SSC
Société Suisse
de Chronométrie

Le facteur de qualité en horlogerie mécanique

Ilan Vardi, Instant-Lab, EPFL
Maladière 71b, CH – 2002 Neuchâtel
ilan.vardi@epfl.ch

Mai 2014

Bulletin SSC n° 75

Le facteur de qualité de l'oscillateur est reconnu comme étant la meilleure indication de précision d'un garde-temps et pour cette raison la «course à la haute fréquence» actuelle devrait être plutôt une «course à la haute qualité». Je présente la théorie du facteur de qualité de manière précise ainsi que des méthodes pour l'améliorer en fonction du frottement, la rigidité et la masse de l'oscillateur. Il est bien connu qu'une augmentation du facteur de qualité affecte la reprise de marche après un choc et je donne pour la première fois une estimation quantitative de la reprise de marche en terme du facteur de qualité. Je présente aussi la formule d'Airy pour l'erreur de l'échappement en fonction du facteur de qualité pour donner une estimation quantitative de l'amélioration chronométrique due à une augmentation de Q.

Introduction

Le facteur de qualité est un nombre sans unité qui caractérise la liberté d'un oscillateur, moins il y a d'amortissement plus la qualité augmente.[1] De manière informelle, on peut dire sans trop tricher que le facteur de qualité est le nombre d'oscillations complètes pour que l'oscillateur s'arrête. En fait ceci est formellement le cas si l'on remplace «s'arrête» par «arrive à 4.3 % de son amplitude initiale», voir la section 2 à la page 58.

Les avancées récentes dans les matériaux et l'échappement ont sensiblement amélioré la fiabilité et le rendement de la montre mais la précision chronométrique de la montre mécanique semble avoir atteint une limite très difficile à surmonter. Une explication est que l'oscillateur des montres mécaniques, le balancier-spiral, a un facteur de qualité relativement faible. En effet, suite à une étude approfondie de Douglas Bateman du facteur de qualité dans les années 1970 [3], le facteur de qualité de l'oscillateur est généralement reconnu comme étant le meilleur indicateur de la précision chronométrique d'un garde-temps, bien que les raisons n'en soient pas tout-à-fait comprises, voir [15, p. 27–36] et [23] pour une discussion critique. Voici des valeurs typiques du facteur Q d'oscillateurs utilisés dans des gardes-temps d'après [18, p. 103].

Petit balancier-spiral	100	–	300
Balancier-spiral chronomètre de marine	300	–	700
Diapason pour montres	1'000	–	2'000
Pendule régulateur à pression atmosphérique [2]	3'000	–	15'000
Pendule régulateur à basse pression	100'000	–	200'000
Cristal de quartz	100'000	–	1'000'000
Horloge atomique au Césium	50'000'000	–	200'000'000

[1] Le mot «qualité» est un peu trompeur. En fait, le concept a été inventé par l'ingénieur K. S. Johnson de Bell Laboratories en 1920 et nommé Q parce que toutes les autres lettres étaient déjà prises [10]. Ce n'est que par la suite que le concept de qualité a été rattaché à cette valeur.

[2] Le Q du pendule de Big Ben a été évalué à 9300 [4].

Si l'on fait un tableau (comme celui de la figure 1) de la précision des gardes-temps, des montres-bracelets mécaniques, électroniques, horloges et montres atomiques, la corrélation avec le facteur de qualité est indéniable. La principale explication théorique pour augmenter le facteur de qualité est que l'on peut exprimer la fameuse formule d'Airy décrivant l'erreur chronométrique due à l'échappement en terme du facteur de qualité, et ceci démontre que toute augmentation de Q, sans modification de l'échappement, améliore la précision chronométrique, voir la section 7 à la page 62.

L'oscillateur amorti, première définition de Q

Le cœur de toute montre est un oscillateur élastique où la force de rappel est proportionnelle au déplacement, la loi de Hooke. Un exemple est la lame ressort, où une masse m au bout d'une lame de longueur L se déplace d'une petite distance x. D'après la loi de Hooke et la deuxième loi de Newton, on a

$$m\ddot{x} = -kx,$$

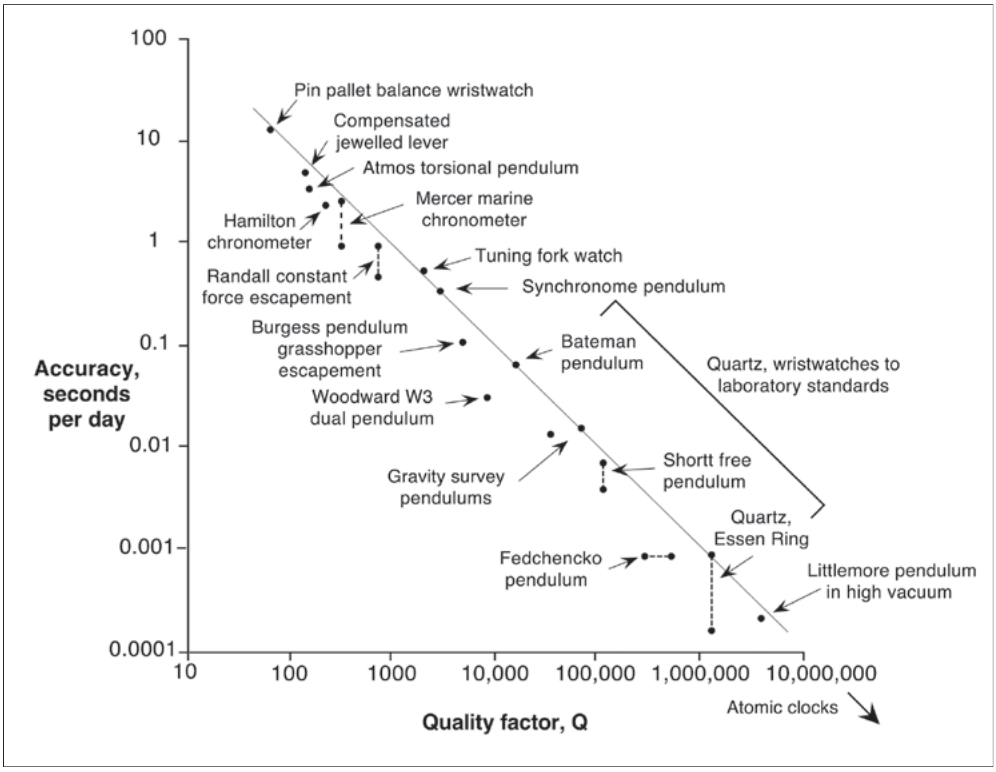

Fig. 1 : Corrélation entre précision et facteur de qualité.

Je vais donc décrire le facteur de qualité, comment on peut l'améliorer en variant le frottement, la fréquence et la masse et comment il affecte la précision de la montre. Pour bien comprendre le but de cet article, je fais la remarque que l'analyse théorique des équations n'est peut-être pas directement utile à la construction horlogère, mais devrait plutôt indiquer la voie vers un nouveau seuil de précision des montres mécaniques.

Cet article est en partie une exposition des résultats de l'horloger et scientifique Douglas Bateman et du mathématicien et horloger Philip Woodward, voir [3] [24] [25], puisque leurs recherches ne sont pas bien connues en Suisse. Je voudrais remercier Fabienne Marquis Weible et Damien Prongué pour leur relecture ainsi que Douglas Bateman pour la figure 1 réalisée pour cet article.

où k est la raideur de la lame ressort et $\dot{x}$, $\ddot{x}$ sont la vitesse et accélération de x. La solution de cette équation différentielle est

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi),$$

où A est l'amplitude, $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ est la *fréquence propre* de l'oscillateur et φ une condition initiale. Dans cet article, on écrira systématiquement $\omega_0 = 2\pi f$ où f est la fréquence d'oscillations complètes par seconde (mesurée en Hz).

On remarque tout-de-suite que la fréquence est indépendante de l'amplitude, c'est l'isochronisme qui libère la mesure du temps de la force motrice et explique pourquoi l'application d'un oscillateur comme base de temps donne une telle précision.

Puisqu'à ce stade on suppose qu'il n'y a pas de frottement, ce système est conservateur, donc l'énergie E est constante et répartie entre l'énergie cinétique et potentielle

$$E = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{kx^2}{2}\ .$$

On peut donc calculer l'énergie totale en terme de vitesse maximale quand $x = 0$ et $\dot{x} = 2\pi f A$, ce qui donne

$$E = \frac{m(2\pi f A)^2}{2} = 2\pi^2 m A^2 f^2 = \frac{A^2 k}{2}$$

De manière tout-à-fait analogue, on modélise les oscillation du balancier-spiral en substituant la distance x par l'angle θ et la masse m par le moment d'inertie I, par exemple, l'énergie est

$$E = 2\pi^2 A^2 f^2 I,$$

où A est l'amplitude angulaire maximale.

Dans le monde réel, tout mouvement subit un frottement et à première approximation cette force de frottement est proportionnelle à la vitesse du mouvement. L'équation de l'oscillateur amorti devient donc

$$m\ddot{x} = -c\dot{x} - kx,$$

où c est une mesure de viscosité. On défini le facteur de qualité par

$$Q = \frac{2\pi f m}{c}\ .$$

Cette définition est bien connue [8, p. 67] [17, section 6], et elle sera la clé de l'analyse de l'amélioration de Q, le lien avec la définition habituelle sera faite dans la section 3 ci-dessous. L'équation du mouvement devient donc

$$\ddot{x} + \frac{2\pi f}{Q}\dot{x} + 4\pi^2 f^2 x = 0,$$

et pour $Q > 1/2$, cette équation a la solution

(1) $x(t) = Ae^{-\pi f t/Q}\cos(2\pi f_a t + \varphi)$, où $f_a = f\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$.

On remarque que la condition $Q > 1/2$ assure que l'on a un véritable oscillateur[3] et que l'isochronisme est toujours présent bien que la fréquence f_a soit diminuée par rapport à la fréquence libre f. Mais, pour les valeurs de Q qui nous intéressent, les montres où $Q \approx 200$, la diminution théorique de la fréquence due à l'amortissement correspond à un retard d'environ 0.25 s/j, donc f_a et f sont interchangeables en ce qui nous concerne.

La formule (1) dit que commençant avec une amplitude initiale A, après t secondes l'amplitude devient $Ae^{-\pi f t/Q}$. Si l'on pose $t = Q/f$, ceci donne une amplitude $Ae^{-\pi}$ où l'on a accompli $f * Q/f = Q$ oscillations complètes. Ceci démontre que Q est environ le nombre d'oscillations complètes pour que l'amplitude baisse à $e^{-\pi} \approx 4.3\,\%$ de sa valeur initiale, justifiant la définition informelle de l'introduction (voir page 57).

Remarque

En réalité, le facteur de qualité n'est pas constant et change avec l'amplitude [2], donc cette dernière formule n'est pas correcte en pratique et un calcul expérimental viendrait plutôt de la formule 4.53× (oscillations pour arriver à la demi-amplitude), où $4.53 = \pi/\log 2$, puisque l'on garde un régime où Q est relativement constant.[4]

Définition énergétique de Q

L'amortissement de l'oscillateur veut dire que son énergie n'est plus constante en raison des pertes par frottement. En écrivant l'énergie en terme de l'énergie cinétique et potentielle on obtient

$$E(t) = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = e^{-2\pi f t/Q} \times (\textit{fonction de période } 1/f_a).$$

Donc si l'on augmente t d'un cycle complet en substituant $t \mapsto t + 1/f_a$ on obtient

$$E\left(t + \frac{1}{f_a}\right) = e^{-2\pi f/(f_a Q)} E(t),$$

et l'énergie totale par rapport à l'énergie perdue dans un cycle est

$$\frac{E(t)}{E(t) - E\left(t + \frac{1}{f_a}\right)} = \frac{1}{1 - e^{-2\pi f/(f_a Q)}} = \frac{Q}{2\pi} + \frac{1}{2} + S(Q)\ ,$$

où

$$0 < S(Q) < \frac{\pi}{6Q} \quad \text{pour} \quad Q > 1/2,$$

ce qui suit d'une estimation analytique standard. Donc, si l'on pose

(2) $$Q^* = 2\pi \times \frac{\text{énergie stockée}}{\text{énergie perdue à chaque période}},$$

ce qui est la définition habituelle du facteur de qualité[5], on a

$$Q^* = Q + \pi,$$

[3] Si $Q \leq 1/2$ le comportement est *apériodique*, l'oscillateur tend vers l'équilibre sans le croiser.

[4] Dans cet article, $\log$ fait référence au logarithme naturel.

[5] On peut expliquer la présence du facteur 2π dans cette définition par le fait que ceci mesure la perte d'énergie par unité de rotation (= 1 radian) et qu'une période est égale à 2π.

avec une erreur inférieure à $\pi^2/(3Q)$. Puisque la valeur exacte de Q n'est pas importante, *la différence de π entre les deux définitions est négligeable pour nos applications*, et on peut en faire abstraction.

Ce calcul est un peu pénible mais nécessaire parce qu'il démontre que ces deux définitions du facteur de qualité sont différentes, même dans la limite, et que cette différence mène à des présentations erronées du facteur de qualité [17].

Calcul direct de Q

En pratique, on peut calculer le facteur de qualité si l'on connait la fréquence f et des données A_0, A_1, A_2,..., A_n de l'amplitude, où l'amplitude est mesurée à chaque oscillation. La période est $T = 1/f$ et les mesures sont faites aux temps $0, T, 2T, 3T, \ldots, nT$, donc si l'on écrit $A = A_0$, la formule (1) du chapitre 2 (voir page 58) donne $A_k = e^{-\pi k/Q} A$, ce qui revient à

$$\log A_k = -\frac{\pi}{Q} k + \log A.$$

On poursuit le calcul en utilisant la régression linéaire pour trouver les constantes a et b qui donnent la meilleure approximation linéaire $y = ax + b$ aux points $(k, \log A_k)$, pour $k = 0, 1, 2, \ldots, n$. Cette méthode donne $Q = -\pi/a$ comme estimation du facteur de qualité.

La restitution d'énergie

Pour qu'un oscillateur amorti tel que celui d'une montre fonctionne normalement, il faut restituer son énergie. Pour des valeurs de masse, amplitude, fréquence et facteur de qualité connus, il est facile de faire ce calcul en utilisant les formules précédentes. L'énergie de restitution par cycle est

$$E_r = \frac{2\pi E}{Q} = A^2 \pi c \sqrt{\frac{k}{m}}\ .$$

Puisque cette énergie doit être fournie par la montre pour restituer l'oscillateur, la puissance fournie à l'oscillateur est cette énergie multipliée par le nombre de cycle par seconde

$$P_r = fE_r = \frac{4\pi^3 A^2 f^3 m}{Q} = 2\pi^2 A^2 f^2 c = \frac{kA^2 c}{2m}$$

en substituant les définitions de Q et f.[6]

Par exemple, d'après Hetzel [13] pour une lame du diapason de l'Accutron m =.5 g, A = 36 µm, f = 360 Hz, Q = 3000, et son énergie est E = 1.6 µJ. L'énergie de restitution est E_p = 3.4 nJ. On doit donc restituer 6.8 nJ par cycle pour entretenir les deux lames, ce qui nécessite une puissance de restitution à l'oscillateur de 2.5 µW.

Pour un balancier-spiral où I = 1 g · mm^2, f = 4 Hz, A = 270° et Q = 300, son énergie est 7 µJ, l'énergie de restitution est 147 nJ, donc la puissance nécessaire pour l'entretenir est 588 nW. Si l'on prend en compte la perte de rendement du train de démultiplication et de l'échappement, on s'approche du microWatt, la puissance typique d'une montre-bracelet.

Améliorer la qualité

Notre définition de $Q = 2\pi m\, f/c$ indique les paramètres à modifier pour améliorer Q sauf qu'ils ne sont pas indépendants et on doit prendre en compte la relation $2\pi f = \sqrt{k/m}$ où k et m sont indépendants. En substituant cette formule on obtient

$$Q = \frac{\sqrt{km}}{c},$$

ce qui donne trois méthodes indépendantes pour améliorer le facteur de qualité (dans ce qui suit, on substitue la masse m par l'inertie I dans le cas du balancier-spiral).

Modifier le frottement

La méthode la plus directe est de mettre l'oscillateur sous vide pour éliminer le frottement de l'air. Cette méthode a été longuement utilisée pour le pendule de précision et le quartz horloger où l'on observe une augmentation de Q d'un facteur de 10. Des tests on été effectués sur l'oscillateur simple en 1970 [9] en réduisant la pression à 10^{-4} mmHg et le facteur de qualité des balanciers à 3 et 4 Hz a doublé et a triplé pour ceux à 5 Hz. En 2012 Cartier a finalement réussi à construire un mouvement entier sous vide avec sa montre ID Two et ils ont observé un Q = 450 comparé à Q = 300 dans des conditions normales, ce qui représente une augmentation de 50 % [5]. L'augmentation n'est pas très importante et pourrait être due au frottement des pivots.

Une méthode alternative pour diminuer le frottement du balancier-spiral est donc d'éliminer les pivots de l'oscillateur et de l'échappement et ceci est le sujet de recherches en cours à l'EPFL et en industrie [12] [22].

Modifier la rigidité

Ceci augmente la fréquence et cette méthode est à la base de l'actuelle « course à la fréquence » de l'industrie horlogère, bien que cette approche ait été étudiée depuis longtemps [20]. On peut observer cette augmentation de Q dans les montres électroniques à diapason des années 1960-70, par exemple, les tests de [3] donnent Q = 2000 pour l'Accutron de fréquence 360 Hz et Q = 4000 pour l'Omega Mega-

6 Ces calculs ne prennent pas en compte les pertes telles que celles dues au rendement de l'échappement et sont donnés à titre indicatif pour apporter une base de comparaison de différentes déclinaisons de l'oscillateur.

sonic à 720 Hz (la Megasonic est deux fois plus précise que l'Accutron, mais ceci est dû au fait que la sensibilité à la gravité diminue avec la fréquence [13]).

La formule pour la puissance de restitution démontre qu'elle grandit comme le cube de la fréquence et inversement de Q, donc comme le carré de la fréquence si l'on prend la définition de Q en compte. Il faut donc faire attention que la fréquence n'augmente pas trop la puissance d'entretien, une technique est de diminuer l'amplitude. Par exemple, le prototype de De Bethune [6], un oscillateur mécanique de 926 Hz, nécessite une puissance d'entretien allant jusqu'à 90 µW, ce qui est deux ordres de magnitudes de plus qu'une montre classique. Ceci peut s'expliquer par leur $Q \leq 2500$, ce qui est très bas pour cette fréquence élevée, et qui peut être à son tour expliqué par la lame vibrante qui n'est pas couplée en diapason.

Modifier la masse

Ceci revient à augmenter la masse et diminuer la fréquence, et explique pourquoi les balanciers de chronomètres de marine on un facteur de qualité plus élevé que ceux de montres bien que la fréquence soit plus basse.

Il est bien sûr possible d'augmenter plusieurs paramètres et l'on observe actuellement une course à la haute fréquence où le facteur de qualité est augmenté en augmentant f qui est une fonction de k et m. Mais puisque l'augmentation de f s'appuie sur d'autres paramètres plus fondamentaux, il vaut mieux bien comprendre l'effet de ces paramètres fondamentaux.

Pour résumer l'effet de la modification de c, k, m, je donne un tableau qui prend en compte les différents paramètres affectant le facteur de qualité. Dans chaque colonne du tableau est donné le facteur multiplicatif affectant la quantité, où l'on varie les valeurs du frottement c, la rigidité k et la masse m. Je rappelle que E est l'énergie totale de l'oscillateur et P_r la puissance de restitution nécessaire pour l'entretenir. De plus, le concept de *pouvoir réglant* est souvent mentionné en référence à la résistance de l'oscillateur aux chocs mais il n'est pas évident de trouver une formulation précise, celles données par Defossez [7, T. 2, p. 305] ont toutes des défauts comme il l'admet à la fin du chapitre. Je vais donc inclure la *puissance virtuelle*

$$P_v = fE = 2\pi^2 m A^2 f^3 = \frac{A^2 k^{3/2}}{4\pi m^{1/2}}$$

comme indication du pouvoir réglant.

On peut donc calculer l'effet de la modification des paramètres fondamentaux c, k, m par un facteur multiplicatif λ sur les paramètres qui nous intéressent la fréquence, le facteur de qualité, l'énergie, la puissance de restitution et la puissance virtuelle. Ceci se fait grâce aux formules dérivées ci-dessus

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}},\ Q = \frac{\sqrt{k/m}}{c},\ E = \frac{A^2 k}{2},\ P_r = \frac{A^2 kc}{2m},\ P_v = \frac{A^2 k^{3/2}}{4\pi m^{1/2}}.$$

Tableau 1 : Effets de la modification de c, k, m et l'amplitude A sur f, Q, E, P_r, P_v

Modification c, k, m	Fréquence	Qualité	Energie	Puissance restitution	Puissance virtuelle
$c \mapsto \lambda c$	f	Q/λ	E	λP_r	P_v
$k \mapsto \lambda k$	$\sqrt{\lambda} f$	$\sqrt{\lambda} Q$	λE	λP_r	$\lambda^{3/2} P_v$
$m \mapsto \lambda m$	$f/\sqrt{\lambda}$	$\sqrt{\lambda} Q$	E	P_r/λ	$P_v/\sqrt{\lambda}$
$A \mapsto \lambda A$	f	Q	$\lambda^2 E$	$\lambda^2 P_r$	$\lambda^2 P_v$

Par exemple, si l'on augmente la masse d'un facteur $\lambda = 4$ (c'est-à-dire, $m \mapsto 4m$), on obtient par lecture de la troisième rangée, $f \mapsto f/2$, $Q \mapsto 2Q$, $E \mapsto E$, $P_r \mapsto P_r/4$, $P_v \mapsto P_v/2$.

De plus, les modifications de c, k, m, A sont indépendantes. Par exemple, si on augmente la rigidité et la masse d'un facteur de 2 et l'on diminue l'amplitude d'un facteur de 2 (c'est-à-dire, $k \mapsto 2k$, $m \mapsto 2m$, $A \mapsto A/2$), on applique les deuxième, troisième et quatrième lignes pour obtenir $f \mapsto f$, $Q \mapsto 2Q$, $E \mapsto E/2$, $P_r \mapsto P_r/4$, $P_v \mapsto P_v/2$.

Ce tableau devrait être utile pour concevoir la hausse du facteur de qualité en fonction des moyens techniques possibles.

La reprise de marche

Il est bien connu que le facteur de qualité affecte la reprise de marche, c'est-à-dire, le temps pour que l'amplitude revienne à une valeur proche de l'amplitude normale de l'oscillateur après un choc ou après le démarrage de la montre.

Notre oscillateur a donc une fréquence f et un facteur de qualité Q, qui sont des fonctions de la rigidité k, la masse m et la viscosité c tels que décrits dans la section 2 (voir page 58). Ensuite, on fait l'hypothèse que l'amplitude A est stable, c'est-à-dire qu'il y a une force motrice restituant exactement l'énergie $2\pi E/Q$ perdue par cycle, où $E = 2\pi^2 m A^2 f^2$.

On fait l'hypothèse que l'amplitude déréglée est a et on voudrait estimer le temps qu'il faut pour que l'amplitude revienne à un certain pourcentage δ de l'amplitude désirée A.

Temps de reprise de marche

Pour Q grand, le temps pour revenir de l'amplitude a à une proportion δ de l'amplitude stable A est environ

$$\frac{Q}{2\pi f}\log\left(\frac{(a/A)^2 - 1}{2(\delta - 1)}\right) .$$

Exemple choc

Pour un balancier-spiral de 4 Hz et un facteur de qualité 200, si un choc lui donne 110 % de son amplitude normale, on calcule le temps pour revenir à 105 % de l'amplitude normale. On a $a/A = 1.1$, $\delta = 1.05$, et la formule donne

$$\frac{200}{8\pi}\log\left(\frac{1.1^2-1}{0.1}\right),$$

environ 6 secondes pour revenir à 105 % de l'amplitude normale.

Reprise de marche après démarrage

Le temps nécessaire pour qu'un oscillateur à faible amplitude initiale atteigne la proportion δ de son amplitude stable est environ

$$-\frac{Q}{2\pi f}\log\left(2(1-\delta)\right).$$

Dans ce cas, on commence par amplitude a que l'on suppose petite comparée à A, c'est-à-dire $(a/A)^2 \approx 0$, et cette substitution donne la formule.

Exemple démarrage

Le temps nécessaire pour qu'un oscillateur atteigne 82 % de son amplitude stable est environ $Q/(2\pi f)$. Ceci est vérifié en posant $\delta = .82$ et notant que $\log(2(1-\delta)) = \log .36 \approx -1$ (le choix de 82 % a été fait pour avoir -1 ici).

Pour une horloge de précision avec un facteur de qualité 20'000 et battant la seconde, le temps de reprise à 82 % est d'environ 1 heure 45 minutes. La formule $Q/(2\pi f)$ permet aussi de comparer différents oscillateurs, par exemple, pour une montre où $Q = 200$ et $f = 4$ Hz la formule donne 8 secondes, et pour un diapason à quartz où $Q = 100'000$ et $f = 32{,}768$ Hz, la formule donne 0.5 secondes.

Remarque

La formule $Q/(2\pi f) = m/c$ permet de dire comment la modification de l'oscillateur affecte la reprise de marche. Par exemple, la formule confirme que la reprise de marche est proportionnelle à la masse. En revanche, la reprise est indépendante de la rigidité, donc une augmentation de la fréquence sans autre modification (de la masse ou du frottement) n'affecte pas la reprise de marche.

La démonstration de ces résultats commence par la remarque que l'énergie à amplitude a est égale à $E_a = 2\pi^2 m a^2 f^2 = Ea^2/A^2$ et l'énergie perdue dans un cycle est $2\pi E_a/Q = 2\pi E(a^2/A^2)/Q$. L'hypothèse est que l'énergie restituée par la force motrice est $2\pi E/Q$ donc, après un cycle, l'énergie est

$$\frac{a^2}{A^2}E - \frac{2\pi}{Q}\frac{a^2}{A^2}E + \frac{2\pi}{Q}E = \left(\frac{a^2}{A^2} + \frac{2\pi}{Q}\left(1-\frac{a^2}{A^2}\right)\right)E.$$

Donc, si $a_0 = a$ et a_1 est l'amplitude après un cycle, on a

$$\frac{a_1^2}{A^2} = \frac{a_0^2}{A^2} + \frac{2\pi}{Q}\left(1-\frac{a_0^2}{A^2}\right),$$

donc

$$a_1^2 = a_0^2 + \frac{2\pi}{Q}(A^2 - a_0^2) = \left(1-\frac{2\pi}{Q}\right)a_0^2 + \frac{2\pi}{Q}A^2.$$

Ceci donne une formule de récurrence de la forme

$$x_{n+1} = \alpha x_n + \beta$$

avec solution

$$x_n = \alpha^n x_0 + \alpha^{n-1}\beta + \ldots + \beta = \alpha^n x_0 + \frac{1-\alpha^n}{1-\alpha}\beta$$

par la formule de série géométrique. Donc après n cycles, si l'amplitude est a_n, on obtient

$$a_n^2 = \left(1-\frac{2\pi}{Q}\right)^n a_0^2 + \frac{1-(1-2\pi/Q)^n}{1-(1-2\pi/Q)}\frac{2\pi}{Q}A^2,$$

ce qui mène a

$$a_n^2 = \left(1-\frac{2\pi}{Q}\right)^n a_0^2 + \left(1-\left(1-\frac{2\pi}{Q}\right)^n\right)A^2.$$

On suppose quand même que Q est grand, donc

$$\left(1-\frac{2\pi}{Q}\right)^{Q/(2\pi)} \approx \frac{1}{e}.$$

Il s'ensuit que pour $\alpha = a_0/A$ et $\beta = 2\pi n/Q$

$$\frac{a_n}{A} \approx \sqrt{1+e^{-\beta}(\alpha^2-1)} \approx 1 + \frac{e^{-\beta}(\alpha^2-1)}{2}.$$

Une estimation de la reprise de marche à une proportion d'amplitude $a_n \approx \delta A$ donne

$$e^{\beta} = \frac{\alpha^2-1}{2(\delta-1)},$$

ce qui veut dire que

$$\beta = \log\left(\frac{\alpha^2-1}{2(\delta-1)}\right).$$

Le temps de reprise de marche est le nombre d'oscillations n divisé par la fréquence f

$$\frac{n}{f} = \frac{\beta Q}{2\pi f},$$

où n a été écrit en terme de β, et le résultat suit en utilisant la formule pour β.

La formule d'Airy en terme de Q

A part les données expérimentales, une raison de croire que le facteur de qualité améliore la chronométrie est que l'élever veut dire que la restitution est diminuée donc que l'échappement gêne moins les oscillations libres de l'oscillateur.

Ce principe a été quantifié par D. A. Bateman qui a réussi a réécrire la formule d'Airy[7] en terme du facteur de qualité [1] [3]. Par la suite, Philip Woodward a présenté de nombreux arguments pour justifier cette procédure [24] [25]. La présentation qui suit est basée sur la méthode de Bateman qui elle-même s'inspire de Rawlings [18] et de Lossier [14].

On suppose un oscillateur amorti $x(t)$ comme dans la section 2 (voir page 58) et on considère son mouvement comme étant celui d'un vecteur $v(t) = (\sqrt{k/2}\,x(t), \sqrt{m/2}\,\dot{x}(t))$ dans le plan, l'*espace des phases* du système. La formule pour l'énergie de l'oscillateur veut dire que le vecteur v a longueur $R = \sqrt{E}$ et la diminution d'énergie veut dire qu'il tourne en spirale à vitesse angulaire constante autour de l'origine. A chaque oscillation, l'oscillateur perd une énergie E_r qui doit être restituée pour qu'il y ait un fonctionnement stable et dans notre modèle, la perte d'énergie est une baisse de longueur qui doit être restituée.

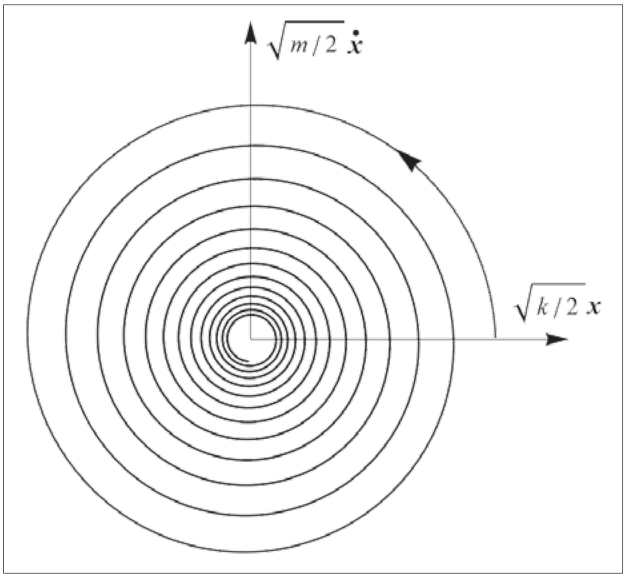

Fig. 2 : Trajectoire de l'oscillateur dans l'espace des phases.

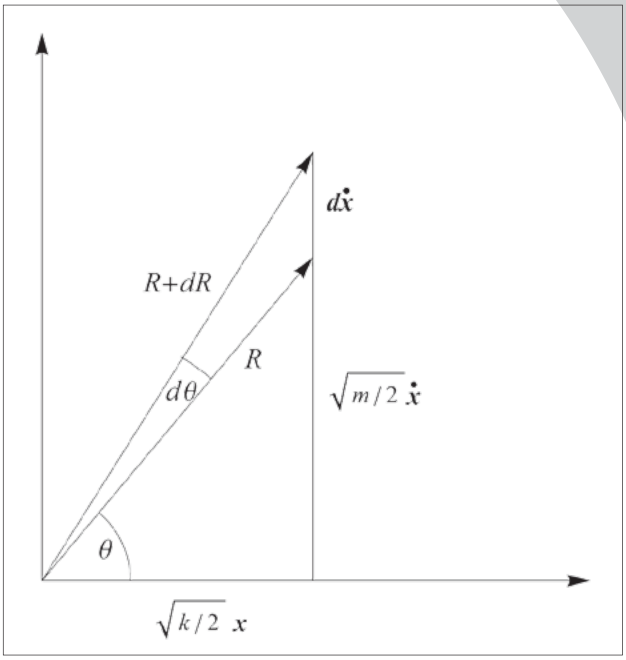

Fig. 3 : Impulsion par $d\dot{x}$ à la phase θ.

On considère la position du vecteur à un angle θ, qui est traditionnellement appelé la *phase* de l'oscillateur à ne pas confondre avec l'espace des phases), voir la figure 3 (par symétrie on ne considère que $0 \leq \theta < 180°$). On modélise le fonctionnement de l'échappement par une impulsion instantanée qui restitue l'énergie en augmentant l'énergie cinétique, c'est-à-dire, augmentant la vitesse par $d\dot{x}$ sans modifier x. Dans la figure 3, ceci veut dire que la position verticale est augmentée de telle manière que le vecteur gagne en longueur $R + dR$. La trigonométrie démontre la formule

$$R = \frac{\sqrt{k/2}x}{\cos\theta} \quad \text{et} \quad R + dR = \frac{\sqrt{k/2}x}{\cos(\theta + d\theta)}$$

donc

$$dR = \sqrt{k/2}x\,\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}\,d\theta = R\tan\theta\,d\theta$$

ce qui donne

$$d\theta = \frac{dR}{R}\cot\theta, \quad \text{où} \ \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \ .$$

Du point de vue énergétique, on a aussi

$$dR = \sqrt{\mathrm{E}} - \sqrt{\mathrm{E} - E_r} \approx \frac{E_r}{2R}$$

et l'approximation suivante est bonne

$$d\theta = \frac{E_r}{2E}\cot\theta = \frac{\pi}{Q}\cot\theta\,.$$

7 George Biddell Airy (1801–1892) est un des grands scientifiques ayant contribué à l'horlogerie. A 25 ans, il a été nommé Lucasian Professor of Mathematics à Cambridge, le poste d'Isaac Newton actuellement occupé par Stephen Hawking et Astronomer Royal à 33 ans, le premier à ce poste à bien comprendre l'horlogerie après les déboires avec Harrison du siècle précédent [19]. Sa formule est le premier exemple de l'application de la théorie des perturbations de Lagrange à l'horlogerie et le début de la véritable théorie d'horlogerie [25, p. 102]. C'est Airy qui a rédigé le cahier des charges de « Big Ben » en insistant sur le fait que cette horloge, la plus connue du monde, devait avoir la précision d'un régulateur astronomique. Ce n'est qu'avec l'aide du rapporteur, Edmund Beckett avocat et horloger amateur, que ceci a été réalisé grâce à son échappement inventé pour cette horloge [11] [16].

Donc, la rotation du vecteur saute un angle $d\theta$ à chaque cycle complet, et puisque le vecteur tourne à vitesse constante, l'erreur chronométrique pour une période complète T est

$$dT = T\frac{\cot\theta}{2Q}.$$

Il s'ensuit que l'erreur chronométrique par période est

$$\frac{dT}{T} = \frac{\cot\theta}{2Q},$$

en seconde par seconde. Ceci est la formule d'Airy en terme de la phase de l'impulsion et le facteur de qualité, on remarque que cet énoncé parait plus simple que ce qui est présenté ailleurs [7, T. 2, p. 304] [21, p. 124].

Pour illustrer cette formule, on considère un balancier-spiral d'amplitude 270° et $Q = 200$ et si l'impulsion se fait à 5° avant le point mort, on a $\theta = \arccos(5/270)$, et l'erreur diurne est

$$86400\,\frac{dT}{T} = 4\ \mathrm{s/j}.$$

On remarque que cette formule vaut également si l'on considère une impulsion à chaque battement, c'est-à-dire, restaurer $E_p/2$ à θ et à $\theta + 180°$. Il a aussi été démontré que cette formule vaut pour une impulsion sinusoïdale centrée à θ ainsi qu'une impulsion constante centrée à θ [18, p. 178–185]. La formule confirme qu'une impulsion avant le point mort fait avancer la montre et après donne un retard. De plus, la formule démontre qu'il est avantageux d'avoir une impulsion aussi près du point mort que possible et ainsi augmenter le facteur de qualité.

Mais une impulsion *systématique* à la même phase θ donne une même marche, donc n'affecte pas la chronométrie, ce sont donc les *variations de phase $\Delta\theta$* qui vont véritablement affecter la précision. On calcule l'effet de cette variation en prenant la dérivée de la formule d'Airy, ce qui donne

$$\frac{\Delta T}{T} = -\frac{\Delta\theta}{2Q\sin^2\theta}.$$

Cette formule démontre que si l'on ne modifie pas l'échappement, tout augmentation de Q diminue l'effet des variations de phase ou d'amplitude, ce qui justifie le facteur de qualité comme indicateur de performance chronométrique.

Il est aussi utile de considérer la phase en terme de son amplitude a, c'est-à-dire, l'amplitude de x à la phase θ. Si l'on écrit $\alpha = a/A$ pour l'*amplitude relative*, où A est l'amplitude maximale des oscillations de x, on a $\alpha = \cos\theta$. La formule précédente devient

$$\frac{\Delta T}{T} = -\frac{\Delta\theta}{2Q(1-\alpha^2)}.$$

Cette formule est simplifiée par rapport à la précédente puisque la droite de l'équation est une fonction rationnelle de α. Pour démontrer l'avantage de cette formulation, on prend l'exemple où l'impulsion se fait à $\alpha = 1/\sqrt{2} = 70\,\%$ de l'amplitude maximale, et l'on voit tout-de-suite par la formule que l'erreur est doublée par rapport à une impulsion idéale au point mort et qu'à $\alpha = \sqrt{3}/2 = 86\,\%$ l'erreur est quadruplée. Ceci démontre que la nécessité d'impulser très près du point mort n'est pas aussi importante que l'on pourrait le croire, si on peut sensiblement augmenter le facteur de qualité.

Références

[1] G. B. Airy, On the Disturbances of Pendulums and Balances, and on the Theory of Escapements, *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, vol. 3, Part I (1830), 105–128. www.loria.fr/~roegel/articles/airy1827annotated.pdf, Version 24 décembre 2013.

[2] C. Attinger, Amortissement et facteur de qualité du système balancier-spiral, *Bulletin Annuel SSC & LSRH* 37 (1962), p. 751–757.

[3] D. A. Bateman, Vibration theory and clocks, *Horological Journal*, 120–121, seven parts July 1977 to January 1978.

[4] D. A. Bateman and K. James, The pendulum of «Big Ben», *Horological Journal* 119 No. 8, February 1977, p. 3–9.

[5] www.larevuedesmontres.com/2012/07/cartier-id-two-le-futur-du-temps-en-toute-transparence, Version 24 décembre 2013.

[6] S. Berns et D. Flageolet, La résonique horlogère, *Actes de la Journée d'Etude SSC 2012*, 37–44.

[7] L. Defossez, *Théorie Générale de l'Horlogerie*, La Chambre suisse d'horlogerie, La Chaux-de-Fonds 1950.

[8] A. P. French, *Vibrations and Waves*, MIT 1971.

[9] M. Girardin et P. Jeannet, Caractéristiques de fonctionnement d'un balancier-spiral à pression réduite, *Bulletin Annuel de la SSC & LSRH* 45 (1970), p. 5-8.

[10] Estill I. Green, The Story of Q, American Scientist 43 (1955), 584–594. www.collinsaudio.com/Prosound_Workshop/The_story_of_Q.pdf Version 24 décembre 2013.

[11] E. Beckett, Baron Grimpthorpe, *A rudimentary Treatise on Clocks, Watches & Bells*, 8th Edition, Crosby Lockwood and Son, D. Van Nostrand Company, London 1903. www.gutenberg.org/files/17576/17576-pdf.pdf, Version 24 décembre 2013.

[12] S. Henein, *Conception des guidages flexibles*, Presses Polytechniques et Universitaires Romandes 2004.

[13] M. Hetzel, Le diapason et son influence sur l'horlogerie, *Bulletin Annuel de la Société Suisse de Chronométrie*, IV juin 1962, p. 666–679.

[14] L. Lossier, *Etude sur la théorie du réglage des montres*, Genève, 1907.

[15] R. J. Matthys, *Accurate Clock Pendulums,* Oxford University Press, 2004.

[16] C. McKay, *Big Ben: The Great Clock and the Bells at the Palace of Westminster*, Oxford University Press, 2010.

[17] Wikipedia, Q Factor, en.wikipedia.org/wiki/Q_factor, Version 23 novembre 2013.

[18] A. L. Rawlings, *The Science of Clocks & Watches*, Third Edition, British Horological Institute, Upton UK 1993.

[19] I. Vardi, Harrison méritait-il le Prix de Longitude ?, Watch Around 011, printemps-été 2011, p. 38–40.

[20] A. Simon-Vermot, Mouvements des montres à balancier-spiral et à fréquence élevée, *Actes du Congrès International de Chronométrie 1969*, p. 1–13.

[21] M. Vermot, P. Bovay, D. Prongué, S. Dordor, *Traité de construction horlogère*, Coordination P. Winkler, Presse Polytechnique et Universitaires Romandes 2011.

[22] S. von Gunten, Ancre à pivotement flexible, *Bulletin de la SSC* 69 (2012), p. 43–48.

[23] H. Wallman with a response by D. Bateman, Bateman's vibration theory, *Horological Journal* 121 (Aug. 1978), p. 48–53.

[24] P. Woodward, *My Own Right Time*, Oxford University Press 1995.

[25] *Woodward on Time, a compilation of Philip Woodward' horological writings*, Bill Taylor and British Horological Institute 2006. ■