

PROJET DE SEMESTRE

---

# Détermination d'une orbite autour de L2 pour la mission CHEOPS

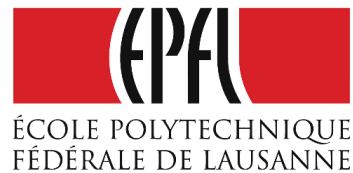
---

*Auteurs :*

Nathan SCHEINMANN et Matthieu SIMEONI

*Superviseur :*

Dr. Anton IVANOV



10 mai 2012



## Résumé

Afin de déterminer l'orbite qu'un satellite d'observation d'exoplanètes devait adopter, il a été nécessaire de considérer les points de Lagrange et plus particulièrement le deuxième de ces points. Dans les pages suivantes, nous localisons les trois premiers de ces points (L1, L2 et L3), expliquons en quoi ils sont importants et démontrons la quasi-stabilité de L1 et L2. Ensuite, nous analysons les différents types d'orbites quasi-périodiques qui existent autour de L2 et construisons une orbite de Lyapunov grâce au logiciel STK/Astrogator, ce qui permet de modéliser la mission et de souligner ses avantages et ses inconvénients.

# Table des matières

Introduction . . . . .	2
1 Étude des points de Lagrange L1, L2 et L3 . . . . .	3
1.1 Position de L1 . . . . .	4
1.2 Position de L2 . . . . .	4
1.3 Position de L3 . . . . .	5
1.4 Cartographie des lignes de champ de l'énergie potentielle du système Terre-Soleil	5
1.5 Stabilité des points L1, L2 . . . . .	7
2 Détermination d'une orbite périodique autour de L2 . . . . .	9
2.1 Différentes orbites autour de L2 . . . . .	9
2.2 Présentation de STK . . . . .	9
2.3 Obtention d'une orbite de Lyapunov avec STK . . . . .	10
Conclusion . . . . .	15
Impressions personnelles . . . . .	15
Remerciements . . . . .	15
Bibliographie . . . . .	16

# Introduction

Dans ces prochaines années, le Swiss Space Center prévoit de lancer un satellite d'observation d'exoplanètes nommé CHEOPS [3] (CH ExOPlanet Satellite). Mobilisant principalement des étudiants de l'EPFL, ce projet se divise en plusieurs défis allant de la conception même du satellite au choix de l'orbite optimale sur laquelle l'envoyer. C'est dans ce dernier cadre que Dr. Anton Ivanov, le responsable de cette mission, nous a proposé de faire l'étude du deuxième point de Lagrange (L2), un point particulier d'un système à deux corps. En effet, dans le système Terre-Soleil, L2 est favorable pour la mission CHEOPS de deux manières. Premièrement, car c'est un point quasi-stable, et deuxièmement, car il existe au voisinage d'un tel point des orbites semi-périodiques qui se prêtent bien à l'observation d'exoplanètes. Ces deux avantages ont déterminé la structure de cette étude. En effet, nous commençons par définir et démontrer la quasi-stabilité des trois premiers points de Lagrange du système Terre-Soleil, puis, à l'aide d'un exemple, nous discutons les orbites atteignables autour de L2.

Bien qu'il existe beaucoup de documentation sur ce sujet, ce qui rend particulière cette étude est qu'elle a été réalisée par des étudiants de deuxième année de Bachelor. Il a donc fallu rendre ce sujet accessible à notre niveau. De ce fait, toutes les démonstrations, les figures et les simulations que vous trouverez dans la suite de ce rapport sont le fruit de notre travail.

# 1 Étude des points de Lagrange L1, L2 et L3

Nous résumons ici la méthode que nous avons utilisée afin de localiser les trois premiers points de Lagrange.

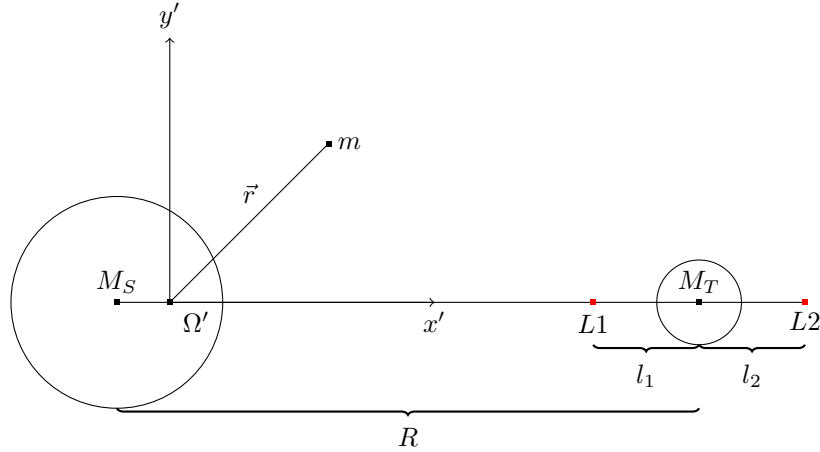


FIGURE 1: Schéma du problème et notations utilisées

1. On se place dans  $\Omega'$  le référentiel lié au centre de masse du système Terre-Soleil. En utilisant la particule fictive de masse fictive  $\mu = \frac{M_s M_t}{M_s + M_t}$ , on cherche  $\omega$ , la vitesse de rotation du repère. On a d'après la seconde loi de Newton<sup>1</sup> :

$$\begin{aligned} \mu \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} &= \vec{F}_{S \rightarrow T}, \\ \mu \omega^2 R &= \|\vec{F}_{S \rightarrow T}\|, \\ \omega^2 R \frac{M_s M_t}{M_s + M_t} &= \mathcal{G} \frac{M_s M_t}{R^2}. \end{aligned}$$

Ainsi on trouve :

$$\boxed{\omega = \sqrt{\mathcal{G} \frac{M_s + M_t}{R^3}}}. \quad (1)$$

2. On établit le bilan des forces pour un point matériel de masse  $m$  dans le référentiel  $\Omega'$  :

$$\begin{aligned} \vec{F}_{S \rightarrow m} &= -\mathcal{G} \frac{m M_S}{\|\vec{r} - \vec{r}_S\|^3} (\vec{r} - \vec{r}_S), \\ \vec{F}_{T \rightarrow m} &= -\mathcal{G} \frac{m M_T}{\|\vec{r} - \vec{r}_T\|^3} (\vec{r} - \vec{r}_T), \\ \vec{F}_{centrifuge} &= m \omega^2 \vec{r}, \\ \vec{F}_{coriolis} &= 0. \end{aligned}$$

On remarque que la force de Coriolis est nulle. Ceci découle directement de la définition des points de Lagrange et de leur stabilité.

1. On supposera que l'orbite de la terre est circulaire.

3. Par le même argument utilisé au-dessus, on a l'équilibre des forces. Ainsi, par la seconde loi de Newton :

$$\vec{F}_{S \rightarrow M} + \vec{F}_{T \rightarrow M} + \vec{F}_{centr.} = 0,$$

et par suite :

$$\boxed{-\frac{M_s}{\|\vec{r} - \vec{r}_s\|^3}(\vec{r} - \vec{r}_s) - \frac{M_t}{\|\vec{r} - \vec{r}_t\|^3}(\vec{r} - \vec{r}_t) + \frac{M_s + M_t}{R^3}\vec{r} = 0} . \quad (2)$$

## 1.1 Position de L1

On cherche L1 sur l'axe Terre-Soleil. En effet, le point L1 est le plus facile à interpréter intuitivement : il s'agit du point où l'attraction gravitationnelle du Soleil est compensée par celle de la Terre. En réalité il faut également considérer la force de centrifuge. Dès lors, il est normal de chercher un tel point sur l'axe Terre-Soleil.

Nous pouvons donc projeter (2) sur l'axe Terre-Soleil. La relation devient :

$$-\frac{M_S}{(R - l_1)^2} + \frac{M_T}{l_1^2} + \frac{\overbrace{M_S + M_T}^{\simeq M_s}}{R^3} \times (R - l_1) = 0. \quad (3)$$

En supposant que  $\epsilon = \frac{l_1}{R} \ll 1$  (ce qui est raisonnable vu que  $M_S \gg M_T$ ), on peut effectuer un développement limité de (3) à l'ordre 1 et on obtient :

$$\epsilon \simeq \sqrt[3]{\frac{M_T}{3M_S}},$$

et donc :

$$\boxed{l_1 = \sqrt[3]{\frac{M_T}{3M_S}} \times R = 1,5 \cdot 10^6 \text{ km}} . \quad (4)$$

## Interêt du point L1

Le point L1 est particulièrement intéressant pour des missions d'observation du soleil. En effet, un satellite envoyé au point L1 n'aurait jamais son champ d'observation masqué par l'ombre de la Terre ou de la Lune, et donc les conditions d'observations en seraient nettement améliorées. Sur ce point, se trouve depuis 1995 le satellite d'observation solaire SoHO (Solar and Heliospheric Observatory) qui a fourni la base de données la plus précise de la surface du Soleil [1].

## 1.2 Position de L2

L2 est un point d'équilibre un peu moins intuitif. En effet, il correspond au point où l'action cumulée du Soleil et de la Terre viennent compenser la force centrifuge. Il semble naturel qu'un tel point se situe sur l'axe Terre Soleil, derrière la Terre. Nous projetons donc à nouveau (2) et on trouve :

$$-\frac{M_S}{(R + l_2)^2} - \frac{M_T}{l_2^2} + \frac{M_S + M_T}{R^3} \times (R + l_2) = 0. \quad (5)$$

En supposant encore une fois que  $\epsilon = \frac{l_2}{R} \ll 1$ , on effectue un développement limité et on obtient :

$$\epsilon \simeq \sqrt[3]{\frac{M_T}{3M_S}},$$

et donc :

$$l_1 = l_2 = 1,5 \cdot 10^6 \text{ km} . \quad (6)$$

### Interêt du point L2

L2 est particulièrement intéressant pour l'observation spatiale, en particulier pour la recherche d'exoplanètes. En effet, sa position fixe relativement au système Terre-Soleil rend les manoeuvres et les calibrations plus faciles. De plus, en ce point, le satellite n'est plus gêné dans ses observations par les radiations de la Terre (car à cette distance celles-ci sont fortement atténuées), ni par celles du Soleil, car la terre fait écran et protège le satellite [2].

Enfin, le champ angulaire d'observation est en ce point très grand (de +/- 60° jusqu'à +/- 90° pour certaines missions comme Herschel en 2009), car la Terre éloignée ne gêne pas le champ d'observation du satellite. Depuis 2001, le voisinage de L2 est occupé par le satellite WMAP, chargé d'étudier le fond diffus cosmologique [19]. Il a été rejoint par les satellites Planck et Herschel en 2009. Il le sera également par Gaia en août 2013 et par le James Webb Space Telescope en 2018 [21] ainsi que, nous l'espérons, par le satellite CHEOPS de l'EPFL.

### 1.3 Position de L3

La position de L3 peut se déterminer aisément en utilisant seulement des considérations physiques : il est évident qu'un objet diamétralement opposé à la Terre par rapport au soleil aurait la même période de révolution que la Terre, et donc serait fixe relativement au système Terre-Soleil.

Ainsi, en posant  $l_3$  la distance Terre-L3, on a :

$$l_3 = 2R = 2.99195740 \cdot 10^{11} \text{ km} . \quad (7)$$

Il existe encore deux points de Lagrange L4 et L5 dans le système Terre-Soleil, mais le calcul des positions de ces derniers n'est pas détaillé ici.

### 1.4 Cartographie des lignes de champ de l'énergie potentielle du système Terre-Soleil

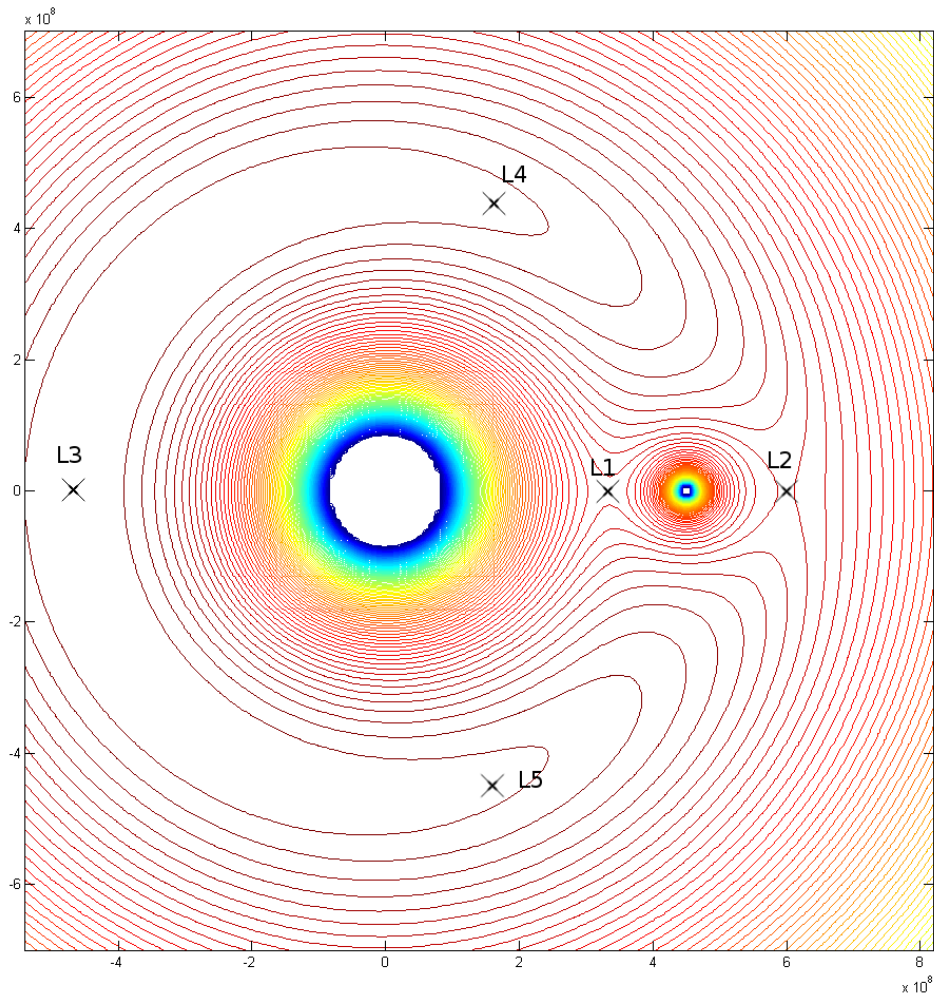
On s'est intéressé à dessiner avec Matlab un *contourplot* de l'énergie potentielle effective (énergie potentielle gravitationnelle et énergie potentielle issue de la force d'inertie d'entraînement) du système Terre-Soleil afin de mieux repérer la position de chacun des points de Lagrange. Le résultat est visible sur la Figure 2.

L'expression de l'énergie potentielle effective du système Terre-Soleil est la suivante :

$$E_{pot.eff} = \underbrace{-\frac{GM_S}{\|\vec{r} - \vec{r}_s\|}}_{E_{p,Soleil}} - \underbrace{\frac{GM_T}{\|\vec{r} - \vec{r}_T\|}}_{E_{p,Terre}} - \underbrace{\frac{\omega^2}{2} \|\vec{r}\|^2}_{E_{p,Inertie}}, \quad (8)$$

avec  $\omega$  la vitesse angulaire de la Terre dans son mouvement de rotation autour du Soleil.





```

x1=linspace(-7E8,-8E5,150);
x2=linspace(8E5,1.2E8,150);
x3=linspace(1.6E8,7E8,150);
x=x1+x2+x3;
y=linspace(-7E8,7E8,450);
[X,Y]=meshgrid(x,y);
f=@(x,y) -(1.3346E20)./(sqrt((x-450).^2+y.^2))
-(1.0038E19)./(sqrt((x-449999550).^2+y.^2))
-(6.9E-7.*(x.^2+y.^2));
z=f(X,Y);
for i=1:450;
    for j=1:150;
        if (z(i,j)<-1.6E12)
            z(i,j)=-1.6E12;
        end; end; end; contour(X,Y,z,100);

```

FIGURE 2: Equipotentielles d'un système à deux corps et le code Matlab correspondant

## 1.5 Stabilité des points L1, L2

On considère l'expression de l'énergie potentielle effective (8) comme une fonction à deux variables et on va appliquer les théorèmes d'analyse connus afin de trouver les extrema de cette fonction :

$$f(x, y) = -\frac{GM_S}{\sqrt{(x-x_S)^2+y^2}} - \frac{GM_T}{\sqrt{(x-x_T)^2+y^2}} - \frac{\omega^2}{2}(x^2+y^2). \quad (9)$$

On effectue un développement limité de (9) d'ordre 2 au point L2 de coordonnées  $(x, 0)$  où  $x = R + l_2$  :

$$f(x+h_1, h_2) = f(x, 0) + \underbrace{\vec{\nabla}(f)(x, 0)}_{=\vec{0}} \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} + o(\|\vec{h}\|^2).$$

On remarque que le gradient est nul étant donné que L2 est un point d'équilibre. On calcule maintenant les dérivées partielles secondes de (9) afin d'étudier sa matrice hessienne correspondante, ce qui nous permettra d'après un théorème d'analyse de conclure sur la stabilité de L2 :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(R+l_2, 0) = 0, \quad (10)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(R+l_2, 0) = \mathcal{G}M_S \overbrace{\frac{(R+l_2)^3 - 3(R+l_2)^5}{(R+l_2)^6}}^{<0} + \mathcal{G}M_T \overbrace{\frac{l_2^3 - 3l_2^5}{(l_2)^6}}^{<0} - \omega^2 < 0, \quad (11)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(R+l_2, 0) = \frac{\mathcal{G}M_S}{(R+l_2)^3} + \frac{\mathcal{G}M_T}{l_2^3} - \omega^2. \quad (12)$$

Si la détermination du signe de (11) est simple, celle de (12) est plus délicate. On remplace tout d'abord  $\omega$  par son expression obtenue en (1) :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(R+l_2, 0) = \frac{\mathcal{G}M_S}{(R+l_2)^3} + \frac{\mathcal{G}M_T}{l_2^3} - \mathcal{G} \overbrace{\frac{M_S + M_T}{R^3}}^{\simeq M_S}.$$

De la même manière que précédemment, on pose  $\epsilon = \frac{l_2}{R} \simeq 10^{-2} \ll 1$ , et on effectue le développement limité de cette expression. Par suite :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(R+l_2, 0) = \frac{1}{R^3} \left( \frac{M_T}{\epsilon^3} - 3\epsilon M_S \right) + o(\epsilon) \simeq \left( \frac{10^{14}}{10^{18}} - \frac{10^{26}}{10^{32}} \right) \simeq 10^{-4}, \quad (13)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(R+l_2, 0) > 0. \quad (14)$$

Le déterminant de la matrice hessienne de  $f$  est négatif, on peut donc conclure que L2 n'est ni un maximum ni un minimum. Toutefois, si l'on se déplace selon la direction  $(0, h_2)$  pour  $x = l_2 + R$ , on a :

$$\boxed{f(R+l_2, h_2) - f(R+l_2, 0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(R+l_2, 0) \frac{h_2^2}{2} + o(h_2^2) > 0}, \quad (15)$$

par (14) et si l'on se déplace selon la direction  $(h_1, 0)$ , on a :

$$f(R + l_2 + h_1, 0) - f(R + l_2, 0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(R + l_2, 0) \frac{h_1^2}{2} + o(h_1^2) < 0 . \quad (16)$$

Nous remarquons ainsi, que L2 est un "point selle" : c'est un maximum selon l'axe  $x$  et un minimum selon l'axe  $y$ . Une analyse semblable nous permet de conclure la même chose pour L1. Pour illustrer cette démonstration de la stabilité, voici une figure que nous avons réalisée sur Matlab<sup>2</sup> :

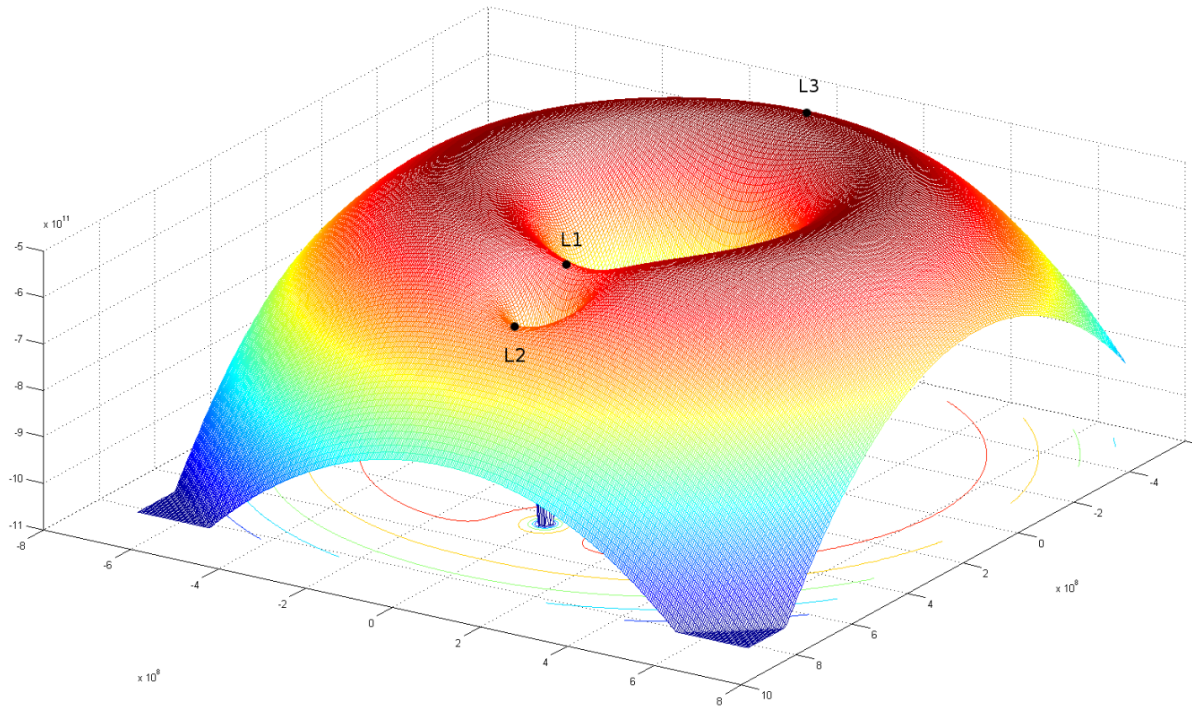


FIGURE 3: Champ de l'énergie potentiel d'un système à deux corps

## Conclusion

À l'issue de cette section, nous constatons que L2 n'est pas stable. Il s'agira donc de trouver une façon de maintenir notre satellite autour de ce point.

---

2. La réalisation de cette figure fait appel au code déjà cité sur la Figure 2, en remplaçant la fonction contour par la fonction meshc.

## 2 Détermination d'une orbite périodique autour de L2

### 2.1 Différentes orbites autour de L2

En mécanique spatiale, il y a trois types d'orbites qu'un objet céleste peut parcourir sans propulsion autour d'un point de Lagrange :

- les orbites de *Lyapunov*,
- les orbites de *Halo*,
- les orbites de *Lissajous*.

Ces trois orbites sont de nature très différentes. Les orbites de Lyapunov sont des trajectoires courbées entièrement contenues dans le plan orbital des deux corps célestes, tandis que les orbites de Halo sont des trajectoires contenues dans le plan orthogonal au plan orbital des deux corps célestes. Les orbites de Lissajous quant à elles, sont des trajectoires ayant des composantes dans les deux plans, suivant des courbes de Lissajous. Bien que les courbes décrivant ces orbites soient toutes trois théoriquement périodiques, il n'en est rien en pratique.

En effet, nous avons vu dans la section précédente que L2 est un point instable, et donc de petites perturbations depuis une position d'équilibre s'accroissent de façon exponentielle, causant très vite une divergence de la trajectoire [4]. Il est donc nécessaire pour un satellite en orbite autour de L2, d'effectuer régulièrement des corrections de sa trajectoire à l'aide de systèmes de propulsion.

Les orbites de Lissajous et de Halo sont alors préférées en pratique pour les missions spatiales, car elles permettent de minimiser le nombre de manœuvres, et donc la quantité de carburant à emporter.

Pendant, elles demeurent beaucoup plus complexes à expliquer physiquement, c'est pourquoi nous avons fait le choix de nous concentrer sur les orbites de Lyapunov qui sont plus abordables à notre niveau.

### 2.2 Présentation de STK

Pour obtenir notre orbite périodique autour de L2, nous avons utilisé le logiciel professionnel STK/ Astrogator, spécialisé dans la conception et l'optimisation de missions spatiales.

Une mission spatiale sous STK se présente de la manière suivante (c.f. Figure 4) : il s'agit d'un arbre temporel constitué de différents segments (*initial state*, *maneuvers*, *propagate*, *target* etc.) représentant schématiquement les différentes étapes de la mission au cours du temps.

STK utilise des méthodes numériques<sup>3</sup> afin de résoudre des problèmes complexes d'optimisation d'orbites : étant données les contraintes que doivent respecter notre orbite, comment doivent être modifiées les conditions initiales et les variables intermédiaires (spécifiées par l'utilisateur) afin d'atteindre les objectifs fixés. STK utilise la dénomination *Target Sequence* pour désigner ce type de problème. Il revient ensuite à l'utilisateur de configurer sa propre *Target Sequence* en fonction de son problème.

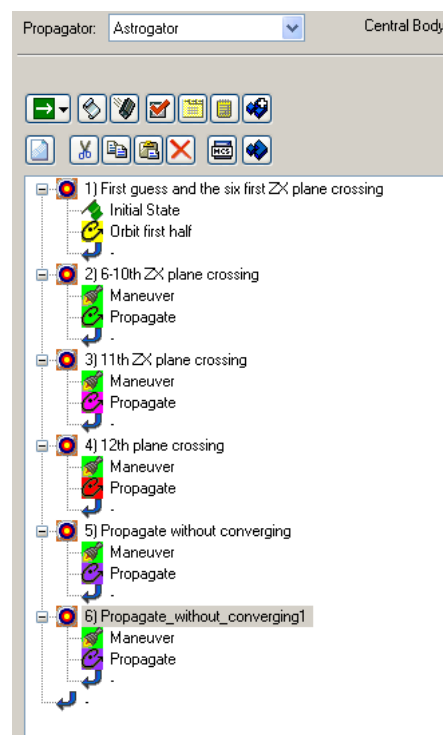


FIGURE 4: Mission spatiale sous STK

3. Nous avons utilisé la méthode SVD differential corrector de manière itérative comme conseillé dans les exercices d'initiation à Astrogator.

Pour cela il peut faire appel (entre autres) à trois types de segments :

- L'état initial (sur STK : *Initial State*) définissant l'état initial du satellite (sa position, sa vitesse, sa masse à vide, la masse du carburant embarqué, la date de lancement...) et les paramètres sur lesquels STK peut jouer afin de trouver l'état initial idéal permettant d'atteindre les objectifs fixés en contrainte.
- Les manœuvres (sur STK : *Maneuver*) consistant en une propulsion du satellite selon une direction de l'espace. Il s'agira alors de spécifier au logiciel quels sont les degrés de liberté du satellite ( $V_x, V_y, V_z$ ), ainsi que les objectifs à atteindre afin qu'il détermine l'intensité de l'impulsion à appliquer pour atteindre ces buts.
- Les propagations (sur STK : *Propagate*) permettant de tracer la trajectoire du satellite et d'imposer des conditions sur cette même trajectoire ; par exemple imposer que le satellite coupe tel plan avec telle vitesse. Le logiciel va alors jouer sur les paramètres déterminant la trajectoire afin de répondre à ces conditions.

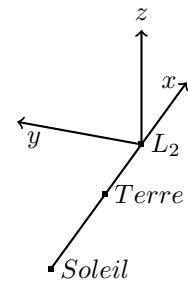


FIGURE 5: Repère centré en L2

L'utilisateur doit nécessairement comprendre avec précision le phénomène physique afin de sélectionner les paramètres et les contraintes déterminants pour aboutir à la convergence des résultats.

### 2.3 Obtention d'une orbite de Lyapunov avec STK

La première étape a été de créer un système de coordonnées adapté à notre étude, car le référentiel par défaut utilisé par STK (référentiel inertiel de la Terre), ne convenait pas pour les calculs de trajectoire, ni ne permettait d'obtenir des graphiques exploitables. Nous avons donc créé un repère centré en L2, lié au système Terre-Soleil (c.f. Figure 5). Nous avons de même créé un *propagator* (fonction utilisée par STK pour générer les trajectoires), afin de tenir compte des influences cummulées du Soleil, de la Terre et de la Lune sur le satellite.

Nous avons maintenant tous les outils nécessaires pour réaliser notre étude.

#### Une première tentative

Dans un premier temps, afin de mieux comprendre le phénomène, nous avons positionné notre satellite à une distance arbitraire de L2 (-700 000 km) et nous lui avons communiqué une vitesse initiale de 0.8 km/s selon  $V_y$ . Le résultat est visible sur la Figure 7 à la page 11.

#### Interprétation physique [17]

Pour comprendre cette trajectoire il faut se remémorer le profil d'énergie potentielle précédemment établi (c.f. Figure 3 à la page 8). Dans un but pédagogique, nous allons assimiler notre satellite à une bille roulant sur une surface 3D qui n'est rien d'autre que le graphe de notre fonction énergie potentielle (c.f. Figure 6). La bille est initialement sur une orbite à -700000 km de L2 dans l'entonnoir principal, et on lui communique une vitesse de 0.8 km/s selon Y.

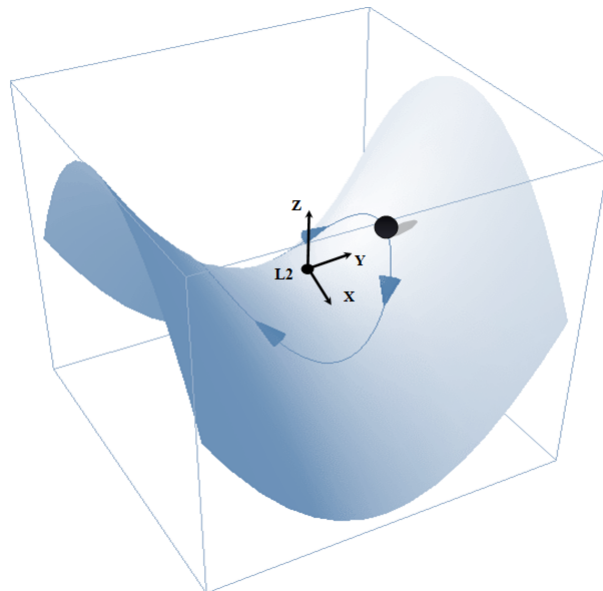


FIGURE 6: Bille (représentant notre satellite) roulant sur le profil de l'énergie potentielle

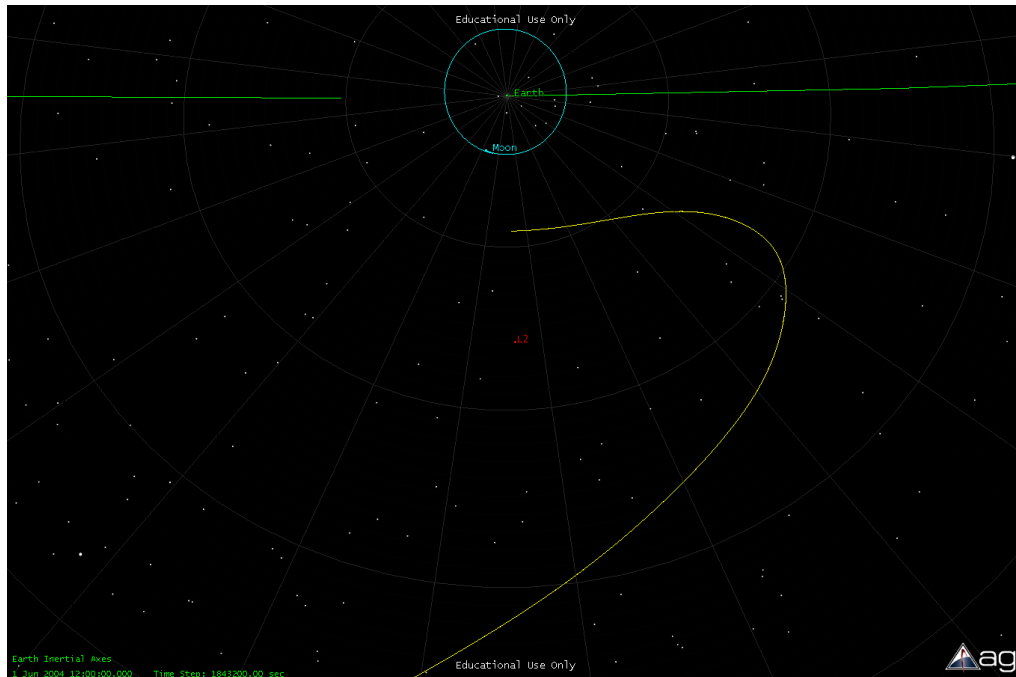


FIGURE 7: Première tentative :  $X = -700000$  km,  $V_y = 0.8$  km.s<sup>-1</sup>

Sa vitesse étant trop élevée pour l'orbite sur laquelle elle se trouve, la bille est déviée vers l'avant et l'extérieur de l'entonnoir. C'est alors que la surface qui la devance se soulève : la bille gravite la colline délimitant le puit potentiel de la terre et ralentit. À cet instant, le point L2 la rattrape et la double par l'intérieur et la bille rencontre une autre pente prononcée, qui la fait tomber vers le fond de la selle. Le point L2 étant un point instable, si la trajectoire de la bille n'est à ce moment là pas corrigée, celle-ci a de très fortes chances de ne pas réussir à franchir la selle pour continuer sur son orbite autour de L2 ; elle tomberait dans le puit du potentiel de la Terre ou partirait à l'infini sous l'effet de la force centrifuge (ce que l'on peut observer sur la Figure 7).

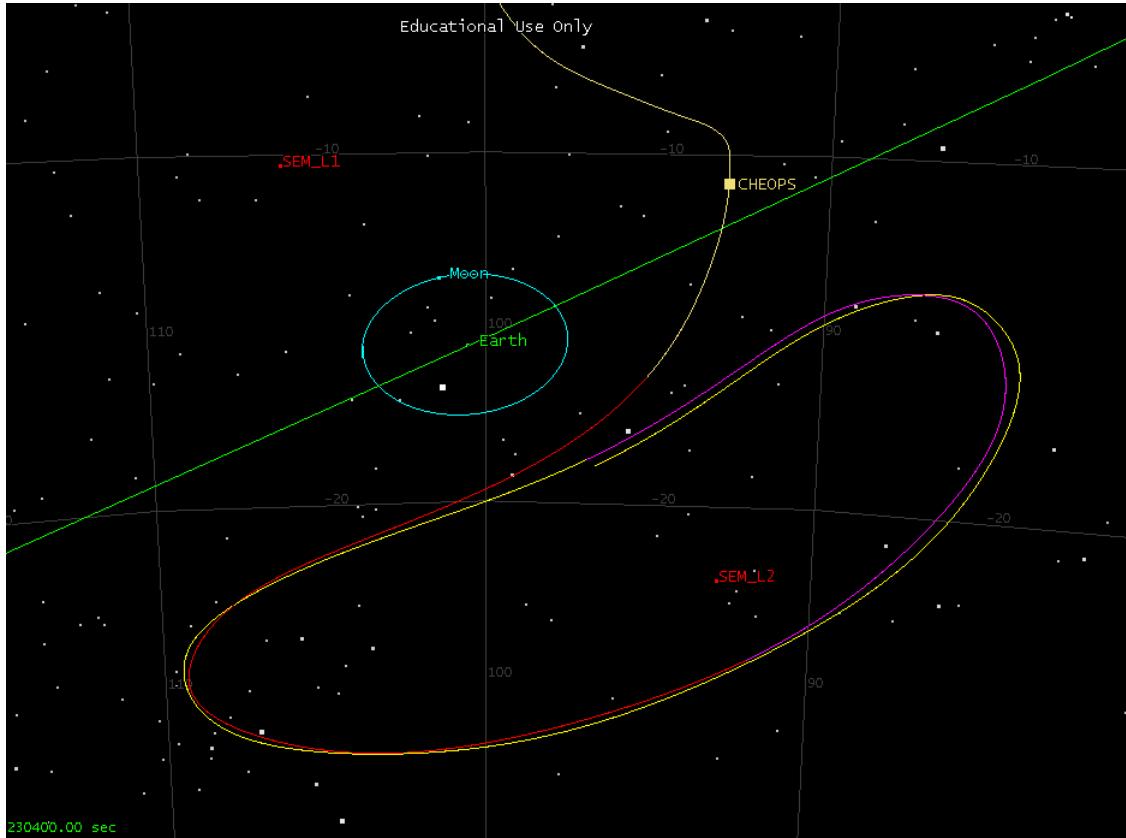
### Quelles sont les contraintes à imposer sur notre trajectoire pour obtenir une orbite autour de L2 ?

L'analyse précédente nous permet d'isoler une première contrainte :  $V_x = 0$  km/s lorsque la trajectoire coupe le plan Z-X (soit lorsque la bille se trouve au milieu de la selle). En effet, c'est une zone périlleuse pour notre bille : imaginez-vous sur une pente très raide, marchant dans la direction orthogonale à celle-ci. Pour éviter de glisser et dévaler la pente, il vous faut prendre garde à maintenir la composante de votre vitesse selon la pente nulle (soit dans notre problème  $V_x = 0$  km/s).

Enfin, une autre condition beaucoup plus intuitive est d'imposer  $V_z = 0$  km/s. En effet, nous savons que les courbes de Lyapunov sont des courbes contenues dans le plan orbital des deux corps célestes, nous voulons donc que notre trajectoire reste dans le plan X-Y, ce que nous garantit cette condition.

### Premières révolutions autour de L2

Nous avons donc réglé notre première *Target Sequence* (portant sur l'*Initial State* de notre satellite), et nous lui avons demandé les valeurs de  $V_y$  et l'altitude Z que devait avoir notre satellite à l'état initial pour respecter les contraintes précédemment identifiées. Les résultats de la simulation sont observables sur la Figure 8.



Initial State : 1 juin 2004 12 :00 UTGC		Variables	Valeurs optimisées par STK	
Coordonnées	X	$-7 \times 10^5$ km	×	-
	Y	0 km	×	-
	Z	0 km	✓	-78.58 km
Vitesse	$V_x$	0 km.s <sup>-1</sup>	×	-
	$V_y$	0.8 km.s <sup>-1</sup>	✓	0.756498 km.s <sup>-1</sup>
	$V_z$	0 km.s <sup>-1</sup>	×	-
Masse du satellite		200 kg	×	-
Masse du carburant		10 kg	×	-

FIGURE 8: Premières révolutions autour de L2 et résultats de la première *Target Sequence*

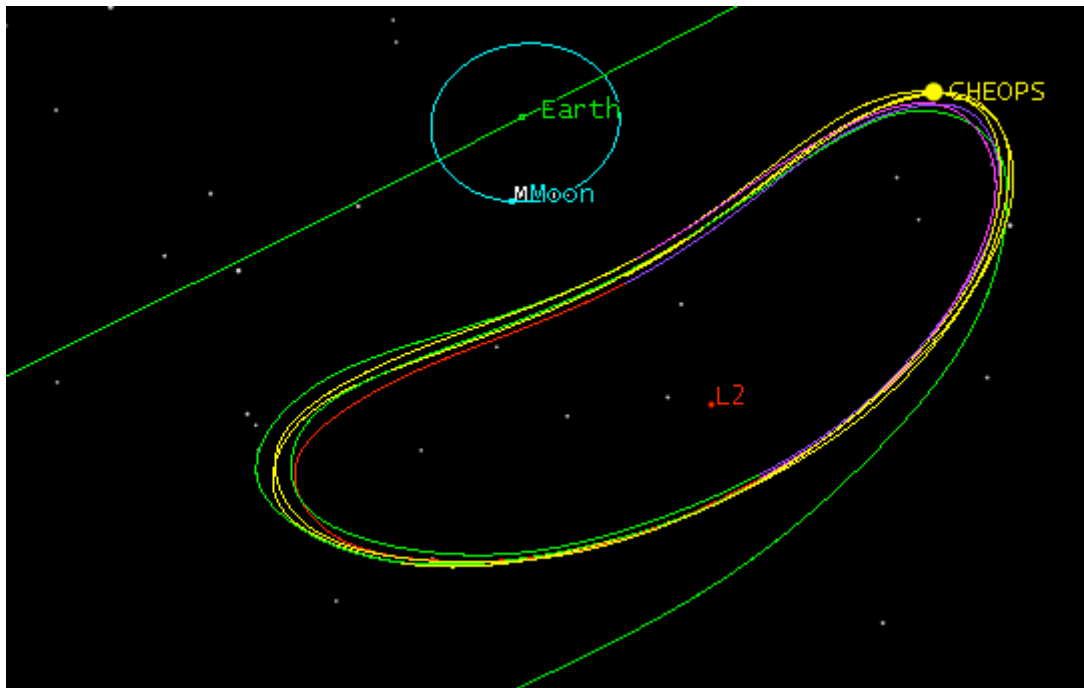
On constate que le respect des contraintes imposées pour l'*Initial State* a bien permis au satellite d'effectuer quelques révolutions sur son orbite autour de L2. Il est déjà remarquable d'avoir obtenu près de deux révolutions sans avoir effectué aucune manœuvre, quand on sait que la moindre perturbation croît exponentiellement autour de L2! Bien sûr ceci n'est pas dû au hasard, car en réalité nous avons demandé à STK d'optimiser l'*Initial State* pour que le satellite puisse parcourir deux révolutions, ce qui a d'ailleurs causé des problèmes de convergence. Nous les avons résolus en procédant par plusieurs

étapes et en augmentant graduellement la précision des perturbations qu'effectue le logiciel à chaque itération. Malheureusement, la divergence que l'on observe au bout d'un certain temps sur la Figure 8 est inévitable : L2 est un point instable et si la trajectoire du satellite n'est pas corrigée, celle-ci finira inévitablement par diverger.

*Remarque* : Il est intéressant de voir qu'ici la divergence a eu lieu de l'autre côté de L2. Ainsi notre problème est symétrique ; à chaque fois que le satellite traverse la selle celui-ci a une chance de partir vers l'infini ou de tomber dans le puit potentiel de la terre.

### Utilisation de manœuvres pour prolonger la durée de l'orbite

Pour éviter la divergence prématurée de notre trajectoire, nous avons décidé d'introduire des manœuvres pour la corriger. Ainsi, à chaque fois que le satellite croise le plan Z-X, nous avons créé une nouvelle *Target Sequence* calculant l'impulsion nécessaire à fournir au satellite pour que celui-ci coupe le prochain plan Z-X avec une vitesse  $V_x = V_y = 0$  km/s, à l'image de ce que nous avons fait précédemment. Nous avons répété l'opération 4 fois jusqu'à obtenir une orbite d'une durée raisonnable : approximativement 3 ans et 6 mois. Les résultats de la simulation sont disponibles sur la Figure 9.



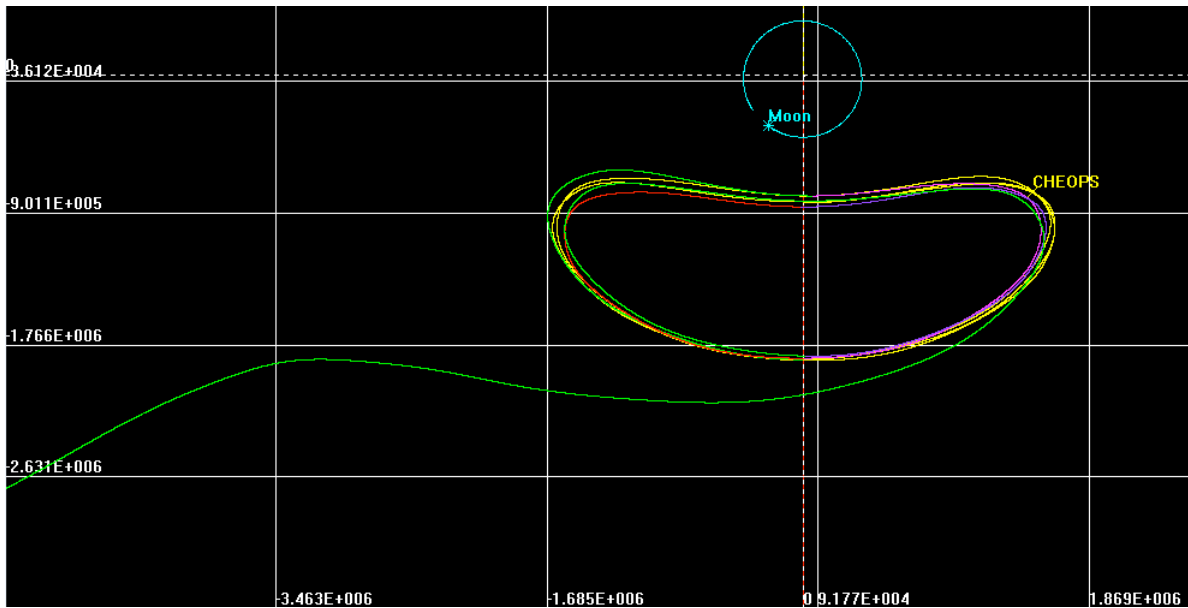
Manœuvres	Delta V	Carburant utilisé	Date
Manœuvres 1	17.309 m.s <sup>-1</sup>	1.291 kg	13 octobre 2005
Manœuvres 2	26.343 m.s <sup>-1</sup>	1.950 kg	21 janvier 2006
Manœuvres 3	5.320 m.s <sup>-1</sup>	0.392 kg	27 avril 2006
Manœuvres 4	6.296 m.s <sup>-1</sup>	0.463 kg	05 août 2006

FIGURE 9: Orbite de Lyapunov obtenue et historique des manœuvres



## Caractéristiques de l'orbite

Les caractéristiques de l'orbite obtenue sont visibles sur la Figure 10 .



Caractéristiques de l'orbite		
Dimensions	selon l'axe X	$\simeq 0.7 \times 10^6$ km
	selon l'axe Y	$\simeq 3 \times 10^6$ km
Nombre de révolutions autour de L2		$\simeq 5.5$
Date de début de la mission		1 juin 2004
Date de fin de la mission		13 novembre 2007
Durée de la mission		$\simeq 3$ ans et 6 mois

FIGURE 10: Orbite dans le plan X-Y et ses caractéristiques

## Conclusion

Nous avons ainsi obtenu une orbite de Lyapunov autour de L2. Pour poursuivre cette étude, il serait intéressant de s'intéresser aux orbites de Halo et de Lissajous pour mieux comprendre celle qui est la plus adaptée pour la mission CHEOPS (carburant utilisé, fréquence des manœuvres de correction etc.).

# Conclusion

Les objectifs que nous nous étions fixés ont bien été atteints. Nous avons dans un premier temps localisé les trois premiers points de Lagrange du système Terre-Soleil et compris en quoi L2 est pertinent dans le cadre de la mission CHEOPS. L'étude de la stabilité de ce dernier nous a amené à nous intéresser aux orbites de Lyapunov. Finalement, après avoir compris l'explication physique sous-jacente à ce type d'orbites, nous avons réussi à en simuler une sur STK, fournissant par là même des informations pratiques permettant au Swiss Space Center d'estimer plus précisément le déroulement et les coûts d'une telle mission.

## Impressions personnelles

Toutes les facettes de ce projet nous ont véritablement passionnées. La première partie nous a permis de jongler avec nos connaissances mathématiques et physiques pour trouver la manière la plus adéquate de poser et résoudre notre problème. Nous avons notamment pu appliquer des théorèmes d'analyse II liés au problème d'extrema d'une fonction à plusieurs variables au cas concret de l'énergie potentielle effective du système Terre-Soleil. Pour illustrer nos résultats, nous avons dû comprendre comment fonctionne Matlab et comment modifier les données du problème afin de rendre les graphiques obtenus lisibles. En effet, si nous n'avions pas modifié la masse de la Terre relativement à celle du Soleil, il serait impossible d'observer l'influence de cette dernière et donc les points de Lagrange. Dans la deuxième partie, moins mathématique, nous avons dû apprendre à utiliser un logiciel professionnel, complexe et indispensable à la modélisation de missions spatiales. C'est la partie qui nous a pris le plus de temps et d'énergie, car il a d'abord fallu mettre à niveau nos connaissances physiques et spatiales afin d'identifier quelles contraintes imposer pour atteindre nos objectifs. Ensuite, il a été nécessaire de réaliser de nombreux tutoriels [18] pour avoir un meilleur aperçu de l'immense panel de possibilités qu'offre STK. Les résultats obtenus dans ces deux parties ont largement dépassé nos attentes et nous en sommes très satisfaits.

Enfin, il a été très stimulant pour nous de travailler au sein de l'équipe CHEOPS. À deux reprises, nous avons présenté en anglais les avancements de notre travail, ce qui pour nous a été une expérience tout à fait nouvelle. Bien que ce projet ait certainement représenté beaucoup plus d'heures de travail qu'un projet classique, nous ne regrettons à aucun moment de nous être lancé dans cette aventure et nous en ressortons enrichis.

## Remerciements

Nous remercions chaleureusement l'ensemble du Swiss Space Center pour nous avoir permis de travailler avec eux et fourni le matériel nécessaire à la réalisation de notre étude. Nous aimerions tout particulièrement remercier Dr. Anton Ivanov pour ses conseils avisés, sa disponibilité et l'intérêt qu'il a porté à notre travail, ainsi que messieurs Federico Belloni, Luzius Gregor Kronig et Donovan Koch. Enfin nous aimerions remercier Pr. Assyr Abdulle pour nous avoir autorisé à entreprendre un projet qui n'était pas dans la liste des suggestions.

# Bibliographie

- [1] Astronoo. Les points de lagrange 11 12 13 14 15. <http://www.astronoo.com/articles/pointsDeLagrange.html>, février 2009.
- [2] William C. Blackwell . Charged Particle Environment for NGST : Model Development. [http://ntrs.nasa.gov/archive/nasa/casi.ntrs.nasa.gov/20000032964\\_2000043747.pdf](http://ntrs.nasa.gov/archive/nasa/casi.ntrs.nasa.gov/20000032964_2000043747.pdf), mars 2000.
- [3] Swiss Space Center. Cheops project. <http://space.epfl.ch/page-61744-en.html>.
- [4] Neil J. Cornish. The lagrange points. <https://www.map.gsfc.nasa.gov/ContentMedia/lagrange.pdf>, Nasa.
- [5] Concours ENSEA. Quelques aspects de l'étude du soleil et des étoiles. <http://concours.ensea.fr/concours/ats/annales/2009/Physique.pdf>, 2009.
- [6] ESA. Gaia. <http://sci.esa.int/science-e/www/area/index.cfm?fareaid=26>.
- [7] Colorado Center for Astrodynamics Research. Asen 5519 : Interplanetary mission design lab. [http://ccar.colorado.edu/asen5519/imd/documents/Lab4\\_3Body.doc](http://ccar.colorado.edu/asen5519/imd/documents/Lab4_3Body.doc).
- [8] Astrogator Guild. Trajectory design with stk/astrogator. [http://astrogatorsguild.com/wp-content/Astrogator\\_Training/EM\\_L1\\_Tutorial.pdf](http://astrogatorsguild.com/wp-content/Astrogator_Training/EM_L1_Tutorial.pdf).
- [9] Olympiades internationales de Physique (iPhO). Problème : Les points de lagrange. [http://www.sciencesalecole.org/images/sae/Image/IPhO/epreuvenationale/2010/IPhO10\\_probleme.pdf](http://www.sciencesalecole.org/images/sae/Image/IPhO/epreuvenationale/2010/IPhO10_probleme.pdf), 2010.
- [10] Wang Sang Koon, Martin W. Lo, Jerrold E. Marsden, and Shane D. Ross. Dynamical systems the three-body problem and space mission design. [http://www.cds.caltech.edu/~koon/book/KoLoMaRo\\_DMissionBk.pdf](http://www.cds.caltech.edu/~koon/book/KoLoMaRo_DMissionBk.pdf), 2006. California Institute of Technology.
- [11] Tapan R. Kulkarni and Daniele Mortari. Low energy interplanetary transfers using halo orbit hopping method with stk/astrogator. <https://www.agi.com/downloads/corporate/partners/edu/SFMpaper.pdf>, Texas AM University.
- [12] Christophe Lagoute. Autour des points de lagrange. [http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~faure/enseignement/projets\\_simulation/pb\\_trois\\_corps\\_restreint/Pb\\_3\\_corps\\_avec\\_calcul\\_formel.pdf](http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~faure/enseignement/projets_simulation/pb_trois_corps_restreint/Pb_3_corps_avec_calcul_formel.pdf).
- [13] John Mike and co. The astrogator's guild. <http://astrogatorsguild.com/>.
- [14] NASA. Herschel. [http://www.nasa.gov/mission\\_pages/herschel/index.html](http://www.nasa.gov/mission_pages/herschel/index.html).
- [15] NASA. The lagrange points. [http://map.gsfc.nasa.gov/mission/observatory\\_l2.html](http://map.gsfc.nasa.gov/mission/observatory_l2.html).
- [16] NASA. Planck. [http://www.nasa.gov/mission\\_pages/planck/index.html](http://www.nasa.gov/mission_pages/planck/index.html).
- [17] Shane Ross. Les autoroutes de l'espace. [http://space-nation.org/images/9/97/Autoroutes\\_interplanetaires.pdf](http://space-nation.org/images/9/97/Autoroutes_interplanetaires.pdf), Pour la Science 335-2007.
- [18] STK. Astrogator exercises. <http://www.stk.com/resources/help/online/stk/source/extfile/gator/tx-intro.htm>.

- [19] Techno-science. Point de lagrange. <http://www.techno-science.net/?onglet=glossaire&definition=6585>.
- [20] Wikipedia. Lagrangian point. [http://en.wikipedia.org/wiki/Lagrangian\\_point](http://en.wikipedia.org/wiki/Lagrangian_point), mars 2012.
- [21] Wikipedia. Point de lagrange. [http://fr.wikipedia.org/wiki/Point\\_de\\_Lagrange](http://fr.wikipedia.org/wiki/Point_de_Lagrange), mars 2012.