Théorie des groupes/*Group Theory*

Sur la conjecture d'Alperin pour les groupes réductifs finis

G.I. LEHRER et J. THÉVENAZ

Résumé – Un théorème récent du premier auteur permet de compter (avec des signes) les classes d'éléments semi-simples réguliers d'un groupe réductif fini. Dans cette note, nous montrons que cette formule fournit aussi une preuve de la conjecture d'Alperin pour un tel groupe en caractéristique naturelle. Cette preuve est entièrement différente de la démonstration originale de Cabanes [2]. Elle utilise la description de l'espace des orbites d'un groupe réductif sur son immeuble sphérique.

On Alperin's conjecture for finite reductive groups

Abstract – *A recent theorem of the first author gives a count (with signs) of the classes of regular semi-simple elements of a finite reductive group. In this note, we show that this formula also provides a proof of Alperin's conjecture for such a group in natural characteristic. This proof is entirely different from the original proof of Cabanes [2]. It involves identification of the orbit space of a reductive group on its spherical building.*

Abridged English Version – Let G be a finite group, let p be a prime number, and let k be an algebraically closed field of characteristic p. Write $\ell(G)$ for the number of isomorphism classes of simple kG-modules, and $z(G)$ for the number of isomorphism classes of projective simple kG-modules. Alperin's conjecture asserts that

$$\ell(G) = \sum_P z(N_G(P)/P)\,, \tag{1}$$

where P runs over all p-subgroups of G up to conjugation. Let $\mathcal{S}_p(G)$ be the poset of non-trivial p-subgroups of G and let $\Delta\mathcal{S}_p(G)$ be the associated simplicial complex of chains of p-subgroups (including the empty chain). Knörr and Robinson [6] have reformulated Alperin's conjecture [1] as follows:

$$\sum_{(\sigma)\in(\Delta\mathcal{S}_p(G))/G} (-1)^{\dim(\sigma)}\ell(G_\sigma) = -z(G)\,, \tag{2}$$

where G_σ denotes the stabilizer of σ (for the action of G induced by conjugation). The complex $\Delta\mathcal{S}_p(G)$ may be replaced by any G-complex Δ which is G-homotopy equivalent to it (cf. [13] and [12]). By an easy formal manipulation (cf. [10] and [11]), the left hand side can be transformed into

$$\sum_{(\sigma)\in\Delta/G} (-1)^{\dim(\sigma)}\ell(G_\sigma) = \sum_{(x)} \tilde{\chi}(\Delta^x/C_G(x))\,, \tag{4}$$

where the sum runs over conjugacy classes (x) of elements x of G which have order prime to p, and where $\tilde{\chi}$ denotes reduced Euler characteristic.

Let q be a power of p and let $\mathbf{G}$ be a connected reductive algebraic group with an $\mathbb{F}_q$-structure corresponding to a Frobenius endomorphism $F : \mathbf{G} \to \mathbf{G}$. We assume $\mathbf{G}$ is $\mathbb{F}_q$-split and the derived group $\mathbf{G}'$ is simply connected. For the finite group $G = \mathbf{G}^F$ of F-fixed points of $\mathbf{G}$, we can take for Δ the combinatorial building of G (cf. [9], [13] and [12]); the sum above then runs over the semisimple classes of G.

Using results of [5] and [7], we obtain that $\Delta^x/C_G(x)$ is contractible if x is not regular semisimple (and so $\tilde{\chi}(\Delta^x/C_G(x))=0$), and that $\Delta^x/C_G(x)$ is homeomorphic to a sphere if x is regular semisimple. The dimension of the sphere can be computed from x and we obtain in particular $\tilde{\chi}(\Delta^x/C_G(x))=(-1)^{s-1}\varepsilon(x)$, where s is the semisimple rank of $\mathbf{G}$, and $\varepsilon(x)$ is the sign of x. Here the sign $\varepsilon(x)$ of x is defined as the sign of w, where (w) is the conjugacy class of the Weyl group W of $\mathbf{G}$ corresponding to the unique maximal torus of $\mathbf{G}$ containing x.

The above sum of Euler characteristics is therefore equal to $\sum_{(x)}(-1)^{s-1}\varepsilon(x)$ so that Alperin's conjecture in this case can be restated as

(5) $$(-1)^s\sum_{(x)}\varepsilon(x)=z(G)\,.$$

But this equality is precisely one of the main results of [8], provided $z(G)$ is replaced by its known value $(q-1)^d$ where $d=\dim Z(\mathbf{G})$. This provides a proof of Alperin's conjecture for finite reductive groups (with simply connected derived group). The result was first proved by Cabanes [2] by a different method.

Soient G un groupe fini, p un nombre premier et k un corps algébriquement clos de caractéristique p. Notons $\ell(G)$ le nombre de classes d'isomorphisme de kG-modules simples (c'est-à-dire aussi le nombre de classes de conjugaison d'éléments p-réguliers de G) et $z(G)$ le nombre de classes d'isomorphisme de kG-modules simples projectifs (c'est-à-dire aussi le nombre de p-blocs de défaut nul). La conjecture d'Alperin [1] affirme que

(1) $$\ell(G)=\sum_P z(N_G(P)/P)\,,$$

où P parcourt les p-sous-groupes de G à conjugaison près.

Soit $\mathcal{S}_p(G)$ l'ensemble ordonné des p-sous-groupes non-triviaux de G et soit $\Delta\mathcal{S}_p(G)$ le complexe simplicial formé des sous-ensembles totalement ordonnés de $\mathcal{S}_p(G)$ (y compris le sous-ensemble vide). Le groupe G agit par conjugaison sur $\mathcal{S}_p(G)$ et donc par automorphismes sur $\Delta\mathcal{S}_p(G)$. A l'aide d'un argument d'induction, Knörr et Robinson [6] ont montré que (1) peut être reformulé de la manière suivante:

(2) $$\sum_{(\sigma)\in(\Delta\mathcal{S}_p(G))/G}(-1)^{\dim(\sigma)}\ell(G_\sigma)=-z(G)\,,$$

où σ parcourt un ensemble de représentants des orbites de G sur $\Delta\mathcal{S}_p(G)$ et où G_σ désigne le stabilisateur de σ.

Le complexe simplicial $\Delta\mathcal{S}_p(G)$ peut être remplacé par n'importe quel G-complexe Δ qui lui est G-homotopiquement équivalent (cf. [13, (6.2)] et [12, (2)]); on obtient donc la formulation équivalente suivante de la conjecture:

(3) $$\sum_{(\sigma)\in\Delta/G}(-1)^{\dim(\sigma)}\ell(G_\sigma)=-z(G)\,.$$

En particulier, si G est un groupe réductif fini, on peut prendre pour Δ l'immeuble combinatoire de G (cf. [9, (3.1)], [13, (2.5)] et [12, (2.3)]). Le but de cette note est de démontrer cette formule dans ce cas.

Par une manipulation formelle facile (cf. [10, (4.1)] et [11, (2.2)]), le membre de gauche de (3) peut être transformé en une somme de caractéristiques d'Euler:

$$\sum_{(\sigma)\in\Delta/G}(-1)^{\dim(\sigma)}\ell(G_\sigma)=\sum_{(x)}\tilde{\chi}(\Delta^x/C_G(x))\,, \tag{4}$$

où (x) parcourt les classes de conjugaison d'éléments x de G. Ici Δ^x désigne le sous-complexe des points fixes sous l'action de x, $C_G(x)$ est le centralisateur de x, $\Delta^x/C_G(x)$ est le complexe quotient, et $\tilde{\chi}$ désigne la caractéristique d'Euler réduite. La somme totale (sous forme non réduite) est en fait la caractéristique d'Euler de la K-théorie équivariante de Δ (cf. [11, (2.2)]). Nous allons calculer ces caractéristiques d'Euler lorsque G est un groupe réductif fini et Δ est l'immeuble de G. Notons que $\tilde{\chi}(\Delta^x/C_G(x))=0$ si l'ordre de x est divisible par p (cf. le lemme ci-dessous, et [11, (4.1)] pour G arbitraire).

Soit q une puissance de p et soit $\mathbf{G}$ un groupe algébrique réductif connexe muni d'une $\mathbb{F}_q$-structure correspondant à l'endomorphisme de Frobenius $F:\mathbf{G}\to\mathbf{G}$. Désormais G désigne le groupe fini $G=\mathbf{G}^F$ des points F-fixes de $\mathbf{G}$. On suppose que le groupe dérivé $\mathbf{G}'$ est simplement connexe, si bien que les centralisateurs d'éléments semi-simples sont connexes (cf. [3, (3.5.6)]); dans ce cas les classes de conjugaison d'éléments semi-simples de G sont en bijection avec les classes F-stables d'éléments semi-simples de $\mathbf{G}$. Pour simplifier, on suppose aussi que $\mathbf{G}$ est $\mathbb{F}_q$-déployé, si bien que F agit trivialement sur le groupe de Weyl W de $\mathbf{G}$; dans ce cas, il est bien connu que les classes de G-conjugaison de tores maximaux F-stables de $\mathbf{G}$ sont en bijection avec les classes de conjugaison de W (cf. [3, (3.3.3)]).

Pour tout $w\in W$, on désigne par $n(w)$ la dimension de $\operatorname{Im}(w-1)$ dans la représentation canonique de W, c'est-à-dire aussi le nombre minimal de réflexions apparaissant dans une expression de w. Si $\varepsilon : W\to\{\pm1\}$ désigne le caractère alterné de W, on a clairement $\varepsilon(w)=(-1)^{n(w)}$. Si maintenant $x\in G$ est semi-simple régulier, x est contenu dans un unique tore maximal F-stable, correspondant à une classe (w) de W. On définit alors $n(x)=n(w)$ et $\varepsilon(x)=\varepsilon(w)$, si bien que $\varepsilon(x)=(-1)^{n(x)}$. Le résultat suivant généralise [10, (4.3)], qui traitait le cas $G=GL_n(\mathbb{F}_q)$.

LEMME. *Soit* $\mathbf{G}$ *comme ci-dessus,* $G=\mathbf{G}^F$ *et* $x\in G$. *Soit* Δ *l'immeuble combinatoire de* G.
(i) Si x *n'est pas semi-simple régulier,* $\Delta^x/C_G(x)$ *est contractile.*
(ii) Si x *est semi-simple régulier,* $\Delta^x/C_G(x)$ *est homéomorphe à une sphère* $S^{s-n(x)-1}$, *où* s *est le rang semi-simple de* $\mathbf{G}$.

DÉMONSTRATION. On remplace l'immeuble Δ par l'espace $\mathcal{B}(\mathbf{G})=\mathcal{B}(\mathbf{G},\mathbb{F}_q)$ construit dans [5], qui est homéomorphe de façon G-équivariante à la suspension d-ème de $|\Delta|$, où $d=\dim Z(\mathbf{G})$. Il suffit donc de montrer les deux assertions suivantes:
(i′) Si x n'est pas semi-simple régulier, $\mathcal{B}(\mathbf{G})^x/C_G(x)$ est contractile.
(ii′) Si x est semi-simple régulier, $\mathcal{B}(\mathbf{G})^x/C_G(x)$ est homéomorphe à une sphère $S^{r-n(x)-1}$, où $r=s+d$ est le rang de $\mathbf{G}$.

Si x n'est pas semi-simple, soit $x=x_sx_u$ la décomposition de Jordan de x, où x_s est semi-simple et où $x_u\neq1$ est unipotent. Alors $\mathcal{B}(\mathbf{G})^x\subset\mathcal{B}(\mathbf{G})^{x_u}$ et l'argument de [5, (8.4)] montre que, si $b\in\mathcal{B}(\mathbf{G})^x$ est tel que le groupe $\mathcal{P}(b)$ est un sous-groupe parabolique minimal de $\mathbf{G}$, $\mathcal{B}(\mathbf{G})^x$ ne contient aucun point de $\mathcal{B}(\mathbf{G})$ opposé à b. De plus la contraction $\gamma_t(y)$ de $\mathcal{B}(\mathbf{G})^x$ sur b définie dans [5, loc. cit.] est $C_G(x)$-équivariante (c'est-à-dire $h\gamma_t(y) = \gamma_t(hy)$ pour $h \in C_G(x)$ et $y \in \mathcal{B}(\mathbf{G})^x$), et on en déduit que $\mathcal{B}(\mathbf{G})^x/C_G(x)$ est contractile. La conclusion concernant $\Delta^x/C_G(x)$ suit en utilisant [5, (6.1) et (7.2)].

Si x est semi-simple, il résulte de [5, (5.1)] que $\mathcal{B}(\mathbf{G})^x \cong \mathcal{B}(C_{\mathbf{G}}(x)^0)$. De plus $\mathbf{H} = C_{\mathbf{G}}(x)$ est connexe vu que $\mathbf{G}'$ est simplement connexe (cf. [3, (3.5.6)]). Par conséquent $\mathcal{B}(\mathbf{G})^x \cong \mathcal{B}(\mathbf{H})$ et donc $\mathcal{B}(\mathbf{G})^x/C_G(x) \cong \mathcal{B}(\mathbf{H})/H$, où $H = \mathbf{H}^F = C_G(x)$. Si x n'est pas régulier, $\mathbf{H}$ n'est pas un tore et donc le rang semi-simple de $\mathbf{H}$ n'est pas nul. Dans ce cas $\mathcal{B}(\mathbf{H})/H$ est un simplexe, donc contractile. Si par exemple $\mathbf{H}$ est semi-simple, une subdivision de $\mathcal{B}(\mathbf{H})/H$ consiste en l'ensemble de tous les sous-ensembles de racines simples de $\mathbf{H}$. Ceci achève la preuve de (i$'$).

Si x est semi-simple régulier, $C_{\mathbf{G}}(x)$ est un tore, l'immeuble combinatoire de $C_{\mathbf{G}}(x)$ est vide, et il s'en suit que $\mathcal{B}(\mathbf{G})^x$ est une suspension de l'ensemble vide, donc une sphère. De manière précise, il résulte de [7, (2.6)] que $\mathcal{B}(\mathbf{G})^x \cong \mathcal{B}(\mathbf{T})^w$, où $\mathbf{T}$ est un tore maximal F-stable déployé de $\mathbf{G}$, et où (w) est la classe de W correspondant à l'unique tore maximal F-stable contenant x (à savoir $C_{\mathbf{G}}(x)$). Mais $\mathcal{B}(\mathbf{T})$ peut être identifié à la sphère unité dans un espace euclidien de dimension $r = \dim(\mathbf{T})$ sur lequel W agit comme groupe de réflexions. Par conséquent $\mathcal{B}(\mathbf{T})^w$ est la sphère unité dans l'espace $\mathrm{Ker}(w-1)$, qui est de dimension $r - n(w)$, si bien que $\mathcal{B}(\mathbf{T})^w$ est une sphère de dimension $r - n(w) - 1$. Comme $C_G(x)$ agit trivialement sur $\mathcal{B}(\mathbf{T})^w$, le complexe quotient coïncide avec $\mathcal{B}(\mathbf{T})^w$, ce qui achève la démonstration de (ii$'$), et donc celle du lemme.

Remarque – Les assertions (i$'$) et (ii$'$) de la preuve se généralisent immédiatement au cas d'un groupe réductif $\mathbf{G}$ défini sur un corps quelconque (avec $\mathbf{G}'$ simplement connexe). La première assertion est la même, et la seconde affirme que si x est semi-simple régulier, $\mathcal{B}(\mathbf{G})^x/C_G(x) \cong S^{m-1}$ où m est la dimension de la partie déployée de l'unique tore contenant x .

COROLLAIRE. *On conserve les notations du lemme.*
(i) Si x n'est pas semi-simple régulier, $\tilde{\chi}(\Delta^x/C_G(x)) = 0$.
(ii) Si x est semi-simple régulier, $\tilde{\chi}(\Delta^x/C_G(x)) = (-1)^{s-1}\varepsilon(x)$.

DÉMONSTRATION. Cela résulte immédiatement du lemme, compte tenu du fait que $(-1)^{n(x)} = \varepsilon(x)$.

Nous pouvons maintenant énoncer le résultat principal, qui affirme que la conjecture (1) est vérifiée dans notre cas.

THÉORÈME. *Soit $\mathbf{G}$ et p comme ci-dessus, et $G = \mathbf{G}^F$. Alors la conjecture d'Alperin (1) est vérifiée pour G et p .*

DÉMONSTRATION. On montre d'abord que, si Δ est l'immeuble combinatoire de G , le formule (3) est vérifiée pour G et p comme dans l'énoncé. En vertu de l'équation (4) et du corollaire ci-dessus, le membre de gauche de (3) est égal à $\sum_{(x)}(-1)^{s-1}\varepsilon(x)$, où (x) parcourt les classes semi-simples régulières. Par ailleurs $z(G) = (q-1)^d$, où $d = \dim Z(\mathbf{G}) = \dim(\mathbf{G}/\mathbf{G}')$. En effet, si $\mathbf{G} = \mathbf{G}'$, la représentation de Steinberg St est l'unique kG-module simple projectif, en vertu de [4, 5.12], et donc $z(G) = 1$; le cas général en résulte, car on peut tensoriser St par n'importe laquelle des $(q-1)^d$ représentations de dimension 1. Pour démontrer l'équation (3), il faut donc prouver que

$$\sum_{(x)} \varepsilon(x) = (-1)^s (q-1)^d . \tag{5}$$

Mais cette formule est exactement le théorème 3.3 de [8] (qui est démontré sous l'hypothèse que $\mathbf{G}'$ est simplement connexe). Ceci achève la preuve de (3), et donc celle de (2) pour G et p comme ci-dessus, puisque Δ est G-homotopiquement équivalent à $\Delta\mathcal{S}_p(G)$. Pour obtenir l'énoncé d'Alperin (1), il reste à suivre l'argument d'induction de Knörr-Robinson. En utilisant l'approche de [13, 6.7], on voit immédiatement que cet argument ne fait intervenir en fait que des sous-groupes paraboliques (au lieu de normalisateurs de p-sous-groupes arbitraires), car $\mathcal{S}_p(N_G(P)/P)$ est contractile si le p-sous-groupe P n'est pas le radical unipotent d'un sous-groupe parabolique (cf. [12, 2.3]). On ne quitte donc jamais la catégorie des groupes réductifs finis, où la formule (2) est démontrée, compte tenu du fait que le groupe dérivé de chaque sous-groupe de Levi est de nouveau simplement connexe. Le théorème s'en suit.

Remarques – (a) Ce résultat est dû à Cabanes [2], qui a montré en fait de manière plus précise que, pour un tel groupe, la conjecture d'Alperin est vérifiée bloc par bloc.

(b) Cette preuve de la conjecture d'Alperin apparaît dans [10] pour $G = GL_n(\mathbb{F}_q)$, et la formule (3) fournit dans ce cas une identité combinatoire sur les partitions de n. D'une manière similaire, on peut trouver d'autres formules combinatoires en traitant les cas des autres groupes classiques.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] J.L. ALPERIN, Weights for finite groups, *Proc. Symp. Pure Math.*, 47, 1987, p. 369-379.

[2] M. CABANES, Brauer morphism between modular Hecke algebras, *J. Algebra*, 115, 1988, p. 1-31.

[3] R.W. CARTER, *Finite groups of Lie type, conjugacy classes and complex characters*, Wiley-Interscience, New York, 1985.

[4] C.W. CURTIS, Modular representations of finite groups with split (B,N)-pairs, in: *Seminar on Algebraic groups and related finite groups*, Lecture Notes in Math., 131, Springer-Verlag, 1970.

[5] C.W. CURTIS, G.I. LEHRER et J. TITS, Spherical buildings and the character of the Steinberg representation, *Inventiones Math.*, 58, 1980, p. 201-210.

[6] R. KNÖRR et G.R. ROBINSON, Some remarks on a conjecture of Alperin, *J. London Math. Soc.*, 39, 1989, p. 48-60.

[7] G.I. LEHRER, The spherical building and regular semisimple elements, *Bull. Austral. Math. Soc.*, 39, 1983, p. 361-379.

[8] G.I. LEHRER, Rational tori, semisimple orbits and the topology of hyperplane complements, *Comment. Math. Helv.*, 67, 1992, p. 226-251.

[9] D. QUILLEN, Homotopy properties of the poset of non-trivial p-subgroups of a group, *Adv. in Math.*, 28, 1978, p. 101-128.

[10] J. THÉVENAZ, Polynomial identities for partitions, *Europ. J. Combinatorics*, 13, 1992, p. 127-139.

[11] J. THÉVENAZ, Equivariant K-theory and Alperin's conjecture, *J. Pure Applied Alg.* (à paraître).

[12] J. THÉVENAZ et P.J. WEBB, Homotopy equivalence of posets with a group action, *J. Combin. Theory A*, 56, 1991, p. 173-181.

[13] P.J. WEBB, Subgroup complexes, *Proc. Symp. Pure Math.*, 47, 1987, p. 349-365.

G.I. L. : *School of Mathematics and Statistics, University of Sydney, NSW 2006, Australia*

J. T. : *Institut de Mathématiques, Université de Lausanne, CH-1015 Lausanne, Suisse*