

# Une modélisation géométrique itérative basée sur les automates

E. TOSAN † -I. BAILLY-SALINS‡\* -G. GOUATY†\* -I. STOTZ† -P. BUSER‡ -Y. WEINAND†

† LIRIS UMR CNRS 5205 - Université Claude Bernard Lyon I

† IBOIS - ‡ IGAT - Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne

eric.tosan@liris.cnrs.fr, gilles.gouaty@epfl.ch, ivo.stotz@epfl.ch

## Résumé

*Nous présentons un modèle itératif inspiré du modèle CIFS (Controlled Iterative Function System) de PRUSINKIEWICZ [PH94] - encore appelé RIFS (Recurrent Iterative Function System) par BARNESLEY ou MRIFS (Mutually Recursive Iterative Function System) par CULIK [CD93] -. Le principe de ces modèles est de définir des familles de figures géométriques avec des règles de production et des systèmes d'équations. Dans cet article, nous en présentons deux généralisations, qui permettent de contrôler la géométrie et la topologie des formes produites.*

**Mots-clés :** architecture, modèle itératif, automate, schéma de subdivision, topologie, courbe, surface.

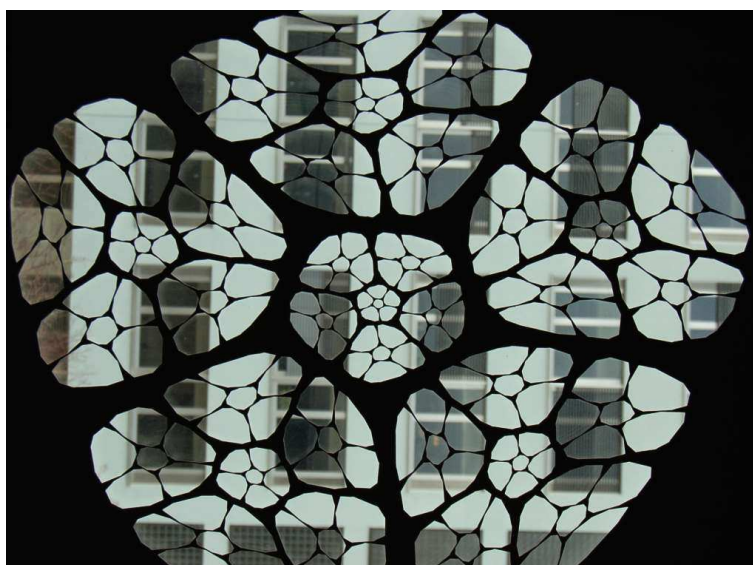


FIG. 1 – Application en architecture : panneau d'ombrage fractal en carton découpé, EPFL 2006

## 1 Introduction

Dans le cadre du projet de recherche “*La géométrie fractale et ses applications dans la construction en bois*” nous étudions un formalisme mathématique général qui permette la représentation de formes géométriques abstraites (voir figure 1). Ces formes sont destinées à l'architecture selon deux aspects principaux : design/architecture intérieure ou structure constructive et porteuse [BRS90] [WEI04]. Très schématiquement, le premier aspect exige surtout une maîtrise de la géométrie des formes, alors que le second exige un contrôle supplémentaire, celui de la topologie - ces formes doivent être munies d'une structure car elles doivent être constructibles-. Nous proposons un modèle itératif qui permet d'aborder ces deux aspects de manière complémentaire.

## 2 Contrôle de la géométrie

Dans le modèle CIFS, un automate contrôle les itérations d'un IFS [PH94]. En nous basant sur l'aspect langage de ce modèle, appelé LRIFS (Langage-Restricted Iterated Function System), nous avons défini des opérations sur les figures fractales [THO97]. Par ailleurs, nous avons développé un modèle d'IFS projeté qui permettait de définir des formes à pôles et de retrouver les formes CAO classiques [ZT96]. Le principe de ce modèle était de distinguer deux espaces : l'espace de modélisation et l'espace d'itération (ou de "mélange"). En utilisant une famille de figures et en associant à chaque figure son propre espace de définition, le modèle CIFS peut être généralisé et intégrer les formes à pôles.

### 2.1 Description

#### 2.1.1 Automate

Le principe de représentation est le suivant. Étant donné un automate  $(Q, \Sigma, \delta)$ , chaque état de  $Q$  correspond à une figure - notées  $s, t, a, b, f, g, \dots$  - chaque symbole de l'alphabet  $\Sigma$  désigne un opérateur de subdivision ; les mots finis désignent les composantes d'une figure. L'état initial  $\natural$  correspond à la figure globale.

La fonction de transition exprime des règles de décomposition :  $\delta(x, i) = y$  signifie qu'un opérateur élémentaire indexé par  $i$  fait passer d'une figure de type  $x$  à sa composante de type  $y$ . L'automate se met sous forme d'un graphe orienté. Chaque nœud correspond à un état  $x$ , chaque arc correspond à une transition  $(x, i)$ , son origine est l'état de départ  $x$  et son extrémité est l'état d'arrivée  $y = \delta(x, i)$ . À chaque nœud  $x$  est associé le sous-ensemble de symboles sur lequel  $\delta$  est définie :  $\Sigma_x = \{i \in \Sigma / \exists y \delta(x, i) = y\}$ .

#### 2.1.2 Description géométrique

À chaque nœud - ou état -  $x$  est associé un espace affine  $E^x$  défini par des coordonnées barycentriques :

$$E^x = \mathbb{B}(\mathbb{R}^{J^x}) = \{(\lambda_j)_{j \in J^x} / \sum_{j \in J^x} \lambda_j = 1\}.$$

À chaque arc - ou transition -  $(x, i)$  avec  $y = \delta(x, i)$ , est associé un opérateur affine  $T_i^x$  qui permet de passer d'un espace à l'autre :  $T_i^x$  est une fonction de  $E^y$  dans  $E^x$ , notée  $T_i^x : E^y \leftarrow E^x$ .

Les opérateurs  $T_i^x$  sont identifiés à des matrices  $J^x \times J^y$  vérifiant  $\forall k \in J^y \sum_{j \in J^x} T_{jk}^x = 1$ .

Les classes d'opérateurs sont déterminés par les espaces  $E^x$  et  $E^y$  :

- si  $E^x = E^y$  - ce qui est en particulier vrai si  $y = x$  -  $T_i^x$  opère sur  $E^x$  et la matrice est carrée ;
- si  $E^x \neq E^y$  - ce qui implique que  $y \neq x$  - on a en général  $\dim(E^x) > \dim(E^y)$ , et  $T_i^x$  est un plongement de  $E^y$  dans  $E^x$  qui positionne une composante dans une figure plus grande.

Mais on peut avoir  $\dim(E^x) < \dim(E^y)$  et  $T_i^x$  est une projection de  $E^y$  sur  $E^x$ .

### 2.2 Calculs

À partir d'une famille initiale de figures (segments, facettes, polygones, polyèdres, ...) vont être calculées des suites de figures. Ces suites sont destinées à produire des formes géométriques utilisables pour réaliser des objets (voir figure 1). Sur un plan théorique, ce sont des approximations de solutions d'un système d'équations : des maillages de plus en plus fins convergent vers des figures lisses ou fractales. Ces calculs ont deux aspects complémentaires : un aspect numérique avec le calcul de produits de matrices, un aspect formel avec le calcul de transition d'états dans un automate.

#### 2.2.1 Système itératif

L'automate décrit un système itératif générant une suite de familles de figures  $\mathbf{K}_n = (K_n^x)_{x \in Q}$  à partir d'une famille initiale de figures. La famille initiale  $\mathbf{K}_0 = (K^x)_{x \in Q}$  sera composée de primitives graphiques. Les figures géométriques que nous utilisons sont des compacts de l'espace métrique  $E^x$  - c.a.d. des ensembles de points fermés et bornés :  $K^x \in \mathcal{H}(E^x)$ .

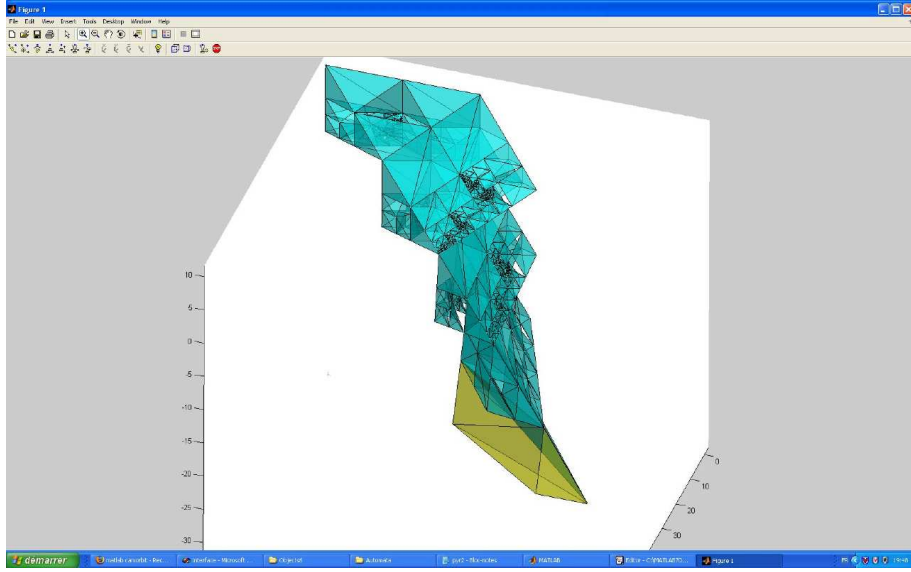


FIG. 2 – Figure générée par automate.

À chaque nœud  $x$  est associée une équation de passage d'un niveau de subdivision à l'autre :

$$K_{n+1}^x = \bigcup_{i \in \Sigma_x} T_i^x K_n^{\delta(x,i)} \quad (1)$$

L'automate décrit également un système d'équations. À chaque nœud  $x$  est associée la figure  $A^x \in \mathcal{H}(E^x)$  vérifiant l'équation :

$$A^x = \bigcup_{i \in \Sigma_x} T_i^x A^{\delta(x,i)} \quad (2)$$

La famille  $\mathbf{A} = (A^x)_{x \in Q}$  correspond au passage à la limite de la suite  $\mathbf{K}_n = (K_n^x)_{x \in Q}$ . Sous réserve de certaines hypothèses sur les opérateurs de subdivision (graphe à circuits contractants), cette limite existe.

### 2.2.2 Composantes géométriques

Tout mot fini  $\theta$  tel que  $\delta(x, \theta) = y$  décrit une suite d'opérations élémentaires  $\theta = \theta_1 \dots \theta_n$  permettant de produire une composante de type  $y$  à partir d'une figure de type  $x$ .

Ces mots sont regroupés dans les langages suivants :

- $L_x = \{\theta / \exists y \delta(x, \theta) = y\}$  ensemble des mots obtenus à partir de  $x$  ;
- $L_x^{(n)} = \{\theta \in L_x / |\theta| = n\}$  ensemble des mots de longueur  $n$ .

Tout couple  $(x, \theta)$  avec  $\theta \in L_x$ , noté  $x.\theta$  dans la suite, désigne un chemin dans le graphe associé à l'automate. Son origine est  $x$  et son extrémité est  $y = \delta(x, \theta)$ . Sur chaque chemin est calculé un opérateur  $T_\theta^x : E^x \leftarrow E^y$  défini par récurrence :

$$T_\varepsilon^x = I \text{ et } T_{\theta_i}^x = T_\theta^x T_i^{\delta(x,\theta)}.$$

À chaque chemin  $x.\theta$  est associée une composante :  $K_\theta^x = T_\theta^x K^{\delta(x,\theta)}$ .

À chaque niveau de subdivision  $n$ , les  $K_\theta^x$  sont les composantes de la figure  $K_n^x$  :

$$K_n^x = \bigcup_{\theta \in L_x^{(n)}} K_\theta^x \quad (3)$$

La visualisation de  $K_n^x$  se fait à travers celle de chacune de ses composantes  $K_\theta^x$ , c'est-à-dire à travers l'affichage de la primitive  $K^{\delta(x,\theta)}$  dans un repère calculé à partir de  $T_\theta^x$  (voir figure 2).

La modélisation itérative que nous proposons est basée sur l'adressage formel des composantes des figures. Chaque composante géométrique  $K_\theta^x$  est identifiée par le chemin  $x.\theta$ , son espace de définition est  $E^x$ , son type géométrique est  $\delta(x, \theta)$  et son positionnement est  $T_\theta^x$ .

## 2.3 Exemples

### 2.3.1 Attracteur à condensation

Etant données les règles de production :

$$\boxed{f} \rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline f & g \\ \hline f & f \\ \hline \end{array} \text{ et } \boxed{g} \rightarrow \boxed{g}$$

l'automate et le système itératif sont :

$$\begin{cases} \delta(f,0) = f, \delta(f,1) = f, \delta(f,2) = f, \delta(f,3) = g; \\ \delta(g,0) = g. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} K_{n+1}^f = T_0^f K_n^f \cup T_1^f K_n^f \cup T_2^f K_n^f \cup T_3^f K_n^g, \\ K_{n+1}^g = K_n^g. \end{cases}$$

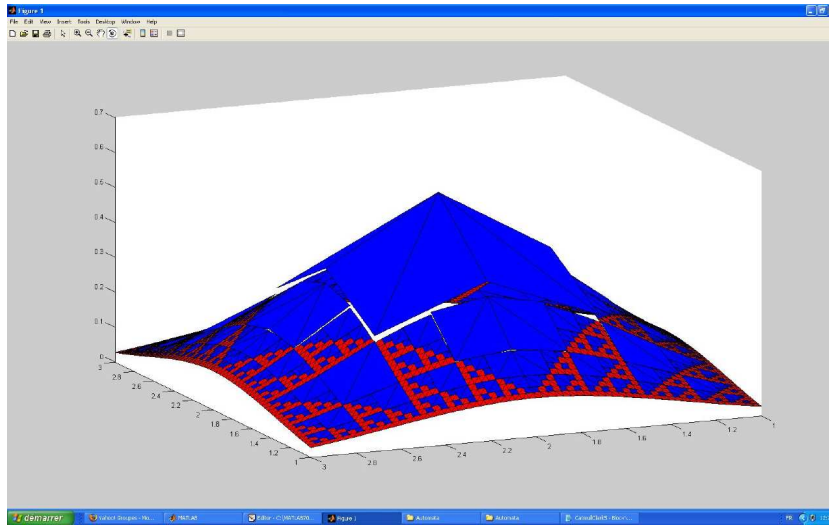


FIG. 3 – Attracteur à condensation.

Le résultat est un attracteur à condensation [BAR88] :

$$\begin{cases} A^f = \mathcal{A}(T^f) \cup (T^f)^* T_3^f A^g, \\ A^g = K_0^g. \end{cases}$$

avec  $\mathcal{A}(T^f)$  attracteur associé à l'IFS  $T^f = \{T_0^f, T_1^f, T_2^f\}$ ; dans ce cas, il s'agit d'un triangle de SIERPINSKI (voir figure 3).

### 2.3.2 Figure à pentagone de contrôle

La famille de figures - figure "pentagonale" projetée, attracteur dans l'espace barycentrique  $\mathbb{B}(\mathbb{R}^5)$  - est définie par le système itératif :

$$\begin{cases} \delta(\natural,0) = a, \\ \delta(a,i) = a \text{ pour } i \in \Sigma. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} K_{n+1}^{\natural} = T_0^{\natural} K_n^a, \\ K_{n+1}^a = \bigcup_{i \in \Sigma} T_i^a K_n^a. \end{cases}$$

Le pentagone de contrôle donne la forme générale de la figure :

$$T_0^{\natural} = (p_0, p_1, p_2, p_3, p_4) \text{ avec } p_j \in \mathbb{R}^2 \text{ ou } \mathbb{R}^3.$$

L'IFS de subdivision  $(T_i^a)_{i \in \Sigma}$  est composé de matrices dont les colonnes  $T_i^a e_j$  sont des combinaisons convexes des sommets du pentagone. Certaines colonnes sont choisies sur les arêtes du polygone de contrôle :  $T_i^a e_j = (1-r)e_k + r e_l$  avec  $0 < r < 1$ . Cette propriété de convexité donne une structure

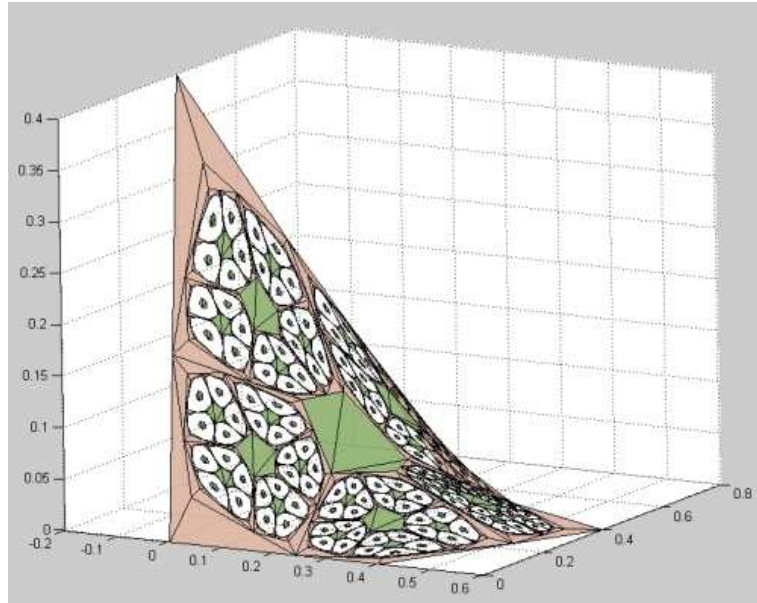


FIG. 4 – Figure pentagonale.

d’emboîtement (voir figure 1). En posant  $\text{conv}(T_\theta^a) = \text{conv}\{T_\theta^a e_j / j = 0, \dots, 4\}$  enveloppe convexe des colonnes de  $T_\theta^a = T_{\theta_1}^a \dots T_{\theta_n}^a$ , on a les inclusions :  $\text{conv}(T_{\theta_i}^a) \subseteq \text{conv}(T_\theta^a)$ .

Pour avoir un contrôle géométrique plus précis de cet emboîtement, nous identifions certaines colonnes (voir figure 4) :  $T_i^a e_j = T_k^a e_l$ . La donnée de l’IFS est alors équivalente à la donnée d’une grille de points de subdivision :  $T_\ddagger^a = (q_0, \dots, q_m)$  avec  $q_j \in \mathbb{B}(\mathbb{R}^5)$  dont on extrait les matrices  $T_i^a = (q_{v_i(0)}, \dots, q_{v_i(4)})$ .

### 3 Contrôle de la topologie

Pour contrôler la topologie des figures définies par subdivision, il faut partir d’une famille de figures munie d’une structure topologique (complexe cellulaire), et utiliser des opérateurs qui modifie cette structure de manière cohérente (opérateurs d’EULER).

Les schémas de subdivision classiques génèrent des figures dont le type topologique est donné par la figure initiale (courbes ou surfaces d’un certain genre), l’ajout de nouveaux points aux maillages permettant de raffiner la géométrie. Mais la décomposition en cellules n’est pas connue. Or à chaque étape, la figure globale est composée de “pièces” (carreaux, arcs, singletons) raccordées entre elles selon une certaine relation d’incidence. En précisant les règles de production, il est possible d’associer à chaque étape de raffinement un complexe cellulaire.

Nous avons montré que le contrôle de la topologie passe par des contraintes sur les matrices de subdivision [TOS99] [TOS04]. Nous montrons ici que ces contraintes sont le reflet de la relation d’incidence exprimée dans un automate. Ceci est obtenu en intégrant au modèle CIFS une Brep (Boundary representation). Nous obtenons alors un nouveau modèle, que nous appelons BCIFS (Boundary Controlled Iterative Function System).

#### 3.1 Principe du modèle BCIFS

La relation d’incidence entre composantes peut s’exprimer géométriquement au moyen d’opérateurs analogues aux opérateurs de subdivision. Pour la représenter de manière formelle, il suffit d’ajouter à l’automate de subdivision des symboles supplémentaires.

### 3.1.1 Automate

L'automate général  $(Q, \Sigma, \delta)$  est la superposition des deux automates :

1. L'automate "géométrique"  $(Q, \Sigma_{\pm}, \delta)$  décrivant un schéma de subdivision, c.a.d. le raffinement de la géométrie et le changement de résolution. À chacun de ses arcs est associé un opérateur de subdivision :  $x.i \in Q \times \Sigma_{x\pm} \rightarrow R_i^x = T_i^x$ .
2. L'automate "topologique"  $(Q, \Sigma_{\partial}, \delta)$  décrivant une structure Brep, c.a.d. une relation d'incidence entre composantes. À chacun de ses arcs est associé un opérateur représentant le côté d'une figure :  $x.u \in Q \times \Sigma_{x\partial} \rightarrow R_u^x = P_u^x$

Les états sont typés suivant la classe topologique des figures associées. Sont distingués :

- les états correspondant aux cellules :
  - $Q_S = \{s, t, \dots\}$  sommets ;
  - $Q_A = \{a, b, \dots\}$  arêtes ;
  - $Q_F = \{f, g, \dots\}$  faces triangulaires ou quadrangulaires ;
- les états initiaux correspondant aux figures composées : courbes ou surfaces.

Les symboles de subdivision sont typés par la classe topologique d'arrivée :  $i_X$  avec  $X = S, A, F$  et  $i = 0, 1, 2, \dots$  :  $\Sigma_{\pm} = \Sigma_S \cup \Sigma_A \cup \Sigma_F$ .

À chaque état  $x$  sont associés les sous-ensemble de symboles :  $\Sigma_{x\partial}$  et  $\Sigma_{x\pm} = \Sigma_{xS} \cup \Sigma_{xA} \cup \Sigma_{xF}$ .

Dans cet automate, les chemins  $x.\beta$  s'interprètent comme des expressions : les composantes sont calculées par  $R_{\beta}^x K^{\delta(x,\beta)}$  avec  $\beta$  mot mélangeant les symboles de subdivision et de côté. Deux chemins - deux expressions -  $x.\beta$  et  $x.\gamma$ , seront dites équivalents, - noté  $x.\beta \equiv x.\gamma$  - si elles ont la même évaluation, c.a.d. le même type et le même positionnement et par suite la même composante :

$$\delta(x, \beta) = \delta(x, \gamma) \text{ et } R_{\beta}^x = R_{\gamma}^x \Rightarrow R_{\beta}^x K^{\delta(x,\beta)} = R_{\gamma}^x K^{\delta(x,\gamma)} \Rightarrow K_{\beta}^x = K_{\gamma}^x.$$

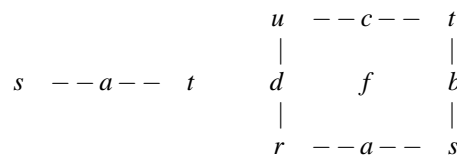
Cette relation d'équivalence va permettre de formuler les contraintes sur les états et les matrices pour que l'automate  $(Q, \Sigma, \delta)$  produise des figures à topologie contrôlée.

### 3.1.2 Expression formelle de la relation d'incidence

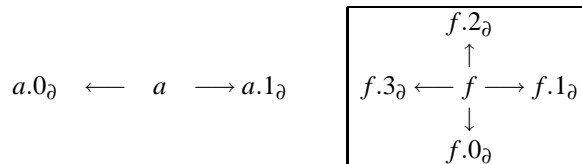
Les côtés des cellules classiques peuvent être formellement numérotés :

- pour les arêtes,  $\Sigma_{a\partial} = \{0_{\partial}, 1_{\partial}\}$  et  $\delta(a, i_{\partial}) \in Q_S$  ;
- pour les faces, si  $f$  est à  $m$  côtés  $\Sigma_{f\partial} = \{i_{\partial}/i = 0, \dots, m-1\}$  et  $\delta(f, i_{\partial}) \in Q_A$ .

La relation d'adjacence reliant sommets, arêtes et faces typés :



peut être représentée par le graphe :



Le premier décrit un complexe cellulaire comportant une arête  $a.\varepsilon$  et deux sommets  $a.0_{\partial}, a.1_{\partial}$ . Le second décrit un complexe cellulaire comportant une face  $f.\varepsilon$ , quatre arêtes  $f.i_{\partial}$  pour  $i = 0, 1, 2, 3$  et quatre sommets donnés par les expressions  $f.i_{\partial}0_{\partial}$  et  $f.i_{\partial}1_{\partial}$ . Pour décrire ces sommets, il faut introduire les équivalences d'expression suivantes :

$$\begin{array}{ccc}
 & c & \\
 u & \longrightarrow & t \\
 d \uparrow & f & \uparrow b \\
 r & \longrightarrow & s \\
 & a & \\
 \Rightarrow & & \\
 \begin{array}{ccccc}
 f.3_{\partial}1_{\partial} \equiv f.2_{\partial}0_{\partial} & \longleftarrow f.2_{\partial} & \longrightarrow & f.2_{\partial}1_{\partial} \equiv f.1_{\partial}1_{\partial} \\
 \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 f.3_{\partial} & \longleftarrow f & \longrightarrow & f.1_{\partial} & \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 f.3_{\partial}0_{\partial} \equiv f.0_{\partial}0_{\partial} & \longleftarrow f.0_{\partial} & \longrightarrow & f.0_{\partial}1_{\partial} \equiv f.1_{\partial}0_{\partial} & 
 \end{array}
 \end{array}$$

Les équivalences  $f.vw \equiv f.v'w'$  vont se traduire par les contraintes :

$$\delta(f, vw) = \delta(f, v'w') \text{ et } P_v^f P_w^a = P_{v'}^f P_{w'}^b \quad (4)$$

### 3.1.3 Expression géométrique de la relation d'incidence

Les figures cellulaires sont des formes paramétrées  $H^x : D^x \rightarrow E^x$  dont les domaines de paramétrisation sont des polytopes standard :

- singletons de domaine  $D^s = \{0\}$  ;
- arcs de courbe de domaine  $D^a = [0, 1]$  ;
- carreaux quadrangulaire de domaine  $D^f = [0, 1]^2$  ;

Les côtés de ces domaines sont représentés par des opérateurs affines :

- Les extrémités de l'intervalle  $D^a = [0, 1]$  sont donnés par les plongements  $\check{P}_u^a : \{0\} \rightarrow [0, 1]$ 
  - $\check{P}_{0\vartheta}^a 0 = 0, \check{P}_{1\vartheta}^a 0 = 1$
- Les côtés du pavé  $D^f = [0, 1]^2$  sont donnés par les plongements  $\check{P}_u^f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]^2$ 
  - $\check{P}_{0\vartheta}^f t = (t, 0), \check{P}_{1\vartheta}^f t = (1, t), \check{P}_{2\vartheta}^f t = (t, 1), \check{P}_{3\vartheta}^f t = (0, t)$ .

Les cellules “gauches” s'expriment comme des images des polytopes standard par des fonctions continues  $H^x$  contrôlées par des grilles de contrôle. Dans le cas où il y a interpolation des sommets, ces grilles sont :

- le singleton de contrôle  $J^s = \{0\}$  ;
- le polygone de contrôle à  $m + 1$  sommets :  $J^a = \{0, \dots, m\}$  ;
- la grille de contrôle à  $(m + 1) \times (n + 1)$  sommets :  $J^f = \{0, \dots, m\} \times \{0, \dots, n\}$ .

La relation d'incidence de ces cellules s'exprime à travers les grilles de contrôle. Les côtés des grilles de contrôle sont donnés par des suites extraites d'indices :

- pour les arcs, les singletons de contrôle des extrémités sont les extrémités du polygone de contrôle :

$$P_{0\vartheta}^a e_0^s = e_0^a \text{ et } P_{1\vartheta}^a e_0^s = e_m^a.$$

- pour les carreaux, les polygones de contrôle des côtés sont les côtés de la grille de contrôle :

$$P_{0\vartheta}^f e_j^a = e_{j0}^f, P_{1\vartheta}^f e_j^a = e_{mj}^f, P_{2\vartheta}^f e_j^a = e_{jn}^f, P_{3\vartheta}^f e_j^a = e_{0j}^f.$$

Dans les deux cas, les opérateurs  $\check{P}_{i\vartheta}^f, \check{P}_{j\vartheta}^a$  vérifient les contraintes (4).

## 3.2 Subdivision et relation d'incidence

Les maillages obtenus par subdivision se raccordent de manière automatique. Nous explicitons et généralisons cette propriété. Grace à une règle formelle, la relation d'incidence des composantes est définie à chaque niveau.

### 3.2.1 Relation d'incidence entre composantes

La famille des composantes est munie de la relation d'incidence formelle suivante :

$x.\theta$  est incidente à  $x.\vartheta$  si en posant  $y = \delta(x, \theta)$  il existe un côté  $v \in \Sigma_{y\vartheta}$  tel que  $x.\theta v \equiv x.\vartheta$ , c.a.d. :

$$\delta(x, \theta v) = \delta(x, \vartheta) \text{ et } T_\theta^x P_v^{\delta(x, \theta)} = P_\vartheta^x.$$

Sous de bonnes hypothèses de raccord, la composante  $K_\theta^x = T_\theta^x K^y$  est alors bordée par les composantes :

$$K_{\theta v}^x = R_{\theta v}^x K^{\delta(y, v)} = T_\theta^x P_v^y K^{\delta(y, v)}.$$

Grace à une règle de subdivision que doit vérifier l'automate, la relation d'incidence de niveau  $n + 1$  se déduit de la relation de niveau  $n$ .

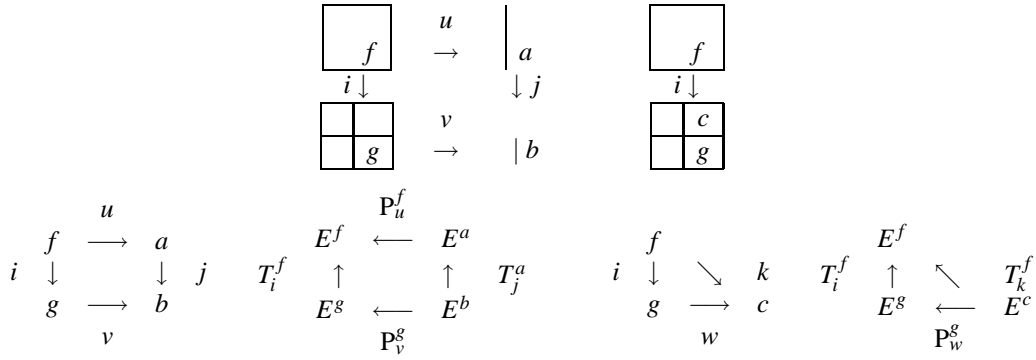


FIG. 5 – En haut : à gauche subdivision d’un côté, à droite insertion d’une nouvelle composante ; en bas : les contraintes correspondantes sur les états et les matrices.

### 3.2.2 Règle de subdivision

Le passage d’un niveau de subdivision à l’autre s’exprime formellement par une règle de commutation entre symboles de subdivision et symboles de côté.

Au cours d’une subdivision de  $y$ , la composante  $y.i$  ne peut posséder que deux types de côtés (voir figure 5) :

- Soit c’est une subdivision d’un composant existant : il y a héritage du niveau précédent et transport de la relation d’incidence :

$$\exists (u, j) \in \Sigma_{\partial} \times \Sigma_{\dot{\cdot}} \quad y.iv \equiv y.uj \Leftrightarrow \delta(y, iv) = \delta(y, uj) \text{ et } T_i^y P_v^{\delta(y,i)} = P_u^y T_j^{\delta(y,u)}.$$

- Soit c’est un nouveau composant : il y a création par rapport au niveau précédent et ajout d’un raccord interne à la relation d’incidence :

$$\exists k \in \Sigma_{\dot{\cdot}} \quad y.iw \equiv y.k \Leftrightarrow \delta(y, iw) = \delta(y, k) \text{ et } T_i^y P_w^{\delta(y,i)} = T_k^y.$$

## 4 Étude de cas

### 4.1 Singletons

Dans la subdivision des singletons, un seul arc est issu de chaque nœud, on a  $\Sigma_s = \Sigma_{s\dot{\cdot}} = \{0_s\}$ .

Le cas le plus simple est celui d’un sommet qui est le point fixe de l’opérateur de subdivision :

$$\delta(s, 0_s) = s \Rightarrow p^s = T_{0_s}^s p^s.$$

Si l’opérateur  $T_{0_s}^s$  est une fonction constante, le schéma est interpolant sur le sommet. On a :  $J^s = \{0\}$ ,  $E^s = \{1\}$  et  $T_{0_s}^s = (1)$ . Si l’opérateur n’est pas constant, on a autour de  $p^s$ , un comportement “différentiel” commun aux arêtes et faces incidentes.

### 4.2 Arcs

#### 4.2.1 Subdivision et relation d’incidence

À un arc est associé un complexe cellulaire composé d’une arête  $a.\varepsilon$  bordée par deux sommets  $a.0_{\partial}, a.1_{\partial}$  :

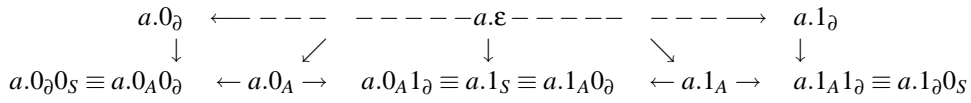
$$a.0_{\partial} \leftarrow a.\varepsilon \longrightarrow a.1_{\partial}$$

La subdivision de cet arc en deux donne un nouveau complexe cellulaire. Il est composé de cellules internes - deux arêtes  $a.0_A, a.1_A$  et un sommet  $a.1_S$  - et de deux sommets externes issus de la subdivision de sa bordure  $a.0_{\partial}0_S, a.1_{\partial}0_S$ . Ces cellules sont liées par la relation d’incidence :

$$a.0_{\partial}0_S \leftarrow a.0_A \rightarrow a.1_S \leftarrow a.1_A \rightarrow a.1_{\partial}0_S$$



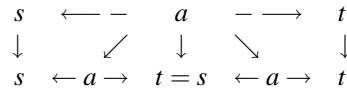
Le passage d'une relation d'incidence à l'autre s'exprime dans le graphe :



Ces équivalences de chemins se traduisent par des contraintes sur les états et les matrices.

#### 4.2.2 Contraintes

En supposant  $a$  autosimilaire, c.a.d. en prenant  $\delta(a, 0_A) = a$  et  $\delta(a, 1_A) = a$ , on a :



La famille de figures - arc, singleton - est définie par le système d'équations :

$$\begin{cases} \delta(a, 0_A) = a, \delta(a, 1_A) = a; \\ \delta(s, 0_S) = s. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A^a = T_{0_A}^a A^a \cup T_{1_A}^a A^a; \\ A^s = T^s A^s. \end{cases}$$

La relation d'incidence se traduit par les contraintes suivantes sur les matrices de subdivision :

$$\begin{aligned}
 T_{0_A}^a P_{0_{\partial}}^a &= P_{0_{\partial}}^a T_{0_S}^s, \\
 T_{0_A}^a P_{1_{\partial}}^a &= T_{1_A}^a P_{0_{\partial}}^a = T_{1_S}^a, \\
 T_{1_A}^a P_{1_{\partial}}^a &= P_{1_{\partial}}^a T_{0_S}^s.
 \end{aligned}$$

Avec ces contraintes, l'arc paramétré est en général non différentiable. L'“ordre de raccord” des sommets étant  $\dim(E^s)$ , on retrouve les schémas de subdivision classiques de courbes fractales avec  $\dim(E^s) = 0$  et des schémas analogues à ceux des B-splines avec  $\dim(E^s) > 0$ .

#### 4.2.3 Schéma fractal classique

Le schéma classique de définition d'un arc fractal par subdivision est donné par la figure 6.

Les espaces associés aux composantes sont :

- singleton :  $E^s = \langle e_0^s \rangle = \{e_0^s\}$  ;
- arc :  $E^a = \langle e_0^a, e_1^a, e_2^a \rangle$ , côtés :  $P_{0_{\partial}}^a = (e_0^a)$  et  $P_{1_{\partial}}^a = (e_2^a)$ .

Étant donnés les points de subdivision :

$$T_{\div}^a = (e_0^a, q_1, q_2, q_3, e_2^a) \text{ avec } q_i = \begin{bmatrix} r_i \\ s_i \\ t_i \end{bmatrix} \text{ et } r_i + s_i + t_i = 1;$$

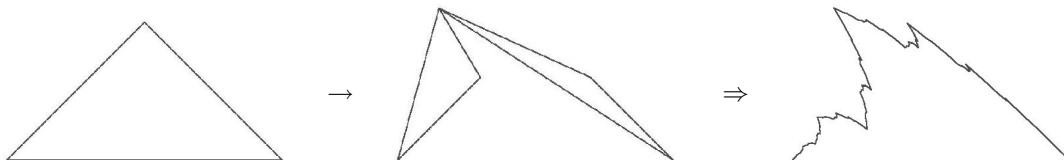


FIG. 6 – Raccord simple d'arc.

les matrices de subdivision sont :

- singleton :  $T^s = (e_0^s)$  ;

- arc :  $T_{0_A}^a = (e_0^a, q_1, q_2)$  et  $T_{1_A}^a = (q_2, q_3, e_2^a)$  ;  
et la relation d'incidence est :

$$\begin{aligned} T_{0_A}^a P_{0_\partial}^a &= P_{0_\partial}^a T^s &= (e_0^a), \\ T_{0_A}^a P_{1_\partial}^a &= T_{1_A}^a P_{0_\partial}^a = T_{1_S}^a &= (q_2), \\ T_{1_A}^a P_{1_\partial}^a &= P_{1_\partial}^a T^s &= (e_2^a). \end{aligned}$$

#### 4.2.4 Schéma type B-spline

La famille de figures - arc, singleton - est définie par le système d'équations :

$$\begin{cases} \delta(a, i) = a & \text{pour } i = 0_A, 1_A, 2_A; \\ \delta(s, 0_S) = s & . \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A^a &= T_{0_A}^a A^a \cup T_{1_A}^a A^a \cup T_{2_A}^a A^a, \\ A^s &= T^s A^s. \end{cases}$$

En prenant pour ordre de raccord des sommets  $\dim(E^s) = 2$ , et pour "degré" des arêtes  $\dim(E^a) = 3$ , les espaces associés sont :

- singleton :  $E^s = \langle e_0^s, e_1^s, e_2^s \rangle$  ;
- arc :  $E^a = \langle e_0^a, e_1^a, e_2^a, e_3^a \rangle$ , côtés :  $P_{0_\partial}^a = (e_0^a, e_1^a, e_2^a)$  et  $P_{1_\partial}^a = (e_1^a, e_2^a, e_3^a)$ .

Étant donnés les points de subdivision :

$$T_{\div}^a = (\underline{q}_0, \underline{q}_1, \underline{q}_2, \hat{q}_0, \hat{q}_1, \hat{q}_2) \text{ avec } q_i = \begin{bmatrix} r_i \\ s_i \\ t_i \end{bmatrix}, \underline{q}_i = P_{0_\partial}^a q_i = \begin{bmatrix} r_i \\ s_i \\ t_i \\ 0 \end{bmatrix}, \hat{q}_i = P_{1_\partial}^a q_i = \begin{bmatrix} 0 \\ r_i \\ s_i \\ t_i \end{bmatrix} \text{ et } r_i + s_i + t_i = 1,$$

les matrices de subdivision sont :

- singleton :  $T^s = (q_0, q_1, q_2)$  ;
- arc :  $T_{0_A}^a = (\underline{q}_0, \underline{q}_1, \underline{q}_2, \hat{q}_0)$ ,  $T_{1_A}^a = (\underline{q}_1, \underline{q}_2, \hat{q}_0, \hat{q}_1)$ ,  $T_{2_A}^a = (\underline{q}_2, \hat{q}_0, \hat{q}_1, \hat{q}_2)$  ;  
et la relation d'incidence est :

$$\begin{aligned} T_{0_A}^a P_{0_\partial}^a &= P_{0_\partial}^a T^s &= (q_0, q_1, q_2), \\ T_{0_A}^a P_{1_\partial}^a &= T_{1_A}^a P_{0_\partial}^a = T_{1_S}^a &= (q_1, q_2, \hat{q}_0), \\ T_{1_A}^a P_{1_\partial}^a &= T_{2_A}^a P_{0_\partial}^a = T_{1_S}^a &= (q_2, \hat{q}_0, \hat{q}_1), \\ T_{2_A}^a P_{1_\partial}^a &= P_{1_\partial}^a T^s &= (\hat{q}_0, \hat{q}_1, \hat{q}_2). \end{aligned}$$

Les courbes de la figure 7 sont obtenues avec  $r_0 = \frac{7}{24}, s_0 = \frac{16}{24}, t_0 = \frac{1}{24}; r_1 = \frac{9}{24}, s_1 = \frac{6}{24}, t_1 = \frac{9}{24}; r_2 = \frac{1}{24}, s_2 = \frac{16}{24}, t_2 = \frac{7}{24}$ .

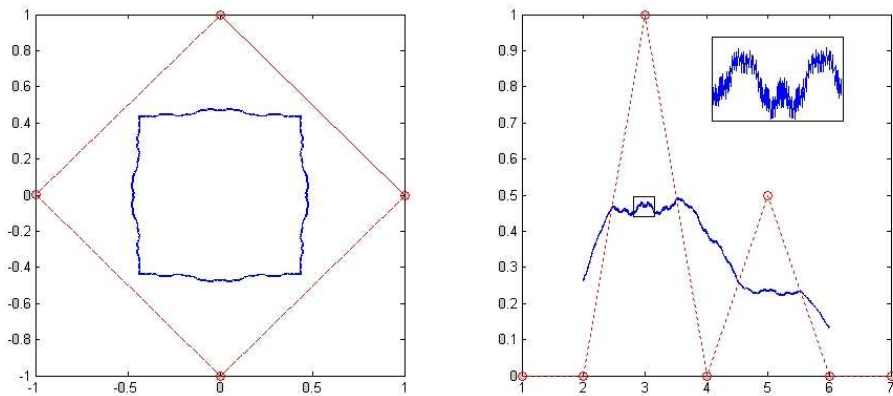
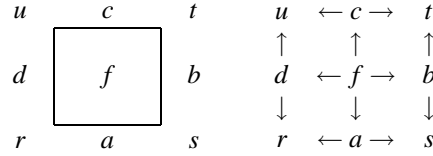


FIG. 7 – Courbes fractales : à gauche courbe fermée, à droite arc composé.

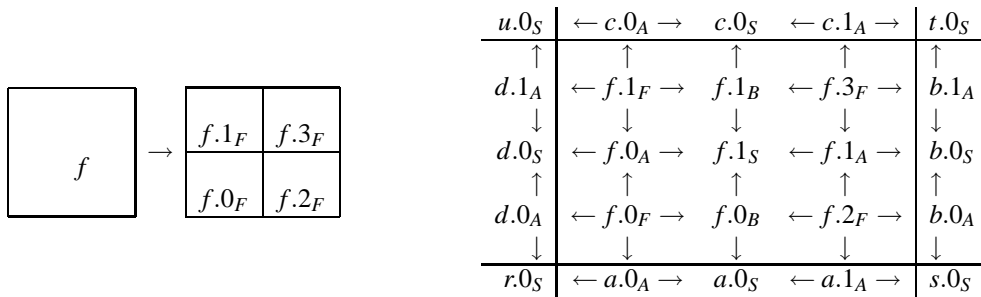
### 4.3 Surfaces

#### 4.3.1 Subdivision et relation d'incidence

À un carreau quadrangulaire est associé un complexe cellulaire composé d'une face  $f.\varepsilon$  ; quatre arêtes  $f.i_\partial$  avec  $i = 0, 1, 2, 3$  et quatre sommets  $f.i_\partial 0_\partial$  avec  $i = 0, 1, 2, 3$ .

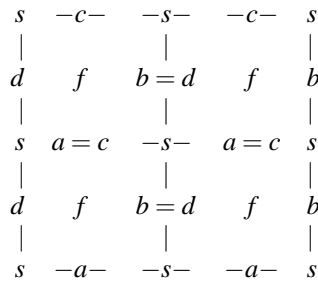


La subdivision de ce carreau en quatre donne un nouveau complexe cellulaire. Il est composé de cellules internes - quatre faces  $f.0_F, f.1_F, f.2_F, f.3_F$  ; quatre arêtes  $f.0_A, f.1_A, f.0_B, f.1_B$  et un sommet  $f.1_S$  - et de cellules de bordure - huit arêtes  $f.i_\partial 0_A, f.i_\partial 1_A$  avec  $i = 0, 1, 2, 3$  ; et huit sommets  $f.i_\partial 0_S, f.i_\partial 1_S$  avec  $i = 0, 1, 2, 3$  - . Ces cellules sont liées par la relation d'incidence :



#### 4.3.2 Contraintes

Si  $f$  est autosimilaire, c.a.d.  $\delta(f, i_F) = f$ , on a deux types d'arêtes et un type de sommets :



Les contraintes de bordure externe sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} T_{0_F}^f P_{0_\partial}^f = P_{0_\partial}^f T_{0_A}^a, \\ T_{2_F}^f P_{0_\partial}^f = P_{0_\partial}^f T_{1_A}^a, \\ T_{1_F}^f P_{2_\partial}^f = P_{2_\partial}^f T_{0_A}^a, \\ T_{3_F}^f P_{2_\partial}^f = P_{2_\partial}^f T_{1_A}^a, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} T_{2_F}^f P_{1_\partial}^f = P_{1_\partial}^f T_{0_A}^b, \\ T_{3_F}^f P_{1_\partial}^f = P_{1_\partial}^f T_{1_A}^b, \\ T_{0_F}^f P_{3_\partial}^f = P_{3_\partial}^f T_{0_A}^b, \\ T_{1_F}^f P_{3_\partial}^f = P_{3_\partial}^f T_{1_A}^b. \end{array} \right.$$

Les contraintes de raccord interne sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} T_{0_F}^f P_{2_\partial}^f = T_{1_F}^f P_{0_\partial}^f = T_{0_A}^f, \\ T_{2_F}^f P_{2_\partial}^f = T_{3_F}^f P_{0_\partial}^f = T_{1_A}^f, \\ T_{2_F}^f P_{3_\partial}^f = T_{0_F}^f P_{1_\partial}^f = T_{0_B}^f, \\ T_{3_F}^f P_{3_\partial}^f = T_{1_F}^f P_{1_\partial}^f = T_{1_B}^f, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} T_{0_A}^f P_{1_\partial}^a = T_{1_A}^f P_{0_\partial}^a = T_{1_S}^f, \\ T_{0_B}^f P_{1_\partial}^b = T_{1_B}^f P_{0_\partial}^b = T_{1_S}^f. \end{array} \right.$$

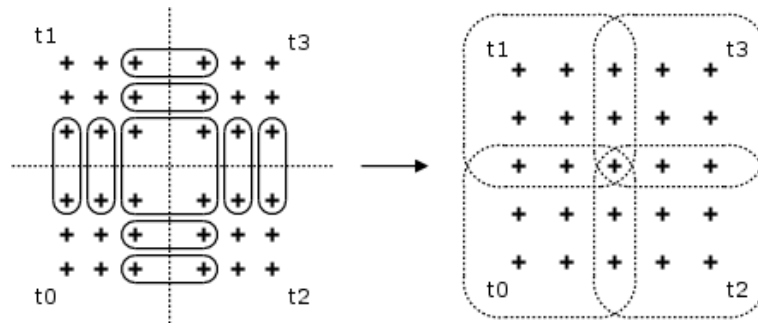


FIG. 8 – Grille de subdivision quadrangulaire.

#### 4.3.3 Schéma de DE CASTELJAU

Dans le schéma de DE CASTELJAU, le maillage de contrôle est une subdivision du complexe cellulaire. Aux sommets de chaque cellule sont ajoutés des sommets supplémentaires :

$$J^s = \bullet, \quad J^a = \bullet - - \circ - - \bullet, \quad J^f = \begin{array}{ccccc} \bullet & - & \circ & - & \bullet \\ | & & | & & | \\ \circ & - & \circ & - & \circ \\ | & & | & & | \\ \bullet & - & \circ & - & \bullet \end{array} .$$

Les contraintes de raccord interne se traduisent par les identifications de colonnes données par la figure 8. La description d'un schéma à  $3 \times 3$  points de contrôle se ramène à une grille à  $5 \times 5$  points de subdivision. Les contraintes de bordure se traduisent par le plongement sur les côtés des points de subdivision des arcs :  $(q_{j_0}^f, q_{j_1}^f, q_{j_2}^f, q_{j_3}^f, q_{j_4}^f) = P_{0_j}^f(e_0^a, q_1^a, q_2^a, q_3^a, e_2^a) \dots$

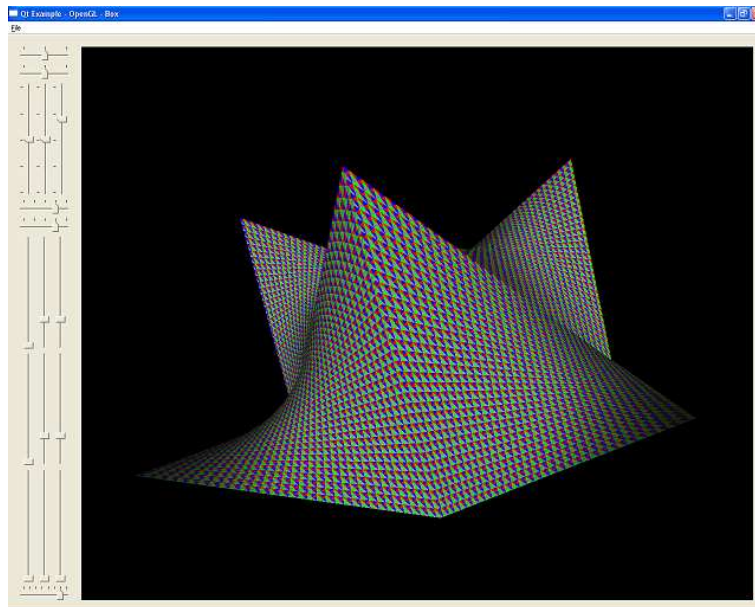


FIG. 9 – Carreau quadrangulaire.

#### 4.3.4 Schéma de CATMULL-CLARK

Dans le schéma de CATMULL-CLARK, il y a une bijection entre sommets du maillage de contrôle et sommets du complexe cellulaire. La grille de contrôle de chaque cellule correspond à son voisinage

dans le complexe cellulaire :  $J^s = \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array}$ ,  $J^a = \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array}$ ,  $J^f = \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array}$ .

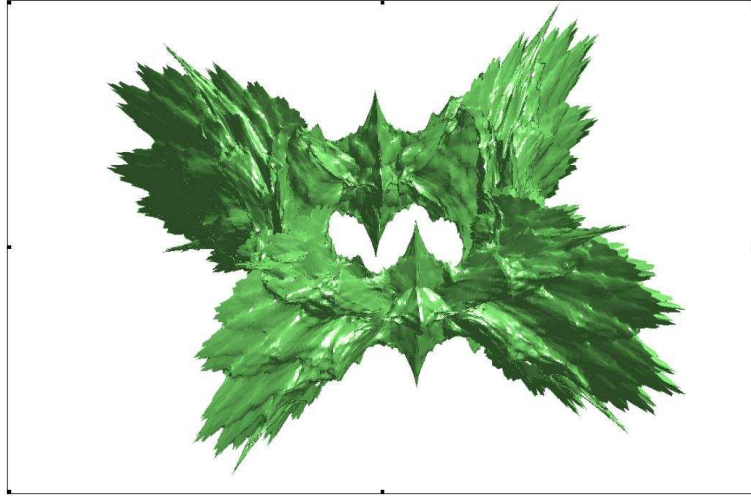


FIG. 10 – Tore fractal obtenu par un schéma de CATMULL-CLARK. .

Comme il y a correspondance entre types de figures - $s, a, b, f$ - et masques d'interpolation  $-\mu^s, \mu^a, \mu^b, \mu^f-$  la grille des points de subdivision est donnée par les masques à partir du complexe cellulaire :

$$T_{\dot{c}}^f = \begin{array}{cccccc} f & - & b & - & f & - & b & - & f \\ | & & | & & | & & | & & | \\ a & - & \mathbf{s} & = & \mathbf{a} & = & \mathbf{s} & - & a \\ | & & \parallel & 1_F & | & 3_F & \parallel & & | \\ f & - & \mathbf{b} & - & \mathbf{f} & - & \mathbf{b} & - & f \\ | & & \parallel & 0_F & | & 2_F & \parallel & & | \\ a & - & \mathbf{s} & = & \mathbf{a} & = & \mathbf{s} & - & a \\ | & & | & & | & & | & & | \\ f & - & b & - & f & - & b & - & f \end{array}$$

Les matrices de subdivision sont extraites de cette grille :

$$\begin{array}{l} \text{– singleton : } T^s = \begin{array}{cccc} f & - & b & - & f \\ | & & | & & | \\ a & - & \mathbf{s} & - & a \end{array} ; \\ \text{– arcs : } T_{0_A}^a = \begin{array}{cccc} f & - & b & - & f \\ | & & | & & | \\ a & - & \mathbf{s} & = & \mathbf{a} \\ | & & | & & | \\ f & - & b & - & f \end{array}, T_{1_A}^a = \begin{array}{cccc} b & - & f & - & b \\ | & & | & & | \\ s & - & \mathbf{a} & = & \mathbf{s} \\ | & & | & & | \\ b & - & f & - & b \end{array}, \dots ; \\ \text{– carreau : } T_{0_F}^f = \begin{array}{cccc} f & - & b & - & f \\ | & & | & & | \\ a & - & \mathbf{s} & = & \mathbf{a} \\ | & & \parallel & 0_F & \parallel \\ a & - & \mathbf{s} & = & \mathbf{a} \\ | & & | & & | \\ f & - & b & - & f \end{array}, T_{1_F}^f = \begin{array}{cccc} f & - & b & - & f \\ | & & | & & | \\ a & - & \mathbf{s} & = & \mathbf{a} \\ | & & \parallel & 1_F & \parallel \\ f & - & \mathbf{b} & = & \mathbf{f} \\ | & & | & & | \\ a & - & s & - & a \end{array}, \dots \end{array}$$

La relation d'incidence est :

$$\begin{aligned}
 T_{0_F}^f P_{0_\partial}^f = P_{0_\partial}^f T_{0_A}^a &= \begin{array}{c} f - b - f - b \\ | \quad | \quad 0_F \quad | \quad | \\ a - \mathbf{s} = \mathbf{a} - s, \dots; \\ | \quad | \quad \quad \quad | \quad | \\ f - b - f - b \end{array} \\
 T_{0_F}^f P_{2_\partial}^f = T_{1_F}^f P_{0_\partial}^f = T_{0_A}^f &= \begin{array}{c} a - s - a - s \\ | \quad | \quad 1_F \quad | \quad | \\ f - \mathbf{b} = \mathbf{f} - b, \dots \\ | \quad | \quad 0_F \quad | \quad | \\ a - s - a - s \end{array}
 \end{aligned}$$

#### 4.3.5 Schéma tridimensionnel

Un schéma de subdivision peut être décrit dans  $\mathbb{R}^3$ . Les opérateurs de subdivision sont des cisaillements verticaux. Pour l'exprimer, il est plus aisé d'utiliser des coordonnées mixtes : tout point peut se décomposer dans un repère  $(e_0^f, e_1^f, e_2^f, \vec{e}_3^f)$  avec  $e_0^f, e_1^f, e_2^f$  points indépendants du plan horizontal et  $\vec{e}_3^f$  vecteur vertical :  $q = re_0^f + se_1^f + te_2^f + h\vec{e}_3^f$  avec  $r + s + t = 1$ .

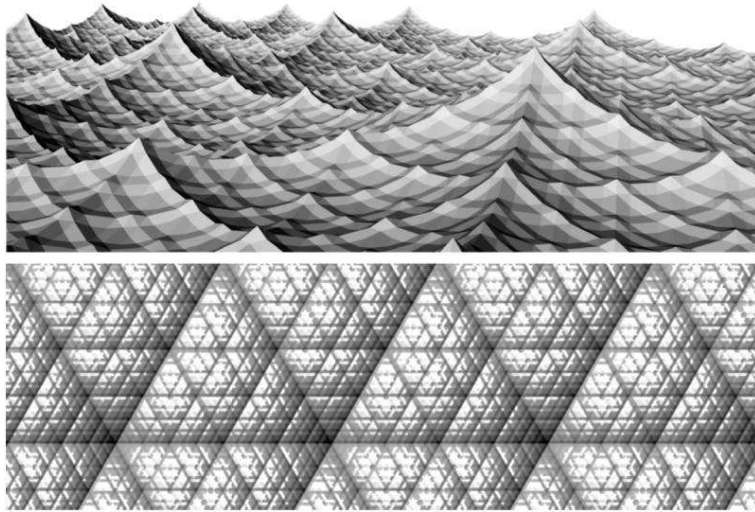


FIG. 11 – Composition triangulaire.

Avec un carreau triangulaire (figure 11), les espaces associés aux cellules sont :

- singleton :  $E^s = \langle e_0^s, \vec{e}_1^s \rangle$  ;
- arc :  $E^a = \langle e_0^a, e_1^a, \vec{e}_2^a \rangle$ , côtés :  $P_{0_\partial}^a = (e_0^a, \vec{e}_2^a)$  et  $P_{1_\partial}^a = (e_1^a, \vec{e}_2^a)$  ;
- carreau :  $E^f = \langle e_0^f, e_1^f, e_2^f, \vec{e}_3^f \rangle$ , côtés :  $P_{0_\partial}^f = (e_0^f, e_1^f, \vec{e}_3^f)$ ,  $P_{1_\partial}^f = (e_1^f, e_2^f, \vec{e}_3^f)$  et  $P_{2_\partial}^f = (e_2^f, e_0^f, \vec{e}_3^f)$ .

En prenant  $r = s = \frac{1}{2}$ ,  $h \in \mathbb{R}, 0 < \Delta h < 1$ , les matrices de subdivision sont :

- singleton :  $T^s = (e_0^s, \vec{u})$  avec  $\vec{u} = \Delta h \vec{e}_1^s$  ;
- arc :  $T_{0_A}^a = (e_0^a, p, \vec{v})$ ,  $T_{1_A}^a = (p, e_1^a, \vec{v})$  avec  $p = re_0^a + se_1^a + h\vec{e}_2^a$ ,  $\vec{v} = \Delta h \vec{e}_2^a$  ;
- carreau :  $T_{0_F}^f = (e_0^f, q^a, q^c, \vec{w})$ ,  $T_{1_F}^f = (q^a, e_1^f, q^b, \vec{w})$ ,  $T_{2_F}^f = (q^c, q^b, e_2^f, \vec{w})$ ,  $T_{3_F}^f = (q^b, q^c, q^a, \vec{w})$  avec  $q^a = re_0^f + se_1^f + h\vec{e}_3^f$ ,  $q^b = re_1^f + se_2^f + h\vec{e}_3^f$ ,  $q^c = re_2^f + se_0^f + h\vec{e}_3^f$ ,  $\vec{w} = \Delta h \vec{e}_3^f$  ;

La relation d'incidence s'exprime avec une mise en commun de la direction verticale :

- arc :

$$\begin{aligned}
 T_{0_A}^a P_{0_\partial}^f &= P_{0_\partial}^a T^s = (e_0^a, \vec{v}), \\
 T_{0_A}^a P_{1_\partial}^f &= T_{1_A}^a P_{0_\partial}^f = T_{0_S}^a = (p, \vec{v}), \\
 T_{1_A}^a P_{1_\partial}^f &= P_{1_\partial}^a T^s = (e_1^a, \vec{v});
 \end{aligned}$$

– carreau :

$$\begin{aligned}T_{0_F}^f P_{0_\partial}^f &= P_{0_\partial}^f T_{0_A}^a = (e_0^f, q^a, \vec{w}), \\T_{0_F}^f P_{1_\partial}^f &= T_{3_F}^f P_{1_\partial}^f S^a = (q^a, q^c, \vec{w}), \\T_{0_F}^f P_{2_\partial}^f &= P_{1_\partial}^f T_{1_A}^c = (q^c, e_0^f, \vec{w}).\end{aligned}$$

## 5 Conclusion

Nous avons ramené la description d'un modèle itératif à une formulation en terme d'automate. Dans l'avenir nous pensons proposer une "grammaire de formes", c.a.d. un système de règles de production de figures avec un contrôle au choix de la géométrie ou de la topologie. Pour cela nous devons élaborer un langage qui décrive cette grammaire. Cette formulation permet également d'envisager une classification des schémas de subdivision.

## Références

- [BAR88] M.F. BARNSELEY. *Fractal Everywhere*. Academic press, INC, 1988.
- [BRS90] P. J. BUSER, B. RADIC, and K.-D. SEMMLER. Surface visualization. In *Scientific visualization and graphic simulation*, pages 27–42. John Wiley, Chichester, 1990.
- [CD93] K. CULIK and S. DUBE. Balancing order and chaos in image generation. *Computer & Graphics*, 17(4) :465–486, 1993.
- [PH94] Przemyslaw PRUSINKIEWICZ and Mark HAMMEL. Language-Restricted Iterated Function Systems, Koch Constructions, and L-systems. In *New Directions for Fractal Modeling in Computer Graphics, SIGGRAPH'94 Course Notes*. ACM Press, 1994.
- [THO97] J. THOLLOT. Set manipulations of fractal objects using matrices of IFS. In Ehoud Ahronovitz and Christophe Fiorio, editors, *Discrete Geometry for Computer Imagery, 7th International Workshop*, number 1347 in Lecture Notes in Computer Sciences, pages 223–234. Springer, 3-5 December 1997.
- [TOS99] Eric TOSAN. Surfaces fractales définies par leurs bords. In L. Briard, N. Szafran, and B.Lacolle, editors, *Journées "Courbes, surfaces et algorithmes"*, Grenoble, 15-17 Septembre 1999.
- [TOS04] Éric TOSAN. Représentation topologique des formes fractales. In *GTMG 2004, Journées du Groupe de Travail en Modélisation Géométrique, Lyon*, pages 1–13, Mars 2004.
- [WEI04] Yves WEINAND. *New modeling*. Presses polytechniques et universitaires romandes, 2004.
- [ZT96] Chems Eddine ZAIR and Eric TOSAN. Fractal modeling using free form techniques. *Computer Graphics Forum*, 15(3) :269–278, August 1996. EUROGRAPHICS'96 Conference issue.