

# DURATA MEDIA DI EVENTI DI PIENA TRAMITE L'APPROSSIMAZIONE DEL COMPOUND POISSON PROCESS

Giulio Calvani<sup>1</sup> & Paolo Perona<sup>1,2</sup>

(1) Platform of Hydraulic Constructions (PL-LCH), IIC - ENAC, EPFL, Lausanne, Switzerland

(2) Institute for Infrastructure and Environment, School of Engineering, University of Edinburgh, Edinburgh, United Kingdom

## ASPETTI CHIAVE

- L'impiego di formulazioni recentemente derivate in letteratura è proposto per il calcolo della durata delle fasi ascendente e discendenti di un idrogramma di piena
- Le formulazioni sono basate sul concetto di tempo medio di passaggio attraverso soglie multiple nel contesto del processo stocastico del Compound Poisson Process (CPP)
- Il positivo confronto con i dati misurati suggerisce che l'approccio può essere adottato per vari corsi fluviali, a condizione che il regime idrologico sia ben approssimabile a un CPP

## 1 INTRODUZIONE

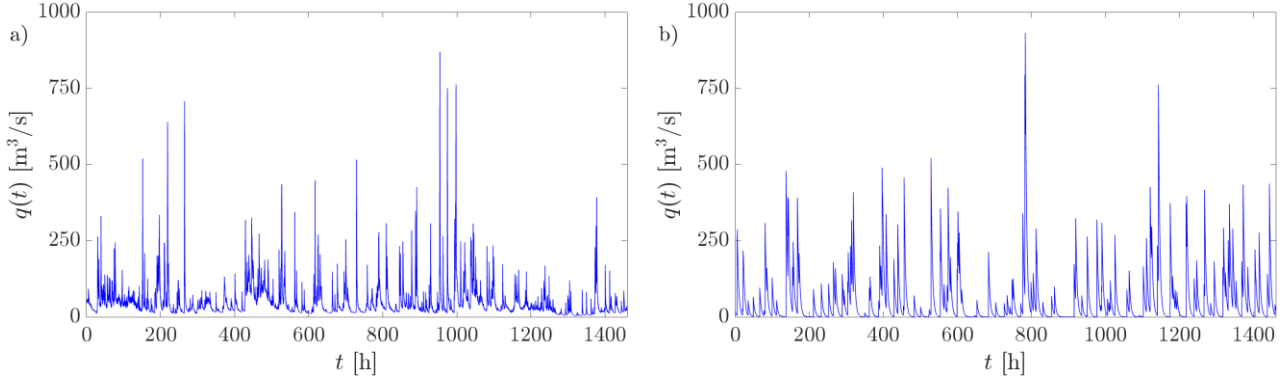
Il funzionamento e la manutenzione di molte strutture idrauliche fluviale vengono generalmente progettati sulla base di un unico valore di picco della portata idraulica a cui le strutture stesse devono resistere. Questo valore è generalmente calcolato tramite l'analisi di dati misurati e del tempo di ritorno generalmente definito da Normativa per quel tipo di opera. La conoscenza del singolo valore di picco, tuttavia, da solo una limitata descrizione dell'intero evento di piena che l'ha generato (Muneepeerakul *et al.*, 2007; Brunner *et al.*, 2017). Molti processi fluviali, infatti, dipendono non solo dal valore massimo di portata, ma anche da quantità integrate nel tempo (e.g., Crouzy *et al.*, 2013; Calvani *et al.*, 2019a). Ad esempio, il volume totale di acqua transitato durante l'intera piena è fondamentale per la progettazione di casse d'espansione, mentre il volume totale di sedimenti erosi e/o depositati influisce sulle strategie di protezione delle sponde. Poiché queste quantità dipendono dal tempo durante la fase ascendente e discendente della piena, diventa importante conoscere l'idrogramma medio e in particolar modo la sua durata totale.

La portata in uscita da un certo bacino idrografico può essere calcolata come integrale di convoluzione dell'idrogramma unitario (IUH) e della pioggia effettiva (pioggia totale meno le perdite per evapotraspirazione e infiltrazione). In letteratura si trovano molte formulazioni dell'IUH (e.g., la funzione Gamma di Nash) e la loro definizione dipende da parametri idro-morfologici dell'intero bacino calcolati generalmente tramite relazioni empiriche (e.g., Rodríguez-Iturbe & Valdés, 1979; Gupta *et al.*, 1980; Muneepeerakul *et al.*, 2007). In altri casi, sono gli stessi idrogrammi che vengono semplificati dai progettisti e dagli ingegneri per permetterne una più facile trattazione e modellazione (e.g., idrogramma di forma triangolare o rettangolare).

La principale limitazione di questo approccio sta nel fatto che la durata dell'idrogramma viene nella maggior parte dei casi calcolata assumendo una certa durata dell'evento di pioggia, su base puramente empirica, tentando di ridurre la probabilità di interruzione del funzionamento della struttura in esame. In questo caso, anche l'uso di un approccio basato sull'IUH può portare ad errori di modellazione e previsione delle dinamiche di alveo, essendo queste determinate da quantità integrate nel tempo (e.g., tasso d'erosione delle sponde, dinamica della vegetazione). In altri casi, la durata di un evento di piena viene calcolata sulla base del tempo di corrivazione del bacino idrografico, a sua volta determinato tramite relazioni empiriche dipendenti dalla geometria della rete idrografica del bacino stesso (e.g., classificazione di Horton-Strahler).

In questo lavoro, proponiamo una prima rotta di soluzione al problema della durata media di un idrogramma di piena, prendendo in considerazione il modello stocastico del Compound Poisson Process (figura 1), largamente utilizzato nella letteratura per trattare matematicamente il regime idrologico delle portate di un fiume (Botter *et al.*, 2007; Ridolfi *et al.*, 2011). Per questa tipologia di processi stocastici, è possibile definire il tempo medio di passaggio (noto in letteratura come Mean First Passage Times, MFPT) che le infinite possibili traiettorie del processo impiegano per raggiungere una certa soglia (Laio *et al.*, 2001). Recentemente, il concetto è stato ampliato alla presenza di più di una soglia (Calvani & Perona, 2023), ed alcune formulazioni sono state derivate per il passaggio da una soglia all'altra, caso rilevante in particolare per i processi erosivi. In questo lavoro viene presentata l'applicazione di queste relazioni per varie combinazioni dei due valori della

soglia inferiore (portata minima) e della soglia superiore (portata di picco). I risultati dimostrano che le equazioni ben approssimano i tempi di salita (durata della fase ascendente della piena) e i tempi di discesa (durata della fase discendente della piena), permettendo una più precisa quantificazione della durata dell'intero idrogramma di piena.



**Figura 1.** Confronto tra le portate misurate sul fiume Thur presso la stazione di Andelfingen in Svizzera (pannello a) e il corrispondente segnale generato con il processo CPP (pannello b).

## 2 METODI

L'idrogramma  $Q(t)$  di un evento di piena si definisce tra due valori di portata: una portata minima iniziale,  $Q_l$ , il cui valore può essere determinato sulla base di considerazioni ecologiche (e.g., il deflusso minimo vitale) e un valore portata di picco,  $Q_p$ , eventualmente calcolato tramite il concetto di tempo di ritorno (e.g., *Gräler et al., 2013; Calvani et al., 2019b*). In questa analisi, consideriamo il modello stocastico del Compound Poisson Process (*Botter et al., 2007; Ridolfi et al., 2011; Calvani et al., 2019b*). In questo processo, l'arrivo di eventi di piena è modellato tramite salti istantanei di occorrenza e grandezza casuale (i cui valori sono estratti da distribuzioni esponenziali con media  $1/\lambda$  e  $1/\gamma$ , rispettivamente). Le fasi discendenti degli eventi sono modellate tramite funzioni esponenziali negative, caratterizzate dal parametro  $\beta$ .

Per questa tipologia di processo stocastico, qualora siano noti i due valori soglia per le portate (nel caso in esame rappresentate da  $Q_l$  e  $Q_p$ ) ed un valore iniziale  $q_0$ , è possibile calcolare il tempo medio necessario ad arrivare ad una delle due soglie, indipendentemente dal numero di volte che viene attraversata l'altra soglia (*Laio et al., 2001*). Recentemente, *Calvani & Perona (2023)* hanno derivato una formulazione per il calcolo del tempo medio,  $T_k(q_0)$ , delle possibili traiettorie che iniziano in  $q_0$  posto all'interno dell'intervallo  $Q_l$ - $Q_p$ , raggiungono la soglia  $Q_k$ , ma non attraversano l'altra soglia. Il tempo  $T_k(q)$  viene calcolato a partire dalla soluzione dell'equazione differenziale

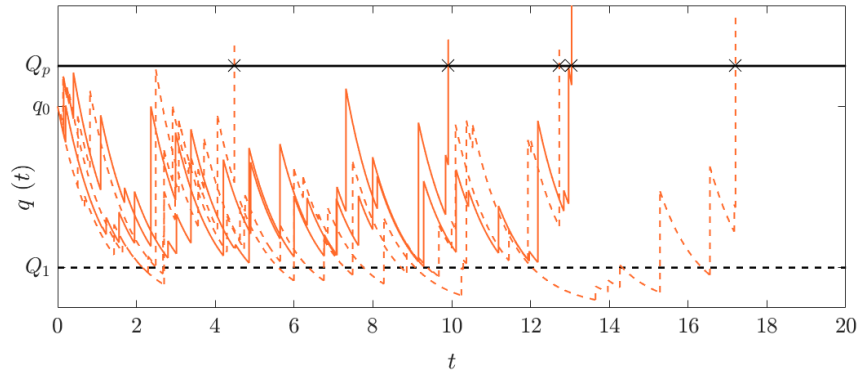
$$\frac{d^2 T_k(q_0)}{dq_0^2} + \left( \frac{\beta + \lambda}{\beta q_0} - \gamma \right) \frac{dT_k(q_0)}{dq_0} = -\frac{\gamma}{\beta q_0} + \frac{1}{\beta q_0} \frac{d \hat{\pi}_k(s, q_0)}{dq_0} \Big|_{s=0} \quad (1)$$

dove  $\beta$ ,  $\lambda$ , e  $\gamma$ , sono i parametri del CPP e il termine  $\hat{\pi}_k(s, q_0)$  rappresenta la trasformata di Laplace (indicata dal simbolo  $\hat{\cdot}$  e dal dominio in frequenza nella variabile complessa  $s$ ) della *splitting probability*, cioè la funzione che definisce la probabilità con cui, partendo da  $q_0$ , il processo raggiunge la soglia  $Q_k$ , senza aver toccato l'altra soglia. La funzione  $\hat{\pi}_k(s, q_0)$  può essere calcolata come soluzione dell'equazione differenziale (*Calvani & Perona, 2023*):

$$\frac{\partial^2 \hat{\pi}_k(s, q_0)}{\partial q_0^2} + \left( \frac{\beta + \lambda + s}{\beta q_0} - \gamma \right) \frac{\partial \hat{\pi}_k(s, q_0)}{\partial q_0} - \frac{s \gamma}{\beta q_0} \hat{\pi}_k(s, q_0) = 0 \quad (2)$$

Un esempio di questo processo è riportato in figura 2, la quale illustra alcune traiettorie che partendo da  $q_0$  attraversano e raggiungono la soglia  $Q_p$  ad istanti di tempo differenti, a causa della stocasticità del processo stesso. Alcune di queste traiettorie attraversano una o più volte l'altra soglia di riferimento, cioè  $Q_l$  (vedasi le traiettorie con linea tratteggiata in figura 2). Altre traiettorie, invece, non attraversano la soglia  $Q_l$  prima di raggiungere la soglia  $Q_p$  (curve con linea continua in figura 2). Le equazioni (1) e (2), ed in particolare la

funzione *splitting probability*,  $\hat{\pi}_k(s, q_0)$ , tengono in considerazione solo queste ultime. Un approccio più generale che tiene in considerazione tutte le possibili traiettorie è proposto da *Laio et al., 2001*.



**Figura 2.** Alcune possibili traiettorie stocastiche che partono da  $q_0$  e raggiungono la soglia  $Q_p$ . Le traiettorie tratteggiate sono quelle che passano anche attraverso la soglia  $Q_1$  e non vengono conteggiate nell'analisi proposte.

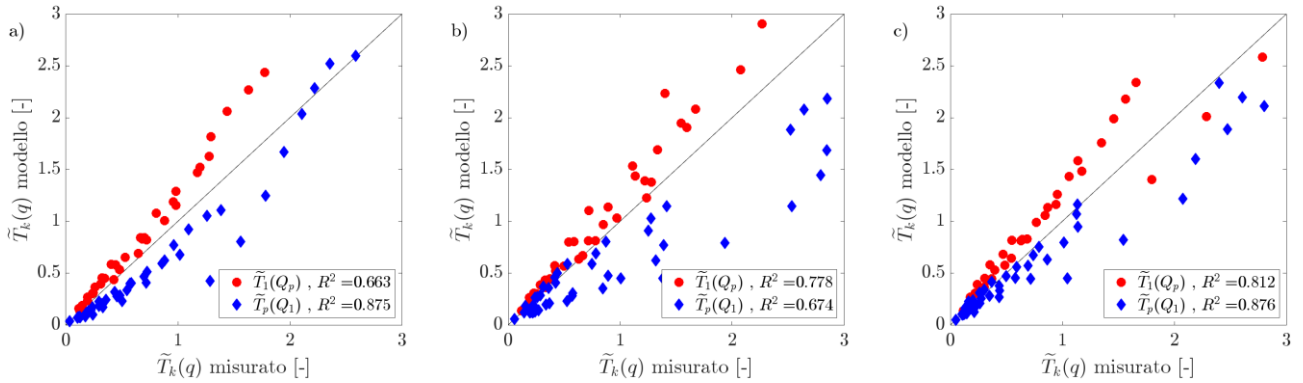
La formulazione matematica del problema, la derivazione delle equazioni (1) e (2) e l'analisi delle traiettorie stocastiche sono argomenti che esulano dalla trattazione di questa memoria e per cui si rimanda il lettore al lavoro citato (*Calvani & Perona, 2023*). È interessante comunque notare che, per la natura del CPP, il tempo medio di discesa da  $Q_p$  a  $Q_1$  può essere trovato come soluzione,  $T_1(Q_p)$ , dell'eq. (1). Il tempo medio di salita dev'essere invece calcolato come valore integrato della soluzione  $T_p(q_0)$ , tramite la relazione

$$T_p(Q_1) = \left(\frac{Q_1}{\gamma}\right)^{\lambda/\beta} \frac{\gamma^{-1}}{\Gamma[\lambda/\beta+1]} \int_{Q_1}^{Q_p} e^{-q/\gamma} T_{Q_p}(q) dq \quad (3)$$

dove  $\Gamma[\cdot]$  rappresenta la funzione Gamma. La somma  $T_1(Q_p) + T_p(Q_1)$  risulta quindi uguale alla durata totale dell'idrogramma medio compreso fra le portate  $Q_1$  e  $Q_p$ . Quest'ultimo risultato deriva dal fatto che l'attraversamento della soglia superiore a partire da sopra la soglia viene effettuato durante una fase discendente, continua della traiettoria stessa. L'attraversamento della soglia inferiore partendo da sotto la soglia stessa viene invece effettuato con un salto istantaneo.

### 3 RISULTATI PRELIMINARI

Le durate della fase ascendente e della fase discendente dell'idrogramma calcolate tramite le eq. (1) e (3) sono state confrontate con i dati misurati per alcuni corsi fluviali estratti dal dataset di *Calvani et al. (2020)*, considerando anche valori diversi della portata minima,  $Q_1$ , e della portata di picco,  $Q_p$ . Il confronto è presentato sulla base dei valori adimensionali (indicati dal simbolo  $\sim$ ), usando la scala temporale  $\beta^{-1}$  del CPP (ad esempio,  $\tilde{T}_k(q) = \beta T_k(q)$ ). Il confronto mostra che entrambe le formulazioni per  $T_p(Q_1)$  e  $T_1(Q_p)$  possono ben approssimare le misure calcolate da dati di letteratura con coefficienti di correlazione che, per i casi riportati, variano da un minimo di 0.66 ad un massimo di 0.88. Dal confronto appare, inoltre, come la formulazione per il tempo di salita (eq. (3), punti blu in figura 3) tenda sistematicamente a sottostimare il tempo di salita misurato. Viceversa, la formulazione per il tempo di discesa (punti rossi in figura 3) appare sottostimare la corrispondente durata misurata dai dati. Va tuttavia messo in luce che i dati misurati si riferiscono ad un periodo, seppur lungo, ma limitato e potrebbero non includere, quindi, un numero rappresentativo di eventi, in particolar modo quando, ad esempio, si prendono in considerazione valori della soglia di picco molto elevati. Si deve inoltre tenere presente che il confronto è influenzato dalla risoluzione temporale dei dati misurati, specialmente, come in questo caso, che i dati si riferiscono a medie giornaliere di portata. In questo caso, è molto probabile che ciò possa mascherare la presenza di contributi aggiuntivi nel segnale a scale temporali più piccole, alterando quindi l'istante di tempo in cui viene raggiunta la soglia in esame.



**Figura 3.** Il confronto tra le durate adimensionali della fase ascendente (punti blu) e della fase discendente (punti rossi) calcolate e misurate per differenti corsi d'acqua. a) Colorado River; b) Rio Grande; c) Yellowstone River.

## 4 CONCLUSIONI

L'impiego di relazioni matematiche derivate recentemente dagli autori per il calcolo del tempo medio di passaggio tra due soglie fornisce risultati promettenti quando applicate al calcolo delle durate medie delle fasi ascendenti e discendenti di un evento di piena. Il confronto con misure derivate da dati di letteratura rileva, tuttavia, l'importanza della risoluzione temporale con cui le misure sono state effettuate, in modo da calibrare in maniera ottimale i parametri del processo CPP. È inoltre necessaria la disponibilità di serie temporali molto lunghe per permettere il confronto dei valori di durata calcolati con un valore medio estratto dai dati che sia il più rappresentativo possibile di tutti gli eventi misurati.

## RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

- Botter, G., Porporato, A., Daly, E., Rodríguez-Iturbe, I., & Rinaldo, A. Probabilistic characterization of base flows in river basins: Roles of soil, vegetation, and geomorphology. *Water Resources Research* 43(6): 1–17, 2007
- Brunner, M. I., Viviroli, D., Sikorska, A. E., Vannier, O., Favre, A.-C., & Seibert, J. Flood type specific construction of synthetic design hydrographs. *Water Resources Research* 53(2): 1390–1406, 2017.
- Calvani, G., Francalanci, S., & Solari, L. A physical model for the uprooting of flexible vegetation on river bars. *Journal of Geophysical Research: Earth Surface* 124(4): 1018–1034, 2019a.
- Calvani, G., Perona, P., Zen, S., & Solari, L. Return period of vegetation uprooting by flow. *Journal of Hydrology* 578: 124103, 2019b.
- Calvani, G., Perona, P., Schick, C., & Solari, L. Biomorphological scaling laws from convectively accelerated streams. *Earth Surface Processes and Landforms* 45(3): 723–735, 2020.
- Calvani, G. & Perona, P. Splitting probabilities and mean first-passage times across multiple thresholds of jump-and-drift transition paths. *Physical Review E* 108(4): 044105, 2023.
- Crouzy, B., Edmaier, K., Pasquale, N., & Perona, P. Impact of floods on the statistical distribution of riverbed vegetation. *Geomorphology* 202: 51–58, 2013.
- Gräler, B., van den Berg, M. J., Vandenbergh, S., Petroselli, A., Grimaldi, S., De Baets, B., & Verhoest, N. Multivariate return periods in hydrology: a critical and practical review focusing on synthetic design hydrograph estimation. *Hydrology and Earth System Sciences* 17(4): 1281–1296, 2013.
- Gupta, V. K., Waymire, E., & Wang, C. A representation of an instantaneous unit hydrograph from geomorphology. *Water Resources Research* 16(5): 855–862, 1980.
- Laio, F., Porporato, A., Ridolfi, L. I. R. I., & Rodríguez-Iturbe, I. Mean first passage times of processes driven by white shot noise. *Physical Review E*, 63(3), 036105, (2001).
- Muneepeerakul, R., Rinaldo, A., & Rodríguez-Iturbe, I. Effects of river flow scaling properties on riparian width and vegetation biomass. *Water Resources Research* 43(12): 1–8, 2007.
- Ridolfi, L., D'Odorico, P., & Laio, F. Noise-induced phenomena in the environmental sciences. Cambridge University Press, 2011.
- Rodríguez-Iturbe, I. & Valde s, J. B. The geomorphologic structure of hydrologic response. *Water Resources Research* 15(6): 1409–1420, 1979.