INCLUSIONS DIFFÉRENTIELLES ET PROBLÈMES VARIATIONNELS

THÈSE N^{O} 3583 (2006)

PRÉSENTÉE LE 14 JUILLET 2006

À LA FACULTÉ SCIENCES DE BASE

Chaire d'analyse mathématique et applications

SECTION MATHÉMATIQUES

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

POUR L'OBTENTION DU GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES

PAR

Ana Margarida FERNANDES RIBEIRO

Mestre em Matemática, Universidade de Lisboa, Lisbonne, Portugal
de nationalité portugaise

acceptée sur proposition du jury:

Prof. T. Mountford, président du jury
Prof. B. Dacorogna, directeur de thèse
Dr P. Metzener, rapporteur
Prof. M. Chipot, rapporteur
Prof. P. Marcellini, rapporteur

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Lausanne, EPFL
2006

Aos meus avós

avó Noémia, avô Costa, avô Vasco

à tia Inácia

Remerciements

Une fois arrivée la fin de ce travail je tiens à remercier à tous ceux qui directe ou indirectement ont contribué à sa réalisation.

Je remercie le Prof. Bernard Dacorogna pour m'avoir donné le privilège de travailler sous sa direction, pour sa présence constante et pour tout son aide, sans laquelle il n'aurait été possible d'accomplir ce projet. Je lui suis très reconnaissante d'avoir partagé lors de ces dernières années ses connaissances, son experience et sa façon de faire de la recherche. Travailler avec Prof. Dacorogna a été pour moi très enrichissant et son enthousiasme pour les mathématiques m'a toujours motivé à poursuivre mon travail et à surmonter mes difficultés.

Je remercie les Professeurs P. Metzener, M. Chipot et P. Marcellini pour avoir accepté d'être membres du jury et le Prof. T. Mountford pour l'avoir présidé. Je suis obligé aux Professeurs P. Metzener et M. Chipot pour l'amélioration du niveau de français de ma thèse.

J'exprime aussi ma gratitude aux Professeurs L. Mascarenhas et L. Trabucho qui se sont toujours intéressés à mon avenir et qui m'ont mis en contact avec mon directeur de thèse.

Je remercie la *Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Lisboa* pour m'avoir donné la possibilité de faire mes études de doctorat à l'étranger et l'EPFL pour les excellentes conditions de travail qui m'a procuré.

Mes remerciements vont également à tous les collègues qui sont passé par la *Chaire d'Analyse Mathématique et Applications* dont j'ai bénéficié des discussions fructueuses. Je remercie en particulier Gisella Croce et Giovanni Pisante pour la façon chaleureuse comme ils m'ont accueilli.

Je remercie toute ma famille et amis qui de près ou de loin ont montré leur présence et soutient. Merci à Filipa Caetano, mon amie, pour être si proche en étant si loin.

Finalement, j'exprime toute ma gratitude à mes parents et à Nuno, mon frère, pour la confiance que déposent sur moi, pour l'intérêt sur tout ce qui m'interesse et pour tout leur amour. Je remercie Ana, ma belle-soeur, pour partager pleinement ces mêmes sentiments. L'union que j'ai toujours trouvé chez eux a été fondamental pour réaliser mon travail en tranquillité.

Je dédie ce travail à la mémoire de mes grands-parents qui ont vécu dans un monde assez éloigné du monde de la recherche, mais dont l'esprit m'accompagne quotidiennement.

Mon travail de recherche a été partiellement financé par la *Fundação para a Ciência e Tecnologia* (BD/10042/2002).

Ana Ribeiro

Lausanne, le 14 juillet 2006

Résumé

Dans cette thèse on dédie notre attention à trois questions différentes qui sont toutefois reliées entre elles. La première (cf. Chapitre 2) est celle de faire un étude systématique des notions de convexité au sens généralisé pour les ensembles. On a étudié les notions d'ensemble polyconvexe, quasiconvexe et rang un convexe. On note que ces notions sont aujourd'hui bien connues dans le contexte des fonctions, mais pas dans le contexte des ensembles. On suit l'approche classique. Ainsi, après avoir donné des définitions précises de convexité généralisée pour les ensembles, on étudie, dans ce sens généralisé, des questions comme le concept d'enveloppe convexe, des théorèmes de Carathéodory et de séparation et les notions de point extrême.

Dans une deuxième partie de ce travail on tourne notre attention vers la résolution de certaines inclusions différentielles de la forme

$$\begin{cases} Du(x) \in E, \ p.p. \ x \in \Omega \\ u = \varphi, \ \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

La méthode utilisée est la méthode des catégories de Baire développée par Dacorogna-Marcellini [14]. Les conditions suffisantes d'existence connues pour ce type de problèmes sont liées aux enveloppes convexes au sens généralisé de l'ensemble E. Ainsi, dans le Chapitre 3, on calcule l'enveloppe rang un convexe de certains ensembles de matrices pour obtenir, dans le Chapitre 4, des résultats d'existence de solution. On a considéré, entre autres, le problème de trouver $u : \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^N$ tel que

$$\Phi(Du(x)) \in \{\alpha, \beta\}, \ p.p. \ x \in \Omega,$$

où Φ est une fonction quasiaffine quelconque et où l'on prescrit la valeur de u sur $\partial\Omega$. On a aussi considéré le problème de trouver $u : \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tel que

$$\begin{cases} \det(Du(x)) \in \{\alpha, \beta\}, \ p.p. \ x \in \Omega, \\ \lambda_i(Du(x)) = \gamma_i, \ p.p. \ x \in \Omega, \ i = 2, ..., n, \end{cases}$$

où $\lambda_1(Du) \leq ... \leq \lambda_n(Du)$ désignent les valeurs singulières de $Du \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

Finalement, dans le Chapitre 5, on considère plusieurs problèmes de minimisation de la forme

$$(P) \qquad \inf \left\{ \int_\Omega f(Du(x))\, dx : \ u \in \varphi + W_0^{1,\infty}(\Omega; \mathbb{R}^N) \right\}.$$

En dénotant par Qf l'enveloppe quasiconvexe de f, on vérifie que la résolution de l'équation

$$Qf(Du(x)) = f(Du(x)), \ p.p. \ x \in \Omega \tag{1}$$

est, dans certaines conditions, suffisante pour assurer l'existence de solution de (P). La résolution des inclusions différentielles considérées dans le Chapitre 4 nous permet alors de résoudre certaines équations de la forme (1) et d'ailleurs des problèmes de la forme (P). On a considéré notamment le cas où

$$f(\xi) = g(\Phi(\xi)), \ \forall \ \xi \in \mathbb{R}^{N\times n}$$

où Φ est une fonction quasiaffine arbitraire.

Mots-clés : Ensemble quasiconvexe et rang un convexe, enveloppe rang un convexe, inclusions différentielles, méthode des catégories de Baire, problèmes de minimisation.

Abstract

In this thesis we deal with three different but connected questions. Firstly (cf. Chapter 2) we make a systematic study of the generalized notions of convexity for sets. We study the notions of polyconvex, quasiconvex and rank one convex set. We remark that these notions are nowadays well known in the context of functions, but not in the context of sets. Following the classical approach, we give precise definitions of generalized convex sets and we study several issues, in this generalized sense, as the concept of convex hull, Carathéodory and separation theorems and the notion of extremal point.

Secondly we have studied some differential inclusions of the form

$$\begin{cases} Du(x) \in E, \ a.e. \ x \in \Omega \\ u = \varphi, \ \text{on } \partial\Omega. \end{cases}$$

The method we have used to solve this kind of problems is the Baire categories method developed by Dacorogna-Marcellini [14]. Known sufficient conditions for this problem are connected to the generalized convex hull of the set E. In Chapter 3, we compute the rank one convex hull of some matrix sets to obtain, in Chapter 4, existence results. Namely, we have considered the problem of finding $u : \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^N$ with Dirichlet boundary condition such that

$$\Phi(Du(x)) \in \{\alpha, \beta\}, \ a.e. \ x \in \Omega,$$

Φ being an arbitrary quasiaffine function. We have also considered the problem of finding $u : \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ such that

$$\begin{cases} \det(Du(x)) \in \{\alpha, \beta\}, \ a.e. \ x \in \Omega, \\ \lambda_i(Du(x)) = \gamma_i, \ a.e. \ x \in \Omega, \ i = 2, ..., n, \end{cases}$$

where $\lambda_1(Du) \leq ... \leq \lambda_n(Du)$ are the singular values of $Du \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Finally, in Chapter 5, we deal with several minimizing problems of the form

$$(P) \qquad \inf \left\{ \int_\Omega f(Du(x))\, dx : \ u \in \varphi + W_0^{1,\infty}(\Omega; \mathbb{R}^N) \right\}.$$

Denoting by Qf the quasiconvex envelope of f, we verify that solving the equation

$$Qf(Du(x)) = f(Du(x)), \ a.e. \ x \in \Omega \tag{2}$$

is, under some conditions, sufficient to ensure the existence of solution of (P). The differential inclusions that we consider in Chapter 4 are helpful to solve some equations of the form (2) and thus, it allows us to solve problems of type (P). In particular, we have considered the problem (P) with

$$f(\xi) = g(\Phi(\xi)), \ \forall \ \xi \in \mathbb{R}^{N \times n}$$

Φ being an arbitrary quasiaffine function.

Key-words : Quasiconvex and rank one convex set, rank one convex hull, differential inclusions, Baire categories method, minimizing problems.

Notations

$\langle \cdot ; \cdot \rangle$	Le produit scalaire dans un espace $\mathbb{R}^m$.
$N \wedge n$	Pour $N, n \in \mathbb{N}$, $N \wedge n = \min\{N, n\}$.
$T(\xi)$	Si $\xi \in \mathbb{R}^{N\times n}$, $T(\xi) = (\xi, \mathrm{adj}_2\xi, \ldots, \mathrm{adj}_{N\wedge n}\xi)$, cf. Notation 2.1.
Λ_s	$\Lambda_s = \{\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_s) : \ \lambda_i \geq 0, \ \sum_{i=1}^{s} \lambda_i = 1\}$, cf. Notation 2.1.
$a \otimes b$	Pour $a \in \mathbb{R}^N$ et $b \in \mathbb{R}^n$ on dénote $a \otimes b$ la matrice de $\mathbb{R}^{N\times n}$ dont la composante (i, j) a la valeur $a_i b_j$.
$\lambda_i(\xi)$	Les valeurs singulières d'une matrice $\xi \in \mathbb{R}^{N\times n}$ sont notées par $\lambda_i(\xi)$, $i = 1, ..., N \wedge n$ avec $0 \leq \lambda_1(\xi) \leq \cdots \leq \lambda_{N\wedge n}(\xi)$, cf. Définition 3.17.
$O(n)$	Ensemble des matrices réelles orthogonales d'ordre n ($P \in O(n) \Leftrightarrow PP^T = P^T P = I$).
$SO(n)$	Ensemble des matrices réelles spéciales orthogonales d'ordre n ($P \in SO(n) \Leftrightarrow P \in O(n), \ \det P = 1$).
$\mathrm{co}\, E$	Enveloppe convexe de $E \subset \mathbb{R}^m$.
$\mathrm{Pco}\, E$	Enveloppe polyconvexe de $E \subset \mathbb{R}^{N\times n}$, cf. Définition 2.21.
$\mathrm{Qco}\, E$	Enveloppe quasiconvexe de $E \subset \mathbb{R}^{N\times n}$, cf. Définition 2.21.
$\mathrm{Rco}\, E$	Enveloppe rang un convexe de $E \subset \mathbb{R}^{N\times n}$, cf. Définition 2.21.
$\mathrm{R}_i\mathrm{co}E$	On a $\mathrm{Rco}\, E = \cup_{i\in\mathbb{N}} \mathrm{R}_i\mathrm{co}E$, cf. notations du Théorème 2.27.
$\mathrm{int}\, Y$, ∂Y	On note par $\mathrm{int}\, Y$ et ∂Y respectivement l'intérieur et le bord de Y. On remarque que parfois ces notions doivent être interprétées comme l'intérieur et le bord de Y pour la topologie induite par un ensemble qui le contient et qui est mentionné toutes les fois que cette notation est utilisée dans ce sens.
$W_0^{1,\infty}(\Omega)$	Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Si Ω est borné $W_0^{1,\infty}(\Omega) = W^{1,\infty}(\Omega) \cap W_0^{1,1}(\Omega)$. Dans le cas où Ω n'est pas borné $u \in W_0^{1,\infty}(\Omega)$ veut dire que $u\psi \in W_0^{1,\infty}(\Omega \cap \mathrm{int\,supp}\, \psi)$, pour tout $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. On note que $\Omega \cap \mathrm{int\,supp}\, \psi$ est borné et donc on revient au premier cas pour cette définition.
$\mathrm{Aff}_{mor}(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^N)$	Une application $u \in \mathrm{Aff}_{mor}(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^N)$ si $u \in W^{1,\infty}(\Omega; \mathbb{R}^N)$ et, pour certains ouverts disjoints Ω_k de Ω avec $\mathrm{mes}(\Omega \setminus \cup_{k\in\mathbb{N}}\Omega_k) = 0$, l'application u est affine dans Ω_k.

$\mathrm{C}^1_{mor}(\overline{\Omega};\mathbb{R}^N)$	Une application $u \in \mathrm{C}^1_{mor}(\overline{\Omega};\mathbb{R}^N)$ si $u \in W^{1,\infty}(\Omega;\mathbb{R}^N)$ et, pour certains ouverts disjoints Ω_k de Ω avec $\mathrm{mes}(\Omega \setminus \cup_{k\in\mathbb{N}}\Omega_k) = 0$, l'application u est C^1 dans Ω_k.
C	L'hypercube $]0,1[^n$ de $\mathbb{R}^n$.
$W^{1,\infty}_{per}(C;\mathbb{R}^N)$	L'espace des applications périodiques dans $W^{1,\infty}(C;\mathbb{R}^N)$, c'est-à-dire l'espace des applications u satisfaisant $u(x) = u(x+e_i)$ pour tous les vecteurs e_i de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.
$\mathcal{W}_{per}$	Le sous-espace de $W^{1,\infty}_{per}(C;\mathbb{R}^N)$ des applications dont les gradients prennent un nombre fini de valeurs.
$\mathrm{Diff}^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$	Si Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, $0 \le \alpha \le 1$ on note par $\mathrm{Diff}^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ l'espace des difféomorphismes $\varphi : \overline{\Omega} \longrightarrow \overline{\Omega}$ tels que $\varphi,\ \varphi^{-1} \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega};\mathbb{R}^n)$.
u_{ξ_0}	Pour $\xi_0 \in \mathbb{R}^{N\times n}$, u_{ξ_0} dénote une application affine telle que $Du_{\xi_0} = \xi_0$.

Table des matières

Chapitre 1

Introduction

Le sujet principal de cette thèse est l'étude de quelques inclusions différentielles et ses applications aux problèmes de minimisation du calcul des variations. Les problèmes considérés sont des problèmes vectoriels et donc la convexité au sens généralisé (polyconvexité, quasiconvexité et rang un convexité) est un concept important dans notre travail.

Les notions de fonction polyconvexe, fonction quasiconvexe et fonction rang un convexe ont été introduites en 1952 par Morrey et c'est plus récemment que les notions analogues pour les ensembles ont manifesté leur importance. En effet, ce sont les développements dans l'étude des inclusions différentielles obtenus par Dacorogna-Marcellini et Müller-Šverák dans les années '90 qui ont révélé l'importance de ces notions. De plus, vu le contexte dans lequel la convexité au sens généralisé pour les ensembles est apparue, on trouve parfois un manque de cohérence par rapport aux concepts de la convexité classique. On juge donc importante une systématisation des résultats concernant la convexité pour les ensembles ce qui a été notre propos dans le Chapitre 2. Le contenu de ce chapitre est le résultat d'un travail avec B. Dacorogna publié dans [19].

On commence par l'introduction des notions d'ensemble polyconvexe, ensemble quasiconvexe et ensemble rang un convexe. Ceci a déjà été fait dans les cas polyconvexe et rang un convexe par Dacorogna-Marcellini [14]. Pour la quasiconvexité c'est beaucoup plus difficile de trouver la bonne définition. Néanmoins, on a réussi à établir une définition d'ensemble quasiconvexe (cf. Définition 2.8) qui a des caractéristiques importantes qu'on souhaite pour une telle définition. En fait, on obtient le résultat suivant qui montre que nos notions de convexité pour les ensembles sont cohérentes avec celles pour les fonctions.

Théorème 1.1. *Soit $E \subset \mathbb{R}^{N\times n}$. On a les implications*

$$E \textit{ convexe } \Rightarrow E \textit{ polyconvexe } \Rightarrow E \textit{ quasiconvexe} \Rightarrow E \textit{ rang un convexe.}$$

Toutes les contre-implications sont fausses, pour $N, n \geq 2$.

Ce résultat n'est pas trivial et pour le démontrer il faut faire appel à l'existence de solution pour certaines inclusions différentielles. De plus, ce résultat est même meilleur que celui qu'on connaît pour les fonctions, puisqu'on ne sait pas si, pour $f : \mathbb{R}^{N\times n} \longrightarrow \mathbb{R}$, lorsque $n \geq N = 2$,

$$f \text{ rang un convexe } \Rightarrow f \text{ quasiconvexe.}$$

Une fois introduites ces notions de convexité, on définit, comme dans le cas classique, l'enveloppe polyconvexe, quasiconvexe et rang un convexe d'un ensemble E respectivement comme le plus petit ensemble polyconvexe, quasiconvexe et rang un convexe qui contient E et qu'on dénote respectivement par $\operatorname{Pco} E, \operatorname{Qco} E$ et $\operatorname{Rco} E$.

Notre façon de définir les enveloppes, même en étant la plus cohérente avec le cas classique, est nouvelle par rapport à ce qu'on trouve dans la littérature. Ceci est dû au fait que le concept d'enveloppe a mérité jusqu'à présent plus d'attention que les notions de convexité en elles mêmes.

Avec notre définition, l'enveloppe quasiconvexe qu'on obtient est différente des enveloppes considérées jusqu'à maintenant. Par contre, en ce qui concerne $\operatorname{Pco} E$ et $\operatorname{Rco} E$, on retrouve des ensembles déjà utilisés. En effet, on a les caractérisations suivantes :

$$\operatorname{Pco} E = \left\{ \xi \in \mathbb{R}^{N\times n} : f(\xi) \leq 0, \text{ pour toute fonction polyconvexe } f \in \overline{\mathcal{F}}_E \right\}$$
$$\operatorname{Rco} E = \left\{ \xi \in \mathbb{R}^{N\times n} : f(\xi) \leq 0, \text{ pour toute fonction rang un convexe } f \in \overline{\mathcal{F}}_E \right\}$$

où
$$\overline{\mathcal{F}}_E = \left\{ f : \mathbb{R}^{N\times n} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\} : f|_E \leq 0 \right\}.$$

On note qu'une caractérisation analogue dans le cas quasiconvexe n'est pas possible vu qu'on n'a pas une bonne définition de fonction quasiconvexe à valeurs dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Si on considère les fonctions f à valeurs finies on obtient un autre type d'enveloppes, évidemment plus grandes que les précédentes et qui sont souvent utilisées dans la littérature (cf. Müller-Šverák [31], Šverák [39], Zhang [43]). Soit
$$\mathcal{F}_E = \left\{ f : \mathbb{R}^{N\times n} \to \mathbb{R} : f|_E \leq 0 \right\},$$
on définit
$$\operatorname{co}_f E = \left\{ \xi \in \mathbb{R}^{N\times n} : f(\xi) \leq 0, \text{ pour toute fonction convexe } f \in \mathcal{F}_E \right\}$$
$$\operatorname{Pco}_f E = \left\{ \xi \in \mathbb{R}^{N\times n} : f(\xi) \leq 0, \text{ pour toute fonction polyconvexe } f \in \mathcal{F}_E \right\}$$
$$\operatorname{Qco}_f E = \left\{ \xi \in \mathbb{R}^{N\times n} : f(\xi) \leq 0, \text{ pour toute fonction quasiconvexe } f \in \mathcal{F}_E \right\}$$
$$\operatorname{Rco}_f E = \left\{ \xi \in \mathbb{R}^{N\times n} : f(\xi) \leq 0, \text{ pour toute fonction rang un convexe } f \in \mathcal{F}_E \right\}.$$
Comme, par définition, les fonctions dans $\mathcal{F}_E$ sont finies, les enveloppes qu'on vient de définir sont des ensembles fermés. De plus, dans le cas convexe on a $\overline{\operatorname{co} E} = \operatorname{co}_f E$, où $\operatorname{co} E$ désigne l'enveloppe convexe de E. On pouvait penser obtenir des identités analogues pour les autres enveloppes, mais on trouve qu'en général

$$\overline{\operatorname{Pco} E} \subsetneqq \operatorname{Pco}_f E, \ \overline{\operatorname{Qco} E} \subsetneqq \operatorname{Qco}_f E \ \text{ et } \ \overline{\operatorname{Rco} E} \subsetneqq \operatorname{Rco}_f E.$$

Dans le cas où E est compact
$$\overline{\operatorname{Pco} E} = \operatorname{Pco}_f E.$$

Encore dans le but d'avoir une théorie pour la convexité au sens généralisé au plus proche de la théorie de convexité classique, on considère aussi dans le Chapitre 2, d'autres questions habituelles en convexité. Dans le cas polyconvexe, qui est celui qui s'approche le plus du cas convexe, on a réussi à établir des résultats de séparation et du type du théorème de Carathéodory (ce dernier avait déjà été considéré dans Dacorogna-Marcellini [14]). On considère aussi pour les différentes notions de convexité les notions de point extrême, des résultats qui généralisent le théorème de Minkowski ainsi que des généralisations de la fonction de Choquet (ces sujets avaient déjà été abordés par Dacorogna-Tanteri [20], Matoušek-Plecháč [28], Zhang [42]).

On s'intéresse ensuite à la résolution de quelques inclusions différentielles de la forme

$$\begin{cases} Du(x) \in E, \ p.p. \ x \in \Omega \\ u = \varphi, \ \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{1.1}$$

où $E \subset \mathbb{R}^{N\times n}$ est un ensemble donné et φ est la donnée au bord. Les inclusions qu'on a considérées se traduisent par des équations aux dérivées partielles de type implicite et on applique une méthode due à Dacorogna-Marcellini basée sur le théorème des catégories de Baire.

Dans le cas scalaire ($N = 1$) on sait qu'une condition suffisante pour l'existence de solution de (1.1) est
$$D\varphi \in E \cup \operatorname{int}(\operatorname{co} E). \tag{1.2}$$

De plus, la condition (1.2) est une condition optimale si φ est affine. Dans le cas vectoriel, jusqu'à présent on ne connaît pas une condition aussi simple que celle ci. Néanmoins, les approches connues pour traiter ce type de problèmes montrent que c'est l'enveloppe convexe de E au sens généralisé qui joue le rôle important. Une condition optimale doit être liée à l'enveloppe quasiconvexe. On note que, si φ est affine, une condition nécessaire pour l'existence de solution de (1.1) est que

$$D\varphi \in \operatorname{Qco}_f E.$$

Une question ouverte est celle de savoir si avec notre définition de quasiconvexité pour les ensembles l'analogue de la condition (1.2), avec $\operatorname{co} E$ remplacé par $\operatorname{Qco} E$, est une condition suffisante d'existence dans le cas vectoriel.

Dans les applications on se restreint à travailler avec $\operatorname{Rco} E$, l'enveloppe rang un convexe de E. Vu l'importance de cette enveloppe dans la résolution des inclusions différentielles, on consacre le Chapitre 3 de cette thèse au calcul de ce type d'enveloppes pour plusieurs ensembles de matrices qui seront importants dans les applications. Les inclusions différentielles sont alors traitées dans le Chapitre 4.

En particulier on considère l'ensemble

$$E = \left\{\xi \in \mathbb{R}^{n\times n} : \ \det \xi \in \{\alpha, \beta\}, \ \lambda_i(\xi) = \gamma_i, \ i = 2, ..., n\right\},$$

où $\lambda_1(\xi) \leq ... \leq \lambda_n(\xi)$ désignent les valeurs singulières de $\xi \in \mathbb{R}^{n\times n}$, c'est-à-dire les racines des valeurs propres de la matrice $\xi\xi^T$.

On trouve, pour des constantes données $\alpha \leq \beta$, $0 < \gamma_2 \leq ... \leq \gamma_n$ vérifiant

$$\gamma_2 \prod_{i=2}^{n} \gamma_i \geq \max\{|\alpha|, |\beta|\},$$

$$\operatorname{Rco} E = \left\{\xi \in \mathbb{R}^{n\times n} : \ \det \xi \in [\alpha, \beta], \ \prod_{i=\tau}^{n} \lambda_i(\xi) \leq \prod_{i=\tau}^{n} \gamma_i, \ \tau = 2, ..., n\right\}.$$

Les résultats abstraits d'existence pour les inclusions différentielles dus à Dacorogna-Marcellini [14], nous ont permis alors d'obtenir le théorème suivant.

Théorème 1.2. *Soient $n \geq 2$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné et des constantes $\alpha < \beta$, $0 < \gamma_2 \leq ... \leq \gamma_n$ vérifiant la condition*

$$\gamma_2 \prod_{i=2}^{n} \gamma_i > \max\{|\alpha|, |\beta|\}.$$

Soit encore $\varphi \in C^1_{mor}(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^n)$ tel que $D\varphi(x) \in \operatorname{int} \operatorname{Rco} E$, p.p. $x \in \Omega$.

Alors, il existe $u \in \varphi + W_0^{1,\infty}(\Omega; \mathbb{R}^n)$ tel que

$$\begin{cases} \det(Du(x)) \in \{\alpha, \beta\}, \ \text{p.p. } x \in \Omega, \\ \lambda_i(Du(x)) = \gamma_i, \ \text{p.p. } x \in \Omega, \ i = 2, ..., n. \end{cases}$$

Ce résultat étend des résultats de Dacorogna-Marcellini [14] et Dacorogna-Tanteri [20] où avaient été considérés respectivement le cas où $\alpha = -\beta$ et le cas $\alpha = \beta \neq 0$.

Si on est seulement intéressé à l'inclusion

$$\det(Du(x)) \in \{\alpha, \beta\},$$

(c'est-à-dire si on ne veut pas prescrire certaines valeurs singulières) alors on a démontré l'existence de solution pour un problème plus général où la fonction déterminant peut être remplacée par une fonction quasiaffine arbitraire (retrouvant en cela un résultat de Cellina-Zagatti [8] obtenu par d'autres méthodes).

Théorème 1.3. *Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, $\alpha < \beta$ des constantes, $\Phi : \mathbb{R}^{N\times n} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction quasiaffine non constante et $\varphi \in C^1_{mor}(\overline{\Omega};\mathbb{R}^N)$ une fonction telle que*

$$\Phi(D\varphi(x)) \in]\alpha,\beta[, \;\; p.p. \; x \in \Omega.$$

Alors il existe $u \in \varphi + W^{1,\infty}_0(\Omega;\mathbb{R}^N)$ tel que

$$\Phi(Du(x)) \in \{\alpha,\beta\}, \;\; p.p. \; x \in \Omega.$$

Dans ce travail on a aussi dédié notre attention aux problèmes de minimisation du calcul des variations dont la résolution est intimement liée à la résolution d'inclusions différentielles (cf. Chapitre 5). Les problèmes de minimisation qu'on a considéré ont la forme

$$(P) \qquad \inf\left\{\int_\Omega f(Du(x))\,dx : \;u \in u_{\xi_0} + W^{1,\infty}_0(\Omega;\mathbb{R}^N)\right\}$$

où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, $f : \mathbb{R}^{N\times n} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction non quasiconvexe donnée et u_{ξ_0} est l'application affine $\xi_0 x$ où $\xi_0 \in \mathbb{R}^{N\times n}$ est donné.

La méthode utilisée pour résoudre ce type de problèmes passe par la résolution de l'équation différentielle

$$f(Du(x)) = Qf(Du(x)), \;\; p.p. \; x \in \Omega, \tag{1.3}$$

où Qf désigne l'enveloppe quasiconvexe de f. En effet, la condition (1.3), qui est une condition nécessaire pour l'existence de solution de (P), devient une condition suffisante si

$$\int_\Omega Qf\left(Du\left(x\right)\right)\,dx = Qf\left(\xi_0\right)\,\mathrm{mes}\,\Omega. \tag{1.4}$$

Evidemment l'équation (1.3) peut être écrite sous la forme d'une inclusion différentielle :

$$Du(x) \in \{\xi \in \mathbb{R}^{N\times n} : \; f(\xi) = Qf(\xi)\}, \;\; p.p. \; x \in \Omega.$$

Cette méthode avait déjà été utilisée par Dacorogna-Marcellini [13]. Les développements récents au niveau des inclusions différentielles nous permettent maintenant de traiter d'autres problèmes de la forme (P) et d'établir des résultats d'existence généraux. En particulier, la résolution de l'inclusion différentielle

$$\Phi(Du(x)) \in \{\alpha,\beta\}, \;\; p.p. \; x \in \Omega,$$

considérée dans le Théorème 1.3, nous permet de traiter le problème

$$(P_1) \qquad \inf\left\{\int_\Omega g(\Phi(Du(x)))\,dx : \;u \in u_{\xi_0} + W^{1,\infty}_0(\Omega;\mathbb{R}^N)\right\}$$

où $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ et Φ est une fonction quasiaffine non constante. On a trouvé comme conditions suffisantes d'existence de solution pour (P_1) celles qu'on décrit ensuite.

Théorème 1.4. *Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné, $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ une fonction semi-continue inférieurement vérifiant*

$$\lim_{|t|\to+\infty} \frac{g(t)}{|t|} = +\infty.$$

Alors (P_1) a une solution.

Ce résultat avait déjà été obtenu, dans le cas où Φ est la fonction déterminant et la donné au bord est un homeomorphisme, par Mascolo-Schianchi [27] et dans le cas général par Cellina-Zagatti [8]. Cependant notre méthode est générale et le résultat précédent s'insère dans le cadre d'un théorème d'existence qu'on a établi pour des problèmes de la forme (P). Le résultat est le suivant. (Voir le Corollaire 5.3 pour une version plus générale.)

Théorème 1.5. *Soit* $f : \mathbb{R}^{N\times n} \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction non quasiconvexe et*

$$K = \{\xi \in \mathbb{R}^{N\times n} : \ Qf(\xi) < f(\xi)\}.$$

Supposons qu'il existe $K_0 \subset \mathbb{R}^{N\times n}$ *borné et* $H \subset \overline{K}_0 \cap K^c$ $(K^c = \mathbb{R}^{N\times n} \setminus K)$ *compact tels que*

- $\xi_0 \in K_0$,
- K_0 *a la propriété de relaxation par rapport à* H,
- Qf *est quasiaffine dans* $\overline{K}_0$.

Alors, le problème (P) *a une solution.*

On note que la propriété de relaxation mentionnée dans le théorème a été introduite par Dacorogna-Marcellini [14] et est la condition essentielle pour assurer l'existence de solution pour les inclusions différentielles. La vérification de cette condition est l'aspect le plus difficile lorsqu'on travaille avec des applications. Dans le cas du présent théorème, l'hypothèse concernant la propriété de relaxation permet d'assurer l'existence de solution de

$$Du \in H \subset K^c$$

qui entraîne d'ailleurs la vérification de la condition (1.3). La condition (1.4) est assurée par l'hypothèse de quasiaffinité de Qf.

Un autre problème déjà considéré par Dacorogna-Marcellini [13] est le problème de minimisation de l'énergie de Saint Venant-Kirchhoff, c'est-à-dire le problème (P) avec

$$f(\xi) = \left|\xi\xi^T - I\right|^2 + \frac{\nu}{1-2\nu}\left(|\xi|^2 - n\right)^2, \ \xi \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

Les développements au niveau des inclusions différentielles nous ont permis de traiter complètement ce problème en dimension 2 étendant ainsi les résultats de [13]. En fonction de ξ_0 on a assuré l'existence ou la non existence de solution pour le problème de minimisation. Quelques progrès ont aussi été faits en dimension 3.

Les résultats mentionnés précédemment concernant la résolution d'inclusions différentielles et les problèmes de minimisation résultent des travaux avec B. Dacorogna et G. Pisante (Dacorogna-Ribeiro [18] et Dacorogna-Pisante-Ribeiro [17]).

Chapitre 2

Les notions de convexité au sens généralisé

On discute dans ce chapitre les extensions de la notion de convexité aux notions de convexité au sens généralisé qui apparaissent dans les problèmes vectoriels du calcul des variations et des équations aux dérivées partielles. Ces notions sont la polyconvexité, la quasiconvexité et la rang un convexité introduites par Morrey, en 1952, pour les fonctions. Ici, nous sommes surtout intéressés au concept plus récent de convexité au sens généralisé pour les ensembles.

Effectivement, l'importance de la convexité au sens généralisé pour les ensembles s'est révélée plus récemment avec les travaux de Dacorogna-Marcellini et Müller-Šverák sur les équations et inclusions différentielles aux dérivées partielles. Dans leur théorie le concept de convexité au sens généralisé apparaît avec l'utilisation des enveloppes convexes généralisés de certains ensembles. On trouve ainsi, dans le contexte des ensembles, la terminologie d'enveloppe convexe au sens généralisé sans avoir des notions précises du concept premier qui est la convexité au sens généralisé.

Notre but est de systématiser la théorie d'analyse convexe au sens généralisé en suivant au plus proche la démarche habituelle pour la convexité classique.

La première section de ce chapitre est une section préliminaire où l'on rappelle les notions de convexité généralisées pour les fonctions ainsi que quelques résultats qui seront utiles dans les chapitres suivants. Pour plus de détails, le livre de référence est celui de Dacorogna [11].

Les notions de convexité pour les ensembles, où réside notre intérêt, sont alors considérées dans la Section 2.2. En suivant l'approche classique de l'analyse convexe, on commence par introduire les notions d'ensemble convexe au sens généralisé. Notamment on propose une définition d'ensemble quasiconvexe qui sera soutenue par le fait que pour tout ensemble $E \subset \mathbb{R}^{N \times n}$,

$$E \text{ convexe } \Rightarrow E \text{ polyconvexe } \Rightarrow E \text{ quasiconvexe} \Rightarrow E \text{ rang un convexe}$$

étant les contre-implications fausses, pour $N, n \geq 2$.

Une fois données les définitions d'ensemble convexe au sens généralisé on définit les enveloppes convexes généralisés d'un ensemble d'une façon plus cohérente avec le cas classique. Dans le cas de la polyconvexité, des théorèmes de séparation et de Carathéodory seront aussi considérés. On finira le chapitre en discutant la notion de point extrême, des théorèmes du type Minkowski et l'existence de la fonction de Choquet, toujours dans le contexte de la convexité généralisée. Certains résultats connus sont inclus dans la suite dans le but de la systématisation de cette théorie.

2.1 Notions de convexité pour les fonctions

La notion de fonction quasiconvexe, introduite par Morrey [29], a permis de traiter les problèmes vectoriels du calcul des variations (voir Dacorogna [11]). Pour mieux comprendre cette notion et dû à la difficulté de la tester dans la pratique, des conditions nécessaires et suffisantes ont été aussi introduites (cf. Morrey [29], Ball [4]). Ces conditions sont, respectivement, la rang un convexité et la polyconvexité. On rappelle, dans cette section, toutes ces notions, qui nous aideront à bien formuler dans la Section 2.2 des notions analogues pour les ensembles.

On commence par introduire une notation utile dans le contexte de la polyconvexité (cf. Dacorogna [11]).

Notation 2.1. (i) Pour $\xi \in \mathbb{R}^{N\times n}$, soit

$$T(\xi) = (\xi, \operatorname{adj}_2\xi, \ldots, \operatorname{adj}_{N\wedge n}\xi) \in \mathbb{R}^{\tau(N,n)}$$

où, pour $1 \leq s \leq N \wedge n = \min\{N, n\}$, $\operatorname{adj}_s\xi$ est la matrice des mineurs de ξ d'ordre s et

$$\tau = \tau(N,n) = \sum_{s=1}^{N\wedge n} \binom{N}{s}\binom{n}{s} \text{ où } \binom{N}{s} = \frac{N!}{s!\,(N-s)!}.$$

En particulier, si $N = n = 2$, alors $T(\xi) = (\xi, \det \xi)$.

(ii) Pour $s \in \mathbb{N}$, soit

$$\Lambda_s = \left\{ \lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_s) : \ \lambda_i \geq 0, \ \sum_{i=1}^{s} \lambda_i = 1 \right\}.$$

On rappelle alors les différentes notions de convexité pour les fonctions.

Définition 2.2. (i) Une fonction $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ est *convexe* si

$$f(\lambda\xi + (1-\lambda)\eta) \leq \lambda f(\xi) + (1-\lambda)\ f(\eta)$$

pour tout $\lambda \in [0,1]$ et tous $\xi, \eta \in \mathbb{R}^m$.

(ii) Une fonction $f : \mathbb{R}^{N\times n} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ est *polyconvexe* s'il existe une fonction convexe $g : \mathbb{R}^{\tau(N,n)} \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ telle que

$$f(\xi) = g(T(\xi)).$$

(iii) Une fonction $f : \mathbb{R}^{N\times n} \to \mathbb{R}$ mesurable au sens de Borel est *quasiconvexe* si

$$f(\xi)\ \mathrm{mes}(U) \leq \int_U f(\xi + D\varphi(x))\, dx$$

pour tout ensemble ouvert borné $U \subset \mathbb{R}^n$, $\xi \in \mathbb{R}^{N\times n}$ et $\varphi \in W_0^{1,\infty}\left(U; \mathbb{R}^N\right)$.

(iv) Une fonction $f : \mathbb{R}^{N\times n} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ est *rang un convexe* si

$$f(\lambda\xi + (1-\lambda)\eta) \leq \lambda f(\xi) + (1-\lambda)\ f(\eta)$$

pour tout $\lambda \in [0,1]$ et tous $\xi, \eta \in \mathbb{R}^{N\times n}$ tels que $\mathrm{rang}(\xi - \eta) = 1$.

(v) Une fonction $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ est *séparément convexe* si

$$f(\lambda\xi + (1-\lambda)\eta) \leq \lambda f(\xi) + (1-\lambda)\ f(\eta)$$

pour tout $\lambda \in [0,1]$ et tous $\xi, \eta \in \mathbb{R}^m$ tels que $\xi - \eta = se_i$, pour certains $s \in \mathbb{R}$ et $i \in \{1, ..., m\}$ (e_i dénote le $i^{ème}$-vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^m$).

(vi) Une fonction $f : \mathbb{R}^{N\times n} \to \mathbb{R}$ mesurable au sens de Borel est *quasiaffine* si f et $-f$ sont quasiconvexes.

Remarque 2.3. L'importance de la notion de fonction quasiconvexe vient du fait que celle ci équivaut à la semi-continuité inférieure de la fonctionnelle intégrale correspondante. Si l'intégrand de cette fonctionnelle prend la valeur $+\infty$, il n'y a aucune définition de fonction quasiconvexe équivalente à la semi-continuité inférieure de la fonctionnelle intégrale. De plus, si l'on permet que f prend la valeur $+\infty$ dans la définition ci-dessus, alors l'implication connue dans le cas fini

$$f \text{ quasiconvexe } \Rightarrow f \text{ rang un convexe}$$

n'est pas vraie. Considérez, par exemple, la fonction indicatrice d'un ensemble $\{\xi, \eta\}$, où $\operatorname{rang}(\xi - \eta) = 1$.

Dans le résultat suivant des conditions équivalentes pour la polyconvexité et la quasiconvexité d'une fonction sont établies. La condition (i) est démontré dans Dacorogna [11, page 106] dans le cas où f peut prendre la valeur $+\infty$, mais sous l'hypothèse de f être minoré par une fonction polyconvexe. La condition (ii) a été démontrée par Šverák [38].

Théorème 2.4. *(i) Une fonction $f : \mathbb{R}^{N\times n} \to \mathbb{R}$ est polyconvexe si et seulement si*

$$f\left(\sum_{i=1}^{\tau+1} \lambda_i \xi_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\tau+1} \lambda_i f(\xi_i) \tag{2.1}$$

pour tout $(\lambda_1, ..., \lambda_{\tau+1}) \in \Lambda_{\tau+1}$ tel que

$$T\left(\sum_{i=1}^{\tau+1} \lambda_i \xi_i\right) = \sum_{i=1}^{\tau+1} \lambda_i T(\xi_i). \tag{2.2}$$

(ii) Une fonction $f : \mathbb{R}^{N\times n} \to \mathbb{R}$ mesurable au sens de Borel est quasiconvexe si et seulement si

$$f(\xi) \leq \int_C f(\xi + D\varphi(x))\, dx$$

pour tous $\xi \in \mathbb{R}^{N\times n}$ et $\varphi \in W^{1,\infty}_{per}\left(C; \mathbb{R}^N\right)$, où $C :=]0,1[^n$.

Démonstration. On ne démontre que (i). C'est immédiat que si f est polyconvexe alors la condition (2.1) est vérifiée lorsqu'on a (2.2). Supposons maintenant que (2.1) est satisfaite. On définit $g : \mathbb{R}^{\tau(N,n)} \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ par

$$g(X) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{I} \lambda_i f(\xi_i) : \ X = \sum_{i=1}^{I} \lambda_i T(\xi_i),\ (\lambda_1, ..., \lambda_I) \in \Lambda_I,\ I \in \mathbb{N}\right\}.$$

On note que g est bien défini, vu que $\mathbb{R}^{\tau(N,n)} = \operatorname{co} T(\mathbb{R}^{N\times n})$ (cf. Dacorogna [11, page 109]). On vérifie par la suite que $g(T(\xi)) = f(\xi),\ \forall\ \xi \in \mathbb{R}^{N\times n}$, g est convexe et qu'en fait $g > -\infty$ ce qui entraîne que f est polyconvexe. On divise le reste de la preuve en trois étapes.

Etape 1 : $g(T(\xi)) = f(\xi),\ \forall\ \xi \in \mathbb{R}^{N\times n}$.

Par définition de g, $g(T(\xi)) \leq f(\xi),\ \forall\ \xi \in \mathbb{R}^{N\times n}$. En utilisant l'hypothèse (2.1) on obtient l'inégalité inverse.

Etape 2 : g est convexe. Soient $X, Y \in \mathbb{R}^{\tau(N,n)}$ et $t \in]0,1[$. On veut vérifier que

$$g(tX + (1-t)Y) \leq tg(X) + (1-t)g(Y).$$

Cas 1 : $g(X), g(Y) \in \mathbb{R}$.

Pour $\varepsilon > 0$ il existe $\xi_i, \eta_j \in \mathbb{R}^{N\times n},\ i = 1, ..., I,\ j = 1, ..., J,\ \lambda \in \Lambda_I,\ \mu \in \Lambda_J$ tels que

$$X = \sum_{i=1}^{I} \lambda_i T(\xi_i), \quad Y = \sum_{j=1}^{J} \mu_j T(\eta_j)$$

et

$$tg(X) + (1-t)g(Y) + \varepsilon \geq t\sum_{i=1}^{I} \lambda_i f(\xi_i) + (1-t)\sum_{j=1}^{J} \mu_j f(\eta_j).$$

Comme

$$tX + (1-t)Y = \sum_{i=1}^{I} t\lambda_i T(\xi_i) + \sum_{j=1}^{J} (1-t)\mu_j T(\eta_j),$$

alors

$$g(tX + (1-t)Y) \leq \sum_{i=1}^{I} t\lambda_i f(\xi_i) + \sum_{j=1}^{J} (1-t)\mu_j f(\eta_j)$$

et par ailleurs

$$g(tX + (1-t)Y) \leq tg(X) + (1-t)g(Y) + \varepsilon.$$

On obtient l'inégalité désirée en passant à la limite en ε.
Cas 2 : $g(X) \in \mathbb{R},\ g(Y) = -\infty$.

Dans ce cas on considère des suites $\xi_i^\nu, \eta_j^\nu \in \mathbb{R}^{N\times n},\ i = 1, ..., I_\nu,\ j = 1, ..., J_\nu,\ \lambda^\nu \in \Lambda_{I_\nu},\ \mu^\nu \in \Lambda_{J_\nu}$ telles que

$$X = \sum_{i=1}^{I_\nu} \lambda_i^\nu T(\xi_i^\nu), \quad Y = \sum_{j=1}^{J_\nu} \mu_j^\nu T(\eta_j^\nu)$$

et

$$\lim_{\nu\to\infty} \sum_{i=1}^{I_\nu} \lambda_i^\nu f(\xi_i^\nu) = g(X), \quad \lim_{\nu\to\infty} \sum_{j=1}^{J_\nu} \mu_j^\nu f(\eta_j^\nu) = -\infty.$$

Pour chaque ν,

$$tX + (1-t)Y = \sum_{i=1}^{I_\nu} t\lambda_i^\nu T(\xi_i^\nu) + \sum_{j=1}^{J_\nu} (1-t)\mu_j^\nu T(\eta_j^\nu)$$

et donc

$$g(tX + (1-t)Y) \leq \lim_{\nu\to\infty} \sum_{i=1}^{I_\nu} t\lambda_i^\nu f(\xi_i^\nu) + \sum_{j=1}^{J_\nu} (1-t)\mu_j^\nu f(\eta_j^\nu) = -\infty = tg(X) + (1-t)g(Y).$$

Cas 3 : $g(X) = g(Y) = -\infty$.

Ce cas est analogue au Cas 2.

Etape 3 : $g > -\infty$.

Si $g(X) = -\infty$ pour certain $X \in \mathbb{R}^{\tau(N,n)}$, alors, comme g est convexe, g serait identiquement égal à $-\infty$, ce qui n'est pas vrai puisque f est réel et $g(T(\xi)) = f(\xi),\ \forall\ \xi \in \mathbb{R}^{N\times n}$.

On conclut ainsi que f est polyconvexe. □

On rappelle ensuite quelques caractérisations des fonctions quasiaffines. Les conditions (*ii*), (*iii*) et (*iv*) sont démontrées dans Dacorogna [11, page 117] et la condition (*v*) dans Ball [4].

Théorème 2.5. *Soit* $f : \mathbb{R}^{N\times n} \longrightarrow \mathbb{R}$. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*
(i) f *est quasiaffine ;*
(ii) f *est rang un affine, i.e.* f *et* $-f$ *sont rang un convexes :*

$$f(\lambda\xi + (1-\lambda)\eta) = \lambda f(\xi) + (1-\lambda)f(\eta),$$

pour tout $\lambda \in [0,1]$ *et tous* $\xi, \eta \in \mathbb{R}^{N\times n}$ *tels que* $\mathrm{rang}(\xi - \eta) = 1$ *;*
(iii) $f(\xi + \eta) = f(\xi) + < Df(\xi); \eta >$*, pour tous* $\xi, \eta \in \mathbb{R}^{N\times n}$, $\mathrm{rang}(\eta) = 1$ *;*
(iv) $f(\xi) = f(0) + < \beta; T(\xi) >$*, pour certain* $\beta \in \mathbb{R}^{\tau(N,n)}$ *ou d'une autre façon*

$$f(\xi) = f(0) + \sum_{k=1}^{N\wedge n} < A^k; \mathrm{adj}_k \xi >,$$

où $N \wedge n = \min\{N, n\}$*,* $A^k \in \mathbb{R}^{\sigma(k)}$*,* $\sigma(k) = \binom{N}{k} \times \binom{n}{k}$ *et* $\mathrm{adj}_k\xi$ *est la matrice des mineurs de* ξ *d'ordre* k *;*
(v) f *est un Lagrangien nul :*

$$\int_\Omega f(D\varphi(x) + Dv(x))\,dx = \int_\Omega f(D\varphi(x))\,dx,\ \forall\ \varphi \in W^{1,\infty}(\Omega;\mathbb{R}^N),\ v \in W_0^{1,\infty}(\Omega;\mathbb{R}^N) \tag{2.3}$$

quelque soit Ω *ouvert, borné non vide de* $\mathbb{R}^n$*.*

Démonstration. On ne présente que la démonstration de l'équivalence entre la quasiaffinité et la condition (v). On refait la démonstration de Ball [4] qui a considéré le cas de la dimension trois ($N = n = 3$). La même démonstration est encore vraie pour une dimension quelconque.

C'est clair que si f est un Lagrangien nul alors f est quasiaffine. On vérifie l'autre implication. On note que par densité il suffit de démontrer (2.3) pour $v \in C_0^\infty(\Omega;\mathbb{R}^N)$.

On commence par vérifier que

$$\sum_{i=1}^N \sum_{\alpha=1}^n \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial \xi_\alpha^i}(D\varphi(x)) D_\alpha v^i(x)\,dx = 0,\ \forall\ \varphi \in W^{1,\infty}(\Omega;\mathbb{R}^N),\ v \in C_0^\infty(\Omega;\mathbb{R}^N). \tag{2.4}$$

On remarque que, par la condition de Legendre-Hadamard, cf. Dacorogna [11, Theorem 1.1 page 102],

$$\sum_{i,j=1}^N \sum_{\alpha,\beta=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial \xi_\alpha^i \partial \xi_\beta^j}(A) \lambda^i \lambda^j \mu_\alpha \mu_\beta = 0,\ \forall\ \lambda \in \mathbb{R}^N,\ \mu \in \mathbb{R}^n,\ A \in \mathbb{R}^{N\times n}.$$

Donc, en particulier,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \xi_\alpha^i \partial \xi_\beta^j} = -\frac{\partial^2 f}{\partial \xi_\beta^i \partial \xi_\alpha^j}. \tag{2.5}$$

Si $\varphi \in C^2(\Omega;\mathbb{R}^N)$,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^N \sum_{\alpha=1}^n \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial \xi_\alpha^i}(D\varphi(x)) D_\alpha v^i(x)\,dx &= \sum_{i,j=1}^N \sum_{\alpha,\beta=1}^n -\int_\Omega \frac{\partial^2 f}{\partial \xi_\beta^j \partial \xi_\alpha^i}(D\varphi(x)) \frac{\partial^2 \varphi^j}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}(x) v^i(x)\,dx \\
&= \sum_{i,j=1}^N \sum_{\alpha,\beta=1}^n \int_\Omega \frac{\partial^2 f}{\partial \xi_\alpha^j \partial \xi_\beta^i}(D\varphi(x)) \frac{\partial^2 \varphi^j}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}(x) v^i(x)\,dx \\
&= \sum_{i=1}^N \sum_{\beta=1}^n \int_\Omega -\frac{\partial f}{\partial \xi_\beta^i}(D\varphi(x)) D_\beta v^i(x)\,dx.
\end{aligned}$$

Donc on obtient l'identité (2.4) pour $\varphi \in C^2(\Omega,\mathbb{R}^N)$ et par densité aussi pour $\varphi \in W^{1,\infty}(\Omega;\mathbb{R}^N)$.

Pour $v \in C_0^\infty(\Omega;\mathbb{R}^N)$, on définit alors la fonction

$$g(t) = \int_\Omega f(D\varphi(x) + tDv(x))\,dx,\ \forall\ t \in [0,1].$$

On a par (2.4) que

$$g'(t) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{\alpha=1}^{n} \int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial \xi_{\alpha}^{i}} (D\varphi(x) + tDv(x)) D_{\alpha} v^{i}(x)\, dx = 0.$$

Donc g est constante dans $[0,1]$. En particulier $g(0) = g(1)$, qui est précisément ce qu'on voulait. □

Il est bien connu que, si $f : \mathbb{R}^{N\times n} \longrightarrow \mathbb{R}$, alors

$$\begin{aligned} &f \text{ convexe } \Rightarrow f \text{ polyconvexe } \Rightarrow f \text{ quasiconvexe} \\ &\Rightarrow f \text{ rang un convexe } \Rightarrow f \text{ séparément convexe} \end{aligned}$$

et, si $f : \mathbb{R}^{N\times n} \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, alors

$$f \text{ convexe } \Rightarrow f \text{ polyconvexe } \Rightarrow f \text{ rang un convexe } \Rightarrow f \text{ séparément convexe}$$

(voir pour les preuves Dacorogna [11]). Les contre-implications sont en générale fausses, restant inconnue, pour $n \geq N = 2$, la véracité de

$$f \text{ rang un convexe } \not\Rightarrow f \text{ quasiconvexe.}$$

Pour $N \geq 3$ et $n \geq 2$ ce résultat a été démontré par Šverák [38].

On définit les enveloppes convexe, polyconvexe, quasiconvexe, rang un convexe et séparément convexe d'une fonction f par, respectivement, la plus grande fonction convexe, polyconvexe, quasiconvexe, rang un convexe et séparément convexe qui minore f. On les dénote, respectivement, par Cf, Pf, Qf, Rf, Sf et on a

$$\begin{aligned} Cf(x) &= \sup\{g(x) :\ g \text{ convexe},\ g \leq f\}, \\ Pf(x) &= \sup\{g(x) :\ g \text{ polyconvexe},\ g \leq f\}, \\ Qf(x) &= \sup\{g(x) :\ g \text{ quasiconvexe},\ g \leq f\}, \\ Rf(x) &= \sup\{g(x) :\ g \text{ rang un convexe},\ g \leq f\}, \\ Sf(x) &= \sup\{g(x) :\ g \text{ séparément convexe } g \leq f\}. \end{aligned}$$

Par la discussion faite avant

$$Cf \leq Pf \leq Qf \leq Rf \leq Sf \leq f.$$

On a ainsi rappelé les définitions et résultats principaux qui concernent la convexité pour les fonctions au sens généralisé. Avant de finir cette section nous démontrons un résultat concernant les fonctions quasiaffines qui sera utile dans le Chapitre 3.

Proposition 2.6. *Soit $f : \mathbb{R}^{N\times n} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction quasiaffine non constante. Alors f n'a pas d'extrema relatifs.*

Démonstration. On vérifie que si f a un extremum relatif alors f doit être constante. On procède en deux étapes.

Etape 1 : On vérifie que si ξ est un point de minimum relatif de f, alors f est constante dans un voisinage de ξ.

On admet que ξ est un point de minimum relatif de f (le cas d'un maximum relatif est traité de façon analogue). Il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$f(\xi) \leq f(\xi + v),\ \forall\ v \in \mathbb{R}^{N\times n} \text{ tel que } \left|v_j^i\right| \leq \varepsilon. \tag{2.6}$$

On va démontrer que cela implique que

$$f(\xi) = f(\xi + v),\ \forall\ v \in \mathbb{R}^{N\times n} \text{ tel que } \left|v_j^i\right| \leq \varepsilon. \tag{2.7}$$

On écrit

$$v = \sum_{\substack{1\leq i\leq N\\ 1\leq j\leq n}} v_j^i e^i \otimes e_j$$

et on note que, une fois que f est quasiaffine, alors

$$f(\xi) = \frac{1}{2} f(\xi + v_1^1 e^1 \otimes e_1) + \frac{1}{2} f(\xi - v_1^1 e^1 \otimes e_1)$$

et comme (2.6) est satisfait on déduit que

$$f(\xi \pm v_1^1 e^1 \otimes e_1) = f(\xi),\ \left|v_1^1\right| \leq \varepsilon. \tag{2.8}$$

En appliquant à nouveau le fait de f être quasiaffine, on écrit

$$f(\xi + v_1^1 e^1 \otimes e_1) = \frac{1}{2} f(\xi + v_1^1 e^1 \otimes e_1 + v_2^1 e^1 \otimes e_2) + \frac{1}{2} f(\xi + v_1^1 e^1 \otimes e_1 - v_2^1 e^1 \otimes e_2).$$

De (2.6) et (2.8) on conclut alors que

$$f(\xi + v_1^1 e^1 \otimes e_1 \pm v_2^1 e^1 \otimes e_2) = f(\xi + v_1^1 e^1 \otimes e_1) = f(\xi),\ \left|v_1^1\right|, \left|v_2^1\right| \leq \varepsilon.$$

En répétant cette procédure dans chaque composante, on obtient (2.7).

Etape 2 : On vérifie maintenant que si f est constante dans un voisinage d'un point $\xi \in \mathbb{R}^{N\times n}$, alors f est constante dans $\mathbb{R}^{N\times n}$. On admet donc que

$$f(\xi + v) = f(\xi),\ \forall\ v \in \mathbb{R}^{N\times n} \text{ tel que } \left|v_j^i\right| \leq \varepsilon \tag{2.9}$$

et on va vérifier que

$$f(\xi + w) = f(\xi),\ \forall\ w \in \mathbb{R}^{N\times n}. \tag{2.10}$$

Le processus est similaire à celui de l'Etape 1. On commence par montrer que pour tous les $w_1^1 \in \mathbb{R}$ et $\left|v_j^i\right| \leq \varepsilon$ on a

$$f\big(\xi + w_1^1 e^1 \otimes e_1 + \sum_{(i,j)\neq(1,1)} v_j^i e^i \otimes e_j\big) = f(\xi + w_1^1 e^1 \otimes e_1) = f(\xi). \tag{2.11}$$

Si $\left|w_1^1\right| \leq \varepsilon$ la condition précédente est la même que (2.9), donc on peut admettre que $\left|w_1^1\right| > \varepsilon$. Comme f est quasiaffine on déduit que

$$f\big(\xi + \varepsilon \frac{w_1^1}{|w_1^1|} e^1 \otimes e_1 + \sum_{(i,j)\neq(1,1)} v_j^i e^i \otimes e_j\big) =$$

$$= \frac{\varepsilon}{|w_1^1|} f\big(\xi + w_1^1 e^1 \otimes e_1 + \sum_{(i,j)\neq(1,1)} v_j^i e^i \otimes e_j\big) + \left(1 - \frac{\varepsilon}{|w_1^1|}\right) f\big(\xi + \sum_{(i,j)\neq(1,1)} v_j^i e^i \otimes e_j\big).$$

De (2.9) et par l'égalité précédente on obtient (2.11). Si on procède d'une façon itérative et analogue avec les autres composantes : $(w_2^1, w_3^1, ...)$ on arrive à (2.10) ce qui conclut la démonstration de la proposition. □

2.2 Notions de convexité pour les ensembles

Le but qu'on se propose ici est de formaliser la théorie de la convexité pour les ensembles au sens généralisé. Ces concepts, mais surtout ceux de quasiconvexité et de rang un convexité, ont été largement utilisés dans le contexte des inclusions différentielles, parfois dans l'absence de définitions précises.

2.2.1 Définitions et propriétés

On donne par la suite les différentes définitions de convexité et on étudie les relations entre elles. On commence par introduire quelques notations qui seront utiles pour définir un ensemble quasiconvexe.

Notation 2.7. – C est l'hypercube $]0,1[^n$ de $\mathbb{R}^n$;

– $W^{1,\infty}_{per}(C;\mathbb{R}^N)$ dénotera l'espace des applications périodiques dans $W^{1,\infty}(C;\mathbb{R}^N)$, i.e. applications u satisfaisant $u(x) = u(x+e_i)$ pour tous les vecteurs e_i de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^n$;

– $\mathcal{W}_{per}$ dénotera le sous-espace de $W^{1,\infty}_{per}(C;\mathbb{R}^N)$ des applications dont les gradients prennent un nombre fini de valeurs.

On introduit ensuite les différentes notions de convexité pour les ensembles.

Définition 2.8. (i) On dit que $E \subset \mathbb{R}^m$ est *convexe* si, pour $\lambda \in [0,1]$ et $\xi, \eta \in E$, alors

$$\lambda\xi + (1-\lambda)\eta \in E.$$

(ii) On dit que $E \subset \mathbb{R}^{N\times n}$ est *polyconvexe* s'il existe un ensemble convexe $K \subset \mathbb{R}^{\tau(N,n)}$ tel que

$$\pi(K \cap T(\mathbb{R}^{N\times n})) = E,$$

où π dénote la projection orthogonale de (la première composante de) $\mathbb{R}^{\tau(N,n)}$ dans $\mathbb{R}^{N\times n}$. De façon équivalente, E est polyconvexe s'il existe un ensemble convexe $K \subset \mathbb{R}^{\tau(N,n)}$ tel que

$$\left\{\xi \in \mathbb{R}^{N\times n} : T(\xi) \in K\right\} = E.$$

(iii) On dit que $E \subset \mathbb{R}^{N\times n}$ est *quasiconvexe* si

$$\left.\begin{array}{c} \xi + D\varphi(x)R \in E,\ p.p.\ x \in C =]0,1[^n, \\ \text{pour certains } \varphi \in \mathcal{W}_{per} \text{ et } R \in O(n) \end{array}\right\} \Rightarrow \xi \in E.$$

(iv) Soit $E \subset \mathbb{R}^{N\times n}$. On dit que E est *rang un convexe* si, donnés $\lambda \in [0,1]$ et $\xi, \eta \in E$ tels que $\operatorname{rang}(\xi-\eta) = 1$, alors

$$\lambda\xi + (1-\lambda)\eta \in E.$$

(v) On dit que $E \subset \mathbb{R}^m$ est *séparément convexe* si, pour tout $\lambda \in [0,1]$ et $\xi, \eta \in E$ tels que $\xi - \eta = se_i$, avec $s \in \mathbb{R}$ et $i \in \{1,...,m\}$ (e_i dénote le $i^{ème}$-vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^m$), alors

$$\lambda\xi + (1-\lambda)\eta \in E.$$

Remarque 2.9. (i) L'opérateur π, introduit dans la définition ci-dessus, peut être mieux précisé de la façon suivante. Si

$$X = (X_1, ..., X_{\tau(N,n)}) \text{ alors } \pi(X) = (X_1, ..., X_{N\times n}).$$

En particulier, si $N = n = 2$ et $X = (\xi, \delta) \in \mathbb{R}^{2\times 2} \times \mathbb{R}$, alors $\pi(X) = \xi$.

(ii) Les définitions d'ensemble convexe, rang un convexe et séparément convexe sont les définitions qu'on trouve habituellement, cf. par exemple Dacorogna-Marcellini [14].

(iii) En ce qui concerne la polyconvexité, la façon la plus courante de la définir est via la condition (ii) du Théorème 2.10 ci-dessous. Cependant les deux conditions sont équivalentes et la définition adoptée est plus cohérente avec la définition analogue pour les fonctions.

On note qu'on pourrait penser, vu la Définition 2.2 (ii), qu'un ensemble E est polyconvexe si $T(E)$ est convexe. Cela n'est pas vrai. Considérez, par exemple, l'ensemble polyconvexe $E = \{I, \xi\}$, où I dénote la matrice identité et $\xi = \operatorname{diag}(2, 0)$. Alors $T(E) = \{(I, 1), (\xi, 0)\}$ qui n'est pas convexe.

(iv) Il n'est pas clair quelle est la meilleure définition d'un ensemble quasiconvexe. Plusieurs définitions ont été considérées (cf. Dacorogna-Marcellini [14], Müller [30], Zhang [42]), ici nous en proposons une qui vérifie les propriétés qu'un tel ensemble doit avoir (cf. Théorème 2.13).

On donne ensuite des conditions équivalentes pour la polyconvexité.

Théorème 2.10. *Soit $E \subset \mathbb{R}^{N\times n}$. Les conditions suivantes sont équivalentes.*

(i) E est polyconvexe.

(ii)

$$\left.\begin{array}{c} \displaystyle\sum_{i=1}^{I} \lambda_i T(\xi_i) = T\left(\sum_{i=1}^{I} \lambda_i \xi_i\right) \\ \xi_i \in E, \ (\lambda_1, ..., \lambda_I) \in \Lambda_I \end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{i=1}^{I} \lambda_i \xi_i \in E.$$

De plus, on peut faire $I = \tau(N, n) + 1$.

(iii) En dénotant par $\operatorname{co} T(E)$ l'enveloppe convexe de $T(E)$,

$$E = \pi(\operatorname{co} T(E) \cap T(\mathbb{R}^{N\times n}))$$

ou, de façon équivalente,

$$E = \{\xi \in \mathbb{R}^{N\times n} : \ T(\xi) \in \operatorname{co} T(E)\}.$$

Démonstration. $(i) \Rightarrow (ii)$. Supposons

$$\sum_{i=1}^{I} \lambda_i T(\xi_i) = T\left(\sum_{i=1}^{I} \lambda_i \xi_i\right), \tag{2.12}$$

avec $\xi_i \in E$ et $(\lambda_1, ..., \lambda_I) \in \Lambda_I$. Par l'hypothèse, $\xi_i \in \pi(K \cap T(\mathbb{R}^{N\times n}))$ pour un certain ensemble convexe $K \subset \mathbb{R}^{\tau(N,n)}$ et d'ailleurs $T(\xi_i) \in K$. Alors $\sum_{i=1}^{I} \lambda_i T(\xi_i) \in \operatorname{co} K = K$ et, de (2.12), on conclut que $\sum_{i=1}^{I} \lambda_i \xi_i \in E$.

Le fait qu'on peut prendre $I = \tau(N, n) + 1$ dans (ii) est une conséquence du théorème de Carathéodory et a été démontré dans Dacorogna [11, Théorème 1.3, page 106].

$(ii) \Rightarrow (iii)$. Il faut vérifier que $E = \pi(\operatorname{co} T(E) \cap T(\mathbb{R}^{N\times n}))$. Evidemment E est contenu dans l'ensemble du membre de droite. Pour l'autre inclusion, considérons $\xi \in \pi(\operatorname{co} T(E) \cap T(\mathbb{R}^{N\times n}))$. Alors, $T(\xi) \in \operatorname{co} T(E)$ et on peut écrire

$$T(\xi) = \sum_{i=1}^{I} \lambda_i T(\xi_i)$$

avec $\xi_i \in E$ et $(\lambda_1, ..., \lambda_I) \in \Lambda_I$. On applique alors (ii) pour obtenir $\xi \in E$, comme désiré.

$(iii) \Rightarrow (i)$. Cette implication est immédiate. □

Le résultat élémentaire suivant montre la relation entre les notions de convexité pour les ensembles et les notions correspondantes pour les fonctions.

Proposition 2.11. *Soit $E \subset \mathbb{R}^{N\times n}$ et χ_E la fonction indicatrice de E :*

$$\chi_E(\xi) = \begin{cases} 0 & si\ \xi \in E \\ +\infty & si\ \xi \notin E. \end{cases}$$

Alors E est, respectivement, convexe, polyconvexe, rang un convexe ou séparément convexe, si et seulement si χ_E est, respectivement, convexe, polyconvexe, rang un convexe ou séparément convexe.

Remarque 2.12. On aimerait avoir le même résultat pour le cas quasiconvexe, mais, comme déjà discuté, on n'a pas considéré des fonctions quasiconvexes prenant la valeur $+\infty$.

Comme pour les fonctions, les conditions de convexité sont enchaînées de la façon suivante.

Théorème 2.13. *Soit $E \subset \mathbb{R}^{N\times n}$. On a les implications*

$$\begin{gathered} E \text{ convexe } \Rightarrow E \text{ polyconvexe } \Rightarrow E \text{ quasiconvexe} \\ \Rightarrow E \text{ rang un convexe} \Rightarrow E \text{ séparément convexe.} \end{gathered}$$

Toutes les contre-implications sont fausses, pour $N, n \geq 2$.

Remarque 2.14. (i) On tire l'attention sur le fait que ce résultat est meilleur que l'analogue pour les fonctions. Ici on a que la convexité de rang un n'implique pas la quasiconvexité même en dimension 2×2.

(ii) On verra (cf. Proposition 2.29) que, comme pour le cas convexe : E, respectivement, polyconvexe, quasiconvexe, rang un convexe ou séparément convexe implique que $\operatorname{int} E$ est aussi, respectivement, polyconvexe, quasiconvexe, rang un convexe ou séparément convexe. Toutefois, cela n'est pas vrai pour $\overline{E}$. En effet on présentera (cf. Proposition 2.29) un exemple d'un ensemble polyconvexe $E \subset \mathbb{R}^{2\times 2}$ tel que $\overline{E}$ n'est même pas séparément convexe.

(iii) A l'évidence, si $N = 1$ ou $n = 1$ alors tout ensemble rang un convexe est convexe et dans ce cas les notions de convexité, polyconvexité, quasiconvexité et rang un convexité coïncident.

Avant de démontrer ce théorème on va énoncer un résultat connu qui est important pour trouver des contre-exemples.

Théorème 2.15. *Soit $E \subset \mathbb{R}^{N\times n}$ $(N, n \geq 2)$ un ensemble avec deux, trois ou quatre éléments tels que*

$$\operatorname{rang}(\xi - \eta) \geq 2,\ \forall\, \xi, \eta \in E,\ \xi \neq \eta.$$

Alors, si Ω est connexe et

$$D\varphi(x) \in E,\ p.p.\ x \in \Omega,$$

nécessairement φ est affine.

Ce résultat a été démontré par Ball-James [5] si le nombre d'éléments de E est deux, par Šverák [36], [37] et Zhang [41] si E a trois éléments et par Chlebík-Kirchheim [9] dans le cas de quatre éléments. Pour des ensembles avec cinq éléments le résultat n'est plus vrai et cela a été démontré par Kirchheim-Preiss (cf. [22]).

On démontre alors le Théorème 2.13.

Démonstration du Théorème 2.13. Partie 1. On ne démontre que les implications liées à la notion de quasiconvexité puisque les autres sont faciles et bien connues.
(i) On démontre que si E est polyconvexe alors E est quasiconvexe. Supposons que

$$\xi + D\varphi(x)R \in E,\ p.p.\ x \in C$$

avec $\varphi \in \mathcal{W}_{per}$ et $R \in O(n)$. On peut écrire $D\varphi(x)R \in \{\eta_1, ..., \eta_k\}$, *p.p.* $x \in C$ pour certains η_i tels que $\xi + \eta_i \in E$, $i = 1, ..., k$. On définit

$$\lambda_i = \text{mes}\{x \in C : \ D\varphi(x)R = \eta_i\}.$$

Alors $\lambda_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$. Puisque φ est périodique et chaque composante de adj_s est quasiaffine $(s = 1, ..., N \wedge n)$ on a, par le THÉORÈME 2.4,

$$T(\xi) = \int_C T(\xi + D\varphi(x)R)\, dx = \sum_{i=1}^k \lambda_i T(\xi + \eta_i).$$

De la polyconvexité de E résulte que $\xi \in E$.

(ii) On démontre maintenant que si l'ensemble E est quasiconvexe alors E est rang un convexe. Soient $\xi, \eta \in E$ tels que $\text{rang}(\xi - \eta) = 1$ et $\lambda \in]0, 1[$. On va voir que $\lambda\xi + (1-\lambda)\eta \in E$. Il suffit de trouver $\varphi \in \mathcal{W}_{per}$ et $R \in O(n)$ tels que

$$\lambda\xi + (1-\lambda)\eta + D\varphi(x)R \in \{\xi, \eta\}, \ \textit{p.p. } x \in C$$

ou de façon équivalente

$$D\varphi(x)R \in \{(1-\lambda)(\xi - \eta), -\lambda(\xi - \eta)\}, \ \textit{p.p. } x \in C.$$

De la quasiconvexité de E suivra le résultat. La construction d'un tel φ est standard dans le contexte des théorèmes de relaxation (voir, par exemple, Dacorogna [11]). Puisque $\text{rang}(\xi - \eta) = 1$, on peut écrire $\xi - \eta = a \otimes \nu$ pour certains $a \in \mathbb{R}^N$ et ν un vecteur unitaire de $\mathbb{R}^n$. Choisissons $R \in O(n)$ une transformation orthogonale telle que $e^1 R = \nu$ (e^1 le premier vecteur de la base canonique) et définissons la fonction $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ 1-périodique telle que

$$h(s) = \begin{cases} (1-\lambda)s, \ 0 \leq s \leq \lambda \\ -\lambda(s-1), \ \lambda \leq s \leq 1. \end{cases}$$

Alors $\varphi(x) = a\, h(x_1)$ est dans les conditions souhaitées. En effet,

$$D\varphi(x)R = h'(x_1)a \otimes e_1 R = h'(x_1)a \otimes \nu \in \{(1-\lambda)(\xi - \eta), -\lambda(\xi - \eta)\}.$$

Partie 2. On verra ensuite que les contre-implications, en général, ne sont pas vraies.

(i) Il y a des ensembles polyconvexes qui ne sont pas convexes. Considérons, par exemple, l'ensemble $E = \{\xi, \eta\} \subset \mathbb{R}^{2\times 2}$, où $\xi = \text{diag}(1, 0)$ et $\eta = \text{diag}(0, 1)$.

(ii) La quasiconvexité n'implique pas la polyconvexité. Considérons les matrices (cf. Dacorogna [11])

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \xi_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \xi_3 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$\eta = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

On a

$$T(\eta) = \frac{1}{3}T(\xi_1) + \frac{1}{3}T(\xi_2) + \frac{1}{3}T(\xi_3),$$

donc, vu que $\eta \notin E$, l'ensemble $E = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$ n'est pas polyconvexe. Néanmoins, E est quasiconvexe. Supposons $\xi + D\varphi R \in E$ pour certains $\varphi \in \mathcal{W}_{per}$ et $R \in O(2)$. Puisque $\text{rang}(\xi_i - \xi_j) = 2$ pour $i \neq j$, on a (cf. THÉORÈME 2.15) que les solutions de ce problème de trois gradients sont des fonctions affines ; c'est-à-dire $\xi + D\varphi R$ coïncide avec une des matrices ξ_i. De la périodicité de φ suit que $\xi = \xi_i \in E$ et donc on conclut que E est quasiconvexe.

(iii) Il y a des ensembles rang un convexes qui ne sont pas quasiconvexes. On fait la preuve en deux étapes.

Etape 1. Par le Théorème 4.29 il existe des matrices $\eta_1, ..., \eta_k \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ telles que $\text{rang}(\eta_i - \eta_j) = 2, \ \forall\ i \neq j$, une matrice $\xi \notin \{\eta_1, ..., \eta_k\}$ et une application $u \in u_\xi + W_0^{1,\infty}(]0,1[^2; \mathbb{R}^2)$ (où u_ξ dénote une application affine vérifiant $Du_\xi = \xi$) telle que $Du(x) \in \{\eta_1, ..., \eta_k\},\ p.p.\ x \in]0,1[^2$.

Etape 2. Soit $E = \{\eta_1, ..., \eta_k\}$. Puisqu'il n'y a pas des connections de rang un parmi les matrices η_i, l'ensemble E est rang un convexe. Pourtant, comme on verra, E n'est pas quasiconvexe. Soit u l'application mentionnée dans l'Etape 1. On peut écrire $u = u_\xi + \varphi$ avec $\varphi \in W_0^{1,\infty}(]0,1[^2; \mathbb{R}^2)$. Alors $Du(x) = \xi + D\varphi(x) \in E,\ p.p.$ dans $]0,1[^2$, mais $\xi \notin E$, ce qui entraîne la non quasiconvexité de E.

(iv) Il y a des ensembles séparément convexes qui ne sont pas rang un convexes. En effet, tel est le cas pour l'ensemble $E = \{\xi, \eta\} \subset \mathbb{R}^{2\times 2}$, où

$$\xi = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \eta = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

□

Nous démontrons ensuite qu'on peut construire un ensemble quasiconvexe, mais non polyconvexe à partir d'une fonction quasiconvexe, mais non polyconvexe. Comme on sait que de telles fonctions existent (cf. Alibert-Dacorogna [1] et Dacorogna-Marcellini [12]) on a ainsi une preuve alternative au fait que la quasiconvexité des ensembles n'implique pas sa polyconvexité. De plus, cela établit évidemment des relations entre certaines notions de convexité pour les ensembles et les fonctions.

Théorème 2.16. *Soit $f : \mathbb{R}^{N\times n} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction non polyconvexe. Alors il existe $\phi : \mathbb{R}^{N\times n} \longrightarrow \mathbb{R}$ quasiaffine telle que*

$$E = \{\xi \in \mathbb{R}^{N\times n} : \ f(\xi) \leq \phi(\xi)\}$$

n'est pas polyconvexe.

De plus, si f est quasiconvexe, resp. rang un convexe, alors E est quasiconvexe, resp. rang un convexe.

Remarque 2.17. Ce résultat s'inspire du cas convexe où, en utilisant une fonction non convexe, on peut construire de façon élémentaire un ensemble non convexe qui a la forme précité. On aurait aimé aussi construire un ensemble rang un convexe, mais non quasiconvexe à partir d'une fonction rang un convexe, mais non quasiconvexe. A cet effet, la forme de l'ensemble E ne semble pas adéquate.

On démontre d'abord un lemme préliminaire.

Lemme 2.18. *Soit $f : \mathbb{R}^{N\times n} \longrightarrow \mathbb{R}$ et considérons des matrices $\xi_1, ..., \xi_k$ et $\lambda_1, ..., \lambda_k \in \mathbb{R}$ avec $\lambda_i > 0$ et $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$.*

Alors il existe $r \leq k$ et une injection $\alpha : \{1, ..., r\} \longrightarrow \{1, ..., k\}$ telle que, pour certains $\gamma_{\alpha(i)} \geq 0$ avec $\sum_{i=1}^r \gamma_{\alpha(i)} = 1$,

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i T(\xi_i) = \sum_{i=1}^r \gamma_{\alpha(i)} T(\xi_{\alpha(i)}), \qquad \sum_{i=1}^k \lambda_i f(\xi_i) \geq \sum_{i=1}^r \gamma_{\alpha(i)} f(\xi_{\alpha(i)})$$

et le système d'équations

$$< T(\xi_{\alpha(i)}); \beta > +b = f(\xi_{\alpha(i)}),\ i = 1, ..., r$$

a une solution.

Démonstration. Considérons les matrices

$$A = \begin{pmatrix} T(\xi_1) & 1 \\ \vdots & \vdots \\ T(\xi_k) & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} f(\xi_1) \\ \vdots \\ f(\xi_k) \end{pmatrix}.$$

Il suffit de considérer le cas où le système d'équations

$$< T(\xi_i); \beta > +b = f(\xi_i), \ i = 1, ..., k$$

n'a pas de solution, c'est-à-dire, $\text{rang}(A) < \text{rang}(A|B)$. Sinon, on prend pour α l'application identité et on obtient le résultat.

Supposons $\text{rang}(A) < \text{rang}(A|B)$. On va vérifier qu'on obtient le résultat en prenant pour r le rang de la matrice A. On raisonne par récurrence sur $k - \text{rang}(A)$.

Etape 1. $\text{rang}(A) = k - 1$.

Alors, par l'hypothèse, $\text{rang}(A|B) = k$ et on peut écrire, pour certains $\mu_i \in \mathbb{R}, \ i = 1, ..., k$ pas tous nuls

$$\sum_{i=1}^{k} \mu_i T(\xi_i) = 0, \qquad \sum_{i=1}^{k} \mu_i = 0, \qquad \sum_{i=1}^{k} \mu_i f(\xi_i) = \delta \neq 0.$$

Sans perte de généralité on peut supposer $\delta > 0$. On divise la preuve en deux parties.

Partie 1. Soit

$$I = \{i \in \{1, ..., k\} : \ \mu_i > 0\}.$$

On note que, puisque $\sum_{i=1}^{k} \mu_i = 0$ et les μ_i ne sont pas tous nuls, l'ensemble I est non vide. On vérifie ensuite l'existence de $i \in I$ tel que

$$\frac{\lambda_j}{\lambda_i} \geq \frac{\mu_j}{\mu_i}, \ \forall \ j \in I.$$

(Notons que, si I est un ensemble unitaire, alors le seul élément de I vérifie la condition précédente.)

Fixons $l \in I$ et définissons

$$J = \left\{ j \in I : \ j \neq l, \ \frac{\lambda_j}{\lambda_l} \geq \frac{\mu_j}{\mu_l} \right\} \qquad \text{et} \qquad S = \left\{ s \in I : \ \frac{\lambda_s}{\lambda_l} < \frac{\mu_s}{\mu_l} \right\}.$$

Si $S = \emptyset$ alors $i = l$. Supposons $S \neq \emptyset$. On vérifie que, pour $m \in S$

$$\# \left\{ j \in I : \ j \neq m, \ \frac{\lambda_j}{\lambda_m} \geq \frac{\mu_j}{\mu_m} \right\} \geq \#J + 1, \tag{2.13}$$

où $\#$ dénote la cardinalité d'un ensemble. Alors, en répétant le processus un nombre fini de fois on trouve l'indice i souhaité.

Soit $m \in S$. Alors

$$\frac{\lambda_m}{\lambda_l} < \frac{\mu_m}{\mu_l} \Rightarrow \frac{\lambda_l}{\lambda_m} > \frac{\mu_l}{\mu_m}$$

et donc

$$\{l\} \cup J \subset \left\{ j \in I : \ j \neq m, \ \frac{\lambda_j}{\lambda_m} \geq \frac{\mu_j}{\mu_m} \right\}.$$

En effet, soit $j \in J$ alors $j \neq m$ et

$$\frac{\lambda_j}{\lambda_m} = \frac{\lambda_j}{\lambda_l} \frac{\lambda_l}{\lambda_m} > \frac{\mu_j}{\mu_l} \frac{\mu_l}{\mu_m} = \frac{\mu_j}{\mu_m}.$$

On obtient ainsi (2.13) vu que $l \notin J$.

Partie 2. Soit i tel que $\mu_i > 0$ et

$$\frac{\lambda_j}{\lambda_i} \geq \frac{\mu_j}{\mu_i}, \ \forall \ j : \ \mu_j > 0.$$

On a

$$T(\xi_i) = \sum_{j=1,\, j\neq i}^{k} -\frac{\mu_j}{\mu_i} T(\xi_j), \qquad f(\xi_i) > \sum_{j=1,\, j\neq i}^{k} -\frac{\mu_j}{\mu_i} f(\xi_j).$$

D'ailleurs

$$\sum_{j=1}^{k} \lambda_j T(\xi_j) = \sum_{j=1,\, j\neq i}^{k} \lambda_j T(\xi_j) + \lambda_i \sum_{j=1,\, j\neq i}^{k} -\frac{\mu_j}{\mu_i} T(\xi_j) = \sum_{j=1,\, j\neq i}^{k} \left(\lambda_j - \lambda_i \frac{\mu_j}{\mu_i}\right) T(\xi_j).$$

De la façon comme on a choisit i on a $\lambda_j - \lambda_i \frac{\mu_j}{\mu_i} \geq 0, \ j \neq i$ et

$$\sum_{j=1,\, j\neq i}^{k} \left(\lambda_j - \lambda_i \frac{\mu_j}{\mu_i}\right) = 1 - \lambda_i - \frac{\lambda_i}{\mu_i} \sum_{j=1,\, j\neq i}^{k} \mu_j = 1.$$

De plus

$$\sum_{j=1}^{k} \lambda_j f(\xi_j) \geq \sum_{j=1,\, j\neq i}^{k} \lambda_j f(\xi_j) + \lambda_i \sum_{j=1,\, j\neq i}^{k} -\frac{\mu_j}{\mu_i} f(\xi_j) = \sum_{j=1,\, j\neq i}^{k} \left(\lambda_j - \lambda_i \frac{\mu_j}{\mu_i}\right) f(\xi_j).$$

On obtient alors le résultat souhaité avec $\alpha(j) = j,$ si $j = 1, ..., i-1;$ $\alpha(j) = j+1$ si $j = i, ..., k-1$ et $\gamma_{\alpha(j)} = \lambda_{\alpha(j)} - \lambda_i \frac{\mu_{\alpha(j)}}{\mu_i}$.

Etape 2. En admettant que le résultat a été établi pour $k - \text{rang}(A) = s - 1$ on va le démontrer pour $k - \text{rang}(A) = s$.

Par hypothèse, $\text{rang}(A|B) > k - s = \text{rang}(A)$. Sans perte de généralité, disons que $A^1, ..., A^{k-s}$ sont linéairement indépendants ainsi que $(A|B)^1, ..., (A|B)^{k-s+1}$. Alors, pour certains $\mu_i \in \mathbb{R}, \ i = 1, ..., k-s+1$ pas tous nuls

$$\sum_{i=1}^{k-s+1} \mu_i T(\xi_i) = 0, \qquad \sum_{i=1}^{k-s+1} \mu_i = 0, \qquad \sum_{i=1}^{k-s+1} \mu_i f(\xi_i) = \delta > 0.$$

Si on procède comme dans le cas $k - \text{rang}(A) = 1$ avant considéré, on trouve $1 \leq i \leq k-s+1$ tel que $\mu_i > 0$ et

$$\frac{\lambda_j}{\lambda_i} \geq \frac{\mu_j}{\mu_i}, \ \forall \ j : \ \mu_j > 0.$$

Alors,

$$\sum_{j=1}^{k} \lambda_j T(\xi_j) = \sum_{j=1,\, j\neq i}^{k-s+1} \left(\lambda_j - \lambda_i \frac{\mu_j}{\mu_i}\right) T(\xi_j) + \sum_{j=k-s+2}^{k} \lambda_j T(\xi_j) := \sum_{j=1,\, j\neq i}^{k} \tilde{\lambda}_j T(\xi_j);$$

$$\tilde{\lambda}_j := \lambda_j - \lambda_i \frac{\mu_j}{\mu_i} \geq 0, \ j = 1, ..., k-s+1, \ j \neq i; \quad \tilde{\lambda}_j := \lambda_j, \ j = k-s+2, ..., k$$

$$\sum_{j=1,\, j\neq i}^{k-s+1} \left(\lambda_j - \lambda_i \frac{\mu_j}{\mu_i}\right) + \sum_{j=k-s+2}^{k} \lambda_j = 1;$$

$$\sum_{j=1}^{k} \lambda_j f(\xi_j) > \sum_{j=1,\, j\neq i}^{k-s+1} \left(\lambda_j - \lambda_i \frac{\mu_j}{\mu_i}\right) f(\xi_j) + \sum_{j=k-s+2}^{k} \lambda_j f(\xi_j) := \sum_{j=1,\, j\neq i}^{k} \tilde{\lambda}_j f(\xi_j).$$

De plus, en définissant

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} T(\xi_1) & 1 \\ \vdots & \vdots \\ T(\xi_{i-1}) & 1 \\ T(\xi_{i+1}) & 1 \\ \vdots & \vdots \\ T(\xi_k) & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \tilde{B} = \begin{pmatrix} f(\xi_1) \\ \vdots \\ f(\xi_{i-1}) \\ f(\xi_{i+1}) \\ \vdots \\ f(\xi_k) \end{pmatrix},$$

on a $k-1-\text{rang}(\tilde{A}) = k-1-(k-s) = s-1$. En appliquant l'hypothèse de récurrence on obtient le résultat. □

On peut maintenant démontrer le Théorème 2.16.

Démonstration du Théorème 2.16. Voyons qu'on peut construire ϕ quasiaffine de façon que E ne soit pas polyconvexe. Comme f n'est pas polyconvexe, il existe $\xi_i \in \mathbb{R}^{N\times n}$, $\lambda_i \geq 0$, $i = 1, ..., k$ $(k \leq \tau(N,n)+1)$, tels que

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1, \qquad T\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \xi_i\right) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i T(\xi_i) \quad \text{et} \quad f\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \xi_i\right) > \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f(\xi_i).$$

Par le lemme précédent on sait qu'on peut se réduire au cas où le système d'équations

$$< T(\xi_i); \beta > +b = f(\xi_i),\ i = 1, ..., k$$

a une solution ; c'est-à-dire il existe une fonction quasiaffine ϕ telle que $\phi(\xi_i) = f(\xi_i),\ i = 1, ..., k$. Cela entraîne le résultat vu que pour l'ensemble E défini dans l'énoncé du théorème on aura $\xi_i \in E$, mais $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \xi_i \notin E$.

Si f est rang un convexe, c'est élémentaire que E est rang un convexe, vu (ii) du Théorème 2.5.

Dans le cas où f est quasiconvexe, la quasiconvexité de E suit de l'inégalité

$$f(\xi) \leq \int_C f(\xi + D\varphi(x)R)\, dx,\ \forall\ \varphi \in W_{per}^{1,\infty}\left(C; \mathbb{R}^N\right),\ R \in O(n), \tag{2.14}$$

valable pour tout f quasiconvexe. En fait, d'une façon plus générale que dans (ii) du Théorème 2.4, si f est quasiconvexe,

$$f(\xi) \leq \int_{QC} f(\xi + D\psi(y))\, dy,\ \forall\ \xi \in \mathbb{R}^{N\times n},\ \psi \in W_{per}^{1,\infty}\left(QC; \mathbb{R}^N\right),\ Q \in O(n).$$

Alors, si on fait $Q = R^t$ et $\psi(y) = \varphi(Ry),\ \forall\ y \in R^t C$, on obtient (2.14).

□

2.2.2 Résultats de séparation pour les ensembles polyconvexes

On connaît des résultats de séparation pour les ensembles convexes. Nous établissons ensuite ce même type de résultats pour les ensembles polyconvexes. On note qu'il est déjà connu un résultat de séparation du graphe de fonctions polyconvexes (cf. Dacorogna [11, Théorème 1.3, page 107]).

Théorème 2.19. *Soit E un ensemble polyconvexe de $\mathbb{R}^{N\times n}$.*
(i) Si $\eta \notin E$ ou $\eta \in \partial E$, alors il existe $\beta \in \mathbb{R}^{\tau(N,n)} \setminus \{0\}$ tel que

$$\langle \beta; T(\eta) - T(\xi) \rangle \leq 0,\ \forall\ \xi \in E.$$

(ii) Si E est compact et $\eta \notin E$, alors il existe $\beta \in \mathbb{R}^{\tau(N,n)} \setminus \{0\}$ tel que

$$\langle \beta; T(\eta) \rangle < \inf_{\xi \in E} \{\langle \beta; T(\xi) \rangle\}.$$

Démonstration. (i) Comme E est polyconvexe, si $\eta \notin E$ alors $T(\eta) \notin \operatorname{co} T(E)$; dans le cas où $\eta \in \partial E$ on obtient $T(\eta) \in \partial \operatorname{co} T(E)$. Dans les deux cas, et par le théorème de séparation d'un convexe, résulte l'existence de β vérifiant

$$\langle \beta; T(\eta) - X \rangle \leq 0, \ \forall \ X \in \operatorname{co} T(E).$$

En particulier, on peut prendre $X \in T(E)$, pour obtenir la condition souhaitée.

(ii) Cette assertion peut être obtenue par application du théorème de séparation dans sa version pour les ensembles convexes fermés, ici l'ensemble $\operatorname{co} T(E)$. □

Le théorème précédent permet la représentation d'un ensemble polyconvexe comme dans le résultat suivant. Cela est une extension d'un résultat classique en analyse convexe qui assure qu'un ensemble convexe fermé est l'intersection des demi-plans qui le contiennent.

Théorème 2.20. *Un ensemble compact $E \subset \mathbb{R}^{N\times n}$ est polyconvexe si et seulement si*

$$E = \{\xi \in \mathbb{R}^{N\times n} : \ \varphi(\xi) \geq 0, \textit{ pour tout } \varphi \textit{ quasiaffine, avec } \varphi_{|E} \geq 0\}.$$

Démonstration. Vu que toute fonction quasiaffine φ peut être représentée par $\varphi(\xi) = \langle \beta; T(\xi)\rangle + c$ pour certains $\beta \in \mathbb{R}^{\tau(N,n)}$ et $c \in \mathbb{R}$, c'est évident qu'un ensemble E de la forme de l'énoncé est polyconvexe.

Voyons ensuite l'autre implication. Soit E un ensemble polyconvexe compact et ξ_0 tel que $\varphi(\xi_0) \geq 0$ pour tout φ quasiaffine satisfaisant $\varphi_{|E} \geq 0$. On va voir que $\xi_0 \in E$. Si ce n'était pas le cas, alors, du Théorème 2.19 (ii),

$$\langle \beta; T(\xi_0)\rangle < c < \inf_{\xi \in E}\{\langle \beta; T(\xi)\rangle\}$$

pour certains $\beta \in \mathbb{R}^{\tau(N,n)} \setminus \{0\}$ et $c \in \mathbb{R}$. On définit $C = c - \inf_{\xi\in E}\{\langle \beta; T(\xi)\rangle\}$ et la fonction quasiaffine

$$\psi(\xi) = \langle \beta; T(\xi)\rangle + C - \langle \beta; T(\xi_0)\rangle.$$

Puisque $\psi_{|E} \geq 0$ on devrait avoir $\psi(\xi_0) \geq 0$, mais $\psi(\xi_0) = C < 0$ ce qui est une contradiction.

L'inclusion inverse est évidente. □

2.2.3 Les enveloppes convexes d'ensembles au sens généralisé

Une fois définies les différentes notions de convexité, on peut maintenant introduire les concepts d'enveloppe convexe au sens généralisé. On procède de la même façon que pour la convexité classique.

Définition 2.21. L'*enveloppe polyconvexe*, *quasiconvexe*, *rang un convexe* et *séparément convexe* d'un ensemble $E \subset \mathbb{R}^{N\times n}$ est, respectivement, le plus petit ensemble polyconvexe, quasiconvexe, rang un convexe et séparément convexe qui contient E. On les dénote, respectivement, par $\operatorname{Pco} E$, $\operatorname{Qco} E$, $\operatorname{Rco} E$ et $\operatorname{Sco} E$.

Par la discussion faite dans la Section 2.2.1, on a les inclusions suivantes

$$E \subset \operatorname{Sco} E \subset \operatorname{Rco} E \subset \operatorname{Qco} E \subset \operatorname{Pco} E \subset \operatorname{co} E.$$

Comme on notera plus loin (cf. Remarque 2.33) certains auteurs ont adopté d'autres définitions pour l'enveloppe rang un convexe d'un ensemble, mais celle-ci est plus consistante avec le cas convexe. De plus, avec la définition précédente on a le résultat suivant (cf. Dacorogna-Marcellini [14]) dont la preuve découle du Théorème 2.31.

Proposition 2.22. *Soit E un sous-ensemble de $\mathbb{R}^{N\times n}$ et χ_E sa fonction indicatrice. Alors*

$$P\chi_E = \chi_{\mathrm{Pco}\,E}$$
$$R\chi_E = \chi_{\mathrm{Rco}\,E}$$
$$S\chi_E = \chi_{\mathrm{Sco}\,E}$$

où $P\chi_E$, $R\chi_E$ et $S\chi_E$ sont, respectivement, l'enveloppe polyconvexe, rang un convexe et séparément convexe de χ_E.

Dans ce qui suit on donnera quelques représentations des enveloppes définies ci-dessus. On commence par deux représentations de l'enveloppe polyconvexe. La deuxième, qui a été établie par Dacorogna-Marcellini [14], est l'analogue du théorème de Carathéodory.

Théorème 2.23. *Soit $E \subset \mathbb{R}^{N\times n}$. Alors*
(i) $\mathrm{Pco}\,E = \pi(\mathrm{co}\,T(E) \cap T(\mathbb{R}^{N\times n}))$,

(ii) $\mathrm{Pco}\,E = \left\{ \xi \in \mathbb{R}^{N\times n} : \; T(\xi) = \sum_{i=1}^{\tau+1} \lambda_i T(\xi_i), \; \xi_i \in E, \; (\lambda_1, ..., \lambda_{\tau+1}) \in \Lambda_{\tau+1} \right\}$.

En particulier, si E est compact, alors $\mathrm{Pco}\,E$ *est aussi compact et si E est ouvert, alors* $\mathrm{Pco}\,E$ *est aussi ouvert.*

Démonstration. (i) On démontre la première représentation de $\mathrm{Pco}\,E$. Evidemment $\mathrm{Pco}\,E \subset \pi(\mathrm{co}\,T(E) \cap T(\mathbb{R}^{N\times n}))$. Pour l'autre inclusion on commence par noter que, puisque $\mathrm{Pco}\,E$ est polyconvexe, par définition,

$$\mathrm{Pco}\,E = \pi(K \cap T(\mathbb{R}^{N\times n}))$$

pour un certain ensemble convexe $K \subset \mathbb{R}^{\tau(N,n)}$. Comme $E \subset \mathrm{Pco}\,E$, K doit contenir $T(E)$ et, d'ailleurs, K doit contenir $\mathrm{co}\,T(E)$, d'où suit l'inclusion désirée.

(ii) Pour cette deuxième représentation de $\mathrm{Pco}\,E$, si on dénote par Y l'ensemble du membre de droite, il suit, par la définition d'ensemble polyconvexe, que $Y \subset \mathrm{Pco}\,E$. De plus, on vérifie aisément que Y est un ensemble polyconvexe qui contient E ce qui implique que $\mathrm{Pco}\,E \subset Y$.

Pour l'assertion concernant les ensembles compacts, il est élémentaire que $\mathrm{Pco}\,E$ est borné si E est compact. Soit alors $\xi_\nu \in \mathrm{Pco}\,E$ avec $\xi_\nu \to \xi$. De la première représentation de $\mathrm{Pco}\,E$, $T(\xi_\nu) \in \mathrm{co}\,T(E)$, qui est un ensemble compact puisque $T(E)$ est compact. Alors $T(\xi) = \lim T(\xi_\nu) \in \mathrm{co}\,T(E)$ et donc $\xi \in \mathrm{Pco}\,E$ comme on voulait.

Finalement, par le Lemme 2.24 ci-dessous, si

$$T(\xi) = \sum_{i=1}^{\tau+1} \lambda_i T(\xi_i),$$

pour certains $\xi, \xi_i \in \mathbb{R}^{N\times n}$ et $(\lambda_1, ..., \lambda_{\tau+1}) \in \Lambda_{\tau+1}$, alors

$$T(\xi + \eta) = \sum_{i=1}^{\tau+1} \lambda_i T(\xi_i + \eta), \; \forall\, \eta \in \mathbb{R}^{N\times n}.$$

De ce qui précède et de (ii) suit facilement que $\mathrm{Pco}\,E$ est ouvert si E est ouvert. □

Maintenant on prouve le Lemme 2.24 mentionné dans la démonstration précédente. En particulier, ce lemme assure que la polyconvexité d'un ensemble est conservée par translation.

Lemme 2.24. *Soient $\xi \in \mathbb{R}^{N\times n}$ et $\xi_i \in \mathbb{R}^{N\times n}$ pour $i = 1, ..., k$ tels que*

$$T(\xi) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i T(\xi_i),$$

pour certain $(\lambda_1, ..., \lambda_k) \in \Lambda_k$. *Alors*

$$T(\xi + \eta) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i T(\xi_i + \eta), \ \forall \ \eta \in \mathbb{R}^{N\times n}.$$

En particulier, si $E \subset \mathbb{R}^{N\times n}$ *est polyconvexe alors* $E+\eta$ *est aussi polyconvexe pour tout* $\eta \in \mathbb{R}^{N\times n}$.

Démonstration. Il suffit de vérifier que

$$\det(\widehat{\xi + \eta}) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \det(\widehat{\xi_i + \eta}),$$

où $\widehat{\xi + \eta}$ et $\widehat{\xi_i + \eta}$ représentent des sous-matrices (carrées) quelconques d'ordre $s \leq \min\{N, n\}$ de $\xi + \eta$ et de $\xi_i + \eta$, respectivement. On remarque que, par l'hypothèse, on a $T(\widehat{\xi}) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i T(\widehat{\xi_i})$. Donc, et pour ne pas charger les notations, il suffit de montrer que, pour $A, A_i \in \mathbb{R}^{s\times s}$,

$$T(A) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i T(A_i) \ \Rightarrow \ \det(A + B) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \det(A_i + B), \ \forall \ B \in \mathbb{R}^{s\times s}.$$

On va utiliser le fait que la fonction déterminant est une fonction multi-linéaire des lignes de la matrice. On désigne par la suite $A^I B^J$, où $I \cup J = \{1, ..., s\}$ et $I \cap J = \emptyset$, la matrice d'ordre s dont les lignes d'indice $i \in I$ sont les lignes respectives de A et les lignes d'indice $j \in J$ sont les lignes respectives de B. Dans les sommes $\sum_{I,J}$, I et J parcourent tous les sous-ensembles de $\{1, ..., s\}$ vérifiant $I \cup J = \{1, ..., s\}$ et $I \cap J = \emptyset$. On a

$$\det(A + B) = \sum_{I,J} \det(A^I B^J) \quad \text{ et } \quad \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \det(A_i + B) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \sum_{I,J} \det({A_i}^I B^J).$$

En faisant une décomposition de chaque $\det(A^I B^J)$ par le théorème de Laplace dans les lignes J et en appliquant l'hypothèse on obtient que

$$\det(A^I B^J) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \det({A_i}^I B^J),$$

ce qui entraîne le résultat désiré.

La dernière assertion du lemme suit maintenant facilement. □

Ensuite on donne une autre représentation de l'enveloppe polyconvexe, en utilisant, maintenant les résultats de séparation de la Section 2.2.2.

Théorème 2.25. *Soit* $E \subset \mathbb{R}^{N\times n}$ *tel que* $\operatorname{Pco} E$ *est compact. Alors*

$$\operatorname{Pco} E = \{\xi \in \mathbb{R}^{N\times n} : \ \varphi(\xi) \geq 0, \textit{ pour tout } \varphi \textit{ quasiaffine tel que } \varphi_{|E} \geq 0\}.$$

Démonstration. L'ensemble du deuxième membre est polyconvexe et contient E, donc contient aussi $\operatorname{Pco} E$. D'autre part, puisque $\operatorname{Pco} E$ est polyconvexe et compact alors, du Théorème 2.20 on peut écrire

$$\operatorname{Pco} E = \{\xi \in \mathbb{R}^{N\times n} : \ \varphi(\xi) \geq 0, \text{ pour tout } \varphi \text{ quasiaffine tel que } \varphi_{|\operatorname{Pco} E} \geq 0\}.$$

Comme une fonction quasiaffine φ telle que $\varphi_{|\operatorname{Pco} E} \geq 0$ vérifie aussi $\varphi_{|E} \geq 0$, on obtient

$$\{\xi \in \mathbb{R}^{N\times n} : \ \varphi(\xi) \geq 0, \text{ pour tout } \varphi \text{ quasiaffine tel que } \varphi_{|E} \geq 0\} \subset \operatorname{Pco} E,$$

ce qui finit la démonstration. □

On considère dans le théorème suivant une représentation de l'enveloppe quasiconvexe similaire à (ii) du Théorème 2.23. On remarque que, contrairement au cas polyconvexe, on n'a pas de formule où l'ensemble $\mathrm{Qco}\, E$ est obtenu en un nombre fini d'étapes. Cependant une telle formule n'existe probablement pas.

Théorème 2.26. *Soit $E \subset \mathbb{R}^{N\times n}$. On dénote l'hypercube $]0,1[^n$ par C. Soit $\mathrm{Q}_0\mathrm{co}E = E$ et définissons par récurrence les ensembles*

$$\mathrm{Q}_{i+1}\mathrm{co}E = \left\{ \xi \in \mathbb{R}^{N\times n} : \begin{array}{c} \exists\ \varphi \in \mathcal{W}_{per},\ R \in O(n) \text{ tels que} \\ \xi + D\varphi(x)R \in \mathrm{Q}_i\mathrm{co}E,\ p.p.\ x \in C \end{array} \right\},\ i \geq 0.$$

Alors $\mathrm{Qco}\, E = \cup_{i\in\mathbb{N}} \mathrm{Q}_i\mathrm{co}E$.

En particulier, si E est ouvert, alors $\mathrm{Qco}\, E$ est aussi ouvert.

Démonstration. Par définition d'ensemble quasiconvexe et par récurrence, on a $\mathrm{Q}_i\mathrm{co}E \subset \mathrm{Qco}\, E$, pour tout i et donc $\cup_{i\in\mathbb{N}}\mathrm{Q}_i\mathrm{co}E \subset \mathrm{Qco}\, E$. L'inclusion inverse suit du fait que $\cup_{i\in\mathbb{N}}\mathrm{Q}_i\mathrm{co}E$ est, comme on le verra, un ensemble quasiconvexe.

Soient $\varphi \in \mathcal{W}_{per},\ R \in O(n)$ tels que $\xi + D\varphi(x)R \in \cup_{i\in\mathbb{N}}\mathrm{Q}_i\mathrm{co}E,\ p.p.\ x \in C$. On a

$$D\varphi(x)R \in \{\eta_1, ..., \eta_k\}\ p.p.\ x \in C, \text{ avec}$$

$$\mathrm{mes}\{x \in C :\ D\varphi(x)R = \eta_i\} > 0,\ i = 1, ..., k.$$

De plus, $\xi + \eta_i \in \mathrm{Q}_{\alpha(i)}\mathrm{co}E$ pour certains $\alpha(i) \in \mathbb{N}$. Soit $s = \max\{\alpha(1), ..., \alpha(k)\}$. Puisque $\mathrm{Q}_i\mathrm{co}E \subset \mathrm{Q}_{i+1}\mathrm{co}E$, on a, pour tout $i = 1, ..., k$, $\xi + \eta_i \in \mathrm{Q}_s\mathrm{co}E$. Donc $\xi + D\varphi(x)R \in \mathrm{Q}_s\mathrm{co}E$ et, par définition, on obtient $\xi \in \mathrm{Q}_{s+1}\mathrm{co}E \subset \cup_{i\in\mathbb{N}}\mathrm{Q}_i\mathrm{co}E$. On a d'ailleurs la quasiconvexité de ce dernier ensemble.

Sous l'hypothèse de E être ouvert, on obtient facilement par récurrence que chaque $\mathrm{Q}_i\mathrm{co}E$ est ouvert. Donc $\mathrm{Qco}\, E$, étant une union d'ouverts, est aussi ouvert. □

Une représentation analogue pour l'enveloppe rang un convexe est donnée ensuite (pour la démonstration voir Dacorogna-Marcellini [14, page 136]).

Théorème 2.27. *Soit $E \subset \mathbb{R}^{N\times n}$. Soit $\mathrm{R}_0\mathrm{co}E = E$ et définissons par récurrence les ensembles*

$$\mathrm{R}_{i+1}\mathrm{co}E = \left\{ \xi \in \mathbb{R}^{N\times n} : \begin{array}{c} \xi = \lambda A + (1-\lambda)B,\ \lambda \in [0,1], \\ A, B \in \mathrm{R}_i\mathrm{co}E,\ \mathrm{rang}(A-B) = 1 \end{array} \right\},\ i \geq 0.$$

Alors $\mathrm{Rco}\, E = \cup_{i\in\mathbb{N}}\mathrm{R}_i\mathrm{co}E$.

En particulier, si E est ouvert, alors $\mathrm{Rco}\, E$ est aussi ouvert.

Remarque 2.28. (i) Des constructions similaires peuvent être obtenues pour $\mathrm{Sco}\, E$.

(ii) La dernière assertion du théorème suit, comme dans le cas quasiconvexe, du fait que chaque $\mathrm{R}_i\mathrm{co}E$ est ouvert si E est ouvert lui même.

(iii) En général, il n'est pas vrai que les enveloppes rang un convexes ou séparément convexes d'ensembles compacts soient compacts (voir Aumann-Hart [3] et Kolář [24]).

Avant de poursuivre avec d'autres représentations pour les enveloppes convexes au sens généralisé, on démontre, comme déjà mentionné dans la Remarque 2.14, que l'intérieur d'ensembles convexes au sens généralisé conserve la notion de convexité afférente, mais que, contrairement au cas convexe classique, cela n'est pas vrai pour la fermeture.

Proposition 2.29. *(i) Soit $E \subset \mathbb{R}^{N\times n}$, respectivement, un ensemble polyconvexe, quasiconvexe, rang un convexe ou séparément convexe. Alors $\mathrm{int}\, E$ est aussi, respectivement, polyconvexe, quasiconvexe, rang un convexe ou séparément convexe.*

(ii) Il existe un ensemble polyconvexe borné $E \subset \mathbb{R}^{2\times 2}$ tel que $\overline{E}$ n'est pas séparément convexe.

Démonstration. (i) On présente la démonstration dans le contexte de la polyconvexité, puisque les autres sont analogues. Il suffit de démontrer que $\mathrm{Pco}(\mathrm{int}\, E) = \mathrm{int}\, E$. L'inclusion non immédiate est $\mathrm{Pco}(\mathrm{int}\, E) \subset \mathrm{int}\, E$. Comme E est polyconvexe, évidemment

$$\mathrm{Pco}(\mathrm{int}\, E) \subset \mathrm{Pco}\, E = E. \tag{2.15}$$

D'autre part, $\mathrm{int}\, E$ est ouvert et donc (cf. Théorème 2.23) $\mathrm{Pco}(\mathrm{int}\, E)$ est aussi ouvert. De (2.15), vient l'inclusion désirée.

(ii) On définit

$$E = \left\{ \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} : \ 0 < x < 1 \right\}.$$

Cet ensemble est borné et $\overline{E}$ n'est pas séparément convexe. En effet, soit $\xi_1 = \mathrm{diag}(1,0)$ et $\xi_2 = \mathrm{diag}(-1,0)$, on a $\xi_1, \xi_2 \in \overline{E}$, mais $\lambda\xi_1 + (1-\lambda)\xi_2 \notin \overline{E}$ pour aucun $0 < \lambda < 1$.

On vérifie ensuite que E est polyconvexe. Soient $\xi_1, ..., \xi_6 \in E$ et supposons que

$$T(\xi) = \sum_{i=1}^{6} \lambda_i T(\xi_i), \text{ pour certain } (\lambda_1, ..., \lambda_6) \in \Lambda_6. \tag{2.16}$$

On doit vérifier que $\xi \in E$. On peut écrire $\{1, ..., 6\} = I_+ \cup I_-$, où les ensembles I_+ et I_- sont tels que

$$\xi_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & x_i \end{pmatrix} \text{ si } i \in I_+ \text{ et } \xi_i = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -x_i \end{pmatrix} \text{ si } i \in I_-,$$

avec $0 < x_i < 1,\ i = 1, ..., 6$. On a toujours $\det \xi_i = x_i$.

Si $I_+ = \emptyset$ ou $I_- = \emptyset$ alors c'est clair que $\xi \in E$. Il reste le cas où $I_+ \neq \emptyset$ et $I_- \neq \emptyset$, qu'on verra ne pas être admissible. En effet, de (2.16), on peut écrire

$$\xi = \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{i \in I_+} \lambda_i - \sum_{i \in I_-} \lambda_i & 0 \\ 0 & \displaystyle\sum_{i \in I_+} \lambda_i x_i - \sum_{i \in I_-} \lambda_i x_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

et $\det \xi = \alpha\beta = \displaystyle\sum_{i=1}^{6} \lambda_i x_i$.

Comme $|\alpha| < \sum_{i=1}^{6} \lambda_i = 1$ et $|\beta| < \sum_{i=1}^{6} \lambda_i x_i$, alors $|\alpha\beta| < \sum_{i=1}^{6} \lambda_i x_i$, qui est une contradiction. □

On considère maintenant quelques représentations des enveloppes convexes d'un ensemble au sens généralisé à l'aide de fonctions avec le même type de convexité.

Notation 2.30. Soit $E \subset \mathbb{R}^{N \times n}$, on considère les ensembles de fonctions suivants

$$\overline{\mathcal{F}}_E = \left\{ f : \mathbb{R}^{N \times n} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\} : f|_E \leq 0 \right\}$$
$$\mathcal{F}_E = \left\{ f : \mathbb{R}^{N \times n} \to \mathbb{R} : f|_E \leq 0 \right\}.$$

Avec la notation précédente, on a, pour $E \subset \mathbb{R}^{N \times n}$,

$$\mathrm{co}\, E = \left\{ \xi \in \mathbb{R}^{N \times n} : f(\xi) \leq 0, \text{ pour toute fonction convexe } f \in \overline{\mathcal{F}}_E \right\} \tag{2.17}$$
$$\overline{\mathrm{co}\, E} = \left\{ \xi \in \mathbb{R}^{N \times n} : f(\xi) \leq 0, \text{ pour toute fonction convexe } f \in \mathcal{F}_E \right\} \tag{2.18}$$

où $\overline{\mathrm{co}\, E}$ dénote la fermeture de l'enveloppe convexe de E.

Des représentations analogues à (2.17) peuvent être obtenues dans les cas polyconvexe, rang un convexe et séparément convexe. Evidemment une telle représentation n'a pas de sens dans le cas quasiconvexe puisqu'on n'a pas défini les fonctions quasiconvexes dans $\overline{\mathcal{F}}_E$.

La représentation (2.18) ne peut être généralisée qu'au cas polyconvexe si les ensembles sont compacts (voir THÉORÈME 2.34). Pour les autres notions de convexité, (2.18) n'est pas vrai même si des ensembles compacts sont considérés.

THÉORÈME 2.31. *Soit $E \subset \mathbb{R}^{N\times n}$, alors*

$$\begin{aligned}\operatorname{Pco} E &= \left\{\xi \in \mathbb{R}^{N\times n} : f(\xi) \leq 0, \text{ pour toute fonction polyconvexe } f \in \overline{\mathcal{F}}_E\right\}\\ \operatorname{Rco} E &= \left\{\xi \in \mathbb{R}^{N\times n} : f(\xi) \leq 0, \text{ pour toute fonction rang un convexe } f \in \overline{\mathcal{F}}_E\right\}\\ \operatorname{Sco} E &= \left\{\xi \in \mathbb{R}^{N\times n} : f(\xi) \leq 0, \text{ pour toute fonction séparément convexe } f \in \overline{\mathcal{F}}_E\right\}.\end{aligned}$$

DÉMONSTRATION. On ne vérifie que la première identité, vu que les autres sont similaires. Soit X l'ensemble du membre de droite. Evidemment X est un ensemble polyconvexe qui contient E et d'ailleurs contient $\operatorname{Pco} E$. Considérons maintenant $\xi \in X$. Puisque $\chi_{\operatorname{Pco} E}$ est une fonction polyconvexe de $\overline{\mathcal{F}}_E$, on a $\chi_{\operatorname{Pco} E}(\xi) \leq 0$ et donc $\xi \in \operatorname{Pco} E$ résultant l'inclusion souhaitée. □

On introduit ensuite quelques ensembles qui permettront de mieux comprendre la fermeture des enveloppes convexes au sens généralisé.

DÉFINITION 2.32. Soit $E \subset \mathbb{R}^{N\times n}$, on définit

$$\begin{aligned}\operatorname{co}_f E &= \left\{\xi \in \mathbb{R}^{N\times n} : f(\xi) \leq 0, \text{ pour toute fonction convexe } f \in \mathcal{F}_E\right\}\\ \operatorname{Pco}_f E &= \left\{\xi \in \mathbb{R}^{N\times n} : f(\xi) \leq 0, \text{ pour toute fonction polyconvexe } f \in \mathcal{F}_E\right\}\\ \operatorname{Qco}_f E &= \left\{\xi \in \mathbb{R}^{N\times n} : f(\xi) \leq 0, \text{ pour toute fonction quasiconvexe } f \in \mathcal{F}_E\right\}\\ \operatorname{Rco}_f E &= \left\{\xi \in \mathbb{R}^{N\times n} : f(\xi) \leq 0, \text{ pour toute fonction rang un convexe } f \in \mathcal{F}_E\right\}\\ \operatorname{Sco}_f E &= \left\{\xi \in \mathbb{R}^{N\times n} : f(\xi) \leq 0, \text{ pour toute fonction séparément convexe } f \in \mathcal{F}_E\right\}.\end{aligned}$$

REMARQUE 2.33. (i) Comme mentionné avant,

$$\operatorname{co}_f E = \overline{\operatorname{co} E}.$$

(ii) Les ensembles ci-dessus sont tous fermés parce que toute fonction séparément convexe à valeurs dans $\mathbb{R}$ est continue. De plus, ces ensembles sont, respectivement, convexe, polyconvexe, quasiconvexe, rang un convexe et séparément convexe.

(iii) Certains auteurs (voir, par exemple, Müller-Šverák [31], Šverák [39], Zhang [43]), ont adopté les définitions précédentes pour l'enveloppe quasiconvexe et rang un convexe. Ils appellent enveloppe laminé convexe ce qu'on a dit être $\operatorname{Rco} E$.

(iv) Comme dans le THÉORÈME 2.23, on peut démontrer aisément que

$$\operatorname{Pco}_f E = \pi(\operatorname{co}_f T(E) \cap T(\mathbb{R}^{N\times n})).$$

On étudie ensuite les relations entre les différentes enveloppes convexes et les ensembles introduits ci-dessus.

THÉORÈME 2.34. *Soit $E \subset \mathbb{R}^{N\times n}$, on denote par $\overline{\operatorname{Pco} E}$, $\overline{\operatorname{Qco} E}$, $\overline{\operatorname{Rco} E}$ et $\overline{\operatorname{Sco} E}$ la fermeture, respectivement, de l'enveloppe polyconvexe, quasiconvexe, rang un convexe et séparément convexe de E. On a*

$$\begin{aligned}\overline{\operatorname{Pco} E} &\subset \operatorname{Pco}_f E\\ \overline{\operatorname{Qco} E} &\subset \operatorname{Qco}_f E\\ \overline{\operatorname{Rco} E} &\subset \operatorname{Rco}_f E\\ \overline{\operatorname{Sco} E} &\subset \operatorname{Sco}_f E.\end{aligned}$$

En général, les inclusions sont strictes, mais, si E est compact, alors

$$\operatorname{Pco} E = \overline{\operatorname{Pco} E} = \operatorname{Pco}_f E.$$

De plus,

$$\operatorname{Sco}_f E \not\subseteq \overline{\operatorname{Rco} E}, \qquad \operatorname{Rco}_f E \not\subseteq \overline{\operatorname{Qco} E} \qquad \text{et} \qquad \operatorname{Qco}_f E \not\subseteq \overline{\operatorname{Pco} E}.$$

Remarque 2.35. On attire l'attention sur le fait que, au contraire de ce qui est mentionné dans Dacorogna-Marcellini [14, page 132], en général, $\overline{\operatorname{Pco} E} \neq \operatorname{Pco}_f E$, sauf si E est compact. On remarque aussi (cf. Proposition 2.29) que, en général, les ensembles $\overline{\operatorname{Pco} E}$, $\overline{\operatorname{Qco} E}$, $\overline{\operatorname{Rco} E}$, $\overline{\operatorname{Sco} E}$ ne sont même pas séparément convexes.

Démonstration. Puisque $\operatorname{Pco}_f E$ est un ensemble polyconvexe fermé qui contient E alors $\overline{\operatorname{Pco} E} \subset \operatorname{Pco}_f E$. De façon analogue on obtient les inclusions dans les cas quasiconvexe, rang un convexe et séparément convexe.

On vérifie ensuite que les inclusions sont en général strictes. La première suit (cf. Proposition 2.29) du fait qu'il y a des ensembles polyconvexes dont la fermeture n'est pas polyconvexe tandis que $\operatorname{Pco}_f E$ l'est toujours. En admettant que E est compact on a, comme on verra,

$$\operatorname{Pco} E = \overline{\operatorname{Pco} E} = \operatorname{Pco}_f E.$$

Si E est compact alors, du Théorème 2.23, $\operatorname{Pco} E$ est aussi compact et donc $\operatorname{Pco} E = \overline{\operatorname{Pco} E}$. Voyons que $\operatorname{Pco}_f E \subset \operatorname{Pco} E$. On commence par noter que, comme E est compact, $T(E)$ est aussi compact et d'ailleurs $\operatorname{co} T(E)$ l'est aussi. Soit $\xi \in \operatorname{Pco}_f E$ alors, de la polyconvexité de la fonction $\eta \mapsto \operatorname{dist}(T(\eta), \operatorname{co} T(E))$, il vient que $\operatorname{dist}(T(\xi), \operatorname{co} T(E)) = 0$. Vu que $\operatorname{co} T(E)$ est fermé, on peut déduire que $T(\xi) \in \operatorname{co} T(E)$ et donc, $\xi \in \operatorname{Pco} E$.

On utilise ensuite un exemple dû à Casadio [7] (des exemples équivalents ont aussi été donnés par Aumann-Hart [3] et Tartar [40]) qui montrera d'un seul coup que

$$\overline{\operatorname{Qco} E} \subsetneqq \operatorname{Qco}_f E, \quad \overline{\operatorname{Rco} E} \subsetneqq \operatorname{Rco}_f E, \quad \overline{\operatorname{Sco} E} \subsetneqq \operatorname{Sco}_f E$$

et

$$\operatorname{Sco}_f E \not\subseteq \overline{\operatorname{Rco} E}, \quad \operatorname{Rco}_f E \not\subseteq \overline{\operatorname{Qco} E}.$$

La deuxième non-inclusion avait déjà été observée par Dacorogna-Marcellini [14, page 133]. Considérons les quatre matrices diagonales de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ suivantes

$$\xi_1 = \operatorname{diag}(-1, 0),\ \xi_2 = \operatorname{diag}(1, -1),\ \xi_3 = \operatorname{diag}(2, 1),\ \xi_4 = \operatorname{diag}(0, 2).$$

Comme $\operatorname{rang}(\xi_i - \xi_j) = 2$ si $i \neq j$, l'ensemble $E = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4\}$ est rang un convexe.

Avec le même argument qu'on a utilisé dans la preuve du Théorème 2.13, on conclut que E est aussi quasiconvexe. En effet, supposons que, pour certains $\varphi \in \mathcal{W}_{per}$ et $R \in O(2)$, on a

$$\xi + D\varphi(x)R \in E,\ p.p.\ x \in C,$$

ici $C =]0,1[^2$. Alors, par le Théorème 2.15, en utilisant le cas des quatre gradients on obtient $\xi + D\varphi(x)R \equiv \xi_i$ pour certain $i \in \{1, ..., 4\}$. De la périodicité de φ vient que $\xi = \xi_i \in E$.

On note ensuite que $E \neq \operatorname{Sco}_f E$, d'où suivent tous les non inclusions vu que $\operatorname{Sco}_f E \subset \operatorname{Rco}_f E \subset \operatorname{Qco}_f E$. Effectivement, toutes les fonctions séparément convexes $f \in \mathcal{F}_E$ et donc toutes les fonctions rang un convexes ou quasiconvexes de $\mathcal{F}_E$, ont $f(0) \leq 0$ (voir [14]). Donc $0 \in \operatorname{Sco}_f E$, mais $0 \notin E = \overline{\operatorname{Sco} E} = \overline{\operatorname{Rco} E} = \overline{\operatorname{Qco} E}$.

Finalement il reste à vérifier que $\operatorname{Qco}_f E \not\subseteq \overline{\operatorname{Pco} E}$. Il suffit de considérer l'ensemble E de la démonstration de (ii) de la Proposition 2.29. On a vérifié que E est polyconvexe donc $\overline{\operatorname{Pco} E} = \overline{E}$. On a aussi que $0 \in \operatorname{Qco}_f E$, mais $0 \notin \overline{E}$. □

En résumant, on peut écrire

$$\overline{\operatorname{Sco} E} \subset \overline{\operatorname{Rco} E} \subset \overline{\operatorname{Qco} E} \subset \overline{\operatorname{Pco} E} \subset \overline{\operatorname{co} E} = \operatorname{co}_f E,$$

$$\operatorname{Sco}_f E \subset \operatorname{Rco}_f E \subset \operatorname{Qco}_f E \subset \operatorname{Pco}_f E \subset \overline{\operatorname{co} E} = \operatorname{co}_f E$$

et

$$\operatorname{Sco}_f E \not\subseteq \overline{\operatorname{Rco} E}, \qquad \operatorname{Rco}_f E \not\subseteq \overline{\operatorname{Qco} E}, \qquad \operatorname{Qco}_f E \not\subseteq \overline{\operatorname{Pco} E}.$$

Si E est compact alors $\operatorname{Pco}_f E = \overline{\operatorname{Pco} E}$ et donc $\operatorname{Qco}_f E \subset \overline{\operatorname{Pco} E}$.

Notons que plusieurs caractérisations des ensembles dans la Définition 2.32 ont été utilisées dans la littérature. Ces ensembles peuvent être décrits à l'aide de mesures (cf. Kirchheim [23], Müller [30]) ou à l'aide de la fonction distance (cf. Zhang [42]) : si $E \subset \mathbb{R}^{N\times n}$ est compact, alors

$$\operatorname{Qco}_f E = \left\{\xi \in \mathbb{R}^{N\times n} : \ Q\operatorname{dist}(\xi, E) = 0\right\},$$

où $Q\operatorname{dist}(\cdot, E)$ est l'enveloppe quasiconvexe de la fonction $\operatorname{dist}(\cdot, E)$.

2.2.4 Points extrêmes, théorème de Minkowski et fonction de Choquet

La notion de point extrême joue un rôle important dans l'analyse convexe. De façon analogue on introduit cette notion pour les autres notions de convexité (cf. Dacorogna-Marcellini [14, page 138]).

Définition 2.36. (i) Si $E \subset \mathbb{R}^m$ est convexe, $\xi \in E$ est un point extrême de E au sens convexe si

$$\left.\begin{array}{r} \xi = \lambda\xi_1 + (1-\lambda)\xi_2 \\ \lambda \in]0,1[, \ \xi_1, \xi_2 \in E \end{array}\right\} \Rightarrow \xi_1 = \xi_2 = \xi.$$

Pour un ensemble arbitraire $E \subset \mathbb{R}^m$, l'ensemble des points extrêmes de $\operatorname{co} E$ sera noté E^c_{ext}.

(ii) Si $E \subset \mathbb{R}^{N\times n}$ est polyconvexe, $\xi \in E$ est un point extrême de E au sens polyconvexe si

$$\left.\begin{array}{r} T(\xi) = \displaystyle\sum_{i=1}^{I} \lambda_i T(\xi_i), \\ (\lambda_1, ..., \lambda_I) \in \Lambda_I, \ \lambda_i > 0, \ \xi_i \in E \end{array}\right\} \Rightarrow \xi_i = \xi, \ i = 1, ..., I,$$

quelque soit $I \in \mathbb{N}$. Pour un ensemble arbitraire $E \subset \mathbb{R}^{N\times n}$, l'ensemble des points extrêmes de $\operatorname{Pco} E$ sera noté E^p_{ext}.

(iii) Si $E \subset \mathbb{R}^{N\times n}$ est quasiconvexe, $\xi \in E$ est un point extrême de E au sens quasiconvexe si

$$\left.\begin{array}{r} \xi + D\varphi(x)R \in E, \ p.p. \ x \in C, \\ C =]0,1[^n, \ \varphi \in \mathcal{W}_{per}, \ R \in O(n) \end{array}\right\} \Rightarrow D\varphi \equiv 0.$$

Pour un ensemble arbitraire $E \subset \mathbb{R}^{N\times n}$, l'ensemble des points extrêmes de $\operatorname{Qco} E$ sera noté E^q_{ext}.

(iv) Si $E \subset \mathbb{R}^{N\times n}$ est rang un convexe, $\xi \in E$ est un point extrême de E au sens rang un convexe si

$$\left.\begin{array}{r} \xi = \lambda\xi_1 + (1-\lambda)\xi_2 \\ \lambda \in]0,1[, \ \xi_1, \xi_2 \in E, \ \operatorname{rang}(\xi_1 - \xi_2) \leq 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \xi_1 = \xi_2 = \xi.$$

Pour un ensemble arbitraire $E \subset \mathbb{R}^{N\times n}$, l'ensemble des points extrêmes de $\operatorname{Rco} E$ sera noté E^r_{ext}.

(v) Si $E \subset \mathbb{R}^m$ est séparément convexe, $\xi \in E$ est un point extrême de E au sens séparément convexe si

$$\left.\begin{array}{c} \xi = \lambda\xi_1 + (1-\lambda)\xi_2 \\ \lambda \in]0,1[,\ \xi_1, \xi_2 \in E,\ \xi_1 - \xi_2 = s\, e_i, \\ \text{avec } s \in \mathbb{R} \text{ et } e_i \text{ un vecteur de la base canonique de } \mathbb{R}^m \end{array}\right\} \Rightarrow \xi_1 = \xi_2 = \xi.$$

Pour un ensemble arbitraire $E \subset \mathbb{R}^m$, l'ensemble des points extrêmes de $\operatorname{Sco} E$ sera noté E^s_{ext}.

Remarque 2.37. (i) La définition du point extrême au sens convexe est équivalente à

$$\left.\begin{array}{c} \xi = \displaystyle\sum_{i=1}^{I} \lambda_i \xi_i, \\ (\lambda_1, ..., \lambda_I) \in \Lambda_I,\ \lambda_i > 0,\ \xi_i \in E \end{array}\right\} \Rightarrow \xi_i = \xi,\ i = 1, ..., I$$

quelque soit $I \in \mathbb{N}$.

(ii) Comme on verra dans la Remarque 2.41, si E est un compact polyconvexe, on peut faire $I = \tau + 1$ dans la définition du point extrême au sens polyconvexe.

On voit ensuite les relations entre les différents ensembles de points extrêmes.

Proposition 2.38. *Soit $E \subset \mathbb{R}^{N\times n}$. Alors*

$$E^c_{ext} \subset E^p_{ext} \subset E^q_{ext} \subset E^r_{ext} \subset E^s_{ext} \subset E.$$

Démonstration. Les inclusions non triviales sont celles liées à E^q_{ext}, l'ensemble des points extrêmes de $\operatorname{Qco} E$. Les arguments sont les mêmes employés dans la preuve du Théorème 2.13, Partie 1.

Voyons que $E^p_{ext} \subset E^q_{ext}$. Soit $\xi \in E^p_{ext}$. Par la représentation de $\operatorname{Pco} E$ donnée dans (ii) du Théorème 2.23, $\xi \in E \subset \operatorname{Qco} E$. Supposons que, pour certains $\varphi \in \mathcal{W}_{per}$ et $R \in O(n)$,

$$\xi + D\varphi(x)R \in \operatorname{Qco} E,\ \textit{p.p. } x \in C.$$

Soient $\eta_i,\ i = 1, ..., k$ tels que $\lambda_i := \operatorname{mes}\{x \in C :\ D\varphi(x)R = \eta_i\} > 0$. On a $\xi + \eta_i \in \operatorname{Qco} E \subset \operatorname{Pco} E$ et, par la périodicité de φ,

$$T(\xi) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i T(\xi + \eta_i).$$

Donc, comme $\xi \in E^p_{ext}$, vient que $\xi + \eta_i = \xi,\ \forall\, i = 1, ..., k$ et d'ailleurs $D\varphi \equiv 0$.

On vérifie ensuite que $E^q_{ext} \subset E^r_{ext}$. Soit $\xi \in E^q_{ext}$. Par le Théorème 2.26, $\xi \in E \subset \operatorname{Rco} E$. Supposons que $\xi = \lambda\xi_1 + (1-\lambda)\xi_2$ pour certains $\lambda \in]0,1[$ et $\xi_1, \xi_2 \in \operatorname{Rco} E$, tels que $\operatorname{rang}(\xi_1 - \xi_2) \leq 1$. Comme on a vu dans le Théorème 2.13, il existe $\varphi \in \mathcal{W}_{per}$ et $R \in O(n)$ tels que

$$\xi + D\varphi(x)R \in \{\xi_1, \xi_2\} \subset \operatorname{Rco} E \subset \operatorname{Qco} E,\ \textit{p.p. } x \in C.$$

Comme $\xi \in E^q_{ext}$ on obtient $D\varphi \equiv 0$ et donc $\xi_1 = \xi_2 = \xi$. □

Le résultat suivant met en rapport les points extrêmes au sens polyconvexe d'un ensemble E avec les points extrêmes au sens convexe de $T(E)$.

Proposition 2.39. *Soit $E \subset \mathbb{R}^{N\times n}$. Alors*

$$T(E)^c_{ext} = T(E^p_{ext}),$$

où $T(E)^c_{ext}$ désigne l'ensemble des points extrêmes de $\operatorname{co} T(E)$ au sens convexe.

Démonstration. On commence par l'inclusion $T(E)^c_{ext} \subset T(E^p_{ext})$. Soit $X \in T(E)^c_{ext}$. En particulier, $X \in T(E)$ et on peut écrire $X = T(\eta)$ avec $\eta \in E$. Il suffit de vérifier que $\eta \in E^p_{ext}$. Supposons que

$$T(\eta) = \sum_{i=1}^{I} \lambda_i T(\eta_i)$$

pour certains $(\lambda_1, ..., \lambda_I) \in \Lambda_I,\ \lambda_i > 0,\ \eta_i \in \operatorname{Pco} E$. Comme $\eta_i \in \operatorname{Pco} E$ alors $T(\eta_i) \in \operatorname{co} T(E)$, et il suit que, du fait que $T(\eta)$ est un point extrême de $\operatorname{co} T(E)$, $\eta_i = \eta$ pour tout i, c'est-à-dire η est un point extrême de $\operatorname{Pco} E$.

Voyons maintenant que $T(E^p_{ext}) \subset T(E)^c_{ext}$. Soit $\xi \in E^p_{ext}$ et supposons que

$$T(\xi) = \lambda X + (1 - \lambda) Y$$

avec $X, Y \in \operatorname{co} T(E)$, $0 < \lambda < 1$. Alors, par le théorème de Carathéodory,

$$X = \sum_{i=1}^{\tau+1} \lambda_i T(\xi_i), \quad Y = \sum_{i=1}^{\tau+1} \mu_i T(\eta_i)$$

avec $(\lambda_1, ..., \lambda_{\tau+1}),\ (\mu_1, ..., \mu_{\tau+1}) \in \Lambda_{\tau+1},\ \lambda_i, \mu_i > 0,\ \xi_i, \eta_i \in E$. Donc,

$$T(\xi) = \sum_{i=1}^{\tau+1} \lambda\lambda_i T(\xi_i) + \sum_{i=1}^{\tau+1} (1 - \lambda) \mu_i T(\eta_i).$$

Comme $\xi \in E^p_{ext}$ alors $\xi = \xi_i = \eta_i$ pour tout i et donc $T(\xi) = X = Y$. On conclut ainsi que $T(\xi) \in T(E)^c_{ext}$. □

Le théorème de Minkowski, parfois nommé comme le théorème de Krein-Milman qui en est toutefois sa version en dimension infinie, assure que l'enveloppe convexe d'un compact coïncide avec l'enveloppe convexe de ses points extrêmes. On discute par la suite la généralisation de ce résultat aux autres notions de convexité. On commence par le cas polyconvexe qui a déjà été analysé par Dacorogna-Tanteri [20].

Théorème 2.40. *Soit $E \subset \mathbb{R}^{N \times n}$ un ensemble compact. Alors*

$$\operatorname{Pco} E = \operatorname{Pco} E^p_{ext}.$$

Remarque 2.41. Ce résultat et le Théorème 2.23 permettent de conclure que pour les ensembles polyconvexes compacts on peut prendre $I = \tau + 1$ dans la définition des points extrêmes au sens polyconvexe.

Démonstration. On commence par noter que

$$\begin{aligned} \operatorname{Pco} E &= \pi(\operatorname{co} T(E) \cap T(\mathbb{R}^{N \times n})) \\ \operatorname{Pco} E^p_{ext} &= \pi(\operatorname{co} T(E^p_{ext}) \cap T(\mathbb{R}^{N \times n})). \end{aligned}$$

Par le théorème de Minkowski, et du fait que $T(E)$ est compact, on a

$$\operatorname{co} T(E) = \operatorname{co}(T(E)^c_{ext}),$$

où $T(E)^c_{ext}$ est l'ensemble des points extrêmes de $\operatorname{co} T(E)$ (au sens convexe). Comme par la Proposition 2.39

$$T(E)^c_{ext} = T(E^p_{ext}),$$

on conclut le résultat. □

Comme il a été observé par Kirchheim dans [23], le résultat précédent n'est pas vrai pour les enveloppes quasiconvexes, rang un convexes ou séparément convexes (voir l'Exemple 2.43 plus bas). Pourtant, pour ces cas, un résultat plus faible peut être démontré (cf. Théorème 2.42). On reproduit ci-dessous la démonstration de Matoušek-Plecháč [28], qui, comme on le verra, est aussi applicable au cas quasiconvexe. Pour ce dernier, voir aussi Zhang [42].

Théorème 2.42. *Soit $E \subset \mathbb{R}^{N\times n}$ un ensemble borné. On dénote par E^{qf}_{ext}, E^{rf}_{ext}, E^{sf}_{ext}, respectivement, l'ensemble des points extrêmes de $\operatorname{Qco}_f E$ (au sens quasiconvexe), l'ensemble des points extrêmes de $\operatorname{Rco}_f E$ (au sens rang un convexe) et l'ensemble des points extrêmes de $\operatorname{Sco}_f E$ (au sens séparément convexe). Alors*

$$\operatorname{Qco}_f E = \operatorname{Qco}_f E^{qf}_{ext}, \qquad \operatorname{Rco}_f E = \operatorname{Rco}_f E^{rf}_{ext} \qquad et \qquad \operatorname{Sco}_f E = \operatorname{Sco}_f E^{sf}_{ext}.$$

Démonstration. Comme déjà mentionné, la preuve est due à Matoušek-Plecháč [28]. On la divise en deux étapes. La première est identique dans les trois cas considérés et on la présente dans le contexte de la quasiconvexité. Dans la deuxième étape on considère séparément les cas quasiconvexe et rang un convexe (ce dernier étant analogue au cas séparément convexe). Dans tout ce qui suit on dénote par $\overline{E}^{qf}_{ext}$ la fermeture de E^{qf}_{ext}.

Etape 1. On note que, pour tout ensemble $K \subset \mathbb{R}^{N\times n}$, $\operatorname{Qco}_f K = \operatorname{Qco}_f \overline{K}$. Alors, il suffit de prouver que $\operatorname{Qco}_f E = \operatorname{Qco}_f \overline{E}^{qf}_{ext}$. L'inclusion $\operatorname{Qco}_f \overline{E}^{qf}_{ext} \subset \operatorname{Qco}_f E$ est élémentaire. Il reste à vérifier l'autre inclusion. On procède par l'absurde.

Supposons qu'il existe $\eta \in \operatorname{Qco}_f E \setminus \operatorname{Qco}_f \overline{E}^{qf}_{ext}$, alors, par définition, il y a une fonction quasiconvexe $f : \mathbb{R}^{N\times n} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $f \in \mathcal{F}_{\overline{E}^{qf}_{ext}}$ et $f(\eta) > 0$. On note que $\operatorname{Qco}_f E$, en étant un sous-ensemble de l'ensemble borné $\overline{\operatorname{co} E}$, est compact.

Soit

$$M = \max_{\operatorname{Qco}_f E} f \qquad \text{et} \qquad \mathcal{A} = \{\xi \in \operatorname{Qco}_f E :\ f(\xi) = M\}.$$

Cet ensemble est compact (vu que $\operatorname{Qco}_f E$ est compact et f est continue) et non vide . Alors, considérant $\mathbb{R}^{N\times n}$ avec l'ordre lexicographique (les éléments de $\mathbb{R}^{N\times n}$ vu comme vecteurs) on peut assurer l'existence de l'élément maximal de $\mathcal{A}$, disons ξ_0. On a $\xi_0 \notin E^{qf}_{ext}$ puisque

$$0 < f(\eta) \leq \max_{\operatorname{Qco}_f E} f = M = f(\xi_0).$$

Comme on verra dans l'Etape 2 cela entraîne l'existence d'un élément dans $\mathcal{A}$ plus grand que ξ_0 dans l'ordre lexicographique, qui est une contradiction.

Etape 2. *Cas quasiconvexe.* Comme $\xi_0 \in \operatorname{Qco}_f E \setminus E^{qf}_{ext}$, il existe certains $\varphi \in \mathcal{W}_{per}$ et $R \in O(n)$ tels que

$$\xi_0 + D\varphi(x)R \in \operatorname{Qco}_f E,\ p.p.\ x \in C, \quad \text{avec } D\varphi \not\equiv 0.$$

On peut écrire

$$D\varphi(x)R \in \{\xi_1, ..., \xi_k\},\ p.p.\ x \in C \text{ et } \lambda_i = \operatorname{mes}\{x \in C :\ D\varphi(x)R = \xi_i\} > 0.$$

Comme $\xi_0 + \xi_i \in \operatorname{Qco}_f E$, on a $f(\xi_0 + \xi_i) \leq M$. Conséquemment, de la quasiconvexité de f (comme on a vu dans la démonstration du Théorème 2.16), on obtient

$$M = f(\xi_0) \leq \int_C f(\xi_0 + D\varphi(x)R)\, dx = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f(\xi_0 + \xi_i) \leq M$$

ce qui implique $f(\xi_0 + \xi_i) = M$, $i = 1, ..., k$ c'est-à-dire $\xi_0 + \xi_i \in \mathcal{A}$. Finalement, du fait que $D\varphi \not\equiv 0$ et $0 = \int_C D\varphi(x)R\, dx = \sum_{i=1}^k \lambda_i \xi_i$ on conclut que parmi les éléments $\xi_0 + \xi_i$ il existe au moins un qui est plus grand que ξ_0 (pour l'ordre lexicographique) ce qui contredit le fait que ξ_0 est l'élément maximal de $\mathcal{A}$.

Cas rang un convexe. On rappelle que dans ce cas la fonction f est rang un convexe. Comme $\xi_0 \in \operatorname{Rco}_f E \setminus E_{ext}^{rf}$, il existe $\eta_1, \eta_2 \in \operatorname{Rco}_f E$, avec $\operatorname{rang}(\eta_1 - \eta_2) = 1$ tels que $\xi_0 = \lambda\eta_1 + (1-\lambda)\eta_2$ et $\xi_0 \neq \eta_1$, $\xi_0 \neq \eta_2$. Comme dans le cas quasiconvexe on obtient $f(\eta_1) = f(\eta_2) = M$ et de $\xi_0 = \lambda\eta_1 + (1-\lambda)\eta_2$ il suit que η_1 ou η_2 doit être plus grand que ξ_0, ce qui est absurde. □

Comme remarqué par Kirchheim [23], l'exemple de Casadio [7] (ou ceux de Aumann-Hart [3] et Tartar [40]) déjà considéré dans la preuve du THÉORÈME 2.34, montre qu'en général, même si E est compact, on a les inégalités

$$\operatorname{Qco} E_{ext}^q \neq \operatorname{Qco} E, \quad \operatorname{Rco} E_{ext}^r \neq \operatorname{Rco} E \quad \text{et} \quad \operatorname{Sco} E_{ext}^s \neq \operatorname{Sco} E.$$

L'exemple est le suivant.

EXEMPLE 2.43. On considère un ensemble de matrices diagonales qu'on identifie avec des éléments de $\mathbb{R}^2$. En particulier, la rang un convexité et la convexité séparée coïncident.

Soit

$$E = E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup E_4 \cup E_5,$$

où

$$\begin{aligned}
&E_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1\},\\
&E_2 = \{(x,1) \in \mathbb{R}^2 :\ 1 \leq x \leq 2\}, \qquad E_3 = \{(0,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 1 \leq y \leq 2\},\\
&E_4 = \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 :\ -1 \leq x \leq 0\}, \quad E_5 = \{(1,y) \in \mathbb{R}^2 :\ -1 \leq y \leq 0\}.
\end{aligned}$$

On note que l'ensemble E est compact et rang un convexe et, de plus,

$$E_{ext}^q \subset E_{ext}^r = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4\},$$

où

$$\xi_1 = (-1,0),\ \xi_2 = (1,-1),\ \xi_3 = (2,1),\ \xi_4 = (0,2).$$

Donc, puisqu'il n'y a pas de connections de rang un entre les éléments ξ_i, par le THÉORÈME 2.15, $\operatorname{Qco} E_{ext}^q = E_{ext}^q$ et $\operatorname{Rco} E_{ext}^r = E_{ext}^r$. Néanmoins, $E_{ext}^q \subset E_{ext}^r \subsetneqq E = \operatorname{Rco} E \subset \operatorname{Qco} E$.

On se tourne maintenant vers la question de l'existence de la fonction de Choquet pour les convexités au sens généralisé. Le cas polyconvexe a été étudié par Dacorogna-Tanteri [20]. Le résultat est le suivant.

THÉORÈME 2.44. *Soit $E \subset \mathbb{R}^{N\times n}$ un ensemble polyconvexe compact et non vide. Alors il existe une fonction polyconvexe $\varphi : \mathbb{R}^{N\times n} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ telle que*

$$E_{ext}^p = \{\xi \in E :\ \varphi(\xi) = 0\} \qquad \textit{et} \qquad \varphi(\xi) \leq 0 \Leftrightarrow \xi \in E.$$

Ci-dessous, ce résultat est étendu au cas rang un convexe.

THÉORÈME 2.45. *Soit $E \subset \mathbb{R}^{N\times n}$ un ensemble rang un convexe compact et non vide. Alors il existe une fonction rang un convexe $\varphi : \mathbb{R}^{N\times n} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ telle que*

$$E_{ext}^r = \{\xi \in E :\ \varphi(\xi) = 0\} \qquad \textit{et} \qquad \varphi(\xi) \leq 0 \Leftrightarrow \xi \in E.$$

DÉMONSTRATION. Considérons la fonction f définie dans $\mathbb{R}^{N\times n}$ par

$$f(\xi) = \begin{cases} -|\xi|^2, & \text{si } \xi \in E,\\ +\infty, & \text{si } \xi \notin E.\end{cases}$$

Alors on définit

$$\varphi(\xi) = \begin{cases} Rf(\xi) - f(\xi), \text{ si } \xi \in E, \\ +\infty, \text{ si } \xi \notin E. \end{cases}$$

Puisque $\xi \mapsto |\xi|^2$ est convexe, alors φ est rang un convexe. En outre, c'est évident que

$$\varphi(\xi) \leq 0 \Leftrightarrow \xi \in E.$$

Voyons que

$$\varphi(\xi) = 0 \;\Rightarrow\; \xi \in E^r_{ext}.$$

Soit ξ tel que $\varphi(\xi) = 0$ et supposons que $\xi = \lambda\xi_1 + (1-\lambda)\xi_2$ pour certains $\xi_1, \xi_2 \in E$ avec $\text{rang}(\xi_1 - \xi_2) \leq 1$ et $\lambda \in]0,1[$. Alors

$$f(\xi) = Rf(\xi) \leq \lambda f(\xi_1) + (1-\lambda)f(\xi_2)$$

et d'ailleurs

$$|\xi|^2 \geq \lambda |\xi_1|^2 + (1-\lambda) |\xi_2|^2 .$$

La convexité stricte de la fonction $|\cdot|^2$ entraîne que $\xi = \xi_1 = \xi_2$, c'est-à-dire, $\xi \in E^r_{ext}$.

On voit ensuite l'implication inverse. Soit $\xi \in E^r_{ext}$. En particulier $\xi \in E$. On a

$$\varphi(\xi) = Rf(\xi) - f(\xi) = \lim R_k f(\xi) + |\xi|^2 ,$$

où

$R_0 f(\eta) = f(\eta)$,

$R_{i+1} f(\eta) = \inf \{\lambda R_i f(\xi_1) + (1-\lambda) R_i f(\xi_2) : \; \eta = \lambda\xi_1 + (1-\lambda)\xi_2, \; \text{rang}(\xi_1 - \xi_2) \leq 1, \; \lambda \in]0,1[\}$

(voir [11, page 202]). Comme $\xi \in E^r_{ext}$, on obtient que, pour tout i, $R_i f(\xi) = f(\xi) = -|\xi|^2$ puisque $\xi \in E$. Donc $\varphi(\xi) = 0$. □

On note encore que, dû à l'absence d'une définition de fonction quasiconvexe qui prend la valeur $+\infty$, on ne peut pas démontrer un résultat semblable dans le cas quasiconvexe. En effet, il n'existe pas de fonction réelle satisfaisant les conditions de la fonction de Choquet puisqu'une telle fonction serait continue et, en général, l'ensemble des points extrêmes n'est pas fermé.

Chapitre 3

Exemples d'enveloppes d'ensembles et de fonctions

Plusieurs définitions de convexité pour les ensembles ont été données dans le chapitre précédent. La rang un convexité, et plus précisément l'enveloppe rang un convexe d'un ensemble, s'avère particulièrement intéressante vu les applications à la résolution des inclusions différentielles. On consacre le présent chapitre au calcul des enveloppes rang un convexes de certains ensembles de matrices. Ceci sera un outil fondamental pour la résolution des inclusions différentielles considérées dans le Chapitre 4.

On va étudier des ensembles qui se décrivent à l'aide d'une fonction quasiaffine. Ainsi, pour

$$E = \left\{ \xi \in \mathbb{R}^{N \times n} : \ \Phi(\xi) \in \{\alpha, \beta\}, \ \left|\xi_j^i\right| \leq c_j^i, \ i = 1, ..., N, \ j = 1, ..., n \right\},$$

où Φ est une fonction quasiaffine arbitraire, $\alpha < \beta$ et c_j^i sont des constantes données, on obtient

$$\mathrm{Rco}\ E = \left\{ \xi \in \mathbb{R}^{N \times n} : \ \Phi(\xi) \in [\alpha, \beta], \ \left|\xi_j^i\right| \leq c_j^i, \ i = 1, ..., N, \ j = 1, ..., n \right\}$$

avec les données soumises à certaines conditions (cf. Théorème 3.1).

Le cas où l'on prescrit aussi les valeurs singulières des matrices est plus intéressant et plus difficile. Pour l'ensemble E ci-dessous

$$E = \left\{ \xi \in \mathbb{R}^{n \times n} : \ \det \xi \in \{\alpha, \beta\}, \ \lambda_i(\xi) = \gamma_i, \ i = 2, ..., n \right\},$$

où $\det \xi$ et $\lambda_1(\xi) \leq ... \leq \lambda_n(\xi)$ dénotent respectivement le déterminant et les valeurs singulières de la matrice $\xi \in \mathbb{R}^{n \times n}$, on trouve que

$$\mathrm{Rco}\, E = \left\{ \xi \in \mathbb{R}^{n \times n} : \ \det \xi \in [\alpha, \beta], \ \prod_{i=\tau}^{n} \lambda_i(\xi) \leq \prod_{i=\tau}^{n} \gamma_i, \ \tau = 2, ..., n \right\}.$$

(Voir le Théorème 3.4 pour les détails.) Dacorogna-Marcellini [14] et Dacorogna-Tanteri [20] avaient considéré les cas $\alpha = -\beta$ et $\alpha = \beta \neq 0$; ici nous avons généralisé leur résultats. De plus, au Théorème 3.7 nous étendons ce résultat à la situation d'une fonction quasiaffine arbitraire plutôt que la fonction déterminant.

Dans la Section 3.4 on étudie des ensembles de la forme

$$\{\xi \in \mathbb{R}^{(n+1) \times n} : \ \mathrm{adj}_n \xi \in S\}.$$

On note que si une surface Γ de $\mathbb{R}^{n+1}$ est paramétrée par $u : \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ alors $\mathrm{adj}_n Du$ représente la normale à la surface $\Gamma = u(\Omega)$ et l'aire de cette surface est donnée par

$$\int_\Omega |\mathrm{adj}_n Du(x)| \ dx.$$

A la fin du chapitre (Section 3.5) on se tourne vers le calcul des enveloppes de fonctions dépendant des valeurs singulières et du déterminant. Le résultat obtenu sera utile au Chapitre 5 pour exprimer le problème relaxé d'un problème de minimisation particulier.

3.1 Ensemble défini par une fonction quasiaffine

On obtient, dans cette section, l'expression de l'enveloppe rang un convexe de l'ensemble

$$E = \left\{\xi \in \mathbb{R}^{N\times n} :\ \Phi(\xi) \in \{\alpha,\beta\},\ \left|\xi_j^i\right| \le c_j^i,\ i=1,...,N,\ j=1,...,n\right\}$$

où $\Phi : \mathbb{R}^{N\times n} \longrightarrow \mathbb{R}$ désigne une fonction quasiaffine non constante et α, β et c_j^i sont des constantes données. Le résultat précis est le suivant.

Théorème 3.1. *Soient $\alpha < \beta$, $\Phi : \mathbb{R}^{N\times n} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction quasiaffine non constante et*

$$E = \left\{\xi \in \mathbb{R}^{N\times n} :\ \Phi(\xi) \in \{\alpha,\beta\},\ \left|\xi_j^i\right| \le c_j^i,\ i=1,...,N,\ j=1,...,n\right\},$$

où c_j^i sont des constantes strictement positives telles que

$$\inf\{|\Phi(\xi)| :\ \left|\xi_j^i\right| = c_j^i\} \ge \max\{|\alpha|, |\beta|\}. \tag{3.1}$$

Alors

$$\text{Rco}\ E = \left\{\xi \in \mathbb{R}^{N\times n} :\ \Phi(\xi) \in [\alpha,\beta],\ \left|\xi_j^i\right| \le c_j^i,\ i=1,...,N,\ j=1,...,n\right\},$$

$$\text{int}\,\text{Rco}\ E = \left\{\xi \in \mathbb{R}^{N\times n} :\ \Phi(\xi) \in \left]\alpha,\beta\right[,\ \left|\xi_j^i\right| < c_j^i,\ i=1,...,N,\ j=1,...,n\right\}.$$

Remarque 3.2. Pour une fonction quasiaffine Φ et pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, on peut toujours trouver (cf. Proposition 3.3) des constantes $c_j^i > 0$ satisfaisant (3.1).

Démonstration. Partie 1. Soit

$$X = \left\{\xi \in \mathbb{R}^{N\times n} :\ \Phi(\xi) \in [\alpha,\beta],\ \left|\xi_j^i\right| \le c_j^i,\ i=1,...,N,\ j=1,...,n\right\}.$$

On vérifie que

$$\text{int}\,X = \left\{\xi \in \mathbb{R}^{N\times n} :\ \Phi(\xi) \in \left]\alpha,\beta\right[,\ \left|\xi_j^i\right| < c_j^i,\ i=1,...,N,\ j=1,...,n\right\} := Y.$$

Par continuité, il est clair que $Y \subset \text{int}\,X$. Inversement, on considère $\xi \in \text{int}\,X$ et on suppose par l'absurde que $\xi \notin Y$. Il y a deux cas à considérer.
Cas 1 : $\exists\ (i,j) :\ \left|\xi_j^i\right| = c_j^i$.

Il suffit de considérer une matrice de la forme $\xi^{\pm\varepsilon} = \xi \pm \varepsilon e^i \otimes e_j$. Pour ε suffisamment petit, $\xi^{\pm\varepsilon} \in X$ puisque $\xi \in \text{int}\,X$ et $|\xi - \xi^{\pm\varepsilon}| = \varepsilon$, mais $\left|(\xi^{\pm\varepsilon})_j^i\right| > c_j^i$, ce qui est absurde.
Cas 2 : $\Phi(\xi) \in \{\alpha,\beta\}$, $\left|\xi_j^i\right| < c_j^i$, $\forall\ (i,j)$.

Disons que $\Phi(\xi) = \alpha$. Comme Φ est quasiaffine et non constante, par la Proposition 2.6, Φ n'a pas de points de minimum local et donc

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \eta \in B_\varepsilon(\xi) :\ \Phi(\eta) < \alpha.$$

On est arrivé de cette façon à l'absurde.
Partie 2 : Avec les notations avant utilisées, on vérifie que $\text{Rco}\,E = X$. L'expression de $\text{int}\,\text{Rco}\,E$ suit alors de la Partie 1.

Comme les fonctions Φ, $-\Phi$ et $\xi \mapsto \left|\xi_j^i\right| - c_j^i$ sont rang un convexes et $E \subset X$ alors $\text{Rco}\,E \subset X$. Il reste à vérifier que $X \subset \text{Rco}\,E$.

En effet, il suffit de vérifier que si $\xi \in \mathbb{R}^{N\times n}$ est tel que $\Phi(\xi) \in]\alpha,\beta[$ et $\left|\xi_j^i\right| \le c_j^i$ alors $\xi \in \operatorname{Rco} E$. On considère une telle matrice ξ. De (3.1) on a qu'il existe (i,j) tel que $\left|\xi_j^i\right| < c_j^i$. En écrivant

$$\xi^t = \xi + te^i \otimes e_j$$

on a que pour certains $t_1 \le 0 \le t_2$, $\xi^{t_\nu} \in \partial X$, $\nu = 1,2$, c'est-à-dire $\Phi(\xi^{t_\nu}) \in \{\alpha,\beta\}$ ou $\left|(\xi^{t_\nu})_j^i\right| = c_j^i$. Si c'est le premier cas alors $\xi^{t_\nu} \in E$, sinon on refait le même raisonnement avec une composante (i,j) différente. Cela est encore possible par l'hypothèse (3.1). Cette condition assure aussi qu'avant d'avoir obtenu une matrice dont toutes les composantes valent en valeur absolue c_j^i, on atteindra des éléments de E ; ce-ci garantit que $\xi \in \operatorname{Rco} E$. □

On vérifie ensuite que l'hypothèse (3.1) du théorème précédent est admissible pour un choix adéquat des constantes c_j^i.

Proposition 3.3. *Soient $\Phi : \mathbb{R}^{N\times n} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction quasiaffine non constante et $K, L > 0$. Alors il existe $c_j^i > L$, $i = 1,...,N$, $j = 1,...,n$ tels que*

$$\inf\{|\Phi(\xi)| : \left|\xi_j^i\right| = c_j^i\} > K.$$

Démonstration. Une fois que Φ est quasiaffine, par le Théorème 2.5, on peut écrire

$$\Phi(\xi) = \Phi(0) + \sum_{q=1}^{N\wedge n} \sum_{\substack{1\le i_1<\cdots<i_q\le N\\ 1\le j_1<\cdots<j_q\le n}} \mu_{j_1\cdots j_q}^{i_1\cdots i_q} \det \begin{pmatrix} \xi_{j_1}^{i_1} & \cdots & \xi_{j_q}^{i_1} \\ \vdots & & \vdots \\ \xi_{j_1}^{i_q} & \cdots & \xi_{j_q}^{i_q} \end{pmatrix}.$$

Comme Φ n'est pas constante, il existe $1 \le s \le N \wedge n$, $1 \le i_1 < \cdots < i_s \le N$ et $1 \le j_1 < \cdots < j_s \le n$ tels que $\mu_{j_1\cdots j_s}^{i_1\cdots i_s} \ne 0$ et $\mu_{j_1\cdots j_q}^{i_1\cdots i_q} = 0$, $\forall\, q > s$. Sans perte de généralité on admet

$$\mu_{1\cdots s}^{1\cdots s} \ne 0. \tag{3.2}$$

On définit l'ensemble

$$\Theta = \left\{\theta \in \mathbb{R}^{N\times n} : \ \theta_j^i \in \{\pm 1\}\right\}$$

et le produit $A \odot B \in \mathbb{R}^{N\times n}$, pour des matrices $A, B \in \mathbb{R}^{N\times n}$, comme

$$(A \odot B)_j^i = A_j^i \cdot B_j^i.$$

On veut trouver une matrice $C \in \mathbb{R}^{N\times n}$ de composantes c_j^i tels que $c_j^i > L$ et

$$\xi = C \odot \theta,\ \theta \in \Theta \implies |\Phi(\xi)| > K.$$

On va démontrer que cette matrice peut être choisit de la forme $C = \tau A$ où $\tau > 0$ et, pour $t > 0$

$$\begin{array}{l} A_i^i = t \text{ si } 1 \le i \le s, \\ A_j^i = 1 \text{ sinon (i.e. si } i \ne j \text{ ou si } i = j \ge s+1). \end{array}$$

On note que

$$\begin{aligned} \Phi(\xi) &= \Phi(C \odot \theta) \\ &= \Phi(0) + \sum_{q=1}^{s} \tau^q \sum_{\substack{1\le i_1<\cdots<i_q\le N\\ 1\le j_1<\cdots<j_q\le n}} \mu_{j_1\cdots j_q}^{i_1\cdots i_q} \det \begin{pmatrix} A_{j_1}^{i_1}\theta_{j_1}^{i_1} & \cdots & A_{j_q}^{i_1}\theta_{j_q}^{i_1} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{j_1}^{i_q}\theta_{j_1}^{i_q} & \cdots & A_{j_q}^{i_q}\theta_{j_q}^{i_q} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et que pour τ et t suffisamment grands il existe $\gamma > 0$ tel que

$$|\Phi(\xi)| \ge \gamma \tau^s t^s.$$

En choisissant τ et t suffisamment grands on trouve $c_j^i > L$ et $|\Phi(\xi)| > K$, comme on voulait. □

3.2 Le cas du déterminant avec conditions sur les valeurs singulières

Le résultat principal de cette section est le THÉORÈME 3.4 ci-dessous qui généralise des résultats déjà existants (cf. REMARQUE 3.5). Ce théorème fourni une caractérisation de l'enveloppe rang un convexe de l'ensemble

$$\left\{\xi \in \mathbb{R}^{n\times n} :\ \det \xi \in \{\alpha, \beta\},\ \lambda_i(\xi) = \gamma_i,\ i = 2, ..., n\right\}, \tag{3.3}$$

où $\lambda_i(\xi),\ i = 2, ..., n$ désignent les valeurs singulières de la matrice ξ. Pour des propriétés concernant les valeurs singulières d'une matrice on se réfère à la Section 3.6.

THÉORÈME 3.4. *Soient $n \geq 2$, $\alpha \leq \beta$, $0 < \gamma_2 \leq ... \leq \gamma_n$ des constantes qui vérifient la condition $\gamma_2 \prod_{i=2}^{n} \gamma_i \geq \max\{|\alpha|, |\beta|\}$ et*

$$E = \left\{\xi \in \mathbb{R}^{n\times n} :\ \det \xi \in \{\alpha, \beta\},\ \lambda_i(\xi) = \gamma_i,\ i = 2, ..., n\right\}.$$

Alors

$$\operatorname{Rco} E = \left\{\xi \in \mathbb{R}^{n\times n} :\ \det \xi \in [\alpha, \beta],\ \prod_{i=\tau}^{n} \lambda_i(\xi) \leq \prod_{i=\tau}^{n} \gamma_i,\ \tau = 2, ..., n\right\}.$$

De plus, si $\alpha < \beta$ alors

$$\operatorname{int} \operatorname{Rco} E = \left\{\xi \in \mathbb{R}^{n\times n} :\ \det \xi \in \left]\alpha, \beta\right[,\ \prod_{i=\tau}^{n} \lambda_i(\xi) < \prod_{i=\tau}^{n} \gamma_i,\ \tau = 2, ..., n\right\}.$$

REMARQUE 3.5. (i) L'hypothèse sur les constantes α, β et γ_i n'est pas une condition restrictive si on veut que E soit non vide et qu'il contienne à la fois des éléments dont le déterminant vaut α et des éléments dont le déterminant vaut β.

(ii) Le théorème ci-dessus étend les résultats de Dacorogna-Marcellini [14, Théorème 7.18, page 187] et Dacorogna-Tanteri [20, Théorème 10.1, page 334].

En effet, dans [14], l'ensemble E considéré est l'ensemble des matrices qui ont toutes les valeurs singulières fixes, *i.e.*

$$E = \left\{\xi \in \mathbb{R}^{n\times n} :\ \lambda_i(\xi) = \gamma_i,\ i = 1, ..., n\right\}.$$

Alors le déterminant des éléments de E ne peut avoir que deux valeurs (qui sont symétriques) :

$$\xi \in E \quad \Longrightarrow \quad |\det \xi| = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i(\xi) = \prod_{i=1}^{n} \gamma_i.$$

En posant $\beta = -\alpha = \prod_{i=1}^{n} \gamma_i$ on voit que ce cas est un cas particulier du nôtre.

Pour le cas considéré dans [20], l'ensemble E s'écrit

$$E = \left\{\xi \in \mathbb{R}^{n\times n} :\ \lambda_i(\xi) = \gamma_i,\ i = 1, ..., n,\ \det \xi = \prod_{i=1}^{n} \gamma_i\right\}$$

ce qui est équivalent à faire $\alpha = \beta = \prod_{i=1}^{n} \gamma_i$ dans le THÉORÈME 3.4. On note que dans ce cas $\operatorname{int} \operatorname{Rco} E = \emptyset$. Cependant, pour les résultats d'existence de solution du Chapitre 4, on considère l'intérieur de Rco E par rapport à $\{\xi \in \mathbb{R}^{n\times n} : \ \det \xi = \alpha\}$, qu'on notera de la même façon par int Rco E.

(iii) Comme cas particulier du Théorème 3.4, on a encore le cas où $\gamma_i = \gamma,\ i = 2, ..., n$. Notons que, dans ce cas, l'hypothèse sur les constantes γ, α et β devient $\gamma^n \geq \max\{|\alpha|, |\beta|\}$ et on peut écrire

$$\operatorname{Rco} E = \left\{\xi \in \mathbb{R}^{n\times n} : \ \det \xi \in [\alpha, \beta],\ \lambda_n(\xi) \leq \gamma\right\}.$$

(iv) On note que du Théorème 3.4 on peut déduire que si

$$E = \left\{\xi \in \mathbb{R}^{n\times n} : \ \det \xi \in \{\alpha, \beta\},\ \lambda_n(\xi) = \gamma\right\}$$

ou

$$E = \left\{\xi \in \mathbb{R}^{n\times n} : \ \det \xi \in \{\alpha, \beta\},\ \lambda_n(\xi) \leq \gamma\right\},$$

on a encore

$$\operatorname{Rco} E = \left\{\xi \in \mathbb{R}^{n\times n} : \ \det \xi \in [\alpha, \beta],\ \lambda_n(\xi) \leq \gamma\right\},$$

sous l'hypothèse $\gamma^n \geq \max\{|\alpha|, |\beta|\}$.

Avant de démontrer le Théorème 3.4, on prouve le lemme suivant.

Lemme 3.6. *Soient $n \geq 2$, $\alpha < \beta$, $0 < \gamma_2 \leq ... \leq \gamma_n$ et*

$$X = \left\{\xi \in \mathbb{R}^{n\times n} : \ \det \xi \in [\alpha, \beta],\ \prod_{i=\tau}^{n} \lambda_i(\xi) \leq \prod_{i=\tau}^{n} \gamma_i,\ \tau = 2, ..., n\right\}.$$

Alors

$$\operatorname{int} X = \left\{\xi \in \mathbb{R}^{n\times n} : \ \det \xi \in \left]\alpha, \beta\right[,\ \prod_{i=\tau}^{n} \lambda_i(\xi) < \prod_{i=\tau}^{n} \gamma_i,\ \tau = 2, ..., n\right\}.$$

Démonstration. Soit

$$A = \left\{\xi \in \mathbb{R}^{n\times n} : \ \det \xi \in \left]\alpha, \beta\right[,\ \prod_{i=\tau}^{n} \lambda_i(\xi) < \prod_{i=\tau}^{n} \gamma_i,\ \tau = 2, ..., n\right\}.$$

On veut vérifier que $A = \operatorname{int} X$. Par continuité des fonctions déterminant et $\prod_{i=\tau}^{n} \lambda_i(\cdot)$ on a que $A \subset \operatorname{int} X$. Il faut alors vérifier l'autre inclusion. On considère $\xi \in \operatorname{int} X$ et on le suppose par l'absurde hors de A. D'après la Remarque 3.19, on peut écrire

$$\xi = P \begin{pmatrix} x_1 & & \\ & \ddots & \\ & & x_n \end{pmatrix} Q$$

où $P, Q \in SO(n)$ et $|x_1| \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$. En effet, $\lambda_1(\xi) = |x_1|$ et $\lambda_i(\xi) = x_i$, $i = 2, ..., n$.

Il y a deux cas à considérer.

Cas 1 : $\prod_{i=\overline{\tau}}^{n} \lambda_i(\xi) = \prod_{i=\overline{\tau}}^{n} \gamma_i$ pour un certain $\overline{\tau} \in \{2, ..., n\}$.

On note d'abord que l'égalité ci-dessus et le fait de $\gamma_i > 0,\ i = 2, ..., n$ impliquent que $x_{\overline{\tau}} \cdots x_{n-1} > 0$.

Considérons

$$\xi_\varepsilon = P \begin{pmatrix} x_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & x_{n-1} & \\ & & & x_n + \varepsilon \end{pmatrix} Q.$$

Comme $\lambda_n(\cdot)$ est une norme (cf. Théorème 3.20) en $\mathbb{R}^{n\times n}$ et $\lambda_n(\xi-\xi_\varepsilon)=\varepsilon$ on sait que, pour ε suffisamment petit, $\xi_\varepsilon \in X$. Cependant, $\prod_{i=\overline{\tau}}^{n}\lambda_i(\xi_\varepsilon)=\prod_{i=\overline{\tau}}^{n}\lambda_i(\xi)+\varepsilon x_{\overline{\tau}}\cdots x_{n-1}=\prod_{i=\overline{\tau}}^{n}\gamma_i+\varepsilon x_{\overline{\tau}}\cdots x_{n-1}>\prod_{i=\overline{\tau}}^{n}\gamma_i$. De cette inégalité résulte que $\xi_\varepsilon \notin X$ et donc on arrive à une contradiction.

Cas 2 : $\det\xi\in\{\alpha,\beta\}$, $\prod_{i=\tau}^{n}\lambda_i(\xi)<\prod_{i=\tau}^{n}\gamma_i,\ \tau=2,...,n.$

Supposons, sans perte de généralité, que $\det\xi=\alpha$. On procède comme avant. Si $x_2\cdots x_n>0$ on fait

$$\xi_\varepsilon = P\begin{pmatrix} x_1-\varepsilon & & & \\ & x_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & x_n \end{pmatrix}Q$$

et on voit que $\xi_\varepsilon\in X$ pour ε petit, mais que $\det\xi_\varepsilon<\alpha$ ce qui est absurde.

Si $x_{i^*}=0$ pour $i^*\in\{2,...,n\}$ et $x_{i^*+1}\neq 0$ alors $x_i=0$, $i=1,...,i^*$ et donc

$$\xi = P\begin{pmatrix} 0 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 0 & & & \\ & & & x_{i^*+1} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & x_n \end{pmatrix}Q.$$

On fait alors

$$\xi_\varepsilon = P\begin{pmatrix} -\varepsilon & & & & & & \\ & \varepsilon & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & \varepsilon & & & \\ & & & & x_{i^*+1} & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & x_n \end{pmatrix}Q,$$

qui est dans X pour ε petit, mais dont le déterminant vérifie : $\det\xi_\varepsilon<0=\alpha$ ce qui n'est pas possible.

Des deux cas considérés on obtient que $A=\operatorname{int}X$. □

On présente ensuite la démonstration du résultat principal de cette section, le Théorème 3.4.

Démonstration du Théorème 3.4. Soit X comme dans le Lemme 3.6, on vérifie que $X=\operatorname{Rco}E$. Une fois démontrée cette identité la représentation de $\operatorname{int}\operatorname{Rco}E$ suit du Lemme 3.6.

Comme les fonctions

$$\xi\to\pm\det\xi,\quad \xi\to\prod_{i=\nu}^{n}\lambda_i(\xi),\ \nu=2,...,n$$

sont rang un convexes on sait que X est un ensemble rang un convexe. De plus, comme $E\subset X$ on conclut que $\operatorname{Rco}E\subset X$. Il reste donc à démontrer que $X\subset\operatorname{Rco}E$.

Comme X est un ensemble borné, il suffit de vérifier que $\partial X\subset\operatorname{Rco}E$. (L'expression de ∂X est connue par le Lemme 3.6.) Soit $\xi\in\partial X$. Comme les fonctions qui définissent X sont $SO(n)$

invariantes, par la REMARQUE 3.19, on peut supposer ξ de la forme

$$\xi = \begin{pmatrix} x_1 & & \\ & \ddots & \\ & & x_n \end{pmatrix}$$

où $|x_1| \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$.

On démontre l'inclusion souhaitée par récurrence sur n. On commence par la dimension 2. Il y a deux cas à considérer.

Cas 1 : $\det \xi \in]\alpha, \beta[\,,\ \lambda_2(\xi) = \gamma_2$.

Dans ce cas on écrit

$$\xi = \begin{pmatrix} x_1 & \\ & x_2 \end{pmatrix},$$

où $|x_1| \leq x_2 = \gamma_2$ et $x_1 \in \left] \frac{\alpha}{\gamma_2}, \frac{\beta}{\gamma_2} \right[$. Alors, $x_1 = s\frac{\alpha}{\gamma_2} + (1-s)\frac{\beta}{\gamma_2}$ pour certain $s \in]0,1[$ et donc on écrit $\xi = s\,\xi_{t_1} + (1-s)\,\xi_{t_2}$, où

$$\xi_{t_1} = \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{\gamma_2} & 0 \\ 0 & \gamma_2 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \xi_{t_2} = \begin{pmatrix} \frac{\beta}{\gamma_2} & 0 \\ 0 & \gamma_2 \end{pmatrix}.$$

Évidemment $\det \xi_{t_i} \in \{\alpha, \beta\}$. Comme, par hypothèse, $\gamma_2^2 \geq \max\{|\alpha|, |\beta|\}$, on déduit que $\lambda_2(\xi_{t_i}) = \gamma_2$. On assure, de cette façon, que ξ peut être écrit comme combinaison rang un convexe d'éléments de E d'où on conclut que $\xi \in \operatorname{Rco} E$.

Cas 2 : $\det \xi \in \{\alpha, \beta\}\,,\ \lambda_2(\xi) < \gamma_2$.

On écrit

$$\xi = \begin{pmatrix} x_1 & \\ & x_2 \end{pmatrix},$$

avec $x_1 x_2 \in \{\alpha, \beta\}$ et $|x_1| \leq x_2 < \gamma_2$. On considère, maintenant,

$$\xi_t = \begin{pmatrix} x_1 & t \\ 0 & x_2 \end{pmatrix}.$$

On a, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\det \xi_t = \det \xi$. D'ailleurs, comme $\lambda_2(\xi_0) = \lambda_2(\xi) < \gamma_2$ et $\lambda_2(\cdot)$ est une norme dans $\mathbb{R}^{2\times 2}$, on sait qu'il existe $t_1 < 0 < t_2$ tels que $\lambda_2(\xi_{t_i}) = \gamma_2$. Comme $\xi_{t_2} - \xi_{t_1}$ a rang un, on conclut que $\xi \in \operatorname{Rco} E$.

On prouve ensuite que $\partial X \subset \operatorname{Rco} E$ dans le cas de la dimension n. On considère deux cas.

Cas 1 : $\det \xi \in [\alpha, \beta]$ et $\prod_{i=\overline{\tau}}^{n} \lambda_i(\xi) = \prod_{i=\overline{\tau}}^{n} \gamma_i$ pour un certain $\overline{\tau} \in \{2, ..., n\}$.

On peut écrire ξ par blocs :

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi_A & \\ & \xi_B \end{pmatrix}$$

où $\xi_A = \operatorname{diag}(x_1, ..., x_{\overline{\tau}-1})$ et $\xi_B = \operatorname{diag}(x_{\overline{\tau}}, ..., x_n)$. Le but est maintenant d'appliquer l'hypothèse de récurrence à ξ_A et ξ_B. Voyons que ξ_A est dans les conditions pour appliquer l'hypothèse de récurrence.

Comme $\gamma_2 \prod_{i=2}^{n} \gamma_i \geq \max\{|\alpha|, |\beta|\}$ alors, $\gamma_2 \prod_{i=2}^{\overline{\tau}-1} \gamma_i \geq \max\left\{ \frac{|\alpha|}{\gamma_{\overline{\tau}} \cdots \gamma_n}, \frac{|\beta|}{\gamma_{\overline{\tau}} \cdots \gamma_n} \right\}$.

De plus, $\det \xi_A = \dfrac{\det \xi}{x_{\overline{\tau}} \cdots x_n} = \dfrac{\det \xi}{\gamma_{\overline{\tau}} \cdots \gamma_n} \in \left[\dfrac{\alpha}{\gamma_{\overline{\tau}} \cdots \gamma_n}, \dfrac{\beta}{\gamma_{\overline{\tau}} \cdots \gamma_n}\right]$ et

$$\prod_{i=\tau}^{\overline{\tau}-1} \lambda_i(\xi_A) = \frac{\prod_{i=\tau}^{n} \lambda_i(\xi)}{\prod_{i=\overline{\tau}}^{n} \lambda_i(\xi)} = \frac{\prod_{i=\tau}^{n} \lambda_i(\xi)}{\prod_{i=\overline{\tau}}^{n} \gamma_i} \leq \frac{\prod_{i=\tau}^{n} \gamma_i}{\prod_{i=\overline{\tau}}^{n} \gamma_i} = \prod_{i=\tau}^{\overline{\tau}-1} \gamma_i, \ \tau = 2, ..., \overline{\tau} - 1.$$

Regardons maintenant la matrice ξ_B. On a $\det \xi_B = \gamma_{\overline{\tau}} \cdots \gamma_n$ et

$$\prod_{i=\tau}^{n-\overline{\tau}+1} \lambda_i(\xi_B) = \prod_{i=\tau+\overline{\tau}-1}^{n} x_i \leq \prod_{i=\tau+\overline{\tau}-1}^{n} \gamma_i, \ \tau = 2, ..., n - \overline{\tau} + 1.$$

Comme $\gamma_{\overline{\tau}+1} \geq \gamma_{\overline{\tau}}$ alors, $\gamma_{\overline{\tau}+1} \displaystyle\prod_{i=2}^{n-\overline{\tau}+1} \gamma_{i+\overline{\tau}-1} \geq \gamma_{\overline{\tau}} \cdots \gamma_n$. Donc ξ_B est aussi dans les conditions d'application de l'hypothèse de récurrence et on conclut que $\xi \in \operatorname{Rco} E$.

Cas 2 : $\det \xi \in \{\alpha, \beta\}$ et $\displaystyle\prod_{i=\tau}^{n} \lambda_i(\xi) < \prod_{i=\tau}^{n} \gamma_i, \ \tau = 2, ..., n$.

Soit

$$Y = \left\{ \eta \in \mathbb{R}^{n \times n} : \ \det \eta = \det \xi, \ \prod_{i=\tau}^{n} \lambda_i(\eta) \leq \prod_{i=\tau}^{n} \gamma_i, \ \tau = 2, ..., n \right\}.$$

On a que, pour la topologie induite par $W = \{\eta \in \mathbb{R}^{n \times n} : \ \det \eta = \det \xi\}$,

$$\operatorname{int} Y = \left\{ \eta \in \mathbb{R}^{n \times n} : \ \det \eta = \det \xi, \ \prod_{i=\tau}^{n} \lambda_i(\eta) < \prod_{i=\tau}^{n} \gamma_i, \ \tau = 2, ..., n \right\}.$$

En effet, la continuité des fonctions $\displaystyle\prod_{i=\tau}^{n} \lambda_i(\cdot)$ assure que $\operatorname{int} Y$ contient l'ensemble du deuxième membre. Pour l'autre inclusion on raisonne par l'absurde. On considère $\eta \in \operatorname{int} Y$ (en particulier $\eta \in Y$) et on admet que $\displaystyle\prod_{i=\overline{\tau}}^{n} \lambda_i(\eta) = \prod_{i=\overline{\tau}}^{n} \gamma_i$ pour un certain $\overline{\tau} \in \{2, ..., n\}$. En écrivant

$$\eta = P \begin{pmatrix} y_1 & & \\ & \ddots & \\ & & y_n \end{pmatrix} Q$$

pour P et Q dans $SO(n)$ et $|y_1| \leq y_2 \leq \cdots \leq y_n$, on définit

$$\eta_\varepsilon = P \begin{pmatrix} y_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & y_{\overline{\tau}-1} & \varepsilon & & \\ & & 0 & y_{\overline{\tau}} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & y_n \end{pmatrix} Q,$$

qui vérifie $\eta_\varepsilon \in W$ et $\lambda_n(\eta_\varepsilon - \eta) = \varepsilon$, ce qui assure, pour ε petit, que $\eta_\varepsilon \in Y$, puisque, par hypothèse, $\eta \in \operatorname{int} Y$. Mais $\displaystyle\prod_{i=\overline{\tau}}^{n} \lambda_i(\eta_\varepsilon) > \prod_{i=\overline{\tau}}^{n} \gamma_i$ donc $\eta_\varepsilon \notin Y$ qui est une contradiction. On termine ainsi la preuve de l'expression de $\operatorname{int} Y$.

On remarque, maintenant, que ξ comme dans l'hypothèse, appartient à $\operatorname{int} Y$. Définissons

$$\xi_t = \begin{pmatrix} x_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & x_{n-1} & t \\ & & 0 & x_n \end{pmatrix}.$$

On a $\det \xi_t = \det \xi$, quelque soit $t \in \mathbb{R}$. Alors, $\xi_t \in W, \forall\, t \in \mathbb{R}$. Mais, comme Y est borné, on peut assurer que $\xi = s\,\xi_{t_1} + (1-s)\xi_{t_2}$ pour certains $s \in]0,1[$ et $\xi_{t_i} \in \partial Y$. Alors ξ_{t_i} sont dans les conditions du premier cas et donc $\xi_{t_i} \in \operatorname{Rco} E$. On conclut ainsi que ξ est aussi un élément de $\operatorname{Rco} E$. □

3.3 Extension du cas d'un ensemble défini par une fonction quasiaffine

Dans cette section, ainsi que dans la Section 3.1, on considère l'enveloppe rang un convexe d'un sous-ensemble E de

$$\left\{\xi \in \mathbb{R}^{N\times n} :\ \Phi(\xi) \in \{\alpha, \beta\}\right\},$$

où Φ est une fonction quasiaffine et E est un ensemble borné. On veux maintenant imposer des conditions sur les valeurs singulières des matrices dans la définition de E. Au contraire du cas particulier étudié dans la Section 3.2, où Φ est le déterminant, maintenant on ne pourra qu'imposer les valeurs singulières de certaines sous-matrices qu'on décrira plus bas. Donc, de ce point de vue, le résultat obtenu est moins général que celui de la section précédente.

On commence par introduire des notations qu'on va utiliser dans cette section. Soit $\Phi : \mathbb{R}^{N\times n} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction quasiaffine non constante. Par le Théorème 2.5, on peut écrire

$$\Phi(\xi) = \Phi(0) + \sum_{k=1}^{N\wedge n} < A^k; \operatorname{adj}_k \xi >,$$

où $N \wedge n = \min\{N, n\}$, $A^k \in \mathbb{R}^{\sigma(k)}$, $\sigma(k) = \binom{N}{k} \times \binom{n}{k}$, $\operatorname{adj}_k\xi$ est la matrice des mineurs de ξ d'ordre k et $< \,;\, >$ dénote le produit scalaire.

Soit $l = \max\{k :\ A^k \neq 0\}$. On fixe $(s,t) \in \mathbb{R}^{\sigma(l)}$ tel que $(A^l)^s_t \neq 0$. On rappelle que la composante (s,t) de $\operatorname{adj}_l\xi$ est le produit de $(-1)^{s+t}$ par le déterminant d'une sous-matrice carrée d'ordre l de ξ qui on note par $\hat{\xi}$: $(\operatorname{adj}_l\xi)^s_t = (-1)^{s+t} \det \hat{\xi}$.

On note encore par I l'ensemble des indices des composantes de la matrice ξ qui ne sont pas dans la matrice $\hat{\xi}$:

$$I = \{(i,j) \in \{1,...,N\} \times \{1,...,n\} :\ \xi^i_j \notin \hat{\xi}\}.$$

Théorème 3.7. *Soient $\Phi : \mathbb{R}^{N\times n} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction quasiaffine non constante, $\alpha \leq \beta$, $c^i_j > 0,\ \forall\ (i,j) \in I$, $\gamma > 0$ une constante. Supposons satisfaites les conditions*

$$\sup\left\{\Phi(\xi) :\ \left|\xi^i_j\right| = c^i_j,\ \forall\ (i,j) \in I,\ \lambda_i(\hat{\xi}) = \gamma,\ \forall\ i = 1,...,l,\ (A^l)^s_t(\operatorname{adj}_l\xi)^s_t < 0\right\} \leq \alpha \tag{3.4}$$

et

$$\beta \leq \inf\left\{\Phi(\xi) :\ \left|\xi^i_j\right| = c^i_j,\ \forall\ (i,j) \in I,\ \lambda_i(\hat{\xi}) = \gamma,\ \forall\ i = 1,...,l,\ (A^l)^s_t(\operatorname{adj}_l\xi)^s_t > 0\right\} \tag{3.5}$$

et on définit

$$E = \left\{\xi \in \mathbb{R}^{N\times n} :\ \Phi(\xi) \in \{\alpha,\beta\},\ \left|\xi^i_j\right| \leq c^i_j,\ \forall\ (i,j) \in I,\ \lambda_i(\hat{\xi}) = \gamma,\ i = 2,...,l\right\}.$$

Alors

$$\operatorname{Rco} E=\left\{\xi\in\mathbb{R}^{N\times n}:\ \Phi(\xi)\in[\alpha,\beta],\ \left|\xi_j^i\right|\le c_j^i,\ \forall\ (i,j)\in I,\ \lambda_l(\hat{\xi})\le\gamma\right\}.$$

De plus, si $\alpha<\beta$ alors

$$\operatorname{int}\operatorname{Rco} E=\left\{\xi\in\mathbb{R}^{N\times n}:\ \Phi(\xi)\in]\alpha,\beta[,\ \left|\xi_j^i\right|< c_j^i,\ \forall\ (i,j)\in I,\ \lambda_l(\hat{\xi})<\gamma\right\}.$$

Remarque 3.8. (i) Dans le cas où Φ est affine, c'est-à-dire quand $l=1$, alors l'ensemble E doit être interprété comme

$$E=\left\{\xi\in\mathbb{R}^{N\times n}:\ \Phi(\xi)\in\{\alpha,\beta\},\ \left|\xi_j^i\right|\le c_j^i,\ \forall\ (i,j)\in I\right\}$$

et

$$\operatorname{Rco} E=\left\{\xi\in\mathbb{R}^{N\times n}:\ \Phi(\xi)\in[\alpha,\beta],\ \left|\xi_j^i\right|\le c_j^i,\ \forall\ (i,j)\in I\right\}.$$

(ii) Si $N=n$ et $\Phi(\xi)$ dépend du déterminant de ξ alors

$$E=\left\{\xi\in\mathbb{R}^{n\times n}:\ \Phi(\xi)\in\{\alpha,\beta\},\ \lambda_i(\xi)=\gamma,\ i=2,...,n\right\}.$$

(iii) Moins généralement que dans le cas où Φ est la fonction déterminant, considéré dans la section précédente, ici la valeur imposée pour les différentes valeurs singulières doit être la même.

Démonstration. Partie 1. Pour $\alpha<\beta$, soit

$$X=\left\{\xi\in\mathbb{R}^{N\times n}:\ \Phi(\xi)\in[\alpha,\beta],\ \left|\xi_j^i\right|\le c_j^i,\ \forall\ (i,j)\in I,\ \lambda_l(\hat{\xi})\le\gamma\right\}.$$

On vérifie que

$$\operatorname{int} X=\left\{\xi\in\mathbb{R}^{N\times n}:\ \Phi(\xi)\in]\alpha,\beta[,\ \left|\xi_j^i\right|< c_j^i,\ \forall\ (i,j)\in I,\ \lambda_l(\hat{\xi})<\gamma\right\}.$$

Par continuité, c'est clair que $\operatorname{int} X$ contient l'ensemble du deuxième membre. On considère maintenant un élément $\xi\in\operatorname{int} X$ (donc $\xi\in X$) et on suppose par l'absurde que ξ n'est pas dans l'ensemble du deuxième membre. On divise le problème en trois cas.
Cas 1 : $\left|\xi_j^i\right|=c_j^i$ pour un certain $(i,j)\in I$.

Pour obtenir l'absurde il suffit de considérer une matrice de la forme $\xi^{\pm\varepsilon}=\xi\pm\varepsilon e^i\otimes e_j$ de façon que $\left|(\xi^{\pm\varepsilon})_j^i\right|>c_j^i$. En fait $|\xi^{\pm\varepsilon}-\xi|=\varepsilon$, mais $\xi^{\pm\varepsilon}\notin X$.
Cas 2 : $\lambda_l(\hat{\xi})=\gamma$.

Dans ce cas si on écrit

$$\hat{\xi}=P\begin{pmatrix} x_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & x_{l-1} & \\ & & & \gamma\end{pmatrix}Q,$$

où $P,Q\in SO(l)$ et $|x_1|\le x_2\le\cdots\le x_{l-1}\le\gamma$ alors il suffit de considérer $\xi^\varepsilon\in\mathbb{R}^{N\times n}$ tel que

$$\widehat{\xi^\varepsilon}=P\begin{pmatrix} x_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & x_{l-1} & \\ & & & \gamma+\varepsilon\end{pmatrix}Q$$

et $(\xi^\varepsilon)_j^i=\xi_j^i,\ \forall\ (i,j)\in I$. Comme avant on arrive à l'absurde.
Cas 3 : $\Phi(\xi)\in\{\alpha,\beta\}$.

La fonction Φ n'a pas d'extrema relatifs (cf. Proposition 2.6) donc, si un voisinage de ξ est donné, on peut trouver $\eta\in\mathbb{R}^{N\times n}$ dans ce voisinage tel que $\Phi(\eta)\notin[\alpha,\beta]$, ce qui est absurde.

On a démontré ainsi l'expression de $\operatorname{int} X$.

Partie 2. Avec les notations de la Partie 1, on démontre que $X = \operatorname{Rco} E$.

Comme $E \subset X$ et X est rang un convexe alors $\operatorname{Rco} E \subset X$. On vérifie maintenant l'autre inclusion. On considère trois cas.

Cas 1 : $\Phi(\xi) \in]\alpha, \beta[,\ \left|\xi_j^i\right| \leq c_j^i,\ \forall\ (i,j) \in I,\ \lambda_i(\hat{\xi}) = \gamma,\ \forall\ i = 2, ..., l.$

On commence par noter qu'on peut se réduire au cas où $\left|\xi_j^i\right| = c_j^i,\ \forall\ (i,j) \in I$. En fait, on peut faire, d'une façon itérative, faire chaque composante $\xi_j^i,\ (i,j) \in I$, atteindre en valeur absolue la valeur c_j^i. Si dans ce processus la fonction Φ prend la valeur α ou β alors on peut conclure que $\xi \in \operatorname{Rco} E$. Sinon il reste à considérer le cas où $\Phi(\xi) \in]\alpha, \beta[,\ \left|\xi_j^i\right| = c_j^i,\ \forall\ (i,j) \in I$ et $\lambda_i(\hat{\xi}) = \gamma,\ \forall\ i = 2, ..., l.$

Dans ce cas, on peut écrire

$$\hat{\xi} = P \begin{pmatrix} x_1 & & & \\ & \gamma & & \\ & & \ddots & \\ & & & \gamma \end{pmatrix} Q,$$

où $P, Q \in SO(l)$ et $|x_1| < \gamma$.

On considère une matrice $\eta \in \mathbb{R}^{N\times n}$ telle que $\eta_j^i = 0,\ \forall\ (i,j) \in I$ et

$$\hat{\eta} = P \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix} Q.$$

Si on définit $\mu_t = \xi + t\eta$, quand on fait t s'éloigner de 0, en prenant des valeurs positives et négatives, on a, par les hypothèses (3.4) et (3.5), qu'avant que $\lambda_1(\widehat{\mu_t})$ atteint la valeur γ, la fonction Φ doit atteindre un des valeurs α ou β. Donc on conclut que $\xi \in \operatorname{Rco} E$.

Cas 2 : $\Phi(\xi) \in [\alpha, \beta],\ \left|\xi_j^i\right| \leq c_j^i,\ \forall\ (i,j) \in I,\ \lambda_l(\hat{\xi}) = \gamma.$

On démontre par récurrence sur $k \geq 2$ que si $\Phi(\xi) \in [\alpha, \beta],\ \left|\xi_j^i\right| \leq c_j^i,\ \forall\ (i,j) \in I,\ \lambda_i(\hat{\xi}) = \gamma,\ \forall\ i = k, ..., l$ alors $\xi \in \operatorname{Rco} E$.

Pour $k = 2$ on a vu que la condition est vraie dans le Cas 1. On suppose maintenant la condition pour un certain k et on la prouve pour $k+1$. Soit $\xi \in \mathbb{R}^{N\times n}$ tel que $\Phi(\xi) \in [\alpha, \beta],\ \left|\xi_j^i\right| \leq c_j^i,\ \forall\ (i,j) \in I,\ \lambda_i(\hat{\xi}) = \gamma,\ \forall\ i = k+1, ..., l$ et $\lambda_k(\hat{\xi}) < \gamma$.

On écrit

$$\hat{\xi} = P \begin{pmatrix} x_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & x_k & & & \\ & & & \gamma & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \gamma \end{pmatrix} Q$$

avec $P, Q \in SO(l)$ et on considère une matrice $\eta \in \mathbb{R}^{N\times n}$ non nulle telle que $< D\Phi(\xi); \eta >= 0$, $\operatorname{rang}(\eta) = 1,\ \eta_j^i = 0,\ \forall\ (i,j) \in I$ et $\hat{\eta}$ ait la forme

$$\hat{\eta} = P \begin{pmatrix} \eta^* & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q,$$

où $\eta^* \in \mathbb{R}^{k\times k}$.

Par le Théorème 2.5 (iii), on a que $\Phi(\xi+t\eta)=\Phi(\xi)+t<D\Phi(\xi);\eta>=\Phi(\xi)\in[\alpha,\beta]$ et $\left|(\xi+t\eta)^i_j\right|=\left|\xi^i_j\right|\leq c^i_j,\ \forall\ (i,j)\in I$. Comme λ_k est une norme dans $\mathbb{R}^{k\times k}$, on aura, pour certains $t_1<0<t_2$, $\lambda_j(\widehat{\xi+t_\nu\eta})=\gamma,\ \forall\ j=k,...,l$. Donc, on peut appliquer l'hypothèse de récurrence, conclure que $\xi+t_\nu\eta\in \operatorname{Rco}E$ et d'ailleurs que $\xi\in\operatorname{Rco}E$, comme on voulait.

Cas 3 : $\Phi(\xi)\in[\alpha,\beta],\ \left|\xi^i_j\right|\leq c^i_j,\ \forall\ (i,j)\in I,\ \lambda_l(\hat{\xi})<\gamma$.

Dans ce cas, il suffit de prendre une matrice $\eta\in\mathbb{R}^{N\times n}$ non nulle telle que $<D\Phi(\xi);\eta>=0$, $\operatorname{rang}(\eta)=1$ et $\eta^i_j=0,\ \forall\ (i,j)\in I$. Comme λ_l est une norme dans $\mathbb{R}^{l\times l}$, il existe $t_1<0<t_2$ tels que $\lambda_l(\widehat{\xi+t_\nu\eta})=\gamma$. Par le Cas 2, les éléments $\xi+t_\nu\eta\in\operatorname{Rco}E$ et donc $\xi\in\operatorname{Rco}E$. □

On démontre maintenant que les hypothèses (3.4) et (3.5) sont admissibles dans le sens de la proposition suivante.

Proposition 3.9. *Soient $N,n\in\mathbb{N}$, $\alpha\leq\beta$, $c^i_j>0,\ \forall\ (i,j)\in I$ et $\Phi:\mathbb{R}^{N\times n}\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction quasiaffine non constante. Alors il existe $\gamma>0$ qui vérifie (3.4) et (3.5).*

Démonstration. On démontre l'inégalité (3.4), l'autre est analogue. Pour une constante γ à déterminer, supposons $\xi\in\mathbb{R}^{N\times n}$ tel que $\left|\xi^i_j\right|=c^i_j,\ \forall\ (i,j)\in I,\ \lambda_i(\hat{\xi})=\gamma,\ \forall\ i=1,...,l$ et $(A^l)^s_t(\operatorname{adj}_l\xi)^s_t<0$. On veut vérifier que $\Phi(\xi)\leq\alpha$. Sans perte de généralité, on suppose ξ tel que

$$\hat{\xi}=\begin{pmatrix}\gamma & & \\ & \ddots & \\ & & \gamma\end{pmatrix}.$$

On a

$$\begin{aligned}\Phi(\xi) &= \Phi(0)+\sum_{k=1}^{l}<A^k;\operatorname{adj}_k\xi> \\ &= \Phi(0)+\sum_{k=1}^{l-1}<A^k;\operatorname{adj}_k\xi>+\sum_{(i,j)\neq(s,t)}(A^l)^i_j(\operatorname{adj}_l\xi)^i_j+(A^l)^s_t(-1)^{s+t}\det\hat{\xi}.\end{aligned}$$

Donc, ce qu'on veut vérifier est

$$\gamma^l\geq\frac{1}{|(A^l)^s_t|}\left(\Phi(0)+\sum_{k=1}^{l-1}<A^k;\operatorname{adj}_k\xi>+\sum_{(i,j)\neq(s,t)}(A^l)^i_j(\operatorname{adj}_l\xi)^i_j-\alpha\right).$$

On fait maintenant quelques majorations :

$$<A^k;\operatorname{adj}_k\xi>\leq\left|<A^k;\operatorname{adj}_k\xi>\right|\leq\left|A^k\right|\left|\operatorname{adj}_k\xi\right|=\left|A^k\right|\sqrt{\sum_{i,j}((\operatorname{adj}_k\xi)^i_j)^2}.$$

Comme pour chaque (i,j), $(\operatorname{adj}_k\xi)^i_j$ est le déterminant d'une sous-matrice de ξ d'ordre k, on peut majorer $\sum_{i,j}((\operatorname{adj}_k\xi)^i_j)^2$ par un polynôme en γ de degré k^2, avec coefficients positifs et qu'on va noter par $p_k(\gamma)$. On a alors

$$<A^k;\operatorname{adj}_k\xi>\leq\left|A^k\right|\sqrt{p_k(\gamma)}.$$

D'autre part, pour $(i,j)\neq(s,t)$, on a $(A^l)^i_j(\operatorname{adj}_l\xi)^i_j\leq\left|(A^l)^i_j\right|\left|(\operatorname{adj}_l\xi)^i_j\right|$, mais $\left|(\operatorname{adj}_l\xi)^i_j\right|$ peut être écrit comme la valeur absolue du déterminant d'une sous-matrice de ξ d'ordre l différente de $\hat{\xi}$, puisque $(i,j) \neq (s,t)$. Donc cette sous-matrice a au moins une ligne ou une colonne de composantes en I et alors

$$(A^l)^i_j (\mathrm{adj}_l \xi)^i_j \leq \left|(A^l)^i_j\right| q_{ij}(\gamma),$$

où q_{ij} est un polynôme à coefficients positifs de degré plus petit ou égal à $l-1$.

Donc il suffit d'assurer qu'il existe γ qui vérifie

$$\gamma^l \geq \frac{1}{|(A^l)^s_t|} \left(\Phi(0) + \sum_{k=1}^{l-1} \left|A^k\right| \sqrt{p_k(\gamma)} + \sum_{(i,j)\neq(s,t)} \left|(A^l)^i_j\right| q_{ij}(\gamma) - \alpha \right),$$

ce qui est possible pour γ suffisamment grand. □

3.4 Surfaces minimales

On considère dans cette section des ensembles de la forme

$$\{\xi \in \mathbb{R}^{(n+1)\times n} : \ \mathrm{adj}_n \xi \in S\}.$$

Comme déjà remarqué, $\mathrm{adj}_n Du(x)$ représente la normale à la surface paramétrée par l'application $u : \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$.

On calcule l'enveloppe rang un convexe des ensembles de la forme précédente et, dans une deuxième étape (cf. Théorème 3.11), on introduira des contraintes sur cet ensemble pour le rendre borné, condition qui s'avère importante pour obtenir des résultats d'existence (cf. Chapitre 4). On commence par le cas sans contraintes.

Proposition 3.10. *Soit* $S \subset \mathbb{R}^{n+1}$ *tel que* $0 \in S \cup \mathrm{int}(\mathrm{co}\, S)$ *ou* $0 \notin \mathrm{co}\, S$. *Soit*

$$E = \{\xi \in \mathbb{R}^{(n+1)\times n} : \ \mathrm{adj}_n \xi \in S\}$$

alors

$$\mathrm{Rco}\, E = \{\xi \in \mathbb{R}^{(n+1)\times n} : \ \mathrm{adj}_n \xi \in \mathrm{co}\, S\}.$$

Démonstration. Soit $X = \{\xi \in \mathbb{R}^{(n+1)\times n} : \ \mathrm{adj}_n \xi \in \mathrm{co}\, S\}$. On a $E \subset X$. Comme $\mathrm{co}\, S$ est convexe et adj_n est composée par $n+1$ fonctions quasiaffines alors X est rang un convexe et on obtient que $\mathrm{Rco}\, E \subset X$. Ensuite on vérifie l'autre inclusion. Il y a deux cas à considérer.
Cas 1 : $\xi \in X$ tel que $\mathrm{adj}_n \xi \neq 0$. On peut supposer $\mathrm{adj}_n \xi \in \mathrm{co}\, S \setminus S$.

Soit $x = \mathrm{adj}_n \xi \neq 0$. Par le théorème de Carathéodory on peut écrire

$$x = \sum_{i=1}^{n+2} \lambda_i x_i \text{ pour certains } \lambda_i \geq 0 \text{ avec } \sum_{i=1}^{n+2} \lambda_i = 1 \text{ et } x_i \in S.$$

Pour certain $1 \leq k \leq n+2$, $\displaystyle\sum_{i=1,\, i\neq k}^{n+2} \lambda_i x_i \neq 0$. Supposons sans perte de généralité $k=1$. On écrit alors

$$x = \lambda_1 x_1 + (1-\lambda_1) \sum_{i=2}^{n+2} \frac{\lambda_i x_i}{1-\lambda_1} = \lambda_1 x_1 + (1-\lambda_1) y_1.$$

Par le Lemme 1.11 de Dacorogna [11, page 135] et puisque $\mathrm{adj}_n \xi \neq 0$, il existe des matrices $B, C \in \mathbb{R}^{(n+1)\times n}$ tels que $\mathrm{rang}(B-C) = 1$, $\mathrm{adj}_n B = x_1$ et $\mathrm{adj}_n C = y_1$. Donc $B \in E$ et pour conclure que $\xi \in \mathrm{Rco}\, E$ il suffit de vérifier que $C \in \mathrm{Rco}\, E$. Pour cela on applique le lemme avant mentionné à y_1 qu'on remarque être non nul. Après un nombre fini d'itérations de ce procès on conclut le résultat.

Cas 2 : $\xi \in X$ tel que $\mathrm{adj}_n\xi = 0$. En particulier $0 = \mathrm{adj}_n\xi \in \mathrm{co}\, S$. Supposons que $0 \notin S$, sinon $\xi \in E$. Alors, par hypothèse, $0 = \mathrm{adj}_n\xi \in \mathrm{int}(\mathrm{co}\, S)$.

On écrit, pour $P \in O(n+1)$ et $Q \in O(n)$ (cf. THÉORÈME 3.18),

$$\xi = P \begin{pmatrix} \lambda_1(\xi) & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n(\xi) \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} Q.$$

Puisque $\mathrm{adj}_n\xi = 0$ on a $\lambda_1(\xi) = 0$. On procède par récurrence. Si $\lambda_2(\xi) > 0$ on considère les matrices

$$\xi_\pm = P \begin{pmatrix} \pm\varepsilon & & & \\ & \lambda_2(\xi) & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n(\xi) \\ 0 & & \cdots & 0 \end{pmatrix} Q.$$

Comme $|\mathrm{adj}_n(\xi_\pm)| = \varepsilon\lambda_2(\xi)\cdots\lambda_n(\xi)$, pour ε suffisamment petit alors $\xi_\pm \in X$ et, par le Cas 1, $\xi_\pm \in \mathrm{Rco}\, E$. Donc $\xi \in \mathrm{Rco}\, E$. Si $\lambda_k(\xi) = 0$ et $\lambda_{k+1}(\xi) \neq 0$ alors de la même façon qu'avant on vérifie que ξ peut être écrit comme combinaison rang un convexe de deux matrices qui ont la même adjugé que ξ et $\lambda_k \neq 0$. Le résultat suit par induction. □

On considère ensuite le cas où S est le bord d'un ensemble donné. Ceci sera utile pour traiter certains problèmes de minimisation étudiés au Chapitre 5. Nous aurons besoin de travailler avec des ensembles E bornés. A cet effet on introduit une condition sur la plus grande valeur singulière. Comme il est difficile de calculer l'enveloppe rang un convexe de l'ensemble obtenu on se contentera d'une partie de cet enveloppe qui s'avérera suffisante.

THÉORÈME 3.11. *Soit C un ensemble ouvert et borné de $\mathbb{R}^{n+1}$ et*

$$E = \left\{\xi \in \mathbb{R}^{(n+1)\times n} :\ \mathrm{adj}_n\xi \in \partial\overline{C},\ \lambda_n(\xi) \le \gamma\right\},$$

où $\gamma > 0$ est une constante telle que

$$|y| \le \gamma^n,\ \forall\, y \in \overline{C}. \tag{3.6}$$

Alors $\mathrm{Rco}\, E$ contient l'ensemble

$$K = \left\{\xi \in \mathbb{R}^{(n+1)\times n} :\ \mathrm{adj}_n\xi \in \overline{C},\ \lambda_n(\xi) \le \gamma\right\}.$$

De plus, sous l'hypothèse $0 \notin \partial\overline{C}$,

$$\mathrm{int}\, K = \left\{\xi \in \mathbb{R}^{(n+1)\times n} :\ \mathrm{adj}_n\xi \in \mathrm{int}\,\overline{C},\ \lambda_n(\xi) < \gamma\right\}.$$

DÉMONSTRATION. Partie 1 : $K \subset \mathrm{Rco}\, E$. Soit $\xi \in K$. Si $\mathrm{adj}_n\xi \in \partial\overline{C}$ alors $\xi \in E \subset \mathrm{Rco}\, E$. Sinon il y a deux cas à considérer.
Cas 1 : $\mathrm{adj}_n\xi \in \mathrm{int}\,\overline{C}$, $\lambda_i(\xi) = \gamma,\ i = 2, ..., n$.

Par le théorème de décomposition (cf. THÉORÈME 3.18) on peut écrire $\xi = PLQ$, où $P \in O(n+1)$, $Q \in SO(n)$ et $L \in \mathbb{R}^{(n+1)\times n}$ a la forme suivante

$$L = \begin{pmatrix} \lambda_1(\xi) & & & \\ & \gamma & & \\ & & \ddots & \\ & & & \gamma \\ 0 & \cdots & & 0 \end{pmatrix}.$$

On définit $\xi_t = PL_tQ$ où

$$L_t = \begin{pmatrix} \lambda_1(\xi)+t & & & \\ & \gamma & & \\ & & \ddots & \\ & & & \gamma \\ 0 & & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Comme

$$|\mathrm{adj}_n\xi| = \prod_{i=1}^{n}\lambda_i(\xi),\ \forall\ \xi \in \mathbb{R}^{(n+1)\times n}$$

alors

$$|\mathrm{adj}_n\xi_t| = |\lambda_1(\xi)+t|\,\gamma^{n-1}.$$

Donc, la condition (3.6) implique qu'il existe $t_1 < 0 < t_2$ tels que $\xi_{t_\nu} \in E$. Comme $\mathrm{rang}(\xi_{t_1} - \xi_{t_2}) = 1$, on obtient $\xi \in \mathrm{Rco}\,E$.

Cas 2 : $\mathrm{adj}_n\xi \in \mathrm{int}\,\overline{C}$, $\lambda_i(\xi) = \gamma,\ i = k, ..., n$ et $\lambda_{k-1}(\xi) < \gamma$ ($k \in \{2, ..., n+1\}$, si $k = n+1$ on doit interpréter l'hypothèse comme $\lambda_n(\xi) < \gamma$).

On procède par récurrence. Pour $k = 2$ on a que $\xi \in \mathrm{Rco}\,E$ par le Cas 1. Supposons $k > 2$. On considère, comme avant, les matrices de la forme

$$\xi_t = PL_tQ = P\begin{pmatrix} \lambda_1(\xi) & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_{k-1}(\xi)+t & & & \\ & & & \gamma & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \gamma \\ 0 & & \cdots & & & 0 \end{pmatrix}Q.$$

Pour certains $t_1 < 0 < t_2$ on trouve des matrices ξ_{t_ν} qui diffèrent de rang un et tels que $\lambda_n(\xi_{t_\nu}) \le \gamma$ et ou $\mathrm{adj}_n(\xi_{t_\nu}) \in \partial\overline{C}$ ou $\lambda_j(\xi_{t_\nu}) = \gamma,\ j = k-1, ..., n$. Dans le premier cas il suit de la définition de E que $\xi_{t_\nu} \in E$, le deuxième suit de l'hypothèse de récurrence.

Partie 2 : Calcule de $\mathrm{int}\,K$. Par continuité il est clair que $\mathrm{int}\,K$ contient l'ensemble du deuxième membre. Pour l'autre inclusion, de façon analogue au Lemme 3.6 on obtient que si $\xi \in \mathrm{int}\,K$ alors $\lambda_n(\xi) < \gamma$. Il reste à vérifier que $\mathrm{adj}_n(\xi) \in \mathrm{int}\,\overline{C}$ pour $\xi \in \mathrm{int}\,K$. Supposons par l'absurde que $\xi \in \mathrm{int}\,K$ et $x = \mathrm{adj}_n\xi \in \partial\overline{C}$. En particulier, par l'hypothèse, $x \neq 0$ et donc on peut écrire

$$\xi = PLQ = P\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}Q$$

pour certains $P \in O(n+1)$, $Q \in SO(n)$ et $\lambda_1, ..., \lambda_n \neq 0$.

Comme $x \in \partial\overline{C}$ on peut trouver $y = x + v \notin \overline{C}$ où v est un vecteur de norme si petite comme on le veut. Pour un tel v soit $u \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $u = (\mathrm{adj}_nP)^T v$.

On définit

$$\eta = PL_uQ = P\begin{pmatrix} \lambda_1 + \frac{(-1)^n u_{n+1}}{\lambda_2\cdots\lambda_n} & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \\ \frac{(-1)^{n+1}u_1}{\lambda_2\cdots\lambda_n} & \frac{(-1)^{n+1}u_2\lambda_2}{\lambda_1\cdots\lambda_n + (-1)^n u_{n+1}} & \cdots & \frac{(-1)^{n+1}u_n\lambda_n}{\lambda_1\cdots\lambda_n + (-1)^n u_{n+1}} \end{pmatrix}Q.$$

On note que

$$\begin{aligned}\mathrm{adj}_n\eta &= \mathrm{adj}_n P\,\mathrm{adj}_n L_u\\ &= \mathrm{adj}_n P\,(\mathrm{adj}_n L + u)\\ &= \mathrm{adj}_n \xi + v = y.\end{aligned}$$

Une fois que $(\mathrm{adj}_n P)^T$ est une matrice orthogonale alors u et v ont la même norme. Donc pour v de norme suffisamment petite on a $\eta \in K$ et $\mathrm{adj}_n\eta = y \notin \overline{C}$, ce qui est une contradiction. □

3.5 Enveloppes de fonctions

On est concerné dans cette section par le calcul des enveloppes d'une classe de fonctions. Il est connu que si $f(\xi) = h(\det(\xi))$, $\forall\ \xi \in \mathbb{R}^{n\times n}$, alors $Pf(\xi) = Qf(\xi) = Rf(\xi) = Ch(\det\xi)$. On connaît aussi des résultats sur les enveloppes de fonctions qui ne dépendent que des valeurs singulières de la matrice. Ici on considère certaines fonctions qui dépendent du déterminant et des valeurs singulières simultanément.

Théorème 3.12. *Soient*

$$Q = \{x = (x_2, ..., x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-2} :\ 0 \le x_2 \le \cdots \le x_{n-1}\},$$

$g : Q \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *tel que* $g(\cdot, s)$ *soit continue et bornée inférieurement pour tout* $s \in \mathbb{R}$. *Si on définit* $f : \mathbb{R}^{n\times n} \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *par* $f(\xi) = g(\lambda_2(\xi), ..., \lambda_{n-1}(\xi), \det\xi)$ *alors*

$$Pf(\xi) = Qf(\xi) = Rf(\xi) = Ch(\det\xi),$$

où $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *est tel que* $h(s) = \inf_{x\in Q} g(x, s)$.

Remarque 3.13. (i) Dans le théorème la fonction Qf ne doit être considérée que dans le cas où f est réelle ($f < +\infty$).

(ii) L'hypothèse de continuité sur $g(\cdot, s)$ est trop forte. En fait, dans la démonstration présentée ici on a besoin de la continuité de $g(\cdot, s)$ seulement dans le cas où

$$\inf g(\cdot, s) = \lim g(x^k, s),\ x^k \in Q \quad \Longrightarrow \quad x_2^k = 0.$$

C'est-à-dire l'infimum de $g(\cdot, s)$ n'est atteint que par des suites de Q qui ont la première composante nulle. Dans ce cas il faut admettre que $g(\cdot, s)$ est continue dans ce sous-ensemble de Q.

(iii) Les fonctions de la forme $g(\det\xi)$, $g(\lambda_2(\xi), ..., \lambda_{n-1}(\xi))$ dont les enveloppes étaient déjà connues, sont des cas particuliers de fonctions f . En fait, dans Buttazzo-Dacorogna-Gangbo [6, Theorem 3.5, page 29] est considéré le cas des fonctions qui dépendent de $(\lambda_1, ..., \lambda_{n-1})$. Il a été démontré que si $f(\xi) = g(\lambda_1(\xi), ..., \lambda_{n-1}(\xi))$ alors $Cf(\xi) = Pf(\xi) = Qf(\xi) = Rf(\xi) = \inf g$. Le résultat présenté ici ne permet pas de considérer des fonctions qui dépendent aussi de λ_1 s'il y a une dépendance par rapport au déterminant. De plus, si c'est le cas, la formule précédente n'est plus valable, comme on le verra plus bas (Proposition 3.15). S'il y a dépendance par rapport à la plus grande valeur singulière, par exemple $f(\xi) = g(\lambda_n(\xi))$, il était déjà connu (cf. [6, Theorem 3.6 (ii), page 31]) que, d'une façon générale, $Pf(\xi) > \inf f$.

Avant de démontrer le théorème on va établir un résultat auxiliaire concernant l'enveloppe rang un convexe d'un ensemble qui nous convient par la suite.

Proposition 3.14. *Soient* $0 < m_2 \le \cdots \le m_{n-1}$, $c \in \mathbb{R}$ *et*

$$E = \{\xi \in \mathbb{R}^{n\times n} :\ \lambda_i(\xi) = m_i,\ i = 2, ..., n-1,\ \det\xi = c\}.$$

Alors

$$\mathrm{Rco}\,E = \{\xi \in \mathbb{R}^{n\times n} :\ \det\xi = c\}.$$

Démonstration. C'est clair que Rco E est inclus dans l'ensemble du membre de droite puisque ce dernier est rang un convexe et contient E. On considère, maintenant, $\eta \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tel que $\det \eta = c$ et on vérifie que $\eta \in \operatorname{Rco} E$. Choisissons $m_n \geq m_{n-1}$ satisfaisant $m_2 \prod_{i=2}^{n} m_i > |c|$ et

$$\prod_{i=\tau}^{n} m_i \geq \prod_{i=\tau}^{n} \lambda_i(\eta),\ \tau = 2, ..., n.$$

Alors, par le Théorème 3.4,

$$\eta \in \operatorname{Rco}\{\xi \in \mathbb{R}^{n\times n} :\ \lambda_i(\xi) = m_i,\ i = 2, ..., n,\ \det \xi = c\} \subset \operatorname{Rco} E.$$

La preuve est finie. □

Démonstration du Théorème 3.12. Soit $F(\xi) = Ch(\det \xi)$. Cette fonction est polyconvexe et minore f, donc on a $F(\xi) \leq Pf(\xi) \leq Qf(\xi) \leq Rf(\xi),\ \forall\ \xi \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Il suffit de vérifier que $Rf(\xi) \leq F(\xi)$.

On va démontrer que $Rf(\xi) \leq h(\det \xi),\ \forall\ \xi \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Comme l'enveloppe rang un convexe de $h(\det \xi)$ est précisément F on obtient le résultat. On note qu'on peut supposer $h(\det \xi) < +\infty$ puisque si ce n'est pas le cas l'inégalité est évidente. On fixe $\xi \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

On considère une suite $x^k = (x_2^k, ..., x_{n-1}^k) \in Q$ telle que

$$h(\det \xi) = \inf g(\cdot, \det \xi) = \lim g(x^k, \det \xi)$$

où l'on peut supposer que $g(x^k, \det \xi) < +\infty,\ \forall\ k \in \mathbb{N}$. Pour chaque $k \in \mathbb{N}$ on définit

$$G_k(\eta) = Rf(\eta) - g(x^k, \det \xi)$$

qui est une fonction rang un convexe. On va démontrer que $G_k(\xi) \leq 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Pour chaque k fixé soit $s \in \{1, ..., n-1\}$ tel que $x_2^k = \cdots = x_s^k = 0$ et $x_{s+1}^k > 0$ (si $s = 1$ signifie que aucune composante de x^k n'est nulle, si $s = n-1$ signifie que $x^k = 0$).

Commençons par le cas où $s = 1$. Soit

$$E_k = \{\eta \in \mathbb{R}^{n\times n} : \lambda_i(\eta) = x_i^k,\ i = 2, ..., n-1,\ \det \eta = \det \xi\}.$$

Clairement $E_k \neq \emptyset$. On a que G_k est négative dans cet ensemble puisque $G_k(\eta) = Rf(\eta) - f(\eta)$ dans E_k. Comme, par la proposition précédente, $\xi \in \operatorname{Rco} E_k$, la rang un convexité de G_k implique que $G_k(\xi) \leq 0$.

Il reste le cas où $s > 1$. On définit la fonction

$$H_k^t(\eta) = Rf(\eta) - g\left(\frac{x_{s+1}^k}{t}, ..., \frac{x_{s+1}^k}{t}, x_{s+1}^k, ..., x_{n-1}^k, \det \xi\right).$$

(Si $s = n-1$ on fait $H_k^t(\eta) = Rf(\eta) - g\left(\frac{1}{t}, ..., \frac{1}{t}, \det \xi\right)$.)

Soit

$$E_k^t = \left\{\eta \in \mathbb{R}^{n\times n} : \lambda_i(\eta) = \frac{x_{s+1}^k}{t},\ i = 2, ..., s,\ \lambda_j(\eta) = x_j^k,\ j = s+1, ..., n-1, \det \eta = \det \xi\right\}.$$

Remarquons que $E_k^t \neq \emptyset$. Comme avant, on a que H_k^t est négative dans cet ensemble et $\xi \in \operatorname{Rco} E_k^t$. Donc, de la rang un convexité de H_k^t on obtient que $H_k^t(\xi) \leq 0$:

$$Rf(\xi) \leq g\left(\frac{x_{s+1}^k}{t}, ..., \frac{x_{s+1}^k}{t}, x_{s+1}^k, ..., x_{n-1}^k, \det \xi\right).$$

On passe à la limite dans t et on obtient que $G_k(\xi) \leq 0$.

Donc, on a vu que $G_k(\xi) \leq 0$, $\forall\, k \in \mathbb{N}$. En passant à la limite dans k on obtient que $Rf(\xi) \leq h(\det \xi)$, comme on voulait. $\square$

Ensuite on voit que l'expression obtenue pour les enveloppes polyconvexe, quasiconvexe et rang un convexe dans le Théorème 3.12 n'est pas valable si l'on permet une dépendance de la fonction par rapport à la plus petite valeur singulière.

Proposition 3.15. *Soit* $f : \mathbb{R}^{2\times 2} \longrightarrow \mathbb{R}$ *définit par* $f(\xi) = |\lambda_1(\xi) - 1| + |\det \xi|$. *Alors* $Pf(\xi) \neq |\det \xi|$.

Démonstration. Soit $F(\xi) = |\det \xi|$. Comme F est polyconvexe et $F \leq f$ alors $F \leq Pf$. Soit $\xi \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ tel que $\lambda_1(\xi) = 0$. Supposons par l'absurde que $Pf(\xi) = F(\xi) = 0$.

Alors, cf. Dacorogna [11, Théorème 1.1, page 201],

$$0 = \lim \sum_{i=1}^{6} t_i^n f(A_i^n)$$

avec $\displaystyle\sum_{i=1}^{6} t_i^n (A_i^n, \det A_i^n) = (\xi, \det \xi)$, $t_i^n \in [0,1]$ et $\displaystyle\sum_{i=1}^{6} t_i^n = 1$. Donc

$$t_i^n |\lambda_1(A_i^n) - 1| \to 0 \quad \text{et} \quad t_i^n |\det A_i^n| \to 0 \text{ pour tout } i = 1, ..., 6.$$

A une sous-suite près, $t_i^n \to t_i \in [0,1]$ avec $\displaystyle\sum_{i=1}^{6} t_i = 1$. Donc, il existe j tel que $t_j \neq 0$ et d'ailleurs

$$\left|\lambda_1(A_j^n) - 1\right| = \frac{1}{t_j^n} t_j^n \left|\lambda_1(A_j^n) - 1\right| \to 0 \quad \text{et} \quad \left|\det A_j^n\right| = \frac{1}{t_j^n} t_j^n \left|\det A_j^n\right| \to 0.$$

La première condition implique que $\lambda_1(A_j^n) \to 1$, donc $\left|\det A_j^n\right| \geq (\lambda_1(A_j^n))^2 \to 1$, ce qui contredit la deuxième condition. $\square$

Remarque 3.16. On peut montrer que la fonction de la Proposition 3.15 satisfait en particulier, $Pf(\xi) = Qf(\xi) = Rf(\xi) = g(\xi)$, où

$$g(\xi) = \begin{cases} |\det \xi|, \ \lambda_1(\xi) \geq 1 \\ \frac{3}{4} = \min f, \ \lambda_2(\xi) \leq \frac{1}{2} \text{ ou } \lambda_1(\xi) = 0. \end{cases}$$

L'image de Pf, Qf et Rf est inconnue pour les matrices satisfaisant $\lambda_2(\xi) > \frac{1}{2}$ et $0 < \lambda_1(\xi) < 1$.

Démonstration de la Remarque. Partie 1 : $Pf(\xi) = Qf(\xi) = Rf(\xi) = |\det \xi|$ si $\lambda_1(\xi) \geq 1$.

Comme $|\det \xi|$ est polyconvexe et $|\det \xi| \leq f(\xi)$ on a $|\det \xi| \leq Pf(\xi) \leq Qf(\xi) \leq Rf(\xi)$. Il suffit de vérifier que $Rf(\xi) \leq |\det \xi|$ pour $\lambda_1(\xi) \geq 1$. Il suffit de considérer ξ tel que $\lambda_1(\xi) > 1$. On peut écrire

$$\xi = P \begin{pmatrix} x & \\ & y \end{pmatrix} Q,$$

où $P, Q \in SO(2)$ et $1 < |x| \leq y$. Soit

$$\xi_t = P \begin{pmatrix} x & t \\ & y \end{pmatrix} Q.$$

On a $\det \xi_t = \det \xi$ et il existe $t_1 < 0 < t_2$ tels que $\lambda_1(\xi_{t_1}) = \lambda_1(\xi_{t_2}) = 1$. Donc $\xi = \mu\xi_{t_1} + (1-\mu)\xi_{t_2}$, $\mu \in]0,1[$ et comme $\text{rang}(\xi_{t_1} - \xi_{t_2}) = 1$, on obtient

$$Rf(\xi) \leq \mu f(\xi_{t_1}) + (1-\mu) f(\xi_{t_2}) = |\det \xi| \,.$$

Partie 2 : $Pf(\xi) = Qf(\xi) = Rf(\xi) = \frac{3}{4}$ si $\lambda_2(\xi) \leq \frac{1}{2}$ ou $\lambda_1(\xi) = 0$.

Etape 1 : $\min f = \frac{3}{4}$.

Si $\lambda_1 \geq 1$ alors

$$f(\xi) \geq \lambda_1(\xi)\lambda_2(\xi) \geq (\lambda_1(\xi))^2 \geq 1 > \frac{3}{4}.$$

Considérons maintenant le cas où $\lambda_1(\xi) < 1$. Dans ce cas $f(\xi) = 1 - \lambda_1(\xi) + \lambda_1(\xi)\lambda_2(\xi) \geq 1 - \lambda_1(\xi) + (\lambda_1(\xi))^2$. La fonction $g(t) = 1 - t + t^2$ définie pour $t \geq 0$, a comme minimum $\frac{3}{4}$ atteint dans le point $\frac{1}{2}$. Donc $f(\xi) \geq \frac{3}{4}$ si $\lambda_1(\xi) < 1$. De plus, soit $\xi = \text{diag}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, alors $f(\xi) = \frac{3}{4}$. Donc $\min f = \frac{3}{4}$.

Etape 2 : $Pf(\xi) = Qf(\xi) = Rf(\xi) =$ constante pour $\lambda_1(\xi) = 0$.

Une fois que f est fonction des valeurs singulières, alors Rf l'est aussi (cf. Buttazzo-Dacorogna-Gangbo [6, Theorem 3.1, page 24]). Disons $Rf(\xi) = h(\lambda_1(\xi), \lambda_2(\xi))$. De plus (cf. Aubert-Tahraoui [2]), la fonction h est convexe et croissante dans chaque variable. Comme $Rf \leq f$ vient $h(0,t) \leq 1$. On a ainsi que $h(0,\cdot)$ est convexe, croissante et bornée supérieurement. Donc $h(0,\cdot)$ doit être constante.

Etape 3 : conclusion.

Soit h la fonction de l'étape précédente. On utilise ensuite la croissance dans chaque variable de cette fonction. On a

$$\frac{3}{4} \leq h\left(0, \frac{1}{2}\right) \leq h\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4},\ \forall\, t \in \left[0, \frac{1}{2}\right].$$

Donc $Rf(\xi) = \frac{3}{4}$ pour tout ξ tel que $\lambda_2(\xi) = \frac{1}{2}$. Fixons $t \in [0, \frac{1}{2}]$,

$$\frac{3}{4} \leq h(t,s) \leq h\left(t, \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4},\ \forall\, s \in \left[t, \frac{1}{2}\right].$$

Donc $Rf(\xi) = \frac{3}{4}$ pour $\lambda_2(\xi) \leq \frac{1}{2}$. En particulier $Rf(0) = \frac{3}{4}$ et d'ailleurs $Rf(\xi) = \frac{3}{4}$ si $\lambda_1(\xi) = 0$ puisque, par l'étape précédente, Rf est constante pour $\lambda_1(\xi) = 0$. □

3.6 Appendice : valeurs singulières

On rappelle la définition des valeurs singulières d'une matrice et quelques résultats les concernant. On se réfère à Ciarlet [10] et Horn-Johnson[21] pour les démonstrations et développements.

Définition 3.17. Soient $\xi \in \mathbb{R}^{N\times n}$ et $N \wedge n = \min\{N, n\}$. Les valeurs singulières de ξ, dénotées par $\lambda_i(\xi)$, $i = 1, ..., N \wedge n$ et satisfaisant $0 \leq \lambda_1(\xi) \leq ... \leq \lambda_{N\wedge n}(\xi)$, sont, dans le cas où $N \leq n$, les racines des valeurs propres de la matrice symétrique et semi-définie positive $\xi\xi^T \in \mathbb{R}^{N\times N}$. Si $n \leq N$, les valeurs singulières sont les racines des valeurs propres de la matrice symétrique et semi-définie positive $\xi^T\xi \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

Le résultat qui est énoncé ensuite donne une décomposition d'une matrice en fonction de ses valeurs singulières. La démonstration de ce résultat peut être trouvée en [10, page 10] ou [21, page 144].

Théorème 3.18. *Soient $\xi \in \mathbb{R}^{N\times n}$ et $N \wedge n = \min\{N, n\}$. Alors il existe des matrices $P \in O(N)$ et $Q \in O(n)$ telles que $\xi = PLQ$ où $L \in \mathbb{R}^{N\times n}$, $L^i_j = 0$ si $i \neq j$ et $L^i_i = \lambda_i(\xi)$, $i = 1, ..., N \wedge n$.*

Remarque 3.19. On déduit du théorème que si $\xi \in \mathbb{R}^{N\times n}$, on peut écrire $\xi = P\,X\,Q$ où $P \in SO(N)$, $Q \in SO(n)$ et $X \in \mathbb{R}^{N\times n}$ tel que, $X_j^i = 0$ si $i \neq j$ et $\left|X_1^1\right| = \lambda_1(\xi)$, $X_i^i = \lambda_i(\xi)$, $i = 2, ..., N \wedge n$.

Le résultat suivant montre qu'on peut définir une norme sur $\mathbb{R}^{N\times n}$ par sa plus grande valeur singulière (voir pour la preuve Ciarlet [10, page 16]).

Théorème 3.20. *L'application $\lambda_{N\wedge n} : \mathbb{R}^{N\times n} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une norme.*

Voyons ensuite une caractérisation de la plus grande valeur singulière d'une matrice. On se réfère à [10, page 16] pour la démonstration.

Théorème 3.21. *Soit $\xi \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Alors*

$$\lambda_n(\xi) = \max_{|y|=1} |\xi y| \,.$$

Le résultat suivant, démontré en Dacorogna-Marcellini [14, page 175], assure la polyconvexité de certaines fonctions qui dépendent des valeurs singulières.

Théorème 3.22. *Soit $\xi \in \mathbb{R}^{n\times n}$ et $\lambda_i(\xi)$, $i = 1, ..., n$ leur valeurs singulières. Alors les fonctions*

$$\xi \longrightarrow \prod_{i=\tau}^{n} \lambda_i(\xi), \quad \tau = 1, ..., n$$

sont polyconvexes.

Chapitre 4

Inclusions différentielles : existence de solutions

On considère dans ce chapitre des problèmes de Dirichlet qui s'écrivent sous la forme d'inclusions différentielles. En général, dans les problèmes traités, on cherche des applications $u : \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^N$ solutions de

$$(I) \begin{cases} Du(x) \in E, \; p.p. \; x \in \Omega, \\ u(x) = \varphi(x), \; x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

où $E \subset \mathbb{R}^{N\times n}$ est un ensemble donné et φ est la donnée au bord. Les différentes inclusions différentielles étudiées correspondent toutes à des problèmes vectoriels $(n, N > 1)$.

Pour traiter les problèmes d'inclusions différentielles vectorielles, deux méthodes différentes ont été développées ; une par Dacorogna-Marcellini (voir la monographie [14]) qui se base sur le théorème des catégories de Baire, l'autre par Müller-Šverák [33] qui s'appuie sur la méthode de l'intégration convexe de Gromov. C'est la première méthode qu'on utilisera pour obtenir des résultats d'existence de solution pour plusieurs problèmes.

On commence dans la première section par regrouper les résultats principaux de la théorie développée par Dacorogna-Marcellini [14]. *Grosso modo*, la condition suffisante pour que (I) ait une solution est que

$$D\varphi(x) \in E \cup K, \; p.p. \; x \in \Omega$$

pour un ensemble de matrices K, vérifiant une propriété en rapport avec E, dite la propriété de relaxation (voir Définition 4.1 et Théorème 4.2). Cette propriété dont la vérification est difficile a été introduite par Dacorogna-Marcellini et est le point central de leur résultat d'existence.

Dans la deuxième section de ce chapitre, on considère quelques cas particuliers abstraits pour lesquels on assure la propriété de relaxation. La troisième section est dédiée aux applications. Notamment on trouve des conditions suffisantes qui assurent l'existence de solution pour le problème

$$\Phi(Du(x)) \in \{\alpha, \beta\}, \; p.p. \; x \in \Omega, \tag{4.1}$$

où $\Phi : \mathbb{R}^{N\times n} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction quasiaffine. Si $N = n$, Φ peut être la fonction déterminant. Dans ce cas, des problèmes plus restrictifs seront considérés, notamment

$$\begin{cases} \det(Du(x)) \in \{\alpha, \beta\}, \; p.p. \; x \in \Omega, \\ \lambda_i(Du(x)) = \gamma_i, \; p.p. \; x \in \Omega, \; i = 2, ..., n, \end{cases}$$

où $\lambda_i(\xi), \; i = 2, ..., n$ désignent les $n-1$ plus grandes valeurs singulières de la matrice ξ et γ_i sont des constantes données.

4.1 Rappel sur le théorème d'existence général

Dacorogna-Marcellini [14] ont développé une méthode pour résoudre des problèmes différentiels de la forme

$$\begin{cases} F_i(Du(x)) = 0, \ p.p. \ x \in \Omega, \ i = 1, ..., I, \\ u(x) = \varphi(x), \ x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.2}$$

pour des fonctions

$$F_i : \mathbb{R}^{N\times n} \longrightarrow \mathbb{R}$$

quasiconvexes. Plus récemment leurs résultats ont été étendus par Dacorogna-Pisante [16] de façon à inclure des problèmes plus généraux :

$$(I) \begin{cases} Du(x) \in E, \ p.p. \ x \in \Omega, \\ u(x) = \varphi(x), \ x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{4.3}$$

C'est ce résultat qu'on énoncera dans cette section (Théorème 4.2) et qui nous permettra dans la suite du chapitre d'obtenir l'existence de solution pour des problèmes concrets.

On rappelle aussi dans cette section une condition suffisante due à Dacorogna-Marcellini qui permet, dans la pratique, d'appliquer le théorème d'existence abstrait (Définition 4.4 et Théorème 4.5).

On commence par rappeler la notion de *propriété de relaxation* introduite par Dacorogna-Marcellini et qui s'avère être une condition suffisante pour l'existence de solution du problème (I).

Définition 4.1. Propriété de relaxation. Soient E, $K \subset \mathbb{R}^{N\times n}$. On dit que K a la propriété de relaxation par rapport à E si, pour tout ensemble ouvert et borné $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ et pour toute application affine, u_ξ, telle que $Du_\xi(x) = \xi$ et

$$Du_\xi(x) \in K,$$

il existe une suite $u_\nu \in Aff_{mor}(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^N)$ telle que

$$\begin{aligned} &u_\nu \in u_\xi + W_0^{1,\infty}(\Omega; \mathbb{R}^N), \quad Du_\nu(x) \in E \cup K, \ p.p. \ x \in \Omega, \\ &u_\nu \overset{*}{\rightharpoonup} u_\xi \text{ en } W^{1,\infty}(\Omega, ; \mathbb{R}^N), \quad \lim_{\nu\to\infty} \int_\Omega \operatorname{dist}(Du_\nu(x); E)\, dx = 0. \end{aligned}$$

On peut présenter maintenant le théorème d'existence. On se réfère à Dacorogna-Pisante [16] pour la démonstration.

Théorème 4.2. Existence de Solution. *Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné et $E, K \subset \mathbb{R}^{N\times n}$ des ensembles tels que E est compact, K est borné et a la propriété de relaxation par rapport à E. Si $\varphi \in Aff_{mor}(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^N)$ est tel que*

$$D\varphi(x) \in E \cup K, \ p.p. \ x \in \Omega,$$

alors il existe $u \in \varphi + W_0^{1,\infty}(\Omega; \mathbb{R}^N)$ tel que

$$Du(x) \in E, \ p.p. \ x \in \Omega.$$

Remarque 4.3. (i) Le théorème est encore vrai pour un ensemble Ω non borné. Il suffit d'appliquer le résultat dans chaque ensemble borné d'une couverture de Vitali (cf. [14, Corollaire 10.6, page 231]).

(ii) On attire l'attention sur la façon dont la condition au bord dans (4.3) doit être interprétée. En effet, le Théorème 4.2 assure que $u \in \varphi + W_0^{1,\infty}(\Omega;\mathbb{R}^N)$. Si Ω est borné alors $W_0^{1,\infty}(\Omega;\mathbb{R}^N) = W^{1,\infty}(\Omega;\mathbb{R}^N) \cap W_0^{1,1}(\Omega;\mathbb{R}^N)$. Cependant, si Ω n'est pas borné alors $u - \varphi \in W_0^{1,\infty}(\Omega;\mathbb{R}^N)$ signifie que

$$(u-\varphi)\psi \in W_0^{1,\infty}(\Omega \cap \operatorname{int}\operatorname{supp}\psi;\mathbb{R}^N),$$

pour tout $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^N)$.

(iii) Le résultat est encore vrai pour des conditions au bord $\varphi \in C^1_{mor}(\overline{\Omega};\mathbb{R}^N)$, si l'ensemble K est ouvert. Pour cela il faut utiliser des résultats d'approximation comme le Théorème 10.16 dans [14].

La propriété de relaxation, nécessaire pour appliquer le théorème précédent, n'est pas une propriété facile à vérifier. Ainsi des conditions suffisantes plus simples ont été développées telles que la *propriété d'approximation* définie ci-dessous et qui a aussi été introduite par Dacorogna-Marcellini [14]. Dans les applications, on utilise cette dernière propriété pour assurer les hypothèses du théorème d'existence (voir le Théorème 4.5).

Définition 4.4. Propriété d'approximation. Soient $E \subset K(E) \subset \mathbb{R}^{N\times n}$. On dit que les ensembles E et $K(E)$ ont la propriété d'approximation s'il existe une famille d'ensembles fermés E_δ et $K(E_\delta)$, $\delta > 0$, tels que

1) $E_\delta \subset K(E_\delta) \subset \operatorname{int} K(E)$, pour tout $\delta > 0$;
2) $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta_0 > 0 :\ \operatorname{dist}(\eta, E) \le \varepsilon,\ \forall\, \eta \in E_\delta,\ \delta \in [0,\delta_0]$;
3) $\eta \in \operatorname{int} K(E)\ \Rightarrow\ \exists\, \delta_0 > 0 :\ \eta \in K(E_\delta),\ \forall\, \delta \in [0,\delta_0]$.

Théorème 4.5. *Soit $E \subset \mathbb{R}^{N\times n}$ un ensemble compact. Si E et $\operatorname{Rco} E$ ont la propriété d'approximation avec $K(E_\delta) = \operatorname{Rco} E_\delta$ alors $\operatorname{int}\operatorname{Rco} E$ a la propriété de relaxation par rapport à E.*

Remarque 4.6. Une généralisation de ce résultat est donnée dans [14] (cf. Théorème 6.15). Cette généralisation est utile pour obtenir la propriété de relaxation via la propriété d'approximation lorsqu'on ne connaît pas l'enveloppe $\operatorname{Rco} E$. Ceci est le cas du problème considéré dans la Section 4.3.4.

On énonce encore un résultat dû à Müller-Sychev [34] qui est est un raffinement d'un résultat classique et qui sera utile dans ce chapitre.

Lemme 4.7. *Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné, $t \in [0,1]$, $A, B \in \mathbb{R}^{N\times n}$ tels que*

$$A - B = a \otimes b$$

où $a \in \mathbb{R}^N$ et $b \in \mathbb{R}^n$. Soient $b_3, \dots, b_k \in \mathbb{R}^n$, $k \ge n$, tels que $0 \in \operatorname{int}\operatorname{co}\{b, -b, b_3, \dots, b_k\}$. Soit φ affine telle que

$$D\varphi(x) = \xi_0 = tA + (1-t)B,\ x \in \overline{\Omega}$$

(i.e. $A = \xi_0 + (1-t)\, a\otimes b$ et $B = \xi_0 - ta \otimes b$). Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une application $u \in Aff_{mor}(\overline{\Omega};\mathbb{R}^N)$ et des ensembles $\Omega_A, \Omega_B \subset \Omega$, ouverts et disjoints tels que

$$\begin{cases} |\text{mes } \Omega_A - t \text{ mes } \Omega|\,,\ |\text{mes } \Omega_B - (1-t) \text{ mes } \Omega| \le \varepsilon \\ u(x) = \varphi(x),\ x \in \partial\Omega \\ |u(x) - \varphi(x)| \le \varepsilon,\ x \in \Omega \\ Du(x) = \begin{cases} A & \text{dans } \Omega_A \\ B & \text{dans } \Omega_B \end{cases} \\ Du(x) \in \xi_0 + \{(1-t)\, a\otimes b, -ta\otimes b, a\otimes b_3, \dots, a \otimes b_k\},\ \textit{p.p.} \text{ dans } \Omega. \end{cases}$$

4.2 La propriété de relaxation

Dans cette section on s'intéresse à la vérification de la propriété de relaxation pour des cas où la propriété d'approximation (cf. Définition 4.4) ne s'applique pas ou bien des résultats plus simples peuvent être appliqués.

4.2.1 Une condition suffisante pour la propriété de relaxation

On démontre ci-dessous une condition suffisante pour obtenir la propriété de relaxation. Cette condition, qui généralise dans une certaine mesure le Théorème 4.5, a été motivée par un résultat dû à Kirchheim et qu'on discutera dans la Section 4.3.5.

La condition suffisante pour la propriété de relaxation est la suivante.

Théorème 4.8. *Soient $E, K \subset \mathbb{R}^{N\times n}$ des ensembles bornés vérifiant la propriété suivante.*
(H) Donné $\varepsilon > 0$, il existe $k = k(\varepsilon, E, K) \in \mathbb{N}$ tel que

$$\begin{aligned}
\forall\ \xi \in \operatorname{int} K \setminus B_\varepsilon(E) \qquad & \exists\ \eta_1, ..., \eta_i \in \mathbb{R}^{N\times n},\ i \in \mathbb{N},\ i \le k,\ \operatorname{rang}(\eta_j) = 1,\ j = 1, ..., i \\
& [\xi + \eta_1 + ... + \eta_{j-1} - \eta_j, \xi + \eta_1 + ... + \eta_{j-1} + \eta_j] \subset \operatorname{int} K,\ j = 1, ..., i, \\
& \xi + \eta_1 + ... + \eta_i \in B_\varepsilon(E).
\end{aligned}$$

Alors $\operatorname{int} K$ *a la propriété de relaxation par rapport à E.*

Remarque 4.9. Si E et $\operatorname{Rco} E$ sont dans les conditions du Théorème 4.5 et si $\operatorname{Rco} E_\delta = \mathrm{R}_I\mathrm{co}E_\delta$ (cf. Théorème 2.27) pour certain $I \in \mathbb{N}$ et pour tout $\delta > 0$, alors E et $\operatorname{Rco} E$ satisfont les hypothèses du Théorème 4.8. Ceci est le cas dans les applications considérées dans la suite du chapitre.

On commence par démontrer le lemme suivant.

Lemme 4.10. *Soient $E, K \subset \mathbb{R}^{N\times n}$ des ensembles vérifiant l'hypothèse (H) du théorème précédent. Soient $\varepsilon > 0$, $k = k(\varepsilon, E, K)$ comme dans (H), $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné et $\varphi \in Aff_{mor}(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^N)$ tel que*

$$D\varphi(x) \in \operatorname{int} K \ \ p.p.\ x \in \Omega.$$

Alors il existe $\psi \in \varphi + W_0^{1,\infty}(\Omega; \mathbb{R}^N) \cap Aff_{mor}(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^N)$ et des ouverts disjoints $A, B \subset \Omega$ tels que

$$D\psi(x) \in \operatorname{int} K,\ p.p.\ x \in \Omega; \quad \operatorname{dist}(D\psi(x), E) \le \varepsilon,\ p.p.\ x \in B;$$

$$||\psi - \varphi||_{L^\infty(\Omega)} \le \frac{\varepsilon^2}{2^{k(\varepsilon)}};$$

$$\operatorname{mes}(\Omega \setminus (A \cup B)) = 0; \quad \operatorname{mes}(A) \le c\frac{\varepsilon}{2^{k(\varepsilon)}} + \left(1 - \frac{1}{2^{k(\varepsilon)}}\right)|\Omega|,$$

où c est une constante.

Démonstration. On dénote par la suite, pour un ensemble U, $|U| = \operatorname{mes}(U)$. Par définition, comme $\varphi \in Aff_{mor}(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^N)$, on a, pour certains ouverts disjoints $\Omega_j \subset \Omega$ avec $|\Omega \setminus (\cup_{j\in\mathbb{N}}\Omega_j)| = 0$, φ affine dans chaque Ω_j, disons $D\varphi = \xi_j$ dans Ω_j.

Pour obtenir l'assertion du lemme on va démontrer, pour chaque $j \in \mathbb{N}$, l'existence de $\psi_j \in \varphi + W_0^{1,\infty}(\Omega_j; \mathbb{R}^N) \cap Aff_{mor}(\overline{\Omega}_j; \mathbb{R}^N)$ et des ouverts disjoints $A_j, B_j \subset \Omega_j$ tels que

$$D\psi_j(x) \in \operatorname{int} K,\ p.p.\ x \in \Omega_j; \quad \operatorname{dist}(D\psi_j(x), E) \le \varepsilon,\ p.p.\ x \in B_j;$$

$$||\psi_j - \varphi||_{L^\infty(\Omega_j)} \le \frac{\varepsilon^2}{2^{k(\varepsilon)}};$$

$$|\Omega_j \setminus (A_j \cup B_j)| = 0; \quad |A_j| \leq \frac{2\varepsilon}{j^2 2^{k(\varepsilon)}} + \left(1 - \frac{1}{2^{k(\varepsilon)}}\right) |\Omega_j| .$$

Alors on aura le résultat énoncé en prenant $\psi = \psi_j$ dans chaque Ω_j, $\psi = \varphi$ dans $\Omega \setminus (\cup_{j\in\mathbb{N}}\Omega_j)$, $A = \cup_{j\in\mathbb{N}} A_j$ et $B = \cup_{j\in\mathbb{N}} B_j$. La constante c sera alors $\sum_{j\in\mathbb{N}} \frac{2}{j^2}$.

Fixons $j \in \mathbb{N}$ et construisons ψ_j. Pour ne pas charger les notations on laisse tomber le j dans Ω_j, A_j, B_j, ψ_j et ξ_j.

Cas 1. Si $\operatorname{dist}(D\varphi(x), E) = \operatorname{dist}(\xi, E) \leq \varepsilon$ alors il suffit de faire $\psi = \varphi$, $A = \emptyset$ et $B = \Omega$.

Cas 2. Supposons $\operatorname{dist}(D\varphi(x), E) = \operatorname{dist}(\xi, E) > \varepsilon$.

On applique l'hypothèse (H) : on a

$$[\xi - \eta_1, \xi + \eta_1] \subset \operatorname{int} K.$$

On peut alors construire (cf. Lemme 4.7) une application $u_1 \in \varphi + W_0^{1,\infty}(\Omega; \mathbb{R}^N) \cap Aff_{mor}(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^N)$ telle que, pour certains ensembles ouverts disjoints $A^1, B^1 \subset \Omega$ vérifiant

$$\left| |A^1| - \frac{1}{2} |\Omega| \right|, \ \left| |B^1| - \frac{1}{2} |\Omega| \right| \leq \frac{\varepsilon}{j^2 2^{k(\varepsilon)}}$$

on a

$$||u_1 - \varphi||_{L^\infty(\Omega)} \leq \frac{\varepsilon^2}{2^{k(\varepsilon)} k(\varepsilon)}; \quad Du_1(x) \in \operatorname{int} K, \ p.p. \ x \in \Omega;$$

$$Du_1 = \begin{cases} \xi - \eta_1 \text{ dans } A^1 \\ \xi + \eta_1 \text{ dans } B^1. \end{cases}$$

En particulier $|B^1| \geq \frac{1}{2} |\Omega| - \frac{\varepsilon}{j^2 2^{k(\varepsilon)}}$.

Dans B^1 on applique une deuxième fois le résultat d'approximation à u_1. On obtient alors une application u_2 avec $Du_2 = \xi + \eta_1 + \eta_2$ dans un certain ouvert $B^2 \subset B^1$ et

$$\left| |B^2| - \frac{1}{2} |B^1| \right| \leq \frac{\varepsilon}{j^2 2^{k(\varepsilon)}}.$$

On répète ce processus i fois ($i \leq k$) jusqu'à avoir $\operatorname{dist}(Du_i, E) \leq \varepsilon$ dans un certain B^i. De plus

$$|\Omega \setminus B^i| = |\Omega| - |B^i| \leq |\Omega| + \frac{\varepsilon}{j^2 2^{k(\varepsilon)}} - \frac{1}{2} |B^{i-1}| \leq |\Omega| + \frac{\varepsilon}{j^2 2^{k(\varepsilon)}} + \frac{1}{2} \left(\frac{\varepsilon}{j^2 2^{k(\varepsilon)}} - \frac{1}{2} |B^{i-2}| \right) \leq$$

$$\leq ... \leq |\Omega| + \frac{\varepsilon}{j^2 2^{k(\varepsilon)}} \sum_{t=0}^{i-2} \frac{1}{2^t} + \frac{1}{2^{i-1}} \left(\frac{\varepsilon}{j^2 2^{k(\varepsilon)}} - \frac{1}{2} |\Omega| \right) \leq \left(1 - \frac{1}{2^{k(\varepsilon)}}\right) |\Omega| + 2 \frac{\varepsilon}{j^2 2^{k(\varepsilon)}}.$$

□

On prouve ensuite le Théorème 4.8.

Démonstration du Théorème 4.8. Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné, u_ξ affine telle que $Du_\xi(x) = \xi \in \operatorname{int} K$ et $\varepsilon > 0$. On va assurer l'existence de $u_\varepsilon \in u_\xi + W_0^{1,\infty}(\Omega; \mathbb{R}^N) \cap Aff_{mor}(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^N)$ tel que

$$Du_\varepsilon(x) \in E \cup \operatorname{int} K, \ p.p. \ x \in \Omega, \quad ||u_\varepsilon - u_\xi||_{L^\infty(\Omega)} \leq a(\varepsilon),$$

$$\int_\Omega \operatorname{dist}(Du_\varepsilon(x), E)\, dx \leq b(\varepsilon),$$

pour certaines fonctions a, b vérifiant $\lim_{\varepsilon\to 0} a(\varepsilon) = \lim_{\varepsilon\to 0} b(\varepsilon) = 0$.

Soit $k(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ comme dans l'hypothèse. Si $k(\varepsilon)$ est borné on peut toujours construire un autre $k(\varepsilon)$ tel que $\lim_{\varepsilon\to 0} k(\varepsilon) = +\infty$ et qui satisfait encore l'hypothèse (H). On suppose alors que

$\lim_{\varepsilon\to 0} k(\varepsilon) = +\infty$. On définit $l(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ comme la partie entière de $1 + 2^{k(\varepsilon)}/\varepsilon$ et on considère une constante $C > 0$ telle que $\operatorname{dist}(\mu, \eta) \leq C,\ \forall\ \mu \in K,\ \eta \in E$.

On commence par appliquer le LEMME 4.10 à u_ξ et on obtient $\psi_1 \in u_\xi + W_0^{1,\infty}(\Omega;\mathbb{R}^N) \cap Aff_{mor}(\overline{\Omega};\mathbb{R}^N)$ et des ouverts disjoints $A^1, B^1 \subset \Omega$ tels que

$$\left|\Omega \setminus (A^1 \cup B^1)\right| = 0$$

$$D\psi_1 \in \operatorname{int} K,\ p.p.\ x \in \Omega; \quad ||\psi_1 - u_\xi||_{L^\infty(\Omega)} \leq \frac{\varepsilon^2}{2^{k(\varepsilon)}};$$

$$\operatorname{dist}(D\psi_1(x), E) \leq \varepsilon,\ p.p.\ x \in B^1; \quad \left|A^1\right| \leq c\frac{\varepsilon}{2^{k(\varepsilon)}} + \left(1 - \frac{1}{2^{k(\varepsilon)}}\right)|\Omega|\,.$$

En particulier,

$$\int_\Omega \operatorname{dist}(D\psi_1(x), E)\,dx \leq \varepsilon\,|\Omega| + C\left|A^1\right| \leq \varepsilon\,|\Omega| + C\left(c\frac{\varepsilon}{2^{k(\varepsilon)}} + \left(1 - \frac{1}{2^{k(\varepsilon)}}\right)|\Omega|\right).$$

Si $\left|A^1\right| > 0$ on applique le LEMME 4.10 à nouveau et on obtient $\psi_2 \in u_\xi + W_0^{1,\infty}(\Omega;\mathbb{R}^N) \cap Aff_{mor}(\overline{\Omega};\mathbb{R}^N)$ (en faisant $\psi_2 = \psi_1$ dans $\Omega \setminus A^1$) et des ouverts disjoints $A^2, B^2 \subset A^1$ tels que

$$\left|A^1 \setminus (A^2 \cup B^2)\right| = 0$$

$$D\psi_2(x) \in \operatorname{int} K,\ p.p.\ x \in \Omega; \quad ||\psi_2 - u_\xi||_{L^\infty(\Omega)} \leq \frac{2\varepsilon^2}{2^{k(\varepsilon)}};$$

$$\operatorname{dist}(D\psi_2(x), E) \leq \varepsilon,\ p.p.\ x \in B^2; \quad \left|A^2\right| \leq c\frac{\varepsilon}{2^{k(\varepsilon)}} + \left(1 - \frac{1}{2^{k(\varepsilon)}}\right)\left|A^1\right|.$$

D'ailleurs

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \operatorname{dist}(D\psi_2(x), E)\,dx &\leq \varepsilon\,|\Omega| + C\left|A^2\right| \leq \varepsilon\,|\Omega| + C\left(c\tfrac{\varepsilon}{2^{k(\varepsilon)}} + \left(1 - \tfrac{1}{2^{k(\varepsilon)}}\right)\left|A^1\right|\right) \\
&\leq \varepsilon\,|\Omega| + C\left(c\tfrac{\varepsilon}{2^{k(\varepsilon)}} + \left(1 - \tfrac{1}{2^{k(\varepsilon)}}\right)\left(c\tfrac{\varepsilon}{2^{k(\varepsilon)}} + \left(1 - \tfrac{1}{2^{k(\varepsilon)}}\right)|\Omega|\right)\right) \\
&= \varepsilon\,|\Omega| + Cc\tfrac{\varepsilon}{2^{k(\varepsilon)}} + Cc\tfrac{\varepsilon}{2^{k(\varepsilon)}}\left(1 - \tfrac{1}{2^{k(\varepsilon)}}\right) + C\left(1 - \tfrac{1}{2^{k(\varepsilon)}}\right)^2|\Omega|\,.
\end{aligned}$$

On répète ce procédé pour autant que $\left|A^i\right| > 0$. Après $l(\varepsilon)$ itérations on a $\psi_{l(\varepsilon)} \in u_\xi + W_0^{1,\infty}(\Omega;\mathbb{R}^N) \cap Aff_{mor}(\overline{\Omega};\mathbb{R}^N)$ et un ouvert $A^{l(\varepsilon)} \subset \Omega$ tels que

$$D\psi_{l(\varepsilon)}(x) \in \operatorname{int} K,\ p.p.\ x \in \Omega; \quad \left|\left|\psi_{l(\varepsilon)} - u_\xi\right|\right|_{L^\infty(\Omega)} \leq l(\varepsilon)\frac{\varepsilon^2}{2^{k(\varepsilon)}};$$

$$\operatorname{dist}(D\psi_{l(\varepsilon)}(x), E) \leq \varepsilon,\ p.p.\ x \in \Omega \setminus A^{l(\varepsilon)}$$

et, en dénotant $\delta_{k(\varepsilon)} = 1 - \frac{1}{2^{k(\varepsilon)}}$,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \operatorname{dist}(D\psi_{l(\varepsilon)}(x), E)\,dx &\leq \varepsilon\,|\Omega| + Cc\tfrac{\varepsilon}{2^{k(\varepsilon)}}\left(1 + \delta_{k(\varepsilon)} + \delta_{k(\varepsilon)}^2 + ... + \delta_{k(\varepsilon)}^{l(\varepsilon)-1}\right) + C\left(1 - \tfrac{1}{2^{k(\varepsilon)}}\right)^{l(\varepsilon)}|\Omega| \\
&\leq \varepsilon\,|\Omega| + Cc\tfrac{\varepsilon}{2^{k(\varepsilon)}}2^{k(\varepsilon)} + C\left(1 - \tfrac{1}{2^{k(\varepsilon)}}\right)^{\frac{2^{k(\varepsilon)}}{\varepsilon}}|\Omega|\,.
\end{aligned}$$

On note que puisque $\lim_{\varepsilon\to 0} 2^{k(\varepsilon)} = +\infty$ alors

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(1 - \frac{1}{2^{k(\varepsilon)}}\right)^{2^{k(\varepsilon)}} = e^{-1}$$

et on obtient ainsi les estimations désirées. $\square$

4.2.2 Problème d'incompressibilité

Le THÉORÈME 4.2 permet de traiter des problèmes d'incompressibilité, c'est-à-dire des problèmes où

$$E, K \subset \{\xi \in \mathbb{R}^{n\times n} : \ \det \xi = 1\}. \tag{4.4}$$

De tels problèmes ont déjà été considérés par la méthode des catégories de Baire dans Dacorogna-Tanteri [20] dans le cadre des problèmes de la forme (4.2). Müller-Šverák [32] ont aussi traité ce genre de contraintes par la méthode de l'intégration convexe.

Dans les applications, pour les problèmes d'incompressibilité, vu que pour des sous-ensembles de $\{\xi \in \mathbb{R}^{n\times n} : \ \det \xi = 1\}$ on a $\operatorname{int} K = \emptyset$, on ne peut pas utiliser le THÉORÈME 4.5 si on ne change pas adéquatement la notion de *propriété d'approximation.* En fait, on démontre ensuite que, si dans la propriété d'approximation on interprète $\operatorname{int} K$ comme l'intérieur relatif à la variété $\det \xi = 1$, alors le THÉORÈME 4.5 est aussi vrai pour des ensembles E, K satisfaisant (4.4). De cette façon on étend le résultat de [20, Théorème 3.2, page 318] au cadre des problèmes de la forme (4.3). De même temps on corrige leur preuve.

THÉORÈME 4.11. *Soit $E \subset \{\xi \in \mathbb{R}^{n\times n} : \ \det \xi = 1\}$ un ensemble compact. Si E et $\operatorname{Rco} E$ ont la propriété d'approximation (où $\operatorname{int}\operatorname{Rco} E$ doit être interprété comme l'intérieur relatif à la variété $\det \xi = 1$) avec $K(E_\delta) = \operatorname{Rco} E_\delta$ alors $\operatorname{int}\operatorname{Rco} E$ a la propriété de relaxation par rapport à E.*

Avant de démontrer ce résultat on énonce deux lemmes. Le premier est démontré dans Dacorogna-Tanteri [20, Lemme 4.1] et le second dans Müller-Šverák [32, Lemme 6.3].

LEMME 4.12. *Soient Ω un ouvert de mesure fini, $t \in [0,1]$, $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ avec $\operatorname{rang}(A - B) = 1$ et $\det A = \det B = 1$. Soit φ tel que $D\varphi(x) = tA + (1-t)B, \ \forall\ x \in \overline{\Omega}$. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $u \in \varphi + W_0^{1,\infty}(\Omega;\mathbb{R}^n) \cap C^\infty(\overline{\Omega};\mathbb{R}^n)$ et des ensembles ouverts disjoints $\Omega_A, \Omega_B \subset \Omega$ tels que*

$$\begin{cases} \left|\operatorname{mes}\Omega_A - t\operatorname{mes}\Omega\right|, \left|\operatorname{mes}\Omega_B - (1-t)\operatorname{mes}\Omega\right| \le \varepsilon, \\ ||u-\varphi||_{L^\infty(\Omega;\mathbb{R}^n)} \le \varepsilon, \\ Du(x) = \begin{cases} A \text{ dans } \Omega_A, \\ B \text{ dans } \Omega_B, \end{cases} \\ \det Du(x) = 1, \ x \in \Omega \\ \operatorname{dist}(Du(x); \operatorname{co}\{A,B\}) \le \varepsilon, \ x \in \Omega. \end{cases}$$

LEMME 4.13. *Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, K un sous-ensemble ouvert de*

$$\{\xi \in \mathbb{R}^{n\times n} : \ \det \xi = 1\}$$

et $u \in C^1(\overline{\Omega};\mathbb{R}^n)$ tel que $Du \in K$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $v \in u + W_0^{1,\infty}(\Omega;\mathbb{R}^n) \cap Aff_{mor}(\overline{\Omega};\mathbb{R}^n)$ tel que

$$\begin{cases} Dv(x) \in K, \ x \in \Omega, \\ ||v-u||_{W^{1,\infty}(\Omega;\mathbb{R}^n)} \le \varepsilon. \end{cases}$$

DÉMONSTRATION du THÉORÈME 4.11. Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné, u_ξ affine telle que

$$Du_\xi = \xi \in \operatorname{int}\operatorname{Rco} E.$$

Il faut démontrer l'existence d'une suite u_ν comme dans la propriété de relaxation. Par la propriété d'approximation on a que $\xi \in \operatorname{Rco} E_\delta$ pour tout δ suffisamment petit.

On va démontrer que, si $\xi \in \operatorname{Rco} E_\delta$ pour un certain δ fixé alors, donné $\varepsilon > 0$, il existe $u_\varepsilon \in Aff_{mor}(\overline{\Omega};\mathbb{R}^n)$ et des ensembles $\Omega_\varepsilon^1, \Omega_\varepsilon^2 \subset \Omega$ ouverts disjoints tels que $\operatorname{mes}(\Omega \setminus (\Omega_\varepsilon^1 \cup \Omega_\varepsilon^2)) = 0$

et

$$\begin{cases} ||u_\varepsilon - u_\xi||_{L^\infty(\Omega;\mathbb{R}^n)} \leq 2\varepsilon, \\ u_\varepsilon = u_\xi, \text{ sur } \partial\Omega \\ \det Du_\varepsilon(x) = 1, \; x \in \Omega \\ \operatorname{dist}(Du_\varepsilon(x); E_\delta) \leq \varepsilon, \; x \in \Omega_\varepsilon^1 \\ Du_\varepsilon(x) \in \operatorname{int} \operatorname{Rco} E, \; x \in \Omega_\varepsilon^2 \\ \operatorname{mes} \Omega_\varepsilon^2 \leq 2\varepsilon. \end{cases} \tag{4.5}$$

Une fois ceci démontré, on définit la suite u_ν comme suit. Pour chaque ν soit $\delta = \delta(\nu) > 0$ suffisamment petit tel que $\operatorname{dist}(\eta, E) \leq \frac{1}{2\nu}$, $\forall\, \eta \in E_\delta$ (cf. (ii) de la propriété d'approximation) et $\xi \in \operatorname{Rco} E_\delta$. On pourra alors choisir $u_\nu \in Aff_{mor}(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^n)$ satisfaisant (4.5) avec $\varepsilon = \frac{1}{2\nu}$.

Il reste à démontrer (4.5). On va le démontrer par récurrence sur J où l'on admet $\xi \in \mathrm{R}_J\mathrm{co}E_\delta$. Si $J = 0$ on fait $u_\varepsilon = u_\xi$. Si $J = 1$ alors on a $\xi = tA + (1-t)B$ pour certains $A, B \in E_\delta$ avec $\operatorname{rang}(A - B) = 1$. On applique le Lemme 4.12 construisant ainsi $v_\varepsilon \in C^\infty(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^n)$, $\Omega_A^\varepsilon, \Omega_B^\varepsilon \subset \Omega$ ouverts et disjoints tels que

$$\begin{cases} |\operatorname{mes} \Omega_A^\varepsilon - t \operatorname{mes} \Omega|, |\operatorname{mes} \Omega_B^\varepsilon - (1-t) \operatorname{mes} \Omega| \leq \varepsilon, \\ v_\varepsilon = u_\xi, \text{ sur } \partial\Omega \\ ||v_\varepsilon - u_\xi||_{L^\infty(\Omega;\mathbb{R}^n)} \leq \varepsilon, \\ Dv_\varepsilon(x) = \begin{cases} A \text{ dans } \Omega_A^\varepsilon, \\ B \text{ dans } \Omega_B^\varepsilon, \end{cases} \\ \det Dv_\varepsilon(x) = 1, \; x \in \Omega \\ \operatorname{dist}(Dv_\varepsilon(x); \operatorname{co}\{A, B\}) \leq \varepsilon, \; x \in \Omega. \end{cases}$$

Alors v_ε est affine dans Ω_A^ε et dans Ω_B^ε. Faisons $u_\varepsilon = v_\varepsilon$ dans $\Omega_\varepsilon^1 = \Omega_A^\varepsilon \cup \Omega_B^\varepsilon \subset \Omega$ et dans $\Omega \setminus \overline{\Omega_\varepsilon^1} = \Omega_\varepsilon^2$ on applique le Lemme 4.13 pour obtenir $w_\varepsilon \in Aff_{mor}(\Omega_\varepsilon^2; \mathbb{R}^n)$ tel que

$$\begin{cases} Dw_\varepsilon \in \operatorname{int} \operatorname{Rco} E, \\ ||w_\varepsilon - v_\varepsilon||_{W^{1,\infty}(\Omega_\varepsilon^2;\mathbb{R}^n)} \leq \varepsilon, \\ w_\varepsilon = v_\varepsilon, \text{ sur } \partial\Omega_\varepsilon^2. \end{cases}$$

On définit alors

$$u_\varepsilon = \begin{cases} v_\varepsilon \text{ dans } \Omega_\varepsilon^1, \\ w_\varepsilon \text{ dans } \Omega_\varepsilon^2, \end{cases}$$

et on obtient le résultat.

Supposons maintenant que $J > 1$. Alors $\xi = tA + (1-t)B$ avec $A, B \in \mathrm{R}_{J-1}\mathrm{co}E_\delta$, $\operatorname{rang}(A - B) = 1$. Par le Lemme 4.12 on obtient $v_\varepsilon \in C^\infty(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^n)$, $\Omega_A^\varepsilon, \Omega_B^\varepsilon \subset \Omega$ ouverts et disjoints comme en haut. Dans Ω_A^ε et Ω_B^ε, v_ε est affine et $Dv_\varepsilon \in \mathrm{R}_{J-1}\mathrm{co}E_\delta$. Par récurrence, il existe $v_\varepsilon^A \in Aff_{mor}(\overline{\Omega}_A^\varepsilon; \mathbb{R}^n)$ et $v_\varepsilon^B \in Aff_{mor}(\overline{\Omega}_B^\varepsilon; \mathbb{R}^n)$ comme dans (4.5). Dans $\Omega \setminus \overline{(\Omega_A^\varepsilon \cup \Omega_B^\varepsilon)}$ on applique le Lemme 4.13 à v_ε et on obtient $w_\varepsilon \in Aff_{mor}(\Omega \setminus \overline{(\Omega_A^\varepsilon \cup \Omega_B^\varepsilon)}; \mathbb{R}^n)$ tel que

$$\begin{cases} Dw_\varepsilon \in \operatorname{int} \operatorname{Rco} E, \\ ||w_\varepsilon - v_\varepsilon||_{W^{1,\infty}} \leq \varepsilon, \\ w_\varepsilon = v_\varepsilon, \text{ sur } \partial(\Omega \setminus \overline{(\Omega_A^\varepsilon \cup \Omega_B^\varepsilon)}) \end{cases}$$

On fait alors

$$u_\varepsilon = \begin{cases} v_\varepsilon^A \text{ dans } \Omega_A^\varepsilon, \\ v_\varepsilon^B \text{ dans } \Omega_B^\varepsilon, \\ w_\varepsilon \text{ dans } \Omega \setminus \overline{(\Omega_A^\varepsilon \cup \Omega_B^\varepsilon)}, \end{cases}$$

et on obtient le résultat. □

4.2.3 L'inclusion $Du(x) \in \partial K$

Il peut être important de résoudre des inclusions différentielles de la forme $Du(x) \in \partial K,\ x \in \Omega$, où ∂K est le bord d'un ensemble K. En effet, la méthode utilisée pour traiter les problèmes de minimisation du Chapitre 5 passe par la résolution de telles inclusions différentielles. Supposons qu'on impose aussi sur le bord de Ω la condition $u = u_{\xi_0}$ où u_{ξ_0} est une application affine telle que $Du_{\xi_0} = \xi_0 \in \mathbb{R}^{N\times n}$. Dans ce cas, par le Théorème 4.2, il faut vérifier qu'il existe un ensemble borné K_0 qui contient ξ_0 et qui a la propriété de relaxation par rapport à ∂K. Si K est borné alors cela est toujours vérifié avec $K_0 = K$. On vérifie par la suite qu'avec des conditions plus faibles sur K (il suffit que K soit borné dans quelques directions) on peut assurer de telles conditions. On commence par introduire quelques notations.

Notation 4.14. Soit $K \subset \mathbb{R}^{N\times n}$ ouvert et $\lambda \in \mathbb{R}^{N\times n}$.

(i) Pour $\xi \in K$, on note par $L_K(\xi,\lambda)$ le plus grand segment de la forme $[\xi + t\lambda, \xi + s\lambda]$, $t < 0 < s$, tel que $]\xi + t\lambda, \xi + s\lambda[\subset K$.

(ii) Si $L_K(\xi,\lambda)$ est borné, on note par $t_-(\xi) < 0 < t_+(\xi)$ les éléments tels que $L_K(\xi,\lambda) = [\xi + t_-\lambda, \xi + t_+\lambda]$. Alors

$$\xi + t_\pm\lambda \in \partial K \quad \text{et} \quad \xi + t\lambda \in K, \ \ \forall\, t \in]t_-, t_+[.$$

(iii) Si $H \subset K$, on fait

$$L_K(H,\lambda) = \bigcup_{\xi\in H} L_K(\xi,\lambda).$$

Définition 4.15. Soit $K \subset \mathbb{R}^{N\times n}$ ouvert, $\xi_0 \in K$ et $\lambda \in \mathbb{R}^{N\times n}$.

(i) On dit que K *est borné en* ξ_0 *dans la direction* λ si $L_K(\xi_0,\lambda)$ est borné.

(ii) On dit que K est *borné de façon stable en* ξ_0 *dans la direction de rang un* $\lambda = \alpha\otimes\beta$ (avec $\alpha \in \mathbb{R}^N$ et $\beta \in \mathbb{R}^n$) s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $L_K(\xi_0 + \alpha\otimes B_\varepsilon, \lambda)$ est borné, où on a noté

$$\xi_0 + \alpha\otimes B_\varepsilon = \left\{\xi \in \mathbb{R}^{N\times n} : \xi = \xi_0 + \alpha\otimes b \text{ avec } |b| < \varepsilon\right\}.$$

On donne un exemple d'un ensemble non borné, mais borné dans certaines directions de rang un.

Exemple 4.16. Soient $N = n = 2$ et l'ensemble non borné

$$K = \left\{\xi \in \mathbb{R}^{2\times 2} : \alpha < \det\xi < \beta\right\}.$$

(i) Si $\xi_0 = I$ alors K est borné, et même borné de façon stable, en ξ_0, dans une direction de rang un, par exemple en faisant

$$\lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \lambda = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(ii) Si $\xi_0 = 0$, alors K n'est borné en ξ_0 dans aucune direction de rang un. Cependant cet ensemble est borné en ξ_0 dans toutes les directions de rang 2.

Théorème 4.17. *Soit $K \subset \mathbb{R}^{N\times n}$ ouvert et $\xi_0 \in K$. S'il existe une direction de rang un $\lambda \in \mathbb{R}^{N\times n}$ telle que K est borné de façon stable en ξ_0 dans la direction $\lambda = \alpha \otimes \beta$ alors, il existe $K_0 \subset K$ borné qui contient ξ_0, avec la propriété de relaxation par rapport à $\overline{K}_0 \cap \partial K$ et d'ailleurs par rapport à ∂K.*

Démonstration. On démontre le résultat en deux étapes.

Etape 1. On peut supposer $|\beta| = 1$, sinon on le remplace par $\beta/|\beta|$. Soient, pour $j \leq k$ et certain $k \geq n$, $\beta_j \in \mathbb{R}^n$, avec $|\beta_j| = 1$, tels que

$$0 \in H := \operatorname{int}\operatorname{co}\{\beta, -\beta, \beta_3, \ldots, \beta_k\} \subset B_1(0) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}.$$

On définit alors, pour $\varepsilon > 0$ comme dans l'hypothèse,

$$K_0 := (\xi_0 + \alpha \otimes \varepsilon H) \cup \left[\partial K \cap L_K(\xi_0 + \alpha \otimes \varepsilon \overline{H}, \lambda)\right].$$

Donc $\xi_0 \in K_0$ et K_0 est borné puisque

$$K_0 \subset \overline{K}_0 \subset L_K(\xi_0 + \alpha \otimes \overline{B}_\varepsilon, \lambda).$$

On remarque que

$$\overline{K}_0 \cap \partial K = \partial K \cap L_K(\xi_0 + \alpha \otimes \varepsilon \overline{H}, \lambda).$$

Il reste donc à démontrer que K_0 a la propriété de relaxation par rapport à $\overline{K}_0 \cap \partial K$. On va le démontrer dans la deuxième étape.

Etape 2. On démontre que K_0 a la propriété de relaxation par rapport à $\overline{K}_0 \cap \partial K$. Soit $\xi \in K_0$ et u_ξ tel que $Du_\xi = \xi$. On va trouver une suite $u_\nu \in Aff_{mor}\left(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^N\right)$ telle que

$$\begin{aligned} &u_\nu \in u_\xi + W_0^{1,\infty}\left(\Omega; \mathbb{R}^N\right),\ Du_\nu(x) \in \left(\overline{K}_0 \cap \partial K\right) \cup K_0,\ p.p.\ x \in \Omega \\ &u_\nu \overset{*}{\rightharpoonup} u_\xi \text{ en } W^{1,\infty},\ \lim_{\nu\to\infty}\int_\Omega \operatorname{dist}\left(Du_\nu(x); \overline{K}_0 \cap \partial K\right) dx = 0. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Si $\xi \in \partial K \cap L_K(\xi_0 + \alpha \otimes \varepsilon \overline{H}, \lambda)$, c'est immédiat, on fait $u_\nu = u_\xi$. Supposons $\xi \in \xi_0 + \alpha \otimes \varepsilon H$. Par hypothèse, on peut trouver $t_-(\xi) < 0 < t_+(\xi)$ tels que

$$\xi_\pm := \xi + t_\pm \lambda \in \partial K \quad \text{et} \quad \xi + t\lambda \in K \ \ \forall\, t \in]t_-, t_+[$$

et donc $\xi_\pm \in \overline{K}_0 \cap \partial K$. On peut écrire

$$\xi = \frac{-t_-}{t_+ - t_-}\xi_+ + \frac{t_+}{t_+ - t_-}\xi_- \quad \text{avec} \quad \xi_\pm \in \overline{K}_0 \cap \partial K. \tag{4.7}$$

De plus, puisque $\xi \in \xi_0 + \alpha \otimes \varepsilon H$, on peut trouver $\gamma \in \varepsilon H$ tel que

$$\xi = \xi_0 + \alpha \otimes \gamma.$$

Comme H est ouvert on a $\overline{B}_\delta(\gamma) \subset \varepsilon H$, pour $\delta > 0$ suffisamment petit. Comme $\delta > 0$, on a

$$0 \in \delta H = \operatorname{int}\operatorname{co}\{\pm\delta\beta, \delta\beta_3, \ldots, \delta\beta_k\}$$

et

$$\pm\delta\beta \in \operatorname{co}\{\pm(t_+ - t_-)\beta\} \subset \operatorname{co}\{\pm(t_+ - t_-)\beta, \delta\beta_3, \ldots, \delta\beta_k\},$$

on obtient

$$0 \in \delta H = \operatorname{int}\operatorname{co}\{\pm\delta\beta, \delta\beta_3, \ldots, \delta\beta_k\} \subset \operatorname{int}\operatorname{co}\{\pm(t_+ - t_-)\beta, \delta\beta_3, \ldots, \delta\beta_k\}.$$

On applique maintenant le LEMME 4.7 à

$$
\begin{aligned}
&a=\alpha,\ b=(t_+-t_-)\,\beta,\ b_j=\delta\beta_j,\ j=3,...,k,\ t=\frac{-t_-}{t_+-t_-},\\
&A=\xi_+=\xi+\frac{t_+}{t_+-t_-}\alpha\otimes(t_+-t_-)\,\beta=\xi+(1-t)\,a\otimes b,\\
&B=\xi_-=\xi+\frac{t_-}{t_+-t_-}\alpha\otimes(t_+-t_-)\,\beta=\xi-ta\otimes b
\end{aligned}
$$

et on trouve $u_\delta\in Aff_{mor}\left(\overline{\Omega};\mathbb{R}^N\right)$, des ensembles ouverts $\Omega_+,\Omega_-\subset\Omega$, tels que

$$
\begin{cases}
\left|\text{mes }(\Omega_+)-t\,\text{mes }\Omega\right|,\ \left|\text{mes }(\Omega_-)-(1-t)\,\text{mes }\Omega\right|\le\delta\\
u_\delta(x)=u_\xi(x),\ x\in\partial\Omega\\
|u_\delta(x)-u_\xi(x)|\le\delta,\quad x\in\Omega\\
Du_\delta(x)=\xi_\pm,\ p.p.\ x\in\Omega_\pm\\
Du_\delta(x)\in\xi+\{t_+\alpha\otimes\beta,t_-\alpha\otimes\beta,\alpha\otimes\delta\beta_3,\dots,\alpha\otimes\delta\beta_k\},\ p.p.\ x\in\Omega.
\end{cases}
\tag{4.8}
$$

Comme $\xi_\pm\in\overline{K}_0\cap\partial K$ et

$$\xi+\alpha\otimes\delta\beta_j\in\xi+\alpha\otimes\delta\overline{H}=\xi_0+\alpha\otimes\left(\gamma+\delta\overline{H}\right)\subset\xi_0+\alpha\otimes\varepsilon H\subset K_0,\ j=3,...,k,$$

on déduit la propriété de relaxation de (4.8), en choisissant $\delta=1/\nu$. Ce qui finit la démonstration du théorème. □

4.3 Applications

4.3.1 Inclusion différentielle définie par une fonction quasiaffine

On considère dans cette section une première application du théorème d'existence général énoncé au début du chapitre. On veut démontrer l'existence de solution pour

$$\Phi(Du)\in\{\alpha,\beta\}$$

où $\Phi:\mathbb{R}^{N\times n}\longrightarrow\mathbb{R}$ est une fonction quasiaffine quelconque.

On aura besoin, dans cette section, des résultats démontrés dans la Section 3.1. Le théorème d'existence est le suivant :

THÉORÈME 4.18. *Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, $\alpha<\beta$ des constantes, $\Phi:\mathbb{R}^{N\times n}\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction quasiaffine non constante et $\varphi\in C^1_{mor}(\overline{\Omega};\mathbb{R}^N)$ une application telle que*

$$\Phi(D\varphi(x))\in]\alpha,\beta[,\ p.p.\ x\in\Omega.$$

Alors il existe $u\in\varphi+W_0^{1,\infty}(\Omega;\mathbb{R}^N)$ tel que

$$\Phi(Du(x))\in\{\alpha,\beta\},\ p.p.\ x\in\Omega.$$

REMARQUE 4.19. Dans les conditions du théorème, si $c^i_j,\ i=1,...,N,\ j=1,...,n$ sont des constantes telles que $\left|D_j\varphi^i(x)\right|\le c^i_j$ et

$$|\Phi(\xi)|>\max\{|\alpha|,|\beta|\},\ \forall\ \xi\in\mathbb{R}^{N\times n}\text{ avec }\left|\xi^i_j\right|=c^i_j,\ i=1,...,N,\ j=1,...,n$$

alors la solution u vérifie $\left|D_ju^i(x)\right|\le c^i_j,\ \forall\ (i,j)$. De plus, cf. PROPOSITION 3.3, il est toujours possible de trouver de telles constantes c^i_j.

Pour démontrer le résultat on veut appliquer le théorème d'existence général : Théorème 4.2. On commence par démontrer la propriété d'approximation (cf. Définition 4.4) qui permet, à l'aide des résultats énoncés dans la Section 4.1, de vérifier les hypothèses du théorème mentionné.

Lemme 4.20. *Soient $\alpha < \beta$, $\Phi : \mathbb{R}^{N\times n} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction quasiaffine non constante et*

$$E = \left\{\xi \in \mathbb{R}^{N\times n} : \ \Phi(\xi) \in \{\alpha, \beta\}, \ \left|\xi_j^i\right| \leq c_j^i, \ i = 1, ..., N, \ j = 1, ..., n\right\},$$

où c_j^i sont des constantes strictement positives telles que

$$|\Phi(\xi)| > \max\{|\alpha|, |\beta|\}, \ \forall \ \xi \in \mathbb{R}^{N\times n}, \left|\xi_j^i\right| = c_j^i, \ i = 1, ..., N, \ j = 1, ..., n. \tag{4.9}$$

Alors E et $\operatorname{Rco} E$ ont la propriété d'approximation avec $K(E_\delta) = \operatorname{Rco} E_\delta$.

Démonstration. Soit, pour $\delta \geq 0$,

$$E_\delta = \left\{\xi \in \mathbb{R}^{N\times n} : \ \Phi(\xi) \in \{\alpha + \delta, \beta - \delta\}, \ \left|\xi_j^i\right| \leq c_j^i - \delta, \ i = 1, ..., N, \ j = 1, ..., n\right\}.$$

On note que les ensembles E_δ sont fermés et on va vérifier que

$$|\Phi(\xi)| > \max\{|\alpha + \delta|, |\beta - \delta|\}, \ \forall \ \xi \in \mathbb{R}^{N\times n}, \ \left|\xi_j^i\right| = c_j^i - \delta, \ i = 1, ..., N, \ j = 1, ..., n. \tag{4.10}$$

On considère à chaque fois parmi les matrices ξ^δ telles que $\left|(\xi^\delta)_j^i\right| = c_j^i - \delta$ (donc $(\xi^\delta)_j^i = \pm(c_j^i - \delta)$) celles dont le signe de chaque composante (i, j) est le même. On définit, pour cet ensemble de matrices, les fonctions $f(\delta) = \left|\Phi(\xi^\delta)\right| - |\alpha + \delta|$ et $g(\delta) = \left|\Phi(\xi^\delta)\right| - |\beta - \delta|$. On a $f(0) = \left|\Phi(\xi^0)\right| - |\alpha| > 0$ et $g(0) = \left|\Phi(\xi^0)\right| - |\beta| > 0$, puisque ξ^0 est telle que $\left|(\xi^0)_j^i\right| = c_j^i$. Donc, par continuité de f et g, il existe $\delta_0 > 0$ tel que $f(\delta) > 0$, $g(\delta) > 0$, $\forall \ \delta \in [0, \delta_0]$. En faisant le même raisonnement pour tous les cas possibles de signes des composantes (i, j) (qui est en nombre fini) on prouve (4.10), pour δ suffisamment petit. Alors par le Théorème 3.1,

$$\operatorname{Rco} E_\delta = \left\{\xi \in \mathbb{R}^{N\times n} : \ \Phi(\xi) \in [\alpha + \delta, \beta - \delta], \ \left|\xi_j^i\right| \leq c_j^i - \delta, \ i = 1, ..., N, \ j = 1, ..., n\right\},$$

qui est aussi un ensemble fermé.

C'est clair, en utilisant l'expression de $\operatorname{int} \operatorname{Rco} E$ calculée dans le Théorème 3.1, que $E_\delta \subset \operatorname{Rco} E_\delta \subset \operatorname{int} \operatorname{Rco} E$, si $\delta > 0$.

On vérifie maintenant que

$$\forall \ \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta_0 > 0 : \ \operatorname{dist}(\eta, E) \leq \varepsilon \ \forall \ \eta \in E_\delta, \ \delta \in [0, \delta_0].$$

Supposons par l'absurde que la condition précédente n'est pas vraie. Alors

$$\exists \ \varepsilon > 0 : \ (\forall \ \delta > 0 \ \exists \ \eta \in E_\delta \ \operatorname{dist}(\eta, E) > \varepsilon).$$

On peut ainsi construire une suite $\eta_n \in E_{1/n}$ telle que $\operatorname{dist}(\eta_n, E) > \varepsilon$, pour un certain $\varepsilon > 0$. Si $\eta_n \in E_{1/n}$ alors $\left|(\eta_n)_j^i\right| \leq c_j^i$ et donc à une sous-suite près, $\eta_n \to \eta$. On vérifie immédiatement que $\eta \in E$ ce qui donne l'absurde.

Il reste à noter que si $\eta \in \operatorname{int} \operatorname{Rco} E$ alors $\eta \in \operatorname{Rco} E_\delta$, pour δ petit. On conclut ainsi que E et $\operatorname{Rco} E$ ont la propriété d'approximation comme on voulait. □

On termine cette section avec la démonstration du théorème principal.

Démonstration du Théorème 4.18 : Une fois que $\varphi \in C_{mor}^1(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^N)$, il existe $M > 0$ tel que $\left|D_j \varphi^i(x)\right| \leq M, \ \forall \ x \in \overline{\Omega}$. En appliquant la Proposition 3.3 on trouve $c_j^i > M$ vérifiant

$$|\Phi(\xi)| > \max\{|\alpha|, |\beta|\}, \ \forall \ \xi \in \mathbb{R}^{N\times n} \text{ tel que } \left|\xi_j^i\right| = c_j^i, \ i = 1, ..., N, \ j = 1, ..., n.$$

On définit alors l'ensemble

$$E = \left\{ \xi \in \mathbb{R}^{N \times n} : \ \Phi(\xi) \in \{\alpha, \beta\}, \ \left|\xi_j^i\right| \leq c_j^i, \ i = 1, ..., N, \ j = 1, ..., n \right\}.$$

Par le lemme précédent, E et $\operatorname{Rco} E$ ont la propriété d'approximation avec $K(E_\delta) = \operatorname{Rco} E_\delta$ et donc, du THÉORÈME 4.5, on conclut que $\operatorname{int} \operatorname{Rco} E$ a la propriété de relaxation par rapport à E.

Finalement, de la façon comme les constantes c_j^i ont été choisis on a $D\varphi(x) \in \operatorname{int} \operatorname{Rco} E$, *p.p.* $x \in \Omega$. Le THÉORÈME 4.2 permet alors de conclure qu'il existe $u \in \varphi + W_0^{1,\infty}(\Omega; \mathbb{R}^N)$ tel que

$$\begin{cases} \Phi(Du(x)) \in \{\alpha, \beta\}, \ p.p. \ x \in \Omega, \\ \left|D_j u^i(x)\right| \leq c_j^i, \ p.p. \ x \in \overline{\Omega}, \ i = 1, ..., N, \ j = 1, ..., n. \end{cases}$$

□

4.3.2 Le cas du déterminant avec conditions sur les valeurs singulières

La fonction déterminant est une fonction quasiaffine. Donc, de la section précédente, on a un résultat d'existence de solution pour l'inclusion

$$\det(Du) \in \{\alpha, \beta\} \text{ dans } \Omega. \tag{4.11}$$

On va vérifier dans cette section qu'on peut encore assurer l'existence de solution pour l'inclusion (4.11) si on impose d'autres conditions sur Du, notamment des conditions sur ses valeurs singulières. Le problème est le suivant : on cherche $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tel que

$$\begin{cases} \det(Du(x)) \in \{\alpha, \beta\} \ p.p. \ x \in \Omega, \\ \lambda_i(Du(x)) = \gamma_i, \ p.p. \ x \in \Omega, \ i = 2, ..., n, \\ u = \varphi, \ \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $\lambda_i(Du(x))$ désignent les valeurs singulières de $Du(x)$ (cf. DÉFINITION 3.17). Le cas où $\alpha = \beta = 0$ sera aussi considéré.

THÉORÈME 4.21. *Soient $n \geq 2$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné et des constantes $\alpha < \beta$, $0 < \gamma_2 \leq ... \leq \gamma_n$ vérifiant la condition*

$$\gamma_2 \prod_{i=2}^{n} \gamma_i > \max\{|\alpha|, |\beta|\}.$$

Soit encore $\varphi \in C^1_{mor}(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^n)$ tel que

$$\begin{cases} \det(D\varphi(x)) \in]\alpha, \beta[, \ p.p. \ x \in \Omega, \\ \prod_{i=\tau}^{n} \lambda_i(D\varphi(x)) < \prod_{i=\tau}^{n} \gamma_i, \ p.p. \ x \in \Omega, \ \tau = 2, ..., n. \end{cases}$$

Alors, il existe $u \in \varphi + W_0^{1,\infty}(\Omega; \mathbb{R}^n)$ tel que

$$\begin{cases} \det(Du(x)) \in \{\alpha, \beta\}, \ p.p. \ x \in \Omega, \\ \lambda_i(Du(x)) = \gamma_i, \ p.p. \ x \in \Omega, \ i = 2, ..., n. \end{cases}$$

REMARQUE 4.22. (i) Le cas où $\alpha = -\beta \neq 0$ a déjà été démontré par Dacorogna-Marcellini [14, Théorème 7.28, page 199]. Pour plus de détails on se réfère à la REMARQUE 3.5 (i), page 38.

(ii) Le cas où $\alpha = \beta$ n'est pas inclus dans le THÉORÈME 4.21. Cependant, si la donnée au bord est affine le résultat est encore vrai. Ce fait a été démontré par Dacorogna-Tanteri [20, Théorème 10.3, page 335] pour $\alpha = \beta \neq 0$. On note que ce problème est dans le contexte du THÉORÈME 4.2 et grâce au THÉORÈME 4.11 il peut être résolu. Plus loin (cf. THÉORÈME 4.24) on considère le cas $\alpha = \beta = 0$ qui se réduit à un problème de dimension inférieure.

On commence par vérifier la propriété d'approximation pour des ensembles adéquats.

Lemme 4.23. *Soient $n \geq 2$, $\alpha < \beta$, $0 < \gamma_2 \leq ... \leq \gamma_n$ vérifiant la condition*

$$\gamma_2 \prod_{i=2}^{n} \gamma_i > \max \{|\alpha|, |\beta|\}$$

et

$$E = \left\{ \xi \in \mathbb{R}^{n \times n} : \ \det \xi \in \{\alpha, \beta\}, \ \lambda_i(\xi) = \gamma_i, \ i = 2, ..., n \right\}.$$

Alors E et $\operatorname{Rco} E$ ont la propriété d'approximation avec $K(E_\delta) = \operatorname{Rco} E_\delta$.

Démonstration. On note d'abord que, par le Théorème 3.4,

$$\operatorname{Rco} E = \left\{ \xi \in \mathbb{R}^{n \times n} : \ \det \xi \in [\alpha, \beta], \ \prod_{i=\tau}^{n} \lambda_i(\xi) \leq \prod_{i=\tau}^{n} \gamma_i, \ \tau = 2, ..., n \right\}$$

et on définit, pour $\delta > 0$ tel que $\gamma_2 - \delta > 0$ et $\alpha + \delta < \beta - \delta$,

$$E_\delta = \left\{ \xi \in \mathbb{R}^{n \times n} : \ \det \xi \in \{\alpha + \delta, \beta - \delta\}, \ \lambda_i(\xi) = \gamma_i - \delta, \ i = 2, ..., n \right\}.$$

Pour δ suffisamment petit, la condition $(\gamma_2 - \delta) \prod_{i=2}^{n} (\gamma_i - \delta) \geq \max \{|\alpha + \delta|, |\beta - \delta|\}$ est encore vérifiée. Donc, par le Théorème 3.4 on a

$$\operatorname{Rco} E_\delta = \left\{ \xi \in \mathbb{R}^{n \times n} : \ \det \xi \in [\alpha + \delta, \beta - \delta], \ \prod_{i=\tau}^{n} \lambda_i(\xi) \leq \prod_{i=\tau}^{n} (\gamma_i - \delta), \ \tau = 2, ..., n \right\}.$$

C'est clair que E_δ et $\operatorname{Rco} E_\delta$ sont des ensembles fermés vérifiant $E_\delta \subset \operatorname{Rco} E_\delta \subset \operatorname{int} \operatorname{Rco} E$ (l'expression de $\operatorname{int} \operatorname{Rco} E$ est connue par le Théorème 3.4).

Ensuite on démontre la deuxième condition de la propriété d'approximation. Soit $\varepsilon > 0$, on veut trouver $\delta_0 > 0$ tel que $\operatorname{dist}(\eta, E) \leq \varepsilon, \ \forall \ \eta \in E_\delta, \ \delta \in [0, \delta_0]$. On va utiliser la métrique de $\mathbb{R}^{n \times n}$ induite par la norme de la plus grande valeur singulière (voir Théorème 3.20).

Soit $\eta \in E_\delta$, pour $\delta \in]0, \delta_0]$, où δ_0 est à trouver. On écrit

$$\eta = P \begin{pmatrix} x & & & \\ & \gamma_2 - \delta & & \\ & & \ddots & \\ & & & \gamma_n - \delta \end{pmatrix} Q,$$

avec $P, Q \in SO(n)$ et $|x| \leq \gamma_2 - \delta$ et disons que $\det \eta = \alpha + \delta$. On va trouver un élément dans E qui soit proche de η. En effet, soit

$$\xi = P \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{\gamma_2 \cdots \gamma_n} & & & \\ & \gamma_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \gamma_n \end{pmatrix} Q.$$

L'hypothèse sur les constantes γ_i permet de conclure que $\xi \in E$. De plus, on a

$$\operatorname{dist}(\eta; E) \leq \operatorname{dist}(\eta; \xi) = \lambda_n(\eta - \xi) = \max \left\{ \left| x - \frac{\alpha}{\gamma_2 \cdots \gamma_n} \right|, \delta \right\}.$$

Comme $\left|x - \frac{\alpha}{\gamma_2 \cdots \gamma_n}\right| = \left|\frac{\alpha+\delta}{(\gamma_2-\delta)\cdots(\gamma_n-\delta)} - \frac{\alpha}{\gamma_2\cdots\gamma_n}\right| \to 0$ lorsque $\delta \to 0$ alors $\mathrm{dist}(\eta; E) < \varepsilon$ pour $\delta \leq \delta_0$ suffisamment petit. On note que le choix de δ_0 ne dépend que de α, β, γ_i, $i = 2, ..., n$ et ε.

Il reste à vérifier la troisième condition de la propriété d'approximation. Soit $\eta \in \operatorname{int} \operatorname{Rco} E$. Alors $\det \eta \in]\alpha, \beta[$ et $\prod_{i=\tau}^{n} \lambda_i(\eta) < \prod_{i=\tau}^{n} \gamma_i,\ \tau = 2, ..., n$. On a que, pour un certain $\delta_1 > 0$, $\det \eta \in]\alpha + \delta, \beta - \delta[,\ \forall\ \delta < \delta_1$. D'autre part, si on considère les fonctions continues $f_\tau(\delta) = \prod_{i=\tau}^{n} \lambda_i(\eta) - \prod_{i=\tau}^{n} (\gamma_i - \delta),\ \tau = 2, ..., n$, on sait que $f_\tau(0) < 0$ et donc $f_\tau(\delta) < 0$ pour δ plus petit qu'un certain $\delta_\tau > 0,\ \tau = 2, ..., n$. Si $\delta_0 = \min_{1 \leq i \leq n} \{\delta_i\}$ on a que $\eta \in \operatorname{Rco} E_\delta$ pour $\delta \leq \delta_0$, comme on voulait. □

Le résultat principal de la section en découle immédiatement.

Démonstration du Théorème 4.21 : Il suffit de vérifier que le Théorème 4.2 est satisfait. On considère l'ensemble

$$E = \left\{\xi \in \mathbb{R}^{n \times n} :\ \det \xi \in \{\alpha, \beta\},\ \lambda_i(\xi) = \gamma_i,\ i = 2, ..., n\right\}.$$

Dans le lemme précédent on a assuré que E et $\operatorname{Rco} E$ ont la propriété d'approximation avec $K(E_\delta) = \operatorname{Rco} E_\delta$ et donc, par le Théorème 4.5, la propriété de relaxation est vérifiée. Finalement, les hypothèses sur la donnée au bord φ permettent de conclure le résultat. □

Ensuite on considère le problème d'existence d'une application u solution de l'équation $\det Du = 0$, avec les valeurs singulières de Du prescrites.

Théorème 4.24. *Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, $1 < t \leq k \leq n + 1$, des constantes $0 < \gamma_t \leq \cdots \leq \gamma_n$ et $\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une application affine telle que*

$$\begin{cases} \lambda_i(D\varphi) = 0,\ i = 1, ..., k-1, \\ \lambda_k(D\varphi) > 0, \\ \prod_{i=\tau}^{n} \lambda_i(D\varphi) < \prod_{i=\tau}^{n} \gamma_i,\ \tau = k, ..., n \end{cases}$$

(les deux inégalités n'ayant lieu que si $k \leq n$).

Alors, il existe $u \in \varphi + W_0^{1,\infty}(\Omega; \mathbb{R}^n)$ tel que

$$\begin{cases} \lambda_i(Du(x)) = 0,\ p.p.\ x \in \Omega,\ i = 1, ..., t-1 \\ \lambda_i(Du(x)) = \gamma_i,\ p.p.\ x \in \Omega,\ i = t, ..., n. \end{cases}$$

Remarque 4.25. On note que le gradient de la solution u doit avoir au maximum le même nombre de valeurs singulières nulles que le gradient de la donnée au bord φ.

Démonstration. On commence par noter qu'il suffit de considérer le cas où

$$D\varphi = \operatorname{diag}(0, ..., 0, \lambda_k, ..., \lambda_n).$$

En fait, comme on peut toujours écrire $D\varphi = PDQ$ où $P, Q \in SO(n)$ et D est la matrice diagonale des valeurs singulières de $D\varphi$ (cf. Remarque 3.19), si $v \in \psi + W_0^{1,\infty}(Q\Omega; \mathbb{R}^n)$ est solution du problème pour $\psi(y) = P^T \varphi(Q^T y)$ $(D\psi = D)$, alors $u(x) = Pv(Qx)$ est solution du problème original.

Supposons donc que $D\varphi = \operatorname{diag}(0, ..., 0, \lambda_k, ..., \lambda_n)$. Alors $\varphi_i(x)$ est constante pour $i = 1, ..., k-1$ et $\varphi_j(x) = \varphi_j(x_j)$ pour $j = k, ..., n$. Pour obtenir une solution du problème il suffit de faire $u = (\varphi_1, ..., \varphi_{t-1}, u_t, ..., u_n)$ où

$$\widetilde{u} = (u_t, ..., u_n) \in (\varphi_t, ..., \varphi_n) + W_0^{1,\infty}(\Omega; \mathbb{R}^{n-t+1}), \quad \lambda_i(D\widetilde{u}) = \gamma_{i+t-1},\ i = 1, ..., n-t+1.$$

En effet, si une matrice a un nombre s de lignes nulles alors ses s premières valeurs singulières sont 0 et les restantes sont les valeurs singulières de la matrice (rectangulaire) composée par les lignes non nulles de la matrice initiale.

L'existence de $\widetilde{u}$ est assurée par le Théorème 7.28 de [14, page 199] où des solutions dans $W^{1,\infty}(\Omega; \mathbb{R}^n)$ ($\Omega \subset \mathbb{R}^n$) sont considérées, mais qui est aussi valable dans $W^{1,\infty}(\Omega; \mathbb{R}^N)$. □

4.3.3 Extension du cas d'une inclusion définie par une fonction quasiaffine

On aimerait étendre le résultat de la section précédente au cas plus général des fonctions quasiaffines, c'est-à-dire, résoudre l'inclusion

$$\Phi(Du) \in \{\alpha, \beta\}$$

(Φ étant une fonction quasiaffine arbitraire) en prescrivant les valeurs singulières de Du. Comme on a vu avant (Section 3.3), calculer l'enveloppe rang un convexe de l'ensemble lié à un tel problème n'est pas facile. On va donc considérer le problème où l'on prescrit les valeurs singulières d'une sous-matrice particulière de Du. Les notations sont les mêmes qu'on a utilisé dans la Section 3.3. On rappelle que si

$$\Phi(\xi) = \Phi(0) + \sum_{k=1}^{N \wedge n} < A^k; \operatorname{adj}_k \xi >,$$

on a noté $l = \max\{k :\ A^k \neq 0\}$ et pour $(s,t) \in \mathbb{R}^{\sigma(l)}$ tel que $(A^l)_t^s \neq 0$ qu'on a fixé, $\hat{\xi}$ est la sous-matrice carrée d'ordre l de ξ qui intervient dans $\operatorname{adj}_l \xi$. De plus, on a noté I l'ensemble des indices des composantes de la matrice ξ qui ne sont pas dans la matrice $\hat{\xi}$.

On considère aussi les conditions suivantes :

$$\sup\left\{\Phi(\xi) :\ \left|\xi_j^i\right| = c_j^i,\ \forall\ (i,j) \in I,\ \lambda_i(\hat{\xi}) = \gamma,\ \forall\ i = 1, ..., l,\ (A^l)_t^s (\operatorname{adj}_l \xi)_t^s < 0\right\} < \alpha \tag{4.12}$$

et

$$\beta < \inf\left\{\Phi(\xi) :\ \left|\xi_j^i\right| = c_j^i,\ \forall\ (i,j) \in I,\ \lambda_i(\hat{\xi}) = \gamma,\ \forall\ i = 1, ..., l,\ (A^l)_t^s (\operatorname{adj}_l \xi)_t^s > 0\right\}. \tag{4.13}$$

On va démontrer le résultat d'existence suivant.

Théorème 4.26. *Soient $N, n \in \mathbb{N}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné, $\Phi : \mathbb{R}^{N\times n} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction quasiaffine non constante et des constantes $\alpha < \beta$ et $\gamma > 0$ vérifiant les conditions (4.12) et (4.13). Soit encore $\varphi \in C^1_{mor}(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^N)$ tel que*

$$\begin{cases} \Phi(D\varphi(x)) \in]\alpha, \beta[,\ p.p.\ x \in \Omega, \\ \lambda_l(\widehat{D\varphi(x)}) < \gamma. \end{cases}$$

Alors il existe $u \in \varphi + W_0^{1,\infty}(\Omega; \mathbb{R}^N)$ tel que

$$\begin{cases} \Phi(Du(x)) \in \{\alpha, \beta\},\ p.p.\ x \in \Omega, \\ \lambda_i(\widehat{D\varphi(x)}) = \gamma,\ p.p.\ x \in \Omega,\ i = 2, ..., l. \end{cases}$$

Comme d'habitude on commence par démontrer la propriété d'approximation.

Lemme 4.27. *Soient $N, n \in \mathbb{N}$, $\Phi : \mathbb{R}^{N\times n} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction quasiaffine non constante, des constantes $\alpha < \beta$ et $\gamma > 0$ vérifiant les conditions (4.12) et (4.13) et*

$$E = \left\{\xi \in \mathbb{R}^{N\times n} : \ \Phi(\xi) \in \{\alpha, \beta\}, \ \left|\xi_j^i\right| \le c_j^i, \ \forall\ (i,j) \in I, \ \lambda_i(\hat{\xi}) = \gamma, \ i = 2, ..., l\right\}.$$

Alors E et $\operatorname{Rco} E$ ont la propriété d'approximation avec $K(E_\delta) = \operatorname{Rco} E_\delta$.

Démonstration. On considère l'ensemble

$$E_\delta = \left\{\xi \in \mathbb{R}^{N\times n} : \ \Phi(\xi) \in \{\alpha+\delta, \beta-\delta\}, \ \left|\xi_j^i\right| \le c_j^i - \delta, \ \forall\ (i,j) \in I, \ \lambda_i(\hat{\xi}) = \gamma - \delta, \ i = 2, ..., l\right\}$$

et on commence par vérifier que

$$\operatorname{Rco} E_\delta = \left\{\xi \in \mathbb{R}^{N\times n} : \ \Phi(\xi) \in [\alpha+\delta, \beta-\delta], \ \left|\xi_j^i\right| \le c_j^i - \delta, \ \forall\ (i,j) \in I, \ \lambda_l(\hat{\xi}) = \gamma - \delta\right\}.$$

Pour cela il suffit de vérifier que les conditions (3.4) et (3.5) du Théorème 3.7 sont vraies quand α est remplacé par $\alpha+\delta$, β par $\beta-\delta$, c_j^i par $c_j^i - \delta$ et γ par $\gamma - \delta$.

On démontre l'inégalité (3.4), l'autre est analogue. On suppose par l'absurde que (3.4) ne se vérifie pas. Alors on peut construire ξ_δ, avec $\delta \to 0$, tel que $\Phi(\xi_\delta) > \alpha+\delta$, $\left|(\xi_\delta)_j^i\right| = c_j^i - \delta$, $\forall\ (i,j) \in I$, $\lambda_i(\hat{\xi_\delta}) = \gamma - \delta$, $\forall\ i = 1, ..., l$ et $(A^l)_t^s (\operatorname{adj}_l \xi_\delta)_t^s < 0$, ce qui donne l'absurde puisqu'on a (4.12) par hypothèse.

Une fois que les ensembles E_δ ont été choisis d'une façon continue par rapport à E, il se vérifie immédiatement (de la même façon que dans les lemmes des Sections 4.3.1 et 4.3.2) que E et $\operatorname{Rco} E$ ont la propriété d'approximation. □

Démonstration du Théorème 4.26. Il suffit d'appliquer le Théorème 4.2. De la même façon que dans les Théorèmes 4.18 et 4.21, à l'aide du lemme précédent on vérifie que $\operatorname{int} \operatorname{Rco} E$ a la propriété de relaxation par rapport à E (cf. notations du lemme) et donc on obtient le résultat. □

4.3.4 Surfaces minimales

On veut étudier l'existence de $u : \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ tel que

$$\operatorname{adj}_n(Du) \in \partial\overline{C},$$

où C est un ensemble de $\mathbb{R}^{n+1}$. On note que si u est une paramétrisation d'une surface, alors $\operatorname{adj}_n Du$ représente la normale à cette surface. Dans le Chapitre 5 on verra que, selon la méthode adoptée, la résolution de l'inclusion précédente est fondamentale pour traiter certains problèmes de minimisation du type des surfaces minimales.

On a le théorème d'existence suivant.

Théorème 4.28. *Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, C un ouvert connexe et borné de $\mathbb{R}^{n+1}$ et u_{ξ_0} l'application affine qui vérifie $Du_{\xi_0} = \xi_0 \in \mathbb{R}^{(n+1)\times n}$. Si ξ_0 est tel que*

$$\operatorname{adj}_n(\xi_0) \in C$$

alors il existe $u \in u_{\xi_0} + W_0^{1,\infty}(\Omega; \mathbb{R}^{n+1})$ tel que $\operatorname{adj}_n(Du) \in \partial\overline{C}$ p.p. dans Ω.

Démonstration. On va appliquer le Théorème 4.2. Il y a deux cas à considérer.
Cas 1 : $\operatorname{adj}_n \xi_0 = 0$.

Comme C est ouvert, en particulier on a dans ce cas que $0 \notin \partial\overline{C}$. En outre, puisque C est borné on peut considérer une constante $\gamma > 0$ telle que

$$|y| \leq \gamma^n, \ \forall\, y \in \overline{C} \tag{4.14}$$

et $\xi_0 \in \operatorname{int} K$ où

$$K := \left\{\xi \in \mathbb{R}^{(n+1)\times n} : \ \operatorname{adj}_n\xi \in \overline{C}, \ \lambda_n(\xi) \leq \gamma\right\}.$$

On a vu au Théorème 3.11 que

$$\operatorname{int} K = \left\{\xi \in \mathbb{R}^{(n+1)\times n} : \ \operatorname{adj}_n\xi \in \operatorname{int}\overline{C}, \ \lambda_n(\xi) < \gamma\right\}.$$

On définit aussi le compact

$$E = \left\{\xi \in \mathbb{R}^{(n+1)\times n} : \ \operatorname{adj}_n\xi \in \partial\overline{C}, \ \lambda_n(\xi) \leq \gamma\right\}.$$

Pour obtenir le résultat du théorème il suffit de vérifier que $\operatorname{int} K$ a la propriété de relaxation par rapport à E. On applique le Théorème 6.15 de [14] (voir Remarque 4.6). On commence par vérifier que E et K ont la propriété d'approximation. Soient

$$E_\delta = \left\{\xi \in \mathbb{R}^{(n+1)\times n} : \ \operatorname{adj}_n\xi \in \partial\overline{C}_\delta, \ \lambda_n(\xi) \leq \gamma - \delta'\right\},$$

$$K_\delta = \left\{\xi \in \mathbb{R}^{(n+1)\times n} : \ \operatorname{adj}_n\xi \in \overline{C}_\delta, \ \lambda_n(\xi) \leq \gamma - \delta'\right\},$$

où

$$\overline{C}_\delta = \left\{x \in \overline{C} : \ \operatorname{dist}(x, \partial\overline{C}) \geq \delta\right\}$$

et $\delta' = \gamma - (\gamma^n - \delta)^{1/n} > 0$. Evidemment $E_\delta \subset K_\delta \subset \operatorname{int} K$. Voyons que

$$\forall\, \varepsilon > 0 \ \exists\, \delta_0 > 0 : \ \operatorname{dist}(\eta, E) \leq \varepsilon, \ \forall\, \eta \in E_\delta, \ \delta \in [0, \delta_0].$$

Supposons par l'absurde que

$$\exists\, \varepsilon > 0 : \ (\forall\, \delta > 0 \ \exists\, \eta \in E_\delta : \ \operatorname{dist}(\eta, E) > \varepsilon).$$

Alors on peut construire une suite $\eta_k \in E_{1/k}$ telle que $\operatorname{dist}(\eta_k, E) > \varepsilon$. La suite η_k est bornée donc à une sous-suite près on peut dire que $\eta_k \to \eta$ pour un certain η qu'on verra doit appartenir à E ce qui donnera une contradiction.

On a $\eta_k \in E_{1/k}$ donc $\operatorname{adj}_n\eta_k \in \partial\overline{C}_{1/k}$, ce qui implique que $\operatorname{dist}(\operatorname{adj}_n\eta_k, \partial\overline{C}) = \frac{1}{k}$. Par continuité, en passant à la limite, on obtient $\operatorname{dist}(\operatorname{adj}_n\eta, \partial\overline{C}) = 0$ ce qui est équivalente à dire que $\operatorname{adj}_n\eta \in \partial\overline{C}$. De la même façon on obtient que $\lambda_n(\eta) \leq \gamma$ et donc $\eta \in E$.

Il reste à vérifier la condition

$$\eta \in \operatorname{int} K \ \Rightarrow \ \exists\, \delta_0 > 0 : \ \eta \in K_\delta, \ \forall\, \delta \in [0, \delta_0]$$

qui est évidente par continuité des fonctions qui définissent K. Donc E et K ont la propriété d'approximation.

Maintenant on vérifie les autres conditions du théorème en application (Théorème 6.15 de [14]). On définit, pour $\delta > 0$,

$$E_\delta^0 := E_\delta \subset E_\delta^1 \subset ... \subset E_\delta^{n-1} \subset E_\delta^n := K_\delta$$

où, pour $i = 1, ..., n-1$,

$$E_\delta^i = E_\delta \cup \left\{\xi \in \mathbb{R}^{(n+1)\times n} : \ \operatorname{adj}_n\xi \in \overline{C}_\delta, \ \lambda_{i+1}(\xi) = \cdots = \lambda_n(\xi) = \gamma - \delta'\right\}.$$

De la même façon qu'on a vu que $K \subset \operatorname{Rco} E$ (Théorème 3.11) on voit que $E_\delta^n \subset \operatorname{Rco} E_\delta$. De plus, on remarque que n passages suffisent pour écrire un élément de E_δ^n comme combinaison rang un convexe d'éléments de E_δ^0 (cf. démonstration du Théorème 3.11). Donc on conclut que K a la propriété de relaxation par rapport à E et par ailleurs l'existence de la solution u souhaitée.
Cas 2 : $\operatorname{adj}_n \xi_0 \neq 0$.

On définit

$$K = \left\{ \xi \in \mathbb{R}^{(n+1)\times n} : \ \operatorname{adj}_n \xi \in \operatorname{int} \overline{C} \right\}.$$

Si on vérifie que, pour certain $K_0 \subset K$ borné et qui contient ξ_0, K_0 a la propriété de relaxation par rapport à une partie fermée de ∂K alors, par le Théorème 4.2, on obtient l'inclusion désirée. On applique le Théorème 4.17 pour assurer l'existence d'un ensemble K_0 dans les conditions décrites.

Il faut vérifier que K est borné de façon stable en ξ_0 dans une direction de rang un $\lambda = \alpha \otimes \beta \in \mathbb{R}^{(n+1)\times n}$.

Par le théorème de décomposition, il existe $P \in O(n+1)$, $Q \in SO(n)$ et $0 \leq \lambda_1 \leq ... \leq \lambda_n$, tels que

$$\xi_0 = PLQ, \text{ où } L = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

De plus

$$\operatorname{adj}_n \xi_0 = \operatorname{adj}_n P \operatorname{adj}_n L \text{ et } \operatorname{adj}_n L = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ (-1)^n \lambda_1 \cdots \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Comme $\operatorname{adj}_n \xi_0 \neq 0$ on a que $\lambda_1 > 0$.

Sans perte de généralité on suppose $\xi_0 = L$. On choisit alors $\lambda = \alpha \otimes \beta$ où $\alpha = (1, 0, ..., 0) \in \mathbb{R}^{n+1}$ et $\beta = (1, 0, ..., 0) \in \mathbb{R}^n$. On va vérifier que $L_K(\xi_0 + \alpha \otimes B_\varepsilon, \lambda)$ (cf. Notation 4.14) est borné pour certain $\varepsilon > 0$. Soit $\eta \in L_K(\xi_0 + \alpha \otimes B_\varepsilon, \lambda)$ alors on peut écrire $\eta = \xi_0 + \alpha \otimes \gamma_\varepsilon + t\lambda$ avec $\gamma_\varepsilon \in B_\varepsilon$ et $t \in \mathbb{R}$. Par définition de $L_K(\xi_0 + \alpha \otimes B_\varepsilon, \lambda)$ on a $\operatorname{adj}_n \eta \in \overline{C}$ et comme C est borné on peut écrire $|\operatorname{adj}_n \eta| \leq l$, pour certain $l > 0$ dépendant seulement de C. D'autre part

$$|\operatorname{adj}_n \eta| = \left| \lambda_1 + \gamma_\varepsilon^1 + t \right| \lambda_2 \cdots \lambda_n.$$

Donc on a les majorations

$$|t| \leq \left| \lambda_1 + \gamma_\varepsilon^1 + t \right| + \left| \lambda_1 + \gamma_\varepsilon^1 \right| \leq \frac{l}{\lambda_2 \cdots \lambda_n} + |\lambda_1| + \varepsilon.$$

D'ailleurs $|\eta| \leq |\xi_0| + |\alpha \otimes \gamma_\varepsilon| + |t| \ |\lambda|$ qui est borné pour chaque ε fixe. □

4.3.5 Gradient avec un nombre fini de valeurs sans connexion de rang un

Dans [22], Kirchheim a démontré l'existence d'applications non affines dont le gradient prend un nombre fini de valeurs sans connexions de rang un. (Voir aussi le résultat dû à Kirchheim-Preiss cf. [23, Corollaire 4.40], où est démontrée l'existence d'une application non affine dont le gradient prend cinq valeurs sans connexion de rang un.) On énonce ensuite le résultat.

Théorème 4.29. *Soient $N, n \geq 2$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné. Alors il existe $E = \{\xi_1, ..., \xi_m\} \subset \mathbb{R}^{N\times n}$ tel que*

$$\operatorname{rang}(\xi_i - \xi_j) = \min\{N, n\} \text{ si } i \neq j$$

et il existe $\xi \notin E$ et $u \in u_\xi + W_0^{1,\infty}(\Omega;\mathbb{R}^N)$ (u_ξ dénote une application qui vérifie $Du_\xi = \xi$) tels que

$$Du(x) \in E,\ p.p.\ x \in \Omega.$$

Ce résultat a été obtenu comme application d'un théorème d'existence abstrait aussi dû à Kirchheim (cf. [22, Théorème 5]). On verra par la suite qu'on peut aussi le démontrer par la méthode des catégories de Baire. On doit alors construire les ensembles E et K satisfaisant les conditions du théorème d'existence général (Théorème 4.2), c'est-à-dire, on doit trouver E compact et K borné avec la propriété de relaxation par rapport à E. La construction de ces ensembles est la même que celle de Kirchheim. Une fois les ensembles construits, on démontre la propriété de relaxation à l'aide du Théorème 4.8.

On commence par rappeler un lemme établit dans [22] qui permet la construction des ensembles ci-mentionnés. On en présentera sa preuve ci-après.

Lemme 4.30. *Soient $N, n \geq 2$. Alors il existe $E = \{\xi_1, ..., \xi_m\} \subset \mathbb{R}^{N\times n}$ tel que*

$$\mathrm{rang}(\xi_i - \xi_j) = \min\{N,n\}\ si\ i \neq j$$

et $\mathrm{dist}(\xi; B_{\frac{1}{2}}(0)) > 0$, *pour tout $\xi \in E$. De plus,*

$$\forall\, \xi \in E\ \exists\ \mathcal{M}_\xi \subset \mathbb{R}^{N\times n}: \quad \begin{aligned} &i)\ \mathcal{M}_\xi \subset \xi + \{\mu \in \mathbb{R}^{N\times n}:\ \mathrm{rang}\,\mu = 1\} \\ &ii)\ \mathcal{M}_\xi \subset B_{\frac{1}{2}}(0),\ \#\mathcal{M}_\xi < 4Nn \\ &iii)\ \partial B_{\frac{1}{2}}(0) \subset \textstyle\bigcup_{\xi\in E} \mathrm{int}(\mathrm{co}(\{\xi\} \cup \mathcal{M}_\xi)). \end{aligned}$$

Démonstration du Théorème 4.29. Soit E l'ensemble que le lemme précédent assure exister et définissons

$$K = B_{\frac{1}{2}}(0) \cup \bigcup_{\xi\in E} \mathrm{int}(\mathrm{co}(\{\xi\} \cup \mathcal{M}_\xi))$$

où l'on a utilisé les notations du Lemme 4.30. On obtient le résultat par application du Théorème 4.2 aux ensembles E et K. On note que, puisque $0 \in K \setminus E$ on obtiendra en particulier l'existence de $u \in u_\xi + W_0^{1,\infty}(\Omega;\mathbb{R}^N)$ tel que $Du \in E$ avec $\xi \notin E$.

Il faut démontrer que K a la propriété de relaxation par rapport à E. Pour cela on applique le Théorème 4.8. On vérifie alors l'hypothèse (H) du théorème. On commence par noter que K est un ensemble ouvert.

Soit $\varepsilon > 0$ et $\eta \in K \backslash B_\varepsilon(E)$. Si $\eta \in B_{\frac{1}{2}}(0)$, on se réduit facilement au cas où $\eta \in \mathrm{int}(\mathrm{co}(\{\xi\} \cup \mathcal{M}_\xi))$ vu que

$$\partial B_{\frac{1}{2}}(0) \subset K.$$

En fait, dans ce cas, il existe η_1 de rang un tel que $[\eta - \eta_1, \eta + \eta_1] \subset \mathrm{int}\, K = K$ et $\eta + \eta_1 \notin B_{\frac{1}{2}}(0)$.

Il reste à considérer le cas où $\eta \in \mathrm{int}(\mathrm{co}(\{\xi\} \cup \mathcal{M}_\xi)) \setminus B_{\frac{1}{2}}(0)$, pour certain $\xi \in E$. Alors

$$\eta = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \mu_j + \left(1 - \sum_{j=1}^{k} \lambda_j\right) \xi,$$

pour certains $\lambda_j \in]0,1[$ tels que $\displaystyle\sum_{j=1}^{k} \lambda_j < 1$ et où μ_j sont des éléments de $\mathcal{M}_\xi$, d'ailleurs $k < 4Nn$.

Soit $j^* \in \{1, ..., k\}$ tel que λ_{j^*} et μ_{j^*} réalisent le $\max_{1\leq j\leq k} \lambda_j |\xi - \mu_j|$ et considérons la direction de rang un donnée par $\xi - \mu_{j^*}$. On vérifie que, pour certain $c > 0$ indépendant de η, $\eta_1 = c(\xi - \mu_{j^*})$ satisfait $[\eta - \eta_1, \eta + \eta_1] \subset \mathrm{int}\, K$. En particulier on obtiendra, pour $C > 0$ indépendant de η, $|\eta_1| \geq C$.

Voyons comment trouver la constante c. Pour

$$|t| < \min\left\{\lambda_{j^*}, 1 - \sum_{j=1}^{k}\lambda_j\right\},$$

$$\eta + t(\xi - \mu_{j^*}) = \sum_{j\neq j^*}\lambda_j\mu_j + (\lambda_{j^*} - t)\mu_{j^*} + \left(1 - \sum_{j=1}^{k}\lambda_j + t\right)\xi \in \operatorname{int}(\operatorname{co}(\{\xi\}\cup\mathcal{M}_\xi)).$$

Il reste donc à vérifier que

$$\min\left\{\lambda_{j^*}, 1 - \sum_{j=1}^{k}\lambda_j\right\} \geq c > 0.$$

De

$$\varepsilon < |\eta - \xi| \leq \sum_{j=1}^{k}\lambda_j|\mu_j - \xi| \leq 4Nn\lambda_{j^*}|\mu_{j^*} - \xi| \leq 4Nn\lambda_{j^*}\max_{\xi\in E,\,\mu\in\mathcal{M}_\xi}|\mu - \xi|$$

on obtient l'estimation pour λ_{j^*}. L'autre estimation est obtenue du fait que

$$\frac{1}{2} \leq |\eta| \leq \sum_{j=1}^{k}\lambda_j\,|\mu_j| + \left(1 - \sum_{j=1}^{k}\lambda_j\right)|\xi| \leq \max_{\mu\in\mathcal{M}_\xi,\,\xi\in E}|\mu|\sum_{j=1}^{k}\lambda_j + \left(1 - \sum_{j=1}^{k}\lambda_j\right)\max_{\xi\in E}|\xi|$$

qui implique que

$$\sum_{j=1}^{k}\lambda_j \leq \frac{\max_{\xi\in E}|\xi| - \frac{1}{2}}{\max_{\xi\in E}|\xi| - \max_{\mu\in\mathcal{M}_\xi,\,\xi\in E}|\mu|} < 1.$$

On obtient ainsi la suite de matrices de rang un $\eta_1, ..., \eta_i$ en faisant maintenant le même raisonnement avec la matrice $\eta + \eta_1$ et ainsi de suite. Reste à vérifier qu'après i itérations on obtient $\eta + \eta_1 + ... + \eta_i \in B_\varepsilon(E)$.

On suppose, sans perte de généralité, que $|\eta + \eta_1| \geq |\eta - \eta_1|$ et on vérifie que

$$|\eta + \eta_1| \geq C.$$

En effet,

$$2\,|\eta + \eta_1|^2 \geq |\eta + \eta_1|^2 + |\eta - \eta_1|^2 = 2\,|\eta|^2 + 2\,|\eta_1|^2 \geq 2C^2.$$

Si $\eta + \eta_1 \notin B_\varepsilon(E)$ quand on répète la procédure on obtient $[\eta + \eta_1 - \eta_2, \eta + \eta_1 + \eta_2] \subset \operatorname{int} K = K$ et (en supposant $|\eta + \eta_1 + \eta_2| \geq |\eta + \eta_1 - \eta_2|$)

$$2\,|\eta + \eta_1 + \eta_2|^2 \geq |\eta + \eta_1 + \eta_2|^2 + |\eta + \eta_1 - \eta_2|^2 = 2\,|\eta + \eta_1|^2 + 2\,|\eta_2|^2 \geq 4C^2.$$

Ainsi, après i itérations, on obtient $\eta + \eta_1 + ... + \eta_i \in \operatorname{int} K = K$ avec

$$|\eta + \eta_1 + ... + \eta_i| \geq \sqrt{i}C. \tag{4.15}$$

Donc, $|\eta + \eta_1 + ... + \eta_i| \longrightarrow +\infty$ et comme K est borné, on conclut que pour certain i, $\eta + \eta_1 + ... + \eta_i \in K \cap B_\varepsilon(E)$. L'estimation $i \leq k(\varepsilon, E, K)$ pour k indépendant de η vient du fait que la constante C est indépendante de η.

On conclut par le Théorème 4.8 que K a la propriété de relaxation par rapport à E et donc l'existence d'une solution u. □

Pour la preuve du Lemme 4.30 qui suit on a besoin d'un résultat auxiliaire établi aussi par Kirchheim [22].

Lemme 4.31. *Soit* $\eta \in \mathbb{R}^{N\times n}$ *avec* $\operatorname{rang}\eta = 1$. *Alors, pour* $r > 0$, *il existe*

$$\mathcal{M}_\eta \subset B_r(\eta) \cap \{\mu \in \mathbb{R}^{N\times n} : \ \operatorname{rang}\mu = 1\}$$

tel que $\#\mathcal{M}_\eta < 4Nn$ *et* $\eta \in \operatorname{int}(\operatorname{co}\mathcal{M}_\eta)$.

Démonstration. Il suffit de montrer le résultat dans le cas où $\eta = e^1 \otimes e_1$. Dans le cas général on peut écrire

$$\eta = Rae^1 \otimes e_1 Q, \text{ pour certains } a \neq 0, \ R \in O(N), \ Q \in O(n).$$

Alors, si $\mathcal{M}$ est l'ensemble associé à $e^1 \otimes e_1$ pour $r' = r/|a|$, on peut faire $\mathcal{M}_\eta = Ra\mathcal{M}Q$.

Supposons maintenant $\eta = e^1 \otimes e_1$ et fixons $r > 0$. On fixe aussi $\delta > 0$ suffisamment petit et on définit

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_\eta \ = \ & \left\{\eta_{1j}^k : \ k \in \{1,2\}, \ j \in \{1,...,n\}\right\} \cup \left\{\eta_{i1}^k : \ k \in \{1,2\}, \ i \in \{1,...,N\}\right\} \cup \\ & \cup \left\{\eta_{ij}^{kl} : \ k,l \in \{1,2\}, \ (i,j) \in \{2,...,N\} \times \{2,...,n\}\right\}\end{aligned}$$

où

$$\eta_{ij}^k = \eta + (-1)^k \delta^2 e^i \otimes e_j \quad \text{pour } i = 1 \text{ ou } j = 1$$

et

$$\eta_{ij}^{kl} = \eta + (-1)^k \delta^2 e^i \otimes e_j + (-1)^l \delta(e^1 \otimes e_j + (-1)^k e^i \otimes e_1) \quad \text{pour } (i,j) \in \{2,...,N\} \times \{2,...,n\}.$$

On peut vérifier que $\mathcal{M}_\eta \subset \{\mu \in \mathbb{R}^{N\times n} : \ \operatorname{rang}\mu = 1\}$ et évidemment que pour $\delta > 0$ suffisamment petit, $\mathcal{M}_\eta \subset B_r(\eta)$. De plus,

$$\#\mathcal{M}_\eta < \#\{(i,j,k,l) : \ (i,j) \in \{1,...,N\} \times \{1,...,n\}, \ k,l \in \{1,2\}\} = 4Nn.$$

Finalement, comme $\eta \pm \delta^2 e^i \otimes e_j \in \operatorname{co}\mathcal{M}_\eta$ pour tout $(i,j) \in \{1,...,n\} \times \{1,...,N\}$ (c'est évident si $i = 1$ ou $j = 1$; dans l'autre cas on note que $\eta \pm \delta^2 e^i \otimes e_j$ est combinaison convexe de η_{ij}^{kl}), on obtient que $\eta \in \operatorname{int}(\operatorname{co}\mathcal{M}_\eta)$. □

Le Lemme 4.30 peut maintenant être démontré.

Démonstration du Lemme 4.30. Etape 1. On vérifie que

$$\forall\ \eta \in \partial B_{\frac{1}{2}}(0) \ \exists\ 0 < \delta < r, \ \xi \in \partial B_1(0), \ \zeta \in B_{\frac{1}{2}}(0), \ \mathcal{M}_\xi \subset \mathbb{R}^{N\times n} :$$

$$\begin{aligned}&1) \ \mathcal{M}_\xi \subset \xi + \{\mu \in \mathbb{R}^{N\times n} : \ \operatorname{rang}\mu = 1\}\\ &2) \ \mathcal{M}_\xi \subset B_r(\zeta) \subset B_{2r}(\zeta) \subset B_{\frac{1}{2}}(0), \ \#\mathcal{M}_\xi < 4Nn\\ &3) \ B_{2\delta}(\eta) \subset \operatorname{co}(\{\xi\} \cup \mathcal{M}_\xi).\end{aligned}$$

Soit $\eta \in \partial B_{\frac{1}{2}}(0)$. Alors $\eta \neq 0$ et puisque η est somme de matrices de rang un, il existe une direction de rang un μ telle que $\langle \eta; \mu \rangle > 0$. On prend alors $\xi \in \partial B_1(0)$ de la forme $\eta + t\mu$ et $\zeta \in B_{\frac{1}{2}}(0)$ de la forme $\eta - t\mu$. On choisit $r > 0$ de façon que $B_{2r}(\zeta) \subset B_{\frac{1}{2}}(0)$.

On applique maintenant le lemme précédent à la matrice de rang un $\zeta - \xi$. On obtient alors un ensemble $\mathcal{N} \subset B_r(\zeta - \xi) \cap \{\mu \in \mathbb{R}^{N\times n} : \ \operatorname{rang}\mu = 1\}$ tel que $\#\mathcal{N} < 4Nn$ et $\zeta - \xi \in \operatorname{int}(\operatorname{co}\mathcal{N})$. Par translation on obtient $\mathcal{M}_\xi := \mathcal{N} + \xi$ vérifiant 1), 2) et $\zeta \in \operatorname{int}(\operatorname{co}\mathcal{M}_\xi)$.

Voyons que $B_{2\delta}(\eta) \subset \operatorname{co}(\{\xi\} \cup \mathcal{M}_\xi)$ pour $\delta > 0$ suffisamment petit à déterminer. Comme $\zeta \in \operatorname{int}(\operatorname{co}\mathcal{M}_\xi)$, alors, pour certain $\gamma > 0$, $B_\gamma(\zeta) \subset \operatorname{co}\mathcal{M}_\xi$. On note aussi que $\eta = \lambda\zeta + (1-\lambda)\xi$ avec $0 < \lambda < 1$ dépendant seulement de η, ζ, ξ. Soit $\mu \in B_{2\delta}(\eta)$. On peut écrire

$$\mu = \eta + (\mu - \eta) = \lambda\zeta + (1-\lambda)\xi + (\mu - \eta) = \lambda\left(\zeta + \frac{1}{\lambda}(\mu - \eta)\right) + (1-\lambda)\xi.$$

On vérifie que $\zeta + \frac{1}{\lambda}(\mu - \eta) \in \operatorname{co}\mathcal{M}_\xi$. En fait,

$$\left|\zeta + \frac{1}{\lambda}(\mu - \eta) - \zeta\right| \leq \frac{1}{\lambda}2\delta.$$

Donc, on obtient que $\zeta + \frac{1}{\lambda}(\mu - \eta) \in \operatorname{co}\mathcal{M}_\xi$ en prenant $2\delta < \lambda\gamma$ et on conclut ainsi que $\mu \in \operatorname{co}(\{\xi\} \cup \mathcal{M}_\xi)$.

Etape 2. On définit l'ensemble E et on conclut le résultat.

Pour chaque $\eta \in \partial B_{\frac{1}{2}}(0)$ on l'associe δ_η, r_η, ξ_η, ζ_η et $\mathcal{M}_{\xi_\eta}$ comme dans la première étape. Alors la famille des boules $B_{\delta_\eta}(\eta)$ avec $\eta \in \partial B_{\frac{1}{2}}(0)$ constitue une couverture de $\partial B_{\frac{1}{2}}(0)$ et donc on peut considérer $\eta_1, ..., \eta_m$ tels que $B_{\delta_{\eta_i}}(\eta_i)$, $i = 1, ..., m$ soit encore une couverture de $\partial B_{\frac{1}{2}}(0)$. On définit $\varepsilon < \min_{1\leq i\leq m}\{\delta_{\eta_i}\}$.

Pour la construction de E on commence par remarquer que, fixé $\eta \in \mathbb{R}^{N\times n}$,

$$\{\mu \in \mathbb{R}^{N\times n} : \ \operatorname{adj}_{N\wedge n}(\mu - \eta) \neq 0\}$$

est ouvert et dense dans $\mathbb{R}^{N\times n}$. On fait alors $E = \{\xi_1, ..., \xi_m\}$, où

– $\xi_1 = \xi_{\eta_1}$;

– On choisit $\xi_2 \in \{\mu \in \mathbb{R}^{N\times n} : \ \operatorname{adj}_{N\wedge n}(\mu - \xi_1) \neq 0\}$ tel que $|\xi_2 - \xi_{\eta_2}| < \varepsilon$;

– Pour choisir ξ_3 on commence par fixer $\mu \in \{\eta \in \mathbb{R}^{N\times n} : \ \operatorname{adj}_{N\wedge n}(\eta - \xi_1) \neq 0\}$ tel que $|\mu - \xi_{\eta_3}| < \varepsilon/2$. On prend alors $\xi_3 \in \{\eta \in \mathbb{R}^{N\times n} : \ \operatorname{adj}_{N\wedge n}(\eta - \xi_2) \neq 0\}$ tel que $|\xi_3 - \mu| < \varepsilon/2$ et suffisamment proche de μ de façon que $\operatorname{adj}_{N\wedge n}(\xi_3 - \xi_1) \neq 0$. On note que $|\xi_3 - \xi_{\eta_3}| < \varepsilon$.

On poursuit de cette façon le choix des restants ξ_i.

On vérifie ensuite que E a les propriétés désirées. Comme $\operatorname{adj}_{N\wedge n}(\xi_i - \xi_j) \neq 0$ pour $i \neq j$, alors

$$\operatorname{rang}(\xi_i - \xi_j) = \min\{N, n\} \text{ si } i \neq j.$$

D'autre part, comme $|\xi_i - \xi_{\eta_i}| < \varepsilon$ et $\xi_{\eta_i} \in \partial B_1(0)$, alors $\operatorname{dist}(\xi_i; B_{\frac{1}{2}}(0)) \geq \frac{1}{2} - \varepsilon > 0$, pour ε petit.

Finalement, pour $\xi_i \in E$ on définit $\mathcal{M}_{\xi_i} = \mathcal{M}_{\xi_{\eta_i}} + \xi_i - \xi_{\eta_i}$ et on obtient le résultat en remarquant que

$$\mathcal{M}_{\xi_i} \subset B_{r_{\eta_i}+\varepsilon}(\zeta_{\eta_i}) \subset B_{2r_{\eta_i}}(\zeta_{\eta_i}) \subset B_{\frac{1}{2}}(0)$$

et que

$$\partial B_{\frac{1}{2}}(0) \subset \bigcup_{i=1}^{m} B_{\delta_{\eta_i}}(\eta_i) \subset \bigcup_{i=1}^{m} B_{2\delta_{\eta_i}}(\eta_i) + \xi_i - \xi_{\eta_i} \subset$$

$$\subset \bigcup_{i=1}^{m} \operatorname{int}(\operatorname{co}(\{\xi_{\eta_i}\} \cup \mathcal{M}_{\xi_{\eta_i}})) + \xi_i - \xi_{\eta_i} = \bigcup_{i=1}^{m} \operatorname{int}(\operatorname{co}(\{\xi_i\} \cup \mathcal{M}_{\xi_i})).$$

□

Chapitre 5

Problèmes de minimisation non quasiconvexes

On considère le problème de minimisation

$$(P) \qquad \inf \left\{ \int_\Omega f(Du(x))\, dx : \; u \in u_{\xi_0} + W_0^{1,\infty}(\Omega; \mathbb{R}^N) \right\}$$

où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, $f : \mathbb{R}^{N\times n} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction non quasiconvexe, $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^N$ et $u_{\xi_0} = \xi_0 x$ avec $\xi_0 \in \mathbb{R}^{N\times n}$. Il s'agit donc d'un problème vectoriel. On note que parfois, durant l'analyse de ce chapitre, on considère des données au bord non affines et des fonctions f à valeurs dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

Le problème relaxé de (P) s'écrit

$$(QP) \qquad \inf \left\{ \int_\Omega Qf(Du(x))\, dx : \; u \in u_{\xi_0} + W_0^{1,\infty}(\Omega; \mathbb{R}^N) \right\}$$

où Qf désigne l'enveloppe quasiconvexe de la fonction f.

Dans ce chapitre des conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence de solution pour le problème abstrait (P) seront établies. On traite, dans la Section 5.1, des conditions suffisantes. Voyons comment les résultats d'existence pour les équations aux dérivées partielles considérées dans le chapitre précédent peuvent être appliqués dans ce contexte.

Une condition nécessaire pour l'existence de solution de (P) est que

$$f(Du) = Qf(Du), \; p.p. \text{ dans } \Omega. \tag{5.1}$$

Cette condition s'avère suffisante si Qf est quasiaffine dans l'ensemble

$$K = \{\xi \in \mathbb{R}^{N\times n} : \; Qf(\xi) < f(\xi)\}.$$

La résolution du problème (P) s'appuie alors sur la recherche de solutions de l'équation (5.1). Pour cela l'équation en question sera mise dans le cadre des inclusions différentielles considérées dans le Chapitre 4.

La Section 5.2 sera consacrée à l'étude de conditions nécessaires pour l'existence de solution de (P). On introduira la notion de quasiconvexité stricte qui, comme on le verra, est une condition suffisante, mais pas nécessaire pour la non-existence de solution de (P). En fait, cette condition équivaut à l'unicité de solution pour le problème (QP), ce qui n'équivaut pas à la non-existence de solution pour (P). On a des exemples où il n'y a pas de solution pour (P), mais pour lesquels le problème relaxé a une infinité de solutions.

Finalement, dans la Section 5.3 plusieurs applications seront considérées. Notamment on considère le cas où $f(\xi) = g(\Phi(\xi)),\ \xi \in \mathbb{R}^{N\times n}$, étant $\Phi : \mathbb{R}^{N\times n} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction quasiaffine arbitraire.

Les résultats de ce chapitre sont parus dans Dacorogna-Ribeiro [18] et Dacorogna-Pisante-Ribeiro [17].

5.1 Conditions suffisantes d'existence

On suppose par la suite $f : \mathbb{R}^{N\times n} \longrightarrow \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$, mesurable au sens de Borel et satisfaisant

$$f(\xi) \geq \langle \alpha; T(\xi)\rangle + \beta,\ \forall\, \xi \in \mathbb{R}^{N\times n} \tag{5.2}$$

pour certains $\alpha \in \mathbb{R}^{\tau(N,n)}$ et $\beta \in \mathbb{R}$. Pour $\xi_0 \in \mathbb{R}^{N\times n}$ on dénote par u_{ξ_0} l'application affine $\xi_0 x$. Alors $Du_{\xi_0} = \xi_0$.

On rappelle que le problème en considération est le problème de minimisation

$$(P) \qquad \inf\left\{\int_\Omega f(Du(x))\,dx :\ u \in u_{\xi_0} + W_0^{1,\infty}(\Omega;\mathbb{R}^N)\right\}.$$

On démontre ensuite un théorème élémentaire, mais fondamental dans cette section. Ce théorème donne des conditions suffisantes pour l'existence de solution du problème (P). Les conditions décrites dans ce résultat fournissent le fil conducteur pour établir les conditions suffisantes du Corollaire 5.3, souvent plus clair dans les applications.

Théorème 5.1. *Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, $F, f : \mathbb{R}^{N\times n} \longrightarrow \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ deux fonctions mesurables au sens de Borel avec $F \leq f$ et u_{ξ_0} une application affine telle que $Du_{\xi_0} = \xi_0$ et*

$$F(\xi_0)\,\mathrm{mes}\,\Omega = \inf\left\{\int_\Omega F(Du(x))\,dx :\ u \in u_{\xi_0} + W_0^{1,\infty}(\Omega;\mathbb{R}^N)\right\}. \tag{5.3}$$

Alors, (P) a une solution s'il existe $\overline{u} \in u_{\xi_0} + W_0^{1,\infty}(\Omega;\mathbb{R}^N)$ tel que

$$f(D\overline{u}(x)) = F(D\overline{u}(x)),\ p.p.\ x \in \Omega \tag{5.4}$$

$$\int_\Omega F(D\overline{u}(x))\,dx = F(\xi_0)\,\mathrm{mes}\,\Omega. \tag{5.5}$$

Remarque 5.2. (i) Si f est une fonction à valeurs finies satisfaisant (5.2) alors Qf (l'enveloppe quasiconvexe de f) est bien définie et satisfait la condition (5.3). En général on travaille avec $F = Qf$, mais, dans le cas où f n'est pas finie, il sera utile d'avoir le Théorème 5.1.

(ii) Si l'enveloppe polyconvexe de f, $Pf(\xi) = g(T(\xi))$ pour une certaine fonction $g : \mathbb{R}^{\tau(N,n)} \longrightarrow \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ convexe et semi-continue inférieurement, alors la condition (5.3) est satisfaite par $F = Pf$.

(iii) Si f est finie et $F = Qf$, alors, en fait, les conditions (5.4) et (5.5) sont (cf. Théorème 5.7) des conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence de solution de (P).

Démonstration. Voyons que si $\overline{u}$ vérifie (5.4) et (5.5) alors $\overline{u}$ est solution de (P) :

$$\begin{aligned}\int_\Omega f(D\overline{u}(x))\,dx &= \int_\Omega F(D\overline{u}(x))\,dx = F(\xi_0)\,\mathrm{mes}(\Omega) \leq \int_\Omega F(Dv(x))\,dx \\ &\leq \int_\Omega f(Dv(x))\,dx, \quad \forall\ v \in u_{\xi_0} + W_0^{1,\infty}(\Omega;\mathbb{R}^N).\end{aligned}$$

□

Comme on a vu dans le résultat précédent, l'ensemble

$$K = \left\{\xi \in \mathbb{R}^{N\times n} : F(\xi) < f(\xi)\right\}$$

($F = Qf$ si f est finie) joue un rôle important dans la recherche de solution de (P). Evidemment, si F et ξ_0 vérifient (5.3), le cas intéressant à étudier est le cas où $\xi_0 \in K$, sinon u_{ξ_0} est solution trivial de (P). Ensuite on cherche des conditions qui garantissent (5.4) et (5.5), et conséquemment, l'existence de solution pour le problème de minimisation. Assurer (5.4) peut être vu comme résoudre l'inclusion différentielle

$$D\overline{u}\,(x) \in K^c = \mathbb{R}^{N\times n} \setminus K,\ p.p.\ x \in \Omega$$

et pour cela le but est d'appliquer la théorie du chapitre précédent. La condition (5.5) sera assurée par l'hypothèse de quasiaffinité de F dans un ensemble adéquat.

Donc, en combinant le résultat précédent avec le THÉORÈME 4.2 on peut établir le corollaire suivant. On note que la propriété de relaxation mentionnée dans le corollaire a été définie dans le Chapitre 4 (DÉFINITION 4.1).

COROLLAIRE 5.3. *Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, $F, f : \mathbb{R}^{N\times n} \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ deux fonctions mesurables au sens de Borel avec $F \leq f$ et vérifiant la condition (5.3). Soit*

$$K = \left\{\eta \in \mathbb{R}^{N\times n} : F\,(\eta) < f\,(\eta)\right\}.$$

Supposons qu'il existe des ensembles bornés $K_0 \subset K_1 \subset \mathbb{R}^{N\times n}$ tels que

- *$\xi_0 \in K_0$,*
- *il y a un compact $H \subset \overline{K}_0 \cap K^c$ tel que K_1 a la propriété de relaxation par rapport à H,*
- *F est quasiaffine dans $\overline{K}_0$.*

Alors, le problème (P) a une solution.

DÉMONSTRATION. Comme $\xi_0 \in K_0 \subset K_1$ en appliquant le THÉORÈME 4.2, on peut conclure l'existence de $\overline{u} \in u_{\xi_0} + W_0^{1,\infty}(\Omega; \mathbb{R}^N)$ tel que

$$D\overline{u} \in H,\ p.p. \text{ dans } \Omega.$$

Donc, puisque $H \subset K^c$, $\overline{u}$ vérifie (5.4) et, par l'hypothèse de quasiaffinité, $\overline{u}$ vérifie aussi (5.5). Donc, par le THÉORÈME 5.1 on obtient que $\overline{u}$ est la solution souhaitée. □

REMARQUE 5.4. Si on considère dans le problème (P) des données au bord $\varphi \in C^1_{mor}$, on peut encore obtenir l'existence de solution si, entre autres conditions, le problème relaxé a une solution régulière (voir REMARQUE 4.3). Dans la Section 5.3.1 on considérera des problèmes où dans certains cas l'existence de solution régulière pour (QP) est assurée et on démontrera le théorème dans ce cas plus général. On se réfère à la démonstration du THÉORÈME 5.20 pour le traitement des données au bord non affines.

Ensuite on cherche des conditions sur K qui permettent d'assurer l'existence de $K_0 = K_1$ avec la propriété de relaxation comme dans l'énoncé du corollaire. Comme on a remarqué dans le chapitre précédent, si K est borné, alors K a la propriété de relaxation par rapport à ∂K. Lorsque K n'est pas borné, mais borné de façon stable en ξ_0 dans une direction de rang un $\lambda = \alpha \otimes \beta$ (cf. (ii) de la DÉFINITION 4.15), on a vu, cf. THÉORÈME 4.17, qu'il est possible d'assurer l'existence de $K_0 \subset K$ avec la propriété de relaxation par rapport à $\overline{K}_0 \cap \partial K$.

On peut alors écrire le résultat suivant.

COROLLAIRE 5.5. *Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, $F, f : \mathbb{R}^{N\times n} \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ deux fonctions mesurables au sens de Borel avec $F \leq f$ et vérifiant la condition (5.3). Soit encore $\xi_0 \in K$ où*

$$K = \left\{\eta \in \mathbb{R}^{N\times n} : F\,(\eta) < f\,(\eta)\right\}.$$

Si K est ouvert et il existe une direction de rang un $\lambda \in \mathbb{R}^{N\times n}$ telle que

(i) K est borné de façon stable en ξ_0 dans la direction $\lambda = \alpha \otimes \beta$,

(ii) F est quasiaffine dans $L_K(\xi_0 + \alpha \otimes \overline{B}_\epsilon, \lambda)$ (cf. DÉFINITION 4.15),

alors le problème (P) a une solution $\overline{u} \in u_{\xi_0} + W_0^{1,\infty}(\Omega; \mathbb{R}^N)$.

Remarque 5.6. (i) Si f est finie et semi-continue inférieurement et $F = Qf$ alors la condition (5.3) est satisfaite et l'ensemble K est ouvert.

(ii) Comme cas particulier du corollaire on obtient le théorème démontré par Dacorogna-Marcellini dans [13, Théorème 3.1].

Démonstration. Le résultat suit immédiatement du Théorème 4.17 et du Corollaire 5.3. □

5.2 Conditions nécessaires d'existence

On établit des conditions nécessaires d'existence pour le problème

$$(P) \qquad \inf\left\{ I\left(u\right) = \int_{\Omega} f\left(Du\left(x\right)\right)\,dx: \ u \in u_{\xi_0} + W_0^{1,\infty}(\Omega;\mathbb{R}^N)\right\}$$

où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, u_{ξ_0} est affine, avec $Du_{\xi_0} = \xi_0$ et $f : \mathbb{R}^{N\times n} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction semi-continue inférieurement. On remarque qu'on ne considère que des fonctions f à valeurs finies. On suppose que $Qf(\xi_0) < f(\xi_0)$ sinon u_{ξ_0} est solution trivial de (P). L'idée fondamentale pour assurer la non existence de solution de (P) est de garantir l'unicité de solution pour le problème relaxé. On obtient ainsi que u_{ξ_0} est la seule solution de (QP), mais comme par hypothèse u_{ξ_0} n'est pas solution de (P) (cf. Théorème 5.7), ce problème n'a pas de solution. Cette méthode était déjà utilisée par Marcellini dans [26] et Dacorogna-Marcellini dans [13]. On étend ici leur résultat.

On remarque que l'unicité de la solution pour le problème relaxé n'est cependant pas nécessaire pour la non existence de solution de (P). Dans l'Exemple 5.29 on considère un problème qui n'a pas de solution, mais dont le problème relaxé a une infinité de solutions (voir Proposition 5.30).

On commence par démontrer un résultat élémentaire qui donne des conditions nécessaires d'existence pour le problème (P).

Théorème 5.7. *Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, $f : \mathbb{R}^{N\times n} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable au sens de Borel et localement bornée satisfaisant (5.2). Alors, si (P) a une solution $u \in u_{\xi_0} + W_0^{1,\infty}(\Omega;\mathbb{R}^N)$, nécessairement*

$$f\left(Du\left(x\right)\right) = Qf\left(Du\left(x\right)\right),\ p.p.\ x \in \Omega \tag{5.6}$$

$$\int_{\Omega} Qf\left(Du\left(x\right)\right)\,dx = Qf\left(\xi_0\right)\,\mathrm{mes}\,\Omega. \tag{5.7}$$

De plus, si u est solution de (P), alors u est solution de (QP).

Démonstration. On commence par noter que, par le théorème de relaxation et puisque $Qf \le f$, si u est solution de (P) alors u est aussi solution de (QP) (voir la définition de (QP) dans la page 79). En effet,

$$\int_{\Omega} Qf(Du(x))\,dx \le \int_{\Omega} f(Du(x))\,dx = \inf(P) = \inf(QP). \tag{5.8}$$

Donc

$$\int_{\Omega} Qf(Du(x))\,dx = \int_{\Omega} f(Du(x))\,dx$$

et comme $Qf \le f$ on obtient (5.6).

En outre, la quasiconvexité de Qf entraîne que u_{ξ_0} est solution de (QP). De (5.8) résulte ainsi la condition (5.7). □

On introduit ensuite la définition de quasiconvexité stricte.

Définition 5.8. On dit qu'une fonction quasiconvexe $f : \mathbb{R}^{N\times n} \longrightarrow \mathbb{R}$ est *strictement quasiconvexe* en $\xi_0 \in \mathbb{R}^{N\times n}$, si pour un ensemble ouvert borné $U \subset \mathbb{R}^n$ et pour tout $\varphi \in W_0^{1,\infty}\left(U;\mathbb{R}^N\right)$ tel que

$$\int_U f\left(\xi_0 + D\varphi\left(x\right)\right) dx = f\left(\xi_0\right) \operatorname{mes}(U)$$

alors $\varphi \equiv 0$.

Proposition 5.9. La définition précédente est indépendante du choix du domaine.

Démonstration. Soit Ω un ouvert borné et supposons que

$$\int_\Omega f\left(\xi_0 + Dw\left(x\right)\right) dx = f\left(\xi_0\right) \operatorname{mes}(\Omega)$$

pour certain $w \in W_0^{1,\infty}(\Omega;\mathbb{R}^N)$.

On choisit $a > 0$ suffisamment grand tel que

$$\Omega \subset Q_a :=]-a, a[^n$$

et on définit

$$v(x) = \begin{cases} w(x), \ x \in \Omega \\ 0, \ x \in Q_a \setminus \Omega. \end{cases}$$

Donc $v \in W_0^{1,\infty}(Q_a;\mathbb{R}^N)$.

Ensuite on considère $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et $k \in \mathbb{R}$ suffisamment grand pour que

$$x_0 + \frac{1}{k}Q_a = x_0 + \left]-\frac{a}{k}, \frac{a}{k}\right[^n \subset U.$$

On définit

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{1}{k}v(k(x-x_0)), \ x \in x_0 + \frac{1}{k}Q_a \\ 0, \ x \in U \setminus \left(x_0 + \frac{1}{k}Q_a\right). \end{cases}$$

On a bien $\varphi \in W_0^{1,\infty}(U;\mathbb{R}^N)$ et

$$\begin{aligned} \int_U f\left(\xi_0 + D\varphi\left(x\right)\right) dx &= f\left(\xi_0\right) \operatorname{mes}\left(U \setminus \left(x_0 + \frac{1}{k}Q_a\right)\right) + \int_{x_0 + \frac{1}{k}Q_a} f\left(\xi_0 + Dv\left(k(x-x_0)\right)\right) dx \\ &= f\left(\xi_0\right)\left(\operatorname{mes}(U) - \frac{\operatorname{mes}\left(Q_a\right)}{k^n}\right) + \frac{1}{k^n}\int_{Q_a} f(\xi_0 + Dv(y))dy \\ &= f\left(\xi_0\right)\left(\operatorname{mes}(U) - \frac{\operatorname{mes}\left(Q_a\right)}{k^n}\right) + \frac{1}{k^n}\left(f(\xi_0)\operatorname{mes}(Q_a\setminus\Omega) + \int_\Omega f(\xi_0 + Dw(x))dx\right) \\ &= f(\xi_0)\operatorname{mes}(U) \end{aligned}$$

Par la stricte quasiconvexité de f en ξ_0 on a que $\varphi \equiv 0$ donc $v \equiv 0$ et finalement $w \equiv 0$. □

Suit un théorème élémentaire de non existence :

Théorème 5.10. *Soit* $f : \mathbb{R}^{N\times n} \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction semi-continue inférieurement, localement bornée et satisfaisant (5.2). Soit* $\xi_0 \in \mathbb{R}^{N\times n}$ *tel que* $Qf\left(\xi_0\right) < f\left(\xi_0\right)$ *et* Qf *est strictement quasiconvexe en* ξ_0*. Alors le problème relaxé* (QP) *a* u_{ξ_0} *comme seule solution tandis que* (P) *n'a aucune solution.*

Démonstration. Comme u_{ξ_0} est solution de (QP), la stricte quasiconvexité de Qf en ξ_0 et le fait que le choix du domaine U est indépendant dans la définition, entraîne immédiatement l'unicité de solution de (QP). D'autre part, par le Théorème 5.7, s'il existe $u \in u_{\xi_0} + W_0^{1,\infty}(\Omega;\mathbb{R}^N)$ une solution de (P) alors u est aussi solution de (QP). Comme par hypothèse $Qf(\xi_0) < f(\xi_0)$, en utilisant une autre fois le Théorème 5.7, on conclut que u_{ξ_0} n'est pas solution de (P) et d'ailleurs on obtient la non existence de solution pour (P). □

Ensuite on donne des conditions suffisantes pour la quasiconvexité stricte. On commence par rappeler un lemme et une définition dus à Dacorogna-Marcellini (cf. [13, Etape 2 de la démonstration du Théorème 5.1]).

Lemme 5.11. *Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ et $\varphi \in W_0^{1,\infty}(\Omega;\mathbb{R}^N)$ tels que*

$$\left\langle \alpha^i; D\varphi^i(x)\right\rangle = 0, \ \ p.p. \ x \in \Omega, \ i = 1, ..., N$$

pour certains $\alpha^i \in \mathbb{R}^n$, $\alpha^i \neq 0$, $i = 1, ..., N$. Alors $\varphi \equiv 0$.

Démonstration. Supposons que

$$\left\langle \alpha^i; D\varphi^i(x)\right\rangle = 0, \ i = 1, ..., N.$$

Fixons $i \in \{1, ..., N\}$, on vérifie alors que $\varphi^i \equiv 0$. Soient $x \in \Omega$ et $x_0 \in \partial\Omega$ de la forme $x_0 = x + t\alpha^i$. Cela est possible puisque Ω est borné. Vu que $\varphi \in W_0^{1,\infty}(\Omega;\mathbb{R}^N)$ on peut écrire

$$\varphi^i(x) = \varphi^i(x_0) - \int_0^t \left\langle D\varphi^i(x + s\alpha^i); \alpha^i\right\rangle ds = 0.$$

Comme x est arbitraire on obtient que $\varphi^i \equiv 0$. □

Définition 5.12. Soit $f : \mathbb{R}^{N\times n} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe. On dit que f est *strictement convexe en $\xi_0 \in \mathbb{R}^{N\times n}$ dans au moins N directions* s'il existe $\alpha = \left(\alpha^i\right)_{1\leq i\leq N} \in \mathbb{R}^{N\times n}$, $\alpha^i \neq 0$ pour tout $i = 1, ..., N$, tel que : si pour un certain $\eta \in \mathbb{R}^{N\times n}$ l'identité

$$\frac{1}{2}f(\xi_0 + \eta) + \frac{1}{2}f(\xi_0) = f\left(\xi_0 + \frac{1}{2}\eta\right)$$

est satisfaite, alors

$$\left\langle \alpha^i; \eta^i\right\rangle = 0, \ i = 1, ..., N.$$

On vérifie que la stricte convexité dans au moins N directions implique la stricte quasiconvexité. Ce résultat a été démontré par Dacorogna-Marcellini dans [13] dont on présente ici sa preuve.

Proposition 5.13. *Si une fonction convexe $f : \mathbb{R}^{N\times n} \longrightarrow \mathbb{R}$ est strictement convexe en $\xi_0 \in \mathbb{R}^{N\times n}$ dans au moins N directions, alors f est strictement quasiconvexe en ξ_0.*

Démonstration. Supposons que $\varphi \in W_0^{1,\infty}(\Omega;\mathbb{R}^N)$ vérifie

$$\int_\Omega f(\xi_0 + D\varphi(x))\, dx = f(\xi_0)\ \mathrm{mes}(\Omega). \tag{5.9}$$

On veut vérifier que $\varphi \equiv 0$.

Par la convexité de f et par (5.9) on a

$$f(\xi_0)\,\mathrm{mes}(\Omega) \leq \int_\Omega f\left(\xi_0 + \frac{1}{2}D\varphi(x)\right) dx \leq \int_\Omega \frac{1}{2}f(\xi_0 + D\varphi(x)) + \frac{1}{2}f(\xi_0)\, dx = f(\xi_0)\,\mathrm{mes}(\Omega).$$

Donc
$$f\left(\xi_0+\frac{1}{2}D\varphi(x)\right)=\frac{1}{2}f(\xi_0+D\varphi(x))+\frac{1}{2}f(\xi_0),\ p.p.\ x\in\Omega.$$

Comme f est strictement convexe dans au moins N directions on a que
$$\left\langle\alpha^i;D\varphi_i(x)\right\rangle=0,\ i=1,...,N,\ p.p.\ x\in\Omega$$
pour un certain α et par le LEMME 5.11 vient que $\varphi\equiv 0$. □

Evidemment la convexité stricte dans au moins N directions est une condition plus faible que la stricte convexité. En particulier, dans le cas scalaire ($N=1$) il suffit que la fonction soit non affine pour avoir la condition précédente et donc on obtient immédiatement le résultat suivant.

COROLLAIRE 5.14. *Soit $f:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$ semi-continue inférieurement, localement bornée et satisfaisant (5.2). Soit $\xi_0\in\mathbb{R}^n$ tel que $Cf(\xi_0)<f(\xi_0)$ et Cf non affine en ξ_0. Alors (P) n'a pas de solution.*

On veut maintenant généraliser la dernière proposition au cas des fonctions polyconvexes. Pour mieux comprendre cette généralisation on commence par démontrer une autre caractérisation de la convexité stricte dans au moins N directions.

On rappelle que si $f:\mathbb{R}^{N\times n}\longrightarrow\mathbb{R}$ est une fonction convexe, le sous-différentiel de f en ξ, dénoté $\partial f(\xi)$, est l'ensemble
$$\partial f(\xi)=\left\{\lambda\in\mathbb{R}^{N\times n}:\ f(\eta)\geq f(\xi)+\langle\lambda;\eta-\xi\rangle,\ \forall\ \eta\in\mathbb{R}^{N\times n}\right\}.$$

PROPOSITION 5.15. *Soit $f:\mathbb{R}^{N\times n}\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction convexe. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) f est strictement convexe en $\xi_0\in\mathbb{R}^{N\times n}$ dans au moins N directions,

(ii) il existe $\alpha=\left(\alpha^i\right)_{1\leq i\leq N}\in\mathbb{R}^{N\times n}$ avec $\alpha^i\neq 0$ pour tout $i=1,...,N$, tel que, si
$$f(\xi_0+\eta)-f(\xi_0)-\langle\lambda;\eta\rangle=0$$
pour certains $\eta\in\mathbb{R}^{N\times n}$ et $\lambda\in\partial f(\xi_0)$, alors
$$\left\langle\alpha^i;\eta^i\right\rangle=0,\ i=1,...,N.$$

DÉMONSTRATION. Etape 1. On va vérifier que la condition
$$\frac{1}{2}f(\xi_0+\eta)+\frac{1}{2}f(\xi_0)=f\left(\xi_0+\frac{1}{2}\eta\right)\tag{5.10}$$
est équivalente à
$$\exists\ \lambda\in\partial f(\xi_0):\ f(\xi_0+t\eta)-f(\xi_0)-t\langle\lambda;\eta\rangle=0,\ \forall\ t\in[0,1].\tag{5.11}$$
On vérifie d'abord que (5.10) implique que
$$tf(\xi_0+\eta)+(1-t)f(\xi_0)=f(\xi_0+t\eta),\ \forall\ t\in[0,1].\tag{5.12}$$
On va le démontrer pour $t>1/2$ (si $t<1/2$ la preuve est analogue). On peut écrire
$$\frac{1}{2}=\alpha t+(1-\alpha)0=\alpha t,\ \text{pour certain}\ \alpha\in]0,1[.$$
Par l'hypothèse et de la convexité de f on trouve
$$\frac{1}{2}f(\xi_0+\eta)+\frac{1}{2}f(\xi_0)=f\left(\xi_0+\frac{1}{2}\eta\right)\leq\alpha f(\xi_0+t\eta)+(1-\alpha)f(\xi_0).$$

Supposons par l'absurde que

$$f(\xi_0 + t\eta) < tf(\xi_0 + \eta) + (1-t) f(\xi_0).$$

Des deux dernières inégalités, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} f(\xi_0 + \eta) + \frac{1}{2} f(\xi_0) &< \alpha [tf(\xi_0 + \eta) + (1-t) f(\xi_0)] + (1-\alpha) f(\xi_0) \\ &= \frac{1}{2} f(\xi_0 + \eta) + \frac{1}{2} f(\xi_0) \end{aligned}$$

qui est absurde. Donc on a bien (5.12). De plus on a

$$f'(\xi_0, \eta) := \lim_{t \to 0^+} \frac{f(\xi_0 + t\eta) - f(\xi_0)}{t} = f(\xi_0 + \eta) - f(\xi_0).$$

Par le Théorème 23.4 de Rockafellar [35], une fois que f est une fonction convexe réelle on a que $\partial f(\xi_0)$ est un compact non vide et

$$f'(\xi_0, \eta) = \sup \{\langle \lambda; \eta \rangle : \ \lambda \in \partial f(\xi_0)\}.$$

Donc il existe $\lambda \in \partial f(\xi_0)$ tel que $f'(\xi_0, \eta) = \langle \lambda; \eta \rangle$, c'est-à-dire $f(\xi_0 + \eta) - f(\xi_0) = \langle \lambda; \eta \rangle$ et de (5.12)

$$f(\xi_0 + t\eta) - f(\xi_0) - t \langle \lambda; \eta \rangle = 0, \ \forall \ t \in [0,1].$$

On a donc démontré que (5.10) implique (5.11). L'implication inverse est immédiate, si on prend $t = 1/2$ et $t = 1$ dans (5.11).

Etape 2. On démontre maintenant l'équivalence des deux conditions de l'énoncé.

(i) $\Rightarrow$ (ii) : On commence par noter que pour tout $\mu \in \mathbb{R}^{N \times n}$ on a

$$\begin{gathered} \tfrac{1}{2} f(\xi_0 + \eta) + \tfrac{1}{2} f(\xi_0) - f\left(\xi_0 + \tfrac{1}{2}\eta\right) = \\ \tfrac{1}{2} [f(\xi_0 + \eta) - f(\xi_0) - \langle \mu; \eta \rangle] - \left[f\left(\xi_0 + \tfrac{1}{2}\eta\right) - f(\xi_0) - \tfrac{1}{2} \langle \mu; \eta \rangle\right]. \end{gathered} \tag{5.13}$$

Supposons que, pour $\lambda \in \partial f(\xi_0)$, on a

$$f(\xi_0 + \eta) - f(\xi_0) - \langle \lambda; \eta \rangle = 0.$$

De la convexité de f, de (5.13) appliqué à $\mu = \lambda$ et de la définition de $\partial f(\xi_0)$, on a

$$0 \le \frac{1}{2} f(\xi_0 + \eta) + \frac{1}{2} f(\xi_0) - f\left(\xi_0 + \frac{1}{2}\eta\right) = -\left[f\left(\xi_0 + \frac{1}{2}\eta\right) - f(\xi_0) - \frac{1}{2} \langle \lambda; \eta \rangle\right] \le 0.$$

Donc, de (i) résulte que $\langle \alpha^i; \eta^i \rangle = 0$, $i = 1, ..., N$, pour certain $\alpha = (\alpha^i)_{1 \le i \le N} \in \mathbb{R}^{N \times n}$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) : Supposons maintenant que

$$\frac{1}{2} f(\xi_0 + \eta) + \frac{1}{2} f(\xi_0) - f\left(\xi_0 + \frac{1}{2}\eta\right) = 0.$$

Par l'Etape 1 on sait qu'il existe $\lambda \in \partial f(\xi_0)$ tel que

$$f(\xi_0 + t\eta) - f(\xi_0) - t \langle \lambda; \eta \rangle = 0, \ \forall \ t \in [0,1].$$

En choisissant $t = 1$, on est dans les conditions de (ii) et on obtient $\langle \alpha^i; \eta^i \rangle = 0$, $i = 1, ..., N$, comme désiré. $\square$

Ensuite on généralise la Proposition 5.13 aux fonctions polyconvexes. On considère séparément dans le résultat suivant le cas $N = n = 2$ pour faciliter sa compréhension.

Proposition 5.16. *Soient* $f : \mathbb{R}^{N\times n} \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction polyconvexe,* $\xi_0 \in \mathbb{R}^{N\times n}$ *et* $\lambda = \lambda(\xi_0) \in \mathbb{R}^{\tau(N,n)}$ *tel que*

$$f(\xi_0+\eta) - f(\xi_0) - \langle \lambda; T(\xi_0+\eta) - T(\xi_0)\rangle \geq 0, \text{ pour tout } \eta \in \mathbb{R}^{N\times n}.$$

(i) Soit $N = n = 2$ *et supposons qu'il existe* $\alpha^{1,1}, \alpha^{1,2}, \alpha^{2,2} \in \mathbb{R}^2$, $\alpha^{1,1} \neq 0, \alpha^{2,2} \neq 0$, $\beta \in \mathbb{R}$, *tels que, pour chaque* $\eta \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ *qui vérifie*

$$f(\xi_0+\eta) - f(\xi_0) - \langle \lambda; T(\xi_0+\eta) - T(\xi_0)\rangle = 0,$$

on a

$$\left\langle \alpha^{2,2}; \eta^2 \right\rangle = 0 \quad \text{et} \quad \left\langle \alpha^{1,1}; \eta^1 \right\rangle + \left\langle \alpha^{1,2}; \eta^2 \right\rangle + \beta \det \eta = 0.$$

Alors f *est strictement quasiconvexe en* ξ_0.

(ii) Soit $N, n \geq 2$ *et supposons qu'il existe, pour tout* $\nu = 1, ..., N$,

$$\alpha^{\nu,\nu}, \alpha^{\nu,\nu+1}, ..., \alpha^{\nu,N} \in \mathbb{R}^n,\ \alpha^{\nu,\nu} \neq 0,\ \beta^{\nu,s} \in \mathbb{R}^{\binom{n}{s}}, 2 \leq s \leq n \wedge (N-\nu+1)$$

tel que pour chaque $\eta \in \mathbb{R}^{N\times n}$ *qui vérifie*

$$f(\xi_0+\eta) - f(\xi_0) - \langle \lambda; T(\xi_0+\eta) - T(\xi_0)\rangle = 0$$

on a

$$\sum_{s=\nu}^{N} \langle \alpha^{\nu,s}; \eta^s \rangle + \sum_{s=2}^{n\wedge(N-\nu+1)} \left\langle \beta^{\nu,s}; adj_s\left(\eta^\nu, ..., \eta^N\right)\right\rangle = 0,\ \nu = 1, ..., N.$$

Alors f *est strictement quasiconvexe en* ξ_0.

Remarque 5.17. (i) L'existence de λ comme dans l'hypothèse de la proposition est assurée par la polyconvexité de f (voir Dacorogna [11, Théorème 1.3, page 106]). Cela correspond à l'élément de $\partial f(\xi_0)$ dans le cas des fonctions convexes.

(ii) Si $l > k > 0$ alors on note $\sum_l^k = 0$.

Exemple 5.18. Soient $N = n = 2$ et

$$f(\eta) = \left(\eta_2^2\right)^2 + \left(\eta_1^1 + \det \eta\right)^2.$$

Cette fonction est évidemment polyconvexe et, d'après la proposition, est aussi strictement quasiconvexe en $\xi_0 = 0$: il suffit de choisir $\lambda = 0 \in \mathbb{R}^5$, $\alpha^{2,2} = (0,1)$, $\alpha^{1,2} = (0,0)$, $\alpha^{1,1} = (1,0)$, $\beta = 1$.

Démonstration de la Proposition 5.16. On démontre la proposition dans le cas $N = n = 2$.

Supposons que pour un certain domaine $U \subset \mathbb{R}^2$ et pour certain $\varphi \in W_0^{1,\infty}\left(U;\mathbb{R}^2\right)$ on a

$$\int_U f(\xi_0 + D\varphi(x))\, dx = f(\xi_0) \operatorname{mes}(U).$$

On prouve que $\varphi \equiv 0$. Par hypothèse, quelque soit $\mu \in \mathbb{R}^{\tau(2,2)}$ on a

$$\left[\int_U f(\xi_0 + D\varphi(x)) - f(\xi_0) - \langle \mu; T(\xi_0 + D\varphi(x)) - T(\xi_0)\rangle\right] dx = 0.$$

En choisissant $\mu = \lambda$ (λ comme dans l'énoncé de la proposition) dans l'identité précédente et en utilisant la polyconvexité de f, on obtient

$$f(\xi_0 + D\varphi(x)) - f(\xi_0) - \langle \lambda; T(\xi_0 + D\varphi(x)) - T(\xi_0)\rangle = 0,\ p.p.\ x \in U.$$

Donc,

$$\left\langle \alpha^{2,2}; D\varphi^2 \right\rangle = 0 \text{ et } \left\langle \alpha^{1,1}; D\varphi^1 \right\rangle + \left\langle \alpha^{1,2}; D\varphi^2 \right\rangle + \beta \det D\varphi = 0, \text{ p.p. } x \in U.$$

On applique maintenant le LEMME 5.11 à la première équation pour obtenir $\varphi^2 \equiv 0$. Si on introduit ce résultat dans la deuxième équation on a

$$\left\langle \alpha^{1,1}; D\varphi^1 \right\rangle = 0.$$

On applique une autre fois le lemme et on déduit que $\varphi^1 \equiv 0$, ce qui finit la démonstration. □

On peut alors écrire le résultat suivant qui résume les résultats précédents.

COROLLAIRE 5.19. *Soit $f : \mathbb{R}^{N\times n} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction semi-continue inférieurement, localement bornée et satisfaisant (5.2). Soit $\xi_0 \in \mathbb{R}^{N\times n}$ tel que*

$$Qf(\xi_0) < f(\xi_0).$$

Si une des conditions suivantes est satisfaite

(i) $Qf(\xi_0) = Cf(\xi_0)$ et Cf est strictement convexe en ξ_0 dans au moins N directions ;

(ii) $Qf(\xi_0) = Pf(\xi_0)$ et Pf est strictement polyconvexe en ξ_0 (dans le sens de la PROPOSITION 5.16) ;

alors (QP) a une seule solution, qui est u_{ξ_0}, tandis que (P) n'a aucune solution.

DÉMONSTRATION. La démonstration est analogue dans les deux cas considérés. On présente la démonstration dans le premier cas. On vérifie que dans les conditions supposées la fonction Qf est strictement quasiconvexe en ξ_0 et le résultat suit du THÉORÈME 5.10. On note d'abord que par la PROPOSITION 5.13 la fonction Cf est strictement quasiconvexe en ξ_0. On suppose que

$$\int_\Omega Qf(\xi_0 + D\varphi(x))\, dx = Qf(\xi_0) \operatorname{mes}\Omega$$

pour certain $\varphi \in W_0^{1,\infty}(\Omega;\mathbb{R}^N)$. Il faut vérifier que $\varphi \equiv 0$. Alors

$$\begin{aligned}\int_\Omega Qf(\xi_0 + D\varphi(x))\, dx &= Qf(\xi_0) \operatorname{mes}\Omega = Cf(\xi_0) \operatorname{mes}\Omega \\ &\le \int_\Omega Cf(\xi_0 + D\varphi(x))\, dx \\ &\le \int_\Omega Qf(\xi_0 + D\varphi(x))\, dx\end{aligned}$$

où l'on a utilisé l'inégalité de Jensen. On conclut ainsi que

$$\int_\Omega Cf(\xi_0 + D\varphi(x))\, dx = Cf(\xi_0) \operatorname{mes}\Omega.$$

On obtient alors que $\varphi \equiv 0$ de la stricte quasiconvexité de Cf en ξ_0. □

5.3 Applications

Dans cette section on considère quatre problèmes de minimisation de la forme introduite au début du chapitre et dont l'existence de solution sera discutée à l'aide des résultats des sections précédentes.

Premièrement on considère une fonctionnelle où l'intégrande dépend d'une fonction quasiaffine et deuxièmement une fonctionnelle avec dépendance par rapport aux valeurs singulières du gradient. Ensuite on regarde un problème du type "surfaces minimales" et finalement le problème de minimisation de l'énergie de Saint Venant-Kirchhoff.

5.3.1 Intégrandes qui dépendent de fonctions quasiaffines

On considère dans cette section le problème de minimisation

$$(P_1) \qquad \inf\left\{\int_\Omega g(\Phi(Du(x)))\,dx:\ u\in\varphi+W_0^{1,\infty}(\Omega;\mathbb{R}^N)\right\}$$

où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, $u:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}^N$, $g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ est une fonction semi-continue inférieurement non convexe, bornée inférieurement par une fonction affine, Φ est une fonction quasiaffine non constante et $\varphi\in W^{1,\infty}(\Omega;\mathbb{R}^N)$.

Le problème relaxé de (P_1) s'écrit,

$$(QP_1) \qquad \inf\left\{\int_\Omega Cg(\Phi(Du(x)))\,dx:\ u\in\varphi+W_0^{1,\infty}(\Omega;\mathbb{R}^N)\right\}$$

où Cg désigne l'enveloppe convexe de g. On rappelle que si on note $f=g\circ\Phi$ alors $Pf=Qf=Rf=Cg\circ\Phi$, Qf ayant du sens si g est une fonction à valeurs finies (cf. Dacorogna [11, page 217]).

Le problème (P_1) a été étudié par Cellina-Zagatti dans [8] pour le cas où la donnée au bord est toutefois une application affine. Mascolo-Schianchi [27] ont aussi vérifié l'existence de solution pour (P_1), dans le cas particulier où la fonction Φ est le déterminant et lorsque la donnée au bord φ est un homéomorphisme de $(C^2(\Omega))^n$ avec $\det D\varphi(x)>0,\ \forall\, x\in\overline{\Omega}$.

La méthode utilisée ici est cependant différente de celle employée par les auteurs mentionnés ci-dessus. On va vérifier que ce problème est dans le cadre des problèmes considérés dans la Section 5.1. Donc, la méthode employée s'appuie sur les théorèmes d'existence pour des inclusions différentielles du Chapitre 4.

Le théorème d'existence qu'on va démontrer dans cette section est le suivant :

Théorème 5.20. *Soient $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ un ouvert borné, $g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ une fonction semi-continue inférieurement vérifiant*

$$\lim_{|t|\to+\infty}\frac{g(t)}{|t|}=+\infty \tag{5.14}$$

et $\varphi\in W^{1,\infty}(\Omega;\mathbb{R}^N)$. Si le problème (QP_1) a une solution $u_0\in C^1_{mor}(\overline{\Omega};\mathbb{R}^N)$ alors il existe $u\in\varphi+W_0^{1,\infty}(\Omega;\mathbb{R}^N)$ solution de (P_1).

Remarque 5.21. (i) L'hypothèse concernant l'existence de $u_0\in C^1_{mor}(\overline{\Omega};\mathbb{R}^N)$ solution de (QP_1) permet d'assurer l'existence de solution pour les problèmes avec la donnée au bord $\varphi\in W^{1,\infty}(\Omega;\mathbb{R}^N)$ et pas seulement $\varphi=u_{\xi_0}$ affine (comme dans le Corollaire 5.3). On verra dans la Proposition 5.23 qu'on peut, dans certaines conditions, assurer l'existence de $u_0\in C^1_{mor}(\overline{\Omega};\mathbb{R}^N)$, solution de (QP_1).

(ii) L'hypothèse (5.14) sur la fonction g permet d'écrire

$$\{t\in\mathbb{R}:\ Cg(t)<g(t)\}=\bigcup_{j\in\mathbb{N}}]\alpha_j,\beta_j[$$

avec Cg affine dans chaque intervalle $[\alpha_j,\beta_j]$ (voir Proposition 5.41).

L'idée de la preuve est la même qu'au Corollaire 5.3. Comme on considère des données au bord non affines, on refait la démonstration, illustrant ainsi la façon de traiter des problèmes avec de telles conditions lorsque l'existence de solution régulière de (QP) est assurée.

Démonstration du Théorème 5.20 : Soit K l'ensemble

$$K=\{t\in\mathbb{R}:\ Cg(t)<g(t)\}.$$

Par la Proposition 5.41, K est ouvert et peut être écrit comme union dénombrable d'intervalles disjoints bornés :

$$K = \bigcup_{j\in\mathbb{N}}]\alpha_j, \beta_j[.$$

On définit des ensembles $\Omega_j,\ j \in \mathbb{N}_0$ de la façon suivante :

$$\Omega_0 = \{x \in \Omega :\ g(\Phi(Du_0(x))) = Cg(\Phi(Du_0(x)))\},$$
$$\Omega_j = \{x \in \Omega :\ \Phi(Du_0(x)) \in]\alpha_j, \beta_j[\},\ j \in \mathbb{N}.$$

On remarque que si $\Omega = \Omega_0$ alors u_0 est solution de (P). La régularité admise sur u_0 entraîne que les ensembles $\Omega_j,\ j \in \mathbb{N}$ sont ouverts. On note encore que, une fois que $u_0 \in W^{1,\infty}(\Omega; \mathbb{R}^N)$, $\Phi(Du_0)$ est borné et donc l'ensemble $\{\alpha_j,\ \beta_j :\ \Omega_j \neq \emptyset\}$ est borné.

Pour chaque $j \in \mathbb{N}$ tel que $\Omega_j \neq \emptyset$, on applique le Théorème 4.18, avec $\varphi = u_0 \in C^1_{mor}(\overline{\Omega_j}; \mathbb{R}^N)$ qui est dans les conditions du théorème. On obtient ainsi l'existence de $u_j \in u_0 + W_0^{1,\infty}(\Omega_j; \mathbb{R}^N)$ tel que

$$\Phi(Du_j(x)) \in \{\alpha_j, \beta_j\},\ p.p.\ x \in \Omega_j.$$

On définit alors,

$$u = \begin{cases} u_0, \text{ dans } \Omega_0 \\ u_j, \text{ dans } \Omega_j,\ j \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

qui vérifie $g(\Phi(Du(x))) = Cg(\Phi(Du(x))),\ p.p.\ x \in \Omega$. Par la Remarque 4.19, et puisque $\{\alpha_j,\ \beta_j :\ \Omega_j \neq \emptyset\}$ est borné, alors $||u_j||_{W^{1,\infty}(\Omega_j)} \leq c$ pour une constante c indépendante de j. Ceci permet de dire que $u \in W^{1,\infty}(\Omega; \mathbb{R}^N)$.

On vérifie maintenant que u est solution du problème (P_1). On a $u \in \varphi + W_0^{1,\infty}(\Omega; \mathbb{R}^N)$ et, en utilisant le fait que Cg est affine dans chaque intervalle $[\alpha_j, \beta_j]$:

$$Cg(t) = a_j + b_j t,\ \forall\ t \in [\alpha_j, \beta_j],$$

et le Théorème 2.5 (v) on obtient

$$\begin{aligned}
\int_\Omega g(\Phi(Du(x)))\,dx &= \int_\Omega Cg(\Phi(Du(x)))\,dx \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \int_{\Omega_j} Cg(\Phi(Du_j(x)))\,dx \\
&= \int_{\Omega_0} Cg(\Phi(Du_0(x)))\,dx + \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\Omega_j} a_j + b_j \Phi(Du_j(x))\,dx \\
&= \int_{\Omega_0} Cg(\Phi Du_0(x))\,dx + \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\Omega_j} a_j + b_j \Phi(Du_0(x))\,dx \\
&= \int_\Omega Cg(\Phi(Du_0(x)))\,dx.
\end{aligned}$$

Comme u_0 est, par hypothèse, une solution de (QP_1) et $\inf(QP_1) \leq \inf(P_1)$, il en résulte que u est solution de (P_1). □

On discute brièvement, par la suite, l'existence de u_0 solution régulière de (QP_1) comme on le suppose dans le Théorème 5.20. Il y a le cas élémentaire où la donnée au bord φ est affine. Dans ce cas φ est solution de (QP_1) et on obtient ainsi une solution régulière du problème relaxé. Cela résulte immédiatement de la quasiconvexité de $Cg \circ \Phi$ dans le cas où g est une fonction finie, mais c'est encore vrai pour des fonctions g plus générales comme on le verra.

Proposition 5.22. *Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction semi-continue inférieurement telle que*

$$\lim_{|t|\to+\infty} \frac{g(t)}{|t|} = +\infty,$$

$\Phi : \mathbb{R}^{N\times n} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction quasiaffine, $\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^N$ une application affine. Alors φ est solution de (QP_1).

Démonstration. Une fois que φ est affine, $D\varphi$ est une constante ξ_0 et donc,

$$\int_\Omega Cg(\Phi(D\varphi(x)))\,dx = |\Omega|\; Cg(\Phi(\xi_0)).$$

Par la quasiaffinité de Φ,

$$\Phi(\xi_0) = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega \Phi(Du(x))\,dx,\ \forall\ u \in \varphi + W_0^{1,\infty}(\Omega;\mathbb{R}^N).$$

Par le Théorème 5.39, les hypothèses sur g assurent que Cg est semi-continue inférieurement et donc l'inégalité de Jensen s'applique (voir la Remarque 5.40). On obtient alors, pour tout $u \in \varphi + W_0^{1,\infty}(\Omega;\mathbb{R}^N)$,

$$\int_\Omega Cg(\Phi(D\varphi(x)))\,dx = |\Omega|\; Cg\left(\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega \Phi(Du(x))\,dx\right) \le \int_\Omega Cg(\Phi(Du(x)))\,dx.$$

Ceci montre que φ est solution de (QP_1). □

Si l'on restreint le problème (P_1) à la fonction quasiaffine du déterminant, on peut considérer le cas plus complexe où la donnée au bord est un difféomorphisme. Comme on vérifiera à la proposition suivante, dans ce cas les résultats de Dacorogna-Moser [15] permettent encore d'assurer l'existence de u_0 avec la régularité demandée dans le Théorème 5.20.

Proposition 5.23. *Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, borné avec $\partial\Omega$ en $C^{3,\alpha}$ pour un certain $0 < \alpha < 1$, $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction semi-continue inférieurement vérifiant*

$$\lim_{|t|\to+\infty} \frac{g(t)}{|t|} = +\infty.$$

Soit encore φ un difféomorphisme $C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$. Alors, si Φ est la fonction déterminant, il existe un difféomorphisme $u_0 \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ solution de (QP_1).

Démonstration. Soit

$$a = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega \det D\varphi(x)\,dx.$$

En appliquant le Théorème 1' de Dacorogna-Moser [15, page 4] , avec $f(x) = \dfrac{1}{a}\det D\varphi(x)$, on assure l'existence de $u \in \mathrm{Diff}^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ tel que

$$\begin{cases} \det Du(x) = \dfrac{1}{a}\det D\varphi(x),\ x \in \Omega, \\ u(x) = x,\ x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Si l'on définit $u_0 = \varphi \circ u^{-1}$, on obtient que $u_0(x) = \varphi(x),\ \forall\ x \in \partial\Omega$ et, dans Ω, $\det Du_0 = \alpha$.

Voyons que u_0 est solution de (QP_1). Soit $v \in \varphi + W_0^{1,\infty}(\Omega;\mathbb{R}^N)$. Par le Théorème 2.5 (v) et par l'inégalité de Jensen (cf. Théorème 5.39 et Remarque 5.40) on obtient

$$\int_\Omega Cg(\det(Du_0(x)))\,dx = |\Omega|\; Cg(a) = |\Omega|\; Cg\left(\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega \det(Du_0(x))\,dx\right) =$$

$$= |\Omega|\; Cg\left(\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega \det(Dv(x))\,dx\right) \le \int_\Omega Cg(\det(Dv(x)))\,dx$$

qui montre que u_0 est solution de (QP_1). □

5.3.2 Intégrandes qui dépendent des valeurs singulières du gradient

Dans la section précédente on a utilisé l'existence d'applications satisfaisant

$$\Phi(Du) \in \{\alpha, \beta\}$$

afin d'assurer l'existence de minimum d'une fonctionnelle décrite par la fonction quasiaffine Φ. On note que, dans le cas où Φ est la fonction déterminant, on a encore l'existence de solution de l'inclusion différentielle si l'on prescrit certaines valeurs singulières de Du (cf. Théorème 4.21). On va considérer des problèmes de minimisation pour lesquels l'information sur les valeurs singulières de Du peut être utilisée.

Le problème est le suivant :

$$(P_2) \qquad \inf\left\{\int_\Omega f(Du(x))\,dx :\ u \in u_{\xi_0} + W_0^{1,\infty}(\Omega;\mathbb{R}^n)\right\}$$

où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $f : \mathbb{R}^{n\times n} \longrightarrow \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ a la forme

$$f(\xi) = g(\lambda_2(\xi), ..., \lambda_{n-1}(\xi), \det\xi),$$

$0 \le \lambda_1(\xi) \le \cdots \le \lambda_n(\xi)$ désignent les valeurs singulières de ξ (cf. Définition 3.17) et u_{ξ_0} est une application affine avec $Du_{\xi_0} = \xi_0 \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Pour rendre le problème plus compréhensible on considère des fonctions f de la forme

$$f(\xi) = g(\lambda_2(\xi), ..., \lambda_{n-1}(\xi)) + h(\det\xi).$$

Par le Théorème 3.12, $Pf(\xi) = Qf(\xi) = Rf(\xi) = \inf g + Ch(\det\xi)$, où Ch désigne l'enveloppe convexe de h (Qf ayant du sens si f est finie).

Dans ce cas, le problème relaxé de (P_2) s'écrit

$$(QP_2) \qquad \inf\left\{\int_\Omega \inf g + Ch(\det Du(x))\,dx :\ u \in u_{\xi_0} + W_0^{1,\infty}(\Omega;\mathbb{R}^n)\right\}.$$

On assure l'existence de solution du problème (P_2) sous les hypothèses du théorème suivant.

Théorème 5.24. *Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné, l'ensemble*

$$Q = \{(x_2, ..., x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-2} :\ 0 \le x_2 \le \cdots \le x_{n-1}\}$$

et $g : Q \longrightarrow \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ une fonction semi-continue inférieurement telle que

$$\inf g = g(m_2, ..., m_{n-1}),\ \text{ avec } 0 < m_2 \le \cdots \le m_{n-1}.$$

Soit encore $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ une fonction semi-continue inférieurement vérifiant

$$\lim_{|t|\to+\infty} \frac{h(t)}{|t|} = +\infty$$

et u_{ξ_0} une application affine telle que $Du_{\xi_0} = \xi_0 \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Alors il existe $u \in u_{\xi_0} + W_0^{1,\infty}(\Omega;\mathbb{R}^n)$ solution de (P_2) pour

$$f(\xi) = g(\lambda_2(\xi), ..., \lambda_{n-1}(\xi)) + h(\det \xi), \ \forall\ \xi \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

Remarque 5.25. Dans le cas général où $f(\xi) = g(\lambda_2(\xi), ..., \lambda_{n-1}(\xi), \det \xi)$, avec $g : Q \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, on obtient l'existence de solution pour (P_2) avec la même démonstration si

$$\inf g(\cdot, ..., \cdot, s) = g(m_2, ..., m_{n-1}, s), \ \forall\ s \in \mathbb{R}$$

pour certains $0 < m_2 \leq \cdots \leq m_{n-1}$ et si la fonction $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ définie par

$$h(s) = \min_{(x_2,...,x_{n-1})\in Q} g(x_2, ..., x_{n-1}, s)$$

est une fonction semi-continue inférieurement et vérifie

$$\lim_{|t|\to+\infty} \frac{h(t)}{|t|} = +\infty.$$

Démonstration. On démontre le résultat d'existence à l'aide des résultats de la Section 5.1 en faisant $F(\xi) = \inf g + Ch(\det \xi)$. On commence par noter que, par la Proposition 5.22, F satisfait la condition (5.3). Rappelons que si f est finie alors F est quasiconvexe et cette condition est immédiate.

Clairement, si $F(\xi_0) = f(\xi_0)$ alors u_{ξ_0} est solution de (P_2). On suppose que $F(\xi_0) < f(\xi_0)$.

Soit
$$K = \left\{\xi \in \mathbb{R}^{n\times n} : F(\xi) < f(\xi)\right\}.$$

On peut écrire $K = L_1 \cup L_2$ où

$$L_1 = \left\{\xi \in \mathbb{R}^{n\times n} :\ Ch(\det \xi) < h(\det \xi)\right\}$$

$$L_2 = \left\{\xi \in \mathbb{R}^{n\times n} :\ Ch(\det \xi) = h(\det \xi),\ \inf g < g(\lambda_2(\xi), ..., \lambda_{n-1}(\xi))\right\}.$$

De la même façon que dans la section précédente, par la Proposition 5.41, on a

$$S = \{t \in \mathbb{R} : Ch(t) < h(t)\} = \bigcup_{j\in\mathbb{N}}]\alpha_j, \beta_j[,$$

avec Ch affine dans chaque intervalle $[\alpha_j, \beta_j]$. Alors

$$L_1 = \left\{\xi \in \mathbb{R}^{n\times n} :\ \det \xi \in \bigcup_{j\in\mathbb{N}}]\alpha_j, \beta_j[\right\}.$$

Il y a trois cas à considérer.

Cas 1 : $\xi_0 \in L_1$.

On note que c'est le même cas qu'on a étudié dans la section précédente. Soit $]\alpha_j, \beta_j[$ tel que $\det \xi_0 \in]\alpha_j, \beta_j[$. On applique le Corollaire 5.3 avec

$$K_0 = K_1 = \left\{\xi \in \mathbb{R}^{n\times n} :\ \det \xi \in]\alpha_j, \beta_j[\,,\ \prod_{i=\nu}^{n} \lambda_i(\xi) < \prod_{i=\nu}^{n} m_i,\ \nu = 2, ..., n\right\},$$

en choisissant m_n suffisamment grand de façon que

$$m_{n-1} \leq m_n, \tag{5.15}$$

$$\prod_{i=\nu}^{n} \lambda_i(\xi_0) < \prod_{i=\nu}^{n} m_i,\ \nu = 2, ..., n, \tag{5.16}$$

$$\max\{|\alpha_j|, |\beta_j|\} < m_2 \prod_{i=2}^{n} m_i. \tag{5.17}$$

Alors F est quasiaffine dans $\overline{K}_0$ et de (5.16) vient que $\xi_0 \in K_0$. De plus, par le LEMME 4.23 conjugué avec les THÉORÈMES 4.5 et 3.4, K_0 a la propriété de relaxation par rapport à

$$H = \left\{\xi \in \mathbb{R}^{n\times n} :\ \det \xi \in \{\alpha_j, \beta_j\},\ \lambda_\nu(\xi) = m_\nu,\ \nu = 2, ..., n\right\} \subset \overline{K}_0 \cap K^c$$

et donc on conclut le résultat.

Cas 2 : $\xi_0 \in L_2$ et $\det \xi_0 \neq 0$.

On considère dans ce cas l'ensemble

$$K_0 = K_1 = \left\{\xi \in \mathbb{R}^{n\times n} :\ \det \xi = \det \xi_0,\ \prod_{i=\nu}^{n} \lambda_i(\xi) < \prod_{i=\nu}^{n} m_i,\ \nu = 2, ..., n\right\}$$

où m_n vérifie (5.15) avec inégalité stricte : $m_n > m_{n-1}$ et vérifie (5.16). Soit

$$H = \left\{\xi \in \mathbb{R}^{n\times n} :\ \det \xi = \det \xi_0,\ \lambda_\nu(\xi) = m_\nu,\ \nu = 2, ..., n\right\} \subset \overline{K}_0 \cap K^c.$$

On note que $K_1 = \operatorname{int} \operatorname{Rco} H$. Dans [20], Dacorogna-Tanteri ont démontré que H et $\overline{K_1} = \operatorname{Rco} H$ ont la propriété d'approximation avec $K(H_\delta) = \operatorname{Rco} H_\delta$. Donc, par le THÉORÈME 4.5, K_1 a la propriété de relaxation par rapport à H. Le résultat suit alors de la quasiaffinité de F dans K_0 (en fait F est constant dans cet ensemble) par application du COROLLAIRE 5.3.

Cas 3 : $\xi_0 \in L_2$ et $\det \xi_0 = 0$.

Par le THÉORÈME 3.18, on peut se ramener au cas où $\xi_0 = \operatorname{diag}(\lambda_1(\xi_0), ..., \lambda_n(\xi_0))$. En particulier, comme $\det \xi_0 = 0$, on a $\lambda_1(\xi_0) = 0$. Les conditions du THÉORÈME 4.24 sont remplies et donc on peut assurer l'existence de $u \in u_{\xi_0} + W_0^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ tel que $Du \in E$ où

$$E = \left\{\xi \in \mathbb{R}^{n\times n} :\ \lambda_1(\xi) = 0,\ \lambda_i(\xi) = m_i,\ i = 2, ..., n\right\}$$

avec m_n suffisamment grand. Le résultat suit alors du THÉORÈME 5.1 vu que $F(\xi_0) = F(Du)$ et $F = f$ dans E.

Alternativement, si on veut obtenir le résultat en appliquant le COROLLAIRE 5.3 sans passer par le THÉORÈME 4.24, une fois remarqué que ξ peut être écrit comme une matrice diagonale avec la première ligne nulle, on considère les ensembles

$$\mathcal{K} = \left\{\xi \in \mathbb{R}^{(n-1)\times n} :\ \prod_{i=\nu}^{n-1} \lambda_i(\xi) < \prod_{i=\nu}^{n-1} m_{i+1},\ \nu = 2, ..., n-1\right\},$$

$$\mathcal{H} = \left\{\xi \in \mathbb{R}^{(n-1)\times n} :\ \lambda_i(\xi) = m_{i+1},\ i = 1, ..., n-1\right\},$$

pour $m_n \geq m_{n-1}$. Alors $\mathcal{K}$ a la propriété de relaxation par rapport à $\mathcal{H}$ (cf. [14, Théorème 7.28]). On conclut alors que si

$$K_0 = K_1 = \left\{\xi \in \mathbb{R}^{n\times n} :\ \xi^1 = 0,\ \prod_{i=\nu}^{n} \lambda_i(\xi) < \prod_{i=\nu}^{n} m_i,\ \nu = 2, ..., n\right\}$$
$$H = \left\{\xi \in \mathbb{R}^{n\times n} :\ \xi^1 = 0,\ \lambda_i(\xi) = m_i,\ i = 2, ..., n\right\}$$

K_1 a la propriété de relaxation par rapport à H. En choisissant m_n suffisamment grand tel que $\xi_0 \in K_0$, le résultat suit du COROLLAIRE 5.3. □

5.3.3 Intégrale du type surfaces minimales

On considère dans cette section le problème

$$(P_3) \qquad \inf\left\{\int_\Omega f(Du(x))\,dx : \ u \in u_{\xi_0} + W_0^{1,\infty}(\Omega;\mathbb{R}^{n+1})\right\}$$

où $f(\xi) = g(\mathrm{adj}_n\xi)$, pour une certaine fonction non convexe $g : \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ et u_{ξ_0} est une application affine telle que $Du_{\xi_0} = \xi_0 \in \mathbb{R}^{(n+1)\times n}$.

On rappelle que si Γ est une surface de paramétrisation $u : \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, l'aire de Γ est donnée par l'intégrale

$$\int_\Omega |\mathrm{adj}_n(Du(x))|\ dx.$$

Celle-ci est l'intégrale qu'on obtient lorsque on pose, avec les notations ci-dessus, $g = |\cdot|$, qui plus est convexe. On retrouve ainsi un problème de surfaces minimales, ici dans un cas élémentaire, vu qu'on considère des données au bord affines. En fait la quasiconvexité de la fonction intégrande entraîne que u_{ξ_0} est solution du problème.

Comme on exclut le cas où g est convexe, les problèmes qu'on considère sont des problèmes non quasiconvexes et donc non triviaux.

On sait (cf. par exemple Dacorogna [11]) que $Pf(\xi) = Qf(\xi) = Rf(\xi) = Cg(\mathrm{adj}_n\xi)$ (Qf n'ayant de sens que si g est finie). On suppose par la suite que Cg est semi-continue inférieurement (voir le Théorème 5.39 pour des conditions sur g qui assurent une telle propriété).

Pour ce problème, et avec les notations de la Section 5.1, on pose $F(\xi) = Cg(\mathrm{adj}_n\xi)$ et

$$K = \{\xi \in \mathbb{R}^{(n+1)\times n} : \ F(\xi) < f(\xi)\} = \left\{\xi \in \mathbb{R}^{(n+1)\times n} : \mathrm{adj}_n\xi \in S\right\}$$

où

$$S = \{y \in \mathbb{R}^{n+1} : \ Cg(y) < g(y)\}.$$

On définit le problème relaxé

$$(QP_3) \qquad \inf\left\{\int_\Omega F(Du(x))\,dx : \ u \in u_{\xi_0} + W_0^{1,\infty}(\Omega;\mathbb{R}^{n+1})\right\}.$$

On commence par vérifier que F satisfait la condition (5.3) nécessaire pour appliquer les résultats de la Section 5.1. On note que si f est finie alors F est quasiconvexe et l'assertion est immédiate.

Proposition 5.26. *Soient $g : \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ une fonction bornée inférieurement par une fonction affine et $F(\xi) = Cg(\mathrm{adj}_n\xi)$. Alors, si Cg est semi-continue inférieurement, u_{ξ_0} est solution de (QP_3).*

Démonstration. Soit $u \in u_{\xi_0} + W_0^{1,\infty}(\Omega;\mathbb{R}^{n+1})$. Comme chaque composante de $\mathrm{adj}_n(\cdot)$ est une fonction quasiaffine,

$$\int_\Omega Cg(\mathrm{adj}_n(\xi_0))\,dx = |\Omega|\ Cg\left(\mathrm{adj}_n(\xi_0)\right) = |\Omega|\ Cg\left(\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega \mathrm{adj}_n(Du(x))\,dx\right).$$

Le résultat suit alors de l'inégalité de Jensen vu que, par hypothèse, Cg est semi-continue inférieure--ment (cf. Remarque 5.40). $\square$

Par la proposition précédente, si $\mathrm{adj}_n\xi_0 \notin S$ alors u_{ξ_0} est solution de (P_3). On étudie le cas où $\mathrm{adj}_n\xi_0 \in S$. Dans ce qui suit on suppose S connexe, sinon on le remplace par sa composante connexe qui contient $\mathrm{adj}_n\xi_0$. Avec la théorie développée dans la première section il est possible d'assurer l'existence de solution pour (P_3) dans les conditions décrites dans le théorème suivant.

Théorème 5.27. *Soient $g : \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction semi-continue inférieurement, bornée inférieurement par une fonction affine et $f(\xi) = g(\mathrm{adj}_n \xi),\ \forall\ \xi \in \mathbb{R}^{(n+1)\times n}$. Si $\xi_0 \in K$, S est ouvert borné, Cg est semi-continue inférieurement et Cg est affine dans $\overline{S}$ alors (P_3) a une solution.*

Remarque 5.28. L'hypothèse que Cg soit affine dans S n'est pas une condition nécessaire de minimum, comme on le verra dans la Proposition 5.30.

Démonstration. On rappelle qu'on pose $F(\xi) = Cg(\mathrm{adj}_n \xi)$. Par la Proposition 5.26, la condition (5.3) est satisfaite. On considère deux cas.
Cas 1 : $\mathrm{adj}_n \xi_0 = 0$. En particulier $0 \notin \partial\overline{S}$ parce que, par hypothèse, $\xi_0 \in K$ et S est ouvert.

On applique le Corollaire 5.3 avec

$$K_0 = \left\{\xi \in \mathbb{R}^{(n+1)\times n} :\ \mathrm{adj}_n \xi \in S,\ \lambda_n(\xi) < \gamma\right\},$$
$$K_1 = \left\{\xi \in \mathbb{R}^{(n+1)\times n} :\ \mathrm{adj}_n \xi \in \mathrm{int}\,\overline{S},\ \lambda_n(\xi) < \gamma\right\},$$

où γ est choisit tel que $\lambda_n(\xi_0) < \gamma$ et

$$|y| \leq \gamma^n,\ \forall\ y \in \overline{S}.$$

Cela est possible puisque S est borné. On a $\xi_0 \in K_0 \subset K_1$ qui sont des bornés, $Cg(\mathrm{adj}_n \xi)$ quasiaffine dans $\overline{K}_0$. De plus, comme on a vu dans la preuve du Théorème 4.28 (Cas 1), K_1 a la propriété de relaxation par rapport à

$$H = \left\{\xi \in \mathbb{R}^{(n+1)\times n} :\ \mathrm{adj}_n \xi \in \partial\overline{S},\ \lambda_n(\xi) \leq \gamma\right\}.$$

Comme H est compact et $H \subset \overline{K}_0 \cap K^c$ on conclut le résultat.
Cas 2 : $\mathrm{adj}_n \xi_0 \neq 0$.

On applique le Corollaire 5.5 pour obtenir ce résultat. Comme on suppose S ouvert, K est ouvert. Il faut trouver une direction de rang un $\lambda = \alpha \otimes \beta \in \mathbb{R}^{(n+1)\times n}$ adéquate. On note que, une fois que Cg est admise affine dans $\overline{S}$, alors $Cg(\mathrm{adj}_n \xi)$ est quasiaffine dans $L_K(\xi_0 + \alpha \otimes B_\epsilon, \lambda)$ (cf. Définition 4.15) indépendamment du choix de λ. Donc, il reste à démontrer que K est borné de façon stable en ξ_0 dans une direction $\lambda = \alpha \otimes \beta$. Cela a été vérifié dans la preuve du Théorème 4.28 (Cas 2). □

On considère ensuite un cas particulier pour la fonction g. On démontrera ainsi que la condition d'affinité de Cg sur S n'est pas une condition nécessaire de minimum et, en outre, qu'un problème (P) peut ne pas avoir de solution et son problème relaxé en avoir une infinité.

Exemple 5.29. Fixons $N = 3$, $n = 2$ et $f : \mathbb{R}^{3\times 2} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(\xi) = g(\mathrm{adj}_2 \xi)$$

où $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ et

$$g(\nu) = \left(\nu_1^2 - 4\right)^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 .$$

On obtient alors $Qf(\xi) = Cg(\mathrm{adj}_2 \xi)$ et

$$Cg(\nu) = \left[\nu_1^2 - 4\right]_+^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2$$

où

$$[x]_+ = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

On choisit la donnée au bord de la façon suivante

$$u_{\xi_0}(x) = (u^1_{\xi_0}(x), u^2_{\xi_0}(x), u^3_{\xi_0}(x)) = (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, 0, 0). \tag{5.18}$$

Alors

$$Du_{\xi_0}(x) = \xi_0 = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{adj}_2 Du_{\xi_0}(x) = \mathrm{adj}_2 \xi_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Le problème est

$$(P) \qquad \inf \left\{ I(u) = \int_\Omega f(Du(x))\, dx : \ u \in u_{\xi_0} + W_0^{1,\infty}(\Omega; \mathbb{R}^3) \right\}.$$

Notons que $Qf(\xi_0) = 0 < f(\xi_0) = 16$.

Avec les notations précédentes

$$\begin{aligned} S &= \{y \in \mathbb{R}^3 : \ Cg(y) < g(y)\} = \{y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3 : \ |y_1| < 2\} \\ K &= \{\xi \in \mathbb{R}^{3\times 2} : \ Qf(\xi) < f(\xi)\} = \left\{\xi \in \mathbb{R}^{3\times 2} : \mathrm{adj}_2 \xi \in S\right\}. \end{aligned}$$

On observe que Cg n'est pas affine dans S, ce qui implique que Qf n'est pas quasiaffine dans K.

Le résultat suivant montre que l'hypothèse de quasiconvexité stricte sur Qf n'est pas nécessaire pour la non existence.

Proposition 5.30. *Le problème (P) décrit dans l'exemple ci-dessus avec la donnée au bord de la forme (5.18) a une solution si et seulement si $u_{\xi_0} \equiv 0$. De plus, Qf n'est pas strictement quasiconvexe dans aucun $\xi_0 \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ de la forme*

$$\xi_0 = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et (QP) a un nombre infini de solutions pour un tel ξ_0.

Démonstration. *Etape 1.* On commence par démontrer que si (P) a une solution alors $u_{\xi_0} \equiv 0$. Soit u_{ξ_0} de la forme (5.18) et supposons $u \in u_{\xi_0} + W_0^{1,\infty}(\Omega; \mathbb{R}^3)$ une solution de (P). Alors, par le Théorème 5.7,

$$f(Du) = Qf(Du) = Qf(Du_{\xi_0}) = Cg(\mathrm{adj}_2 Du_{\xi_0}) = Cg(0) = 0.$$

Donc, dénotant par $\nu(\xi) = \mathrm{adj}_2 \xi$, on a

$$|\nu_1(Du)| = 2 \,, \nu_2(Du) = \nu_3(Du) = 0.$$

Les trois équations s'écrivent

$$\begin{cases} \left|u^2_{x_1} u^3_{x_2} - u^2_{x_2} u^3_{x_1}\right| = 2 \\ u^1_{x_1} u^3_{x_2} - u^1_{x_2} u^3_{x_1} = 0 \\ u^1_{x_1} u^2_{x_2} - u^1_{x_2} u^2_{x_1} = 0. \end{cases} \tag{5.19}$$

En multipliant la deuxième équation de (5.19) par $u^2_{x_1}$, et après par $u^2_{x_2}$, et en utilisant la troisième équation de (5.19), on obtient

$$\begin{aligned} 0 &= u^2_{x_1} u^1_{x_1} u^3_{x_2} - u^2_{x_1} u^1_{x_2} u^3_{x_1} = u^2_{x_1} u^1_{x_1} u^3_{x_2} - u^1_{x_1} u^2_{x_2} u^3_{x_1} = u^1_{x_1}\left(u^2_{x_1} u^3_{x_2} - u^2_{x_2} u^3_{x_1}\right) \\ 0 &= u^2_{x_2} u^1_{x_1} u^3_{x_2} - u^2_{x_2} u^1_{x_2} u^3_{x_1} = u^2_{x_1} u^1_{x_2} u^3_{x_2} - u^2_{x_2} u^1_{x_2} u^3_{x_1} = u^1_{x_2}\left(u^2_{x_1} u^3_{x_2} - u^2_{x_2} u^3_{x_1}\right). \end{aligned}$$

En introduisant la première équation de (5.19) dans les deux nouvelles équations, on trouve

$$u^1_{x_1} = u^1_{x_2} = 0, \text{ } p.p. \text{ dans } \Omega.$$

On conclut que les solutions de (P) vérifient $Du^1 = 0$ *p.p.* et donc $u^1 \equiv$constante dans chaque composante connexe de Ω. Comme u^1 coïncide avec $u^1_{\xi_0}$ sur le bord de Ω, on déduit que $u^1_{\xi_0} \equiv 0$ et donc $u_{\xi_0} \equiv 0$, comme on voulait.

Etape 2. On démontre ensuite que si $u_{\xi_0} \equiv 0$, alors (P) a une solution. Par le THÉORÈME 5.1, il suffit de choisir $u^1 \equiv 0$ et résoudre

$$\begin{cases} \left|u^2_{x_1}u^3_{x_2} - u^2_{x_2}u^3_{x_1}\right| = 2 & p.p. \text{ dans } \Omega \\ \\ u^2 = u^3 = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Cela est possible par le THÉORÈME 4.18.

Etape 3. On démontre finalement qu'il n'existe aucun $\xi_0 \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ de la forme donnée dans la proposition de telle sort que Qf soit strictement quasiconvexe en ξ_0 mais que (QP) a un nombre infini de solutions pour des telles données au bord. En effet, soient $0 < R_1 < R_2 < R$ et dénotons par B_R la boule de centre dans 0 et rayon R. Choisissons $\lambda, \mu \in C^\infty(B_R)$ tels que

1) $\lambda = 0$ dans ∂B_R et $\lambda \equiv 1$ dans B_{R_2}.

2) $\mu \equiv 0$ dans $B_R \setminus \overline{B}_{R_2}$, $\mu \equiv 1$ dans B_{R_1} et

$$\left|\mu^2 + \mu\left(x_1\mu_{x_1} + x_2\mu_{x_2}\right)\right| < 2 \text{ pour tout } x \in B_R\,.$$

Cette dernière condition (qui est une restriction seulement dans $B_{R_2} \setminus \overline{B}_{R_1}$) peut être satisfaite pour R_1, R_2 et R convenablement choisis.

On choisit alors $u(x) = u_{\xi_0}(x) + \varphi(x)$ où

$$\varphi^1(x) = -\lambda(x)\, u^1_{\xi_0}(x)\,,\; \varphi^2(x) = \mu(x)\, x_1 \text{ et } \varphi^3(x) = \mu(x)\, x_2\,.$$

Alors on a $\varphi \in W^{1,\infty}_0(B_R;\mathbb{R}^3)$, $\operatorname{adj}_2 Du \equiv 0$ dans $B_R \setminus \overline{B}_{R_2}$ et dans B_{R_2} on a

$$Du = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mu + x_1\mu_{x_1} & x_1\mu_{x_2} \\ x_2\mu_{x_1} & \mu + x_2\mu_{x_2} \end{pmatrix}$$

et

$$\operatorname{adj}_2 Du = \left(\mu^2 + \mu\left(x_1\mu_{x_1} + x_2\mu_{x_2}\right), 0, 0\right).$$

On a ainsi obtenu $Cg\left(\operatorname{adj}_2 Du\right) \equiv 0$ et donc

$$Qf\left(\xi_0 + D\varphi\right) \equiv Qf\left(\xi_0\right) = 0.$$

Comme φ n'est pas identiquement nulle, on déduit que Qf n'est pas strictement quasiconvexe. La construction faite précédemment montre que le problème (QP) a un nombre infini de solutions. □

5.3.4 L'énergie de Saint Venant-Kirchhoff

On considère le problème de la minimisation de l'énergie de Saint Venant-Kirchhoff qui s'écrit

$$(P_4) \qquad \inf\left\{\int_\Omega f\left(Du\left(x\right)\right) dx :\; u \in u_{\xi_0} + W^{1,\infty}_0(\Omega;\mathbb{R}^n)\right\},$$

où

$$f(\xi) = \left|\xi\xi^T - I\right|^2 + \frac{\nu}{1-2\nu}\left(|\xi|^2 - n\right)^2$$

pour un certain paramètre $\nu \in]0,1/2[$ et u_{ξ_0} est l'application affine telle que $Du_{\xi_0} = \xi_0 \in \mathbb{R}^{n\times n}$. De façon équivalente, en fonction des valeurs singulières $0 \le \lambda_1(\xi) \le \cdots \le \lambda_n(\xi)$ de $\xi \in \mathbb{R}^{n\times n}$

$$f(\xi) = \sum_{i=1}^{n} \left([\lambda_i(\xi)]^2 - 1 \right)^2 + \frac{\nu}{1-2\nu} \left(\sum_{i=1}^{n} [\lambda_i(\xi)]^2 - n \right)^2 .$$

Ce problème a été étudié par Dacorogna-Marcellini [13]. Suite aux développements de leurs résultats d'existence pour les inclusions différentielles, cf. [14], il est dès lors possible de traiter des nouveaux cas.

On commence par rappeler l'expression de l'enveloppe quasiconvexe de f pour les dimensions $n=2$ et $n=3$. Ces expressions ont été calculées par Le Dret-Raoult [25].

Pour $n=2$ on a

$$Qf(\xi) = \frac{1}{1-\nu} \left[[\lambda_2(\xi)]^2 - 1 \right]_+^2 + \frac{1}{(1-\nu)(1-2\nu)} \left[(1-\nu)[\lambda_1(\xi)]^2 + \nu [\lambda_2(\xi)]^2 - 1 \right]_+^2$$

où

$$[x]_+ = \begin{cases} x & \text{si } x \ge 0 \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

De façon équivalente

$$Qf(\xi) = \begin{cases} 0 & \text{si } \xi \in D_1 \\ \frac{1}{1-\nu} \left([\lambda_2(\xi)]^2 - 1 \right)^2 & \text{si } \xi \in D_2 \\ f(\xi) & \text{si } \xi \notin D_1 \cup D_2 \end{cases}$$

où

$$\begin{aligned} D_1 &= \left\{ \xi \in \mathbb{R}^{2\times 2} : (1-\nu)[\lambda_1(\xi)]^2 + \nu [\lambda_2(\xi)]^2 < 1,\ \lambda_2(\xi) < 1 \right\} \\ &= \left\{ \xi \in \mathbb{R}^{2\times 2} : \lambda_2(\xi) < 1 \right\} \\ D_2 &= \left\{ \xi \in \mathbb{R}^{2\times 2} : (1-\nu)[\lambda_1(\xi)]^2 + \nu [\lambda_2(\xi)]^2 < 1,\ \lambda_2(\xi) \ge 1 \right\}. \end{aligned}$$

Si $n=3$ alors

$$\begin{aligned} Qf(\xi) \quad = \quad & (1+\nu) \left[\lambda_3^2(\xi) - 1 \right]_+^2 + \frac{1}{1-\nu} \left[[\lambda_2(\xi)]^2 + \nu [\lambda_3(\xi)]^2 - (1+\nu) \right]_+^2 + \\ & + \frac{1}{(1-\nu)(1-2\nu)} \left[(1-\nu)[\lambda_1(\xi)]^2 + \nu([\lambda_2(\xi)]^2 + [\lambda_3(\xi)]^2) - (1+\nu) \right]_+^2 \end{aligned}$$

ou

$$Qf(\xi) = \begin{cases} 0 & \text{si } \xi \in C_1 \\ (1+\nu) \left([\lambda_3(\xi)]^2 - 1 \right)^2 & \text{si } \xi \in C_2 \\ (1+\nu) \left([\lambda_3(\xi)]^2 - 1 \right)^2 + \frac{1}{1-\nu} \left([\lambda_2(\xi)]^2 + \nu [\lambda_3(\xi)]^2 - (1+\nu) \right)^2 & \text{si } \xi \in C_3 \\ f(\xi) & \text{si } \xi \notin C_1 \cup C_2 \cup C_3 \end{cases}$$

où

$$\begin{aligned}
C_1 &= \left\{ \xi \in \mathbb{R}^{3\times 3} : \begin{array}{c} \lambda_3(\xi) < 1,\ [\lambda_2(\xi)]^2 + \nu\,[\lambda_3(\xi)]^2 < 1+\nu \\ (1-\nu)\,[\lambda_1(\xi)]^2 + \nu([\lambda_2(\xi)]^2 + [\lambda_3(\xi)]^2) < 1+\nu \end{array} \right\} \\
&= \left\{ \xi \in \mathbb{R}^{3\times 3} : \lambda_3(\xi) < 1 \right\} \\
C_2 &= \left\{ \xi \in \mathbb{R}^{3\times 3} : \begin{array}{c} \lambda_3(\xi) \geq 1,\ [\lambda_2(\xi)]^2 + \nu\,[\lambda_3(\xi)]^2 < 1+\nu \\ (1-\nu)\,[\lambda_1(\xi)]^2 + \nu([\lambda_2(\xi)]^2 + [\lambda_3(\xi)]^2) < 1+\nu \end{array} \right\} \\
C_3 &= \left\{ \xi \in \mathbb{R}^{3\times 3} : \begin{array}{c} [\lambda_2(\xi)]^2 + \nu\,[\lambda_3(\xi)]^2 \geq 1+\nu \\ (1-\nu)\,[\lambda_1(\xi)]^2 + \nu([\lambda_2(\xi)]^2 + [\lambda_3(\xi)]^2) < 1+\nu \end{array} \right\}.
\end{aligned}$$

On va assurer l'existence ou la non existence de solution pour (P_4) en fonction de la donnée au bord u_{ξ_0}. Pour la dimension $n = 2$, le problème sera complètement résolu. En effet, pour chaque valeur de ξ_0 on démontre s'il existe ou non des solutions au problème de minimisation. Dans le cas de la dimension $n = 3$ quelques cas restent encore ouverts. Les résultats sont les suivants.

Théorème 5.31. *Si $n = 2$, le problème (P_4) a des solutions si et seulement si $\xi_0 \notin D_2$.*

Théorème 5.32. *Si $n = 3$, le problème (P_4) a une solution si $\xi_0 \notin C_2 \cup C_3$ et n'a pas de solution si $\xi_0 \in C_2$.*

Remarque 5.33. Le cas où $\xi_0 \in C_3$ est ouvert.

On commence par démontrer deux lemmes concernant des propriétés des valeurs singulières qui permettront de démontrer, pour certaines valeurs de ξ_0, la non existence de solution du problème (P_4). On note que les deux lemmes sont valables en dimension n quelconque.

Lemme 5.34. *Soient $\xi_0 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tel que $\lambda_n(\xi_0) = 1$ et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Si $u \in u_{\xi_0} + W_0^{1,\infty}(\Omega;\mathbb{R}^n)$ est tel $\lambda_n(Du(x)) = 1,$ p.p. $x \in \Omega$ alors $u = u_{\xi_0}$.*

Démonstration. Soit u dans les conditions de l'énoncé. Sans perte de généralité on écrit $\xi_0 = \operatorname{diag}(\lambda_1(\xi_0), ..., \lambda_{n-1}(\xi_0), 1)$ et $u = u_{\xi_0} + \varphi$, avec $\varphi \in W_0^{1,\infty}(\Omega;\mathbb{R}^n)$. Alors, par la caractérisation de λ_n donnée dans le Théorème 3.21, *p.p.* $x \in \Omega$, on a

$$\begin{aligned}
1 = \lambda_n(Du(x)) \geq |Du(x)e_n| &= \left| \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n}, ..., \frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial x_n}, 1 + \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n} \right) \right| = \\
&= \sqrt{\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n}\right)^2 + ... + \left(\frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial x_n}\right)^2 + \left(1 + \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n}\right)^2} \geq \left| 1 + \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n} \right|,
\end{aligned} \tag{5.20}$$

où $e_n = (0, ..., 0, 1) \in \mathbb{R}^n$.

Voyons que $\frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n} = 0,$ *p.p.* dans Ω. Comme $\varphi \in W_0^{1,\infty}(\Omega;\mathbb{R}^n)$ alors

$$\int_\Omega \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n} = 0.$$

Si $\frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n} \neq 0$ dans un ensemble de mesure positive, alors $\frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n} > 0$ dans une partie de Ω, ce qui contredit (5.20). Donc $\frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n} = 0,$ *p.p.* $x \in \Omega$ et par (5.20) pour tout $i = 1, ..., n,$ $\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_n} = 0,$ *p.p.* $x \in \Omega$. Cela implique que $\varphi = 0$, c'est-à-dire, $u = u_{\xi_0}$. □

Dans le deuxième lemme on démontre la stricte convexité de $\lambda_n(\cdot)$ en ξ dans au moins n directions (cf. Définition 5.12), sous l'hypothèse de $\lambda_{n-1}(\xi) < \lambda_n(\xi)$. Ce résultat avait été obtenu en dimension 2 par Dacorogna-Marcellini [13]. En le démontrant pour une dimension n arbitraire on sera capable de prouver la non existence de solution de (P_4) en dimension 3 dans certains cas. En fait, comme on l'a vu dans la Section 5.2 la convexité stricte dans au moins n directions est une condition suffisante pour la non existence de solution des problèmes de minimisation.

Lemme 5.35. *Soit $\xi \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tel que $\lambda_{n-1}(\xi) < \lambda_n(\xi)$. Alors la fonction convexe $\lambda_n : \mathbb{R}^{n\times n} \longrightarrow \mathbb{R}$ est strictement convexe en ξ dans au moins n directions.*

Remarque 5.36. Si $\lambda_{n-1}(\xi) = \lambda_n(\xi)$ le résultat n'est plus vrai. En effet, soit $\xi \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ tel que $\xi = \mathrm{diag}(a, a)$ avec $a > 0$. Alors pour toutes les matrices symétriques $\eta \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ avec leurs éléments positifs on a $\lambda_2(2\xi + \eta) = \lambda_2(\xi + \eta) + \lambda_2(\xi)$ ce qui contredit la définition de convexité stricte dans au moins 2 directions.

Démonstration. Sans perte de généralité, supposons que ξ ait la forme $\xi = \mathrm{diag}(\gamma_1, ..., \gamma_n)$, où $\gamma_i = \lambda_i(\xi),\ i = 1, ..., n$. On démontre que si

$$\lambda_n\left(\xi + \frac{\eta}{2}\right) = \frac{\lambda_n(\xi + \eta) + \lambda_n(\xi)}{2}$$

alors $< \alpha^i, \eta^i, >= 0,\ i = 1, ..., n$ avec $\alpha^1 = ... = \alpha^{n-1} = e_n = (0, ..., 0, 1)$ et $\alpha_n = e_1 = (1, 0, ..., 0)$.

Supposons que $\lambda_n\left(\xi + \frac{\eta}{2}\right) = \frac{\lambda_n(\xi+\eta)+\lambda_n(\xi)}{2}$, ce qui est équivalent à $\lambda_n(2\xi + \eta) = \lambda_n(\xi + \eta) + \lambda_n(\xi)$. On note qu'il suffit de considérer $\xi + \eta \neq 0$. Comme la fonction $\lambda_n(\cdot)$ peut être écrite comme $\lambda_n(\zeta) = \max_{|y|=1} |\zeta y|$ (cf. Théorème 3.21) on considère $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $|x| = 1$ et $\lambda_n(2\xi + \eta) = |(2\xi + \eta)x|$. Alors

$$\lambda_n(\xi + \eta) + \lambda_n(\xi) = |(2\xi + \eta)x| \leq |(\xi + \eta)x| + |\xi x| \leq \lambda_n(\xi + \eta) + \lambda_n(\xi).$$

Donc $|(\xi + \eta)x| + |\xi x| = \lambda_n(\xi + \eta) + \lambda_n(\xi)$ et comme $|(\xi + \eta)x| \leq \lambda_n(\xi + \eta)$ et $|\xi x| \leq \lambda_n(\xi)$ on obtient $|(\xi + \eta)x| = \lambda_n(\xi + \eta)$ et $|\xi x| = \lambda_n(\xi)$. En outre, du fait que $|(2\xi + \eta)x| = |(\xi + \eta)x| + |\xi x|$, résulte que $(\xi + \eta)x$ et ξx sont co-linéaires. Comme $|(\xi + \eta)x| = \lambda_n(\xi + \eta) \neq 0$ et $|\xi x| = \lambda_n(\xi) \neq 0$ alors on peut écrire $\xi x = c(\xi + \eta)x$ avec $c \neq 0$.

On vérifie ensuite qu'alors $|\xi x| = \lambda_n(\xi) = \gamma_n$ entraîne que $x = \pm e_n = \pm(0, ..., 0, 1)$. On commence par noter que

$$\sum_{i=2}^{n}(\gamma_i^2 - \gamma_{i-1}^2)(x_i^2 + ... + x_n^2 - 1) =$$
$$= \sum_{i=2}^{n}\left(\gamma_i^2(x_i^2 + ... + x_n^2 - 1) - \gamma_{i-1}^2(x_{i-1}^2 + ... + x_n^2 - 1)\right) + \sum_{i=2}^{n}\gamma_{i-1}^2 x_{i-1}^2 =$$
$$= \gamma_n^2(x_n^2 - 1) - \gamma_1^2(x_1^2 + ... + x_n^2 - 1) + \sum_{i=2}^{n}\gamma_{i-1}^2 x_{i-1}^2 =$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\gamma_i^2 x_i^2 - \gamma_n^2 = |\xi x|^2 - \gamma_n^2 = 0.$$

Donc on a une somme nulle dont chaque terme est négatif ou nul. On conclut que chaque terme est en fait nul et en particulier, comme $\gamma_n > \gamma_{n-1}$, que $x_n^2 = 1$, c'est-à-dire $x = \pm e_n$.

On peut alors écrire

$$\pm\gamma_n e_n = \xi x = c(\xi + \eta)x = \pm c(\xi + \eta)_n$$

où $(\xi + \eta)_n$ désigne la dernière colonne de $\xi + \eta$. En particulier $\eta_n^1 = \cdots = \eta_n^{n-1} = 0$. De la même façon, puisque $\lambda_n(\zeta) = \lambda_n(\zeta^T)$ en faisant le même raisonnement avec les matrices transposées on obtient que $\eta_1^n = ... = \eta_{n-1}^n = 0$ et donc $< \alpha^i, \eta^i >= 0$, pour tout les $i \in \{1, ..., n\}$ avec les choix des α^i mentionnés en haut. □

On démontre ensuite les résultats liés au problème de minimisation. On commence par le cas de la dimension 2.

Démonstration du Théorème 5.31. On considère plusieurs cas.

(i) Si $\xi_0 \notin D_1 \cup D_2$ alors u_{ξ_0} est solution du problème.

(ii) Si $\xi_0 \in D_1$ (ce cas n'était pas inclus dans Dacorogna-Marcellini [13]) on applique le Corollaire 5.3 pour obtenir l'existence de solution. Ici $F = Qf$. Il suffit de faire

$$\begin{aligned} K &= D_1 \cup D_2 = \left\{\xi \in \mathbb{R}^{2\times 2} : (1-\nu)\,[\lambda_1(\xi)]^2 + \nu\,[\lambda_2(\xi)]^2 < 1\right\} \\ K_0 &= K_1 = D_1 = \left\{\xi \in \mathbb{R}^{2\times 2} : \lambda_1(\xi) \le \lambda_2(\xi) < 1\right\} \\ H &= \overline{K}_0 \cap \partial K = \left\{\xi \in \mathbb{R}^{2\times 2} : \lambda_1(\xi) = \lambda_2(\xi) = 1\right\}. \end{aligned}$$

On note que Qf est quasiaffine dans $\overline{K}_0$ (en effet $Qf \equiv 0$ dans cet ensemble) et que K_1 a la propriété de relaxation par rapport à H (ce fait résulte du Lemme 4.23 conjugué avec le Théorème 4.5).

(iii) Si $\xi_0 \in D_2$ avec $\lambda_2(\xi_0) = 1$ alors $\lambda_1(\xi_0) < 1 = \lambda_2(\xi_0)$. Par le Théorème 5.7, on a que si u est solution de (P_4) alors $\lambda_1(Du(x)) = \lambda_2(Du(x)) = 1,\ p.p.\ x \in \Omega$. Par le Lemme 5.34 ceci n'a pas de solution avec la condition au bord $u = u_{\xi_0}$.

(iv) Supposons $\xi_0 \in D_2$ avec $\lambda_2(\xi_0) > 1$. Ce cas a été démontré par Dacorogna-Marcellini dans [13]. De la définition de D_2, $\lambda_1(\xi_0) < \lambda_2(\xi_0)$ et, par le Lemme 5.35, $\lambda_2(\cdot)$ est strictement convexe en ξ_0 dans au moins 2 directions. Si on définit

$$g(t) = \frac{1}{1-\nu}(t^2-1)^2$$

alors dans un voisinage de ξ_0

$$Qf(\xi) = g(\lambda_2(\xi)).$$

La convexité stricte de g pour $t > 1$ implique que aussi Qf est strictement convexe en ξ_0 dans au moins 2 directions. Donc la Proposition 5.13 et le Théorème 5.10 assurent dans ce cas la non existence de solution. □

On démontre maintenant le Théorème 5.32.

Démonstration du Théorème 5.32. La démonstration utilise les mêmes arguments que ceux utilisés au Théorème 5.31.

(i) Si $\xi_0 \notin C_1 \cup C_2 \cup C_3$ alors u_{ξ_0} est solution de (P_4).

(ii) Si $\xi_0 \in C_1$ il suffit d'appliquer le Corollaire 5.3 avec $F = Qf$,

$$\begin{aligned} K &= C_1 \cup C_2 \cup C_3 = \left\{\xi \in \mathbb{R}^{3\times 3} : (1-\nu)\,[\lambda_1(\xi)]^2 + \nu([\lambda_2(\xi)]^2 + [\lambda_3(\xi)]^2) < 1+\nu\right\} \\ K_0 &= K_1 = C_1 = \left\{\xi \in \mathbb{R}^{3\times 3} : \lambda_3(\xi) < 1\right\} \\ H &= \overline{K}_0 \cap \partial K = \left\{\xi \in \mathbb{R}^{3\times 3} : \lambda_1(\xi) = \lambda_2(\xi) = \lambda_3(\xi) = 1\right\}. \end{aligned}$$

(iii) Si $\xi_0 \in C_2$ avec $\lambda_3(\xi_0) = 1$ alors $\lambda_2(\xi_0) < 1 = \lambda_3(\xi_0)$. Si u est solution de (P_4) alors $\lambda_1(Du(x)) = \lambda_2(Du(x)) = \lambda_3(Du(x)) = 1,\ p.p.\ x \in \Omega$. Le Lemme 5.34 montre qu'un tel u n'existe pas.

(iv) Si $\xi_0 \in C_2$ avec $\lambda_3(\xi_0) > 1$ alors $\lambda_2(\xi_0) < \lambda_3(\xi_0)$ et la non existence de solution résulte, comme dans le cas de la dimension 2, de la convexité stricte de λ_3 en ξ_0 dans au moins 3 directions. □

5.4 Appendice : quelques résultats élémentaires sur les enveloppes convexes

On discute par la suite de la question : étant donnée une fonction $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ semi-continue inférieurement, son enveloppe convexe Cg est-elle encore semi-continue inférieurement ?

On remarque que, si Cg est finie, alors on peut même dire que Cg est continue puisqu'elle est convexe (cf. [35, Théorème 10.1, page 82]). Mais, en général, Cg n'est pas finie et, même, Cg n'est pas semi-continue inférieurement, comme l'exemple suivant le démontre.

Exemple 5.37. Soit $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ définie par

$$g(x) = \begin{cases} 1, & si\ x \in L, \\ +\infty, & si\ x \notin L, \end{cases}$$

où $L = \{(0,t) : \ t \geq 0\} \cup \{(t,0) : \ 0 \leq t \leq 1\}$. Puisque L est fermé, cette fonction est semi-continue inférieurement. D'autre part, son enveloppe convexe est la fonction

$$Cg(x) = \begin{cases} 1, & si\ x \in \operatorname{co} L, \\ +\infty, & si\ x \notin \operatorname{co} L, \end{cases}$$

où $\operatorname{co} L = \{(s,t) : \ 0 \leq s < 1, \ t \geq 0\} \cup \{(1,0)\}$. Comme cet ensemble n'est pas fermé, la fonction Cg n'est pas semi-continue inférieurement.

Cet exemple est en accord avec le résultat connu suivant (cf. [35, Théorème 7.4, page 56]).

Théorème 5.38. *Soit $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction convexe. Alors g est semi-continue inférieurement sauf éventuellement au bord relatif de son domaine effectif.*

On vérifie que sous une hypothèse de croissance à l'infini la semi-continuité inférieure de Cg est assurée.

Théorème 5.39. *Soit $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction semi-continue inférieurement telle que*

$$\lim_{|x| \to +\infty} \frac{g(x)}{|x|} = +\infty.$$

Alors Cg est semi-continue inférieurement.

Remarque 5.40. En particulier, avec ces hypothèses sur g, on a $Cg = g^{**}$ et d'ailleurs l'inégalité de Jensen est valable pour Cg même si cette fonction a des valeurs dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Cela provient du fait que $Cg = g^{**}$ et donc est supremum de fonctions affines.

Démonstration. Soient $x \in \mathbb{R}^n$ et $x_\nu \to x$. Il faut vérifier que $Cg(x) \leq \liminf Cg(x_\nu)$. Dans tout ce qui suit, on considère la sous-suite de x_ν qui réalise la limite inférieure de $Cg(x_\nu)$ et qu'on dénote aussi par x_ν.

On note d'abord que, par le théorème de Carathéodory,

$$Cg(z) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{n+1} t^i g(y^i) : \ t^i \in [0,1], \ \sum_{i=1}^{n+1} t^i = 1, \ \sum_{i=1}^{n+1} t^i y^i = z \right\}$$

et donc, pour chaque $\nu \in \mathbb{N}$, il existe

$$\begin{cases} t_\nu^i \in [0,1], \ y_\nu^i \in \mathbb{R}^n, \ \displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} t_\nu^i = 1, \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} t_\nu^i y_\nu^i = x_\nu, \\ Cg(x_\nu) \leq \displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} t_\nu^i g(y_\nu^i) \leq Cg(x_\nu) + \frac{1}{\nu}. \end{cases} \tag{5.21}$$

Comme les suites t_ν^i sont bornées on peut, à une sous-suite près, écrire $t^i = \lim t_\nu^i$. On considère trois cas séparément.
Cas 1 : les suites y_ν^i sont toutes bornées.

A une sous-suite près on peut écrire $y^i_\nu \to y^i$. De (5.21) résulte que $x = \sum_{i=1}^{n+1} t^i y^i$ et donc, par la convexité de Cg et la semi-continuité inférieure de g,

$$Cg(x) \leq \sum_{i=1}^{n+1} t^i g(y^i) \leq \liminf \sum_{i=1}^{n+1} t^i_\nu g(y^i_\nu) \leq \lim Cg(x_\nu) + \frac{1}{\nu} = \lim Cg(x_\nu),$$

comme on voulait.
Cas 2 : il existe $j \in \{1, ..., n+1\}$ tel que la suite y^j_ν est non bornée et $t^j \neq 0$.

Dans ce cas $|y^j_\nu| \to +\infty$ et donc, par l'hypothèse de croissance de g, $\lim g(y^j_\nu) = +\infty$. D'autre part, les hypothèses sur g entraînent que g est bornée par dessous. Alors on a

$$Cg(x_\nu) + \frac{1}{\nu} \geq \sum_{i=1}^{n+1} t^i_\nu g(y^i_\nu) \geq c + t^j_\nu g(y^j_\nu) \to +\infty$$

et d'ailleurs $\lim Cg(x_\nu) = +\infty \geq Cg(x)$.
Cas 3 : pour toutes les suites y^i_ν non bornées le t^i correspondant est nul. En dénotant par I l'ensemble des indices i tels que y^i_ν est non bornée et par J l'ensemble des indices i tels que y^i_ν est bornée on considère deux sous-cas.
Sous-cas 1 : $x = \sum_{i \in J} t^i y^i$. En particulier $\lim \sum_{i \in I} t^i_\nu y^i_\nu = 0$.

Comme $|y^i_\nu|$ est non bornée pour $i \in I$, alors, en utilisant l'hypothèse de croissance à l'infini de g, on a, pour ν suffisamment grand,

$$g(y^i_\nu) \geq |y^i_\nu|, \; i \in I.$$

Donc

$$\begin{aligned} \lim Cg(x_\nu) &= \lim \left(Cg(x_\nu) + \frac{1}{\nu} \right) \geq \lim \sum_{i=1}^{n+1} t^i_\nu g(y^i_\nu) \geq \lim \left(\sum_{i \in J} t^i_\nu g(y^i_\nu) + \sum_{i \in I} t^i_\nu |y^i_\nu| \right) \geq \\ &\geq \sum_{i \in J} t^i g(y^i) \geq Cg(x) \end{aligned}$$

comme on voulait.
Sous-cas 2 : $x \neq \sum_{i \in J} t^i y^i$. On commence par noter que, comme $|y^i_\nu|$ est non bornée pour $i \in I$, l'hypothèse de croissance à l'infini de g implique que

$$\lim \frac{\sum_{i \in I} t^i_\nu g(y^i_\nu)}{\left|\sum_{i \in I} t^i_\nu y^i_\nu\right|} = +\infty.$$

Cela entraîne que

$$\begin{aligned} \lim Cg(x_\nu) = \lim & \left(\frac{Cg(x_\nu) + \frac{1}{\nu} - \sum_{i \in J} t^i_\nu g(y^i_\nu)}{\left|x_\nu - \sum_{i \in J} t^i_\nu y^i_\nu\right|} \left| x_\nu - \sum_{i \in J} t^i_\nu y^i_\nu \right| - \frac{1}{\nu} + \sum_{i \in J} t^i_\nu g(y^i_\nu) \right) \geq \\ \geq \lim & \left(\frac{\sum_{i \in I} t^i_\nu g(y^i_\nu)}{\left|\sum_{i \in I} t^i_\nu y^i_\nu\right|} \left| x_\nu - \sum_{i \in J} t^i_\nu y^i_\nu \right| - \frac{1}{\nu} + \sum_{i \in J} t^i_\nu g(y^i_\nu) \right) = +\infty. \end{aligned}$$

Donc $Cg(x) \leq +\infty = \lim Cg(x_\nu)$. □

En dimension 1 on peut obtenir encore plus d'informations sur Cg. Notamment Cg est affine dans chaque composante connexe de l'ensemble $K = \{x \in \mathbb{R} : \; Cg(x) < g(x)\}$. Cet ensemble joue un rôle important dans la résolution des problèmes du calcul des variations et le résultat suivant est important dans les applications considérées dans les Sections 5.3.1 et 5.3.2.

Proposition 5.41. *Soit $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction semi-continue inférieurement telle que*

$$\lim_{|t|\to+\infty} \frac{g(t)}{|t|} = +\infty.$$

Alors, $K = \{t \in \mathbb{R} : \; Cg(t) < g(t)\}$ est ouvert et peut être écrit comme union dénombrable d'intervalles ouverts, bornés et disjoints. De plus Cg est affine dans la fermeture de ces intervalles.

Démonstration. On suppose $K \neq \emptyset$. Soit $x \in K$. On note que $Cg(x) \neq +\infty$ parce que $Cg < g$ dans K. Par le théorème de Carathéodory, on peut considérer des suites de nombres réels (t_n, y_n, z_n) telles que

$$\begin{cases} t_n \in [0,1], \\ t_n y_n + (1-t_n) z_n = x, \\ t_n g(y_n) + (1-t_n) g(z_n) \longrightarrow Cg(x). \end{cases} \tag{5.22}$$

Etape 1 : Les suites y_n et z_n sont bornées.

On raisonne par l'absurde. Il y a deux cas à considérer.

Cas 1 : y_n est bornée et z_n n'est pas bornée (ou le contraire).

Dans ce cas on peut écrire à une sous-suite près : $y_n \longrightarrow y \in \mathbb{R}$, $|z_n| \longrightarrow +\infty$ et $t_n \longrightarrow t \in [0,1]$. En particulier $\lim g(z_n) = +\infty$. On analyse maintenant les cas $t = 1$, $t = 0$ et $t \in]0,1[$.

Si $t = 1$ et $x \neq y$, alors

$$+\infty = \lim \frac{g(z_n)}{|z_n|} = \lim \frac{(1-t_n)g(z_n)}{|(1-t_n)z_n|} \leq \frac{Cg(x) - g(y)}{|x-y|} < +\infty$$

qui est absurde. Mais, si $t = 1$ et $x = y$ alors

$$\lim (1-t_n) g(z_n) \leq Cg(x) - g(y) = Cg(x) - g(x) < 0,$$

ce qui est aussi absurde puisque $(1-t_n)g(z_n) \geq 0$ pour n suffisamment grand vu que

$$\lim \frac{g(z_n)}{|z_n|} = +\infty.$$

Si $t = 0$, (5.22) implique que $\lim t_n g(y_n) = -\infty$. Mais, comme g est bornée inférieurement,

$$\lim t_n g(y_n) > -\infty.$$

Finalement, si $t \in]0,1[$ alors,

$$\lim t_n g(y_n) + (1-t_n) g(z_n) = +\infty,$$

ce qui implique que $Cg(x) = +\infty$, qui n'est pas vrai, comme on a déjà remarqué.

Cas 2 : Les suites y_n et z_n ne sont pas bornées.

A une sous-suite près, $|y_n| \longrightarrow +\infty$, $|z_n| \longrightarrow +\infty$ et $t_n \longrightarrow t \in [0,1]$.

Si $t \neq 0$ alors

$$\lim t_n \frac{g(y_n)}{|y_n|} + (1-t_n)\frac{g(z_n)}{|y_n|} - \frac{Cg(x)}{|y_n|} \geq \lim t_n \frac{g(y_n)}{|y_n|} - \frac{Cg(x)}{|y_n|} = +\infty,$$

ce qui contredit (5.22).

Si $t = 0$ alors

$$\lim t_n \frac{g(y_n)}{|z_n|} + (1-t_n)\frac{g(z_n)}{|z_n|} - \frac{Cg(x)}{|z_n|} \geq \lim (1-t_n)\frac{g(z_n)}{|z_n|} - \frac{Cg(x)}{|z_n|} = +\infty,$$

ce qui contredit aussi (5.22).

Etape 2 : $Cg(s) = \dfrac{g(y)-g(z)}{y-z}s + \dfrac{yg(z)-zg(y)}{y-z}$, $\forall\ s \in [y,z]$ où y et z sont, respectivement, les limites des sous-suites de y_n et z_n. En particulier, $Cg(y) = g(y)$ et $Cg(z) = g(z)$.

Comme on a vérifié dans l'Etape 1, les suites y_n et z_n sont bornées et donc, à une sous-suite près on peut écrire $y = \lim y_n$, $z = \lim z_n$ et $t = \lim t_n$. Donc de (5.22) résulte que

$$ty + (1-t)z = x. \tag{5.23}$$

D'autre part, par la semi-continuité inférieure de g et (5.22),

$$tg(y) + (1-t)g(z) \leq Cg(x). \tag{5.24}$$

Donc de (5.23) et par la convexité de Cg , on a que

$$tg(y) + (1-t)g(z) \leq Cg(x) = Cg(ty + (1-t)z) \leq tCg(y) + (1-t)Cg(z). \tag{5.25}$$

On note que $Cg(x) < +\infty$ donc (5.24) implique que $g(y), g(z) < +\infty$ et d'ailleurs $Cg(y), Cg(z) < +\infty$. Alors, de (5.25),

$$t(g(y) - Cg(y)) + (1-t)(g(z) - Cg(z)) \leq 0.$$

Mais $t \neq 0$ et $t \neq 1$. En fait, si $t = 0$ (analogue pour $t = 1$), alors $x = z$ et $Cg(z) = g(z)$ qui est absurde puisque $x \in K$.

Donc $t \in]0,1[$ et d'ailleurs $Cg(y) = g(y)$ et $Cg(z) = g(z)$. De plus, on obtient, par (5.25), que

$$Cg(x) = tg(y) + (1-t)g(z)$$

et, comme $x = ty + (1-t)z$, par conséquence $Cg(x) = \dfrac{g(y)-g(z)}{y-z}x + \dfrac{yg(z)-zg(y)}{y-z}$, comme on voulait.

Soit $h(s) := \dfrac{g(y)-g(z)}{y-z}s + \dfrac{yg(z)-zg(y)}{y-z}$. Comme h est une droite, Cg coïncide avec h en trois points : x, y et z et par définition de Cg, on obtient que $Cg = h$ dans $[y,z]$.

Etape 3 : K est ouvert et peut être écrit comme union dénombrable d'intervalles ouverts, bornés et disjoints : pour certains $\alpha_i,\ \beta_i \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha_i < \beta_i$,

$$K = \bigcup_{i\in\mathbb{N}}]\alpha_i, \beta_i[$$

et Cg est affine dans chaque $[\alpha_i, \beta_i]$, $i \in \mathbb{N}$.

On note que si K n'était pas ouvert, il existerait $x \in K$ et $x_n \notin K$ tel que $x_n \to x$. Par les étapes précédentes, pour n suffisamment grand, $x_n \in [y,z]$ et Cg est affine dans $[y,z]$. Donc,

$$g(x) \leq \liminf g(x_n) = \liminf Cg(x_n) = \liminf h(x_n) = Cg(x)$$

qui est absurde puisque $x \in K$. Donc K est un ouvert et donc, peut être écrit comme union dénombrable d'intervalles ouverts. Par les étapes précédentes, si $x \in K$ alors $x = ty + (1-t)z$, $t \in [0,1]$ avec $y, z \notin K$. Donc, chaqu'un des intervalles avant mentionnés est borné et on peut écrire $K = \bigcup_{i\in\mathbb{N}}]\alpha_i, \beta_i[$, où $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}$ et $\alpha_i < \beta_i$.

De plus, on a vérifié dans l'Etape 2 que Cg est affine dans chaque intervalle $[\alpha_i, \beta_i]$ et, si $x \in]\alpha_i, \beta_i[$, alors $Cg(x) = tg(\alpha_i) + (1-t)g(\beta_i)$, où $t \in]0,1[$ et $x = t\alpha_i + (1-t)\beta_i$. $\square$

Bibliographie

[1] J.-J. Alibert et B. Dacorogna. An example of a quasiconvex function that is not polyconvex in two dimensions. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 117(2) :155–166, 1992.

[2] G. Aubert et R. Tahraoui. Sur la faible fermeture de certains ensembles de contrainte en élasticité non linéaire plane. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B*, 290(12) :A537–A540, 1980.

[3] R. J. Aumann et S. Hart. Bi-convexity and bi-martingales. *Israel J. Math.*, 54(2) :159–180, 1986.

[4] J. M. Ball. Constitutive inequalities and existence theorems in nonlinear elastostatics. In *Nonlinear analysis and mechanics : Heriot-Watt Symposium (Edinburgh, 1976), Vol. I*, pages 187–241. Res. Notes in Math., No. 17. Pitman, London, 1977.

[5] J. M. Ball et R. D. James. Fine phase mixtures as minimizers of energy. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 100(1) :13–52, 1987.

[6] G. Buttazzo, B. Dacorogna et W. Gangbo. On the envelopes of functions depending on singular values of matrices. *Boll. Un. Mat. Ital. B (7)*, 8(1) :17–35, 1994.

[7] E. Casadio Tarabusi. An algebraic characterization of quasi-convex functions. *Ricerche Mat.*, 42(1) :11–24, 1993.

[8] A. Cellina et S. Zagatti. An existence result in a problem of the vectorial case of the calculus of variations. *SIAM J. Control Optim.*, 33(3) :960–970, 1995.

[9] M. Chlebík et B. Kirchheim. Rigidity for the four gradient problem. *J. Reine Angew. Math.*, 551 :1–9, 2002.

[10] P. G. Ciarlet. *Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation.* Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise. [Collection of Applied Mathematics for the Master's Degree]. Masson, Paris, 1982.

[11] B. Dacorogna. *Direct methods in the calculus of variations*, volume 78 of *Applied Mathematical Sciences.* Springer-Verlag, Berlin, 1989.

[12] B. Dacorogna et P. Marcellini. A counterexample in the vectorial calculus of variations. In *Material instabilities in continuum mechanics (Edinburgh, 1985–1986)*, Oxford Sci. Publ., pages 77–83. Oxford Univ. Press, New York, 1988.

[13] B. Dacorogna et P. Marcellini. Existence of minimizers for non-quasiconvex integrals. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 131(4) :359–399, 1995.

[14] B. Dacorogna et P. Marcellini. *Implicit partial differential equations.* Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, 37. Birkhäuser Boston Inc., Boston, 1999.

[15] B. Dacorogna et J. Moser. On a partial differential equation involving the Jacobian determinant. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 7(1) :1–26, 1990.

[16] B. Dacorogna et G. Pisante. A general existence theorem for differential inclusions in the vector valued case. *Port. Math. (N.S.)*, 62(4) :421–436, 2005.

[17] B. Dacorogna, G. Pisante et A. M. Ribeiro. On non quasiconvex problems of the calculus of variations. *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 13(4) :961–983, 2005.

[18] B. Dacorogna et A. M. Ribeiro. Existence of solutions for some implicit partial differential equations and applications to variational integrals involving quasi-affine functions. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, 134(5) :907–921, 2004.

[19] B. Dacorogna et A. M. Ribeiro. On some definitions and properties of generalized convex sets arising in the calculus of variations. In *Recent advances on elliptic and parabolic issues, Proceedings of the 2004 Swiss-Japanese Seminar*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, 2006.

[20] B. Dacorogna et C. Tanteri. Implicit partial differential equations and the constraints of nonlinear elasticity. *J. Math. Pures Appl.*, 81(4) :311–341, 2002.

[21] R. Horn et C. Johnson. *Topics in Matrix Analysis*. Cambridge University Press, 1991.

[22] B. Kirchheim. Deformations with finitely many gradients and stability of quasiconvex hulls. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 332(3) :289–294, 2001.

[23] B. Kirchheim. Rigidity and geometry of microstructures. *Lecture Note No. 16, Max Planck Institute for Mathematics in the Sciences*, 2003.

[24] J. Kolář. Non-compact lamination convex hulls. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 20(3) :391–403, 2003.

[25] H. Le Dret et A. Raoult. The quasiconvex envelope of the Saint Venant-Kirchhoff stored energy function. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, 125(6) :1179–1192, 1995.

[26] P. Marcellini. *A relation between existence of minima for nonconvex integrals and uniqueness for nonstrictly convex integrals of the calculus of variations*, volume 979 of *Lecture Notes in Math.* Springer, Berlin, 1983.

[27] E. Mascolo et R. Schianchi. Existence theorems for nonconvex problems. *J. Math. Pures Appl.*, 62(3) :349–359, 1983.

[28] J. Matoušek et P. Plecháč. On functional separately convex hulls. *Discrete Comput. Geom.*, 19(1) :105–130, 1998.

[29] C. B. Morrey. Quasi-convexity and the lower semicontinuity of multiple integrals. *Pacific J. Math.*, 2 :25–53, 1952.

[30] S. Müller. Variational models for microstructure and phase transitions. In *Calculus of variations and geometric evolution problems (Cetraro, 1996)*, volume 1713 of *Lecture Notes in Math.*, pages 85–210. Springer, Berlin, 1999.

[31] S. Müller et V. Šverák. Unexpected solutions of first and second order partial differential equations. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. II*, pages 691–702. Documenta Mathematica, Berlin, 1998.

[32] S. Müller et V. Šverák. Convex integration with constraints and applications to phase transitions and partial differential equations. *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*, 1(4) :393–422, 1999.

[33] S. Müller et V. Šverák. Convex integration for Lipschitz mappings and counterexamples to regularity. *Ann. of Math. (2)*, 157(3) :715–742, 2003.

[34] S. Müller et M. A. Sychev. Optimal existence theorems for nonhomogeneous differential inclusions. *J. Funct. Anal.*, 181(2) :447–475, 2001.

[35] R. Tyrrell Rockafellar. *Convex analysis*. Princeton Landmarks in Mathematics. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1997. Reprint of the 1970 original, Princeton Paperbacks.

[36] V. Šverák. On regularity for the Monge-Ampère equations. *Preprint Heriot-Watt University*, 1991.

[37] V. Šverák. New examples of quasiconvex functions. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 119(4) :293–300, 1992.

[38] V. Šverák. Rank-one convexity does not imply quasiconvexity. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, 120(1-2) :185–189, 1992.

[39] V. Šverák. On the problem of two wells. In *Microstructure and phase transition*, volume 54 of *IMA Vol. Math. Appl.*, pages 183–189. Springer, New York, 1993.

[40] L. Tartar. Some remarks on separately convex functions. In *Microstructure and phase transition*, volume 54 of *IMA Vol. Math. Appl.*, pages 191–204. Springer, New York, 1993.

[41] K. Zhang. Rank 1 connections and the three "well" problem, preprint.

[42] K. Zhang. On the structure of quasiconvex hulls. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 15(6) :663–686, 1998.

[43] K. Zhang. On various semiconvex hulls in the calculus of variations. *Calc. Var. Partial Differential Equations*, 6(2) :143–160, 1998.

Curriculum Vitae

Prénom et nom : Ana Margarida Fernandes Ribeiro

Date de naissance : 7 août 1976

Lieu de naissance : Lisbonne, Portugal

Nationalité : Portugaise

Formation

- Licence en Mathématiques à la *Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa* en juillet 1998.
  Moyenne finale : 16,2 sur 20.
- Mestrado (DEA) en Mathématiques dans la branche d'Analyse fonctionnelle et équations différentielles à la *Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa* en juillet 2001 avec la mention *Muito Bom* (Très Bien).
  Thèse intitulée : *Existence et Unicité de Solution pour une Classe de Problèmes en Elasticité Adaptative*, sous la direction du Prof. Luís Trabucho.

Activité

- Assistante stagiaire à la *Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa* entre décembre 1999 et juillet 2001.
- Assistante à la *Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa* depuis juillet 2001.
- Doctorante en Mathématiques à l'*Ecole Polytechnique Fédéral de Lausanne* sous la direction du Prof. Bernard Dacorogna depuis mars 2003.

Publications

- B. Dacorogna et A. M. Ribeiro. Existence of solutions for some implicit partial differential equations and applications to variational integrals involving quasi-affine functions. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, 134(5) :907–921, 2004.
- B. Dacorogna, G. Pisante et A. M. Ribeiro. On non quasiconvex problems of the calculus of variations. *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 13(4) :961–983, 2005.
- B. Dacorogna et A. M. Ribeiro. On some definitions and properties of generalized convex sets arising in the calculus of variations. In *Recent advances on elliptic and parabolic issues, Proceedings of the 2004 Swiss-Japanese Seminar*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, 2006.