MODULES D'ENDO-p-PERMUTATION

THÈSE N^{O} 3544 (2006)

PRÉSENTÉE LE 19 JUIN 2006

À LA FACULTÉ SCIENCES DE BASE

Chaire de théorie des groupes

SECTION DE MATHÉMATIQUES

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

POUR L'OBTENTION DU GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES

PAR

Jean-Marie URFER

mathématicien diplômé de l'Université de Lausanne
de nationalité suisse et originaire de Crassier (VD)

acceptée sur proposition du jury:

Prof. P. Buser, président du jury
Prof. J. Thévenaz, directeur de thèse
Prof. S. Bouc, rapporteur
Dr N. Mazza, rapporteur
Prof. D. Testerman, rapporteur

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Lausanne, EPFL
2006

à Raphaëlle

Table des matières

Chapitre 0

Introduction

0.1 Résumé

Ce travail étudie une nouvelle famille de représentations de groupes finis, les modules d'endo-p-permutation. Etant donné un nombre premier p, un groupe fini G d'ordre divisible par p et un corps algébriquement clos de caractéristique p, on dit qu'un kG-module M est un kG-module d'endo-p-permutation si son algèbre des endomorphismes $\mathrm{End}_k(M)$ est un kG-module de p-permutation, c'est-à-dire un facteur direct d'un kG-module de permutation. Cela généralise la notion, introduite par E. Dade en 1978, de module d'endo-permutation pour les p-groupes. Pour un p-groupe P, E. Dade construisit une structure de groupe abélien sur l'ensemble des classes d'isomorphisme de kP-modules indécomposables de vortex P et il démontra que la description complète de la structure de ce groupe est équivalente à la classification des kP-modules d'endo-permutation. Ce groupe est appelé aujourd'hui groupe de Dade du p-groupe P.

Le problème de décrire le groupe de Dade pour un p-groupe arbitraire ayant été résolu récemment par S. Bouc, cela ouvre la question de l'étude des modules d'endo-p-permutation qui sont la généralisation naturelle aux groupes finis arbitraires des modules d'endo-permutation. Dans le texte qui suit, nous présentons les propriétés élémentaires des modules d'endo-p-permutation et donnons une caractérisation des modules d'endo-p-permutation indécomposables de vortex P via des propriétés sur leurs sources. En particulier, quand le normalisateur de P contrôle la p-fusion, nous pouvons donner une classification complète des sources de kG-modules d'endo-p-permutation indécomposables de vortex P, en utilisant la description du groupe de Dade de S. Bouc. Nous donnons aussi (quand p est impair) une nouvelle preuve d'un théorème de Dade concernant l'extension des modules d'endo-permutation, en utilisant nos résultats précédents. Nous présentons une conséquence de ce théorème de Dade sur la structure du module de multiplicité associé à un module d'endo-p-permutation indécomposable. Finalement, nous étudions quelques exemples concrets de modules d'endo-p-permutation comme les syzygies relatives et les translatés de Heller relatifs. Nous prouvons aussi que le correspondant de Green d'un $kN_G(P)$-module d'endo-p-permutation n'est pas en général un kG-module d'endo-p-permutation.

Notons encore que l'étude de telles représentations est motivée par le rôle important qu'elles jouent dans certains domaines de la théorie des représentations. Par exemple, les modules d'endo-permutation et plus généralement les modules d'endo-p-permutation (comme prouvé ici), apparaissent dans l'étude des modules simples pour les groupes p-résolubles.

Mots clés : module d'endo-p-permutation, module d'endo-permutation, groupe de Dade, module endo-trivial, représentations modulaires.

0.2 Abstract

This dissertation is concerned with the study of a new family of representations of finite groups, the endo-p-permutation modules. Given a prime number p, a finite group G of order divisible by p and an algebraically closed field k of characteristic p, we say that a kG-module M is an endo-p-permutation module if its endomorphism algebra $\mathrm{End}_k(M)$ is a p-permutation kG-module, that is a direct summand of a permutation kG-module. This generalizes the notion, first introduced by E. Dade in 1978, of endo-permutation modules for p-groups . For P a p-group, E. Dade defined an abelian group structure on the set of isomorphism classes of indecomposable endo-permutation kP-modules with vertex P and he proved that the complete description of the structure of this group is equivalent to the classification of endo-permutation kP-modules. This group of isomorphism classes is now called the Dade group of the p-group P.

The problem of describing the Dade group for an arbitrary p-group was recently solved by S. Bouc. This opens the question of studying endo-p-permutation modules, which are the natural generalization to arbitrary finite groups of endo-permutation modules. In the following text, we present the basic properties of endo-p-permutation modules and give a characterization of indecomposable endo-p-permutation modules with vertex P via properties of their sources modules. In particular, when the normalizer of P controls p-fusion, we are able to give a complete classification of sources of indecomposable endo-p-permutation modules with vertex P, using Bouc's description of the Dade group. When p is odd, we also give an alternative proof of a theorem of Dade concerned with extensions of endo-permutation modules, using our previous results. We present a consequence of this theorem of Dade on the structure of the multiplicity module associated to an indecomposable endo-p-permutation module. Finally we study some concrete examples of endo-p-permutation modules such as relative syzygies and relative Heller translates. We prove also that the Green correspondent of an indecomposable $kN_G(P)$-endo-p-permutation module with vertex P is not in general an endo-p-permutation kG-module.

The study of such representations is motivated by the important role they play in certain areas of representations theory. For instance, endo-permutation modules, and more generally endo-p-permutation modules (as is proved here), appear in the study of simple modules for p-solvable groups.

Key words : endo-p-permutation module, endo-permutation module, Dade group, endo-trivial module, modular group representations.

0.3 Introduction

Ce travail est une petite pierre apportée à l'édifice, toujours en construction, de la théorie des représentations des groupes finis. Une *représentation de degré* n d'un groupe G sur un corps K est un homomorphisme de groupes $\rho : G \to GL_n(K)$ ou, de manière équivalente, un KG-module de type fini. Cette notion a été introduite dans le but de pouvoir déduire des informations sur un groupe G à partir de ses représentations.

Cette théorie trouve son origine à la fin du XIX$^{\text{ième}}$siècle. A cette époque, on étudiait les représentations d'un groupe fini G sur le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes, ce qu'on appelle aujourd'hui les *représentations ordinaires*. Dans ce cas, grâce au théorème de Maschke, on peut prouver que l'algèbre de groupe $\mathbb{C}G$ est semi-simple et par suite tous les $\mathbb{C}G$-modules se décomposent en sommes directes de $\mathbb{C}G$-modules simples et les classes d'isomorphisme de ces derniers sont en nombre fini. De plus, les représentations de G sont complètement déterminées par les tables de caractères qui peuvent être "calculées". Beaucoup d'informations sur le groupe G peuvent être retrouvées depuis sa table des caractères, par exemple tous les sous-groupes normaux de G peuvent être reconstruits à partir de cette table.

Dans la première moitié du XX$^{\text{ième}}$ siècle, R. Brauer voulait obtenir de nouvelles informations sur cette table en travaillant avec un nombre premier p fixé. Il introduisit alors la théorie des représentations modulaires, c'est-à-dire l'étude des représentations d'un groupe G d'ordre divisible par p sur un corps k de caractéristique p. Dans ce cas, le théorème de Maschke n'est plus vrai, les kG-modules ne se décomposent plus en sommes directes de modules simples. Mais le théorème de Krull-Schmidt nous assure que l'on peut tout de même décomposer tout kG-module en somme directe de kG-modules indécomposables de manière essentiellement unique.

J. Green a alors commencé dans les années 1960 l'étude systématique des kG-modules indécomposables et découvrit beaucoup de propriétés importantes. En particulier, il introduisit la théorie des vortex (qui sont des p-groupes P) et des sources (qui sont des kP-modules indécomposables). Cette théorie permet en un sens la réduction de l'étude des kG-modules à l'étude des kP-modules, où P est un p-groupe. Si P est un p-sous-groupe de G, il construisit aussi une bijection, appelée aujourd'hui correspondance de Green, entre les classes d'isomorphisme de kG-modules indécomposables de vortex P et les classes d'isomorphisme de $kN_G(P)$-modules modules indécomposables de vortex P, où $N_G(P)$ est le normalisateur de P dans G.

En développant ces théories, il a été remarqué que certaines familles de représentations de p-groupes apparaissent souvent, comme par exemple les kP-modules d'endo-permutation qui sont définis comme suit : un kP-module M est *d'endo-permutation* si son algèbre des endomorphismes $\mathrm{End}_k(M)$ (qui est aussi un kP-module) possède une k-base de permutation, c'est-à-dire une k-base permutée par l'action de P. C'est en 1978 que E. Dade introduit et étudie cette famille de représentations. Il réussit même à complètement classifier les kP-modules d'endo-permutation dans le cas où P est abélien. La classification complète de cette famille a été achevée en 2005 par S. Bouc en utilisant la classification obtenue tout aussi récemment par J. Carlson et J. Thévenaz d'une autre famille de représentations, les kP-modules endo-triviaux qui jouent un rôle central dans toute cette théorie.

Le but du présent travail est de généraliser la notion de module d'endo-permutation en une nouvelle notion, les modules d'endo-p-permutation qui sont définis pour des groupes finis G arbitraires. Nous utiliserons alors les techniques de J. Green introduites ci-dessus pour nous ramener à l'étude de certains kP-modules d'endo-permutation.

Ce travail se présente comme suit. Le chapitre 1 est dévolu à l'introduction du sujet et des outils nécessaires pour la suite. Il y est aussi présenté un survol super-sonique de la classification des modules d'endo-permutation. Les rappels théoriques et historiques faits, le chapitre 2 introduit la notion de module d'endo-p-permutation. Les principales propriétés de ces modules y sont exposés ainsi qu'une caractérisation de cette famille grâce à la notion de source. Dans le chapitre 3, nous décrivons le sous-groupe des points fixes $D(P)^N$ du groupe de Dade $D(P)$ sous l'action d'un groupe N agissant sur P par automorphismes. Cela a pour conséquence la classification, dans certains cas, des sources des kG-modules d'endo-p-permutation indécomposables. Plus précisément, si P est le vortex d'un kG-modules d'endo-p-permutation indécomposable M et si le normalisateur de P contrôle la p-fusion, alors la source de M est un kP-module d'endo-permutation tel que sa classe dans le groupe de Dade $D(P)$ appartient au sous-groupe des éléments $N_G(P)$-fixes de $D(P)$. Le chapitre 4 s'intéresse à l'extension des modules d'endo-permutation et à ces conséquences. Le paragraphe 4.1 présente une preuve, se basant sur les résultats du paragraphe 3.1, d'un théorème de Dade sur l'extension des modules d'endo-permutation (dans le cas p impair). Une conséquence (connue) de ce théorème est que le module de multiplicité d'un kG-module d'endo-p-permutation est un module sur une algèbre de groupe "non-tordue". Nous présentons donc dans le paragraphe 4.2 ce résultat et cette notion de module de multiplicité qui permet, avec le vortex et la source, de paramétrer tous les modules indécomposables. Dans le dernier chapitre nous présentons des exemples de modules d'endo-p-permutation. Plus précisément, dans le paragraphe 5.1, nous donnerons un cas important d'occurence des modules d'endo-p-permutation dans la théorie des représentations de groupes. Nous donnerons aussi un exemple de construction de modules d'endo-p-permutation, comme par exemple les translatés de Heller relatifs du module trivial. Nous étudierons alors plus précisément ces derniers dans le paragraphe 5.2. Enfin pour finir, nous calculerons quelques exemples de sources de modules d'endo-p-permutation lorsque le normalisateur ne contrôle pas la fusion. Nous en déduirons par ailleurs que le correspondant de Green d'un $kN_G(P)$-module d'endo-p-permutation n'est pas en général un kG-module d'endo-p-permutation.

Notons encore que ce travail ne répond pas à toutes les questions autour des modules d'endo-p-permutation. En particulier, le problème de leur classification complète est encore ouvert.

Je finirai cette introduction par quelques remerciements. Tout d'abord je tiens à remercier infiniment Jacques Thévenaz, mon directeur pour ce travail de thèse, autant pour le choix du sujet que pour son aide constante. J'aimerais remercier aussi les personnes qui m'ont soutenu durant mes études de mathématiques, à commencer par mes parents et ma future femme, Raphaëlle. Merci aussi à mes collègues qui ont partagé un bout de chemin mathématique avec moi et qui ont rendu ces années fort agréables, tout particulièrement Caleb, Muriel, Jérôme, Nicolas, Sébastien, David et Paul.

Chapitre 1

Introduction théorique

1.1 Préliminaires

Dans ce paragraphe, nous présenterons quelques résultats de base de la théorie des représentations des groupes finis. Nous fixerons aussi certaines conventions que nous garderons tout au long de ce travail.

Convention 1.1 *Si A est un anneau, alors tous les A-modules sont des A-modules à gauche de type fini.*

Définition 1.2 *Soit R un anneau commutatif et G un groupe fini.*

*a) L'**algèbre du groupe** G est la R-algèbre définie par*

$$RG = \left\{ \sum_{g \in G} \lambda_g g \,|\, \lambda_g \in R,\ \forall\, g \in G \right\},$$

muni des opérations suivantes :

$$\left(\sum_{g\in G} \lambda_g g \right) + \left(\sum_{g\in G} \mu_g g \right) = \sum_{g\in G} (\lambda_g + \mu_g) g$$

$$\left(\sum_{g\in G} \lambda_g g \right) \cdot \left(\sum_{g\in G} \mu_g g \right) = \sum_{g\in G} \left(\sum_{h\in G} \lambda_{gh^{-1}} \mu_h \right) g$$

quel que soit $\sum_{g\in G} \lambda_g g$ et $\sum_{g\in G} \mu_g g$ dans RG.

*b) Soit n un entier strictement positif. **Une représentation de G sur R de degré n** est un homomorphisme de groupes $\rho : G \to GL(V)$ où V est un R-module libre de rang n. La donnée d'une représentation sur R de G est équivalente à la donnée d'un RG-module V, libre sur R de rang n, l'action de G sur V étant donnée par $g \cdot v = \rho(g)v$, quel que soit $g \in G$ et $v \in V$.*

c) *Une* **sous-représentation** *de ρ est un homomorphisme $\rho' : G \to GL(W)$ où W est un RG-sous-module de V.*

d) *On dit qu'une représentation ρ est* **irréductible** *si V n'est pas nul et si ρ ne possède pas de sous-représentation propre non-nul, autrement dit, si V ne possède pas de RG-sous-module propre non-nul.*

e) *On dit qu'une représentation ρ de G est* ***indécomposable*** *si V est un RG-module indécomposable, c'est-à-dire V n'est pas nul et ne peut pas se décomposer en somme directe de RG-sous-modules propres. En particulier, une représentation irréductible est indécomposable.*

Définition 1.3 *Soient K un corps et G un groupe fini.*

a) *On dit que K est* ***suffisamment gros*** *pour G si K possède une racine n-ième de l'unité, où n est l'exposant de G.*

b) *On dit que KG est* **semi-simple** *si toute représentation de G sur K se décompose comme somme directe de représentations irréductibles.*

Théorème 1.4 *Soit K un corps et G un groupe fini. Alors KG est semi-simple si et seulement si la caractéristique de K ne divise pas l'ordre de G. Si, de plus, K est suffisamment gros, alors le nombre de représentations irréductibles est égal au nombre de classes de conjugaison des éléments de G. Par conséquent le nombre de classes d'isomorphisme de KG-modules simples est fini.*

Ce théorème s'applique en particulier avec $K = \mathbb{C}$. Les représentations dans cette situation s'appellent des représentations **ordinaires.** On peut aussi s'intéresser au représentations sur un corps k de caractéristique $p > 0$, où p divise l'ordre de G. Il existe alors un lien entre ces deux situations que nous allons juste survoler.

Définition 1.5 *Soient p un nombre premier et $\mathcal{O}$ un anneau de valuation discrète (en particulier local), complet d'unique idéal maximal $\mathfrak{m}$ tel que les conditions suivantes sont vérifiées :*

a) *Le corps résiduel $k = \mathcal{O}/\mathfrak{m}$ est algébriquement clos et de caractéristique p.*

b) *Le corps des fractions K de $\mathcal{O}$ est de caractéristique 0 et suffisamment gros pour tous les groupes considérés.*

Un tel triple $(K, \mathcal{O}, k)$ s'appelle un ***système p-modulaire suffisamment gros.***

Proposition 1.6 *Pour tout nombre premier p et pour tout groupe G il existe un système p-modulaire suffisamment gros.*

Pour un système p-modulaire suffisamment gros $(K, \mathcal{O}, k)$, nous avons donc le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O} \arrow[r, "\subset"] \arrow[d] & K \\ k = \mathcal{O}/\mathfrak{m} & \end{tikzcd}$$

L'anneau $\mathcal{O}$ permet donc de faire le lien entre k et K. Les représentations sur $\mathcal{O}$ sont appelées **représentations entières** tandis que celles sur k sont dites **représentations modulaires.** Lorsque la caractéristique p de k divise l'ordre du groupe G, alors une représentation indécomposable n'est pas nécessairement irréductible. De plus si les p-sous-groupes de Sylow de G ne sont pas cycliques, alors il existe une infinité de représentations indécomposables. Ce travail se situe dans l'étude des représentations modulaires, nous ne travaillerons que sur un corps k de caractéristique $p > 0$.

Voici un résultat fondamental, appelé théorème de Krull-Schmidt, qui réduit l'étude des RG-modules à celle des RG-modules indécomposables.

Théorème 1.7 (Krull-Schmidt) *Soit A une R-algèbre de type fini comme R-module, où R est un anneau commutatif, local, complet et noethérien (par exemple $R = \mathcal{O}$ ou $R = k$), et soit M un A-module de type fini.*

a) Il existe une décomposition $M = \oplus_{i=1}^r M_i$, où r est un entier positif et M_i est un A-module indécomposable, pour tout $1 \leq i \leq r$.

b) Cette décomposition est essentiellement unique, dans le sens que si $M = \oplus_{i=1}^s N_i$ est une autre telle décomposition, alors $r = s$ et il existe une permutation $\sigma \in S_r$, le groupe symétrique de degré r, telle que $M_{\sigma(i)} \cong N_i$ quel que soit $1 \leq i \leq r$.

1.2 Modules de p-permutation et d'endo-permutation

Convention 1.8 *Dans tout ce travail, k désignera un corps de caractéristique $p > 0$ et G un groupe fini d'ordre divisible par p.*

Avant de présenter les familles de modules annoncées en titre de ce paragraphe, nous allons tout d'abord fixer quelques notations.

Notation 1.9 *Soit H un sous-groupe de G et $g, h \in G$.*

a) On note ${}^g h$ l'élément ghg^{-1} et h^g l'élément $g^{-1}hg$ de G. De même ${}^g H$ désigne le sous-groupe gHg^{-1} et H^g le sous-groupe $g^{-1}Hg$ de G.

b) Si M est un kG-module, on note $M^* = \mathrm{Hom}_k(M, k)$ son dual.

c) On note $\otimes$ le produit tensoriel $\otimes_k$ sur k.

Définition 1.10 *Soit H un sous-groupe de G, M un kG-module et N un kH-module.*

*a) Pour tout $g \in G$, le **module conjugué** ${}^g N$ est l'ensemble $\{{}^g n | n \in N\}$ muni de la structure de $k\,{}^g H$-module donnée par l'action de ${}^g H$-suivante : ${}^g h \cdot {}^g n = {}^g(h \cdot n)$ quel que soit $h \in H$ et $g \in G$.*

*b) Le **module restreint** $M{\downarrow}_H^G$ de G à H de M est le module M que l'on ne voit plus que comme un kH-module.*

*c) Le **module induit** $N{\uparrow}_H^G$ de H à G du kH-module N est le kG-module $kG \otimes_{kH} N$.*

*d) Un kG-module M est **projectif relativement à** H s'il existe un kH-module N tel que M est isomorphe à un facteur direct de $N{\uparrow}_H^G$.*

Nous allons maintenant introduire quelques résultats sur la théorie des vortex et sources dont nous ferons abondamment usage par la suite.

Définition et proposition 1.11 *Soit M un kG-module indécomposable.*

a) M est projectif relativement à un p-sous-groupe de Sylow de G.

b) Il existe un p-sous-groupe P de G, unique à conjugaison près, et un kP-module indécomposable S, unique à conjugaison et isomorphisme près, tels que M est isomorphe à un facteur direct de $S\uparrow_P^G$ et tel que M n'est projectif relativement à aucun p-sous-groupe ne contenant pas P ou un de ces conjugués. Le p-sous-groupe P s'appelle ***un vortex*** *de M et le kP-module S,* ***une source*** *de M.*

Convention 1.12 *Bien qu'une paire vortex - source d'un module indécomposable M n'est pas définie de manière univoque, nous parlerons toujours du vortex et de la source pour un choix d'une telle paire.*

E. Dade a commencé son article d'origine sur les modules d'endo-permutation par cette phrase : “There are just too many modules over p-groups.” Alors évidemment sur un groupe fini arbitraire, il y a “plus que trop” de modules. C'est ce qui nous amène à étudier des sous-familles qui sont en même temps suffisamment grandes pour être intéressantes et suffisamment petites pour être classifiées.

Voici donc une première famille importante de kG-modules, les kG-modules de permutation.

Définition 1.13 *Un kG-module est dit de* **permutation** *s'il possède une base, comme k-espace vectoriel, G-invariante.*

Notons X une base G-invariante d'un kG-module de permutation M, alors la décomposition de X en G-orbite donne une décomposition de M en somme directe. De plus chaque facteur direct ainsi obtenu est isomorphe à $k[G/H]$, où H est le stabilisateur d'un élément $x \in X$ dans l'orbite considérée. Ainsi tout kG-module de permutation est somme directe de $k[G/H]$ pour différents $H \leq G$. Réciproquement, $k[G/H]$ est un kG-module de permutation (les classes $gH \in G/H$ qui forment un base de $k[G/H]$ sont permutées entre elles sous l'action de G).

Les opérations de restriction, induction et conjugaison préservent les modules de permutation. De plus si P est un p-groupe, alors $k[P/Q]$ est indécomposable pour tout $Q \leq P$ (théorème d'indécomposabilité de Green). Par contre ce n'est plus vrai en général pour $k[G/H]$ si G n'est pas un p-groupe et les facteurs directs de $k[G/H]$ ne sont plus en général des kG-modules de permutation. On va alors agrandir cette famille de modules en ajoutant tous les facteurs directs de modules de permutation.

Définition et proposition 1.14 *Soit M un kG-module. Les conditions suivantes sont équivalentes.*

a) La restriction de M à tout p-sous-groupe P de G est un kP-module de permutation.

b) M est isomorphe à un facteur direct d'un kG-module de permutation.

c) M est la somme directe de kG-modules indécomposables de source triviale k.

*Un kG-module est de p-***permutation** *s'il satisfait ces conditions équivalentes*

Preuve. Voir [25], paragraphe 27. □

Remarque 1.15 *Comme tous les p-sous-groupes de Sylow d'un groupe fini G sont conjugués dans G, et que les modules de p-permutation sont préservés par conjugaison et restriction, il suffit de vérifier la condition a) ci-dessus pour un p-sous-groupe de Sylow de G.*

Passons maintenant aux modules d'endo-permutation. Ils ont été introduits par E. Dade en 1978 dans [16]. Ce qui suit sont les propriétés de base qui permettent leur étude et sont toutes apparues dans cet article originel. L'historique de l'étude des modules d'endo-permutation sera donnée dans le paragraphe 1.6.

Tout d'abord, notons que les modules d'endo-permutation ne sont définis que sur les p-groupes, fixons donc la notation.

Notation 1.16 *Dorénavant, P désigne toujours un p-groupe.*

Nous allons définir en même temps les modules endo-triviaux car ils jouent un rôle central dans l'étude des modules d'endo-permutation.

Définition 1.17 *Soit M un kP-module.*

a) M est **d'endo-permutation** *si $\mathrm{End}_k(M)$ est un kP-module de permutation, où la structure de kP-module est donnée par l'action de P suivante :*

$$(u \cdot \varphi)(m) = u \cdot \varphi(u^{-1} \cdot m) \qquad \forall m \in M,\ \forall u \in P,\ \forall \varphi \in \mathrm{End}_k(M).$$

b) M est **endo-trivial** *s'il existe un kP-module projectif L tel que $\mathrm{End}_k(M) \cong k \oplus L$ comme kP-modules. Notons que comme P est un p-groupe, L est en fait un kP-module libre.*

Donnons maintenant les liens entre les modules de permutation, d'endo-permutation et endo-triviaux.

Remarque 1.18 *Soit P un p-groupe.*

a) Un kP-module est de p-permutation si et seulement s'il est de permutation.

b) Tout kP-module de permutation est d'endo-permutation.

c) Tout kP-module endo-trivial est d'endo-permutation.

Avec ces définitions, il est aisé de deviner celle de module d'endo-p-permutation, mais celle-ci étant nouvelle, nous ne l'introduirons que lorsque la partie des rappels sera terminée.

Concentrons-nous sur la famille des modules d'endo-permutation, car c'est celle que nous étudierons le plus. Enumérons tout d'abord quelques propriétés de stabilité de cette famille qui sont toutes démontrées dans [16].

Proposition 1.19 *Soient M et N deux kP-modules d'endo-permutation et Q un sous-groupe de P. Alors $M \otimes N$, M^*, ${}^gM$, $M{\downarrow}_Q^P$ ainsi que tout facteur direct de M sont encore des modules d'endo-permutation.*

Par contre la somme directe ainsi que l'induction ne préservent pas en général les modules d'endo-permutation.

Enonçons maintenant le résultat crucial pour leur étude.

Théorème 1.20 (Dade [16]) *Soient M et N deux kP-modules d'endo-permutation indécomposables de vortex P. Alors $M \oplus N$ est d'endo-permutation si et seulement si $M \cong N$.*

Ce théorème a les conséquences suivantes :

Définition et proposition 1.21 (Dade [16]) *Soit M un kP-module d'endo-permutation. S'il existe un facteur direct indécomposable M_* de M de vortex P (qui est d'endo-permutation vu la proposition 1.19), alors tous les facteurs directs indécomposables de M de vortex P sont isomorphes à M_* vu le théorème précédent. S'il existe un tel facteur direct, M est dit* ***couvert*** *("capped" en anglais), et le facteur direct M_* (défini à isomorphisme près) est appelé le* ***chapeau*** *de M. On peut démonter ([16] proposition 3.7) qu'un kP-module d'endo-permutation indécomposable M est couvert (i.e. de vortex P) si et seulement si le kP-module trivial k est facteur direct de* $\mathrm{End}_k(M)$.

En particulier, tout kP-module endo-trivial est un kP-module d'endo-permutation couvert.

De plus si M et N sont deux kP-modules d'endo-permutation couverts, alors $M \otimes N$ et M^* sont encore des kP-modules d'endo-permutation couverts.

On vient de voir de jolies définitions et de bien belles propriétés, mais a-t-on des exemples "concrets" de modules d'endo-permutation ? La réponse est oui. Voici une famille importante de modules d'endo-permutation.

Si X est un G-ensemble et H un sous-groupe de G, on note $|X|$ la cardinalité de l'ensemble X et X^H l'ensemble des points fixes de X sous l'action de H.

Exemple 1.22 Soit P un p-groupe et X un P-ensemble fini. Alors kX est un kP-module et considérons l'homomorphisme de kP-modules $\varepsilon : kX \to k$ défini par $\varepsilon(x) = 1$ pour tout $x \in X$ et étendu par k-linéarité. Le noyau de ε, noté $\Omega_X(k)$, s'appelle la **syzygie relative de k relativement à X.** J. Alperin [1] a démontré que $\Omega_X(k)$ est un kP-module d'endo-permutation. De plus $\Omega_X(k)$ est indécomposable si et seulement si aucune orbite de P sur X n'est l'image par un homomorphisme de P-ensembles, d'une autre orbite de P sur X et $\Omega_X(k)$ est couvert si et seulement si $|X^P| \neq 1$.

Notons que l'on considère souvent les syzygies ralatives $\Omega_{P/Q}$ où Q est un sous-groupe de P, et P/Q est un P-ensemble par multiplication à gauche.

Nous reviendrons de manière plus générale sur cette famille de modules entre autre dans les paragraphes 5.1 et 5.2.

Afin d'étudier les modules d'endo-permutation indécomposables, E. Dade a démontré qu'il suffisait d'étudier les kP-modules d'endo-permutation indécomposables de vortex maximal P. Il a alors construit une structure de groupe abélien sur l'ensemble des classes d'isomorphisme de tels modules.

Définition et proposition 1.23 (Dade [16]) *Soient M et N deux kP-modules d'endo-permutation indécomposables couverts (i.e. de vortex P). Alors comme on l'a vu avant, $M \otimes N$ est encore un kP-module d'endo-permutation couvert. Notons alors $(M \otimes N)_*$ un facteur direct indécomposable de vortex P de $M \otimes N$. Considérons $D(P)$ l'ensemble des classes d'isomorphisme de kG-modules indécomposables couverts et notons $[M]$ la classe d'isomorphisme de M. On munit $D(P)$ d'une structure de groupe abélien en posant*

$$[M] + [N] = [(M \otimes N)_*], \quad \forall [M], [N] \in D(P).$$

L'élément neutre est la classe du kP-module trivial k, tandis que l'opposé de $[M]$ est la classe $[M^*]$ du module dual de M quel que soit $[M] \in D(P)$.

*Le groupe $D(P)$ s'appelle le **groupe de Dade de p-groupe P**.*

*Soit $T(P)$ le sous-ensemble de $D(P)$ constitué des classes d'isomorphisme de kP-modules endo-triviaux. Alors $T(P)$ est un sous-groupe de $D(P)$, appelé le **groupe des kP-modules endo-triviaux.***

Preuve. La définition de la loi de composition dans $D(P)$ a du sens grâce à la proposition 1.21. De plus cette loi est associative et commutative car le produit tensoriel l'est. L'élément neutre est bien la classe de k car $M \otimes k \cong M$. Pour l'opposé on utilise le fait que $M^* \otimes M \cong \mathrm{End}_k(M)$ et que, toujours grâce à la proposition 1.21, le kP-module trivial k est un facteur direct indécomposable de $M^* \otimes M$, et par suite $(M^* \otimes M)_* \cong k$.

Le sous-ensemble $T(P)$ est un sous-groupe de $D(P)$ car le produit tensoriel de deux modules endo-triviaux est endo-trivial et si L est un kP-module endo-trivial, alors $L \cong L_0 \oplus (kP)^n$, où L_0 est un kP-module endo-trivial indécomposable ([17] proposition 7.3). □

Enonçons encore un résultat très important pour nous, toujours dû à E. Dade ([16] corollaire 6.12)

Théorème 1.24 (Dade [16]) *Soient M et N deux kG-modules d'endo-permutation couverts. Alors $M \oplus N$ est d'endo-permutation si et seulement si $[M] = [N]$ dans le groupe de Dade $D(P)$.*

Fixons encore quelques notations.

Notation 1.25

- *Si X est un P-ensemble fini, on note Ω_X la classe de $\Omega_X(k)$ dans $D(P)$.*
- *On note $D^{\Omega}(P)$ le sous-groupe de $D(P)$ engendré par les classes d'isomorphisme de syzygies relatives Ω_X, pour tout P-ensemble X.*
- *On note $D_t(P)$ le sous-groupe de torsion de $D(P)$ et $T_t(P)$ le sous-groupe de torsion de $T(P)$.*

1.3 Représentations rationnelles

L'étude du groupe de Dade a fait apparaître un lien avec $R_{\mathbb{Q}}(P)$ le groupe de Grothendieck des représentations rationnelles d'un p-groupe P (c'est-à-dire le $\mathbb{Z}$-module libre de base les représentations irréductibles de P sur $\mathbb{Q}$). Il nous faut donc présenter ici quelques résultats sur les représentations rationnelles des p-groupes.

Définition et notation 1.26 *Soit p un nombre premier quelconque. Un p-groupe P est de p-**rang normal 1** s'il n'a aucun sous-groupe normal isomorphe à $C_p \times C_p$. Un tel groupe possède une unique représentation rationnelle irréductible fidèle, qu'on notera Φ_P.*

Les p-groupes de p-rang normal 1 sont classifiés. Si P est un tel p-groupe d'ordre p^n et p est impair, alors $P \cong C_{p^n}$ le groupe cyclique d'ordre p^n. Si $p = 2$, alors $P \cong C_{2^n}$ ou $P \cong Q_{2^n}$ $(n \geq 3)$ le groupe des quaternions généralisé ou $P \cong D_{2^n}$ $(n \geq 4)$ le groupe diédral ou $P \cong SD_{2^n}$ $(n \geq 4)$ le groupe semi-diédral ([18] chapitre 5, théorème 4.10).

Définition 1.27 *Soient T et S deux sous-groupes d'un p-groupe P, avec S normal dans T. On appelle la paire (T, S) une* **section** *de P. Si R est un groupe, une section (T, S) d'un p-groupe P est dite de* ***type*** *R si $T/S \cong R$. La section (T, S) est dite* **génétique** *si les trois conditions suivantes sont satisfaites.*

i) *Le groupe T/S est de p-rang normal 1.*

ii) *Le $\mathbb{Q}P$-module $V(T, S) = (\mathrm{Inf}_{T/S}^{T} \Phi_{T/S})\uparrow_{T}^{P}$ est simple, où $\mathrm{Inf}_{T/S}^{T} \Phi_{T/S}$ est $\Phi_{T/S}$ vu comme un kT-module en faisant agir S par l'identité.*

iii) $\dim_{\mathbb{Q}} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}P}(V(T, S), V(T, S)) = \dim_{\mathbb{Q}} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}T/S}(\Phi_{T/S}, \Phi_{T/S})$.

Le $\mathbb{Q}P$-module $V(T, S)$ sera appelé **le module simple associé à** (T, S). S. Bouc a démontré ([3] Théorème 3.4) que pour tout $\mathbb{Q}P$-module simple V, il existe une section génétique (T, S) de P telle que $V \cong V(T, S)$. On se demande alors dans quel cas deux sections génétiques donnent des modules simples correspondants isomorphes. Pour cela il nous faut définir une relation entre les sections génétiques. Deux sections génétiques (T, S) et (T', S') sont dites **liées** si $T/S \cong (T \cap T')/(S \cap S') \cong T'/S'$. On note cette relation $(T, S) — (T', S')$. Elles sont dites **liées modulo** P s'il existe $x \in P$ tel que $(T, S) —\, {}^{x}(T', S')$ et on le note $(T, S) —_{P} (T', S')$. S. Bouc a démontré ([3] Proposition 7.1 et Théorème 7.11) que $V(T, S) \cong V(T', S')$ si et seulement si $(T, S) —_{P} (T'S')$.

Notons que si $(T, S) —_{P} (T', S')$, alors ces deux sections ont le même type. On peut donc définir le type d'un $\mathbb{Q}P$-module comme suit.

Définition 1.28 *Si V est un $\mathbb{Q}P$-module simple et (T, S) une section génétique de P telle que $V \cong V(T, S)$, alors T/S est appelé le* **type** *de V.*

En fait, S. Bouc a démontré plus tard que si (T, S) est une section génétique, alors $T = N_P(S)$ et donc en fait (T, S) est déterminé par S ([5] proposition 4.4). Cela nous amène à la définition suivante :

Définition et notation 1.29 *Un sous-groupe S de P est dit* ***génétique*** *si la section $(N_P(S), S)$ est une section génétique de P. On notera le $\mathbb{Q}P$-module simple $V(N_P(S), S)$ simplement $V(S)$. Et si S et S' sont deux sous-groupes génétiques de P, on dit que S et S' sont* ***liés modulo*** *P et on le note $S \longrightarrow_P S'$ si $(N_P(S), S) \longrightarrow_P (N_P(S'), S')$.*

Le relation $\longrightarrow_P$ entre sous-groupes génétiques de P est une relation d'équivalence et la correspondance $S \mapsto V(S)$ est une bijection entre les classes d'équivalence de sous-groupes génétiques modulo $\longrightarrow_P$ et les classes d'isomorphisme de $\mathbb{Q}P$-modules simples, c'est-à-dire les classes d'isomorphisme de représentations rationnelles irréductibles.

Définition 1.30 *Une* ***base génétique*** *est un système de représentants des classes d'équilence de sous-groupes génétiques modulo la relation $\longrightarrow_P$.*

1.4 Opérations entre groupes de Dade

Nous allons définir cinq homomorphismes entre des groupes de Dade pour différents p-groupes. De nouveau, tout au long de ce paragraphe, P désigne un p-groupe fini.

Restriction. Soit M un kP-module d'endo-permutation indécomposable de vortex P et Q un sous-groupe de P. Alors le kQ-module restreint $M{\downarrow}_Q^P$ est un kQ-module d'endo-permutation couvert. La restriction induit ainsi un homomorphisme de groupes

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{Res}_Q^P : & D(P) & \to & D(Q) \\ & [M] & \mapsto & [(M{\downarrow}_Q^P)_*] \end{array}$$

Inflation. Soit Q un sous-groupe normal de P et M un $k[P/Q]$-module d'endo-permutation indécomposable de vortex P/Q. Alors on peut voir M comme un kP-module, noté $\mathrm{Inf}_{P/Q}^P M$, en faisant agir Q par l'identité. C'est un kP-module d'endo-permutation indécomposable de vortex P. Cela induit un homomorphisme de groupes :

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{Inf}_Q^P : & D(P/Q) & \to & D(P) \\ & [M] & \mapsto & [\mathrm{Inf}_{P/Q}^P M] \end{array}$$

Isomorphisme. Soit $\varphi : P \to Q$ un isomorphisme de groupes et M un kP-module d'endo-permutation indécomposable de vortex P. Alors on peut voir M comme un kQ-module, noté $\mathrm{Iso}_P^Q M$ via l'isomorphisme φ. De nouveau, $\mathrm{Iso}_P^Q M$ est un kQ-module d'endo-permutation indécomposable de vortex Q et on a donc un homomorphisme et même un isomorphisme de groupes :

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{Iso}_P^Q : & D(P) & \to & D(Q) \\ & [M] & \mapsto & [\mathrm{Iso}_P^Q M] \end{array}$$

Induction tensorielle. L'induction ordinaire ne préserve pas la famille des modules d'endo-permutation, par contre on peut démontrer que l'induction tensorielle fait l'affaire. Soit M un kQ-module, considérons le k-espace vectoriel

$$M{\uparrow}_{\otimes Q}^P = \bigotimes_{x \in [P/Q]} {}^x M,$$

où $[P/Q]$ est un système de représentants des classes à gauche de P/Q. On munit alors $M{\uparrow}_{\otimes Q}^{P}$ de la structure de kP-module suivante : quel que soit $y \in P$, il existe une unique permutation σ_y de $[P/Q]$ et des éléments $z_x \in Q$ uniques tels que $yx = \sigma_y(x)z_x$ pour tout $x \in [P/Q]$. L'action de P est alors

$$y \cdot \bigotimes_{x\in[P/Q]} {}^{x}(u_x) = \bigotimes_{x\in[P/Q]} {}^{x}(z_{\sigma_y^{-1}(x)} \cdot u_{\sigma_y^{-1}(x)}); \quad \forall y \in P, \bigotimes_{x\in[P/Q]} {}^{x}(u_x) \in M{\uparrow}_{\otimes Q}^{P}.$$

On peut démontrer que si M est un kQ-module d'endo-permutation indécomposable de vortex Q, alors $M{\uparrow}_{\otimes Q}^{P}$ est un kP-module d'endo-permutation couvert ([8] lemme 2.1). De plus $(M \otimes N){\uparrow}_{\otimes Q}^{P} \cong M{\uparrow}_{\otimes Q}^{P} \otimes N{\uparrow}_{\otimes Q}^{P}$ et donc l'induction tensorielle induit un homomorphisme de groupes :

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{Ten}_Q^P : & D(Q) & \to & D(P) \\ & [M] & \mapsto & [(M{\uparrow}_{\otimes Q}^{P})_*] \end{array}$$

Déflation. Cette opération, introduite par E. Dade dans son article d'origine [16] sous le nom de construction “slash” , va nous permettre de construire un homomorphisme de $D(P)$ dans $D(P/Q)$ où Q est un sous-groupe normal de P. Soit M un kP-module d'endo-permutation indécomposable de vortex P. Pour définir la déflation, il nous faut passer par le quotient de Brauer de l'algèbre $A = \mathrm{End}_k(M)$. Pour la définition de ce quotient, voir par exemple [25] paragraphe 11. Notons donc A_R^Q l'image de A^R par l'application trace relative et $A[Q] = A^Q / \sum_{R<Q} A_R^Q$ le quotient de Brauer de A relativement à Q. On peut démontrer que $A[Q] \cong \mathrm{End}_k(M[Q])$ pour un unique (à isomorphisme près) $k[P/Q]$-module d'endo-permutation couvert ([16] théorème 4.15 et proposition 5.1) et si M est indécomposable, alors $M[Q]$ aussi ([16] proposition 5.7). De plus, si M et N sont deux kP-modules d'endo-permutation et $A = \mathrm{End}_k(M)$, $B = \mathrm{End}_k(N)$ les algèbres correspondantes, alors $(A\otimes B)[Q] \cong A[Q]\otimes B[Q]$ ([16] proposition 5.12). Ainsi on obtient un homomorphisme de groupes :

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{Def}_{P/Q}^P : & D(P) & \to & D(P/Q) \\ & [M] & \mapsto & [M[Q]] \end{array}$$

1.5 Foncteurs de bi-ensembles

Introduisons maintenant un nouveau formalisme qui permettra de définir les cinq homomorphismes du paragraphe précédent par un procédé unique. Cette approche a été introduite dans [8] et s'est avérée très fructueuse, car c'est entre autre grâce à cela que la classification des modules d'endo-permutation a pu être achevée.

Définition 1.31 *Soient P et Q des p-groupes finis.*

- *Un (Q, P)-**bi-ensemble** $U = {}_QU_P$ est un ensemble U muni d'une action de Q à gauche et d'une action de P à droite telles que $(g \cdot u) \cdot h = g \cdot (u \cdot h)$ pour tout $u \in U$, $g \in Q$ et $h \in P$.*

- *Si U est un (Q,P)-bi-ensemble fini, on note U^{op} le* ***bi-ensemble opposé*** *: Comme ensemble, il est égal à U, mais muni de la structure de (P,Q)-bi-ensemble*

$$\forall x \in Q, \forall u \in U, \forall y \in P, \quad y \cdot u \cdot x \quad (\text{dans } U^{\mathrm{op}}) \ = x^{-1}uy^{-1} \quad (\text{dans } U).$$

Définition et notation 1.32 *Notons $\mathcal{C}_p$ la catégorie suivante :*

- *Les objets de $\mathcal{C}_p$ sont les p-groupes finis.*
- *Si P et Q sont des p-groupes, alors $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_p}(P,Q) = B(Q \times P^{\mathrm{op}})$ est le groupe de Burnside des (Q,P)-bi-ensembles finis. Un élément de ce groupe est appelé un (Q,P)**-bi-ensemble virtuel**.*
- *Si U est un (Q,P)-bi-ensemble fini et V un (R,Q)-bi-ensemble fini, notons $V \times_Q U$ le quotient de $V \times U$ par la Q-action à droite définie par*

$$(v,u) \cdot x = (vx, x^{-1}u), \quad \forall v \in V,\ \forall u \in U,\ \forall x \in Q.$$

En d'autres termes, $V \times_Q U = (V \times U^{\mathrm{op}})/Q$. On notera $(v;u)$ ou $(v;_Q u)$ la classe de (v,u) dans $V \times_Q U$. La composition des morphismes de $\mathcal{C}_p$ est $\mathbb{Z}$-bilinéaire et la composition des classes d'isomorphisme de V et U est la classe d'isomorphisme de $V \times_Q U$. Le morphisme identité du p-groupe P est la classe de l'ensemble P muni des actions à gauche et à droite par multiplication.

Notons $\mathcal{F}_p$ la catégorie additive des foncteurs de $\mathcal{C}_p$ dans la catégorie $\mathbb{Z} - \mathrm{Mod}$ des groupes abéliens. Un objet de $\mathcal{F}_p$ est appelé ***un foncteur de bi-ensembles.***

Ce formalisme de bi-ensembles nous donne alors un outil pour définir les cinq opérations que sont l'induction (usuelle ou tensorielle selon les cas), la restriction, l'inflation, la déflation et le transport via un isomorphisme, de manière uniforme.

- Si Q est un sous-groupe de P, alors posons $\mathrm{Ind}_Q^P = \mathrm{Ten}_Q^P \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_p}(Q,P)$ pour le bi-ensemble P avec action à gauche de P et action à droite de Q par multiplication.
- Si Q est un sous-groupe de P, alors posons $\mathrm{Res}_Q^P \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_p}(P,Q)$ pour le bi-ensemble P avec action à gauche de Q et action à droite de P par multiplication.
- Si Q est un sous-groupe normal de P, alors posons $\mathrm{Inf}_{P/Q}^P \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_p}(P/Q,P)$ pour le bi-ensemble P/Q avec action à gauche de P par projection et multiplication et action à droite de P/Q par multiplication.
- Si Q est un sous-groupe normal dans P, alors posons $\mathrm{Def}_{P/Q}^P \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_p}(P,P/Q)$ pour le bi-ensemble P/Q avec action à gauche de P/Q par multiplication et action à droite de P par projection et multiplication.
- Si $\varphi : P \to Q$ est un isomorphisme de groupes, alors posons $\mathrm{Iso}_P^Q \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_p}(P,Q)$ pour le bi-ensemble Q avec action à gauche de Q par multiplication et action à droite de P en prenant l'image par φ puis en multipliant.

Remarque 1.33 ([8] lemme 7.4) *Tout élément $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_p}$ est combinaison $\mathbb{Z}$-linéaire de composées de ces cinq opérations.*

Le lien entre ces bi-ensembles et les cinq opérations entre groupes de Dade introduites dans le paragraphe 1.4 est présenté dans [8]. A tout (P, Q)-bi-ensemble U (P et Q des p-groupes finis) est associé une application

$$D(U) : D(P) \to D(Q)$$

telle que les applications définies dans le paragraphe 1.4 sont égales à $D(U)$ lorsque U est le bi-ensemble correspondant Res^P_Q, Ten^P_Q, Iso^P_Q, $\mathrm{Def}^P_{P/Q}$, $\mathrm{Inf}^P_{P/Q}$ défini ci-dessus.

De plus cette correspondance est additive, si bien que, vu la remarque 1.33, on peut l'étendre à tout $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_p}(P, Q) : \varphi \mapsto D(\varphi) \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(D(P), D(Q))$.

Mais attention : cette correspondance ne fait (malheureusement) pas de D un foncteur de bi-ensembles. La raison est qu'en général

$$D(\varphi) \circ D(\psi) \neq D(\varphi \circ \psi).$$

En fait, pour ne rien cacher, il s'en est fallu de peu. L'égalité n'est pas vérifiée que lors de la composition de l'induction tensorielle suivie de la déflation qui fait apparaître un phénomène appelé "torsion de Galois." La définition exacte de cette torsion de Galois et son rôle dans le composition des morphismes sont présentés dans le paragraphe 3 de [8]. Précisons simplement cela : si a est un endomorphisme du corps de base k, alors pour tout p-groupe P, il existe un homomorphisme $\gamma_a = \gamma_{a,P} : D(P) \to D(P)$. En fait, dans les formules de composition, les seuls endomorphismes qui apparaissent sont de la forme $a(\lambda) = \lambda^{p^n}$ pour tout $\lambda \in k$ (où $n \geq 0$ est un entier), et dans ce cas on note $\gamma_a = \gamma_{p^n}$. Notons encore que γ_a est souvent l'identité, par exemple lorsqu'on le restreint à $D^\Omega(P)$. Ainsi, par exemple, le foncteur D^Ω définit par $P \mapsto D^\Omega(P)$ est un foncteur de bi-ensembles.

Notation 1.34 *Soit (N, S) une section d'un p-groupe P.*
- *On note* $\mathrm{Defres}^P_{N/S}$ *la composée* $\mathrm{Def}^N_{N/S} \circ \mathrm{Res}^P_N$.
- *On note* $\mathrm{Teninf}^P_{N/S}$ *la composée* $\mathrm{Ten}^P_N \circ \mathrm{Inf}^N_{N/S}$.

Remarque 1.35 *Si P est un p-groupe et (N, S) une section de P, alors*

$$(\mathrm{Teninf}^P_{N/S})^{\mathrm{op}} \cong \mathrm{Defres}^P_{N/S}$$

comme $(N/S, P)$-bi-ensembles.

En suivant S. Bouc dans [5], présentons encore deux bi-ensembles qui jouent un rôle central dans l'étude du groupe de Dade.

Notation 1.36 *Si S est un sous-groupe génétique avec $S \neq P$, alors $N_P(S)/S$ a un unique sous-groupe central d'ordre p, et ce sous-groupe est égal à $\hat{S}/S$ pour un sous-groupe $\hat{S}$ de $N_P(S)$ bien défini. Alors P/S et $P/\hat{S}$ sont des $(P, N_P(S)/S)$-bi-ensembles, et notons a_S l'élément de* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_p}(N_P(S)/S, P)$ *défini par*

$$a_S = P/S - P/\hat{S}.$$

Notons aussi b_S l'élément de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_p}(P, N_P(S)/S)$ correspondant au bi-ensemble opposé, i.e.

$$b_S = S\backslash P - \hat{S}\backslash P.$$

Si $(N_P(S), S) = (P, P)$ est la section génétique triviale de P, notons a_S l'image dans $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_p}(\mathbf{1}, P)$ du $(P, \mathbf{1})$-bi-ensemble de cardinalité 1, et par b_S l'image dans $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_p}(P, \mathbf{1})$ du $(\mathbf{1}, P)$-bi-ensemble de cardinalité 1.

Toute cette machinerie des bi-ensembles a joué un rôle essentiel dans la classification des modules d'endo-permutation. Nous en verrons un aperçu dans le paragraphe 3.2.

1.6 La grande marche vers la classification

Dans ce paragraphe, nous survolerons les principaux événements qui ont mené à la description complète du groupe de Dade d'un p-groupe fini, et par suite à la classification des kP-modules d'endo-permutation.

Toute cette aventure commence en 1978 avec la publication de deux articles de E. Dade [16, 17] où il présente la notion de modules d'endo-permutation. Il y construit le groupe de Dade (sous un autre nom) ainsi que le sous-groupe des modules endo-triviaux et réussit à donner complètement leur structure dans le cas abélien. Voici le théorème.

Théorème 1.37 (Dade [17]) *Soit P un p-groupe abélien.*

a) $T(P)$ est engendré par Ω_P. Donc $T(P) \cong \begin{cases} \{0\} & \text{si } |P| = 2 \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \text{si } P \text{ est cyclique d'ordre } \geq 3 \\ \mathbb{Z} & \text{sinon} \end{cases}$

b) $D(P) \cong \bigoplus_{1 \leq Q < P} T(P/Q)$

Dans les années 1980, L. Puig introduit la notion de P-algèbre de Dade dont nous ne dirons pas grand chose si ce n'est le lien avec les modules d'endo-permutation ; si M est un kP-module d'endo-permutation couvert, alors $A = \mathrm{End}_k(M)$ est une P-algèbre de Dade et réciproquement, à toute P-algèbre de Dade A, on peut associer un “presque unique” kP-module d'endo-permutation couvert. On trouve un très clair exposé de ces deux notions équivalentes dans les paragraphes 28 à 30 du livre de J. Thévenaz [25].

L. Puig démontre alors plusieurs résultats importants autour du groupe de Dade et du groupe des modules endo-triviaux que voici.

Théorème 1.38 (Puig [21]) *Soit P un p-groupe fini.*

a)

$$T(P) = \bigcap_{1 < Q \leq P} \ker(\mathrm{Defres}^P_{N_P(Q)/Q}).$$

b) Le noyau de l'application

$$\prod_E \mathrm{Res}^P_E : T(P) \to \prod_E T(E),$$

où E parcourt les p-sous-groupes abéliens élémentaires, est fini.

c) $D(P)$ *est de type fini.*

Par la suite le sujet s'est un peu endormi, avant de renaître avec le nouveau millénaire. En 2000, J. Alperin démontre, entre autres, que les syzygies relatives sont des modules d'endo-permutation, ce dont nous avons déjà parlé. Il calcule aussi le rang "sans torsion" de $T(P)$, c'est-à-dire la dimension du $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $\mathbb{Q} \otimes T(P)$. Ce dernier est égal au nombre de classes de conjugaison de sous-groupes de P non cycliques.

La même année, S. Bouc et J. Thévenaz [8] démontrent par une autre méthode ce dernier résultat. C'est dans cet article que l'approche fonctorielle à l'aide des foncteurs de bi-ensembles est présentée. En particulier, un premier lien, encore un peu magique, est fait entre le groupe de Dade $D(P)$, le groupe de Burnside $B(P)$ et le groupe de Grothendieck $R_{\mathbb{Q}}(P)$ des représentations rationnelles de P.

Toujours cette même année 2000, J. Carlson et J. Thévenaz [11] démontrent des théorèmes de réduction pour l'étude du groupe des modules endo-triviaux $T(P)$.

Théorème 1.39 (Carlson-Thévenaz [11]) *Soit P un p-groupe non cyclique. Soit $\mathcal{A}$ la classe de tous les groupes abéliens élémentaires de rang 2 et de tous les p-groupes extraspéciaux d'exposant p si p est impair, ou $\mathcal{A}$ la classe de tous les groupes abéliens élémentaires de rang 2 et de tous les groupes presque extraspéciaux et de tous les extraspéciaux sauf D_8 si $p = 2$. Alors l'application restriction :*

$$\prod_E \mathrm{Res}_E^P : T(P) \to \prod_E T(E)$$

est injective, où E parcourt tous les sous-groupes de P appartenant à $\mathcal{A}$.

Il y est aussi donné la structure du groupe de Dade pour les 2-groupes quaternions généralisés Q_{2^n}, diédraux D_{2^n} et semi-diédraux SD_{2^n}.

Théorème 1.40 ([11]) *Si $G = Q_{2^n}, D_{2^n}$ ou SD_{2^n}, alors $D(G) \cong T(G) \oplus D(G/Z(G))$. De plus $D(G/Z(G)) \cong D(D_{2^{n-1}})$.*

(a) Si k ne contient pas de racine primitive troisième de l'unité, $T(Q_8) \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, engendré par Ω_{Q_8} et si k contient une racine primitive troisième de l'unité, alors $T(Q_8) \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ engendré par Ω_{Q_8} et par la classe d'un module qui n'est pas une syzygie relative de k.

(b) Si $n \geq 3$, alors $T(Q_{2^{n+1}}) \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ engendré par $\Omega_{Q_{2^{n+1}}}$ et par la classe d'un module qui n'est pas une syzygie relative de k.

(c) Si $n \geq 3$, alors $T(D_{2^n}) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ engendré par $\Omega_{D_{2^n}}$ et $\Omega_{D_{2^n}/R}$ où R est un sous-groupe d'ordre 2 non-central de D_{2^n}.

(d) Si $n \geq 4$, alors $T(SD_{2^n}) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ engendré par $\Omega_{SD_{2^n}}$ et par $\Omega_{SD_{2^n}} + \Omega_{SD_{2^n}/R}$ où R est un sous-groupe non-central d'ordre 2 de SD_{2^n}.

A partir de là, les dates de parution des articles sont un peu déroutantes. Nous allons les présenter dans l'ordre logique des résultats qui y apparaissent mais en donnant la date de leur publication qui ne sera du coup pas chronologique.

En 2005, J. Carlson et J. Thévenaz finissent la classification de la partie de torsion $T_t(P)$ de $T(P)$. Ils démontrent que la famille de détection $\mathcal{A}$ du théorème ci-dessus peut être réduite. En fait si P n'est pas cyclique, quaternion ou semi-diédral, alors ils démontrent qu'on peut prendre pour $\mathcal{A}$ l'ensemble des groupes abéliens élémentaires de rang 2 ([13] théorème 12.5). Comme le groupe des modules endo-triviaux d'un groupe abélien élémentaire de rang 2 est sans torsion, ils obtiennent en corollaire.

Théorème 1.41 (Carlson-Thévenaz [13]) *Si P est un p-groupe qui n'est ni cyclique, ni quaternion, ni semi-diédral, alors $T_t(P) = \{0\}$.*

Enfin en utilisant les résultats de J. Alperin [1] ils peuvent prouver le théorème suivant :

Théorème 1.42 (Carlson-Thévenaz [13]) *Si tous les sous-groupes abéliens élémentaires maximaux de P sont de rang plus grand ou égal à 3, alors $T(P) \cong \mathbb{Z}$ engendré par Ω_P.*

Ils démontrent aussi des théorèmes de détection pour le groupe de Dade. Ils obtiennent entre autre le résultat suivant qui est une amélioration d'un théorème de [8].

Théorème 1.43 (Bouc-Thévenaz [8]) *Si p est impair, le sous-groupe de torsion $D_t(P)$ de $D(P)$ est isomorphe à $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^r$ où r est égal au nombre de classes de conjugaison de sous-groupes cycliques non-triviaux de P.*

La classification complète des modules endo-triviaux suivra dans l'article [12] toujours de J. Carlson et J. Thévenaz. Il reste à considérer le cas où P possède un sous-groupe abélien élémentaire maximal de rang 2.

Théorème 1.44 (Carlson-Thévenaz [12]) *Soit P un p-groupe contenant un sous-groupe abélien élémentaire maximal de rang 2 et supposons que P n'est pas semi-diédral. Alors $T(P) \cong \mathbb{Z}^s$.*

Notons que s peut être décrit en terme de théorie des groupes. De plus le théorème ci-dessus est en fait plus précis car il y est construit s générateurs explicites qui sont des classes de syzygies relatives du module trivial. Ils obtiennent alors en corollaire.

Théorème 1.45 (Carlson-Thévenaz [12]) *Soit P un p-groupe. Alors $T(P)$ est engendré par les classes de syzygies relatives du module trivial, sauf dans le cas où $p = 2$ et P est quaternion généralisé.*

En 2004, en utilisant des résultats de [12], S. Bouc et N. Mazza [7] classifient les kP-modules d'endo-permutation pour P un p-groupe (presque) extraspécial.

En 2000, S. Bouc démontre des relations dans le groupe de Dade et calcule l'induction tensorielle des syzygies relatives dans [2]. Puis il développe toute la "machinerie" des foncteurs de bi-ensembles appliquée au groupe de Dade et fait un lien naturel entre le groupe de Dade $D(P)$ et les duaux des groupes $B(P)$ et $R_{\mathbb{Q}}(P)$. Plus précisément, il introduit l'élément $\omega_X \in B^*(P)$ défini sur la base canonique de $B(P)$ par

$$\omega_X(P/Q) = \begin{cases} 1 & \text{si } X^Q \neq \emptyset \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Les éléments $\omega_{P/Q}$, pour Q parcourant $[s_P]$ un système de représentants de l'ensemble s_P des classes de conjugaison de sous-groupes de P, forment une $\mathbb{Z}$-base de $B^*(P)$ ([4] Lemme 2.2).

De plus, il existe une transformation naturelle surjective $B \to R_{\mathbb{Q}}$ envoyant le P-ensemble X sur le $\mathbb{Q}P$-module de permutation $\mathbb{Q}X$ (Théorème de Ritter - Segal). Cette transformation surjective induit une injection naturelle duale $i : R_{\mathbb{Q}}^* \to B^*$.

Théorème 1.46 (Bouc [4]) *Il existe une unique transformation naturelle $\Theta : B^* \to D^{\Omega}$ avec la propriété que $\Theta_P(\omega_X) = \Omega_X$ pour tout p-groupe P et tout P-ensemble X. De plus la suite de foncteurs*

$$0 \to R_{\mathbb{Q}}^* \xrightarrow{i} B^* \xrightarrow{\Theta} D^{\Omega}/D_t^{\Omega} \to 0$$

est exacte.

S. Bouc étudie alors le foncteur $R_{\mathbb{Q}}^*$ ainsi que les représentation rationnelles dans [3]. Il poursuit cette étude et développe la théorie des sections génétiques dans [5].

Et en 2006, il parvient, en utilisant la classification des modules endo-triviaux ainsi que tous les résultats des articles cités ci-dessus, à la classification complète des kP-modules d'endo-permutation [6].

Voici trois théorèmes importants de cet article.

Théorème 1.47 (Bouc [6]) *Soit P un p-groupe.*
a) $D(P) = D^{\Omega}(P) + D_t(P)$.
b) Si p est impair, alors $D(P) = D^{\Omega}(P)$.

Théorème 1.48 (Bouc [6]) *Soit P un p-groupe et $\mathcal{S}$ une base génétique de P. Alors l'application*

$$\mathcal{I}_{\mathcal{S}} = \bigoplus_{S \in \mathcal{S}} D(a_S) = \bigoplus_{S \in \mathcal{S}} \mathrm{Teninf}_{N_P(S)/S}^P : \bigoplus_{S \in \mathcal{S}} T_t(N_P(S)/S) \to D_t(P)$$

est un isomorphisme d'inverse $\mathcal{D}_{\mathcal{S}} = \bigoplus_{S \in \mathcal{S}} D(b_S)$ (où a_S et b_S sont les bi-ensembles introduits dans la notation 1.36).

Il obtient ainsi en corollaire.

Théorème 1.49 (Bouc [6]) *Soit P un p-groupe. Alors*

$$D_t(P) \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{n_P} \oplus (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^{m_P},$$

où m_P est égal au nombre d'éléments de type quaternion généralisé d'une base génétique $\mathcal{S}$ de P et n_P est égal au nombre d'éléments de $\mathcal{S}$ de type :

- *cyclique d'ordre au moins 3 ou semi-diédral ou quaternion généralisé si k contient une racine primitive de l'unité,*
- *cyclique d'ordre au moins 3 ou semi-diédral ou quaternion généralisé d'ordre au moins 16 sinon.*

Il donne encore une présentation par générateurs et relations du groupe de Dade $D(P)$. Pour l'énoncer en partie, introduisons la notation suivante : si $\mathcal{S}$ est une base génétique, notons $\mathcal{Q}$ l'ensemble des $S \in \mathcal{S}$ de type quaternion généralisé. Supposons que k possède une racine troisième de l'unité. Alors pour tout $S \in \mathcal{Q}$ fixons $\eta(S,1)$ un élément d'ordre 2 de $T_t(N_P(S)/S)$ qui n'est pas une syzygie relative (cf. théorème 1.40) et posons $\Lambda(S,1) = \mathrm{Teninf}_{N_P(S)/S}^{P}(\eta(S,1))$. On peut énoncer le théorème suivant (pour les détails, cf. [6] théorème 9.5) :

Théorème 1.50 (Bouc [6]) *Si p est impair, alors $D(P) = D^{\Omega}(P)$ est engendré par des syzygies relatives du module trivial et ces syzygies sont sujettes à des relations explicites. Si $p = 2$, alors $D(P) = D^{\Omega}(P) \oplus D_{\mathcal{Q}}(P)$, où $D_{\mathcal{Q}}(P) \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{n_{\mathcal{Q}}}$ est un $\mathbb{F}_2$-espace vectoriel de base $\{\Lambda(S,1) \mid S \in \mathcal{Q}\}$.*

J. Thévenaz a rédigé un article [26] résumant toutes les phases cruciales de la classification des modules endo-triviaux et des modules d'endo-permutation, ce qui permet maintenant d'avoir une vision globale de tout ce travail.

Chapitre 2

Définitions et résultats généraux

Convention 2.1 *Pour toute la suite de ce travail, k est un corps de caractéristique p, algébriquement clos et G désignera un groupe fini d'ordre divisible par p.*

Nous entrons maintenant dans le vif du sujet. Ce paragraphe est dévolu à la présentation des modules d'endo-p-permutation. Le principal résultat de ce paragraphe est le théorème 2.11 qui donne une condition nécessaire et suffisante sur la source d'un module indécomposable pour que ce dernier soit d'endo-p-permutation.

Définition 2.2 *Un kG-module M est dit* **d'endo-p-permutation** *si son algèbre des endomorphismes $\mathrm{End}_k(M)$ est un kG-module de p-permutation.*

Remarque 2.3 *On a la définition équivalente suivante : un kG-module M est d'endo-p-permutation si la restriction de M à tout p-sous-groupe P de G est un kP-module d'endo-permutation.*

Preuve. Cela vient du fait que $\mathrm{End}_k(M)\downarrow_P^G \cong \mathrm{End}_k(M\downarrow_P^G)$. $\square$

En fait comme pour les modules de p-permutation (remarque 1.15), il suffit de vérifier que la restriction de M à un p-sous-groupe de Sylow P est un kP-module d'endo-permutation.

Exemple 2.4

a) Tout kG-module de p-permutation est d'endo-p-permutation. En effet, la restriction à un p-sous-groupe d'un module de p-permutation est un module de permutation, donc en particulier un module d'endo-permutation.

b) Si P est un p-groupe, un kP-module d'endo-p-permutation est un kP-module d'endo-permutation.

c) Rappelons qu'un kG-module M est endo-trivial si $\mathrm{End}_k(M) \cong k \oplus L$ où L est un kG-module projectif. Alors tout kG-module endo-trivial est un kG-module d'endo-p-permutation. En effet, la restriction à un p-sous-groupe d'un kG-module endo-trivial est un module endo-trivial, donc en particulier un module d'endo-permutation.

La famille des modules d'endo-p-permutation est stable pour les opérations suivantes : la restriction, la conjugaison, le produit tensoriel (sur k) l'induction tensorielle et la dualité.

Proposition 2.5 *Soient M et N deux kG-modules d'endo-p-permutation, H un sous-groupe de G, L un kH-module d'endo-p-permutation et $x \in G$. Alors le dual M^* de M, le produit tensoriel $M \otimes N$, l'induit tensoriel $L{\uparrow}_{\otimes H}^{G}$ et tout facteur direct de M sont des kG-modules d'endo-p-permutation. Le $k[{}^gH]$-module conjugué ${}^gL$ est d'endo-p-permutation et le module restreint $M{\downarrow}_H^G$ est un kH-module d'endo-p-permutation.*

Preuve. Soit P un p-sous-groupe de Sylow de G. Alors $M^*{\downarrow}_P^G \cong (M{\downarrow}_P^G)^*$ est un kP-module d'endo-permutation vu que le dual d'un module d'endo-permutation est un module d'endo-permutation. Donc M^* est d'endo-p-permutation. Comme $(M \otimes N){\downarrow}_P \cong M{\downarrow}_P \otimes N{\downarrow}_P$ et le produit tensoriel de deux modules d'endo-permutation est d'endo-permutation, $M \otimes N$ est d'endo-p-permutation. Considérons l'avant dernière affirmation. Comme $\mathrm{End}_k({}^gL) \cong {}^g\mathrm{End}_k(L)$ et comme le conjugué d'un module de p-permutation est de p-permutation, ${}^gM$ est d'endo-p-permutation. Pour l'induction tensorielle, on utilise la formule de Mackey,

$$L{\uparrow}_{\otimes H}^{G}{\downarrow}_P^G \cong \bigotimes_{g \in [P \backslash G/H]} {}^gL{\downarrow}_{{}^gH \cap P}^{{}^gH}{\uparrow}_{\otimes\, {}^gH \cap P}^{P}.$$

Comme la conjugaison préserve les modules d'endo-p-permutation, ${}^gL{\downarrow}_{{}^gH\cap P}^{{}^gH}$ est un $k[{}^gH \cap P]$-module d'endo-permutation pour tout $g \in G$ et vu que l'induction tensorielle et le produit tensoriel de modules d'endo-permutation est d'endo-permutation, $L{\uparrow}_{\otimes H}^{G}{\downarrow}_P^G$ est d'endo-permutation. Par suite $L{\uparrow}_{\otimes P}^{G}$ est d'endo-p-permutation. Si M_0 est un facteur direct de M, alors $M_0{\downarrow}_P^G$ est un facteur direct de $M{\downarrow}_P^G$ et donc est d'endo-permutation. Ainsi M_0 est bien d'endo-p-permutation. Enfin, tous les p-sous-groupes de H sont des p-sous-groupes de G, donc le module restreint $M{\downarrow}_H^G$ est un kH-module d'endo-p-permutation. $\square$

Proposition 2.6 *Soient H un sous-groupe de G et M un kH-module. Alors le kG-module induit $M{\uparrow}_H^G$ est de p-permutation si et seulement si M est de p-permutation.*

Preuve. Si M est de p-permutation, M est facteur direct d'un module de permutation. Comme l'induite d'un module de permutation est de permutation, $M{\uparrow}_H^G$ est aussi facteur direct d'un module de permutation et donc est de p-permutation. Réciproquement comme M est un facteur direct de $M{\uparrow}_H^G{\downarrow}_H^G$ et comme la restriction d'un module de p-permutation est de p-permutation, M est facteur direct du module de p-permutation $M{\uparrow}_H^G{\downarrow}_H^G$. Donc M est de p-permutation. $\square$

Comme pour les modules d'endo-permutation, la somme directe de deux modules d'endo-p-permutation n'est pas en général un module d'endo-p-permutation. Cela nous amène à la définition suivante.

Définition 2.7 *Deux kG-modules d'endo-p-permutation sont dits* **compatibles** *si leur somme directe $M \oplus N$ est un kG-module d'endo-p-permutation.*

Cette définition est une généralisation aux modules d'endo-p-permutation de la définition de compatibilité pour les modules d'endo-permutation.

Proposition 2.8 *Soient M et N deux kG-modules d'endo-p-permutation. Alors M et N sont compatibles si et seulement si le kG-module* $\mathrm{Hom}_k(M, N)$ *ou le kG-module* $\mathrm{Hom}_k(N, M)$ *est de p-permutation.*

Preuve. Supposons que M et N sont compatibles. Alors

$$\mathrm{End}_k(M \oplus N) \cong \mathrm{End}_k(M) \oplus \mathrm{Hom}_k(M, N) \oplus \mathrm{Hom}_k(N, M) \oplus \mathrm{End}_k(N) \qquad (2.8.1)$$

est un kG-module de p-permutation. Donc $\mathrm{Hom}_k(M, N)$ et $\mathrm{Hom}_k(N, M)$ sont des facteurs directs d'un kG-module de p-permutation et sont donc de p-permutation.

Réciproquement, supposons, sans perte de généralité, que le kG-module $\mathrm{Hom}_k(M, N)$ est de p-permutation. Comme $\mathrm{Hom}_k(M, N) \cong M^* \otimes N$, son dual est isomorphe au produit tensoriel $N^* \otimes M \cong \mathrm{Hom}_k(N, M)$ et est donc aussi de p-permutation par la proposition 2.5 Ainsi par la formule (2.8.1), $\mathrm{End}_k(M \oplus N)$ est somme directe de modules de p-permutation et est donc de p-permutation. Par suite $M \oplus N$ est d'endo-p-permutation. □

Lemme 2.9 *Soient M et N deux kG-modules d'endo-p-permutation indécomposables. Alors M et N sont compatibles si et seulement si M et N sont facteurs directs d'un module d'endo-p-permutation commun.*

Preuve. Si M et N sont compatibles alors ils sont facteurs directs du module d'endo-p-permutation $M \oplus N$. Réciproquement, si M et N sont facteurs directs d'un module d'endo-p-permutation L, alors soit ils sont isomorphes et donc compatibles soit $M \oplus N$ est un facteur direct de L. Mais dans ce cas $M \oplus N$ est d'endo-p-permutation par la proposition 2.5 et donc M et N sont compatibles. □

Proposition 2.10 *Soient H un sous-groupe de G et M un kH-module d'endo-p-permutation. Alors $M{\uparrow}_H^G$ est un kG-module d'endo-p-permutation si et seulement si les $k[{}^gH \cap H]$-modules d'endo-p-permutation ${}^gM{\downarrow}^{{}^gH}_{{}^gH\cap H}$ et $M{\downarrow}^{H}_{{}^gH\cap H}$ sont compatibles pour tout $g \in G$.*

Preuve. Supposons que $M{\uparrow}_H^G$ est un kG-module d'endo-p-permutation. Alors le module $\mathrm{End}_k(M{\uparrow}_H^G)$ est un kG-module de p-permutation. De plus, en utilisant deux fois la réciprocité de Frobenius ainsi que la formule de Mackey, on obtient les isomorphismes suivants

$$\begin{aligned}
\mathrm{End}_k(M\uparrow_H^G) &\cong \mathrm{Hom}_k(M\uparrow_H^G\downarrow_H^G, M)\uparrow_H^G \\
&\cong \mathrm{Hom}_k(\bigoplus_{g\in[H\backslash G/H]} {}^gM\downarrow^{{}^gH}_{{}^gH\cap H}\uparrow^H_{{}^gH\cap H}, M)\uparrow_H^G \\
&\cong \bigoplus_{g\in[H\backslash G/H]} \mathrm{Hom}_k({}^gM\downarrow^{{}^gH}_{{}^gH\cap H}, M\downarrow^H_{{}^gH\cap H})\uparrow^G_{{}^gH\cap H},
\end{aligned}$$

où $[H\backslash G/H]$ est un système de représentants de $H\backslash G/H$. Ainsi le $k[{}^gH\cap H]$-module $\mathrm{Hom}_k({}^gM\downarrow^H_{{}^gH\cap H}, M\downarrow^H_{{}^gH\cap H})\uparrow^G_{{}^gH\cap H}$ est de p-permutation pour tout g dans $[H\backslash G/H]$ vu que c'est un facteur direct d'un module de p-permutation. Par la proposition 2.6, cela implique que $\mathrm{Hom}_k({}^gM\downarrow^{{}^gH}_{{}^gH\cap H}, M\downarrow^H_{{}^gH\cap H})$ est de p-permutation et par suite ${}^gM\downarrow^{{}^gH}_{{}^gH\cap H}$ et $M\downarrow^H_{{}^gH\cap H}$ sont compatibles pour tout $g\in[H\backslash G/H]$ vu la proposition 2.8. Comme $[H\backslash G/H]$ est un système de représentants arbitraire, ${}^gM\downarrow^{{}^gH}_{{}^gH\cap H}$ et $M\downarrow^H_{{}^gH\cap H}$ sont compatibles pour tout $g\in G$.

Réciproquement, si les deux modules ${}^gM\downarrow^{{}^gH}_{{}^gH\cap H}$ et $M\downarrow^H_{{}^gH\cap H}$ sont compatibles pour tout $g\in G$, alors $\mathrm{Hom}_k({}^gM\downarrow^{{}^gH}_{{}^gH\cap H}, M\downarrow^H_{{}^gH\cap H})$ est de p-permutation pour tout $g\in G$. Ainsi

$$\bigoplus_{g\in[H\backslash G/H]} \mathrm{Hom}_k({}^gM\downarrow^{{}^gH}_{{}^gH\cap H}, M\downarrow^H_{{}^gH\cap H})\uparrow^G_{{}^gH\cap H} \cong \mathrm{End}_k(M\uparrow_H^G)$$

est aussi de p-permutation vu que la famille des modules de p-permutation est stable par induction et par somme directe. Ainsi $M\uparrow_P^G$ est bien d'endo-p-permutation. □

Voici maintenant un résultat central de ce travail. Il s'agit d'une condition nécessaire et suffisante sur la source d'un kG-module indécomposable pour que ce dernier soit d'endo-p-permutation.

Théorème 2.11 *Soit M un kG-module indécomposable de vortex P et source S. Alors M est d'endo-p-permutation si et seulement si S est d'endo-permutation et les $k[{}^gP\cap P]$-modules $S\downarrow^P_{{}^gP\cap P}$ et ${}^gS\downarrow^{{}^gP}_{{}^gP\cap P}$ sont compatibles pour tout $g\in G$. En particulier si P est normal dans G, M est d'endo-p-permutation si et seulement si S est d'endo-permutation et $S\cong {}^gS$ pour tout $g\in G$.*

Preuve. Supposons que M soit d'endo-p-permutation. Alors $M\downarrow_P^G$ est un kP-module d'endo-permutation couvert et la source S de M est un facteur direct de vortex P de $M\downarrow_P^G$. Donc S est d'endo-permutation et en fait S est le chapeau de $M\downarrow_P^G$. De plus, comme ${}^gM\cong M$ quel que soit $g\in G$, ${}^gM\downarrow^G_{{}^gP\cap P}\cong M\downarrow^G_{{}^gP\cap P}$ pour tout $g\in G$. Ainsi, dans le groupe de Dade $D({}^gP\cap P)$, on a

$$[({}^gS\downarrow^{{}^gP}_{{}^gP\cap P})_*] = [({}^gM\downarrow^G_{{}^gP\cap P})_*] = [(M\downarrow^G_{{}^gP\cap P})_*] = [(S\downarrow^P_{{}^gP\cap P})_*].$$

Vu le théorème 1.24, cela démontre que $S{\downarrow}^{P}_{{}^gP\cap P}$ et ${}^gS{\downarrow}^{{}^gP}_{{}^gP\cap P}$ sont compatibles pour tout $g \in G$.

Réciproquement, grâce à la proposition 2.10, le kG-module induit $S{\uparrow}^{G}_{P}$ est d'endo-p-permutation. Or M est un facteur direct de $S{\uparrow}^{G}_{P}$ et donc est un kG-module d'endo-p-permutation.

Si P est normal dans G, alors les conditions de compatibilité entre $S{\downarrow}^{P}_{{}^gP\cap P}$ et ${}^gS{\downarrow}^{{}^gP}_{{}^gP\cap P}$ pour tout $g \in G$ se réduisent simplement en conditions de compatibilité entre S et ${}^gS$ pour tout $g \in G$. Or S et ${}^gS$ sont deux kP-modules d'endo-permutation indécomposables de vortex P, ainsi par le théorème 1.20, ils sont compatibles si et seulement s'ils sont isomorphes. □

Remarque 2.12 *En reprenant les notations du théorème ci-dessus, si la source S de M est d'endo-permutation et satisfait la condition $S{\downarrow}^{P}_{{}^gP\cap P} \cong {}^gS{\downarrow}^{{}^gP}_{{}^gP\cap P}$ pour tout $g \in G$, alors M est d'endo-p-permutation. Par contre il est fort probable que cette condition suffisante pour que M soit d'endo-p-permutation ne soit pas nécessaire, mais je n'ai malheureusement pas d'exemple pour le montrer.*

Une conséquence de ce théorème est que la compatibilité des modules d'endo-p-permutation indécomposables de vortex commun peut se repérer sur leur source.

Proposition 2.13 *Soient M et N deux kG-modules d'endo-p-permutation indécomposables de vortex commun P. Alors M et N sont compatibles si et seulement si leurs sources sont isomorphes.*

Preuve. Supposons que M et N sont compatibles et notons S et S' leur source. Alors le kP-module $S \oplus S'$ est un facteur direct du kP-module d'endo-permutation $(M \oplus N){\downarrow}^{G}_{P}$ et, par conséquent, est un kP-module d'endo-permutation. Donc S et S' sont deux kP-modules d'endo-permutation indécomposables de vortex P compatibles. Ainsi ils sont isomorphes par le théorème 1.20.
Réciproquement si S et S' sont isomorphes, alors M et N sont tous deux isomorphes à un facteur direct de $S{\uparrow}^{G}_{P}$. Donc par le lemme 2.9, M et N sont compatibles. □

Remarque 2.14 *Ce résultat est une généralisation du théorème 1.20. De plus, la relation de compatibilité entre les modules d'endo-p-permutation indécomposables de vortex commun est ainsi une relation d'équivalence. En effet, en utilisant la définition de compatibilité, la transitivité n'est pas claire. Par contre elle devient triviale grâce à la proposition ci-dessus.*

Au vu de cette remarque, nous pouvons généraliser la relation d'équivalence entre modules d'endo-permutation qui définit le groupe de Dade d'un p-groupe au cas des modules d'endo-p-permutation.

Définition 2.15 *Soit P un p-sous-groupe de G. Notons $D_P(G)$ l'ensemble des classes d'équivalence de kG-modules d'endo-p-permutation indécomposables de vortex P pour la relation de compatibilité. Si M est un kG-module d'endo-p-permutation indécomposable de vortex P, nous noterons $[M]$ sa classe dans $D_P(G)$.*

Le défaut de cette relation d'équivalence est qu'elle identifie tous les kG-modules d'endo-permutation indécomposables de vortex P qui ont une source commune. Dans le cas des kP-modules d'endo-permutation indécomposables de vortex P, cela n'identifie que les classes d'isomorphisme de tels modules, c'est-à-dire ce que l'on veut étudier. Regardons tout de même de plus près l'ensemble de ces classes d'équivalence. Nous allons le munir d'une structure de groupe abélien induite par le produit tensoriel. Pour cela il nous faut un petit lemme.

Lemme 2.16 *Soient M et N deux kG-modules d'endo-p-permutation indécomposables de vortex P. Alors $M \otimes N$ possède un facteur direct indécomposable de vortex P.*

Preuve. Comme M et N sont projectifs relativement à P, $M \otimes N$ et tout facteur direct de $M \otimes N$ sont projectifs relativement à P. D'un autre côté, comme $M{\downarrow}_P^G$ et $N{\downarrow}_P^G$ sont des kP-modules d'endo-permutation couverts, $(M \otimes N){\downarrow}_P^G$ aussi. Considérons donc son chapeau $((M \otimes N){\downarrow}_P^G)_*$ qui est un kP-module indécomposable de vortex P. Soit L un kG-facteur direct indécomposable de $M \otimes N$ tel que $((M \otimes N){\downarrow}_P^G)_*$ est facteur direct de $L{\downarrow}_P^G$. Alors L est de vortex plus grand ou égal à un conjugué de P. Or $M \otimes N$ est projectif relativement à P, donc L aussi et par suite L est de vortex P. □

Définissons une structure de groupe abélien sur $D_P(G)$ comme suit : si M et N sont deux kG-modules d'endo-p-permutation indécomposables de vortex P,

$$[M] + [N] = [(M \otimes N)_*],$$

où $(M \otimes N)_*$ est un facteur direct indécomposable de vortex P de $M \otimes N$. Cela ne dépend pas du choix du facteur direct de $M \otimes N$. En effet si $(M \otimes N)_\bullet$ est un autre tel facteur direct, alors $(M \otimes N)_*$ et $(M \otimes N)_\bullet$ sont compatibles par le lemme 2.9 car ils sont facteurs directs du module d'endo-p-permutation $M \otimes N$.

L'élément neutre pour cette opération est la classe des modules de p-permutation indécomposables de vortex P (les modules de p-permutation sont tous compatibles entre eux car la somme directe de deux modules de p-permutation est encore un module de p-permutation). En effet, M est un facteur direct de

$$M{\downarrow}_P^G{\uparrow}_P^G \cong (M{\downarrow}_P^G \otimes k){\uparrow}_P^G \cong M \otimes k{\uparrow}_P^G.$$

De plus, tout kG-module de p-permutation indécomposable S de vortex P est un facteur direct de $k{\uparrow}_P^G$. Ainsi M et $M \otimes S$ sont facteurs directs de $M \otimes k{\uparrow}_P^G$ qui est un module d'endo-p-permutation. Donc M et $(M \otimes S)_*$ sont compatibles par le lemme 2.9. Ainsi on a bien $[M] + [S] = [(M \otimes S)_*] = [M]$. L'opposé $-[M]$ de $[M]$ est la classe $[M^*]$ du dual de M. En effet

$$[M] + [M^*] = [(M \otimes M^*)_*] = [(\mathrm{End}_k(M))_*] = 0$$

vu que $\mathrm{End}_k(M)$ est de p-permutation.

Remarque 2.17 *Le groupe de Dade $D(P)$ est égal à $D_P(P)$. En effet, par le théorème 1.20, deux kP-modules d'endo-permutation indécomposables de vortex P sont compatibles si et seulement s'ils sont isomorphes.*

Nous avons vu par exemple que les kG-modules endo-triviaux sont des modules d'endo-p-permutation. On peut définir une relation d'équivalence plus naturelle sur les kG-modules endo-triviaux. Soient M et N deux kG-modules endo-triviaux. On dit que M et N sont équivalents s'ils sont isomorphes dans la catégorie stable des kG-modules, ou autrement dit, s'il existe deux kG-modules projectifs U et V tels que $M \oplus U \cong N \oplus V$. On considère alors $T(G)$ l'ensemble des classes d'équivalence de kG-modules endo-triviaux. Pour plus de détails sur $T(G)$, voir [10]. L'ensemble des classes d'équivalence de kG-modules endo-triviaux indécomposables sous la relation de compatibilité forme un sous-groupe $T_P(G)$ de $D_P(G)$. Nous allons faire le lien entre $T(G)$ et $T_P(G)$.

Rappelons que le vortex d'un kG-module endo-trivial est un p-sous-groupe de Sylow P. De plus, si M est un kG-module endo-trivial, alors $M \cong M_0 \oplus U$ avec M_0 endo-trivial et indécomposable et U projectif. On a alors un homomorphisme surjectif de $T(G)$ dans $T_P(G)$ envoyant la classe $[M]$ dans $T(G)$ du module endo-trivial M sur la classe dans $T_P(G)$ de M_0. Le noyau de cet homomorphisme correspond aux classes des modules endo-triviaux qui sont de p-permutation. Montrons qu'un kG-module M est endo-trivial et de p-permutation si et seulement si $M{\downarrow}_P^G \cong k \oplus L$ où L est un kP-module projectif. Si M est endo-trivial, alors $M{\downarrow}_P^G$ est endo-trivial et donc $M{\downarrow}_P^G \cong N \oplus L$ où N est indécomposable et endo-trivial et L est projectif. Mais comme $M{\downarrow}_P^G$ est de permutation, N aussi. Or un kP-module indécomposable de permutation est de la forme $k[P/Q]$ pour un sous-groupe Q de P et comme un kP-module endo-trivial est de vortex P, on doit avoir $Q = P$. Par suite $N \cong k$. Réciproquement si $M{\downarrow}_P^G \cong k \oplus L$ où L est un kP-module projectif, alors $M{\downarrow}_P^G$ est endo-trivial. Or un kG-module est endo-trivial si et seulement si sa restriction à un p-sous-groupe de Sylow de G est endo-trivial ([10] proposition 2.6), donc M est endo-trivial. De plus comme L est projectif et P est un p-groupe, L est libre et donc $M{\downarrow}_P^G \cong k \oplus L$ est de permutation et donc M est de p-permutation.

Revenons à notre groupe abélien $D_P(G)$. Comme la compatibilité des modules d'endo-p-permutation de vortex commun se teste sur la source, qui est un module d'endo-permutation, nous allons montrer que $D_P(G)$ est isomorphe à un sous-groupe bien précis du groupe de Dade $D(P)$. Pour cela il nous faut une définition.

Définition 2.18 *Soient $\mathcal{M}$ un foncteur de Mackey et P un sous-groupe de G. Notons* Res *pour la restriction et c_g pour la conjugaison par $g \in G$. Un élément $m \in \mathcal{M}(P)$ est dit* **G-stable** *si*

$$(\mathrm{Res}^{\,^gP}_{\,^gP\cap P} \circ c_g)(m) = \mathrm{Res}^P_{\,^gP\cap P}(m), \quad \forall g \in G.$$

On note $\mathcal{M}(P)^{G\text{-st}}$ le sous-groupe de tous les éléments G-stables de $\mathcal{M}(P)$.

Proposition 2.19 *Le groupe $D_P(G)$ est isomorphe au groupe $D(P)^{G\text{-st}}$.*

Preuve. On définit l'application $\varphi : D_P(G) \to D(P)^{G\text{-st}}$ par $\varphi([M]) = [(M{\downarrow}_P^G)_*]$ quel que soit $[M] \in D_P(G)$. Cette application est bien définie car si M et N sont compatibles, alors par la proposition 2.13 leurs sources sont isomorphes. De plus, comme $(M{\downarrow}_P^G)_*$ est en fait la source de M, l'image de φ est bien contenue dans les éléments G-stables de $D(P)$ grâce au théorème 2.11. Maintenant montrons que φ est un homomorphisme de groupes. On a

$$\varphi([M]+[N]) = [((M\otimes N)_*{\downarrow}_P^G)_*] \quad \text{et} \quad \varphi([M])+\varphi([N]) = [((M{\downarrow}_P^G)_*\otimes(N{\downarrow}_P^G)_*)_*].$$

Les kP-modules $((M\otimes N)_*{\downarrow}_P^G)_*$ et $((M{\downarrow}_P^G)_*\otimes(N{\downarrow}_P^G)_*)_*$ sont tout deux facteurs directs de $(M{\downarrow}_P^G)\otimes(N{\downarrow}_P^G)$ qui est un kP-module d'endo-permutation, donc ils sont compatibles et par suite leurs classes sont égales dans $D(P)$.

Pour montrer que φ est un isomorphisme, considérons $\psi : D(P)^{G\text{-st}} \to D_P(G)$ défini par $\psi([S]) = [(S{\uparrow}_P^G)_*]$ pour tout $[S] \in D(P)^{G\text{-st}}$. Le kG-module $S{\uparrow}_P^G$ est bien d'endo-p-permutation vu que $[S]$ est G-stable (proposition 2.10) et il a un facteur direct indécomposable de vortex P vu que S est indécomposable de vortex P. C'est bien défini car si $[S]=[S']$, c'est-à-dire $S \cong S'$, alors $(S{\uparrow}_P^G)_*$ et $(S'{\uparrow}_P^G)_*$ sont isomorphes à un facteur direct du module d'endo-p-permutation $S{\uparrow}_P^G$ et sont donc compatibles. Montrons que ψ est l'inverse de φ. Cela vient du fait que si M est un kG-module d'endo-p-permutation indécomposable de vortex P, alors les kG-modules M et $((M{\downarrow}_P^G)_*{\uparrow}_P^G)_*$ sont compatibles car facteurs directs du module d'endo-p-permutation $M{\downarrow}_P^G{\uparrow}_P^G$. De même si S est un kP-module d'endo-permutation indécomposable de vortex P dont la classe $[S]$ est G-stable, alors S et $((S{\uparrow}_P^G)_*{\downarrow}_P^G)_*$ sont isomorphes par le théorème 1.20 vu que ce sont deux facteurs directs indécomposables de vortex P du kP-module d'endo-permutation $S{\uparrow}_P^G{\downarrow}_P^G$. □

Dans le but de cerner un peu mieux les modules d'endo-p-permutation, nous allons étudier le sous-groupe $D(P)^{G\text{-st}}$ du groupe de Dade $D(P)$. Si nous réussissons à expliciter $D(P)^{G\text{-st}}$, nous aurons alors classifié les sources des kG-modules d'endo-p-permutation. Nous y parviendrons dans certains cas, mais pas en toute généralité.

Cela ne nous donne pas une classification des kG-modules d'endo-p-permutation indécomposables, mais au moins nous savons que ces derniers sont tous les facteurs directs indécomposables d'induits de modules d'endo-permutation indécomposables dont les classes dans le groupe de Dade sont G-stables.

Enonçons une proposition qui réduira l'étude des éléments G-stables quand la p-fusion est contrôlée par un sous-groupe de G. Pour cela définissons ce qu'est le contrôle de la p-fusion.

Définition 2.20 *On dit qu'un sous-groupe H de G contrôle la p-fusion si les deux conditions suivantes sont vérifiées :*

- *p ne divise pas l'indice de H dans G (c'est-à-dire qu'un p-sous-groupe de Sylow de H est un p-sous-groupe de Sylow de G)*
- *si Q est un p-sous-groupe de H et si ${}^gQ$ est un sous-groupe de H pour un certain $g \in G$, alors $g = hz$ avec $h \in H$ et $z \in C_G(Q)$ le centralisateur de Q dans G.*

Lemme 2.21 *Soit P un p-sous-groupe de G et $\mathcal{M}$ un foncteur de Mackey. Supposons que le centralisateur $C_G(Q)$ de Q dans G agisse trivialement sur $\mathcal{M}(Q)$ pour tout sous-groupe Q de P. Si la p-fusion dans G est contrôlée par $H \leq G$, alors $\mathcal{M}(P)^{G\text{-st}} = \mathcal{M}(P)^{H\text{-st}}$.*

Preuve. Soit $g \in G$. Les sous-groupes $T = {}^gP \cap P$ et $P \cap P^g$ de P sont conjugués par g^{-1}. Alors comme H contrôle la p-fusion, $g^{-1} = h^{-1}z^{-1}$ avec $z \in C_G(T)$ et $h \in H$ et ainsi $g = zh$. Maintenant, ${}^zT = T \leq {}^gP = {}^{zh}P$, ainsi $T \leq {}^hP$ et donc $T \leq {}^hP \cap P$. Par conséquent,

$$\mathrm{Res}^{{}^gP}_T \circ c_g = \mathrm{Res}^{{}^{zh}P}_{{}^zT} \circ c_z \circ c_h = c_z \circ \mathrm{Res}^{{}^hP\cap P}_T \circ \mathrm{Res}^{{}^hP}_{{}^hP\cap P} \circ c_h.$$

Soit $x \in \mathcal{M}(P)^{H\text{-st}}$ (i.e. $(\mathrm{Res}^{{}^hP}_{{}^hP\cap P} \circ c_h)(x) = \mathrm{Res}^P_{{}^hP\cap P}(x)$ pour tout $h \in H$), alors

$$\begin{aligned}(\mathrm{Res}^{{}^gP}_T \circ c_g)(x) &= (c_z \circ \mathrm{Res}^{{}^hP\cap P}_T \circ \mathrm{Res}^{{}^hP}_{{}^hP\cap P} \circ c_h)(x) \\ &= (c_z \circ \mathrm{Res}^{{}^hP\cap P}_T \circ \mathrm{Res}^P_{{}^hP\cap P})(x) = (c_z \circ \mathrm{Res}^P_T)(x).\end{aligned}$$

Mais par hypothèse $c_z = id_{\mathcal{M}(T)}$ et donc $(\mathrm{Res}^{{}^gP}_T \circ c_g)(x) = \mathrm{Res}^P_T(x)$. Comme g est arbitraire dans G, on a $x \in D(P)^{G\text{-st}}$ et donc $D(P)^{H\text{-st}} \leq D(P)^{G\text{-st}}$. L'autre inclusion est toujours vraie et ainsi le lemme est prouvé. □

Proposition 2.22 *Soit P un p-sous-groupe de G et supposons que la p-fusion de G est contrôlée par $H \leq G$. Alors l'ensemble des éléments G-stables du groupe de Dade $D(P)$ est égal à l'ensemble des éléments H-stables de $D(P)$. En particulier, si $H = N_G(P)$ est le normalisateur de P dans G, alors $D(P)^{G\text{-st}} = D(P)^{N_G(P)}$ est le sous-groupe des points fixes de $D(P)$ sous l'action de $N_G(P)$ par conjugaison.*

Preuve. Grâce au lemme précédent, il suffit de prouver que le centralisateur $C_G(Q)$ de tout sous-groupe Q de P agit trivialement sur $D(Q)$. Mais c'est évident car pour tout kQ-module M, le module conjugué ${}^zM$ est isomorphe à M quel que soit $z \in C_G(Q)$ et donc $[{}^zM] = [M]$. Le cas particulier $H = N_G(Q)$ provient du fait que si $h \in N_G(P)$, alors ${}^hP \cap P = P$ et donc $\mathrm{Res}^P_{{}^hP\cap P} = id$. □

Notons que par exemple si G a un un p-sous-groupe de Sylow abélien P, alors le normalisateur de P dans G contrôle la p-fusion (théorème de Burnside).

Chapitre 3

Points fixes du groupe de Dade

Nous allons nous focaliser maintenant sur l'étude du sous-groupe $D(P)^N$ des points fixes de $D(P)$ sous l'action de N, où N est un groupe agissant sur P par automorphismes. Pour ce faire nous allons utiliser la récente classification des modules d'endo-permutation. En particulier, cela permettra de décrire $D(P)^{N_G(P)}$, le sous-groupe des points fixes de $D(P)$ sous l'action du normalisateur. Comme on l'a vu avant, si $N_G(P)$ contrôle la p-fusion, alors les classes d'isomorphismes des sources des kG-modules d'endo-p-permutation indécomposables sont exactement les éléments de $D(P)^{N_G(P)}$. Nous avons ainsi dans ce cas une classification des sources des kG-modules d'endo-p-permutation.

Fixons quelques notations pour ce chapitre.

Notation 3.1 *Dans ce chapitre, N est un groupe agissant par automorphismes sur P. Si $g \in N$ et $x \in P$, on notera ${}^g x$ pour l'action de g sur x.*

3.1 Points fixes de $D(P)$ en caractéristique impaire

Ce paragraphe concerne le cas où p est impair, qui est plus facile. En effet dans ce cas, comme on l'a vu dans l'introduction, $D(P) = D^{\Omega}(P)$.

Dans le théorème 9.5 de [6], S. Bouc donne une présentation de $D(P)$ par générateurs et relations. Nous allons énoncer ci-dessous une description un peu différente de $D(P)$ dont nous allons donner une preuve.

Rappelons qu'il existe une suite exacte de foncteurs (théorème 1.46)

$$0 \to R_{\mathbb{Q}}^* \xrightarrow{i} B^* \xrightarrow{\Theta} D^{\Omega}/D_t^{\Omega} \to 0. \tag{3.1.1}$$

Notons $\dim_{\mathbb{Q}} \in R_{\mathbb{Q}}^*(P)$ la $\mathbb{Z}$-forme linéaire dimension, c'est-à-dire l'application qui à tout $\mathbb{Q}P$-module V associe sa dimension comme $\mathbb{Q}$-espace vectoriel, que l'on étend par $\mathbb{Z}$-linéarité en une $\mathbb{Z}$-forme sur $R_{\mathbb{Q}}(P)$.

Théorème 3.2 (Bouc) *Supposons p impair et soit P un p-groupe. Alors la suite*

$$0 \to (2R_{\mathbb{Q}}^*(P) + \mathbb{Z}\dim_{\mathbb{Q}}) \xrightarrow{i} B^*(P) \xrightarrow{\Theta_P} D(P) \to 0$$

est exacte.

Preuve. Comme $p \neq 2$, par le théorème 1.47, $D^{\Omega}(P) = D(P)$ et ainsi Θ_P est surjectif. Comme $2D_t(P) = 0$, $i(2R^*_{\mathbb{Q}}(P)) \leq \ker\Theta_P$. On veut prouver que $i(\dim_{\mathbb{Q}}) \in \ker\Theta_P$. Si μ_P est la fonction de Möbius de s_P, tout $\varphi \in B^*(P)$ peut s'écrire ([4] remarque 2.3)

$$\varphi = \sum_{\substack{Q,R\in[s_P]\\ Q\leq_P R}} \varphi(P/R)\mu_P(Q,R)\omega_{P/Q}.$$

Donc,

$$\begin{aligned}\Theta_P(i(\dim_{\mathbb{Q}})) &= \Theta_P(\sum_{\substack{Q,R\in[s_P]\\ Q\leq_P R}} i(\dim_{\mathbb{Q}})(P/R)\mu_P(Q,R)\omega_{P/Q})\\ &= \sum_{\substack{Q,R\in[s_P]\\ Q\leq_P R}} |P:R|\mu_P(Q,R)\Omega_{P/Q} = 0,\end{aligned}$$

la dernière égalité provenant d'une relation dans le groupe de Dade ([2] relation (6.1.2)). De plus on sait que le rang de $R^*_{\mathbb{Q}}(P)$ est égal au nombre de classes de conjugaison de sous-groupes cycliques de P (cf. [22] Chapitre 13, Théorème 29, Corollaire 1). Le quotient $R^*_{\mathbb{Q}}(P)/(2R^*_{\mathbb{Q}}(P)+\mathbb{Z}\dim_{\mathbb{Q}})$ est ainsi un $\mathbb{F}_2$-espace vectoriel de dimension $\mathrm{Rang}(R^*_{\mathbb{Q}}(P))-1$ c'est-à-dire égal au nombre de classes de conjugaison de sous-groupes cycliques non-triviaux de P. Mais c'est alors égal à la dimension de $D_t(P)$ (théorème 1.43) et donc $R^*_{\mathbb{Q}}(P)/(2R^*_{\mathbb{Q}}(P) + \mathbb{Z}\dim_{\mathbb{Q}}) \cong D_t(P)$. Par conséquent, vu la suite 3.1.1 le noyau de Θ_P est bien $2R^*_{\mathbb{Q}}(P) + \mathbb{Z}\dim_{\mathbb{Q}}$. □

Remarque 3.3 L'action de N sur P induit une action sur les $\mathbb{Z}$-modules $R^*_{\mathbb{Q}}(P)$, $B^*(P)$ et $D(P)$. En effet, si $g \in N$, l'action de g est un isomorphisme de P dans lui-même, on peut donc considérer le (P,P)-bi-ensemble $\mathrm{Iso}_g = P$ avec action à gauche par multiplication et action à droite en prenant l'image par g puis en multipliant. Maintenant, si F est un foncteur de bi-ensembles ou si $F = D$, $F(Iso_g) : F(P) \to F(P)$ est un isomorphisme de $\mathbb{Z}$-modules et donc cela nous définit une action de N sur $F(P)$. Si $\gamma \in F(P)$ et $g \in N$, nous noterons l'action de g sur γ, c'est-à-dire $F(\mathrm{Iso}_g)(\gamma)$, simplement par ${}^g\gamma$. En particulier, avec cette action, $R^*_{\mathbb{Q}}(P)$, $B^*(P)$ et $D(P)$ sont des $\mathbb{Z}N$-modules. Remarquons encore que la construction de cette action étant fonctorielle, les homomorphismes $\Theta_P : B^*(P) \to D^{\Omega}(P)$ et $i : R^*_{\mathbb{Q}}(P) \to B^*(P)$ commutent à l'action de N, autrement dit ce sont des homomorphismes de $\mathbb{Z}N$-modules.

Regardons tout de même explicitement comment est faite l'action de N sur ces $\mathbb{Z}$-modules. Si V est un P-ensemble (ou un KP-module, K un corps) et $g \in N$, alors on note ${}^gV$ l'ensemble V (respectivement le K-espace vectoriel V) muni de l'action de P donnée par :

$$y \cdot v \quad (\text{dans } {}^gV) = (g^{-1}yg)\cdot v \quad (\text{dans } V), \quad \forall v \in V, \forall y \in P.$$

Avec cette action, ${}^{g}V$ est un P-ensemble (respectivement un KP-module). Ainsi, N agit sur l'ensemble des P-ensembles (respectivement l'ensemble des KP-modules) et induit alors une action sur $B(P)$ (respectivement sur $R_{\mathbb{Q}}(P)$ (si $K=\mathbb{Q}$) ou $D(P)$ (si $K=k$)). Par suite $B(P)$, $R_{\mathbb{Q}}(P)$ et $D(P)$ sont des $\mathbb{Z}N$-modules et donc $B^*(P)$ et $R^*_{\mathbb{Q}}(P)$ aussi. Notons finalement que si $[V]$ est la classe de V dans $F(P)$, où $F=B$ (respectivement $R_{\mathbb{Q}}$ ou D) , alors $F(\mathrm{Iso}_g)([V]) = {}^{g}[V] = [{}^{g}V]$.

Nous allons montrer que la suite du théorème 3.2 reste exacte en passant aux points fixes, c'est-à-dire que l'homomorphisme de $B^*(P)^N$ dans $D(P)^N$ est surjectif. On verra que cela revient à montrer que le groupe de cohomologie $H^1(N, 2R^*_{\mathbb{Q}}(P)+\mathbb{Z}\dim_{\mathbb{Q}})$ est nul.

Présentons ici un corollaire facile et connu du théorème d'Eckmann-Shapiro.

Lemme 3.4 *Soit N un groupe fini et L un $\mathbb{Z}N$-module de permutation, alors $H^1(N,L)$ est nul.*

Preuve. Comme L est de permutation, $L \cong \bigoplus_{H\in\mathcal{H}} \mathbb{Z}[N/H]$, où $\mathcal{H}$ est une famille de sous-groupes de N. Alors,

$$\begin{aligned}
H^1(N,L) &\cong H^1(N, \bigoplus_{H\in\mathcal{H}} \mathbb{Z}[N/H]) \\
&\cong \bigoplus_{H\in\mathcal{H}} H^1(N, \mathbb{Z}{\uparrow}_H^N) \\
&\cong \bigoplus_{H\in\mathcal{H}} H^1(H,\mathbb{Z}) \\
&\cong \bigoplus_{H\in\mathcal{H}} \mathrm{Hom}(H,\mathbb{Z}),
\end{aligned}$$

l'avant-dernier isomorphisme provenant du lemme d'Eckmann-Shapiro. Or $\mathrm{Hom}(H,\mathbb{Z})$ est nul pour tout $H\in\mathcal{H}$ vu que H est fini et $\mathbb{Z}$ est sans torsion. □

Nous allons donc prouver que $2R^*_{\mathbb{Q}}(P)+\mathbb{Z}\dim_{\mathbb{Q}}$ est un $\mathbb{Z}N$-module de permutation et nous verrons que cela nous permettra de conclure la surjectivité de $\Theta_P : B^*(P)^N \to D(P)^N$.

Proposition 3.5 *Le $\mathbb{Z}N$-module $2R^*_{\mathbb{Q}}(P)+\mathbb{Z}\dim_{\mathbb{Q}}$ est un module de permutation.*

Preuve. Montrons tout d'abord que l'ensemble $\mathcal{B}=\{2V^*, \dim_{\mathbb{Q}} | V\in \mathrm{Irr}_{\mathbb{Q}} - \{\mathbb{Q}\}\}$, où $\mathrm{Irr}_{\mathbb{Q}}$ est l'ensemble des représentations rationnelles irréductibles et $\mathbb{Q}$ est la représentation triviale, est une $\mathbb{Z}$-base de $2R^*_{\mathbb{Q}}(P)+\mathbb{Z}\dim_{\mathbb{Q}}$. Rappelons que pour tout $\varphi\in R^*_{\mathbb{Q}}(P)$, on a

$$\varphi = \sum_{V\in\mathrm{Irr}_{\mathbb{Q}}} \varphi(V)V^*. \tag{3.5.1}$$

Montrons que $\mathcal{B}$ est libre. On note que $\sum_{V\in \mathrm{Irr}_{\mathbb{Q}}-\{\mathbb{Q}\}} \lambda_V 2V^* + \mu \dim_{\mathbb{Q}} = 0$ se récrit, grâce à la formule 3.5.1,

$$\mu \dim_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q})\mathbb{Q}^* + \sum_{V\in \mathrm{Irr}_{\mathbb{Q}}-\{\mathbb{Q}\}} (2\lambda_V + \mu \dim_{\mathbb{Q}}(V))V^* = 0.$$

Or comme $\{V^* | V \in \mathrm{Irr}_{\mathbb{Q}}\}$ est une base de $R^*_{\mathbb{Q}}(P)$, cela force $\mu = 0$ et par suite $\lambda_V = 0$ pour tout $V \in \mathrm{Irr}_{\mathbb{Q}} - \{\mathbb{Q}\}$. Pour montrer que $\mathcal{B}$ est une famille génératrice, il suffit de voir que $2\mathbb{Q}^*$ est combinaison linéaire d'éléments de $\mathcal{B}$. Or, toujours grâce à la formule 3.5.1,

$$2\mathbb{Q}^* = 2\dim_{\mathbb{Q}} - \sum_{V\in \mathrm{Irr}_{\mathbb{Q}}-\{\mathbb{Q}\}} \dim_{\mathbb{Q}}(V) 2V^*$$

et donc $\mathcal{B}$ est une $\mathbb{Z}$-base de $2R^*_{\mathbb{Q}}(P) + \mathbb{Z}\dim_{\mathbb{Q}}$. Il reste à prouver que $\mathcal{B}$ est une base de permutation. Mais c'est clair car pour tout $g \in N$, on a ${}^g(2V^*) = 2({}^gV)^*$ et si $V \in \mathrm{Irr}_{\mathbb{Q}} - \{\mathbb{Q}\}$, alors ${}^gV \in \mathrm{Irr}_{\mathbb{Q}} - \{\mathbb{Q}\}$, ainsi ${}^g(2V^*) \in \mathcal{B}$. De plus ${}^g\dim_{\mathbb{Q}} = \dim_{\mathbb{Q}} \in \mathcal{B}$, quel que soit $g \in N$, ce qui achève la preuve de cette proposition. □

Nous pouvons alors énoncer le théorème suivant.

Théorème 3.6 *Supposons p impair, soit P un p-groupe et soit N un groupe agissant par automorphismes sur P. Alors la suite des points fixes*

$$0 \to (2R^*_{\mathbb{Q}}(P) + \mathbb{Z}\dim_{\mathbb{Q}})^N \to B^*(P)^N \to D(P)^N \to 0$$

est exacte.

Preuve. Posons $L = 2R^*_{\mathbb{Q}}(P) + \mathbb{Z}\dim_{\mathbb{Q}}$. La suite exacte courte du théorème 3.2 induit la suite exacte longue suivante en cohomologie :

$$0 \to H^0(N, L) \to H^0(N, B^*(P)) \to H^0(N, D(P)) \to H^1(N, L) \to \cdots$$

Mais $H^0(N, M) = M^N$ pour tout $\mathbb{Z}N$-module M. En appliquant la proposition et le lemme précédents, on conclut que $H^1(N, L)$ est nul et donc que la suite des points fixes est une suite exacte courte. □

Comme corollaire on obtient :

Corollaire 3.7 *Supposons p est impair et soit P un p-sous-groupe de G. Les éléments de $D(P)^{N_G(P)}$ s'écrivent comme combinaisons linéaires de sommes d'orbites de syzygies relatives. Explicitement, les éléments de $D(P)^{N_G(P)}$ sont combinaisons $\mathbb{Z}$-linéaires d'éléments de la forme*

$$\sum_{g\in[N_G(P)/P\cdot N_G(P,Q)]} \Omega_{P/{}^gQ},$$

où $N_G(P,Q) = \{g \in N_G(P) \mid {}^gQ = Q\}$.

Preuve. Soit $y \in D^{\Omega}(P)^{N_G(P)} = D(P)^{N_G(P)}$. Alors par le théorème précédent et le théorème 3.2,

$$y = \Theta_P\Big(\sum_{Q\in[s_p]} \lambda_Q \, \omega_{P/Q}\Big)$$

avec $\sum_{Q\in[s_p]} \lambda_Q \, \omega_{P/Q} \in B^*(P)^{N_G(P)}$, $\lambda_Q \in \mathbb{Z}$. On a donc, quel que soit $g \in N_G(P)$,

$$\begin{aligned} \sum_{Q\in[s_P]} \lambda_Q \, \omega_{P/Q} &= {}^g\Big(\sum_{Q\in[s_p]} \lambda_Q \, \omega_{P/Q}\Big) \\ &= \sum_{Q\in[s_P]} \lambda_Q \, \omega_{P/{}^gQ}. \end{aligned}$$

Or $\omega_{P/Q} = \omega_{P/{}^gQ}$ si et seulement si Q et ${}^gQ$ sont conjugués dans P, c'est-à-dire si et seulement s'il existe $h \in P$ tel que ${}^{hg}Q = Q$. C'est équivalent à $hg \in N_G(P,Q)$ ou encore $g \in P \cdot N_G(P,Q)$. Cela permet de décomposer la somme ci-dessus comme suit :

$$\sum_{Q\in[s_P]} \lambda_Q \, \omega_{P/Q} = \sum_{Q\in\mathcal{R}} \lambda_Q \sum_{g\in[N_G(P)/P\cdot N_G(P,Q)]} \omega_{P/{}^gQ},$$

où $\mathcal{R}$ est un système de représentants des classes de conjugaison de $[s_P]$ sous l'action de $N_G(P)$, action définie de la manière suivante : si $Q \in [s_P]$ et $g \in N_G(P)$, on pose $g \cdot Q = R$ où R est l'unique élément de $[s_P]$ tel que R et ${}^gQ$ sont conjugués dans P. Ainsi on conclut que

$$\begin{aligned} y &= \Theta_P\left(\sum_{Q\in\mathcal{R}} \lambda_Q \sum_{g\in[N_G(P)/P\cdot N_G(P,Q)]} \omega_{P/{}^gQ}\right) \\ &= \sum_{Q\in\mathcal{R}} \lambda_Q \sum_{g\in[N_G(P)/P\cdot N_G(P,Q)]} \Omega_{P/{}^gQ}. \end{aligned}$$

□

3.2 Points fixes de $D(P)$ en caractéristique 2

Notre but sera ici, comme dans le cas de la caractéristique impaire, de trouver une suite exacte qui restera exacte en passant aux points fixes sous l'action d'un groupe N agissant sur P. La difficulté réside tout particulièrement dans le fait que si $p = 2$, il existe des modules d'endo-permutation exotiques, c'est-à-dire $D(P) \neq D^\Omega(P)$. Nous allons tout d'abord nous intéresser à la torsion de $D(P)$.

Convention 3.8 *Dans ce paragraphe, k est un corps (algébriquement clos) de caractéristique 2.*

Notation 3.9

- *On notera $N(S)$ pour $N_P(S)$ le normalisateur dans P d'un sous-groupe S de P.*
- *Fixons $\mathcal{S}$ une base génétique et notons $\mathcal{Q}$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{S}$ de type quaternion généralisé, $\mathcal{SD}$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{S}$ de type semi-diédral, $\mathcal{C}$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{S}$ de type cyclique d'ordre plus grand ou égal à 4 et $\mathcal{D}$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{S}$ de type diédral et cyclique d'ordre 2.*
- *Si S est un sous-groupe génétique de type quaternion généralisé, alors il existe des éléments exotiques dans $T(N(S)/S)$, c'est-à-dire qui ne sont pas des syzygies relatives (théorème 1.40). Plus précisément, il existe quatre éléments exotiques dans $T(N(S)/S)$, dont deux d'ordre 2 que nous noterons $\eta(S,1)$ et $\eta(S,-1)$. On a alors la relation suivante dans $T(N(S)/S)$:*

$$\eta(S,1) + \eta(S,-1) + 2\Omega_{N(S)/S} = 0. \tag{3.9.1}$$

  Pour $\varepsilon \in \{\pm 1\}$, posons encore $\Lambda(S,\varepsilon) = \mathrm{Teninf}_{N(S)/S}^{P}\, \eta(S,\varepsilon)$.
- *Rappelons que si S est un sous-groupe génétique de P, il existe une unique représentation rationnelle fidèle de $N(S)/S$, notée $\Phi_{N(S)/S}$. On note alors*

$$V(S) = \mathrm{Indinf}_{N(S)/S}^{P}\, \Phi_{N(S)/S} \in R_{\mathbb{Q}}(P).$$

  Vu la remarque qui suit la définition 1.29 l'ensemble $\{V(S) \,|\, S \in \mathcal{S}\}$ est une base de $R_{\mathbb{Q}}(P)$. Posons alors $\{V^*(S) \,|\, S \in \mathcal{S}\}$ la base duale de $\{V(S) \,|\, S \in \mathcal{S}\}$.

Rappelons aussi qu'il existe une suite exacte :

$$0 \to L \to R_{\mathbb{Q}}^*(P) \xrightarrow{\Theta_P \circ i} D_t^\Omega(P) \to 0.$$

De plus, les images par $\Theta_P \circ i$ des $V^*(S)$, $S \in \mathcal{S}$ sont calculées dans la preuve du théorème 9.5 de [6] et valent :

$$(\Theta_P \circ i)(V^*(S)) = \begin{cases} \mathrm{Teninf}_{N(S)/S}^{P}\, \Omega_{N(S)/S} & \text{si } S \in \mathcal{Q} \cup \mathcal{C} \\ \mathrm{Teninf}_{N(S)/S}^{P}(\Omega_{N(S)/S} + \Omega_{(N(S)/S)/R)}) & \text{si } S \in \mathcal{SD} \\ 0 & \text{si } S \in \mathcal{D} \end{cases}$$

où R est un sous-groupe non-central d'ordre 2 de $N(S)/S$. Maintenant si $S \in \mathcal{Q}$, l'ordre de $\mathrm{Teninf}_{N(S)/S}^{P} \Omega_{N(S)/S}$ est 4, si $S \in \mathcal{C}$ l'ordre de $\mathrm{Teninf}_{N(S)/S}^{P} \Omega_{N(S)/S}$ est 2 et si $S \in \mathcal{SD}$, l'ordre de $\mathrm{Teninf}_{N(S)/S}^{P}(\Omega_{N(S)/S} + \Omega_{(N(S)/S)/R})$ est 2 (théorème 1.40). Ainsi, vu la structure de $D_t(P)$ (théorème 1.49), on obtient que L est le $\mathbb{Z}$-module libre de base

$$\{\tau_S V^*(S) \mid S \in S\} \quad \text{où} \quad \tau_S = \begin{cases} 1 & \text{si } S \in \mathcal{D} \\ 2 & \text{si } S \in \mathcal{C} \cup \mathcal{SD} \\ 4 & \text{si } S \in \mathcal{Q} \end{cases}$$

La suite exacte ci-dessus, avec la suite exacte du théorème 1.46 nous donne une nouvelle suite exacte

$$0 \to L \xrightarrow{i} B^*(P) \xrightarrow{\Theta_P} D^{\Omega}(P) \to 0. \tag{3.9.2}$$

On peut alors énoncer le théorème suivant.

Théorème 3.10 *Soit $\mathcal{S}$ une base génétique et posons $\mathcal{S} = \mathcal{Q} \cup \mathcal{D} \cup \mathcal{SD} \cup \mathcal{C}$ et τ_S, $S \in \mathcal{S}$ comme ci-dessus. Notons E le $\mathbb{Z}$-module libre de base $\{(T, \varepsilon) \mid T \in \mathcal{Q}, \varepsilon \in \{\pm 1\}\}$. Pour tout $T \in \mathcal{Q}$, notons encore $U(T) = (T, 1) + (T, -1) + 2V^*(T) \in R_{\mathbb{Q}}^*(P) \oplus E$. Soit K le $\mathbb{Z}$-sous-module de $R_{\mathbb{Q}}^*(P) \oplus E$, libre de base*

$$\{\tau_S V^*(S), U(T), 2(T, \varepsilon) \mid S \in \mathcal{S}, T \in \mathcal{Q}, \varepsilon \in \{\pm 1\}\}.$$

Alors la suite suivante est exacte

$$0 \to K \xrightarrow{j} B^*(P) \oplus E \xrightarrow{\Psi} D(P) \to 0$$

où $\Psi|_{B^*(P)} = \Theta_P$ et $j|_{R_{\mathbb{Q}}^*(P)} = i$ tandis que $\Psi(T, \varepsilon) = \Lambda(T, \varepsilon)$ et $j(T, \varepsilon) = (T, \varepsilon)$ pour tout $T \in \mathcal{Q}$ et $\varepsilon \in \{\pm 1\}$, Ψ et j étendus par $\mathbb{Z}$-linéarité.

Preuve. La surjectivité de Ψ est clair vu la suite 3.9.2 et le théorème 1.50. L'injectivité de j est évidente vu que i est injectif. Il nous reste donc à montrer que $\ker(\Psi) = j(K)$. Tout d'abord, réalisons que $j(K)$ est contenu dans le noyau de Ψ. En effet, $\Psi(j(\tau_S V^*(S))) = (i \circ \Theta_P)(\tau_S V^*(S)) = 0$ pour tout $S \in \mathcal{S}$ vu la suite 3.9.2. Comme $(i \circ \Theta_P)(V^*(T)) = \mathrm{Teninf}\, \Omega_{N(T)/T}$ pour tout $T \in \mathcal{Q}$, on a

$$\Psi(j(U(T))) = \Lambda(T, 1) + \Lambda(T, -1) + 2\, \mathrm{Teninf}_{N(T)/T}^{P}(\Omega_{N(T)/T})$$

et donc $\Psi(j(U(T))) = 0$ vu la relation 3.9.1. Finalement, $\Psi(j(2(T, \varepsilon))) = 2\Lambda(T, \varepsilon) = 0$ quel que soit $T \in \mathcal{Q}$, $\varepsilon \in \{\pm 1\}$ vu que $\Lambda(T, \varepsilon)$ est d'ordre 2. Montrons maintenant l'inclusion opposée, c'est-à-dire $\ker(\Psi) \subseteq j(K)$. Soit $x \in \ker(\Psi)$ et posons $x = y + z$ avec $y \in B^*(P)$ et $z \in E$. Alors

$$z = \sum_{(T,\varepsilon) \in \mathcal{Q} \times \{\pm 1\}} \lambda_{T,\varepsilon}(T, \varepsilon), \quad \text{où } \lambda_{T,\varepsilon} \in \mathbb{Z},\ \forall (T, \varepsilon) \in \mathcal{Q} \times \{\pm 1\}.$$

Notons alors

$$z' = z - \sum_{T \in \mathcal{Q}} \lambda_{T,-1} j(U(T)) = \sum_{T \in \mathcal{Q}} [\lambda'_{T,1}(T, 1) - \lambda_{T,-1} i(2V^*(T))].$$

Pour tout $T \in \mathcal{Q}$, posons $\lambda'_{T,1} = 2\mu_T + \lambda''_T$ avec $\mu_T \in \mathbb{Z}$ et $\lambda''_T \in \{0,1\}$. Considérons alors l'élément de $R^*_{\mathbb{Q}}(P) \oplus E$

$$z'' = z' - \sum_{(T,1)\in\mathcal{Q}} \mu_T 2(T,1) = \sum_{T\in\mathcal{Q}} [\lambda''_T(T,1) - \lambda_{T,-1} i(2V^*(T))].$$

Tout d'abord remarquons que comme $j(U(T))$ et $2(T,1)$ sont dans $j(K)$ pour tout $T \in \mathcal{Q}$ et comme $j(K) \subseteq \ker(\Psi)$, on a $\Psi(z) = \Psi(z') = \Psi(z'')$. Notons encore $\pi_{\mathcal{Q}}$ la projection de $D(P) = D^{\Omega}(P) \oplus D_{\mathcal{Q}}(P)$ sur $D_{\mathcal{Q}}(P)$. Alors comme $\Psi(y) \in D^{\Omega}(P)$ et $\Psi(z) = \Psi(z'')$,

$$0 = \pi_{\mathcal{Q}}(\Psi(x)) = \pi_{\mathcal{Q}}(\Psi(y)) + \pi_{\mathcal{Q}}(\Psi(z)) = \pi_{\mathcal{Q}}(\Psi(z'')) = \sum_{T\in\mathcal{Q}} \lambda''_T \Lambda(T,1),$$

la dernière égalité provenant du fait que $\Psi(-\lambda_{T,-1} i(2V^*(T))) \in D^{\Omega}(P)$. Mais alors comme $\lambda''_T \in \{0,1\}$ et comme $D_{\mathcal{Q}}(P)$ est un $\mathbb{F}_2$-espace vectoriel de base $\{\Lambda(T,1) \mid T \in \mathcal{Q}\}$ (théorème 1.50), $\lambda''_T = 0$ quel que soit $T \in \mathcal{Q}$. Ainsi, $z'' = \sum_{T\in\mathcal{Q}} -\lambda_{T,-1} i(2V^*(T)) \in B^*(P)$. De plus $y + z'' \in \ker(\Psi)$ vu que $\Psi(z) = \Psi(z'')$ et donc $y + z'' \in \ker(\Psi) \cap B^*(P) = i(L)$ vu la suite 3.9.2. Mais alors, comme $i(L) \subseteq j(K)$, $y + z'' \in j(K)$ et comme par construction $z'' = z + j(k)$ pour un $k \in K$, on a $x = y + z = y + z'' - j(k) \in j(K)$, ce qui achève la preuve de ce théorème. □

Notation 3.11 *Pour la suite de ce paragraphe, N est un groupe qui agit par automorphismes sur P.*

Les résultats qui suivent vont nous servir à définir des structures de $\mathbb{Z}N$-modules sur K et sur $B^*(P) \oplus E$ telles que Ψ et j soient des homomorphismes de $\mathbb{Z}N$-modules.

Remarque 3.12 (S. Bouc [5] 2.3) *Soient S et S' deux sous-groupes génétiques liés modulo P et soit $x \in P$ tel que S — ${}^xS'$. Regardons $S\backslash N(S)xN(S')/S'$ comme un $(N(S)/S, N(S')/S')$−bi-ensemble. Si $n' \in N(S')$, alors il existe $n \in N(S) \cap {}^xN(S')$ et $s' \in S'$ tels que $n' = n^x s'$. La correspondance $u : n'S' \mapsto nS$ est bien définie et est un isomorphisme $N(S')/S' \to N(S)/S$. De plus la correspondance*

$$\begin{array}{ccc} S\backslash N(S)xN(S')/S' & \to & N(S)/S \\ Snxn'S' & \mapsto & nS \cdot (u(n'S')) \end{array}$$

est un isomorphisme de $(N(S)/S, N(S')/S')$-bi-ensembles.

Lemme 3.13 *Soient $(N(S), S)$ et $(N(S'), S')$ deux sections d'un p-groupe P et soit $x \in P$. Alors les $(N(S)/S, N(S')/S')$-bi-ensembles*

$$\hat{S}\backslash N(S)xN(S')/S' \quad \text{et} \quad \hat{S}\backslash N(S) \times_{S\backslash N(S)} S\backslash N(S)xN(S')/S'$$

sont isomorphes.

Preuve. Considérons

$$\begin{array}{rccc} \phi: & \hat{S}\backslash N(S)xN(S')/S' & \to & \hat{S}\backslash N(S)\times_{S\backslash N(S)} S\backslash N(S)xN(S')/S' \\ & \hat{S}nxn'S' & \mapsto & (\hat{S}; Snxn'S') \end{array}$$

L'application ϕ est bien définie : si $\hat{S}nxn'S' = \hat{S}mxm'S'$, alors il existe $\hat{s}\in\hat{S}$ tel que $S\hat{s}nxn'S' = Smxm'S'$. Par suite

$$\begin{aligned}\phi(\hat{S}nxn'S') = (\hat{S}; Snxn'S') = (\hat{S}\cdot(S\hat{s}); Snxn'S') = (\hat{S}; (S\hat{s})\cdot Snxn'S') \\ = (\hat{S}; S\hat{s}nxn'S') = (\hat{S}; Smxm'S') = \phi(\hat{S}mxm'S').\end{aligned}$$

L'application ϕ est injective : si $\phi(\hat{S}nxn'S') = \phi(\hat{S}mxm'S')$, alors il existe $Sl\in S\backslash N(S)$ tel que $(\hat{S}l, Sl^{-1}nxn'S') = (\hat{S}, Smxm'S')$. Ainsi $l\in\hat{S}$ et $\hat{S}nxn'S' = \hat{S}mxm'S'$. De plus ϕ est surjective car $(\hat{S}l; Snxn'S') = \phi(\hat{S}lnxn'S')$ quel que soit $l,n\in N(S)$ et $n'\in N(S')$. Les vérifications qu'il s'agit bien d'un homomorphisme de $(N(S)/S, N(S')/S')$-bi-ensembles sont faciles. □

Voici un lemme crucial dont la preuve ci-dessous est une petite adaptation de la preuve du théorème 6.1 de [5].

Lemme 3.14 *Soient S et S' deux sous-groupes génétiques et soit $u\in T_t(N(S')/S')$. Si $D(b_S)D(a_{S'})(u)\neq 0$, alors $S \longrightarrow_P S'$.*

Preuve. En utilisant les résultats du paragraphe 3 de [8] qui donnent le lien entre $D(U)D(V)$ et $D(U\circ V)$ où U et V sont des bi-ensembles (et surtout le fait qu'en général ils sont égaux sauf lorsque l'on compose l'induction tensorielle suivie de la déflation où le phénomène de torsion de Galois apparaît comme expliqué dans les préliminaires), et en calculant des composées de bi-ensembles adéquats, on obtient (pour les détails voir la preuve du théorème 6.1 de [5])

$$D(S\backslash P)D(P/S') = \sum_{x\in[N(S)\backslash P/N(S')]} \gamma_{|S:S\cap {}^xN(S')|} D(S\backslash N(S)xN(S')/S')$$

et de même

$$D(S\backslash P)D(P/\hat{S}') = \sum_{x\in[N(S)\backslash P/N(S')]} \gamma_{|S:S\cap {}^xN(S')|} D(S\backslash N(S)xN(S')/\hat{S}').$$

Donc si $D(S\backslash P)D(a_{S'})(u)\neq 0$, il existe $y\in P$ tel que $Sy\hat{S}'\neq SyS'$ ou de manière équivalente, $\hat{S}'\cap S^y\subseteq S'$. Le même argument montre que si $D(\hat{S}\backslash P)D(a_{S'})(u)\neq 0$, alors il existe $y\in P$ tel que $\hat{S}'\cap\hat{S}^y\subseteq S'$, ce qui implique $\hat{S}'\cap S^y\subseteq S'$.

D'un autre côté, comme $D(b_S) = D(S\backslash P) - D(\hat{S}\backslash P)$ et vu que par hypothèse $D(b_S)D(a_{S'})(u)\neq 0$, alors il existe $y\in P$ tel que $\hat{S}'\cap S^y\subseteq S'$. Comme $u\in T_t(N(S')/S')$, on a $\mathrm{Def}^{N(S')/S'}_{N(S')/\hat{S}'} u = 0$ et donc

$$D(P/\hat{S}')(u) = \mathrm{Teninf}^P_{N(S')/\hat{S}'}\,\mathrm{Def}^{N(S')/S'}_{N(S')/\hat{S}'}(u) = 0.$$

Ainsi $D(b_S)D(a_{S'})(u) = D(b_S)D(P/S')(u)$ et par les mêmes calculs que ci-dessus, c'est égal à

$$\sum_{x\in[N(S)\backslash P/N(S')]} \big(\gamma_{|S:S\cap {}^xN(S')|}D(S\backslash N(S)xN(S')/\hat{S}')(u) \\ - \gamma_{|\hat{S}:\hat{S}\cap {}^xN(S')|}D(\hat{S}\backslash N(S)xN(S')/\hat{S}')(u)\big).$$

Comme c'est non nul par hypothèse, au moins une des deux assertions suivantes est vérifiée :

- Il existe $x \in P$ tel que $|S : S\cap {}^xN(S')| \neq |\hat{S} : \hat{S}\cap {}^xN(S')|$ ou de manière équivalente $|\hat{S} : S| = p \neq |\hat{S} \cap {}^xN(S') : S \cap {}^xN(S')|$, ainsi $\hat{S} \cap {}^xN(S') \subseteq S$. Cela implique $\hat{S} \cap {}^xS' \subseteq S$.
- Il existe $x \in P$ tel que $\hat{S}xS' \neq SxS'$, ou de manière équivalente, $\hat{S} \cap {}^xS' \subseteq S$.

Dans les deux cas, il existe $x \in P$ tel que $\hat{S}\cap {}^xS' \subseteq S$. Ainsi nous avons prouvé l'existence de x et y dans P tels que $\hat{S} \cap {}^xS' \subseteq S$ et $\hat{S}' \cap S^y \subseteq S'$. Mais ce sont exactement les hypothèses du lemme 4.5 de [5], qui affirme que si ces conditions sont remplies, alors $S \longrightarrow_P S'$. □

Lemme 3.15 *Soient S' un sous-groupe de P, $x \in P$ et supposons que S est un sous-groupe génétique de P de type quaternion généralisé. Alors*

$$\hat{S} \cap {}^xS' \subseteq S \text{ si et seulement si } N(S) \cap {}^xS' \subseteq S.$$

Preuve. Comme $\hat{S} \subseteq N(S)$, l'inclusion $N(S) \cap {}^xS' \subseteq S$ implique $\hat{S} \cap {}^xS' \subseteq S$. Réciproquement, supposons $N(S) \cap {}^xS' \not\subseteq S$. Alors $\hat{S} \subseteq (N(S) \cap {}^xS')S$ puisque $\hat{S}/S$ est le seul sous-groupe d'ordre 2 de $N(S)/S$. Donc

$$\hat{S} = (N(S) \cap {}^xS' \cap \hat{S})S = (\hat{S} \cap {}^xS')S,$$

et donc $\hat{S} \cap {}^xS' \not\subseteq S$. □

Proposition 3.16 *Soient S et S' deux sous-groupes génétiques de P de type quaternion généralisé. Supposons que $S \longrightarrow_P S'$. Soit encore $u \in T_t(N(S')/S')$. Alors*

$$D(b_S)D(a_{S'})(u) = \gamma_{|S:S\cap {}^{x_0}N(S')|} \operatorname{Iso}^{N(S)/S}_{N(S')/S'}(u)$$

où $x_0 \in P$ est tel que $S \longrightarrow {}^{x_0}S'$.

Preuve. Comme avant, $u \in T_t(N(S')/S')$ implique $D(P/\hat{S}')(u) = 0$. Donc $D(a'_S)(u) = D(P/S')(u)$. Ainsi par un calcul déjà fait dans la preuve du lemme 3.14, on a

$$D(b_S)D(a_{S'})(u) = \sum_{x\in[N(S)\backslash P/N(S')]} \big(\gamma_{|S:S\cap {}^xN(S')|}D(S\backslash N(S)xN(S')/S')(u) \\ - \gamma_{|\hat{S}:\hat{S}\cap {}^xN(S')|}D(\hat{S}\backslash N(S)xN(S')/S')(u)\big).$$

De nouveau par le même argument que dans la preuve du lemme 3.14, c'est non nul si et seulement s'il existe $x \in P$ tel que $\hat{S} \cap {}^{x}S' \subseteq S$. Par le lemme 3.15, c'est équivalent à $N(S) \cap {}^{x}S' \subseteq S$. Or, comme par hypothèse $S \longrightarrow_P S'$, il existe une unique double classe $N(S)x_0S'$ telle que $N(S) \cap {}^{x_0}S' \subseteq S$, et $S \longrightarrow_P {}^{x_0}S'$ ([5] lemme 4.7). Donc la somme se réduit à un seul terme, celui correspondant à x_0 liant S et S'. De plus, par le lemme 3.13

$$D(\hat{S}\backslash N(S)x_0N(S')/S') = D(\hat{S}\backslash N(S) \times_{S\backslash N(S)} S\backslash N(S)x_0N(S')/S').$$

Grâce à la remarque 3.12, $S\backslash N(S)x_0N(S')/S' \cong N(S)/S$, ainsi il n'y a pas de "Ten" dans ces bi-ensembles (et donc il n'y a pas de torsion de Galois qui apparaît ou autrement dit D se comporte comme un foncteur de bi-ensemble). Par suite,

$$\begin{aligned} D(\hat{S}\backslash N(S) \times_{S\backslash N(S)} S\backslash N(S)x_0N(S')/S') &= D(\hat{S}\backslash N(S))D(N(S)/S) \\ &= \mathrm{Inf}_{N(S)/\hat{S}}^{N(S)/S} \mathrm{Def}_{N(S)/\hat{S}}^{N(S)/S} \mathrm{Iso}_{N(S')/S'}^{N(S)/S}. \end{aligned}$$

Mais $\mathrm{Iso}_{N(S')/S'}^{N(S)/S}(u) \in T(N(S)/S)$ et donc $\mathrm{Def}_{N(S)/\hat{S}}^{N(S)/S} \mathrm{Iso}_{N(S')/S'}^{N(S)/S}(u) = 0$. On a donc bien

$$\begin{aligned} D(b_S)D(a_{S'})(u) &= \gamma_{|S:S\cap {}^{x_0}N(S')|} D(S\backslash N(S)x_0N(S')/S')(u) \\ &= \gamma_{|S:S\cap {}^{x_0}N(S')|} \mathrm{Iso}_{N(S')/S'}^{N(S)/S}(u). \end{aligned}$$

□

Proposition 3.17 *Soient S et S' des sous-groupes génétiques de P de type quaternion généralisé. Si $S \longrightarrow_P S'$, alors*

$$\mathrm{Teninf}_{N(S)/S}^{P}(\eta(S,1)) = \mathrm{Teninf}_{N(S')/S'}^{P}(\eta(S',\varepsilon))$$

et

$$\mathrm{Teninf}_{N(S)/S}^{P}(\eta(S,-1)) = \mathrm{Teninf}_{N(S')/S'}^{P}(\eta(S',-\varepsilon))$$

pour un $\varepsilon \in \{\pm 1\}$.

Preuve. Soient $v_S \in T(N(S)/S)$ et $v_{S'} \in T(N(S')/S')$. Comme $D(P/\hat{S})(v_S) = 0$, $\mathrm{Teninf}_{N(S)/S}^{P}(v_S) = D(a_S)(v_S)$. De même $\mathrm{Teninf}_{N(S')/S'}^{P}(v_{S'}) = D(a_{S'})(v_{S'})$. Soit $\mathcal{S}$ une base génétique contenant S. Notons i l'injection canonique de $T(N(S)/S)$ dans $\oplus_{R\in\mathcal{S}} T(N(R)/R)$; on a $D(a_S)(v_S) = \mathcal{I}_{\mathcal{S}}(i(v_S))$, où $\mathcal{I}_{\mathcal{S}} = \oplus_{S\in\mathcal{S}} D(a_S)$ est l'isomorphisme défini dans le théorème 1.48. Maintenant, par le lemme 3.14, si $R \in \mathcal{S}$ est tel que $R \not\longrightarrow_P S$ (et donc $R \not\longrightarrow_P S'$)

$$D(b_R)D(a_S)(v_S) = 0 = D(b_R)D(a_{S'})(v_{S'}).$$

Donc en appliquant $\mathcal{D}_{\mathcal{S}} = \oplus_{S\in\mathcal{S}} D(b_S)$ qui est l'inverse de $\mathcal{I}_{\mathcal{S}}$, on obtient

$$\mathcal{D}_{\mathcal{S}}(\mathrm{Teninf}_{N(S)/S}^{P}(v_S)) = \mathcal{D}_{\mathcal{S}}(D(a_S)(v_S)) = \mathcal{D}_{\mathcal{S}}(\mathcal{I}_{\mathcal{S}}(i(v_S))) = i(v_S) \tag{3.17.1}$$

et

$$\mathcal{D}_{\mathcal{S}}(\mathrm{Teninf}^{P}_{N(S')/S'}(v_{S'})) = i(D(b_S)D(a_{S'})(v_{S'})). \tag{3.17.2}$$

Si $v_{S'} = \eta(S', 1)$, alors par la proposition 3.16,

$$D(b_S)D(a_{S'})(\eta(S', 1)) = \gamma_{|S:S\cap {}^xN(S')|}\,\mathrm{Iso}^{N(S)/S}_{N(S')/S'}(\eta(S', 1)) = \eta(S, \varepsilon),$$

pour $\varepsilon \in \{\pm 1\}$ suivant $|S : S \cap {}^xN(S')|$ et suivant le choix que l'on a fait pour $\eta(S, 1)$ et $\eta(S', 1)$. En effet, si l est un entier impair, γ_{2l} échange $\eta(S, 1)$ et $\eta(S, -1)$ (cf. [8] exemple 3.4). Remarquons que l'égalité $D(b_S)D(a_{S'})(\eta(S', 1)) = \eta(S, \varepsilon)$ implique $D(b_S)D(a_{S'})(\eta(S', \varepsilon)) = \eta(S, 1)$ et $D(b_S)D(a_{S'})(\eta(S', -\varepsilon)) = \eta(S, -1)$. Par suite en prenant $v_S = \eta(S, 1)$ dans 3.17.1 et $v_{S'} = \eta(S', \varepsilon)$ dans 3.17.2, on a

$$\mathcal{D}_{\mathcal{S}}(\mathrm{Teninf}^{P}_{N(S)/S}(\eta(S, 1))) = i(\eta(S, 1)) = \mathcal{D}_{\mathcal{S}}(\mathrm{Teninf}^{P}_{N(S')/S'}(\eta(S', \varepsilon)))$$

ce qui prouve la première égalité, vu que $\mathcal{D}_{\mathcal{S}}$ est un isomorphisme. De manière similaire en posant $v_S = \eta(S, -1)$ dans 3.17.1 et $v_{S'} = \eta(S', -\varepsilon)$ dans 3.17.2, on démontre la deuxième égalité. □

Définissons maintenant une action de N sur la base génétique fixée $\mathcal{S}$.

Définition 3.18 *Si $S \in \mathcal{S}$ et $g \in N$, alors $g * S$ est l'unique élément de $\mathcal{S}$ tel que $g * S \,—_P\, {}^gS$.*

Lemme 3.19 *L'opération de N sur $\mathcal{S}$ définie ci-dessus est une action de groupe.*

Preuve. Clairement $1 * S = S$. Soient $g, h \in N$. Alors

$$(gh) * S \,—_P\, {}^{(gh)}S = {}^g({}^hS) \,—_P\, {}^g(h * S) \,—_P\, g * (h * S),$$

la "liaison" du milieu provenant du fait général suivant : si T et T' sont deux sous-groupes génétiques tels que $T \,—_P\, T'$, alors il existe $x \in P$ tel que $T \,—\, {}^xT'$ et par suite ${}^gT \,—\, {}^{{}^gx}({}^gT')$. Or comme ${}^gx \in P$, ${}^gT \,—_P\, {}^gT'$. Alors $(gh) * S$ et $g * (h * S)$ sont deux éléments de $\mathcal{S}$ liés modulo P , donc ils sont égaux et $*$ est bien une action du groupe N sur $\mathcal{S}$. □

Voici un petit résultat sur les bi-ensembles qui va nous permettre de faire "commuter" l'action de N avec l'homomorphisme Teninf .

Lemme 3.20 *Soient $\varphi : P \to P'$ un isomorphisme de groupes, T un sous-groupe de P, R un sous-groupe normal de P et notons $T' = \varphi(T)$ et $R' = \varphi(R)$. Alors comme bi-ensembles, on a les isomorphismes suivants :*

$$\mathrm{Iso}^{P'}_{P} \circ \mathrm{Ind}^{P}_{T} \cong \mathrm{Ind}^{P'}_{T'} \circ \mathrm{Iso}^{T'}_{T}, \quad \mathrm{Iso}^{P'}_{P} \circ \mathrm{Inf}^{P}_{P/R} \cong \mathrm{Inf}^{P'}_{P'/R'} \circ \mathrm{Iso}^{P'/R'}_{P/R},$$

$$\mathrm{Res}^{P}_{T} \circ \mathrm{Iso}^{P}_{P'} \cong \mathrm{Iso}^{T}_{T'} \circ \mathrm{Res}^{P'}_{T'} \quad \text{et} \quad \mathrm{Def}^{P}_{P/R} \circ \mathrm{Iso}^{P}_{P'} \cong \mathrm{Iso}^{P/R}_{P'/R'} \circ \mathrm{Def}^{P'}_{P'/R'}.$$

Preuve. Pour le premier isomorphisme, considérons

$$\begin{array}{rrcll} \alpha : & \mathrm{Iso}_P^{P'} \circ \mathrm{Ind}_T^P = {}_{P'}P' \times_P P_T & \to & {}_{P'}P' \times_{T'} T'_T & = \mathrm{Ind}_{T'}^{P'} \circ \mathrm{Iso}_T^{T'} \\ & (x' ;_P y) & \mapsto & (x'\varphi(y) ;_{T'} 1). & \end{array}$$

Tout d'abord, notons que α est bien défini. Si $(x';_P y) = (\tilde{x}';_P \tilde{y})$, alors il existe $g \in P$ tel que $(x', y) = (\tilde{x}'\varphi(g), g^{-1}\tilde{y})$. Par suite $x'\varphi(y) = \tilde{x}'\varphi(g)\varphi(g^{-1})\varphi(\tilde{y}) = \tilde{x}'\varphi(\tilde{y})$ et ainsi α est bien défini. L'application α est surjective car si $(x';_{T'} t') \in {}_{P'}P' \times_{T'} T'_T$, alors $(x';_{T'} t') = (x't';_{T'} 1) = \alpha(x';_P \varphi^{-1}(t'))$. Aussi α est injective car si $(x'\varphi(y);_{T'} 1) = (\tilde{x}'\varphi(\tilde{y});_{T'} 1)$, alors $x'\varphi(y) = \tilde{x}'\varphi(\tilde{y})$ et donc dans ${}_{P'}P' \times_P P_T$ on a

$$(x';_P y) = (x'\varphi(y);_P 1) = (\tilde{x}'\varphi(\tilde{y});_P 1) = (\tilde{x}';_P \tilde{y}).$$

Vérifions que c'est un homomorphisme de T-ensembles à droite :

$$\begin{aligned} \alpha((x';_P y) * t) = \alpha(x';_P yt) = (x'\varphi(yt);_{T'} 1) = (x'\varphi(y);_{T'} \varphi(t)) = (x'\varphi(y);_{T'} 1) * t = \\ = (\alpha(x';_P y)) * t. \end{aligned}$$

Enfin il est facile de vérifier que c'est un homomorphisme de P'-ensembles à gauche.

Pour le deuxième isomorphisme, notons $\bar{P} = P/R$ et $\bar{P}' = P'/R'$ et considérons

$$\begin{array}{rrcll} \beta : & \mathrm{Iso}_P^{P'} \circ \mathrm{Inf}_{\bar{P}}^P = {}_{P'}P' \times_P \bar{P}_{\bar{P}} & \to & {}_{P'}\bar{P}' \times_{\bar{P}'} \bar{P}'_{\bar{P}} & = \mathrm{Inf}_{\bar{P}'}^{P'} \circ \mathrm{Iso}_{\bar{P}}^{\bar{P}'} \\ & (x';_P yR) & \mapsto & (x'R';_{\bar{P}'} \varphi(y)R'). & \end{array}$$

De nouveau, vérifions que β est bien défini. Si $(x';_P yR) = (\tilde{x}';_P \tilde{y}R)$ alors il existe $g \in P$ tel que $(x', yR) = (\tilde{x}'\varphi(g), g^{-1}\tilde{y}R)$. Ainsi

$$(x'R', \varphi(y)R') = (\tilde{x}'\varphi(g)R', \varphi(g^{-1}\tilde{y})R') = (\tilde{x}'R' * \varphi(g)R', \varphi(g)^{-1}R' * \varphi(\tilde{y})R')$$

et donc $(x'R';_{\bar{P}'} \varphi(y)R') = (\tilde{x}'R';_{\bar{P}'} \varphi(\tilde{y})R')$ dans ${}_{P'}\bar{P}' \times_{\bar{P}'} \bar{P}'_{\bar{P}}$. La surjectivité de β est évidente. Montrons donc l'injectivité. Si $(x'R';_{\bar{P}'} \varphi(y)R') = (\tilde{x}'R';_{\bar{P}'} \varphi(\tilde{y})R')$, alors il existe $g' \in P'$ tel que $(x'R', \varphi(y)R') = (\tilde{x}'g'R', g'^{-1}\varphi(\tilde{y})R')$ et par suite il existe $r \in R$ tel que $x' = \tilde{x}'g'\varphi(r)$. Ainsi dans ${}_{P'}P' \times_P \bar{P}_{\bar{P}}$ on a

$$\begin{aligned} (x';_P yR) = (\tilde{x}'g'\varphi(r);_P (\varphi^{-1}(g'^{-1})\tilde{y})R) = (\tilde{x}' * (\varphi^{-1}(g')r);_P \varphi^{-1}(g'^{-1}) * \tilde{y}R) = \\ = (\tilde{x}' * \varphi^{-1}(g');_P \varphi^{-1}(g'^{-1}) * \tilde{y}R) = (\tilde{x}';_P \tilde{y}R). \end{aligned}$$

Pour finir il est facile de vérifier que c'est un isomorphisme de bi-ensembles.

Pour les deux derniers isomorphismes on utilise les deux premiers isomorphismes et l'on passe simplement aux bi-ensembles opposés. On obtient bien

$$\mathrm{Res}_T^P \circ \mathrm{Iso}_{P'}^P = (\mathrm{Iso}_P^{P'} \circ \mathrm{Ind}_T^P)^{\mathrm{op}} \cong (\mathrm{Ind}_{T'}^{P'} \circ \mathrm{Iso}_T^{T'})^{\mathrm{op}} = \mathrm{Iso}_{T'}^T \circ \mathrm{Res}_{T'}^{P'}$$

et de même

$$\mathrm{Def}_{P/R}^P \circ \mathrm{Iso}_{P'}^P = (\mathrm{Iso}_P^{P'} \circ \mathrm{Inf}_{P/R}^P)^{\mathrm{op}} = (\mathrm{Inf}_{P'/R'}^{P'} \circ \mathrm{Iso}_{P/R}^{P'/R'})^{\mathrm{op}} = \mathrm{Iso}_{P'/R'}^{P/R} \circ \mathrm{Def}_{P'/R'}^{P'}.$$

□

Corollaire 3.21 *Soient N un groupe agissant sur P, $g \in N$ et soit S un sous-groupe de P. Alors $\mathrm{Iso}_g \circ \mathrm{Indinf}_{N(S)/S}^P \cong \mathrm{Indinf}_{N({}^gS)/{}^gS}^P \circ \mathrm{Iso}_{N(S)/S}^{N({}^gS)/{}^gS}$ comme $(P, N(S)/S)$-bi-ensembles.*

Preuve. On utilise les deux premiers isomorphismes du lemme précédent et le fait que ${}^gN(S) = N({}^gS)$. On obtient

$$\mathrm{Iso}_g \circ \mathrm{Indinf}_{N(S)/S}^P \cong \mathrm{Ind}_{N({}^gS)}^P \,\mathrm{Iso}_{N(S)}^{N({}^gS)} \circ \mathrm{Inf}_{N(S)/S}^{N(S)} \cong \mathrm{Indinf}_{N({}^gS)/{}^gS}^P \circ \mathrm{Iso}_{N(S)/S}^{N({}^gS)/{}^gS} .$$

□

Lemme 3.22 *Soit $S \in \mathcal{Q}$. Si $g \in N$, alors ${}^g\Lambda(S,1) = \Lambda(g * S, \varepsilon)$ pour $\varepsilon \in \{\pm 1\}$.*

Preuve. Par le corollaire ci-dessus,

$${}^g\Lambda(S,1) = \mathrm{Teninf}_{N({}^gS)/{}^gS}^P \,\mathrm{Iso}_{N(S)/S}^{N({}^gS)/{}^gS}\, \eta(S,1).$$

De plus, $\mathrm{Iso}_{N(S)/S}^{N({}^gS)/{}^gS}\, \eta(S,1)$ doit être un élément exotique d'ordre 2 de $T(N({}^gS)/{}^gS)$, donc $\mathrm{Iso}_{N(S)/S}^{N({}^gS)/{}^gS}\, \eta(S,1) = \eta({}^gS, \varepsilon')$ pour un $\varepsilon' \in \{\pm 1\}$. Maintenant, par définition, ${}^gS \,—_P\, g{*}S$ et donc par la proposition 3.17

$$\mathrm{Teninf}_{N({}^gS)/{}^gS}^P \,\eta({}^gS, \varepsilon') = \mathrm{Teninf}_{N(g*S)/(g*S)}^P \,\eta(g * S, \varepsilon) = \Lambda(g * S, \varepsilon)$$

pour $\varepsilon \in \{\pm 1\}$. □

Rappelons que, par le théorème 3.10, il existe une suite exacte de $\mathbb{Z}$-modules :

$$0 \to K \xrightarrow{j} B^*(P) \oplus E \xrightarrow{\Psi} D(P) \to 0 \qquad (3.22.1)$$

On va maintenant définir une action de N sur E de telle sorte que j et Ψ soient des homomorphismes de $\mathbb{Z}N$-modules. On définit la structure comme suit :

$$g * (T, \varepsilon) = (g * T, g * \varepsilon), \quad \forall g \in N,\ \forall (T, \varepsilon) \in E,$$

où $g * \varepsilon$ est défini par l'égalité ${}^g\Lambda(T, \varepsilon) = \Lambda(g * T, g * \varepsilon)$. Notons que cette définition est possible grâce au lemme précédent.

Lemme 3.23 *Les applications j et Ψ de la suite 3.22.1 sont des homomorphismes de $\mathbb{Z}N$-modules.*

Preuve. Pour j c'est évident vu que sur $R_{\mathbb{Q}}^*(P)$, $j = i$ qui est un homomorphisme de $\mathbb{Z}N$-modules et sur E, j est l'identité. Donc j est un homomorphisme de $\mathbb{Z}N$-modules.

Pour Ψ, il suffit aussi de regarder ce qui se passe sur E, car Θ_P est un homomorphisme de $\mathbb{Z}N$-modules. Or sur E, on a tout fait pour que ça marche. En effet,

$$\Psi(g * (T, \varepsilon)) = \Psi((g * T, g * \varepsilon)) = \Lambda(g * T, g * \varepsilon) = {}^g\Lambda(T, \varepsilon) = {}^g\Psi((T, \varepsilon))$$

quel que soit $g \in N$ et $(T, \varepsilon) \in E$. □

Théorème 3.24 *Supposons p=2. Soient K et E comme dans la suite 3.22.1 munis de leur structure de $\mathbb{Z}N$-modules définies ci-dessus. Alors la suite des points N-fixes*

$$0 \to K^N \to B^*(P)^N \oplus E^N \to D(P)^N \to 0$$

est exacte.

Preuve. Notons tout d'abord que $(B^*(P) \oplus E)^N = B^*(P)^N \oplus E^N$ car c'est une somme directe de $\mathbb{Z}N$-modules. Par le théorème 3.10 et comme j et Ψ sont des homomorphismes de $\mathbb{Z}N$-modules, il suffit de montrer la surjectivité de Ψ restreint aux points fixes. Par le lemme 3.4, il suffit donc de démontrer que K est un $\mathbb{Z}N$-module de permutation (même argument que dans le théorème 3.6, une suite exacte courte induit une suite exacte longue en cohomologie et les points fixes correspondent à la cohomologie en degré 0). Notons que si $V(S) \in R_{\mathbb{Q}}(P)$ et $g \in N$, on a, grâce au corollaire 3.21

$$\begin{aligned} {}^gV(S) = {}^g(\mathrm{Indinf}^P_{N(S)/S}\, \Phi_{N(S)/S}) &= \mathrm{Indinf}^P_{N({}^gS)/{}^gS}\, \mathrm{Iso}^{N({}^gS)/{}^gS}_{N(S)/S}\, \Phi_{N(S)/S} = \\ &= \mathrm{Indinf}^P_{N({}^gS)/{}^gS}\, \Phi_{N({}^gS)/{}^gS} = V({}^gS). \end{aligned}$$

Ainsi, en passant au dual, on a ${}^gV^*(S) = V^*({}^gS)$. De plus $V^*({}^gS) = V^*(g * S)$ vu que $g * S \frac{\quad}{}_P\, {}^gS$. Remarquons encore que si $g \in N$, $g * S$ est de même type que ${}^gS$ vu qu'ils sont liés. Par suite ils sont de même type que S. Ainsi ${}^g(\tau_S V^*(S)) = \tau_S V^*(g * S)$ est bien dans la base de K donnée. Aussi si $T \in \mathcal{Q}$ et $\varepsilon \in \{\pm 1\}$, $g * (T, \varepsilon) = (g * T, g * \varepsilon)$ avec $g * T \in \mathcal{Q}$ vu que $g * T \frac{\quad}{}_P\, {}^gT$ et on a évidemment $g * \varepsilon \in \{\pm 1\}$. Enfin toujours pour $T \in \mathcal{Q}$,

$$\begin{aligned} g * U(T) &= g * ((T, 1) + (T, -1) + 2V^*(T)) \\ &= (g * T, g * 1) + (g * T, g * (-1)) + 2\,{}^gV^*(T) \\ &= (g * T, g * 1) + (g * T, g * (-1)) + 2V^*(g * T) \end{aligned}$$

est dans la base de K donnée vu que si $g * (T, 1) = (g * T, \varepsilon)$, $\varepsilon \in \{\pm 1\}$, alors $g * (T, -1) = (g * T, -\varepsilon)$. □

Corollaire 3.25 *Si $p = 2$, les éléments de $D(P)^{N_G(P)}$ s'écrivent comme combinaisons $\mathbb{Z}$-linéaires de sommes d'orbites de syzygies relatives et de sommes d'orbites de $\Lambda(T, \varepsilon)$ $T \in \mathcal{Q}$, $\varepsilon \in \{\pm 1\}$. Explicitement, les éléments de $D(P)^{N_G(P)}$ sont combinaisons linéaires d'éléments de la forme*

$$\sum_{g \in [N_G(P)/P \cdot N_G(P,Q)]} \Omega_{P/{}^gQ} \quad \text{et} \quad \sum_{g \in [N_G(P)/N_G(P)_{\Lambda(T,\varepsilon)}]} {}^g\Lambda(T, \varepsilon),$$

où $N_G(P, Q) = \{g \in N_G(P) \mid {}^gQ = Q\}$ et $N_G(P)_{\Lambda(T,\varepsilon)}$ est le stabilisateur dans $N_G(P)$ de $\Lambda(T, \varepsilon)$.

Preuve. L'argument est similaire à celui du corollaire 3.7. Cela provient du fait que $B^*(P)$ et E sont libres et que, grâce au théorème précédent, l'homomorphisme Ψ restreint aux points fixes $B^*(P)^{N_G(P)} \oplus E^{N_G(P)} \to D(P)^{N_G(P)}$ est surjectif. De plus, le stabilisateur dans $N_G(P)$ de $\omega_{P/Q} \in B^*(P)$ est $N_G(P,Q)$. Montrons encore que le stabilisateur de $(T,\varepsilon) \in E$ coïncide avec le stabilisateur de $\Lambda(T,\varepsilon)$. L'élément $g \in N_G(P)$ stabilise (T,ε) si et seulement si ${}^gT \frac{\quad}{}_P T$ et $g{*}\varepsilon = \varepsilon$, c'est-à-dire si et seulement si ${}^g\Lambda(T,\varepsilon) = \Lambda(T,\varepsilon)$. $\square$

Remarque 3.26 *Dans le corollaire ci-dessus, on a pu décrire explicitement le stabilisateur dans $N_G(P)$ de $\omega_{P/Q}$ en fonction de P et Q. On serait tenté d'espérer quelque chose de semblable pour le stabilisateur de $\Lambda(T,\varepsilon)$. En fait, le stabilisateur de $\Lambda(T,\varepsilon)$ est le stabilisateur de la classe d'équivalence de T modulo la relation $\frac{\quad}{}_P$ ou un sous-groupe d'indice 2 de ce stabilisateur. En effet, si $g \in N_G(P)$ est tel que ${}^gT \frac{\quad}{}_P T$, alors ${}^g\Lambda(T,\varepsilon) = \Lambda(T,\pm\varepsilon)$ et par conséquent, g^2 stabilise $\Lambda(T,\varepsilon)$. Réciproquement si g stabilise $\Lambda(T,\varepsilon)$, alors on doit avoir ${}^gT \frac{\quad}{}_P T$.*

Remarquons encore que $P\cdot N_G(P,T)$ est contenu dans le stabilisateur de la classe de T modulo $\frac{\quad}{}_P$. Mais nous montrerons dans le paragraphe 4.1 qu'en général ce stabilisateur peut être plus grand que $P \cdot N_G(P,T)$.

Chapitre 4

Extension des modules d'endo-permutation

4.1 Sur l'extension des modules d'endo-permutation

Ce paragraphe est dévolu à la démonstration, dans le cas où p est impair, d'un théorème non publié de E. Dade sur l'extension des modules d'endo-permutation. Pour ce faire nous utiliserons les résultats du paragraphe 3.1. On peut trouver une autre preuve de ce théorème dans [19].

Commençons par une définition.

Définition 4.1 *Soient G un groupe fini, H un sous-groupe de G et M un kH-module. On dit que M* ***s'étend*** *à G s'il existe un kG-module $\tilde{M}$ tel que $\tilde{M}\downarrow_H^G \cong M$.*

Si H est un sous-groupe normal de G et M un kH-module qui s'étend à G, alors clairement M est **G-invariant**, i.e. ${}^gM \cong M$ pour tout $g \in G$. Cette condition nécessaire n'est en général pas suffisante mais elle l'est pour les kP-modules d'endo-permutation si P est un p-sous-groupe de Sylow de G.

Voici le théorème de E. Dade sur l'extension des modules d'endo-permutation tel qu'énoncé dans [15].

Théorème 4.2 (Dade) *Soient G un groupe fini et P un p-sous-groupe de Sylow de G, normal dans G. Tout kP-module d'endo-permutation G-invariant s'étend en un kG-module (d'endo-p-permutation).*

Afin de démontrer ce théorème, nous allons utiliser un lemme clé prouvé par E. Dade toujours dans [15] qui réduira le problème à l'extension de certains modules d'endo-permutation.

Fixons tout d'abord quelques notations. Soient H un groupe fini et L un kH-module. Notons

$$\begin{aligned} C &= \mathrm{End}_k(L) \\ E &= C^H = \mathrm{End}_{kH}(L) \end{aligned}$$

Posons aussi

$$\bar{E} \quad = \quad E/J(E) = \bar{E}_1 \times \cdots \times \bar{E}_s \tag{4.2.1}$$

le quotient semi-simple de E par son radical, où les $\bar{E}_i$ sont les facteurs simples de $\bar{E}$.

Définition 4.3 *Soit M un facteur direct d'un kH-module L et notons e l'idempotent de $E = \mathrm{End}_{kH}(L)$ tel que $M \cong eL$. On dit que M* ***divise exactement*** *L si aucun facteur direct non-nul de M n'est isomorphe à un facteur direct non-nul de $(1-e)L$.*

Proposition 4.4 *Soient H un sous-groupe de G et L un kH-module. Si M est un kH-module facteur direct de L et $e \in E$ est un idempotent tel que $M \cong eL$, alors M divise exactement L si et seulement si $\bar{e} = e + J(E) \in E/J(E)$ est central dans $E/J(E)$. Dans ce cas, si $M \cong fL$ pour un autre idempotent, alors $\bar{e} = \bar{f}$.*

Preuve. Supposons que

$$L = \bigoplus_{i=1}^{n} e_i L$$

où $\sum_{i=1}^{n} e_i$ est une décomposition primitive orthogonale de 1_E, c'est-à-dire les e_iL, $1 \leq i \leq n$, sont les facteurs directs indécomposables de L. Comme $eL \cong M$ est un facteur direct de L, on a $eL \cong \oplus_{i\in S} e_iL$ où $S \subseteq \{1, \ldots, n\}$. Donc $\bar{e}$ est conjugué à $\sum_{i\in S} \bar{e}_i$. Soit s comme dans 4.2.1. Pour tout $j \in \{1, \ldots, s\}$, posons $S_j = \{i \,|\, 1 \leq i \leq n, \bar{e}_i \in \bar{E}_j\}$. Alors l'affirmation que M divise exactement L est équivalente à : pour tout $i \in S, S_i \subseteq S$, ce qui est équivalent à $S = \bigcup_{j\in J} S_j$ où $J \subseteq \{1, \ldots, s\}$. C'est encore équivalent à l'affirmation que $\bar{e}$ est conjugué à

$$\sum_{i\in S} \bar{e}_i = \sum_{j\in J} \sum_{i\in S_j} \bar{e}_i = \sum_{j\in J} 1_{\bar{E}_j}.$$

Or les idempotents centraux de $\bar{E}$ sont précisément les $\sum_{j\in J} 1_{\bar{E}_j}$ pour des sous-ensembles J de $\{1, \ldots, s\}$. Ainsi M divise exactement L si et seulement si $\bar{e}$ est central, ce qui prouve la première affirmation.
Pour la deuxième, il suffit de réaliser que $\bar{e}$ et $\bar{f}$ sont deux idempotents centraux conjugués, donc égaux. □

Lemme 4.5 (Dade) *Soit H un sous-groupe normal de G et supposons que $\bar{G} = G/H$ est un p'-groupe. Soient encore L un kG-module et M un kH-module G-invariant divisant exactement $L\!\downarrow^G_H$. Alors il existe une extension $\tilde{M}$ de M à G telle que $\tilde{M}$ soit un facteur direct de L. De plus, deux telles extensions sont isomorphes.*

Preuve. Comme H agit trivialement sur C^H, $\bar{G}$ agit sur C^H et $(C^H)^{\bar{G}} = C^G$. Par hypothèse M est un facteur direct de $L\!\downarrow^G_H$, donc il existe un idempotent $e \in C^H$ tel que $M \cong eL$. Soit $g \in G$, alors

$$M \cong {}^gM \cong {}^g(eL) \cong ({}^ge)L.$$

Ainsi $({}^{g}e)L$ est aussi un kH-facteur direct de $L{\downarrow}_H^G$. Comme M divise exactement $L{\downarrow}_H^G$, la proposition 4.4 implique que, dans le quotient $C^H/J(C^H)$, ${}^{g}\bar{e} = \overline{{}^{g}e} = \bar{e}$. Donc

$$\bar{e} \text{ est fixe par } \bar{G}. \tag{4.5.1}$$

Par hypothèse, $|\bar{G}|$ est inversible dans k. Considérons donc

$$c = |\bar{G}|^{-1} \sum_{x \in \bar{G}} {}^{x}e \in C^H.$$

Par construction, $c \in (C^H)^{\bar{G}} = C^G$ et par 4.5.1

$$c + J(C^H) = |\bar{G}|^{-1} \sum_{x \in \bar{G}} {}^{x}\bar{e} = \bar{e} \in C^H/J(C^H). \tag{4.5.2}$$

Comme $\bar{e}^2 = \bar{e}$, on a $c^2 \equiv c \mod J(C^H) \cap C^G$. Soit $\tilde{c}$ l'image de c dans $C^G/J(C^H) \cap C^G$. Par la propriété de relèvement des idempotents ([14] théorème 6.7), on peut relever $\tilde{c}$ dans C^G, disons sur c'. On a donc

$$c' \equiv c \mod (J(C^H) \cap C^G). \tag{4.5.3}$$

Ainsi,

$$c' + J(C^H) \overset{4.5.3}{=} c + J(C^H) \overset{4.5.2}{=} \bar{e}.$$

Donc $(c'L){\downarrow}_H^G \cong eL \cong M$. Ainsi en prenant $\tilde{M} = c'L$, on a bien que $\tilde{M}$ étend M à G.

Il reste à prouver que cette extension est unique à isomorphisme près. Soit M' une autre extension de M telle que M' soit un facteur direct de L. Alors $M' \cong fL$ pour un idempotent f de C^G. Par la deuxième assertion de la proposition 4.4, $e \equiv f \mod (J(C^H))$. Donc $e - f \in J(C^H) \cap C^G \subseteq J(C^G)$. Ainsi e et f ont la même image dans $C^G/J(C^G)$ et ainsi les modules $\tilde{M}$ et M' sont bien isomorphes. □

Nous allons maintenant étendre à G certains kP-modules d'endo-permutation où P est un p-sous-groupe de Sylow de G, puis nous appliquerons le lemme ci-dessus pour démontrer (dans le cas impair) que tous les kP-modules d'endo-permutation peuvent s'étendre à G.

Proposition 4.6 *Soit P un p-sous-groupe de Sylow de G et supposons que P est normal dans G. Soit Q un sous-groupe de P. Alors le kP-module $\Omega_{P/Q}(k)$ s'étend en un $kPN_G(Q)$-module.*

Preuve. Comme P est un p-sous-groupe de Sylow normal de G, par le théorème de Schur-Zassenhaus, il existe un complémentaire de P dans $PN_G(Q)$, explicitement, il existe un sous groupe H de $PN_G(Q)$ tel que $PN_G(Q) = P \rtimes H$. Nous allons montrer que le noyau de l'homomorphisme d'augmentation $k[PH/QH] \to k$ étend le kP-module $\Omega_{P/Q}(k)$. On a

$$k[PH/QH]{\downarrow}_P^{PH} \cong \bigoplus_{x \in [P \backslash PH/QH]} k[P/{}^{x}(QH) \cap P] \cong k[P/QH \cap P] = k[P/Q],$$

car $P\backslash PH/QH = \{PH\}$ vu que P est normal dans PH. Ainsi la suite exacte

$$0 \to M \to k[PH/QH] \to k \to 0$$

se restreint à P en

$$0 \to M\downarrow_P^{PH} \to k[P/Q] \to k \to 0.$$

Mais alors $M\downarrow_P^{PH} \cong \Omega_{P/Q}(k)$ et donc $\Omega_{P/Q}(k)$ s'étend à $PH = PN_G(Q)$. □

Corollaire 4.7 *Soit P un p-sous-groupe de Sylow normal de G et soit Q un sous-groupe de P. Le kP-module $L(Q) = \bigotimes_{g\in[G/PN_G(Q)]} \Omega_{P/{}^gQ}(k)$ s'étend en un kG-module.*

Preuve. Notons M_Q le $kPN_G(Q)$-module tel que $M_Q\downarrow_P^{PN_G(Q)} \cong \Omega_{P/Q}(k)$. Alors

$$\begin{aligned} M_Q\uparrow_{\otimes PN_G(Q)}^{G}\downarrow_P^G &\cong \bigotimes_{g\in[P\backslash G/PN_G(Q)]} {}^gM_Q\downarrow^{{}^g(PN_G(Q))}_{{}^g(PN_G(Q))\cap P}\uparrow_{\otimes}^{P} \\ &\cong \bigotimes_{g\in[G/PN_G(Q)]} {}^gM_Q\downarrow_P^{{}^g(PN_G(Q))} \\ &\cong \bigotimes_{g\in[G/PN_G(Q)]} \Omega_{P/{}^gQ}(k), \end{aligned}$$

le premier isomorphisme étant la formule de Mackey, le deuxième provenant du fait que P est normal dans G et que par suite ${}^g(PN_G(Q)) \cap P = P({}^gN_G(Q)) \cap P = P$ et enfin le dernier provenant du fait que M_Q étend $\Omega_{P/Q}(k)$ et par suite ${}^gM_Q$ étend ${}^g\Omega_{P/Q}(k) = \Omega_{P/{}^gQ}$. Ainsi $M_Q\uparrow_{\otimes PN_G(Q)}^{G}$ étend $L(Q)$ à G. □

Théorème 4.8 *Supposons p impair et soit P un p-sous-groupe de Sylow normal de G. Soit M un kP-module d'endo-permutation G-invariant, indécomposable de vortex P. Alors M s'étend en un kG-module.*

Preuve. Comme p est impair, $D(P) = D^{\Omega}(P)$. De plus comme M est G-invariant, sa classe $[M]$ dans le groupe de Dade est dans $D(P)^G$. Le corollaire 3.7 nous dit alors que

$$[M] = \sum_{Q\in\mathcal{U}} \lambda_Q \sum_{g\in[G/PN_G(Q)]} \Omega_{P/{}^gQ}$$

où $\lambda_Q \in \mathbb{Z}$ et $\mathcal{U}$ est une famille de sous-groupes de P. Or si L et N sont deux kP-modules d'endo-permutation indécomposables de vortex P, alors le chapeau $(L\otimes N)_*$ est un facteur direct de multiplicité 1 de $L \otimes N$ ([16] proposition 6.5). Dans notre cas, cela signifie que M divise exactement un module de la forme

$$L = \bigotimes_{Q\in\mathcal{U}} \bigotimes_{g\in[G/PN_G(Q)]} \Omega_{P/{}^gQ}(k)^{\otimes\lambda_Q}$$

où $\Omega_{P/{}^gQ}(k)^{\otimes\lambda_Q} = \Omega_{P/{}^gQ}(k) \otimes \cdots \otimes \Omega_{P/{}^gQ}(k)$, λ_Q termes si $\lambda_Q \geq 0$ et $\Omega_{P/{}^gQ}(k)^{\otimes -1} = \Omega_{P/{}^gQ}(k)^*$, le dual de $\Omega_{P/{}^gQ}(k)$. Or L s'étend à G car $\bigotimes_{g\in[G/PN_G(Q)]}(\Omega_{P/{}^gQ}(k))$ s'étend par le corollaire 4.7. On conclut alors grâce au lemme 4.5. □

Nous allons maintenant montrer en suivant l'approche de E. Dade dans [15] que dans le cas où P est un p-sous-groupe de Sylow normal dans G, le fait qu'un kP-module d'endo-permutation indécomposable G-invariant de vortex P s'étende implique que tout kP-module d'endo-permutation s'étend.

Notons que nous avons montré dans le théorème ci-dessus que les kP-modules d'endo-permutation G-invariants indécomposables s'étendent seulement dans le cas où p est impair. La preuve de E. Dade montre que le résultat est vrai en général. Nous ne distinguerons donc par la suite plus le cas $p = 2$ ou p impair et nous utiliserons le résultat plus général de E. Dade.

Proposition 4.9 *Soit P un p-sous-groupe de Sylow normal de G. Tout kP-module d'endo-permutation indécomposable G-invariant M s'étend à G.*

Preuve. Soit Q le vortex et S la source de M. Alors S est un kQ-module d'endo-permutation indécomposable de vortex Q. De plus $M \cong S\uparrow_Q^P$ ([16] théorème 6.6) . Comme M est G-invariant, ${}^gQ$ est un vortex et ${}^gS$ est une source de M pour tout $g \in G$. Or la paire (Q, S) est unique à conjugaison dans P près. Donc si $g \in G$, il existe $h_g \in P$ tel que ${}^{h_g}(Q, S) = {}^g(Q, S)$. Notons $N_G(Q, S)$ le stabilisateur dans G de la paire (Q, S). On a ainsi $g \in h_gN_G(Q, S)$. Par suite $G/P = PN_G(Q, S)/P$. Comme $N_G(Q, S) \cap P$ est un p-groupe et $N_G(Q, S)/N_G(Q, S) \cap P \cong N_G(Q, S)P/P = G/P$ est un p'-groupe, il existe un complément $H \cong G/P$ à $N_G(Q, S) \cap P$ dans $N_G(Q, S)$.

La source S qui est un kQ-module d'endo-permutation indécomposable de vortex Q est (QH)-invariante (car H est contenu dans $N_G(Q, S)$). Donc par le théorème 4.8, S s'étend en un $k(QH)$-module, noté $\tilde{S}$. Comme $(QH)P = G$ et $QH \cap P = Q$, on a

$$\tilde{S}\uparrow_{(QH)}^G\downarrow_P^G \cong \bigoplus_{g\in[P\backslash G/QH]} {}^gS\downarrow^{{}^g(QH)}_{{}^g(QH)\cap P}\uparrow^P \cong S\uparrow_Q^P \cong M$$

vu que $P\backslash G/QH = G/PH = \{G\}$. Donc M s'étend à G. □

Proposition 4.10 *Soit P un p-sous-groupe de Sylow normal de G. Tout kP-module d'endo-permutation G-invariant M s'étend à G.*

Preuve. Soit $M = M_1 \oplus \cdots \oplus M_n$ une décomposition de M en facteurs directs indécomposables. On va prouver le résultat par récurrence sur n. Si $n = 1$, alors le résultat est vrai par la proposition précédente. Supposons donc $n > 1$ et le résultat vrai pour $m < n$. Comme ${}^gM \cong M$ pour tout $g \in G$, on a, quel que soit $1 \leq i \leq n$, ${}^gM_i \cong M_j$ pour $1 \leq j \leq n$. On peut supposer, quitte à renuméroter, que $M_1, M_2, \ldots M_m$, $m \leq n$ sont tels que quel que soit $g \in G$, ${}^gM_1 \cong M_j$ avec $j \leq m$. Si $m < n$, alors $M = L \oplus N$ avec $L = \oplus_{i=1}^m M_i$ et $N = \oplus_{i=m+1}^n M_i$. Comme M et L sont G-invariants, N l'est aussi.

De plus L et N sont des modules d'endo-permutation car ce sont des facteurs directs de M qui en est un. Ainsi par hypothèse de récurrence L et N s'étendent à G et par suite M aussi. Maintenant si $m = n$, notons $G_1 = \{g \in G \,|\, {}^gM_1 \cong M_1\}$. Alors M_1 est un kP-module d'endo-permutation G_1-invariant. Par la proposition précédente, il existe un kG_1-module $\tilde{M_1}$ qui étend M_1. De plus comme G agit transitivement sur les classes d'isomorphisme de facteurs directs indécomposables de M, G induit des bijections entre ces classes, c'est-à-dire que chaque classe a le même nombre d'éléments, disons r. Alors toujours par transitivité sur les classes d'isomorphisme, on obtient

$$(\tilde{M_1})^r \uparrow_{G_1}^G \downarrow_P^G \cong \bigoplus_{g \in [G/G_1]} ({}^gM_1)^r \cong M.$$

Ainsi M s'étend à G. $\square$

Pour finir ce paragraphe, nous allons démontrer une proposition semblable à la proposition 4.6 pour les éléments "exotiques" de $D(P)$ d'ordre 2 à savoir les $\Lambda(S, \varepsilon)$. Nous allons montrer que l'on peut étendre leurs représentants à $PN_G(S)$.

Proposition 4.11 *Soit M un kQ_8-module d'endo-permutation indécomposable de vortex Q_8 et supposons que Q_8 est un 2-sous-groupe de Sylow normal de G. Alors M s'étend en un kG-module.*

Preuve. Par le théorème de Schur-Zassenhaus, $G = Q_8 \rtimes D$ où D est un $2'$-groupe. Rappelons que Q_8 a la présentation suivante : $Q_8 =< x, y \,|\, x^2 = y^2 = (xy)^2, x^4 = 1 >$. Soit $u \in D$, alors comme u est d'ordre impair, soit u permute les trois sous-groupes cycliques d'ordre 4 de Q_8 (sans en fixer), soit il les fixe tous. Dans ce deuxième cas, u normalise $<x>$ et donc u centralise $<x>$ car le groupe des automorphismes de $<x> \cong C_4$ est d'ordre 2 alors que u est d'ordre impair. De même pour $<y>$. Ainsi, dans ce cas, u agit trivialement sur Q_8. Donc si L est un kQ_8-module, on peut faire agir u trivialement pour étendre l'action à $Q_8 \times <u>$. Dans le cas où u permute les 3 sous-groupes cycliques d'ordre 4 entre eux, on peut supposer (quitte à changer les générateurs) ${}^ux = y$ et ${}^uy = xy$ ou ${}^ux = y$ et ${}^uy = x^3y$. Notons ω une racine primitive troisième de l'unité. Soit alors L le kQ_8-module endo-trivial de dimension 3 introduit dans [11] et défini par

$$x \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad y \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \omega & 1 & 0 \\ 0 & \omega^2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Alors en posant pour le premier cas

$$u \mapsto \begin{pmatrix} \omega & 0 & 0 \\ 1 & \omega^2 & 0 \\ \omega^2 & \omega^2 & \omega \end{pmatrix}$$

et pour le deuxième cas

$$u \mapsto \begin{pmatrix} \omega & 0 & 0 \\ \omega & \omega^2 & 0 \\ \omega & 1 & \omega \end{pmatrix},$$

on vérifie que les relations sont respectées et donc le kQ_8-module exotique L s'étend à G. Maintenant si M est un kQ_8-module d'endo-permutation indécomposable G-invariant, alors par le corollaire 3.25 et vu la structure de $D(Q_8)$, la classe de M dans $D(Q_8)$ est combinaison $\mathbb{Z}$-linéaire d'éléments de la forme

$$\sum_{g\in[G/Q_8\cdot N_G(R)]} \Omega_{Q_8/{}^gR} \quad \text{et} \quad \sum_{g\in[G/G_{\eta(Q_8,1)}]} {}^g\eta(Q_8,1),$$

où $R = 1$ ou $Z(Q_8)$. Notons que l'on peut prendre $\eta(Q_8,1) = [(\Omega_{Q_8}(k)\otimes L)_*]$ et par suite vu que L et $\Omega_{Q_8}(k)$ sont G-invariants, $G_{\eta(Q_8,1)} = G$ et la deuxième somme ne contient qu'un terme. De plus comme G normalise Q_8, G normalise aussi $Z(Q_8)$ et donc dans la première somme, il n'y a aussi qu'un seul terme. Au final cela veut dire que M divise exactement un module N de la forme

$$N = \Omega_{Q_8/Z(Q_8)}(k)^{\otimes n} \otimes \Omega_{Q_8}(k)^{\otimes m} \otimes (\Omega_{Q_8}(k)\otimes L)^{\otimes i},$$

où $m \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, $i \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{Z}$ sont déterminés de manière unique et où nous prenons la même convention que dans la preuve du théorème 4.8 pour $U^{\otimes n}$ (U un kP-module), en particulier $U^{\otimes -1} = U^*$. Par la proposition 4.6, $\Omega_{Q_8}(k)$ et $\Omega_{Q_8/Z(Q_8)}(k)$ s'étendent à G et vu ce qui précède, L aussi, donc N s'étend à G. Grâce au lemme 4.5, on conclut que M s'étend à G, ce qui achève la preuve. □

Lemme 4.12 *Il n'existe pas d'automorphisme d'ordre impair non trivial de Q_{2^n}, $n \geq 4$.*

Preuve. On procède par récurrence sur n. Si $n = 4$ et φ est un automorphisme d'ordre impair de Q_{16}, alors φ ne peut pas échanger les deux sous-groupes Q et Q' de Q_{16} isomorphes à Q_8, donc il les fixe. De plus φ fixe le sous-groupe cyclique d'ordre 8 de Q_{16} et même point par point vu que C_8 n'a pas d'automorphisme d'ordre impair non trivial. Aussi, comme φ fixe $Q \cap Q' \cong C_4$, φ fixe aussi les deux autres sous-groupes cycliques d'ordre 4 de Q et de Q' respectivement. Comme C_4 n'a pas d'automorphisme d'ordre impair non trivial, φ est l'identité sur tous ces sous-groupes et donc φ est l'identité sur Q et Q'. Ainsi φ est l'identité sur les trois sous-groupes maximaux de Q_{16}, donc sur Q_{16}. Supposons maintenant $n \geq 5$ et le résultat vrai pour $n-1$. De nouveau, comme φ ne peut pas échanger les deux sous-groupes maximaux quaternions généralisés, il les fixe. Ainsi par hypothèse de récurrence φ restreint à ces deux sous-groupes maximaux est l'identité et il est aussi l'identité sur le sous-groupe cyclique maximal (qui n'a pas d'automorphisme d'ordre impair non trivial). Donc φ est l'identité.

□

Corollaire 4.13 *Supposons que $p = 2$ et que Q_{2^n}, $n \geq 4$, est un 2-sous-groupe de Sylow normal de G. Alors tout kQ_{2^n}-module s'étend à G.*

Preuve. Par le théorème de Schur-Zassenhaus, $G = Q_{2^n} \rtimes D$ pour un $2'$-groupe D. Par le lemme précédent, D agit trivialement sur Q_{2^n} et donc $G = Q_{2^n} \times D$. On étend alors à G tout kQ_{2^n}-module, en faisant agir D trivialement. □

Proposition 4.14 *Supposons $p = 2$ et soit P un 2-sous-groupe de Sylow normal d'un groupe G. Soit aussi $(N_P(S), S)$ une section génétique de type quaternion généralisé. Soit L un $kN_P(S)/S$-module endo-trivial indécomposable tel que sa classe dans $T(N_P(S)/S)$ n'est pas dans $T^\Omega(N_P(S)/S)$. On considère le kP-module d'endo-permutation couvert $M = (\mathrm{Inf}_{N_P(S)/S}^{N_P(S)} L)\uparrow_{\otimes N_P(S)}^{P}$. Alors M s'étend à $PN_G(S)$.*

Preuve. Comme P est normal dans G, $N_P(S) \trianglelefteq N_G(S)$. Par conséquent $N_P(S)/S \trianglelefteq N_G(S)/S$ et de plus

$$2 \not| \; |PN_G(S) : P| = |N_G(S) : N_P(S)| = |N_G(S)/S : N_P(S)/S|.$$

Ainsi on peut utiliser les résultats précédents sur l'extension des kQ_{2^n}-modules d'endo-permutation. Soit donc $\tilde{L}$ un $kN_G(S)/S$-module qui étend le $kN_P(S)/S$-module L. Alors, clairement $(\mathrm{Inf}_{N_G(S)/S}^{N_G(S)} \tilde{L})\downarrow_{N_P(S)}^{N_G(S)} \cong \mathrm{Inf}_{N_P(S)/S}^{N_P(S)} L$. Induisons alors tensoriellement $\mathrm{Inf}_{N_G(S)/S}^{N_G(S)} \tilde{L}$ à $PN_G(S)$ et restreignons à P. On obtient

$$\begin{aligned}
(\mathrm{Inf}_{N_G(S)/S}^{N_G(S)} \tilde{L})\uparrow_{\otimes N_G(S)}^{PN_G(S)}\downarrow_P &\cong \bigotimes_{x\in[P\backslash PN_G(S)/N_G(S)]} ({}^x(\mathrm{Inf}_{N_G(S)/S}^{N_G(S)} \tilde{L})\downarrow_{{}^xN_G(S)\cap P}^{{}^xN_G(S)})\uparrow_{\otimes}^{P} \\
&\cong (\mathrm{Inf}_{N_G(S)/S}^{N_G(S)} \tilde{L})\downarrow_{N_P(S)}^{N_G(S)}\uparrow_{\otimes}^{P} \cong (\mathrm{Inf}_{N_P(S)/S}^{N_P(S)} L)\uparrow_{\otimes N_P(S)}^{P} = M,
\end{aligned}$$

vu que $P\backslash PN_G(S)/N_G(S) = \{PN_G(S)\}$. Et donc $(\mathrm{Inf}_{N_G(S)/S}^{N_G(S)} \tilde{L})\uparrow_{\otimes N_G(S)}^{PN_G(S)}$ étend M en un $kPN_G(S)$-module. □

Remarque 4.15 *Si la classe dans $T(N_P(S)/S)$ du module L de la proposition ci-dessus est d'ordre 2, alors la classe du chapeau de M dans $D(P)$ est l'élément noté $\Lambda(S,1)$ ou $\Lambda(S,-1)$ dans le paragraphe précédent.*

Nous allons maintenant donner un exemple où le stabilisateur de $\Lambda(S,1)$ est plus grand que $PN_G(S)$. Comme on l'a vu dans la remarque 3.26, le stabilisateur de $\Lambda(S,1)$ est le stabilisateur de la classe d'équivalence de S modulo la relation $\frac{\quad}{}_P$ ou un sous-groupe d'indice 2 de ce stabilisateur. Notons que sous nos hypothèses, P est un 2 -sous-groupe de Sylow de G, ce deuxième cas ne peut pas se produire car $PN_G(S)$ n'a alors pas de sous-groupe d'indice 2.

Pour notre exemple considérons le groupe extraspécial d'ordre 32 de type II, à savoir le produit central $D_8 * Q_8$. Nous allons tout d'abord présenter les propriétés connues de ce groupe provenant du fait que c'est un 2-groupe extraspécial. Ensuite nous étudierons son groupe d'automorphismes dans le but de montrer que l'on peut le plonger dans un groupe G tel qu'il soit un 2-sous-groupe de Sylow d'indice 5.

Le quotient de $D_8 * Q_8$ par son centre Z est un 2-sous-groupe abélien élémentaire de rang 4, et nous pouvons donc le voir comme un $\mathbb{F}_2$-espace vectoriel V de dimension 4. De plus V est muni d'une forme quadratique $Q : V \to \mathbb{F}_2$ définie par

$$Q(xZ) = \begin{cases} 0 & \text{si } x^2 = 1 \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Notons $D_8 =< s,t \,|\, s^2 = t^2 = (st)^4 = 1 >$, $Q_8 =< i,j \,|\, i^2 = j^2 = (ij)^2, i^4 = 1 >$ et $(a:b)$ la classe de $(a,b) \in D_8 \times Q_8$ dans le produit central $D_8 * Q_8$. On peut vérifier que

$$\{(s:1)Z, (t:1)Z, (1:i)Z, (1:j)Z\}$$

est une base de V où $((s:1)Z, (t:1)Z)$ est une paire hyperbolique. De plus le sous-espace engendré par $(1:i)Z$ et $(1:j)Z$ ne contient aucun vecteur singulier (i.e. $Q(v) \neq 0$ pour tout $v \in< (1:i)Z, (1:j)Z >$). Autrement dit, l'indice de Witt de V est 2.

Maintenant si φ est un automorphisme de $D_8 * Q_8$, alors il fixe son centre Z (car Z est d'ordre 2). On peut alors définir $\bar{\varphi} : V \to V$ par $\bar{\varphi}(xZ) = \varphi(x)Z$ quel que soit $x \in D_8 * Q_8$. L'application $\bar{\varphi}$ est bien définie car $\varphi(z) = z$ pour tout $z \in Z$ et c'est un automorphisme, car φ en est un. Donc $\bar{\varphi}$ est un automorphisme de l'espace vectoriel V. De plus on peut montrer que cet automorphisme préserve la forme quadratique Q, c'est-à-dire $Q(\bar{\varphi}(xZ)) = Q(xZ)$ quel que soit $xZ \in D_8 * Q_8/Z = V$. Ainsi $\bar{\varphi} \in O^-(4, \mathbb{F}_2)$, le groupe orthogonal de rang 4, de type II. D. Winter [27] a démontré le résultat général suivant :

Théorème 4.16 (Winter) *Soit P un 2-groupe extraspécial. Alors le groupe* $\mathrm{Out}(P)$ *est isomorphe au groupe orthogonal O_P associé à la forme quadratique correspondant à P.*

Dans notre cas cela implique que l'application $^- : \mathrm{Aut}(D_8 * Q_8) \to O^-(4, \mathbb{F}_2)$ est surjective. Or l'ordre de $O^-(4, \mathbb{F}_2)$ est connu et est égal à $120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$. Ainsi, il existe un élément d'ordre 5 dans $O^-(4, \mathbb{F}_2)$ et par surjectivité, il existe un automorphisme φ de $D_8 * Q_8$ d'ordre 5. On peut donc construire le produit semi-direct $G = (D_8 * Q_8) \rtimes C_5$ où C_5 est le groupe cyclique d'ordre 5 engendré par φ.

Nous nous trouvons donc dans la situation où $P = D_8 * Q_8$ est un sous-groupe normal de G tel que G/P est un p'-groupe. Ainsi, par le théorème de Dade 4.2, tout kP-module d'endo-permutation G-invariant s'étend à G. Nous allons montrer que le stabilisateur de la classe $\Lambda(S,1)$ est G tout entier, car cela correspond à l'ensemble des $g \in G$ tels que ${}^gS \,\text{—}_P\, S$. Par suite si M est un représentant de la classe d'isomorphisme $\Lambda(S,1)$ alors M est G-invariant et s'étend donc en un kG-module. La proposition 4.14 ne suffit pas dans ce cas pour construire cette extension, car nous montrerons que si S est un sous-groupe génétique, alors $PN_G(S) = P$.

Dans $P = D_8 * Q_8$, il existe cinq classes de conjugaison de sous-groupes d'ordre 2 non centraux (les deux classes dans D_8 et le produit d'un élément d'ordre 4 dans D_8 avec un des trois éléments d'ordre 4 possibles dans Q_8.) Notons $S_1, \ldots, S_5$ cinq représentants de ces classes de conjugaison. Ces 5 sous-groupes sont des sous-groupes génétiques de P, de plus ils sont tous liés modulo P. En effet, $N_P(S_i) = S_i \times C$ où $C \cong Q_8$ et donc $N_P(S_i)/S_i \cong Q_8$. Par suite les S_i sont des sous-groupes génétiques de type quaternion. Ils sont tous liés modulo P, en fait ils sont même tous liés car si $i \neq j$, alors $N_P(S_i) \cap N_P(S_j) = C \cong Q_8$ et $S_i \cap S_j = \{1\}$. Ainsi on a bien $N_P(S_i)/S_i \cong (N_P(S_i) \cap N_P(S_j))/(S_i \cap S_j)$ pour tout $1 \leq i,j \leq 5$. Ce sont les seuls sous-groupes génétiques de type quaternion car si H est un autre sous-groupe de P, alors il contient le sous-groupe de Frattini $\Phi(P)$ de P et par suite $N_P(H)/H = P/H$ est abélien élémentaire.

Maintenant, dans le groupe $G = (D_8 * Q_8) \rtimes C_5$, les éléments de C_5 agissent sur ces cinq sous-groupes $S_1, \ldots, S_5$. Mais C_5 ne peut que les permuter transitivement, car s'il en fixe un, il les fixe tous et l'action de C_5 sur P serait alors triviale. Ainsi, quel que soit $1 \leq i \leq 5$, $PN_G(S_i) = P$.

De plus comme il n'y a qu'une classe d'équivalence de sous-groupes génétiques de type quaternion, et que les éléments de G ne font que permuter les éléments de cette classe entre eux, le stabilisateur de $\Lambda(S_i, 1)$ qui est, comme on l'a vu, le stabilisateur de la classe de S_i est alors clairement G tout entier. Autrement dit $\Lambda(S_i, 1) \in D(P)^G$. Ainsi si M est un kP-module d'endo-permutation indécomposable tel que sa classe dans $D(P)$ est $\Lambda(S, 1)$, alors par le théorème de Dade (théorème 4.2), il existe un kG-module qui étend M, ce que nous n'avons pas prouvé avec nos méthodes.

4.2 Paramétrage des modules indécomposables

Dans ce paragraphe, nous présentons un paramétrage des kG-modules indécomposables en partie due à L. Puig [20], puis de manière complète à J. Thévenaz [24], utilisant trois invariants, à savoir le vortex, la source et le module de multiplicité que nous allons introduire. En général le module de multiplicité est un module sur une algèbre de groupe dite "tordue", mais nous montrerons que dans le cas des modules d'endo-p-permutation cette algèbre de groupe tordue est en fait isomorphe à l'algèbre de groupe $kN_G(P)$ où P est le vortex.

Pour comprendre la structure du module de multiplicité, nous devons faire une incursion dans le monde des G-algèbres. Les généralités sur les G-algèbres et le module de multiplicité que nous donnons ci-dessous sont largement inspirées de [25].

Définition 4.17 *1. Une G-**algèbre** est une paire (A, ψ) où A est une k-algèbre (de dimension finie) et $\psi : G \to \mathrm{Aut}(A)$ un homomorphisme de groupes.*

*2. Une G-**algèbre intérieure** est une paire (A, ϕ), où A est une k-algèbre (de dimension finie) et $\phi : G \to A^*$ un homomorphisme de groupes.*

Dans la pratique nous n'écrirons pas ψ et ϕ. Nous noterons d'ailleurs l'action à gauche $\psi(g)$ de $g \in G$ sur A par ${}^g a = \psi(g)(a)$ et nous noterons $g \cdot a = \phi(g)a$ et $a \cdot g = a\phi(g)$ quel que soit $a \in A$. Clairement une G-algèbre intérieure A est une G-algèbre, grâce à l'homomorphisme de groupes $A^* \to \mathrm{Aut}(A)$ envoyant $a \in A$ sur l'automorphisme intérieur correspondant. Si A et B sont des G-algèbres, un homomorphisme d'algèbres (non nécessairement unitaire) $f : A \to B$ est un *homomorphisme de G-algèbres* si $f({}^g a) = {}^g(f(a))$. De même si A et B sont des G-algèbres intérieures et $f : A \to B$ est un homomorphisme d'algèbres, alors f est un *homomorphisme de G-algèbres intérieures* si $f(g \cdot a) = g \cdot f(a)$ et $f(a \cdot g) = f(a) \cdot g$ pour tout $g \in G$.

L'exemple de G-algèbre qui nous intéresse est le cas où $A = \mathrm{End}_k(V)$ pour un k-espace vectoriel V. Alors V est muni d'une structure de kG-module si et seulement si A est muni d'une structure de G-algèbre intérieure. En effet, $\phi(g) \in \mathrm{Aut}(V)$ est donné par l'action de g sur V pour tout $g \in G$ et réciproquement. Dans ce cas on peut démontrer (cf. [25] lemme 10.7) que deux kG-modules L et M sont isomorphes si et seulement si les G-algèbres intérieures $\mathrm{End}_k(M)$ et $\mathrm{End}_k(L)$ sont isomorphes.

Dans le cas où $A = \mathrm{End}_k(V)$ est muni d'une structure de G-algèbre non intérieure, on ne peut pas munir V d'une structure de kG-module. Par contre, on peut munir V d'une structure sur une algèbre de groupe tordue que nous allons définir maintenant.

Soit une extension centrale de G :

$$1 \to k^* \xrightarrow{\varphi} \hat{G} \xrightarrow{\pi} G \to 1.$$

Alors $\hat{G}$ est un groupe avec un sous-groupe central $\varphi(k^*)$ isomorphe au groupe multiplicatif k^*, et le quotient $\hat{G}/\varphi(k^*)$ est isomorphe à G. On définit *l'algèbre de groupe tordue $k_*\hat{G}$* par

$$k_*\hat{G} = k \otimes_{k[k^*]} k\hat{G},$$

où $k\hat{G}$ est l'algèbre de groupe du groupe (peut-être infini) $\hat{G}$ et $k[k^*]$ est l'algèbre de groupe du groupe k^*. L'action de $k[k^*]$ à gauche sur $k\hat{G}$ est donnée par φ et à droite sur k par l'inclusion $k^* \to k$. Notons que $k_*\hat{G}$ est une k-algèbre de dimension finie. En effet $k_*\hat{G}$ est isomorphe au quotient de $k\hat{G}$ par l'idéal I engendré par les éléments $\varphi(\lambda) - \lambda \cdot 1$, où $\lambda \in k^*$. Ainsi le sous-groupe central $\varphi(k^*) \cong k^*$ est identifié avec les scalaires k^* de l'algèbre de groupe. En multipliant un générateur de I par un élément arbitraire x de $\hat{G}$, on remarque que I est le k-sous-espace vectoriel engendré par les éléments $\varphi(\lambda)x - \lambda \cdot x$, où $\lambda \in k^*$ et $x \in \hat{G}$. Donc si $\sigma : G \to \hat{G}$ est une application telle que $\pi\sigma = id_G$, alors les images des éléments $\sigma(x)$ pour x dans G forment une base pour l'algèbre $k_*\hat{G}$. Ainsi $k_*\hat{G}$ a une base indicée par les éléments de G. Le produit de deux éléments de la base n'est pas en général le produit des éléments du groupe correspondants, mais est modifié par un scalaire dans k^* ; en effet $\sigma(xy) = \lambda(x,y)\sigma(x)\sigma(y)$ pour un $\lambda(x,y) \in k^*$. Notons encore, bien que nous ne l'utiliserons pas, que $k_*\hat{G}$ est une G-algèbre : l'action de $g \in G$ est donné par $c_{\sigma(g)}$, la conjugaison par $\sigma(g)$. C'est bien défini puisque $\sigma(g)$ est défini à un élément central de $\hat{G}$ près.

Revenons à notre G-algèbre $A = \mathrm{End}_k(V)$. Par le théorème de Skolem-Noether ([14] théorème 3.62), l'action d'un élément $g \in G$ sur A est un automorphisme intérieur, donc de la forme $c_{\rho(g)}$ pour un certain $\rho(g) \in A^*$. L'élément $\rho(g)$ n'est pas déterminé de manière unique par g, mais il est bien défini à un élément central de A près. Par suite $\rho(g)$ est bien défini à un scalaire près dans $k^* \cdot 1_A$ que l'on identifie à k^*. Cela définit une application

$$\rho : G \to A^*/k^* \cong PGL(V)$$

qui est un homomorphisme de groupes. En effet l'automorphisme intérieur $c_{\rho(gh)}$ de A est égal à $c_{\rho(g)\rho(h)} = c_{\rho(g)}c_{\rho(h)}$ car les deux sont égaux à l'action de gh sur A. Ici $PGL(V)$ est le groupe linéaire général projectif. On veut voir cette représentation projective comme un module sur une algèbre de groupe tordue de G appropriée. Etant donné un homomorphisme $\rho : G \to PGL(V)$, on pose $\hat{G}$ l'extension centrale du groupe G par le sous-groupe central k^* définie par le diagramme pull-back suivant :

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & k^* \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "id"] & \hat{G} \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\hat{\rho}"] & G \arrow[r] \arrow[d, "\rho"] & 1 \\
1 \arrow[r] & k^* \arrow[r] & GL(V) \arrow[r, "\pi_V"] & PGL(V) \arrow[r] & 1.
\end{tikzcd}$$

Par la propriété universelle du pull-back, le triple $(\hat{G}, \hat{\rho}, \pi)$ est unique à un unique isomorphisme de groupes près. En pratique on peut choisir $\hat{G}$ comme étant l'ensemble des paires $(a,g) \in GL(V) \times G$ telles que $\pi_V(a) = \rho(g)$ et alors $\hat{\rho}$ et π sont respectivement la première et la seconde projection. Avec cette construction, l'égalité $\pi_V(a) = \rho(g)$ équivaut à dire que l'action de g sur A est égale à l'automorphisme intérieur c_a. Par conséquent, $\hat{G}$ est l'ensemble des paires $(a,g) \in GL(V) \times G$ telles que c_a réalise l'action de g.

Ainsi la représentation "projective" ρ est relevée en une représentation ordinaire $\hat{\rho}$ du groupe (éventuellement infini) $\hat{G}$ sur le k-espace vectoriel V. La représentation $\hat{\rho}$ envoie le sous-groupe central k^* sur le centre k^* de $GL(V)$ par l'application identité. Ainsi cela revient au même que considérer un module sur l'algèbre de groupe tordue $k_*\hat{G}$. Plus précisément, l'homomorphisme de groupes $\hat{\rho} : \hat{G} \to GL(V)$ s'étend par k-linéarité en un homomorphisme d'algèbres $\hat{\rho} : k\hat{G} \to \mathrm{End}_k(V)$. Rappelons que $k_*\hat{G}$ est le quotient de $k\hat{G}$ par I où l'idéal I est engendré par les éléments $\varphi(\lambda) - \lambda \cdot 1$, où $\lambda \in k^*$. Et comme $\rho(\varphi(\lambda)) = \lambda \cdot id_V$ pour tout $\lambda \in k^*$, il est clair que I est dans le noyau de $\hat{\rho}$. Par suite on obtient un homomorphisme d'algèbres $\bar{\rho} : k_*\hat{G} \to \mathrm{End}_k(V)$ qui munit ainsi V d'une structure de $k_*\hat{G}$-module. Ainsi le relèvement $\hat{\rho}$ de la représentation "projective" $\rho : G \to PGL(V)$, induit une structure de $k_*\hat{G}$-module sur V. Réciproquement, à tout $k_*\hat{G}$-module V est associé un homomorphisme de groupes canonique $\rho : G \to PGL(V)$, vu que la structure de module définit un homomorphisme de groupes $\hat{\rho} : \hat{G} \to GL(V)$ qui induit une représentation "projective" $\rho : G \to PGL(V)$ en passant au quotient par k^* des deux côtés.

En résumé, pour toute G-algèbre $A = \mathrm{End}_k(V)$, la structure de G-algèbre sur $\mathrm{End}_k(V)$ se relève en une structure canonique de $k_*\hat{G}$-module sur V, où $k_*\hat{G}$ est l'algèbre de groupe tordue canoniquement associée à A. Réciproquement pour tout module V sur une algèbre de groupe tordue $k_*\hat{G}$, il existe un homomorphisme de groupes induit $G \to PGL(V)$, ainsi une structure de G-algèbre sur $A = \mathrm{End}_k(V)$ puisque $PGL(V) = A^*/k^*$ est le groupe des automorphismes intérieurs.

Nous allons maintenant définir le troisième invariant de notre paramétrage, à savoir le module de multiplicité. Rappelons qu'un *point* d'une k-algèbre A est une classe de conjugaison d'idempotents primitifs de A. On note $\mathcal{P}(A)$ l'ensemble des points de A. Notons aussi $\mathrm{Max}(A)$ l'ensemble des idéaux maximaux de A et $\mathrm{Irr}(A)$ l'ensemble des A-modules simples. Comme corollaire du théorème de relèvement des idempotents ([14] théorème 6.7), on peut prouver que $\mathcal{P}(A)$, $\mathrm{Max}(A)$ et $\mathrm{Irr}(A)$ sont en bijection. Si $\alpha \in \mathcal{P}(A)$, l'idéal maximal correspondant $\mathfrak{m}_\alpha$ est caractérisé par la propriété $e \notin \mathfrak{m}_\alpha$ pour un $e \in \alpha$, tandis que le A-module simple $V(\alpha)$ est caractérisé par la propriété $eV(\alpha) \neq 0$.

Pour tout point $\alpha \in \mathcal{P}(A)$, on notera aussi $S(\alpha)$ le quotient $A/\mathfrak{m}_\alpha$ et on a donc $S(\alpha) \cong \mathrm{End}_k(V(\alpha))$.

Si A est une G-algèbre, on appelle *groupe pointé sur* A une paire (H, α) où H est un sous-groupe de G et $\alpha \in \mathcal{P}(A^H)$ est un point de A^H. On notera H_α la paire (H, α). Etant donné ce qui précède, à tout groupe pointé H_α de A sont associés plusieurs objets ; l'idéal maximal $\mathfrak{m}_\alpha$ de A^H et le quotient simple $S(\alpha) = A^H/\mathfrak{m}_\alpha$ correspondant à α. La k-algèbre simple $S(\alpha)$ s'appelle *l'algèbre de multiplicité* du groupe pointé H_α. Si on écrit $S(\alpha) \cong \mathrm{End}_k(V(\alpha))$, alors le A^H-module simple $V(\alpha)$ est appelé *le module de multiplicité* de H_α. Nous allons mettre une structure supplémentaire sur $S(\alpha)$ et $V(\alpha)$ provenant du groupe G.

Remarquons que G agit sur l'ensemble des groupes pointés : si H_α est un groupe pointé sur A et si $x \in G$, alors ${}^x(H_\alpha) = ({}^xH)_{{}^x\alpha}$ où ${}^x\alpha$ est l'image de α sous l'action de x (remarquons que ${}^x(A^H) = A^{{}^xH}$ si bien que ${}^x\alpha$ est bien un point de $A^{{}^xH}$). Notons $N_G(H_\alpha)$ le stabilisateur de H_α. C'est un sous-groupe du normalisateur $N_G(H)$ du sous-groupe H.

Comme $N_G(H_\alpha)$ stabilise α par définition, il stabilise l'idéal maximal $\mathfrak{m}_\alpha$. Ainsi $N_G(H_\alpha)$ agit sur le quotient $S(\alpha) = A^H/\mathfrak{m}_\alpha$. En d'autres termes, $S(\alpha)$ est une $N_G(H_\alpha)$-algèbre. Comme H agit trivialement sur A^H, il est pratique de voir $S(\alpha)$ comme une

$\bar{N}_G(H_\alpha)$-algèbre où $\bar{N}_G(H_\alpha) = N_G(H_\alpha)/H$. Maintenant, comme $S(\alpha) \cong \mathrm{End}_k(V(\alpha))$ et vu la construction ci-dessus, $V(\alpha)$ est muni canoniquement d'une structure de $k_*\hat{\bar{N}}_G(H_\alpha)$-module.

Finalement notons encore que si $A = \mathrm{End}_k(L)$ pour un kG-module L, la donnée d'un groupe pointé H_α sur A est équivalente à la donnée d'une classe d'isomorphisme d'un KH-facteur direct indécomposable de $L{\downarrow}^G_H$. En effet si $e \in \alpha$, alors e est un idempotent primitif de $A^H = \mathrm{End}_{kH}(L)$ et eL est un kH-facteur direct indécomposable de $L{\downarrow}^G_H$. De plus si f est un autre idempotent de A^H, $fL \cong eL$ si et seulement si e et f sont conjugués, c'est-à-dire $f \in \alpha$. Dans ce cas il est clair que le stabilisateur $N_G(H_\alpha)$ de H_α est égal au sous groupe d'inertie de eL, c'est-à-dire le sous-groupe $N_G(H, eL)$ des $g \in N_G(H)$ tels que ${}^g(eL) \cong eL$.

Revenons à notre paramétrage des kG-modules indécomposables. De manière imprécise, le théorème de paramétrage nous dit qu'à tout kG-module indécomposable L on peut faire correspondre de manière essentiellement unique trois invariants à savoir le vortex P, la source M et le module de multiplicité V (relativement à P_γ où γ correspond à M facteur direct de $L{\downarrow}^G_P$) et réciproquement si l'on se donne un p-sous-groupe P de G un kP-module indécomposable M de vortex P et un $k_*\hat{\bar{N}}_G(P, M)$-module projectif indécomposable, alors on peut faire correspondre un unique (à isomorphisme près) kG-module indécomposable.

Avant d'énoncer le résultat de manière tout à fait précise, il y a encore un point très subtil à présenter. Soit L un kG-module indécomposable de vortex P et source M et soit P_γ le groupe pointé sur $A = \mathrm{End}_k(L)$ correspondant à M facteur direct de $L{\downarrow}^G_P$. Considérons encore la G-algèbre $C = \mathrm{End}_k(M{\uparrow}^G_P)$. En termes de G-algèbres, le fait que L est un facteur direct de $M{\uparrow}^G_P$ se traduit par l'existence d'un plongement (dans un sens particulier que je ne vais pas développer ici) $\mathcal{F} : A \to C$. De plus ce plongement est unique. Si on note γ' l'image de γ par ce plongement, γ' correspond à un facteur direct indécomposable M' de $M{\uparrow}^G_P{\downarrow}^G_P$ et en fait M et M' sont isomorphes. Nous allons maintenant identifier les points de A avec ceux de C par ce plongement.

On pose alors $V_A(\gamma)$ le module de multiplicité de γ vu comme un point de A et $V_C(\gamma)$ le module de multiplicité de γ vu comme un point de C. Ce plongement $\mathcal{F}$ induit un plongement $\mathcal{F}(\gamma)$ entre les algèbres de multiplicité et un isomorphisme $\bar{\mathcal{F}}^*(\gamma)$ entre les extensions centrales :

$$\bar{\mathcal{F}}(\gamma) : \mathrm{End}_k(V_A(\gamma)) \to \mathrm{End}_k(V_C(\gamma)), \quad \bar{\mathcal{F}}^*(\gamma) : \hat{\bar{N}}_G(P_\gamma) \xrightarrow{\cong} \hat{\bar{N}}^A_G(P_\gamma),$$

où $\hat{\bar{N}}^A_G(P_\gamma)$ désigne l'extension associée à $\mathrm{End}_k(V_A(\gamma))$, tandis que $\hat{\bar{N}}_G(P_\gamma)$ désigne celle associée à $\mathrm{End}_k(V_C(\gamma))$.

Pour le paramétrage que nous cherchons, nous devons voir $V_A(\gamma)$ comme un module pour $\hat{\bar{N}}_G(P_\gamma)$ via $\bar{\mathcal{F}}^*(\gamma)$ et non pas simplement comme un module sur $\hat{\bar{N}}^A_G(P_\gamma)$.

Comme l'extension centrale $\hat{\bar{N}}_G(P_\gamma)$ est construite à partir de $M{\uparrow}^G_P$ on dira que la structure de $\hat{\bar{N}}_G(P_\gamma)$-module de $V_A(\gamma)$ est la structure de module *déterminée par* $M{\uparrow}^G_P$. Notons encore que comme le plongement $\mathcal{F} : A \to C$ est unique, l'isomorphisme $\bar{\mathcal{F}}^*(\gamma)$

est déterminé de manière unique et donc la structure de $V_A(\gamma)$ déterminée par $M{\uparrow}_P^G$ est aussi univoquement déterminée.

Fixons encore quelques notations. Considérons $\Pi(G)$ l'ensemble des triples (P, M, V) où P est un p-sous-groupe de G, M une classe d'isomorphisme de kP-modules indécomposables de vortex P et V une classe d'isomorphisme de $k_*\hat{\tilde{N}}_G(P, M)$-modules projectifs indécomposables, où $k_*\hat{\tilde{N}}_G(P, M)$ est l'algèbre de groupe tordue du sous-groupe d'inertie $N_G(P, M)$ déterminée par $M{\uparrow}_P^G$. Pour simplifier on regarde V et M comme des modules à la place de classes d'isomorphisme. Le groupe G agit par conjugaison sur $\Pi(G)$ et l'on est intéressé à l'ensemble des orbites $G\backslash\Pi(G)$.

Théorème 4.18 *Il existe une bijection entre l'ensemble des classes d'isomorphisme de kG-modules indécomposables et $G\backslash\Pi(G)$ qui est décrite comme suit :*

a) A un kG-module indécomposable L est associé la G-orbite du triple (P, M, V), où P est un vortex de L, M une source (à isomorphisme près) et V un module de multiplicité (à isomorphisme près) muni de sa structure déterminée par $M{\uparrow}_P^G$.

b) A la G-orbite du triple (P, M, V) est associée la classe d'isomorphisme du facteur direct de $M{\uparrow}_P^G$ correspondant au point de $\mathrm{End}_{kG}(M{\uparrow}_P^G)$ qui est le correspondant de Puig correspondant au module V (où la correspondance de Puig est faite relativement à (P, M)).

Le fait de pendre le module de multiplicité muni de sa structure déterminée par $M{\uparrow}_P^G$ est un point vraiment subtil mais indispensable. Tout d'abord réalisons que la structure du module de multiplicité déterminée par $M{\uparrow}_P^G$ ne dépend que de P et M (et évidemment G), mais plus du tout de L, ce qui permet de construire le module V du point b). De plus, il se peut que deux kG-modules indécomposables non-isomorphes L et L' aient le même vortex, la même source et la même algèbre de multiplicité. Comme les modules de multiplicité sont construits de manière unique à partir des algèbres de multiplicité on pourrait croire qu'ils sont isomorphes. Mais il faut se rappeler qu'à partir d'une algèbre de multiplicité, on construit une extension centrale et ainsi une algèbre de groupe tordue. Donc les modules de multiplicité de L et L' sont des modules sur des algèbres de groupes tordues distinctes. On doit donc d'abord trouver un isomorphisme entre les extensions centrales avant de les comparer. Le moyen de faire cela est de voir les modules de multiplicité sur une seule et même extension centrale, c'est-à-dire avec leur structure de module déterminée par l'induction de la source.

En résumé le vortex, la source et l'algèbre de multiplicité ne sont pas suffisants pour déterminer la classe d'isomorphisme du kG-module L, il faut une information supplémentaire provenant du plongement de L dans $M{\uparrow}_P^G$, cette information étant contenue dans le module de multiplicité muni de sa structure déterminée par $M{\uparrow}_P^G$.

Nous allons montrer maintenant que l'algèbre de groupe tordue associée au module de multiplicité d'un module d'endo-p-permutation n'est en fait pas tordue, en ce sens qu'elle est isomorphe à l'algèbre de groupe $kN_G(P, M)$.

Remarque 4.19 *La correspondance de Green pour les kG-modules est une conséquence du paramétrage ci-dessus. En effet pour un vortex fixé P, et une source fixée M, considérons un sous-groupe H contenant $N_G(P,M)$. Alors il existe une bijection entre l'ensemble des classes d'isomorphisme de kG-modules indécomposables de vortex P et source M et l'ensemble des classes d'isomorphisme de kH-modules indécomposables de vortex P et source M, car les deux ensembles sont en bijection avec l'ensemble des classes d'isomorphisme de $k_*\hat{\tilde{N}}_G(P,M)$-modules projectifs indécomposables. En résumé, les correspondants de Green ont les mêmes trois invariants.*

Grâce à cette remarque, on peut se ramener à la situation où P est normal dans G, ce qui nous permettra d'appliquer les résultats du paragraphe précédent. Montrons maintenant deux petits lemmes que nous utiliserons pour calculer le module de multiplicité.

Lemme 4.20 *Soient A et B deux G-algèbres et supposons que G agit trivialement sur B. Alors $(A \otimes B)^G = A^G \otimes B$.*

Preuve. Soit $\{e_1, \dots, e_n\}$ une base de B. Un élément z de $A \otimes B$ s'écrit de manière unique $z = \sum_{i=1}^n a_i \otimes e_i$, $a_i \in A$. Si $z \in (A \otimes B)^G$, alors

$$z = {}^g z = \sum_{i=1}^n {}^g a_i \otimes {}^g e_i = \sum_{i=1}^n {}^g a_i \otimes e_i$$

quel que soit $g \in G$. Par unicité de l'écriture de z, ${}^g a_i = a_i$ et donc $a_i \in A^G$ pour tout $1 \leq i \leq n$ et pour tout $g \in G$. Ainsi $(A \otimes B)^G \subseteq A^G \otimes B$. D'un autre côté, on a

$$A^G \otimes B = A^G \otimes B^G \subseteq (A \otimes B)^G.$$

Donc $A^G \otimes B = (A \otimes B)^G$. □

Lemme 4.21 *Soit A une k-algèbre et $M_n(k)$ l'algèbre des matrices carrées $n \times n$. Alors $M_n(k) \otimes A \cong M_n(A)$, $M_n(A)/M_n(J(A)) \cong M_n(A/J(A))$ et $J(M_n(A)) = M_n(J(A))$.*

Preuve. L'application

$$\begin{array}{rcl} \phi : M_n(k) \times A & \to & M_n(A) \\ ((m_{i,j})_{i,j}, a) & \mapsto & (m_{ij}a)_{i,j} \end{array}$$

est bilinéaire et induit par conséquent un homomorphisme de k-algèbres $\tilde{\phi}$ de $M_n(k) \otimes A$ dans $M_n(A)$ avec $\tilde{\phi}(\sum_{r,s} M_r \otimes a_s) = \sum_{r,s} \phi(M_r, a_s)$. Soit E_{ij} la matrice de $M_n(k)$ avec que des entrées nulles, sauf le (i,j)-ème coefficient qui vaut 1. L'application $\psi : M_n(A) \to M_n(k) \otimes A$ définie par $\psi((m_{ij})_{i,j}) = \sum_{i,j} E_{ij} \otimes m_{ij}$ est un homomorphisme de k- algèbres inverse de ϕ et donc le premier isomorphisme est démontré.

Soit Π l'homomorphisme surjectif de $M_n(A)$ sur $M_n(A/J(A))$ provenant de la surjection de A sur $A/J(A)$ appliqué à chaque entrée de la matrice de $M_n(A)$. On a alors $\Pi((m_{ij})_{i,j}) = 0$ si et seulement si $(m_{ij})_{i,j} \in M_n(J(A))$. Ainsi $M_n(A)/M_n(J(A))$ est isomorphe à $M_n(A/J(A))$, ce qui montre le deuxième isomorphisme.

Enfin comme $M_n(A/J(A))$ est semi-simple, $J(M_n(A)) \subseteq M_n(J(A))$. De plus l'idéal $M_n(J(A))$ est nilpotent vu que $J(A)$ l'est et donc $M_n(J(A)) \subseteq J(M_n(A))$ et par suite $J(M_n(A)) = M_n(J(A))$. $\square$

Convention et notation 4.22 *A partir de maintenant et jusqu'au théorème 4.26, on suppose que P est un p-sous-groupe normal de G et on note $\bar{G} = G/P$. Nous fixons aussi les notations suivantes : L est un kG-module d'endo-p-permutation indécomposable de vortex P et source M et on pose $A = \mathrm{End}_k(L)$ et $C = \mathrm{End}_k(M{\uparrow}_P^G)$. De plus on note $\gamma \in \mathcal{P}(C^P)$ le point correspondant à M comme facteur direct de $M{\uparrow}_P^G{\downarrow}_P^G$.*

Notre but est de montrer que $V_A(\gamma)$ a une structure de module sur une algèbre non-tordue. En fait il suffit de le montrer pour $V_C(\gamma)$ car l'on regarde $V_A(\gamma)$ muni de sa structure provenant de $M{\uparrow}_P^G$ et dans ce cas $V_A(\gamma)$ est un facteur direct indécomposable de $V_C(\gamma)$. Comme P est normal dans G, par le théorème 2.11 la source M est G-invariante et donc $N_G(P_\gamma) = N_G(P, M) = N_G(P) = G$. Considérons alors le diagramme pull-back suivant nous donnant la structure de $k_*\hat{\bar{G}}$-module sur $V_C(\gamma)$:

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & k^* \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "id"] & \hat{\bar{G}} \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\hat{\rho}"] & \bar{G} \arrow[r] \arrow[d, "\rho"] & 1 \\
1 \arrow[r] & k^* \arrow[r] & GL(V_C(\gamma)) \arrow[r, "\pi_V"] & PGL(V_C(\gamma)) \arrow[r] & 1.
\end{tikzcd}$$

Pour montrer que $V_C(\gamma)$ a une structure provenant de $\bar{G}$ il nous faut prouver l'existence d'un homomorphisme de groupes $\psi : \bar{G} \to GL(V_C(\gamma))$ qui commute dans le diagramme. Or l'existence d'un tel ψ est équivalente à l'existence d'une section s de π. Pour ce faire nous allons nous restreindre aux l-sous-groupes de Sylow de $\bar{G}$ et utiliser des résultats de cohomologie que nous allons introduire maintenant.

Proposition 4.23 *Soit H un groupe fini. Il existe une bijection entre $H^2(H, K)$ et les classes d'équivalence d'extensions de groupes avec groupe quotient H et noyau abélien K (ce dernier muni de la structure de $\mathbb{Z}H$-module provenant de la conjugaison par le groupe H). De plus, la classe d'équivalence des extensions scindées correspond par cette bijection à $0 \in H^2(H, K)$.*

Les détails et la preuve de ce résultat sont exposés, par exemple, dans [9], chapitre IV. Rappelons que si J est un sous-groupe de H et K un $\mathbb{Z}H$-module, il existe une application $\mathrm{Res}_J^H : H^n(H, K) \to H^n(J, K)$ provenant de l'inclusion $J \subseteq H$. Voici une proposition de réduction aux l-sous-groupes de Sylow de G dont la preuve se trouve aussi dans [9], Chapitre III, paragraphe 10 .

Proposition 4.24 *L'application*

$$\mathrm{Res} = \bigoplus_{\substack{l \text{ premier} \\ l \mid |H|}} \mathrm{Res}_{J_l}^H : H^2(H, K) \to \bigoplus_{\substack{l \text{ premier} \\ l \mid |H|}} H^2(J_l, K),$$

où J_l est un l-sous-groupe de Sylow de H, est injective.

Nous voulons montrer que la suite

$$0 \to k^* \to \hat{\bar{G}} \to \bar{G} \to 0$$

scinde, donc qu'elle correspond à $0 \in H^2(\bar{G}, k^*)$ et pour ce faire, vu la proposition ci-dessus, il nous suffit de montrer que sa restriction à tous les l-sous-groupes de Sylow de $\bar{G}$ scinde.

Soit $G(l)$ un sous-groupe de G tel que $G(l)/P = \bar{G}(l)$ est un l-sous-groupe de Sylow de $\bar{G}$. Tout d'abord, rappelons que si $l = p$, alors $H^2(\bar{G}(p), k^*) = 0$ vu que l'ordre de $\bar{G}(p)$ est inversible dans k^*, c'est-à-dire l'homomorphisme $k^* \to k^*$ donné par $\lambda \mapsto \lambda^{|\bar{G}(p)|}$ est un isomorphisme (car k est de caracteristique p et k algébriquement clos, donc parfait). Ainsi nous pouvons supposer $l \neq p$.

Considérons alors le diagramme

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & k^* \arrow[r] \arrow[d] & \hat{\bar{G}}(l) \arrow[r] \arrow[d] & \bar{G}(l) \arrow[r] \arrow[d] & 1 \\
1 \arrow[r] & k^* \arrow[r] & GL(V_C(\gamma)) \arrow[r] & PGL(V_C(\gamma)) \arrow[r] & 1.
\end{tikzcd}$$

De nouveau, le suite du haut scinde si et seulement s'il existe un homomorphisme ψ_l de $\bar{G}(l)$ dans $GL(V_C(\gamma))$ qui commute dans le diagramme. Donc si $S_C(\gamma) = \mathrm{End}_k(V_C(\gamma))$ a une structure de $\bar{G}(l)$-algèbre intérieure qui induit la structure canonique de $\bar{G}(l)$-algèbre, alors la suite scinde. Or rappelons que la source M de L est un kP-module d'endo-permutation G-invariant, a fortiori $G(l)$-invariant, et comme $G(l)/P$ est un p'-groupe ($l \neq p$), nous pouvons étendre M en un module sur $G(l)$. Nous allons prouver que grâce à cela, $S_C(\gamma)$ est muni d'une structure de $\bar{G}(l)$-algèbre intérieure qui induit la structure canonique de $\bar{G}(l)$-algèbre.

Proposition 4.25 *Soit l un nombre premier différent de p divisant l'ordre de $\bar{G}$. L'algèbre de multiplicité $S_C(\gamma)$ est munie d'une structure de $\bar{G}(l)$-algèbre intérieure induisant la structure canonique de $\bar{G}(l)$-algèbre.*

Preuve. Rappelons que $S_C(\gamma) = C^P/\mathfrak{m}_\gamma = \mathrm{End}_{kP}(M\uparrow_P^G)/\mathfrak{m}_\gamma$. Considérons donc tout d'abord $C^P = \mathrm{End}_{kP}(M\uparrow_P^G)$ qui est muni d'une structure de G/P-algèbre provenant de la structure de kG-module de M. Explicitement $\phi : G \to \mathrm{Aut}(C^P)$ est défini par

$$\phi(g)(\alpha)(m) = ({}^g\alpha)(m) = g\alpha(g^{-1}m), \quad \forall m \in M, \forall \alpha \in C^P, \forall g \in G$$

et comme $\phi(P) = 1$, ϕ induit $\bar{\phi} : G/P \to \mathrm{Aut}(C^P)$. Nous sommes intéressés à la restriction de cette structure à $G(l)/P$. Or remarquons que comme P est normal dans G et M est G-invariant on a

$$M\uparrow_P^G\downarrow_{G(l)}^G \cong \bigoplus_{g \in [G(l)\backslash G/P]} {}^gM\downarrow_{{}^gP\cap G(l)}^{{}^gP}\uparrow_{{}^gP\cap G(l)}^{G(l)} \cong \bigoplus_{g\in[G(l)\backslash G]} M\uparrow_P^{G(l)} \cong M\uparrow_P^{G(l)} \otimes k^{n_l}$$

où n_l est la cardinalité de $G(l)\backslash G$. Mais M est un kP-module d'endo-permutation G-invariant, donc a fortiori $G(l)$-invariant et de plus P est un p-sous-groupe de Sylow de $G(l)$. Ainsi, par le théorème 4.2, M s'étend à $G(l)$. Notons $\tilde{M}_l$ un $kG(l)$-module qui étend M. On a alors, en utilisant la formule de réciprocité de Frobenius,

$$M\uparrow_P^{G(l)} \cong (M \otimes k)\uparrow_P^{G(l)} \cong \tilde{M}_l \otimes kG(l)/P.$$

Ainsi en regardant C^P comme $G(l)/P$-algèbre (par restriction), on a les isomorphismes suivants,

$$\begin{aligned} C^P &\cong \left(\mathrm{End}_k\left(M\uparrow_P^G\downarrow_{G(l)}^G\right)\right)^P \\ &\cong \left(\mathrm{End}_k(M\uparrow_P^{G(l)} \otimes k^{n_l})\right)^P \\ &\cong \left(\mathrm{End}_k\left((\tilde{M}_l \otimes kG(l)/P) \otimes k^{n_l}\right)\right)^P \\ &\cong \left(\mathrm{End}_k(\tilde{M}_l) \otimes \mathrm{End}_k(kG(l)/P) \otimes \mathrm{End}_k(k^{n_l})\right)^P \\ &\cong \mathrm{End}_k(\tilde{M}_l)^P \otimes \mathrm{End}_k(kG(l)/P) \otimes M_{n_l}(k) \end{aligned}$$

le dernier isomorphisme provenant du lemme 4.20 et du fait que P agit trivialement sur $k(G(l)/P)$ et sur k^{n_l}. La structure de $G(l)/P$-algèbre sur $\mathrm{End}_k(kG(l)/P)$ qui provient de celle de C^P par ces isomorphismes est toujours donnée par la conjugaison, à savoir $({}^{\bar{h}}\beta)(n) = h\beta(h^{-1}n)$ quel que soit $n \in kG(l)/P$, $\beta \in \mathrm{End}_k(kG(l)/P)$ et $\bar{h} \in G(l)/P$. De même sur $\mathrm{End}_k(\tilde{M}_l)^P = \mathrm{End}_{kP}(\tilde{M}_l)$. Par le lemme 4.21, le radical $J(C^P)$ de C^P est isomorphe au radical $J(\mathrm{End}_{kP}(\tilde{M}_l))$ de $\mathrm{End}_{kP}(\tilde{M}_l)$ car $\mathrm{End}_k(kG(l)/P) \otimes M_{n_l}(k)$ est simple. De plus on a les isomorphismes suivants sur les quotients

$$C^P/J(C^P) \cong \mathrm{End}_{kP}(\tilde{M}_l)/J(\mathrm{End}_{kP}(\tilde{M}_l)) \otimes \mathrm{End}_k(kG(l)/P) \otimes M_{n_l}(k).$$

Or comme M est un kP-module indécomposable et k est algébriquement clos,

$$\mathrm{End}_{kP}(\tilde{M}_l)/J(\mathrm{End}_{kP}(\tilde{M}_l)) \cong k.$$

Et donc

$$C^P/J(C^P) \cong \mathrm{End}_k(kG(l)/P) \otimes M_{n_l}(k)$$

est une k-algèbre simple, par conséquent isomorphe (comme k-algèbre) à l'algèbre de multiplicité $S_C(\gamma) = C^P/\mathfrak{m}_\gamma$. En passant au quotient, la structure par conjugaison de $G(l)/P$-algèbre de $\mathrm{End}_k(kG(l)/P)$ qui provenait de celle de C^P par les isomorphismes ci-dessus n'a pas changé. D'un autre côté comme $kG(l)/P$ est un $kG(l)/P$-module, $\mathrm{End}_k(kG(l)/P)$ est une $G(l)/P$-algèbre intérieure et par suite une $G(l)/P$-algèbre (via la conjugaison). Mais ces deux structures de $G(l)/P$-algèbres coïncident car elles sont toutes les deux données par la conjugaison. Ainsi $S_C(\gamma)$ a une structure de $\bar{G}(l)$-algèbre intérieure induisant la structure canonique de $\bar{G}(l)$-algèbre. □

Grâce à cette proposition et à la discussion qui la précède, on a démontré l'existence d'une application ψ_l dans le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & k^* \arrow[r] \arrow[d] & \hat{\bar{G}}(l) \arrow[r] \arrow[d] & \bar{G}(l) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dl, dashed, "\psi_l"] & 1 \\ 1 \arrow[r] & k^* \arrow[r] & GL(V_C(\gamma)) \arrow[r] & PGL(V_C(\gamma)) \arrow[r] & 1. \end{tikzcd}$$

Par conséquent la suite du haut scinde et ce pour tout premier $l \neq p$ divisant l'ordre de $\bar{G}$. Ainsi, grâce au fait que $H^2(G(p), k^*) = 0$ et à la proposition 4.24 on a démontré que la suite

$$0 \to k^* \to \hat{\bar{G}} \to \bar{G} \to 0$$

scinde et donc qu'il existe un homomorphisme $\psi : \bar{G} \to GL(V_C(\gamma))$ qui commute dans le diagramme :

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & k^* \arrow[r] \arrow[d] & \hat{\bar{G}} \arrow[r] \arrow[d] & \bar{G} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dl, dashed, "\psi"] & 1 \\ 1 \arrow[r] & k^* \arrow[r] & GL(V_C(\gamma)) \arrow[r] & PGL(V_C(\gamma)) \arrow[r] & 1. \end{tikzcd}$$

Nous avons donc démontré le théorème suivant.

Théorème 4.26 *Soit L un kG-module d'endo-p-permutation indécomposable de vortex P et source M. Alors le module de multiplicité de L est muni d'une structure de module sur l'algèbre de groupe non-tordue $kN_G(P, M) = kN_G(P)$.*

Nous allons encore donner un exemple d'application du théorème de Dade sur l'extension des modules d'endo-permutation où l'on utilise les mêmes techniques que celles introduites jusqu'ici. Enonçons tout d'abord un lemme.

Lemme 4.27 *Soient P un p-sous-groupe normal de G et L un kG-module indécomposable de vortex P tel que $L\downarrow_P^G$ est indécomposable. Soit encore T un facteur direct indécomposable de $k[G/P]$. Alors $L \otimes T$ est indécomposable. De plus le module de multiplicité V de $L \otimes T$ peut être muni d'une structure de module sur l'algèbre de groupe non-tordue $k[G/P]$ telle que $V \cong T$.*

Preuve. Notons $A = \mathrm{End}_k(L \otimes T)$ et considérons les sous-algèbres de points fixes A^P et A^G. Comme P agit trivialement sur T, par le lemme 4.20, $A^P \cong \mathrm{End}_{kP}(L) \otimes \mathrm{End}_k(T)$. De plus par le lemme 4.21

$$A^P/J(A^P) \cong \mathrm{End}_{kP}(L)/J(\mathrm{End}_{kP}(L)) \otimes \mathrm{End}_k(T) \cong \mathrm{End}_k(T)$$

vu que $L\downarrow_P^G$ est indécomposable. Considérons alors l'homomorphisme quotient de A^G dans $A^G/(J(A^P) \cap A^G)$. Comme $L \otimes T$ est projectif relativement à P, on a $A^G = A_P^G$

où A_P^G est l'image de A^G par l'application trace relative depuis P (critère de Higman). Par suite (cf. par exemple [25] proposition 11.9)

$$A^G/(J(A^P)\cap A^G) = A_P^G/(J(A^P)\cap A^G) = (A^P/J(A^P))_1^{G/P} \cong \mathrm{End}_k(T)_1^{G/P} \cong \mathrm{End}_{kG}(T).$$

Comme $J(A^P)$ est nilpotent, $J(A^P)\cap A^G$ aussi, et donc $J(A^P)\cap A^G \subseteq J(A^G)$. Ainsi par le théorème de relèvement des idempotents, les classes de conjugaison des idempotents primitifs de A^G et de $A^G/(J(A^P)\cap A^G) \cong \mathrm{End}_{kG}(T)$ sont en bijection. De même les classes d'idempotents primitifs de $\mathrm{End}_{kG}(T)$ et de $\mathrm{End}_{kG}(T)/J(\mathrm{End}_{kG}(T))$ sont en bijection. Or comme T est indécomposable et k est algébriquement clos, $\mathrm{End}_{kG}(T)/J(\mathrm{End}_{kG}(T)) \cong k$ et il n'y a que deux idempotents primitifs dans k, 0 et 1. Par suite, il n'y a aussi que 0 et 1 comme idempotents primitif de A^G. Donc A^G est locale et $L \otimes T$ est indécomposable.

Pour la deuxième affirmation, notons P_γ le groupe pointé sur A correspondant à la source de $L \otimes T$. Alors comme $A^P/J(A^P) \cong \mathrm{End}_k(T)$ est une k-algèbre simple, $\mathrm{End}_k(V_A(\gamma)) = S_A(\gamma) = A^P/J(A^P) \cong \mathrm{End}_k(T)$ comme k-algèbres. En suivant la structure canonique de G/P-algèbre de $S_A(\gamma)$ par cet isomorphisme, on réalise, comme dans la preuve de la proposition 4.25, qu'elle correspond à la structure induite par la structure de G/P-algèbre intérieure de $\mathrm{End}_k(T)$. Ainsi $S_A(\gamma)$ est muni d'une structure de G/P-algèbre intérieure qui induit sa structure canonique de G/P-algèbre et ainsi le module de multiplicité $V = V_A(\gamma)$ est muni d'une structure de $k[G/P]$-module. De plus avec cette structure $V_A(\gamma)$ est isomorphe à T. □

Proposition 4.28 *Soient P un p-sous-groupe de Sylow normal de G et M un kP-module d'endo-permutation G-invariant indécomposable de vortex P. Alors le kG-module induit $M{\uparrow}_P^G$ est d'endo-p-permutation. De plus il existe une bijection entre l'ensemble des classes d'isomorphisme de facteurs directs indécomposables de $M{\uparrow}_P^G$ et l'ensemble des classes d'isomorphisme de $k[G/P]$-modules simples.*

Preuve. Le kG-module induit $M{\uparrow}_P^G$ est d'endo-p-permutation par la proposition 2.10. Maintenant, comme M est G-invariant et G/P est un p'-groupe, par le théorème 4.2, il existe un kG-module $\tilde{M}$ tel que $M \cong \tilde{M}{\downarrow}_P^G$. On a alors

$$\begin{aligned} M{\uparrow}_P^G &\cong (\tilde{M}{\downarrow}_P^G \otimes k){\uparrow}_P^G \\ &\cong \tilde{M} \otimes k[G/P] \\ &\cong \bigoplus_{T\in\mathcal{P}} \tilde{M} \otimes T^{\dim_k(T)}, \end{aligned}$$

où $\mathcal{P}$ est un ensemble de représentants des classes d'isomorphisme de $k[G/P]$-modules simples. Le dernier isomorphisme provient du fait que G/P est un p'-groupe et par conséquent, dans la décomposition de $k[G/P]$ en facteurs directs indécomposables, apparaissent toutes les classes d'isomorphisme de $k[G/P]$-modules simples. De plus si T est simple de dimension n, alors T est un facteur direct de $k[G/P]$ de multiplicité n.

Maintenant si $T \in \mathcal{P}$, $\tilde{M} \otimes T$ est un kG-module indécomposable de vortex P, source M et de module de multiplicité T en le regardant comme $k[G/P]$-module comme dans le lemme précédent. Si on note $\mathcal{I}(M\uparrow_P^G)$ l'ensemble des classes d'isomorphisme de facteurs directs indécomposables de $M\uparrow_P^G$, on a, grâce au paramétrage des modules indécomposables par le vortex, la source et le module de multiplicité, une bijection bien définie

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P} & \to & \mathcal{I}(M\uparrow_P^G) \\ T & \mapsto & [\tilde{M} \otimes T] \end{array}$$

où $[-]$ est la classe d'isomorphisme de $-$. $\square$

Cette proposition montre que, contrairement au cas des modules d'endo-permutation, si G n'est pas un p-groupe, un kG-module d'endo-p-permutation n'a pas une unique classe d'isomorphisme de facteurs directs indécomposables de vortex P. Au contraire, cela montre que si P est un p-sous-groupe de Sylow normal de G et si on se fixe un kP-module d'endo-permutation G-invariant, alors on peut construire un kG-module d'endo-p-permutation qui possède comme facteurs directs indécomposables de vortex P et source M toutes les classes d'isomorphisme possibles (qui correspondent à tous les choix possibles pour le module de multiplicité).

Chapitre 5

Exemples de modules d'endo-p-permutation

5.1 Occurrence des modules d'endo-p-permutation

Nous allons donner ici quelques exemples où les modules d'endo-p-permutation apparaissent dans la théorie des représentations. Tout d'abord nous allons reformuler un résultat de Puig qui dit que si G est un groupe p-résoluble, alors la source de tout kG-module simple est un module d'endo-permutation. En fait on peut énoncer le résultat suivant.

Théorème 5.1 *Si G est un groupe p-résoluble, alors tout kG-module simple non induit depuis un sous-groupe propre de G est un kG-module d'endo-p-permutation.*

Pour le prouver on a besoin de la caractérisation des modules simples suivante.

Lemme 5.2 *Soit M un kG-module et posons $A = \mathrm{End}_k(M)$. Alors M est un kG-module simple si et seulement si l'image de G engendre A comme k-espace vectoriel.*

Preuve. M est un kG-module simple si et seulement si A est isomorphe à un des facteurs simples de $kG/J(kG)$, c'est-à-dire si et seulement si A est isomorphe à un quotient de l'algèbre kG. C'est le cas si et seulement si l'application $kG \to A$ provenant de la structure de M est surjective, ce qui est équivalent au fait que l'image de G engendre A comme k-espace vectoriel. □

Le théorème ci-dessus suit du lemme (non-trivial) suivant dû à Puig et dont une preuve se trouve dans [25] (Lemme 30.4).

Lemme 5.3 [Puig] *Soient G un groupe p-résoluble et M un kG-module simple. Posons $A = \mathrm{End}_k(M)$ et supposons que M n'est pas induit depuis un sous-groupe propre de G. Alors il existe un sous-groupe fini L de A^* tel que :*

a) L est d'ordre premier à p.

b) L est invariant sous l'action de G.

c) L engendre A comme k-espace vectoriel.

On peut alors prouver le théorème.

Preuve. Par le lemme précédent il existe L un sous-groupe fini G-invariant de A^*, où $A = \mathrm{End}_k(M)$, d'ordre premier à p et qui engendre A comme k-espace vectoriel. La dernière condition implique que M est un kL-module simple grâce au lemme 5.2 et donc A est isomorphe à un quotient simple de kL. Mais comme L est d'ordre premier à p, kL est semi-simple (théorème de Maschke), par conséquent $kL \cong A \times B$, où B est le produit direct de tous les autres quotients simples de kL. Maintenant, comme L est G-invariant, G permute les quotients simples de kL et comme G stabilise A par construction, G permute les autres quotients simples de kL. En d'autres termes, G stabilise aussi B ce qui veut dire que si l'on regarde maintenant kL comme un kG-module de permutation, on a $kL \cong A \oplus B$. Ainsi le kG-module $A = \mathrm{End}_k(M)$ est un facteur direct d'un module de permutation donc est un kG-module de p-permutation. Et alors, M est bien un kG-module d'endo-p-permutation. □

Nous allons encore présenter une grande famille de modules d'endo-p-permutation. Ce sont les syzygies relatives et les couvertures relatives de modules d'endo-p-permutation. Relevons que dans le cas des p-groupes, ces modules constituent presque tous les modules d'endo-permutation.

Rappelons que si X un G-ensemble fini, on note $\Omega_X(k)$ le noyau de l'homomorphisme d'augmentation $\varepsilon : kX \to k$ défini par $\varepsilon(x) = 1$ pour tout $x \in X$.

Plus généralement si M est un kG-module, alors $\Omega_X(M)$ est le noyau de l'homomorphisme $\varepsilon \otimes id_M : kX \otimes M \to k \otimes M \cong M$ et s'appelle la *syzygie de M relative à X*.

Voici un résultat de J. Alperin ([1] théorème 1) qui nous permet de montrer que les syzygies relatives de modules d'endo-p-permutation sont encore des modules d'endo-p-permutation.

Lemme 5.4 (Alperin) *Soit X un G-ensemble fini. Alors il existe un isomorphisme de kG-modules*

$$\Omega_X(k)^* \otimes \Omega_X(k) \oplus kX \oplus kX \cong k \oplus (kX \otimes kX).$$

Corollaire 5.5 *Si M un kG-module d'endo-p-permutation, alors $\Omega_X(M)$ est un kG-module d'endo-p-permutation.*

Preuve. Par le lemme d'Alperin, $\mathrm{End}_k(\Omega_X(k)) \cong \Omega_X(k)^* \otimes \Omega_X(k)$ est un facteur direct d'un kG-module de permutation, donc est un kG-module de p-permutation. Par suite $\Omega_X(k)$ est un kG-module d'endo-p-permutation. Maintenant comme M est plat sur k, la suite

$$0 \to \Omega_X(k) \otimes M \to kX \otimes M \to M \to 0$$

est exacte. Donc $\Omega_X(M) \cong \Omega_X(k) \otimes M$ est le produit tensoriel de deux kG-modules d'endo-p-permutation. Ainsi $\Omega_X(M)$ est d'endo-p-permutation. □

Nous avons ainsi une grande famille de kG-modules d'endo-p-permutation. Nous nous intéresserons dans le paragraphe 5.2 à des facteurs directs indécomposables de certaines syzygies relatives, à savoir les translatés de Heller relatifs de modules d'endo-p-permutation. Nous allons les introduire maintenant. Les propriétés que nous énonçons ci-dessous se trouvent par exemple dans [23].

Si M est un kG-module et $\mathcal{H}$ une famille de sous-groupes de G, une *présentation projective relative à* $\mathcal{H}$ (ou présentation $\mathcal{H}$-projective) de M est une paire (L, β) où L est un kG-module et $\beta : L \to M$ un homomorphisme surjectif et telle que

i) L est $\mathcal{H}$-projectif, c'est-à-dire $L = \oplus_{i \in I} L_i$ et pour tout $i \in I$ il existe $H \in \mathcal{H}$ tel que L_i soit projectif relativement à H.

ii) β est $\mathcal{H}$-scindé, c'est-à-dire que pour tout $H \in \mathcal{H}$, il existe une section kH-linéaire de β, autrement dit une application kH-linéaire $\sigma : M \to L$ telle que $\beta\sigma = id_M$.

Notons qu'une telle présentation existe toujours. En effet, on prend comme module $L = \oplus_{H \in \mathcal{H}} M{\downarrow}_H^G{\uparrow}_H^G$ et β la somme directe des applications $\beta_H : kG \otimes_{kH} (M{\downarrow}_H^G) \to M$ définies par $\beta_H(a \otimes m) = am$. Clairement l'application $\sigma_H : M \to kG \otimes_{kH} (M{\downarrow}_H^G)$ donnée par $\sigma_H : m \to 1 \otimes_{kH} m$ est une section kH-linéaire.

Proposition 5.6 *Soit $\beta : L \to M$ une présentation projective relative à $\mathcal{H}$ de dimension minimale. Alors les conditions suivantes sont vérifiées :*

i) $\ker \beta$ *ne contient aucun facteur direct $\mathcal{H}$-projectif non nul.*

ii) si $\beta' : L' \to M$ est une présentation $\mathcal{H}$-projective de M, alors la suite $0 \to \ker \beta \to L \xrightarrow{\beta} M \to 0$ *est facteur direct de la suite* $0 \to \ker \beta' \to L' \xrightarrow{\beta'} M \to 0$.

Par cette proposition, on a l'existence et l'unicité (à isomorphisme de suites exactes près) d'une présentation $\mathcal{H}$-projective de dimension minimale. On l'appelle *une couverture projective relative à* $\mathcal{H}$ (ou couverture $\mathcal{H}$-projective) de M. Si $\beta : L \to M$ est une couverture $\mathcal{H}$-projective, on note alors $\ker \beta = \Omega_{\mathcal{H}}(M)$ et on l'appelle *translaté de Heller relatif à* $\mathcal{H}$ *de* M. Dans le cas où $\mathcal{H} = \{1\}$ on dit simplement *couverture projective* et *translaté de Heller*.

Corollaire 5.7 *Si M est indécomposable, alors $\Omega_{\mathcal{H}}(M)$ est indécomposable. De plus, $\Omega_{\mathcal{H}}(M) = 0$ si et seulement si M est $\mathcal{H}$-projectif. Si M est indécomposable et n'est pas $\mathcal{H}$-projectif, alors les vortex de M et $\Omega_{\mathcal{H}}(M)$ coïncident. En particulier, $\Omega_{\mathcal{H}}(k)$ est soit nul (s'il existe $H \in \mathcal{H}$ contenant un p-sous-groupe de Sylow de G) soit un kG-module indécomposable de vortex un p-sous-groupe de Sylow de G.*

Nous nous intéresserons plus particulièrement aux translatés de Heller relatifs du kG-module trivial k. En effet, nous pouvons montrer qu'il s'agit de kG-modules d'endo-p-permutation.

Proposition 5.8 *Le translaté de Heller $\Omega_{\mathcal{H}}(M)$ relatif à $\mathcal{H}$ d'un kG-module d'endo-p-permutation M est un kG-module d'endo-p-permutation. En particulier $\Omega_{\mathcal{H}}(k)$ est d'endo-p-permutation.*

Preuve. Considérons l'ensemble $X = \coprod_{H \in \mathcal{H}} G/H$. Alors la suite

$$0 \to N \to kX \otimes M \stackrel{\varepsilon \otimes id}{\to} M \to 0,$$

où ε est l'homomorphisme d'augmentation, est une présentation $\mathcal{H}$-projective. En effet

$$kX = \oplus_{H \in \mathcal{H}} k[G/H] \cong \oplus_{H \in \mathcal{H}} k{\uparrow}_H^G$$

est projectif relativement à $\mathcal{H}$ et par suite $kX \otimes M$ aussi. Pour $R \in \mathcal{H}$, la section kR-linéaire de $\varepsilon \otimes id$ est donnée par $\sigma(m) = i(1 \cdot R) \otimes m$ quel que soit $m \in M$, où i est l'injection canonique de $k[G/R]$ dans $\oplus_{H \in \mathcal{H}} k[G/H]$. Alors par la proposition 5.6, $\Omega_{\mathcal{H}}(M)$ est un facteur direct du noyau $\Omega_X(M)$ de $\varepsilon \otimes id$. Or on a démontré que $\Omega_X(M)$ est un kG-module d'endo-p-permutation, par suite $\Omega_{\mathcal{H}}(M)$ aussi. $\square$

5.2 Couvertures projectives relatives

Nous allons étudier les couvertures projectives relatives du module trivial qui sont des exemples de modules d'endo-p-permutation indécomposables comme on l'a démontré au paragraphe précédent. Nous allons essayer d'identifier la classe dans le groupe de Dade de leur source, ainsi que leur module de multiplicité.

Rappelons quelques résultats sur les couvertures projectives relatives. Si $\mathcal{H}$ est une famille de sous-groupes de G, on note $\bar{\mathcal{H}}$ l'ensemble de tous les conjugués des éléments de $\mathcal{H}$, $\bar{\mathcal{H}}_p$ l'ensemble des p-sous-groupes de Sylow des éléments de $\bar{\mathcal{H}}$ et enfin $\hat{\mathcal{H}}$ un ensemble de représentants des classes de G-conjugaison de $\bar{\mathcal{H}}_p$. Alors il est connu qu'un kG-module est $\mathcal{H}$-projectif si et seulement s'il est $\bar{\mathcal{H}}$-projectif ou encore si et seulement s'il est $\hat{\mathcal{H}}$-projectif (tout kG-module est projectif relativement à un p-sous-groupe de Sylow et s'il est projectif par rapport à un sous-groupe H de G il est projectif par rapport à tous les conjugués de H). De même, un homomorphisme est $\mathcal{H}$-scindé si et seulement s'il est $\bar{\mathcal{H}}$-scindé ou encore si et seulement s'il est $\hat{\mathcal{H}}$-scindé. Ainsi pour calculer la couverture projective relative à une famille $\mathcal{H}$, on peut remplacer $\mathcal{H}$ soit par $\bar{\mathcal{H}}$ soit par $\hat{\mathcal{H}}$. En particulier si $\mathcal{H} = \{H\}$, on peut se réduire au cas où H est un p-sous-groupe de G.

Les couvertures projectives relatives du kG-module trivial k font apparaître les modules de Scott. Rappelons que le kG-module induit $k\!\uparrow_H^G$ possède un unique facteur direct ayant k comme quotient (cf. [25] exercice 27.5). Ce facteur direct s'appelle le *module de Scott correspondant à* H et on le note $\mathrm{Sc}(H)$. En fait, $\mathrm{Sc}(H) = \mathrm{Sc}(H_p)$ où H_p est un p-sous-groupe de Sylow de H, donc il n'y a qu'un seul module de Scott pour chaque classe de conjugaison de p-sous-groupes.

On peut démontrer (cf. [23] paragraphe 3) que la couverture projective de k relative à un sous-groupe H de G est $\mathrm{Sc}(H) \to k$ et plus généralement que la couverture projective relative à la famille de sous-groupes $\mathcal{H}$ de G est $\mathrm{Sc}(\mathcal{H}) \to k$ où $\mathrm{Sc}(\mathcal{H}) = \oplus_{H\in\hat{\mathcal{H}}} \mathrm{Sc}(H)$.

Notons que si $G = P$ est un p-groupe, alors $\mathrm{Sc}(Q) = k\!\uparrow_Q^P \cong k[P/Q]$ car $k\!\uparrow_Q^P$ est indécomposable (théorème d'indécomposabilité de Green) et alors $\Omega_{\{Q\}}(k) = \Omega_{P/Q}(k)$ est la syzygie relative à Q du kP-module trivial.

Proposition 5.9 *Soient P un p-sous-groupe de Sylow de G, Q un sous-groupe de P et $\mathcal{A}$ un système de représentants des doubles classes $P\backslash G/N_G(Q)$. Alors la classe de la source de $\Omega_{\{Q\}}(k)$ dans le groupe de Dade $D(P)$ est*

$$\Omega_{\coprod_{g\in\mathcal{A}} P/{}^gQ\cap P}.$$

De plus si P est normal dans G, alors $\mathcal{A} = [G/PN_G(Q)]$ et la source de $\Omega_{\{Q\}}(k)$ est

$$\Omega_{\coprod_{g\in\mathcal{A}} P/{}^gQ}(k).$$

Preuve. Tout d'abord rappelons que le kG-module trivial est de vortex un p-sous-groupe de Sylow P et par conséquent, $\Omega_{\{Q\}}(k)$ aussi. Comme $k[G/Q] \to k$ est une présentation projective relative à Q du kG-module trivial k, la suite exacte de kG-modules

$$0 \to \Omega_{G/Q}(k) \to k[G/Q] \to k \to 0$$

a pour facteur direct la suite exacte de kG-modules

$$0 \to \Omega_{\{Q\}}(k) \to \mathrm{Sc}(Q) \to k \to 0.$$

Par conséquent la source S de $\Omega_{\{Q\}}(k)$ est un facteur direct de $\Omega_{G/Q}(k)\downarrow^G_P$. Plus précisément, comme $\Omega_{G/Q}(k)\downarrow^G_P$ est un kP-module d'endo-permutation, S est le chapeau de $\Omega_{G/Q}(k)\downarrow^G_P$. Donc dans $D(P)$ on a

$$[S] = [(\Omega_{G/Q}(k)\downarrow^G_P)_*] = \Omega_{G/Q\downarrow^G_P} = \Omega_{\coprod_{g\in[P\backslash G/Q]} P/\,{}^g\!Q\cap P}.$$

Notons encore que si $gN_G(Q) = hN_G(Q)$, alors ${}^g\!Q\cap P = {}^h\!Q\cap P$ et par conséquent on peut enlever ces répétitions dans la réunion disjointe. En d'autres termes on peut remplacer $[P\backslash G/Q]$ par $[P\backslash G/N_G(Q)] = \mathcal{A}$. Ainsi la première affirmation est démontrée.

Dans le cas où P est normal dans G, alors $\mathcal{A} = [P\backslash G/N_G(Q)] = [G/PN_G(Q)]$ et ${}^g\!Q \cap P = {}^g\!Q$. La restriction à P d'une présentation projective relative à $\{Q\}$ du kG-module trivial est une présentation projective relative à la famille $\{\,{}^g\!Q \cap P|\ g \in G\}$ et dans le cas où P est normal dans G, relative à $\mathcal{H} = \{\,{}^g\!Q \mid g \in G\}$. Il nous suffit donc de vérifier que $\mathrm{Sc}(\mathcal{H}) = \oplus_{g\in[G/PN_G(Q)]}k[P/\,{}^g\!Q]$, c'est-à-dire que $\hat{\mathcal{H}} = \{\,{}^g\!Q \mid g \in [G/PN_G(Q)]\}$ car alors $\Omega_{\coprod_{g\in\mathcal{A}} P/\,{}^g\!Q}(k)$ est un translaté de Heller relatif, donc indécomposable. Mais c'est bien le cas car quel que soit g et h dans G, $k[P/\,{}^g\!Q] \cong k[P/\,{}^h\!Q]$ si et seulement si $gPN_G(Q) = hPN_G(Q)$. □

Dans le cas où P est un p-sous-groupe de Sylow normal dans G, alors nous pouvons donner explicitement la couverture $\{Q\}$-projective du kG-module trivial. Pour cela nous allons tout d'abord donner un homomorphisme de kG-modules qui étend la couverture projective relative à $\{\,{}^g\!Q \mid g \in G\}$ du kP-module trivial qui est, vu la fin de la preuve ci-dessus $\oplus_{g\in[G/PN_G(Q)]}k[P/\,{}^g\!Q] \to k$.

Lemme 5.10 *Soient P un p-sous-groupe de Sylow de G et Q un sous-groupe de P. Supposons que P est normal dans G. Notons H un complément de $N_P(Q)$ dans $N_G(Q)$. Alors l'homomorphisme d'augmentation*

$$k[G/QH] \to k$$

étend la couverture $\{\,{}^g\!Q \mid g \in G\}$-projective du kP-module trivial

$$\bigoplus_{g\in[G/PN_G(Q)]} k[P/\,{}^g\!Q] \to k.$$

Preuve. Il suffit de calculer la restriction à P de $[kG/QH]$. On a

$$k[G/QH]\downarrow^G_P \cong \bigoplus_{g\in[P\backslash G/QH]} k[P/\,{}^g(QH) \cap P] \cong \bigoplus_{g\in[G/PN_G(Q)]} k[P/\,{}^g\!Q],$$

le dernier isomorphisme provenant du fait que P est normal dans G et donc ${}^g(QH)\cap P = {}^g(QH \cap P) = {}^g\!Q$ et $P\backslash G/QH = G/PH = G/PN_G(Q)$. □

Proposition 5.11 *Soient P un p-sous-groupe de Sylow de G et Q un sous-groupe de P. Supposons que P est normal dans G. Notons H un complément de $N_P(Q)$ dans $N_G(Q)$. L'homomorphisme d'augmentation $k[G/QH] \xrightarrow{\varepsilon} k$ est une couverture $\{Q\}$-projective du kG-module trivial k.*

Preuve. Montrons tout d'abord que $k[G/QH] \to k$ est une présentation $\{Q\}$-projective de k. En effet, le kG-module $k[G/QH]$ est projectif relativement à QH et donc relativement à Q qui est un p-sous-groupe de Sylow de QH. De plus l'application $\sigma : k \to k[G/QH]$ définie par $\sigma(\lambda) = \lambda QH$ pour tout $\lambda \in k$ est une section kQ-linéaire de ε. Il nous reste à montrer que c'est une présentation $\{Q\}$-projective minimale dans le sens que $k[G/QH]$ est de dimension minimale. La restriction à P d'une présentation $\{Q\}$-projective du kG-module trivial est une présentation $\{\,{}^gQ \,|\, g \in G\}$-projective du kP-module trivial. Or par le lemme précédent, la restriction à P de $k[G/QH] \to k$ est la couverture projective relative à $\{\,{}^gQ \,|\, g \in G\}$. Elle est donc de dimension minimale parmi les présentations projectives. Par suite $k[G/QH] \to k$ est bien minimale parmi les présentations $\{Q\}$-projectives du kG-module trivial. □

On peut généraliser ce résultat, toujours dans le cas où P est un p-sous-groupe de Sylow normal, à des couvertures projectives relatives à une famille de sous-groupes. C'est le même raisonnement mais plus fastidieux à rédiger.

Pour finir, intéressons-nous au module de multiplicité de $\Omega_{\{Q\}}(k)$. Supposons toujours que P est un p-sous-groupe de Sylow normal de G. Nous allons montrer que le module de multiplicité d'une couverture $\{Q\}$-projective du kG-module trivial k est de dimension 1. On ne pourra pas donner plus d'information. En effet, le module de multiplicité n'est muni d'une structure canonique que sur une algèbre de groupe tordue. Nous avons montré que cette dernière était en fait isomorphe à une algèbre de groupe non tordue et donc que k pouvait être considéré comme un module sur $k[N_G(P)/P]$. Mais l'isomorphisme entre l'algèbre de groupe tordue et $k[N_G(P)/P]$ n'est pas unique ni canonique et chaque choix d'un tel isomorphisme nous donne une autre structure sur k.

Remarquons le fait général suivant. Si la restriction à P d'un kG-module indécomposable M de vortex P est indécomposable (et donc égale à sa source), alors le module de multiplicité de M est de dimension 1. En effet dans ce cas, l'algèbre $\mathrm{End}_{kP}(M)$ est locale. Donc l'algèbre de multiplicité de M est l'unique quotient simple

$$\mathrm{End}_{kP}(M)/J(\mathrm{End}_{kP}(M)) \cong k$$

vu que k est algébriquement clos. Nous pouvons appliquer ce fait à nos couvertures $\{Q\}$-projectives.

Proposition 5.12 *Soient P un p-sous-groupe de Sylow de G, Q un sous-groupe de P et supposons que P est normal dans G. Alors le module de multiplicité du translaté de Heller relatif $\Omega_{\{Q\}}(k)$ est de dimension 1.*

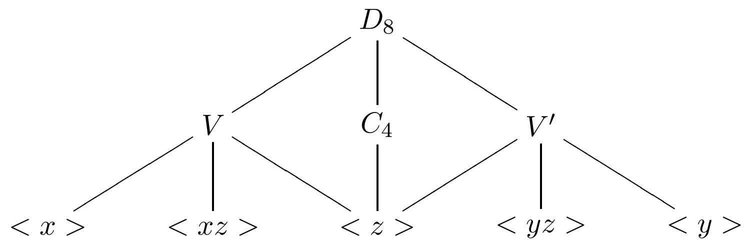
Preuve. Par la proposition 5.11, le translaté de Heller $\{Q\}$-relatif de k est $\Omega_{G/QH}(k)$ où H est un complément de $N_P(Q)$ dans $N_G(Q)$. Or, par le lemme 5.10, le kP-module

$\Omega_{G/QH}(k)\downarrow_P^G$ est indécomposable vu que la restriction à P de $k[G/QH] \to k$ est une couverture projective relative. On conclut alors par la remarque ci-dessus. Le module de multiplicité du translaté de Heller $\{Q\}$-relatif du kG-module trivial est de dimension 1. □

On peut de nouveau généraliser avec les mêmes arguments ce résultat pour des translatés de Heller relatifs à des familles de sous-groupes.

5.3 Le groupe diédral D_8

Dans ce paragraphe, nous allons calculer $D(D_8)^{G\text{-st}}$ pour différents groupes G tels que D_8 est un 2-sous-groupe de Sylow de G. Commençons par rappeler une présentation de D_8. On a $D_8 =< x, y \,|\, x^2 = y^2 = (xy)^4 = 1 >$. Le centre de D_8 est le sous-groupe $<z>$ d'ordre 2 où $z = (xy)^2$ et D_8 possède deux sous-groupes $V =< x, z >$ et $V' =< y, z >$ isomorphes au groupe de Klein $C_2 \times C_2$. Si l'on représente D_8 et ses sous-groupes non-triviaux, on a



Dans D_8, les sous-groupes $<x>$ et $<xz>$, ainsi que $<y>$ et $<yz>$ sont conjugués et ce sont les seuls sous-groupes conjugués dans D_8. Nous allons étudier les trois cas de fusion possibles, c'est-à-dire le cas où il n'y a pas de fusion (aucune paire de sous-groupes de D_8 n'est conjuguée dans G si elle n'est pas conjuguée dans D_8), le cas où $<x>$ et $<z>$ fusionnent dans G c'est-à-dire sont conjugués dans G, mais pas $< y >$ et $< z >$ (c'est le cas où V est normal dans G) et enfin le cas où tous les sous-groupes d'ordre 2 sont conjugués. Notons que si D_8 est un 2-sous-groupe de Sylow de G, alors V et V' ne sont jamais conjugués dans G comme le montre le petit lemme ci-dessous.

Lemme 5.13 *Les sous-groupes V et V' de D_8 ne sont jamais conjugués dans un groupe fini ayant pour 2-sous-groupe de Sylow le groupe D_8.*

Preuve. Supposons par l'absurde qu'il existe un groupe fini G tel que D_8 soit un 2-sous-groupe de Sylow et tel qu'il existe $g \in G$ avec $V' = {}^gV$. Comme V est normal dans D_8 et dans ${}^{g^{-1}}D_8$, les groupes D_8 et ${}^{g^{-1}}D_8$ sont contenus dans $N_G(V)$. Comme ce sont des sous-groupes de Sylow de $N_G(V)$ il existe $h \in N_G(V)$ tel que ${}^hD_8 = {}^{g^{-1}}D_8$. Par suite il existe $n \in N_G(D_8)$ tel que $g^{-1} = hn$. Or $N_G(D_8) = C_G(D_8)D_8$. En effet, $N_G(D_8)/C_G(D_8)$ s'injecte dans $\mathrm{Aut}(D_8) \cong D_8$ et par suite $N_G(D_8)/C_G(D_8)D_8$ est un 2-groupe. Mais comme D_8 est un 2-sous-groupe de Sylow de G, $N_G(D_8)/C_G(D_8)D_8$ est un $2'$-groupe et donc $N_G(D_8)/C_G(D_8)D_8 = \{1\}$. Maintenant comme $D_8C_G(D_8) = N_G(D_8)$ est contenu dans $N_G(V)$, on doit avoir $g^{-1} \in N_G(V)$ ce qui est une contradiction. $\square$

Rappelons ici que le groupe de Dade $D(D_8)$ est un groupe abélien libre de rang 3 engendré par les classes des syzygies relatives $\Omega_{D_8}, \Omega_{D_8/<x>}$ et $\Omega_{D_8/<z>}$ (théorème 1.40). Nous allons montrer que quel que soit le type de 2-fusion qui se produit, ces trois générateurs sont G-stables. Ainsi $D(D_8)^{G\text{-st}} = D(D_8)$ pour tout groupe G contenant D_8 comme 2-sous-groupe de Sylow.

Le premier cas, c'est-à-dire quand D_8 contrôle la 2-fusion, est trivial. En effet, par le lemme 2.22, tous les éléments de $D(D_8)$ sont G-stables car ils sont évidemment D_8-stables.

Le plus petit exemple du deuxième cas de fusion apparaît lorsque l'on plonge D_8 dans S_4 de la manière suivante :

$$\begin{array}{rccl} \sigma : & D_8 & \longrightarrow & S_4 \\ & x & \mapsto & (14)(23) \\ & y & \mapsto & (13) \end{array}$$

Dans ce cas, $N_{S_4}(D_8) = D_8$, le sous-groupe V est normal dans S_4 et le normalisateur $N_{S_4}(V') = D_8$. Dans cette situation, les sous-goupes $<x>$ et $<z>$ fusionnent, explicitement, ${}^{(123)}< x >=< z >$ et on a ${}^{(123)}D_8 \cap D_8 = V$. Calculons donc $\Omega_{D_8/<x>}\downarrow_V^{D_8}$ et ${}^{(123)}\Omega_{D_8/<x>}\downarrow_V^{{}^{(123)}D_8}$. Pour cela, on utilise la formule de Mackey et on remarque que

$$k[D_8/<x>]\downarrow_V^{D_8} \cong \bigoplus_{h\in[V\backslash D_8/<x>]} kV/\,{}^h<x> = k[V/<x>] \oplus k[V/<xz>].$$

La suite

$$0 \to k \to kV \xrightarrow{\varphi} k[V/<x> \amalg V/<xz>] \xrightarrow{\varepsilon} k \to 0,$$

où φ est défini par $\varphi(h) = h<x> + h<xz>$, $h \in V$ étendu par linéarité et où ε est l'homomorphisme d'augmentation, est une suite exacte. Ainsi $\ker(\varepsilon) = \mathrm{Im}(\varphi) \cong \Omega_V^{-1}(k)$. Donc les suites

$$0 \to \Omega_{D_8/<x>}(k)\downarrow_V^{D_8} \to k[D_8/<x>]\downarrow_V^{D_8} \to k \to 0$$

et

$$0 \to \Omega_V^{-1}(k) \to k[V/<x>] \oplus k[V/<xz>] \to k \to 0$$

sont isomorphes et ainsi $\Omega_{D_8/<x>}(k)\downarrow_V^{D_8} \cong \Omega_V^{-1}(k)$.

Par un raisonnement mutatis mutandis, on remarque que

$${}^{(123)}\Omega_{D_8/<x>}(k)\downarrow_V^{{}^{(123)}D_8} \cong {}^{(132)}\Omega_{D_8/<x>}(k)\downarrow_V^{{}^{(132)}D_8} \cong \Omega_V^{-1}(k).$$

Considérons maintenant $\Omega_{D_8/<z>} \in D(D_8)$. Dans $D(D_8)$, on a

$$\mathrm{Res}_V^{D_8}\Omega_{D_8/<z>} = \Omega_{D_8/<z>\downarrow_V^{D_8}} = \Omega_{V/<z> \amalg V/<z>} = \Omega_{V/<z>} = 0$$

et

$$\mathrm{Res}_V^{{}^gD_8}\,{}^g\Omega_{D_8/<z>} = \Omega_{{}^gD_8/\,{}^g<z>\downarrow_V^{{}^gD_8}} = \Omega_{V/\,{}^g<z> \amalg V/\,{}^g<z>} = \Omega_{V/\,{}^g<z>} = 0,$$

quel que soit $g \in S_4 - D_8$.

Et enfin de manière évidente, on a aussi $\mathrm{Res}_V^{D_8}\Omega_{D_8} = \Omega_V = \mathrm{Res}_V^{{}^gD_8}\,{}^g\Omega_{D_8}$, quel que soit $g \in S_4$. On a donc montré que tous les générateurs de $D(D_8)$ sont S_4-stables, ce qui prouve que

$$D(D_8)^{S_4\text{-st}} = D(D_8).$$

Pour le dernier cas de fusion, le plus petit exemple est lorsque l'on plonge D_8 dans $G = \mathrm{Gl}_3(\mathbb{F}_2)$ de la manière suivante :

$$\begin{array}{rccc} \sigma: & D_8 & \longrightarrow & \mathrm{Gl}_3(\mathbb{F}_2) \\ & x & \mapsto & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ & y & \mapsto & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Dans cette situation, les sous-groupes $<x>$ et $<y>$ fusionnent. En effet, en prenant

$$g = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{on a} \quad {}^g< x >=< y > .$$

On remarque que $y \in {}^gD_8 \cap D_8$ mais $x \notin {}^gD_8$, car sinon, ${}^gD_8 \cap D_8 = D_8$ et alors $g \in N_G(D_8) = D_8$ ce qui n'est pas le cas. De même $z \notin {}^gD_8$ car on vérifie $z^g \notin D_8$. Donc ${}^gD_8 \cap D_8 =<y>$ et ainsi $D({}^gD_8 \cap D_8) = 0$ et évidemment il n'y a pas de problème de stabilité.

De plus on a vu plus haut que le cas où $<x>$ et $<z>$ fusionnent ne pose pas de problème de stabilité et donc dans ce cas aussi, on a

$$D(D_8)^{\mathrm{Gl}_3(\mathbb{F}_2)\text{-st}} = D(D_8).$$

Nous venons ainsi de montrer comme annoncé que si D_8 est un 2-sous-groupe de Sylow d'un groupe fini G, alors $D(D_8)^{G\text{-st}} = D(D_8)$. Ce phénomène provient essentiellement du fait que le groupe de Dade d'un groupe cyclique d'ordre 2 est trivial.

5.4 Le groupe extra-spécial d'ordre 27

Cet exemple a pour but de démontrer que si P est un p-sous-groupe de Sylow d'un groupe fini G, alors le correspondant de Green d'un $kN_G(P)$-module d'endo-p-permutation n'est pas en général un kG-module d'endo-p-permutation.

Pour ce faire, nous allons construire un exemple où $D(P)^{G\text{-st}} \neq D(P)^{N_G(P)}$. Soit P le 3-sous-groupe extra-spécial d'ordre 27 de $G = \mathrm{Gl}_3(\mathbb{F}_3)$ constitué des matrices uni-triangulaires supérieures, c'est-à-dire des matrices triangulaires supérieures avec des 1 dans la diagonale. Nous allons donner explicitement un élément de $D(P)^{N_G(P)}$ qui n'est pas G-stable. Posons

$$x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

trois éléments de P. Avec ces notations, considérons la partie du treillis des sous-groupes de P suivante :

$$\begin{tikzcd}
 & & & P \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & & & \\
 & & V \arrow[dll, dash] \arrow[dl, dash] \arrow[d, dash] \arrow[dr, dash] & & V' \arrow[dl, dash] \arrow[d, dash] \arrow[dr, dash] \arrow[drr, dash] & & \\
 <xz^2> & <x> & <xz> & <z> & <yz> & <y> & <yz^2>
\end{tikzcd}$$

où V et V' sont isomorphes à $C_3 \times C_3$. Explicitement V est l'ensemble des matrices de P telles que le coefficient (1,2) est nul, tandis que V' est l'ensemble des matrices de P telles que le coefficient (2,3) est nul.

Le normalisateur de P dans G est l'ensemble des matrices inversibles triangulaires supérieures. On vérifie aisément que $N_G(P)$ normalise aussi V et V'. Réciproquement si une matrice $(m_{ij})_{i,j} \in \mathrm{Gl}_3(\mathbb{F}_3)$ normalise V, alors $m_{31} = m_{32} = 0$ et si elle normalise V', alors $m_{21} = m_{31} = 0$ et donc si elle normalise V et V' elle est triangulaire supérieure et normalise alors P. Donc $N_G(P) = N_G(V) \cap N_G(V')$.

Nous allons montrer que $\Omega_{P/<x>}$ est $N_G(P)$-stable mais n'est pas G-stable. Montrons d'abord que $\Omega_{P/<x>}$ est $N_G(P)$-stable. Si $g \in N_G(P)$, alors comme $g \in N_G(V) \cap N_G(V')$, ${}^g<x>=<xz^i>$, $i \in \{0, 1, 2\}$. Mais $<xz^i>$ est conjugué à $<x>$ dans P, c'est-à-dire qu'il existe $h \in P$ tel que ${}^g<x>= {}^h<x>$. Ainsi

$${}^g\Omega_{P/<x>} = \Omega_{P/{}^g<x>} = \Omega_{P/{}^h<x>} = {}^h\Omega_{P/<x>} = \Omega_{P/<x>},$$

et donc $\Omega_{P/<x>} \in D(P)^{N_G(P)}$.

Montrons maintenant qu'il n'est pas G-stable. Pour ce faire, nous allons choisir $g \in G$ tel que ${}^g<x>=<y>$. Explicitement, on considère $g = g_2 g_1$, avec

$$g_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in N_G(V) \quad \text{et} \quad g_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in N_G(V').$$

On vérifie que ${}^{g_1}<x>=<z>$ et ${}^{g_2}<z>=<y>$. Calculons ${}^gP \cap P = {}^{g_2}({}^{g_1}P \cap P^{g_2})$.Tout d'abord

$$<z>= V \cap V' \leq {}^{g_1}P \cap P^{g_2}.$$

Par contre $x \notin P^{g_2}$ car sinon, $g_2 \in N_G(V) \cap N_G(V') = N_G(P)$, ce qui n'est pas le cas vu que g_2 n'est pas triangulaire supérieure. De même $y \notin {}^{g_1}P$. Ainsi

$${}^{g_1}P \cap P^{g_2} =<z> \quad \text{et donc} \quad {}^gP \cap P = {}^{g_2}<z> =<y> .$$

Maintenant,

$$\mathrm{Res}^P_{{}^gP\cap P}\, \Omega_{P/<x>} = \Omega_{P/<x>\downarrow^P_{<y>}} = \Omega_{<y>},$$

car grâce à la formule de Mackey et comme x n'est pas conjugué à y dans P, on a

$$P/<x>\downarrow^{P}_{<y>} = \coprod_{h\in[<y>\backslash P/<x>]} <y>/({}^{h}<x>\cap<y>) = \coprod_{h\in[<y>\backslash P/<x>]} <y>/\{1\}$$

et on sait que $\Omega_{X\amalg X} = \Omega_X$ pour tout P-ensemble X. Par contre,

$$\mathrm{Res}^{{}^gP}_{{}^gP\cap P}\, {}^g\Omega_{P/<x>} = \Omega_{{}^gP/<y>\downarrow^{{}^gP}_{<y>}} = 0.$$

En effet,

$${}^gP/<y>\downarrow^{{}^gP}_{<y>} = \coprod_{h\in[<y>\backslash {}^gP/<y>]} <y>/({}^{h}<y>\cap<y>) \cong \left(\coprod_{\mathcal{A}}<y>\right)\amalg\left(\coprod_{\mathcal{B}}\{\cdot\}\right),$$

où $\mathcal{A}$ est l'ensemble des $h\in[<y>\backslash {}^gP/<y>]$ tels que ${}^{h}<y>\neq<y>$ et $\mathcal{B}$ est l'ensemble des $h\in[<y>\backslash {}^gP/<y>]$ tels que ${}^{h}<y>=<y>$. L'ensemble $\mathcal{B}$ n'est pas vide car $1\in\mathcal{B}$ (en choisissant $1\in[<y>\backslash {}^gP/<y>]$). Le résultat suit du fait que l'on peut enlever les répétitions et du calcul général suivant utilisant le lemme de Thévenaz ([2] lemme 5.2.1) :

$$\Omega_{\{\cdot\}\amalg X} = \Omega_{\{\cdot\}} + \Omega_X - \Omega_{\{\cdot\}\times X} = \Omega_{\{\cdot\}} = 0$$

pour tout P-ensemble X vu que $\{\cdot\}\times X\cong X$ comme P-ensembles.

En résumé, $\Omega_{P/<x>}$ n'est pas G-stable car dans le groupe de Dade $D(<y>)\cong\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, on a

$$\mathrm{Res}^{{}^gP}_{{}^gP\cap P}\, {}^g\Omega_{P/<x>} = 0 \neq \Omega_{<y>} = \mathrm{Res}^{P}_{{}^gP\cap P}\,\Omega_{P/<x>}.$$

Par contre on a démontré plus haut qu'il était $N_G(P)$-stable. Cela nous permet d'énoncer la proposition suivante.

Proposition 5.14 *Si P est un p-sous-groupe de Sylow de G, alors le correspondant de Green d'un $kN_G(P)$-module d'endo-p-permutation n'est pas, en général, un kG-module d'endo-p-permutation.*

Preuve. On reprend l'exemple ci-dessus, c'est-à-dire $G = \mathrm{Gl}_3(\mathbb{F}_3)$ et P est le sous-groupe extra-spécial d'ordre 27 de G. On considère le $kN_G(P)$-module $\Omega_{P/<x>}(k)\uparrow_P^{N_G(P)}$. C'est un module d'endo-p-permutation par la proposition 2.10 car on a démontré ci-dessus que $\Omega_{P/<x>}$ est $N_G(P)$-invariant. Soit M un facteur direct indécomposable de vortex P de $\Omega_{P/<x>}(k)\uparrow_P^{N_G(P)}$ (un tel facteur existe car $\Omega_{P/<x>}(k)$ est de vortex P). Alors M est un $kN_G(P)$-module d'endo-p-permutation indécomposable de vortex P et source $\Omega_{P/<x>}(k)$. Maintenant le correspondant de Green $Gr(M)$ de M sur G possède le même vortex et la même source que M, donc a comme source $\Omega_{P/<x>}(k)$. Mais on a vu ci-dessus que $\Omega_{P/<x>}$ n'est pas G-stable et donc par le théorème 2.11, $Gr(M)$ n'est pas un kG-module d'endo-p-permutation. □

Chapitre 6

Conclusion

Pour conclure, nous allons faire une petite synthèse des résultats présentés tout au long de ce travail et donner quelques questions ouvertes.

Le point de départ de ce travail est l'introduction de la notion de kG-module d'endo-p-permutation pour un groupe fini G. Une fois l'étude de quelques propriétés faciles de cette famille de modules, le premier résultat important est la caractérisation des modules d'endo-p-permutation par leur source. Avec ce résultat, nous pouvons déjà affirmer qu'un kG-module d'endo-p-permutation indécomposable est toujours facteur direct de certains kP-modules d'endo-permutation particuliers que l'on a induit à G. Pour un p-sous-groupe fixé P, les classes d'isomorphisme des modules d'endo-permutation indécomposables depuis lesquels on induit pour trouver les modules d'endo-p-permutation forment en fait le sous-groupe des éléments G-stables du groupe de Dade $D(P)$.

Ce résultat nous a amené à tenter d'expliciter, dans certains cas, ce sous-groupe. Notre chance a été que, pendant que ce travail s'effectuait, la classification des modules d'endo-permutation a été achevée. Grâce à cela, nous avons pu décrire complètement le sous-groupe des éléments G-stables du groupe de Dade lorsque le normalisateur contrôle la p-fusion.

D'un autre côté, nous nous sommes intéressés à un théorème connu, dû à Dade, sur l'extension des modules d'endo-permutation. Nous avons pu utiliser nos résultats pour donner une nouvelle preuve de ce théorème dans le cas où p est un nombre premier impair.

Nous avons alors présenté la paramétrage des modules indécomposables à l'aide du vortex, de la source et d'un troisième invariant, le module de multiplicité. Il était naturel de regarder cela pour deux raisons. Tout d'abord nous avions utilisé la source pour caractériser les modules d'endo-p-permutation, il était donc logique de présenter le troisième invariant nécessaire à ce paramétrage. D'un autre côté le théorème de Dade a pour conséquence que le module de multiplicité d'un module d'endo-p-permutation indécomposable est muni d'une structure de module sur une algèbre de groupe non-tordue.

Nous avons étudié ensuite quelques familles relativement connues de modules d'endo-p-permutation, à savoir les syzygies relatives et surtout les translatés de Heller relatifs. Dans le cas des p-groupes, ces deux notions coïncident, mais ce n'est plus le cas pour un groupe fini arbitraire. Les syzygies relatives n'étant plus indécomposables, il nous a fallu plutôt étudier les translatés de Heller relatifs qui eux sont indécomposables.

Finalement, nous avons calculé quelques sous-groupes d'éléments G-stables de $D(P)$ pour des p-sous-groupes de Sylow de différents petits groupes G.

Il reste évidemment encore des questions ouvertes. La première serait de se demander si tous les modules d'endo-p-permutation (dans le cas impair) sont des translatés de Heller relatifs du module trivial. C'est le cas pour les modules d'endo-permutation, mais nos résultats ne nous permettent pas d'en dire plus en général. Au final, il serait évidemment idéal de pouvoir classifier complètement les kG-modules d'endo-p-permutation.

En attendant, d'autres questions pourraient être abordées. Par exemple la question du relèvement des kP-modules d'endo-p-permutation sur un anneau de valuation discrète $\mathcal{O}$ avec corps résiduel k. On sait par exemple, grâce à la classification, que les modules d'endo-permutation se relèvent sur $\mathcal{O}$. De même, il est aussi connu que les modules de p-permutation se relèvent sur $\mathcal{O}$. Qu'en est-il des modules d'endo-p-permutation ?

En résumé tout n'a pas été dit, loin s'en faut, sur les modules d'endo-p-permutation et il reste certainement des choses intéressantes à découvrir sur cette famille de représentations.

Bibliographie

[1] Alperin, J. L. A construction of endo-permutation modules. *J. Group Theory 4*, 1 (2001), 3–10.

[2] Bouc, S. Tensor induction of relative syzygies. *J. Reine Angew. Math. 523* (2000), 113–171.

[3] Bouc, S. The functor of rational representations for p-groups. *Adv. Math. 186*, 2 (2004), 267–306.

[4] Bouc, S. A remark on the Dade group and the Burnside group. *J. Algebra 279* (2004), 180–190.

[5] Bouc, S. Biset functors and genetic sections for p-groups. *J. Algebra 284*, 1 (2005), 179–202.

[6] Bouc, S. The Dade group of a p-group. *Invent. Math. 164*, 1 (2006), 189–231.

[7] Bouc, S., and Mazza, N. The Dade group of (almost) extraspecial p-groups. *J. Pure Appl. Algebra 192*, 1-3 (2004), 21–51.

[8] Bouc, S., and Thévenaz, J. The group of endo-permutation modules. *Invent. Math. 139*, 2 (2000), 275–349.

[9] Brown, K. S. *Cohomology of groups*, vol. 87 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1982.

[10] Carlson, J. F., Mazza, N., and Nakano, D. K. Endotrivial modules for finite groups of Lie type. *A paraître J. Reine Angew. Math.*.

[11] Carlson, J. F., and Thévenaz, J. Torsion endo-trivial modules. *Algebr. Represent. Theory 3* (2000), 303–335.

[12] Carlson, J. F., and Thévenaz, J. The classification of endo-trivial modules. *Invent. Math. 158*, 2 (2004), 389–411.

[13] Carlson, J. F., and Thévenaz, J. The classification of torsion endo-trivial modules. *Ann. of Math. (2) 162*, 2 (2005), 823–883.

[14] Curtis, C. W., and Reiner, I. *Methods of representation theory. Vol. I.* John Wiley & Sons Inc., New York, 1981.

[15] Dade, E. C. Extending endo-permutation modules. *Non publié.*

[16] Dade, E. C. Endo-permutation modules over p-groups. I. *Ann. of Math. (2) 107*, 3 (1978), 459–494.

[17] Dade, E. C. Endo-permutation modules over p-groups. II. *Ann. of Math. (2) 108*, 2 (1978), 317–346.

[18] Gorenstein, D. *Finite groups*, second ed. Chelsea Publishing Co., New York, 1980.

[19] Puig, L. Local extensions in endo-permutation modules split : a proof of Dade's theorem. In *Séminaire sur les groupes finis, Tome III*, vol. 25 of *Publ. Math. Univ. Paris VII*. Univ. Paris VII, Paris, 1986, pp. iii, 199–205.

[20] Puig, L. Pointed groups and construction of modules. *J. Algebra 116*, 1 (1988), 7–129.

[21] Puig, L. Affirmative answer to a question of Feit. *J. Algebra 131*, 2 (1990), 513–526.

[22] Serre, J.-P. *Représentations linéaires des groupes finis.* Hermann, Paris, 1971.

[23] Thévenaz, J. Relative projective covers and almost split sequences. *Comm. Algebra 13*, 7 (1985), 1535–1554.

[24] Thévenaz, J. The parametrization of interior algebras. *Math. Z. 212*, 3 (1993), 411–454.

[25] Thévenaz, J. *G-algebras and modular representation theory.* Clarendon Press, Oxford, 1995.

[26] Thévenaz, J. Endo-permutation modules, a guided tour. *Pré-publication* (2006).

[27] Winter, D. L. The automorphism group of an extraspecial p-group. *Rocky Mountain J. Math. 2*, 2 (1972), 159–168.

Index

Curriculum Vitae

Jean-Marie Urfer

Ch. des Cottages 2
1007 Lausanne

Né le 12 octobre 1978 à Aubonne (VD) et originaire de Crassier (VD).
Fils de Pierre-André Urfer, instituteur et Françoise Urfer, institutrice.

Etudes

1986 - 1994 : Ecoles primaires et secondaires inférieurs, Nyon.
1994 - 1997 : Etudes gymnasiales mathématiques-sciences (type C), Gymnase de Nyon.
1997 - 2002 : Etudes de mathématiques, Institut de Mathématiques, Université de Lausanne.
- Travail de diplôme sous la direction du Professeur Jacques Thévenaz, *Groupe de Dade et modules endo-triviaux.*

2002 - 2006 : Préparation d'une thèse de doctorat à l'Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne.
- Recherche en théorie des représentations modulaires des groupes finis sous la direction du Professeur Jacques Thévenaz.

Titres

1997 : Maturité type C, Gymnase de Nyon.
2002 : Diplôme de mathématicien, Université de Lausanne.

Pré-publication

Modules d'endo-p-permutation, 17p., pré-publication.

Exposé

2005 : Group Representation Theory Program, centre Bernoulli, EPFL, Lausanne.
- Exposé dans le cadre du workshop *Modules d'endo-permutation.*

Enseignement

1999 - 2002 : Assistant-étudiant au Cours de Mathématiques Spéciales, EPFL.
Depuis 2001 : Assistant en mathématiques à l'Université de Lausanne puis à l'EPFL.