



ÉCOLE POLYTECHNIQUE  
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Faculté des Sciences de Base  
Institut de Mathématiques

Travail Pratique de Master

Hiver 2004-2005

---

# Colorations suboptimales

---

Daniela BRONNER

**Responsables :**

Prof. Dominique de WERRA

Ivo BLÖCHLIGER

Chaire de Recherche Opérationnelle Sud-Est  
- ROSE -



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Définitions préliminaires</b>	<b>7</b>
<b>2</b>	<b>Construction du graphe <math>\text{penta}K_{3,3}</math> et de ses généralisations</b>	<b>11</b>
<b>3</b>	<b>Colorations suboptimales</b>	<b>15</b>
3.1	Quelques propriétés sur les colorations suboptimales . . . . .	17
3.1.1	Propriétés de $A_G(p, q)$ . . . . .	17
3.1.2	Résultats utiles . . . . .	18
3.1.3	Propriétés supplémentaires de $A_G(p, q)$ . . . . .	19
<b>4</b>	<b>Les graphes <math>CB_{k,\kappa}</math></b>	<b>21</b>
4.1	Nombre chromatique des graphes $CB_{k,\kappa}$ . . . . .	21
4.2	Propriétés des graphes $CB_{k,\kappa}$ . . . . .	22
4.2.1	Propriétés du graphe $\text{penta}K_{3,3}$ . . . . .	22
4.2.2	Propriété particulière des graphes $CB_{k,\kappa}$ . . . . .	23
4.3	Propriétés des graphes oligomatiques . . . . .	27
4.3.1	Graphes oligomatiques avec 30 sommets . . . . .	28
<b>5</b>	<b>Graphes oligomatiques particuliers</b>	<b>33</b>
5.1	Graphes parfaits . . . . .	33
5.2	Graphes de Halin . . . . .	34
5.3	Graphes planaires extérieurs . . . . .	37
5.4	Approche aux graphes planaires . . . . .	39

5.5	Graphes sans griffe . . . . .	41
<b>6</b>	<b>Résolution heuristique de la <math>k, \kappa</math>-coloration</b>	<b>45</b>
6.1	Les heuristiques . . . . .	45
6.2	La méthode tabou . . . . .	46
6.3	L'algorithme tabou . . . . .	47
6.4	Méthode de résolution . . . . .	48
6.5	Première adaptation de la méthode tabou au problème de la $k, \kappa$ -coloration . . .	49
6.6	Deuxième adaptation de la méthode tabou au problème de la $k, \kappa$ -coloration . . .	52
<b>7</b>	<b>Résultats de l'implémentation des algorithmes tabou</b>	<b>55</b>
7.1	Résultats de la première adaptation au problème de la $k, \kappa$ -coloration . . . . .	56
7.2	Résultats de la deuxième adaptation au problème de la $k, \kappa$ -coloration . . . . .	58
7.3	Recherche de nouveaux graphes oligomatiques . . . . .	60
<b>8</b>	<b>Conclusion</b>	<b>63</b>
	Bibliographie . . . . .	65

# Introduction

Le problème de la coloration des sommets d'un graphe est intéressant à plusieurs titres. Premièrement, en raison de la simplicité de son énoncé et de sa complexité théorique ; deuxièmement parce qu'il apparaît naturellement dans de multiples problèmes pratiques.

Une coloration d'un graphe est l'attribution d'une couleur à chaque sommet du graphe de telle sorte que deux sommets adjacents aient des couleurs différentes.

Une coloration optimale est une coloration utilisant un nombre minimal de couleurs différentes. Ce nombre de couleurs est noté  $\chi(G)$ .

De nombreux problèmes pratiques peuvent être modélisés par des problèmes de coloration de graphes. D'une manière générale, chaque sommet représente une des entités du problème, et deux entités « incompatibles » sont reliées par une arête. Le problème de coloration associé au graphe résultant consiste alors à rechercher une coloration optimale.

Considérons à titre d'exemple le problème de la confection d'horaires d'examens dans une université. Dans le graphe associé à ce problème chaque sommet représente un examen, et deux sommets sont reliés si les examens correspondants à ces sommets ne peuvent pas avoir lieu le même jour. Dans ce cas une coloration optimale du graphe nous fournira le nombre minimal de journées nécessaires permettant à tous les examens d'être effectués.

Le problème de la coloration optimale des sommets d'un graphe a été largement étudié et beaucoup de propriétés ont été découvertes. Par contre une grande partie des propriétés des colorations suboptimales reste inconnue.

Une coloration suboptimale des sommets d'un graphe est une coloration qui utilise plus de couleurs que le nombre minimal nécessaire.

Ce problème mérite aussi de l'attention, en premier lieu puisque du point de vue théorique il y a des nouvelles propriétés à découvrir, et deuxièmement puisque dans de nombreuses applications on travaille sur des colorations suboptimales. En effet, le problème de la coloration optimale d'un graphe est difficile ; c'est pourquoi dans la pratique on privilégie des heuristiques, lesquelles permettent d'obtenir en un temps raisonnable des colorations de bonne qualité bien qu'elles ne soient pas nécessairement optimales.

Dans certaines applications il peut même être requis d'utiliser plus de couleurs que le nombre minimal nécessaire. C'est par exemple le cas dans le problème de la confection d'horaires d'examens telle qu'elle soit effectuée sur  $\chi(G) + p$  jours (c'est-à-dire le graphe associé à ce problème est coloré avec  $\chi(G) + p$  couleurs) afin que les étudiants n'aient pas trop d'examens rapprochés. Une troisième motivation pour l'étude des colorations suboptimales est la redécouverte, grâce à ces colorations, d'une classe de graphes appelés oligomatiques.

Le but du projet est de continuer la recherche sur les colorations suboptimales, d'étudier et découvrir des propriétés particulières sur les graphes oligomatiques et de proposer un ou plusieurs algorithmes qui puissent fournir une solution en relation avec les colorations suboptimales et les graphes oligomatiques.

Notre travail sera ainsi partagé en deux parties : la première consiste en l'étude théorique de la coloration suboptimale et des graphes oligomatiques, alors que la deuxième consiste en l'étude et l'implémentation d'algorithmes appropriés nous fournissant une coloration particulière des sommets d'un graphe.

# Chapitre 1

## Définitions préliminaires

Un *graphe orienté*  $G$  est constitué d'un ensemble  $V$  d'éléments appelés *sommets* ou *nœuds* et d'une famille  $E$  d'éléments appelés *arcs*.

Un arc est un couple ordonné  $(x, y)$  de sommets où  $x$  est l'extrémité initiale et  $y$  l'extrémité terminale.

Dans le cas d'un graphe non-orienté, les éléments de la famille  $E$  sont appelés *arêtes*.

Une arête est donc un couple non-ordonné  $[x, y]$  de sommets.

Caractérisé par le couple  $(V, E)$ , un graphe  $G$  sera noté  $G = (V, E)$ .

Soit  $V'$  un sous-ensemble de  $V$ . Le graphe  $G[V'] = G' = (V', E(V'))$ , où  $E(V') = \{(x, y) \in E \mid x, y \in V'\}$ , est le *sous-graphe* engendré (induit) par  $V'$ .

Un *graphe partiel* de  $G = (V, E)$  est un graphe  $(V, E')$  avec  $E' \subseteq E$ .

Une *chaîne* dans un graphe  $G$  est une suite d'arêtes  $e_1, e_2, \dots, e_p$  telle que chaque  $e_i$  ( $i = 2, \dots, p-1$ ) a une extrémité en commun avec  $e_{i+1}$  et l'autre avec  $e_{i-1}$ .

Soient  $v, w$  deux sommets du graphe  $G$ . La *distance*  $d(v, w)$  entre les sommets  $v$  et  $w$  est le nombre d'arêtes sur la plus courte chaîne reliant  $v$  et  $w$ .

### Définition 1.1

Une *k-coloration* d'un graphe  $G = (V, E)$  est une partition  $(S_1, \dots, S_k)$  de l'ensemble des sommets  $V$  en  $k$  ensembles stables  $S_i$  (ensembles de sommets deux à deux non-adjacents).

### Définition 1.2

Le *nombre chromatique* d'un graphe  $G = (V, E)$  est le plus petit  $k$  pour lequel  $G$  admet une  $k$ -coloration.

Le nombre chromatique d'un graphe  $G = (V, E)$  est noté  $\chi(G)$ .

Une *coloration optimale* est une coloration du graphe avec  $\chi(G)$  couleurs.

Dans notre travail nous traiterons des graphes connexes et simples.

Rappelons qu'un graphe  $G = (V, E)$  est dit *connexe* si  $\forall v, w \in V$  il existe une chaîne entre  $v$  et  $w$  et il est dit *simple* s'il n'admet ni boucles ni arêtes parallèles.

Soit alors  $G = (V, E)$  un graphe connexe simple.

### Définition 1.3

Soit  $v \in V$  un sommet de  $G$ . Le *voisinage généralisé* de taille  $q$  d'un sommet  $v$  est l'ensemble de tous les sommets à distance au plus  $q$  de  $v$  :

$$N_q(v) = \{w \in V \mid d(v, w) \leq q\}$$

### Définition 1.4

Soit  $c : V \rightarrow \{1, \dots, \chi(G) + p\}$  avec  $p \geq 0$  une coloration des sommets de  $G$ . Définissons les couleurs dans  $N_q(v)$  (*i.e* les couleurs vues par  $v$  à une distance au plus  $q$ ) comme

$$K_q(v) = \{c(w) \mid w \in V \text{ et } d(v, w) \leq q\}$$

Ainsi les couleurs vues par  $v$  sont les couleurs dans  $K_1(v)$ . Remarquons que la couleur du sommet  $v$  est incluse dans tous les ensembles  $K_q(v)$ ,  $\forall q \geq 0$ .

Rappelons encore que dans une coloration optimale il existe toujours un sommet  $v$  tel que  $|K_1(v)| = \chi(G)$ .

La question qui surgit maintenant est si cette égalité pourrait aussi être vraie dans des graphes avec une *coloration suboptimale*, c'est-à-dire une coloration du graphe en utilisant plus de  $\chi(G)$  couleurs. Or ceci n'est pas toujours le cas.

La classe de graphes qui nous servira de contre-exemple sera appelée *oligomatique*.

### Définition 1.5

Un graphe  $G$  est appelé *oligomatique* s'il existe une coloration  $c : V \rightarrow \{1, \dots, \chi(G) + p\}$  avec  $p \geq 1$  telle que  $|K_1(v)| < \chi(G)$ ,  $\forall v \in V$ .

### Définition 1.6

Une *k-coloration oligomatique* du graphe  $G$  est une  $k$ -coloration du graphe telle que  $k > \chi(G)$  et telle que chaque sommet du graphe ne voit qu'un nombre de couleurs strictement inférieur au nombre chromatique.



Nous pouvons tout de suite affirmer qu'il n'existe aucun graphe oligomatique  $G$  avec  $\chi(G) \leq 3$ . Cela signifie que, pour un graphe  $G$  avec une  $(\chi(G) + p)$ -coloration ( $p \geq 1$ ) et tel que  $\chi(G) \leq 3$ , il existe toujours un sommet  $v \in V$  pour lequel  $|K_1(v)| = \chi(G)$ .

Expliquons ci-dessous cette propriété :

1. Si  $\chi(G) = 1$  le graphe  $G$  consiste en sommets isolés et donc chaque sommet ne voit que sa propre couleur. Le graphe  $G$  ne peut donc pas être oligomatique.
2. Si  $\chi(G) = 2$ , pour que  $G$  soit oligomatique, il faudrait que chaque sommet ne voie qu'une seule couleur. Or ceci impliquerait que  $G$  consiste en sommets isolés. Nous avons donc une contradiction avec le fait que  $\chi(G) = 2$ .
3. Si  $\chi(G) = 3$ , pour que  $G$  soit oligomatique, il faudrait que chaque sommet ne voie que deux couleurs. Or ceci impliquerait que  $G$  est biparti et donc 2-colorable. Nous avons donc une contradiction avec le fait que  $\chi(G) = 3$ .

Nous avons donc l'implication suivante :

$$G \text{ graphe oligomatique} \implies \chi(G) \geq 4.$$



## Chapitre 2

# Construction du graphe $\text{penta}K_{3,3}$ et de ses généralisations

Nous avons conclu le chapitre précédent en affirmant qu'un graphe  $G = (V, E)$  pouvait être oligomatique seulement si  $\chi(G) \geq 4$ . Cela implique que, si nous voulons construire un graphe oligomatique, il faudra utiliser au moins cinq couleurs puisqu'un graphe oligomatique est un graphe qui admet une coloration suboptimale avec  $|K_1(v)| < \chi(G), \forall v \in V$ .

C'est à partir de ce concept que le premier graphe oligomatique a été découvert. Ce graphe a été appelé  $\text{penta}K_{3,3}$  ; il est 4-chromatique et admet une 5-coloration oligomatique.

Dans ce chapitre nous présenterons la construction du graphe  $\text{penta}K_{3,3}$  et une généralisation de cette construction qui nous fournira d'autres graphes oligomatiques.

Le graphe  $\text{penta}K_{3,3}$  a été construit d'après les idées suivantes :

1. Coloration du graphe avec cinq couleurs.
2. Chaque sommet du graphe ne doit voir qu'un nombre de couleurs strictement inférieur au nombre chromatique. Comme on aimerait  $\chi(G) = 4$ , alors  $|K_1(v)| \leq 3 \forall v \in V$ . En effet, nous ne pouvons pas construire un graphe oligomatique où chaque sommet ne voit qu'une seule couleur ou deux couleurs car dans ces cas le nombre chromatique du graphe serait égal à un ou deux.

Nous pouvons ainsi classer chaque sommet par sa propre couleur et par les deux autres couleurs de ses voisins. Cette classification se traduit comme suit :

pour toute couleur  $c$  et pour tout sous-ensemble  $\{i, j\}$  de taille deux de l'ensemble  $\{1, 2, 3, 4, 5\} \setminus \{c\}$ , créer un sommet  $v_{c, \{i, j\}}$  avec  $c, i, j$  tous distincts.

Cela produit  $\binom{4}{2} = 6$  sommets par couleur et donc 30 sommets pour le graphe tout entier.

La création des arêtes fut faite de la façon suivante :

relier deux sommets  $v_{c, \{i, j\}}$  et  $v_{c', \{i', j'\}}$  si

- $c \neq c'$
- $c \in \{i', j'\}$
- $c' \in \{i, j\}$

Le premier point nous assure que, si deux sommets sont reliés, ils n'ont pas la même couleur.

Les deuxième et troisième points nous assurent que, si deux sommets  $v_1$  et  $v_2$  sont reliés, la couleur du sommet  $v_1$  fait partie des couleurs des voisins du sommet  $v_2$  et vice versa.

Nous obtenons ainsi un graphe avec 30 sommets et 90 arêtes.

Il est intéressant de noter que le nom penta $K_{3,3}$  (donné par son auteur) provient du fait que ce graphe est coloré avec cinq couleurs et qu'entre chaque paire de couleurs il existe un graphe complet biparti  $K_{3,3}$  comme sous-graphe induit.

Une représentation du graphe penta $K_{3,3}$  est donnée dans la figure 2.1.

La construction du graphe penta $K_{3,3}$  peut être généralisée en utilisant plus de cinq couleurs. Nous trouvons ainsi des graphes oligomatiques ayant des colorations oligomatiques différentes.

Pour générer des graphes oligomatiques qui soient colorés avec  $k$  couleurs et tels que chaque sommet ne voie que  $\kappa$  couleurs, avec  $3 \leq \kappa < k$ , nous avons la construction suivante :

pour toute couleur  $c \in \{1, \dots, k\}$  et pour tout sous-ensemble  $\mathcal{C}$  de taille  $\kappa - 1$  de  $\{1, \dots, k\} \setminus c$ , créer un sommet  $v_{c,\mathcal{C}}$ . Cela produit  $\binom{k-1}{\kappa-1}$  sommets par couleur et donc  $k \cdot \binom{k-1}{\kappa-1}$  sommets pour le graphe tout entier.

Nous allons donc relier deux sommets  $v_{c,\mathcal{C}}$  et  $v_{c',\mathcal{C}'}$  si

- $c \neq c'$
- $c \in \mathcal{C}'$
- $c' \in \mathcal{C}$

Le sous-ensemble de couleurs  $\mathcal{C}$  représente ainsi les couleurs des voisins du sommet  $v_{c,\mathcal{C}}$ . De même  $\mathcal{C}'$  représente les couleurs des voisins du sommet  $v_{c',\mathcal{C}'}$ . Nous noterons ces graphes  $CB_{k,\kappa}$  (la notation  $CB$  provient du mot anglais «color-blind» qui signifie daltonien. Le mot daltonien a été remplacé par le mot oligomatique qui est plus approprié).

Les graphes  $CB_{k,\kappa}$  ont diverses propriétés intéressantes que nous présenterons dans les prochains chapitres.

Comme nous l'avons déjà mentionné, le nombre de sommets des graphes  $CB_{k,\kappa}$  est

$$|V| = k \cdot \binom{k-1}{\kappa-1}$$

Le degré de tout sommet  $v_{c,\mathcal{C}}$  vaut donc

$$d(v_{c,\mathcal{C}}) = (\kappa - 1) \cdot \binom{k-2}{\kappa-2}$$

Ceci dérive du fait que chaque sommet voit  $(\kappa - 1)$  couleurs dans son voisinage et que chaque sommet  $v_{c',\mathcal{C}'}$  adjacent à  $v_{c,\mathcal{C}}$  est tel que  $c \in \mathcal{C}'$ . Ainsi pour compléter l'ensemble  $\mathcal{C}'$  il faut choisir  $(\kappa - 2)$  couleurs parmi les  $(k - 2)$  couleurs restantes.

Enfin le nombre d'arêtes est

$$|E| = \frac{|V|}{2} \cdot d(v_{c,\mathcal{C}}) = \frac{k \cdot (\kappa - 1)}{2} \cdot \binom{k-1}{\kappa-1} \cdot \binom{k-2}{\kappa-2}$$

Dans la figure suivante chaque groupe de six sommets représente une couleur. Nous pouvons ainsi remarquer que le graphe  $\text{penta}K_{3,3}$  admet bien une 5-coloration telle que chaque sommet ne voit que trois couleurs c'est-à-dire chaque sommet ne voit que sa propre couleur et n'est adjacent qu'à des sommets appartenants à deux autres groupes de six sommets.

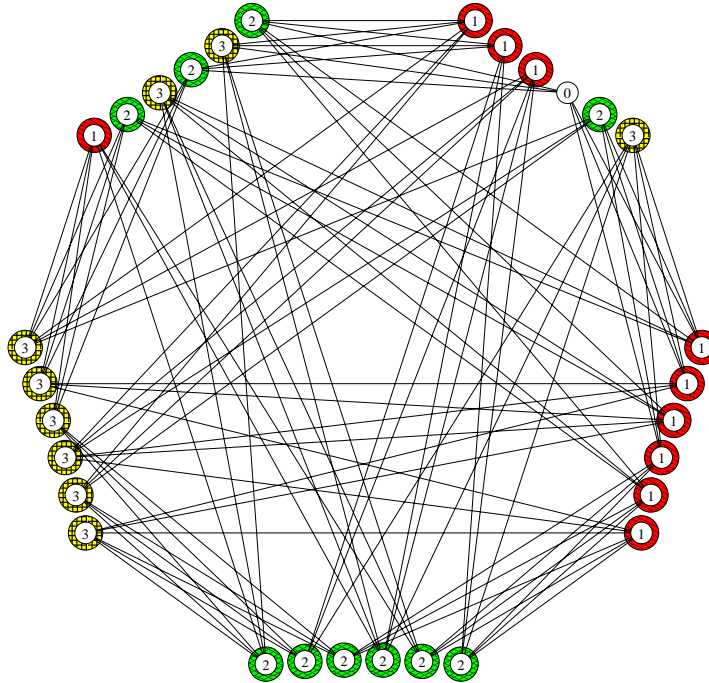


FIG. 2.1 – Le graphe  $\text{penta}K_{3,3}$  coloré avec 4 couleurs et tel qu'un seul sommet ait la couleur 0

Nous avons coloré ici le graphe  $\text{penta}K_{3,3}$  avec  $\chi(G)$  couleurs et tel qu'un seul sommet ait la couleur zéro (la démonstration de la 4-chromaticité du graphe  $\text{penta}K_{3,3}$  va être donnée dans le paragraphe 4.2.1). Ceci nous montre en particulier que ce graphe est critique. Rappelons qu'un graphe  $G$  est critique si en lui éliminant un sommet il peut être recoloré avec  $(\chi(G) - 1)$  couleurs. C'est bien le cas pour ce graphe  $\text{penta}K_{3,3}$ . En effet, si nous supprimons le sommet coloré avec la couleur zéro, le sous-graphe induit obtenu sera 3-colorable.

Cette propriété particulière du graphe  $\text{penta}K_{3,3}$  nous sera utile dans la suite pour la détermination d'autres propriétés intéressantes de ce graphe et de ses généralisations.



# Chapitre 3

## Colorations suboptimales

Dans ce chapitre nous travaillerons sur des graphes  $G = (V, E)$  colorés avec plus de  $\chi(G)$  couleurs et nous présenterons des propriétés intéressantes sur les colorations suboptimales appliquées à ces graphes.

Afin de pouvoir donner une plus vaste gamme de ces propriétés, nous traiterons aussi un paragraphe contenant des résultats importants trouvés dans [4].

Sachant que, dans une coloration optimale d'un graphe  $G$ , il existe toujours un sommet  $v$  qui voit toutes les  $\chi(G)$  couleurs, on aimerait étudier quelle doit être la grandeur de la taille du voisinage généralisé telle que pour toute  $(\chi(G) + p)$ -coloration du graphe il existe un sommet  $v$  pour lequel  $K_q(v)$  contienne toutes les  $\chi(G)$  couleurs différentes. En d'autres mots, on aimerait savoir à quelle distance il faut aller pour qu'un sommet voie  $\chi(G)$  couleurs différentes parmi les  $(\chi(G) + p)$  couleurs utilisées dans la coloration du graphe.

### THÉORÈME 3.1

Soit  $G = (V, E)$  un graphe avec nombre chromatique  $\chi(G)$  et soit  $p$  un entier non-négatif. Alors pour toute  $(\chi(G) + p)$ -coloration du graphe il existe un sommet  $v$  tel que  $K_{\lceil \frac{p}{2} \rceil + 1}(v)$  contient au moins  $\chi(G)$  couleurs différentes. [2]

Ce théorème nous dit que, si un graphe  $G$  est  $(\chi(G) + p)$ -coloré et si pour chaque sommet  $v$  nous regardons la couleur des sommets à une distance au plus  $\lceil \frac{p}{2} \rceil + 1$  de  $v$ , alors il existe un sommet du graphe qui à cette distance voit au moins  $\chi(G)$  couleurs différentes.

Comme nous l'avons déjà mentionné, un graphe  $G$  avec  $\chi(G) \leq 3$  ne peut pas être oligomatique. Ainsi, si nous colorons un tel graphe  $G$  avec plus de  $\chi(G)$  couleurs, il existe sûrement un sommet  $v$  qui voit au moins toutes les  $\chi(G)$  couleurs dans son voisinage. En effet, si tel n'était pas le cas, tous les sommets auraient vu moins de  $\chi(G)$  couleurs dans leur voisinage et donc  $G$  serait oligomatique.

Nous pouvons donc conclure que, dans des graphes  $G$  avec une  $(\chi(G) + p)$ -coloration et tels que  $\chi(G) \leq 3$ , il existe toujours un sommet  $v$  tel que  $K_1(v)$  contienne au moins  $\chi(G)$  couleurs. Ainsi

pour de tels graphes la taille du voisinage  $q = \lceil \frac{p}{2} \rceil + 1$  n'est pas optimale puisque  $q = 1$  suffirait. Nous pourrions maintenant nous demander si le théorème 3.1 appliqué à des graphes avec  $\chi(G) \geq 4$  est le meilleur possible par rapport à  $q$ , c'est-à-dire si pour tout entier  $p$  il existe un graphe  $G$  ayant une  $(\chi(G) + p)$ -coloration telle que  $|K_{\lceil \frac{p}{2} \rceil}(v)| < \chi(G)$ ,  $\forall v \in V$ .

Dans le cas où  $p = 0, 1, 2$  il existe au moins un graphe tel que l'inégalité précédente est satisfaite. En effet :

si  $p=0$  : la coloration du graphe est optimale, et en prenant un graphe quelconque  $G$  avec  $\chi(G) > 1 \implies |K_{\lceil \frac{p}{2} \rceil}(v)| = |K_0(v)| = 1 < \chi(G)$ ,  $\forall v \in V$ .

si  $p=1$  : prenons par exemple le graphe  $CB_{5,3} = \text{penta}K_{3,3} \implies |K_1(v)| < \chi(CB_{5,3}) = 4$ ,  $\forall v \in V$ .

si  $p=2$  : prenons par exemple le graphe  $CB_{6,3} \implies |K_1(v)| < \chi(CB_{6,3}) = 4$ ,  $\forall v \in V$ .

La valeur  $q = \lceil \frac{p}{2} \rceil + 1$  est donc bien la meilleure possible pour des  $(\chi(G) + p)$ -colorations avec  $p = 0, 1, 2$ .

Remarquons que pour  $p \geq 3$  nous avons  $q > 1$ . Nous ne pouvons donc plus faire appel aux graphes  $CB_{k,\kappa}$  pour satisfaire l'inégalité  $|K_{\lceil \frac{p}{2} \rceil}(v)| < \chi(G)$ ,  $\forall v \in V$ .

Pour  $p = \chi(G)$  la valeur de  $q = \lceil \frac{p}{2} \rceil + 1$  n'est pas optimale comme nous le verrons par la suite.

### Proposition 3.1

Pour toute coloration d'un graphe  $G$  il existe une chaîne de  $\chi(G)$  sommets visitant  $\chi(G)$  couleurs différentes. [3]

Si nous considérons maintenant le sommet central de la chaîne nous obtenons le corollaire suivant

### Corollaire 3.1

Pour toute coloration d'un graphe  $G$  il existe un sommet  $v$  tel que  $|K_{\lfloor \frac{\chi(G)}{2} \rfloor}(v)| \geq \chi(G)$ .

Il est donc clair que, pour  $p \geq \chi(G)$ , l'inégalité n'est pas satisfaite.

De plus, comme  $\lceil \frac{\chi(G)-1}{2} \rceil = \lfloor \frac{\chi(G)}{2} \rfloor$ , aussi pour  $p = \chi(G) - 1$  la borne  $q = \lceil \frac{p}{2} \rceil + 1$  n'est pas ferme. Nous pouvons ainsi conclure que pour  $p \geq \chi(G) - 1$  la valeur  $q = \lceil \frac{p}{2} \rceil + 1$  n'est pas optimale car  $q = \lfloor \frac{\chi(G)}{2} \rfloor$  suffirait.

La question de l'optimalité de la valeur  $q = \lceil \frac{p}{2} \rceil + 1$  est encore ouverte pour  $2 < p < \chi(G) - 1$ .



### 3.1 Quelques propriétés sur les colorations suboptimales

Dans la section précédente nous avons étudié, dans un graphe connexe et simple  $G$ , des propriétés liées à la présence de  $\chi(G)$  couleurs dans un voisinage généralisé d'un sommet arbitraire.

Nous présentons maintenant quelques propriétés liées au nombre de couleurs qui apparaissent dans un certain voisinage d'un sommet  $v$  du graphe.

Pour toute  $(\chi(G) + p)$ -coloration  $c(p)$  d'un graphe  $G = (V, E)$ , soit  $k(c(p), v, q)$  le nombre de couleurs qui apparaissent dans le voisinage  $N_q(v)$  de  $v$ . Remarquons que  $k(c(p), v, q) = |K_q(v)|$ . Nous nous intéressons au plus grand nombre de couleurs apparaissant à une distance au plus  $q$  d'un sommet  $v$ , c'est-à-dire nous nous intéressons au  $\max_{v \in V(G)} k(c(p), v, q)$ .

Si  $\mathcal{C}(p)$  est la famille de toutes les  $(\chi(G) + p)$ -colorations de  $G$ , nous voulons estimer

$$A_G(p, q) = \min_{c(p) \in \mathcal{C}(p)} (\max_{v \in V(G)} k(c(p), v, q))$$

#### 3.1.1 Propriétés de $A_G(p, q)$

Donnons tout d'abord des propriétés élémentaires sur  $A_G(p, q)$  :

- $A_G(p, q) \leq \chi(G) + p$ .
- $A_G(p, 1) \leq \Delta(G) + 1$ , où  $\Delta(G)$  est le degré maximal des sommets de  $G$ .
- $A_G(0, 1) = \chi(G)$ . En effet, dans toute coloration optimale il existe un sommet qui voit toutes les couleurs.

De plus, par le théorème 3.1 nous pouvons encore affirmer que :

- $A_G(p, \lceil \frac{p}{2} \rceil + 1) \geq \chi(G)$ .

Nous présentons maintenant d'autres résultats intéressants sur  $A_G(p, q)$ .

#### THÉORÈME 3.2

Pour un graphe  $G$  avec  $\chi(G) \geq 2$  et  $p \geq 1$  nous avons

$$A_G(p, 1) \geq \lceil \frac{\chi(G)}{p+1} \rceil + 1 \quad [1]$$

Ce théorème nous dit que, pour n'importe quelle coloration suboptimale d'un graphe  $G$  avec  $\chi(G) \geq 2$ , il existe un sommet  $v$  qui voit au moins  $\lceil \frac{\chi(G)}{p+1} \rceil + 1$  couleurs dans son voisinage.

## THÉORÈME 3.3

$$A_G(p, q) \leq 2q \implies \chi(G) \leq 2q$$

Ce théorème nous dit que, si pour n'importe quelle coloration suboptimale du graphe, tout sommet  $v$  voit au maximum  $2q$  couleurs dans son voisinage généralisé  $N_q(v)$ , alors le nombre chromatique du graphe est plus petit ou égal à  $2q$ .

**Démonstration**

Soit  $G = (V, E)$  un graphe et  $c : V \rightarrow \{1, \dots, \chi(G) + p\}$  une coloration suboptimale de  $G$  telle que  $|K_q(v)| \leq 2q, \forall v \in V$ .

Nous orientons toutes les arêtes de  $G$  à partir d'un sommet avec une couleur plus petite vers un sommet de plus grande couleur. Dans cette orientation, le plus long chemin contient moins de  $2q$  arcs car s'il contenait  $2q$  arcs (*i.e.*  $(2q + 1)$  sommets de couleur différente) nous aurions  $|K_q(x)| \geq 2q + 1$  avec  $x$  sommet central du chemin.

Théorème de Roy-Gallay : si on peut orienter les arêtes de  $G$  de sorte qu'aucun chemin n'ait plus de  $k$  sommets  $\implies \chi(G) \leq k$ .

Par le théorème de Roy-Gallay nous pouvons donc conclure que  $\chi(G) \leq 2q$ .

□

**3.1.2 Résultats utiles**

Dans ce paragraphe nous proposons des propriétés trouvées dans [4] qui nous aiderons à développer d'autres propositions sur  $A_G(p, q)$ .

Pour commencer nous avons besoin de la définition suivante :

**Définition 3.1**

$P(k, \gamma, \kappa)$  est l'abréviation de la proposition :  
 $\exists$  graphe  $G = (V, E)$  avec une coloration  $c : V \rightarrow \{1, \dots, k\}$  telle que  $|K_1(v)| \leq \kappa \quad \forall v \in V$   
 et  $\chi(G) > \gamma$ .

**Propriété 3.1**

$P(k, \gamma, \kappa)$  est vrai  $\Leftrightarrow \chi(CB_{k, \kappa}) > \gamma$ .

**Démonstration**

$\Leftarrow$ : Pour les graphes  $CB_{k,\kappa}$  nous avons bien  $|K_1(v)| \leq \kappa, \forall v$ . Donc ces graphes font l'affaire.

$\Rightarrow$ : Nous voulons montrer que si  $\chi(CB_{k,\kappa}) \leq \gamma \Rightarrow P(k, \gamma, \kappa)$  est faux.

Supposons que  $\chi(CB_{k,\kappa}) \leq \gamma$ . Soit  $G' = (V', E')$  un graphe arbitraire avec la coloration

$c' : V' \rightarrow \{1, \dots, k\}$  telle que  $|K_1(v')| \leq \kappa, \forall v' \in V'$ . Nous voulons montrer que  $\chi(G') \leq \gamma$ .

Définissons un homomorphisme de graphes  $h : G' \rightarrow CB_{k,\kappa}$  tel que  $h(v') = v_{c'(v'), X}$  où  $c'(v')$  est la couleur du sommet  $v'$  dans le graphe  $G'$  et  $X = \{K_1(v') \setminus c'(v')\} \cup \{\text{les } (\kappa - |K_1(v')|) \text{ plus petits éléments de } \{1, \dots, k\} \setminus K_1(v')\}$ .

Si  $(v', w') \in E'$ , nous avons bien  $(h(v'), h(w')) \in E_{CB_{k,\kappa}}$ . La nouvelle coloration  $c''$  telle que  $c''(v') = c(h(v'))$  est telle qu'on utilise  $\gamma$  couleurs. Ainsi  $\chi(G') \leq \gamma$ .

□

**Propriété 3.2**

Pour tout  $\gamma, p, P(\gamma + p + 1, \gamma, \lfloor \frac{\gamma}{p+1} \rfloor + p + 1)$  est vrai.

Nous avons une amélioration de cette propriété donnée dans le théorème suivant :

**THÉORÈME 3.4**

Pour tout  $\gamma, p, P(\gamma + p + 1, \gamma, \kappa)$  est vrai avec  $\kappa = \min_{q=1, \dots, p} (\lfloor \frac{\gamma}{q+1} \rfloor + q + 1)$

**Propriété 3.3**

Pour tout  $\gamma \geq p \cdot (p + 1), P(\gamma + p + 1, \gamma, \lfloor \frac{\gamma}{p+1} \rfloor + p)$  est faux.

**3.1.3 Propriétés supplémentaires de  $A_G(p, q)$** 

Grâce aux propriétés que nous venons d'énoncer, nous pouvons renforcer le théorème 3.2 avec le prochain théorème. Celui-ci possède une preuve inductive simple qui nous permettra d'obtenir de manière directe une inégalité, pour les graphes  $G$  avec  $\chi(G) \geq p \cdot (p + 1)$ , meilleure de celle trouvée au théorème 3.2.

**THÉORÈME 3.5**

Pour tout  $p \geq 0$  et pour tout graphe  $G = (V, E)$  avec  $\chi(G) \geq p \cdot (p + 1)$  nous avons

$$A_G(p, 1) \geq \left\lceil \frac{\chi(G)}{p+1} \right\rceil + p$$

**Démonstration**

Supposons qu'il existe un graphe  $G = (V, E)$  avec une  $(\chi(G) + p)$ -coloration telle que

$$|K_1(v)| \leq \left\lceil \frac{\chi(G)}{p+1} \right\rceil + p - 1 = \left\lceil \frac{\chi(G) - 1}{p+1} \right\rceil + p (= \kappa)$$

Ceci impliquerait que

$$P(\chi(G) + p, \chi(G) - 1, \left\lceil \frac{\chi(G) - 1}{p+1} \right\rceil + p) \implies P(\gamma + p + 1, \gamma, \left\lfloor \frac{\gamma}{p+1} \right\rfloor + p) \text{ est vrai.}$$

L'implication est due à un changement de variable  $\gamma = \chi(G) - 1$ .

Nous avons ainsi une contradiction avec la propriété 3.3.

□

**THÉORÈME 3.6**

Pour tout nombre entier  $\nu \geq 2$ ,  $\exists$  un graphe  $G = (V, E)$  avec  $\chi(G) = \nu$  tel que

$$A_G(1, 1) = \left\lceil \frac{\chi(G)}{2} \right\rceil + 1$$

Ce théorème nous assure l'existence d'un graphe  $G$  avec  $\chi(G) \geq 2$  tel que pour toute coloration suboptimale qui utilise une couleur de plus que le nombre chromatique, il existe un sommet  $v$  de  $G$  qui voit au moins  $\lceil \frac{\chi(G)}{2} \rceil + 1$  couleurs dans son voisinage.

Plus précisément, pour au moins une coloration qui utilise  $(\chi(G) + 1)$  couleurs, le sommet qui voit plus de couleurs dans son voisinage en voit exactement  $\lceil \frac{\chi(G)}{2} \rceil + 1$ .

**Démonstration**

Par le théorème 3.2 avec  $p = 1$ , nous avons l'inégalité suivante

$$A_G(1, 1) \geq \left\lceil \frac{\chi(G)}{2} \right\rceil + 1 \quad (3.1)$$

De plus par la propriété 3.2 nous pouvons affirmer qu'il existe un graphe  $G = (V, E)$  avec une coloration suboptimale  $c : V \rightarrow \{1, \dots, \chi(G) + 1\}$  tel que

$$|K_1(v)| \leq \left\lceil \frac{\chi(G) - 1}{2} \right\rceil + 2 = \left\lceil \frac{\chi(G)}{2} \right\rceil + 1 \implies \underbrace{|K_1(v)|}_{\geq A_G(1,1)} \leq \left\lceil \frac{\chi(G)}{2} \right\rceil + 1 \quad (3.2)$$

Avec les inégalités 3.1 et 3.2 nous obtenons bien l'égalité désirée.

□

# Chapitre 4

## Les graphes $CB_{k,\kappa}$

Dans les deux premières parties de ce chapitre nous étudierons plus en détail les graphes  $CB_{k,\kappa}$ , qui sont les seuls graphes oligomatiques que nous connaissons, et nous présenterons des résultats très intéressants concernant ces graphes.

Dans la troisième partie nous rechercherons des propriétés spécifiques pour des graphes oligomatiques afin de pouvoir mieux comprendre l'allure de base de tels graphes.

### 4.1 Nombre chromatique des graphes $CB_{k,\kappa}$

Dans cette section nous présentons un théorème qui nous fournit le nombre chromatique de certains graphes  $CB_{k,\kappa}$ . La démonstration de ce théorème a été trouvée en utilisant les propriétés traitées au paragraphe 3.1.2.

#### THÉORÈME 4.1

Pour tout  $k \geq 5$  et  $\lfloor \frac{k}{2} \rfloor \leq \kappa < k - 1$  nous avons

$$\chi(CB_{k,\kappa}) = k - 1$$

#### Démonstration

Pour  $\kappa < k - 1$ , tout graphe  $CB_{k,\kappa}$  a une  $(k - 1)$ -coloration triviale en recolorant tout sommet  $v$  de couleur 1 avec une couleur qui n'est pas dans  $K_1(v)$ .

Le théorème 3.4 avec  $p = 1$  nous donne

$$P(\gamma + 2, \gamma, \lfloor \frac{\gamma}{2} \rfloor + 2) \quad i.e. \quad P(k, k - 2, \lfloor \frac{k - 2}{2} \rfloor + 2)$$

qui est égal à  $P(k, k - 2, \lfloor \frac{k}{2} \rfloor + 1)$ .

Dans la propriété 3.1 nous avons vu l'équivalence entre  $P(k, \gamma, \kappa)$  et  $\chi(CB_{k,\kappa}) > \gamma$ .  
Ainsi  $k > \chi(CB_{k,\kappa}) > k - 2 \Rightarrow \chi(CB_{k,\kappa}) = k - 1$ .

□

Ce théorème est très important car il va nous aider dans la démonstration d'autres théorèmes que nous présenterons dans les prochains paragraphes.

Malheureusement, dans les autres cas (c'est-à-dire quand les conditions  $k \geq 5$  et  $\lfloor \frac{k}{2} \rfloor \leq \kappa < k - 1$  ne sont pas satisfaites), le nombre chromatique des graphes  $CB_{k,\kappa}$  ne peut pas être déterminé avec certitude. Dans ces cas il faudra se servir d'heuristiques qui pourraient nous aider à déterminer soit le nombre chromatique exact, soit le nombre chromatique probable.

## 4.2 Propriétés des graphes $CB_{k,\kappa}$

### 4.2.1 Propriétés du graphe $\text{penta}K_{3,3}$

Dans le chapitre 2 nous avons expliqué la construction du graphe  $\text{penta}K_{3,3}$  et nous avons aussi anticipé sa 4-chromaticité ainsi que sa représentation en quatre couleurs.

Nous donnons maintenant la démonstration de la 4-chromaticité de ce graphe et nous montrons de plus que le graphe  $\text{penta}K_{3,3}$  est le plus petit graphe (par rapport au nombre de sommets) 4-chromatique admettant une 5-coloration oligomatique.

THÉORÈME 4.2

$$\chi(\text{penta}K_{3,3}) = 4$$

#### Démonstration

Le graphe  $\text{penta}K_{3,3}$  (i.e  $CB_{5,3}$ ) satisfait les conditions du théorème 4.1.  
Ainsi nous avons bien que  $\chi(CB_{5,3}) = k - 1 = 5 - 1 = 4$ .

□

THÉORÈME 4.3

Le plus petit graphe 4-chromatique qui admet une 5-coloration oligomatique a 30 sommets.

#### Démonstration [2]

Supposons  $G = (V, E)$  4-chromatique et  $c$  une 5-coloration oligomatique de  $G$ .

Supposons par contradiction que  $G$  a moins de 30 sommets et montrons qu'un tel graphe est 3-colorable.

Comme un graphe 4-chromatique qui admet une 5-coloration oligomatique est tel que chaque sommet ne voit au maximum que trois couleurs (sa propre couleur et deux autres), nous classifions les sommets de  $G$  dans 30 classes  $C_{i,\{j,k\}}$  où  $i$  est la couleur associée au sommet et  $j, k$  les couleurs de ses voisins. Si un sommet a qu'une couleur  $j$  dans son voisinage, nous introduisons ce sommet dans la classe  $C_{i,\{j,k\}}$  avec le plus petit  $k$ .

Pour le penta $K_{3,3}$  et sa 5-coloration oligomatique, il y a une bijection entre sommets et classes. Comme le graphe  $G$  a moins de 30 sommets, il existe au moins une classe  $C^*$  qui sera vide. Soit  $G'$  le sous-graphe de penta $K_{3,3}$  obtenu en enlevant le sommet correspondant à  $C^*$ . Comme penta $K_{3,3}$  est critique,  $G'$  admet une 3-coloration  $c'$ . Nous pouvons maintenant colorer les sommets de  $G$  en leur donnant la même couleur que les sommets de  $G'$  qui correspondent à leur classe.

Nous avons ainsi obtenu une 3-coloration de  $G$ .

□

Dans la démonstration de ce théorème nous avons utilisé le fait que le graphe penta $K_{3,3}$  est critique, *i.e.* si on lui enlève un sommet le sous-graphe induit est 3-colorable.

La démonstration de la criticité de ce graphe est donnée avec un théorème très intéressant dans le paragraphe qui suit.

#### 4.2.2 Propriété particulière des graphes $CB_{k,\kappa}$

##### THÉORÈME 4.4

Pour  $n \geq 2$ , les graphes  $CB_{2n+1,n+1}$  sont critiques.

#### Démonstration

Puisque les conditions suivantes sont satisfaites

$$\begin{aligned} 2n + 1 &\geq 5 & \forall n \geq 2 \\ \lfloor \frac{2n+1}{2} \rfloor &\leq n + 1 < (2n + 1) - 1 & \forall n \geq 2 \end{aligned}$$

nous remarquons qu'à l'aide du théorème 4.1 nous pouvons déterminer le nombre chromatique  $\chi$  des graphes  $CB_{2n+1,n+1}$ ,  $n \geq 2$ . Nous obtenons :  $\chi(CB_{2n+1,n+1}) = (2n + 1) - 1 = 2n$ .

Rappelons qu'un graphe  $G$  est critique si, en lui éliminant un sommet, il peut être recoloré avec  $(\chi(G) - 1)$  couleurs. Nous voulons ainsi montrer que les graphes  $CB_{2n+1,n+1}$  avec  $n \geq 2$  peuvent être colorés avec  $\chi(G) = 2n$  couleurs tels qu'un seul sommet ait la couleur  $2n$ .

Dans les graphes  $CB_{k,\kappa}$  le nombre de sommets de même couleur  $c$  est égale à  $\binom{2n}{n}$  pour toute couleur  $c \in \{1, \dots, 2n+1\}$ . Le nombre de sommets du graphe est donc

$$|V| = (2n+1) \cdot \binom{2n}{n}$$

Le nombre d'arêtes du graphe est

$$|E| = \frac{(2n+1) \cdot n}{2} \binom{2n}{n} \cdot \binom{2n-1}{n-1}$$

Le degré de chaque sommet  $v \in V$  est

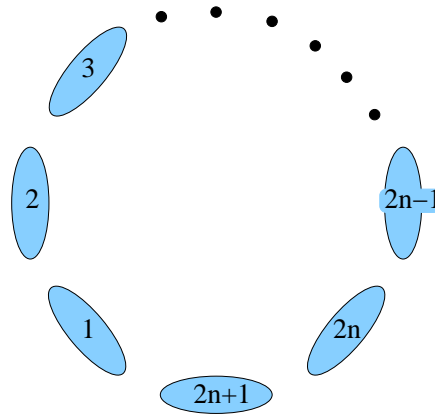
$$d(v) = 2 \cdot \frac{|E|}{|V|} = n \cdot \binom{2n-1}{n-1}$$

Comme chaque sommet ne voit que  $(n+1)$  couleurs, il sera adjacent à  $n$  couleurs différentes (la  $(n+1)$ -ième couleur est la propre couleur du sommet).

Ainsi le nombre d'arêtes envoyées par chaque sommet vers une même couleur est de

$$\frac{d(v)}{n} = \binom{2n-1}{n-1}$$

Représentons pour simplifier le graphe  $CB_{2n+1, n+1}$  avec  $(2n+1)$  ensembles tels que l'ensemble  $j$  représente les sommets de couleur  $j$ . De plus, par souci de clarté, nous évitons de représenter ses arêtes.



Tentons maintenant de recolorer le graphe  $CB_{2n+1, n+1}$  (avec  $n \geq 2$ ) en utilisant  $(2n-1)$  couleurs. Nous voulons donc recolorer le graphe tel qu'un sommet seul ne puisse pas être coloré sans créer de conflits.

Classifions pour commencer tout sommet  $v \in V$  dans une classe  $C_{k, \{i_1, \dots, i_n\}}$  où  $k = c(v)$  (c'est-à-dire la couleur du sommet  $v$ ) et les  $i_1, \dots, i_n$  sont les couleurs des voisins de  $v$ .



De cette façon l'ensemble des sommets avec couleur  $j$  sera noté  $C_{j,\{i_1,\dots,i_n\}}$ ,  $j = 1, \dots, 2n + 1$ .  
Recolorons les sommets dans la classe  $C_{2n+1,\{i_1,\dots,i_n\}}$  avec

$$\min(\{1, \dots, 2n - 1\} \setminus \{i_1, \dots, i_n\})$$

et les sommets dans la classe  $C_{2n,\{i_1,\dots,i_n\}}$  avec

$$\max(\{1, \dots, 2n - 1\} \setminus \{i_1, \dots, i_n\})$$

Dans cette nouvelle coloration, nous pourrions avoir uniquement des conflits entre des sommets  $x$  et  $y$  tels que

$$x \in C_{2n,\{i_1,\dots,i_{n-1},2n+1\}} \quad \text{et} \quad y \in C_{2n+1,\{i_1,\dots,i_{n-1},2n\}}$$

c'est-à-dire entre les sommets de couleur  $2n$  et de couleur  $(2n + 1)$  qui sont adjacents.

En effet :

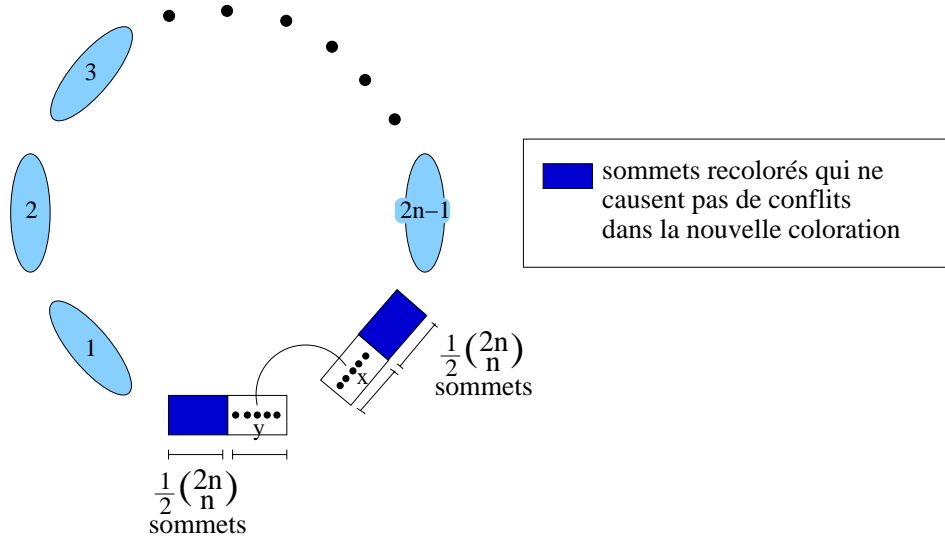
1. Les sommets qui ont une couleur  $c \in \{1, \dots, 2n - 1\}$  ne sont pas recolorés et ne peuvent pas créer de conflits dans la nouvelle coloration.
2. Comme les sommets de couleur  $2n$  et  $2n + 1$  qui ne sont pas adjacents entre eux ne sont adjacents qu'à  $n$  couleurs différentes parmi  $\{1, \dots, 2n - 1\}$  avec  $n \geq 2$ , il existe toujours une couleur  $c \in \{1, \dots, 2n - 1\}$  que nous pouvons affecter à ces sommets. Ceci car  $(2n - 1) > n$ ,  $\forall n \geq 2$ , ce qui signifie qu'il existe au moins une couleur  $c \in \{1, \dots, 2n - 1\}$  qu'un tel sommet ne voit pas.

Le nombre de sommets  $x \in C_{2n,\{i_1,\dots,i_{n-1},2n+1\}}$  (= nombre de sommets  $y \in C_{2n+1,\{i_1,\dots,i_{n-1},2n\}}$ ) est

$$\begin{aligned} \underbrace{\binom{2n}{n}}_{\substack{\# \text{ sommets } v \text{ t.q} \\ v \in C_{2n,\{i_1,\dots,i_n\}}} } & - \underbrace{\binom{2n-1}{n}}_{\substack{\# \text{ sommets } v \text{ t.q } v \in C_{2n,\{i_1,\dots,i_n\}} \\ \text{avec } (2n+1) \notin \{i_1,\dots,i_n\}}} & = \frac{(2n)!}{n! \cdot n!} - \frac{(2n-1)!}{n! \cdot (n-1)!} \\ & = \frac{2 \cdot (2n)! - 2n \cdot (2n-1)!}{2 \cdot n! \cdot n!} \\ & = \frac{2 \cdot (2n)! - (2n)!}{2 \cdot n! \cdot n!} \\ & = \frac{(2n)!}{2 \cdot n! \cdot n!} \\ & = \frac{1}{2} \cdot \binom{2n}{n} \end{aligned}$$

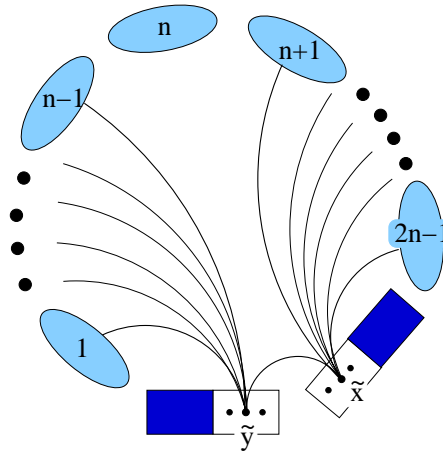
c'est-à-dire : la moitié des sommets de la classe  $C_{2n,\{i_1,\dots,i_n\}}$  et la moitié des sommets de la classe  $C_{2n+1,\{i_1,\dots,i_n\}}$  sont adjacents entre eux.

Ainsi, pour la raison expliquée précédemment,  $\frac{1}{2} \binom{2n}{n}$  sommets de couleur  $2n$  et  $\frac{1}{2} \binom{2n}{n}$  sommets de couleur  $2n + 1$  ne causent pas de conflits dans la nouvelle coloration.



Comme  $\frac{1}{2} \binom{2n}{n} = \binom{2n-1}{n-1}$ , un sommet  $x \in C_{2n, \{i_1, \dots, i_{n-1}, 2n+1\}}$  est adjacent à tout sommet  $y \in C_{2n+1, \{i_1, \dots, i_{n-1}, 2n\}}$  et vice versa. De plus, tout sommet  $x$  (et tout sommet  $y$ ) sera adjacent à  $(n - 1)$  couleurs parmi  $\{1, \dots, 2n - 1\}$ . En effet, tout sommet  $x \in C_{2n, \{i_1, \dots, i_{n-1}, 2n+1\}}$  voit sa propre couleur, la couleur  $2n + 1$  et  $(n + 1) - 2 = n - 1$  autres couleurs. Le raisonnement est identique pour un sommet  $y \in C_{2n+1, \{i_1, \dots, i_{n-1}, 2n\}}$ .

Nous pouvons ainsi remarquer que, dans cette nouvelle coloration, il y a un seul conflit entre le sommet  $\tilde{x} \in C_{2n, \{n+1, \dots, 2n-1, 2n+1\}}$  et le sommet  $\tilde{y} \in C_{2n+1, \{1, \dots, n-1, 2n\}}$ . Ceci car ces sommets sont adjacents et tous les deux sont affectés à la couleur  $n$ , comme le montre la figure ci-dessous.



En effet, pour  $\tilde{x} \in C_{2n, \{n+1, \dots, 2n-1, 2n+1\}}$  le  $\max\{1, \dots, 2n - 1\} \setminus \{n + 1, \dots, 2n - 1\}$  vaut  $n$ , et pour  $\tilde{y} \in C_{2n+1, \{1, \dots, n-1, 2n\}}$  le  $\min\{1, \dots, 2n - 1\} \setminus \{1, \dots, n - 1\}$  vaut aussi  $n$ .

Si donc nous affectons la couleur  $n$  au sommet  $\tilde{y}$ , le seul sommet qui ne peut pas être recoloré avec une couleur dans  $\{1, \dots, 2n - 1\}$  sans créer de conflits est le sommet  $\tilde{x}$ .

Nous avons ainsi obtenu ce que nous souhaitions puisqu'à partir d'ici nous pouvons facilement trouver une coloration du graphe telle que seul un sommet ait la couleur  $2n$  : ce sera le sommet  $\tilde{x}$ .

Il faudrait encore montrer qu'on peut obtenir une  $2n$ -coloration de  $CB_{2n+1, n+1}$  telle que n'importe quel sommet soit le seul sommet coloré avec la couleur  $2n$ .

Pour montrer qu'un sommet  $v_{c, \{i_1, \dots, i_n\}} \in V$  peut être le seul sommet coloré avec la couleur  $2n$ , il suffit d'appliquer une permutation sur les couleurs du graphe  $CB_{2n+1, n+1}$  de telle façon que  $c = 2n$  et  $(i_1, \dots, i_n) = (n + 1, \dots, 2n - 1, 2n + 1)$ , et ensuite répéter le même procédé de recoloration présenté avant.

Nous avons ainsi vérifié que n'importe quel sommet du graphe  $CB_{2n+1, n+1}$  peut être le seul sommet de couleur  $2n$ .

Les graphes  $CB_{2n+1, n+1}$  sont donc bien critiques pour tout  $n \geq 2$ .

□

### 4.3 Propriétés des graphes oligomatiques

Dans cette section nous présenterons des propositions intéressantes sur des graphes oligomatiques généraux. Grâce à ces propositions il sera possible d'avoir une idée plus concrète de l'allure que doit avoir un graphe oligomatique.

Rappelons encore une fois que nous travaillons sur des graphes  $G = (V, E)$  connexes et simples.

#### Proposition 4.1

Il n'existe aucun graphe  $G = (V, E)$  4-chromatique admettant une 5-coloration oligomatique pour laquelle il existe un couple de couleurs  $(c, c')$  avec  $c, c' \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$  n'ayant aucun cycle passant uniquement par ces deux couleurs.

#### Démonstration

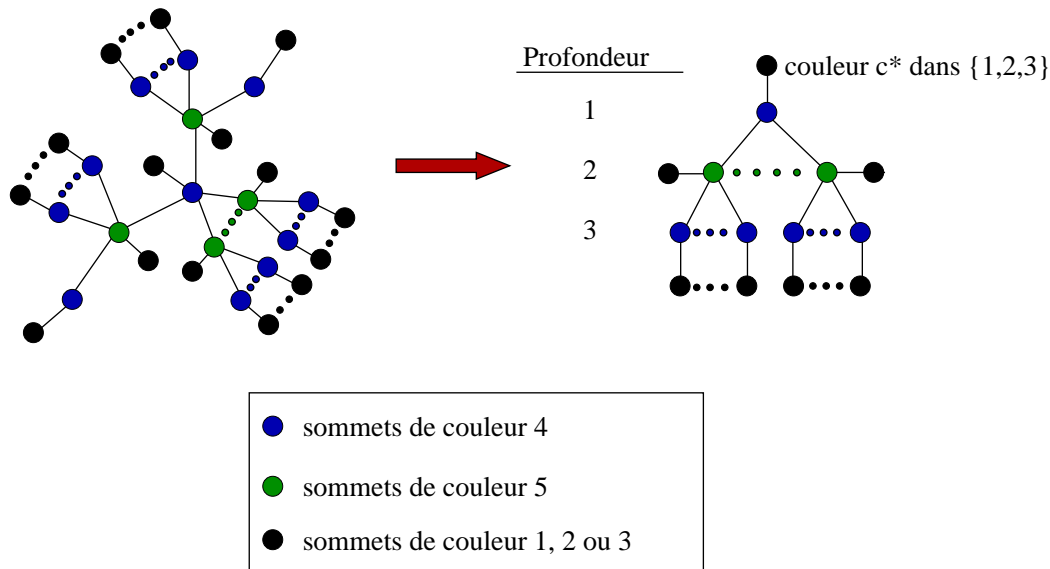
Soit  $G$  un graphe coloré avec cinq couleurs tel que  $|K_1(v)| \leq 3 \forall v \in V$  et tel que pour un couple de couleurs  $(c, c')$  il n'existe aucun cycle passant uniquement par ces deux couleurs.

Montrons que  $G$  est 3-colorable et donc n'est pas oligomatique.

Supposons sans perte de généralité que  $(c, c') = (4, 5)$ . Un sommet de couleur quatre ou cinq qui n'est pas adjacent respectivement à des sommets de couleur cinq ou quatre peut être recoloré sans problème avec une couleur dans  $\{1, 2, 3\}$  différente de la couleur de ses voisins. En effet, comme  $|K_1(v)| \leq 3 \forall v \in V$ , un tel sommet aura des voisins n'ayant que deux couleurs parmi  $\{1, 2, 3\}$ .

Regardons maintenant les sommets de couleur quatre et cinq qui sont adjacents. Comme entre les sommets de couleur quatre et cinq il n'existe pas de cycles, le sous-graphe induit par ces sommets est une forêt.

Nous donnons ci-dessous un exemple qui représente un arbre formé par des sommets adjacents de couleur quatre et cinq et nous expliquerons leur recoloration avec les couleurs  $\{1, 2, 3\}$ .



Commençons par recolorer le centre de l'arbre (s'il y en a deux, en choisir un au hasard) et continuons à recolorer les sommets de couleur quatre et cinq en procédant par profondeur.

Rappelons que le centre est un sommets  $u$  dont l'écartement est minimum et l'écartement  $e(v)$  d'un sommet  $v \in V$  est la distance maximale de  $v$  aux autres sommets de l'arbre. Colorer le centre de l'arbre ne posera pas de problèmes car il suffit de choisir une couleur dans l'ensemble  $\{1, 2, 3\} \setminus c^*$ . Pour la recoloration des autres sommets il n'y aura pas de problèmes non plus, puisque la couleur d'un de ces sommets dépend uniquement de la couleur de son père et d'une seule autre couleur appartenant à l'ensemble  $\{1, 2, 3\}$ .

Nous pouvons donc toujours 3-colorer les arbres induits par les sommets de couleur quatre et cinq adjacents. Le graphe  $G$  est ainsi 3-colorable.

□

#### Corollaire 4.1

Soit  $G$  un graphe 4-chromatique admettant une 5-coloration oligomatique. Alors dans un tel graphe entre chaque paire de couleurs il existe un cycle.

#### 4.3.1 Graphes oligomatiques avec 30 sommets

Dans le paragraphe précédent nous avons traité les graphes  $G = (V, E)$  4-chromatiques qui admettent une 5-coloration oligomatique *i.e.* une 5-coloration telle que  $|K_1(v)| \leq 3, \forall v \in V$ .

Nous nous restreignons maintenant au cas où ces graphes ont 30 sommets.

Comme un graphe 4-chromatique qui admet une 5-coloration oligomatique est tel que chaque sommet ne voit au maximum que trois couleurs (sa propre couleur et deux autres), nous classifions les sommets de  $G$  dans 30 classes  $C_{i,\{j,k\}}$  où  $i$  est la couleur associée au sommet et  $j, k$  les couleurs de ses voisins. Si un sommet n'a qu'une couleur  $j$  dans son voisinage nous l'introduisons dans la classe  $C_{i,\{j,k\}}$  avec le plus petit  $k$ .

Par le corollaire 4.1 nous pouvons affirmer que pour toute couleur il existe au moins deux sommets qui voient une couleur commune. Mais, si par exemple il n'y a que deux sommets dans  $C_{i,\{j,\cdot\}}$ , le graphe serait encore 3-colorable puisque nous pourrions recolorer les deux sommets de couleur  $i$  avec une même couleur (différente de la couleur des voisins) et recolorer aussi les sommets de couleur  $j$ .

Ainsi pour toute couleur il existe au moins trois sommets ; de plus comme  $|V| = 30$ , nous pouvons affirmer qu'il existe exactement trois sommets par couleur. Plus précisément il existe un sommet par classe tel que chaque sommet voit exactement trois couleurs.

Chaque sommet correspond ainsi à une classe (comme c'était le cas pour le graphe  $\text{penta}K_{3,3}$ ).

Dans la suite nous noterons  $\tilde{G}$  un graphe de ce type.

Notons que  $\tilde{G}$  est un graphe 4-chromatique admettant une 5-coloration daltonienne tel que  $|V| = 30$  et tel que chaque sommet est dans une classe différente. Le graphe  $\tilde{G}$  n'est donc pas forcément égale à  $CB_{5,3}$ , mais nous pouvons plutôt dire que  $CB_{5,3}$  est un graphe du type  $\tilde{G}$ .

### Proposition 4.2

Il n'existe aucun graphe  $\tilde{G}$  admettant un couple de couleur  $(c,c')$  n'ayant qu'un seul cycle passant uniquement par ce couple de couleurs.

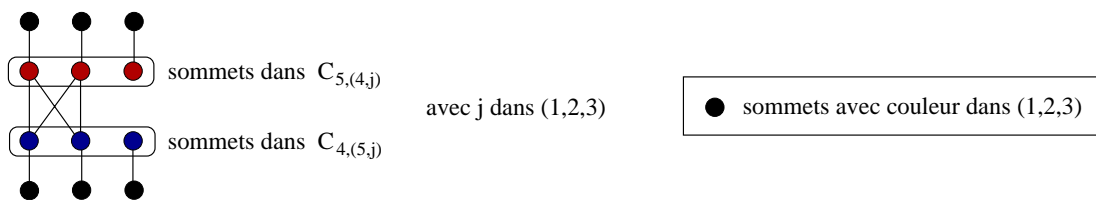
### Démonstration

Rappelons que  $\tilde{G}$  est un graphe 4-chromatique avec 30 sommets admettant une 5-coloration telle que  $|K_1(v)| \leq 3 \forall v \in V$ . Supposons de plus par l'absurde qu'entre un couple de couleurs  $(c,c')$  il existe un seul cycle. Montrons que  $\tilde{G}$  est 3-colorable et donc qu'il n'est pas oligomatique.

Supposons sans perte de généralité que  $(c,c')=(4,5)$ .

Comme il existe un seul sommet par classe, il y aura trois sommets de couleur quatre et trois sommets de couleur cinq qui pourraient être adjacents entre eux. De plus, comme par hypothèse il existe un seul cycle passant uniquement par les couleurs quatre et cinq, ce cycle aura longueur quatre ou longueur six.

1. Si le cycle a longueur quatre, nous avons par exemple le cas suivant :



Si les deux sommets de couleur quatre et cinq n'appartenant pas au cycle ne sont pas adjacents, alors chacun de ces sommets peut être adjacent à au maximum un sommet du

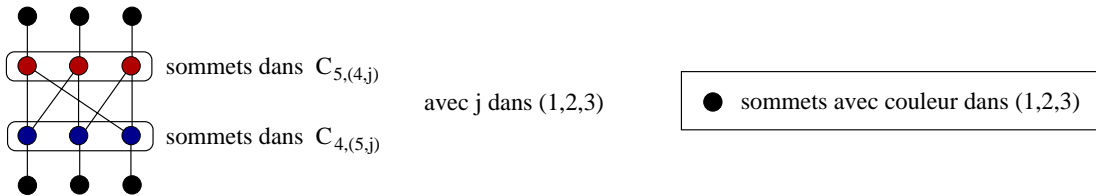
cycle, autrement nous aurions un nouveau cycle. Si par contre les deux sommets de couleur quatre et cinq n'appartenant pas au cycle sont adjacents, alors un seul de ces sommets peut être adjacent à au maximum un sommet du cycle.

Recolorons maintenant ces sommets par étapes :

- i) Recolorer les sommets de couleur quatre appartenants au cycle avec la couleur  $c_1 \in \{1, 2, 3\} \setminus \{c(d), c(e)\}$ .
- ii) Recolorer le sommet de couleur cinq appartenant au cycle et adjacent au sommet  $g$  avec une couleur  $c_2 \in \{1, 2, 3\} \setminus \{c_1, c(g)\}$  et recolorer le sommet de couleur cinq appartenant au cycle et adjacent au sommet  $h$  avec une couleur  $c_3 \in \{1, 2, 3\} \setminus \{c_1, c(h)\}$ .
- iii) Si les deux sommets n'appartenant pas au cycle ne sont pas adjacents, alors ils peuvent être recolorés sans problèmes car ils ont degré deux.  
Si les deux sommets n'appartenant pas au cycle sont adjacents, commencer par recolorer le sommet qui est adjacent à un sommet du cycle. En effet ce sommet a uniquement deux sommets recolorés adjacents. Recolorer ensuite le dernier sommet.

Si le cycle a longueur quatre,  $\tilde{G}$  est donc 3-colorable.

2. Si le cycle a longueur six, nous avons par exemple le cas suivant :



Comme entre les sommets de couleur quatre et ceux de couleur cinq il existe un unique cycle, il ne peut pas y avoir d'autres arêtes.

Il suffit alors de commencer par recolorer un sommet dans  $C_{4,\{5,j_1\}}$  tel qu'il soit adjacent à un sommet dans  $C_{5,\{4,j_2\}}$  avec  $j_2 \neq j_1$ .

Supposons sans perte de généralité  $c(d) = j_1$  et  $c(g) = j_2$ . Il faut alors recolorer le sommet de couleur quatre adjacent à  $d$  avec la couleur  $j_2$  de telle façon qu'il n'y a pas de problèmes en recolorant les sommets  $h, e, k, f$  et  $g$  dans cet ordre.

Si le cycle a longueur six,  $\tilde{G}$  est donc 3-colorable.

□

**Corollaire 4.2**

Si  $G = (V, E)$  est un graphe du type  $\tilde{G}$ , alors entre chaque paire de couleurs il existe plus qu'un seul cycle .

**Remarque 4.5** La seule possibilité pour que entre une paire de couleurs  $(c, c')$   $\tilde{G}$  ait plus qu'un seul cycle est qu'il ait un cycle de longueur six et deux cycles de longueur quatre comme le montre la figure suivante :

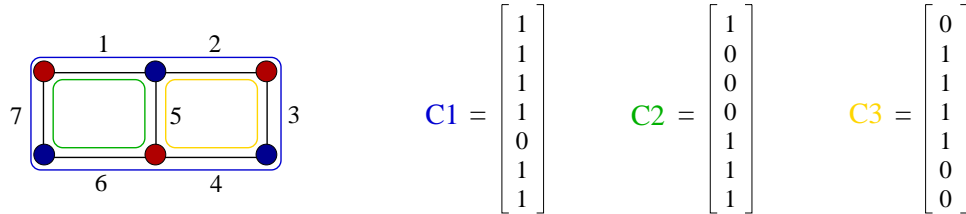


FIG. 4.1 – trois cycles entre chaque paire de couleurs

**Corollaire 4.3**

Soit  $G = (V, E)$  un graphe 4-chromatique admettant une 5-coloration oligomatique. Alors  $G$  doit avoir au moins 30 sommets (i.e  $|V| \geq 30$ ).

En particulier  $G$  doit avoir au moins un sommet par classe, et si  $|V| = 30$  chaque sommet doit voir exactement trois couleurs (sa propre couleur et deux autres).

Ce corollaire est facilement compréhensible puisqu'un graphe  $G$  admettant une 5-coloration oligomatique et avec moins de 30 sommets ne pourrait pas avoir entre chaque paire de couleurs un sous-graphe partiel égal à celui de la figure 4.1. Un tel graphe sera donc 3-colorable.

De plus, comme nous l'avons déjà mentionné, un graphe  $G$  avec 30 sommets mais tels que pas tous les sommets voient exactement trois couleurs serait 3-colorable, puisque nous pourrions facilement éliminer la couleur du sommet qui ne voit que deux couleurs et la couleur de ses voisins.

Nous avons ainsi trouvé plus de détails sur les sommets d'un graphe 4-chromatique qui admet une 5-coloration oligomatique et nous avons donné une preuve inductive simple qui permet d'obtenir le théorème 4.3 par un autre chemin.

Grâce à la remarque précédente et à la proposition 4.2 nous pouvons conclure en énonçant le théorème suivant :

THÉORÈME 4.6

Si  $G = (V, E)$  est un graphe de type  $\tilde{G}$ , alors entre chaque paire de couleurs  $(c, c')$  il existe le sous-graphe partiel suivant où les  $x, y, z \in \{1, 2, 3, 4, 5\} \setminus \{c, c'\}$  sont tous différents.

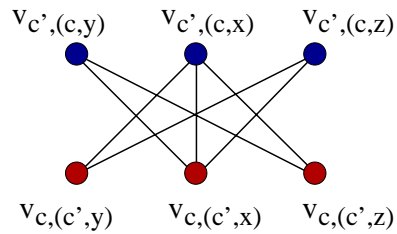
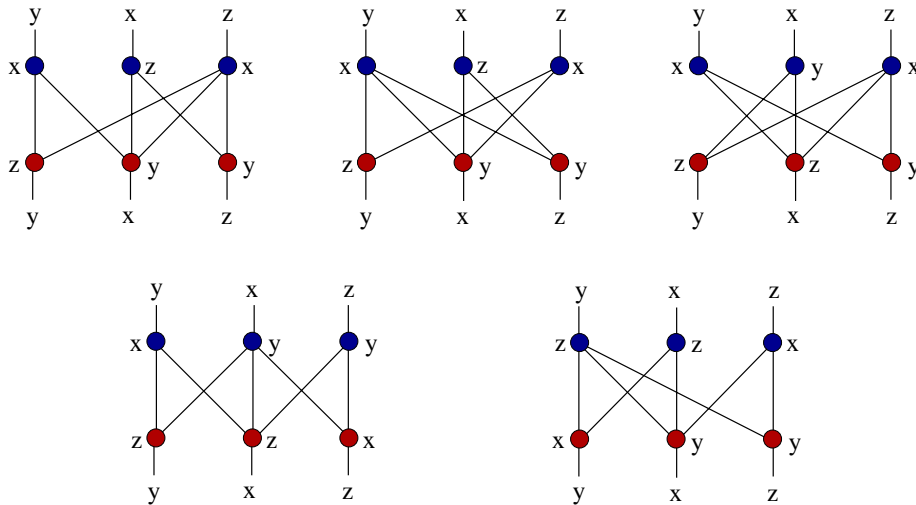


FIG. 4.2 – sous-graphe partiel

Démonstration

Il suffit de vérifier que pour n'importe quelle autre combinaison des arêtes ces configurations (qui sont strictement liées à  $x, y$  et  $z$ ) peuvent être 3-coloré.

Représentons toutes ces configurations, chacune avec une 3-recoloration possible des sommets.



□



# Chapitre 5

## Graphes oligomatiques particuliers

Dans ce chapitre nous nous intéresserons à l'étude de l'existence de graphes oligomatiques particuliers.

Une grande partie des paragraphes qui vont suivre sont liés à la problématique de l'existence de graphes planaires oligomatiques. Nous présenterons de plus une conclusion très simple sur les graphes parfaits et un étude sur les graphes sans griffe.

### 5.1 Graphes parfaits

Considérons le cas où  $G = (V, E)$  est un graphe parfait, c'est-à-dire un graphe  $G$  tel que pour tout sous-graphe  $G'$  de  $G$  nous avons  $\chi(G') = \omega(G')$ , où  $\omega(G')$  est la taille de la plus grande clique (ensemble de sommets deux à deux adjacents) dans  $G'$ .

#### Proposition 5.1

Soit  $G = (V, E)$  un graphe avec  $\chi(G) = \omega(G)$ .  
Alors  $G$  n'est pas oligomatique.

#### Démonstration

Comme  $G$  contient une clique  $C$  de taille  $\chi(G)$ , chaque sommet de cette clique  $C$  doit voir au moins  $\chi(G)$  couleurs différentes *i.e.*  $\forall v \in C$  on a  $|K_1(v)| \geq \chi(G)$ .  
Il est donc clair que nous ne pouvons pas avoir  $|K_1(v)| \leq \kappa < \chi(G)$ ,  $\forall v \in V$ .

□

Comme tout graphe parfait  $G$  est tel que  $\chi(G) = \omega(G)$ , nous pouvons facilement conclure qu'*aucun graphe parfait n'est oligomatique*.

## 5.2 Graphes de Halin

Un problème ouvert très passionnant est lié à l'existence de graphes planaires oligomatiques. Comme ce problème est très complexe, nous nous restreignons ici à l'étude de l'existence de graphes de Halin oligomatiques.

En effet, comme les graphes de Halin sont planaires, la classe des graphes de Halin est une sous-classe des graphes planaires.

### Définition 5.1

Considérons le cas où  $G = (V, E)$  est un *graphe de Halin*, c'est-à-dire un graphe planaire  $G = T \cup C$  où  $T$  est un arbre et  $C$  un cycle passant par toutes les feuilles dans un ordre induit par l'une des représentations planaires de  $T$ .

Les sommets et les arcs sur le cycle  $C$  sont appelés sommets et arcs extérieurs.

Les autres sommets et arcs sont appelés sommets et arcs intérieurs.

On impose encore que le degré des sommets intérieurs soit strictement plus grand que deux.

Comme les graphes de Halin sont des graphes planaires, nous savons que leur nombre chromatique est inférieur ou égal à quatre. Nous chercherons alors à caractériser les graphes de Halin par rapport à leur nombre chromatique de façon à pouvoir identifier ceux avec nombre chromatique quatre et d'étudier l'existence de graphes oligomatiques de ce type.

Remarquons pour commencer que le nombre chromatique d'un graphe de Halin  $G$  est supérieur ou égal à trois. En effet tout graphe de Halin admet un triangle comme sous-graphe induit par deux sommets extérieurs et le sommet intérieur adjacent à ces deux sommets extérieurs.

### THÉORÈME 5.1

Soit  $G = (V, E)$  un graphe de Halin avec plus qu'un sommet intérieur. Alors  $\chi(G) = 3$ .

### Démonstration

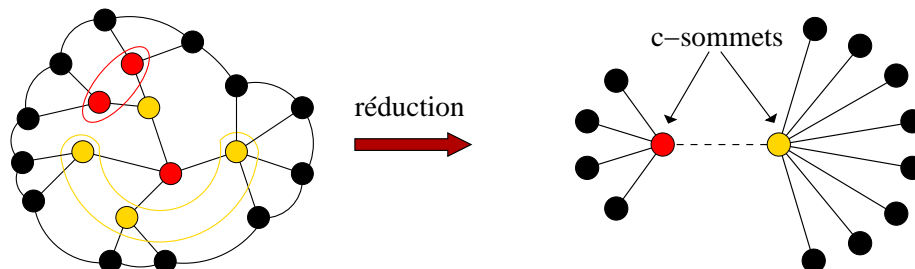
Soit  $G$  un graphe de Halin ayant plus qu'un sommet intérieur et un nombre pair de sommets extérieurs.

Nous démontrons ce théorème en exposant une 3-coloration admissible de  $G$ .

Colorons tout d'abord le sous-arbre induit par les sommets intérieurs avec deux couleurs : la couleur 1 et la couleur 2. Cela est faisable car un arbre est 2-colorable, de plus deux est le nombre minimal de couleurs nécessaires car il existe au moins deux sommets intérieurs.

Il nous reste donc à colorer les sommets extérieurs. Appelons les sommets intérieurs qui sont adjacents à des sommets extérieurs les *derniers sommets intérieurs*. Nous disons que deux derniers sommets intérieurs  $u$  et  $v$  sont *proches* s'il existe un sommet extérieur  $u'$  adjacent à  $u$  et un sommet extérieur  $v'$  adjacent à  $v$  tel que  $u'$  et  $v'$  sont adjacents.

Pour simplifier la coloration des sommets extérieurs, nous allons contracter les derniers sommets intérieurs qui sont proches et qui ont même couleur  $c \in \{1, 2\}$  en un unique sommet de couleur  $c$ . Appelons ces nouveaux sommets contractés les  $c$ -sommets. Nous obtiendrons ainsi soit un seul de ces  $c$ -sommets, soit nous en obtiendrons un nombre pair.



Orientons maintenant le cycle dans le sens des aiguilles d'une montre.

1. Si le nombre de sommets extérieurs est pair nous avons la recoloration suivante :

a) S'il y a un seul  $c$ -sommet :

Supposons sans perte de généralité que le  $c$ -sommets est de couleur 1. Il suffit alors de colorer les sommets extérieurs avec la couleur 2 et avec une nouvelle couleur 3. Cela est possible car le circuit extérieur est pair.

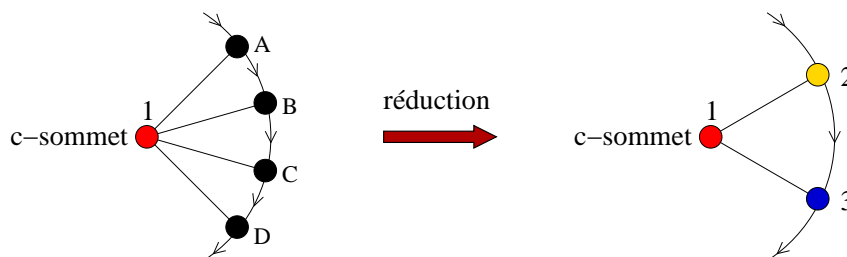
b) S'il y a un nombre pair de  $c$ -sommets nous appliquons la réduction suivante :

- si un  $c$ -sommets  $x$  est adjacent à un nombre pair de sommets extérieurs, alors le premier et le dernier parmi ces sommets rencontrés par le circuit devront avoir une couleur différente. En effet ces sommets extérieurs adjacents au  $c$ -sommets  $x$  ont deux couleurs à disposition, c'est-à-dire qu'ils pourraient être affectés à une couleur dans  $\{1, 2, 3\} \setminus c(x)$ .

Nous pouvons ainsi visualiser les sommets extérieurs adjacents à  $x$  comme seulement deux sommets extérieurs.

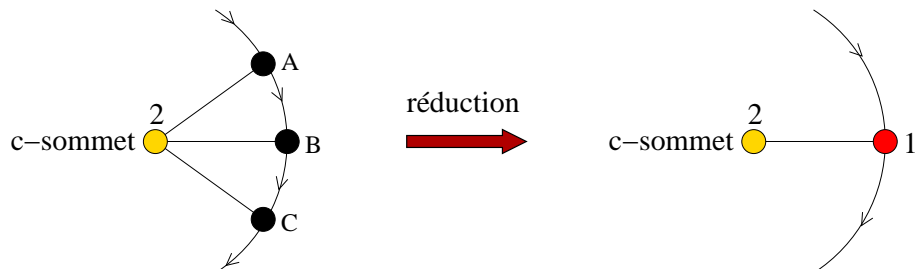
On colore le premier sommet rencontré par le circuit avec la couleur  $\{1, 2\} \setminus c(x)$  et le deuxième avec la couleur 3.

Voici un petit exemple où le  $c$ -sommets a couleur 1 :



Cette coloration implique que le sommet  $A$  et le sommet  $C$  auront couleur 2 et les sommets  $B$  et  $D$  couleur 3.

- si un  $c$ -sommets  $y$  est adjacent à un nombre impair de sommets extérieurs, alors le premier et le dernier parmi ces sommets extérieurs devront avoir la même couleur. Nous pouvons ainsi visualiser les sommets extérieurs adjacents à  $y$  comme un seul sommet extérieur. Nous colorons ce sommet avec la couleur  $\{1, 2\} \setminus c(y)$ . Voici un petit exemple où le  $c$ -sommets a couleur 2 :



Cette coloration implique que le sommets  $A$  et le sommets  $C$  auront couleur 1 et le sommets  $B$  aura couleur 3.

Vérifions maintenant que cette 3-coloration ne produit aucun conflit. Comme nous n'avons aucun conflit dans le sous-arbre induit par les sommets intérieurs, grâce à la coloration donnée, parmi les  $c$ -sommets et les sommets extérieurs (donc aussi parmi les derniers sommets intérieurs et les sommets extérieurs), il suffit de vérifier qu'il n'existe aucun conflit sur le circuit. Comme la couleur des  $c$ -sommets change de 1 à 2 et vice versa, un sommets extérieur  $e$  de couleur  $c(e) \in \{1, 2\}$  peut être suivi dans le circuit soit par un sommets de couleur 3 (si les deux sont adjacents au même  $c$ -sommets), soit par un sommets de couleur  $\{1, 2\} \setminus c(e)$  (s'ils ne le sont pas). Ainsi, avec la coloration donnée, il n'y a aucun conflit.

2. Si le nombre de sommets extérieurs est impair nous avons la recoloration suivante :

a) S'il y a un nombre pair de  $c$ -sommets :

En appliquant la même réduction et coloration que dans le cas où le graphe de Halin a un nombre pair de sommets extérieur nous ne créons aucun conflit.

b) S'il y a un seul  $c$ -sommets :

Supposons sans perte de généralité que le  $c$ -sommets est de couleur 1. Il suffit alors de colorer au moins un dernier sommets intérieur avec la couleur 3 afin de se ramener au cas précédent (*i.e.* avec un nombre pair de  $c$ -sommets). Dans ce cas la couleur 3 joue le rôle de la couleur 2 et vice versa.

Nous avons ainsi fourni une méthode de coloration des sommets d'un graphe de Halin  $G$  ayant plus qu'un sommets intérieur en trois couleurs.

□

Il est facile de remarquer que si  $G = (V, E)$  est un graphe de Halin avec un seul sommet intérieur et un nombre pair de sommets extérieurs, alors  $\chi(G) = 3$ . En effet le sommet intérieur est adjacent à tous les sommets extérieurs, donc il doit être le seul sommet coloré avec la couleur 1. Comme le circuit extérieur est pair, les sommets extérieurs peuvent être colorés avec la couleur 2 et avec la couleur 3. Nous avons donc une 3-coloration triviale du graphe  $G$ .

De même il est simple de noter que, si  $G = (V, E)$  est un graphe de Halin avec un seul sommet intérieur et un nombre impair de sommets extérieurs, alors  $\chi(G) = 4$ . En effet, comme dans le cas précédent, le sommet intérieur est adjacent à tous les sommets extérieurs donc il doit être le seul sommet coloré avec la couleur 1. Comme le circuit extérieur est impair, les sommets extérieurs ne peuvent pas être colorés avec seulement deux couleurs. Nous avons donc besoin de trois couleurs pour le circuit extérieur et par conséquent de quatre couleurs pour le graphe tout entier.

Il est clair que ces derniers graphes ne peuvent pas être oligomatiques, car il n'est pas possible de colorer de tels graphes de telle façon que le sommet intérieur ne voie que trois couleurs.

Dans ce paragraphe nous avons trouvé une classification des graphes de Halin et nous avons montré que les seules graphes de Halin avec nombre chromatique quatre sont ceux avec un seul sommet intérieur et un nombre impair de sommets extérieurs. Comme ces derniers graphes ne peuvent pas être oligomatiques, nous pouvons conclure qu'*aucun graphe de Halin n'est oligomatique*.

### 5.3 Graphes planaires extérieurs

#### Définition 5.2

Un graphe est dit *planaire extérieur* s'il est planaire et s'il peut être dessiné sur un plan de telle manière que tout sommet soit adjacent à la face illimitée *i.e.* un graphe planaire extérieur consiste en un cycle avec des cordes qui ne se coupent pas.

**Exemple 5.2** Dans la figure suivante les graphes  $G$  et  $H$  sont planaires mais de plus le graphe  $G$  est de plus planaire extérieur tandis que le graphe  $H$  ne l'est pas.



Remarquons que la classe des graphes planaires extérieurs est une sous-classe des graphes planaires.

**Proposition 5.2**

Tout graphe planaire extérieur simple a au moins un sommet  $v$  tel que  $d(v) \leq 2$ .

Avant de démontrer cette proposition nous avons besoin des définitions suivantes

**Définition 5.3**

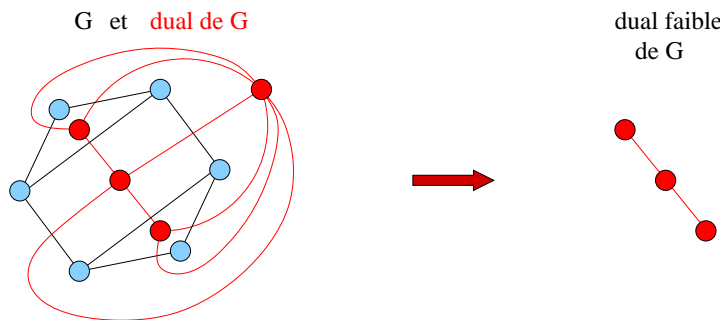
Donné un graphe planaire  $G$ , son *dual* géométrique  $G^*$  est construit en plaçant un sommet dans chaque face de  $G$  (incluse la face illimitée) et, si deux faces ont une arête  $e$  en commun, relier les deux sommets correspondants à cette face par une arête ne traversant que  $e$ . Nous avons ainsi les correspondances suivantes :

$$\begin{array}{lcl} \text{face de } G & \leftrightarrow & \text{sommet de } G^* \\ \text{sommet de } G & \leftrightarrow & \text{face de } G^* \\ \text{arête de } G & \leftrightarrow & \text{arête de } G^* \end{array}$$

**Définition 5.4**

Le *dual faible* d'un graphe planaire extérieur  $G$  est le graphe obtenu à partir du dual de  $G$  en éliminant le sommet correspondant à la face illimitée.

**Exemple 5.3** Nous présentons ici un graphe planaire extérieur  $G$  avec son dual et son dual faible

**Démonstration de la proposition**

Soit  $G$  un graphe planaire extérieur simple. Alors le dual faible de  $G$  est un arbre. Une feuille de cet arbre correspond à une face limitée de  $G$  qui a exactement une seule arête intérieure  $e$ .

Comme  $G$  est simple, il existe au moins deux autres arêtes adjacentes à cette face. Il existe ainsi au moins un sommet sur cette face qui n'est pas une extrémité de l'arête  $e$ . Ce sommet a degré deux.

□

---

THÉORÈME 5.4

---

Tout graphe planaire extérieur est 3-colorable.

### Démonstration

Démontrons ce théorème par induction sur le nombre de sommets du graphe.

Trivialement tout graphe avec  $n = 1$  sommet est 3-colorable. Par hypothèse de récurrence supposons que tout graphe planaire extérieur simple avec  $n = k - 1$  sommets soit 3-colorable. Montrons que nous pouvons maintenant 3-colorer un graphe  $G$  avec  $n = k$  sommets.

Choisissons un sommet  $v$  tel que  $d(v) \leq 2$ . Ce sommet existe par la proposition énoncée auparavant. Si nous éliminons le sommet  $v$  et que nous ajoutons, si nécessaire, une arête telle que la face extérieure soit toujours bornée par un cycle, nous obtenons un graphe  $G'$  qui est encore planaire extérieur (car tout sommet est encore sur la frontière qui délimite la face illimitée). De plus  $G'$  a  $k - 1$  sommets donc, par hypothèse de récurrence, il est 3-colorable. Comme le sommet  $v$  est tel que  $d(v) \leq 2$ , il a au plus deux voisins. Cela signifie qu'il existe au moins une couleur qui n'est pas utilisée par les voisins de  $v$  et qui peut donc être utilisée pour colorer  $v$ .

Le graphe  $G$  est donc 3-colorable.

□

Nous pouvons ainsi conclure qu'*aucun graphe planaire extérieur n'est oligomatique*.

## 5.4 Approche aux graphes planaires

Comme nous l'avons déjà mentionné avant, un problème très complexe est lié à l'existence de graphes planaires oligomatiques.

Nous avons déjà énoncé le fait que si un graphe est oligomatique, son nombre chromatique est plus grand ou égal à quatre. Par contre le nombre chromatique d'un graphe planaire est inférieur ou égal à quatre. Nous pouvons donc en déduire que si un graphe planaire oligomatique existe, il aura forcément un nombre chromatique égal à quatre. Il suffirait donc d'étudier l'existence de graphes planaires oligomatiques sur des graphes ayant nombre chromatique égal à quatre, mais comme nous ne connaissons pas beaucoup de propriétés sur les graphes planaires, ce problème devient très difficile.

Dans cette section nous présenterons un résultat trouvé grâce aux propositions du paragraphe 4.3.1 sur les graphes planaires 4-chromatiques ayant 30 sommets.

Rappelons que  $\tilde{G} = (V, E)$  est un graphe 4-chromatique admettant une 5-coloration oligomatique tel que  $|V| = 30$  et tel que chaque sommet est dans une classe différente. Dans le théorème 4.6 nous avons vu que, si  $G$  est un graphe du type  $\tilde{G}$ , alors entre chaque paire de couleurs  $(c, c')$  il existe le sous-graphe partiel de la figure 4.2.

Nous construisons maintenant un graphe ayant 30 sommets et tel que ses seules arêtes sont celles des sous-graphes partiels (entre chaque couple de couleurs) nécessaires en sorte que le graphe ait une chance d'avoir une 5-coloration telle que  $|K_1(v)| \leq 3, \forall v \in V$ .

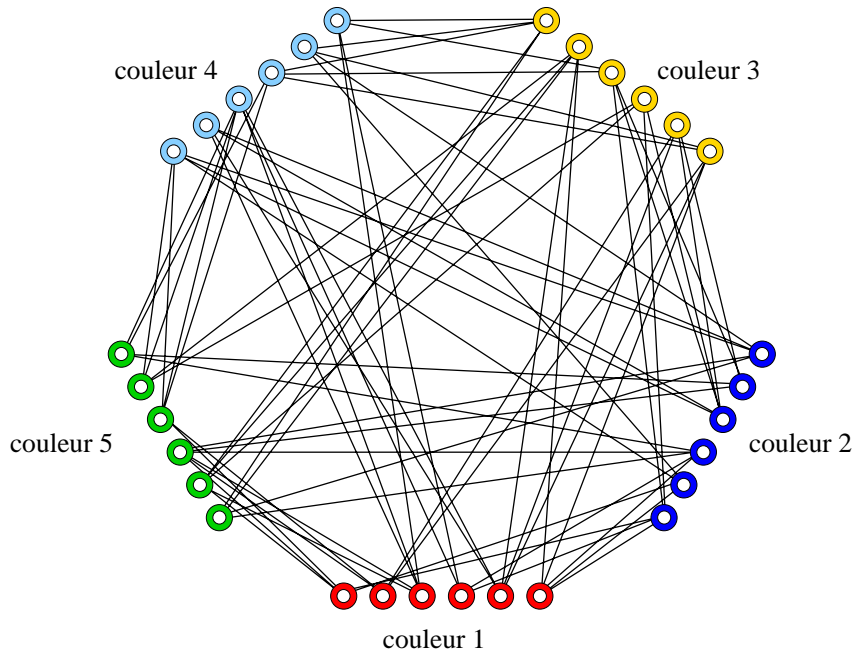


FIG. 5.1 – graphe représentant les arêtes nécessaires à ce qu'il soit daltonien

Dans ce graphe nous avons trouvé une subdivision de  $K_5$ . Rappelons qu'une subdivision d'un graphe  $G$  est un graphe  $G'$  obtenu à partir de  $G$  en rajoutant des sommets sur des arêtes.

Une subdivision de la clique  $K_5$  trouvée dans le graphe précédent est donnée dans la figure 5.2.

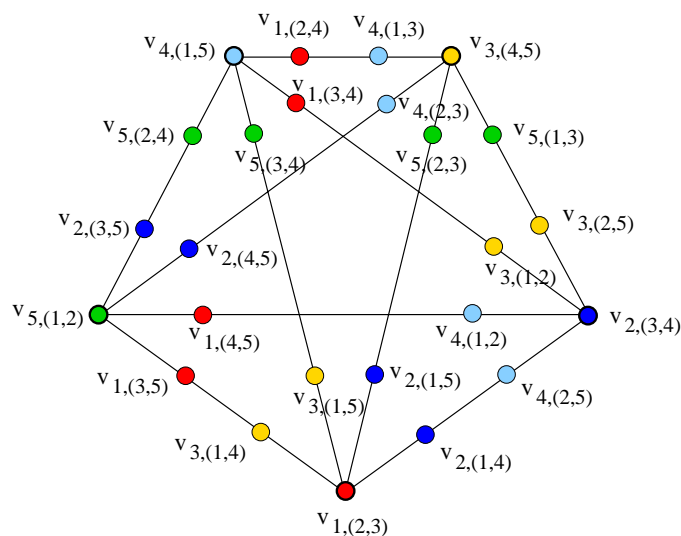
Comme

$G$  planaire  $\Leftrightarrow G$  ne contient aucune subdivision de  $K_5$  ou  $K_{3,3}$  comme sous-graphe partiel

nous pouvons affirmer qu'il n'existe aucun graphe  $G = (V, E)$  de type  $\tilde{G}$  qui soit planaire. Plus précisément *il n'existe aucun graphe planaire 4-chromatique avec 30 sommets admettant une 5-coloration oligomatique.*

À partir de cette subdivision nous pouvons également affirmer qu'aucun graphe partiel des graphes  $CB_{k,3}$  ne peut être planaire et en même temps conserver le fait qu'il soit oligomatique.



FIG. 5.2 – subdivision de la clique  $K_5$  trouvée dans le graphe de la figure 5.1

## 5.5 Graphes sans griffe

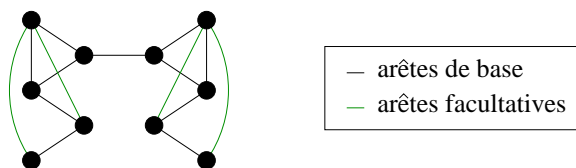
### Définition 5.5

Un graphe est dit *sans griffe* si et seulement s'il ne contient pas le graphe complet biparti  $K_{1,3}$  comme sous-graphe induit.

Comme les graphes  $CB_{k,\kappa}$  contiennent des griffes, nous sommes sûrs de l'existence de graphes oligomatiques avec griffes.

Nous cherchons dans cette section à chercher d'étudier l'existence de graphes *sans griffe* oligomatiques.

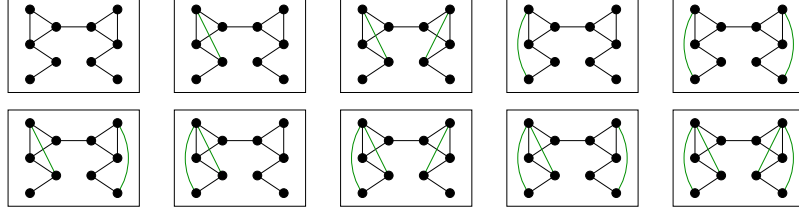
Le problème de l'existence de graphes sans griffes oligomatiques est complexe mais l'impression est qu'il n'existe pas de tels graphes. Nous cherchons donc à montrer l'inexistence d'un graphe  $G$  4-chromatique et sans griffe admettant une 5-coloration oligomatique. Pour cela nous introduisons des sous-graphes interdits de la forme suivante



Remarquons que, comme désiré, ces sous-graphes ne contiennent aucune griffe.

**Proposition 5.3**

Aucun graphe 4-chromatique sans griffe ne contenant pas les sous-graphes induits représentés ci-dessous admet une 5-coloration oligomatique.

**Démonstration**

Supposons  $G$  un graphe sans griffe ne contenant pas les sous-graphes induits précédents et admettant une 5-coloration  $c$  tel que  $|K_1(v)| \leq 3 \forall v \in V$ . Montrons que  $G$  est 3-colorable : classifions tout sommet  $v \in V$  dans une classe  $C_{k,\{i,j\}}$  telle que  $k = c(v)$  et  $i, j$  sont les couleurs des voisins de  $v$ . Si le sommet  $v$  a seulement une couleur  $i$  voisine, on choisit une deuxième couleur  $j$  différente de  $k$  et  $i$  mais telle que l'on évite les classes  $C_{5,\{1,4\}}$  et  $C_{4,\{3,5\}}$ .

Nous recolorons maintenant les sommets dans la classe  $C_{5,\{i,j\}}$  avec

$$\min(\{1, 2, 3\} \setminus \{i, j\})$$

On obtient ainsi une 4-coloration du graphe  $G$ .

Recolorons ensuite les sommets dans la classe  $C_{4,\{i,j\}}$  avec

$$\max(\{1, 2, 3\} \setminus \{i, j\})$$

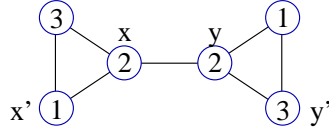
Dans cette nouvelle recoloration il pourrait y avoir des conflits car les sommets dans  $C_{5,\{1,4\}}$  et ceux dans  $C_{4,\{3,5\}}$  reçoivent la couleur 2 et pourraient être adjacents.

Si de tels conflits existent nous les résoudrons par récurrence jusqu'à ce qu'il n'y en ait plus.

Soit  $x \in C_{4,\{3,5\}}$  et  $y \in C_{5,\{1,4\}}$  tels que  $x$  et  $y$  soient adjacents. Nous pouvons remarquer que  $x$  a un voisin de couleur 3 et  $y$  a un voisin de couleur 1, car sinon ils auraient été mis dans d'autres classes.

- Si  $x$  ou  $y$  ont degré égal à deux :  
si  $x$  a degré deux nous pouvons le recolorer avec la couleur 1 sans créer de nouveaux conflits. De même si  $y$  a degré deux nous pouvons le recolorer avec la couleur 3. Ainsi, si  $x$  ou  $y$  ont degré deux, le conflit sera éliminé.
- Si  $x$  et  $y$  ont degré plus grand que deux :  
Dans ce cas  $x$  aura forcément un voisin  $x' \in C_{5,\{3,4\}}$  : il ne peut pas y avoir un autre voisin de couleur 3, sinon on aurait une griffe et, pour la même raison, un voisin de couleur 5 doit être

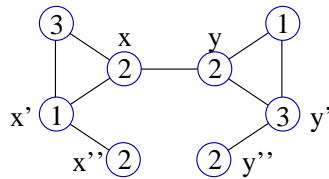
adjacent au sommet de couleur 3. De même  $y$  aura forcément un voisin  $y' \in C_{4,\{1,5\}}$ . Ainsi, grâce à la recoloration des sommets  $C_{5,\{i,j\}}$  et  $C_{4,\{i,j\}}$  donnée précédemment, nous avons que  $c(x') = 1$  et  $c(y') = 3$ .



Si  $x'$  n'a pas de voisins de couleur 2, nous pouvons échanger les couleurs de  $x$  et  $x'$  et le conflit sera éliminé. De même si  $y'$  n'a pas de voisins de couleur 2, nous pouvons échanger les couleurs de  $y$  et  $y'$  et le conflit disparaît.

Nous aurons encore des conflits si  $x'$  et  $y'$  ont des voisins de couleur 2 :

si  $x'$  a un voisin  $x''$  de couleur 2,  $x''$  doit être dans la classe  $C_{4,\{3,5\}}$ . De plus  $x''$  est le seul autre voisin de couleur 2 car sinon il y aurait une griffe. De même si  $y'$  a un voisin  $y''$  de couleur 2,  $y''$  doit être dans la classe  $C_{5,\{1,4\}}$ , et  $y''$  est le seul autre voisin de couleur 2 car sinon il y aurait une griffe.



Si  $x''$  n'a pas d'autres voisins de couleur 1 sauf  $x'$  ou bien  $y''$  n'a pas d'autres voisins de couleur 3 sauf  $y'$ , nous pouvons éliminer le conflit.

Si  $x''$  a un voisin de couleur 1 et  $y''$  a un voisin de couleur 3, on aurait un des sous-graphes induits interdits. Ceci n'est donc pas possible.

Le conflit sera ainsi éliminé au maximum au pas précédent.

On procède de la même manière pour tout conflit non encore résolu.

□

Notons que nous avons dû faire appel à des sous-graphes induits interdits car sinon le sommet  $x''$  aurait pu avoir un voisin  $\tilde{x}$  de couleur 1 dans la classe  $C_{5,\{2,4\}}$ . Dans ce cas  $\tilde{x}$  aurait pu avoir un voisin de couleur 2 dans la classe  $C_{2,\{5,j\}}$ . Nous aurions ainsi pris en compte les sommets qui n'ont pas été recolorés et que nous ne pouvons pas recolorer car nous pourrions causer de nouveaux conflits. De même pourrait arriver à  $y''$  s'il avait un sommet  $\tilde{y}$  de couleur 3 comme voisin.



## Chapitre 6

# Résolution heuristique de la $k, \kappa$ -coloration

Une  $k, \kappa$ -coloration d'un graphe  $G = (V, E)$  est une  $k$ -coloration des sommets du graphe telle que  $|K_1(v)| \leq \kappa, \forall v \in V$ . Puisque le problème de la coloration des sommets d'un graphe apparaît dans de multiples applications, il serait importante et utile d'avoir également une approche pratique sur la  $k, \kappa$ -coloration d'un graphe.

Nous avons ainsi décidé de consacrer une partie de ce travail à la recherche et à l'implémentation d'une bonne heuristique nous permettant de trouver une telle coloration.

### 6.1 Les heuristiques

Lorsqu'on aborde un problème d'optimisation, il est possible d'utiliser différentes approches qui dépendent de la taille et de la difficulté spécifique du problème, ainsi que des objectifs que l'on veut atteindre.

Lorsque la complexité et la taille du problème sont grandes, il est difficile de produire une solution qui soit optimale en des temps de calcul raisonnables. Il est alors utile de considérer une approche par des *heuristiques*. Une heuristique peut se définir comme une méthode d'optimisation qui se contente de trouver en un temps raisonnable une solution de qualité satisfaisante pour un problème donné. Contrairement aux méthodes exactes, une heuristique ne garantit généralement pas l'obtention de la solution optimale. Malgré la relative simplicité des concepts qui caractérisent la plupart des heuristiques, leur adaptation efficace à un problème particulier nécessite un grand effort de modélisation et une bonne connaissance des propriétés du problème à traiter.

Les heuristiques peuvent se classer en trois catégories :

1. Les heuristiques *constructives*.
2. Les heuristiques de *recherche locale*.
3. Les heuristiques *évolutives*.

Les heuristiques constructives se contentent de construire pas à pas une seule solution en complétant à chaque étape une solution partielle. Elles se caractérisent par une grande rapidité mais leur performance est souvent décevante. L'une des plus connues est l'algorithme glouton.

Les heuristiques de recherche locale travaillent quant à elles sur une solution qu'elles tentent d'améliorer itérativement. Lors d'une itération, la solution courante est légèrement modifiée afin d'obtenir une solution voisine. Ces heuristiques obtiennent en général de bien meilleurs résultats que les procédures constructives, mais n'ont pas toujours une grande capacité à explorer des régions très différentes de l'espace des solutions. Les méthodes de recherche locale les plus célèbres sont la descente, l'algorithme tabou et le recuit simulé.

Enfin, les heuristiques évolutives agissent sur une population d'individus (des solutions ou des morceaux de solutions) qui coopèrent et s'adaptent individuellement.

Pour la résolution de la  $k, \kappa$ -coloration nous avons décidé de nous tourner vers la *méthode tabou* car cette méthode est d'une approche relativement simple et s'est avérée particulièrement efficace pour la résolution de nombreux problèmes difficiles.

Nous présenterons tout d'abord les concepts qui sont à la base des méthodes de recherche tabou et nous appliquerons ensuite ces concepts à la résolution de la  $k, \kappa$ -coloration des graphes.

## 6.2 La méthode tabou

Le but de cette méthode est d'approcher la solution exacte d'un problème donné. Supposons que le problème consiste à minimiser une certaine fonction objectif  $f$ .

Pour la description de cette méthode nous avons besoin de quelques définitions :

### Définition 6.1

L'espace de recherche  $S$  (aussi appelé espace des solutions) représente l'ensemble de toutes les configurations possibles pour un problème donné.

Remarquons que les configurations d'un problème sont souvent appelées solutions. Dans la suite nous adopterons aussi ce deuxième terme.

### Définition 6.2

Deux solutions  $s$  et  $s'$  sont dites *voisines* si l'on peut obtenir  $s'$  en modifiant *légèrement*  $s$  selon une règle bien définie. Nous dirons que le passage de  $s$  à  $s'$  se fait par un *mouvement*. Le *voisinage*  $N(s)$  d'une solution  $s \in S$  est l'ensemble des solutions voisines de  $s$ .

Une méthode tabou est une méthode qui, étant donné une *solution initiale*, effectue le meilleur mouvement dans le voisinage de cette solution (c'est-à-dire le mouvement qui donne la meilleure solution du voisinage) tout en interdisant des solutions qui se trouvent dans une liste  $T$  qui s'appelle *liste tabou*. La liste  $T$  contient les  $t$  dernières solutions visitées durant les  $t$  dernières itérations. Les solutions qui font partie de  $T$  sont appelés *solutions tabou*. Autrement dit, nous choisissons la meilleure solution  $s'$  de  $N(s) \setminus T$ .

D'autre part, devoir chercher à chaque fois dans la liste tabou si une solution est interdite est très coûteux. Il y a néanmoins une autre approche de la méthode tabou qui consiste non pas à interdire une solution déjà visitée, mais plutôt à interdire certains mouvements définis pour le problème spécifique. Avec cette variante, si un certain mouvement est effectué, le mouvement inverse ne pourra pas être effectué pendant les  $t$  itérations suivantes. Dans ce cas, la liste tabou  $T$  contient l'inverse des  $t$  derniers mouvements effectués durant les  $t$  dernières itérations. Les mouvements qui font partie de  $T$  sont appelés *mouvements tabou*. En général on admet quand même un mouvement tabou si celui-ci mène à une solution meilleure que la meilleure solution déjà rencontrée.

En considérant maintenant la nouvelle solution atteinte et en itérant cette même procédé, l'algorithme tabou retient la meilleure solution rencontrée ; celle-ci sera notée  $s^*$ . L'algorithme s'arrête seulement lorsqu'un *critère d'arrêt* est satisfait. Cette méthode ne s'arrête donc pas si l'on détériore la solution courante, mais s'arrête après :

- i) un nombre d'itérations  $p$  fixé à l'avance, ou
- ii) un nombre d'itérations  $p$  sans amélioration de la meilleure solution déjà rencontrée, ou
- iii) un temps de calcul fixé à l'avance.

Une méthode tabou peut donc être décrite par :

1. la définition de ce qu'est une solution admissible ;
2. la définition de la solution initiale (ou éventuellement la méthode pour la construire) ;
3. la définition du *voisinage* d'une solution ;
4. la manière de choisir une solution voisine à la solution courante ;
5. le (les) *critère(s) d'arrêt* ;
6. la liste tabou.

### 6.3 L'algorithme tabou

1. Construire une solution initiale  $s$  ;
2. Poser  $s^* = s$  et  $f^* = f(s)$  (meilleure solution rencontrée) ;
3. Tant qu'un *critère d'arrêt* n'est pas satisfait, faire :
  - si  $T$  contient des solutions, choisir la meilleure solution  $s'$  dans  $V(s) \setminus T$  ;
  - si  $T$  contient des mouvements, effectuer le meilleur mouvement non tabou pour obtenir la solution voisine  $s'$ .  
**mais** on autorise un mouvement tabou si  $f(s') < f(s^*)$  ;
  - si  $f(s') < f(s^*)$ , poser  $s^* = s'$  et  $f^* = f(s')$  ;
  - poser  $s = s'$  (la nouvelle solution courante est  $s'$ ).
4. Retourner la solution  $s^*$ .

## 6.4 Méthode de résolution

Dans cette section nous proposons une méthode permettant de trouver, dans un graphe donné  $G = (V, E)$ , une  $k, \kappa$ -coloration (si celle-ci existe).

Soit  $G = (V, E)$  un graphe connexe simple. Nous transformons chaque sommet du graphe en une clique ayant  $k \cdot \binom{k-1}{\kappa-1}$  sommets tel que chaque sommet de la clique soit dans une classe différente (les classes étant celles utilisées pour la construction des graphes  $CB_{k, \kappa}$ . Nous avons bien  $k \cdot \binom{k-1}{\kappa-1}$  classes). Remarquons que cette transformation n'est pas une transformation polynomiale.

Si  $[x, y] \in E$ , alors on relie les sommets de la clique correspondante à  $x$  avec les sommets de la clique correspondante à  $y$  tels que l'on obtient tous les conflits possibles.

En d'autres termes :

1. on relie les sommets de la clique correspondante à  $x$  de couleur  $c$  avec les sommets de la clique correspondante à  $y$  ayant la même couleur, ceci pour toute couleur  $c \in \{1, \dots, k\}$ .
2. on relie les sommets  $v_{c, \mathcal{C}}$  de la clique correspondante à  $x$  avec les sommets  $v_{c', \mathcal{C}'}$  de la clique correspondante à  $y$  qui ont couleur différente (i.e  $c \neq c'$ ) si les deux conditions suivantes sont satisfaites :
  - $c \notin \mathcal{C}'$
  - $c' \notin \mathcal{C}$

Nous répétons cette opération pour tout couple de sommets  $x$  et  $y$  tel que  $[x, y] \in E$ .

Il s'agit maintenant de chercher un *stable maximum* (i.e. un stable de taille maximale) dans ce nouveau graphe.

Sous ces conditions, une solution est un ensemble de sommets se trouvant chacun dans une clique différente et telle que si  $[x, y] \in E$ , alors le sommet  $v_{c, \mathcal{C}}$  du stable maximum appartenant à la clique correspondante à  $x$  et le sommet  $v_{c', \mathcal{C}'}$  du stable maximum appartenant à la clique correspondante à  $y$  sont tels que :

- $c \neq c'$
- $c \in \mathcal{C}'$
- $c' \in \mathcal{C}$

Si la taille du stable maximum est égale au nombre de sommets du graphe de départ  $G$ , alors nous avons trouvé une  $k, \kappa$ -coloration du graphe  $G$ .

Ce problème peut être résolu à l'aide d'une heuristique, mais la taille du problème à traiter peut devenir très grande. Nous avons donc cherché une autre méthode de résolution que nous présenterons au paragraphe suivant.



## 6.5 Première adaptation de la méthode tabou au problème de la $k, \kappa$ -coloration

Dans ce paragraphe nous définissons les notions décrivant les paramètres de la méthode tabou pour le problème de la  $k, \kappa$ -coloration. Rappelons qu'avec cette méthode nous cherchons à déterminer une  $k$ -coloration des sommets d'un graphe telle que  $|K_1(v)| \leq \kappa, \forall v \in V$  (si celle-ci existe).

1. Une solution est une partition des sommets en  $k$  classes (c'est-à-dire en  $k$  couleurs). Nous pouvons représenter une telle solution par un ensemble contenant tous les sommets du graphe et partitionnés en  $k$  classes :  $s = (C_1, \dots, C_k)$  où  $C_i$  est la classe contenant tous les sommets de la couleur  $i$ .

Une telle partition  $s$  est une  $k, \kappa$ -coloration si et seulement si aucune arête n'a ses deux extrémités dans un même sous-ensemble  $C_i$  et si tout sommet  $v \in V$  est tel que  $|K_1(v)| \leq \kappa$ .

Nous définissons ci-dessous la fonction objectif  $f$  à minimiser :

$$\begin{aligned} f(s) &= \text{nombre de conflits} \\ &= \text{nombre d'arêtes } [x, y] \text{ telles que } x \text{ et } y \text{ sont dans un même sous-ensemble} \\ &\quad \text{de la partition } s + \sum_{v \in V} \max\{0, |K_1(v)| - \kappa\} \end{aligned}$$

Nous aurons obtenu une  $k, \kappa$ -coloration dès que nous aurons trouvé une solution  $s$  avec  $f(s) = 0$ .

2. Nous choisissons la solution initiale telle que les sommets du graphe soient colorés aléatoirement avec  $k$  couleurs différentes.
3. Nous définissons la relation de voisinage de la manière suivante : une solution  $s$  est voisine d'une solution  $s'$  si l'on peut obtenir  $s'$  à partir de  $s$  en déplaçant un sommet  $x$  d'un certain sous-ensemble  $C_i$  vers un autre sous-ensemble  $C_j$  (avec  $i \neq j$ ).
4. À chaque fois qu'on atteint une solution  $s$ , la prochaine solution courante sera la meilleure solution  $s'$  dans  $N(s)$ . Lorsque nous parlons de meilleure solution dans  $N(s)$ , nous nous référons à la solution qui minimise la fonction objectif  $f$  parmi les solutions  $s' \in N(s)$ . En d'autres termes, on recolore un sommet  $x$  avec la couleur qui cause le moins de conflits possibles.
5. Le principal critère d'arrêt de la méthode tabou est la découverte d'une solution  $s$  avec  $f(s) = 0$ , c'est-à-dire d'une  $k, \kappa$ -coloration. Mais si une  $k, \kappa$ -coloration n'existe pas dans le graphe  $G$  (ou si on prend un  $k < \chi(G)$ ), ce critère d'arrêt n'est pas suffisant. Il faut donc introduire un ou plusieurs autres critères d'arrêt pour interrompre la recherche. Nous avons donc choisi d'arrêter l'algorithme aussi dans le cas où, après un nombre fixé d'itérations  $p$ , nous n'avons pas encore rencontré une solution  $s$  telle que  $f(s) = 0$ .
6. Le passage d'une solution  $s$  vers une solution  $s'$  dans  $N(s)$  consistant dans le déplacement d'un sommet  $x$  d'un ensemble  $C_i$  vers un ensemble  $C_j$ , nous introduisons dans  $T$  la paire

$(x, i)$  dans le but d'interdire (temporairement) le retour de  $x$  dans le  $i$ -ème sous-ensemble. La taille maximale de la liste tabou étant souvent fixée à une certaine valeur, le plus vieil élément de  $T$  est supprimé lorsque  $T$  devient trop grand.

Il est important, pour la rapidité de l'algorithme, de noter que la valeur  $f(s')$  d'une solution voisine de  $s$  peut être calculée sur la base de la valeur  $f(s)$  connue.

Considérons que le passage de  $s = (C_1, \dots, C_k)$  à  $s'$  consiste à déplacer un sommet  $x$  du  $i$ -ème au  $j$ -ème sous-ensemble. Il est facile de noter que, entre  $s$  et  $s'$ , la variation sur le nombre d'arêtes  $[x, y]$  tel que  $x$  et  $y$  sont dans un même sous-ensemble de la partition est de

$$|N(x) \cap C_j| - |N(x) \cap C_i|$$

Étudions maintenant la variation sur le  $\max\{0, |K_1(v)| - \kappa\}$ ,  $\forall v \in V$ .

Tout d'abord nous pouvons remarquer qu'une variation sur ce terme ne peut avoir lieu que dans le cas où  $v$  est égal au sommet  $x$  ou dans le cas où  $v$  est égal à l'un des voisins de  $x$ .

1. Variation sur  $\max\{0, |K_1(x)| - \kappa\}$  :  
soit  $\overline{X}$  l'ensemble des couleurs des voisins de  $x$ .
  - Si  $j \in \overline{X}$  et  $i \in \overline{X}$   $\rightarrow$  il n'y a pas de variation.
  - Si  $j \notin \overline{X}$ ,  $i \in \overline{X}$  et  $|K_1(x)| \geq \kappa$   $\rightarrow$  variation de +1.
  - Si  $j \in \overline{X}$ ,  $i \notin \overline{X}$  et  $|K_1(x)| \geq \kappa + 1$   $\rightarrow$  variation de -1.
  - Si  $j \notin \overline{X}$  et  $i \notin \overline{X}$   $\rightarrow$  il n'y a pas de variation.

Nous pouvons ainsi définir la fonction suivante :

$$var_x = \begin{cases} 1 & \text{si } j \notin \overline{X}, i \in \overline{X} \text{ et } |K_1(x)| \geq \kappa \\ -1 & \text{si } j \in \overline{X}, i \notin \overline{X} \text{ et } |K_1(x)| \geq \kappa + 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

2. Variation sur  $\max\{0, |K_1(u)| - \kappa\}$  où  $u \in N(x)$  :  
soit  $\overline{U}$  l'ensemble des couleurs des voisins de  $u$ .
  - Si  $c(u) = i$  :
    - si  $j \notin \overline{U}$  et  $|K_1(u)| \geq \kappa$   $\rightarrow$  variation de +1
    - sinon  $\rightarrow$  il n'y a pas de variation
  - Si  $c(u) = j$  :
    - s'il n'existe pas un  $w \in (N(u) \setminus x)$  tel que  $c(w) = i$  et  $|K_1(u)| \geq \kappa + 1$   $\rightarrow$  variation de -1
    - sinon  $\rightarrow$  il n'y a pas de variation

- Si  $c(u) = m$  avec  $m \neq i, j$  :
  - si  $j \notin \overline{U}$ , s'il existe un  $w \in (N(u) \setminus x)$  tel que  $c(w) = i$  et  $|K_1(u)| \geq \kappa$   $\longrightarrow$  variation de +1
  - si  $j \in \overline{U}$ , s'il n'existe pas un  $w \in (N(u) \setminus x)$  tel que  $c(w) = i$  et  $|K_1(u)| \geq \kappa + 1$   $\longrightarrow$  variation de -1
  - sinon  $\longrightarrow$  il n'y a pas de variation

Alors nous avons :

$$var_u = \begin{cases} 1 & \text{si } j \notin \overline{U}, |K_1(u)| \geq \kappa \text{ et } c(u) = i \text{ ou si } j \notin \overline{U}, |K_1(u)| \geq \kappa, \\ & \text{il existe un } w \in (N(u) \setminus x) \text{ tel que } c(w) = i \text{ et } c(u) = m \neq i, j \\ -1 & \text{s'il n'existe pas un } w \in (N(u) \setminus x) \text{ tel que } c(w) = i, |K_1(u)| \geq \kappa + 1 \\ & \text{et } c(u) = j \text{ ou si } j \notin \overline{U}, \text{ s'il n'existe pas un } w \in (N(u) \setminus x) \text{ tel que} \\ & c(w) = i \text{ et } |K_1(u)| \geq \kappa + 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On pourra maintenant calculer la valeur de la fonction objectif dans la solution  $s'$  sur la base de la valeur  $f(s)$  connue.

$$f(s') = f(s) - |N(x) \cap C_i| + |N(x) \cap C_j| + var_x + \sum_{u \in N(x)} var_u$$

La variation de la fonction  $f$  en déplaçant le sommet  $x$  du  $i$ -ème au  $j$ -ème sous-ensemble sera :

$$\Delta f_{x_i \rightarrow j} = |N(x) \cap C_j| - |N(x) \cap C_i| + var_x + \sum_{u \in N(x)} var_u$$

Comme le but est de minimiser la fonction objectif, à chaque étape de l'algorithme tabou nous choisirons de changer la couleur d'un sommet  $x$  en une couleur  $j$  si  $\Delta f_{x_i \rightarrow j}$  est le  $\Delta f$  minimum parmi tous les  $\Delta f$ . Si le  $\Delta f$  minimum est négatif, alors on améliorera la solution courante.

**Remarque 6.1** Après avoir déplacé un sommet  $x$  du  $i$ -ème au  $j$ -ème sous-ensemble il est possible, pendant la mise à jour, de recalculer les variations  $\Delta f$  uniquement pour le sommet  $x$  auquel nous venons de changer la couleur, pour les voisins  $u$  du sommet  $x$  et pour les voisins  $w$  des sommets  $u$ .

En effet nous avons vu que pour le calcul de  $\Delta f_v$  nous avons besoin de la couleur du sommet  $v$ , de la couleur de ses voisins et aussi de la couleur des sommets adjacents aux voisins de  $v$ . Notons ces sommets  $w$ .

Il est possible de réduire encore plus le calcul de ces variations  $\Delta f$  de la façon suivante :

1. Calcul des  $\Delta f_x$  :

- si pour au moins un  $u \in N(x)$ , soit le seul voisin de  $u$  de couleur  $i$  était le sommet  $x$ , soit le sommet  $u$  n'avait pas de voisins de couleur  $j$   $\longrightarrow$  recalculer toutes les variations  $\Delta f_{x_j \rightarrow \cdot}$ .
- sinon  $\longrightarrow$  mettre à jour uniquement les variations  $\Delta f_{x_j \rightarrow i}$  et  $\Delta f_{x_j \rightarrow j}$ .

2. Calcul des  $\Delta f_u$  pour un  $u \in N(x)$  :
  - si  $c(u) = i$  ou  $c(u) = j \rightarrow$  recalculer toutes les variations  $\Delta f_{x_j \rightarrow \cdot}$ .
  - si soit le seul voisin de  $u$  de couleur  $i$  était le sommet  $x$ , soit le sommet  $u$  n'avait pas de voisins de couleur  $j \rightarrow$  recalculer toutes les variations  $\Delta f_{x_j \rightarrow \cdot}$ .
  - sinon  $\rightarrow$  mettre à jour uniquement les variations  $\Delta f_{x_j \rightarrow i}$  et  $\Delta f_{x_j \rightarrow j}$ .
3. Calcul des  $\Delta f_w$  pour un  $w \in N(u)$  :
  - si soit le seul voisin de  $u$  (où  $u$  est le sommet tel que  $w \in N(u)$ ) de couleur  $i$  était le sommet  $x$ , soit le sommet  $u$  n'avait pas de voisins de couleur  $j \rightarrow$  recalculer toutes les variations  $\Delta f_{x_j \rightarrow \cdot}$ .
  - sinon  $\rightarrow$  mettre à jour uniquement les variations  $\Delta f_{x_j \rightarrow i}$  et  $\Delta f_{x_j \rightarrow j}$ .

Cependant, toutes ces réductions sont intéressantes uniquement lorsque la densité des graphes à traiter est faible. Nous avons par conséquent choisi de recalculer toutes les variations  $\Delta f$  à chaque itération de notre algorithme tabou.

Dans le paragraphe suivant nous proposerons une deuxième adaptation de la méthode tabou au problème de la  $k, \kappa$ -coloration mais telle que nous ne cherchons pas forcément une  $k, \kappa$ -coloration du graphe mais plutôt une coloration admissible du graphe telle que chaque sommet ne voie pas plus que  $\kappa$  couleurs.

## 6.6 Deuxième adaptation de la méthode tabou au problème de la $k, \kappa$ -coloration

Dans ce paragraphe nous commençons par décrire les paramètres de la méthode tabou pour le problème de la détermination d'une coloration admissible du graphe telle que  $|K_1(v)| \leq \kappa$ ,  $\forall v \in V$  (si celle-ci existe).

1. Une solution est une partition des sommets en  $n$  classes (c'est-à-dire en  $n$  couleurs où  $n$  est le nombre de sommets du graphe). Nous représentons une telle solution par un ensemble contenant tous les sommets du graphe et partitionnés en  $n$  classes :  $s = (C_1, \dots, C_n)$  où  $C_i$  est la classe contenant tous les sommets de la couleur  $i$ .  
Une telle partition  $s$  est une  $k, \kappa$ -coloration si et seulement si seules  $k$  classes parmi les classes  $C_i$  sont telles que  $C_i \neq \emptyset$  et tout sommet  $v \in V$  est tel que  $|K_1(v)| \leq \kappa$ .

Nous définissons ci-dessous la fonction objectif  $f$  à minimiser :

$$f(s) = \sum_{v \in V} \max\{0, |K_1(v)| - \kappa\}$$

Nous aurons obtenu une coloration admissible du graphe telle que  $|K_1(v)| \leq \kappa \forall v \in V$  dès que nous aurons trouvé une solution  $s$  avec  $f(s) = 0$ .

2. Nous choisissons la solution initiale telle que tous les sommets du graphe soient colorés avec une couleur différente.  
Nous pouvons remarquer que ceci est faisable puisque nous disposons bien de  $n$  couleurs.
3. À la différence de l'adaptation précédente, nous définissons la relation de voisinage de la façon suivante : une solution  $s$  est voisine d'une solution  $s'$  si l'on peut obtenir  $s'$  à partir de  $s$  en déplaçant un sommet  $x$  d'un certain sous-ensemble  $C_i$  vers un autre sous-ensemble  $C_j$  où  $j \neq i$  et  $j \neq c(u)$ ,  $\forall u \in N(x)$ .  
Avec cette relation de voisinage nous avons la certitude qu'à chaque itération de l'algorithme nous aurons des colorations admissibles.
4. Comme dans l'adaptation précédente, à chaque fois qu'on atteint une solution  $s$ , la prochaine solution courante sera la meilleure solution  $s'$  dans  $N(s)$ .
5. Les critères d'arrêt que nous avons choisi sont soit la découverte d'une solution  $s$  avec  $f(s) = 0$ , c'est-à-dire d'une coloration admissible du graphe telle que  $|K_1(v)| \leq \kappa$ ,  $\forall v \in V$  soit l'exécution d'un nombre fixé d'itérations  $p$  pour lesquelles une solution  $s$  telle que  $f(s) = 0$  n'a pas été trouvée.
6. Si le dernier mouvement a été le déplacement d'un sommet  $x$  d'un ensemble  $C_i$  vers un ensemble  $C_j$ , nous introduisons dans  $T$  la paire  $(x, i)$ .

Comme nous l'avons déjà mentionné, il est important de noter que la valeur  $f(s')$  d'une solution voisine de  $s$  peut être calculée sur la base de la valeur  $f(s)$  connue.

Considérons que le passage de  $s$  à  $s'$  consiste dans le déplacement d'un sommet  $x$  du  $i$ -ème au  $j$ -ème sous-ensemble où  $j \neq c(u)$ ,  $\forall u \in N(x)$ .

Nous pouvons remarquer que les seuls sommets qui peuvent faire varier la fonction objectif après un mouvement de l'algorithme tabou sont les sommets  $u \in N(x)$ .

Étudions donc la variation d'un sommet  $u \in N(x)$ .

Soit  $\bar{U}$  l'ensemble des couleurs des voisins de  $u$ .

$$var_u = \begin{cases} 1 & \text{si } j \notin \bar{U}, \text{ il existe un } w \in (N(u) \setminus x) \text{ tel que } c(w) = i \text{ et } |K_1(u)| \geq \kappa \\ -1 & \text{si } j \in \bar{U}, \text{ il n'existe pas un } w \in (N(u) \setminus x) \text{ tel que } c(w) = i \text{ et } |K_1(u)| \geq \kappa + 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

La valeur de la fonction objectif dans la solution  $s'$  sera ainsi de :

$$f(s') = f(s) + \sum_{u \in N(x)} var_u$$

La variation de la fonction  $f$  si on déplace le sommet  $x$  du  $i$ -ème au  $j$ -ème sous-ensemble avec  $j \neq c(u)$ ,  $\forall u \in N(x)$  sera :

$$\Delta f_{x_i \rightarrow j} = \sum_{u \in N(x)} var_u$$

Nous pouvons déjà remarquer que, par rapport à l'algorithme précédent, celui-ci possède une

mise à jour du nombre de conflits pour chaque sommet beaucoup plus simple. Premièrement puisque la mise à jour est faite uniquement sur les sommets  $u \in N(x)$  et en deuxième lieu car à chaque itération la solution est une coloration admissible.

Nous nous trouvons donc dans le cas de la première adaptation où  $c(u) = m$  avec  $m \neq i, j$ .

# Chapitre 7

## Résultats de l'implémentation des algorithmes tabou

Dans ce chapitre nous rapportons les résultats obtenus en créant deux programmes capables de lire les données pour un graphe particulier ou de créer un graphe aléatoire et de traiter le graphe par les algorithmes proposés au chapitre 6.

Nous avons de plus élaboré un programme qui nous montrera la rareté des graphes oligomatiques. Le fonctionnement de ce programme sera présenté à la fin de ce chapitre.

Afin de ne pas appliquer sur nos algorithmes uniquement des graphes aléatoires mais aussi des graphes particuliers, nous avons une fonction de lecture des données d'un graphe.

À titre d'exemple nous montrons, dans la figure suivante, la façon dont les données d'un graphe particulier  $G$  se présentent :

p	edge	5	7
e	1	2	
e	1	3	
e	1	5	
e	2	3	
e	2	5	
e	3	4	
e	4	5	

nombre de sommets → 5  
nombre d'arêtes ← 7  
arête entre le sommet 2 et le sommet 3 ←

FIG. 7.1 – données d'un graphe  $G$ .

La lecture de ces données nous fournit un graphe  $G$  avec 5 sommets et 7 arêtes de la forme suivante :

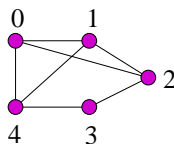


FIG. 7.2 – graphe  $G$  prêt à être traité par les algorithmes tabou.

Remarquons que pour l'implémentation nous avons utilisé une numérotation des sommets qui commence en 0 et se termine en  $n - 1$ . De même la numérotation des couleurs commencera en 0 et se terminera en  $k - 1$ .

Grâce à la fonction de lecture des données nous pouvons tester nos algorithmes sur les graphes  $CB_{k,\kappa}$  dont nous connaissons l'existence d'une  $k, \kappa$ -coloration.

## 7.1 Résultats de la première adaptation au problème de la $k, \kappa$ -coloration

Rappelons qu'avec ce premier algorithme la solution initiale est donnée par une coloration aléatoire des sommets du graphe.

Nous débutons en présentant les résultats obtenus en appliquant à notre algorithme un graphe particulier. Nous proposons ici d'étudier les résultats obtenus avec le graphe  $\text{penta}K_{3,3}$  ( $= CB_{5,3}$ ).

En premier lieu, notre programme nous demande d'entrer le nombre de couleurs à utiliser pour colorer le graphe (*i.e.* la valeur de  $k$ ), le nombre de couleurs maximum que chaque sommet peut voir (*i.e.* la valeur de  $\kappa$ ), un numéro au hasard (appelé germe) qui va nous servir à la construction de la coloration initiale aléatoire, le nom du fichier à lire c'est-à-dire le nom du fichier où sont stockées les données du graphe  $\text{penta}K_{3,3}$  et la taille de la liste tabou.

Nous avons par exemple :

```
*****
nombre de couleurs à utiliser : 5
nombre de couleurs maximum que chaque sommet peut voir : 3
germe : 11
nom du fichier à lire : instances/penta_N1_3.col
taille liste tabou : 17
*****
```

Après ces informations de base, le programme nous fournit les résultats sur la forme suivante :

```
*****
Solution initiale : c = [0, 2, 1, 0, 4, 2, 2, 2, 2, 1, 1, 3, 0, 1, 2, 4, 1, 0, 1, 3, 2, 2, 2, 1, 1, 3, 0, 0, 2, 3]
fonction objective = 163
Après 24 itérations la meilleure solution rencontrée pour le moment est : 6
Obtenue avec : c = [0, 0, 0, 0, 0, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 1, 3, 0, 1, 1, 4, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 3, 0, 3, 0, 3]
Après 40 itérations la meilleure solution rencontrée pour le moment est : 4
Obtenue avec : c = [0, 0, 0, 0, 0, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 1, 3, 0, 3, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2]
Après 134 itérations la meilleure solution rencontrée pour le moment est : 0
Obtenue avec : c = [4, 4, 4, 4, 4, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2]
Une 5,3-coloration a été trouvée!
*****
```



Le programme nous donne cette solution en quelques secondes.

Dans ces résultats, par souci de clarté, nous avons évité d'écrire toutes les 23 premières itérations de l'algorithme. Dans ces premières itérations une amélioration (diminution) de la fonction objective a été trouvée aisément. Par contre, quand la fonction objective est assez proche numériquement de la solution optimale, le programme se trouve probablement dans un minimum local (solution «cuvette») et nécessite ainsi de plus d'itérations pour en ressortir (en visitant des mauvaises solutions) et pouvoir aboutir à la solution optimale.

Il est intéressant de noter que la solution trouvée à l'itération 40 nous fournit une coloration admissible du graphe avec quatre couleurs. Dans cette solution la valeur de la fonction objective est égale à 4 à cause de quatre sommets qui voient chacun  $\kappa + 1$  couleurs.

Remarquons de plus que le nombre d'itérations effectués par l'algorithme avant d'aboutir à la solution optimale va dépendre de la coloration initiale du graphe que, dans notre cas, dépend du germe que nous devons entrer au début du programme.

Dans le cas où nous voulons appliquer notre algorithme à un graphe aléatoire, la fonction qui génère le graphe aura besoin d'une densité qui sera la densité du graphe aléatoire créée. La densité d'un graphe  $G$  est le rapport entre le nombre d'arêtes du graphe et le nombre d'arêtes qu'aurait eu le même graphe s'il aurait été complet. La valeur de la densité est ainsi un numéro compris entre 0 et 1.

À titre d'exemple, nous présentons maintenant un graphe aléatoire et sa  $k, \kappa$ -coloration trouvés avec notre programme.

\*\*\*\*\*

nombre de sommets : 12

nombre de couleurs à utiliser : 6

nombre de couleurs maximum que chaque sommet peut voir : 4

aSeed : 1

densité : 0,3

taille liste tabou : 10

Solution initiale :  $c = [0, 0, 4, 2, 3, 1, 0, 4, 4, 5, 2, 3]$

fonction objective = 13

Après 1 itération la meilleure solution rencontrée pour le moment est : 6

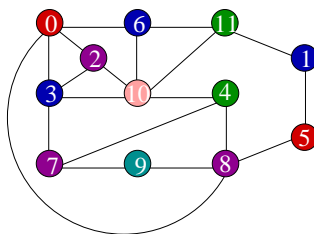
Obtenue avec :  $c = [1, 0, 4, 2, 3, 1, 0, 4, 4, 5, 2, 3]$

Après 2 itération la meilleure solution rencontrée pour le moment est : 6

Obtenue avec :  $c = [1, 0, 4, 0, 3, 1, 0, 4, 4, 5, 2, 3]$

Une 6,4-coloration a été trouvée!

\*\*\*\*\*



Dans cet exemple le graphe est 3-chromatique et une 6,4-coloration est trouvée aisément. Cependant sur d'autres graphes, quand  $\kappa \geq \chi(G)$ , le programme nous fournit souvent une coloration optimale. Ceci puisque si  $\kappa \geq \chi(G)$ , la valeur de la fonction objective obtenue avec la coloration optimale sera égale à zéro.

En testant l'algorithme avec les graphes  $CB_{k,\kappa}$  et en variant la valeur de aSeed de telle façon à pouvoir débiter avec des colorations initiales différentes, nous avons pu remarquer que dans certains cas l'algorithme convergait très vite vers une «solution cuvette», c'est-à-dire qu'il trouve une solution qui est un minimum local. Ce minimum local est donné principalement par une coloration du graphe avec moins de  $k$  couleurs. Malheureusement quand l'algorithme arrive à ce minimum local, il n'arrive plus à en ressortir. Nous avons tenté de varier la taille de la liste tabou et de mettre des poids sur la fonction objective, toutefois il y a encore des cas où le programme converge vers une solution cuvette. Comme nous le verrons dans le prochain chapitre, ce problème ne surviendra pas avec l'adaptation 2 de l'algorithme tabou présentée dans la section 6.6.

## 7.2 Résultats de la deuxième adaptation au problème de la $k, \kappa$ -coloration

Rappelons que dans ce deuxième algorithme la solution initiale est donnée par une coloration des sommets telle que chaque sommet ait une couleur différente.

Comme pour le programme précédent, nous présentons tout d'abord les résultats obtenus en appliquant notre algorithme aux graphes particuliers  $CB_{k,\kappa}$ .

En premier lieu il faudra entrer le nom du fichier à lire et le nombre de couleurs maximum que chaque sommet peut voir. Nous fixons la taille de la liste tabou à 15.

Voici les résultats obtenus sur les graphes  $CB_{k,\kappa}$  testés :

Graphe	‡ sommets	‡ arêtes	solution trouvée	‡ itérations
penta $K_{3,3}$	30	90	oui	23
$CB_{6,3}$	60	240	oui	53
$CB_{6,4}$	60	540	oui	53
$CB_{7,3}$	105	525	oui	97
$CB_{7,4}$	140	2100	oui	132
$CB_{7,5}$	105	2100	oui	97
$CB_{8,3}$	168	1008	oui	159
$CB_{8,4}$	280	6300	oui	271
$CB_{8,5}$	280	11200	oui	271
$CB_{8,6}$	168	6300	oui	159
$CB_{9,3}$	252	1764	oui	242
$CB_{9,4}$	504	15876	oui	494
$CB_{9,5}$	630	44100	oui	620
$CB_{9,6}$	504	44100	oui	494

Nous pouvons remarquer que cet algorithme est très performant. Plus précisément nous nous sommes vite rendus compte que la taille de la liste tabou n'a aucune influence puisque l'algorithme ne change jamais la couleur d'un sommet plus qu'une fois.

Nous avons donc : *nombre d'itérations*  $< |V|$ .

Pour les graphes  $CB_{k,\kappa}$  avec  $|V| \leq 260$ , l'algorithme fournit la solution en quelques secondes. Pour les graphes avec  $|V| \simeq 500$ , comme pour le graphe  $CB_{9,4}$ , il faut attendre environ 30 secondes. Par contre, quand  $|V| \simeq 600$ , comme dans le cas du graphe  $CB_{9,5}$ , il faut attendre environ 30 minutes. Mentionnons encore que tous ces tests ont été effectués sur un ordinateur Intel Pentium 4 CPU 2.00GHz.

Aussi dans le cas où nous voulons appliquer cet algorithme sur des graphes aléatoires, nous obtenons une meilleure performance par rapport au premier programme. En effet, avec ce programme une  $k, \kappa$ -coloration dans un graphe aléatoire est facilement trouvée.

Nous présentons ci-dessous un tel exemple :

\*\*\*\*\*

nombre de sommets : 12

nombre de couleurs maximum que chaque sommet peut voir : 3

aSeed : 7

densité : 0,3

fonction objective = 11

Après 1 itération la meilleure solution rencontrée pour le moment est : 9

Obtenue avec :  $c = [8, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11]$

Après 2 itération la meilleure solution rencontrée pour le moment est : 7

Obtenue avec :  $c = [8, 3, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11]$

Après 3 itération la meilleure solution rencontrée pour le moment est : 5

Obtenue avec :  $c = [8, 3, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 8, 10, 11]$

Après 4 itération la meilleure solution rencontrée pour le moment est : 3

Obtenue avec :  $c = [8, 3, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 8, 3, 11]$

Après 5 itération la meilleure solution rencontrée pour le moment est : 2

Obtenue avec :  $c = [8, 3, 3, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 8, 3, 11]$

Après 6 itération la meilleure solution rencontrée pour le moment est : 1

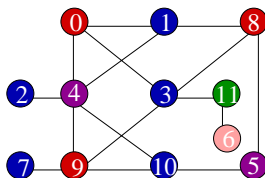
Obtenue avec :  $c = [8, 3, 3, 3, 5, 5, 6, 7, 8, 8, 3, 11]$

Après 7 itération la meilleure solution rencontrée pour le moment est : 0

Obtenue avec :  $c = [8, 3, 3, 3, 5, 5, 6, 3, 8, 8, 3, 11]$

Une coloration telle que chaque sommet ne voie que trois couleurs a été trouvée !

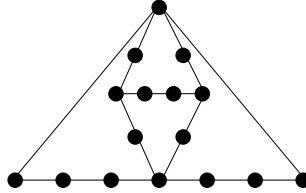
\*\*\*\*\*



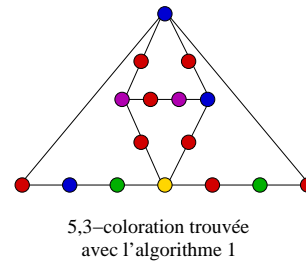
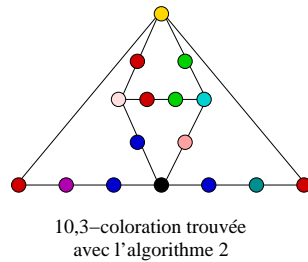
Après avoir effectué beaucoup de tests sur cet algorithme nous avons remarqué que, appliqué à

des graphes qui admettent une coloration avec plus de  $\kappa$  couleurs et telle que chaque sommet ne voit au maximum que  $\kappa$  couleurs, ce programme nous fournit bien une  $k, \kappa$ -coloration. Quand une coloration telle que chaque sommet ne voie que  $\kappa$  couleurs existe, alors ce programme semble la retrouver toujours !

**Remarque 7.1** Comme nous l'avons déjà mentionné, le deuxième programme est plus efficace du premier. Cependant le deuxième programme nous fournit une  $k, \kappa$ -coloration telle que  $k$  est la première valeur rencontrée qui respecte l'inégalité  $|K_1(v)| \leq \kappa, \forall v \in V$ . À titre d'exemple, nous avons étudié les résultats fournis par les deux algorithmes sur le graphe suivant :



Le deuxième programme nous fournit une 10,3-coloration de ce graphe alors qu'une 5,3-coloration existe et a été trouvée avec l'algorithme de la première adaptation.



### 7.3 Recherche de nouveaux graphes oligomatiques

Nous nous sommes demandés si les graphes oligomatiques sont des graphes «qu'on peut rencontrer dans la rue». En d'autres mots, est-ce que les graphes oligomatiques sont rares ou en testant un certain nombre de graphes aléatoires nous pouvons en trouver quelques-uns oligomatique ?

Pour répondre à cette question nous avons créé un programme qui fait appel à notre deuxième algorithme et à un autre algorithme de coloration de graphes.

Grâce à l'algorithme 2, nous créons un graphe aléatoire, les données duquel sont enregistrées dans un fichier ayant même forme que dans la figure 7.1.

Selon la taille du graphe, nous posons  $\kappa$  assez grand de telle façon à avoir plus de chance de trouver une coloration des sommets telle que chaque sommet ne voie que  $\kappa$  couleurs.

Si l'algorithme 2 trouve une coloration du graphe telle que  $|K_1(v)| \leq \kappa \forall v \in V$ , nous faisons appel au nouveau programme de coloration de graphes qui lit les données du graphe aléatoire créé par l'algorithme 2 et tente de recolorer le graphe avec  $\kappa$  couleurs.

Si une telle coloration est trouvée, alors le graphe n'admet pas une coloration oligomatique telle que  $|K_1(v)| \leq \kappa, \forall v \in V$ . Nous diminuons alors la valeur de  $\kappa$  d'une unité et nous répétons ce même procédé.

Si par chance l'algorithme 2 nous fournit une coloration telle que  $|K_1(v)| \leq \kappa \forall v \in V$  et le nouveau algorithme de coloration n'arrive pas à colorer le graphe avec  $\kappa$  couleurs, alors nous avons trouvé un graphe heuristiquement oligomatique. Par heuristiquement nous voulons dire qu'il n'existe pas une preuve de la  $\chi(G)$ -chromaticité du graphe avec  $\chi(G) > \kappa$ .

Nous avons créé quelques milliers de graphes aléatoires de la façon suivante :

Premièrement nous avons sélectionné une densité  $d$ .

En deuxième lieu nous avons choisi le nombre de sommets  $n$  que doit avoir le graphe  $G$  à créer. Pour créer les arêtes du graphe  $G$  de manière différente nous avons varié aussi le germe. Nous avons ainsi pris au hasard quatre valeurs différentes pour le germe de telle façon à créer quatre graphes aléatoires avec  $n$  sommets et densité  $d$ .

Ce même procédé a été répété pour toute valeur  $n$  dans l'intervalle  $[50, 250]$ . Nous avons ainsi créé  $200 \cdot 4 = 800$  graphes aléatoires avec la densité  $d$ .

Pour la création des graphes nous avons utilisé  $d = 0.1 ; 0.15 ; 0.2 ; 0.25 ; 0.3 ; 0.4$ .

Le nombre total de graphes qui ont été créés et ensuite testés est donc de  $800 \cdot 6 = 4800$ .

Expliquons maintenant la raison du choix des paramètres que nous avons utilisés pour la création des graphes :

- Nous avons opté de prendre le nombre de sommets  $n$  dans l'intervalle  $[50, 250]$  ainsi que l'algorithme ne soit pas trop lent (comme nous l'avons déjà mentionné au paragraphe précédent, si le nombre de sommets est trop grand l'algorithme pourrait nous fournir la solution après environ 30 minutes).
- Les valeurs de la densité ont été sélectionnées en étudiant les valeurs de la densité pour les graphes  $CB_{k,\kappa}$ . En effet, la densité des graphes  $CB_{k,\kappa}$  tels que  $|V| \leq 250$  varie dans l'intervalle  $[0.1; 0.45]$ .

Parmi tous ces graphes que nous avons testé aucun s'est révélé être heuristiquement oligomatique. Comme on l'aurait pu prévoir, il semblerait que les graphes oligomatiques ne sont pas des graphes «faciles à rencontrer».



# Chapitre 8

## Conclusion

Au cours de ce travail, nous avons réussi avec succès à résoudre des problèmes ouverts qui nous ont été proposés et nous avons découvert d'autres propriétés intéressantes sur les graphes oligomatiques. Ceci grâce à une étude très approfondie sur la «structure» de ces derniers graphes et à une étude sur leur existence dans d'autres classes de graphes.

Nous avons de plus exploré le domaine pratique en élaborant des heuristiques en relation avec les colorations oligomatiques.

Parmi les problèmes ouverts figurait une conjecture selon laquelle pour  $n \geq 2$ , les graphes  $CB_{2n+1, n+1}$  sont critiques. Comme nous avons pu le constater au paragraphe 4.2.2 nous avons réussi à démontrer cette conjecture en proposant une preuve nous fournissant principalement une coloration optimale de ces graphes telle qu'un seul sommet ait la couleur  $\chi(G)$ .

De plus, en ce qui concerne les graphes  $CB_{k, \kappa}$ , il n'a pas été difficile de donner la démonstration proposée au paragraphe 4.2.1 sur la 4-chromaticité du graphe penta $K_{3,3}$ .

Dans la section 4.3 nous avons découvert et présenté des propriétés utiles sur les graphes oligomatiques. Ces propriétés sont basées surtout sur des graphes oligomatiques avec 30 sommets et grâce à elles nous avons maintenant une idée plus concrète de l'allure de base de tels graphes. De plus, le dernier théorème proposé nous a également aidé dans l'obtention d'un résultat important concernant le problème de l'existence de graphes planaires oligomatiques. En effet, grâce à ce théorème nous avons pu montrer dans la section 5.4 qu'il n'existe aucun graphe planaire 4-chromatique avec 30 sommets admettant une 5-coloration oligomatique.

C'est en raison du problème de l'existence de graphes planaires oligomatiques que nous nous sommes intéressés à l'étude de l'existence de graphes planaires extérieurs oligomatiques (section 5.3) et à l'étude de l'existence de graphes de Halin oligomatiques (section 5.2).

L'étude des graphes planaires extérieurs nous a amené au résultat de l'inexistence de tels graphes oligomatiques. En ce qui concerne les graphes de Halin, nous avons trouvé une classification de ces graphes par rapport au nombre chromatique. Grâce à cette classification il a ensuite été aisé de conclure qu'il n'existe aucun graphe de Halin oligomatique.

Par la suite nous avons étudié le problème de l'existence de graphes sans griffe oligomatiques. Le problème des graphes sans griffe a toujours été très passionnant mais, comme dans d'autres études, ce problème est très complexe. Néanmoins, nous avons réussi à obtenir un résultat

intéressant sur ce problème aussi (voir proposition 5.3).

Dans la deuxième partie de notre travail nous avons étudié et présenté deux adaptations différentes de la méthode tabou au problème de la  $k, \kappa$ -coloration. Malheureusement le premier algorithme ne fournit pas toujours la solution désirée. Par contre, les résultats obtenus avec l'implémentation du deuxième algorithme sont optimaux.

En raison de la meilleure performance du deuxième programme, nous avons préféré faire appel à ce deuxième programme dans l'implémentation de l'algorithme présenté dans la section 7.3 plutôt qu'au premier. Grâce à cette dernière implémentation nous pouvons dire que les graphes oligomatiques semblent être rares.

Il reste cependant des points à améliorer, comme par exemple une étude plus approfondie sur les résultats que fournit ce troisième programme c'est-à-dire de noter les valeurs de  $k$  et  $\kappa$  rencontrées afin de pouvoir se faire une meilleure idée sur le type de graphes admettant une  $k, \kappa$ -coloration, et relancer ensuite l'algorithme sur des graphes similaires.

Par la suite il serait également intéressant d'essayer de généraliser le résultat sur la planarité, trouvé dans la section 5.4, à des graphes ayant plus de 30 sommets, de telle façon à s'approcher encore plus d'une résolution du problème de l'existence de graphes planaires oligomatiques.

Les recherches présentées au paragraphe 4.3.1 pourraient également faire l'objet de travaux futurs afin de tenter de découvrir de nouvelles propriétés sur l'arête-criticalité du graphe  $CB_{5,3}$ .

Du point de vue personnel ce travail fut intéressant à plus d'un titre. Premièrement j'ai eu l'occasion d'explorer un nouveau sujet de recherche ce qui m'a consenti d'approfondir mes connaissances dans le domaine et qui m'a permis de voir le genre de difficultés pouvant survenir dans un tel travail, comme par exemple le fait de n'avoir pas toujours des résultats à la fin d'une journée de travail intense.

Deuxièmement, avec la partie pratique de ce travail j'ai pu consolider mes connaissances de programmation ce qui me sera certainement très utile dans la suite de ma carrière.

Enfin, en raison de la nouveauté du sujet ce travail s'est révélé très stimulant.



# Bibliographie

- [1] I. Blöchliger and D. de Werra, On some properties of suboptimal colorings of graphs. *Networks*, 43(2) :103-108, 2004.
- [2] I. Blöchliger and D. de Werra, Color-blind graphs and suboptimal colorings. Technical Report ORWP 04/04, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, EPFL, Switzerland, April 2004.
- [3] D. de Werra and P. Hansen. Panchromatic chains and paths. Technical Report ORWP 01/02, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, EPFL, Switzerland, June 2001.
- [4] P. Erdős, Z. Fredi, A. Hajnal, P. Komjáth, V. Rödl and Á. Seress. Coloring graphs with locally few colors. *Discrete Mathematics*, 59 :21-34, 1986.