

# IDENTIFICATION PAR RECALAGE MODAL ET FRÉQUENTIEL DES PROPRIÉTÉS CONSTITUTIVES DE COQUES EN MATÉRIAUX COMPOSITES

THÈSE N° 3106 (2004)

PRÉSENTÉE À LA FACULTÉ SCIENCES ET TECHNIQUES DE L'INGÉNIEUR

Institut d'ingénierie des systèmes

SECTION DE GÉNIE MÉCANIQUE

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

POUR L'OBTENTION DU GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES

PAR

**Joël CUGNONI**

ingénieur mécanicien diplômé EPF  
de nationalité suisse et originaire d'Ormont-Dessous (VD)

acceptée sur proposition du jury:

Dr Th. Gmür, directeur de thèse  
Prof. I. Botsis, rapporteur  
Prof. W.P De Wilde, rapporteur  
Prof. F. Pierron, rapporteur  
Prof. I. Smith, rapporteur

Lausanne, EPFL  
2005



---

*« Sans imagination, il ne pourrait y avoir création. »*

Albert Jacquard



---

## Résumé

De nos jours, les matériaux composites fibreux sont de plus en plus couramment utilisés comme alternative aux matériaux conventionnels, principalement en raison de leur haute résistance et rigidité spécifique, mais aussi à cause de leurs propriétés mécaniques ajustables dans des grandes proportions. Par contre, avant d'utiliser ce type de matériaux de manière fiable dans des applications industrielles telles que les transports maritimes, aériens, automobiles ou ferroviaires, une caractérisation poussée et précise de leurs propriétés mécaniques est nécessaire. En raison du nombre des paramètres constitutifs et de leur inhérente variabilité, la caractérisation expérimentale classique de matériaux composites s'avère souvent fastidieuse et requiert un grand nombre de procédures de test et de spécimens pour être menée à bien. Une solution élégante à ce problème peut être l'utilisation d'une méthode d'identification mixte numérique-expérimentale qui représente un puissant outil pour l'estimation de paramètres constitutifs inconnus à partir d'un modèle numérique de la structure étudiée et de données expérimentales de tests statiques ou dynamiques. Se basant sur des mesures de grandeurs telles que les fréquences propres ou les modes propres d'une structure, ces techniques permettent, par comparaison des prédictions d'un modèle numérique avec les données expérimentales correspondantes, d'identifier par recalage successif les paramètres inconnus du modèle de simulation. Dans ce domaine, les méthodes mixtes basées sur des grandeurs modales représentent toujours un grand axe de développement scientifique.

Dans ce travail, une nouvelle méthode d'identification mixte numérique-expérimentale basée sur les propriétés modales de structures de coques en stratifiés composites épais est présentée. Cette technique se fonde sur une technique de minimisation des écarts entre les pulsations et modes propres calculés à l'aide d'un modèle d'éléments finis de coque de haute précision, dont les propriétés élastiques sont inconnues, et les valeurs modales expérimentales correspondantes. Dans le cas de stratifiés composites épais, les paramètres pouvant être identifiés à l'aide de cette technique sont les modules de Young  $E_1$  et  $E_2$  et de cisaillement dans le plan  $G_{12}$  et transverse  $G_{13}$  et  $G_{23}$ , ainsi que le coefficient de Poisson dans le plan  $\nu_{12}$ . Pour déterminer ces paramètres constitutifs un ensemble de 10 à 15 modes et fréquences propres mesurées est sélectionné et le problème de minimisation des erreurs modales est résolu itérativement à l'aide d'un algorithme d'optimisation de type moindres carrés non linéaires.

Pour maximiser la qualité d'identification, une méthode de mesure modale sans contact basée sur une technique d'acquisition par interférométrie laser à balayage des vibrations d'un stratifié composite libre-libre excité par une source acoustique contrôlée est mise en place. Le

---

modèle modal expérimental du spécimen de test est extrait des fonctions de transfert mesurées à l'aide d'une technique d'analyse modale par curve fitting MDOF afin de garantir une excellente qualité des modes et fréquences propres mesurés.

Comme la précision des méthodes numériques inverses dépend directement de l'exactitude du modèle de simulation utilisé, une famille d'éléments finis de coque avec approximation en déplacement d'ordre  $p$  variable dans l'épaisseur a été développée. Dans ces éléments, la possibilité de varier le nombre de degrés de liberté par nœud permet l'ajustement, en fonction des besoins, de la précision ou du temps de résolution du modèle numérique. Il a été montré que cette formulation conduit à une excellente précision de convergence à partir de l'ordre  $p = 3$ , tandis que les résultats fournis pour l'ordre  $p = 7$  sont déjà quasiment exacts. En comparaison avec d'autres modèles de solides 3D ou de coques épaisses de type layerwise, l'élément développé fournit une précision équivalente des pulsations propres calculées pour un temps de calcul généralement inférieur.

Un algorithme classique de minimisation aux moindres carrés de type Levenberg-Marquardt est utilisé pour résoudre le problème inverse consistant à déterminer les propriétés élastiques constitutives qui minimisent l'écart entre les modèles modaux numérique et expérimental. Des fonctions d'erreur originales ont été développées afin de quantifier les écarts entre les pulsations propres simulées et mesurées, mais aussi entre les formes modales numériques et expérimentales. Elles se basent notamment sur les propriétés de la norme MAC des modes simulés et mesurés, mais aussi sur les propriétés des lignes nodales des différentes formes propres. Dans ce travail, il a été observé que l'identification mixte requiert entre 3 et 6 itérations avant de converger avec une erreur résiduelle sur les fréquences propres de l'ordre de 0.2 %.

Finalement, plusieurs exemples d'identification de stratifiés composites réels sont présentés, allant de plaques, minces à épaisses, en composite à base de fibres de carbone à des spécimens de stratifié fibre de verre – polypropylène à plis croisés. La robustesse et la convergence de la méthode d'identification proposée ont été étudiées et les paramètres constitutifs identifiés sont comparés avec des mesures statiques classiques. Dans l'ensemble, il a pu être conclu que, pour des spécimens modérément épais, la méthode d'identification mixte proposée fournit une estimation précise des modules de Young et de cisaillement dans le plan, mais aussi des modules de cisaillement transverse et du coefficient de Poisson dans le plan. La stabilité et la répétabilité de la méthode s'avèrent également excellentes dans la mesure où le nombre de modes mesurés est suffisamment élevé.

---

## **Abstract**

Fibre-reinforced composites are being increasingly used as alternatives for conventional materials primarily because of their high strength, specific stiffness, light weight and adjustable properties. However, before using this type of material with confidence in industrial applications such as marine, automotive or aerospace structural components, a thorough characterization of the constituent material properties is needed. Because of the number and the inherent variability of the constitutive properties of composite materials, the experimental characterization is quite cumbersome and requires a large number of specimens to be tested. An elegant way to circumvent this lack consists in using mixed numerical-experimental methods which constitute powerful tools for estimating unknown constitutive coefficients in a numerical model of a composite structure from static and/or dynamic experimental data collected on the real structure. Starting from the measurement of quantities such as the natural frequencies and mode shapes, these methods allow, by comparing numerical and experimental observations, the progressive refinement of the estimated material properties in the corresponding numerical model. In this domain, dynamic mixed techniques have gained in importance owing to their simplicity and efficiency.

In this work, a new mixed numerical-experimental identification method based on the modal response of thick laminated shells is presented. This technique is founded on the minimisation of the discrepancies between the eigenvalues and eigenmodes computed with a highly accurate composite shell finite element model with adjustable elastic properties and the corresponding experimental quantities. In the case of thick shells, the constitutive parameters that can be identified are the two in-plane Young's moduli  $E_1$  and  $E_2$ , the in-plane Poisson's ratio  $\nu_{12}$  and the in-plane and transverse shear moduli  $G_{12}$ ,  $G_{13}$  and  $G_{23}$ . To determine these six parameters, a typical set of 10 to 15 measured eigenfrequencies and eigenmodes is selected, and the over-constrained optimisation problem is solved with a nonlinear least squares algorithm.

In order to maximize the quality of the identification, free-free boundary conditions and a non-contacting modal measurement method are chosen for the experimental determination of the eigenparameters. To obtain optimal experimental conditions, the specimens are suspended by thin nylon yarns and excited by a calibrated acoustic source (loudspeakers) while the dynamic response is measured with a scanning laser vibrometer. The measured frequency response functions are then treated in a modal curve fitting software to obtain a high quality set of modal data (mode shapes and frequencies).

---

As the accuracy of this inverse method directly depends on the precision of the finite element model, a family of very efficient thick laminated shell finite elements based on a variable  $p$ -order approximation of the through-the-thickness displacement with a full 3D orthotropic constitutive law has been developed. In these elements, varying the degree of approximation of the model allows to adjust the needs in accuracy and/or computation time. It is shown that for thick and highly orthotropic plates, the formulation exhibits a good convergence on the eigenfrequencies with  $p = 3$  and a nearly exact solution for  $p = 7$ . In comparison to other 3D solid or thick shell elements, such as layerwise models, the presented elements show an equivalent precision of the computed eigenfrequencies and are computationally less expensive for laminates with more than 8 plies.

A classical Levenberg-Marquardt nonlinear least squares minimisation algorithm is used to solve the inverse problem of finding the elastic constitutive parameters which are best matching the experimental modal data. Original multiple objective functions are used for comparing the computed and measured values. They are based upon the relative differences between the eigenfrequencies, upon the diagonal and off-diagonal terms of the so-called modal assurance criterion norm on the mode shapes, and upon geometrical properties of the mode shapes such as the nodal lines. In this work, the convergence properties of the minimisation algorithm are also investigated. It can be observed that usually the minimisation requires between 3 and 6 iterations to reach a residual error of less than 0.2 %.

Finally, real identification examples are presented, for various thin to thick unidirectional carbon fiber plates and for a relatively thick cross-ply glass – polypropylene specimen. The robustness and the convergence of the present identification method are studied and the identification results are compared to those obtained with classical static tests. It can be concluded that overall, when the test specimens are moderately thick, the present identification method can accurately determine the in-plane Young's and shear moduli as well as the transverse shear moduli and the in-plane Poisson's ratio. It is also seen that the stability of the method is excellent as long as the number of measured modes is reasonably larger than the number of parameters to be identified.

---

## **Remerciements**

Cette thèse est le fruit de près de quatre années de recherche passées au Laboratoire de Mécanique Appliquée et d'analyse de Fiabilité (LMAF) de l'EPFL, où j'ai eu la chance de pouvoir travailler et vivre dans une ambiance exceptionnelle entouré par une équipe aussi sympathique que motivée. Pour tout cela, je souhaite tout d'abord remercier le Professeur J. Botsis de m'avoir accueilli au sein de son laboratoire et de m'avoir fourni ainsi les moyens techniques nécessaires à l'accomplissement de cette recherche.

J'aimerais remercier tout particulièrement mon directeur de thèse Dr Th. Gmür pour avoir rendu possible cette aventure, mais aussi pour sa confiance, pour son soutien, pour sa rigueur scientifique et pour tous les moments de discussion et d'échange que l'on a passé sur la méthode des éléments finis et d'autres sujets tout aussi passionnants. M'ayant donné une liberté de travail presque totale durant toute cette thèse, il m'a également appris que l'on pouvait travailler sans compter, avec passion, tout en gardant le sourire aux lèvres. Je souhaite également remercier chaleureusement Dr A. Schorderet pour sa participation à la mise sur pied de ce projet, mais aussi pour tout ce qu'il m'a appris sur l'analyse modale et la dynamique des structures en général.

Je suis également extrêmement reconnaissant au Professeur J. Giovanola du LCSM de m'avoir prêté pendant quatre ans, sans restriction, le système de mesure vibrométrique laser à effet Doppler Polytec PSV200 qui est au cœur même de toute la partie expérimentale de ce travail. Sans ce système, cette thèse n'aurait probablement pas été la même.

Je remercie également tous ceux qui, de près ou de loin, ont contribué à la réalisation de ce travail. Je pense ici particulièrement au Professeur Philippe Bonhôte qui m'a appris énormément sur l'analyse modale expérimentale et dont l'éternelle bonne humeur s'est avérée plus que communicative durant tout ce temps, mais aussi à Dr F. Bosia, M.A. Mostafa et L. Sorensen pour le temps qu'ils ont passé à fabriquer des échantillons de composites pour la validation de ce travail. Je souhaite également remercier tous mes collègues et amis, étudiants ou collaborateurs, qui ont rendu ces quatre années de travail passionnantes, riches en découvertes mais aussi incroyablement divertissantes.

Finalement, je voudrais encore remercier mes proches, ma famille et surtout ma chère et tendre pour m'avoir supporté, dans tous les sens du terme, durant ces quatre années de travail sans horaire et sans limite, où souvent je me transformais en courant d'air.



**Table des matières**

|            |  |     |
|------------|--|-----|
| Chapitre 1 | Introduction.....  | 13  |
| 1.1        | Motivations et situation.....  | 13  |
| 1.2        | Etat de l'art.....   | 14  |
| 1.2.1      | Méthodes de caractérisation statiques.....   | 14  |
| 1.2.2      | Méthodes dynamiques d'identification de paramètres de matériaux.....                         | 19  |
| 1.2.3      | Conclusions.....   | 27  |
| 1.3        | Objectifs et organisation du travail.....  | 28  |
| Chapitre 2 | Modèles d'éléments finis.....  | 31  |
| 2.1        | Objectifs.....   | 31  |
| 2.2        | Théories des stratifiés composites.....  | 32  |
| 2.2.1      | Généralités.....   | 32  |
| 2.2.2      | Modèles de stratifiés de type couche unique équivalente (Equivalent Single Layer - ESL)..... | 38  |
| 2.2.3      | Autres théories.....   | 42  |
| 2.2.4      | Conclusions.....   | 44  |
| 2.3        | Formulation des éléments finis de coque PSDT.....  | 45  |
| 2.3.1      | Problème de l'élastodynamique linéaire et modélisation par éléments finis... ..              | 45  |
| 2.4        | Implantation dans le logiciel d'éléments finis MAFE.....                                     | 62  |
| 2.4.1      | Généralités.....   | 62  |
| 2.4.2      | Structure du logiciel MAFE.....  | 63  |
| 2.5        | Validation de la classe d'éléments finis de coque PSDT.....                                  | 69  |
| 2.5.1      | Validation semi-analytique.....  | 69  |
| 2.5.2      | Validation expérimentale.....  | 74  |
| 2.5.3      | Validation numérique.....  | 76  |
| Chapitre 3 | Analyse modale expérimentale.....  | 84  |
| 3.1        | Objectifs.....   | 84  |
| 3.2        | Généralités.....   | 85  |
| 3.3        | Technique de mesure vibratoire sans contact.....   | 90  |
| 3.3.1      | Système de mesure dynamique sans contact.....  | 91  |
| 3.3.2      | Conditions de support du spécimen.....   | 97  |
| 3.4        | Excitation acoustique.....   | 98  |
| 3.4.1      | Caractérisation du système d'excitation acoustique.....                                      | 105 |
| 3.4.2      | Optimisation de l'excitation acoustique.....   | 112 |

|            |   |     |
|------------|---|-----|
| 3.5        | Extraction modale par Curve Fitting.....                                    | 121 |
| Chapitre 4 | Identification mixte numérique-expérimentale.....                           | 130 |
| 4.1        | Généralités et objectifs.....   | 130 |
| 4.2        | Normes d'erreur modales.....  | 133 |
| 4.3        | Etude paramétrique.....   | 137 |
| 4.3.1      | Objectifs et démarche.....  | 137 |
| 4.3.2      | Implantation d'un logiciel d'étude paramétrique pour MAFE.....              | 139 |
| 4.3.3      | Sensibilités des normes d'erreur modales.....                               | 143 |
| 4.3.4      | Robustesse des fonctions d'erreur.....                                      | 150 |
| 4.4        | Algorithme d'identification mixte numérique – expérimentale.....            | 156 |
| 4.4.1      | Problème d'optimisation modale.....   | 156 |
| 4.4.2      | Algorithmes de minimisation.....  | 158 |
| 4.4.3      | Calcul des gradients des fonctions d'erreur.....                            | 164 |
| 4.4.4      | Pondération et incertitudes des normes d'erreur modales.....                | 172 |
| 4.4.5      | Implantation MATLAB de la méthode d'identification.....                     | 173 |
| 4.5        | Etude de convergence et de robustesse de l'algorithme d'identification..... | 177 |
| 4.6        | Résumé et commentaires.....   | 184 |
| Chapitre 5 | Validation et exemples.....   | 187 |
| 5.1        | Résumé de la méthode d'identification mixte proposée.....                   | 187 |
| 5.2        | Objectifs et démarche.....  | 188 |
| 5.3        | Plaque fibre de verre - polypropylène.....                                  | 189 |
| 5.3.1      | Spécimen testé.....   | 189 |
| 5.3.2      | Mesures modales.....  | 190 |
| 5.3.3      | Identification mixte numérique-expérimentale.....                           | 193 |
| 5.3.4      | Fréquences propres identifiées.....   | 197 |
| 5.3.5      | Paramètres constitutifs identifiés.....                                     | 198 |
| 5.4        | Plaques AS4-PPS et AS4-PEKK.....  | 200 |
| 5.4.1      | Spécimens testés.....   | 200 |
| 5.4.2      | Mesures dynamiques et analyse modale.....                                   | 200 |
| 5.4.3      | Identification mixte numérique-expérimentale.....                           | 204 |
| 5.4.4      | Robustesse de la méthode d'identification mixte.....                        | 207 |
| 5.4.5      | Fréquences et modes propres identifiés.....                                 | 208 |
| 5.4.6      | Propriétés constitutives identifiées.....                                   | 212 |
| 5.5        | Plaques en composite fibres de carbone – matrice époxyde.....               | 215 |

---

|                    |   |     |
|--------------------|---|-----|
| 5.5.1              | Buts et matériaux testés .....                                | 215 |
| 5.5.2              | Caractérisations statiques des propriétés constitutives ..... | 216 |
| 5.5.3              | Tests dynamiques et analyse modale expérimentale .....        | 221 |
| 5.5.4              | Identification mixte numérique-expérimentale.....             | 226 |
| 5.5.5              | Fréquences et modes propres identifiés .....                  | 230 |
| 5.5.6              | Paramètres identifiés.....                                    | 233 |
| 5.6                | Résumé et commentaires .....                                  | 238 |
| Chapitre 6         | Conclusions.....  | 241 |
| 6.1                | Synthèse et conclusions .....                                 | 241 |
| 6.2                | Développements futurs et perspectives.....                    | 243 |
| Publications.....  |   | 245 |
| Bibliographie..... |   | 245 |



## Chapitre 1 Introduction

### 1.1 *Motivations et situation*

En raison de leurs propriétés de légèreté, de rigidité et de résistance spécifique, les matériaux composites sont utilisés de nos jours dans un nombre croissant d'applications dans des domaines de plus en plus étendus, allant de la recherche aérospatiale aux articles de sport grand public. Cependant, en raison de leur comportement anisotrope et des nombreuses possibilités d'optimisation qu'ils offrent, le recours à ces matériaux dans des applications courantes nécessite un effort de développement bien plus important qu'avec leurs homologues isotropes classiques. Avec le développement extrêmement rapide des moyens de calcul numériques, les ingénieurs ont vu également leurs possibilités de simulation décuplées en quelques décennies. A l'heure actuelle, les simulations numériques permettent de traiter la majeure partie des problèmes physiques rencontrés couramment et les modèles utilisés ne cessent d'évoluer. La possibilité de simuler des phénomènes toujours plus complexes entraîne toutefois inévitablement l'augmentation du nombre de grandeurs physiques nécessaires à la caractérisation des modèles numériques. Ainsi, face à l'accroissement prodigieux des moyens de simulation, les besoins de données expérimentales fiables ont crû de manière tout aussi exponentielle, au point qu'aujourd'hui, les techniques de mesure et de caractérisation physique sont quasiment devenues des freins pour les processus de développement de nouveaux matériaux ou produits. Face à la demande croissante de données empiriques, le coût et la complexité des méthodes de caractérisation classique, qui exigent pour la plupart la réalisation d'un test spécifique pour chaque paramètre constitutif requis, sont devenus des aspects non négligeables de l'effort de développement. Contrairement aux méthodes de caractérisation classiques qui sont souvent limitées par l'utilisation d'une solution mathématique exacte pour la détermination des paramètres physiques recherchés, une nouvelle classe de méthodes basées sur l'identification de modèles numériques par rapport aux données expérimentales a été développée durant les vingt dernières années. Cette famille de méthodes se base sur une résolution itérative d'un problème numérique inverse, à savoir la détermination des paramètres d'entrée d'un modèle de simulation de telle sorte que les résultats simulés soient aussi proches que possible des observations empiriques. Rendues applicables par l'augmentation de la puissance de calcul disponible, ces méthodes n'en restent pas moins gourmandes en ressources, mais compensent largement ce défaut par une facilité

d'expérimentation accrue et par la possibilité qu'elles offrent d'identifier plusieurs paramètres constitutifs inconnus sur la base d'un seul test, réduisant ainsi radicalement les efforts et les coûts des mesures. Dans le domaine des matériaux composites, le nombre de propriétés constitutives recherchées est au minimum de six pour un seul matériau, ce qui nécessite habituellement un minimum de cinq essais de caractérisation classiques pour les déterminer. Dans ce contexte, les méthodes mixtes d'identification numérique-expérimentale prennent tout leur sens car, en se basant par exemple sur les propriétés vibratoires d'une structure en matériau composite, elles ont le potentiel de caractériser les six propriétés constitutives de matériaux composites stratifiés en un seul test dynamique non destructif.

## 1.2 Etat de l'art.

| Type de chargement  | Plage de mesure             | Famille de modèles         | Exemple   |
|---------------------|-----------------------------|----------------------------|---|
| Chargement statique | Mesure ponctuelle / moyenne | Analytique et inversible   | Tests standardisés ASTM p.ex D3039, D3518   |
|                     |                             | Numérique / non inversible | Validation de modèles   |
|                     | Mesure de champ             | Analytique et inversible   | Méthodes des champs virtuels [4-6]  |
|                     |                             | Numérique / non inversible | Identification mixte num. / exp. par ex. par minimisation de type moindres carrés   |
| Dynamique           | Mesure ponctuelle / moyenne | Analytique et inversible   | Caractérisation par ultrasons ou par identification des fréquences propres de spécimens de poutres minces                   |
|                     |                             | Numérique / non inversible | Identification mixte num. / exp. des fréquences propres de spécimens de poutres épaisses ou de plaques/coques [8-32]        |
|                     | Mesure de champ             | Analytique et inversible   | Méthodes des champs virtuels [6]  |
|                     |                             | Numérique / non inversible | Identification mixte num. / exp. des fréquences et modes propres de spécimens de plaques/coques épaisses :<br>Pas d'article |

Tableau 1.1: Classification des techniques de caractérisation des matériaux composites

### 1.2.1 Méthodes de caractérisation statiques

Depuis les prémices de la mécanique appliquée, les ingénieurs ont toujours eu un besoin croissant de données expérimentales pour mener à bien leurs calculs et leurs études, de telle sorte qu'en tout temps, la mécanique n'a jamais pu se passer d'expérimentations rigoureuses. Dans le domaine des propriétés constitutives de matériaux, la complexité de caractérisation des propriétés élastiques des matériaux de construction classiques tels que les aciers, les

aluminiums et tous les alliages métalliques en général, a toujours été assez réduite en raison de l'isotropie de ces matériaux qui ne nécessite donc la mesure de seulement deux constantes, traditionnellement le module de Young en traction  $E$  et le coefficient de Poisson  $\nu$ . Cependant, avec la démocratisation des matériaux composites à matrice polymère et renfort sous forme de fibres longues, le besoin de caractérisation des propriétés élastiques a fortement augmenté, d'une part en raison de la grande variabilité des propriétés qu'il est possible d'obtenir de tels matériaux, et d'autre part surtout à cause de l'anisotropie non négligeable de ces matériaux. Dans le cas des composites fibreux, la caractérisation complète des propriétés élastiques du matériau requiert la mesure non plus de deux constantes, mais de neuf paramètres, à savoir trois modules de Young, trois coefficients de Poisson, mais aussi trois modules de cisaillement. Les méthodes traditionnelles de caractérisation de matériaux isotropes (tests de traction uniaxiale, flexion trois points) ont bien évidemment été adaptées à la caractérisation des composites, mais du fait de l'anisotropie du matériau, le nombre de spécimens et de tests nécessaires à une caractérisation complète est environ quatre fois plus important que pour les matériaux isotropes. De plus, en raison de la variabilité des propriétés due aux procédés de mise en œuvre, le nombre de spécimens par test est généralement bien plus important encore. Avec l'évolution des connaissances dans le domaine des matériaux composites, des tests spécifiques ont toutefois été développés non seulement pour la détermination des propriétés constitutives d'élasticité, mais aussi et surtout dans le domaine des mesures des contraintes limites de rupture de ces matériaux dans différents modes de chargement.

Les tests statiques de caractérisation des propriétés élastiques les plus couramment utilisés sont les suivants :

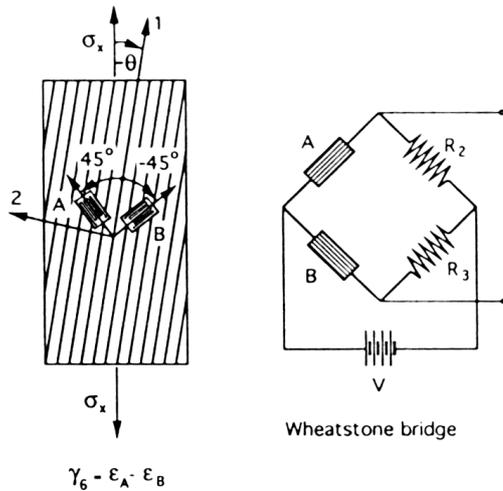
### **Détermination des propriétés de traction d'un pli**

Le test de caractérisation statique le plus usuel reste l'essai de traction uniaxiale, avec mesure par jauges de déformation résistives ou extensomètres des déformations locales au centre de l'échantillon ou des déformations moyennes dans l'axe de traction et dans l'axe transverse. Ce type de test est bien sûr standardisé pour les matériaux composites, notamment par l'ASTM (ASTM spécification D3039) qui décrit à la fois la géométrie des éprouvettes, leur préparation et les conditions de test recommandées pour différentes classes de matériaux et orientations de fibres. Pour ce genre d'essai, deux ensembles d'échantillons de test sont nécessaires : un ensemble d'éprouvettes dont les fibres sont alignées dans le sens de la longueur du spécimen et un autre ensemble avec les fibres en direction transverse. Bien que

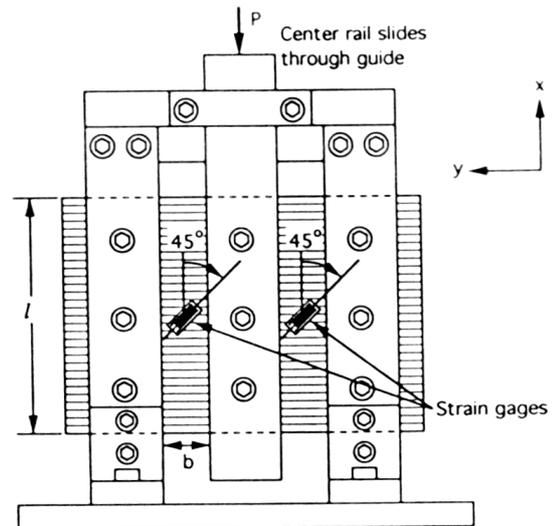
très simple en apparence, cet essai requiert tout de même un soin particulier et généralement un nombre d'échantillons relativement élevé est nécessaire pour réduire les inévitables incertitudes expérimentales. Parallèlement aux essais de traction uniaxiale, des tests de flexion trois ou quatre points (ASTM D790, EN ISO 14125) sont également couramment utilisés, mais mènent généralement à des valeurs de modules de Young légèrement différentes de celles obtenues en traction, de sorte qu'on les appelle en général les modules de flexion pour les distinguer explicitement de leurs équivalents en traction.

### **Détermination des propriétés de cisaillement d'un stratifié**

De nombreuses méthodes ont été développées pour la détermination des modules de cisaillement d'une strate. Un des tests les plus couramment employés (ASTM D3518) se base sur un spécimen stratifié à  $\pm 45^\circ$  chargé en traction uniaxiale, afin de générer un état de contrainte en cisaillement dans le plan au centre de l'échantillon. Bien que très simple à mettre en œuvre, cette méthode a tendance à surestimer le module de cisaillement  $G_{12}$  en raison des effets des contraintes interlaminaires induites par le schéma de stratification choisi. Une technique relativement proche dans son principe utilise, quant à elle, un échantillon avec fibres désaxées de  $10^\circ$  lors d'un essai de traction (Figure 1.1) afin de créer un état de contrainte mixte traction-cisaillement. Une autre catégorie de tests est standardisée dans la norme ASTM D4255 qui décrit deux types d'essais de cisaillement créé entre deux ou trois rails boulonnés (et parfois aussi collés) à un spécimen de type plaque (Figure 1.2). Traditionnellement, un spécimen unidirectionnel est fixé entre deux ou trois rails transversaux, afin de créer un état de contrainte en cisaillement dans le plan entre les rails. La mesure est généralement réalisée à l'aide de jauges de déformation orientées à  $45^\circ$  de l'axe des fibres. Quoiqu'assez fiable, cette méthode nécessite un outillage spécial relativement complexe et les conditions aux limites de fixation de l'échantillon introduisent une variabilité inévitable dans les mesures.



**Figure 1.1: Test de cisaillement par traction d'une éprouvette unidirectionnelle orientée à  $10^\circ$  hors axe**



**Figure 1.2: Test de cisaillement à trois rails (ASTM D4255)**

Finalement, des tests plus spécifiques ont vu le jour pour déterminer à la fois les modules de cisaillement dans le plan, mais aussi les modules de cisaillement transverse de composites généralement unidirectionnels. Un des tests les plus étudiés récemment est probablement le test de cisaillement de Iosipescu (du nom de son auteur) qui se base sur une éprouvette parallélépipédique entaillée en V à  $90^\circ$  (ou selon d'autres angles en fonction des matériaux testés), chargée en cisaillement dans une fixation spécialement étudiée qui reproduit approximativement un chargement en cisaillement entre 4 appuis simples. Cet essai est maintenant standardisé dans la norme ASTM D5379, mais à cause des effets locaux de l'entaille, l'état de contrainte induit au centre du spécimen n'est pas toujours homogène et des concentrations de contrainte apparaissent surtout lorsque l'angle de l'entaille n'est pas parfaitement adapté au matériau testé [1]. Cependant, l'un des avantages de ce test est de permettre de déterminer à la fois les modules de cisaillement dans le plan, mais aussi les modules de cisaillement transverse, par simple changement de l'orientation des fibres du spécimen testé.

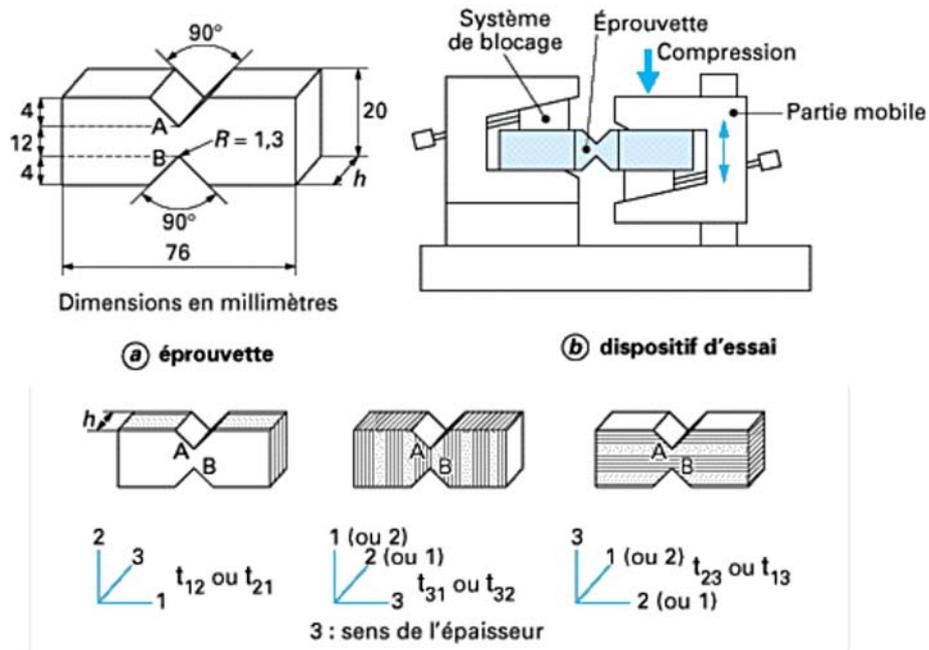


Figure 1.3: Test de cisaillement de Iosipescu (ASTM D 5379)

Un autre essai moins connu permet également de déterminer les modules de cisaillement dans les trois plans d'orthotropie d'un composite unidirectionnel. Basée sur des éprouvettes parallélépipédiques unidirectionnelles à  $0^\circ$  et  $90^\circ$  (comme les tests de traction ASTM D3039) chargées en torsion, cette méthode [2,3] requiert la mesure des déformations à  $45^\circ$  à la fois au centre de la face, mais aussi sur la tranche du spécimen. Pour chaque orientation d'éprouvette, un système non linéaire de deux équations doit être résolu pour déterminer à la fois le module de cisaillement dans le plan, et l'un des deux modules de cisaillement transverse. Ainsi, à l'aide des deux ensembles d'éprouvette, les trois modules de cisaillement peuvent être déterminés. Cette technique nécessite toutefois un important effort d'instrumentation des spécimens testés, notamment au niveau de la mesure par jauges de déformation des déformations sur la tranche relativement mince du spécimen. Les erreurs expérimentales lors de la mesure d'éprouvettes minces sont donc la principale source de difficulté de cette technique.

Parallèlement à ces méthodes directes de caractérisation, un nombre important de techniques statiques basées sur des mesures de champs ont été développées durant la dernière décennie. Ces méthodes de caractérisation statique par mesure de champs peuvent être classées en deux catégories : tout d'abord, les méthodes directes se fondant sur la technique des champs virtuels [4-6] et d'autre part les méthodes numériques inverses basées couramment sur une approche de minimisation aux moindres carrés d'une fonctionnelle

d'erreur. Toutes ces méthodes permettent de déterminer plusieurs paramètres en un seul test statique, mais à l'heure actuelle, aucune configuration d'essai ne semble permettre de déterminer toutes les propriétés constitutives de matériaux composites en un seul test et de nombreuses recherches dans ce domaine sont en cours.

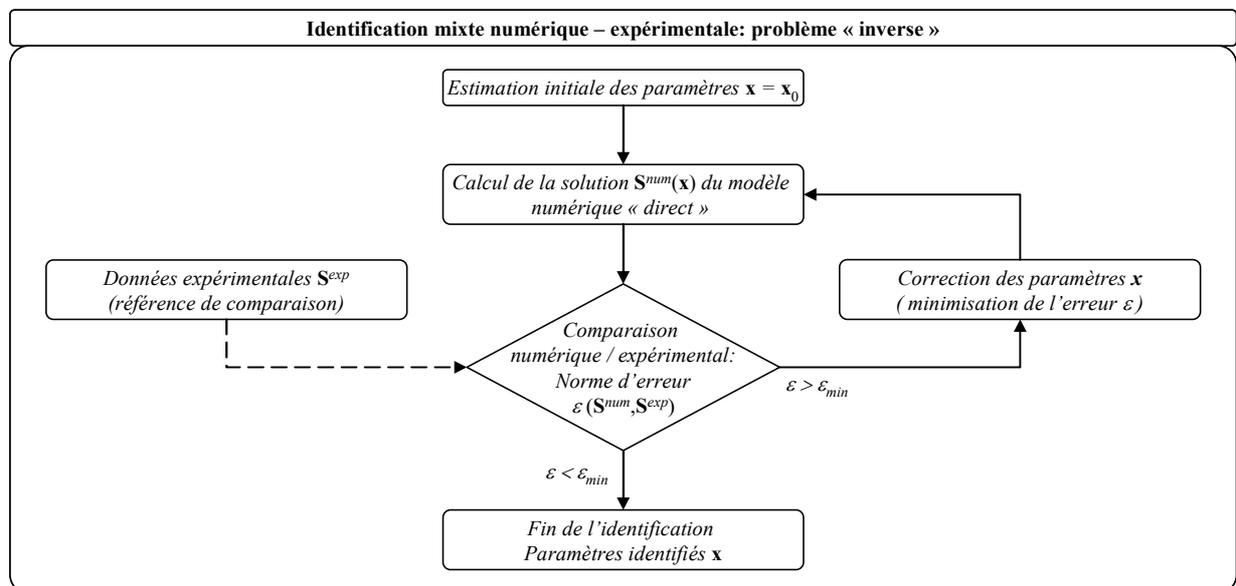
### **1.2.2 Méthodes dynamiques d'identification de paramètres de matériaux**

Contrairement aux propriétés statiques des structures, qui sont souvent dominées par des phénomènes locaux, les propriétés dynamiques telles que les fréquences propres et les modes propres sont généralement représentatifs du comportement global des matériaux utilisés, rendant ainsi ces informations très attrayantes pour l'identification des propriétés constitutives élastiques. De toute la littérature concernant l'identification des propriétés des matériaux composites, une très grande partie est consacrée aux méthodes basées sur des tests dynamiques. En raison de la complexité mathématique des problèmes dynamiques de structures en composites stratifiés, peu de solutions analytiques sont cependant disponibles pour effectuer une identification directe des paramètres constitutifs de composites. Comme très peu de modèles mathématiques inversibles existent, la recherche s'est alors tournée vers la résolution de problèmes « inverses » tout d'abord semi-analytiques puis plus récemment purement numériques. Ainsi sont donc nées les méthodes dites « d'identification mixte numérique – expérimentales ».

#### **Méthodes numériques - expérimentales pour l'identification de paramètres**

En dehors de quelques rares cas, il n'existe que peu de solutions analytiques exactes aux équations régissant la dynamique des structures composites et les solutions existantes ne présentent que peu d'intérêt pour l'identification, généralement du fait de l'impossibilité de réaliser correctement les conditions aux limites expérimentalement. Pour contourner cette difficulté, l'idée est venue de déterminer les paramètres constitutifs inconnus non plus par comparaison d'une solution analytique (si possible inversible) avec des résultats de mesures expérimentales, mais plutôt par comparaison d'un modèle numérique du problème avec les résultats expérimentaux. De cette idée simple sont nées de nombreuses méthodes d'identification de paramètres, dont une grande partie traite de la détermination des paramètres constitutifs des matériaux composites. Les méthodes d'identification mixte numérique – expérimentale fonctionnent généralement sur un principe itératif de résolution d'un problème numérique inverse (Figure 1.4). Dans un premier temps, une estimation des

paramètres à identifier est utilisée pour résoudre le problème numérique direct correspondant à l'expérience réalisée préalablement. Ensuite, les informations des expériences réelle et simulée numériquement sont comparées à l'aide d'une fonctionnelle (ou « norme ») d'erreur permettant d'évaluer la qualité de l'estimation actuelle des paramètres. Si la norme d'erreur est supérieure au seuil de convergence fixé, une méthode d'optimisation cherche alors à minimiser cette fonctionnelle d'erreur, en se basant généralement sur son gradient, et corrige les valeurs courantes des paramètres. Finalement, le modèle numérique est mis à jour et le calcul de la solution directe du problème est relancé. La boucle « correction des paramètres- solution numérique-calcul d'erreur » continue jusqu'à ce que la norme d'erreur est inférieure à la tolérance choisie. A la fin du processus, les paramètres « réels » sont considérés comme étant égaux aux paramètres de la dernière itération du modèle numérique qui fournissent une erreur inférieure au seuil spécifié.



**Figure 1.4 : Principe de la résolution itérative du problème numérique inverse d'identification mixte numérique - expérimentale**

Diverses méthodes mixtes numériques-expérimentales des propriétés constitutives de matériaux ont été développées à ce jour. Elles se distinguent principalement par les techniques utilisées pour l'optimisation des paramètres, par la définition de la fonctionnelle d'erreur, par le genre d'expériences réalisées, par le type de données expérimentales employées ou encore par la classe de modélisation et sa résolution numérique mise en œuvre. La précision et les propriétés de convergence de ces méthodes dépendent essentiellement de la corrélation entre les conditions expérimentales et leurs simulations numériques (consistance du modèle et de l'expérience), de la sensibilité des solutions du modèle numérique aux paramètres à identifier, de la sensibilité de la fonctionnelle d'erreur mesurant la corrélation numérique-expérimentale

ainsi que de la performance de la technique d'optimisation adoptée. Le principal avantage de telles méthodes est de permettre l'identification de paramètres dans des conditions de test pour lesquelles aucune solution analytique inversible n'est disponible et qui sont particulièrement aisées à réaliser expérimentalement et donc fournissent des mesures précises.

### **Méthodes dynamiques et échantillons de type poutre**

Les équations qui régissent la dynamique des poutres sont décrites exhaustivement dans la littérature, et notamment dans [7]. Des tests vibratoires en flexion d'une poutre en stratifié composite soumise à une excitation transitoire ou harmonique forcée présentent un grand intérêt pour la caractérisation des matériaux et offrent en outre l'avantage d'être relativement simples à réaliser [8,9]. Cependant, de telles méthodes requièrent généralement l'usage de plusieurs types de spécimen pour la détermination de l'ensemble des propriétés élastiques du composite et les écarts observés entre les modules de cisaillement  $G_{12}$  et coefficient de Poisson  $\nu_{12}$  identifiés et les valeurs mesurées en statique sont parfois importants.

### **Méthodes dynamiques et échantillons de type plaque**

Des éprouvettes de type plaque présentent l'avantage principal par rapport aux poutres de permettre l'identification de l'ensemble des propriétés constitutives  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $G_{12}$ ,  $G_{23}$ ,  $G_{13}$  et  $\nu_{12}$  à partir d'un échantillon unique, ce qui réduit les dispersions dues à l'emploi de plusieurs échantillons de type poutre prélevés dans le matériau à étudier.

Bien que basée sur un modèle analytique et non pas numérique, la première technique d'identification mixte basée sur les propriétés vibratoires de plaque a été développée par C.S. Kim et S.M. Dickinson [10] qui utilisèrent une expression à trois termes pour la déformée de plaques orthotropes.

L.R. Deobald et R.F. Gibson [11] s'appuyèrent sur la méthode de Rayleigh - Ritz basée sur un développement à six termes de fonctions « de poutre » (déformées des modes propres de poutres), combinée à une analyse modale, pour déterminer les constantes élastiques de plaques à orthotropie particulière (composées de couches orthotropes, qui sont empilées de telle sorte que le stratifié obtenu ne possède pas de couplage membrane-flexion). Cette approche donne de bons résultats (environ 3% d'erreur sur le module longitudinal d'un composite unidirectionnel carbone/époxyde), mais ne permet pas d'obtenir des valeurs correctes du coefficient de Poisson dans le plan. Un jeu initial de propriétés élastiques du matériau étudié est nécessaire pour démarrer le processus itératif, permettant de recalibrer les fréquences mesurées expérimentalement avec les fréquences calculées. La convergence de

l'algorithme d'optimisation dépend fortement de l'estimation initiale des propriétés élastiques. Les conditions aux limites utilisées par les auteurs sont de type libre-libre ou d'encastrement. Il est montré que les meilleurs résultats sont obtenus pour des conditions aux limites libre-libre, car celles-ci sont facilement réalisables expérimentalement avec un excellent degré de précision. Les mesures dynamiques sont réalisées à l'aide d'une méthode d'excitation impulsionnelle par marteau d'impact et d'un capteur à courant de Foucault pour une mesure sans contact de la réponse de la plaque, tandis que les conditions aux limites sont approchées en posant le spécimen sur un matelas de coton extrêmement souple.

Parallèlement, M.E. McIntyre et J. Woodhouse [12] employèrent comme expression de la déformée de la plaque des séries de puissance de la forme

$$w(x, y) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m a_{ij} x^i y^j$$

où  $w$  représente le déplacement transverse du plan moyen en tout point  $(x, y)$  de la plaque, tandis que les coefficients  $a_{ij}$  représentent les inconnues du système.

Les déformées des modes de basses fréquences des plaques sont approximées en utilisant des polynômes de degré 11. Les modes propres sont identifiés de manière expérimentale en utilisant la technique des figures de Chladni (une fine poudre est répandue à la surface de la plaque et la fréquence d'excitation par un haut-parleur est ajustée jusqu'à ce que les lignes nodales apparaissent). Cette méthode offre l'avantage de ne pas perturber la valeur des fréquences mesurées comme cela peut être le cas lorsqu'un accéléromètre est placé sur la structure. Des blocs de mousse positionnés sur les bords de la plaque à l'emplacement des lignes nodales du mode étudié sont choisis pour assurer expérimentalement des conditions aux limites du type libre-libre.

H. Sol [13] se basa quant à lui sur des polynômes de Lagrange afin d'exprimer la déformée de la plaque. Il montre que pour les 5 premières fréquences propres d'une plaque, la convergence est atteinte pour des polynômes de degré 7. Il est le premier à employer une méthode d'estimation bayésienne pour déterminer les six constantes élastiques recherchées. Cette méthode d'identification s'appuie sur une approche statistique des systèmes vibratoires et permet de prendre en compte un intervalle de confiance (variance) pour les mesures expérimentales. Le recalage des paramètres à identifier dans le modèle numérique est effectué jusqu'à ce que les valeurs des fréquences calculées correspondent à celles obtenues expérimentalement, le processus itératif ayant alors pour but de maximiser la probabilité du set de paramètres d'identification. Ce type d'approche d'identification a le mérite de fournir à

la fois les propriétés constitutives recherchées et leur variance estimée. L'auteur développe également une technique permettant la mesure du coefficient de Poisson  $\nu_{12}$  pour des plaques orthotropes. Cette méthode est basée sur l'influence qu'a ce coefficient sur les fréquences du mode en croix et du mode circulaire (modes particuliers) apparaissant lorsque la géométrie de la plaque vérifie le rapport :

$$\frac{a}{b} = \left( \frac{D_{11}}{D_{22}} \right)^{1/4}$$

où  $a$  et  $b$  sont respectivement le plus grand et le plus petit côté de la plaque, tandis que  $D_{11}$  et  $D_{22}$  représentent les rigidités de flexion du stratifié dans les direction  $x$  et  $y$ . Dans une telle configuration (appelée « plaque de Poisson »), les pulsations propres de ces deux modes sont influencées de manière équivalente par les deux rigidités de flexion  $D_{11}$  et  $D_{22}$  (liées à  $E_1$  et  $E_2$ ) et par le coefficient de Poisson  $\nu_{12}$ , contrairement aux autres modes propres de flexion dépendant quant à eux d'un seul paramètre à la fois. On observe alors que si  $\nu_{12} = 0$ , les fréquences propres de ces deux modes sont confondues et que lorsque le coefficient de Poisson augmente, ces deux fréquences se séparent, la fréquence du mode en croix diminuant et celle du mode circulaire augmentant. Cependant, le choix d'une telle géométrie nécessite une connaissance a priori de la plaque à étudier, ce qui présente un gros inconvénient pour la caractérisation systématique de matériaux composites. Les modes propres particuliers en croix et en « O » furent également utilisés par K.-E. Fällström [14, 15] pour la détermination précise de la valeur du coefficient de Poisson  $\nu_{12}$ .

Le même type de fonction et d'approche que celles de Deobald et Gibson est retenu dans les travaux de T.C. Lai et K.H. Ip [16]. La plaque à tester est suspendue en position verticale à l'aide de longs fils et est excitée à l'aide d'un pot vibrant. Le schéma itératif d'identification évalue les corrections des paramètres, en se basant sur les sensibilités du modèle numérique de Rayleigh-Ritz aux paramètres d'identification. Des résultats d'identification satisfaisants sont obtenus pour des plaques généralement orthotropes et la stabilité de convergence de l'algorithme d'optimisation est vérifiée. Cependant, bien que la précision de la détermination de  $E_1$ ,  $E_2$  et  $G_{12}$  soit acceptable, le coefficient de Poisson  $\nu_{12}$  pose encore problème. De plus, le module de Young longitudinal  $E_1$  peut également être relativement mal estimé si les plaques ont un rapport d'orthotropie  $E_1/E_2$  très élevé. Les auteurs précités étendirent également leur approche en recourant à un procédé bayésien d'optimisation statistique [17].

Les travaux de C.M. Mota Soares et al. sont basés sur une approche sensiblement identique à celles citées précédemment, mais en incluant toutefois à leurs modèles une modélisation simplifiée des effets des déformations en cisaillement transverse, ce qui permet de rechercher également les modules de cisaillement transverse. Ces auteurs élaborèrent également une technique d'identification numérique-expérimentale basée sur un modèle d'éléments finis de plaque, en développant au premier ordre les champs de déplacement dans l'épaisseur de la plaque (First Order Shear Deformation Theory, FSDT) [18]. Comme tous les travaux précédents, seules les fréquences propres mesurées expérimentalement servent de base au processus d'optimisation, qui vise alors à minimiser l'écart entre les fréquences propres expérimentales et numériques. Les auteurs présentent également trois méthodes de calcul des sensibilités du modèle numérique, à savoir des approches analytique, semi-analytique et numérique, les deux premières étant conseillées en raison de leur faible coût opératoire. Ces trois méthodes d'analyse des sensibilités sont validées et leur équivalence est démontrée. Les résultats d'identification fournis s'avèrent satisfaisants pour  $E_1$ ,  $E_2$  et  $G_{12}$ , mais le module de cisaillement transverse  $G_{23}$  n'a pu être identifié correctement que pour des rapports d'épaisseur  $a/h$  compris entre 5 et 10 (où  $a$  représente le plus grand côté de la plaque et  $h$  son épaisseur). Cette restriction provient essentiellement des limites inhérentes à la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT) utilisée pour l'identification. Le coefficient de Poisson  $\nu_{12}$  n'a pu être que grossièrement estimé du fait de la faible sensibilité des fréquences à ce paramètre. Cette méthode d'identification s'est révélée également très sensible à la qualité des données expérimentales, ce qui pousse les auteurs à recommander un rapport d'aspect  $a/b$  proche de 2 (où  $b$  est le plus petit côté de la plaque), de manière à séparer clairement les modes et, par conséquent, à faciliter la mesure des fréquences propres sans avoir recours à une méthode de curve fitting modal.

Cette approche fut étendue par la suite en employant un modèle d'éléments finis avec déformation en cisaillement transverse d'ordre plus élevé [19, 20]. Ces méthodes permettent alors une identification raisonnablement précise des modules de cisaillement transverse  $G_{13}$  et  $G_{23}$ , mais uniquement pour une plaque très épaisse. De plus, seuls les modes correspondant aux fréquences propres les plus élevées semblent influencés par les effets de déformation en cisaillement transverse et la moindre erreur de mesure sur les fréquences de ces derniers modes se répercute fortement sur la précision de l'estimation des modules de cisaillement transverse. Le coefficient de Poisson  $\nu_{12}$  reste également difficilement identifiable du fait de

sa faible influence sur les fréquences propres et son estimation est d'autant moins précise que le matériau est fortement anisotrope.

Une nouvelle méthode d'identification des propriétés élastiques et d'amortissement des matériaux composites a été développée par J. De Visscher, H. Sol, W. P. De Wilde et J. Vantomme [21]. Cette technique cherche à déterminer les modules complexes d'élasticité par comparaison entre les paramètres modaux mesurés et les résultats d'un modèle numérique. La relation entre les paramètres modaux et les propriétés des matériaux est obtenue par l'utilisation conjointe d'un modèle numérique du spécimen et de la méthode de l'énergie de déformation modale (modal strain energy method). Un lien entre les modules d'élasticité complexes et les paramètres modaux est dérivé pour le cas d'une plaque mince. La mesure de l'amortissement modal de quelques modes spécifiquement choisis permet de déterminer les paramètres d'amortissement interne. Cependant, bien que la méthode soit relativement simple et rapide à mettre en œuvre, la précision des mesures d'amortissement modal est entachée de plusieurs sources d'erreurs inévitablement dues aux divers amortissements externes indésirables. En effet, malgré une méthode de mesure sans contact de haute qualité basée sur une excitation acoustique et une mesure par interféromètre laser à effet Doppler, l'amortissement des suspensions (fils minces) et de l'air ambiant reste non négligeable. Les paramètres d'amortissement ont toutefois pu être identifiés avec une erreur de l'ordre de 2 à 15%, ce qui reste malgré tout une bonne performance.

Des résultats encourageants [22] ont également été obtenus par identification à la fois des propriétés élastiques de plaques épaisses et de l'amortissement interne, grâce à un modèle d'éléments finis incluant une modélisation des effets de cisaillement transverse d'ordre élevé ainsi qu'un modèle de l'amortissement interne. L'optimisation est réalisée également en cherchant à minimiser une fonction objectif basée sur les pulsations propres et les amortissements modaux mesurés en orientant la mise à jour des paramètres à l'aide des sensibilités du modèle. Un système non linéaire est alors résolu itérativement par une méthode de moindres carrés. Les résultats trouvés pour les modules élastiques dans le plan sont satisfaisants, comme pour la plupart des autres méthodes. Les modules de cisaillement transverse sont néanmoins estimés plus précisément qu'avec les autres méthodes, mais leur exactitude reste modérée et surtout dépend fortement de l'épaisseur de la plaque et de la qualité des mesures. Le coefficient de Poisson dans le plan  $\nu_{12}$  reste mal identifié et la véracité de l'identification de l'amortissement interne n'a pas pu être complètement vérifiée du fait de la faible précision des mesures de validation.

Peu d'auteurs retiennent pour la caractérisation dynamique des propriétés constitutives de plaques composites d'autres informations que les fréquences propres. Les travaux de K.-E. Fällström et M. Jonsson [23] et K.-E. Fällström [14] utilisent les déformées des modes observés par holographie pour comparer les résultats expérimentaux aux déformées obtenues par les éléments finis. En effet, les franges de l'interférogramme produit par la technique holographique peuvent être considérées comme des lignes d'iso-amplitude à la surface de la plaque, faisant apparaître alors clairement les lignes nodales. Les propriétés élastiques du matériau à identifier sont ajustées jusqu'à ce que les résultats trouvés à l'aide du modèle coïncident avec les fréquences et les modes des deux expériences (vérification qualitative). Il est également mis en évidence qu'une variation du coefficient de Poisson  $\nu_{12}$  dans le modèle d'éléments finis n'a en général que peu d'influence sur les fréquences des modes, mais agit de manière visible sur la courbure des lignes nodales. K.-E. Fällström et M. Jonsson [23] utilisent eux aussi des « plaques de Poisson » excitées à la pulsation propre du mode en croix afin de déterminer  $\nu_{12}$ . Des valeurs constantes de  $E_1$ ,  $E_2$  et  $G_{12}$  sont alors imposées et la valeur de  $\nu_{12}$  est modifiée jusqu'à ce que les pentes des lignes nodales ou l'angle entre les lignes nodales des modes calculés et mesurés correspondent. Il est à noter que bien que l'allure des modes soit observée par les auteurs, cette technique reste qualitative puisque aucune mesure de déformée réelle n'est réalisée.

Afin d'améliorer et de fiabiliser les techniques d'identification mixtes basées sur les pulsations propres de plaques composites épaisses [24-26], un ensemble de recommandations portant sur le choix des dimensions des spécimens de tests ont été formulée [27]. Les critères principaux utilisés pour cette optimisation géométrique sont l'absence de modes « dans le plan » dans les six premiers modes ainsi que la séparation nette des pics de chacun des six premiers modes.

Plus récemment, de nombreuses variantes des techniques d'identification mixtes basées sur les fréquences propres précédentes ont été développées, avec principalement la mise au point de nouvelles techniques d'optimisation. On notera particulièrement l'utilisation d'algorithmes génétiques [28, 29] qui, contrairement aux techniques d'identifications basées sur l'analyse bayésienne ou la minimisation de type moindres carrés, ne nécessitent pas le calcul coûteux des gradients des fréquences propres par rapport aux paramètres.

Une autre technique permettant d'accélérer la procédure d'identification est la mise en œuvre des principes de planification d'expériences et de surface de réponse [30, 31]. Dans cette approche, un modèle analytique approché (surface de réponse) de l'évolution des

fréquences propres sur une plage de paramètres est construit à partir d'un ensemble de modèles numériques. Une fois l'approximation formée sur ce domaine, l'identification des paramètres constitutifs peut être réalisée, sans avoir recours à un modèle numérique, en cherchant alors à minimiser l'écart entre l'approximation analytique et les mesures expérimentales. Ces techniques possèdent donc l'avantage de ne nécessiter que peu d'effort de calcul pour l'identification à proprement parler, la majorité du coût opérationnel étant concentré dans la détermination de la surface de réponse. Cependant, la précision de cette technique reste fortement dépendante de la qualité de l'approximation analytique.

Parallèlement, des travaux étendant les différentes approches d'identification mixte existantes à la détermination des propriétés de structures « intelligentes » avec actionneurs piézo-électriques intégrés ont été présentés par A. L. Araújo, C. M. Mota Soares, J. Herskovits et P. Pedersen [32], montrant à nouveau tout l'attrait que représentent ces techniques de caractérisation de paramètres.

### 1.2.3 Conclusions

Cet « état de l'art » des méthodes de caractérisation dynamique des matériaux composites montre l'intérêt de la recherche pour ce type d'approche, lié aux nombreux avantages qu'elles apportent par rapport aux tests statiques traditionnels :

- les mesures modales effectuées ne sont pas destructives ;
- les résultats obtenus concernent l'ensemble du spécimen de test et diminuent ainsi les dispersions observées avec des échantillons de dimensions plus réduites ;
- la préparation des éprouvettes est en général minimale ;
- la mesure des fréquences de résonance est très rapide ;
- un seul test peut être utilisé pour identifier précisément la majorité des propriétés élastiques d'un stratifié composite.

On peut aussi observer que, malgré le grand potentiel que représentent les méthodes mixtes numériques-expérimentales dans le domaine de l'identification de paramètres de matériaux, les méthodes actuelles ne fournissent pas encore des résultats d'identification satisfaisants pour l'ensemble des paramètres élastiques recherchés, notamment au niveau des modules de cisaillement transverse  $G_{13}$  et  $G_{23}$  ainsi que du coefficient de Poisson dans le plan  $\nu_{12}$ .

De cette étude bibliographique, nous déduisons que les conditions permettant d'obtenir une meilleure précision d'identification sont les suivantes :

- l'utilisation d'un modèle numérique de haute précision prenant en compte, avec suffisamment de sensibilité, les effets de cisaillement transverse afin de rendre possible l'identification des modules de cisaillement transverse avec un bon degré d'exactitude ;
- une méthode de mesure extrêmement précise et représentant parfaitement le cas simulé, une attention toute particulière devant être portée à la réalisation des conditions aux limites ainsi qu'aux méthodes d'excitation et de mesure, qui seront préférentiellement sans contact et si possible sans masse ajoutée ;
- une méthode d'optimisation très sensible, prenant en compte un maximum d'informations expérimentales et notamment les formes propres, pour obtenir une convergence rapide, stable et précise.

### **1.3 Objectifs et organisation du travail**

L'objectif principal de ce travail est d'étendre l'enveloppe de performance des méthodes d'identification mixte numérique-expérimentale basées sur des données modales, afin de permettre une caractérisation précise et systématique des propriétés constitutives  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $G_{12}$ ,  $G_{23}$ ,  $G_{13}$  et  $\nu_{12}$  de matériaux composites stratifiés en un seul test vibratoire.

Dans le but d'améliorer l'efficacité des méthodes d'identification mixtes existantes, nous proposons d'introduire les nouveautés suivantes :

- utiliser la forme d'un grand ensemble de modes propres pour l'élaboration de nouveaux critères d'identification afin d'obtenir de meilleures propriétés de convergence (précision, répétabilité et robustesse) pour les paramètres constitutifs peu sensibles ( $G_{23}$ ,  $G_{31}$  et  $\nu_{12}$ ) ;
- développer et intégrer un modèle d'éléments finis de coque avec déformation en cisaillement d'ordre élevé de haute précision qui permet de simuler toute la complexité du comportement des coques composites épaisses, notamment les effets de déformation en cisaillement transverse ;
- mettre au point une technique de mesure de haute précision et sans contact des modes et fréquences propres de spécimens en stratifié composite ; l'utilisation conjointe de méthodes de mesure modale par interférométrie laser à balayage et d'excitation

acoustique devrait fournir des mesures très précises des modes et fréquences propres, tout en permettant une excellente corrélation avec les modèles numériques due aux faibles effets de bord.

En résumé, notre étude des méthodes actuelles de caractérisation mixte des propriétés constitutives de matériaux composites nous amène à formuler la proposition suivante :

« Il est possible d'identifier les propriétés élastiques  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $G_{12}$ ,  $G_{23}$ ,  $G_{31}$  et  $\nu_{12}$  d'un composite avec une méthode d'identification mixte numérique-expérimentale par recalage modal et fréquentiel d'un modèle d'éléments finis de coque HSDT sur la base des fréquences et modes propres mesurés à l'aide d'une méthode d'analyse modale sans contact».

Ce travail se décompose en cinq tâches distinctes permettant l'élaboration d'une nouvelle technique d'identification mixte numérique – expérimentale par recalage modal et fréquentiel des propriétés constitutives de structures en composite stratifié :

- 1) Développement d'un modèle d'éléments finis de coque à déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT)
- 2) Mise au point d'une méthode de mesure non invasive et de haute précision des modes et fréquences propres
- 3) Définition des fonctions d'erreur modales pour l'identification des paramètres
- 4) Développement d'un algorithme d'identification mixte numérique-expérimental
- 5) Validation de la méthode proposée par rapport à des tests de caractérisation classiques

En raison de l'approche pluridisciplinaire du développement proposé, la structure de ce mémoire est articulée en cinq chapitres correspondant aux différents domaines de recherche abordés. Le présent chapitre (chapitre 1) dresse l'état des connaissances actuelles dans le domaine de la caractérisation des matériaux composites et fixe les objectifs de recherche de ce travail. Dans le chapitre 2 sont présentés les développements théoriques d'un modèle numérique d'éléments finis de coque HSDT ainsi que sa validation analytique, expérimentale et numérique. Le troisième chapitre traite de l'élaboration de la technique de mesure modale sans contact des fréquences et modes propres de structures en stratifiés composites. Les détails du système de mesure de la réponse vibratoire et le développement d'une méthode d'excitation acoustique originale y sont également présentés. Le chapitre 4 est dédié aux développements de nouveaux critères d'identification modale et de l'algorithme d'optimisation mixte numérique – expérimentale. Les résultats d'une étude paramétrique des

sensibilités de plaques en matériaux composites stratifiés par rapport aux paramètres constitutifs y figurent également. Le dernier chapitre est consacré quant à lui à la validation expérimentale sur plusieurs types de plaques en stratifiés composites de la méthode d'identification mixte développée dans les chapitres précédents et permet ainsi de vérifier concrètement la performance de la technique proposée.

## Chapitre 2 Modèles d'éléments finis

### 2.1 Objectifs

Dans le contexte des méthodes d'identification mixte numérique-expérimentale (Figure 2.1), le rôle du modèle de simulation est de fournir une évaluation aussi précise que possible de la réponse du système testé pour des paramètres d'identification variables. Lors de la résolution itérative du problème inverse d'identification mixte, la consistance et la précision du modèle numérique influencent directement l'exactitude des paramètres identifiés. Afin de garantir leur détermination avec un bon degré de précision, la solution du problème numérique se doit d'être aussi sensible que possible à l'ensemble des paramètres recherchés. De plus, en raison de la nature itérative des procédures d'identification mixte, l'efficacité de calcul du logiciel de résolution du problème numérique direct détermine inévitablement la productivité et la performance de la méthode d'identification mixte.

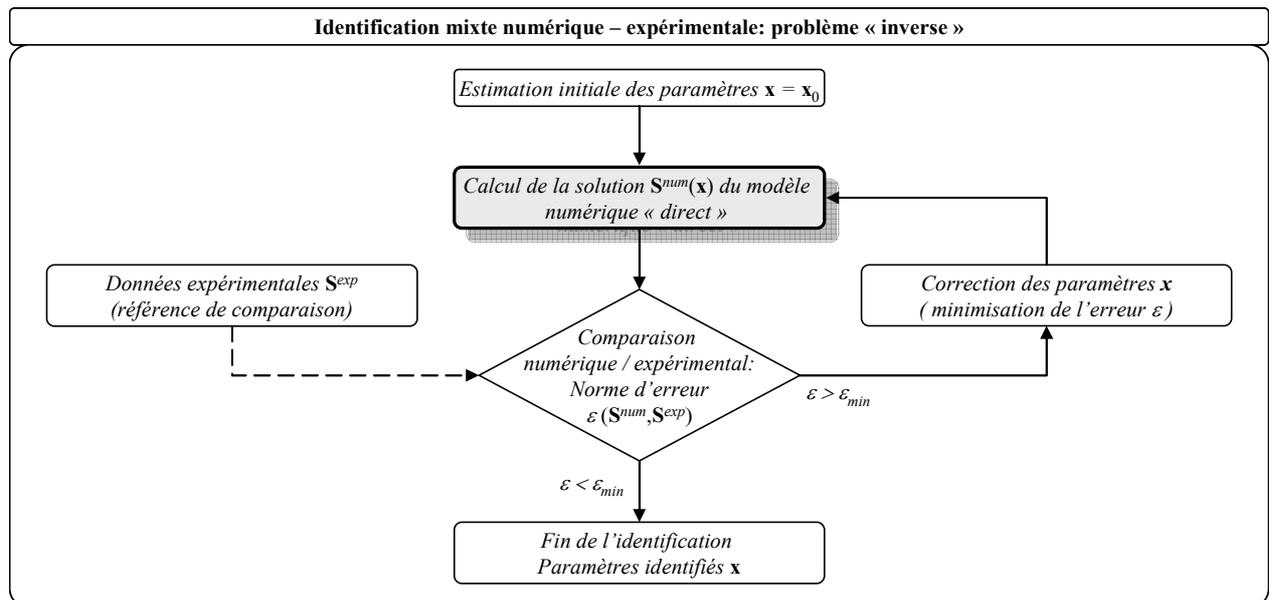


Figure 2.1: Rôle du modèle numérique dans la procédure d'identification mixte

## 2.2 Théories des stratifiés composites

### 2.2.1 Généralités

Un matériau composite est une combinaison de deux matériaux distincts que l'on appelle généralement la matrice et le renfort, aux propriétés souvent complémentaires, qui associés possèdent des caractéristiques physiques complètement différentes de leurs composants. La matrice a généralement pour rôle mécanique de fournir une certaine cohésion entre les différents éléments de renfort et ainsi joue le rôle de « ciment » en assurant un minimum d'homogénéité à l'ensemble. Dans la majorité des matériaux composites, les propriétés mécaniques sont essentiellement fournies par les renforts, de telle sorte que le taux de renfort dans la matrice ainsi que la qualité de l'interface renfort / matrice conditionnent directement les propriétés mécaniques du matériau composite. Les renforts peuvent se trouver utilisés sous différentes formes, comme par exemple en fibres longues, en fibres courtes, en sphères et même en tissu de fibres plus ou moins complexe (tissage 2D, voire même 3D). Ainsi, de nos jours, un très grand nombre de composites sont utilisés de manière courante et il est pratiquement impossible de les traiter tous de la même manière, tant leurs propriétés sont variables. Cependant, nous pouvons distinguer quelques familles de composites en fonction du type de matrice et de renfort utilisés (Tableau 2.1 et Tableau 2.2). Du point de vue des applications industrielles, les composites les plus répandus sont caractérisés généralement par une matrice polymère et des renforts sous forme de fibres longues tissées ou non. Les principales fibres employées aujourd'hui sont de type fibres de verre pour les applications à coûts réduits, ainsi que fibres de carbone et aramide pour les applications plus exigeantes.

| <i>Type de matrice</i> | <i>Exemples</i>                                    | <i>Propriétés</i>  |
|------------------------|--|--|
| Polymère               | résine époxyde, polyester, PEEK, PEKK, PPS etc.... | Matériaux pouvant être de type thermodurcis ou thermoplastiques, faible résistance à la température, légers et facilement moulables, généralement ductiles.  |
| Métaux                 | aluminium, magnésium, tungstène                    | Matériaux mis en œuvre par fonderie ou par métallurgie des poudres de moyenne à haute température de fusion, à bonne résistance mécanique intrinsèque, à densité moyenne à très élevée, généralement ductiles mais parfois fragiles. |
| Céramiques             | carbure de Silicium (SiC)                          | Matériaux généralement mis en œuvre par frittage de poudres, à très haute température de fonctionnement, à densité élevée, mais fragiles.  |

**Tableau 2.1 : Type de matrices utilisées dans les composites courants**

On appelle « stratifié » un matériau composé d'un ensemble ordonné de couches d'orientation et d'épaisseur données, constituées de divers matériaux. Une couche d'un stratifié est souvent appelée une strate. Le type de stratifié est défini généralement par sa séquence d'empilement, information qui fournit de manière synthétique l'orientation des diverses couches d'un stratifié. Par exemple, un stratifié de type  $(90^\circ, 0^\circ)_{2s}$  est constitué en fait de 8 couches orientées comme suit : deux groupes de plis à  $90^\circ$  et  $0^\circ$ , puis par symétrie de deux groupes de plis à  $0^\circ$  et  $90^\circ$ . L'avantage que présentent les composites stratifiés est de permettre de créer des matériaux aux propriétés mécaniques orientées de manière optimale afin de mieux répondre aux sollicitations de la structure.

| <i>Type de renfort</i>                            | <i>Propriétés</i>   | <i>Matrice utilisée couramment</i>                     |
|---|---|--|
| fibres ou paillettes de verre                     | fibres de verre de type E ou R, à différents diamètres, souvent en tissus ou bobines, à faible coût, à densité moyenne et à propriétés mécaniques moyennes  | polymères: polyester, résine époxyde, thermoplastiques |
| fibres de carbone                                 | fibres obtenues par carbonisation de polymères ou frittage, souvent en tissu pré-imprégnés ou bobines, à coût moyen à élevé selon la qualité, de faible densité, à excellentes rigidité et limite de rupture, à faible résilience, à usinage relativement difficile mais possible avec des outils diamantés ou en métal dur | polymères: résine époxyde, PPS, PEEK, PEKK etc...      |
| fibres d'aramide (Kevlar)                         | fibre polymère, souvent en tissu ou pré-imprégnée, parfois combinée en fils mixtes aramide-carbone, à densité faible, à rigidité moyenne à élevée, à hautes ténacité et résilience, très difficile à découper et usiner   | polymères: résine époxyde, PPS, PEEK, PEKK etc...      |
| fibres polypropylène à haute ténacité             | fibre polymère, souvent en tissu ou pré-imprégnées, à densité très faible, à rigidité faible à moyenne, à très hautes ténacité et résilience mais difficile à découper et usiner  | polymères: résine époxyde, polyester etc...            |
| fibres / particules d'alumine (oxyde d'aluminium) | fibre à très hautes rigidité et limite de rupture, à densité élevée, à prix élevé et à très haute limite de température   | métaux: aluminum, magnésium; céramiques                |

**Tableau 2.2 : Propriétés des renforts couramment utilisés**

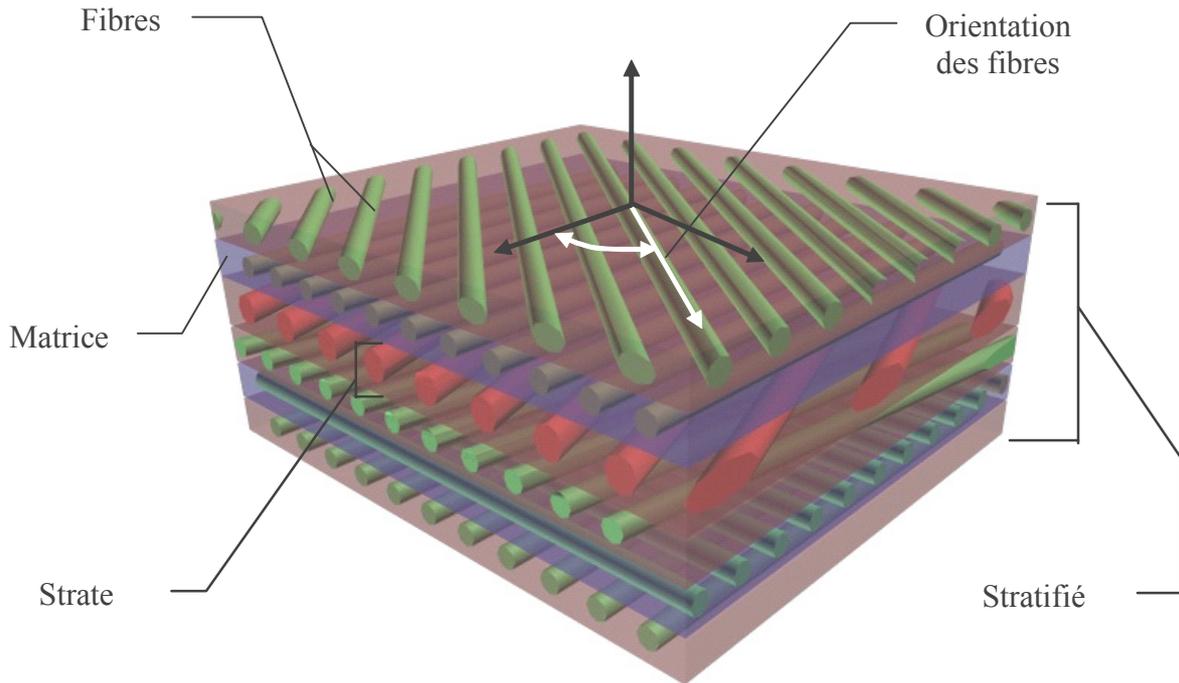


Figure 2.2: Nomenclature des stratifiés composites

Une des propriétés essentielles des matériaux composites est le caractère directionnel de leurs propriétés mécaniques. En effet, ces matériaux ne possèdent pas du tout les mêmes propriétés dans le sens des renforts que dans la direction perpendiculaire aux renforts. Ce type de propriétés est souvent modélisé par une loi de comportement élastique orthotrope, loi qui permet de représenter un matériau dont les propriétés mécaniques élastiques possèdent trois directions principales orthogonales (soit trois plans de symétrie). Ce type de loi permet à la fois de modéliser des composites fibreux unidirectionnels et des composites à fibres tissées, comme aussi des matériaux plus isotropes comme par exemple les plastiques renforcés de fibres courtes ou même des matériaux isotropes standard. La loi de comportement d'un matériau orthotrope élastique en déformations infinitésimales, exprimée dans le repère d'orthotropie du matériau, s'écrit [7]:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{C}_{11} & \bar{C}_{12} & \bar{C}_{13} & 0 & 0 & 0 \\ \bar{C}_{12} & \bar{C}_{22} & \bar{C}_{23} & 0 & 0 & 0 \\ \bar{C}_{13} & \bar{C}_{23} & \bar{C}_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{C}_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{C}_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{C}_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{31} \\ 2\varepsilon_{12} \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

$$\text{avec : } \bar{C}_{11} = \frac{1 - \nu_{23}\nu_{32}}{E_2 E_3 \Delta} ; \bar{C}_{12} = \frac{\nu_{21} + \nu_{31}\nu_{23}}{E_2 E_3 \Delta} = \frac{\nu_{12} + \nu_{32}\nu_{13}}{E_1 E_3 \Delta} ; \bar{C}_{13} = \frac{\nu_{31} + \nu_{21}\nu_{32}}{E_2 E_3 \Delta} = \frac{\nu_{13} + \nu_{12}\nu_{23}}{E_1 E_2 \Delta}$$

$$\bar{C}_{22} = \frac{1 - \nu_{13}\nu_{31}}{E_1 E_3 \Delta} ; \bar{C}_{23} = \frac{\nu_{32} + \nu_{12}\nu_{31}}{E_1 E_3 \Delta} = \frac{\nu_{23} + \nu_{21}\nu_{13}}{E_1 E_2 \Delta} ; \bar{C}_{33} = \frac{1 - \nu_{12}\nu_{21}}{E_1 E_2 \Delta}$$

$$\bar{C}_{44} = G_{23} , \bar{C}_{55} = G_{31} , \bar{C}_{66} = G_{12}$$

$$\Delta = \frac{1 - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}\nu_{32} - \nu_{13}\nu_{31} - 2\nu_{21}\nu_{32}\nu_{13}}{E_1 E_2 E_3}$$

$$\nu_{ji} = \frac{E_j}{E_i} \nu_{ij} \quad (\text{pour } i, j = 1, 2, 3)$$

où les différentes variables sont définies ainsi :

$\sigma_{ij}$ : tenseur<sup>1</sup> des contraintes nominales représenté sous forme vectorisée ;

$\varepsilon_{ij}$ : tenseur des déformations infinitésimales représenté sous forme vectorisée ;

$\bar{C}_{ij}$ : tenseur d'élasticité linéaire orthotrope exprimé sous forme matricielle dans le repère des directions principales du matériau ;

$E_i$ : module d'élasticité dans la direction principale  $i$  ;

$\nu_{ij}$ : coefficient de Poisson dans la direction  $j$  pour une traction en  $i$  ;

$G_{ij}$ : module de cisaillement dans le plan  $ij$ .

Nous remarquons que pour définir un matériau avec ce modèle, dix paramètres constitutifs doivent être déterminés, soit trois modules d'élasticité, trois coefficients de Poisson, trois modules de cisaillement, ainsi que la masse volumique du matériau. Dans ce modèle, les directions principales forment un trièdre orthogonal droit. Il faut également noter que le modèle d'élasticité orthotrope est plus général qu'un modèle de composite unidirectionnel, souvent considéré comme transotrope (ou isotrope transverse). On obtient un modèle de matériau composite fibreux transotrope en imposant que :

- $E_2$  et  $E_3$  sont égaux au module d'élasticité transverse  $E_T$ ,  $E_1$  étant alors égal au module d'élasticité  $E_L$  dans la direction principale (des fibres).
- $G_{12}$  et  $G_{13}$  sont égaux au module de cisaillement  $G_{LT}$  entre la direction principale et le plan transverse,  $G_{23}$  étant alors égal au module de cisaillement  $G_{TT}$  dans le plan transverse.

<sup>1</sup> Dans ces développements, les tenseurs du deuxième ordre des contraintes et déformations sont toujours écrits sous forme de vecteurs à six composantes, tandis que les tenseurs d'élasticité du quatrième ordre sont écrits sous forme matricielle (6x6). Les produits des tenseurs du second ordre et du quatrième ordre se réduisent donc à des produits matrice-matrice, matrice-vecteur ou vecteur-vecteur.

- $\nu_{12}$  et  $\nu_{13}$  sont égaux au coefficient de Poisson  $\nu_{LT}$  entre les directions principale et transverse,  $\nu_{23}$  étant alors égal au coefficient de Poisson  $\nu_{TT}$  dans le plan transverse.

On peut ainsi décrire un matériau composite unidirectionnel transotrope par 6 constantes de matériau :  $E_L, E_T, G_{LT}, G_{TT}, \nu_{LT}$  et  $\nu_{TT}$ . Cependant, en raison des procédés de mise en œuvre des matériaux composites, on remarque souvent qu'un matériau composite unidirectionnel réel ne peut pas être considéré comme parfaitement transotrope. Ainsi, en toute généralité, pour des structures plaques ou coques<sup>2</sup>, les constantes nécessaires à la caractérisation d'un matériau orthotrope sont  $E_1, E_2, G_{12}, G_{23}, G_{31}$  et finalement  $\nu_{12}$ .

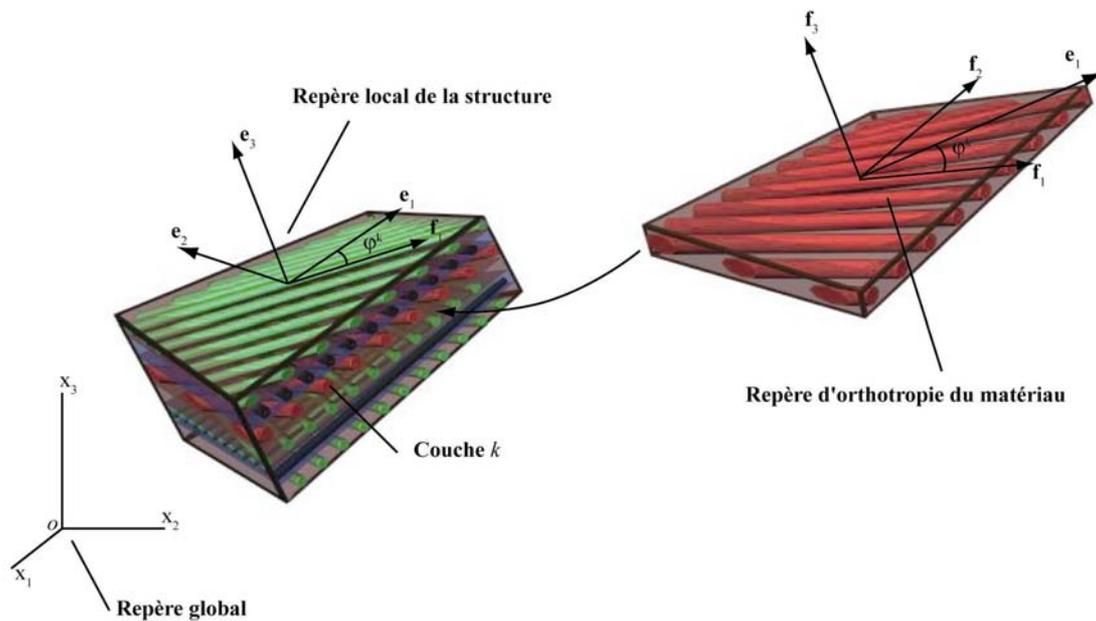


Figure 2.3 : Orientation des couches d'un stratifié orthotrope

Une autre propriété inhérente à l'anisotropie des matériaux composites est la nécessité de prendre en compte l'orientation de la loi constitutive, pour passer d'une formulation de la matrice d'élasticité  ${}^e\bar{C}$  dans le repère lié au matériau vers une représentation  ${}^eC$  dans le repère global de la structure. En effet, dans le cas des composites fibreux, la direction principale du matériau (celle des fibres) n'est généralement pas alignée avec la première direction du référentiel de la structure. Dans le cas de structures de coques ou de plaques, la troisième direction d'orthotropie est généralement considérée comme colinéaire à la normale à la

<sup>2</sup> En effet, les hypothèses classiques de plaques et de coques imposent à la fois l'incompressibilité transverse et l'absence de traction/compression transverse. Ces hypothèses annulent donc tout effet du module de Young  $E_3$  dans l'épaisseur ainsi que des coefficients de Poisson  $\nu_{13}$  et  $\nu_{23}$  associés à la déformation transverse.

surface de la structure. Cependant, afin de définir l'orientation de l'axe principal d'orthotropie du matériau  $\mathbf{f}_1$  dans le plan de la coque, l'angle  $\varphi^k$  entre les fibres (direction principale  $\mathbf{f}_1$  de la loi constitutive) de la  $k$ -ème couche et le premier axe local  $\mathbf{e}_1$  de la structure doit également être spécifié. La transformation permettant de passer du référentiel matériel au référentiel local est en fait une rotation tensorielle d'angle  $\varphi^k$  autour de l'axe  $\mathbf{e}_3$ . On peut bien sûr appliquer cette rotation au tenseur d'élasticité du quatrième ordre et écrire ainsi la loi d'élasticité orthotrope dans le repère de la structure (matrice  ${}^e C$ ) de la manière suivante [7]:

$$C^k = T^k \bar{C}^k T^{kT} \quad (2.2)$$

avec

$$T^k = \begin{bmatrix} \cos^2 \varphi^k & \sin^2 \varphi^k & 0 & 0 & 0 & -2 \sin \varphi^k \cos \varphi^k \\ \sin^2 \varphi^k & \cos^2 \varphi^k & 0 & 0 & 0 & 2 \sin \varphi^k \cos \varphi^k \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \varphi^k & \sin \varphi^k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \varphi^k & \cos \varphi^k & 0 \\ \sin \varphi^k \cos \varphi^k & -\sin \varphi^k \cos \varphi^k & 0 & 0 & 0 & \cos^2 \varphi^k - \sin^2 \varphi^k \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

La forme des matrices d'élasticité réorientées change alors par rapport à la définition (1.1) et fait apparaître des termes de couplages ( $C_{16}$ ,  $C_{26}$ ,  $C_{36}$  et  $C_{45}$ ) entre les contraintes et déformations normales et de cisaillement.

$$C^e = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & C_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{45} & C_{55} & 0 \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

Si, dans la majorité des applications, les stratifiés sont utilisés pour produire des structures de type plaque ou coque dont l'épaisseur est relativement fine par rapport aux autres directions, un important effort de développement est de nos jours consenti pour mettre en œuvre des stratifiés de plus en plus épais, notamment afin de remplacer des pièces maîtresses massives autrefois réalisées en matériaux métalliques. Dans cet effort d'extension du domaine d'application des matériaux composites, de nombreuses théories de plus en plus sophistiquées ont été développées, afin de prendre en compte le plus fidèlement possible les effets liés à l'augmentation de l'épaisseur des stratifiés. Le principal phénomène apparaissant lors de l'utilisation de composites relativement épais est la déformation en cisaillement transverse du stratifié, qui introduit un champ de déplacement non linéaire dans l'épaisseur du stratifié.

Parallèlement à l'effet de l'augmentation de l'épaisseur, la très forte orthotropie des matériaux composites modernes, avec des rapports  $E_1/G_{23}$  dépassant couramment 50 voire même 100, ne fait qu'augmenter l'importance des effets de déformation en cisaillement transverse.

Bien qu'il soit possible, du moins en théorie, de modéliser un stratifié comme un ensemble de couches de solides 3D régis chacun par la théorie de l'élasticité linéaire et liés entre eux par des équations de continuité et d'équilibre, cette approche ne peut pratiquement pas être mise en oeuvre sans hypothèses simplificatrices en raison de la complexité et de la grande généralité du problème. Ainsi, la plupart des théories traitant du comportement des stratifiés se basent sur une approche d'homogénéisation du stratifié permettant de calculer un ensemble de rigidités équivalentes pour un ensemble d'efforts intérieurs donnés. La plupart des approches reposent principalement sur des hypothèses de comportement mécanique de type plaque ou coque. A l'aide de ces méthodes, les rigidités de traction, cisaillement et flexion (ainsi que les termes de couplage entre ces différents effets) d'un stratifié composite sont calculées à partir de l'orientation, des propriétés mécaniques et des distributions d'épaisseur des couches individuelles. Ces propriétés globales du stratifié sont généralement utilisées ensuite dans différents types d'analyses structurelles et de processus de conception propres aux structures composites.

Face au nombre élevé de théories et de formulations proposées dans ce domaine, une classification générale s'avère essentielle pour appréhender les points forts et les limitations des grandes catégories de modèles.

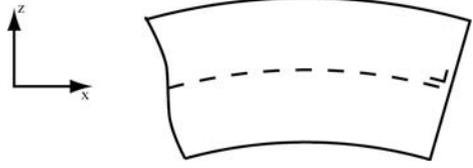
### **2.2.2 Modèles de stratifiés de type couche unique équivalente (Equivalent Single Layer - ESL)**

Parmi les différentes classes de théories, l'approche ESL est la plus fréquemment utilisée. Celle-ci se base sur l'idée de représenter un stratifié hétérogène complexe par un seul lamina statiquement équivalent (homogénéisation), ce qui permet de réduire le problème d'élasticité 3D complexe à un problème 2D bien plus simple. Cette approche pose donc l'hypothèse que le champ de déplacement dans l'épaisseur peut être considéré comme continu et appartenant à la classe de fonction  $C^1$  dans l'épaisseur. Ces théories sont très intéressantes dans l'étude des plaques et des coques, car celles-ci s'affranchissent ainsi de la discrétisation dans la direction de l'épaisseur, faisant ainsi ressortir le caractère bidimensionnel de la structure. Cependant, en considérant une approximation du déplacement unique dans toute l'épaisseur du stratifié, cette

classe de théories assure la continuité des déformations entre les diverses strates, mais ne permet pas de modéliser la continuité des contraintes aux interfaces des couches. Ainsi, les contraintes interlaminaires ne peuvent généralement pas être déterminées avec précision à l'aide de ces seules méthodes, ce qui implique donc souvent l'utilisation d'autres théories pour effectuer une correction a posteriori des contraintes. Dans cette catégorie, on considère généralement trois déclinaisons de cette approche<sup>3</sup> :

**Théorie classique des plaques stratifiées (Classical Laminated Plate Theory - CLPT)**

La théorie CLPT, qui est une généralisation aux stratifiés composites de la théorie classique des plaques, se présente comme la plus simple des approches ESL. Cette théorie se base sur les hypothèses de Kirchhoff, selon lesquelles une droite normale au plan moyen de la plaque reste perpendiculaire après déformation, ce qui revient à négliger les effets de déformation en cisaillement transverse. Ainsi, la réponse d'une plaque stratifiée ne peut être précisément déterminée avec cette méthode que si la structure est très mince et que les matériaux utilisés sont faiblement orthotropes. Le champ de déplacement approché utilisé dans cette formulation est de la forme (1.5) :



Modèle  
CLPT

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= u_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} \\ v(x, y, z, t) &= v_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} \\ w(x, y, z, t) &= w_0(x, y, t) \end{aligned} \quad (2.5)$$

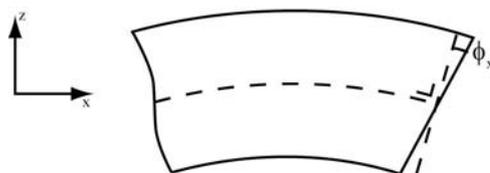
où  $(u, v, w)$  représente le vecteur des déplacements, au temps  $t$ , d'un point matériel de coordonnées nominales  $(x, y, z)$ . Le plan principal de la plaque est le plan  $x$ - $y$  et l'épaisseur  $h$  de cette dernière est orientée selon l'axe  $z$  (avec  $z \in [-h/2, h/2]$ ).

**Théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (First-order Shear Deformation Theory - FSDT)**

Comme le module de cisaillement est en général bien plus faible pour les matériaux composites que pour les matériaux isotropes traditionnels, les effets des déformations en cisaillement transverse doivent être déjà pris en compte pour des structures stratifiées faiblement à moyennement épaisses. Ainsi le principe de la théorie FSDT [34-39], étape suivante de l'approche ESL, est de relaxer l'hypothèse de normalité des sections après déformation de la théorie classique (CLPT). On introduit alors les hypothèses de plaques de

<sup>3</sup> Pour des raisons de clarté et de simplicité, seules les formulations de type plaque de ces théories seront présentées ici. Cependant toutes ces théories se généralisent aisément au cas des structures de type coque.

Reissner-Mindlin, l'approximation des déplacements dans l'épaisseur prenant ainsi en compte la rotation de la section déformée par un développement au premier ordre du champ de déplacement dans l'épaisseur. Cette hypothèse se traduit par une déformation en cisaillement transverse constante dans l'épaisseur. Cependant, du fait que les contraintes ainsi calculées ne s'annulent pas sur les surfaces externes, cette théorie nécessite l'introduction d'un facteur de correction de cisaillement. Les déformations en cisaillement transverse étant plutôt quadratiques que constantes dans l'épaisseur, le facteur de correction de cisaillement corrige les modules de cisaillement transverse  $G_{13}$  et  $G_{23}$ , de telle sorte que l'énergie de déformation du modèle linéaire soit équivalente à la solution réelle. L'inconvénient de cette approche est alors évident, puisqu'il faut connaître la solution réelle pour calculer le facteur de correction de cisaillement, ce qui n'est évidemment pas envisageable généralement. De plus, comme la solution réelle dépend directement du type de stratifié et des matériaux, il en va de même pour le facteur de correction en cisaillement, qui est différent pour chaque stratifié. Afin de résoudre cette « quadrature du cercle », plusieurs méthodes approchées ont été proposées pour le calcul de ce facteur de correction, la plupart se basant sur des solutions exactes de poutre pour évaluer le rapport des énergies de déformation. Ce facteur dépend de l'énergie de déformation du stratifié et donc à la fois du type de stratification et des matériaux. Toutefois, il est à noter que dans le cas particulier des composites unidirectionnels à isotropie transverse, la valeur exacte du facteur de correction de cisaillement est la même que celle des matériaux isotropes, soit 5/6. Ainsi, le champ de déplacement approché est de la forme :



Modèle  
FSDT

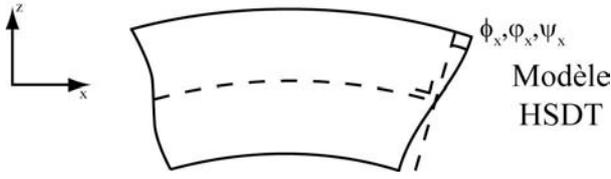
$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= u_0(x, y, t) - z\phi_x(x, y, t) \\ v(x, y, z, t) &= v_0(x, y, t) - z\phi_y(x, y, t) \\ w(x, y, z, t) &= w_0(x, y, t) \end{aligned} \quad (2.6)$$

où  $\phi_x$  et  $\phi_y$  représentent les angles de rotation des sections de la plaque par rapport à la normale de la structure non déformée (soit l'axe  $z$  ici).

### **Théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (Higher-order Shear Deformation Theory - HSDT)**

Cette classe de théories plus fines a pour base un développement du déplacement dans l'épaisseur à l'ordre deux ou plus. Ces théories sont particulièrement bien adaptées à la modélisation du comportement des plaques ou coques épaisses, où la déformation en cisaillement transverse joue un grand rôle. La plupart des modèles basés sur cette approche ne développent le champ de déplacement qu'au troisième ordre, représentant ainsi des

déformations en cisaillement transverse quadratiques dans l'épaisseur. Le champ de déplacement approché est pour le troisième ordre, de la forme :



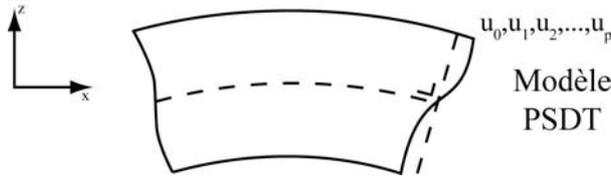
$$\begin{aligned}
 u(x, y, z, t) &= u_0(x, y, t) + z\phi_x(x, y, t) + z^2\theta_x(x, y, t) + z^3\psi_x(x, y, t) \\
 v(x, y, z, t) &= v_0(x, y, t) + z\phi_y(x, y, t) + z^2\theta_y(x, y, t) + z^3\psi_y(x, y, t) \\
 w(x, y, z, t) &= w_0(x, y, t)
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

où les variables  $\phi_x$  et  $\phi_y$  représentent les rotations des sections déformées autour des axes  $y$  et  $x$  respectivement (termes du premier ordre), tandis que  $\theta_x$  et  $\theta_y$  symbolisent les termes du second ordre (courbure) et  $\psi_x$  et  $\psi_y$  les termes du troisième ordre (gauchissement des sections).

Cependant, l'augmentation de l'ordre de l'approximation introduit des degrés de liberté supplémentaires, ce qui alourdit passablement le problème à résoudre. Afin de réduire la complexité, de nombreuses hypothèses supplémentaires ont été formulées [40-45]. Les hypothèses les plus utilisées considèrent que la plaque ou la coque est incompressible dans la direction transverse et que la contrainte de cisaillement s'annule sur les peaux du stratifié [7]. La première hypothèse entraîne alors l'annulation des termes d'ordre deux dans le développement du déplacement dans l'épaisseur, tandis que la seconde hypothèse permet de relier le coefficient du terme cubique à celui du terme linéaire, ce qui réduit finalement le problème à un même niveau de complexité que le modèle FSDT (seulement cinq inconnues  $u_0$ ,  $v_0$ ,  $w_0$ ,  $\phi_x$  et  $\phi_y$ ). La précision des rigidités de stratifié ainsi obtenues avec les méthodes HSDT est nettement supérieure à celle trouvée à l'aide des théories d'ordre inférieur et le recours au facteur de correction de cisaillement n'est généralement pas nécessaire. Par contre, comme toutes les théories ESL basées sur une approximation du déplacement uniquement, les contraintes interlaminaires ne sont toujours pas continues à l'interface entre les stratifiés, même si ces dernières se rapprochent des contraintes réelles. Si d'un point de vue de la précision en fonction de l'effort de calcul, les théories du troisième ordre simplifiées semblent optimales, des modèles HSDT d'ordre plus élevé restent bien plus précis dans le cas de coques épaisses fortement orthotropes. De tels modèles, cas particulier des formulations HSDT, sont décrits dans le paragraphe suivant.

### **Théorie de déformation en cisaillement d'ordre variable $p$ (Variable $p$ - order Shear Deformation Theory – PSDT)**

Dans l'ensemble des modèles basés sur un développement d'ordre supérieur à trois, la théorie PSDT présente l'avantage d'être basée sur un développement de Taylor complet d'ordre  $p$  variable. Le champ de déplacement approché par la théorie PSDT est de la forme suivante:



$$\begin{aligned}
 u(x, y, z, t) &= u_0(x, y, t) + u_1(x, y, t)z + \frac{1}{2}u_2(x, y, t)z^2 + \dots + \frac{1}{p!}u_p(x, y, t)z^p \\
 v(x, y, z, t) &= v_0(x, y, t) + v_1(x, y, t)z + \frac{1}{2}v_2(x, y, t)z^2 + \dots + \frac{1}{p!}v_p(x, y, t)z^p \\
 w(x, y, z, t) &= w_0(x, y, t) + w_1(x, y, t)z + \frac{1}{2}w_2(x, y, t)z^2 + \dots + \frac{1}{p!}w_p(x, y, t)z^p \quad (2.8)
 \end{aligned}$$

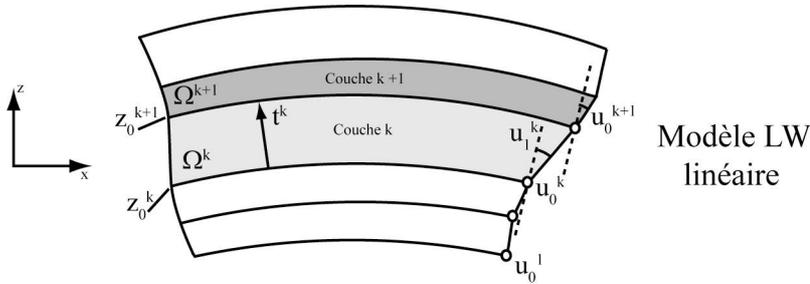
où  $u_i = \frac{\partial^i u}{\partial z^i}$ ,  $v_i = \frac{\partial^i v}{\partial z^i}$  et  $w_i = \frac{\partial^i w}{\partial z^i}$  ( $i \in [1; p]$ ) sont les dérivées premières et supérieures des déplacements  $u$ ,  $v$  et  $w$  évaluées en  $z = 0$ .

En fait, vu la complétude du développement polynomial utilisé, cette théorie généralise tous les modèles ESL basés sur une approximation polynomiale du déplacement d'ordre inférieur ou égal à  $p$ . L'ordre du développement étant variable, la précision de la solution est ajustable en fonction des besoins et des moyens de calcul, ce qui permet de trouver un optimum entre le coût opératoire et la précision souhaitée. De plus, de par la nature même des développements de Taylor, le problème ainsi posé devient hiérarchique [46], car la solution d'ordre  $p-1$  est un sous-ensemble de la solution d'ordre  $p$ . Il faut également noter que cette théorie ne pose généralement pas les hypothèses d'incompressibilité transverse et donc le champ de déplacement approché est complètement tridimensionnel.

### **2.2.3 Autres théories**

Dès lors que les théories ESL classiques se basent sur une approximation du champ de déplacement, la précision de la réponse globale (rigidité, flèche, limite de flambage ou encore fréquences et modes propres) d'un système modélisé par des plaques ou coques ESL est généralement excellente pour des épaisseurs de stratifiés correspondant au domaine de validité du modèle utilisé. Cependant, comme ces modèles ne peuvent pas rendre compte

précisément des contraintes interlaminaires au voisinage des interfaces entre les couches, d'autres approches [45, 47-54] ont été développées afin de pouvoir étudier des phénomènes tels que la délamination ou la rupture des stratifiés épais. Ainsi, la classe de modèles de type « par couche » (layerwise - LW) a été développée en ne cherchant plus cette fois à homogénéiser le matériau stratifié, mais au contraire, à décrire chaque couche indépendamment tout en imposant des relations de continuité et d'équilibre local entre les couches. De telles approches se basent généralement sur une approximation polynomiale linéaire ou cubique du déplacement à l'intérieur de chaque couche. De plus, afin de mieux satisfaire les critères de continuité des contraintes aux interfaces des couches, de nombreux modèles utilisent une approche dite hybride s'appuyant sur une approximation simultanée des déplacements et des contraintes<sup>4</sup>. Dans le cas d'une approximation linéaire par couche par exemple, le champ de déplacement approché est de la forme suivante :



$$\begin{aligned}
 u(x, y, z, t) &= u_0^k(x, y, t) + u_1^k(x, y, t)(z - z_0^k) \\
 v(x, y, z, t) &= v_0^k(x, y, t) + v_1^k(x, y, t)(z - z_0^k) \quad \text{pour } (x, y, z) \in \Omega^k \\
 w(x, y, z, t) &= w_0^k(x, y, t)
 \end{aligned} \quad (2.9)$$

avec les équations de continuité

$$\begin{aligned}
 u_0^{k+1}(x, y, t) &= u_0^k(x, y, t) + u_1^k(x, y, t)t^k \\
 v_0^{k+1}(x, y, t) &= v_0^k(x, y, t) + v_1^k(x, y, t)t^k \\
 w_0^{k+1}(x, y, t) &= w_0^k(x, y, t)
 \end{aligned} \quad (2.10)$$

où l'indice supérieur  $k$  dénote le numéro de la couche et  $t^k$  représente l'épaisseur de la couche  $k$ , alors que les indices inférieurs 0 et 1 symbolisent les dérivées d'ordre correspondant

<sup>4</sup> Afin d'assurer la compatibilité des champs des déplacements approchés et des contraintes approchées, les théories hybrides n'incluent généralement que certains termes du tenseur des contraintes dans leur approximation, notamment les termes de cisaillement interlaminaire.

Si ces modèles produisent en général d'excellents résultats, la complexité inhérente à la formulation par couche les rend bien difficiles à mettre en œuvre sur des géométries quelconques. De plus, bien que les équations d'équilibre et de continuité locale permettent de réduire quelque peu le nombre de variables, la quantité d'inconnues utilisées pour décrire le champ de déplacement global d'un stratifié reste très élevée et surtout devient proportionnelle au nombre de couches qui le constituent. Ainsi, dans le cas de stratifiés épais courants, le nombre de couches est si important (de l'ordre de 10 à plus de 100 couches) que le nombre de variables nécessaires pour décrire le comportement de telles structures devient très vite prohibitif pour un gain de précision parfois minime par rapport aux théories ESL d'ordre élevé.

### 2.2.4 Conclusions

Après ce rapide survol des théories des stratifiés composites existantes, on peut constater que, dans le contexte de l'identification mixte, les exigences de performance de calcul et de précision des solutions simulées ne peuvent vraisemblablement pas être satisfaites avec des modèles d'éléments finis FSDT classiques (pour des raisons de précision) ou encore en se basant sur des modèles layerwise (pour des raisons de temps de calcul). Le modèle PSDT avec déformations en cisaillement transverse d'ordre  $p$  variable a non seulement l'avantage d'être très général puisqu'il englobe toutes les théories HSDT, mais aussi de permettre d'ajuster le rapport temps de calcul / précision, ce qui rend particulièrement intéressante son utilisation dans une méthode d'identification mixte itérative.

## 2.3 Formulation des éléments finis de coque PSDT

Au vu des avantages évidents qu'elle représente, il a été décidé de baser la procédure d'identification mixte proposée sur une extension de la théorie PSDT au domaine des éléments finis de coque en stratifiés composites.

### 2.3.1 Problème de l'élastodynamique linéaire et modélisation par éléments finis

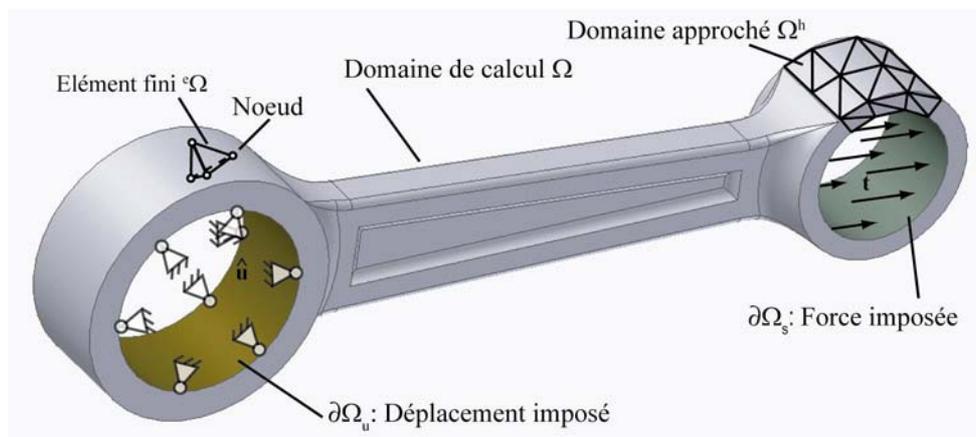


Figure 2.4: Modélisation par élément finis, domaines et discrétisation

Le problème de l'élastodynamique linéaire [55] d'un solide  $\Omega$  subissant des déplacements imposés  $\hat{\mathbf{u}}$  sur la frontière  $\partial\Omega_u$ , ainsi que des forces volumiques  $\mathbf{f}$  et des forces externes  $\mathbf{t}$  sur la frontière  $\partial\Omega_\sigma$ , peut se poser de la manière suivante :

#### Forme forte

$$\nabla^T \mathbf{C} \nabla \mathbf{u} + \mathbf{f} = \rho \ddot{\mathbf{u}} \quad \forall (\mathbf{x}, t) \text{ dans } \Omega \times ]0, T[ \quad (2.11)$$

avec les conditions aux limites

$$\mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}} \text{ sur } \partial\Omega_u \times ]0, T[ \quad (\text{conditions limites essentielles})$$

$$\mathbf{N}^T \mathbf{C} \nabla \mathbf{u} = \mathbf{N}^T \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{t} \text{ sur } \partial\Omega_\sigma \times ]0, T[ \quad (\text{conditions limites naturelles})$$

et les conditions initiales

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 \text{ dans } \Omega(t=0)$$

$$\dot{\mathbf{u}} = \dot{\mathbf{u}}_0 \text{ dans } \Omega(t=0).$$

où les différentes variables sont définies dans le Tableau 2.3.

| Symbole   | Description   |
|---|---|
| $\mathbf{x}$  | Vecteur des coordonnées d'un point matériel dans le référentiel global  |
| $\mathbf{C}$  | Tenseur d'élasticité du quatrième ordre, écrit sous forme matricielle   |
| $\mathbf{u}, \ddot{\mathbf{u}}$   | Champs vectoriels des déplacements et des accélérations (inconnues)   |
| $\mathbf{f}$  | Forces volumiques appliquées au solide $\Omega$   |
| $\hat{\mathbf{u}}$  | Déplacements imposés sur la frontière $\partial\Omega_u$  |
| $\rho$  | Masse volumique du matériau   |
| $\mathbf{N} = \begin{bmatrix} n_1 & 0 & 0 & 0 & n_3 & n_2 \\ 0 & n_2 & 0 & n_3 & 0 & n_1 \\ 0 & 0 & n_3 & n_2 & n_1 & 0 \end{bmatrix}^T$  | Matrice des cosinus directeurs de la normale $\mathbf{n}$ à la frontière $\partial\Omega_\sigma$  |
| $\mathbf{t}$  | Forces imposées (externes) sur la frontière $\partial\Omega_\sigma$   |
| $\mathbf{u}_0, \dot{\mathbf{u}}_0$  | Conditions initiales en déplacement et vitesse (champs vectoriels)  |
| $\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{23}, \sigma_{31}, \sigma_{12}\}^T$  | Tenseur des contraintes écrit sous forme vectorielle  |
| $\nabla = \begin{bmatrix} \partial/\partial x_1 & 0 & 0 \\ 0 & \partial/\partial x_2 & 0 \\ 0 & 0 & \partial/\partial x_3 \\ 0 & \partial/\partial x_3 & \partial/\partial x_2 \\ \partial/\partial x_3 & 0 & \partial/\partial x_1 \\ \partial/\partial x_2 & \partial/\partial x_1 & 0 \end{bmatrix}$ | Opérateur de dérivation généralisé.<br>$\nabla \mathbf{v}$ correspond au gradient du champ $\mathbf{v}$<br>$\nabla^T \mathbf{v}$ correspond à la divergence du champ $\mathbf{v}$ |

**Tableau 2.3 : Définition des variables principales du problème de l'élastodynamique linéaire**

En appliquant le principe des déplacements virtuels, l'équation différentielle (2.11) peut s'écrire sous la forme faible suivante :

**Forme faible**

$$\int_{\Omega} (\nabla \delta \mathbf{u})^T \mathbf{C} (\nabla \mathbf{u}) d\Omega + \int_{\Omega} \rho \delta \mathbf{u}^T \ddot{\mathbf{u}} d\Omega = \int_{\Omega} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{f} d\Omega + \int_{\partial\Omega_\sigma} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{t} d(\partial\Omega_\sigma) \quad (2.12)$$

pour

$$\forall \delta \mathbf{u} \in \{ \delta \mathbf{u} \mid \delta u_i(\mathbf{x}) \in H^1(\Omega); \delta u_i(\mathbf{x}) = 0, \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega_u, i = 1,2,3 \}$$

$$\mathbf{u} \in \{ \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \mid u_i(\mathbf{x}, t) \in H^1(\Omega); u_i(\mathbf{x}, t) = \hat{u}_i(\mathbf{x}, t), \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega_u, \forall t \in ]0, T[, i = 1,2,3 \}$$

avec les conditions initiales (pour  $t = 0$ )

$$\int_{\Omega} \rho \delta \mathbf{u}^T \mathbf{u} d\Omega = \int_{\Omega} \rho \delta \mathbf{u}^T \mathbf{u}_0 d\Omega$$

$$\int_{\Omega} \rho \delta \mathbf{u}^T \dot{\mathbf{u}} d\Omega = \int_{\Omega} \rho \delta \mathbf{u}^T \dot{\mathbf{u}}_0 d\Omega$$

où  $\delta \mathbf{u}$  représente le vecteur des déplacements virtuels et  $H^1$  est l'espace de Sobolev d'ordre 1 des fonctions dont les dérivées généralisées au premier ordre sont de carrés sommables.

On peut discrétiser le volume  $\Omega$  en un ensemble d'éléments finis  ${}^e\Omega$ . Les domaines élémentaires résultants  ${}^e\Omega$  forment alors le domaine approché  $\Omega^h$  correspondant au volume initial  $\Omega$ . Les éléments finis sont quant à eux définis par des points nodaux (ou nœuds)  $\mathbf{x}^j$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ). La formulation par éléments finis de ce problème est alors obtenue en considérant des champs de déplacements réel et virtuel approchés de la forme

$$\mathbf{u}^h(\mathbf{x}, t) = \mathbf{H}(\mathbf{x}) \mathbf{q}(t) \text{ et } \delta \mathbf{u}^h(\mathbf{x}) = \mathbf{H}(\mathbf{x}) \delta \mathbf{q} \quad (2.13)$$

où la quantité  $\mathbf{H}$  est appelée matrice des fonctions de forme (fonctions de base de l'approximation),  $\mathbf{q}$  dénote le vecteur des déplacements discrets (coefficients de l'approximation). Les fonctions de forme contenues dans la matrice  $\mathbf{H}$  et utilisées dans les éléments finis sont à support compact et possèdent la propriété habituelle  $h_i(\mathbf{x}^j) = \delta_{ij}$ . Ces fonctions de forme (généralement polynomiales par morceaux) satisfont de plus les conditions de continuité, de complétude et de différentiabilité requises par le problème.

En utilisant la propriété de support compact des fonctions de forme utilisées, il est possible de localiser la forme faible approchée sur chaque élément fini à l'aide de l'opérateur  ${}^e\mathbf{L}$  tel que  ${}^e\mathbf{q} = {}^e\mathbf{L} \mathbf{q}$  où  ${}^e\mathbf{q}$  est le vecteur des déplacements discrets de l'élément  $e$ . Cette localisation permet ainsi de calculer les matrices de rigidité et de masse du système par assemblage des matrices élémentaires de rigidité et de masse. Afin de systématiser la formulation, nous introduisons la notion d'élément père  ${}^a\Omega$ , qui est relié à chaque élément fini géométriquement déformé  ${}^e\Omega$  par une transformation de coordonnées paramétrée  ${}^eT : \xi \in {}^a\Omega \rightarrow \mathbf{x}(\xi) \in {}^e\Omega$  (bijection). L'élément père est défini ici dans un système de coordonnées  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)^T$  avec  $\xi_i \in [-1; +1]$  (pour  $i=1, 2, 3$ ). La forme faible peut alors être écrite de manière approchée de la façon suivante<sup>5</sup>

---

<sup>5</sup> Les variables préfixées en exposant par un «  $e$  » sont définies sur l'élément fini «  $e$  » tandis que l'on note les variables définies dans l'espace de l'élément père par un préfixe «  $a$  ». Ainsi  ${}^a\mathbf{H}$  représente la matrice des fonctions de formes exprimées dans l'espace de l'élément père (fonctions indépendantes de l'élément), tandis que la matrice gradient  ${}^e\mathbf{B}$ , bien que dérivée de  ${}^a\mathbf{H}$ , est propre à l'élément fini «  $e$  » car dépendant de sa configuration « déformée » ou plus précisément de la matrice jacobienne  ${}^e\mathbf{J}$ .

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{q}(t) = \mathbf{r}(t) \quad (2.14)$$

avec les conditions initiales

$$\mathbf{q}(0) = \mathbf{q}_0$$

$$\dot{\mathbf{q}}(0) = \dot{\mathbf{q}}_0$$

et les conditions aux limites essentielles :

$$\mathbf{u}^h(\mathbf{x}^j, t) = \mathbf{q}^j(t) \equiv \hat{\mathbf{q}}^j(t) \approx \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}^j, t) \quad \forall j | \mathbf{x}_j \in \partial\Omega_u^h$$

où  $\mathbf{M}$  et  $\mathbf{K}$  sont les matrices globales de masse et de rigidité et où  $\mathbf{r}$  est le vecteur des excitations. Les matrices structurelles  $\mathbf{M}$  et  $\mathbf{K}$  s'écrivent

$$\mathbf{M} = \int_{\Omega} \rho \mathbf{H}^T \mathbf{H} d\Omega = \sum_{e=1}^q {}^e\mathbf{L}^T {}^e\mathbf{M} {}^e\mathbf{L} \quad (2.15)$$

$$\mathbf{K} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} d\Omega = \sum_{e=1}^q {}^e\mathbf{L}^T {}^e\mathbf{K} {}^e\mathbf{L} \quad (2.16)$$

$${}^e\mathbf{M} = \int_{{}^e\Omega} \rho {}^e\mathbf{H}^T {}^e\mathbf{H} d\Omega = \int_{{}^a\Omega} \rho {}^a\mathbf{H}^T {}^a\mathbf{H} {}^e j^a d\Omega \quad (2.17)$$

$${}^e\mathbf{K} = \int_{{}^e\Omega} {}^e\mathbf{B}^T {}^e\mathbf{C} {}^e\mathbf{B} d\Omega = \int_{{}^a\Omega} {}^a\mathbf{B}^T {}^a\mathbf{C} {}^a\mathbf{B} {}^e j^a d\Omega \quad (2.18)$$

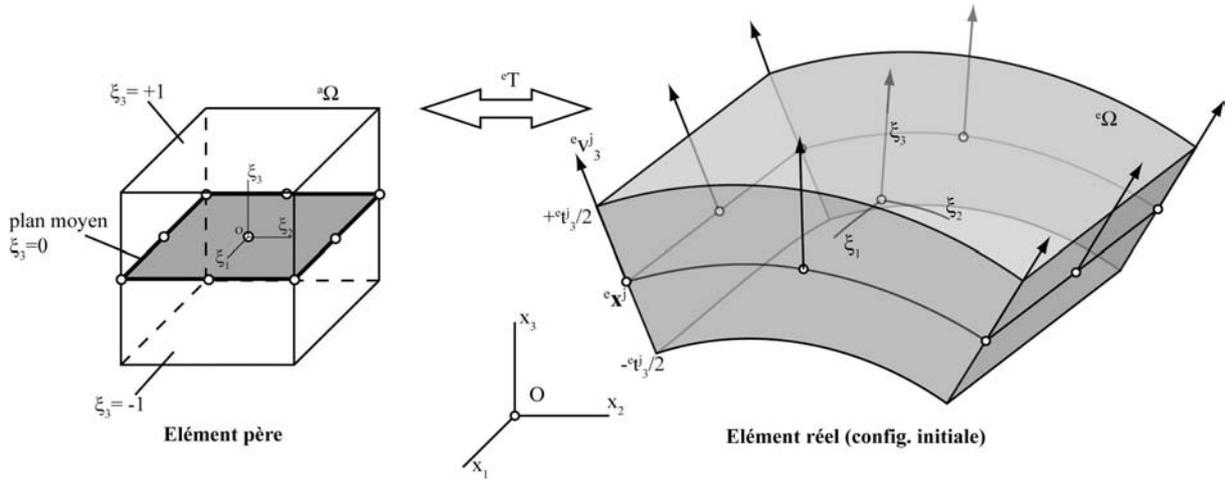
où  ${}^e\mathbf{M}$  et  ${}^e\mathbf{K}$  sont les matrices élémentaires de masse et de rigidité,  $\mathbf{B}$  représente la matrice déformation donnée par  $\nabla\mathbf{H}$  tandis que  ${}^e j$  est le jacobien de la transformation de coordonnées entre l'élément père  ${}^a\Omega$  et l'élément géométriquement déformé  ${}^e\Omega$ .

### Géométrie et transformation de coordonnées

Dans l'élément fini de coque PSDT à  $p$  nœuds développé ici, la géométrie  $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, x_3\}^T$  de la coque dans sa configuration initiale est interpolée linéairement dans l'épaisseur, comme dans le cas des coques classiques, en se basant sur les coordonnées des nœuds  ${}^e\mathbf{x}^i$  ( $i = 1, 2, \dots, p$ ) formant le plan moyen, sur les vecteurs normaux  ${}^e\mathbf{v}_3^i$  aux nœuds ainsi que sur les épaisseurs nodales  ${}^e t_3^i$  qui y sont associées. On peut donc expliciter la bijection  ${}^e T$  utilisée ici de la manière suivante

$${}^e T: \mathbf{x}(\xi) = \sum_{i=1}^p {}^a h_i(\xi_1, \xi_2) \left[ {}^e\mathbf{x}^i + \frac{1}{2} \xi_3 {}^e t_3^i {}^e\mathbf{v}_3^i \right] \quad (2.19)$$

où  ${}^a h_i(\xi_1, \xi_2)$  sont les fonctions de formes 2D associées aux nœuds du plan moyen définissant la géométrie de l'élément fini et où le vecteur  $\xi = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}^T$  symbolise les coordonnées naturelles de celui-ci.



**Figure 2.5: Transformation de coordonnées pour un élément de coque**

Les fonctions d'interpolation  ${}^a h_i(\xi_1, \xi_2)$  dans le plan moyen représentent ici les polynômes de base de l'interpolation de Lagrange correspondant au type de géométrie et au nombre de nœuds utilisés dans l'élément fini. La famille d'éléments finis développée ici est très générale et se base sur des géométries de type triangulaire ou quadrangulaire, avec interpolation linéaire, quadratique ou cubique complète ou partielle (permettant ainsi de produire des éléments ayant, par exemple, à la fois des arêtes linéaires et quadratiques).

A partir de la définition de la transformation de coordonnées  ${}^e T$  précédente, il est possible de calculer la matrice jacobienne  ${}^e \mathbf{J}$  qui y est associée ainsi que son déterminant  ${}^e j$  à l'aide des relations suivantes

$${}^e \mathbf{J} = \begin{bmatrix} \partial x_1 / \partial \xi_1 & \partial x_2 / \partial \xi_1 & \partial x_3 / \partial \xi_1 \\ \partial x_1 / \partial \xi_2 & \partial x_2 / \partial \xi_2 & \partial x_3 / \partial \xi_2 \\ \partial x_1 / \partial \xi_3 & \partial x_2 / \partial \xi_3 & \partial x_3 / \partial \xi_3 \end{bmatrix} \quad {}^e j = \det({}^e \mathbf{J}) \quad (2.20)$$

D'un point de vue de la loi constitutive, le volume  ${}^e \Omega$  de l'élément fini de coque est subdivisé en sous-volumes  ${}^e \Omega_k$  ( $k=1, 2, \dots, {}^e q$ ) correspondant à chaque couche du stratifié. Du fait de la transformation de coordonnées bijective  ${}^e T$ , chaque couche  ${}^e \Omega_k$  correspond donc à un sous-domaine  ${}^a \Omega_k$  dans l'espace de l'élément père  ${}^a \Omega$ . La géométrie de chaque couche est donnée à l'aide de l'épaisseur relative  ${}^e \theta^k$  de la couche  $k$  de l'élément  $e$ . La loi constitutive de chaque couche est fournie quant à elle par une matrice d'élasticité linéaire orthotrope  ${}^e \mathbf{D}^k$  définie dans le repère d'orthotropie du matériau ainsi que par un angle  ${}^e \phi^k$  déterminant

l'orientation de la direction principale  ${}^e \mathbf{f}_1^k$  du matériau par rapport à la première direction du repère local de l'élément<sup>6</sup>.

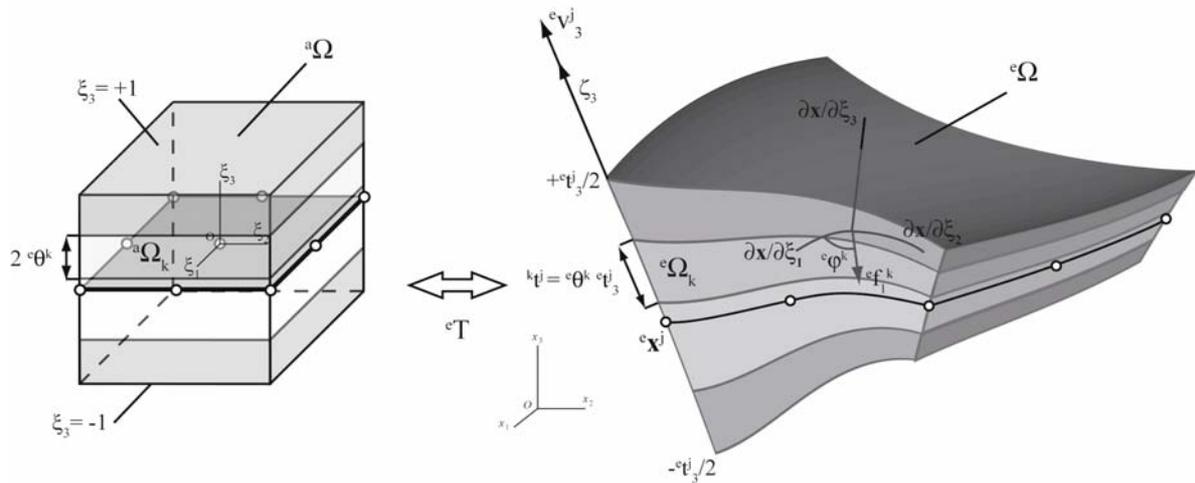


Figure 2.6: Géométrie et orientation des couches d'une coque en stratifié composite

### Approximation du champ de déplacement

De la même manière que pour les éléments finis classiques de coque  $C^0$ , une famille générale d'éléments finis de coque en stratifiés composites peut être dérivée par dégénérescence d'éléments finis solides multi-couches. Cependant, contrairement à la démarche classique qui se base sur des fonctions de forme linéaires dans l'épaisseur du stratifié (afin de satisfaire les hypothèses de coque de Reissner-Mindlin), cette démarche peut être étendue à des fonctions de forme dans l'épaisseur d'ordre quelconque [46]. Dans l'ensemble des fonctions de forme possibles, l'approximation du champ de déplacement par un développement limité de Taylor d'ordre variable  $p$  dans l'épaisseur de la coque semble être le plus approprié de par sa nature « centrée » sur le plan moyen de la coque. L'avantage d'un champ approché de déplacement d'ordre élevé dans l'épaisseur est de bien mieux modéliser les effets de déformation en cisaillement transverse (gauchissement des sections) qui interviennent lorsque le rapport épaisseur de coque / longueur caractéristique de la déformée devient important. Dans le cas de structures en matériaux composites, la limite de validité des théories de déplacements approchés au premier ordre dépend fortement de l'orthotropie du matériau et notamment du rapport module de Young longitudinal / module de cisaillement transverse. Ainsi, on peut considérer une coque en matériau composite comme épaisse, et

<sup>6</sup> On appelle repère local de l'élément déformé le repère orthonormé formé par les directions  $\mathbf{v}_1$ ,  $\mathbf{v}_2$  et  $\mathbf{v}_3$  : le vecteur  $\mathbf{v}_3$  est identique au vecteur normal obtenu par interpolation sur la coque des vecteurs normaux nodaux, alors que le vecteur  $\mathbf{v}_1$  est défini quand à lui comme étant orthogonal à  $\mathbf{v}_3$  et dans le plan  $(\partial \mathbf{x} / \partial \xi_1) - (\partial \mathbf{x} / \partial \xi_3)$ , le vecteur  $\mathbf{v}_2$  étant simplement construit par le produit vectoriel entre  $\mathbf{v}_3$  et  $\mathbf{v}_1$ .

donc nécessitant une formulation avec déplacement d'ordre élevé, lorsque le rapport épaisseur / longueur caractéristique est de l'ordre de 1/20 pour les composites fortement orthotropes, comme par exemple les matériaux unidirectionnels à base de fibre de carbone et à 1/10 pour les matériaux plus faiblement orthotropes comme les composites à base de fibres de verre. De plus, contrairement à la majorité des théories basées sur une approximation linéaire du déplacement et donc considérant des déformations de cisaillement constantes dans l'épaisseur, les théories basées sur une approximation du déplacement d'ordre supérieur ou égal à trois ne requièrent aucun facteur de correction du cisaillement, facteur généralement inconnu et déterminé de manière très approximative dans le cas des modèles classiques. Parallèlement, un développement limité de Taylor introduit un aspect hiérarchique dans l'approximation du déplacement car l'approximation d'ordre  $p-1$  est un sous-ensemble de l'approximation d'ordre  $p$ . Finalement, de par la nature même du développement en série de puissances, un modèle de coque basé sur une approximation de Taylor dans l'épaisseur d'ordre  $p$  variable du champ de déplacement représente un modèle général des théories de coque ESL basées sur une approximation en déplacement et permet donc théoriquement de représenter toutes les autres théories de cette famille.

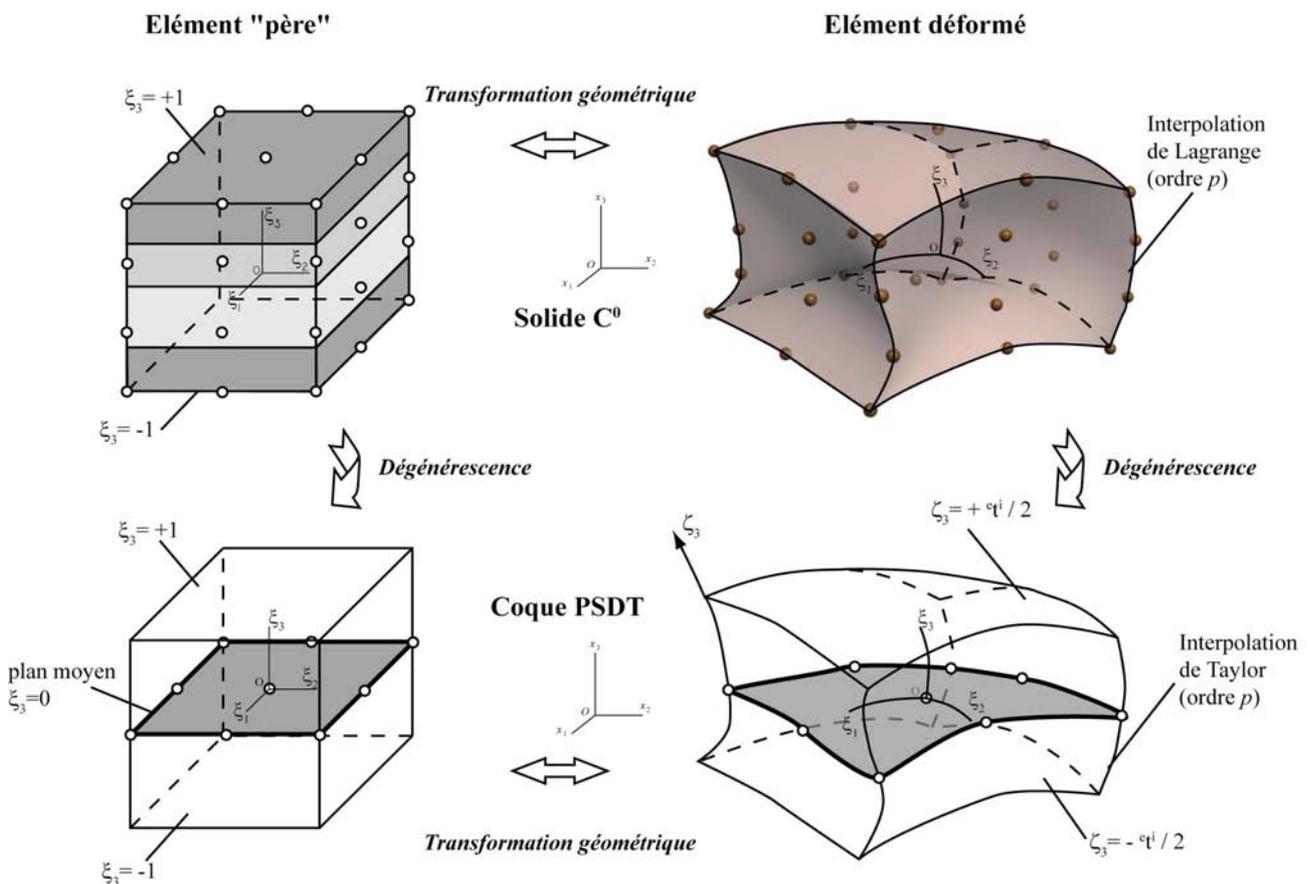


Figure 2.7: Champ de déplacement approché et dégenérescence solide - coque

Le champ de déplacement approché  ${}^e \mathbf{u}^h$  d'un élément fini  ${}^e \Omega$  de coque d'ordre  $p$  est exprimé ici sous la forme d'un développement en série polynomial limité à l'ordre  $p$  de la manière suivante (Figure 2.7)

$${}^e \mathbf{u}^h(\boldsymbol{\xi}, t) = \sum_{i=1}^p {}^a h_i(\xi_1, \xi_2) \left\{ {}^e \mathbf{p}_i^{(0)}(t) + \xi_3 \frac{{}^e t_3^i}{2} {}^e \mathbf{p}_i^{(1)}(t) + \frac{\xi_3^2}{2!} \left( \frac{{}^e t_3^i}{2} \right)^2 {}^e \mathbf{p}_i^{(2)}(t) + \dots + \frac{\xi_3^p}{p!} \left( \frac{{}^e t_3^i}{2} \right)^p {}^e \mathbf{p}_i^{(p)}(t) \right\} \quad (2.21)$$

où  ${}^a h_i(\xi_1, \xi_2)$  ( $i = 1, 2, \dots, {}^e p$ ) représente la  $i$ -ème fonction de forme dans le plan  $\xi_1, \xi_2$  de l'élément père  ${}^a \Omega$ ,  ${}^e p$  dénote le nombre total de nœuds sur la surface médiane de l'élément fini,  $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  est le vecteur des coordonnées dans l'élément père non déformé,  ${}^e t_3^i$  ( $i = 1, 2, \dots, {}^e p$ ) est l'épaisseur de l'élément au nœud  $i$ , et  $t$  symbolise le temps. Dans l'équation (2.21), les composantes nodales inconnues  ${}^e \mathbf{p}_i^{(j)}$  ( $i = 1, 2, \dots, {}^e p$ ,  $j = 0, 1, \dots, p$ ) de l'approximation des déplacements sont stockées dans le vecteur  ${}^e \mathbf{p}_i(t)$  ( $i = 1, 2, \dots, {}^e p$ ). De par les propriétés des développements limités de Taylor, le vecteur des composantes d'ordre  $j$ ,  ${}^e \mathbf{p}_i^{(j)}(t)$  ( $i = 1, 2, \dots, j = 0, 1, \dots, p$ ), est identique aux  $j$ -èmes dérivées du champ de déplacement au nœud  $i$  par rapport à la coordonnée généralisée  $\zeta_3 = [-{}^e t_3^i / 2, +{}^e t_3^i / 2]$  représentant l'épaisseur de la coque (Figure 2.7)

$${}^e \mathbf{p}_i^{(j)} = \left. \frac{\partial^j ({}^e \mathbf{u}^h)}{\partial \zeta_3^j} \right|_{\xi_1 = \xi_1^i, \xi_2 = \xi_2^i} \quad (j = 0, 1, \dots, p) \quad (2.22)$$

où  $\xi_k^i$  ( $k = 1, 2$ ) sont les coordonnées locales du point nodal  $i$ . En utilisant la relation liant la coordonnée locale normalisée  $\xi_3$  à la coordonnée globale  $\zeta_3 = 2 \xi_3 / {}^e t_3^i$ , on peut réécrire le vecteur des déplacements nodaux inconnus de la façon suivante

$${}^e \mathbf{p}_i^{(j)} = \left( \frac{2}{{}^e t_3^i} \right)^j \left. \frac{\partial^j ({}^e \mathbf{u}^h)}{\partial \xi_3^j} \right|_{\xi_1 = \xi_1^i, \xi_2 = \xi_2^i} = \left( \frac{2}{{}^e t_3^i} \right)^j {}^e \mathbf{q}_i^{(j)} \quad (j = 0, 1, \dots, p) \quad (2.23)$$

où les degrés de liberté  ${}^e \mathbf{q}_i^{(j)}(t)$  ( $i = 1, 2, \dots, {}^e p; j = 0, 1, \dots, p$ ) sont les  $j$ -èmes dérivées de l'approximation des déplacements par rapport à la coordonnée locale normalisée  $\xi_3 = [-1, +1]$

au nœud  $i$ . En substituant les degrés de liberté  ${}^e\mathbf{p}$  par les nouvelles inconnues  ${}^e\mathbf{q}$ , le nouveau champ de déplacement approché peut être explicité sous la forme suivante

$${}^e\mathbf{u}^h(\boldsymbol{\xi}, t) = \sum_{i=1}^p a_{h_i}(\xi_1, \xi_2) \left\{ {}^e\mathbf{q}_i^{(0)}(t) + \xi_3 {}^e\mathbf{q}_i^{(1)}(t) + \frac{\xi_3^2}{2!} {}^e\mathbf{q}_i^{(2)}(t) + \dots + \frac{\xi_3^p}{p!} {}^e\mathbf{q}_i^{(p)}(t) \right\} \quad (2.24)$$

Cette nouvelle forme possède l'avantage, par rapport à la précédente, d'être bien plus stable numériquement dans le cas de coques relativement minces, car les coefficients du développement polynomial utilisé restent dans un même ordre de grandeur au lieu de varier en  $(1/{}^e t_3^i)^p$ . Le conditionnement numérique de ce modèle est donc amélioré par rapport aux autres modèles PSDT, notamment celui qui est présenté dans la référence [46], qui deviennent rapidement instables numériquement (matrices de rigidité mal conditionnées, erreurs importantes lors de l'inversion des matrices globales, etc.) dans le cas de coques modérément minces (épaisseur de l'ordre du millimètre) lorsque  $p$  augmente au-delà de trois.

Afin de simplifier la formulation, on rassemble les  $3(p+1)$  degrés de liberté au nœud  $i$  dans un vecteur  ${}^e\mathbf{q}_i$

$${}^e\mathbf{q}_i = \left\{ e_{q_{1,i}}^{(0)}, e_{q_{2,i}}^{(0)}, e_{q_{3,i}}^{(0)}, e_{q_{1,i}}^{(1)}, e_{q_{2,i}}^{(1)}, e_{q_{3,i}}^{(1)}, \dots, e_{q_{1,i}}^{(p)}, e_{q_{2,i}}^{(p)}, e_{q_{3,i}}^{(p)} \right\}^T \quad (2.25)$$

Les trois premières composantes du vecteur ainsi formé représentent les déplacements du nœud  $i$  exprimés dans le repère global  $(x_1, x_2, x_3)$ , comme pour les éléments finis classiques de poutre, coque ou solide, ce qui assure ainsi une certaine de compatibilité avec les autres modèles existants. Le deuxième groupe de degrés de liberté contient quant à lui les dérivées premières du champ de déplacement 3D par rapport à la coordonnée locale normalisée  $\xi_3$  et représente donc les rotations des sections de la coque dans le repère local  $(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ . Les termes suivants symbolisent les  $i$ -èmes dérivées du champ de déplacement par rapport à cette même coordonnée  $\xi_3$ . Le champ de déplacement utilisé dans cet élément fini est donc complètement tridimensionnel et aucune hypothèse d'incompressibilité des normales n'est utilisée. Ainsi, cette famille d'éléments finis évite le problème classique des coques à six degrés de liberté par nœud qui nécessitent généralement l'ajout d'une rigidité numérique fictive pour assurer des matrices élémentaires  $6 \times 6$  définies strictement positives tout en imposant l'incompressibilité des normales. Cependant, comme les dérivées sont exprimées par rapport à la coordonnée locale normalisée  $\xi_3$  et non pas dans l'espace global  $(x_1, x_2, x_3)$ , les

coefficients du premier ordre ne sont pas compatibles<sup>7</sup> avec ceux utilisés dans les coques classiques à six degrés de liberté par nœud. Ainsi les éléments finis de coque d'ordre  $p$  présentés ici ne peuvent pas être assemblés directement avec d'autres éléments, mais uniquement par une technique de « drapage » de faces solides ou coques. Cette limitation n'a de toute façon qu'une importance secondaire, car cette famille d'éléments permet également de représenter des éléments de coque de type FSDT classique si l'on fixe la valeur de  $p$  à l'unité.

Le déplacement approché dans l'élément  $e$  peut donc être écrit sous forme compacte

$${}^e \mathbf{u}^h(\boldsymbol{\xi}, t) = \sum_{i=1}^p {}^a \mathbf{H}_i(\boldsymbol{\xi}) {}^e \mathbf{q}_i(t) = {}^a \mathbf{H}(\boldsymbol{\xi}) {}^e \mathbf{q}(t) \quad (2.26)$$

avec

$${}^a \mathbf{H} = [{}^a \mathbf{H}_1, {}^a \mathbf{H}_2, \dots, {}^a \mathbf{H}_i, \dots, {}^a \mathbf{H}_p]$$

$${}^e \mathbf{q} = \{{}^e \mathbf{q}_1, {}^e \mathbf{q}_2, \dots, {}^e \mathbf{q}_i, \dots, {}^e \mathbf{q}_p\}^T$$

où  ${}^a \mathbf{H}$  représente la matrice des fonctions d'interpolation dans l'élément  $e$  et  ${}^e \mathbf{q}$  est le vecteur des déplacements nodaux généralisés qui rassemble tous les degrés de liberté de l'élément. Constituant la matrice  ${}^a \mathbf{H}$ , les sous-matrices  $3 \times 3(p+1)$   ${}^a \mathbf{H}_i$  des fonctions d'interpolation liées aux nœuds  $i$ , s'écrivent de la manière suivante

$${}^a \mathbf{H}_i = \begin{bmatrix} {}^a h_i & 0 & 0 & | & \xi_3 {}^a h_i & 0 & 0 & | & \frac{\xi_3^2}{2!} {}^a h_i & 0 & 0 & | & \dots \\ 0 & {}^a h_i & 0 & | & 0 & \xi_3 {}^a h_i & 0 & | & 0 & \frac{\xi_3^2}{2!} {}^a h_i & 0 & | & \dots \\ 0 & 0 & {}^a h_i & | & 0 & 0 & \xi_3 {}^a h_i & | & 0 & 0 & \frac{\xi_3^2}{2!} {}^a h_i & | & \dots \end{bmatrix}$$

<sup>7</sup> Cependant, comme l'épaisseur et la normale au plan moyen de la coque sont spécifiés ici en chaque nœud du maillage et non par élément, les coordonnées  $\zeta_3$  des différents éléments qui partagent un nœud sont définies de manière identique. Ceci implique que les coordonnées  $\xi_3$  restent également identiques pour deux éléments partageant ce nœud. Ainsi, les vecteurs des déplacements nodaux généralisés sont bien identiques pour deux éléments voisins, ce qui assure donc la possibilité d'assembler les matrices élémentaires pour produire une matrice globale.

$$\begin{array}{c}
 \dots \\
 \dots \\
 \dots
 \end{array}
 \left[ \begin{array}{ccc}
 \frac{\xi_3^p}{p!} a_{h_i} & 0 & 0 \\
 0 & \frac{\xi_3^p}{p!} a_{h_i} & 0 \\
 0 & 0 & \frac{\xi_3^p}{p!} a_{h_i}
 \end{array} \right] = a_{h_i} \left[ \mathbf{I}, \xi_3 \mathbf{I}, \frac{\xi_3^2}{2!} \mathbf{I}, \dots, \frac{\xi_3^p}{p!} \mathbf{I} \right] \quad (2.27)$$

où  $\mathbf{I}$  représente la matrice d'identité d'ordre 3. La nature hiérarchique de l'approximation du déplacement ressort ici clairement et permet ainsi de calculer les matrices des fonctions de forme de manière récursive.

### Approximation des déformations et des contraintes

La théorie développée étant destinée à l'analyse dynamique en élasticité linéaire, les déplacements et les déformations sont tous considérés comme faibles (formulation infinitésimale). Ainsi, le tenseur des déformations infinitésimales approchées  ${}^e\boldsymbol{\varepsilon}^h$  peut s'exprimer sous la forme

$${}^e\boldsymbol{\varepsilon}^h(\boldsymbol{\xi}, t) = \sum_{i=1}^p \nabla^a \mathbf{H}_i(\boldsymbol{\xi}) {}^e\mathbf{q}_i(t) = \sum_{i=1}^p {}^e\mathbf{B}_i(\boldsymbol{\xi}) {}^e\mathbf{q}_i(t) = \nabla^a \mathbf{H}(\boldsymbol{\xi}) {}^e\mathbf{q}(t) = {}^e\mathbf{B}(\boldsymbol{\xi}) {}^e\mathbf{q}(t) \quad (2.28)$$

où l'on utilise l'opérateur de dérivation  $\nabla$  défini précédemment pour calculer la matrice gradient  ${}^e\mathbf{B}$  (appelée aussi matrice-déformation). De par les propriétés de bloc de la matrice des fonctions de forme,  ${}^e\mathbf{B}$  peut s'écrire comme un agrégat de sous-matrices  ${}^e\mathbf{B}_i$  de dimension  $6 \times 3(p+1)$  liées aux nœuds

$${}^e\mathbf{B} = [{}^e\mathbf{B}_1, {}^e\mathbf{B}_2, \dots, {}^e\mathbf{B}_p, \dots, {}^e\mathbf{B}_{ep}] \quad (2.29)$$

Les sous-matrices  ${}^e\mathbf{B}_i$  peuvent être obtenues directement en appliquant l'opérateur de dérivation sur les sous-matrices  ${}^a\mathbf{H}_i$  des fonctions de forme correspondantes. Ainsi,  ${}^e\mathbf{B}_i$  peut s'écrire

$${}^e \mathbf{B}_i = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} \frac{\partial^a h_i}{\partial x_1} & 0 & 0 & \dots & \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\xi_3^p}{p!} {}^a h_i \right) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial^a h_i}{\partial x_2} & 0 & \dots & 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{\xi_3^p}{p!} {}^a h_i \right) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial^a h_i}{\partial x_3} & \dots & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \frac{\xi_3^p}{p!} {}^a h_i \right) \\ 0 & \frac{\partial^a h_i}{\partial x_3} & \frac{\partial^a h_i}{\partial x_2} & \dots & 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \frac{\xi_3^p}{p!} {}^a h_i \right) & \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{\xi_3^p}{p!} {}^a h_i \right) \\ \frac{\partial^a h_i}{\partial x_3} & 0 & \frac{\partial^a h_i}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \frac{\xi_3^p}{p!} {}^a h_i \right) & 0 & \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\xi_3^p}{p!} {}^a h_i \right) \\ \frac{\partial^a h_i}{\partial x_2} & \frac{\partial^a h_i}{\partial x_1} & 0 & \dots & \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{\xi_3^p}{p!} {}^a h_i \right) & \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\xi_3^p}{p!} {}^a h_i \right) & 0 \end{array} \right] \quad (2.30)$$

avec

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\xi_3^k}{k!} {}^a h_i \right) = \frac{1}{k!} \left[ \xi_3^k \left( {}^e J_{j1}^{-1} \frac{\partial^a h_i}{\partial \xi_1} + {}^e J_{j2}^{-1} \frac{\partial^a h_i}{\partial \xi_2} \right) + k {}^e J_{j3}^{-1} \xi_3^{k-1} {}^a h_i \right] \quad (j = 1, 2, 3; k = 0, 1, \dots, p) \quad (2.31)$$

Dans cette expression,  ${}^e J_{j\ell}^{-1}$  ( $j, \ell = 1, 2, 3$ ), dénote la composante  $(j, \ell)$  de l'inverse de la matrice jacobienne de la transformation de coordonnées  ${}^e T$  définie précédemment.

En considérant une loi constitutive d'élasticité linéaire, le tenseur des contraintes dans la couche  $k$  d'un stratifié constitué de  ${}^e q$  couches différentes peut être calculé ainsi

$${}^e \boldsymbol{\sigma}_k^h(\boldsymbol{\xi}, t) = {}^e \mathbf{C}_k {}^e \boldsymbol{\varepsilon}^h(\boldsymbol{\xi}, t) = {}^e \mathbf{C}_k {}^e \mathbf{B}(\boldsymbol{\xi}) {}^e \mathbf{q}(t) \quad (k = 1, 2, \dots, {}^e q) \quad (2.32)$$

où  ${}^e \mathbf{C}_k$  symbolise le tenseur d'élasticité linéaire du matériau de la couche  $k$ , représenté ici sous forme matricielle (dimension 6x6) dans le repère global  $(x_1, x_2, x_3)$ . A l'aide de la matrice de rotation<sup>8</sup>  ${}^e \mathbf{Q}$  reliant le repère global  $(x_1, x_2, x_3)$  au repère local  $(v_1, v_2, v_3)$ , le tenseur d'élasticité  ${}^e \mathbf{C}_k$  peut également être déterminé à partir du tenseur d'élasticité  ${}^e \overline{\mathbf{C}}_k$  défini dans le repère local de l'élément (équ. 2.1).

<sup>8</sup> Les matrices de rotation utilisées ici représentent en fait un opérateur de rotation de tenseurs du quatrième ordre écrit sous forme matricielle compacte. Cependant, bien qu'étant appelées « matrices de rotations », ces dernières ne possèdent pas la propriété classique  $\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^T$ . Par contre la transformation inverse de  $\mathbf{Q}$  reste malgré tout donnée par la matrice  $\mathbf{Q}^{-1}$  (inversion matricielle classique).

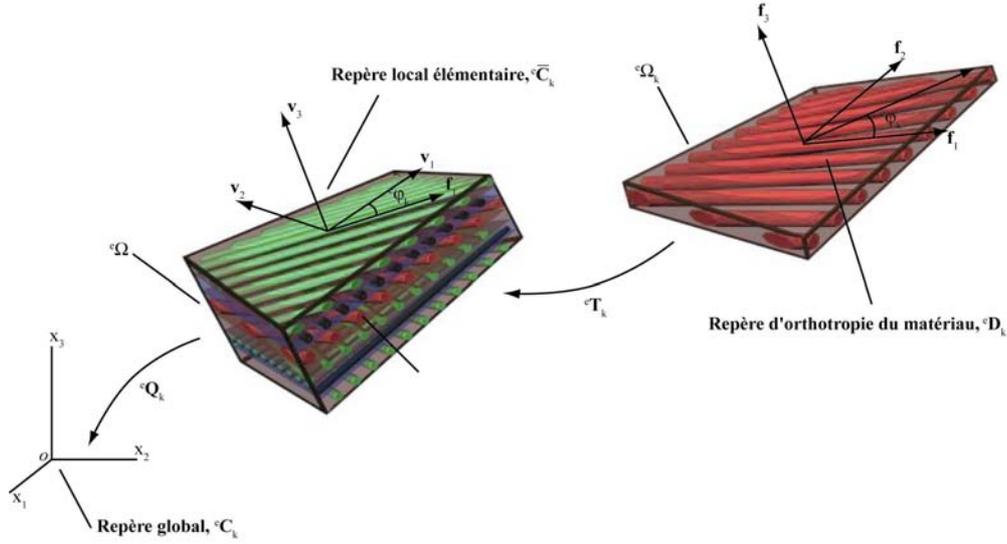


Figure 2.8: Orientation de la loi constitutive

On peut donc réécrire le tenseur d'élasticité global sous la forme

$${}^e\mathbf{C}_k = {}^e\mathbf{Q}^T {}^e\bar{\mathbf{C}}_k {}^e\mathbf{Q} \quad (2.33)$$

où la matrice  ${}^e\mathbf{Q}$  est définie à partir des cosinus directeurs<sup>9</sup>  $q_{ij}$  entre les vecteurs de base  $(x_1, x_2, x_3)$  et  $(v_1, v_2, v_3)$  comme suit

$${}^e\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} q_{11}^2 & q_{21}^2 & q_{31}^2 & q_{21}q_{31} & q_{31}q_{11} & q_{11}q_{21} \\ q_{12}^2 & q_{22}^2 & q_{32}^2 & q_{22}q_{32} & q_{32}q_{12} & q_{12}q_{22} \\ q_{13}^2 & q_{23}^2 & q_{33}^2 & q_{23}q_{33} & q_{33}q_{13} & q_{13}q_{23} \\ 2q_{12}q_{13} & 2q_{22}q_{23} & 2q_{32}q_{33} & q_{22}q_{33} + q_{23}q_{32} & q_{32}q_{13} + q_{33}q_{12} & q_{12}q_{23} + q_{13}q_{22} \\ 2q_{13}q_{11} & 2q_{23}q_{21} & 2q_{33}q_{31} & q_{23}q_{31} + q_{21}q_{33} & q_{33}q_{11} + q_{31}q_{13} & q_{13}q_{21} + q_{11}q_{23} \\ 2q_{11}q_{12} & 2q_{21}q_{22} & 2q_{31}q_{32} & q_{21}q_{32} + q_{22}q_{31} & q_{31}q_{12} + q_{32}q_{11} & q_{11}q_{22} + q_{12}q_{21} \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

Le tenseur local d'élasticité  ${}^e\bar{\mathbf{C}}_k$  peut finalement être exprimé en fonction du tenseur d'élasticité  ${}^e\mathbf{D}_k$  défini dans le repère d'orthotropie du matériau à l'aide d'une seconde matrice de rotation  ${}^e\mathbf{T}_k$  telle que

$${}^e\bar{\mathbf{C}}_k = ({}^e\mathbf{T}_k)^T {}^e\mathbf{D}_k {}^e\mathbf{T}_k \quad (2.35)$$

<sup>9</sup>Le cosinus directeur  $q_{ij}$  est défini comme le cosinus de l'angle entre le  $i$ -ème vecteur de base du repère destination  $(x_1, x_2, x_3)$  et le  $j$ -ème vecteur de base du repère source  $(v_1, v_2, v_3)$ .

où la matrice de rotation  ${}^e\mathbf{T}_k$  d'angle  ${}^e\varphi_k$  autour de l'axe normal à la coque (direction  $\partial\mathbf{x}/\partial\xi_3$ ), liant le tenseur local d'élasticité au tenseur d'élasticité dans le repère d'orthotropie, est donnée par:

$${}^e\mathbf{T}_k = \begin{bmatrix} \cos^2 {}^e\varphi_k & \sin^2 {}^e\varphi_k & 0 & 0 & 0 & \sin {}^e\varphi_k \cos {}^e\varphi_k \\ \sin^2 {}^e\varphi_k & \cos^2 {}^e\varphi_k & 0 & 0 & 0 & -\sin {}^e\varphi_k \cos {}^e\varphi_k \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos {}^e\varphi_k & -\sin {}^e\varphi_k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin {}^e\varphi_k & \cos {}^e\varphi_k & 0 \\ -2\sin {}^e\varphi_k \cos {}^e\varphi_k & 2\sin {}^e\varphi_k \cos {}^e\varphi_k & 0 & 0 & 0 & \cos^2 {}^e\varphi_k - \sin^2 {}^e\varphi_k \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

Ainsi l'angle d'orientation des couches  ${}^e\varphi_k$  du stratifié est utilisé pour orienter chaque couche au sein de l'élément, avec comme référence angulaire la première direction principale de l'élément  $\mathbf{v}_1 = \partial\mathbf{x}/\partial\xi_1$ . En portant l'expression (2.35) dans la relation (2.33), on aboutit finalement à la forme suivante du tenseur d'élasticité global

$${}^e\mathbf{C}_k = ({}^e\mathbf{T}_k {}^e\mathbf{Q})^T {}^e\mathbf{D}_k {}^e\mathbf{T}_k {}^e\mathbf{Q} \quad (2.37)$$

### Matrices structurelles

Les matrices structurelles élémentaires du  $e$ -ème élément de coque PSDT  ${}^e\Omega$  sont calculées comme à l'accoutumée à l'aide de la relation :

$${}^e\mathbf{M} = \int_{{}^a\Omega} {}^e\rho {}^a\mathbf{H}^T {}^a\mathbf{H} {}^e j {}^a d\Omega \quad (2.38)$$

$${}^e\mathbf{K} = \int_{{}^a\Omega} {}^e\mathbf{B}^T {}^e\mathbf{C} {}^e\mathbf{B} {}^e j {}^a d\Omega \quad (2.39)$$

où  ${}^e\rho$  dénote la masse volumique et  ${}^e\mathbf{C}$  le tenseur d'élasticité décrit dans le repère global comme énoncé précédemment. Ces grandeurs étant en réalité définies différemment sur chaque couche  ${}^e\Omega_k$ , il est nécessaire de décomposer l'intégrale sur le domaine  ${}^a\Omega_k$  en une somme d'intégrales sur les  ${}^e q$  sous-domaines  ${}^a\Omega_k$  et d'introduire les grandeurs « par couche »  ${}^e\rho_k$  et  ${}^e\mathbf{C}_k$  correspondantes. En tenant compte également de l'orientation de la loi constitutive de chaque couche, les matrices structurelles peuvent alors être explicités sous les formes

$${}^e\mathbf{M} = \sum_{k=1}^{{}^e q} \int_{{}^a\Omega_k} {}^e\rho_k {}^a\mathbf{H}^T {}^a\mathbf{H} {}^e j {}^a d\Omega_k \quad (2.40)$$

$${}^e\mathbf{K} = \sum_{k=1}^{e_q} \int_{{}^a\Omega_k} {}^e\mathbf{B}^T {}^e\mathbf{C}_k {}^e\mathbf{B} {}^e j^a d\Omega_k = \sum_{k=1}^{e_q} \int_{{}^a\Omega_k} ({}^e\mathbf{T}_k {}^e\mathbf{Q} {}^e\mathbf{B})^T {}^e\mathbf{D}_k ({}^e\mathbf{T}_k {}^e\mathbf{Q} {}^e\mathbf{B}) {}^e j^a d\Omega_k \quad (2.41)$$

Afin de simplifier l'intégration numérique sur chaque couche  ${}^a\Omega_k$ , il est préférable de retransformer chaque sous domaine  ${}^a\Omega_k$  vers un nouveau volume normalisé  $\Omega_k$  défini par les coordonnées  $(\xi_1, \xi_2, \zeta) \in [-1, +1] \times [-1, +1] \times [-1, +1]$ . En utilisant la définition des épaisseurs relatives des couches  ${}^e\theta_k = {}^e t_k^i / {}^e t_3^i$ , il est possible de transformer la coordonnée  $\xi_3$  dans  ${}^a\Omega_k$  vers la coordonnée  $\zeta$  normalisée dans la couche  $k$  de la manière suivante

$$\xi_3 = -1 + 2 \sum_{j=1}^{k-1} {}^e\theta_j + (1 + \zeta) {}^e\theta_k \quad (k = 1, 2, \dots, e_q) \quad (2.42)$$

Il est important de remarquer que cette transformation de coordonnées ne dépend pas des coordonnées  $\xi_1$  et  $\xi_2$  du point considéré, car l'épaisseur relative  ${}^e\theta_k$  de la couche  $k$ , est considérée comme constante sur l'ensemble de l'élément. En appliquant cette transformation de coordonnées sur les intégrales (2.40) et (2.41), nous pouvons reformuler les matrices structurelles élémentaires

$${}^e\mathbf{M} = \sum_{k=1}^{e_q} \int_{\Omega_k} ({}^e\rho_k {}^a\mathbf{H}^T {}^a\mathbf{H} {}^e j) \Big|_{\xi_3 = \xi_3(\zeta)} {}^e\theta_k d\Omega_k \quad (2.43)$$

$${}^e\mathbf{K} = \sum_{k=1}^{e_q} \int_{\Omega_k} ({}^e\mathbf{S}_k^T {}^e\mathbf{D}_k {}^e\mathbf{S}_k {}^e j) \Big|_{\xi_3 = \xi_3(\zeta)} {}^e\theta_k d\Omega_k \quad (2.44)$$

où la matrice  ${}^e\mathbf{S}_k = {}^e\mathbf{T}_k {}^e\mathbf{Q} {}^e\mathbf{B}$  représente la matrice-gradient (ou matrice-déformation) exprimée dans le repère d'orthotropie de la couche  $k$ . Les grandeurs à intégrer, toutes fonctions de  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$ , sont alors évaluées sur le domaine transformé  $\Omega_k$ , ce qui fait apparaître le jacobien de cette dernière transformation, qui n'est autre que l'épaisseur relative  ${}^e\theta_k$  de la couche  $k$ .

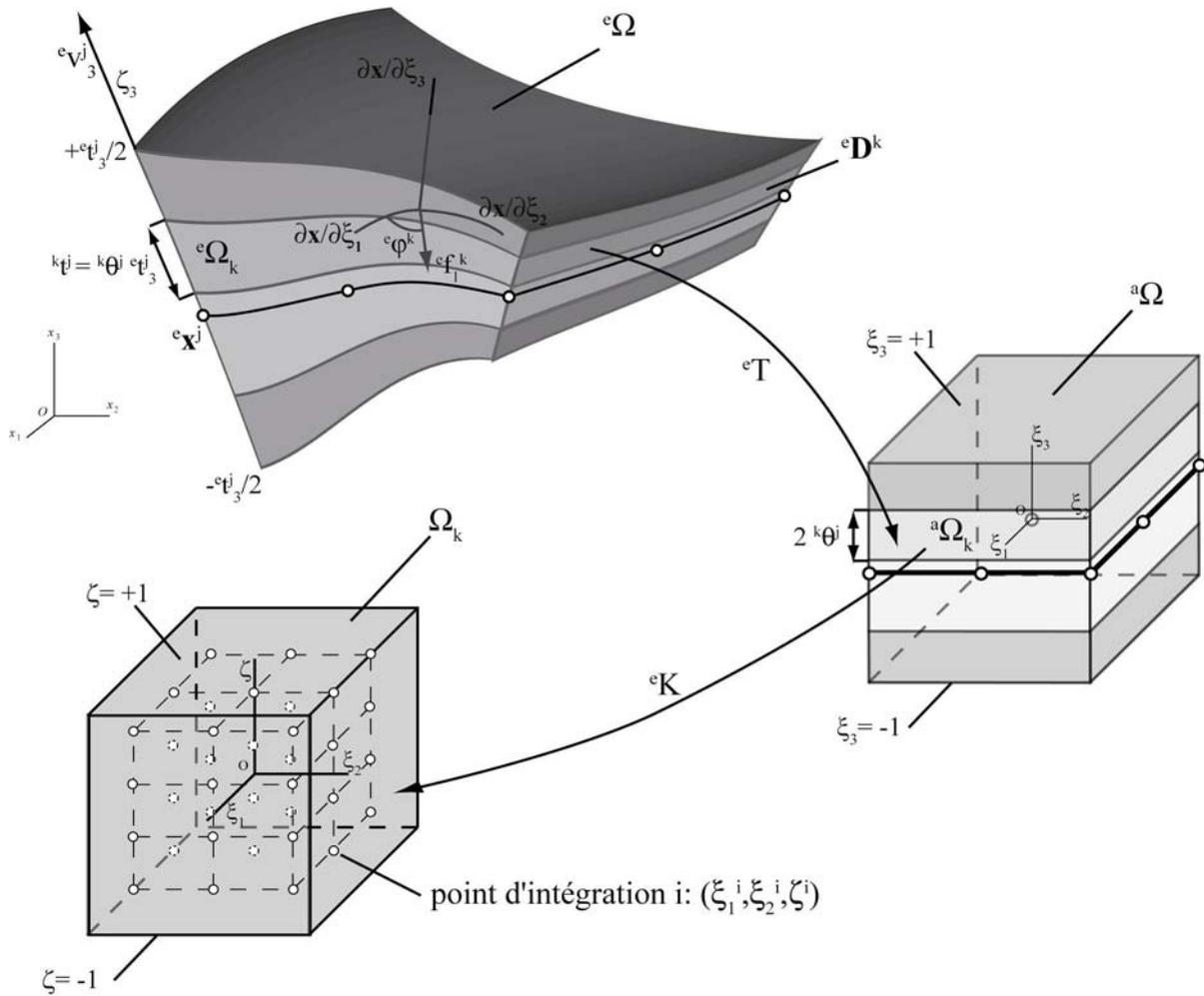


Figure 2.9: Intégration numérique par couche d'un élément de coque stratifié

### Intégration numérique de Gauss-Legendre

Comme le domaine de chaque couche  ${}^e\Omega_k$  est transformé en un volume normalisé simple  $\Omega_k$ , nous pouvons appliquer directement sur ce volume les méthodes classiques d'intégration numérique de Gauss-Legendre afin d'intégrer facilement les matrices structurales élémentaires  ${}^e\mathbf{K}$  et  ${}^e\mathbf{M}$ . Ainsi, pour le cas d'un élément de coque à base quadrangulaire, nous pouvons écrire

$$\sum_{k=1}^q \int_{\Omega_k} (\cdot) \Big|_{\xi_3=\xi_3(\zeta)} e_{\theta_k} d\Omega_k = \sum_{k=1}^q \sum_{\ell=1}^r \sum_{m=1}^s \sum_{n=1}^t \omega_1^\ell \omega_2^m \omega_3^n e_{\theta_k} (\cdot) \Big|_{\xi_1=\xi_1^\ell, \xi_2=\xi_2^m, \xi_3=\xi_3(\zeta^n)} \quad (2.45)$$

où les points  $(\xi_1^\ell, \xi_2^m, \xi_3^n)$  représentent les coordonnées des points d'intégration de Gauss dans le volume normalisé  $\Omega_k$ , correspondant aux points  $(\xi_1^\ell, \xi_2^m, \xi_3(\zeta^n))$  dans l'élément père, et où

les coefficients de pondération associés sont définis quant à eux par  $\omega_1^\ell$ ,  $\omega_2^m$  et  $\omega_3^n$ . Les nombres  $r$ ,  $s$  et  $t$  de points de Gauss dans chaque direction sont définis selon l'ordre des fonctions de forme dans les directions  $\xi_1$ ,  $\xi_2$  et  $\xi_3$  respectivement. Ainsi, afin d'intégrer exactement les matrices structurelles d'un élément basé sur des fonctions de formes 2D  $^a h_i$  d'ordre  $o_1$  en  $\xi_1$  et  $o_2$  en  $\xi_2$ , un nombre de points de Gauss selon le plan moyen de  $(o_1 + 1) \times (o_2 + 1)$  est nécessaire<sup>10</sup>. Concernant l'intégration numérique dans l'épaisseur de la coque, une intégration numérique exacte requiert, pour chaque couche, un nombre de points de Gauss en  $\zeta$  égal au moins à  $p + 1$ , où  $p$  représente l'ordre du développement du champ de déplacement dans l'épaisseur de la coque. Ainsi, un élément de coque PSDT quadrangulaire d'ordre  $p$  et d'ordre  $o_1$  et  $o_2$  en  $\xi_1$  et  $\xi_2$  nécessite  $(o_1 + 1) \times (o_2 + 1) \times (p + 1) \times {}^e q$  points d'intégration au total. Dans le cas d'éléments à base triangulaire, un schéma de quadrature spécifique permet d'intégrer simultanément en  $\xi_1$  et  $\xi_2$ , l'intégration en  $\zeta$  étant toujours effectuée séparément. Bien que le nombre d'évaluations numériques nécessaires à l'intégration des matrices structurelles peut paraître élevé et donc pénalisant d'un point de vue du temps de calcul, il faut noter que le temps d'assemblage du problème d'éléments finis reste toutefois bien inférieur au temps de résolution nécessaire et ne représente par conséquent pas un problème en pratique. Des schémas d'intégration exacte, réduite ou sélective<sup>11</sup> sont employés pour l'intégration dans le plan  $\xi_1 - \xi_2$ , afin de prévenir un éventuel blocage en cisaillement dans le cas de coques très minces. Comme ces techniques n'ont pas réellement de sens pour l'intégration dans l'épaisseur de la coque, seule une méthode d'intégration exacte est utilisée dans la direction transverse. Finalement, en appliquant l'expression d'intégration numérique (2.45) aux relations (2.43) et (2.44), nous obtenons la forme des matrices structurelles élémentaires suivante

<sup>10</sup>En effet, dans le cas de fonctions de forme d'ordre  $r$  dans une direction donnée (élément rectangulaire), l'ordre des fonctions à intégrer est au maximum de  $2r$  et l'intégration numérique de Gauss à  $n$  points est exacte jusqu'à un ordre de  $2n - 1$ , de sorte qu'il faut toujours que  $n \geq r + 1$  pour obtenir une intégration numérique exacte.

<sup>11</sup>Un schéma réduit d'intégration numérique d'une fonction d'ordre  $2r$  utilise un nombre de points de Gauss égal à  $r$  (au lieu de  $r+1$ ). La méthode d'intégration numérique sélective intègre exactement les contributions de traction-compression, tandis que les composantes de cisaillement sont intégrées de manière réduite.

$${}^e\mathbf{M} = \sum_{k=1}^q \sum_{l=1}^r \sum_{m=1}^s \sum_{n=1}^t \omega_1^l \omega_2^m \omega_3^n {}^e\theta_k \left[ {}^e\rho_k {}^a\mathbf{H}^T {}^a\mathbf{H} {}^e\mathbf{j} \right] \Big|_{\xi_1 = \xi_1^l, \xi_2 = \xi_2^m, \xi_3 = \xi_3^n} (\zeta^n) \quad (2.46)$$

$${}^e\mathbf{K} = \sum_{k=1}^q \sum_{l=1}^r \sum_{m=1}^s \sum_{n=1}^t \omega_1^l \omega_2^m \omega_3^n {}^e\theta_k \left[ ({}^e\mathbf{T}_k {}^e\mathbf{Q} {}^e\mathbf{B})^T {}^e\mathbf{D}_k ({}^e\mathbf{T}_k {}^e\mathbf{Q} {}^e\mathbf{B}) {}^e\mathbf{j} \right] \Big|_{\xi_1 = \xi_1^l, \xi_2 = \xi_2^m, \xi_3 = \xi_3^n} (\zeta^n) \quad (2.47)$$

pour des éléments à base quadrangulaire et

$${}^e\mathbf{M} = \sum_{k=1}^q \sum_{l=1}^r \sum_{n=1}^t \omega_{12}^l \omega_3^n {}^e\theta_k \left[ {}^e\rho_k {}^a\mathbf{H}^T {}^a\mathbf{H} {}^e\mathbf{j} \right] \Big|_{\xi_1 = \xi_1^l, \xi_2 = \xi_2^l, \xi_3 = \xi_3^n} (\zeta^n) \quad (2.48)$$

$${}^e\mathbf{K} = \sum_{k=1}^q \sum_{l=1}^r \sum_{n=1}^t \omega_{12}^l \omega_3^n {}^e\theta_k \left[ ({}^e\mathbf{T}_k {}^e\mathbf{Q} {}^e\mathbf{B})^T {}^e\mathbf{D}_k ({}^e\mathbf{T}_k {}^e\mathbf{Q} {}^e\mathbf{B}) {}^e\mathbf{j} \right] \Big|_{\xi_1 = \xi_1^l, \xi_2 = \xi_2^l, \xi_3 = \xi_3^n} (\zeta^n) \quad (2.49)$$

pour des éléments à base triangulaire.

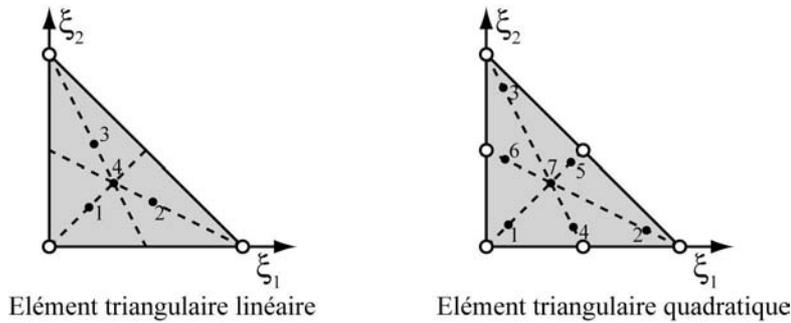


Figure 2.10: Intégration numérique d'éléments triangulaires

## 2.4 Implantation dans le logiciel d'éléments finis MAFE

### 2.4.1 Généralités

Afin d'obtenir une méthode d'identification mixte numérique-expérimentale rapide, générale et performante, il est essentiel de développer un logiciel de calcul par éléments finis qui possède ces mêmes qualités de rapidité, de généralité, de flexibilité et de précision. Comme le problème à résoudre consiste à calculer les premières fréquences propres, ainsi que les formes propres associées, de stratifiés composites modélisés à l'aide d'éléments finis de coque PSDT, il est essentiel de disposer d'un logiciel efficace pour la résolution spécifique du problème aux valeurs propres

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})\mathbf{p} = \mathbf{0} \quad (2.50)$$

de pulsation propre  $\omega$  et de forme propre  $\mathbf{p}$  associé au régime libre de l'équation (2.14) afin d'intégrer un tel modèle numérique dans une boucle itérative d'optimisation tout en garantissant un temps d'exécution raisonnable sur des ordinateurs courants.

Dans le cadre de l'identification structurelle, un logiciel a été développé depuis de nombreuses années au laboratoire LMAF. Ce code de calcul, dénommé MAFE [56] (Modal Analysis by Finite Element) est programmé en FORTRAN pour la résolution de problèmes numériques en dynamique des structures et permet l'analyse modale de systèmes conservatifs ou dissipatifs, classiques ou gyroscopiques, la condensation statique et dynamique de modèles, la dynamique linéaire transitoire par superposition modale et la synthèse modale inverse. Ce logiciel dispose déjà d'une importante collection d'éléments finis de géométrie (poutres, coques, solides, éléments de transition) et d'ordre (interpolations linéaire, quadratique et cubique) très variés, ainsi que de plusieurs solveurs d'extraction modale fiables et performants. La disponibilité du code source et l'expérience acquise autour de ce logiciel, associés à l'efficacité du langage FORTRAN pour le calcul numérique, font du logiciel MAFE un excellent point de départ pour de nouveaux développements dans l'analyse modale par éléments finis. A l'heure actuelle, MAFE comporte environ deux cent vingt routines distinctes pour un total de quarante mille lignes de code, afin de gérer une cinquantaine de types d'éléments utilisables dans une dizaine de solveurs (condensation, extraction modale et dynamique transitoire par superposition modale). Pour les diverses raisons évoquées, la famille d'éléments finis de coque composite PSDT décrite précédemment a été tout naturellement incorporée dans le code MAFE.

### 2.4.2 Structure du logiciel MAFE

Sans entrer dans les détails, la structure du logiciel MAFE, englobant le traitement des éléments de coque de type PSDT est illustrée dans la Figure 2.11, où l'on trouve les routines de base spécifiques à l'analyse modale de coques composites.

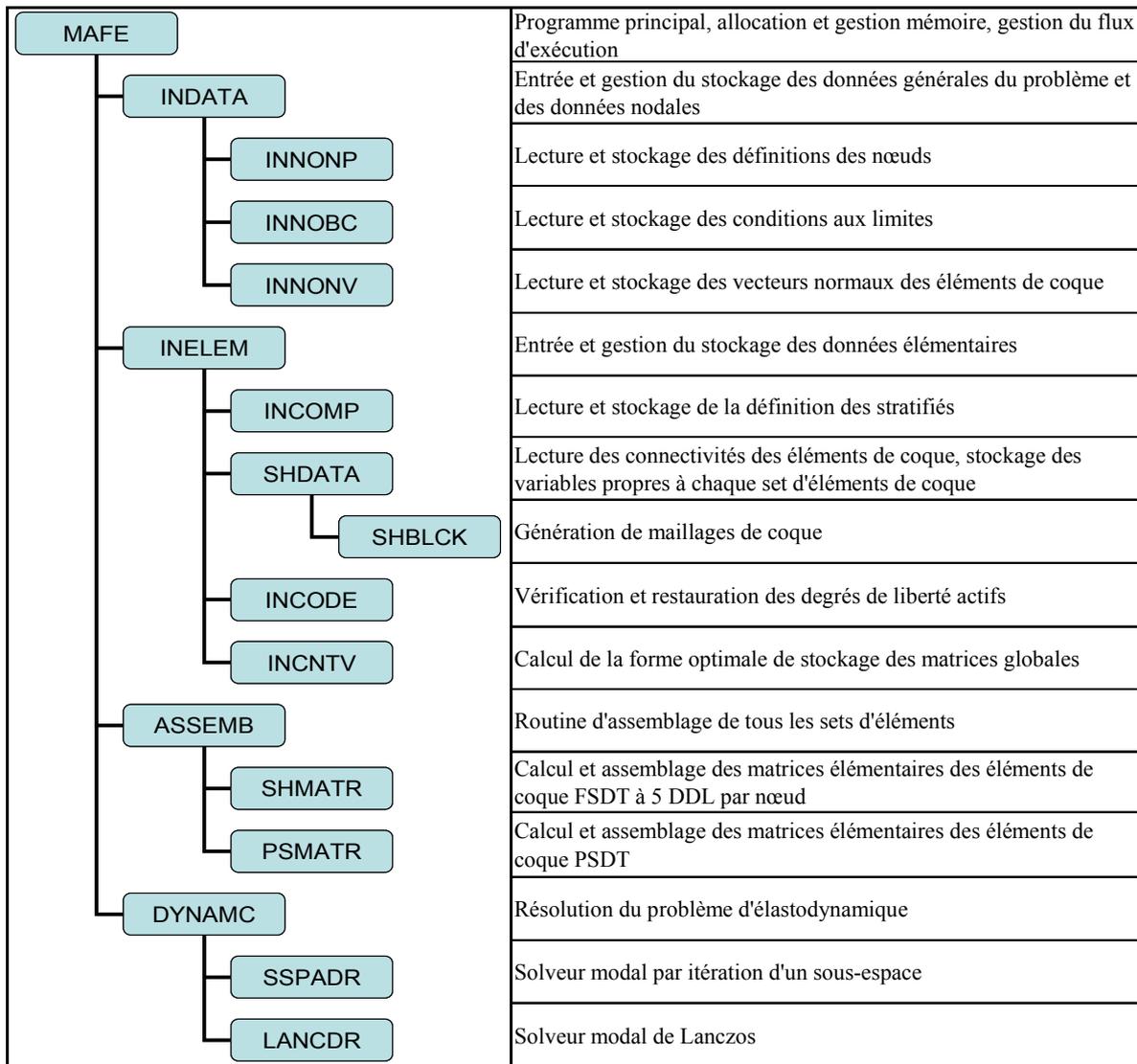


Figure 2.11: Arbre simplifié des fonctions de MAFE utilisées pour le calcul des coques

L'incorporation de la famille des éléments de coque de type PSDT dans l'ancienne version du code a nécessité principalement les modifications et développements suivants :

- L'entrée des données et leur gestion interne ont été fondamentalement revues afin de tenir compte de l'ordre  $p$  de l'approximation du déplacement, du nombre accru de degrés de liberté par nœuds passant d'un maximum de 6 à  $3(p+1)$ , soit 48 pour un ordre 15 par exemple, des nouvelles conditions aux limites introduites par les degrés de liberté supplémentaires et des nouveaux types d'éléments finis de coque PSDT. L'ordre  $p$  maximal de l'approximation des déplacements est fixé à 15 dans la version actuelle du code. Par souci de compatibilité avec les éléments existants, la bibliothèque des éléments de coque PSDT a été étendue aux formulations

linéaires, quadratiques et cubiques, de type lagrangien ou sérendipien complet ou non pour des formes de base triangulaire ou rectangulaire. Le Tableau 2.4 résume les différentes possibilités de discrétisation en éléments de coque PSDT, valables également pour les éléments FSDT.

| Ordre       | Type                                 | Nœuds  |
|-------------|--------------------------------------|--------|
| Linéaire    | Quadrangulaire                       | 4      |
| Linéaire    | Triangulaire                         | 3      |
| Quadratique | Quadrangulaire Lagrangien complet    | 9      |
| Quadratique | Quadrangulaire Sérendipien complet   | 8      |
| Quadratique | Quadrangulaire Sérendipien incomplet | 5 à 8  |
| Quadratique | Triangulaire complet ou non          | 4 à 6  |
| Cubique     | Quadrangulaire Lagrangien complet    | 16     |
| Cubique     | Quadrangulaire Sérendipien complet   | 12     |
| Cubique     | Quadrangulaire Sérendipien incomplet | 6 à 12 |
| Cubique     | Triangulaire complet ou non          | 5 à 10 |

**Tableau 2.4: Types des éléments de coque FSDT et PSDT**

- Toutes les matrices élémentaires, comme par exemple les matrices des fonctions de forme, la matrice-gradient mais aussi les matrices élémentaires de masse et de rigidité, ont été redimensionnées. Il est à noter que la taille maximale occupée par ces matrices et les autres variables volatiles lors de l'assemblage ne dépasse pas les 10Mo, ce qui reste négligeable en comparaison des 500Mo ou 1Go utilisés pour stocker les matrices globales et résoudre le problème d'extraction modale.
- L'intégration numérique dans l'épaisseur de la coque a nécessité l'introduction de nouvelles règles de quadrature pour pouvoir intégrer exactement des polynômes allant jusqu'à l'ordre 30. Ainsi des schémas de quadrature allant jusqu'à 16 points de Gauss ont été intégrés et la routine de quadrature numérique a également dû être revue.
- L'orientation des stratifiés existants a été modifiée afin de permettre la définition de stratifiés composites orientés par rapport à un vecteur de l'espace global et non plus uniquement par rapport à la direction locale  $\mathbf{v}_1$  de l'élément (qui dépend de la numérotation et des coordonnées des nœuds et donc diffère entre chaque élément fini).
- Le calcul des nouvelles matrices des fonctions de forme et des matrices-déformation a nécessité passablement d'effort, notamment en raison du type de stockage utilisé pour ces matrices, chaque bloc correspondant à la matrice  ${}^e\mathbf{B}_i$  de la

matrice-déformation  ${}^e\mathbf{B}$  étant stocké bout à bout avec le précédent de manière vectorisée (par colonne).

- La loi de comportement orthotrope 3D a été programmée, en tenant bien sûr compte de la numérotation interne à MAFE des termes de contraintes et déformations. Dans le cas où l'ordre  $p$  est égal à 1, le facteur de correction de cisaillement défini dans les propriétés du matériau orthotrope est tout de même utilisé pour corriger les termes de cisaillement transverse, tandis que dans le cas où  $p$  est supérieur à l'unité, ce facteur est tout simplement ignoré, puisque celui-ci n'est théoriquement plus nécessaire.

La structure modifiée des fonctions d'assemblage des éléments de coque PSDT, ainsi que celles de la construction détaillée des matrices élémentaires de rigidité et de masse des éléments PSDT homogènes et stratifiés, sont présentées ci-dessous (Figure 2.12 à Figure 2.16).

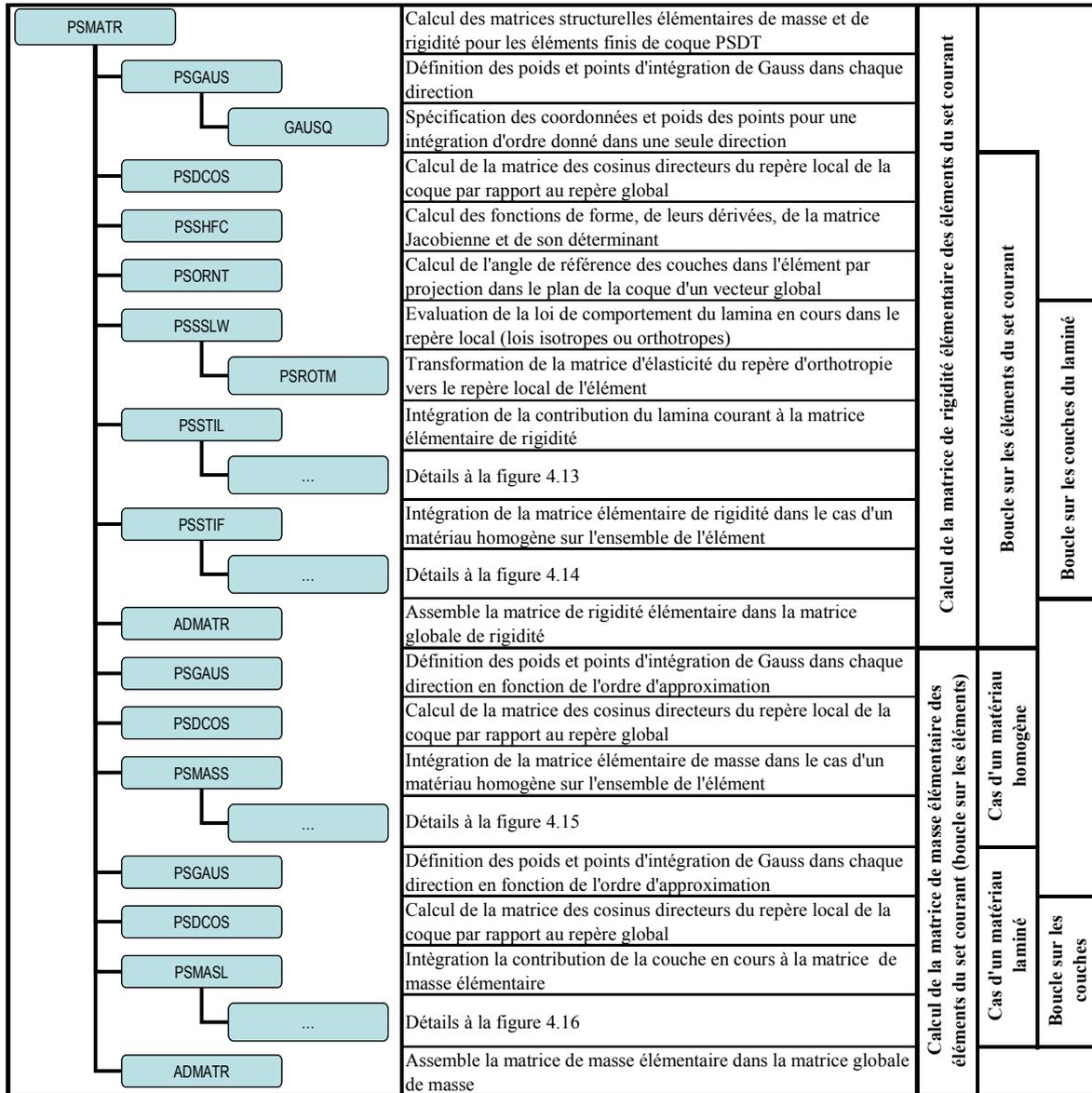


Figure 2.12: Arbre des fonctions d'assemblage des éléments de coque PSDT

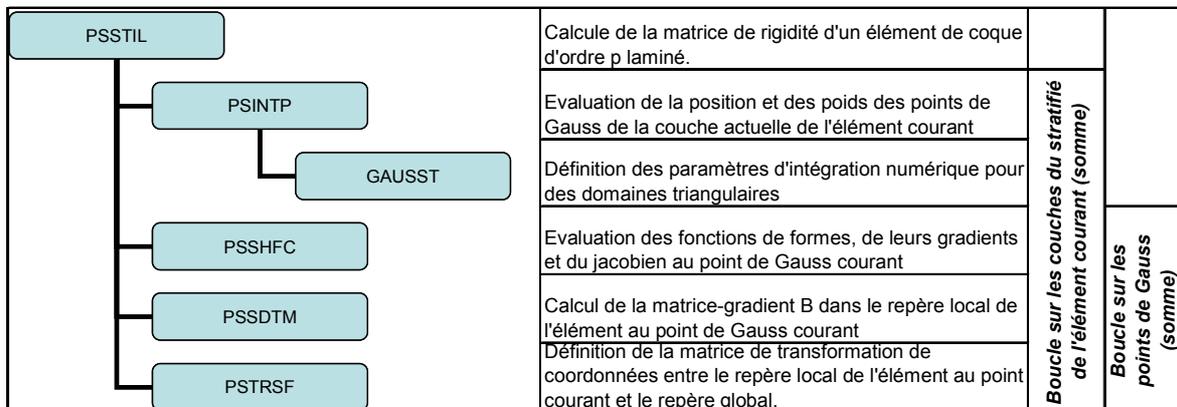


Figure 2.13: Arbre d'appel de la routine d'intégration des matrices de rigidités d'éléments de coque PSDT stratifiés

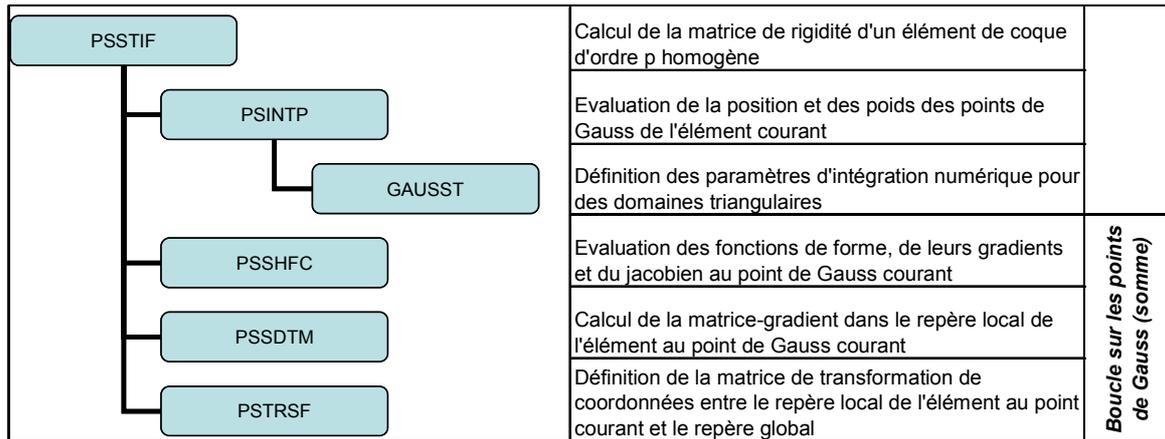


Figure 2.14: Arbre d'appel de la routine d'intégration des matrices de rigidités d'éléments de coque PSDT homogènes

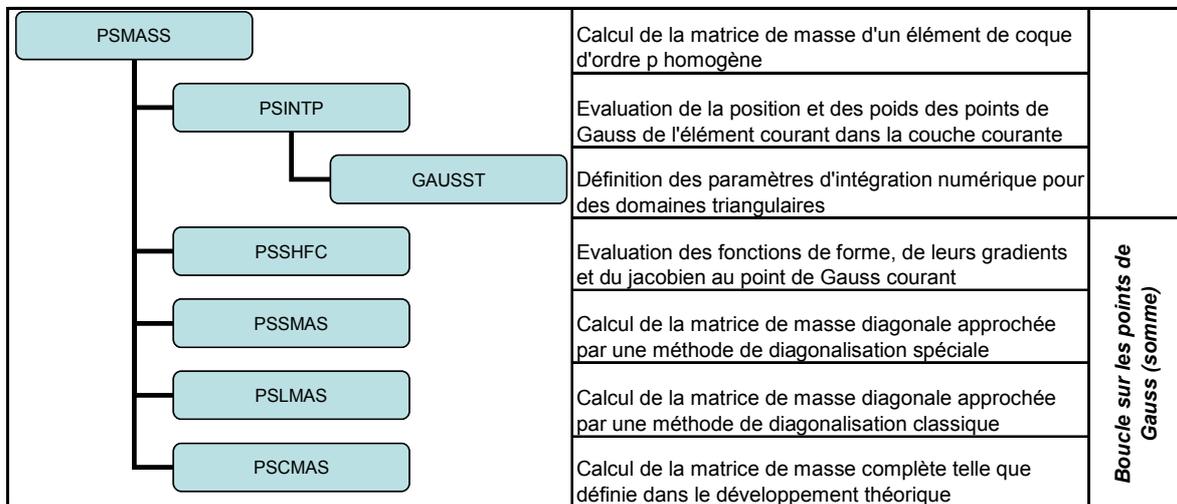


Figure 2.15: Arbre d'appel de la routine d'intégration des matrices de masse d'éléments de coque PSDT homogènes

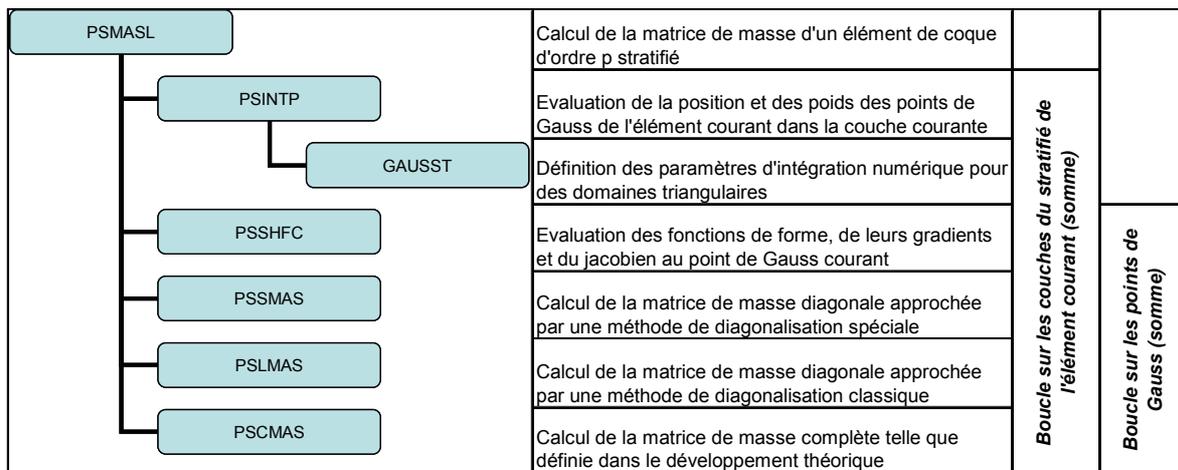


Figure 2.16: Arbre d'appel de la routine d'intégration des matrices de masse d'éléments de coque PSDT stratifiés

## 2.5 Validation de la classe d'éléments finis de coque PSDT

Afin de s'assurer de la précision du modèle de coque PSDT développé et de la consistance du code implémenté dans le logiciel MAFE, une validation basée sur des résultats expérimentaux, semi-analytiques et purement numériques a été réalisée pour des problèmes d'analyse modale de structures en stratifiés composites. La plupart de ces comparaisons ont porté sur les premières fréquences propres de plaques minces ou épaisses de forme rectangulaire dans des conditions d'appui simple ou de bord complètement libre.

### 2.5.1 Validation semi-analytique

Une première vérification a permis de contrôler la consistance du code de calcul des matrices structurelles élémentaires par comparaison directe de la matrice élémentaire obtenue dans la nouvelle version de MAFE avec son équivalent calculé analytiquement pour un élément fini quadrangulaire linéaire de géométrie simple (calcul symbolique dans MAPLE et calcul manuel).

Après cette vérification, une réelle validation du modèle développé a pu être entamée. Dans un premier temps, des résultats semi-analytiques issus d'une étude modale de plaques en stratifiés composites ont été utilisés comme référence de comparaison avec notre modèle. La principale difficulté rencontrée lors de cette étape a été de trouver suffisamment de résultats documentés et reproductibles de modèles analytiques de plaques en stratifiés pour des problèmes d'analyse modale. Parmi la littérature récente, nous avons choisi de comparer notre modèle PSDT avec les résultats de comparaison d'un grand nombre de modèles de plaques en stratifiés composites présentés par Carrera dans [49]. Dans cette publication, des modèles de plaques de différentes familles (ESL, layerwise, zig-zag, hybride) et de différents ordres d'approximation (de linéaire à cubique) sont présentés dans plusieurs cas tests, dont un traité d'analyse modale. Les résultats de référence utilisés correspondent à la première pulsation propre adimensionnelle  $\Omega = \omega_1 \sqrt{a^4 \rho / E_2 h^2}$  d'une plaque carrée de côté  $a$  et d'épaisseur variable  $h$  à quatre couches  $(0/90)_s$ <sup>12</sup> sur appuis simples. Les propriétés physiques de la plaque considérée sont symbolisées par  $\rho$  pour la masse volumique et  $E_2$  pour le module d'élasticité transverse. Le rapport d'épaisseur  $a/h$  varie de 4 à 100 et les propriétés des matériaux de chaque couche sont définies dans le Tableau 2.5. Les modèles d'éléments finis de coque PSDT d'ordre variable utilisés dans cette comparaison sont tous basés sur une

<sup>12</sup> Les quatre couches constituant le stratifié sont d'épaisseur identique.

discrétisation de la plaque en  $15 \times 15$  éléments de coque quadratiques lagrangiens (9 nœuds) avec intégration sélective des matrices dans le plan et intégration exacte dans l'épaisseur. Un facteur de correction du cisaillement transverse de  $5/6$  est utilisé pour les coques PSDT d'ordre 1, une valeur unitaire (pas de correction de cisaillement) étant toutefois aussi choisie afin de quantifier l'effet du facteur de correction (pour toutes les autres coques PSDT, le facteur de correction de cisaillement est ignoré). Les conditions aux limites en appuis simples ont été modélisées pour les éléments finis de coque PSDT de MAFE par un blocage des déplacements, mais aussi par un blocage local de toutes les dérivées d'ordre supérieur à 1, afin de supprimer l'effet parasite de la compressibilité transverse aux points d'appui. Cette modélisation des conditions de bord se rapproche ainsi des hypothèses utilisées pour le calcul des solutions semi-analytiques de référence.

| Propriété | $E_1/E_2$ | $E_3/E_2$ | $G_{23}/E_2$ | $G_{31}/E_2=G_{12}/E_2$ | $\nu_{12}=\nu_{13}=\nu_{23}$ |
|-----------|-----------|-----------|--------------|-------------------------|------------------------------|
| Valeur    | 40        | 1         | 0.6          | 0.5                     | 0.25                         |

**Tableau 2.5: Propriétés des couches de la plaque (0/90)<sub>s</sub>**

Les théories de plaque utilisées dans cette comparaison sont définies dans le Tableau 2.6. De toutes ces formulations, le modèle layerwise avec déplacement cubique dans chaque couche (LD3) est utilisé comme référence. Les simulations présentées dans la référence [49] sont obtenues par l'évaluation numérique d'une solution analytique de type développement en série.

| Symbole  | Description  |
|----------|--|
| P1 à P11 | Modèle d'élément fini de coque PSDT d'ordre $p=1$ à 11 calculé dans MAFE   |
| EDZ1     | Modèle de plaque ESL d'ordre 1 (FSDT) avec terme additionnel de type zig-zag et compressibilité transverse                           |
| EDZ3     | Modèle de plaque ESL d'ordre 3 (HSDT) avec terme additionnel de type zig-zag et compressibilité transverse                           |
| EDZ1d    | Modèle de plaque ESL d'ordre 1 (FSDT) avec terme additionnel de type zig-zag, sans compressibilité transverse                        |
| EDZ3d    | Modèle de plaque ESL d'ordre 3 (HSDT) avec terme additionnel de type zig-zag sans compressibilité transverse                         |
| LD1      | Modèle par couche (layerwise) basé sur une approximation en déplacement linéaire dans chaque couche, avec compressibilité transverse |
| LD3      | Modèle par couche (layerwise) basé sur une approximation en déplacement cubique dans chaque couche, avec compressibilité transverse. |

**Tableau 2.6: Théories utilisées pour la validation semi-analytique**

Les résultats de calcul de la première pulsation propre adimensionnelle sont présentés dans le Tableau 2.7, tandis que les écarts relatifs de la pulsation propre par rapport au modèle LD3 sont reportés dans le Tableau 2.8 et à la Figure 2.17. La Figure 2.18 représente quant à elle le graphe de convergence, en fonction de l'ordre  $p$ , de l'écart relatif de la première pulsation calculée par rapport au modèle LD3.

| $a/h$ | LD3    | LD1    | EDZ3   | EDZ1   | EDZ3d  | EDZ1d  |
|-------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 4     | 9.224  | 9.473  | 9.388  | 9.956  | 9.394  | 9.595  |
| 10    | 15.148 | 15.335 | 15.232 | 15.563 | 15.271 | 15.572 |
| 20    | 17.626 | 17.703 | 17.655 | 17.817 | 17.717 | 17.829 |
| 100   | 18.753 | 18.761 | 18.754 | 18.819 | 18.827 | 18.833 |

| $a/h$ | P1 (K=5/6) | P1 (K=1) | P3     | P5     | P7     | P9     | P11    |
|-------|------------|----------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 4     | 9.388      | 9.960    | 9.497  | 9.394  | 9.388  | 9.385  | 9.381  |
| 10    | 15.131     | 15.573   | 15.261 | 15.196 | 15.190 | 15.189 | 15.187 |
| 20    | 17.647     | 17.829   | 17.661 | 17.637 | 17.635 | 17.634 | 17.634 |
| 100   | 18.824     | 18.833   | 18.754 | 18.753 | 18.753 | 18.753 | 18.753 |

**Tableau 2.7: Première pulsation propre adimensionnelle d'une plaque carrée (0/90), sur appuis simples**

| $a/h$ | LD1     | EDZ3    | EDZ1    | EDZ3d   | EDZ1d   |
|-------|---------|---------|---------|---------|---------|
| 4     | 2.6995% | 1.7780% | 7.9358% | 1.8430% | 4.0221% |
| 10    | 1.2345% | 0.5545% | 2.7396% | 0.8120% | 2.7990% |
| 20    | 0.4369% | 0.1645% | 1.0836% | 0.5163% | 1.1517% |
| 100   | 0.0427% | 0.0053% | 0.3519% | 0.3946% | 0.4266% |

| $a/h$ | P1 (K=5/6) | P1 (K=1) | P3      | P5      | P7      | P9      | P11     |
|-------|------------|----------|---------|---------|---------|---------|---------|
| 4     | 1.7796%    | 7.9738%  | 2.9593% | 1.8426% | 1.7824% | 1.7471% | 1.6974% |
| 10    | -0.1099%   | 2.8041%  | 0.7453% | 0.3149% | 0.2792% | 0.2701% | 0.2564% |
| 20    | 0.1212%    | 1.1506%  | 0.1996% | 0.0634% | 0.0510% | 0.0479% | 0.0436% |
| 100   | 0.3770%    | 0.4245%  | 0.0077% | 0.0017% | 0.0011% | 0.0009% | 0.0009% |

**Tableau 2.8: Ecart relatif de pulsation propre par rapport au modèle LD3**

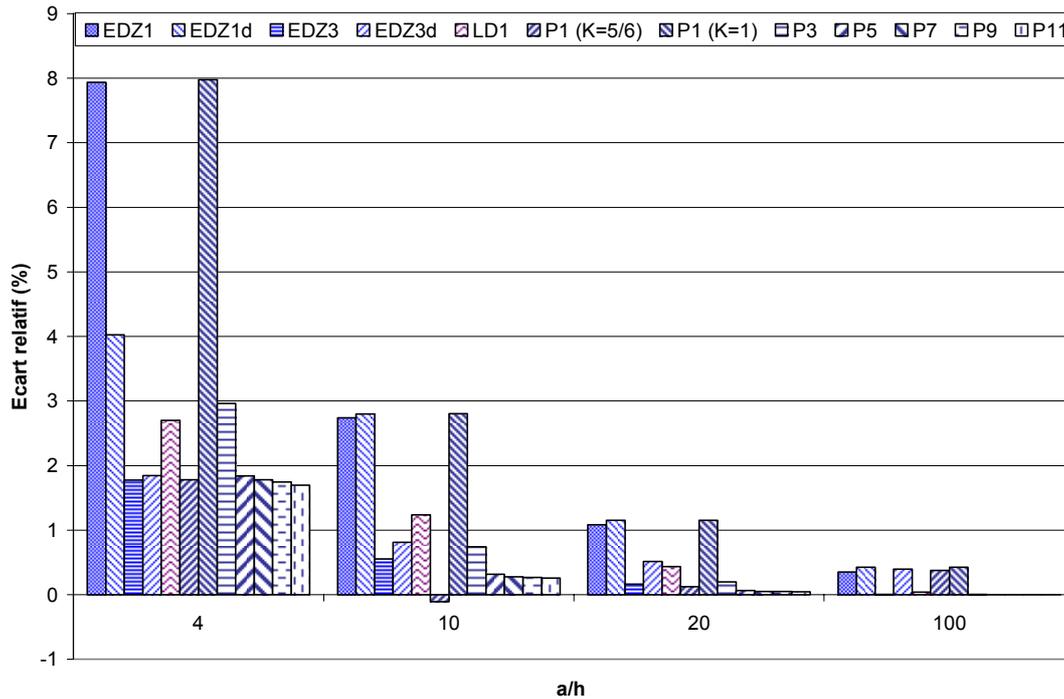


Figure 2.17: Ecarts relatifs au modèle LD3 de la première pulsation propre calculée

Tout d’abord, nous pouvons constater que dans le cas des plaques très épaisses ( $a/h \leq 10$ ) les modèles ESL basés sur une approximation linéaire du champ de déplacement ne fournissent des résultats satisfaisants qu’à la condition de connaître très précisément le facteur de correction de cisaillement. En effet, la différence entre le modèle d’ordre  $p=1$  sans correction de cisaillement et avec le bon facteur de correction peut atteindre jusqu’à plus de 6% sur la première fréquence propre et, par conséquent, bien plus sur les pulsations propres d’ordre élevé qui sont davantage sensibles aux effets de cisaillement transverse. Les modèles PSDT avec  $p > 3$  fournissent quant à eux de très bons résultats pour tous les rapports d’épaisseur considérés en comparaison des autres modèles de plaque. Le modèle PSDT d’ordre 3 permet d’obtenir une excellente précision dans une plage de rapport d’épaisseur  $a/h$  de 10 à 100, mais fournit un résultat légèrement moins précis dans le cas de plaques très épaisses ( $a/h < 10$ ).

En comparant les différents modèles ESL basés sur une approximation cubique (EDZ3, EDZ3d et P3), on peut observer que les termes zig-zag additionnels des théories de plaques EDZ3 et EDZ3d améliorent clairement la précision dans le cas de plaques très épaisses ( $a/h < 10$ ) mais n’introduisent aucune amélioration significative dans les autres cas ( $a/h > 10$ ). En s’intéressant aux différences entre les modèles des familles EDZ, EDZd et PSDT, on note que les termes de type zig-zag n’apportent aucune amélioration dans le cas de modèles linéaires et

qu'en dehors du cas peu souhaitable d'une plaque épaisse modélisée avec une approximation linéaire, l'inclusion dans les modèles des effets de compressibilité transverse n'entraîne qu'un faible gain de précision<sup>13</sup>. Comparé aux modèles ESL d'ordre 1, le modèle layerwise d'ordre 1 (LD1) produit de bien meilleurs résultats, montrant ainsi le gain de précision qu'apporte une approche layerwise. Cependant, le modèle layerwise d'ordre 1 reste malgré tout légèrement inférieur en terme de précision aux modèles PSDT d'ordre 3 et plus. En outre, si l'on considère le nombre de degrés de liberté que nécessiterait un modèle layerwise d'ordre 1 et plus, les modèles LD1 et LD3 s'avèrent nettement moins intéressants d'un point de vue précision atteinte par rapport à l'effort de calcul requis, rendant ainsi ces modèles bien moins intéressants pour une utilisation dans une procédure d'identification mixte numérique-expérimentale.

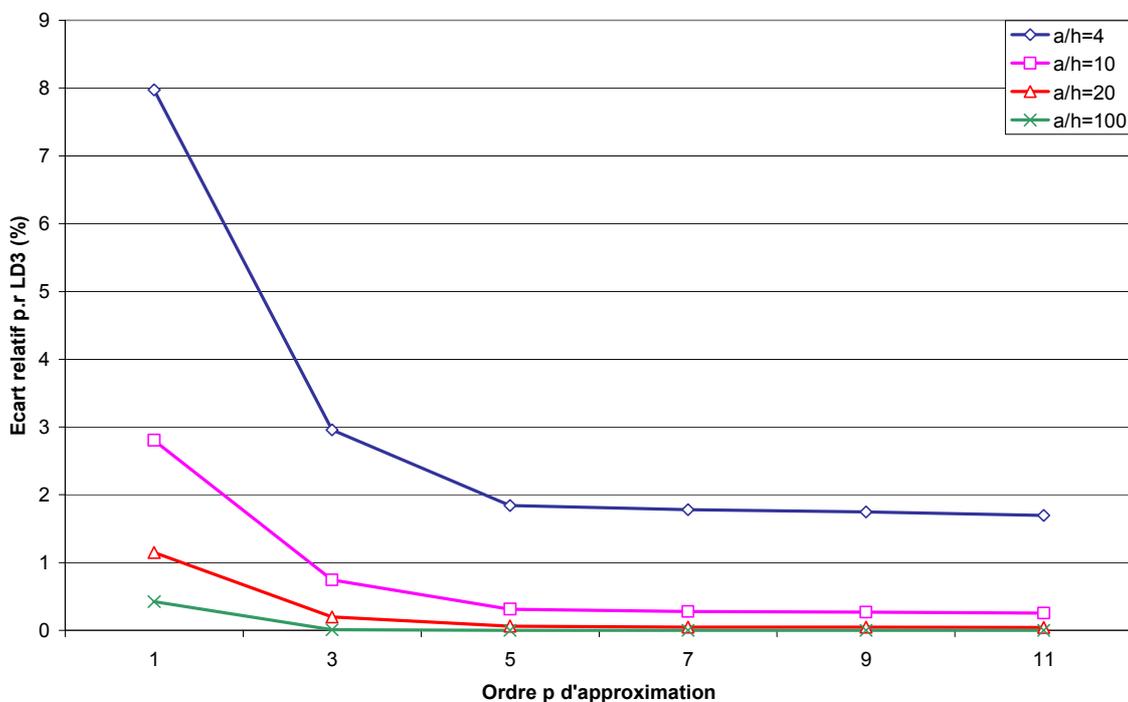


Figure 2.18: Convergence du modèle PSDT en fonction de l'ordre  $p$  d'approximation

Nous pouvons également remarquer que le modèle PSDT d'ordre 5 est déjà très proche de la convergence et que l'augmentation de l'ordre  $p$  au-delà de 5 ne semble pas améliorer l'estimation de la première pulsation propre. Malgré tout, la convergence du modèle d'ordre  $p$

<sup>13</sup> Bien que n'apportant aucun avantage dans le cas des plaques planes, l'inclusion des effets de compressibilité transverse dans la formulation PSDT assure un conditionnement numérique correct du problème dans le cas de structures 2D planes mais aussi 3D gauches, sans avoir à ajouter un terme de rigidité numérique fictive comme ce que requièrent généralement les coques à 6 DDL par nœud.

par rapport au modèle layerwise cubique LD3 de référence est excellente pour  $a/h \geq 10$ , mais une différence résiduelle d'un peu moins de 2% subsiste dans le cas des plaques très épaisses ( $a/h < 10$ ). Cette différence peut en partie être expliquée par la difficulté de modélisation en éléments finis des conditions aux limites théoriques utilisées dans la solution analytique. En effet, les appuis simples sont simulés par un blocage de tous les déplacements généralisés d'ordre supérieur à 1 afin d'annuler tous les termes d'ordre pair supérieur ou égal à 2 qui correspondent aux effets de compressibilité transverse. Cependant, en fixant tous ces déplacements, on bloque aussi localement les termes de gauchissement de la section de la coque (termes d'ordre impair représentant les effets de cisaillement transverse), introduisant ainsi des erreurs de modélisation par rapport aux conditions aux limites analytiques.

### 2.5.2 Validation expérimentale

Dans un second temps, la validation de la famille d'éléments finis de coque PSDT a été réalisée par rapport à des mesures d'analyse modale expérimentale d'une plaque composite. Le spécimen de test considéré est une plaque rectangulaire de dimension  $290 \times 234 \times 5$  mm constituée d'un stratifié  $(90^\circ/0^\circ)_{2s}$  de 8 couches de composite fibre de verre / matrice thermoplastique polypropylène. Fabriquée au LMAF selon une technique de pressage à chaud, la plaque de test a un rapport d'aspect de 1.24 et un rapport d'épaisseur d'environ 60, permettant ainsi de considérer cette plaque comme relativement mince. Le matériau de chaque couche est formé de pré-imprégnés Twintex fournis par Vetrotex (France) et basés sur un tissu tressé 4:1 de fibres de verre. Les tests de qualité classiques ont été effectués pour évaluer le taux de vide et la distribution d'épaisseur de la plaque. Les propriétés élastiques de chaque couche ont été obtenues par des tests statiques de traction et de flexion [57] ainsi que par une procédure d'identification modale mixte numérique-expérimentale sur plusieurs spécimens. Il faut cependant noter que les propriétés du matériau composite utilisé dépendent fortement des paramètres du procédé de mise en œuvre (température, temps, pression) et qu'elles ont une incertitude non négligeable (au minimum de 1% à 5% selon le paramètre), surtout pour les modules de cisaillement transverse  $G_{13}$  et  $G_{23}$ . La masse volumique de la plaque a une valeur de  $1463 \text{ kg/m}^3$  et les propriétés élastiques des couches sont données dans le Tableau 2.9.

| Propriété | $E_1$ | $E_2$ | $G_{12}=G_{13}$ | $G_{23}$ | $\nu_{12}$ |
|-----------|-------|-------|-----------------|----------|------------|
| Unité     | GPa   | GPa   | GPa             | GPa      | -          |
| Valeur    | 23.5  | 9.4   | 2.5             | 1.8      | 0.08       |

Tableau 2.9: Propriétés élastiques des strates Twintex Fabric 4/1

Les données expérimentales ont été obtenues par la méthode d'analyse modale, basée sur une excitation acoustique et une mesure par interférométrie laser à effet Doppler de la réponse

en vitesse du spécimen de test, décrite au chapitre 3. Il est toutefois à remarquer que cette méthode est utilisée ici uniquement pour mesurer les fréquences propres de la structure et non pas pour estimer les propriétés élastiques constitutives du matériau. La mesure est effectuée avec des conditions aux limites représentant expérimentalement des conditions de vibration totalement libres par suspension du spécimen à l'aide de deux fils de nylon très fins. Comme la mesure peut être effectuée sur une grille de point, la plaque a été discrétisée en un maillage de  $15 \times 13$  points de mesure. La plage de fréquence utilisée va de 50 à 1500 Hz et tous les modes et fréquences propres présents sont extraits des fonctions de transfert mesurées.

Du point de vue de la modélisation par éléments finis, le maillage choisi pour cette validation est constitué de  $8 \times 8$  éléments sérendapiens (8 nœuds) de coque PSDT avec intégration sélective dans le plan et exacte dans l'épaisseur. Le matériau constitutif est défini pour chaque couche pour constituer un stratifié d'orientation et d'épaisseur correspondant au spécimen réel.

Les résultats expérimentaux et numériques sont présentés dans le Tableau 2.10 et les écarts relatifs des fréquences propres calculées et mesurées sont présentés dans la Figure 2.19.

| Mode | EXP    | P1 k=5/6 | [Ecart (%)] | P3     | [Ecart (%)] | P5     | [Ecart (%)] |
|------|--------|----------|-------------|--------|-------------|--------|-------------|
| 1    | 101.7  | 101.5    | [-0.2%]     | 101.5  | [-0.2%]     | 101.5  | [-0.2%]     |
| 2    | 190.1  | 187.3    | [-1.5%]     | 189.4  | [-0.4%]     | 188.8  | [-0.7%]     |
| 3    | 273.9  | 277.0    | [1.1%]      | 278.3  | [1.6%]      | 277.9  | [1.5%]      |
| 4    | 340.9  | 338.3    | [-0.8%]     | 340.9  | [0.0%]      | 340.2  | [-0.2%]     |
| 5    | 389.7  | 393.1    | [0.9%]      | 395.3  | [1.4%]      | 394.7  | [1.3%]      |
| 6    | 524.5  | 515.6    | [-1.7%]     | 520.9  | [-0.7%]     | 519.5  | [-1.0%]     |
| 7    | 558.2  | 562.4    | [0.8%]      | 563.8  | [1.0%]      | 563.5  | [0.9%]      |
| 8    | 600.9  | 596.2    | [-0.8%]     | 600.6  | [0.0%]      | 599.4  | [-0.2%]     |
| 9    | 872.3  | 866.1    | [-0.7%]     | 868.6  | [-0.4%]     | 867.9  | [-0.5%]     |
| 10   | 926.3  | 926.4    | [0.0%]      | 933.5  | [0.8%]      | 931.6  | [0.6%]      |
| 11   | 970.8  | 972.0    | [0.1%]      | 978.1  | [0.8%]      | 976.5  | [0.6%]      |
| 12   | 1023.0 | 1009.4   | [-1.3%]     | 1020.0 | [-0.3%]     | 1017.1 | [-0.6%]     |
| 13   | 1076.0 | 1078.9   | [0.3%]      | 1089.0 | [1.2%]      | 1086.3 | [1.0%]      |
| 14   | 1131.0 | 1121.4   | [-0.8%]     | 1124.8 | [-0.5%]     | 1123.9 | [-0.6%]     |
| 15   | 1339.0 | 1328.2   | [-0.8%]     | 1334.1 | [-0.4%]     | 1332.5 | [-0.5%]     |
| 16   | 1416.0 | 1389.3   | [-1.9%]     | 1392.4 | [-1.7%]     | 1391.7 | [-1.7%]     |

**Tableau 2.10: Fréquences propres en Herz mesurées et calculées de la plaque Twintex (90°/0°)<sub>2s</sub> et écarts relatifs par rapport aux valeurs expérimentales**

Au vu des résultats, on peut constater que les simulations numériques et les valeurs expérimentales concordent relativement précisément, avec une erreur maximale de l'ordre de  $\pm 2\%$ . Cependant, comme la plaque est mince, les différences entre les modèles d'ordre  $p=1$  (avec un facteur de correction de cisaillement de  $5/6$ ),  $p=3$  et  $p=5$  restent bien évidemment très faibles et ne justifient pas, dans ce cas, l'utilisation d'une théorie avec déformation en cisaillement transverse d'ordre élevé. Dès lors que l'erreur relative est vraisemblablement de nature plutôt aléatoire et indépendante du type de formulation utilisée, il semblerait donc que les écarts observés proviennent plutôt de la relative incertitude avec laquelle sont définies les propriétés élastiques de référence. Toutefois, vu les incertitudes des propriétés élastiques (au mieux entre  $\pm 1\%$  à  $\pm 5\%$ ) et des fréquences propres mesurées (entre  $\pm 1\%$  et  $\pm 2\%$ ), nous pouvons considérer que les résultats de validation concordent.

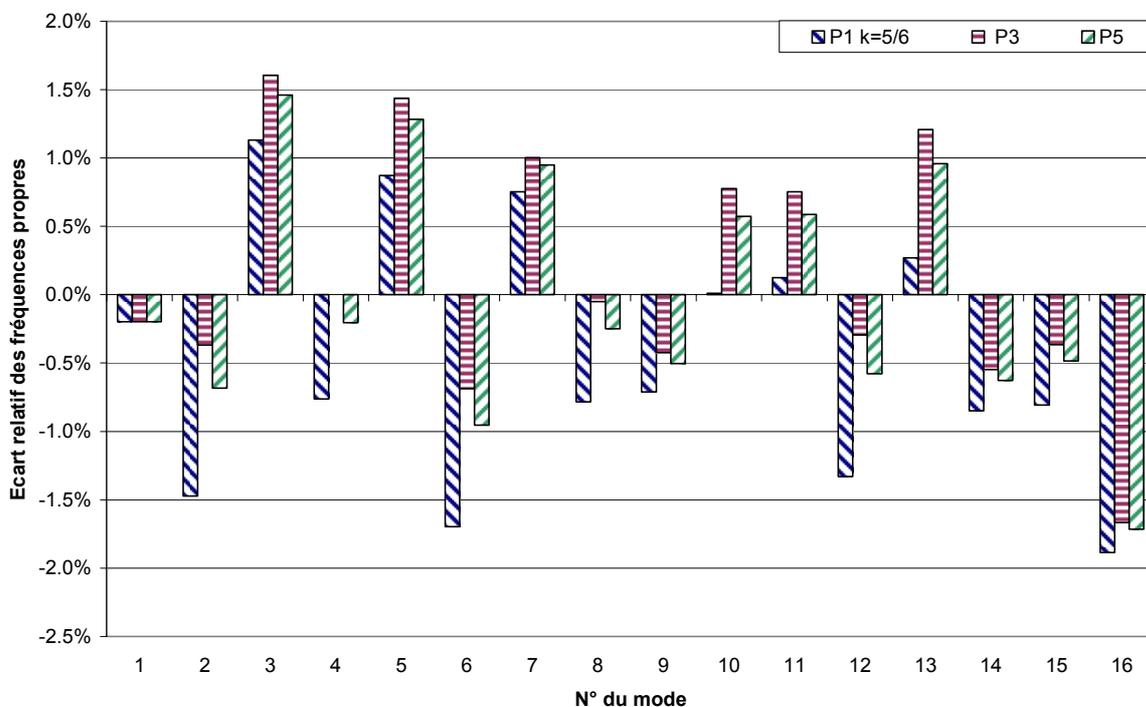


Figure 2.19: Ecart relatif des fréquences propres calculées par rapport aux mesures

### 2.5.3 Validation numérique

Afin d'étudier plus attentivement les effets de cisaillement transverse et de valider les modèles de coque PSDT dans le cas de structures très épaisses, une comparaison avec des formulations d'éléments finis solides  $C^0$  de plaques en stratifié composite a été réalisée. Celle-ci porte sur l'analyse modale numérique d'une série de plaques rectangulaires de dimensions  $150 \times 100 \times 10$ ,  $150 \times 100 \times 20$  et  $150 \times 100 \times 40$  mm en stratifié  $(0^\circ/90^\circ)_{2s}$  de composite

carbone-époxy fortement orthotrope. Les plaques sont considérées comme étant complètement libres et les propriétés du matériau correspondent à des valeurs typiques de composites en carbone-époxyde à 60% de volume de fibres (Tableau 2.11). Le rapport d'aspect des plaques de test est de 1.5 et le rapport d'épaisseur varie de 3.75 à 15, ce qui correspond à des plaques très épaisses à modérément épaisses.

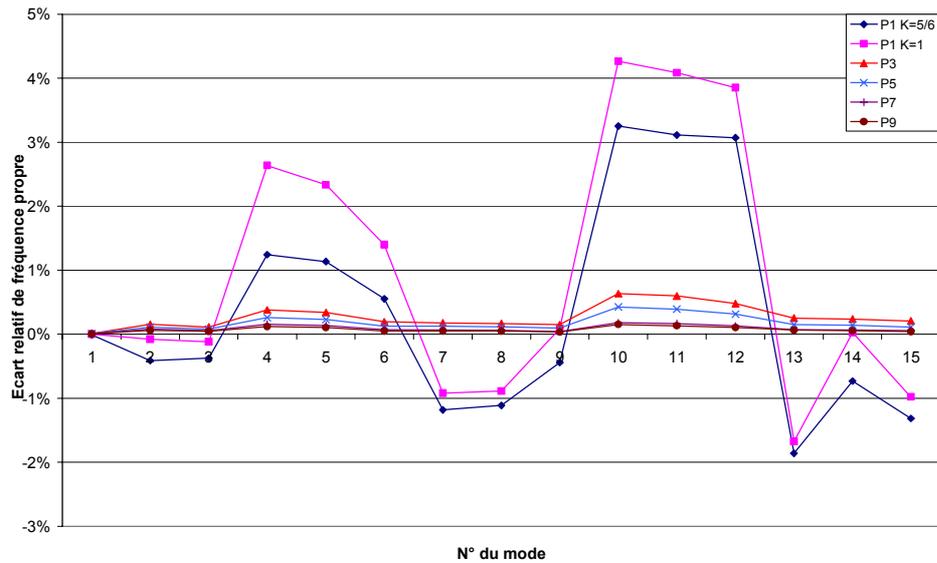
| Propriété | $E_1$ | $E_2=E_3$ | $G_{12}=G_{13}$ | $G_{23}$ | $\nu_{12}=\nu_{13}$ | $\nu_{23}$ | $\rho$            |
|-----------|-------|-----------|-----------------|----------|---------------------|------------|-------------------|
| Unité     | GPa   | GPa       | GPa             | GPa      | -                   | -          | kg/m <sup>3</sup> |
| Valeur    | 114   | 8.0       | 3.1             | 2.9      | 0.29                | 0.44       | 1480              |

**Tableau 2.11: Propriétés d'un lamina en composite carbone-époxyde à 60% de volume de fibres**

Le maillage retenu dans les modèles d'éléments finis de type coque PSDT est constitué de  $15 \times 10$  éléments sérendapiens (8 nœuds) de coque PSDT avec intégration sélective dans le plan et exacte dans l'épaisseur de la coque. Les modèles d'éléments finis solides  $C^0$  ont été construits avec le logiciel commercial ABAQUS et sont constitués de  $20 \times 13 \times 16$  éléments quadratiques sérendapiens à 20 nœuds et avec intégration réduite (éléments C3D20R selon la nomenclature ABAQUS). Ainsi, le nombre de nœuds présents dans les modèles PSDT et solides sont respectivement de 501 et 19'103. A titre de comparaison, le nombre total de degrés de liberté est de 3006 pour le modèle PSDT d'ordre 1 (6 ddl/nœud), 12'024 pour le modèle PSDT d'ordre 7 (24 ddl/nœud) et de 57'309 pour le modèle solide d'Abaqus (3 ddl/nœud).

| Mode | Solide 3D | P1 $k=5/6$ | P1 $k=1$ | P3     | P5     | P7     | P9     |
|------|-----------|------------|----------|--------|--------|--------|--------|
| 1    | 989.49    | 989.39     | 989.51   | 989.62 | 989.58 | 989.56 | 989.55 |
| 2    | 3137.2    | 3124.3     | 3134.8   | 3142.1 | 3140.8 | 3139.8 | 3139.1 |
| 3    | 3616.6    | 3603.1     | 3612.4   | 3620.7 | 3619.6 | 3618.7 | 3618.2 |
| 4    | 4868.7    | 4929.2     | 4997.1   | 4887.3 | 4881.4 | 4876.4 | 4874.6 |
| 5    | 5164.5    | 5223.1     | 5285.1   | 5182.1 | 5176.4 | 5171.6 | 5169.9 |
| 6    | 6620.9    | 6657.6     | 6713.5   | 6633.8 | 6629.4 | 6625.5 | 6624.4 |
| 7    | 7426.1    | 7338.4     | 7357.9   | 7439.4 | 7435.4 | 7431.0 | 7429.9 |
| 8    | 7762.9    | 7676.5     | 7694.0   | 7776.0 | 7771.9 | 7767.7 | 7766.7 |
| 9    | 9788.2    | 9745.2     | 9796.6   | 9802.9 | 9797.4 | 9792.4 | 9791.5 |
| 10   | 11003     | 11361      | 11472    | 11073  | 11050  | 11023  | 11020  |
| 11   | 11213     | 11562      | 11671    | 11280  | 11257  | 11232  | 11228  |
| 12   | 12117     | 12489 *    | 12584 *  | 12175  | 12155  | 12133  | 12130  |
| 13   | 12312     | 12083 *    | 12106 *  | 12343  | 12331  | 12321  | 12320  |
| 14   | 12581     | 12489      | 12584    | 12611  | 12599  | 12589  | 12588  |
| 15   | 14010     | 13826      | 13873    | 14039  | 14026  | 14018  | 14016  |

**Tableau 2.12: Fréquences propres de la plaque carbone-époxy  $150 \times 100 \times 10$  mm (un astérisque met en lumière une inversion de l'ordre d'apparition des modes)**

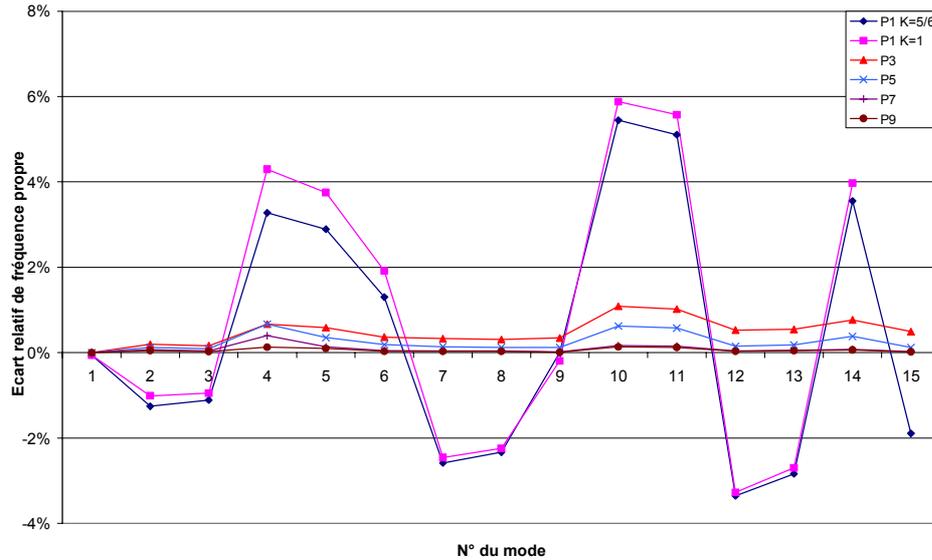


**Figure 2.20: Ecart relatif des fréquences propres de la plaque carbone-époxy  $150 \times 100 \times 10$  mm par rapport aux valeurs calculées à l'aide du modèle solide 3D.**

Les résultats des 15 premières fréquences propres sont présentés dans les Tableaux 2.12 à 2.14 et les écarts relatifs des fréquences calculées avec les modèles PSDT par rapport au modèle solide 3D sont illustrés dans les Figures 2.20 à 2.22. La Figure 2.23 montre quant à elle l'écart relatif moyen (en valeurs absolues) en fonction de l'ordre  $p$  d'approximation, permettant ainsi d'évaluer la convergence du modèle PSDT par rapport au modèle solide de référence.

| Mode | Solide 3D | P1 $k=5/6$ | P1 $k=1$ | P3    | P5    | P7    | P9    |
|------|-----------|------------|----------|-------|-------|-------|-------|
| 1    | 1825      | 1824       | 1824     | 1825  | 1825  | 1825  | 1825  |
| 2    | 5295      | 5228       | 5241     | 5305  | 5301  | 5298  | 5297  |
| 3    | 5955      | 5888       | 5898     | 5964  | 5960  | 5957  | 5956  |
| 4    | 7795      | 8051       | 8130     | 7847  | 7847  | 7826  | 7805  |
| 5    | 8209      | 8446       | 8517     | 8257  | 8238  | 8220  | 8217  |
| 6    | 10222     | 10355 *    | 10418 *  | 10259 | 10241 | 10227 | 10225 |
| 7    | 10292     | 10026 *    | 10039 *  | 10326 | 10306 | 10296 | 10295 |
| 8    | 10740     | 10489      | 10499    | 10773 | 10753 | 10744 | 10743 |
| 9    | 13690     | 13690      | 13663    | 13737 | 13706 | 13692 | 13691 |
| 10   | 14283     | 15061 *    | 15123 *  | 14438 | 14372 | 14307 | 14302 |
| 11   | 14596     | 15341 *    | 15409 *  | 14745 | 14680 | 14618 | 14614 |
| 12   | 15374     | 14858 *    | 14870 *  | 15455 | 15397 | 15380 | 15379 |
| 13   | 15645     | 15201 *    | 15222 *  | 15730 | 15673 | 15653 | 15652 |
| 14   | 15991     | 16559      | 16626    | 16114 | 16052 | 16003 | 16001 |
| 15   | 17857     | 17519      | -        | 17945 | 17878 | 17861 | 17860 |

**Tableau 2.13: Fréquences propres de la plaque carbone-époxy  $150 \times 100 \times 20$  mm (un astérisque met en lumière une inversion de l'ordre d'apparition des modes)**

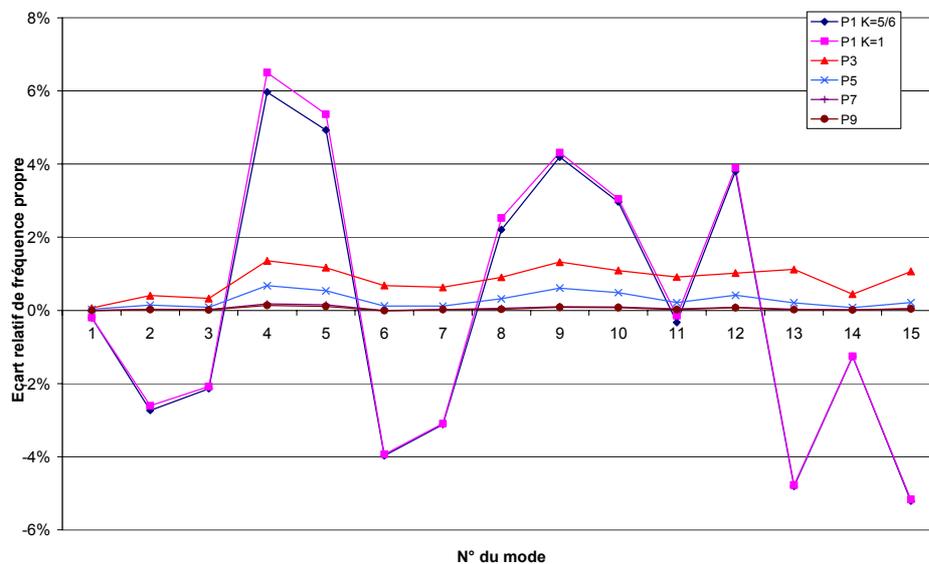


**Figure 2.21: Ecarts relatifs des fréquences propres de la plaque carbone - époxy 150x100x20 mm par rapport à celle calculée à l'aide du modèle solide 3D.**

On peut relever à nouveau que les modèles PSDT d'ordre 3 et plus donnent d'excellents résultats par rapport au modèle solide de référence. Par contre, les modèles linéaires ne fournissent dans cette comparaison que des résultats peu précis (entre 4% et 6% d'erreur), même dans le cas le moins épais (rapport d'épaisseur de 15), ce qui n'avait pas été observé dans les comparaisons précédentes. En effet, il semble que, dans le cas présent, le haut degré d'orthotropie du matériau, ainsi que la stratification en plis croisés avec un nombre important de couches, accentuent fortement les effets des déformations en cisaillement transverse. De plus, il est fort possible que les facteurs de correction de cisaillement de 5/6 ou de 1 utilisés ne correspondent pas du tout au facteur de correction réel pour ce stratifié. Nous constatons également que les modèles linéaires conduisent à de bons résultats pour certains types de mode, dont le premier mode, mais pas pour d'autres, comme par exemple les modes faisant intervenir des déformations en flexion dans la largeur de la plaque (cas du mode 10 de la plaque de 20mm) comme illustré à la Figure 2.24. On note ainsi que l'influence des effets des cisaillement transverse n'est pas uniformément répartie sur toutes les formes propres, mais est plutôt sélective sur certains types de déformée modale. Nous pouvons aussi observer que l'ordre d'apparition des modes des modèles d'ordre 1 n'est pas le même que pour les autres modèles. Enfin, les formes des modes calculés avec les modèles linéaires diffèrent quelque peu de celles des modes propres fournis par les autres formulations, mais ces différences n'ont pas été illustrées ici par souci de concision.

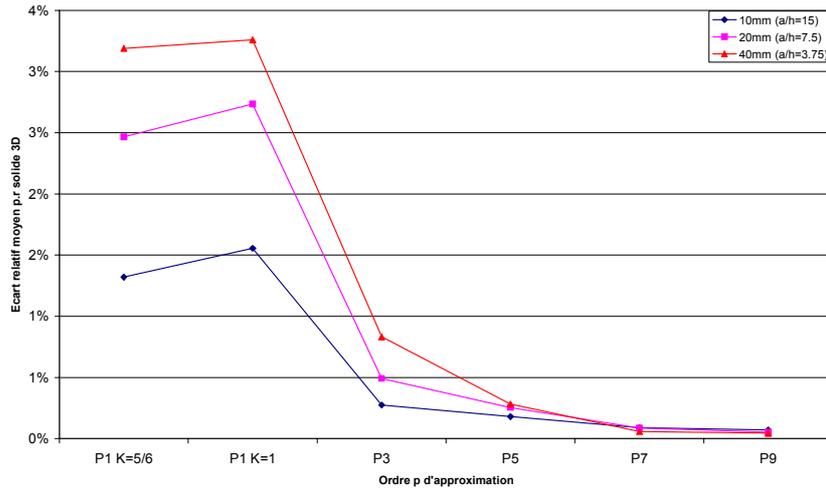
| Mode | Solide 3D | P1 $k=5/6$ | P1 $k=1$ | P3    | P5    | P7    | P9    |
|------|-----------|------------|----------|-------|-------|-------|-------|
| 1    | 3051      | 3045       | 3045     | 3053  | 3052  | 3051  | 3051  |
| 2    | 7304      | 7104       | 7113     | 7333  | 7314  | 7306  | 7305  |
| 3    | 7990      | 7819       | 7824     | 8016  | 7997  | 7992  | 7991  |
| 4    | 10122     | 10726      | 10780    | 10259 | 10190 | 10140 | 10136 |
| 5    | 10648     | 11173 *    | 11219 *  | 10772 | 10705 | 10664 | 10660 |
| 6    | 11482     | 11026 *    | 11030 *  | 11560 | 11496 | 11482 | 11481 |
| 7    | 12184     | 11804      | 11807    | 12261 | 12198 | 12187 | 12187 |
| 8    | 12961     | 13247      | 13288    | 13078 | 13002 | 12968 | 12965 |
| 9    | 14343     | 14944      | 14961    | 14532 | 14430 | 14358 | 14355 |
| 10   | 14689     | 15124      | 15137    | 14849 | 14760 | 14702 | 14700 |
| 11   | 16057     | 16004      | 16034    | 16203 | 16091 | 16063 | 16060 |
| 12   | 16561     | 17190 *    | 17206 *  | 16730 | 16629 | 16575 | 16573 |
| 13   | 16918     | 16104 *    | 16110 *  | 17107 | 16953 | 16924 | 16921 |
| 14   | 17391     | 17172      | 17173    | 17468 | 17404 | 17394 | 17393 |
| 15   | 17416     | 16508 *    | 16516 *  | 17601 | 17453 | 17425 | 17423 |

**Tableau 2.14: : Fréquences propres de la plaque carbone - époxy 150x100x40 mm (un astérisque met en lumière une inversion de l'ordre d'apparition des modes)**



**Figure 2.22: Ecarts relatifs des fréquences propres de la plaque carbone-époxy 150 × 100 × 40 mm par rapport à celles calculées à l'aide du modèle solide 3D**

Si l'on s'intéresse à la précision des modèles d'ordre  $p > 3$  (Figure 2.19 à Figure 2.21), nous voyons que le modèle cubique fournit déjà une excellente précision, avec moins de 1% d'erreur pour un rapport d'épaisseur supérieur à 7.5 et environ un maximum de 1.5% pour le cas extrême de la plaque de 40 mm (ratio d'épaisseur de 3.75). L'erreur relative moyenne sur l'ensemble des modes converge visiblement vers une valeur proche de zéro lorsque l'ordre  $p$  augmente et les erreurs relatives des modèles d'ordre supérieur à 5 deviennent extrêmement faibles, même dans le cas de plaques très épaisses.



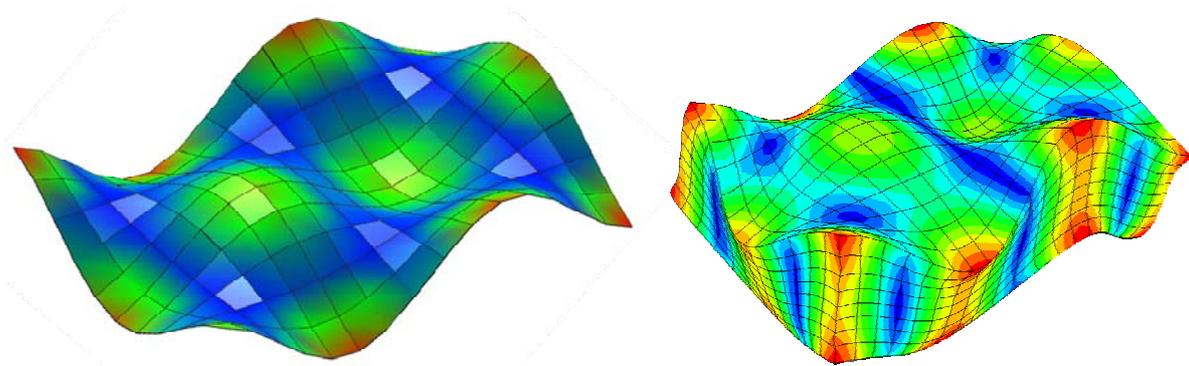
**Figure 2.23: Graphe de convergence des modèles de coque PSDT par rapport au modèle solide 3D pour des rapports d'épaisseur  $a/h$  allant de 3.75 à 15**

L'étude du graphe de convergence (Figure 2.23) permet de déterminer l'ordre d'approximation optimal en fonction du rapport d'épaisseur  $a/h$  (ratio entre la longueur  $a$  et l'épaisseur  $h$ ) de la plaque étudiée. En effet, nous constatons tout d'abord que l'ordre 3 paraît être un minimum pour les plaques relativement épaisses ( $a/h < 20$ ) et fortement orthotropes. Si le passage de l'ordre 1 à l'ordre 3 apporte le plus de gain, l'augmentation du degré d'approximation à 5 (pour  $a/h$  entre 7.5 et 20) mais aussi à 7 (pour  $a/h < 7.5$ ) entraîne encore un gain de précision non négligeable. Ainsi d'un point de vue de la précision de calcul, l'ordre  $p$  optimal peut être défini comme suit <sup>14</sup>:

- pour les plaques faiblement épaisses et faiblement orthotropes ( $a/h > 20$ ,  $E_1/E_2 < 10$ ), l'ordre 1 peut suffire pour des applications courantes, mais requiert un facteur de correction de cisaillement (la valeur standard de 5/6 donne en moyenne de bons résultats, mais ce n'est pas une valeur exacte pour la plupart des stratifiés) ;
- pour les plaques modérément épaisses ( $a/h > 20$ ) et fortement orthotropes ( $E_1/E_2 > 10$ ), l'ordre 3 semble optimal pour des applications courantes, les ordres 5 ou 7 ne conduisant pas à des gains significatifs ;

<sup>14</sup> Toutes ces recommandations étant tirées de l'étude d'un seul type de stratifié, leur validité ne peut pas formellement être extrapolée à d'autres stratifiés. Cependant les cas choisis étant dans les extrêmes des rapports d'orthotropie et d'épaisseur observés dans les applications courantes, ces recommandations devraient se révéler plutôt conservatrices pour la plupart des applications rencontrées.

- pour les plaques relativement épaisses ( $a/h$  entre 10 et 20) et fortement orthotropes ( $E_1/E_2 > 10$ ), l'ordre 3 semble optimal pour des applications courantes, mais les ordres 5 ou 7 permettent d'obtenir des résultats encore plus précis si nécessaire.
- pour les plaques très épaisses et fortement orthotropes, ( $a/h < 10$ ,  $E_1/E_2 > 10$ ), l'ordre 5 est fortement recommandé pour des applications précises, même si pour des besoins moins exigeants le modèle d'ordre 3 peut suffire. Les modèles d'ordre supérieur à 7 ne semblent par contre rien apporter de plus et l'ordre 7 peut donc être considéré comme un maximum.



**Figure 2.24: Forme du mode 10 de la plaque  $150 \times 100 \times 20$  mm modélisée en éléments de coque PSDT d'ordre 3 (à gauche<sup>15</sup>) et en solides quadratiques (à droite)**

Si l'on s'intéresse finalement à l'efficacité opératoire des modèles PSDT, il est possible de relever que la formulation proposée reste très intéressante du point de vue de la précision par rapport au temps de calcul (ou au nombre de degrés de liberté) en comparaison de modèles solides bien plus gourmands. En effet, même comparé au modèle d'ordre 7 (dont l'erreur maximale est ici de 0.15%), le modèle solide exige un nombre de degrés de liberté près de 5 fois plus important et donc un temps de calcul total de 25 à 125 fois plus élevé<sup>16</sup>. Le modèle d'ordre 3 reste le plus intéressant de tous les modèles étudiés ici, si la précision qu'il fournit est suffisante pour l'application considérée. Les modèles d'ordre 7 et plus, bien que n'étant pas aussi gourmands que les formulations solides, requièrent plus du double de degrés de liberté par rapport au modèle cubique et ne représentent donc pas vraiment une bonne option

---

<sup>15</sup> Les nœuds « quadratiques » ne sont pas affichés sur le modèle de coque PSDT.

<sup>16</sup> Le temps de calcul en analyse modale est généralement de l'ordre de  $N^2$  ou  $N^3$  où  $N$  représente le nombre total de degrés de liberté.

d'un point de vue efficacité de calcul (sauf cas extrêmes). Le modèle d'ordre 5 ne devrait quant à lui être employé dans des calculs nécessitant un bon rendement (études paramétriques, identification / optimisation) que dans les cas de coques très épaisses ( $a/h < 10$ ) et fortement orthotropes ( $E_1/E_2 > 10$ ).

Finalement, nous pouvons conclure de ces comparaisons que le modèle de coque PSDT fournit non seulement d'excellents résultats lorsque cela est nécessaire, mais permet également de s'adapter aux besoins de rendement des calculs grâce à la modification de l'ordre d'approximation selon la précision voulue et le temps de calcul disponible, offrant ainsi dans tous les cas un modèle optimal par rapport aux besoins de l'application considérée.

## Chapitre 3 Analyse modale expérimentale

### 3.1 Objectifs

Du fait de leur nature intrinsèque, les fréquences et modes propres sont le reflet dans le domaine dynamique des caractéristiques globales d'une structure, au point que l'ensemble des informations modales constitue un modèle complet de la structure, au même titre que le modèle spatial constitué des matrices de masse et de rigidité globales. Ces informations modales représentent donc les effets des propriétés massiques et élastiques moyennes d'un objet. Pour une caractérisation aussi précise que possible des matériaux composites stratifiés par une méthode d'identification mixte numérique–expérimentale, l'utilisation des informations modales mesurées comme base de comparaison semble un choix judicieux en termes de représentativité et de précision. Cependant, comme pour toute méthode d'identification, la précision des paramètres qu'il est possible d'obtenir est en grande partie conditionnée par les erreurs d'ordre expérimental, mais aussi par les défauts de modélisation des conditions de test réelles. Le but de cette section est donc de développer une technique de mesure aussi précise et représentative possible des fréquences propres et modes propres de spécimens en stratifiés composites.

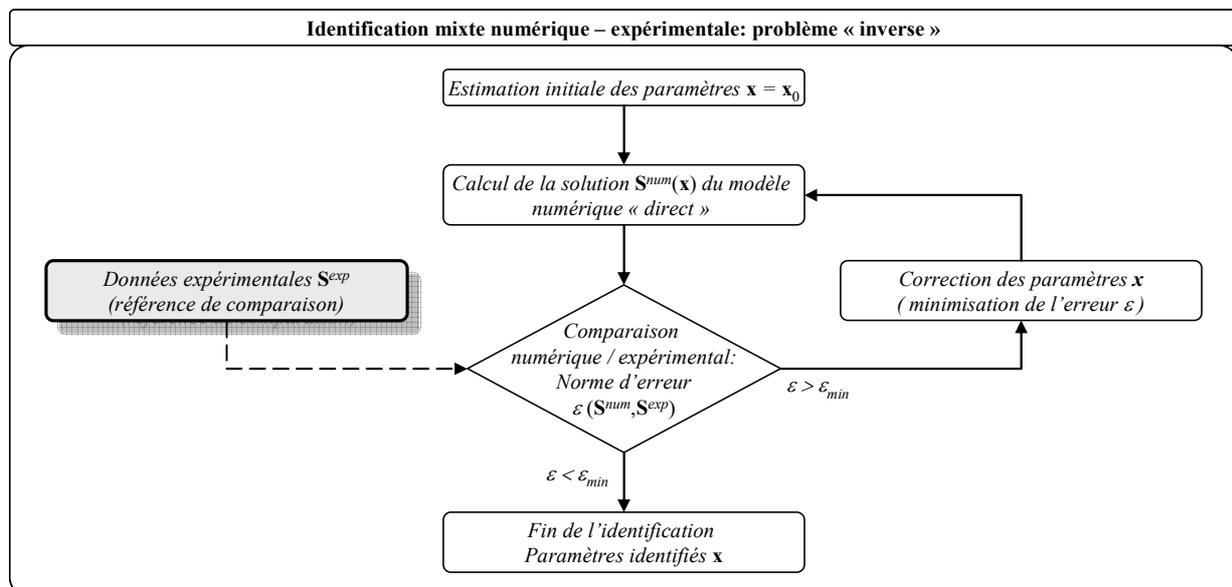


Figure 3.1: Importance des données expérimentales dans la procédure d'identification.

### 3.2 Généralités

L'étude expérimentale du comportement dynamique d'une structure se base traditionnellement sur une discrétisation de cette dernière en un ensemble de points de mesure formant ainsi un maillage « expérimental ». Par la suite, toutes les mesures et analyses nécessaires se basent alors uniquement sur les points de ce maillage. Un exemple de modèle discret de la structure est représenté à la Figure 3.2.

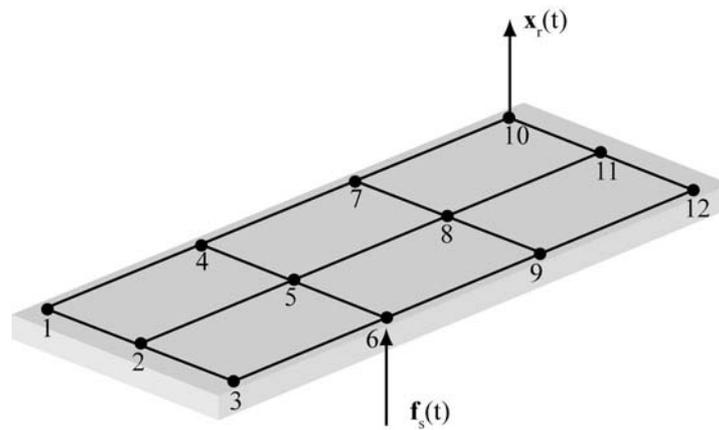


Figure 3.2: Maillage expérimental en analyse modale

L'analyse modale expérimentale d'une structure suppose d'ordinaire que le comportement dynamique décrit par les équations du mouvement du système étudié peut être représenté par un système d'équations différentielles linéaires à coefficients constants en fonction du temps.

Le modèle des équations du mouvement est classiquement défini comme suit

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C} \dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K} \mathbf{x}(t) = \mathbf{f}(t) \quad (3.1)$$

où  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$  et  $\mathbf{K}$  représentent respectivement les matrices  $n \times n$  de masse, d'amortissement et de rigidité de la structure et où  $n$  symbolise le nombre de degrés de liberté du système. Les vecteurs (fonctions du temps)  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{f}$  dénotent les champs des déplacements et des forces d'excitation agissant sur le système discret étudié.

En considérant tout d'abord le système (3.1) sous sa forme homogène (réponse vibratoire libre) et en considérant un régime harmonique amorti, nous pouvons expliciter la solution temporelle sous la forme

$$\mathbf{x}(t) = \boldsymbol{\varphi}_k e^{-\delta_k t} \quad \text{avec} \quad \delta_k = -\lambda_k \pm j\omega_k \quad (3.2)$$

où  $\boldsymbol{\varphi}_k$  est le vecteur propre de rang  $k$  et  $\delta_k$  la  $k$ -ème valeur propre complexe dont les parties réelle et imaginaire représentent respectivement le coefficient d'amortissement modal  $\lambda_k$  et la pulsation propre  $\omega_k$ .

En substituant la solution (3.2) dans la forme homogène du système (3.1), nous faisons apparaître le problème aux valeurs propres généralisé suivant

$$(-\delta_k^2 \mathbf{M} - \delta_k \mathbf{C} + \mathbf{K}) \boldsymbol{\varphi}_k = \mathbf{0} \quad (3.3)$$

Les vecteurs propres  $\boldsymbol{\varphi}_k$  (réels ou complexes) solutions du système (3.3) ont la propriété essentielle de définir une nouvelle base, appelée base modale, permettant de diagonaliser le système d'équation différentiel (3.1). En effet, les  $n$  vecteurs propres  $\boldsymbol{\varphi}_k$  ( $k=1, 2, \dots, n$ ) sont orthogonaux entre eux (et donc linéairement indépendants) et forment par conséquent une base orthogonale complète pour le système (3.1).

En projetant le système (3.1) dans la base modale ainsi formée, il est possible de découpler les équations du système. Le changement de base correspondant à cette projection s'écrit

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{k=1}^n X_k(t) \boldsymbol{\varphi}_k = \boldsymbol{\Phi} \mathbf{X}(t) \quad (3.4)$$

où  $X_k$  ( $k=1, 2, \dots, n$ ) dénote la coordonnée modale de rang  $k$ . Le vecteur  $\mathbf{X}$  rassemble toutes les coordonnées modales du vecteur spatial  $\mathbf{x}$ , tandis que la matrice des formes propres  $\boldsymbol{\Phi}$  stocke toutes les formes propres  $\boldsymbol{\varphi}_k$  du système. Si l'on prémultiplie encore l'expression (3.1) par  $\boldsymbol{\Phi}^T$ , nous obtenons la forme, projetée dans la base modale et donc découplée, de notre système d'équations différentielles

$$m_k \ddot{X}_k(t) + c_k \dot{X}_k(t) + k_k X_k(t) = \boldsymbol{\varphi}_k^T \mathbf{f}(t) = F_k(t) \quad \text{pour } (k=1, 2, \dots, n) \quad (3.5)$$

où  $m_k$ ,  $c_k$  et  $k_k$  représentent respectivement la masse modale, l'amortissement modal et la rigidité modale du mode de rang  $k$ . Ces grandeurs correspondent à la projection dans la base modale des matrices structurelles du système

$$m_k = \boldsymbol{\varphi}_k^T \mathbf{M} \boldsymbol{\varphi}_k, \quad c_k = \boldsymbol{\varphi}_k^T \mathbf{C} \boldsymbol{\varphi}_k \quad \text{et} \quad k_k = \boldsymbol{\varphi}_k^T \mathbf{K} \boldsymbol{\varphi}_k \quad (3.6)$$

On notera également que le terme de force  $\mathbf{f}(t)$  est transformé, par projection dans la base modale, en une force d'excitation modale  $F_k(t) = \boldsymbol{\varphi}_k^T \mathbf{f}(t)$ .

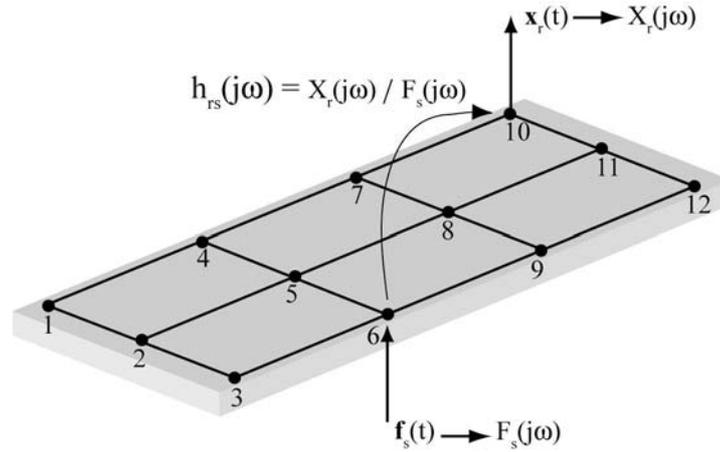


Figure 3.3: Maillage expérimental et fonctions de transfert

En appliquant une transformation de Fourier à l'expression (3.5) et en isolant certains termes, nous obtenons une expression pour la contribution de rang  $k$  à la réponse du système :

$$X_k(j\omega) = \frac{F_k(j\omega)}{m_k (\omega_k^2 + 2j\zeta_k \omega_k \omega - \omega^2)} \quad (3.7)$$

où  $\zeta_k$  représente le facteur d'amortissement modal (amortissement relatif) et  $\omega$  est la pulsation de la transformation (variable). En sommant les contributions de chaque mode et en projetant cette fois-ci l'expression (3.7) dans la base spatiale, nous pouvons exprimer les fonctions de transfert du système discret sous la forme

$$h_{rs}(j\omega) = \frac{X_r(j\omega)}{F_s(j\omega)} = \sum_{k=1}^n \frac{\varphi_r^k \varphi_s^k}{m_k (\omega_k^2 + 2j\zeta_k \omega_k \omega - \omega^2)} \quad (3.8)$$

dans laquelle  $\varphi_i^j$  est la  $i$ -ème composante du vecteur modal de rang  $j$ .

La fonction de transfert  $h_{rs}(j\omega)$  représente, dans le domaine fréquentiel, la réponse du système en un point  $r$  pour une excitation de type impulsion de Dirac en un point  $s$  ou, en d'autres termes, à la transformée de Fourier de la réponse impulsionnelle. Ainsi, le système d'équations différentielles de la formulation spatiale du problème (3.1) se transforme en une matrice de fonctions de transfert  $\mathbf{H}(j\omega)$  décrivant complètement le système dynamique réel. En retravaillant l'expression (3.8), il est possible d'écrire la matrice des fonctions de transfert  $\mathbf{H}(j\omega)$  de la façon suivante

$$\mathbf{H}(j\omega) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{m_k (\omega_k^2 + 2j\zeta_k \omega_k \omega - \omega^2)} (\boldsymbol{\varphi}_k \otimes \boldsymbol{\varphi}_k) \quad (3.9)$$

Dans cette égalité, la matrice des fonctions de transfert est constituée d'une somme sur tous les modes  $k$  ( $k=1, 2, \dots, n$ ) de facteurs fréquentiels (la fraction en  $j\omega$ ) et spatiaux (le produit dyadique des formes propres). Comme cette matrice dérive du produit dyadique d'un vecteur à  $n$  composantes, il suffit de connaître  $n$  composantes distinctes pour pouvoir déterminer complètement cette matrice  $n \times n$ .

A chaque modèle spatial (ou temporel) d'une structure caractérisée par les matrices  $\mathbf{K}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{M}$  et les vecteurs  $\mathbf{x}(t)$  et  $\mathbf{f}(t)$ , il correspond un modèle fréquentiel défini par la matrice  $\mathbf{H}(j\omega)$  et les spectres  $\mathbf{X}(j\omega)$  et  $\mathbf{F}(j\omega)$ , mais aussi un modèle modal constitué des vecteurs  $\boldsymbol{\varphi}_k$  et des scalaires  $\omega_k$ ,  $\zeta_k$ ,  $m_k$ ,  $X_k(t)$  et  $F_k(t)$  (pour  $k=1, 2, \dots, n$ ). L'analyse modale, en tant que technique expérimentale ou numérique, a pour but d'identifier les paramètres du modèle modal à partir des modèles spatiaux ou fréquentiels.

Dans le domaine expérimental, la démarche d'analyse modale est généralement la suivante :

#### **1. Etablissement d'un modèle spatial / temporel**

La structure à étudier est positionnée avec des conditions d'appui représentatives et discrétisée en un ensemble de points caractéristiques. Elle est ensuite excitée en un ou plusieurs points  $s$  à l'aide d'une ou plusieurs forces  $f_s(t)$ . On enregistre simultanément (échantillonnage à fréquence suffisante pour représenter les caractéristiques du signal) les réponses  $x_r(t)$  en chaque point  $r$  de la structure et la ou les forces d'excitation  $f_s(t)$ . Le modèle temporel de la structure est alors complètement déterminé par les fonctions  $x_r(t)$  et  $f_s(t)$  mesurées lors de l'expérience.

#### **2. Transformation du modèle spatial / temporel en modèle fréquentiel**

Le modèle temporel caractérisé par les fonctions mesurées  $x_r(t)$  et  $f_s(t)$  est converti en un ensemble de spectres complexes  $X_r(j\omega)$  et  $F_s(j\omega)$  à l'aide d'une transformée de Fourier (généralement une transformée de Fourier discrète de type Fast Fourier Transform ou FFT). Les fonctions de transfert (appelées aussi fonctions de réponse en fréquence)  $h_{rs}(j\omega)$  sont alors calculées en effectuant le quotient  $h_{rs}(j\omega) = X_r(j\omega) / F_s(j\omega)$  des spectres fréquentiels de réponse  $X_r(j\omega)$  et d'excitation  $F_s(j\omega)$ . Le modèle fréquentiel est alors complètement défini lorsqu'une ligne ou une colonne de la matrice  $\mathbf{H}(j\omega)$  est déterminée.

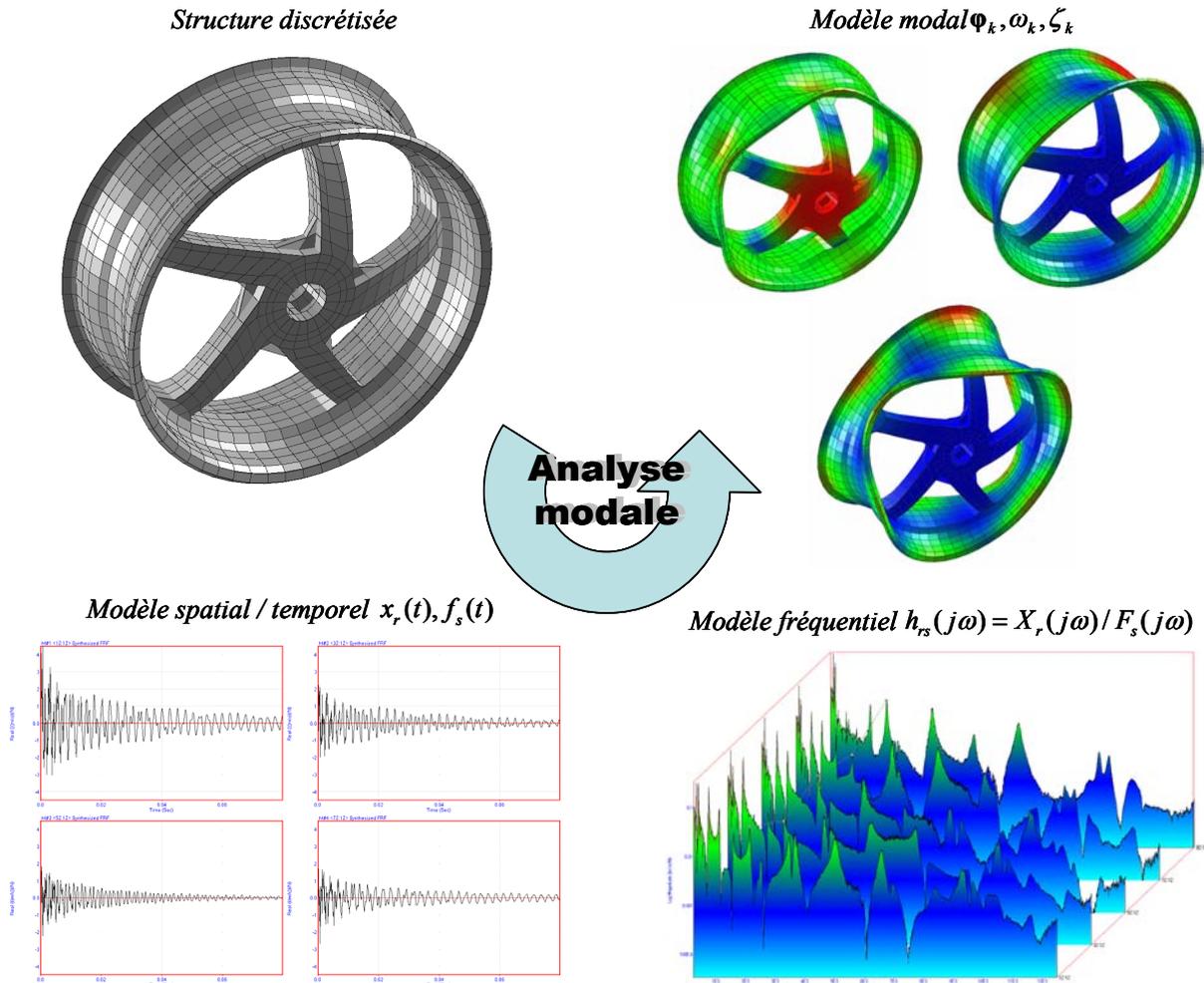


Figure 3.4: Déroulement d'une analyse modale expérimentale

### 3. Extraction des paramètres modaux (analyse modale)

Le modèle modal est créé en identifiant à partir du modèle fréquentiel  $\mathbf{H}(j\omega)$  l'ensemble des paramètres modaux  $\varphi_k$ ,  $\omega_k$ ,  $\zeta_k$  et  $m_k$  pour tous les modes  $k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ). En raison des effets inertiels, la réponse dynamique de la structure est toutefois habituellement dominée par l'influence des modes de plus faibles pulsations propres, de sorte qu'il est possible de ne s'intéresser qu'à un nombre restreint de modes sans perdre d'information capitale sur la dynamique de la structure étudiée. Généralement, une dizaine de modes faisant partie de la plage de fréquence de fonctionnement de la structure suffisent pour l'analyse de son comportement dynamique. Chaque mode nécessitant la détermination d'un vecteur

propre  $\Phi_k$  à  $n$  composantes ainsi que d'au moins deux<sup>17</sup> paramètres modaux ( $\omega_k$  et  $\zeta_k$ ), le problème d'identification à résoudre devient rapidement complexe au vu du grand nombre de paramètres à extraire. Cependant, grâce au caractère local des pics de résonance, l'identification des paramètres modaux peut être généralement réalisée indépendamment pour chaque mode ou chaque groupe de modes (Figure 3.5).

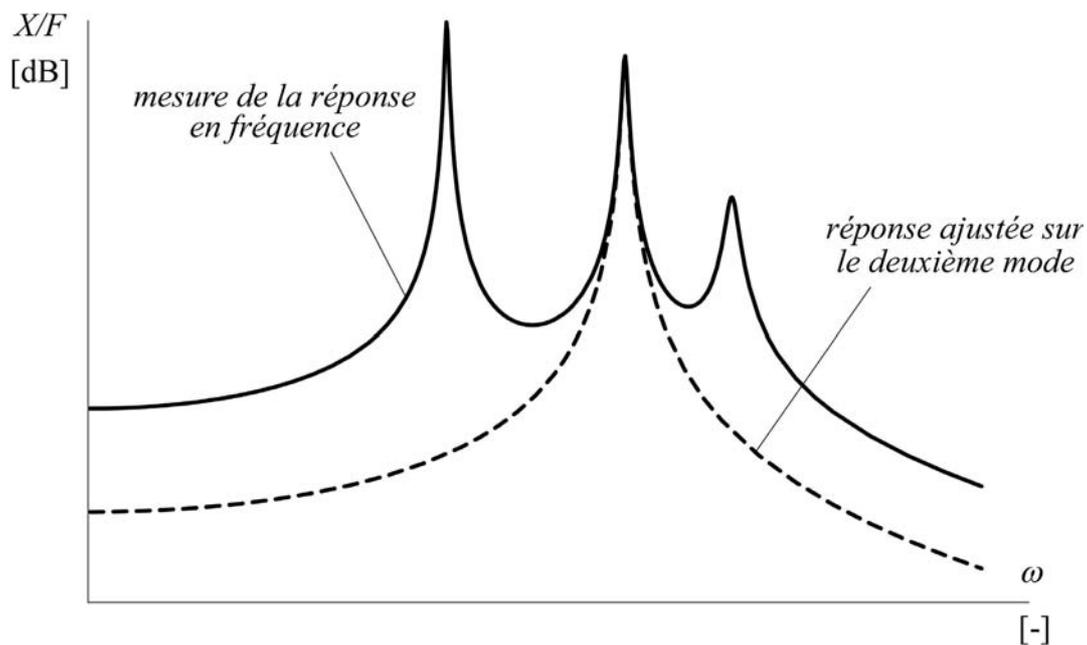


Figure 3.5: Identification du second mode à partir de la fonction de transfert de la structure

### 3.3 Technique de mesure vibratoire sans contact

Le but principal de la méthode d'analyse modale expérimentale développée pour ce travail est de permettre la mesure d'un grand nombre de modes (pulsations propres et formes modales) de plaques en matériau composite stratifié, de manière aussi précise et non invasive que possible. L'objectif étant d'obtenir un large ensemble de valeurs expérimentales qui serviront d'objectifs à la méthode d'identification mixte (chapitre 4), les conditions de mesure doivent assurer une corrélation optimale avec un modèle numérique simulant l'expérience

<sup>17</sup>Dans la plupart des analyses modales expérimentales, la masse modale  $m_k$  n'est pas identifiée à partir des mesures, car le vecteur propre  $\Phi_k$  correspondant est normé de manière à ce que  $m_k$  soit unitaire.

réalisée. Ainsi, la méthode expérimentale doit être parfaitement maîtrisée et reproductible et doit pouvoir être simulée très fidèlement dans un modèle d'éléments finis. En effet, toute erreur de modélisation des conditions expérimentales fausserait directement les résultats du processus d'identification mixte qui se baserait sur ces mesures.

Une haute corrélation entre les conditions expérimentale et leur modélisation par éléments finis peut être garantie en sélectionnant et en contrôlant avec soin les conditions aux limites du spécimen de test mesuré. Les conditions aux limites du spécimen incluent bien sûr les conditions de support du spécimen, la technique d'excitation dynamique et les effets du système de mesure de la réponse vibratoire, mais aussi tous les effets de bord bien moins maîtrisables dus à l'environnement de mesure.

La démarche de développement de la technique de mesure vibratoire doit viser à mesurer la réponse vibratoire uniquement du spécimen de test en maîtrisant au maximum les conditions aux limites expérimentales. Dans le domaine de l'analyse modale, cet objectif passe par la minimisation de tous les effets de masses ajoutées au spécimen, de rigidités externes ou additionnelles mais aussi des effets externes d'amortissement plus difficilement contrôlables. Ainsi, afin de réduire au maximum les effets indésirables, le maître mot de cette technique de mesure vibratoire doit être « sans contact ».

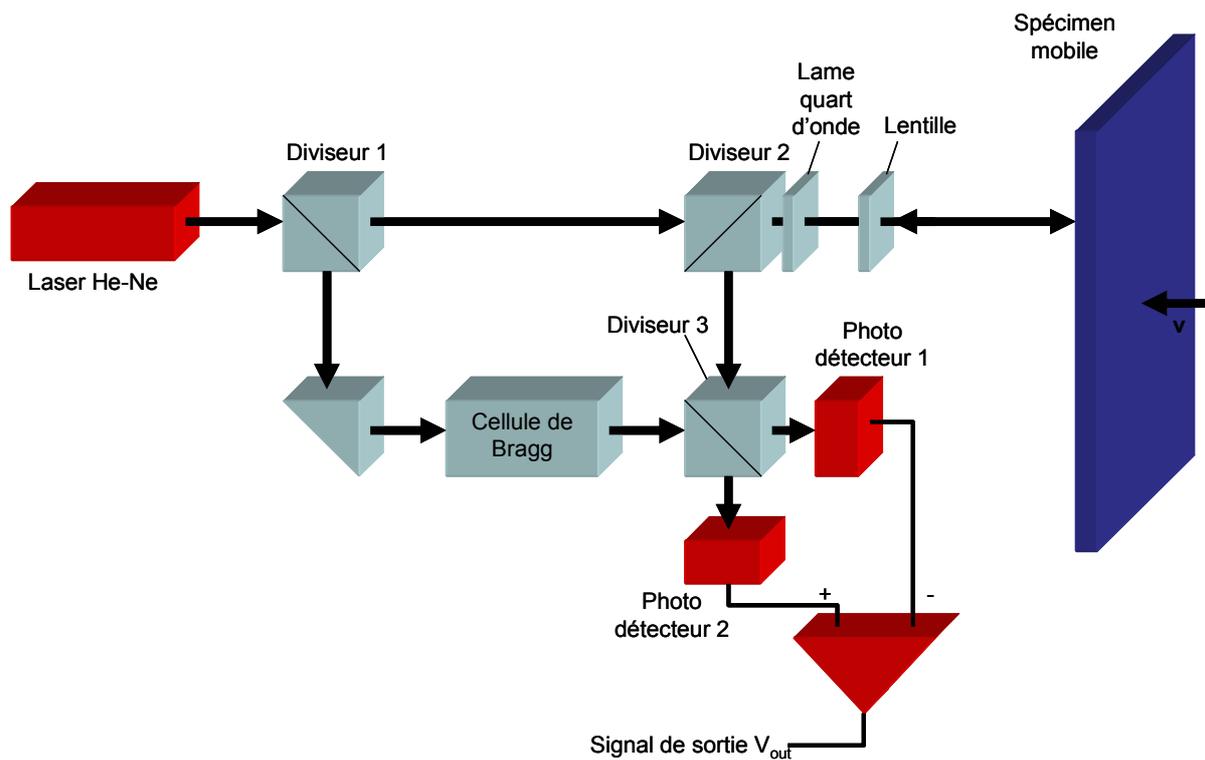
### **3.3.1 Système de mesure dynamique sans contact**

Afin d'établir un modèle temporel puis modal du stratifié composite testé, la réponse du spécimen à une excitation donnée doit être mesurée sur les différents points du maillage expérimental. Les systèmes de mesures dynamiques utilisés couramment dans ce type d'analyse peuvent être classés dans plusieurs catégories, ayant chacune ses avantages et ses inconvénients (Tableau 3.1).

| <i>Capteurs de vibration</i> |   |   |  |
|------------------------------|---|---|--|
| <i>Grandeur mesurée</i>      | <i>Type de capteur</i>  | <i>Avantages</i>  | <i>Inconvénients</i>   |
| <i>Déplacement</i>           | Capteur résistif externe  | Simple, grands déplacements   | Masse, rigidité et amortissement externe   |
|                              | Capteur inductif à transformateur différentiel (LVDT) externe                                 | Précis, grande plage de déplacements mesurable, mesure statique également possible  | Masse et amortissement externe   |
|                              | Capteur capacitif embarqué (mesure de la capacité électrique entre le spécimen et le capteur) | Relativement simple, relativement peu invasif pour les structures métalliques, fonctionnement même à haute température  | Nécessité d'un revêtement conducteur sur les spécimens isolants, nécessité d'un câble d'alimentation sur le spécimen (effets de masse ajoutée, de rigidité et amortissement externes)  |
|                              | Holographe et interféromètre laser  | Très haute sensibilité, mesure de champ, excellente résolution spatiale, peu invasif pour des conditions aux limites sans modes de corps rigide                             | Nécessité de conditions aux limites sans modes de corps rigide, faible résolution fréquentielle, sensibilité parfois non linéaire par rapport au déplacement, difficultés de post traitement, plage de fréquences restreinte, coût important |
| <i>Déformation</i>           | Extensomètre à jauges résistives  | Simple et précis, bonne plage de fréquence, bonne dynamique, mesure statique possible, haute sensibilité, large gamme de mesure   | Nécessité d'un câble d'alimentation, (effets de masse ajoutée, d'amortissement et rigidité externes), mesure de déformation rendant difficile la reconstruction des formes propres en déplacement  |
| <i>Vitesse</i>               | Capteur inductif à champ ouvert (entre le spécimen et le capteur)                             | Non invasif pour les structures ferromagnétiques, faiblement invasif pour les autres cas, plage de fréquence élevée   | Étalonnage nécessaire pour chaque cas, effets non linéaires, masse ajoutée sur matériaux non ferromagnétiques (inducteur collé)  |
|                              | Stroboscope   | Mesure de champ, bonne résolution spatiale, non invasive  | Faible plage de fréquence, faible résolution en déplacement, dynamique réduite, méthode plus qualitative que quantitative  |
|                              | Interféromètre laser à effet Doppler  | Haute dynamique et précision, large plage de fréquences, non invasif, possibilité de mesurer un champ par balayage  | Nécessité de réflecteurs optiques pour des mesures à faible niveau vibratoire (léger effet de masse ajoutée), coût élevé, sensibilité aux déplacements de corps rigide de grande amplitude   |
| <i>Accélération</i>          | Servoaccéléromètres   | Mesure possible à très faible fréquence, très haute sensibilité, haute résolution en déplacement.   | Faible bande passante, très massif, à réserver aux applications basse fréquence (génie civil) et très basse fréquence (sismique)   |
|                              | Accéléromètres piézo-électriques  | Très haute dynamique, mesure d'accélération dans une large bande de fréquences, large gamme d'amplitudes / sensibilité, très précis, simple à mettre en œuvre, très robuste | Capteur collé au spécimen avec un câble d'alimentation et de signal (effets de masse, amortissement et rigidité externes), mesure mono point   |

**Tableau 3.1: Types et caractéristiques des capteurs de mesures vibratoires**

Parmi toutes les techniques de mesures dynamiques énoncées dans le Tableau 3.1, nous pouvons constater qu'il n'existe finalement que peu de méthodes « non invasives » permettant de mesurer précisément un grand nombre de modes propres (haute résolution en fréquence et amplitude sur une large plage fréquentielle). Seules les méthodes de mesures optiques permettent de minimiser les effets de masse ajoutée, ainsi que de rigidité et amortissement externes et, dans cette catégorie, la méthode d'interférométrie laser à effet Doppler est la seule à fournir une excellente résolution fréquentielle et une haute dynamique<sup>18</sup> dans une plage de fréquence suffisante pour mesurer des spécimens en stratifiés composites (plage de fréquence de 50 Hz à plus de 10 kHz). De plus, comme cette méthode peut être automatisée en réorientant le faisceau laser pour changer de point de mesure, il est aisé de réaliser des mesures de formes modales avec une résolution spatiale suffisante pour les besoins d'identification (maillage expérimental d'au moins  $10 \times 10$  points de mesure).



**Figure 3.6: Principe de fonctionnement de l'interféromètre laser à effet Doppler de type Polytec OFV-303**

<sup>18</sup>La dynamique d'un signal représente le rapport entre la plus grande et la plus petite valeur mesurable et dépend donc fortement de la sensibilité de la technique de mesure, de sa résolution en amplitude, mais aussi du rapport signal/bruit de l'appareil.

L'interférométrie laser à effet Doppler (Figure 3.6) est basée sur une version modifiée de l'interféromètre de Mach-Zehnder dont le principe est de créer une interférence d'un faisceau optique de référence avec un faisceau optique de longueur variable, afin de déterminer la différence de chemin optique entre les deux faisceaux. L'interférométrie laser à effet Doppler reprend ce principe, mais le modifie quelque peu afin de créer un signal optique correspondant à un battement à une fréquence dépendant de la vitesse du spécimen mesuré. Le battement optique est créé en ajoutant une cellule de Bragg sur le chemin optique de référence, décalant ainsi la longueur d'onde de ce faisceau. Les intensités vues par les photodétecteurs 1 et 2 (Figure 3.6) suivent les relations suivantes

$$I_1 = 1/2 A^2 [1 - \cos(2\pi(f_b + \frac{2v}{\lambda})t)] \quad \text{et} \quad I_2 = 1/2 A^2 [1 + \cos(2\pi(f_b + \frac{2v}{\lambda})t)] \quad (3.10)$$

où  $A$  représente l'amplitude du signal optique du laser,  $f_b$  désigne le décalage de fréquence (contrôlé) de la cellule de Bragg et  $v$  symbolise la vitesse du spécimen,  $\lambda$  étant la longueur d'onde du faisceau fourni par le laser. Les deux intensités  $I_1$  et  $I_2$  converties en tensions par les photodétecteurs 1 et 2 sont alors combinées dans un amplificateur différentiel pour créer une tension de sortie  $V_{out}$  de la forme

$$V_{out} = K \cos[2\pi(f_b + \frac{2v}{\lambda})t] \quad (3.11)$$

où  $K$  représente le facteur de conversion opto-électrique du système.

On peut observer dans cette relation que la tension de sortie de l'interféromètre est modulée à une fréquence égale à  $f_m = f_b + 2v/\lambda$ . Comme dans cette dernière égalité seul le terme de vitesse  $v$  est inconnu, il suffit de mesurer la fréquence  $f_m$  pour déterminer la vitesse instantanée  $v$  du spécimen au point de mesure. Dès lors que l'ordre de grandeur des fréquences  $f_m$  et  $f_b$  est dans le domaine des ondes optiques (env.  $10^{14}$  Hz), cette modulation reste à très haute fréquence, de telle sorte qu'il est possible de mesurer des phénomènes mécaniques à très haute fréquence et très faible amplitude.

Ayant à disposition un système de mesure Polytec PSV200 par interférométrie laser à effet Doppler à balayage appartenant au Laboratoire de conception des systèmes mécaniques (LCSM / EPFL) et au vu des performances très élevées d'une telle technique, il a été décidé de baser la technique de mesure modale sur cet outil. Le système de mesure laser Polytec PSV200 (Figure 3.7) est composé d'une tête de mesure interférométrique laser OFV-303, d'un système motorisé de balayage optique sur deux axes contrôlé par caméra vidéo OFV-

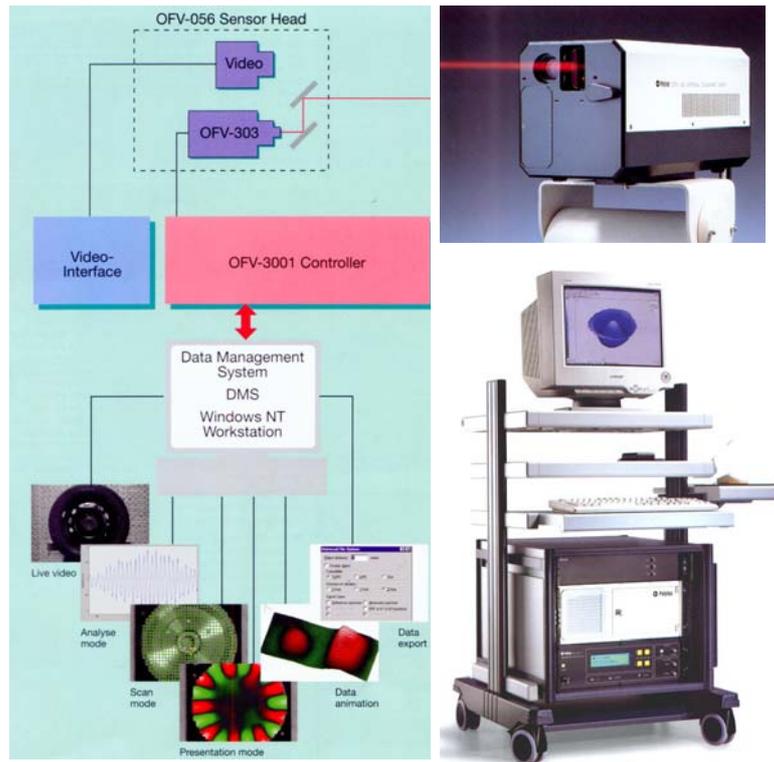
056, d'un contrôleur et amplificateur de signal OFV-3001, d'un PC de mesure équipé d'une carte A/D National Instruments DSA avec processeurs FFT embarqués (jusqu'à 3200 lignes) et d'un logiciel d'acquisition et de traitement des données PSV200, ainsi que d'un générateur de signal programmable par interface GPIB Hewlett Packard HP33120A.

| Sensibilité de mesure (mm/s/V) | Vitesse mesurable maximale (mm/s) | Résolution ( $\mu\text{m/s}$ ) | Fréquence maximale de mesure (kHz) | Accélération maximale (g) |
|--------------------------------|-----------------------------------|--------------------------------|------------------------------------|---------------------------|
| 1                              | 20                                | 0.3                            | 10                                 | 70                        |
| 5                              | 100                               | 0.3                            | 10                                 | 200                       |
| 10                             | 200                               | 0.5                            | 250                                | 15'000                    |
| 25                             | 500                               | 2                              | 250                                | 40'000                    |
| 125                            | 2'500                             | 5                              | 250                                | 200'000                   |
| 1000                           | 20'000                            | 10                             | 250                                | 1'600'000                 |

**Tableau 3.2: Plage de mesure et performance du système de mesure Polytec PSV 200**

Ce système de test dynamique permet de mesurer des vibrations dont les vitesses peuvent aller de quelques  $\mu\text{m/s}$  à plusieurs  $\text{m/s}$  sur une plage de fréquences de 0.1 Hz à 250 kHz (Tableau 3.2). A titre de comparaison, les amplitudes de déplacement correspondant aux limites minimales et maximales de ce vibromètre sont respectivement de 0.05 nm (à 250kHz) à près de 3 m (à 0.1 Hz). Ensuite, le logiciel interne pilotant le système d'acquisition autorise facilement la mesure de fonctions de transfert sur des grilles de points allant jusqu'à plus de  $300 \times 300$  points et fournit des fonctions intuitives de post-traitement et de visualisation des spectres, fonctions de réponse en fréquence et modes mesurés.

Malgré des caractéristiques très poussées, une mesure de haute qualité par une méthode d'interférométrie laser à effet Doppler nécessite tout de même des conditions expérimentales particulières. En effet, de par le principe de l'interférométrie utilisé, l'intensité du faisceau optique réfléchi par le spécimen conditionne l'amplitude de la modulation de battement du faisceau mesuré et donc détermine la dynamique du système de mesure. Afin de mesurer avec précision même de très faibles amplitudes de vibration sur une large plage de fréquence, il est dès lors essentiel de maximiser l'intensité du signal réfléchi.



**Figure 3.7: Système de mesure laser par interférométrie laser à effet Doppler Polytec PSV200**

Pour atteindre ce but, plusieurs méthodes ont été testées et comparées pour la mesure, dans une plage de 50Hz à 10kHz, de diverses plaques en stratifiés composites. Tout d'abord, plusieurs peintures classiques en spray ont été utilisées (couleur blanc mat, gris métallisé, gris pailleté) pour renforcer l'intensité du faisceau réfléchi mais elles n'ont donné que peu de résultats tant la qualité du signal était faible et fortement dépendante de la position du faisceau. Une peinture rétro réfléchissante spéciale, au pistolet, pour applications marines a ensuite été essayée, donnant en moyenne de meilleurs résultats, mais en raison de la trop faible densité des réflecteurs (billes de verre) dans la peinture, l'intensité du signal réfléchi restait bien trop variable en fonction de la position. Plusieurs types de bandes réfléchissantes autoadhésives ont alors été collées aux plaques de test et toutes ont fourni directement un signal réfléchi de très haute intensité dans la direction du faisceau incident. Il est donc apparu très clairement que la meilleure méthode de traitement optique de la surface de l'échantillon de test est de coller des bandes rétro réfléchissantes sur l'ensemble de la surface de mesure.

Bien que fournissant un excellent signal de mesure, l'utilisation d'un traitement optique de la surface de l'échantillon peut introduire des modifications de rigidité, de masse et d'amortissement qu'il est impératif de quantifier pour assurer la consistance de la méthode d'identification mixte développée dans ce travail. L'influence de la rigidité et de la masse de

ces bandes adhésives a alors été analysée par comparaison avec les mesures effectuées précédemment, mais aussi en identifiant les effets sur les fréquences propres de chacun des paramètres à l'aide de modèles d'éléments finis. Il a été observé que la rigidité additionnelle de ces bandes peut être parfaitement négligée en comparaison des rigidités propres des plaques, mais que par contre la masse ajoutée doit absolument être prise en compte lors de la détermination de la densité du spécimen. L'inclusion des effets massiques dans les modèles d'éléments finis assure une corrélation numérique et expérimentale entachée de moins de 1% d'erreur sur les fréquences propres.

En raison de l'effet rétroreflectif des bandes adhésives, l'intensité du signal réfléchi reste suffisamment importante pour mesurer des spécimens gauches, dans la mesure où l'angle d'incidence maximum du faisceau laser de mesure ne dépasse pas  $20^\circ$  par rapport à la normale à la surface au point de mesure. Dans le cas de surfaces gauches à forte courbure, il est toutefois important de corriger les amplitudes mesurées afin de compenser les effets induits par la direction de la vitesse mesurée par rapport à la normale à la surface.

### **3.3.2 Conditions de support du spécimen**

Dans les mesures rencontrées en mécanique des solides et des structures, les conditions d'appui d'un spécimen testé représentent généralement une importante source d'effets de bord souvent non répétables ou difficilement quantifiables, rendant très difficile la modélisation numérique ou analytique de l'expérience réelle. Les conditions aux limites des plaques dans les tests statiques courants sont habituellement de type encastrement ou appuis simples. Bien que ce genre de conditions d'appui paraisse très simple à modéliser par éléments finis et semble assurer une bonne corrélation entre modèle numérique et technique de mesure, ce n'est pas le cas en pratique. En effet, il est quasi impossible de réaliser un encastrement parfait de rigidité « infinie » et les tentatives de réaliser une bonne approximation de ces conditions aux limites ne fournissent en général pas de résultats répétables à quelques pourcentages près. Par exemple, dans le cas d'un encastrement, le couple de serrage des vis de la fixation peut très fortement influencer la pression de contact servant à maintenir le spécimen et introduire par là-même une variation notable de la rigidité locale d'encastrement. Similairement, les conditions d'appuis simples « idéalisées » dans les modèles analytiques ou d'éléments finis (rotations libres, translations bloquées dans le plan moyen de la coque) ne sont pas réalisables en pratique en raison de l'épaisseur non négligeable des spécimens réels et des effets locaux de frottement et de décollement.

Contrairement aux méthodes de mesure statique, l'analyse modale expérimentale peut heureusement être réalisée même dans des cas où la structure n'est pas complètement contrainte et est libre d'effectuer des mouvements de corps rigide. En utilisant cet avantage, il est possible d'envisager des conditions aux limites naturelles homogènes (absence de condition de bord), que l'on appelle généralement conditions aux limites libre - libre dans le cas des plaques (libre sur toutes les arêtes de la plaque). Bien que de telles conditions expérimentales soient irréalisables sans apesanteur, elles peuvent être approchées en pratique avec une précision et une répétabilité élevée en minimisant tous les effets de masse ajoutée ainsi que de rigidité et d'amortissement d'appui. La technique la plus fréquemment utilisée (et probablement la plus précise aussi) est de suspendre le spécimen à mesurer à l'aide de minces fils de masse négligeable et n'offrant pratiquement aucune rigidité dans le sens transverse. La plaque de test n'est ainsi que très faiblement contrainte dans cette direction, ce qui est idéal pour la mesure des modes propres de flexion qui nous intéresse ici. Cependant, la position de fixation des fils sur la plaque de test peut avoir une influence sur les valeurs modales mesurées, mais en général ces effets sont principalement dissipatifs et modifient essentiellement les amortissements modaux. Il a été effectivement observé que la position de fixation des fils n'a pas d'effet significatif sur les pulsations et les modes propres mesurés. Comme l'objectif de cette étude expérimentale est de mesurer un grand nombre de modes, une optimisation de la position des points de fixation n'est pas envisageable ici, et il a été décidé d'attacher les fils de suspension aux deux coins supérieurs des spécimens testés.

### **3.4      *Excitation acoustique***

Pour établir un modèle dynamique d'une structure, il est bien évidemment nécessaire d'exciter celle-ci avec un ensemble de forces  $f_s(t)$  dépendant du temps. Afin de satisfaire les critères de consistance et de fiabilité de la modélisation numérique de l'expérience réelle (section 3.3 ), il est cependant essentiel de minimiser à nouveau tout effet externe et notamment l'influence des rigidités et masses que peuvent représenter un quelconque système d'excitation dynamique. Parmi l'ensemble des méthodes d'excitation dynamique rencontrées (Tableau 3.3), seul un petit nombre ne requiert pas de contact direct avec le spécimen testé, presque toutes les méthodes classiques induisant une masse et/ou une rigidité additionnelle pour l'excitation de structures composites non ferromagnétiques. A première vue, seule l'excitation par impact peut être envisagée pour nos besoins, mais, en raison de sa nature impulsionnelle, cette technique s'avère incompatible avec une mesure de réponse dynamique

en vitesse dans des conditions complètement libres. En effet, l'impact n'étant pas un signal symétrique, il génère d'importants déplacements de corps rigide qui noient complètement la réponse vibratoire de la plaque de test.

| <i>Méthode</i>                             | <i>Avantages</i>  | <i>Inconvénients</i>  |
|--|---|---|
| pot vibrant (excitation électro-dynamique) | excitation à haute intensité, force ponctuelle, très linéaire, contrôle possible en boucle ouverte ou fermée, plage de fréquences moyennement élevée, excitation à basse fréquence possible | masse ajoutée non négligeable (à identifier très précisément pour les structures légères), rigidité additionnelle                                       |
| marteau instrumenté (impact)               | excitation dans une plage moyennement étendue, amplitude moyenne à élevée, simple, précis et efficace   | Incompatible avec des tests libre-libre pour une mesure en vitesse ou déplacement   |
| éléments piézo-électriques collés (patch)  | excitation dans une large plage de fréquences à faible amplitude  | relativement complexe, éléments collés sur la surface du spécimen (masse ajoutée, rigidité et amortissement supplémentaires)                            |
| induction électro-magnétique               | excitation de faible amplitude jusqu'à de hautes fréquences, pas de rigidité additionnelle, pas de masse additionnelle, application aux structures ferromagnétiques                         | légèrement non linéaire, calibration obligatoire pour chaque utilisation spécifique, masse ajoutée (inducteur) pour les structures non ferromagnétiques |

**Tableau 3.3: Avantages et inconvénients des méthodes d'excitation dynamiques courantes**

Aucune méthode d'excitation classique ne satisfaisant vraiment les critères imposés, il est nécessaire de réfléchir à une alternative plus adaptée pour atteindre l'objectif fixé de générer une force d'excitation dynamique dans une large bande de fréquences (jusqu'à 10 kHz au moins) sans contact et sans masse ajoutée significative. La solution peut résider dans le recours à une méthode basée sur une excitation vibratoire par ondes acoustiques.

Quoique rarement utilisée pour effectuer des analyses modales, cette technique n'introduit aucune masse ajoutée ni aucune rigidité externe, mais du fait de la nature ondulatoire et diffusive du son, elle ne peut fournir qu'un champ de forces d'excitation réparti et généralement fortement variable en fonction de la fréquence à cause des nombreuses interférences acoustiques générées au voisinage d'une source de dimension finie (champ proche). Bien que très intéressante par son principe, la méthode d'excitation acoustique nécessite en conséquence un travail de mise au point avant d'être réellement efficace et fiable.

Afin d'obtenir une force d'excitation suffisante sur une large plage de fréquence, il est généralement nécessaire d'utiliser des haut-parleurs placés à faible distance du spécimen.

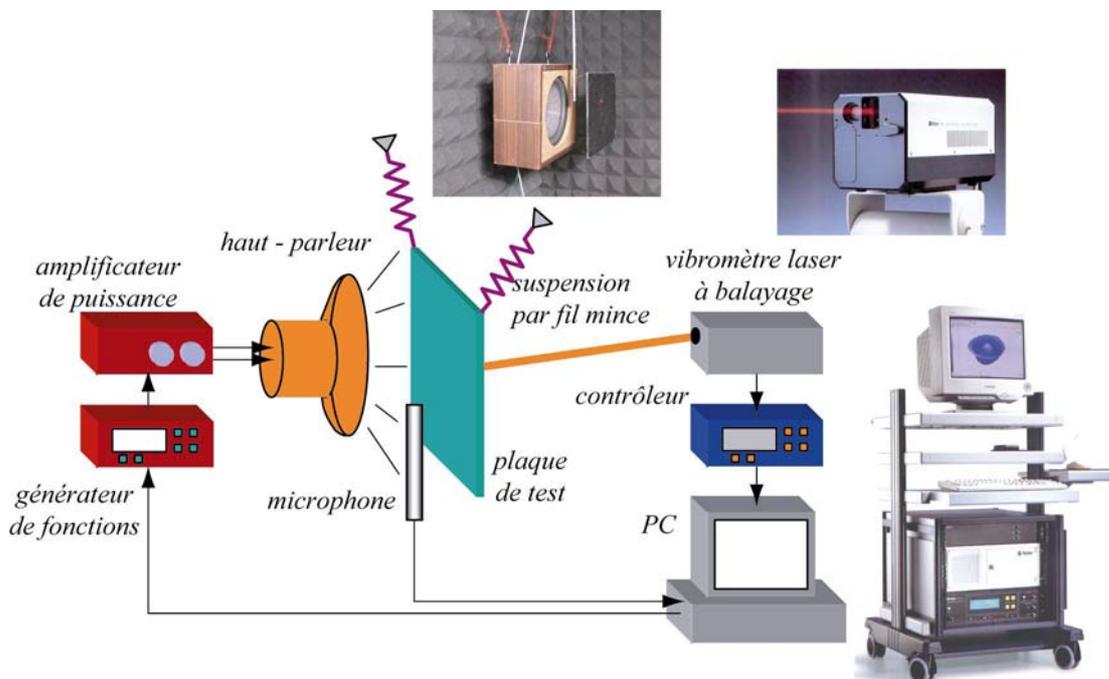
Comme dans ces conditions, les dimensions de la membrane du haut-parleur ne sont plus négligeables vis-à-vis de la distance d'observation du champ de pression, la réponse du système d'excitation acoustique doit être considérée comme étant en « champ proche », impliquant une grande variabilité spatiale des propriétés du champ acoustique. Ainsi, la source acoustique applique un champ de pression d'amplitude et de phase fortement variable sur la surface de la plaque en stratifié composite testée et la force d'excitation résultante perçue par la structure ne peut pas être mesurée précisément sous ces conditions. Cependant, comme la forme des modes propres recherchés est de toute façon définie à un facteur près, la connaissance de l'amplitude exacte de la force d'excitation n'est pas primordiale pour la détermination des paramètres modaux nécessaires à l'identification des propriétés constitutives. Par contre, en raison de la non-uniformité des fonctions de réponse en fréquence des haut-parleurs, même de qualité élevée, il est nécessaire de corriger les spectres de vitesse mesurés (réponse de la structure) pour prendre en compte le niveau global d'intensité d'excitation. Pour corriger ces effets, une fonction de transfert peut être établie entre la réponse vibratoire de la structure et une mesure locale de la pression acoustique aussi représentative que possible des caractéristiques globales du champ de pression généré. Nous avons donc décidé de baser notre technique de mesure sur des fonctions de transfert vitesse / pression acoustique locale, où la valeur de référence de la pression acoustique est mesurée ponctuellement à l'aide d'un microphone de mesure. Pour être efficace, cette approche nécessite que le microphone de mesure soit placé au plus près de la surface de la plaque testée, afin de réduire autant que possible les effets de déphasage entre la pression acoustique ponctuelle mesurée et le champ de pression perçu par la plaque de test. Comme la sensibilité des microphones utilisés pour la suite de ce travail peut être considérée comme constante sur toute la plage de fréquence étudiée, aucune correction de la mesure de pression acoustique n'est nécessaire et les fonctions de transfert sont donc toutes établies directement par rapport à la tension de sortie du microphone<sup>19</sup>.

Dans le principe, le système complet de mesure modal sans contact est donc constitué (Figure 3.8) de l'équipement Polytec PSV200 et d'un générateur de fonctions arbitraires HP 33120A branché sur un amplificateur de puissance (Crown 300A ou Harman Kardon AVR3000) qui alimente le haut-parleur servant de source d'excitation. Le spécimen testé est placé à environ 30 mm de la face avant du haut-parleur et est soutenu par deux minces fils de nylon. La référence de pression acoustique est quant à elle mesurée par un microphone de

---

<sup>19</sup>Les unités des fonctions de réponse en fréquence mesurées sont ici en  $(\text{mm/s}) / V_{\text{microphone}}$ .

haute fidélité B&K 2619 (½ pouce) placé au centre du haut-parleur, aussi près que possible de la plaque testée, et les signaux du vibromètre laser ainsi que l'excitation sont redirigés vers le PC d'acquisition et de traitement du signal pour le calcul des fonctions de transfert et le post-traitement. Bien que d'autres modes d'acquisition soient possibles avec ce système, la mesure est le plus souvent effectuée en établissant une fonction de transfert par point du maillage expérimental à l'aide d'un signal d'excitation de type « periodic chirp » représentant un balayage sinus rapide de toute la plage de fréquence de mesure sur la durée d'une acquisition (en général 3200 lignes FFT).



**Figure 3.8: Système de mesure modale sans contact par interférométrie laser à balayage et excitation acoustique**

Dès lors que nous ne sommes intéressés ici que par l'efficacité directe de la méthode d'excitation, l'approche de développement s'est essentiellement basée sur une démarche empirique, tout d'abord phénoménologique et qualitative, puis finalement quantitative. Afin de cerner les problèmes pouvant survenir avec cette classe de méthode d'excitation, un grand nombre de mesures dynamiques et modales ont été effectuées sur un ensemble de plaques de test avec le système Polytec PSV200 complet (Figure 3.8), afin d'évaluer visuellement la qualité des mesures obtenues à l'aide de différents types de haut-parleurs. Les systèmes acoustiques utilisés lors de ces essais représentent un large échantillon des différents types de sources acoustiques courantes et offrent des caractéristiques très variables, telles que le

diamètre et le type de membrane, le nombre et la disposition des voies ou encore le type de caisson retenu. De plus, pour évaluer les effets de localisation du champ de pression acoustique, la position de la source par rapport à la plaque a également été variée dans de larges proportions. Enfin, des mesures de pression acoustique en différents points ont été réalisées avec et sans la présence de la plaque de test pour évaluer l'influence des caractéristiques vibratoires de celle-ci sur le champ de pression d'excitation.

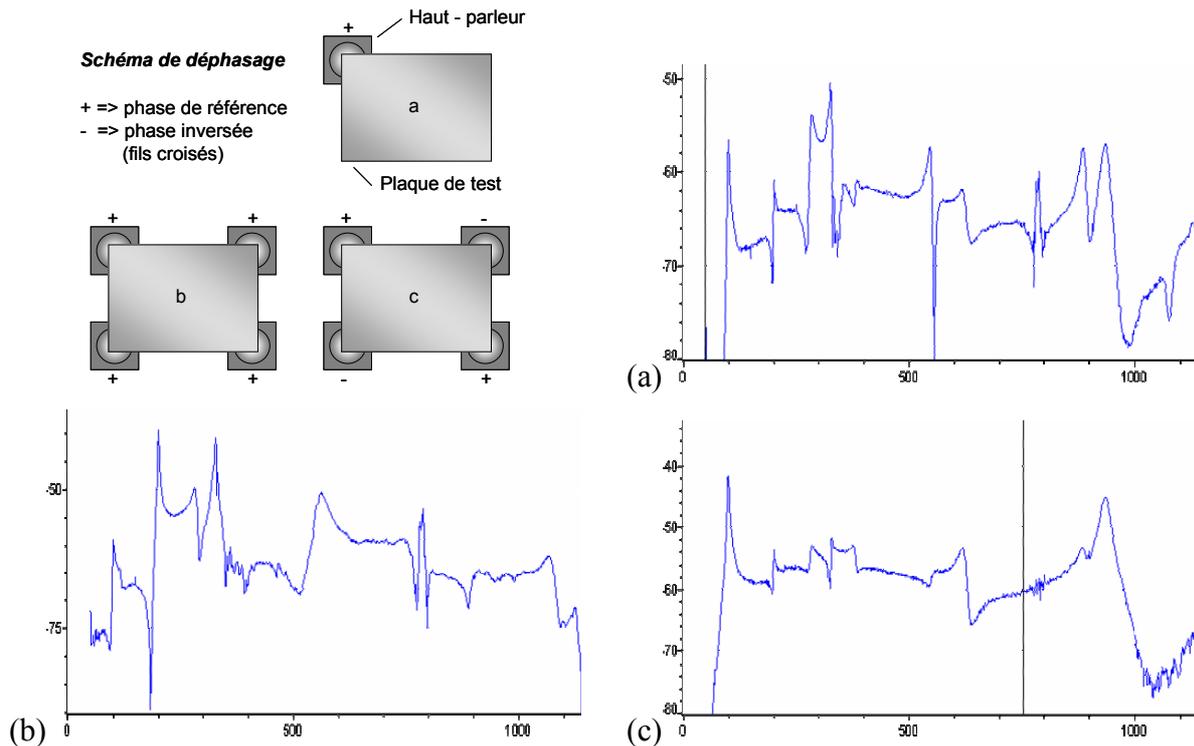
De ces expériences qualitatives, il est possible de déduire les constats suivants :

- Logiquement, nous observons qu'un système à un seul haut-parleur est généralement plus limité au niveau de la largeur de bande des fréquences d'excitation qu'un système à plusieurs haut-parleurs, mais fournit un champ de pression acoustique plus homogène au niveau spatial. Cette homogénéité a toutefois tendance à « amortir » artificiellement certains modes, qui ne peuvent alors plus être observés. En effet, si le champ de pression diffus est symétrique par rapport aux axes principaux de la plaque (cas d'un haut-parleur au centre de la plaque par exemple), il ne pourra exciter que les modes possédant ce type de symétrie (comme par exemple les modes de flexion), de sorte que l'excitation devient sélective. Il semble alors préférable d'avoir une excitation acoustique relativement localisée (en dehors des axes de symétrie) ou non uniforme, afin d'exciter le plus grand nombre de modes. Dans le cas d'un haut-parleur simple, la position de la source acoustique par rapport au spécimen testé est d'une importance capitale pour obtenir une excitation suffisante d'un maximum de modes propres.
- Un système à plusieurs voies permet d'obtenir une excitation correcte dans une large plage de fréquence. Par exemple, un haut-parleur à trois voies séparées de qualité moyenne excite convenablement une plaque en matériaux composites dans une plage de 50 Hz à 15 kHz, rendant ainsi possible la mesure d'un maximum de modes (de l'ordre de 10 modes excités sur 12 modes présents dans la plage donnée). Cependant, la distribution du champ de pression fourni par les systèmes non coaxiaux varie très fortement avec la fréquence, ce qui les rend difficiles à caractériser avec précision et donc à maîtriser dans tous les cas.
- La présence de la plaque de test dans le champ acoustique ne semble pas modifier considérablement la distribution d'amplitude du champ de pression acoustique, ce dernier étant clairement conditionné par les positions et les propriétés

directionnelles des haut-parleurs utilisés. Le champ d'excitation acoustique peut donc être étudié en l'absence de la plaque de test sans induire d'erreurs significatives.

En conclusion de cette étude qualitative préliminaire, on peut affirmer qu'il est souhaitable, afin de maîtriser les phénomènes acoustiques, de baser la technique d'excitation sur un ou plusieurs haut-parleurs de petite taille et très directionnels, afin de produire un champ de pression relativement concentré et alliant une réponse aussi linéaire que possible dans une large plage de fréquence (entre 50Hz et au moins 10kHz). Dans cette catégorie de haut-parleurs, les systèmes de sonorisation de type « satellite » à caissons de graves séparés semblent satisfaire à la fois les critères de puissance, de compacité et de linéarité dans la plage de fréquence fixée. A partir des caractéristiques de linéarité et de plage de fréquence de la réponse acoustique de petits haut-parleurs à une voie, nous avons choisi un modèle de haut-parleur de type Bose<sup>®</sup> Cube Speaker<sup>®</sup> d'un système de sonorisation Acoustimas<sup>®</sup> 6. En effet, ce système à cinq satellites et un caisson de graves passif faisant également office de filtre à basse fréquence se caractérise par une excellente linéarité de réponse acoustique pour des haut-parleurs satellites très compacts de dimension 80 × 80 × 80 mm. De plus, même dans les fréquences relativement basses (100 Hz par exemple), ces satellites offrent une puissance suffisante pour exciter les premiers modes vibratoires de plaques en matériaux composites, tandis que la fréquence de réponse maximale se situe à environ 15 kHz pour les structures très faiblement amorties comme les composites à base de carbone et résine époxyde.

Comme la combinaison de plusieurs sources acoustiques distinctes est possible, une étude qualitative a également été réalisée afin d'explorer les avantages et inconvénients d'un système d'excitation constitué de quatre haut-parleurs compacts Bose<sup>®</sup> Cube Speaker<sup>®</sup> branchés selon plusieurs schémas de déphasage. Dans cette étude, les quatre haut-parleurs sont placés aux quatre coins de la plaque de test (plaque en carbone sergé – résine époxyde de dimension 250 × 250 × 4 mm) à une distance d'environ 30 mm. Un des haut-parleurs est instrumenté à l'aide d'un microphone B&K 2619 afin de servir de référence d'excitation pour le calcul des fonctions de transfert de la plaque. Les schémas de branchement des haut-parleurs utilisés sont les suivants : tous en phase, opposition de phase entre les deux haut-parleurs du haut et du bas, phase alternée en forme de croix. Parallèlement à ce système à quatre haut-parleurs, un essai est réalisé avec un seul haut-parleur situé sur l'un des coins de la plaque à la même distance que précédemment.



**Figure 3.9: Spectres d'amplitude obtenus par excitation de la plaque en sergé carbone-époxy avec respectivement un seul haut-parleur au coin de la plaque (a), quatre haut-parleurs en phase (b) et quatre haut-parleurs branchés en déphasage croisé (c)**

Les conclusions qui ressortent de cette étude qualitative sont les suivantes (Figure 3.9) :

- Une excitation avec les quatre haut-parleurs en phase privilégie clairement les modes « symétriques » par rapport aux axes principaux de la plaque, c'est-à-dire essentiellement les modes de flexion (modes d'ordre pair).
- L'utilisation d'un schéma de déphasage en croix favorise l'excitation des modes « antisymétriques » (modes d'ordre impair) et permet de mesurer les modes de torsion le long des directions principales de la plaque.
- De tous les cas testés, le recours à un seul haut-parleur dans un coin de la plaque permet l'excitation du plus grand nombre de modes, à un niveau certes inférieur à celui obtenu avec quatre haut-parleurs mais tout de même suffisant pour identifier clairement les pics et changements de phase dans les fonctions de transfert mesurées.

En résumé, cette étude qualitative de l'excitation acoustique de plaques en composites avec sources multiples suggère que, pour extraire un grand nombre de modes propres, il est préférable d'exciter le spécimen de test à l'aide d'un seul haut-parleur positionné de manière

adéquate et fournissant un champ de pression localisé d'intensité aussi constante que possible sur la plage de fréquence requise (50Hz à 10kHz).

### 3.4.1 Caractérisation du système d'excitation acoustique

Pour optimiser et maîtriser le système d'excitation acoustique, une mesure quantitative de la distribution spatiale d'amplitude et de phase en fonction de la fréquence est nécessaire. En effet, cette distribution conditionne visiblement les performances de l'excitation acoustique et peut même empêcher la mesure d'un nombre non négligeable de modes si elle n'est pas maîtrisée. Une série de mesures acoustiques a alors été entreprise avec comme objectif de pouvoir caractériser le spectre moyen d'excitation du système sur une plage de fréquence de 50 Hz à 15kHz et de pouvoir évaluer la distribution spatiale d'amplitude et de phase de la pression acoustique dans un volume de mesure autour de la plaque de test. En se basant sur les conclusions tirées des mesures préliminaires de champ, tous les essais ont été effectués en champ libre, sans présence de la plaque. La démarche de mesure est fondée sur un principe de balayage dans le plan vertical d'une rampe horizontale de neuf microphones de mesure de ¼ de pouce Earthworks M30BX. Ce balayage de neuf points par ligne crée un maillage de mesure de dimension  $9 \times n$  où  $n$  représente le nombre de lignes horizontales mesurées. Le système de mesure acoustique utilisé pour cet essai est constitué des appareils suivants :

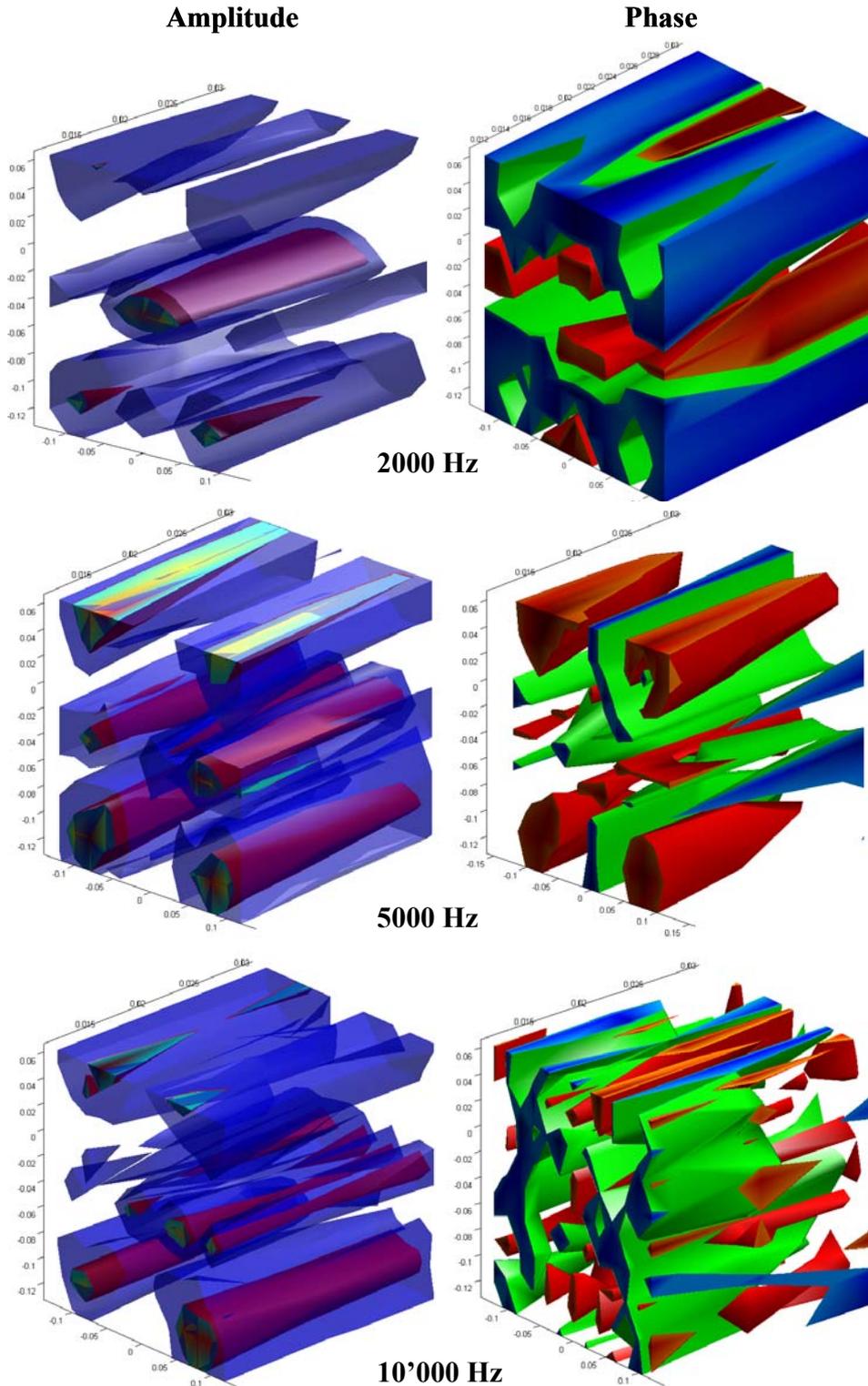
- 9 microphones de mesure de ¼ de pouce Earthworks M30BX, branchés sur 9 préamplis de mesure Earthworks LAB1 (gain étalonné) ;
- un PC d'acquisition équipé d'une carte National Instruments PCI-MIO-16 à 16 canaux d'entrée A/D et 2 sorties D/A ;
- un programme d'acquisition et de traitement des données développé avec MATLAB, permettant la génération de signaux pseudo aléatoires ou de type sine-chirp et simultanément l'acquisition des 9 sources acoustiques. La partie post-traitement détermine les fonctions de transfert du système acoustique par FFT pour chaque cycle de mesure et calcule la fonction de transfert moyenne pour chaque point sur l'ensemble des mesures ;
- un amplificateur de puissance Harmann Kardon AVR3000 à 6 canaux branché sur la sortie D/A du PC et alimentant les haut-parleurs testés ;
- de 1 à 4 haut-parleurs Bose<sup>®</sup> Cube Speaker<sup>®</sup>, montés sur une armature légère en bois ne perturbant pas le champ de mesure (barres cylindriques) ;

- une chambre anéchoïde de  $1.5 \times 1.5 \times 1.5$  m contenant tous les éléments de mesure, suspendus par des fils minces n'offrant aucune rigidité et ne perturbant pas le champ acoustique.

### Sources d'excitation multiples

Dans un premier temps, une mesure du champ de pression issu d'un système à quatre haut-parleurs Bose<sup>®</sup> Cube Speaker<sup>®</sup> en phase a été effectuée afin de comprendre plus précisément les phénomènes rencontrés lors de l'excitation acoustique à l'aide de sources multiples. Le volume de mesure, de dimension  $265 \times 240 \times 30$  mm est centré par rapport aux quatre sources et situé à une distance de 10 mm par rapport à la face avant des haut-parleurs. Ce domaine de mesure est discrétisé en un maillage structuré de  $9 \times 13 \times 3$  points de mesure. Les haut-parleurs, de dimension extérieure  $80 \times 80 \times 80$  mm, sont placés aux coins d'une armature légère en bois, leurs centres formant un carré de dimension  $180 \times 180$  mm. Pour chaque ligne de mesure, un signal de type periodic chirp (balayage sinus rapide) sur une plage de fréquence de 20Hz à 20kHz est généré 30 fois par le logiciel spécialement développé pour ces mesures et les réponses acoustiques sont échantillonnées à 40 kHz pour les 9 microphones simultanément. Les données temporelles mesurées sont sauvegardées directement dans un fichier binaire et stockées en vue du post-traitement. La position de la rampe de microphones est ensuite modifiée et la mesure recommencée jusqu'à ce que le volume entier ait été balayé.

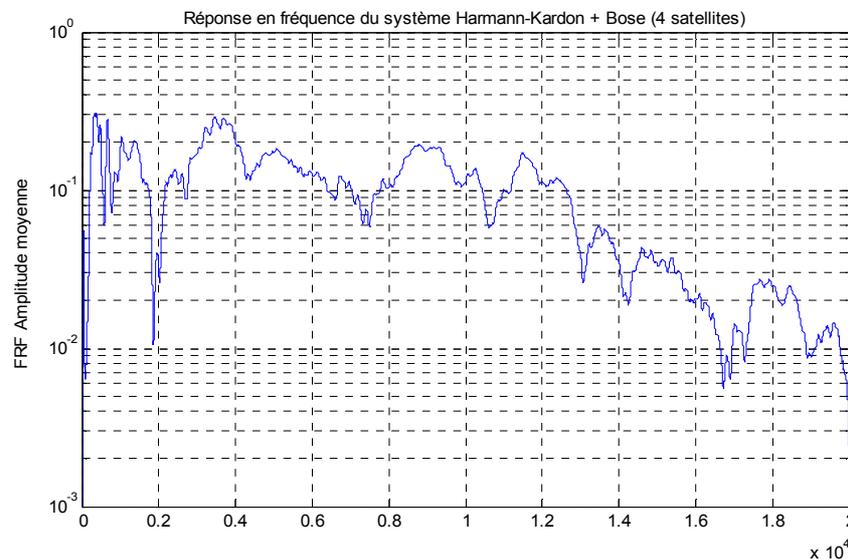
Une fois tous les points mesurés, un programme spécifique de traitement de signal est lancé. Cette routine récupère toutes les mesures temporelles (environ 1 Go de données) et, pour chaque point et cycle d'excitation, calcule la fonction de transfert du système acoustique par transformée de Fourier rapide (FFT). Une moyenne complexe des fonctions de transfert sur les 30 cycles d'excitation est ensuite extraite afin de réduire les inévitables bruits de mesure. Ces fonctions de transfert ainsi que les informations de maillage sont alors stockées dans une structure de donnée MATLAB pour traitement et visualisation ultérieure. Enfin, après représentation en isosurfaces 3D ou contours 2D (isolignes) dans plusieurs bandes de fréquence, les distributions d'amplitude et de phase de la pression acoustique dans le domaine de mesure sont visualisées, afin de pouvoir analyser les effets de superposition/interférence des différentes sources en fonction de la fréquence (Figure 3.10).



**Figure 3.10: Distribution spatiale d'amplitude et de phase en fonction de la fréquence d'un système à 4 haut-parleurs en phase (isosurface d'amplitude à 25% de l'amplitude maximale, isosurfaces de phase correspondant à  $[-\pi/2, -\pi/4]$  et à  $[\pi/4, \pi/2]$ )**

En effectuant une moyenne complexe sur tous les points de mesure des différentes fonctions de transfert, il est également possible de représenter la fonction de transfert

moyenne du système dans le volume de mesure (Figure 3.11) et analyser ainsi les variations d'excitation globale en fonction de la fréquence.



**Figure 3.11: Fonction de transfert moyenne du système de quatre haut-parleurs en phase**

Ces mesures quantitatives du champ de pression acoustique nous révèlent l'importance des effets d'interférence des différentes sources (Figure 3.10), avec des « cellules » d'interférence ayant une taille de plus en plus petite au fur et à mesure que la fréquence augmente. Par exemple, on peut observer la présence d'une zone centrale de forte amplitude dans le champ de pression à 2 kHz, qui correspond vraisemblablement à une interférence constructive des quatre sources acoustiques (diamètre d'environ 60 mm). De la même manière, lorsque la fréquence atteint 5 kHz, deux zones d'interférence constructive font leur apparition, mais cette fois-ci avec une dimension environ deux fois moindres (env. 20 à 30 mm). Lorsque la fréquence atteint 10 kHz, le nombre de zones d'interférence est alors encore plus important et leur taille devient si réduite que le maillage de mesure finit par être trop grossier pour capter le phénomène. Les variations de phase de la pression acoustique sont encore plus révélatrices du phénomène d'interférence observé, avec une taille de cellule de phase similaire passant de 80 mm à une fréquence de 2 kHz, à moins de 20 mm (résolution du maillage) à 10 kHz. Sans grande surprise, la taille des zones d'interférence suit environ l'évolution de la demi-longueur d'onde de la pression acoustique. Par contre, malgré les inévitables imperfections de mesure, nous constatons que le champ de pression reste effectivement symétrique par rapport aux axes du rectangle formé par les haut-parleurs. Ainsi, les effets d'interférence entre les sources rend l'optimisation de l'excitation des modes propres très complexes tant la phase et donc le signe

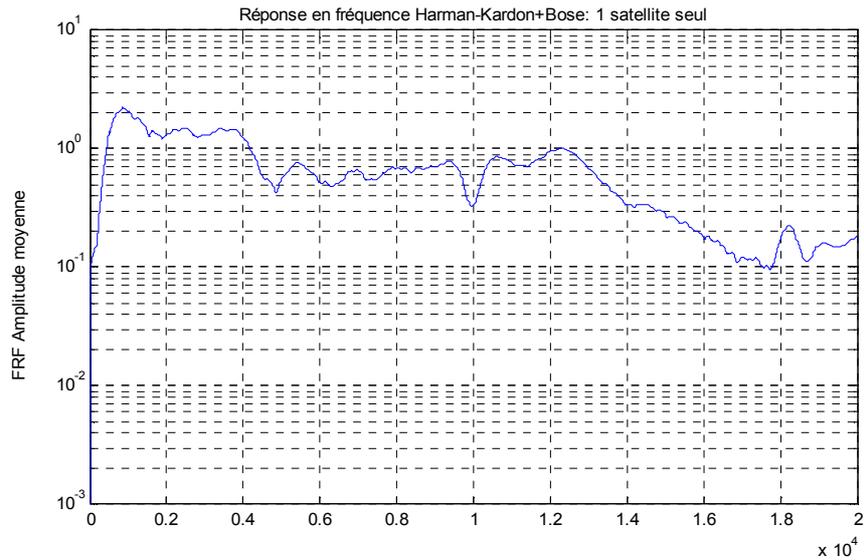
de la pression changent localement. De plus, comme le montre la Figure 3.11, la distribution globale d'amplitude d'excitation est très variable en fonction de la fréquence, ce qui démontre encore une fois les effets négatifs des interférences des sources.

En conclusion, on peut affirmer que ces mesures quantitatives de champ permettent d'expliquer les difficultés rencontrées dans la mise au point empirique d'un système d'excitation à sources multiples, le problème majeur étant lié aux interférences des différents haut-parleurs créant des « cellules » d'interférence (ayant une phase proche) de taille de plus en plus petite lorsque la fréquence augmente, ce qui rend la force résultante sur la plaque de plus en plus variable et dépendante de la position relative de la plaque par rapport à la source d'excitation acoustique. L'idée d'une excitation à sources multiples peut dès lors être clairement abandonnée au profit d'une excitation à l'aide d'une source unique.

### **Source d'excitation unique**

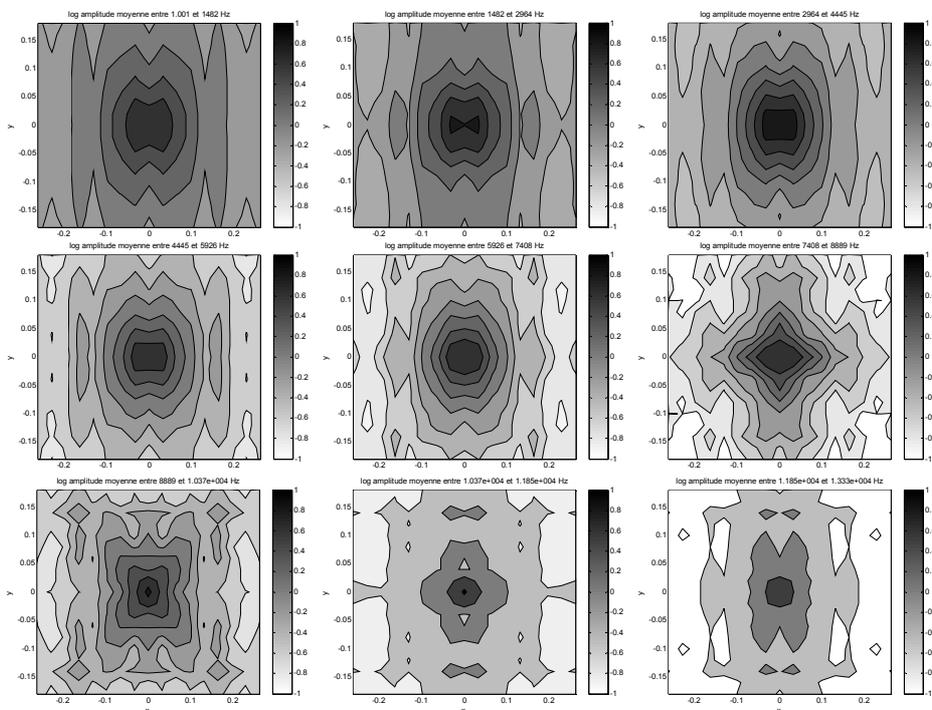
Une étude expérimentale analogue a été menée sur un système d'excitation acoustique constitué d'un seul haut-parleur. Le même système de mesure que précédemment a été choisi pour caractériser ce haut-parleur dans un plan situé à une distance de 30 mm. Afin de réduire le nombre de mesures et d'augmenter la résolution spatiale, seul un quart du plan de mesure a été effectivement observé, le reste étant obtenu par symétrie. La grille de mesure de dimension  $260 \times 180$  mm est constituée de  $9 \times 10$  points. Le spectre d'excitation moyen ainsi que les distributions d'amplitude et de phase de ce haut-parleur sont présentés ci-dessous (Figure 3.12 à Figure 3.14).

D'après les résultats, nous constatons que ce haut-parleur à simple voie offre une réponse en fréquence moyenne (Figure 3.12) beaucoup plus constante que le système composé de quatre sources, preuve à nouveau des effets d'interférence cités auparavant. La plage de réponse s'étend principalement (tolérance d'une décade) de 150 Hz à près de 14 kHz. On note cependant une plage de faible puissance autour de 10 kHz, qui n'est fort heureusement pas trop marquée pour compromettre la mesure.

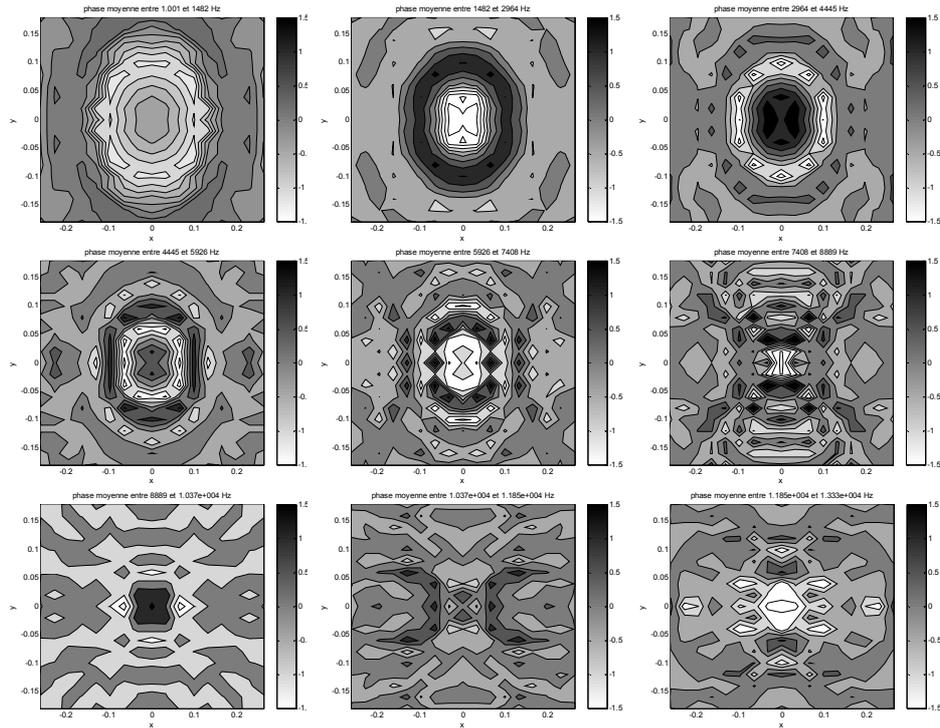


**Figure 3.12: Fonction de transfert moyenne d'un seul haut parleur**

Au niveau de la distribution d'amplitude (Figure 3.13), nous voyons une forte directionnalité de la réponse du haut-parleur et ceci tout particulièrement à hautes fréquences, puisque la zone d'excitation correspondant à 50% de l'amplitude maximale n'atteint qu'environ 30 à 40 mm de diamètre à 10 kHz. Ainsi, plus la fréquence augmente, plus l'excitation acoustique devient concentrée, se rapprochant de plus en plus d'une excitation ponctuelle.



**Figure 3.13: Distribution spatiale d'amplitude (échelle  $\log_{10}$ ) de pression acoustique d'un haut parleur, mesurée dans un plan vertical à une distance de 30 mm, de 1 Hz (en haut à gauche) à 13.3 kHz (en bas à droite) par bande de 1480 Hz**



**Figure 3.14: Distribution spatiale de phase de pression acoustique d'un haut parleur mesurée dans un plan vertical à une distance de 30 mm, de 1 Hz (en haut à gauche) à 13.3 kHz (en bas à droite) par bande de 1480 Hz**

Pour ce qui est de la phase, on constate à nouveau de fortes variations qui correspondent aux interférences des ondes générées en chaque point de la membrane du haut-parleur (champ proche). La distribution de phase a assez logiquement une allure en cercles concentriques. Le diamètre du cercle central des points ayant le même signe de phase correspond environ à une longueur d'onde. Ainsi, le fonctionnement en champ proche du haut-parleur induit inévitablement une distribution de phase variable, mais en comparaison avec le système à sources multiples, la taille des cellules de phase de signe identique s'avère tout de même plus importante et la forte directionnalité de l'excitation fournie par le haut-parleur atténue grandement l'influence des effets d'interférence pour des points éloignés du centre (amplitude négligeable dans les zones périphériques).

Du fait de la forte localisation du champ de pression acoustique de ce système, on peut conclure que la position de la source par rapport à la plaque de test a une forte influence sur la puissance d'excitation transmise à chaque mode. En se basant sur ces données expérimentales, une procédure d'optimisation de la position de la source par rapport à la plaque de test devrait permettre d'assurer une excitation suffisante d'un grand nombre de modes propres.

### 3.4.2 Optimisation de l'excitation acoustique

Comme vu au début de ce chapitre, la force d'excitation modale  $F_k(t)$  d'un mode  $k$  donné peut être calculée par projection du champ de force d'excitation  $f_s(t)$  ( $s = 1, 2, \dots, n$ ) dans la base modale constituée des vecteurs propres  $\boldsymbol{\varphi}_k$  de la structure

$$F_k = \boldsymbol{\varphi}_k^T \mathbf{f}(t) \quad \text{pour } k = 1, 2, \dots, n \quad (3.12)$$

Comme le champ des forces d'excitation discrètes  $f_s(t)$  ( $s = 1, 2, \dots, n$ ) est la résultante du champ de pression acoustique sur la surface de la plaque de test, on peut diviser cette surface en un ensemble de zones rectangulaires élémentaires  $R_s$ , centrées aux points  $P_s$  de coordonnées  $(x_1^s, x_2^s)$  et exprimer la force d'excitation acoustique locale  $f_s(t)$  en fonction de la pression acoustique moyenne  $p_s(t)$  sur la zone  $R_s$  de dimension  $a_s \times b_s$  (Figure 3.15).

$$f_s(t) \cong p_s(t) a_s b_s \quad \text{pour } s = 1, 2, \dots, n \quad (3.13)$$

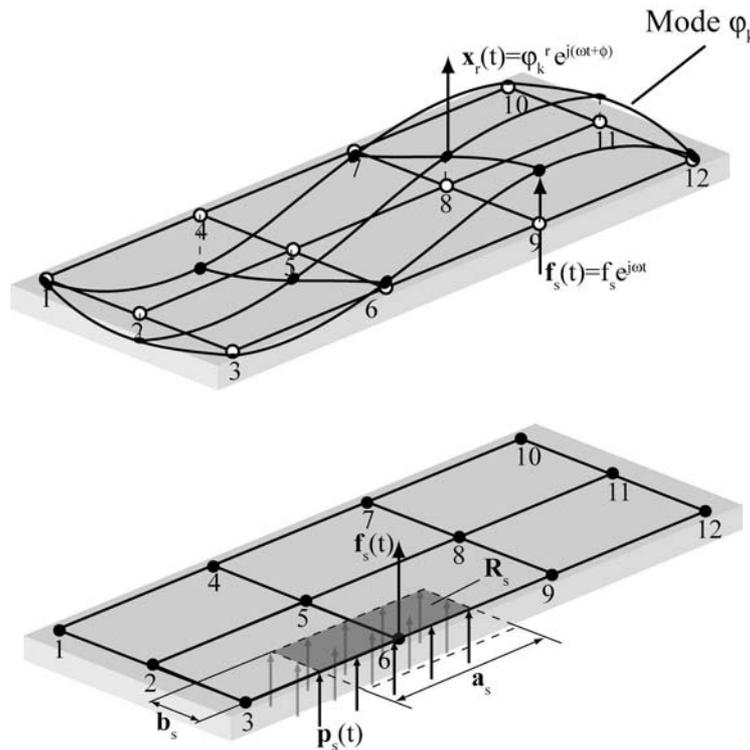


Figure 3.15: Calcul des forces et puissances modales d'excitation

La force d'excitation modale  $F_k(t)$  du mode  $k$  est alors approchée par l'expression :

$$F_k = \boldsymbol{\varphi}_k^T \mathbf{f}(t) \cong \sum_{s=1}^n \varphi_k^s p_s(t) a_s b_s \quad (3.14)$$

où  $\varphi_k^s$  est la composante  $s$  du vecteur modal de rang  $k$ .

Dans le cas d'une excitation sinusoïdale de pulsation  $\omega = \omega_k$  en phase avec la vitesse instantanée du spécimen (ce qui est le cas pour les structures faiblement amorties), la puissance d'excitation de chaque mode peut être définie comme suit

$$P_k(t) = \sum_{s=1}^n f_s(t) \dot{x}_s(t) = \sum_{s=1}^n j\omega_k \varphi_k^s f_s e^{2j\omega_k t} \cong j\omega_k \sum_{s=1}^n a_s b_s \varphi_k^s p_s e^{2j\omega_k t} \quad (3.15)$$

Ainsi, il est possible de calculer de manière approximative la force et la puissance d'excitation du mode structurel  $k$  de pulsation propre  $\omega_k$  et de forme propre  $\varphi_k$  connues, dans la mesure où la pression acoustique à la pulsation  $\omega = \omega_k$  en chaque point du maillage expérimental est connue.

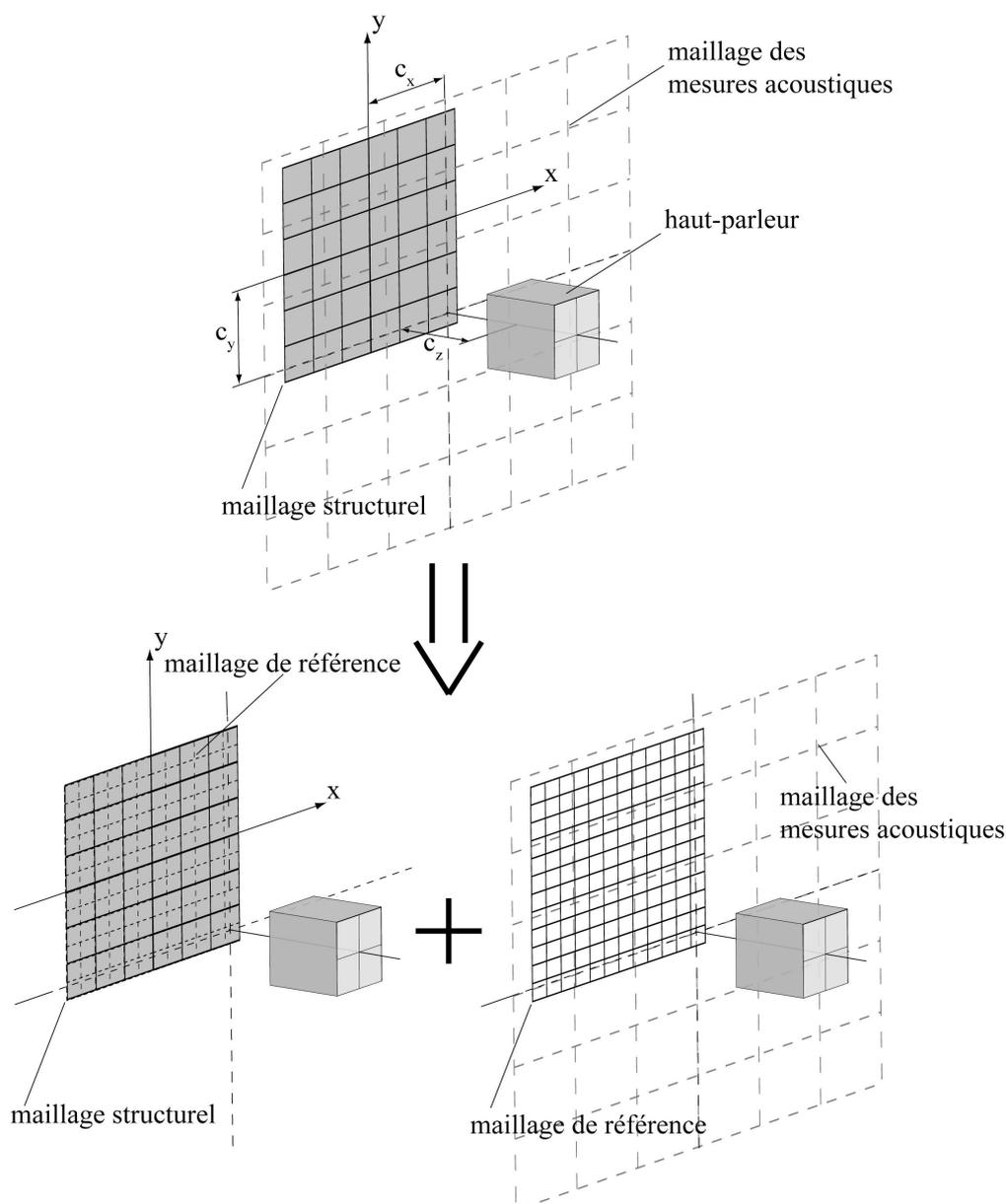
En exploitant les mesures de caractérisation spatiale et fréquentielle de la source acoustique présentée précédemment, on peut quantifier l'excitation d'un mode dont on connaît la forme et la pulsation propre. Dans le but d'obtenir une excitation maximale du plus grand nombre de modes possibles dans une plage de fréquence donnée, il est primordial de positionner au mieux la source d'excitation acoustique par rapport à la plaque. Pour déterminer la position idéale  $(c_x, c_y)$  de la source, nous pouvons formuler et essayer de résoudre l'un des deux problèmes d'optimisation suivants

$$\text{trouver } c_x, c_y \text{ tq } c_x, c_y \text{ maximisent } F_{\min} = \min_{k=1, \dots, n} (F_k(c_x, c_y)) \quad (3.16a)$$

ou

$$\text{trouver } c_x, c_y \text{ tq } c_x, c_y \text{ maximisent } P_{\min} = \min_{k=1, \dots, n} (P_k(c_x, c_y)) \quad (3.16b)$$

où  $F_k(c_x, c_y)$  et  $P_k(c_x, c_y)$  représentent respectivement la force d'excitation modale et la puissance d'excitation modale de rang  $k$  lorsque la source acoustique est positionnée au point  $(c_x, c_y)$  à une distance fixée  $c_z$  de la plaque de test (Figure 3.16).



**Figure 3.16: Principe de projection des maillages acoustique et structurel par interpolation sur une grille de référence**

L'optimisation de l'excitation des modes d'une plaque présuppose donc la connaissance de ses pulsations et formes propres, ce qui n'est pas a priori le cas avant d'effectuer une mesure modale. Cependant, il est possible de contourner ce problème en calculant ces grandeurs à l'aide d'un modèle numérique de la plaque de test basé sur des propriétés élastiques approchées obtenues par exemple par homogénéisation fibre/matrice. Les modèles d'Abolinh et Van Yin [33] fournissent des résultats relativement fiables à partir du taux volumique de fibres et des propriétés moyennes de la classe de fibres et de matrices utilisées. Ces dernières peuvent être récupérées depuis les données du fournisseur des différents composants du stratifié composite étudié ou même à partir d'une base de donnée de propriétés mécaniques

(site web [www.matweb.com](http://www.matweb.com) par exemple). Une fois les paramètres élastiques déterminés et le schéma de stratification connu, une approximation des pulsations et modes propres de la plaque de test est calculée afin de résoudre l'un des problèmes d'optimisation (3.16a) ou (3.16b).

A cette fin, un programme MATLAB a été développé pour réaliser une optimisation « naïve » de la force et de la puissance d'excitation modale sur une grille de positions  $c_x$  et  $c_y$  de la source acoustique par rapport au centre de la plaque de test. Les données acoustiques utilisées dans ce logiciel sont stockées dans une structure de données identique à celle établie lors de l'étude de la variation spatiale et fréquentielle du champ de pression acoustique, alors que les modes et pulsations propres proviennent d'un modèle d'éléments finis calculé par MAFE. Comme la structure des données acoustiques et le modèle numérique sont définis sur des maillages différents, il est préalablement nécessaire de projeter les données des deux modèles acoustiques et structurels sur un même maillage de référence pour pouvoir calculer les excitations acoustiques. Le maillage de référence est généré avec un nombre important de points ( $25 \times 25$  points) sur la surface de la plaque de test (Figure 3.16) et les données modales et acoustiques sont projetées à l'aide d'une méthode d'interpolation linéaire sur ce maillage de référence. Lors de cette projection, les coordonnées de la source sont utilisées pour transformer (par translation) les coordonnées des points de mesures acoustiques en prenant comme référence un repère dont l'origine est située au centre de la plaque de test et dont les axes  $x$  et  $z$  sont définis comme étant respectivement horizontal et aligné avec la normale à la plaque. La grille des positions de la source acoustique est quant à elle fixée par l'utilisateur qui spécifie les valeurs minimales et maximales ainsi que le pas dans les deux directions du plan de la plaque. La routine calcule finalement les excitations modales (puissance ou force) pour chaque mode sur l'ensemble des positions de la source acoustique.

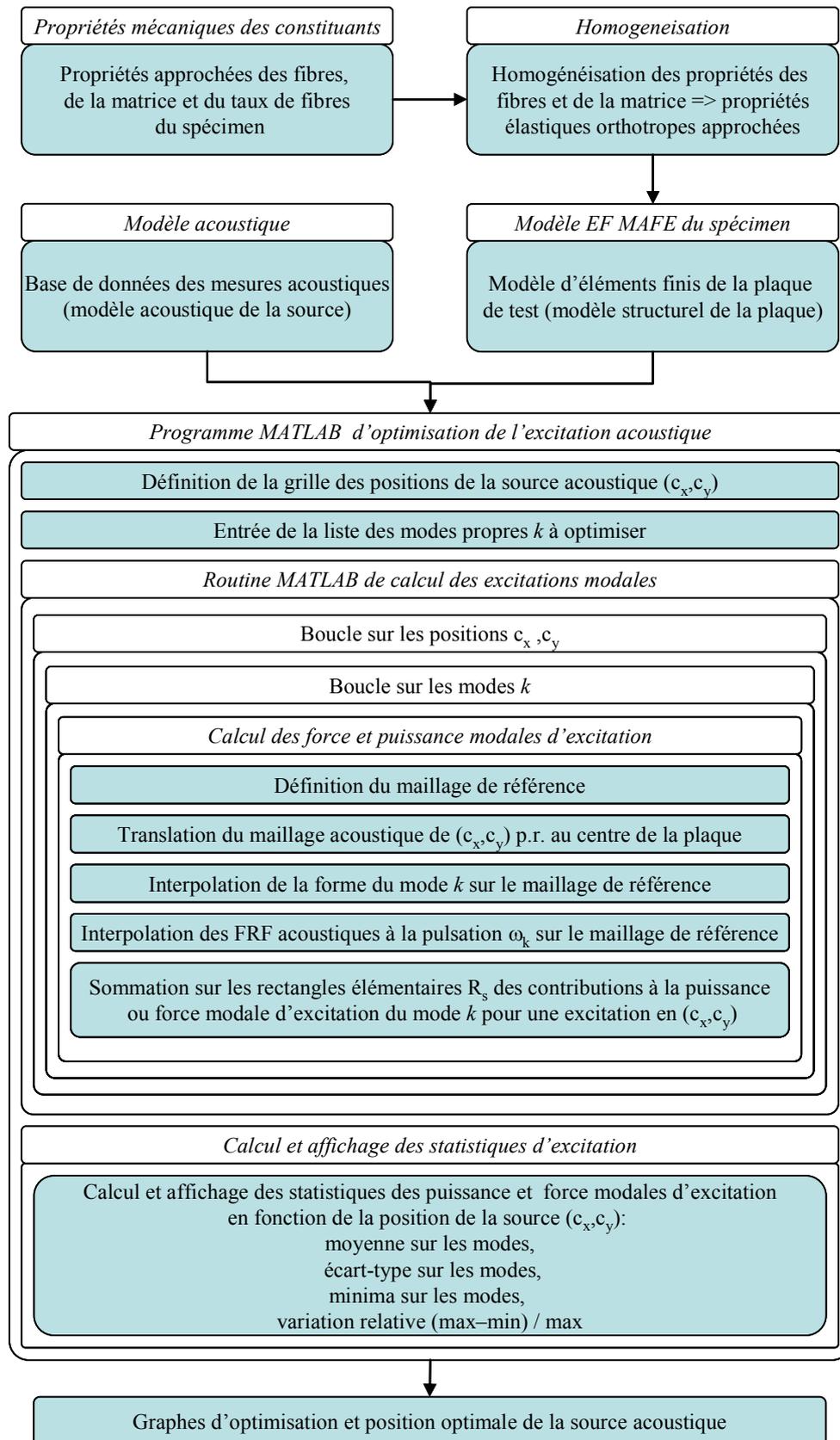


Figure 3.17: Implantation de la méthode d'optimisation de l'excitation acoustique

Ces données modales d'excitation sont ensuite évaluées statistiquement en chaque point  $(c_x, c_y)$  selon plusieurs critères :

- la moyenne sur l'ensemble des modes de la force ou de la puissance d'excitation modale ;
- l'écart-type de la puissance ou de la force d'excitation modale sur tous les modes ;
- le minimum de la puissance ou de la force d'excitation modale sur l'ensemble des modes ;
- la variation relative de l'excitation modale (force ou puissance) pour tous les modes, qui est définie par

$$\Delta F_r = \frac{\max_k F_k - \min_k F_k}{\max_k F_k} \text{ et } \Delta P_r = \frac{\max_k P_k - \min_k P_k}{\max_k P_k} \quad (3.17)$$

La Figure 3.17 résume l'ensemble de la procédure d'optimisation de l'excitation acoustique.

Les résultats trouvés sont présentés dans des graphes 2D permettant d'identifier les zones de placement optimal de la source acoustique. Un exemple de calcul des excitations modales des formes propres 1 à 15 (fréquences propres de 700 Hz à 8.5 kHz) d'une plaque en composite fibres de carbone – résine époxyde unidirectionnel de dimension  $135 \times 135 \times 8$  mm est donné dans les Figures 3.18 à 3.19. La plaque est excitée par un seul haut-parleur compact de dimensions extérieures de  $80 \times 80 \times 80$  mm à une distance de 30 mm de la surface de la plaque. Les données acoustiques utilisées sont celles qui ont été mesurées lors de l'étude de variation spatiale et fréquentielle du champ de pression acoustique présentée au paragraphe 3.4.1 . Les propriétés de chaque strate du composite ont été obtenues par homogénéisation fibre–matrice [33] à partir des données du fournisseur et du taux volumique de fibres (Tableau 3.4).

| $E_1$ (GPa) | $E_2 = E_3$ (GPa) | $\nu_{12}$ (-) | $G_{12} = G_{13}$ (GPa) | $G_{23}$ (GPa) | $\rho$ (kg/m <sup>3</sup> ) |
|-------------|-------------------|----------------|-------------------------|----------------|-----------------------------|
| 95          | 7.2               | 0.25           | 3.8                     | 2.2            | 1770                        |

**Tableau 3.4 : Propriétés physiques approximatives utilisées pour l'optimisation de l'excitation acoustique de la plaque composite carbone - époxy UD  $135 \times 135 \times 8$  mm**

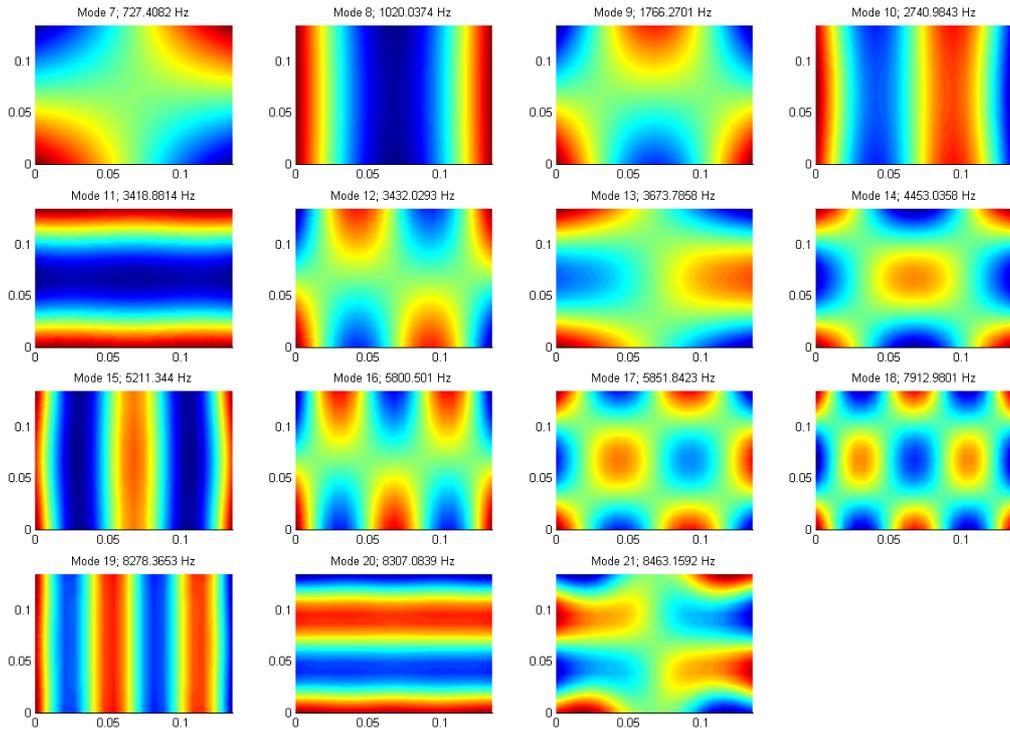


Figure 3.18: Fréquences et modes propres estimés de la plaque carbone époxy UD 135x135x8mm

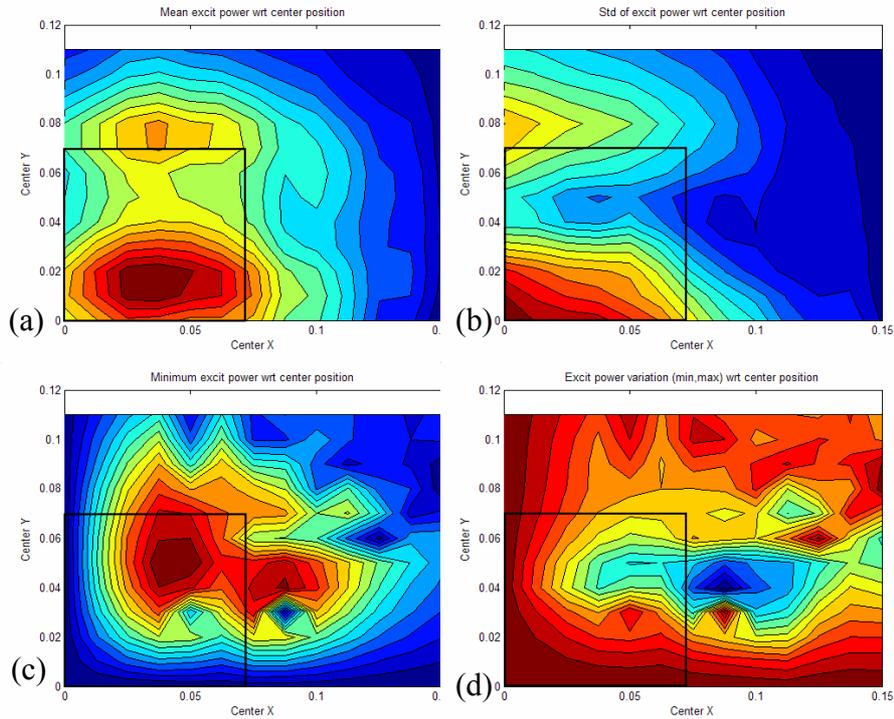
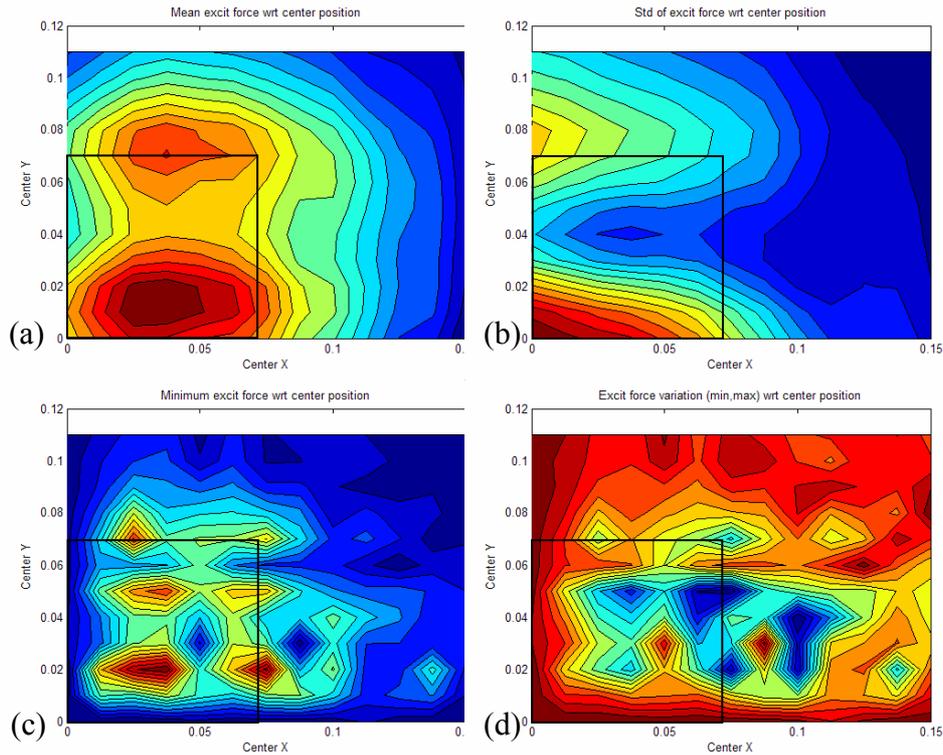


Figure 3.19: Résultats de calcul de la puissance d'excitation modale en fonction de la position de la source acoustique (le rectangle représente le quart de la plaque de test) : moyenne (a), écart-type (b), minimum (c) et variation maximale (d)



**Figure 3.20: Résultats de calcul de la force d'excitation modale en fonction de la position de la source acoustique (le rectangle représente le quart de la plaque de test) : moyenne (a), écart-type (b), minimum (c) et variation maximale (d)**

Au vu des résultats de calcul, on constate que les moyennes des puissances (Figure 3.19a) et des forces excitations modales (Figure 3.20a) ont à peu de chose près la même distribution en fonction de la position de la source, avec notamment deux maxima locaux aux coordonnées (0.035, 0.015) et (0.035, 0.07) par rapport au centre de la plaque de test. Par contre, la répartition de la puissance d'excitation minimale et de la variation maximale de puissance (Figure 3.19c et d) n'a pas du tout la même forme que les distributions de force d'excitation correspondantes (Figure 3.20c et d). En effet, les deux critères d'optimisation du champ (maximisation de l'excitation minimale et minimisation de la variation maximale) sont basés sur des minima ou maxima de données modales et, comme les puissances d'excitation et les forces modales sont reliées par un facteur  $j\omega$ , les modes dominant ces critères ne sont pas identiques. Après plusieurs tests, il apparaît que le critère de force d'excitation est plutôt influencé par les modes d'ordre relativement élevé, ce qui explique la forme plus « tortueuse » de la distribution, alors que le critère basé sur la puissance d'excitation modale est plus sensible aux modes de basses fréquences. Les positions optimales d'excitation sont choisies de préférence en cherchant les maxima locaux de la norme d'excitation (force ou puissance) modale minimale. Dans le cas de notre exemple, les positions optimales en terme

de puissance d'excitation (Figure 3.19c) seraient les points (0.045, 0.055) et (0.090, 0.04). En ce qui concerne les optimums de force d'excitation, il existe environ 6 points qui maximisent la force d'excitation modale minimale mais les variations spatiales de cette dernière sont très importantes. Comme les zones d'optimalité ont une taille très réduite (environ 10 mm), les optimums calculés sont très difficiles à reproduire expérimentalement avec une précision satisfaisante.

Après plusieurs essais comparatifs dans des cas réels de mesure de plaques en stratifiés composites, nous avons remarqué que le critère (3.16b) de maximisation de la puissance d'excitation minimale semble fournir les meilleurs résultats, puisque il permet l'identification d'environ 80 à 90% des modes présents dans la plage de fréquence. Cependant, nous avons aussi relevé que le point d'excitation optimal est généralement très proche du coin de la plaque rectangulaire de test, soit à une distance d'environ 10 à 20 mm en x et en y du coin de la plaque (vers l'intérieur de celle-ci). Une telle position de haut-parleur est recommandée lorsqu'une optimisation d'excitation acoustique rigoureuse n'est pas réalisable.

En conclusion, avec une position d'excitation optimale, le système d'excitation acoustique proposé fournit d'excellents résultats au niveau de la qualité des fonctions de transfert (Figure 3.21) sur une large plage de fréquence (env. 100 Hz à 13 kHz avec le haut-parleur retenu). Seul un inévitable problème de déphasage entre la mesure de référence de la pression acoustique et la résultante d'excitation modale perçue par la plaque pose parfois quelques difficultés, mais ce problème peut être résolu facilement en corrigeant la phase des fonctions de transfert pour prendre en compte la distance séparant le microphone de la plaque.

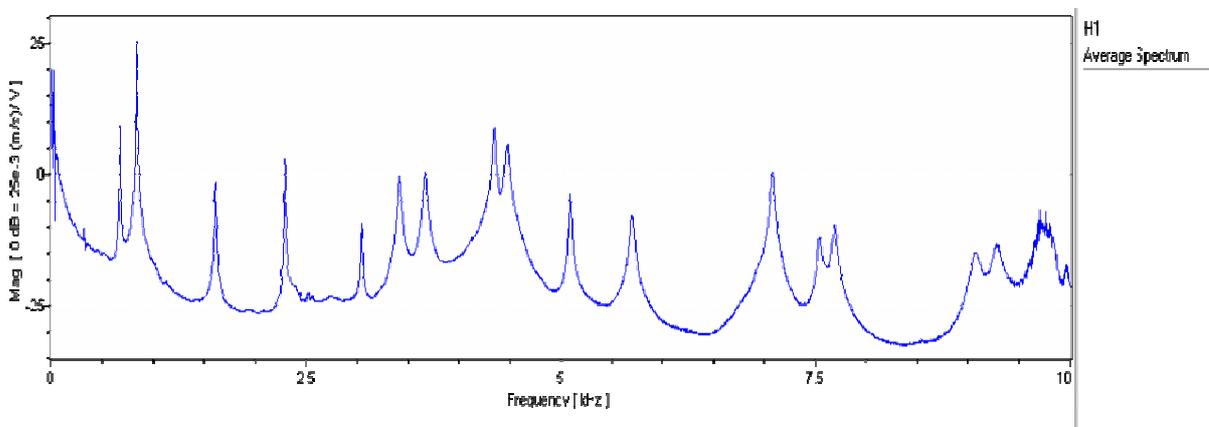


Figure 3.21: Fonction de transfert moyenne mesurée sur un échantillon de plaque en stratifié composite

### 3.5 Extraction modale par Curve Fitting

Une fois les conditions expérimentales maîtrisées, la mesure dynamique du spécimen de test est réalisée dans des conditions d'excitation et de mesure idéales. Les fonctions de transfert de la structure de type vitesse / pression acoustique sont calculées par le logiciel interne au système PSV200 et une moyenne sur plusieurs mesures est effectuée pour augmenter encore la qualité du modèle fréquentiel expérimental.

Le modèle fréquentiel établi, il est maintenant nécessaire d'en extraire les différents paramètres modaux dans la plage de fréquence mesurée. Les techniques classiques d'extraction modale se basent toutes sur le même principe qui consiste à identifier, à partir du modèle fréquentiel  $\mathbf{H}(j\omega)$  (ou temporel dans certains cas), l'ensemble des paramètres modaux  $\varphi_k$ ,  $\omega_k$ ,  $\zeta_k$  et  $m_k$  pour tous les modes  $k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) de la plage de mesure. Cette identification est généralement réalisée à l'aide d'une méthode d'optimisation (de type moindres carrés par exemple) tâchant de minimiser l'écart global entre les fonctions de transfert mesurées (considérées comme les fonctions de transfert réelles) et les fonctions de transfert théoriques synthétisées à partir des paramètres modaux à identifier.

$$h_{rs}(j\omega) = \frac{X_r(j\omega)}{F_s(j\omega)} \xrightarrow{\text{identification}} \bar{h}_{rs}(j\omega) = \sum_{k=1}^n \frac{\varphi_r^k \varphi_s^k}{m_k (\omega_k^2 + 2j\zeta_k \omega_k \omega - \omega^2)} \quad (3.18)$$

Parmi toutes les méthodes d'extraction modale, la plus classique se base sur l'hypothèse qu'au voisinage du  $k$ -ème pic de résonance, la fonction de transfert peut être approchée par une fonction de réponse en fréquence de type oscillateur élémentaire à un seul degré de liberté. Cette technique, communément appelée méthode d'extraction modale SDOF (Single-Degree-Of-Freedom), permet d'extraire correctement et relativement simplement les paramètres modaux de modes dont les pics de résonance sont clairement séparés et dont l'amortissement modal est faible (Figure 3.22). Elle se base sur l'identification des fonctions de transfert mesurées  $h_{rs}(j\omega)$  à l'aide de l'approximation simplifiée

$$\begin{aligned} \bar{h}_{rs}(j\omega) &= \sum_{k=1}^n \frac{\varphi_r^k \varphi_s^k}{m_k (\omega_k^2 + 2j\zeta_k \omega_k \omega - \omega^2)} \cong R_{rs}^m + \frac{\varphi_r^k \varphi_s^k}{m_k (\omega_k^2 + 2j\zeta_k \omega_k \omega - \omega^2)} + R_{rs}^k \\ &= R_{rs} + \frac{\varphi_r^k \varphi_s^k}{m_k (\omega_k^2 + 2j\zeta_k \omega_k \omega - \omega^2)} \end{aligned} \quad (3.19)$$

pour  $\omega$  dans le voisinage de  $\omega_k$  et où  $R_{rs}^m$  et  $R_{rs}^k$  représentent les résidus inertiels et élastiques correspondant respectivement aux contributions des modes d'ordre inférieur à  $k$  et supérieur à

$k$ , dont la somme  $R_{ys}$  est en général négligée lors de l'identification. Cette technique simple à l'avantage de permettre d'identifier quasiment directement les fréquences propres en se basant sur la fréquence de résonance d'amplitude et de reconstruire très facilement la forme des modes propres en extrayant la composante imaginaire de la fonction de transfert en déplacement / force à cette même pulsation.

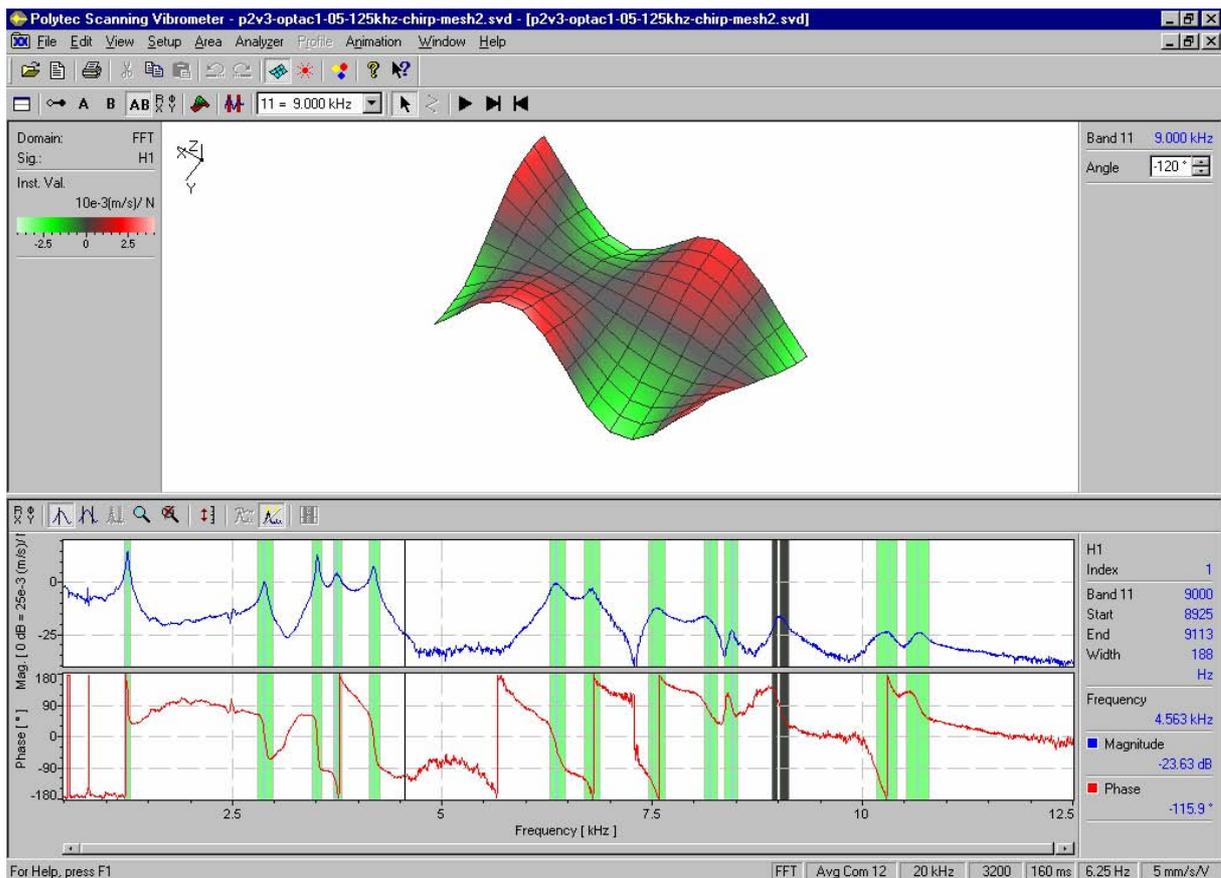
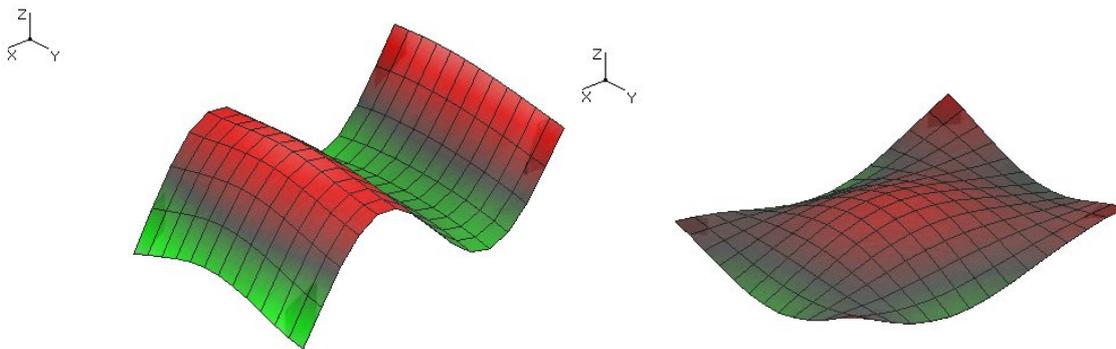


Figure 3.22: Exemple d'extraction modale SDOF à l'aide du logiciel Polytec PSV200

Le système PSV200 automatise cette tâche et ne requiert de l'utilisateur que la sélection d'une bande de fréquence dans laquelle le logiciel recherchera le mode à extraire. Pour que cette technique fonctionne correctement, il faut toutefois impérativement que les résidus des modes voisins du mode  $k$  identifié soient négligeables, ce qui n'est de loin pas toujours le cas. Les effets de bord pouvant ainsi apparaître avec cette méthode d'extraction sont les suivants :

- Les pulsations propres peuvent être faussées dans une large proportion si des modes proches perturbent le pic de résonance du mode recherché. Cet effet est également présent dans une moindre mesure si le mode recherché, bien qu'isolé des autres, est fortement amorti.

- Les formes modales extraites sont encore plus perturbées par la présence de modes proches que les fréquences propres, de sorte qu'il est parfois même difficile de reconstituer précisément la forme d'un mode propre isolé. L'utilisation d'une méthode SDOF basée sur l'ajustement d'un cercle dans le diagramme de Nyquist (Circle Fitting) permet d'obtenir de meilleurs résultats, mais exige généralement un traitement manuel pour être vraiment efficace. La source d'erreur la plus communément observée vient du fait que le mode  $k$  identifié par la méthode SDOF est souvent une superposition complexe du mode souhaité et d'un ou plusieurs modes proches. Il faut noter toutefois que les contributions des modes voisins ont habituellement une phase quelque peu différente, de telle sorte qu'il est parfois possible de distinguer la forme approximative de chacune des contributions dans une animation temporelle du mode identifié (Figure 3.23).



**Figure 3.23: Exemple de la séparation, à l'aide d'une animation temporelle des formes modales identifiées par une méthode SDOF, de deux modes proches. (Plaque Twintex (90°, 0°, 0°, 0°), mode 6 à 541 Hz et mode 7 à 548 Hz)**

Le but de la technique de mesure modale développée ici étant de mesurer très précisément un nombre important de grandeurs modales, la densité de modes dans les fonctions de réponse en fréquence mesurées est généralement très élevée (environ 10 à 20 modes dans la plage de fréquence de la mesure). Cette densité modale élevée introduit des effets de couplage tels qu'il n'est pas envisageable d'extraire les pulsations propres et surtout les formes propres avec une méthode d'extraction modale SDOF. En effet, même dans des conditions de mesure idéales et avec une excitation acoustique optimisée pour le spécimen testé, un nombre non négligeable de modes propres sont souvent bien trop proches, même avec un faible amortissement structural, pour être considérés comme découplés. Il est alors nécessaire d'utiliser une méthode d'analyse modale basée sur une identification simultanée de plusieurs modes propres  $k$  ( $k = k_0, k_0 + 1, \dots, k_0 + m$ ) s'appuyant sur un problème de minimisation au

sens des moindres carrés de l'écart entre les fonctions de transfert mesurées  $h_{rs}(j\omega)$  et des fonctions de réponses en fréquence synthétiques de la forme  $\bar{h}_{rs}(j\omega)$  :

$$\bar{h}_{rs}(j\omega) = R_{rs}^m + \sum_{k=k_0}^{k_0+m} \frac{\varphi_r^k \varphi_s^k}{m_k (\omega_k^2 + 2j\zeta_k \omega_k \omega - \omega^2)} + R_{rs}^k \quad (3.20)$$

pour  $\omega \in [\omega_{k_0} - \Delta\omega, \omega_{k_0+m} + \Delta\omega]$  inclus dans un voisinage  $\pm\Delta\omega$  des pulsations propres recherchées et où  $R_{rs}^m$  et  $R_{rs}^k$  représentent à nouveau les résidus inertiels et élastiques de l'identification.

Par analogie avec la méthode SDOF, cette catégorie de techniques porte le nom de MDOF (Multiple-Degree-Of-Freedom). Les deux grandes familles de méthodes MDOF sont les suivantes :

- *Méthode d'interpolation par fraction polynomiale*

Dans cette technique, les fonctions de transfert recherchées sont reformulées comme une fraction de polynômes d'ordre variable en fonction du nombre  $m$  de modes recherchés. Le curve fitting s'effectue dans l'espace fréquentiel complexe et se déroule en deux étapes [58] : tout d'abord, les pulsations propres et les amortissements modaux sont identifiés dans la bande de fréquence choisie, puis dans un second temps, les amplitudes complexes de chaque mode  $k$  en tout point sont évaluées afin de reconstituer les formes modales.

- *Méthode d'interpolation temporelle par exponentielle complexe*

Les fonctions de transfert sont ici converties par transformée de Fourier inverse sous leur forme temporelle (réponse impulsionnelle) et les fonctions résultantes sont ensuite identifiées à l'aide d'une somme de fonctions exponentielles complexes. L'identification se déroule également en deux temps, comme pour la méthode des fractions polynomiales.

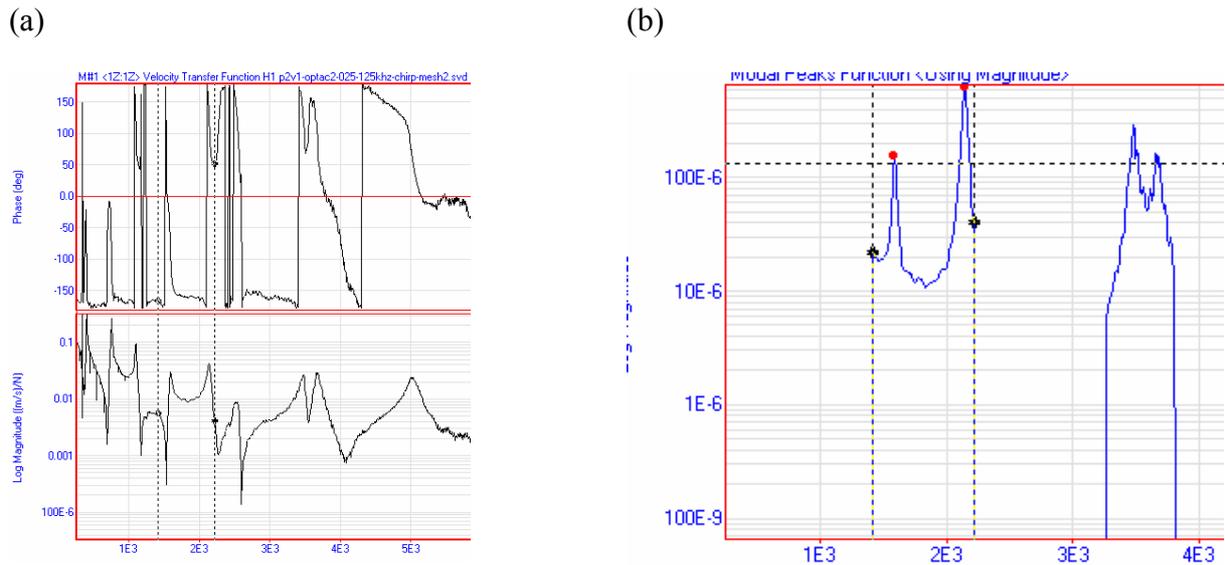
Comme ces procédés d'analyse modale sont relativement complexes à implanter correctement d'un point de vue numérique et qu'ils requièrent une interface utilisateur conviviale pour être efficaces, nous n'avons pas cherché, vu le temps disponible, à développer en interne de telles méthodes. Sur le marché des logiciels de mesure modale, il existe en effet un grand nombre de programmes qui implantent diverses versions de ces méthodes

d'extraction modale et assurent en général l'import direct des données de mesure depuis le système PSV200 (au format classique UNV).

Après une comparaison de tous ces programmes, notre choix s'est porté sur le logiciel Me'Scope Visual Modal Pro de la société Vibrant Technology, qui combine les avantages de puissance de traitement, de convivialité et d'ouverture sur des formats de fichier très variés. En outre, la technique de curve fitting implantée dans ce logiciel se base sur une approche appelée « Global Curve Fitting » [58] qui utilise le principe d'identification en deux temps décrit précédemment. Cette technique est considérée aujourd'hui comme étant la plus précise et la plus robuste des méthodes d'analyse modale MDOF.

Pour terminer, décrivons les étapes d'une démarche d'extraction modale typique. Les différentes phases de cette procédure sont les suivantes :

1. Exportation des fonctions de transfert mesurées depuis le PSV200 dans un format de fichier UNV et importation des données dans Me'Scope.
2. Analyse modale expérimentale par « Global Polynomial Curve Fitting »:
  - a. Une bande de fréquence contenant un groupe de modes proches est identifiée par l'utilisateur en se basant principalement sur les informations de phase. Pour une précision maximale, la plage de fréquence sélectionnée doit commencer et se terminer respectivement juste avant et juste après les sauts de phase caractéristiques des modes à extraire (Figure 3.24a).
  - b. Une fonction d'indication modale (MIF) mesurant la probabilité de présence d'un mode en fonction de la fréquence est alors calculée en s'appuyant de préférence sur l'amplitude des fonctions de transfert mesurées (Figure 3.24b). Cette étape sert généralement à identifier globalement le nombre de modes présents dans la plage de fréquence sélectionnée, mais peut parfois fournir une estimation erronée. L'utilisateur doit donc vérifier le nombre de sauts de phase et de pics présents et, si nécessaire, spécifier manuellement le nombre de modes à identifier. Ce dernier permet au programme de fixer l'ordre des polynômes complexes utilisés lors de l'identification et a donc une importance capitale pour la suite du processus d'analyse modale.



**Figure 3.24: Sélection de la plage de fréquence de curve fitting sur la base des informations de phase des fonctions de réponse en fréquence mesurées (a) et calcul du nombre de modes présents (b) à l'aide d'une fonction d'indication modale (MIF).**

- c. Les pulsations propres et les amortissements modaux sont alors extraits par identification par moindres carrés des coefficients d'une fraction polynomiale complexe (Figure 3.25a) sur l'ensemble des fonctions de transfert mesurées (l'ordre des polynômes choisis par le programme inclut également des termes représentant les résidus inertiels et élastiques).
- d. Une deuxième identification par moindres carrés permet d'identifier les vecteurs modaux à partir d'une fraction polynomiale. Une fois extraits, les modes propres sont sauvegardés dans la table des formes propres de la structure pour la visualisation (Figure 3.25b et c).
- e. La procédure recommence au point 2.a jusqu'à ce que tous les modes soient identifiés.

3. Evaluation de la qualité des modes identifiés et sélection des modes :

- a. En général, les modes extraits par curve fitting avec la précision la plus élevée sont également ceux dont l'amortissement modal est le plus faible, car tout effet de couplage des pics de résonance tend à augmenter fortement la dissipation apparente, l'amortissement modal étant représentatif des effets typiques de déphasage dans les cas de couplage de modes proches. Une manière de vérifier la qualité des modes extraits consiste à contrôler la distribution de phase d'un vecteur modal aux différents points de la

structure. En représentant chaque composante modale complexe dans un graphe de phase, on évalue rapidement la dispersion de celle-ci et la précision d'extraction du mode, les critères de qualité étant la largeur de la dispersion et sa symétrie autour de la phase moyenne. La Figure 3.26 illustre une bonne identification modale (faible dispersion de phase, symétrique par rapport à la phase moyenne) et une mauvaise estimation (mode couplés) (dispersion de phase large et asymétrique).

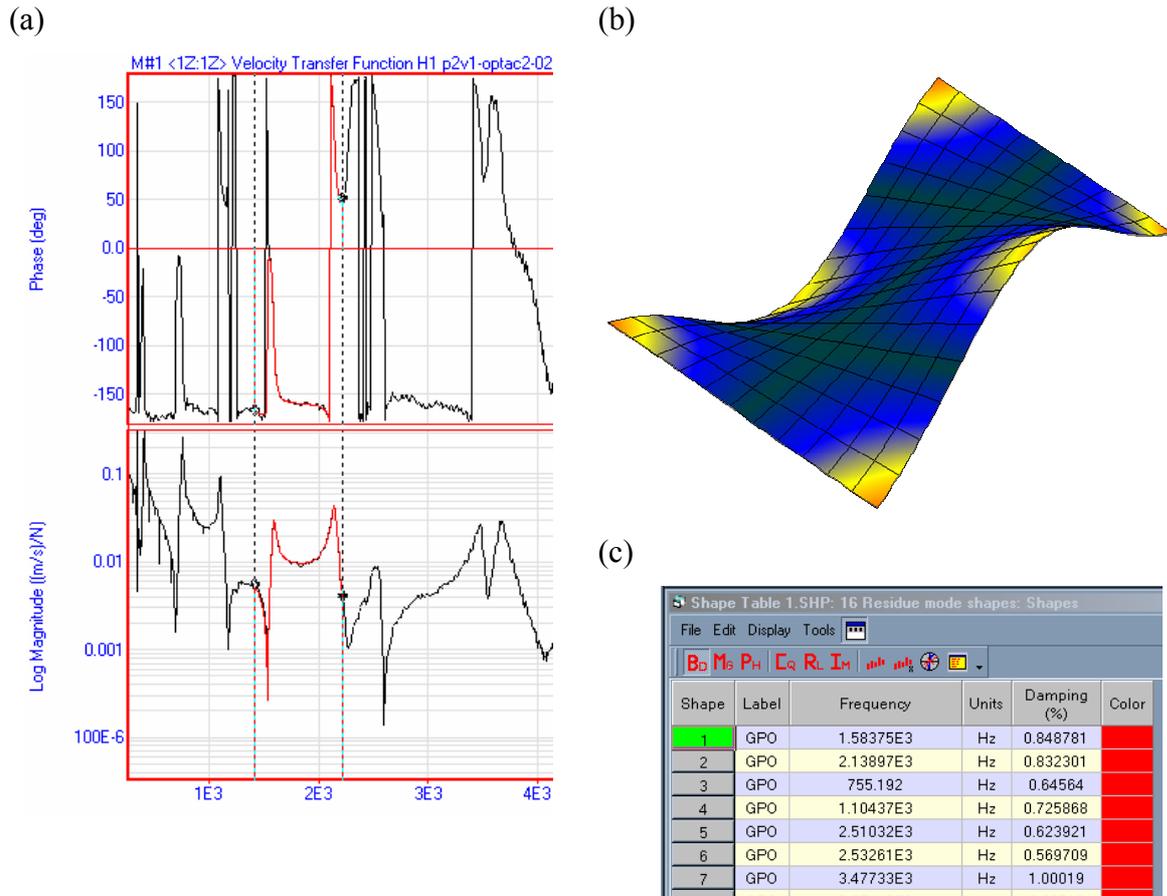


Figure 3.25: Résultat du curve fitting global des fonctions de transferts (a), formes modales extraites (b) et table de grandeurs propres (c)

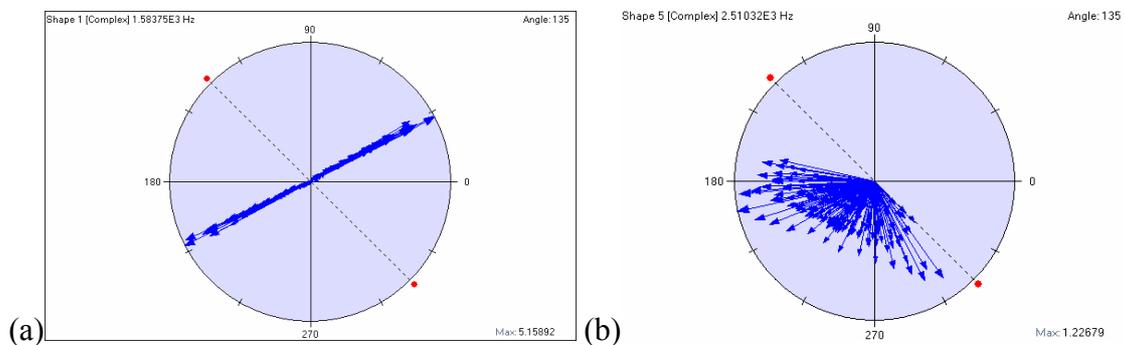
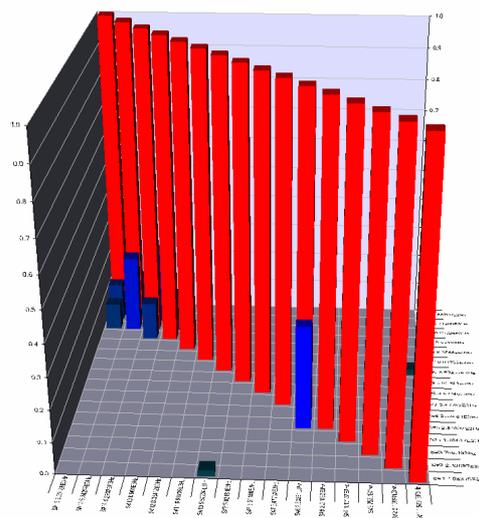


Figure 3.26: Evaluation de la qualité des formes modales extraites à l'aide du graphe de distribution de phase des composantes modales : exemple d'un mode correctement identifié (a) et très mal découplé (b)

- b. Le dernier test de qualité effectué se base sur la matrice MAC de corrélation modale (voir Chapitre 4.2 pour sa définition). Cette grandeur (Figure 3.27) représente d'une certaine manière les produits scalaires pondérés par la masse des différents modes propres mesurés et teste donc l'orthogonalité des modes propres identifiés. Une bonne qualité de mesure globale des modes propres doit correspondre à une matrice MAC proche de la matrice-identité. Dans le cas présent, seuls les termes non diagonaux nous intéressent, chacun de ces termes symbolisant en quelque sorte le couplage des formes propres de deux modes. Ainsi, les paires de modes ayant des coefficients MAC de couplage supérieurs à 0.1 ou 0.2 sont considérées comme de qualité insuffisante pour servir de base à l'identification mixte des propriétés constitutives.



**Figure 3.27: Exemple de matrice MAC de corrélation modale montrant des termes hors diagonale non négligeables, correspondant à des paires de modes mal découplés.**

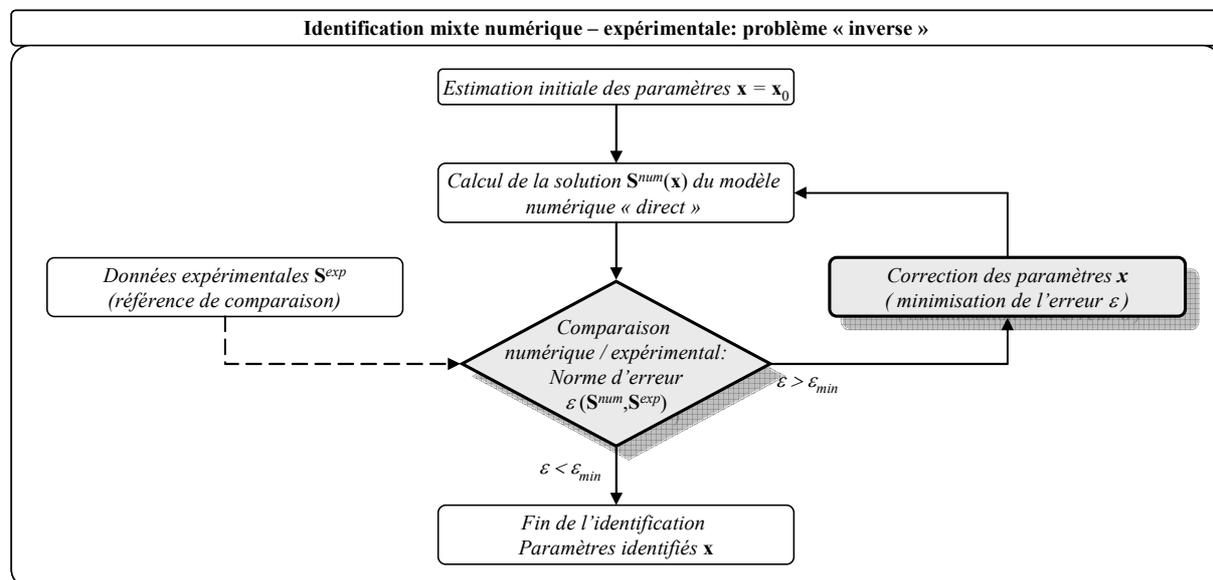
- c. Les modes propres qui ne satisfont pas les critères de phase et de corrélation MAC (étapes 3.a et 3.b) sont soit retirés de la table des vecteurs modaux, soit identifiés à nouveau par curve fitting en changeant quelque peu la plage de fréquence d'extraction ou le nombre de modes identifiés simultanément.
4. Pour la suite de la procédure d'identification mixte des propriétés constitutives, les données modales (maillage, pulsations, amortissements et formes propres) sont à leur tour exportées dans un fichier au format UNV.

Au final, dans la majorité des cas testés jusqu'ici, il a été possible d'extraire, à l'aide de la technique de mesure modale sans contact proposée, un grand nombre de modes propres par essais vibratoires (entre 10 et 20 en moyenne) avec un excellent degré de qualité des formes modales, même lorsque les modes sont relativement proches et que l'amortissement interne devient important. En général, environ 80% des modes présents dans la plage de fréquence choisie peuvent être extraits avec une précision suffisante pour la suite de la procédure d'identification mixte numérique–expérimentale des propriétés élastiques.

## Chapitre 4 Identification mixte numérique-expérimentale

### 4.1 Généralités et objectifs

Dans une procédure d'identification mixte numérique-expérimentale, il est nécessaire d'utiliser une méthode d'optimisation afin de faire tendre les paramètres à identifier d'un modèle numérique, non inversible, vers les valeurs cibles que représentent les données expérimentales. Ainsi la méthode d'optimisation a une importance capitale dans la qualité d'identification des paramètres. Cependant, les propriétés des normes d'erreur (ou fonctions objectifs) à minimiser jouent également un rôle important dans la précision et la robustesse de la méthode d'identification mixte numérique-expérimentale, car ces fonctions représentent la mesure de l'écart entre le modèle numérique à l'itération courante et les valeurs cibles expérimentales que l'algorithme cherche à minimiser. Si ces normes d'erreur ne sont pas suffisamment efficaces et ne capturent pas tous les effets physiques des paramètres recherchés, il est fort probable qu'un certain nombre de ces paramètres s'en trouveront finalement très mal identifiés.



**Figure 4.1: Rôle des normes d'erreur et de l'algorithme d'optimisation dans le contexte des procédures d'identification mixte numérique - expérimentale.**

Ainsi dans le but de minimiser l'erreur résiduelle d'identification tout en garantissant une robustesse et un taux de convergence élevé, il est essentiel de développer un ensemble de

fonctions objectifs adaptées aux données expérimentales et numériques à disposition qui satisfassent les conditions suivantes :

- *Sensibilité élevée aux paramètres* : les fonctions objectifs doivent être suffisamment sensibles à l'ensemble des paramètres à identifier pour garantir une excellente précision d'identification. De plus une sensibilité élevée mais équilibrée des normes d'erreur permet de réduire les effets sur les paramètres identifiés des incertitudes de mesure et des éventuelles erreurs expérimentales.
- *Robustesse* : les normes d'erreur utilisées doivent être convexes et ne posséder qu'un seul et unique minima local dans une large plage de paramètres afin de garantir le bon déroulement de la procédure d'optimisation indépendamment de l'estimation initiale des paramètres à identifier.
- *Précision* : les fonctions objectifs doivent converger vers zéro au voisinage des paramètres réels et l'erreur résiduelle d'identification ne doit pas provenir d'effets de troncature numérique ou d'approximation dans le calcul de ces fonctions, mais uniquement des incertitudes expérimentales.

Parallèlement aux exigences formulées sur les propriétés des normes d'erreur, l'algorithme itératif de minimisation de ces fonctions objectifs doit lui-même satisfaire autant que possible les critères suivants :

- *Rapidité de convergence* : comme à chaque itération de la méthode d'optimisation, il est nécessaire de calculer numériquement la solution d'un problème aux valeurs propres relativement coûteux en terme de temps de calcul, il est essentiel que l'algorithme de minimisation converge rapidement, en effectuant un minimum de calculs de normes d'erreur (et donc d'analyses modales par éléments finis). La rapidité de convergence doit non seulement être élevée lors des premières itérations afin de diriger rapidement la suite de la recherche dans la bonne plage de paramètres, mais aussi lors des dernières itérations permettant de fixer les derniers pourcentages des paramètres. En effet, dans le cadre d'une application concrète d'une méthode d'identification mixte, le temps d'exécution de l'algorithme de minimisation est de première importance pour des raisons évidentes de productivité ; ainsi, si la convergence finale de l'algorithme est mauvaise, il est fort probable que la procédure sera tout simplement terminée avant que le degré de

convergence souhaité ne soit atteint, affectant ainsi directement la précision de l'identification.

- *Robustesse* : la méthode de minimisation se doit également d'être robuste, notamment dans les premières itérations, afin d'assurer que la méthode d'identification converge vers la solution réelle quelle que soit l'estimation (raisonnable) des paramètres initiaux utilisés pour lancer la procédure itérative.
- *Précision* : bien évidemment, la précision de l'estimation finale des paramètres est de première importance pour que la méthode d'identification soit réellement efficace. Cependant, comme dans la plupart des cas lorsque l'on identifie un modèle théorique sur des données mesurées, l'erreur résiduelle est non seulement conditionnée par la précision des mesures et du modèle utilisé, mais aussi par la tolérance de convergence spécifiée à l'algorithme de minimisation. Dans les applications pratiques, cette tolérance est souvent fixée de telle manière à obtenir des résultats à une précision suffisante dans un temps plus ou moins défini. Ainsi la rapidité de convergence de la méthode influence finalement aussi la précision de l'identification.

La démarche suivie pour développer les fonctions d'erreur et pour mettre au point l'algorithme d'optimisation est caractérisée par les points suivants :

1. Définition d'un ensemble de fonctions d'erreur possibles en se basant sur les normes couramment utilisées en analyse modale et sur des idées originales.
2. Etude paramétrique de grande envergure par éléments finis sur plusieurs types de plaques en stratifiés composites afin d'identifier la robustesse et la sensibilité des normes d'erreur proposées. Définition d'une norme d'erreur « composite » comme combinaison des fonctions d'erreur élémentaires sélectionnées.
3. Analyse, choix et implantation d'un type d'algorithme d'optimisation correspondant aux besoins. Etude de l'efficacité et de la précision des différentes méthodes disponibles pour le calcul des gradients de la norme d'erreur.
4. Tests de robustesse et de convergence (précision et vitesse) de la méthode d'identification dans des cas strictement numériques.

## 4.2 Normes d'erreur modales

Comme le rôle des normes d'erreur est de mesurer l'écart entre l'ensemble des données modales expérimentales et numériques, ces fonctions d'erreur doivent être basées non seulement sur les pulsations propres  $\omega_k$  ( $k=1, 2, \dots, m$ ) mesurées et calculées, mais aussi sur les formes modales  $\varphi_k$  ( $k=1, 2, \dots, m$ ) expérimentales et numériques. Finalement, par analogie, les normes dont nous avons besoin sont du même genre que celles utilisées depuis des années dans le domaine de l'analyse modale expérimentale et l'identification des structures. Ainsi, en se basant sur des normes d'erreur modales ayant fait leurs preuves dans ces domaines, nous sommes assurés d'obtenir des fonctions d'erreur de qualité. Cependant certaines possibilités plus originales sont également proposées dans le but d'augmenter encore la sensibilité de la méthode d'identification aux paramètres constitutifs les moins influents comme le coefficient de Poisson  $\nu_{12}$  et les modules de cisaillement transverse  $G_{13}$  et  $G_{23}$ .

Les données modales que l'algorithme d'optimisation aura à sa disposition pour chaque mode  $k$  ( $k=1, 2, \dots, m$ ) à l'itération  $i$  ( $i=1, 2, \dots, q$ ) sont les suivantes :

- Les pulsations propres mesurées (cible)  $\omega_k$  ( $k=1, 2, \dots, m$ ) et calculées à l'itération  $i$   $\tilde{\omega}_k^i = \tilde{\omega}_k^i(\mathbf{x}^i)$  ( $k=1, 2, \dots, m$ ) où  $\mathbf{x}^i$  représente le vecteur des paramètres d'identification à l'itération  $i$ .
- Les modes propres mesurés (cible)  $\varphi_k$  ( $k=1, 2, \dots, m$ ) et calculés à l'itération  $i$   $\tilde{\varphi}_k^i = \tilde{\varphi}_k^i(\mathbf{x}^i)$  ( $k=1, 2, \dots, m$ ). Cependant, les maillages numériques et expérimentaux n'étant pas forcément identiques, ces deux vecteurs modaux ne sont pas définis sur les mêmes grilles. De plus, il faut noter que seules les composantes normales du déplacement du spécimen sont mesurées alors que le vecteur modal numérique comporte toutes les composantes du modèle d'éléments finis de coque d'ordre  $p$  utilisé pour l'identification. Dans un souci de simplicité et de clarté, nous considérerons dans ce chapitre que les modes propres mesurés et calculés sont déjà transformés dans un même maillage de référence et que seuls les degrés de liberté correspondant aux déplacements transverses sont retenus. Nous reviendrons sur la méthode de transformation des maillages dans la partie traitant de l'implantation de l'algorithme d'identification.

La plus classique des normes d'erreur modales est bien évidemment basée sur l'écart des pulsations propres mesurées  $\omega_k$  et calculées  $\tilde{\omega}_k^i$  de chaque mode  $k$  ( $k=1, 2, \dots, m$ ) servant de

base à l'identification. Cependant, il est important de relever que la forme des modes expérimentaux et celle des modes numériques doivent absolument correspondre avant de réaliser une quelconque comparaison des fréquences. Aussi, une méthode permettant de définir précisément des paires de modes numériques et expérimentaux correspondants doit être appliquée avant tout calcul de norme d'erreur. Comme cette méthode de tri automatique des modes est fortement liée à l'implantation de la méthode d'identification, elle n'est pas présentée ici, mais fait l'objet d'un paragraphe dans le chapitre 4.4.5 . On suppose donc ici que les modes numériques et expérimentaux d'indice  $k$  forment effectivement une paire de modes correspondants. Ainsi, la norme d'erreur classique basée sur les écarts relatifs des pulsations propres peut s'écrire

$$F_k^{frq}(\mathbf{x}^i) = \frac{\tilde{\omega}_k^i - \omega_k}{\omega_k}, \text{ pour chaque mode } k=1, 2, \dots, m \quad (4.1)$$

En analyse modale, la méthode la plus couramment utilisée pour évaluer la qualité des modes propres mesurés ou la corrélation entre deux séries de modes propres est appelée méthode MAC (Modal Assurance Criterion). La méthode MAC se base sur le principe théorique d'orthogonalité des formes propres pour calculer les projections d'un ensemble de modes propres sur la base formée par un second ensemble de modes. Les projections sont calculées dans le cas de cette méthode à l'aide d'un produit scalaire standard, correspondant en fait à une projection dans la norme d'une matrice de masse identité. La méthode MAC fournit donc une matrice  $\mathbf{M}_{jl} = MAC(\boldsymbol{\varphi}_j^a, \boldsymbol{\varphi}_l^b)$  de produits scalaires entre deux ensembles de modes  $\boldsymbol{\varphi}_j^a$  ( $j=1, 2, \dots, m^a$ ) et  $\boldsymbol{\varphi}_l^b$  ( $l=1, 2, \dots, m^b$ ), dont la définition est la suivante

$$\mathbf{M}_{jl} = MAC(\boldsymbol{\varphi}_j^a, \boldsymbol{\varphi}_l^b) = \frac{(\boldsymbol{\varphi}_j^a \cdot \boldsymbol{\varphi}_l^b)^2}{(\boldsymbol{\varphi}_j^a \cdot \boldsymbol{\varphi}_j^a)(\boldsymbol{\varphi}_l^b \cdot \boldsymbol{\varphi}_l^b)} \quad (4.2)$$

Ainsi, si les deux ensembles de modes  $\boldsymbol{\varphi}_j^a$  et  $\boldsymbol{\varphi}_l^b$  sont identiques, la matrice MAC  $\mathbf{M}_{jl}$  est égale à une matrice-identité, ce qui correspond au cas d'une corrélation idéale. Dans le domaine de l'analyse modale, on considère généralement que deux modes  $\boldsymbol{\varphi}_j^a$  et  $\boldsymbol{\varphi}_l^b$  sont identiques si le terme  $\mathbf{M}_{jl}$  est supérieur à 0.9 et on dira que les formes modales sont proches si  $\mathbf{M}_{jl} > 0.7$  ou 0.8 suivant la tolérance utilisée pour l'application considérée. En utilisant les propriétés de la matrice MAC ainsi définies, nous pouvons écrire une première norme d'erreur modale sous la forme suivante

$$F_k^{mac1}(\mathbf{x}^i) = 1 - MAC(\tilde{\boldsymbol{\varphi}}_k^i, \boldsymbol{\varphi}_k) \text{ pour chaque paire de mode } k=1, 2, \dots, m \quad (4.3)$$

Cependant, en vertu de la propriété d'orthogonalité des modes propres, une corrélation parfaite entre deux ensembles de modes propres implique également que tous les termes non diagonaux de la matrice MAC correspondante sont nuls. En exploitant cette nouvelle propriété, une seconde fonction d'erreur modale basée sur la matrice MAC peut être définie par

$$F_k^{mac2}(\mathbf{x}^i) = \sum_{j=1, j \neq k}^m MAC(\tilde{\boldsymbol{\varphi}}_j^i, \boldsymbol{\varphi}_k) \text{ pour chaque mode } k=1, 2, \dots, m \quad (4.4)$$

Parallèlement au principe de projection modale utilisé par la méthode MAC, il est également envisageable de mesurer l'écart entre les formes modales de deux ensembles en calculant simplement une somme des valeurs absolues des différences entre les composantes des vecteurs modaux. Toutefois, il est absolument nécessaire dans ce cas que les ensembles de modes soient normalisés et signés de la même manière, par exemple en fixant la composante de valeur maximale à l'unité. On peut donc définir une fonction d'erreur, basée sur les composantes des vecteurs modaux, de la forme suivante :

$$F_k^{ecm}(\mathbf{x}^i) = \sum_{j=1}^r \left( \frac{(\tilde{\boldsymbol{\varphi}}_k^i)_j}{\max_l((\tilde{\boldsymbol{\varphi}}_k^i)_l)} - \frac{(\boldsymbol{\varphi}_k)_j}{\max_l((\boldsymbol{\varphi}_k)_l)} \right) \text{ pour chaque mode } k=1, 2, \dots, m \quad (4.5)$$

où  $(\boldsymbol{\varphi}_k)_j$  et  $(\tilde{\boldsymbol{\varphi}}_k^i)_j$  représentent les  $j$ -èmes composantes des vecteurs  $\boldsymbol{\varphi}_k$  et  $\tilde{\boldsymbol{\varphi}}_k^i$  tandis que  $r$  symbolise le nombre de composantes des vecteurs modaux.

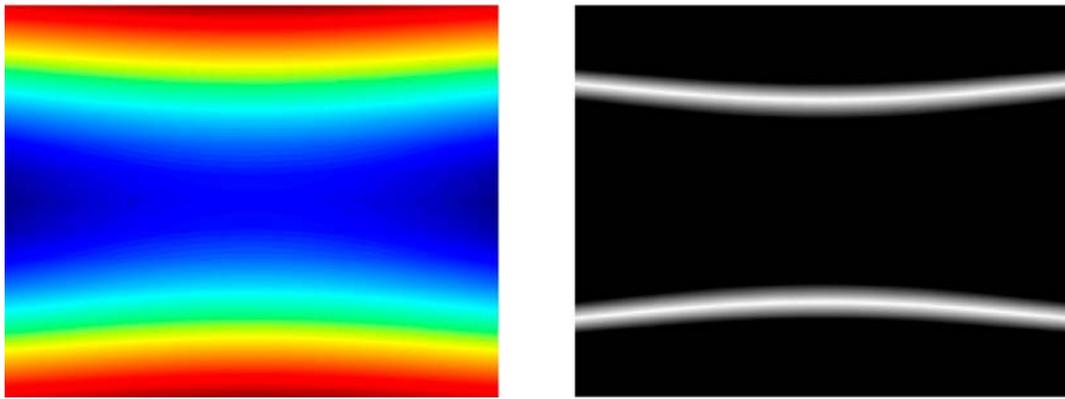
Finalement, une dernière méthode de corrélation utilisée couramment en analyse modale, de manière certes plus visuelle que quantitative, est basée sur la comparaison de la forme et de la position des lignes nodales<sup>20</sup> de chaque paire de modes. L'avantage de cette méthode de comparaison est essentiellement d'être potentiellement moins sensible aux bruits et erreurs de mesure que les autres normes d'erreur basées sur les formes modales, en raison de la nature intrinsèque des lignes nodales. Pour automatiser et quantifier rigoureusement cette mesure d'erreur de nature généralement visuelle, nous nous sommes basés sur un principe de corrélation d'image. Le processus de traitement de la paire de modes  $\boldsymbol{\varphi}_k$  et  $\tilde{\boldsymbol{\varphi}}_k^i$  débute tout d'abord par une interpolation bicubique des formes modales sur une grille relativement fine de dimension  $a \times a$  d'environ  $256 \times 256$  points. Les deux tableaux d'amplitudes (signées)  ${}^k A_{rs}$

<sup>20</sup>Les lignes nodales représentent les courbes 2D d'iso-déplacement nul. Elles symbolisent donc l'ensemble des nœuds (points à déplacement nul) d'un mode donné.

et  ${}^k\tilde{A}_{rs}^i$  obtenus ainsi sont normalisés en valeur absolue afin que chaque point soit inclus dans l'intervalle  $[0,1]$ , permettant alors d'assimiler ces tableaux à des images bitmap en niveaux de gris  ${}^kI_{rs}$  et  ${}^k\tilde{I}_{rs}^i$ . Ces images sont ensuite filtrées afin de faire apparaître les lignes nodales en niveau de gris sur fond noir, produisant les images  ${}^kJ_{rs} = g({}^kI_{rs})$  et  ${}^k\tilde{J}_{rs}^i = g({}^k\tilde{I}_{rs}^i)$ . La fonction de filtre  $g({}^kI_{rs})$  d'interpolation linéaire en niveau de gris utilisée lors de ce traitement est définie ainsi :

$$g({}^kI_{rs}) = \begin{cases} 0 & \text{si } {}^kI_{rs} > \delta \\ 1 - \frac{{}^kI_{rs}}{\delta} & \text{si } {}^kI_{rs} \leq \delta \end{cases} \quad (4.6)$$

où  $\delta$  symbolise la tolérance d'amplitude relative définissant les lignes nodales (valeur typique de 10% par exemple).



**Figure 4.2: Représentation de la forme d'un mode propre et de l'image bitmap en niveau de gris représentant ses lignes nodales (grille de  $400 \times 400$ ,  $\delta = 0.1$ ).**

Au final, la norme d'erreur entre les lignes nodales des deux modes  $\varphi_k$  et  $\tilde{\varphi}_k^i$  est calculée en effectuant la somme des carrés des différences entre les deux images :

$$F_k^{nod}(\mathbf{x}^i) = \frac{1}{a^2} \sum_{r=1}^a \sum_{s=1}^a ({}^k\tilde{J}_{rs}^i - {}^kJ_{rs})^2 \quad \text{pour chaque paire de modes d'indice } k=1, 2, \dots, m \quad (4.7)$$

Le Tableau 4.1 résume les normes d'erreur utilisées et leur nomenclature dans les études suivantes de ce travail.

| Norme analytique  | Nomenclature <sup>21</sup> |
|---|----------------------------|
| $F_k^{frq}(\mathbf{x}^i) = \frac{\tilde{\omega}_k^i - \omega_k}{\omega_k}$  | EcRelFreq                  |
| $F_k^{mac1}(\mathbf{x}^i) = 1 - MAC(\tilde{\boldsymbol{\varphi}}_k^i, \boldsymbol{\varphi}_k)$  | MAC1                       |
| $F_k^{mac2}(\mathbf{x}^i) = \sum_{j=1}^m MAC(\tilde{\boldsymbol{\varphi}}_j^i, \boldsymbol{\varphi}_k)$   | MAC2                       |
| $F_k^{ecm}(\mathbf{x}^i) = \sum_{j=1}^r \left( \frac{(\tilde{\boldsymbol{\varphi}}_k^i)_j}{\max_l((\tilde{\boldsymbol{\varphi}}_k^i)_l)} - \frac{(\boldsymbol{\varphi}_k)_j}{\max_l((\boldsymbol{\varphi}_k)_l)} \right)$ | SumEcMod                   |
| $F_k^{nod}(\mathbf{x}^i) = \frac{1}{a^2} \sum_{r=1}^a \sum_{s=1}^a ({}^k \tilde{J}_{rs}^i - {}^k J_{rs})^2$   | NodalCorr2                 |

Tableau 4.1: Nomenclature des normes d'erreurs modales

### 4.3 Etude paramétrique

#### 4.3.1 Objectifs et démarche

Afin d'étudier la robustesse et la sensibilité des normes d'erreur candidates, mais aussi pour étudier les influences des paramètres constitutifs sur les grandeurs modales, nous avons effectué une étude paramétrique de grande envergure sur des modèles d'éléments finis de coque d'ordre  $p$  représentant des plaques en matériaux composites de type carbone-époxy d'épaisseurs diverses et stratifiés selon différents schémas courants. Toutes les plaques modélisées ont une dimension de  $150 \times 100$  mm pour des épaisseurs de 5, 10 ou 20 mm, correspondant ainsi à des rapports d'épaisseur de plaque de 30, 15 et 7.5. Les stratifiés représentés dans cette étude sont de type unidirectionnel (UD), à plis croisés (crossply, CP) ou encore quasi isotrope (QISO, Tableau 4.2). Toutes les combinaisons d'épaisseurs et de stratifiés étant prises en compte, cette étude porte sur neuf plaques en stratifié composite (Tableau 4.2).

<sup>21</sup>Comme plusieurs implantations différentes de ces normes ont été développées, la nomenclature utilisée dans les figures et tableaux qui suivent varie parfois quelque peu, avec notamment la présence du préfixe « ERN » ou encore des suffixes « z » et / ou « Tot ». Cependant, malgré ces changements de noms, les normes d'erreur correspondent toujours aux définitions présentées dans cette section.

| <i>Stratifié</i>                                    | <i>Epaisseur</i> | <i>Rapport d'épaisseur</i> | <i>Désignation</i>      |
|---|------------------|----------------------------|-------------------------|
| Unidirectionnel (UD), 0°                            | 5 mm             | 30                         | UD150x100x5             |
| Unidirectionnel (UD), 0°                            | 10 mm            | 15                         | UD150x100x10            |
| Unidirectionnel (UD), 0°                            | 20 mm            | 7.5                        | UD150x100x20            |
| Plis croisés (CP), (0°,90°) <sub>2s</sub>           | 5 mm             | 30                         | Carb-0-90-2s-150x100x5  |
| Plis croisés (CP), (0°,90°) <sub>2s</sub>           | 10 mm            | 15                         | Carb-0-90-2s-150x100x10 |
| Plis croisés (CP), (0°,90°) <sub>2s</sub>           | 20 mm            | 7.5                        | Carb-0-90-2s-150x100x20 |
| Quasi isotrope (QISO), (0°, ±45°, 90°) <sub>s</sub> | 5 mm             | 30                         | CarbQiso150x100x5       |
| Quasi isotrope (QISO), (0°, ±45°, 90°) <sub>s</sub> | 10 mm            | 15                         | CarbQiso150x100x10      |
| Quasi isotrope (QISO), (0°, ±45°, 90°) <sub>s</sub> | 20 mm            | 7.5                        | CarbQiso150x100x20      |

**Tableau 4.2: Plaques en stratifié composite carbone-époxy prises en compte dans l'étude paramétrique des normes d'erreur modales en fonction des paramètres constitutifs**

Les propriétés constitutives nominales de chaque couche des stratifiés composites fibres de carbone-résine époxyde considérés sont données dans le Tableau 4.3 et représentent des valeurs typiques d'un tel composite.

| <b>Grandeur</b> | $E_1$      | $E_2=E_3$  | $G_{12}=G_{13}$ | $G_{23}$   | $G_{13}$   | $\nu_{12}=\nu_{13}$ | $\nu_{23}$ | $\rho$                  |
|-----------------|------------|------------|-----------------|------------|------------|---------------------|------------|-------------------------|
| <i>Unité</i>    | <i>GPa</i> | <i>GPa</i> | <i>GPa</i>      | <i>GPa</i> | <i>GPa</i> | -                   | -          | <i>kg/m<sup>3</sup></i> |
| <i>Valeur</i>   | 110        | 8          | 3               | 2.5        | 3          | 0.28                | 0.43       | 2000                    |

**Tableau 4.3: Propriétés constitutives nominales du composite carbone-époxy**

Les propriétés des strates  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $E_3$ ,  $\nu_{12}$ ,  $\nu_{23}$ ,  $\nu_{31}$ ,  $G_{12}$ ,  $G_{23}$  et  $G_{13}$  sont alors considérées comme paramètres de l'étude par éléments finis et, pour chaque paramètre, on définit trente valeurs « perturbées » d'au plus  $\pm 30\%$  autour de la valeur nominale. Les perturbations relatives des paramètres sont réparties non uniformément de la manière suivante :  $\pm 0.09\%$ ,  $\pm 0.18\%$ ,  $\pm 0.36\%$ ,  $\pm 0.8\%$ ,  $\pm 1.6\%$ ,  $\pm 3\%$ ,  $\pm 6\%$ ,  $\pm 9\%$ ,  $\pm 12\%$ ,  $\pm 15\%$ ,  $\pm 18\%$ ,  $\pm 21\%$ ,  $\pm 24\%$ ,  $\pm 27\%$  et  $\pm 30\%$ . Dans cette étude, un seul paramètre varie à la fois par rapport aux valeurs nominales; l'étude paramétrique complète représentant une croix dans l'espace des paramètres centrée sur les valeurs de référence. Ainsi, pour chaque plaque considérée dans l'étude, 271 combinaisons de paramètres sont évaluées, ce qui représente au total pour l'ensemble de l'étude 2439 cas simulés. Pour chaque cas, un modèle d'éléments finis constitué de  $15 \times 10$  éléments quadratiques lagrangiens de coque d'ordre  $p=3$  (intégration numérique sélective dans le plan et exacte dans l'épaisseur) est généré pour des conditions aux limites libres et les 26 premières valeurs propres (modes de corps rigide compris) sont extraites par MAFE à l'aide d'une méthode d'itération d'un sous-espace. Finalement, les

résultats de chaque cas de calcul sont sauvegardés et les normes d'erreur modales candidates sont évaluées entre le cas de référence (paramètres nominaux) et chaque cas « perturbé ».

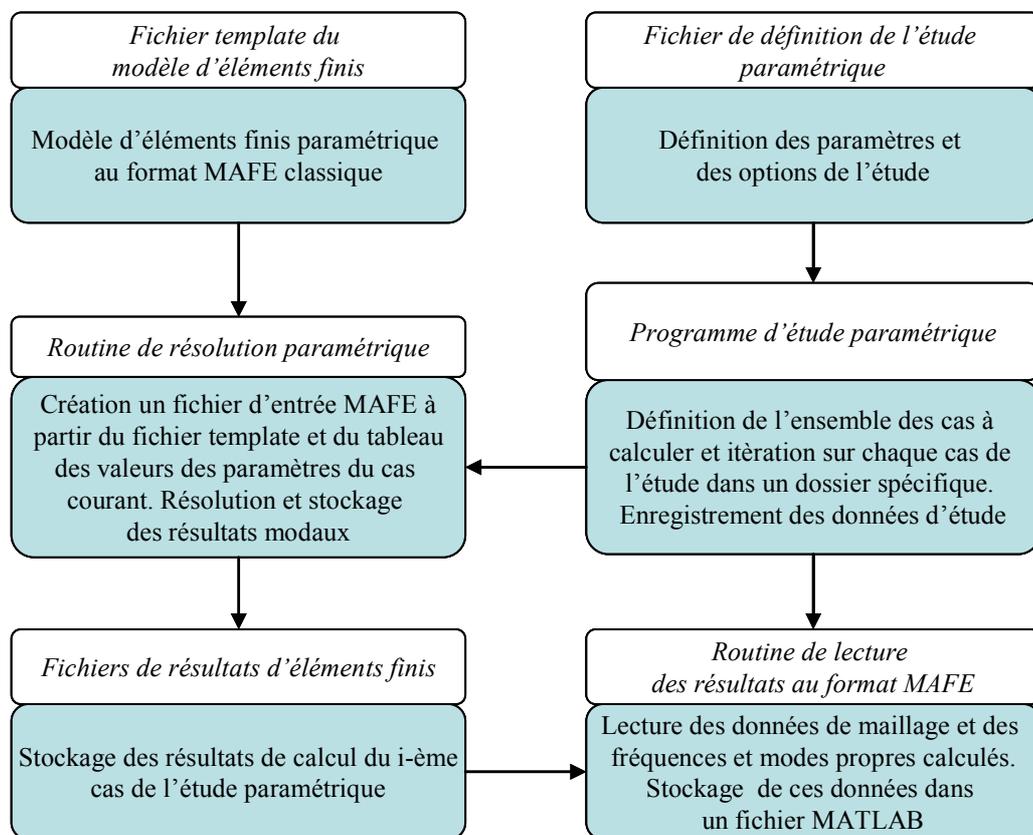
### **4.3.2 Implantation d'un logiciel d'étude paramétrique pour MAFE**

Afin de mener à bien cette étude paramétrique, un logiciel générique d'étude paramétrique pour MAFE a été développé dans l'environnement MATLAB. Ce programme se base sur deux sources de données : d'un côté, le modèle d'éléments finis et le problème à résoudre sont décrits dans le format traditionnel de MAFE dans un fichier « modèle » dans lequel les paramètres sont simplement identifiés par une chaîne unique de longueur égale au nombre de caractères du paramètre à y substituer ; de l'autre côté, l'étude paramétrique à proprement parler est décrite dans un fichier exécutable MATLAB définissant une structure de données contenant les spécifications de tous les paramètres nécessaires à l'étude.

Le programme d'études paramétriques développé pour l'occasion est constitué d'une quarantaine de fonctions MATLAB que l'on peut classer en trois catégories principales:

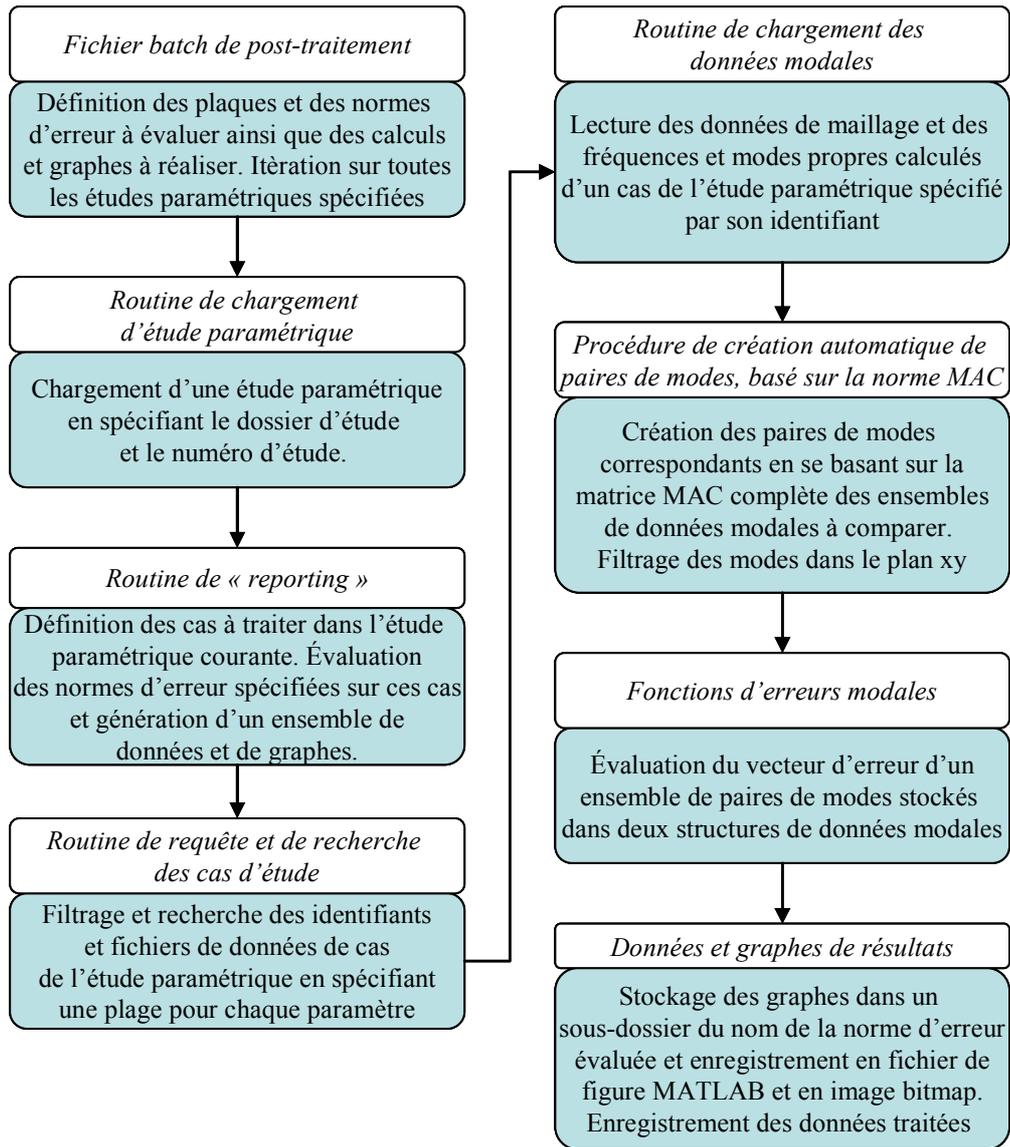
1. Les fonctions permettant de réaliser les calculs sur l'ensemble des cas d'étude, notamment les fonctions de définition de l'espace des paramètres, les routines pour fusionner le modèle d'éléments finis paramétrique avec un vecteur de paramètres pour générer un modèle d'éléments finis MAFE classique, les procédures permettant d'exécuter et contrôler le solveur d'éléments finis MAFE et les fonctions de lecture des fichiers de sortie.
2. Les fonctions effectuant le post-traitement des données d'éléments finis, dont notamment les routines qui assurent la conduite des calculs des normes d'erreur et la synthèse des données de l'étude paramétrique, ou encore qui permettent de charger des études, rechercher des cas spécifiques dans l'espace des paramètres et charger les données modales correspondantes.
3. Les fonctions de calcul des normes modales d'erreur qui implantent les fonctions d'erreur présentées précédemment. Ces fonctions sont standardisées et utilisent toutes les mêmes arguments, à savoir une paire de structures de données stockant les données modales à comparer ainsi qu'une liste triée de numéros de modes à traiter pour chaque cas (définition des paires de modes).

Le déroulement global de l'exécution du programme d'étude paramétrique est divisé en deux temps principaux : tout d'abord, calculer tous les modèles d'éléments finis qui composent l'étude et stocker les données modales dans une structure de fichiers hiérarchiques, puis, dans un deuxième temps, exécuter un grand nombre de calculs de post-traitement sur la base de données ainsi créée. Les grandes lignes du déroulement de ces deux phases de traitement sont détaillées ci-dessous (Figure 4.3 et Figure 4.4). Dans notre étude, les quelques 2500 cas de calcul répartis sur les neuf études paramétriques réalisées (une par plaque de test) représente environ 9 Go de données de calcul d'éléments finis MAFE et de données MATLAB.



**Figure 4.3: Schéma bloc du déroulement d'une étude paramétrique avec le logiciel MATLAB développé**

Les normes d'erreur candidates, présentées à la section 4.2, ont été implantées dans le programme MATLAB qui calcule les vecteurs d'erreur en comparant deux structures de données contenant toutes les informations modales d'un cas de calcul « perturbé » et du cas de référence.



**Figure 4.4: Schéma bloc de post-traitement des études paramétriques avec le programme MATLAB développé**

Comme dans cette étude les maillages des modèles numériques à comparer sont toujours identiques, car dérivant d'un même modèle d'éléments finis paramétrique, le développement des fonctions d'erreur modale est très simple, car il n'est pas nécessaire de projeter les maillages l'un sur l'autre avant de calculer la norme d'erreur. Par contre, l'ordre d'apparition des modes pouvant changer fortement en fonction des paramètres constitutifs, il est absolument nécessaire de définir (automatiquement) des paires de modes correspondants avant de réaliser la comparaison des deux modèles. La méthode de tri et de création de paires de modes utilisée ici est basée une fois de plus sur la matrice MAC des deux ensembles de modes (au complet), dans laquelle chaque colonne et chaque ligne correspondent respectivement à un mode du modèle de référence et à un mode du modèle perturbé. Pour

chaque mode du modèle de référence spécifié dans la liste des modes à étudier (entrée utilisateur), la composante maximale de la colonne correspondante de la matrice MAC est recherchée, permettant ainsi de déterminer le mode « perturbé » qui est le mieux corrélé avec le mode « de référence ». Si cette composante maximale dépasse une valeur limite (tolérance classique 0.7), la paire de mode est alors validée. Finalement, comme toutes les études effectuées dans ce travail ne portent que sur les modes de flexion (composante de déplacement normal à la plaque), les éventuels modes de traction/compression/cisaillement dans le plan de la plaque sont éliminés de la liste des modes à traiter, afin de ne pas perturber les analyses.

Afin d'étudier les modèles paramétriques calculés, deux types d'analyse de données sont envisageables et tous deux ont également été programmés dans des routines de post-traitement :

- L'étude de l'évolution des fonctions d'erreur sur une plage de paramètres : un paramètre variable est sélectionné et une plage de valeurs de ce paramètre est spécifiée par l'utilisateur. Une recherche est alors effectuée sur l'ensemble de la base de données pour sélectionner les cas de calcul correspondant aux critères et les normes d'erreur sont ensuite calculées pour ces cas. Les résultats, détaillés par mode, ou synthétiques, sont finalement présentés sous forme de graphes 2D. Une macro-procédure permet de réaliser facilement ce genre d'étude.
- L'étude de la sensibilité du modèle en fonction des paramètres : une tolérance de variation relative des paramètres est définie par l'utilisateur afin de permettre au programme de calculer les dérivées des fonctions d'erreur par différences finies entre le cas de référence (valeurs nominales des paramètres) et les modèles « perturbés ». La sensibilité relative<sup>22</sup> d'une fonction d'erreur par rapport à un paramètre, définie par l'expression suivante est alors calculée pour chaque paramètre

---

<sup>22</sup>La sensibilité est définie ici en fonction de la variation relative des paramètres. Ce choix a été conditionné par le fait que l'ordre de grandeur des paramètres constitutifs envisagés est très variable, les modules de Young et les coefficients de Poisson étant respectivement de l'ordre de  $10^{11}$  et  $10^{-1}$ . Par contre, nous avons choisi de ne pas « normaliser » les variations des fonctions d'erreur dans l'expression de la sensibilité, car la plupart des fonctions d'erreur utilisées sont déjà basées sur des variations relatives.

$$S_F(x_j^i, x_j^0) = \frac{F(x_j^i) - F(x_j^0)}{(x_j^i - x_j^0)/x_j^0} \quad (4.8)$$

où  $F$  dénote la fonction d'erreur, tandis que  $x_j^i$  et  $x_j^0$  représentent respectivement la valeur perturbée et la valeur de référence du paramètre étudié.

Au final, les sensibilités sont représentées, par mode et par paramètre, dans un graphe 3D ou de manière synthétique dans un histogramme 2D. Ce type d'étude peut être réalisé aisément à l'aide d'une macro-procédure automatisant cette tâche.

### 4.3.3 Sensibilités des normes d'erreur modales

La première analyse réalisée sur les résultats de calcul par éléments finis des différentes plaques testées concerne la sensibilité des normes d'erreur modales en fonction des neuf paramètres constitutifs d'élasticité orthotrope des strates  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $E_3$ ,  $\nu_{12}$ ,  $\nu_{23}$ ,  $\nu_{31}$ ,  $G_{12}$ ,  $G_{23}$  et  $G_{13}$ . Pour chaque plaque de test et chaque norme d'erreur un histogramme 3D représentant la sensibilité de chacun des modes en fonction de chaque paramètre est généré. Afin d'avoir une vision plus synthétique, un graphe 2D représentant la sensibilité moyenne sur l'ensemble des modes est également créé. Ces données représentant environ une centaine de graphes, seules quelques exemples et les conclusions principales seront présentés ici.

En observant les graphes 3D de sensibilité de chaque mode en fonction des paramètres, par exemple pour les plaques UD 10 mm et CP 10 mm (Figure 4.5 et Figure 4.6), nous pouvons constater que l'influence d'un paramètre est généralement très variable en fonction du mode considéré, notamment pour la norme d'écart relatif de fréquences (EcRelFreq) et dans les stratifiés unidirectionnels. De plus, certains paramètres s'avèrent très sélectifs, comme par exemple le module de cisaillement dans le plan  $G_{12}$  (paramètre 7) qui, concernant les pulsations propres, influence presque uniquement la fréquence du premier mode propre (mode de « torsion » d'ordre impair dans les deux directions). De manière générale, et pour des raisons évidentes, les modules de Young  $E_1$  et  $E_2$  (paramètres 1 et 2) influencent très clairement les fréquences propres des modes de flexion respectivement en  $x$  et en  $y$  pour les plaques UD, tandis que  $E_1$  domine les effets de flexion pour les autres stratifiés (en ce qui concerne les fréquences propres). Au niveau de la sensibilité des modes propres, les effets des modules  $E_1$  et  $E_2$  se concentrent principalement sur les modes de flexion, mais de manière moins tranchée que dans le cas des fréquences propres. Dans tous les stratifiés, le module de cisaillement  $G_{12}$  influence principalement les modes de torsion (ordres impairs dans la numérotation classique des modes), mais là encore de manière bien plus contrastée dans le cas

des fréquences que des modes propres. Le coefficient de Poisson  $\nu_{12}$  (paramètre 4), comme prévu, n'influence quasiment pas les fréquences propres, mais par contre, semble avoir un certain effet sur la forme des modes propres et davantage notamment avec les modes de flexion. Ainsi, lors du test modal d'un spécimen réel, il est capital d'obtenir un grand ensemble de modes expérimentaux couvrant la majorité des premiers modes propres, afin de ne pas « fausser » l'algorithme d'identification en ne comparant par exemple qu'un seul et même type de mode (par exemple les modes de flexion dans l'axe  $x$ ) et donc en n'identifiant réellement que les effets de certains paramètres constitutifs. Il est également intéressant de voir ici que la norme modale basée sur la somme des écarts de composantes modales (SumEcMod) est la plus homogène des normes testées par rapport aux différents types de modes, mais aussi par rapport aux différents paramètres.

De manière générale, nous observons aussi, et sans réelle surprise, que les paramètres liés à la compressibilité transverse des stratifiés, à savoir  $E_3$ ,  $\nu_{23}$  et  $\nu_{31}$  (paramètres 3, 5 et 6), n'ont aucune influence réellement significative ni sur les fréquences propres, ni sur les modes propres. Ces paramètres ne peuvent donc évidemment pas être identifiés par une méthode mixte basée sur les modes propres de flexion de plaques en stratifiés composites.

La sensibilité des grandeurs modales aux modules de cisaillement transverse  $G_{23}$  et  $G_{13}$  (paramètres 8 et 9) augmente très distinctement avec le numéro du mode et donc avec la fréquence. Si l'on tient compte de la nature quasi sinusoïdale de la forme des modes propres de plaques rectangulaires, ce constat s'explique aisément par le fait que plus l'ordre du mode est élevé plus la longueur d'onde des déformées de flexion des modes propres diminue, réduisant ainsi le rapport « local » d'épaisseur / longueur caractéristique, ce qui augmente bien évidemment l'influence des modules de cisaillement transverse sur les grandeurs modales à fréquence élevée.

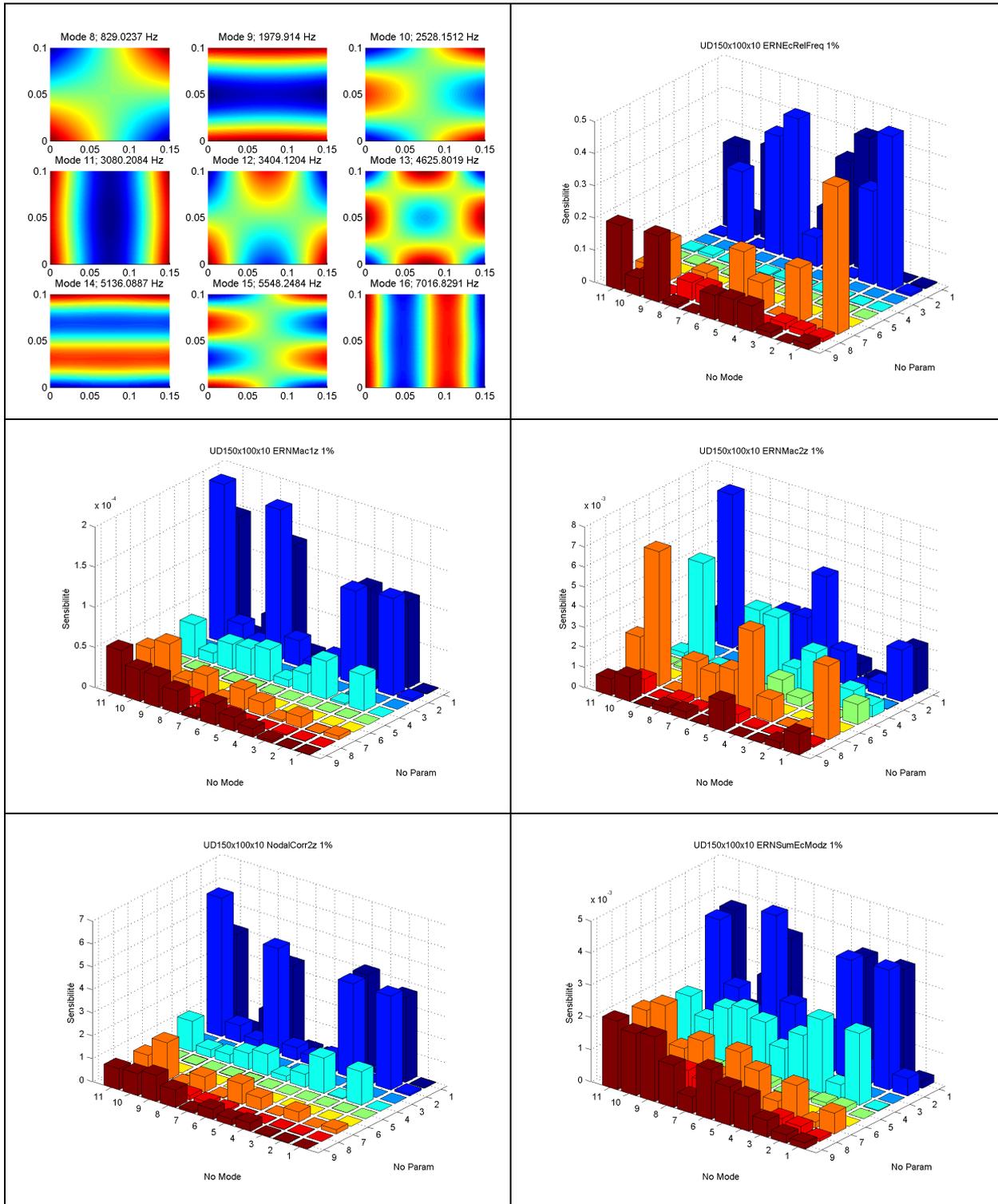
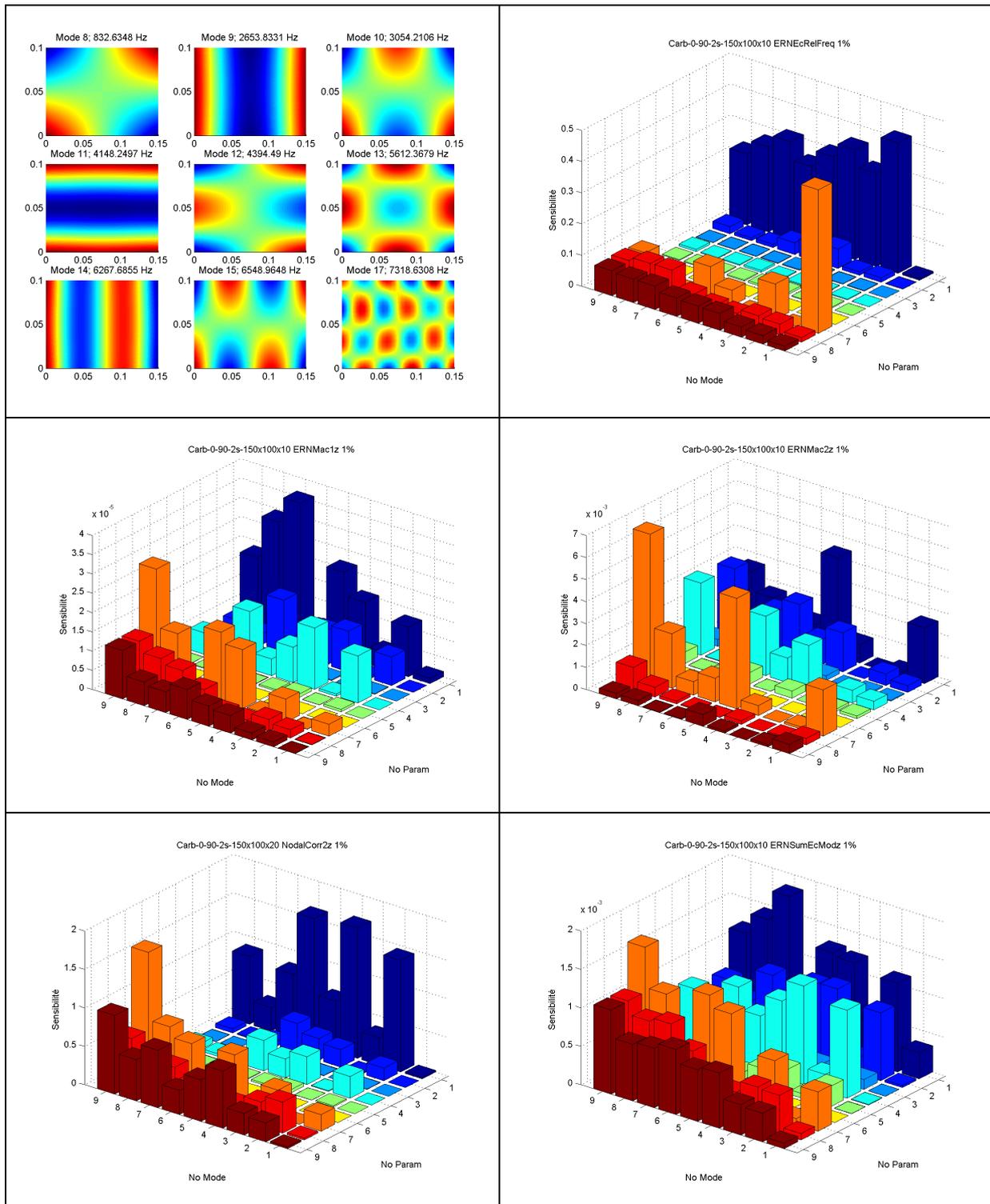


Figure 4.5: Sensibilité des normes d'erreur modales pour la plaque carbone-époxyde unidirectionnelle UD150x100x10mm en fonction des paramètres constitutifs et des modes. Les paramètres sont numérotés par ordre croissant:  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $E_3$ ,  $\nu_{12}$ ,  $\nu_{23}$ ,  $\nu_{31}$ ,  $G_{12}$ ,  $G_{23}$  et  $G_{31}$ .



**Figure 4.6: Sensibilité des normes d'erreur modales pour la plaque carbone-époxyde à plis croisés CP150x100x10mm en fonction des paramètres constitutifs et des modes**

Concernant les effets du rapport d'épaisseur des plaques de test (Figure 4.7), on peut relever que non seulement la sensibilité des normes d'erreur par rapport aux modules de cisaillement transverse  $G_{23}$  et  $G_{31}$  augmente très significativement avec l'épaisseur, mais aussi

que les effets du module de Young  $E_2$  dans la seconde direction d'orthotropie semblent également fortement gagner en influence par rapport à  $E_1$  dans les stratifiés UD très épais.

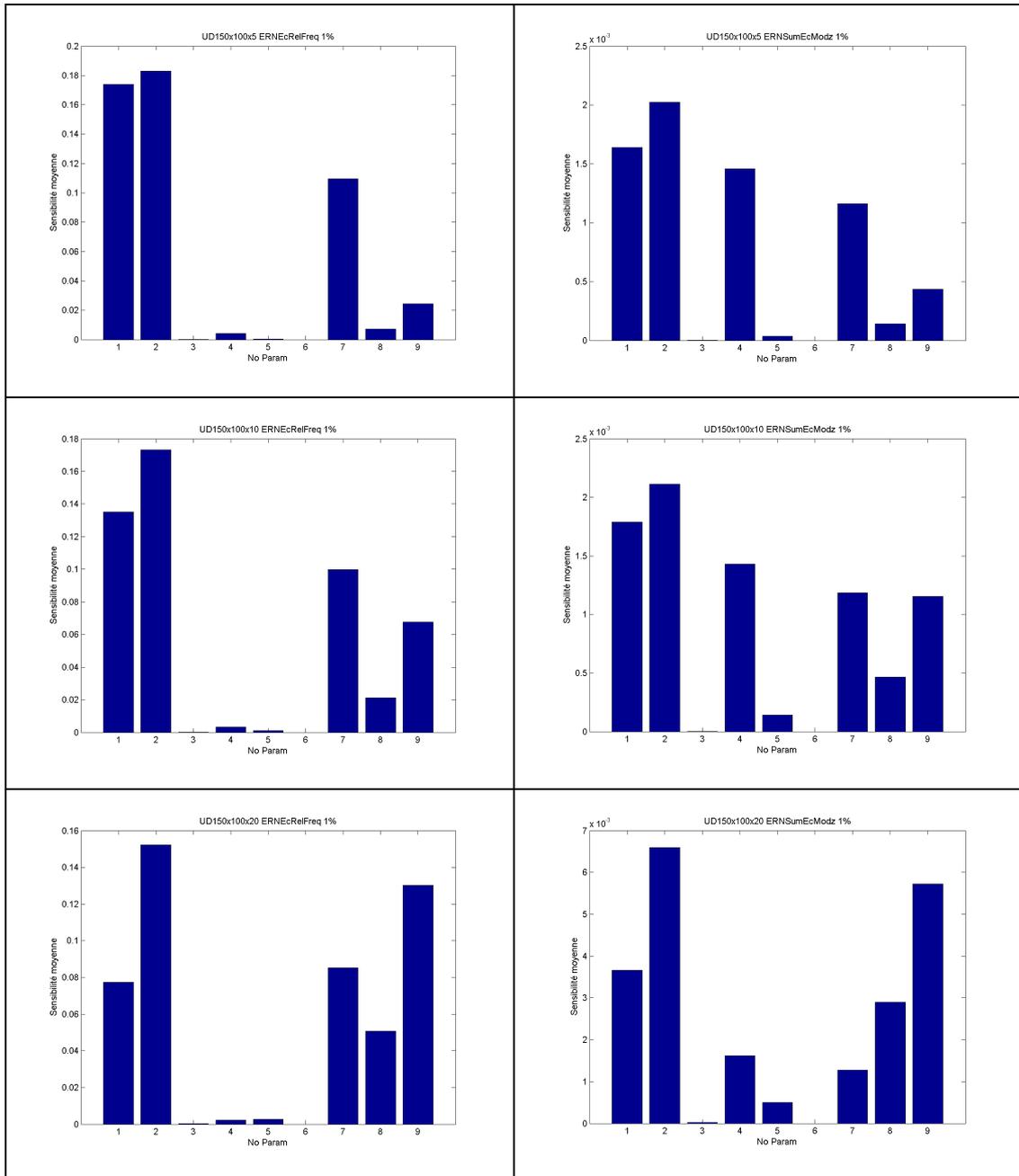


Figure 4.7: Effets de l'épaisseur sur la sensibilité moyenne des fréquences (ERNEcRelFreq) et modes propres (ERNSumEcMod) de stratifiés unidirectionnels

De plus, on notera également que les effets du coefficient de Poisson  $\nu_{12}$  sur la forme des modes tendent par contre à diminuer par rapport aux autres paramètres lorsque l'épaisseur du stratifié augmente, rendant ainsi ce paramètre potentiellement plus difficile à identifier dans le cas de plaques très épaisses ( $a/h < 10$ ). Il semble donc qu'il existe un rapport d'épaisseur

optimal pour lequel les sensibilités des fréquences et modes propres en fonction des paramètres secondaires que sont  $\nu_{12}$ ,  $G_{23}$  et  $G_{31}$  sont à peu près égales, assurant ainsi une sensibilité équilibrée du spécimen de test en fonction de l'ensemble des paramètres constitutifs à identifier. Dans le cas de plaques unidirectionnelles, à plis croisés ou quasi isotropes en fibres de carbone-résine époxyde (rapport d'aspect  $a/b = 1.5$ ) étudiées ici, il apparaît que le rapport d'épaisseur  $a/h$  « optimal » se situe autour de 15.

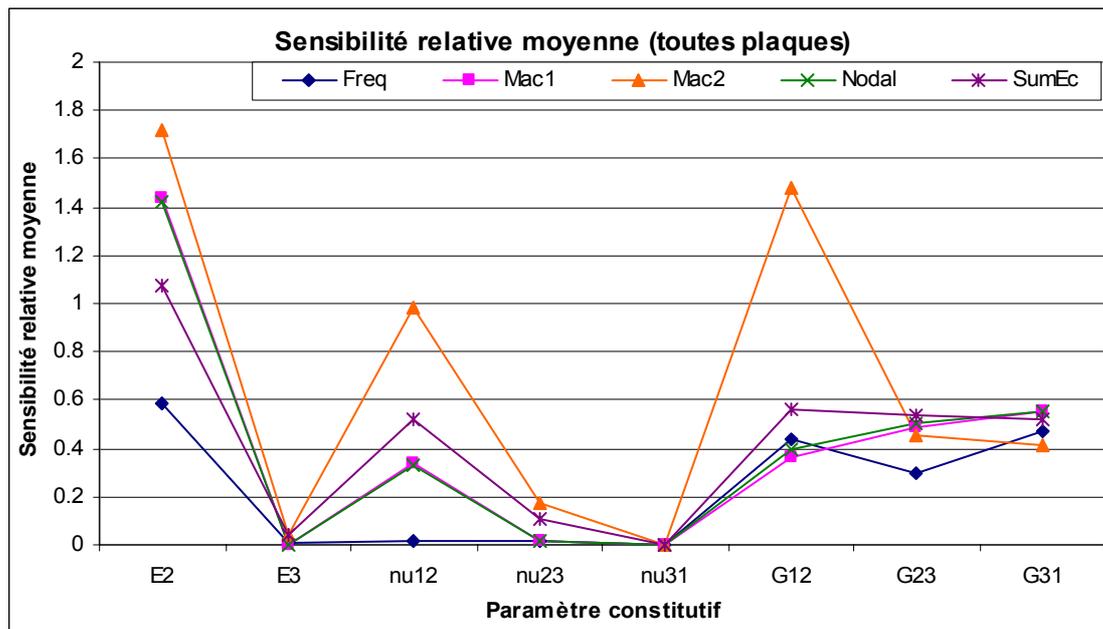
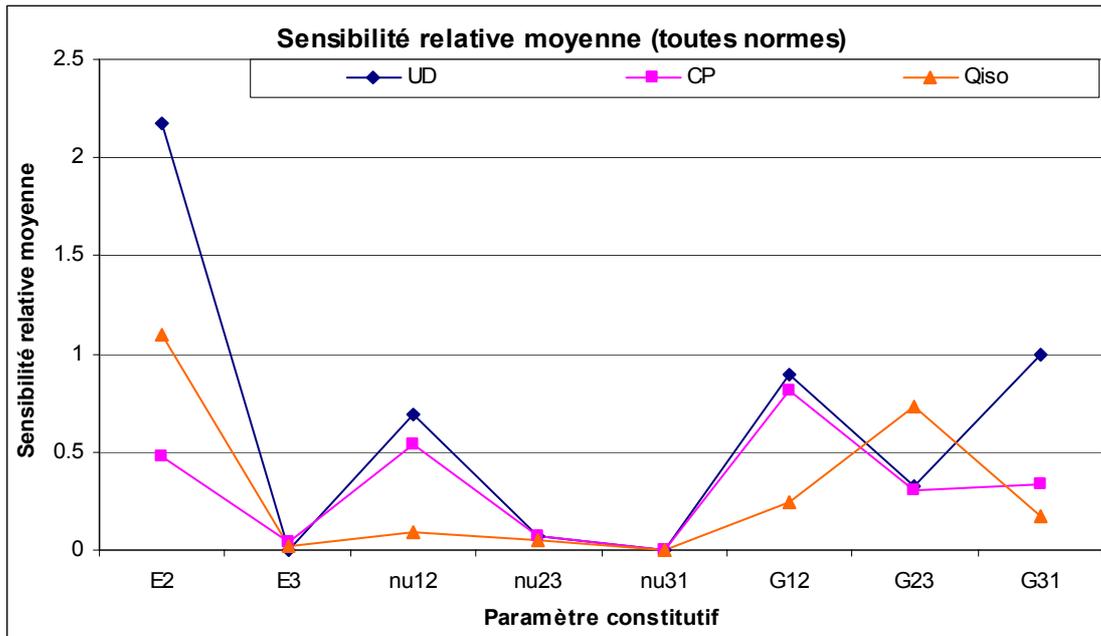


Figure 4.8 : Sensibilité relative (par rapport à la sensibilité de  $E_1$ ) des normes d'erreur modales pour l'ensemble des plaques (moyenne).

En effectuant une moyenne sur toutes les plaques testées des sensibilités des différentes normes d'erreur et en rapportant chaque sensibilité moyenne à celle de  $E_1$  (Figure 4.8), une vision synthétique de l'efficacité des fonctions d'erreur modales « candidates » peut être obtenue. Dans ce graphe, nous constatons tout d'abord que la norme d'erreur fréquentielle ne permet absolument pas d'identifier le coefficient de Poisson  $\nu_{12}$  et que, bien que cette norme soit malgré tout sensible aux cisaillements transverses, la sensibilités des fréquences aux différents paramètres est très déséquilibrée, notamment en raison de la nette domination du module de Young principal  $E_1$ . Les normes d'erreur basées sur la forme des modes sont, quant à elles, bien plus homogènes en fonction des paramètres, avec une mention particulière concernant la norme MAC2 (basée sur les termes non diagonaux de la matrice MAC) qui s'avère particulièrement sensible au coefficient de Poisson  $\nu_{12}$  et au module de cisaillement

dans le plan  $G_{12}$ . On notera également un comportement similaire entre la norme MAC1 (basée sur la diagonale de la matrice MAC) et la fonction d'erreur NodalCorr2 (utilisant le principe de corrélation des lignes nodales). La fonction SumEcMod paraît aussi très homogène en fonction des paramètres, l'écart entre la sensibilité minimale et maximale des paramètres à identifier étant seulement de l'ordre de 40% pour cette grandeur.



**Figure 4.9: Sensibilité relative moyenne (par rapport à la sensibilité moyenne de  $E_1$ ) des normes d'erreur modales pour des stratifiés unidirectionnels (UD), à plis croisés (CP) ou quasi isotropes (Qiso).**

En effectuant cette fois-ci une moyenne sur les différentes normes et épaisseurs de plaque, il est possible de résumer les sensibilités moyennes des différents types de stratifiés testés (Figure 4.9) dans cette étude paramétrique. On relèvera le comportement très sélectif du stratifié quasi isotrope, les modes propres de ce dernier n'étant réellement sensibles qu'aux modules de Young  $E_1$  et  $E_2$ , mais aussi, plus étonnamment, au module de cisaillement transverse  $G_{23}$ . Par contre, pour ce type de stratifié, le coefficient de Poisson  $\nu_{12}$  ne semble pas avoir d'influence, ni sur les fréquences, ni sur les modes propres. Les stratifiés en plis croisés apparaissent ici bien plus équilibrés et sont globalement sensibles à tous les paramètres identifiables, mais on note quand même une domination très claire du module de Young principal  $E_1$  et du module de cisaillement  $G_{12}$  sur les propriétés modales de ces stratifiés. De tous les schémas de stratification testés dans cette étude, nous constatons que le

composite unidirectionnel est généralement le plus sensible sur l'ensemble des paramètres d'identification et donc que ce cas de figure représente un optimum pour la détermination, à un degré de précision égal, de l'ensemble des propriétés constitutives des strates. Il est en outre important de noter que dans le cas des plaques unidirectionnelles, le paramètre dominant la réponse modale n'est pas le module de Young principal  $E_1$ , mais le module de Young  $E_2$ . Toutefois, cet effet devant vraisemblablement provenir de la très forte orthotropie du matériau considéré ici ( $E_1/E_2 = 13.75$ ), l'effet des modules  $E_1$  et  $E_2$  devrait tendre à s'égaliser pour des composites moins orthotropes (par exemple pour des composites fibres de verre-résine époxyde). Une étude paramétrique portant plus spécifiquement sur les effets du degré d'orthotropie sur la réponse modale de stratifiés composites apporterait probablement un certain nombre de conclusions plus précises à ce sujet, mais pour des raisons de temps, elle n'a pas pu être réalisée durant ce travail.

### 4.3.4 Robustesse des fonctions d'erreur

Pour garantir une identification performante, les normes d'erreur modales doivent non seulement être sensibles à l'ensemble des paramètres à identifier, mais aussi ne posséder qu'un seul et unique minimum dans une large plage de paramètres, assurant ainsi la robustesse de la méthode. En effet, lors de la première itération de la méthode d'identification, un ensemble de propriétés constitutives estimées grossièrement est utilisé pour initialiser l'algorithme, entraînant ainsi généralement d'importants écarts par rapport aux paramètres réels et donc aussi par rapport aux modes et fréquences propres mesurés. La robustesse de la procédure d'identification est par conséquent conditionnée en partie par l'évolution des différentes normes d'erreur modales dans une large plage de paramètres. Ces fonctions d'erreur étant à terme destinées à être intégrées dans une norme d'erreur modale hybride de type moindres carrés pondérés, la convexité des fonctions ou le signe de ces dernières n'ont aucun impact sur la convexité de la norme d'erreur hybride finale; seule la présence d'extrema multiples et d'éventuels points d'inflexion dans les fonctions d'erreur « candidates » a réellement de l'importance pour la robustesse de la méthode d'identification.

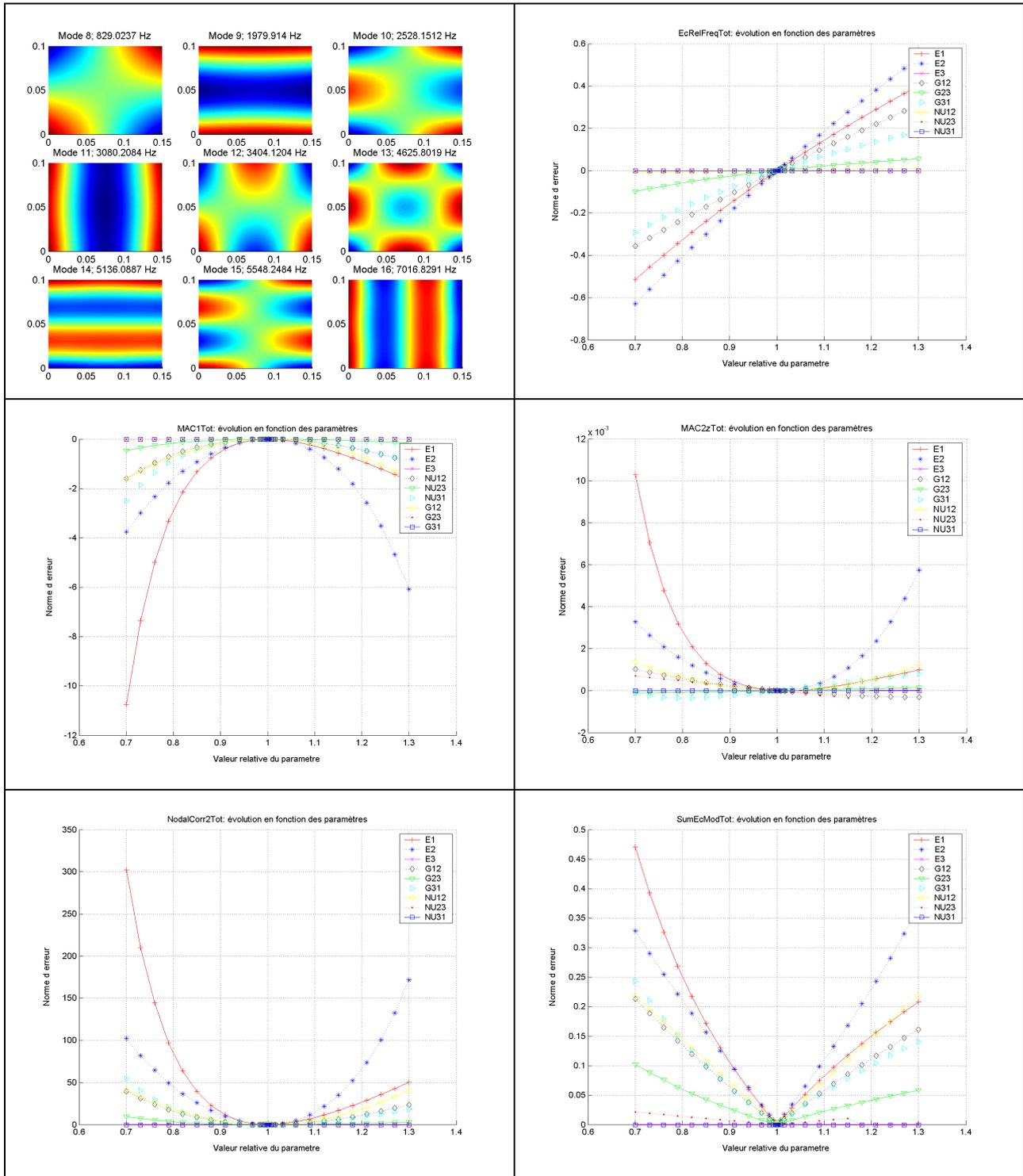


Figure 4.10: Evolution des normes d'erreur modales<sup>23</sup> (somme sur tous les modes) sur une plage de  $\pm 30\%$  de chaque paramètre constitutif (plaque UD150x100x10 mm)

<sup>23</sup> La norme d'erreur MAC1 est ici multipliée par un facteur de -1000 par rapport à la norme théorique définie précédemment.

A l'aide de la base de données des études paramétriques effectuées dans ce travail, nous avons la possibilité d'analyser chaque norme d'erreur sur un grand nombre de vecteurs de paramètres (environ 2500 cas de plus de 10 modes et 5 normes d'erreur). Une procédure de post-traitement spécifique a été créée à cet effet et permet de générer des graphes d'évolution des normes d'erreur dans la plage d'un paramètre. Comme cette analyse génère un très grand nombre de figures (près de 800 figures) seuls quelques exemples significatifs seront décrits ici afin de ne pas surcharger la présentation.

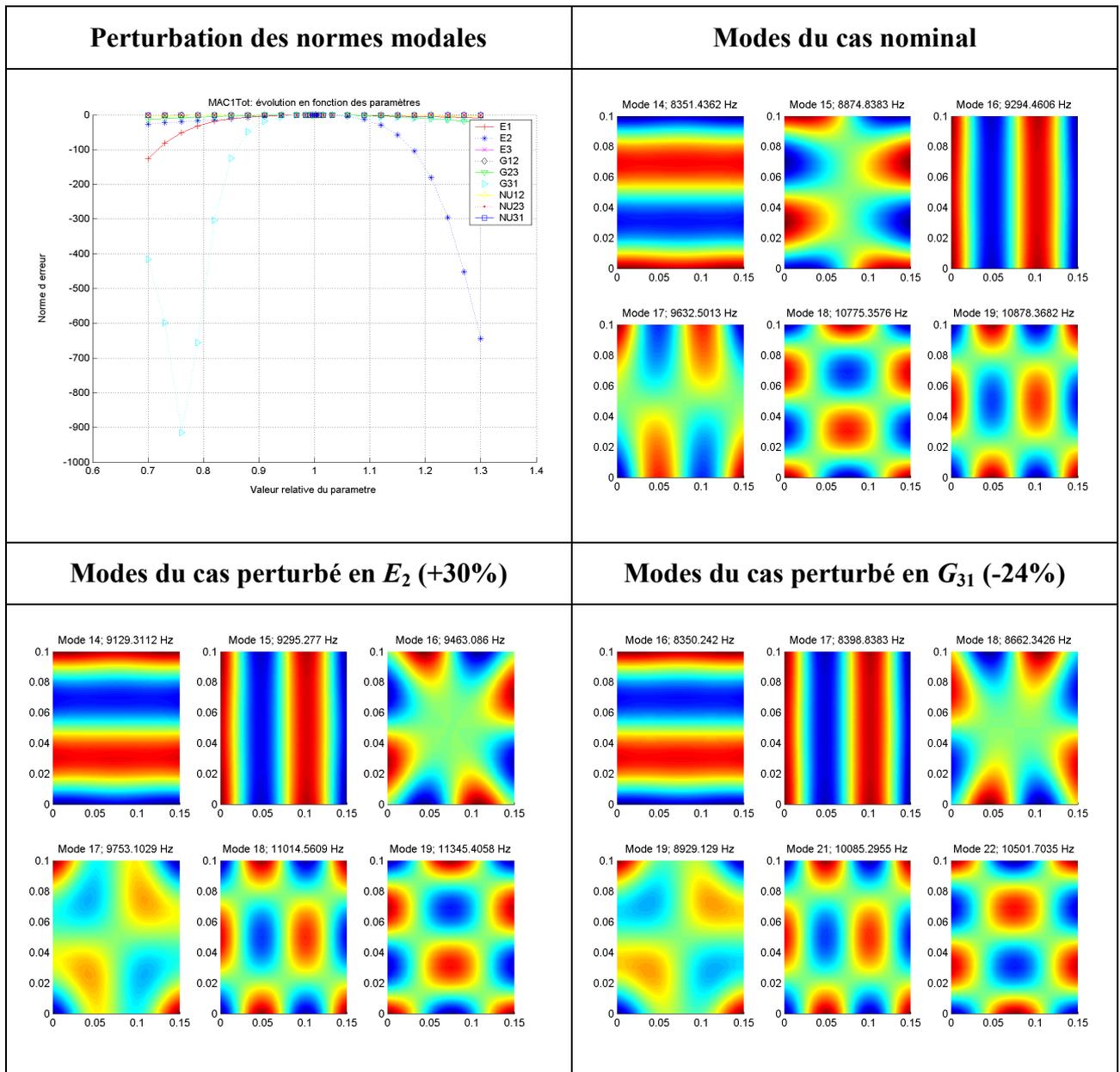
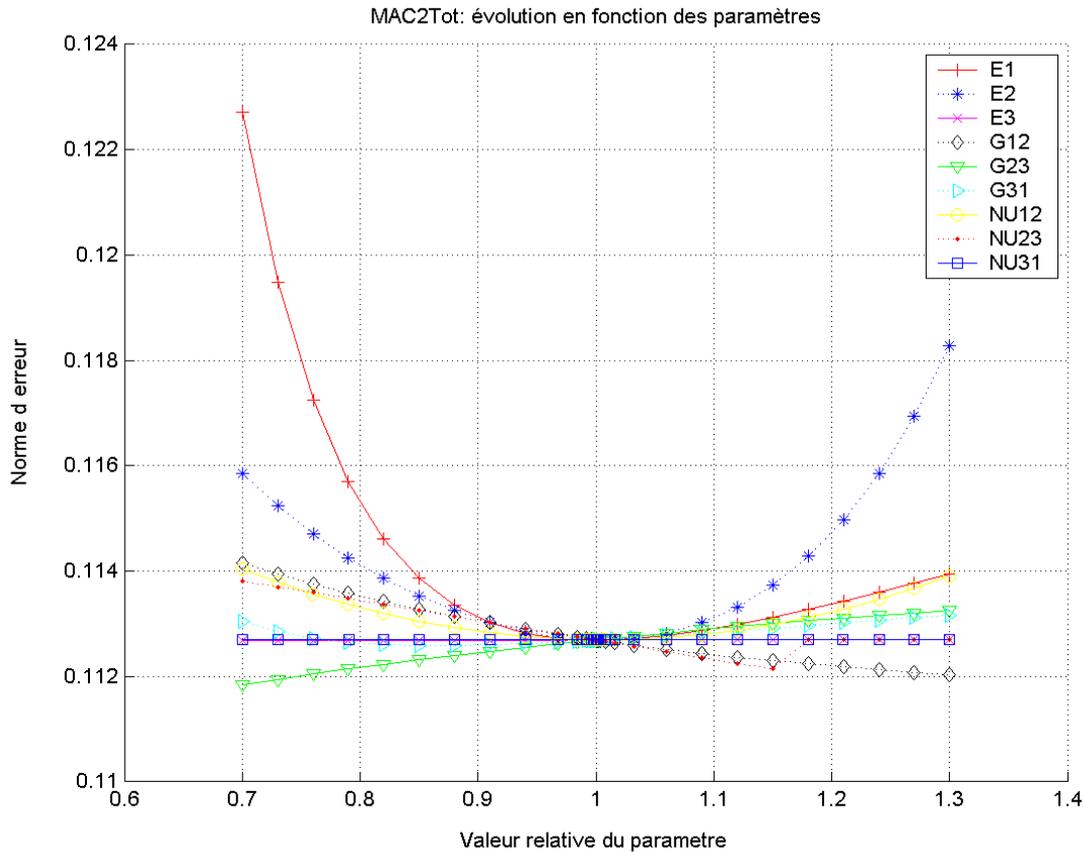


Figure 4.11: Instabilité des normes d'erreur modales dans le cas de la plaque UD150x100x20mm, en raison de l'apparition de cas particuliers de formes modales

La Figure 4.10 illustre l'évolution des normes d'erreur modales sur une plage de  $\pm 30\%$  des paramètres constitutifs pour la plaque UD150×100×10mm. Elle montre tout d'abord la nature quasi-linéaire en fonction de chaque paramètre de la norme d'erreur relative en fréquence (EcRelFreq), ce qui correspond bien au type de comportement attendu. Les normes basées sur la matrice MAC (MAC1 et MAC2) ont quant à elles un caractère quadratique, découlant directement de la définition même de cette matrice de corrélation modale. La norme des lignes nodales (NodalCorr2) possède également ce caractère quadratique et son évolution s'avère très proche de celles des normes basées sur la matrice MAC. Enfin, la norme de la somme des écarts absolus des composantes modales (SumEcMod) fait apparaître très clairement un caractère de mesure en « valeurs absolues » mis en lumière par la discontinuité de pente très marquée au point minima, ce qui pourrait entraîner quelques difficultés au niveau de l'algorithme d'identification si cette norme est utilisée seule ou trop fortement pondérée dans une norme mixte. Les pentes des graphes d'évolution des normes d'erreur en fonction des paramètres permettent de retrouver les sensibilités des fonctions d'erreur candidates et mènent bien évidemment aux mêmes conclusions que l'étude de sensibilité présentée auparavant.

Sur l'ensemble des près de 800 graphes générés par cette étude, aucune norme d'erreur, à une exception près, sur toutes les études paramétriques effectuées ne possède un minimum multiple ou un point d'inflexion gênant dans la plage des paramètres testés. La seule exception à ce constat (Figure 4.11) vient de la plaque UD150×100×20 mm où des modes à forme particulière apparaissent quand  $E_2$  est fortement augmenté de +30% (modes 16 et 17) ou encore si  $G_{31}$  est fortement réduit de -24% (modes 18 et 19). Ces modes dont la forme ne correspond à aucun autre mode du cas nominal apparaissent vraisemblablement en raison d'un effet de symétrie qui conduit dans des cas très particuliers à des formes modales uniques, correspondant généralement à la superposition de deux modes proches lorsque leurs pulsations propres se rejoignent. En raison d'une tolérance un peu trop élevée dans la méthode de création automatique de paires de modes, ces configurations si spécifiques sont malheureusement comparées ici avec les modes 15 et 17 du modèle d'éléments finis nominal qui sont radicalement différents ce qui entraîne une forte augmentation des normes d'erreur modales sur ces deux modes. Ce type de comportement étant particulièrement singulier (conditions spéciales requises) et difficile à filtrer sans effets de bord prononcés, aucune modification des normes d'erreur ne permet de contourner ces difficultés. Par contre, une tolérance sur la valeur de la diagonale de la matrice MAC de 0.7 au minimum (au lieu de 0.5

ici) pourrait éviter le calcul des normes d'erreur entre deux ensembles de modes si différents, éliminant ainsi ces instabilités à la source.



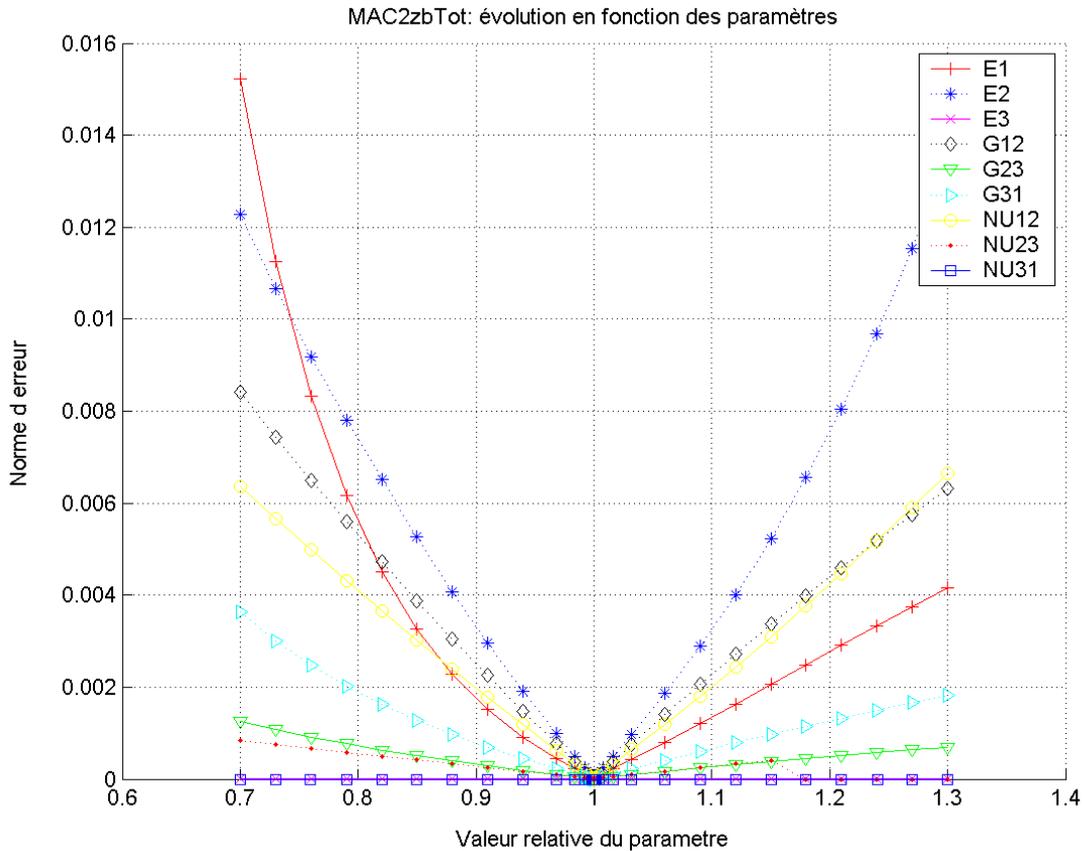
**Figure 4.12: Problème numérique de la norme Mac2 basées sur les termes non diagonaux de la matrice MAC (plaque UD150×100×10mm)**

Une dernière difficulté potentielle pour l'identification mixte numérique-expérimentale pourrait provenir de l'évolution de la norme MAC hors diagonale (MAC2) qui non seulement ne s'avère pas nulle pour le cas nominal, mais en plus tend parfois même à diminuer en valeurs absolues lorsque l'on s'éloigne du cas nominal. Ce comportement pour le moins curieux provient vraisemblablement du fait que les modes propres calculés par éléments finis sont lus à partir d'un fichier texte créé par le code MAFE, introduisant ainsi quelques erreurs d'arrondi lors de la conversion du mode texte au mode binaire effectuée au cours du transfert de données entre MAFE et MATLAB. Ces légères erreurs de troncature rendent alors les modes numériques importés dans MATLAB légèrement non orthogonaux entre eux, ce qui conduit à des termes hors diagonale non nuls dans la matrice MAC du cas de référence. Cet

effet de bord peut malheureusement fortement perturber la méthode de minimisation utilisée par la suite dans la procédure d'identification mixte, notamment en raison de gradients d'erreur erronés allant parfois à l'opposé de la direction de minimisation. Ainsi, afin de corriger cet effet, la norme MAC hors diagonale MAC2 est modifiée de la manière suivante (MAC2b)

$$F_k^{mac2b}(\mathbf{x}^i) = \sum_{j=1, j \neq k}^m |MAC(\tilde{\boldsymbol{\varphi}}_j^i, \boldsymbol{\varphi}_k) - MAC(\boldsymbol{\varphi}_j, \boldsymbol{\varphi}_k)| \text{ pour tous les modes } k=1, 2, \dots, m \quad (4.9)$$

dont l'évolution pour une des plaques testées est illustrée à la Figure 4.13.



**Figure 4.13: Nouvelle norme ERNMac2b basée sur les différences des termes non diagonaux de la matrice MAC (plaque UD150×100×10mm)**

Ainsi, malgré les légers problèmes potentiels susmentionnés, les normes d'erreur modales proposées semblent fournir un ensemble robuste et suffisamment sensible aux paramètres  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $\nu_{12}$ ,  $G_{12}$ ,  $G_{23}$  et  $G_{31}$ , de telle sorte qu'une norme hybride combinant toutes ces fonctionnelles d'erreur devrait vraisemblablement fournir de bons résultats d'identification

des propriétés élastiques constitutives de plaques en stratifiés composites. Une telle norme hybride  $\mathbf{F}^{tot}(\mathbf{x}^i)$  combinant toutes les fonctions d'erreurs modales proposées afin d'assurer une identification optimale des paramètres d'élasticité orthotrope des stratifiés composites, pourrait être

$$\mathbf{F}^{tot}(\mathbf{x}^i) = \left[ \alpha^{frq} \mathbf{F}^{frq}(\mathbf{x}^i), \alpha^{mac1} \mathbf{F}^{mac1}(\mathbf{x}^i), \alpha^{mac2} \mathbf{F}^{mac2b}(\mathbf{x}^i), \alpha^{nod} \mathbf{F}^{nod}(\mathbf{x}^i), \alpha^{ecm} \mathbf{F}^{ecm}(\mathbf{x}^i) \right]^T \quad (4.10)$$

où les facteurs  $\alpha^{frq}$ ,  $\alpha^{mac1}$ ,  $\alpha^{mac2}$ ,  $\alpha^{nod}$  et  $\alpha^{ecm}$  représentent les coefficients de pondération de chaque norme élémentaire. Ces facteurs doivent être déterminés en fonction des incertitudes expérimentales des différentes normes et sont donc à déterminer empiriquement (du moins en partie). Ce point particulier est traité à la section 4.4.4 .

## 4.4 Algorithme d'identification mixte numérique – expérimentale

### 4.4.1 Problème d'optimisation modale

Dans une approche d'identification mixte numérique-expérimentale, la convergence progressive des données modales numériques du modèle d'éléments finis, dont les paramètres sont inconnus, vers les valeurs cibles que représentent les données expérimentales est généralement réalisée itérativement à l'aide d'un algorithme de minimisation cherchant à réduire autant que possible l'écart global entre ces deux ensembles de données. La méthode d'identification se réduit alors à un problème de minimisation d'une fonctionnelle d'erreur globale  $f(\mathbf{x}^i)$  par rapport au vecteur des paramètres inconnus  $\mathbf{x}^i$ . Ce problème peut donc se poser de la manière suivante :

$$\text{Chercher } \mathbf{x}^i \in \mathfrak{R}^n \text{ tel que } \mathbf{x}^i \text{ minimise la norme d'erreur } f(\mathbf{x}^i) \quad (4.11)$$

où  $\mathbf{x}^i$  représente le vecteur des paramètres d'identification à l'itération  $i$ .

Dans notre cas, les paramètres constitutifs inconnus  $\mathbf{x}^i$  doivent satisfaire des contraintes d'inégalité afin de s'assurer que la loi de comportement identifiée soit physiquement admissible. Dans le cadre de l'élasticité linéaire orthotrope, ces contraintes peuvent être

$$C_j(\mathbf{x}^i) \leq 0 \quad \text{pour } j = 1, 2, \dots, 9 \quad (4.12a)$$

avec

$$\begin{aligned}
 C_1(\mathbf{x}^i) &= -E_1, \quad C_2(\mathbf{x}^i) = -E_2, \quad C_3(\mathbf{x}^i) = -G_{12}, \quad C_4(\mathbf{x}^i) = -G_{23} \text{ et } C_5(\mathbf{x}^i) = -G_{31} \\
 C_6(\mathbf{x}^i) &= |\nu_{12}| - \sqrt{E_1 / E_2}, \quad C_7(\mathbf{x}^i) = |\nu_{31}| - \sqrt{E_3 / E_1}, \quad C_8(\mathbf{x}^i) = |\nu_{23}| - \sqrt{E_2 / E_3} \\
 C_9(\mathbf{x}^i) &= -1 + \nu_{12} \nu_{21} + \nu_{23} \nu_{32} + \nu_{13} \nu_{31} + 2 \nu_{12} \nu_{23} \nu_{31}
 \end{aligned}$$

D'un point de vue pratique, il est également possible de rechercher les paramètres constitutifs dans une plage plausible de valeurs, de sorte que des limites de variation sont imposées aux paramètres

$$(\mathbf{x}^{\min})_j < (\mathbf{x}^i)_j < (\mathbf{x}^{\max})_j \quad \text{pour } j = 1, 2, \dots, 6 \quad (4.12b)$$

Cependant, comme par définition les données expérimentales sont physiquement admissibles (aux erreurs de mesure près), minimiser l'écart entre le modèle numérique et les mesures tend automatiquement à faire respecter les contraintes physiques<sup>24</sup> 4.12a et 4.12b imposées aux paramètres  $\mathbf{x}^i$ . Ainsi, il est possible de considérer ce problème de minimisation avec contraintes explicites fortes (4.12a et 4.12b) ou sans contraintes, celles-ci étant implicitement contenues dans les valeurs expérimentales « cibles ».

Dans un sens de minimisation aux moindres carrés, la fonctionnelle d'erreur globale  $f(\mathbf{x}^i)$  peut être écrite en fonction du vecteur des normes d'erreur développé précédemment de la manière suivante

$$f(\mathbf{x}^i) = \frac{1}{2} \|\mathbf{F}^{tot}(\mathbf{x}^i)\|^2 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^q [F_k^{tot}(\mathbf{x}^i)]^2 \quad (4.13)$$

$$\text{avec } \mathbf{F}^{tot} = [\alpha^{frq} \mathbf{F}^{frq}, \alpha^{mac1} \mathbf{F}^{mac1}, \alpha^{mac2} \mathbf{F}^{mac2}, \alpha^{nod} \mathbf{F}^{nod}, \alpha^{ecm} \mathbf{F}^{ecm}, \alpha^{stab} (\mathbf{x}^i - \mathbf{x}^0)]^T$$

où  $\alpha^{stab}$  représente le coefficient de pondération des termes de stabilisation optionnels, permettant de restreindre encore la variation des paramètres par rapport à leur estimation initiale.

Un des avantages direct d'une norme d'erreur globale de type moindres carrés est de garantir la convexité et le signe de la fonctionnelle d'erreur, et cela indépendamment des propriétés des composantes du vecteur d'erreur  $\mathbf{F}^{tot}(\mathbf{x}^i)$ , rendant ainsi la méthode d'identification particulièrement stable quand le nombre de composantes  $q$  du vecteur d'erreur

<sup>24</sup>Ce constat logique a été effectivement observé lors des différentes identifications réalisées, les contraintes d'inégalité n'étant jamais actives quand les mesures « cibles » sont de bonne qualité. Il faut bien sûr s'assurer toutefois que les valeurs initiales des paramètres soient également admissibles.

est bien plus important que le nombre  $n$  de paramètres à identifier. Dans le cas qui nous concerne, le nombre de modes mesurés doit donc être si possible de l'ordre de 10, afin d'assurer à la fois la surdétermination du problème de minimisation aux moindres carrés tout en garantissant une variété de modes suffisante pour obtenir une sensibilité équilibrée à l'ensemble des paramètres  $\mathbf{x}^i$ .

Afin d'éviter directement les problèmes de conditionnement numérique liés à l'ordre de grandeur fortement variable des paramètres à identifier ( $10^{12}$  de différence entre  $\nu_{12}$  et  $E_1$  par exemple), nous définissons le vecteur des paramètres  $\mathbf{x}^i$  de manière relative aux valeurs initiales

$$\mathbf{x}^i = [E_1 / E_1^0, E_2 / E_2^0, \nu_{12} / \nu_{12}^0, G_{12} / G_{12}^0, G_{23} / G_{23}^0, G_{31} / G_{31}^0]^T$$

En résumé, le problème de minimisation avec ou sans contrainte peut être défini ainsi

$$\underset{\mathbf{x}^i \in \mathbb{R}^n}{\text{minimiser } f(\mathbf{x}^i)} \text{ avec } f(\mathbf{x}^i) = \frac{1}{2} \|\mathbf{F}^{tot}(\mathbf{x}^i)\|^2 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^q [F_k^{tot}(\mathbf{x}^i)]^2 \quad (4.14a)$$

avec les contraintes optionnelles

$$C_j(\mathbf{x}^i) \leq 0 \quad \text{pour } j = 1, 2, \dots, 9 \quad (4.14b)$$

$$(\mathbf{x}^{\min})_j < (\mathbf{x}^i)_j < (\mathbf{x}^{\max})_j \quad \text{pour } j=1, 2, \dots, 6 \quad (4.14c)$$

où la fonctionnelle d'erreur s'écrit

$$\mathbf{F}^{tot} = [\alpha^{frq} \mathbf{F}^{frq}, \alpha^{mac1} \mathbf{F}^{mac1}, \alpha^{mac2} \mathbf{F}^{mac2}, \alpha^{nod} \mathbf{F}^{nod}, \alpha^{ecm} \mathbf{F}^{ecm}, \alpha^{stab} (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_0)]^T \quad (4.14d)$$

et où les contraintes (optionnelles) sont

$$C_1(\mathbf{x}^i) = -(\mathbf{x}^i)_1, C_2(\mathbf{x}^i) = -(\mathbf{x}^i)_2, C_3(\mathbf{x}^i) = -(\mathbf{x}^i)_4, C_4(\mathbf{x}^i) = -(\mathbf{x}^i)_5, C_5(\mathbf{x}^i) = -(\mathbf{x}^i)_6 \quad (4.14e)$$

$$C_6(\mathbf{x}^i) = |\nu_{12}| - \sqrt{E_1 / E_2}, C_7(\mathbf{x}^i) = |\nu_{31}| - \sqrt{E_3 / E_1}, C_8(\mathbf{x}^i) = |\nu_{23}| - \sqrt{E_2 / E_3}$$

$$\text{et } C_9(\mathbf{x}^i) = -1 + \nu_{12} \nu_{21} + \nu_{23} \nu_{32} + \nu_{13} \nu_{31} + 2 \nu_{12} \nu_{23} \nu_{31}$$

#### 4.4.2 Algorithmes de minimisation

En adoptant une démarche de développement pragmatique en ce qui concerne l'algorithme d'identification, nous avons décidé de baser nos travaux sur une librairie existante de routines d'optimisation ayant déjà fait leurs preuves dans de nombreuses applications. Puisqu'un important ensemble de routines MATLAB permettant de résoudre des problèmes paramétriques d'éléments finis avec le logiciel MAFE a déjà été développé pour les besoins

des études de sensibilités (section 4.3.2), nous avons choisi de nous appuyer sur la bibliothèque de fonctions d'optimisation « MATLAB Optimisation Toolbox » qui implante un grand nombre de méthodes de référence pour la résolution avec ou sans contraintes de problèmes d'optimisation linéaire ou non linéaire de petite à très grande échelle.

Dans le cadre de notre problème de minimisation, le nombre  $n$  de paramètres à identifier ( $n=6$ ) et le nombre de composantes d'erreur  $q$  ( $q = 5 \times m$ , où  $m \approx 10$  représente le nombre de modes mesurés) peuvent être considérés comme relativement faibles, permettant ainsi de classer ce problème dans la catégorie des optimisations à petite ou moyenne échelle (faible nombre de paramètres, faible nombre de normes d'erreur non découplées).

Les algorithmes principaux utilisés dans ce domaine sont soit de type moindres carrés non linéaires (méthodes de Gauss-Newton, du gradient maximal ou encore de Levenberg-Marquardt) pour les problèmes sans contraintes [59], soit de type programmation quadratique séquentielle (SQP, Sequential Quadratic Programming) pour les problèmes contraints.

Après avoir testé les deux classes d'algorithmes de type moindres carrés non linéaires et SQP, nous avons constaté que les contraintes ne jouent ici pas de rôle prépondérant et ne sont actives que dans le cas d'erreurs de mesure grossières. De plus, en cas de léger problème de convergence d'un paramètre, il est aisé de stabiliser l'algorithme en spécifiant une valeur non nulle (même très faible) pour le coefficient de stabilisation  $\alpha^{\text{stab}}$ . Le problème d'optimisation à résoudre peut donc clairement être considéré comme non contraint (du moins explicitement), sans poser de réels problèmes. En outre, d'après les tests que nous avons effectués, le nombre d'évaluations de fonctions d'erreur et de gradients d'erreur réalisées par l'algorithme SQP sous contraintes est généralement bien plus important que ce que requièrent les algorithmes de type moindres carrés non linéaires pour une même tolérance de convergence. Ainsi, nous ne présenterons ici que la méthode d'optimisation par moindres carrés non linéaires utilisée dans la procédure d'identification mixte numérique-expérimentale développée dans ce travail.

Commençons d'abord par définir les matrices gradients (pentes) et hessiennes (courbure) de la norme d'erreur globale  $f(\mathbf{x}^i)$ . Grâce à la forme particulière de la fonctionnelle d'erreur totale de type moindres carrés, ces matrices peuvent être reliées aux matrices jacobiennes  $\mathbf{J}(\mathbf{x}^i)$  et hessiennes du vecteur d'erreur  $\mathbf{F}^{\text{tot}}(\mathbf{x}^i)$ . La matrice jacobienne  $\mathbf{J}(\mathbf{x}^i)$  du vecteur d'erreur  $\mathbf{F}^{\text{tot}}(\mathbf{x}^i)$  et le vecteur gradient  $\mathbf{G}(\mathbf{x}^i)$  de la fonctionnelle d'erreur globale  $f(\mathbf{x}^i)$  peuvent alors être mis sous la forme

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}^i) = \frac{\partial \mathbf{F}^{tot}(\mathbf{x}^i)}{\partial \mathbf{x}^i} \quad (4.15)$$

et

$$\mathbf{G}(\mathbf{x}_i) = \nabla f(\mathbf{x}^i) = \mathbf{J}(\mathbf{x}^i)^T \mathbf{F}^{tot}(\mathbf{x}^i) \quad (4.16)$$

La matrice hessienne  $\mathbf{H}^j(\mathbf{x}^i)$  des dérivées secondes de la  $j$ -ème composante du vecteur d'erreur  $\mathbf{F}^{tot}(\mathbf{x}^i)$  et la matrice hessienne  $\mathbf{H}(\mathbf{x}^i)$  de la fonctionnelle d'erreur globale  $f(\mathbf{x}^i)$  sont liées par les relations

$$\mathbf{H}^j(\mathbf{x}^i) = \frac{\partial^2 F_j^{tot}(\mathbf{x}^i)}{(\partial \mathbf{x}^i)^2} \quad (4.17)$$

et

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}^i) = \mathbf{J}(\mathbf{x}^i)^T \mathbf{J}(\mathbf{x}^i) + \mathbf{Q}(\mathbf{x}^i), \quad \text{avec} \quad \mathbf{Q}(\mathbf{x}^i) = \sum_{j=1}^q F_j^{tot}(\mathbf{x}^i) \cdot \mathbf{H}^j(\mathbf{x}^i) \quad (4.18)$$

Après ces définitions, considérons maintenant la fonctionnelle globale  $f(\mathbf{x}^i)$ . Si celle-ci est suffisamment régulière au voisinage de  $\mathbf{x}^i$ , cette fonctionnelle peut être approchée par le développement limité suivant

$$f(\mathbf{x}^i + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}^i) + \mathbf{h}^T \mathbf{G}(\mathbf{x}^i) + \frac{1}{2} \mathbf{h}^T \mathbf{H}(\mathbf{x}^i) \mathbf{h} + O(\|\mathbf{h}\|^3)$$

où le vecteur  $\mathbf{h}$  dénote une perturbation locale des paramètres autour de  $\mathbf{x}^i$ .

Les conditions nécessaires et suffisantes pour que  $\mathbf{x}^*$  soit un minima local de la fonctionnelle d'erreur  $f(\mathbf{x})$  peuvent être définies par

$$\mathbf{x}^* \text{ est un minimum local de } f(\mathbf{x}) \text{ si : } \mathbf{G}(\mathbf{x}^*) = 0 \text{ et } \mathbf{H}(\mathbf{x}^*) \text{ est strictement définie positive.} \quad (4.19)$$

La plupart des méthodes utilisées pour la minimisation de type moindres carrés non linéaires sont basées sur une méthode itérative de « descente », tendant à chercher à chaque itération  $i$  une direction de descente  $\mathbf{h}$  (vecteur de l'espace des paramètres) telle que

$\mathbf{h}$  est une direction de descente pour la norme d'erreur globale  $f(\mathbf{x})$  autour de  $\mathbf{x}^i$  si :

$$f(\mathbf{x}^i + \alpha \mathbf{h}) < f(\mathbf{x}^i) \text{ (pour de faibles valeurs de } \alpha) \Leftrightarrow \mathbf{h}^T \mathbf{G}(\mathbf{x}^i) < 0 \quad (4.20)$$

La technique la plus connue pour la détermination d'une direction de descente se base sur le gradient de la fonctionnelle d'erreur totale pour calculer la direction de descente  $\mathbf{h}_{SD}$  de « pente maximale »

$$\mathbf{h}_{SD}(\mathbf{x}^i) = -f'(\mathbf{x}^i) = -\mathbf{G}(\mathbf{x}^i) \quad (4.21)$$

En résumé, le Tableau 4.4 donne le déroulement global d'un algorithme d'optimisation par moindres carrés non linéaires.

|  |
|--|
| <p>Définition d'un vecteur de paramètre initial <math>\mathbf{x}_0</math></p> <p>Itération tant que la convergence n'est pas atteinte (tolérance) ou que le nombre d'itérations maximal n'est pas dépassé :</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. calculer une direction de descente <math>\mathbf{h}(\mathbf{x}^i)</math> telle que <math>f(\mathbf{x}^i + \alpha \mathbf{h}) &lt; f(\mathbf{x}^i)</math></li> <li>2. chercher le long de la direction de descente <math>\mathbf{h}(\mathbf{x}^i)</math> le facteur <math>\alpha</math> minimisant la fonction de <math>\alpha : f(\mathbf{x}^i + \alpha \mathbf{h})</math></li> <li>3. mettre à jour le vecteur de paramètres : <math>\mathbf{x}^{i+1} = \mathbf{x}^i + \alpha \mathbf{h}(\mathbf{x}^i)</math>.</li> </ol> |
|--|

**Tableau 4.4: Algorithme d'optimisation général basé sur les principes de la direction de descente et de la recherche de ligne**

Dans le cas de la méthode des moindres carrés non linéaires, la matrice hessienne  $\mathbf{H}(\mathbf{x})$  de la fonctionnelle d'erreur totale  $f(\mathbf{x})$  possède une propriété particulière. En effet, comme la matrice  $\mathbf{Q}(\mathbf{x}^i)$  tend vers zéro lorsque le résidu d'erreur  $\|\mathbf{F}^{tot}(\mathbf{x}^i)\|$  tend lui-même vers zéro, la matrice hessienne prend la forme spécifique suivante lorsque le résidu d'erreur  $\|\mathbf{F}^{tot}(\mathbf{x}^i)\|$  est nul ou très faible ( $\mathbf{x}^i$  proche du minimum) :

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}^i) \cong \mathbf{J}(\mathbf{x}^i)^T \mathbf{J}(\mathbf{x}^i) \quad (4.22)$$

Ceci implique que, pour  $\mathbf{x}^i$  au voisinage du minimum  $\mathbf{x}^*$ , l'approximation au deuxième ordre de la fonctionnelle d'erreur totale  $f(\mathbf{x})$  s'écrit

$$f(\mathbf{x}^i + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}^i) + \mathbf{h}^T \mathbf{J}(\mathbf{x}^i)^T \mathbf{F}^{tot}(\mathbf{x}^i) + \frac{1}{2} \mathbf{h}^T \mathbf{J}(\mathbf{x}^i)^T \mathbf{J}(\mathbf{x}^i) \mathbf{h} + O(\|\mathbf{h}\|^3) \quad (4.23a)$$

Ce développement limité de la fonction d'erreur totale correspond alors parfaitement à la forme approchée de  $f(\mathbf{x})$  que l'on obtiendrait par une approximation linéaire de chaque composante du vecteur d'erreur  $\mathbf{F}^{tot}(\mathbf{x}^i)$  autour de  $\mathbf{x}^i$ :

$$\mathbf{F}^{tot}(\mathbf{x}^i + \mathbf{h}) \cong \mathbf{F}^{tot}(\mathbf{x}^i) + \mathbf{J}(\mathbf{x}^i)\mathbf{h} + O(\|\mathbf{h}\|^2) \quad (4.24a)$$

entraîne

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}^i + \mathbf{h}) &= \frac{1}{2}(\mathbf{F}^{tot}(\mathbf{x}^i + \mathbf{h}))^T \mathbf{F}^{tot}(\mathbf{x}^i + \mathbf{h}) \cong \frac{1}{2}(\mathbf{F}^{tot}(\mathbf{x}^i))^T \mathbf{F}^{tot}(\mathbf{x}^i) + \\ &\frac{1}{2}(\mathbf{J}(\mathbf{x}^i)\mathbf{h})^T \mathbf{F}^{tot}(\mathbf{x}^i) + \frac{1}{2}(\mathbf{F}^{tot}(\mathbf{x}^i))^T \mathbf{J}(\mathbf{x}^i)\mathbf{h} + \frac{1}{2}\mathbf{h}^T \mathbf{J}(\mathbf{x}^i)^T \mathbf{J}(\mathbf{x}^i) \mathbf{h} \\ &= f(\mathbf{x}^i) + \mathbf{h}^T \mathbf{J}(\mathbf{x}^i)^T \mathbf{F}^{tot}(\mathbf{x}^i) + \frac{1}{2}\mathbf{h}^T \mathbf{J}(\mathbf{x}^i)^T \mathbf{J}(\mathbf{x}^i) \mathbf{h} \end{aligned} \quad (4.24b)$$

Ce constat est le fondement de la méthode d'optimisation de Gauss-Newton, qui s'appuie sur une approximation linéaire des composantes du vecteur d'erreur  $\mathbf{F}^{tot}(\mathbf{x}^i)$  à chaque itération, formant ainsi une approximation quadratique de la fonctionnelle d'erreur totale  $f(\mathbf{x}^i)$ . Cette méthode possède des propriétés de convergence quadratique lorsque le résidu d'erreur final est faible ou nul, ou linéaire dans les autres cas.

La direction de descente  $\mathbf{h}_{GN}$  calculée par cette méthode de Gauss - Newton à chaque itération est la solution du système suivant :

$$(\mathbf{J}(\mathbf{x}^i)^T \mathbf{J}(\mathbf{x}^i))\mathbf{h}_{GN} = -\mathbf{J}(\mathbf{x}^i)^T \mathbf{F}^{tot}(\mathbf{x}^i) \quad (4.25)$$

L'avantage premier de la méthode de Gauss-Newton est bien entendu sa convergence quadratique lors des itérations finales si le résidu d'erreur minimal est faible. Cependant, lors des premières itérations, la matrice hessienne  $\mathbf{H}(\mathbf{x})$  de  $f(\mathbf{x})$  peut être indéfinie, voire même définie négative, perturbant ainsi totalement la procédure, au point que  $\mathbf{h}_{GN}$  puisse ne pas être une direction de descente pour  $f(\mathbf{x})$ . Par conséquent, lors des premières itérations, l'utilisation d'une direction de descente de pente maximale  $\mathbf{h}_{SD}$  peut être plus appropriée. L'idée d'une méthode hybride entre la méthode de descente maximale et la méthode de Gauss-Newton a motivé toute une série d'algorithmes dont le plus connu (et peut être le plus efficace) est l'algorithme de Levenberg-Marquardt [59,60]. La difficulté de tout algorithme hybride est principalement de choisir à quel moment et dans quelles conditions passer de la méthode de la descente maximale à la méthode de Gauss-Newton et réciproquement. Pour ce faire, la méthode de Levenberg-Marquardt introduit un paramètre  $\lambda_i$  variant dans l'intervalle  $[0, \infty[$ . La direction de descente  $\mathbf{h}_{LM}$  est alors calculée en résolvant

$$(\mathbf{J}(\mathbf{x}^i)^T \mathbf{J}(\mathbf{x}^i) + \lambda_i \mathbf{I})\mathbf{h}_{LM}(\mathbf{x}^i) = -\mathbf{J}(\mathbf{x}^i)^T \mathbf{F}^{tot}(\mathbf{x}^i) \quad (4.26)$$

Si  $\lambda_i$  est proche de zéro, la direction de descente  $\mathbf{h}_{LM}$  tend vers la direction de descente  $\mathbf{h}_{GN}$  de type Gauss-Newton, alors que lorsque  $\lambda_i$  devient relativement grand la direction de descente  $\mathbf{h}_{LM}$  tend vers  $-1/\lambda_i \mathbf{h}_{SD}$ , représentant un petit « pas » dans la direction de descente maximale. Il faut noter que  $\lambda_i$  influence aussi bien la direction de descente que l'amplitude du pas effectué à l'itération  $i$ , permettant ainsi de se passer d'une méthode de recherche de ligne. Néanmoins, toute la performance de cette méthode se cache en fait dans la manière de faire évoluer  $\lambda_i$  au cours des itérations. L'idée utilisée ici est de réduire  $\lambda_i$  lorsque l'approximation linéaire des composantes du vecteur d'erreur fournit de bons résultats (termes quadratiques peu importants) afin de se rapprocher de la direction de descente de type Gauss-Newton (convergence super linéaire si le résidu est faible), et d'augmenter  $\lambda_i$  lorsque les termes du second ordre des composantes du vecteur d'erreur  $\mathbf{F}^{tot}$  sont importants, de sorte que l'algorithme tend vers une méthode de descente maximale.

Bien qu'une recherche de ligne ne soit pas appliquée directement dans la méthode de Levenberg-Marquardt, l'implantation qui en est réalisée dans la librairie MATLAB Optimization Toolbox [60] détermine quand même par recherche de ligne un facteur  $\alpha^*$  qui sert de mesure de la non-linéarité des composantes du vecteur d'erreur. Cette longueur de pas  $\alpha^*$  est évaluée en cherchant un minimum  $\mathbf{x}^*$  le long d'une interpolation cubique  $f_C(\mathbf{x})$  de la fonction d'erreur (basée sur les valeurs d'erreurs et de gradients calculés aux itérations  $i$  et  $i-1$ ). L'efficacité de l'approximation linéaire locale  $f_L(\mathbf{x}^i + \mathbf{h}^i)$  de type Gauss-Newton est alors comparée à l'approximation cubique  $f_C(\mathbf{x}^*)$ , afin de juger s'il faut augmenter ou diminuer  $\lambda_{i+1}$ . La mise à jour de la valeur de  $\lambda_{i+1}$  du pas courant se base finalement sur la longueur du pas de l'interpolation cubique  $\alpha^*$ . La Table 4.5 résume finalement l'algorithme de minimisation de Levenberg-Marquardt implanté dans l'outil MATLAB.

En conclusion, la méthode d'optimisation par moindres carrés de Levenberg-Marquardt est reconnue comme étant très robuste et généralement très performante dans une grande variété de cas. Bien que convergeant théoriquement moins vite que la méthode de Gauss-Newton dans certains cas très spécifiques, cet algorithme est le plus efficace sur la majorité des cas rencontrés. De plus, la convergence très rapide de l'algorithme, associée au fait qu'il ne requiert pas systématiquement l'évaluation des gradients des fonctions d'erreur durant la recherche de ligne, fait de cette procédure l'une des moins exigeantes en calcul de normes et gradients d'erreur et donc, pour notre cas, en calcul de solutions modales très coûteuses du modèle d'éléments finis.

Définition d'un vecteur de paramètre initial  $\mathbf{x}^0$

Itération tant que la convergence n'est pas atteinte (tolérance) ou que le nombre d'itération maximal n'est pas dépassé :

1. calculer le vecteur d'erreur  $\mathbf{F}^{tot}(\mathbf{x}^i)$  et ses dérivées  $\mathbf{J}(\mathbf{x}^i)$
2. évaluer le facteur d'amortissement  $\lambda_i$  de l'itération courante
  - a. extrapolation linéaire de la fonction d'erreur :  $f_L(\mathbf{x}^i + \mathbf{h}^i)$
  - b. interpolation cubique  $f_C(\mathbf{x})$  de  $f(\mathbf{x}^{i-1})$  et  $f(\mathbf{x}^i)$  et recherche du minimum de l'interpolation conduisant à  $f_C(\mathbf{x}^*)$  et  $\alpha^*$
  - c. calcul de  $\lambda_i$  :

$$\text{i. si } f_L(\mathbf{x}^i + \mathbf{h}^i) < f_C(\mathbf{x}^*) \text{ alors } \lambda_{i+1} = \frac{\lambda_i}{1 + \alpha^*}$$

$$\text{ii. si } f_L(\mathbf{x}^i + \mathbf{h}^i) > f_C(\mathbf{x}^*) \text{ alors } \lambda_{i+1} = \lambda_i + \frac{f_C(\mathbf{x}^*) - f_L(\mathbf{x}^i + \mathbf{h}^i)}{\alpha^*}$$

3. chercher une direction de descente  $\mathbf{h}^i = \mathbf{h}(\mathbf{x}^i)$  en résolvant:
 
$$\left(\mathbf{J}(\mathbf{x}^i)^T \mathbf{J}(\mathbf{x}^i) + \lambda_i \mathbf{I}\right) \mathbf{h}^i(\mathbf{x}^i) = -\mathbf{J}(\mathbf{x}^i)^T \mathbf{F}^{tot}(\mathbf{x}^i)$$
4. trouver le long de la direction de descente  $\mathbf{h}^i(\mathbf{x}^i)$  le facteur  $\alpha$  minimisant  $f(\mathbf{x}^i + \alpha \mathbf{h}^i)$  à l'aide d'une procédure d'interpolation quadratique / cubique  $\Rightarrow$  calcul de vecteurs d'erreur intermédiaires  $\mathbf{F}^{tot}(\mathbf{x}^i + \alpha_k \mathbf{h}^i)$  (pour  $k \in [1,3]$ )
5. mettre à jour le vecteur de paramètre  $\mathbf{x}^{i+1} = \mathbf{x}^i + \alpha \mathbf{h}^i$

**Table 4.5: Algorithme de minimisation de Levenberg-Marquardt implémenté dans la librairie MATLAB Optimization Toolbox**

### 4.4.3 Calcul des gradients des fonctions d'erreur

Comme nous l'avons vu dans la présentation de l'algorithme de minimisation, il est nécessaire de calculer à chaque itération principale du processus non seulement le vecteur des fonctions d'erreur modales entre les modèles numérique et expérimental, mais aussi le gradient de ce vecteur par rapport aux paramètres d'identification. Les gradients (ou

jacobiens) des normes d'erreur modales dépendent bien évidemment des solutions modales du modèle numérique, mais aussi du gradient de ces solutions par rapport aux paramètres constitutifs. Ainsi, il est nécessaire de construire à chaque itération principale de la méthode d'identification, à la fois les solutions modales du modèle d'éléments finis paramétrique mais aussi leurs dérivées par rapport à chaque paramètre d'identification. Si les dérivées des pulsations propres sont relativement simples à calculer à partir des dérivées des matrices globales de masse et de rigidité, il n'est va pas de même pour les dérivées des modes propres, qui requièrent bien plus d'effort de calcul pour être évaluées. Par soucis de clarté et de concision, nous abandonnerons ici l'indice  $i$  représentant les itérations.

Rappelons que le problème d'extraction modale peut être posé de la manière suivante

$$(\mathbf{K}(\mathbf{x}) - \lambda_j \mathbf{M})\boldsymbol{\varphi}_j = 0 \Rightarrow \lambda_j(\mathbf{x}), \boldsymbol{\varphi}_j(\mathbf{x}) \quad \text{pour } j=1, 2, \dots, m \quad (4.27)$$

où  $\mathbf{K}$  et  $\mathbf{M}$  sont les matrices globales de masse et de rigidité et où  $\lambda_j$  et  $\boldsymbol{\varphi}_j$  représentent respectivement la  $j$ -ème valeur propre (le carré de la  $j$ -ème pulsation propre  $\omega_j$ ) et le  $j$ -ème vecteur propre du système,  $m$  dénotant le nombre de paires propres considérées. Dans notre cas d'identification, la matrice de masse  $\mathbf{M}$  ne dépend pas du vecteur de paramètre<sup>25</sup>  $\mathbf{x}$  car la densité et les dimensions géométriques ne font pas partie du vecteur des paramètres et restent donc constantes.

En dérivant directement l'équation (4.27) par rapport au paramètre  $x_k$  et en utilisant la propriété de normalisation des modes dans la métrique de la matrice de masse, on peut formuler aisément le calcul des dérivées des valeurs propres [61, 62]

$$\frac{\partial \lambda_j}{\partial x_k} = \boldsymbol{\varphi}_j^T \frac{\partial \mathbf{K}(\mathbf{x})}{\partial x_k} \boldsymbol{\varphi}_j \quad \text{pour } j = 1, 2, \dots, m \quad (4.28)$$

Les dérivées des modes propres sont les solutions du système suivant:

$$(\mathbf{K}(\mathbf{x}) - \lambda_j \mathbf{M}) \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_j}{\partial x_k} = \frac{\partial \lambda_j}{\partial x_k} \mathbf{M} \boldsymbol{\varphi}_j - \frac{\partial \mathbf{K}(\mathbf{x})}{\partial x_k} \boldsymbol{\varphi}_j \quad \text{pour } j = 1, 2, \dots, m \quad (4.29)$$

De par la définition même des valeurs et vecteurs propres, le système d'équation (4.29) ne peut toutefois pas être résolu directement car la matrice  $(\mathbf{K} - \lambda_j \mathbf{M})$  est singulière. Dans les

<sup>25</sup>Afin d'alléger quelque peu la formulation, l'indice  $i$  des itérations est abandonné pour la suite du développement des dérivées modales.

lignes qui suivent, nous présentons quelques méthodes de calcul des dérivées modales qui se concentrent essentiellement sur la résolution de ce problème à singularité.

### Méthode de Nelson

La méthode de Nelson [62] cherche à résoudre le système (4.29) en levant directement la singularité de la matrice  $(\mathbf{K}-\lambda_j\mathbf{M})$ . Dans cette technique, une solution de la forme suivante est recherchée :

$$\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_j}{\partial x_k} = \mathbf{P} + c \boldsymbol{\varphi}_j \quad (4.30)$$

où  $\mathbf{P}$  est une solution particulière et  $c$  une constante déterminée par la relation :

$$c = -\boldsymbol{\varphi}_j^T \mathbf{M} \mathbf{P} \quad (4.31)$$

Le principe de base permettant le calcul de la solution particulière  $\mathbf{P}$  de cette méthode s'appuie sur le raisonnement plutôt astucieux suivant : comme la matrice  $(\mathbf{K}-\lambda_j\mathbf{M})$  de dimension  $r \times r$  est singulière de rang  $r-1$ , il suffit pour lever la singularité de supprimer une seule et unique équation de ce système pour rendre cette matrice à nouveau inversible. La méthode de Nelson propose de forcer à zéro la dérivée de la composante maximale  $(\boldsymbol{\varphi}_j)_p = \max \boldsymbol{\varphi}_j$  du vecteur modal. Ainsi, pour chaque dérivée de chacun des modes, un nouveau système linéaire est résolu afin d'obtenir  $\mathbf{P}$  tel que

$$\mathbf{A} \mathbf{P} = \frac{\partial \lambda_j}{\partial x_k} \mathbf{M} \boldsymbol{\varphi}_j - \frac{\partial \mathbf{K}(\mathbf{x})}{\partial x_k} \boldsymbol{\varphi}_j \quad (4.32)$$

où  $\mathbf{A}$  est la matrice  $\mathbf{B}=(\mathbf{K}-\lambda_j\mathbf{M})$  transformée dans laquelle les lignes  $\mathbf{B}_{pi}$  et colonnes  $\mathbf{B}_{ip}$  correspondant à la composante maximale  $p$  du vecteur modal  $\boldsymbol{\varphi}_j$  ont été forcées à zéro et où le terme diagonal  $\mathbf{B}_{pp}$  est forcé à 1.

$$\begin{cases} A_{ij} = B_{ij} , i, j \in [1, r] \text{ et } i, j \neq p \\ A_{ip} = 0 \text{ et } A_{pi} = 0 , i \in [1, r] \text{ et } i \neq p \\ A_{pp} = 1 \end{cases} \quad (4.33)$$

Finalement, la factorisation de la matrice  $\mathbf{A}$  permet le calcul de la solution particulière  $\mathbf{P}$  qui est alors insérée dans les relations (4.30) et (4.31) pour obtenir la dérivée du mode propre  $\boldsymbol{\varphi}_j$ . Cette méthode possède l'avantage d'être mathématiquement exacte, mais requiert la factorisation d'autant de matrices  $\mathbf{A}$  qu'il y a de modes à dériver, ce qui rend cet algorithme très rapidement prohibitif en temps de calcul. En effet, le nombre de modes calculés est de

l'ordre de 15 à 20 et la taille des matrices  $\mathbf{A}$  à factoriser est facilement de l'ordre de  $10^7 000 \times 10^7 000$  ou plus.

### Méthode de dérivation par projection modale

Deux autres méthodes [61, 63, 64] permettent de calculer les dérivées des formes propres de manière approchée, en considérant que ces dernières peuvent être exprimées comme combinaisons linéaires des vecteurs modaux  $\boldsymbol{\varphi}_j$  du système. Cette hypothèse revient en fait à projeter le problème (4.29) dans la base des modes propres  $\boldsymbol{\varphi}_j$  ( $j = 1, 2, \dots, s$ ). Comme dans la plupart des cas, seule une petite fraction  $s$  des  $r$  modes propres du système est extraite, la méthode de projection modale peut être considérée comme d'autant plus inexacte que le nombre de modes  $s$  de la base modale est faible en regard du nombre de mode  $m$  dont on veut calculer les dérivées. D'après la littérature, un minimum de  $s = 2$  à  $3 \times m$  modes de base est requis pour le calcul des dérivées modales.

Dans la première stratégie, les dérivées de modes propres sont approchées de la façon suivante

$$\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_j}{\partial x_k} \cong \sum_{l=1}^s A_{jkl} \boldsymbol{\varphi}_l \quad \text{pour } j = 1, 2, \dots, m \text{ et } k = 1, 2, \dots, n \quad (4.34a)$$

où le coefficient  $A_{jkl}$  est calculé de la façon suivante

$$\begin{cases} A_{jkl} = \frac{1}{(\lambda_j - \lambda_l)} \boldsymbol{\varphi}_l^T \frac{\partial \mathbf{K}(\mathbf{x})}{\partial x_k} \boldsymbol{\varphi}_j, \text{ pour } j \neq l \\ A_{jkl} = 0, \text{ pour } j = l \end{cases} \quad (4.34b)$$

La seconde méthode de calcul des dérivées modales par projection dans la base modale est dite « accélérée », car elle utilise une solution pseudo statique du problème (4.29) afin d'accélérer la convergence des coefficients  $A_{jkl}$  réduisant ainsi le nombre de modes de base nécessaires pour atteindre une même précision. Dans cette technique, l'approximation des dérivées des vecteurs modaux s'écrit

$$\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_j}{\partial x_k} \cong \left( \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_j}{\partial x_k} \right)_s + \sum_{l=1}^s \bar{A}_{jkl} \boldsymbol{\varphi}_l \quad (4.36a)$$

où la solution pseudo statique est donnée par :

$$\left( \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_j}{\partial x_k} \right)_s = \mathbf{K}(\mathbf{x})^{-1} \left( \frac{\partial \lambda_j}{\partial x_k} \mathbf{M} - \frac{\partial \mathbf{K}(\mathbf{x})}{\partial x_k} \right) \boldsymbol{\varphi}_j \quad (4.36b)$$

et où les coefficients de projection modale  $\bar{A}_{jkl}$  sont calculés à l'aide de l'expression

$$\begin{cases} \bar{A}_{jkl} = \frac{\lambda_j}{\lambda_l(\lambda_j - \lambda_l)} \boldsymbol{\varphi}_l^T \frac{\partial \mathbf{K}(\mathbf{x})}{\partial x_k} \boldsymbol{\varphi}_j, \text{ pour } j \neq l \\ \bar{A}_{jkl} = 0, \text{ pour } j = l \end{cases} \quad (4.36c)$$

Le point intéressant de cette seconde méthode est de converger bien plus rapidement que la première, puisque :

$$\bar{A}_{jkl} / A_{jkl} = \lambda_j / \lambda_l \quad (4.37)$$

Par contre ce gain de rapidité de convergence requiert la factorisation de la matrice  $\mathbf{K}$  et le calcul d'une solution pseudo statique.

### Différences finies

La technique classique des différences finies peut également être implantée très facilement dans notre cas, que ce soit pour le calcul des dérivées des fréquences et modes propres, ou même directement pour le calcul des dérivées des normes d'erreur modales.

Les dérivées modales calculées par différences finies requièrent l'évaluation d'un cas « de référence » du modèle d'éléments finis paramétrique ainsi que le calcul de  $n$  cas « perturbés ».

Soit  $\lambda_j^0$  et  $\boldsymbol{\varphi}_j^0$  les solutions modales du cas de référence (vecteur des paramètres  $\mathbf{x} = \mathbf{x}^0$ ) et  $\lambda_j^k$  et  $\boldsymbol{\varphi}_j^k$  les solutions modales du cas perturbé selon le  $k$ -ème paramètre  $x_k$  avec un pas  $\Delta x_k$ , les dérivées modales alors être approchées par

$$\frac{\partial \lambda_j}{\partial x_k} \cong \frac{1}{\Delta x_k} (\lambda_j^k - \lambda_j^0) \text{ et } \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_j}{\partial x_k} \cong \frac{1}{\Delta x_k} (\boldsymbol{\varphi}_j^k - \boldsymbol{\varphi}_j^0) \text{ pour } j = 1, 2, \dots, m \quad (4.38)$$

Bien évidemment, la résolution de  $n+1$  problèmes aux valeurs propres de grande dimension n'est pas très économique en terme de temps de calcul, mais la simplicité et la précision de cette méthode permet d'obtenir une très bonne évaluation des jacobiens d'erreur  $\mathbf{J}(\mathbf{x})$ . De plus, il est possible de réduire radicalement le temps de résolution des cas « perturbés » en imposant au solveur d'extraction modale numérique (itération d'un sous-espace) des vecteurs d'itération initiaux égaux aux vecteurs modaux de la solution de référence. En procédant ainsi, le nombre d'itérations du solveur modal peut être fortement

diminué jusqu'à un facteur 2, de sorte que chaque évaluation de gradient devient bien moins coûteuse en temps de calcul.

### Test et comparaison des méthodes de dérivation

Chacune de ces méthodes a été programmée dans MATLAB afin de pouvoir tester sa précision et son efficacité de calcul dans des cas concrets de modèles d'éléments finis issus de MAFE. Notons que le calcul des dérivées de la matrice de rigidité globale par rapport aux paramètres est effectuée par différences finies entre un cas de référence et un cas perturbé

$$\frac{\partial \mathbf{K}(\mathbf{x})}{\partial x_k} \cong \frac{\mathbf{K}(\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}_k) - \mathbf{K}(\mathbf{x})}{\|\Delta \mathbf{x}_k\|} \quad (4.39)$$

où  $\Delta \mathbf{x}_k$  est un vecteur de perturbation des paramètres dans la direction  $k$ .

La matrice de rigidité est assemblée et exportée depuis MAFE, puis relue sous forme binaire dans MATLAB pour entreprendre la suite des calculs. Les méthodes de dérivation proposées sont ensuite appelées pour le calcul des dérivées des pulsations et des modes propres par rapport aux six paramètres à identifier  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $\nu_{12}$ ,  $G_{12}$ ,  $G_{23}$  et  $G_{31}$  de la plaque UD150×100×10 considérée comme parfaitement représentative du comportement des différentes techniques de calcul des dérivées modales. Seules trois méthodes sont en fait testées<sup>26</sup> : la méthode exacte de Nelson, considérée comme référence, la méthode modale approchée classique et le schéma aux différences finies. Dans cet exemple de comparaison, la plaque est discrétisée par un maillage de 10×7 éléments de coque quadratiques d'ordre  $p=3$  avec intégration sélective dans le plan et exacte dans l'épaisseur de la coque. Les dérivées des 18 premiers modes et fréquences propres par rapport aux 6 paramètres d'identification sont évaluées. Dans le cas de la méthode modale approchée, 36 modes propres sont calculés afin de servir de base au calcul des dérivées modales. Pour chaque technique, la précision des dérivées des modes et des fréquences propres ainsi que le temps de calcul sont étudiés. Les temps d'exécution de ces procédures sont mesurés sur un PC Pentium 4 à 3.06Ghz muni de 1Gb de Ram.

Les conclusions de cette analyse sont les suivantes :

---

<sup>26</sup>La méthode modale accélérée est abandonnée ici car celle-ci nécessite d'être modifiée pour traiter des cas de modèles éléments finis avec modes de corps rigide, car en l'état, l'inversion de  $\mathbf{K}$  n'est pas possible puisque la matrice de rigidité comporte 6 valeurs propres nulles.

- Les dérivées modales des pulsations propres obtenues par les trois méthodes peuvent être admises comme équivalentes compte tenu de la précision requise pour l'identification mixte numérique-expérimentale (erreur relative de moins de  $10^{-4}$ )
- Le temps de calcul des dérivées des modes propres par la méthode de Nelson (Tableau 4.6) est effectivement prohibitif, cette méthode ne pouvant donc pas être retenue pour la méthode d'identification développée. Cette méthode de calcul est alors utilisée ici comme référence de précision uniquement.

| <i>Méthode de calcul</i>   | <i>Temps de calcul</i> | <i>Ecart relatif moyen</i> |
|----------------------------|------------------------|----------------------------|
| Méthode de Nelson (exacte) | 339 s                  | 0 (référence)              |
| Différences Finies         | 125 s                  | $2.31 \times 10^{-5}$      |
| Modal (base de 36 modes)   | 89 s                   | $1.02 \times 10^{-1}$      |

**Tableau 4.6: Précision et temps de calcul des dérivées modales pour les 18 premiers modes de la plaque UD150x100x10mm (calcul sur un PC Pentium 4, 3.06Ghz / 1Gb Ram, modèle éléments finis MAFE de coque PSDT d'ordre  $p=3$ , 3780 ddl).**

- Les dérivées des modes calculés par les méthodes de Nelson et des différences finies sont numériquement très proches, mais les dérivées estimées par projection modale sont très nettement en erreur, surtout pour les modes élevés (Figure 4.14). On peut donc affirmer ici qu'une base modale constituée de  $2 \times m$  vecteurs modaux n'est pas suffisante pour calculer avec une bonne précision les dérivées modales de  $m$  vecteurs propres avec cette technique.
- Bien que le temps d'exécution (Tableau 4.6) de la méthode modale approchée soit légèrement inférieur à celui de la technique des différences finies, la précision quasi exacte de cette dernière la rend clairement plus efficace pour nos besoins d'identification. En effet, si les gradients des normes d'erreur ne sont évalués que trop grossièrement, le nombre d'itérations total de l'algorithme de minimisation de Levenberg-Marquardt peut augmenter de manière très significative, entraînant ainsi une hausse très importante du temps de calcul nécessaire à l'identification des paramètres constitutifs.

Il peut être conclu que malgré sa simplicité la méthode de calcul des gradients des solutions modales par différences finies reste la procédure la plus performante pour le calcul d'un grand nombre de dérivées modales avec une précision très proche de la solution exacte fournie par la méthode de Nelson, mais avec un temps de calcul environ trois fois inférieur.

Ainsi, la méthode d'identification développée ici ne fera appel qu'à la technique de dérivation par différences finies. Comme, dans l'algorithme de résolution par moindres carrés non linéaires de MATLAB, une option permet d'activer le calcul automatique des gradients d'erreur par différences finies, nous utiliserons cette technique pour évaluer directement les dérivées des composantes du vecteur d'erreur modale  $\mathbf{F}^{tot}(\mathbf{x}^i)$ .

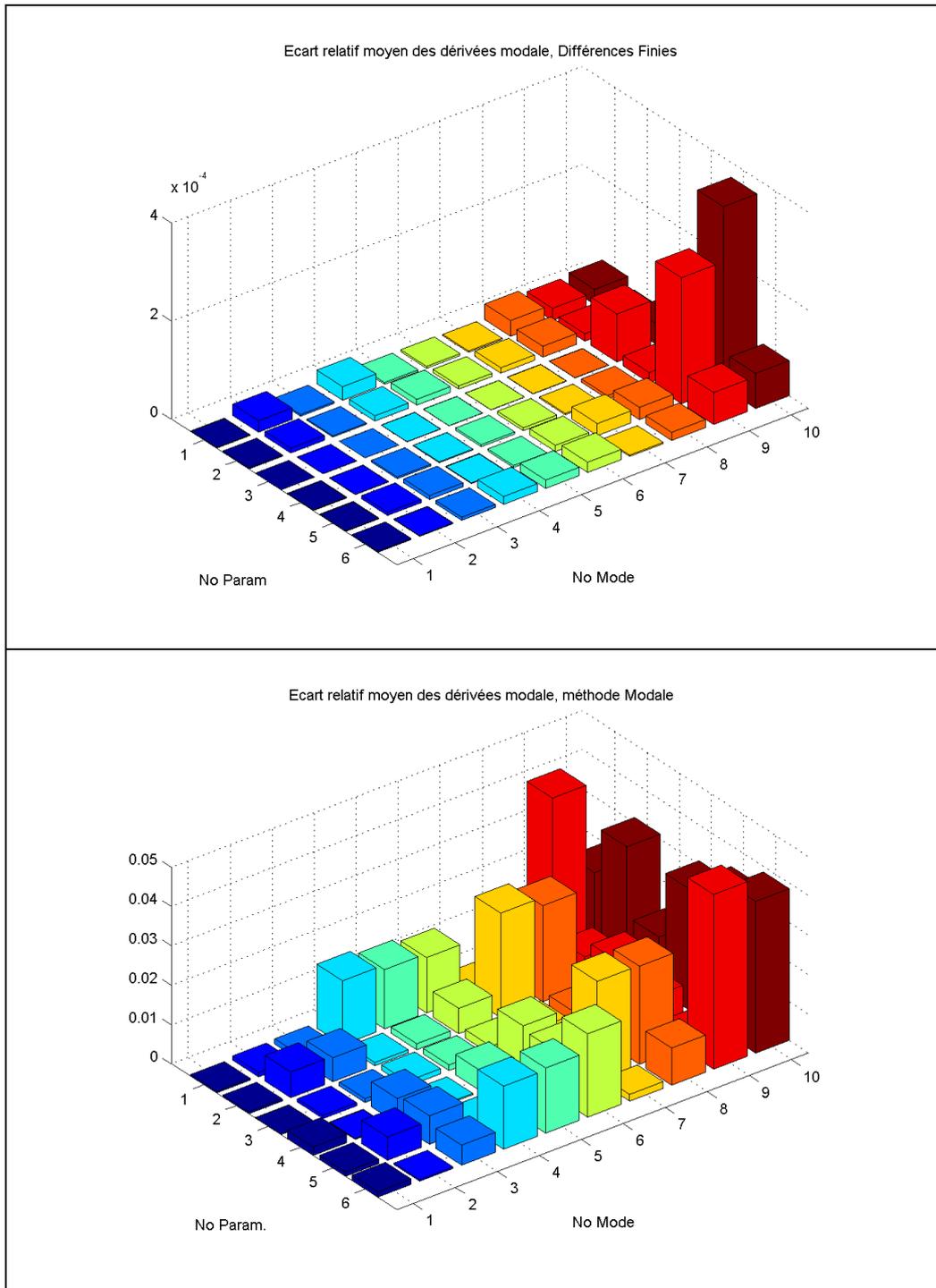


Figure 4.14: Ecart relatif moyen, rapport aux résultats de la méthode de dérivation exacte de Nelson, des dérivées des modes 1 à 10 de la plaque UD150×100×10mm calculées par différences finies en haut et par la méthode modale approchée sur 36 modes en bas

#### 4.4.4 Pondération et incertitudes des normes d'erreur modales

En théorie, pour que les poids des composantes d'une fonction d'erreur n'influencent pas la solution du problème d'optimisation, ils devraient être sélectionnés de telle manière qu'ils soient inversement proportionnels à l'incertitude de leurs composantes respectives. L'incertitude expérimentale des fréquences propres peut être évaluée sans trop de peine et est de l'ordre de  $\pm 1\%$ , tandis que l'on considère que des différences de 0.1 sur les termes des matrices MAC sont généralement admissibles. Par contre, les incertitudes des autres normes modales (corrélation des lignes nodales ou somme des écarts de composantes) sont bien plus difficiles à estimer a priori. En se basant sur l'étude paramétrique effectuée précédemment, on constate que ces deux normes d'erreur évoluent respectivement dans une plage de  $[0, 100]$  et de  $[0, 0.1]$ , alors que les normes basées sur les fréquences et le termes diagonaux et hors diagonale de la matrices MAC varient respectivement dans des plages de  $[-0.15, +0.15]$ ,  $[0, 0.03]$  et  $[0, 0.04]$  pour des variations de paramètres de  $\pm 30\%$ . Ainsi, en se basant à la fois sur les incertitudes expérimentales estimées et les variations des normes dans l'étude paramétrique, nous pouvons présélectionner approximativement les poids des normes d'erreur modales (Tableau 4.7).

| <i>Norme</i>   | <i>EcRelFreq</i> | <i>MAC1</i> | <i>MAC2</i> | <i>NodalCorr2</i> | <i>SumEcMod</i> |
|--|------------------|-------------|-------------|-------------------|-----------------|
| <i>Incertitude expérimentale</i>                           | 0.01             | 0.1         | 0.5         | -                 | -               |
| <i>Variation de l'étude paramétrique</i>                   | 0.3              | 0.03        | 0.04        | 200               | 0.1             |
| <i>Poids relatifs tirés de l'incertitude expérimentale</i> | 1                | 0.1         | 0.02        | -                 | -               |
| <i>Poids relatifs tirés de la variation des paramètres</i> | 1                | 10          | 7.5         | 0.0015            | 3               |
| <b><i>Poids relatifs minimaux</i></b>                      | <b>1</b>         | <b>0.05</b> | <b>0.05</b> | <b>0.000001</b>   | <b>0.05</b>     |
| <b><i>Poids relatifs maximaux</i></b>                      | <b>1</b>         | <b>1</b>    | <b>1</b>    | <b>0.0001</b>     | <b>1</b>        |

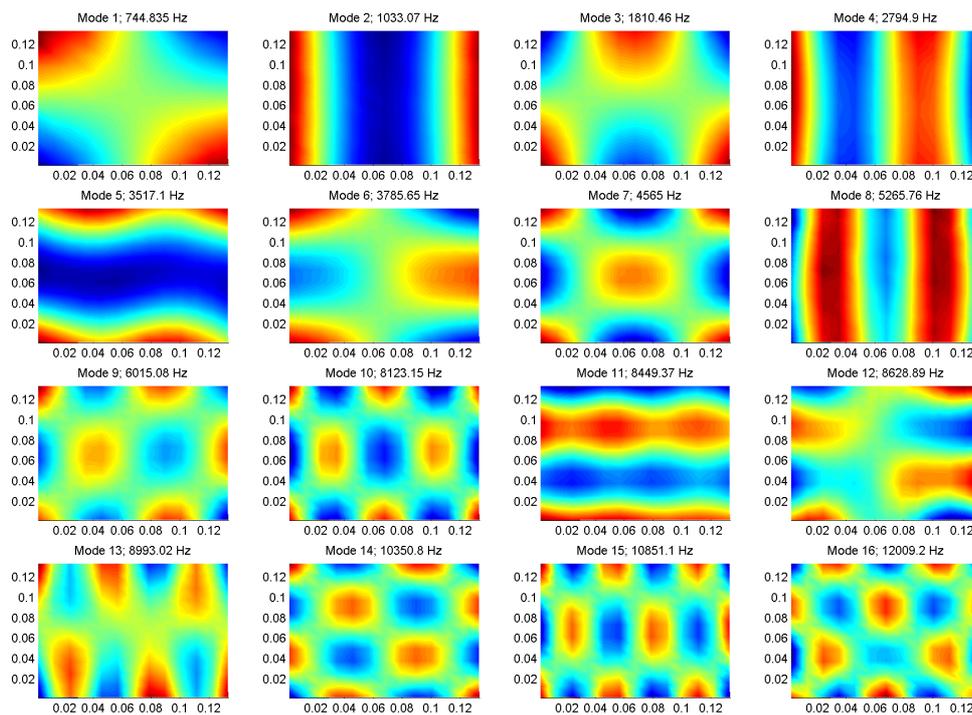
**Tableau 4.7 : Estimation des poids des fonctions d'erreur modales**

On constate rapidement que l'ordre de grandeur des incertitudes expérimentales et des variations des normes dans des cas purement numériques ne sont pas du tout comparables et que par conséquent ces normes peuvent être très fortement influencées par des incertitudes raisonnables dans les valeurs expérimentales. Ainsi, on peut considérer que les poids des normes doivent vraisemblablement rester dans la plage établie au Tableau 4.7. Plus les formes modales mesurées sont précises (au sens de la corrélation avec un modèle d'éléments finis), plus les normes d'erreur basées sur la forme des modes peuvent être pondérées fortement, augmentant ainsi la précision et la rapidité de convergence des paramètres les moins sensibles

comme le coefficient de Poisson  $\nu_{12}$  et les modules de cisaillement transverse  $G_{23}$  et  $G_{31}$ . Toutefois, une surpondération de ces normes, lorsque la précision des valeurs modales expérimentales ne le permet pas, peut entraîner une instabilité de l'algorithme d'identification. A ce stade des développements, on choisira donc par « défaut » les valeurs de pondération minimales spécifiées dans Tableau 4.7.

#### 4.4.5 Implantation MATLAB de la méthode d'identification

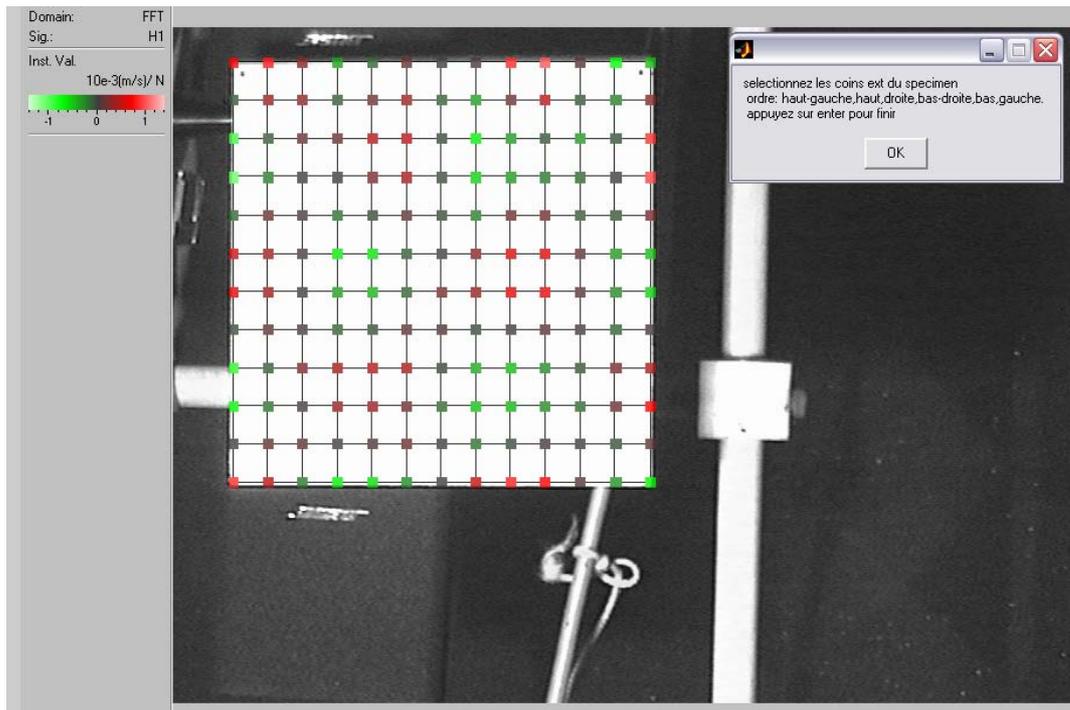
La méthode d'identification développée ici se base essentiellement sur la fonction de la librairie MATLAB Optimization Toolbox d'optimisation sans contraintes de type Levenberg-Marquardt avec évaluation des gradients par différences finies (évaluation des dérivées que quand cela est nécessaire). La majorité du développement de la méthode a porté sur le calcul de la fonctionnelle d'erreur modale et donc sur la comparaison des valeurs modales numériques et expérimentales.



**Figure 4.15: Modes mesurés sur plaque carbone – époxy UD 135 × 135 × 8 mm et traitées par le programme de « curve fitting » modal Me'Scope**

Avant même le calcul des normes modales, les données modales expérimentales, préalablement traitées par curve fitting dans le logiciel Me'Scope (Figure 4.15), doivent être importées dans l'environnement MATLAB et le maillage expérimental doit être converti dans

le même système de coordonnées que le modèle numérique utilisé par la suite pour l'identification. Une routine de traitement (Figure 4.16) permet de charger le modèle modal expérimental depuis un fichier UNV et de définir interactivement les données géométriques nécessaires à la correction des coordonnées sur la base d'une image du maillage expérimental exportée depuis le module de post-traitement du logiciel de mesure PSV200 (Figure 4.16). Le modèle modal expérimental est stocké dans une structure de donnée globale MATLAB de la même manière que les modèles modaux numériques.



**Figure 4.16 : Procédure interactive de chargement et de transformation de coordonnées du modèle modal expérimental depuis un fichier de post-traitement au format « Universal File ».**

Ayant déjà à disposition un ensemble de routines permettant la définition et l'exécution de modèles d'éléments finis MAFE paramétriques, nous avons repris ici le principe de fonctionnement de l'étude paramétrique présentée au paragraphe 4.3.2 .

Cependant, comme les maillages utilisés pour la mesure et pour le modèle numérique sont a priori dissemblables, une stratégie de projection des données modales sur un maillage de référence a été nécessaire pour le calcul des normes d'erreur basées sur la forme des modes propres. Par conséquent, chaque routine de calcul des normes d'erreur basées sur les modes (MAC1, MAC2, NodalCorr2 et SumEcMod) fait appel à une version « interpolée » des procédures de calcul des matrices MAC ou des sommes des écarts de composantes modales.

Ainsi un maillage de référence de dimension variable (par défaut  $20 \times 20$ ) est généré et les interpolations cubiques 2D des composantes normales des déformées modales sont calculées. Dès lors que les modes propres extraits numériquement sont généralement plus nombreux que les modes mesurés et que ceux-ci n'apparaissent pas forcément dans le même ordre que les précédents, la numérotation des modes doit être corrigée avant d'effectuer le calcul des normes d'erreur. Une stratégie de création automatique de paires de modes numériques et expérimentaux, basée sur les termes maximaux de la matrice de corrélation MAC, est utilisée pour assurer la compatibilité des formes modales. De plus, les modes de corps rigide et les modes dans le plan de la coque sont également filtrés pour ne pas perturber l'identification. Les vecteurs modaux interpolés étant alors définis sur le même maillage et numérotés de la même manière, les normes modales peuvent être estimées aisément comme dans leur définition théorique.

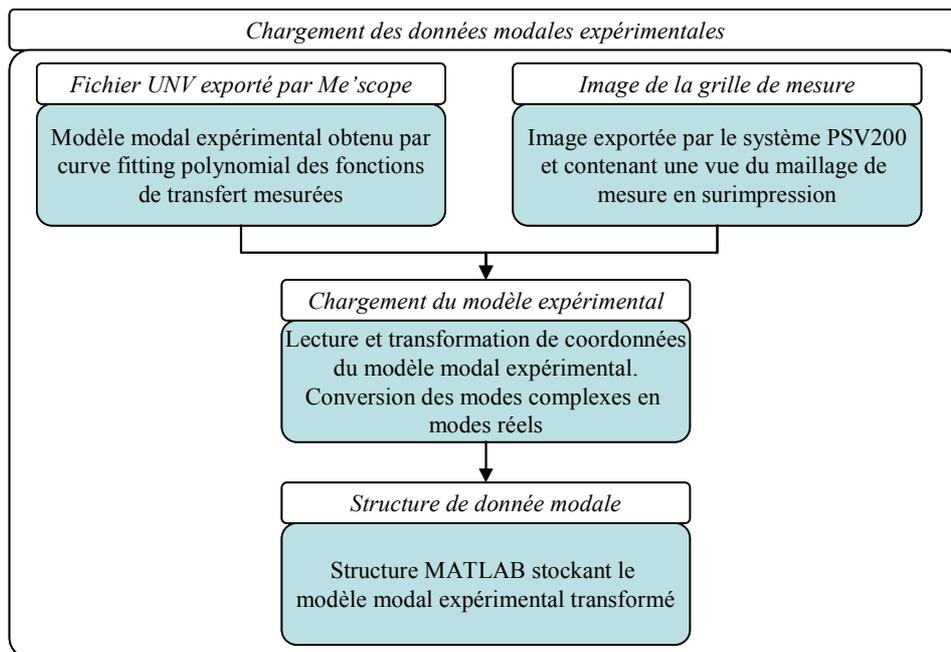


Figure 4.17: Schéma bloc du chargement des données expérimentales pour la procédure d'identification mixte

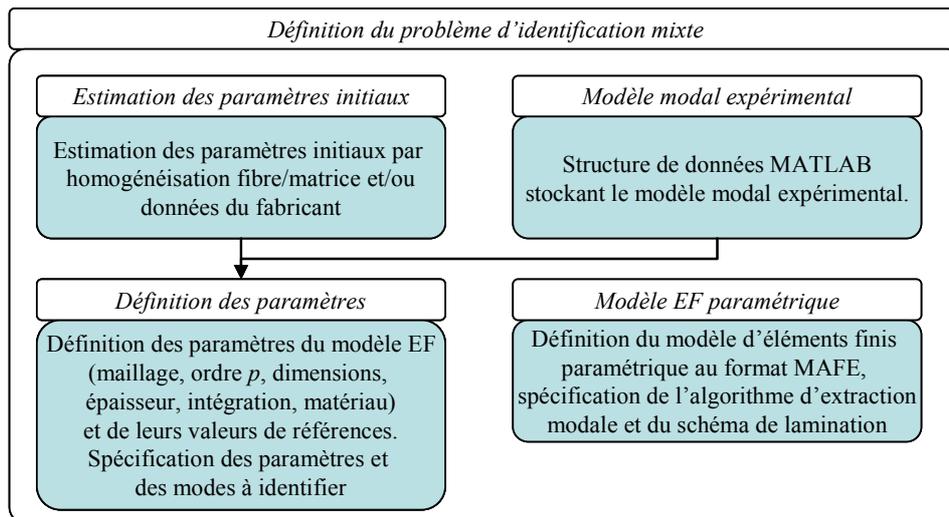


Figure 4.18: Schéma bloc de la définition du problème d'identification mixte

Une fois ces préparatifs exécutés, le déroulement de la procédure d'identification mixte numérique-expérimentale se déroule selon les trois étapes suivantes :

1. Chargement des données expérimentales (Figure 4.17) ;
2. Définition des options d'identification et du modèle d'éléments finis paramétrique : géométrie, paramètres initiaux, stratifié, maillage, ordre  $p$ , etc... (Figure 4.18) ;
3. Identification mixte numérique-expérimentale par moindres carrés non linéaires : algorithme de Levenberg - Marquardt et évaluation itérative des normes d'erreur modales et de leur gradients (Figure 4.19 et Figure 4.20).

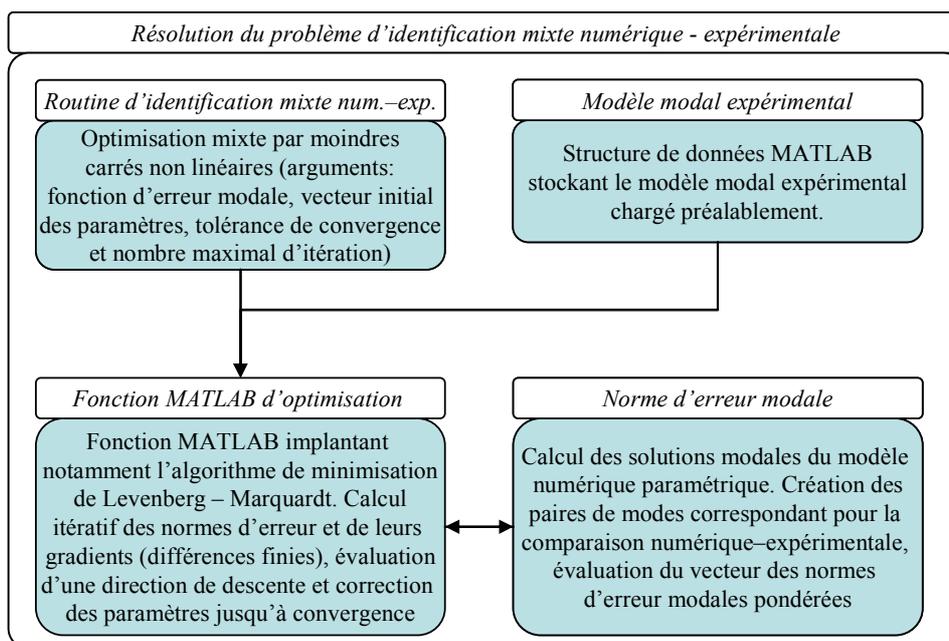


Figure 4.19: Schéma bloc général de la résolution du problème d'identification mixte

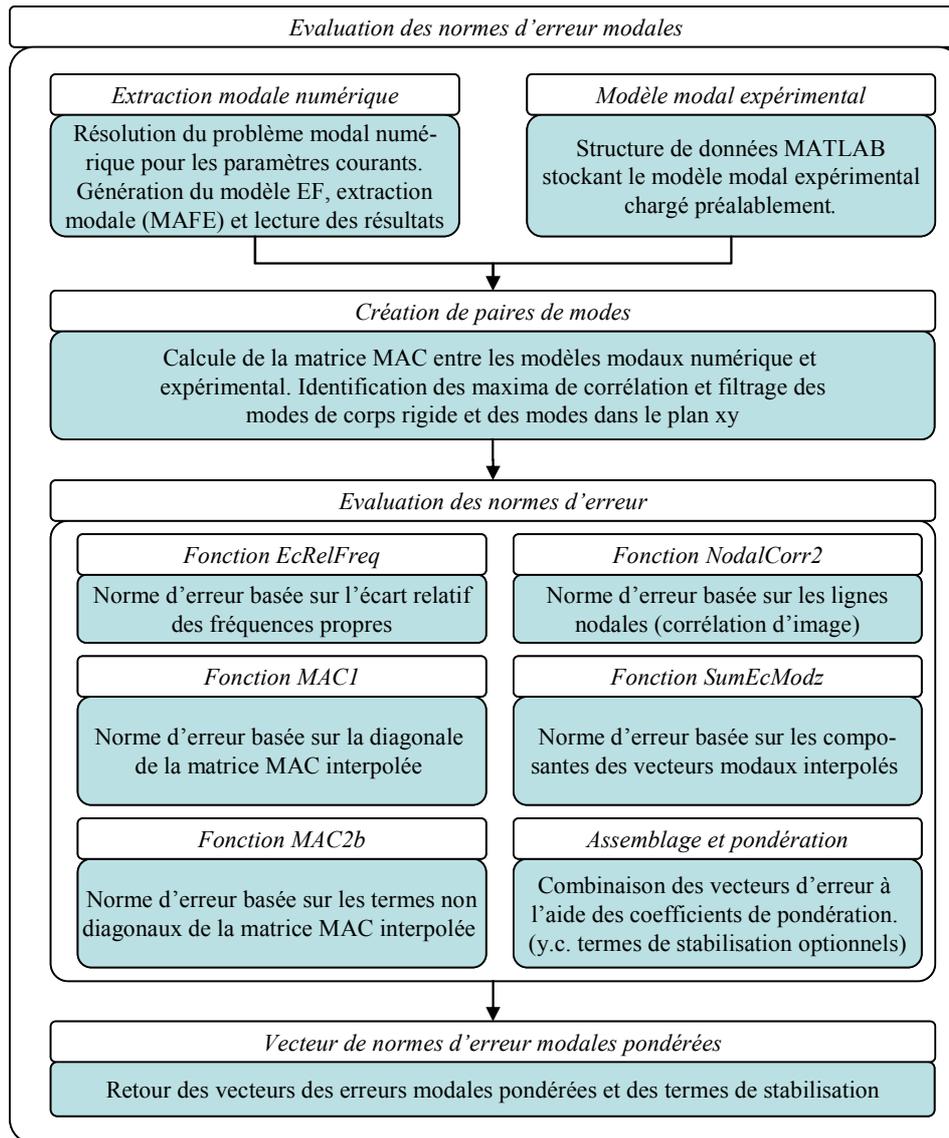


Figure 4.20: Schéma bloc de l'évaluation des normes d'erreurs modales

#### 4.5 Etude de convergence et de robustesse de l'algorithme d'identification

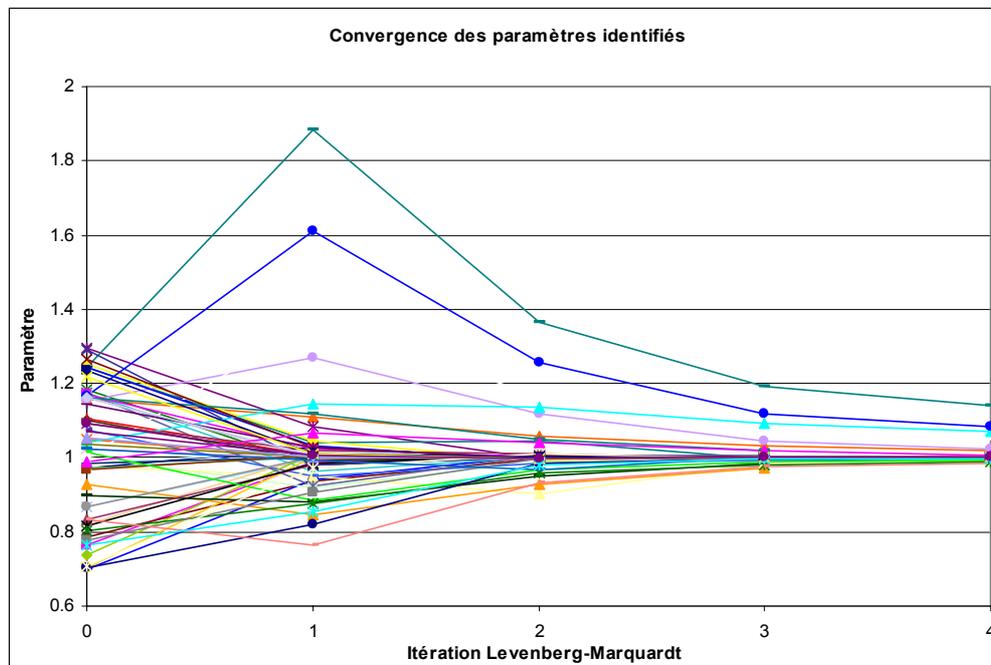
Dans le but d'étudier le comportement de l'algorithme d'identification et des normes d'erreur modales développées, une étude d'identification basée sur des valeurs modales cibles purement numériques a été effectuée. Le cas de la plaque unidirectionnelle UD 150×100×10 mm en fibre de carbone – matrice époxyde a été choisi pour cette étude et l'identification est réalisée à l'aide d'un modèle de 10×7 éléments de coque d'ordre  $p=3$  avec intégration exacte. Les dix premiers modes propres de flexion servent de base à l'identification des paramètres  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $G_{12}$ ,  $G_{23}$ ,  $G_{31}$  et  $\nu_{12}$  dont les valeurs cibles sont fixées respectivement à 110 GPa, 8 GPa, 3 GPa, 2.5 GPa, 3 GPa et 0.28. Un ensemble de dix vecteurs initiaux perturbés de façon

aléatoire de  $\pm 30\%$  sur chaque paramètre est adopté pour exécuter l'identification mixte et tester la robustesse et la convergence des différents paramètres. Le nombre maximal d'itérations de l'algorithme de Levenberg-Marquardt est fixé à 3 (sans compter l'étape initiale) et les tolérances sur le vecteur des paramètres et sur l'erreur résiduelle sont définies à  $1 \times 10^{-4}$  et  $1 \times 10^{-5}$ . Les poids des fonctions d'erreur modales élémentaires (Tableau 4.8) sont fixés au maximum de la plage proposée au paragraphe 4.4.4, dès lors que l'incertitude des modes cibles est ici nulle (modes purement numériques). Enfin, aucun terme de stabilisation n'est ajouté dans la norme d'erreur totale, afin de pouvoir étudier la stabilité des normes d'erreur brutes.

| <b>Norme</b>          | <b>EcRelFreq</b> | <b>MAC1</b> | <b>MAC2</b> | <b>NodalCorr2</b> | <b>SumEcMod</b> |
|-----------------------|------------------|-------------|-------------|-------------------|-----------------|
| <b>Poids Relatifs</b> | 1                | 1           | 1           | 0.001             | 1               |

**Tableau 4.8: Poids des fonctions d'erreur composant la fonctionnelle d'erreur totale**

Après génération aléatoire des 10 vecteurs initiaux, le processus itératif d'identification est lancé pour chaque cas. Les résultats de l'évolution des différents paramètres au cours des itérations sont représentés à la Figure 4.21, où l'enveloppe de convergence des paramètres peut être évaluée globalement. Bien que chargée, cette figure montre que, quel que soit le degré de perturbation, la majorité des paramètres des 10 cas testés convergent rapidement et de manière stable vers leur valeur cible.



**Figure 4.21: Enveloppe de convergence des paramètres relatifs sur les 4 premières itérations de l'algorithme (les trois courbes supérieures correspondent à des paramètres de type coefficient de Poisson  $\nu_{12}$ )**

Dans l'ensemble (Figure 4.22), on relève que les paramètres constitutifs de type modules de Young  $E_1$  et  $E_2$  et module de cisaillement  $G_{12}$  convergent très rapidement avec moins de 1% d'erreur en moyenne à partir de la seconde itération déjà et qu'à la fin des quatre pas, l'erreur résiduelle moyenne de ces paramètres ne dépasse pas 0.03%. Les modules de cisaillement transverse  $G_{23}$  et  $G_{31}$  sont identifiés un peu moins rapidement, l'erreur étant toutefois en moyenne inférieure à 2% dès la seconde itération. Si le coefficient  $G_{31}$  continue de converger rapidement dans les dernières itérations, avec un résidu moyen de moins de 0.1%, le module de cisaillement  $G_{23}$  se rapproche par contre plus lentement de la valeur réelle et comporte une erreur résiduelle de l'ordre de 0.5% à la quatrième itération. Cette constatation peut être aisément expliquée si l'on se souvient des résultats de l'analyse des sensibilités moyennes des paramètres constitutifs pour des plaques unidirectionnelles (chapitre 4.3.3 ).

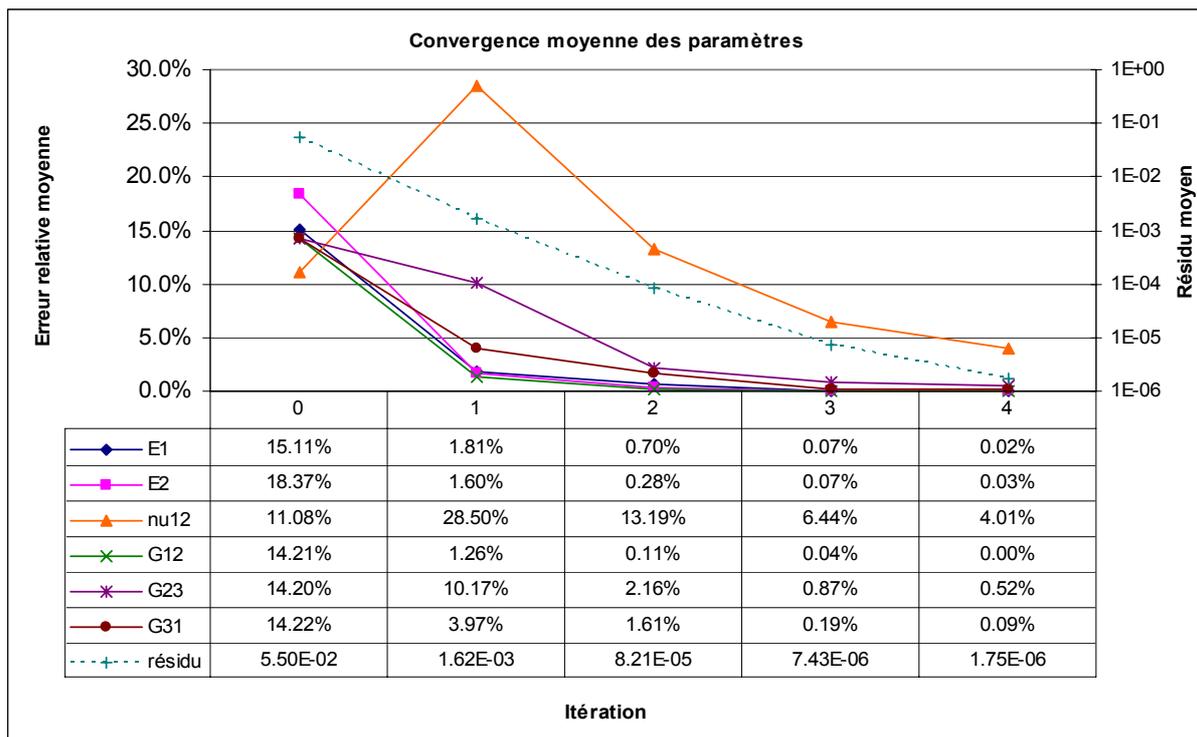


Figure 4.22 : Convergence relative moyenne des paramètres en fonction du nombre d'itérations

Le coefficient de Poisson  $\nu_{12}$  converge clairement plus lentement que les autres paramètres et même diverge parfois fortement lors de la première itération (Figure 4.23 et Figure 4.24), ce qui perturbe sa convergence pour les itérations ultérieures. Cette divergence passagère du coefficient de Poisson  $\nu_{12}$  lors de la première itération intervient en fait lorsque les paramètres

constitutifs principaux ( $E_1$ ,  $E_2$  ou  $G_{12}$ ) sont fortement éloignés par rapport à l'optimum dans des directions opposées. En effet, cette divergence n'est pas du tout observée lorsque tous les paramètres sont sous-estimés ou surestimés par rapport aux valeurs exactes, ce qui tend à prouver qu'en raison de sa faible sensibilité le coefficient de Poisson  $\nu_{12}$  se retrouve parfois « noyé » dans les variations des autres paramètres, la première itération de l'algorithme de Levenberg - Marquardt (itération de type « descente maximale ») conduisant alors à une mauvaise évaluation de la direction et de l'amplitude de la correction de ce facteur. L'ajout d'un terme de stabilisation spécifique au coefficient de Poisson permet cependant de limiter voire de supprimer cet effet.

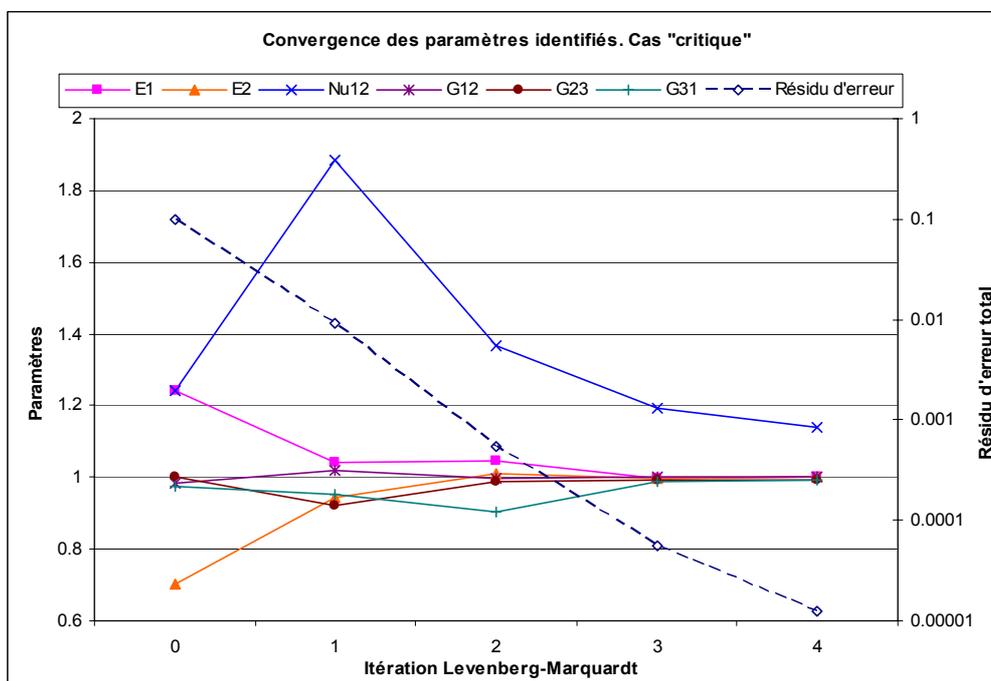
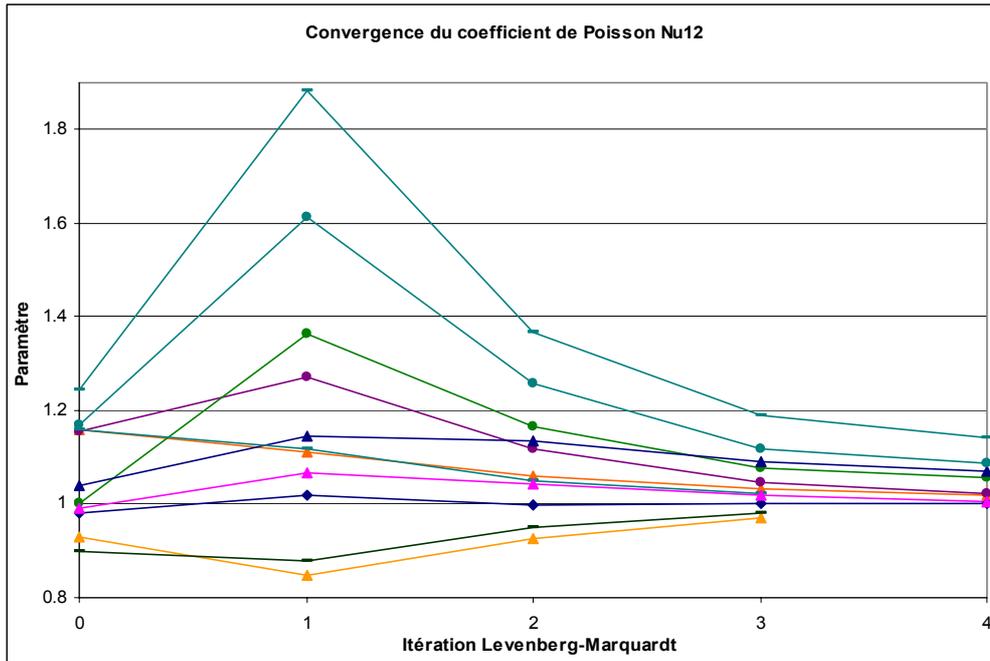


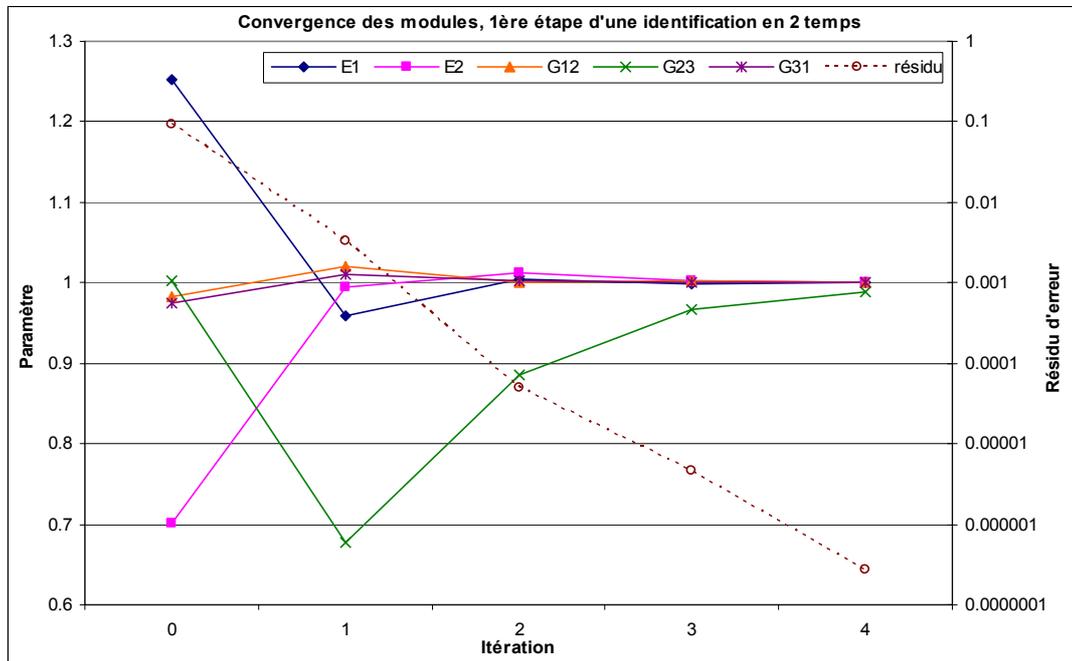
Figure 4.23: Exemple de convergence "critique" du coefficient de Poisson  $\nu_{12}$  quand les paramètres constitutifs principaux (modules de Young  $E_1$  et  $E_2$ ) initiaux sont fortement éloignés et à l'opposé de leur valeur réelle



**Figure 4.24: Graphe de convergence du coefficient de Poisson  $\nu_{12}$  sur les 4 premières itérations de l'algorithme de Levenberg-Marquardt.**

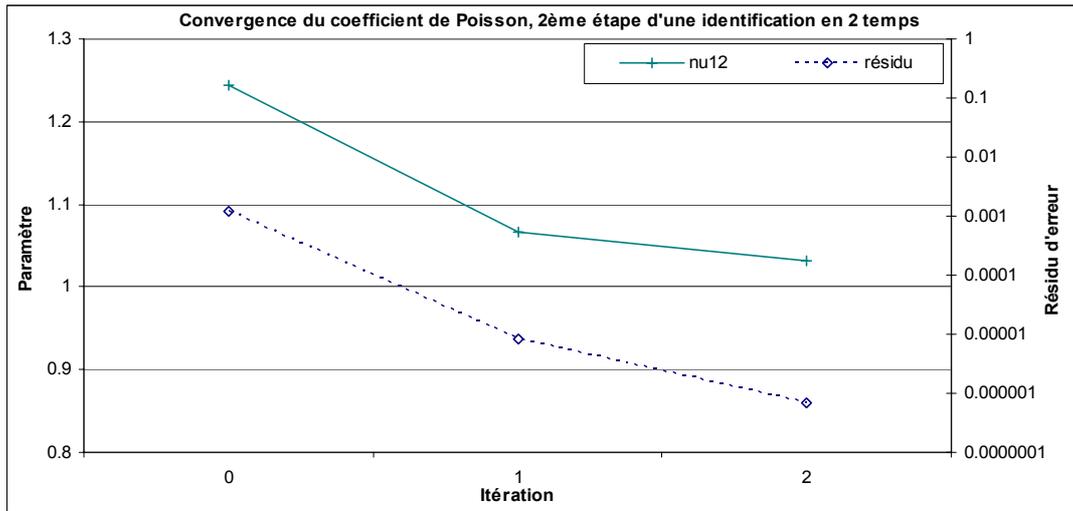
Malgré les problèmes de divergence lors de la première itération, l'identification du coefficient de Poisson  $\nu_{12}$  s'effectue en général relativement correctement, avec 4% d'erreur moyenne à la fin de la quatrième itération. Cependant, il semble que, pour que le coefficient de Poisson commence à converger convenablement, il faut que les autres paramètres se soient déjà pratiquement stabilisés. En effet, si en moyenne, une seule itération suffit pour que l'erreur d'identification des modules  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $G_{12}$  et  $G_{31}$  passe sous la barre des 5%, deux itérations sont encore nécessaires pour que le coefficient de cisaillement transverse  $G_{23}$  atteigne le même niveau de précision alors que le coefficient de Poisson  $\nu_{12}$  n'atteint cette limite en moyenne qu'à la quatrième itération. Fort de cette constatation, il pourrait être intéressant dans certains cas d'identifier en deux étapes les paramètres constitutifs, en commençant tout d'abord par les modules de Young et les modules de cisaillement dans le plan et transverses. Ces modules ayant un effet sur les pulsations propres (si la plaque de test est suffisamment épaisse), la convergence de ces paramètres serait ainsi principalement guidée par la norme d'écart relatif des fréquences propres et, dans une moindre mesure et plus spécifiquement pour  $G_{23}$ , par les normes d'erreur basées sur les formes modales. Une fois la convergence atteinte pour ces paramètres, une seconde identification mixte avec une pondération plus prononcée des normes basées sur les formes des modes propres peut être exécutée pour l'identification du coefficient de Poisson seul. Ainsi, la convergence du

coefficient de Poisson ne serait pas perturbée par les premières itérations et un certain nombre d'évaluations des solutions modales du modèle d'éléments finis pourrait être évité lors du calcul des gradients des normes, réduisant du coup le temps total d'identification.



**Figure 4.25: Exemple d'identification en deux temps des propriétés constitutives. Première étape, détermination des modules de Young et de cisaillement**

Un exemple d'identification en deux temps qui se base sur un cas où l'identification simultanée est « critique » (Figure 4.23) est également présenté (Figure 4.25 et Figure 4.26) et illustre clairement la précision de cette approche. En plus de fournir une erreur maximale de l'ordre de 3% sur le coefficient de Poisson à la 3<sup>ème</sup> itération seulement, cette démarche d'optimisation ne requiert pas plus d'évaluations de solutions modales numériques que l'identification simultanée. Malgré ses avantages, une approche en deux temps n'est toutefois pas réellement conseillée lorsque l'identification simultanée est possible, car celle-ci suppose une influence mutuelle nulle des paramètres constitutifs lors de l'identification, ce qui n'est a priori pas assuré en toute généralité. Cette procédure d'identification en deux temps ne doit être considérée comme une alternative à l'identification directe que si la précision ou la rapidité de convergence d'un paramètre trop faiblement sensible n'est pas insuffisante.



**Figure 4.26: Exemple d'identification en deux temps. Deuxième étape, détermination du coefficient de Poisson**

Lors de nos nombreux tests, il a également été constaté que la rapidité de convergence et la stabilité de la méthode d'identification mixte sont généralement meilleures lorsque l'ensemble de paramètres constitutifs initiaux est soit surestimé, soit sous-estimé, et ceci même lorsque l'écart entre les valeurs initiales et réelles est important (par exemple plus de 50%). Deux cas de convergence des paramètres à identifier pour des vecteurs initiaux sous-estimés de 30% (Figure 4.27) ou surestimés de 30% (Figure 4.28) démontrent que pour une identification purement numérique, l'ensemble des modules de Young et de cisaillement convergent complètement à la première itération déjà. Comme précédemment, le coefficient de Poisson évolue plus lentement, mais l'erreur de ce dernier paramètre est d'environ  $\pm 5\%$  à la troisième itération. Ainsi, au vu de cette propriété relativement surprenante, nous pouvons recommander de sélectionner des valeurs initiales de paramètres systématiquement sous-estimées ou surestimées afin d'accélérer et de fiabiliser au maximum la présente méthode d'identification mixte.

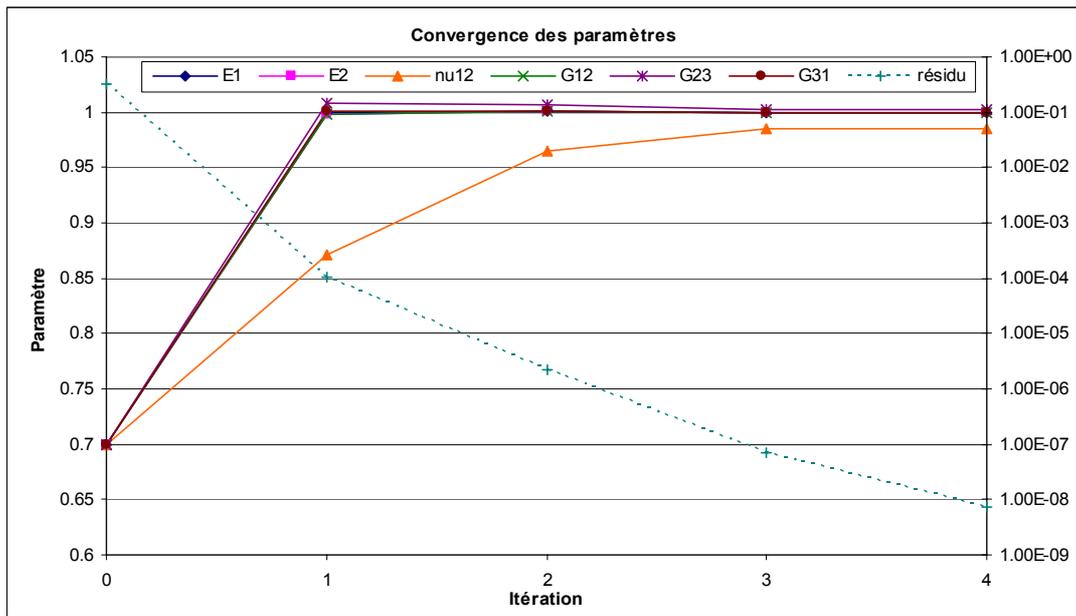


Figure 4.27: Exemple de convergence type lorsque l'ensemble des paramètres initiaux sont sous-estimés

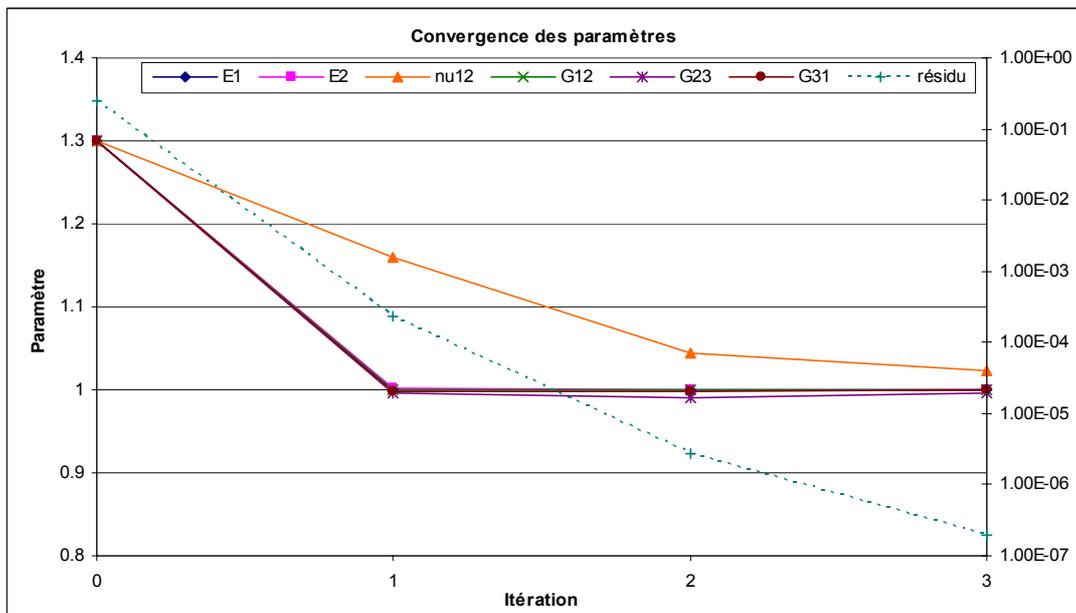


Figure 4.28: Exemple de convergence type lorsque l'ensemble des paramètres initiaux sont sur-estimés

## 4.6 Résumé et commentaires

En résumé, nous avons montré par cette étude que les normes d'erreur modales et l'algorithme d'optimisation développé dans ce travail contribuent à créer une méthode d'identification mixte numérique–expérimentale rapide, stable et précise. L'identification

« purement numérique » des modules de Young et du coefficient de cisaillement dans le plan requiert généralement une ou deux itérations, tandis que les modules de cisaillement transverse exigent au maximum trois itérations pour être identifiés. Le coefficient de Poisson converge par contre plus lentement et dans certains cas particuliers peut même diverger lors de la première itération. Cependant, malgré ce phénomène perturbateur, l'erreur résiduelle sur le coefficient de Poisson est en moyenne inférieure à 4% après la 4<sup>ème</sup> itération.

Dans les cas où le coefficient de Poisson est déstabilisé lors de l'itération initiale (modules  $E_1$  fortement surévalué et  $E_2$  largement sous-estimé ou inversement), une identification séquentielle des modules dans un premier temps et du coefficient de Poisson dans un second temps permet même d'identifier plus précisément ce dernier paramètre que lors d'une identification simultanée.

D'une manière générale, la convergence des paramètres est beaucoup plus précise lorsque ceux-ci sont tous sous-estimés ou surestimés. Il est ainsi recommandé de choisir les paramètres initiaux à environ 80% de leur valeur estimée afin de garantir une convergence rapide et stable dans la majorité des cas.



## Chapitre 5 Validation et exemples

Dans cette dernière section, plusieurs exemples d'identification des propriétés élastiques de plaques réelles en matériaux composites stratifiés sont présentés dans le but d'illustrer l'application de la méthode d'identification développée et valider l'approche par comparaison des paramètres identifiés aux valeurs obtenues par des tests statiques classiques.

### 5.1 *Résumé de la méthode d'identification mixte proposée*

Avant de commencer, nous rappelons d'abord le déroulement concret de la démarche d'identification mixte numérique-expérimentale proposée :

#### 1. *Mesure modale du spécimen de test*

- a. *Sélection du spécimen*
- b. *Préparation du spécimen*
- c. *Optimisation de l'excitation acoustique*
- d. *Mesures dynamiques*
- e. *Extraction modale par « Curve Fitting »*

#### 2. *Identification mixte numérique-expérimentale*

- a. *Importation du modèle modal expérimental*
- b. *Estimation des propriétés constitutives*
- c. *Paramétrisation d'un modèle d'éléments finis de coque PSDT du spécimen*
- d. *Définition du problème d'identification*
- e. *Choix des poids des normes d'erreur*
- f. *Exécution de l'algorithme d'optimisation*

## 5.2 Objectifs et démarche

A ce stade du développement, la méthode d'identification mixte numérique-expérimentale des propriétés constitutives de stratifiés composites, basée sur les fréquences propres et modes propres de plaques stratifiées, est complètement développée sur le plan de la théorie et de l'implantation. Cependant, malgré des résultats d'identification numérique très encourageants, cette méthode doit encore faire ses preuves dans des applications concrètes avant de pouvoir être considérée comme validée. Afin de vérifier la fiabilité de la technique d'identification, une comparaison rigoureuse entre les paramètres constitutifs identifiés et les constantes d'élasticité mesurées à l'aide de tests statiques classiques (traction, flexion, torsion, ...) doit être effectuée (Figure 5.1). Le but de ce chapitre est ainsi de valider la méthode d'identification mixte par rapport à des mesures statiques des modules  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $G_{12}$ ,  $G_{23}$ ,  $G_{13}$  et du coefficient de Poisson  $\nu_{12}$  de plusieurs types de stratifiés composites courants.

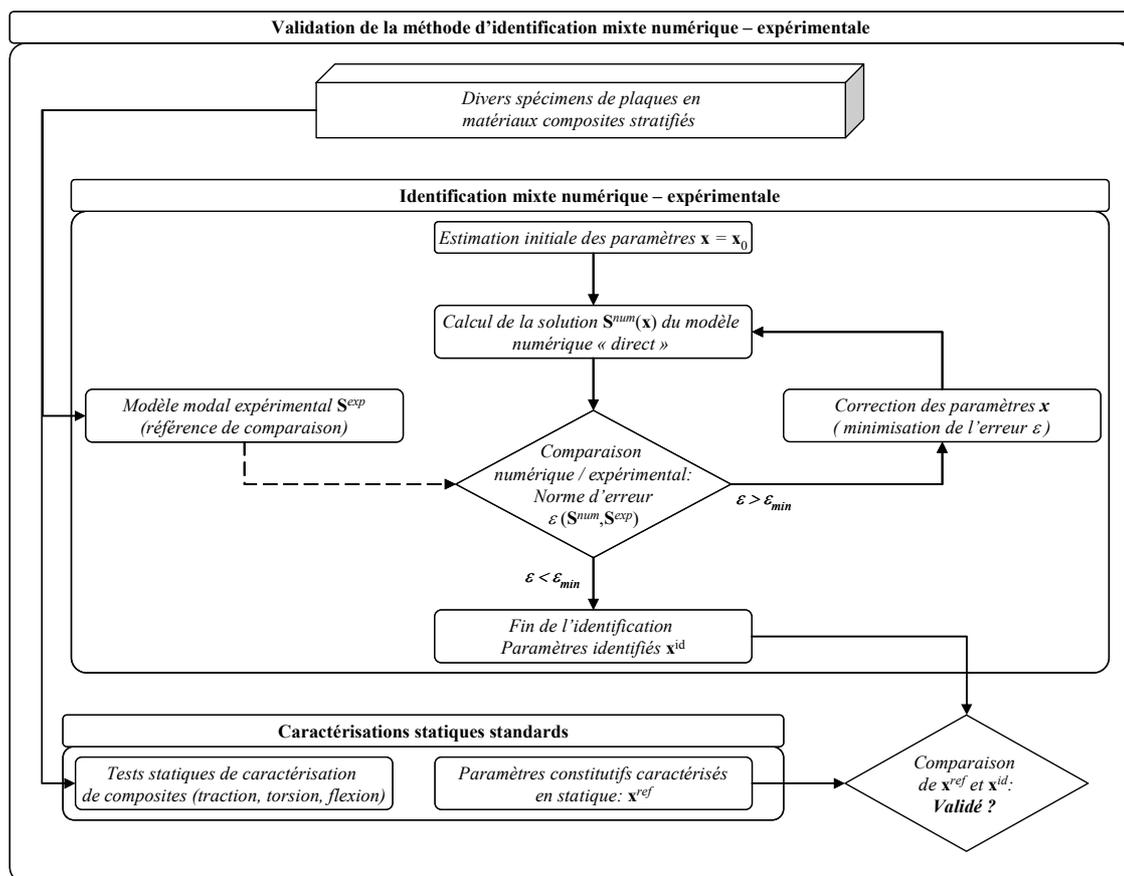


Figure 5.1: Démarche de validation de la procédure d'identification mixte numérique-expérimentale par comparaison avec des tests statiques classiques

**Remarque :**

Les coefficients de pondération des différentes normes d'erreur étant des paramètres très empiriques, un grand nombre de tests d'identification de spécimens réels ont été effectués afin de déterminer les coefficients de pondération présentés dans le Tableau 5.1 et qui offrent dans la majorité des cas un bon compromis entre vitesse et stabilité de convergence. Ces valeurs de pondération sont donc conseillées (par défaut) et ont été utilisées pour toutes les études qui suivent (sauf mention contraire).

| Norme        | EcRelFreq | MAC1 | MAC2 | NodalCorr2         | SumEcMod |
|--------------|-----------|------|------|--------------------|----------|
| <i>Poids</i> | 1         | 0.05 | 0.1  | $1 \times 10^{-6}$ | 0.1      |

**Tableau 5.1: Pondération conseillée des normes d'erreurs**

### 5.3 **Plaque fibre de verre - polypropylène**

#### 5.3.1 **Spécimen testé**

La première série de validation a porté sur une plaque à plis croisés  $(0^\circ, 90^\circ)_{4s}$  à base de pré-imprégnés thermoplastiques de type polypropylène renforcés de tissus 4:1 de fibres de verre (Twintex<sup>®</sup> Fabric 4:1 de Vetrotex<sup>®</sup>, France). Cette plaque de dimension  $150 \times 59 \times 10$  mm a été fabriquée au LMAF / EPFL par un procédé de pressage à chaud. Ses rapports d'aspect  $a/b$  et d'épaisseur  $a/h$  sont respectivement 2.54 et 15, ce qui signifie notamment que ce spécimen peut être considéré comme suffisamment épais pour espérer déterminer les modules de cisaillement transverse lors de l'identification mixte. Les tests de contrôle de qualité usuels ont été pratiqués afin de s'assurer de la bonne uniformité de l'épaisseur de la plaque ainsi que du faible taux de vide du composite.

L'analyse modale de cette plaque a été effectuée sur une plage de fréquence de 1 à 12 kHz sur un maillage expérimental de  $12 \times 8$  points de mesure. Les transformées de Fourier mesurées sont définies sur 3200 lignes et une moyenne de 6 mesures par point est réalisée pour augmenter le rapport signal-bruit. Le haut-parleur BOSE<sup>®</sup> Cube Speaker servant à l'excitation est décalé de 74 mm en  $x$  et 40 mm en  $y$  par rapport au centre de la plaque (Figure 5.2), comme spécifié par la procédure d'optimisation de la puissance d'excitation acoustique.

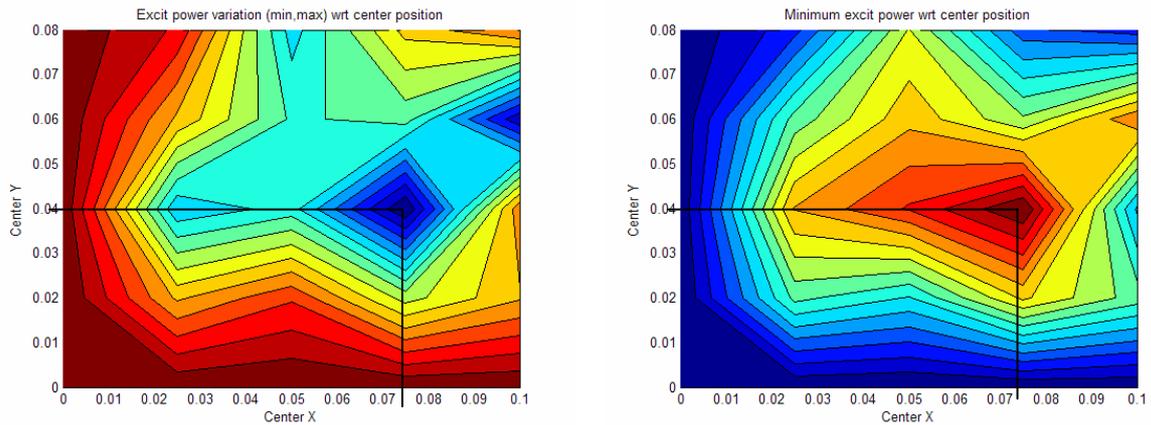


Figure 5.2: Optimisation de la position du haut-parleur pour la plaque Twintex  $(0^\circ, 90^\circ)_{4s}$

### 5.3.2 Mesures modales

Le spectre moyen des fonctions de transfert mesurées est représenté à la Figure 5.3, où l'on identifie 11 pics de résonance ainsi qu'une zone de bruit systématique autour de 2.5 kHz, dont la source provient d'une résonance ou d'un jeu d'ajustement d'un élément optique interne au vibromètre.

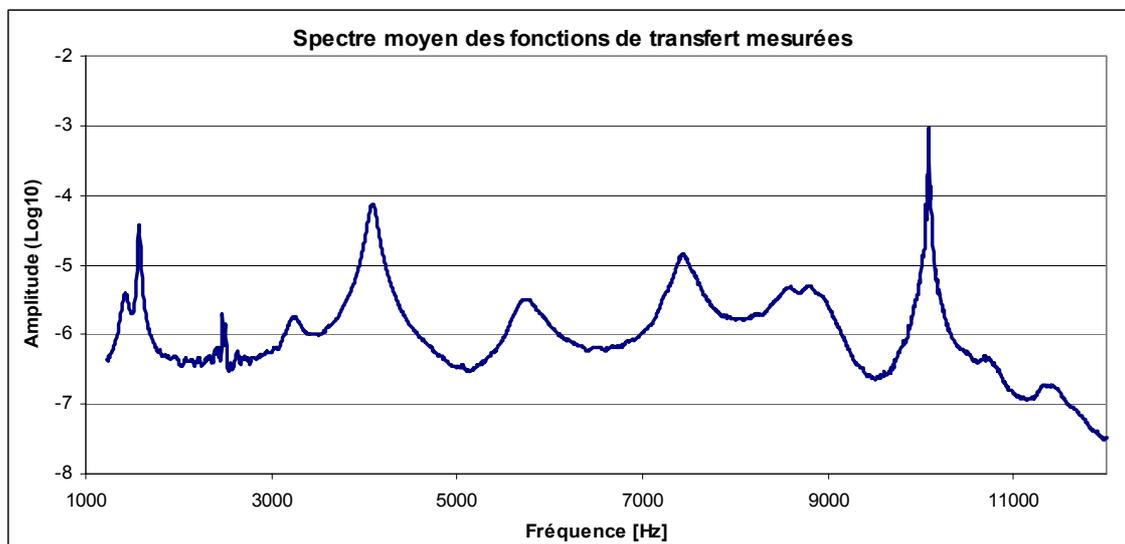
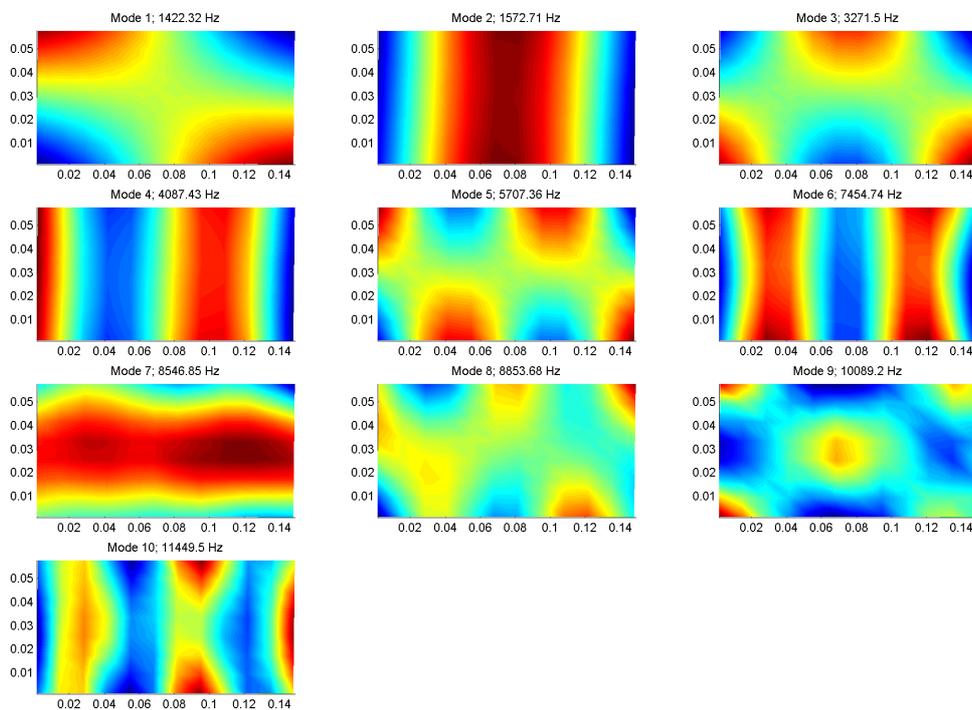


Figure 5.3: Spectre d'amplitude moyen des fonctions de transfert mesurées sur la plaque Twintex  $(0^\circ, 90^\circ)_{4s}$

La très forte influence mutuelle de certains pics de résonance est ici évidente et la procédure d'extraction modale par « curve fitting » polynomial est essentielle pour déterminer précisément les pulsations propres et les formes des modes propres proches. Ce problème est

dû ici essentiellement à l'important amortissement interne inhérent à la matrice thermoplastique polypropylène du composite Twintex, ce qui produit des pics de résonance relativement larges et amplifie l'influence mutuelle des modes assez proches. Les 10 modes qui ont pu être identifiés avec un degré suffisant de qualité sont présentés dans la Figure 5.4. Un léger décalage angulaire est toutefois présent entre le maillage de mesure et la géométrie du spécimen, ce qui se voit assez clairement sur la forme des trois premiers modes. Cette légère erreur d'alignement a été corrigée en appliquant une rotation au maillage expérimental, de telle sorte que les modes se retrouvent correctement alignés par rapport aux directions  $x$  et  $y$  du modèle d'éléments finis servant à l'identification.



**Figure 5.4: Modes propres extraits par curve fitting polynomial depuis le modèle fréquentiel expérimental**

Les graphes de phase indiquent que certains modes extraits du modèle fréquentiel par curve fitting polynomial sont malgré tout fortement complexes, avec parfois une grande distribution de phase sur les différents points. Ainsi, même si la technique de curve fitting permet d'identifier des modes très proches ou hautement amortis, la qualité de ceux-ci est tout de même légèrement réduite par rapport aux modes bien isolés. Dès lors que certains modes mesurés ici sont fortement complexes et que la procédure d'identification nécessite des modes de référence réels, ces modes complexes ont été convertis (automatiquement dans la routine d'importation MATLAB des fichiers de mesures) sous forme réelle en ne conservant que

l'amplitude, avec son signe, correspondant à la phase moyenne du mode complexe mesuré (Figure 5.5).

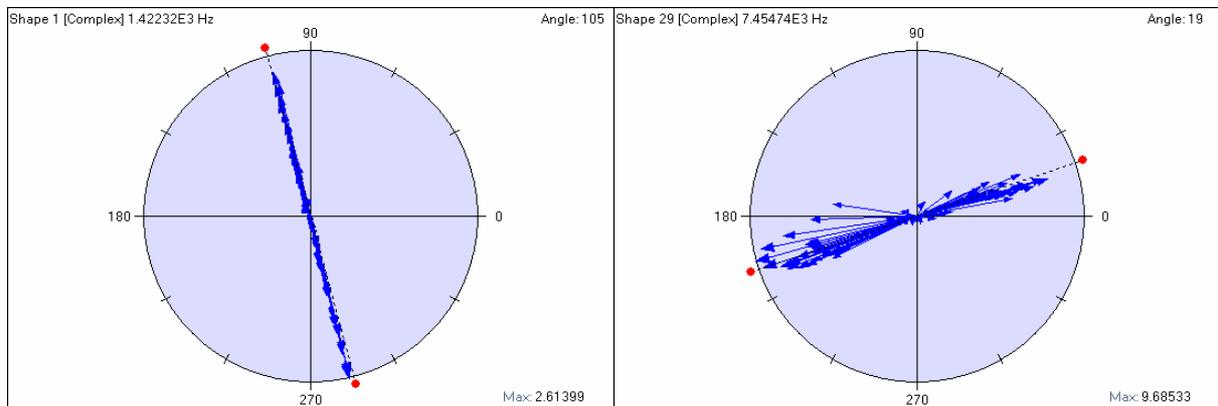


Figure 5.5: Graphes de phase des modes mesurés n° 1 et n° 6

La matrice MAC (Figure 5.6) des modes réels est de très bonne qualité car les termes non diagonaux sont réellement négligeables, ce qui prouve ainsi l'excellente orthogonalité des modes propres mesurés servant de base à l'identification des paramètres constitutifs.

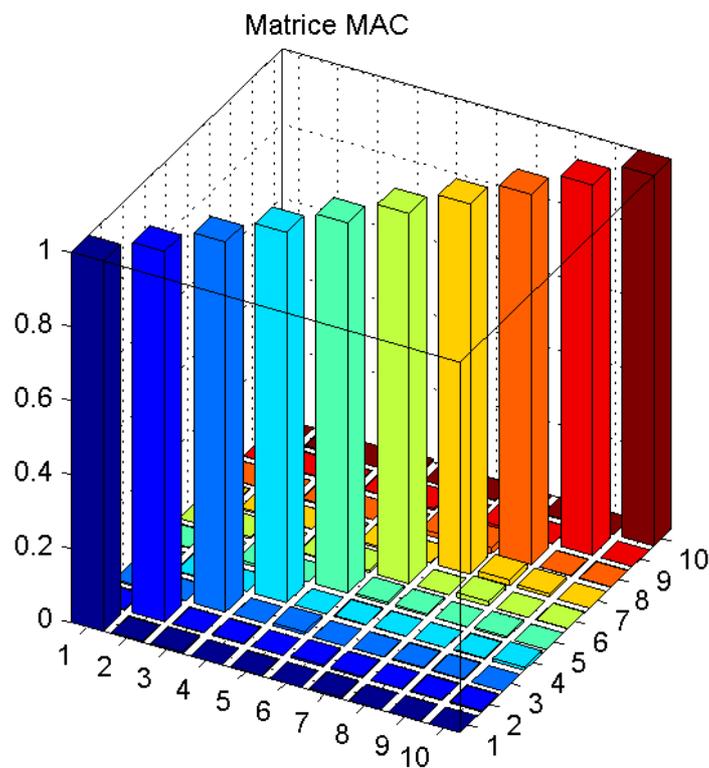


Figure 5.6: Matrice MAC des modes mesurés de la plaque Twintex (0,90)<sub>4s</sub>

### 5.3.3 Identification mixte numérique-expérimentale

L'identification est exécutée sur la base des dix modes extraits, afin de minimiser la norme d'erreur totale pondérée avec les coefficients conseillés dans le Tableau 5.1. Le modèle d'éléments finis est constitué de  $12 \times 5$  éléments quadratiques lagrangiens de coque PSDT d'ordre  $p = 3$  avec intégration numérique exacte.

#### Identification « par couche »

Une identification des propriétés constitutives « par couche » est d'abord réalisée, en choisissant des valeurs initiales des paramètres fortement sous-estimées ( $E_1=16.8$  GPa,  $E_2=5.6$  GPa,  $G_{12}=G_{23}=G_{31}=1.4$  GPa,  $\nu_{12}=0.21$ ). Le schéma de stratification en plis croisés à 16 couches est spécifié dans le modèle d'éléments finis paramétrique et la masse volumique du matériau est fixée à  $1629 \text{ kg/m}^3$ . Le processus d'identification mixte est exécuté (durée de calcul d'environ 30 minutes). Le déroulement de l'algorithme et l'évolution des paramètres constitutifs durant la procédure d'identification sont présentés dans le Tableau 5.2. La convergence des paramètres relatifs à la solution (3<sup>ème</sup> itération) est également présentée graphiquement dans la Figure 5.7 et les modes identifiés sont illustrés dans la Figure 5.8.

| <i>Paramètre</i>       | <i>Itération 0</i> | <i>Itération 1</i> | <i>Itération 2</i> | <i>Itération 3</i> |
|------------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| $E_1$ (GPa)            | 16.80              | 25.17              | 23.80              | 23.87              |
| $E_2$ (GPa)            | 5.60               | 10.85              | 11.84              | 11.64              |
| $\nu_{12}$ (-)         | 0.21               | 0.21               | 0.23               | 0.25               |
| $G_{12}$ (GPa)         | 1.40               | 2.61               | 2.65               | 2.64               |
| $G_{23}$ (GPa)         | 1.40               | 2.50               | 2.55               | 2.53               |
| $G_{13}$ (GPa)         | 1.40               | 2.60               | 2.78               | 2.88               |
| <i>résidu d'erreur</i> | 0.55297            | 0.00137            | 0.00090            | 0.00089            |

**Tableau 5.2: Convergence de l'algorithme d'identification et évolution des paramètres**

La matrice MAC des modes identifiés par rapport aux modes mesurés (Figure 5.9) indique que la corrélation des modes numériques et expérimentaux est bonne (termes diagonaux de la matrice MAC supérieur à 0.8), à l'exception du 8<sup>ème</sup> mode mesuré qui ne correspond pas parfaitement à son équivalent simulé (9<sup>ème</sup> mode de flexion calculé) puisque leur norme de corrélation MAC est d'environ 0.75. Malgré une qualité des modes propres mesurés qui n'est pas réellement optimale, l'identification des formes modales et la création automatique de paires de modes se comporte correctement et la convergence des paramètres constitutifs reste rapide et stable.

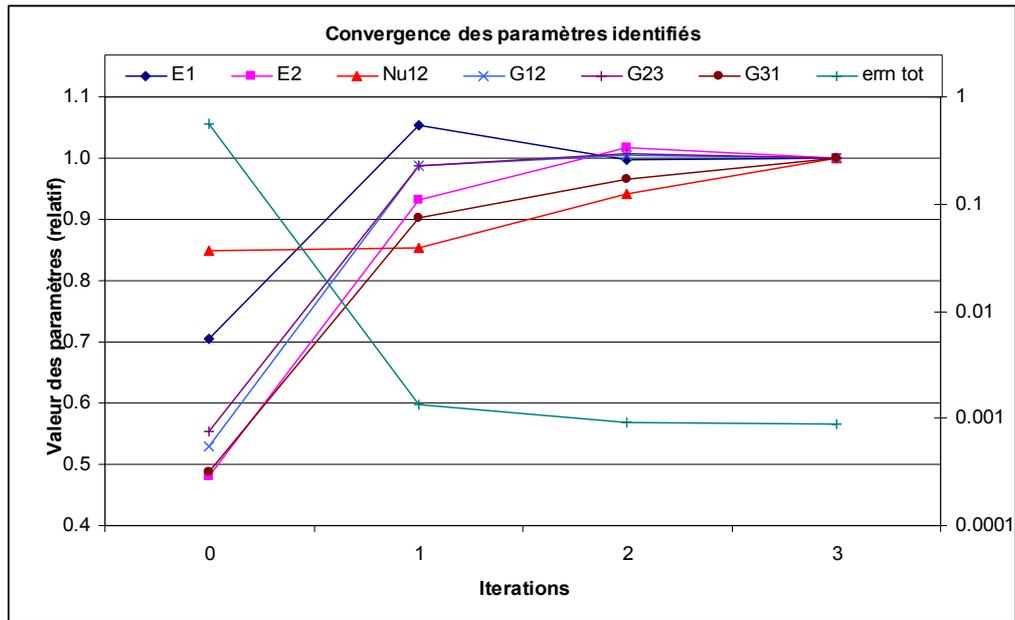


Figure 5.7: Graphe de convergence des paramètres constitutifs lors de l'identification "par couche" de la plaque Twintex  $(0,90)_{4s}$

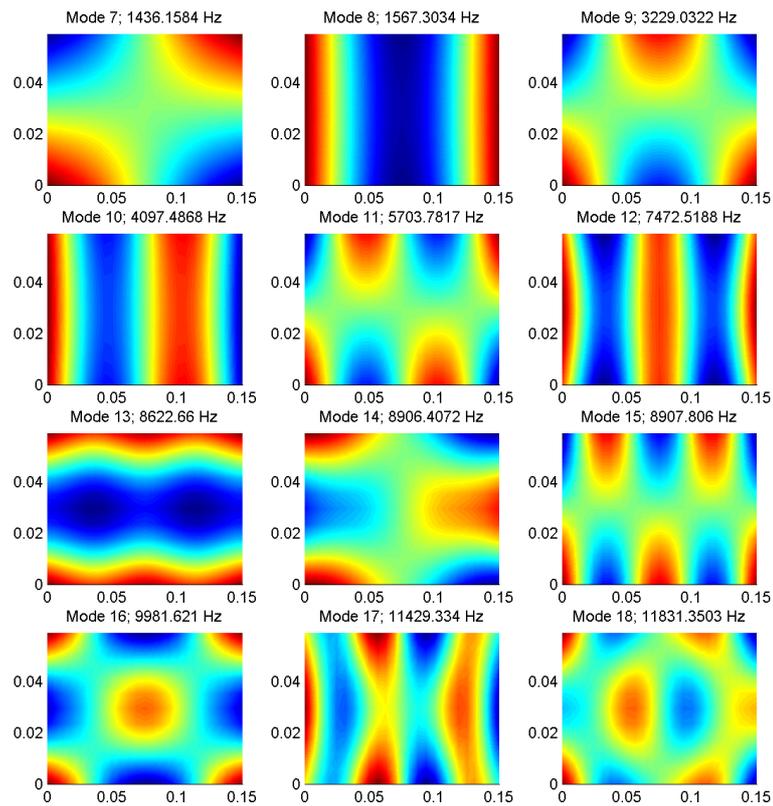


Figure 5.8: Modes propres identifiés de la plaque Twintex  $(0,90)_{4s}$  (identification par couche)

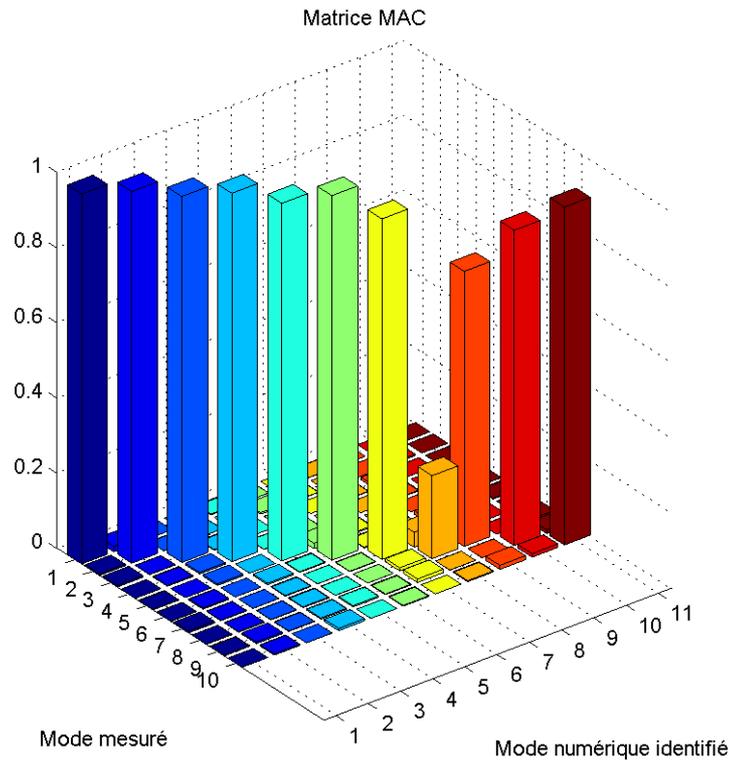


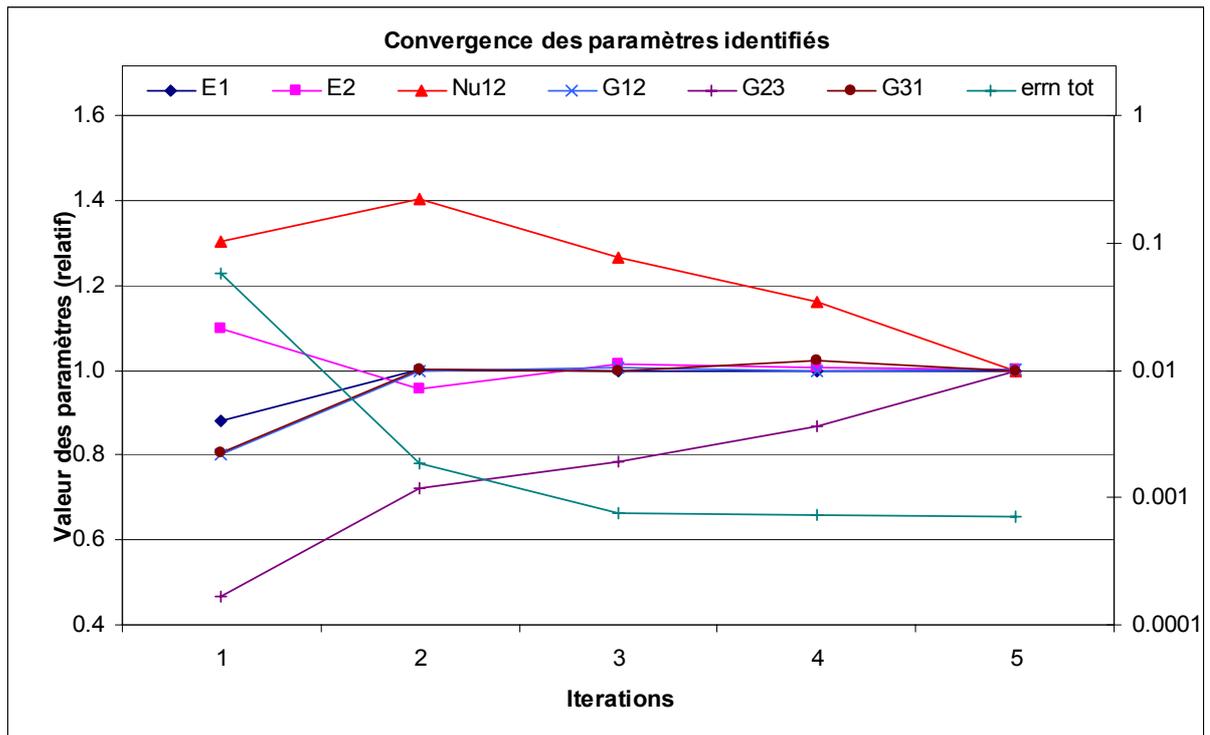
Figure 5.9: Matrice MAC des modes mesurés et identifiés de la plaque Twintex  $(0,90)_{4s}$  (matériau stratifié identifié par couche)

#### Identification « homogénéisée »

Dans un second temps, les propriétés orthotropes équivalentes homogénéisées du stratifié sont identifiées à l'aide de la même procédure d'optimisation. Le seul changement par rapport à la démarche précédente est qu'un schéma de stratification constitué d'une seule couche à  $0^\circ$  est introduit dans le modèle d'éléments finis paramétrique. Le Tableau 5.3 et la Figure 5.10 illustrent la convergence des paramètres constitutifs.

| Paramètre       | Itération 0 | Itération 1 | Itération 2 | Itération 3 | Itération 4 |
|-----------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| $E_1$ (GPa)     | 16.80       | 19.09       | 19.09       | 19.05       | 19.09       |
| $E_2$ (GPa)     | 16.80       | 14.65       | 15.52       | 15.38       | 15.31       |
| $\nu_{12}$ (-)  | 0.25        | 0.26        | 0.24        | 0.22        | 0.19        |
| $G_{12}$ (GPa)  | 2.10        | 2.61        | 2.63        | 2.61        | 2.62        |
| $G_{23}$ (GPa)  | 2.10        | 3.26        | 3.54        | 3.91        | 4.51        |
| $G_{13}$ (GPa)  | 2.10        | 2.61        | 2.61        | 2.68        | 2.61        |
| résidu d'erreur | 0.05823     | 0.00187     | 0.00076     | 0.00073     | 0.00070     |

Tableau 5.3 : Convergence des paramètres lors de l'identification d'un matériau orthotrope homogène équivalent au stratifié mesuré



**Figure 5.10: Graphe de convergence des paramètres constitutifs du matériau orthotrope homogène identifié**

On peut constater que la convergence des propriétés constitutives lors de l'identification « homogénéisée » est bien plus lente que pour l'identification « par couche », surtout pour le module de cisaillement transverse  $G_{23}$  et le coefficient de Poisson  $\nu_{12}$ . Ces deux paramètres évoluent de concert de manière relativement régulière avant de se stabiliser à partir de la 5<sup>ème</sup> itération. D'après d'autres essais d'identification, il semble que le coefficient de Poisson  $\nu_{12}$  varie tant que le module  $G_{23}$  n'a pas convergé. La robustesse de l'algorithme d'identification s'avère excellente, car la méthode converge même avec des paramètres initiaux très différents des propriétés constitutives réelles (plus de 50% d'écart sur le module  $G_{23}$  par exemple).

Au niveau de la forme de modes propres identifiés, le comportement de l'identification « homogénéisée » est identique à la méthode « par couche », le 8<sup>ème</sup> mode mesuré étant toujours en erreur même si le terme de corrélation MAC (Figure 5.11) correspondant s'est légèrement accru. On relèvera que, même avec cette perturbation d'origine expérimentale, l'algorithme d'identification converge correctement et la méthode de création automatique des paires de modes numériques et expérimentaux n'est pas mise en défaut par ces erreurs de mesure.

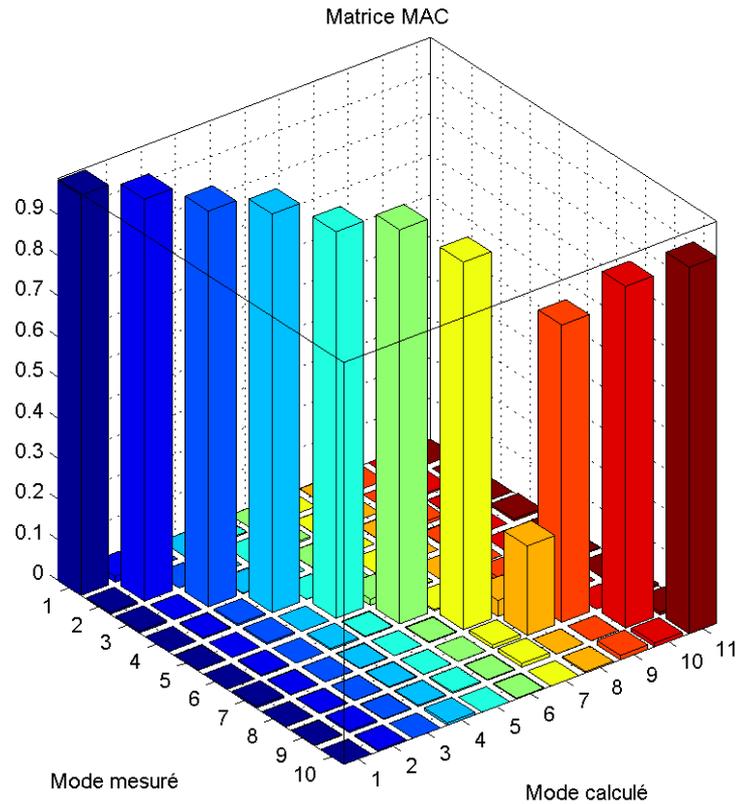


Figure 5.11: Matrice MAC des modes mesurés et identifiés (matériau orthotrope homogène) de la plaque Twintex  $(0^\circ, 90^\circ)_{4s}$

### 5.3.4 Fréquences propres identifiées

A la fin des deux procédures d'optimisation, les pulsations propres identifiées sont très proches des valeurs mesurées (Tableau 5.4), avec une erreur maximale de l'ordre de  $\pm 1\%$  correspondant aux incertitudes de mesure des pulsations. L'identification des fréquences propres est donc réalisée avec succès dans les deux cas d'identification. En moyenne, l'identification « homogénéisée » fournit des résultats légèrement plus précis que la première méthode « par couche », mais cet écart n'est pas suffisant pour tirer une conclusion sur son éventuelle supériorité.

| N° du mode  | 1     | 2      | 3      | 4     | 5      | 6     | 7     | 8     | 9      | 10     |
|---|-------|--------|--------|-------|--------|-------|-------|-------|--------|--------|
| Fréquences propres mesurées (Hz)                        | 1422  | 1573   | 3272   | 4087  | 5707   | 7455  | 8547  | 8854  | 10089  | 11450  |
| Fréquences propres identifiées (matériau stratifié, Hz) | 1436  | 1568   | 3231   | 4098  | 5707   | 7463  | 8616  | 8888  | 9983   | 11421  |
| Erreurs relatives                                       | 0.98% | -0.30% | -1.25% | 0.26% | -0.01% | 0.11% | 0.81% | 0.39% | -1.05% | -0.25% |

|   |       |        |        |       |       |        |       |       |        |        |
|---|-------|--------|--------|-------|-------|--------|-------|-------|--------|--------|
| <i>Fréquences propres<br/>identifiées<br/>(matériau homogène,<br/>Hz)</i> | 1432  | 1571   | 3234   | 4096  | 5719  | 7445   | 8589  | 8886  | 10022  | 11381  |
| <i>Erreurs relatives</i>  | 0.69% | -0.13% | -1.15% | 0.21% | 0.20% | -0.14% | 0.49% | 0.37% | -0.67% | -0.60% |

**Tableau 5.4 : Fréquences propres mesurées et identifiées (matériau stratifié ou homogène)**

### 5.3.5 Paramètres constitutifs identifiés

Des mesures en flexion trois points de plaques à plis croisés Twintex  $(0^\circ, 90^\circ)_{4s}$  ont été effectuées [57]. Les comparaisons des propriétés constitutives mesurées et identifiées « par couche » sont présentées dans le Tableau 5.5 qui contient également les résultats d’anciennes plaques mesurées en statique (ASTM D3039 et D3518). On observe que les propriétés constitutives identifiées « par couche » avec la méthode mixte numérique-expérimentale correspondent en moyenne relativement bien avec les valeurs mesurées en statique. Par contre, le module de Young  $E_2$  et le coefficient de Poisson  $\nu_{12}$  sont néanmoins surévalués par rapport aux valeurs de référence. Ces difficultés d’identification des propriétés « par couches » de stratifiés à plis croisés proviennent en fait directement du schéma de stratification qui rend les rigidités de flexion en  $x$  et  $y$  quasiment identiques et surtout dépendantes autant de  $E_1$  que de  $E_2$ . Dans le cas de stratifiés à plis croisés, la solution d’optimisation modale ne peut pas être considérée comme unique puisque plusieurs couples de propriétés  $(E_1, E_2)$  peuvent générer les mêmes rigidités de flexion et donc les mêmes pulsations propres. La non-unicité de la solution dans ce cas particulier de stratifié est présentée plus en détail dans le paragraphe traitant de la validation de l’identification mixte sur des plaques épaisses en carbone – époxy (paragraphe 5.5.6 ).

| Test                                 | $E_1$ (GPa)           | $E_2$ (GPa)          | $G_{12}$ (GPa)       | $G_{23}$ (GPa) | $G_{13}$ (GPa) | $\nu_{12}$ (-)         |
|--------------------------------------|-----------------------|----------------------|----------------------|----------------|----------------|------------------------|
| Traction<br>(ASTM D3039 et<br>D3518) | 24.0<br>( $\pm 1.6$ ) | 6.3<br>( $\pm 1.6$ ) | 1.1<br>( $\pm 1.6$ ) | -              | -              | 0.12<br>( $\pm 0.06$ ) |
| Flexion trois points                 | 24.2<br>( $\pm 1.2$ ) | 7.9<br>( $\pm 1.2$ ) | 0.8<br>( $\pm 1.5$ ) | -              | -              | -                      |
| Identification mixte<br>(7.2004)     | 23.9                  | 11.6                 | 2.6                  | 2.5            | 2.9            | 0.25                   |

**Tableau 5.5: Comparaisons des propriétés constitutives des couches du stratifié Twintex  $(0^\circ, 90^\circ)_{4s}$  mesurées en statique et identifiées.**

L'identification homogénéisée du stratifié ne pose par contre pas de problème. Les valeurs des modules<sup>27</sup> de Young  $E_{xx}$  et  $E_{yy}$  mesurés en flexion trois points [57] du composite Twintex  $(0^\circ, 90^\circ)_{4s}$  sont reportées dans le Tableau 5.6, où figurent également les propriétés constitutives, obtenues par homogénéisation FSDT classique [7], des paramètres identifiés sur les couches présentés au Tableau 5.5.

| Test                                   | $E_{xx}$ (GPa)        | $E_{yy}$ (GPa)        | $G_{xy}$ (GPa) | $G_{xz}$ (GPa) | $G_{yz}$ (GPa) | $\nu_{xy}$ (-)         |
|--|-----------------------|-----------------------|----------------|----------------|----------------|------------------------|
| Tests statiques                        | 20.1<br>( $\pm 0.4$ ) | 14.5<br>( $\pm 0.4$ ) | -              | -              | -              | 0.19<br>( $\pm 0.08$ ) |
| Identification homogène directe        | 19.1                  | 15.3                  | 2.6            | 2.6            | 4.5            | 0.19                   |
| Identification par couche homogénéisée | 20.1                  | 15.7                  | 2.7            | -              | -              | 0.17                   |

**Tableau 5.6: Comparaison des propriétés constitutives homogénéisées de la plaque Twintex  $(0^\circ, 90^\circ)_{4s}$**

Au vu des résultats présentés dans le Tableau 5.6, on constate que les propriétés constitutives homogénéisées de la plaque, obtenues par identification mixte numérique-expérimentale, correspondent remarquablement bien avec les valeurs mesurées en statique (flexion trois points), démontrant ainsi l'efficacité de la méthode pour la détermination des modules de flexion de stratifiés à plis croisés. Le coefficient de Poisson  $\nu_{12}$  identifié ici également très proche de la mesure effectuée en statique. En conclusion, ce premier cas de test montre que la méthode d'identification mixte proposée entraîne des résultats fiables malgré des mesures modales perfectibles et un nombre de modes identifiés plutôt réduit (seulement 10 modes propres, dont un de qualité discutable).

<sup>27</sup>Les indices des paramètres correspondent pour des stratifiés à plis croisés aux directions longitudinales  $x$  et transverse  $y$ .

## 5.4 Plaques AS4-PPS et AS4-PEKK

### 5.4.1 Spécimens testés

La seconde série de validations a porté sur des plaques unidirectionnelles relativement minces à base de fibres de carbone à haut module AS4 et à matrice PPS et PEKK. Ces plaques de dimensions respectives  $198 \times 52 \times 3.7$  mm et  $199 \times 52 \times 3.7$  mm ont été fabriquées par pressage à chaud à partir de pré-imprégnés unidirectionnels fournis par la société Cytec. Les rapports d'aspect  $a/b$  et d'épaisseur  $a/h$  de ces plaques sont respectivement de 3.8 et 53, tandis que le ratio  $b/h$  entre la longueur de déformation caractéristique et l'épaisseur est de 14. Ces stratifiés composites sont à classer dans la catégorie des plaques relativement minces, même si, au vu de leur forte orthotropie présumée, les effets de cisaillement transverse peuvent être importants pour les modes d'ordre élevé. La masse volumique des spécimens (masse du réflecteur optique incluse) est de  $1629 \text{ kg/m}^3$  pour le composite AS4-PEKK et de  $1664 \text{ kg/m}^3$  pour la plaque AS4-PPS.

### 5.4.2 Mesures dynamiques et analyse modale

Les mesures modales ont été effectuées sur un maillage de mesure de  $27 \times 7$  points dans une plage de fréquence de 0.5 à 10 kHz, avec excitation acoustique centrée sur un des coins supérieur de la plaque. Les fonctions de transfert mesurées (Figure 5.12 et Figure 5.13) sont extraites par curve fitting polynomial des 16 premiers modes propres de flexion (Figure 5.15 et Figure 5.17). Les matrices MAC (Figure 5.14 et Figure 5.16) et les graphes de phase de ces modes sont bien sur vérifiés pour s'assurer de la qualité des formes modales mesurées.

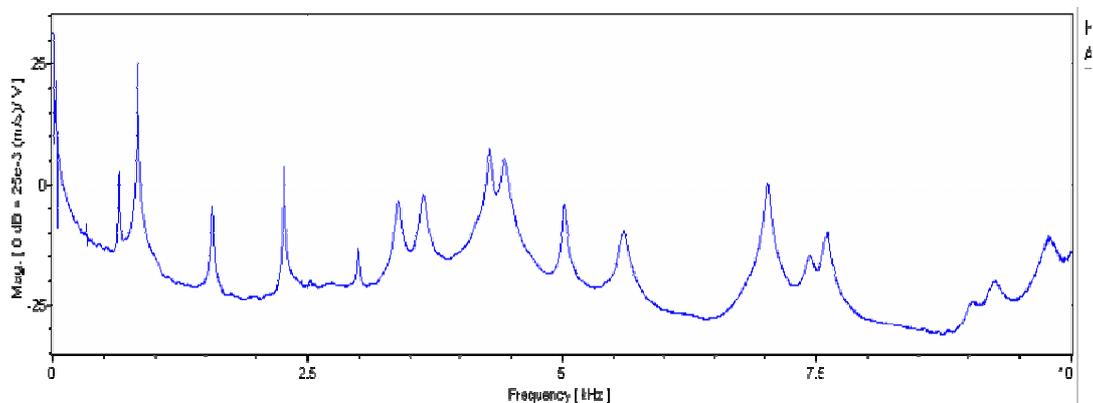
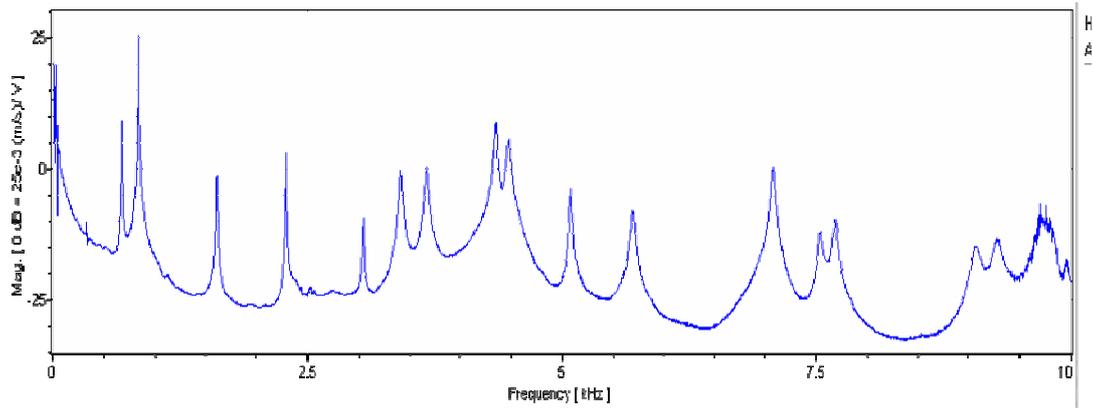


Figure 5.12: Fonction de transfert moyenne de la plaque AS4-PEKK



**Figure 5.13: Fonction de transfert moyenne de la plaque AS4-PPS**

La qualité des fonctions de transfert mesurées est remarquable, avec un grand nombre de modes très peu amortis (environ 16 modes) et d'amplitudes proches, prouvant ainsi l'efficacité de la méthode de mesure modale sans contact. Comme en témoignent les normes MAC, les formes propres mesurées s'avèrent également très nettement orthogonales entre elles, gage une fois encore d'une bonne qualité de mesure et d'une bonne représentativité de la méthode de test. Il faut également noter la présence, dans les deux cas traités, de deux modes particuliers en forme de O et de X (modes 8 et 9) qui n'apparaissent généralement que lorsque les rigidités globales en flexion dans les deux directions  $x$  et  $y$  sont proches du cas de la plaque de Poisson (chapitre 1.2.2 ). Ces modes n'apparaissant pas en général lorsque le vecteur des paramètres constitutifs est quelconque, leur présence pourraient éventuellement déstabiliser l'algorithme d'identification.

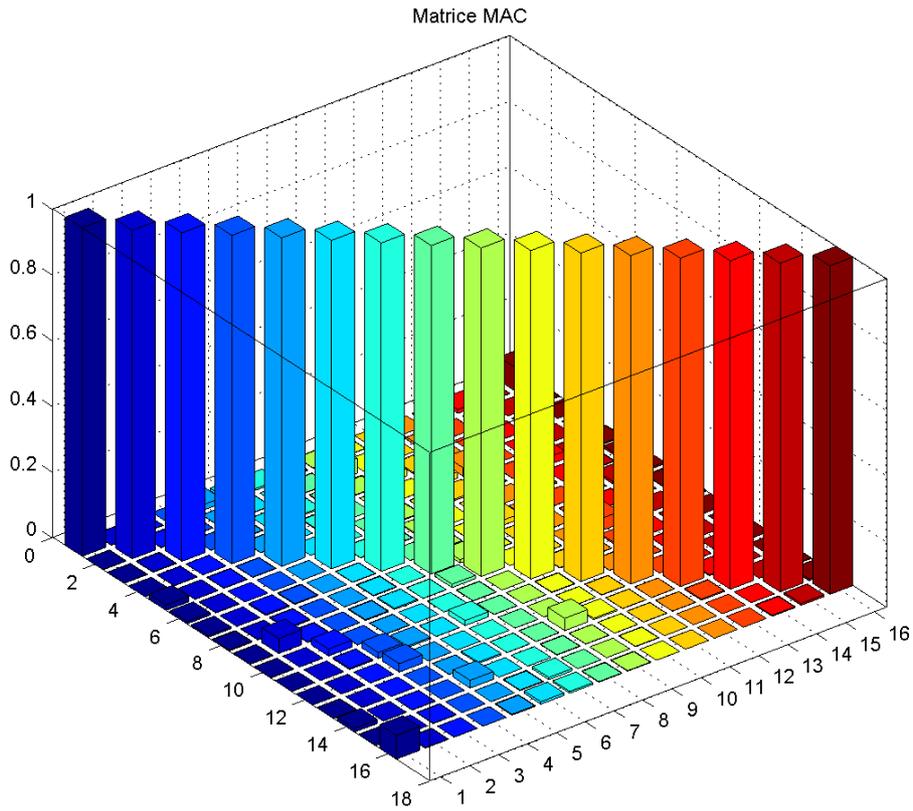


Figure 5.14: Matrice MAC des modes mesurés sur la plaque AS4-PPS

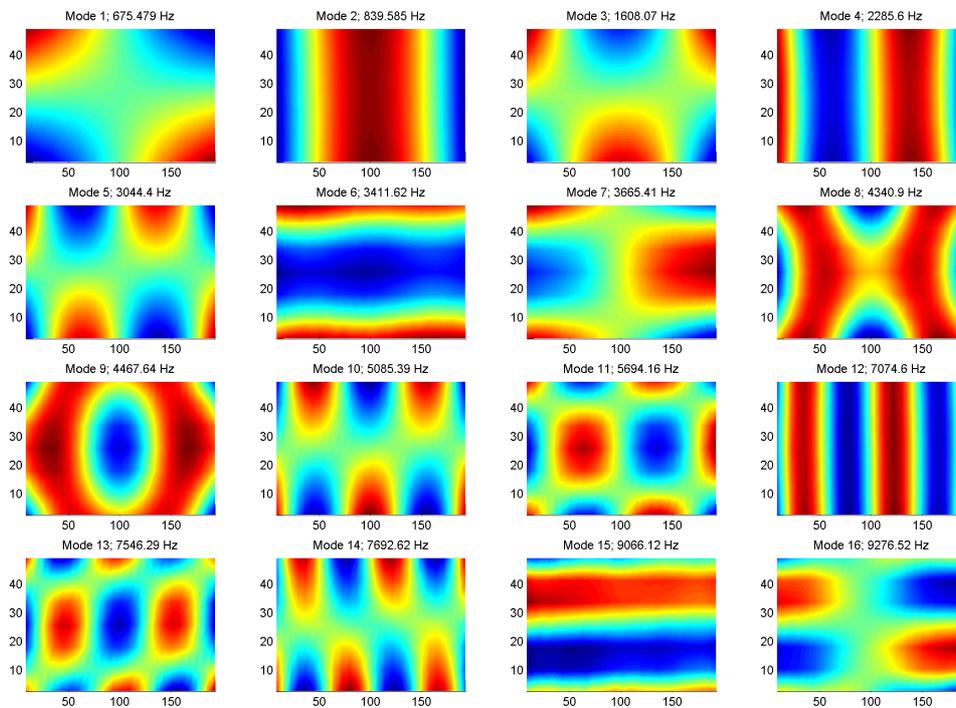


Figure 5.15: Modes propres mesurés sur la plaque AS4-PPS

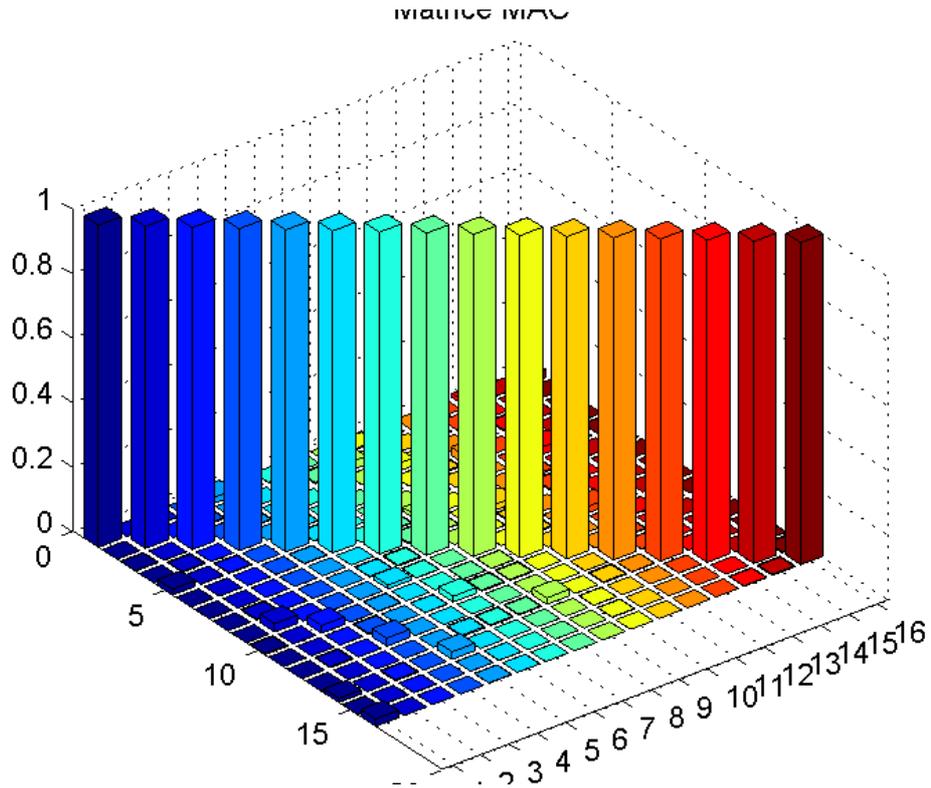


Figure 5.16: Matrice MAC des modes mesurés sur la plaque AS4-PEKK

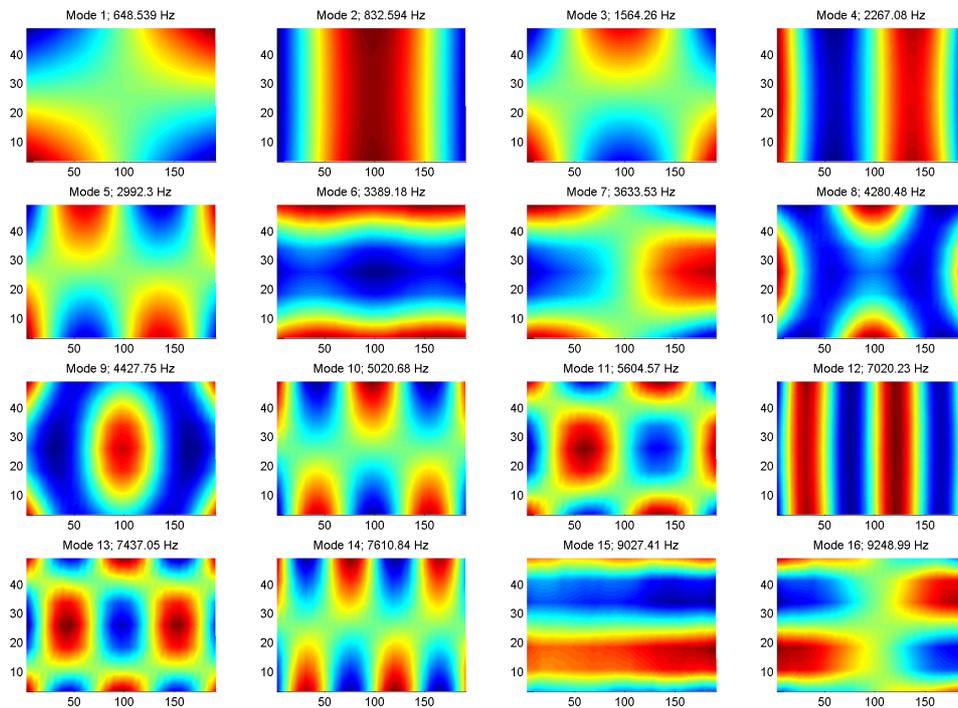


Figure 5.17: Modes propres mesurés sur la plaque AS4-PEKK

### 5.4.3 Identification mixte numérique-expérimentale

Les modèles modaux expérimentaux étant extraits (§ 5.4.2), il faut encore construire les modèles numériques avant de lancer la procédure d'identification. Une discrétisation de  $10 \times 5$  éléments de coque PSDT quadratiques lagrangiens d'ordre  $p = 3$  avec intégration numérique exacte a été choisie pour les deux types de plaque. L'identification des six paramètres constitutifs  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $G_{12}$ ,  $G_{23}$ ,  $G_{13}$ ,  $\nu_{12}$  est alors entreprise en utilisant la norme d'erreur totale pondérée par les coefficients donnés au Tableau 5.7.

| Norme | EcRelFreq | MAC1 | MAC2  | NodalCorr2         | SumEcMod |
|-------|-----------|------|-------|--------------------|----------|
| Poids | 1         | 0.05 | 0.025 | $2 \times 10^{-6}$ | 0.01     |

Tableau 5.7: Pondération des normes d'erreur

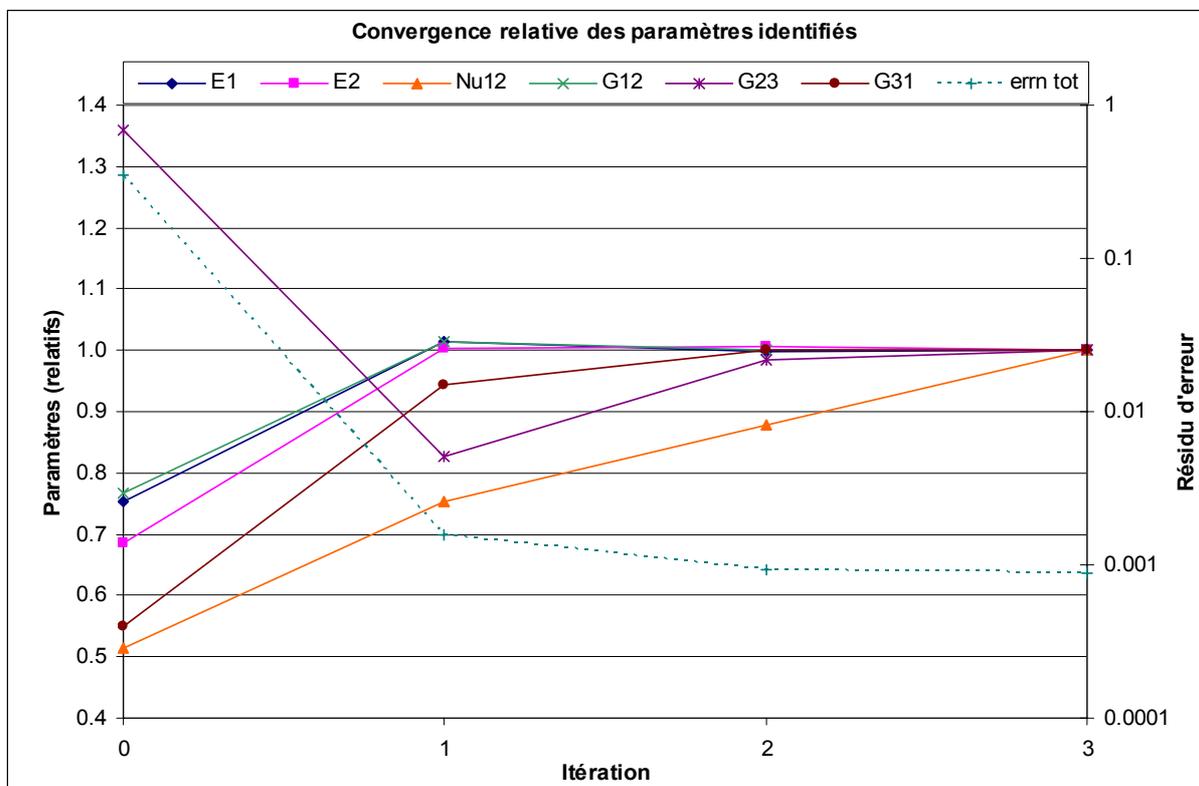


Figure 5.18: Convergence des paramètres identifiés et erreur résiduelle en fonction du nombre d'itérations de l'algorithme d'optimisation (Plaque AS4-PEKK)

Durant les deux premières itérations (Figure 5.18), la vitesse de convergence illustrée pour la plaque AS4-PEKK est très élevée, puisque l'erreur résiduelle est divisée par 1000 durant cette phase. En général, la première itération permet de déterminer déjà très précisément les paramètres principaux ( $E_1$ ,  $E_2$  et  $G_{12}$ ). Dans les itérations qui suivent, la direction d'identification s'oriente de plus en plus dans celle des paramètres les moins sensibles, à

savoir dans l'ordre  $G_{23}$ ,  $G_{13}$  et finalement  $\nu_{12}$ . Lors des dernières itérations, les paramètres  $G_{13}$  et  $\nu_{12}$  varient en parallèle, jusqu'à ce que le module de cisaillement  $G_{13}$  se stabilise ou que la tolérance de convergence soit atteinte. Le coefficient de Poisson  $\nu_{12}$  converge donc assez lentement et la détermination précise de ce coefficient n'est possible que lorsque tous les autres paramètres ont complètement convergé, ce qui peut demander un nombre d'itérations élevé selon les cas. La Figure 5.19 illustre un exemple de convergence lente et, en parallèle, des facteurs  $G_{13}$  et  $\nu_{12}$  pour les valeurs initiales choisies.

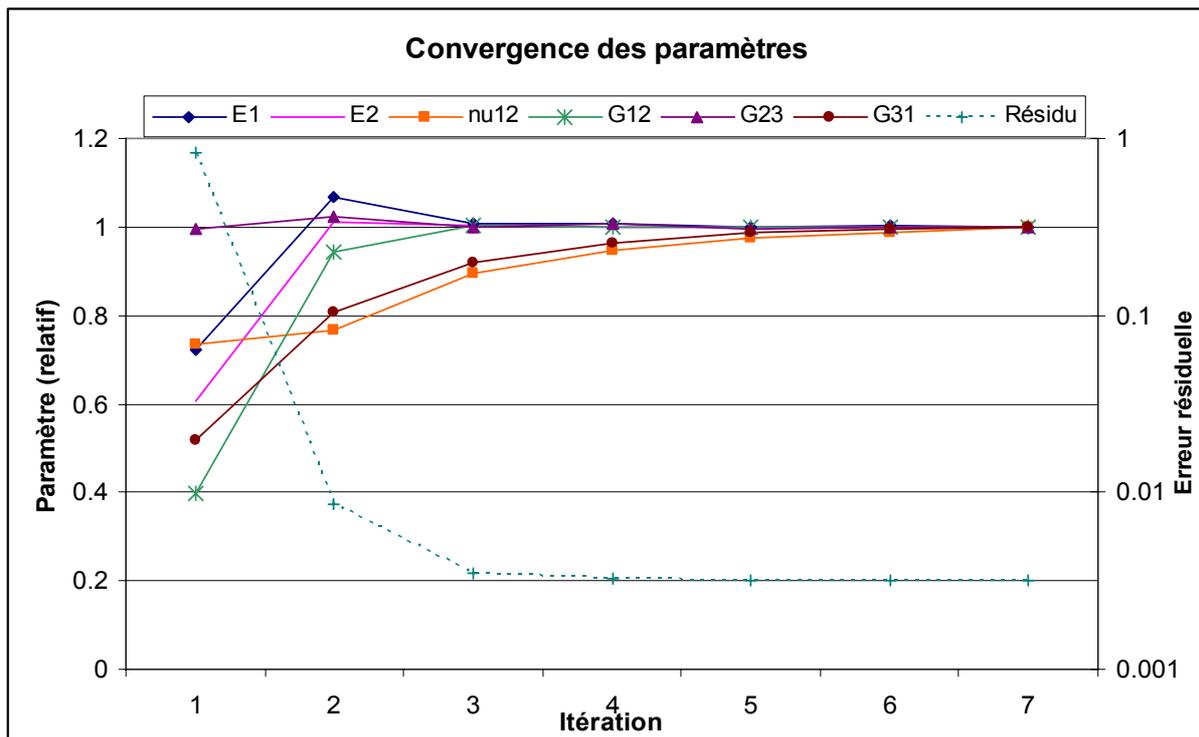


Figure 5.19: Graphe de convergence des paramètres constitutifs de la plaque AS4-PPS

Comme la détermination du coefficient de Poisson semble subordonnée à l'identification des modules de Young et de cisaillement, une stratégie d'identification en deux temps (§ 4.5) peut être envisagée comme une solution alternative permettant à la fois d'accélérer le processus d'identification et de le fiabiliser lors des premières itérations. Un exemple d'identification séparée des modules avec des normes modales faiblement pondérées, (Tableau 5.7) puis du coefficient de Poisson avec une pondération des normes modales plus élevée (Tableau 5.1) est montré à la Figure 5.20. Nous constatons que maintenant les modules sont identifiés en trois itérations (optimisation sur cinq paramètres avec 34 évaluations de solutions modales) et que le coefficient de Poisson (Figure 5.21) est estimé aussi en trois itérations (optimisation sur un seul paramètre avec 12 évaluations de solutions modales), alors

qu'une identification simultanée requiert en moyenne entre 40 et 60 évaluations de solutions modales pour atteindre le même niveau de convergence du coefficient de Poisson. Le gain de temps n'est peut être pas vraiment important pour le choix d'une stratégie d'identification simultanée ou en deux temps, mais la détermination du coefficient de Poisson dans une identification séparée est bien plus robuste et précise.

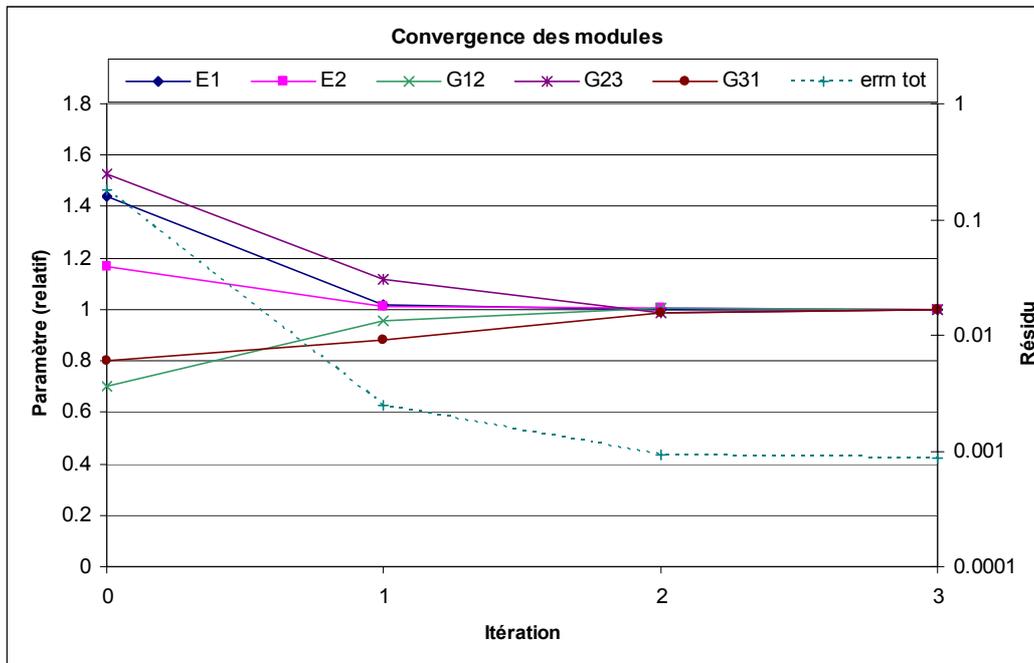


Figure 5.20: Convergence de l'identification des modules de Young et de cisaillement lors d'une identification en deux temps (Plaque AS4-PEKK)

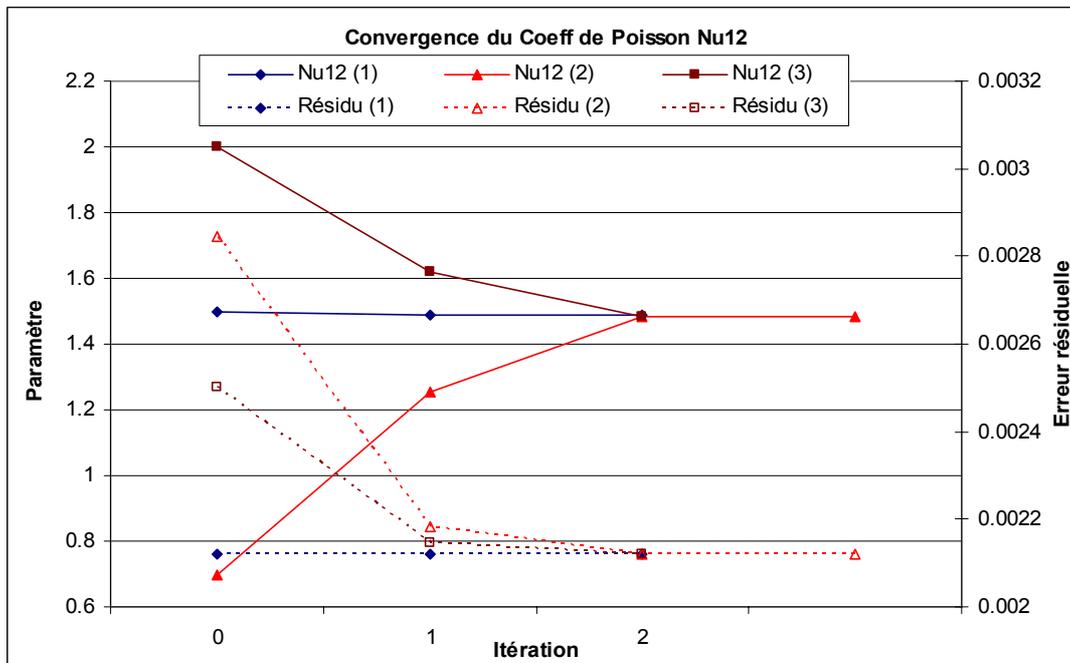


Figure 5.21: Convergence du coefficient de Poisson  $\nu_{12}$  lors d'une identification en deux temps (Plaque AS4-PEKK)

#### 5.4.4 Robustesse de la méthode d'identification mixte

Afin de s'assurer de la robustesse de la méthode d'optimisation dans des situations réelles, un test de sensibilité aux vecteurs des paramètres initiaux a été exécuté sur la plaque AS4-PEKK. Un ensemble de 6 vecteurs constitutifs initiaux ont été générés aléatoirement avec  $\pm 50\%$  de variation maximale par rapport aux estimations originales des paramètres élastiques. L'identification simultanée des 6 paramètres constitutifs  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $\nu_{12}$ ,  $G_{12}$ ,  $G_{23}$  et  $G_{13}$  est alors réalisée en utilisant la norme d'erreur totale pondérée avec les facteurs du Tableau 5.7.

Les résultats de l'étude de robustesse sont présentés dans la Figure 5.22 et au Tableau 5.8. Nous remarquons que, dans 5 perturbations sur 6, l'identification est terminée en 3 itérations seulement, mais que dans un cas (le plus perturbé), il faut 5 itérations pour atteindre le même degré de précision globale. A la convergence, l'erreur résiduelle entre les données modales expérimentales et numériques s'élève à un peu moins de  $10^{-3}$ .

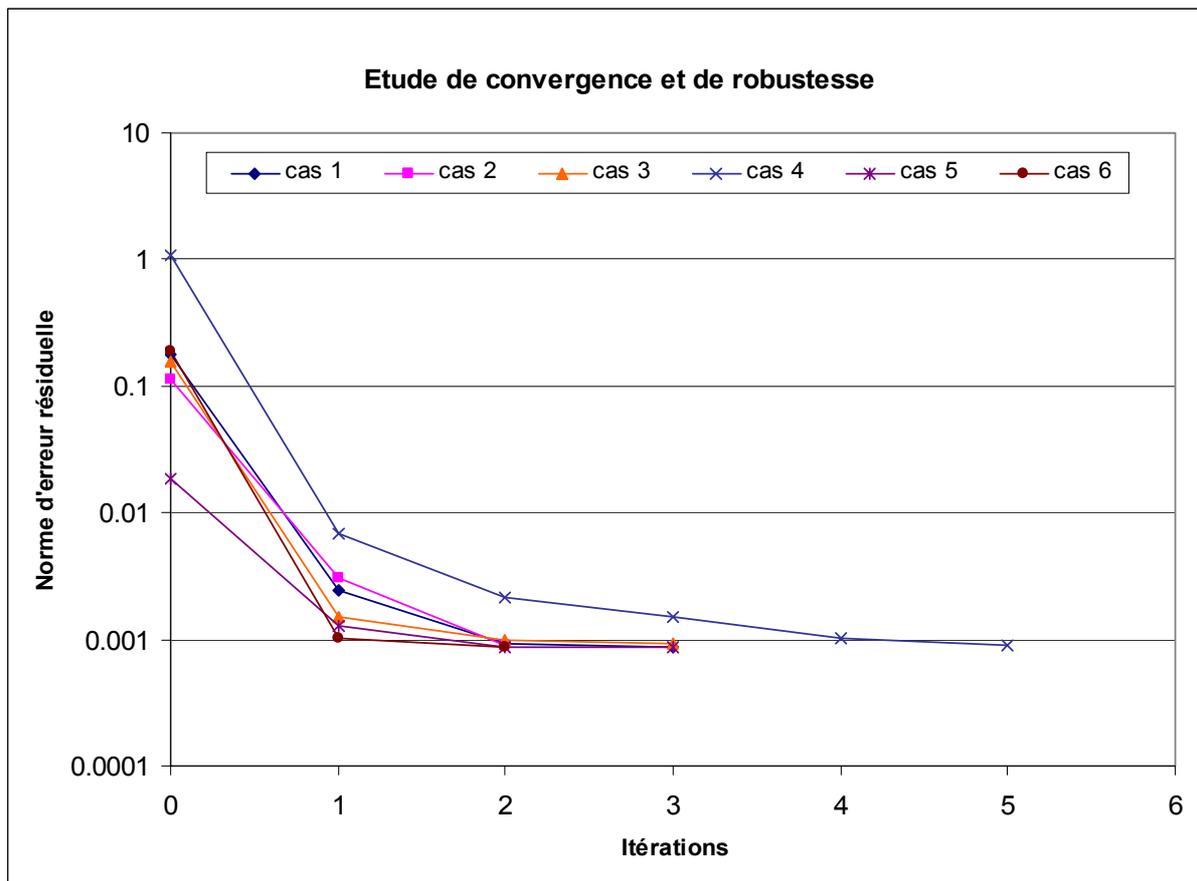


Figure 5.22: Robustesse de la convergence du résidu d'erreur (Plaque AS4-PEKK)

La reproductibilité de la procédure d'identification mixte peut également être étudiée à partir des données du Tableau 5.8, où l'on constate que l'écart type des 6 paramètres

constitutifs identifiés varie de moins de 0.5% pour les modules de Young  $E_1$  et  $E_2$  à plus de 10% pour le coefficient de Poisson  $\nu_{12}$ . La dispersion des valeurs des modules de cisaillement dans le plan  $G_{12}$  et transverse  $G_{23}$  reste très faible (moins de 1%). Le module de cisaillement transverse  $G_{13}$  est quant à lui plus difficile à identifier avec précision que les autres modules de cisaillement, mais même avec une variation de  $\pm 3.5\%$ , il reste identifiable avec autant de précision que ce que l'on peut espérer de tests statiques standardisés courants. De tous les paramètres constitutifs identifiés, seul le coefficient de Poisson  $\nu_{12}$  semble donc relativement difficile à estimer avec précision à partir des données modales mesurées, car il n'influence pas les fréquences propres (extraites avec précision), mais uniquement la forme des modes propres (mesurés avec bien plus d'incertitudes). La robustesse de l'algorithme est aussi notée avec l'identification en deux temps, toujours sur la plaque AS4-PEKK. La Figure 5.21 montre la convergence du coefficient de Poisson  $\nu_{12}$  et de la norme globale d'erreur pour trois valeurs initiales différentes du paramètre. Les graphes confirment la robustesse de la méthode, puisqu'en trois itérations le paramètre est identifié quelle que soit sa valeur initiale (répétabilité d'environ 2%).

| Cas test                  | $E_1$ (GPa) | $E_2$ (GPa) | $G_{12}$ (GPa) | $G_{23}$ (GPa) | $G_{31}$ (GPa) | $\nu_{12}$ (-) |
|---------------------------|-------------|-------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| <i>cas 1</i>              | 123.4       | 9.68        | 5.06           | 1.79           | 4.45           | 0.42           |
| <i>cas 2</i>              | 123.8       | 9.64        | 5.08           | 1.77           | 4.12           | 0.51           |
| <i>cas 3</i>              | 122.8       | 9.73        | 5.09           | 1.78           | 4.54           | 0.37           |
| <i>cas 4</i>              | 123.3       | 9.73        | 5.08           | 1.76           | 4.47           | 0.38           |
| <i>cas 5</i>              | 123.4       | 9.66        | 5.07           | 1.77           | 4.32           | 0.47           |
| <i>cas 6</i>              | 123.5       | 9.64        | 5.08           | 1.79           | 4.28           | 0.47           |
| <i>moyenne</i>            | 123.4       | 9.68        | 5.08           | 1.78           | 4.36           | 0.44           |
| <i>écart type</i>         | 0.33        | 0.04        | 0.008          | 0.013          | 0.15           | 0.06           |
| <i>écart type relatif</i> | 0.27%       | 0.43%       | 0.17%          | 0.76%          | 3.5%           | 13%            |

**Tableau 5.8: Paramètres identifiés à partir de 6 vecteurs de paramètres initiaux perturbés de manière aléatoire de +/- 50%, (Plaque AS4 - PEKK)**

### 5.4.5 Fréquences et modes propres identifiés

Les fréquences propres mesurées et identifiées à la fin de la procédure d'optimisation sont présentées pour les deux plaques AS4-PEKK et AS4-PPS respectivement dans le Tableau 5.9 et le Tableau 5.10.

| Fréquences propres (Hz) | mode 1 | mode 2 | mode 3 | mode 4 | mode 5 | mode 6 | mode 7 | mode 8 |
|-------------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| <i>Mesures</i>          | 648.5  | 832.6  | 1564.3 | 2267.1 | 2992.3 | 3389.2 | 3633.5 | 4280.5 |
| <i>Identification</i>   | 652.8  | 833.4  | 1561.5 | 2265.0 | 2981.8 | 3394.9 | 3628.0 | 4271.3 |
| <i>Erreur relative</i>  | 0.65%  | 0.10%  | -0.18% | -0.09% | -0.35% | 0.17%  | -0.15% | -0.22% |

| Fréquences propres (Hz) | mode 9 | mode 10 | mode 11 | mode 12 | mode 13 | mode 14 | mode 15 | mode 16 |
|-------------------------|--------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| <i>Mesures</i>          | 4427.8 | 5020.7  | 5604.6  | 7020.2  | 7437.1  | 7610.8  | 9027.4  | 9249.0  |
| <i>Identification</i>   | 4438.2 | 5011.4  | 5584.5  | 7048.8  | 7407.7  | 7617.3  | 9060.3  | 9240.6  |
| <i>Erreur relative</i>  | 0.23%  | -0.19%  | -0.36%  | 0.41%   | -0.39%  | 0.08%   | 0.36%   | -0.09%  |

**Tableau 5.9: Fréquences propres mesurées et identifiées pour la plaque AS4-PEKK**

| Fréquences propres (Hz) | mode 1 | mode 2 | mode 3 | mode 4 | mode 5 | mode 6 | mode 7 | mode 8 |
|-------------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| <i>Mesures</i>          | 675.48 | 839.59 | 1608.1 | 2285.6 | 3044.4 | 3411.6 | 3665.4 | 4340.9 |
| <i>Identification</i>   | 678.95 | 841.8  | 1608   | 2286.1 | 3040.2 | 3418   | 3659.8 | 4345.9 |
| <i>Erreur relative</i>  | 0.51%  | 0.26%  | -0.01% | 0.02%  | -0.14% | 0.19%  | -0.15% | 0.12%  |

| Fréquences propres (Hz) | mode 9 | mode 10 | mode 11 | mode 12 | mode 13 | mode 14 | mode 15 | mode 16 |
|-------------------------|--------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| <i>Mesures</i>          | 4467.6 | 5085.4  | 5694.2  | 7074.6  | 7546.3  | 7692.6  | 9066.1  | 9276.5  |
| <i>Identification</i>   | 4444.5 | 5076.9  | 5665.4  | 7077.5  | 7498.5  | 7689.9  | 9100.9  | 9284.1  |
| <i>Erreur relative</i>  | -0.52% | -0.17%  | -0.51%  | 0.04%   | -0.63%  | -0.04%  | 0.38%   | 0.08%   |

**Tableau 5.10: Fréquences propres mesurées et identifiées pour la plaque AS4-PPS**

La qualité d'identification des fréquences propres est excellente pour les deux plaques testées puisque l'erreur maximale sur les pulsations propres des 16 modes mesurés et identifiés ne dépasse guère 0.5%, ce qui reste bien inférieur aux incertitudes de mesure. Les formes propres mesurées et identifiées correspondantes sont illustrées pour les plaques AS4-PEKK et AS4-PPS respectivement dans la Figure 5.23 et la Figure 5.25, alors que les matrices MAC de corrélation modale sont données respectivement dans la Figure 5.24 et la Figure 5.26. Les termes diagonaux de ces matrices indiquent que la corrélation entre les 16 modes propres numériques et expérimentaux est bonne, puisque la composante minimale reste supérieure à 0.8, avec une moyenne de plus de 0.9. Quelques termes non diagonaux signalent cependant un certain « couplage » (ou défaut d'orthogonalité) des bases modales numériques et expérimentales. Ces légers termes de couplage proviennent sûrement d'imprécisions de mesure de certains modes propres, mais ils n'ont qu'une importance limitée dans notre contexte. La composante MAC hors diagonale assez élevée entre les modes 1 et 16 provient par contre de la résolution des maillages utilisés qui ne peuvent plus représenter précisément des modes d'ordre aussi grand.

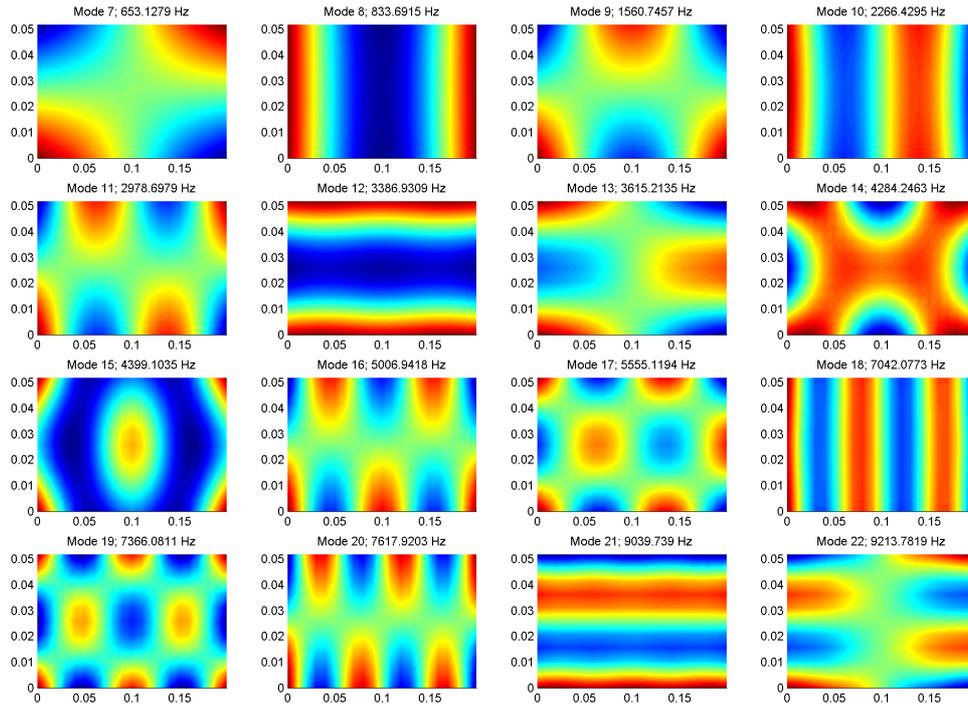


Figure 5.23 : Modes propres identifiés (Plaque AS4-PEKK)

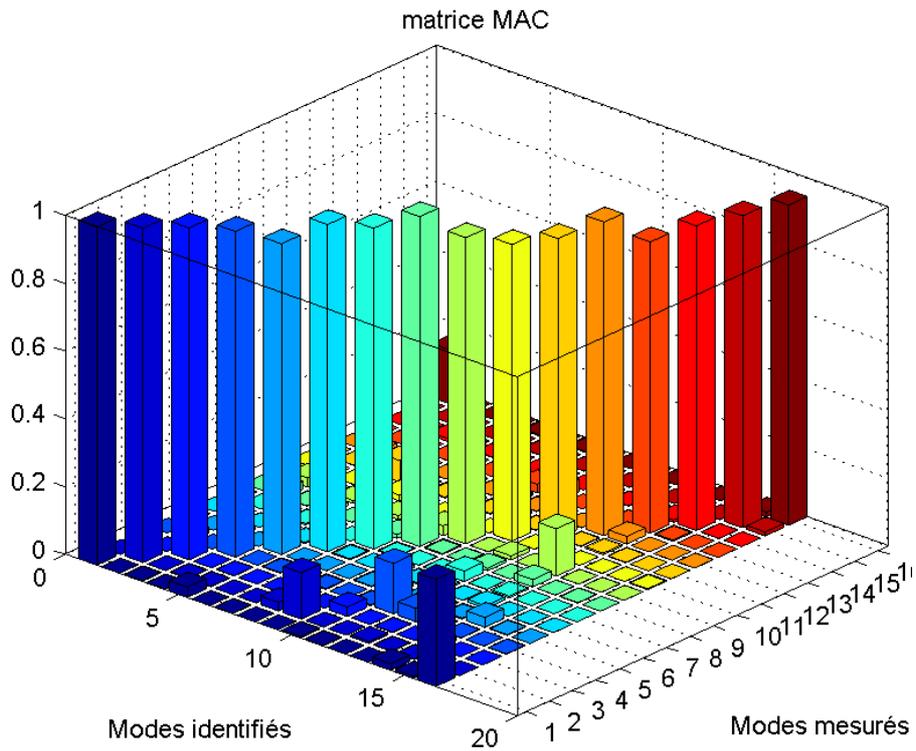


Figure 5.24: Matrice MAC des modes mesurés et identifiés de la plaque AS4-PEKK

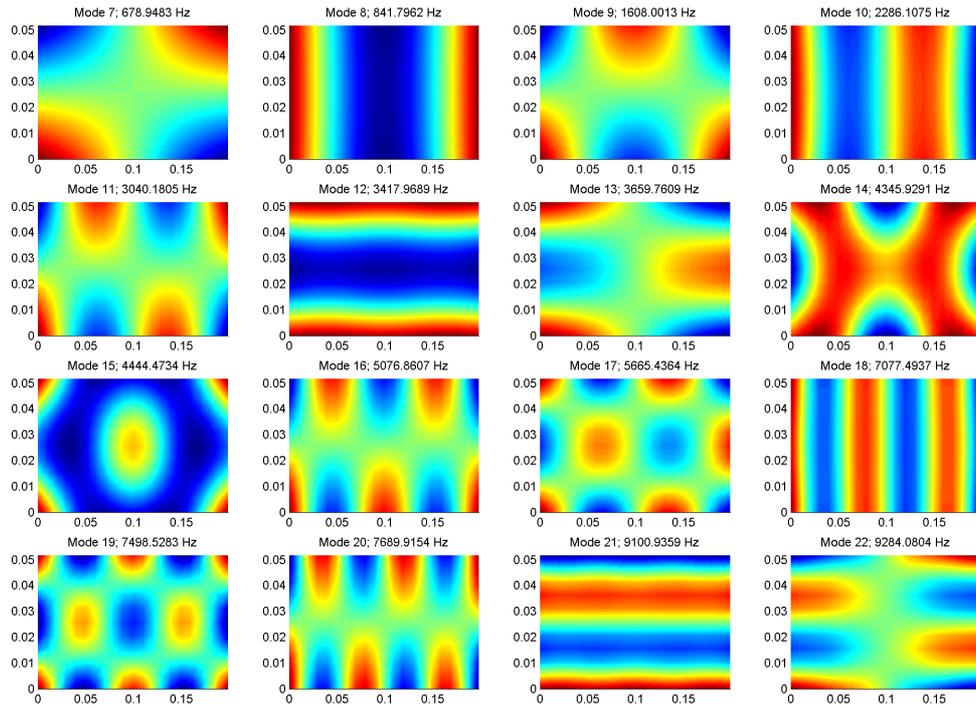


Figure 5.25: Modes propres identifiés (Plaque AS4-PPS)

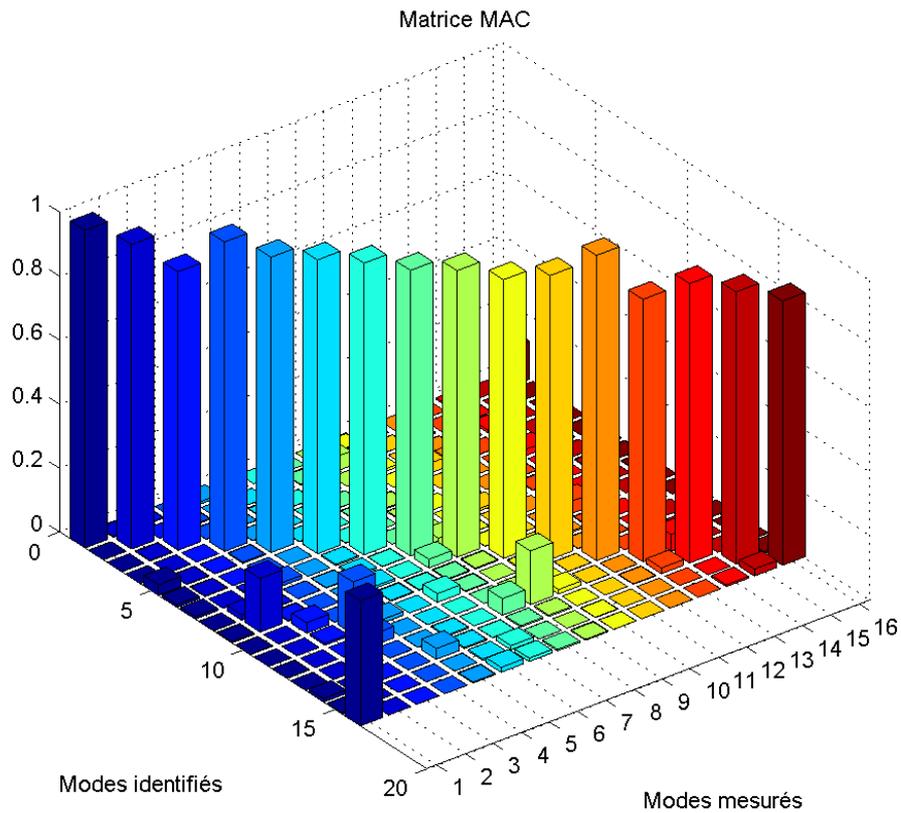


Figure 5.26: Matrice MAC des modes identifiés et mesurés sur la plaque AS4-PPS

### 5.4.6 Propriétés constitutives identifiées

Les paramètres constitutifs identifiés sur les plaques AS4-PPS et AS4-PEKK (Tableau 5.12 et Tableau 5.13) sont comparées avec des valeurs mesurées au cours de tests statiques classiques. Les tests effectués par le fabricant Cyttec sont standardisés selon la norme ASTM D3039 pour les coefficients  $E_1$ ,  $E_2$  et  $\nu_{12}$ , selon la norme SACMA SRM-1 pour le module  $E_2$  en compression et selon le standard ASTM D3518 pour le module de cisaillement dans le plan  $G_{12}$ . Ces propriétés étant malheureusement incomplètes, une estimation par un modèle semi-empirique d'homogénéisation fibre-matrice [33] est également entreprise. Elle est basée sur les propriétés, fournies par le fabricant des matrices PPS et PEKK ainsi que des fibres de carbone AS4 (Tableau 5.11), mais aussi sur le taux de fibres mesurés dans les deux spécimens (58% de volume de fibres pour les deux plaques). De plus, des mesures internes au laboratoire, notée « *mesures LMAF (a)* » sur un échantillon d'AS4-PEKK de qualité très moyenne (taux de vide important dans certaines zones) sont également présentées à titre d'indication de la variabilité des propriétés constitutives en fonction des conditions de mise en œuvre. Une seconde série de mesures internes notée « *mesures LMAF (b)* » sur des spécimens UD en matériaux composites AS4-PPS et AS4-PEKK de meilleure qualité permettent de cerner encore un peu plus les propriétés de ces composites.

| <i>Fibres de carbone AS4</i> |                            | <i>Matrice PEKK</i> |                            | <i>Matrice PPS</i> |                            |
|------------------------------|----------------------------|---------------------|----------------------------|--------------------|----------------------------|
| <i>E (GPa)</i>               | <i><math>\nu</math>(-)</i> | <i>E (GPa)</i>      | <i><math>\nu</math>(-)</i> | <i>E (GPa)</i>     | <i><math>\nu</math>(-)</i> |
| 228                          | 0.35                       | 3.45                | 0.38                       | 3.8                | 0.38                       |

**Tableau 5.11: Données d'homogénéisation fibre-matrice des composites AS4-PEKK et AS4-PPS utilisés dans cette étude (sources Matweb / Cyttec).**

Malgré la dispersion parfois importante, due aux techniques de mesure et aux conditions de mise en œuvre, des propriétés constitutives, les modules  $E_1$  et  $E_2$  identifiés sur les plaques AS4-PPS et AS4-PEKK se montrent très proches des valeurs mesurées et se situent en général entre les modules de Young mesurés en flexion et en traction. Bien que variables en fonction des mesures effectuées, les coefficients de Poisson identifiés de ces plaques restent malgré tout relativement proches de la moyenne des mesures de référence. Les modules de cisaillement n'ayant pas été mesurés en statique, seules les valeurs d'homogénéisation, qui s'avèrent étonnement fiables au demeurant, sont disponibles pour leur validation. Même si ces valeurs homogénéisées ont une incertitude importante, nous constatons que les modules de cisaillement identifiés  $G_{12}$  et  $G_{23}$  sont en moyenne supérieurs de 20% et respectivement

inférieurs de 40% aux valeurs obtenues par homogénéisation, mais les autres propriétés constitutives correspondent remarquablement bien. Ainsi, à défaut de valeur de référence pour les modules de cisaillement, on peut considérer que les paramètres constitutifs identifiables dans le cas de plaques de ce type (minces et fortement orthotropes) sont en tout cas les modules de Young  $E_1$  et  $E_2$ , ainsi que le coefficient de Poisson  $\nu_{12}$ . En ce qui concerne les modules de cisaillement, une validation plus complète doit être effectuée avant de pouvoir se prononcer.

| Propriété            | $E_1$ (GPa) | $E_2$ (GPa) | $E_1$ (GPa) | $E_2$ (GPa) |
|----------------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| Source               | Traction    | compression | flexion     | Traction    |
| données Cytec        | 133         | 124         | 129         | 9.47        |
| Homogénéisation      | 134         | -           | -           | 9.31        |
| mesures LMAF (a)     | 127         | -           | 115         | -           |
| mesures LMAF (b)     | 120         | -           | -           | -           |
| identification mixte | -           | -           | 123         | 9.68        |

| Propriété            | $G_{12}$ (GPa) | $G_{23}$ (GPa) | $G_{13}$ (GPa) | $\nu_{12}$ (-) |
|----------------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| Source               | Cisaillement   | -              | -              | traction       |
| données Cytec        | 5.56           | -              | 5.56           | 0.3            |
| Homogénéisation      | 4.47           | 2.91           | 4.47           | 0.374          |
| mesures LMAF (a)     | -              | -              | -              | 0.37           |
| mesures LMAF (b)     | -              | -              | -              | 0.41           |
| identification mixte | 5.08           | 1.8            | 4.46           | 0.41           |

**Tableau 5.12: Paramètres constitutifs identifiés, mesurés et estimés par homogénéisation du spécimen AS4-PEKK**

| Propriété            | $E_1$ (GPa) | $E_2$ (GPa) | $E_1$ (GPa) | $E_2$ (GPa) |
|----------------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| Source               | traction    | compression | flexion     | traction    |
| données Cytec        | 131         | 117         | 124         | -           |
| homogénéisation      | 134         | -           | -           | 10.2        |
| mesures LMAF (b)     | 129         | -           | -           | -           |
| identification mixte | -           | -           | 128         | 10.1        |

| Propriété            | $G_{12}$ (GPa) | $G_{23}$ (GPa) | $G_{13}$ (GPa) | $\nu_{12}$ (-) |
|----------------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| Source               | cisaillement   | -              | -              | traction       |
| données Cytec        | -              | -              | -              | -              |
| homogénéisation      | 4.9            | 3.22           | 4.9            | 0.36           |
| mesures LMAF (b)     | -              | -              | -              | 0.32           |
| identification mixte | 5.69           | 2.11           | 4.89           | 0.37           |

**Tableau 5.13: Paramètres constitutifs identifiés, mesurés et estimés par homogénéisation du spécimen AS4-PPS**

En résumé, cette étape de validation a permis de vérifier la bonne convergence, la reproductibilité et la robustesse de l'algorithme d'optimisation dans des conditions réelles. De plus les propriétés constitutives identifiées pour les plaques UD minces AS4-PEKK et AS4-

PPS ont pu être identifiées avec précision pour les modules de Young et avec un relativement bon niveau de qualité pour les autres paramètres. Cependant, en raison du trop faible nombre de valeurs de référence expérimentales (tests statiques), une validation plus poussée avec caractérisation statique complète du composite est nécessaire pour pouvoir réellement valider la précision et la consistance de l'ensemble des paramètres identifiés.

## **5.5 Plaques en composite fibres de carbone – matrice époxyde**

### **5.5.1 Buts et matériaux testés**

Malgré le bon déroulement général et la robustesse de l'algorithme d'identification observés dans les exemples précédents, une comparaison complète de toutes les propriétés constitutives identifiées avec des résultats de tests statiques n'a pas encore été effectuée, notamment en raison de l'absence de données de test disponibles pour les spécimens étudiés jusqu'ici. Dans le but de combler ce manque et de valider quantitativement la méthode d'identification mixte numérique-expérimentale développée dans ce travail, une caractérisation statique complète de matériaux composites stratifiés est nécessaire. En l'état actuel, les tests statiques classiques ne permettent cependant de caractériser précisément, au niveau de la strate, que des stratifiés de type unidirectionnel, les seules grandeurs effectivement mesurables sur d'autres types de stratifiés n'étant généralement que des modules homogénéisés équivalents (sauf pour le test de cisaillement à plis croisés ASTM D3538). Ainsi, il est nécessaire de caractériser tout d'abord complètement les propriétés élastiques d'un composite stratifié unidirectionnel avant de pouvoir valider tout autre type de stratifié constitué de ce même matériau composite. Une série de plaques en composite carbone-époxyde a été fabriquée à l'Atelier Composite Borghini (Lausanne) par voie humide (imprégnation de tissus de fibres et pressage à température ambiante) dans des conditions identiques, avec un taux de fibres aussi proche que possible et constituées de la même résine époxyde (résine Resoltech RS1050 et durcisseur RS1055, 5 heures de temps de prise) et des mêmes tissus UD de fibres de carbone (tissu de fibres de carbone UD 220 g/m<sup>2</sup> de qualité industrielle). Les processus de pressage et de polymérisation, ainsi que la température ambiante des cycles de production, sont contrôlés et une post-cuisson à 60 °C pendant 15 heures est imposée pour s'assurer que la polymérisation de la résine époxyde est complète. Les plaques ainsi produites sont alors découpées par jet d'eau afin d'extraire de chacune d'elles des spécimens de traction de type ASTM D3039 (dimensions 215 × 25 mm) ainsi que des échantillons de tests dynamiques pour la méthode d'identification mixte. Les plaques en stratifiés composites fabriquées pour cette validation sont décrites dans le Tableau 5.14.

| <i>plaque</i> | <i>stratification</i> | <i>nombre de couches</i> | <i>épaisseur</i> | <i>dimensions</i> | <i>% masse fibre</i> | <i>% vol fibre</i> |
|---------------|-----------------------|--------------------------|------------------|-------------------|----------------------|--------------------|
| <i>P1</i>     | UD                    | 16                       | 3.77 mm          | 300×300 mm        | 64%                  | 52%                |
| <i>P2</i>     | UD                    | 32                       | 8.25 mm          | 300×300 mm        | 62%                  | 50%                |
| <i>P3</i>     | UD                    | 48                       | 13.0 mm          | 300×300 mm        | 61%                  | 49%                |
| <i>P6</i>     | (0,90) <sub>4s</sub>  | 48                       | 13.0 mm          | 300×300 mm        | 62%                  | 50%                |

Tableau 5.14: Propriétés des plaques de test carbone-époxyde

### 5.5.2 Caractérisations statiques des propriétés constitutives

La caractérisation du composite carbone-époxy est effectuée sur les spécimens unidirectionnels à 0° et 90°. Les méthodes de tests statiques retenues pour la caractérisation du matériau composite sont les suivantes :

- **Tests de traction / compression de spécimens unidirectionnels (ASTM D3039)**

Un test de traction/compression standard est employé pour la détermination du module  $E_1$  et du coefficient de Poisson  $\nu_{12}$  pour des éprouvettes unidirectionnelles à 0° et du module  $E_2$  et du coefficient de Poisson  $\nu_{21}$  pour des éprouvettes à 90°. Douze spécimens découpés dans les plaques P1 et P2, de dimension de 215 × 25 mm sont testés à faible charge sur une machine de traction-torsion MTS (Figure 5.27). Les fixations utilisées pour ces tests sont de type « wedge grips » et assurent une traction sans glissement perceptible sur toute la plage de force de ces mesures (- 1 à +2 kN). Un capteur de force de 10 kN sert à la détermination des contraintes, tandis que les allongements axiaux et transverses sont mesurés à la fois par un extensomètre bi-axial MTS et des jauges de déformation à double grille (HBM XY31-3/120 sur amplificateur HBM MGC-55) collées au centre des faces du spécimen. Pour chaque essai, trois éprouvettes de chaque orientation sont testées (soit 6 éprouvettes par composite) et au minimum six cycles de charge sont effectués, les quatre derniers cycles étant utilisés pour la détermination des modules et coefficients de Poisson. Les données de contraintes et déformations mesurées sont traitées pour estimer avec précision les pentes initiales des graphes contraintes-déformations par régression linéaire pour chaque cycle. La moyenne de ces pentes est alors prise pour calculer directement les paramètres constitutifs  $E_1$  et  $\nu_{12}$  pour les éprouvettes à 0° et  $E_2$  et  $\nu_{21}$  pour les éprouvettes à 90°.

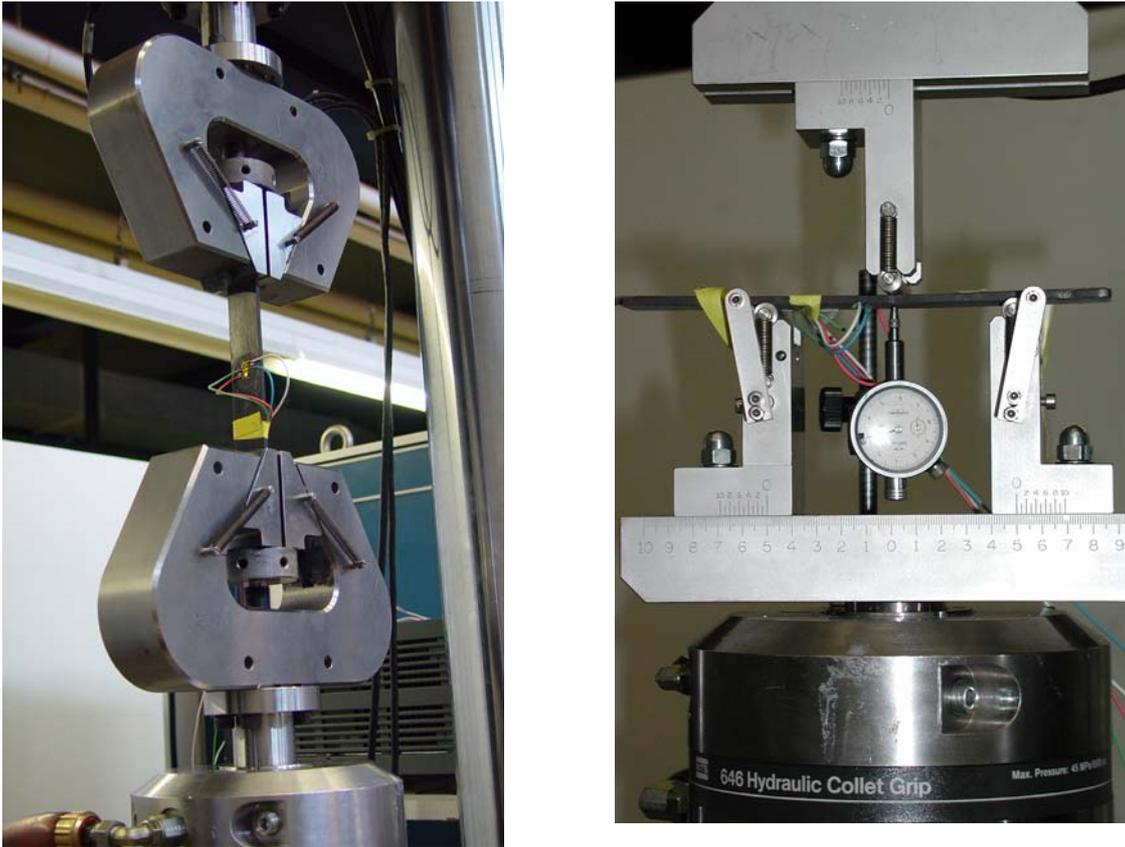
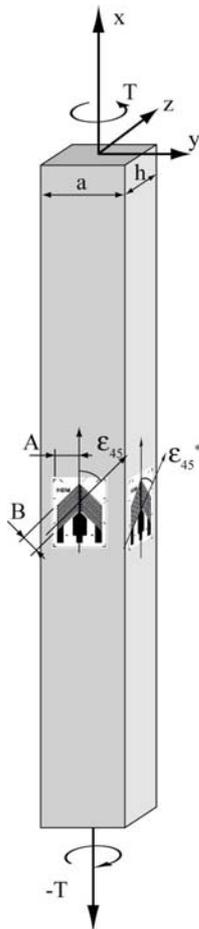


Figure 5.27: Tests de traction / compression (à gauche) et de flexion trois points (à droite) de composites unidirectionnels

- **Test de torsion d'éprouvettes rectangulaires de composites UD [2]**

Pour mesurer les modules de cisaillement dans le plan  $G_{12}$  et transverse  $G_{23}$  et  $G_{13}$ , une méthode d'identification basée sur deux tests de torsion des six éprouvettes rectangulaires P2 unidirectionnelles (type ASTM D3039) à  $0^\circ$  et  $90^\circ$  est mise en œuvre. Dans cette technique, le couple appliqué est mesuré en même temps que les déformations à  $45^\circ$  sur la face et le côté du spécimen et les modules de cisaillement sont identifiés par rapport à une solution analytique de la torsion de spécimens rectangulaires unidirectionnels [2]. Les paramètres constitutifs des éprouvettes à  $0^\circ$  et  $90^\circ$ , à savoir  $G_{12}$  et  $G_{13}$  et respectivement  $G_{12}$  et  $G_{23}$ , sont finalement extraits en résolvant numériquement deux systèmes de deux équations non linéaires. La machine de test de traction-torsion MTS a également été utilisée pour ces essais, avec les mêmes fixations que pour les essais de traction. Les spécimens sont instrumentés par deux jauges à  $\pm 45^\circ$  HBM XY41-120/3 montées au centre des faces avant et latérale droite du spécimen. Ces capteurs à double grille sont branchés en demi-pont sur un amplificateur HBM MGC-55 pour mesurer les composantes à  $45^\circ$  des déformations moyennes sur la face ( $\varepsilon_{45}$ ) et la tranche ( $\varepsilon_{45}^*$ ) du spécimen. Le couple  $T$  est

également mesuré lors de l'acquisition de données à l'aide d'un capteur de force/moment de 10 kN / 20 Nm. Le principe de la méthode est de comparer les efforts de cisaillement transverse  $V_x$  sur la face latérale du spécimen, calculés à partir de la déformation  $\varepsilon_{45}^*$  mesurée sur la tranche de l'éprouvette, et l'angle de torsion par unité de longueur  $\theta$  calculé à partir de la déformation  $\varepsilon_{45}$  sur la face du spécimen. La seconde équation du système est quant à elle plus classique et lie le couple  $T$  mesuré à l'angle de torsion par unité de longueur  $\theta$ . Ainsi, le système à résoudre est formé par les équations (5.1) et (5.2). Ce système de deux équations non linéaires est alors résolu pour les inconnues  $G_{12}$  et  $G_{13}$ . Dans le cas de l'éprouvette à  $90^\circ$ , les équations restent les mêmes, mais il faut substituer  $G_{13}$  par  $G_{23}$  dans les relations 5.3 et 5.5 pour pouvoir déterminer cette fois-ci  $G_{12}$  et  $G_{23}$ .



$$T = \frac{1}{3} a \theta G_{12} h^3 \left( 1 - \frac{\tanh \beta}{\beta} \right) \quad (5.1)$$

$$V_x(y = a/2) = \frac{\theta G_{12} h^3}{3a} \left( \frac{\beta}{\cosh \beta} \right) \sinh \beta = 2 h G_{13} \varepsilon_{45}^* / \xi \quad (5.2)$$

Avec :

$$\xi = \frac{3}{2} - \frac{(A^2 + B^2)}{4h^2}$$

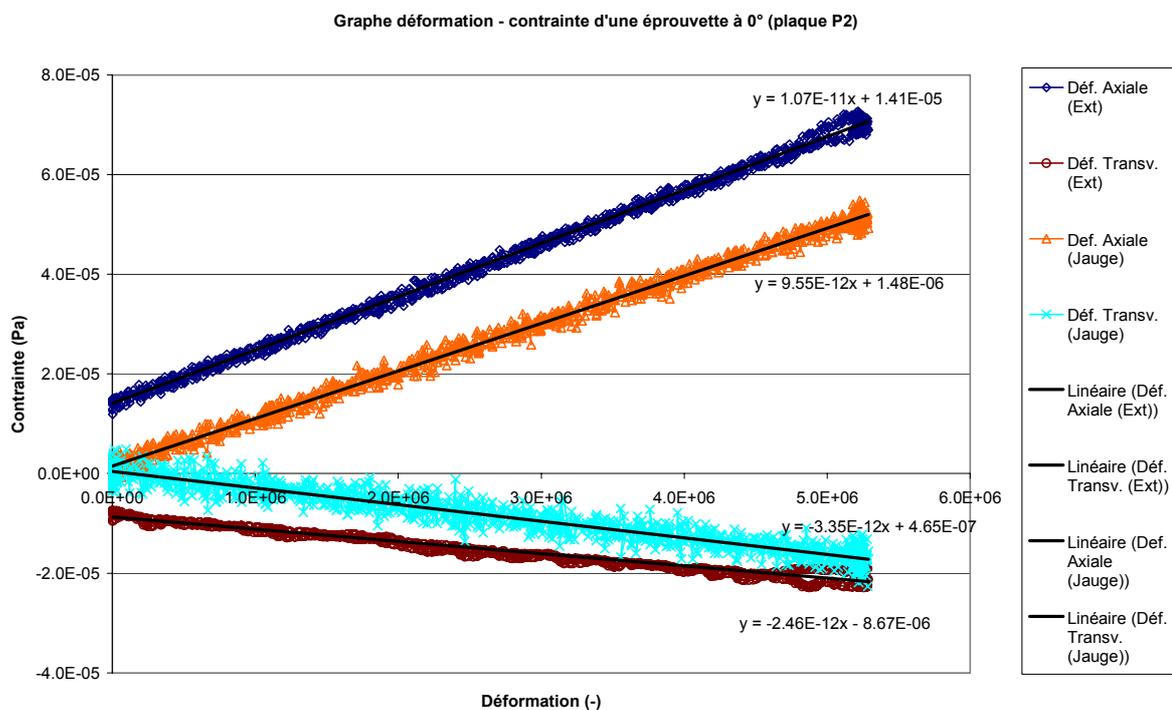
$$\theta = \frac{2 \varepsilon_{45} \cosh \beta}{h} \left/ \left[ \frac{2a^2}{AB \beta^2} \sinh \left( \frac{A\beta}{a\sqrt{2}} \right) \sinh \left( \frac{B\beta}{a\sqrt{2}} \right) - \cosh \beta \right] \right. \quad (5.3)$$

$$\beta = \frac{a}{2h} \sqrt{10 G_{13} / G_{12}} \quad (5.4)$$

Figure 5.28: Test de torsion de coupons rectangulaires unidirectionnels

- **Tests de flexion quatre points de spécimens rectangulaires**

Un test de flexion 4 points est également effectué sur les douze éprouvettes pour déterminer les modules dits « de flexion<sup>28</sup> »  $E_1^f$  et  $E_2^f$ . La longueur entre appuis du spécimen est de 180 mm et l'écartement des appuis mobiles de chargement est fixé à 60 mm comme dans les normes. L'éprouvette est instrumentée à l'aide d'une jauge de déformation placée au centre de la face du bas de l'échantillon, tandis qu'un capteur de déplacement mesure la déformée du spécimen en son centre. La force appliquée est aussi mesurée à l'aide d'un capteur de force de 10 kN. Le test est répété plusieurs fois par échantillon comme pour tous les autres essais, les pentes des courbes force-déplacement et force-déformation permettant simplement de calculer les modules de Young  $E_1$  pour les échantillons à  $0^\circ$  et  $E_2$  pour les échantillons à  $90^\circ$ .



**Figure 5.29: Exemple de graphe de déformation / contrainte d'un test de traction (1kN) d'un spécimen à  $0^\circ$  de la plaque carbone-époxy P2 de 8.2mm**

<sup>28</sup>Une mesure des modules de Young à l'aide d'un test de flexion prend ici tout son sens, car dans la majorité des cas les matériaux composites n'ont pas les mêmes « modules de Young équivalents » en traction / compression et en flexion.

### Propriétés constitutives de référence

Après mesure et traitement de ces données, nous obtenons les propriétés du Tableau 5.15. Le module de cisaillement dans le plan  $G_{12}$  étant mesuré à la fois sur les éprouvettes de torsion à  $0^\circ$  et à  $90^\circ$ , deux valeurs distinctes,  $G_{12}^a$  mesuré sur les éprouvettes à  $0^\circ$  et  $G_{12}^b$  mesuré sur les spécimens à  $90^\circ$ , sont données. Les modules de Young en traction et en compression mesurés étant très proches (moins de 1% de différence), les valeurs figurant dans le tableau représentent en fait la moyenne des mesures de modules de Young en traction et en compression des différents spécimens testés. Il peut être constaté que, comme ce qui est généralement observé pour les composites, les modules de Young mesurés en traction / compression sont en moyenne plus élevés que les modules obtenus en flexion, à l'exception du module  $E_2$  de la plaque P2 qui s'avère plus faible en traction qu'en flexion. Nous voyons aussi que l'hypothèse d'isotropie transverse généralement utilisée pour les composites unidirectionnels semble justifiée, car les modules de cisaillement mesurés  $G_{12}$  et  $G_{13}$  restent suffisamment proches pour être considérés comme égaux, le module  $G_{23}$  étant comme à l'accoutumée inférieur aux modules  $G_{12}$  et  $G_{13}$ . Les écarts-types donnés dans le tableau permettent d'évaluer la fiabilité des différentes mesures et renseignent sur les incertitudes de chaque paramètre constitutif. Ainsi, les tests de torsion se montrent finalement aussi précis (ou du moins aussi reproductibles) que les autres tests classiques, la dispersion des modules de cisaillement observée étant du même ordre que celle des modules de Young mesurés en flexion, à la seule exception du module  $G_{12}^a$ . En raison d'un bruit électronique trop important provenant de l'amplificateur de jauges, les mesures à l'aide de jauges du coefficient de Poisson  $\nu_{12}$  n'ont par contre pu être effectuées qu'avec un degré de précision réduit, entraînant ainsi une importante variabilité.

| test<br><i>Plaque</i> | traction (jauges de déformation) |             |                | traction (extensomètre biaxial) |             |                |
|-----------------------|----------------------------------|-------------|----------------|---------------------------------|-------------|----------------|
|                       | $E_1$ (GPa)                      | $E_2$ (GPa) | $\nu_{12}$ (-) | $E_1$ (GPa)                     | $E_2$ (GPa) | $\nu_{12}$ (-) |
| <i>P1</i>             | 101.7                            | 7.43        | 0.34           | 103.0                           | 6.97        | 0.34           |
| <i>écart type</i>     | 3.3%                             | 1.7%        | 9.9%           | 0.4%                            | 0.8%        | 3.6%           |
| <i>P2</i>             | 95.3                             | 6.75        | 0.26           | 99.4                            | 6.52        | 0.36           |
| <i>écart type</i>     | 4.3%                             | 0.5%        | 11.0%          | 1.0%                            | 0.8%        | 4.4%           |

| test<br><i>Plaque</i> | flexion 4 pts |             | torsion (jauges extensométriques) |                  |                |                |
|-----------------------|---------------|-------------|-----------------------------------|------------------|----------------|----------------|
|                       | $E_1$ (GPa)   | $E_2$ (GPa) | $G_{12}^a$ (GPa)                  | $G_{12}^b$ (GPa) | $G_{13}$ (GPa) | $G_{23}$ (GPa) |
| <i>P1</i>             | 95.2          | 7.67        | -                                 | -                | -              | -              |
| <i>écart type</i>     | 3.0%          | 5.3%        | -                                 | -                | -              | -              |
| <i>P2</i>             | 89.7          | 7.42        | 3.56                              | 3.49             | 3.28           | 2.11           |
| <i>écart type</i>     | 6.7%          | 5.9%        | 9.1%                              | 2.1%             | 1.0%           | 3.1%           |

Tableau 5.15 : Propriétés constitutives mesurées sur les échantillons tirés des plaques P1 et P2 à l'aide de tests statiques de traction/compression, de torsion et de flexion

Pour la suite de la validation de la méthode mixte, les valeurs de référence utilisées seront les modules de Young  $E_1$  et  $E_2$  mesurés en flexion quatre points, le coefficient de Poisson  $\nu_{12}$  obtenu à l'aide de l'extensomètre biaxial et les modules de cisaillement  $G_{12}^a$ ,  $G_{13}$  et  $G_{23}$  mesurés en torsion.

### 5.5.3 Tests dynamiques et analyse modale expérimentale

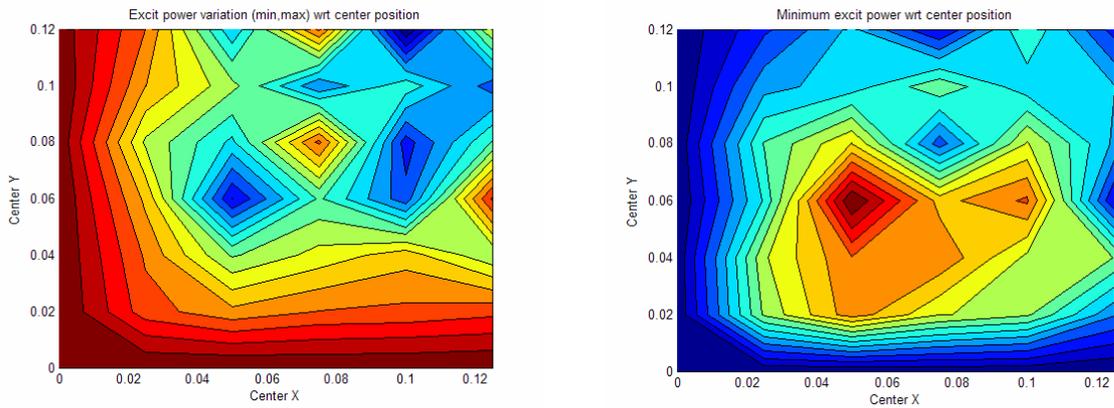
Pour chaque plaque P1 et P2, trois spécimens de rapport d'aspect variable ont été découpés pour les tests vibratoires. Ils se caractérisent par différentes orientations de fibres pour évaluer quelle configuration d'éprouvette est optimale d'un point de vue de l'identification mixte. Afin de garder un nombre raisonnable de cas tests, seul un échantillon des autres plaques a été retenu. Les caractéristiques des spécimens de tests vibratoires, extraits des différentes plaques en stratifié composite carbone-époxy, sont présentées dans le Tableau 5.16.

| spécimen     | plaque | dimensions | épaisseur | rapport d'épaisseur | orientation des fibres | masse volumique <sup>29</sup> |
|--------------|--------|------------|-----------|---------------------|------------------------|-------------------------------|
| <i>P1V1</i>  | P1     | 214×79 mm  | 3.77 mm   | 57                  | 90°                    | 1482 kg/m <sup>3</sup>        |
| <i>P1V2</i>  | P1     | 135×135 mm | 3.90 mm   | 34                  | 0°                     | 1482 kg/m <sup>3</sup>        |
| <i>P1V3</i>  | P1     | 135×79 mm  | 3.76 mm   | 36                  | 0°                     | 1482 kg/m <sup>3</sup>        |
| <i>P2V1</i>  | P2     | 214×79 mm  | 8.2 mm    | 26                  | 90°                    | 1440 kg/m <sup>3</sup>        |
| <i>P2V2</i>  | P2     | 135×134 mm | 8.3 mm    | 16                  | 0°                     | 1440 kg/m <sup>3</sup>        |
| <i>P2V3</i>  | P2     | 135×79 mm  | 8.2 mm    | 16                  | 0°                     | 1441 kg/m <sup>3</sup>        |
| <i>P3V2b</i> | P3     | 135×70 mm  | 13.0 mm   | 10                  | 0°                     | 1440 kg/m <sup>3</sup>        |
| <i>P6V1</i>  | P6     | 215×80 mm  | 13.0 mm   | 16                  | (0°,90°) <sub>4s</sub> | 1440 kg/m <sup>3</sup>        |

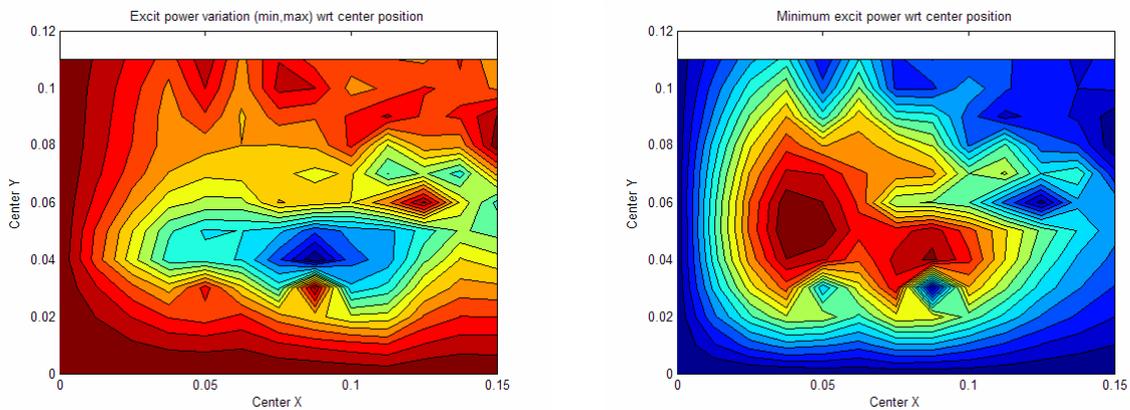
Tableau 5.16: Caractéristiques des spécimens de tests vibratoires

Pour chaque spécimen, une optimisation de la position de la source d'excitation acoustique est réalisée sur la base de propriétés constitutives approchées. La position optimale du haut-parleur est déterminée en recherchant principalement le maximum de la puissance d'excitation modale minimale. Comme observé précédemment, elle se situe, du moins pour les dix premiers modes, généralement non loin des coins de la plaque, de sorte que cette position peut être utilisée par défaut si une optimisation acoustique rigoureuse ne peut être effectuée. Deux exemples de calcul de la position optimale de la source acoustique sont présentés dans les Figures 5.30 et 5.31.

<sup>29</sup>La masse volumique prend déjà en compte la masse de la bande adhésive rétro-réfléchissante utilisée pour maximiser l'intensité du signal optique réfléchi.



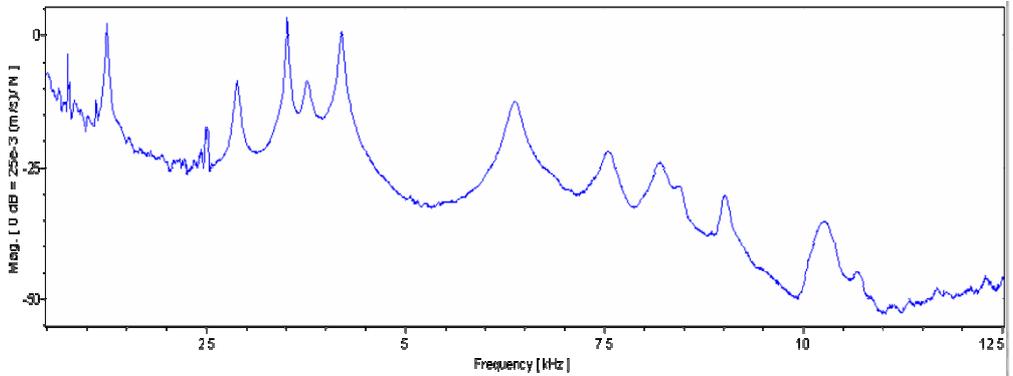
**Figure 5.30: Optimisation de l'excitation acoustique de la plaque P2V3 de dimensions 135 × 79 mm; position optimale en  $(c_x, c_y) = (50 \text{ mm}, 60 \text{ mm})$  par rapport au centre de la plaque**



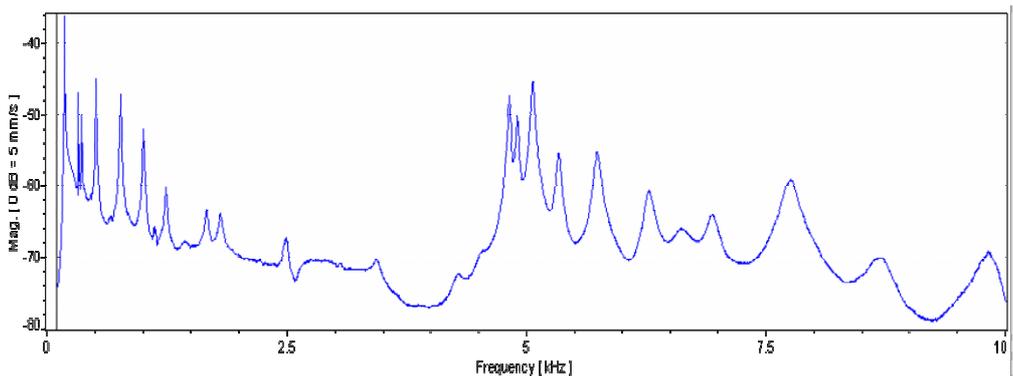
**Figure 5.31: Optimisation de l'excitation acoustique de la plaque P2V2 de dimensions 135 × 134 mm; position optimale en  $(85 \text{ mm}, 40 \text{ mm})$  par rapport au centre de la plaque**

Chaque spécimen est ensuite aligné précisément par rapport au système laser et la source acoustique et son microphone sont placés à la position d'excitation optimale. Les mesures dynamiques sont alors réalisées dans une plage de fréquence de 100 Hz à 10 kHz pour les spécimens de la plaque P1 et de 500 Hz à 15kHz pour les autres échantillons. A chaque fois, un nombre de lignes FFT maximal de 3200 est spécifié et les fonctions de transfert sont moyennées sur un minimum de 6 mesures par point. La qualité des fonctions de transfert mesurées (Figure 5.32 et Figure 5.33) est généralement excellente, seuls quelques modes trop proches gênent parfois l'analyse. En moyenne, entre 15 et 20 pics de résonance sont identifiés sur les plaques minces tirées de P1 tandis que pour les spécimens plus épais, de type P2, entre 12 et 15 modes sont mesurables dans la plage de fréquence. On relèvera le bon fonctionnement de la procédure d'optimisation de l'excitation acoustique, qui permet

d'exciter à un niveau suffisant un nombre important de modes propres sur une large plage de fréquence.



**Figure 5.32: Fonction de transfert moyenne mesurée sur la plaque P2V3 de 8.2mm**



**Figure 5.33: Fonction de transfert moyenne mesurée sur la plaque P1V1 de 3.7 mm**

Après exportation au format UNV et réimportation dans le logiciel Me'Scope, le modèle fréquentiel expérimental est traité et une extraction modale par curve fitting polynomial est réalisée afin d'obtenir précisément les pulsations propres et les formes modales. Les modes extraits à l'aide de cette technique sont vérifiés au moyen de la matrice MAC de l'ensemble des formes propres mesurées (évaluation de l'orthogonalité de modes expérimentaux), ainsi que des graphes de distribution de phase et de l'animation temporelle des formes propres (évaluation des effets de couplage de modes proches ou autres effets complexes). Un certain tri est parfois nécessaire afin de ne conserver que les modes mesurés parfaitement, sans effet des autres modes proches et sans bruit de mesure important. Il faut noter particulièrement qu'en raison de la distance entre le microphone de mesure de référence de la pression

acoustique et la plaque de test, un décalage de phase progressif entre la mesure de référence et l'excitation réelle se produit, entraînant donc un décalage de la phase progressif de la fonction de transfert mesurée (principalement à hautes fréquences). Cet effet de décalage de phase a tendance à gêner les méthodes de curve fitting modales. Il serait ainsi intéressant par la suite de corriger la phase des fonctions de transfert mesurées afin de supprimer ces effets parasites. Malgré tout, la qualité des modes mesurés est très bonne, même lorsque les modes sont proches. Deux exemples de modes propres extraits, accompagnés de leur matrice MAC, sont présentés ci-dessous (Figure 5.34 à Figure 5.37).

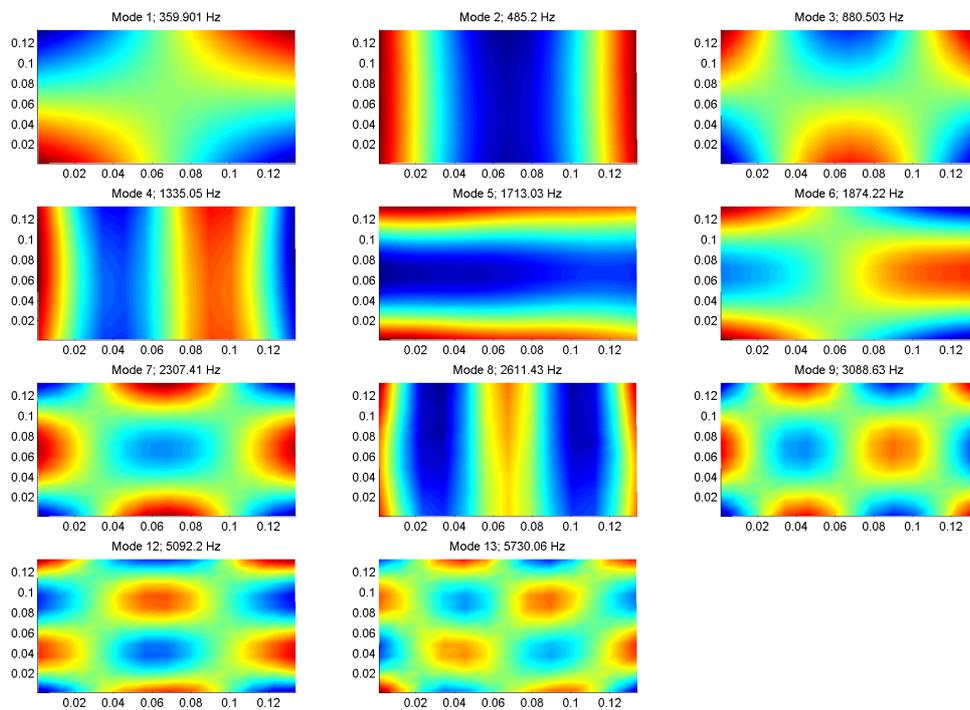


Figure 5.34: Modes mesurés servant de base à l'identification de la plaque P1V2

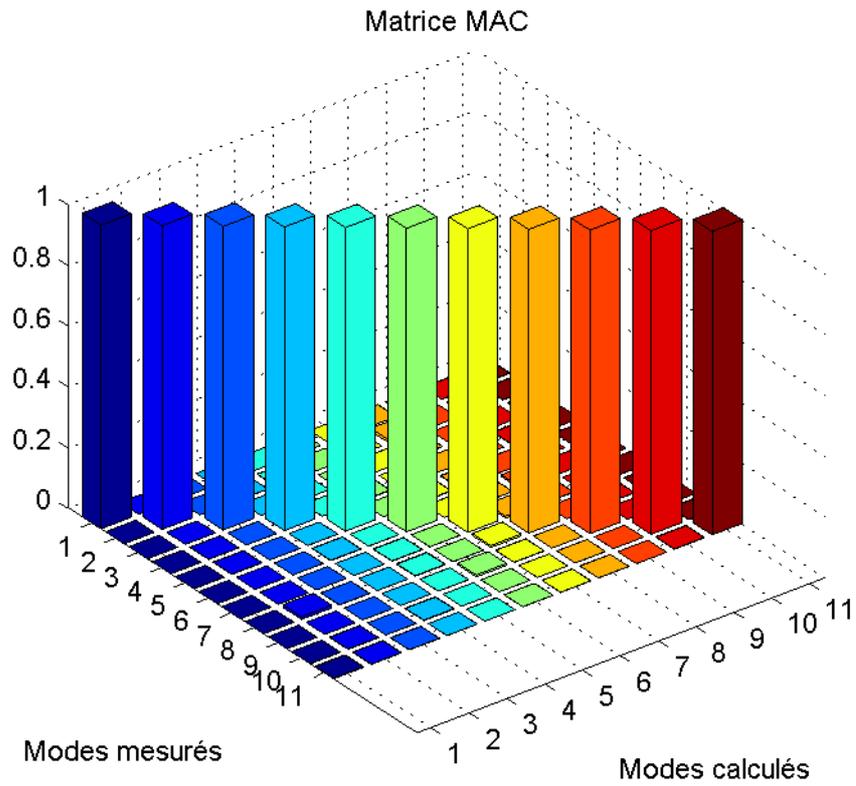


Figure 5.35: Matrice MAC des modes mesurés (plaque P1V2)

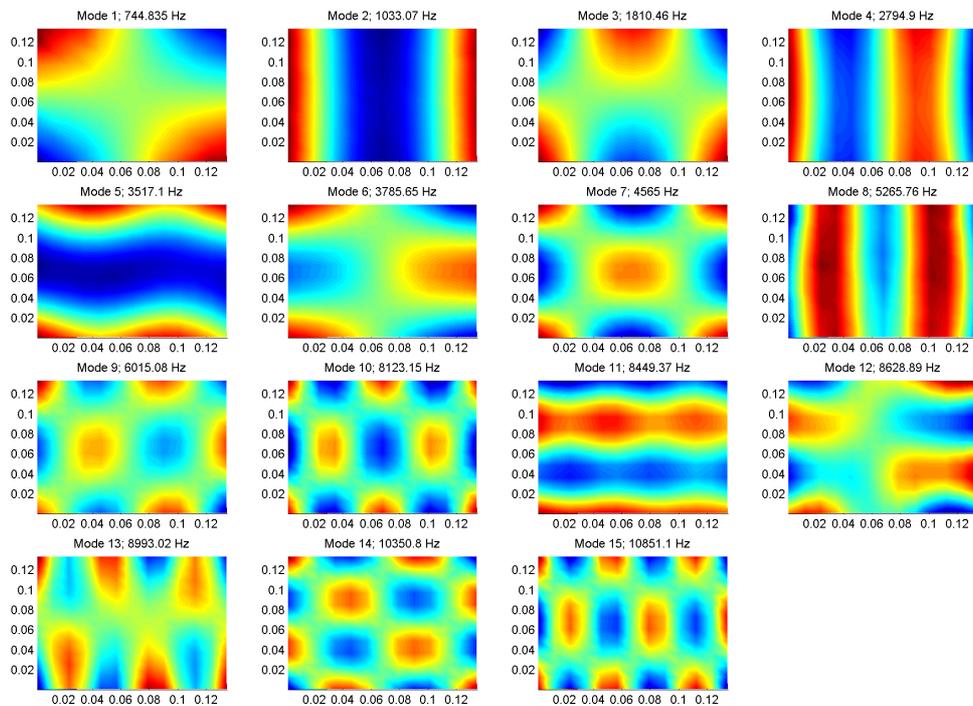


Figure 5.36: Modes propres mesurés de la plaque P2V2

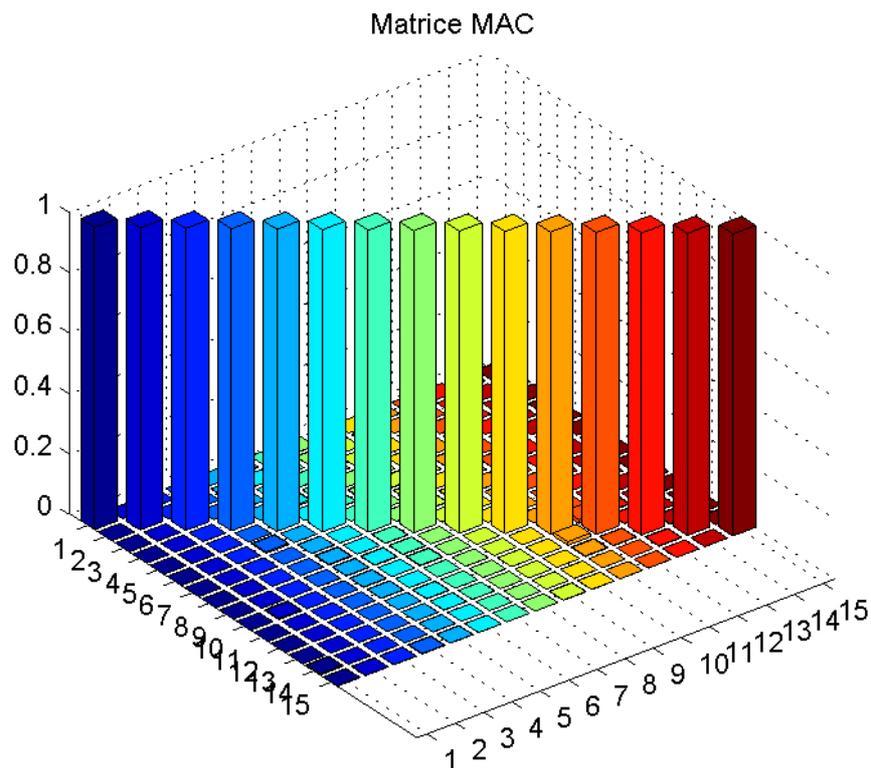


Figure 5.37: Matrice MAC des modes propres mesurés (Plaque P2V2)

#### 5.5.4 Identification mixte numérique-expérimentale

Une fois que les modèles modaux expérimentaux des spécimens sont correctement extraits, la procédure d'identification à proprement parler peut commencer. Toutes les identifications réalisées se basent sur des modèles d'éléments finis de coque d'ordre  $p = 3$  avec intégration numérique exacte. Les maillages numériques sont définis par  $15 \times 6$  éléments quadratiques lagrangiens pour les spécimens rectangulaires et par  $10 \times 10$  éléments similaires pour les spécimens carrés (P1V2 et P2V2). Pour chaque échantillon, au minimum trois identifications mixtes ont été exécutées dans lesquelles les pondérations des normes d'erreur, de même que les vecteurs de paramètres initiaux, ont été changés. Deux ensembles de facteurs de pondération des normes d'erreur ont été testés (Tableau 5.17), le premier pondérant assez fortement les normes basées sur les formes propres et le second étant plus équilibré et plus robuste dans la majorité des cas.

| Norme          | EcRelFreq | MAC1 | MAC2  | NodalCorr2         | SumEcMod |
|----------------|-----------|------|-------|--------------------|----------|
| <i>Poids 1</i> | 1         | 0.05 | 0.1   | $1 \times 10^{-6}$ | 0.1      |
| <i>Poids 2</i> | 1         | 0.05 | 0.025 | $1 \times 10^{-6}$ | 0.01     |

Tableau 5.17: Pondération conseillée des normes d'erreur

La convergence de l'algorithme d'identification pour les modules de Young et de cisaillement dans le plan est tout aussi rapide que lors des exemples précédents, puisqu'au maximum trois itérations sont nécessaires pour déterminer précisément ces paramètres (Figure 5.38). Les modules de cisaillement transverse convergent un peu plus lentement que les autres, plus particulièrement dans le cas des plaques minces (P1), mais se stabilisent en général à partir de la 3<sup>ème</sup> ou 4<sup>ème</sup> itération.

Le coefficient de Poisson évolue malheureusement plus lentement et semble, surtout avec le premier set de pondération, dériver de manière excessive sur les dernières itérations si la tolérance de convergence est beaucoup trop exigeante ( $< 10^{-4}$ ). Visible principalement dans des cas où les modes mesurés sont légèrement perturbés par rapport aux modes théoriques, ce phénomène de dérive semble conditionné par les incertitudes sur les modes mesurés. L'algorithme d'identification cherche alors à compenser les inévitables erreurs d'origine expérimentale, même infimes, en variant trop fortement le coefficient de Poisson (qui affecte entre autres la courbure des lignes nodales). Il n'est donc pas raisonnable et même contre-productif d'imposer à l'algorithme des conditions de convergence beaucoup trop sévères. Les tolérances de convergence devraient si possible rester de l'ordre de  $10^{-4}$  et le nombre maximal d'itérations autorisées ne devrait pas dépasser 5 ou 6. Il faut tout de même noter que dans tous les cas, le coefficient de Poisson finit par se stabiliser, mais parfois assez loin de la valeur de référence. On note donc ici toute l'importance du soin apporté aux mesures des formes propres.

On peut encore ajouter que, dans la majorité des cas testés, le deuxième set de facteurs de pondération semble plus robuste, tout en étant aussi performant voire plus que le premier set. En outre, comme pressenti dans l'étude paramétrique, la convergence des modules de cisaillement transverse mais aussi du coefficient de Poisson est nettement moins rapide et moins stable dans le cas des plaques minces (P1) que pour les plaques relativement épaisses (P2), ce qui s'explique facilement si l'on observe la sensibilité des plaques unidirectionnelles aux différents paramètres constitutifs (chapitre 4.3.3 ).

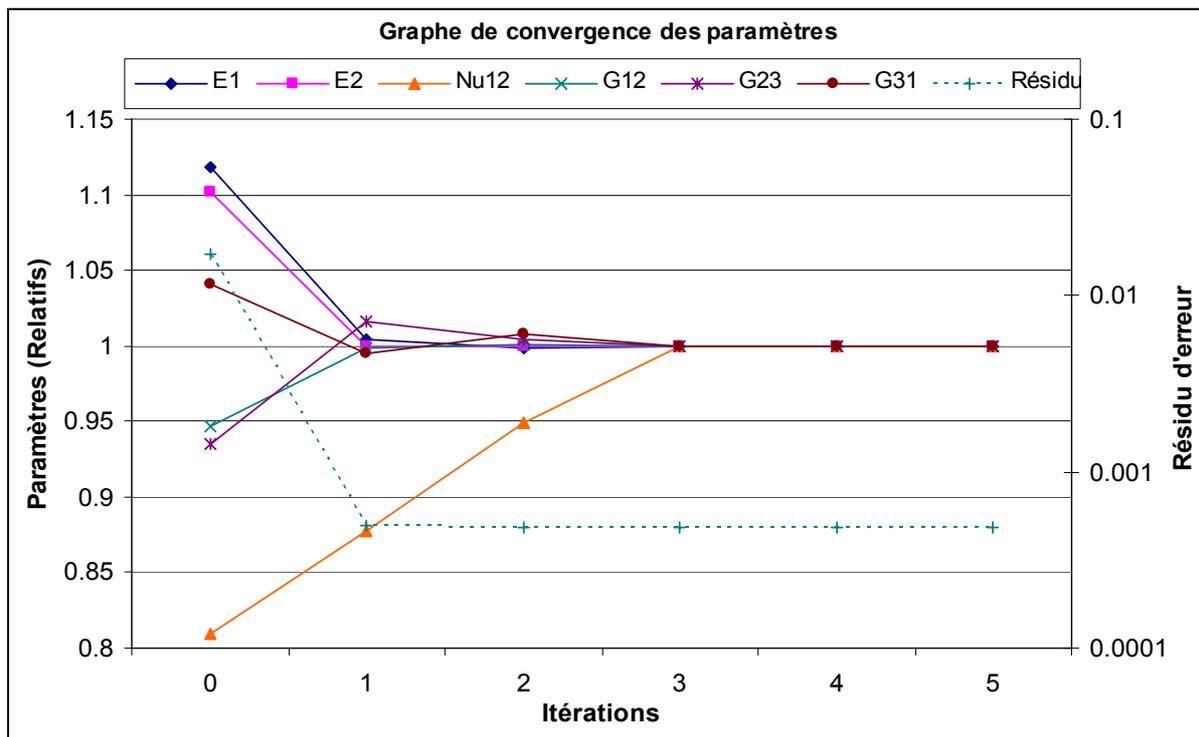


Figure 5.38: Graphe de convergence des paramètres identifiés (plaque P2V2 de 8.2 mm)

Au vu des rapports d'épaisseur  $a/h$  des plaques P3V2b et P6V1, valant respectivement 10 et 16, et d'après les recommandations tirées de la validation du modèle d'éléments finis de coque PSDT, un ordre  $p$  d'approximation du déplacement dans l'épaisseur égal à 5 serait conseillé pour l'identification de ces plaques. Afin de vérifier le gain de précision / rapidité d'identification que peut apporter une augmentation de l'ordre  $p$ , une étude d'identification des propriétés constitutives des plaques P3V2b et P6V1 à l'aide de modèles d'éléments finis de coque d'ordre  $p$  égal à 5 a été réalisée (plutôt que l'ordre  $p=3$  utilisé jusqu'ici) (Figure 5.39 et Figure 5.40). Dans le cas de la plaque unidirectionnelle épaisse P2V3b, le gain de rapidité de convergence est très important, surtout pour les paramètres les moins sensibles comme les modules de cisaillement transverse ou le coefficient de Poisson, puisque l'ensemble de paramètres convergent alors complètement en trois itérations seulement. De plus l'erreur résiduelle d'identification à l'ordre  $p=5$  est nettement inférieure au résidu trouvé à l'ordre  $p=3$ . Cependant, cette diminution d'erreur résiduelle n'affecte que peu la valeur des paramètres identifiés (quelques fractions de pourcents pour les modules et env. 3% pour le coefficient de Poisson). Le résidu étant généralement dominé par les termes d'écart relatif des pulsations propres, il semble que le gain de précision lors du passage à l'ordre  $p=5$  influence

essentiellement la précision des fréquences propres calculées. Cette constatation tend donc à prouver que l'augmentation d'ordre bénéficie principalement à la vitesse de convergence des normes fréquentielles et améliore ainsi également la robustesse<sup>30</sup> de la méthode, mais n'apporte finalement pas de grand gain de précision d'identification. Du point de vue du temps de calcul, l'identification d'ordre  $p = 3$  a nécessité l'évaluation de 58 solutions modales numériques tandis qu'avec l'ordre 5, seules 36 évaluations ont été nécessaires pour une précision a priori équivalente, voire meilleure. Comme le temps de résolution du problème numérique avec un modèle d'ordre  $p = 5$  est environ le double du temps de celui d'ordre  $p = 3$ , le temps total d'identification reste environ équivalent pour les deux ordres d'approximation. Cependant, le gain de robustesse qu'apporte l'augmentation de l'ordre d'approximation pour les plaques très épaisses et fortement orthotropes reste un avantage important et, par conséquent, il est donc préférable d'utiliser un modèle d'ordre  $p = 5$  pour l'identification de ce type de spécimens ( $a/h < 15$ ,  $E_1/E_2 > 10$ ). On notera également que ces constatations confirment les recommandations faites précédemment au chapitre 2.

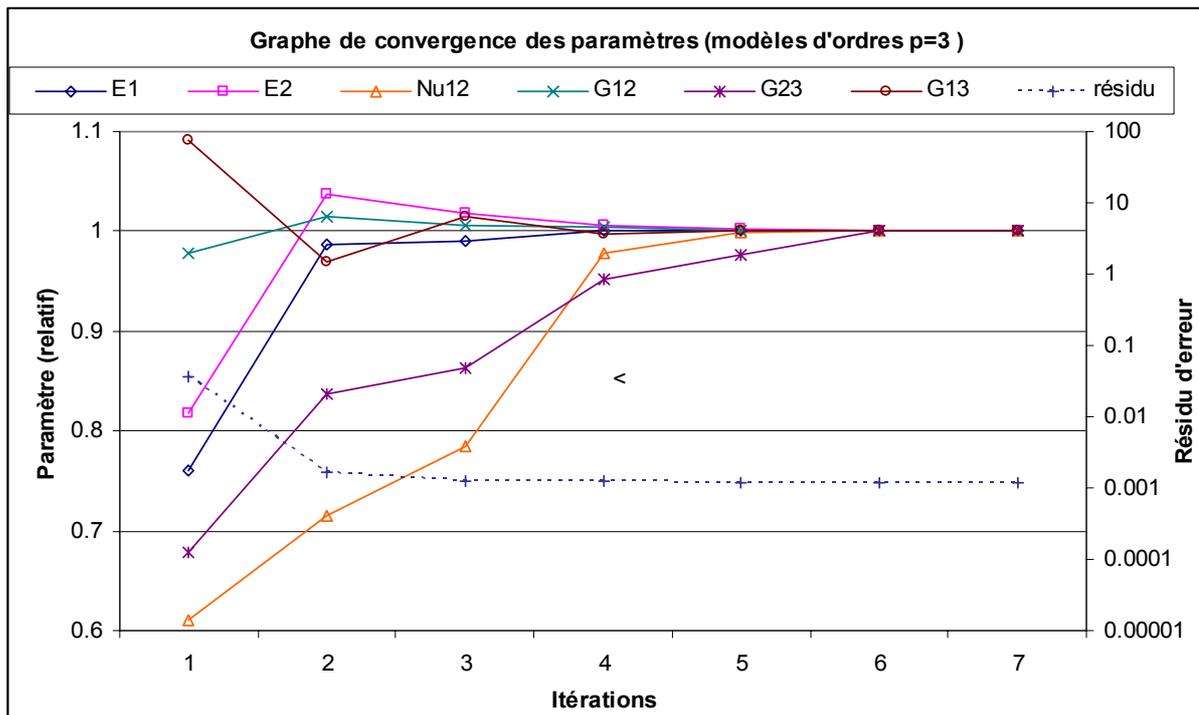


Figure 5.39: Graphe de convergence des paramètres constitutifs de la plaque P3V2 de 13 mm avec un modèle de coque d'ordre  $p=3$

<sup>30</sup> En effet, les pulsations propres étant les plus fiables des propriétés modales mesurées ici, une augmentation de sensibilité des pulsations propres calculées par rapport à l'ensemble des paramètres améliore directement la robustesse de la méthode d'identification.

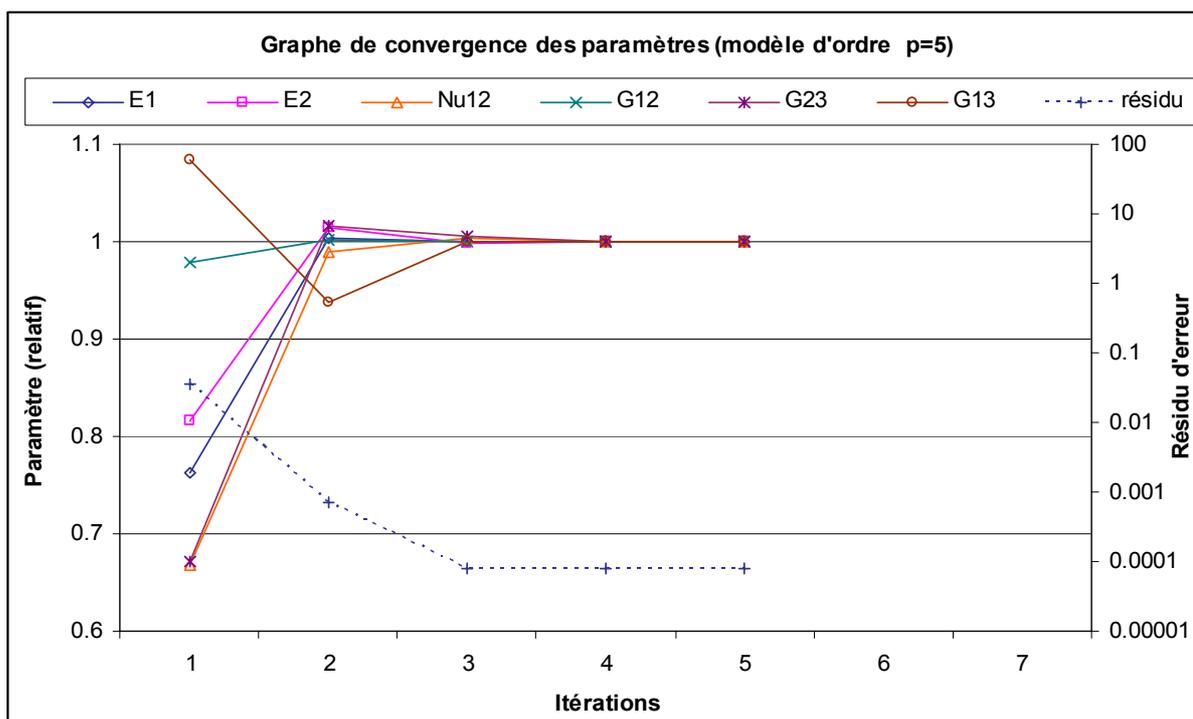


Figure 5.40: Graphe de convergence des paramètres constitutifs de la plaque P3V2 de 13 mm avec un modèle de coque d'ordre  $p=5$

### 5.5.5 Fréquences et modes propres identifiés

Les modèles modaux numériques identifiés sont généralement très proches des valeurs expérimentales, surtout au niveau des pulsations propres, puisque en moyenne les écarts relatifs des fréquences propres mesurées et identifiées est inférieur à 0.5%, soit une erreur bien inférieure à l'incertitude de mesure. Pour les modes propres, les matrices MAC des modes mesurés et identifiés sont dans la grande majorité des cas très proches des valeurs idéales, avec des termes diagonaux supérieurs à 0.9 et hors diagonale inférieurs à 0.1, ce qui représente une très bonne corrélation entre données numériques et expérimentales. A titre d'exemple, les fréquences propres mesurées et identifiées des plaques P1V2 et P2V2 sont présentées dans le Tableau 5.18 et au Tableau 5.19, tandis que les modes propres identifiées et les matrices MAC correspondantes sont présentés ci-dessous (Figure 5.41, Figure 5.42 et Figure 5.43).

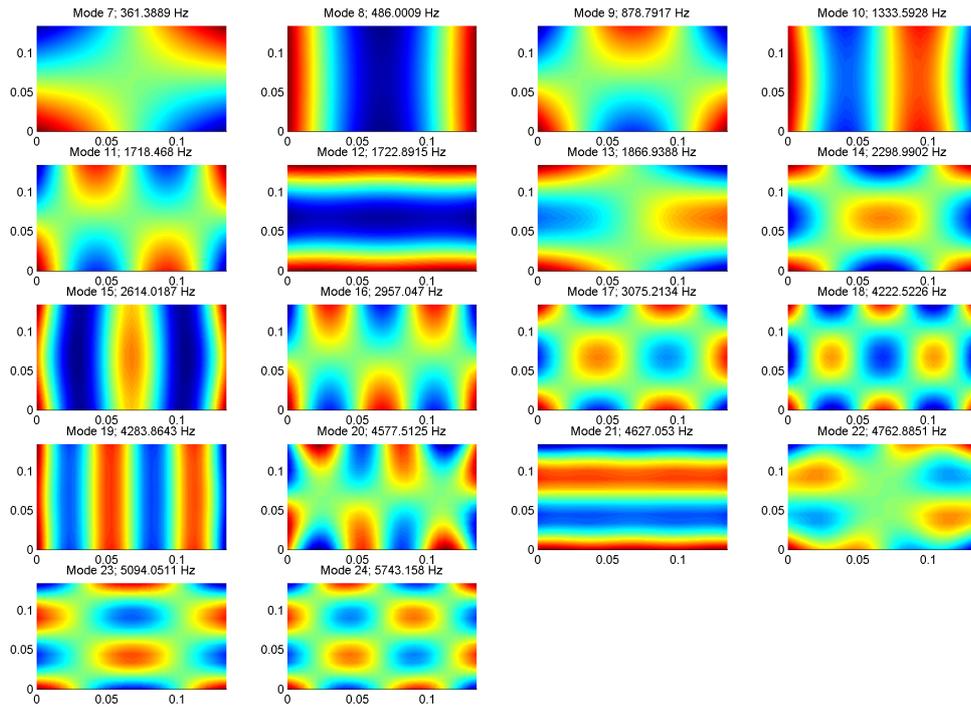


Figure 5.41: Modes identifiés de la plaque P1V2

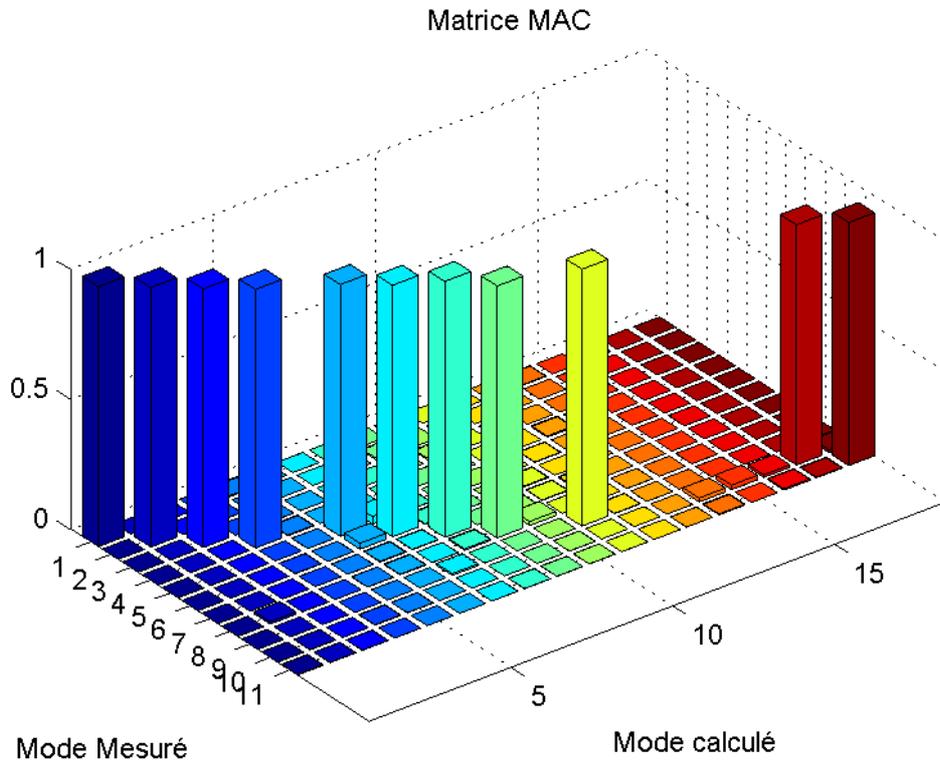


Figure 5.42: Matrice MAC entre les modes mesurés et identifiés de la plaque P1V2

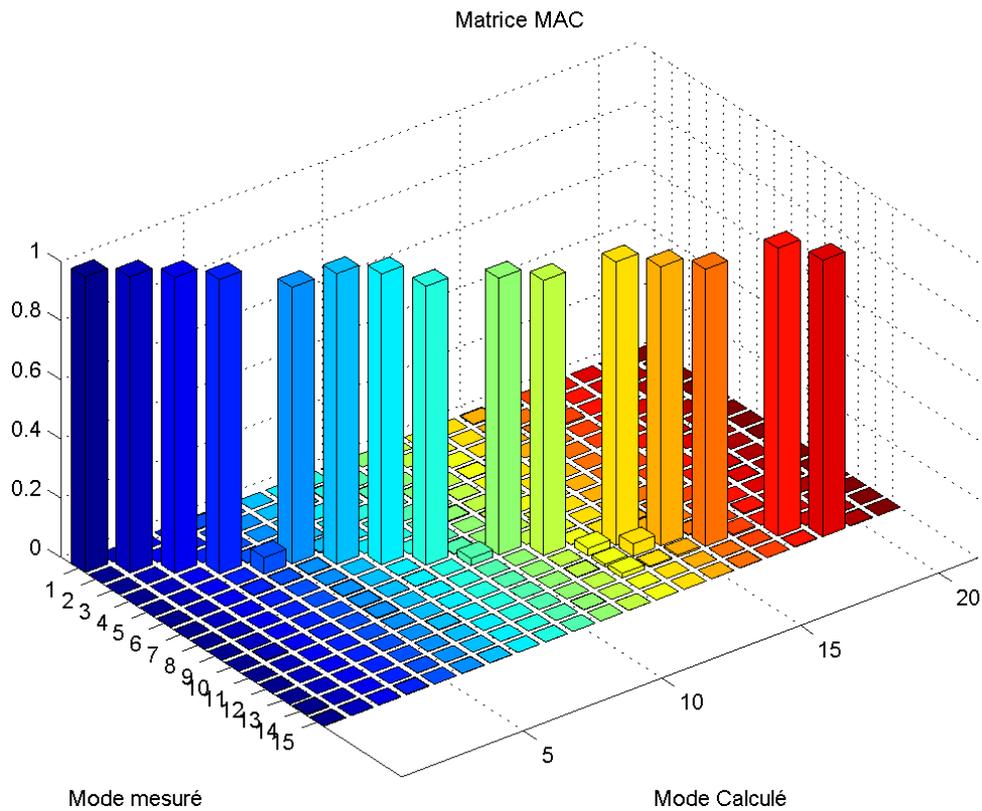


Figure 5.43: Matrice MAC des modes mesurés et identifiés de la plaque P2V2

| Source                             | Mode 1 | Mode 2 | Mode 3 | Mode 4 | Mode 5 |
|------------------------------------|--------|--------|--------|--------|--------|
| <i>fréquences mesurées (Hz)</i>    | 744.8  | 1033.1 | 1810.5 | 2794.9 | 3517.1 |
| <i>fréquences identifiées (Hz)</i> | 747.1  | 1034.4 | 1807.0 | 2780.3 | 3517.8 |
| <i>% écart</i>                     | 0.30%  | 0.13%  | -0.19% | -0.52% | 0.02%  |

| Source                             | Mode 6 | Mode 7 | Mode 8 | Mode 9 | Mode 10 |
|------------------------------------|--------|--------|--------|--------|---------|
| <i>fréquences mesurées (Hz)</i>    | 3785.7 | 4565.0 | 5265.8 | 6015.1 | 8123.1  |
| <i>fréquences identifiées (Hz)</i> | 3779.9 | 4570.9 | 5301.6 | 5999.6 | 8099.2  |
| <i>% écart</i>                     | -0.15% | 0.13%  | 0.68%  | -0.26% | -0.29%  |

| Source                             | Mode 11 | Mode 12 | Mode 13 | Mode 14 | Mode 15 |
|------------------------------------|---------|---------|---------|---------|---------|
| <i>fréquences mesurées (Hz)</i>    | 8449.4  | 8628.9  | 8993.0  | 10351.0 | 10851.0 |
| <i>fréquences identifiées (Hz)</i> | 8474.8  | 8619.5  | 9247.7  | 10340.0 | 10857.0 |
| <i>% écart</i>                     | 0.30%   | -0.11%  | 2.83%   | -0.11%  | 0.06%   |

Tableau 5.18: Fréquences mesurées et identifiées de la plaque P2V2

| Source                             | Mode 1 | Mode 2 | Mode 3 | Mode 4 | Mode 5 | Mode 6 |
|------------------------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| <i>fréquences mesurées (Hz)</i>    | 359.9  | 485.2  | 880.5  | 1335.1 | 1713.0 | 1874.2 |
| <i>fréquences identifiées (Hz)</i> | 361.4  | 486.0  | 878.8  | 1333.6 | 1722.9 | 1866.9 |
| <i>% écart</i>                     | 0.41%  | 0.16%  | -0.19% | -0.11% | 0.58%  | -0.39% |

| Source                             | Mode 7 | Mode 8 | Mode 9 | Mode 12 | Mode 13 |
|------------------------------------|--------|--------|--------|---------|---------|
| <i>Fréquences mesurées (Hz)</i>    | 2307.4 | 2611.4 | 3088.6 | 5092.2  | 5730.1  |
| <i>Fréquences identifiées (Hz)</i> | 2299.0 | 2614.0 | 3075.2 | 5094.1  | 5743.2  |
| <i>% écart</i>                     | -0.36% | 0.10%  | -0.43% | 0.04%   | 0.23%   |

Tableau 5.19: Fréquences propres identifiées sur la plaque P1V2

### 5.5.6 Paramètres identifiés

Les paramètres constitutifs identifiés pour chaque échantillon des plaques unidirectionnelles P1, P2, P3 et à plis croisés P6 sont présentés dans les Tableaux 5.20 à 5.23. Les valeurs de référence des propriétés constitutives des composites proviennent des essais de flexion quatre points pour les deux modules de Young, du test de traction/compression avec extensomètre biaxial pour le coefficient de Poisson et du test de torsion des spécimens de la plaque P2 pour les modules de cisaillement dans le plan et transverse. Dans les tableaux suivants, lorsque ces données sont directement disponibles pour la plaque considérée, les valeurs mesurées sur cette plaque sont bien sûr utilisées comme référence de comparaison. Par contre lorsque les valeurs de référence de certains paramètres n'ont pas été mesurées pour un spécimen donné, les valeurs utilisées proviennent alors des tests effectués sur les échantillons de la plaque P2 et les grandeurs correspondantes sont dans ce cas affichées en italique dans les tableaux de résultats.

| Test                 | $E_1$<br>(GPa) | $E_2$<br>(Gpa) | $\nu_{12}$<br>(-) | $G_{12}$<br>(GPa) <sup>1</sup> | $G_{23}$<br>(GPa) <sup>1</sup> | $G_{31}$<br>(GPa) <sup>1</sup> |
|----------------------|----------------|----------------|-------------------|--------------------------------|--------------------------------|--------------------------------|
| <i>statique</i>      | 95.2           | 7.67           | 0.36              | 3.56                           | 2.11                           | 3.28                           |
| <i>écart type %</i>  | 6.7%           | 5.3%           | 4.4%              | 9.1%                           | 1.0%                           | 3.1%                           |
| <i>PIV1</i>          | 94.6           | 7.19           | 0.31              | 4.05                           | 1.36                           | 5.59                           |
| <i>% écart</i>       | -0.6%          | -6.3%          | -13.6%            | 13.8%                          | -35.4%                         | 70.6%                          |
| <i>PIV2</i>          | 92.5           | 7.27           | 0.37              | 3.87                           | 2.55                           | 3.46                           |
| <i>% écart</i>       | -2.8%          | -5.3%          | 4.0%              | 8.6%                           | 21.0%                          | 5.6%                           |
| <i>PIV3</i>          | 96.0           | 7.40           | 0.35              | 4.10                           | 1.27                           | 4.24                           |
| <i>% écart</i>       | 0.8%           | -3.6%          | -2.4%             | 15.1%                          | -39.7%                         | 29.5%                          |
| <i>moyenne</i>       | 94.3           | 7.28           | 0.34              | 4.01                           | 1.73                           | 4.43                           |
| <i>écart type</i>    | 1.4            | 0.09           | 0.03              | 0.10                           | 0.58                           | 0.88                           |
| <i>écart type %</i>  | 1.5%           | 1.2%           | 7.6%              | 2.5%                           | 33.7%                          | 19.9%                          |
| <i>% erreur moy.</i> | -1.0%          | -4.7%          | -0.8%             | 12.0%                          | -12.2%                         | 23.4%                          |

Tableau 5.20: Paramètres identifiés sur les spécimens de la plaque P1 de 3.7mm  
(<sup>1</sup> valeurs statiques mesurées sur la plaque P2 de 8.2 mm)

L'identification mixte des propriétés constitutives de la plaque P1 est exécutée avec une moyenne de 12 à 16 fréquences et modes propres mesurés. Les valeurs des modules de Young  $E_1$  et  $E_2$  identifiées sur les spécimens de la plaques UD mince (P1) sont très proches des propriétés mesurées en flexion quatre points et sont situées globalement entre les modules de Young mesurés en flexion et en traction/compression uniaxiale. Le module de cisaillement dans le plan  $G_{12}$  est quant à lui relativement bien identifié, surtout si l'on prend en compte le fait que la valeur de comparaison provient d'une autre plaque (P2) ayant notamment un taux de fibres légèrement inférieur à la plaque originale. Les valeurs du module  $G_{12}$  identifié sont toutes supérieures à la valeur de référence tirées de la plaque P2, ce qui peut s'expliquer par le fait que la plaque P1 à un taux de fibre légèrement plus important que la plaque P2 plus épaisse. Par contre, comme nous l'indiquait l'étude de sensibilité des paramètres, l'identification des modules de cisaillement transverse ne semble pas possible pour des spécimens aussi minces (rapport  $a/h > 30$ ). Le coefficient de Poisson  $\nu_{12}$  identifié correspond aux valeurs mesurées en statique (à l'incertitude près) pour les identifications des plaques P1V2 et P1V3 (fibres à  $0^\circ$ ), mais comme pour la plupart des autres paramètres, le spécimen P1V1 avec fibres à  $90^\circ$  ne fournit pas de résultats fiables. De manière générale, nous constatons que la meilleure géométrie de spécimen pour l'identification mixte des propriétés de cette plaque UD mince est très nettement celle de la plaque carrée P1V2, le spécimen P1V1 avec fibre à  $90^\circ$  étant quant à lui vraiment à proscrire. En résumé, l'identification mixte numérique-expérimentale basée sur les propriétés modales de plaques minces fortement orthotropes comme les spécimens de type P1 permet de déterminer avec un degré de précision acceptable les modules de Young  $E_1$  et  $E_2$ , ainsi que le module de cisaillement  $G_{12}$  et le coefficient de Poisson  $\nu_{12}$ .

| Test                 | $E_1$<br>(GPa) | $E_2$<br>(GPa) | $\nu_{12}$<br>(-) | $G_{12}$<br>(GPa) | $G_{23}$<br>(GPa) | $G_{31}$<br>(GPa) |
|----------------------|----------------|----------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|
| <i>statique</i>      | 89.7           | 7.42           | 0.36              | 3.56              | 2.11              | 3.28              |
| <i>écart type %</i>  | 6.7%           | 5.9%           | 4.4%              | 9.1%              | 1.0%              | 3.1%              |
| <i>P2V1</i>          | 89.3           | 7.04           | 0.35              | 3.74              | 2.43              | 4.08              |
| <i>% écart</i>       | -0.5%          | -5.2%          | -1.3%             | 4.9%              | 15.3%             | 24.4%             |
| <i>P2V2</i>          | 89.4           | 7.26           | 0.37              | 3.70              | 2.25              | 3.36              |
| <i>% écart</i>       | -0.4%          | -2.2%          | 3.4%              | 3.7%              | 6.7%              | 2.6%              |
| <i>P2V3</i>          | 93.6           | 7.14           | 0.36              | 3.74              | 2.15              | 3.53              |
| <i>% écart</i>       | 4.3%           | -3.7%          | 0.8%              | 5.1%              | 2.0%              | 7.6%              |
| <i>moyenne</i>       | 90.8           | 7.15           | 0.36              | 3.73              | 2.27              | 3.66              |
| <i>Écart type</i>    | 2.0            | 0.09           | 0.01              | 0.02              | 0.12              | 0.31              |
| <i>écart type %</i>  | 2.2%           | 1.3%           | 1.9%              | 0.6%              | 5.1%              | 8.3%              |
| <i>% erreur moy.</i> | 1.1%           | -3.7%          | 1.0%              | 4.6%              | 8.0%              | 11.5%             |

**Tableau 5.21: Paramètres constitutifs identifiés sur la plaque P2 de 8.2mm**

Pour la plaque modérément épaisse de type P2, nous disposons d'un ensemble complet de propriétés constitutives de référence mesurées lors des essais statiques de spécimens tous tirés de la même plaque que les échantillons de tests dynamiques. Les comparaisons seront donc réellement représentatives de la précision d'identification des propriétés constitutives à l'aide de la méthode proposée. Entre 12 et 16 modes et fréquences propres en moyenne servent de base à l'identification de chaque spécimen. D'après le Tableau 5.21, il peut être constaté que les modules de Young  $E_1$  et  $E_2$ , le coefficient de Poisson  $\nu_{12}$  et le module de cisaillement  $G_{12}$  sont parfaitement identifiés avec un écart inférieur à l'écart type des mesures statiques réalisées. A nouveau les modules  $E_1$  et  $E_2$  identifiés se trouvent très proches des modules dits de flexion et sont respectivement légèrement inférieur et supérieur aux modules de traction/compression. Dans le cas des échantillons avec fibres à  $0^\circ$  (P2V2 et P2V3), les modules de cisaillement transverse  $G_{13}$  et  $G_{23}$  sont également identifiés précisément, puisque l'erreur maximale sur ces paramètres est de l'ordre de 7%. Même si les erreurs sur ces coefficients sont légèrement plus élevées que l'écart type des mesures statiques, nous pouvons raisonnablement penser que l'incertitude réelle des mesures statiques des modules de cisaillement est plus élevée que le seul écart type des mesures, notamment en raison des éventuelles imprécisions dans les hypothèses et les théories utilisées pour poser le système d'équations reliant le couple et les déformations à  $45^\circ$  aux modules de cisaillement (§ 5.5). Ainsi, la détermination des modules de cisaillement transverse avec une incertitude de  $\pm 0.2$  GPa représente une performance très intéressante, surtout en regard de la variabilité observée couramment avec d'autres techniques de tests statiques comme les essais standardisés de cisaillement entre rails ou de type Iosipescu. Les échantillons de test avec fibres orientées à  $90^\circ$  sont à nouveau à éviter autant que possible, tandis que la meilleure géométrie semble encore une fois être celle de la plaque carrée P2V2, même si l'échantillon rectangulaire à fibre à  $0^\circ$  (P2V3) fournit malgré tout des résultats très proches. Comme prévu lors de l'étude de sensibilité, l'ensemble des propriétés élastiques d'un composite unidirectionnel peuvent ainsi être déterminées avec une excellente précision à l'aide d'une identification mixte basée sur les fréquences et modes propres de plaques unidirectionnelles relativement épaisses ( $a/h$  entre 15 et 20) comme les spécimens de type P2.

| Test                         | $E_1$<br>(GPa) | $E_2$<br>(GPa) | $\nu_{12}$<br>(-) | $G_{12}$<br>(GPa) | $G_{23}$<br>(GPa) | $G_{31}$<br>(GPa) |
|------------------------------|----------------|----------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|
| <i>statique</i> <sup>1</sup> | 89.7           | 7.42           | 0.36              | 3.56              | 2.11              | 3.28              |
| <i>écart type %</i>          | 6.7%           | 5.9%           | 4.4%              | 9.1%              | 1.0%              | 3.1%              |
| <i>P3V2</i>                  | 92.1           | 6.85           | 0.34              | 3.58              | 3.09              | 3.21              |
| <i>% écart</i>               | 2.7%           | -7.7%          | -4.0%             | 0.4%              | 46.9%             | -2.2%             |

**Tableau 5.22: Paramètres constitutifs identifiés sur la plaque P3 de 13mm**  
(<sup>1</sup> valeurs de référence statiques tirées de la plaque P2 de 8.2 mm)

La plaque UD épaisse P3 n'ayant pas été testée en statique, seules les valeurs de référence de la plaque P2 peuvent être utilisées pour comparer les résultats d'identification mixte. Ces deux plaques possèdent des taux de fibres proches, mais en raison de la variabilité inhérente au procédé de fabrication par voie humide (imprégnation manuelle de tissus et pressage), les propriétés peuvent changer de manière assez significatives, notamment à cause des effets d'écoulement de résine, de glissements relatifs des strates entre elles lors du pressage ou encore vu les effets de polymérisation de la résine époxyde pour de grandes épaisseurs de stratifiés<sup>31</sup>. Malgré tout, les propriétés constitutives identifiées sur la plaque P3 par la méthode mixte (Tableau 5.22) s'avèrent finalement très proches des mesures statiques effectuées sur la plaque P2, à l'exception notable du module de cisaillement transverse  $G_{23}$  qui est ici supérieur de 50% à la valeur de référence. En l'absence d'autres mesures, il est impossible de savoir si cet écart important est réel et provient des effets de bord du procédé de fabrication, ou voire même de la physique des stratifiés épais, ou plutôt d'une erreur due uniquement à la procédure d'identification mixte ou des mesures modales. En raison de la limitation de la plage d'excitation acoustique à environ 13 kHz, cette identification n'a pu en outre se baser que sur 8 modes propres mesurés, les modes suivants ne pouvant plus être suffisamment excités pour être mesurés convenablement.

<sup>31</sup> La polymérisation de la résine époxyde s'accompagne d'un dégagement de chaleur important et d'une réduction de volume non négligeable, ce qui peut induire des changements locaux de structure chimique et des contraintes résiduelles importantes. Cet effet est surtout visible dans le cas de composites épais, où le transfert de chaleur est généralement « bloqué » du fait de la faible conductivité thermique de la résine et où la réaction de polymérisation évolue à des vitesses différentes entre le centre et la surface de la pièce.

| Test                         | $E_1$<br>(GPa) | $E_2$<br>(GPa) | $\nu_{12}$<br>(-) | $G_{12}$<br>(GPa) | $G_{23}$<br>(GPa) | $G_{31}$<br>(GPa) |
|------------------------------|----------------|----------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|
| <i>statique</i> <sup>1</sup> | 89.7           | 7.42           | 0.36              | 3.56              | 2.11              | 3.28              |
| <i>écart type %</i>          | 6.7%           | 5.9%           | 4.4%              | 9.1%              | 1.0%              | 3.1%              |
| <i>P6V1</i>                  | 97.6           | 9.38           | 0.30              | 3.70              | 1.58              | 3.48              |
| <i>% écart</i>               | 8.7%           | 26.4%          | -15.8%            | 3.9%              | -25.1%            | 6.2%              |

**Tableau 5.23: Paramètres constitutifs identifiés sur la plaque à plis croisés P6 de 13mm**  
(<sup>1</sup> valeurs de référence statiques tirées de la plaque P2 de 8.2 mm)

Pour finir, la plaque épaisse à plis croisés  $(0^\circ, 90^\circ)_{4s}$  P6 a été identifiée à l'aide de la même procédure et une fois encore les propriétés constitutives de référence sont tirées des tests sur la plaque unidirectionnelle P2 ayant un taux de fibre similaire. Les propriétés constitutives du stratifié épais P6 ont été identifiées « par couches » sur la base de 12 modes et fréquences propres. Les résultats d'identification (Tableau 5.23) sont généralement supérieurs aux valeurs mesurées en statique sur le spécimen P2, à l'exception du module de cisaillement transverse  $G_{23}$  qui est inférieur à la valeur de référence de près de 25%. Plus particulièrement, le module de Young  $E_2$  semble fortement surévalué, ce qui peut s'expliquer par le fait que les rigidités de flexion du stratifié dans chaque direction dépendent à la fois des paramètres  $E_1$  et  $E_2$ , de telle sorte que les mêmes pulsations propres peuvent être obtenues pour plusieurs vecteurs de paramètres différents. L'identification par couches de stratifiés à plis croisés soulève donc un problème d'unicité de la solution d'identification, comme le montrent les tests de convergence présentés à la Figure 5.44. Par contre, l'identification homogène globale de ce genre de stratifié ne pose aucun problème et reste une bonne solution pour la caractérisation de stratifiés quelconques. Il faut également noter que dans le cas des stratifiés à plis croisés, les paramètres définissant le lieu des solutions optimales (non uniques) semblent être principalement  $E_1$ ,  $E_2$  et  $G_{23}$ , alors que les autres paramètres restent à peu près constants.

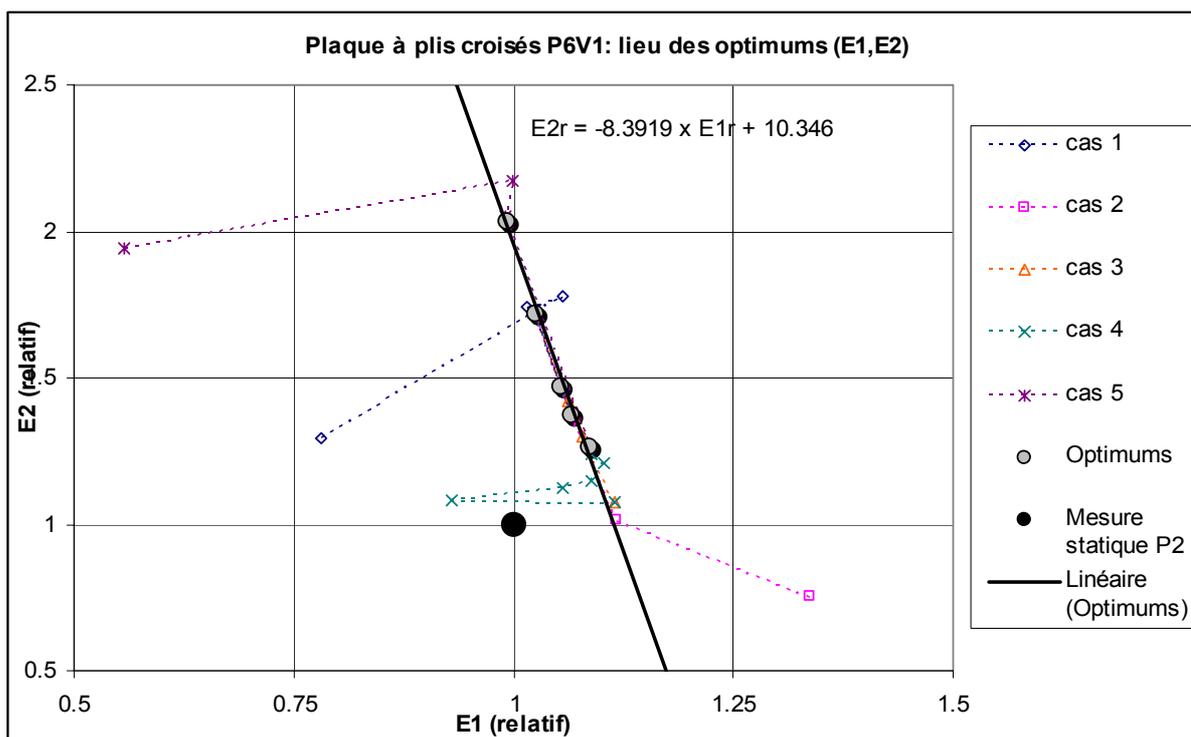


Figure 5.44: Problème de la non-unicité des solutions d'optimisation des paramètres  $E_1$  et  $E_2$  de plaques à plis croisés (plaque P6V1)

## 5.6 Résumé et commentaires

En se fondant sur l'expérience acquise lors des nombreuses identifications de propriétés constitutives de plaques en composites stratifiés, des recommandations concernant les caractéristiques des spécimens de test peuvent être formulées dans le but de maximiser la qualité des paramètres identifiés. Dans la mesure du possible, le spécimen de test doit être une plaque rectangulaire de dimension  $a \times b$  comprises entre 80 x 50 mm et 300 x 200 mm, et de préférence unidirectionnelle. La direction principale d'orthotropie est préférentiellement orientée dans le sens de la longueur, et si possible la plaque doit avoir un rapport d'épaisseur  $a/h$  de l'ordre de 10 à 15 et un rapport d'aspect  $a/b$  de l'ordre de 1.5 à 4. Des plaques plus minces peuvent également être testées, mais dans ce cas, les modules de cisaillement transverses ne peuvent normalement plus être identifiés avec autant de précision. Si les propriétés constitutives sont approximativement connues, il est possible d'optimiser (par éléments finis p.ex.) les dimensions du spécimen afin qu'environ 10 à 15 modes de flexion soit présents dans une plage fréquence de 100 Hz à 12 kHz et que les fréquences de ces modes soient réparties le plus uniformément possible sur cette plage de fréquence. A titre d'exemple, une plaque de test typique (en carbone – époxy unidirectionnel, mais aussi valable dans

d'autres cas) est approximativement de dimensions 200 x 100 x 10 mm ou 100 x 50 x 5 mm (fibres dans la longueur du spécimen).

Au final, une telle démarche d'identification nécessite en l'état actuel environ deux heures de travail pour effectuer la préparation du spécimen, la mesure modale et le post traitement par curve fitting, et environ une heure supplémentaire (dont seulement quelques minutes de travail, le reste étant du temps de calcul) pour la détermination des six paramètres constitutifs  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $G_{12}$ ,  $G_{23}$ ,  $G_{13}$  et  $\nu_{12}$  de la plaque testée. De plus, comme l'identification mixte est basée sur des grandeurs modales globales, un effet de moyenne spatiale sur l'ensemble de l'échantillon est présent dans cette approche d'identification, garantissant ainsi une faible dispersion des paramètres identifiés sur plusieurs échantillons. A titre de comparaison, un détermination statique de ces mêmes paramètres aurait nécessité deux tests de traction ou flexions et trois tests de cisaillement, avec pour chaque test des spécimens de dimensions différentes et généralement plusieurs spécimens par essai afin de réduire la dispersion liée aux variations propres aux spécimens (qualité de fabrication, taux de fibre ou de vide variable) et aux conditions expérimentales (alignements, contacts, fixations). La durée de travail d'une caractérisation classique de précision équivalente correspond en général à au moins une semaine de travail.



## Chapitre 6 Conclusions

### 6.1 Synthèse et conclusions

De toutes les théories HSDT de stratifiés composites, la formulation PSDT d'ordre  $p$  variable est la plus générale et offre l'avantage indéniable de pouvoir varier à loisir l'ordre d'approximation pour trouver dans tous les cas un optimum entre la précision de la solution et l'effort de calcul nécessaire. Un élément fini de coque PSDT avec approximation polynomiale du déplacement d'ordre  $p$  variable dans l'épaisseur a été développé et validé sur un ensemble de cas tests analytiques, expérimentaux et purement numériques d'analyse modale de plaques en stratifiés composites. Les comparaisons avec d'autres modèles de plaque de stratifiés composites ont démontré l'excellente précision des modèles PSDT d'ordre  $p \geq 5$  et l'excellent rapport précision / effort de calcul du modèle d'ordre  $p = 3$ .

Une méthode de mesure sans contact de haute précision des fréquences et modes propres des stratifiés composites par excitation acoustique contrôlée et mesure interférométrique laser à balayage a été développée pour servir de base à l'identification mixte des propriétés constitutives. Par l'utilisation conjointe d'une procédure d'optimisation de la position de la source d'excitation acoustique et d'une technique d'extraction modale par curve fitting polynomial, cette méthode permet de déterminer précisément entre 80 et 90% des fréquences et modes propres de stratifiés composites dans une plage de fréquence de 50 Hz à 12 kHz.

Un ensemble de normes d'erreur basées à la fois sur les fréquences et modes propres mesurés et simulés ont été développées avec pour objectif de maximiser leurs sensibilités aux paramètres secondaires  $G_{13}$ ,  $G_{12}$  et  $\nu_{12}$ . Une étude paramétrique des solutions modales libre – libre de plaques en matériaux composites stratifiés (composite carbone – époxyde) a prouvé que dans le cas de plaques suffisamment épaisses (rapport d'épaisseur  $a/h < 15$ ), les normes d'erreurs développées sont suffisamment sensibles et robustes pour permettre l'identification des six paramètres  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $G_{12}$ ,  $G_{23}$ ,  $G_{13}$  et  $\nu_{12}$ . Une plaque rectangulaire unidirectionnelle de rapport d'épaisseur  $a/h$  proche de 15 et de rapport d'aspect  $a/b$  d'environ 1.5 représente le type de spécimen de test optimal pour la méthode d'identification mixte proposée et permet d'équilibrer au mieux les sensibilités des différents paramètres. Ces normes d'erreur ont été combinées et pondérées pour former une fonctionnelle d'erreur totale de type moindres carrés servant d'objectif de minimisation à un algorithme d'optimisation des paramètres constitutifs de type Levenberg-Marquardt. La méthode d'identification mixte ainsi formée a été testée sur

des cas d'identification strictement numériques afin de vérifier ses propriétés de convergence et de robustesse aux estimations initiales. La méthode d'optimisation proposée s'est avérée très efficace, puisque en moyenne, tous les paramètres constitutifs ont été identifiés au plus tard à la 4<sup>ème</sup> itération de l'algorithme.

Finalement, la validation expérimentale de la méthode d'identification a permis de vérifier la convergence très rapide et précise des modules de Young et de cisaillement dans le plan lors de l'identification de toutes les plaques testées. Les modules de cisaillement transverse sont identifiés quant à eux un peu plus lentement, soit en moyenne après 3 ou 4 itérations seulement. Le coefficient de Poisson est par contre plus difficile à déterminer, car il ne cesse d'évoluer tant que les autres paramètres ne sont pas stabilisés. Toutefois, après environ 5 itérations, le coefficient de Poisson converge tout de même, mais parfois légèrement au-dessus de la valeur de référence. Cet effet est vraisemblablement dû à la grande sensibilité du coefficient de Poisson aux erreurs de mesure des formes propres. Afin de résoudre ces difficultés, une méthode d'identification séparée des modules de Young et de cisaillement dans un premier temps et du coefficient de Poisson dans un second temps a fourni de très bons résultats et devrait être étudiée plus en détail par la suite. Lors de l'identification de plaques épaisses ( $a/h < 15$ ) et fortement orthotropes, l'utilisation d'un modèle d'éléments finis de coque PSDT d'ordre  $p = 5$  permet d'obtenir un gain notable de rapidité de convergence, prouvant ainsi l'intérêt de ce type de modèle d'ordre élevé.

Dans tous les cas testés, la méthode d'identification mixte proposée s'est toujours montrée robuste, même avec 50% d'erreur sur les paramètres constitutifs initiaux. De manière générale, il a été constaté que la stabilité de la méthode est meilleure lorsque tous les paramètres initiaux sont soit surestimés soit sous-estimés, même dans de larges proportions. Les fréquences et modes propres identifiés à la fin des itérations sont très proches des mesures expérimentales et, dans tous les cas, l'erreur résiduelle reste inférieure aux incertitudes de mesure. Lorsque l'épaisseur de la plaque le permet, l'ensemble des paramètres constitutifs est identifié avec une erreur maximale de l'ordre 5% par rapport à des tests de caractérisation statique classiques.

Nous pouvons donc conclure de ces résultats que l'utilisation conjointe de l'ensemble des informations modales, d'un modèle d'éléments finis extrêmement précis et d'une méthode de mesure modale sans-contact permet d'étendre le domaine d'application des méthodes d'identification mixtes à la détermination de l'ensemble des propriétés élastiques constitutives  $E_1, E_2, G_{12}, G_{23}, G_{13}$  et  $\nu_{12}$  de stratifiés composites.

## 6.2 *Développements futurs et perspectives*

Bien que les résultats de ce travail soient très positifs, il n'en reste pas moins nécessaire de poursuivre la recherche dans ce domaine, notamment afin de qualifier plus finement la fiabilité et la précision de la méthode d'identification mixte numérique-expérimentale proposée, mais aussi afin d'en cerner plus clairement les limites. Pour ce faire, les démarches suivantes sont envisagées :

- Validation plus poussée et étude de fiabilité, notamment en élargissant la validation à un très grand panel de matériaux, mais aussi en s'intéressant à la sensibilité de la méthode aux différentes sources d'erreurs afin de déterminer plus finement un intervalle de confiance pour les paramètres constitutifs identifiés.
- Optimisation dimensionnelle des spécimens de test dynamique afin de garantir à la fois une qualité de mesure idéale (modes clairement découplés), mais aussi une sensibilité maximale à l'ensemble des paramètres notamment en s'assurant qu'un nombre élevé de modes de différents types (flexion en  $x$  ou  $y$ , torsion) sont présents dans la plage de fréquence de mesure.
- Extension et validation à des spécimens gauches à courbure modérée : bien que l'ensemble des techniques développées pour ce travail se basent sur des géométries rectangulaires planes, leur extension à des surfaces modérément gauches est aisément réalisable et devrait permettre l'identification de propriétés de composites produits par des techniques spécifiques aux géométries de révolution (enroulement filamentaire, tissage « en chaussette ») qui ne peuvent que difficilement être caractérisés aujourd'hui à l'aide de méthodes standards.
- Résolution des indéterminations lors de l'identification « par couche » de stratifiés non unidirectionnels, notamment en utilisant plusieurs spécimens ou tests simultanément lors de l'identification voire même en employant des éprouvettes non homogènes.

Afin d'améliorer encore la performance de la technique d'identification, il est également envisageable d'intégrer les améliorations suivantes dans le logiciel actuel (MATLAB) :

- Optimisation du modèle d'éléments finis de coque PSDT de MAFE en supprimant les termes d'ordre pair ainsi que les degrés de liberté correspondant aux effets de compressibilité transverse.

- Parallélisation de la procédure de calcul des sensibilités du modèle numérique, voire même extension du code au calcul distribué (cluster ou grille de calcul).
- Optimisation / réécriture en FORTRAN de l'algorithme de minimisation actuellement intégré dans MATLAB.

A plus long terme, cette technique d'identification mixte pourrait être étendue pour la résolution des problèmes suivants :

- Identification simultanée ou séquentielle de plusieurs matériaux par exemple pour les structures sandwich, ou réparées par des patches composites.
- Caractérisation des propriétés de structures complexes, dont la géométrie et les modes propres sont complètement tridimensionnels, par exemple des produits finis monolithiques (panneau composite renforcé) ou même des assemblages complets (aile d'avion complète)
- Extension à la mesure de paramètres dissipatifs et dépendant des conditions environnementales (humidité, température, amplitude d'excitation)
- Identification de l'endommagement de structures composites (délamination, fatigue, fissuration) voire même localisation de l'endommagement.
- Extension à d'autres types de matériaux (p.ex. piézo électriques) et adaptation aux lois de comportement non linéaires.

Comme le montrent les points précédents, les domaines de recherche impliquant des techniques d'identification modale mixtes numériques-expérimentales sont encore vastes et les perspectives d'utilisation de ces techniques restent aujourd'hui très intéressantes pour l'avenir d'un grand nombre de domaines des sciences de l'ingénieur.

D'un point de vue plus personnel, ce travail de recherche pluridisciplinaire et passionnant à mener a bien m'inspire le constat suivant:

« Si les techniques du début du 20ème siècle furent essentiellement expérimentales et si, avec l'avènement de l'informatique, on a vu grandir et se démocratiser l'utopie du « tout – numérique », il est fort tentant d'entrevoir que les outils d'avenir des ingénieurs seront avant tout « mixtes »: une fusion toujours plus fine et intelligente de modèles numériques, analytiques et expérimentaux où chacun de ces domaines apporte ses avantages. »

## Publications

Les publications et conférences suivantes ont été réalisées durant ce travail de doctorat :

- i. Cugnoni, J., Gmür, Th., and Schorderet, A. (2004), *Identification by modal analysis of composite structures modelled with FSDT and HSDT laminated shell finite elements*, Composites Part A: Applied Science and Manufacturing, Vol. 35, No. 7-8, pp. 977-987.
- ii. Cugnoni, J., Gmür, Th., and Schorderet, A. (2004), *Modal validation of a set of  $C^0$  compatible composite shell elements*, Composites Science and Technology, Vol. 64, No. 13-14, pp. 2039-2050.
- iii. Cugnoni, J., Gmür, Th., and Schorderet, A. (2004), *Identification of the constitutive properties in thick composite plates by a mixed numerical-experimental procedure based on modal analysis*, submitted to Computers & Structures.
- iv. Cugnoni, J., Gmür, Th., and Schorderet, A. (2003), *Modal identification of composite structures modelled with FSDT and HSDT laminated shell finite elements*, Proceedings of the International Conference on Composites Testing and Model Identification CompTest 2003 (Eds. F. Pierron, M. Wisnom), Châlons-en-Champagne, France, January 28-31, 2003, ENSAM, Châlons-en-Champagne, Paper P11.
- v. Cugnoni, J., Gmür, Th., and Schorderet, A. (2004), *Numerical-experimental identification of the elastic properties in composite shells*, Proceedings of the 7<sup>th</sup> International Conference on Computational Structures Technology (Eds. B. H. V. Topping, C. A. Mota Soares), Lisbon, Portugal, September 7-9, 2004, Civil-Comp Press, Stirling, pp. Paper 239, 18 p.
- vi. Cugnoni, J., Gmür, Th., and Schorderet, A. (2004), *A mixed numerical-experimental identification method for evaluating the constitutive parameters of composite laminated shells*, Proceedings of the 2<sup>nd</sup> International Conference on Composites Testing and Model Identification CompTest 2004 (Eds. F. Pierron, M. Wisnom), Bristol, United Kingdom, September 21-23, 2004. Paper P58, pp. 85-86.

## Bibliographie

- [1] Gunnar Melin L., Neumeister J. M., Pettersson K. B., Johansson H. et Asp L. E., *Evaluation of Four Composite Shear Test Methods by Digital Speckle Strain Mapping and Fractographic Analysis*, Journal of Composites Technology & Research, ASTM, 2000, Vol. 22(3), pp. 161-172
- [2] Tsai C. L. et Daniel I. M., *Determination of In-plane and Out-of-plane Shear Moduli of Composite Materials*, *Experimental Mechanics*, September 1990, pp. 295-299
- [3] Tsai C. L., Daniel I. M. et Yaniv G., *Torsional Response of Rectangular Composite Laminates*, Journal of Applied Mechanics, June 1990, Vol. 57, pp. 383-387.
- [4] Pierron F., Grediac M., *Identification of the through-thickness moduli of thick composites from whole-field measurements using the Iosipescu fixture: theory and simulations*, Compos. Pt. A-Appl. Sci. Manuf., 2000, Vol. 31, pp. 309-318
- [5] Pierron F., Zhavoronok S, Grediac M., *Identification of the through-thickness properties of thick laminated tubes using the virtual fields method*, Int. J. Solids Struct., 2000, Vol. 37, pp. 4437-4453
- [6] Grediac M, *The use of full-field measurement methods in composite material characterization: interest and limitations*, Compos. Pt. A-Appl. Sci. Manuf., 2004, Vol. 35, pp. 751-761
- [7] Reddy J. N., *Mechanics of Laminated Composite Plates : Theory and Analysis*, , CRC Press, 1997

- [8] Gibson R. F., *Modal vibration response measurements for characterization of composite materials and structures*, Composites Science and Technology, 2000, Vol. 60, pp 2769-2780
- [9] Zheng Z., Ayorinde E. O. et Gibson R. F., *A Thick-Beam Library Solution Method for Vibration-Based Characterization of Thick Composite Plates*, Journal of Vibration and Acoustics, January 2001, Vol. 123, pp. 76-83
- [10] Kim C. S. et Dickinson S. M., (1985), *Improved Approximate Expressions for the Natural Frequencies of Isotropic and Orthotropic Rectangular Plates*, Journal of Sound and Vibration, Vol. 103, pp. 142-149.
- [11] Deobald L.R. et Gibson R. F., *Determination of elastic constants of orthotropic plates by a modal analysis / Rayleigh-Ritz technique*, Journal of Sound and Vibration, 1988, Vol. 124(2), pp. 269-283
- [12] McIntyre M. E. et Woodhouse J., *On measuring the elastic and damping constants of orthotropic sheet materials*, Acta Metallica, 1988, Vol. 36(6), pp. 1397-1416
- [13] Sol H., *Identification of anisotropic plates rigidities using free vibration data*. Doctoral Thesis, Vrije Universiteit Brussel, Octobre 1986
- [14] Fällström K. E., *Determining material properties in anisotropic plates using Rayleigh's method*, Polymer Composites, 1991, Vol. 12(5), pp. 306-314
- [15] Fällström K. E., Olofsson K., Saldner H. O., Schedin S. et Huntley J. M., *Dynamic material parameters in an anisotropic plate estimated by phase-stepped holographic interferometry*, Optics and Lasers in Engineering, 1996, Vol. 24(5-6), pp. 429-454
- [16] Ip K. H. et Lai T. C., *Determination of elastic constants of a generally orthotropic plate by modal analysis*. Modal Analysis, 1993, Vol. 8, pp. 15-33
- [17] Ip K. H. et Lai T. C., *Parameter estimation of orthotropic plates by Bayesian sensitivity analysis*, Composite Structures, 1996, Vol. 34, pp. 29-42
- [18] Soares C. M., Moreira de Freitas M. et Araujo A. L., Composite Structures, 1993, Vol. 25, pp. 277-285
- [19] Araújo A.L., Mota Soares C. M. et Moreira de Freitas M. J., *Characterization of material parameters of composite plates specimens using optimization and experimental vibrational data*, Composites : Part B, 1996, Vol. 27B, pp. 185-192
- [20] Pedersen P., *Optimization method applied to identification of material parameters*, dans 'Discretization Methods and Structural Optimization – Procedures and Applications' (édité par Eschenauer, H.A. and Thierauf, G.), Springer-Verlag, 1989, pp. 277-283
- [21] De Visscher J., Sol H., De Wilde W. P. et Vantomme J., *Identification of the Damping Properties of Orthotropic Composite Materials Using a Mixed Numerical Experimental Method*, Applied Composite Materials, 1997, Vol. 4, pp. 13-33
- [22] Qian G. L., Hoa S. V. et Xiao X., *Vibration method for measuring mechanical properties of composite, theory and experiment*, Composite Structures, 1997, Vol. 39(1-2), pp. 31-38
- [23] Fällström K. E. et Jonsson M., *A non destructive method to determine material properties in anisotropic plates*, Polymer Composites, 1991, Vol. 5, pp. 293-305
- [24] Sol H., Hua H., DeVisscher J., Vantomme J., DeWilde W. P., *A mixed numerical/experimental technique for the nondestructive identification of the stiffness properties of fibre reinforced composite materials*, NDT E Int., 1997, Vol. 30, pp. 85-91
- [25] Cunha J., Piranda J., *Application of model updating techniques in dynamics for the identification of elastic constants of composite materials*, Compos. Pt. B-Eng., 1999, Vol. 30, pp. 79-85

- 
- [26] Araujo A.L., Soares C.M.M., de Freitas M.J.M., Pedersen P., Herskovits J., *Combined numerical-experimental model for the identification of mechanical properties of laminated structures*, Compos. Struct., 2000, Vol. 50, pp. 363-372
- [27] Gagneja S., Gibson R.F., Ayorinde E.O., *Design of test specimens for the determination of elastic through-thickness shear properties of thick composites from measured modal vibration frequencies*, Compos. Sci. Technol., 2001, Vol. 61, pp. 679-687
- [28] Cunha J., Cogan S., Berthod C., *Application of genetic algorithms for the identification of elastic constants of composite materials from dynamic tests*, Int. J. Numer. Methods Eng., 1999, Vol. 45, pp. 891-900
- [29] Silva M.F.T, Borges L.M., Rochinha F.A., de Carvalho L.A.V., *A genetic algorithm applied to composite elastic parameters identification*, Inverse Probl. Sci. Eng., 2004, Vol. 12, pp. 17-28
- [30] Rikards R., Chate A., Gailis G., *Identification of elastic properties of laminates based on experiment design*, Int. J. Solids Struct., 2001, Vol. 38, pp. 5097-5115
- [31] Rikards R., Auzins J., *Response surface method for solution of structural identification problems*, Inverse Probl. Sci. Eng., 2004, Vol. 12, pp. 59-70
- [32] Araujo A. L., Mota Soares C. M., Herskovits J. et Pedersen P., *Development of a finite element model for the identification of mechanical and peizoelectric properties through gradient optimization and experimental vibration data*, Composite Structures, 2002, Vol. 58, pp. 307 – 318
- [33] Bogdanovich, Pastor, *Mechanics of textile and laminated composites*, London: Chapman & Hall, 1996
- [34] Dong S.B. et Tso F.K.W. *On a laminated orthotropic shell theory including transverse shear deformation*. ASME Journal of Applied Mechanics, 1972, Vol. 39(4), pp. 1091-1096
- [35] Reddy J.N., *Exact solutions of moderately thick laminated shells*, ASCE J Eng Mech Div, 1984, Vol. 110(5), pp. 794-809
- [36] Liao C.L et Reddy J.N, *Analysis of anisotropic, stiffened composite laminates using a continuum-based shell element*, Computers & Structures, 1990, Vol. 34(6), pp. 805-815
- [37] Panda S. et Natarajan R., *Analysis of laminated composite shell structures by finite element method*, Computers & Structures, 1981, Vol. 14(3-4), pp.225-230
- [38] Prema Kumar W.P. et Palaninathan R., *Explicit through-thickness integration schemes for geometric nonlinear analysis of laminated composite shells*, Finite Elements in Analysis and Design, 1999, Vol. 32, pp. 235-256
- [39] Reddy J.N. et Kuppusamy, T., *Natural vibrations of laminated anisotropic plates*, J. Sound and Vibration, 1984, Vol. 94(1), pp. 63-69.
- [40] Whitney J.M. et Sun C.T., *A higher order theory for extensional motion of laminated composites*, J. Sound and Vibration, 1973, Vol. 30(1), pp. 85-97
- [41] Reddy J.N. et Liu C.F., *A higher-order shear deformation theory pf laminated elastic shells*, Int. J. Eng Sci, 1985, VOL. 23(3), pp. 319-330
- [42] Matsunaga H., *Assessment of a global higher-order deformation theory for laminated composite and sandwich plates*, Composite Structures, 2002, Vol. 56, pp. 279-291
- [43] Attia O. et El-Zafrany A., *A high-order shear element for nonlinear vibration analysis of composite layered plates and shells*, Int J Mech Sci, 1999, Vol. 41, pp. 461-486
- [44] Kant T. et Kommineni J. R., *Geometrically non-linear transient analysis of laminated composite and sandwich shells with a refined theory and  $C^0$  finite elements*, Computers & Structures, 1994, Vol. 52, pp. 1243-1259

- [45] Reddy J.N., *An evaluation of equivalent-single-layer and layerwise theories of composite laminates*, Composite Structures, 1993, Vol. 25, pp. 21-35
- [46] Surana, K.S. et Sorem, R.M., *p-Approximation curved shell elements for elastostatic analysis of laminated composite plates and shells*, Int J Numerical Methods in Engineering, 1990, Vol. 29, pp. 1393-1420
- [47] Yang H.T.Y, Saigal S., Masud A. et Kapania R.K., *A survey of recent shell finite elements*, Int J Numerical Methods in Engineering, 2000, Vol. 47, pp. 101-127
- [48] Messina A., *Free vibration of multilayered plates based on a mixed variational approach in conjunction with global piecewise-smooth functions*, J Sound and Vibration, 2002, Vol. 256(1), pp. 103-129
- [49] Carrera E., *An assessment of mixed and classical theories on global and local response of multilayered orthotropic plates*, Composite Structures, 2000, Vol. 50, pp. 183-198
- [50] Koo, K.N., *Vibration and damping analysis of composite plates using finite elements with layerwise in-plane displacements*, Computers & Structures, 2002, Vol. 80, pp. 1393-1398
- [51] Brank B. *On composite shell models with a piecewise linear warping function*, Composite Structures, 2003, Vol. 59, pp. 163-171
- [52] Carrera E., *A study of transverse normal stress effect on vibration of multilayered plates and shells*, J Sound and Vibration, 1999, Vol. 225(5), pp. 803-829
- [53] Xavier P.B., Chew C.H. et Lee K. H., *Buckling and vibration of multilayer orthotropic composite shells using a simple higher-order*, Int J. Solids Structures, 1995, Vol. 32(23), pp. 3479-3497
- [54] Nosier, A, Kapania R.K. et Reddy J.N, *Free vibration analysis of laminated plates using layerwise theory.*, AIAA Journal, 1993, Vol. 31(12), pp. 2335-2346
- [55] Gmür T., *Dynamique des structures : Analyse modale numérique*, Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, 1997
- [56] Gmür T., *MAFE a code for modal analysis by finite elements*, Polycopié EPFL, 1991
- [57] Bosia F., *Internal strain measurements in composite laminates using fibre Bragg grating sensors*, 2002, Thèse n°2621, EPFL, Lausanne
- [58] Richardson M.H. et Formenti D.L., *Global curve fitting of frequency response measurements using the rational fraction polynomial method*, Proceedings 3<sup>rd</sup> IMAC Conference, Orlando, January 1985.
- [59] Madsen K., Nielsen H.B. et Tingleff O., *Methods for non-linear least squares problems, lecture notes*, IMM, Department of Mathematical Modelling, Technical University of Denmark, Lyngby-Denmark.
- [60] Moré, J.J., *The Levenberg-Marquardt algorithm: implementation and theory*, in "Numerical Analysis", Watson, G.A., (Editor), Lecture Notes in Mathematics 630, Springer Verlag, 105-116, 1977.
- [61] Mottershead J. E. et Friswell M. I., *Model updating in structural dynamics : a survey*, J Sound and Vibration, 1993, Vol. 167(2), pp. 347-375
- [62] Nelson R. B., *Simplified calculation of eigenvector derivatives*, AIAA Journal, september 1976, Vol. 14(9), pp. 1201-1205
- [63] Sutter T.R., Camarda C.J., Walsh J.L. et Adelman H.M., *Comparison of several methods for calculating vibration mode shape derivatives*, AIAA Journal, 1988, Vol. 26(12), pp. 1506-1511
- [64] Ojalvo I.U., *Efficient computation of mode-shape derivatives for large dynamic systems*, AIAA Journal, 1986, Vol. 25(10), pp. 1386-1390

## CURRICULUM VITAE

Joël CUGNONI

Né le 27 juillet 1976 à Montreux (VD)

Originaire de Ormont-Dessous (VD)

### *Formation :*

- 1992-1995 Etudes secondaires supérieures  
au Gymnase de Burier (VD)
- 1995 Baccalauréat scientifique
- 1995-2000 Etudes à l'EPFL, section de mécanique
- 2000 Diplôme d'ingénieur mécanicien EPFL
- 2000-2004 Assistant-Doctorant au Laboratoire  
de mécanique appliquée et  
d'analyse de fiabilité

### *Expérience professionnelle :*

- 1998-1999 Assistant-étudiant au cours de mécanique des  
structures, Dr. Th. Gmür, LMAF/EPFL
- 2000 Analyse modale expérimentale d'une machine  
outil DIXI, Dr. A. Schorderet, Prof. J. Giovannola,  
Laboratoire de conception des systèmes mécaniques,  
EPFL
- 2001-2002 Etudes et optimisation par éléments finis de la  
structure sandwich nid d'abeille carbone-cyanate-ester  
du détecteur SCT de l'expérience ATLAS (CERN)  
Département de physique nucléaire et corpusculaire  
Université de Genève