

# COUPLAGE D'UNE LOI D'ADHÉSION À UNE LOI DE CONTACT AVEC FROTTEMENT POUR L'ÉTUDE DE LA DÉCOHÉSION DANS LES MATÉRIAUX COMPOSITES

THÈSE N° 2482 (2001)

PRÉSENTÉE AU DÉPARTEMENT DE GÉNIE MÉCANIQUE

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

POUR L'OBTENTION DU GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES

PAR

**Christian TALON**

Ingénieur mécanicien diplômé EPF  
de nationalité béninoise

acceptée sur proposition du jury:

Prof. A. Curnier, directeur de thèse  
Prof. M. Frémond, rapporteur  
Prof. M. Raous, rapporteur  
Dr G. Pietrzak, rapporteur  
Prof. B. Dacorogna, rapporteur  
Prof. I. Botsis, rapporteur

Lausanne, EPFL  
2002



*à Rajah, Philippe et Debbie*

*et en mémoire de Madame Sebastienne Talon*



## Remerciements

Je ne sais comment exprimer ma gratitude envers le Prof. Alain Curnier. Alain, je crois que je n'aurais jamais pu en apprendre autant ces dernières années autrement. Merci pour ton amitié, ta patience, ta confiance, ta gentillesse, ta persévérance, ta compréhension, ta générosité et surtout de m'avoir fait partager ta considérable expérience.

J'aimerais particulièrement remercier le Prof. Philippe Zysset pour avoir relu mon manuscrit, malgré son emploi du temps (toujours) très chargé, et pour toutes les discussions et commentaires intéressants.

Merci au Prof. John Botsis de m'avoir donné l'opportunité d'effectuer ce travail au sein de son laboratoire.

Merci à tous mes collègues, Federico, Michel, Jarek, Lili, Stephan, Laurent, Jörn, Colin, Aïssa, Mauro, Eric. Merci de m'avoir inconditionnellement apporté votre soutien et aide.

Merci à Grzegorz Pietrzak (ta thèse est un modèle pour moi) pour ses commentaires sur ce travail ainsi que pour m'avoir donné les bases pour l'utilisation de l'outil génial qu'est  $\text{\TeX}$ .

Merci aussi au Prof. Heinz Bargmann pour son éternelle bonne humeur ainsi qu'aux brèves (mais intéressantes) discussions que nous avons eues.

Je remercie aussi ici tous les membres du jury pour m'avoir honoré en jugeant cette thèse.

A ma future fiancée (j'espère) Debbie, cette thèse tu l'as vécue autant que moi. Merci pour ton soutien, ta patience et tes sacrifices. Je t'aime, je t'aime, je t'aime.

Maman et Philippe, merci d'avoir toujours été là pour moi. Votre soutien a été mon plus précieux allié.

A ma tante Christine, je sais que tu es avec moi en tous temps.

Je n'oublie pas ma grand-mère qui nous a récemment quittés, qu'elle repose en paix. Elle est ma source d'inspiration et de fierté.

Merci aussi à tous les collaborateurs de l'atelier mécanique et tous les autres membres du LMAF et de l'ICAP. Au personnel des cafétérias et des restaurants de l'EPFL. Merci à tous. Ce sont des petites gouttes d'eau qui forment des rivières.



## Abstract

In this thesis, an original law of adhesion is developed and then coupled to the classical law of unilateral contact with threshold friction, in order to study the phenomenon of fibre/matrix debonding in composite materials.

This tribological law is developed within the framework of standard generalized materials adapted to interfaces. Thus, the law is derived from a free energy potential  $\Psi_c$  and a dissipation potential  $\Phi_c$ . The adhesive interface is interpreted as a bundle of links connecting the two contact surfaces. Each link is assumed to have a plastic behavior with softening and damage, caused by stretching, to represent the loss of adhesion. An internal variable  $g^a$  measuring an irreversible adhesive gap is introduced and associated by energetic duality to an adhesive stress  $p^a$ . The ranges of  $g^a$  and  $p^a$  are limited by two characteristic constants of adhesion,  $g_M$  and  $p_M$  respectively.  $p_M$  is the maximum adhesive tension below which the links remain elastic. Above this limit, debonding and damage of the links occur as  $g^a$  increases. Once  $g^a$  reaches the value  $g_M$ , total rupture of the adhesive bond occurs.

This adhesion law is then mounted in parallel to the contact and friction laws into a unique law. The law is regularized using either the approximate penalty method or the exact augmented Lagrangian method, in option.

The regularized laws are implemented in a node-to-node contact element of the finite element code TACT. The adhesive force is computed by means of a predictor-corrector with projection algorithm for integrating the evolution of  $g^a$ , and the relevant Jacobian tensors required for the resolution of non-linearities by the iterative scheme of Newton are calculated. This is accomplished for the penalty and the augmented Lagrangian regularizations.

A traction test of a glass/epoxy interface in the normal direction is designed and used to experimentally determine the parameters  $p_M$  and  $g_M$  of such an interface ( $p_M$  directly and  $g_M$  indirectly).

Numerical simulations of adhesion between a rigid punch and an elastic half-space enable the comparison of the proposed model of adhesion to the classical theories of adhesion. A numerical simulation of the standard pull-out test of a fibre embedded in a matrix is then performed, and the numerical shear distribution along the interface is compared to the analytical one existing for this experiment. The results are in good agreement with existing ones. Finally, a crack propagation in a fibrous composite is simulated.

**Key words :** Contact Mechanics, Friction, Adhesion ;  
Numerical Methods, Finite Element Method, Augmented Lagrangian Method ;  
Continuum Mechanics, Composite Materials, Debonding, Crack-Bridging ;

## Résumé

Afin de mieux comprendre la résistance à la rupture des matériaux composites fibreux, notamment les phénomènes de décohésion à l'interface fibre/matrice et de pontage des fissures par les fibres, un modèle d'adhésion couplé au contact avec frottement est ici développé.

La loi d'adhésion introduite s'inscrit dans le cadre des matériaux standards généralisés étendu aux interfaces. Ainsi, cette loi d'interface dérive d'un potentiel d'énergie libre  $\Psi_c$  et d'un potentiel de dissipation  $\Phi_c$ . L'adhésion est modélisée par des filaments reliant les deux faces en contact. Le comportement de chaque filament est de type plastique avec écrouissage négatif afin d'introduire un étirement endommageant des filaments représentant la perte d'adhésion.  $g^a$  est une variable interne introduite mesurant un écart adhésif irréversible, et on lui associe par dualité énergétique la contrainte adhésive  $p^a$ . Le rayon d'action de  $g^a$  et de  $p^a$  est limité par deux constantes, respectivement  $g_M$  et  $p_M$ , caractéristiques de l'adhésion.  $p_M$  est la contrainte seuil adhésive en dessous de laquelle les filaments restent élastiques. Au delà de ce seuil, il y a décohésion avec endommagement des filaments, et la variable  $g^a$  évolue. Lorsque  $g^a$  atteint la valeur  $g_M$ , il y a rupture totale du filament.

Cette loi d'adhésion est ensuite montée en parallèle avec une loi de contact avec frottement pour former une seule loi constitutive. La régularisation de la loi est effectuée en utilisant soit la méthode approchée de la pénalité soit la méthode exacte du Lagrangien augmenté, au choix.

La loi d'adhésion-contact-frottement régularisée est mise sous la forme d'un algorithme numérique qui est ensuite implanté dans l'élément contact nœud-à-nœud du programme d'analyse mécanique TACT. L'algorithme comprend le calcul des efforts adhésifs, évalués par un prédicteur-correcteur avec projection représentant la loi d'évolution de la variable  $g^a$ , ainsi que le calcul des tenseurs Jacobiens nécessaires à la résolution des non-linéarités par la méthode itérative de Newton. Ceci est effectué pour la pénalité et le Lagrangien augmenté.

Une expérience de traction d'une interface verre/époxyde dans la direction normale, a été mise au point afin de déterminer expérimentalement les paramètres  $p_M$  et  $g_M$  d'une telle interface ( $p_M$  directement et  $g_M$  indirectement).

Des simulations numériques d'un poinçon rigide sur un demi-espace élastique permettent de comparer dans un premier temps la loi d'adhésion proposée aux théories classiques de l'adhésion. Ensuite, un essai d'arrachement d'une fibre noyée dans une matrice est simulé et étudié en rapport aux méthodes analytiques associées à cet essai. Pour finir, la simulation numérique d'une fissure se propageant dans un composite fibreux est effectuée.

**Mots clés :** Mécanique du Contact, Frottement, Adhésion ;  
Mécanique des Milieux Continus, Méthodes Numériques ;  
Méthode des Éléments Finis, Méthode du Lagrangien Augmenté ;  
Matériaux Composites, Décohésion, Pontage de Fissures ;

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>1</b>
1.1	Position du problème . . . . .	1
1.1.1	Quelques éléments de mécanique des contacts . . . . .	1
1.1.2	Mécanique de la rupture des matériaux composites . . . . .	3
1.2	Etat de l'art . . . . .	5
1.2.1	Modèles de décohésion des matériaux composites . . . . .	5
1.2.2	Modèles d'adhésion . . . . .	8
1.2.3	Traitement numérique . . . . .	10
1.2.4	Techniques expérimentales . . . . .	11
1.3	Objectifs de la thèse . . . . .	13
1.4	Plan du rapport de thèse . . . . .	13
1.4.1	Formulation théorique . . . . .	13
1.4.2	Traitement numérique . . . . .	13
1.4.3	Identification expérimentale et application aux composites . . . . .	13
<b>2</b>	<b>Mécanique des solides et des contacts</b>	<b>15</b>
2.1	Introduction . . . . .	15
2.2	Thermomécanique des solides déformables . . . . .	16
2.2.1	Géométrie et thermo-cinématique . . . . .	16
2.2.2	Statique et thermodynamique . . . . .	18
2.2.3	Thermo-énergétique . . . . .	22
2.2.4	Lois de comportement . . . . .	24
2.2.5	Equilibre d'un solide élastique par minimisation de son énergie . . . . .	39
2.3	Thermomécanique des contacts . . . . .	41
2.3.1	Thermo-cinématique . . . . .	41
2.3.2	Thermodynamique . . . . .	45
2.3.3	Thermo-énergétique de deux solides en contact . . . . .	47
2.3.4	Lois tribologiques . . . . .	49
2.3.5	Equilibre de deux solides élastiques en contact tribologique par minimisation de la quasi-énergie incrémentale du système . . . . .	55
2.4	Commentaires . . . . .	60
2.5	Synthèse . . . . .	61

---

<b>3</b>	<b>Contact avec frottement et adhésion</b>	<b>63</b>
3.1	Introduction . . . . .	63
3.2	Formulation de l'adhésion . . . . .	64
3.2.1	Eléments du modèle de Frémond (1982) . . . . .	64
3.2.2	L'approche de Cangémi–Raous . . . . .	66
3.2.3	Une nouvelle approche basée sur des filaments plastiques écrouissables . . . . .	74
3.2.4	Formulation du contact avec frottement et adhésion . . . . .	83
3.2.5	Minimisation élastique sous contrainte . . . . .	89
3.3	Analyse du contact avec frottement et adhésion . . . . .	90
3.3.1	Résolution par la méthode de la pénalité . . . . .	90
3.3.2	Résolution par la méthode du Lagrangien augmenté . . . . .	99
<b>4</b>	<b>Traitement numérique</b>	<b>113</b>
4.1	Introduction . . . . .	113
4.2	Méthodes numériques en mécanique des solides . . . . .	113
4.2.1	Discrétisation spatiale et méthode des éléments finis . . . . .	114
4.2.2	Construction par éléments . . . . .	118
4.2.3	Résolution des non-linéarités par la méthode des itérations linéaires . . . . .	119
4.2.4	Discrétisation temporelle et méthode des différences finies . . . . .	123
4.2.5	Synthèse et algorithme global . . . . .	124
4.3	Méthodes numériques en mécanique du contact . . . . .	126
4.3.1	Discrétisation spatiale du contact . . . . .	126
4.3.2	Travaux virtuels discrets en mécanique des contacts . . . . .	127
4.3.3	Traitement numérique du contact en pénalité . . . . .	127
4.3.4	Calcul des Jacobiennes en pénalité . . . . .	129
4.3.5	Equation discrète linéarisée en pénalité . . . . .	133
4.3.6	Traitement numérique du contact en Lagrangien augmenté . . . . .	133
4.3.7	Calcul des Jacobiennes en Lagrangien augmenté . . . . .	137
4.3.8	Equation discrète linéarisée en Lagrangien augmenté . . . . .	142
4.4	Élément de contact avec adhésion . . . . .	143
4.4.1	Description de l'élément . . . . .	143
4.4.2	Algorithme d'adhésion . . . . .	144
4.5	Problèmes tests de validation . . . . .	146
4.5.1	Cadre général . . . . .	146
4.5.2	Cas unidimensionnel de contact avec adhésion . . . . .	146
4.5.3	Cas bidimensionnel de frottement avec adhésion . . . . .	149
4.5.4	Cas tridimensionnel . . . . .	152
4.5.5	Conclusion des tests de validation . . . . .	155

<b>5</b>	<b>Expérimentation et calibration</b>	<b>157</b>
5.1	Introduction . . . . .	157
5.2	Etude de l'interface et des phénomènes d'endommagement dans des composites fibre de verre/résine époxyde . . . . .	157
5.2.1	Généralités . . . . .	158
5.2.2	Techniques expérimentales : principe et théorie . . . . .	159
5.2.3	Les systèmes matrice époxyde/fibre de verre . . . . .	166
5.3	Essais de traction d'une éprouvette époxyde avec lame de verre . . . . .	169
5.3.1	Principe . . . . .	169
5.3.2	Etude préliminaire de l'essai . . . . .	170
5.3.3	Réalisation . . . . .	173
5.3.4	Essais et résultats . . . . .	175
<b>6</b>	<b>Applications numériques</b>	<b>183</b>
6.1	Introduction . . . . .	183
6.2	Contact adhésif d'un poinçon axisymétrique rigide sur un demi- espace élastique . . . . .	184
6.2.1	Généralités . . . . .	184
6.2.2	Poinçon axisymétrique plat . . . . .	185
6.2.3	Poinçon axisymétrique sphérique . . . . .	192
6.2.4	Poinçon axisymétrique conique convexe . . . . .	199
6.2.5	Poinçon axisymétrique conique concave . . . . .	202
6.3	Test d'arrachement . . . . .	206
6.3.1	Généralités . . . . .	206
6.3.2	Analyse du problème par la méthode dite du "shear-lag" . . . . .	207
6.3.3	Modèle numérique . . . . .	209
6.3.4	Simulation avec une fibre non-encastree . . . . .	210
6.3.5	Simulation avec une fibre encastree . . . . .	213
6.4	Propagation d'une fissure à travers un composite fibreux . . . . .	216
6.4.1	Généralités . . . . .	216
6.4.2	Modèle numérique . . . . .	219
6.4.3	Résultats des simulations . . . . .	220
<b>7</b>	<b>Conclusion</b>	<b>227</b>
<b>A</b>	<b>Rappels de base d'analyse convexe</b>	<b>233</b>
<b>B</b>	<b>Algorithme de projection pour l'adhésion</b>	<b>237</b>
<b>C</b>	<b>Analyse du transfert de charge à l'interface fibre/matrice d'un test d'arrachement</b>	<b>241</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>247</b>



# Chapitre 1

## Introduction

---

### 1.1 Position du problème

#### 1.1.1 Quelques éléments de mécanique des contacts

Le fonctionnement de la plupart des systèmes mécaniques repose sur le contact entre les diverses pièces qui les constituent.

“La mécanique des contacts s’attache à décrire la relation géométrique (mouvement relatif), l’interaction statique (action-réaction) et la loi mécanique (tribologie) entre **deux** solides proches ou contigus qui s’attirent ou se repoussent.” (d’après [23])

Dans la plupart des cas, le **contact** peut être simple, normal, unilatéral (Figure 1.1 **a**)), voire couplé à d’autres phénomènes tangentiels tels que le **frottement** (Figure 1.1 **b**)). Des applications comme les disques de freins, les embrayages, les pneumatiques, les systèmes poulie/courroie sont quelques exemples répandus en mécanique dont le fonctionnement est assuré par frottement <sup>1</sup>. Ces phénomènes apparaissent aussi dans les processus de fabrication industriels comme l’usinage ou le formage des matériaux.

Cependant, dans de nombreuses situations, le contact avec frottement peut aussi s’accompagner d’un troisième phénomène tribologique appelé **adhésion** (Figure 1.2). Mécaniquement, on peut dire qu’il y a adhésion entre deux solides si simultanément :

- a) ils ne peuvent se séparer en deçà d’un certain seuil de traction (Figure 1.2 **a**)),
- b) ils ne peuvent glisser l’un par rapport à l’autre en deçà d’un certain seuil de cisssion (Figure 1.2 **b**)).

---

<sup>1</sup>En comparaison avec d’autres mécanismes (clavettes, butées, engrenages ...) régis par contact unilatéral dont le fonctionnement est dit assuré par obstacle.

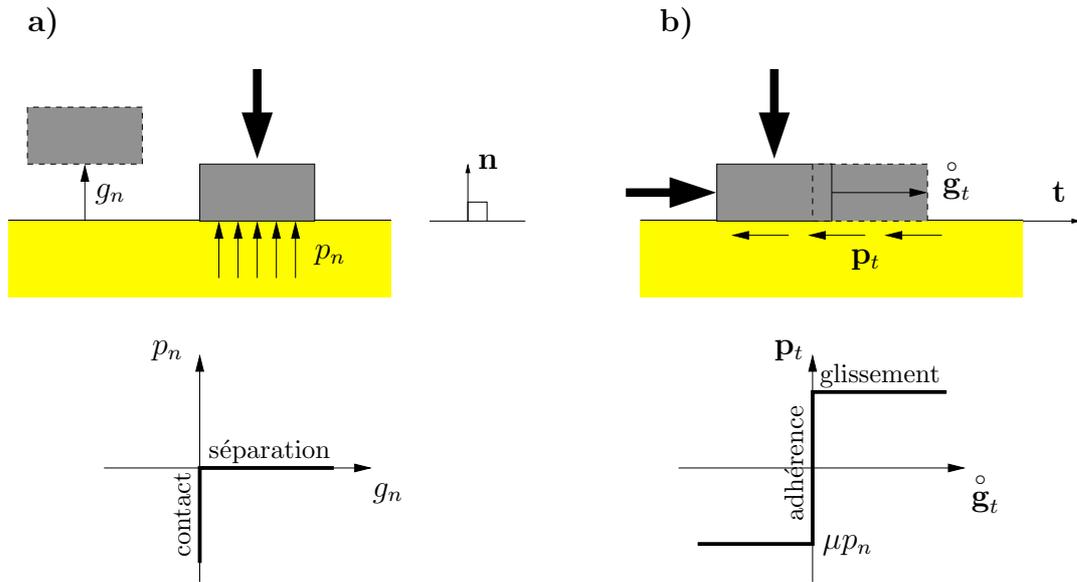


FIG. 1.1 – Graphes du contact unilatéral et du frottement à seuil de Coulomb.  $g_n$  est l'écart normal,  $p_n$  la pression normale,  $\dot{g}_t$  le taux de glissement relatif tangent et  $p_t$  le cisaillement.  $\mu$  est le coefficient de frottement.

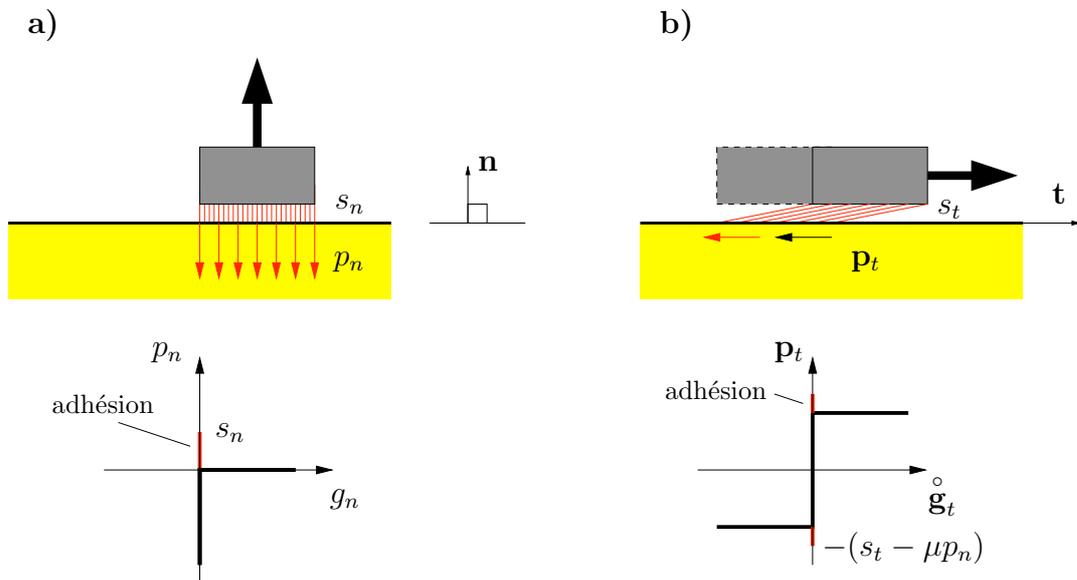


FIG. 1.2 – Graphes du contact et du frottement avec adhésion.  $s_n$  et  $s_t$  sont les seuils d'adhésion normal et tangentiel, respectivement.

Contrairement au contact et au frottement, notons que l'adhésion fait intervenir des processus physico-chimiques au niveau de l'interface entre deux corps. Les forces de contact normal (non-pénétration) et de frottement sont présentes, dues à la nature même des deux corps et à leur rugosité de surface. Pour que des forces adhésives apparaissent, il faut que la constitution atomique de la zone de

contact soit de plus modifiée <sup>2</sup>. Il faut à ce titre faire une nette différence avec les phénomènes adhésifs liés au frottement, et que nous appellerons **adhérence** (Figure 1.1 **b**). Du point de vue mécanique, on peut dire qu'il y a adhérence entre deux corps en contact s'ils ne peuvent glisser l'un par rapport à l'autre en deçà d'un certain seuil de cisaillement proportionnel à la force de contact.

De plus, nous restreignons le cadre de cette étude à une adhésion irréversible en supposant que les liaisons adhésives, une fois rompues, ne peuvent se régénérer, ce qui est le plus fréquent.

L'adhésion se rencontre dans de nombreuses applications où interviennent des adhésifs ou des colles, et cela dans des secteurs très divers et à des échelles variables, notamment entre la matrice et le renfort dans les **matériaux composites**.

## 1.1.2 Mécanique de la rupture des matériaux composites

### Généralités

Un matériau composite est un matériau constitué de **deux** phases clairement discernables, de natures très différentes et aux fonctions complémentaires :

- la **matrice** *légère* réalisant la continuité et assurant la cohésion,
- le **renfort** *rigide* apportant une résistance mécanique supplémentaire à l'ensemble.

Ayant des propriétés mécaniques exceptionnelles, notamment grâce à leur rapport rigidité/masse, les matériaux composites remplacent les métaux dans un nombre croissant d'applications (automobile, transport aérien et maritime, aérospatiale, accessoires de sport...). En règle générale, un composite est fabriqué par **incorporation** du renfort solide (fibres de verre, dans ce qui suit) dans la matrice liquide, suivi de la **solidification** de la matrice. L'incorporation s'accompagne de réactions physico-chimiques à l'interface (adhésion/décohésion) et la solidification entraîne une force de serrage de la matrice autour de fibres (adhérence/glissement). On peut souligner dès à présent que l'interface joue un rôle clé dans le comportement du matériau. C'est aussi une région où le contact avec frottement se retrouve couplé à l'*adhésion*.

Hull [64] présente une synthèse complète des matériaux composites. Les propriétés, le comportement mécanique, les procédés de fabrication de tels matériaux sont actuellement bien maîtrisés (Gibson [48], Daniel et Ishai [29], Berthelot [9], Christensen [17]), ainsi que leurs méthodes de dimensionnement pour la conception (Gay [45]). Cependant, due à la présence du renfort, la rupture des matériaux composites est moins bien connue car elle diffère de celle des matériaux classiques.

---

<sup>2</sup>L'adhésion peut être créée notamment par adsorption thermodynamique, par électrostatisme ou par réaction chimique au niveau de l'interface.

### Fissuration d'un composite

Considérons un matériau composite fibreux unidirectionnel soumis à une charge de traction et dont la matrice contient une fissure préexistante perpendiculaire à la direction des fibres (Figure 1.3). Au delà d'une certaine valeur du chargement, la fissure se propage inévitablement dans la matrice. Néanmoins, à l'approche et au contact des fibres, plusieurs phénomènes micro-mécaniques vont contribuer à modifier de façon générale cette propagation.

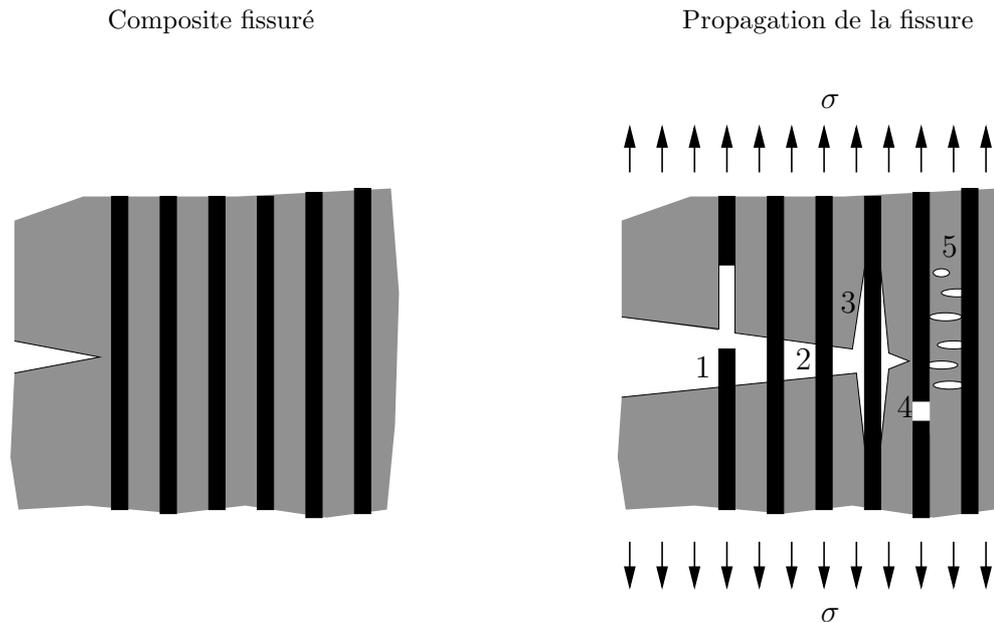


FIG. 1.3 – Exemples d'endommagement et de mécanismes de rupture dans un composite renforcé de longues fibres (adapté d'Anderson [5]). On distingue schématiquement la rupture et l'arrachement de la fibre (1), des fibres pontantes (2), le phénomène de décohésion (3), la rupture d'une fibre (4) et l'endommagement de la matrice (5).

Ainsi, la propagation de la fissure est ralentie suite au transfert de la charge sur les fibres situées en amont de la fissure par l'intermédiaire de l'interface. Ceci empêche l'ouverture de la fissure. On dit alors que les fibres **pontent** la fissure. Avec l'accroissement de la charge au delà d'un certain seuil, les fibres ne peuvent plus retenir l'ouverture de la fissure. Plusieurs scénarios peuvent alors se dérouler, selon les résistances respectives de la fibre, de l'interface et de la matrice (voir [123],[9]) :

1. Rupture brutale de la fibre (liée à la résistance de la fibre).
2. Déracinement de la fibre qui emporte une couche de matrice (lié à la résistance de la matrice).
3. Déchaussement de la fibre hors de la matrice (dépend de la résistance de l'interface).

Ce dernier phénomène, aussi appelé *décohésion*, est celui qui intervient le plus fréquemment, car l'interface est l'élément le plus faible dans la plupart des cas.

Nous comprenons aussi comment la qualité de l'interface donne au matériau composite une résistance élevée à la rupture et à la fatigue. Du point de vue énergétique, on peut dire que l'interface absorbe en partie l'énergie qui serait dissipée par une propagation de la fissure.

Le phénomène de décohésion peut se décomposer en trois étapes :

- a) cisaillement élastique entre la fibre et la matrice.
- b) rupture de l'interface entre la fibre et la matrice.
- c) frottement entre la fibre et la matrice.

Tous ces processus ont lieu séquentiellement, avec une force de contact unilatérale, due à la pression exercée par la matrice sur la fibre. Il n'est néanmoins pas exclu que les processus b) et c) s'effectuent simultanément. Auquel cas, les phénomènes de frottement et d'adhésion coexistent au sein de l'interface. Le cas du matériau composite fissuré est celui qui nous intéresse le plus, car nous étudions l'adhésion afin de modéliser plus fidèlement le comportement en rupture des matériaux composites, notamment les phénomènes de pontage des fissures (adhésion) et de déchaussement (décohésion). La présence des fibres augmente non seulement le module d'élasticité et les autres propriétés mécaniques du matériau dans la direction des fibres, mais aussi sa résistance à la fissuration transverse, par la présence d'adhésion entre la fibre et la matrice. L'adhésion à l'interface joue un rôle important pour la fatigue du matériau, notamment puisqu'elle ralentit la propagation des fissures dans le composite.

Ainsi, pour notre étude, il est nécessaire d'établir un modèle d'interface où les conditions de contact unilatéral, de frottement et d'adhésion sont couplées au sein d'une même loi constitutive <sup>3</sup> (Figure 1.2).

## 1.2 Etat de l'art

### 1.2.1 Modèles de décohésion des matériaux composites

Afin de mieux comprendre les processus de rupture dans les matériaux composites, il a fallu élaborer des modèles qui permettent, dans un premier temps, de déterminer comment s'effectue le transfert de charge au niveau de l'interface en vue de comprendre le processus de décohésion.

#### Le modèle shear-lag

L'une des premières modélisations du transfert de charge à l'interface fibre/matrice a été proposée par Cox [20] (voir aussi [64]).

---

<sup>3</sup>On trouve aussi un autre cas où adhérence et adhésion sont fortement couplés, lorsqu'on considère les pneumatiques automobiles. En effet, en fonctionnement normal, il y a adhérence entre la roue et la chaussée. Aux températures élevées, on observe aussi un "collage" des roues sur la chaussée dû à de l'adhésion.

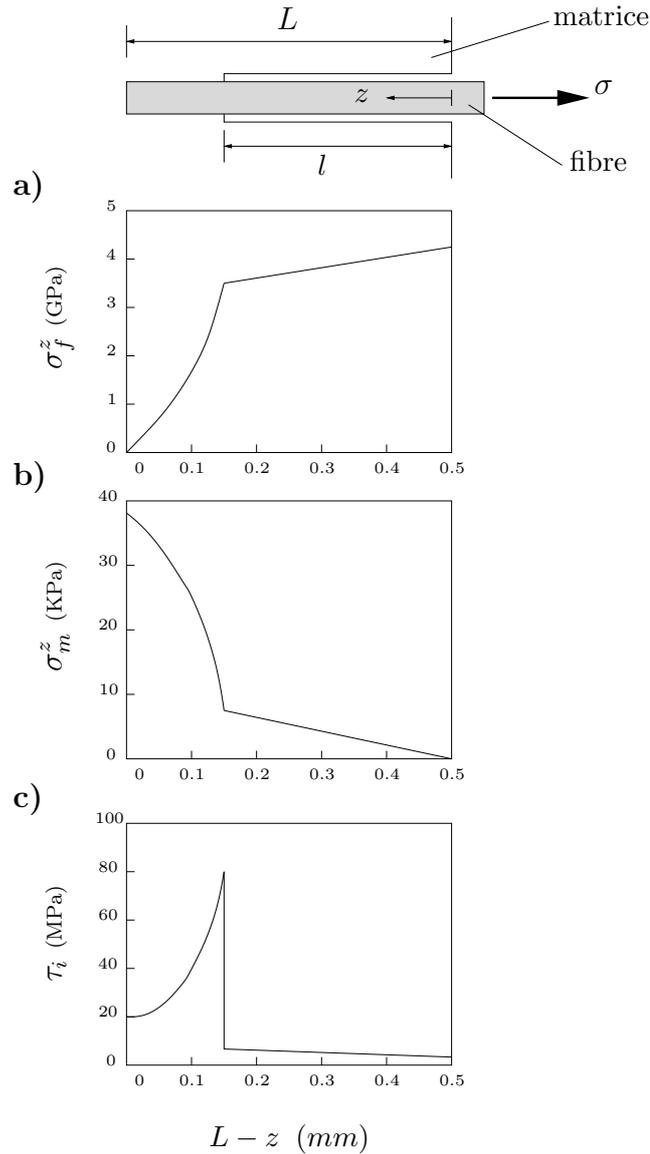


FIG. 1.4 – Répartition des contraintes lors d’un test d’arrachement d’une fibre d’un matériau composite, ayant au préalable subi une décohésion partielle de longueur  $l$ , par la méthode dite du “shear-lag”. On distingue **a)** contraintes axiales de la fibre  $\sigma_f^z$ , **b)** contraintes axiales de la matrice  $\sigma_m^z$  et **c)** contrainte de cisaillement interfaciale  $\tau_i$  le long de l’interface. (D’après [73])

Il s’agit d’un modèle simple, connu sous le nom de “shear-lag”, mais incomplet par ses hypothèses relativement restrictives. Ce modèle suppose tout d’abord une interface parfaite (non-endommageable) et se base sur le transfert d’une contrainte de traction axiale de la fibre vers la matrice par une contrainte de cisaillement interfaciale. Combinant cette hypothèse avec les résultats de l’élasticité linéaire classique, il donne analytiquement la répartition de la contrainte axiale le long de la fibre et la contrainte de cisaillement interfaciale le long de l’interface, pour une fibre entièrement noyée dans une matrice qui est soumise à des efforts de traction (Figure 1.4).

Cette approche a été adaptée par la suite pour des configurations fibre/matrice plus complexes (Outwater [98], Rosen [112], Dow [32], Greszczuk [50]), se rapprochant de celles rencontrées dans les composites (contrainte appliquée sur une fibre partiellement noyée dans une matrice). Ce modèle a aussi été adapté par Eshelby [34] pour un renfort de forme elliptique.

Combiné à un critère ou seuil de rupture statique (par exemple une contrainte de cisaillement interfaciale maximale, voir Figure 1.4 c)) ou encore énergétique, ce modèle permet de déterminer si il y a décohésion.

Le modèle shear-lag a l'avantage d'être simple, pouvant parfois être résolu analytiquement. Son succès est dû aussi au fait qu'il se résume à quelques formules pratiques, directement utilisables industriellement pour le dimensionnement rapide et approximatif d'un matériau composite. Sa popularité résulte enfin de son lien étroit avec les tests d'enfoncement et d'arrachement qui sont largement utilisés pour caractériser la décohésion des matériaux composites.

Cependant, le modèle "shear-lag" ne donne aucune indication sur l'évolution de la décohésion et ses mécanismes ; c'est là son principal défaut. En effet, il serait par exemple difficile de prévoir le comportement du pontage d'une fissure par cette méthode. Les résultats obtenus seraient trop approximatifs et insuffisants en terme d'évolution spatiale et temporelle.

Pour conclure, ce modèle a fait l'objet d'améliorations successives (Hsueh [62]) et des solutions à des situations toujours plus complexes (Kim et Mai [73]) ont été trouvées, mais conservant néanmoins les hypothèses simplificatrices du modèle. Plus récemment, l'approche par un critère énergétique pour la prévision de la décohésion a été complétée par des critères provenant de la mécanique de la rupture assimilant ce phénomène interfacial à une propagation de fissure (Gao et al. [44], Zhou et al. [134]).

## Mécanique de la rupture

La mécanique de la rupture suppose la présence d'une amorce de fissure initiale dans un matériau. Ensuite, la propagation de cette dernière est dictée par deux types de critères, dépendant du mode de sollicitation :

– CRITÈRE EN CONTRAINTE (IRWIN,1957) :

Le champ de contraintes en pointe de fissure est asymptotique, proportionnel à un facteur d'intensité de contraintes (FIC)  $K_m$  dépendant de la configuration considérée (notamment la longueur de la fissure), du mode de sollicitation  $m = I, II, III$  de la fissure et de l'intensité de la charge appliquée. Il y a propagation de la fissure (ou rupture) lorsque le FIC atteint une valeur critique.

– CRITÈRE ÉNERGÉTIQUE (GRIFFITH,1920) :

Le critère se base sur le constat que propager une fissure nécessite de l'énergie pour la création des deux nouvelles surfaces. Ainsi, il y aura exten-

sion de fissure lorsque l'énergie disponible pour propager la fissure atteint une valeur critique qui représente l'énergie de formation de deux surfaces. L'énergie disponible est déterminée par la différence d'énergie potentielle par unité de surface entre le système avant et après l'avancée d'une fissure (taux de restitution d'énergie, noté  $G$ ).

Pour des matériaux inhomogènes comme les composites, la prédiction de la rupture s'avère beaucoup plus complexe. Les valeurs des critères sont mal définies et la description du champ de contraintes est particulièrement ardue. Cependant, Marshall et al. [84] et McCartney [82] ont remplacé le composite par un milieu homogène équivalent et ont modélisé l'effet du pontage par une pression appliquée à la surface de la fissure. Ils ont ainsi pu proposer une condition de fissuration en se servant de la mécanique de la rupture. D'autres modèles, partant d'une fissure pontée, avec différents degrés d'endommagement d'interface ont été élaborés, notamment par Budiansky et al. [13]. La lacune principale de l'approche par la mécanique de la rupture est la même que celle du shear-lag dans le sens qu'elle ne donne aucun détail sur le processus proprement dit de propagation de fissure. De plus, son utilisation est restreinte à une géométrie et à un état de contrainte donnés. Elle ne différencie pas non plus les spécificités et le type des différentes interfaces que l'on peut rencontrer. Une synthèse complète de l'utilisation de la mécanique de la rupture dans les matériaux composites est disponible dans [42] et [113] regroupe une liste d'articles sur l'étude des interfaces.

### 1.2.2 Modèles d'adhésion

La compréhension du comportement de l'interface passe par l'étude des mécanismes d'adhésion. Il existe plusieurs théories de l'adhésion. Plusieurs modèles de zone cohésive <sup>4</sup> ont été établis, dont les plus significatifs sont ceux de Dugdale (1960), Needleman (1987,1990), Tvergaard (1990), Michel et al. (1992,1994), Cangémi et al. [15], Raous et al. [108] et Chaboche et al. (1997). Il semble dans tous les cas que l'adhésion soit un processus moléculaire, voire atomique (Kendall [70]).

#### La théorie de l'adsorption d'Eley (1961)

La théorie de l'adsorption thermodynamique part du constat qu'une petite quantité de liquide déposée à la surface d'un solide adopte la configuration d'une goutte, les forces adhésives empêchant son étalement. Le degré d'étalement (mesuré par l'angle de contact formé entre la surface et les extrémités de la goutte) dépend des énergies libres de surface de chacun des composants et permet de déterminer l'énergie d'adhésion de Dupré  $w$ . Cette notion est étendue à l'adhésion entre deux solides et on considère que pour les séparer, il faut fournir un **travail d'adhésion**  $w$  qui correspond à la quantité d'énergie stockée par unité de surface à l'interface (Israelchvili [65], Packham [99]).

---

<sup>4</sup>décrivant l'évolution des forces cohésives

### La théorie de l'adhésion de Johnson–Kendall–Roberts (JKR) (1971)

En supposant des corps élastiques linéaires et l'absence de forces de frottement et d'adhésion, le problème du contact sphère-plan a été résolu très tôt par Hertz (1881) qui détermina la distribution de pression, l'enfoncement élastique  $\delta$  ainsi que le rayon  $a$  de la surface de contact ainsi formée. Johnson et al. [69] constatèrent expérimentalement des années plus tard que la théorie de Hertz sous-estimait ce rayon de contact pour une sphère en verre et un plan en élastomère, qui du reste ne s'annulait pas avec la charge. Leur séparation nécessitait même une force non-négligeable. Ils attribuèrent ceci à l'adhésion et formulèrent la fameuse théorie de JKR qui consiste à associer le travail d'adhésion à une charge supplémentaire constante dans une formulation de Hertz. Cette théorie a été validée ensuite expérimentalement et associée à une technique qui permet d'obtenir le travail d'adhésion entre deux corps (voir Woerdeman et al. [127], par exemple). A partir des profils de distribution de pression hyperboliques obtenus, et en se basant sur un critère énergétique de la mécanique de la rupture, notamment en postulant que le taux de restitution d'énergie  $G$  est égal au travail d'adhésion  $w$ , ils purent ainsi prévoir la charge de décollement des deux solides. Leur théorie ne prenant pas en compte les forces d'attraction hors de la zone de contact, Derjaguin et al. [30] (DMT) proposèrent un modèle incluant ces forces adhésives uniquement hors du contact, en conservant néanmoins un contact de type Hertzien. Maugis [86] [87] proposa alors un modèle permettant entre autres une transition analytique entre les deux approches précédentes.

### Le modèle d'adhésion de Frémond (1982)

Des formulations plus “locales”, issues de la mécanique des contacts, ont ensuite permis de retrouver les propriétés macroscopiques et surtout de décrire l'évolution du phénomène de décohésion. L'adhésion est un phénomène d'interface. Une théorie moderne du contact avec adhésion, issue de la mécanique des milieux continus, est proposée par Frémond [38] [39] [40]. Elle se base sur les conditions du contact unilatéral de Hertz–Signorini–Moreau et d'une variable interne  $\beta$  additionnelle qui mesure “l'intensité de l'adhésion” localement (Figure 1.5). Cette variable est régie par une *loi d'évolution* au delà du seuil d'adhésion, ce dernier étant déterminé par le travail de l'adhésion  $w$ .

En utilisant le formalisme des variables internes (Coleman et Gurtin [19]), pour son caractère irréversible, et le formalisme moderne de l'analyse convexe de Moreau [91] [92] [93] [94], pour son caractère irrégulier, Frémond montre que sa *loi constitutive* de contact avec adhésion se ramène à une *loi d'état* et une *loi d'évolution* qui dérivent respectivement d'un potentiel (non régulier) d'énergie libre et d'un potentiel de dissipation complémentaire (Germain et al. [47], Frémond, Lemaitre–Chaboche [80], Klarbring [76]). Le respect des principes fondamentaux de la thermodynamique, notamment de l'inégalité de Clausius–Duhem, est ainsi assuré. Un matériau dont le comportement est décrit par les lois

précédentes est appelé *matériau standard généralisé*, selon le formalisme de Halphen et Nguyen [52]. Dans cette lignée, la loi de contact unilatéral avec adhésion de Frémond a récemment été couplée à une loi de frottement non associée de Coulomb–Moreau<sup>5</sup> par Cangémi et al. [16], Cangémi [15], Raous et al. [107] [108]. Enfin, une loi similaire a été utilisée pour caractériser le rôle de l’interface dans la fissuration des composites (Monerie [90]).

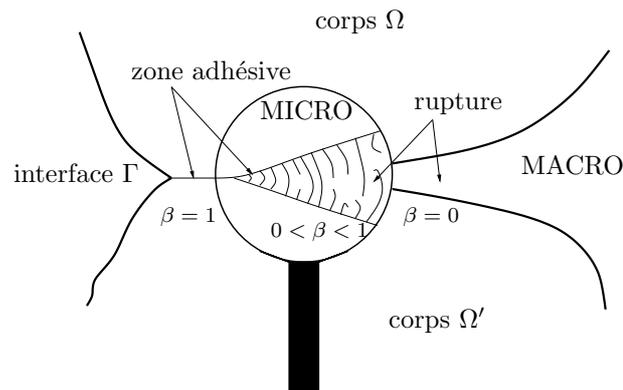


FIG. 1.5 – Variable interne  $\beta$  de mesure de l’adhésion : rapport entre le nombre de filaments rompus sur le nombre initial de filaments.  $\beta \in [0, 1]$ .  $\beta$  peut aussi s’interpréter comme l’aire de la zone restée collée sur l’aire de l’interface totale (=aire collée+aire décollée). (Adapté de [15])

Nous pensons que le cadre des matériaux standard généralisés mérite d’être adopté, notamment pour la recherche d’une loi constitutive découlant directement d’un potentiel d’énergie libre et d’un potentiel de dissipation.

### 1.2.3 Traitement numérique

Les solutions analytiques aux problèmes auxquels on vient de faire allusion sont rares. Seules des techniques numériques appropriées permettent de résoudre efficacement les systèmes d’équations obtenus.

#### Méthodes numériques en mécanique des solides déformables

Pour résoudre le problème aux valeurs initiales et aux limites de la mécanique non-linéaire des solides déformables, on fait habituellement appel aux trois méthodes numériques suivantes :

1. La méthode des éléments finis (MEF) pour la discrétisation spatiale.
2. La méthode des itérations linéaires (MIL) pour les non-linéarités.
3. La méthode des différences finies (MDF) pour l’intégration temporelle.

<sup>5</sup>On doit notamment à Moreau la possibilité d’inclure des phénomènes non-réguliers comme la plasticité et le frottement dans la classe des matériaux standards généralisés, en choisissant un potentiel de dissipation convexe, pas forcément différentiable. Ces potentiels non-différentiables ont été nommés pseudo-potentiels par Moreau.

Ces trois méthodes sont programmées dans le code d'éléments finis TACT [21] développé par Curnier [22].

### Méthodes numériques en mécanique des contacts

Les problèmes de mécanique des contacts se distinguent par la présence de discontinuités géométriques et matérielles (par opposition à l'hypothèse de continuité de la mécanique des solides) entraînant des non-linéarités. De plus, les lois de contact font intervenir des fonctions à la fois non-régulières et non-différentiables, introduisant des systèmes d'équations différentielles partielles couplées à des *contraintes d'inégalité*. La résolution numérique de problèmes de mécanique des contacts doit être précédée d'une régularisation du modèle mathématique afin de décontraindre le système. Il existe pour cela deux techniques assez répandues :

– LA MÉTHODE DE LA PÉNALITÉ (EULER,1744) :

Elle a principalement été introduite par Euler puis Thomson et Tait (1867) avant d'être établie par Courant (1927-1962) pour des contraintes égalités, et étendue par la suite aux contraintes inégalités par Bertsekas (1975), Rockafellar (1976), et plus récemment Auslender (1986). C'est la technique la plus simple et la plus populaire. Elle reste cependant sensible au choix du paramètre de pénalité, qui par sa valeur élevée pose des problèmes de conditionnement. De plus, la solution obtenue est une solution approchée. Elle a été appliquée pour les problèmes de contact avec frottement entre autres par Oden (1980), Curnier et Alart [25].

– LA MÉTHODE DU LAGRANGIEN AUGMENTÉ (ARROW-SOLOW,1958) :

Comme pour la pénalité, la technique du Lagrangien augmenté a d'abord été introduite par Arrow-Solow, Hestenes [55], Powell [104] pour les contraintes égalité, avant d'être étendue aux contraintes inégalités (Rockafellar (1974), Fortin [36] [37]). Elle connaît de plus en plus de succès car elle évite les problèmes de la méthode de la pénalité notamment par sa robustesse, son bon conditionnement et surtout sa solution exacte. Elle est par contre plus compliquée à mettre en œuvre. Son utilisation pour les problèmes de contact avec frottement est relativement récente (Alart [1], Alart et Curnier [2], Simo et al. [117] [116], Heegaard et Curnier [54], Pietrzak [100], Strömberg [118], entre autres).

### 1.2.4 Techniques expérimentales

Les techniques expérimentales ont évolué en fonction des modèles. Elles se résument principalement à trois techniques :

– LES TESTS D'ARRACHEMENT (GRAY,1984 ; DÉSARMOT ET AL.,1991 ; KIM ET AL.,1991 ; JIANG ET AL.,1992) :

Ce test consiste à provoquer la décohésion à l'interface en arrachant une

fibre plantée dans une matrice (Figure 1.6 a)). Connaissant la traction appliquée, on en déduit la contrainte maximale que supporte l'interface avant décohésion par une analyse de type shear-lag ou un critère de Griffith.

- LES TESTS DE MICRO-INDENTATION (MANDELL ET AL.,1986-1987 ; GRANDE ET AL.,1988 ; MARSHALL ET AL.,1987) :

Le principe est similaire à celui du test précédent à la différence qu'il s'agit d'enfoncer la fibre par une charge en compression appliquée au niveau de la surface du composite préalablement polie, à l'aide d'un indenteur(Figure 1.6 b)). On détermine ainsi la résistance de l'interface au cisaillement. L'analyse des essais s'effectue par un modèle de type shear-lag, combiné à la théorie de la mécanique de la rupture, dont le plus populaire est celui de Marshall [83], Marshall et al. [85].

- L'ESSAI DE FRAGMENTATION (KELLY ET TYSON,1965) :

La technique de fragmentation consiste à noyer une fibre dans une matrice qui est ensuite soumise à une charge (Figure 1.6 c)). En raison de la différence des déformations à rupture des deux constituants, la fibre se morcèle en fragments, et selon leur longueur, on peut déterminer la façon dont la charge est transférée entre la fibre et la matrice. Kelly et Tyson (1965) ont proposé un modèle dans lequel le transfert de charge est limité par la plastification de la matrice le long de l'interface.

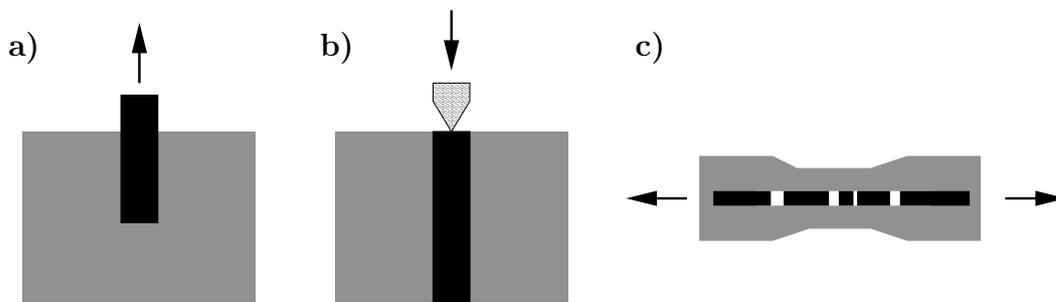


FIG. 1.6 – Tests classiques d'identification des propriétés d'interface, avec a) test d'arrachement, b) test de micro-indentation et c) essai de fragmentation.

Le test d'arrachement est le plus courant car c'est la configuration la plus proche d'une fibre dans un composite, bien que l'essai de micro-indentation soit techniquement plus stable. Ce dernier apporte aussi plus d'information, toutefois, sa mise en œuvre est relativement complexe comparé aux informations recueillies.

On constate que ces tests, étroitement liés au modèle shear-lag et à l'approche par la mécanique de la rupture, se contentent de fixer des limites mais ne donnent aucune indication sur le mécanisme de décohésion à proprement parler (Shetty [114], Kerans et al. [71], Kuntz et al. [78]).

Un inventaire des tests les plus habituels et des théories relatives appliquées à des composites fibre de verre/résine époxyde a été effectuée par Feillard [35].

## 1.3 Objectifs de la thèse

*Le premier objectif de cette thèse est de proposer une formulation théorique cohérente et réaliste de l'adhésion entre deux corps s'inscrivant dans le cadre de la théorie des matériaux standards généralisés. Il s'agira ensuite de coupler cette formulation avec celles déjà existantes du contact avec frottement en une loi unique. Le deuxième objectif est de développer des méthodes numériques pour la résolution des équations formulées, notamment en combinant la technique du Lagrangien augmenté aux méthodes des éléments finis et des itérations linéaires. Le troisième objectif consistera, une fois calibré par des expériences adéquates, à appliquer le modèle obtenu à des matériaux composites fibreux, pour une meilleure compréhension de leur comportement mécanique.*

## 1.4 Plan du rapport de thèse

### 1.4.1 Formulation théorique

Dans le chapitre 2, les principes fondamentaux de la thermomécanique des solides et des contacts (lois de conservation, principes de la thermodynamique et lois de comportement) seront passés en revue.

Après un rappel du modèle de Cangémi, le chapitre 3 expose le modèle d'adhésion développé, qui s'inspire de la théorie de la plasticité avec écrouissage.

### 1.4.2 Traitement numérique

La modélisation numérique par éléments finis de la mécanique des solides déformables est rappelée au chapitre 4.

Le chapitre 5 traite de la discrétisation numérique de la formulation des problèmes de contact avec frottement dans un premier temps, puis de l'adhésion. Des cas tests de problèmes de contact avec frottement et adhésion (tests de validation) y sont aussi traités.

### 1.4.3 Identification expérimentale et application aux composites

Le chapitre 6 expose les techniques expérimentales mises en œuvre en vue de déterminer les paramètres adhésifs du modèle. Après cette étape de calibration, dans le chapitre 7, des simulations numériques sont effectuées et étudiées en rapport avec des théories de l'adhésion et de la rupture des matériaux composites. Plus précisément, le problème de l'adhésion d'un poinçon rigide sur un demi-espace élastique, le test d'arrachement d'une fibre et la propagation d'une fissure dans un matériau composite fibreux seront étudiés.



# Chapitre 2

## Mécanique des solides et des contacts

---

### 2.1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est de passer en revue les concepts généraux et les principes fondamentaux de la thermomécanique des solides et de proposer une formulation théorique des contacts entre deux solides déformables. La synthèse de la thermomécanique des solides fait l'objet des quatre premières sections :

- la thermo-cinématique
- la thermodynamique
- la thermo-énergétique
- les lois de comportement

Des études plus détaillées et exhaustives sur la mécanique des milieux continus et des solides déformables peuvent être trouvées chez Germain [46], Gurtin [51] et Curnier [24].

Par analogie, l'essai théorique sur la thermomécanique des contacts des quatre sections suivantes reprend la même approche, à la différence que celle-ci est étendue au niveau de l'interface de contact. Les premières tentatives de considérer la mécanique des contacts de manière continue et de l'intégrer dans l'optique de la mécanique des solides remontent à Hertz (1881), Signorini (1933-59), Fichera (1964), Duvaut–Lions [33], Kikuchi–Oden [72].

Les résumés qui suivent s'inspirent aussi largement de Zysset [137], Pietrzak [100], Ramaniraka [106], Strömberg [118], Cangémi [15] et de Curnier [24] [22]. Quelques remarques et une synthèse de la thermomécanique des solides et du contact sont effectués en fin de chapitre.

## 2.2 Thermomécanique des solides déformables

### 2.2.1 Géométrie et thermo-cinématique

#### Définition d'un solide

Un corps solide est défini comme un ensemble de particules ou de points matériels dans un espace donné. Le corps est identifié par sa forme  $\Omega \subseteq \mathbf{R}^3$  (région de l'espace qu'il occupe à un instant originel  $t = 0$  donné).

L'état thermo-géométrique originel local est caractérisé par :

- le vecteur position  $\mathbf{x}$  de chaque particule,
- la température originelle  $T_0$  de chaque particule.

L'état originel se résume donc au couple  $\mathbf{z} = \{\mathbf{x}, T_0\}$ .

#### Cadre général

En outre, un corps est supposé être *impénétrable* pour le distinguer du vide. Cela se traduit par un domaine  $\Omega$  non vide (contenant au moins une particule) et “monocouche” (avec une seule particule par point). Un corps est encore supposé être continu. Cela implique un domaine  $\Omega$  *connexe*, c'est-à-dire d'un seul tenant. La *frontière* du corps est désignée par  $\Gamma \equiv \partial\Omega$ . En plus d'occuper l'espace et d'être impénétrable, un corps est *mobile*, donc susceptible de se mouvoir et de se déformer dans l'espace au cours du temps  $t$ .

#### Modes de description d'un solide

Après avoir subi une transformation, le solide  $\Omega$  se trouve à l'instant  $t$  dans une nouvelle forme  $\Omega_t$ , appelée *configuration* ou *forme actuelle* transformée (Figure 2.1).

L'état actuel du corps est caractérisé par :

- la nouvelle position  $\mathbf{y}(\mathbf{x}, t)$  du point matériel  $\mathbf{x}$  au temps  $t$ ,
- la température actuelle  $T(\mathbf{x}, t)$  de la particule  $\mathbf{x}$ .

La fonction  $\mathbf{y}$  définit le mouvement du solide, qui transforme  $\Omega$  en  $\Omega_t$ , dans l'espace Euclidien  $\mathbf{R}^3$ . La fonction  $T$  décrit l'évolution de sa température.

Il existe deux principaux types de description de mouvement :

- une description *matérielle* ou *Lagrangienne* : associée à la forme originelle du corps  $\Omega$ ,
- une description *spatiale* ou *Eulérienne* : liée à la forme actuelle du corps  $\Omega_t$ .

Dans cette étude, nous adopterons exclusivement une description matérielle.

### Cinématique du solide

Les deux variables cinématiques qui jouent un rôle important en mécanique des milieux continus sont le gradient de transformation et la vitesse.

La vitesse du solide est définie par la dérivée matérielle (partielle) du mouvement par rapport au temps :

$$\dot{\mathbf{y}}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{y}(\mathbf{x}, t) \quad (2.1)$$

De même, on définit l'accélération du solide par la dérivée de la vitesse par rapport au temps :

$$\ddot{\mathbf{y}}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{y}(\mathbf{x}, t) \quad (2.2)$$

Pour mesurer les transformations locales du solide, on introduit le gradient de la transformation (d'Euler) :

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, t) = \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{y}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{y}(\mathbf{x}, t) \quad (2.3)$$

La déformation d'une fibre  $d\mathbf{x}$  de sa configuration initiale à sa configuration actuelle  $d\mathbf{y}$  est donnée par :

$$d\mathbf{y} = \mathbf{F}d\mathbf{x} \quad (2.4)$$

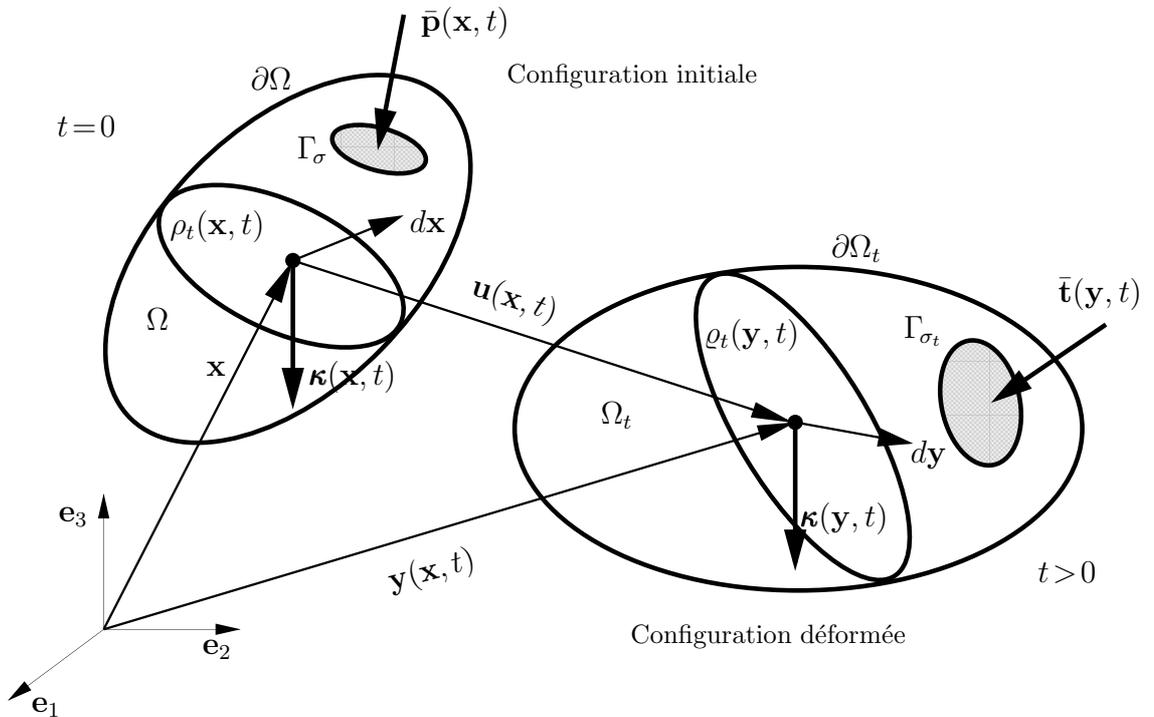


FIG. 2.1 – Configurations initiale-de référence et actuelle-deformée du corps  $\Omega$ .

Le mouvement du solide est aussi parfois décrit par son déplacement  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{y}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{x}$ . On définit alors de manière analogue le gradient du déplacement  $\mathbf{H}(\mathbf{x}, t) = \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{F}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{I}$ .

Les déformations du corps peuvent être mesurées de plusieurs manières équivalentes. Comme  $\mathbf{F}$  n'est pas invariant lors d'un changement de référentiel (objectivité), nous introduisons le tenseur métrique matériel de Cauchy–Green droit :

$$\mathbf{C}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{F}^T(\mathbf{x}, t)\mathbf{F}(\mathbf{x}, t) \quad (2.5)$$

La version normalisée de ce tenseur est la déformation matérielle (Lagrangienne) de St.-Venant–Green :

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2}[\mathbf{C}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{I}] \quad (2.6)$$

### Thermique d'un solide

En plus de la température actuelle  $T(\mathbf{x}, t)$ , on introduit les variables thermo-cinématiques additionnelles suivantes :

- le taux matériel de la température par rapport au temps :

$$\dot{T}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial}{\partial t} T(\mathbf{x}, t) \quad (2.7)$$

- le gradient de la température :

$$\nabla_{\mathbf{x}} T(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} T(\mathbf{x}, t) \quad (2.8)$$

## 2.2.2 Statique et thermodynamique

En mécanique des milieux continus, les lois de conservation suivantes sont postulées indépendamment de la géométrie et de la nature des matériaux :

- la conservation de la masse,
- la variation de la quantité de mouvement linéaire,
- la variation de la quantité de mouvement angulaire.

### Conservation de la masse

*“La masse de toute partie  $\omega$  d'un corps  $\Omega$  reste inchangée pour tout mouvement du corps.”*

Si  $M(\omega, t)$  est la masse de la partie  $\omega$  du corps  $\Omega$  à l'instant  $t$ , alors :

$$M(\omega, t) = M(\omega, 0) \quad , \quad \forall t \in [0, T] \quad , \quad \forall \omega \subseteq \Omega \quad (2.9)$$

FORMULATION GLOBALE :

$$\int_{\omega} \rho_t(\mathbf{x}, t) dV = \int_{\omega} \rho(\mathbf{x}) dV, \quad \forall t \in [0, T], \quad \forall \omega \subseteq \Omega \quad (2.10)$$

où  $\rho_t(\mathbf{x}, t)$  désigne la densité nominale actuelle et  $\rho(\mathbf{x})$  la densité matérielle originelle.

Pour un domaine  $\omega$  suffisamment régulier (continuité), et un matériau homogène aux densités continues en  $\mathbf{x}$ , nous pouvons écrire la forme locale de la conservation de la masse.

FORMULATION LOCALE :

$$\rho_t(\mathbf{x}, t) = \rho(\mathbf{x}) \quad (2.11)$$

### Variation de la quantité de mouvement linéaire

“Le taux de la quantité de mouvement linéaire  $\mathbf{l}(\omega, t)$  de toute partie  $\omega$  d’un corps  $\Omega$ , à un instant donné  $t$ , est égal à la résultante  $\mathbf{f}_R$  des forces exercées sur le corps.”

$$\frac{d}{dt} \mathbf{l}(\omega, t) = \mathbf{f}_R(\bar{\omega}, t), \quad \forall t \in [0, T], \quad \forall \omega \subseteq \Omega \quad (2.12)$$

avec  $\mathbf{l}(\omega, t) = \int_{\omega} \rho(\mathbf{x}) \dot{\mathbf{y}}(\mathbf{x}, t) dV$ .

Les forces externes  $\mathbf{f}_R$  qui agissent sur le corps peuvent être de deux types (figure 2.1) :

- les forces volumiques ou forces à distance, définies par une densité volumique de force de volume  $\boldsymbol{\kappa}(\mathbf{x}, t)$  répartie sur la forme de référence,
- les forces de surface ou forces de contact qui agissent sur la surface frontière  $\partial\omega$  de  $\omega$  définies par une densité aérique de force de contact actuelle  $\mathbf{p}[\mathbf{x}, t, \mathbf{m}(\mathbf{x})]$  réparties par unité d’aire de référence, où  $\mathbf{m}(\mathbf{x})$  est la normale unitaire sortante à l’élément de référence  $d\mathbf{s} = \mathbf{m} dA$  sur lequel  $\mathbf{p}[\mathbf{x}, t, \mathbf{m}(\mathbf{x})]$  est censé agir.

FORMULATION GLOBALE :

$$\int_{\omega} \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{x}, t) dV + \int_{\partial\omega} \mathbf{p}[\mathbf{x}, t, \mathbf{m}(\mathbf{x})] dA = \int_{\omega} \rho(\mathbf{x}) \ddot{\mathbf{y}}(\mathbf{x}, t) dV, \quad (2.13)$$

$$\forall t \in [0, T], \quad \forall \omega \subseteq \Omega$$

En écrivant l’équilibre d’un tétraèdre, on montre que  $\mathbf{p}[\mathbf{x}, t, \mathbf{m}(\mathbf{x})] = \mathbf{P}(\mathbf{x}, t) \mathbf{m}(\mathbf{x})$  où le tenseur  $\mathbf{P}$  est appelé tenseur de contrainte nominal ou premier tenseur de Piola–Kirchhoff.

Cependant,  $\mathbf{P}$  n’étant pas objectif, il est utile d’introduire le tenseur de contrainte matériel  $\mathbf{S}$ , aussi appelé second tenseur de Piola–Kirchhoff :

$$\mathbf{S} = \mathbf{F}^{-1} \mathbf{P} \quad (2.14)$$

Ce tenseur peut aussi être pris comme l'équivalent matériel du tenseur de Cauchy spatial défini par  $\mathbf{t}(\mathbf{y}, t, \mathbf{n}(\mathbf{y})) = \mathbf{T}(\mathbf{y}, t)\mathbf{n}(\mathbf{y})$ . On montre que  $\mathbf{T}(\mathbf{y}(\mathbf{x}, t)) = J^{-1}(\mathbf{x}, t)\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)\mathbf{S}(\mathbf{x}, t)\mathbf{F}^T(\mathbf{x}, t)$  où  $\mathbf{n}(\mathbf{y}) = \mathbf{m}_t(\mathbf{y})$  est le vecteur normal unitaire à la surface  $\partial\omega_t$  de  $\omega_t$  à  $\mathbf{y}$  dans la configuration actuelle  $\Omega_t$ .

Pour des domaines et des densités suffisamment réguliers, on déduit la forme locale de la variation de la quantité de mouvement linéaire.

FORMULATION LOCALE (de l'équilibre des forces) :

$$\rho(\mathbf{x})\ddot{\mathbf{y}}(\mathbf{x}, t) - \text{Div}[\mathbf{P}(\mathbf{x}, t)] - \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{0} \quad (2.15)$$

### Variation de la quantité de mouvement angulaire

“Le taux de la quantité de mouvement angulaire  $\widehat{\mathbf{I}}(\omega, t)$  de toute partie  $\omega$  d'un corps  $\Omega$ , à un instant donné  $t$ , par rapport à un point donné est égal aux moments résultants  $\widehat{\mathbf{f}}_R$  par rapport au même point.”

$$\frac{d}{dt}\widehat{\mathbf{I}}(\omega, t) = \widehat{\mathbf{f}}_R(\bar{\omega}, t) \quad , \quad \forall t \in [0, T] \quad , \quad \forall \omega \subseteq \Omega \quad (2.16)$$

avec :

$$\frac{d}{dt}\widehat{\mathbf{I}}(\omega, t) = \int_{\omega} \mathbf{y}(\mathbf{x}, t) \wedge \rho(\mathbf{x})\ddot{\mathbf{y}}(\mathbf{x}, t)dV$$

et  $\widehat{\mathbf{f}}_R(\bar{\omega}, t)$  représente le moment résultant des forces de volume et de contact.

FORMULATION GLOBALE :

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{f}}_R(\bar{\omega}, t) &= \int_{\omega} \mathbf{y}(\mathbf{x}, t) \wedge \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{x}, t)dV + \int_{\partial\omega} \mathbf{y}(\mathbf{x}, t) \wedge \mathbf{p}[\mathbf{x}, t, \mathbf{m}(\mathbf{x})]dA \\ &= \int_{\omega} \mathbf{y}(\mathbf{x}, t) \wedge \rho(\mathbf{x})\ddot{\mathbf{y}}(\mathbf{x}, t)dV \quad , \quad \forall t \in [0, T] \quad , \quad \forall \omega \subseteq \Omega \end{aligned} \quad (2.17)$$

Pour des domaines et des densités suffisamment réguliers, on déduit de (2.15) et (2.16) la forme locale de la variation de la quantité de mouvement angulaire.

FORMULATION LOCALE (de l'équilibre des moments) :

$$\mathbf{F}^T(\mathbf{x}, t)\mathbf{P}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{P}(\mathbf{x}, t)\mathbf{F}^T(\mathbf{x}, t) \quad \iff \quad \mathbf{S}^T(\mathbf{x}, t) = \mathbf{S}(\mathbf{x}, t) \quad (2.18)$$

### Conditions initiales et aux limites

En plus de ces équations d'équilibre locales, nous avons :

des conditions initiales :

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{y}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{x} \\ \dot{\mathbf{y}}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{v}_0(\mathbf{x}) \end{array} \right\} \quad \text{dans } \Omega \quad (2.19)$$

des conditions aux limites :

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(\mathbf{x}, t) &= \bar{\mathbf{y}}(\mathbf{x}, t) \quad \text{sur } \Gamma_y \times [0, T] \\ \mathbf{P}(\mathbf{x}, t)\mathbf{m}(\mathbf{x}) &= \bar{\mathbf{p}}(\mathbf{x}, t) \quad \text{sur } \Gamma_\sigma \times [0, T] \end{aligned} \quad (2.20)$$

avec :

$$\begin{aligned} \Gamma_y, \Gamma_\sigma &- \text{parties de la frontière } \partial\Omega \text{ sur lesquelles des déplacements,} \\ &\text{respectivement des forces sont imposés et telles que :} \\ \Gamma_y \cup \Gamma_\sigma &\subset \Gamma, \quad \Gamma_y \cap \Gamma_\sigma = \emptyset \end{aligned}$$

Toutefois, pour pouvoir résoudre le problème aux valeurs initiales et aux limites (2.15), (2.18), (2.19) et (2.20) (obtenir autant d'équations que d'inconnues  $\mathbf{y}$  et  $\mathbf{P}$ ), des relations supplémentaires, dites *constitutives* vont devoir être introduites.

### Formulation faible (principe des travaux virtuels)

Dans l'optique de résoudre le problème aux valeurs initiales et aux limites par la méthode des éléments finis et pour disposer d'une formulation théorique plus générale, nous introduisons la *formulation faible* des équations d'équilibre aussi appelé *principe des travaux virtuels*. Nous définissons l'*espace des mouvements cinématiquement admissibles*  $\mathbf{z}$  satisfaisant les conditions aux limites sur  $\Gamma_y$  :

$$V_y = \{ \mathbf{z} \mid \mathbf{z} = \bar{\mathbf{y}} \text{ sur } \Gamma_y \} \quad (2.21)$$

$V_y$  étant un sous-espace vectoriel affine, au temps présent  $t$  on définit un *déplacement virtuel*  $\mathbf{w}$  (déplacement relatif naissant<sup>1</sup>) par la différence :

$$\mathbf{w}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{z}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{y}(\mathbf{x}, t)$$

où  $\mathbf{y}$  représente un mouvement réel et  $\mathbf{z} \in V_y$  un *mouvement virtuel*, nous constatons que  $\mathbf{w}$  satisfait les conditions aux limites nulles homogènes, c'est-à-dire que les  $\mathbf{w} \in V$  sont tels que :

$$V = \{ \mathbf{w} \mid \mathbf{w} = \mathbf{0} \text{ sur } \Gamma_y \} \quad (2.22)$$

La fonction  $\mathbf{w} \in V$ , aussi équivalente à une variation de  $\mathbf{y}$ , est aussi notée  $\delta\mathbf{y}$ . En multipliant l'équation d'équilibre des forces (2.19) par  $\mathbf{w} \in V$ , et après intégration par parties sur le corps  $\Omega$ , on obtient la formulation variationnelle :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\rho(\mathbf{x}) \ddot{\mathbf{y}}(\mathbf{x}, t) - \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{x}, t)) \cdot \mathbf{w}(\mathbf{x}, t) d\Omega + \int_{\Omega} \nabla \mathbf{w}(\mathbf{x}, t) : \mathbf{P}(\mathbf{x}, t) d\Omega = \\ = \int_{\Gamma_\sigma} (\mathbf{P}(\mathbf{x}, t) \mathbf{m}(\mathbf{x})) \cdot \mathbf{w}(\mathbf{x}, t) d\Gamma, \quad \forall \mathbf{w} \in V \end{aligned} \quad (2.23)$$

$(\cdot)$  et  $(:)$  dénotent les produits scalaires vectoriel et tensoriel, respectivement.

<sup>1</sup>mathématiquement identique à une vitesse virtuelle  $\mathbf{w} = \delta t \dot{\mathbf{y}}$

Finalement, le problème peut se résumer de la manière suivante :

*Etant donné un corps :*

$$\Omega \subset \mathbf{R}^3, \quad \partial\Omega \equiv \Gamma_y \cup \Gamma_\sigma, \quad ,$$

*des fonctions :*

$$\rho, \mathbf{P}, \boldsymbol{\kappa},$$

*des conditions initiales et aux limites :*

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{y}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{x} \\ \dot{\mathbf{y}}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{v}_0(\mathbf{x}) \end{array} \right\} \quad \text{dans } \Omega$$

$$\mathbf{y}(\mathbf{x}, t) = \bar{\mathbf{y}}(\mathbf{x}, t) \quad \text{sur } \Gamma_y \times [0, T]$$

$$\mathbf{P}(\mathbf{x}, t) \mathbf{m}(\mathbf{x}) = \bar{\mathbf{p}}(\mathbf{x}, t) \quad \text{sur } \Gamma_\sigma \times [0, T]$$

*Trouver le mouvement  $\mathbf{y}$  tel que :*

$$\forall t \in [0, T], \quad \forall \mathbf{w} \in V$$

$$\int_{\Omega} \mathbf{w}(\mathbf{x}, t) \cdot (\rho(\mathbf{x}) \dot{\mathbf{y}}(\mathbf{x}, t) - \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{x}, t)) d\Omega + \int_{\Omega} \nabla \mathbf{w}(\mathbf{x}, t) : \mathbf{P}(\mathbf{x}, t) d\Omega = \int_{\Gamma_\sigma} \mathbf{w}(\mathbf{x}, t) \cdot \bar{\mathbf{p}}(\mathbf{x}, t) d\Gamma \quad (2.24)$$

L'équation variationnelle (2.24) peut aussi être dérivée de l'équation de la variation de l'énergie.

### 2.2.3 Thermo-énergétique

En plus des lois de la mécanique précédentes, les principes de la thermodynamique doivent aussi être respectés :

- l'équilibre de l'énergie (premier principe)
- l'inégalité de l'entropie (second principe)

#### Principe de “conservation” de l'énergie

En général, la déformation d'un solide n'est pas un phénomène purement mécanique ; elle peut aussi être par exemple introduite par un échauffement ou une variation de la température. De même, une déformation peut engendrer des effets thermiques si le comportement du matériau constitutif est inélastique, irréversible. La prise en compte de ces phénomènes nécessite l'introduction de nouvelles notions : énergie interne et chaleur.

Premier principe : “La somme des taux d’énergie cinétique et de l’énergie interne de toute partie  $\omega$  d’un corps  $\Omega$ , à un instant donné  $t$  est égale à la somme de la puissance des efforts extérieurs et du flux de chaleur.”

$$\frac{d}{dt}(K(\omega, t) + E(\omega, t)) = P_e(\omega, t) + Q(\omega, t) , \quad \forall t \in [0, T] , \quad \forall \omega \subseteq \Omega \quad (2.25)$$

Les différents termes de cet équilibre sont :

– l’énergie interne :

$$E(\omega, t) = \int_{\omega} \rho(\mathbf{x}, t) e(\mathbf{x}, t) dV$$

où  $e(\mathbf{x}, t)$  est la densité d’énergie interne spécifique par unité de masse dans la forme de référence.

– l’énergie cinétique :

$$K(\omega, t) = \frac{1}{2} \int_{\omega} \rho(\mathbf{x}, t) \dot{\mathbf{y}}(\mathbf{x}, t) \cdot \dot{\mathbf{y}}(\mathbf{x}, t) dV$$

– la puissance des efforts extérieurs dus à  $\boldsymbol{\kappa}(\mathbf{x}, t)$  et  $\mathbf{p}[\mathbf{x}, t, \mathbf{m}(\mathbf{x})]$  sur la surface  $\partial\omega$  :

$$P_e(\omega, t) = \int_{\omega} \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{x}, t) \cdot \dot{\mathbf{y}}(\mathbf{x}, t) dV + \int_{\partial\omega} \mathbf{p}[\mathbf{x}, t, \mathbf{m}(\mathbf{x})] \cdot \dot{\mathbf{y}}(\mathbf{x}, t) dA$$

– le taux de la quantité de chaleur échangée avec l’extérieur :

$$Q(\omega, t) = \int_{\omega} r(\mathbf{x}, t) dV - \int_{\partial\omega} q[\mathbf{x}, t, \mathbf{m}(\mathbf{x})] dA$$

où  $q[\mathbf{x}, t, \mathbf{m}(\mathbf{x})]$  est le flux scalaire de chaleur mesuré par unité d’aire matérielle  $dA$  et  $r(\mathbf{x}, t)$  la densité volumique de chaleur fournie à  $\omega$  par l’extérieur (radiations).

– la puissance des efforts internes, par définition :

$$P_i(\omega, t) = \int_{\omega} \mathbf{P}(\mathbf{x}, t) : \dot{\mathbf{F}}(\mathbf{x}, t) dV$$

En appliquant l’équilibre de l’énergie à un tétraèdre, on montre que  $q[\mathbf{x}, t, \mathbf{m}(\mathbf{x})] = \mathbf{q}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{m}(\mathbf{x})$  où  $\mathbf{q}$  est le vecteur flux de chaleur nominal.

FORMULATION LOCALE :

$$\rho(\mathbf{x}) \dot{e}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{P}(\mathbf{x}, t) : \dot{\mathbf{F}}(\mathbf{x}, t) + r(\mathbf{x}, t) - \text{Div}[\mathbf{q}(\mathbf{x}, t)] \quad (2.26)$$

D’autre part, on peut montrer que la puissance développée par la contrainte nominale  $\mathbf{P}(\mathbf{x}, t)$  au taux de déformation nominale  $\dot{\mathbf{F}}(\mathbf{x}, t)$  est égale à celle développée par la contrainte matérielle  $\mathbf{S}(\mathbf{x}, t)$  au taux de déformation matériel  $\dot{\mathbf{E}}(\mathbf{x}, t)$ .

On peut donc écrire l’équation de l’énergie locale sous la forme équivalente :

$$\rho(\mathbf{x}) \dot{e}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{S}(\mathbf{x}, t) : \dot{\mathbf{E}}(\mathbf{x}, t) + r(\mathbf{x}, t) - \text{Div}[\mathbf{q}(\mathbf{x}, t)] \quad (2.27)$$

### Inégalité de l'entropie

Pour écrire le deuxième principe, il faut introduire deux nouvelles grandeurs :

- la température absolue  $T(\mathbf{x}, t)$ ,
- l'entropie  $S(\omega, t)$ , fonction de l'état thermodynamique du système  $\omega$ .

Second principe : “*Pour toute partie  $\omega$  d'un corps  $\Omega$  et à tout instant  $t$ , la dérivée matérielle de l'entropie  $S(\omega, t)$  contenue dans  $\omega$  est toujours supérieure ou égale au taux d'entropie  $N(\omega, t)$  fourni par l'extérieur à  $\omega$ .*”

$$\frac{d}{dt}S(\omega, t) \geq N(\omega, t) \quad , \quad \forall t \in [0, T] \quad , \quad \forall \omega \subseteq \Omega \quad (2.28)$$

En distinguant :

- l'entropie :

$$S(\omega, t) = \int_{\omega} \rho(\mathbf{x}, t) s(\mathbf{x}, t) dV$$

où  $s(\mathbf{x}, t)$  est la densité spécifique d'entropie,

- le taux d'entropie fourni :

$$N(\omega, t) = \int_{\omega} \frac{r(\mathbf{x}, t)}{T(\mathbf{x}, t)} dV - \int_{\partial\omega} \frac{q[\mathbf{x}, t, \mathbf{m}(\mathbf{x})]}{T(\mathbf{x}, t)} dA$$

FORMULATION LOCALE (avec l'équation locale de conservation de l'énergie) :

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{x}) [T(\mathbf{x}, t) \dot{s}(\mathbf{x}, t) - \dot{e}(\mathbf{x}, t)] + \mathbf{S}(\mathbf{x}, t) : \dot{\mathbf{E}}(\mathbf{x}, t) \\ - \mathbf{q}(\mathbf{x}, t) \cdot \frac{\nabla T(\mathbf{x}, t)}{T(\mathbf{x}, t)} \geq 0 \end{aligned} \quad (2.29)$$

### 2.2.4 Lois de comportement

De manière générale, les lois de conservation et les principes de la thermodynamique développés dans les sections précédentes sont indépendants de la matière constitutive du corps déformable envisagé (sauf pour la densité  $\rho$ ). Deux matériaux ayant exactement la même forme géométrique et soumis aux mêmes sollicitations mécaniques et thermiques peuvent avoir des réponses différentes. Ceci s'explique par les lois constitutives (ou lois de comportement) qui caractérisent un matériau. Ces lois sont nécessaires pour déterminer le champ de contrainte  $\mathbf{P}(\mathbf{x}, t)$ . En mécanique, elles relient les variables primales-cinématiques (déformations) aux variables duales-statiques (contraintes). La théorie des lois de comportement est due à Truesdell (1952), Noll (1955), Coleman–Noll (1963), Coleman (1964), Truesdell–Noll (1965), et plus récemment on peut citer entre autres les travaux de Moreau (1964–1970), Gurtin (1972), et Germain–Nguyen Son–Suquet (1980).

La formulation des lois constitutives d'une classe de matériaux se doit de respecter certaines hypothèses sur leur structure, notamment les préceptes suivants :



La rotation impose une restriction supplémentaire qui sera satisfaite ultérieurement en remplaçant la déformation et la contrainte nominales  $\mathbf{F} - \mathbf{P}$  par leur contreparties matérielles  $\mathbf{E} - \mathbf{S}$ .

– INVARIANCE MATÉRIELLE-SYMÉTRIE :

Les lois de comportement doivent être invariantes dans un certain groupe de transformations particulières ou *groupe de symétrie*  $\mathcal{G}$  du matériau. Ce groupe  $\mathcal{G}$  est tout le groupe unimodulaire pour les fluides. C'est un sous-groupe du groupe unimodulaire, voire l'intégrité du groupe orthogonal pour les solides.

– LOCALISATION :

Les matériaux considérés sont supposés matériellement simples. Les valeurs d'une fonction constitutive  $\mathcal{C}$  en une particule  $\mathbf{x}$  ne sont pas affectées de manière appréciable par une particule  $\mathbf{x}'$  assez loin de  $\mathbf{x}$ . Autrement dit, une fonction constitutive ne dépend que des gradients du premier ordre dans l'espace :

$$\mathcal{C} = \mathcal{C} ( \nabla \mathbf{y}, T, \nabla T, \boldsymbol{\alpha}, \nabla \boldsymbol{\alpha}, \\ \nabla \dot{\mathbf{y}}, \dot{T}, \nabla \dot{T}, \dot{\boldsymbol{\alpha}}, \nabla \dot{\boldsymbol{\alpha}}, \\ \nabla \ddot{\mathbf{y}}, \ddot{T}, \nabla \ddot{T}, \ddot{\boldsymbol{\alpha}}, \nabla \ddot{\boldsymbol{\alpha}}, \\ \dots \dots \dots ; \mathbf{x} )$$

– INSTANTANÉISATION :

Les matériaux considérés sont supposés "temporellement simple". Autrement dit, une fonction constitutive ne dépend que des dérivées premières temporelles :

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}(\nabla \mathbf{y}, \nabla \dot{\mathbf{y}}, T, \dot{T}, \nabla T, \nabla \dot{T}, \boldsymbol{\alpha}, \dot{\boldsymbol{\alpha}}, \nabla \boldsymbol{\alpha}, \nabla \dot{\boldsymbol{\alpha}}; \mathbf{x})$$

– EQUIPRÉSENCE (TRUESDELL, 1951) :

Une variable indépendante apparaissant dans une relation constitutive doit être présente dans toutes les autres relations constitutives sauf si sa présence entre en contradiction avec un des principes généraux de la thermomécanique.

### Variables d'état

La localisation postule que l'état thermomécanique d'un milieu matériel en un point et à un instant donnés est complètement défini par la connaissance des valeurs à cet instant d'un certain nombre de variables ne dépendant que du point considéré. C'est par le choix de la nature et du nombre des variables d'état que l'on décrit plus ou moins finement les phénomènes physiques. Les variables d'état  $\boldsymbol{\alpha}$ , appelées aussi variables thermodynamiques ou variables indépendantes sont de deux types :

– VARIABLES OBSERVABLES :

Ce sont les variables imposées par le formalisme de la mécanique et de la thermodynamique des milieux continus développé aux paragraphes précédents, et qui permettent la description de la plupart des phénomènes mécaniques réversibles (élasticité, viscoélasticité). On distingue :

- la déformation totale  $\mathbf{E}$  (en remplacement de  $\mathbf{F} = \nabla \mathbf{y}$  pour assurer l'objectivité en rotation),
  - la température<sup>2</sup>  $T$ ,
- explicitement incluses dans l'état.

– VARIABLES INTERNES :  $\alpha^i$

En règle générale, la description de chaque phénomène physique irréversible supplémentaire nécessite l'introduction d'une nouvelle variable appelée variable interne liée à ce phénomène particulier, et ne pouvant pas être directement mesurée. Notamment, pour les phénomènes dissipatifs, l'état actuel dépend aussi de l'histoire passée, représentée dans la méthode de l'état local par les valeurs à chaque instant des variables internes. Deux exemples classiques de variables internes sont :

- la déformation plastique  $\mathbf{E}^p$ ,
- l'accumulation de la déformation plastique  $e^p = \int_0^t \sqrt{\frac{2}{3}} \|\dot{\mathbf{E}}^p\| d\tau$   
(endommagement, écoulement).

### Formulation générale pour les phénomènes thermomécaniques

D'après Coleman–Noll (1963), un processus thermomécanique est décrit à l'aide de quatre fonctions<sup>3</sup> :

- le tenseur de contrainte nominal  $\mathbf{P}$  ou préférablement matériel  $\mathbf{S}$
- l'entropie  $s$
- l'énergie interne  $e$
- le flux de chaleur  $\mathbf{q}$

Compte tenu des préceptes sur les lois de comportement exposés précédemment, ces fonctions dépendent du gradient de la transformation  $\mathbf{F}$  ou préférablement de la déformation matérielle  $\mathbf{E}$ , de la température  $T$  et éventuellement d'autres variables d'état  $\alpha$ , ainsi que des gradients  $\nabla T$ ,  $\nabla \alpha$  et des taux  $\dot{\mathbf{E}}$ ,  $\dot{T}$ ,  $\nabla \dot{T}$ ,  $\dot{\alpha}$ ,  $\nabla \dot{\alpha}$ , au temps  $t$ .

Ces quatre grandeurs doivent satisfaire les lois de conservation pour tout  $\omega \subseteq \Omega$ . Les variables thermo-cinématiques  $\mathbf{E}$  et  $T$ ,  $\nabla T$  sont les variables primales et les fonctions thermodynamiques  $\mathbf{S}$  et  $\mathbf{q}$  sont les fonctions duales,  $e$  et  $s$  jouant le rôle de potentiels.

<sup>2</sup>La température est un peu particulière dans le sens qu'elle peut être considérée à la fois comme une variable observable ou comme une variable interne.

<sup>3</sup>Éventuellement redondantes.

### Formulation des matériaux standards généralisés

Nous nous plaçons maintenant dans une classe de lois de comportement plus restreinte appelée cadre des **matériaux standards généralisés**, dans la lignée des travaux de Onsager (1931), Ziegler (1958-1963), Coleman et Noll (1963), Moreau (1970-1974), Halphen et Nguyen [52](1975), Germain et al. [47] (1983). La loi de comportement en contrainte de matériaux appartenant à une telle classe dérive de deux potentiels : un potentiel d'énergie libre  $\Psi$  et un potentiel de dissipation  $\Phi$ .

**Energie libre** – Compte tenu des axiomes précédents et du postulat de la méthode de l'état local (voir Lemaitre–Chaboche [80]) selon lequel les dérivées temporelles des variables d'état n'interviennent pas pour définir l'état<sup>4</sup>, nous introduisons, pour des matériaux standards généralisés l'énergie libre spécifique  $\Psi$  définie par :

$$\Psi(\mathbf{E}, T, \nabla T, \boldsymbol{\alpha}^i) = e(\mathbf{E}, T, \nabla T, \boldsymbol{\alpha}^i) - s(\mathbf{E}, T, \nabla T, \boldsymbol{\alpha}^i)T \quad (2.30)$$

Afin de ne pas alourdir l'écriture, nous supposons dans (2.30) que  $\Psi$  ne dépend pas de  $\nabla \boldsymbol{\alpha}^i$ , le traitement de cette variable étant similaire à  $\boldsymbol{\alpha}^i$ .

En introduisant cette énergie dans l'inégalité de l'entropie, nous obtenons l'*inégalité de Clausius–Duhem* :

$$\left(\mathbf{S} - \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{E}}\right) : \dot{\mathbf{E}} - \rho \left(\frac{\partial \Psi}{\partial T} + s\right) \dot{T} - \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\alpha}^i} : \dot{\boldsymbol{\alpha}}^i - \mathbf{q} \frac{\nabla T}{T} - \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \nabla T} \cdot \overline{\nabla \dot{T}} \geq 0 \quad (2.31)$$

En se référant à la liste des arguments de (2.31),  $\dot{T}$  et  $\overline{\nabla \dot{T}}$  peuvent prendre des valeurs quelconques. D'après l'axiome d'équiprésence, et comme  $s$  ne dépend pas de  $\dot{T}$  et  $\Psi$  ne dépend pas de  $\overline{\nabla \dot{T}}$ , pour que l'inégalité soit toujours respectée, il faut que les facteurs de  $\dot{T}$  et  $\overline{\nabla \dot{T}}$  s'annulent (démarche de Coleman) :

$$s = -\frac{\partial \Psi}{\partial T}, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial \nabla T} = 0 \quad \implies \quad \Psi = \Psi(\mathbf{E}, T, \boldsymbol{\alpha}^i) \quad (2.32)$$

**Dissipation** – Pour définir les lois complémentaires relatives aux processus dissipatifs, la théorie postule maintenant l'existence d'un potentiel de dissipation  $\Phi = \Phi(\dot{\mathbf{E}}, \dot{\boldsymbol{\alpha}}^i; \mathbf{E}, \boldsymbol{\alpha}^i)$  dépendant directement des variables de flux, mais pouvant éventuellement faire intervenir des variables d'état en paramètres, et tel que :

$$\left(\mathbf{S} - \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{E}}\right) \equiv \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{\mathbf{E}}} \quad \text{et} \quad -\rho \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\alpha}^i} \equiv \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{\boldsymbol{\alpha}}^i} \quad (2.33)$$

<sup>4</sup>Toute évolution est dès lors considérée comme une succession d'états d'équilibre.

Qui prend la forme d'inclusions si la dissipation  $\Phi$  n'est pas différentiable au sens de l'analyse classique :

$$\left(\mathbf{S} - \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{E}}\right) \in \partial_{\dot{\mathbf{E}}} \Phi \quad \text{et} \quad -\rho \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\alpha}^i} \in \partial_{\dot{\boldsymbol{\alpha}}^i} \Phi \quad (2.34)$$

Ainsi exprimées, les lois d'évolution respectent la règle de normalité du processus dissipatif (principe de dissipation maximal : Onsager (1931), Hill(1950), Ziegler (1958-1963)). D'après (2.32) l'énergie libre (2.30) prend la forme :

$$\Psi = \Psi(\mathbf{E}, T, \boldsymbol{\alpha}^i)$$

L'inégalité de l'entropie de Clausius–Duhem (2.31) se réduit donc à :

$$\left(\mathbf{S} - \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{E}}\right) : \dot{\mathbf{E}} + \mathbf{S}^i : \dot{\boldsymbol{\alpha}}^i - \mathbf{q} \frac{\nabla T}{T} \geq 0 \quad (2.35)$$

avec  $\mathbf{S}^i \equiv -\rho \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\alpha}^i}$  ou  $\mathbf{S}^i \in -\rho \partial_{\boldsymbol{\alpha}^i} \Psi$  selon la différentiabilité de  $\Psi$  par rapport à  $\boldsymbol{\alpha}^i$ .

En considérant un processus isotherme, l'inégalité se réduit encore plus à :

$$\left(\mathbf{S} - \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{E}}\right) : \dot{\mathbf{E}} + \mathbf{S}^i : \dot{\boldsymbol{\alpha}}^i \geq 0 \quad (2.36)$$

Dans le cas classique où  $\Phi$  est différentiable en  $\dot{\mathbf{E}}$ , l'inégalité de Clausius–Duhem prend aussi la forme :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{\mathbf{E}}} : \dot{\mathbf{E}} + \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{\boldsymbol{\alpha}}^i} : \dot{\boldsymbol{\alpha}}^i \geq 0 \quad (2.37)$$

**En résumé** – Pour le respect du second principe de la thermodynamique, il suffit que le potentiel de dissipation (ou pseudo-potentiel) soit une fonction convexe, positive et nulle à l'origine par rapport aux variables de flux  $(\dot{\mathbf{E}}, \dot{\boldsymbol{\alpha}}_i)$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi([0], \mathbf{0}; \mathbf{E}, \boldsymbol{\alpha}^i) = 0 \quad , \\ \Phi(\dot{\mathbf{E}}, \dot{\boldsymbol{\alpha}}^i; \mathbf{E}, \boldsymbol{\alpha}^i) \geq 0 \quad , \\ \Phi((1-\lambda)\dot{\mathbf{E}}' + \lambda\dot{\mathbf{E}}, (1-\lambda)\dot{\boldsymbol{\alpha}}'^i + \lambda\dot{\boldsymbol{\alpha}}^i; \mathbf{E}, \boldsymbol{\alpha}^i) \leq (1-\lambda)\Phi(\dot{\mathbf{E}}', \dot{\boldsymbol{\alpha}}'^i; \mathbf{E}, \boldsymbol{\alpha}^i) \\ \quad \quad \quad + \lambda\Phi(\dot{\mathbf{E}}, \dot{\boldsymbol{\alpha}}^i; \mathbf{E}, \boldsymbol{\alpha}^i) \quad , \quad \forall \lambda \in (0, 1). \end{array} \right.$$

Pour des raisons de stabilité en petites déformations, il suffit aussi que le potentiel d'énergie libre soit convexe au voisinage de l'origine, et on peut supposer qu'il s'annule à l'origine en terme de  $\mathbf{E}$  sans perte de généralité.

Dans la suite, nous discuterons les lois de comportement de différents matériaux de manière unidimensionnelle, pour la clarté, une meilleure appréciation des

phénomènes et afin de nous préparer au modèle d'interface adhésive développé plus tard. La généralisation tridimensionnelle, lorsqu'elle est donnée ne fait pas l'objet d'une étude exhaustive. Cette dernière nécessitera les définitions de quelques produits tensoriels [24] qu'il est utile de rappeler ici :

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})\mathbf{X} &= (\mathbf{B} : \mathbf{X})\mathbf{A} , & \forall \mathbf{X} \\ (\mathbf{A} \underline{\otimes} \mathbf{B})\mathbf{X} &= \mathbf{A}\mathbf{X}\mathbf{B}^T , & \forall \mathbf{X} \\ (\mathbf{A} \overline{\otimes} \mathbf{B})\mathbf{X} &= \mathbf{A}\mathbf{X}^T\mathbf{B}^T , & \forall \mathbf{X} \\ (\mathbf{A} \underline{\overline{\otimes}} \mathbf{B})\mathbf{X} &= \frac{1}{2}(\mathbf{A}\mathbf{X}\mathbf{B}^T + \mathbf{A}\mathbf{X}^T\mathbf{B}^T) , & \forall \mathbf{X} \end{aligned}$$

De plus, on se limitera dans ce qui suit au cas *isotherme*, pour simplifier.

### Matériaux élastiques

L'état mécanique d'un matériau élastique est totalement déterminé par sa déformation  $\mathbf{E}$ . Aucun taux de déformation ni aucune variable interne n'est nécessaire. Le potentiel d'énergie libre  $\Psi$  est supposé deux fois différentiable et convexe par rapport à la variable observable  $\mathbf{E}$ . Le potentiel de dissipation  $\Phi$  est nul.

**Les lois constitutives** – L'énergie libre et la dissipation s'écrivent :

$$\Psi = \Psi(\mathbf{E}) \quad \Phi = 0 \tag{2.38}$$

Les lois constitutives se résument donc à une loi d'état donnée par les relations (2.33) :

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}^e = \mathbf{S}(\mathbf{E}) = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{E}} \tag{2.39}$$

**Cas unidimensionnel linéaire** – L'énergie libre s'écrit :

$$\Psi = \Psi(E) = \frac{1}{2\rho} \epsilon E^2 , \quad \text{où } \epsilon : \text{ module de Young} \tag{2.40}$$

On en dérive la contrainte élastique (Figure 2.2) :

$$S = S^e = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial E} = \epsilon E \tag{2.41}$$

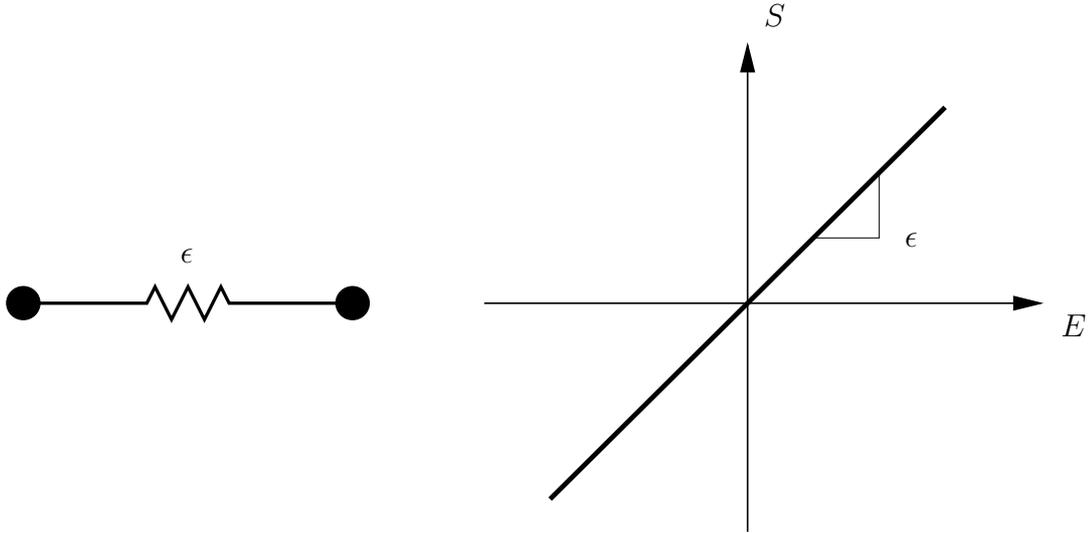


FIG. 2.2 – Modèle rhéologique et loi constitutive d'un matériau linéaire élastique.

### Cas tridimensionnel linéaire isotrope –

$$\Psi = \Psi(\mathbf{E}) = \frac{1}{2\rho} \mathbf{E} : \mathbb{S} \mathbf{E} \quad (2.42)$$

avec  $\mathbb{S} = \lambda(\mathbf{I} \otimes \mathbf{I}) + 2\mu(\mathbf{I} \overline{\otimes} \mathbf{I})$  le tenseur tangent élastique et  $\lambda, \mu$  sont les *coefficients de Lamé* reliés au module d'élasticité  $\epsilon$  et au *coefficient de poisson*  $\nu$  par :

$$\lambda = \frac{\epsilon \nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad , \quad \mu = \frac{\epsilon}{2(1 + \nu)}$$

Le potentiel de dissipation restant bien entendu nul et en se servant des relations (2.33), la loi d'état se formule :

$$\begin{aligned} \mathbf{S} = \mathbf{S}(\mathbf{E}) &= \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{E}} = \mathbb{S} \mathbf{E} = \lambda(\mathbf{I} \otimes \mathbf{I}) \mathbf{E} + 2\mu(\mathbf{I} \overline{\otimes} \mathbf{I}) \mathbf{E} \\ &= \lambda(\mathbf{I} : \mathbf{E}) \mathbf{I} + \mu(\mathbf{E} \mathbf{I} \mathbf{I}^T + \mathbf{E} \mathbf{I}^T \mathbf{I}^T) \\ &= \lambda \operatorname{tr}(\mathbf{E}) \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{E} \end{aligned} \quad (2.43)$$

### Matériaux visco-élastiques

Les matériaux visco-élastiques de type Kelvin–Voigt possèdent une mémoire évanescence dans le sens que leur comportement mécanique dépend du taux actuel de déformation  $\dot{\mathbf{E}}$  (mais d'aucune variable interne). Ils se distinguent donc des matériaux élastiques par la présence d'une dissipation fonction de  $\dot{\mathbf{E}}$ . L'utilisation d'une variable interne donne cependant un matériau standard dont la réponse est plus satisfaisante. Pour en savoir plus sur le comportement visco-élastique des matériaux, on peut entre autres se référer à [126].

**Les lois constitutives** – L'énergie libre et la dissipation s'écrivent sans variable interne :

$$\Psi = \Psi(\mathbf{E}) \quad \Phi = \Phi(\dot{\mathbf{E}}) \quad (2.44)$$

D'après (2.34) la loi constitutive :

$$\mathbf{S} = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{E}} + \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{\mathbf{E}}} = \mathbf{S}^e + \mathbf{S}^v, \quad \text{avec} \quad \mathbf{S}^v \equiv \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{\mathbf{E}}} \quad (2.45)$$

**Cas unidimensionnel** – L'énergie libre est la même qu'en élasticité :

$$\Psi = \Psi(E) = \frac{1}{2\rho} \epsilon E^2, \quad \text{où} \quad \epsilon : \text{module de Young} \quad (2.46)$$

En postulant le potentiel de dissipation suivant :

$$\Phi = \Phi(\dot{E}) = \frac{n}{n+1} v |\dot{E}|^{\frac{n+1}{n}}, \quad (2.47)$$

la loi constitutive s'écrit :

$$S = S^e + S^v = \epsilon E + v |\dot{E}|^{\frac{1}{n}} \frac{\dot{E}}{|\dot{E}|} \quad (2.48)$$

Lorsque  $n = 1$ , on retrouve la viscosité linéaire de Newton et  $v$  est un coefficient de viscosité (Figure 2.3).

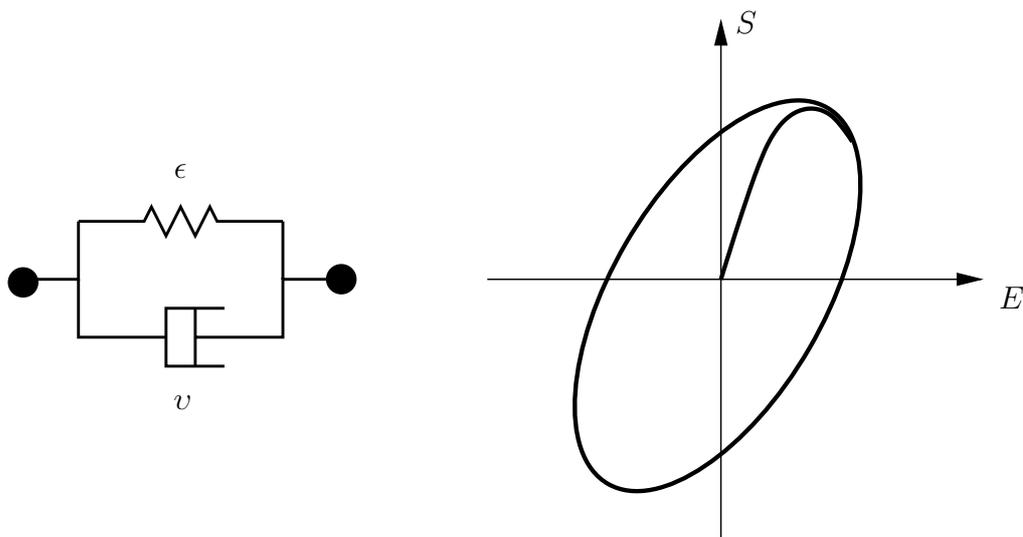


FIG. 2.3 – Modèle rhéologique et loi constitutive d'un matériau visco-élastique.

## Matériaux élasto-plastiques

La loi classique “indépendante des taux” de l'élasto-plasticité est la plus répandue pour combiner les effets élastiques et plastiques (voir [81], [66]). La réponse de tels matériaux est supposée se décomposer en deux phénomènes distincts : élasticité et plasticité. Une variable interne  $\mathbf{E}^p$  est introduite, représentant la déformation plastique permanente. Pour en savoir plus sur les fondements de la théorie de la plasticité, on peut se référer notamment à Hill [57].

**Les lois constitutives** – Les potentiels d'énergie libre et de dissipation sont postulés de la forme :

$$\Psi = \Psi(\mathbf{E}, \mathbf{E}^p) , \quad \Phi = \Phi(\dot{\mathbf{E}}^p) \quad (2.49)$$

La contrainte “indépendante du taux” de la déformation plastique, ou plus exactement fonction homogène de degré zero de celui-ci, se traduit par une dissipation homogène de degré un, non-différentiable à l'origine.

$\Phi$  n'étant pas différentiable par l'analyse classique, et comme  $\Phi$  est indépendant de  $\dot{\mathbf{E}}$ , les relations (2.34) donnent :

$$\mathbf{S} = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{E}} \quad \text{et} \quad \mathbf{S}^p = -\rho \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{E}^p} \in \partial_{\mathbf{E}^p} \Phi \quad (2.50)$$

**Cas unidimensionnel élastique linéaire - plastique parfait** – L'énergie libre est choisie de la forme suivante :

$$\Psi = \Psi(E, E^p) = \frac{1}{2\rho} \epsilon (E - E^p)^2 , \quad \text{où } \epsilon : \text{ module de Young} \quad (2.51)$$

Ceci sous-entend une décomposition additive de la déformation  $E$  en une partie élastique  $E^e$  et une partie plastique  $E^p$  et suppose un montage en série de l'élasticité et de la plasticité ( $E = E^e + E^p$ ).

Le potentiel de dissipation suivant est postulé :

$$\Phi = \Phi(\dot{E}^p) = \sigma |\dot{E}^p| , \quad \text{où } \sigma : \text{ contrainte limite élastique} \quad (2.52)$$

L'utilisation de la transformation de Legendre–Fenchel permet d'écrire :

$$\Phi(\dot{E}^p) = I_{[-\sigma, \sigma]}^*(\dot{E}^p) \quad (2.53)$$

où  $I_{[-\sigma, \sigma]}$  est la fonction indicatrice du segment  $[-\sigma, \sigma]$  (le domaine élastique) définie par :

$$I_{[-\sigma, \sigma]}(\dot{E}^p) = \begin{cases} 0 & \text{si } \dot{E}^p \in [-\sigma, \sigma] \\ \infty & \text{si } \dot{E}^p \notin [-\sigma, \sigma] \end{cases} \quad (2.54)$$

Ainsi, la fonction valeur absolue multipliée par  $\sigma$  (plus généralement la fonction support du segment convexe  $[-\sigma, \sigma]$ ) est la conjuguée (transformée) de la fonction indicatrice de ce segment convexe (Figure 2.4).

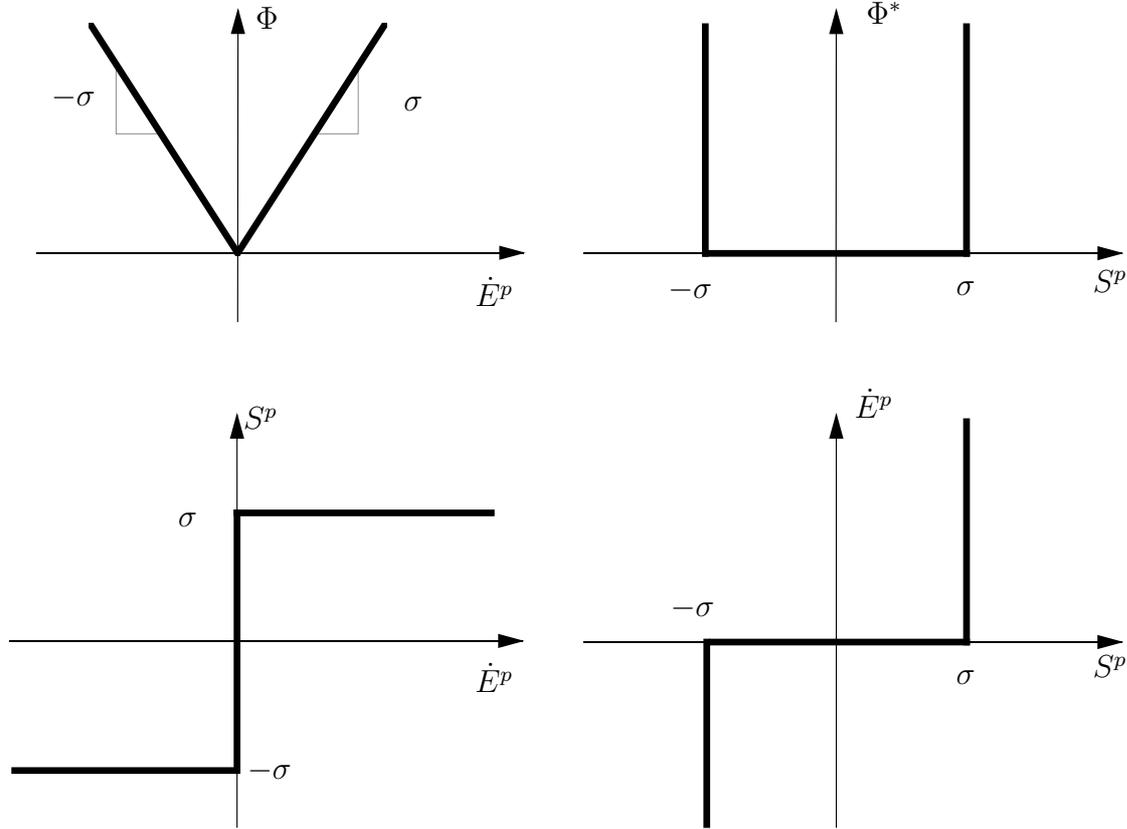


FIG. 2.4 – Transformée de Legendre–Fenchel du potentiel de dissipation.

Les lois constitutives (2.33) et (2.34) conduisent à :

$$S = S^e = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial E} = \epsilon(E - E^p) \quad (2.55)$$

$$\begin{cases} S^p = -\rho \frac{\partial \Psi}{\partial E^p} = \epsilon(E - E^p) \\ S^p \in \partial_{\dot{E}^p} \Phi = \partial \mathbb{I}_{[-\sigma, \sigma]}^*(\dot{E}^p) = \sigma \partial |\dot{E}^p| \end{cases} \quad (2.56)$$

On note que  $S = S^e = S^p$  (ce qui confirme un montage en série de l'élasticité et de la plasticité), d'où la relation suivante :

$$S = \epsilon(E - E^p) \in \partial \mathbb{I}_{[-\sigma, \sigma]}^*(\dot{E}^p) \quad (2.57)$$

L'intégration de l'inclusion différentielle (2.57) peut s'effectuer pas à pas (par un algorithme incrémental) à l'aide du schéma d'Euler régressif completé d'une

projection (algorithme de retour radial ou de raffe d'un convexe, Wilkins(1964), Moreau(1964), voir par exemple Curnier [22], Simo–Hugues [66] [67]).

On décompose  $E^p$  en écrivant  $E^p = E_0^p + \dot{E}^p dt$ . La relation précédente se réécrit :

$$S = \epsilon(E - E_0^p - \dot{E}^p dt) \in \partial \mathbf{I}_{[-\sigma, \sigma]}^*(\dot{E}^p) \quad (2.58)$$

qui s'écrit aussi (Figure 2.5) :

$$\epsilon(E - E_0^p) \in \partial \mathbf{I}_{[-\sigma, \sigma]}^*(\dot{E}^p) + \epsilon \dot{E}^p dt \quad (2.59)$$

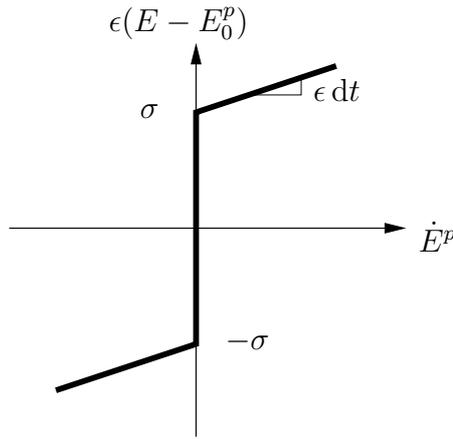


FIG. 2.5 – Graphe de  $\epsilon(E - E_0^p)$  en fonction de  $\dot{E}^p$ .

Il en résulte, en se servant de (2.58) et (2.59) que :

$$\text{Si } \epsilon|(E - E_0^p)| \leq \sigma \iff \begin{cases} \dot{E}^p = 0 \\ S = \epsilon(E - E_0^p) \end{cases} \quad (2.60)$$

$$\text{Si } \epsilon|(E - E_0^p)| > \sigma \iff \begin{cases} \dot{E}^p = \frac{1}{dt} \left( (E - E_0^p) - \frac{\sigma}{\epsilon} \frac{E - E_0^p}{|E - E_0^p|} \right) \\ S = \sigma \frac{E - E_0^p}{|E - E_0^p|} = \pm \sigma \end{cases} \quad (2.61)$$

Si on récapitule en se servant de (2.60) et (2.61), on peut écrire (Figure 2.6) :

$$S = \begin{cases} \epsilon(E - E_0^p) & \text{si } \epsilon|(E - E_0^p)| \leq \sigma \\ \sigma \frac{E - E_0^p}{|E - E_0^p|} = \pm \sigma & \text{si } \epsilon|(E - E_0^p)| > \sigma \end{cases} \quad (2.62)$$

La contrainte  $S$  est la *projection* d'une contrainte d'essai  $\epsilon(E - E_0^p)$  sur le domaine élastique délimité par le *critère de plasticité* :

$$S = P_{[-\sigma, \sigma]}(\epsilon(E - E_0^p)) \quad (2.63)$$

Dans le cas où le critère de plasticité est défini par une fonction  $f$  telle que :

$$f(S) = |S| - \sigma \quad (2.64)$$

La loi d'évolution peut aussi s'écrire sous la forme (dite de Kuhn–Tucker en optimisation ou de Moreau en plasticité) :

$$\begin{aligned} |\dot{E}^p| \geq 0 \quad , \quad f(S) \leq 0 \quad , \quad |\dot{E}^p| f(S) = 0 \\ \dot{E}^p = |\dot{E}^p| \frac{\partial f}{\partial S} \end{aligned} \quad (2.65)$$

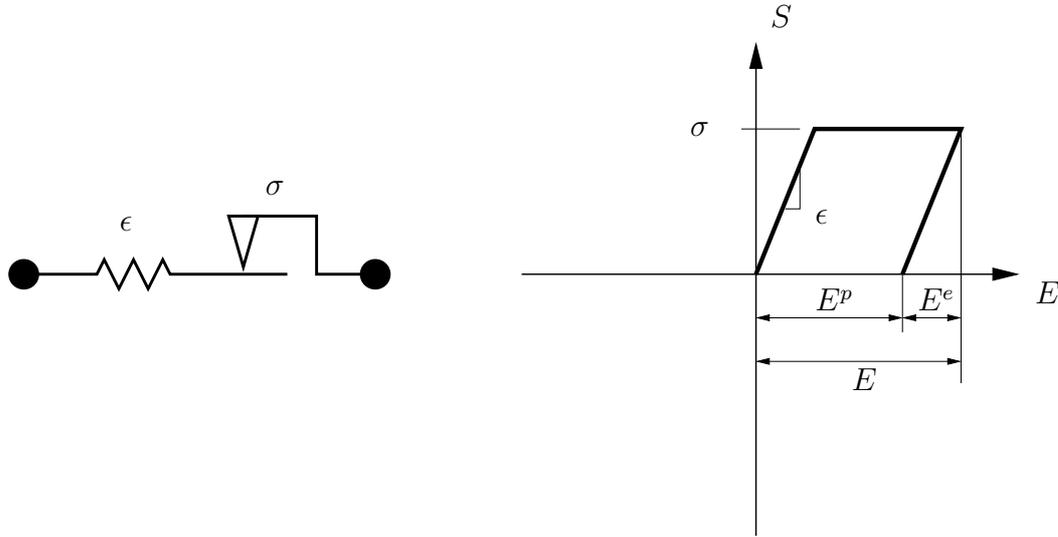


FIG. 2.6 – Modèle rhéologique et loi constitutive d'un matériau élasto-plastique.

### Matériaux élasto-plastiques avec écrouissage

L'écrouissage est un phénomène observé en plasticité dans les matériaux, plus particulièrement les métaux. Dans cette étude, nous nous limitons à un écrouissage de type *isotrope* où la variation de la contrainte plastique résulte de l'accumulation de déformation plastique<sup>5</sup>. Pour l'introduire, il faut faire appel à une nouvelle variable interne  $e^p$ , la déformation plastique cumulée :

$$e^p = \int_0^t \sqrt{\frac{2}{3}} \|\dot{\mathbf{E}}^p\| d\tau \quad \text{et} \quad \dot{e}^p = \sqrt{\frac{2}{3}} \|\dot{\mathbf{E}}^p\| \quad (2.66)$$

En raison du caractère cumulatif de  $e^p$ ,  $\mathbf{E}^p$  et  $e^p$  restent des variables indépendantes. Pour des approfondissements concernant l'écrouissage, on se référera à Hill [57] pour la théorie et à Simo–Hugues [66] pour la mise en œuvre numérique.

<sup>5</sup>Il existe un autre type d'écrouissage dit cinématique observé dans des matériaux soumis à des charges cycliques.

**Les lois constitutives** – Les potentiels d'énergie libre et de dissipation sont choisis de la forme suivante :

$$\Psi = \Psi(\mathbf{E}, \mathbf{E}^p, e^p) \quad , \quad \Phi = \Phi(\dot{\mathbf{E}}^p, \dot{e}^p) \quad (2.67)$$

Par définition et par les relations (2.34) , on a :

$$S^{ec} = -\rho \frac{\partial \Psi}{\partial e^p} \in \partial_{\dot{e}^p} \Phi \quad (2.68)$$

**Cas unidimensionnel élastique linéaire - plastique avec écrouissage** – L'énergie libre prend la forme suivante :

$$\Psi = \Psi(E, E^p, e^p) = \frac{1}{2\rho} \epsilon (E - E^p)^2 + \frac{1}{\rho} \int_0^{e^p} g(s) ds \quad (2.69)$$

où  $g$  est une fonction d'écrouissage.

On postule le potentiel de dissipation suivant :

$$\Phi = \Phi(\dot{E}^p, \dot{e}^p; e^p) = (\sigma + g(e^p)) |\dot{E}^p| - g(e^p) \dot{e}^p \quad (2.70)$$

Sans rentrer dans les détails de l'analyse [137], la loi d'évolution de ce modèle peut aussi s'écrire sous la forme de Kuhn-Tucker (Figure 2.7) :

$$\dot{e}^p = |\dot{E}^p| \geq 0 \quad , \quad f(S, e^p) = |S| - \sigma - g(e^p) \leq 0 \quad , \quad |\dot{E}^p| f(S, e^p) = 0$$

$$\dot{E}^p = |\dot{E}^p| \frac{\partial f}{\partial S} \quad (2.71)$$

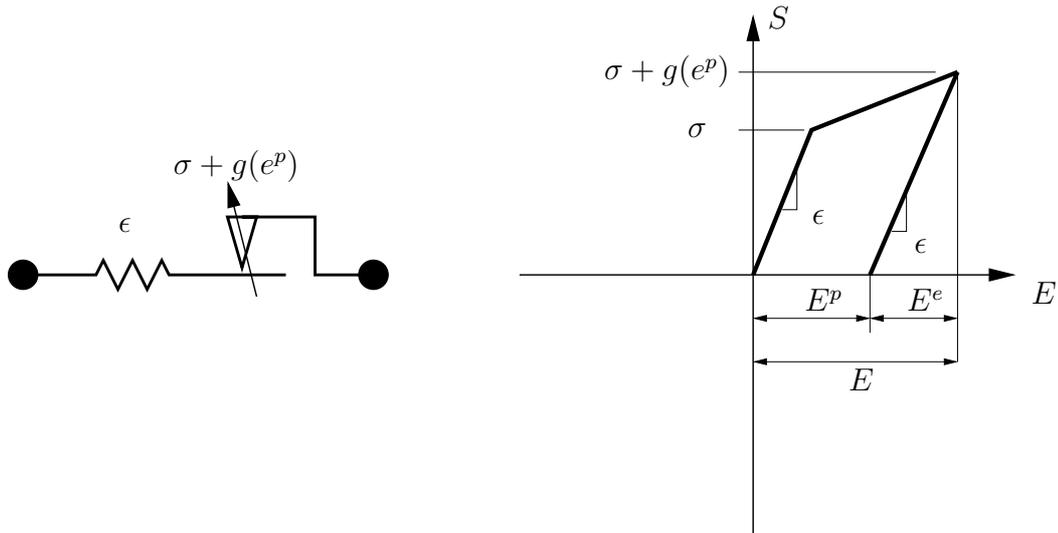


FIG. 2.7 – Modèle rhéologique et loi constitutive d'un matériau élasto-plastique avec écrouissage.

**Cas tridimensionnel élastique isotrope-plastique avec écrouissage isotrope** – On décompose le tenseur tangent élastique  $\mathbb{S}$  en la somme d'un traceur et d'un déviateur de la manière suivante :

$$\mathbb{S} = \lambda(\mathbf{I} \otimes \mathbf{I}) + 2\mu(\mathbf{I} \underline{\otimes} \mathbf{I}) = \bar{\mathbb{S}} + \mathbb{S}' \quad (2.72)$$

avec :

$$\bar{\mathbb{S}} = \kappa(\mathbf{I} \otimes \mathbf{I}) \quad \text{et} \quad \mathbb{S}' = 2\mu(\mathbf{I} \underline{\otimes} \mathbf{I} - \frac{1}{3}\mathbf{I} \otimes \mathbf{I})$$

où  $\kappa = \frac{3\lambda + 2\mu}{3}$  est le module de compressibilité.

En postulant des potentiels d'énergie libre et de dissipation de la forme :

$$\Psi = \Psi(\mathbf{E}, \mathbf{E}^p, e^p) = \frac{1}{2\rho}(\mathbf{E} - \mathbf{E}^p) : \mathbb{S}(\mathbf{E} - \mathbf{E}^p) + \int_0^{e^p} g(s) ds \quad (2.73)$$

$$\begin{aligned} \Phi = \Phi(\dot{\mathbf{E}}^p, \dot{e}^p; e^p) = & \left( \sqrt{\frac{2}{3}}(\sigma_y + g(e^p)) \right) \sqrt{\dot{\mathbf{E}}^p : \mathbb{S}' \dot{\mathbf{E}}^p} \\ & - g(e^p)\dot{e}^p + \mathbf{I}_{\mathbf{R}^+}(\dot{e}^p) \end{aligned} \quad (2.74)$$

On peut démontrer qu'avec ces potentiels, le critère de plasticité avec écrouissage isotrope devient celui de *Huber-von Mises*, avec :

$$f(\mathbf{S}, e^p) = \|\mathbf{S}'\| - \left( \sqrt{\frac{2}{3}}(\sigma_y + h e^p) \right) \quad (2.75)$$

où :  $\mathbf{S}' = \mathbf{S} - \frac{1}{3}\text{tr}(\mathbf{S})\mathbf{I}$  – le déviateur des contraintes,

$\sigma_y$  – la *limite élastique des contraintes* dans un essai de traction simple,

$h$  – le module d'écrouissage *isotrope* (écrouissage linéaire  $g(e^p) = h e^p$ ),

$e^p = \int_0^t \sqrt{\frac{2}{3}} \|\dot{\mathbf{E}}^p\| d\tau$  – l'accumulation de la déformation plastique.

La loi d'écoulement peut se mettre sous la forme :

$$\begin{aligned} \dot{\lambda} \geq 0 \quad , \quad f(\mathbf{S}, e^p) \leq 0 \quad , \quad \dot{\lambda} f(\mathbf{S}, e^p) = 0 \\ \dot{\mathbf{E}}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{S}} \end{aligned} \quad (2.76)$$

$$\text{avec :} \quad \begin{cases} \dot{\lambda} \equiv \|\dot{\mathbf{E}}^p\| \\ \dot{\mathbf{E}}^p = \|\dot{\mathbf{E}}^p\| \frac{\mathbf{S}'}{\|\mathbf{S}'\|} \end{cases}$$

Similairement au cas unidimensionnel, on montre que la contrainte  $\mathbf{S}$  est la projection d'une contrainte d'essai élastique sur le critère de Huber–von Mises.

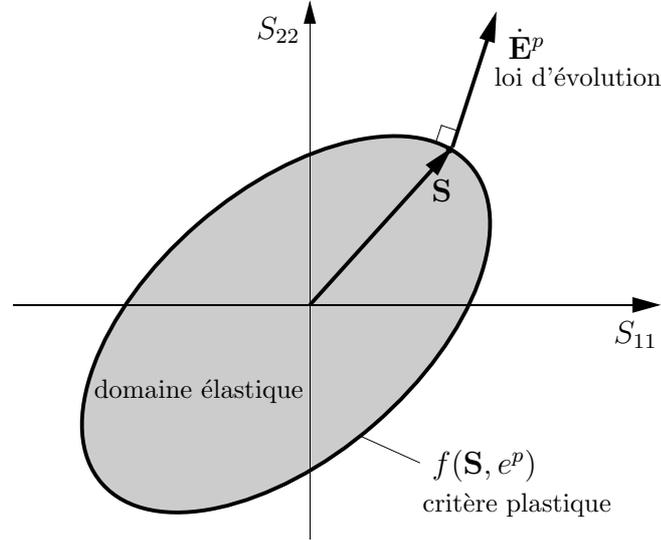


FIG. 2.8 – Critère plastique de Huber–von Mises et loi d'évolution normale. (Adapté de [22])

## 2.2.5 Equilibre d'un solide élastique par minimisation de son énergie

La formulation faible des équations d'équilibre ou principe des travaux virtuels constitue la base pour la résolution numérique des problèmes aux valeurs aux limites en mécanique des solides. Cependant, lorsque le solide est hyper-élastique et que le problème est statique, et si les forces externes sont conservatives, il est pratique de reformuler ce problème en un problème de minimisation d'une fonctionnelle énergie (Duvaut–Lions [33], Ciarlet [18]). Un matériau est dit hyperélastique si il possède une densité d'énergie potentielle de déformation  $\Psi(\mathbf{E})$ , ou encore  $\Psi(\mathbf{F})$ . Le raisonnement suivant est généralisable sous forme incrémentale aux matériaux inélastiques, mais toutefois par souci de simplicité, nous supposons que le corps  $\Omega$  a un comportement linéaire élastique isotrope. Nous lui associons le potentiel densité d'énergie libre suivant :

$$\Psi = \Psi(\mathbf{E}) = \frac{1}{2\rho} [\lambda(\text{tr}\mathbf{E})^2 + 2\mu \text{tr}(\mathbf{E}^2)] \quad (2.77)$$

$$= \Psi(\mathbf{F}) = \frac{1}{8\rho} [\lambda[\text{tr}(\mathbf{F}^T\mathbf{F}) - 3]^2 + 2\mu \text{tr}(\mathbf{F}^T\mathbf{F} - \mathbf{I})^2] \quad (2.78)$$

Comme  $\mathbf{F} = \nabla \mathbf{y}$ , l'énergie de déformation ou énergie interne élastique du corps  $\Omega$  devient la fonctionnelle :

$$U(\mathbf{y}) = \int_{\Omega} \Psi(\nabla \mathbf{y}(\mathbf{x})) d\Omega \quad (2.79)$$

Si on suppose que les densités de forces de volume et de contact  $\boldsymbol{\kappa}$ ,  $\bar{\mathbf{p}}$  sont conservatives, les termes correspondants dans le principe des travaux virtuels (2.24) peuvent être exprimés comme des dérivées directionnelles de Gâteaux des potentiels des forces :

$$\begin{aligned} D\mathcal{K}(\mathbf{y}; \mathbf{w}) &= \nabla \mathcal{K}(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{w} = \int_{\Omega} \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{w} \, d\Omega \\ D\bar{P}(\mathbf{y}; \mathbf{w}) &= \nabla \bar{P}(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{w} = \int_{\Gamma_{\sigma}} \bar{\mathbf{p}}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{w} \, d\Gamma \end{aligned} \quad \mathbf{w} \in V \quad (2.80)$$

avec :  $\mathcal{K}(\mathbf{y})$ ,  $\bar{P}(\mathbf{y})$  – les potentiels des forces de volume et de surface.

Si de plus nous considérons que les forces se comportent comme des *charges mortes* (indépendantes de la transformation  $\mathbf{y}$ ), alors les potentiels  $\mathcal{K}(\mathbf{y})$ ,  $\bar{P}(\mathbf{y})$  sont de simples formes linéaires :

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(\mathbf{y}) &= \int_{\Omega} \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y}(\mathbf{x}) \, d\Omega \\ \bar{P}(\mathbf{y}) &= \int_{\Gamma_{\sigma}} \bar{\mathbf{p}}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y}(\mathbf{x}) \, d\Gamma \end{aligned} \quad (2.81)$$

L'énergie potentielle  $\mathcal{U}(\mathbf{y})$  du corps  $\Omega$  est égale à son énergie interne élastique  $U(\mathbf{y})$  (2.79) moins l'énergie externe  $\mathcal{K}(\mathbf{y}) - \bar{P}(\mathbf{y})$  (2.81) développée par les forces de volume et de surface :

$$\begin{aligned} \mathcal{U}(\mathbf{y}) &= U(\mathbf{y}) - \mathcal{K}(\mathbf{y}) - \bar{P}(\mathbf{y}) = \\ &= \int_{\Omega} \Psi(\nabla \mathbf{y}(\mathbf{x})) \, d\Omega - \int_{\Omega} \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y}(\mathbf{x}) \, d\Omega - \int_{\Gamma_{\sigma}} \bar{\mathbf{p}}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y}(\mathbf{x}) \, d\Gamma \end{aligned} \quad (2.82)$$

Le problème de minimisation de l'énergie potentielle du corps hyperélastique  $\Omega$  dans sa forme de référence soumis à des forces de volume et de surface conservatives (supposées des charges mortes) se formule :

$$\text{Trouver : } \mathbf{y} \in V_y = \{ \mathbf{z} : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}^3 \mid \mathbf{z}(\mathbf{x}) = \bar{\mathbf{y}}(\mathbf{x}) \quad , \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_y \}$$

$$\text{tel que } \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{U}(\mathbf{y}) = \inf_{\mathbf{z} \in V_y} \mathcal{U}(\mathbf{z}) \quad , \\ \mathcal{U}(\mathbf{z}) = \int_{\Omega} \Psi(\nabla \mathbf{z}(\mathbf{x})) \, d\Omega \\ \quad - \int_{\Omega} \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{z}(\mathbf{x}) \, d\Omega - \int_{\Gamma_{\sigma}} \bar{\mathbf{p}}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{z}(\mathbf{x}) \, d\Gamma \end{array} \right. \quad (2.83)$$

Une condition nécessaire pour que la fonctionnelle  $\mathcal{U}(\mathbf{z})$  atteigne un minimum local en  $\mathbf{y} \in V_y$  s'écrit :

$$D\mathcal{U}(\mathbf{y}; \mathbf{w}) = \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \mathbf{z}}(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{w} = 0 \quad \forall \mathbf{w} \in V \quad (2.84)$$

qui est équivalent au principe des travaux virtuels :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \int_{\Omega} \nabla \mathbf{w}(\mathbf{x}) : \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{F}}(\nabla \mathbf{y}(\mathbf{x})) d\Omega \\ - \int_{\Omega} \mathbf{w}(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{x}) d\Omega - \int_{\Gamma_{\sigma}} \mathbf{w}(\mathbf{x}) \cdot \bar{\mathbf{p}}(\mathbf{x}) d\Gamma = 0 \end{cases} \quad (2.85)$$

avec  $\mathbf{w} \in V$  un déplacement virtuel quelconque.

Nous retrouvons donc le problème aux limites :

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \left[ \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{F}}(\nabla \mathbf{y}(\mathbf{x})) \right] + \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{x}) &= 0 \quad , \quad \mathbf{x} \in \Omega \\ \mathbf{y}(\mathbf{x}) &= \bar{\mathbf{y}}(\mathbf{x}) \quad , \quad \mathbf{x} \in \Gamma_y \\ \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{F}}(\nabla \mathbf{y}(\mathbf{x})) \cdot \mathbf{m}(\mathbf{y}(\mathbf{x})) &= \bar{\mathbf{p}}(\mathbf{x}) \quad , \quad \mathbf{x} \in \Gamma_{\sigma} \end{aligned} \quad (2.86)$$

La solution du problème aux limites est donc la transformation  $\mathbf{y} \in V_y$  (éventuellement multiple) qui minimise la fonctionnelle  $\mathcal{U}(\mathbf{y})$  d'énergie potentielle.

## 2.3 Thermomécanique des contacts

Plus récemment, des tentatives en grandes transformations de considérer la mécanique des contacts de manière continue et de l'intégrer dans l'optique de la mécanique des solides furent entreprises par Ciarlet et Necas (1985), Ciarlet [18](1988) puis Curnier et al. [27] (1992). Pour des raisons de complexité, ces travaux se limitèrent au contact unilatéral. Des formulations incluant le frottement furent ensuite développées par Laursen–Simo [79], Klarbring [77] et Curnier–He–Klarbring [26].

Le résumé de l'approche continue en mécanique du contact qui suit reprend celle des travaux de Curnier–He–Klarbring [26], Pietrzak [100] et Ramaniraka [106].

### 2.3.1 Thermo-cinématique

#### Surface de contact

Considérons un solide déformable occupant le domaine  $\Omega$  dans sa configuration de référence. Sa frontière  $\partial\Omega$  est divisée en trois régions disjointes :

$$\partial\Omega = \partial\Omega_y \cup \partial\Omega_{\sigma} \cup \Gamma \quad (2.87)$$

avec :

- $\partial\Omega_y = \Gamma_y$  la partie de  $\partial\Omega$  où un déplacement est imposé
- $\partial\Omega_\sigma = \Gamma_\sigma$  la partie de  $\partial\Omega$  où une force est imposée
- la surface de contact potentielle entre  $\Omega$  et un autre corps :  $\Gamma$

La surface déformée  $\Gamma_t$  de  $\Gamma$  est définie par :

$$\Gamma_t = \mathbf{y}(\Gamma, t) = \{\mathbf{y} \in \mathbf{R}^3, \mathbf{y} = \mathbf{y}(\mathbf{x}, t), \mathbf{x} \in \Gamma\} \quad (2.88)$$

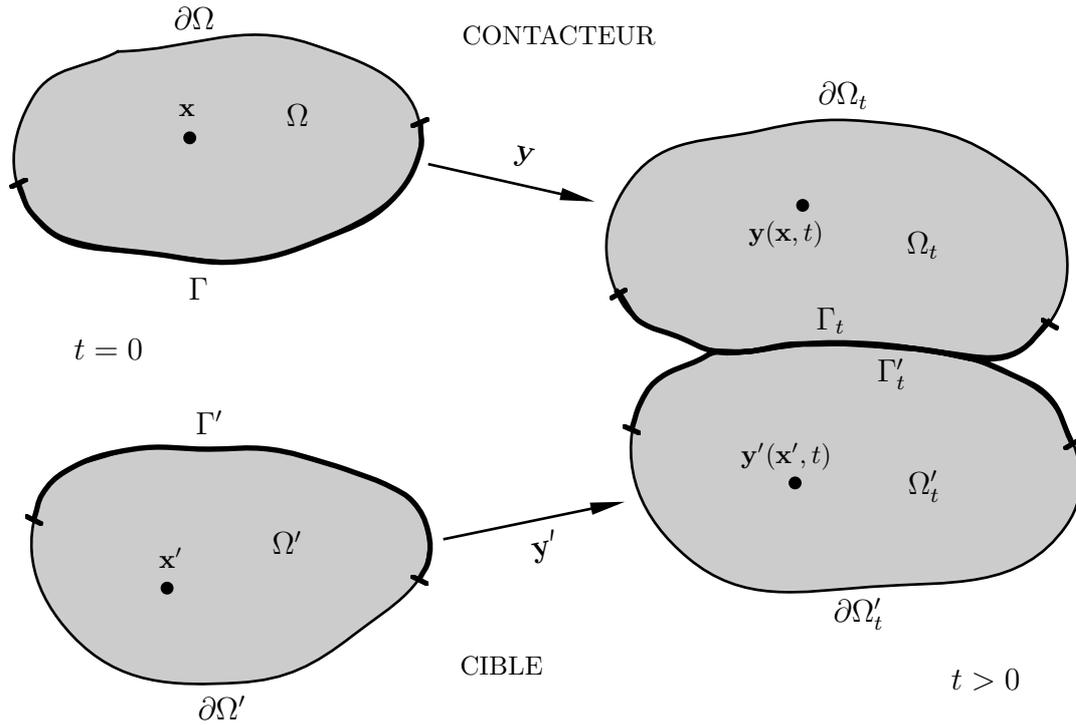


FIG. 2.9 – Contact entre deux solides déformables. (Adapté de [100])

Un élément  $dA$  de la surface de référence  $\partial\Omega$  et sa déformée  $dA_t$  sur  $\partial\Omega_t$  sont reliés par :

$$dA_t[\mathbf{y}(\mathbf{x}, t)] = j(\mathbf{x}, t)dA(\mathbf{x}) \quad (2.89)$$

avec  $0 < j(\mathbf{x}, t) = \|\mathbf{F}^*(\mathbf{x}, t)\mathbf{m}(\mathbf{x})\| < \infty$  et  $\mathbf{F}^* = J\mathbf{F}^{-T}$ ,  $\mathbf{F}$  étant le gradient de la transformation du solide et  $J = \det \mathbf{F}$ .

### Géométrie des contacts

Considérons deux corps solides déformables  $\Omega$  et  $\Omega'$  susceptibles d'entrer en contact (Figure 2.9). On distingue :

- le corps  $\Omega$  limité par une surface frontière  $\partial\Omega = \partial\Omega_y \cup \partial\Omega_\sigma \cup \Gamma$
- le corps  $\Omega'$  limité par une surface frontière  $\partial\Omega' = \partial\Omega'_y \cup \partial\Omega'_\sigma \cup \Gamma'$

Le corps  $\Omega'$ , choisi comme le corps de référence est appelé la *cible* et  $\Omega$  est appelé le *contacteur*. Les deux surfaces de contact potentielles  $\Gamma$  et  $\Gamma'$  seront appelées surface de *contact* et surface *cible*, respectivement. Ces deux surfaces potentielles  $\Gamma$  et  $\Gamma'$  définissent à l'instant initial la géométrie du contact. On établit une bijection entre  $\Gamma$  et  $\Gamma^\perp \subset \Gamma'$  basée sur une projection de  $\Gamma_t$  sur  $\Gamma'_t$  au temps  $t$ . La question de l'unicité de la projection a été discutée dans [26] et [53].

Le point proximal est défini de la manière suivante (Figure 2.10) :

$$\mathbf{x}^\perp = \mathbf{x}^\perp(\mathbf{x}, t) = \operatorname{argmin}_{\mathbf{x}' \in \Gamma'} \left[ \frac{1}{2} \|\mathbf{y}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{y}'(\mathbf{x}', t)\|^2 \right] \quad (2.90)$$

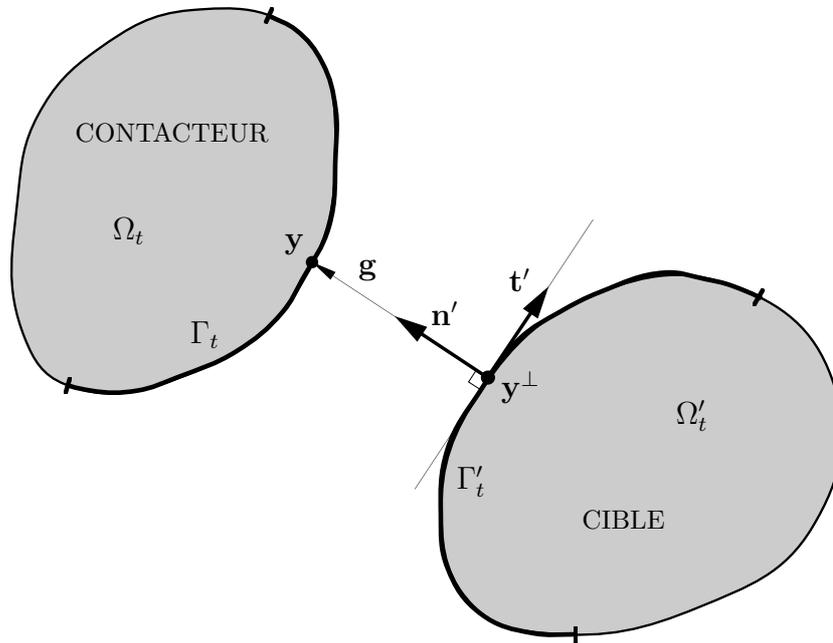


FIG. 2.10 – Projection orthogonale. (Adapté de [100])

L'écart de contact (gap) est défini par :

$$\mathbf{g} = \mathbf{g}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{y}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{y}'(\mathbf{x}^\perp, t) \quad (2.91)$$

et on note :

$$\mathbf{y}^\perp = \mathbf{y}'(\mathbf{x}^\perp, t) \quad (2.92)$$

La distance normale de contact est définie par :

$$g_n = g_n(\mathbf{x}, t) = [\mathbf{y}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{y}'(\mathbf{x}^\perp, t)] \cdot \mathbf{n}'(\mathbf{x}^\perp, t) \quad (2.93)$$

Selon la valeur de  $g_n$ , on distingue (Figure 2.11) :

- si  $g_n > 0$ , les deux corps sont séparés
- si  $g_n = 0$ , les deux corps sont en contact
- si  $g_n < 0$ , les deux corps se pénètrent l'un l'autre

En petites perturbations,  $\mathbf{x}^\perp = \mathbf{x}'$  est a priori connu, et donc indépendant de  $\mathbf{x}$ . Par suite l'écart se simplifie alors :

$$\mathbf{g} = \mathbf{g}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{y}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{y}'(\mathbf{x}', t) \quad (2.94)$$

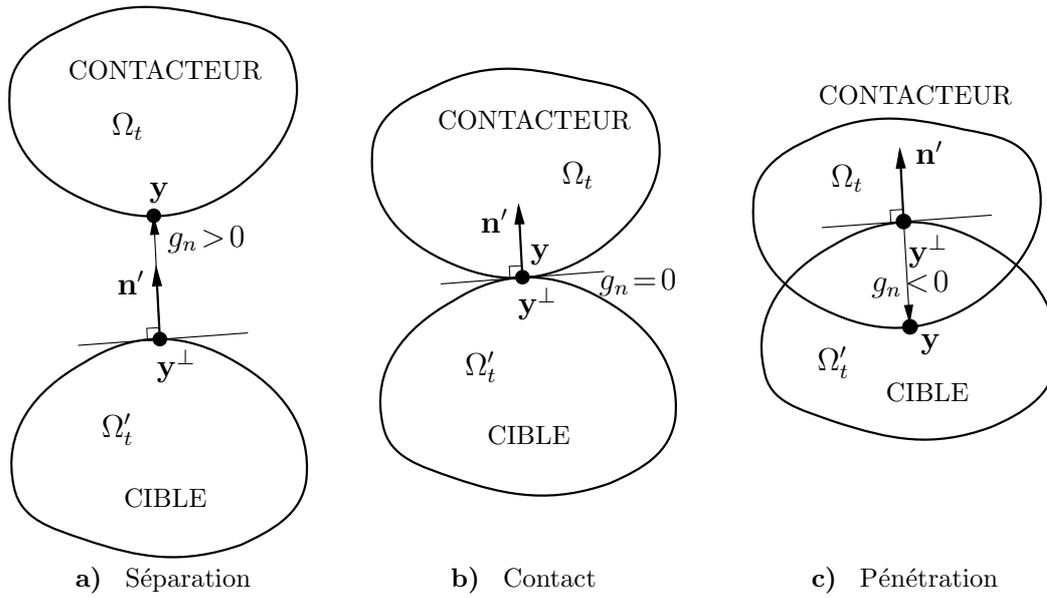


FIG. 2.11 – Etat d'écart, de contact et de pénétration du point  $\mathbf{y}(\mathbf{x}, t)$ . (Adapté de [100])

### Cinématique des contacts

Le taux de l'écart de contact est défini par :

$$\dot{\mathbf{g}} = \dot{\mathbf{g}}(\mathbf{x}, t) = \dot{\mathbf{y}}(\mathbf{x}, t) - \dot{\mathbf{y}}'(\mathbf{x}^\perp, t) \quad (2.95)$$

où :

$$\dot{\mathbf{y}}'(\mathbf{x}^\perp, t) = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{y}'(\mathbf{x}^\perp, t) + \mathbf{F}'(\mathbf{x}^\perp, t) \dot{\mathbf{x}}^\perp(\mathbf{x}, t) \quad , \quad \text{avec} \quad \mathbf{F}'(\mathbf{x}, t) = \nabla_{\mathbf{x}'} \mathbf{y}'(\mathbf{x}, t)$$

Pour des raisons d'objectivité, on introduit la vitesse de contact :

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{g}} &= \mathbf{y}(\mathbf{x}, t) - \partial_t \mathbf{y}'(\mathbf{x}^\perp, t) - g_n(\mathbf{x}, t) \dot{\mathbf{n}}'(\mathbf{x}^\perp, t) \\ &= \dot{g}_n(\mathbf{x}, t) \mathbf{n}'(\mathbf{x}^\perp, t) + \mathbf{F}'(\mathbf{x}^\perp, t) \dot{\mathbf{x}}^\perp(\mathbf{x}, t) \end{aligned} \quad (2.96)$$

En petites perturbations  $\dot{\mathbf{g}} = \dot{\mathbf{g}}$ .

### Ecart de température

On définit un écart de température :

$$\delta = \delta(\mathbf{x}, t) = T(\mathbf{x}, t) - T'(\mathbf{x}^\perp, t) \quad (2.97)$$

### 2.3.2 Thermodynamique

Considérons deux corps  $\omega \subseteq \Omega$  et  $\omega' \subseteq \Omega'$  susceptibles d'entrer en contact.

#### Variation de la quantité de mouvement linéaire

“La variation de la quantité de mouvement linéaire  $\mathbf{l}$  de  $\omega \cup \omega'$  est égale à la somme des forces extérieures  $\mathbf{f}_R$  à  $\omega$  et  $\omega'$ .”

$$\frac{d}{dt} \mathbf{l}(\omega \cup \omega', t) = \mathbf{f}_R(\omega \cup \omega', t) \quad , \quad \forall t \in [0, T] \quad , \quad \forall \omega \subseteq \Omega \quad , \quad \forall \omega' \subseteq \Omega' \quad (2.98)$$

avec :

$$\mathbf{l}(\omega \cup \omega', t) = \int_{\omega \cup \omega'} \rho(\mathbf{x}) \dot{\mathbf{y}}(\mathbf{x}, t) dV = \int_{\omega} \rho(\mathbf{x}) \dot{\mathbf{y}}(\mathbf{x}, t) dV + \int_{\omega'} \rho'(\mathbf{x}') \dot{\mathbf{y}}'(\mathbf{x}', t) dV'$$

et :

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_R &= \int_{\omega} \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{x}, t) dV + \int_{\partial\omega} \mathbf{p}[\mathbf{x}, t, \mathbf{m}(\mathbf{x})] dA \\ &\quad + \int_{\omega'} \boldsymbol{\kappa}'(\mathbf{x}', t) dV' + \int_{\partial\omega'} \mathbf{p}'[\mathbf{x}', t, \mathbf{m}'(\mathbf{x}')] dA' \end{aligned}$$

La surface frontière  $\partial\omega$  du solide  $\omega$  est décomposée en deux parties  $\partial\omega \setminus \gamma$  et  $\gamma$ , où  $\gamma$  est la surface de contact du corps  $\omega$ , avec  $\partial\omega \cap \Gamma \neq \emptyset$ . La surface  $\partial\omega'$  est décomposée d'une manière similaire avec  $\partial\omega' \cap \Gamma' \neq \emptyset$ .

$\mathbf{p}[\mathbf{x}, t, \mathbf{m}(\mathbf{x})]$  désigne le vecteur contrainte nominal sur  $\gamma$ , et  $\mathbf{m}(\mathbf{x})$  indique la normale originelle, avec les mêmes définitions pour  $\mathbf{p}'[\mathbf{x}', t, \mathbf{m}'(\mathbf{x}')] et  $\mathbf{m}'(\mathbf{x}')$  sur  $\gamma'$ . Ensuite, du fait que le principe fondamental de la dynamique s'applique également pour  $\omega \cup \omega'$ , il en résulte la formulation globale.$

FORMULATION GLOBALE :

$$\int_{\gamma} \mathbf{p}[\mathbf{x}, t, \mathbf{m}(\mathbf{x})] dA + \int_{\gamma'} \mathbf{p}'[\mathbf{x}', t, \mathbf{m}'(\mathbf{x}')] dA' = \mathbf{0} \quad (2.99)$$

Le contact mutuel entre  $\omega$  et  $\omega'$  est entièrement défini par  $\gamma$  sur  $\gamma^\perp$ , où  $\gamma = \omega \cap \Gamma$  et  $\gamma^\perp = \mathbf{x}^\perp(\gamma, t) \subset \gamma' = \omega' \cap \Gamma'$ . Compte tenu de la bijection  $\mathbf{x}^\perp$ , l'intégrale sur toute la surface cible peut être projetée sur la surface de contact à l'aide du changement de variable  $\mathbf{x}^\perp = \mathbf{x}^\perp(\mathbf{x}, t)$  et  $dA^\perp = J^\perp(\mathbf{x}, t) dA$  où :

$$J^\perp(\mathbf{x}, t) = \frac{J(\mathbf{x}, t) j^\perp[\mathbf{y}(\mathbf{x}, t), t]}{J'(\mathbf{x}^\perp, t)} \quad (2.100)$$

avec :

$$\begin{aligned}
 J(\mathbf{x}, t) &= \frac{dA_t[\mathbf{y}(\mathbf{x}, t), t]}{dA(\mathbf{x})} \\
 j^\perp(\mathbf{y}, t) &= \frac{dA_t^\perp(\mathbf{y}^\perp, t)}{dA_t(\mathbf{y}, t)} \\
 J'(\mathbf{x}^\perp, t) &= \frac{dA'_t[\mathbf{y}'(\mathbf{x}^\perp, t)]}{dA'(\mathbf{x}^\perp)}
 \end{aligned} \tag{2.101}$$

En petites perturbations  $J^\perp \approx 1$ .

On en déduit la formulation locale de la variation de la quantité de mouvement linéaire.

FORMULATION LOCALE :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{p}[\mathbf{x}, t, \mathbf{m}(\mathbf{x})] + J^\perp(\mathbf{x}, t) \mathbf{p}'[\mathbf{x}^\perp, t, \mathbf{m}'(\mathbf{x}^\perp)] &= \mathbf{0} \quad , \quad \forall t \in [0, T] \quad , \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma \\
 \mathbf{p}'[\mathbf{x}', t, \mathbf{m}'(\mathbf{x}')] &= \mathbf{0} \quad , \quad \forall t \in [0, T] \quad , \quad \forall \mathbf{x}' \in \Gamma' \setminus \Gamma^\perp
 \end{aligned} \tag{2.102}$$

Le principe de l'action et de la réaction local nominal fait intervenir le rapport des aires originelles de contact.

### Variation de la quantité de mouvement angulaire

“Le taux de la quantité de mouvement angulaire  $\widehat{\mathbf{I}}(\omega \cup \omega', t)$  de toute partie  $\omega \subseteq \Omega$  et  $\omega' \subseteq \Omega'$ , à un instant donné  $t$ , est égal à la somme des moments des forces  $\widehat{\mathbf{f}}_R$  extérieures à  $\omega \cup \omega'$  par rapport au même point.”

$$\frac{d}{dt} \widehat{\mathbf{I}}(\omega \cup \omega', t) = \widehat{\mathbf{f}}_R \quad , \quad \forall \omega \subseteq \Omega, \forall \omega' \subseteq \Omega', \forall \gamma \subset \Gamma, \forall t \in [0, T] \tag{2.103}$$

avec :

$$\frac{d}{dt} \widehat{\mathbf{I}}(\omega \cup \omega', t) = \int_\omega \mathbf{y}(\mathbf{x}, t) \wedge \rho(\mathbf{x}) \ddot{\mathbf{y}}(\mathbf{x}, t) dV + \int_{\omega'} \mathbf{y}'(\mathbf{x}', t) \wedge \rho(\mathbf{x}') \ddot{\mathbf{y}}'(\mathbf{x}', t) dV'$$

et :

$$\begin{aligned}
 \widehat{\mathbf{f}}_R &= \int_\omega \mathbf{y}(\mathbf{x}, t) \wedge \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{x}, t) dV + \int_{\partial\omega} \mathbf{y}(\mathbf{x}, t) \wedge \mathbf{p}[\mathbf{x}, t, \mathbf{m}(\mathbf{x})] dA \\
 &\quad + \int_{\omega'} \mathbf{y}'(\mathbf{x}', t) \wedge \boldsymbol{\kappa}'(\mathbf{x}', t) dV' + \int_{\partial\omega'} \mathbf{y}'(\mathbf{x}', t) \wedge \mathbf{p}'[\mathbf{x}', t, \mathbf{m}'(\mathbf{x}')] dA'
 \end{aligned}$$

En appliquant la même méthode que celle de la conservation de quantité de mouvement linéaire, il résulte la formulation globale.

FORMULATION GLOBALE (au niveau de l'interface de contact  $\gamma$ ) :

$$\int_{\gamma} \mathbf{y}(\mathbf{x}, t) \wedge \mathbf{p}[\mathbf{x}, t, \mathbf{m}(\mathbf{x})] dA + \int_{\gamma'} \mathbf{y}'(\mathbf{x}', t) \wedge \mathbf{p}'[\mathbf{x}', t, \mathbf{m}'(\mathbf{x}')] dA' = \mathbf{0} \quad (2.104)$$

FORMULATION LOCALE :

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(\mathbf{x}, t) \wedge \mathbf{p}[\mathbf{x}, t, \mathbf{m}(\mathbf{x})] + \mathbf{y}'(\mathbf{x}^{\perp}, t) \wedge J^{\perp}(\mathbf{x}, t) \mathbf{p}'[\mathbf{x}^{\perp}, t, \mathbf{m}'(\mathbf{x}^{\perp})] &= \mathbf{0} \\ \iff \mathbf{g}(\mathbf{x}, t) \wedge \mathbf{p}[\mathbf{x}, t, \mathbf{m}(\mathbf{x})] &= \mathbf{0} \quad , \quad \forall t \in [0, T] \quad , \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma \end{aligned} \quad (2.105)$$

Le principe d'équilibre des moments nominal local exige donc que le vecteur contrainte de contact soit colinéaire au vecteur écart dans l'éventualité d'une pénétration-pression ou d'un écart-tension (voir [26]). Cette dernière éventualité est précisément la situation du modèle d'adhésion qui sera adopté par la suite, l'adhésion ne satisfaisant plus a priori ce principe. En effet, en situation d'écart  $g_n > 0$ , on a  $\mathbf{p} = \mathbf{0}$  en contact sans adhésion mais  $\mathbf{p} \neq \mathbf{0}$  en contact adhésif. Il va s'avérer que le modèle d'adhésion proposé est compatible avec ce principe fondamental (noter qu'en contact et en petites perturbations, ce principe est automatiquement satisfait).

### 2.3.3 Thermo-énergétique de deux solides en contact

Le résumé de la thermomécanique suivant est inspiré de Frémond [40], Klarbring [76], Curnier–Ramaniraka [28], Raous et al. [107], Johansson–Klarbring [68], Strömberg [118], Bretelle [12].

#### Equilibre énergétique de deux solides en contact

Nous appliquons le premier principe à deux solides en contact :

$$\frac{d}{dt}(K(\omega \cup \omega', t) + E(\omega \cup \omega', t)) = P_e(\omega \cup \omega', t) + Q(\omega \cup \omega', t) \quad , \quad (2.106)$$

$$\forall \omega \subseteq \Omega, \omega' \subseteq \Omega'$$

Nous postulons la non additivité de l'énergie interne :

$$E(\omega \cup \omega', t) = E(\omega, t) + E(\omega', t) + E(\omega \cap \omega', t) \quad (2.107)$$

Plus précisément, en plus de la densité volumique d'énergie  $e$ , on postule aussi l'existence d'une densité d'énergie interne de surface  $e_c$  correspondant à l'énergie interne aérique au niveau de l'interface [28]. L'introduction de cette densité d'énergie supplémentaire permet de prolonger l'hypothèse de l'état local à la surface  $\Gamma$ , en lui attribuant un comportement thermodynamique qui lui est spécifique.

L'énergie cinétique s'écrit :

$$K(\omega \cup \omega', t) = \frac{1}{2} \int_{\omega} \rho(\mathbf{x}, t) \dot{\mathbf{y}}(\mathbf{x}, t) \cdot \dot{\mathbf{y}}(\mathbf{x}, t) dV + \frac{1}{2} \int_{\omega'} \rho'(\mathbf{x}', t) \dot{\mathbf{y}}'(\mathbf{x}', t) \cdot \dot{\mathbf{y}}'(\mathbf{x}', t) dV'$$

La puissance des efforts extérieurs :

$$\begin{aligned} P_e(\omega \cup \omega', t) &= \int_{\omega} \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{x}, t) \cdot \dot{\mathbf{y}}(\mathbf{x}, t) dV + \int_{\partial\omega \setminus \gamma} \mathbf{p}[\mathbf{x}, t, \mathbf{m}(\mathbf{x})] \cdot \dot{\mathbf{y}}(\mathbf{x}, t) dA \\ &\quad + \int_{\gamma} \mathbf{p}[\mathbf{x}, t, \mathbf{m}(\mathbf{x})] \cdot \dot{\mathbf{y}}(\mathbf{x}, t) dA \\ &\quad + \int_{\omega'} \boldsymbol{\kappa}'(\mathbf{x}', t) \cdot \dot{\mathbf{y}}'(\mathbf{x}', t) dV' + \int_{\partial\omega' \setminus \gamma'} \mathbf{p}'[\mathbf{x}', t, \mathbf{m}'(\mathbf{x}')] \cdot \dot{\mathbf{y}}'(\mathbf{x}', t) dA' \\ &\quad + \int_{\gamma'} \mathbf{p}'[\mathbf{x}', t, \mathbf{m}'(\mathbf{x}')] \cdot \dot{\mathbf{y}}'(\mathbf{x}', t) dA' \end{aligned}$$

Le flux de chaleur et la source volumique de chaleur s'écrivent :

$$\begin{aligned} Q(\omega \cup \omega', t) &= \int_{\omega} r(\mathbf{x}, t) dV - \int_{\partial\omega \setminus \gamma} q[\mathbf{x}, t, \mathbf{m}(\mathbf{x})] dA - \int_{\gamma} q[\mathbf{x}, t, \mathbf{m}(\mathbf{x})] dA \\ &\quad + \int_{\omega'} r'(\mathbf{x}', t) dV' - \int_{\partial\omega' \setminus \gamma'} q'[\mathbf{x}', t, \mathbf{m}'(\mathbf{x}')] dA' - \int_{\gamma'} q'[\mathbf{x}', t, \mathbf{m}'(\mathbf{x}')] dA' \end{aligned}$$

L'équation de la conservation de l'énergie étant respectée sur  $\omega \cup \omega'$ , il en découle la forme globale.

FORMULATION GLOBALE :

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \dot{e}_c(\mathbf{x}, t) dA &= \int_{\gamma} \mathbf{p}[\mathbf{x}, t, \mathbf{m}(\mathbf{x})] \cdot \dot{\mathbf{y}}(\mathbf{x}, t) dA + \int_{\gamma'} \mathbf{p}'[\mathbf{x}', t, \mathbf{m}'(\mathbf{x}')] \cdot \dot{\mathbf{y}}'(\mathbf{x}', t) dA' \\ &\quad - \int_{\gamma} q[\mathbf{x}, t, \mathbf{m}(\mathbf{x})] dA - \int_{\gamma'} q'[\mathbf{x}', t, \mathbf{m}'(\mathbf{x}')] dA' \end{aligned} \quad (2.108)$$

FORMULATION LOCALE :

On peut montrer que :

$$\begin{aligned} \dot{e}_c(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{p}[\mathbf{x}, t, \mathbf{m}(\mathbf{x})] \cdot \dot{\mathbf{g}}(\mathbf{x}, t) - q[\mathbf{x}, t, \mathbf{m}(\mathbf{x})] \\ &\quad - J^\perp(\mathbf{x}, t) q'[\mathbf{x}^\perp, t, \mathbf{m}'(\mathbf{x}^\perp)] \quad , \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma \quad , \quad \forall t \in [0, T] \\ q'[\mathbf{x}', t, \mathbf{m}'(\mathbf{x}')] &= 0 \quad , \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma \setminus \Gamma^\perp \quad , \quad \forall t \in [0, T] \end{aligned} \quad (2.109)$$

### Inégalité de l'entropie à l'interface

Nous appliquons le second principe de la thermodynamique :

$$\frac{d}{dt}S(\omega \cup \omega', t) \geq N(\omega \cup \omega', t) , \quad \forall \omega \subseteq \Omega, \forall \omega' \subseteq \Omega' \quad (2.110)$$

L'entropie de toute la matière contenue dans  $\omega \cup \omega'$  est donnée par :

$$\begin{aligned} S(\omega \cup \omega', t) &= S(\omega, t) + S(\omega', t) + S(\omega \cap \omega', t) \\ &= \int_{\omega} \rho(\mathbf{x}, t) s(\mathbf{x}, t) dV + \int_{\omega'} \rho'(\mathbf{x}', t) s'(\mathbf{x}', t) dV' + \int_{\gamma} s_c(\mathbf{x}, t) dA \end{aligned}$$

avec  $s_c(\mathbf{x}, t)$  une densité d'entropie aérique, que l'on suppose contenue par la surface de contact  $\gamma$ . Le taux d'entropie fourni par le système extérieur à  $\omega \cup \omega'$  est :

$$\begin{aligned} N(\omega \cup \omega', t) &= \int_{\omega} \frac{r(\mathbf{x}, t)}{T(\mathbf{x}, t)} dV - \int_{\partial\omega} \frac{q[\mathbf{x}, t, \mathbf{m}(\mathbf{x})]}{T(\mathbf{x}, t)} dA \\ &\quad + \int_{\omega'} \frac{r'(\mathbf{x}', t)}{T'(\mathbf{x}', t)} dV' - \int_{\partial\omega'} \frac{q'[\mathbf{x}', t, \mathbf{m}'(\mathbf{x}')] }{T'(\mathbf{x}', t)} dA' \end{aligned}$$

La localisation du second principe sur  $\gamma$  donne :

$$\dot{s}_c(\mathbf{x}, t) \geq -\left( \frac{q[\mathbf{x}, t, \mathbf{m}(\mathbf{x})]}{T(\mathbf{x}, t)} + J^\perp(\mathbf{x}, t) \frac{q'[\mathbf{x}^\perp, t, \mathbf{m}'(\mathbf{x}^\perp)]}{T'(\mathbf{x}^\perp, t)} \right) \quad (2.111)$$

On rappelle ici que  $J^\perp \approx 1$  en petites perturbations.

### 2.3.4 Lois tribologiques

Les lois tribologiques, analogues à des lois de comportement en mécanique des solides, décrivent les relations liant les variables primales cinématiques ( $\mathbf{g}$ ) aux variables duales statiques ( $\mathbf{p}$ ). L'introduction de variables internes est parfois nécessaire pour décrire certains processus irréversibles. En thermomécanique, les lois tribologiques habituelles, contact, frottement, lubrification, usure, doivent être complétées par une loi de conduction thermique à l'interface.

#### Processus thermomécanique de contact

Considérons deux corps  $\Omega$  et  $\Omega'$  en contact et leur surface de contact potentielle  $\Gamma$  formant un système de contact thermomécanique. Par analogie avec la définition de Coleman–Noll pour un matériau thermomécanique, on propose que, dans une forme de référence, le processus thermomécanique de contact est décrit à l'aide de quatre fonctions :

- le vecteur contrainte de contact  $\mathbf{p}$
- l'entropie de contact  $e_c$
- l'énergie interne de contact  $s_c$
- le flux de chaleur  $q$

Ces quatre fonctions doivent satisfaire les lois de conservation pour tout  $\omega \subseteq \Omega$  et tout  $\omega' \subseteq \Omega'$ . Elles doivent aussi satisfaire les différents axiomes valables pour des lois rhéologiques (voir paragraphe 2.2.4).

Dans la suite de ce chapitre, pour alléger la notation, nous omettons les variables  $(\mathbf{x}, t)$  lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté.

### Lois tribologiques “standard généralisées”

Sur  $\Gamma$ , la localisation des deux principes de la thermomécanique donnent respectivement :

$$\dot{e}_c = \mathbf{p} \cdot \overset{\circ}{\mathbf{g}} - q - J^\perp q^\perp \quad (2.112)$$

$$\dot{s}_c \geq -\left(\frac{q}{T} + J^\perp \frac{q^\perp}{T^\perp}\right) \quad (2.113)$$

La surface de contact est une zone de transition assimilée à une interface  $\Gamma = -\Gamma'$  d'épaisseur nulle, mais possédant un comportement thermodynamique spécifique. L'énergie libre de l'interface de densité  $\Psi_c$  répartie sur  $\Gamma$  est définie par :

$$\Psi_c = e_c - s_c T \quad (2.114)$$

On obtient alors :

$$\dot{s}_c = \frac{1}{T} [\dot{e}_c - \dot{\Psi}_c - s_c \dot{T}] \quad (2.115)$$

Finalement, en introduisant l'écart de température  $\delta = T - T^\perp$ , il résulte :

$$\mathbf{p} \cdot \overset{\circ}{\mathbf{g}} - \dot{\Psi}_c - s_c \dot{T} + J^\perp \frac{q^\perp}{T^\perp} \delta \geq 0 \quad (2.116)$$

Poursuivant dans la même lignée de travaux (Frémond [38] [39], Klarbring [76], Johansson et Klarbring [68], Strömberg et al. [119], Cangémi [15]), on postule, de manière similaire à la mécanique des matériaux standards généralisés, une énergie libre d'interface de la forme :

$$\Psi_c = \hat{\Psi}_c[g_n, \mathbf{g}_t, \alpha_c^i, T] \quad (2.117)$$

où  $\alpha_c^i$  est une variable interne décrivant un phénomène interfacial.

En admettant que la dérivée temporelle satisfasse  $\dot{\mathcal{E}}(\mathbf{g}) = \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \mathbf{g}} \cdot \overset{\circ}{\mathbf{g}}$ , l'introduction

de  $\Psi_c$  dans l'inégalité (2.116) donne :

$$(p_n - \frac{\partial \Psi_c}{\partial g_n}) \dot{g}_n + (\mathbf{p}_t - \frac{\partial \Psi_c}{\partial \mathbf{g}_t}) \cdot \overset{\circ}{\mathbf{g}}_t - \frac{\partial \Psi_c}{\partial \alpha_c^i} \dot{\alpha}_c^i - (s_c + \frac{\partial \Psi_c}{\partial T}) \dot{T} + J^\perp \frac{q^\perp}{T^\perp} \delta \geq 0 \quad (2.118)$$

En supposant que la démarche de Coleman soit généralisable aux  $\Psi_c$  non réguliers, l'inégalité (2.118) de l'entropie, peut se réduire à :

$$(p_n - \frac{\partial \Psi_c}{\partial g_n}) \dot{g}_n + (\mathbf{p}_t - \frac{\partial \Psi_c}{\partial \mathbf{g}_t}) \cdot \overset{\circ}{\mathbf{g}}_t - \frac{\partial \Psi_c}{\partial \alpha_c^i} \dot{\alpha}_c^i + J^\perp \frac{q^\perp}{T^\perp} \delta \geq 0, \quad \text{avec } s_c = -\frac{\partial \Psi_c}{\partial T} \quad (2.119)$$

En supposant de plus que le processus est isotherme, cette inégalité se simplifie encore :

$$(p_n - \frac{\partial \Psi_c}{\partial g_n}) \dot{g}_n + (\mathbf{p}_t - \frac{\partial \Psi_c}{\partial \mathbf{g}_t}) \cdot \overset{\circ}{\mathbf{g}}_t - \frac{\partial \Psi_c}{\partial \alpha_c^i} \dot{\alpha}_c^i \geq 0 \quad (2.120)$$

En introduisant maintenant une fonction de dissipation  $\Phi$ , définie telle que :

$$(p_n - \frac{\partial \Psi_c}{\partial g_n}) \equiv \frac{\partial \Phi_c}{\partial \dot{g}_n}, \quad (\mathbf{p}_t - \frac{\partial \Psi_c}{\partial \mathbf{g}_t}) \equiv \frac{\partial \Phi_c}{\partial \overset{\circ}{\mathbf{g}}_t} \quad \text{et} \quad -\frac{\partial \Psi_c}{\partial \alpha_c^i} \equiv \frac{\partial \Phi_c}{\partial \dot{\alpha}_c^i} \quad (2.121)$$

qui peut aussi prendre la forme plus générale :

$$p_n \in \partial_{g_n} \Psi_c + \partial_{\dot{g}_n} \Phi_c, \quad \mathbf{p}_t \in \partial_{\mathbf{g}_t} \Psi_c + \partial_{\overset{\circ}{\mathbf{g}}_t} \Phi_c \quad \text{et} \quad \partial_{\alpha_c^i} \Psi_c \in -\partial_{\dot{\alpha}_c^i} \Phi_c \quad (2.122)$$

si les potentiels  $\Psi$  et  $\Phi$  sont non-différentiables au sens de l'analyse classique.

Si  $\Phi$  est de plus positif, convexe et s'annule à l'origine par rapport aux variables de flux  $(\dot{g}_n, \overset{\circ}{\mathbf{g}}_t, \dot{\alpha}_c^i)$ , on satisfait alors l'inégalité de Clausius–Duhem a priori :

$$\frac{\partial \Phi_c}{\partial \dot{g}_n} \dot{g}_n + \frac{\partial \Phi_c}{\partial \overset{\circ}{\mathbf{g}}_t} \cdot \overset{\circ}{\mathbf{g}}_t + \frac{\partial \Phi_c}{\partial \dot{\alpha}_c^i} \dot{\alpha}_c^i \geq 0 \quad (2.123)$$

### Loi de contact

La loi de contact unilatéral normal exprime l'impénétrabilité de deux corps en contact ainsi que l'inattraction de deux corps distants. Le contact est un phénomène non-dissipatif donc réversible.

D'après les travaux de Moreau, on peut écrire que la force de contact  $p_n$  dérive d'un pseudo-potentiel d'énergie libre non-différentiable sous la forme d'une inclusion :

$$\begin{aligned} \Psi_c(g_n) &= \mathbf{I}_{\mathbf{R}^+}(g_n) \\ \Phi_c &= 0 \end{aligned} \quad (2.124)$$

où  $I_{\mathbf{R}^+}(g_n)$  est la fonction indicatrice de l'ensemble des réels  $\mathbf{R}^+$  définie par :

$$I_{\mathbf{R}^+}(g_n) = \begin{cases} 0 & \text{si } g_n \in \mathbf{R}^+ \\ \infty & \text{si } g_n \notin \mathbf{R}^+ \end{cases} \quad (2.125)$$

Par les relations (2.122) et  $\Phi_c$  étant nul, on déduit la loi de contact, qui est inversible (Figure 2.12) :

$$p_n \in \partial I_{\mathbf{R}^+}(g_n) \iff g_n \in \partial I_{\mathbf{R}^-}(p_n) \quad (2.126)$$

$\partial I_{\mathbf{R}^+}(g_n)$  est le sous-différentiel de  $I_{\mathbf{R}^+}(g_n)$  au sens de l'analyse convexe (voir l'annexe A).

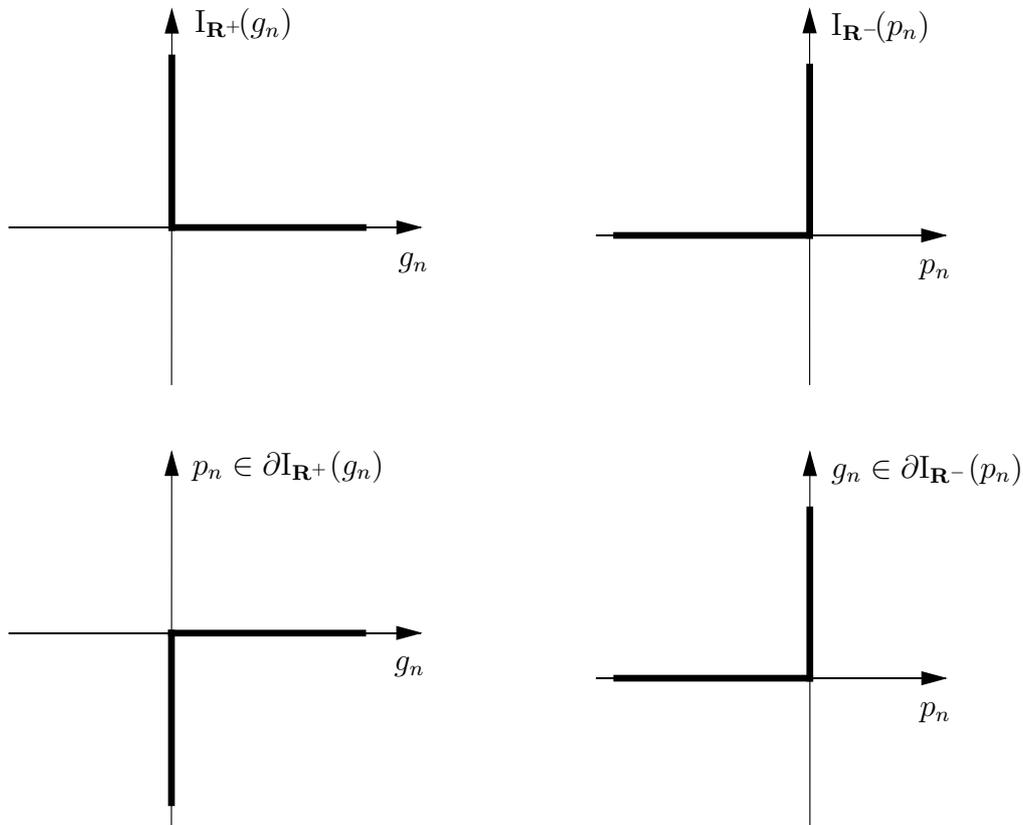


FIG. 2.12 – Loi de contact unilatéral et son inverse dérivées de leurs potentiels respectifs.

Sous forme plus classique, le contact unilatéral est caractérisé par deux statuts de contact :

- si les deux corps sont séparés, alors  $g_n > 0$ ,  $p_n = 0$ ,
- si les deux corps sont en contact, alors  $g_n = 0$ ,  $p_n \leq 0$ .

Ces deux statuts de contact sont formulés par une condition d'impénétrabilité, une d'inattraction et une de complémentarité :

$$g_n \geq 0 \quad , \quad p_n \leq 0 \quad , \quad p_n g_n = 0 \quad (2.127)$$

### Loi de frottement pur

Contrairement au contact (qui est réversible), le phénomène de frottement est dissipatif. Le frottement *pur* est défini comme un frottement à pression constante donnée  $\pi$ .

En utilisant le formalisme de l'analyse convexe comme pour le cas du contact unilatéral, la force de frottement  $\mathbf{p}_t$  dérive d'un potentiel de dissipation, ce qui s'exprime sous la forme d'une inclusion différentielle. Nous postulons que le potentiel de dissipation a pour expression :

$$\begin{aligned} \Psi_c &= 0 \\ \Phi_c(\mathring{\mathbf{g}}_t) &= I_{\mathcal{C}(\pi)}^*(\mathring{\mathbf{g}}_t) \end{aligned} \quad (2.128)$$

où  $I_{\mathcal{C}(\pi)}^*$  est la conjuguée de Fenchel de la fonction indicatrice  $I_{\mathcal{C}(\pi)}$  du disque convexe  $\mathcal{C}$  de rayon  $-\mu\pi$  centré à l'origine :

$$\mathcal{C}(\pi) = \{ \mathbf{p}_t \mid \|\mathbf{p}_t\| \leq -\mu\pi, \pi \leq 0 \}$$

Par suite, on montre que  $\Phi_c(\mathring{\mathbf{g}}_t) = I_{\mathcal{C}(\pi)}^*(\mathring{\mathbf{g}}_t) = -\mu\pi\|\mathring{\mathbf{g}}_t\|$ . On dérive les forces de frottement à l'aide de (2.122) (Figure 2.13) :

$$\mathbf{p}_t \in \partial I_{\mathcal{C}(\pi)}^*(\mathring{\mathbf{g}}_t) = -\mu\pi \partial \|\mathring{\mathbf{g}}_t\| \quad (2.129)$$

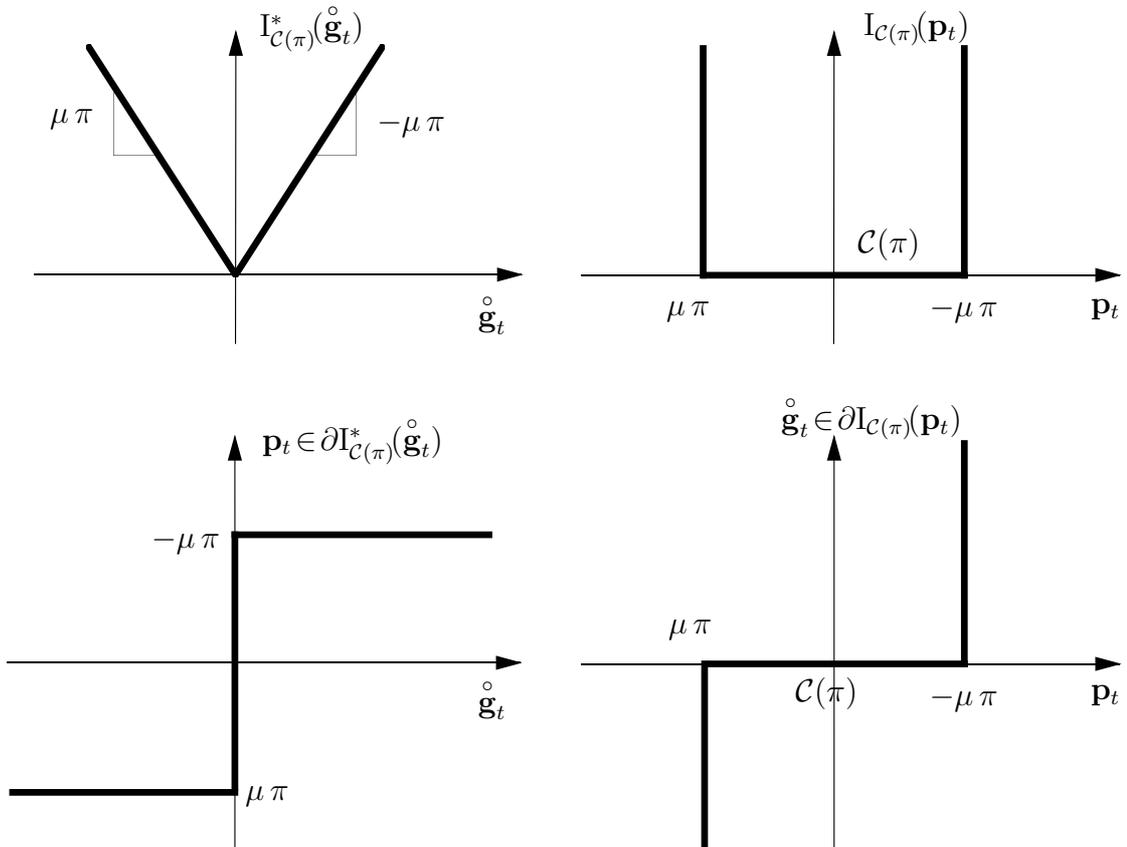


FIG. 2.13 – Loi de frottement (nominale) et son inverse, dérivées de leurs potentiels respectifs.

Plus classiquement, le frottement peut se caractériser par deux statuts :

- si les deux matériaux adhèrent, alors  $\|\mathbf{p}_t\| + \mu\pi < 0$ ,
- si les deux matériaux frottent, alors  $\|\mathbf{p}_t\| + \mu\pi = 0$ .

Ces deux statuts de frottement sont formulés par une loi de glissement (radial), un critère de frottement (de Coulomb à pression constante) et une condition de complémentarité :

$$\|\mathring{\mathbf{g}}_t\| \mathbf{p}_t = \|\mathbf{p}_t\| \mathring{\mathbf{g}}_t, \quad \|\mathbf{p}_t\| + \mu\pi \leq 0, \quad \|\mathring{\mathbf{g}}_t\| (\|\mathbf{p}_t\| + \mu\pi) = 0 \quad (2.130)$$

La loi de glissement impose que la force de frottement  $\mathbf{p}_t$  soit colinéaire à la vitesse de glissement  $\mathring{\mathbf{g}}_t$  correspondante. Le critère de frottement limite l'intensité de la force de frottement. La condition de complémentarité joue le rôle de lien entre les variables cinématiques et statiques en rendant exclusifs les statuts d'adhérence et de glissement.

### Loi de contact avec frottement

Nous couplons le contact normal et le frottement tangentiel par la loi de Coulomb qui stipule que la pression constante  $\pi$  devient la pression variable normale de contact  $p_n$ . Cela revient à remplacer dans les expressions précédentes  $\pi$  par  $p_n$ . Dès lors, le potentiel de dissipation dégénère en un quasi-potentiel (qui dépend de la pression effective  $p_n$ , c'est-à-dire de la solution du problème).

$$\begin{aligned} \Psi_c &= \mathbf{I}_{\mathbf{R}^+}(g_n) \\ \Phi_c(\mathring{\mathbf{g}}_t; p_n) &= \mathbf{I}_{\mathcal{C}(p_n)}^*(\mathring{\mathbf{g}}_t) = -\mu p_n \|\mathring{\mathbf{g}}_t\| \end{aligned} \quad (2.131)$$

On construit les lois générales de contact avec frottement en se servant de (2.122) (Figures 2.14 et 2.15) :

$$\begin{cases} p_n \in \partial \mathbf{I}_{\mathbf{R}^+}(g_n) \\ \mathbf{p}_t \in \partial \mathbf{I}_{\mathcal{C}(p_n)}^*(\mathring{\mathbf{g}}_t) \end{cases} \quad (2.132)$$

L'inclusion (2.132) n'est plus qu'une quasi-inclusion sous-différentielle car  $\Phi_c = \mathbf{I}_{\mathcal{C}(p_n)}^*(\mathring{\mathbf{g}}_t)$  dépend de  $p_n$  ( $\mathbf{p}_t = \mathbf{p}_t(\mathring{\mathbf{g}}_t; p_n)$ ).

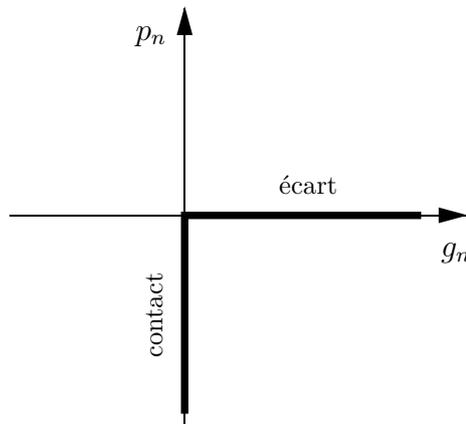


FIG. 2.14 – Loi de contact unilatéral.

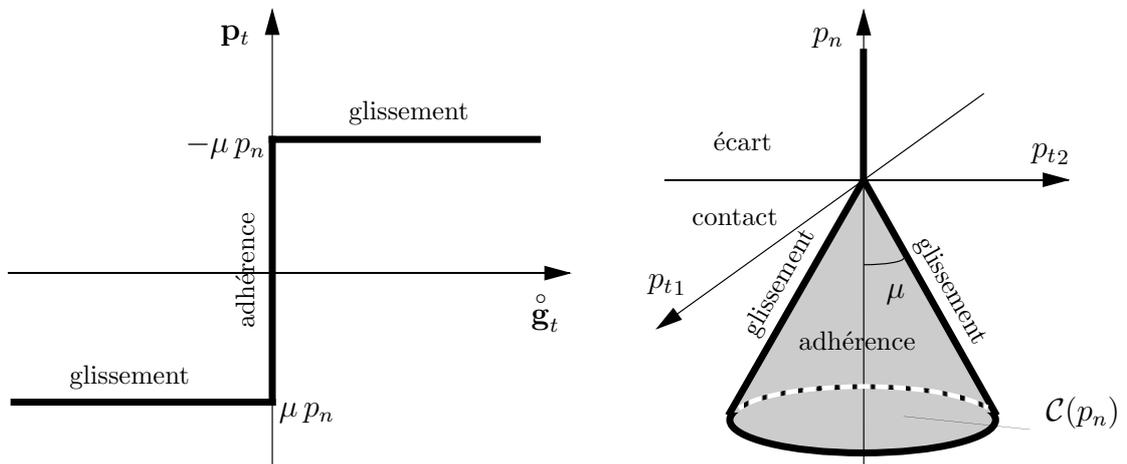


FIG. 2.15 – Loi de frottement tangential, cône de Coulomb (Adapté de [100]).

### 2.3.5 Equilibre de deux solides élastiques en contact tribologique par minimisation de la quasi-énergie incrémentale du système

De manière similaire à la mécanique des solides, la résolution de problèmes de contact entre deux corps hyperélastiques peut se formuler sous la forme d'un problème de minimisation de la fonctionnelle d'énergie potentielle du système de contact (on peut citer Kikuchi–Oden [72], Curnier–He–Telega [27] [53]). Cependant, une formulation des problèmes de contact *avec frottement* fait intervenir une “fonctionnelle” doublement différente d'une vraie fonctionnelle élastique :

- sa valeur dépend de la pression de contact à la solution  $p_n$  (quasi-fonctionnelle)

- sa valeur dépend de l'incrément de glissement  $\overset{\circ}{\mathbf{g}}_t \delta t$  au lieu du glissement  $\mathbf{g}_t$  (fonctionnelle incrémentale)

On peut la qualifier de “quasi-fonctionnelle incrémentale”.

Nous considérons maintenant deux corps élastiques, le contacteur  $\Omega$  et la cible  $\Omega'$ , respectivement dotés des potentiels différentiables densités d'énergie libre de déformation :

$$\Psi = \Psi(\mathbf{F}) = \Psi(\mathbf{E}) = \frac{1}{2\rho} [\lambda(\text{tr}\mathbf{E})^2 + 2\mu\text{tr}(\mathbf{E}^2)] \quad (2.133)$$

$$\Psi' = \Psi'(\mathbf{F}') = \Psi'(\mathbf{E}') = \frac{1}{2\rho'} [\lambda'(\text{tr}\mathbf{E}')^2 + 2\mu'\text{tr}(\mathbf{E}'^2)] \quad (2.134)$$

L'énergie élastique des deux corps s'intègre, respectivement :

$$U(\mathbf{y}) = \int_{\Omega} \Psi(\nabla\mathbf{y}(\mathbf{x})) d\Omega \quad , \quad U'(\mathbf{y}') = \int_{\Omega'} \Psi'(\nabla\mathbf{y}'(\mathbf{x}')) d\Omega' \quad (2.135)$$

Nous supposons une fois de plus que les forces de volume et de surface sur le contacteur et sur la cible, respectivement  $\boldsymbol{\kappa}$ ,  $\boldsymbol{\kappa}'$ ,  $\bar{\mathbf{p}}$  et  $\bar{\mathbf{p}}'$  sont conservatives. Aussi, elles sont considérées comme des charges mortes. Ainsi,  $\boldsymbol{\kappa}$ ,  $\boldsymbol{\kappa}'$ ,  $\bar{\mathbf{p}}$  et  $\bar{\mathbf{p}}'$  peuvent être exprimées comme les dérivées directionnelles des potentiels correspondants  $\mathcal{K}(\mathbf{y})$ ,  $\mathcal{K}'(\mathbf{y}')$ ,  $\bar{P}(\mathbf{y})$  et  $\bar{P}'(\mathbf{y}')$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{K}(\mathbf{y}) = \int_{\Omega} \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y}(\mathbf{x}) d\Omega \\ \bar{P}(\mathbf{y}) = \int_{\Gamma_{\sigma}} \bar{\mathbf{p}}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y}(\mathbf{x}) d\Gamma \\ D\mathcal{K}(\mathbf{y}; \mathbf{w}) = \nabla\mathcal{K}(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{w} = \int_{\Omega} \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{w} d\Omega \\ D\bar{P}(\mathbf{y}; \mathbf{w}) = \nabla\bar{P}(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{w} = \int_{\Gamma_{\sigma}} \bar{\mathbf{p}}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{w} d\Gamma \\ \forall \mathbf{w} \in V = \{ \mathbf{v} : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}^3 \mid \mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \text{ , pour } \mathbf{x} \in \Gamma_y \} \end{array} \right. \quad (2.136)$$

avec  $V$  l'espace des déplacements virtuels du contacteur.

(de même pour le corps cible en utilisant les symboles “prime”)

Si nous considérons un mouvement  $\mathbf{y}$  quasi-statique du corps et si nous négligeons les effets inertiels, l'énergie totale du corps  $\Omega$  pris séparément est égale à son énergie potentielle (de même pour  $\Omega'$ ) :

$$\begin{aligned} \mathcal{U}(\mathbf{y}) &= U(\mathbf{y}) - (\mathcal{K}(\mathbf{y}) + \bar{P}(\mathbf{y})) = \\ &= \int_{\Omega} \Psi(\nabla\mathbf{y}(\mathbf{x})) d\Omega - \int_{\Omega} \boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{y}(\mathbf{x}) d\Omega - \int_{\Gamma_{\sigma}} \bar{\mathbf{p}}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y}(\mathbf{x}) d\Gamma \end{aligned} \quad (2.137)$$

L'énergie totale de l'*union* des deux corps  $\Omega$  et  $\Omega'$  séparés est égale à la somme des énergies potentielles du contacteur et de la cible :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{U}_U(\mathbf{y}, \mathbf{y}') &= \mathcal{U}(\mathbf{y}) + \mathcal{U}'(\mathbf{y}') = \\
 &= \left[ U(\mathbf{y}) + U'(\mathbf{y}') \right] - \left[ \mathcal{K}(\mathbf{y}) + \mathcal{K}'(\mathbf{y}') \right] - \left[ \bar{P}(\mathbf{y}) + \bar{P}'(\mathbf{y}') \right] \\
 &= \left[ \int_{\Omega} \Psi(\nabla \mathbf{y}(\mathbf{x})) d\Omega + \int_{\Omega'} \Psi'(\nabla \mathbf{y}'(\mathbf{x}')) d\Omega' \right] \\
 &\quad - \left[ \int_{\Omega} \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y}(\mathbf{x}) d\Omega + \int_{\Omega'} \boldsymbol{\kappa}'(\mathbf{x}') \cdot \mathbf{y}'(\mathbf{x}') d\Omega' \right] \\
 &\quad - \left[ \int_{\Gamma_{\sigma}} \mathbf{p}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y}(\mathbf{x}) d\Gamma + \int_{\Gamma'_{\sigma}} \mathbf{p}'(\mathbf{x}') \cdot \mathbf{y}'(\mathbf{x}') d\Gamma' \right]
 \end{aligned} \tag{2.138}$$

La solution du problème de minimisation du problème non-couplé s'écrit :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{U}_U(\mathbf{y}, \mathbf{y}') &= \inf_{\substack{\mathbf{z} \in V_y \\ \mathbf{z}' \in V'_y}} \mathcal{U}_U(\mathbf{z}, \mathbf{z}') = \inf_{\substack{\mathbf{z} \in V_y \\ \mathbf{z}' \in V'_y}} (\mathcal{U}(\mathbf{z}) + \mathcal{U}'(\mathbf{z}')) = \inf_{\mathbf{z} \in V_y} \mathcal{U}(\mathbf{z}) + \inf_{\mathbf{z}' \in V'_y} \mathcal{U}'(\mathbf{z}') \\
 \iff &\begin{cases} \mathbf{y} : & \mathcal{U}(\mathbf{y}) = \inf_{\mathbf{z} \in V_y} \mathcal{U}(\mathbf{z}) \\ \mathbf{y}' : & \mathcal{U}'(\mathbf{y}') = \inf_{\mathbf{z}' \in V'_y} \mathcal{U}'(\mathbf{z}') \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$V_y = \{ \mathbf{z} : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}^3 \mid \mathbf{z}(\mathbf{x}) = \bar{\mathbf{y}}(\mathbf{x}) \text{ pour } \mathbf{x} \in \Gamma_y \}$$

$$V'_y = \{ \mathbf{z}' : \Omega' \longrightarrow \mathbf{R}^3 \mid \mathbf{z}'(\mathbf{x}') = \bar{\mathbf{y}}'(\mathbf{x}') \text{ pour } \mathbf{x}' \in \Gamma'_y \}$$

Pour considérer les interactions des deux corps, les mouvements  $\mathbf{y}$  et  $\mathbf{y}'$  doivent être liés par les conditions de contact et de frottement de la loi de comportement au niveau de l'interface.

Par exemple, si nous considérons des problèmes de contact normal simple,  $(\mathbf{y}, \mathbf{y}')$  doivent appartenir à l'ensemble des positions admissibles  $\mathcal{N}$  :

$$\mathcal{N} = \{ \hat{\mathbf{y}} = [\mathbf{y}, \mathbf{y}']^T \mid \mathbf{y} \in V_y, \mathbf{y}' \in V'_y, g_n(\hat{\mathbf{y}}) \geq 0 \}$$

En définissant les vecteurs des mouvements réels et virtuels du système :

$$\hat{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{y}' \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} \mathbf{z} \\ \mathbf{z}' \end{bmatrix}$$

on aboutit au vrai problème d'optimisation sous contraintes :

$$\mathcal{U}_U(\hat{\mathbf{y}}) = \inf_{\hat{\mathbf{z}} \in \mathcal{N}} \mathcal{U}_U(\hat{\mathbf{z}}) \tag{2.139}$$

Par extension, une manière de décontraindre le problème de contact avec frottement incrémental est de rajouter le potentiel d'énergie libre  $\Psi_c = \mathbf{I}_{\mathbf{R}_+}(g_n(\mathbf{x}))$  et le quasi-potentiel incrémental  $\Phi_c = \mathbf{I}_{\mathcal{C}(p_n)}^*(\overset{\circ}{\mathbf{g}}_t(\mathbf{x}) \delta t)$  (pour tout point  $\mathbf{x} \in \Gamma$  et où  $\delta t$  désigne un incrément de temps<sup>6</sup>) au potentiel d'énergie de l'union  $\mathcal{U}_U(\mathbf{y}, \mathbf{y}')$ . Le problème de minimisation de l'énergie potentielle incrémentale du système complet s'écrit alors :

$$\mathcal{U}_{sys}(\widehat{\mathbf{y}}; p_n) \equiv \mathcal{U}_{sys}\left(\begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{y}' \end{bmatrix}; p_n\right) = \inf_{\widehat{\mathbf{z}} \in \mathcal{Z}} \mathcal{U}_{sys}(\widehat{\mathbf{z}}; p_n) \equiv \inf_{\substack{\mathbf{z} \in V_y \\ \mathbf{z}' \in V'_y}} \mathcal{U}_{sys}\left(\begin{bmatrix} \mathbf{z} \\ \mathbf{z}' \end{bmatrix}; p_n\right) \quad (2.140)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_{sys}(\widehat{\mathbf{z}}; p_n) &= \mathcal{U}_U(\widehat{\mathbf{z}}) + \int_{\Gamma} (\Psi_c(\mathbf{z}, \mathbf{z}') + \Phi_c(\mathbf{z}, \mathbf{z}') \delta t) d\Gamma \\ &= \mathcal{U}_U(\widehat{\mathbf{z}}) + \int_{\Gamma} \left[ \mathbf{I}_{\mathbf{R}_+}(g_n(\mathbf{z}, \mathbf{z}')) + \mathbf{I}_{\mathcal{C}(p_n(\widehat{\mathbf{y}}))}^*(\overset{\circ}{\mathbf{g}}_t(\mathbf{z}, \mathbf{z}') \delta t) \right] d\Gamma \\ \widehat{\mathbf{z}} \in \mathcal{Z} &\equiv \left( \mathbf{z} \in V_y, \mathbf{z}' \in V'_y \right), \quad p_n = p_n(\widehat{\mathbf{y}}). \end{aligned}$$

Les termes additionnels de la minimisation (2.140) représentent l'apport énergétique du contact avec frottement incrémental. En effet, le premier terme supplémentaire stipule que l'énergie pour faire pénétrer les deux corps l'un par rapport à l'autre est infinie et le deuxième terme contient le travail dissipé par le processus de frottement au cours d'un incrément de temps  $\delta t$  (ou de charge).

En remplaçant les sous-gradients  $\partial \mathbf{I}_{\mathbf{R}_+}$  et  $\partial \mathbf{I}_{\mathcal{C}(p_n(\widehat{\mathbf{y}}))}^*$  exprimant les lois de contact et de frottement correspondantes (2.132) par leurs valeurs  $p_n$  et  $\mathbf{p}_t$ , respectivement, et en utilisant (2.137) nous pouvons exprimer la condition d'optimum :

$$0 \in \partial \mathcal{U}_{sys}(\widehat{\mathbf{y}}; p_n) \quad (2.141)$$

sous la forme variationnelle :

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} \nabla \mathbf{w}(\mathbf{x}) : \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{F}}(\nabla \mathbf{y}(\mathbf{x})) d\Omega + \int_{\Omega'} \nabla \mathbf{w}'(\mathbf{x}') : \frac{\partial \Psi'}{\partial \mathbf{F}'}(\nabla \mathbf{y}'(\mathbf{x}')) d\Omega' \\ &\quad - \int_{\Omega} \mathbf{w}(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{x}) d\Omega - \int_{\Omega'} \mathbf{w}'(\mathbf{x}') \cdot \boldsymbol{\kappa}'(\mathbf{x}') d\Omega' \\ &\quad - \int_{\Gamma_{\sigma}} \mathbf{w}(\mathbf{x}) \cdot \bar{\mathbf{p}}(\mathbf{x}) d\Gamma - \int_{\Gamma'_{\sigma}} \mathbf{w}'(\mathbf{x}') \cdot \bar{\mathbf{p}}'(\mathbf{x}') d\Gamma' \\ &\quad + \int_{\Gamma} p_n(\mathbf{x}) \delta g_n(\mathbf{y}(\mathbf{x}), \mathbf{y}^{\perp}(\mathbf{y}(\mathbf{x}), \mathbf{y}'(\mathbf{x}'))) d\Gamma \\ &\quad + \int_{\Gamma} \mathbf{p}_t(\mathbf{x}) \cdot \delta \overset{\circ}{\mathbf{g}}_t(\mathbf{y}(\mathbf{x}), \mathbf{y}^{\perp}(\mathbf{y}(\mathbf{x}), \mathbf{y}'(\mathbf{x}'))) \delta t d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (2.142)$$

$$\forall \mathbf{w} \in V, \quad \forall \mathbf{w}' \in V'$$

<sup>6</sup>Il s'agit d'un temps paramétrique lié au chargement quasi-statique et non pas du temps physique.

qui est associée à des inclusions représentant la loi de comportement à l'interface :

$$\left\{ \begin{array}{l} p_n \in \partial I_{\mathbf{R}_+}(g_n) \\ \mathbf{p}_t \in \partial I_{\mathcal{C}(p_n)}^*(\mathring{\mathbf{g}}_t \delta t) \end{array} \right. , \quad \mathbf{x} \in \Gamma \quad (2.143)$$

et, avec sous les intégrales les variations suivantes :

$$\begin{aligned} \delta g_n(\widehat{\mathbf{y}}) &\equiv \delta g_n(\mathbf{y}, \mathbf{y}^\perp(\mathbf{y}, \mathbf{y}')) = \nabla_{\widehat{\mathbf{y}}} g_n(\widehat{\mathbf{y}}) \cdot \widehat{\mathbf{w}} \\ \delta \mathring{\mathbf{g}}_t(\widehat{\mathbf{y}}) &\equiv \delta \mathring{\mathbf{g}}_t(\mathbf{y}, \mathbf{y}^\perp(\mathbf{y}, \mathbf{y}')) = \nabla_{\widehat{\mathbf{y}}} \mathring{\mathbf{g}}_t(\widehat{\mathbf{y}}) \cdot \widehat{\mathbf{w}} \end{aligned} \quad (2.144)$$

La formulation variationnelle ci-dessus représente le principe des travaux virtuels. La formulation forte de l'équilibre des forces correspondante peut se résumer au problème aux limites incrémental suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Div} \mathbf{P}(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \\ \mathbf{P}(\mathbf{x}) = \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{F}}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{y}(\mathbf{x}) = \bar{\mathbf{y}}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{P}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{m}(\mathbf{x}) = \bar{\mathbf{p}}(\mathbf{x}) \end{array} \right. , \quad \begin{array}{l} \mathbf{x} \in \Omega \\ \\ \mathbf{x} \in \Gamma_y \\ \mathbf{x} \in \Gamma_\sigma \end{array} \quad (2.145)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Div} \mathbf{P}'(\mathbf{x}') + \boldsymbol{\kappa}'(\mathbf{x}') = \mathbf{0} \\ \mathbf{P}'(\mathbf{x}') = \frac{\partial \Psi'}{\partial \mathbf{F}'}(\mathbf{x}') \\ \mathbf{y}'(\mathbf{x}') = \bar{\mathbf{y}}'(\mathbf{x}') \\ \mathbf{P}'(\mathbf{x}') \cdot \mathbf{m}'(\mathbf{x}') = \bar{\mathbf{p}}'(\mathbf{x}') \end{array} \right. , \quad \begin{array}{l} \mathbf{x}' \in \Omega' \\ \\ \mathbf{x}' \in \Gamma'_y \\ \mathbf{x}' \in \Gamma'_\sigma \end{array} \quad (2.146)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{p}[\mathbf{x}, \mathbf{m}(\mathbf{x})] + J^\perp(\mathbf{x}) \mathbf{p}'[\mathbf{x}^\perp, \mathbf{m}'(\mathbf{x}^\perp)] = \mathbf{0} \\ \mathbf{y}(\mathbf{x}) \wedge \mathbf{p}[\mathbf{x}, \mathbf{m}(\mathbf{x})] + \mathbf{y}'(\mathbf{x}^\perp) \wedge J^\perp(\mathbf{x}) \mathbf{p}'[\mathbf{x}^\perp, \mathbf{m}'(\mathbf{x}^\perp)] = \mathbf{0} \end{array} \right. , \quad \mathbf{x} \in \Gamma \quad (2.147)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} p_n(\mathbf{x}) \in \partial I_{\mathbf{R}_+}(g_n(\mathbf{x})) \\ \mathbf{p}_t(\mathbf{x}) \in \partial I_{\mathcal{C}(p_n)}^*(\mathring{\mathbf{g}}_t(\mathbf{x}) \delta t) \end{array} \right. , \quad \mathbf{x} \in \Gamma \quad (2.148)$$

### Formulation du frottement par variable interne

On note une similitude entre les phénomènes de plasticité dans les solides et de frottement à l'interface. En effet, nous pouvons pousser plus loin cette ressemblance, en exprimant le frottement, ici formulé à l'aide d'une variable observable  $\mathbf{g}_t$  comme un phénomène à variable interne. Si nous introduisons une variable de glissement  $\mathbf{g}_t^s$  qui mesure le glissement entre les deux corps, et telle que :

$$\mathbf{g}_t^s = \mathbf{g}_t \quad (2.149)$$

On déduit de (2.149) que :

$$\overset{\circ}{\mathbf{g}}_t^s = \overset{\circ}{\mathbf{g}}_t \quad (2.150)$$

En introduisant les relations (2.149) et (2.150) dans les potentiels de la loi de frottement pur (2.128), et en introduisant une énergie libre d'adhérence (qui par définition reste nulle), on obtient une formulation équivalente :

$$\begin{aligned} \Psi_c(\mathbf{g}_t, \mathbf{g}_t^s) &= I_{\{0\}}(\mathbf{g}_t - \mathbf{g}_t^s) \\ \Phi_c(\overset{\circ}{\mathbf{g}}_t^s) &= I_{\mathcal{C}(\pi)}^*(\overset{\circ}{\mathbf{g}}_t^s) \end{aligned} \quad (2.151)$$

Cette formulation par variable interne montre que l'énergie rigide (nulle-infinie) du frottement avec adhérence rigide est analogue à l'énergie élastique quadratique de l'élasto-plasticité.

## 2.4 Commentaires

**Commentaire 2.4.1** Nous pouvons constater que les lois aussi bien rhéologiques de volume que tribologiques d'interface étudiées satisfont tous les principes de base de la thermodynamique. C'est une théorie relativement efficace dans le sens que de nombreux principes sont tous respectés, à trois conditions près sur le potentiel de dissipation (positivité, convexité et nullité à l'origine). Aussi, lors de l'élaboration de nouvelles lois, nous nous efforçons de rester dans ce même cadre.

**Commentaire 2.4.2** La formulation par minimisation de quasi-fonctionnelle incrémentale joue un rôle prédominant dans l'analyse par la technique du Lagrangien augmenté de tels problèmes.

## 2.5 Synthèse

### Equations d'équilibre

$$\rho(\mathbf{x})\ddot{\mathbf{y}}(\mathbf{x}, t) - \text{Div}[\mathbf{P}(\mathbf{x}, t)] - \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{0} \quad \text{dans } \Omega$$

$$\rho'(\mathbf{x}')\ddot{\mathbf{y}}'(\mathbf{x}', t) - \text{Div}[\mathbf{P}'(\mathbf{x}', t)] - \boldsymbol{\kappa}'(\mathbf{x}', t) = \mathbf{0} \quad \text{dans } \Omega'$$

$$\mathbf{p}[\mathbf{x}, t, \mathbf{m}(\mathbf{x})] + J^\perp(\mathbf{x}, t)\mathbf{p}'[\mathbf{x}^\perp, t, \mathbf{m}'(\mathbf{x}^\perp)] = \mathbf{0} \quad , \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma$$

$$\mathbf{p}'[\mathbf{x}', t, \mathbf{m}'(\mathbf{x}')] = \mathbf{0} \quad , \quad \forall \mathbf{x}' \in \Gamma' \setminus \Gamma^\perp$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}, t) \wedge \mathbf{p}[\mathbf{x}, t, \mathbf{m}(\mathbf{x})] = \mathbf{0} \quad , \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma$$

### Forme locale du premier principe

$$\rho(\mathbf{x})\dot{e}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{P}(\mathbf{x}, t) : \dot{\mathbf{F}}(\mathbf{x}, t) + r - \text{Div}[\mathbf{q}(\mathbf{x}, t)] \quad \text{dans } \Omega$$

$$\rho'(\mathbf{x}')\dot{e}'(\mathbf{x}', t) = \mathbf{P}'(\mathbf{x}', t) : \dot{\mathbf{F}}'(\mathbf{x}', t) + r' - \text{Div}[\mathbf{q}'(\mathbf{x}', t)] \quad \text{dans } \Omega'$$

$$\dot{e}_c(\mathbf{x}, t) = \mathbf{p}[\mathbf{x}, t, \mathbf{m}(\mathbf{x})] \cdot \overset{\circ}{\mathbf{g}}(\mathbf{x}, t) - q[\mathbf{x}, t, \mathbf{m}(\mathbf{x})] - J^\perp(\mathbf{x}, t)q'[\mathbf{x}^\perp, t, \mathbf{m}'(\mathbf{x}^\perp)] \quad \text{sur } \Gamma$$

$$q'[\mathbf{x}', t, \mathbf{m}'(\mathbf{x}')] = 0 \quad , \quad \forall \mathbf{x}' \in \Gamma' \setminus \Gamma^\perp$$

### Forme locale du second principe

$$\rho(\mathbf{x}, t)\dot{s}(\mathbf{x}, t) \geq \frac{r(\mathbf{x}, t)}{T(\mathbf{x}, t)} - \text{Div}\left(\frac{\mathbf{q}(\mathbf{x}, t)}{T(\mathbf{x}, t)}\right) \quad \text{dans } \Omega$$

$$\rho'(\mathbf{x}', t)\dot{s}'(\mathbf{x}', t) \geq \frac{r'(\mathbf{x}', t)}{T'(\mathbf{x}', t)} - \text{Div}\left(\frac{\mathbf{q}'(\mathbf{x}', t)}{T'(\mathbf{x}', t)}\right) \quad \text{dans } \Omega'$$

$$\dot{s}_c(\mathbf{x}, t) \geq -\left(\frac{q[\mathbf{x}, t, \mathbf{m}(\mathbf{x})]}{T(\mathbf{x}, t)} + J^\perp(\mathbf{x}, t)\frac{q'[\mathbf{x}^\perp, t, \mathbf{m}'(\mathbf{x}^\perp)]}{T'(\mathbf{x}^\perp, t)}\right) \quad \text{sur } \Gamma$$

### Potentils d'énergie libre et de dissipation

$$\Psi \quad \text{et} \quad \Phi \quad \text{dans } \Omega$$

$$\Psi' \quad \text{et} \quad \Phi' \quad \text{dans } \Omega'$$

$$\Psi_c \quad \text{et} \quad \Phi_c \quad \text{sur } \Gamma$$



# Chapitre 3

## Contact avec frottement et adhésion

---

### 3.1 Introduction

Dans ce chapitre, il s'agit tout d'abord de faire le point sur la mécanique du contact avec adhésion. En particulier, il s'agira d'exposer les bases du modèle de Frémond, approfondi par la suite par Cangémi–Raous. Nous verrons les implications de cette formulation. Nous tenterons alors de proposer une nouvelle formulation inspirée de la théorie de la plasticité avec écrouissage, toujours dans le cadre des matériaux standards généralisés. Finalement, nous présenterons le couplage de ce modèle avec une loi de frottement de type Coulomb.

La première section se voulant être une introduction aux modèles, nous n'y traiterons tout d'abord que l'adhésion normale. Cette simplification revient à considérer une adhésion unidirectionnelle et nous permettra de comprendre plus facilement le fonctionnement et les mécanismes impliqués dans les modèles d'adhésion. Ceci permettra de donner au lecteur non seulement une vue d'ensemble, mais aussi une meilleure comparaison des deux approches. Pour le modèle retenu, la prise en compte des phénomènes tangentiels, notamment le couplage avec le frottement fera l'objet de la fin de la section.

L'analyse de cette formulation, notamment par la méthode de la pénalité et la technique du Lagrangien augmenté sera traitée dans la seconde section.

## 3.2 Formulation de l'adhésion

**L'approche générale** – Nous avons vu dans les chapitres précédents que le comportement d'une surface de contact, comme celui d'un solide, découle en général de deux potentiels ayant certaines propriétés qui garantissent le respect des principes mécaniques et thermodynamiques. Il s'agit maintenant de construire des potentiels particuliers qui respectent ces conditions, et qui incorporent l'adhésion.

Au vu du peu de restrictions sur les potentiels, il est bien entendu possible de modéliser un même phénomène de plusieurs manières différentes. Pour cette raison, lors de l'élaboration d'un modèle, nous nous efforcerons de respecter les règles suivantes autant que possible :

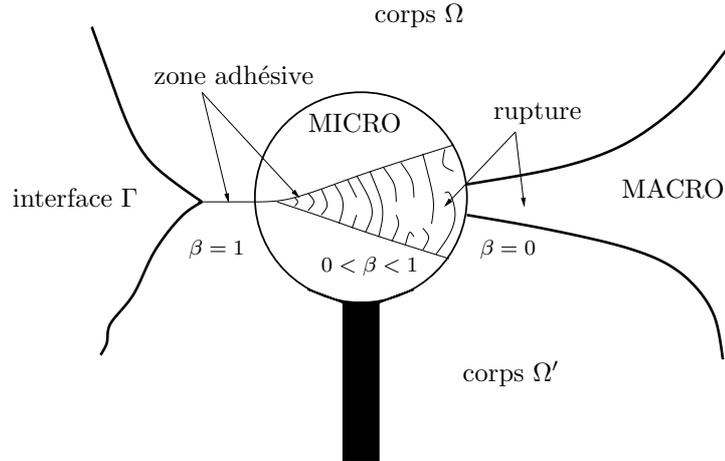
- MODÈLE SIMPLE : utilisation d'aussi peu de variables d'état que possible, avec des lois d'évolution aussi simples que possible,
- MODÈLE RÉALISTE : utilisation de résultats expérimentaux comme guide,
- MODÈLE COHÉRENT : utilisation du cadre des matériaux standards généralisés.

### 3.2.1 Éléments du modèle de Frémond (1982)

Frémond [38] [39] développe une formulation originale afin de modéliser les effets mécaniques dus à la présence de liaisons adhésives, tout en étendant les principes généraux utilisés dans la description thermodynamique des comportements rhéologiques classiques à la notion de comportement spécifique de surface.

**La notion d'intensité d'adhésion** – Si on considère deux solides en contact, il nous est impossible de distinguer l'état de contact simple (sans adhésion) d'un état collé (avec adhésion), car bien que les déplacements soient identiques, l'état mécanique est différent. C'est par ce constat que Frémond pose la nécessité d'introduire une nouvelle variable qui caractérisera l'état *adhésif* d'une interface. N'étant pas directement observable ni contrôlable, l'état adhésif sera caractérisé par une variable supplémentaire interne  $\alpha_c^i = \beta$ . Une manière d'interpréter l'approche de Frémond est de supposer que l'état adhésif est caractérisé par une multitude de liens microscopiques distribués le long de l'interface collée. Lors de l'évolution du système, notamment lors d'un décollage, certains de ces liens adhésifs se rompent. Ainsi l'état mécanique est décrit par la variable  $\beta$  mesurant la proportion des liens adhésifs intacts sur le nombre de liens initial.  $\beta$  est donc considérée comme la variable interne mesurant localement le degré d'adhésion ( $\beta = \beta(\mathbf{x}, t)$ ) et il découle par définition que  $\beta \in [0, 1]$ . Trois états adhésifs peuvent être distingués (Figure 3.1) :

- $\beta = 1$  Tous les liens sont intacts et l'adhésion est totale,
- $0 < \beta < 1$  Certains liens se sont cassés et l'adhésion est partielle,
- $\beta = 0$  Tous les liens sont cassés, l'état est dit décollé.


 FIG. 3.1 – Variable interne  $\beta$  de mesure de l'intensité d'adhésion. (Adapté de [15])

**Les équations d'équilibre** – L'adhésion est considérée comme un phénomène résultant de réactions physico-chimiques à l'interface des deux corps qui introduisent une puissance d'interface. Les équations d'équilibre sont les mêmes que pour le contact de deux solides, à ceci près que la puissance des efforts extérieurs et intérieurs comporte un terme supplémentaire dû à la puissance adhésive développée par les réactions  $R_\beta$  aux vitesses d'évolution  $\dot{\beta}$  des variables internes.

Puissance des efforts internes :

$$P_i(\omega \cup \omega', t) = \int_{\omega} \mathbf{P}(\mathbf{x}, t) : \dot{\mathbf{F}}(\mathbf{x}, t) dV + \int_{\omega'} \mathbf{P}'(\mathbf{x}', t) : \dot{\mathbf{F}}'(\mathbf{x}', t) dV' \\ + \int_{\gamma} \mathbf{p}[\mathbf{x}, t, \mathbf{m}(\mathbf{x})] \cdot \dot{\mathbf{g}}(\mathbf{x}, t) dA + \int_{\gamma} R_\beta^i \dot{\beta} dA$$

Puissance des efforts externes :

$$P_e(\omega \cup \omega', t) = \int_{\omega} \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{x}, t) \cdot \dot{\mathbf{y}}(\mathbf{x}, t) dV + \int_{\partial\omega \setminus \gamma} \mathbf{p}[\mathbf{x}, t, \mathbf{m}(\mathbf{x})] \cdot \dot{\mathbf{y}}(\mathbf{x}, t) dA \\ + \int_{\omega'} \boldsymbol{\kappa}'(\mathbf{x}', t) \cdot \dot{\mathbf{y}}'(\mathbf{x}', t) dV' + \int_{\partial\omega' \setminus \gamma'} \mathbf{p}'[\mathbf{x}', t, \mathbf{m}'(\mathbf{x}')] \cdot \dot{\mathbf{y}}'(\mathbf{x}', t) dA' + \int_{\gamma} R_\beta^e \dot{\beta} dA$$

où interviennent les efforts suivants :

- effort intérieur associé par dualité à  $\beta$  :  $R_\beta^i$ ,
- action extérieure modifiant l'état adhésif du contact :  $R_\beta^e$ .

La puissance des efforts externes étant égale à celle des efforts internes, on note que  $R_\beta = R_\beta^i = R_\beta^e$  (ayant la dimension d'un travail), est l'effort associé par dualité à  $\beta$ .

**Lois thermomécaniques** – En plus de la condition de normalisation sur  $\beta$  ( $0 \leq \beta \leq 1$ ), Frémond introduit une condition de complémentarité cinématique  $\beta \mathbf{g} = \mathbf{0}$  (il ne peut y avoir localement séparation que si l'adhésion est totalement nulle), ainsi que l'énergie de Dupré  $w$  (énergie stockée dans l'interface) dans l'expression de son énergie libre d'interface, qu'il choisit de la forme :

$$\Psi_c = \hat{\Psi}_c[\mathbf{g}, \beta, T] \quad (3.1)$$

Il introduit aussi dans son pseudo-potential de dissipation une dissipation de type visqueux quadratique en  $\dot{\beta}$  :

$$\Phi_c = \hat{\Phi}_c[\dot{\mathbf{g}}, \dot{\beta}] \quad (3.2)$$

Frémond (1985), Frémond et al. [41], et plus récemment Alves–Kikuchi [3] améliorent par la suite la finesse de ce modèle en introduisant un gradient  $\nabla\beta$  dans leur formulation.

**Remarque 3.2.1** L'effort  $R_\beta$  étant défini par dualité avec  $\beta$  par  $R_\beta \in -\partial_\beta \Psi_c$ , on déduit de la troisième égalité de (2.122) que  $R_\beta \in \partial_{\dot{\beta}} \Phi_c$ , ce que l'on peut résumer en écrivant :

$$R_\beta \in -\partial_\beta \Psi_c \cap \partial_{\dot{\beta}} \Phi_c \quad (3.3)$$

## 3.2.2 L'approche de Cangémi–Raous

### Description générale

Cangémi [15], Raous et al. [108], poursuivant selon l'approche de Frémond introduisirent dans leur modèle une rigidité adhésive endommageable. La condition de complémentarité cinématique est abandonnée, rendant le modèle plus souple. De plus, ils couplent ce modèle d'adhésion au contact avec frottement, ce qui représente une avancée sensible.

### Les potentiels

**Energie libre** – A l'interface, le potentiel d'énergie libre est choisi de la forme :

$$\Psi_c(g_n, \beta) = \mathbf{I}_{\mathbf{R}^+}(g_n) + \frac{1}{2}\gamma\beta^2 g_n^2 - w\beta + \mathbf{I}_{[0, \infty[}(\beta) \quad (3.4)$$

– TERME DE CONTACT NORMAL :  $\mathbf{I}_{\mathbf{R}^+}(g_n)$

On reconnaît ce terme qui est tout simplement un contact normal classique comme détaillé au chapitre sur les lois thermomécaniques des contacts.

- TERME ÉLASTIQUE ENDOMMAGEABLE :  $\frac{1}{2}\gamma\beta^2g_n^2$

Ce terme quadratique est de type élastique. En effet, lorsque  $\beta = 1$ , il résulte simplement un terme élastique de rigidité  $\gamma$  en  $g_n$ , ce qui signifie que les liens adhésifs se comportent comme de simples ressorts.

Cependant, ce terme est en facteur avec un terme quadratique en  $\beta$ . Effectivement, on a une perte d'adhésion qui se traduit par un endommagement des ressorts ou plus exactement de leur rigidité qui décroît quadratiquement avec la diminution de la variable  $\beta$ . Ceci peut être en effet mis en valeur lorsque le terme élastique dommageable est écrit sous la forme  $\frac{1}{2}(\beta^2\gamma)g_n^2$ .

- TERME DE DUPRÉ :  $w\beta$

Le modèle suppose qu'une interface entre deux corps collés contient une certaine quantité d'énergie emmagasinée dans les liaisons. Pour provoquer une perte d'adhésion, il faut fournir au système une quantité d'énergie proportionnelle à  $w$ , dite énergie de Dupré. Cette énergie est fournie par le terme élastique vu précédemment, et se traduit par un seuil de force que la colle peut supporter avant le début de l'endommagement et la décroissance de la variable  $\beta$ . La variable  $w$  fixe donc (implicitement) la hauteur du seuil.

- TERME DE NORMALISATION :  $I_{[0,\infty[}(\beta)$

Ce terme force la variable  $\beta$  à rester positive. Ceci provient tout simplement de la définition de la variable  $\beta$  qui est un rapport entre deux quantités dont le résultat est positif, comme vu précédemment. La variable  $\beta$  est alors bornée inférieurement mais pas supérieurement.

Cependant, par définition, l'ensemble d'appartenance effectif de  $\beta$  est  $[0, 1]$ . La borne supérieure sera imposée plus loin.

**Dissipation** – A l'interface, le potentiel de dissipation est choisi de la forme suivante :

$$\Phi_c(\dot{\beta}) = \frac{1}{2}b\dot{\beta}^2 + I_{\mathbf{R}^-}(\dot{\beta}) \quad (3.5)$$

- TERME DE VISCOSITÉ D'ENDOMMAGEMENT :  $\frac{1}{2}b\dot{\beta}^2$

Dans ce modèle, l'évolution de la variable  $\beta$  est déterminée par son comportement en vitesse  $\dot{\beta}$ . Le facteur de "viscosité"  $b$  permet de modifier la vitesse de décohésion selon l'interface considérée.

- TERME D'IRRÉVERSIBILITÉ :  $I_{\mathbf{R}^-}(\dot{\beta})$

Ce terme provient aussi directement de la définition de la variable  $\beta$ . En effet, il est supposé que les liaisons adhésives ne peuvent en aucun cas se reconstituer, et que la rupture d'un lien est un phénomène totalement irréversible. Avec ce terme, on force donc la vitesse  $\dot{\beta}$  de décohésion à être négative ou nulle. Ainsi,  $\beta$  ne peut que décroître. Maintenant, si il est fixé qu'au temps originel du système  $\beta(0) \leq 1$ , alors compte tenu de  $\beta \in [0, \infty[$

imposé précédemment,  $\beta$  appartiendra toujours à l'intervalle  $[0, 1]$ , comme annoncé.

### Analyse

**Lois d'état** – Comme vu précédemment, les lois d'état sont les dérivées par rapport aux variables d'état des potentiels, conformément à l'approche des matériaux standards généralisés. Le potentiel d'énergie libre possède deux variables d'état  $g_n$  et  $\beta$  auxquelles on associe deux forces thermodynamiques dites duales. Nous notons :

- la force thermodynamique  $p_n$  (pression normale) associée à  $g_n$
- la force thermodynamique  $R_\beta$  (énergie d'adhésion) associée à  $\beta$

Sachant que l'énergie libre  $\Psi_c$  n'est pas différentiable par rapport à  $g_n$  au sens de l'analyse classique et que la dissipation  $\Phi_c$  est indépendante de  $\dot{g}_n$ , on déduit de (3.3) la relation suivante :

$$p_n \in \partial_{g_n} \Psi_c = \partial \mathbf{I}_{\mathbf{R}^+}(g_n) + \gamma \beta^2 g_n \quad (3.6)$$

Cette relation est équivalente au système d'inégalités suivant (Figure 3.2) :

$$g_n \geq 0, \quad p_n - \gamma \beta^2 g_n \leq 0, \quad (p_n - \gamma \beta^2 g_n) g_n = 0 \quad (3.7)$$

On reconnaît les conditions d'imperméabilité-séparation, de répulsion-adhésion ainsi que celle de complémentarité.

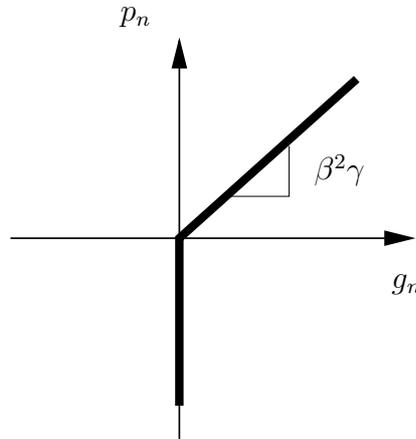


FIG. 3.2 – Graphe du contact avec adhésion (modèle de Cangémi–Raous, avec  $\beta$  constant).

Noter que le contact normal est classique avec un comportement élastique en traction dont la rigidité est proportionnelle à  $\beta^2$ .

L'énergie libre  $\Psi$  n'étant pas différentiable par rapport à  $\beta$  au sens de l'analyse classique, la relation (3.3) nous permet de dériver l'énergie d'adhésion :

$$R_\beta \in -\partial_\beta \Psi_c = -\partial \mathbf{I}_{[0, \infty[}(\beta) - \gamma g_n^2 \beta + w \quad (3.8)$$

Cette relation est équivalente au système de relations suivant (Figure 3.3) :

$$\begin{aligned} R_\beta &\geq w && \text{si } \beta = 0 \\ R_\beta &= w - \gamma g_n^2 \beta && \text{si } \beta > 0 \end{aligned} \quad (3.9)$$

qui peut aussi s'écrire sous la forme :

$$\beta \geq 0, \quad R_\beta \geq w - \gamma g_n^2 \beta, \quad \beta(R_\beta - w + \gamma g_n^2 \beta) = 0 \quad (3.10)$$

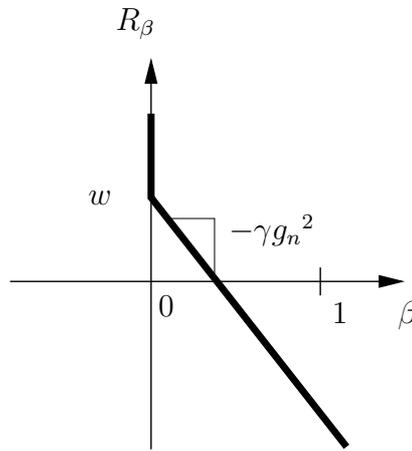


FIG. 3.3 – Force thermodynamique associée à  $\beta$ .

**Lois d'évolution** – Le phénomène de décohésion est un processus entièrement dissipatif, introduit par les lois complémentaires que l'on dérive du potentiel de dissipation. Ainsi, obtient-on d'après (3.3) :

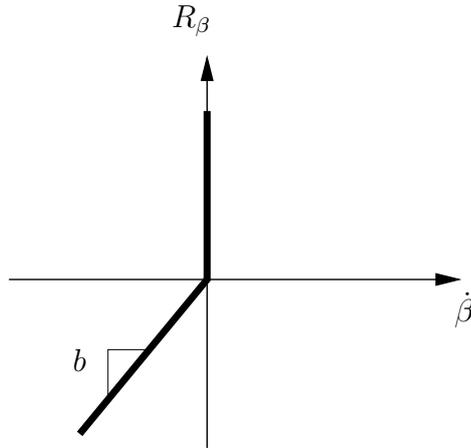
$$R_\beta \in \frac{\partial \Phi_c}{\partial \dot{\beta}} = b \dot{\beta} + \partial I_{\mathbf{R}^-}(\dot{\beta}) \quad (3.11)$$

Cette relation est équivalente au système d'inégalités suivant (Figure 3.4) :

$$\begin{aligned} R_\beta &\geq 0 && \text{si } \dot{\beta} = 0 \\ R_\beta &= b \dot{\beta} && \text{si } \dot{\beta} < 0 \end{aligned} \quad (3.12)$$

qui peut aussi s'écrire sous la forme :

$$\dot{\beta} \leq 0, \quad R_\beta \geq b \dot{\beta}, \quad \dot{\beta}(R_\beta - b \dot{\beta}) = 0 \quad (3.13)$$

FIG. 3.4 – Force thermodynamique associée à  $\dot{\beta}$ .

**Résolution** – Pour obtenir la loi d'évolution de la variable  $\beta$ , il faut écrire l'égalité entre  $R_\beta$  dérivé du potentiel d'énergie libre et celui dérivé du potentiel de dissipation. Autrement dit, il faut effectuer l'intersection des deux graphes précédents pour obtenir l'expression de  $\dot{\beta}$  (voir (3.3),  $R_\beta \in -\partial_\beta \Psi_c \cap \partial_{\dot{\beta}} \Phi_c$ ).

Analytiquement cela revient à résoudre le système d'inégalités obtenu de (3.9) et (3.12), soit :

$$\left\{ \begin{array}{ll} R_\beta \geq w & \text{si } \beta = 0 \\ R_\beta = w - \gamma g_n^2 \beta & \text{si } \beta > 0 \\ R_\beta \geq 0 & \text{si } \dot{\beta} = 0 \\ R_\beta = b \dot{\beta} & \text{si } \dot{\beta} < 0 \end{array} \right. \quad (3.14)$$

Pour les discussions qui suivent, on suppose que l'hypothèse du contact unilatéral  $g_n \geq 0$  est toujours vérifiée et que l'énergie de Dupré est positive  $w > 0$ .

DISCUSSION :

$$\text{si } \beta = 0 \text{ et } \dot{\beta} < 0 \implies b \dot{\beta} \geq w \text{ contradiction}$$

$$\text{si } \beta = 0 \text{ et } \dot{\beta} = 0 \implies R_\beta \geq w \text{ état stable}$$

On en déduit la conséquence suivante :

### Conséquence 1

$$\text{Si } \beta = 0 \iff \dot{\beta} = 0 \quad (3.15)$$

DISCUSSION :

$$\text{si } \beta > 0 \text{ et } \dot{\beta} < 0 \implies \dot{\beta} = -\frac{1}{b}(\gamma g_n^2 \beta - w) \text{ condition : } \gamma g_n^2 \beta > w$$

$$\text{si } \beta > 0 \text{ et } \dot{\beta} = 0 \implies \gamma g_n^2 \beta \leq w$$

On en déduit la conséquence suivante :

**Conséquence 2**

$$\text{Si } \beta \in ]0, \infty[ \iff \begin{cases} \dot{\beta} = -\frac{1}{b}(\gamma g_n^2 \beta - w) & \text{si } \gamma g_n^2 \beta > w \\ \dot{\beta} = 0 & \text{si } \gamma g_n^2 \beta \leq w \quad (\text{sinon}) \end{cases} \quad (3.16)$$

On peut condenser les conséquences 1 et 2, et obtenir :

$$\text{Si } \beta \geq 0 \iff \begin{cases} \dot{\beta} = -\frac{1}{b}(\gamma g_n^2 \beta - w) & \text{si } \gamma g_n^2 \beta > w \\ \dot{\beta} = 0 & \text{si } \gamma g_n^2 \beta \leq w \quad (\text{sinon}) \end{cases} \quad (3.17)$$

On peut aussi réécrire ce système de la manière suivante, où  $D_{\mathbf{R}^-}[x]$  indique la distance de  $x$  à l'ensemble  $\mathbf{R}^-$  (voir l'annexe A) :

$$\text{Si } \beta \geq 0 \iff \dot{\beta} = -\frac{1}{b}D_{\mathbf{R}^-}[\gamma g_n^2 \beta - w] \quad (3.18)$$

Maintenant si la valeur de  $\beta$  originelle est choisie de manière à respecter les définitions, nous obtenons :

$$\begin{cases} \beta(0) = \beta_0 \in [0, 1] \\ \dot{\beta} = -\frac{1}{b}D_{\mathbf{R}^-}[\gamma g_n^2 \beta - w] \end{cases} \quad (3.19)$$

L'intégration de cette équation différentielle lorsqu'on a décohéssion sans décharge ( $\gamma g_n^2 \beta > w$ ) donne la décroissance suivante :

$$\beta(t) = \left(\beta_0 - \frac{w}{\gamma g_n^2}\right)e^{-\left(\frac{\gamma g_n^2}{b}\right)t} + \frac{w}{\gamma g_n^2} \quad (3.20)$$

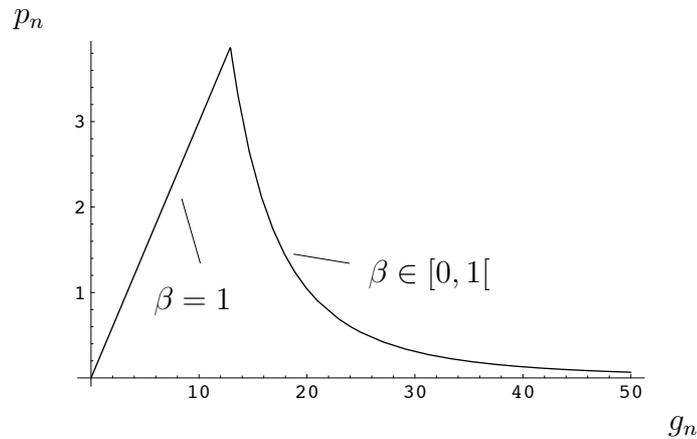


FIG. 3.5 – Loi d'adhésion-décohéssion lente de Cangémi-Raous.

Finalement, la réponse du modèle en traction est la suivante (Figure 3.5). Il y a d'abord une montée élastique lorsqu'on exerce la traction (où  $\beta = 1$ ). Ensuite, dès que la force élastique dépasse un certain seuil, il y a décroissance de  $\beta$  entraînant ainsi la décohésion.

Pour mettre en évidence le rôle de la variable  $b$ , nous avons tracé le même graphe mais pour différentes valeurs de  $b$  (Figure 3.6).

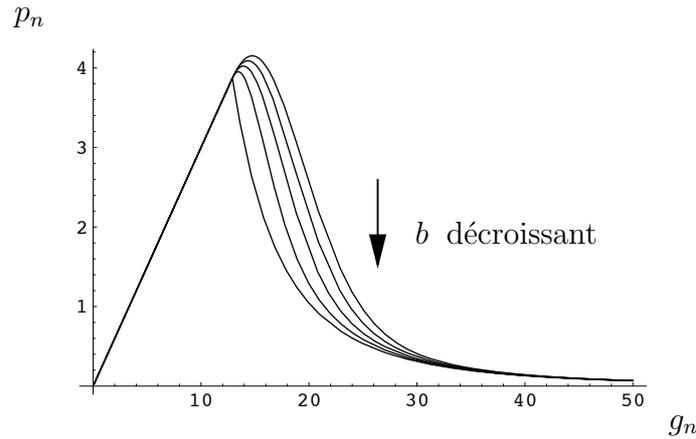


FIG. 3.6 – Loi d'adhésion de Cangémi.

On constate que la variable  $b$  influence la vitesse de décohésion mais aussi la “viscosité” du pic lorsque la rupture se produit. Les pics les plus pointus sont observés lorsque  $b$  tend vers 0.

### Résumé, commentaires et remarques

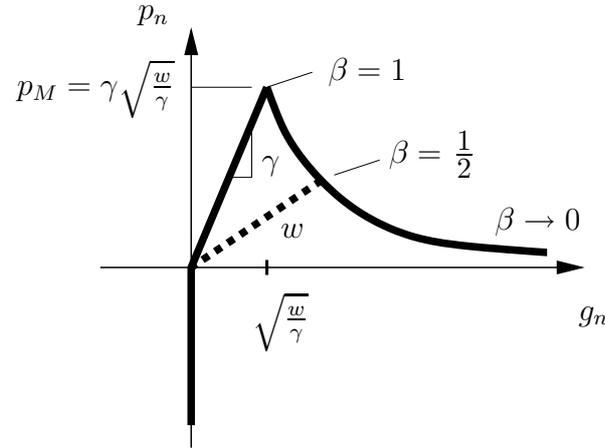
L'ensemble du problème d'adhésion normale à l'interface se résume par les expressions suivantes :

$$p_n - \gamma\beta^2 g_n \leq 0, \quad g_n \geq 0, \quad (p_n - \gamma\beta^2 g_n)g_n = 0$$

$$\beta(0) = \beta_0 \in [0, 1] \tag{3.21}$$

$$\dot{\beta} = -\frac{1}{b} D_{\mathbf{R}^-} [\gamma g_n^2 \beta - w]$$

Le graphe du contact normal avec adhésion correspondant est le suivant (avec une décharge) (Figure 3.7) :

FIG. 3.7 – Loi d'adhésion de Cangémi ( $b = 0$ ).

**Commentaire 3.2.1** En combinant l'équation (3.6) de la pression normale et (3.20) d'évolution de  $\beta(t)$ , on obtient la pression normale de décohesion ( $g_n > \sqrt{\frac{w}{\gamma}} > 0$ ) :

$$p_n = \gamma g_n \left[ \left( \beta_0 - \frac{w}{\gamma g_n^2} \right)^2 e^{-2\left(\frac{\gamma g_n^2}{b}\right)t} + \frac{2w}{\gamma g_n^2} \left( \beta_0 - \frac{w}{\gamma g_n^2} \right) e^{-\left(\frac{\gamma g_n^2}{b}\right)t} + \frac{w^2}{\gamma^2 g_n^4} \right] \quad (3.22)$$

La réponse (3.22) montre que si  $g_n$  est constant, il y a tout de même une relaxation temporelle (dépendante de  $b$ ) faisant évoluer la force en fonction du temps. Nous n'avons donc pas indépendance temporelle entre  $p_n$  et  $g_n$ .

**Commentaire 3.2.2** L'analyse de (3.22) indique aussi que si les effets visqueux sont supprimés (en faisant tendre  $b \rightarrow 0$ ), l'évolution de  $p_n$  décrit une hyperbole cubique en  $g_n$  (Figure 3.7) :

$$p_n = \frac{w^2}{\gamma g_n^3} \quad (3.23)$$

Ceci signifie que la pression ne s'annule totalement que lorsque  $g_n \rightarrow \infty$ , ce qui est physiquement peu réaliste, bien que la pression devienne vite négligeable pour un  $g_n$  relativement petit.

**Remarque 3.2.2** L'analyse du graphe de contact normal avec adhésion (Figure 3.7) indique encore que lors d'une décharge après un certain endommagement (par exemple  $\beta = \frac{1}{2}$ ), la rigidité des liens adhésifs a diminué d'une quantité proportionnelle à  $\beta^2$ . La hauteur du pic d'adhésion a également diminué. On voit que pour  $\beta = 0$ , on retrouve le graphe du contact normal sans adhésion (Figure 2.14).

**Remarque 3.2.3** Sans rentrer dans les détails, ce modèle d'adhésion peut aussi inclure des effets tangents et notamment être couplé à une loi de frottement de type Coulomb. En effet, en rajoutant dans l'énergie libre un terme élastique endommageable tangent  $\frac{1}{2}\gamma\beta^2\|\mathbf{g}_t\|^2$  décrivant le cisaillement des liens adhésifs ainsi qu'un terme de frottement  $I_{C(p_n^c)}^*(\mathring{\mathbf{g}}_t)$  ( $p_n^c$  étant la pression normale uniquement due au contact) dans le potentiel de dissipation, le graphe tangent devient le suivant (Figure 3.8) :

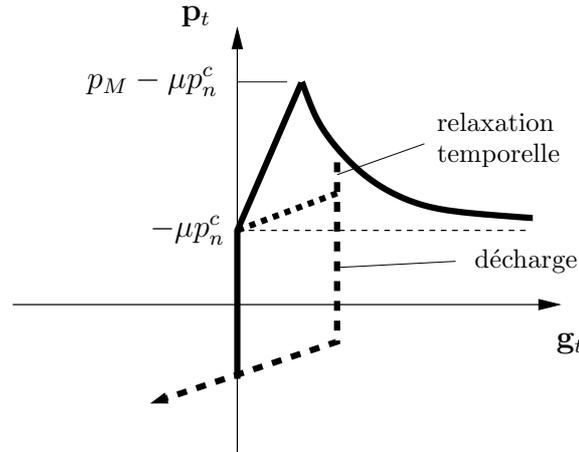


FIG. 3.8 – Comportement tangent avec frottement.

**Remarque 3.2.4** Du fait que la colle est dotée d'une élasticité, la raison d'être de la variable  $\beta$  (qui, on le rappelle, était d'arriver à distinguer un contact adhésif sous tension avec une colle *intacte* du même contact avec une colle *rompue*) devient caduque, puisqu'on peut utiliser  $g_n$  ( $g_n > 0$ , supérieur ou égal à  $\sqrt{\frac{w}{\gamma}}$ ). C'est en partie ce constat qui a motivé la recherche d'une alternative.

### 3.2.3 Une nouvelle approche basée sur des filaments plastiques écouissables

#### Description générale et notion d'écart adhésif

Nous supposons toujours que l'état adhésif est caractérisé par une multitude de filaments distribués le long de l'interface. Lorsque nous appliquons une charge de traction à une structure collée à une autre (Figure 3.9 a)), nous apercevons (selon la colle) le long de l'interface des petits filaments adhésifs (Figure 3.9 b)). Au départ, ces filaments sont supposés avoir une longueur nulle (Figure 3.9 a)), surface collée). Une première constatation est qu'une fois étirés d'une certaine longueur, ces filaments ne se raccourcissent pas lorsque la charge diminue, voire s'inverse. Ils se replient sur eux-mêmes, et ne transmettent plus aucune charge entre les deux corps (Figure 3.9 c)). Aussi, lorsque nous appliquons une charge

suffisante pour provoquer un décollement, les éléments les plus étirés sont les plus faibles, et cassent (Figure 3.9 d)).

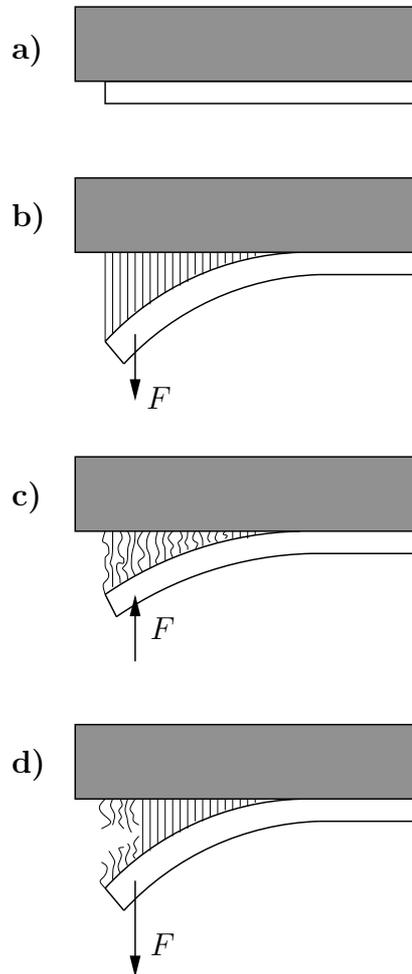


FIG. 3.9 – Schématisation du comportement des filaments lors du décollement.

Contrairement au modèle de Frémond qui supposait que l'état des liens était soit actif soit inactif, cette approche diffère par le fait que les liens obéissent maintenant à une loi de comportement spécifique. Pour tenir compte de l'étirement, nous postulons que les liens ont un comportement de type plastique. Nous introduisons donc une variable interne  $g^a$  qui correspond à la variable de déformation plastique en théorie de la plasticité et qui représente la longueur distendue plastiquement par les filaments. Ensuite, pour considérer l'endommagement des filaments puis leur rupture, nous rajoutons à notre loi plastique d'interface un écrouissage négatif [96], s'annulant selon la valeur de  $g^a$ . En effet, notre variable interne n'est plus une proportion comme précédemment, mais devient une variable cinématique d'écart adhésif cumulé  $g^a$  mesurant l'étirement plastique des filaments. A cette variable  $g^a$ , nous associons la force duale adhésive  $p^a$ .

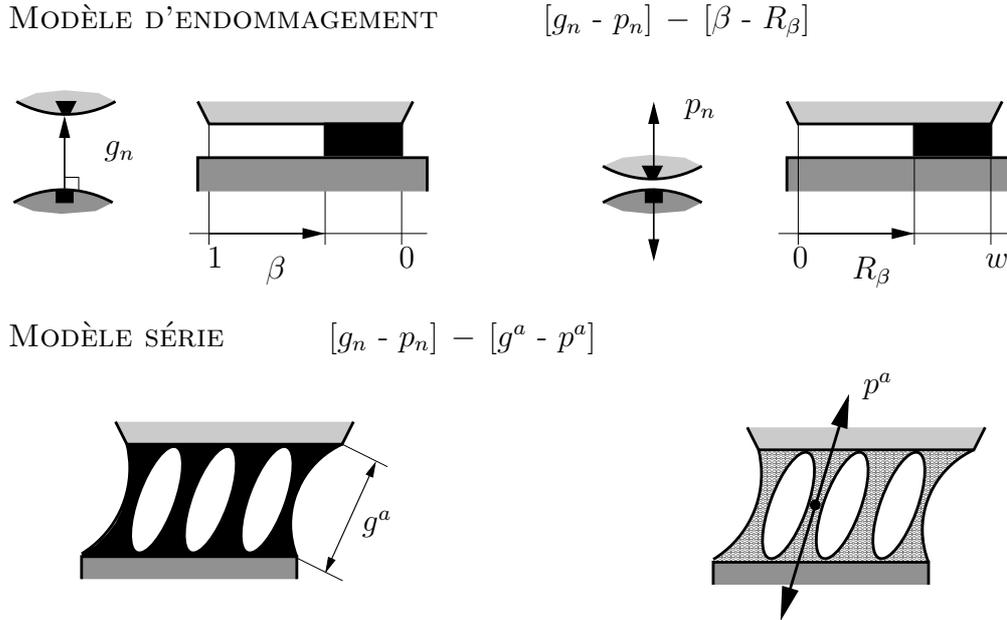


FIG. 3.10 – Comparaison des deux approches.

La figure 3.10 montre la différence principale entre l'approche à la Frémond où la variable  $\beta$  indique l'état adhésif sur une portion de l'interface et le modèle proposé où chaque filament se comporte de manière plastique selon  $g^a$ . Les forces duales  $R_\beta$  et  $p^a$  représentent le travail adhésif dissipé et la force adhésive (tension) fournie par chaque filament, respectivement.

### Les potentiels

**Energie libre** – A l'interface, nous choisissons le potentiel d'énergie libre suivant :

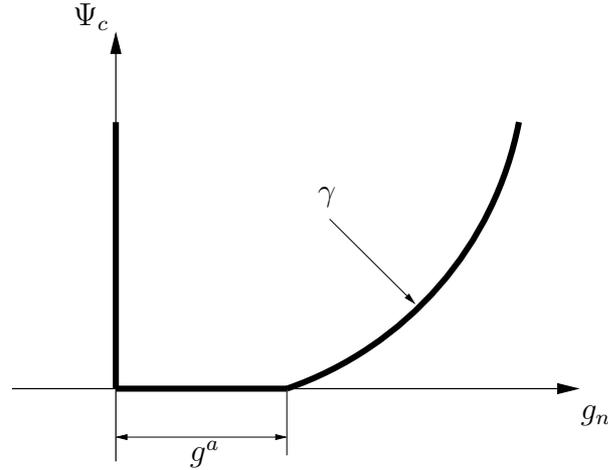
$$\Psi_c(g_n, g^a) = I_{\mathbf{R}^+}(g_n) + \frac{1}{2}\gamma D_{\mathbf{R}^-}^2(g_n - g^a) \quad (3.24)$$

- TERME DE CONTACT NORMAL :  $I_{\mathbf{R}^+}(g_n)$

Nous ne reviendrons pas sur ce terme.

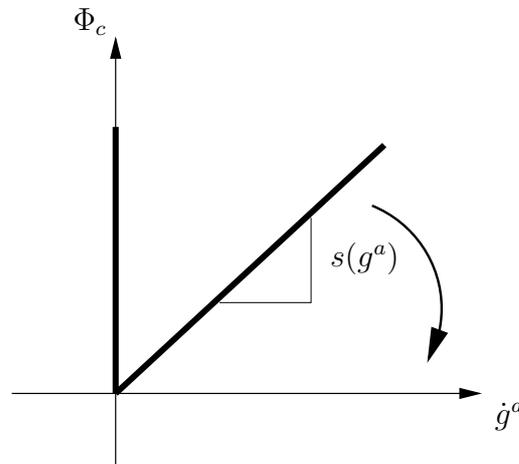
- TERME ADHÉSIF :  $\frac{1}{2}\gamma D_{\mathbf{R}^-}^2(g_n - g^a)$

Nous reconnaissons un terme d'inspiration élasto-plastique. Nous y introduisons la distance par rapport à  $\mathbf{R}^-$ , qui annule ce terme si  $g_n < g^a$ , pour modéliser le fait que les filaments n'ont aucune rigidité en compression.

FIG. 3.11 – Potentiel d'énergie libre d'interface  $\Psi_c$  en fonction de  $g_n$ .

**Dissipation** – A l'interface, nous choisissons le potentiel de dissipation non-différentiable suivant :

$$\Phi_c(\dot{g}^a; g^a) = s(g^a)\dot{g}^a + \mathbf{I}_{\mathbf{R}^+}(\dot{g}^a) = \mathbf{I}_{[-\infty, s(g^a)]}^*(\dot{g}^a) \quad (3.25)$$

FIG. 3.12 – Potentiel de dissipation d'interface  $\Phi_c$  en fonction de  $\dot{g}^a$ .

– TERME DE SEUIL :  $s(g^a)\dot{g}^a$

En raison de la discontinuité (coin) à l'origine de la dissipation, les forces adhésives sont limitées par un seuil. L'endommagement des filaments interviendra lorsque ces forces seront supérieures à ce seuil, qui est choisi dépendant de  $g^a$ . En effet, la fonction  $s(g^a)$  décrira l'évolution de la décohésion lors de l'étirement des filaments. Ce sera donc une fonction positive décroissante qui sera égale à la force maximale adhésive lorsque  $g^a = g_0^a$  (typiquement pour une colle intacte  $g_0^a = 0$ , voir Figure 3.9 a)).

Par exemple, la fonction  $s(g^a)$  pourra prendre la forme suivante :

$$s(g^a) = \begin{cases} p_M(1 - \frac{g^a}{g_M}) & \text{si } 0 \leq g_0^a \leq g^a \leq g_M \\ 0 & \text{si } g^a > g_M \end{cases} \quad (3.26)$$

$p_M$  est le *seuil adhésif* (limite d'adhésion ou seuil de décohésion),  $g_M$  est l'*écart adhésif maximal* (écart de décohésion, de rupture des filaments) sur lequel  $g^a$  est actif (Figure 3.13).

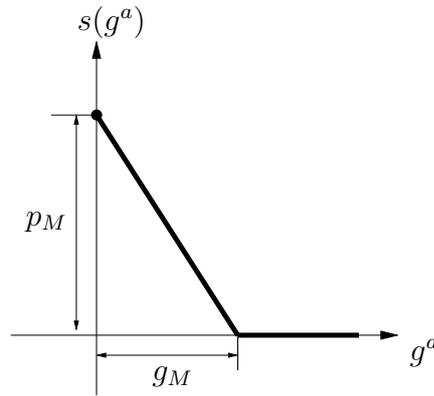


FIG. 3.13 – Exemple de choix de fonction pour  $s(g^a)$ .

– TERME D'IRRÉVERSIBILITÉ :  $\mathbf{I}_{\mathbf{R}^+}(g^a)$

L'adhésion étant un phénomène irréversible, ce terme garantit que  $g^a$  ne peut que croître et ainsi le système ne peut évoluer que d'un état adhésif vers un état décollé (un recollement est exclu).

## Analyse

**Lois d'état** – Nous associons des forces thermodynamiques duales à nos variables :

- la force thermodynamique  $p_n$  (pression de contact) associée à  $g_n$
- la force thermodynamique  $p^a$  associée à  $g^a$  (traction adhésive)

On déduit donc de (3.24) :

$$p_n \in \partial_{g_n} \Psi_c = \partial \mathbf{I}_{\mathbf{R}^+}(g_n) + \{\gamma \mathbf{P}_{\mathbf{R}^+}(g_n - g^a)\} \quad (3.27)$$

Cette relation est équivalente au système d'inégalités suivant (Figure 3.14) :

$$g_n \geq 0, \quad p_n - \gamma \mathbf{P}_{\mathbf{R}^+}(g_n - g^a) \leq 0, \quad (p_n - \gamma \mathbf{P}_{\mathbf{R}^+}(g_n - g^a))g_n = 0 \quad (3.28)$$

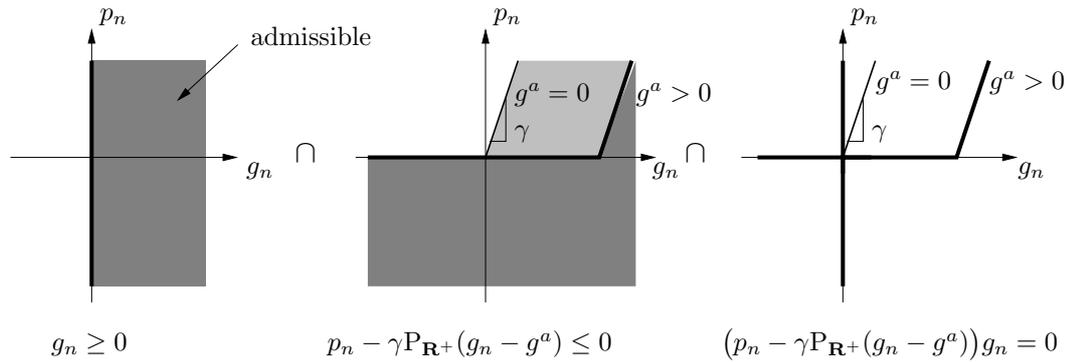


FIG. 3.14 – Intersection du système d'inégalités.

dont la combinaison constitue le graphe suivant (Figure 3.15), équivalent à (3.27) et (3.28) :

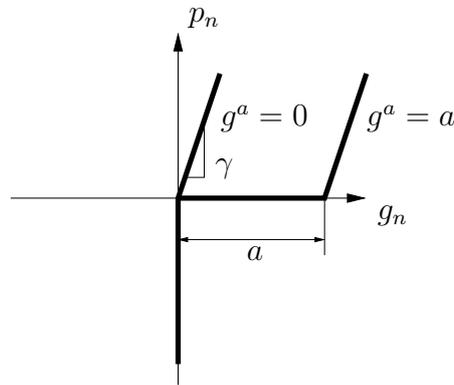
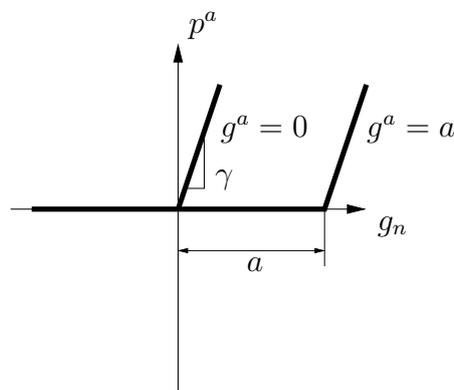


FIG. 3.15 – Graphe du contact avec adhésion.

Ensuite, on dérive la force adhésive (Figure 3.16) :

$$p^a = -\frac{\partial \Psi_c(g_n, g^a)}{\partial g^a} = \gamma P_{\mathbf{R}^+}(g_n - g^a) \quad (3.29)$$


 FIG. 3.16 – Traction adhésive  $p^a$  associée à  $g^a$ .

On constate qu'on peut aussi réécrire les relations (3.28) sous la forme équivalente :

$$g_n \geq 0 \quad , \quad p_n - p^a(g_n, g^a) \leq 0 \quad , \quad (p_n - p^a(g_n, g^a))g_n = 0 \quad (3.30)$$

**Loi complémentaire** – D'autre part, on dérive du potentiel de dissipation :

$$p^a \in \partial_{\dot{g}^a} \Phi_c(\dot{g}^a; g^a) = \partial \mathbf{I}_{[-\infty, s(g^a)]}^*(\dot{g}^a) = s(g^a) + \partial \mathbf{I}_{\mathbf{R}^+}(\dot{g}^a) \quad (3.31)$$

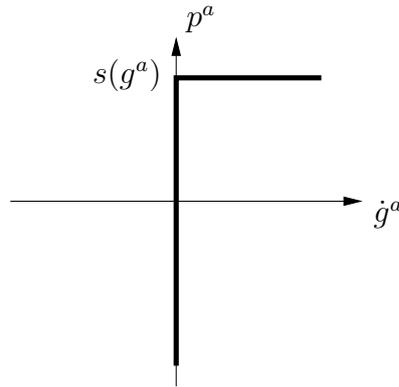


FIG. 3.17 – Traction adhésive  $p^a$  associée à  $\dot{g}^a$ .

La loi d'évolution d'étirement en tension peut aussi se mettre sous la forme (Figure 3.17) :

$$\dot{g}^a \geq 0 \quad , \quad p^a - s(g^a) \leq 0 \quad , \quad \dot{g}^a(p^a - s(g^a)) = 0 \quad (3.32)$$

**Résolution** – De (3.29) et (3.31), il résulte le système suivant à résoudre :

$$\begin{cases} p^a = \gamma \mathbf{P}_{\mathbf{R}^+}(g_n - g^a) \\ p^a \in \partial \mathbf{I}_{[-\infty, s(g^a)]}^*(\dot{g}^a) \end{cases} \quad (3.33)$$

On en déduit la relation suivante :

$$\gamma \mathbf{P}_{\mathbf{R}^+}(g_n - g^a) \in \partial \mathbf{I}_{[-\infty, s(g^a)]}^*(\dot{g}^a) \quad (3.34)$$

De même que pour la plasticité au paragraphe (2.2.4) , nous résolvons ce système de manière incrémentale. On peut décomposer  $g^a$  en écrivant  $g^a = g_0^a + \dot{g}^a dt$ , on réécrit la relation (3.34) :

$$\gamma \mathbf{P}_{\mathbf{R}^+}(g_n - g_0^a - \dot{g}^a dt) \in \partial \mathbf{I}_{[-\infty, s(g^a)]}^*(\dot{g}^a) \quad (3.35)$$

Si  $g_n \leq g_0^a$  , et sachant que  $\dot{g}^a \geq 0$ , la résolution du système devient triviale et donne :

$$p^a = 0 \quad (3.36)$$

D'autre part, si  $g_n - g_0^a > 0$ , la relation (3.34) s'écrit :

$$\gamma(g_n - g_0^a - \dot{g}^a dt) \in \partial \mathbf{I}_{[-\infty, s(g^a)]}^*(\dot{g}^a) \quad (3.37)$$

qui s'écrit aussi (Figure 3.18) :

$$\gamma(g_n - g_0^a) \in \partial \mathbf{I}_{[-\infty, s(g^a)]}^*(\dot{g}^a) + \{\gamma \dot{g}^a dt\} \quad (3.38)$$

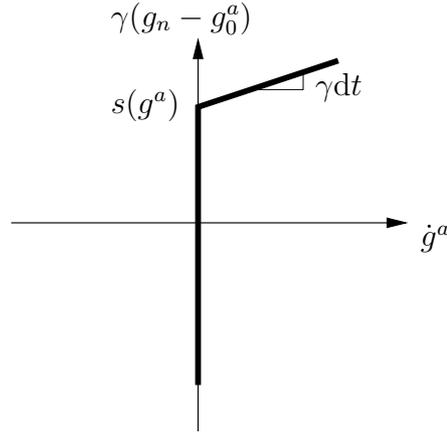


FIG. 3.18 – Graphe de  $\gamma(g_n - g_0^a)$  en fonction de  $\dot{g}^a$ .

Il en résulte :

$$\text{Si } \gamma(g_n - g_0^a) \leq s(g^a) \iff \begin{cases} \dot{g}^a = 0 \\ p^a = \gamma(g_n - g_0^a) \end{cases} \quad (3.39)$$

$$\text{Si } \gamma(g_n - g_0^a) > s(g^a) \iff \begin{cases} \dot{g}^a = \frac{1}{\gamma dt}(\gamma(g_n - g_0^a) - s(g^a)) \\ p^a = s(g^a) \end{cases} \quad (3.40)$$

Si on récapitule, en se servant de (3.39) et (3.40), on peut écrire :

$$p^a = \begin{cases} \gamma(g_n - g_0^a) & \text{si } \gamma(g_n - g_0^a) \leq s(g^a) \\ s(g^a) & \text{si } \gamma(g_n - g_0^a) > s(g^a) \end{cases} \quad (3.41)$$

En incluant le cas (3.36), le système complet s'écrit :

$$p^a = \begin{cases} 0 & \text{si } \gamma(g_n - g_0^a) \leq 0 \\ \gamma(g_n - g_0^a) & \text{si } 0 < \gamma(g_n - g_0^a) \leq s(g^a) \\ s(g^a) & \text{si } \gamma(g_n - g_0^a) > s(g^a) \end{cases} \quad (3.42)$$

ou encore (sachant que  $s(g^a) \geq 0$ ) :

$$p^a = \mathbf{P}_{[-\infty, s(g^a)]}(\gamma \mathbf{P}_{\mathbf{R}^+}(g_n - g_0^a)) \quad (3.43)$$

### Résumé et remarques

L'ensemble du problème d'adhésion normale à l'interface se résume par les expressions suivantes :

$$g_n \geq 0, \quad p_n - p^a \leq 0, \quad (p_n - p^a)g_n = 0 \quad (3.44)$$

$$p^a = P_{[-\infty, s(g^a)]}(\gamma P_{\mathbf{R}^+}(g_n - g_0^a))$$

$p^a$  est la projection d'une contrainte d'essai  $\gamma P_{\mathbf{R}^+}(g_n - g_0^a)$  sur un critère dont le domaine décroît avec la variable interne  $g^a$ . Le graphe du contact normal avec adhésion correspondant est le suivant (avec une décharge) (Figure 3.19) :

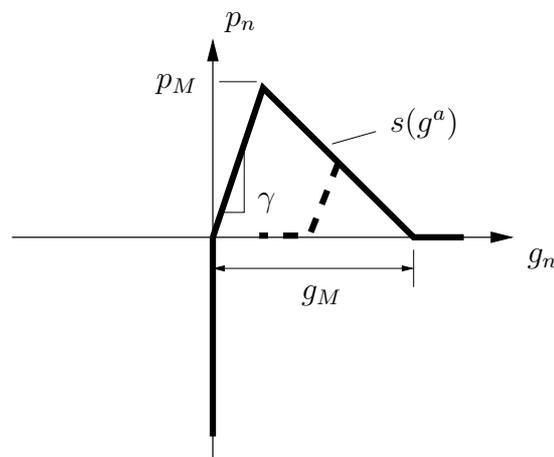


FIG. 3.19 – Loi d'adhésion.

Lorsqu'on exerce une traction, on a  $p_n = p^a$ . Comme pour le modèle exposé précédemment, il y a tout d'abord une montée élastique ( $\dot{g}^a = 0 \Rightarrow g^a = g_0^a$ ) tant que la force adhésive est au dessous du seuil  $s(g_0^a) = p_M$ . Au delà de ce seuil, il y a décohesion ( $\dot{g}^a > 0$ ) et la force adhésive  $p^a = s(g^a)$  décroît de manière linéaire avec l'augmentation de  $g^a$ . Il y a endommagement par “distension”, “étirement”. Cependant, la décohesion s'effectue sans endommagement de la rigidité des filaments. En effet, une décharge s'effectue toujours selon la même pente élastique. Aussi, la force adhésive devient nulle si nous comprimons les filaments préalablement étirés. Si on recharge ces filaments et on poursuit la décohesion,  $g^a$  devient supérieur à une valeur  $g_M$  pour laquelle  $s(g^a)$  devient nul. Il y a alors rupture du filament et on retrouve le graphe de contact normal sans adhésion (Figure 2.14).

**Commentaire 3.2.3** Nous constatons qu'il y a “indépendance temporelle” entre  $p_n$  et  $g_n$  et il n'y a pas d'effet visqueux. Cette approche permet d'obtenir une loi d'adhésion indépendante des taux.

**Remarque 3.2.5** Le choix de la fonction de décroissance  $s(g^a)$  reste relativement libre. En choisissant la décroissance (3.26), on fixe une distance adhésive

finie après laquelle la force adhésive devient nulle. La décroissance est linéaire car c'est la manière la plus simple pour faire décroître une fonction (simplicité). Il est bien entendu aussi possible de choisir une fonction de décroissance non-linéaire et/ou ne s'annulant pas forcément. Ce choix doit être précisé ultérieurement en relation avec des expériences de décohésion sur des interfaces (réalisme).

### 3.2.4 Formulation du contact avec frottement et adhésion

#### Description générale

La prise en compte des phénomènes tangents s'effectue en deux étapes. Tout d'abord, il faut déterminer le comportement des filaments lors du cisaillement entre les deux corps, avant d'inclure la loi de frottement.

**Cinématique de l'adhésion** – Dans la configuration de référence, les points en adhésion  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{x}'$ , appartenant respectivement au contacteur et à la cible sont confondus (Figure 3.20). On suppose qu'un lien adhésif existe entre ces deux points.

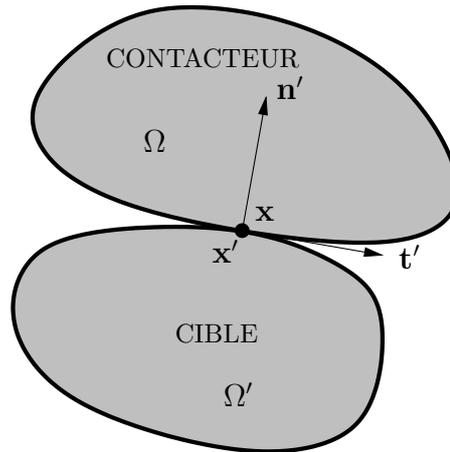


FIG. 3.20 – Configuration de référence de deux corps avec un lien adhésif.

Ensuite lors de l'évolution du système, la position de ces deux points devient respectivement  $\mathbf{y}(\mathbf{x}, t)$  et  $\mathbf{y}'(\mathbf{x}, t)$  (Figure 3.21). Nous supposons alors que les filaments adhésifs relient toujours ces deux points. Ceci restant vrai quelle que soit la configuration des deux corps, on suppose de plus que la force adhésive agit selon la direction radiale  $\mathbf{d}$  reliant ces deux points (en accord avec le principe d'équilibre des moments local nominal), avec :

$$\mathbf{d} = \frac{\mathbf{y} - \mathbf{y}'}{\|\mathbf{y} - \mathbf{y}'\|} = \frac{\mathbf{g}}{\|\mathbf{g}\|} \quad (3.45)$$

Si on note  $p^a = \|\mathbf{p}^a\|$  l'intensité de la force adhésive, alors le vecteur force adhésive s'écrit  $\mathbf{p}^a = p^a \mathbf{d}$ . La direction de la force adhésive étant fixée, on a

donc  $p^a = p^a(\|\mathbf{g}\|)$ . L'intensité de la force adhésive ne dépendant que de la norme de l'écart, si nous fixons le point  $\mathbf{y}'$ , et maintenons l'intensité d'adhésion  $p^a$  constante, les régions admissibles de  $\mathbf{y}$  décrivent des sphères autour de  $\mathbf{y}'$  (Figure 3.21). Par conséquent, la hauteur du pic en cisaillement tangential est la même que celle du pic en traction normale.

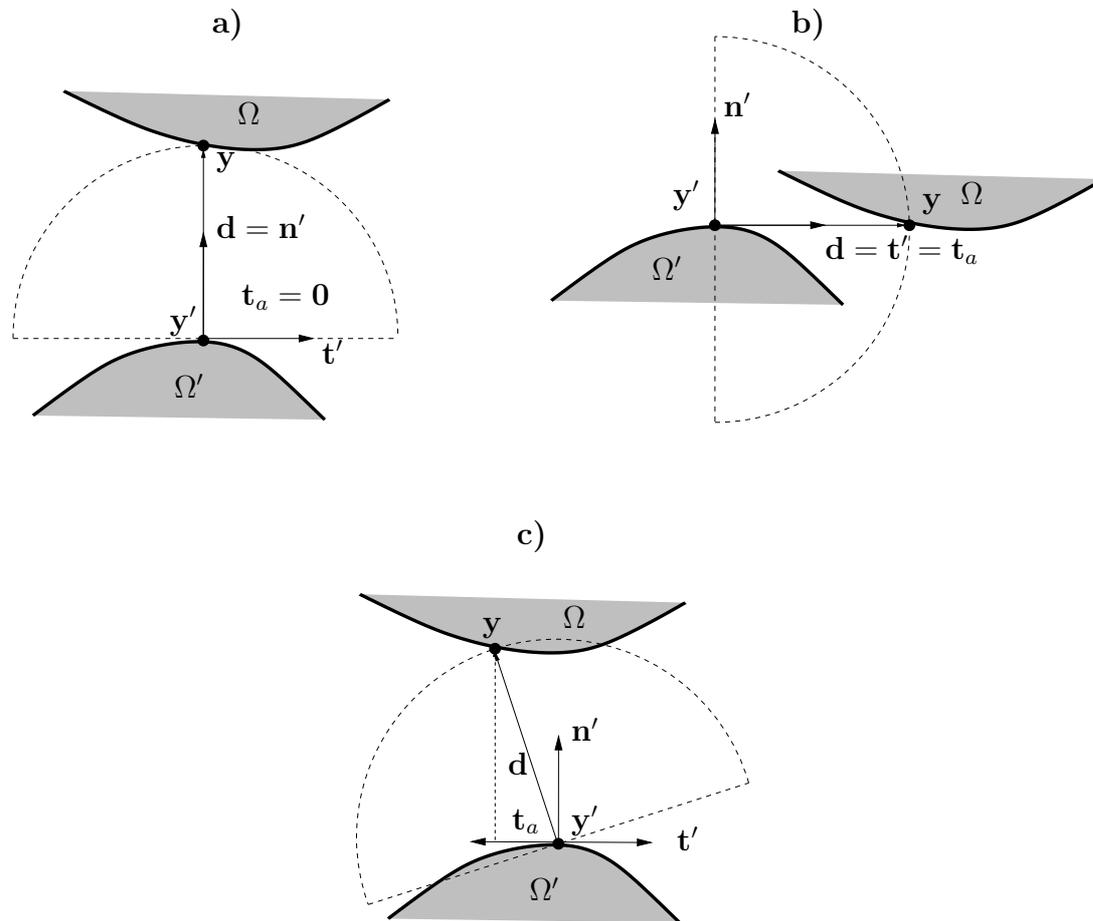


FIG. 3.21 – Configuration actuelle de deux corps avec **a)** traction normale **b)** cisaillement et **c)** séparation dans une direction  $\mathbf{d}$  quelconque. Noter l'hémisphère autour de  $\mathbf{y}'$ .

**Adhésion et contact normal** – L'adhésion n'influence pas le contact normal. En effet dans la direction normale, si  $g_n > 0$ , alors il y a tension-séparation (faisant uniquement intervenir l'adhésion) et si  $g_n < 0$  (toléré en pénalité) alors il y a pression-non pénétration (faisant uniquement intervenir le contact unilatéral). Nous avons vu jusqu'ici que les forces adhésives agissent selon la direction radiale  $\mathbf{d}$ . Par contre, le contact normal influence l'adhésion car nous faisons l'hypothèse supplémentaire que nos forces adhésives n'agissent que dans le plan tangent selon la direction  $\mathbf{t}_a$  (projection de  $\mathbf{d}$  sur le plan tangent) lorsqu'il y a contact, quelle que soit la pénétration  $g_n < 0$  (tolérée en pénalité) entre les deux corps. De même, si nous fixons le point  $\mathbf{y}'$ , les domaines où  $\mathbf{y}$  varie et l'intensité d'adhésion reste constante ne décrivent plus que des hémisphères autour de  $\mathbf{y}'$ .

**Adhésion et frottement tangentiel** – Lorsque  $p_n < 0$ , les phénomènes d'adhésion et de frottement se manifestent simultanément. Contrairement à l'adhésion, les points de frottement évoluent au cours du mouvement ( $\mathbf{y}'$  ne dépend pas de  $\mathbf{x}'$  mais de  $\mathbf{x}^\perp$ ) et la direction de la force de frottement dépend de la direction de glissement. L'hypothèse selon laquelle la direction des forces adhésives dépend toujours de  $\mathbf{d}$  nous amène à supposer dans ce modèle que le couplage entre le frottement et l'adhésion se résume à une superposition des deux phénomènes. En effet, dans certains cas, la force de frottement peut avoir une direction différente de celle de l'adhésion tangente. Dans ce sens, nous pensons que frottement et adhésion sont deux phénomènes indépendants.

**Hypothèse supplémentaire des petits déplacements** – Nous faisons aussi dans la suite de l'étude l'hypothèse des petits déplacements. En effet, les forces adhésives sont des forces qui agissent généralement sur des courtes distances. De plus, pour de grands glissements, l'hypothèse selon laquelle les forces adhésives agissent selon la direction  $\mathbf{d}$  (ou parfois  $\mathbf{t}$ ) n'est plus toujours vérifiée.

Ainsi, dans ce qui suit, le point proximal  $\mathbf{x}^\perp$  est assimilé à  $\mathbf{x}'$  quelle que soit la configuration du système.

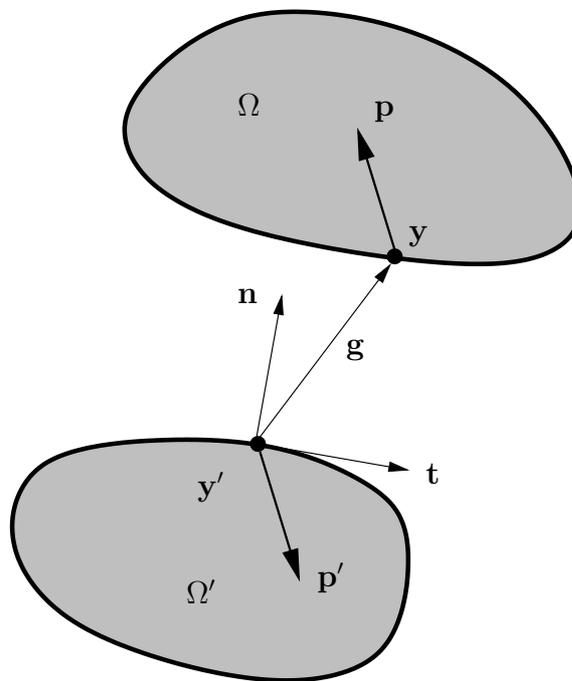


FIG. 3.22 – Configuration de contact entre deux solides déformables en petits déplacements.

Sachant qu'ils se rapportent toujours à la cible et afin d'alléger les notations, nous omettons les symboles "prime" des vecteurs unités des bases de référence.

## Les potentiels

**Energie libre** – Nous postulons le potentiel d'énergie libre suivant à l'interface :

$$\Psi_c(g_n, \mathbf{g}_t, \mathbf{g}_t^s, g^a) = I_{\mathbf{R}^+}(g_n) + I_{\{0\}}(\mathbf{g}_t - \mathbf{g}_t^s) + I_{\mathbf{R}^-}(\sqrt{P_{\mathbf{R}^+}^2(g_n) + \|\mathbf{g}_t\|^2} - g^a) \quad (3.46)$$

– TERME ADHÉSIF :  $I_{\mathbf{R}^-}(\sqrt{P_{\mathbf{R}^+}^2(g_n) + \|\mathbf{g}_t\|^2} - g^a)$

Ce terme est la version tridimensionnelle du terme adhésif du cas précédent. L'adhésion ne dépend plus uniquement de  $g_n$  mais de l'ensemble de la norme du vecteur écart total  $\|\mathbf{g}\| = \sqrt{(g_n)^2 + \|\mathbf{g}_t\|^2}$ , ici légèrement modifiée pour tenir compte du fait que lors du contact, l'adhésion dépend uniquement de la norme de l'écart tangent  $\|\mathbf{g}_t\|$ . En effet, on a :

$$\sqrt{P_{\mathbf{R}^+}^2(g_n) + \|\mathbf{g}_t\|^2} = \|P_{\mathbf{R}_n^+}(\mathbf{g})\|$$

où  $\mathbf{g} \equiv g_n \mathbf{n} + \mathbf{g}_t$  et  $\mathbf{R}_n^+ = \{\mathbf{v} \mid \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \geq 0\}$  (Figure 3.23).

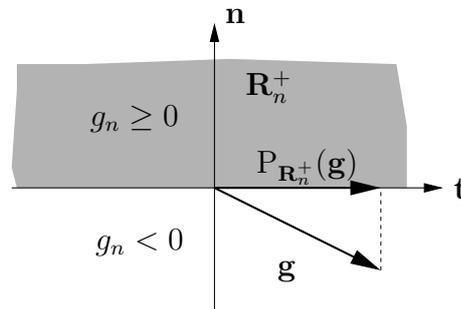


FIG. 3.23 – Projection du vecteur écart lors du contact  $g_n < 0$ .

De plus, l'utilisation de l'indicatrice sur  $I_{\mathbf{R}^-}(\dots)$  à la place de la distance  $D_{\mathbf{R}^-}^2(\dots)$  nous permet de redresser nos graphes, en introduisant des filaments de rigidité infinie.

– TERME DE FROTTEMENT :  $I_{\{0\}}(\mathbf{g}_t - \mathbf{g}_t^s)$

Ce terme, comme nous l'avons vu précédemment permet d'introduire la variable interne de glissement  $\mathbf{g}_t^s$  en lui associant une énergie potentielle.

**Dissipation** – Nous postulons le potentiel de dissipation suivant :

$$\Phi_c(\overset{\circ}{\mathbf{g}}_t^s, \dot{g}^a, g^a, p_n^c) = I_{\mathcal{C}(p_n^c)}^*(\overset{\circ}{\mathbf{g}}_t^s) + I_{[-\infty, s(g^a)]}^*(\dot{g}^a) \quad (3.47)$$

– TERME DISSIPATIF ADHÉSIF :  $I_{[-\infty, s(g^a)]}^*(\dot{g}^a)$

Ce terme nous dicte la loi d'évolution de la variable interne d'adhésion  $g^a$ .

– TERME DISSIPATIF DE FROTTEMENT :  $I_{\mathcal{C}(p_n^c)}^*(\dot{\mathbf{g}}_t^s)$

Ce terme est la loi d'évolution de la variable interne de glissement  $\mathbf{g}_t^s$  qui constitue le frottement de Coulomb. Dû à la présence d'adhésion, la pression-tension normale  $p_n$  se décompose en une pression normale de contact  $p_n^c$  et une tension normale due à l'adhésion  $p_n^a$  ( $p_n = p_n^c + p_n^a$ ). La force de frottement n'est proportionnelle qu'à la pression normale de contact  $p_n^c$ .

### Lois constitutives

A partir des potentiels d'énergie libre et de dissipation, nous dérivons les lois d'état et complémentaires pour former le système d'équations du contact avec frottement couplé à l'adhésion.

Les forces "externes", associées aux variables cinématiques :

$$p_n \in \partial_{g_n} \Psi_c(g_n, \mathbf{g}_t, \mathbf{g}_t^s, g^a) \quad (3.48)$$

avec :

$$\begin{aligned} \partial_{g_n} \Psi_c &= \partial_{\mathbf{R}^+}(g_n) + \partial_{\mathbf{R}^-}(\|\mathbf{P}_{\mathbf{R}_n^+}(\mathbf{g})\| - g^a) \frac{\mathbf{P}_{\mathbf{R}^+}(g_n)}{\|\mathbf{P}_{\mathbf{R}_n^+}(\mathbf{g})\|} \\ &= p_n^c + p_n^a \end{aligned} \quad (3.49)$$

$$\mathbf{p}_t \in \partial_{\mathbf{g}_t} \Psi_c(g_n, \mathbf{g}_t, \mathbf{g}_t^s, g^a) \quad (3.50)$$

avec :

$$\begin{aligned} \partial_{\mathbf{g}_t} \Psi_c &= \partial_{\mathbf{R}^-}(\|\mathbf{P}_{\mathbf{R}_n^+}(\mathbf{g})\| - g^a) \frac{\|\mathbf{g}_t\|}{\|\mathbf{P}_{\mathbf{R}_n^+}(\mathbf{g})\|} \frac{\mathbf{g}_t}{\|\mathbf{g}_t\|} \\ &\quad + \partial_{\mathbf{I}_{\{0\}}}(\mathbf{g}_t - \mathbf{g}_t^s) \\ &= p_t^a \mathbf{t} + \mathbf{p}_t^f = \mathbf{p}_t^a + \mathbf{p}_t^f \end{aligned} \quad (3.51)$$

Les forces "internes", associées aux variables internes :

$$\mathbf{p}_t^s \in -\partial_{\mathbf{g}_t^s} \Psi_c(g_n, \mathbf{g}_t, \mathbf{g}_t^s, g^a) = \partial_{\mathbf{I}_{\{0\}}}(\mathbf{g}_t - \mathbf{g}_t^s) \quad (3.52)$$

$$\mathbf{p}_t^s \in \partial_{\dot{\mathbf{g}}_t^s} \Phi_c(\dot{g}^a, \dot{\mathbf{g}}_t^s; g^a, p_n^c) = \partial I_{\mathcal{C}(p_n^c)}^*(\dot{\mathbf{g}}_t^s) \quad (3.53)$$

$$p^a \in -\partial_{g^a} \Psi_c(g_n, \mathbf{g}_t, \mathbf{g}_t^s, g^a) = \partial_{\mathbf{R}^-}(\|\mathbf{P}_{\mathbf{R}_n^+}(\mathbf{g})\| - g^a) \quad (3.54)$$

$$p^a \in \partial_{\dot{g}^a} \Phi_c(\dot{\mathbf{g}}_t^s, \dot{g}^a; g^a, p_n^c) = \partial I_{[-\infty, s(g^a)]}^*(\dot{g}^a) = s(g^a) + \partial_{\mathbf{R}^+}(\dot{g}^a) \quad (3.55)$$

**Remarque 3.2.6** On peut représenter le contact avec frottement couplé à l'adhésion sous la forme du cône de Coulomb (Figure 3.24). On reconnaît le lobe hémisphérique avec traction adhésive et la superposition de l'adhésion sur le cône classique de Coulomb du frottement lors d'efforts tangents.

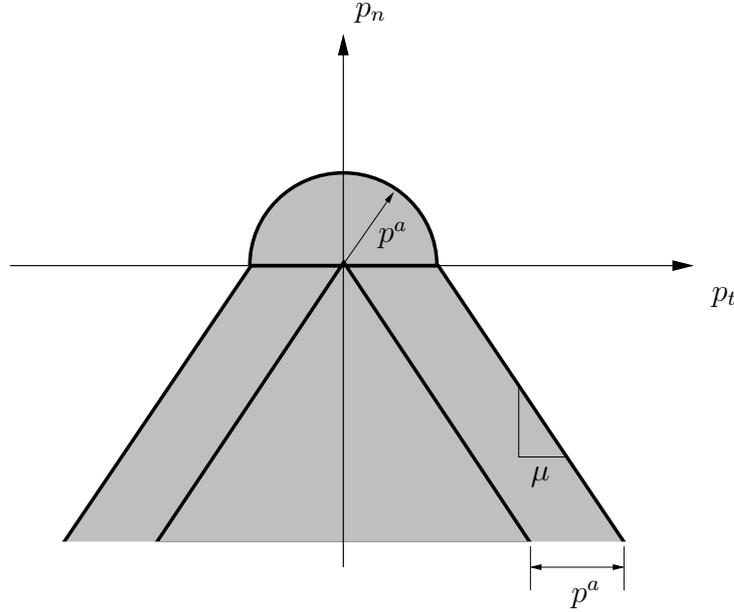


FIG. 3.24 – Cône de Coulomb du contact avec frottement couplé à l'adhésion.

### Regroupement des potentiels

Comme nous l'avons vu, les phénomènes de frottement et d'adhésion sont indépendants. Aussi, il devient possible d'effectuer un découplage au niveau des potentiels entre le contact avec frottement et l'adhésion. On peut donc décomposer le potentiel d'énergie libre de la manière suivante :

$$\Psi_c(g_n, \mathbf{g}_t, \mathbf{g}_t^s, g^a) = \Psi_c^c(g_n) + \Psi_c^s(\mathbf{g}_t, \mathbf{g}_t^s) + \Psi_c^a(g_n, \mathbf{g}_t, g^a) \quad (3.56)$$

en regroupant dans  $\Psi_c^c$  les termes de contact, dans  $\Psi_c^s$  les termes de frottement et enfin dans  $\Psi_c^a$  les termes adhésifs. Bien entendu, pour une loi de Coulomb, le frottement reste indissociable de la pression normale de contact  $p_n$  (mais pas inversement), contrairement à l'adhésion qui ne dépend que du signe de  $p_n$ . Comme dans la plupart du travail qui suit, nous n'étudions que très peu le contact seul, nous regroupons  $\Psi_c^c(g_n) + \Psi_c^s(\mathbf{g}_t, \mathbf{g}_t^s) = \Psi_c^{cs}(g_n, \mathbf{g}_t, \mathbf{g}_t^s)$ . Similairement pour le potentiel de dissipation, on écrit :

$$\Phi_c(\overset{\circ}{\mathbf{g}}_t^s, \dot{g}^a; g^a, p_n^c) = \Phi_c^s(\overset{\circ}{\mathbf{g}}_t^s; p_n^c) + \Phi_c^a(\dot{g}^a; g^a) \quad (3.57)$$

avec  $\Phi_c^s$  pour le frottement et  $\Phi_c^a$  pour l'adhésion.

### 3.2.5 Minimisation élastique sous contrainte

Le problème consiste à résoudre le système suivant d'une minimisation incrémentale et de deux systèmes d'inclusions :

$$\mathcal{U}_{sys}(\widehat{\mathbf{y}}; p_n^c, g^a) = \inf_{\widehat{\mathbf{z}}} \left[ \mathcal{U}_U(\widehat{\mathbf{z}}) + \int_{\Gamma} \Psi_c(g_n(\mathbf{z}, \mathbf{z}'), \mathbf{g}_t(\mathbf{z}, \mathbf{z}'); \mathbf{g}_t^s, g^a) d\Gamma + \int_{\Gamma} \Phi_c(\overset{\circ}{\mathbf{g}}_t^s, \dot{g}^a; p_n^c, g^a) \delta t d\Gamma \right] \quad (3.58)$$

$$\begin{cases} \mathbf{p}_t^s \in -\partial_{\mathbf{g}_t^s} \Psi_c(g_n(\mathbf{z}, \mathbf{z}'), \mathbf{g}_t(\mathbf{z}, \mathbf{z}'), \mathbf{g}_t^s, g^a) \\ \mathbf{p}_t^s \in \partial_{\overset{\circ}{\mathbf{g}}_t^s} \Phi_c(\overset{\circ}{\mathbf{g}}_t^s, \dot{g}^a; g^a, p_n^c) \end{cases} \quad (3.59)$$

$$\begin{cases} p^a \in -\partial_{g^a} \Psi_c(g_n(\mathbf{z}, \mathbf{z}'), \mathbf{g}_t(\mathbf{z}, \mathbf{z}'), \mathbf{g}_t^s, g^a) \\ p^a \in \partial_{\dot{g}^a} \Phi_c(\overset{\circ}{\mathbf{g}}_t^s, \dot{g}^a; p_n^c, g^a) \end{cases} \quad (3.60)$$

Sachant que le quasi-potentiel de dissipation de notre formulation ne dépend uniquement que des variables internes qui sont indépendantes de  $\mathbf{y}$  et  $\mathbf{y}'$  ( $\widehat{\mathbf{y}} = [\mathbf{y} \ \mathbf{y}']^T$ ), le problème de minimisation du système complet ne laisse apparaître plus que les termes d'énergie libre et devient :

$$\mathcal{U}_{sys}(\widehat{\mathbf{y}}) = \inf_{\widehat{\mathbf{z}}} \left[ \mathcal{U}_U(\widehat{\mathbf{z}}) + \int_{\Gamma} \Psi_c(g_n(\mathbf{z}, \mathbf{z}'), \mathbf{g}_t(\mathbf{z}, \mathbf{z}'), \mathbf{g}_t^s, g^a) d\Gamma \right] \quad (3.61)$$

$$\begin{cases} \mathbf{p}_t^s \in -\partial_{\mathbf{g}_t^s} \Psi_c(g_n(\mathbf{z}, \mathbf{z}'), \mathbf{g}_t(\mathbf{z}, \mathbf{z}'), \mathbf{g}_t^s, g^a) \\ \mathbf{p}_t^s \in \partial_{\overset{\circ}{\mathbf{g}}_t^s} \Phi_c(\dot{g}^a, \overset{\circ}{\mathbf{g}}_t^s; g^a, p_n^c) \end{cases} \quad (3.62)$$

$$\begin{cases} p^a \in -\partial_{g^a} \Psi_c(g_n(\mathbf{z}, \mathbf{z}'), \mathbf{g}_t(\mathbf{z}, \mathbf{z}'), \mathbf{g}_t^s, g^a) \\ p^a \in \partial_{\dot{g}^a} \Phi_c(\overset{\circ}{\mathbf{g}}_t^s, \dot{g}^a; g^a, p_n^c) \end{cases} \quad (3.63)$$

Le couplage entre les variables cinématiques dépendantes de  $\widehat{\mathbf{y}}$  et internes est assuré par les lois constitutives faisant évoluer les variables internes  $\mathbf{g}_t^s$  et  $g^a$ , par l'intermédiaire des systèmes formés par les deux inclusions. Ce système est complété par les lois d'état :

$$\begin{cases} p_n \in \partial_{g_n} \Psi_c(g_n(\widehat{\mathbf{y}}), \mathbf{g}_t(\widehat{\mathbf{y}}), \mathbf{g}_t^s, g^a) \\ \mathbf{p}_t \in \partial_{\mathbf{g}_t} \Psi_c(g_n(\widehat{\mathbf{y}}), \mathbf{g}_t(\widehat{\mathbf{y}}), \mathbf{g}_t^s, g^a) \end{cases} \quad (3.64)$$

Nous constatons que ce système comprend une fonctionnelle non-régulière couplée à plusieurs inclusions dont certaines sont emboîtées; c'est un système "intégrationnel". Pour résoudre ce système, notamment trouver une formulation régulière permettant d'être résolue numériquement, il est nécessaire de faire appel à certaines techniques spéciales : les techniques de la pénalité ou du Lagrangien augmenté pour la régularisation et un algorithme de projection pour la résolution incrémentale des systèmes d'inclusions. Ceci fera l'objet du paragraphe suivant.

**Remarque 3.2.7** Si on préfère la formulation du frottement par variable cinématique à celle par variable interne, le système s'écrit :

$$\mathcal{U}_{sys}(\widehat{\mathbf{y}}; p_n^c, g^a) = \inf_{\widehat{\mathbf{z}}} \left[ \mathcal{U}_U(\widehat{\mathbf{z}}) + \int_{\Gamma} \Psi_c(g_n(\widehat{\mathbf{z}}), \mathbf{g}_t(\widehat{\mathbf{z}}); \mathbf{g}_t^s, g^a) d\Gamma + \int_{\Gamma} \Phi_c(\overset{\circ}{\mathbf{g}}_t(\widehat{\mathbf{z}}), \dot{g}^a; g^a, p_n^c) \delta t d\Gamma \right] \quad (3.65)$$

$$\begin{cases} p^a \in -\partial_{g^a} \Psi_c(g_n(\widehat{\mathbf{z}}), \mathbf{g}_t(\widehat{\mathbf{z}}), \mathbf{g}_t^s, g^a) \\ p^a \in \partial_{\dot{g}^a} \Phi_c(\overset{\circ}{\mathbf{g}}_t, \dot{g}^a; g^a, p_n^c) \end{cases} \quad (3.66)$$

Sans adhésion, nous retrouvons le problème incrémental de minimisation par variables uniquement cinématiques (2.140) introduit précédemment au paragraphe 2.3.5. Dans ce cas, il n'est plus possible de ne pas faire figurer le pseudo-potentiel de dissipation dans la fonctionnelle  $\mathcal{U}_{sys}$ , ce dernier dépendant de  $\widehat{\mathbf{y}}$ . Chaque variable interne requiert en conséquence en plus du problème incrémental de minimisation un système d'inclusions de couplage.

**Remarque 3.2.8** A ce niveau, le système (3.61) à (3.63) ne peut pas encore être qualifié d'incrémental. Il le deviendra en fait plus loin lors de la résolution des systèmes d'inclusions.

### 3.3 Analyse du contact avec frottement et adhésion

Nous avons vu dans la section précédente que le couplage entre contact avec frottement et adhésion se résumait à une superposition des phénomènes. Ainsi, lors de l'analyse, nous pouvons considérer ces derniers séparément sans perte de généralité.

#### 3.3.1 Résolution par la méthode de la pénalité

##### La méthode de la pénalité

**Principe** – C'est la méthode la plus simple et la plus classique pour résoudre des problèmes de contact. Cette méthode remplace les fonctions multivoques non-régulières (non-différentiables) par des fonctions (univoques) approximatives. Cette méthode a été établie pour la résolution de problèmes d'optimisation sous contraintes (Courant (1927-43-62), Bertsekas (1975), Rockafellar (1976), entre autres) puis appliquée aux problèmes de contact (notamment Oden (1980), Curnier (1984)). Le présent exposé s'inspire notamment de Curnier–Alart [25].

Plus concrètement, la fonction indicatrice d'une variable sur un ensemble est remplacée par un terme proportionnel à la distance au carré de cette variable par rapport à ce même ensemble.

**Exemple scalaire** – Soit l'ensemble  $[-R, R] \in \mathbf{R}$ . L'indicatrice de la variable  $x$  sur cet ensemble s'écrit :

$$I_{[-R,R]}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [-R, R] \\ \infty & \text{si } x \notin [-R, R] \end{cases} \quad (3.67)$$

La méthode de la pénalité quadratique consiste à remplacer l'indicatrice par le carré de la distance à l'ensemble (Figure 3.25) :

$$\frac{1}{2}\gamma D_{[-R,R]}^2(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [-R, R] \\ \frac{1}{2}\gamma(|x| - R)^2 & \text{si } x \notin [-R, R] \end{cases} \quad (3.68)$$

avec  $\gamma$  le facteur de pénalité (comparable à une rigidité), qui, pour se rapprocher le plus de la fonction exacte doit prendre des valeurs relativement grandes.

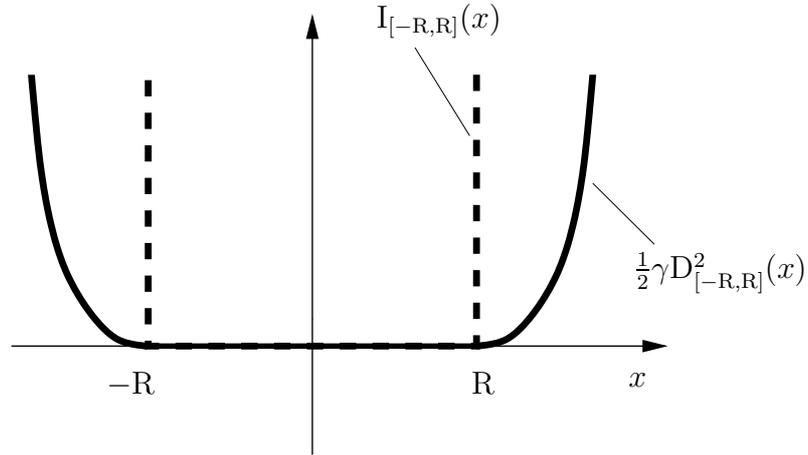


FIG. 3.25 – Principe de la méthode de pénalité. La fonction pénalisée est en traits pleins et la fonction exacte en pointillés.

L'intérêt de la fonction distance est qu'elle reste bien définie pour des ensembles de  $\mathbf{R}^N$

**Application** – La pénalisation consiste à remplacer le potentiel  $\Psi_c$  par la fonction approximative différentiable  $\tilde{\Psi}_c$  correspondante dans (3.61) :

$$\tilde{\mathcal{U}}_{sys}(\hat{\mathbf{y}}) = \inf_{\hat{\mathbf{z}}} [\mathcal{U}_U(\hat{\mathbf{z}}) + \tilde{\mathcal{U}}_c(\hat{\mathbf{z}})] = \inf_{\hat{\mathbf{z}}} [\mathcal{U}_U(\hat{\mathbf{z}}) + \int_{\Gamma} \tilde{\Psi}_c(\mathbf{z}, \mathbf{z}') d\Gamma] \quad (3.69)$$

En se servant de la décomposition (3.56) du potentiel d'énergie libre, le problème de minimisation du système complet s'écrit :

$$\tilde{\mathcal{U}}_{sys}(\hat{\mathbf{y}}) = \inf_{\hat{\mathbf{z}}} [\mathcal{U}_U(\hat{\mathbf{z}}) + \int_{\Gamma} (\tilde{\Psi}_c^{cs}(\mathbf{z}, \mathbf{z}') + \tilde{\Psi}_c^a(\mathbf{z}, \mathbf{z}')) d\Gamma] \quad (3.70)$$



### Contact avec frottement pénalisé

**Les potentiels** – On rappelle que l'énergie libre exacte du contact avec frottement s'écrit, d'après (3.46) :

$$\Psi_c^{cs}(g_n, \mathbf{g}_t, \mathbf{g}_t^s) = I_{\mathbf{R}^+}(g_n) + I_{\{0\}}(\mathbf{g}_t - \mathbf{g}_t^s) \quad (3.75)$$

La version pénalisée de ce potentiel s'écrit quant à elle :

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}_c^{cs}(g_n, \mathbf{g}_t, \mathbf{g}_t^s) &= \frac{1}{2}\gamma_n^c D_{\mathbf{R}^+}^2(g_n) + \frac{1}{2}\gamma_t^f D_{\{0\}}^2(\mathbf{g}_t - \mathbf{g}_t^s) \\ &= \frac{1}{2}\gamma_n^c D_{\mathbf{R}^+}^2(g_n) + \frac{1}{2}\gamma_t^f (\mathbf{g}_t - \mathbf{g}_t^s)^2 \end{aligned} \quad (3.76)$$

où  $\gamma_n^c$  et  $\gamma_t^f$  sont des facteurs de pénalité.

La dissipation du contact avec frottement reste exacte et s'écrit, d'après (3.47) :

$$\Phi_c^s(\mathring{\mathbf{g}}_t^s; p_n^c) = I_{\mathcal{C}(p_n^c)}^*(\mathring{\mathbf{g}}_t^s) = -\mu p_n^c \|\mathring{\mathbf{g}}_t^s\| \quad (3.77)$$

**Analyse** – On en déduit la force normale de (3.76) :

$$p_n^c = \frac{\partial \tilde{\Psi}_c^{cs}(g_n, \mathbf{g}_t, \mathbf{g}_t^s)}{\partial g_n} = \gamma_n^c P_{\mathbf{R}^-}(g_n) \quad (3.78)$$

On peut donc expliciter  $p_n^c$  sous la forme :

$$p_n^c = \begin{cases} 0 & \text{si } g_n > 0 \quad \text{écart} \\ \gamma_n^c g_n & \text{si } g_n \leq 0 \quad \text{contact} \end{cases} \quad (3.79)$$

Et la force tangente de frottement se dérive de (3.76) :

$$\mathbf{p}_t^f = \frac{\partial \tilde{\Psi}_c^{cs}(g_n, \mathbf{g}_t, \mathbf{g}_t^s)}{\partial \mathbf{g}_t} = \gamma_t^f (\mathbf{g}_t - \mathbf{g}_t^s) \quad (3.80)$$

On dérive aussi les forces de glissement de (3.76) et (3.77), respectivement :

$$\begin{cases} \mathbf{p}_t^s = -\frac{\partial \tilde{\Psi}_c^{cs}(g_n, \mathbf{g}_t, \mathbf{g}_t^s)}{\partial \mathbf{g}_t^s} = \gamma_t^f (\mathbf{g}_t - \mathbf{g}_t^s) \\ \mathbf{p}_t^s \in \partial_{\mathring{\mathbf{g}}_t^s} \Phi_c^s(\mathring{\mathbf{g}}_t^s; p_n^c) = -\mu p_n^c \partial \|\mathring{\mathbf{g}}_t^s\| \end{cases} \quad (3.81)$$

On note que  $\mathbf{p}_t^f = \mathbf{p}_t^s$  et on en déduit la relation suivante :

$$\mathbf{p}_t^f \in -\mu p_n^c \partial \|\mathring{\mathbf{g}}_t^s\| \quad (3.82)$$

D'autre part, on peut décomposer  $\mathbf{g}_t^s$  en écrivant  $\mathbf{g}_t^s = \mathbf{g}_{t_0}^s + \mathring{\mathbf{g}}_t^s dt$ , on réécrit la relation précédente :

$$\gamma_t^f (\mathbf{g}_t - \mathbf{g}_{t_0}^s - \mathring{\mathbf{g}}_t^s dt) \in -\mu p_n^c \partial \|\mathring{\mathbf{g}}_t^s\| \quad (3.83)$$

qui s'écrit aussi (Figure 3.26) :

$$\gamma_t^f(\mathbf{g}_t - \mathbf{g}_{t_0}^s) \in -\mu p_n^c \partial \|\dot{\mathbf{g}}_t^s\| + \gamma_t^f \dot{\mathbf{g}}_t^s dt \quad (3.84)$$

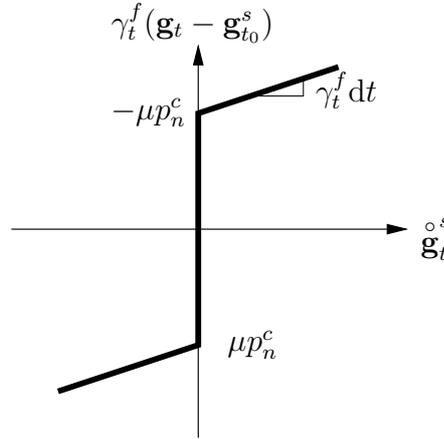


FIG. 3.26 – Graphe de  $\gamma_t^f(\mathbf{g}_t - \mathbf{g}_{t_0}^s)$  en fonction de  $\dot{\mathbf{g}}_t^s$ .

Il en résulte :

$$\text{Si } \|\gamma_t^f(\mathbf{g}_t - \mathbf{g}_{t_0}^s)\| \leq -\mu p_n^c \iff \begin{cases} \dot{\mathbf{g}}_t^s = \mathbf{0} \\ \mathbf{p}_t^f = \gamma_t^f(\mathbf{g}_t - \mathbf{g}_{t_0}^s) \end{cases} \quad (3.85)$$

$$\text{Si } \|\gamma_t^f(\mathbf{g}_t - \mathbf{g}_{t_0}^s)\| > -\mu p_n^c \iff \begin{cases} \dot{\mathbf{g}}_t^s = \frac{1}{dt} \left( (\mathbf{g}_t - \mathbf{g}_{t_0}^s) + \frac{\mu p_n^c}{\gamma_t^f} \frac{(\mathbf{g}_t - \mathbf{g}_{t_0}^s)}{\|(\mathbf{g}_t - \mathbf{g}_{t_0}^s)\|} \right) \\ \mathbf{p}_t^f = -\mu p_n^c \frac{(\mathbf{g}_t - \mathbf{g}_{t_0}^s)}{\|(\mathbf{g}_t - \mathbf{g}_{t_0}^s)\|} \end{cases} \quad (3.86)$$

Si on récapitule, en se servant de (3.85) et de (3.86) :

$$\mathbf{p}_t^f = \begin{cases} \gamma_t^f(\mathbf{g}_t - \mathbf{g}_{t_0}^s) & \text{si } \|\gamma_t^f(\mathbf{g}_t - \mathbf{g}_{t_0}^s)\| \leq -\mu p_n^c \text{ adhérence} \\ -\mu p_n^c \frac{(\mathbf{g}_t - \mathbf{g}_{t_0}^s)}{\|(\mathbf{g}_t - \mathbf{g}_{t_0}^s)\|} & \text{si } \|\gamma_t^f(\mathbf{g}_t - \mathbf{g}_{t_0}^s)\| > -\mu p_n^c \text{ glissement} \end{cases} \quad (3.87)$$

on peut encore écrire  $\mathbf{p}_t^f$  comme la projection d'une contrainte adhérente "d'essai"  $\gamma_t^f(\mathbf{g}_t - \mathbf{g}_{t_0}^s)$  sur le critère du frottement :

$$\mathbf{p}_t^f = P_{C(p_n^c)}(\gamma_t^f(\mathbf{g}_t - \mathbf{g}_{t_0}^s)) \quad (3.88)$$

**Résumé** – Le problème de contact avec frottement se résume au système suivant (Figures 3.27 et 3.28) :

$$\begin{cases} p_n^c = \gamma_n^c P_{\mathbf{R}^-}(g_n) \\ \mathbf{p}_t^f = P_{C(p_n^c)}(\gamma_t^f(\mathbf{g}_t - \mathbf{g}_{t_0}^s)) \end{cases} \quad (3.89)$$

Complété par une mise à jour de  $\mathbf{g}_t^s$  :  $\mathbf{g}_t^s = \mathbf{g}_t - \frac{\mathbf{p}_t^f}{\gamma_t^f}$ .

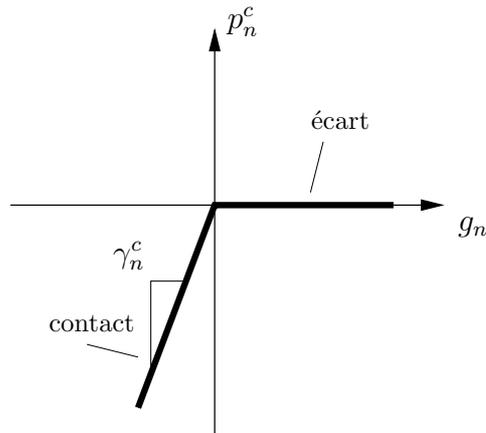


FIG. 3.27 – Graphe du contact normal pénalisé.

Nous définissons  $\mathbf{g}_t^r = \mathbf{g}_t - \mathbf{g}_{t_0}^s$  l'écart tangent adhérent.

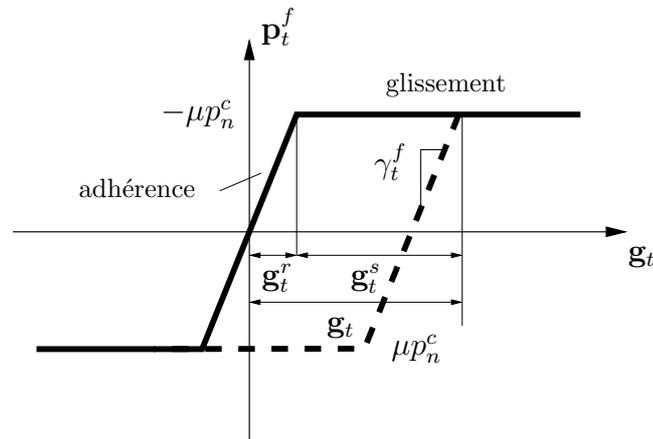


FIG. 3.28 – Graphe du frottement tangent pénalisé.

### Adhésion pénalisée

**Les potentiels** – L'énergie libre exacte d'adhésion s'écrit, d'après (3.46) :

$$\Psi_c^a(g_n, \mathbf{g}_t, g^a) = I_{\mathbf{R}^-}(\|P_{\mathbf{R}_+^a}(\mathbf{g})\| - g^a) \quad (3.90)$$

La version pénalisée de ce potentiel s'écrit :

$$\tilde{\Psi}_c^a(g_n, \mathbf{g}_t, g^a) = \frac{1}{2} \gamma^a D_{\mathbf{R}^-}^2 (\sqrt{P_{\mathbf{R}^+}(g_n)^2 + \|\mathbf{g}_t\|^2} - g^a) \quad (3.91)$$

où  $\gamma^a$  est un facteur de pénalité (la raideur de la colle).

La dissipation de l'adhésion reste exacte et s'écrit, d'après (3.47) :

$$\Phi_c^a(\dot{g}^a; g^a) = \mathbb{I}_{[-\infty, s(g^a)]}^*(\dot{g}^a) \quad (3.92)$$

**Analyse** – On pose  $\tilde{\mathbf{g}} = P_{\mathbf{R}^+}(g_n)\mathbf{n} + \mathbf{g}_t = P_{\mathbf{R}_n^+}(\mathbf{g})$  pour abrégier.

On dérive l'intensité adhésive de (3.91) :

$$\begin{aligned} p^a &= \frac{\partial \tilde{\Psi}_c^a(g_n, \mathbf{g}_t, g^a)}{\partial g^a} = \gamma^a P_{\mathbf{R}^+}(\|P_{\mathbf{R}_n^+}(\mathbf{g})\| - g^a) \\ &= \gamma^a P_{\mathbf{R}^+}(\|\tilde{\mathbf{g}}\| - g^a) \end{aligned} \quad (3.93)$$

On dérive aussi la force adhésive de (3.91) :

$$\begin{aligned} \mathbf{p}^a &= \frac{\partial \tilde{\Psi}_c^a(g_n, \mathbf{g}_t, g^a)}{\partial \mathbf{g}} = \frac{\partial \tilde{\Psi}_c^a(g_n, \mathbf{g}_t, g^a)}{\partial g_n} \mathbf{n} + \frac{\partial \tilde{\Psi}_c^a(g_n, \mathbf{g}_t, g^a)}{\partial \mathbf{g}_t} \\ &= \gamma^a P_{\mathbf{R}^+}(\|\tilde{\mathbf{g}}\| - g^a) \frac{P_{\mathbf{R}^+}(g_n)}{\|\tilde{\mathbf{g}}\|} \mathbf{n} + \gamma^a P_{\mathbf{R}^+}(\|\tilde{\mathbf{g}}\| - g^a) \frac{\mathbf{g}_t}{\|\tilde{\mathbf{g}}\|} \\ &= p_n^a \mathbf{n} + \mathbf{p}_t^a = \gamma^a P_{\mathbf{R}^+}(\|\tilde{\mathbf{g}}\| - g^a) \tilde{\mathbf{d}} = p^a \tilde{\mathbf{d}} \end{aligned} \quad (3.94)$$

avec  $\tilde{\mathbf{d}} = \frac{\tilde{\mathbf{g}}}{\|\tilde{\mathbf{g}}\|}$ .

D'autre part, on dérive  $p^a$  du potentiel de dissipation (3.92) :

$$p^a \in \partial_{\dot{g}^a} \Phi_c^a(\dot{g}^a; g^a) = \partial \mathbb{I}_{[-\infty, s(g^a)]}^*(\dot{g}^a) = s(g^a) + \partial \mathbb{I}_{\mathbf{R}^+}(\dot{g}^a) \quad (3.95)$$

Aussi on en déduit le système suivant :

$$\begin{cases} p^a = \gamma^a P_{\mathbf{R}^+}(\|\tilde{\mathbf{g}}\| - g^a) \\ p^a \in \partial \mathbb{I}_{[-\infty, s(g^a)]}^*(\dot{g}^a) \end{cases} \quad (3.96)$$

On obtient alors la relation suivante :

$$\gamma^a P_{\mathbf{R}^+}(\|\tilde{\mathbf{g}}\| - g^a) \in \partial \mathbb{I}_{[-\infty, s(g^a)]}^*(\dot{g}^a) \quad (3.97)$$

Ceci est la loi d'évolution de la décohésion.

Comme précédemment, on peut décomposer  $g^a$  en écrivant  $g^a = g_0^a + \dot{g}^a dt$ , on réécrit la relation précédente :

$$\gamma^a P_{\mathbf{R}^+}(\|\tilde{\mathbf{g}}\| - g_0^a - \dot{g}^a dt) \in \partial \mathbb{I}_{[-\infty, s(g^a)]}^*(\dot{g}^a) \quad (3.98)$$

Si  $\|\tilde{\mathbf{g}}\| \leq g_0^a$ , la résolution du système devient triviale et donne :

$$p^a = 0 \quad (3.99)$$

Si  $\|\tilde{\mathbf{g}}\| > g^a$  l'équation (3.97) prend la forme suivante :

$$\gamma^a(\|\tilde{\mathbf{g}}\| - g_0^a - \dot{g}^a dt) \in \partial \mathbf{I}_{[-\infty, s(g^a)]}^*(\dot{g}^a) \quad (3.100)$$

qui s'écrit aussi (Figure 3.29) :

$$\gamma^a(\|\tilde{\mathbf{g}}\| - g_0^a) \in \partial \mathbf{I}_{[-\infty, s(g^a)]}^*(\dot{g}^a) + \gamma^a \dot{g}^a dt \quad (3.101)$$

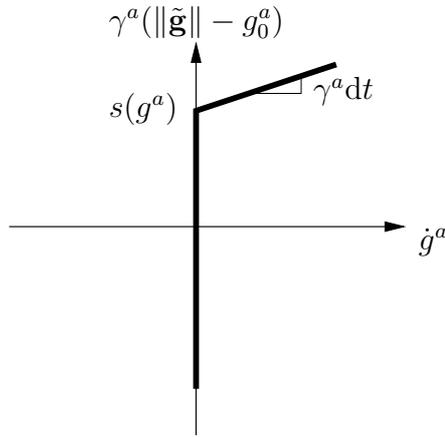


FIG. 3.29 – Graphe de  $\gamma^a(\|\tilde{\mathbf{g}}\| - g_0^a)$  en fonction de  $\dot{g}^a$ .

Il en résulte :

$$\text{Si } \gamma^a(\|\tilde{\mathbf{g}}\| - g_0^a) \leq s(g^a) \iff \begin{cases} \dot{g}^a = 0 \\ p^a = \gamma^a(\|\tilde{\mathbf{g}}\| - g_0^a) \end{cases} \quad (3.102)$$

$$\text{Si } \gamma^a(\|\tilde{\mathbf{g}}\| - g_0^a) > s(g^a) \iff \begin{cases} \dot{g}^a = \frac{1}{\gamma^a dt}(\gamma^a(\|\tilde{\mathbf{g}}\| - g_0^a) - s(g^a)) \\ p^a = s(g^a) \end{cases} \quad (3.103)$$

Si on récapitule en se servant de (3.102) et (3.103) :

$$p^a = \begin{cases} \gamma^a(\|\tilde{\mathbf{g}}\| - g_0^a) & \text{si } \gamma^a(\|\tilde{\mathbf{g}}\| - g_0^a) \leq s(g^a) \\ s(g^a) & \text{si } \gamma^a(\|\tilde{\mathbf{g}}\| - g_0^a) > s(g^a) \end{cases} \quad (3.104)$$

En incluant le cas (3.99), le système complet s'écrit :

$$p^a = \begin{cases} 0 & \text{si } \gamma^a(\|\tilde{\mathbf{g}}\| - g_0^a) \leq 0 \quad \text{jeu} \\ \gamma^a(\|\tilde{\mathbf{g}}\| - g_0^a) & \text{si } 0 < \gamma^a(\|\tilde{\mathbf{g}}\| - g_0^a) \leq s(g^a) \quad \text{adhésion} \\ s(g^a) & \text{si } \gamma^a(\|\tilde{\mathbf{g}}\| - g_0^a) > s(g^a) \quad \text{décohésion} \end{cases} \quad (3.105)$$

**Résumé** – Finalement, le problème d'adhésion se déduit en se servant de (3.94), et sachant que  $s(g^a) \geq 0$  (Figure 3.30) :

$$\mathbf{p}^a = p^a \tilde{\mathbf{d}} = P_{[-\infty, s(g^a)]}(\gamma^a P_{\mathbf{R}^+}(\|\tilde{\mathbf{g}}\| - g_0^a)) \tilde{\mathbf{d}} \quad (3.106)$$

Complété par une mise à jour de  $g^a$  :  $g^a = \|\tilde{\mathbf{g}}\| - \frac{p^a}{\gamma^a}$ .

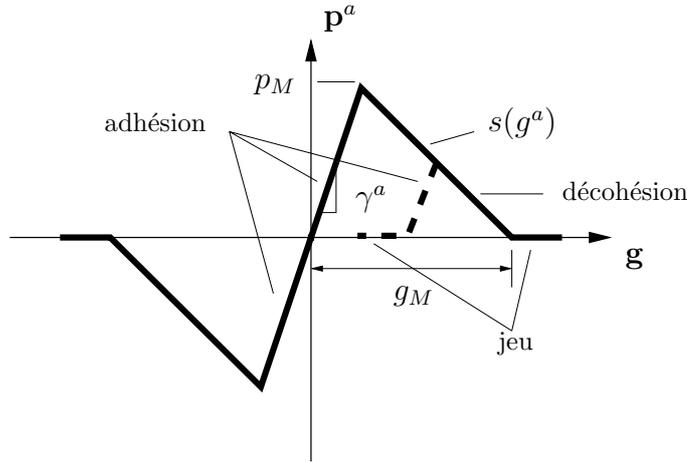


FIG. 3.30 – Loi d'adhésion en tension ( $g_n > 0$ ,  $p_n > 0$ ). Pour obtenir le cas en pression ( $g_n \leq 0$ ,  $p_n \leq 0$ ), il suffit de remplacer  $\mathbf{g}$  par  $\mathbf{g}_t$  sur ce même graphe.

### Problème couplé pénalisé

La formulation forte de l'équilibre des forces dans le cas du contact avec frottement et adhésion devient :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Div} \mathbf{P}(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} & , \quad \mathbf{x} \in \Omega \\ \mathbf{P}(\mathbf{x}) = \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{F}}(\mathbf{x}) & \\ \mathbf{y}(\mathbf{x}) = \bar{\mathbf{y}}(\mathbf{x}) & , \quad \mathbf{x} \in \Gamma_y \\ \mathbf{P}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{m}(\mathbf{x}) = \bar{\mathbf{p}}(\mathbf{x}) & , \quad \mathbf{x} \in \Gamma_\sigma \end{array} \right. \quad (3.107)$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Div} \mathbf{P}'(\mathbf{x}') + \boldsymbol{\kappa}'(\mathbf{x}') = \mathbf{0} & , \quad \mathbf{x}' \in \Omega' \\ \mathbf{P}'(\mathbf{x}') = \frac{\partial \Psi'}{\partial \mathbf{F}'}(\mathbf{x}') & \\ \mathbf{y}'(\mathbf{x}') = \bar{\mathbf{y}}'(\mathbf{x}') & , \quad \mathbf{x}' \in \Gamma'_y \\ \mathbf{P}'(\mathbf{x}') \cdot \mathbf{m}'(\mathbf{x}') = \bar{\mathbf{p}}'(\mathbf{x}') & , \quad \mathbf{x}' \in \Gamma'_\sigma \end{array} \right. \quad (3.108)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{p}[\mathbf{x}, \mathbf{m}(\mathbf{x})] + \mathbf{p}'[\mathbf{x}^\perp, \mathbf{m}'(\mathbf{x}^\perp)] = \mathbf{0} \\ \mathbf{y}(\mathbf{x}) \wedge \mathbf{p}[\mathbf{x}, \mathbf{m}(\mathbf{x})] + \mathbf{y}'(\mathbf{x}^\perp) \wedge \mathbf{p}'[\mathbf{x}^\perp, \mathbf{m}'(\mathbf{x}^\perp)] = \mathbf{0} \end{array} \right. \quad \mathbf{x} \in \Gamma \quad (3.109)$$

$$\left\{ \begin{array}{l}
 p_n(\mathbf{x}) = p_n^c(\mathbf{x}) + p_n^a(\mathbf{x}) \\
 = \gamma_n^c P_{\mathbf{R}^-}(g_n(\mathbf{x})) \\
 \quad + P_{[-\infty, s(g^a)]}(\gamma^a P_{\mathbf{R}^+}[\|\tilde{\mathbf{g}}(\mathbf{x})\| - g_0^a(\mathbf{x})]) \frac{P_{\mathbf{R}^+}(g_n(\mathbf{x}))}{\|\tilde{\mathbf{g}}(\mathbf{x})\|} \\
 \mathbf{p}_t(\mathbf{x}) = \mathbf{p}_t^f(\mathbf{x}) + \mathbf{p}_t^a(\mathbf{x}) \\
 = P_{\mathcal{C}(g_n)}(\gamma_t^f(\mathbf{g}_t(\mathbf{x}) - \mathbf{g}_{t_0}^s(\mathbf{x}))) \\
 \quad + P_{[-\infty, s(g^a)]}(\gamma^a P_{\mathbf{R}^+}[\|\tilde{\mathbf{g}}(\mathbf{x})\| - g_0^a(\mathbf{x})]) \frac{\mathbf{g}_t(\mathbf{x})}{\|\tilde{\mathbf{g}}(\mathbf{x})\|}
 \end{array} \right. , \quad \mathbf{x} \in \Gamma$$

(3.110)

La force de contact  $\mathbf{p}$  du couplage des forces de contact avec frottement et adhésion résulte de la somme des forces de contact de chaque phénomène considéré séparément :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{p} &= p_n^c \mathbf{n} + \mathbf{p}_t^f + \mathbf{p}^a \\
 &= p_n \mathbf{n} + \mathbf{p}_t \\
 &= (p_n^c + p_n^a) \mathbf{n} + \mathbf{p}_t^f + \mathbf{p}_t^a
 \end{aligned}$$

**Remarque 3.3.1** La méthode de la pénalité trouve une justification sur le plan physique, dans le cas du contact avec frottement par le fait que l'interface des deux corps est constituée de nombreuses aspérités pouvant s'interpénétrer et se déformer élastiquement. Concernant l'adhésion, la pénalisation consiste à considérer des filaments de rigidité finie.

**Remarque 3.3.2** Dans un problème de mécanique des contacts et plus généralement des solides, la pénalisation s'applique aux termes des potentiels contenant des variables observables. Ceci est vérifié par la formulation du problème de minimisation, dont les termes contenant uniquement des variables internes s'annulent par la différentiation car ces variables sont indépendantes des termes minimisants  $\mathbf{y}$  et  $\mathbf{y}'$ . Dans notre formulation, les termes dissipatifs n'étant dépendants que des variables internes, la pénalisation du problème consiste à pénaliser uniquement les termes de l'énergie libre.

### 3.3.2 Résolution par la méthode du Lagrangien augmenté

#### La méthode du Lagrangien Augmenté

**Principe** – Plusieurs méthodes ont été développées pour la résolution des problèmes de minimisation sous contraintes. Notamment, la méthode de la pénalité, la méthode du Lagrangien standard et la méthode du Lagrangien augmenté. L'obtention d'un problème doté d'une solution exacte, bien conditionné et décontraint sont les points forts qui assurent la supériorité de la méthode du Lagrangien augmenté par rapport aux autres méthodes.

La technique du Lagrangien augmenté fut d'abord introduite par Hestenes [55] et Powell [104] pour la résolution de problèmes de minimisation avec des contraintes égalité. Ensuite, Wierzbicki [125], Rockafellar [110] et Fortin [36] l'ont adaptée aux problèmes de minimisation convexe sous contraintes d'inégalité comme pour les problèmes de contact simple. Ensuite, Alart-Curnier [1], [2] ont étendu cette technique aux problèmes de minimisation non-symétriques de quasi-fonctionnelles particulières pour le cas du contact avec frottement. Le résumé qui suit sur la méthode du Lagrangien augmenté est largement inspiré de [100], [101] et [54].

De nombreux problèmes courants peuvent se résumer par la minimisation de la somme de deux fonctionnelles :

$$\inf_{v \in H} F(v) = \inf_{v \in H} (f(v) + \Psi(g(v))) \quad (3.111)$$

avec  $H$  un espace de Hilbert ;  $f, \Psi : H \longrightarrow \bar{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$  sont des fonctionnelles convexes, propres, semi-continues inférieurement<sup>1</sup> et  $f$  est (au moins)  $C^1$ . Dans la décomposition additive ci-dessus  $F(v) = f(v) + \Psi(g(v))$ , la fonction  $\Psi$  exprime normalement les contraintes imposées sur  $v$  ou  $f$ . La fonction  $g$  est telle que la convexité de  $\Psi(v) \equiv \Psi \circ g(v)$  est préservée.

Un cas particulier de la formulation est la minimisation sous contraintes suivante :

$$\begin{aligned} \inf_{v \in \mathcal{C}} f(v) &\equiv \inf_{v \in H} F(v) \\ F(v) &= f(v) + I_{\mathcal{C}}(v) \end{aligned} \quad , \quad I_{\mathcal{C}}(v) = \begin{cases} 0 & \text{si } v \in \mathcal{C} \\ +\infty & \text{si } v \notin \mathcal{C} \end{cases}$$

avec  $\mathcal{C}$  un sous-ensemble convexe fermé non vide de  $H$  et  $I_{\mathcal{C}}$  la fonction indicatrice de  $\mathcal{C}$ .

Une manière de résoudre le problème de minimisation (3.111) est de le transformer en un *problème de point-selle (min-max)*, qui consiste à rechercher la paire  $(\bar{u}, \bar{\lambda})$  telle que :

$$l(\bar{u}, \lambda) \leq l(\bar{u}, \bar{\lambda}) \leq l(u, \bar{\lambda}) \quad , \quad \forall u \in H \quad \forall \lambda \in Y^* \quad (3.112)$$

avec :  $Y, Y^*$  – un autre espace de Hilbert et son dual  $Y = Y^*$ ,

$\lambda$  – une variable duale, appelée *multiplicateur de Lagrange*,

$$l(u, \lambda) = - \sup_{p \in Y} \left( (\lambda, p) - \tilde{F}(u, p) \right) = \inf_{p \in Y} \left( \tilde{F}(u, p) - (\lambda, p) \right) \quad (3.113)$$

– la *fonctionnelle Lagrangienne* (le *Lagrangien*) de  $F$ ,

$\tilde{F}(u, p) = f(u) + \Psi(g(u) + p)$  – la *fonctionnelle perturbée* de  $F$ .

Résoudre le problème (min-max) associé au point-selle de la fonctionnelle  $l(u, \lambda)$  devient problématique lorsque  $\Psi$  est une fonction non-différentiable, ne permettant pas ainsi d'utiliser les méthodes du gradient. Une méthode efficace

<sup>1</sup>Se référer à l'annexe A

pour surmonter cet obstacle est la technique dite du Lagrangien augmenté. L'idée principale est de remplacer  $l(u, \lambda)$  par une fonctionnelle régularisée adéquate  $\mathcal{L}(u, \lambda)$ , appelée le *Lagrangien augmenté*, qui conserve les propriétés essentielles de  $l(u, \lambda)$  et pouvant être résolu par des méthodes standard. La fonctionnelle du Lagrangien augmenté est établie pour deux cas selon la fonctionnelle  $\Psi$  :

- 1)  $\Psi(g) = I_{\mathcal{C}}(g)$  – l'indicatrice d'un ensemble convexe fermé  $\mathcal{C}$ ,
- 2)  $\Psi(g) = I_{\mathcal{C}}^*(g)$  – la *fonction support* d'un ensemble convexe fermé  $\mathcal{C}$ .

**Première version** – Le premier cas représente la minimisation de la fonctionnelle  $f$  avec une contrainte (d'ensemble) imposée sur la variable primale  $g(u) \in \mathcal{K}$  ( $\mathcal{K} = \mathbf{R}_+ \equiv \{x \mid x \geq 0\}$ ) pour une contrainte inégalité standard  $g(u) \geq 0$ ) :

$$\inf_{u \in \mathcal{K}} f(u) = \inf_u (f(u) + I_{\mathcal{K}}(g(u))) \quad (3.114)$$

La fonctionnelle du Lagrangien augmenté prend la forme suivante :

$$\mathcal{L}(u, \lambda) = f(u) - \frac{1}{2r} |\lambda|^2 + \frac{1}{2r} D_{\mathcal{K}}^2(\lambda + r g(u)) \quad (3.115)$$

avec :  $D_{\mathcal{K}}^2(x) = \inf_{y \in \mathcal{K}} \{|x - y|^2\}$

– le carré de la distance entre le point  $x$  et l'ensemble convexe  $\mathcal{K}$ ,

$r$  – un paramètre de régularisation à valeur *finie*.

**Seconde version** – Pour le second cas :

$$\inf_u F(u) = \inf_u (f(u) + I_{\mathcal{C}}^*(g(u))) \quad , \quad (3.116)$$

une minimisation avec une contrainte sur un ensemble  $\lambda \in \mathcal{C}$  imposée sur la variable duale, a pour Lagrangien augmenté :

$$\mathcal{L}(u, \lambda) = f(u) + (\lambda, g(u)) + \frac{r}{2} |g(u)|^2 - \frac{1}{2r} D_{\mathcal{C}}^2(\lambda + r g(u)) \quad (3.117)$$

Chacune des fonctionnelles point-selle (3.115), (3.117), sous certaines hypothèses sur la régularité de  $f$  et  $g$ , sont  $C^1$ .

Une condition nécessaire pour que la paire  $(u, \lambda)$  soit un point-selle de  $\mathcal{L}(u, \lambda)$  est :

$$\begin{aligned} D\mathcal{L}((u, \lambda); (\delta u, \delta \lambda)) &= 0 \quad , \quad \forall \delta u \quad , \quad \forall \delta \lambda \\ \iff \begin{cases} \nabla_u \mathcal{L}(u, \lambda) = 0 \\ \nabla_\lambda \mathcal{L}(u, \lambda) = 0 \end{cases} & \quad (3.118) \end{aligned}$$

avec  $D\mathcal{L}((u, \lambda); (\delta u, \delta \lambda))$  la dérivée directionnelle de  $\mathcal{L}$  au point  $(u, \lambda)$  dans la direction  $(\delta u, \delta \lambda)$ .

**Application** – La méthode du Lagrangien augmenté consiste à remplacer le potentiel  $\Psi_c$  par la fonctionnelle du Lagrangien augmenté  $\ell_c$  dans le problème de minimisation du système complet. Ce faisant, on relaxe ce dernier en introduisant les multiplicateurs de Lagrange  $\boldsymbol{\lambda} = [\lambda_1, \dots, \boldsymbol{\lambda}_k, \dots, \lambda_i]$  (avec  $i$  le nombre de multiplicateurs de Lagrange introduits) pour finalement réécrire le problème sous la forme d'un problème de point-selle (min-max) :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\hat{\mathbf{y}}, \boldsymbol{\lambda}) = \hat{\mathcal{U}}_{sys}(\hat{\mathbf{y}}) &= \min_{\hat{\mathbf{z}}} \max_{\boldsymbol{\lambda}} [\mathcal{U}_U(\hat{\mathbf{z}}) + \hat{\mathcal{U}}_c(\hat{\mathbf{z}}, \boldsymbol{\lambda})] \\ &= \min_{\hat{\mathbf{z}}} \max_{\boldsymbol{\lambda}} [\mathcal{U}_U(\hat{\mathbf{z}}) + \int_{\Gamma} \ell_c(\mathbf{z}, \mathbf{z}', \boldsymbol{\lambda}) d\Gamma] \end{aligned} \quad (3.119)$$

Nous nous servons maintenant de la décomposition (3.56) pour introduire dans notre problème de point-selle les trois fonctionnelles correspondant au contact, au frottement et à l'adhésion, respectivement :

$$\mathcal{L}(\hat{\mathbf{y}}, \boldsymbol{\lambda}) = \min_{\hat{\mathbf{z}}} \max_{\boldsymbol{\lambda}} [\mathcal{U}_U(\hat{\mathbf{z}}) + \int_{\Gamma} (\ell_c^c(\mathbf{z}, \mathbf{z}', \lambda_n^c) + \ell_c^s(\mathbf{z}, \mathbf{z}', \boldsymbol{\lambda}_t^f) + \ell_c^a(\mathbf{z}, \mathbf{z}', \lambda^a)) d\Gamma] \quad (3.120)$$

avec les trois multiplicateurs de Lagrange  $\boldsymbol{\lambda} = [\boldsymbol{\lambda}^{cf}, \lambda^a]$ . Nous regroupons les multiplicateurs pour le contact et le frottement dans  $\boldsymbol{\lambda}^{cf} = \lambda_n^c \mathbf{n} + \boldsymbol{\lambda}_t^f$ . Les lois constitutives et d'état (3.62) à (3.64) prennent la forme :

$$\left\{ \begin{aligned} p_n &= \frac{\partial \ell_c(g_n, \mathbf{g}_t, \mathbf{g}_t^s, g^a, \boldsymbol{\lambda})}{\partial g_n} = \frac{\partial \ell_c^c(g_n, \lambda_n^c)}{\partial g_n} + \frac{\partial \ell_c^a(g_n, \mathbf{g}_t, g^a, \lambda^a)}{\partial g_n} \\ &= p_n^c + p_n^a \\ \mathbf{p}_t &= \frac{\partial \ell_c(g_n, \mathbf{g}_t, \mathbf{g}_t^s, g^a, \boldsymbol{\lambda})}{\partial \mathbf{g}_t} = \frac{\partial \ell_c^s(g_n, \mathbf{g}_t, \mathbf{g}_t^s, \boldsymbol{\lambda}_t^f)}{\partial \mathbf{g}_t} + \frac{\partial \ell_c^a(g_n, \mathbf{g}_t, g^a, \lambda^a)}{\partial \mathbf{g}_t} \\ &= \mathbf{p}_t^f + \mathbf{p}_t^a \end{aligned} \right. \quad (3.121)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \mathbf{p}_t^s &= -\frac{\partial \ell_c(g_n, \mathbf{g}_t, \mathbf{g}_t^s, g^a, \boldsymbol{\lambda})}{\partial \mathbf{g}_t^s} = -\frac{\partial \ell_c^s(g_n, \mathbf{g}_t, \mathbf{g}_t^s, \boldsymbol{\lambda}_t^f)}{\partial \mathbf{g}_t^s} \\ \mathbf{p}_t^s &\in \partial_{\mathbf{g}_t^s} \Phi_c(\dot{g}^a, \mathbf{g}_t^s; g^a, p_n^c) = \partial_{\mathbf{g}_t^s} \Phi_c^s(\mathbf{g}_t^s; p_n^c) \end{aligned} \right. \quad (3.122)$$

$$\left\{ \begin{aligned} p^a &= -\frac{\partial \ell_c(g_n, \mathbf{g}_t, \mathbf{g}_t^s, g^a, \boldsymbol{\lambda})}{\partial g^a} = -\frac{\partial \ell_c^a(g_n, \mathbf{g}_t, g^a, \lambda^a)}{\partial g^a} \\ p^a &\in \partial_{g^a} \Phi_c(\mathbf{g}_t^s, \dot{g}^a; g^a, p_n^c) = \partial_{g^a} \Phi_c^a(\dot{g}^a; g^a) \end{aligned} \right. \quad (3.123)$$

La condition nécessaire de point-selle s'écrit par rapport à la dérivée directionnelle de  $\mathcal{L}(\hat{\mathbf{y}}, \boldsymbol{\lambda})$  :

$$\begin{aligned}
 D\mathcal{L}((\mathbf{y}, \mathbf{y}', \boldsymbol{\lambda}); (\delta\mathbf{y}, \delta\mathbf{y}', \delta\boldsymbol{\lambda})) &= \left( DU(\mathbf{y}; \delta\mathbf{y}) + DU'(\mathbf{y}'; \delta\mathbf{y}') \right) \\
 &+ D\hat{\mathcal{U}}_c((\mathbf{y}, \mathbf{y}', \boldsymbol{\lambda}); (\delta\mathbf{y}, \delta\mathbf{y}', \delta\boldsymbol{\lambda})) = 0 \quad , \\
 \forall \delta\mathbf{y} \quad \forall \delta\boldsymbol{\lambda} &= \begin{bmatrix} \delta\boldsymbol{\lambda}^{cf} \\ \delta\lambda^a \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.124}$$

avec :

$$DU(\mathbf{y}; \delta\mathbf{y}) = \nabla_{\mathbf{y}}\mathcal{U}(\mathbf{y}) \cdot \delta\mathbf{y}$$

$$DU'(\mathbf{y}'; \delta\mathbf{y}') = \nabla_{\mathbf{y}'}\mathcal{U}'(\mathbf{y}') \cdot \delta\mathbf{y}'$$

$$\begin{aligned}
 D\hat{\mathcal{U}}_c((\mathbf{y}, \mathbf{y}', \boldsymbol{\lambda}); (\delta\mathbf{y}, \delta\mathbf{y}', \delta\boldsymbol{\lambda})) &= \nabla_{\mathbf{y}}\hat{\mathcal{U}}_c(\mathbf{y}, \mathbf{y}', \boldsymbol{\lambda}) \cdot \delta\mathbf{y} + \nabla_{\mathbf{y}'}\hat{\mathcal{U}}_c(\mathbf{y}, \mathbf{y}', \boldsymbol{\lambda}) \cdot \delta\mathbf{y}' \\
 &+ \nabla_{\boldsymbol{\lambda}^{cf}}\hat{\mathcal{U}}_c(\mathbf{y}, \mathbf{y}', \boldsymbol{\lambda}) \cdot \delta\boldsymbol{\lambda}^{cf} + \nabla_{\lambda^a}\hat{\mathcal{U}}_c(\mathbf{y}, \mathbf{y}', \boldsymbol{\lambda}) \delta\lambda^a
 \end{aligned}$$

Les deux premiers termes de (3.124) sont les principes des travaux virtuels pour le contacteur  $\Omega$  et la cible  $\Omega'$ . Le troisième terme  $D\hat{\mathcal{U}}_c((\mathbf{y}, \mathbf{y}', \boldsymbol{\lambda}); (\delta\mathbf{y}, \delta\mathbf{y}', \delta\boldsymbol{\lambda}))$  représente le *principe des travaux virtuels augmenté* développé par les forces de contact, frottement et adhésion à l'interface.

En introduisant les fonctionnelles des Lagrangiens augmentés dans (3.124), d'après :

$$\hat{\mathcal{U}}_c(\mathbf{y}, \mathbf{y}', \boldsymbol{\lambda}) = \int_{\Gamma} \ell_c(\mathbf{z}, \mathbf{z}', \boldsymbol{\lambda}) d\Gamma \quad ,$$

il vient :

$$\begin{aligned}
 D\hat{\mathcal{U}}_c((\mathbf{y}, \mathbf{y}', \boldsymbol{\lambda}); (\delta\mathbf{y}, \delta\mathbf{y}', \delta\boldsymbol{\lambda})) &= \\
 &= \int_{\Gamma} \nabla_{\hat{\mathbf{y}}} \ell_c^c(\mathbf{y}, \mathbf{y}', \boldsymbol{\lambda}_n^c) \cdot \delta\hat{\mathbf{y}} d\Gamma + \int_{\Gamma} \nabla_{\hat{\mathbf{y}}} \ell_c^s(\mathbf{y}, \mathbf{y}', \boldsymbol{\lambda}_t^f) \cdot \delta\hat{\mathbf{y}} d\Gamma \\
 &+ \int_{\Gamma} \nabla_{\hat{\mathbf{y}}} \ell_c^a(\mathbf{y}, \mathbf{y}', \lambda^a) \cdot \delta\hat{\mathbf{y}} d\Gamma + \int_{\Gamma} \nabla_{\boldsymbol{\lambda}^{cf}} \ell_c^c(\mathbf{y}, \mathbf{y}', \boldsymbol{\lambda}_t^f) \cdot \delta\boldsymbol{\lambda}^{cf} d\Gamma \\
 &+ \int_{\Gamma} \nabla_{\boldsymbol{\lambda}^{cf}} \ell_c^s(\mathbf{y}, \mathbf{y}', \boldsymbol{\lambda}_t^f) \cdot \delta\boldsymbol{\lambda}^{cf} d\Gamma + \int_{\Gamma} \nabla_{\lambda^a} \ell_c^a(\mathbf{y}, \mathbf{y}', \lambda^a) \delta\lambda^a d\Gamma
 \end{aligned}$$

avec :

$$\hat{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{y}' \end{bmatrix}, \quad \delta\hat{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} \delta\mathbf{y} \\ \delta\mathbf{y}' \end{bmatrix},$$

Sachant que  $\ell_c^c(\mathbf{y}, \mathbf{y}', \lambda_n^c) \equiv \ell_c^c(\widehat{\mathbf{y}}, \lambda_n^c)$ ,  $\ell_c^s(\mathbf{y}, \mathbf{y}', \lambda_t^f) \equiv \ell_c^s(\widehat{\mathbf{y}}, \lambda_t^f)$ , et  $\ell_c^a(\mathbf{y}, \mathbf{y}', \lambda^a) \equiv \ell_c^a(\widehat{\mathbf{y}}, \lambda^a)$ , on définit les dérivées par rapport aux variables  $(\widehat{\mathbf{y}}, \boldsymbol{\lambda})$  :

$$\nabla_{\widehat{\mathbf{y}}} \ell_c = \begin{bmatrix} \nabla_{\mathbf{y}} \ell_c \\ \nabla_{\mathbf{y}'} \ell_c \end{bmatrix}, \quad \nabla_{\boldsymbol{\lambda}} \ell_c^c = \begin{bmatrix} \nabla_{\lambda_n^c} \ell_c^c \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \nabla_{\boldsymbol{\lambda}} \ell_c^s = \begin{bmatrix} \nabla_{\lambda_t^f} \ell_c^s \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \nabla_{\boldsymbol{\lambda}} \ell_c^a = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \nabla_{\lambda^a} \ell_c^a \end{bmatrix}$$

Finalement, le choix de  $\delta \widehat{\mathbf{y}}$  et  $\delta \boldsymbol{\lambda}^{cf}$ ,  $\delta \lambda^a$  étant arbitraire, la condition nécessaire de point-selle peut se subdiviser en un *principe augmenté des travaux virtuels de contact* et en équations variationnelles des multiplicateurs de Lagrange :

$$\begin{aligned} D\mathcal{L}((\mathbf{y}, \mathbf{y}', \boldsymbol{\lambda}); (\delta \mathbf{y}, \delta \mathbf{y}', \delta \boldsymbol{\lambda})) &= \left( \nabla_{\mathbf{y}} \mathcal{U}(\mathbf{y}) \cdot \delta \mathbf{y} + \nabla_{\mathbf{y}'} \mathcal{U}'(\mathbf{y}') \cdot \delta \mathbf{y}' \right) \\ &+ \int_{\Gamma} \begin{bmatrix} \delta \mathbf{y} \\ \delta \mathbf{y}' \\ \delta \boldsymbol{\lambda}^{cf} \\ \delta \lambda^a \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \nabla_{\mathbf{y}} \ell_c^c(\mathbf{y}, \mathbf{y}', \lambda_n^c) + \nabla_{\mathbf{y}} \ell_c^s(\mathbf{y}, \mathbf{y}', \lambda_t^f) + \nabla_{\mathbf{y}} \ell_c^a(\mathbf{y}, \mathbf{y}', \lambda^a) \\ \nabla_{\mathbf{y}'} \ell_c^c(\mathbf{y}, \mathbf{y}', \lambda_n^c) + \nabla_{\mathbf{y}'} \ell_c^s(\mathbf{y}, \mathbf{y}', \lambda_t^f) + \nabla_{\mathbf{y}'} \ell_c^a(\mathbf{y}, \mathbf{y}', \lambda^a) \\ \nabla_{\lambda_n^c} \ell_c^c(\mathbf{y}, \mathbf{y}', \lambda_n^c) + \nabla_{\lambda_t^f} \ell_c^s(\mathbf{y}, \mathbf{y}', \lambda_t^f) \\ \nabla_{\lambda^a} \ell_c^a(\mathbf{y}, \mathbf{y}', \lambda^a) \end{bmatrix} d\Gamma \\ &= \nabla_{\widehat{\mathbf{y}}} \mathcal{U}_U(\widehat{\mathbf{y}}) \cdot \delta \widehat{\mathbf{y}} + \int_{\Gamma} \begin{bmatrix} \delta \widehat{\mathbf{y}} \\ \delta \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \nabla_{\widehat{\mathbf{y}}} \ell_c^c(\widehat{\mathbf{y}}, \boldsymbol{\lambda}) + \nabla_{\widehat{\mathbf{y}}} \ell_c^s(\widehat{\mathbf{y}}, \boldsymbol{\lambda}) + \nabla_{\widehat{\mathbf{y}}} \ell_c^a(\widehat{\mathbf{y}}, \boldsymbol{\lambda}) \\ \nabla_{\boldsymbol{\lambda}} \ell_c^c(\widehat{\mathbf{y}}, \boldsymbol{\lambda}) + \nabla_{\boldsymbol{\lambda}} \ell_c^s(\widehat{\mathbf{y}}, \boldsymbol{\lambda}) + \nabla_{\boldsymbol{\lambda}} \ell_c^a(\widehat{\mathbf{y}}, \boldsymbol{\lambda}) \end{bmatrix} d\Gamma \\ &= \nabla_{\widehat{\mathbf{y}}} \mathcal{U}_U(\widehat{\mathbf{y}}) \cdot \delta \widehat{\mathbf{y}} \\ &+ \int_{\Gamma} \begin{bmatrix} \delta \widehat{\mathbf{y}} \\ \delta \boldsymbol{\lambda}^{cf} \\ \delta \lambda^a \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \left[ \nabla_{\widehat{\mathbf{y}}} \mathbf{g}(\widehat{\mathbf{y}}) \right]^T \left( \frac{\partial \ell_c^c(\mathbf{g}(\widehat{\mathbf{y}}), \boldsymbol{\lambda})}{\partial \mathbf{g}} + \frac{\partial \ell_c^s(\mathbf{g}(\widehat{\mathbf{y}}), \boldsymbol{\lambda})}{\partial \mathbf{g}} + \frac{\partial \ell_c^a(\mathbf{g}(\widehat{\mathbf{y}}), \boldsymbol{\lambda})}{\partial \mathbf{g}} \right) \\ \frac{\partial \ell_c^c(\mathbf{y}, \mathbf{y}', \lambda_n^c)}{\partial \lambda_n^c} + \frac{\partial \ell_c^s(\mathbf{y}, \mathbf{y}', \lambda_t^f)}{\partial \lambda_t^f} \\ \frac{\partial \ell_c^a(\mathbf{y}, \mathbf{y}', \lambda^a)}{\partial \lambda^a} \end{bmatrix} d\Gamma \\ &= 0 \end{aligned} \tag{3.125}$$

$$\begin{aligned}
 \Leftrightarrow & \int_{\Omega} \nabla(\delta \mathbf{y}(\mathbf{x})) : \mathbf{P}(\mathbf{x}) d\Omega + \int_{\Omega'} \nabla(\delta \mathbf{y}'(\mathbf{x}')) : \mathbf{P}'(\mathbf{x}') d\Omega' \\
 & - \int_{\Omega} \delta \mathbf{y}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{b}(\mathbf{x}) d\Omega - \int_{\Omega'} \delta \mathbf{y}'(\mathbf{x}') \cdot \mathbf{b}'(\mathbf{x}') d\Omega' \\
 & - \int_{\Gamma_{\sigma}} \delta \mathbf{y}(\mathbf{x}) \cdot \bar{\mathbf{p}}(\mathbf{x}) d\Gamma - \int_{\Gamma'_{\sigma}} \delta \mathbf{y}'(\mathbf{x}') \cdot \bar{\mathbf{p}}'(\mathbf{x}') d\Gamma' \\
 & + \int_{\Gamma} \delta \mathbf{y}(\mathbf{x}) \cdot \left[ \nabla_{\mathbf{y}} \ell_c^c(\mathbf{y}(\mathbf{x}), \mathbf{y}'(\mathbf{x}'), \lambda_n^c(\mathbf{x})) + \nabla_{\mathbf{y}} \ell_c^s(\mathbf{y}(\mathbf{x}), \mathbf{y}'(\mathbf{x}'), \boldsymbol{\lambda}_t^f(\mathbf{x})) \right. \\
 & \qquad \qquad \qquad \left. + \nabla_{\mathbf{y}} \ell_c^a(\mathbf{y}(\mathbf{x}), \mathbf{y}'(\mathbf{x}'), \lambda^a(\mathbf{x})) \right] d\Gamma \\
 & + \int_{\Gamma} \delta \mathbf{y}'(\mathbf{x}') \cdot \left[ \nabla_{\mathbf{y}'} \ell_c^c(\mathbf{y}(\mathbf{x}), \mathbf{y}'(\mathbf{x}'), \lambda_n^c(\mathbf{x})) + \nabla_{\mathbf{y}'} \ell_c^s(\mathbf{y}(\mathbf{x}), \mathbf{y}'(\mathbf{x}'), \boldsymbol{\lambda}_t^f(\mathbf{x})) \right. \\
 & \qquad \qquad \qquad \left. + \nabla_{\mathbf{y}'} \ell_c^a(\mathbf{y}(\mathbf{x}), \mathbf{y}'(\mathbf{x}'), \lambda^a(\mathbf{x})) \right] d\Gamma = 0 \\
 & \forall \delta \mathbf{y}(\mathbf{x}) \in V \quad , \quad \forall \delta \mathbf{y}'(\mathbf{x}') \in V'
 \end{aligned} \tag{3.126}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Gamma} \delta \lambda_n^c(\mathbf{x}) \nabla_{\lambda_n^c} \ell_c^c(\mathbf{y}(\mathbf{x}), \mathbf{y}'(\mathbf{x}'), \lambda_n^c(\mathbf{x})) d\Gamma = 0 \quad , \quad \forall \delta \lambda_n^c(\mathbf{x}) \\ \int_{\Gamma} \delta \boldsymbol{\lambda}_t^f(\mathbf{x}) \cdot \nabla_{\boldsymbol{\lambda}_t^f} \ell_c^s(\mathbf{y}(\mathbf{x}), \mathbf{y}'(\mathbf{x}'), \boldsymbol{\lambda}_t^f(\mathbf{x})) d\Gamma = 0 \quad , \quad \forall \delta \boldsymbol{\lambda}_t^f(\mathbf{x}) \\ \int_{\Gamma} \delta \lambda^a(\mathbf{x}) \nabla_{\lambda^a} \ell_c^a(\mathbf{y}(\mathbf{x}), \mathbf{y}'(\mathbf{x}'), \lambda^a(\mathbf{x})) d\Gamma = 0 \quad , \quad \forall \delta \lambda^a(\mathbf{x}) \end{array} \right.$$

### Contact avec frottement en Lagrangien Augmenté

L'énergie libre du contact s'écrit, d'après (3.46)

$$\Psi_c^c(g_n) = \mathbf{I}_{\mathbf{R}^+}(g_n) \tag{3.127}$$

La première version nous donne le Lagrangien augmenté :

$$\ell_c^c(g_n, \lambda_n^c) = -\frac{1}{2r} |\lambda_n^c|^2 + \frac{1}{2r} D_{\mathbf{R}^+}^2(\lambda_n^c + r g_n) \quad , \quad \hat{\lambda}_n^c = \lambda_n^c + r g_n \tag{3.128}$$

qui peut aussi s'expliciter :

$$\ell_c^c(g_n(\hat{\mathbf{Y}}), \lambda_n^c) = \begin{cases} (\lambda_n^c + \frac{r}{2} g_n(\hat{\mathbf{Y}})) g_n(\hat{\mathbf{Y}}) & \text{si } \hat{\lambda}_n^c \leq 0 \\ -\frac{1}{2r} |\lambda_n^c|^2 & \text{si } \hat{\lambda}_n^c > 0 \end{cases} \tag{3.129}$$

On calcule ensuite les dérivées :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ell_c^c(g_n, \lambda_n^c)}{\partial \mathbf{g}} &= [\nabla_{\mathbf{g}} g_n]^T \frac{\partial \ell_c^c(g_n, \lambda_n^c)}{\partial g_n} \\ &= \begin{cases} \hat{\lambda}_n^c \mathbf{n} & \text{si } \hat{\lambda}_n^c \leq 0 \text{ contact} \\ \mathbf{0} & \text{si } \hat{\lambda}_n^c > 0 \text{ écart} \end{cases} \end{aligned} \quad (3.130)$$

$$\frac{\partial \ell_c^c(g_n, \lambda_n^c)}{\partial \lambda_n^c} = \begin{cases} g_n \mathbf{n} & \text{si } \hat{\lambda}_n^c \leq 0 \text{ contact} \\ -\frac{1}{r} \lambda_n^c \mathbf{n} & \text{si } \hat{\lambda}_n^c > 0 \text{ écart} \end{cases} \quad (3.131)$$

On constate que le multiplicateur augmenté du contact normal est une pression normale, et d'après les lois constitutives, on a  $p_n^c = \hat{\lambda}_n^c$ .

Partant de l'énergie libre du terme de frottement :

$$\Psi_c^s(\mathbf{g}_t, \mathbf{g}_t^s) = I_{\{0\}}(\mathbf{g}_t - \mathbf{g}_t^s) \quad , \quad (3.132)$$

la formulation du Lagrangien augmenté s'écrit :

$$\ell_c^s(\mathbf{g}_t, \mathbf{g}_t^s, \boldsymbol{\lambda}_t^f) = -\frac{1}{2r} \|\boldsymbol{\lambda}_t^f\|^2 + \frac{1}{2r} D_{\{0\}}^2(\boldsymbol{\lambda}_t^f + r(\mathbf{g}_t - \mathbf{g}_t^s)) \quad (3.133)$$

avec  $\hat{\boldsymbol{\lambda}}_t^f = \boldsymbol{\lambda}_t^f + r(\mathbf{g}_t - \mathbf{g}_t^s)$  le multiplicateur augmenté équivalent.

L'équation (3.133) peut aussi se réécrire :

$$\ell_c^s(\mathbf{g}_t(\hat{\mathbf{y}}), \mathbf{g}_t^s, \boldsymbol{\lambda}_t^f) = -\frac{1}{2r} \|\boldsymbol{\lambda}_t^f\|^2 + \frac{1}{2r} \|\boldsymbol{\lambda}_t^f + r(\mathbf{g}_t(\hat{\mathbf{y}}) - \mathbf{g}_t^s)\|^2 \quad (3.134)$$

On calcule les dérivées :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ell_c^s(\mathbf{g}_t, \mathbf{g}_t^s, \boldsymbol{\lambda}_t^f)}{\partial \mathbf{g}} &= [\nabla_{\mathbf{g}} \mathbf{g}_t]^T \frac{\partial \ell_c^s(\mathbf{g}_t, \mathbf{g}_t^s, \boldsymbol{\lambda}_t^f)}{\partial \mathbf{g}_t} \\ &= \hat{\boldsymbol{\lambda}}_t^f \end{aligned} \quad (3.135)$$

$$\frac{\partial \ell_c^s(\mathbf{g}_t, \mathbf{g}_t^s, \boldsymbol{\lambda}_t^f)}{\partial \boldsymbol{\lambda}^{cf}} = \mathbf{g}_t - \mathbf{g}_t^s \quad (3.136)$$

Les lois constitutives nous permettent de constater que :

$$\begin{cases} \mathbf{p}_t^s = \hat{\boldsymbol{\lambda}}_t^f = \boldsymbol{\lambda}_t^f + r(\mathbf{g}_t - \mathbf{g}_t^s) \\ \mathbf{p}_t^s \in \partial_{\mathbf{g}_t^s} \Phi_c^s(\mathbf{g}_t^s; \hat{\lambda}_n^c) = -\mu\pi \partial \|\mathbf{g}_t^s\| \end{cases} \quad (3.137)$$

avec  $\pi = P_{\mathbf{R}^-}(\hat{\lambda}_n^c)$  qui traduit le fait que le rayon du disque  $\mathcal{C}(p_n^c)$  est nul ( $\pi = 0$ ) pour des pressions de contact (augmentées) positives (qui traduisent un état

d'écart).

On déduit donc la relation suivante :

$$\hat{\lambda}_t^f \in -\mu\pi\partial\|\mathbf{g}_t^{\circ s}\| \quad (3.138)$$

D'autre part, on peut décomposer  $\mathbf{g}_t^s$  en écrivant  $\mathbf{g}_t^s = \mathbf{g}_{t_0}^s + \mathbf{g}_t^{\circ s}dt$ , on réécrit la relation précédente :

$$\lambda_t^f + r(\mathbf{g}_t - \mathbf{g}_{t_0}^s + \mathbf{g}_t^{\circ s}dt) \in -\mu\pi\partial\|\mathbf{g}_t^{\circ s}\| \quad (3.139)$$

qui s'écrit aussi (Figure 3.31) :

$$\lambda_t^f + r(\mathbf{g}_t - \mathbf{g}_{t_0}^s) \in -\mu P_{\mathbf{R}} - (\hat{\lambda}_n^c) \partial\|\mathbf{g}_t^{\circ s}\| + r\mathbf{g}_t^{\circ s}dt \quad (3.140)$$

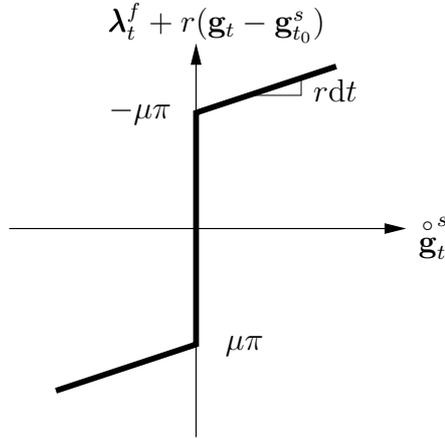


FIG. 3.31 – Graphe de  $\lambda_t^f + r(\mathbf{g}_t - \mathbf{g}_{t_0}^s)$  en fonction de  $\mathbf{g}_t^{\circ s}$ .

Il en résulte :

$$\text{Si } \|\hat{\lambda}_{t_0}^f\| \leq -\mu\pi \iff \begin{cases} \mathbf{g}_t^{\circ s} = \mathbf{0} \\ \hat{\lambda}_t^f = \lambda_t^f + r(\mathbf{g}_t - \mathbf{g}_{t_0}^s) \end{cases} \quad (3.141)$$

$$\text{Si } \|\hat{\lambda}_{t_0}^f\| > -\mu\pi \iff \begin{cases} \mathbf{g}_t^{\circ s} = \frac{1}{dt} \left( \frac{1}{r} \lambda_t^f + (\mathbf{g}_t - \mathbf{g}_{t_0}^s) + \frac{\mu\pi}{r} \frac{\lambda_t^f + r(\mathbf{g}_t - \mathbf{g}_{t_0}^s)}{\|\lambda_t^f + r(\mathbf{g}_t - \mathbf{g}_{t_0}^s)\|} \right) \\ \hat{\lambda}_t^f = -\mu\pi \frac{\lambda_t^f + r(\mathbf{g}_t - \mathbf{g}_{t_0}^s)}{\|\lambda_t^f + r(\mathbf{g}_t - \mathbf{g}_{t_0}^s)\|} \end{cases} \quad (3.142)$$

avec  $\hat{\lambda}_{t_0}^f = \lambda_t^f + r(\mathbf{g}_t - \mathbf{g}_{t_0}^s)$ .

Si on récapitule en se servant de (3.141) et (3.142) :

$$\hat{\lambda}_t^f = \begin{cases} \lambda_t^f + r(\mathbf{g}_t - \mathbf{g}_{t_0}^s) & \text{si } \|\hat{\lambda}_{t_0}^f\| \leq -\mu\pi \\ -\mu\pi \frac{\lambda_t^f + r(\mathbf{g}_t - \mathbf{g}_{t_0}^s)}{\|\lambda_t^f + r(\mathbf{g}_t - \mathbf{g}_{t_0}^s)\|} & \text{si } \|\hat{\lambda}_{t_0}^f\| > -\mu\pi \end{cases} \quad (3.143)$$

ou encore :

$$\hat{\lambda}_t^f = P_{C(\pi)}(\lambda_t^f + r(\mathbf{g}_t - \mathbf{g}_{t_0}^s)) \quad (3.144)$$

En remplaçant dans (3.133) et (3.134), on en déduit donc finalement les dérivées :

$$\frac{\partial \ell_c^s(\mathbf{g}_t, \mathbf{g}_t^s, \lambda_t^f)}{\partial \mathbf{g}} = \begin{cases} \begin{cases} \lambda_t^f + r(\mathbf{g}_t - \mathbf{g}_{t_0}^s) & \text{si } \|\hat{\lambda}_{t_0}^f\| \leq -\mu\pi \quad \text{adhérence} \\ -\mu\pi \frac{\lambda_t^f + r(\mathbf{g}_t - \mathbf{g}_{t_0}^s)}{\|\lambda_t^f + r(\mathbf{g}_t - \mathbf{g}_{t_0}^s)\|} & \text{si } \|\hat{\lambda}_{t_0}^f\| > -\mu\pi \quad \text{glissement} \end{cases} \left. \begin{array}{l} \hat{\lambda}_n^c \leq 0 \\ \text{contact} \end{array} \right\} \\ \mathbf{0} \quad \forall \hat{\lambda}_t^f \quad \hat{\lambda}_n^c > 0 \quad \text{écart} \end{cases} \quad (3.145)$$

$$\frac{\partial \ell_c^s(\mathbf{g}_t, \mathbf{g}_t^s, \lambda_t^f)}{\partial \lambda^{cf}} = \begin{cases} \begin{cases} \mathbf{g}_t - \mathbf{g}_{t_0}^s & \text{si } \|\hat{\lambda}_{t_0}^f\| \leq -\mu\pi \quad \text{adhérence} \\ -\frac{1}{r} \left( \lambda_t^f + \mu\pi \frac{\lambda_t^f + r(\mathbf{g}_t - \mathbf{g}_{t_0}^s)}{\|\lambda_t^f + r(\mathbf{g}_t - \mathbf{g}_{t_0}^s)\|} \right) & \text{si } \|\hat{\lambda}_{t_0}^f\| > -\mu\pi \quad \text{glissement} \end{cases} \left. \begin{array}{l} \hat{\lambda}_n^c \leq 0 \\ \text{contact} \end{array} \right\} \\ -\frac{1}{r} \lambda_t^f \quad \forall \hat{\lambda}_t^f \quad \hat{\lambda}_n^c > 0 \quad \text{écart} \end{cases} \quad (3.146)$$

**Remarque 3.3.3** On constate que cette formulation du Lagrangien augmenté basée sur les potentiels de contact avec frottement faisant appel à une variable interne est en pratique équivalente à l'approche par variables strictement cinématiques (voir sections 2.3.4 et 2.3.5) telle que développée par Pietrzak [100]. La technique du Lagrangien augmenté est donc applicable à des problèmes avec des variables internes.

### Adhésion en Lagrangien Augmenté

L'énergie libre d'adhésion s'écrit, d'après (3.46) :

$$\Psi_c(g_n, \mathbf{g}_t, g^a) = \mathbf{I}_{\mathbf{R}^-}(\|\mathbf{P}_{\mathbf{R}_n^+}(\mathbf{g})\| - g^a) = \mathbf{I}_{\mathbf{R}^-}(\|\tilde{\mathbf{g}}\| - g^a) \quad (3.147)$$

On en déduit le Lagrangien correspondant :

$$\ell_c^a(\tilde{\mathbf{g}}, \lambda^a) = -\frac{1}{2r} |\lambda^a|^2 + \frac{1}{2r} \mathbf{D}_{\mathbf{R}^-}^2(\lambda^a + r(\|\tilde{\mathbf{g}}\| - g^a)) \quad , \quad \hat{\lambda}^a = \lambda^a + r(\|\tilde{\mathbf{g}}\| - g^a) \quad (3.148)$$

qui peut aussi s'écrire :

$$\ell_c^a(\tilde{\mathbf{g}}(\hat{\mathbf{y}}), \lambda^a) = \begin{cases} -\frac{1}{2r} |\lambda^a|^2 & \text{si } \hat{\lambda}^a \leq 0 \\ \lambda^a + \frac{r}{2} (\|\tilde{\mathbf{g}}(\hat{\mathbf{y}})\| - g^a)^2 & \text{si } \hat{\lambda}^a > 0 \end{cases} \quad (3.149)$$

Nous calculons les dérivées :

$$\frac{\partial \ell_c^a(\mathbf{g}, \lambda^a)}{\partial \mathbf{g}} = \begin{cases} \mathbf{0} & \text{si } \hat{\lambda}^a \leq 0 \\ \hat{\lambda}^a \tilde{\mathbf{d}} & \text{si } \hat{\lambda}^a > 0 \end{cases} \quad (3.150)$$

$$\frac{\partial \ell_c^a(\mathbf{g}, \lambda^a)}{\partial \lambda^a} = \begin{cases} -\frac{1}{r} \lambda^a & \text{si } \hat{\lambda}^a \leq 0 \\ \|\tilde{\mathbf{g}}\| - g^a & \text{si } \hat{\lambda}^a > 0 \end{cases} \quad (3.151)$$

D'après les lois constitutives, on constate que :

$$\begin{cases} p^a = \hat{\lambda}^a = \lambda^a + r(\|\tilde{\mathbf{g}}\| - g^a) \\ p^a \in \partial \mathbf{I}_{[-\infty, s(g^a)]}^*(\dot{g}^a) \end{cases} \quad (3.152)$$

On en déduit donc que :

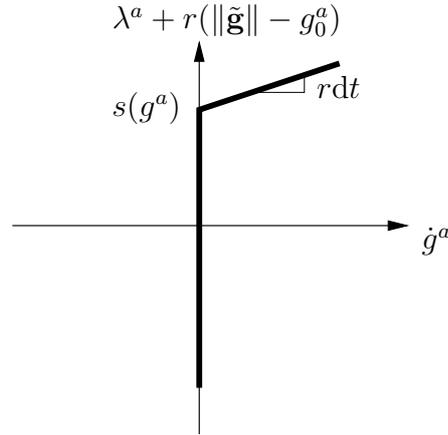
$$\hat{\lambda}^a \in \partial \mathbf{I}_{[-\infty, s(g^a)]}^*(\dot{g}^a) \quad (3.153)$$

D'autre part, on peut décomposer  $g^a$  en écrivant  $g^a = g_0^a + \dot{g}^a dt$ , on réécrit la relation précédente :

$$\lambda^a + r(\|\tilde{\mathbf{g}}\| - g_0^a - \dot{g}^a dt) \in \partial \mathbf{I}_{[-\infty, s(g^a)]}^*(\dot{g}^a) \quad (3.154)$$

qui s'écrit aussi (Figure 3.32) :

$$\lambda^a + r(\|\tilde{\mathbf{g}}\| - g_0^a) \in \partial \mathbf{I}_{[-\infty, s(g^a)]}^*(\dot{g}^a) + r \dot{g}^a dt \quad (3.155)$$


 FIG. 3.32 – Graphe de  $\lambda^a + r(\|\tilde{\mathbf{g}}\| - g_0^a)$  en fonction de  $g^a$ .

Il en résulte, en posant  $\hat{\lambda}_0^a = \lambda_0^a + r(\|\tilde{\mathbf{g}}\| - g_0^a)$  :

$$\text{Si } \hat{\lambda}_0^a \leq s(g^a) \iff \begin{cases} \dot{g}^a = 0 \\ \hat{\lambda}_0^a = \lambda^a + r(\|\tilde{\mathbf{g}}\| - g_0^a) \end{cases} \quad (3.156)$$

$$\text{Si } \hat{\lambda}_0^a > s(g^a) \iff \begin{cases} \dot{g}^a = \frac{1}{r dt}(\lambda^a + r(\|\tilde{\mathbf{g}}\| - g_0^a) - s(g^a)) \\ \hat{\lambda}^a = s(g^a) \end{cases} \quad (3.157)$$

On récapitule, en se servant de (3.156) et (3.157) :

$$\hat{\lambda}^a = \begin{cases} \lambda^a + r(\|\tilde{\mathbf{g}}\| - g_0^a) & \text{si } \hat{\lambda}_0^a \leq s(g^a) \\ s(g^a) & \text{si } \hat{\lambda}_0^a > s(g^a) \end{cases} \quad (3.158)$$

ou encore :

$$\hat{\lambda}^a = P_{[-\infty, s(g^a)]}(\lambda^a + r(\|\tilde{\mathbf{g}}\| - g_0^a)) \quad (3.159)$$

En introduisant ce résultat dans (3.150) et (3.151), on obtient finalement les dérivées :

$$\frac{\partial \ell_c^a(\mathbf{g}, \lambda^a)}{\partial \mathbf{g}} = \begin{cases} \left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{0} & \text{si } \hat{\lambda}^a \leq 0 \text{ jeu} \\ \hat{\lambda}^a \mathbf{d} & \text{si } 0 < \hat{\lambda}^a \leq s(g^a) \text{ adhésion} \\ s(g^a) \mathbf{d} & \text{si } \hat{\lambda}^a > s(g^a) \text{ décohésion} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \hat{\lambda}_n^c > 0 \\ \text{écart} \end{array} \\ \left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{0} & \text{si } \hat{\lambda}^a \leq 0 \text{ jeu} \\ \hat{\lambda}^a \mathbf{t}_a & \text{si } 0 < \hat{\lambda}^a \leq s(g^a) \text{ adhésion} \\ s(g^a) \mathbf{t}_a & \text{si } \hat{\lambda}^a > s(g^a) \text{ décohésion} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \hat{\lambda}_n^c \leq 0 \\ \text{contact} \end{array} \end{cases} \quad (3.160)$$

$$\frac{\partial \ell_c^a(\mathbf{g}, \lambda^a)}{\partial \lambda^a} = \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{ll} -\frac{1}{r}\lambda^a & \text{si } \hat{\lambda}^a \leq 0 \text{ jeu} \\ \|\mathbf{g}\| - g^a & \text{si } 0 < \hat{\lambda}^a \leq s(g^a) \text{ adhésion} \\ -\frac{1}{r}(\lambda^a - s(g^a)) & \text{si } \hat{\lambda}^a > s(g^a) \text{ décohésion} \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} \hat{\lambda}_n^c > 0 \\ \text{écart} \end{array} \right\} \\ \left\{ \begin{array}{ll} -\frac{1}{r}\lambda^a & \text{si } \hat{\lambda}^a \leq 0 \text{ jeu} \\ \|\mathbf{g}_t\| - g^a & \text{si } 0 < \hat{\lambda}^a \leq s(g^a) \text{ adhésion} \\ -\frac{1}{r}(\lambda^a - s(g^a)) & \text{si } \hat{\lambda}^a > s(g^a) \text{ décohésion} \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} \hat{\lambda}_n^c \leq 0 \\ \text{contact} \end{array} \right\} \end{array} \right. \quad (3.161)$$

avec  $\mathbf{d} = \frac{\mathbf{g}}{\|\mathbf{g}\|}$  et  $\mathbf{t}_a = \frac{\mathbf{g}_t}{\|\mathbf{g}_t\|}$ .

**Commentaire 3.3.1** En Lagrangien augmenté, il n'est pas impératif d'introduire dans la formulation la variable  $\tilde{\mathbf{g}}$ . On peut se contenter d'utiliser  $\mathbf{g}$ , comme la technique résoud le problème de manière exacte et la solution n'admet pas de pénétration  $g_n < 0$  entre les deux corps. Cependant, nous conserverons toutefois  $\tilde{\mathbf{g}}$  en raison des itérations du traitement numérique, traitement que nous abordons au chapitre qui suit.



# Chapitre 4

## Traitement numérique

---

### 4.1 Introduction

Pour peu que les corps  $\Omega$  et  $\Omega'$  aient des formes un peu compliquées et que les lois de comportement des matériaux constitutifs soient non linéaires, la recherche d'une solution analytique de problèmes de mécanique des solides avec contact devient fastidieuse, voire impossible. Il faut en conséquence faire appel à des techniques numériques pour obtenir une solution approchée au problème, techniques que nous exposerons dans ce chapitre.

Ce chapitre se divise en trois parties. Dans la première, il s'agit d'exposer tout d'abord les méthodes numériques en mécanique des solides. Sans nous y attarder, le sujet ayant été largement traité dans la littérature (voir Oden [97], Hughes [63], Zienkiewicz–Taylor [135] [136], Curnier [22], Gmür [49]), notre exposé se situera dans le cadre du code d'éléments finis TACT [21] développé par Curnier. Dans la seconde partie, nous décrirons les méthodes numériques en mécanique des contacts, notamment sa discrétisation et sa linéarisation, en nous concentrant sur l'élément de contact avec frottement et adhésion. Pour finir, la troisième partie exposera des résultats de simulations numériques simples qui valident la solution numérique et la convergence de la méthode de résolution.

### 4.2 Méthodes numériques en mécanique des solides

D'une manière générale, la résolution d'un problème aux valeurs aux limites et initiales en mécanique des milieux continus nécessite l'intégration d'un ensemble d'équations différentielles partielles non linéaires. Pour de tels problèmes, les solutions analytiques restent exceptionnelles, et si elles existent, ces dernières sont limitées par la géométrie qui reste simple et la loi constitutive des corps qui est la plupart du temps une loi linéaire élastique. L'utilisation de techniques numériques devient en conséquence indispensable pour tous les autres cas.

La résolution numérique complète d'un problème de thermomécanique des solides nécessite les méthodes suivantes ([22]) :

- discrétisation spatiale du corps par la Méthode des Eléments Finis (MEF)
- résolution des non-linéarités (géométrique et matérielle) par la Méthode des Itérations Linéaires (MIL)
- discrétisation temporelle par la Méthode des Différences Finies (MDF)

La combinaison de ces trois méthodes permet de transformer le système d'équations différentielles partielles non linéaires du problème en un système d'équations algébriques pouvant être résolu numériquement.

#### 4.2.1 Discrétisation spatiale et méthode des éléments finis

La méthode des éléments finis consiste en une discrétisation spatiale du corps en *éléments* géométriques simples connectés par un nombre fini de *nœuds*. Supposant une solution de type polynômiale par morceaux dans chaque élément, la méthode permet de trouver une solution *discrète* aux nœuds, approximant les mouvements dans l'espace du corps.

##### La méthode de Galerkin

Poursuivant sur le principe des travaux virtuels (2.24), l'idée fondamentale de la méthode de Galerkin consiste à y substituer des valeurs approchées du déplacement virtuel  $\mathbf{w}(\mathbf{x}, t)$  et du mouvement réel  $\mathbf{y}(\mathbf{x}, t)$  sous la forme de développements en série finie de la forme :

$$\mathbf{w}(\mathbf{x}, t) \approx \mathbf{w}_h(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=1}^N b_i(\mathbf{x}) \mathbf{w}_i(t) \quad (4.1)$$

$$\mathbf{y}(\mathbf{x}, t) \approx \mathbf{y}_h(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=1}^N b_i(\mathbf{x}) \mathbf{y}_i(t) \quad (4.2)$$

avec :

$\mathbf{w}_h(\mathbf{x}, t), \mathbf{y}_h(\mathbf{x}, t)$  sont les solutions *approchées* des mouvements virtuels exacts  $\mathbf{w}(\mathbf{x}, t)$  et réels exacts  $\mathbf{y}(\mathbf{x}, t)$ , respectivement, en fonction de la variable spatiale  $\mathbf{x}$ ,

$(\mathbf{w}_1(t), \mathbf{w}_2(t), \dots, \mathbf{w}_m(t))$  ,  $(\mathbf{y}_1(t), \mathbf{y}_2(t), \dots, \mathbf{y}_m(t))$  sont les coefficients de l'approximation de Galerkin, les solutions *discrètes*, qui en mécanique des solides et pour la méthode des éléments finis se révèlent être des déplacements nodaux,

$(b_1(\mathbf{x}), b_2(\mathbf{x}), \dots, b_m(\mathbf{x}))$  sont les fonctions de base, fonctions de la variable  $\mathbf{x}$ .

Souvent, les coefficients  $\mathbf{y}_i$  et les fonctions de base  $b_i$  sont empilées dans un vecteur  $\mathbf{y}$  et une matrice  $\mathbf{B}(\mathbf{x})$ , respectivement appelés vecteur des déplacements nodaux et matrice des fonctions de base. L'approximation de Galerkinge s'écrit alors :

$$\mathbf{w}_h(\mathbf{x}, t) = \mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{w}(t) \quad \text{avec} \quad \mathbf{w}(t) = [\mathbf{w}_1(t) \quad \mathbf{w}_2(t) \quad \dots \quad \mathbf{w}_m(t)]^T \quad (4.3)$$

$$\mathbf{y}_h(\mathbf{x}, t) = \mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{y}(t) \quad \text{avec} \quad \mathbf{y}(t) = [\mathbf{y}_1(t) \quad \mathbf{y}_2(t) \quad \dots \quad \mathbf{y}_m(t)]^T \quad (4.4)$$

$\mathbf{w}(t)$  et  $\mathbf{y}(t)$  constituent alors le déplacement virtuel discret et le mouvement discret, respectivement.

La vitesse et l'accélération sont approchées par :

$$\dot{\mathbf{y}}_h(\mathbf{x}, t) = \mathbf{B}(\mathbf{x})\dot{\mathbf{y}}(t) \quad (4.5)$$

$$\ddot{\mathbf{y}}_h(\mathbf{x}, t) = \mathbf{B}(\mathbf{x})\ddot{\mathbf{y}}(t) \quad (4.6)$$

Le gradient du déplacement est lui approché par :

$$\mathbf{F}_h(\mathbf{x}, t) \equiv \nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{y}_h(\mathbf{x}, t) = \mathbf{y}'_h(\mathbf{x}, t) = \mathbf{B}'(\mathbf{x})\mathbf{y}(t) \quad (4.7)$$

avec :

$$\mathbf{B}'(\mathbf{x}) \equiv \nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \frac{d\mathbf{B}(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}}$$

qui dénote les dérivées dans l'espace des fonctions de base. Le gradient du déplacement virtuel  $\delta\mathbf{F}_h = \delta\mathbf{y}'_h = \mathbf{w}'_h$  revêt une expression similaire.

En substituant les solutions approchées  $\mathbf{w}_h$  et  $\mathbf{y}_h$  dans le principe des travaux virtuels, on obtient la forme faible discrète de l'équilibre du corps qui comporte une somme d'intégrales représentant le travail de forces généralisées :

$$\mathbf{w} \cdot \mathbf{r}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, \ddot{\mathbf{y}}) = \mathbf{w}^T [\mathbf{h}(\ddot{\mathbf{y}}) + \mathbf{f}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}) + \mathbf{k} + \mathbf{q}] = 0 \quad , \quad \forall \mathbf{w} \quad (4.8)$$

avec :

$$\mathbf{h}(\ddot{\mathbf{y}}) = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \rho \mathbf{B} \ddot{\mathbf{y}} dV \quad \text{représente la force d'inertie discrète,}$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}) = \int_{\Omega} \mathbf{B}'^T \mathbf{P} [\mathbf{B}' \mathbf{y}, \mathbf{B}' \dot{\mathbf{y}}] dV \quad \text{la force discrète de déformation,}$$

$$\mathbf{k} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\kappa} dV \quad \text{la force discrète de volume,}$$

$$\mathbf{q} = \int_{\Gamma_{\sigma}} \mathbf{B}^T \bar{\mathbf{p}} dA \quad \text{la force discrète de surface.}$$

Compte tenu du caractère arbitraire  $\forall \mathbf{w}$ , l'équilibre des travaux (4.8) est équivalent à celui de la résultante des forces discrètes  $\mathbf{r}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, \ddot{\mathbf{y}})$  :

$$\mathbf{r}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, \ddot{\mathbf{y}}) \equiv \mathbf{h}(\ddot{\mathbf{y}}) + \mathbf{f}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}) - \mathbf{k} - \mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (4.9)$$

Cette équation est appelée équation semi-discrète de la dynamique des structures non linéaires.

### Élément fini solide isoparamétrique

Les fonctions de base de la méthode de Galerkinge, définies sur l'ensemble du solide, doivent se prêter à la prescription des conditions aux limites. Le choix de ces fonctions reste cependant ouvert et influence la précision de la solution. Un choix possible est celui des fonctions propres lorsque le problème est linéaire et qu'elles sont connues. Autrement, si nous effectuons une discrétisation de notre solide en éléments finis délimités par des nœuds, on peut choisir des fonctions de base particulières qui sont des polynômes de degré  $k$  par morceaux qui prennent la valeur 1 au nœud auquel ils sont attachés et la valeur 0 à tous les autres nœuds. Le corps  $\Omega$  est donc subdivisé en éléments simples  $\Omega^e$ ,  $e = 1, \dots, \text{NELE}$  appelés éléments finis connectés entre eux par un nombre fini de nœuds.

$$\Omega \approx \Omega_h = \bigcup_{e=1}^{\text{NELE}} \Omega^e$$

L'ensemble des éléments et des nœuds constitue le maillage. Ce découpage du corps suggère une procédure systématique pour évaluer le travail virtuel, élément par élément.

Dans notre étude, nous choisirons pour discrétiser nos corps des hexaèdres tridimensionnels dits *isoparamétriques* (Figure 4.1), raison pour laquelle ce type d'élément servira de modèle dans ce qui suit.

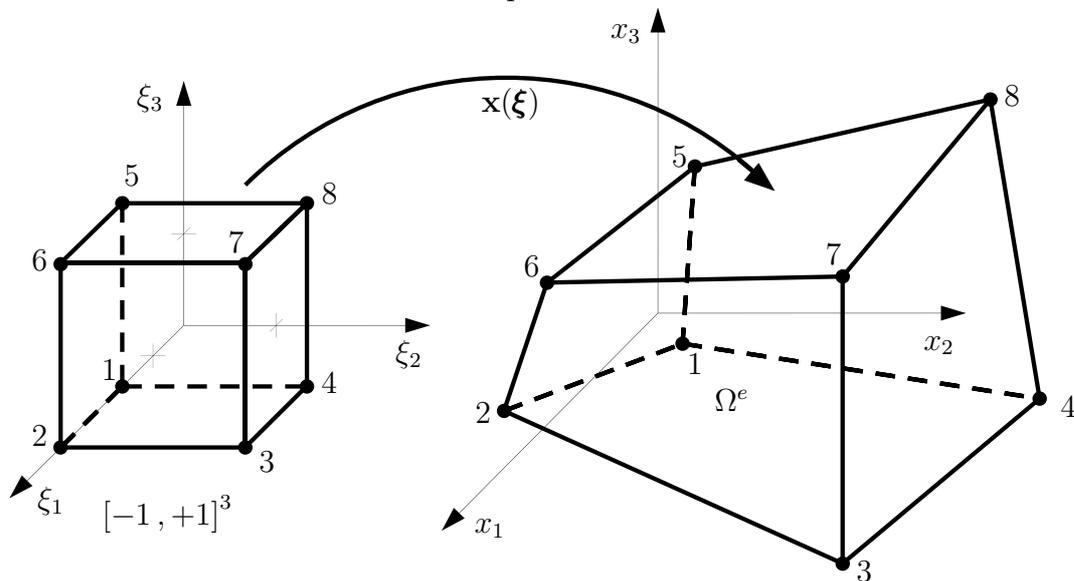


FIG. 4.1 – Élément isoparamétrique solide tridimensionnel.

L'idée de base des éléments dits isoparamétriques consiste à utiliser les mêmes fonctions de base pour interpoler la géométrie (forme originelle  $\Omega$ ) et les champs de déformation (forme actuelle  $\Omega_t$ ). A chaque hexaèdre  $\Omega^e$  on associe un hexaèdre cube unité "type" :

$$\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in [-1, +1]^3 = [-1, +1] \times [-1, +1] \times [-1, +1] \subset \mathbf{R}^3$$

qui sert à paramétrer les positions et les déplacements de l'élément réel. La transformation du cube en hexaèdre s'effectue à l'aide des fonctions de forme naturelles :

$$b_a(\boldsymbol{\xi}) : [-1, +1]^3 \longrightarrow [0, 1] \in \mathbf{R} \quad , \quad a = 1, \dots, 8$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} b_1 = \frac{1}{8}(1 - \xi_1)(1 - \xi_2)(1 - \xi_3) & b_5 = \frac{1}{8}(1 - \xi_1)(1 - \xi_2)(1 + \xi_3) \\ b_2 = \frac{1}{8}(1 + \xi_1)(1 - \xi_2)(1 - \xi_3) & b_6 = \frac{1}{8}(1 + \xi_1)(1 - \xi_2)(1 + \xi_3) \\ b_3 = \frac{1}{8}(1 + \xi_1)(1 + \xi_2)(1 - \xi_3) & b_7 = \frac{1}{8}(1 + \xi_1)(1 + \xi_2)(1 + \xi_3) \\ b_4 = \frac{1}{8}(1 - \xi_1)(1 + \xi_2)(1 - \xi_3) & b_8 = \frac{1}{8}(1 - \xi_1)(1 + \xi_2)(1 + \xi_3) \end{array} \right.$$

Pour les positions et les champs de mouvement  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}(\mathbf{x}, t)$ , l'interpolation iso-paramétrique prend la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{x}_h^e(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{a=1}^8 b_a(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{x}_a \\ \mathbf{y}_h^e(\boldsymbol{\xi}, t) = \sum_{a=1}^8 b_a(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{y}_a(t) \end{array} \right. \quad (4.10)$$

avec :

- $\mathbf{x}_a$  – la position originelle du nœud  $a$  (nœud de l'hexaèdre),
- $\mathbf{y}_a(t)$  – la position actuelle (mouvement) du même nœud  $a$ .

L'intégration d'une composante  $f(\boldsymbol{\xi})$  des forces sur l'élément  $\Omega^e$  s'effectue numériquement en utilisant la formule d'intégration de Gauss :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^e} f(\mathbf{x}) d\Omega &= \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} f(\boldsymbol{\xi}) J(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} \approx \\ &\approx \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_2} \sum_{k=1}^{N_3} f(\xi_1^i, \xi_2^j, \xi_3^k) J(\xi_1^i, \xi_2^j, \xi_3^k) \omega_1^i \omega_2^j \omega_3^k d\boldsymbol{\xi} \end{aligned} \quad (4.11)$$

avec :

- $(\xi_\alpha^l, \alpha = 1, 2, 3)$  – coordonnée paramétrisée du point d'intégration de Gauss  $l$ ,
- $J(\boldsymbol{\xi}) = \det(\nabla_{\boldsymbol{\xi}} \mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}))$  – déterminant de la matrice Jacobienne,
- $\omega_\alpha^l$  – poids associé à  $\xi_\alpha^l$ ,
- $[N_1, N_2, N_3]$  – nombre de points d'intégration de Gauss selon les directions paramétrisées  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  respectivement.

Dans certains cas (blocage d'élément), il est nécessaire d'effectuer une intégration sélective qui consiste à limiter le nombre de points de Gauss dans certaines directions et pour certaines déformations :

- *solides* – intégration exacte  $[N_1, N_2, N_3] = [2, 2, 2]$ ,
- *plaques et coques* (épaisseur dans la direction  $\xi_3$ ) – intégration réduite  $[N_1, N_2, N_3] = [1, 1, 2]$  pour le terme de cisaillement et exacte pour le terme de volume,
- *matériaux incompressibles* – intégration réduite  $[N_1, N_2, N_3] = [1, 1, 1]$  pour le terme volumique et exacte pour le terme de cisaillement.

## 4.2.2 Construction par éléments

Les travaux virtuels (4.8) exprimés par la méthode de Galerkin ont un caractère global. Cependant, le fait que le domaine  $\Omega$  soit maintenant subdivisé en une collection de NELE sous-domaines  $\Omega^e$  ou éléments finis permet d'évaluer le travail virtuel de manière systématique élément par élément selon la règle :

$$\int_{\Omega} \square d\Omega = \sum_{e=1}^{\text{NELE}} \int_{\Omega^e} \square d\Omega$$

A cette fin, il faut introduire une procédure de localisation qui permette de restreindre des expressions globales telles que  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$ ,  $\dot{\mathbf{y}}$ ,  $\ddot{\mathbf{y}}$ ,  $\mathbf{w}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{B}'$  de  $\Omega$  aux éléments  $\Omega^e$ . Les vecteurs globaux et locaux sont reliés par une matrice localisation  $\mathbf{L}^e$ , dite éparsée car elle contient des zéros quasiment partout.

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^e &= \mathbf{L}^e \mathbf{x} & \mathbf{w}^e &= \mathbf{L}^e \mathbf{w} \\ \mathbf{y}^e &= \mathbf{L}^e \mathbf{y} & \mathbf{B}^e &= \mathbf{L}^e \mathbf{B} \\ \dot{\mathbf{y}}^e &= \mathbf{L}^e \dot{\mathbf{y}} & \mathbf{B}^{e'} &= \mathbf{L}^e \mathbf{B}' \\ \ddot{\mathbf{y}}^e &= \mathbf{L}^e \ddot{\mathbf{y}} & & \end{aligned} \quad e = 1, \dots, \text{NELE}$$

Par ce biais, le principe des travaux virtuels élémentaire discret s'écrit :

$$\sum_{e=1}^{\text{NELE}} (\mathbf{w}^e)^T [\mathbf{h}^e(\ddot{\mathbf{y}}^e) + \mathbf{f}^e(\mathbf{y}^e, \dot{\mathbf{y}}^e) - \mathbf{k}^e - \mathbf{q}^e] = \mathbf{0}, \quad \forall \mathbf{w}^e, \quad e = 1, \dots, \text{NELE} \quad (4.12)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \mathbf{h}^e(\ddot{\mathbf{y}}^e) &= \int_{\Omega^e} \mathbf{B}^{eT} \rho \mathbf{B}^e \ddot{\mathbf{y}}^e d\Omega \\ \mathbf{f}^e(\mathbf{y}^e, \dot{\mathbf{y}}^e) &= \int_{\Omega^e} \mathbf{B}^{e'T} \mathbf{P}(\mathbf{B}^{e'} \mathbf{y}^e, \mathbf{B}^{e'} \dot{\mathbf{y}}^e) d\Omega \\ \mathbf{q}^e &= \int_{\Omega^e} \mathbf{B}^{eT} \boldsymbol{\kappa} d\Omega \\ \mathbf{k}^e &= \int_{\Gamma_{\sigma}^e} \mathbf{B}^{eT} \bar{\mathbf{p}} d\Omega \end{aligned} \right.$$

avec :  $\Gamma_{\sigma}^e = \Gamma_{\sigma} \cap \partial\Omega^e$  (qui peut être un ensemble vide).

Nous obtenons finalement la formulation discrète “élémentaire forte” du problème :

$$\mathfrak{h}(\ddot{\mathbf{y}}) + \mathfrak{f}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}) - \mathfrak{k} - \mathfrak{q} = \mathbf{0} \quad (4.13)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{h}(\ddot{\mathbf{y}}) = \sum_{e=1}^{\text{NELE}} \mathbf{L}^{eT} \int_{\Omega^e} \mathbf{B}^{eT} \rho \mathbf{B}^e (\mathbf{L}^e \ddot{\mathbf{y}}) d\Omega \\ \mathfrak{f}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}) = \sum_{e=1}^{\text{NELE}} \mathbf{L}^{eT} \int_{\Omega^e} \mathbf{B}^{eT} \mathbf{P} [\mathbf{B}^{e'}(\mathbf{L}^e \mathbf{y}), \mathbf{B}^{e'}(\mathbf{L}^e \dot{\mathbf{y}})] d\Omega \\ \mathfrak{q} = \sum_{e=1}^{\text{NELE}} \mathbf{L}^{eT} \int_{\Omega^e} \mathbf{B}^{eT} \boldsymbol{\kappa} d\Omega \\ \mathfrak{k} = \sum_{e=1}^{\text{NELE}} \mathbf{L}^{eT} \int_{\Gamma_\sigma^e} \mathbf{B}^{eT} \bar{\mathbf{p}} d\Omega \end{array} \right.$$

$$\mathbf{y}^e(0) = \mathbf{L}^e \mathbf{y}_0 \quad , \quad \dot{\mathbf{y}}^e(0) = \mathbf{L}^e \mathbf{v}_0$$

$$\bar{\mathbf{y}}^e(t) = \mathbf{L}^e \bar{\mathbf{y}}(\mathbf{L}^e \bar{\mathbf{x}}, t) \quad \text{pour } \bar{\mathbf{x}} \in \Gamma_y$$

### 4.2.3 Résolution des non-linéarités par la méthode des itérations linéaires

Après la discrétisation par la méthode des éléments finis, le problème semi-discret contient toujours un ensemble d'équations différentielles ordinaires non-linéaires dans le temps. En mécanique des solides, les non-linéarités sont de nature géométrique (grandes déformations des solides) et de nature matérielle (loi de comportement du matériau). Ces deux types de non-linéarités sont contenus dans le terme  $\mathfrak{f}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}})$ . En mécanique des contacts, une autre source de non-linéarité provient du terme des forces de contact  $\mathfrak{p}(\hat{\mathbf{y}})$  (où  $\hat{\mathbf{y}} = [\mathbf{y} \quad \mathbf{y}']^T$  empile les mouvements des nœuds des deux corps en contact). Nous reviendrons sur son traitement plus loin.

Le problème :

$$\mathfrak{r}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, \ddot{\mathbf{y}}) \equiv \mathfrak{h}(\ddot{\mathbf{y}}) + \mathfrak{f}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}) - \mathfrak{k} - \mathfrak{q} = \mathbf{0} \quad (4.14)$$

peut être résolu par la méthode de Newton généralisée (ou méthode des itérations linéaires) qui est une procédure itérative permettant de transformer une équation non-linéaire en une suite d'équations linéaires.

#### Méthode de Newton généralisée

Considérons un système d'équations non-linéaires quelconque :

$$\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}) = \mathbf{0} \quad \text{avec } \bar{\mathbf{x}} \text{ la solution recherchée.} \quad (4.15)$$

Sous réserve de régularité, nous pouvons approcher la fonction précédente en utilisant le développement en série de Taylor d'un point  $\mathbf{x}$  au voisinage de  $\bar{\mathbf{x}}$  :

$$\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}) \equiv \mathbf{f}(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{f}(\mathbf{x}) \Delta\mathbf{x} + \frac{1}{2!}[\nabla_{\mathbf{x}}^2\mathbf{f}(\mathbf{x}) \Delta\mathbf{x}]\Delta\mathbf{x} + \dots = \mathbf{0} \quad (4.16)$$

avec :  $\Delta\mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}} - \mathbf{x}$ ,

$$\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \left[ \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}) \right] \quad \text{– la matrice Jacobienne de } \mathbf{f} \text{ au point } \mathbf{x}.$$

L'idée de base de la méthode de Newton–Raphson consiste à négliger les termes d'ordre supérieur à 1 du développement ci-dessus en n'y conservant par conséquent que les termes linéaires :

$$\mathbf{0} = \mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}) \approx \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{f}(\mathbf{x}) (\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{x}) \quad (4.17)$$

Ainsi, l'algorithme itératif suivant peut être proposé :

soit  $\mathbf{x}^0$ ,  $i = 0$

$$\left[ \begin{array}{l} \mathbf{S}^i \Delta\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{x}^i) \\ \mathbf{x}^{i+1} = \mathbf{x}^i + \Delta\mathbf{x} \\ i = i + 1 \end{array} \right. \quad (4.18)$$

avec :  $\mathbf{S}^i$  – une approximation de la Jacobienne  $\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{f}(\mathbf{x}^i)$  au point  $\mathbf{x}^i$ .

Cet algorithme regroupe une famille de méthodes qui diffèrent par la matrice pente  $\mathbf{S}^i$  utilisée à chaque itération :

- $\mathbf{S}^i = \nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{f}(\mathbf{x}^i)$  – la méthode de Newton–Raphson proprement dite
- $\mathbf{S}^i = \nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{f}(\mathbf{x}^0)$  – la méthode de Newton–Raphson modifiée
- $\mathbf{S}^i (\mathbf{x}^i - \mathbf{x}^{i-1}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}^i) - \mathbf{f}(\mathbf{x}^{i-1})$  – une méthode de sécante
- $\mathbf{S}^i (\mathbf{x}^i - \mathbf{x}^0) = \mathbf{f}(\mathbf{x}^i) - \mathbf{f}(\mathbf{x}^0)$  – une méthode de corde

### Linéarisation du problème

Dans notre étude, nous utiliserons la méthode de Newton–Raphson complète pour résoudre le système d'équations d'équilibre discret. Pour cela, nous linéarisons (4.14) :

$$\mathbf{0} = \mathbf{r}(\bar{\mathbf{y}}, \dot{\bar{\mathbf{y}}}, \ddot{\bar{\mathbf{y}}}) \simeq \mathbf{r}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, \ddot{\mathbf{y}}) + \delta\mathbf{r}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, \ddot{\mathbf{y}} | \mathbf{w}, \dot{\mathbf{w}}, \ddot{\mathbf{w}}) \quad (4.19)$$

avec :  $(\bar{\mathbf{y}}, \dot{\bar{\mathbf{y}}}, \ddot{\bar{\mathbf{y}}})$  une solution du problème.

Cette procédure nécessite le calcul de la dérivée directionnelle de  $\mathbf{r}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, \ddot{\mathbf{y}})$  dans la direction  $(\mathbf{w}, \dot{\mathbf{w}}, \ddot{\mathbf{w}}) = (\bar{\mathbf{y}} - \mathbf{y}, \dot{\bar{\mathbf{y}}} - \dot{\mathbf{y}}, \ddot{\bar{\mathbf{y}}} - \ddot{\mathbf{y}})$  :

$$\delta\mathbf{r}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, \ddot{\mathbf{y}} | \mathbf{w}, \dot{\mathbf{w}}, \ddot{\mathbf{w}}) = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, \ddot{\mathbf{y}}) \mathbf{w} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \dot{\mathbf{y}}}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, \ddot{\mathbf{y}}) \dot{\mathbf{w}} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \ddot{\mathbf{y}}}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, \ddot{\mathbf{y}}) \ddot{\mathbf{w}} \quad (4.20)$$

Nous obtenons ainsi l'équation discrète linéarisée :

$$\mathbb{C} \dot{\mathbf{w}} + \mathbb{D}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}) \dot{\mathbf{w}} + \mathbb{E}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}) \mathbf{w} = \mathbf{k} + \mathbf{q} - \mathbf{h}(\ddot{\mathbf{y}}) - \mathbf{f}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}) \quad (4.21)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{C} \quad \equiv \frac{d\mathbf{h}}{d\ddot{\mathbf{y}}} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \rho \mathbf{B} \, d\Omega \quad - \text{la matrice de masse} \\ \mathbb{D}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}) \equiv \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \dot{\mathbf{y}}} = \int_{\Omega} \mathbf{B}'^T \frac{\partial \mathbf{P}(\mathbf{B}'\mathbf{y}, \mathbf{B}'\dot{\mathbf{y}})}{\partial \dot{\mathbf{y}}} \, d\Omega \\ \quad \quad \quad = \int_{\Omega} \mathbf{B}'^T \mathbb{P}^v \mathbf{B}' \, d\Omega \quad - \text{la matrice amortissement tangente} \\ \mathbb{E}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}) \equiv \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{y}} = \int_{\Omega} \mathbf{B}'^T \frac{\partial \mathbf{P}(\mathbf{B}'\mathbf{y}, \mathbf{B}'\dot{\mathbf{y}})}{\partial \mathbf{y}} \, d\Omega = \\ \quad \quad \quad = \int_{\Omega} \mathbf{B}'^T \mathbb{P}^{(ep)} \mathbf{B}' \, d\Omega \quad - \text{la matrice rigidité tangente} \end{array} \right.$$

avec :  $\mathbb{P}^v, \mathbb{P}^{(ep)}$  – les tenseurs nominaux tangents visqueux et élastoplastiques (tenseurs du quatrième ordre).

En accord avec la procédure de localisation exposée précédemment pour les forces, les matrices globales  $(\mathbb{C}, \mathbb{D}, \mathbb{E})$  peuvent s'exprimer comme un assemblage de contributions élémentaires de composantes  $(\mathbb{C}^e, \mathbb{D}^e, \mathbb{E}^e)$  :

$$\mathbb{C} = \sum_{e=1}^{\text{NELE}} \mathbf{L}^{eT} \mathbb{C}^e \mathbf{L}^e \quad , \quad \mathbb{C}^e = \int_{\Omega^e} \mathbf{B}^{eT} \rho \mathbf{I} \mathbf{B}^e \, d\Omega$$

$$\mathbb{D} = \sum_{e=1}^{\text{NELE}} \mathbf{L}^{eT} \mathbb{D}^e \mathbf{L}^e \quad , \quad \mathbb{D}^e = \int_{\Omega^e} \mathbf{B}^{e'T} \mathbb{P}^v \mathbf{B}^{e'} \, d\Omega$$

$$\mathbb{E} = \sum_{e=1}^{\text{NELE}} \mathbf{L}^{eT} \mathbb{E}^e \mathbf{L}^e \quad , \quad \mathbb{E}^e = \int_{\Omega^e} \mathbf{B}^{e'T} \mathbb{P}^{(ep)} \mathbf{B}^{e'} \, d\Omega$$

Pour compléter la linéarisation, les relations entre les tenseurs élémentaires nominaux tangents  $\mathbb{P}$  et leurs équivalents matériels  $\mathbb{S}$  doivent être déterminées. Pour cela, il est nécessaire de linéariser la loi nominale :

$$\mathbf{P} : (\mathbf{F}, \dot{\mathbf{F}}) \longmapsto \mathbf{P}(\mathbf{F}, \dot{\mathbf{F}})$$

au point  $(\mathbf{F}, \dot{\mathbf{F}})$  dans la direction  $(\delta\mathbf{F}, \delta\dot{\mathbf{F}})$  :

$$\mathbf{P}(\mathbf{F} + \delta\mathbf{F}, \dot{\mathbf{F}} + \delta\dot{\mathbf{F}}) \simeq \mathbf{P}(\mathbf{F}, \dot{\mathbf{F}}) + \delta\mathbf{P}(\mathbf{F}, \dot{\mathbf{F}} | \delta\mathbf{F}, \delta\dot{\mathbf{F}}) \quad (4.22)$$

$$\begin{aligned} \delta\mathbf{P}(\mathbf{F}, \dot{\mathbf{F}} | \delta\mathbf{F}, \delta\dot{\mathbf{F}}) &= \frac{\partial\mathbf{P}}{\partial\mathbf{F}}(\mathbf{F}, \dot{\mathbf{F}}) \delta\mathbf{F} + \frac{\partial\mathbf{P}}{\partial\dot{\mathbf{F}}}(\mathbf{F}, \dot{\mathbf{F}}) \delta\dot{\mathbf{F}} = \\ &= \mathbb{P}^{(ep)}(\mathbf{F}, \dot{\mathbf{F}}) \delta\mathbf{F} + \mathbb{P}^v(\mathbf{F}, \dot{\mathbf{F}}) \delta\dot{\mathbf{F}} \end{aligned}$$

$$\text{avec : } \begin{cases} \delta\mathbf{F}(\mathbf{u}, \mathbf{w}) = \nabla\mathbf{w} \\ \delta\dot{\mathbf{F}}(\mathbf{u}, \mathbf{w}) = \nabla\dot{\mathbf{w}} \end{cases}$$

En décomposant ensuite la loi constitutive nominale selon :

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{F}, \dot{\mathbf{F}}, \mathbf{E}^p) = \mathbf{F} \mathbf{S}(\mathbf{E}(\mathbf{F}), \dot{\mathbf{E}}(\mathbf{F}, \dot{\mathbf{F}}), \mathbf{E}^p) \quad (4.23)$$

nous obtenons les tenseurs suivants :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^{(ep)} &= \frac{\partial\mathbf{P}}{\partial\mathbf{F}}(\mathbf{F}, \dot{\mathbf{F}}) = \mathbf{I} \underline{\otimes} \mathbf{S} + [\mathbf{F} \underline{\otimes} \mathbf{I}] [\mathbb{S}^{(ep)}[\mathbf{F} \underline{\otimes} \mathbf{I}]^T + \mathbb{S}^v[\mathbf{F} \underline{\otimes} \mathbf{I}]^T] \\ \mathbb{P}^v &= \frac{\partial\mathbf{P}}{\partial\dot{\mathbf{F}}}(\mathbf{F}, \dot{\mathbf{F}}) = [\mathbf{F} \underline{\otimes} \mathbf{I}] \mathbb{S}^v[\mathbf{F} \underline{\otimes} \mathbf{I}]^T \end{aligned} \quad (4.24)$$

où leurs contreparties matérielles  $\mathbb{S}^{(ep)}$  et  $\mathbb{S}^v$  sont définies par :

$$\begin{aligned} \mathbb{S}^{(ep)} &= \frac{\partial\mathbf{S}}{\partial\mathbf{E}}(\mathbf{E}, \dot{\mathbf{E}}, \dots) \\ \mathbb{S}^v &= \frac{\partial\mathbf{S}}{\partial\dot{\mathbf{E}}}(\mathbf{E}, \dot{\mathbf{E}}, \dots) \end{aligned}$$

Ils sont obtenus par une linéarisation similaire :

$$\mathbf{S}(\mathbf{E} + \delta\mathbf{E}, \dot{\mathbf{E}} + \delta\dot{\mathbf{E}}) \simeq \mathbf{S}(\mathbf{E}, \dot{\mathbf{E}}) + \delta\mathbf{S}(\mathbf{E}, \dot{\mathbf{E}} | \delta\mathbf{E}, \delta\dot{\mathbf{E}}) \quad (4.25)$$

$$\begin{aligned} \delta\mathbf{S}(\mathbf{E}, \dot{\mathbf{E}} | \delta\mathbf{E}, \delta\dot{\mathbf{E}}) &= \frac{\partial\mathbf{S}}{\partial\mathbf{E}}(\mathbf{E}, \dot{\mathbf{E}}) \delta\mathbf{E} + \frac{\partial\mathbf{S}}{\partial\dot{\mathbf{E}}}(\mathbf{E}, \dot{\mathbf{E}}) \delta\dot{\mathbf{E}} = \\ &= \mathbb{S}^{(ep)}(\mathbf{E}, \dot{\mathbf{E}}) \delta\mathbf{E} + \mathbb{S}^v(\mathbf{E}, \dot{\mathbf{E}}) \delta\dot{\mathbf{E}} \end{aligned}$$

$$\text{avec : } \begin{cases} \delta\mathbf{E}(\mathbf{F}, \delta\mathbf{F}) = \frac{1}{2} [\mathbf{F}^T \delta\mathbf{F} + \delta\mathbf{F}^T \mathbf{F}] = \frac{1}{2} [\mathbf{F}^T \underline{\otimes} \mathbf{I} + \mathbf{I} \overline{\otimes} \mathbf{F}^T] \delta\mathbf{F} \\ \delta\dot{\mathbf{E}}(\mathbf{E}, \dot{\mathbf{E}} | \delta\mathbf{E}, \delta\dot{\mathbf{E}}) = \frac{1}{2} [\delta\mathbf{F}^T \dot{\mathbf{F}} + \dot{\mathbf{F}}^T \delta\mathbf{F} + \mathbf{F}^T \delta\dot{\mathbf{F}} + \delta\dot{\mathbf{F}}^T \mathbf{F}] = \\ = \frac{1}{2} [(\dot{\mathbf{F}}^T \underline{\otimes} \mathbf{I} + \mathbf{I} \overline{\otimes} \dot{\mathbf{F}}^T) \delta\mathbf{F} + [\mathbf{F}^T \underline{\otimes} \mathbf{I} + \mathbf{I} \overline{\otimes} \mathbf{F}^T) \delta\dot{\mathbf{F}}] \end{cases}$$

#### 4.2.4 Discrétisation temporelle et méthode des différences finies

Après la discrétisation spatiale et la linéarisation, le problème se réduit à un système d'équations différentielles ordinaires linéaires :

$$\mathbb{C} \ddot{\mathbf{w}}(t) + \mathbb{D}(t) \dot{\mathbf{w}}(t) + \mathbb{E}(t) \mathbf{w}(t) = -\mathbf{r}(t) \quad (4.26)$$

$$\text{avec } \mathbf{r}(\mathbf{y}(t), \dot{\mathbf{y}}(t), \ddot{\mathbf{y}}(t), t) = -\mathbf{k} - \mathbf{q} + \mathbf{h}(\ddot{\mathbf{y}}(t)) + \mathbf{f}(\mathbf{y}(t), \dot{\mathbf{y}}(t))$$

Pour intégrer cette équation vectorielle dans le temps, nous nous servons de la méthode des différences finies. L'idée de base de cette méthode consiste à remplacer les dérivées dans le temps par des quotients de différences finies.

Considérons le problème aux valeurs initiales donné par :

$$\begin{cases} \mathbf{w}(0) = \mathbf{w}_0 \\ \dot{\mathbf{w}}(0) = \mathbf{v}_0 \end{cases}$$

La méthode des différences finies de Newmark ou méthode des trapèzes généralisée consiste en :

$$\mathbb{C}_{n+1} \mathbf{a}_{n+1} + \mathbb{D}_{n+1} \mathbf{v}_{n+1} + \mathbb{E}_{n+1} \mathbf{y}_{n+1} = -\mathbf{r}_{n+1} \quad (4.27)$$

$$\begin{cases} \mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + (1 - \alpha) \tau \mathbf{v}_n + \alpha \tau \mathbf{v}_{n+1} + \left(\frac{1}{2} - \alpha\right) \tau^2 \mathbf{a}_n \\ \mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{v}_n + (1 - \beta) \tau \mathbf{a}_n + \beta \tau \mathbf{a}_{n+1} \end{cases}$$

Rappelons que  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{v}$  et  $\mathbf{y}$  représentent respectivement les accélérations, les vitesses et les mouvements discrets avec :

$$\mathbf{y}_{n+1} \approx \mathbf{y}(t_{n+1}), \quad \mathbf{v}_{n+1} \approx \dot{\mathbf{y}}(t_{n+1}), \quad \mathbf{a}_{n+1} \approx \ddot{\mathbf{y}}(t_{n+1})$$

De même, on a :

$$\mathbb{C}_{n+1} = \mathbb{C}(t_{n+1}), \quad \mathbb{D}_{n+1} \approx \mathbb{D}(t_{n+1}), \quad \mathbb{E}_{n+1} \approx \mathbb{E}(t_{n+1}), \quad \mathbf{r}_{n+1} \approx \mathbf{r}(t_{n+1})$$

$\tau = t_{n+1} - t_n$ ,  $\tau > 0$  – incrément de temps.

$\alpha, \beta \in [0, 1]$  – des paramètres de contrôle.

Le paramètre  $\alpha$  contrôle la stabilité tandis que  $\beta$  régit la dissipation de l'algorithme. Si nous choisissons  $\beta = \frac{1}{2}$  et  $\alpha = \frac{1}{2}$  nous reconnaissons la règle des trapèzes. Le schéma d'intégration le plus précis est obtenu pour  $\beta = \frac{1}{2}$  et  $\alpha = \frac{1}{6}$ .

La programmation la plus nette de la méthode de Newmark consiste en l'algorithme (prédicteur-correcteur) en deux temps suivant :

– *prédiction explicite* – qui se base sur un schéma des différences centrées :

$$\begin{cases} \mathbb{y}_{n+1}^0 = \mathbb{y}_n + \tau \mathbb{v}_n + \frac{\tau^2}{2} \mathbb{a}_n \\ \mathbb{v}_{n+1}^0 = \mathbb{v}_n + \tau \mathbb{a}_n \\ \mathbb{a}_{n+1}^0 = \mathbb{a}_n \end{cases} \quad (4.28)$$

– *correction* – qui sera combinée à celle de la linéarisation :

$$\begin{cases} \mathbb{y}_{n+1} = \mathbb{y}_{n+1}^0 + \delta \mathbb{y} \\ \mathbb{v}_{n+1} = \mathbb{v}_{n+1}^0 + \delta \mathbb{v} \\ \mathbb{a}_{n+1} = \mathbb{a}_{n+1}^0 + \delta \mathbb{a} \end{cases} \quad (4.29)$$

$$\text{avec : } \delta \mathbb{y} = (\alpha \tau) \delta \mathbb{v} = (\alpha \beta \tau^2) \delta \mathbb{a}$$

Si on note que :

$$\delta \mathbb{y} = \mathbb{w} \quad , \quad \delta \mathbb{v} = \dot{\mathbb{w}} \quad , \quad \delta \mathbb{a} = \ddot{\mathbb{w}} \quad ,$$

nous pouvons éliminer  $\delta \mathbb{v}$  et  $\delta \mathbb{a}$ . L'algorithme final, en terme de l'incrément  $\mathbb{w}$  des mouvements est le suivant :

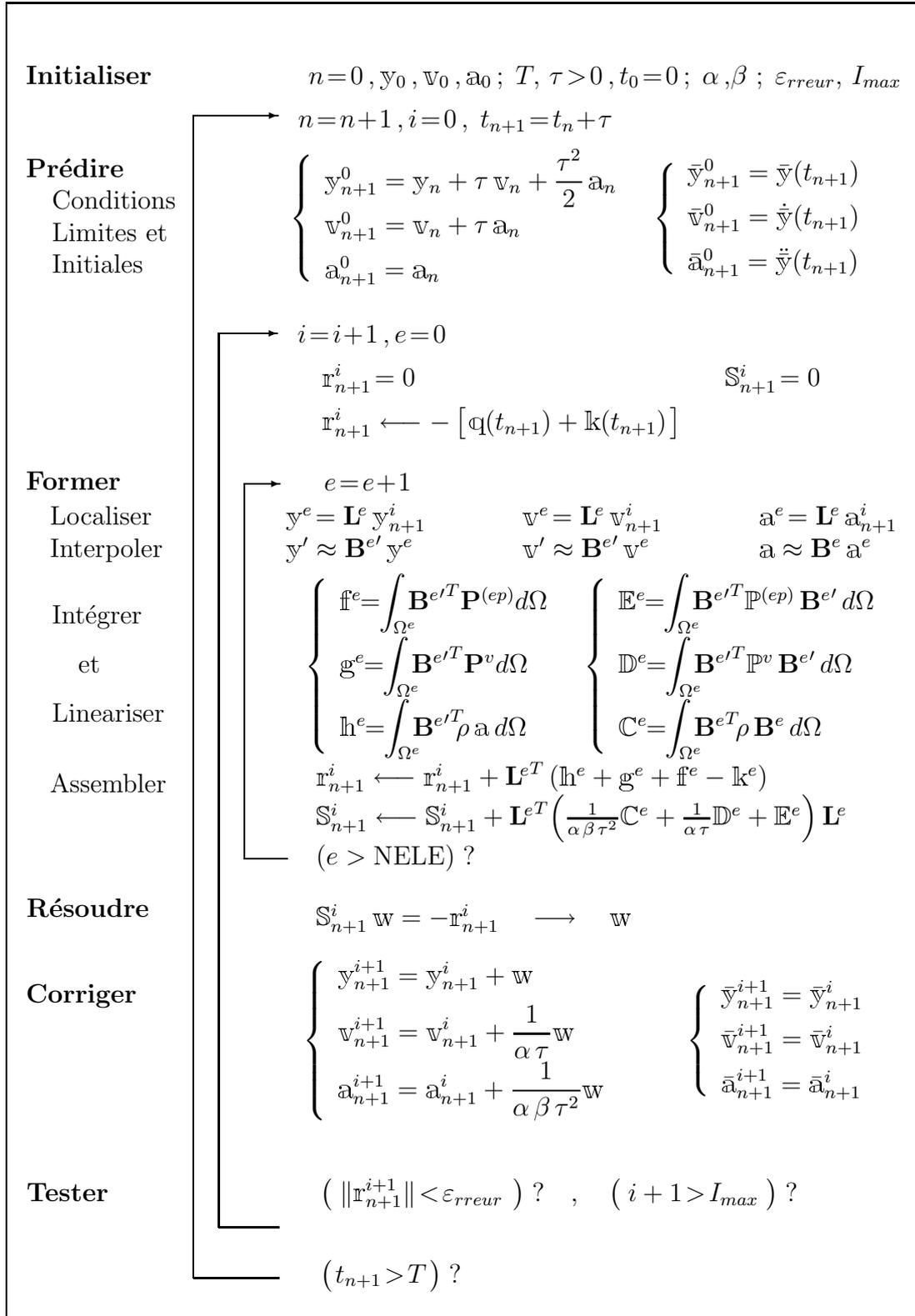
$$\begin{aligned} & \left( \frac{1}{\alpha \beta \tau^2} \mathbb{C}_{n+1} + \frac{1}{\alpha \tau} \mathbb{D}_{n+1} + \mathbb{E}_{n+1} \right) \mathbb{w} \\ & = \mathbb{k}_{n+1} + \mathbb{q}_{n+1} - \mathbb{h}_{n+1} - \mathbb{f}_{n+1} \\ & \begin{cases} \mathbb{y}_{n+1} = \mathbb{y}_{n+1}^0 + \mathbb{w} \\ \mathbb{v}_{n+1} = \mathbb{v}_{n+1}^0 + \frac{1}{\alpha \tau} \mathbb{w} \\ \mathbb{a}_{n+1} = \mathbb{a}_{n+1}^0 + \frac{1}{\alpha \beta \tau^2} \mathbb{w} \end{cases} \end{aligned}$$

### 4.2.5 Synthèse et algorithme global

Pour conclure, l'algorithme global des éléments finis pour des problèmes de dynamiques non linéaires combine :

- une discretisation spatiale de Galerkin
- une méthode itérative de Newton généralisée
- une intégration temporelle de Newmark

L'algorithme est présenté sous sa forme globale dans la table suivante.



TAB. 4.1 – Algorithme d'éléments finis global pour la dynamique non-linéaire. (Repris de [22])

## 4.3 Méthodes numériques en mécanique du contact

Cette section traite de la formulation numérique pour résoudre les problèmes en mécanique des contacts entre deux solides déformables dans le cas de petits déplacements. Comme pour les solides, ces problèmes nécessitent une discrétisation spatiale par éléments finis et la résolution des non-linéarités par une méthode de Newton. Le traitement numérique du contact donne lieu à deux formulations discrètes selon que la régularisation du problème de contact est effectuée par la méthode de la pénalité ou celle du Lagrangien augmenté. On se réfère dans ce qui suit notamment à Curnier–Alart [25], Alart [1], Alart–Curnier [2], Heegaard–Curnier [54], Laursen–Simo [79], Klarbring [77] et Pietrzak [100].

### 4.3.1 Discrétisation spatiale du contact

#### Cinématique du contact discret

Considérons deux corps  $\Omega$  et  $\Omega'$  dans leur configuration de référence susceptibles d'entrer en contact. Le corps  $\Omega$  est discrétisé en NELE éléments finis reliés entre eux par NODE nœuds, et le corps  $\Omega'$  en NELE' éléments finis reliés par NODE' nœuds. La surface discrète de contact entre les deux corps est constituée par l'ensemble des nœuds d'une surface  $\Gamma_h \in \partial\Omega$ . De même, la surface cible discrète est représentée par les nœuds de  $\Gamma'_h \in \partial\Omega'$ .

#### Élément de contact de type nœud-à-nœud

Dans le cas de petits glissements ou de petites déformations, c'est-à-dire que si une correspondance biunivoque entre les nœuds au niveau de la surface de contact est maintenue pendant la période de contact, la géométrie de l'élément de contact *nœud-à-nœud* est adéquate. Pour cette géométrie, le nœud de la surface frontière  $\Gamma_h$ , qui forme l'élément de contact avec le nœud  $\Gamma'_h$  est le nœud le plus proche de  $\Gamma'_h$  dans la configuration originelle du système. L'élément de contact sera formé de ces deux nœuds pendant toute la période du contact. Le vecteur écart de contact discret  ${}^e\mathbf{g}$  est défini par :

$$\mathbf{g}^e = \mathbf{y}'^e - \mathbf{y}^e = (\mathbf{x}'^e + \mathbf{u}'^e) - (\mathbf{x}^e + \mathbf{u}^e) = \mathbf{g}_0^e + \mathbf{u}'^e - \mathbf{u}^e \quad (4.30)$$

où  $\mathbf{y}^e$  est la position du nœud dans la configuration déformée,  $\mathbf{x}^e$  la position de la particule dans la configuration de référence et  $\mathbf{u}^e$  le déplacement du nœud.

#### Vecteur écart

Pour de petites déformations, le vecteur écart local  $\mathbf{g}^e$  peut être décomposé en un écart normal  $g_n^e$  et en un vecteur glissement tangent  $\mathbf{g}_t^e$  :

$$\mathbf{g}^e = g_n^e \mathbf{n}^e + \mathbf{g}_t^e \quad (4.31)$$

### 4.3.2 Travaux virtuels discrets en mécanique des contacts

#### Rappel sur les termes volumiques

Basé sur la subdivision des solides  $\Omega$  et  $\Omega'$  en éléments finis, les intégrales sur les volumes de la cible et du contacteur sont évaluées élément par élément de la manière suivante :

$$\int_{\Omega} \square d\Omega = \sum_{e=1}^{\text{NELE}} \int_{\Omega^e} \square d\Omega^e \quad , \quad \int_{\Omega'} \square d\Omega' = \sum_{e=1}^{(\text{NELE})'} \int_{\Omega'^e} \square d\Omega'^e$$

Les deux premiers termes du principe des travaux virtuels sont donc approchés de la manière suivante :

$$\begin{aligned} DU(\mathbf{y}; \delta\mathbf{y}) &= \langle \nabla_{\mathbf{y}} \mathcal{U}(\mathbf{y}); \delta\mathbf{y} \rangle \\ &\simeq \sum_{e=1}^{\text{NELE}} (\delta\mathbf{y}^e)^T [\mathbf{h}^e(\ddot{\mathbf{y}}^e) + \mathbf{f}^e(\mathbf{y}^e, \dot{\mathbf{y}}^e) - \mathbf{k}^e - \mathbf{q}^e] \\ DU'(\mathbf{y}'; \delta\mathbf{y}') &= \langle \nabla_{\mathbf{y}'} \mathcal{U}'(\mathbf{y}'); \delta\mathbf{y}' \rangle \\ &\simeq \sum_{e=1}^{(\text{NELE})'} (\delta\mathbf{y}'^e)^T [\mathbf{h}'^e(\ddot{\mathbf{y}}'^e) + \mathbf{f}'^e(\mathbf{y}'^e, \dot{\mathbf{y}}'^e) - \mathbf{k}'^e - \mathbf{q}'^e] \end{aligned} \quad (4.32)$$

Nous avons vu aux sections 2.3.5 et 3.2.5 des chapitres précédents que pour considérer des interactions entre les deux corps  $\Omega$  et  $\Omega'$ , il faut rajouter à ces deux premiers termes la forme faible (variationnelle) du terme de contact.

### 4.3.3 Traitement numérique du contact en pénalité

#### Terme de contact en pénalité

Le terme de contact de la formulation (3.74) s'écrit :

$$\begin{aligned} D\tilde{\mathcal{U}}_c(\hat{\mathbf{y}}; \delta\hat{\mathbf{y}}) &= \int_{\Gamma} \left[ \frac{\partial \tilde{\Psi}_c^{cs}(\mathbf{g}(\hat{\mathbf{y}}))}{\partial \mathbf{g}} + \frac{\partial \tilde{\Psi}_c^a(\mathbf{g}(\hat{\mathbf{y}}))}{\partial \mathbf{g}} \right] \cdot \delta\mathbf{g}(\hat{\mathbf{y}}, \delta\hat{\mathbf{y}}) d\Gamma \\ &= \int_{\Gamma} \mathbf{p}(\mathbf{g}(\hat{\mathbf{y}})) \cdot \nabla_{\hat{\mathbf{y}}} \mathbf{g}(\hat{\mathbf{y}}) \delta\hat{\mathbf{y}} d\Gamma \\ &= \int_{\Gamma} [\nabla_{\hat{\mathbf{y}}} \mathbf{g}(\hat{\mathbf{y}})]^T \mathbf{p}(\mathbf{g}(\hat{\mathbf{y}})) \cdot \delta\hat{\mathbf{y}} d\Gamma \\ &= \int_{\Gamma} \delta\hat{\mathbf{y}}^T [\nabla_{\hat{\mathbf{y}}} \mathbf{g}(\hat{\mathbf{y}})]^T \mathbf{p}(\mathbf{g}(\hat{\mathbf{y}})) d\Gamma \end{aligned} \quad (4.33)$$

avec la contrainte de contact  $\mathbf{p}$  définie comme le vecteur contrainte nominal exercé par le corps  $\Omega'$  sur le corps  $\Omega$  :

$$\mathbf{p}(\mathbf{g}) = \frac{\partial \tilde{\Psi}_c}{\partial \mathbf{g}} = \frac{\partial \tilde{\Psi}_c^{cs}}{\partial \mathbf{g}} + \frac{\partial \tilde{\Psi}_c^a}{\partial \mathbf{g}} = p_n \mathbf{n} + \mathbf{p}_t$$

Sachant que  $\hat{\mathbf{y}} = [\mathbf{y}, \mathbf{y}']^T$  et que  $\mathbf{g}(\hat{\mathbf{y}}) = \mathbf{g}(\mathbf{y}, \mathbf{y}') \equiv \mathbf{y} - \mathbf{y}'$ , on a :

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{g}(\hat{\mathbf{y}}; \delta \hat{\mathbf{y}}) &= \delta \mathbf{g}(\mathbf{y}, \mathbf{y}'; \delta \mathbf{y}, \delta \mathbf{y}') = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{y}} \delta \mathbf{y} + \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{y}'} \delta \mathbf{y}' \\ &= \mathbf{I} \delta \mathbf{y} - \mathbf{I} \delta \mathbf{y}' \\ &= [\mathbf{I} \quad -\mathbf{I}] \begin{bmatrix} \delta \mathbf{y} \\ \delta \mathbf{y}' \end{bmatrix} \\ &= \nabla_{\hat{\mathbf{y}}} \mathbf{g}(\hat{\mathbf{y}}) \delta \hat{\mathbf{y}} \end{aligned}$$

Le terme  $[\nabla_{\hat{\mathbf{y}}} \mathbf{g}(\hat{\mathbf{y}})]^T$  donne donc deux forces de contact égales mais opposées conformément au principe de l'action et de la réaction. En effet, on note :

$$[\nabla_{\hat{\mathbf{y}}} \mathbf{g}(\hat{\mathbf{y}})]^T = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ -\mathbf{I} \end{bmatrix} = \mathbf{I}_A^R, \quad \text{et} \quad [\nabla_{\hat{\mathbf{y}}} \mathbf{g}(\hat{\mathbf{y}})]^T \mathbf{p} = \mathbf{I}_A^R \mathbf{p} = \begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ -\mathbf{p} \end{bmatrix}$$

Le terme de contact peut finalement être approché par (voir [25]) :

$$\int_{\Gamma} \delta \hat{\mathbf{y}}^T [\nabla_{\hat{\mathbf{y}}} \mathbf{g}(\hat{\mathbf{y}})]^T \mathbf{p}(\mathbf{g}) d\Gamma \simeq \sum_{e=1}^{\text{NCEL}} (\delta \hat{\mathbf{y}}^e)^T \mathbf{I}_A^R \mathbf{p}(\mathbf{g}^e) A^e \quad (4.34)$$

avec NCEL le nombre d'éléments de contact,  $\mathbf{p}^e = \mathbf{p}(\mathbf{g}^e)$  la force de contact locale concentrée au nœud  $e$  et  $A^e$  peut être interprétée comme l'aire tributaire du nœud  $e$ .

### Linéarisation du contact en pénalité

Nous appliquons la méthode de Newton–Raphson (4.18) au terme pénalisé de contact (4.33). Nous effectuons donc l'approximation suivante ( $\delta$  et  $\Delta$  représentent la première et la seconde variation) :

$$\begin{aligned} D\tilde{\mathcal{U}}_c((\bar{\mathbf{y}}, \bar{\mathbf{y}}'); (\delta \mathbf{y}, \delta \mathbf{y}')) &\simeq D\tilde{\mathcal{U}}_c((\mathbf{y}, \mathbf{y}'); (\delta \mathbf{y}, \delta \mathbf{y}')) \\ &\quad + \Delta \left( D\tilde{\mathcal{U}}_c((\mathbf{y}, \mathbf{y}'); (\delta \mathbf{y}, \delta \mathbf{y}')); (\Delta \mathbf{y}, \Delta \mathbf{y}') \right) \end{aligned} \quad (4.35)$$

$$\begin{aligned} &\Delta \left( D\tilde{\mathcal{U}}_c((\mathbf{y}, \mathbf{y}'); (\delta \mathbf{y}, \delta \mathbf{y}')); (\Delta \mathbf{y}, \Delta \mathbf{y}') \right) \\ &= \Delta \left( \int_{\Gamma} \delta \hat{\mathbf{y}}^T [\nabla_{\hat{\mathbf{y}}} \mathbf{g}(\hat{\mathbf{y}})]^T \mathbf{p}(\mathbf{g}) d\Gamma \right) \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{y} \\ \Delta \mathbf{y}' \end{bmatrix} \\ &= \int_{\Gamma} \delta \hat{\mathbf{y}}^T \mathbb{I}_A^R \frac{\partial \mathbf{p}(\mathbf{g})}{\partial \mathbf{g}} \Delta \hat{\mathbf{y}} d\Gamma \end{aligned}$$

avec  $\mathbb{I}_A^R = [\nabla_{\hat{\mathbf{y}}} \mathbf{g}(\hat{\mathbf{y}})]^T \otimes [\nabla_{\hat{\mathbf{y}}} \mathbf{g}(\hat{\mathbf{y}})]^T$

### 4.3.4 Calcul des Jacobiennes en pénalité

#### Généralités

La clé de la mise en œuvre de la méthode de Newton est le calcul du tenseur Jacobien de contact :

$$\mathbf{J} = \nabla_{\mathbf{g}} \mathbf{p}(\mathbf{g}) = \frac{\partial \mathbf{p}(\mathbf{g})}{\partial \mathbf{g}}$$

D'autre part on rappelle que le vecteur force de contact  $\mathbf{p}$  se décompose de la manière suivante :

$$\mathbf{p} = p_n^c \mathbf{n} + \mathbf{p}_t^f + \mathbf{p}^a = \mathbf{p}^{cf} + \mathbf{p}^a$$

avec  $\mathbf{p}^{cf} = p_n^c \mathbf{n} + \mathbf{p}_t^f$ .

Le tenseur Jacobien de contact se décompose donc :

$$\mathbf{J} = \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{g}} = \frac{\partial \mathbf{p}^{cf}}{\partial \mathbf{g}} + \frac{\partial \mathbf{p}^a}{\partial \mathbf{g}} = \mathbf{J}_{cf} + \mathbf{J}_a$$

Dans ce qui suit, nous exposerons ainsi sans perte de généralité dans un premier temps le calcul du tenseur Jacobien du contact avec frottement  $\mathbf{J}_{cf}$  suivi de celui de l'adhésion  $\mathbf{J}_a$ .

#### Jacobiennes du contact avec frottement pénalisé

Nous choisissons des coefficients de pénalité identiques pour le contact et le frottement en posant  $\gamma_n^c = \gamma_t^s = \gamma^{cf}$ . Rappelons aussi que  $\mathbf{p} = p_n \mathbf{n} + \mathbf{p}_t$ . La Jacobienne  $\mathbf{J}_{cf}$  se distingue par plusieurs statuts (Figure 4.2) correspondant au contact avec frottement (voir (3.79) et (3.87), on se reportera aussi à [2]) :

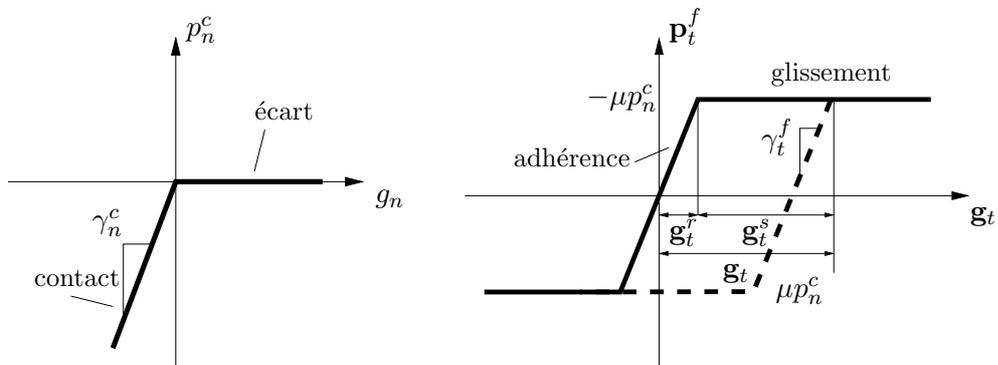


FIG. 4.2 – Graphes du contact normal et du frottement tangent pénalisés.

**Ecart** ( $g_n > 0$ )

$$p_n^c = 0 \quad , \quad \mathbf{p}_t^f = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{p}^{cf}(\mathbf{g}) = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{J}_{cf} = \mathbf{J}_{ecrt}^{cf} = \frac{\partial \mathbf{p}^{cf}}{\partial \mathbf{g}} = [\mathbf{0}] \quad (4.36)$$

**Contact adhérent** ( $g_n \leq 0$ ,  $\|\mathbf{g}_t - \mathbf{g}_{t_0}^s\| \leq -\mu g_n$ )

$$p_n^c = \gamma^{cf} P_{\mathbf{R}^-}(g_n) = \gamma^{cf} g_n \quad , \quad \mathbf{p}_t^f = \gamma^{cf} (\mathbf{g}_t - \mathbf{g}_t^s)$$

$$\mathbf{p}^{cf}(\mathbf{g}) = \gamma^{cf} [g_n \mathbf{n} + \mathbf{g}_t - \mathbf{g}_{t_0}^s] = \gamma^{cf} [\mathbf{g} - \mathbf{g}_{t_0}^s]$$

$$\mathbf{J}_{cf} = \mathbf{J}_{adhrce}^{cf} = \frac{\partial \mathbf{p}^{cf}}{\partial \mathbf{g}} = \gamma^{cf} \mathbf{I} \quad (4.37)$$

**Contact glissant** ( $g_n \leq 0$ ,  $\|\mathbf{g}_t - \mathbf{g}_{t_0}^s\| > -\mu g_n$ )

$$p_n^c = \gamma^{cf} P_{\mathbf{R}^-}(g_n) = \gamma^{cf} g_n$$

$$\mathbf{p}_t^f = -\mu \gamma^{cf} g_n \mathbf{t}_s \quad \text{avec} \quad \mathbf{t}_s = \mathbf{t}_s(\mathbf{g}) = \frac{\mathbf{g}_t - \mathbf{g}_{t_0}^s}{\|\mathbf{g}_t - \mathbf{g}_{t_0}^s\|}$$

$$\mathbf{p}^{cf}(\mathbf{g}) = \gamma^{cf} [(\mathbf{n} \otimes \mathbf{n})\mathbf{g} - \mu(\mathbf{t}_s \otimes \mathbf{n})\mathbf{g}]$$

on trouve :

$$\mathbf{J}_{cf} = \mathbf{J}_{gliss}^{cf} = \frac{\partial \mathbf{p}^{cf}}{\partial \mathbf{g}} = \gamma^{cf} [(\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) - \mu(\mathbf{t}_s \otimes \mathbf{n}) + \varrho(\mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} - \mathbf{t}_s \otimes \mathbf{t}_s)] \quad (4.38)$$

avec :

$$\varrho = -\frac{\mu g_n}{\|\mathbf{g}_t - \mathbf{g}_{t_0}^s\|}$$

### Jacobiennes de l'adhésion pénalisée

La Jacobiene  $\mathbf{J}_a$  se distingue aussi par plusieurs statuts (Figure 4.3) d'adhésion (voir (3.105)) :

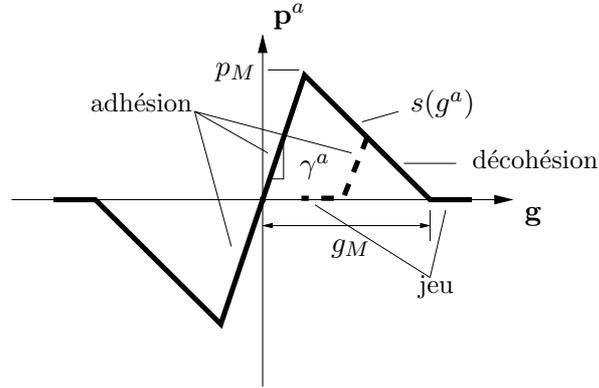


FIG. 4.3 – Graphe de l'adhésion pénalisée.

**Jeu** ( $\|\tilde{\mathbf{g}}\| - g_0^a < 0$ )

$$\mathbf{p}^a(\mathbf{g}) = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{J}_a = \mathbf{J}_{\text{jeu}}^a = \frac{\partial \mathbf{p}^a}{\partial \mathbf{g}} = [\mathbf{0}] \quad (4.39)$$

**Ecart-adhésion** ( $g_n > 0$ ,  $0 < \|\mathbf{g}\| - g_0^a \leq \frac{s(g^a)}{\gamma^a}$ )

$$\mathbf{p}^a(\mathbf{g}) = \gamma^a \left[ \mathbf{g} - \frac{\mathbf{g}}{\|\mathbf{g}\|} g_0^a \right]$$

$$\mathbf{J}_a = \mathbf{J}_{\text{ecrt-adhsn}}^a = \frac{\partial \mathbf{p}^a}{\partial \mathbf{g}} = \gamma^a \left[ \left(1 - \frac{g_0^a}{\|\mathbf{g}\|}\right) \mathbf{I} + \frac{g_0^a}{\|\mathbf{g}\|} (\mathbf{d} \otimes \mathbf{d}) \right] \quad (4.40)$$

Avec  $\mathbf{d} = \frac{\mathbf{g}}{\|\mathbf{g}\|}$ .

**Ecart-décohésion** ( $g_n > 0$ ,  $\|\mathbf{g}\| - g_0^a > \frac{s(g^a)}{\gamma^a}$ )

$$\mathbf{p}^a(\mathbf{g}) = s(g^a) \frac{\mathbf{g}}{\|\mathbf{g}\|}$$

$$\mathbf{J}_a = \mathbf{J}_{\text{ecrt-decsn}}^a = \frac{\partial \mathbf{p}^a}{\partial \mathbf{g}} = \frac{s(g^a)}{\|\mathbf{g}\|} (\mathbf{I} - \mathbf{d} \otimes \mathbf{d}) + \frac{\partial s(g^a)}{\partial g} \otimes \mathbf{d}$$

Pour aller plus loin, nous choisissons  $s(g^a)$  la fonction d'écroissage :

$$s(g^a) = \begin{cases} p_M(1 - \frac{g^a}{g_M}i) & \text{si } g^a \leq \frac{g_M}{i} \\ 0 & \text{si } g^a > \frac{g_M}{i} \end{cases}, \quad i = \frac{\gamma^a}{\frac{p_M}{g_M} + \gamma^a} \quad (4.41)$$

$p_M$  est la force maximale adhésive,  $g_M$  la distance adhésive de rupture et  $i$  est un rapport de projection dû à l'endommagement (similaire aux rapports d'écroissage).

Nous trouvons donc finalement :

$$\mathbf{J}_a = \mathbf{J}_{ecrt-decsn}^a = \frac{\partial \mathbf{p}^a}{\partial \mathbf{g}} = \begin{cases} \kappa \mathbf{I} - (\kappa + \beta) \mathbf{d} \otimes \mathbf{d} & \text{si } g^a \leq \frac{g_M}{i} \\ [\mathbf{0}] & \text{si } g^a > \frac{g_M}{i} \end{cases} \quad (4.42)$$

avec  $\beta = \frac{p_M}{g_M}$  et  $\kappa = \frac{s(g^a)}{\|\mathbf{g}\|}$ .

**Contact-adhésion** ( $g_n \leq 0$ ,  $0 < \|\mathbf{g}_t\| - g_0^a \leq \frac{s(g^a)}{\gamma^a}$ )

$$\begin{aligned} \mathbf{p}^a(\mathbf{g}) &= \gamma^a [\mathbf{g}_t - \frac{\mathbf{g}_t}{\|\mathbf{g}_t\|} g_0^a] \\ \mathbf{J}_a &= \mathbf{J}_{cont-adhsn}^a = \frac{\partial \mathbf{p}^a}{\partial \mathbf{g}} = \gamma^a [\mathbf{I} - (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) - \frac{g^a}{\|\mathbf{g}_t\|} (\mathbf{I} - (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) - (\mathbf{t}_a \otimes \mathbf{t}_a))] \end{aligned} \quad (4.43)$$

Avec  $\mathbf{t}_a = \frac{\mathbf{g}_t}{\|\mathbf{g}_t\|}$ .

**Contact-décohésion** ( $g_n \leq 0$ ,  $\|\mathbf{g}_t\| - g_0^a > \frac{s(g^a)}{\gamma^a}$ )

$$\begin{aligned} \mathbf{p}^a(\mathbf{g}) &= s(g^a) \frac{\mathbf{g}_t}{\|\mathbf{g}_t\|} \\ \mathbf{J}_a &= \mathbf{J}_{cont-decsn}^a = \frac{\partial \mathbf{p}^a}{\partial \mathbf{g}} = \frac{s(g^a)}{\|\mathbf{g}_t\|} (\mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} - \mathbf{t}_a \otimes \mathbf{t}_a) + \frac{\partial s(g^a)}{\partial \mathbf{g}} \otimes \mathbf{t}_a \end{aligned}$$

Nous trouvons donc finalement en incluant la fonction d'écroissage :

$$\mathbf{J}_a = \mathbf{J}_{cont-decsn}^a = \frac{\partial \mathbf{p}^a}{\partial \mathbf{g}} = \begin{cases} \kappa (\mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} - \mathbf{t}_a \otimes \mathbf{t}_a) - \beta (\mathbf{t}_a \otimes \mathbf{t}_a) & \text{si } g^a \leq \frac{g_M}{i} \\ [\mathbf{0}] & \text{si } g^a > \frac{g_M}{i} \end{cases} \quad (4.44)$$

si on pose  $\kappa = \frac{s(g^a)}{\|\mathbf{g}\|} = \frac{s(g^a)}{\|\mathbf{g}_t\|}$ .

**Remarque 4.3.1** Les statuts “Ecart-jeu” ( $g_n > 0$ ,  $\|\mathbf{g}\| - g_0^a < 0$ ) et “Contact-jeu” ( $g_n \leq 0$ ,  $\|\mathbf{g}_t\| - g_0^a < 0$ ) donnant tous les deux des forces et donc des matrices Jacobiennes nulles sont par conséquent condensés dans le statut “Jeu” ( $\|\tilde{\mathbf{g}}\| - g_0^a < 0$ ) qui est valable indépendamment du signe de  $g_n$ .

### 4.3.5 Equation discrète linéarisée en pénalité

Nous négligeons les effets inertiels et nous supposons que les deux corps sont élastiques. En substituant les approximations (4.35) dans (4.33) et en rajoutant (4.32), nous obtenons la forme discrète linéarisée du principe de travaux virtuels (3.69) en pénalité :

$$\begin{aligned}
& \sum_{e=1}^{\text{NELE}} (\delta \mathbf{y}^e)^T \left( [\mathbf{f}^e(\mathbf{y}^e) - \mathbf{k}^e - \mathbf{q}^e] + \mathbb{E}^e(\mathbf{y}^e) \Delta \mathbf{y}^e \right) \\
& + \sum_{e=1}^{(\text{NELE})'} (\delta \mathbf{y}'^e)^T \left( [\mathbf{f}'^e(\mathbf{y}'^e) - \mathbf{k}'^e - \mathbf{q}'^e] + \mathbb{E}'^e(\mathbf{y}'^e) \Delta \mathbf{y}'^e \right) \\
& + \sum_{e=1}^{\text{NCEL}} (\delta \hat{\mathbf{y}}^e)^T \left( \mathbf{I}_A^R \mathbb{P}^e(\hat{\mathbf{y}}^e) + \mathbb{I}_A^R ((\mathbb{J}_{cf})^e(\hat{\mathbf{y}}^e) + (\mathbb{J}_a)^e(\hat{\mathbf{y}}^e)) \Delta \hat{\mathbf{y}}^e \right) A^e = \mathbf{0} \\
& \quad \forall \delta \mathbf{y}, \delta \mathbf{y}'
\end{aligned} \tag{4.45}$$

Que l’on peut encore condenser :

$$\begin{aligned}
& \sum_{e=1}^{\text{NTOT}} (\delta \hat{\mathbf{y}}^e)^T \left( \begin{bmatrix} \mathbf{f}^e(\mathbf{y}^e) \\ \mathbf{f}'^e(\mathbf{y}'^e) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{k}^e \\ \mathbf{k}'^e \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{q}^e \\ \mathbf{q}'^e \end{bmatrix} + \mathbf{I}_A^R \mathbb{P}^e(\hat{\mathbf{y}}^e) A^e \right. \\
& \quad \left. + \left( [\mathbb{E}^e(\mathbf{y}^e) \quad \mathbb{E}'^e(\mathbf{y}'^e)] + \mathbb{I}_A^R \mathbb{J}^e(\hat{\mathbf{y}}^e) A^e \right) \Delta \hat{\mathbf{y}}^e \right) = \mathbf{0} \\
& \quad \forall \delta \hat{\mathbf{y}}, \quad \text{NTOT} = \text{NELE} + (\text{NELE})'
\end{aligned} \tag{4.46}$$

avec  $\mathbb{J}^e(\hat{\mathbf{y}}^e) = (\mathbb{J}_{cf})^e(\hat{\mathbf{y}}^e) + (\mathbb{J}_a)^e(\hat{\mathbf{y}}^e)$ .

### 4.3.6 Traitement numérique du contact en Lagrangien augmenté

#### Terme de contact en Lagrangien augmenté

Le terme de contact de la formulation (3.125) peut s’écrire :

$$D\hat{U}_c((\hat{\mathbf{y}}, \boldsymbol{\lambda}); (\delta \hat{\mathbf{y}}, \delta \boldsymbol{\lambda})) = \int_{\Gamma} \delta \hat{\mathbf{y}}_{\lambda}^T \hat{\mathbf{I}}_A^R (\hat{\mathbf{p}}_n^c + \hat{\mathbf{p}}_t^f + \hat{\mathbf{p}}^a) d\Gamma \tag{4.47}$$

avec les forces augmentées :

$$\widehat{\mathbf{p}}_n^c = \begin{bmatrix} \frac{\partial \ell_c^c}{\partial \mathbf{g}} \\ \frac{\partial \ell_c^c}{\partial \boldsymbol{\lambda}} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{p}_c^c \\ \mathbf{h}_c^c \end{bmatrix}, \quad \widehat{\mathbf{p}}_t^f = \begin{bmatrix} \frac{\partial \ell_c^s}{\partial \mathbf{g}} \\ \frac{\partial \ell_c^s}{\partial \boldsymbol{\lambda}} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{p}_c^s \\ \mathbf{h}_c^s \end{bmatrix}, \quad \widehat{\mathbf{p}}^a = \begin{bmatrix} \frac{\partial \ell_c^a}{\partial \mathbf{g}} \\ \frac{\partial \ell_c^a}{\partial \boldsymbol{\lambda}} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{p}_c^a \\ \mathbf{h}_c^a \end{bmatrix}$$

et :

$$\delta \widehat{\mathbf{y}}_\lambda = \begin{bmatrix} \delta \widehat{\mathbf{y}} \\ \delta \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix}$$

et en introduisant le tenseur d'action-réaction augmenté :

$$\widehat{\mathbf{I}}_A^R = \begin{bmatrix} [\nabla_{\widehat{\mathbf{y}}} \mathbf{g}(\widehat{\mathbf{y}})]^T & [\mathbf{0}] \\ [\mathbf{0}] & \mathbf{I}_4 \end{bmatrix}$$

On définit le vecteur contrainte généralisé  $\widehat{\mathbf{p}}$  :

$$\widehat{\mathbf{p}}(\mathbf{g}, \boldsymbol{\lambda}) = \widehat{\mathbf{p}}_n^c + \widehat{\mathbf{p}}_t^f + \widehat{\mathbf{p}}^a = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_c^c + \mathbf{p}_c^s + \mathbf{p}_c^a \\ \mathbf{h}_c^c + \mathbf{h}_c^s + \mathbf{h}_c^a \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{p}(\mathbf{g}, \boldsymbol{\lambda}) \\ \mathbf{h}(\mathbf{g}, \boldsymbol{\lambda}) \end{bmatrix}$$

L'approximation du terme de contact s'effectue finalement de la manière suivante (voir [100]) :

$$\int_{\Gamma} \delta \widehat{\mathbf{y}}_\lambda^T \widehat{\mathbf{I}}_A^R (\widehat{\mathbf{p}}_n^c + \widehat{\mathbf{p}}_t^f + \widehat{\mathbf{p}}^a) d\Gamma \simeq \sum_{e=1}^{\text{NCEL}} (\delta \widehat{\mathbf{y}}_\lambda^e)^T \widehat{\mathbf{I}}_A^R \mathbf{A}^e \widehat{\mathbf{p}}(\mathbf{g}^e, \boldsymbol{\lambda}^e) \quad (4.48)$$

où  $\mathbf{A}^e$  est une matrice permettant de distribuer l'aire tributaire uniquement aux vecteurs  $\mathbf{p}$  :

$$\mathbf{A}^e = \begin{bmatrix} A^e \mathbf{I} & [\mathbf{0}] \\ [\mathbf{0}] & \mathbf{I}_4 \end{bmatrix}$$

Avec la méthode mixte du Lagrangien augmenté, il faut discrétiser explicitement la force de contact ou multiplicateur augmenté  $\boldsymbol{\lambda}$  qui devient une inconnue supplémentaire du problème. Les multiplicateurs augmentés se discrétisent de la même manière que les champs de mouvement ou de déplacement. Un moyen commode de les introduire est de déclarer une (voire deux) couche(s) de nœuds supplémentaire dont les degrés de liberté deviennent les multiplicateurs en question. Autrement dit, l'élément nœud-à-nœud passe de deux nœuds en pénalité à trois nœuds (voire quatre) en Lagrangien augmenté. Plus précisément, le premier nœud supplémentaire contient les multiplicateurs augmentés du contact avec frottement  $\boldsymbol{\lambda}^{cf}$  et le second le multiplicateur augmenté de l'adhésion  $\lambda^a$ .

### Linéarisation du contact en Lagrangien augmenté

Nous appliquons la méthode de Newton–Raphson (4.18) au terme augmenté de contact (4.47). Nous effectuons donc l’approximation suivante ( $\delta$  et  $\Delta$  représentent la première et la seconde variation) :

$$\begin{aligned} D\widehat{\mathcal{U}}_c((\bar{\mathbf{y}}, \bar{\mathbf{y}}', \bar{\boldsymbol{\lambda}}); (\delta\mathbf{y}, \delta\mathbf{y}', \delta\boldsymbol{\lambda})) &\simeq D\widehat{\mathcal{U}}_c((\mathbf{y}, \mathbf{y}', \boldsymbol{\lambda}); (\delta\mathbf{y}, \delta\mathbf{y}', \delta\boldsymbol{\lambda})) \\ &+ \Delta\left(D\widehat{\mathcal{U}}_c((\mathbf{y}, \mathbf{y}', \boldsymbol{\lambda}); (\delta\mathbf{y}, \delta\mathbf{y}', \delta\boldsymbol{\lambda})); (\Delta\mathbf{y}, \Delta\mathbf{y}', \Delta\boldsymbol{\lambda})\right) \end{aligned} \quad (4.49)$$

En introduisant (4.47) :

$$D\widehat{\mathcal{U}}_c((\mathbf{y}, \mathbf{y}', \boldsymbol{\lambda}); (\delta\mathbf{y}, \delta\mathbf{y}', \delta\boldsymbol{\lambda})) = \int_{\Gamma} \delta\widehat{\mathbf{y}}_{\lambda}^T \widehat{\mathbf{I}}_A^R (\widehat{\mathbf{p}}_n^c + \widehat{\mathbf{p}}_t^f + \widehat{\mathbf{p}}^a) d\Gamma$$

dans (4.49), il vient :

$$\begin{aligned} &\Delta\left(D\widehat{\mathcal{U}}_c((\mathbf{y}, \mathbf{y}', \boldsymbol{\lambda}); (\delta\mathbf{y}, \delta\mathbf{y}', \delta\boldsymbol{\lambda})); (\Delta\mathbf{y}, \Delta\mathbf{y}', \Delta\boldsymbol{\lambda})\right) \\ &= \Delta\left(\int_{\Gamma} \delta\widehat{\mathbf{y}}_{\lambda}^T \widehat{\mathbf{I}}_A^R (\widehat{\mathbf{p}}_n^c + \widehat{\mathbf{p}}_t^f + \widehat{\mathbf{p}}^a) d\Gamma\right) \begin{bmatrix} \Delta\mathbf{y} \\ \Delta\mathbf{y}' \\ \Delta\boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix} \\ &= \int_{\Gamma} \delta\widehat{\mathbf{y}}_{\lambda}^T \widehat{\mathbf{I}}_A^R \circ \frac{\partial \widehat{\mathbf{p}}}{\partial \widehat{\mathbf{g}}} \Delta\widehat{\mathbf{y}}_{\lambda} d\Gamma \\ &, \quad \widehat{\mathbf{g}} = \begin{bmatrix} \mathbf{g} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix}, \quad \widehat{\mathbf{y}}_{\lambda} = \begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{y}' \\ \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix}, \quad \delta\widehat{\mathbf{y}}_{\lambda} = \begin{bmatrix} \delta\mathbf{y} \\ \delta\mathbf{y}' \\ \delta\boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \Delta\widehat{\mathbf{y}}_{\lambda} = \begin{bmatrix} \Delta\mathbf{y} \\ \Delta\mathbf{y}' \\ \Delta\boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

en définissant l’opérateur  $(\circ)$  de produit matriciel par bloc (produit d’Hadamard par bloc) tel que :

$$\left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \hline \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{array} \right] \circ \left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{B}_{11} & \mathbf{B}_{12} \\ \hline \mathbf{A}_{21} & \mathbf{B}_{22} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{A}_{11}\mathbf{B}_{11} & \mathbf{A}_{12}\mathbf{B}_{12} \\ \hline \mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22}\mathbf{B}_{22} \end{array} \right]$$

on effectue la linéarisation formelle :

$$\begin{aligned}
\delta(\widehat{\mathbf{I}}_A^R \widehat{\mathbf{p}}(\widehat{\mathbf{y}}_\lambda; \delta\widehat{\mathbf{y}}_\lambda)) &= \frac{\partial(\widehat{\mathbf{I}}_A^R \widehat{\mathbf{p}})}{\partial\widehat{\mathbf{y}}_\lambda}(\widehat{\mathbf{y}}_\lambda) \delta\widehat{\mathbf{y}}_\lambda \\
&= \frac{\partial\mathbf{p}}{\partial\mathbf{y}}(\mathbf{y}, \mathbf{y}', \boldsymbol{\lambda}) \delta\mathbf{y} + \frac{\partial\mathbf{p}}{\partial\mathbf{y}'}(\mathbf{y}, \mathbf{y}', \boldsymbol{\lambda}) \delta\mathbf{y}' + \frac{\partial\mathbf{p}}{\partial\boldsymbol{\lambda}}(\mathbf{y}, \mathbf{y}', \boldsymbol{\lambda}) \delta\boldsymbol{\lambda} \\
&\quad - \frac{\partial\mathbf{p}}{\partial\mathbf{y}}(\mathbf{y}, \mathbf{y}', \boldsymbol{\lambda}) \delta\mathbf{y} - \frac{\partial\mathbf{p}}{\partial\mathbf{y}'}(\mathbf{y}, \mathbf{y}', \boldsymbol{\lambda}) \delta\mathbf{y}' - \frac{\partial\mathbf{p}}{\partial\boldsymbol{\lambda}}(\mathbf{y}, \mathbf{y}', \boldsymbol{\lambda}) \delta\boldsymbol{\lambda} \\
&\quad + \frac{\partial\mathbf{h}}{\partial\mathbf{y}}(\mathbf{y}, \mathbf{y}', \boldsymbol{\lambda}) \delta\mathbf{y} - \frac{\partial\mathbf{h}}{\partial\mathbf{y}'}(\mathbf{y}, \mathbf{y}', \boldsymbol{\lambda}) \delta\mathbf{y}' - \frac{\partial\mathbf{h}}{\partial\boldsymbol{\lambda}}(\mathbf{y}, \mathbf{y}', \boldsymbol{\lambda}) \delta\boldsymbol{\lambda} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{\partial\mathbf{p}}{\partial\mathbf{g}} & -\frac{\partial\mathbf{p}}{\partial\mathbf{g}} & \frac{\partial\mathbf{p}}{\partial\boldsymbol{\lambda}} \\ -\frac{\partial\mathbf{p}}{\partial\mathbf{g}} & \frac{\partial\mathbf{p}}{\partial\mathbf{g}} & -\frac{\partial\mathbf{p}}{\partial\boldsymbol{\lambda}} \\ \frac{\partial\mathbf{h}}{\partial\mathbf{g}} & -\frac{\partial\mathbf{h}}{\partial\mathbf{g}} & \frac{\partial\mathbf{h}}{\partial\boldsymbol{\lambda}} \end{bmatrix} \delta\widehat{\mathbf{y}}_\lambda \quad (\mathbf{g} = \mathbf{y} - \mathbf{y}') \\
&= \left[ \begin{array}{c|c} [\nabla_{\widehat{\mathbf{y}}}\mathbf{g}(\widehat{\mathbf{y}})]^T \otimes [\nabla_{\widehat{\mathbf{y}}}\mathbf{g}(\widehat{\mathbf{y}})]^T & [\nabla_{\widehat{\mathbf{y}}}\mathbf{g}(\widehat{\mathbf{y}})]^T \\ \hline [\nabla_{\widehat{\mathbf{y}}}\mathbf{g}(\widehat{\mathbf{y}})] & \mathbf{I}_4 \end{array} \right] \circ \left[ \begin{array}{c|c} \frac{\partial\mathbf{p}}{\partial\mathbf{g}} & \frac{\partial\mathbf{p}}{\partial\boldsymbol{\lambda}} \\ \hline \frac{\partial\mathbf{h}}{\partial\mathbf{g}} & \frac{\partial\mathbf{h}}{\partial\boldsymbol{\lambda}} \end{array} \right] \delta\widehat{\mathbf{y}}_\lambda
\end{aligned}$$

Nous définissons alors :

$$\widehat{\mathbb{I}}_A^R = \left[ \begin{array}{c|c} [\nabla_{\widehat{\mathbf{y}}}\mathbf{g}(\widehat{\mathbf{y}})]^T \otimes [\nabla_{\widehat{\mathbf{y}}}\mathbf{g}(\widehat{\mathbf{y}})]^T & [\nabla_{\widehat{\mathbf{y}}}\mathbf{g}(\widehat{\mathbf{y}})]^T \\ \hline [\nabla_{\widehat{\mathbf{y}}}\mathbf{g}(\widehat{\mathbf{y}})] & \mathbf{I}_4 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c|c} \mathbb{I}_A^R & \mathbf{I}_A^R \\ \hline (\mathbf{I}_A^R)^T & \mathbf{I}_4 \end{array} \right]$$

et on peut écrire d'après la définition de  $\hat{\mathbf{p}}$  :

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{J}} = \frac{\partial \hat{\mathbf{p}}}{\partial \hat{\mathbf{g}}} &= \left[ \begin{array}{c|c} \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{g}} & \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \lambda} \\ \hline \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{g}} & \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \lambda} \end{array} \right] = \left[ \frac{\partial \hat{\mathbf{p}}}{\partial \mathbf{g}} \mid \frac{\partial \hat{\mathbf{p}}}{\partial \lambda} \right] \\
&= \left[ \begin{array}{c|c} \frac{\partial \mathbf{p}_c^c}{\partial \mathbf{g}} + \frac{\partial \mathbf{p}_c^s}{\partial \mathbf{g}} + \frac{\partial \mathbf{p}_c^a}{\partial \mathbf{g}} & \frac{\partial \mathbf{p}_c^c}{\partial \lambda} + \frac{\partial \mathbf{p}_c^s}{\partial \lambda} + \frac{\partial \mathbf{p}_c^a}{\partial \lambda} \\ \hline \frac{\partial \mathbf{h}_c^c}{\partial \mathbf{g}} + \frac{\partial \mathbf{h}_c^s}{\partial \mathbf{g}} + \frac{\partial \mathbf{h}_c^a}{\partial \mathbf{g}} & \frac{\partial \mathbf{h}_c^c}{\partial \lambda} + \frac{\partial \mathbf{h}_c^s}{\partial \lambda} + \frac{\partial \mathbf{h}_c^a}{\partial \lambda} \end{array} \right] \\
&= \left[ \frac{\partial \hat{\mathbf{p}}_n^c}{\partial \mathbf{g}} + \frac{\partial \hat{\mathbf{p}}_t^f}{\partial \mathbf{g}} + \frac{\partial \hat{\mathbf{p}}^a}{\partial \mathbf{g}} \mid \frac{\partial \hat{\mathbf{p}}_n^c}{\partial \lambda} + \frac{\partial \hat{\mathbf{p}}_t^f}{\partial \lambda} + \frac{\partial \hat{\mathbf{p}}^a}{\partial \lambda} \right] \\
&= \left[ \frac{\partial \hat{\mathbf{p}}_n^c}{\partial \mathbf{g}} + \frac{\partial \hat{\mathbf{p}}_t^f}{\partial \mathbf{g}} \mid \frac{\partial \hat{\mathbf{p}}_n^c}{\partial \lambda} + \frac{\partial \hat{\mathbf{p}}_t^f}{\partial \lambda} \right] + \left[ \frac{\partial \hat{\mathbf{p}}^a}{\partial \mathbf{g}} \mid \frac{\partial \hat{\mathbf{p}}^a}{\partial \lambda} \right]
\end{aligned}$$

### 4.3.7 Calcul des Jacobiennes en Lagrangien augmenté

#### Généralités

La clé de la mise en œuvre de la méthode de Newton est le calcul du tenseur Jacobien de contact augmenté qui se décompose :

$$\hat{\mathbf{J}} = \frac{\partial \hat{\mathbf{p}}}{\partial \hat{\mathbf{g}}} = \hat{\mathbf{J}}_{cf} + \hat{\mathbf{J}}_a$$

avec :

$$\hat{\mathbf{J}}_{cf} = \left[ \frac{\partial \hat{\mathbf{p}}_n^c}{\partial \mathbf{g}} + \frac{\partial \hat{\mathbf{p}}_t^f}{\partial \mathbf{g}} \mid \frac{\partial \hat{\mathbf{p}}_n^c}{\partial \lambda} + \frac{\partial \hat{\mathbf{p}}_t^f}{\partial \lambda} \right] \quad \text{et} \quad \hat{\mathbf{J}}_a = \left[ \frac{\partial \hat{\mathbf{p}}^a}{\partial \mathbf{g}} \mid \frac{\partial \hat{\mathbf{p}}^a}{\partial \lambda} \right]$$

Dans ce qui suit, nous exposerons ainsi sans perte de généralité le calcul du tenseur Jacobien du contact avec frottement augmenté  $\hat{\mathbf{J}}_{cf}$  suivi de celui de l'adhésion augmentée  $\hat{\mathbf{J}}_a$ .

#### Jacobiennes du contact avec frottement augmenté

La Jacobienne  $\hat{\mathbf{J}}_{cf}$  se distingue par plusieurs statuts correspondant au contact avec frottement (voir 3.145 et 3.146, on se reportera aussi à [1] [2], et [100]) :

Ecart ( $\hat{\lambda}_n^c > 0$ )

$$\hat{\mathbf{p}}_n^c(\mathbf{g}, \boldsymbol{\lambda}) + \hat{\mathbf{p}}_t^f(\mathbf{g}, \boldsymbol{\lambda}) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -\frac{1}{r}\boldsymbol{\lambda}^{cf} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{J}}_{cf} = \hat{\mathbf{J}}_{ecrt}^{cf} = \left[ \frac{\partial \hat{\mathbf{p}}_n^c}{\partial \mathbf{g}} + \frac{\partial \hat{\mathbf{p}}_t^f}{\partial \mathbf{g}} \mid \frac{\partial \hat{\mathbf{p}}_n^c}{\partial \boldsymbol{\lambda}} + \frac{\partial \hat{\mathbf{p}}_t^f}{\partial \boldsymbol{\lambda}} \right] = \left[ \begin{array}{c|cc} [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] & \mathbf{0} \\ \hline [\mathbf{0}] & -\frac{1}{r}\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T & 0 \end{array} \right] \quad (4.50)$$

Contact adhérent ( $\hat{\lambda}_n^c \leq 0$ ,  $\|\hat{\boldsymbol{\lambda}}_{t_0}^f\| \leq -\mu\pi$ )

$$\hat{\mathbf{p}}_n^c(\mathbf{g}, \boldsymbol{\lambda}) + \hat{\mathbf{p}}_t^f(\mathbf{g}, \boldsymbol{\lambda}) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\lambda}^{cf} + r\mathbf{g} - r\mathbf{g}_{t_0}^s \\ \mathbf{g} - \mathbf{g}_{t_0} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{J}}_{cf} = \hat{\mathbf{J}}_{adhrcce}^{cf} = \left[ \frac{\partial \hat{\mathbf{p}}_n^c}{\partial \mathbf{g}} + \frac{\partial \hat{\mathbf{p}}_t^f}{\partial \mathbf{g}} \mid \frac{\partial \hat{\mathbf{p}}_n^c}{\partial \boldsymbol{\lambda}} + \frac{\partial \hat{\mathbf{p}}_t^f}{\partial \boldsymbol{\lambda}} \right] = \left[ \begin{array}{c|cc} r\mathbf{I} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{I} & [\mathbf{0}] & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T & 0 \end{array} \right] \quad (4.51)$$

Contact glissant ( $\hat{\lambda}_n^c \leq 0$ ,  $\|\hat{\boldsymbol{\lambda}}_{t_0}^f\| > -\mu\pi$ )

$$\hat{\mathbf{p}}_n^c(\mathbf{g}, \boldsymbol{\lambda}) + \hat{\mathbf{p}}_t^f(\mathbf{g}, \boldsymbol{\lambda}) =$$

$$= \left[ \begin{array}{c} -\mu(\mathbf{n}^T \boldsymbol{\lambda}^{cf} + r\mathbf{n}^T \mathbf{g}) \frac{\hat{\mathbf{t}}_s}{\|\hat{\mathbf{t}}_s\|} + (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \boldsymbol{\lambda}^{cf} + r(\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \mathbf{g} \\ -\frac{1}{r} \left( [\mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}] \boldsymbol{\lambda}^{cf} \right) + \mu(\mathbf{n}^T \boldsymbol{\lambda}^{cf} + r\mathbf{n}^T \mathbf{g}) \frac{\hat{\mathbf{t}}_s}{\|\hat{\mathbf{t}}_s\|} + (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \mathbf{g} \end{array} \right]$$

avec :

$$\hat{\mathbf{t}}_s = \frac{\boldsymbol{\lambda}_t^f + r(\mathbf{g}_t - \mathbf{g}_{t_0}^s)}{\|\boldsymbol{\lambda}_t^f + r(\mathbf{g}_t - \mathbf{g}_{t_0}^s)\|}$$

on obtient finalement :

$$\widehat{\mathbf{J}}_{cf} = \widehat{\mathbf{J}}_{gliss}^{cf} = \left[ \begin{array}{c|cc} \frac{\partial \widehat{\mathbf{p}}_n^c}{\partial \mathbf{g}} + \frac{\partial \widehat{\mathbf{p}}_t^f}{\partial \mathbf{g}} & \frac{\partial \widehat{\mathbf{p}}_n^c}{\partial \lambda} + \frac{\partial \widehat{\mathbf{p}}_t^f}{\partial \lambda} \\ \hline \mathbf{M} & \frac{1}{r}(\mathbf{M} - \mathbf{I}) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T & 0 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c|cc} r\mathbf{M} & \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{M} & \frac{1}{r}(\mathbf{M} - \mathbf{I}) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T & 0 \end{array} \right] \quad (4.52)$$

avec :

$$\mathbf{M} = \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} - \mu \hat{\mathbf{t}}_s \otimes \mathbf{n} + \varrho [\mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} - \hat{\mathbf{t}}_s \otimes \hat{\mathbf{t}}_s]$$

et en posant :

$$\varrho = -\mu \frac{\lambda_n^c + r g_n}{\|\boldsymbol{\lambda}_t^f + r(\mathbf{g}_t - \mathbf{g}_{t_0}^s)\|}$$

### Jacobiennes de l'adhésion augmentée

La Jacobienne  $\widehat{\mathbf{J}}_a$  se distingue par plusieurs statuts d'adhésion (voir 3.160 et 3.161) :

**Jeu** ( $\hat{\lambda}^a \leq 0$ )

$$\widehat{\mathbf{p}}^a(\mathbf{g}, \boldsymbol{\lambda}) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ -\frac{1}{r}\lambda^a \end{bmatrix}$$

$$\widehat{\mathbf{J}}_a = \widehat{\mathbf{J}}_{jeu}^a = \left[ \begin{array}{c|cc} \frac{\partial \widehat{\mathbf{p}}^a}{\partial \mathbf{g}} & \frac{\partial \widehat{\mathbf{p}}^a}{\partial \lambda} \\ \hline [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] & \mathbf{0} \\ [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T & -\frac{1}{r} \end{array} \right] \quad (4.53)$$

**Ecart-adhésion** ( $0 < \hat{\lambda}^a \leq s(g^a)$  ,  $\hat{\lambda}_n^c > 0$ )

$$\widehat{\mathbf{p}}^a(\mathbf{g}, \boldsymbol{\lambda}) = \begin{bmatrix} \lambda^a \frac{\mathbf{g}}{\|\mathbf{g}\|} + r(\|\mathbf{g}\| - g^a) \frac{\mathbf{g}}{\|\mathbf{g}\|} \\ \mathbf{0} \\ \|\mathbf{g}\| - g^a \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 \widehat{\mathbf{J}}_a &= \widehat{\mathbf{J}}_{ecrt-adhsn}^a = \left[ \begin{array}{c|c} \frac{\partial \widehat{\mathbf{p}}^a}{\partial \mathbf{g}} & \frac{\partial \widehat{\mathbf{p}}^a}{\partial \lambda} \end{array} \right] \\
 &= \left[ \begin{array}{c|c} r[(\mathbf{I} - \frac{(g^a - \lambda^a/r)}{\|\mathbf{g}\|})(\mathbf{I} - \mathbf{d} \otimes \mathbf{d})] & \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{d} \end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{d}^T \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix} \end{array} \right] \quad (4.54)
 \end{aligned}$$

Ecart-décohésion ( $\hat{\lambda}^a > s(g^a)$  ,  $\hat{\lambda}_n^c > 0$ )

$$\widehat{\mathbf{p}}^a(\mathbf{g}, \lambda) = \begin{bmatrix} s(g^a)\mathbf{d} \\ \mathbf{0} \\ -\frac{1}{r}(\lambda^a - s(g^a)) \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 \widehat{\mathbf{J}}_a &= \widehat{\mathbf{J}}_{ecrt-decsn}^a = \left[ \begin{array}{c|c} \frac{\partial \widehat{\mathbf{p}}^a}{\partial \mathbf{g}} & \frac{\partial \widehat{\mathbf{p}}^a}{\partial \lambda} \end{array} \right] \\
 &= \left\{ \begin{array}{l} \left[ \begin{array}{c|c} \frac{s(g^a)}{\|\mathbf{g}\|}(\mathbf{I} - \mathbf{d} \otimes \mathbf{d}) - \beta \mathbf{d} \otimes \mathbf{d} & \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\frac{1}{r}\beta \mathbf{d} \end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -\frac{1}{r}\beta \mathbf{d}^T \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \mathbf{0}^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\frac{1}{r}(1 + \frac{\beta}{r}) \end{bmatrix} \end{array} \right] & \text{si } g^a \leq \frac{g_M}{i} \\ \\ \left[ \begin{array}{c|c} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & -\frac{1}{r} \end{bmatrix} \end{array} \right] & \text{si } g^a > \frac{g_M}{i} \end{array} \right. \quad (4.55)
 \end{aligned}$$

**Contact-adhésion** ( $0 < \hat{\lambda}^a \leq s(g^a)$  ,  $\hat{\lambda}_n^c \leq 0$ )

$$\hat{\mathbf{p}}^a(\mathbf{g}, \boldsymbol{\lambda}) = \begin{bmatrix} \lambda^a \frac{\mathbf{g}_t}{\|\mathbf{g}_t\|} + r(\|\mathbf{g}_t\| - g^a) \frac{\mathbf{g}_t}{\|\mathbf{g}_t\|} \\ \mathbf{0} \\ \|\mathbf{g}_t\| - g^a \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{J}}_a &= \hat{\mathbf{J}}_{cont-adhsn}^a = \left[ \begin{array}{c|c} \frac{\partial \hat{\mathbf{p}}^a}{\partial \mathbf{g}} & \frac{\partial \hat{\mathbf{p}}^a}{\partial \boldsymbol{\lambda}} \end{array} \right] \\ &= \left[ \begin{array}{c|cc} r[\mathbf{I} - (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) - \frac{(g^a - \lambda^a/r)}{\|\mathbf{g}_t\|}(\mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} - \mathbf{t}_a \otimes \mathbf{t}_a)] & [\mathbf{0}] & \mathbf{t}_a \\ \hline & [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] \quad \mathbf{0} \\ & \mathbf{t}_a^T & \mathbf{0}^T \quad 0 \end{array} \right] \end{aligned} \quad (4.56)$$

**Contact-décohésion** ( $\hat{\lambda}^a > s(g^a)$  ,  $\hat{\lambda}_n^c \leq 0$ )

$$\hat{\mathbf{p}}^a(\mathbf{g}, \boldsymbol{\lambda}) = \begin{bmatrix} s(g^a) \mathbf{t}_a \\ \mathbf{0} \\ -\frac{1}{r}(\lambda^a - s(g^a)) \end{bmatrix}$$

$$\widehat{\mathbf{J}}_a = \widehat{\mathbf{J}}_{cont-decsn}^a = \left[ \begin{array}{c|c} \frac{\partial \widehat{\mathbf{p}}^a}{\partial \mathbf{g}} & \frac{\partial \widehat{\mathbf{p}}^a}{\partial \lambda} \end{array} \right]$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \left[ \begin{array}{c|c} \kappa(\mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} - \mathbf{t}_a \otimes \mathbf{t}_a) - \beta \mathbf{t}_a \otimes \mathbf{t}_a & \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\frac{1}{r} \beta \mathbf{t}_a \end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -\frac{1}{r} \beta \mathbf{t}_a^T \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & -\frac{1}{r} (1 + \frac{\beta}{r}) \end{bmatrix} \end{array} \right] & \text{si } g^a \leq \frac{g_M}{i} \\ \\ \left[ \begin{array}{c|c} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & -\frac{1}{r} \end{bmatrix} \end{array} \right] & \text{si } g^a > \frac{g_M}{i} \end{array} \right. \quad (4.57)$$

### 4.3.8 Equation discrète linéarisée en Lagrangien augmenté

De même que pour la pénalité, en se servant de (4.49), (4.47) et de (4.32), nous obtenons la formulation discrète correspondant à (3.124) en Lagrangien augmenté :

$$\begin{aligned} & \sum_{e=1}^{NELE} (\delta \mathbf{y}^e)^T \left( [\mathbf{f}^e(\mathbf{y}^e) - \mathbf{k}^e - \mathbf{q}^e] + \mathbb{E}^e(\mathbf{y}^e) \Delta \mathbf{y}^e \right) \\ & + \sum_{e=1}^{(NELE)'} (\delta \mathbf{y}'^e)^T \left( [\mathbf{f}'^e(\mathbf{y}'^e) - \mathbf{k}'^e - \mathbf{q}'^e] + \mathbb{E}'^e(\mathbf{y}'^e) \Delta \mathbf{y}'^e \right) \\ & + \sum_{e=1}^{NCEL} (\delta \widehat{\mathbf{y}}_\lambda^e)^T \left( \widehat{\mathbf{I}}_A^R \mathbf{A}^e \widehat{\mathbf{p}}^e(\widehat{\mathbf{y}}_\lambda^e) + \widehat{\mathbf{I}}_A^{R \circ} \mathbf{A}^e [(\widehat{\mathbf{J}}_{cf})^e(\widehat{\mathbf{y}}_\lambda^e) + (\widehat{\mathbf{J}}_a)^e(\widehat{\mathbf{y}}_\lambda^e)] \Delta \widehat{\mathbf{y}}_\lambda^e \right) = 0 \\ & \quad \forall \delta \mathbf{y}, \delta \mathbf{y}', \delta \lambda \end{aligned} \quad (4.58)$$

Que l'on peut encore condenser :

$$\left[ \begin{array}{l} \sum_{e=1}^{\text{NTOT}} (\delta \widehat{\mathbf{y}}_\lambda^e)^T \left( \left[ \begin{array}{c} \mathbf{f}^e(\mathbf{y}^e) \\ \mathbf{f}'^e(\mathbf{y}'^e) \end{array} \right] - \left[ \begin{array}{c} \mathbf{k}^e \\ \mathbf{k}'^e \end{array} \right] - \left[ \begin{array}{c} \mathbf{q}^e \\ \mathbf{q}'^e \end{array} \right] + \mathbf{I}_A^R \mathbf{P}^e(\widehat{\mathbf{y}}_\lambda^e) A^e \\ + \left[ \begin{array}{ccc} \mathbb{E}^e(\mathbf{y}^e) & \mathbb{E}'^e(\mathbf{y}'^e) & \mathbf{0} \end{array} \right] + \left[ \begin{array}{c|c} \mathbb{I}_A^R & \mathbf{I}_A^R \end{array} \right] \circ \left[ \begin{array}{c|c} \mathbb{J}_{pg}^e(\widehat{\mathbf{y}}_\lambda^e) & \mathbb{J}_{p\lambda}^e(\widehat{\mathbf{y}}_\lambda^e) \end{array} \right] A^e \end{array} \right] \Delta \widehat{\mathbf{y}}_\lambda^e = \mathbf{0} \\ \sum_{e=1}^{\text{NTOT}} (\delta \widehat{\mathbf{y}}_\lambda^e)^T \left[ \mathbf{h}^e(\widehat{\mathbf{y}}_\lambda^e) + \left[ \begin{array}{c|c} (\mathbf{I}_A^R)^T & \mathbf{I}_4 \end{array} \right] \circ \left[ \begin{array}{c|c} \mathbb{J}_{hg}^e(\widehat{\mathbf{y}}_\lambda^e) & \mathbb{J}_{h\lambda}^e(\widehat{\mathbf{y}}_\lambda^e) \end{array} \right] \Delta \widehat{\mathbf{y}}_\lambda^e \right] = \mathbf{0} \\ \forall \delta \widehat{\mathbf{y}}_\lambda \quad , \quad \text{NTOT} = \text{NELE} + (\text{NELE})' \end{array} \right. \quad (4.59)$$

avec :

$$\left[ \begin{array}{c|c} \mathbb{J}_{pg}^e & \mathbb{J}_{p\lambda}^e \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c|c} \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{g}} & \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \lambda} \end{array} \right] \quad \text{et} \quad \left[ \begin{array}{c|c} \mathbb{J}_{hg}^e & \mathbb{J}_{h\lambda}^e \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c|c} \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{g}} & \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \lambda} \end{array} \right]$$

## 4.4 Elément de contact avec adhésion

### 4.4.1 Description de l'élément

L'élément nœud-à-nœud de contact avec frottement et adhésion a été implanté dans le code d'éléments finis TACT [21] dans la sous-routine E4NODH (qui est une version couplée à l'adhésion de la sous-routine E4NODE déjà existante effectuant du contact avec frottement en pénalité et en Lagrangien augmenté en petits déplacements). Cela a impliqué l'ajout des forces et des Jacobiennes d'adhésion, tant en pénalité qu'en Lagrangien augmenté.

L'élément contact-frottement-adhésion est constitué de 4 nœuds :

- NŒUD 1 : du contacteur situé en  $\mathbf{x}^1$  et contenant la position  $\mathbf{y}^1$  comme degré de liberté.
- NŒUD 2 : de la cible situé en  $\mathbf{x}^2$  et contenant la position  $\mathbf{y}^2$  comme degré de liberté.
- NŒUD 3 : contenant le multiplicateur augmenté du contact avec frottement  $\lambda^{cf}$  en Lagrangien augmenté. En pénalité, on retire tous les degrés de liberté à ce nœud. De plus, la position originelle  $\mathbf{x}^3$  de ce nœud est telle qu'elle permet de déterminer l'aire tributaire  $A^e = \|\mathbf{x}^3 - \mathbf{x}^2\|$  ainsi que le vecteur normal  $\mathbf{n} = (\mathbf{x}^3 - \mathbf{x}^2)/A^e$ .
- NŒUD 4 : contenant en Lagrangien augmenté le multiplicateur augmenté de l'adhésion  $\lambda^a$  selon la première composante, les autres étant éventuellement fixées (en 2D ou 3D). De même, en pénalité, ce nœud est fixé selon toutes ses composantes.

### 4.4.2 Algorithme d'adhésion

L'algorithme de l'adhésion est basé sur le calcul d'une contrainte d'essai  $p_e^a = \gamma^a(\|\tilde{\mathbf{g}}\| - g_0^a)$  en pénalité (voir (3.106)) et une contrainte d'essai augmentée  $\hat{\lambda}_e^a = \lambda_a + r(\|\tilde{\mathbf{g}}\| - g_0^a)$  en Lagrangien augmenté (voir (3.159)). Dans un premier temps, le signe de cette contrainte d'essai est analysé. Si il est négatif, alors le statut jeu est déclaré. Sinon, cette contrainte est projetée sur le critère  $[0, s(g_0^a)]$  permettant ainsi de déclarer le statut adhésif si la contrainte d'essai est à l'intérieur de l'intervalle ou décohésion dans le cas contraire. Si  $s(g^a) = 0$ , le statut jeu est d'emblée déclaré afin d'éviter à l'algorithme d'effectuer des projections que l'on juge inutiles puisque en pratique l'état devient similaire au jeu. Les méthodes de la pénalité et du Lagrangien augmenté utilisent un algorithme de projection commun.

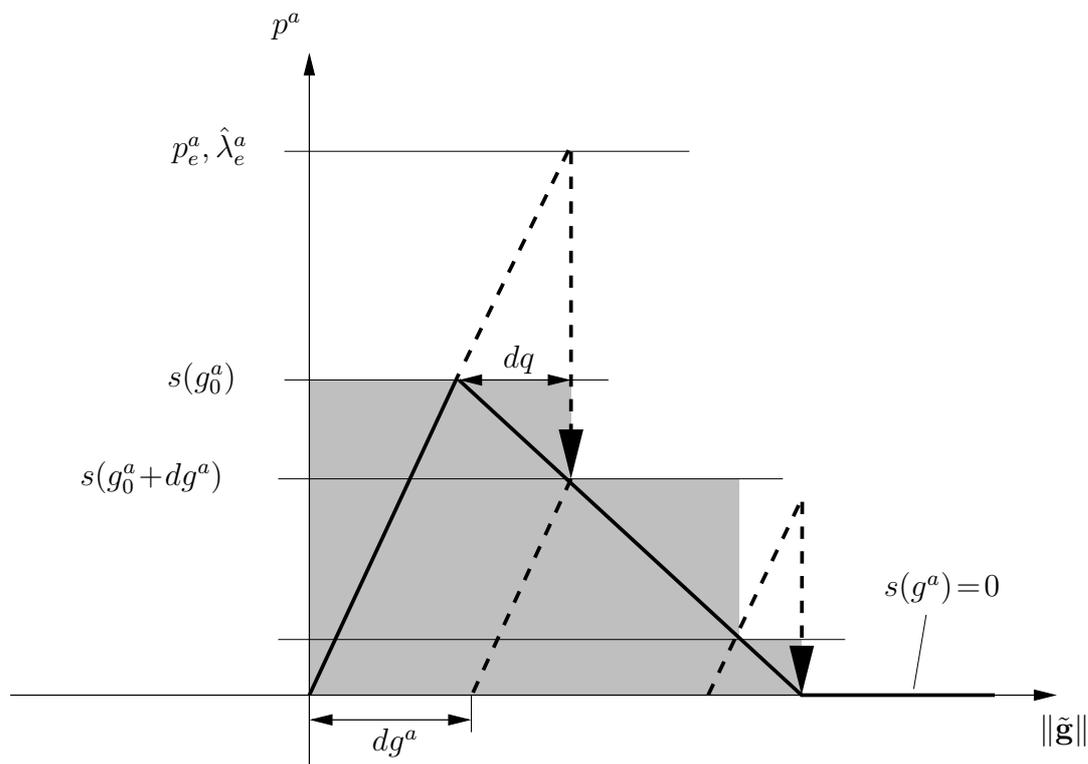


FIG. 4.4 – Algorithme de projection. Remarquons que la projection n'est plus effectuée lorsque  $s(g^a) = 0$ .

Plus de détails sur l'algorithme de l'adhésion sont reportés à l'annexe B.

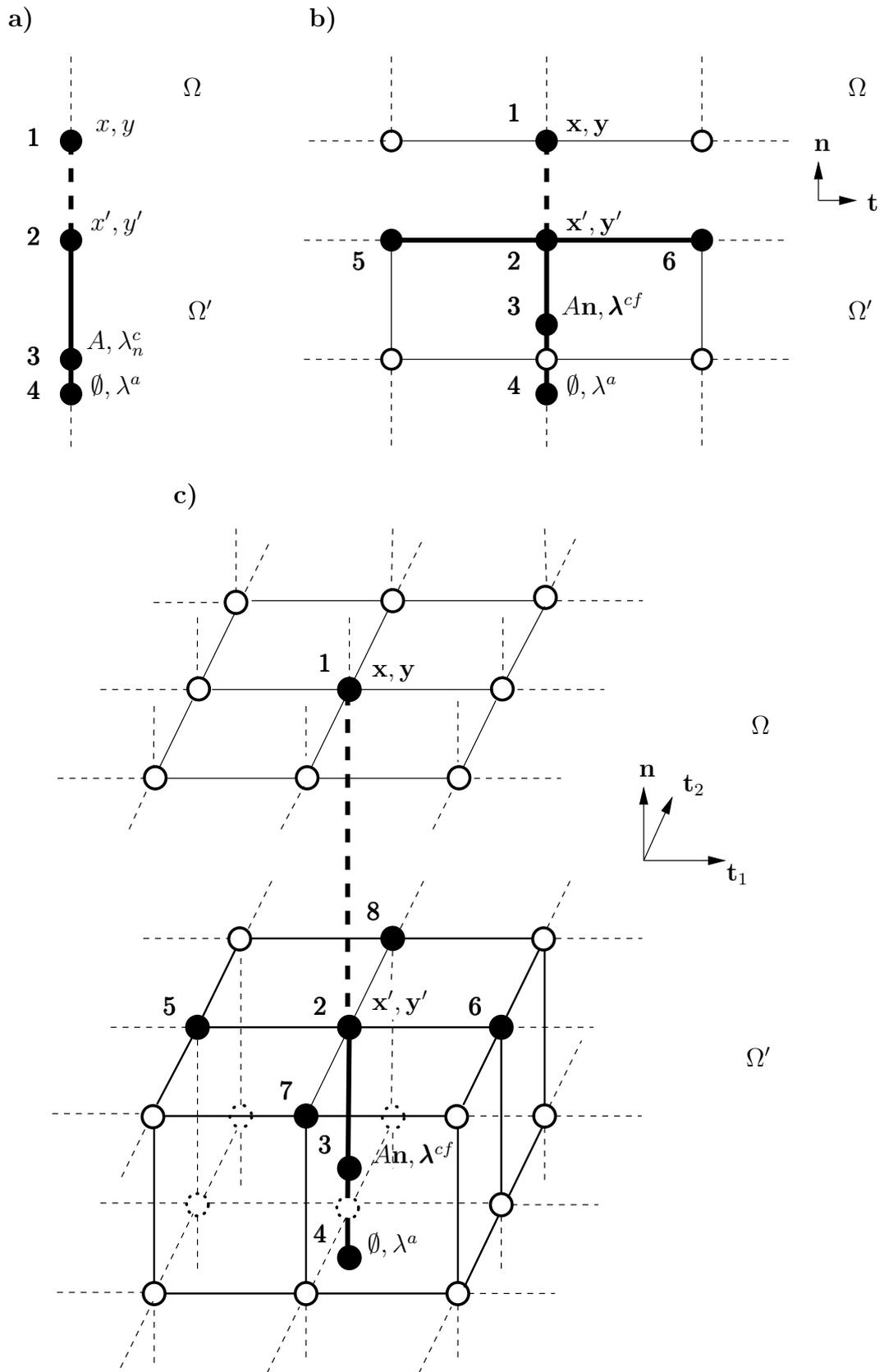


FIG. 4.5 – Élément de contact en a) 1D, b) 2D et c) 3D. La position originelle des nœuds 5 et 6 (en 2D), et 5 à 8 (en 3D) sert à la détermination du vecteur normal et de l'aire tributaire (enregistrés dans la position du nœud 3) dans les trois dimensions).

## 4.5 Problèmes tests de validation

### 4.5.1 Cadre général

Dans la série de simulations qui suivent, il s'agit de tester l'élément **E4NODH** afin de contrôler que la solution numérique correspond aux lois tribologiques introduites (forces) et s'assurer de la convergence de l'algorithme (matrices Jacobiennes). La configuration des tests se voulant être la plus simple possible, les simulations ont été effectuées en se servant d'un seul élément de contact. L'élément est étudié dans les trois dimensions (**1D**, **2D** et **3D**), en utilisant les deux méthodes proposées de régularisation du problème de contact (**pénalité** et **Lagrangien augmenté**), et enfin en faisant varier le type des conditions aux limites (tests en **déplacements imposés** afin de s'assurer du bon comportement de la loi d'adhésion introduite [Forces], et tests en **forces imposées** permettant de contrôler la convergence des itérations de la méthode de Newton [Jacobiennes]). Les propriétés tribologiques considérées ont ici des valeurs purement académiques et ne correspondent en aucun cas à des valeurs physiques d'interfaces réelles.

Afin de mettre en valeur le caractère dissipatif du frottement et de l'adhésion, il est intéressant d'imposer des conditions aux limites cycliques dans le temps. Par conséquent, nous imposerons des déplacements ou des forces cycliques en dents de scie selon la fonction  $f(t)$  de période  $T$  et d'amplitude croissante dans les simulations (Figure 4.6). Par contre, la pression normale de contact  $p_n^c$  visant à introduire des forces de frottement sera toujours constante.

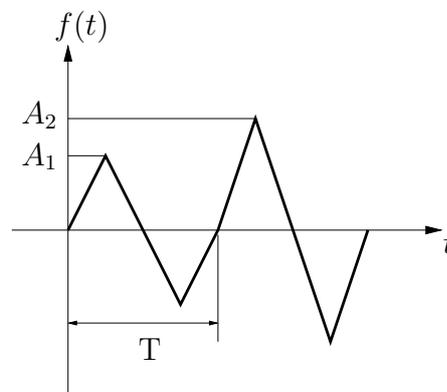


FIG. 4.6 – Fonction dent-de-scie avec amplitude croissante utilisée.

### 4.5.2 Cas unidimensionnel de contact avec adhésion

#### Description

Nous nous intéressons au comportement normal du contact avec adhésion. Considérons le problème 1D d'une barre élastique de rigidité  $\epsilon$  entrant en contact avec un mur rigide (Figure 4.7). Nous rajoutons en parallèle à ce système un

ressort  $\gamma$  entre le mur et la barre permettant de stabiliser le système lors de la décohésion, lorsque nous travaillons en force imposée.

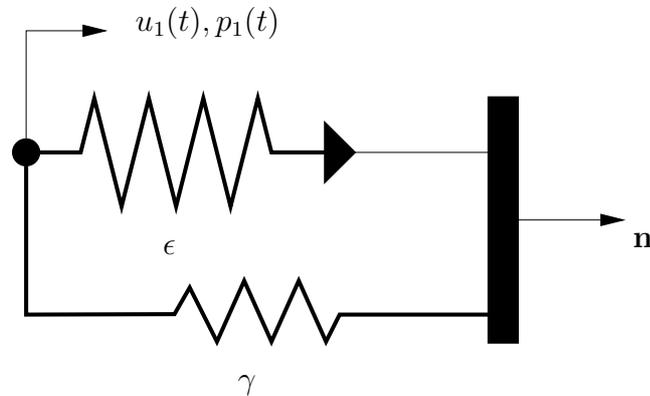


FIG. 4.7 – Contact d’une barre élastique contre un mur.

### Conditions aux limites

La barre élastique est libre à l’extrémité susceptible d’entrer en contact avec le mur. A l’autre, nous imposons le déplacement  $u_1(t)$  ou la force  $p_1(t)$  dans la direction  $\mathbf{n}$  tels que :

$$u_1(t) = \bar{u}_1 f(t) \quad , \quad p_1(t) = \bar{p}_1 f(t)$$

### Propriétés élastiques et tribologiques

Les valeurs suivantes sont choisies :

seuil de force adhésive	$p_M = 4000$
écart de décohésion	$g_M = 0.2$
rigidité adhésive	$\gamma^a = 40000$
écart adhésif initial	$\begin{cases} g_0^a = \infty & \text{sans adhésion} \\ g_0^a = 0.0 & \text{avec adhésion} \end{cases}$
rigidité de la barre	$\epsilon = 35000$

### Résultats des simulations

Les simulations numériques nous permettent de tracer les graphes suivants (Figure 4.8) :

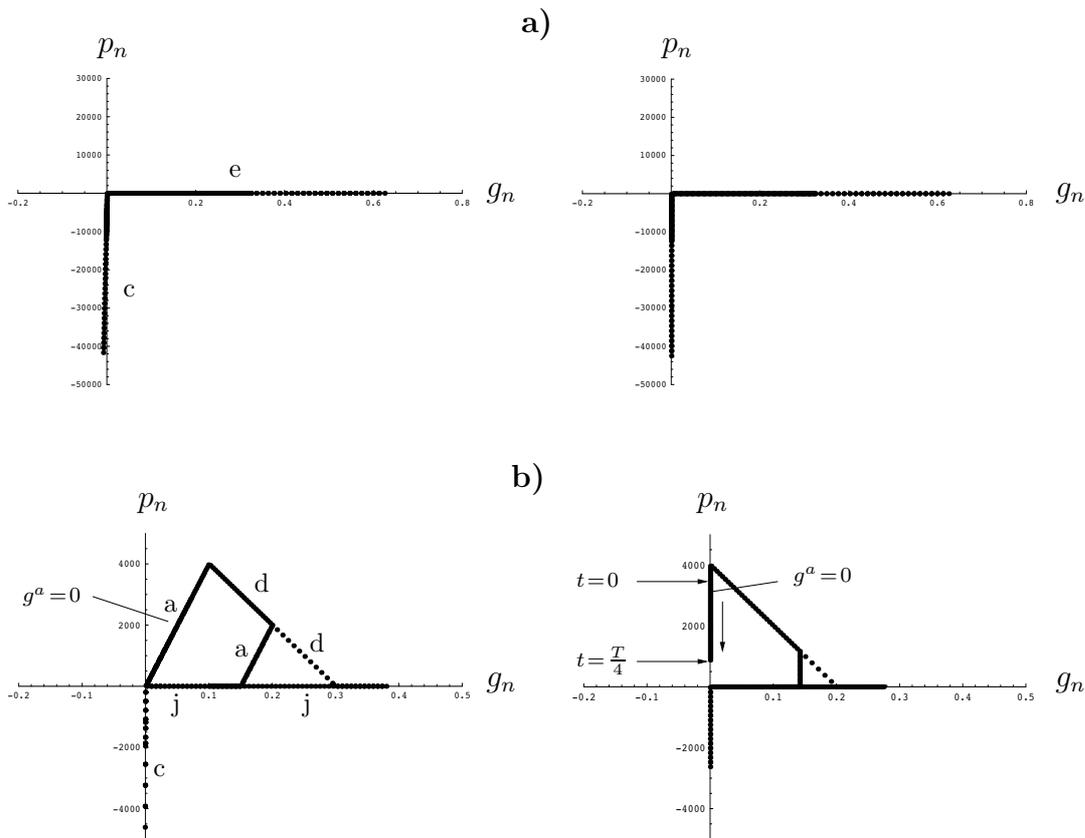


FIG. 4.8 – Simulations numériques en pénalité (à gauche) et en Lagrangien augmenté (à droite) pour **a)** le contact normal simple et **b)** un contact normal avec adhésion. On reconnaît les statuts e:écart, c:contact, a:adhésion, d:décohésion et j:jeu.

## Commentaires

**Les graphes** – Le graphe de la simulation numérique du contact normal simple (Figure 4.8 **a**)) correspond effectivement à celui du contact normal (Figures 2.14 et 3.24). Notons la pente infinie du contact en Lagrangien augmenté par rapport à celle finie (bien qu'élevée) en pénalité.

Le graphe de la simulation numérique du contact normal avec adhésion pénalisé (Figure 4.8 **b**)) correspond aussi effectivement aux graphes théoriques (Figures 3.18 et 3.27) et on retrouve les différents statuts de l'adhésion. On constate que les graphes conservent bien la même pente élastique même après un endommagement partiel. En Lagrangien augmenté, on redresse la pente élastique comme souhaité et on note que  $g_n = 0$  tant que  $g_0^a = 0.0$ .

**Remarque 4.5.1** La variable  $g^a$  est traitée au niveau de l'algorithme comme une variable d'histoire qui prime sur la configuration géométrique originelle. Ainsi, si nous partons avec une configuration originelle  $g_n(0) > 0$  ( $g_n(0) = 0.1$ ) et  $g_0^a = 0.0$ , l'état initial est associé à une force non-nulle due à la tension élastique de la barre (à  $t = 0$ , on trouve  $p_n = 3500$ ) dont l'extrémité se retrouve aussitôt collée contre

le mur<sup>1</sup>. Ainsi, lors du premier quart de cycle où le ressort  $\gamma$  est comprimé, la tension élastique de la force diminuera mais ne s'annulera pas forcément (à  $t = T/4$ , on trouve  $p_n = 875$ ). Ceci explique pourquoi  $p_n$  sur le graphe avec adhésion en Lagrangien augmenté n'est jamais nul lorsque  $g^a = 0.0$ .

**Remarque 4.5.2** Le choix de la valeur de la rigidité du ressort  $\gamma$  reste arbitraire malgré le fait que nous ayons choisie cette dernière égale à celle de la barre  $\epsilon$ . Le changement de sa valeur ne modifie que le taux de la décohésion et donc le nombre de points de décohésion obtenus sur les graphes.

**La convergence** – En pénalité, et lorsque la simulation est effectuée en force imposée, il faut deux itérations pour que l'algorithme converge lorsque le statut change entre deux pas de temps : la première itération permet de trouver la bon statut et la seconde la bonne solution. En Lagrangien augmenté, il faut une itération de plus. Autrement, dans les cas où le statut ne change pas, une itération est suffisante aussi bien en pénalité qu'en Lagrangien augmenté. Ceci est très satisfaisant.

### 4.5.3 Cas bidimensionnel de frottement avec adhésion

#### Description

Considérons maintenant un pion (maintenu par deux ressorts  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  disposés de manière orthogonale) sur une table rigide plane (Figure 4.9).

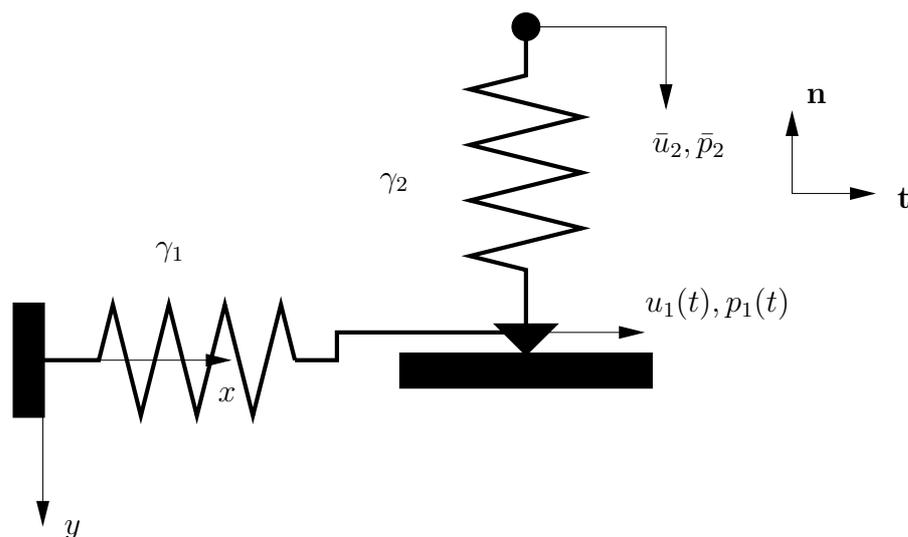


FIG. 4.9 – Frottement avec adhésion.

<sup>1</sup>Il est clair que si la rigidité de la barre trop élevée, il y a alors aussitôt décohésion.

Le ressort  $\gamma_1$  a un effet stabilisant lorsque les forces sont imposées et qu'il y a décohesion. Le ressort  $\gamma_2$  permet d'imposer une force normale  $\bar{p}_n^c$  sur le pion afin de faire intervenir le frottement.

### Conditions aux limites

Nous imposons le déplacement  $u_1(t)$  ou la force  $p_1(t)$  dans la direction tangente  $\mathbf{t}$  tels que :

$$u_2(t) = \bar{u}_2 f(t) \quad , \quad p_2(t) = \bar{p}_2 f(t)$$

Le déplacement  $\bar{u}_2$  et la force  $\bar{p}_2$  sont maintenus constants.

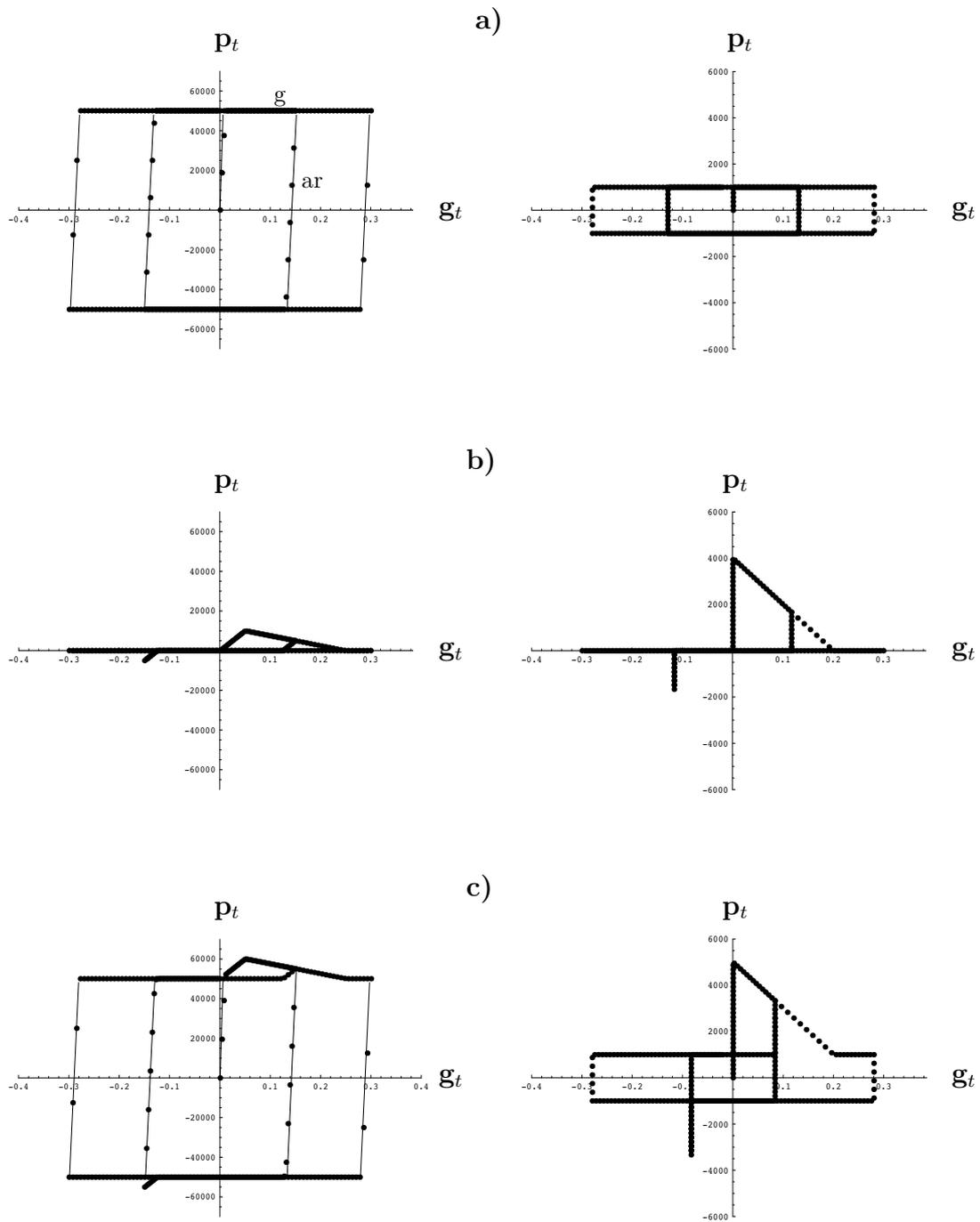
### Propriétés élastiques et tribologiques

Les valeurs suivantes sont choisies :

seuil de force adhésive	$\begin{cases} p_M = 10000 & \text{cas 1} \\ p_M = 4000 & \text{cas 2} \end{cases}$
écart de décohesion	$g_M = 0.2$
rigidité adhésive	$\gamma^a = 200000$
écart adhésif initial	$\begin{cases} g_0^a = \infty & \text{sans adhésion} \\ g_0^a = 0.0 & \text{avec adhésion} \end{cases}$
coefficient de frottement	$\begin{cases} \mu = 0.0 & \text{sans frottement} \\ \mu = 0.2 & \text{avec frottement} \end{cases}$
pression normale	$\begin{cases} \bar{p}_n^c = 250000 & \text{cas 1} \\ \bar{p}_n^c = 5000 & \text{cas 2} \end{cases}$

### Résultats des simulations

Les résultats des simulations permettent de tracer les graphes suivants (Figure 4.10) :



## Commentaires

**Les graphes** – Les graphes de la simulation numérique du frottement seul de la figure 4.10 **a**) correspondent effectivement à ceux de la loi de frottement exacte (voir Figure 2.15) et pénalisée (voir Figure 3.28). De même pour la loi d’adhésion pénalisée seule de la figure 4.10 **b**) (se reporter à la figure 3.30) dont la pente élastique est redressée en Lagrangien augmenté.

Le couplage du frottement et de l’adhésion pénalisés est simplement la somme algébrique des deux graphes obtenus lorsqu’on considère les lois séparément. Par contre en Lagrangien augmenté, la pente étant infinie dans les deux cas, l’algorithme n’arrive pas à déterminer si le statut est adhésif ou adhérent. Nous avons choisi d’instaurer l’ordre selon lequel le statut adhérent primait sur le statut adhésif, ce dernier n’étant déclaré que lorsque le statut du frottement était le glissement<sup>2</sup>. Ceci n’est bien sûr utile que lorsqu’il y a contact, le problème ne se posant pas si il y a un écart.

**Remarque 4.5.3** Dans ces simulations, nous avons tantôt supposé des forces adhésives plus importantes que les forces de frottement tantôt l’inverse. Ce sont deux configurations que nous pouvons rencontrer dans des problèmes réels.

**La convergence** – Chaque configuration (frottement seul, adhésion seule, problème couplé) requiert deux itérations pour converger en Lagrangien augmenté et trois en pénalité. Il est clair que la recherche du statut de contact n’entre pas en jeu car nous effectuons toujours un premier pas de temps où nous imposons la force normale toute seule, cependant ce taux de convergence reste tout à fait acceptable. Il est caractéristique de la méthode de Newton généralisée (aux opérateurs affines par morceaux, continus non-différentiables).

## 4.5.4 Cas tridimensionnel

### Description

Le problème tridimensionnel généralise en trois dimensions le problème bidimensionnel précédent (Figure 4.11). Il s’agit encore d’un pion (maintenu par trois barres orthogonales) en contact avec une table rigide. Le pion peut glisser ou décoller mais nous n’explorerons cette dernière possibilité que plus loin car nous voulons ici mettre en valeur le lobe hémisphérique de l’adhésion. Les simulations sont présentées uniquement en pénalité, mais similaires en Lagrangien augmenté, à la pente adhésive près.

---

<sup>2</sup>L’intuition de ce choix provient du fait que dans la plupart du temps la rigidité des aspérités de l’interface est plus élevée que celle d’une colle. Il est clair qu’en Lagrangien augmenté, on ne saurait faire la différence, mais si on dira tout simplement “qu’il y a une pente qui est plus infinie que l’autre”.

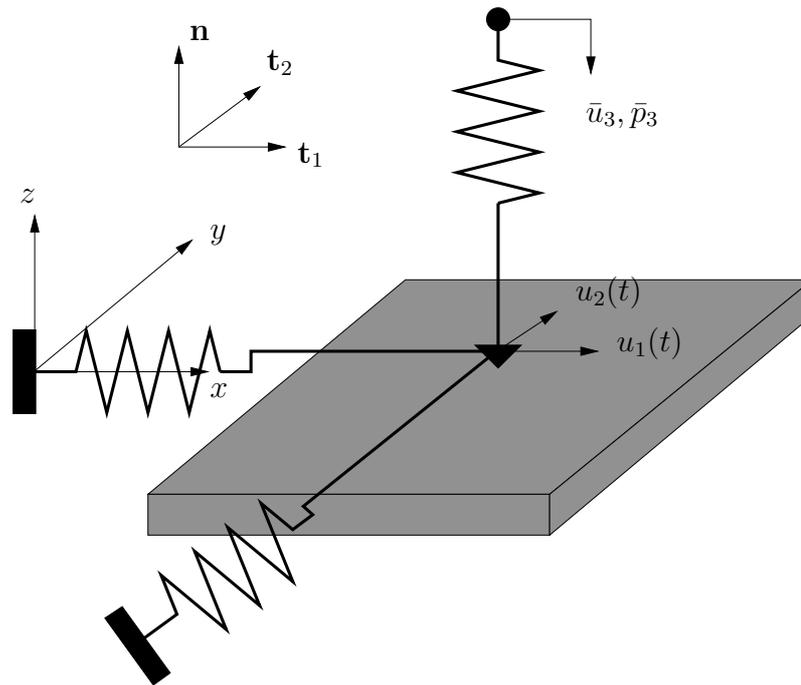


FIG. 4.11 – Adhésion en trois dimensions.

### Conditions aux limites

Nous imposons le déplacement  $u_1(t)$  ou la force  $p_1(t)$  dans la direction tangente  $\mathbf{t}_1$  et le déplacement  $u_2(t)$  ou la force  $p_2(t)$  dans la direction tangente  $\mathbf{t}_2$  afin que le pion décrive des cercles dont le rayon s'accroît au cours du temps. On a :

$$u_1(t) = \bar{u}_1 t \cos(\omega t) \quad , \quad p_1(t) = \bar{p}_1 t \cos(\omega t)$$

$$u_2(t) = \bar{u}_2 t \sin(\omega t) \quad , \quad p_2(t) = \bar{p}_2 t \sin(\omega t)$$

Le déplacement  $\bar{u}_3$  ou la force  $\bar{p}_3$  sont maintenus constants.

### Propriétés élastiques et tribologiques

Les valeurs suivantes sont choisies :

seuil de force adhésive	$p_M = 1000$
écart de décohésion	$g_M = 0.2$
rigidité adhésive	$\gamma^a = 200000$
écart adhésif initial	$\begin{cases} g_0^a = 0.0 & \text{cas 1} \\ g_0^a = 0.2 & \text{cas 2} \end{cases}$
coefficient de frottement	$\mu = 0.0$

**Simulations** – Nous nous intéressons au comportement tridimensionnel de la force adhésive  $p^a$  dans l'espace.

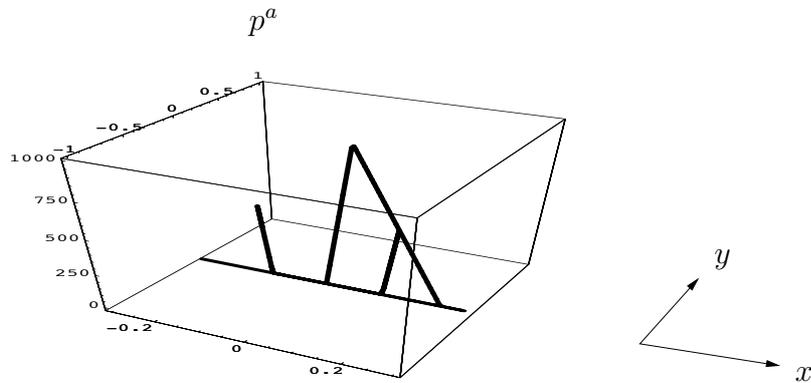
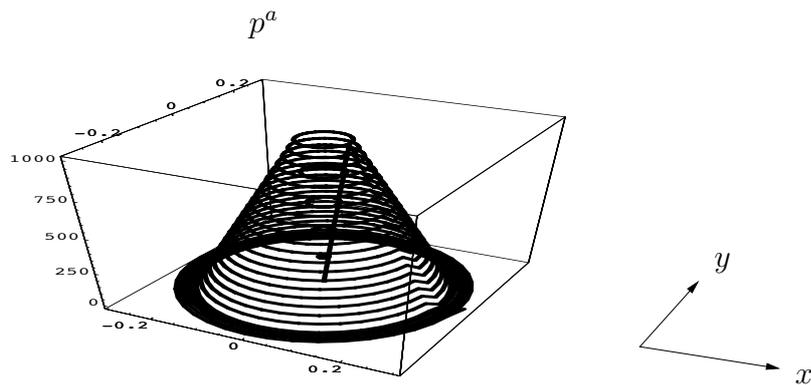
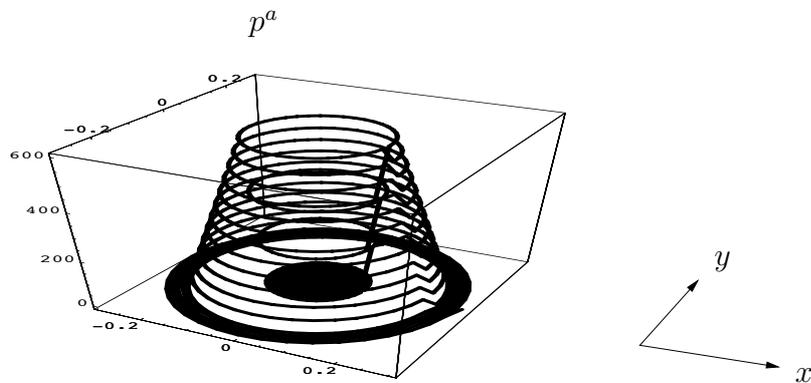


FIG. 4.12 – Traction unidirectionnelle.

FIG. 4.13 – Traction circulaire sans endommagement initial  $g_0^a = 0.0$ .FIG. 4.14 – Traction circulaire avec endommagement initial  $g_0^a = 0.2$ .

## Commentaires

**Les graphes** – Lorsque nous effectuons une traction plane unidirectionnelle (Figure 4.12), nous retrouvons le cas bidimensionnel (Figure 4.10 **b**) pénalisé. Le pion étant astreint à se déplacer sur la table, le lobe hémisphérique dégénère en un cercle. Nous le voyons (Figure 4.13) par la série de cercles concentriques décrivant les zones où  $p^a$  est constant et formant un cône “coniquement creux”<sup>3</sup>. Aussi, si les filaments ont déjà été étirés d’une longueur  $g_0^a = 0.2$ , on voit apparaître un disque de rayon  $g_0^a$  à l’intérieur duquel les filaments sont enroulés et en conséquence ne fournissent aucun effort ( $p^a = 0$ )<sup>4</sup>.

**Remarque 4.5.4** En faisant décoller le pion selon une trajectoire définie dans l’espace, on retrouve le lobe hémisphérique pour lequel  $p^a$  est constant.

**La convergence** – En trois dimensions, trois itérations sont nécessaires lors d’un changement de statut en Lagrangien augmenté et une de moins en pénalité pour que l’algorithme converge. Lorsque le statut n’évolue pas entre deux pas de temps, une seule itération est suffisante.

### 4.5.5 Conclusion des tests de validation

Ces tests démontrent la validité du modèle théorique (tribologique) comme celle de l’algorithme numérique (projection et linéarisation).

---

<sup>3</sup>En Lagrangien augmenté, on obtient une pointe conique non creuse.

<sup>4</sup>Lorsque  $g^a = \infty$ , on obtient alors le plan entier.



# Chapitre 5

## Expérimentation et calibration

---

### 5.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à l'expérimentation. En effet, il s'agit maintenant de déterminer par des expériences les paramètres  $p_M$  (contrainte limite adhésive ou seuil de décohésion) et  $g_M$  (écart de rupture) du modèle proposé pour une interface d'un matériau composite donné. Ceci afin de pouvoir ensuite effectuer des études de la décohésion dans ce matériau. Dans un premier temps, un rappel des différentes techniques expérimentales existantes pour déterminer les propriétés adhésives des composites est effectué. Ces techniques n'étant pas tout à fait adéquates pour identifier les paramètres de notre modèle, nous verrons dans une seconde partie la technique expérimentale proposée pour notre modèle.

### 5.2 Etude de l'interface et des phénomènes d'endommagement dans des composites fibre de verre/résine époxyde

Il existe plusieurs types de matériaux composites. Nous nous restreignons à l'étude des composites fibreux unidirectionnels. Un nombre important de combinaisons de matériaux étant possible, nous choisissons ensuite une résine therm durcissable de la famille des époxydes pour la matrice et des fibres en verre. Le choix d'un composite fibre de verre/matrice époxyde est justifié par la disponibilité et la relative bonne maîtrise des techniques de fabrication de résine époxyde au sein du LMAF. Aussi, ce type de composite est relativement répandu (notamment en aéronautique).

## 5.2.1 Généralités

### Elaboration d'un composite fibre de verre/matrice époxyde

Le matériau composite est obtenu en coulant de l'époxyde qui est une résine thermodurcissable liquide sur des fibres de verre. L'ajout d'un catalyseur déclenche une réaction exothermique qui fournit l'énergie nécessaire à la réticulation des chaînes de polymère (leur liaison) et la solidification de la matrice. Le refroidissement de la matrice et son durcissement crée des forces de serrage sur les fibres (fretage, adhérence). De plus, des réactions chimiques à l'interface peuvent aussi intervenir et fortifier cette dernière (adhésion).

### Définition et caractérisation d'une interface

L'élaboration des matériaux composites comme tout matériau polyphasé crée des zones de contact, plus ou moins étendues entre les constituants, appelées interfaces. Par définition, une interface est une surface de discontinuité entre deux matériaux. Une interface assume a priori la continuité géométrique (continuité des déplacements) et l'équilibre statique (transmission des efforts entre deux phases). Selon sa tribologie, l'interface joue globalement un rôle mécanique de protection vis-à-vis d'un endommagement progressant d'une phase vers l'autre (comme par exemple une fissure).

**Continuité géométrique** – L'interface assure cette continuité en reliant les variables de déplacement surfacique  $\mathbf{y}_m$  de la matrice à  $\mathbf{y}'_f$  de la fibre au sein d'une variable d'état géométrique  $\mathbf{g}(\mathbf{y}_m, \mathbf{y}'_f)$ . L'interface en réalité est une zone d'épaisseur  $e$  non nulle ( $\|\mathbf{g}\| = \|\mathbf{y}_m - \mathbf{y}'_f\| \geq e$ ) où interviennent de nombreux phénomènes et états physico-chimiques comme la porosité, la diffusion, des réactions chimiques, l'humidité et des gradients de température.

**Equilibre statique** – Il existe un équilibre d'action-réaction des forces à l'interface entre les forces surfaciques de la matrice  $\mathbf{p}_m$  et celles de la fibre  $\mathbf{p}'_f$ . Selon la nature de constituants, l'origine de ces forces peut être physique (forces de Van der Waals), chimique (liaisons covalentes généralement) ou mécanique (fretage). D'autres phénomènes statiques comme des gradients de contraintes et des contraintes résiduelles subsistent aussi à l'interface en raison de la mise en œuvre du matériau.

**Tribologie d'interface** – Le comportement de l'interface est modélisé par des lois tribologiques reliant les variables primales cinématiques ( $\mathbf{g}$ ) aux variables duales statiques ( $\mathbf{p}$ ). Quelques caractéristiques interfaciales importantes sont le coefficient de frottement ( $\mu$ ), l'énergie d'adhésion ( $w$ ), l'usure ( $k_a, p_s$ ) [118]. Dans le cadre de cette étude, d'autres grandeurs mécaniques supplémentaires ( $p_M, g_M, \gamma^a, \dots$ ) sont introduites.

L'influence des caractéristiques de l'interface sur les propriétés mécaniques des composites a été mise en évidence depuis de nombreuses années. Par exemple, pour les systèmes verre/époxyde, il est souhaitable d'avoir une forte adhésion pour exploiter pleinement les propriétés mécaniques des fibres (Dow [32], Rosen [112]). En revanche, on a mis en évidence que dans le cas des composites à matrice céramique qu'il était nécessaire d'avoir une faible adhésion interfaciale pour conserver une déformation à rupture macroscopique du matériau élevée (on tolère des décohésions locales le long de l'interface afin que la fibre puisse se déformer, sinon celle-ci en se rompant favorise la propagation de la fissure à travers le matériau, voir Budiansky et al. [13]).

On sait ainsi que la progression des endommagements dans le composite peut être ralentie si l'on sait jouer des propriétés à la rupture des interfaces, de sorte que la défaillance du matériau intervienne le plus tardivement possible lors du chargement.

L'étude complète de l'interface se révèle être complexe, mais essentielle pour la compréhension du fonctionnement macroscopique des composites.

### 5.2.2 Techniques expérimentales : principe et théorie

Les techniques expérimentales sont basées sur des modèles théoriques qu'il est important d'étudier afin d'en comprendre le principe expérimental et surtout les informations sur l'interface qu'elles fournissent. Dans le résumé qui suit, nous nous inspirons largement de la synthèse effectuée par Feillard [35] sur les composites fibre de verre/matrice époxyde.

#### Le test d'arrachement avec le modèle de Cox (1952)

Le test de déchaussement consiste à exercer une traction axiale sur une fibre encastrée dans un bloc de matrice (Figure 5.1) jusqu'à provoquer la décohésion à l'interface et l'extraction de la fibre. Lors de l'essai, on mesure la force exercée sur la fibre en fonction de la longueur encastrée qui augmente avec la déformation de la fibre. Les grandeurs déterminées sont la contrainte de décohésion  $\sigma_d$  et la longueur encastrée  $l$ . Une hypothèse d'interprétation des résultats stipule que lorsque la contrainte de cisaillement à l'interface  $\tau_i$  est égale à la résistance de l'interface à la décohésion, une fissure s'amorce et se propage le long de l'interface entraînant une décohésion quasi-instantanée et catastrophique. En 1952, Cox [20] a proposé le premier modèle de transfert de charge élastique pour l'étude des propriétés mécaniques des matériaux fibreux. Les principales hypothèses sont :

- Les rigidités transversales de la fibre et de la matrice sont identiques et seule la charge dans la direction de la fibre est transférée entre la fibre et la matrice. En conséquence, la déformation longitudinale de la matrice est uniforme tout le long de l'interface.
- La charge transférée de la matrice vers la fibre dépend de la relation entre le déplacement  $u$  dans la direction de la fibre à une distance  $z$  d'une extrémité

et le déplacement  $v$  de la matrice au même point en l'absence de fibre. Sans rentrer dans les détails analytiques, l'équilibre des forces sur un élément  $dz$  de la fibre nous permet de déterminer la répartition de la contrainte normale dans la fibre :

$$\sigma_f(z) = E_f \epsilon(\sigma) \left( 1 - \frac{\cosh \alpha \left( \frac{L}{2} - z \right)}{\cosh \alpha \frac{L}{2}} \right) \quad \text{avec} \quad \alpha = \sqrt{\frac{2G_m}{E_f R_f^2 \log\left(\frac{R_m}{R_f}\right)}} \quad (5.1)$$

$R_f, E_f$  : rayon et module élastique de la fibre

$E_m, G_m$  : module de Young et en cisaillement de la matrice

$\epsilon(\sigma)$  : déformation appliquée

$R_m$  : rayon du cylindre de matrice subissant un cisaillement en présence de la fibre

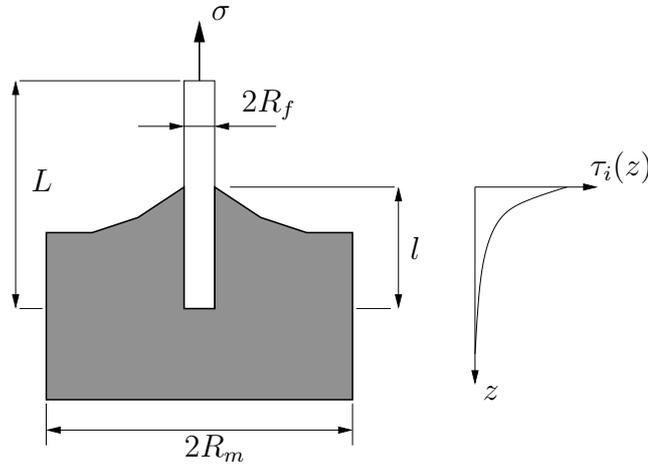


FIG. 5.1 – Schéma du test d'arrachement.

Toujours sur la base du modèle de Cox, Greszczuk [50] est arrivé à exprimer le cisaillement à l'interface en fonction de la longueur encastrée. Le cisaillement le long de l'interface est donné par :

$$\tau_i(z) = \frac{\sigma \alpha}{2\pi R_f} (\coth(\alpha l) \cosh(z) - \sinh(z)) \quad (5.2)$$

On en déduit donc que le cisaillement maximal s'obtient pour  $z = 0$  et ainsi le cisaillement maximal supporté avant décohésion (lorsque  $\sigma = \sigma_d$ ) :

$$\tau_d = \frac{\sigma_d \alpha}{2\pi R_f} \coth(\alpha l) \quad (5.3)$$

Le test d'arrachement permet par conséquent de déterminer la contrainte de cisaillement interfaciale maximale  $\tau_d$  supportée par l'interface. Un autre mode de représentation moins usuel peut être utilisé en considérant cette fois la contrainte axiale  $\sigma_d$  dans la fibre au moment de la décohésion.

Pour plus de détails sur la résolution analytique d'un test d'arrachement on pourra se reporter à l'annexe C.

### Le test de fragmentation avec le modèle de Kelly et Tyson (1965)

Lorsque la comparaison de systèmes fibre-matrice implique une étude micromécanique, ce test est employé assez systématiquement. Il consiste à exercer un effort de traction sur une éprouvette de matrice contenant axialement un monofilament (fibre de verre). En raison de la différence des déformations à la rupture entre les deux constituants (déformation à rupture de la fibre très inférieure à celle de la matrice), la fibre se rompt en fragments de plus en plus courts (Figure 5.2). En analysant la longueur moyenne du fragment de filament  $\ell_c$ , nous obtenons des informations sur le transfert de charge entre la fibre et la matrice. En effet, plus la contrainte de cisaillement transférée à l'interface est élevée, plus la longueur critique du filament  $\ell_c$  sera faible selon :

$$\ell_c = \frac{\sigma_r(\ell_c)R_f}{2\sigma_y} \quad (5.4)$$

Avec  $\sigma_r$  la contrainte à la rupture moyenne d'une fibre de longueur  $\ell_c$  et  $\sigma_y$  le seuil de plastification de la matrice. Ce modèle suppose que le transfert de charge est limité par la plastification de la matrice le long de l'interface, étant donné une matrice avec un comportement élasto-plastique sans durcissement.

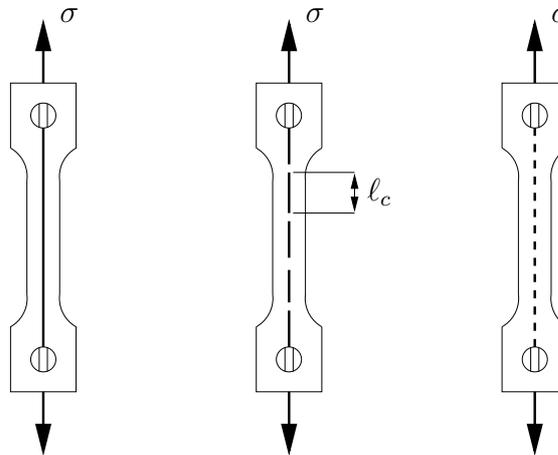


FIG. 5.2 – Principe du test de fragmentation.

Ce test met en évidence la façon dont la charge est transférée entre la matrice et la fibre. Il apporte une information sur l'éventuelle saturation du transfert de charge due à une plastification de la matrice. Le paramètre déterminé est la longueur critique  $\ell_c$  qui indique un bon transfert de charge lorsqu'il est faible. Les principaux défauts viennent du fait que ce modèle ne tient pas compte de la décohésion interfaciale lors de la mise en charge, et qui suit généralement la rupture de la fibre, et aussi qu'il ne convient pas sans restriction pour les systèmes à matrice avec un comportement autre qu'élasto-plastique.

### Le test de micro-indentation avec le modèle de Marshall (1980)

L'essai de micro-indentation a pour objet de déterminer la résistance en cisaillement de l'interface lors d'un chargement ponctuel d'une fibre en compression. Ce test a l'avantage de pouvoir être mené sur une section polie de composite unidirectionnel **réel**. De façon générale, on mesure la force  $F$  et le déplacement  $u$  de l'indenteur. Le changement de pente intervenant sur les courbes  $F = F(u)$  est relié à l'amorçage et la propagation de la décohésion le long de l'interface.

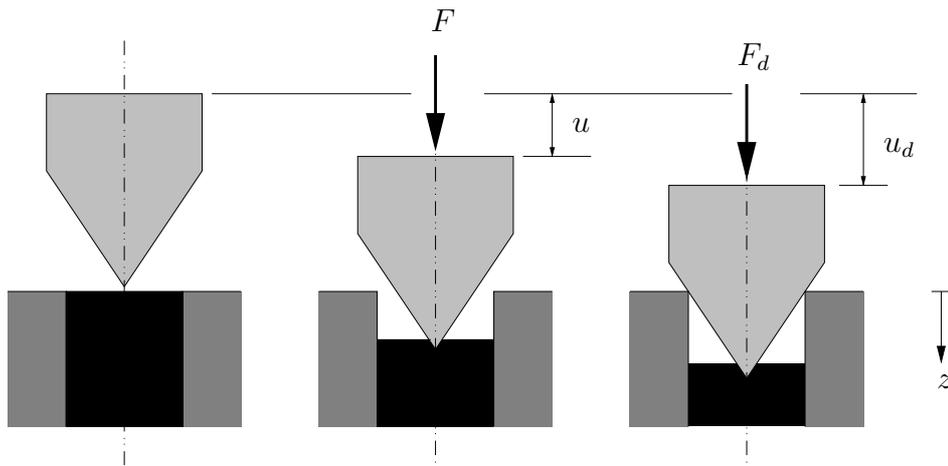


FIG. 5.3 – Principe du test de microindentation.

Le modèle le plus utilisé est celui proposé par Marshall [83] où la fibre est supposée cylindrique isotrope et élastique et la matrice infiniment rigide. Basé sur une approche de type “shear-lag”, ce modèle suppose l'absence de forces adhésives à l'interface et uniquement la présence de forces adhérentes. Lorsqu'on applique une force  $F$  à l'aide de l'indenteur (Figure 5.3), il apparaît une zone de glissement de longueur  $l_s$  débutant à la surface où le cisaillement interfacial  $\tau_i(z)$  est plus important que le seuil de glissement  $-\mu q_0$  ( $q_0$  est la contrainte résiduelle normale à l'interface, supposée constante le long de celle-ci, et  $\mu$  est le coefficient de frottement entre le verre et l'époxyde). La fibre se déforme selon cette longueur de glissement  $l_s$  et on peut exprimer le déplacement de la fibre, assimilé à celui de l'indenteur en fonction de la force appliquée (voir [85]) :

$$u = \frac{F^2}{4\pi^2 R_f^3 E_f \tau_s} \quad (5.5)$$

où  $F$  est la force appliquée et  $\tau_s = -\mu q_0$  le seuil de glissement interfacial (frottement). On effectue ensuite un ajustement avec l'expérience pour déterminer la valeur de  $\tau_s$  (voir [83] [61]). Ce modèle a été perfectionné par la prise en compte d'un seuil de décohésion interfaciale (adhésion). La décohésion est amorcée quand  $\tau_i > \tau_d$  ( $\tau_d$  est une valeur seuil de décohésion), elle est suivie par la propagation

d'une fissure en mode II (propagation par cisaillement) à l'interface et d'un glissement de la fibre sur la longueur décollée. Le déplacement de la fibre peut alors s'écrire :

$$u = \frac{F^2}{4\pi^2 R_f^3 E_f \tau_s} - \frac{2\Gamma}{\tau_s} \quad (5.6)$$

où  $2\Gamma$  est l'énergie de rupture en mode II à l'interface. L'analyse en contrainte permet d'exprimer, par analogie à l'énergie de création de surface, la force seuil nécessaire à amorcer la décohésion  $F_d$  :

$$u_d = \frac{F^2 - F_d^2}{4\pi^2 R_f^3 E_f \tau_s} \quad (5.7)$$

L'ajustement avec des courbes expérimentales de cette équation permet de déterminer les valeurs de  $\tau_s$  et de  $F_d$ . Dans ce modèle, on ne tient pas compte de l'endommagement de la surface de la fibre ni du fait que le poinçonnement modifie le déplacement apparent de la fibre.

D'autres modèles ont été développés où le cisaillement n'est plus considéré comme constant (il décroît le long de la fibre), et où les effets de rétrécissement latéral de la fibre et de la matrice (Stupkiewicz [121]) ainsi que les contraintes résiduelles thermiques sont également prises en compte. Des modèles de transfert de charge qui ne font pas d'hypothèse restrictive sur la nature des constituants ont aussi été élaborés (voir Shetty [115]), mais reposent aussi sur la théorie du shear-lag dont nous connaissons les limites. Un des modèles le plus complet est celui de Hsueh [62].

### **Le test de décohésion d'une sphère d'un plan avec le modèle de Johnson et al. (1971)**

Cet essai, aussi connu sous le nom de technique de JKR (Johnson–Kendall–Roberts [69]) consiste à enfoncer un substrat solide de forme convexe contre un plan élastomère (Figure 5.4). Après un contact prolongé apparaissent des forces adhésives qui déforment les solides et accroissent l'aire de contact à l'interface. La théorie de JKR est une extension de la théorie de Hertz du contact d'une sphère rigide sur un demi-espace élastique prenant en compte les effets du travail d'adhésion à l'interface.

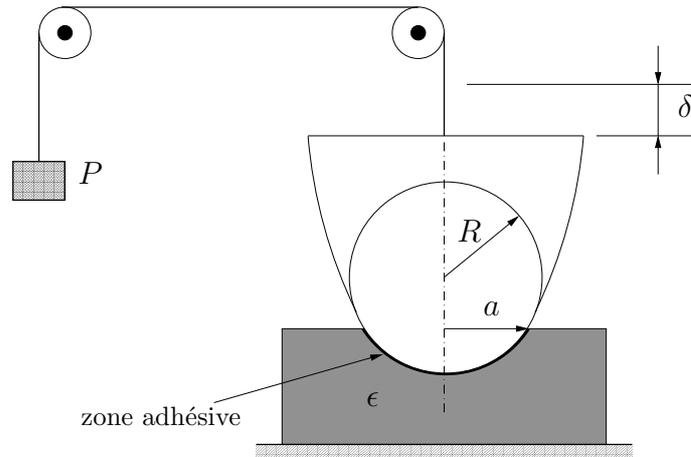


FIG. 5.4 – Dispositif expérimental de la technique de JKR pour déterminer  $w$  à force imposée  $P$ .

En ne considérant aucune force adhésive, la charge appliquée sur la sphère  $P$  et son enfoncement  $\delta$  sont donnés par les relations de Hertz :

$$P = \frac{Ka^3}{R} \quad (5.8)$$

$$\delta = \frac{a^2}{R} \quad (5.9)$$

où  $a$  est le rayon du disque formé par l'aire de contact.  $R$  est le rayon de courbure de la sphère et  $K \approx 16\epsilon/9$ , avec  $\epsilon$  le module de Young du demi-plan.

En présence de forces adhésives, Johnson et al. observèrent, avec certains matériaux des rayons  $a$  d'aire de contact plus importants que ceux prévus par la théorie de Hertz.  $P$  et  $\delta$  d'un système avec adhésion à l'équilibre sont donnés par les relations de JKR :

$$P = \frac{Ka^3}{R} - \sqrt{6\pi Ka^3w} \quad (5.10)$$

$$\delta = \frac{a^2}{R} - \sqrt{\frac{8\pi aw}{3K}} \quad (5.11)$$

avec  $w$  l'énergie de Dupré. Les relations de JKR, adaptées de celles de Hertz tiennent notamment compte du fait que  $w$  est l'énergie nécessaire pour créer une zone de contact de rayon  $a$  en l'absence de forces adhésives. En se servant ensuite du critère de Griffith, Johnson et al. prévoient que la séparation des deux sphères a lieu lorsque la charge  $P$  devient plus grande qu'une charge critique  $P_c(w)$  :

$$P_c(w) = -\frac{3}{2}\pi wR \quad (5.12)$$

Cette théorie a été validée expérimentalement, et pour en savoir plus, on peut se référer à Johnson et al. [69], Maugis [87], Burnham–Kulik [14] et Woerdeman et al. [127].

## Résumé

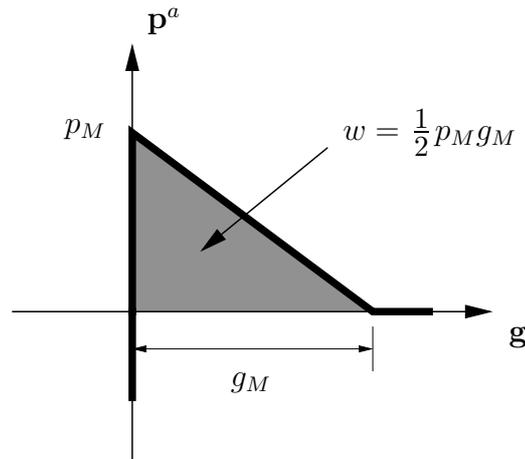
- lors d'un essai d'arrachement, on mesure la force de décohésion associée à une longueur encastrée, c'est un critère de rupture de l'interface. L'analyse mécanique fournit une contrainte de décohésion interfaciale en cisaillement  $\tau_d$ .
- lors d'un essai de fragmentation, on mesure la longueur moyenne des fragments à saturation  $\ell_c$ . On calcule la longueur critique du système étudié et sa capacité de transfert de charge.
- lors d'un essai de microindentation, on mesure la force appliquée sur la fibre et le déplacement de celle-ci. La force de décohésion  $F_d$  et le seuil de frottement  $\tau_s$  sont déterminés à la suite de l'analyse de la courbe  $F = F(u)$ .
- avec la technique de JKR, on mesure la force appliquée  $P_c$  pour séparer la sphère du demi-plan, puis en se servant de la relation (5.12), on peut en déduire le travail d'adhésion de Dupré  $w$ .

**Sur les trois premiers tests** – Bien que les trois premiers tests sollicitent tous l'interface, la manière dont est appliqué l'effort mécanique est différente. Les données extraites de ces tests ne peuvent être directement comparées mais cependant les informations recueillies sont complémentaires. Le test d'arrachement donne le seuil de décohésion au même titre que l'essai de microindentation, mais la déformation de la fibre diffère en raison de l'effet de Poisson<sup>1</sup>. Une analyse fine de ces essais permet de déterminer un seuil de décohésion intrinsèque de l'interface dépendant de la sollicitation mécanique.

**Sur la technique de JKR** – Cette technique permet de calculer l'énergie d'adhésion  $w$ . En se basant sur le comportement du modèle proposé dans cette thèse, le travail d'adhésion est l'aire située au dessous du graphe de la loi d'adhésion (Figure 5.5) :

---

<sup>1</sup>Les essais d'arrachement et d'indentation sont opposés. Cependant sous réserve de comportement linéaire élastique (ou du moins égal en tension et compression) et de coefficients de Poisson identiques, pour la fibre et la matrice, ils devraient en principe donner les mêmes résultats. Pour en savoir plus sur cette comparaison, voir [60].

FIG. 5.5 – Loi d'adhésion et énergie de Dupré  $w$ .

Ainsi, si nous connaissons l'énergie de Dupré  $w$  de l'interface, il n'est ensuite nécessaire que de déterminer un des paramètres  $(p_M, g_M)$  pour en déduire l'autre, les trois constantes étant liées par :

$$w = \frac{1}{2} p_M g_M \quad (5.13)$$

### Conclusion

Nous constatons que les trois premiers essais ne permettent pas directement d'identifier les paramètres de notre modèle. Le paramètre se rapprochant le plus de  $p_M$  est  $\tau_d$ . Malheureusement, ces essais sollicitant l'interface en cisaillement, les effets du frottement et de l'adhésion sont mal découplés. La détermination de  $w$  par la technique de JKR va s'avérer utile, compte tenu des relations entre l'énergie de Dupré et les paramètres du modèle.

Comme nous le verrons par la suite, nous allons tenter de mettre au point un type d'essai nous permettant de nous affranchir des couplages avec le frottement afin de mesurer directement les propriétés normales d'une interface. En raison de la formulation de notre modèle (lobe hémisphérique), la connaissance des propriétés normales devient suffisante.

### 5.2.3 Les systèmes matrice époxyde/fibre de verre

Dans les expériences que nous allons effectuer, nous nous servirons de résine époxyde, de verre et d'un liant qui augmente les propriétés interfaciales. Les systèmes matrice époxyde/fibre de verre sont constitués de plusieurs composants.

#### Les composants

**Epoxyde** – Les matrices époxydes sont des mélanges de polymères thermodurcissables constitués d'une résine époxyde et d'un durcisseur aminé. A ces

deux constituants peuvent s'ajouter des diluants qui ont pour but de diminuer la viscosité de la résine ; mais ils réduisent la réticulation entre les chaînes macromoléculaires. L'usage de catalyseurs permet d'augmenter la vitesse de réticulation ou d'abaisser la température de mise en œuvre.

Les résines époxydes résultent de l'action de l'épichlorhydrine sur des polyalcools aromatiques. La densité des polyalcools est à l'origine de celles des propriétés des résines obtenues. Les caractéristiques physico-chimiques des résines époxydes sont essentiellement fonction de la taille de la chaîne polymérique, elle-même déterminée par le rapport moléculaire des réactifs. Les groupements époxy réagissent avec les groupements amine du durcisseur pour former un polymère à structure tridimensionnelle. L'ouverture des cycles époxy par les durcisseurs appelés agents de réticulation conduit à des pontages entre molécules.

La température de réticulation dépend de la nature chimique du couple résine-durcisseur. Les amines aliphatiques sont réactives à température ordinaire alors que les amines aromatiques de type DDS (diaminodiphénylsulfone) ou DDM (diaminodiphénylméthane) nécessitent une température plus élevée ou l'emploi d'un catalyseur. On peut caractériser toute résine époxyde par son taux de polycondensation (cristallinisation), qui influence notamment l'opacité de la résine et ses propriétés mécaniques. Les taux du mélange doivent être relativement précis car ils influencent de manière non négligeable les propriétés de la résine durcie. Une résine époxyde typique a une densité de  $\rho_{\text{ép}} = 1300 \text{ kg/m}^3$ , un module de Young  $\epsilon_{\text{ép}}$  compris entre 3 et 5 GPa, une contrainte à la rupture d'environ  $\sigma_{r\text{ép}} = 70 \text{ MPa}$  et un coefficient de Poisson situé aux alentours de  $\nu_{\text{ép}} = 0.4$ .

**Verre** – Les oxydes principaux constituant un verre sont la silice, l'alumine et la chaux. Un verre classique contient 53% de silice, 15% d'alumine et 22% de chaux tandis qu'un verre mécanique contient 60% de silice, 25% d'alumine et 9% de chaux. C'est à  $\text{Al}_2\text{O}_3$  et à  $\text{CaO}$  que revient le rôle d'augmenter la contrainte à la rupture et les propriétés diélectriques. En moyenne, un verre a une densité de  $\rho_v = 2300 \text{ kg/m}^3$ , un module de Young  $\epsilon_v = 70 \text{ GPa}$ , une contrainte à la rupture de  $\sigma_{rv} = 3 \text{ GPa}$ , et un coefficient de Poisson de  $\nu_v = 0.2$ .

**Silane (liant)** – Les composites fibres de verre/matrice organique possèdent à priori un handicap majeur : leur sensibilité à l'hydrolyse des liaisons covalentes fibre-matrice. L'eau est soit adsorbée en surface du verre par les groupes hydroxyles ( $-\text{OH}$ ) soit chimisorbée pour la création de groupes hydroxyles en surface. L'adsorption s'effectue sur les oxydes de la surface du verre ( $\text{Na}_2$ ,  $\text{CaO}$ , ...) qui sont présents de façon significative. On peut noter enfin qu'une monocouche d'eau est toujours présente à la surface du verre.

Les silanes organofonctionnels sont utilisés depuis près d'une quarantaine d'années pour limiter cet effet. Leur structure générale est  $\text{Y-R-Si}(\text{OCH}_3)_3$  où Y est un groupement réactif du polymère tels les groupes méthacrylate, amine, époxy ou styrène ; ils sont liés à l'atome de silicium par une liaison covalente très stable. Ces composés qui sont des hybrides de composés organiques et inorga-

niques, ont également une action sur le mouillage, la rhéologie de la matrice et enfin ils facilitent les opérations de manipulation des fibres.

En raison de leur caractère hybride, les silanes établissent un lien entre fibre et matrice qui limite très efficacement l'hydrolyse du verre. Une forte teneur en silane change les propriétés mécaniques de la matrice et déplace le point de rupture du système de l'interface vers la matrice. Cependant, la nature de la liaison entre le silane et les autres constituants est encore en partie mal connue.

## Les liaisons

**Liaison silane-matrice** – Bien que la liaison entre silane et matrice soit souvent représentée comme une monocouche de silane formant un pontage covalent entre fibre et matrice, la réalité est plus complexe. Le silane hydrolysé est vraisemblablement sous forme de plusieurs monocouches en surface. Après évaporation du solvant, le silane se condense en groupements siloxane ( $-\text{Si}-\text{O}-\text{Si}$ ), oligomères qui assurent la liaison avec le polymère tant que leur solubilité est suffisante. Dans le cas de résines thermodurcissables, ces composés siloxanes construisent un réseau polymérique où les deux composants s'interpénètrent. La formation de cette liaison a un caractère irréversible.

**Liaison silane-verre** – A l'opposé, la liaison verre-silane possède un très fort caractère ionique dû à la formation de liaisons oxanes ( $-\text{Si}-\text{O}-\text{V}$ ) à l'interface (V représente le substrat de verre). Le silane est généralement appliqué sur les fibres à partir de solutions aqueuses où se forment des groupements silanols. Ces groupements sont maintenus en surface du substrat par l'intermédiaire de liaisons hydrogène. Après évaporation du solvant, ils se condensent et forment les liaisons siloxanes avec la surface du verre. Le caractère réversible de la liaison verre/silane peut être mis en évidence par une exposition prolongée dans l'eau, puis un séchage. L'hydrolyse des liaisons siloxane entraîne la chute des propriétés mécaniques qui sont restituées lors du séchage, avec la reformation de ces liaisons.

**Liaison verre-silane-matrice** – D'autres théories ont été avancées pour expliquer la liaison globale verre/silane/polymère, en particulier celles qui accordent une attention prépondérante à la mouillabilité et aux énergies de surface des constituants. Pour un mouillage par le polymère de la surface de verre en-simée, la tension de surface du verre doit être inférieure à celle du polymère. Indépendamment, le verre est, comme la plupart des substrats minéraux, recouvert d'une couche d'eau en raison de l'humidité atmosphérique. Cela a pour conséquence de limiter la mouillabilité.

## 5.3 Essais de traction d'une éprouvette époxyde avec lame de verre

L'objectif de l'essai est de déterminer les propriétés mécaniques de la liaison verre-silane-matrice dans le cadre du modèle. Notamment, il s'agit d'évaluer la contrainte de traction adhésive maximale  $p_M$  et l'écart de décohésion  $g_M$ . Nous supposons que la rigidité interfaciale  $\gamma^a$  est infiniment grande. En effet, pour certaines colles, cette rigidité doit être prise en compte mais dans le cas de l'interface étudiée, elle est suffisamment élevée pour être considérée comme infiniment grande.

### 5.3.1 Principe

Le principe de l'expérience consiste à mouler une éprouvette de traction classique en résine époxyde avec la particularité qu'en son centre est intercalée une plaquette de verre. Ainsi, avec l'interface plane entre le verre et la résine sollicitée dans la direction normale, nous espérons obtenir les propriétés adhésives sans effets tangents de frottement, contrairement aux trois premiers tests expérimentaux vus précédemment. La figure 5.6 suivante nous montre l'illustration et les dimensions d'une telle éprouvette :

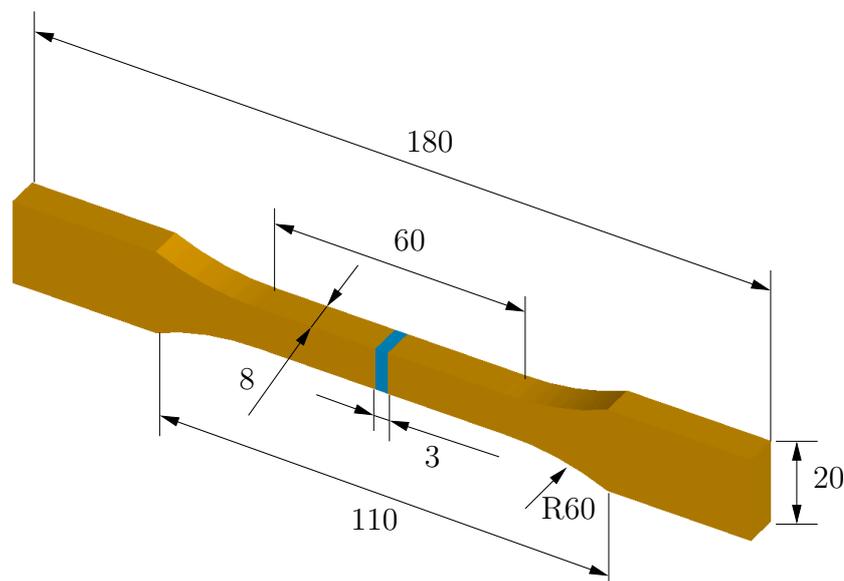


FIG. 5.6 – Eprouvette de traction avec lame de verre. Les dimensions sont exprimées en mm.

L'essai de traction d'une telle éprouvette met en jeu trois éléments en série : la matrice époxyde, l'interface et le verre. Compte tenu des considérations précédentes, la matrice époxyde et le verre sont deux éléments déformables. En effectuant des essais de traction sur ce type d'éprouvette, nous espérons obtenir des informations sur le comportement en décohésion de l'interface. Il faut donc s'affranchir

des effets des déformations de l'époxyde et du verre pour distinguer le comportement interfacial. Pour évaluer les effets dûs à la déformation de l'époxyde, ceux-ci seront comparés à l'essai de traction d'une éprouvette sans échantillon de verre. Nous supposerons aussi que dû à sa rigidité élevée et à sa faible épaisseur que le verre ne se déforme pratiquement pas lors de tels essais. Ainsi, par soustraction, il est prévu d'en déduire le comportement de l'interface.

### 5.3.2 Etude préliminaire de l'essai

Une première simulation numérique de l'essai de traction a été effectuée. Les dimensions de l'éprouvette sont celles de la figure 5.6. Il s'agit ici de vérifier dans un premier temps l'hypothèse selon laquelle la déformation du verre peut être négligée. Ensuite, cette analyse permettra de déterminer l'état des contraintes dans une telle éprouvette et d'en tirer quelques conclusions. L'interface est ici supposée parfaite c'est-à-dire que sa rigidité est infinie et qu'elle ne s'endommage pas. La simulation consiste à encastrier une extrémité de l'éprouvette et à imposer un déplacement à l'autre. Les constantes suivantes sont utilisées :

module d'élasticité du verre  $\epsilon_v = 70 \text{ GPa}$

module d'élasticité de l'époxyde  $\epsilon_{\text{ép}} = 3 \text{ GPa}$

**Première simulation** – Nous considérons des coefficients de Poisson nuls pour les deux matériaux :

coefficient de Poisson du verre  $\nu_v = 0$

coefficient de Poisson de l'époxyde  $\nu_{\text{ép}} = 0$

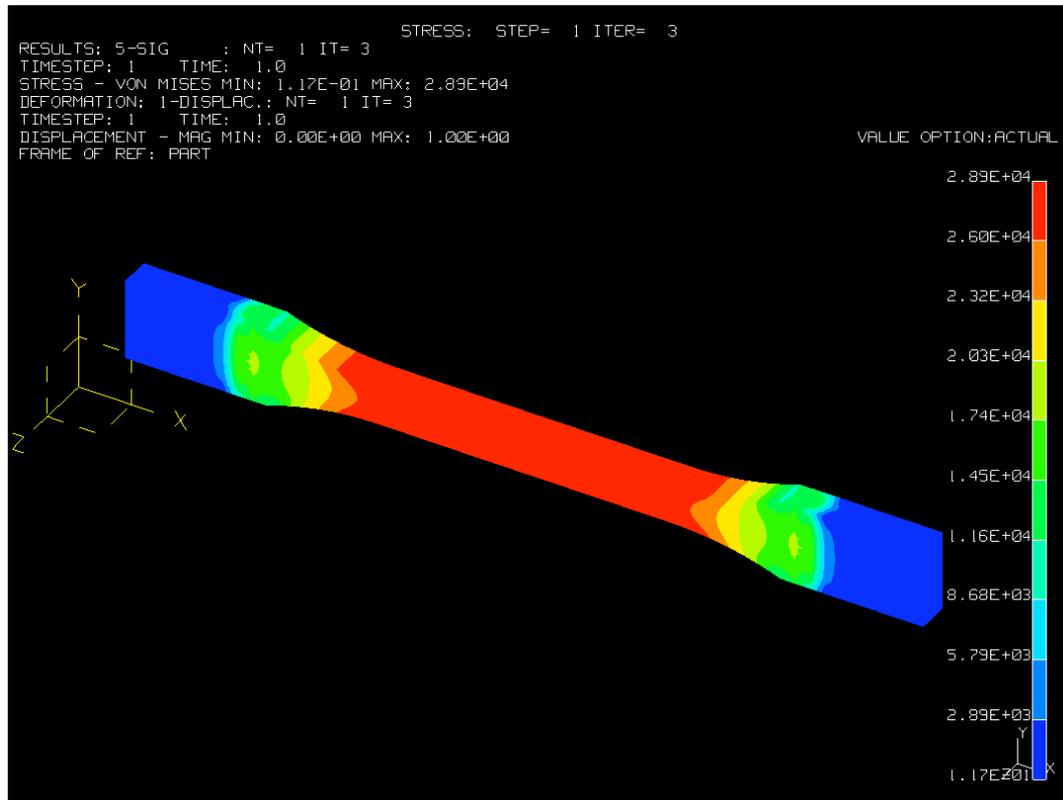


FIG. 5.7 – Simulation numérique d'un essai de traction. Contraintes de Von Mises avec  $E_v = 70$  GPa,  $\nu_v = 0$ ,  $E_{ép} = 3$  GPa,  $\nu_{ép} = 0$ .

Comme attendu (Figure 5.7), on constate que la forme de l'éprouvette choisie permet d'obtenir un état de contrainte homogène au niveau de l'interface et la répartition des contraintes est identique à celle d'une éprouvette qui serait uniquement constituée d'époxyde. Toutefois, la contrainte de traction subit une augmentation d'un peu moins de 0.7 % par rapport à une éprouvette sans plaque de verre pour un même déplacement imposé. Cela confirme la supposition selon laquelle l'influence du verre sur le module d'élasticité de l'éprouvette est négligeable. Ceci est dû notamment au choix d'une plaquette de verre aussi mince que possible et au module élastique élevé du verre par rapport à l'époxyde.

**Seconde simulation** – Une seconde simulation numérique est effectuée cette fois-ci en tenant compte des coefficients de Poisson du verre et de l'époxyde :

$$\text{coefficient de Poisson du verre} \quad \nu_v = 0.2$$

$$\text{coefficient de Poisson de l'époxyde} \quad \nu_{ép} = 0.4$$

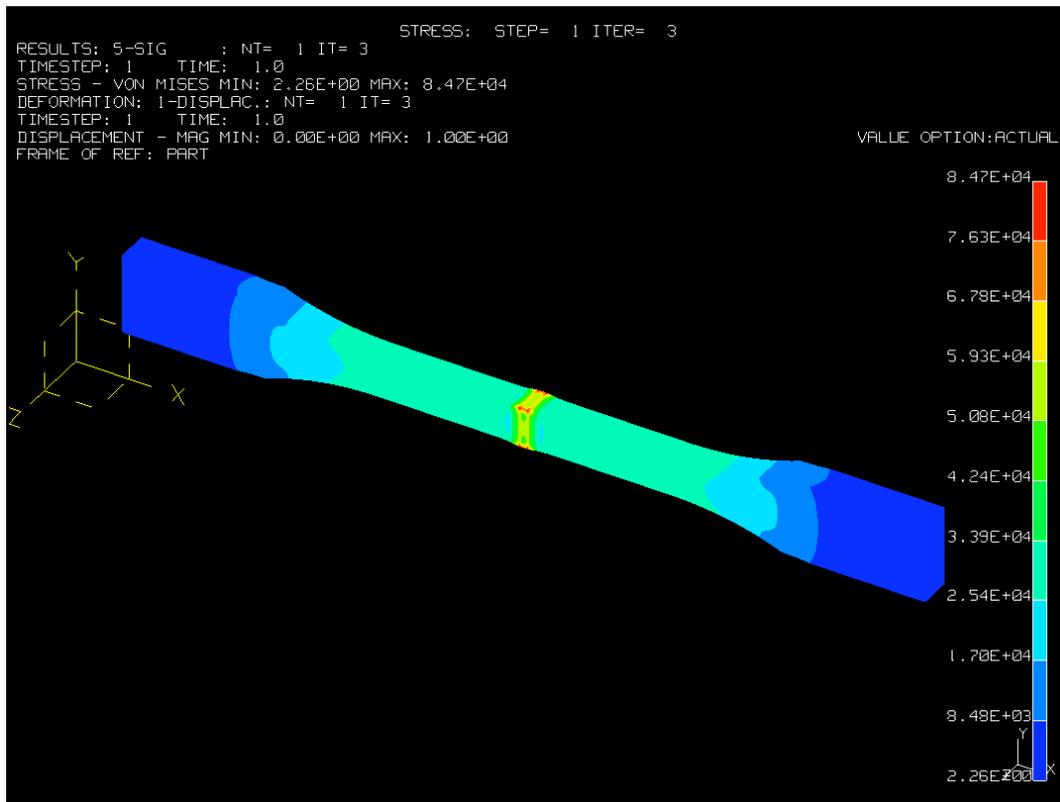


FIG. 5.8 – Simulation numérique d'un essai de traction. Contraintes de Von Mises avec  $E_v = 70$  GPa,  $\nu_v = 0.2$ ,  $E_{ép} = 3$  GPa,  $\nu_{ép} = 0.4$ .

Nous constatons (Figure 5.8) que dû à l'effet Poisson (le verre se déformant latéralement beaucoup moins que l'époxyde), il apparaît des concentrations de contraintes aux arêtes (notamment aux coins) de l'interface des éprouvettes. Les filaments auront donc tendance à se rompre dans ces régions. Imaginons maintenant qu'un nombre  $\delta b$  de filaments se rompent. Si la charge est maintenue, les autres filaments compensent cette perte en supportant une charge plus élevée. Il est clair que d'autres filaments dans les régions critiques s'endommageront aussi, entraînant ainsi d'autres filaments et ainsi de suite jusqu'à la décohésion totale. Le phénomène de décohésion dans cette configuration, similaire à la propagation d'une fissure est un phénomène instable et extrêmement rapide et qui aura par conséquent toujours tendance à se propager à partir des extrémités. Ce phénomène sera accentué par les imperfections au niveau des arêtes de l'interface dues au retrait après le coulage ainsi qu'à la présence de nombreuses micro-fissures à la surface du verre et dans l'époxyde. La contrainte locale maximale aux arêtes (qui sera celle de la décohésion) est environ 3 fois plus élevée que celle appliquée. Il faudra en tenir compte lors de l'évaluation des paramètres.

### 5.3.3 Réalisation

#### Moule

Le moule a été réalisé en plexiglas en raison de sa capacité à faciliter le démoulage de la pièce, et aussi parce que nous avons une bonne visibilité de l'intérieur de celui-ci lorsque nous effectuons notre coulage (contrôle de l'apparition d'éventuelles bulles d'air dans l'époxyde visqueux). Notre moule est composé principalement de quatre pièces, ce qui le rend entièrement démontable et facilite ainsi le démoulage.

#### Elaboration des composants

- VERRE : Nous avons deux types de parallélépipèdes de verre :
  - Type 1 : dimensions  $8 \times 10 \times 2$  mm
  - Type 2 : dimensions  $8 \times 10 \times 3$  mm

Nous traitons pendant quelques minutes ces parallélépipèdes de verre dans une solution de silane. Ils sont ensuite stockés dans des capsules contenant des pastilles absorbantes d'humidité (Gel de Silice) afin d'éviter toute réaction des surfaces traitées avec l'humidité de l'air ambiant. Sinon, le silane s'oxyde très vite et perd alors ses propriétés chimiques (voir [109]).

- EPOXYDE : L'époxyde que nous fabriquons s'obtient par un mélange de trois composants :
  - DER 330 : résine époxyde (35g)
  - DER 732 : résine époxyde (15g)
  - DEH 24 : agent durcisseur (10g)

Ces quantités stœchiométriques sont légèrement différentes de celles que l'on peut trouver dans la littérature, qui correspondent la plupart du temps à des quantités dosées industriellement et donc plus précisément. Notamment par un surdosage de durcisseur, il s'agit d'obtenir de l'époxyde ayant des propriétés correctes (les propriétés mécaniques de l'époxyde obtenue étant très sensibles au dosage des différents composants) et variant peu malgré l'imprécision de la balance (qui donne des mesures au gramme près). Ces trois produits sont mélangés à  $60^\circ$  afin que les composants deviennent plus visqueux afin qu'ils se mélangent mieux. Ceci crée des bulles d'air dans le mélange, qui est ensuite passé sous vide quelques minutes afin de les éliminer. Ce passage sous vide évapore le durcisseur (influence sur les propriétés mécaniques) et parfois emballe la réaction. Il doit être limité autant que possible.

Pour en savoir plus sur le traitement au silane et sur l'élaboration d'époxyde au LMAF, on pourra se reporter à Studer [120].

### Processus d'élaboration d'une éprouvette

L'élaboration d'une éprouvette se fait par les étapes suivantes (Figure 5.9) :

- Traitement du moule avec un agent de démoulage (QZ 13).
- Assemblage du moule, insertion et centrage du verre à l'aide des cales et de la vis prévues à cet effet.
- Coulage de l'époxyde liquide de la première partie de l'éprouvette.
- Durcissement 12 heures, retournement du moule et coulage de la seconde partie.
- Durcissement 12 heures et démoulage.

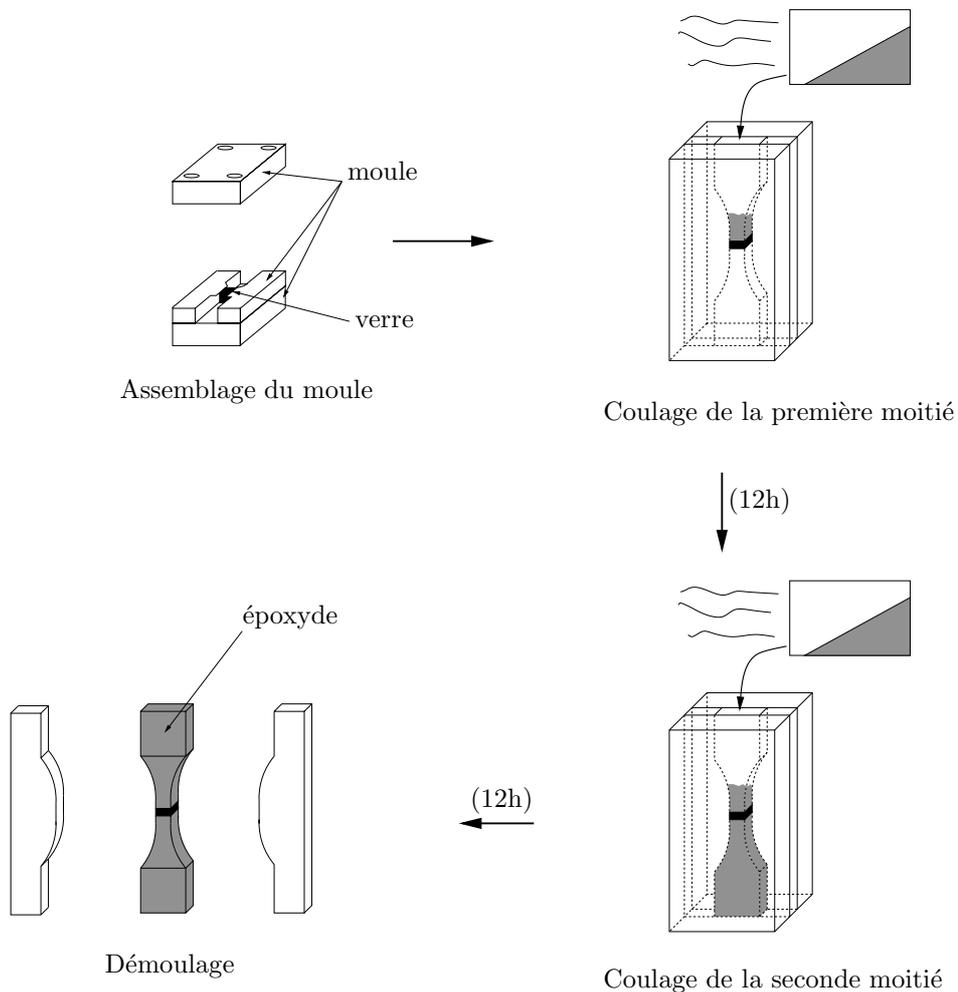


FIG. 5.9 – Processus d'élaboration d'une éprouvette.

Les éprouvettes sont ensuite identifiées selon la date de leur fabrication et une marque permet de distinguer l'interface ayant été constituée en premier. En effet, l'interface créée en dernier est celle dont la face de verre silanisé sera, malgré toutes nos précautions, exposée le plus longtemps à l'humidité de l'air ambiant, donc en théorie plus faible mécaniquement. Il s'agira d'observer si c'est toujours la même

face qui cède lors de l'essai de traction. Ci-dessous (Figure 5.10), nous avons une image représentant une éprouvette au niveau de l'interface.

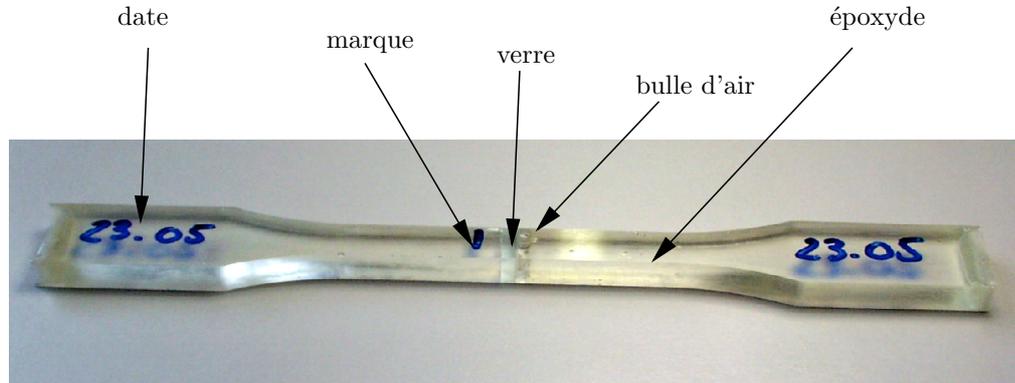


FIG. 5.10 – Epreuve de verre obtenue. Noter la présence de quelques bulles d'air.

### 5.3.4 Essais et résultats

Nous avons effectué des essais de traction sur la machine MTS à disposition au LMAF. L'éprouvette est fixée à l'aide de mors intermédiaires à "action-ciseau" (conçus pour les plastiques rigides et les composites) eux mêmes fixés à la machine par des mors à pression hydraulique. Un extensomètre de  $d_0 = 50$  mm de largeur entre ses couteaux permet de mesurer la déformation du corps de l'éprouvette. Les essais sont tous effectués en déplacements imposés. La figure suivante (Figure 5.11) illustre le dispositif expérimental.

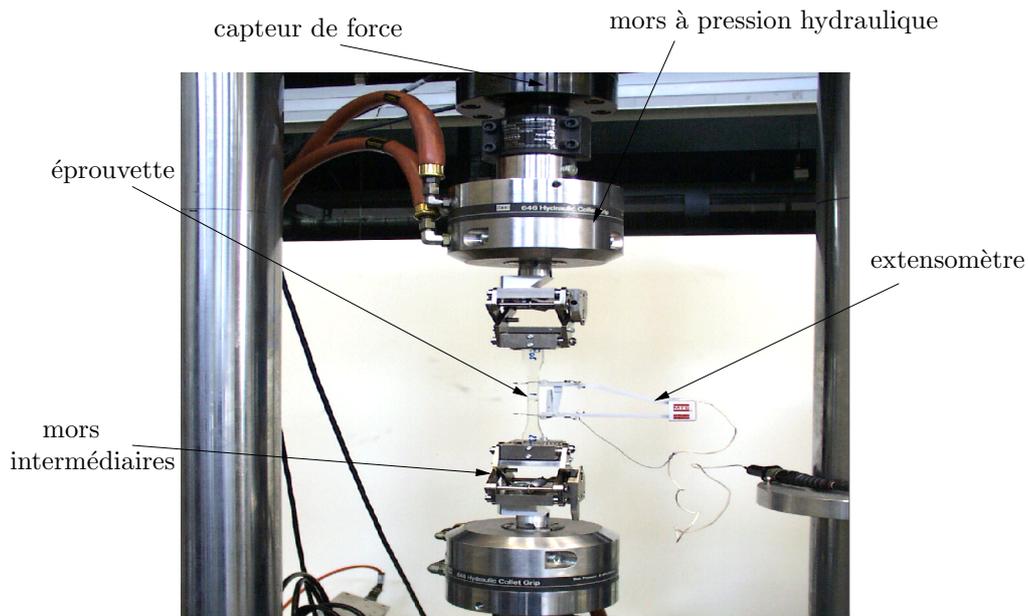


FIG. 5.11 – Dispositif expérimental de l'essai de traction sur machine MTS.

## Traction d'une éprouvette simple

Lors du coulage de chaque partie de l'éprouvette, nous coulons également avec le même mélange une éprouvette témoin uniquement constituée d'époxyde avec laquelle nous effectuons des essais de charge/décharge. Nous obtenons une courbe force-déplacement linéaire car nous sollicitons le matériau dans son domaine linéaire-élastique (Figure 5.12).

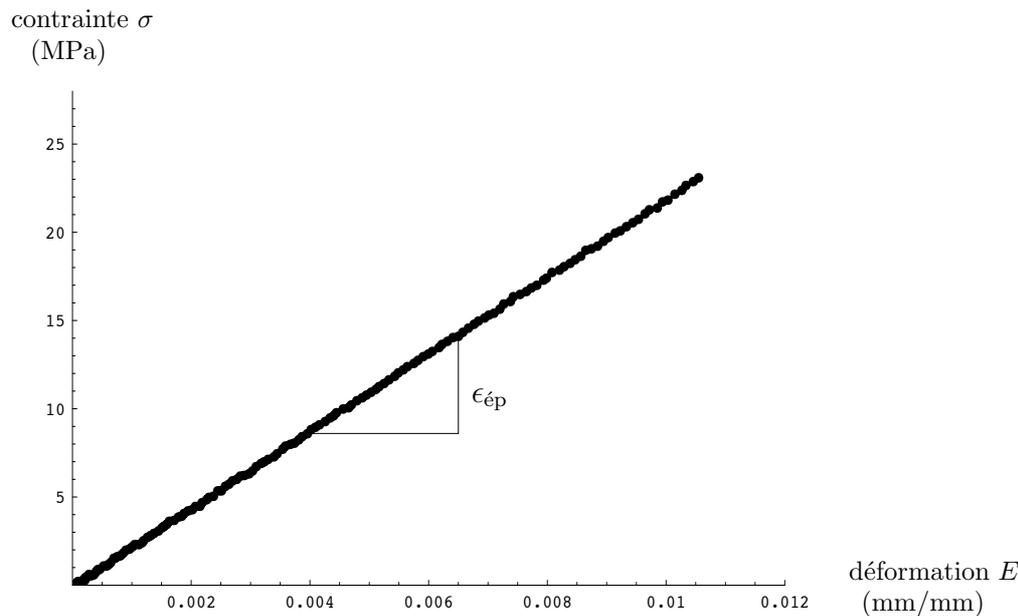


FIG. 5.12 – Courbe contrainte  $\sigma$ -déformation  $E$  pour un essai de traction élastique.

On calcule un module d'élasticité moyen des éprouvettes de 2,2 GPa, ce qui est acceptable pour une résine époxyde. Nous vérifions aussi que l'écart moyen du module d'élasticité des éprouvettes n'excède pas  $\pm 5\%$ . Ceci garantit que les deux moitiés en époxyde constituant une éprouvette avec plaquette de verre ont des propriétés quasiment identiques malgré le fait qu'elles n'aient pas été coulées à partir du même mélange.

## Traction d'une éprouvette avec verre

Nous avons effectué des essais de traction avec une éprouvette contenant du verre jusqu'à la rupture de l'interface. Les résultats d'une courbe force-déformation typique est la suivante (Figure 5.13) :

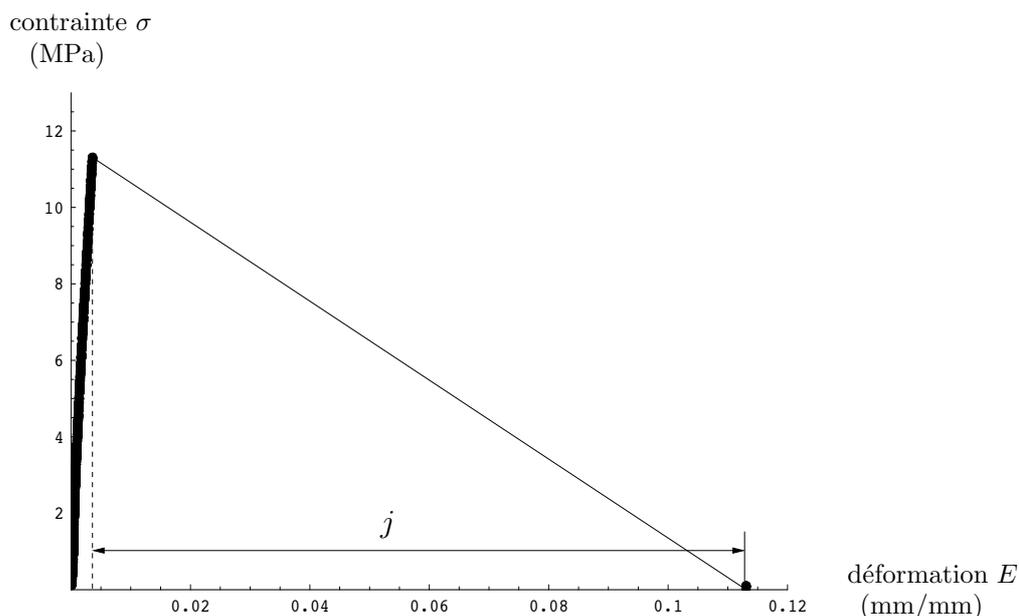


FIG. 5.13 – Courbe force-déformation avec rupture de l'interface.

Qualitativement, la rupture de l'interface est un phénomène extrêmement rapide accompagné d'un craquement sonore. La force appliquée à l'éprouvette chute brusquement à zéro. Nous voyons que les deux parties de l'éprouvette s'écartent d'une distance  $j d_0$  ( $d_0 = 50$  mm). Ceci résulte de plusieurs phénomènes qui apparaissent lorsque la contrainte s'annule :

- Le corps de l'éprouvette entière, ainsi que toutes les pièces du système montées en série reprennent leur longueur initiale.  $j$  dépend en effet de la contrainte de décohésion de l'interface.
- La boucle de réglage, recevant un signal brusquement nul n'a pas le temps d'ajuster la force appliquée.
- L'onde de choc accroît parfois cette distance provoquant le pivotement des deux moitiés de l'éprouvette et déstabilisant le montage de l'extensomètre.

### Détermination expérimentale de $p_M$

Nous avons répété l'essai de traction sur un certain nombre d'éprouvettes. Nous avons testé 20 éprouvettes réparties selon le type de la plaquette de verre :

Type de la plaquette de verre	Nombre d'éprouvettes
verre de 2 mm d'épaisseur, silanisé	4
verre de 3 mm d'épaisseur, non silanisé	3
verre de 3 mm d'épaisseur, silanisé	13

Chaque éprouvette est chargée jusqu'à la rupture de l'interface, et on note la force maximale  $F_M$  supportée. On obtient le diagramme suivant (Figure 5.14) :

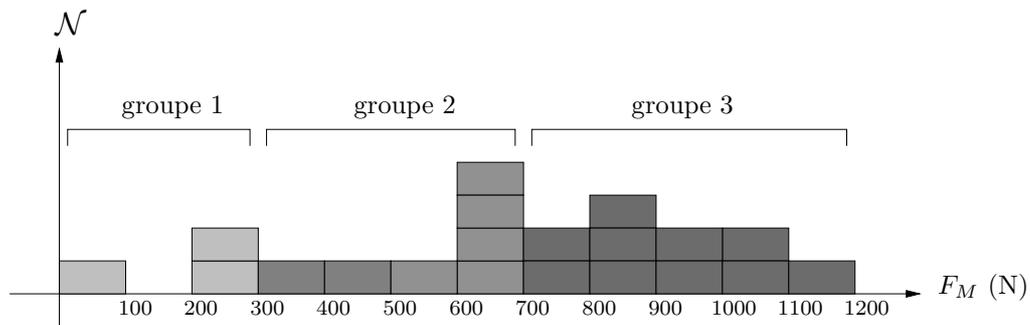


FIG. 5.14 – Nombre d'échantillons  $\mathcal{N}$  en fonction de la force maximale de rupture de l'interface  $F_M$ .

Afin de mieux interpréter les résultats, les échantillons ont été répartis en plusieurs groupes. Le groupe 1 est constitué des échantillons dont le verre n'est pas traité au silane. Le groupe 2 concerne des éprouvettes présentant un nombre relativement important de bulles d'air au niveau de l'interface et le groupe 3 en présente moins ou pas du tout.

**Interprétation des résultats** – Fait bien connu, le traitement au silane améliore la résistance de l'interface comme le montre le groupe 1. Certains échantillons non traités au silane se rompent déjà au démoulage.

On constate que le groupe 3 possède une résistance bien meilleure que le groupe 2. Ceci est dû à l'influence de bulles d'air à l'interface. L'observation au microscope d'une éprouvette rompue appartenant au groupe 2 apporte plus de précisions (Figure 5.15).

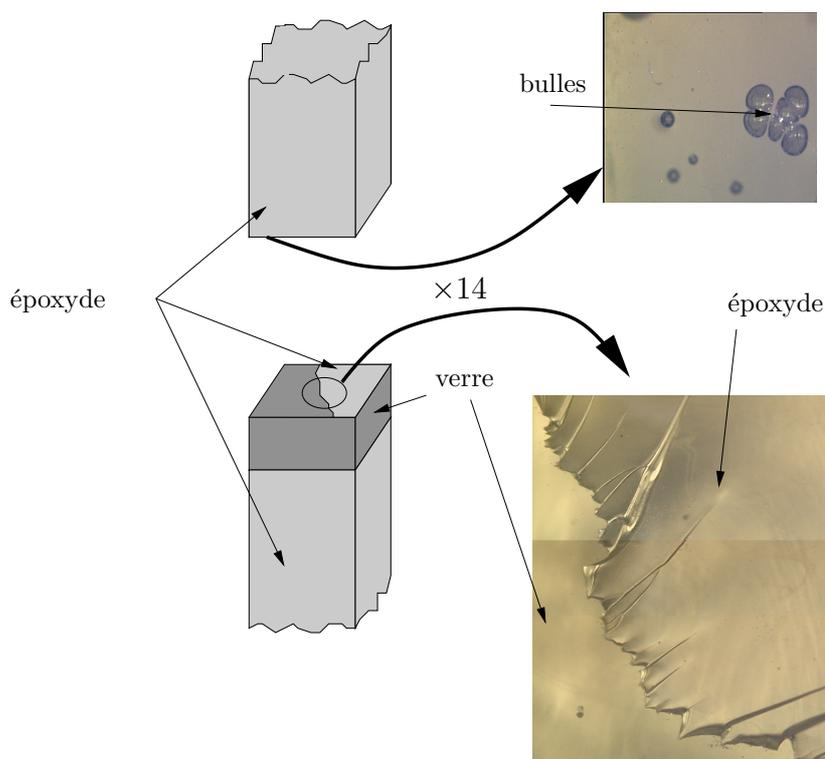


FIG. 5.15 – Etat de surface d’une éprouvette du groupe 2 après rupture.

On constate que la décohésion est déviée à l’interface et elle se propage à l’intérieur de l’époxyde sous forme d’une fissure. En effet, la présence de bulles entraîne des imperfections au niveau de l’interface qui sont l’amorce de fissures dans un matériau fragile comme l’époxyde. On comprend ainsi pourquoi sa résistance est moins importante lorsqu’il subsiste des bulles d’air à l’interface :

- La décohésion se transforme en une propagation de fissure à l’intérieur de l’époxyde, provoquant une rupture prématurée.
- La surface adhésive étant moins importante, l’intensité des concentrations de contraintes s’accroît. Le seuil de rupture d’interface diminue par conséquent.

Les éprouvettes du groupe 3 ont une surface après rupture lisse. On peut en conclure qu’ils sont plus représentatifs de la résistance de l’interface. Compte tenu de ces considérations, on peut estimer que l’interface peut supporter une force d’environ 1000 N. Ceci équivaut à une contrainte maximale de 12,5 MPa qu’il faut multiplier par le facteur de concentration de contrainte ( $\times 3$ , obtenu par les simulations numériques de l’étude préliminaire) pour obtenir  $p_M \approx 37,5$  MPa pour une interface verre/époxyde silanisée.

### Quelques constatations –

**Remarque 5.3.1** Dans la série d'essais effectués on note qu'il n'y a pas de corrélation entre laquelle des deux interfaces se rompt et la chronologie de leur élaboration. C'est tantôt la dernière interface créée qui se rompt, tantôt l'autre. On constate même que les éprouvettes dont la rupture s'effectue selon les interfaces créées en dernier sont légèrement plus nombreuses. Le traitement au silane a donc été convenablement conservé.

**Remarque 5.3.2** Nous n'observons aucune relation entre la date de création de l'éprouvette et son seuil de rupture. Ceci indique que la conservation à l'air ambiant des éprouvettes n'a pas affecté leurs propriétés mécaniques.

**Remarque 5.3.3** Le seuil de plastification de l'époxyde est d'environ 70 MPa. La rupture de l'interface s'effectue bien avant ce seuil.

**Remarque 5.3.4** Nous n'observons aucune différence de comportement mécanique des éprouvettes comportant une plaquette de verre de 2 mm et celles de 3 mm. Les éprouvettes de 2 mm sont cependant plus délicates à manipuler car elles sont plus fragiles et le serrage du moule entraîne parfois leur morcellement.

### Détermination expérimentale de $g_M$

L'essai que nous effectuons provoque une décohésion quasi-instantanée. Le phénomène est instable, ce qui le rend difficile à observer. De plus, les effets du retrait des parties élastiques, malgré la sensibilité de notre extensomètre ne nous permet pas de mesurer l'écart adhésif maximal  $g_M$  avec ce type d'essai. Pour tenter de ralentir la progression du phénomène et pour éliminer tout effet élastique, l'éprouvette va être stabilisée par deux autres éprouvettes sans verre collées en parallèle (Figure 5.16) :

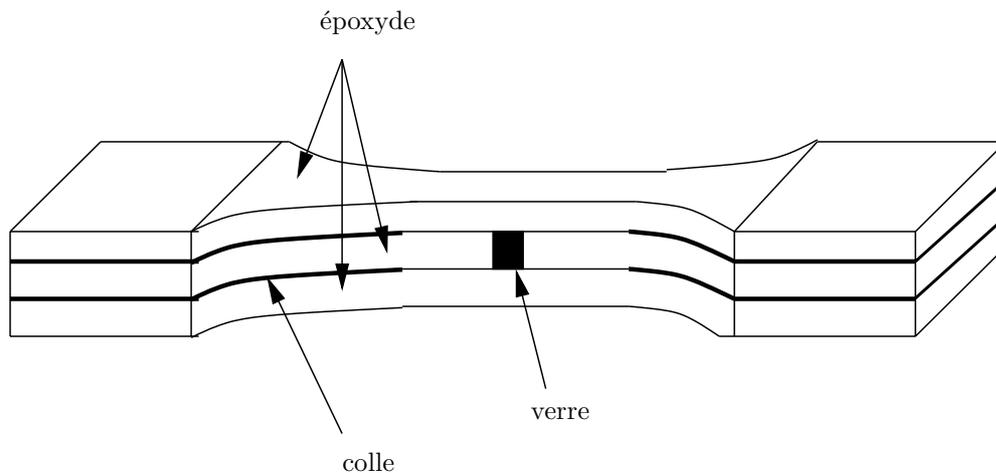


FIG. 5.16 – Stabilisation d'une éprouvette. Le collage est effectué par de l'époxyde même, qui est aussi utilisé dans la pratique comme une colle.

On effectue un essai de traction jusqu'à la rupture d'une des deux interfaces, et par soustraction des effets élastiques connus des deux éprouvettes stabilisantes déterminer le comportement de l'interface. La courbe force-déformation pour de tels essais est la suivante (Figure 5.17) :

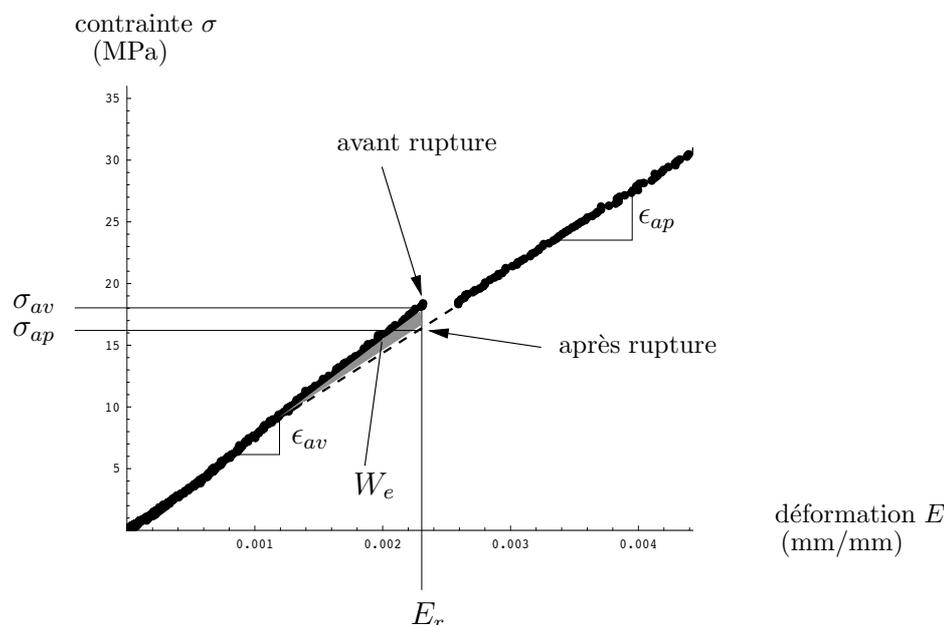


FIG. 5.17 – Courbe force-déformation avec rupture de l'interface d'une éprouvette stabilisée.

**Interprétation des résultats** – Les trois éprouvettes étant en parallèle, la rigidité totale avant la rupture de l'interface est de  $\epsilon_{av} = 3\epsilon_{ép}$ . Ensuite, cette rigidité passe brusquement à une valeur inférieure dépendant de l'aire des surfaces collées. L'essai est aussi instable que le précédent. La rupture a aussi lieu instantanément, et en raison de la déformation élastique des zones non-collées et du mauvais conditionnement de la boucle de réglage, on observe un saut de déformation. Par contre on peut en déduire l'énergie dissipée lors de la rupture. En effet, il est possible de retracer le chemin suivi par la force en prolongeant la seconde partie de la courbe. On obtient ainsi la contrainte immédiatement après la rupture de l'interface et ensuite l'énergie dissipée s'obtient en effectuant la différence de l'énergie élastique avant avec celle après la rupture. On trouve donc :

$$W_e = d_0 \left( \frac{1}{2} \epsilon_{av} E_r^2 - \frac{1}{2} \epsilon_{ap} E_r^2 \right) = \frac{1}{2} d_0 E_r^2 (\epsilon_{av} - \epsilon_{ap}) \approx 288 \text{ J} \cdot \text{m}^{-2} \quad (5.14)$$

Cette énergie dissipée n'est cependant pas l'énergie de Dupré  $w$  car ce terme contient aussi l'énergie élastique des zones non-collées.

Même "stabilisée", l'éprouvette de traction avec lame de verre intercalée permet d'estimer la contrainte d'adhésion  $p_M$  mais pas l'écart à la rupture  $g_M$ . D'autres expériences (de traction) de conception différentes devront être conçues à cette fin.

**Estimation de l'écart à la rupture  $g_M$**  – L'expérience proposée ne permettant de déterminer qu'en partie les paramètres attendus, on peut cependant utiliser certaines données disponibles dans la littérature pour estimer  $g_M$ . Woerdeman et al. [127] ont mesuré par la technique de JKR l'énergie de Dupré d'interfaces époxyde/verre traitées au silane comprises entre  $40 \text{ mJ} \cdot \text{mm}^{-2}$  et  $80 \text{ mJ} \cdot \text{mm}^{-2}$ . En se basant sur une énergie de Dupré  $w \approx 70 \text{ mJ} \cdot \text{mm}^{-2}$ , et en se servant de  $p_M$  déterminé auparavant, on peut calculer à l'aide de (5.13) un écart adhésif  $g_M \approx 3.73\text{E}-6 \text{ mm}$ .

### Commentaires –

**Commentaire 5.3.1** L'énergie élastique dissipée lors du retrait des éléments déformés masque l'énergie de Dupré qui est comparativement plus faible. Pour déterminer celle-ci, il faut donc faire appel à un autre type d'essai.

**Commentaire 5.3.2** La détermination de  $g_M$  en présence d'une interface à rupture fragile est une tâche ardue. En effet, il faut soit arriver à stabiliser la fissure en modifiant par exemple la forme de l'éprouvette (éprouvettes en forme de sou-pape) ou bien utiliser des équipements (caméra, extensomètre) ultra-sensibles. Une autre alternative consiste à combiner l'essai non stabilisé sur l'éprouvette avec plaquette de verre à la technique de JKR pour déterminer  $p_M$  et  $w$  dans un premier temps, puis en déduire  $g_M$  à l'aide de (5.13).

**Commentaire 5.3.3** L'écart adhésif calculé a une valeur comparable à une distance moléculaire. Ceci est bon signe puisque l'adhésion est un phénomène ayant lieu à un niveau moléculaire.

# Chapitre 6

## Applications numériques

---

### 6.1 Introduction

L’objet de ce chapitre est de valider notre modèle analytique-numérique en le comparant à des modèles analytiques classiques et d’illustrer par des simulations numériques comment il peut aider à mieux comprendre la décohésion dans les matériaux composites.

Premièrement, une série de simulations du contact avec adhésion d’un poinçon plat, sphérique, conique convexe et conique concave, axisymétrique rigide sur un demi-espace élastique sera effectuée. Elle permettra dans un premier temps de valider notre modèle d’adhésion par comparaison des résultats numériques avec les solutions analytiques existantes (voir Maugis [86], Maugis–Barquins [88] [89] [6]). On vérifiera tout d’abord la qualité de la solution avec adhésion parfaite, c’est-à-dire lorsque les filaments restent intacts. L’analyse de la décohésion de ce type de problème étant effectuée par les outils de la mécanique de la rupture (équilibre énergétique, introduit pour ce type de problème par Kendall (1971) et Johnson et al. (1971)), nous pourrons ensuite effectuer une comparaison entre cette approche et celle proposée. Ceci nous permettra entre autres d’évaluer notre modèle par rapport aux théories “classiques” de l’adhésion, notamment celle de Johnson et al. [69].

Deuxièmement, une simulation numérique du test d’arrachement d’une fibre plantée dans une matrice sera effectuée. Cette fois-ci, nous comparerons la solution numérique avec la solution analytique axisymétrique obtenue par la méthode du “shear-lag” de Kim et Mai [73]. Nous mettrons en évidence par des simulations de propagation de la décohésion les avantages du modèle proposé.

Une dernière simulation d’une fissure se propageant à travers une plaque en résine renforcée par une seule fibre transverse montrera notamment la forme du front de fissure à l’approche de la fibre, sa déviation le long de l’interface et/ou la poursuite de sa propagation à travers la matrice. Bien que des solutions analytiques basées sur la mécanique de la rupture existent en deux dimensions, le problème reste entier en trois dimensions à cause de la complexité de la configura-

tion. Plusieurs tentatives numériques (Bower–Ortiz [10] [11], Xu et al. [129], Xu–Bower–Ortiz [128], van den Heuvel et al. [56], Monerie [90], Sukumar et al. [122], et Pietrzyk [102]) relativement récentes nous serviront de base de comparaison pour cette simulation. Bien entendu, nous nous servirons aussi de résultats plus classiques sur l'état de contraintes autour d'une fissure en trois dimensions (Benthem [8], Nakamura–Parks [95]) ainsi que sur la rupture de la matrice dans les composites fibreux (Budiansky et al. [13], Ananth et al. [4], Bennett et Young [7]). De plus, des expériences de propagation d'une fissure dans une matrice renforcée par une fibre ont aussi été effectuées au LMAF dans le cadre d'un autre projet par Humbert (non publiées). La configuration de ses essais est quasiment la même et on pourra en tirer certaines conclusions d'ordre global sur les simulations numériques.

## 6.2 Contact adhésif d'un poinçon axisymétrique rigide sur un demi-espace élastique

### 6.2.1 Généralités

Dans cette section, nous étudions l'adhésion d'un poinçon rigide collé contre un demi-espace élastique. Le frottement n'est ici pas pris en compte. L'étude est menée pour des poinçons de profil différents. Nous étudions successivement un poinçon plat, sphérique, conique convexe et conique concave. Les simulations numériques sont effectuées dans une configuration axisymétrique. L'analyse se divise en deux étapes :

- ETUDE ADHÉSIVE ÉLASTIQUE : Il s'agira de comparer la contrainte et la déformée à l'interface avec des solutions analytiques (que l'on peut trouver dans Maugis [87]) lorsque le poinçon subit une compression et une traction par rapport au demi-espace élastique. Ici, les filaments adhésifs sont supposés être infiniment résistants ( $p_M = \infty$ ).
- ETUDE DE LA DÉCOHÉSION : En se servant de la méthode d'équilibre énergétique de la mécanique de la rupture pour ce type de problème (utilisé pour la première fois par Kendall (1971), puis notamment par Johnson et al. (1971)), le critère de Griffith permet de trouver un point d'équilibre instable à partir duquel la décohésion se propage. Ce point d'équilibre critique est obtenu en écrivant l'égalité entre le taux de restitution d'énergie  $G$  et l'énergie de Dupré  $w$  de l'interface. Après une étude de stabilité de la décohésion, un travail d'adhésion identique à  $w$  est considéré à l'interface pour les simulations numériques et les deux approches sont comparées.

On peut considérer le problème du poinçon axisymétrique plat qui suit comme un problème modèle. En effet, la même démarche est adoptée pour les autres formes de poinçon, et notamment le même maillage légèrement adapté est repris pour les trois problèmes qui suivent. De plus, les simulations ont été effectuées en se servant de la technique du Lagrangien augmenté. La différence avec la solution obtenue par la méthode de pénalité n'est pas notable, par contre le nombre d'itérations est légèrement plus élevé en Lagrangien augmenté.

## 6.2.2 Poinçon axisymétrique plat

### Description

Nous considérons un poinçon axisymétrique plat de rayon  $a$  soumis à une force  $P$  (Figure 6.1). Ce poinçon, supposé rigide entre en contact avec un demi-espace élastique et s'enfonce d'une distance  $\delta$ . On suppose alors la création d'une zone adhésive répartie sur toute la surface de contact de rayon  $a$  entre le poinçon et le demi-espace (par affinité des matériaux ou interposition d'une colle).

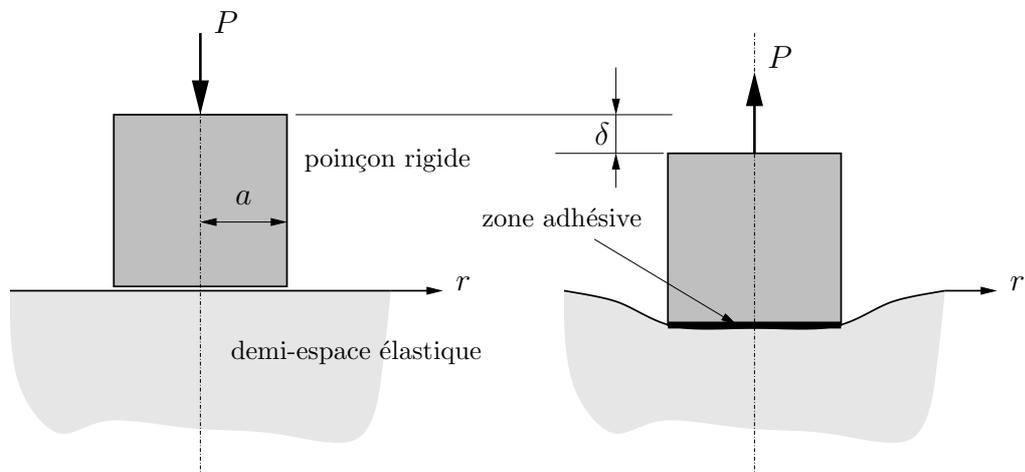


FIG. 6.1 – Contact adhésif d'un poinçon axisymétrique plat sur un demi-espace élastique.

Le modèle par éléments finis du problème est présenté à la figure 6.2. Le poinçon est choisi pour le contacteur  $\Omega$  et le demi-espace élastique joue le rôle de la cible  $\Omega'$ . Pour des raisons de symétrie de révolution, seule une section de la moitié du problème est considérée. Le demi-espace élastique est subdivisé en 2400 éléments tandis que le poinçon est discrétisé à l'aide de 20 éléments rigides. Pour modéliser de manière plus réaliste le demi-espace élastique, celui-ci est étendu par 80 éléments infinis. La charge  $P$  est appliquée sur l'axe de symétrie du poinçon.

Les valeurs des propriétés matérielles du demi-espace sont les suivantes :

module de Young du demi-espace  $\epsilon = 100$

module de Poisson du demi-espace  $\nu = 0.3$

Ces valeurs sont aussi utilisées pour les simulations ultérieures.

La demi-largeur du poinçon considéré est  $a = 1.5$ .

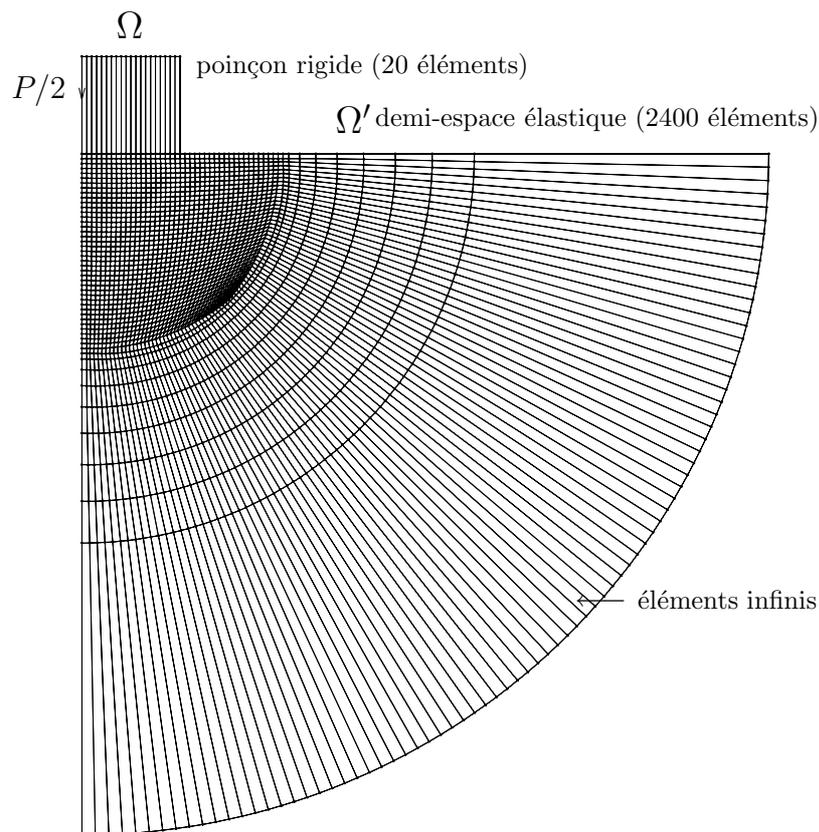


FIG. 6.2 – Maillage par éléments finis du problème du poinçon rigide en contact avec un demi-espace élastique.

### Etude adhésive élastique

**Problème de Boussinesq (1885)** – Si nous ne considérons pas de forces adhésives, la pénétration  $\delta$  du poinçon, la distribution de pression  $p_n(r)$  et la déformée  $u(r)$  du demi-espace au niveau de l'interface sont donnés par :

$$\delta = \frac{1 - \nu^2}{2\epsilon} \frac{P}{a} \quad (6.1)$$

$$p_n(r) = \begin{cases} -\frac{P}{2\pi a^2} \frac{1}{\sqrt{1-r^2/a^2}} & , \quad r < a \\ 0 & , \quad r \geq a \end{cases} \quad (6.2)$$

$$u(r) = \begin{cases} -\delta & , \quad r < a \\ -\frac{1-\nu^2}{\pi\epsilon} \frac{P}{a} \arcsin[a/r] & , \quad r \geq a \end{cases} \quad (6.3)$$

La comparaison de la distribution de pression ainsi que de la déformée avec la simulation numérique pour différentes valeurs de  $P$  est présentée à la figure 6.3 suivante (la solution analytique y apparaît en traits pleins et la solution numérique en pointillés; noter que la déformée est amplifiée par un facteur 150 environ). Cette légende reste valable pour les graphes suivants, sauf indication contraire. Les forces adhésives sont désactivées en prenant  $g_0^a = \infty$ .

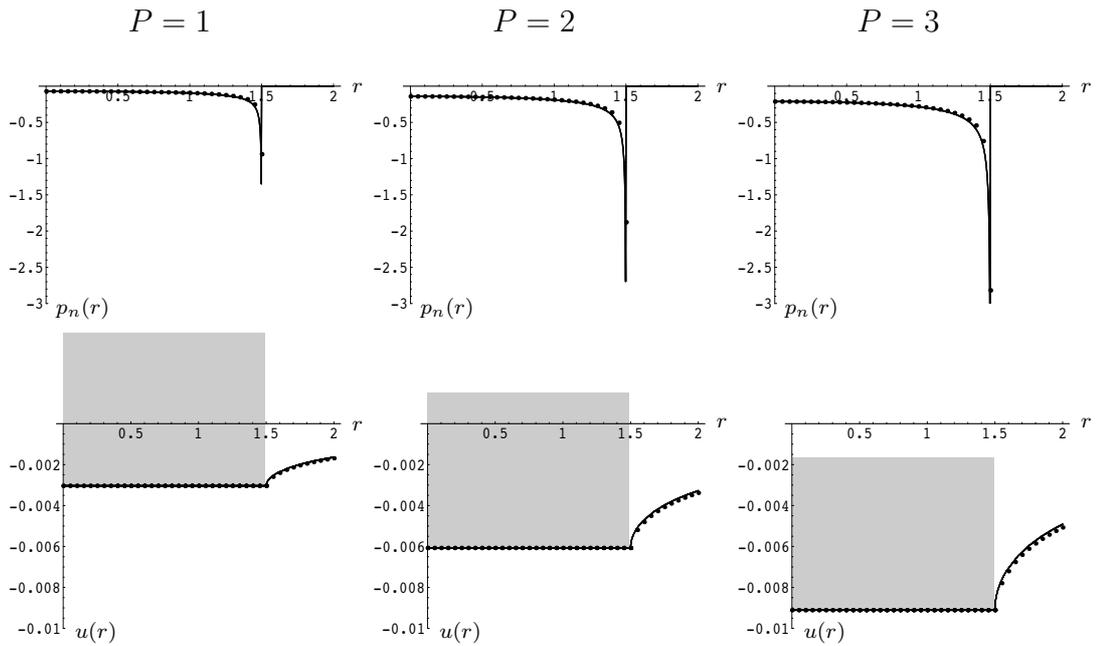


FIG. 6.3 – Poinçon plat en compression sans adhésion ( $g_0^a = \infty$ ). Distribution normale de pression  $p_n(r)$  et déformée  $u(r)$  du demi-espace pour différentes valeurs de  $P$ .

On constate que les résultats de la simulation numérique sont en accord avec la solution analytique. On remarque que pour  $r = a$ , la pression normale théorique est infinie  $p_n(a) = -\infty$  et que la simulation numérique donne une valeur finie.

**Extension de Sneddon (1946)** – On effectue le même test que précédemment à la différence que nous activons les forces adhésives ( $g_0^a = 0$ ) sur la surface de contact. On obtient les résultats numériques de la figure 6.4.

Avec l'adhésion, la solution numérique prévoit un enfoncement légèrement moins important que la solution analytique. De plus, si on compare les distributions de pression sans et avec adhésion, on constate que le profil est légèrement différent.

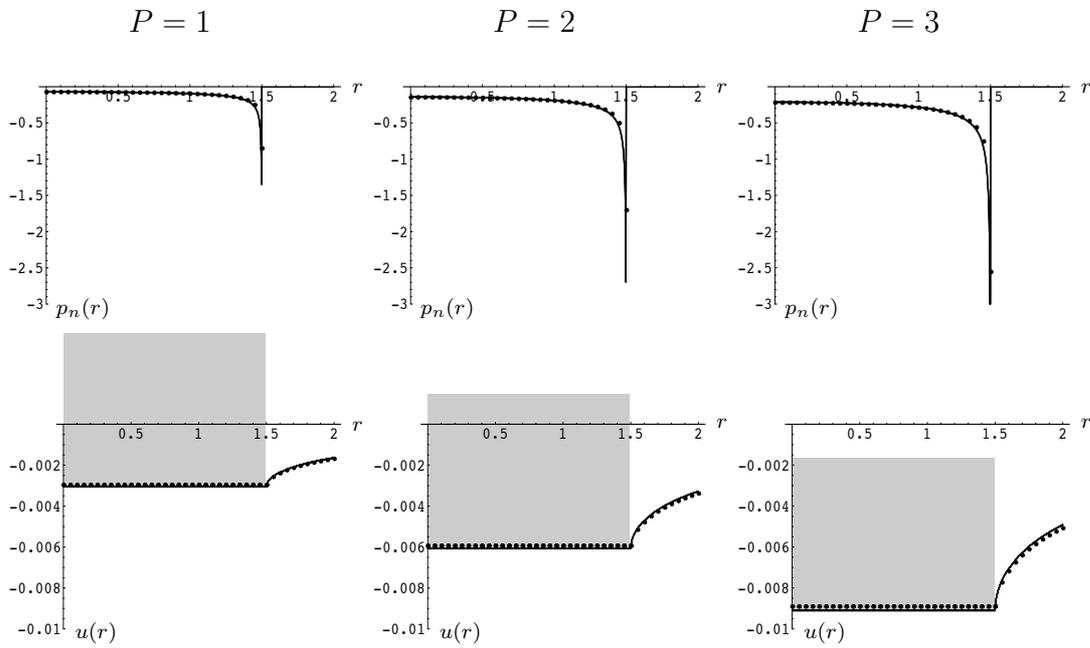


FIG. 6.4 – Poinçon plat en compression avec adhésion ( $g_0^a = 0$ ). Distribution normale de pression  $p_n(r)$  et déformée  $u(r)$  du demi-espace pour différentes valeurs de  $P$ .

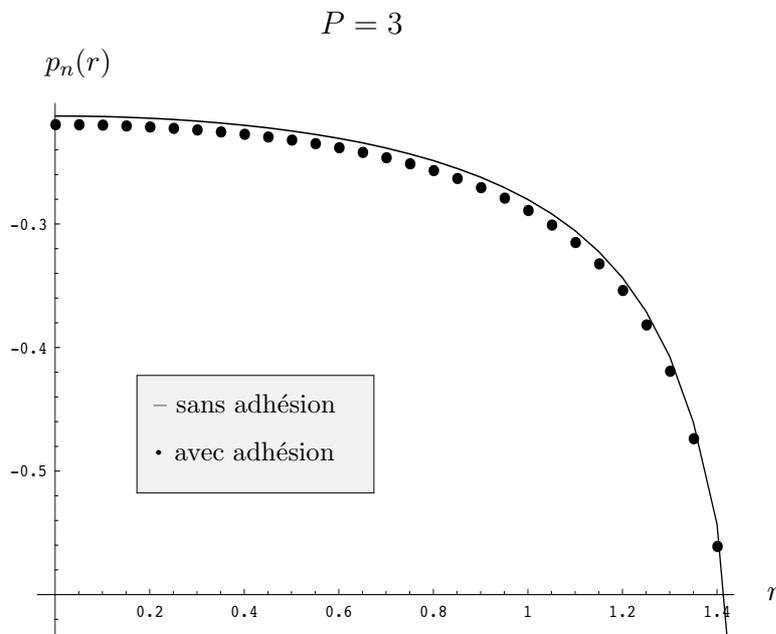


FIG. 6.5 – Comparaison pour une force constante de la distribution de pression entre contact sans et avec adhésion.

En effet, la présence d'adhésion accroît la pression aux extrémités et la diminue au centre du poinçon (Figure 6.5). Rappelons que lorsqu'il y a contact ( $p_n < 0$ ), les forces adhésives de notre modèle ne travaillent pas dans la direction normale. Cependant, lorsque le poinçon est enfoncé contre le demi-espace, celui-ci se déforme aussi latéralement dans la direction tangente à cause de l'effet de Poisson. Sans forces adhésives, il y a glissement radial extérieur dans la direction tangente du demi-espace par rapport au poinçon; par contre avec adhésion, ces glissements ne peuvent avoir lieu en raison des forces adhésives tangentes (lobe hémisphérique, voir Figure 3.20 b)). Ceci explique la différence des profils de pression et d'enfoncement lorsqu'on considère des forces adhésives. On peut ajouter que des simulations numériques sans forces adhésives mais avec des forces adhérentes ( $\mu = \infty$ ) donnent les mêmes résultats que ceux obtenus en considérant l'adhésion mais sans frottement ( $\mu = 0$ ).

**Remarque 6.2.1** Les profils avec et sans adhésion deviennent identiques aussi si on supprime les effets de Poisson ( $\nu = 0$ ).

Les équations (6.1) à (6.3) restent valables lorsque la force  $P$  devient une force de traction. On peut comparer à nouveau la solution analytique avec la solution numérique (Figure 6.6). L'accord est excellent.

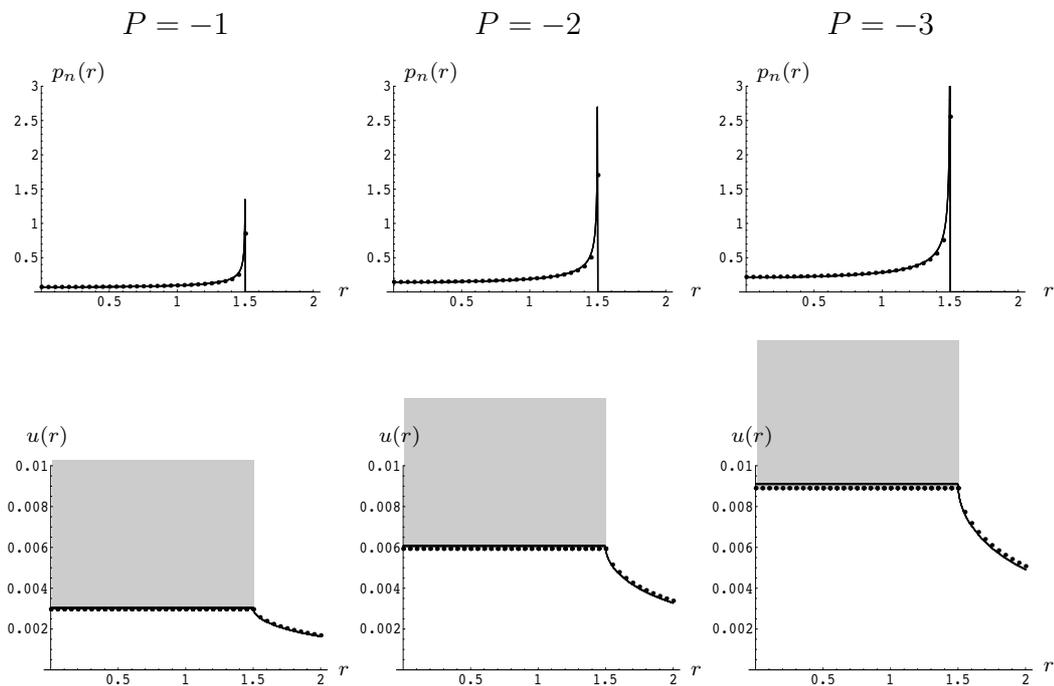


FIG. 6.6 – Poinçon plat en traction avec adhésion ( $g_0^a = 0$ ). Distribution normale de pression  $p_n(r)$  et déformée  $u(r)$  du demi-espace pour différentes valeurs de  $P$ .

Le problème du poinçon plat avec adhésion en traction est symétrique par rapport à celui en compression. On note les mêmes différences entre les deux solutions

que précédemment dues au fait que la solution analytique ne considère que des forces adhésives normales.

### Etude de la décohésion

**Etude de stabilité** – La propagation de la fissure a pour conséquence de diminuer le rayon du contact  $a$ . Ainsi, nous pouvons “artificiellement” propager la fissure en étudiant la distribution des contraintes pour différentes valeurs de  $a$  (Figure 6.7). Les contraintes deviennent critiques ( $p_n \rightarrow \infty$ ) lorsque  $r \rightarrow a$  et la diminution de  $a$  accroît l’intensité de la contrainte dans cette zone<sup>1</sup>. Le taux de restitution d’énergie  $G$  (variation de la somme de l’énergie élastique et potentielle totale en fonction de la surface de contact) s’exprime par :

$$G = \frac{P^2}{6\pi a^3 K} \quad , \quad \text{avec} \quad \frac{1}{K} = \frac{3}{4} \frac{1 - \nu^2}{\epsilon} \quad (6.4)$$

Le taux de restitution d’énergie augmente lorsque  $a$  diminue, ce qui explique que la fissure soit instable (comme le montre aussi les expériences effectuées au chapitre précédent). Numériquement, nous observons aussi une contrainte critique (finie) pour  $a = 1.5$ . Si cette valeur de contrainte est supérieure à un seuil, la fissure s’amorce et  $a$  diminue, augmentant par conséquent la contrainte critique et emballant alors le processus de décohésion.

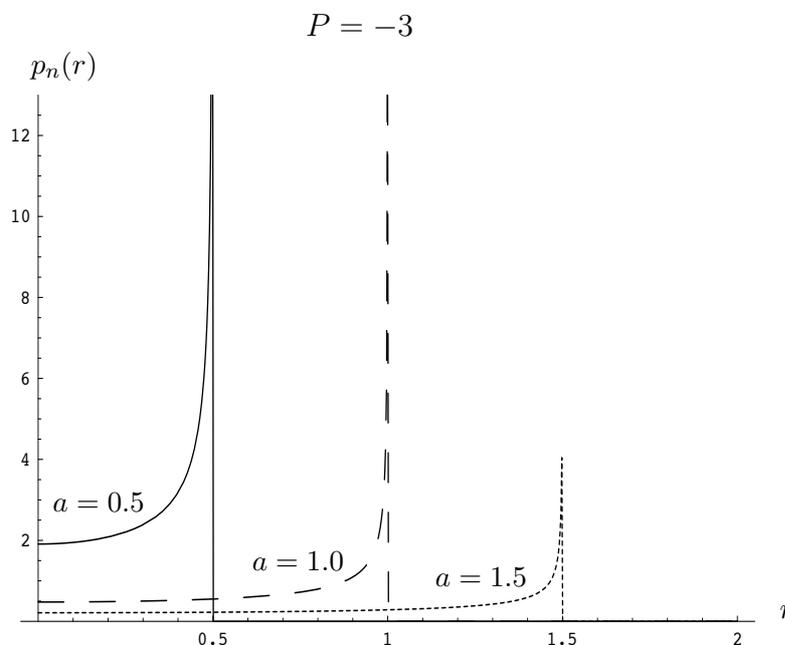


FIG. 6.7 – Distribution de pression en fonction du rayon du contact  $a$ .  $P$  est constant.

<sup>1</sup>En mécanique de la rupture, on dit que le facteur d’intensité des contraintes  $K_I$  (mode en traction) augmente.

**Propagation de la décohésion** – Une analyse par le critère énergétique de la mécanique de la rupture indique que la fissure se propage de manière instable lorsque la force appliquée dépasse la valeur critique :

$$P_c = -\sqrt{6\pi a^3 K w} \quad , \quad \text{avec } w \text{ l'énergie de Dupré} \quad (6.5)$$

Supposons maintenant que la charge critique  $P_c = P = -3$ . On a donc :

$$w = \frac{3}{2} \frac{1}{\pi a^3 K} \approx 9.655\text{E}-4 \quad (6.6)$$

Il s'agit maintenant d'introduire la même valeur de  $w$  dans le modèle numérique. Compte tenu de :

$$w = \frac{1}{2} p_M g_M \quad , \quad (6.7)$$

il existe une infinité de possibilités de combiner le seuil adhésif  $p_M$  et l'écart de décohésion  $g_M$  dans notre modèle, pour une même énergie  $w$ . On note dans les simulations précédentes que pour  $P = -3$ , on a  $p^a \approx 2.6$ . Par conséquent, pour qu'il y ait décohésion pour cette valeur de  $P$ , il faut que  $p_M < 2.6$ . Dans le modèle proposé, la valeur de  $w$  n'est pas déterminante pour prévoir la décohésion mais c'est plutôt la manière dont elle se répartit entre  $p_M$  et  $g_M$ . Ainsi, pour une même valeur de  $w$ , il peut ou non y avoir décohésion. La répartition de l'énergie d'adhésion dépendra du type d'interface que l'on modélise. Si c'est une interface à rupture de type fragile, on aura tendance à avoir des  $p_M$  élevés et des petites valeurs de  $g_M$  (idéalement, pour simuler une fissure au sens de la mécanique de la rupture, il faudrait avoir  $p_M = \infty$  et  $g_M = 0$ ). Si par contre on modélise une colle, voire une interface "pâte à modeler", toujours pour une même valeur de  $w$ , on aura tendance à avoir des valeurs pour  $p_M$  faibles et des  $g_M$  relativement grands.

Dans la simulation que nous considérons, si  $P_c$  est un seuil critique alors  $p_M < 2.6$ . En choisissant  $p_M = 2.0$ , on a d'après (6.7) :

$$g_M = 2 \frac{w}{p_M} = 9.655\text{E}-4 \quad (6.8)$$

Les simulations numériques montrent alors que la décohésion se propage le long de l'interface pour  $P = P_c = -3$  (Figure 6.8) et que tous les liens adhésifs de l'interface s'écrouissent totalement (séparation,  $s(g^a) = 0.0$  partout).

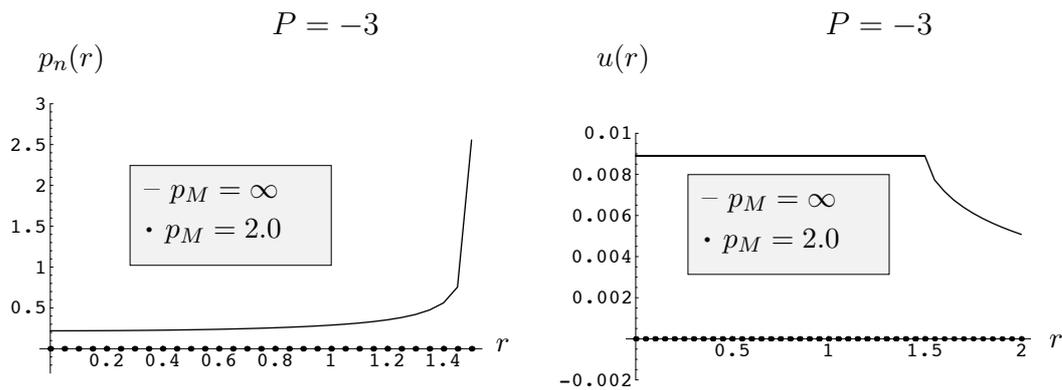


FIG. 6.8 – Comparaison de la distribution de pression sans ( $p_M = \infty$ ) et avec ( $p_M = 2.0$ ) décohésion.

### Taux de convergence

Le taux de convergence des simulations effectuées dans le cas où l’adhésion est parfaite ( $p_M = \infty$ ) est de quatre à cinq itérations. Par contre, lors de la propagation de la décohésion le long de l’interface, le nombre d’itérations est plus important. En effet, il faut environ une vingtaine d’itérations avant que la décohésion devienne totale. L’observation des statuts lors des itérations montre que la “vitesse de décohésion” varie. Tantôt quatre filaments se rompent en une itération, tantôt il faut plusieurs itérations pour qu’il y en ait un qui cède. Ceci montre que la méthode de Newton perd de son efficacité lors de la recherche des statuts pour les problèmes non-monotones.

## 6.2.3 Poinçon axisymétrique sphérique

### Description

Nous considérons un poinçon axisymétrique sphérique de rayon  $R$  sur lequel est appliquée une force  $P$  (Figure 6.9). Le poinçon s’enfonce d’une distance  $\delta$ . On suppose alors la création d’une zone adhésive répartie sur l’aire de contact de rayon  $a$ .

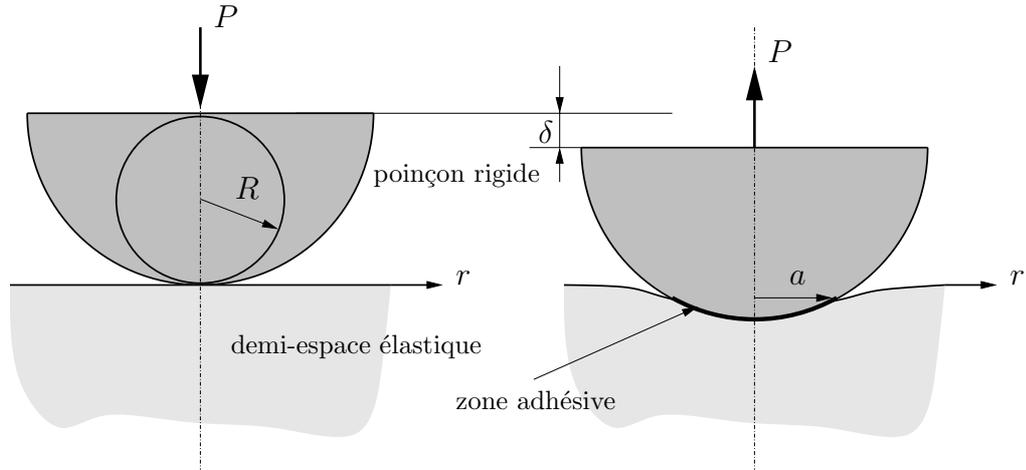


FIG. 6.9 – Contact adhésif d'un poinçon axisymétrique sphérique sur un demi-espace élastique.

Le rayon de courbure est choisi  $R = 100$ . Le maillage du poinçon plat est repris puis adapté en conséquence. Les autres paramètres ont les mêmes valeurs que dans la simulation précédente.

### Etude adhésive élastique

**Problème de Hertz (1881)** – Sans forces adhésives, le rayon de contact  $a$ , la pénétration  $\delta$ , la distribution de pression  $p_n(r)$  ainsi que la déformée  $u(r)$  du demi-espace au niveau de l'interface s'expriment par :

$$a = \sqrt[3]{\frac{PR}{K}}, \quad \text{avec} \quad \frac{1}{K} = \frac{3}{4} \frac{1 - \nu^2}{\epsilon} \quad (6.9)$$

$$\delta = \frac{a^2}{R} \quad (6.10)$$

$$p_n(r) = \begin{cases} -\frac{3}{2} \frac{P}{\pi a^2} \sqrt{1 - r^2/a^2} & , \quad r < a \\ 0 & , \quad r \geq a \end{cases} \quad (6.11)$$

$$u(r) = \begin{cases} -\delta + \frac{r^2}{2R} & , \quad r \leq a \\ -\frac{a^2}{\pi R} \left[ \sqrt{r^2/a^2 - 1} + \left(2 - \frac{r^2}{a^2}\right) \arcsin[a/r] \right] & , \quad r > a \end{cases} \quad (6.12)$$

La comparaison de la distribution de pression ainsi que de la déformée (amplifiée d'un facteur 100 environ) avec la simulation numérique pour différentes valeurs de  $P$  est présentée à la figure 6.10.

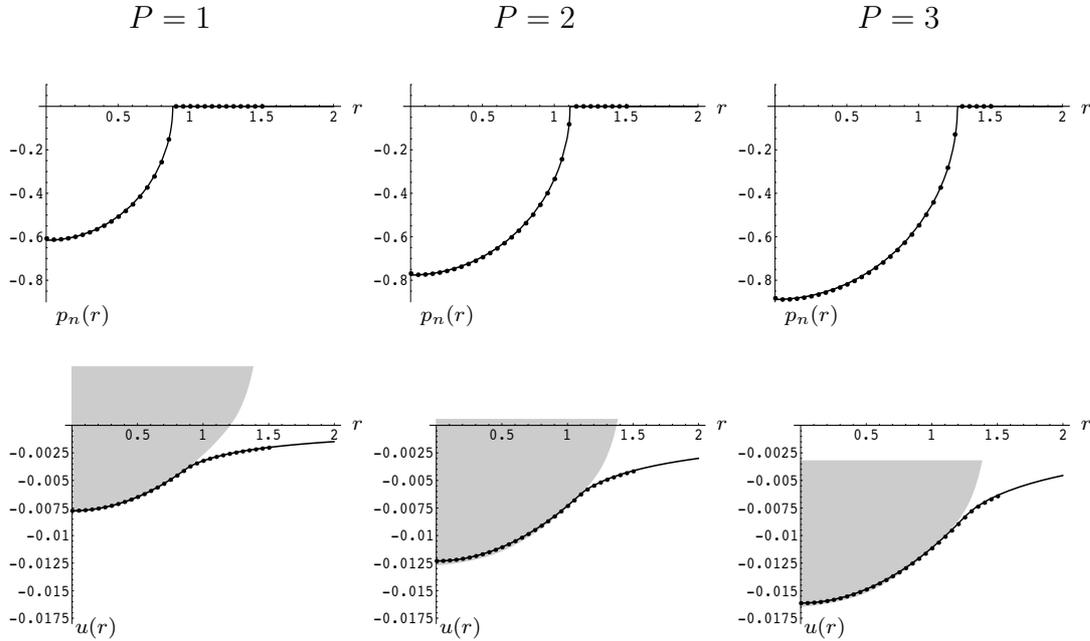


FIG. 6.10 – Poinçon sphérique en compression sans adhésion ( $g_0^a = \infty$ ). Distribution normale de pression  $p_n(r)$  et déformée  $u(r)$  du demi-espace pour différentes valeurs de  $P$ .

**Extension de Johnson–Kendall–Roberts (1971)** – Supposons que nous appliquions une force  $P_1$  sur le poinçon, comme précédemment. Par la théorie de Hertz, le rayon de contact  $a$  ainsi obtenu est relié à  $P_1$  par :

$$P_1 = \frac{a^3 K}{R} \quad (6.13)$$

Imaginons maintenant que nous introduisons une énergie  $w$  à l'interface et qu'il se crée ainsi sur la surface de contact des forces adhésives. Si nous déchargeons ensuite le poinçon, faisant passer la force appliquée de  $P_1$  à  $P$ , le rayon de contact  $a$ , la pénétration  $\delta$ , la distribution de pression  $p_n(r)$  ainsi que la déformée  $u(r)$  du demi-espace au niveau de l'interface s'expriment selon la théorie de JKR :

$$a = \sqrt[3]{\frac{P_1 R}{K}} \quad (6.14)$$

$$\delta = \frac{a^2}{3R} + \frac{2P}{3aK} \quad (6.15)$$

$$p_n(r) = \begin{cases} -\frac{3}{2} \frac{P_1}{\pi a^2} \sqrt{1 - r^2/a^2} + \frac{P_1 - P}{2\pi a^2} \frac{1}{\sqrt{1 - r^2/a^2}} & , \quad r < a \\ 0 & , \quad r \geq a \end{cases} \quad (6.16)$$

$$u(r) = \begin{cases} -\delta + \frac{r^2}{2R} & , \quad r \leq a \\ -\frac{a^2}{\pi R} \left[ \sqrt{r^2/a^2 - 1} + \left( 2 - \frac{r^2}{a^2} \arcsin[a/r] \right) \right] \\ \quad + \frac{1 - \nu^2}{\pi \epsilon} \frac{P_1 - P}{a} \arcsin[a/r] & , \quad r > a \end{cases} \quad (6.17)$$

On constate que si  $P = P_1$ , on retrouve les relations de Hertz pour une force appliquée  $P_1$ . Selon la théorie de JKR, coller un poinçon avec un demi-espace sur une surface de contact de rayon  $a$  équivaut à appliquer une charge  $P_1$  sous laquelle en l'absence de forces adhésives, on obtiendrait le même rayon de contact.  $P_1$  est appelé la force *apparente* d'adhésion.

**Remarque 6.2.2** Une analyse de la distribution des pressions montre que la surface de contact est divisée en deux zones :

- Une zone centrale en compression de rayon  $r^*$  ( $0 \leq r \leq r^*$ ), avec :

$$r^* = a \sqrt{1 - \frac{P_1 - P}{3P_1}} \quad (6.18)$$

- Une zone annulaire en traction ( $r^* < r \leq a$ ).

**Remarque 6.2.3** Les distributions de pression (6.16) et la déformée (6.17) sont obtenues en effectuant la somme d'une contribution Hertzienne soumise à une charge de compression  $P_1$  et celle d'un poinçon plat soumis à une charge de traction  $P_1 - P$ .

On suit le même processus de collage pour les simulations numériques. On enfonce le poinçon sous une charge  $P_1 = 1$ . La surface de contact a alors un rayon de  $a = 0.85$ . On active l'adhésion ( $g_0^a = 0.0$ ) pour les éléments en contact ( $p_n < 0$ ). Le poinçon est ensuite déchargé en appliquant une charge  $P \leq P_1$ . On compare alors les résultats de la simulation numérique avec la solution analytique (Figure 6.11).

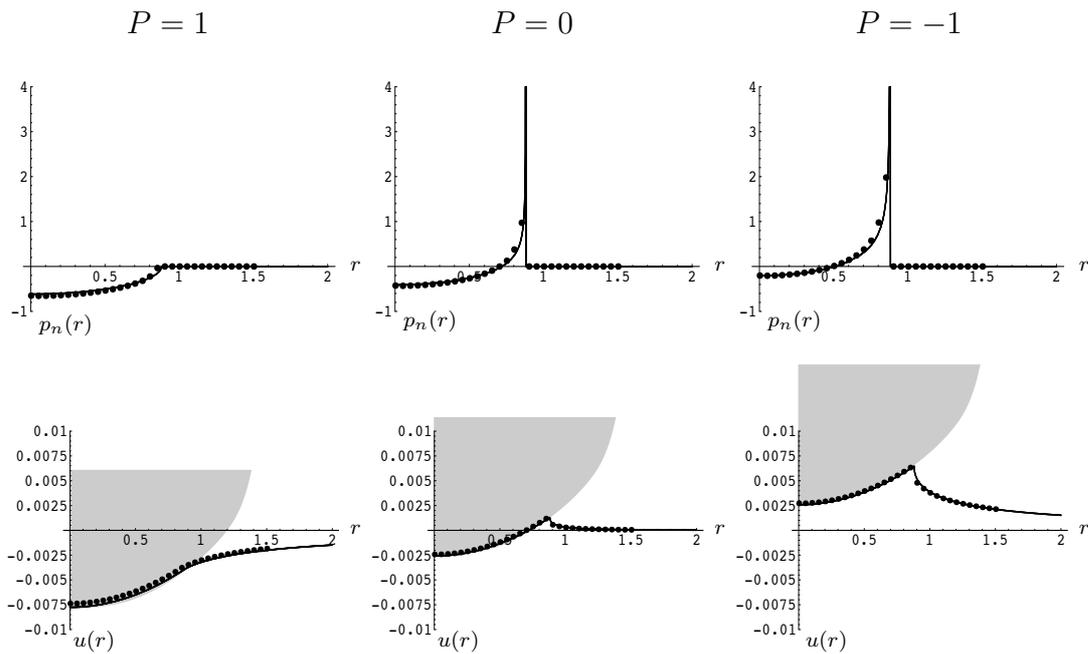


FIG. 6.11 – Poinçon sphérique avec adhésion ( $g_0^a = 0.0$ ) pour une charge apparente  $P_1 = 1$ . Distribution normale de pression  $p_n(r)$  et déformée  $u(r)$  du demi-espace pour différentes valeurs de  $P$ .

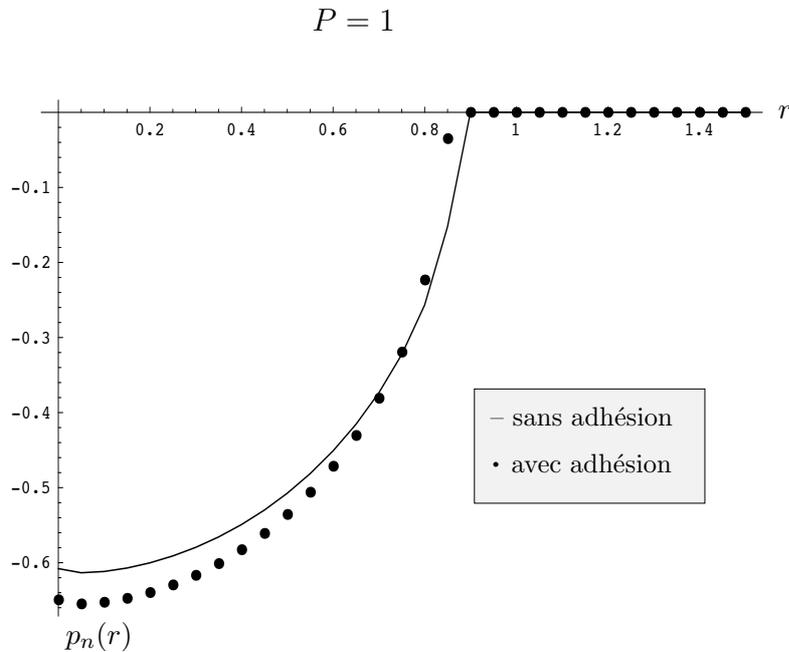


FIG. 6.12 – Comparaison pour une force constante de la distribution de pression entre contact sans et avec adhésion ( $P_1 = 1$ ).

Les simulations numériques sont globalement en accord avec la solution analytique. On note cependant quelques légères différences causées par deux phénomènes :

- En raison de la discrétisation du solide, le rayon de la surface de contact collée numériquement ( $a = 0.85$ ) n'est pas exactement celui prévu analytiquement ( $a = 0.88$ ). Cette différence peut être corrigée en augmentant la finesse du maillage.
- Ensuite, il apparaît les mêmes effets de Poisson mis en évidence précédemment, dus au fait que la solution analytique ne considère qu'une adhésion normale, et qui expliquent la différence de profil des pressions et de la déformée lorsque l'adhésion est activée (Figure 6.12).

### Etude de la décohésion

**Etude de stabilité** – Les contraintes deviennent critiques lorsque ( $r \rightarrow a$ ). La décohésion va donc s'amorcer dans cette région et faire décroître le rayon de contact  $a$ . Comme précédemment, nous étudions la distribution des contraintes normales lorsque  $a$  diminue (Figure 6.13).

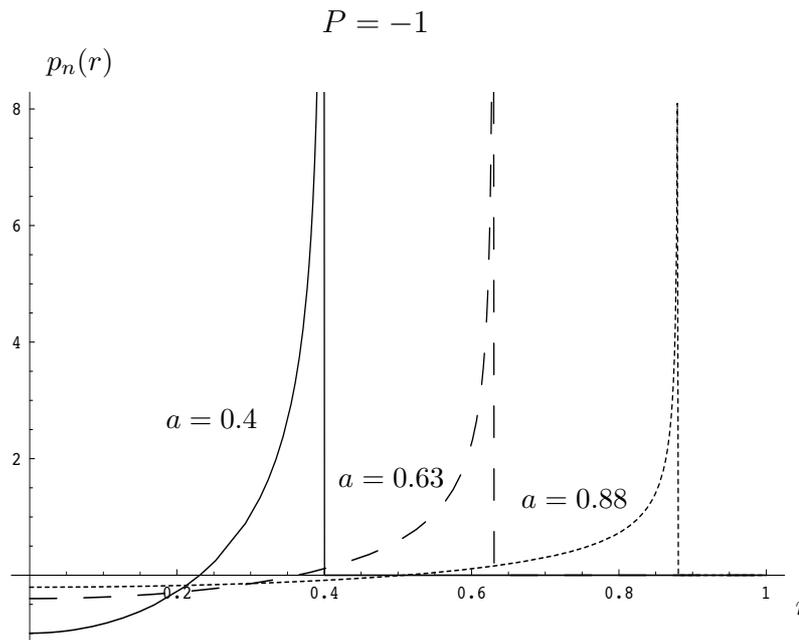


FIG. 6.13 – Distribution de pression en fonction du rayon du contact  $a$ .  $P$  est constant et  $P_1 = 1$ .

Le taux de restitution d'énergie  $G$ , ainsi que la contrainte critique augmentent lorsque  $a$  diminue, ce qui rend la propagation instable.  $G$  est donné par l'expression suivante :

$$G = \frac{(P_1 - P)^2}{6\pi a^3 K} \quad (6.19)$$

**Propagation de la décohésion** – Une analyse par le critère énergétique de la mécanique de la rupture indique que la fissure se propage lorsque la force appliquée dépasse la valeur critique :

$$P_c = -P_1 = -\frac{3}{2}\pi wR \quad (6.20)$$

Cette relation indique aussi le lien entre  $P_1$  et  $w$  :

$$w = \frac{2}{3} \frac{P_1}{\pi R} \quad (6.21)$$

$w$  est l'énergie mécanique par unité de surface lorsqu'on le poinçon est soumis à une charge compressive  $P_1$ . La charge critique est donc celle pour laquelle l'énergie mécanique de la traction est telle que  $P_c = -P_1$ .

Pour les simulations numériques que nous effectuons, la décohésion est supposée intervenir lorsque  $P = P_c = -1$ . Pour cette valeur, on note que  $p^a$  est légèrement plus élevée que 2.0. Si on choisit  $p_M = 2.0$ ,  $g_M$  est donné par la relation :

$$g_M = \frac{2}{3} \frac{P_1}{\pi R} \approx 2.122\text{E}-3 \quad (6.22)$$

On observe alors la propagation de la décohésion sur toute l'interface pour  $P = P_c$ . On confirme que la décohésion est instable.

Nous supposons maintenant que l'interface adhésive est constituée de deux zones :

- une zone centrale de rayon  $r_d = 0.25$  où  $p_M = 10.0$  et  $g_M = 2.122\text{E}-3$  ;
- une zone annulaire  $r_d < r < a$  où  $p_M = 2.0$  et  $g_M = 2.122\text{E}-3$ .

La propagation de la décohésion s'effectue alors dans la région où les propriétés adhésives sont les plus faibles et elle s'arrête lorsque elle atteint la zone centrale (Figure 6.14).

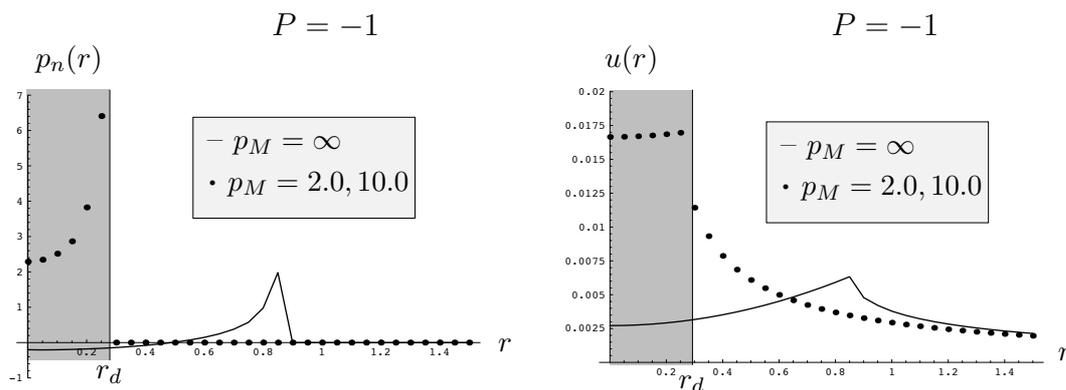


FIG. 6.14 – Comparaison de la distribution de pression sans ( $p_M = \infty$ ) et avec ( $p_M = 2.0, 10.0$ ) décohésion.

## 6.2.4 Poinçon axisymétrique conique convexe

### Description

Nous considérons maintenant un poinçon axisymétrique conique convexe dont la pointe forme un angle  $\beta$  avec la surface du demi-espace (Figure 6.15).

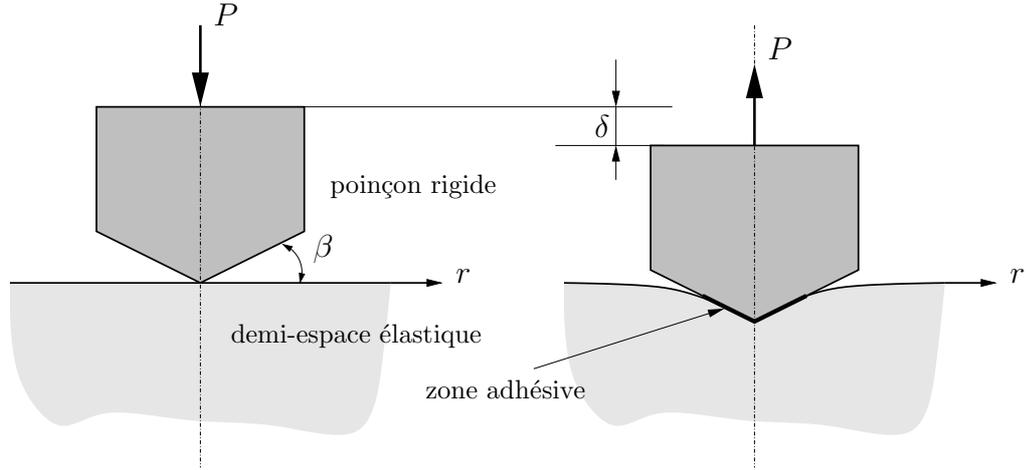


FIG. 6.15 – Contact adhésif d'un poinçon axisymétrique conique convexe sur un demi-espace élastique.

L'angle  $\beta$  est choisi tel que  $\tan \beta = 0.01$ .

### Etude adhésive élastique

**Problème de Love (1939), Harding–Sneddon (1945)** – Sans forces adhésives, le rayon de contact  $a$ , la pénétration  $\delta$ , la distribution de pression  $p_n(r)$  ainsi que la déformée  $u(r)$  du demi-espace au niveau de l'interface s'expriment par :

$$a = \sqrt{\frac{2P}{\pi \epsilon' \tan \beta}}, \quad \text{avec} \quad \epsilon' = \frac{\epsilon}{1 - \nu^2} \quad (6.23)$$

$$\delta = \frac{\pi a}{2} \tan \beta \quad (6.24)$$

$$p_n(r) = \begin{cases} -\frac{\epsilon' \tan \beta}{2} \arccos[a/r] & , \quad 0 < r \leq a \\ 0 & , \quad r > a \end{cases} \quad (6.25)$$

$$u(r) = \begin{cases} -\delta + r \tan \beta & , \quad r \leq a \\ -\frac{2\delta}{\pi} \left[ \arcsin[a/r] - \frac{r}{a} + \sqrt{r^2/a^2 - 1} \right] & , \quad r > a \end{cases} \quad (6.26)$$

La comparaison de la distribution de pression ainsi que de la déformée (amplifiée d'un facteur d'environ 200) avec la simulation numérique pour différentes valeurs de  $P$  est présentée à la figure 6.16.

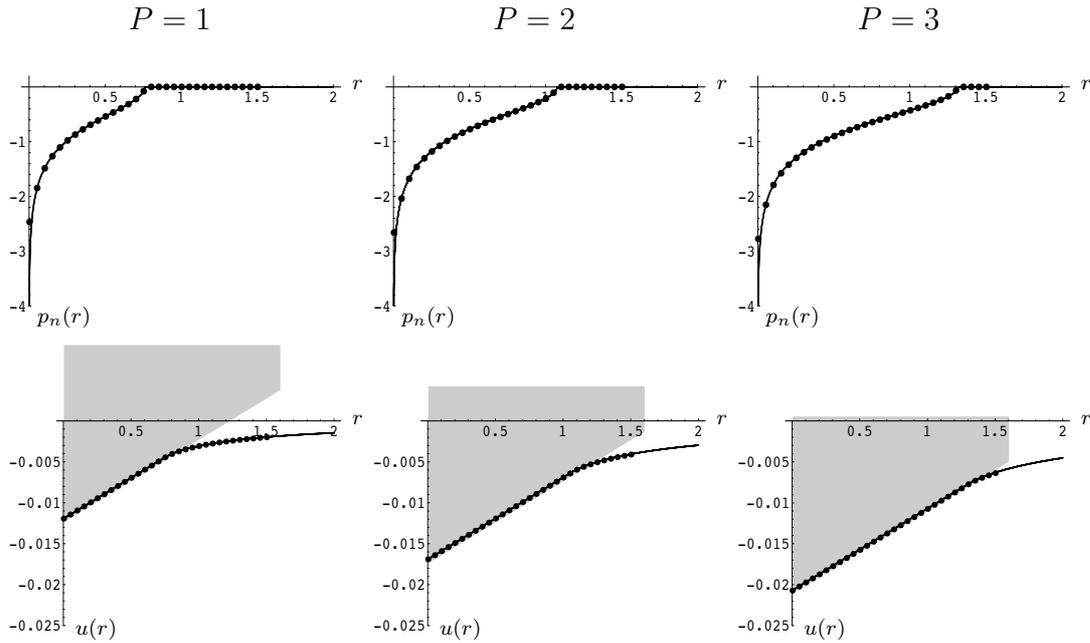


FIG. 6.16 – Poinçon conique convexe en compression sans adhésion ( $g_0^a = \infty$ ). Distribution normale de pression  $p_n(r)$  et déformée  $u(r)$  du demi-espace pour différentes valeurs de  $P$ .

**Traction du poinçon adhésif** – Similairement à la théorie de JKR, on suppose la création d'une zone adhésive de rayon  $a$  résultant d'une charge apparente  $P_1$ , et telle que :

$$P_1 = \frac{\pi \epsilon' \tan \beta}{2} a^2 \quad (6.27)$$

L'enfoncement du poinçon  $\delta$ , la distribution de pression  $p_n(r)$  ainsi que la déformée  $u(r)$  du demi-espace au niveau de l'interface s'expriment alors :

$$\delta = \frac{1}{2} \left( \pi a \tan \beta - \frac{P_1 - P}{a \epsilon'} \right) \quad (6.28)$$

$$p_n(r) = \begin{cases} -\frac{\epsilon'}{2} \left[ -\frac{P_1 - P}{\sqrt{a^2 - r^2}} \frac{1}{a \epsilon' \pi} + \tan \beta \arccos[a/r] \right] & , \quad 0 < r \leq a \\ 0 & , \quad r > a \end{cases} \quad (6.29)$$

$$u(r) = \begin{cases} -\delta + r \tan \beta & , \quad r > a \\ -\frac{P_1 - P}{a \epsilon' \pi} \arcsin[a/r] \\ \quad + \left[ \arcsin[a/r] - \frac{r}{a} + \sqrt{r^2/a^2 - 1} \right] a \tan \beta & , \quad r \leq a \end{cases} \quad (6.30)$$

En choisissant  $a = 1$  (qui équivaut à une force apparente  $P_1$  déterminée à l'aide de (6.27)), on peut alors comparer les résultats de la simulation numérique avec la solution analytique (Figure 6.17).

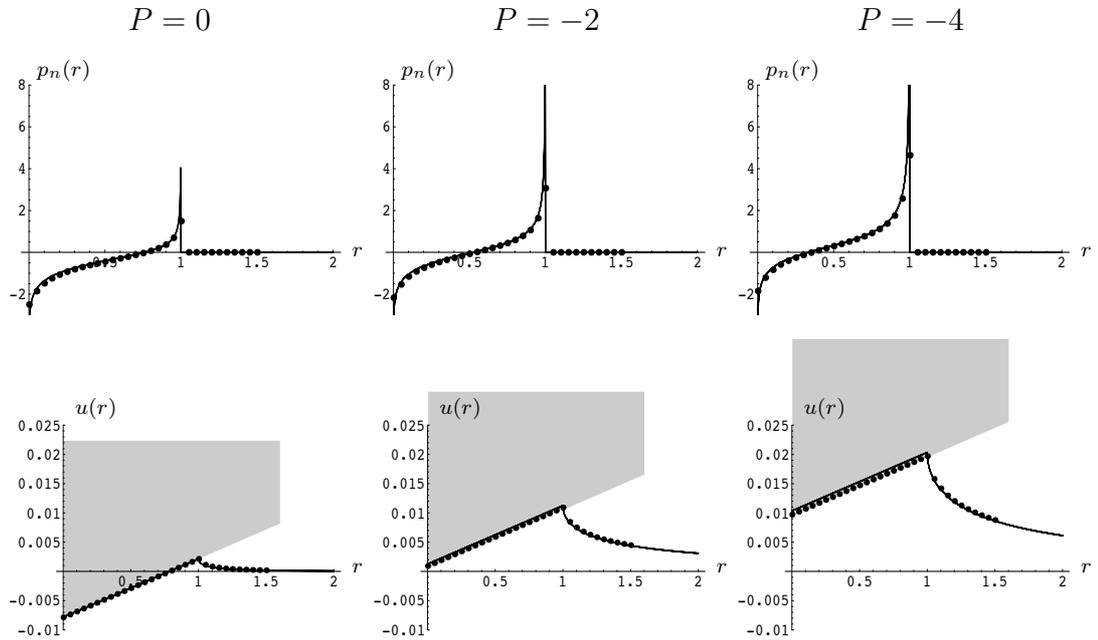


FIG. 6.17 – Poinçon conique convexe avec adhésion ( $g_0^a = 0.0$ ) pour une charge apparente  $P_1 = 1.72$  ( $a = 1$ ). Distribution normale de pression  $p_n(r)$  et déformée  $u(r)$  du demi-espace pour différentes valeurs de  $P$ .

### Etude de la décohésion

Similairement au cas précédents, on montre que la décohésion est instable. Le taux de restitution d'énergie s'écrit :

$$G = \frac{(P_1 - P)^2}{8\pi a^3 \epsilon'} \quad (6.31)$$

De même que précédemment, on peut aussi trouver des valeurs  $p_M$  et  $g_M$  telles que le poinçon décolle pour la charge critique théorique  $P_c$  :

$$P_c = -54 \frac{w^2}{\pi \epsilon' \tan^2 \beta} \quad (6.32)$$

### 6.2.5 Poinçon axisymétrique conique concave

#### Motivation

La décohésion de tous les poinçons étudiés jusqu'à présent est instable. En raison de leur forme convexe, les zones où les contraintes sont critiques sont celles pour lesquelles  $r \rightarrow a$ . La décohésion se propage ainsi toujours de l'extérieur vers l'intérieur du poinçon. De plus, la configuration étant axisymétrique, une diminution  $\delta a$  du rayon de la surface adhésive se traduit par une décroissance quadratique  $\delta a^2$  de son aire. L'augmentation des contraintes critiques est donc aussi parabolique en fonction de la diminution de  $a$ . Pour stabiliser le processus de décohésion, celui-ci devrait s'effectuer à partir de la zone centrale du poinçon vers l'extérieur. Dans ce but, on s'intéresse à un poinçon de forme concave, pour lequel la solution analytique n'est pas connue. Elle semble être la "même" que celle du poinçon convexe au changement de rayon  $r' = a - r$  près.

#### Description

Nous considérons maintenant le poinçon axisymétrique conique concave dont la pointe forme un angle  $\beta$  avec la surface du demi-espace et de largeur  $a$  (Figure 6.18).

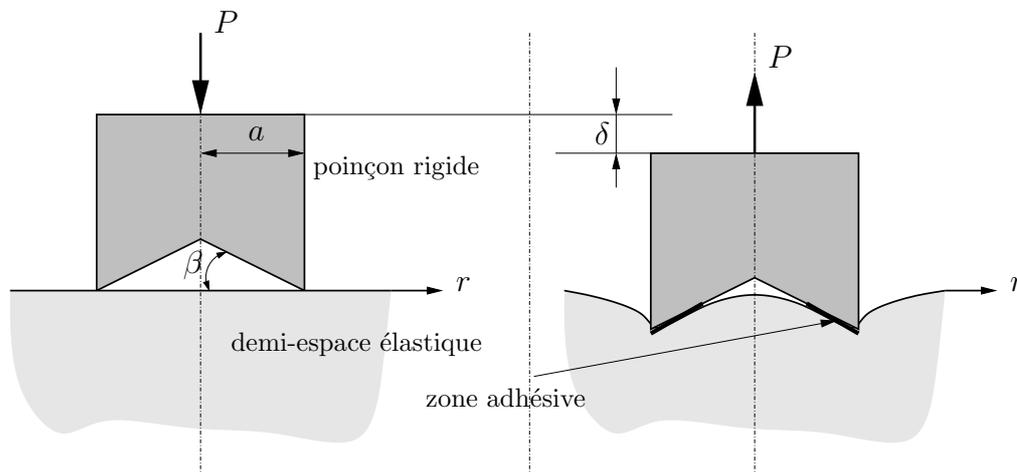


FIG. 6.18 – Contact adhésif d'un poinçon axisymétrique conique concave sur un demi-espace élastique.

L'angle  $\beta$  est choisi tel que  $\tan \beta = 0.01$  et  $a = 1.5$ .

**Etude élastique** ( $p_M = \infty$ )

**Problème d'enfoncement** – La distribution de pression ainsi que la déformée (amplifiée d'un facteur 150 environ) pour le problème d'enfoncement sans adhésion ( $g_0^a = \infty$ ) sont obtenus par simulation numérique (Figure 6.19).

On observe un pic de pression pour  $r = a$  dû à la forme pointue du poinçon au bord.

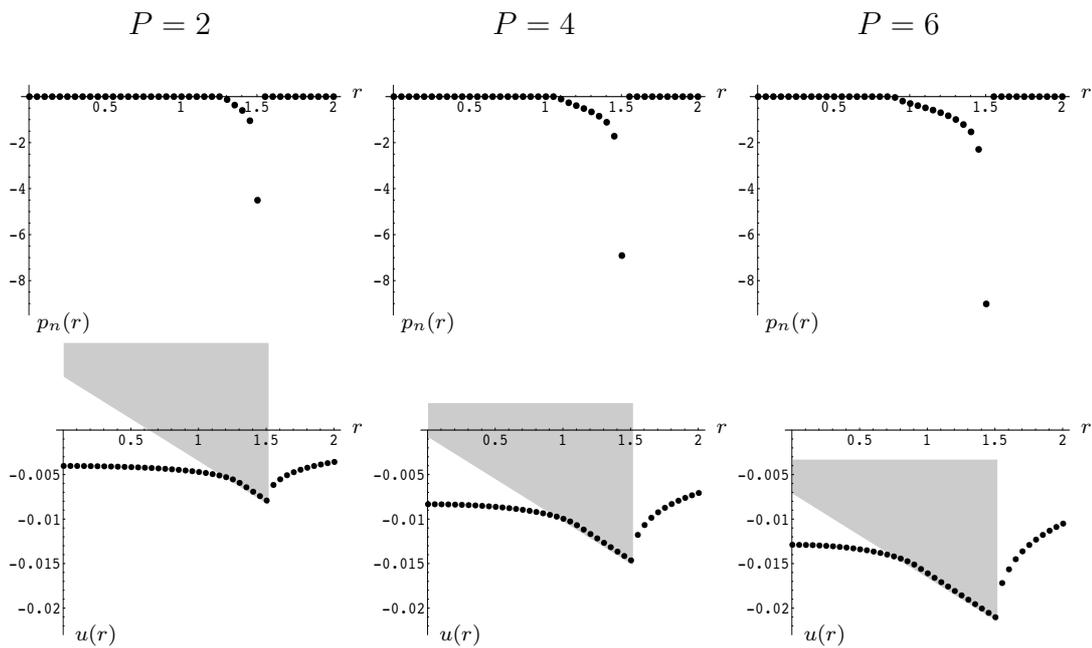


FIG. 6.19 – Poinçon conique concave en décharge avec adhésion ( $g_0^a = 0$ ). Distribution normale de pression  $p_n(r)$  et déformée  $u(r)$  du demi-espace pour différentes valeurs de  $P$ .

**Décharge du poinçon** – Les forces d'adhésion sont activées ( $g_0^a = 0$ ) sur toute la largeur du poinçon ( $a = 1.5$ ). On obtient alors les distributions de pression et la déformée (amplifiée d'un facteur 200 environ) de la figure 6.20.

Il apparaît deux zones où les contraintes sont critiques. Une région en compression à l'extérieur ( $r = a$ ) du poinçon et une région centrale ( $r = 0$ ) en traction. La décohésion aura donc tendance à se propager à partir de la zone centrale vers l'extérieur.

Lorsque l'on décharge le poinçon, la contrainte de compression en  $r = a$  diminue plus rapidement que l'augmentation de la contrainte de traction en  $r = 0$ .

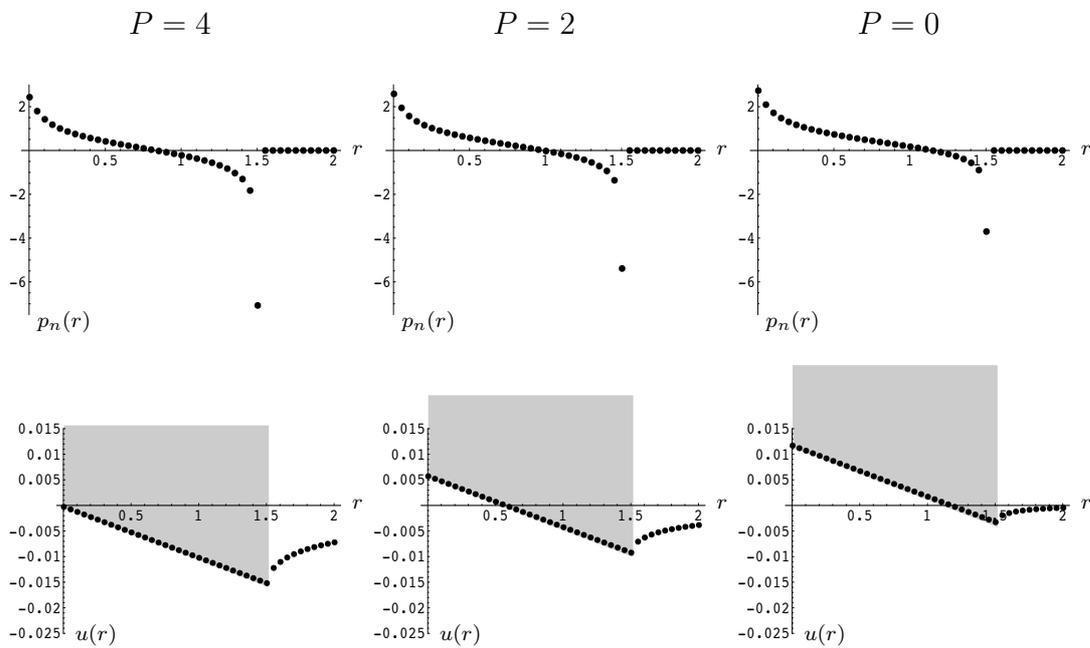


FIG. 6.20 – Poinçon conique concave en compression sans adhésion ( $g_0^a = \infty$ ). Distribution normale de pression  $p_n(r)$  et déformée  $u(r)$  du demi-espace pour différentes valeurs de  $P$ .

## Etude de la décohésion

**Etude de stabilité** – La fissure a été artificiellement propagée en désactivant l'adhésion ( $g_0^a = \infty$ ) pour des éléments à l'interface sur un rayon  $r_d$  partant du centre du poinçon. La distribution des contraintes obtenue est celle de la figure 6.21.

On observe que lorsque  $r_d$  augmente, la contrainte critique décroît. La propagation de la décohésion est donc stable dans ce cas. Ceci s'explique par le fait que la contrainte moyenne augmente toutefois avec  $r_d$  et il s'établit une compensation du travail des forces adhésives en raison des rayons (donc des surfaces) de contact qui deviennent plus importants lorsqu'on s'éloigne du centre du poinçon.

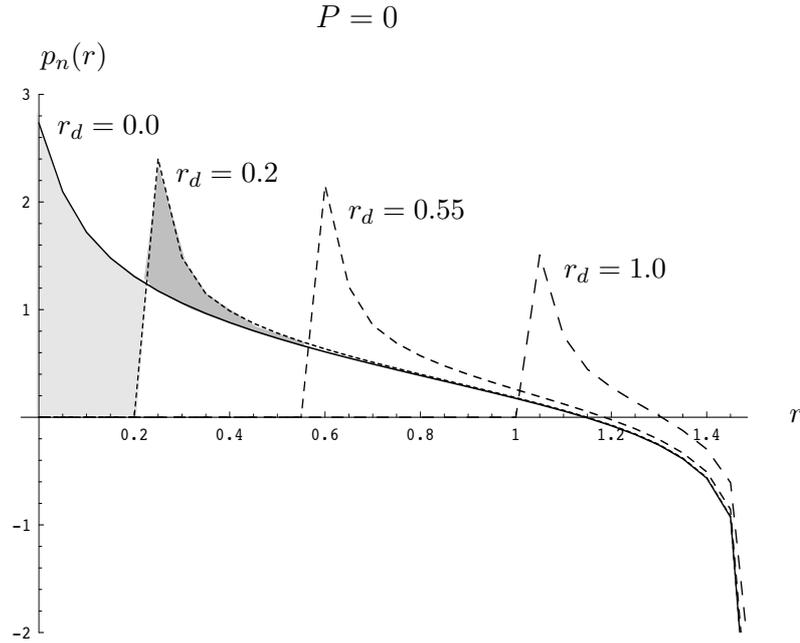


FIG. 6.21 – Distribution de pression en fonction du rayon de décohésion  $r_d$ .  $P$  est constant. On remarque que le travail des forces adhésives reste constant en raison de l'augmentation quadratique des aires de contact lorsqu'on s'éloigne du centre du poinçon.

**Propagation de la décohésion** – Nous choisissons maintenant une énergie d'adhésion  $w$  finie à l'interface. On choisit de la répartir entre  $g_M$  et  $p_M$  de la manière suivante :

seuil adhésif	$p_M = 2.3$
écart de décohésion	$g_M = 4.191\text{E}-3$
énergie de Dupré	$w \approx 5\text{E}-3$

On observe alors numériquement une propagation stable de la décohésion comme prévu (Figure 6.22).

On remarque que pour  $P = 0$ , la décohésion se propage déjà d'une certaine longueur  $r_d$ , car pour cette valeur la contrainte critique de traction  $p_n(0) > p_M$ . Ensuite, la propagation s'arrête, pour une contrainte critique qui est inférieure au seuil  $p_M$ . Pour que la décohésion se poursuive, il faut augmenter la charge  $P$  afin que  $p_n(r_d) > p_M$ . La charge critique de décollement total du poinçon est  $P_c = P = -3$ .

### Taux de convergence

La convergence de l'algorithme reste satisfaisante lorsque le statut des filaments reste adhésif (moins de 4 itérations par incrément de charge). Ensuite, lorsqu'il apparaît des éléments qui subissent une décohésion, le comportement de l'algorithme dépend alors du nombre de filaments rompus. Dans le cas présenté, les

incréments de charge sont effectués successivement et il faut en moyenne 8 à 10 itérations pour chaque pas de charge pour que l'algorithme converge.

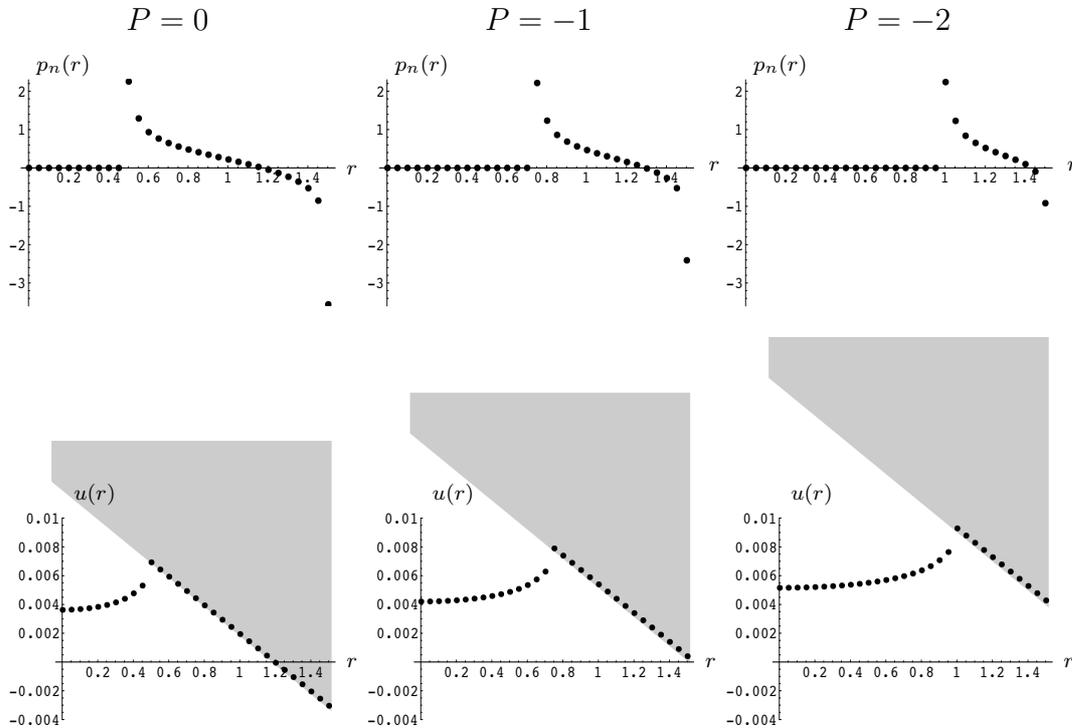


FIG. 6.22 – Décollage progressif du poinçon conique concave. Distribution normale de pression  $p_n(r)$  et déformée  $u(r)$  (amplifiée environ 100 fois) du demi-espace pour différentes valeurs de  $P$ .

## 6.3 Test d'arrachement

### 6.3.1 Généralités

Malgré la difficulté d'interprétation de ses résultats (voir [31] [103]), le test d'arrachement d'une fibre plantée dans une matrice est un des plus répandus pour déterminer expérimentalement les caractéristiques de l'interface, notamment sa résistance au cisaillement  $\tau_d$  qui fixe un seuil de cisaillement d'interface au delà duquel la décohésion se propage. Reprenant l'approche du modèle de Cox (dite "shear-lag"), Kim–Mai et al. [74] [75] [134] [73], Yue et al. [130] [133] étudient analytiquement la répartition de la contrainte de cisaillement le long d'une interface supposée parfaite (adhésion parfaite ne pouvant s'endommager) dans le cadre d'un test d'arrachement. Cette solution suppose cependant que la décohésion s'est propagée d'une longueur  $l$  donnée (fissure préexistante). Ensuite, selon la distribution du cisaillement, des critères de seuil de contrainte  $\tau_d$  ou énergétiques de la mécanique de la rupture (introduits par Gao et al. [44] puis repris par Zhou,

Kim et Mai [134]), on détermine si la propagation se poursuit. Dans un premier temps, nous comparerons cette solution analytique avec les résultats d'une simulation numérique où la longueur de la fissure préexistante sera un paramètre et l'interface infiniment résistante. Ensuite, nous utiliserons la possibilité offerte par le modèle proposé de faire évoluer la décohésion en fonction de la charge appliquée. Nous verrons notamment que la décohésion se propage de manière stable à l'interface si la fibre est encastrée à son extrémité non soumise à la charge.

### 6.3.2 Analyse du problème par la méthode dite du “shear-lag”

#### Description

Le modèle d'arrachement d'une fibre basée sur l'analyse dite du “shear-lag” (représenté à la figure 6.23) consiste en une fibre (de rayon  $R_f = a$ ) encastrée au centre d'un cylindre coaxial de matrice (de rayon  $R_m = b$ ).

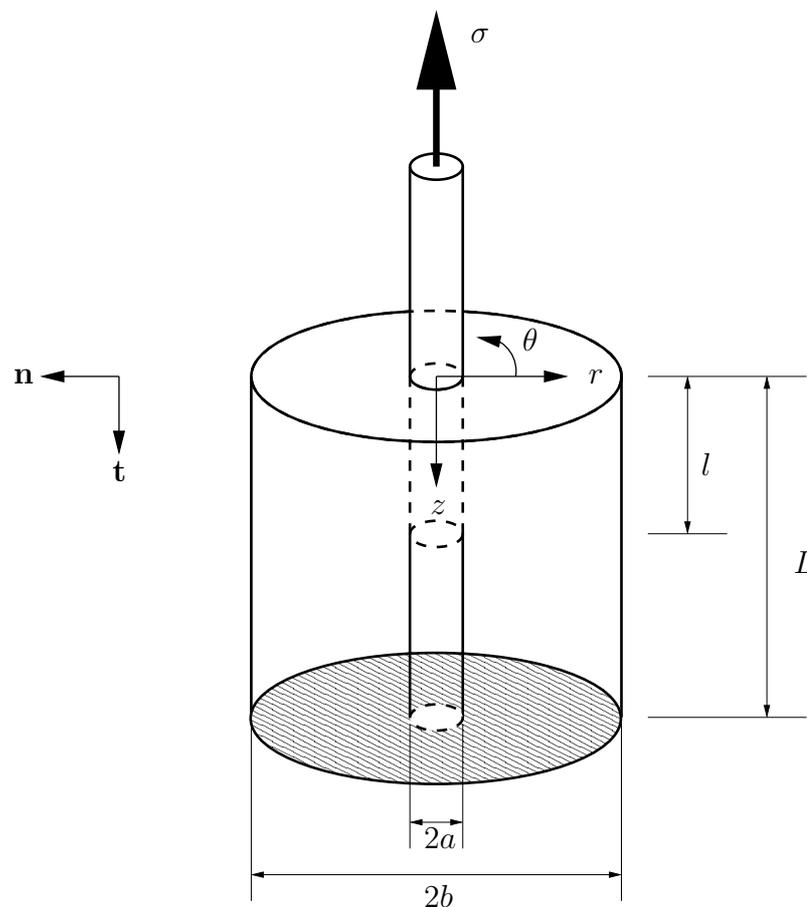


FIG. 6.23 – Schéma du test d'arrachement avec décohésion partielle.

$L$  est la longueur totale de fibre encastrée. Nous supposons aussi un début de

décohésion (décohésion partielle) de longueur  $l$ . Une contrainte de traction  $\sigma$  est appliquée à l'extrémité de la fibre (à  $z = 0$ ) tandis que la base du cylindre de matrice est encastrée (à  $z = L$ ). L'autre extrémité de la fibre (à  $z = L$ ) est supposée libre.

L'analyse complète du problème dans un système de coordonnées cylindriques  $\{r, \theta, z\}$  (pour mieux décrire la configuration axisymétrique du problème) par la méthode du "shear-lag" est donnée en annexe C. Mentionnons simplement ici que cette analyse repose sur l'élasticité linéaire *simplifiée* de la fibre et de la matrice et que par conséquent cette solution n'est qu'approchée. Dans ce qui suit, les indices  $f$ ,  $m$  et  $i$  se rapportent à la fibre, à la matrice et à l'interface, respectivement.

### Solution analytique

La distribution des contraintes de cisaillement le long de l'interface pour une avancée  $l$  de la fissure fixée arbitrairement est donné par :

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_t &= \tau_i(z)\mathbf{t} \\ &= \begin{cases} -\mu[q_0 + q^*(z)]\mathbf{t} & , 0 \leq z < l \\ \sigma a \sqrt{A_1} \left[ \frac{[\frac{A_2}{A_1} + \frac{\sigma_l}{\sigma}] \cosh[\sqrt{A_1}(L-z)] - \frac{A_2}{A_1} \cosh[\sqrt{A_1}(l-z)]}{\sinh[\sqrt{A_1}(L-l)]} \right] \mathbf{t} & , l \leq z \leq L \end{cases} \end{aligned} \quad (6.33)$$

où  $q_0$  est la contrainte résiduelle radiale (de compression) résultant du rétrécissement de la matrice sur la fibre après le refroidissement de la matrice de sa température de coulage à la température ambiante.  $\sigma_l$  est défini comme la contrainte normale dans la fibre au niveau de la région de transition ( $z = l$ ) entre la zone intacte de l'interface et celle décollée.  $A_1$  et  $A_2$  sont des paramètres dépendant de la géométrie et des propriétés de la fibre et de la matrice. La fonction  $q^*(z)$  est une contrainte radiale supplémentaire provenant de la contraction par effet de Poisson de la fibre soumise à une tension axiale. Ces fonctions ou paramètres sont explicités dans l'annexe C.

La distribution des contraintes de cisaillement se divise en deux régions. Dans la région décollée ( $0 \leq z < l$ ), le cisaillement est dû au frottement de Coulomb. Dans la région collée ( $l \leq z \leq L$ ), le cisaillement prend une valeur critique pour  $z = l$ . Ceci explique aussi que la fissure se propage à partir de la surface extérieure. En effet, si il n'y a pas de fissure préexistante ( $l = 0$ ), le cisaillement est maximal pour  $z = 0$ .

On constate que dans cette solution, frottement et adhésion sont des phénomènes qui sont découplés et le seul statut du frottement retenu est le glissement.

### 6.3.3 Modèle numérique

#### Description

Compte tenu de la symétrie du problème, seul un secteur du système est considéré dans une configuration axisymétrique (Figure 6.24 a)). Le maillage adopté est celui de la figure 6.24 b)).

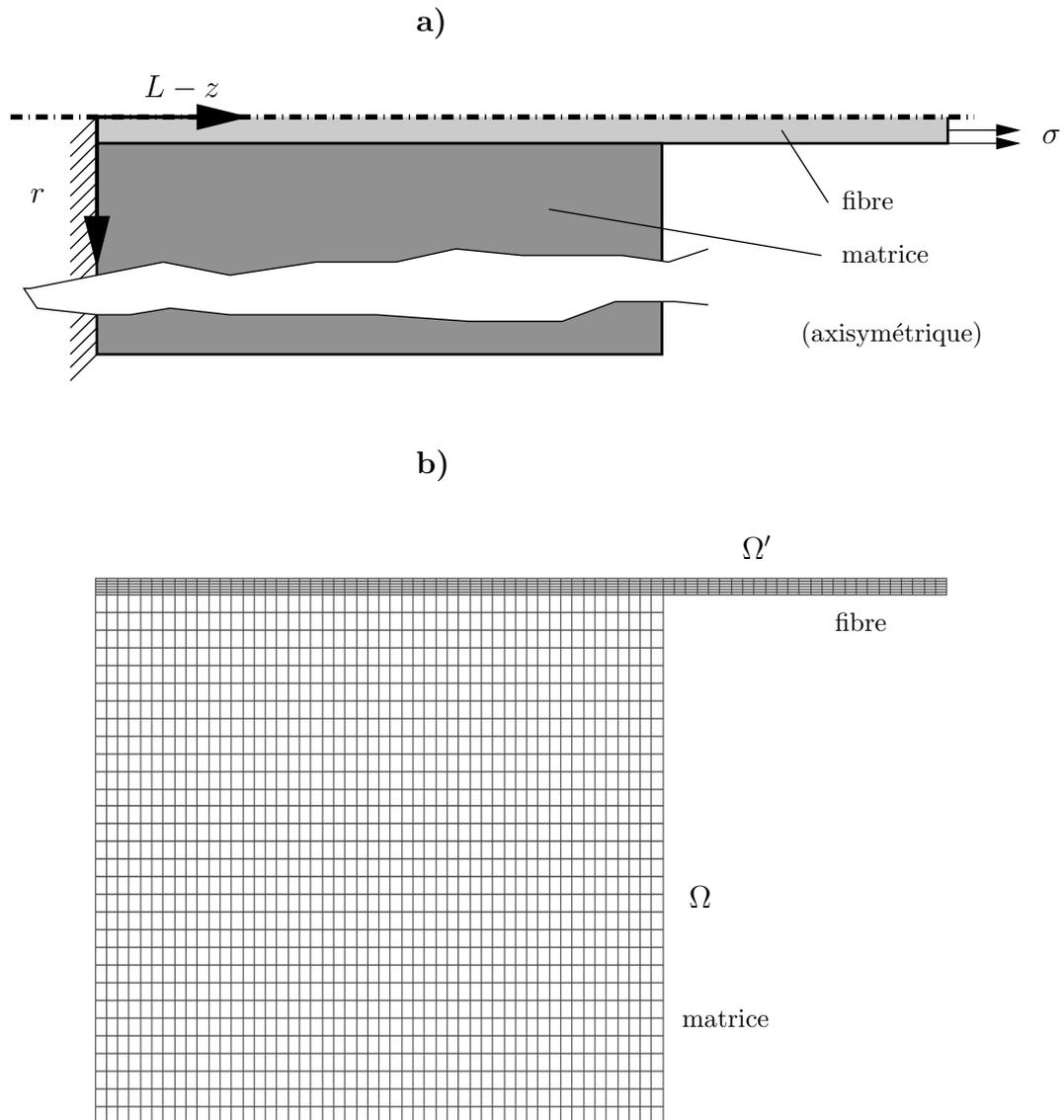


FIG. 6.24 – Configuration axisymétrique du problème et maillage.

La fibre et la matrice sont discrétisées en 450 et 1500 éléments quadratiques bidimensionnels, respectivement. 51 éléments de contact sont répartis le long de l'interface entre la fibre et la matrice. La valeur du rayon interne de la matrice

est choisie légèrement inférieure à celle du rayon de la fibre afin d'introduire une pression résiduelle (précontrainte)  $q_0$  à l'interface.

### Paramètres

La fibre est constituée de verre et la matrice d'époxyde. Les paramètres pour la fibre, la matrice et l'interface suivants sont choisis :

rayon de la fibre	$a = R^f = 0.0625$ mm
rayon externe de la matrice	$b = R^m = 1.9862$ mm
largeur de l'interface	$L = 2.5$ mm
module d'élasticité de la fibre	$\epsilon_{\text{verre}} = 70$ GPa
module d'élasticité de la matrice	$\epsilon_{\text{époxy}} = 2.2$ GPa
coefficient de Poisson de la fibre	$\nu_{\text{verre}} = 0.2$
coefficient de Poisson de la matrice	$\nu_{\text{époxy}} = 0.35$
coefficient de frottement verre/époxyde	$\mu = 0.3$
pression résiduelle d'interface	$q_0 \approx -50$ GPa

Le rayon de la fibre correspond à des fibres réelles utilisés au LMAF pour l'étude des forces pontantes (voir [120]). Le module d'élasticité choisi est celui que nous avons déterminé expérimentalement (voir au paragraphe 5.3.3). Les méthodes expérimentales pour déterminer le coefficient de frottement  $\mu$  et la pression résiduelle de rétrécissement  $q_0$  sont résumées par Yue et al. [131], et ensuite appliquées à une interface verre/époxyde d'un composite fibreux par Yue et al. [132]. Les simulations sont effectuées en se servant de la méthode de la pénalité. On a cependant vérifié qu'on obtient des résultats similaires en Lagrangien augmenté.

### 6.3.4 Simulation avec une fibre non-encastree

#### Généralités

La simulation consiste à propager la fissure d'une certaine longueur  $l$  avant de comparer les résultats numériques obtenus avec la solution analytique. Cependant, cette dernière suppose que l'extrémité ( $z = L$ ) de la fibre est libre et l'essai est instable pour cette configuration. En effet, le transfert de charge entre la fissure est uniquement assuré par l'interface. Si certains filaments cèdent, inévitablement d'autres filaments céderont aussi en raison de la diminution de la surface adhésive et de l'augmentation de la contrainte moyenne et critique qui en résulte. La décohésion de propagera ainsi sur toute l'interface jusqu'à l'arrachement complet de la fibre. Par conséquent, nous propagerons la fissure de manière artificielle en désactivant l'adhésion ( $g_0^a = \infty$ ) des filaments de la zone décollée ( $0 \leq z < l$ ) et en supposant que les filaments adhésifs ( $g_0^a = 0$ ) de la zone collée ( $l \leq z \leq L$ ) ne peuvent s'endommager ( $p_M = \infty$ ).

### Simulations numériques

On compare alors la distribution des contraintes de cisaillement  $\tau_i(z)$  à l'interface obtenus par simulation numérique avec la solution analytique, pour différentes valeurs de longueur décollée  $l$  et pour différents coefficients de frottement  $\mu$ . (Figure 6.25). La charge appliquée  $\sigma = 920$  MPa est constante.

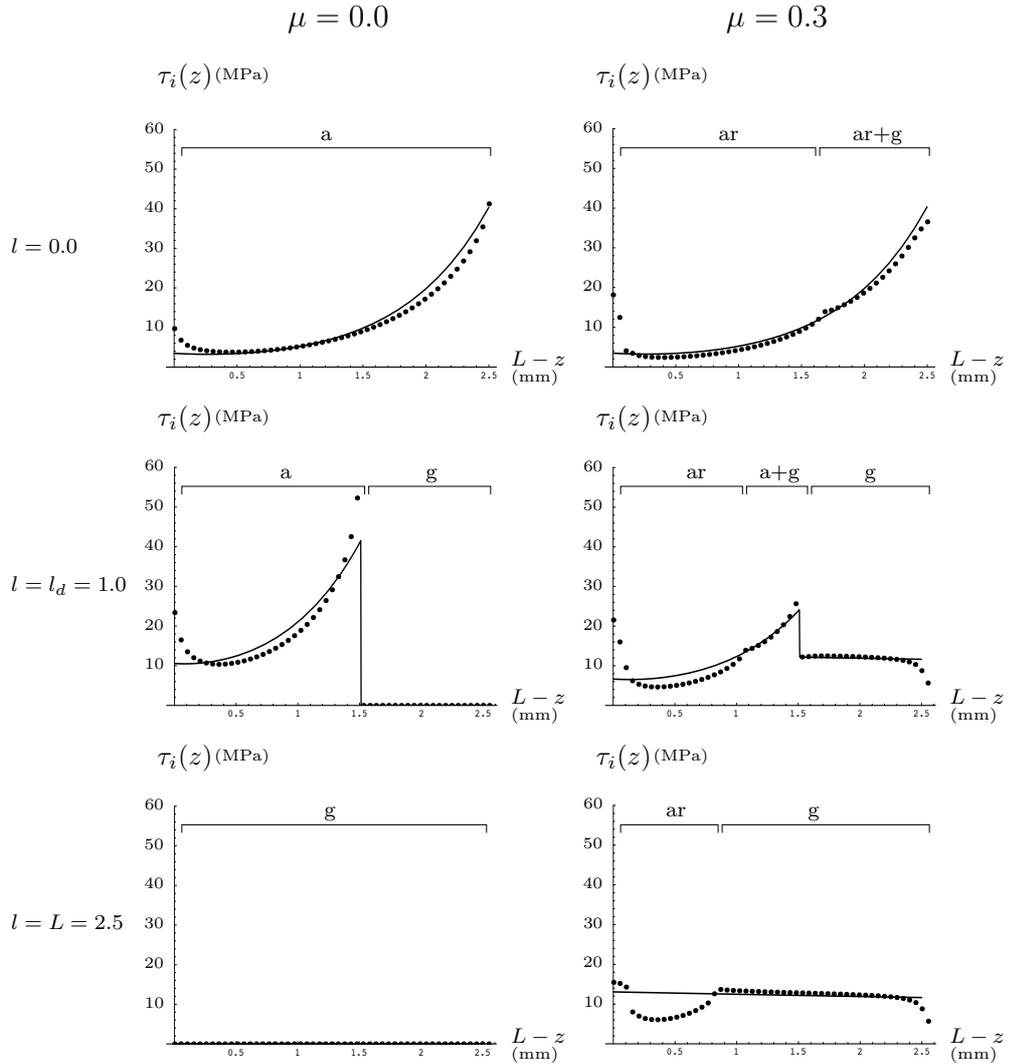


FIG. 6.25 – Distribution du cisaillement tangent  $\tau_i(z)$  sur l'interface pour une charge de traction  $\sigma = 920$  MPa constante appliquée sur la fibre. On différencie les différentes zones par le statut des éléments de contact a:adhésion, g:glissement et ar:adhérence.

Les résultats numériques sont globalement en accord avec la solution analytique. Cependant, on peut noter quelques différences :

- INTERFACE INTACTE :  $l = 0.0$

Pour le cas sans frottement ( $\mu = 0.0$ ), la solution numérique prévoit un

cisaillement plus élevé à l'extrémité  $z = L$  de la fibre. En effet, proposant une approche par l'énergie complémentaire totale, Quek et Yue [105] montrent que la solution basée sur une analyse de type "shear-lag" sous-estime les concentrations de contrainte à l'interface fibre-matrice.

Pour le cas avec frottement ( $\mu = 0.3$ ), nous voyons que l'interface se divise en deux zones. La première zone, partant de l'extrémité de la fibre soumise à la charge, est adhésive avec glissement. La contrainte de cisaillement est dans cette région plus élevée que le seuil de frottement et il y a glissement par conséquent. Par contre, les filaments adhésifs supportent alors une charge. La seconde zone est uniquement adhérente. Cette répartition résulte du couplage entre le frottement et l'adhésion, notamment du fait que l'adhérence prime sur l'adhésion.

– INTERFACE PARTIELLEMENT DÉCOLLÉE :  $l = l_d$

Sans frottement, l'interface se divise en une zone adhésive et une zone glissante ( $\mu = 0.0$ ). On remarque encore une fois la sous-estimation des contraintes critiques aux extrémités de la fibre par la solution analytique. Lorsqu'on introduit le frottement ( $\mu = 0.3$ ), il y a toujours glissement dans la zone décollée. Par contre, dans la zone intacte, on observe une région adhésive avec glissement (où la contrainte de cisaillement est plus importante que le seuil de glissement), l'autre étant adhérente.

Remarquons aussi que le seuil de glissement ( $-\mu p_n$ ) décroît lorsque  $z \rightarrow 0$ . Ceci s'explique par le fait que la fibre soumise à la charge de traction provoque une ouverture de la matrice dans cette région (voir maillage déformé de la figure 6.26) et diminue ainsi localement la pression normale de contact ( $p_n(z)$ ). On observe similairement une ouverture locale de la matrice en  $z = l$ , résultant d'effets de Poisson et aussi mise en évidence par [102].

– INTERFACE ENTIÈREMENT DÉCOLLÉE :  $l = L$

Il n'y a plus de phénomènes adhésifs sur toute l'interface. On remarque alors que lorsqu'il y a frottement ( $\mu = 0.3$ ), il apparaît une première zone adhérente proche de l'extrémité libre de la fibre, la seconde étant une zone de glissement. La solution analytique ne prévoit qu'une zone avec glissement, ceci faisant partie des hypothèses de son développement.

Par ses hypothèses restrictives, le modèle de type "shear-lag" sous-estime les contraintes critiques, ne prévoit pas l'apparition de plusieurs zones distinctes au sein de l'interface, ni l'influence de la déformation des corps sur la pression normale et donc le frottement tangent. C'est un modèle simple, néanmoins appréciable.

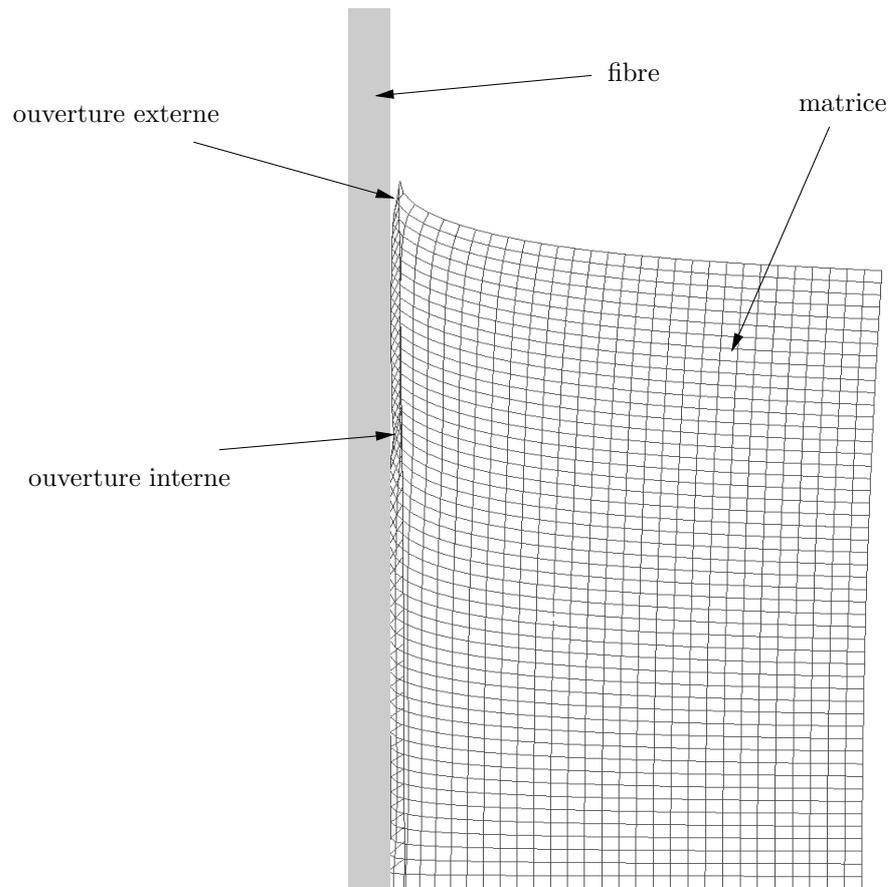


FIG. 6.26 – Maillage déformé pour  $l = l_d$  et  $\mu = 0.3$ . La déformée est amplifiée d'un facteur 100.

### 6.3.5 Simulation avec une fibre encastrée

#### Généralités

Nous supposons maintenant que l'extrémité ( $z = L$ ) de la fibre est encastrée. La décohésion peut alors se propager de manière stable. En effet, contrairement à l'essai précédent, toute la charge appliquée n'est pas transférée par l'interface car une partie est transmise par l'extrémité encastrée de la fibre. Nous utilisons les valeurs suivantes, déterminées au chapitre précédent, pour les propriétés de l'interface :

seuil adhésif	$p_M = 37.5 \text{ MPa}$
écart de décohésion	$g_M = 3.733\text{E}-6 \text{ mm}$

La charge  $\sigma$  sera normalisée par rapport à une charge de référence  $\sigma_0 = 18.4 \text{ MPa}$ . Ici, le frottement  $\mu = 0.3$  est toujours pris en considération. Reprenant une partie des efforts de cisaillement, il accroît la stabilité du problème, comme le montre [102], ralentissant par conséquent le processus de décohésion.

## Simulations numériques

La charge  $\sigma$  appliquée sur la fibre est progressivement augmentée et on observe la propagation de la décohésion (Figure 6.27).

Pour  $\sigma/\sigma_0 \leq 2.92$ , il n'y a pas d'endommagement de l'interface.  $\sigma_d = 2.92 \sigma_0$  est donc la charge critique de décohésion. Le cisaillement maximal à l'interface pour cette valeur de charge est  $\tau_i(0) = \tau_d = 46$  MPa.  $\tau_d$  est le paramètre principal obtenu d'un essai d'arrachement (voir [131]). Expérimentalement,  $\tau_d$  a été mesuré pour des composites fibre de verre/matrice époxyde par Yue et al. [132] et Feillard [35]. Ils trouvent des valeurs comprises entre 40 et 100 MPa. La valeur obtenue numériquement avec nos paramètres expérimentaux est en accord avec ces données.

On constate que la propagation de la décohésion, bien que le processus soit stable, ne s'effectue pas proportionnellement à la charge appliquée sur la fibre. Pour  $l = 0$  et lorsque la charge appliquée est  $\sigma = \sigma_d$ , la charge est reprise principalement par l'interface. Une petite augmentation de la charge  $\sigma$  propage la fissure de manière considérable. Ensuite, lorsque la longueur décollée  $l$  devient proche de la longueur de l'interface  $L$ , la charge est reprise presque intégralement par l'encastrement plus que par le transfert à l'interface. L'incrément de charge doit être plus important pour qu'un nombre limité de filaments soit endommagé. Pour finir, lorsque toute l'interface est décollée, le transfert de charge s'effectue intégralement par l'extrémité encastree de la fibre.

La figure 6.28 montre l'évolution de la longueur décollée  $l$  en fonction de la charge  $\sigma$  appliquée sur la fibre.

On constate principalement trois phases au processus :

- Une première phase où le transfert de charge s'effectue par l'interface qui s'endommage de manière instable,
- puis une phase de transition où le transfert de charge se répartit entre l'interface et l'extrémité encastree de la fibre,
- et finalement, c'est l'encastrement de la fibre qui retient cette dernière.

## Taux de convergence

Le nombre d'itérations nécessaires pour que l'algorithme converge est globalement proportionnel au nombre de filaments rompus. La décohésion totale de l'interface s'effectue en une cinquantaine d'itérations. Toutefois, il apparaît parfois des cas où la longueur de décohésion est plus élevée mais que l'algorithme converge en moins d'itérations. C'est l'avantage de la méthode de Newton généralisée sur d'autres méthodes plus classiques comme l'algorithme de Lemke ou celui d'Uzawa. A l'intérieur d'une même phase (Figure 6.28), la variation du nombre d'itérations est faible.

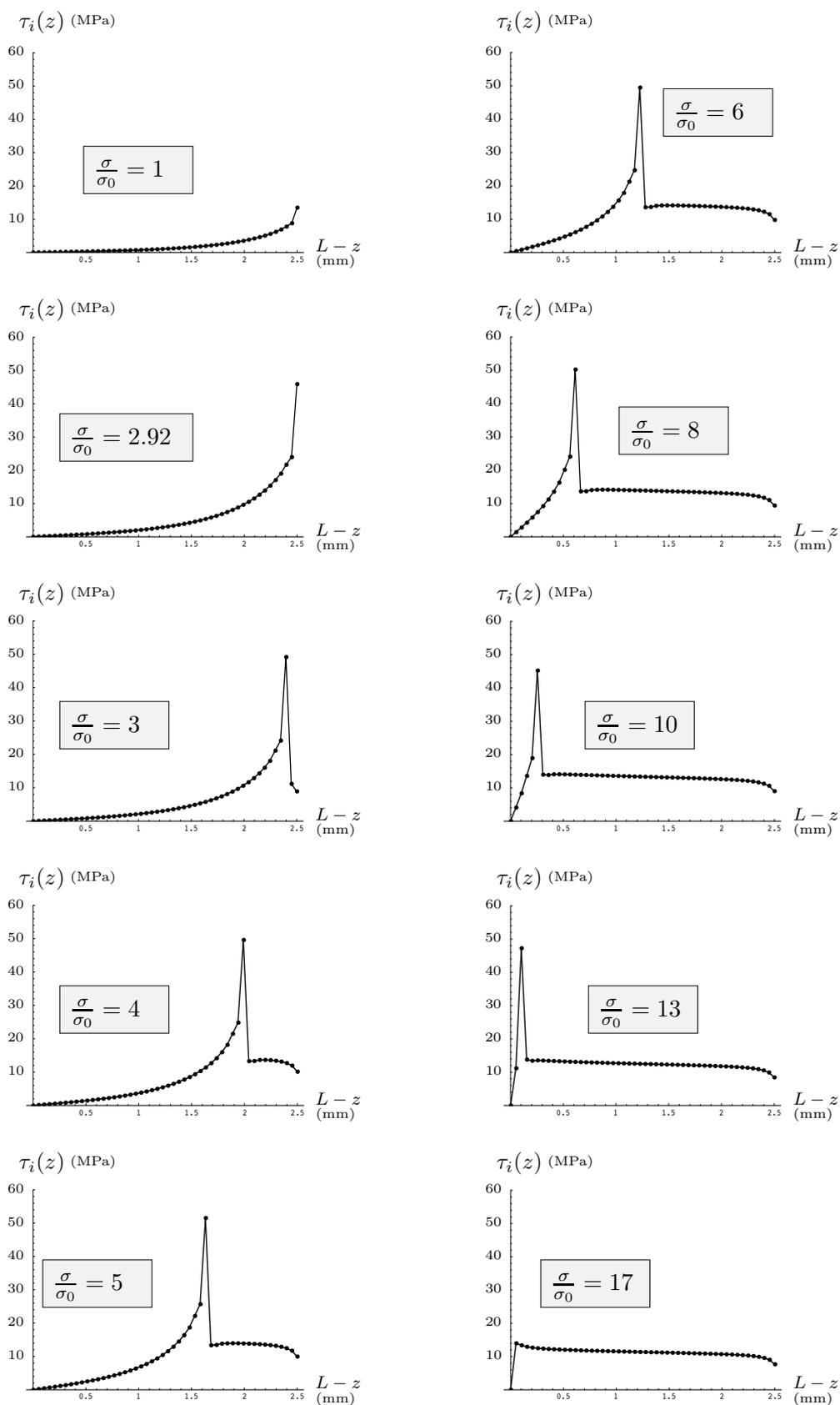


FIG. 6.27 – Distribution du cisaillement tangent  $\tau_i(z)$  sur l'interface pour différentes charges de traction  $\sigma$  et propagation de la décohésion.

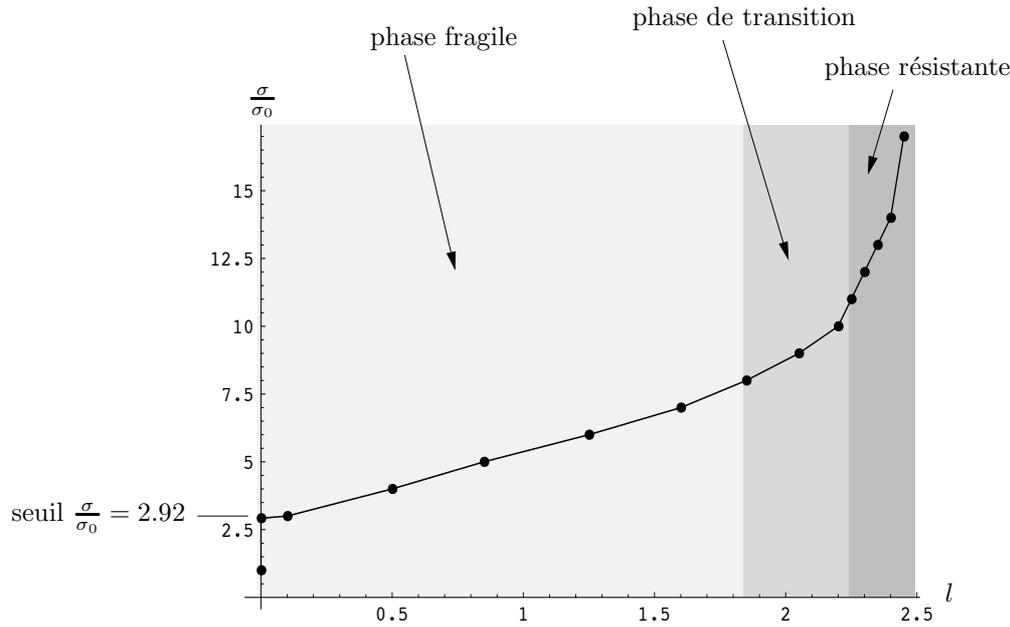


FIG. 6.28 – Evolution de la longueur décollée  $l$  en fonction de la charge  $\sigma$  appliquée sur la fibre.

## 6.4 Propagation d'une fissure à travers un composite fibreux

### 6.4.1 Généralités

#### Motivation

Les phénomènes micro-mécaniques apparaissant lors de la propagation d'une fissure dans un matériau composite sont complexes. On peut cependant distinguer trois micro-mécanismes élémentaires à savoir la rupture de la fibre, la fissuration de la matrice et la décohésion interfaciale. Ces phénomènes se retrouvent alors couplés dans des micro-mécanismes plus complexes tels que l'arrachement de la fibre et le pontage de la fissure par la fibre. Ces derniers sont influencés par de nombreux facteurs, comme par exemple le rapport des rigidités et du module de Poisson entre les composants, le frottement et l'adhésion à l'interface, l'espacement entre les fibres, le rapport volumique entre le renfort et la matrice. C'est l'ensemble de ces phénomènes élémentaires et couplés qui déterminent l'endommagement des composites.

Pour étudier expérimentalement ce processus, des simplifications sont nécessaires. On considère par exemple la propagation d'une fissure dans une matrice contenant une seule fibre (Figure 6.29).

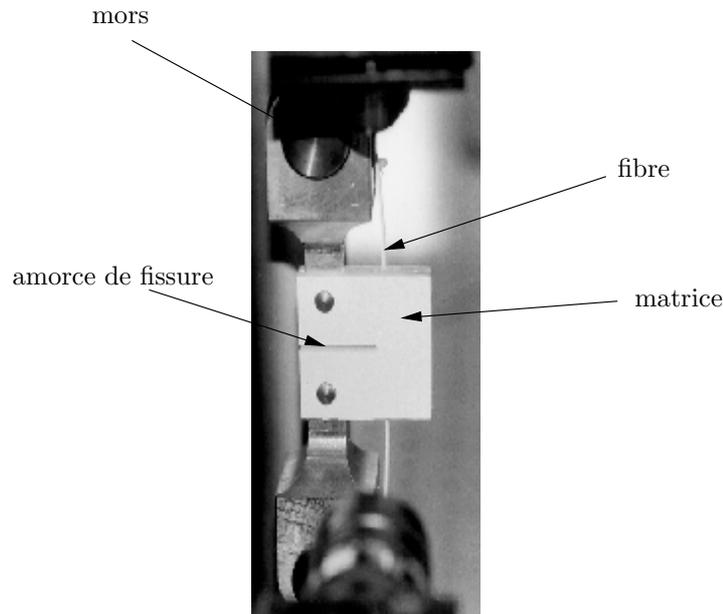


FIG. 6.29 – Exemple d'un essai expérimental de propagation d'une fissure dans une matrice contenant une fibre. (D'après [120])

On peut alors étudier les conditions de propagation de la fissure à travers le composite et de sa déviation le long de l'interface lorsque celle-là s'approche de la fibre. Il peut aussi y avoir rupture de la fibre mais dans ce qui suit nous supposons que ce n'est pas le cas et que la fibre est suffisamment résistante. En utilisant une fibre optique avec un réseau de Bragg, il est possible de mesurer la déformation de la fibre lors de ce processus et d'en déduire les forces pontantes résultant de la présence des fibres (voir Studer [120]).

Dans ce qui suit, il s'agit de simuler numériquement cette expérience. On peut ici souligner une des différences principales entre une fissure et une décohésion, à savoir que la première peut se propager aléatoirement dans la matrice (selon le chargement notamment) tandis que la seconde ne se propage que le long de l'interface en principe le plus souvent. Dans la simulation qui suit, nous faisons l'hypothèse que la fissure matricielle est plane. Ainsi, il sera possible d'utiliser les éléments d'adhésion du modèle proposé pour modéliser la fissure en faisant l'hypothèse supplémentaire qu'il n'y a pas de différence entre les phénomènes de cohésion d'un matériau (la matrice) et d'adhésion de deux matériaux (la matrice et le renfort). Cette hypothèse semble fondée (Maugis [87]).

## Description

Le schéma de la simulation numérique proposée est montré à la figure 6.30 suivante.

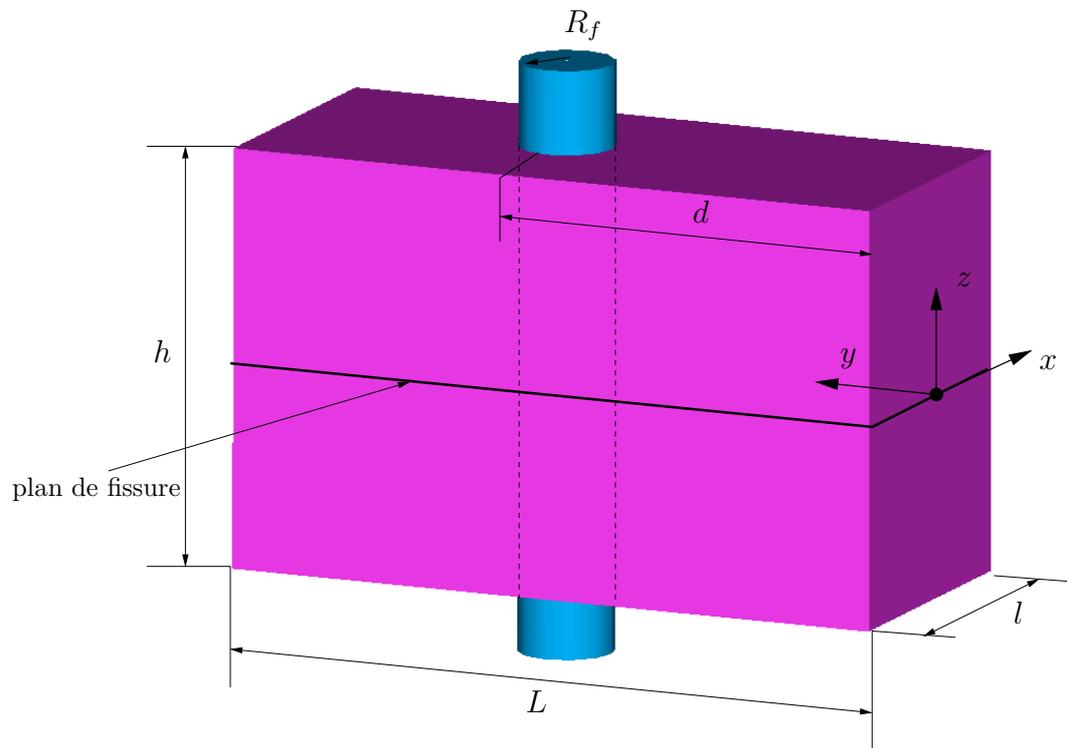


FIG. 6.30 – Schéma de la simulation numérique. Bloc de résine renforcée par une fibre de verre.

avec les dimensions suivantes :

rayon de la fibre	$R^f = 0.0625 \text{ mm}$
largeur de la matrice	$l = 1 \text{ mm}$
longueur de la matrice	$L = 1.125 \text{ mm}$
hauteur de la matrice	$h = 1.5 \text{ mm}$
longueur avant la fibre	$d = 0.687 \text{ mm}$

### Conditions aux limites

L'ouverture de la matrice sur le plan de la fissure s'effectue par un déplacement imposé positif dans la direction de  $z$  le long du segment défini par :

$$\left\{ x \in \left[-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right], y = 0, z = 0 \right\}$$

Cela correspond à un coin que l'on enfonce dans l'entaille servant d'amorce de fissure. En raison du déplacement imposé de cette manière, la propagation de la fissure est stable (voir par exemple Maugis [87]).

### Propriétés élastiques et tribologiques.

Les propriétés élastiques sont celles d'une fibre de verre et d'une matrice en époxyde. En choisissant un rayon interne de la matrice qui entoure la fibre légèrement inférieur au rayon de la fibre, comme pour la simulation précédente d'arrachement d'une fibre, on obtient quasiment la même pression résiduelle  $q_0$  à l'interface. Les propriétés adhésives de la fissure sont choisies égales à celles d'une interface verre/époxyde. Il aurait été préférable d'utiliser les données des propriétés de cohésion époxyde/époxyde pour se rapprocher de résultats expérimentaux. Cependant, les résultats de l'étude qui suit restent relatifs, ce choix reste acceptable.

module d'élasticité de la fibre	$\epsilon_{\text{verre}} = 70 \text{ GPa}$
module d'élasticité de la matrice	$\epsilon_{\text{époxy}} = 2.2 \text{ GPa}$
coefficient de Poisson de la fibre	$\nu_{\text{verre}} = 0.2$
coefficient de Poisson de la matrice	$\nu_{\text{époxy}} = 0.35$
coefficient de frottement verre/époxyde	$\mu = 0.3$
pression résiduelle d'interface	$q_0 \approx -50 \text{ GPa}$
seuil adhésif de la fissure	$p_M^f = 37.5 \text{ MPa}$
écart de décohésion de la fissure	$g_M^f = 3.733\text{E}-6 \text{ mm}$

Les simulations numériques seront divisées principalement en deux séries. Dans un premier temps, nous supposons que l'interface est parfaite afin de mettre en évidence le pontage de la fissure par la fibre, puis nous rechercherons quelles sont les propriétés adhésives de l'interface pour qu'il y ait déviation de la fissure et décohésion de l'interface.

### 6.4.2 Modèle numérique

Compte tenu de la symétrie de l'essai, nous n'en simulerons qu'un quart. Le maillage est représenté à la figure 6.31 suivante.

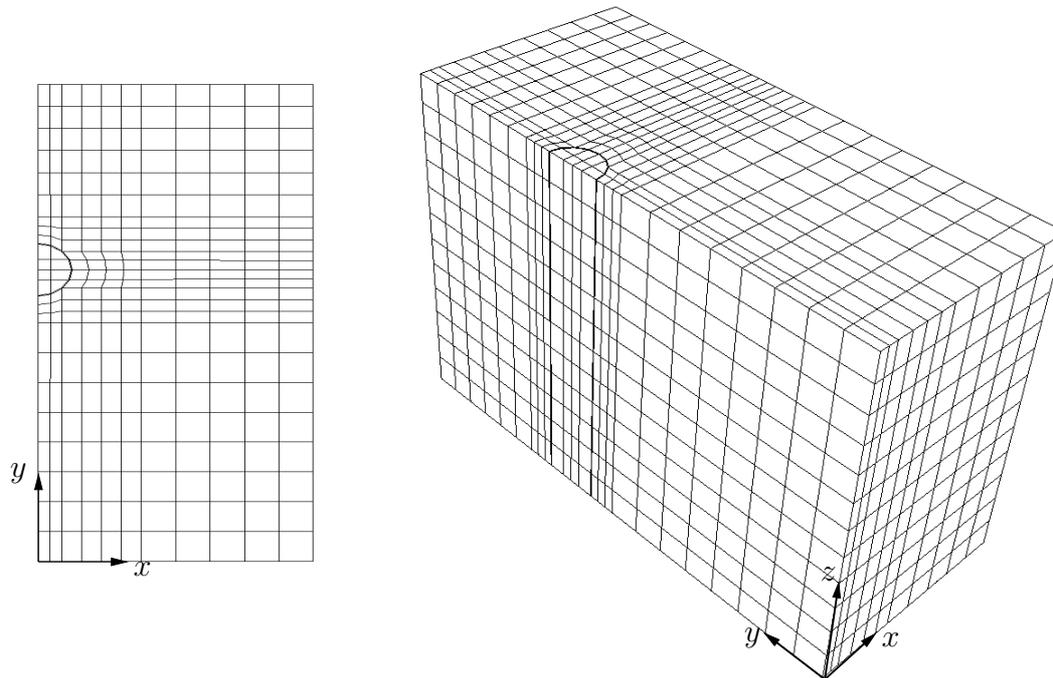


FIG. 6.31 – Vue en perspective et de dessus du maillage éléments finis utilisé pour la simulation de la fissuration tridimensionnelle d'un composite fibre de verre/matrice époxyde.

La fibre et la matrice sont discrétisés en 96 et 3072 éléments, respectivement. 294 éléments de contact sont répartis sur le plan de la fissure et 117 à l'interface. Les simulations sont effectuées en utilisant la méthode de la pénalité afin de réduire le temps des calculs. Il serait cependant judicieux et plus réaliste d'utiliser la méthode de la pénalité pour les éléments adhésifs de l'interface et la méthode du Lagrangien augmenté pour ceux de la fissure. On comprend bien que les liens adhésifs de l'interface ont une rigidité (même si elle est déjà relativement grande) beaucoup plus faible que celles de liens cohésifs de la matière.

### 6.4.3 Résultats des simulations

#### Pontage de fissure (propagation)

**Résultats** – Nous effectuons une première série de simulations en supposant une interface parfaite ( $p_M^i = \infty$ ). Nous accroissons le déplacement imposé  $\bar{u}$ . Ceci provoque la rupture de certains liens adhésifs du plan de fissure et on peut ainsi tracer l'évolution du front de fissure (composé de filaments intacts) en fonction du déplacement imposé (Figure 6.32).

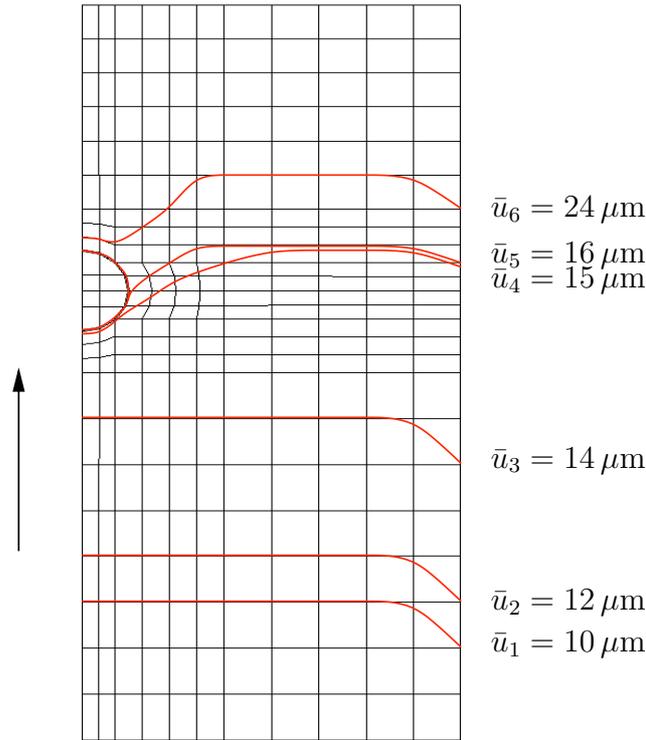


FIG. 6.32 – Evolution du front de fissure dans le plan de fissure ( $z = 0$ ) pour différentes valeurs du déplacement imposé pour une interface parfaite ( $p_M^i = \infty$ ).

**Sur l'évolution de la fissure** – L'évolution de la fissure se caractérise principalement par trois phases. Au début, lorsque la fissure est assez loin de la fibre, celle-ci se propage de manière stable. La propagation de la fissure s'accélère ensuite à l'approche de la fibre. Une fois que la fissure atteint la fibre celle-ci est ralentie de manière considérable en raison du pontage de la fibre et il faut imposer un déplacement relativement élevé pour que la fissure contourne la fibre. L'accélération de la fissure à l'approche de la fibre puis sa stabilisation sont aussi constatées expérimentalement par Humbert.

**Sur la forme de la fissure** – On note tout d'abord que le bord  $x = l/2$  résiste plus à la propagation de la fissure. Ceci s'explique par les conditions aux limites de la face  $x = l/2$  qui est libre. En effet, Benthem [8], Nakamura–Parks [95] et plus récemment Sukumar et al. [122] montrent une diminution des facteurs d'intensité de contrainte à l'extrémité libre. De plus en considérant des conditions aux limites périodiques selon  $x$  (imposition des déplacements selon  $x$  sur la face  $x = l/2$ ), Pietrzyk [102] constate numériquement que le profil de la fissure est droit lorsqu'on est suffisamment loin de la fibre.

Lorsque la fibre pontage la fissure, le profil de cette dernière entoure partiellement la fibre. Le profil de la fissure observé expérimentalement par Humbert est globalement en accord qualitatif avec les résultats obtenus par la présente simulation

numérique (Figure 6.33).

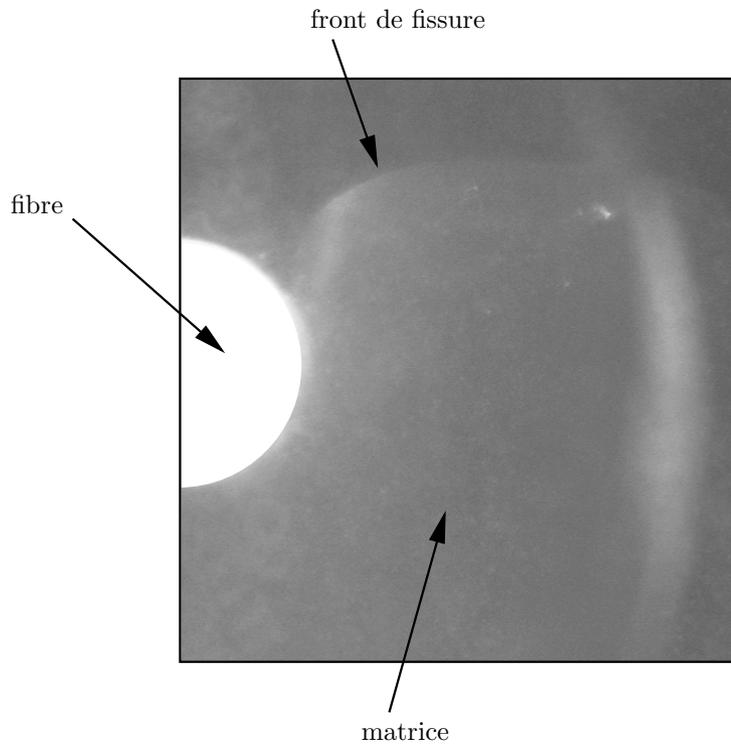


FIG. 6.33 – Profil du front de fissure obtenu expérimentalement par Humbert lorsque la fissure contourne la fibre.

Ces résultats sont aussi qualitativement en accord avec Xu et al. [128] dont le profil du front de fissure est celui obtenu à la figure 6.34 suivante.

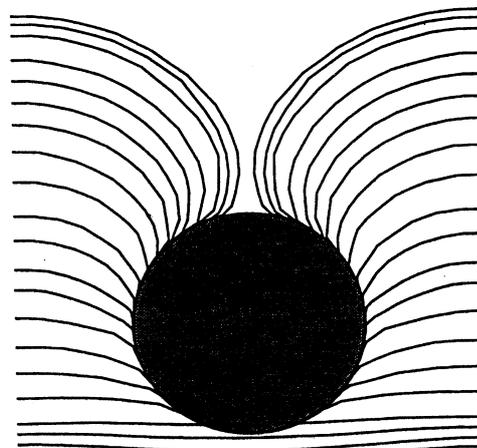


FIG. 6.34 – Profil du front de fissure obtenu par Xu-Bower-Ortiz. (D'après [128])

### Décohésion interfaciale (déviation)

**Sur les conditions de déviation** – En diminuant le seuil adhésif de l'interface, celle-ci commence à s'endommager lorsqu'on choisit  $p_M^i \approx 10$  MPa. On conserve le même écart de décohésion à la rupture pour l'interface que celui utilisé pour la fissure ( $g_M^i = 3.733\text{E}-6$  mm). Le rapport critique entre le seuil adhésif de l'interface et celui de la fissure pour qu'il y ait déviation de la fissure à l'interface est donc donné par :

$$\mathcal{R} = \frac{p_M^i}{p_M^f} \approx 0.27 \quad (6.34)$$

Monerie [90] obtient un rapport comparable pour une géométrie, des lois des matériaux et tribologiques différentes. L'écart de décohésion de la fissure  $g_M^f$  étant égal à celui de l'interface  $g_M^i$ , ce rapport critique  $\mathcal{R}$  est aussi celui des énergies de Dupré respectives.

**Résultats** – On impose les mêmes déplacements que pour la simulation précédente. On peut ainsi une fois de plus tracer l'évolution du front de fissure (composé de filaments intacts) en fonction du déplacement imposé (Figure 6.35).

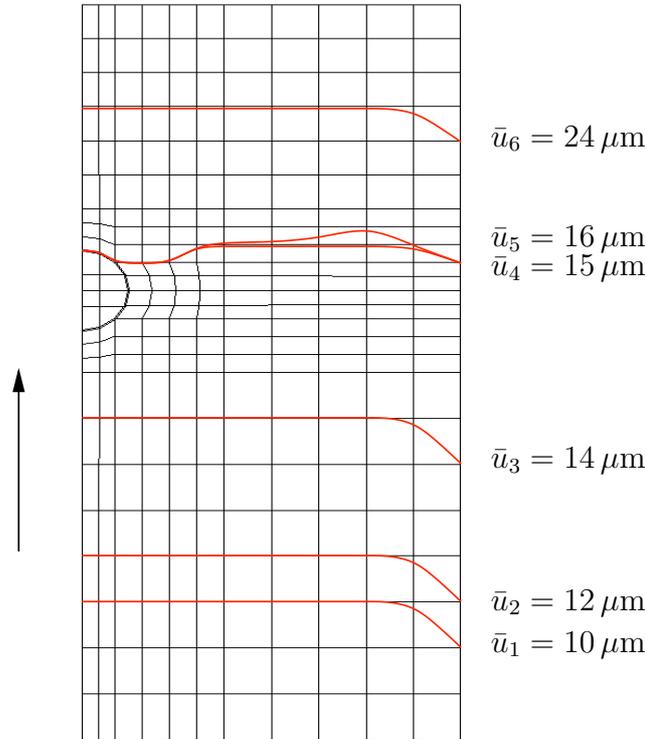


FIG. 6.35 – Evolution du front de fissure dans le plan de fissure ( $z = 0$ ) pour différentes valeurs du déplacement imposé pour une interface endommageable ( $p_M^i = 10$  MPa).

**Sur l'évolution de la fissure** – Lorsqu'on est suffisamment loin de la fibre, le fait que l'interface soit endommageable ne joue aucun rôle et on obtient les mêmes profils que pour une interface parfaite. Cependant, lorsque la fissure s'approche de la fibre ( $\bar{u}_3 = 14 \mu\text{m}$ ), on note déjà un début d'endommagement de l'interface. Celle-ci s'endommage alors sérieusement pour  $\bar{u}_4 = 15 \mu\text{m}$  et retient la fissure presque aussi efficacement que lorsque l'interface est parfaite. Pour  $\bar{u}_5 = 16 \mu\text{m}$ , la fissure évolue peu. Par contre, la décohésion interfaciale se propage alors de manière considérable. Ensuite (lorsque  $\bar{u}_6 = 24 \mu\text{m}$ ), la décohésion interfaciale monte rapidement le long de l'interface et la fissure se propage alors plus loin que si la fissure était pontée par la fibre. Comme le montre aussi Xu et al. [128], la décohésion est inégale autour de la fibre. La figure suivante nous montre la répartition des forces adhésives  $p^a$  autour de la fibre pour un déplacement imposé  $\bar{u}_5$  entraînant une décohésion partielle de l'interface (Figure 6.36).

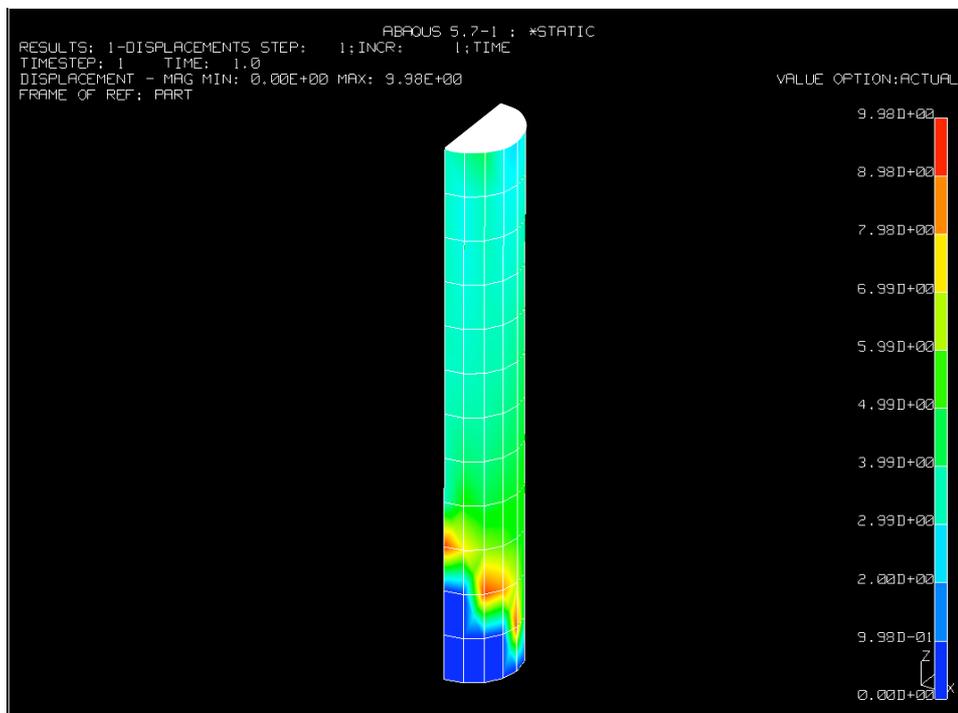


FIG. 6.36 – Répartition de la contrainte adhésive  $p^a$  autour de la fibre pour  $\bar{u}_5 = 16 \mu\text{m}$ . Les forces adhésives nulles (en bleu foncé) indiquent des régions décollées.

### Taux de convergence

Lorsque l'interface ne subit pas d'endommagement et que le plan de fissure est supposé parfait ( $p_M^i = p_M^f = \infty$ ), l'algorithme converge en trois itérations. Ensuite, lorsque l'on propage la fissure dans le plan avec une interface parfaite, le nombre d'itérations est proportionnel à l'avancée de la fissure lorsque celle-ci est relativement éloignée de la fibre. On compte alors une quinzaine d'itérations en

moyenne. Ensuite, lorsque la fissure atteint la fibre, il faut compter plus d'une vingtaine d'itérations. On constate même parfois que l'algorithme avance la fissure d'une longueur trop importante puis recherche un équilibre en faisant reculer la fissure.

### Conclusion

Le pontage d'une fissure semble être un moyen efficace pour ralentir la propagation de la fissure. On essaiera donc d'obtenir une interface aussi forte que possible pour augmenter la résistance d'un composite. Néanmoins, le ralentissement de la propagation de fissure par déviation à l'interface est aussi un moyen relativement important pour augmenter la résistance d'un composite. En effet la déviation reste efficace tant que l'interface n'est pas entièrement décollée. On préconisera donc l'utilisation de fibres longues pour des composites dont la résistance de l'interface est faible. Les figures suivantes (Figure 6.37 et Figure 6.38) montrent la distribution des contraintes et la déformée (amplifiée) des configurations de pontage de fissure et de déchaussement de la fibre, respectivement.

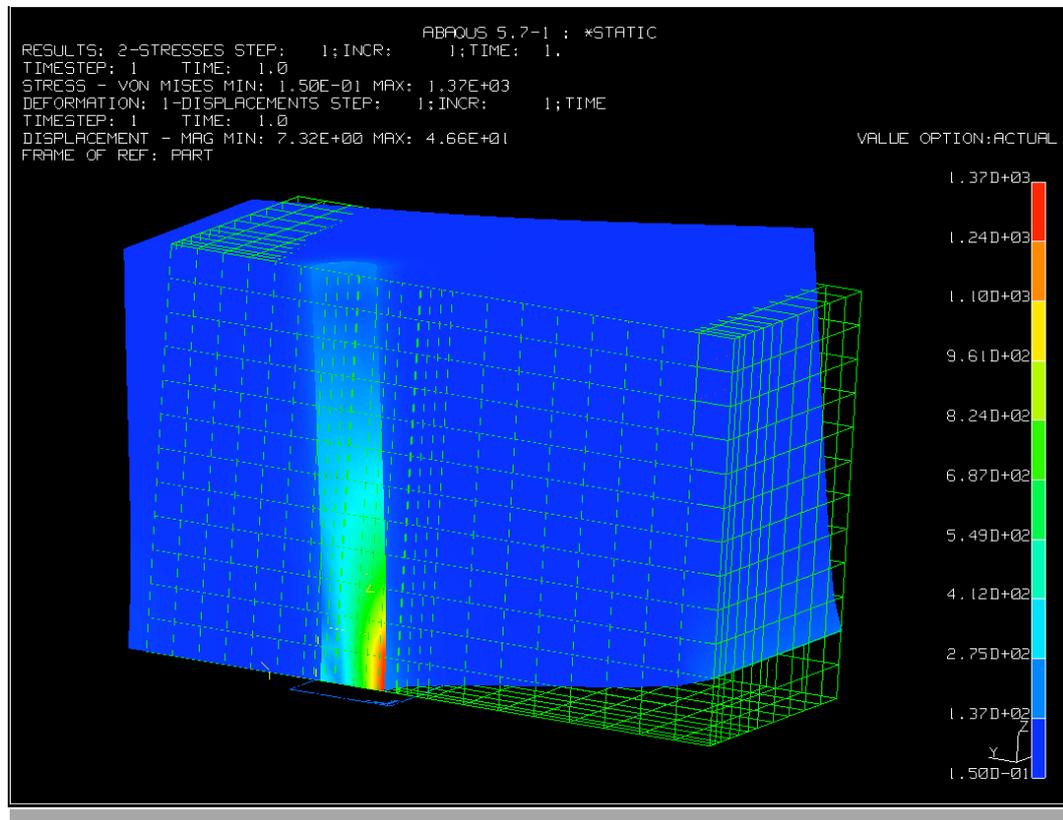


FIG. 6.37 – Contraintes de Von Mises et déformée lors du pontage de la fissure par la fibre ( $\bar{u}_6 = 24 \mu\text{m}$ ).

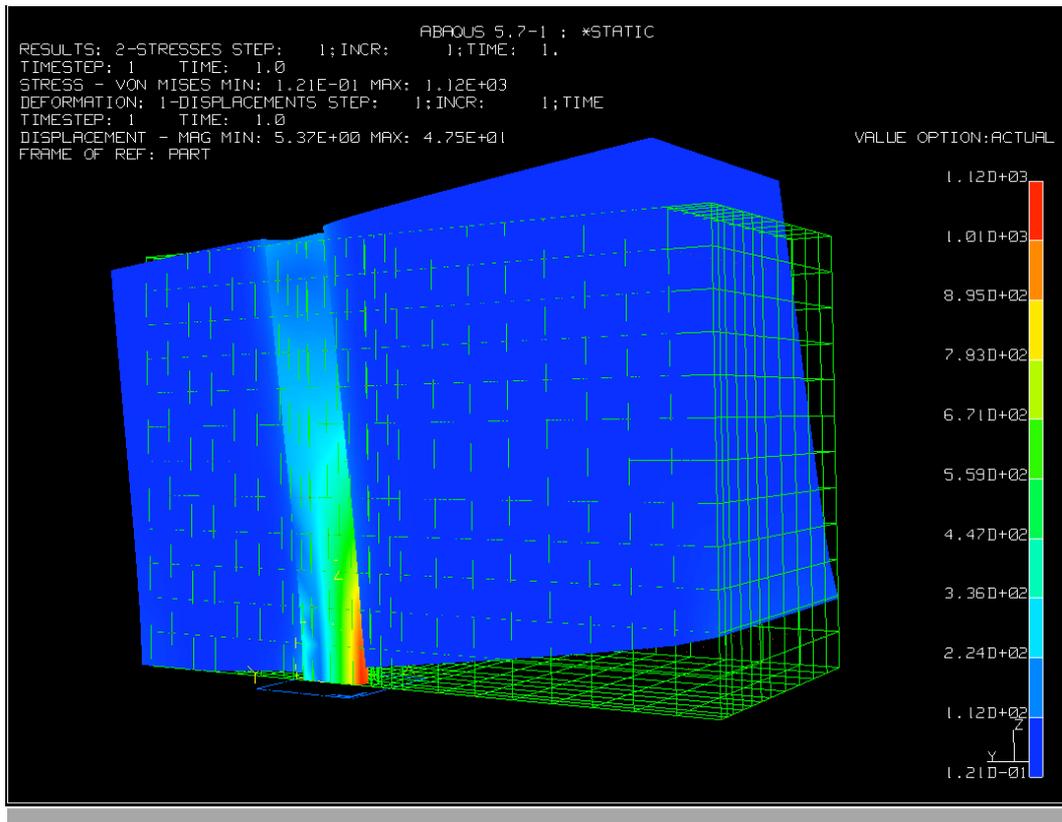


FIG. 6.38 – Contraintes de Von Mises et déformée lors de la déviation de la fissure et du déchaussement de la fibre ( $\bar{u}_6 = 24 \mu\text{m}$ ).

# Chapitre 7

## Conclusion

---

### Synthèse

L'objectif principal de cette thèse est de formuler une loi d'adhésion cohérente et réaliste, couplée à une loi de contact avec frottement. La loi d'adhésion proposée s'inscrit dans le cadre des matériaux standard généralisés étendu aux interfaces. Elle dérive de potentiels d'énergie libre et de dissipation d'interface. Ces potentiels satisfont certaines conditions qui assurent que les principes de la thermodynamique sont respectés par cette loi d'adhésion. Cette dernière est ensuite rajoutée en parallèle à une loi de contact unilatéral avec frottement sec. Selon la normale, le contact régit la pression tandis que l'adhésion régit la tension. Dans le plan tangent, le frottement et l'adhésion se conjuguent pour régir le cisaillement.

Cette loi non-régulière est ensuite régularisée par la méthode de la pénalité et par la technique du Lagrangien augmenté ; dans les deux cas, les forces adhésives sont obtenues par une projection sur le critère de décohesion. Cette loi non-linéaire est encore linéarisée (par cônes). Afin d'être résolue par une méthode itérative de Newton, les matrices Jacobiennes de l'adhésion sont dérivées. Un élément fini de contact avec frottement et adhésion nœud à nœud est ensuite développé dans le code d'éléments finis TACT.

Les paramètres du modèle (les propriétés adhésives) sont ensuite estimés expérimentalement pour des interfaces verre silanisé/époxyde. Une expérience originale a ainsi été développée permettant de mesurer certaines propriétés adhésives normales, et combinée à des résultats d'expériences antérieures.

Le modèle est utilisé tout d'abord pour l'étude du décollement d'un poinçon rigide d'un demi-espace élastique. Ensuite, il est appliqué pour une meilleure compréhension du comportement mécanique des matériaux composites. Une première simulation d'un test d'arrachement permet d'illustrer comment se propage la décohesion le long de l'interface ainsi que de préciser les informations obtenues d'un tel essai. Une seconde simulation d'une fissure se propageant dans un matériau composite indique le profil de la fissure à l'approche de la fibre ainsi que les conditions de déviation/propagation de la fissure.

## Originalité

### Loi d'adhésion

La loi d'adhésion se distingue des précédentes par plusieurs traits originaux. Tout d'abord, l'introduction d'une variable interne cinématique mesurant l'allongement irréversible des filaments de "colle" (étirement), à la place de la variable interne adimensionnelle mesurant localement l'intensité d'adhésion. L'interface adhésive est constituée d'une multitude de filaments adhésifs ayant chacun une loi de comportement de type plastique avec écrouissage adoucissant. Dans le modèle proposé, il n'y a pas d'endommagement de la rigidité des filaments qui reste constante. L'endommagement (élastique) réside dans l'allongement irréversible des filaments. La décohésion s'effectue sur une distance finie au delà de laquelle le filament se rompt et les forces adhésives s'annulent, contrairement aux modèles précédents où la décohésion s'effectue sur une distance infinie, ce qui est peu réaliste même si ces forces deviennent négligeables au delà d'une certaine distance. Le modèle est indépendant des taux et il n'y a pas de viscosité des forces adhésives à l'interface. Enfin, le comportement des filaments est tel que ces derniers n'opposent aucune résistance en compression. De plus, le choix de la fonction indiquant l'allure de la décohésion reste libre. Il est ainsi possible d'adapter le modèle pour différents types de décohésion d'interface.

Le seuil de décohésion n'est plus fixé par l'énergie d'adhésion de Dupré. En effet, le critère de décohésion est dans cette approche un critère en contrainte. L'énergie d'adhésion reste proportionnelle à cette contrainte seuil, mais cependant, pour une même énergie de Dupré il peut y avoir ou non décohésion. Ceci permet de modéliser plusieurs types de colles et mieux caractériser le comportement des différentes interfaces que l'on peut rencontrer.

### Régularisation

La loi de frottement est réécrite de manière équivalente en introduisant une variable interne de glissement. Ceci permet de rapporter toutes les variables cinématiques observables dans le potentiel d'énergie libre, le potentiel de dissipation ne dépendant plus alors que des variables internes et de leur taux. Ainsi, le problème de minimisation se résume à la minimisation des termes de l'énergie libre, le couplage entre les variables cinématiques et internes étant regroupé dans un système d'inclusions qui contraint le problème de minimisation. On justifie ainsi le fait que la pénalisation du frottement ne s'effectue pas sur le graphe en vitesse (provenant de la dissipation) mais résulte d'un terme élastique (provenant de l'énergie libre). Jusqu'ici, ce terme élastique était simplement rajouté lors de la pénalisation. On montre que ce terme provient d'une barre rigide ajoutée en série à la loi de frottement.

De même, la technique du Lagrangien augmenté est appliquée au potentiel d'énergie libre contraint par le système d'inclusions. La résolution incrémentale

de ce système d'inclusions permet de retrouver une formulation en Lagrangien augmenté du frottement identique à celle obtenue lorsqu'on n'introduit pas de variable interne dans la formulation du frottement (et que toutes les variables sont cinématiques). La technique du Lagrangien augmenté est donc ici appliquée à un problème à variable interne.

Par sa formulation, les termes de l'énergie libre regroupent d'emblée les variables cinématiques, le potentiel de dissipation ne dépendant que de variables internes. Les méthodes de la pénalité et du Lagrangien augmenté sont donc de manière similaire appliquées à l'adhésion par la même approche de résolution des systèmes d'inclusions couplé au problème de minimisation des termes d'énergie libre.

## Expériences

Une expérience permettant d'estimer la contrainte de décohésion  $p_M$  d'une interface a été développée. En effet, la plupart des techniques existantes mesurent cette propriété de l'adhésion lorsqu'elle est couplée au frottement. Il est ainsi difficile de distinguer les contributions de chacun de ces phénomènes. Par la formulation de la loi d'adhésion proposée, la détermination des propriétés normales à l'interface est suffisante pour la calibration du modèle. Cependant, cette expérience n'a permis de déterminer qu'un seul des deux paramètres en raison de la vitesse du processus de décohésion due à son instabilité.

## Simulations numériques

La validation de l'algorithme de l'adhésion, notamment de la projection des forces adhésives et des tenseurs Jacobiens de l'adhésion (ainsi que leur implémentation) ont été effectuées pour les trois dimensions, en pénalité et en Lagrangien augmenté.

Les simulations numériques du décollement d'un poinçon rigide collé sur un demi-espace élastique ont démontré que ces problèmes sont abordables par l'approche de la mécanique des contacts, le problème ayant été étudié par une approche de la mécanique de la rupture. On a montré ainsi que la décohésion dépend du profil du poinçon et que celle-ci peut devenir stable en choisissant des profils de poinçon concaves. Ceci peut s'avérer très utile pour concevoir un essai expérimental avec une propagation de fissure stable.

## Perspectives

### Loi d'adhésion

Si on s'intéresse surtout à des interfaces à rupture de type fragile, la décohésion est si brutale qu'un cycle de décharge-recharge n'est jamais observé. On a donc  $g_M \rightarrow 0$ . Il serait donc plus simple de supprimer le paramètre  $g_M$  de la formulation.

Cependant, on aurait alors  $p_M \rightarrow \infty$  et le travail d'adhésion devient indéfini. La question reste ouverte.

### Intégration numérique

On constate au cours des simulations numériques une convergence linéaire des statuts de contact de la méthode de Newton généralisée dans la phase préliminaire de détection. Une méthode performante devrait parvenir à préserver la convergence quadratique de la méthode de Newton standard même lors de cette phase préliminaire. Ce point nécessite d'être approfondi, et éventuellement la recherche ou l'amélioration de la méthode d'intégration considérée.

Le calcul des aires de contact tributaires s'effectue de manière approximative et l'erreur commise dépend notamment de la régularité du maillage. Ceci affecte la précision du calcul des pressions de contact, et surtout de la tension adhésive  $p^a$ . Si  $p^a$  est sur-évalué ou sous-évalué, on aura rupture "prématurée" du filament ou résistance anormale de celui-ci, respectivement. Par conséquent, le calcul des aires tributaires est déterminant, et pour minimiser les erreurs commises, on préconisera un maillage aussi régulier et aussi fin que possible. Dans le cadre de travaux futurs, il serait approprié et commode d'établir une méthode plus précise que celle existante pour évaluer les aires tributaires de contact.

### Expériences

La détermination de  $g_M$  reste problématique pour des interfaces à rupture fragile. Comme préconisé dans cette thèse, une solution consiste à déterminer le pic d'adhésion  $p_M$  par un premier essai (de traction, comme celui réalisé dans ce travail) puis l'énergie d'interface  $w$  par un second essai (de poinçonnement) pour en déduire l'écart à la rupture  $g_M = 2w/p_M$  cherché.

On peut aussi améliorer la précision des instruments d'acquisition des données mais l'investissement risque d'être trop grand par rapport aux informations recueillies.

Il est clair que si l'on supprime  $g_M$  comme suggéré précédemment, ce problème se trouve résolu du même coup. Par contre, on perd alors la possibilité de pouvoir modéliser des décohésions d'interfaces de type différent (ductile, fragile).

### Simulations numériques

Considérant le problème du poinçon rigide sur un demi-espace élastique, on pourrait utiliser le modèle développé pour valider la solution proposée par DMT (Derjaguin–Muller–Toporov [30]) qui suppose la présence de forces adhésives hors de la zone de contact. Il serait aussi intéressant d'étudier le comportement du modèle ici proposé en relation avec le modèle proposé par Maugis [86] qui s'affranchit du fait que les zones adhésives correspondent à des surfaces de contact préalablement comprimées.

---

Souvent, une zone plastique se développe dans la résine autour du front de fissure. Il serait intéressant d'étudier la propagation d'une fissure à l'aide des éléments d'adhésion développés dans une matrice modélisée avec une loi de comportement élasto-plastique, en mettant l'accent sur une comparaison avec la mécanique de la rupture.

On pourrait encore aller plus loin en introduisant des éléments d'adhésion entre tous les éléments solides non-connectés d'un maillage. On serait alors en mesure d'étudier la propagation d'une fissure dans des directions non-prédéfinies.

Le domaine d'application de ce modèle reste relativement vaste car il s'applique à tout assemblage adhésif. Une application intéressante serait dans le domaine de la biomécanique, notamment pour la modélisation des ligaments (osseux, par exemple). En effet, une analyse plus détaillée de ces ligaments montre qu'ils sont constitués d'une multitude de filaments possédant chacun une loi de décohésion. De plus, ces derniers se prêtent mieux, en raison de l'échelle, à une détermination expérimentale des paramètres adhésifs, notamment par leur élongation avant rupture qui est mesurable. La fonction de décohésion serait ensuite adaptée selon leur comportement en étirement. Cependant, il faudrait alors introduire de la viscosité dans le modèle, car celle-ci ne peut plus être négligée. On pourrait ensuite éventuellement prévoir la force d'arrachement d'une dent, par exemple.



# Annexe A

## Rappels de base d'analyse convexe

---

### Généralités

Cette annexe contient les principaux résultats de l'analyse convexe et d'optimisation utilisés dans le cadre de cette étude. Pour une présentation plus exhaustive, on pourra se référer entre autres à Rockafellar [111], Moreau [94], Van Tiel [124], Hiriart–Urruty [59] et Hiriart–Urruty–Lemaréchal [58]. Ce résumé s'inspire aussi notamment de [23], [118] et de [43].

### Notions d'analyse convexe

#### Définitions

Un *cône*  $\mathcal{K}$  est un sous-ensemble (de  $\mathbf{R}^n$ ) constitué de rayons issus de l'origine, et donc invariant par une multiplication positive :

$$\mathcal{K} \subset \mathbf{R}^n \mid \forall \mathbf{x} \in \mathcal{K}, \forall \lambda \geq 0, \text{ on a } \lambda \mathbf{x} \in \mathcal{K}$$

Un *ensemble convexe* est un sous-ensemble (de  $\mathbf{R}^n$ ) tel que tout segment délimité par deux points de l'ensemble est entièrement contenu dans l'ensemble :

$$\mathcal{C} \subset \mathbf{R}^n \mid \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{C}, \forall \lambda \in [0, 1], \text{ on a } (1 - \lambda)\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y} \in \mathcal{C}$$

La fonction  $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$  est dite *convexe* si :

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^n, \forall \lambda \in [0, 1], \text{ on a } f(\lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda)\mathbf{y}) \leq \lambda f(\mathbf{x}) + (1 - \lambda)f(\mathbf{y})$$

Une fonction convexe  $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$  est *propre* sur  $\mathbf{R}^n$  si elle n'est pas identiquement égale à  $+\infty$ .

Soit une fonction  $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$  et  $\mathbf{a} \in \mathbf{R}^n$ .  $f$  est dite *semi-continue inférieurement* au point  $\mathbf{a}$  si quel que soit  $K \in \mathbf{R}$  tel que  $K < f(\mathbf{a})$ , il existe un voisinage  $\mathbf{U}$  autour de  $\mathbf{a}$  tel que  $f(\mathbf{U}) > K$ .  $f$  est dite *semi-continue inférieurement* si  $f$  est semi-continue inférieurement en tout point de  $\mathbf{R}^n$ .

La fonction *indicatrice*  $I_{\mathcal{C}} : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$  d'un ensemble non-vide  $\mathcal{C}$  est définie par :

$$I_{\mathcal{C}}(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0 & \text{si } \mathbf{x} \in \mathcal{C} \\ +\infty & \text{si } \mathbf{x} \notin \mathcal{C} \end{cases}$$

Si  $\mathcal{C}$  est un ensemble convexe, alors  $I_{\mathcal{C}}$  est une fonction convexe (et vice-versa).

Le sous-différentiel  $\partial f(\mathbf{x})$  au point  $\mathbf{x}$  d'une fonction convexe  $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  est l'ensemble des *sous-gradients*  $\mathbf{y} \in \mathbf{R}^n$ .

$$\partial f(\mathbf{x}) = \{\mathbf{y} \in \mathbf{R}^n \mid \mathbf{y} \cdot (\mathbf{z} - \mathbf{x}) + f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{z}), \quad \forall \mathbf{z} \in \mathbf{R}^n\}$$

où  $(\cdot)$  denote le produit scalaire dans  $\mathbf{R}^n$ .

### Proposition

Soit un ensemble convexe  $\mathcal{C}$  défini par  $m$  fonctions convexes  $f_i$  :

$$\mathcal{C} = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \mid f_i(\mathbf{x}) \leq 0, \quad i = 1 \dots m\}, \quad f_i \in C^1$$

Alors le sous-différentiel de la fonction indicatrice de cet ensemble s'écrit :

$$\partial I_{\mathcal{C}}(\mathbf{x}) = \{\mathbf{y} \in \mathbf{R}^n \mid \mathbf{y} = \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla f_i, \quad f_i \leq 0, \quad \lambda_i \leq 0, \quad \lambda_i f_i = 0\}$$

## Projection sur un convexe

### Définitions

Soit  $\|\cdot\|$  la norme Euclidienne dans  $\mathbf{R}^n$ . La longueur d'un segment  $[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$  ou la distance entre deux points  $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$  et  $\mathbf{y} \in \mathbf{R}^n$  est donnée par  $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ .

La *distance* d'un point  $\mathbf{x}$  à un ensemble convexe fermé non-vide  $\mathcal{C}$  est définie comme la distance minimale entre ce point  $\mathbf{x}$  et tout point  $\mathbf{y}$  de l'ensemble. La distance est notée  $D_{\mathcal{C}}(\mathbf{x})$ , et on a :

$$D_{\mathcal{C}}(\mathbf{x}) \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|, \quad \forall \mathbf{y} \in \mathcal{C}$$

La *projection* d'un point  $\mathbf{x}$  sur un ensemble convexe fermé non-vide  $\mathcal{C}$  est définie comme le point le plus proche de  $\mathbf{x}$  appartenant à  $\mathcal{C}$ . La projection est notée  $P_{\mathcal{C}}(\mathbf{x})$ , et on a :

$$\|P_{\mathcal{C}}(\mathbf{x}) - \mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|, \quad \forall \mathbf{y} \in \mathcal{C}, \quad P_{\mathcal{C}}(\mathbf{x}) \in \mathcal{C}$$

Soit  $\mathcal{K} \subset \mathbf{R}^n$  un cône. Le cône polaire  $\mathcal{K}^0 \subset \mathbf{R}^n$  est défini par :

$$\mathcal{K}^0 = \{\mathbf{y} \in \mathbf{R}^n \mid \mathbf{y} \cdot \mathbf{x} \leq 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{K}\}$$

### Lemme

La dérivée de la moitié de la distance à un cône  $\mathcal{K}$  au carré est égale à la projection sur le cône polaire  $\mathcal{K}^0$ .

Par exemple,  $\mathbf{R}^-$  est le cône polaire de  $\mathbf{R}^+$ . On peut donc écrire :

$$\left(\frac{1}{2}D_{\mathbf{R}^+}^2(x)\right)' = P_{\mathbf{R}^-}(x)$$

### Propositions

1. Si  $\mathcal{K} = \mathbf{R}^+ = \{x \in \mathbf{R} : x \geq 0\}$ , alors pour  $x \in \mathbf{R}$  :

$$P_{\mathbf{R}^+}(x) = \max(0, x) = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où l'opérateur "max" signifie le maximum des deux arguments.

2. Si  $\mathcal{K} = \mathbf{R}^- = \{x \in \mathbf{R} : x \leq 0\}$ , alors pour  $x \in \mathbf{R}$  :

$$P_{\mathbf{R}^-}(x) = \min(0, x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où l'opérateur "min" signifie le minimum des deux arguments.

3. Si  $\mathcal{C} = (-\infty, r] = \{x \in \mathbf{R} : x \leq r\}$ , alors pour  $x \in \mathbf{R}$  :

$$P_{(-\infty, r]}(x) = \min(r, x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq r \\ r & \text{sinon} \end{cases}$$

où l'opérateur "min" signifie le minimum des deux arguments.

4. Si  $\mathcal{B}_r = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^2 : \|\mathbf{x}\| \leq r\}$ , alors pour  $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^2$  :

$$P_{\mathcal{B}_r}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \mathbf{x} & \text{si } \mathbf{x} \in \mathcal{B}_r \\ r \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} & \text{sinon} \end{cases}$$



# Annexe B

## Algorithme de projection pour l'adhésion

---

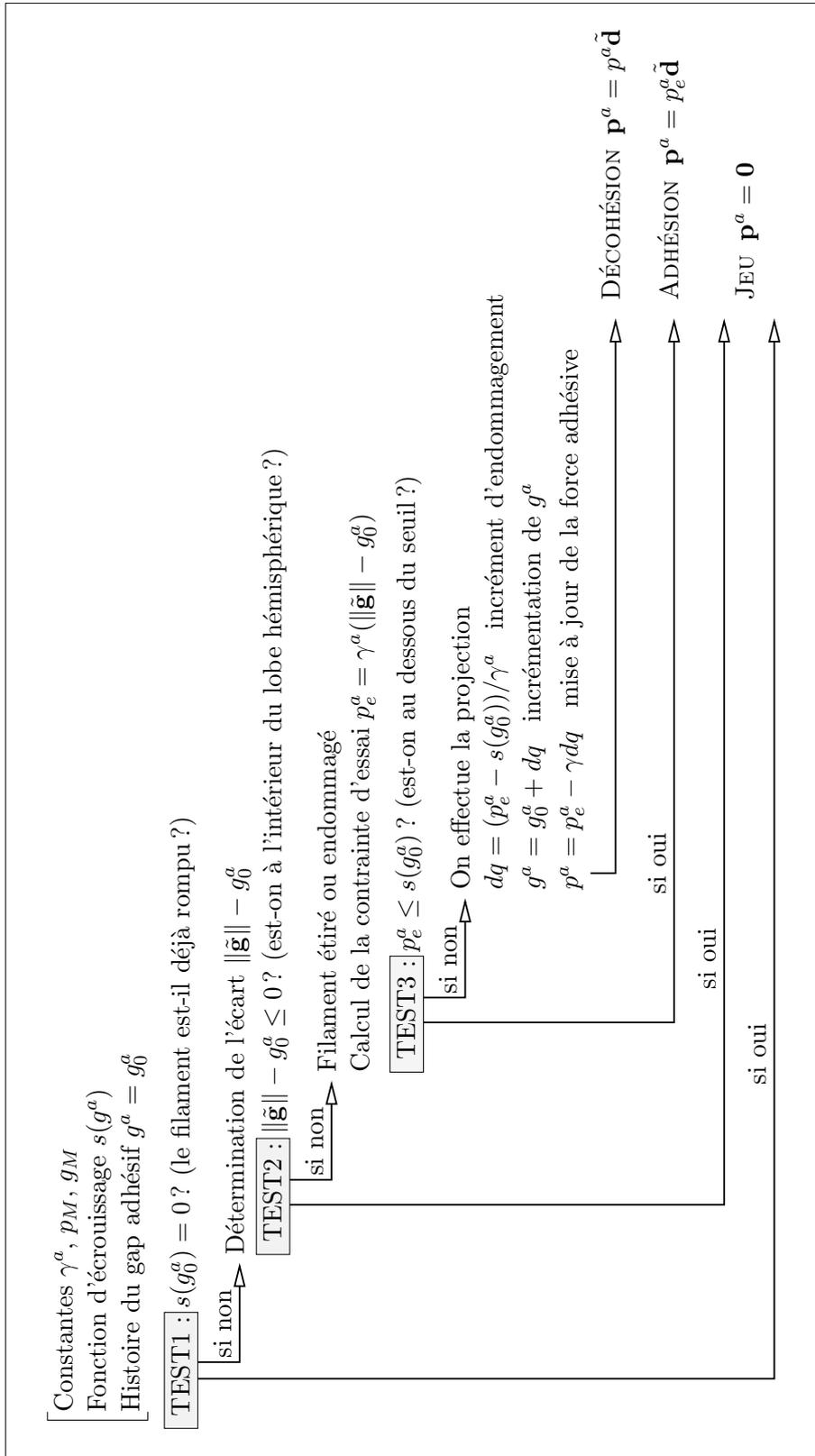
### Généralités

Dans cette annexe, nous présentons l'algorithme de projection de la loi d'adhésion d'abord lorsqu'elle est régularisée par la pénalité puis lorsqu'elle l'est par celle du Lagrangien augmenté. En réalité, le même algorithme de projection est utilisé et adapté à la régularisation. Le Lagrangien augmenté se distingue par le calcul de l'action  $h^a$  agissant sur le nœud de Lagrange d'adhésion, en plus de la contrainte adhésive  $\mathbf{p}^a$ . L'algorithme de projection consiste à calculer une contrainte d'essai "adhésive" et, si elle viole le critère d'adhésion, à la projeter sur ce critère. Il s'appelle aussi l'algorithme de retour radial ou de rafle d'un convexe. L'algorithme de projection se décompose en une série de trois tests :

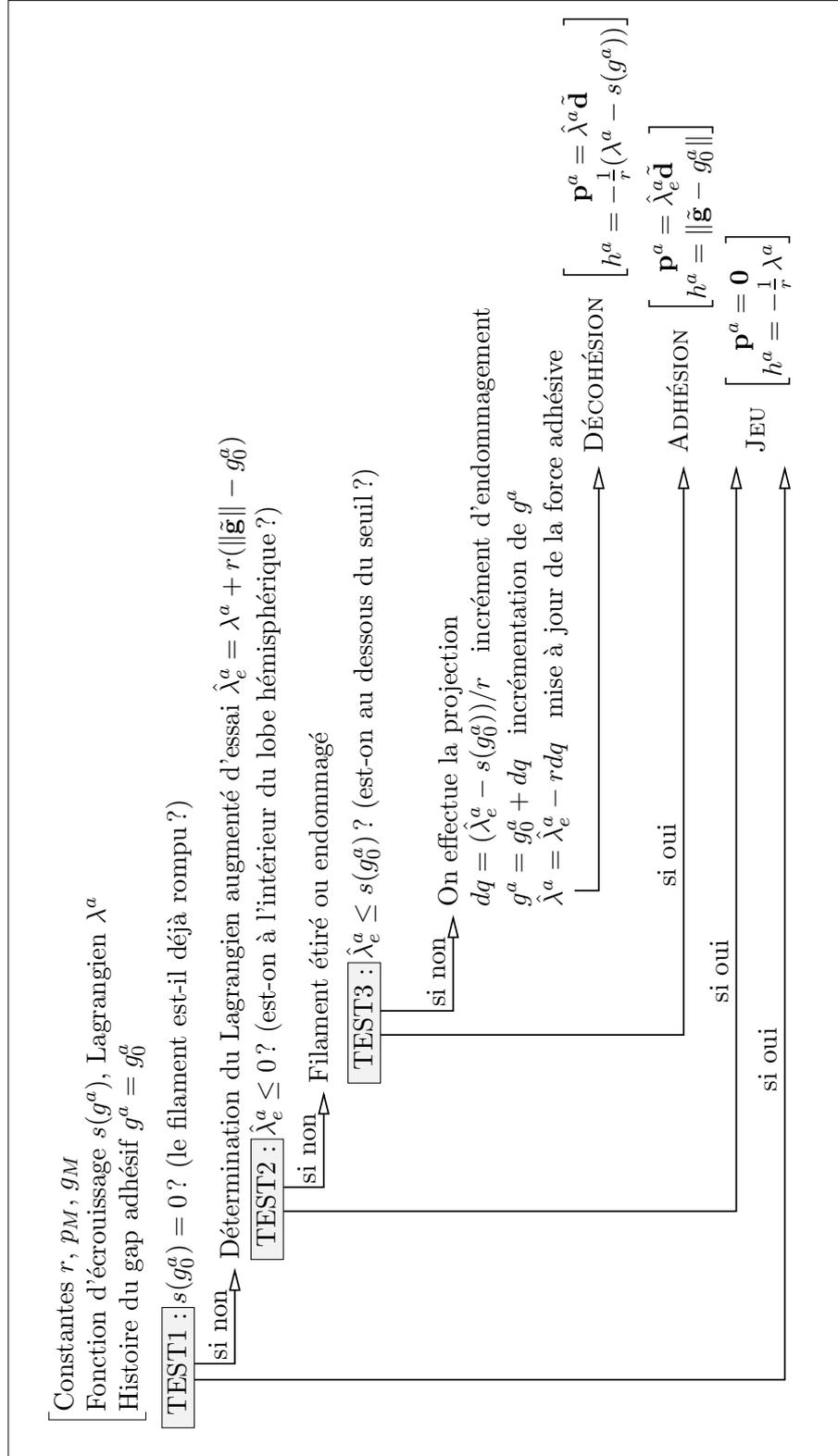
- Le premier test consiste à contrôler que le filament n'est pas déjà complètement endommagé. Si c'est le cas, le statut jeu est alors déclaré ce qui évite d'effectuer des projections sur un critère d'emblée nul.
- Dans le test suivant, on distingue le statut jeu des autres statuts en déterminant si le vecteur écart est à l'intérieur du lobe hémisphérique.
- Si ce n'est pas le cas, les filaments adhésifs supportent une charge. Le troisième test examine si la charge supportée est supérieure à la charge critique. Si c'est le cas, l'état de décohésion est déclaré et la projection s'effectue. Sinon, l'état est adhésif et on peut entériner la contrainte adhésive.

L'algorithme de la loi de contact avec frottement est effectué avant celui de l'adhésion. Le couplage avec l'adhésion résulte de l'influence des statuts du contact avec frottement sur l'adhésion. On exprime ainsi le fait que le statut du contact influence la direction de la force adhésive et que l'adhérence prime sur l'adhésion. Ceci est représenté sous la forme d'un organigramme.

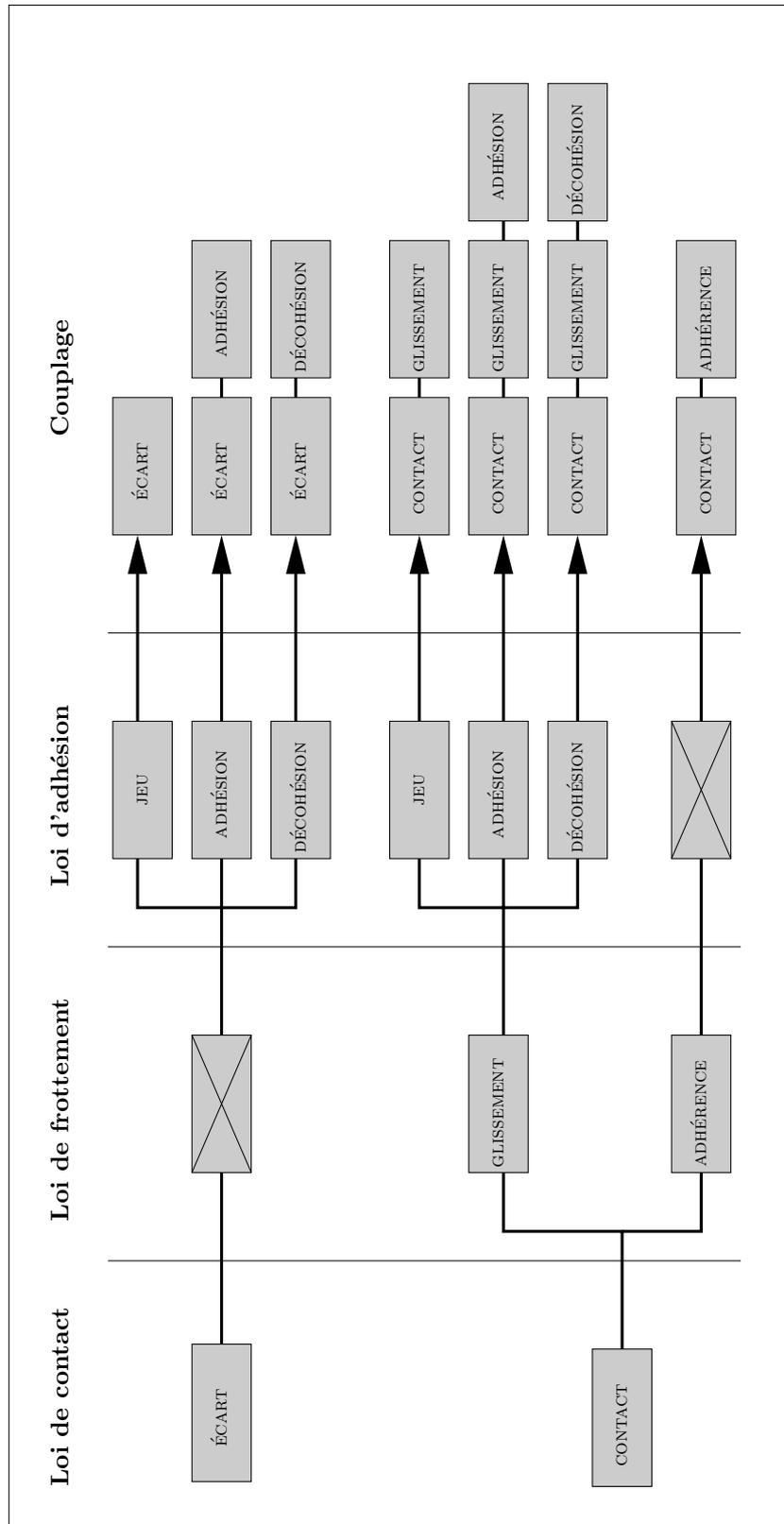
Algorithme d'adhésion en pénalité



## Algorithme d'adhésion en Lagrangien augmenté



Organigramme du couplage du contact avec frottement et de l'adhésion



## Annexe C

# Analyse du transfert de charge à l'interface fibre/matrice d'un test d'arrachement

---

Cette annexe s'inspire largement de Kim et Mai [73].

### Description

Le modèle d'arrachement d'une fibre basée sur l'analyse dite du "shear-lag" (représenté en figure C.1) consiste en une fibre (de rayon  $R_f = a$ ) encastrée au centre d'un cylindre coaxial de matrice (de rayon  $R_m = b$ ). Le rapport du volume de fibre sur celui de la matrice est noté  $\varphi = \frac{a^2}{b^2 - a^2}$ .  $L$  est la longueur totale de fibre encastrée. Nous supposons aussi un début de décohésion (décohésion partielle) de longueur  $l$ . Une contrainte de traction  $\sigma$  est appliquée à l'extrémité de la fibre (à  $z = 0$ ) tandis que la base du cylindre de la résine est encastrée (à  $z = L$ ). L'autre extrémité (en  $z = L$ ) de la fibre est libre.

Nous choisissons le système de coordonnées cylindriques  $\{r, \theta, z\}$  pour mieux décrire la configuration axisymétrique du problème. Dans ce cadre, nous supposons les matériaux de la matrice et de la fibre à la fois élastiques et isotropes, et les composantes de la contrainte ( $\sigma^r, \sigma^\theta, \sigma^z, \tau^{rz}$ ) et du déplacement ( $u^r, u^z$ ) indépendantes de  $\theta$ , les autres composantes étant nulles. La contrainte appliquée est transférée de la fibre à la matrice par l'intermédiaire de la contrainte de cisaillement d'interface  $\tau_i(z)$ .

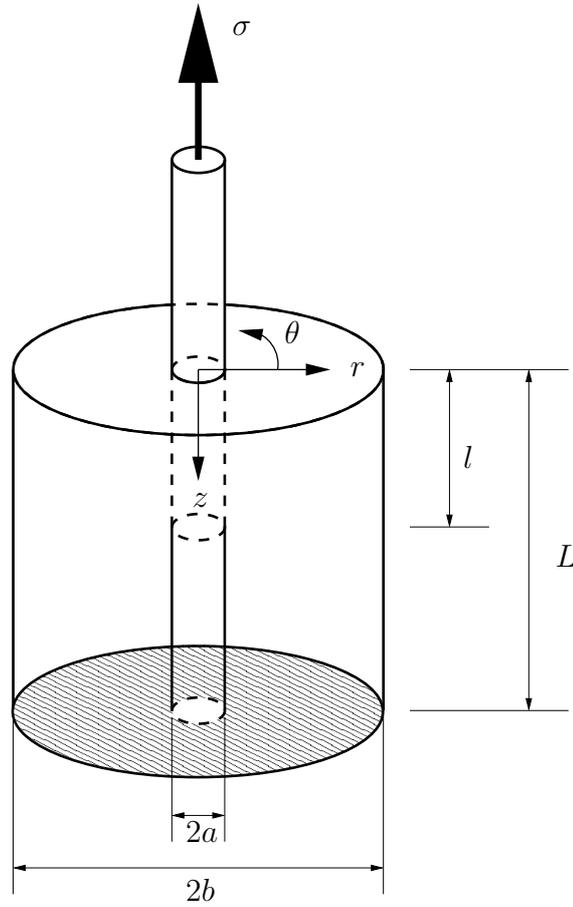


FIG. C.1 – Schéma du test d'arrachement avec décohésion partielle.

## Résolution analytique

Les relations contraintes-déformations générales s'écrivent :

$$\epsilon_f^z(r, z) = \frac{1}{E_f} \left( \sigma_f^z(r, z) - \nu_f [\sigma_f^r(r, z) + \sigma_f^\theta(r, z)] \right) \quad (\text{C.1})$$

$$\epsilon_m^z(r, z) = \frac{1}{E_m} \left( \sigma_m^z(r, z) - \nu_m [\sigma_m^r(r, z) + \sigma_m^\theta(r, z)] \right) \quad (\text{C.2})$$

$$\epsilon_m^{rz}(r, z) = \frac{2(1 + \nu_m)}{E_m} \tau_m^{rz}(r, z) \quad (\text{C.3})$$

où les indices  $f$ ,  $m$  et  $i$  se rapportent à la fibre, à la matrice et à l'interface, respectivement.  $E$  désigne le module de Young et  $\nu$  le coefficient de Poisson. De plus, les conditions d'équilibre mécanique entre les composants du composite s'écrivent :

$$\sigma = \sigma_f^z(z) + \frac{1}{\varphi} \sigma_m^z(z) \quad (\text{C.4})$$

$$\frac{d\sigma_f^z(z)}{dz} = -\frac{2}{a}\tau_i(z) \quad (\text{C.5})$$

$$\frac{\partial\sigma_m^z(z)}{\partial z} + \frac{\partial\tau_m^{rz}(r, z)}{\partial r} + \frac{\tau_m^{rz}(r, z)}{r} = 0 \quad (\text{C.6})$$

La contrainte axiale moyenne dans la matrice  $\sigma_m^z(z)$  de l'équation (C.4) est définie par l'expression suivante en déformation plane :

$$\sigma_m^z(z) = \frac{2}{b^2 - a^2} \int_a^b \sigma_m^z(r, z) r dr \quad (\text{C.7})$$

### Solution pour les composantes de la contrainte dans la zone intacte ( $l \leq z \leq L$ )

La surface cylindrique de la matrice étant libre et du fait que la contrainte de cisaillement de la matrice  $\tau_m^{rz}(r, z)$  est égale à la contrainte de cisaillement d'interface  $\tau_i(r, z)$  à l'interface ( $r = a$ ), on a :

$$\tau_m^{rz} = \frac{\varphi(b^2 - r^2)}{ar} \tau_i^{rz}(z) \quad (\text{C.8})$$

Les déplacements axiaux étant continus à l'interface ( $u_m^z(a, z) = u_f^z(a, z)$ ), la combinaison de (C.3) et de (C.8), puis la dérivation par rapport à  $z$  donne :

$$\frac{d\tau_i(z)}{dz} = \frac{aE_m[\epsilon_m^z(b, z) - \epsilon_f^z(a, z)]}{(1 + \nu_m)[2\varphi b^2 \ln(b/a) - a^2]} \quad (\text{C.9})$$

Il faut aussi tenir compte d'une contrainte radiale à l'interface supplémentaire  $q^*(z)$ , provenant de la contraction par effet de Poisson de la fibre soumise à une tension axiale. Elle est obtenue par l'hypothèse de continuité des déformations tangentes à l'interface ( $\epsilon_f^\theta(a, z) = \epsilon_m^\theta(a, z)$ ) :

$$q^*(z) = \frac{\zeta\nu_f\sigma_f^z(z) - \nu_m\sigma_m^z(z)}{\zeta(1 - \nu_f) + 1 + \nu_m + 2\varphi}, \quad \zeta = \frac{E_m}{E_f} \quad (\text{C.10})$$

avec  $\zeta$  le rapport des modules de Young. En combinant les équations (C.3), (C.4), (C.9) et (C.10), nous obtenons une équation différentielle du second degré pour la contrainte axiale dans la fibre  $\sigma_f^z(z)$  :

$$\frac{1}{A_1} \frac{d^2\sigma_f^z(z)}{dz^2} - \sigma_f^z(z) = \frac{A_2}{A_1} \sigma \quad (\text{C.11})$$

avec :

$$A_1 = \frac{2[\zeta(1 - 2k\nu_f) + \varphi(1 - 2k\nu_m)]}{(1 + \nu_m)[2\varphi b^2 \ln(b/a) - a^2]}$$

$$\frac{A_2}{A_1} = -\frac{\varphi(1 - 2k\nu_m)}{\zeta(1 - 2k\nu_f) + \varphi(1 - 2k\nu_m)}$$

$$k = \frac{\zeta\nu_f + \varphi\nu_m}{\zeta(1 - \nu_f) + 1 + \nu_m + 2\varphi}$$

Avec les conditions aux limites :

$$\sigma_f^z(l) = \sigma_l = \sigma - \omega(\bar{\sigma} - \sigma)[\exp(\eta l) - 1] \quad , \quad \sigma_f^z(L) = 0 \quad (\text{C.12})$$

$\bar{\sigma}$  et  $\eta$  étant définis plus loin.

Nous obtenons ainsi des solutions pour la contrainte axiale dans la fibre  $\sigma_f^z(z)$  et dans la matrice  $\sigma_m^z(z)$ , les contraintes de cisaillement dans la matrice  $\tau_m^{rz}(z)$  et à l'interface  $\tau_i(z)$  :

$$\sigma_f^z(z) = \sigma \left[ \frac{\left[ \frac{A_2}{A_1} + \frac{\sigma_l}{\sigma} \right] \sinh[\sqrt{A_1}(L - z)] - \frac{A_2}{A_1} \sinh[\sqrt{A_1}(l - z)]}{\sinh[\sqrt{A_1}(L - l)]} - \frac{A_2}{A_1} \right] \quad (\text{C.13})$$

$$\sigma_m^z(z) = \sigma \left[ -\varphi \frac{\left[ \frac{A_2}{A_1} + \frac{\sigma_l}{\sigma} \right] \sinh[\sqrt{A_1}(L - z)] - \frac{A_2}{A_1} \sinh[\sqrt{A_1}(l - z)]}{\sinh[\sqrt{A_1}(L - l)]} + \varphi \frac{A_2}{A_1} \right] \quad (\text{C.14})$$

$$\tau_m^{rz}(r, z) = \frac{\sigma\varphi\sqrt{A_1}(b^2 - r^2)}{2r} \left[ \frac{\left[ \frac{A_2}{A_1} + \frac{\sigma_l}{\sigma} \right] \cosh[\sqrt{A_1}(L - z)] - \frac{A_2}{A_1} \sinh[\sqrt{A_1}(l - z)]}{\sinh[\sqrt{A_1}(L - l)]} \right] \quad (\text{C.15})$$

$$\tau_i(z) = \sigma a \sqrt{A_1} \left[ \frac{\left[ \frac{A_2}{A_1} + \frac{\sigma_l}{\sigma} \right] \cosh[\sqrt{A_1}(L - z)] - \frac{A_2}{A_1} \cosh[\sqrt{A_1}(l - z)]}{\sinh[\sqrt{A_1}(L - l)]} \right] \quad (\text{C.16})$$

Dans ce cadre,  $\sigma_l$  est défini comme la contrainte s'appliquant dans la région limite (à  $z = l$ ) entre la partie intacte et la partie décollée de l'interface (la pointe de la fissure).

### Solution pour les composantes de la contrainte dans la zone décollée ( $0 \leq z \leq l$ )

On suppose qu'il apparaît des phénomènes de glissement dans la région décollée, et le transfert de charge à travers l'interface s'opère par une loi de frottement de Coulomb avec un coefficient de frottement constant  $\mu$  :

$$\tau_i(z) = -\mu[q_0 + q^*(z)] \quad (\text{C.17})$$

où  $q_0$  est la contrainte résiduelle (de compression) de direction radiale résultant du rétrécissement de la matrice sur la fibre dû au refroidissement de la matrice de

sa température de coulage à la température ambiante. En combinant les équations (C.1), (C.4), (C.5), (C.8) et (C.17), en tenant compte des conditions aux limites suivantes :

$$\sigma_f^z(0) = \sigma \quad (\text{C.18})$$

et de l'équation (C.12) à  $z = l$ , nous obtenons des solutions pour les composantes des contraintes :

$$\sigma_f^z(z) = \sigma - \omega(\bar{\sigma} - \sigma)[\exp(\eta z) - 1] \quad (\text{C.19})$$

$$\sigma_m^z(z) = \varphi\omega(\bar{\sigma} - \sigma)[\exp(\eta z) - 1] \quad (\text{C.20})$$

$$\tau_m^{rz}(r, z) = \frac{\varphi\eta\omega(b^2 - r^2)}{2r}(\bar{\sigma} - \sigma)\exp(\eta z) \quad (\text{C.21})$$

$$\tau_i(z) = \frac{a\eta\omega}{2}(\bar{\sigma} - \sigma)\exp(\eta z) \quad (\text{C.22})$$

avec :

$$\omega = \frac{\zeta\nu_f}{\zeta\nu_f + \varphi\nu_m} \quad , \quad \eta = \frac{2\mu k}{a} \quad , \quad \bar{\sigma} = -\frac{q_0}{\omega k}$$

## Illustration

Les distributions de contraintes sont illustrées à la figure C.2. Notons la concentration de contrainte apparaissant au front de fissure, où le cisaillement  $\tau_i(z)$  est discontinu. La décroissance vers l'extrémité où s'applique la charge des contraintes axiales de la fibre et de cisaillement d'interface dans la région décollée est un effet direct de Poisson résultant de la contraction latérale de la fibre soumise à une traction.

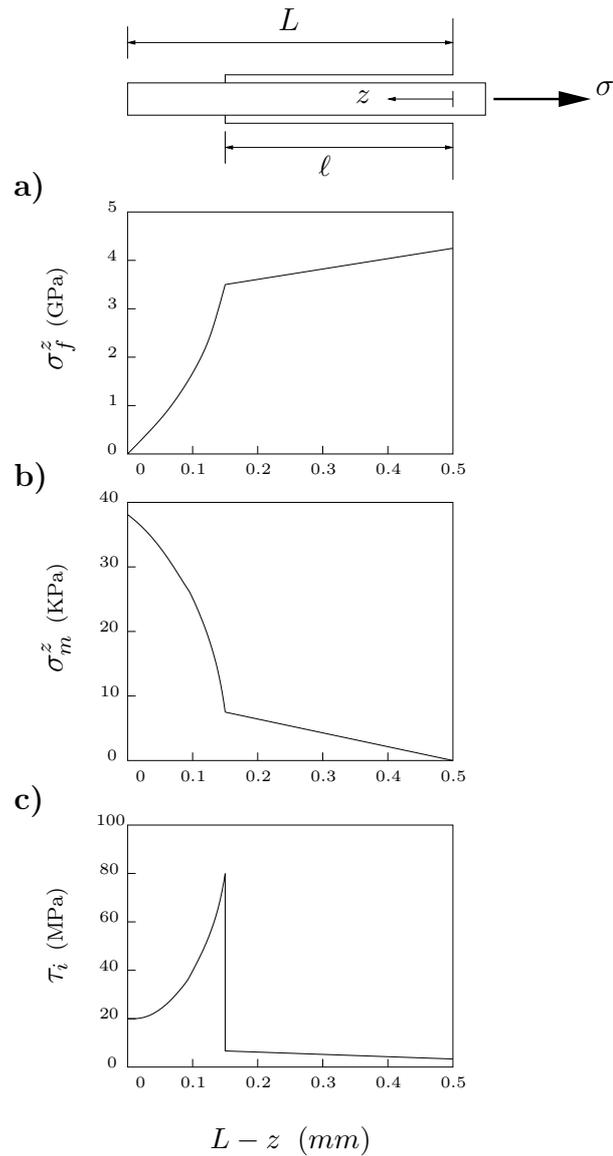


FIG. C.2 – Répartition des contraintes lors d'un test d'arrachement d'une fibre d'un matériau composite, ayant au préalable subi une décohésion partielle de longueur  $l$ , par la méthode dite du "shear-lag". On distingue **a)** contraintes axiales de la fibre  $\sigma_f^z$ , **b)** contraintes axiales de la matrice  $\sigma_m^z$  et **c)** contrainte de cisaillement interfacique  $\tau_i$  le long de l'interface. (D'après [73])

# Bibliographie

- [1] P. Alart. Multiplicateurs “augmentés” et méthode de Newton généralisée pour contact avec frottement. Rapport technique, Laboratoire de mécanique appliquée. DMA EPFL, Lausanne (1988).
- [2] P. Alart et A. Curnier. A mixed formulation for frictional contact problems prone to Newton like methods. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, **92** (3), 353–375 (1991).
- [3] M.K. Alves et N. Kikuchi. Damage theory applied to the analysis of composite materials subjected to a loss of adherence between its constituents. *Eur. J. Mech., A/Solids*, **17** (1), 53–69 (1998).
- [4] C.R. Ananth, S.R. Voleti, et N. Chandra. Effect of fiber fracture and interfacial debonding on the evolution of damage in metal matrix composites. *Composites : Part A*, **29A**, 1203–1211 (1998).
- [5] T.L. Anderson. *Fracture mechanics, fundamentals and applications*. CRC Press, Boca Raton (1991).
- [6] M. Barquins et D. Maugis. Adhesive contact of axisymmetric punches on an elastic half-space : the modified Hertz–Huber’s stress tensor for contacting spheres. *J. Méc. Théor. Appl.*, **1** (2), 331–357 (1982).
- [7] J.A. Bennett et R.J. Young. The effect of fibre-matrix adhesion upon crack bridging in fibre reinforced composites. *Composites : Part A*, **29A**, 1071–1081 (1998).
- [8] J.P. Benthem. State of stress at the vertex of a quarter-infinite crack in a half-space. *Int. J. Solids. Structures*, **13**, 479–492 (1977).
- [9] J.-M. Berthelot. *Matériaux composites. Comportement mécanique et analyse des structures*. Masson, Paris (1996).
- [10] A.F. Bower et M. Ortiz. Solution of three-dimensional crack problems by a finite perturbation method. *J. Mech. Phys. Solids*, **38** (4), 443–480 (1990).
- [11] A.F. Bower et M. Ortiz. A three-dimensional analysis of crack trapping and bridging by tough particles. *J. Mech. Phys. Solids*, **39** (6), 815–858 (1991).
- [12] A.S. Bretelle. *Formulation et résolution des problèmes de contact avec frottement et adhérence en grandes déformations*. Thèse de doctorat, Institut de Mécanique de Marseille (I.M.2) (1999).

- [13] B. Budiansky, J. Hutchinson, et A. Evans. Matrix fracture in fiber-reinforced ceramics. *Acta metallurgica materialia*, **39** (2), 167–189 (1986).
- [14] N.A. Burnham et A.J. Kulik. Surface forces and adhesion. Dans *Handbook of micro/nano tribology* (Edité par G. Bhushan). CRC Press, Boca Raton, 2<sup>e</sup> édition (1999).
- [15] L. Cangémi. *Frottement et adhérence : modèle, traitement numérique et application à l'interface fibre/matrice*. Thèse de doctorat, Institut de Mécanique de Marseille (I.M.2) (1997).
- [16] L. Cangémi, M. Raous, et M. Cocu. Adhérence et frottement : une nouvelle approche pour les interfaces fibres/matrices. *Cptes Rend. 10 J. Nat. Comp.*, 1–12 (1996).
- [17] R.M. Christensen. *Mechanics of composite materials*. Krieger Publishing Company, Malabar, Florida (1991).
- [18] P.G. Ciarlet. *Mathematical elasticity : V.1 three-dimensional elasticity*. North-Holland, Amsterdam (1988).
- [19] B.D. Coleman et M.E. Gurtin. Thermodynamics with internal variables. *J. Chem. Phys.*, **47**, 597–613 (1967).
- [20] H.L. Cox. The elasticity and strength of paper and other fibrous materials. *Brit. J. Appl. Phys.*, **3**, 72–79 (1952).
- [21] A. Curnier. TACT–A contact analysis program. Rapport technique, Laboratoire de mécanique appliquée. DMA EPFL, Lausanne (1982).
- [22] A. Curnier. *Méthodes numériques en mécanique des solides*. Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, Lausanne (1993).
- [23] A. Curnier. Discrete contact mechanics. LMAF, DGM, EPFL, Lausanne (2000). Lecture notes.
- [24] A. Curnier. Mécanique des solides déformables. LMAF, DGM, EPFL, Lausanne (2001). Notes de cours.
- [25] A. Curnier et P. Alart. A generalized Newton method for contact problems with friction. *J. Theor. Appl. Mech.*, **7** (1), 67–82 (1988).
- [26] A. Curnier, Q.C. He, et A. Klarbring. Continuum mechanics modeling of large deformation contact with friction. Dans *Contact mechanics* (Edité par M. Raous, M. Jean, et J.J. Moreau), 145–158. Plenum, New York (1995).
- [27] A. Curnier, Q.C. He, et J.J. Telega. Formulation of unilateral contact between two elastic bodies undergoing finite deformations. *Mech. Solids*, **314** (2), 1–6 (1992).
- [28] A. Curnier et N.A. Ramaniraka. Thermo-mechanical contact between two deformable solids (1997). Communication.
- [29] I.M. Daniel et O. Ishai. *Engineering mechanics of composite materials*. Oxford University Press, Oxford (1994).

- 
- [30] B.V. Derjaguin, V.M. Muller, et Y.P. Toporov. Effect of contact deformations on the adhesion of particles. *J. Colloid Interface Sc.*, **53**, 314–326 (1975).
- [31] C. DiFrancia, T.C. Ward, et R.O. Claus. The single-fibre pull-out test. 1 : Review and interpretation. *Composites : Part A*, **27A**, 597–612 (1996).
- [32] N.F. Dow. Study of stresses near discontinuity in a filament-reinforced composite metal. Rapport technique R635D61, GE Co., Missile and Space div. (1963).
- [33] G. Duvaut et J.L. Lions. *Les inéquations en mécanique et en physique*. Dunod, Paris (1972).
- [34] J.D. Eshelby. The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems. *Proc. Roy. Soc. London*, **A252** (12), 9–561 (1959).
- [35] P. Feillard. Contribution à l'étude micromécanique de l'interface et des phénomènes élémentaires dans des composites fibre de verre/résine époxyde. Rapport technique FR ISSN 0078-3781, Office National d'Etudes et de Recherches Aérospatiales (1993).
- [36] M. Fortin. Minimization of some non-differentiable functionals by the augmented Lagrangian method of Hestenes and Powell. *Appl. Math. Optim.*, **2** (3), 236–250 (1976).
- [37] M. Fortin et G. Glowinski. *Méthodes du Lagrangien augmenté*. Collection Méthodes Mathématiques de l'Informatique. Dunod, Paris (1982).
- [38] M. Frémond. Adhérence des solides. *J. Méc. Théor. Appl.*, **6** (3), 383–407 (1987).
- [39] M. Frémond. Contact unilatéral avec adhérence. Dans *Unilateral problems in structural analysis* (Edité par Del Piero et Maceri). Springer Verlag, Heidelberg (1987).
- [40] M. Frémond. Contact with adhesion. Dans *Topics in nonsmooth mechanics* (Edité par J.J. Moreau, P.D. Panagiotopoulos, et G. Strang), 177–221. Birkhäuser Verlag, Basel (1988).
- [41] M. Frémond, N. Point, E. Sacco, et J.M. Tien. Contact with adhesion. Dans *Engineering Systems Design and Analysis Conference (ESDA)* (Edité par A. LaGarde et M. Raous), tome 76. The American Society of Mechanical Engineers (1996).
- [42] Klaus Friedrich (rédacteur). *Fracture mechanics, fundamentals and applications*, Amsterdam (1989). Elsevier.
- [43] J.F. Ganghoffer et J. Schultz. Interactions between adhesion and friction I. Theoretical aspects. *J. Mech. Phys. Solids*, **45** (1), 151–174 (1997).
- [44] Y.C. Gao, Y.W. Mai, et B. Cotterell. Fracture of fibre reinforced materials. *J. Appl. Math. Phys.*, **39**, 550–557 (1988). (ZAMP).

- [45] D. Gay. *Matériaux composites*. Hermes, Paris (1997).
- [46] P. Germain. *Mécanique des milieux continus*. Masson, Paris (1973).
- [47] P. Germain, Q.S. Nguyen, et P. Suquet. Continuum thermodynamics. *J. Appl. Mech.*, **50**, 1010–1020 (1983).
- [48] R.F. Gibson. *Principles of composite material mechanics*. McGraw Hill, New York (1994).
- [49] T. Gmür. *Méthode des éléments finis en mécanique des structures*. Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, Lausanne (2000).
- [50] L.B. Greszczuk. Theoretical studies of the mechanisms of the fibre-matrix interface. Rapport technique, American Society for Testing and Materials, Philadelphia (1969). Special Technical Publication.
- [51] M. Gurtin. *An introduction to continuum mechanics*. Academic Press, New York (1981).
- [52] B. Halphen et Q.S. Nguyen. Sur les matériaux standards généralisés. *J. Méca*, **14**, 39–63 (1975).
- [53] Q.C. He, J.J. Telega, et A. Curnier. Unilateral contact of two solids subject to large deformations : formulation and existence results. *Proc. Roy. Soc. London*, **A452**, 2691–2717 (1996).
- [54] J.-H. Heegard et A. Curnier. An augmented Lagrangian method for discrete large-slip contact problems. *Int. J. Numer. Meth. Engng*, **36**, 569–593 (1993).
- [55] M.R. Hestenes. Survey paper : multiplier and gradient methods. *J. Opt. Theory Appl.*, **4** (5), 303–320 (1969).
- [56] P.W.J. Heuvel, M.K. Wubbolts, R.J. Young, et T. Peijs. Failure phenomena in two-dimensional multi-fibre model composites. Part 5 : A finite element study. *Composites : Part A*, **29A**, 1121–1135 (1998).
- [57] R. Hill. *The mathematical theory of plasticity*. Oxford University Press, Oxford (1950).
- [58] J.B. Hiriart-Urruty. *Optimisation et analyse convexe*. Presses Universitaires de France, Paris (1998).
- [59] J.B. Hiriart-Urruty et C. Lemaréchal. *Convex analysis and minimization algorithms I*. Springer-Verlag, New York (1993).
- [60] C.H. Hsueh. Fiber pullout against push-down for fibre-reinforced composites with frictional interfaces. *J. Mater. Science*, **25**, 811–817 (1990).
- [61] C.H. Hsueh. Interfacial friction analysis for fibre-reinforced composites during fibre push-down (indentation). *J. Mater. Science*, **25**, 818–828 (1990).
- [62] C.H. Hsueh. Interfacial debonding and fiber pull-out stresses of fiber-reinforced composites : improved analyses for bonded interfaces. *Mat. Science Eng.*, **A154**, 125–132 (1992).

- 
- [63] T.J.R. Hughes. *The finite element method*. Prentice Hall, Englewood Cliffs (1987).
- [64] D. Hull et T.W. Clyne. *An introduction to composite materials*. Cambridge University Press, Cambridge, 4<sup>e</sup> édition (1996).
- [65] J.N. Israelachvili. *Intermolecular and surface forces*. Academic press, San Diego (1997).
- [66] J.C.Simo et T.J.R. Hugues. *Elastoplasticity and viscoplasticity : Computational aspects*. Springer-Verlag (1986).
- [67] J.C.Simo et T.J.R. Hugues. *Computational inelasticity*. Mechanics and Materials. Springer (1998).
- [68] L. Johansson et A. Klarbring. Thermoelastic frictional contact problems : Modelling, finite element approximation and numerical realization. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, **105**, 181–210 (1993).
- [69] K.L. Johnson, K. Kendall, et A.D. Roberts. Surface energy and the contact of elastic solids. *Proc. Roy. Soc. London*, **A324**, 301–313 (1971).
- [70] K. Kendall. *Molecular adhesion and its applications*. Kluwer academic/Plenum publishers, New York (2001).
- [71] R.J. Kerans et T.A. Parthasarathy. Theoretical analysis of the fiber pull-out and push-out tests. *J. Amer. Ceramic Soc.*, **74** (7), 1585–1596 (1991).
- [72] N. Kikuchi et J.T. Oden. *Contact problems in elasticity : A study of variational inequalities and finite element methods*. SIAM, Philadelphia (1988).
- [73] J-K Kim et Y-W Mai. Modelling of stress transfer across the fibre-matrix interface. Dans *Numerical analysis and modelling of composite materials* (Edité par J.W Bull), 287–326. Chapman & Hall, Glasgow (1996).
- [74] J.K. Kim, C. Baillie, et Y.W. Mai. Interfacial debonding and fibre pull-out stresses. Part I : Critical comparison of existing theories with experiments. *J. Mater. Science*, **27**, 3143–3154 (1991).
- [75] J.K. Kim, S. Lu, et Y.W. Mai. Interfacial debonding and fibre pull-out stresses. Part IV : Influence of interface layer on the stress transfer. *J. Mater. Science*, **29**, 554–561 (1994).
- [76] A. Klarbring. Derivation and analysis of rate boundary value problems of frictional contact. *Eur. J. Mech. A/Solides*, **9**, 53–85 (1990).
- [77] A. Klarbring. Large displacement frictional contact : A continuum framework for finite element discretization. Dans *COMMET-COSMASE course : Computational solid mechanics*. Lausanne, Suisse (March 1994).
- [78] M. Kuntz, K.H. Schlapschi, B. Meier, et G. Grathwohl. Evaluation of interface parameters in push-out and pull-out tests. *Composites*, **25** (7), 476–481 (1994).
- [79] T.A. Laursen et J.C. Simo. A continuum-based finite element formulation for the implicit solution of multibody, large deformation frictional contact problems. *Int. J. Numer. Meth. Struct.*, **36**, 3451–3485 (1993).

- [80] J. Lemaitre et J.L. Chaboche. *Mécanique des matériaux solides*. Dunod (1985).
- [81] J. Lubliner. *Plasticity theory*. Macmillan Publishing Company, New York (1990).
- [82] L.N. MacCartney. Mechanics of matrix cracking in brittle-matrix fiber-reinforced ceramics. *Proc. Roy. Soc. London*, **A409**, 329–350 (1987).
- [83] D.B. Marshall. An indentation method for measuring matrix-fiber frictional stresses in ceramic composites. *J. Amer. Ceramic Soc.*, **67** (12), C259–C260 (1984).
- [84] D.B. Marshall, B.N. Cox, et A. Kelly. The mechanics of matrix cracking in brittle-matrix fiber composites. *Acta metallurgica*, **33**, 2013–2021 (1985).
- [85] D.B. Marshall et W. Oliver. Measurement of interfacial mechanical properties in fiber-reinforced ceramic composites. *J. Amer. Ceramic Soc.*, **70** (8), 542–548 (1987).
- [86] D. Maugis. Adhesion of spheres : The JKR-DMT transition using a Dugdale model. *J. Colloid Interface Sc.*, **150** (1), 243–269 (1992).
- [87] D. Maugis. *Contact, adhesion and rupture of elastic solids*. Springer, Heidelberg (2000).
- [88] D. Maugis et M. Barquins. Fracture mechanics and the adherence of viscoelastic bodies. *J. Phys. D : Appl. Phys.*, **11**, 1843–1874 (1978).
- [89] D. Maugis et M. Barquins. Adhesive contact of sectionally smooth-ended punches on elastic half-spaces : theory and experiment. *J. Phys. D : Appl. Phys.*, **16**, 1843–1874 (1983).
- [90] Y. Monerie. *Fissuration des matériaux composites : rôle de l'interface fibre/matrice*. Thèse de doctorat, Ecole Supérieure de Mécanique de Marseille II (2000).
- [91] J.J. Moreau. La notion de sur-potentiel et les liaisons unilatérales en élastostatique. *Cptes Rend. Acad. Sc. Paris*, **267**, 954–957 (1968).
- [92] J.J. Moreau. Sur les lois de frottement, de plasticité et de viscosité. *Cptes Rend. Acad. Sc. Paris*, **271 A**, 608–611 (1970).
- [93] J.J. Moreau. On unilateral constraints, friction and plasticity. Dans *New variational techniques in mathematical physics* (Edité par G. Capriz et G. Stampacchia), II-1973, 175–322. Cremonese, Rome (1973).
- [94] J.J. Moreau. Application of convex analysis to some problems of dry friction. Dans *Trends of pure mathematics to mechanics* (Edité par H. Zorki), tome II, 263–280. Pitman (1979).
- [95] T. Nakamura et D.M. Parks. Three-dimensional stress field near the crack front of a thin elastic plate. *J. Appl. Mech.*, **55**, 805–813 (1988).
- [96] Q.S. Nguyen et H.D. Bui. Sur les matériaux élastoplastiques à écrouissage positif ou négatif. *J. de Mécanique*, **13** (2), 321–342 (1974).

- 
- [97] J.T. Oden. *Finite elements of nonlinear continua*. McGraw–Hill, New York (1972).
- [98] J.O. Outwater. The mechanics of plastics reinforced in tension. *Modern Plastics*, **33**, 56–65 (1956).
- [99] D.E. Packham. Work of adhesion : contact angles and contact mechanics. *Int. J. Adhesion and Adhesives*, **16**, 121–128 (1996).
- [100] G. Pietrzak. *Continuum mechanics modelling and augmented lagrangian of large deformation frictional contact problems*. Thèse de doctorat, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne (1997).
- [101] G. Pietrzak et A. Curnier. Large deformation frictional contact mechanics : continuum formulation and augmented Lagrangian treatment. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, **177**, 351–381 (1999).
- [102] J. Pietrzyk. *Numerical studies of fracture in composites with long aligned fibers*. Thèse de doctorat, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne (2001). A paraître.
- [103] M.R. Piggott. Why interface testing by single-fibre methods can be misleading. *Composites Sci. Techno.*, **57**, 965–974 (1997).
- [104] M.J.D. Powell. A method for nonlinear constraints in minimization problems. Dans *Optimization* (Edité par R. Fletcher), 283–298. Academic Press, London (1969).
- [105] M.Y. Quek et C.Y. Yue. An improved analysis for axisymmetric stress distributions in single fibre pull-out test. *J. Mater. Science*, **32**, 5457–5465 (1997).
- [106] N. Ramaniraka. *Thermomécanique des contacts entre deux solides déformables*. Thèse de doctorat, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne (1997).
- [107] M. Raous, L. Cangémi, et M. Cocu. Un modèle couplant adhérence et frottement pour le contact entre deux solides déformables. *Cptes Rend. Acad. Sc. Paris*, **325**, 503–509 (1997). Série IIb.
- [108] M. Raous, L. Cangémi, et M. Cocu. A consistent model coupling adhesion, friction and unilateral contact. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, **177**, 383–399 (1999).
- [109] J.E. Ritter, J.R. Fox, D.I. Hutko, et T.J. Lardner. Moisture-assisted crack growth at epoxy-glass interfaces. *J. Mater. Science*, **33**, 4581–4588 (1998).
- [110] R.T. Rockafellar. Augmented Lagrangians and applications of the proximal point algorithm in convex programming. *Math. Oper. Res.*, **1** (2), 97–116 (1976).
- [111] R.T. Rockafellar. *Convex analysis*. Princeton University Press, New Jersey (1997).
- [112] B.W. Rosen. Mechanics of fibre strengthening. Dans *Fibre composite materials* (Edité par B.W. Rosen), chapitre 3. ASM : Metals Park, Ohio (1974).

- [113] H.-P. Rossmannith (rédacteur). *Damage and failure of interfaces*, Rotterdam (1997). ICDFI, A.A. Balkema.
- [114] D.K. Shetty. Shear-lag analysis of fiber push-out (indentation) tests for estimating interfacial friction stress in ceramic-matrix composites. *J. Amer. Ceramic Soc.*, **71**, 107–109 (1988).
- [115] D.K. Shetty. Shear-lag analysis of fiber push-out (indentation) tests for estimating interfacial friction stress in ceramic-matrix composites. *J. Amer. Ceramic Soc.*, **71** (2), C107–C109 (1988).
- [116] J.C. Simo et T.A. Laursen. An augmented Lagrangian treatment of contact problems involving friction. *Comput. Struct.*, **42** (1), 97–116 (1992).
- [117] J.C. Simo, P. Wriggers, et R.L. Taylor. A perturbed Lagrangian formulation for the finite element solution of contact problems. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, **50**, 163–180 (1984).
- [118] N. Strömberg. *Thermomechanical modelling of tribological systems*. Thèse de doctorat, Linköping University (1997).
- [119] N. Strömberg, L. Johansson, et A. Klarbring. Derivation and analysis of a generalized standard model for contact, friction and wear. *Int. J. Solids Structures*, **33** (13), 1817–1836 (1996).
- [120] M. Studer. *Etude des forces pontantes dans un matériau composite à l'aide de réseaux de Bragg dans des fibres optiques*. Thèse de doctorat, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne (2001). À paraître.
- [121] S. Stupkiewicz. Fiber sliding model accounting for interfacial micro-dilatancy. *Mechanics of materials*, **22**, 65–84 (1995).
- [122] N. Sukumar, N. Moës, B. Moran, et T. Belytschko. Extended finite element method for three-dimensional crack modelling. *Int. J. Numer. Meth. Engng*, **48**, 1549–1570 (2000).
- [123] S. Suresh. *Fatigue of materials*. Cambridge University Press, Cambridge (1998).
- [124] J. Van Tiel. *Convex analysis : An introductory text*. John Wiley and Sons, Chichester (1984).
- [125] A.P. Wierzbicki. A penalty function shifting method in constrained static optimization and its convergence properties. *Arch. Automat. Telemekh.*, **16**, 395–416 (1971).
- [126] A.S. Wineman et K.R. Rajagopal. *Mechanical response of polymers*. Cambridge University Press, Cambridge (2000).
- [127] D.L. Woerdeman, N. Amouroux, V. Ponsinet, G. Jandeau, H. Hervet, et L. Léger. Characterization of glass–epoxy adhesion using JKR methods and atomic force microscopy. *Composites : Part A*, **30**, 95–109 (1999).
- [128] G. Xu, A.F. Bower, et M. Ortiz. The influence of crack trapping on the toughness of fiber reinforced composites. *J. Mech. Phys. Solids*, **46** (10), 1815–1833 (1997).

- 
- [129] X.P. Xu, A. Needleman, et F.F. Abraham. Effect of inhomogeneities on dynamic crack growth in an elastic solid. *Modelling Simul. Mater. Sci. Eng.*, **5**, 489–516 (1997).
- [130] C.Y. Yue et W.L. Cheung. Interfacial properties of fibrous composites. Part I : Model for the debonding and pull-out processes. *J. Mater. Science*, **27**, 3173–3180 (1992).
- [131] C.Y. Yue et W.L. Cheung. Interfacial properties of fibrous composites. Part II : Determination of interfacial shear strength, interfacial coefficient of friction, and the shrinkage pressure on the fibre. *J. Mater. Science*, **27**, 3181–3191 (1992).
- [132] C.Y. Yue et H.C. Looi. Influence of thermal and microwave processing on the mechanical and interfacial properties of glass/epoxy composite. *Composites*, **26**, 767–773 (1995).
- [133] C.Y. Yue, H.C. Looi, et M.Y. Quek. Assessment of fibre-matrix adhesion and interfacial properties using the pull-out test. *Int. J. Adhesion and Adhesives*, **15**, 73–80 (1995).
- [134] L.M. Zhou, J.K. Kim, et Y.W. Mai. Interfacial debonding and fibre pull-out stresses. Part II : A new model based on the fracture mechanics approach. *J. Mater. Science*, **27**, 3155–3166 (1992).
- [135] O.C. Zienkiewicz et R.L. Taylor. *The finite element method : Volume 1*. McGraw–Hill, London, 4<sup>e</sup> édition (1997).
- [136] O.C. Zienkiewicz et R.L. Taylor. *The finite element method : Volume 2*. McGraw–Hill, London, 4<sup>e</sup> édition (1998).
- [137] P. Zysset. *A constitutive law for trabecular bone*. Thèse de doctorat, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne (1994).



# CURRICULUM VITAE

## DONNÉES PERSONNELLES

- **Nom** : Christian TALON
- **Date de Naissance** : 24 Janvier 1976
- **Nationalité** : Béninois
- **Etat civil** : célibataire
- **Adresse** : Route de la Clochette 6, 1018 Lausanne, SUISSE
- **E-mail** : christian.talon@epfl.ch

## FORMATION

- **Diplôme d'ingénieur mécanicien**, Orientation mécanique et productive, Prix de la jeunesse, Ecole Polytechnique de Lausanne (EPFL), 1993–1998
- **Baccalauréat Français Type C**, Mention bien, Lycée de la Mission Française en Ethiopie, –1993

## EXPÉRIENCE

- Assistant-doctorant, Laboratoire de Mécanique Appliquée et d'Analyse de Fiabilité (LMAF), Ecole Polytechnique de Lausanne, 1998–

### Domaines d'expertise :

- Mécanique des solides, élasticité, plasticité, écrouissage, endommagement
- Mécanique des contacts, analyse convexe non régulière
- Mécanique des matériaux composites
- Méthodes numériques en mécanique des solides et des contacts
- Outils informatiques pour la conception en mécanique

## SÉMINAIRES, COLLOQUES ET CONFÉRENCES

- Séminaire CAE 1998, Topics in Computer Aided Engineering, Lausanne, Suisse, Novembre–Décembre 1998.
- Colloque IDF 1999, Instabilité Du Frottement, Chambéry, France, 27–29 Septembre 1999.
- Conférence CMIS 2001, Contact Mechanics International Symposium, Peniche, Portugal, 17–21 Juin 2001.

## LANGUES

FRANÇAIS : Langue maternelle  
ANGLAIS : Excellent  
ESPAGNOL : Bien  
ALLEMAND : Notions

## INFORMATIQUE

### LOGICIELS

– Bureautique : Microsoft Office, L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X  
– Applications scientifiques : Labview, Matlab, Mathematica,  
MTS TestStar & TestWare  
– DAO, CFAO, simulation, MEF : Drafting, Ideas-Master, ADAMS,  
ABAQUS, TACT  
PROGRAMMATION : Pascal, C, C++, Fortran, Assembleur,  
HTML, Java, Javascript, VisualBasic  
SYSTÈMES D'EXPLOITATION : Unix, Windows 2000 & NT, Mac OS

## PUBLICATION

– C. Talon et A. Curnier. A model of adhesion added to contact with friction. Dans *Contact Mechanics International Symposium (CMIS) Proceedings* (Edité par J. Martins et E.B. Pires). Peniche (Portugal) (2001).



