ALGÈBRES DE ROYDEN ET HOMÉOMORPHISMES Á P-DILATATION BORNÉE ENTRE ESPACES MÉTRIQUES MESURÉS

THÈSE N° 2422 (2001)

PRÉSENTÉE AU DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

POUR L'OBTENTION DU GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES

PAR

Khaled GAFAITI

Ingénieur mathématicien diplômé EPF

et de nationalité marocaine

acceptée sur proposition du jury:

Prof. M. Troyanov, directeur de thèse

Prof. T. Coulhon, rapporteur

Prof. V. Gol'dshtein, rapporteur

Prof. K. Hess Bellwald, rapporteur

Prof. P. Pansu, rapporteur

Lausanne, EPFL

2001

A la mémoire de mon père.

Remerciments

Tout d'abord, je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à mon directeur de thèse et professeur, Monsieur Marc Troyanov, qui a largement orienté ma recherche, et a fait preuve d'une grande patience vis à vis de mes énièmes questions.
Je remercie vivement les professeurs C.A Stuart, T. Coulhon, V. Gol'dshtein, K. Hess et P. Pansu qui m'ont honoré en acceptant d'être membres de jury.
J'aimerai notamment exprimer ma gratitude à Monsieur le professeur P. Buser qui a su nous offrir une bonne ambiance de travail.
Mes remerciments vont également à ma famille au Maroc et mes amis pour leurs encouragements.
Finalement, je remercie ma femme Laila qui m'a supporté tout au long de l'élaboration de cette thèse, sans oublier mon adorable petit garçon Wael.

Version abrégée

Le but de cette thèse est d'introduire les notions d'algèbre de Royden et d'applications à p-dilatation bornée entre espaces métriques mesurés. En particulier nous donnons des conditions suffisantes pour qu'un espace métrique mesuré soit caractérisé à équivalence lipschitzienne près par son algèbre de Royden. Nous étudions aussi sous quelles conditions une application à p-dilatation bornée entre deux espaces métriques mesurés est une quasi-isométrie ou une application lipschitzienne.
Ces résultats sont obtenus dans le cadre de la théorie axiomatique des espaces de Sobolev sur les espaces métriques et ont donc une grande généralité. On montre cependant que l'application de ces résultats au cas particulier des groupes de Lie nilpotents munis d'un système de Hörmander donne de nouvelles informations concrètes sur la géométrie de ces groupes.

Abstract.

The goal of this thesis is to introduce the notions of Royden algebra and mapping with bounded p-dilation between metric measure spaces. In particular, we give sufficient conditions for a metric measure space to be characterized, up to bilipshitz equivalence, by its Royden algebra. We also study sufficient conditions for mapping with bounded p-dilation between metric measure spaces to be a quasi-isometry or to be a lipschitz map.
Our results are obtained in the framework of the theory of axiomatic Sobolev spaces on metric measure spaces and are thus of a very general nature. However, we show that the application of these results to the particular case of nilpotent Lie groups with a Hörmander system gives new concrete information on the geometry of these groups.

Table des matières

Introduction

Motivations:

Soit (M, g) une variété riemannienne connexe orientée. Le gradient (au sens des distributions) d'une fonction localement intégrable $u\colon M \to \mathbb{R}$ a un sens et on peut donc définir la p-énergie d'une telle fonction (pour $p \geq 1$) par

$$\mathcal{E}_p(u) := \int_M |\nabla u|^p \, d\text{vol}.$$

Et ainsi on a les espaces fonctionnels suivants:

1.) L'espace de Dirichlet $\mathcal{L}^{1,p}(M)$ est l'ensemble des fonctions $u \in L^p_{loc}(M)$ de $p-$énergie finie,

2.) l'espace de Sobolev est $W^{1,p}(M) := \mathcal{L}^{1,p}(M) \cap L^p(M)$,

3.) l'algèbre de Royden est $\mathcal{A}^p(M) := \mathcal{L}^{1,p}(M) \cap C(X) \cap L^\infty(M)$.

On note $\mathcal{A}^p_0(M) \subset \mathcal{A}^p(M)$ l'idéal des fonctions s'annulant à l'infini.
On définit aussi la p-capacité d'un compact $D \subset M$ par

$$\mathrm{Cap_p}(D) := \inf \left\{ \mathcal{E}_p(u) : u \in C^1_0(M) \text{ et } u \geq 1 \text{ sur D } \right\}.$$

On dit que la variété M est *p-parabolique* si $\mathrm{Cap_p}(D) = 0$ pour tout compact $D \subset M$ et qu'elle est *p-hyperbolique* dans le cas contraire.
Soient maintenant deux variétés riemanniennes connexes orientées M et N et un homéomorphisme $f\colon M \to N$. L'application f est dite à *p-dilatation bornée* si $f^*\colon \mathcal{A}^p(N) \to \mathcal{A}^p(M)$ est un opérateur borné. Cette notion est équivalente à : f est différentiable presque partout et la fonction $|df|^p/J_f \in L^\infty(M)$; voir par exemple [13].
Ces notions permettent de décrire des relations étroites entre l'analyse et la géométrie sur les variétés. Citons deux résultats qui nous semblent typiques dans cette direction. Le premier a été obtenu par J. Ferrand en 1972, il affirme qu'une variété riemannienne M est décrite à équivalence bilipschitz près par l'algèbre de Royden $\mathcal{A}^p(M)$ (à condition que $p > n = dim(M)$):

Théorème (J. Ferrand 1972)
Soient M, N deux variétés riemanniennes complétes de dimension n. S'il existe $p > n$ tel que $\mathcal{A}^p_0(M)$ et $\mathcal{A}^p_0(N)$ sont isomorphes en tant qu'algèbres de Banach alors M et N sont bilipschitz (i.e il existe un homéomorphisme bilipschitzien entre M et N).

Preuve Ce résultat découle des théorèmes 8.3 et 10.1 de [11].

□

Le second résultat est dû à P. Pansu; il dit que dans certaines conditions, un homéomorphisme à p-dilatation bornée est une quasi-isométrie.

Théorème (P. Pansu 1997)
Soient M, N deux variétés riemanniennes de dimension n, à géométrie bornée. Supposons que M est de dimension isopérimétrique $d > n$. Alors pour $p \in]n, d[$, tout homéomorphisme de p-dilatation bornée $M \to N$ est une quasi-isométrie.

L'objectif principal de cette thèse est d'étendre ces deux résultats, et quelques autres, au contexte des espaces métriques mesurés.

Pour cela, il est nécessaire de généraliser les notions d'algèbre de Royden et d'application à p-dilatation bornée aux cas des espaces métriques mesurés. Plusieurs constructions sont possibles.

En 1996, Hajłasz propose d'associer à tout espace métrique mesuré (X, d, μ) et à toute fonction localement intégrable $u \colon X \to \mathbb{R}$ une famille de fonctions $HD(u)$, appelée les *pseudo-gradients au sens de Hajłasz* de u. Par définition $g \in HD(u)$ si et seulement si $g \colon X \to [0, \infty]$ est mesurable et

$$|u(x) - u(y)| \leq (g(x) + g(y))d(x, y) \tag{1}$$

pour presque tous $x, y \in X$.
Ainsi, on peut étendre les définitions des espaces fonctionnels cités plus haut et la notion d'homéomorphisme de p-dilatation bornées aux espaces métriques mesurés.
En 1998, J. Heinonen et P. Koskela dans [26] ont proposé une notion alternative de gradient sur les espaces métriques mesurés qui est bien adaptée au cas des espaces rectifiablement connexes.
Rappelons brièvement cette construction : soient (X, d) un espace métrique et $u \colon X \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit qu'une fonction borélienne $\rho \colon X \to [0, \infty]$ est un *sur-gradient* de u si

$$|u(x) - u(y)| \leq \int_{\gamma_{xy}} \rho ds \tag{2}$$

pour toute courbe rectifiable γ_{xy} qui relie x à y dans X.
Par exemple, si X est une variété riemannienne, ou sous-riemannienne, et si u est une fonction assez régulière alors $\rho = |\nabla u|$ est un sur-gradient de u (dans le cas sous-riemannien, il faut prendre le gradient horizontal $\rho = |\nabla_h u|$).

Enfin V. Gol'dshtein et M. Troyanov ont axiomatisé cette théorie dans [14] de telle sorte qu'elle englobe tous les exemples classiques d'espaces de Sobolev sur les espaces métriques .

L'idée principale de cette déscription axiomatique est la suivante : on associe à chaque fonction $u \in L^1_{loc}(X)$ un ensemble $D(u)$ de fonctions mesurables positives, appelées *pseudo-gradients* de u, et on suppose que cette correspondance vérifie certains axiomes.

L'approche axiomatique offre un cadre adéquat pour généraliser les théorèmes de Ferrand et Pansu cités plus haut.

Contenu des chapitres :

Chapitre I. Dans ce chapitre, on s'intéresse aux difféomorphismes à p-dilatation bornée entre deux variétés riemanniennes.
Nous commençons par rappeler la preuve du résultat folklorique suivant :

Proposition *Soient M et N deux variétés riemanniennes orientées de dimension n, telles que M est p-parabolique et N est $p-$hyperbolique $(p > 1)$, alors il n'existe pas de difféomorphisme à $s-$dilatation bornée $f\colon M \to N$ où $s = \frac{p}{p-1}(n-1)$.*

Puis nous démontrons que ce résultat est optimal sur une large classe de variétés riemanniennes. Plus précisement, on montre

Théorème *Supposons que $d \leq n < d'$, alors on peut construire des variétés riemanniennes M et N paraboliquement régulières de dimension n telles que*

1) *$d_{par}(M) = d$ et $d_{par}(N) = d'$,*

2) *il existe un difféomorphisme à $s-$dilatation bornée $f : M \to N$ si et seulement si $\frac{s}{n-1} \notin \left(\frac{d'}{d'-1}, \frac{d}{d-1}\right]$.*

Une variété M est dite *paraboliquement régulière* s'il existe un nombre $1 \leq d \leq \infty$ tel que M est $p-$hyperbolique si et seulement si $1 \leq p < d$. Ce nombre s'appelle la dimension parabolique et est noté $d_{par}(M)$.

Chapitre II. On rappelle brièvement la construction axiomatique des espaces de Sobolev sur les espaces métriques mesurés. Puis, en utilisant les techniques de Bakry et al (voir [2]), on prouve, entre autres, l'inégalité de Sobolev globale suivante sur les espaces métriques mesurés :

Théorème *Soient (X, d, μ) un espace de type homogène, muni d'une structure d' espace de Sobolev absolument local et $1 \leq p < s$ deux réels. Supposons les conditions suivantes satisfaites:*
a) (X, d) est complet,
b) Pour tout $r > 0$ et pour tout $x \in X$ on a:

$$\mu(B(x,r)) \geq C\, r^s,$$

c) L'inégalité de Poincaré de type p

$$\int_B |u-u_B|^p d\mu \leq C\,\mathrm{diam}(B)^p \int_B g^p d\mu$$

est vérifiée pour toute boule $B \subset X$, pour toute fonction $u\colon X \to \mathbb{R}$ localement lipschitzienne à support compact et pour tout $g \in D(u)$.
Alors l'inégalité de Sobolev globale de type (p,q)

$$\left(\int_X |u|^q d\mu\right)^{\frac{1}{q}} \leq C \ (\mathcal{E}_p(u))^{\frac{1}{p}}$$

est vérifiée pour tout $u \in W^{1,p}(X,d,\mu)$, avec $q = \frac{sp}{s-p}$.

Un espace de Sobolev axiomatique est absolument local si, en gros, les pseudo-gradients sont caractérisés d'une manière locale, voir définition 2.9.
Par exemple l'espace de Sobolev au sens des sur-gradients est absolument local, alors que celui au sens de Hajłasz ne l'est pas.
Rappelons également qu'un espace métrique mesuré (X,d,μ) est de type homogène s'il existe une constante C telle que pour toute boule on a $\mu(B(x,2r)) \leq C\mu(B(x,r))$.

Chapitre III. Le résultat central de ce chapitre est une généralisation du théorème de Pansu à la classe $\mathcal{C}(s,p)$ d'espaces métriques mesurés.

Définition *Un espace métrique mesuré X est dans la classe $\mathcal{C}(s,p)$ si*

1.) L'espace métrique (X,d) est propre et quasi-convexe,

2.) L'espace X est localement uniformement régulier de dimension locale s c'est à dire il existe $\eta > 0$ et $C \geq 1$ tels que pour tout $x \in X$ et tout $r \in [0,\eta]$ on a:

$$\frac{1}{C}\, r^s \leq \mu(B(x,r)) \leq C\, r^s$$

3.) L'espace métrique mesuré (X,d,μ) supporte une inégalité de Poincaré de type $(1,p)$ localement uniformément c'est à dire il existe $R > 0$ tel que l'équation suivante est véifiée pour toute boule de rayon $r < R$, pour tout $u \in C(X)$ et pour tout $g \in D(u)$.

$$\left(\fint_B |u-u_B|^q \ d\mu\right)^{\frac{1}{q}} \leq \hat{C}\ \mathrm{diam}(B)\ \left(\fint_{\lambda B} g^p \ d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$$

Par exemple toute variété riemannienne à géométrie bornée de dimension n et tout groupe de Carnot appartient à la classe $\mathcal{C}(n,p)$ pour tout $p \geq 1$. Par ailleurs, Laakso a récemment montré que la classe $\mathcal{C}(s,p)$ est non vide pour tout réel $s \geq 1$ et tout $p \geq 1$ (au sens des sur-gradients).

Notons que les espaces de Sobolev au sens de Hajłasz supportent toujours une inégalité de Poincaré de type $(1,p)$ pour tout $p > 1$.
Nous prouvons les deux résultats suivants

Proposition *Soient $X \in \mathcal{C}(s_1,p)$ et $Y \in \mathcal{C}(s_2,p)$ où $p > s_2 \geq s_1$.*
Alors tout homéomorphisme $f\colon X \to Y$ à $p-$dilatation bornée est lipschitzien.
En particulier si $s_2 > s_1$, alors il n'existe pas d'homéomorphisme à $p-$dilatation bornée de X vers Y.

Le théorème de Pansu dans la classe $\mathcal{C}(s,p)$ s'énonce comme suit :

Théorème *Soient X, Y deux espaces de la classe $\mathcal{C}(s,p)$ où $p > s$. Si X vérifie une inégalité de Sobolev globale de type (q,p) (pour un $q \geq 1$ quelconque) alors tout homéomorphisme $f\colon X \to Y$ à $p-$dilatation bornée est une quasi-isométrie.*

Chapitre IV. Dans ce chapitre, on donne une condition pour que l'espace de Royden $\mathcal{A}_0^p(X)$ soit une algèbre. On appelle celle-ci la *condition de Royden* et on montre qu'elle est vérifiée sur tous les exemples d'espace de Sobolev introduits au chapitre II.
Ensuite, on généralise le théorème Ferrand aux espaces métriques mesurés.

Théorème *Soient X et Y deux espaces de la classe $\mathcal{C}(s,p)$ vérifiant la condition de Royden. Si $\mathcal{A}_0^p(X)$ est isomorphe à $\mathcal{A}_0^p(Y)$ où $p > s$ alors X et Y sont bilipschitz.*

Chapitre V. Dans ce dernier chapitre, on détaille le cas des groupes de Lie nilpotents munis d'une métrique de Carnot Carathéodory.
Soient donc deux groupes de Lie nilpotents G_1 et G_2, simplement connexes munis d'une mesure de Haar invariante à gauche μ_1 et μ_2.
Considérons sur G_i un sous fibré tangent invariant à gauche $\mathcal{H}_i \subset TG_i$ $(i = 1,2)$ vérifiant la condition de Hörmander. Notons d_i $(i = 1,2)$ la dimension locale de $(G_i, \mathcal{H}_i)$ $(i = 1,2)$ et D_i $(i = 1,2)$ la dimension à l'infini de G_i $(i = 1,2)$.
On prouve alors, en utilisant les résultats des chapitres précédents, le théorème suivant:

Théorème *A.) Si $d_1 = d_2$ et $d_1 < p < D_1$ alors tout homéomorphisme $f\colon G_1 \to G_2$ à p-dilatation bornée est une quasi-isométrie; en particulier si $D_1 \neq D_2$ un tel homéomorphisme n'existe pas.*
B.) Si $p > d_2 > d_1$ alors il n'existe pas d'homéomorphisme à p-dilatation bornée entre G_1 et G_2.
C.) Si $d_1 = d_2$ et $D_1 \neq D_2$ alors $\mathcal{A}_0^p(G_1)$ et $\mathcal{A}_0^p(G_2)$ ne sont pas isomorphes pour tout $p > d_1$.

La thèse se termine par deux annexes: dans l'annexe A on développe les notions de bases sur les groupes de Lie nilpotents et les métriques de Carnot-Cararthéodory.

Dans l'annexe B on rappelle brièvement quelques résultats sur les espaces de type homogène.

Chapitre 1

Optimalité des exposants des applications à (co-)dilatation bornée

1.1 Introduction

Un difféomorphisme $f : M \to N$ entre deux variétés riemanniennes orientées de même dimension est à *$s-$dilatation bornée* si la fonction $|df|^s/J_f$ est bornée sur M où J_f est le jacobien de f.

Dans les articles [35] et [37], on s'est intéressé à la question suivante:

Étant donné deux variétés riemanniennes (connexes, orientées et de même dimension n) M et N, pour quelles valeurs de s existe-t-il un difféomorphisme à s-dilatation bornée $f : M \to N$?

Cette question se pose également pour des applications plus générales que des difféomorphismes. L'article récent [37] de Vodop'yanov et Troyanov donne des obstructions à l'existence d'application à s-dilatation bornée entre des variétés ayant des dimensions paraboliques différentes. Ces obstructions sont données dans la proposition 1.3.1 dans le cas d'un difféomorphisme. Elles sont optimales dans le cas $\mathbb{R}^n \to \mathbb{H}^n$ (espace hyperbolique), plus précisément on peut montrer (voir [35] ou théorème 1.1.1 ci dessous):

1.1.1 Théorème *Il existe un difféomorphisme $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{H}^n$ de* s-dilatation bornée *si et seulement si $s \notin (n-1, n]$.*

Le but principal de ce chapitre est de montrer que ces obstructions sont optimales dans une large classe de variétés riemanniennes orientées de même dimension.

Nous étendons aussi cette étude au cas des difféomorphismes à q-codilatation bornée (voir définition au §3), et nous obtenons un autre théorème d'optimalité.

Nous allons aussi étudier la codilatation d'une classe d'applications entre groupes de Lie nilpotents introduite par P.Pansu(voir §1.5).

1.2 Rappels de quelques invariants

Rappelons tout d'abord quelques définitions classiques:

1.1 Définitions *1.) Soient* (M,g) *une variété riemannienne connexe, et* $D \subset M$ *un sous-ensemble compact. Pour* $1 \leq p < \infty$*, on définit la* $p-$capacité *de* D *par:*

$$\mathrm{Cap_p}(D) = \inf\left\{ \int_M |\nabla u|^p : u \in C_0^1(M) \text{ et } u \geq 1 \text{ sur } D \right\}$$

2.) La variété M *est dite* p-parabolique *si* $\mathrm{Cap_p}(D) = 0$ *pour tout compact* $D \subset M$*. Elle est dite* p-hyperbolique *dans le cas contraire.*

3.) Une variété M *non-compacte vérifie l'*inégalité isopérimétrique *d'ordre* $k > 0$ *s'il existe* $C, \delta > 0$ *avec* $\mathrm{Vol}(M) \geq \delta$ *telles que pour tout compact à bord lisse* D *de* M *où* $\mathrm{Vol}(D) \geq \delta$ *on a:*

$$\mathrm{Vol}(D)^{k-1} \leq C \;\mathrm{Aire}(\partial D)^k.$$

Et la dimension isopérimétrique *est alors:*

$$d_{isop}(M,g) = \sup\{k > 0 : M \text{ satisfait une inégalité isopérimétrique d'ordre } k\}.$$

4.) Une variété M *non-compacte est dite ouverte à l'infini s'il existe une constante* C *telle que*

$$\mathrm{Vol}(D) \leq C \;\mathrm{Aire}(\partial D)$$

pour tout compact à bord lisse D *de* M*.*

5.) Le degré de croissance *d'une variété riemannienne complète* (M,g) *est le nombre:*

$$d_{cr}(M,g) = \inf\{m > 1 : \liminf_{r\to\infty} \frac{V(r)}{r^m} < \infty\}$$

où $V(r) = \mathrm{Vol}(B(x_0, r)$ *est le volume de la boule de centre* $x_0 \in M$ *et de rayon* r*.*

Introduisons cette définition.

1.2 Définition *Une variété riemannienne* M *est dite* paraboliquement-régulière *si elle est connexe; et s'il existe un nombre* $1 \leq d \leq \infty$ *tel que* M *est* $p-$*hyperbolique si et seulement si* $1 \leq p < d$*.*

Ce nombre s'appelle alors la *dimension parabolique* de M et est noté $d = d_{par}(M)$. Il s'agit d'un invariant de quasi-isométrie dans la classe des variétés à géométrie bornée.

Donnons quelques exemples de variétés paraboliquement-régulières : l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ est paraboliquement-régulier avec $d_{par}(\mathbb{R}^n) = n$, et l'espace hyperbolique $\mathbb{H}^n$ est paraboliquement-régulier avec $d_{par}(\mathbb{H}^n) = \infty$.
Si M est une variété homogène, ou le revêtement universel d'une variété compacte, alors M est paraboliquement-régulière et sa dimension parabolique est donnée par son degré de croissance (voir [36]).

Plus généralement, les variétés riemanniennes complètes telles que $d_{isop} = d_{cr}$ font partie de cette classe (voir [36]).

Suivant [17] ou [18] , on appelle *modèle à symétrie sphérique*, ou simplement *modèle*, toute variété riemannienne M_h^n difféomorphe à $\mathbb{R}^n$, et dont la métrique s'écrit en coordonnées sphériques (r, σ)

$$g = g_h = dr^2 + h(r)^2 d\sigma^2$$

où $d\sigma^2$ dénote la métrique canonique sur la sphère S^{n-1} et $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ est une fonction C^∞ telle que la fonction $(r - h(r))$ s'annule en $r = 0$, ainsi que ses dérivées jusqu'à l'ordre 2 (cette condition nous garantit que la métrique g s'étend à l'origine de $\mathbb{R}^n$). D'autres part, on sait que la variété M_h^n est p-parabolique si et seulement si

$$\int_1^\infty (h(r))^{\frac{n-1}{1-p}} dr = \infty$$

(voir par exemple [36, cor. 5.2]). En particulier, si $h(r) = r^\mu$ pour les grandes valeurs de r, alors M_h^n est paraboliquement-regulière avec dimension parabolique $d_{par}(M_h^n) = 1 + \mu(n-1)$.

Remarque:
Il est bien connu (voir [36]) que si (M, g) est à géométrie bornée alors il existe un nombre $d \in [1, \infty]$ tel que M est $p-$parabolique pour $p > d$ et $p-$hyperbolique pour $p < d$. La notion de régularité introduite ci-dessus exige de plus que M soit $d-$parabolique, toutefois nous n'avons pas d'exemple de variété à géométrie bornée qui ne soit pas paraboliquement régulière.

1.3 Applications à (co-)dilatation bornée

Soit $f : M \to N$ une application localement Lipschitzienne entre deux variétés riemanniennes orientées de dimension n.
On note df_x la différentielle de f en x (définie presque partout) et $J_f(x)$ son jacobien.
Les valeurs propres de l'opérateur symétrique $df_x^t \circ df_x$ sont non négatives. On les note $0 \leq \lambda_1^2 \leq \lambda_2^2 \leq \cdots \leq \lambda_n^2$; les λ_i s'appellent alors les *coefficients de dilatation principaux* de f.
Une interprétation géométrique de ces coefficients est la suivante: il existe une base orthonormée $e_1, \cdots, e_n$ de T_xM et une base orthonormée $e'_1, \cdots, e'_n$ de $T_{f(x)}N$ telles que

$$df_x(e_i) = \lambda_i \ e'_i$$

pour tout $i = 1, \cdots, n$.
Enfin, $\Lambda_{n-1} f_x$ est l'action de df_x sur les $(n-1)-$formes différentielles, plus précisément, $\Lambda_{n-1} f \colon \Omega^{n-1}(N) \to \Omega^{n-1}(M)$ avec $(\Lambda_{n-1} f_x)(\omega) := \Lambda^{n-1}((d_x f)^*)(\omega_{f(x)})$ et où $x \in M$ et ω est une $(n-1)-$forme différentielle et $x \in M$.

Remarquons que: $J_f(x) = \lambda_1 \cdots \lambda_n$, $|df_x| = \lambda_n$ et $|\Lambda_{n-1} f_x| = \lambda_2 \cdots \lambda_n$.

1.3 Définition *On dit que* f *est une application à* s-dilatation bornée *s'il existe une constante* K *telle que:*

$$|df_x|^s \leq K J_f(x)$$

pour presque tout $x \in M$. *De même, on dit que* f *est une application à* q-codilatation bornée *si*

$$|\Lambda_{n-1} f_x|^q \leq K J_f(x)$$

pour presque tout $x \in M$.

1.4 Remarque: *Si* f *est à* $s-$*dilatation bornée* ($s > n-1$), *alors* f *est à* $q-$*codilatation bornée pour* $q = \frac{s}{n-1}$. *Cela découle de l'inégalité algébrique* $|\Lambda_{n-1} f_x| \leq |df|^{n-1}$.

La proposition suivante dit qu'il existe des obstructions sur les exposants possibles d'un difféomorphisme à $s-$dilatation bornée entre deux variétés de type parabolique différents:

1.3.1 Proposition *Soient* M *et* N *deux variétés riemanniennes orientées de dimension* n, *telles que* M *est p-parabolique et* N *est* $p-$*hyperbolique* ($p > 1$) , *alors il n'existe pas de difféomorphisme à* $s-$*dilatation bornée* $f\colon M \to N$ *où* $s = \frac{p}{p-1}(n-1)$.

Pour démontrer cette proposition, nous aurons besoin de deux lemmes.

1.3.2 Lemme *Soient* $g\colon M \to N$ *un difféomorphisme à* $p-$*dilatation bornée, et* D *un compact de* M, *alors on a:*

$$\mathrm{Cap_p}(D, M) \leq K \ \mathrm{Cap_p}(g(D), N)$$

Preuve Soit $v \in C_0^1(N)$ avec $v \equiv 1$ sur $g(D)$, qui est un compact.
Posons $u(x) := v(g(x))$, il est clair que $u \in C_0^1(M)$ et $u = 1$ sur D. On a presque partout

$$|\nabla u| = |\nabla (v \circ g)| \leq |dg| |\nabla v|$$

Et comme $|dg|^p \leq K \ J_g$ on a alors ces inégalités:

$$\begin{aligned} \int_M |\nabla u|^p d\mu &\leq \int_M |\nabla v(g(x))|^p |dg_x|^p d\mu(x) \\ &\leq K \int_M |\nabla v(g(x))|^p J_g(x) d\mu(x) \\ &\leq K \int_N |\nabla v(y)|^p d\nu(y). \end{aligned}$$

Et donc $\mathrm{Cap_p}(D, M) \leq K \ \mathrm{Cap_p}(g(D), M)$.

$\square$

1.3.3 Lemme *Soit $f\colon M \to N$ un difféomorphisme à $s-$dilatation bornée avec $s > n-1$, alors f^{-1} est à $p-$dilatation bornée où $p = \frac{s}{s-(n-1)}$.*

Preuve Soient $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n$ les coefficients de dilatation principaux de f. Si f est à $s-$dilatation bornée alors

$$\lambda_n^s \leq K\,(\lambda_1 \cdots \lambda_n).$$

On a alors: $\lambda_1 \geq \frac{1}{K}\frac{\lambda_n^s}{\lambda_2 \cdots \lambda_n} \geq \frac{1}{K}\lambda_n^{s-(n-1)}$, et comme $\lambda_n \geq (\lambda_2 \cdots \lambda_n)^{\frac{1}{n-1}}$, on a $\lambda_1 \geq \frac{1}{K}(\lambda_2 \cdots \lambda_n)^{\frac{s-(n-1)}{n-1}}$, soit $\lambda_1^{n-1} \geq \frac{1}{K^{n-1}}(\lambda_2 \cdots \lambda_n)^{s-(n-1)}$, ce qui implique $\lambda_1^s \geq \frac{1}{K^{n-1}}(\lambda_1\lambda_2 \cdots \lambda_n)^{s-(n-1)}$, d'où

$$|df^{-1}|^{\frac{s}{s-(n-1)}} \leq K^{\frac{n-1}{s-(n-1)}}\, J_{f^{-1}}.$$

puisque $J_{f^{-1}} = (\lambda_1\lambda_2 \cdots \lambda_n)^{-1}$ et $|df^{-1}| = (\lambda_1)^{-1}$.

□

Preuve (de la proposition)
Supposons, par absurde, qu'il existe un difféomorphisme à $s-$dilatation bornée $f\colon M \to N$ où $s = \frac{p}{p-1}(n-1)$. Par le lemme précédent $f^{-1}\colon N \to M$ est à $p-$dilatation bornée avec $p = \frac{s}{s-(n-1)}$.
Comme N est $p-$hyperbolique, il existe un compact $D \subset N$ tel que $\mathrm{Cap_p}(D,N) > 0$, par le lemme 1.3.2, on a donc:

$$\mathrm{Cap_p}(D,N) \leq Cte\ \mathrm{Cap_p}(f^{-1}(D),M).$$

Comme M est p-parabolique, on a $\mathrm{Cap_p}(f^{-1}(D),M) = 0$, ce qui est en contradiction avec l'inégalité précédente.

□

On a un corollaire immédiat de cette proposition.

1.3.4 Corollaire *Soient M et N deux variétés riemanniennes orientées de dimension n, avec M est p-parabolique et N est $p-$hyperbolique (où $p > 1$), alors il n'existe pas de difféomorphisme à $q-$codilatation bornée $f\colon M \to N$ si $q = \frac{p}{p-1}$.*

Preuve Immédiat à partir de la proposition et de la remarque 1.4

□

Remarque:
La proposition et le corollaire précédents s'étendent à des applications plus générales. Dans [37], S. Vodop'yanov et M. Troyanov ont démontré les théorèmes de type Liouville suivants: soient M et N, deux variétés riemanniennes orientées de dimension n:

1.3.5 Théorème *Si M est p-parabolique et N est $p-$hyperbolique, alors il n'existe pas d'application localement Lipschitzienne non constante $f : M \to N$ à s-dilatation bornée où $p > 1$ et $\frac{s}{n-1} = \frac{p}{p-1}$.*

1.3.6 Théorème *Si M est p-parabolique et N est $p-$hyperbolique, alors toute application de degré fini localement Lipschitzienne $f : M \to N$ à q-codilatation bornée où $q = \frac{p}{p-1}$, est dégénérée (i.e $\mathrm{Vol}(f(M)) = 0$).*

Nous avons supposé que f est localement Lipschitzienne pour simplifier. Toutefois, ces résultats sont encore vrais sous des hypothèses plus générales. Nous renvoyons à l'article [37] pour des énoncés plus précis ainsi que des démonstrations.

□

1.4 Optimalité des théorèmes sur la dilatation et la codilatation bornées

Dans ce paragraphe, on va montrer, en s'inspirant de la méthode utilisée par P. Pansu pour la preuve de la proposition 8.1 de [35], que les résultats du paragraphe précédent (en particulier la proposition 1.3.1) sont optimaux dans la classe des variétés riemanniennes paraboliquement régulières.
D'abord, on a ce corollaire de la proposition 1.3.1

1.4.1 Corollaire *Soient M et N deux variétés riemanniennes paraboliquement régulières telles que $d := d_{par}(M) < d' := d_{par}(N)$, alors il n'existe pas de difféomorphisme à $q-$codilatation bornée $f : M \to N$ si $q \in \left(\frac{d'}{d'-1}, \frac{d}{d-1}\right]$.*

Preuve Soit $q \in \left(\frac{d'}{d'-1}, \frac{d}{d-1}\right]$ quelconque. Posons $p = \frac{q}{q-1}$ alors $d \leq p < d'$, et donc par hypothèse, N est $p-$hyperbolique et M est p-parabolique. Le corollaire découle par conséquent de la proposition 1.3.1

□

Le lemme suivant décrit les coefficients de dilatation pour une classe d'applications radiales entre modèles à symétrie sphérique (voir fin du §1.2 pour cette notion).

1.4.2 Lemme *Soit f_c: $M^n_h \to M^n_{h'}$ difféomorphisme radial entre deux modèles à symétrie sphérique telle que*

$$f_c(r, \sigma) = (r^c, \sigma)$$

pour $r \geq 1$ ($c > 0$ est un paramètre). On suppose que les variétés M^n_h et $M^n_{h'}$ sont décrites par des fonctions h et h' telles que:

$$h(r) = r^{\mu} \quad et \quad h'(r) = r^{\mu'} \quad pour \quad r \geq 1$$

avec $0 < \mu \leq 1 < \mu'$. *Alors les coefficients de dilatation de* f_c *sont:*

$$\lambda_1 = cr^{c-1}, \text{ et } \lambda_i = r^{c\mu'-\mu} \quad i = 2, \cdots n.$$

pour r assez grand

Preuve Soient $Y_1, \cdots Y_{n-1}$, une base orthonormée de $T_\sigma S^{n-1}$ et $(r,\sigma) \in M_h^n$, alors $\{R = \frac{\partial}{\partial r}, X_1, \cdots X_{n-1}\}$ est une base orthonormée de TM_h^n avec $X_i = r^{-\mu}Y_i$.
Au point $(t,\sigma) \in M_{h'}^n$, une base orthonormée est alors donnée par :

$$R = \frac{\partial}{\partial t}, X_1', \cdots, X_{n-1}'$$

avec $X_i' = t^{-\mu'}Y_i$.
On a $f(r,\sigma) = (t,\sigma)$ avec $t = r^c$ donc :

$$df_{(r,\sigma)}: \begin{cases} R \to cr^{c-1}R \\ X_i \to r^{c\mu'-\mu}X_i'. \end{cases}$$

Comme $0 < \mu \leq 1 < \mu'$, on a $cr^{c-1} \leq r^{c\mu'-\mu}$ pour r assez grand. Le lemme est démontré.

□

Remarque:
La condition $0 < \mu \leq 1 < \mu'$ entraîne que:

$$d = d_{par}(M_h^n) \leq n \quad \text{et} \quad d' = d_{par}(M_{h'}^n) > n\,.$$

Montrons maintenant que les obstructions données par le corollaire 1.4.1 sont optimales lorsque $d \leq n < d'$:

1.4.3 Théorème *Supposons* $d \leq n < d'$ *et* $q \geq 1$, *alors on peut construire des variétés riemanniennes* M *et* N *paraboliquement régulières de dimension* n *ayant les propriétés suivantes:*

1) $d_{par}(M) = d$ *et* $d_{par}(N) = d'$;

2) *il existe un difféomorphisme à* $q-$*codilatation bornée* $f : M \to N$ *si et seulement si* $q \notin \left(\frac{d'}{d'-1}, \frac{d}{d-1}\right]$.

Preuve La condition $q \notin \left(\frac{d'}{d'-1}, \frac{d}{d-1}\right]$ est nécessaire par le corollaire 1.4.1. Pour montrer qu'elle est suffisante, on prend pour M et N des modèles à symétrie sphérique: $M = M_h^n$ et $N = M_{h'}^n$ où

$$h(r) = r^\mu \qquad \text{et} \qquad h'(r) = r^{\mu'}$$

pour $r \geq 1$.
Les conditions $d_{par}(M) = d$ et $d_{par}(N) = d'$ imposent les valeurs $\mu = \frac{d-1}{n-1}$ et $\mu' = \frac{d'-1}{n-1}$ (en

particulier $\mu \leq 1 < \mu'$ car $d \leq n < d'$). Considérons maintenant l'application f_c: $M \to N$, définie dans le lemme précédent, on a alors, par le lemme 1.4.2

$$\frac{|\Lambda_{n-1}f|^q}{J_{f_c}} = \frac{1}{c} r^\alpha$$

où $\alpha = q(c(d'-1) - (d-1)) - (cd' - d)$ pour r assez grand, de sorte que si l'on choisit

$$q = q(c) := \frac{cd' - d}{c(d'-1) - (d-1)}$$

alors, on a en tout point $|\Lambda_{n-1}f|^q \leq \frac{1}{c} J_{f_c}$.

Lorsque c varie de 0 à $\frac{d-1}{d'-1}$, alors $q(c)$ varie de $\frac{d}{d-1}$ à $+\infty$; et lorsque c varie de 1 à $+\infty$, $q(c)$ varie de 1 à $\frac{d'}{d'-1}$.

On a donc montré que pour tout $q \in (1, \frac{d'}{d'-1}) \cup (\frac{d}{d-1}, \infty)$ il existe un difféomorphisme à $q-$codilatation bornée $f_c : M \to N$.

Il reste à traiter le cas $q = \frac{d'}{d'-1}$. On définit l'application: f_∞: $M \to N$ par

$$f_\infty(r, \sigma) := (e^r, \sigma) \quad \text{(pour } r \text{ assez grand).}$$

On a alors

$$\frac{|\Lambda_{n-1}f_\infty|^q}{J_f} = e^{r(q(d'-1)-d')} r^{(1-q)(d-1)}.$$

Par conséquent, puisque $q = \frac{d'}{d'-1}$, on a

$$\frac{|\Lambda_{n-1}f_\infty|^q}{J_{f_\infty}} = r^{(1-q)(d-1)} \leq 1,$$

ce qui achève la démonstration.

□

Passons à présent à l'étude des applications à dilatation bornée. On a comme vu plus haut:

1.4.4 Corollaire *Soient M et N deux variétés riemanniennes paraboliquement régulières telles que $d := d_{par}(M) < d' := d_{par}(N)$. Alors il n'existe pas de difféomorphisme à $s-$dilatation bornée si $\frac{s}{n-1} \in (\frac{d'}{d'-1}, \frac{d}{d-1}]$.*

Preuve La preuve est similaire à celle du corollaire 1.4.1 (en s'appuyant sur la remarque 1.4).

□

Cette obstruction est optimale si $d' > n$:

1.4.5 Théorème *Supposons que $d \leq n < d'$, alors on peut construire des variétés riemanniennes M et N paraboliquement régulières de dimension n telles que*

1) $d_{par}(M) = d$ et $d_{par}(N) = d'$,

2) il existe un difféomorphisme à $s-$dilatation bornée $f : M \to N$ si et seulement si $\frac{s}{n-1} \notin \left(\frac{d'}{d'-1}, \frac{d}{d-1}\right]$.

Preuve La condition $\frac{s}{n-1} \notin \left(\frac{d'}{d'-1}, \frac{d}{d-1}\right]$ est nécessaire par le corollaire 1.4.4.
Pour montrer la réciproque, on considère les mêmes variétés M et N que dans la preuve du théorème précédent, ainsi que la même application $f_c : M \to N$. On a

$$\frac{|df|^s}{J_f} = r^\beta$$

pour r assez grand et où $\beta = (c(d'-1) - (d-1))s - (cd' - d)(n-1)$. Choisissons $s = s(c) := (n-1)q(c) = \dfrac{(cd'-d)(n-1)}{c(d'-1)-d+1}$, de sorte que

$$|df|^s \leq \text{cte.}\, J_f.$$

On a donc obtenu pour tout $\frac{s}{n-1} \in (1, \frac{d'}{d'-1}) \cup (\frac{d}{d-1}, \infty)$ un difféomorphisme à $s-$dilatation bornée $f_c : M \to N$.

Il reste à traiter le cas $q = \frac{d'}{d'-1}$. On prend l'application $f_\infty(r,u) := (e^r, u)$ (pour r assez grand) qui vérifie

$$\frac{|df|^p}{J_f} = r^{1-d} \leq 1.$$

□

1.5 Applications entre groupes de Carnot

Commençons par rappeler la définition d'un groupe de Carnot qui sera développée dans l'annexe A.

1.5 Définition *Un groupe de Lie G est un* groupe de Carnot *s'il est simplement connexe, et son algèbre de Lie $\mathcal{G}$ admet une décomposition $\mathcal{G} = \oplus_{i=1}^r V^i$ telles que*

1) $V^{i+1} = [V^1, V^i]$;

2) $[V^i, V^j] \subset V^{i+j}$ si $i+j \leq r$;

3) $[V^i, V^j] = 0$ si $i+j > r$.

1.5.1 Proposition *Soit G un groupe de Carnot de degré de nilpotence r. Munissons G d'une métrique riemannienne invariante à gauche, alors G est une variété paraboliquement régulière et sa dimension parabolique est donnée par*

$$d_{par}(N) = \sum_{i=1}^r i d_i \quad \text{où } d_i = \dim(V^i).$$

Preuve On sait que $\mathrm{Vol}(B(e,r)) \leq \mathrm{cte}\ r^d$ pour $r \geq 1$ (voir[21]), donc G est d-parabolique (voir [36]). De même, on sait que

$$\mathrm{Aire}(\partial\Omega)^{\frac{d}{d-1}} \geq \mathrm{cte.}\ \mathrm{Vol}(\Omega)$$

si $\mathrm{Vol}\,\Omega \geq 1$ (voir[7]), donc G est p-hyperbolique pour $p < d$; et comme G est à géométrie bornée, on obtient le résultat (voir [36]).

□

Via l'application exponentielle, on peut identifier $G \cong \mathcal{G} = \oplus_{i=1}^{r} V^i$; la loi de groupe est alors donnée par la formule de Campbell-Hausdorff :

$$x \cdot y = x + y + \frac{1}{2}[x,y] + \cdots$$

Un groupe de Carnot G est muni d'une "norme homogène" définie par

$$\|x\| = \left(\sum_{j=1}^{r} \|x_j\|_{V_j}^{\frac{2r!}{j}} \right)^{\frac{1}{2r!}}$$

où l'on a écrit $x = (x_1, \cdots, x_r) \in G$ avec $x_j \in V_j$ et $\|\cdot\|_{V_j}$ dénote la norme euclidienne sur V_j.

On peut ainsi introduire un groupe à un paramètre d'automorphismes $\delta_t : G \to G$, $t > 0$ (les "dilatations") définis en coordonnées exponentielles par

$$\delta_t(x) = (tx_1, t^2 x_2, \ldots, t^r x_r).$$

On a alors les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} \delta_{st} &= \delta_s \circ \delta_t \\ \|\delta_t(x)\| &= t\|x\|. \end{aligned}$$

Remarque Si l'on définit $\rho : G \times G \to \mathbb{R}_+$ par $\rho(x,y) := \|x^{-1}y\|$, alors ρ ne vérifie en général pas l'inégalité triangulaire mais elle est équivalente à la métrique de Carnot-Carathéodory sur G. Dans certains cas, par exemple les groupes de Heisenberg, ρ est une distance (voir [30]).

Posons $S_G := \{u \in G \ : \|u\| = 1\}$, alors S_G est difféomorphe à une sphère S^{n-1}; et il est clair que tout $x \in G \setminus \{0\}$ s'écrit d'une manière unique sous la forme

$$x = \delta_t(u)$$

avec $t = \|x\| > 0$ et $u = \delta_{1/t}(x) \in S_G$. On note $x := (t,u)$ et on dit que (t,u) sont les *coordonnées polaires* de x.
Ces coordonnées polaires permettent d'introduire la notion de difféomorphisme homogène

entre groupes de Carnot (cf §9.2 de [35]). Plus précisément, soient G et G', deux groupes de Carnot, δ_s et δ'_s les familles de dilatations correspondant respectivement à G et G' . Donnons un difféomorphisme quelconque $\psi \ : S \to S'$, $(c > 0)$, alors l'application $f_c\colon G \to G'$, définie par:

$$f_c(t,u) = (t^c, \psi(u))$$

(pour $t \geq 1$) est homogène de degré c, c'est à dire $f_c(\delta_t x) = \delta'_{t^c} f_c(x)$.
En effet: soit $x \in G$; on sait que $x = \delta_s(u)$ avec $s = \|x\|$ et $u \in S$

$$\begin{aligned} f_c(\delta_t x) &= f_c(\delta_t \delta_s u) = f_c(\delta_{ts} u) = \delta'_{(ts)^c} f_c(u) \\ &= \delta'_{t^c} \delta'_{s^c} f_c(u) = \delta'_{t^c} f_c(\delta_s u) = \delta'_{t^c} f_c(u)\,. \end{aligned}$$

1.5.2 Théorème *Soient G et G' deux groupes de Carnot de même dimension n. Notons d (resp. d') et r (resp. r') la dimension parabolique et le degré de nilpotence de G (resp. G'). On suppose que $d < d'$. Si $q \in \left(\frac{d'}{d'-1}, \frac{d}{d-1}\right]$ alors il n'existe pas de difféomorphisme $f : G \to G'$ à q-codilatation bornée.*
Si $q \notin \left(\frac{d'}{d'-1}, \frac{d}{d-r}\right]$ alors il existe un difféomorphisme $f : G \to G'$ à q-codilatation bornée.

Remarquons en particulier que si $r = 1$ (i.e. G est abélien), alors on sait par ce théorème qu'il existe un difféomorphisme $f \ : \ G \to G'$ à q-codilatation bornée si et seulement si $q \notin \left(\frac{d'}{d'-1}, \frac{d}{d-r}\right]$. Par contre, lorsque $r > 1$, on a alors un "intervalle d'ignorance" $\left(\frac{d}{d-1}, \frac{d}{d-r}\right)$ pour lequel on ne sait rien dire.

Preuve La première affirmation découle du corollaire 1.4.1 avec $d = d_{par}(G)$ et $d' = d_{par}(G')$.
Soient $q \notin (\frac{d'}{d'-1}, \frac{d}{d-r}]$ et $f_c\colon G \to G'$ l'application définie ci-dessus, nous allons montrer qu'il existe une constante K telle que:

$$\frac{|\Lambda_{n-1} f_c(x)|^q}{J_{f_c}(x)} \leq K \|x\|^\alpha \tag{1.6}$$

Pour tout $x \in G$ tel que $\|x\| \geq 1$ (il s'agit de la "norme " définie au § 5) avec $\alpha := \alpha(c,q) = q(c(d'-1) - (d-r)) - (cd' - d)$, de sorte que si on choisit:

$$q(c) = \frac{cd' - d}{c(d'-1) - (d-r)},$$

alors $\alpha = 0$ et donc $\dfrac{|\Lambda_{n-1} f_c(x)|^q}{J_{f_c}(x)} \leq K$, pour tout $x \in G$. Ainsi, lorsque c varie de 0 à $\dfrac{d-r}{d'-1}$, q varie de $\dfrac{d}{d-r}$ à $+\infty$; et lorsque c varie de $\dfrac{d}{d'}$ à $+\infty$, $q(c)$ varie de 0 à $\dfrac{d'}{d'-1}$. Pour le cas $q = \dfrac{d'}{d'-1}$, on prend $f(t,u) = f_\infty(t,u) = (e^t, \psi(u))$. La deuxième affirmation sera donc démontrée dès que l'on aura établi (1.6).

Pour montrer (1.6), on fixe $x \in G$ tel que $\|x\| \geq 1$. On peut écrire $x = \delta_t u$ avec $u \in S_G$, et $t > 1$. Posons $h_x := L_{f_c(x)^{-1}} \circ f_c \circ L_x \; : \; G \; \to G'$ et notons $A(x) := dh_e(x)$. La relation $f_c(\delta_t u) = \delta'_{t^c} f_c(u)$ entraîne

$$A(x) = A(\delta_t u) = \delta'_{t^c} \circ A(u) \circ \delta_{t^{-1}} ,$$

et comme $A(u)$ est borné pour $u \in S_G$ et $|\Lambda_{n-1} f_c(x)| = |\Lambda_{n-1} A(x)|$, l'identité ci-dessus entraîne

$$|\Lambda_{n-1} f_c| \leq \text{cte.} |\Lambda_{n-1} \delta'_{t^c}| |\Lambda_{n-1} \delta_{t^{-1}}| .$$

Comme $|\Lambda_{n-1} \delta'_{t^c}| = t^{c(d'-1)}$ et $|\Lambda_{n-1} \delta_{t^{-1}}| = t^{-(d-r)}$ si $t \geq 1$, on a

$$|\Lambda_{n-1} f_c| \leq \text{cte. } t^{c(d'-1)-(d-r)}$$

pour $t \geq 1$.

D'autre part, $J_{f_c}(x) = \det A(x) = \det(\delta'_{t^c}) \det A(u) \det(\delta_{t^{-1}})$, donc

$$J_{f_c} \geq \text{cte. } t^{cd'-d} .$$

Les deux inégalités précédentes entraînent (1.6).

□

Par des raisonnements similaires, P. Pansu a obtenu le résultat suivant sur les applications à s−dilatation bornée (voir [35]).

1.5.3 Théorème *Soient G et G', deux groupes de Carnot de même dimension n. Notons d (resp. d') et r (resp. r'), la dimension parabolique et le degré de nilpotence de G (resp. G'). On suppose que $\frac{d'}{r'} \leq d < d'$.*
Si $\frac{s}{n-1} \in \left(\frac{d'}{d'-1}, \frac{d}{d-1}\right]$ alors il n'existe pas de difféomorphisme $f : G \to G'$ à s-dilatation bornée.
Si $s \notin \left(\frac{d'}{r'}, \, d\right]$ alors il existe un difféomorphisme $f : G \to G'$ à s-dilatation bornée.

□

Chapitre 2

Inégalités de Sobolev sur les espaces métriques mesurés

2.1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est de montrer l'inégalité de Sobolev globale sur les espaces métriques mesurés. Pour ce faire, nous aurons besoin de rappeler l'approche axiomatique des espaces de Sobolev proposée par V. Gol'dshtein et M. Troyanov (voir [14]).
Notons que pour montrer cette inégalité, nous adapterons les techniques de Bakry et al. (voir [2]) à notre contexte.
Tout au long de ce chapitre, nous supposerons que les espaces métriques mesurés (X, d, μ) sont tels que

1.) μ est une mesure extérieure Borel régulière(pour la défintion voir par exemple[10]).

2.) Pour toute boule $B \subset X$, de rayon strictement positif nous avons: $0 < \mu(B) < \infty$.

3.) L'espace métrique est propre, c'est -à- dire que les boules fermées sont compactes.

Nous noterons $L^p_{loc}(X) := L^p_{loc}(X, d, \mu)$ (où p $\geq$ 1) l'espace des fonctions qui sont p-intégrables sur tout ensemble borélien borné.

2.2 Espaces de Sobolev sur les espaces métriques mesurés

Cette section est une présentation rapide de l'approche axiomatique des espaces de Sobolev sur les espaces métriques mesurés, le plus souvent référence sera faite à l'article de V. Gol'dshtein et M. Troyanov (voir [14]).
Pour définir un espace de Sobolev axiomatique sur l'espace métrique (X, d, μ), on suppose qu'à chaque fonction $u \in L^1_{loc}(X)$ est associée un ensemble $D(u)$ de fonctions mesurables positives, appelées *pseudo-gradients* de u .
Dans cette approche, la façon dont est construit les pseudo-gradients importe peu; par contre la correspondance $u \to D(u)$ doit satisfaire les cinq axiomes suivants:

Axiome A1 (Non trivialité)
Si $u\colon X \to \mathbb{R}_+$ *est* k *Lipschitz alors la fonction*

$$g := k\ sgn(u) = \begin{cases} k & \text{si } u > 0 \\ 0 & \text{si } u = 0 \end{cases}$$

appartient à $D(u)$.

Axiome A2 (Sur-linéarité)
Si $g_1 \in D(u_1)$, $g_2 \in D(u_2)$ *et* $g \geq |\alpha| g_1 + |\beta| g_2$ *presque partout, alors* $g \in D(\alpha u_1 + \beta u_2)$.

Cet axiome entraîne que $D(u)$ est convexe et $D(\alpha u) = |\alpha| D(u)$.

Axiome A3 (La règle de Leibniz)
Si $g \in D(u)$ *alors pour toute fonction Lipschitzienne et bornée* $\phi\colon X \to \mathbb{R}$, *la fonction* $h(x) = (\|\phi\|_\infty g(x) + Lip(\phi)|u(x)|)$ *appartient à* $D(\phi u)$.

Axiome A4 (min et max)
Soient $u = \max(u_1, u_2)$ *et* $v = \min(u_1, u_2)$ *où* $u_1, u_2 \in L^1_{loc}(X)$.
Si $g_1 \in D(u_1)$ *et* $g_2 \in D(u_2)$ *alors* $g = \max(g_1, g_2) \in D(u) \cap D(v)$.
Fixons $p \in [1, \infty[$.

Axiome A5 (La complétude)
Soient $\{u_i\}_i$ *et* $\{g_i\}_i$ *deux suites de fonctions telles que:* $g_i \in D(u_i)$ *pour tout* i.
Si u_i *tend vers* u *dans* $L^p_{loc}(X)$ *et* $(g_i - g)$ *tend vers 0 dans* $L^p(X)$ *alors* $g \in D(u)$.

Maintenant, nous sommes en mesure de rappeler quelques définitions et théorèmes connus (voir [14]).

2.1 Définitions *1.) Soit* $u \in L^1_{loc}(X)$, *la p-énergie de* u *est:*

$$\mathcal{E}_p(u) = \inf\left\{\int_X g^p\, d\mu : g \in D(u)\right\}.$$

2.) L'espace de $p-$*Dirichlet* $\mathcal{L}^{1,p}(X)$ *est l'ensemble des fonctions* $u \in L^p_{loc}(X)$ *de* $p-$*énergie finie.*

3.) L'espace de Sobolev est alors:

$$W^{1,p}(X) := \mathcal{L}^{1,p}(X) \cap L^p(X)$$

4.) L'espace de Royden est:

$$\mathcal{A}^p(X) := \mathcal{L}^{1,p}(X) \cap C(X) \cap L^\infty(X).$$

On verra, par la suite, que dans les cas habituels $\mathcal{A}^p(X)$ est une algèbre.

2.2.1 Théorème *1.) $W^{1,p}(X)$ est un espace de Banach pour la norme*

$$\|u\|_{W^{1,p}(X)} = \left(\int_X |u|^p \, d\mu + \mathcal{E}_p(u)\right)^{\frac{1}{p}}$$

2.) $\mathcal{A}^p(X)$ est un espace de Banach pour la norme

$$\nu_p(u) = \|u\|_\infty + \|u\|_{\mathcal{L}^{1,p}}$$

où $\|u\|_{\mathcal{L}^{1,p}} = (\mathcal{E}_p(u))^{\frac{1}{p}}$

Preuve voir [14].

□

2.2.2 Proposition *Pour toute fonction $u \in \mathcal{L}^{1,p}(X)$ avec $p \in]1, \infty[$, il existe une fonction unique $g_u \in D(u)$ telle que: $\int_X g_u^p \, d\mu = \mathcal{E}_p(u)$. La fonction g_u est appelée alors le $p-$*pseudo-gradient minimal, *et elle est notée par $D_p^* u$.*

Preuve Voir [14].

□

2.2 Définition *Un espace de Sobolev est dit* local *si la propriété suivante est vérifiée: Si u est constante presque partout sur un borélien borné A de X, alors $\mathcal{E}_p(u|A) = 0$ où*

$$\mathcal{E}_p(u|A) := \inf\{\int_A g^p \, d\mu : g \in D(u)\}.$$

2.3 Espaces de Sobolev obtenus par complétion

Dans ce paragraphe, nous supposerons qu'une famille de pseudo-gradients $\tilde{D}(u)$ a été définie seulement pour les fonctions localement lipschitziennes $u \colon X \to \mathbb{R}$, et que cette correspondance vérifie les axiomes $A1 - A5$. Par la procédure de *complétion* décrite ci-dessous, nous allons définir les pseudo-gradients pour toute fonction dans $L^1_{loc}(X)$.
Tout d'abord, introduisons ces notations: $\mathcal{F}$ est l'ensemble des fonctions localement lipschitziennes, et $\mathcal{F}_c \subset \mathcal{F}$ est l'ensemble des fonctions localement lipschitziennes à support compact.

2.3 Définition *Soient $u \in L^1_{loc}(X)$ et $g : X \to [0, \infty]$ deux fonctions, alors $g \in \tilde{D}(u)$ si et seulement si ou bien $g = \infty$, ou bien il existe deux suites de fonctions mesurables $\{u_n\}_n$ et $\{g_n\}_n$ telles que les u_n sont localement lipschitziennes, $g_n \in D(u_n)$, $u_n \to u$ dans $L^p_{loc}(X)$ et $(g - g_n) \to 0$ dans $L^p(X)$.*

2.3.1 Proposition *La correspondance $u \to \tilde{D}(u)$ satisfait les axiomes $A1 - A5$ pour tout $u \in L^1_{loc}(X)$.*
Preuve Voir [14].

□

2.4 Définition *Soit* $1 < p < \infty$. *Une suite* $\{u_i\}_i \subset W^{1,p}(X)$ converge vers u au *sens de la* m-toplogie *si* $u_j \to u$ *dans* $L^p(X)$ *et* $D_p^* u_j \to D_p^* u$ dans $L^p(X)$.

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer un théorème de densité qui sera très utile par la suite.

2.3.2 Théorème *Si l'espace de Sobolev* X *est local et* $p \in]1, \infty[$, *alors* $\mathcal{F}_c \cap W^{1,p}(X)$ *est dense dans* $W^{1,p}(X)$ *pour la* $m-$*toplogie.*

Preuve Voir théorème 1.29 de [14].

□

2.4 Exemples d'espaces de Sobolev

Dans cette section, nous allons rappeler quelques exemples d'espaces de Sobolev sur les espaces métriques mesurés.

2.4.1 Espaces de Sobolev au sens de Hajłasz

Une fonction mesurable $g : X \to \overline{\mathbb{R}}+$ est un *pseudo-gradient au sens de Hajłasz* pour la fonction $u \colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ si:

$$|u(x) - u(x')| \leq (g(x) + g(x'))d(x, x') \tag{2.5}$$

pour tout $x, x' \in X \setminus F$ où $F \subset X$ est un ensemble de mesure nulle.
Notons alors par $HD(u)$ l'ensemble de tous les pseudo-gradients au sens de Hajłasz, l'espace de Dirichlet par $HL^{1,p}(X)$ et l'espace de Sobolev par $HW^{1,p}(X, d, \mu)$.

2.6 Remarques: *1.) L'espace* X *muni de l'espace de Sobolev au sens de Hajłasz vérifie les cinq axiomes de l'approche axiomatique des espaces de Sobolev sur les espaces métriques mesurés(voir [14]), et c'est un exemple d'espace de Sobolev non local.*

2.) En intégrant deux fois l'inégalité (2.5), voir par exemple [14], on obtient l'inégalité de Poincaré de type $(1, 1)$ *suivante*

$$\fint_B |u - u_B| d\mu \leq C \operatorname{diam}(B) \left(\fint_B g d\mu \right) \tag{2.7}$$

pour toute boule $B \subset X$.

2.4.2 Espaces de Sobolev au sens de "Stretching"

A présent,Nous allons donner un exemple d'espace de Sobolev local.
D'abord introduisons quelques notations: Pour une fonction localement lipschitzienne $u\colon X \to \mathbb{R}$ et une boule $B(x,r) \subset X$ définissons

$$L_{u,r}(x) := \sup_{d(y,x)\leq r} \frac{|u(x)-u(y)|}{r} \text{ et } L_u(x) := \limsup_{r\to 0} L_{u,r}(x).$$

$SD(u)$ est alors l'ensemble des fonctions boréliennes g telles que:

$$g(x) \quad \geq L_u(x)$$

pour presque tout $x \in X$.
Nous définissons alors les pseudo-gradients pour toutes fonctions $u \in L^1_{loc}(X)$ par la procédure de complétion.
L'espace de Sobolev associé est noté $SW^{1,p}(X,d,\mu)$. Il vérifie les cinq axiomes, et c'est un exemple d'espace local.

2.4.3 Espaces de Sobolev au sens de sur-gradient

Nous supposerons que X est un espace métrique rectifiablement connexe, c'est -à- dire que pour tous $x, y \in X$ il existe une courbe γ liant x à y de longueur finie.

2.8 Définition *Soit $u : X \to \mathbb{R}$ une fonction localement lipshitzienne.*
Une fonction borélienne $g : X \to \mathbb{R}_+$ est dite un sur-gradient si pour toute courbe lipshitzienne $\gamma : [0,1] \to X$ nous avons:

$$|u(\gamma(1)) - u(\gamma(0))| \leq \int_0^1 g(\gamma(t))\, dt.$$

Et nous définissons l'espace de Sobolev par complétion.

Nous noterons par $UD(u)$ l'ensemble des sur-gradients d'une fonction $u \in L^1_{loc}(X)$, par $UW^{1,p}(X,d,\mu)$ l'espace de Sobolev associé.
Cet espace vérifie les cinq axiomes et c'est un exemple d'espace local (voir [14]).

2.5 inégalité de Sobolev globale

Tout au long de ce paragraphe, on supposera que les espaces de Sobolev sont définis par complétion.
Pour montrer les inégalités de Sobolev, nous aurons besoin d'introduire cette définition.

2.9 Définition *L'espace de Sobolev est dit* absolument local *si:*
(a) X est local(voir définition 2.3.2),

(b) pour toute fonction localement lipschitzienne $u\ :\ X\ \to \mathbb{R}$ *nous avons:*

$$g\ \in D(u) \Rightarrow g\ \chi_{\{x:u(x)\ \geq\ 0\}} \in D(u^+)$$

où $u^+ = \max(u, 0)$.

Une simple vérification montre que les espaces $UW^{1,p}(X, d, \mu)$ et $SW^{1,p}(X, d, \mu)$ sont absolument locaux (voir lemme 10.4 de [24]).

2.5.1 Proposition *Soit* (X, d, μ) *un espace métrique mesureé muni d'une strucure d'espace de Sobolev absolument local alors pour tout* $u\ \in \mathcal{L}^{1,p}(X, d, \mu)$ *on a :*

1.) *Si* $g\ \in D(u)$ *alors* $g\ \chi_{\{s\ \leq u\ \leq s+t\}}\ \in D(v)$ *où* s, t *sont deux nombres positifs et* $v = t - (t - (u - s)^+)^+$.

2.)
$$(\sum_{k\in\mathbb{Z}}\ \|u_k\|^p_{\mathcal{L}^{1,p}})^{\frac{1}{p}}\ \leq\ 2^{\frac{1}{p}}\ \|u\|_{\mathcal{L}^{1,p}}$$

où $u_k = \rho^k(\rho - 1) - (\rho^k(\rho - 1) - (u - \rho^k)^+)^+$ avec $\rho\ >\ 1$.

La fonction u_k peut également s'écrire

$$u_k = \begin{cases} 0 & \text{si } u(x) \leq \rho^k \\ u(x) - \rho^k & \text{si } \rho^k \leq u(x) \leq \rho^{k+1} \\ \rho(\rho^k - 1) & \text{si } u(x) \geq \rho^{k+1} \end{cases}.$$

Observons aussi que si $u(x)\ \geq\ 0$ alors $u(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} u_k(x)$.
La condition (1) est similaire à la propriété de troncation utilisée dans [24, page 9].
De même, la condition (2) est similaire à la propriété (H_p^ρ) de [2].

Preuve

1.) On a $g\ \chi_{\{u\ \geq\ s\}}\ \in D((u - s)^+)$, et donc $g\ \chi_{\{u\ \geq\ s\}}\ \chi_{\{t-(u-s)^+\ \geq\ 0\}}\ \in D(v)$, i.e $g\ \chi_{\{s\ \leq u\ \leq s+t\}}\ \in\ D(v)$.

2.) Posons $A_k\ = \{x : \rho^k\ \leq\ u(x)\ \leq\ \rho^{k+1}\}$, $B_k\ = \{x : \rho^k\ <\ u(x)\ <\ \rho^{k+1}\}$ et $C_k = \{x :\ u(x) = \rho^k\ \}$.
La première partie de la proposition entraîne:
$\mathcal{E}_p(u_k) \leq \int_{A_k} g^p\ d\mu$, comme $A_k = B_k \cup C_k \cup C_{k+1}$, on a donc pour tout $g\ \in\ D(u)$ les inégalités suivantes:

$$\begin{aligned}\sum_k\ \mathcal{E}_p(u_k)\ &\leq\ \sum_k \int_{B_k}\ g^p\ d\mu + 2 \sum_k \int_{C_k}\ g^p\ d\mu \\ &\leq\ 2\ \int_X\ g^p\ d\mu.\end{aligned}$$

c'est -à- dire $(\sum_{k\in\mathbb{Z}}\ \|u_k\|^p_{\mathcal{L}^{1,p}})^{\frac{1}{p}}\ \leq\ 2^{\frac{1}{p}}\ \|u\|_{\mathcal{L}^{1,p}}$.

□

Nous avons alors un corollaire immédiat.

2.5.2 Corollaire *Sous les mêmes hypothèses et notations que la proposition précédente nous avons:*

1.) $\|v\|_{\mathcal{L}^{1,p}} \leq C \ \|u\|_{\mathcal{L}^{1,p}}$

2.) $(\sum_k \ \|u_k\|^{\alpha}_{\mathcal{L}^{1,p}})^{\frac{1}{\alpha}} \ \leq \ C \ \|u\|_{\mathcal{L}^{1,p}}$ *pour tout* $\alpha \ \geq \ p$.

□

Notons par $\mathcal{F}^+$ la famille des fonctions u positives localement lipschitzienne à support compact.

2.5.3 Théorème *Soit*(X, d, μ) *un espace métrique mesuré muni d'une structure d'espace de Sobolev absolument local.*
Supposons que l'espace métrique (X, d) *est propre, qu'il existe une famille d'opérateurs* $\{M_r : r \ > 0\}$ *et un nombre* $1 \leq p < s$ *tels que pour toute fonction* $u \ \in \mathcal{F}^+$ *nous avons ces deux inégalités pour tout* $r \ > 0$ *:*

1.) $\|M_r u\|_\infty \leq \ C_1 \ r^{-s}\|u\|_1$

2.) $\|u - M_r u\|_p \leq C_2 \ r \ \|u\|_{\mathcal{L}^{1,p}}$.

Alors on a l'inégalité de Sobolev globale:

$$\left(\int_X \ |u|^q \ d\mu\right)^{\frac{1}{q}} \leq C \,(\mathcal{E}_p(u))^{\frac{1}{p}} \tag{2.10}$$

pour tout $u \ \in \mathcal{F}^+$*et où* C *est une constante qui ne dépend que de l'espace* X*, et* $q = \frac{sp}{s-p}$.

Preuve Ce théorème est une conséquence des théorèmes 3.1 et 9.1 de [2]. Nous en donnons ci-dessous une preuve directe.
1ère étape:
Soit u une fonction positive localement lipschitzienne à support compact. Si on pose $\tau = 1 + \frac{1}{s}$, on a cette inégalité:

$$\sup_{\lambda \ > \ 0} \{\lambda\mu(u \ \geq \ \lambda)^{\frac{1}{p\tau}}\} \leq \ C_3 \ \|u\|^{\frac{1}{\tau}}_{\mathcal{L}^{1,p}} \|u\|_1^{\frac{1}{s+1}}.$$

Preuve (preuve de la 1ère étape)
Fixons $\lambda \ > \ 0$, et soit $r \ > \ 0$ telle que: $C_1 r^{-s}\|u\|_1 = \frac{\lambda}{3}$.
$\mu(u \ \geq \ \lambda) \ \leq \ \mu(|u - M_r u| \ \geq \ \frac{\lambda}{2}) + \mu(|M_r u| \ \geq \ \frac{\lambda}{2})$, or $\|M_r u\|_\infty \ \geq \ |M_r u(x)|$ presque

partout et $C_1 r^{-s}\|u\|_1 \geq \|M_r u\|_\infty$, donc $\frac{\lambda}{3} \geq \|M_r u\|_\infty \geq |M_r u(x)|$, pour presque tout $x \in X$, et donc $\mu(|M_r u| \geq \frac{\lambda}{2}) = 0$. Ainsi

$$\begin{aligned}
\mu(u \geq \lambda) &\leq \mu(|u - M_r u| \geq \frac{\lambda}{2}) \\
&\leq (\frac{2}{\lambda})^p \|u - M_r u\|_p^p \\
&\leq (\frac{2}{\lambda})^p \, C_2^p \, r^p \, \mathcal{E}_p(u) \\
&\leq (2C_2)^p (3C_1)^{\frac{p}{s}} \lambda^{-p(1+\frac{1}{s})} \mathcal{E}_p(u) \|u\|_1^{\frac{p}{s}}.
\end{aligned}$$

Et donc l'inégalité annoncée est une conséquence de cette dernière inégalité.

♯

Comme u est bornée et à support compact, on a alors cette inégalité:

$$\sup_{\lambda > 0} \{\lambda \mu(u \geq \lambda)^{\frac{1}{p\tau}}\} \leq C_3 \|u\|_{\mathcal{L}^{1,p}}^{\frac{s}{s+1}} (\|u\|_\infty \, \mu(\mathrm{supp}(u)))^{\frac{1}{s+1}} \tag{2.11}$$

$2^{ème}$ étape:

L'inégalité (2.11) entraîne:

$$\sup_{\lambda > 0} \{\lambda \mu(u \geq \lambda)^{\frac{1}{q}}\} \leq C_4 \, \|u\|_{\mathcal{L}^{1,p}}$$

Preuve (preuve de la $2^{ème}$ étape)

Soit u une fonction localement lipschitzienne positive à support compact, sous les mêmes notations que la proposition 2.5.1, on a donc:

$\mathrm{supp}(u_k) \subset \{x \ : u(x) \geq \rho^k\}$ et $\{x \ : u_k(x) \geq \rho^k(\rho - 1)\} = \{x \ : u(x) \geq \rho^{k+1}\}$, et $\|u_k\|_\infty \leq \rho^k(\rho - 1)$.

On applique à u_k l'inégalité 2.11 avec $\lambda = \rho^k(\rho - 1)$, nous aurons alors:

$$\rho^k(\rho - 1)\mu(u \geq \rho^{k+1})^{\frac{1}{p\tau}} \leq C_3 \|u\|_{\mathcal{L}^{1,p}}^{\frac{s}{s+1}} \, (\rho^k(\rho - 1) \ \ \mu(u \geq \rho^k))^{\frac{1}{s+1}}.$$

Ce qui entraîne:

$$\mu(u \geq \rho^{k+1})^{\frac{1}{p\tau}} \leq C_3 \left(\frac{\|u\|_{\mathcal{L}^{1,p}}}{\rho - 1}\right)^{\frac{s}{s+1}} \rho^{-\frac{kq}{p\tau}} \, (\rho^k \mu(u \geq \rho^k)^{\frac{1}{q}})^{\frac{q}{s+1}}.$$

Dans cette inégalité, nous sommes basés sur le fait que: $q = \frac{sp}{s-p}$.

Si nous posons $N(u) := \sup_k \{\rho^k \ \mu(u \geq \rho^k)^{\frac{1}{q}}\}$, alors

$$N(u)^{\frac{q}{p\tau}} \leq C_3 \rho^{\frac{q}{p\tau}} (\frac{\|u\|_{\mathcal{L}^{1,p}}}{\rho - 1})^{\frac{s}{s+1}} \, N(u)^{\frac{q}{s+1}}.$$

Comme $N(u) < \infty$, nous obtenons $N(u) \leq C_3^\tau \frac{\rho^{\frac{q}{p}}}{\rho - 1} \|u\|_{\mathcal{L}^{1,p}}$.

Pour $\lambda > 0$ il existe un nombre $k \in \mathbb{Z}$ tel que: $\rho^k \leq \lambda < \rho^{k+1}$.

Et donc $\lambda \, (\mu(u \geq \lambda))^{\frac{1}{q}} \leq \rho^{k+1} \, (\mu(u \geq \rho^k))^{\frac{1}{q}}$, ainsi

$$\begin{aligned}
\sup_{\lambda > 0} \{\lambda(\mu(u \geq \lambda))^{\frac{1}{q}}\} &\leq \rho \, N(u) \\
&\leq C_3^\tau \frac{\rho^{1+\frac{q}{p}}}{(\rho - 1)} \|u\|_{\mathcal{L}^{1,p}}.
\end{aligned}$$

$\sharp$

Rappelons que la *norme de Lorentz* d'une fonction $u\colon X \to \mathbb{R}$ est définie pour $a, b > 0$ par $\|u\|_{a,b} = (b \int_0^\infty (t^a \ \mu(u \ \geq \ t))^{\frac{b}{a}})^{\frac{1}{b}}$.
Le théorème de Fubini entraîne: $\|u\|_{a,a} = \|u\|_a$

$3^{ème}$ étape:

Pour toute fonction positive u localement lipschitzienne et à support compact, on a pour tout $\alpha \geq p$:

$$\|u\|_{q,\alpha} \ \leq \ C_5 \ \|u\|_{\mathcal{L}^{1,p}}.$$

Preuve (Preuve de la $3^{ème}$ étape:)
On applique la $2^{ème}$ étape à u_k avec $\lambda = \rho^k(\rho - 1)$, nous aurons alors:

$$\rho^k \mu(u \ \geq \ \rho^{k+1})^{\frac{1}{q}} \ \leq \ \frac{C_4}{(\rho - 1)} \ \|u_k\|_{\mathcal{L}^{1,p}}.$$

Soit $\alpha \ \geq \ p$, donc

$$(\sum_k \rho^{k\alpha}(\mu(u \ \geq \ \rho^{k+1}))^{\frac{\alpha}{q}})^{\frac{1}{\alpha}} \leq \frac{C_4}{(\rho - 1)} \ (\sum_k \ \|u_k\|^{\alpha}_{\mathcal{L}^{1,p}})^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Le corollaire 2.5.2 entraîne ainsi l'inégalité avec $C_5 = \frac{C_4}{(\rho-1)}$.
En particulier, $\|u\|_q = \|u\|_{q,q} \ \leq C_5 \ \|u\|_{\mathcal{L}^{1,p}}$, car $q \ > \ p$.

$\square$

2.12 Remarque: *Il est facile de vérifier à partir des axiomes A2 et A4 que $D[u] \subset D[|u|]$, donc*

$$\mathcal{E}_p(|u|) \leq \mathcal{E}_p(u).$$

On en déduit que l'inégalité de Sobolev globale (2.10) reste vraie pour toute fonction localement lipschitzienne et à support compact.

Nous avons un corollaire important du théorème 2.5.3

2.5.4 Corollaire *Sous les mêmes hypothèses que le théorème précédent l'inégalité de Sobolev globale*

$$\left(\int_X \ |u|^q \ d\mu\right)^{\frac{1}{q}} \leq C\,(\mathcal{E}_p(u))^{\frac{1}{p}}$$

est vérifiée pour toute fonction $u \ \in W^{1,p}(X, d, \mu)$.

Preuve Par le théorème 2.3.2, nous avons la densité des fonctions localement lipschitziennes à support compact pour la $m-$topologie; et donc pour tout $u \ \in \ W^{1,p}(X, d, \mu)$ il existe une suite de fonctions $\{u_j\}_j \ \in \mathcal{F}_c$ telle que $u_j \to \ u$ dans $L^p(X)$ et $D^*u_j \ \to \ D^*u$ dans $L^p(X)$.

Comme $u_j \to u$ dans $L^p(X)$, il existe une sous suite $\{u_{\eta_j}\}_j$ qui converge presque partout vers u.
Par le théorème 2.5.3 et la remarque 2.12 nous avons

$$\|u_{\eta_j}\|_q \leq C \|u_{\eta_j}\|_{\mathcal{L}^{1,p}}.$$

Par passage à la limite inferieure nous aurons:

$$\liminf_{j\to\infty} \|u_{\eta_j}\|_q \leq C \liminf_{j\to\infty} \|u_{\eta_j}\|_{\mathcal{L}^{1,p}} = C \|u\|_{\mathcal{L}^{1,p}},$$

car $D^*u_j \to D^*u$ dans $L^p(X)$.
Le lemme de Fatou implique:

$$\left(\int_X (\liminf_{j\to\infty} u_{\eta_j})^q \, d\mu\right)^{\frac{1}{q}} \leq \liminf_{j\to\infty} \|u_{\eta_j}\|_q,$$

donc
$(\int_X u^q \, d\mu)^{\frac{1}{q}} \leq \liminf_{j\to\infty} \|u_{\eta_j}\|_q$.
Et ainsi on a

$$\left(\int_X |u|^q \, d\mu\right)^{\frac{1}{q}} \leq C\,(\mathcal{E}_p(u))^{\frac{1}{p}}.$$

□

2.13 Remarque: *La propriété suivante: il existe deux réels $s > 1$ et $C > 0$ tels que*

$$\mu(B(x,r)) \geq C\, r^s$$

pour tout $r > 0$ et pour tout $x \in X$ entraîne la condition (1) du théorème 2.5.3 avec $M_r(u)(x) = ⨍_{B(x,r)} u \, d\mu := u_{B(x,r)}$.

2.6 inégalité de Sobolev globale sur les espaces de type homogène

Un des cadres dans lequel la théorie des espaces de Sobolev sur les espaces métriques s'applique de manière assez satisfaisante est celui des espaces de *type homogène*, dont on rappelle brièvement la définition. Pour plus de détails voir l'annexe B.

2.14 Définition *Un espace métrique mesuré (X, d, μ) est dit de type homogène s'il existe une constante $C > 0$ telle que:*

$$0 < \mu\,(B(x,r)) < C\mu(B(x, \frac{r}{2})) < \infty$$

Pour tout $x \in X$ et $r > 0$.

Nous allons appliquer le corollaire 2.5.4 au cas particulier des espaces de type homogène munis d'une structure d'espace de Sobolev axiomatique absolument locaux, et où $M_r(u)(x) = ⨍_{B(x,r)} u \, d\mu := u_{B(x,r)}$.

2.6.1 Corollaire *(inégalité de Sobolev globale sur les espaces de type homogène)*
Soient (X, d, μ) *un espace de type homogène muni d'une structure d'espace de Sobolev absolument local et* $1 \leq p < s$ *deux réels.*
Supposons que les conditions suivantes sont satisfaites:
a)(X, d) *est complet,*
b)pour tout $r > 0$ *et pour tout* $x \in X$ *on a:*

$$\mu(B(x,r)) \geq C\, r^s,$$

c) l'inégalité de Poincaré de type p

$$\int_B |u - u_B|^p d\mu \leq C \operatorname{diam}(B)^p \int_B g^p d\mu$$

est vérifiée pour toute boule $B \subset X$*, pour toute fonction* $u\colon X \to \mathbb{R}$ *localement lipschitzienne à support compact et pour tout* $g \in D(u)$.
Alors l'inégalité de Sobolev globale de type (p, q)

$$\left(\int_X |u|^q \, d\mu\right)^{\frac{1}{q}} \leq (\mathcal{E}_p(u))^{\frac{1}{p}}$$

est vérifiée pour tout $u \in W^{1,p}(X, d, \mu)$*, avec* $q = \frac{sp}{s-p}$.

Preuve Le corollaire 2.5.4 avec les faits suivants:

1.) L'espace métrique est propre par la proposition B.4 de l'annexe B,

2.) l'inégalité de Poincaré globale de type p est vérifiée (voir la proposition B.0.3 de l'annexe B),

3.) $\|M_r(u)\|_\infty \leq C_1 r^{-s} \|u\|_1$ pour toute fonction u positive localement lipschitzienne à support compact, et pour tout $r > 0$ où $M_r(u)(x) = u_{B(x,r)}$ (voir la remarque 2.13),

entraînent le corollaire.

□

Application du corollaire 2.6.1
Si (M, g) est une variété riemannienne complète telle que

1. $\mathrm{Vol}(B(x,r)) \geq C r^s$ pour tout $r > 0$,

2. l'inégalité de Poincaré de type p est vérifiée pour toute boule $B \subset M$ où $1 \leq p < s$,

alors *dimisop* $\geq \frac{sp}{s-p}$.
Ce résultat se trouve dans [7] théorème 3.

Chapitre 3

Homéomorphisme de p-dilatation bornée

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous étendons la définition des homéomorphismes à *$s-$dilatation bornée* aux espaces métriques mesurés.
Ensuite, nous généralisons le théorème de P. Pansu mentionné dans l'introduction. Nous nous inspirons des techniques utilisées par Pansu pour la preuve de ce théorème.
Comme dans le chapitre précédent, les espaces métriques mesurés sont tels que

1.) μ est une mesure extérieure Borel régulière,

2.) pour toute boule $B \subset X$, de rayon strictement positif nous avons: $0 < \mu(B) < \infty$,

3.) l'espace métrique est propre.

Les espaces métriques mesurés sont toujours munis d'une structure d' espace de Sobolev axiomatique vérifiant les axiomes A1-A5.

3.2 Applications de $p-$dilatations bornées

Tout d'abord, nous étendons la définition des applications à *$p-$dilatation bornée* aux espaces métriques mesurés.

3.1 Définition *Soient X, Y deux espaces métriques mesurés et $f\colon X \to Y$ un homéomorphisme. L'application $f\colon X \to Y$ est dite à $p-$dilatation bornée si :*

$$\begin{array}{rcl} f^*\colon \mathcal{A}^p(Y) & \to & \mathcal{A}^p(X) \\ v & \to & v \circ f \end{array}$$

est un opérateur borné où $\mathcal{A}^p(X)$ est l'espace de Royden (voir définition 2.1).

3.2 Remarque: *Dans le cas particulier où $f\colon M \to N$ est un difféomorphisme entre variétés riemanniennes orientées, cette définition est équivalente à la définition 1.3 du premier chapitre (voir théorème 6.2 du [37]), à savoir f est à $p-$dilatation bornée si et seulement si $|df|^p/J_f \in L^\infty(M)$.*

Avant d'énoncer les résultats principaux de ce paragraphe, rappelons encore quelques définitions classiques.

3.3 Définitions *1.) Un espace métrique mesuré X est dit s-régulier au sens d'Ahlfors s'il existe $C \geq 1$ tel que pour tout $x \in X$ et tout $r \geq 0$ on a:*

$$\frac{1}{C}\, r^s \leq \mu(B(x,r) \leq C\, r^s. \tag{3.4}$$

2.) Un espace métrique mesuré X est dit localement uniformément régulier (au sens d'Ahlfors) de dimension locale s s'il existe $\eta > 0$ et $C \geq 1$ tels que pour tout $x \in X$ et tout $r \in [0, \eta]$ on a:

$$\frac{1}{C}\, r^s \leq \mu(B(x,r)) \leq C\, r^s.$$

3.) Un espace métrique (X,d) est Q-quasi-convexe (où $Q \geq 1$) si pour tout $u, v \in X$ il existe une courbe $\gamma : [0,L] \to X$ liant u à v telle que $\ell(\gamma) \leq Q\, d(u,v)$, où $\ell(\gamma)$ est la longueur de la courbe γ.

4.) Soient (X,d) et (Y,δ) deux espaces métriques, et $f : X \to Y$ un homéomorphisme. f est une quasi-isométrie s'il existe $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 1$ tels que:

$$\frac{1}{\beta} d(x,y) - \alpha \leq \delta(f(x), f(y)) \leq \beta d(x,y) + \alpha$$

pour tout $x, y \in X$.

5.) Soient (X,d) un espace métrique et s un nombre positif. Pour tout $A \subset X$ et $\delta > 0$ posons

$$\mathcal{H}^s_\delta(A) := \inf\{\sum_i (\operatorname{diam}(B_i))^s : A \subset \cup_i B_i \text{ et } \operatorname{diam}(B_i) \leq \delta\}.$$

(a) La mesure s-dimensionnelle de Hausdorff de A est alors

$$\mathcal{H}^s(A) := \lim_{\delta \to 0} \mathcal{H}^s_\delta(A).$$

(b) La dimension de Hausdorff de A est

$$\dim \mathcal{H}(A) := \sup\{\alpha > 0 : \mathcal{H}^\alpha(A) = \infty\}.$$

6.) L'espace métrique mesuré (X,d,μ) vérifie une inégalité de Poincaré de type (q,p) où $1 \leq q, p < \infty$ s'il existe $\hat{C} > 0$ et $\lambda \geq 1$ tels que:

$$\left(⨍_B |u - u_B|^q \, d\mu\right)^{\frac{1}{q}} \leq \hat{C}\ \operatorname{diam}(B) \left(⨍_{\lambda B} g^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \tag{3.5}$$

Pour tout $u \in C(X)$, pour tout $g \in D(u)$ et pour toute boule B où $C(X)$ est l'espace des fonctions continues.

7.) *Un espace métrique mesuré (X, d, μ) vérifie l'inégalité de Sobolev globale de type (q, p) avec $p, q \geq 1$ s'il existe $C > 0$ tel que*

$$\left(\int_X |u|^q \, d\mu\right)^{\frac{1}{q}} \leq (\mathcal{E}_p(u))^{\frac{1}{p}}$$

pour tout $u \in C_c(X) \cap \mathcal{L}^{1,p}(X)$.

8.) *Un espace métrique (X, d) est un espace de longueur si la distance de deux points quelconques est toujours égale à la borne inférieure des longueurs des courbes qui les joingnent, et il est géodésique s'il existe une courbe minimisante entre deux points quelconques de (X, d).*

3.6 Remarques: *1.) La mesure de Hausdorff est une mesure extérieure Borel régulière.*

2.) *Si X vérifie une inégalité de Poincaré de type (q, p) alors X vérifie une inégalité de Poincaré de type (q, p') pour tout $p' \geq p$ (c'est une conséquence directe de l'inégalité de Jensen ou de Hölder).*

3.) *De même, si X vérifie une inégalité de Poincaré de type (q, p) alors X vérifie une inégalité de Poincaré de type (q', p) pour tout $q' \leq q$*

4.) *Si $q = p$ on dit simplement que X vérifie une inégalité de Poincaré de type p.*

5.) *Rappelons encore que si l'espace X est muni de l'espace de Sobolev au sens de Hajłasz alors l'inégalité de Poincaré de type $(1, p)$ est vérifiée pour tout $p \geq 1$.*

Introduisons une classe d'espaces métriques mesurés.

3.7 Définition *Un espace métrique mesuré X est dans la classe $\mathcal{C}(s, p)$ si*

1.) *L'espace métrique (X, d) est propre et quasi-convexe,*

2.) *l'espace métrique mesuré (X, d, μ) est localement uniformément régulier de dimension locale s,*

3.) *L'espace métrique mesuré (X, d, μ) supporte une inégalité de Poincaré de type $(1, p)$ localement uniformément c'est-à- dire qu' il existe $R > 0$ tel que l'équation (3.5) est vérifiée pour toute boule de rayon $r < R$, tout $u \in C(X)$ et pour tout $g \in D(u)$.*

Exemple: Si (M, g) est une variété riemannienne complète à courbure de Ricci minorée et de rayon d'injectivité strictement positif alors M est dans la classe $\mathcal{C}(n, p)$ où n est la dimension de M . Nous verrons dans le chapitre 5 d'autres exemples (non riemanniens) appartenant à cette classe.

3.8 Remarques: *1.) Rappelons que tout espace de longueur propre est géodésique (ceci découle d'Arzela-Ascoli), en particulier un tel espace est toujours quasi-convexe.*

2.) Si l'espace X est de type homogène, connexe par arc, complet et vérifiant une inégalité de Poincaré de type $(1,p)$ pour l'espace de Sobolev au sens de sur-gradient, et où $p \geq 1$, alors X est quasi-convexe(voir proposition 4.4 de [24]).

3.) L'inégalité de Jensen implique $\mathcal{C}(s,p) \subset \mathcal{C}(s,p')$ dès que $p \leq p'$.

3.3 Principaux résultats sur les applications à p-dilatations bornées

Nous pouvons maintenant énoncer les résultats centraux de ce paragraphe.

3.3.1 Proposition *Soient X un espace de la classe $\mathcal{C}(s_1,p)$ et Y un espace de la classe $\mathcal{C}(s_2,p)$ où $p > s_2 \geq s_1$, alors tout homéomorphisme $f\colon X \to Y$ à $p-$dilatation bornée est lipschitzien; en particulier si $s_2 > s_1$ alors il n'existe pas d'homéomorphisme à $p-$dilatation bornée de X vers Y.*

3.3.2 Théorème *Soient X, Y deux espaces de la classe $\mathcal{C}(s,p)$ où $p > s$. Si X vérifie une inégalité de Sobolev globale de type (q,p) pour un $q \geq 1$ quelconque, alors tout homéomorphisme $f\colon X \to Y$ à $p-$dilatation bornée est une quasi-isométrie.*

Ce théorème généralise le théorème de Pansu mentionné dans l'introduction. Pour la preuve, nous nous baserons sur plusieurs résultats auxiliaires. D'abord, nous avons le lemme classique suivant (voir par exemple proposition 2.6 de[1] ou lemme 3.6 de [23])

3.3.3 Lemme *Soient X un espace localement uniformément régulier de dimension locale s , $u \in C(X)$, $0 \leq \beta < 1$ et $x, y \in X$ avec $d(x,y) \leq \frac{\eta}{10}$.*
(η est la constante donnée par la définition de localement uniformément régulier). Alors nous avons:

$$|u(x) - u(y)| \leq C' d(x,y)^{\beta} (u^{\sharp}_{\beta,4d(x,y)}(x) + u^{\sharp}_{\beta,4d(x,y)}(y))$$

où

$$u^{\sharp}_{\beta,R}(x) = \sup_{0 < r < R} \frac{1}{r^{\beta}} \fint_{B(x,r)} |u - u_{B(x,r)}| \, d\mu$$

et C' est une constante qui ne dépend que de l'espace X et de β.

Preuve Soient $x \in X$ et $0 < r < \frac{\eta}{10}$ fixés. Notons $B_i := B(x, 2^{-i}r)$ $i \in \mathbf{N}$, nous avons alors les inégalités suivantes

$$\begin{aligned}
|u_{B_{i+1}} - u_{B_i}| &= |\fint_{B_{i+1}} u d\mu - \fint_{B_{i+1}} u_{B_i}\, d\mu| \\
&\leq \fint_{B_{i+1}} |u - u_{B_i}|\, d\mu \\
&\leq \frac{\mu(B_i)}{\mu(B_{i+1})} \fint_{Bi} |u - u_{B_i}|\, d\mu \\
&\leq C^2 2^s \fint_{Bi} |u - u_{B_i}|\, d\mu.
\end{aligned}$$

La fonction u étant continue en x, on a $\lim_{i\to\infty} u_{B_i} = u(x)$, ce qui implique

$$\begin{aligned}
|u(x) - u_{B(x,r)}| &\leq \sum_{i=0}^{\infty} |u_{B_{i+1}} - u_{B_i}| \\
&\leq C^2 2^s \sum_{i=0}^{\infty} \fint_{Bi} |u - u_{B_i}| d\mu \\
&\leq C^2 2^s \sum_{i=0}^{\infty} (2^{-i}r)^\beta (2^{-i}r)^{-\beta} \fint_{Bi} |u - u_{B_i}| d\mu \\
&\leq C^2 2^{s+1} r^\beta u^\sharp_{\beta,r}(x).
\end{aligned}$$

Soit $y \in B(x,r)$ alors $B(x,r) \subset B(y,2r)$, d'où

$$\begin{aligned}
|u(y) - u_{B(x,r)}| &\leq |u(y) - u_{B(y,2r)}| + |u_{B(x,r)} - u_{B(y,2r)}| \\
&\leq C^2 2^{s+1+\beta} r^\beta u^\sharp_{\beta,2r}(y) + \fint_{B(x,r)} |u - u_{B(y,2r)}|\, d\mu \\
&\leq 2^s r^\beta u^\sharp_{\beta,2r}(y) + (2r)^\beta \fint_{B(y,2r)} |u - u_{B(y,2r)}|\, d\mu \\
&\leq (2^{s+1+\beta} C^2 + 2^\beta) r^\beta u^\sharp_{\beta,2r}(y).
\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité triangulaire, nous aurons alors

$$|u(x) - u(y)| \leq |u(x) - u_{B(x,r)}| + |u(y) - u_{B(x,r)}|,$$

et en prenant $r = 2d(x,y)$, on obtient l'inégalité suivante:

$$|u(x) - u(y)| \leq C' d(x,y)^\beta (u^\sharp_{\beta,4d(x,y)}(x) + u^\sharp_{\beta,4d(x,y)}(y))$$

avec $C' = \dfrac{2^{s+1+\beta} C^2 + 2^\beta}{2^\beta}$.

□

3.3.4 Lemme *Soient X un espace de la classe $\mathcal{C}(s,p)$, $u \in C(X)$ et $g \in D(u)$, alors pour tout $\alpha \in [0,1)$ et pour tous $x, y \in X$ tels que $d(x,y) \leq \inf\{\frac{\eta}{10}, R\}$ on a*

$$|u(x) - u(y)| \leq C_1\, d(x,y)^{1-\alpha} (\mathcal{M}_{\alpha,4\lambda d(x,y),p}\, g(x) + \mathcal{M}_{\alpha,4\lambda d(x,y),p}\, g(y)),$$

où $\mathcal{M}_{\alpha,R,p}g(x) = \sup_{0\ <\ r\ <R} r^{\alpha}(\fint_{B(x,r)} g^p\ d\mu)^{\frac{1}{p}}$, C_1 *est une constante qui ne dépend que de l'espace* X *et de* α. *La constante* R *est donnée par la définition 3.7.*

Preuve Nous avons les inégalités suivantes:

$$\begin{aligned} r^{\alpha-1}\fint_B |u-u_B|\ d\mu &\leq \hat{C}\ r^{\alpha-1}diam(B(x,r))\left(\fint_{\lambda B(x,r)} g^p\ d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \hat{C}r^{\alpha-1}(2r)\left(\fint_{B(x,\lambda r)} g^p\ d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \frac{2\hat{C}}{\lambda^{\alpha}}(\lambda r)^{\alpha}\left(\fint_{B(x,\lambda r)} g^p\ d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

Et donc $u^{\sharp}_{1-\alpha,r}(x) \leq \frac{2\hat{C}}{\lambda^{\alpha}}\mathcal{M}_{\alpha,\lambda r,p}g(x)$ d'où le résultat en utilisant le lemme 3.3.3.

□

3.3.5 Lemme *Sous les mêmes hypothèses que le lemme précédent et si* $p > s$ *on a*

$$|u(x)-u(y)| \leq C'\ d(x,y)^{1-\frac{s}{p}}\left(\int_{20\lambda B} g^p\ d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$$

pour toute boule de rayon $r\ \leq \inf\{\frac{\eta}{20\lambda}, R\}$ *et pour tous* $x, y\ \in B$, *et où* $C' = 2C_1\, C^{\frac{1}{p}}$. *En particulier,* u *est localement Hölder continue si* $g \in L^p loc(X)$.

Preuve Posons $B := B(t_0, \frac{\eta}{20\lambda})$ et $\alpha := \frac{s}{p}$, et soient $x, y\ \in B$ alors nous avons: $B(x, 4\lambda d(x,y)) \subset B(x, \frac{\eta}{2})$ et $B(y, 4\lambda d(x,y)) \subset B(y, \frac{\eta}{2})$. De même, nous avons ces inégalités:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\alpha,4\lambda d(x,y),p}g(x) &= \sup_{0\ <\ r\ <4\lambda d(x,y)} r^{\frac{s}{p}}(\fint_{B(x,r)} g^p\ d\mu)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq C^{\frac{1}{p}} \sup_{0\ <\ r\ <4\lambda d(x,y)} (\int_{B(x,r)} g^p\mu)^{\frac{1}{p}} \\ &= C^{\frac{1}{p}}(\int_{B(x,\frac{\eta}{2})} g^p\mu)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Pour établir ces inégalités, nous sommes basés sur le fait que l'espace X est localement uniformément régulier de dimension locale égale à s.
En outre, nous avons l' inégalité suivante

$$\mathcal{M}_{\alpha,4\lambda d(x,y),p}g(y) \leq C^{\frac{1}{p}}(\int_{B(y,\frac{\eta}{2})} g^p\mu)^{\frac{1}{p}}.$$

Et donc, par le lemme précédent on a:

$$|u(x)-u(y)| \leq C_1\ d(x,y)^{1-\frac{s}{p}}\left((\ C^{\frac{1}{p}}\int_{B(x,\frac{\eta}{2})} g^p\ \mu)^{\frac{1}{p}} +\ C^{\frac{1}{p}}(\int_{B(y,\frac{\eta}{2})} g^p\ \mu)^{\frac{1}{p}}\right).$$

Par l'inégalité triangulaire on a: $B(x, \frac{\eta}{2}) \subset 20\lambda B$ et $B(y, \frac{\eta}{2}) \subset 20\lambda B$, d'où

$$|u(x) - u(y)| \leq 2C^{\frac{1}{p}} C_1 \; d(x,y)^{1-\frac{s}{p}} (\int_{20\lambda B} g^p \; \mu)^{\frac{1}{p}}.$$

□

Pour prouver la proposition 3.3.1, nous aurons besoin d'introduire l'invariant de Hölder défini par

$$h_p(x,y) = \inf\{\mathcal{E}_p(u) : u \in \mathcal{L}(X)^{1,p} \cap C_c(X) \text{ avec } u(x) = 1 \text{ et } u(y) = 0\}$$

3.3.6 Lemme *Soit (X, d, μ) un espace métrique mesuré et localement uniformément régulier de dimension locale égale à s, alors*

$$h_p(x,y) \; \leq C \; d(x,y)^{s-p}$$

pour tous $x, y \in X$ avec $d(x,y) \leq \eta$.

Preuve L'espace X est localement uniformément régulier, il existe donc $\eta > 0$ et $C \geq 1$ tels que pour tout $x \in X$ et pour tout $r \in [0, \eta]$ on a:

$$\frac{1}{C} \; r^s \leq \mu(B(x,r)) \leq C \; r^s.$$

Soient $x, y \in X$ avec $d(x,y) \leq \eta$, et soit la fonction u définie par

$$u(z) = \left(1 - \frac{d(z,x)}{d(x,y)}\right)^+$$

alors u est $\frac{1}{d(x,y)}$-lipschitzienne à support compact. Par l'axiome A1, la fonction $\frac{1}{d(x,y)}\chi_{B(x,d(x,y))}$ est dans $D(u)$; et comme l'espace X est localement uniformément régulier, on a donc

$$h_p(x,y) \; \leq C \; d(x,y)^{s-p}.$$

□

3.3.7 Lemme *Soit X un espace de la classe $\mathcal{C}(s,p)$ avec $p > s$, alors il existe $C_2 > 0$ tel que*

$$h_p(x,y) \geq C_2 \, d(x,y)^{s-p}$$

pour tout $x, y \in X$ avec $d(x,y) \leq \inf\{\frac{\eta}{20\lambda}, R\}$.

Preuve Une conséquence immédiate du lemme 3.3.5.

□

3.3.8 Lemme *Soient X un espace de la classe $\mathcal{C}(s_1,p)$, Y un espace de la classe $\mathcal{C}(s_2,p)$ et $f\colon X \to Y$ un homéomorphisme à p-dilatation bornée.*
Si $p > s_1 \geq s_2$ alors f est localement hölderienne.
Si $p > s_2 \geq s_1$ alors f est localement lipschitzienne.

Preuve Soit $x \in X$ fixé, l'espace métrique mesuré Y est localement uniformément régulier de dimension locale s_2, il existe donc $\eta_2 > 0$, $C_2 > 1$ tels que pour tout $x \in Y$ et $r \in [0,\eta_2]$ on a:

$$\frac{1}{C_2}\, r^{s_2} \leq \mu_2(B(x,r)) \leq C_2\, r^{s_2}.$$

L'application f est continue en x, il existe alors $\delta(x) > 0$ tel que pour tout $u \in B(x,\delta)$ on a $d_2(f(u),f(v)) \leq \eta_2$ et donc

$$h_p(f(u),f(x)) \leq C\, d_2(f(u),f(x))^{s_2-p}$$

par le lemme 3.3.6.
L'application f étant à p-dilatation bornée, il existe $L \geq 0$ tel que

$$h_p(u,x) \quad \leq L\, h_p(f(u),f(x))$$

pour tout $u \in B(x,\delta)$. Posons $\hat{\eta} = \inf\{\delta, \frac{\eta}{20\lambda}, R\}$ où η, λ sont données par le lemme 3.3.7 appliqué à l'espace (X,d_1,μ_1). Nous aurons alors pour tout $u \in B(x,\hat{\eta})$

$$h_p(u,x) \geq C_2 d(u,x)^{s_1-p}.$$

D'où l'inégalité suivante

$$d_1(u,x)^{s_1-p} \quad \leq \frac{L}{C_2}\, d_2(f(u),f(x))^{s_2-p}. \tag{3.9}$$

Si on pose $\alpha := \frac{p-s_1}{p-s_2}$, l'équation (3.9) s'ecrit alors

$$d_2(f(u),f(x)) \;\leq\; C_3\, d_1(u,x)^{\alpha}. \tag{3.10}$$

pour tout $u \in B(x,\hat{\eta})$ et où $C_3 = (\frac{L}{C_2})^{\frac{1}{p-s_2}}$.
Si $\alpha \leq 1$ i.e $s_1 \geq s_2$ l'équation (3.10) entraîne que f est localement hölderienne.
Si $\alpha \geq 1$ alors f est localement lipschitzienne. En effet, posons $\hat{\eta}_1 = \inf(\hat{\eta},1)$ et comme $d_1(u,x)^\alpha \leq d_1(u,x)$ pour tout $u \in B(x,\hat{\eta}_1)$, l'équation (3.10) entraîne alors le résultat.

□

3.3.9 Lemme *Soient (X,d) et (Y,δ) deux espaces métriques , $f\colon X \to Y$ une application C-lipschitzienne et $E \subset X$, alors*

$$\mathcal{H}^s(f(E)) \leq C^s \mathcal{H}^s(E).$$

En particulier, $\dim \mathcal{H}(E) \geq \dim \mathcal{H}(f(E))$.

Preuve L'inégalité (3.3.9) découle immédiatement de l'inégalité suivante

$$(\operatorname{diam} f(B_i))^s \leq C^s \operatorname{diam} B_i. \tag{3.11}$$

□

3.3.10 Lemme *Soit X un espace propre et localement uniformément régulier de dimension locale égale à s, alors la dimension de Hausdorff de X est s.*

Preuve Voir [25] §8.7. Le fait que X soit localement uniformément régulier de dimension locale égale à s entraîne qu'il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in X$ on a $0 < \mathcal{H}^s(B(x,\eta)) < \infty$ (voir §8.18 de [25]).
Soit $u \in X$ fixé, il est clair que $X = \cup_{i=1}^{\infty} \bar{B}(u,i)$ et $\bar{B}(u,i) \subset \cup_{x\in X} B(x,\eta)$, comme $\bar{B}(u,i)$ est un compact pour tout $i \in \mathbf{N}$, donc il existe une suite $\{x_n\}_n \in X$ telle que $X = \cup_{i=0}^{\infty} B(x_i,\eta)$.
Pour tout $t > s$ on a $\mathcal{H}^t(X) \leq \sum_{j=0}^{\infty} \mathcal{H}^t(B(x_j,\eta)) = 0$ et donc $\dim \mathcal{H}(X) \leq t$.
Pour tout $t < s$ on a $\mathcal{H}^t(X) \geq \mathcal{H}^t(B(x_j,\eta)) = \infty$ d'où $\dim \mathcal{H}(X) \geq t$. Ainsi $\dim \mathcal{H}(X) = s$.

□

Preuve (preuve de la proposition 3.3.1)
Soient $x, y \in X$ fixés. Comme X est quasi-convexe, il existe une courbe $\gamma\colon [0,1] \to X$ liant x à y avec $\ell(\gamma) \leq Q\, d(x,y)$, où Q est la constante de quasi-convexité de X.
Soit K un compact contenant la courbe γ, l'application f est uniformément continue sur K. Il existe donc $\delta(K) > 0$ tel que pour tout $u, v \in K$ nous avons: si $d_1(u,v) \leq \delta$ alors $d_2(f(u), f(v)) \leq \eta_2$, les mêmes raisonnements et notations que le lemme précédent entraînent alors

$$d_2(f(u), f(v)) \leq C_3\, d_1(u,v)^\alpha, \tag{3.12}$$

pour tout $u, v \in K$ avec $d_1(u,v) \leq \hat{\eta}$ où $\alpha \geq 1$.
Il existe $t_0 = 0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_m = 1$ avec $d_1(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})) = \frac{\hat{\eta}}{2}$ pour $i = 1, \cdots m-1$ et $d_1(\gamma(t_{m-1}), \gamma(t_m)) \leq \frac{\hat{\eta}}{2}$.
L'inégalité triangulaire et l'équation (3.12) entraînent

$$d_2(f(x), f(y)) \leq \sum_{i=0}^{m} d_2(f(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1}))) \leq C_3 \sum_{i=0}^{m} d_1(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1}))^\alpha$$

Comme $\alpha \geq 1$ on a alors

$$\begin{aligned} d_2(f(x), f(y)) &\leq C_3 \left(\sum_{i=0}^{m} d_1(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})) \right)^\alpha \\ &\leq C_3 (\ell(\gamma))^\alpha \\ &\leq C_3\, Q^\alpha\, d_1(x,y)^\alpha \end{aligned}$$

Si $d_1(x,y) \leq 1$ on a $d_1(x,y)^\alpha \leq d_1(x,y)$, et donc

$$d_2(f(x),f(y)) \leq C_3 Q^\alpha d(x,y).$$

Si $d_1(x,y) \geq 1$ alors il existe $s_0 = 0 \leq s_1 \leq \cdots \leq s_k = 1$ avec $d_1(\gamma(s_i),\gamma(s_{i+1})) = 1$ pour $s_0 = 0 \leq s_1 \leq \cdots \leq s_{k-2} = 1$ $d_1(\gamma(s_{k-1}),\gamma(1)) \leq 1$, et donc

$$\begin{aligned} d_2(f(x),f(y)) &\leq \sum_{i=0}^{k-1} d_2(f(\gamma(s_i)), f(\gamma(s_{i+1})) \\ &\leq C_3\ Q^\alpha \left(\sum_{i=0}^{k-1} d_1^\alpha(\gamma(s_i),\gamma(s_{i+1}))\right) \\ &\leq C_3\ Q^\alpha \left(\sum_{i=0}^{k-1} d_1(\gamma(s_i),\gamma(s_{i+1}))\right) \\ &\leq C_3\ Q^\alpha \ell(\gamma) \\ &\leq C_3 Q^{\alpha+1}\ d(x,y) \end{aligned}$$

l'application f est donc lipschitzienne puisque la constante $C_3Q^{\alpha+1}$ ne dépend pas de $x, y \in X$.
Puisque f est lipschitzienne et surjective on a, par les lemmes 3.3.9 et 3.3.10, l'inégalité suivante

$$s_2 = \dim_H(Y) = \dim_H(f(X)) \leq \dim_H(X) = s_1,$$

et comme on a supposé $s_1 \leq s_2$, on a alors $s_1 = s_2$.

□

3.13 Remarque: *La conclusion de la proposition reste valable si on remplace la condition f est à p-dilatation bornée par la condition suivante: $f^*: \mathcal{A}_c^p(Y) \to \mathcal{A}_c^p(X)$ est un opérateur borné où $\mathcal{A}_c^p(X) := C_c(X) \cap \mathcal{L}^{1,p}(X)$.*

Nous allons généraliser la définition de l'invariant de Grötsch aux espaces métriques mesurés propres et quasi-convexes.

3.14 Définition *L'invariant de Grötsch $g_p(x,y)$ avec $p > 1$ est la borne inférieure des p-énergies des fonctions $u \in \mathcal{L}^{1,p} \cap C_c(X)$ où $u \equiv 1$ sur une courbe liant x à y.*

3.3.11 Proposition *Soit X un espace de la classe $\mathcal{C}(s,p)$où $p > s$, et vérifiant l'inégalité de Sobolev globale de type (q,p), alors il existe $C > 0$ tel que*

$$g_p(x,y) \geq C \inf\{d(x,y); (d(x,y))^{\frac{1}{q}}\}.$$

Pour montrer cette proposition, on s'appuie essentiellement sur les deux lemmes suivants:

3.3.12 Lemme *Soient X un espace de la classe $\mathcal{C}(s,p)$ où $p > s$, B une boule de rayon inférieur à $\frac{\eta}{20\lambda}$, $x \in B$, $u \in L^{1,p}(X) \cap C_c(X)$, $g \in D(u) \cap L^p(X)$ et $\delta > 0$ donné.*
Supposons que $u(x) = 1$ et $\int_{20\lambda B} |g|^p d\mu < \delta$, alors il existe $\eta_1(X,p,\delta) > 0$ tel que $u \geq \frac{1}{2}$ sur $B(x,\eta_1)$.

Preuve Conséquence directe du lemme 3.3.5.

□

3.3.13 Lemme *Si (X,d) un espace métrique et γ: $[0,L] \to X$ une courbe liant x à y et $\epsilon > 0$ un réel fixé, alors il existe des points $u_0, u_1, \cdots, u_{m+1} \in \gamma$ tels que:*

1.) $u_0 = x$ *et* $u_{m+1} = y$

2.) $d(u_i, u_{i+1}) = 2\epsilon \quad i = 0, \cdots, m-1$

3.) $d(u_m, u_{m+1}) \leq 2\epsilon$

4.) $d(u_i, u_j) \geq 2\epsilon$ *pour* $1 \leq i < j < m+1$

Preuve Soit $t_0 = \sup\{t \in [0,L] : \gamma(t) \in B(x, 2\epsilon)\}$.
On construit par récurrence la suite $\{t_i\}_i$: $t_{i+1} = \sup\{t \in [t_i, L] : \gamma(t) \in B(\gamma(t_i), 2\epsilon)\}$.
A chaque itération on a deux cas:
1^{er}**cas:** Si $t_{i+1} = L$ on s'arrête.
$2^{ème}$**cas:** Si $t_{i+1} < L$ on continue, et dans ce cas on a: $t_1 < t_2 < \cdots < t_i < t_{i+1} < L$, de plus $\gamma(t_{i+1}) \in \partial B(\gamma(t_i), 2\epsilon)$.
$1^{ère}$ **affirmation:**
Il existe $k \in \mathbf{N}$ tel que $t_k = L$.
En effet, sinon pour tout $k \in \mathbf{N}$ on aurait $t_k < L$ et donc la distance

$$d(\gamma(t_j), \gamma(t_{j+1})) = 2\eta \tag{3.15}$$

pour tout $j \in \mathbf{N}$; et comme la suite $\{t_i\}_i$ est strictement croissante majorée, alors il existe $t^* \in [o, L]$ tel que la suite $\{t_i\}_i$ converge vers t^*, et puisque l'application γ est continue donc la suite $\{\gamma(t_i)\}_i$ converge vers $\gamma(t^*)$, et ainsi la suite $\{\gamma(t_i)\}_i$ est de Cauchy, ce qui serait absurde avec l'équation (3.15).
$2^{ème}$ **affirmation:**
$B(\gamma(t_i), \epsilon) \cap B(\gamma(t_j), \epsilon) = \emptyset$ pour $i \neq j$.
Sinon, il existerait $i < j$ tel que:$B(\gamma(t_i), \epsilon) \cap B(\gamma(t_j), \epsilon) \neq \emptyset$.
Et dans ce cas, il existe $u \in X$ tel que:
$d(\gamma(t_i), u) < \epsilon$ et $d(\gamma(t_j), u) < \epsilon$.
L'inégalité triangulaire entraîne l'équation

$$d(\gamma(t_i), \gamma(t_j)) < 2\epsilon. \tag{3.16}$$

Et donc $\gamma(t_j) \in B(\gamma(t_i), 2\epsilon)$, ce qui implique $t_j \leq t_{i+1}$, et ainsi $t_i < t_{i+1} \leq t_j \leq t_{i+1}$, deux cas à considérer:

1^{er} **cas:** $j \neq i+1$ est absurde.

$2^{ème}$ **cas:** $j = i+1$ et donc $d(\gamma(t_j), \gamma(t_{j+1})) = 2\epsilon$, ce qui est en contradiction avec l'équation (3.16).

□

Preuve (de la proposition 3.3.11)

Soient $x, y \in X$ fixés, γ: $[0, L] \to X$ une courbe liant x à y, et $u \in \mathcal{L}^{1,p}(X) \cap C_c(X)$ une fonction vérifiant $u \equiv 1$ sur cette courbe, et soient $\epsilon < \inf\{\frac{\eta}{20\lambda}, R\}$, et $\delta > 0$ données. Si $\int_{B(\gamma(t)),20\lambda\epsilon)} |D^*u|^p < \delta$ alors par le lemme 3.3.12 il existe $\eta_1(X, p, \delta) > 0$ tel que

$$u \geq \frac{1}{2} \tag{3.17}$$

sur la boule $B(\gamma(t), \eta_1)$. Soient $u_i := \gamma(t_i)$ $i = 0, 1, \cdots, m+1$ les points de γ vérifiant les conditions du lemme 3.3.13. Posons $B_i := B(\gamma(t_i), \eta_1)$ pour $i = 0, \cdots, m+1$, $A := \bigcup_{i=1}^{s} B_{\alpha_i}$ avec $\int_{B_{\alpha_i}} |D^*u|^p \, d\mu \geq \delta$ et $B := \bigcup_{j=1}^{t} B_{\beta_j}$avec $\int_{B_{\beta_j}} |D^*u|^p \, d\mu < \delta$.

On a clairement $s + t = m + 1$, de même $u \geq \frac{1}{2}$ sur B.

Nous avons également $\int_A |D^*u|^p \, d\mu \geq \frac{1}{2}\delta s$ (car les boules B_{α_i} sont disjointes deux à deux par le lemme 3.3.13) et donc $\mathcal{E}_p(u) \geq \frac{1}{2}\delta s$.

L'espace X vérifie l'inégalité de Sobolev globale de type (q, p), il existe alors $\tilde{C} > 0$ tel que pour tout $u \in \mathcal{L}^{1,p}(X) \cap C_c(C)$ nous avons les inégalités suivantes

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_p(u) &\geq \tilde{C} \left(\int_X |u|^q d\mu \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\geq \tilde{C} \left(\int_B |u|^q d\mu \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\geq \frac{\tilde{C}}{2} t^{\frac{1}{q}} \mu(B_i)^{\frac{1}{q}} \\
&\geq C_4 \, t^{\frac{1}{q}},
\end{aligned}$$

où $C_4 = \frac{\tilde{C}}{2}(\frac{1}{C}\eta_1^n)^{\frac{1}{q}}$, et donc on a:

$$\mathcal{E}_p(u) + \mathcal{E}_p^q(u) \geq C_5 \, (s + t), \tag{3.18}$$

où $C_5 = \sup(C_4, \frac{1}{2}\delta)$.

Par l'inégalité triangulaire on a

$$d(x, y) \leq \sum_{i=0}^{m+1} d(u_i, u_{i+1}) \leq 2\eta_1(m + 1) \tag{3.19}$$

et donc les équations (3.18) et (3.19) entraînent

$$\mathcal{E}_p(u) + \mathcal{E}_p(u)^q \geq C_6 \, d(x, y)$$

où $C_6 = \frac{C_5}{\eta_1}$, ce qui implique $\mathcal{E}_p(u) \geq \frac{C_6}{2} d(x,y)$ ou $\mathcal{E}_p(u) \geq \frac{C_6}{2}^{\frac{1}{q}} d^{\frac{1}{q}}(x,y)$ et donc

$$\mathcal{E}_p(u) \geq C_7 \inf(d(x,y), d^{\frac{1}{q}}(x,y)).$$

Ainsi

$$g_p(x,y) \;\geq\; C \;\inf\{d(x,y); d(x,y)^{\frac{1}{q}}\}.$$

□

3.20 Remarque: *La proposition reste valable si on suppose que X est seulement connexe par arc, au lieu d'être quasi-convexe.*

3.3.14 Lemme *Soit X un espace métrique mesuré $s-$localement régulier et Q-quasi-convexe alors il existe $K \geq 0$ tel que*

$$g_p(x,y) \leq K(d(x,y) + 1)$$

pour tous $x, y \in X$.

Preuve

L'espace X est localement uniformément régulier, il existe alors $\eta > 0$ et $C \geq 1$ tels que pour tout $x \in X$ et pour tout $r \in [0, 2\eta]$ on a:

$$\frac{1}{C}\, r^s \leq \mu(B(x,r)) \leq C\, r^s, \tag{3.21}$$

pour tous $x \in X$et $r \in [0, 2\eta]$.

Soient $x, y \in X$ fixés. Comme X est $Q-$quasi-convexe il existe alors une courbe $\gamma\colon [0, L] \to X$ paramétrée par arc telle que $\ell(\gamma) \leq Q d(x,y)$.

Considérons la fonction suivante:

$$u(z) := \max\{0, 1 - \frac{dist(z,\gamma)}{\eta}\},$$

et posons $T_\eta := \{z : dist(z,\gamma) \leq \eta\}$. Il est facile de montrer que u est $\frac{1}{\eta}$ lipschitzienne, $u \equiv 1$ sur γ et $u \equiv 0$ à l'extérieur de T_η. L'axiome A1 entraîne que la fonction g définie par:

$$g(z) = \begin{cases} \frac{1}{\eta} & \text{si } z \in T_\eta; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

est dans $D(u)$.

Nous avons

$$\int_X g^p d\mu \leq \frac{1}{\eta^p} \mu(T_\eta). \tag{3.22}$$

Montrons que

$$\mu(T_\eta) \leq L\ (d(x,y) + 1) \tag{3.23}$$

où L est une constante qui ne dépend que de l'espace X et de p. En effet la courbe γ est paramétrée par arc donc il existe $t_0 = x \leq t_1 \leq \cdots \leq t_{m+1} = y$ avec $\ell(\gamma_{|[t_i,t_{i+1})}) = \eta$ pour $i = 0, \cdots, m-1$ et $\ell(\gamma_{|[t_m,t_{m+1})}) = \delta$ avec $0 < \delta < \eta$, on a donc $\ell(\gamma) = m\eta + \delta$ d'où l'inégalité suivante

$$\frac{d(x,y)}{\eta} - 1 \leq m \leq \frac{Q}{\eta} d(x,y). \tag{3.24}$$

L'inégalité triangulaire entraîne $T_\eta \subset \cup_{i=0}^{m} B(\gamma(t_i), 2\eta)$, et donc par l'inégalité (3.21) nous aurons

$$\mu(T_\eta) \leq C(2\eta)^s (m+1). \tag{3.25}$$

Donc, en utilisant l'inégalité (3.24), nous aurons

$$\mu(T_\eta) \leq C(2\eta)^s (\frac{Q}{\eta} d(x,y) + 1). \tag{3.26}$$

Par conséquent l'inégalité (3.23) est prouvée avec $L = \max(C(2\eta)^n \frac{Q}{\eta}, C(2\eta)^s)$.
Les inégalités (3.22) et (3.23) entraînent donc

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_p(u) &\leq \int_X g^p d\mu \\ &\leq \frac{L}{\eta}(d(x,y)+1), \end{aligned}$$

d'où le lemme.

□

3.3.15 Lemme *Soient (X,d), (Y,δ) deux espaces métriques quasi-convexes, et $f\colon X \to Y$ un homéomorphisme vérifiant la condition suivante:*
Il existe des nombres réels ρ, ν, σ avec $0 < \rho < \nu$ et $\sigma > 0$ tels que:

$$\rho \leq d(u,v) \leq \nu \Rightarrow \delta(f(u), f(v)) \geq \sigma .$$

Alors il existe $K \geq 0$ tel que :
pour tout $u, v \in X$ on a

$$\delta(f(u), f(v)) \geq K\ (d(u,v) - 2\nu) \tag{3.27}$$

Preuve L'inégalité (3.27) est vraie si $d(u,v) < 2\nu$.
Si $d(u,v) \geq 2\nu$, et si γ est une courbe liant $f(u)$ à $f(v)$ avec $\ell(\gamma) \leq Qd(f(u), f(v))$ $\Gamma := f^{-1} \circ \gamma$ est une courbe qui lie u à v.
Choisissons des points $x_0, x_1, \cdots \in \Gamma$ tels que:

$$x_0 = u \text{ et } \rho \leq d(x_i, x_{i+1}) \leq \nu. \tag{3.28}$$

Posons $y_i := f(x_i)$. On a $\delta(y_i, y_{i+1}) \geq \sigma$, et donc $\ell(\gamma_{|[y_i,y_{i+1}]}) \geq \sigma$.
$\ell(\gamma_{|[y_1,y_m]}) = \sum_{i=0}^{m} \ell(\gamma_{|[y_i,y_{i+1}]}) \geq m\ \sigma$, et donc

$$\ell(\gamma) \geq \ell(\gamma_{|[y_1,y_m]}) \geq m\ \sigma \tag{3.29}$$

L'équation (3.29) entraîne l'existence d'un nombre fini des points x_i vérifiant l'équation (3.28); et donc on peut toujours supposer que $v = x_{m+1}$
$\delta(f(u), f(v)) \leq \ell(\gamma_{|[y_1,y_{m+1}]}) \leq C\ \delta(f(u), f(v))$, et donc $m \leq \frac{\sigma}{c}\ \delta(f(u), f(v))$.
Par l'inégalité triangulaire on a: $d(u,v) \leq \sum_{i=1}^{m} d(x_i, x_{i+1}) \leq m\ \nu$.
Ainsi $d(u,v) \leq \dfrac{\sigma\nu}{c}\delta(f(u), f(v))$, et donc:
Pour tout $u, v \in X$ on a $\delta(f(u), f(v)) \geq$ *cste* $(d(u,v) - 2\nu)$.

□

Preuve (Preuve du théorème 3.3.2)
Par la proposition 3.3.1 l'application f est lipschitzienne.
Il reste à montrer l'inégalité suivante: il existe deux nombres positifs k_1 et k_2 tels que

$$d_2(f(u), f(v)) \geq k_1(d_1(u,v) - k_2) \tag{3.30}$$

pour tous $u, v \in X$.
Si $\mathrm{diam}(X) < \infty$, on prend $k_1 = 1$, $k_2 = \mathrm{diam}(X)$. Donc, l'équation (3.30) est triviale.
On suppose alors $\mathrm{diam}(X) = \infty$. Le lemme 3.3.14 entraîne l'inégalité suivante:

$$g_p^Y(f(x), f(y)) \leq L\ (d_2(f(x), f(y)) + 1).$$

Par ailleurs, la proposition 3.3.11 implique que $g_p^X(x,y) \geq C\ \min\{d(x,y); d(x,y)^{\frac{1}{q}}\}$.
$f^* : \mathcal{A}^p(Y) \to \mathcal{A}^p(X)$ est un opérateur borné, il existe alors $L_1 \geq 0$ tel que

$$g_p^X(x,y) \leq L_1\, g_p^Y(f(x), f(y)),$$

donc il existe $C > 0$ tel que

$$\min\{d_1(x,y), d_1(x,y)^{\frac{1}{q}}\} \leq C\ (d_2(f(x), d_2(y)) + 1).$$

Posons $\rho := \sup((2C)^q, 1)$ alors l'inégalité précédente entraîne

$$d_2(f(x), f(y)) \geq (\frac{\rho^{\frac{1}{q}}}{C} - 1) \geq 1,$$

si $d_1(x,y) \geq \rho$.
Le lemme 3.3.15 implique alors l'inégalité (3.30).

□

Nous avons un corollaire important du théorème 3.3.2

3.3.16 Corollaire *Soit X un espace de la classe $\mathcal{C}(s,p)$ tel qu'il existe $C > 0$ et $D \geq s$ avec $\mu(B(x,r)) \geq C\ r^D$ pour tout $x \in X$ et pour tout $r \geq 0$.*
Supposons de plus que l'espace X est absolument local et vérifie l'une des deux conditions suivantes:

1.) L'inégalité de Poincaré globale d'ordre p

$$\int_X |u - u_B|^p d\mu \le C \operatorname{diam}(B)^p \mathcal{E}_p(u)$$

est vérifiée pour toute boule $B \subset X$ et pour toutes les fonctions localement lipschitziennes à support compact.

2.) X est de type homogène et l'inégalité de Poincaré de type p

$$\int_B |u - u_B|^p d\mu \le C \operatorname{diam}(B)^p \int_B g^p d\mu$$

est vérifiée pour toute boule $B \subset X$ et pour toute fonction $u\colon X \to \mathbb{R}$ localement lipschitzienne à support compact et pour tout $g \in D(u)$.

Et soit Y un espace de la clase $\mathcal{C}(s,p)$. Si $s < p < D$ alors tout homéomorphisme $f : X \to Y$ à p-dilatation bornée est une quasi-isométrie.

Preuve Si l'espace X est de type homogène, nous savons par le corollaire 2.6.1 que X vérifie une inégalité de Sobolev globale de type (q,p) et le théorème 3.3.2 entraîne le résultat.
Sinon, on applique directement le corollaire 2.5.4 à l'espace X, et donc X vérifie une inégalité de Sobolev globale de type (q,p) et le théorème 3.3.2 entraîne alors le résultat.

Des exemples d'application du théorème 3.3.2 et du corollaire 3.3.16 seront données au chapite 5.

3.4 Espace de Sobolev axiomatique naturel

Soient X, Y deux espaces métriques mesurés munis des structures d'espace de Sobolev axiomatiques.

3.4.1 Proposition *Soit $f\colon X \to Y$ une bijection vérifiant*

1.) Si $v \in L^p loc(Y)$ et $h \in D[v]$ alors il existe $k_1 > 0$ tel que $k_1(h \circ f) \in D[v \circ f]$

2.) Si $u \in L^p loc(X)$ et $g \in D[u]$ alors il existe $k_2 > 0$ tel que $k_2(g \circ f^{-1}) \in D[u \circ f^{-1}]$

3.) L'application f induit un isomorphisme $f^*\colon L^p(Y) \to L^p(X)$.

Alors $f^*\colon \mathcal{A}_0^p(Y) \to \mathcal{A}_0^p(X)$ est un isomorphisme. De même $f^*\colon W^{1,p}(Y) \to W^{1,p}(X)$ et $f^*\colon \mathcal{L}^{1,p}(Y) \to \mathcal{L}^{1,p}(X)$ sont des isomorphismes.
Si de plus f est un homéomorphisme alors $f^*\colon \mathcal{A}_0^p(Y) \to \mathcal{A}_0^p(X)$ est un isomorphisme.
Preuve (évident)

$\square$

3.31 Définition *Une structure d' espace de Sobolev axiomatique est naturelle si*

1.) *Il est défini pour tout espace métrique mesuré,*

2.) *la propriété (1) de la proposition 3.4.1 est vérifiée pour toute fonction lipschitzienne avec k_1 est égale à la constante de Lipschitz de f.*

Les structures d'espaces de Sobolev axiomatique du chapitre 3 sont naturelles.

3.4.2 Proposition *Soient X, Y deux espaces métriques mesurés munis des stuctures d'espace de Sobolev axiomatique naturelles, f une application bilipschitzienne de : $X \to Y$. Alors $f^*\colon \mathcal{L}^{1,p}(Y) \to \mathcal{L}^{1,p}(X)$ et $f^*\colon W^{1,p}(Y) \to W^{1,p}(X)$ sont des isomorphismes.*

3.32 Remarque: *Dans les cas usuels(variétés riemanniennes, sous riemanniennes, etc) il n'est pas difficile de vérifier qu'un homéomorphisme bilipschitzien vérifie les hypothèses de la proposition 3.4.1*

3.4.3 Théorème *Soit $f\colon X \to Y$ un homéomorphisme vérifiant les hypothèses de la proposition 3.4.1 où $X, Y \in \mathcal{C}(s,p)$ avec $p > s$ alors f est bilipschitz.*

Preuve Elle découle directement de la proposition 3.3.1 et de la proposition 3.4.1.

□

Chapitre 4

Algèbres de Royden

4.1 Introduction

J. Ferrand a démontré qu'une variété riemannienne M de dimension n est caractérisée à équivalence bilipshitz près, par la classe d'isomorphie de l'algèbre de Royden $\mathcal{A}_0^p(M)$ pour un $p > n$. Le but de ce chapitre est de généraliser ce résultat à certains espaces métriques mesurés.

Introduisons d'abord ces notations:

$C_0(X)$ est l'espace des fonctions continues tendant vers zéro à l'infini .

$C_c(X)$ est l'espace des fonctions continues à support compact.

4.2 La condition de Royden

4.1 Définition *Un espace métrique mesuré X muni d'une structure d'espace de Sobolev axiomatique vérifie la condition de Royden si*

$$\|uv\|_{\mathcal{L}^{1,p}} \leq \|u\|_\infty \|v\|_{\mathcal{L}^{1,p}} + \|v\|_\infty \|u\|_{\mathcal{L}^{1,p}}$$

pour tout $u, v \in \mathcal{A}_0^p(X)$ et pour tout $p \geq 1$ où $\mathcal{A}_0^p(X) = C_0(X) \cap \mathcal{L}^{1,p}(X)$ et $\|u\|_{\mathcal{L}^{1,p}} = (\mathcal{E}_p(u))^{\frac{1}{p}}$.

4.2.1 Proposition *Si l'espace X vérifie la condition de Royden alors $\mathcal{A}_0^p(X)$ est une algèbre de Banach pour la norme*

$$\|u\|_{\mathcal{A}_0^p(X)} := \|u\|_\infty + \|u\|_{\mathcal{L}^{1,p}(X)}.$$

Cette algèbre s'appelle l'algèbre de Royden.

Preuve Le fait que X vérifie la condition de Royden entraîne

$$\|uv\|_{\mathcal{A}_0^p(X)} \leq \|u\|_{\mathcal{A}_0^p(X)} \|v\|_{\mathcal{A}_0^p(X)}.$$

Ce qui implique que $\mathcal{A}_0^p(X)$ est une algèbre.
$(\mathcal{A}_0^p(X), \|\ \|_{\mathcal{A}_0^p(X)})$ est un espace de Banach (la preuve est similaire à celle du théorème 1.2.1 du [14]).

$\square$

4.3 Exemples d'espaces vérifiant la condition de Royden

Nous allons montrer dans ce paragraphe que tous les exemples d'espaces de Sobolev axiomatique (donnés au chapitre 2) vérifient la condition de Royden.

4.3.1 Proposition *Si X est un espace métrique mesuré muni d'une structure d'espace de Sobolev au sens de Hajłasz alors X vérifie la condition de Royden.*

Preuve Soient $u, v \in \mathcal{A}_0^p(X)$ il existe $g_1, g_2 \in L^p(X)$ telles que:

$$|u(x) - u(y)| \leq d(x,y)(g_1(x) + g_1(y))$$

$$|v(x) - v(y)| \leq d(x,y)(g_2(x) + g_2(y))$$

pour presque tous $x, y \in X$.
Posons $h := \|u\|_\infty g_2 + \|v\|_\infty g_1$, on a pour presque tous $x, y \in X$

$$\begin{aligned} |u(x)v(x) - u(y)v(y)| &= |u(x)(v(x) - v(y)) + v(y)(u(x) - u(y))| \\ &\leq \|u\|_\infty d(x,y)(g_2(x) + g_2(y)) + \|v\|_\infty d(x,y)(g_1(x) + g_1(y)) \\ &\leq d(x,y)(h(x) + h(y)). \end{aligned}$$

Donc $h \in HD(uv)$, ainsi $\|uv\|_{\mathcal{L}^{1,p}} \leq \|h\|_p \leq \|u\|_\infty \|v\|_{\mathcal{L}^{1,p}} + \|v\|_\infty \|u\|_{\mathcal{L}^{1,p}}$.

$\square$

4.3.2 Proposition *Si X un espace métrique mesuré muni d'une structure d'espace de Sobolev au sens de sur-gradient et $u, v \in \mathcal{A}_0^p(X)$, alors il existe deux fonctions $g \in UD(u)$ et $h \in UD(u)$ telles que pour tout $\epsilon > 0$ la fonction $f := (|u| + \epsilon)h + (|v| + \epsilon)g$ est dans $UD(uv)$, en particulier, X vérifie la condition de Royden.*

Pour prouver cette proposition, nous aurons besoin de plusieurs lemmes.

4.3.3 Lemme *(voir lemme 1.7 de [4])*
Soient $u, v\colon X \to \mathbb{R}$ deux fonctions localement lipschitziennes à support compact, $g \in UD(u)$ et $h \in UD(v)$ alors pour tout $\epsilon > 0$ nous avons

$$(|u| + \epsilon)h + (|v| + \epsilon)g \in UD(uv)$$

Preuve
Soit $\gamma\colon [0, L] \to X$ une courbe rectifiable. Supposons $h \circ \gamma$ et $g \circ \gamma$ intégrables sur $[0, L]$,

(sinon il n'y a rien à prouver).
Fixons un entier $n > 0$ et posons $l_i = \dfrac{iL}{n}$ $i = 0, 1 \cdots n-1$.
Nous avons alors les inégalités suivantes:

$$|u(\gamma(l_{i+1}))||v(\gamma(l_{i+1})) - v(\gamma(l_i))| \leq |u(\gamma(l_{i+1}))| \int_{l_i}^{l_{i+1}} h(\gamma(s))ds,$$

et

$$|v(\gamma(l_{i+1}))||u(\gamma(l_{i+1})) - u(\gamma(l_i))| \leq |v(\gamma(l_{i+1}))| \int_{l_i}^{l_{i+1}} g(\gamma(s))ds.$$

D'où

$$\begin{aligned}|u(\gamma(l_{i+1}))v(\gamma(l_{i+1})) - u(\gamma(l_i))v(\gamma(l_i))| \leq |u(\gamma(l_{i+1}))| \int_{l_i}^{l_{i+1}} h(\gamma(s))ds \\ + |v(\gamma(l_i))| \int_{l_i}^{l_{i+1}} g(\gamma(s))ds.\end{aligned}$$

En sommant ces inégalités, et en utilisant l'inégalité triangulaire on obtient alors

$$\begin{aligned}|(uv)(\gamma(0)) - (uv)(\gamma(1))| \leq \sum_{i=0}^{n-1} \int_{l_i}^{l_{i+1}} |u(\gamma(l_{i+1})|h(\gamma(s))ds \\ + \sum_{i=0}^{n-1} \int_{l_i}^{l_{i+1}} |v(\gamma(l_i)|g(\gamma(s))ds.\end{aligned}$$

Le résultat est immédiat en utilisant le fait que $u \circ \gamma$ et $v \circ \gamma$ sont uniformément continues sur $[0, L]$.

□

4.3.4 Lemme *Pour toute fonction positive $u \in \mathcal{A}_c^p(X)$ il existe $g \in UD(u)$ et deux suites $\{u_n\}_n$, $\{g_n\}_n$ où $u_n \in \mathcal{F}_c \cap W^{1,p}(X)$, $g_n \in UD(u_n)$ avec $u_n \to u$ dans $L^p(X)$, $g_n \to g$ dans $L^p(X)$ et $\|u_n\|_\infty \leq \|u\|_\infty$.*
Rappelons que $\mathcal{F}_c$ est l'ensemble des fonctions localement lipschitziennes à support compact.

Preuve Par le théorème 2.3.2 nous avons la densité de $\mathcal{F}_c \cap W^{1,p}(X)$ pour la $m-$topologie; comme $\mathcal{A}_c^p(X) \subset W^{1,p}(X)$, il existe alors deux suites $\{\hat{u}_n\}_n$, $\{g_n\}_n$ avec $\hat{u}_n \in \mathcal{F}_c \cap W^{1,p}(X)$ et $g_n \in UD(\hat{u}_n)$ telles que $\hat{u}_n \to u$ dans $L^p(X)$ et $g_n \to D^*(u)$ dans $L^p(X)$.
Posons $u_n = \max\{-\|u\|_\infty, \min\{\|u\|_\infty, \hat{u}_n\}\}$. Il est facile de vérifier que $|u_n - u| \leq |\hat{u}_n - u|$ et donc $u_n \to u$ dans $L^p(X)$. L'axiome A4 entraîne que $g_n \in UD(u_n)$, d'où le résultat.

□

4.3.5 Lemme *Si $u, v \colon X \to \mathbb{R}$ deux fonctions positives dans $\mathcal{A}_c^p(X)$, alors il existe deux fonctions $g \in UD(u)$ et $h \in UD(v)$ telles que pour tout $\epsilon > 0$ la fonction*

$f := (|u| + \epsilon)h + (|v| + \epsilon)g$ *est dans* $UD(uv)$.

Preuve Soit $u \in \mathcal{A}_c^p(X)$. Par le lemme 4.3.4, il existe $g \in UD(u)$, deux suites $\{u_n\}_n$ et $\{g_n\}_n$ avec $g_n \in UD(u_n)$ et $u_n \in \mathcal{F}_c \cap W^{1,p}(X)$ et telles que $u_n \to u$ dans $L^p(X)$, $g_n \to g$ dans $L^p(X)$ et $\|u_n\|_\infty \leq \|u\|_\infty$.
De même pour $v \in \mathcal{A}_c^p(X)$, il existe $h \in UD(u)$, deux suites $\{v_n\}_n$ et $\{h_n\}_n$ avec $h_n \in UD(v_n)$, $v_n \in \mathcal{F}_c \cap W^{1,p}(X)$ avec $v_n \to v$ dans $L^p(X)$, $h_n \to h$ dans $L^p(X)$ et $\|v_n\|_\infty \leq \|v\|_\infty$.
Soit $\epsilon > 0$ fixé. Posons $f_n := (|u_n| + \epsilon)h_n + (|v_n| + \epsilon)g_n$ et $f := (|u| + \epsilon)h + (|v| + \epsilon)g$.
Par le lemme 4.3.3 on a $f_n \in UD(u_n v_n)$.
L'inégalité $|u_n v_n - uv| \leq \|u\|_\infty |v_n - v| + \|v\|_\infty |u_n - u|$ entraîne que $u_n v_n \to uv$ dans $L^p(X)$.
Montrons que $f_n \to f$ dans $L^p(X)$. Tout d'abord, nous avons

$$f_n - f = (|u|h - |u_n|h_n) + \epsilon(h - h_n) + (|v|g - |v_n|g_n) + \epsilon(g - g_n),$$

comme

$$|u|h - |u_n|h_n = h(|u| - |u_n|) + |u_n|(h - h_n)$$

et

$$|v|g - |v_n|g_n = g(|v| - |v_n|) + |v_n|(g - g_n).$$

On a donc l'inégalité suivante

$$\begin{aligned} |f_n - f| \quad \leq \quad & h||u_n| - |u|| + \|u_n\|_\infty |h_n - h| + \epsilon|h - h_n| + \\ & g||v_n| - |v|| + \|v_n\|_\infty |g_n - g| + \epsilon|g_n - g|, \end{aligned}$$

or par construction des suites $\{u_n\}_n$ et $\{v_n\}_n$ on a $\|u_n\|_\infty \leq \|u\|_\infty$ et $\|v_n\|_\infty \leq \|v\|_\infty$ d'où

$$|f_n - f| \leq h|u_n - u| + \|u\|_\infty |h_n - h| + \epsilon|h - h_n| + g|v_n - v| + \|v\|_\infty |g_n - g| + \epsilon|g_n - g|$$

ce qui entraîne que $f_n \to f$ dans $L^p(X)$. Et par l'axiome A5, on a $f \in UD(uv)$, ce qui implique

$$\|uv\|_{\mathcal{L}^{1,p}} \leq (\|u\|_\infty + \epsilon)\|v\|_{\mathcal{L}^{1,p}} + (\|v\|_\infty + \epsilon)\|u\|_{\mathcal{L}^{1,p}}$$

pour tout $\epsilon > 0$. en tendant ϵ vers 0 on aura le résultat.

□

Preuve (de la proposition 4.3.2)
Soient $\epsilon > 0$ et $u, v \in \mathcal{A}_0^p(X)$.
1ère étape:
On prouve d'abord la proposition dans le cas particulier où les deux fonctions u, v sont positives.

Posons $u_n(x) := (1-\frac{1}{n})\chi_{\{u\geq\frac{1}{n}\}}$ et $v_n(x) := (1-\frac{1}{n})\chi_{\{v\geq\frac{1}{n}\}}$. Il est clair que u_n, v_n sont dans $\mathcal{A}^p_c(X)$ et $\|u_n\|_\infty \leq \|u\|_\infty$ et $\|v_n\|_\infty \leq \|v\|_\infty$.
Par le lemme précédent, il existe deux fonctions $g_n \in UD(u_n)$ et $h_n \in UD(v_n)$ telles que $f_n := (|u_n|+\epsilon)h_n + (|v_n|+\epsilon)g_n \in UD(u_nv_n)$, il reste à montrer que la fonction $f := (|u|+\epsilon)h + (|v|+\epsilon)g$ est dans $UD(uv)$.
L'équation suivante

$$\begin{aligned}\|f_n - f\|_p &\leq \|h\|_p\|u_n-u\|_\infty + \|u\|_\infty\|h_n-h\|_p + \epsilon\|h-h_n\|_p + \\ &\quad \|g\|_p\|v_n-v\|_\infty + \|v\|_\infty\|g_n-g\|_p + \epsilon\|g_n-g\|_p\end{aligned}$$

entraîne que $f_n \to f$ dans $L^p(X)$, de même $u_nv_n \to uv$ dans $L^P_{loc}(X)$. L'axiome A5 implique que la fonction f est dans $UD(uv)$.
$\|f\|_p \leq (\|u\|_\infty+\epsilon)\|h\|_p + (\|v\|_\infty+\epsilon)\|g\|_p$ pour tout $\epsilon > 0$ d'où $\|uv\|_{\mathcal{L}^{1,p}} \leq \|f\|_p \leq \|u\|_\infty\|h\|_p + \|v\|_\infty\|g\|_p$. Ainsi la condition de Royden est vérifiée pour les fonctions positives.
2ème étape: cas général
On applique la 1ère étape aux quatre couples de fonctions suivants:(u^+,v^+), (u^+,v^-), (u^-,v^+) et (u^-,v^-). Il existe alors huit fonctions $g_{++}, g_{+-}, h_{++}, h_{-+}, g_{-+}, h_{--}$ avec $g_{++}, g_{+-} \in UD(u^+)$; $g_{-+}, g_{--} \in UD(u^-)$; $h_{++}, h_{-+} \in UD(v^+)$ et $h_{+-} + h_{--} \in UD(v^-)$ et telles que

$$f_{++} := (u^+ + \epsilon)h_{++} + (v^+ + \epsilon)g_{++} \in UD(u^+v^+)$$

$$f_{+-} := (u^+ + \epsilon)h_{+-} + (v^- + \epsilon)g_{+-} \in UD(u^+v^-)$$

$$f_{-+} := (u^- + \epsilon)h_{-+} + (v^+ + \epsilon)g_{-+} \in UD(u^-v^+)$$

$$f_{--} := (u^- + \epsilon)h_{--} + (v^- + \epsilon)g_{--} \in UD(u^-v^-).$$

Comme $uv = u^+v^+ - u^+v^- - u^-v^+ + u^-v^-$, l'axiome A2 entraîne que la fonction $f := f_{++} + f_{+-} + f_{-+} + f_{--} \in UD(uv)$. Les fonctions $(g_{++} + g_{-+})$ et $(g_{+-} + g_{--})$ sont dans $UD(u)$ par l'axiome A2, de même que les fonctions $(h_{++} + h_{+-})$ et $(h_{-+} + h_{--})$ sont dans $UD(v)$.
Par l'axiome A4, la fonction $\max\{(g_{++}+g_{-+}), (g_{+-}+g_{--})\}$ est dans $UD(u)$, et la fonction $\max\{(h_{++}+h_{+-}), (h_{-+}+h_{--})\}$ est dans $UD(v)$.
D'où l'inégalité suivante

$$\|uv\|_{\mathcal{L}^{1,p}} \leq \|f\|_p \leq (\|u\|_\infty + 2\epsilon)\|v\|_{\mathcal{L}^{1,p}} + (\|v\|_\infty + 2\epsilon)\|u\|_{\mathcal{L}^{1,p}}.$$

Donc l'espace X vérifie la condition de Royden.

□

4.3.6 Proposition *Si X est un espace métrique mesuré au sens de "Stretching" alors X vérifie la condition de Royden.*

Preuve Soient $u, v \in \mathcal{F}_c$, $g \in SD(u)$ et $h \in SD(u)$ alors on a pour tout $r > 0$ l'inégalité suivante

$$L_{uv,r}(x) \leq |u(x)| \sup_{y \in B(x,r)} \frac{|v(x) - v(y)|}{r} + \sup_{y \in B(x,r)} |v(y)| \frac{|u(x) - u(y)|}{r}$$

d'où

$$L_{uv,r}(x) \leq |u(x)| \sup_{y \in B(x,r)} \frac{|v(x) - v(y)|}{r} + \sup_{y \in B(x,r)} |v(y)| \sup_{y \in B(x,r)} \frac{|u(x) - u(y)|}{r}$$

Comme v est continue, on aura donc par passage à la limite supérieure l'inégalité suivante

$$L_{uv}(x) \leq |u(x)| L_v(x) + |v(x)| L_u(x).$$

D'où la fonction $|u|h + |v|g \in SD(uv)$. Et comme l'espace X est absolument local, les mêmes raisonnements utilisés dans la preuve du lemme 4.3.5 et de la proposition 4.3.2 sont valables, d'où le résultat.

□

4.4 Caractérisation algébrique

Nous pouvons énoncer le résultat principal de ce chapitre.

4.4.1 Théorème *Soient X et Y deux espaces de la classe $\mathcal{C}(s,p)$. Si les espaces X et Y vérifient la condition de Royden et si $\mathcal{A}_0^p(X)$ est isomorphe à $\mathcal{A}_0^p(Y)$ où $p > s$ alors X et Y sont bilipschitz.*

Pour prouver le théorème 4.4.1 nous aurons besoin de plusieurs résultats intermédiaires. Dans toute la suite, on suppose que les espaces vérifient la condition de Royden.

4.4.2 Lemme *$\mathcal{A}_0^p(X)$ est dense dans $C_0(X)$ pour la norme de la convergence uniforme.*

Preuve l'espace X étant localement compact, $\mathcal{A}_0^p(X)$ est une sous algèbre de $C_0(X)$ qui sépare les points de X telle que pour tout $x \in X$ il existe une fonction $f \in \mathcal{A}_0^p(X)$ avec $f(x) \neq 0$. La conclusion du lemme est alors une conséquence directe du théorème Stone-Weiertrass.

□

4.4.3 Lemme *Soient $u \in \mathcal{A}_0^p(X)$ et $k \in \mathbf{N}^*$, alors on a:*

$$\|u^k\|_{\mathcal{L}^{1,p}} \leq k \|u\|_\infty^{k-1} \, \|u\|_{\mathcal{L}^{1,p}}$$

Preuve Une simple récurrence.

□

4.2 Définition *Soit $u \in \mathcal{A}_0^p(X)$. Le rayon spectral de u est*

$$\rho(u) := \lim_{k\to\infty} \{\|u^k\|_{\mathcal{A}_0^p}\}^{\frac{1}{k}}.$$

On a alors le lemme suivant

4.4.4 Lemme *(voir §2 de [11])*
Pour $u \in \mathcal{A}_0^p(X)$ on a

$$\rho(u) := \|u\|_\infty.$$

Preuve L'inégalité $\|u^k\|_{\mathcal{A}_0^p} \geq \|u^k\|_\infty = \|u\|_\infty^k$ pour tout $u \in \mathcal{A}_0^p(X)$, entraîne $\liminf_{k\to\infty}\{\|u^k\|_{\mathcal{A}_0^p}\}^{\frac{1}{k}} \geq \|u\|_\infty$.
Le lemme précédent implique: $\|u^k\|_{\mathcal{L}^{1,p}} \leq k\|u\|_\infty^{k-1}\|u\|_{\mathcal{L}^{1,p}}$.
Si on pose $\alpha := \|u\|_\infty$ et $\beta := \|u\|_{\mathcal{L}^{1,p}}$, on a alors cette inégalité:

$$\|u^k\|_{\mathcal{A}_0^p}^{\frac{1}{k}} \leq (\alpha^k + k\alpha^{k-1}\beta)^{\frac{1}{k}}.$$

Et par conséquent

$$\limsup_{k\to\infty}\{\|u^k\|_{\mathcal{A}_0^p}\}^{\frac{1}{k}} \leq \lim_{k\to\infty}(\alpha^k + k\alpha^{k-1}\beta)^{\frac{1}{k}} = \alpha,$$

d'où le résultat.

□

4.4.5 Lemme *(voir lemme 8.1 de [11])*
Tout homomorphisme d'algèbres de Banach $\mathcal{A}_0^p(Y)$ dans $\mathcal{A}_0^p(X)$ se prolonge en un homomorphisme de $C_0(Y)$ dans $C_0(X)$

Preuve Soit $h : \mathcal{A}_0^p(Y) \to \mathcal{A}_0^p(X)$ un homomorphisme. Pour tout $k \in \mathbf{N}$ et tout $u \in \mathcal{A}_0^p(Y)$ nous avons l'inégalité suivante:

$$\|(h(u))^k\|_{\mathcal{A}_0^p}^{\frac{1}{k}} \leq C\ (\|u^k\|_{\mathcal{A}_0^p})^{\frac{1}{k}}.$$

Par passage à la limite et en utilisant le lemme précédent, nous obtenons :

$$\|h(u)\|_\infty \leq C\ \|u\|_\infty.$$

Ainsi h est un homomorphisme borné pour la norme de la convergence uniforme, et comme $\mathcal{A}_0^p(Y)$ est dense dans $C_0(Y)$, le résultat s'ensuit.

□

4.4.6 Lemme *Tout isomorphisme de $C_0(Y)$ sur $C_0(X)$ est de la forme $h = \phi^* : v \to v \circ \phi$ où ϕ est un homéomorphisme de X sur Y.*

Preuve Voir corollaire 4.1.2 de [32].

$\square$

4.4.7 Proposition *Tout isomorphisme h de l'algèbre $\mathcal{A}_0^p(Y)$ sur l'algèbre $\mathcal{A}_0^p(X)$ est de la forme $h = \phi^* : v \to v \circ \phi$ où ϕ est un homéomorphisme de X sur Y.*

Preuve L'application h se prolonge en un isomorphisme de $C_0(Y)$ sur $C_0(X)$.

$\square$

Preuve (Preuve du théorème 4.4.1)
Soit h un isomorphisme de $\mathcal{A}_0^p(Y)$ sur l'algèbre $\mathcal{A}_0^p(X)$. Par la proposition précédente, il existe un homéomorphisme ϕ: $X \to Y$ tel que $h = \phi^*$, comme $p > s$. On peut donc appliquer la proposition 3.3.1 à ϕ et à ϕ^{-1}, d'où le résultat. $\square$

Chapitre 5

Exemples

Introduction

Le but principal de ce chapitre est de donner des exemples d'espaces non riemanniens appartenant à la classe introduite au chapitre 3.

Notre exemple est celui des groupes de Lie nilpotents simplement connexes, munis d'une famille de champs de vecteurs invariants à gauche vérifiant la condition de Hörmander.

Récemment, Laakso a construit pour tout $s \geq 1$ un espace s-régulier (au sens d'Ahlfors) muni d'un espace de Sobolev au sens de sur-gradient et vérifiant une inégalité de Poincaré de type (1,1). Plus précisémment, il a montré:

Théorème (voir théorème 2.7 de [31])
Pour tout nombre réel $s \geq 1$ il existe un espace s-régulier au sens d'Ahlfors, non borné, géodésique et vérifiant une inégalité de Poincaré de type (1,1).

Notons cet espace par $L(s)$, nous avons donc $L(s)$ est de type homogène, et $L(s) \in \mathcal{C}(s,p)$ pour tout $p \geq 1$.

On trouve d'autres exemples des espaces appartenant à cette classe, au paragraphe VI de [26] et dans [3].

Finalement, tout espace s-régulier (au sens d'Ahlfors), propre, quasi-convexe et muni d'une structure d'espace de Sobolev au sens de Hajłasz, est dans $\mathcal{C}(s,p)$ par la remarque 3.6 du chapitre 3.

5.1 Les groupes de Lie nilpotents simplement connexes

Soient (G,g) un groupe de Lie nilpotent simplement connexe muni d'une métrique riemannnienne invariante à gauche g , $\mathcal{H} \subset TG$ un sous fibré tangent invariant à gauche vérifiant la condition de Hörmander (voir Annexe A pour cette notion), d_c la métrique de Carnot Carathéodory associée et μ une mesure de Haar invariante à gauche sur G.

L'invariance à gauche de la métrique de Carnot-Carathéodoryd_c et de μ impliquent $\mu(B(x,r)) = \mu(B(e,r))$ pour tout $x \in G$ et pour tout $r > 0$, où e est l'élément unité du groupe G, et $B(x,r)$ est la boule de rayon r pour la métrique de Carnot-Carathéodory.

5.1.1 Proposition *Il existe deux entiers d, D avec $d \leq D$ et un nombre $C_1 \geq 1$ tels que*

$$\frac{1}{C_1}t^d \leq \mu(B(e,t)) \leq C_1 t^d \tag{5.1}$$

pour tout $0 \leq t \leq 1$,

$$\frac{1}{C_1}t^D \leq \mu(B(e,t)) \leq C_1 t^D \tag{5.2}$$

pour tout $t \geq 1$.

Preuve (voir théorème IV.5.8 de [9]).

□

Le nombre d s'appelle la *dimension locale* de $(G, \mathcal{H})$, et D est la *dimension à l'infini* de G.
Les inégalités (5.1) et (5.2) entraînent qu'il existe une constante $C_2 \geq 1$ telle que

$$\frac{1}{C_2}\left(\frac{R}{r}\right)^d \leq \frac{\mu(B(e,R))}{\mu(B(e,r))} \leq C_2\left(\frac{R}{r}\right)^D, \tag{5.3}$$

pour tous $0 < r \leq R$. D'où il existe une constante $C_3 \geq 1$ telle que

$$\mu(B(e,2r)) \leq C_3 \mu(B(e,r)), \tag{5.4}$$

en particulier (G, d_c, μ) est de type homogène.
Munissons l'espace métrique mesuré (G, d_c, μ) de la structure d'espace de Sobolev axiomatique au sens de sur-gradient. On a alors

5.1.2 Proposition *L'espace G est de type homogène, il est dans la classe $\mathcal{C}(d,p)$ pour tout $p \geq 1$. De plus $\mu(B(e,t)) \geq \frac{1}{C_1}t^D$ pour tout $t \geq 0$.*

Preuve Montrons que l'espace métrique (G, d_c) est propre.
Soit $\overline{B}_c(e,R) = \{x \in G : d_c(e,x) \leq R\}$ une boule fermée de rayon R. L'inégalité $d_r(e,x) \leq d_c(e,x)$ pour tout $x \in G$ où d_r est la métrique riemannienne associée à g, entraîne $\overline{B}_c(e,R) \subset \overline{B}_r(e,R)$. Et comme $\overline{B}_r(e,R)$ est compact (car l'espace métrique (G, d_r) est complet, et donc par le théorème de Hopf-Rinow, il est propre) et $\overline{B}_c(e,R)$ est fermée ((G, d_r) et (G, d_c) ont même topologie) donc $\overline{B}_c(e,R)$ est compact.
L'espace métrique (G, d_c) est quasi-convexe (et même géodésique) par la remarque 3.8(2).
L'espace (G, d_c, μ) est localement uniformément régulier de dimension locale égale à d par l'inégalité (5.1).
Enfin, l'espace G supporte une inégalité de Poincaré de type $(1,p)$ pour tout $p \geq 1$ (voir théorème 11.12 du [24]).

□

Une simple application du corollaire 2.6.1 du chapitre 2 et de la proposition précédente entraînent l'inégalité de Sobolev globale suivante

5.1.3 Proposition *Pour tout $1 < p < D$ et pour tout $u \in UW^{1,p}(G, d_c, \mu)$ on a*

$$\left(\int_G |u|^q \, d\mu\right)^{\frac{1}{q}} \leq C \, \mathcal{E}_p^{\frac{1}{p}}(u)$$

où $q = \frac{Dp}{D-p}$.

Preuve

□

5.1.4 Théorème *Soient G_i $(i = 1,2)$ deux groupes de Lie nilpotents simplement connexes, $\mathcal{H}_i \subset TG_i$ un sous fibré tangent invariant à gauche vérifiant la condition de Hörmander, d_{c_i} la métrique de Carnot Carathéodory associée, μ_i une mesure de Haar invariante à gauche sur G_i. Notons d_i la dimension locale et D_i la dimension à l'infini de G_i. Alors*

1.) *Si $d_1 = d_2$ et $d_1 < p < D_1$ alors tout homéomorphisme $f \colon G_1 \to G_2$ à p-dilatation bornée est une quasi-isométrie, en particulier, si $D_1 \neq D_2$ un tel homéomorphisme n'existe pas.*

2.) *Si $p > d_2 > d_1$ alors il n'existe pas d'homéomorphisme à p-dilatation bornée entre G_1 et G_2.*

Pour prouver cette proposition nous aurons besoin de plusieurs lemmes.

5.1.5 Lemme *Il existe $b \geq 1$ tel que si $d_r(e,x) \leq 1$ alors $d_c(e,x) \leq b$.*

Preuve Posons $K = \{x \in G : d_r(e,x) \leq 1\}$ alors K est un compact pour (G, d_r); donc un compact pour (G, d_c) car on a la même topologie, d'où il existe $b \geq 1$ tel que $d_c(e,x) \leq b$ pour tout $x \in K$.

□

5.1.6 Lemme *Pour tous $x, y \in G$ avec $d_r(x,y) \geq 1$ on a:*

$$\frac{d_c(x,y)}{2b} \leq d_r(x,y) \leq d_c(x,y). \tag{5.5}$$

Preuve Trivialement $d_r(x,y) \leq d_c(x,y)$.
Comme d_r et d_c sont invariantes à gauche, il suffit de montrer que

$$\frac{d_c(e,x)}{2b} \leq d_r(e,x)$$

si $d_r(e,x) \geq 1$.
Soit γ une géodésique minimisante pour la métrique riemannienne de e à x (elle existe

car (G, d_r) est complet), soient $x_0 = e, x_1, \cdots, x_n, x_{n+1} = x$ des points de γ tels que :

$$d_r(e, x_1) = 1,\ d_r(x_2, x_3) = 1, \cdots,\ d_r(x_{n-1}, x_n) = 1 \text{ et } d_r(x_n, x_{n+1}) \leq 1.$$

Par le lemme précédent $d_c(x_j, x_{j+1}) \leq b$ pour $j = 0, 1, \cdots n$, donc par l'inégalité triangulaire on a :

$$\begin{aligned} d_c(e, x) &\leq d_c(e, x_1) + d_c(x_1, x_2) + \cdots d_c(x_n, x_{n+1}) \\ &\leq (n+1)b \end{aligned}$$

Or $n \leq d_r(e, x) \leq n + 1$ et donc $(n + 1) \leq 2\ d_r(e, x)$ et ainsi $d_c(e, x) \leq 2b\ d_r(e, x)$.

□

5.1.7 Lemme *Les espaces métriques (G, d_r) et (G, d_c) sont quasi-isométriques.*
Preuve Il suffit de vérifier ces inégalités:

$$\frac{d_c(e, x) - 1}{2b} \leq d_r(e, x) \leq d_c(e, x).$$

□

5.1.8 Corollaire *La dimension à l'infini D coïncide avec le degré de croissace $d_{cr}(G, g)$ de G (pour cette notion voir la définition 1.1(5)). En particulier, D ne dépend pas du choix de $\mathcal{H}$ et de plus, deux groupes de Lie nilpotents simplement connexes quasi-isométriques(pour la métrique riemannienne ou pour une métrique de Carnot-Carathéodory) ont la même dimension à l'infini.*

Preuve Claire par les lemmes 5.1.6 et 5.1.7. Car le degré de croissance est un invariant de quasi- isométrie (voir [27]

□

Preuve (du théorème 5.1.4)
Les deux propositions 5.1.2 et 5.1.3 entraînent que G_1 et G_2 vérifient les hypothèses du théorème 3.3.2, donc f est une quasi-isométrie.
Si $D_1 \neq D_2$ alors une telle quasi-isométrie n'existe pas par le corollaire précédent.

□

5.1.9 Proposition *Sous les mêmes notations que la proposition précédente.*
Si $d_1 = d_2$ et $D_1 \neq D_2$ alors $\mathcal{A}_0^p(G_1)$ et $\mathcal{A}_0^p(G_2)$ ne sont pas isomorphes pour tout $p > d_1$.
Preuve

une simple application de la proposition 3.3.1. □

Conclusion

Dans le présent travail, nous avons pu étendre quelques résultats au contexte des espaces métriques mesurés. Néamoins, certains questions demeurent ouvertes.

1.) Les constructions du chapitre 1 montrent que l'obstruction de la proposition 1.3.1 est optimale dans le cas des applications radiales entre variétés à symétrie sphérique. Y-a-t-il une explication géométrique à ce phénomène ? Peut-on exploiter les techniques de symétrisation pour obtenir de nouveaux résultats dans cette direction ?

2.) Peut-on utiliser $\mathcal{A}_0^p(X)$ pour définir une distance entre espaces métriques mesurés ?

3.) Supposons que les deux algèbres de Royden $\mathcal{A}_0^p(X)$ et $\mathcal{A}_0^p(Y)$ sont isométriques. Est-ce que les espaces métriques X et Y sont isométriques ?

4.) Soient X et Y deux espaces métriques mesurés munis de structures d'espaces de Sobolev axiomatiques et $f\colon X \to Y$ un homéomorphisme à $p-$dilatation bornée. Avons-nous
$$\limsup_{r\to 0} \frac{(L_f(x,r))^p}{f_v(x,r)} \in L^\infty(X) \ ?$$
où $L_f(x,r) := \sup\limits_{t\in B(x,r)} \dfrac{d_Y(f(t),f(x))}{d_X(t,x)}$ et $f_v(x,r) := \frac{\nu(f(B(x,r)))}{\mu(B(x,r))}$.
Remarquons que cette caractérisation géométrique est vraie pour les ouverts de $\mathbb{R}^n$ avec $p > n$ (voir [13]).

5.) Peut-on montrer si $X, Y \in \mathcal{C}(s,p)$ où $p > s$ et $\mathcal{L}^{1,p}(X)/\mathbb{R}$ est isomorphe à $\mathcal{L}^{1,p}(Y)/\mathbb{R}$ en tant qu' espace de Banach réticulé (Lattice Banach Space), alors X est bilipschitz à Y ?
Dans le cas des domaines de $\mathbb{R}^n$ voir [15].

Enfin, mentionnons les articles récents de [8] et [27] qui portent sur des sujets reliés à cette thèse.

Appendice A

Rappels sur les groupes et algèbres de Lie nilpotents

A.1 Généralités

On va rappeler quelques résultats de la théorie des groupes et algèbre de Lie.

1.) Une algèbre de Lie $\mathcal{G}$ est dite *nilpotente* d'ordre k si :

$$\mathcal{G}^{(0)} = \mathcal{G} \supset \mathcal{G}^{(1)} \supset \cdots \supset \mathcal{G}^{(k-1)} \neq 0 \supset \mathcal{G}^{(k)} = \{0\}$$

avec $\mathcal{G}^{(i+1)} = [\mathcal{G}, \mathcal{G}^{(i)}]$.

2.) A chaque algèbre de Lie(nilpotente) $\mathcal{G}$ correspond un unique groupe de Lie G (nilpotent) 1-connexe d'algèbre de Lie $\mathcal{G}$.

3.) Si G est 1-connexe nilpotent alors $\exp\colon \mathcal{G} \to G$ est un difféomorphisme.

4.) On a $(d\ exp)_X = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (adX)^n}{(n+1)!} := \left(\frac{1-e^{-adX}}{adX}\right)$, où $ad\colon \mathcal{G} \to \mathcal{G}$ avec $ad(X)Y := [X,Y]$.

5.) Si $\mathcal{G}$ est nilpotent alors il existe une base de $\mathcal{G}$ telle que:

$$adX = \begin{pmatrix} 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & * & * \\ \vdots & \cdots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & \ddots & 0 \end{pmatrix} \text{ pour tout } X \in \mathcal{G}.$$

6.) La formule de Campbell-Hausdorff:

$$exp\ X\ exp\ Y = exp\left(X + Y + \frac{1}{2}[X,Y] + \frac{1}{12}([X,[X,Y]] + [Y,[Y,X]]) + \cdots\right)$$

et la somme est finie si $\mathcal{G}$ est nilpotente.

7.) On peut identifier un groupe de Lie nilpotent et 1-connexe avec $\mathbb{R}^n$ (où $n = \dim G$) via l'application exponentielle, la loi du groupe est alors donnée par:

$$X * Y = X + Y + \frac{1}{2}[X,Y] + \frac{1}{12}([X,[X,Y]] + [Y,[Y,X]]) + \cdots .$$

8.) Une métrique riemannienne sur un groupe de Lie G est dite invariante à gauche si

$$\langle dL_g X, dL_g Y\rangle_g = \langle X, Y\rangle_e \quad \text{pour tout } X, Y \in \mathcal{G} \text{ et } g \in G$$

où $L_g(x) = gx$ pour $x \in G$.

9.) La mesure invariante à gauche ω est donnée en coordonnées exponentielles par:

$$(exp)^*\omega = \det\left(\frac{1 - e^{-adX}}{adX}\right) dx_1 \cdots dx_n = dx_1 \cdots dx_n.$$

10.) En particulier, $\mathrm{Vol}_{riem} = cste\ \mathrm{Vol}_{euc}$.

A.2 Le groupe de Heisenberg H_3

L'exemple le plus simple, après le groupe de Lie nilpotent trivial $(\mathbb{R}^3, +)$, est celui du groupe de Heisenberg H_3 .
Etudions en détail ce groupe.

$$H_3 = \left\{ m = \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

H_3 est difféomorphe à $\mathbb{R}^3$ et $T_e H_3$ est donné par

$$T_e H_3 = \left\{ X_e = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \right\}$$

Une base évidente de $T_e H_3$ est donnée par $\{A_e, B_e, C_e\}$ où :

$$A_e = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B_e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad C_e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Les translations de ces vecteurs par dL_m se calculent comme suit :

$$t \to C(t) = \begin{pmatrix} 1 & t\alpha & t\beta \\ 0 & 1 & t\gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On a $C(0) = e$ et $\dot{C}(0) = X_e$

$$dL_m X_e = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} L_m \begin{pmatrix} 1 & t\alpha & t\beta \\ 0 & 1 & t\gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta + x\gamma \\ 0 & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Les champs de vecteurs invariants à gauche sont donc :
$A := \frac{\partial}{\partial x}$
$B := \frac{\partial}{\partial y} + x\frac{\partial}{\partial z}$
$C := \frac{\partial}{\partial z}$.
Les crochets de Lie sont donc : $[A_e, B_e] = C_e$, les autres sont nuls.

A.3 La métrique de Carnot-Carathéodory

Commençons par donner une rapide présentation de la métrique de Carnot-Carathéodory. Pour plus de détails à ce sujet voir par exemple [19] ou [9].
Soit V une variété différentiable de classe C^∞. Une polarisation de la variété V est la donnée d'un sous-fibré tangent $\mathcal{H} \subset TV$.

A.1 Définitions *1.) Un champ de vecteurs* $\mathbf{X}$ *sur* V *est* horizontal *si* $\mathbf{X_p} \in \mathcal{H}$ *pour tout* $p \in \mathcal{H}$

2.) Une courbe C^1*- par morceaux* $\gamma\colon [0,1] \to V$ *est dite horizontale si* $\dot{\gamma}(t) \in \mathcal{H}$ *pour presque tout* $t \in [0,1]$.

Soit $(V, g, \mathcal{H})$ une variété riemannienne munie d'une *polarisation* $\mathcal{H}$. La métrique de *Carnot-Carathéodory* d_c est définie par:

$$d_c(x,y) = \inf\{\ell(\gamma) : \gamma \text{ est une courbe horizontale liant } x \text{ à } y\}$$

où $\ell(\gamma)$ est la longueur riemannienne de la courbe γ.
La métrique d_c est une distance si pour tous $x, y \in V$ il existe une courbe horizontale liant x à y (sinon on peut avoir $d_c(x,y) = \infty$).
Cette propriété est satisfaite si $\mathcal{H}$ vérifie la condition de *Hörmander*; c'est -à -dire que l'algèbre de Lie des champs de vecteurs sur V est engendrée (en tant qu'algèbre de Lie) par les champs horizontaux, et dans ce cas, cette métrique induit la topologie de V(voir théorème de Chow, ou théorème III.4.1 de [9]).

A.4 Les groupes de Carnot

Tout d'abord, rappelons la définition d'un groupe de Carnot

A.2 Définitions 1. *Un groupe de Lie G est un* groupe de Carnot *s'il est simplement connexe, et son algèbre de Lie $\mathcal{G}$ admet une décomposition $\mathcal{G} = \oplus_{i=1}^{r} V^i$ telle que*

(a) $V^{i+1} = [V^1, V^i]$;

(b) $[V^i, V^j] \subset V^{i+j}$ *si* $i+j \leq r$;

(c) $[V^i, V^j] = 0$ *si* $i+j > r$.

2. *Le nombre* $D := \sum_{i=1}^{n} i \dim(V_i)$ *s'appelle la dimension homogène de G.*

On peut donc introduire un groupe à un paramètre d'automorphismes $\delta_t : G \to G$, $t > 0$ (les "dilatations") défini en coordonnées exponentielles par

$$\delta_t(x) = (tx_1, t^2 x_2, \dots, t^r x_r).$$

On a alors la propriété suivante:

$$\delta_{st} = \delta_s \circ \delta_t.$$

Remarques:

1) Un groupe de Carnot est toujours un groupe nilpotent et son degré de nilpotence est r.

2) $(\mathbb{R}^n, +)$, et les groupes de Heisenberg H_n sont des exemples des groupes de Carnot.

3) Il existe des groupes de Lie nilpotents et simplement connexes qui ne sont pas des groupes de Carnot (voir [16]).

Soit maintenant un groupe de Carnot (G, g, V^1) où g est une métrique invariante à gauche et V_1 une polarisation. Par construction V_1 vérifie les conditions de Hörmander. Soit d_c la métrique de Carnot Carathéodory associée à celle ci. Il est clair que cette métrique d_c est invariante à gauche. De plus on a

A.4.1 Lemme

$$d_c(\delta_t x, \delta_t y) = t\, d_c(x, y)$$

Preuve

$$d_c(\delta_t x, \delta_y) \leq t\, d_c(x, y)$$

car $\|\delta_t \dot{c}\|_c = t\, \|\dot{c}\|_c$.
Et par symétrie on aura la deuxième inégalité.

□

A.4.2 Proposition *Il existe $C > 0$ tel que pour tout $t > 0$ on a*

$$\mu(B^c(e, t)) = Ct^D$$

(où D est la dimension homogène de G et $B^c(e,t) = \{x \in G : d_c(e,x) \leq t\}$). En particulier, (G, d_c) est D-Ahlfors régulier.

Preuve Le groupe à un paramètre d'automorphismes $\delta_t : G \to G$, $t > 0$ vérifie en coordonnées exponentielles l'équation suivante

$$\delta_t(x) = (tx_1, t^2x_2, \ldots, t^r x_r). \tag{A.3}$$

où $x_i \in V_i$ pour $i = 1, 2, \cdots, r$.
Le lemme A.4.1 entraîne $B^c(e,t) = \delta_t B^c(e,1)$ et donc l'équation A.3 implique

$$\mu(B^c(e,t)) = Ct^D,$$

où $C = \mu(B^c(e,1))$ et $D = \sum_{i=1}^r i \dim V_i$. En particulier, la dimension à l'infini coïncide avec la dimension locale.

□

A.4.3 Lemme *Soient G un groupe de Carnot, d_r une métrique riemannienne invariante à gauche et d_c la métrique de Carnot associée, alors il existe $b > 1$ tel que si $d_r(e,x) \leq 1$ alors on a $d_c(e,x) \leq b$.*
Preuve voir le lemme 5.1.5.

□

A.4.4 Proposition *Pour tout $x, y \in G$ avec $d_r(x,y) \geq 1$ on a:*

$$\frac{d_c(x,y)}{2b} \leq d_r(x,y) \leq d_c(x,y)$$

Preuve Voir la proposition 5.1.6.

□

A.5 La géométrie des boules riemannienne

Posons $\Omega_1 = I_1 \times I_2 \times \cdots I_r$ où I_i est un cube euclidien de côté 1 dans V^i.
Soit $\Omega_t := \delta_t(\Omega_1)$, donc $\Omega_t = I_1^t \times I_2^t \times \cdots I_r^t$ où I_i^t est un cube euclidien de côté t^i dans V^i. On a alors:

$$\mathrm{Vol}_{euc}(\Omega_t) = t^d$$

avec $d = \sum_{i=1}^r i \dim V^i$.
Notons $B_t^r := B^r(e,t)$ la boule de rayon r avec la métrique riemannienne, et $B_t^c := B^c(e,t)$ la boule de rayon r avec la métrique de Carnot.

A.5.1 Proposition *Il existe $\epsilon > 0$ tel que pour tout $t \geq 1$ on a:*

$$\delta_{t\epsilon}(\Omega_1) \subset B_t^r \subset \delta_{2bt\epsilon^{-1}}(\Omega_1) \tag{A.4}$$

Preuve Soit $\epsilon > 0$ tel que:

$$B^c_\epsilon \subset \Omega \subset B^c_{\epsilon^{-1}} \tag{A.5}$$

La proposition A.4.4 entraîne

$$B^c_t \subset B^r_t \subset B^c_{2bt}$$

$B^c_t = \delta_{t\epsilon} B^c_{\epsilon^{-1}} \supset \delta_{t\epsilon}(\Omega)$ et $B^c_{2bt} = \delta_{2bt\epsilon^{-1}}(B^c_\epsilon) \subset \delta_{2bt\epsilon^{-1}}(\Omega)$ (d'après l'équation A.5) et donc on a l'équation A.4.

□

A.6 Remarque: *Ainsi on a une estimation de la forme des boules dans un groupe de Carnot(si le rayon est assez grand).*

A.5.2 Corollaire *La croissance riemannienne du volume d'un groupe de Carnot est polynomiale, plus précisement on a:*
Il existe $c \geq 1$ *tel que :*

$$\frac{t^D}{c} \leq \mathrm{Vol}(B^r_t) \leq c\, t^D \quad \text{pour } t \geq 1$$

avec $D = \sum_{i=1}^r i \dim(V^i)$.

A.7 Remarque: *Dans la proposition A.5.1, on a identifié* G *à* $\mathcal{G}$ $(\equiv \mathbb{R}^n)$ *via l'exponentielle.*

Appendice B

Les espaces de type homogène

Un des cadres dans lequel la théorie des espaces de Sobolev sur les espaces métriques s'applique de manière assez satisfaisante, est celui des espaces de *type homogène.*
On suppose que les mesures μ sont Borel régulières.

B.1 Définition *Un espace métrique mesuré (X, d, μ) est dit de type homogène s'il existe une constante $C > 0$ telle que:*

$$0 < \mu(B(x, 2r)) \leq C\, \mu(B(x, r)) < \infty$$

Pour tout $x \in X$ et $r > 0$.

B.1 Proposition *Soit X un espace de type homogène. Pour tous $r_0 > r > 0$ et pour tout $x \in X$ on a*

$$\frac{\mu(B(x,r))}{\mu(B(x,r_0))} \geq \frac{1}{C}\left(\frac{r}{r_0}\right)^{\alpha} \tag{B.2}$$

où $\alpha = log_2(C)$.

Preuve Pour $r_0 > r > 0$ il existe un unique $n \in \mathbf{N}$ tel que $2^n \leq \frac{r_0}{r} < 2^{n+1}$ d'où

$$\mu(B(x,r)) \geq \frac{1}{C^{n+1}}\mu(B(x,r_0)).$$

Et comme $C = 2^{\alpha}$ et $\frac{1}{2^{n+1}} > \frac{r}{2r_0}$ donc

$$\mu(B(x,r)) \geq \frac{1}{C}(\frac{r}{r_0})^{\alpha}\mu(B(x,r_0)).$$

$\square$

B.2 Lemme *(Voir lemme 1.1 du chapitre III de [5])*
Soit X un espace de type homogène. Alors il existe un entier N tel que quels que soient x dans X, r réel positif et n entier positif, la boule $B(x, r)$ ne peut contenir plus de N^n points dont les distances mutuelles soient supérieures à $\frac{r}{2^n}$.

B.3 Lemme *Soit X un espace de type homogène alors pour tout $x \in X$ et pour tout $\epsilon > 0$ il existe N boules $B_1, \cdots, B_N$ de rayon ϵ telles que*

$$B(x,R) \subset \cup_{i=1}^{N} B_i$$

où $N = N(R,\epsilon,C)$.

Preuve (Conséquence directe du lemme précédent).

□

B.4 Proposition *Soit X un espace de type homogène complet, alors l'espace métrique (X,d) est propre.*

Preuve Par le lemme précédent, toute boule $B(x,R)$ est totalement bornée. Comme X est complet, on en déduit que toute boule fermée est compacte.

□

B.3 Définition *Un espace métrique (X,d) est doublant s'il existe $C_1 \geq 1$ telle que pour tout $r > 0$, toute boule de rayon $2r$ peut être recouverte par au plus C_1 boules de rayon r.*

Par le lemme précédent, il est clair que si (X,d,μ) est un espace de type homogène alors l'espace métrique (X,d) est doublant. J. Luukkainen et E. Saksamn ont démontré la réciproque

B.5 Théorème *(voir [33])*
Soit un espace métrique (X,d) complet et doublant alors il existe une mesure μ telle que l'espace (X,d,μ) est de type homogène.

Exemples d'espaces de type homogène

1.) Les variétés riemanniennes compactes.

2.) Les variétés riemanniennes complètes avec courbure de Ricci positive.

3.) L'espace $(\mathbb{R}^n, d_{euc}, \mu)$ avec $\mu = (1 + \|x\|)dx$ est de type homogène et il vérifie

$$\mu(B(x,R)) \geq CR^n$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et tout $R > 0$ (voir [26]).

4.) Les espaces métriques mesurés Ahlfors réguliers.

5.) Les exemples du chapitre 5.

Soit maintenant un espace de type homogène muni d'une structure d' espace de Sobolev axiomatique.
Nous avons alors cette proposition

B.0.3 Proposition *Si X vérifie une inégalité de Poincaré de type p où $1 \leq p < \infty$ alors l'inégalité de Poincaré globale d'ordre p est vérifiée:*

$$\int_X |u(x) - u_{B(x,r)}|^p \, d\mu(x) \leq C \, r^p \int_X g^p \, d\mu.$$

Pour tout $g \in D(u)$ *et pour tout* $r > 0$.

Preuve On applique les arguments de la preuve du lemme page 301 de [7].

□

Bibliographie

[1] P. Auscher, T. Coulhon *Gaussian lower bounds for random walks from elliptic regularity* Ann.Inst.H.Poincaré Probab. Statist.**35**(1999), no 5,605-630.

[2] D. Bakry, T. Coulhon , M. Ledoux et L. Salloff-Coste *Sobolev Inequalities in Disguise* Indiana Univ. Math. J.**44** ,4 (1995) 1033-1074.

[3] M. Bourdon et H. Pajot, *Poincaré inequalities and quasiconformal structure on the boundary of some hyperbolic buildings.* Proc. Amer. Math. Soc. **127** (1999), 2315-2324.

[4] J. Cheeger *Differentiability of Lipschitz Functions on Metric Measure Spaces.* GAFA **9** (195) 428–517.

[5] R. Coifman et G. Weiss *Analyse harmonique non-Commutative sur certains espaces homogenes* Lecture Notes in Math. 242, Springer 1971.

[6] T. Coulhon *Espaces de Lipschitz et inégalité de Poincaré* J.Functional analysis, 136, 81-113, (1996).

[7] T. Coulhon et L. Salloff-Coste *Isopérimétrie pour les groupes et variétés* Rev.Mat.Iber. vol 9,No 2 (1993).

[8] T. Coulhon et P. Koskela *Geometric Interpretations of L^p-Poncaré Inequalities on Graphs with Polynomial Volume Growth* [en préparation].

[9] T. Coulhon, L. Salloff-Coste et N.Th. Varopoulos *Analysis and Geometry on Groups* Cambridge Univ.Press, Cambridge, UK, 1992.

[10] LC. Evans et R.F. Gariepy *Measure Theory and Fine properties of Functions* Studies in Advanced Mathematics. CRC Press, Boca Raton, Florida, USA (1992).

[11] J. Ferrand *Étude d'une classe d'applications liées à des homomorphismes d'algèbres de fonctions et généralisant les quasi-conformes.* Duke Math. J. **40**, (1973) 163–186.

[12] B. Franchi, P. Hajłasz et P. Koskela *Definitions of Sobolev Classes on Metric Spaces.* Ann. Inst. Fourier **49** (1999) 1903-1924.

[13] V. Gol'dshtein, L. Gurov et A. Romanov *Homeomorphisms that induce Monomorphisms of Sobolev Spaces.* Israel J. Math **91** (1995) 31-60.

[14] V. Gol'dshtein et M. Troyanov *Axiomatic Theory of Sobolev Spaces.* en préparation.

[15] V. Gol'dshtein et S.K Vodop'janov *Lattice isomorphisms of the space W_n^1 and quasi-conformal mappings* Sibirsk.Mat.Z. **16**(1976),224-246, 419.

[16] N. Goodman m *Nilpotent Lie Groups* Springer Lect. Notes **562**.

[17] R.E Greene et H. Wu *Function Theory on Manifolds which possess a Pole* Springer Lect. Notes in Mathematics **699**.

[18] A. Grigor'yan *Analytic and Geometric Background of Recurence and Non-Explosion of the Brownian Motion on Riemannian Manifolds.* Bull. Amer. **36** (1999), 135-249.

[19] M. Gromov *Carnot-Carathéodory Spaces seen from within* Progress in Mathematics **144** (1996) 79-318.

[20] M. Gromov, J. Lafontaine et P. Pansu *Structures Métriques pour les variétés riemanniennes* Cedic-Nathan 1981.

[21] Y. Guivarc'h *Croissance polynômiale et périodes des fonctions harmoniques* Bull. Soc. Math. France**101**(1973) 333-379.

[22] P. Hajłasz *Sobolev Spaces on an arbitrary Metric Space.* Potential Anal. **5** (1996), no. 4, 403–415.

[23] P. Hajłasz et J. Kinnunen *Hölder Quasicontinuity of Sobolev Functions on Metric Spaces* Rev.Mat Iberoam. **14**, no 3, 601-622 (1998).

[24] P. Hajłasz et P. Koskela *Sobolev met Poincaré.* Mem. Amer. Math. Soc.**145**, no 688 (2000).

[25] J. Heinonen, *Lectures on analysis on metric spaces.* Universitext. Springer-Verlag, New York, 2001.

[26] J. Heinonen et P. Koskela *Quasiconformal maps in Metric Spaces with controlled geometry.* Acta Math. **181** (1998), 1–61.

[27] M. Kanai *Rough Isometries and Combinatorial Approximations of Geometries of non-Compact Riemannian Manifolds* J.Math. Soc. Japan, **37**, (1985), 391-413.

[28] V.M. Keselman et V.A. Zorich *On Conformal Type of a Riemannian Manifold* Func. Anal. and Appl. **30** (1996), 106–117.

[29] J. Kinnunen et O. Martio *The Sobolev Capacity on Metric Spaces.* Annales Academiae Scientiarum Fennicae Series Mathematica **21** (1996) 367–382.

[30] A. Korányi et H.M. Reimann *Quasiconformal Mappings on the Heisenberg Group* Inven.Math **80** 309-338 (1985).

[31] T. Laakso *Ahlfors Q-Regular Spaces With Arbitrary $Q > 1$ Admitting Weak Poincaré Inequality* GAFA, **10** (2000), no. 1, 111-123.

[32] R. Larsen *Banach Algebras an Introduction* M.Dekker, Inc N.Y 1973.

[33] J. Luukkainen et E. Saksman *Every Complete Doubling Metric Space carries a Doubling Measure* Pro.Amer.Math.Soc, **126** (1998) 531-534.

[34] M. Nakai *Existence of Quasi-isometric Mappings And Royden Compactification* Ann. Acad. Scient. Fenn. Math, **25** (2000), 239-260.

[35] P. Pansu *Difféomorphismes de p-dilatation bornées.* Ann. Acad. Sc. Fenn. **223** (1997) 475–506.

[36] M. Troyanov *Parabolicity of Manifolds* Siberian Adv. in Math. **9** (1999).

[37] M. Troyanov et S. Vodop'yanov *Liouville type Theorem for Mappings with Bounded (co-)Dilatation* Preprint EPFL, (1999).

Curriculum Vitae

Je suis né le 31 Janvier 1966 à Tétouan au Maroc.
J'ai effectué mes études secondaires à Oujda où j'ai obtenu un baccalauréat de type sciences mathématiques en 1985. Après, j'ai suivi la filière des mathématiques supérieures et mathématiques spéciales. Ensuite, j'ai étudié dans une grande école d'ingénieurs au Maroc; Ecole Hassania des travaux publics à Casablanca, où j'ai passé deux ans en ingénierie: une en génie civil et une autre en génie éléctrique.
En 1992, j'ai réussi l'examen d'admission à L' EPFL et je commençais alors des études de mathématiques que j'ai terminé en 1997 avec l'obtention de diplôme d'ingénieur mathématicien.
Depuis cette date je suis assistant au DMA auprès des professeurs P. Buser et M. Troyanov.