

# **ANALYSE MATHÉMATIQUE ET NUMÉRIQUE D'UN MODÈLE DE CHAUFFAGE PAR INDUCTION**

THÈSE N° 1240 (1994)

PRÉSENTÉE AU DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

POUR L'OBTENTION DU GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES

PAR

**STÉPHANE CLAIN**

Maîtrise de mathématiques de l'Université de Rennes  
de nationalité française

acceptée sur proposition du jury:

Prof. R. Touzani, rapporteur  
Dr B. Dacorogna, corapporteur  
Prof. T. Gallouët, corapporteur  
Prof. M. Pierre, corapporteur  
Prof. J. Rappaz, corapporteur

Lausanne, EPFL  
1994



## Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier le Professeur R. Touzani qui m'a permis d'entreprendre cette thèse et m'a suivi dans mon travail durant ces trois années.

J'exprime ma profonde reconnaissance au Docteur Marek Swierkosz avec qui j'ai étroitement collaboré et pour ses précieux conseils.

Je remercie vivement le Professeur Jacques Rappaz sans qui cette thèse n'aurait jamais vu le jour et pour l'intérêt qu'il a porté à mon travail.

Mes remerciements vont aussi au Professeur Thierry Gallouët pour l'encouragement qu'il m'a apporté dans ce travail et pour ces conseils.

J'exprime ma gratitude à la société AMYSA d'Yverdon et tout particulièrement aux Docteurs Rémi Glardon et Daniele Mari ainsi qu'à M. Charles Chaboudez.

Je remercie le Docteur Bernard Dacorogna et le Professeur Michel Pierre pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail et pour avoir accepté de participer au jury.

Enfin, je suis reconnaissant envers le National Energie Forschung Fonds qui a financé cette thèse dans le cadre d'un projet dirigé par les professeurs J. Rappaz et R. Touzani.

## Résumé

Le but de ce travail est l'étude d'un modèle mathématique du procédé de chauffage par induction. Nous construisons tout d'abord le modèle à partir des équations de la physique et obtenons sous des hypothèses simplificatrices un couple d'équations aux dérivées partielles décrivant l'évolution du champ magnétique et de la température dans les pièces chauffées. Nous montrons que ce problème évolutif admet une solution au sens faible. Nous analysons ensuite ces équations avec les techniques de l'analyse numérique. On construit des schémas numériques nous permettant par la suite d'entreprendre une simulation numérique du procédé. Enfin, nous nous intéressons au problème stationnaire et prouvons l'existence d'une solution sous des hypothèses moins restrictives que dans le cas évolutif.

## Abstract

In this work, we deal with a mathematical model of heat induction processes. We first build a model derived from Maxwell and heat equations and, using certain simplifying assumptions, we obtain a system of coupled partial differential equations describing the evolution of thermal and magnetic fields. We show that this evolutive problem has a solution in a weak sense. The study of the problem is carried out using numerical analysis techniques. A numerical scheme is build to be implemented on a computer in order to obtain numerical results. Finally, we present theoretical results for a steady-state problem and prove existence of a solution under assumptions weaker than in the evolutive case.

## Table des matières

	<u>Introduction.</u>	1
I.	<u>Modélisation.</u>	5
	Introduction.	6
	1) Description physique du problème.	6
	2) Modélisation de l'électromagnétisme.	9
	3) Modélisation de la thermique.	13
	4) Deux modèles de chauffage par induction.	14
	5) Un modèle monodimensionnel.	15
II.	<u>Le problème évolutif.</u>	17
	Introduction.	18
	1) Notations.	19
	2) Hypothèses de travail.	20
	3) Un problème parabolique linéaire avec second membre $L^1$ .	21
	4) Existence et unicité d'une solution approchée.	33
	5) Convergence forte.	36
	6) Cas d'un chauffage avec une condition de Dirichlet.	39
III.	<u>Un schéma numérique.</u>	43
	Introduction.	44
	1) Hypothèses et régularités.	44
	2) Le problème discrétisé.	46
	3) Les estimations d'erreurs.	51
IV.	<u>Quelques résultats numériques.</u>	59
	Introduction.	60
	1) Le modèle monodimensionnel.	60
	2) La méthode des pas mixtes.	64
	3) Une application aux matériaux non ferromagnétiques.	66
	4) Cas des matériaux ferromagnétiques.	67
	5) Le modèle bidimensionnel.	71
V.	<u>Le problème stationnaire.</u>	77
	Introduction.	78
	1) Le modèle stationnaire.	78
	2) Le problème tronqué.	81
	3) Quelques lemmes techniques.	86
	4) Existence d'une solution bornée.	95
	5) Conclusion.	98

Annexe.  
Bibliographie.

99  
104

## Principales notations utilisées

### 1) Notations générales.

On désigne par  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^2$ . Soit  $T > 0$ , on note par  $Q_T$  le cylindre ouvert de base  $\Omega$  et de hauteur  $T$ :

$$Q_T = ]0, T[ \times \Omega.$$

Le point générique de  $\mathbb{R}^2$  est noté par  $x = (x_1, x_2)$ . On désigne par  $\partial\Omega$  le bord du domaine  $\Omega$  et par  $|\Omega|$  la mesure de l'ensemble  $\Omega$ . Soit  $u$  une fonction sur  $\mathbb{R}^2$  à valeurs réelles et  $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$  une application de  $\mathbb{R}^2$  dans lui-même. On utilisera l'écriture usuelle des opérateurs différentiels suivants:

$$\begin{aligned}\nabla u &= \left( \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2} \right), \\ \nabla \cdot \mathbf{v} &= \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2}, \\ \Delta u &= \nabla \cdot (\nabla u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}.\end{aligned}$$

### 2) Les espaces fonctionnels.

On définit par  $\mathcal{D}(\Omega)$  l'espace des fonctions infiniment continument dérivables à support comp. On note parfois  $\mathcal{D}(\Omega)$  par  $C_0^\infty(\Omega)$ . L'espace des distributions  $\mathcal{D}'(\Omega)$  est le dual de  $\mathcal{D}(\Omega)$ . Soit  $p \in [1, \infty]$ . On utilise la définition standard des espaces  $L^p(\Omega)$ . Ces espaces sont munis des normes suivantes:

$$\begin{aligned}\|u\|_{L^p(\Omega)} &= \left( \int_{\Omega} |u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty, \\ \|u\|_{L^\infty(\Omega)} &= \inf \{ C \in \mathbb{R} \text{ tel que } |u| \leq C \text{ p.p. sur } \Omega \}.\end{aligned}$$

On définit les espaces de Sobolev  $W^{1,p}(\Omega)$  par:

$$W^{1,p}(\Omega) = \{ u \in L^p(\Omega) \text{ tel que } \nabla u \in (L^p(\Omega))^2 \}.$$

On les munit de la norme suivante:

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \left( \|u\|_{L^p(\Omega)}^p + \|\nabla u\|_{(L^p(\Omega))^2}^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Les espaces  $L^p(\Omega)$  et  $W^{1,p}(\Omega)$  sont des espaces de Banach. Ils sont réflexifs pour  $p \in ]1, \infty[$ . On désigne par  $W_0^{1,p}(\Omega)$  le complété de l'espace  $\mathcal{D}(\Omega)$  pour la norme de  $W^{1,p}(\Omega)$ . Les espaces  $W_0^{1,p}(\Omega)$  sont aussi des espaces de Banach. Si  $1 \leq p < \infty$ , on note par  $W^{-1,p'}(\Omega)$  le dual de  $W_0^{1,p}(\Omega)$ , où  $p'$  est le nombre conjugué de  $p$ , i.e.:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$



De même, on désigne par  $W^{2,p}(\Omega)$  l'espace des fonctions  $u$  de  $W^{1,p}(\Omega)$  telles que  $\nabla u \in (W^{1,p}(\Omega))^2$ . On le munit de la norme suivante:

$$\|u\|_{W^{2,p}(\Omega)} = (\|u\|_{L^p(\Omega)}^p + \|\frac{\partial u}{\partial x_1}\|_{W^{1,p}(\Omega)}^p + \|\frac{\partial u}{\partial x_2}\|_{W^{1,p}(\Omega)}^p)^{\frac{1}{p}}.$$

Soit  $m$  un entier positif. On note par  $C^0(\mathbb{R})$  l'ensemble des applications continues et par  $C^m(\mathbb{R})$  l'ensemble des applications ayant des dérivées continues jusqu'à l'ordre  $m$ .

Dans ce travail, nous serons amenés à considérer des fonctions paramétrées par le temps. On peut regarder ces fonctions comme des applications d'un intervalle  $]0, T[$  dans un espace fonctionnel. Soit  $X$  un espace de Banach, on note par  $C([0, T]; X)$  l'ensemble des fonctions continues de  $[0, T]$  dans  $X$  muni de la norme suivante:

$$\|u\|_{C([0, T]; X)} \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{t \in [0, T]} \|u(t)\|_X$$

On note par  $L^p(0, T; X)$  l'espace de Banach obtenue par complétion de l'espace  $C([0, T]; X)$  pour la norme suivante [SI]:

$$\|u\|_{L^p(0, T; X)} \stackrel{\text{def}}{=} \left( \int_0^T \|u(t)\|_X^p dt \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty,$$

$$\|u\|_{L^\infty(0, T; X)} \stackrel{\text{def}}{=} \inf \{ C \in \mathbb{R} \text{ tel que } \|u(t)\|_X \leq C, \text{ p.p. } t \in [0, T] \}.$$

L'étude des opérateurs paraboliques nous conduit à introduire des espaces fonctionnels caractérisant à la fois une fonction et sa première dérivée par rapport au paramètre. On définit donc les espaces suivants:

$$\mathcal{W}^{1,p} \stackrel{\text{def}}{=} \{ u \in L^p(0, T; W^{1,p}(\Omega)); \frac{\partial u}{\partial t} \in L^p(0, T; W^{-1,p}(\Omega)) \},$$

$$\mathcal{W}_0^{1,p} \stackrel{\text{def}}{=} \{ u \in L^p(0, T; W_0^{1,p}(\Omega)); \frac{\partial u}{\partial t} \in L^p(0, T; W^{-1,p}(\Omega)) \}.$$

Ces espaces sont des espaces de Banach [LIONS] p. 57, munis des normes:

$$\|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}} \stackrel{\text{def}}{=} (\|u\|_{L^p(0, T; W^{1,p}(\Omega))}^p + \|\frac{\partial u}{\partial t}\|_{L^p(0, T; W^{-1,p}(\Omega))}^p)^{1/p},$$

$$\|u\|_{\mathcal{W}_0^{1,p}} \stackrel{\text{def}}{=} (\|u\|_{L^p(0, T; W_0^{1,p}(\Omega))}^p + \|\frac{\partial u}{\partial t}\|_{L^p(0, T; W^{-1,p}(\Omega))}^p)^{1/p}.$$

On précisera si c'est nécessaire l'intervalle de temps  $]a, b[$  auquel on fait référence en utilisant la notation  $\mathcal{W}^{1,p}(a, b)$  sinon on notera  $\mathcal{W}^{1,p}(0, T)$  par  $\mathcal{W}^{1,p}$ .

### 3) Notations relatives aux grandeurs physiques.

Pour caractériser les grandeurs physiques, on adopte les notations suivantes:

- $C_p$  : capacité calorifique par unité de volume,
- $\lambda$  : conductivité thermique,
- $\rho$  : résistivité électrique,
- $\sigma$  : conductivité électrique ( $\sigma = \frac{1}{\rho}$ ),
- $\mu$  : perméabilité magnétique dans un conducteur,
- $\mu_0$  : perméabilité magnétique dans le vide,
- $\theta$  : température,
- $H$  : composante suivant l'axe  $x_3$  du champ magnétique,
- $B$  : composante suivant l'axe  $x_3$  du champ d'induction magnétique,
- $\mathbf{E}$  : champ électrique,
- $\mathbf{J}$  : densité de courant.

### 4) Notations relatives à la discrétisation.

On suppose que  $\Omega$  est un ouvert polygonal de  $\mathbb{R}^2$ . On désigne par  $\mathcal{T}_h$  une triangulation de  $\overline{\Omega}$ . Pour tout triangle  $K$  appartenant à  $\mathcal{T}_h$ , on note par  $h_K$  le rayon de la plus petite boule contenant  $K$ . On définit la taille de la triangulation par:

$$h = \max\{h_K, K \in \mathcal{T}_h\}.$$

On garantit que la triangulation est non dégénérée. On construit l'espace discrétisé  $V_h$  par:

$$V_h = \{\phi \in C^0(\overline{\Omega}); \phi|_K \in P_1(K), \forall K \in \mathcal{T}_h \text{ et } \phi = 0 \text{ sur } \partial\Omega\},$$

où  $P_1(K)$  désigne l'ensemble des polynômes de degré un sur  $K$ .

Soit  $T > 0$  et  $N$  un entier strictement positif, on note par  $\tau = \frac{T}{N}$  le pas de temps de la subdivision  $(t_i)_{i=0}^N$  définie par  $t_i = i\tau$ ,  $0 \leq i \leq N$ . On notera en général par  $u^n$  une approximation de la valeur de  $u$  au point  $t_n$ , i.e:  $u^n \approx u(t_n)$ . On distinguera enfin les deux opérateurs suivants:

$$\begin{aligned} \bar{\partial}_t u^n &= \frac{u^n - u^{n-1}}{\tau}, & 1 \leq n \leq N, \\ \bar{\partial}_t u(t_n) &= \frac{u(t_n) - u(t_{n-1})}{\tau}, & 1 \leq n \leq N. \end{aligned}$$

## Introduction

Le procédé de chauffage par induction est de nos jours très largement utilisé dans l'industrie métallurgique. Les opérations de refonte, de forgeage, de recuit ou de brasage utilisent de plus en plus cette technique. Son principe général est le suivant : on soumet les pièces métalliques à un champ magnétique périodique très puissant généré par un solénoïde entourant les pièces. Ce champ induit des courants de Foucault permettant par effet Joule, d'élever la température dans les pièces. L'intérêt de ce procédé réside dans le contrôle plus précis du chauffage des pièces. Contrairement aux méthodes plus classiques (four), on peut dans une certaine mesure contrôler la répartition dans le corps de l'apport d'énergie. On peut par exemple chauffer une pièce en garantissant une température relativement homogène. On peut aussi en utilisant une fréquence élevée chauffer le corps uniquement sur le bord et ainsi modifier localement la structure cristalline par un procédé de trempe sans pour autant chauffer toute la pièce. Cette technique permet par ailleurs de chauffer uniquement la pièce sans dissiper trop de chaleur dans les structures se trouvant dans son voisinage (air ambiant, rail de guidage, installation...).

Nous abordons dans cette thèse l'étude, à la fois mathématique et numérique, des équations régissant le processus de chauffage par induction. Nous prouvons tout d'abord l'existence d'une solution au modèle gouvernant le chauffage par induction. L'analyse numérique nous permet d'obtenir une solution approchée par des calculs sur ordinateur.

Dans un premier chapitre, nous construisons un modèle mathématique du processus de chauffage par induction. Nous établissons ce modèle à l'aide des équations de Maxwell et des lois de comportement des champs électrique et magnétique. Sous certaines hypothèses simplificatrices, nous obtenons une description du comportement du champ magnétique  $\mathbf{H}$  sous la forme d'une équation aux dérivées partielles. L'évolution de la température  $\theta$  est décrite par la classique équation de la chaleur. La puissance dissipée par les courants de Foucault intervient dans le second membre de cette équation comme source de chaleur.

Nous supposons que les inducteurs et les induits sont infiniment longs dans une direction. Cette hypothèse permet de formuler les équations en deux dimensions d'espace. Nous obtenons un modèle dit "bidimensionnel". On peut encore simplifier ce modèle en supposant que les pièces sont des cylindres de révolution. On peut ainsi formuler les équations uniquement en une dimension d'espace en utilisant les coordonnées polaires. Nous obtenons le modèle "monodimensionnel". On montre que le procédé de chauffage par induction est décrit par le système d'équations couplées suivant:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}(\mu H) - \nabla \cdot (\rho \nabla H) = 0, \\ C_p \frac{\partial \theta}{\partial t} - \nabla \cdot (\lambda \nabla \theta) = \rho |\nabla H|^2, \end{cases}$$

où  $\rho$ ,  $C_p$  et  $\lambda$  dépendent de  $\theta$ .

Ce système d'équations couplées intervient dans de nombreux problèmes physiques. La dépendance thermique des coefficients physiques des matériaux conduit généralement au

modèle combinant les deux équations ci-dessus dont l'une est l'équation de la chaleur. Le terme quadratique de la forme  $|\nabla H|^2$  apparaît très souvent dans les problèmes faisant intervenir la loi de Joule. On peut citer pour exemple les problèmes d'électrochimie [GAHE] ou de résistances électriques dans un corps conducteur [CI], [HO].

Nous étudions dans le deuxième chapitre l'existence d'un couple  $(H, \theta)$  solution du problème couplé en dimension deux d'espace. Les difficultés essentielles résident dans le terme quadratique du second membre de l'équation de la chaleur et la non-linéarité des équations. Nous serons amenés à faire des hypothèses restrictives sur les coefficients physiques des matériaux, en particulier nous les supposons bornés. Nous définissons tout d'abord le cadre fonctionnel de notre étude puis nous introduisons une méthode dite "de décalage temporel" nous permettant de découpler les deux équations. Cette technique nous permet de construire une suite de problèmes dérivant du problème initial, pour laquelle on peut prouver l'existence des solutions. On montre ensuite que cette suite de solutions converge vers une solution du problème couplé. La démonstration de l'existence d'une solution s'appuie essentiellement sur un théorème de Meyers [BLP] et sur un théorème de Boccardo-Gallouët [BOGA]. On construit à partir de ces deux résultats les outils nécessaires à la preuve. La méthode que nous proposons est essentiellement constructive et s'inspire des modèles numériques que nous proposons dans le chapitre suivant.

Le troisième chapitre est consacré à l'étude du schéma numérique introduit en vue d'une implantation sur ordinateur. Nous présentons les équations discrétisées et établissons la convergence du schéma vers la solution. Ces équations discrétisées reposent sur des schémas aux différences finies semi-implicites en temps combinés avec une méthode du type éléments finis continus linéaires par morceaux pour les variables d'espace. Nous nous intéressons uniquement au modèle "bidimensionnel". On donne des estimations sur les ordres de convergence en temps et en espace des solutions approchées en fonction du pas de temps et du pas du maillage. On utilise essentiellement des résultats dûs à V. Thomée [THO]. Pour obtenir ces estimations, nous sommes obligés de formuler une hypothèse supplémentaire sur la régularité des solutions du problème discrétisé.

Le quatrième chapitre est consacré aux résultats numériques. Les schémas étudiés dans le chapitre III ont été mis en œuvre sur ordinateur. Nous avons tout d'abord implanté un code construit à partir du modèle monodimensionnel.

L'expérience physique montre que les vitesses d'évolution du champ magnétique et de la température sont très différentes. Dans le cas type de chauffage par induction, le champ magnétique oscille en temps à des fréquences de plusieurs milliers de cycles par seconde alors que la température s'élève de quelques dizaines de degrés en une seconde. On adopte un pas spécifique pour la discrétisation en temps pour chacune de ces équations. On introduit une méthode dite "méthode des pas mixtes" utilisant deux pas de temps différents pour discrétiser le système d'équations couplées.

Le modèle mathématique présenté dans le premier chapitre montre que l'équation

décrivant le comportement du champ magnétique dépend de la résistivité électrique  $\rho$  et de la perméabilité magnétique  $\mu$ . Généralement, la perméabilité ne dépend pas du champ magnétique. Néanmoins, une classe importante de métaux comme certains aciers ne satisfont pas à cette dernière propriété. Leur perméabilité magnétique dépend de la température et du champ magnétique. On montre que cette dépendance entraîne une forte augmentation du temps de calcul. On introduit une technique de calcul consistant à évaluer une perméabilité équivalente permettant de déterminer une solution numérique du problème pour un coût de calcul raisonnable. Cette méthode est ensuite utilisée sur le modèle bidimensionnel.

Nous présentons ensuite les résultats obtenus avec un schéma construit autour du modèle bidimensionnel. Certaines de ces simulations ont été réalisées en parallèle avec des mesures expérimentales réalisées en milieu industriel. Nous présentons deux comparaisons entre l'expérience physique et la simulation numérique obtenues sur des géométries simples bidimensionnelles. Le premier test est réalisé sur un matériau non ferromagnétique. Il permet de valider la méthode des pas mixtes. Le deuxième test utilise un matériau ferromagnétique. Le but de cette comparaison est de valider l'utilisation d'une perméabilité magnétique équivalente.

Le cinquième chapitre est dédié à l'étude du problème stationnaire. Ce problème est obtenu lorsqu'on s'intéresse aux solutions stationnaires du problème évolutif. On obtient alors un modèle décrit par les deux équations couplées suivantes:

$$\begin{cases} i\omega\mu H - \nabla \cdot (\rho(\theta)\nabla H) = f, \\ -\nabla \cdot (\lambda(\theta)\nabla \theta) = \frac{1}{2}\rho(\theta)[\nabla H]^2. \end{cases}$$

Dans ce problème, la température sur le bord est donnée. On montre l'existence d'une solution  $(H, \theta)$  de ce problème sous des hypothèses moins restrictives que dans le chapitre II. En particulier, nous ne supposons plus que les fonctions  $\lambda$  et  $\rho$  sont bornées. On utilise une méthode s'inspirant des résultats obtenus par Stampacchia [STAM]. On montre en particulier que la température  $\theta$  est bornée.



# CHAPITRE I

## MODÉLISATION

### Résumé

Nous construisons dans ce chapitre plusieurs modèles mathématiques décrivant le processus de chauffage par induction pour des systèmes infiniment longs dans une direction. Nous établissons tout d'abord le modèle électromagnétique à partir des équations de Maxwell auquel nous rajoutons l'équation de la chaleur. Le processus de chauffage par induction débouche sur un système couplé de deux équations paraboliques.

## Introduction.

Dans ce chapitre, nous allons établir un modèle mathématique décrivant le processus du chauffage par induction. Nous allons dans un premier paragraphe décrire le phénomène physique et expliciter les grandeurs mises en jeu. Le paragraphe suivant aura pour but de construire à partir des lois de l'électromagnétisme un modèle permettant de caractériser le champ magnétique. Le troisième paragraphe sera dédié à la construction du modèle thermique. Dans le quatrième paragraphe, nous présenterons le système complet d'équations régissant le chauffage par induction pour une géométrie "bidimensionnelle". Enfin dans le dernier paragraphe, nous proposerons un modèle monodimensionnel issu du modèle précédent.

### 1) Description physique du problème.

Le chauffage par induction consiste à chauffer un corps conducteur de courant (typiquement une pièce de métal) au moyen de courants de Foucault générés par un champ magnétique. Pour représenter plus concrètement ce processus, on peut imaginer une pièce métallique entourée d'une bobine parcourue par un courant électrique périodique en temps (fig. 1) (courant alternatif).

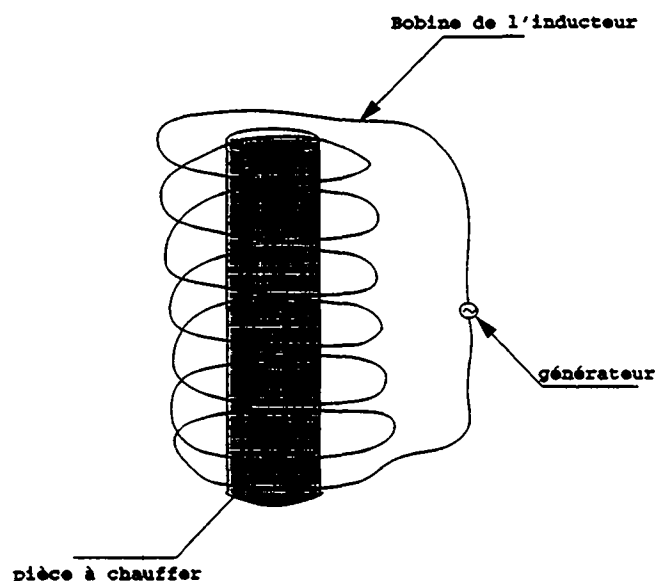


Fig. 1. Le système inducteur-induit.

La bobine génère un champ magnétique dans l'espace. Ce champ agit sur la pièce métallique. Il se crée dans le métal un courant électrique qui tend à s'opposer au champ magnétique qui lui a donné naissance. Ce courant induit, par la loi d'Ohm, crée une dissipation thermique. Celle-ci est responsable de l'élévation de température de la pièce. Les propriétés physiques des matériaux dépendent de l'état thermique de celui-ci. Par conséquent, cette variation de température entraîne une modification des propriétés physiques du corps chauffé. Ceci implique en retour une modification du champ magnétique. Le processus de chauffage par induction se caractérise donc par une interaction entre le champ magnétique



et la température (fig 2.).

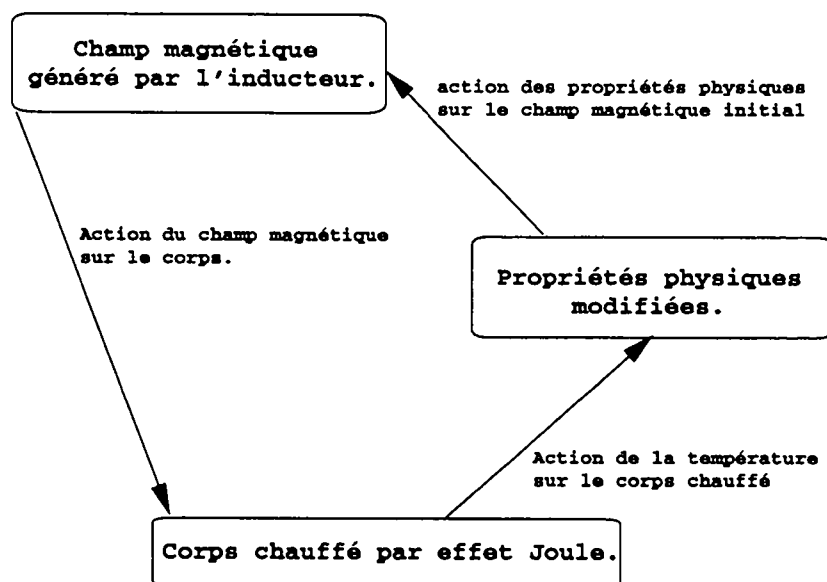


Fig. 2. Schéma d'interaction

Les grandeurs physiques que nous utilisons pour étudier le chauffage par induction sont, d'une part le champ magnétique et d'autre part, la température. Pour déterminer ces deux grandeurs, il faut connaître un certain nombre de paramètres comme les propriétés des matériaux et la tension ou l'intensité du courant parcourant la bobine. Il faut aussi se donner l'état du système inducteur-induit avant le début du chauffage. Nous allons proposer deux modèles mathématiques décrivant l'évolution du champ magnétique au cours du temps. Dans un premier modèle, la tension aux bornes de la bobine est donnée. Il s'agit de prendre en compte le couplage résultant des inductions mutuelles entre la bobine et la pièce et de calculer le champ magnétique qui en résulte. Dans le deuxième modèle, nous supposons que le champ magnétique sur le bord de la pièce est connu. Le phénomène d'interaction entre les pièces n'intervient plus dans ce modèle.

### 1.1 Hypothèses et notations.

Dans ce travail, nous étudions des pièces cylindriques de section quelconque que nous supposons infiniment longues. Nous nous intéressons à des systèmes inducteur-induit très longs par rapport à leur section. Nous supposons en outre que l'inducteur n'est formé que d'une seule spire infiniment longue (fig. 3.). Cette hypothèse reste raisonnable au regard de la réalité physique si les inducteurs et les corps chauffés sont "très longs par rapport au diamètre de la section". Ceci nous permet de supposer l'invariance du système inducteur-induit par translation suivant l'axe  $Ox_3$  du cylindre. Cette invariance nous conduit à étudier le processus de chauffage uniquement sur un plan de coupe  $Ox_1x_2$ .

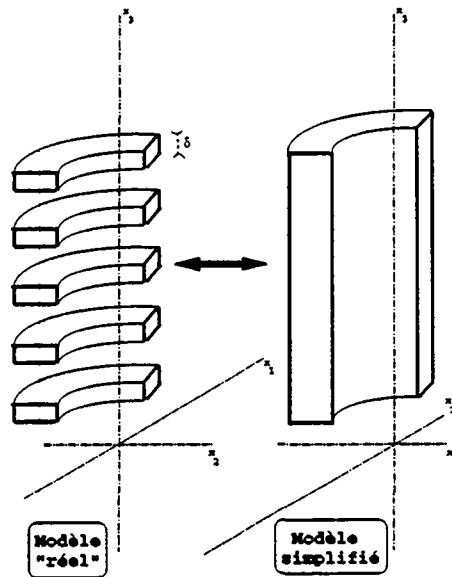


Fig. 3. Modèle simplifié.

On désignera par  $\Omega_0$  la trace de l'inducteur dans le plan de coupe  $Ox_1x_2$ . Le domaine  $\Omega_0$  est un ouvert topologiquement équivalent à un anneau. Cet ensemble délimite deux zones du plan: une partie bornée contenant  $\Omega_0$  et une partie non bornée à l'extérieur de l'anneau. On notera par  $\Lambda$  la partie bornée et par  $\tilde{\Omega}$  la partie extérieure. Les ensembles  $\Lambda$  et  $\tilde{\Omega}$  sont des ouverts du plan.

On désigne par  $\Omega_1, \dots, \Omega_p$  la trace des conducteurs. On a évidemment  $\Omega_i \subset \Lambda$ ,  $0 \leq i \leq p$ . On notera par  $\Omega$  la réunion de tous les ouverts  $\Omega_i$ ,  $0 \leq i \leq p$  et par  $\Omega'$  le vide entre les inducteurs et l'induit c.à.d.  $\Omega' = \Lambda \setminus \tilde{\Omega}$  (Voir fig. 4).

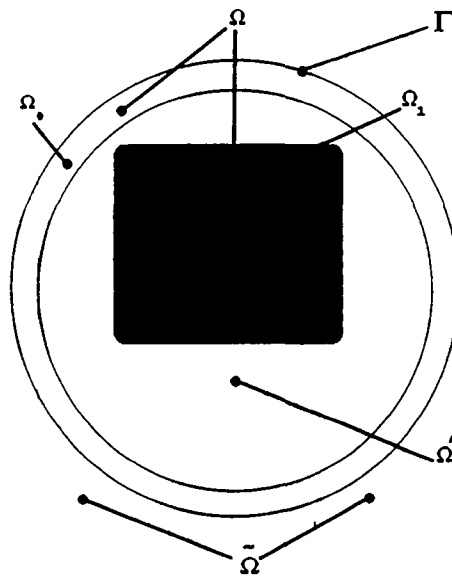


Fig. 4. Géométrie des conducteurs

On supposera en outre que tous les conducteurs sont disjoints, i.e.

$$\bar{\Omega}_i \cap \bar{\Omega}_j = \emptyset, \quad 0 \leq i, j \leq p.$$

On désignera par  $\Gamma$  le bord de  $\Lambda$  et par  $\Gamma_i$  le bord de  $\Omega_i$ ,  $1 \leq i \leq p$ .

Les grandeurs physiques intervenant dans cette modélisation sont le champ électrique  $\mathbf{E}$ , le champ magnétique  $\mathbf{H}$ , la densité de courant  $\mathbf{J}$ , le champ d'induction magnétique  $\mathbf{B}$  et la température  $\theta$ . Nous commençons tout d'abord par construire un modèle mathématique décrivant le comportement électromagnétique en utilisant les lois de Maxwell. Nous présentons ensuite le modèle thermique.

## 2) Modélisation de l'électromagnétisme.

Dans ce paragraphe, la température est une fonction donnée. Les fréquences utilisées dans la pratique étant de l'ordre de quelques kHz et les pièces considérées de petites tailles (quelques décimètres), nous négligeons les courants de déplacement. Sous cette hypothèse, les équations de Maxwell s'écrivent:

$$\mathbf{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J}, \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \mathbf{rot} \mathbf{E} = \mathbf{0}, \quad (2.2)$$

$$\mathbf{div} \mathbf{B} = 0, \quad (2.3)$$

dans  $\mathbb{R}^3$ . La loi d'Ohm et la loi d'induction sont données par les relations suivantes:

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}, \quad \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}, \quad (2.4)$$

$$\mathbf{J} = \mathbf{0}, \quad \text{dans } (\tilde{\Omega} \cup \Omega') \times \mathbb{R}, \quad (2.5)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad \text{dans } \mathbb{R}^3. \quad (2.6)$$

Les fonctions  $\sigma$  et  $\mu$  représentent respectivement la conductivité électrique et la perméabilité magnétique. Elles peuvent dépendre de la température. De plus,  $\mu$  peut dépendre aussi du champ magnétique dans les conducteurs. Grâce aux hypothèses faites sur la géométrie du système, nous supposons que les grandeurs physiques étudiées sont de la forme:

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ H \end{pmatrix} \quad \text{dans } \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{J} = \begin{pmatrix} J_1 \\ J_2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{dans } \Omega.$$

Des relations (2.4)-(2.6), on obtient:

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{dans } \Omega, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{pmatrix} \quad \text{dans } \mathbb{R}^3.$$

Le système est invariant par translation suivant  $x_3$ ; par conséquent les fonctions  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $J_1$ ,  $J_2$ ,  $H$  et  $B$  ne dépendent pas de  $x_3$ . On notera dorénavant par  $\mathbf{J}$  et  $\mathbf{E}$  les vecteurs suivants:

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{J} = \begin{pmatrix} J_1 \\ J_2 \end{pmatrix}.$$

Notons maintenant par  $\text{rot}$  et  $\text{rot}$  le rotationnel d'un champ scalaire et le rotationnel d'un champ vectoriel dans  $\mathbb{R}^2$ , i.e.:

$$\text{rot } \phi \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x_2} \\ -\frac{\partial \phi}{\partial x_1} \end{pmatrix}, \quad \text{rot } \mathbf{A} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2}.$$

En utilisant les relations (2.1)-(2.6), on déduit:

$$\text{rot } H = \mathbf{J}, \quad \text{dans } \mathbb{R}^2, \quad (2.7)$$

$$\mathbf{J} = 0, \quad \text{dans } \Omega' \cup \tilde{\Omega}, \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mu H) + \text{rot } \mathbf{E} = 0, \quad \text{dans } \Omega, \quad (2.9)$$

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}, \quad \text{dans } \Omega. \quad (2.10)$$

Des relations (2.7)-(2.8) on déduit que dans les domaines non conducteurs  $H$  ne dépend que du temps puis que  $\text{rot } H = 0$ . On suppose dans notre modèle que le champ magnétique est nul dans  $\tilde{\Omega}$ , i.e.:

$$H = 0 \quad \text{dans } \tilde{\Omega}. \quad (2.11)$$

En substituant les équations (2.7) et (2.10) dans (2.9), nous obtenons:

$$\frac{\partial(\mu H)}{\partial t} + \text{rot}(\sigma^{-1} \text{rot } H) = 0, \quad \text{dans } \Omega. \quad (2.12)$$

D'où

$$\frac{\partial(\mu H)}{\partial t} - \nabla \cdot (\rho \nabla H) = 0, \quad \text{dans } \Omega, \quad (2.13)$$

où  $\rho$  est la résistivité électrique.

Nous supposons qu'il n'y a pas de courant de surface. En conséquence, la relation (2.7) implique que le champ magnétique est continu à travers les frontières  $\Gamma_i$ :

$$H \text{ est continu à travers les frontières } \Gamma_i. \quad (2.14)$$

Nous allons maintenant présenter deux modèles différents. Dans le premier, la tension injectée dans le générateur est donnée, alors que dans le second, c'est le courant total circulant dans l'induit qui est connu.

2.1. *Le modèle en tension.*

Notre but est de déterminer une approximation numérique du champ  $H$  au cours du temps. Pour cela, nous allons formuler ce problème sous une forme variationnelle et utiliser les techniques de l'analyse numérique pour calculer une approximation du champ magnétique et de la température. Nous ne nous préoccupons pas dans ce chapitre du problème d'existence. Nous supposons que les différentes grandeurs physiques sont très régulières. Nous cherchons à déterminer de manière formelle la formulation variationnelle de ce problème.

On définit l'espace fonctionnel  $V$  par

$$V = \{\phi \in C_I^2(\bar{\Lambda}); \phi|_{\Omega'} = \text{const.}, \phi = 0 \text{ sur } \Gamma\},$$

où  $C_I^2(\bar{\Lambda})$  est l'espace des fonctions continues sur  $\bar{\Lambda}$  deux fois continûment dérivables par morceaux.

Considérons maintenant le problème suivant. On se donne une fonction  $v = v(t)$  assez régulière et  $T > 0$ ;

trouver  $H : ]0, T[ \rightarrow V$  tel que:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Lambda} \mu H \phi \, dx + \int_{\Omega} \rho \nabla H \cdot \nabla \phi \, dx = v \phi|_{\Omega'}, \quad \forall \phi \in V, \quad t \in ]0, T[, \quad (2.15)$$

$$H(0, \cdot) = \tilde{H}_0. \quad (2.16)$$

La fonction  $\tilde{H}_0$  représente le champ initial. Nous allons montrer qu'une solution du problème (2.15)-(2.16) suffisamment régulière est aussi une solution du problème (2.11)-(2.14). on a la

**Proposition 2.1.**

Soit  $H$  une fonction de  $C([0, T]; V) \cap C^1(0, T; C^0(\bar{\Lambda}))$  satisfaisant les équations (2.15)-(2.16) alors  $H$  réalise l'équation (2.13).

*Preuve.*

Soit  $\phi \in V$ . On déduit de la relation (2.15):

$$\frac{d}{dt} \int_{\Lambda} \mu H \phi \, dx - \int_{\Omega} \nabla \cdot (\rho \nabla H) \phi \, dx = v \phi|_{\Omega'} - \int_{\partial\Omega} \rho \frac{\partial H}{\partial n} \phi \, ds. \quad (2.17)$$

Prenons en particulier des fonctions  $\phi$  à support compact dans  $\Omega$ , le second membre s'annule et la relation (2.17) devient:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \mu H \phi \, dx - \int_{\Omega} \nabla \cdot (\rho \nabla H) \phi \, dx = 0.$$

Par un raisonnement standard, on en déduit (2.13).  $\square$

**Remarque 2.1.**

La fonction  $v$  peut-être interprétée comme la tension fournie par le générateur. En effet, la relation (2.15) implique:

$$\int_{\Lambda} \frac{\partial(\mu H)}{\partial t} \phi \, dx - \int_{\Omega} \nabla \cdot (\rho \nabla H) \phi \, dx = v \phi|_{\Omega'}, \quad \forall \phi \in V.$$

Prenons  $\phi = H$ , on tire alors de la relation précédente:

$$\int_{\Lambda} \frac{\partial(\mu H)}{\partial t} H \, dx + \int_{\Omega} \rho |\nabla H|^2 \, dx = v H|_{\Omega'}$$

En utilisant les relations (2.1) et (2.4), on obtient:

$$\int_{\Lambda} \frac{\partial B}{\partial t} H \, dx + \int_{\Omega} \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} \, dx = v H|_{\Omega'}$$

Cette dernière relation représente l'équation de conservation de l'énergie. Le terme  $v H|_{\Omega'}$  définit l'énergie totale injectée dans le système. La fonction  $v$  s'interprète comme la tension fournie par le générateur et  $H|_{\Omega'}$  comme l'intensité par mètre circulant dans l'inducteur.

*2.2. Le modèle en courant total.*

Nous allons dans ce paragraphe présenter un modèle où le courant total  $I$  circulant dans l'inducteur est la donnée du problème. On peut établir une relation très simple entre le courant total et le champ magnétique dans lequel sont plongés les corps conducteurs. Considérons un inducteur composé de plusieurs spires de largeur  $\delta$  (fig. 3). En supposant que le champ magnétique est parallèle à l'axe  $Ox_3$ , on montre en utilisant la loi d'Ampère que le champ  $H_0$  dans le domaine  $\Omega'$  est donné par la relation:

$$H_0 = I \delta.$$

La fonction  $H_0$  est une fonction de  $t$  uniquement. La continuité de  $H$  à travers le bord implique:

$$H|_{\Gamma_i} = H_0, \quad 1 \leq i \leq p.$$

Soit  $T > 0$ . Les équations décrivant le processus de chauffage par induction sont:

$$\begin{cases} \frac{\partial(\mu H)}{\partial t} - \nabla \cdot (\rho \nabla H) = 0, & \text{dans } \Omega_i, \quad 1 \leq i \leq p, \quad \forall t \in ]0, T[, \\ H = H_0, & \text{sur } \Gamma_i, \quad 1 \leq i \leq p, \quad \forall t \in ]0, T[, \\ H(0, \cdot) = \tilde{H}_0 & \text{dans } \Omega_i, \quad 1 \leq i \leq p. \end{cases} \quad (2.18)$$

### 3) Modélisation de la thermique.

Nous présentons maintenant les équations régissant la température des corps chauffés. Dans cette section, nous supposons que le champ magnétique est une fonction donnée suffisamment régulière. Le problème thermique consiste à étudier l'influence des courants de Foucault induits par le champ magnétique sur la température. Deux mécanismes physiques entrent en jeu. Tout d'abord, les courants induits dissipent de l'énergie sous forme de chaleur par effet Joule et entraînent une élévation de la température dans la pièce. D'autre part, dans les matériaux ferromagnétiques, la magnétisation du corps entraîne la création d'un champs magnétique résiduel qui tend à s'opposer au champ magnétique. Il en résulte un phénomène d'hystérèse caractérisé par une dissipation d'énergie sous forme de chaleur. Nous négligeons cet apport énergétique car il se révèle dans la pratique très inférieur à l'apport de chaleur dû aux courants de Foucault. La puissance par unité de volume dissipée par effet Joule est donnée par la relation suivante:

$$P_{Joule} = \rho |\mathbf{J}|^2 \stackrel{\text{def}}{=} \rho |\mathbf{rot} H|^2 = \rho |\nabla H|^2.$$

L'équation de la chaleur s'écrit:

$$C_p \frac{\partial \theta}{\partial t} - \nabla \cdot (\lambda \nabla \theta) = \rho |\nabla H|^2,$$

où  $C_p$  est la capacité calorifique par unité de volume et  $\lambda$  la conductivité thermique. Ces deux fonctions dépendent de la température  $\theta$ . Dans la pratique, les inducteurs sont refroidis par de l'eau. Leur température est ainsi maintenue constante. En conséquence, la résolution de cette équation s'avère nécessaire uniquement dans chacun des induits.

La dissipation thermique au bord est due essentiellement au rayonnement. Dans le cas d'une pièce de forme convexe, cette perte est donnée par la relation:

$$\lambda \frac{\partial \theta}{\partial n} + \alpha \theta^4 = 0,$$

où  $\alpha$  est le coefficient de rayonnement défini par le produit de la constante de Stefan-Boltzmann par l'émissivité.

Nous obtenons finalement la formulation variationnelle suivante pour  $i = 1, \dots, p$ :

$$\begin{aligned} & \text{Trouver } \theta : ]0, T[ \mapsto C_I^1(\bar{\Omega}_i) \text{ tel que:} \\ & \int_{\Omega_i} C_p \frac{\partial \theta}{\partial t} \psi \, dx + \int_{\Omega_i} \lambda \nabla \theta \cdot \nabla \psi \, dx \\ & \quad + \int_{\Gamma_i} \alpha \theta^4 \psi \, ds = \int_{\Omega_i} \rho |\nabla H|^2 \psi \, dx, \quad \forall \psi \in C_I^1(\bar{\Omega}_i), \\ & \theta(0, \cdot) = \theta_0, \end{aligned}$$

où  $\theta_0$  est la température initiale.

#### 4) Deux modèles de chauffage par induction.

Nous présentons maintenant deux modèles complets simulant le chauffage par induction. Le premier est appelé "modèle en tension". Le problème prend en compte la tension aux bornes de l'inducteur. Cette formulation est intéressante sur un plan pratique; en effet on maîtrise plus facilement et plus précisément la tension que le courant. Nous présentons ce modèle sous une forme variationnelle nous permettant par la suite d'utiliser des méthodes numériques.

Le deuxième modèle, appelé "modèle en courant", est mathématiquement plus simple à étudier. Le champ magnétique à l'extérieur des pièces est connu grâce à la loi d'Ampère. On ne prend plus en compte les phénomènes d'interactions entre les pièces métalliques, puisque le courant qui résulte des multiples influences entre l'inducteur et l'induit est connu. Cette formulation est écrite sous la forme d'un couplage de deux équations paraboliques et fera l'objet dans les chapitres suivants d'une étude mathématique approfondie.

On note par  $W$  la réunion des espaces  $C_I^1(\bar{\Omega}_i)$ ,  $1 \leq i \leq p$ . Le modèle en tension s'énonce de la manière suivante:

Soit  $T > 0$ , trouver  $(H, \theta) : ]0, T[ \mapsto V \times W$  tel que

$$\begin{cases} \int_{\Lambda} \frac{\partial}{\partial t} (\mu H) \phi \, dx + \int_{\Omega} \rho \nabla H \cdot \nabla \phi \, dx = v \phi|_{\Omega'}, & \forall \phi \in V, \quad t \in ]0, T[, \\ H(., 0) = \tilde{H}_0, \end{cases} \quad (4.1)$$

$$\begin{cases} \int_{\Omega_i} C_p \frac{\partial \theta}{\partial t} \psi \, dx + \int_{\Omega_i} \lambda \nabla \theta \cdot \nabla \psi \, dx + \int_{\Gamma_i} \alpha \theta^4 \psi \, ds \\ \quad = \int_{\Omega_i} \rho |\nabla H|^2 \psi \, dx, & \forall \psi \in C_I^1(\bar{\Omega}_i), \quad t \in ]0, T[, \\ \theta(0, .) = \theta_0. \end{cases} \quad (4.2)$$

Le modèle en courant s'énonce de la manière suivante:

Soit  $T > 0$ , trouver  $(H, \theta) : ]0, T[ \mapsto V \times W$  tel que

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} (\mu H) - \nabla \cdot (\rho \nabla H) = 0, & \text{dans } ]0, T[ \times \Omega, \\ H = H_0, & \text{sur } ]0, T[ \times \partial \Omega, \\ H(0, .) = \tilde{H}_0 & \text{dans } \Omega. \end{cases} \quad (4.3)$$

$$\begin{cases} C_p \frac{\partial \theta}{\partial t} - \nabla \cdot (\lambda \nabla \theta) = \rho |\nabla H|^2, & \text{dans } ]0, T[ \times \Omega_i, \quad 1 \leq i \leq p, \\ \lambda \frac{\partial \theta}{\partial n} = \alpha \theta^4, & \text{sur } ]0, T[ \times \Gamma_i, \quad 1 \leq i \leq p, \\ \theta(0, .) = \theta_0, & \text{dans } \Omega_i, \quad 1 \leq i \leq p. \end{cases} \quad (4.4)$$



#### Remarque 4.1.

Le système d'équation que nous obtenons décrit l'évolution d'un système au cours du temps. Nous présenterons dans le chapitre V un problème stationnaire déduit de ce modèle en supposant que les tensions utilisées sont sinusoïdales. On utilisera une formulation du problème en variables complexes. On obtiendra ainsi un problème couplé indépendant de la variable de temps.

#### 5) Un modèle monodimensionnel.

Nous présentons dans ce dernier paragraphe un modèle mathématique de chauffage par induction simplifié issu du modèle en tension développé précédemment. Nous supposons que la géométrie du système inducteur-induit a une symétrie de révolution. L'inducteur et l'induit se présentent donc sous la forme d'anneaux. Soient  $R_1$  et  $R_2$  les rayons intérieur et extérieur de l'induit et  $R_3$  et  $R_4$  ceux de l'inducteur de telle manière que  $0 \leq R_1 < R_2 < R_3 < R_4$ . Nous supposons aussi que les conditions initiales de notre problème respectent cette symétrie. Ces hypothèses conduisent à formuler le problème en coordonnées polaires. L'invariance par rotation permet une formulation dépendant uniquement du rayon  $r$ . On notera par  $\Omega_1$  l'ouvert  $]R_1, R_2[$  et par  $\Omega_0$  l'ouvert  $]R_3, R_4[$ . La réunion de ces deux ouverts est notée par  $\Omega$  et on désignera par  $\Lambda$  le domaine  $]0, R_4[$ .

Soient  $X$  et  $Y$  des espaces de fonctions à valeurs réelles définies sur  $\Lambda$  et  $\Omega_1$  respectivement que nous caractériserons par la suite et  $T > 0$ , nous nous intéressons aux solutions du problème suivant. Trouver  $(H, \theta) \in L^2(0, T; X) \times L^2(0, T; Y)$  tel que:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Lambda} \mu H \phi r dr + \int_{\Omega} \rho \frac{\partial H}{\partial r} \frac{\partial \phi}{\partial r} r dr = \frac{v}{2\pi} \phi(R_3) \quad \forall \phi \in X, \quad (5.1)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_1} C_p \frac{\partial \theta}{\partial t} \psi r dr + \int_{\Omega_1} \lambda \frac{\partial \theta}{\partial r} \frac{\partial \psi}{\partial r} r dr + \alpha \theta(t, R_2)^4 \psi(R_2) R_2 \\ = \int_{\Omega_1} \rho \left| \frac{\partial H}{\partial r} \right|^2 \psi r dr \quad \forall \psi \in Y, \end{aligned} \quad (5.2)$$

$$\theta(0, \cdot) = \theta_0, \quad H(0, \cdot) = H_0,$$

La fonction  $v$  représente la tension fournie par le générateur. Les conditions initiales  $H_0$  et  $\theta_0$  sont deux fonctions connues de  $X$ . Les fonctions  $\rho$ ,  $C_p$ , et  $\lambda$  dépendent de  $\theta$ . La fonction  $\mu$  dépend à la fois de  $\theta$  et de  $H$ .

Ce modèle simplifié nous permettra de mettre en œuvre des techniques numériques spécifiques au chauffage par induction. En particulier, l'étude de l'influence du champ magnétique sur la perméabilité  $\mu$  sera faite avec ce modèle. De plus, ce modèle nous permet de construire des solutions analytiques et ainsi de comparer les résultats numériques avec la solution exacte. Les schémas numériques de ce modèle monodimensionnel sont très simples à mettre en œuvre. Les codes de calcul fondés sur ces schémas s'avèrent très efficaces et rapides pour des géométries très simples. Cette performance est utile pour une utilisation industrielle.



## CHAPITRE II

### LE PROBLÈME ÉVOLUTIF

#### Résumé

Nous montrons dans ce chapitre l'existence d'une solution pour un système d'équations paraboliques non linéaires couplées issu du problème de chauffage par induction. La présence du terme quadratique dû à l'effet Joule nécessite la construction d'outils spécifiques pour établir l'existence d'une solution.

## Introduction.

Nous nous intéressons à une classe de systèmes paraboliques non linéaires issue des problèmes de chauffage par induction électromagnétique. Nous étudions le couplage entre les équations de Maxwell et l'équation de la chaleur résultant de la dépendance en température des propriétés physiques des matériaux et de l'effet Joule généré par le champ induit. Une modélisation mathématique du chauffage par induction dans un cadre bidimensionnel a été faite dans le chapitre précédent. Le système d'équations que nous allons étudier est tiré de ce modèle.

On note par  $\Omega$  un domaine borné de  $\mathbb{R}^2$  de frontière  $\partial\Omega$  et par  $H, \theta$  des fonctions à valeurs réelles représentant respectivement le champ magnétique et la température dans  $\Omega$ . Nous supposons que le champ magnétique  $H_0$  dans le vide est connu. Le modèle présenté dans le chapitre I montre que le champ dans le vide est indépendant des variables d'espace. Les équations décrivant le processus de chauffage par induction sont données par:

$$\begin{cases} \mu \frac{\partial H}{\partial t} - \nabla \cdot (\rho(\theta) \nabla H) = 0, & \text{dans } ]0, T[ \times \Omega, \\ H(0, \cdot) = 0, & \text{dans } \Omega, \\ H = H_0, & \text{sur } ]0, T[ \times \partial\Omega, \end{cases} \quad (0.1)$$

$$\begin{cases} C_p(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial t} - \nabla \cdot (\lambda(\theta) \nabla \theta) = \rho(\theta) |\nabla H|^2, & \text{dans } ]0, T[ \times \Omega, \\ \frac{\partial \theta}{\partial n} = 0, & \text{sur } ]0, T[ \times \partial\Omega, \\ \theta(0, \cdot) = \theta_0, & \text{dans } \Omega, \end{cases} \quad (0.2)$$

où les fonctions  $C_p, \rho, \lambda$  représentent respectivement la capacité calorifique par unité de volume, la résistivité électrique et la conductivité thermique. Les fonctions  $\rho(\theta)$  et  $\lambda(\theta)$  désignent la composition des fonctions  $\rho$  et  $\lambda$  avec la fonction  $\theta$ . Dans cette étude, nous supposons que la perméabilité magnétique  $\mu$  est une constante strictement positive. Nous ne traitons pas le cas des matériaux ferromagnétiques.

La fonction  $\theta_0$  représente la température initiale du conducteur. La continuité du champ magnétique sur le bord de  $\Omega$  nous donne la condition  $H = H_0$  sur  $\partial\Omega$ . Nous supposons en outre qu'il n'y a pas de transfert de chaleur avec l'extérieur (rayonnement ou convection par exemple). On exprime cette hypothèse par une condition de Neumann homogène sur le bord. Le but de ce travail est de montrer l'existence d'une solution  $(H, \theta): (0, T) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$  du problème (0.1)-(0.2).

La non-linéarité introduite par le terme quadratique  $|\nabla H|^2$  ne nous permet pas d'étudier les équations (0.1)-(0.2) dans le cadre classique variationnel. Par contre, le cadre fonctionnel des espaces de Banach du type  $L^p$  avec  $p \neq 2$  s'avère satisfaisant. Dans une première section, nous allons réécrire le problème (0.1)-(0.2) sous la forme de deux équations de type parabolique de forme divergentielle. Nous rappelons dans une deuxième section un

certain nombre de résultats liés à une classe de problèmes paraboliques linéaires dans les espaces de Banach  $L^p$ . Nous nous appuyerons essentiellement sur des résultats dûs à Meyers [BLP] et Boccardo-Gallouët [BOGA]. Nous introduisons la notion de Solution Obtenue comme Limite d'Approximations (SOLA) due à A. Dall'Aglio [DA]. Nous établissons un résultat d'existence et d'unicité sur une classe de problèmes paraboliques linéaires avec une condition de Neumann homogène et un second membre dans  $L^1$ .

Dans une troisième section, nous allons introduire, grâce à un procédé de retard temporel sur les coefficients, une suite de problèmes linéaires  $\mathcal{P}_n$  dérivant du problème initial. Nous décrivons d'abord la technique du retard temporel, puis nous prouvons l'existence et l'unicité d'une solution pour chaque problème linéaire  $\mathcal{P}_n$ . Nous obtenons ensuite des estimations de ces solutions et nous établissons la convergence d'une sous-suite  $(H_n, \theta_n)_n$  vers un couple de fonctions  $(H, \theta)$  dans l'espace  $L^p(]0, T[ \times \Omega) \times L^{p/2}(]0, T[ \times \Omega)$  pour un  $p > 2$ .

En utilisant les résultats établis dans la troisième section, nous prouvons dans une quatrième section que le couple  $(H, \theta)$  vérifie dans un sens faible l'équation (0.1). Nous montrons alors la convergence forte de la suite  $(H_n)_n$  vers la fonction  $H$  dans l'espace  $L^2(0, T; W_0^{1,2}(\Omega))$ . Cette convergence nous permet ensuite de prouver que le couple  $(H, \theta)$  vérifie dans un sens faible l'équation (0.2).

### 1) Notations.

Nous allons maintenant introduire les espaces fonctionnels que nous utiliserons dans toute la suite de ce travail. D'une façon générale,  $\Omega$  est un ouvert borné de  $\mathbb{R}^2$  et  $T$  est un réel strictement positif; on note par  $Q_T$  l'ouvert  $]0, T[ \times \Omega$ . Soit  $p \in [1, \infty[$ , on définit les espaces suivants:

$$\begin{aligned} \mathcal{W}^{1,p} &\stackrel{\text{def}}{=} \left\{ u \in L^p(0, T; W^{1,p}(\Omega)); \quad \frac{\partial u}{\partial t} \in L^p(0, T; W^{-1,p}(\Omega)) \right\}, \\ \mathcal{W}_0^{1,p} &\stackrel{\text{def}}{=} \left\{ u \in L^p(0, T; W_0^{1,p}(\Omega)); \quad \frac{\partial u}{\partial t} \in L^p(0, T; W^{-1,p}(\Omega)) \right\}. \end{aligned}$$

Ces espaces sont des espaces de Banach [LIONS] p. 57 lorsqu'on les munit respectivement des normes:

$$\begin{aligned} \|u\|_{\mathcal{W}^{1,p}} &\stackrel{\text{def}}{=} \left( \|u\|_{L^p(0,T;W^{1,p}(\Omega))}^p + \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|_{L^p(0,T;W^{-1,p}(\Omega))}^p \right)^{1/p}, \\ \|u\|_{\mathcal{W}_0^{1,p}} &\stackrel{\text{def}}{=} \left( \|u\|_{L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))}^p + \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|_{L^p(0,T;W^{-1,p}(\Omega))}^p \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

On précisera, si c'est nécessaire, l'intervalle de temps  $]a, b[$  auquel on fait référence en utilisant la notation  $\mathcal{W}^{1,p}(a, b)$ . On notera par  $C([0, T]; E)$  l'espace de Banach des applications continues de  $[0, T]$  à valeurs dans l'espace de Banach  $E$ . Enfin, pour tout réel  $p \geq 1$ , on désigne par  $p'$  le conjugué de  $p$ :  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ , avec  $p' = \infty$  si  $p = 1$ .

## 2) Hypothèses de travail.

Soit  $\Omega$  un ouvert borné (domaine correspondant au conducteur) et  $T > 0$ . Les équations régissant l'évolution de la température et du champ magnétique sont données par (0.1)-(0.2). D'après le paragraphe I.2, la fonction  $H_0$  définie sur le bord  $\partial\Omega$  ne dépend pas des variables d'espaces. Elle peut être identifiée à une fonction définie sur  $[0, T]$  à valeurs réelles. Dans toute la suite, nous ferons les hypothèses suivantes:

$$H_0 \in C^1([0, T]), \quad H_0(0) = 0, \quad (2.1)$$

$$\rho, C_p, \lambda \in C^1(\mathbb{R}) \text{ et } \mu > 0, \quad (2.2)$$

$$\text{il existe } \tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \text{ tels que } 0 < \tilde{\alpha} \leq \rho(s), C_p(s), \lambda(s) \leq \tilde{\beta} < \infty, \quad \forall s \in \mathbb{R}, \quad (2.3)$$

$$\theta_0 \in C^1(\bar{\Omega}), \quad (2.4)$$

$$\partial\Omega \text{ est de classe } C^2. \quad (2.5)$$

Nous allons transformer ce problème en un système de deux équations paraboliques de forme divergentielle en considérant les changements de variable suivants:

$$U = \gamma(\theta) = \int_0^\theta C_p(s) ds, \quad (\text{Transformation de Kirchhoff})$$

$$\tilde{H} = H - H_0.$$

Comme  $C_p$  est une fonction qui vérifie (2.2)-(2.3), la transformation définie par  $\gamma : \theta \mapsto U$  est une bijection conservant la régularité des fonctions de type  $L^p(0, T; W^{1,p}(\Omega))$  pour  $p \geq 1$ . Notons de plus:

$$r(U) = \rho(\gamma^{-1}(U)),$$

$$k(U) = \frac{\lambda(\gamma^{-1}(U))}{C_p(\gamma^{-1}(U))}.$$

Les relations (0.1) et (0.2) deviennent:

$$\begin{cases} \mu \frac{\partial \tilde{H}}{\partial t} - \nabla \cdot (r(U) \nabla \tilde{H}) = \mu H_0', & \text{dans } ]0, T[ \times \Omega, \\ \tilde{H}(0, \cdot) = 0, & \text{dans } \Omega, \\ \tilde{H} = 0, & \text{sur } ]0, T[ \times \partial\Omega, \end{cases} \quad (2.6)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} - \nabla \cdot (k(U) \nabla U) = r(U) |\nabla \tilde{H}|^2, & \text{dans } ]0, T[ \times \Omega, \\ \frac{\partial U}{\partial n} = 0, & \text{sur } ]0, T[ \times \partial\Omega, \\ U(0, \cdot) = U_0 \stackrel{\text{def}}{=} \gamma(\theta_0), & \text{dans } \Omega. \end{cases} \quad (2.7)$$

Les fonctions  $r$  et  $k$  sont encore des fonctions de  $C^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$  et satisfont la condition:

$$\text{Il existe } \alpha, \beta \text{ tels que } 0 < \alpha \leq r(s), k(s) \leq \beta < \infty, \quad \forall s \in \mathbb{R}. \quad (2.8)$$

L'existence d'une solution faible de ce nouveau problème implique l'existence d'une solution faible au problème (0.1)-(0.2). Dans toute la suite, nous utiliserons la notation  $H$  au lieu de  $\tilde{H}$  et nous poserons  $f(t) = \mu H'_0(t)$  pour simplifier les notations.

### 3) Un problème parabolique linéaire avec second membre $L^1$ .

Soit  $a$  une fonction définie sur  $Q_T$  à valeurs réelles. On suppose qu'il existe  $\alpha$  et  $\beta$  tels que:

$$0 < \alpha \leq a(t, x) \leq \beta < \infty, \quad \forall (t, x) \in Q_T.$$

On note par  $L$  l'opérateur linéaire:

$$Lu \stackrel{\text{def}}{=} -\nabla \cdot (a \nabla u).$$

On se donne une fonction  $g \in L^1(Q_T)$  et une fonction  $v^0 \in L^1(\Omega)$ . Le problème consiste à déterminer une fonction  $u : ]0, T[ \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  telle que :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + Lu = g, & \text{dans } ]0, T[ \times \Omega, \\ u(0, \cdot) = v^0, & \text{dans } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0, & \text{sur } ]0, T[ \times \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.1)$$

La condition de Neumann homogène sur le bord du problème (3.1) caractérise toute fonction  $w \in W^{1,r}(\Omega)$ ,  $r \in [1, \infty[$  satisfaisant la condition:

$$\int_{\Omega} \Delta w \phi \, dx = \int_{\Omega} \nabla w \nabla \phi \, dx, \quad \forall \phi \in C^1(\bar{\Omega}).$$

On sait établir l'existence d'une solution à un problème similaire au problème (3.1) en remplaçant la condition de Neumann par une condition de Dirichlet [BOGA]. Nous montrerons un résultat identique dans le cas d'une condition de Neumann homogène. La démonstration s'appuie sur des estimations obtenues dans [BOGA]. Nous obtiendrons un résultat d'unicité en utilisant la notion de Solution Obtenue comme Limite d'Approximations. Nous allons dès maintenant introduire cette notion.

#### Définition 3.1.

Soit  $f$  et  $u^0$  des fonctions de  $L^1(Q_T)$  et  $L^1(\Omega)$  respectivement. Considérons deux suites de fonctions  $(f_n)_n$  et  $(u_n^0)_n$  de  $C_0^\infty(Q_T)$  et  $C_0^\infty(\Omega)$  respectivement. On suppose que la suite  $(f_n)_n$  converge vers  $f$  dans  $L^1(Q_T)$  et que la suite  $(u_n^0)_n$  converge vers  $u^0$  dans  $L^1(\Omega)$ . On note par  $u_n$  la solution du problème (3.1) obtenue avec  $g = f_n$  comme second

membre et  $v^0 = u_n^0$  comme condition initiale. On appellera Solution Obtenue par Limite d'Approximations du problème (3.1) toute fonction  $u$  obtenue par les passages à la limite:

$$\begin{aligned} u_n &\rightarrow u && \text{dans } C([0, T]; L^1(\Omega)), \\ \nabla u_n &\rightharpoonup \nabla u && \text{dans } (L^1(Q_T))^2 \text{ faible.} \end{aligned}$$

Pour simplifier, on écrira que  $u$  est une SOLA du problème (3.1).

**Remarque 3.1.**

On peut définir de la même manière la notion de SOLA pour un problème de Dirichlet avec une condition homogène sur le bord.

**Remarque 3.2.**

La convergence de la suite  $(u_n)_n$  dans  $C([0, T], L^1(\Omega))$  permet de donner un sens à la condition initiale. On pourrait donner un sens plus général à cette condition initiale en l'introduisant sous une forme faible en utilisant une formulation variationnelle du problème.

**Remarque 3.3.**

L'introduction de la SOLA a pour but d'obtenir un résultat d'unicité pour le problème (3.1). On peut montrer [STAM] qu'un problème linéaire de type parabolique peut avoir plusieurs solutions si celles-ci sont peu régulières. Par contre, nous allons prouver que parmi toutes ces solutions il n'y a qu'une seule SOLA.

Nous allons maintenant énoncer le résultat principal de cette section.

**Théorème 3.1.**

Soient  $f \in L^1(Q_T)$  et  $u^0 \in L^1(\Omega)$ . Alors, il existe une unique SOLA  $u$  du problème (3.1). De plus, l'application  $(f, u^0) \mapsto u$  est linéaire. En outre, soit  $B > 0$  tel que:

$$\|f\|_{L^1(Q_T)} \leq B, \quad \|u^0\|_{L^1(\Omega)} \leq B.$$

On a l'estimation suivante:

$$\|u\|_{L^q(0, T; W^{1, q}(\Omega))} \leq C_q(B), \quad \forall q \in [1, 4/3], \quad (3.2)$$

où  $C_q(B)$  ne dépend que de  $q$  et de  $B$ .

**Remarque 3.4.**

On peut étendre ce théorème à des dimensions d'espace supérieures à deux. La borne supérieure de  $q$  (ici  $4/3$ ) dépendra de la dimension de l'espace considéré.

*Preuve.*

L'essentiel de cette démonstration est directement inspiré de l'article de Boccardo et Gallouët [BOGA]. Commençons par établir l'unicité d'une telle solution. Soient  $f$  un



élément de  $L^1(Q_T)$  et  $u^0$  une fonction de  $L^1(\Omega)$  et soient  $u$  et  $v$  deux SOLA du problème (3.1), nous allons montrer que  $u = v$  presque partout.

Une deuxième méthode pour montrer l'unicité consiste à considérer la fonction  $f = 0$  et de prouver que si  $u$  est une solution au sens de la définition 3.1 alors  $u = 0$ . La linéarité du problème permet alors de conclure. Néanmoins nous utiliserons la première méthode car elle débouche sur une estimation utile pour établir la preuve de l'existence.

Puisque  $u$  et  $v$  sont deux SOLA du problème (3.1), on peut leur associer respectivement deux suites  $(f_n)_n$  et  $(g_n)_n$  de  $C_0^\infty(Q_T)$  convergeant vers  $f$  dans  $L^1(Q_T)$  et deux suites  $(u_n^0)_n$  et  $(v_n^0)_n$  de  $C_0^\infty(\Omega)$  convergeant vers  $u^0$  dans  $L^1(\Omega)$ . Pour tout  $n$ , la fonction  $u_n$  est la solution du problème de Neumann suivant:

$$\begin{cases} \frac{\partial u_n}{\partial t} + Lu_n = f_n, & \text{dans } ]0, T[ \times \Omega, \\ u_n(0, \cdot) = u_n^0, & \text{dans } \Omega, \\ \frac{\partial u_n}{\partial n} = 0, & \text{sur } ]0, T[ \times \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.3)$$

En utilisant le théorème de J.L. Lions [BRE] p. 218, on montre que ce problème admet une unique solution dans  $\mathcal{W}^{1,2}$ . De même, pour tout  $n$ , la fonction  $v_n$  est la solution du problème (3.3) avec  $g_n$  comme second membre et  $v_n^0$  comme condition initiale. Les fonctions  $u_n$  et  $v_n$  sont des éléments de  $\mathcal{W}^{1,2}$ . En particulier  $u_n$  et  $v_n$  appartiennent à  $C([0, T]; L^2(\Omega))$  (cf. [BRE]). On a alors par définition de la SOLA:

$$\begin{aligned} u_n &\rightarrow u, && \text{dans } C([0, T]; L^1(\Omega)), \\ \nabla u_n &\rightharpoonup \nabla u && \text{dans } (L^1(Q_T))^2 \text{ faible}, \\ v_n &\rightarrow v && \text{dans } C([0, T]; L^1(\Omega)), \\ \nabla v_n &\rightharpoonup \nabla v && \text{dans } (L^1(Q_T))^2 \text{ faible}. \end{aligned}$$

On définit maintenant la fonction  $\psi$  par:

$$\psi(s) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} -1 & \text{sur } ]-\infty, -1], \\ s & \text{sur } ]-1, 1[, \\ 1 & \text{sur } [1, \infty[, \end{cases}$$

et la fonction  $\Phi$  par

$$\Phi(z) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^z \psi(s) ds.$$

On a  $\Phi(z) = \frac{1}{2}z^2$  sur  $]-1, 1[$  et  $\Phi(z) = |z| - \frac{1}{2}$  pour  $|z| > 1$ . On en déduit que  $\frac{1}{2}|z| \leq \Phi(z)$  pour  $|z| > 1$  et que  $\Phi(z) \leq |z|$  pour tout  $z$ . On note de plus, pour  $t > 0$ , la fonction caractéristique de l'intervalle  $[0, t]$  par  $\chi_{[0, t]}$ .

Soient  $u_n$  et  $v_m$  deux éléments des suites  $(u_k)_k$  et  $(v_k)_k$ . Ces deux fonctions satisfont le système suivant:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}(u_n - v_m) + L(u_n - v_m) = f_n - g_m, & \text{dans } ]0, T[ \times \Omega, \\ u_n(0, \cdot) - v_m(0, \cdot) = u_n^0 - v_m^0, & \text{dans } \Omega, \\ \frac{\partial u_n}{\partial n} - \frac{\partial v_m}{\partial n} = 0, & \text{sur } ]0, T[ \times \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.4)$$

On fixe  $t \in ]0, T]$ . En multipliant la première ligne du système (3.4) par la fonction  $\psi(u_n - v_m)\chi_{[0, t]}$ , on obtient par intégration sur  $Q_T$ :

$$\begin{aligned} & \int_{Q_T} \frac{\partial}{\partial t}(u_n - v_m)\psi(u_n - v_m)\chi_{[0, t]} dx dt - \\ & \int_{Q_T} \nabla \cdot (a \nabla(u_n - v_m))\psi(u_n - v_m)\chi_{[0, t]} dx dt = \\ & \int_{Q_T} (f_n - g_m)\psi(u_n - v_m)\chi_{[0, t]} dx dt. \end{aligned}$$

En notant que

$$\frac{\partial}{\partial t}(u_n - v_m)\psi(u_n - v_m) = \frac{\partial}{\partial t}\Phi(u_n - v_m),$$

on peut écrire:

$$\begin{aligned} \int_{Q_T} \frac{\partial}{\partial t}(u_n - v_m)\psi(u_n - v_m)\chi_{[0, t]} dx dt &= \int_{\Omega} \Phi(u_n(t) - v_m(t)) dx \\ &- \int_{\Omega} \Phi(u_n(0) - v_m(0)) dx. \end{aligned}$$

Notons par  $B = \{(s, x) \in ]0, t[ \times \Omega; |u_n(s, x) - v_m(s, x)| \leq 1\}$ . Sur le domaine  $(]0, t[ \times \Omega) \setminus B$ , la fonction  $\psi(u_n - v_m)$  est constante. Sa dérivée est donc nulle. On peut alors écrire en utilisant la formule de Green (puisque  $\frac{\partial}{\partial n}(u_n - v_m) = 0$  sur  $\partial\Omega$ ):

$$\begin{aligned} \int_{Q_T} L(u_n - v_m)\psi(u_n - v_m)\chi_{[0, t]} dx dt &= \int_{Q_i} a\psi'(u_n - v_m)|\nabla(u_n - v_m)|^2 dx dt, \\ &= \int_B a|\nabla(u_n - v_m)|^2 dx dt, \\ &\geq \alpha \int_B |\nabla(u_n - v_m)|^2 dx dt. \end{aligned}$$

Comme  $|\psi| \leq 1$ , on peut majorer le second membre de la manière suivante:

$$\int_{Q_T} (f_n - g_m)\psi(u_n - v_m)\chi_{[0, t]} dx dt \leq \int_{Q_T} |f_n - g_m| dx dt.$$

De ces estimations, on déduit l'inégalité suivante:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \Phi(u_n(t) - v_m(t)) dx + \alpha \int_B |\nabla(u_n - v_m)|^2 dx dt \\ \leq \int_{Q_T} |f_n - g_m| dx dt + \int_{\Omega} \Phi(u_n^0 - v_m^0) dx. \end{aligned}$$

Donc,

$$\int_{\Omega} \Phi(u_n(t) - v_m(t)) dx \leq \int_{Q_T} |f_n - g_m| dx dt + \int_{\Omega} \Phi(u_n^0 - v_m^0) dx.$$

En utilisant l'inégalité  $\Phi(s) \leq |s|$ , on majore  $\Phi(u_n^0 - v_m^0)$  par  $|u_n^0 - v_m^0|$ . On pose maintenant:

$$2A_{n,m} = \int_{Q_T} |f_n - g_m| dx dt + \int_{\Omega} |u_n^0 - v_m^0| dx.$$

L'inégalité précédente s'écrit:

$$\int_{\Omega} \Phi(u_n(t) - v_m(t)) dx \leq \frac{1}{2} A_{n,m}. \quad (3.5)$$

Puisque  $(f_n)_n, (g_n)_n$  convergent vers  $f$  dans  $L^1(Q_T)$  et  $(u_n^0)_n$  et  $(v_n^0)_n$  convergent vers  $u^0$  dans  $L^1(\Omega)$  alors la suite  $A_{n,m}$  tend vers 0 quand  $n$  et  $m$  tendent vers l'infini.

Considérons les deux sous-domaines de  $\Omega$  suivants:

$$\begin{aligned} \Omega_1(t, n, m) &= \{x \in \Omega; |u_n(t, x) - v_m(t, x)| \leq 1\}, \\ \Omega_2(t, n, m) &= \{x \in \Omega; |u_n(t, x) - v_m(t, x)| > 1\}. \end{aligned}$$

Ces deux ensembles sont bien définis à un ensemble de mesure nulle près car  $u_n(t), v_m(t) \in L^2(\Omega)$  pour tout  $t$  puisque  $u_n$  et  $v_m$  sont des éléments de  $C([0, T]; L^2(\Omega))$ .

Sur le domaine  $\Omega_1(t, n, m)$ , on a  $\Phi(u_n(t) - v_m(t)) = \frac{1}{2}(u_n(t) - v_m(t))^2$ . Sur le domaine  $\Omega_2(t, n, m)$ ,  $\Phi(u_n(t) - v_m(t)) \geq \frac{1}{2}|u_n(t) - v_m(t)|$ . De l'inégalité (3.5) on tire:

$$\int_{\Omega_1(t, n, m)} |u_n(t) - v_m(t)|^2 dx + \int_{\Omega_2(t, n, m)} |u_n(t) - v_m(t)| dx \leq A_{n,m}.$$

Comme  $A_{n,m}$  tend vers 0 quand  $n$  et  $m$  tendent vers l'infini, il existe  $N_0$  tel que si  $n > N_0$  et  $m > N_0$  alors  $A_{n,m} \leq 1$ ; en particulier  $\int_{\Omega_2(t, n, m)} |u_n(t) - v_m(t)| dx \leq 1$ . Dans ce cas, on peut écrire:

$$\left( \int_{\Omega_2(t, n, m)} |u_n(t) - v_m(t)| dx \right)^2 \leq \int_{\Omega_2(t, n, m)} |u_n(t) - v_m(t)| dx.$$

D'autre part, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient:

$$\left( \int_{\Omega_1(t,n,m)} |u_n(t) - v_m(t)| dx \right)^2 \leq |\Omega_1(t,n,m)| \int_{\Omega_1(t,n,m)} |u_n(t) - v_m(t)|^2 dx,$$

où  $|\cdot|$  désigne la mesure de Lebesgue. Des deux inégalités précédentes, on tire l'estimation:

$$\min\left(1, \frac{1}{|\Omega_1(t,n,m)|}\right) \left[ \left( \int_{\Omega_1(t,n,m)} |u_n(t) - v_m(t)| dx \right)^2 + \left( \int_{\Omega_2(t,n,m)} |u_n(t) - v_m(t)| dx \right)^2 \right] \leq A_{n,m}.$$

En utilisant la relation  $(a+b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$  et en remarquant que  $|\Omega_1(t,n,m)| \leq |\Omega|$ , on trouve:

$$C \left( \int_{\Omega} |u_n(t) - v_m(t)| dx \right)^2 \leq A_{n,m}, \quad (3.6)$$

où  $C$  est une constante strictement positive indépendante de  $t$ , de  $n$  et de  $m$  pour  $n > N_0$  et  $m > N_0$ . De cette dernière inégalité, on déduit par passage à la limite que  $u(t) = v(t)$  presque partout sur  $\Omega$ , pour tout  $t \in ]0, T]$ . D'où l'unicité.

Montrons l'existence d'une telle SOLA. Nous allons utiliser des estimations très similaires à celles obtenues dans [BOGA]. On se donne  $B > 0$  et  $f \in L^1(Q_T)$ ,  $u_0 \in L^1(\Omega)$  tels que:

$$\|f\|_{L^1(Q_T)} \leq B, \quad \|u_0\|_{L^1(\Omega)} \leq B.$$

Par une technique classique de suites régularisantes [BRE], il existe une suite  $(f_n)_n$  de  $C_0^\infty(Q_T)$  convergeant vers  $f$  dans  $L^1(Q_T)$  et une suite  $(u_n^0)_n$  de  $C_0^\infty(\Omega)$  convergeant vers  $u^0$  dans  $L^1(\Omega)$ . On peut, en outre, construire ces suites de manière à ce qu'on ait:

$$\|f_n\|_{L^1(Q_T)} \leq 2B, \quad \|u_n^0\|_{L^1(\Omega)} \leq 2B.$$

Soit  $(u_n)_n$  la suite obtenue en résolvant (3.3). D'après la relation (3.6), en substituant  $v_m$  par  $u_m$ , et  $g_m$  par  $f_m$  dans  $A_{n,m}$ , on voit que la suite  $(u_n)_n$  est une suite de Cauchy dans  $C([0, T], L^1(\Omega))$ . On en déduit l'existence d'une fonction  $u$  telle que la suite  $(u_n)_n$  converge vers  $u$  dans  $C([0, T], L^1(\Omega))$ . Cette convergence implique que la suite  $(u_n)_n$  est bornée dans  $C([0, T], L^1(\Omega))$ . Il existe, par conséquent, une constante  $C_0$  telle que:

$$\|u_n\|_{L^\infty(0,T;L^1(\Omega))} \leq C_0, \quad \forall n. \quad (3.7)$$

Considérons maintenant les fonctions  $\psi_m$ ,  $m \in \mathbb{N}^*$  définies par:

$$\psi_m(s) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} -1 & \text{sur } ]-\infty, -m-1], \\ s+m & \text{sur } ]-m-1, -m], \\ 0 & \text{sur } ]-m, m[, \\ s-m & \text{sur } [m, m+1[, \\ 1 & \text{sur } [m+1, \infty[, \end{cases}$$

et par  $\Phi_m$  la fonction:

$$\Phi_m(z) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^z \psi_m(s) ds.$$

Notons que  $\Phi_m(z) \leq |z|$  pour tout  $z$ . Soit  $n$  un entier,  $n \leq N$ , on définit le sous-ensemble  $B_m(u_n)$  de  $Q_T$  par:

$$B_m(u_n) = \{(t, x) \in Q_T; \quad m \leq |u_n(t, x)| \leq m + 1\}.$$

Pour simplifier, on notera  $B_m$ . En effectuant le produit de la première équation du système (3.3) par la fonction  $\psi_m(u_n)$  et en intégrant sur le domaine  $Q_T$ , on obtient:

$$\int_{Q_T} \frac{\partial u_n}{\partial t} \psi_m(u_n) dx dt + \int_{Q_T} \psi_m(u_n) Lu_n dx dt = \int_{Q_T} f_n \psi_m(u_n) dx dt$$

On remarque que:

$$\frac{\partial u_n}{\partial t} \psi_m(u_n) = \frac{\partial}{\partial t} \Phi_m(u_n).$$

En intégrant sur  $Q_T$ , on obtient:

$$\int_{Q_T} \frac{\partial u_n}{\partial t} \psi_m(u_n) dx dt = \int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} \Phi_m(u_n) dx dt.$$

On déduit de cette dernière relation l'égalité suivante:

$$\int_{Q_T} \frac{\partial u_n}{\partial t} \psi_m(u_n) dx dt = \int_{\Omega} \Phi_m(u_n(T)) dx - \int_{\Omega} \Phi_m(u_n(0)) dx.$$

D'autre part, la fonction  $\psi'_m(u_n)$  est nulle dans  $Q_T \setminus B_m$ ; on a par conséquent puisque la dérivée normale de  $u_n$  sur  $\partial\Omega$  est nulle:

$$\begin{aligned} \int_{Q_T} \psi_m(u_n) Lu_n dx dt &= \int_{Q_T} \alpha \psi'_m(u_n) |\nabla u_n|^2 dx dt, \\ &\geq \alpha \int_{B_m} |\nabla u_n|^2 dx dt. \end{aligned}$$

Notons de plus que l'inégalité  $|\psi_m(u_n)| \leq 1$ , implique que

$$\int_{Q_T} f_n \psi_m(u_n) dx dt \leq \int_{Q_T} |f_n| dx dt.$$

On déduit des trois estimations précédentes l'inégalité:

$$\int_{\Omega} \Phi_m(u_n(T)) dx + \alpha \int_{B_m} |\nabla u_n|^2 dx dt \leq \int_{Q_T} |f_n| dx dt + \int_{\Omega} \Phi_m(u_n^0) dx.$$

En remarquant que  $\Phi_m(u_n(T))$  est une fonction positive et en majorant  $\Phi(u_n^0)$  par  $|u_n^0|$ , on obtient finalement:

$$\alpha \int_{B_m} |\nabla u_n|^2 dx dt \leq \int_{Q_T} |f_n| dx dt + \int_{\Omega} |u_n^0| dx.$$

Puisque les suites  $(f_n)_n$  et  $(u_n^0)_n$  sont bornées respectivement dans  $L^1(Q_T)$  et  $L^1(\Omega)$ , il existe une constante  $C_1$  telle que:

$$\int_{B_m} |\nabla u_n|^2 dx dt \leq C_1, \quad \forall m, n. \quad (3.8)$$

Soit maintenant  $q \in [1, 2[$ ; en utilisant l'inégalité de Hölder, on obtient:

$$\int_{B_m} |\nabla u_n|^q dx dt \leq \left( \int_{B_m} |\nabla u_n|^2 dx dt \right)^{q/2} |B_m|^{\frac{2-q}{2}},$$

où  $|B_m|$  désigne la mesure du domaine  $B_m$ . Comme  $|u_n| \geq m$  sur  $B_m$ , on peut écrire:

$$|B_m| \leq \frac{1}{m^r} \int_{B_m} |u_m|^r dx dt, \quad \forall r \in [1, \infty[.$$

En utilisant l'inégalité (3.8), on déduit donc l'estimation suivante:

$$\int_{B_m} |\nabla u_n|^q dx dt \leq C_1^{q/2} \left( \frac{1}{m^r} \right)^{\frac{2-q}{2}} \left( \int_{B_m} |u_m|^r dx dt \right)^{\frac{2-q}{2}}. \quad (3.9)$$

En utilisant la relation

$$\sum_n a_n b_n \leq \left( \sum_n a_n^s \right)^{1/s} \left( \sum_n b_n^{s'} \right)^{1/s'},$$

avec

$$s = \frac{2}{q}, \quad s' = \frac{2}{2-q},$$

on obtient:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left[ \left( \frac{1}{m^r} \right)^{\frac{2-q}{2}} \left( \int_{B_m} |u_m|^r dx dt \right)^{\frac{2-q}{2}} \right] \leq \left( \sum_{m=1}^{\infty} \left( \frac{1}{m^r} \right)^{\frac{2-q}{q}} \right)^{\frac{q}{2}} \left( \sum_{m=1}^{\infty} \int_{B_m} |u_m|^r dx dt \right)^{\frac{2-q}{2}}. \quad (3.10)$$

Choisissons  $r > \frac{q}{2-q}$ , de sorte que la série

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left( \frac{1}{m^r} \right)^{\frac{2-q}{q}}$$

converge. Comme  $Q_T = \cup_{m=0}^{\infty} B_m$ , on peut écrire:

$$\|\nabla u_n\|_{L^q(Q_T)}^q \leq \|\nabla u_n\|_{L^q(B_0)}^q + \sum_{m=1}^{\infty} \|\nabla u_n\|_{L^q(B_m)}^q.$$

On a d'une part en utilisant les estimations (3.9) et (3.10):

$$\sum_{m=1}^{\infty} \|\nabla u_n\|_{L^q(B_m)}^q \leq C \left( \sum_{m=1}^{\infty} \left( \int_{B_m} |u_m|^r dx dt \right) \right)^{\frac{2-q}{2}}.$$

D'autre part, de la relation (3.8), on tire:

$$\|\nabla u_n\|_{L^q(B_0)}^q \leq C \|\nabla u_n\|_{L^2(B_0)}^q \leq CC_1^q.$$

Enfin, de ces deux dernières majorations, on déduit l'estimation suivante:

$$\|\nabla u_n\|_{L^q(Q_T)}^q \leq C_2 + C_3 \|u_n\|_{L^r(Q_T)}^{\frac{2-q}{2}r}. \quad (3.11)$$

Par ailleurs, soit  $v \in L^\infty(\Omega)$ ; en utilisant l'inégalité d'interpolation entre espaces  $L^p$  (cf. [BRE]), on peut écrire:

$$\|v\|_{L^r(\Omega)} \leq \|v\|_{L^{q^*}(\Omega)}^{1-\theta} \|v\|_{L^1(\Omega)}^\theta,$$

où  $\frac{1}{q^*} = \frac{1}{q} - \frac{1}{2}$ , et  $1 - \theta = \frac{r-1}{q^*-1} q^*/r$ .

La valeur de  $r$  n'est pas fixée. Elle doit vérifier  $r > \frac{q}{2-q}$ . De même la valeur de  $q$  n'est pas fixée mais doit satisfaire la condition  $q \in [1, 2[$ . On choisira  $q$  et  $r$  de manière à ce que  $0 \leq \theta \leq 1$ . On montrera que ce choix est possible. L'inégalité (3.7) montre que  $\|u_n(t)\|_{L^1(\Omega)}$  est borné uniformément en temps. On obtient alors l'estimation:

$$\begin{aligned} \int_0^T \|u_n(t)\|_{L^r(\Omega)}^r dt &\leq \int_0^T \|u_n(t)\|_{L^{q^*}(\Omega)}^{(1-\theta)r} \|u_n(t)\|_{L^1(Q_T)}^{r\theta} dt, \\ &\leq C_4 \int_0^T \|u_n(t)\|_{L^{q^*}(\Omega)}^{(1-\theta)r} dt, \end{aligned}$$

où  $C_4$  est une constante indépendante de  $n$ . En choisissant  $\theta$  tel que  $(1-\theta)r = q$ , on obtient l'inégalité

$$\|u_n\|_{L^r(Q_T)}^r \leq C_4 \|u_n\|_{L^q(0,T;L^{q^*}(\Omega))}^q. \quad (3.12)$$

On vérifie que le choix de  $\theta$  respecte les deux relations  $r > \frac{q}{2-q}$  et  $q \in [1, 2[$ . On a  $r = 3q/2$  et la condition  $(2-q)r > q$  implique que  $q < 4/3$ . On vérifie que  $1 - \theta = 2/3$ ; cette valeur satisfait la condition  $0 \leq \theta \leq 1$ . Des relations (3.11) et (3.12), on tire l'estimation suivante:

$$\|\nabla u_n\|_{L^q(Q_T)}^q \leq C_2 + C_5 \|u_n\|_{L^q(0,T;L^{q^*}(\Omega))}^{q\frac{2-q}{2}}$$

Soit  $\gamma \in [0, 1]$ , en utilisant l'inégalité  $(a+b)^\gamma \leq a^\gamma + b^\gamma$  avec  $\gamma = 1/q$ , on obtient:

$$\|\nabla u_n\|_{L^q(Q_T)} \leq C'_2 + C'_5 \|u_n\|_{L^q(0,T;L^{q^*}(\Omega))}^{\frac{2-q}{2}} \quad (3.13)$$

D'autre part, soit  $v$  une fonction de  $L^1(\Omega)$ , on note par  $\bar{v}$  la valeur moyenne de  $v$  définie par:

$$\bar{v} = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} v dx.$$

En utilisant le théorème de Poincaré-Wirtinger [BRE], on peut écrire pour  $q < 2$ :

$$\|v - \bar{v}\|_{L^{q^*}(\Omega)} \leq C \|\nabla v\|_{L^q(\Omega)},$$

où  $C$  est une constante indépendante de  $v$ . Pour toute valeur de  $t$  de  $[0, T]$ , on peut définir la fonction  $\bar{u}_n(t)$  car  $u_n \in C([0, T]; L^1(\Omega))$ . Cette nouvelle fonction est continue sur  $[0, T]$ . De l'inégalité précédente, on déduit la relation suivante:

$$\|u_n - \bar{u}_n\|_{L^q(0,T;L^{q^*}(\Omega))} \leq C \|\nabla u_n\|_{L^q(Q_T)}.$$

En utilisant l'inégalité triangulaire, on peut écrire:

$$\|u_n - \bar{u}_n\|_{L^q(0,T;L^{q^*}(\Omega))} \geq \|u_n\|_{L^q(0,T;L^{q^*}(\Omega))} - \|\bar{u}_n\|_{L^q(0,T;L^{q^*}(\Omega))}.$$

De cette dernière inégalité, on tire avec les relations (3.7) et (3.13):

$$\begin{aligned} \|u_n\|_{L^q(0,T;L^{q^*}(\Omega))} &\leq C'(\|\nabla u_n\|_{L^q(Q_T)} + \|\bar{u}_n\|_{L^q(0,T;L^{q^*}(\Omega))}), \\ &\leq C'(\|\nabla u_n\|_{L^q(Q_T)} + \frac{(T|\Omega|)^{\frac{1}{q}}}{|\Omega|^{3/2}} \|u_n\|_{L^\infty(0,T;L^1(\Omega))}), \\ &\leq C'(\|\nabla u_n\|_{L^q(Q_T)} + \frac{(T|\Omega|)^{\frac{1}{q}}}{|\Omega|^{3/2}} C_0). \end{aligned}$$

La relation (3.13) implique donc:

$$\|u_n\|_{L^q(0,T;L^{q^*}(\Omega))} \leq C_6 \|u_n\|_{L^q(0,T;L^{q^*}(\Omega))}^{\frac{2-q}{2}} + C_7.$$



Comme  $2 - q < 2$ , on en déduit qu' il existe une constante  $M$  indépendante de  $n$  telle que:

$$\|u_n\|_{L^q(0,T;L^{q^*}(\Omega))} \leq M, \quad \forall n. \quad (3.14)$$

De la relation (3.13), on obtient l'estimation:

$$\|\nabla u_n\|_{L^q(Q_T)} \leq K, \quad \forall n, \quad (3.15)$$

où  $K$  est une constante indépendante de  $n$ .

Pour tout  $q \in ]1, 4/3[$ , la suite  $(\nabla u_n)_n$  est bornée dans  $(L^q(Q_T))^2$ . On peut en extraire une sous-suite  $(\nabla u_k)_k$  qui converge faiblement vers une fonction  $v$  de  $(L^q(Q_T))^2$ . Comme la suite  $(u_n)_n$  converge vers  $u$  dans  $C([0, T], L^1(\Omega))$ , on a  $v = \nabla u$ .

Cette sous-suite converge faiblement également dans  $L^1(Q_T)$  car le domaine  $Q_T$  est borné. En effet, soit  $\phi$  une fonction de  $(L^\infty(Q_T))^2$ , alors  $\phi$  est un élément de  $(L^p(Q_T))^2$  pour tout  $p \in [1, \infty]$ . Soit  $q \in [1, 4/3[$  et  $p = q'$ , on a:

$$\int_{Q_T} \nabla u_k \phi dx dt \rightarrow \int_{Q_T} \nabla u \phi dx dt.$$

Ce passage à la limite a lieu pour toutes fonctions  $\phi$  de  $(L^\infty(Q_T))^2$ . D'où la convergence faible dans  $(L^1(Q_T))^2$ . L'inégalité (3.2) se déduit des estimations (3.14) et (3.15).

Remarquons enfin que l'application  $(f, u^0) \mapsto u$  est linéaire grâce à la linéarité de l'opérateur  $L$ .  $\square$

### Remarque 3.5.

Le problème (3.1) dans le cas d'une condition de Dirichlet homogène a été étudié dans [BOGA]. On obtient une SOLA  $u$  dans les espaces  $L^q(0, T; W_0^{1,q}(\Omega))$  avec  $q \in [1, 4/3[$ .

### Corollaire 3.1.

Sous les hypothèses du théorème 3.1, soit  $q \in [1, 4/3[$  et supposons de plus que  $f \in L^q(Q_T)$ . Alors la SOLA  $u$  est un élément de  $\mathcal{W}^{1,q}$ . De plus, on a l'estimation suivante:

$$\|u\|_{\mathcal{W}^{1,q}} \leq C(\|f\|_{L^q(Q_T)} + \|u^0\|_{L^1(\Omega)}), \quad (3.16)$$

où  $C$  ne dépend que de  $\alpha$  et  $\beta$ .

*Preuve.*

La fonction  $f$  est un élément de  $L^q(Q_T)$ , donc de  $L^1(Q_T)$ . D'après le théorème 3.1, il existe une unique SOLA  $u$  du problème (3.1). Cette solution appartient à  $L^q(0, T; W^{1,q}(\Omega))$  par conséquent  $f - Lu$  appartient à  $L^q(0, T; W^{-1,q}(\Omega))$ . D'après l'estimation (3.2), la fonction  $u$  est bornée dans  $\mathcal{W}^{1,q}$  par une constante dépendant uniquement de la norme de  $f$  dans  $L^q(Q_T)$  et de la norme de  $u^0$  dans  $L^1(\Omega)$ . L'application qui associe  $(f, u^0)$  à la SOLA est linéaire et bornée. On en déduit qu'elle est continue. L'estimation (3.16) se déduit de cette continuité.  $\square$

**Remarque 3.6.**

Le corollaire 3.1 a son équivalent dans le cas d'une condition de Dirichlet homogène. On montre de la même manière que si  $f \in L^q(Q_T)$ ,  $q \in [1, 4/3[$ , la SOLA  $u$  est un élément de  $W_0^{1,q}$ . De plus, on a l'estimation suivante:

$$\|u\|_{W_0^{1,q}} \leq C(\|f\|_{L^q(Q_T)} + \|u^0\|_{L^1(\Omega)}), \quad (3.17)$$

où  $C$  ne dépend que de  $\alpha$  et  $\beta$ .

Nous allons maintenant introduire un autre outil très important pour obtenir le résultat d'existence. Rappelons tout d'abord le résultat standard suivant [BRE].

**Lemme 3.1.**

Soit  $f \in L^2(0, T; W^{-1,2}(\Omega))$  et  $u^0 \in L^2(\Omega)$ , le problème:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + Lu = f, & \text{dans } ]0, T[ \times \Omega, \\ u(0, \cdot) = u^0, & \text{dans } \Omega, \\ u = 0, & \text{sur } ]0, T[ \times \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.18)$$

admet une unique solution  $u$  dans  $W_0^{1,2}$  avec l'estimation suivante:

$$\|u\|_{W_0^{1,2}} \leq C(\|f\|_{L^2(0,T;W^{-1,2}(\Omega))} + \|u^0\|_{L^2(\Omega)}).$$

Le lemme qui suit est une extension du résultat précédent. Ce résultat est démontré dans [BLP], p. 272. Il est dû à N.G. Meyers.

**Lemme 3.2.**

Il existe  $p > 2$  tel que si  $f \in L^p(0, T; W^{-1,p}(\Omega))$  et  $u^0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ , le problème (3.18) admet une unique solution  $u \in W_0^{1,p}$ . De plus  $u$  réalise l'estimation suivante:

$$\|u\|_{W_0^{1,p}} \leq C(\|f\|_{L^p(0,T;W^{-1,p}(\Omega))} + \|u^0\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}). \quad (3.19)$$

Les valeurs de  $p$  et de  $C$  ne dépendent que de  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\Omega$ .

**Remarque 3.7.**

La démonstration de ce résultat montre que si ce théorème est valable pour  $p_0 > 2$ , il reste encore valable pour les valeurs de  $p$  prises dans l'intervalle  $[2, p_0]$ . Ainsi, on pourra imposer (par exemple !)  $p < 8/3$ .  $\square$

#### 4) Existence et unicité d'une solution approchée.

Dans cette section, nous allons introduire une suite de problèmes linéaires dont les solutions convergent vers une solution du problème (2.6)-(2.7). Nous allons étudier ces solutions en utilisant les outils développés dans le paragraphe 3. Nous proposons une méthode qui consiste à utiliser un décalage temporel pour obtenir une famille de problèmes linéaires. Soit  $\tau$  un réel strictement positif et  $\varphi$  une fonction de  $L^p(-\infty, T; W^{1,p}(\Omega))$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ . On définit la fonction  $\pi_\tau \varphi$  par:

$$\pi_\tau \varphi(t) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(t - \tau), \quad t \in ]-\infty, T].$$

Nous construisons une approximation du problème (2.6)-(2.7) en remplaçant  $r(U)$  et  $k(U)$  par  $r(\pi_\tau U_\tau)$  et  $k(\pi_\tau U_\tau)$  respectivement. Nous obtenons ainsi les problèmes linéaires  $(\mathcal{P}_\tau)$  suivants: Trouver  $(H_\tau, U_\tau): ]0, T[ \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$  tel que:

$$\begin{cases} \mu \frac{\partial H_\tau}{\partial t} - \nabla \cdot (r(\pi_\tau U_\tau) \nabla H_\tau) = f, & \text{dans } ]0, T[ \times \Omega, \\ H_\tau = 0, & \text{dans } ]-\infty, 0] \times \Omega, \\ H_\tau = 0, & \text{sur } ]0, T[ \times \partial\Omega, \end{cases} \quad (4.1)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial U_\tau}{\partial t} - \nabla \cdot (k(\pi_\tau U_\tau) \nabla U_\tau) = r(\pi_\tau U_\tau) |\nabla H_\tau|^2, & \text{dans } ]0, T[ \times \Omega, \\ \frac{\partial U_\tau}{\partial n} = 0, & \text{sur } ]0, T[ \times \partial\Omega, \\ U_\tau = U_0, & \text{dans } ]-\infty, 0] \times \Omega. \end{cases} \quad (4.2)$$

Dans ce qui suit, nous allons montrer que le problème (4.1)-(4.2) admet une solution unique  $(H_\tau, U_\tau)$  pour chaque  $\tau$  où  $U_\tau$  est une SOLA. Nous montrons ensuite qu'une sous-suite de la suite  $(H_\tau, U_\tau)$  converge vers une solution du problème (2.6)-(2.7).

Nous allons étudier le système (4.1)-(4.2) en imposant à  $\tau$  des valeurs particulières. Soit  $N \in \mathbb{N}$ , on pose  $\tau = \frac{T}{N}$ . On définit la subdivision de  $[0, T]$  suivante:

$$t_n = n\tau, \quad n = 0, \dots, N.$$

Nous allons construire le couple solution  $(H_\tau, U_\tau)$  par une méthode récurrente en considérant le problème  $\mathcal{P}_\tau$  non pas sur l'intervalle  $]0, T]$  mais sur les intervalles  $]0, t_n]$ ,  $0 \leq n \leq N$ . La méthode consiste à établir que si il existe une unique solution du problème (4.1)-(4.2) - notée  $(H^n, U^n)$  - sur l'intervalle  $]0, t_n]$  où  $U^n$  est une SOLA, alors il existe une unique solution  $(H^{n+1}, U^{n+1})$  sur l'intervalle  $]0, t_{n+1}]$  où  $U^{n+1}$  est une SOLA et les deux couples solution coïncident sur l'intervalle  $]0, t_n]$ . Il s'agit d'une méthode constructive où les solutions s'emboîtent successivement. La solution obtenue sur l'intervalle  $]0, t_N]$  sera la solution du problème  $\mathcal{P}_\tau$  (i.e.,  $(H^N, U^N) = (H_\tau, U_\tau)$ ).

Soit  $N$  un entier positif donné et  $m$  tel que  $0 < m \leq N$ . Nous définissons par récurrence le problème  $\mathcal{P}_m$  suivant:

Trouver  $H^m$  et  $U^m: ]0, t_m[ \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  tel que:

$$(\mathcal{P}_m) \begin{cases} \mu \frac{\partial H^m}{\partial t} - \nabla \cdot (r(\pi_\tau U^{m-1}) \nabla H^m) = f, & \text{dans } ]0, t_m[ \times \Omega, \\ H^m = 0, & \text{dans } ]-\infty, 0] \times \Omega, \\ H^m = 0, & \text{sur } ]0, t_m[ \times \partial\Omega, \\ \frac{\partial U^m}{\partial t} - \nabla \cdot (k(\pi_\tau U^{m-1}) \nabla U^m) = r(\pi_\tau U^{m-1}) |\nabla H^m|^2, & \text{dans } ]0, t_m[ \times \Omega, \\ \frac{\partial U^m}{\partial n} = 0, & \text{sur } ]0, t_m[ \times \partial\Omega, \\ U^m = U_0, & \text{dans } ]-\infty, 0] \times \Omega, \end{cases}$$

où  $(H^{m-1}, U^{m-1})$  est la solution du problème  $\mathcal{P}_{m-1}$  pour  $m \geq 1$ . Pour  $m = 0$ , on prend  $H^0 = 0$  et  $U^0 = U_0$  sur  $]-\infty, 0] \times \Omega$ . Nous allons montrer par récurrence que ce problème est bien défini et qu'il admet une unique solution  $(H^m, U^m)$ .

#### Théorème 4.1.

Soit  $\tau = \frac{T}{N}$ ,  $N \in \mathbb{N}$  donné. Alors pour tout entier  $m$ ,  $0 < m \leq N$ , le problème  $\mathcal{P}_m$  possède une solution unique  $(H^m, U^m)$  dans  $\mathcal{W}_0^{1,2}(0, t_m) \times \mathcal{W}^{1,1}(0, t_m)$  où  $U^m$  est une SOLA et  $H^m = H^{m-1}$ ,  $U^m = U^{m-1}$  sur  $]-\infty, t_{m-1}] \times \Omega$ .

*Preuve.*

La preuve se fait par récurrence. Pour  $m = 1$ , le problème  $\mathcal{P}_m$  est défini par:

Trouver  $(H^1, U^1): ]0, t_1[ \times \Omega \mapsto \mathbb{R}$  tel que:

$$\begin{cases} \mu \frac{\partial H^1}{\partial t} - \nabla \cdot (r(\pi_\tau U^0) \nabla H^1) = f, & \text{dans } ]0, t_1[ \times \Omega, \\ H^1 = 0, & \text{dans } ]-\infty, 0] \times \Omega, \\ H^1 = 0, & \text{sur } ]0, t_1[ \times \partial\Omega, \end{cases} \quad (4.3)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial U^1}{\partial t} - \nabla \cdot (k(\pi_\tau U^0) \nabla U^1) = r(\pi_\tau U^0) |\nabla H^1|^2, & \text{dans } ]0, t_1[ \times \Omega, \\ \frac{\partial U^1}{\partial n} = 0, & \text{sur } ]0, t_1[ \times \partial\Omega, \\ U^1 = U_0, & \text{dans } ]-\infty, 0] \times \Omega. \end{cases} \quad (4.4)$$

Grâce au lemme 3.1, on obtient l'existence et l'unicité de  $H^1$  dans  $\mathcal{W}_0^{1,2}(0, t_1)$  par conséquent  $|\nabla H^1|^2 \in L^1(Q_{t_1})$ . En appliquant le théorème 3.1 et le corollaire 3.1 au problème (4.4), on obtient une unique SOLA  $U^1$  dans  $\mathcal{W}^{1,1}(0, t_1)$ .

Supposons que le résultat soit vrai pour  $m = n-1$ . La fonction  $(H^{n-1}, U^{n-1})$  appartient à  $\mathcal{W}_0^{1,2}(0, t_{n-1}) \times \mathcal{W}^{1,1}(0, t_{n-1})$  et  $U^{n-1}$  est une SOLA. Nous allons montrer que le couple

de fonctions  $(H^n, U^n)$  existe et appartient à l'espace  $\mathcal{W}_0^{1,2}(0, t_n) \times \mathcal{W}^{1,1}(0, t_n)$  et que  $U^n$  est une SOLA.

Le problème  $\mathcal{P}_n$  est bien défini puisque  $\pi_\tau U^{n-1}$  est défini sur  $] - \infty, t_n] \times \Omega$ . Les deux équations sont linéaires. En appliquant successivement le lemme 3.1 et le théorème 3.1 et en refaisant un raisonnement identique à celui du cas  $m = 1$ , on obtient l'existence et l'unicité d'un couple solution  $(H^n, U^n)$  dans  $\mathcal{W}_0^{1,2}(0, t_n) \times \mathcal{W}^{1,1}(0, t_n)$  où  $U^n$  est une SOLA. Comme  $\pi_\tau U^{n-1} = \pi_\tau U^{n-2}$  sur  $] - \infty, t_{n-1}] \times \Omega$  par hypothèse de récurrence, les solutions du problème  $\mathcal{P}_n$  sont aussi des solutions du problème  $\mathcal{P}_{n-1}$  sur  $] - \infty, t_{n-1}] \times \Omega$ . Les fonctions  $U^n$  et  $U^{n-1}$  coïncident dans  $]0, t_{n-1}] \times \Omega$  par unicité de la SOLA. Il en va de même pour les fonctions  $H^n$  et  $H^{n-1}$ . On obtient une solution unique du problème  $\mathcal{P}_n$  dans  $\mathcal{W}_0^{1,2}(0, t_n) \times \mathcal{W}^{1,1}(0, t_n)$  où  $U^n$  est une SOLA.  $\square$

Nous allons montrer qu'en fait la solution  $H$  possède une meilleure régularité en utilisant le lemme 3.2. Nous faisons d'abord la remarque importante suivante:

**Remarque 4.1.**

*Nous allons mettre en application le lemme 3.2. L'hypothèse (2.3) implique que les fonctions  $r$  et  $k$  sont majorées et minorées par deux constantes strictement positives  $\alpha$  et  $\beta$ . Ces deux constantes ne dépendent pas du choix de  $\tau$ . Grâce au lemme 3.2 et la remarque 3.7 on va montrer que que l'on peut obtenir une solution  $H_\tau$  dans  $\mathcal{W}_0^{1,p}$  avec  $p \in ]2, 8/3[$ . La valeur  $p$  ainsi que la constante de continuité  $C$  sont indépendantes de  $\tau$ . Dans toute la suite, la valeur de  $p$  est fixée par les valeurs  $\alpha$  et  $\beta$  données dans l'hypothèse (2.4).*

**Théorème 4.2.**

Soit  $\tau = \frac{T}{N}$ ,  $N \in \mathbb{N}$  donné, le problème  $\mathcal{P}_\tau$  possède une solution  $(H_\tau, U_\tau)$  dans  $\mathcal{W}_0^{1,p} \times \mathcal{W}^{1,p/2}$  et  $U_\tau$  est une SOLA. La valeur de  $p$  est donnée par le lemme 3.2. De plus, on obtient les estimations suivantes:

$$\|H_\tau\|_{\mathcal{W}_0^{1,p}} + \|U_\tau\|_{\mathcal{W}^{1,p/2}} \leq C. \quad (4.5)$$

où la constante  $C$  est indépendante de  $\tau$ .

*Preuve.*

La solution  $(H_\tau, U_\tau)$  est la solution du problème  $\mathcal{P}_N$ . En utilisant le lemme 3.2, on déduit que la fonction  $H_\tau$  appartient à  $\mathcal{W}_0^{1,p}$ . Comme  $p/2 \in ]1, 4/3[$ , on déduit grâce au corollaire 3.1 que la SOLA  $U_\tau$  appartient à  $\mathcal{W}^{1,p/2}$ . On déduit en utilisant les relations (3.19) et (3.16) les estimations:

$$\begin{aligned} \|H_\tau\|_{\mathcal{W}_0^{1,p}} &\leq C \|f\|_{L^p(0,T;W^{-1,p}(\Omega))}, \\ &\leq C' \|H'_0\|_{L^p(0,T)}, \\ \|U_\tau\|_{\mathcal{W}^{1,p/2}} &\leq C \|f\|_{L^p(0,T;W^{-1,p}(\Omega))}^2. \end{aligned}$$

Les constantes sont indépendantes de  $\tau$  car elles ne dépendent que des conditions initiales, de la fonction  $f$  et des coefficients  $\alpha$  et  $\beta$ .  $\square$

**Remarque 4.2.**

Une méthode généralement utilisée dans ce genre de problème consiste à calculer la solution sur chaque intervalle de temps  $[t_{n-1}, t_n]$  puis à recoller les solutions. L'outil essentiel dans le cas  $p = 2$  est l'utilisation de l'injection de  $\mathcal{W}^{1,2}$  dans  $C([0, T], L^2(\Omega))$ . La continuité de  $H_\tau$  en temps permet le recollement de la solution. Par contre, nous n'avons pas cette injection dans le cas  $p < 2$ . Néanmoins nous avons prouvé que  $U_\tau$  est un élément de  $C([0, T], L^1(\Omega))$ . Cette propriété de la SOLA nous permet de construire une solution par recollement. Dans le cas d'une méthode d'emboîtement, l'argument d'unicité est essentiel pour la construction récurrente d'une solution (alors que cet argument est inutile dans le cas de la méthode standard citée ci-dessus). Elle permet par contre de se passer de l'argument de continuité, nécessaire à la première méthode.

Nous pouvons maintenant énoncer le résultat de convergence suivant:

**Corollaire 4.1.**

Il existe une sous-suite  $(H_n, U_n)_n$  de  $(H_\tau, U_\tau)_{\tau=\frac{T}{N}, N \in \mathbb{N}^*}$  qui converge vers un couple de fonctions  $(H, U)$  dans  $L^p(Q_T) \times L^{p/2}(Q_T)$  telle que la suite  $(\nabla H_n, \nabla U_n)_n$  converge vers  $(\nabla H, \nabla U)$  faiblement dans  $(L^p(Q_T))^2 \times (L^{p/2}(Q_T))^2$ .

*Preuve.*

L'injection de  $\mathcal{W}^{1,r}$  dans  $L^r(Q_T)$  est compacte pour  $1 < r < \infty$  (cf. [LIONS]). Comme la suite  $(H_\tau, U_\tau)_\tau$  est bornée indépendamment de  $\tau$  dans  $\mathcal{W}_0^{1,p} \times \mathcal{W}^{1,p/2}$  d'après l'estimation (4.5), on peut en extraire une sous-suite  $(H_m, U_m)_m$  convergente dans  $L^p(Q_T) \times L^{p/2}(Q_T)$ . Nous noterons par  $(H, U)$  la limite de cette sous-suite. La suite  $(\nabla H_m, \nabla U_m)_m$  est bornée dans  $(L^p(Q_T))^2 \times (L^{p/2}(Q_T))^2$ . On peut à nouveau en extraire une sous-suite  $(\nabla H_k, \nabla U_k)_k$  qui converge faiblement vers un couple  $(\Phi, \Psi)$ . Comme la suite  $(H_k, U_k)_k$  converge vers  $(H, U)$ , on en déduit que  $\nabla H = \Phi$  et  $\nabla U = \Psi$ .  $\square$

**5) Convergence forte.**

Nous allons prouver que le couple  $(H, U)$  obtenu dans le corollaire 4.1 est une solution du problème (2.6)-(2.7). Nous allons d'abord montrer que la suite  $(H_n)_n$  obtenue par le corollaire 4.1 converge fortement vers  $H$  dans  $L^2(0, T; W_0^{1,2}(\Omega))$ . On en déduira par passage à la limite dans l'équation (4.1) que le couple  $(H, U)$  satisfait l'équation (2.6). On montrera ensuite par passage à la limite dans l'équation (4.2) que le couple  $(H, U)$  satisfait l'équation (2.7). On aura ainsi montré que le couple  $(H, U)$  est une solution du système (2.6)-(2.7).

Pour cela, nous avons besoin du lemme suivant:

**Lemme 5.1.**

On se donne un espace de Banach  $E$  de fonctions définies sur  $\Omega$  à valeurs réelles. Soit  $q \in [1, \infty[$  et  $\varphi$  une fonction de  $L^q(-\infty, T; E)$ ; alors la suite  $(\pi_\tau \varphi_n)_n$  définie par  $\pi_\tau \varphi_n(t) = \varphi(t - \frac{T}{n})$  converge fortement dans  $L^q(-\infty, T; E)$  vers  $\varphi$ . De plus, si  $r \in L^\infty(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R})$ , alors la suite  $(r \circ \pi_\tau \varphi_n)_n$  converge vers  $r \circ \varphi$  dans  $L^s(0, T; E)$ ,  $\forall s \in [1, \infty[$ .

*Preuve.*

La première assertion est démontrée dans [ZEN], p. 296. La convergence de  $(r \circ \pi_\tau \varphi_n)_n$  se déduit du théorème de la convergence dominée de Lebesgue et de la continuité de  $r$ .  $\square$

**Remarque 5.1.**

Ce résultat est faux pour  $s = \infty$ .

Nous allons d'abord montrer que la suite  $(H_n)_n$  converge vers  $H$  dans  $\mathcal{W}_0^{1,2}$ .

**Proposition 5.1.**

Soit  $(H_n, U_n)_n$  la suite obtenue dans le corollaire (4.1) convergeant vers  $(H, U)$  dans  $L^p(Q_T) \times L^{p/2}(Q_T)$ . Alors la suite  $(H_n)_n$  converge vers  $H$  pour la norme de  $\mathcal{W}_0^{1,2}$ . De plus, la fonction  $H$  appartient à l'espace  $\mathcal{W}_0^{1,p}$ . Ainsi  $(H, U)$  appartient à  $\mathcal{W}_0^{1,p} \times L^{p/2}(Q_T)$ .

*Preuve.*

Montrons d'abord que la suite  $(H_n)_n$  est une suite de Cauchy dans  $\mathcal{W}_0^{1,2}$ . Les fonctions  $(H_n, U_n)$  obtenues dans le corollaire (4.1) sont les solutions du système suivant:

$$\begin{cases} \mu \frac{\partial H_n}{\partial t} - \nabla \cdot (r(\pi_\tau U_n) \nabla H_n) = f, & \text{dans } ]0, T[ \times \Omega, \\ H_n = 0, & \text{dans } ]-\infty, 0] \times \Omega, \\ H_n = 0, & \text{sur } ]0, T[ \times \partial\Omega, \end{cases} \quad (5.1)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial U_n}{\partial t} - \nabla \cdot (k(\pi_\tau U_n) \nabla U_n) = r(\pi_\tau U_n) |\nabla H_n|^2, & \text{dans } ]0, T[ \times \Omega, \\ \frac{\partial U_n}{\partial n} = 0, & \text{sur } ]0, T[ \times \partial\Omega, \\ U_n = U_0, & \text{dans } ]-\infty, 0] \times \Omega. \end{cases} \quad (5.2)$$

Considérons deux éléments  $(H_n, U_n)$  et  $(H_m, U_m)$  de la suite. On obtient par soustraction, en utilisant l'équation (5.1):

$$\begin{cases} \mu \frac{\partial (H_n - H_m)}{\partial t} - \nabla \cdot (r(\pi_\tau U_n) \nabla H_n - r(\pi_\tau U_m) \nabla H_m) = 0, & \text{dans } ]0, T[ \times \Omega, \\ H_n - H_m = 0, & \text{dans } ]-\infty, 0] \times \Omega, \\ H_n - H_m = 0 & \text{sur } ]0, T[ \times \partial\Omega. \end{cases}$$

On peut réécrire la première égalité sous la forme:

$$\mu \frac{\partial (H_n - H_m)}{\partial t} - \nabla \cdot (r(\pi_\tau U_n) (\nabla H_n - \nabla H_m)) = \nabla \cdot (\{r(\pi_\tau U_n) - r(\pi_\tau U_m)\} \nabla H_m).$$

Le second membre étant un élément de  $L^2(0, T; W^{-1,2}(\Omega))$ , d'après le lemme 3.1, on a:

$$\begin{aligned} \|H_n - H_m\|_{\mathcal{W}_0^{1,2}} &\leq C \|\nabla \cdot (\{r(\pi_\tau U_n) - r(\pi_\tau U_m)\} \nabla H_m)\|_{L^2(0, T; W^{-1,2}(\Omega))}, \\ &\leq C \|\{r(\pi_\tau U_n) - r(\pi_\tau U_m)\} \nabla H_m\|_{L^2(Q_T)}, \\ &\leq C' \|\nabla H_m\|_{L^p(Q_T)} \|r(\pi_\tau U_n) - r(\pi_\tau U_m)\|_{L^{p^*}(Q_T)}, \end{aligned}$$

où  $\frac{1}{p^*} + \frac{1}{p} = \frac{1}{2}$ . On a par conséquent:

$$\|H_n - H_m\|_{\mathcal{W}_0^{1,2}} \leq C' \|r(\pi_\tau U_n) - r(\pi_\tau U_m)\|_{L^{p^*}(Q_T)}. \quad (5.3)$$

Or  $p^*$  est fini car  $p > 2$ ; donc d'après le lemme 5.1, la suite  $(r(\pi_\tau U_n))_n$  est de Cauchy dans  $L^{p^*}(Q_T)$ . La suite  $(\nabla H_m)_m$  est bornée dans  $(L^p(Q_T))^2$ . La suite  $(H_n)_n$  est donc de Cauchy dans  $\mathcal{W}_0^{1,2}$  et converge vers une fonction  $V$  dans  $\mathcal{W}_0^{1,2}$ . Comme la suite  $(H_n)_n$  converge aussi vers la fonction  $H$  dans  $L^p(Q_T)$ , on a  $V = H$  presque partout. Cette convergence prouve que la fonction  $H$  appartient à  $\mathcal{W}_0^{1,2}$ . Nous pouvons ainsi passer à la limite dans l'équation (5.1). En effet, on a:

$$\frac{\partial H_n}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial H}{\partial t} \quad \text{dans } L^2(0, T; W^{-1,2}(\Omega)).$$

La suite  $(\nabla H_n)_n$  converge fortement dans  $(L^2(Q_T))^2$ . De plus, le lemme 5.1 implique que la suite  $(r(\pi_\tau U_n))_n$  converge fortement dans  $(L^2(Q_T))$ . On en déduit que la suite  $(r(\pi_\tau U_n) \nabla H_n)_n$  converge vers la fonction  $r(U) \nabla H$  dans  $(L^1(Q_T))^2$ :

$$r(\pi_\tau U_n) \nabla H_n \rightarrow r(U) \nabla H \quad \text{dans } (L^1(Q_T))^2.$$

Nous pouvons obtenir une meilleure régularité de la fonction  $H$  en appliquant le lemme 3.2. On en déduit que  $H$  est un élément de  $\mathcal{W}_0^{1,p}$ .  $\square$

### Remarque 5.2.

L'estimation (5.3) n'a été possible que dans la mesure où  $p > 2$ . Ceci nous permet d'obtenir  $p^*$  différent de  $\infty$ . La remarque 5.1 montre que cette technique se révèle impuissante si  $p = 2$ .

La convergence de la suite  $(H_n)_n$  vers la fonction  $H$  dans  $L^2(0, T; W_0^{1,2}(\Omega))$  implique que le terme  $|\nabla H_n|^2$  de l'équation (5.2) converge vers  $|\nabla H|^2$  dans  $L^1(Q_T)$ .

Nous allons maintenant passer à la limite dans l'équation (5.2) et montrer que le couple  $(H, U)$  satisfait le problème (2.7).

### Théorème 5.1.

Il existe  $p \in ]2, 8/3[$  tel que le problème (2.6)-(2.7) admet une solution  $(H, U)$  dans  $\mathcal{W}_0^{1,p} \times \mathcal{W}^{1,p/2}$ .

*Preuve.*



Nous avons déjà montré que le couple  $(H, U)$  obtenu au moyen du corollaire (4.1) satisfait le problème (2.6). Il s'agit de passer à la limite dans l'équation (4.2). Nous avons établi les résultats suivants:

$$\nabla H_n \rightarrow \nabla H \quad \text{dans } (L^2(Q_T))^2, \quad (5.4)$$

$$U_n \rightarrow U \quad \text{dans } L^{p/2}(Q_T), \quad (5.5)$$

$$U_n \quad \text{est bornée dans } \mathcal{W}^{1,p/2}, \quad (5.6)$$

$$\nabla U_n \rightharpoonup \nabla U \quad \text{faiblement dans } (L^{p/2}(Q_T))^2. \quad (5.7)$$

La propriété (5.6) implique que l'on peut extraire de la suite  $U_n$  une sous-suite (que l'on notera encore  $U_n$ ) convergeant faiblement dans  $\mathcal{W}^{1,p/2}$ . Par conséquent:

$$\frac{\partial U_n}{\partial t} \rightharpoonup \frac{\partial U}{\partial t} \quad \text{faiblement dans } L^{p/2}(0, T; W^{-1,p/2}(\Omega)).$$

Nous allons montrer que la suite  $(k(\pi_\tau U_n) \nabla U_n)_n$  converge faiblement vers la fonction  $k(U) \nabla U$  dans  $(L^1(Q_T))^2$ . Soit  $\phi$  une fonction de  $(L^\infty(Q_T))^2$ ; d'après (5.5) et le lemme 5.1, la suite  $(k(\pi_\tau U_n))_n$  converge vers  $k(U)$  dans  $L^s(Q_T)$  avec  $s \in [1, \infty[$ . En particulier, elle converge dans  $L^{(p/2)'}(Q_T)$ . Par conséquent, la suite  $(k(\pi_\tau U_n) \phi)_n$  converge vers  $k(U) \phi$  dans  $L^{(p/2)'}(Q_T)$ . La suite  $(\nabla U_n)_n$  converge vers  $\nabla U$  faiblement dans  $(L^{p/2}(Q_T))^2$ . On en déduit (cf [BRE] prop. III.5.(iv), p. 35) que la suite  $\langle k(\pi_\tau U_n) \phi, \nabla U_n \rangle$  converge vers  $\langle k(U) \phi, \nabla U \rangle$ . Ceci prouve la convergence faible de  $(k(\pi_\tau U_n) \nabla U_n)_n$  dans  $(L^1(Q_T))^2$ .

La propriété (5.4) et le lemme 5.1 impliquent que la suite  $(r(\pi_\tau U_n) |\nabla H_n|^2)_n$  converge fortement dans  $L^1(Q_T)$ .

On peut passer à la limite dans l'équation (4.2) et la solution  $(H, U)$  obtenue est un élément de  $\mathcal{W}_0^{1,p} \times \mathcal{W}^{1,p/2}$ .  $\square$

### Remarque 5.3.

*En fait, on obtient une meilleure régularité pour la solution  $U$ . Les fonctions  $\nabla U_n$  appartiennent à  $(L^q(Q_T))^2$ ,  $q \in [1, 4/3[$ , et sont uniformément bornées. Par un argument de compacité, on en déduit qu'une sous-suite de  $(\nabla U_n)_n$  converge vers  $\nabla U$  faiblement dans  $(L^q(Q_T))^2$ . On obtient donc une solution  $(H, U)$  dans  $\mathcal{W}_0^{1,p} \times (\mathcal{W}^{1,p/2} \cap L^q(0, T; W^{1,q}(\Omega)))$ .*

## 6) Cas d'un chauffage avec une condition de Dirichlet.

On considère dans cette section un problème très similaire à celui étudié dans les paragraphes précédents. Nous allons considérer le processus de chauffage par induction en imposant une condition de Dirichlet sur le bord du domaine chauffé. Le problème se pose

sous la forme suivante: Trouver  $H, \theta: ]0, T[ \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  tels que:

$$\begin{cases} \mu \frac{\partial H}{\partial t} - \nabla \cdot (\rho(\theta) \nabla H) = 0, & \text{dans } ]0, T[ \times \Omega, \\ H(0, \cdot) = 0, & \text{dans } \Omega, \\ H = H_0, & \text{sur } ]0, T[ \times \partial\Omega, \end{cases} \quad (6.1)$$

$$\begin{cases} C_p(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial t} - \nabla \cdot (\lambda(\theta) \nabla \theta) = \rho(\theta) |\nabla H|^2, & \text{dans } ]0, T[ \times \Omega, \\ \theta = \theta_1, & \text{sur } ]0, T[ \times \partial\Omega, \\ \theta(0, \cdot) = \theta_0, & \text{dans } \Omega, \end{cases} \quad (6.2)$$

où les fonctions  $\mu, C_p, \rho, \lambda$  représentent les mêmes coefficients que ceux décrits dans l'introduction de ce chapitre. La fonction  $\theta_1$  est une constante positive. Elle représente la température sur le bord du domaine  $\Omega$ . La fonction  $\theta_0$  représente la température initiale du conducteur au début du chauffage. Le but de ce paragraphe est de montrer l'existence d'une solution  $(H, \theta): ]0, T[ \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$  du problème (6.1)-(6.2).

Nous allons ramener le problème (6.1)-(6.2) à un système de deux équations paraboliques de forme divergentielle. On utilise la transformation de Kirchhoff suivante:

$$U = \int_{\theta_1}^{\theta} C_p(s) ds = \gamma(\theta), \quad (\text{Transformation de Kirchhoff})$$

$$\tilde{H} = H - H_0.$$

On ramène ainsi le système d'équation (6.1)-(6.2) au problème suivant: Trouver  $\tilde{H}, U: ]0, T[ \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  tels que:

$$\begin{cases} \mu \frac{\partial \tilde{H}}{\partial t} - \nabla \cdot (r(U) \nabla \tilde{H}) = \mu H'_0, & \text{dans } ]0, T[ \times \Omega, \\ \tilde{H}(0, \cdot) = 0, & \text{dans } \Omega, \\ \tilde{H} = 0, & \text{sur } ]0, T[ \times \partial\Omega, \end{cases} \quad (6.3)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} - \nabla \cdot (k(U) \nabla U) = r(U) |\nabla \tilde{H}|^2, & \text{dans } ]0, T[ \times \Omega, \\ U = 0, & \text{sur } ]0, T[ \times \partial\Omega, \\ U(0, \cdot) = U_0 \stackrel{\text{def}}{=} \gamma(\theta_0), & \text{dans } \Omega. \end{cases} \quad (6.4)$$

Comme dans le deuxième paragraphe, nous utiliserons la notation  $H$  au lieu de  $\tilde{H}$  et l'on posera  $f(t) = \mu H'_0(t)$  pour simplifier les notations.

**Remarque 6.1.**

Nous avons pris la fonction  $\theta_1$  constante sur le bord par mesure de simplification. On peut considérer le cas où  $\theta_1$  est une fonction suffisamment régulière admettant un relèvement  $\tilde{\theta}_1$  sur  $\Omega$ . Dans ce cas, un nouveau terme apparaît dans le second membre de l'équation (6.4). Celui-ci est très régulier et est indépendant de  $U$ .

Nous allons maintenant introduire un système d'équations "linéarisées" issu du système (6.3)-(6.4) dont les solutions constitueront une approximation de la solution du problème continu. Nous utilisons une méthode identique à celle introduite dans le quatrième paragraphe. Soit  $N > 0$  et  $\tau = \frac{T}{N}$ , on considère le problème ( $\mathcal{P}_\tau$ ) suivant: Trouver  $(H_\tau, U_\tau)$ :  $]0, T[ \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$  tel que:

$$\begin{cases} \mu \frac{\partial H_\tau}{\partial t} - \nabla \cdot (r(\pi_\tau U_\tau) \nabla H_\tau) = f, & \text{dans } ]0, T[ \times \Omega, \\ H_\tau = 0, & \text{dans } ]-\infty, 0] \times \Omega, \\ H_\tau = 0, & \text{sur } ]0, T[ \times \partial\Omega, \end{cases} \quad (6.5)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial U_\tau}{\partial t} - \nabla \cdot (k(\pi_\tau U_\tau) \nabla U_\tau) = r(\pi_\tau U_\tau) |\nabla H_\tau|^2, & \text{dans } ]0, T[ \times \Omega, \\ U_\tau = 0, & \text{sur } ]0, T[ \times \partial\Omega, \\ U_\tau = U_0, & \text{dans } ]-\infty, 0] \times \Omega. \end{cases} \quad (6.6)$$

Rapellons que la fonction  $\pi_\tau U(t, x)$  est la fonction  $U(t - \tau, x)$ .

Nous allons montrer que ce système admet une solution. Ceci fait l'objet du

**Théorème 6.1.**

Soit  $\tau = \frac{T}{N}$ ,  $N \in \mathbb{N}$  donné, le problème  $\mathcal{P}_\tau$  possède une solution  $(H_\tau, U_\tau)$  dans  $\mathcal{W}_0^{1,2} \times \mathcal{W}_0^{1,1}$  où  $U_\tau$  est une SOLA.

*Preuve.*

On construit une solution  $(H_\tau, U_\tau)$  par une méthode récurrente identique à celle utilisée dans le paragraphe 4. On considère le problème  $\mathcal{P}_\tau$  sur les intervalles  $]0, t_n]$ ,  $0 \leq n \leq N$ . La solution obtenue sur l'intervalle  $]0, t_N]$  sera la solution du problème  $\mathcal{P}_\tau$ . Le théorème 3.1 utilisé dans le cas d'une condition de Neumann homogène s'applique aussi pour un problème avec une condition de Dirichlet homogène (Remarque 3.5). On obtient aussi son corollaire (Remarque 3.6).  $\square$

En appliquant le lemme 3.2 ainsi que la remarque 3.6, on a le:

**Théorème 6.2.**

Soit  $\tau = \frac{T}{N}$ ,  $N \in \mathbb{N}$  donné, le problème (6.5)-(6.6) possède une solution  $(H_\tau, U_\tau)$  dans  $\mathcal{W}_0^{1,p} \times \mathcal{W}_0^{1,p/2}$  et  $U_\tau$  est une SOLA. De plus, on a les estimations suivantes:

$$\begin{aligned} \|H_\tau\|_{\mathcal{W}_0^{1,p}} &\leq C \|H_0'\|_{L^p(0,T)}, \\ \|U_\tau\|_{\mathcal{W}_0^{1,p/2}} &\leq C. \end{aligned}$$

La constante  $C$  est indépendante de  $\tau$ .

De ces estimations on en déduit le corollaire suivant:

**Corollaire 6.1.**

Il existe une sous-suite  $(H_n, U_n)$  de  $(H_\tau, U_\tau)_{\tau=\frac{T}{N}, N \in \mathbb{N}^*}$  qui converge vers un couple de fonctions  $(H, U)$  dans  $L^p(Q_T) \times L^{p/2}(Q_T)$  tel que la sous-suite  $(\nabla H_n, \nabla U_n)_n$  converge vers  $(\nabla H, \nabla U)$  faiblement dans  $(L^p(Q_T))^2 \times (L^{p/2}(Q_T))^2$ .

La proposition 5.1 nous assure la convergence forte de la suite  $(\nabla H_n)_n$  vers  $\nabla H$  dans  $(L^2(Q_T))^2$ . En utilisant exactement des mêmes arguments utilisés dans le théorème 5.1, on obtient le

**Théorème 6.3.**

Il existe  $p \in ]2, 8/3[$  tel que le problème (6.3)-(6.4) admet une solution  $(H, U)$  dans  $\mathcal{W}_0^{1,p} \times \mathcal{W}_0^{1,p/2}$ .

On obtient ainsi l'existence d'une solution du problème (6.3)-(6.4).

## CHAPITRE III

### UN SCHÉMA NUMÉRIQUE

#### Résumé

Nous présentons dans ce chapitre un schéma numérique dérivant du système d'équations étudiées dans le chapitre précédent. Nous établissons ensuite des résultats de convergence en temps et en espace.

## Introduction.

Dans ce chapitre, nous introduisons un schéma numérique pour obtenir une approximation de la solution du problème couplé (II.6.3)-(II.6.4) formulé dans le chapitre II.

Nous proposons, dans une première partie, un schéma discrétisé en temps et en espace du problème (II.6.3)-(II.6.4). Nous introduisons les outils et le cadre fonctionnel nécessaire à son étude. La deuxième partie est consacrée aux estimations de l'erreur entre la solution du problème discret et la solution du problème continu.

Le calcul d'erreur nécessite une régularité suffisante des solutions. Nous supposons dès lors que le problème (II.6.3)-(II.6.4) admet une solution dans  $C^2(\overline{Q}_T) \times C^2(\overline{Q}_T)$ . De plus, nous introduisons une conjoncture en affirmant que la solution du problème discrétisé est bornée uniformément pour une certaine norme. Cette hypothèse supplémentaire permet d'établir dans une troisième partie la convergence de la solution discrète vers la solution exacte et de déterminer l'ordre de cette convergence.

### 1) Hypothèses et régularités.

Soient  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^2$  et  $T > 0$ . Les fonctions  $f$  et  $U_0$  appartiennent respectivement à  $C^1([0, T])$  et  $C^1(\overline{\Omega})$ . Nous avons montré dans le chapitre précédent l'existence d'une solution  $(H, U) : ]0, T[ \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$  satisfaisant les deux systèmes d'équations suivants (Théorème II.6.3):

$$\begin{cases} \mu \frac{\partial H}{\partial t} - \nabla \cdot (r(U) \nabla H) = f, & \text{dans } ]0, T[ \times \Omega, \\ H(0, \cdot) = 0, & \text{dans } \Omega, \\ H = 0, & \text{sur } ]0, T[ \times \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.1)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} - \nabla \cdot (k(U) \nabla U) = r(U) |\nabla H|^2, & \text{dans } ]0, T[ \times \Omega, \\ \frac{\partial U}{\partial n} = 0, & \text{sur } ]0, T[ \times \partial\Omega, \\ U(0, \cdot) = U_0, & \text{dans } \Omega, \end{cases} \quad (1.2)$$

où  $r$  et  $k$  sont des fonctions de  $L^\infty(\mathbb{R}) \cap C^0(\mathbb{R})$  définies dans les hypothèses formulées dans le paragraphe II.2. Les fonctions  $r(U)$  et  $k(U)$  désignent respectivement la composition des fonctions  $r$  et  $k$  avec la fonction  $U$ , i.e.  $r(U) = r \circ U$  et  $k(U) = k \circ U$ . Nous supposons dans toute la suite qu'il existe un couple solution  $(H, U)$  de (1.1)-(1.2) dans  $(C^2(\overline{Q}_T))^2$ .

Dans le chapitre II, nous avons introduit un problème approché issu du problème (1.1)-(1.2) par une méthode de décalage temporel. Soient  $N$  un entier positif et  $\tau = \frac{T}{N}$ . Pour toute fonction  $g$ , on note par  $\pi_\tau g(t)$  la fonction  $g(t - \tau)$ . Soit  $(H_\tau, U_\tau)$  une solution du

problème:

$$\begin{cases} \mu \frac{\partial H_\tau}{\partial t} - \nabla \cdot (r(\pi_\tau U_\tau) \nabla H_\tau) = f, & \text{dans } ]0, T[ \times \Omega, \\ H_\tau(t, \cdot) = 0, & \text{dans } ]-\infty, 0] \times \Omega, \\ H_\tau = 0, & \text{sur } ]0, T[ \times \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.3)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial U_\tau}{\partial t} - \nabla \cdot (k(\pi_\tau U_\tau) \nabla U_\tau) = r(\pi_\tau U_\tau) |\nabla H_\tau|^2, & \text{dans } ]0, T[ \times \Omega, \\ \frac{\partial U_\tau}{\partial n} = 0, & \text{sur } ]0, T[ \times \partial\Omega, \\ U_\tau(t, \cdot) = U_0, & \text{dans } ]-\infty, 0] \times \Omega. \end{cases} \quad (1.4)$$

On a montré qu'il existe un  $p > 2$  tel que ce problème admette une solution unique dans  $\mathcal{W}_0^{1,p} \times \mathcal{W}^{1,p/2}$  où  $U$  est une Solution Obtenue comme Limite d'Approximation ou SOLA (Théorème II.5.1). Notre but est de déterminer une solution numérique du problème (1.1)-(1.2) en nous inspirant du procédé de "linéarisation" qui a conduit aux équations (1.3)-(1.4). Nous allons proposer un schéma numérique et utiliser les outils de la théorie des éléments finis. A cette fin, nous formulons des hypothèses supplémentaires en supposant que les deux fonctions  $r$  et  $k$  sont  $C^1(\mathbb{R})$  et lipschitziennes:

$$\exists K > 0 \text{ tel que } \forall s, t \in \mathbb{R}, \begin{cases} |r(s) - r(t)| \leq K|s - t|, \\ |k(s) - k(t)| \leq K|t - s|, \end{cases} \quad (1.5)$$

$$r, k \in C^1(\mathbb{R}). \quad (1.6)$$

Nous montrons maintenant un lemme technique qui nous sera utile pour évaluer l'ordre de convergence entre la solution discrète et la solution exacte.

**Lemme 1.1.**

Soient  $g \in C^1(\overline{Q}_T)$  et  $r \in [1, \infty[$ . La fonction  $g$  peut être vue comme une application de  $[0, T]$  à valeur dans  $C^1(\overline{\Omega})$ . On prolonge la fonction  $g$  sur  $]-\infty, T]$  par  $g(t) = g(0)$ ,  $t < 0$ . Alors, on a l'estimation suivante:

$$\|g - \pi_\tau g\|_{L^r(Q_T)} \leq C\tau, \quad (1.7)$$

où  $C$  est une constante indépendante de  $\tau$ .

*Preuve.*

Notons tout d'abord que la fonction  $\frac{\partial g}{\partial t}$  est nulle sur  $]-\infty, 0] \times \Omega$ . Par conséquent, la

fonction  $\frac{\partial g}{\partial t}$  est un élément de  $L^\infty(]-\infty, T] \times \Omega)$ . Soit  $\tau > 0$ , on peut écrire:

$$\begin{aligned} \|g - \pi_\tau g\|_{L^r(Q_T)}^r &= \int_0^T dt \int_\Omega |g(t, x) - g(t - \tau, x)|^r dx \\ &= \int_0^T dt \int_\Omega \left| \int_{t-\tau}^t \frac{\partial g}{\partial t}(s, x) ds \right|^r dx \\ &\leq \int_0^T dt \int_\Omega \left\| \frac{\partial g}{\partial t} \right\|_{L^\infty(]-\infty, T] \times \Omega)}^r \tau^r dx \\ &\leq T |\Omega| \tau^r \left\| \frac{\partial g}{\partial t} \right\|_{L^\infty(Q_T)}^r \end{aligned}$$

On obtient ainsi:

$$\|g - \pi_\tau g\|_{L^r(Q_T)} \leq \tau |Q_T|^{\frac{1}{r}} \left\| \frac{\partial g}{\partial t} \right\|_{L^\infty(Q_T)}.$$

D'où le lemme.  $\square$

## 2) Le problème discrétisé.

Dans ce paragraphe, nous proposons un schéma numérique pour déterminer une solution approchée du problème (II.6.3)-(II.6.4). Nous définirons tout d'abord le cadre fonctionnel dans lequel nous allons travailler, puis nous présenterons le schéma numérique sur lequel se fonde notre étude. Nous établirons l'existence d'une solution pour ce schéma. Comme nous l'avons indiqué au début de ce chapitre, nous serons néanmoins amenés à formuler une hypothèse supplémentaire sur la régularité de cette solution. Nous obtiendrons ensuite des estimations entre la solution discrète et la solution du problème continu. Nous commençons par définir les outils nécessaires à l'élaboration du schéma numérique.

Soit  $\Omega$  un ouvert borné que nous supposons polygonal. On note par  $\mathcal{T}_h$  une triangulation de  $\bar{\Omega}$  en triangle  $K \in \mathcal{T}_h$ :

$$\bar{\Omega} = \cup_{K \in \mathcal{T}_h} K.$$

On notera par  $h_K$  le diamètre de la plus petite boule contenant le triangle  $K$ . Le pas du maillage de  $\mathcal{T}_h$  est donnée par:

$$h = \max\{h_K, K \in \mathcal{T}_h\}.$$

Nous allons imposer une condition supplémentaire sur les éléments de la triangulation. Nous supposons qu'il existe un réels  $\alpha_1 \in ]0, \pi/3[$  tel que:

$$\forall K \in \mathcal{T}_h, \quad \alpha_1 \leq \alpha_K,$$

ou  $\alpha_K$  désigne un angle quelconque du triangle  $K$ .

Cette hypothèse nous assure la non-dégénérescence du maillage et sa régularité uniforme. On définit maintenant par  $V_h$  l'espace de type éléments finis suivant:

$$V_h = \{\phi \in C^0(\bar{\Omega}), \phi|_K \in P_1(K), \forall K \in \mathcal{T}_h \text{ et } \phi = 0 \text{ sur } \partial\Omega\},$$



où  $P_1(K)$  est l'espace des polynômes à deux variables du premier degré sur  $K$ . L'espace  $V_h$  est un sous-espace de dimension finie de  $W_0^{1,2}(\Omega)$ . On le munit de la norme et du produit scalaire induit par  $W_0^{1,2}(\Omega)$ .

Pour établir les estimations entre la solution du problème continu et la solution du problème discrétisé, nous utilisons la méthode classique consistant à estimer l'erreur entre la solution du problème discrétisé et le projeté elliptique de la solution du problème continu. Nous allons introduire dès maintenant la notion de projecteur elliptique et donnons les estimations a priori qui en découlent. Ces résultats sont présentés dans [THO]. Dans toute la suite  $C, C', C_1, \dots$  représentent des constantes génériques indépendantes de  $\tau$  et de  $h$ . Pour simplifier les notations, dans tout ce paragraphe  $\|\cdot\|$  représente la norme dans  $L^2(\Omega)$ . S'il y a lieu de préciser la norme, on utilisera la notation  $\|\cdot\|_p$  pour désigner la norme dans  $L^p(\Omega)$ . On notera de plus par  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  le produit scalaire dans  $L^2(\Omega)$ .

**Lemme 2.1.**

Soit  $a$  une fonction de  $C^1(\overline{\Omega})$  et  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  tels que:

$$0 < \alpha \leq a \leq \beta.$$

On note par  $P_h(a)$  l'application de  $W_0^{1,2}(\Omega)$  sur  $V_h$  suivante:

$$\begin{aligned} P_h(a) : v \in W_0^{1,2}(\Omega) &\mapsto P_h(a)v \in V_h \text{ tel que:} \\ \langle a \nabla v, \nabla \phi \rangle &= \langle a \nabla P_h(a)v, \nabla \phi \rangle, \quad \forall \phi \in V_h. \end{aligned}$$

Si  $v \in W^{2,2}(\Omega)$ , on a l'estimation suivante:

$$\|v - P_h(a)v\|_{L^2(\Omega)} + h\|\nabla(v - P_h(a)v)\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|v\|_{W^{2,2}(\Omega)}h^2, \quad (2.1)$$

où  $C$  est une constante indépendante de  $h$  et de  $v$ .

*Preuve.*

Cette application est bien définie (en utilisant par exemple le théorème de Lax-Milgram [BRE]). L'estimation (2.1) est démontrée dans [THO] (Lemme 1, p. 150).  $\square$

Nous étendons maintenant cette définition à des fonctions dépendant d'un paramètre. Pour simplifier les notations, nous noterons par  $\partial_t$  la dérivée partielle par rapport au paramètre  $t$  (en l'occurrence la variable de temps).

**Lemme 2.2.**

Soit  $a$  un élément de  $C^1(\overline{Q}_T)$  tel que:

$$0 < \alpha \leq a \leq \beta < \infty.$$

On définit par  $P_h(a)$  l'application de  $C^1([0, T]; W_0^{1,2}(\Omega))$  sur  $C^1([0, T]; V_h)$  par:

$$\begin{aligned} P_h(a) : v \in C^1([0, T]; W_0^{1,2}(\Omega)) &\mapsto P_h(a)v \in C^1([0, T]; V_h) \text{ où} \\ \langle a(t)\nabla v(t), \nabla \phi \rangle &= \langle a(t)\nabla P_h(a)v(t), \nabla \phi \rangle, \quad \forall \phi \in V_h, \forall t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Si  $v \in C^2(\overline{Q}_T)$ , on a les estimations suivantes:

$$\|(v - P_h(a)v)(t)\|_{L^2(\Omega)} + h\|\nabla(v - P_h(a)v)(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^2, \quad (2.3)$$

$$\|\partial_t(v - P_h(a)v)(t)\|_{L^2(\Omega)} + h\|\nabla\partial_t(v - P_h(a)v)(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^2, \quad (2.4)$$

où  $C$  est une constante indépendante de  $h$  et de  $t$ .

*Preuve.*

L'existence de l'application  $P_h$  découle du lemme 2.1. L'estimation (2.3) se déduit directement de la relation (2.1). L'indépendance de la constante par rapport à  $t$  se déduit de l'hypothèse  $v \in C^2(\overline{Q}_T)$ . Nous allons maintenant prouver l'estimation (2.4) en nous inspirant d'un résultat de V. Thomée [THO] p. 152 lemme 3.

Fixons  $t \in [0, T]$ . Soit  $u \in W_0^{1,2}(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$  on note par  $I_h u$  l'interpolant de  $u$  dans  $V_h$  i.e.:

$$\begin{aligned} I_h u &\in V_h, \\ I_h u(P) &= v(P), \quad \text{pour tout point } P \text{ du maillage.} \end{aligned}$$

Si de plus  $u \in W^{2,2}(\Omega)$ , on a alors [THO] p. 3:

$$\|I_h u - u\| + h\|\nabla(I_h u - u)\| \leq Ch^2\|u\|_{W^{2,2}(\Omega)}. \quad (2.5)$$

On définit la fonction  $\eta = v - P_h(a)v$ . Soit  $\chi$  un élément de  $V_h$ , on peut réécrire l'équation (2.2) sous la forme:

$$\langle a\nabla\eta, \nabla\chi \rangle = 0.$$

En dérivant cette dernière relation par rapport au paramètre  $t$ , on obtient:

$$\langle \partial_t a\nabla\eta, \nabla\chi \rangle + \langle a\nabla\partial_t\eta, \nabla\chi \rangle = 0, \quad \forall \chi \in V_h. \quad (2.6)$$

On déduit alors:

$$\begin{aligned} \alpha\|\nabla\partial_t\eta\|^2 &\leq \langle a\nabla\partial_t\eta, \nabla\partial_t\eta \rangle, \\ &\leq \langle a\nabla\partial_t\eta, \nabla(\partial_tv - \chi) \rangle + \langle a\nabla\partial_t\eta, \nabla(\partial_tP_h(a)v - \chi) \rangle, \\ &\leq \langle a\nabla\partial_t\eta, \nabla(\partial_tv - \chi) \rangle + \langle \partial_t a\nabla\eta, \nabla(\chi - \partial_tP_h(a)v) \rangle, \\ &\leq C(\|\nabla\partial_t\eta\|\|\nabla(\chi - \partial_tv)\| + \|\nabla\eta\|\|\nabla(\chi - \partial_tP_h(a)v)\|). \end{aligned}$$

En choisissant  $\chi = I_h\partial_tv$ , on obtient:

$$\begin{aligned} \alpha\|\nabla\partial_t\eta\|^2 &\leq C' [Ch\|\partial_tv\|_{W^{2,2}(\Omega)}\|\nabla\partial_t\eta\| + \|\nabla\eta\|(\|\nabla(\chi - \partial_tv)\| + \|\nabla\partial_t\eta\|)], \\ &\leq \frac{\alpha}{2}\|\nabla\partial_t\eta\|^2 + C'(h^2\|\partial_tv\|_{W^{2,2}(\Omega)}^2 + \|\nabla\eta\|^2). \end{aligned}$$

De la relation (2.3), on tire l'inégalité suivante:

$$\|\nabla\partial_t\eta\| \leq C_1 h,$$

où  $C_1$  est une constante indépendante de  $h$  et de  $t$ .

D'autre part, soit  $\varphi$  une fonction de  $L^2(\Omega)$ , il existe une unique fonction  $\psi$  de  $W_0^{1,2}(\Omega) \cap W^{2,2}(\Omega)$  telle que:

$$-\nabla \cdot (a \nabla \psi) = \varphi,$$

avec  $\|\psi\|_{W^{2,2}(\Omega)} \leq C \|\varphi\|_{L^2(\Omega)}$ . Ce résultat est donné dans [BRE] p.182. Soit  $\chi \in V_h$ . En utilisant la relation (2.6), on peut alors écrire:

$$\begin{aligned} \langle \partial_t \eta, \varphi \rangle &= \langle \partial_t \eta, -\nabla \cdot (a \nabla \psi) \rangle \\ &= \langle a \nabla \partial_t \eta, \nabla \psi \rangle \\ &= \langle a \nabla \partial_t \eta, \nabla \psi \rangle - \langle \partial_t a \nabla \eta, \nabla \chi \rangle - \langle a \nabla \partial_t \eta, \nabla \chi \rangle, \\ &= \langle a \nabla \partial_t \eta, \nabla(\psi - \chi) \rangle + \langle \partial_t a \nabla \eta, \nabla(\psi - \chi) \rangle - \langle \partial_t a \nabla \eta, \nabla \psi \rangle \\ &= \langle a \nabla \partial_t \eta, \nabla(\psi - \chi) \rangle + \langle \partial_t a \nabla \eta, \nabla(\psi - \chi) \rangle - \langle \eta, \nabla \cdot (\partial_t a \nabla \psi) \rangle. \end{aligned}$$

Choisissons  $\chi = I_h \psi$ , on tire alors:

$$\begin{aligned} |\langle \partial_t \eta, \varphi \rangle| &\leq C(\|\nabla \partial_t \eta\| h \|\psi\|_{W^{2,2}(\Omega)} + \|\nabla \eta\| h \|\psi\|_{W^{2,2}(\Omega)} + \|\eta\| \|\psi\|_{W^{2,2}(\Omega)}), \\ &\leq C(\|\nabla \partial_t \eta\| h + \|\nabla \eta\| h + \|\eta\|) \|\varphi\|. \end{aligned}$$

En utilisant l'estimation de  $\|\nabla \partial_t \eta\|$  et l'inégalité (2.3), on obtient:

$$|\langle \partial_t \eta, \varphi \rangle| \leq C' h^2 \|\varphi\|, \quad \forall \varphi \in L^2(Q_T).$$

On conclut:

$$\|\partial_t \eta\| \leq C_2 h^2,$$

où  $C_2$  est une constante indépendante de  $h$  et de  $t$ .  $\square$

Nous aurons enfin besoin du lemme suivant:

**Lemme 2.3.**

Soit  $v \in C^1(\overline{Q_T})$  alors la fonction  $\nabla P_h(a)v$  est bornée dans  $(L^\infty(Q_T))^2$  par une constante  $C$  indépendante de  $h$ , c.à.d.

$$\|\nabla P_h(a)v\|_{L^\infty(Q_T)} \leq C, \quad \forall h > 0.$$

*Preuve.*

Ce résultat est démontré dans [THO], lemme 4 p. 152.  $\square$

Nous allons maintenant introduire le schéma numérique sur lequel portera notre étude. Soient  $N \in \mathbb{N}$  et  $\tau = \frac{T}{N}$ . On pose  $t_n = n\tau$ . On se propose de déterminer la suite  $(H_h^n, U_h^n)_{n=1}^N$ ,  $H_h^n, U_h^n \in V_h$  telle que:

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle \mu \frac{H_h^n - H_h^{n-1}}{\tau}, \phi \rangle + \\ \langle r(U_h^{n-1}) \nabla H_h^n, \nabla \phi \rangle = \langle f(t_n), \phi \rangle, \quad \forall \phi \in V_h, \quad n \leq N, \\ H_h^0 = 0, \quad \text{dans } \Omega, \end{array} \right. \quad (2.7)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle \frac{U_h^n - U_h^{n-1}}{\tau}, \phi \rangle + \langle k(U_h^{n-1}) \nabla U_h^n, \nabla \phi \rangle = \\ \langle r(U_h^{n-1}) |\nabla H_h^n|^2, \phi \rangle, \quad \forall \phi \in V_h, \quad n \leq N, \\ U_h^0 = P_h(k(U_0))U_0, \quad \text{dans } \Omega, \end{array} \right. \quad (2.8)$$

**Proposition 2.1.**

Soit  $k \in \mathbb{N}$ ,  $1 \leq k \leq N$ . Alors il existe une unique suite  $(H_h^n, U_h^n)_{n=1}^k$  avec  $H_h^n$  et  $U_h^n$  dans  $V_h$  solution du problème (2.7)-(2.8).

*Preuve.*

La démonstration se fait par récurrence. Pour  $k = 1$ , les fonctions  $H_h^0$  et  $U_h^0$  sont connues. On résout le problème suivant: Trouver  $H_h^1$  et  $U_h^1$  tel que:

$$\begin{aligned} \langle \mu H_h^1, \phi \rangle + \langle \tau r(U_h^0) \nabla H_h^1, \nabla \phi \rangle &= \langle \tau f(t_n) + H_h^0, \phi \rangle, \quad \forall \phi \in V_h, \\ \langle U_h^1, \phi \rangle + \langle \tau k(U_h^0) \nabla U_h^1, \nabla \phi \rangle &= \langle r(U_h^0) |\nabla H_h^1|^2 + U_h^0, \phi \rangle, \quad \forall \phi \in V_h. \end{aligned}$$

Ce problème est bien défini. En utilisant le théorème de Lax-Milgram, on obtient une unique solution  $(H_h^1, U_h^1)$  à ce problème. Supposons maintenant que la proposition soit juste pour  $k = n - 1$ . Dans ce cas les fonctions  $H_h^{n-1}$  et  $U_h^{n-1}$  sont connues. En faisant un raisonnement similaire au cas  $k = 1$ , on obtient une unique solution  $(H_h^n, U_h^n)$ . La solution du problème (2.7)-(2.8) est donnée pour  $k = N$ .  $\square$

Comme nous l'avons indiqué au début de ce chapitre, nous sommes amenés à faire une hypothèse de régularité sur la solution du problème discrétisé.

**Hypothèse de régularité.**

Soit  $(H_h^n, U_h^n)_n$  la solution du problème (2.7)-(2.8). Nous supposons dans toute la suite qu'il existe  $C$  tel que  $\forall N \in \mathbb{N}$  et  $\forall h > 0$  on a:

$$\|\nabla H_h^n\|_\infty \leq C, \quad n \leq N. \quad (2.9)$$

Nous introduisons la notation suivante:

$$\bar{\partial}_t H_h^n \stackrel{\text{def}}{=} \frac{H_h^n - H_h^{n-1}}{\tau}.$$

Nous poserons  $f^n = f(t_n)$  et nous définirons les quatités suivantes:

$$\begin{aligned}
\zeta_h &\stackrel{\text{def}}{=} H - P_h(r(U))H, & \zeta_h^n &\stackrel{\text{def}}{=} \zeta_h(t_n), \\
\tilde{H}_h^n &\stackrel{\text{def}}{=} P_h(r(U(t_n)))H(t_n), & \xi_h^n &\stackrel{\text{def}}{=} \tilde{H}_h^n - H_h^n, \\
\phi_h &\stackrel{\text{def}}{=} U - P_h(k(U))U, & \phi_h^n &\stackrel{\text{def}}{=} \phi_h(t_n), \\
\tilde{U}_h^n &\stackrel{\text{def}}{=} P_h(k(U(t_n)))U(t_n), & \psi_h^n &\stackrel{\text{def}}{=} \tilde{U}_h^n - U_h^n, \\
\partial_t \zeta_h^n &\stackrel{\text{def}}{=} (\partial_t \zeta_h)(t_n), & \partial_t \phi_h^n &\stackrel{\text{def}}{=} (\partial_t \phi_h)(t_n).
\end{aligned}$$

**Corollaire 2.1.**

Des lemmes 2.1 et 2.2, on déduit les inégalités suivantes:

$$\|\phi_h^n\| + h\|\nabla\phi_h^n\| \leq Ch^2, \quad (2.10)$$

$$\|\zeta_h^n\| + h\|\nabla\zeta_h^n\| \leq Ch^2, \quad (2.11)$$

$$\|\partial_t\phi_h^n\| + \|\partial_t\zeta_h^n\| \leq Ch^2. \quad (2.12)$$

où  $C_1, C_2$  et  $C_3$  sont des constantes indépendantes de  $h$  et de  $n$ .

**3) Les estimations d'erreurs.**

Nous allons maintenant établir deux inégalités qui nous permettront de mesurer l'erreur entre  $H_h^n$  et  $H(t_n)$  ainsi que l'erreur entre  $U_h^n$  et  $U(t_n)$ . Les fonctions  $\zeta_h^n$  et  $\phi_h^n$  peuvent être majorées en fonction de  $h$  grâce aux relations (2.10), (2.11) et (2.12). Il nous reste à estimer  $\xi_h^n$  et  $\psi_h^n$ .

**Lemme 3.1.**

Soit  $k \in \mathbb{N}, 1 \leq k \leq N$ . Alors, on a l'inégalité suivante:

$$\sum_{n=1}^k \tau \|\nabla \xi_h^n\|^2 \leq C(\tau^2 + h^4 + \sum_{n=0}^{k-1} \tau \|\psi_h^n\|^2), \quad (3.1)$$

où  $C$  est une constante indépendante de  $h$  et de  $n$ .

*Preuve.*

Soit  $v$  une fonction de  $V_h$  et posons pour  $1 \leq n \leq N$

$$A^n(v) = \langle \mu \bar{\partial}_t \xi_h^n, v \rangle + \langle r(U_h^{n-1}) \nabla \xi_h^n, \nabla v \rangle .$$

On peut alors écrire:

$$\begin{aligned}
A^n(v) &= \langle \mu \bar{\partial}_t \tilde{H}_h^n, v \rangle + \langle r(U_h^{n-1}) \nabla \tilde{H}_h^n, \nabla v \rangle \\
&\quad - \langle \mu \bar{\partial}_t H_h^n, v \rangle - \langle r(U_h^{n-1}) \nabla H_h^n, \nabla v \rangle \\
&= \langle \bar{\partial}_t \tilde{H}_h^n, v \rangle + \langle r(U_h^{n-1}) \nabla \tilde{H}_h^n, \nabla v \rangle \\
&\quad - \langle \mu \bar{\partial}_t H(t_n), v \rangle - \langle r(U(t_n)) \nabla H(t_n), \nabla v \rangle \\
&= \langle \mu \bar{\partial}_t \tilde{H}_h^n - \mu \bar{\partial}_t H(t_n), v \rangle + \langle \{r(U_h^{n-1}) - r(U(t_n))\} \nabla \tilde{H}_h^n, \nabla v \rangle \\
&\quad + \langle r(U(t_n)) (\nabla \tilde{H}_h^n - \nabla H(t_n)), \nabla v \rangle.
\end{aligned}$$

Par définition du projecteur elliptique, on a l'égalité:

$$\langle r(U(t_n)) (\nabla \tilde{H}_h^n - \nabla H(t_n)), \nabla v \rangle = 0.$$

Prenons pour fonction  $v$  la fonction  $\xi_h^n$ ; on obtient:

$$\langle \bar{\partial}_t \xi_h^n, \xi_h^n \rangle = \frac{1}{2} \bar{\partial}_t \|\xi_h^n\|^2 + \frac{\tau}{2} \|\bar{\partial}_t \xi_h^n\|^2. \quad (3.2)$$

D'autre part, l'hypothèse (II.2.8) donne:

$$\langle r(U_h^{n-1}) \nabla \xi_h^n, \nabla \xi_h^n \rangle \geq \alpha \|\nabla \xi_h^n\|^2. \quad (3.3)$$

On obtient par conséquent:

$$\begin{aligned}
\frac{\mu}{2} \bar{\partial}_t \|\xi_h^n\|^2 + \alpha \|\nabla \xi_h^n\|^2 &\leq A_n(\xi_h^n) \\
&\leq \mu \|\bar{\partial}_t \tilde{H}_h^n - \bar{\partial}_t H(t_n)\| \|\xi_h^n\| \\
&\quad + \|\{r(U_h^{n-1}) - r(U(t_n))\} \nabla \tilde{H}_h^n\| \|\nabla \xi_h^n\|.
\end{aligned}$$

En utilisant le lemme 2.3, on a l'estimation suivante:

$$\begin{aligned}
\frac{\mu}{2} \bar{\partial}_t \|\xi_h^n\|^2 + \alpha \|\nabla \xi_h^n\|^2 &\leq \frac{\mu^2}{2\varepsilon} (\|\bar{\partial}_t \tilde{H}_h^n - \bar{\partial}_t H(t_n)\|^2 + C \|r(U_h^{n-1}) - r(U(t_n))\|^2) \\
&\quad + \frac{\varepsilon}{2} (\|\xi_h^n\|^2 + \|\nabla \xi_h^n\|^2), \quad \forall \varepsilon > 0.
\end{aligned}$$

L'inégalité de Poincaré nous donne:

$$\|\xi_h^n\|^2 + \|\nabla \xi_h^n\|^2 \leq S \|\nabla \xi_h^n\|^2.$$

En prenant  $\varepsilon = \frac{\alpha}{8}$ , on obtient finalement:

$$\begin{aligned}
\frac{\mu}{2} \bar{\partial}_t \|\xi_h^n\|^2 + \frac{\alpha}{2} \|\nabla \xi_h^n\|^2 &\leq \frac{\mu^2 S}{2\alpha} (\|\bar{\partial}_t \tilde{H}_h^n - \partial_t H(t_n)\|^2 + C \|r(U_h^{n-1}) - r(U(t_n))\|^2) \\
&\leq C' (\|\bar{\partial}_t \tilde{H}_h^n - \bar{\partial}_t H(t_n)\|^2 + \|\bar{\partial}_t H(t_n) - \partial_t H(t_n)\|^2 \\
&\quad + \|r(U_h^{n-1}) - r(U(t_n))\|^2) \\
&\leq C' (\|\bar{\partial}_t \zeta_h^n\|^2 + \|\bar{\partial}_t H(t_n) - \partial_t H(t_n)\|^2 \\
&\quad + \|r(U_h^{n-1}) - r(U(t_n))\|^2),
\end{aligned}$$

où  $\bar{\partial}_t H(t_n) = \tau^{-1}(H(t_n) - H(t_{n-1}))$ .

Nous allons estimer le terme  $\|\bar{\partial}_t H(t_n) - \partial_t H(t_n)\|$  en utilisant un développement de Taylor de la fonction  $H(t)$  en  $t_n$ . Il existe  $\varepsilon \in ]0, 1[$  tel que:

$$\frac{H(t_n) - H(t_{n-1})}{\tau} = \partial_t H(t_n) + \frac{\tau}{2} \partial_{tt} H(t_n - \varepsilon\tau).$$

En utilisant le fait que  $H \in C^2(\bar{Q}_T)$ , on obtient l'estimation:

$$\|\bar{\partial}_t H(t_n) - \partial_t H(t_n)\| \leq C\tau. \quad (3.4)$$

D'autre part, on a:

$$\bar{\partial}_t \zeta_h^n = \frac{1}{\tau} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \partial_t \zeta_h.$$

On peut donc écrire en utilisant l'inégalité (2.11):

$$\begin{aligned}
\|\bar{\partial}_t \zeta_h^n\| &= \frac{1}{\tau} \left\| \int_{t_{n-1}}^{t_n} \partial_t \zeta_h(s) ds \right\| \\
&\leq \frac{1}{\tau} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \|\partial_t \zeta_h(s)\| ds \\
&\leq \frac{1}{\tau} \int_{t_{n-1}}^{t_n} Ch^2 ds \\
&\leq Ch^2.
\end{aligned}$$

On a donc:

$$\begin{aligned}
\|\bar{\partial}_t \tilde{H}_h^n - \partial_t H(t_n)\|^2 &\leq 2\|\bar{\partial}_t \tilde{H}_h^n - \bar{\partial}_t H(t_n)\|^2 + 2\|\bar{\partial}_t H(t_n) - \partial_t H(t_n)\|^2 \\
&\leq C(\tau^2 + h^4).
\end{aligned} \quad (3.5)$$

Enfin, de l'inégalité (1.5) on déduit en utilisant le lemme 1.1:

$$\begin{aligned}
\|r(U_h^{n-1}) - r(U(t_n))\| &\leq C\|U_h^{n-1} - U(t_n)\| \\
&\leq C(\|U_h^{n-1} - U(t_{n-1})\| + \|U(t_{n-1}) - U(t_n)\|) \\
&\leq C'(\|U_h^{n-1} - U(t_{n-1})\| + \tau) \\
&\leq C'(\|\psi_h^{n-1} + \phi_h^{n-1}\| + \tau).
\end{aligned}$$

De ces estimations et de l'inégalité (2.10), on obtient finalement:

$$\frac{1}{2}\bar{\partial}_t\|\xi_h^n\|^2 + \frac{\alpha}{2}\|\nabla\xi_h^n\|^2 \leq C_1(\tau^2 + h^4 + \|\psi_h^{n-1}\|^2).$$

En multipliant cette dernière relation par  $\tau$  et en effectuant la somme sur l'indice  $n$  de 1 à  $k$ , on trouve:

$$\frac{1}{2}(\|\xi_h^k\|^2 - \|\xi_h^0\|^2) + \frac{\alpha}{2}\sum_{n=1}^k \tau\|\nabla\xi_h^n\|^2 \leq C_1(h^4 + \tau^2 + \sum_{n=1}^k \tau\|\psi_h^{n-1}\|^2).$$

Par hypothèse  $\xi_h^0 = 0$ . D'où le résultat.  $\square$

**Lemme 3.2.**

Soit  $k \in \mathbb{N}$ ,  $1 \leq k \leq N$ . Alors, on a l'inégalité suivante:

$$\|\psi_h^k\|^2 \leq C(h^2 + \tau^2 + \sum_{n=0}^{k-1} \tau\|\psi_h^n\|^2), \quad (3.6)$$

où  $C$  est une constante indépendante de  $h$  et de  $\tau$ .

*Preuve.*

Soit  $v$  un élément de  $V_h$  et posons

$$B^n(v) = \langle \bar{\partial}_t \psi_h^n, v \rangle + \langle k(U_h^{n-1})\nabla\psi_h^n, \nabla v \rangle.$$

On peut alors écrire:

$$\begin{aligned}
B^n(v) &= \langle \bar{\partial}_t \tilde{U}_h^n, v \rangle + \langle k(U_h^{n-1})\nabla\tilde{U}_h^n, \nabla v \rangle \\
&\quad - \langle \bar{\partial}_t U_h^n, v \rangle - \langle k(U_h^{n-1})\nabla U_h^n, \nabla v \rangle \\
&= \langle \bar{\partial}_t \tilde{U}_h^n, v \rangle + \langle k(U_h^{n-1})\nabla\tilde{U}_h^n, \nabla v \rangle \\
&\quad - \langle \partial_t U(t_n), v \rangle - \langle k(U(t_n))\nabla U(t_n), \nabla v \rangle \\
&\quad + \langle r(U(t_n))|\nabla H(t_n)|^2, v \rangle - \langle r(U_h^{n-1})|\nabla H_h^n|^2, v \rangle \\
&= \langle \bar{\partial}_t \tilde{U}_h^n - \partial_t U(t_n), v \rangle + \langle \{k(U_h^{n-1}) - k(U(t_n))\}\nabla\tilde{U}_h^n, \nabla v \rangle \\
&\quad + \langle k(U(t_n))(\nabla\tilde{U}_h^n - \nabla U(t_n)), \nabla v \rangle \\
&\quad + \langle r(U(t_n))|\nabla H(t_n)|^2 - r(U_h^{n-1})|\nabla H_h^n|^2, v \rangle.
\end{aligned}$$



Par définition du projecteur elliptique, on a

$$\langle k(U(t_n))(\nabla\tilde{U}_h^n - \nabla U(t_n)), \nabla v \rangle = 0.$$

Prenons pour fonction  $v$  la fonction  $\psi_h^n$ , on obtient:

$$\langle \bar{\partial}_t \psi_h^n, \psi_h^n \rangle = \frac{1}{2} \bar{\partial}_t \|\psi_h^n\|^2 + \frac{\tau}{2} \|\bar{\partial}_t \psi_h^n\|^2.$$

D'autre part, on peut écrire en utilisant l'hypothèse (II.2.8):

$$\langle k(U_h^{n-1}) \nabla \psi_h^n, \nabla \psi_h^n \rangle \geq \alpha \|\nabla \psi_h^n\|^2.$$

On obtient par conséquent:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \bar{\partial}_t \|\psi_h^n\|^2 + \alpha \|\nabla \psi_h^n\|^2 &\leq B(\psi_h^n), \\ &\leq \|\bar{\partial}_t \tilde{U}_h^n - \partial_t U(t_n)\| \|\psi_h^n\| \\ &\quad + \|\{k(U_h^{n-1}) - k(U(t_n))\} \nabla \tilde{U}_h^n\| \|\nabla \psi_h^n\| \\ &\quad + \|r(U(t_n)) |\nabla H(t_n)|^2 - r(U_h^{n-1}) |\nabla H_h^n|^2\| \|\psi_h^n\|. \end{aligned}$$

En utilisant le lemme 2.3, on a l'estimation suivante:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \bar{\partial}_t \|\psi_h^n\|^2 + \alpha \|\nabla \psi_h^n\|^2 &\leq \frac{1}{2\varepsilon} (\|\bar{\partial}_t \tilde{U}_h^n - \partial_t U(t_n)\|^2 + C \|k(U_h^{n-1}) - k(U(t_n))\|^2 \\ &\quad + \|r(U(t_n)) |\nabla H(t_n)|^2 - r(U_h^{n-1}) |\nabla H_h^n|^2\|^2) \\ &\quad + \frac{\varepsilon}{2} (\|\psi_h^n\|^2 + \|\nabla \psi_h^n\|^2). \end{aligned}$$

L'inégalité de Poincaré nous donne:

$$\|\psi_h^n\|^2 + \|\nabla \psi_h^n\|^2 \leq S \|\nabla \psi_h^n\|^2.$$

En prenant  $\varepsilon = \frac{2\alpha}{S}$ , on obtient:

$$\begin{aligned} \bar{\partial}_t \|\psi_h^n\|^2 &\leq C (\|\bar{\partial}_t \tilde{U}_h^n - \partial_t U(t_n)\|^2 + \|k(U_h^{n-1}) - k(U(t_n))\|^2 + \\ &\quad \|r(U(t_n)) |\nabla H(t_n)|^2 - r(U_h^{n-1}) |\nabla H_h^n|^2\|^2). \end{aligned}$$

Nous allons maintenant estimer le second membre de cette inégalité. Le terme  $\|\bar{\partial}_t \tilde{U}_h^n - \partial_t U(t_n)\|$  se majore de la même manière que le terme  $\|\bar{\partial}_t \tilde{H}_h^n - \partial_t H(t_n)\|$  (Lemme 3.1). On a par conséquent:

$$\|\bar{\partial}_t \tilde{U}_h^n - \partial_t U(t_n)\|^2 \leq C(h^4 + \tau^2).$$

En utilisant l'hypothèse (1.5) et le lemme 1.1, on peut écrire:

$$\begin{aligned}
\|k(U_h^{n-1}) - k(U(t_n))\| &\leq K\|U_h^{n-1} - U(t_n)\| \\
&\leq C(\|U_h^{n-1} - U(t_{n-1})\| + \|U(t_{n-1}) - U(t_n)\|) \\
&\leq C'(\|U_h^{n-1} - U(t_{n-1})\| + \tau) \\
&\leq C'(\|\psi_h^{n-1}\| + \|\phi_h^{n-1}\| + \tau) \\
&\leq C''(\|\psi_h^{n-1}\| + h^2 + \tau).
\end{aligned}$$

Il reste à estimer le terme  $r(U(t_n))|\nabla H(t_n)|^2 - r(U_h^{n-1})|\nabla H_h^n|^2$ . On décompose ce terme de la manière suivante:

$$\begin{aligned}
&\|r(U(t_n))|\nabla H(t_n)|^2 - r(U_h^{n-1})|\nabla H_h^n|^2\| \\
&\leq \|(r(U(t_n)) - r(U_h^{n-1}))|\nabla H(t_n)|^2\| + \|r(U_h^{n-1})(|\nabla H(t_n)|^2 - |\nabla H_h^n|^2)\| \\
&\leq C[\|r(U(t_n)) - r(U_h^{n-1})\| + \|(\nabla H(t_n) - \nabla H_h^n)(\nabla H(t_n) + \nabla H_h^n)\|].
\end{aligned}$$

En utilisant l'hypothèse (1.5) et le lemme 1.1, on peut écrire:

$$\begin{aligned}
\|r(U_h^{n-1}) - r(U(t_n))\| &\leq K\|U_h^{n-1} - U(t_n)\| \\
&\leq C(\|U_h^{n-1} - U(t_{n-1})\| + \|U(t_{n-1}) - U(t_n)\|) \\
&\leq C'(\|U_h^{n-1} - U(t_{n-1})\| + \tau) \\
&\leq C'(\|\psi_h^{n-1}\| + \|\phi_h^{n-1}\| + \tau) \\
&\leq C''(\|\psi_h^{n-1}\| + h^2 + \tau).
\end{aligned}$$

Nous utilisons maintenant l'hypothèse (2.9). Le terme  $\nabla H(t_n) + \nabla H_h^n$  est majoré dans  $L^\infty(Q_T)$  par une constante indépendante de  $h$  et de  $n$ . On déduit alors l'estimation suivante:

$$\begin{aligned}
&\|r(U(t_n))|\nabla H(t_n)|^2 - r(U_h^{n-1})|\nabla H_h^n|^2\| \\
&\leq C_2(\|\psi_h^{n-1}\| + h^2 + \tau + \|\nabla H(t_n) - \nabla H_h^n\|)
\end{aligned}$$

On obtient alors grâce à la relation (2.11):

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\bar{\partial}_t\|\psi_h^n\|^2 &\leq C_3(h^4 + \tau^2 + \|\psi_h^{n-1}\|^2 + \|\nabla H(t_n) - \nabla H_h^n\|^2) \\
&\leq C_3(h^4 + \tau^2 + \|\psi_h^{n-1}\|^2 + 2\|\nabla \zeta_h^n\|^2 + 2\|\nabla \xi_h^n\|^2) \\
&\leq C_4(h^2 + \tau^2 + \|\psi_h^{n-1}\|^2 + \|\nabla \xi_h^n\|^2).
\end{aligned}$$

En multipliant cette dernière équation par  $\tau$  et en sommant sur l'indice  $n$  de 1 à  $k$ , on obtient

$$\|\psi_h^k\|^2 - \|\psi_h^0\|^2 \leq C''(h^2 + \tau^2 + \sum_{n=1}^k \tau\|\psi_h^{n-1}\|^2 + \sum_{n=1}^k \tau\|\nabla \xi_h^n\|^2).$$

Le terme  $\psi_h^0$  est nul par définition de la condition initiale. En utilisant la relation (3.1), on obtient la majoration (3.6).  $\square$

**Remarque 3.1.**

La majoration de  $\|\nabla\zeta_h^n\|$  est d'ordre  $h$ . Ce terme apparait à cause du terme contenant le gradient se trouvant au second membre de l'équation (2.8). On perd ainsi un ordre.

**Remarque 3.2.**

On s'aperçoit néanmoins que numériquement l'erreur en norme  $L^\infty$  entre la solution calculée et la solution exacte est d'ordre 2.

Avant de démontrer le résultat principal de cette section, nous avons besoin du lemme suivant.

**Lemme 3.3(Inégalité de Gronwall discrète).**

Soient  $(a_n)_n$  et  $(b_n)_n$  des suites de réels positifs et  $\tau > 0$  tels que:

$$a_n \leq b_n + \sum_{k=0}^{n-1} \tau a_k, \quad \forall n \geq 1,$$

avec  $a_0 \leq b_0$ . Alors, on a l'inégalité suivante:

$$a_n \leq b_n \exp(\tau n). \quad (3.7)$$

On trouvera cette version du lemme de Gronwall dans [ZEN], p. 43.  $\square$

Nous pouvons maintenant énoncer le

**Théorème 3.1.**

On a les estimations suivantes:

$$\|\psi_h^k\| \leq C(\tau + h), \quad \forall k \leq N, \quad (3.8)$$

$$\|\nabla\xi_h^k\| \leq C(\tau + h), \quad \forall k \leq N, \quad (3.9)$$

où  $C$  est une constante indépendante de  $h$ ,  $n$ , et  $N$ .

*Preuve.*

La relation (3.6) nous donne:

$$\|\psi_h^k\|^2 \leq C(h^2 + \tau^2 + \sum_{n=0}^{k-1} \tau \|\psi_h^n\|^2), \quad k \leq N.$$

En utilisant le lemme 3.3, on obtient alors

$$\begin{aligned} \|\psi_h^k\|^2 &\leq C(h^2 + \tau^2) \exp(k\tau), \\ &\leq C(h^2 + \tau^2) \exp(N\tau), \\ &\leq C_4(h^2 + \tau^2). \end{aligned}$$

La deuxième relation se déduit de l'inégalité (3.1).  $\square$

**Corollaire 3.1.**

On a les estimations suivantes:

$$\begin{aligned}\|U_h^n - U(t_n)\| &\leq C(\tau + h), \quad \forall k \leq N, \\ \|\nabla H_h^n - \nabla H(t_n)\| &\leq C(\tau + h), \quad \forall k \leq N.\end{aligned}$$

*Preuve.*

Ce résultat se déduit du théorème 3.1 et des estimations du projecteur elliptique du corollaire 2.1.  $\square$

Les estimations d'erreurs que nous avons obtenues nécessitent une hypothèse supplémentaire sur la régularité des solutions discrètes. C'est le terme quadratique  $|\nabla H^2|$  qui en est la cause principale. Les estimations d'erreurs utilisent la formulation variationnelle du problème et les majorations s'effectuent dans les espaces Hilbertiens de types  $L^2$ . Ces espaces sont très mal adaptés à ce type de problème ce qui nous a conduit à faire des hypothèses supplémentaires à la fois sur la solution exacte mais aussi sur la solution discrète.

## CHAPITRE IV

### QUELQUES RÉSULTATS NUMÉRIQUES

#### Resumé

Nous présentons dans ce quatrième chapitre les schémas numériques utilisés pour une mise en œuvre sur ordinateur. Nous présentons quelques méthodes visant à réduire le coût de calcul et nous donnons quelques exemples de résultats.

## Introduction.

Nous présentons dans ce chapitre les schémas numériques utilisés pour évaluer une approximation du champ magnétique  $H$  et de la température  $\theta$  d'un corps chauffé par induction électromagnétique.

Dans une première section, nous étudions tout d'abord le modèle monodimensionnel proposé dans le chapitre I. Ce modèle a l'avantage d'être simple et de simuler assez fidèlement les procédés industriels utilisés dans le cadre du chauffage par induction. Nous donnons une description détaillée des éléments finis utilisés dans les schémas numériques du modèle monodimensionnel. Sous certaines conditions, nous pouvons déterminer une solution exacte du problème électromagnétique. On compare dans ces cas simples la solution calculée et la solution exacte.

Les grandeurs physiques mises en jeu, la température et le champ magnétique, ont des vitesses d'évolution très différentes. Pratiquement, l'accroissement de la température est de quelques degrés par seconde alors que le champ magnétique oscille à des fréquences de plusieurs milliers de cycles par seconde. Ce fait nous amènera à considérer des échelles de temps distinctes; en particulier nous introduirons deux discrétisations temporelles, l'une pour l'équation électromagnétique, l'autre pour l'équation de la chaleur. Nous appellerons cette méthode de "méthode des pas mixtes". Nous en donnerons une description dans un deuxième paragraphe.

Certains matériaux tels l'acier, le Nickel ou le Cobalt se caractérisent par une perméabilité magnétique dépendante du champ magnétique. Cette propriété des matériaux ferromagnétiques entraîne d'importantes complications sur le plan numérique, en particulier les coûts de calcul s'avèrent prohibitifs. Ces matériaux sont fortement utilisés dans l'industrie; il est donc important de prendre en compte leur spécificité. Nous introduirons une méthode permettant de diminuer de manière conséquente le coût du calcul sans pour autant altérer la qualité des résultats.

Certaines géométries plus complexes ne peuvent être traitées avec le modèle monodimensionnel et nécessitent un modèle bidimensionnel pour rendre compte de la réalité physique du problème. Nous présenterons le schéma bidimensionnel déduit du modèle mathématique "en tension" proposé dans le chapitre I. Nous donnerons un certain nombre de comparaisons entre les résultats obtenus par calcul et les mesures physiques effectuées en milieu industriel.

### 1) Le modèle monodimensionnel.

Cette section a pour but l'étude du modèle monodimensionnel. Nous supposons dans ce paragraphe que la géométrie du système inducteur-induit a une symétrie de révolution. L'inducteur et l'induit se présentent donc sous la forme d'anneaux. On note par  $R_1$  et  $R_2$  les rayons intérieur et extérieur de l'induit et  $R_3$  et  $R_4$  ceux de l'inducteur. On impose  $0 \leq R_1 < R_2 < R_3 < R_4$ . On désigne par  $\Omega_1$  l'ouvert  $]R_1, R_2[$  et par  $\Omega_0$  l'ouvert  $]R_3, R_4[$ . La réunion de ces deux ouverts est notée par  $\Omega$  et on désigne par  $\Lambda$  le domaine  $]0, R_4[$  (fig. 1.1).

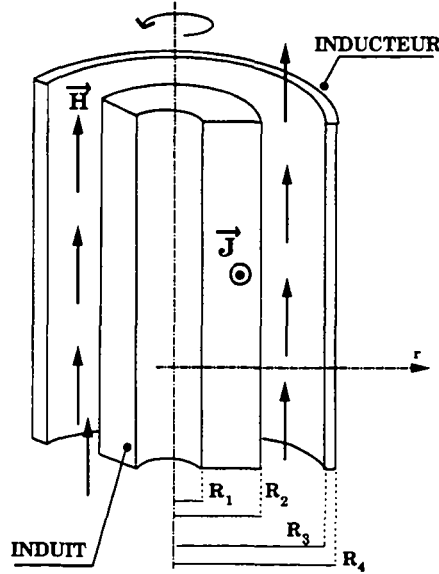


Fig. 1.1

Pour définir mathématiquement notre problème, nous introduisons les espaces  $X$  et  $Y$  suivants:

$$\begin{aligned}
 X &= \{u \in \mathcal{D}'(\Lambda), \quad \sqrt{r}u \in L^2(\Lambda), \quad \sqrt{r}u' \in L^2(\Lambda), \\
 &\quad u(R_4) = 0, u|_{]0, R_1[} = \text{const.}, u|_{]R_2, R_3[} = \text{const.}\}, \\
 Y &= \{u \in \mathcal{D}'(\Omega_1), \quad \sqrt{r}u \in L^2(\Omega_1), \quad \sqrt{r}u' \in L^2(\Omega_1)\}.
 \end{aligned}$$

Soit  $T > 0$ , nous nous intéressons aux solutions du problème suivant:

Trouver  $(H, \theta) \in L^2(0, T; X) \times L^2(0, T; Y)$  tel que:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Lambda} \mu H \phi r dr + \int_{\Omega} \rho \frac{\partial H}{\partial r} \frac{\partial \phi}{\partial r} r dr = \frac{v}{2\pi} \phi(R_3), \quad \forall \phi \in X, \quad (1.1)$$

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega_1} C_p \frac{\partial \theta}{\partial t} \psi r dr + \int_{\Omega_1} \lambda \frac{\partial \theta}{\partial r} \frac{\partial \psi}{\partial r} r dr + \alpha \theta(\cdot, R_2)^4 \psi(R_2) R_2 \\
 = \int_{\Omega_1} \rho \left| \frac{\partial H}{\partial r} \right|^2 \psi r dr, \quad \forall \psi \in Y, \quad (1.2)
 \end{aligned}$$

$$\theta(0, \cdot) = \theta_0, \quad H(0, \cdot) = H_0.$$

La fonction  $v$  représente la tension fournie par le générateur. Les conditions initiales  $H_0$  et  $\theta_0$  sont deux fonctions connues de  $X$  et  $Y$  respectivement. Rappelons que les fonctions  $\rho$ ,  $C_p$ , et  $\lambda$  dépendent de  $\theta$  et que la fonction  $\mu$  dépend à la fois de  $\theta$  et de  $H$ . Notre but est d'évaluer une solution approchée du problème défini ci-dessus sur l'intervalle de temps  $[0, T]$ .

Soient  $N$  un entier et  $(t_i)_{i=1}^N$  une subdivision régulière de l'intervalle  $[0, T]$  définie par  $t_i = i\tau$ , où  $\tau = \frac{T}{N}$ . Nous allons construire le schéma numérique de la manière suivante. Les fonctions  $H^n$  et  $\theta^n$  étant supposées connues à l'instant  $t_n$ , on veut évaluer une approximation  $H^{n+1}$  et  $\theta^{n+1}$  de  $H$  et  $\theta$  au temps  $t_{n+1}$ .

On approche les valeurs  $C_p(\theta(t_{n+1}))$ ,  $\rho(\theta(t_{n+1}))$ , et  $\lambda(\theta(t_{n+1}))$  par les valeurs  $C_p^n = C_p(\theta^n)$ ,  $\rho^n = \rho(\theta^n)$  et  $\lambda^n = \lambda(\theta^n)$  respectivement; on pose  $\mu^n = \mu(H^n, \theta^n)$  qui sont clairement des fonctions de  $r$ . On remplace les expressions des dérivées en temps par un schéma d'Euler.

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}(\mu H)(t^{n+1}) &\approx \frac{\mu^{n+1} H^{n+1} - \mu^n H^n}{\tau}, \\ C_p \frac{\partial \theta}{\partial t}(t^{n+1}) &\approx C_p^n \frac{\theta^{n+1} - \theta^n}{\tau}.\end{aligned}$$

La fonction  $\mu^{n+1}$  ne peut pas être évaluée puisque les fonctions  $H^{n+1}$  et  $\theta^{n+1}$  ne sont pas connues. On utilise donc une extrapolation de  $\mu^{n+1}$  en utilisant la fonction  $\bar{\mu}^{n+1}$  définie comme suit:

$$\bar{\mu}^{n+1} = 2\mu^n - \mu^{n-1}, \quad 0 \leq n \leq N,$$

en posant  $\mu^{-1} = \mu^0$ .

Nous présentons maintenant le problème semi-discrétisé; à chaque pas  $t_{n+1}$ , on résout le problème suivant: Etant connues  $H^n$  et  $\theta^n$ , calculer  $(H^{n+1}, \theta^{n+1})$  solution des équations:

$$\int_{\Lambda} \frac{\bar{\mu}^{n+1} H^{n+1} - \mu^n H^n}{\tau} \phi r dr + \int_{\Omega} \rho^n \frac{dH^{n+1}}{dr} \frac{d\phi}{dr} r dr = \frac{v^{n+1}}{2\pi} [\phi], \quad \forall \phi \in X, \quad (1.3)$$

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_1} C_p^n \frac{\theta^{n+1} - \theta^n}{\tau} \psi r dr + \int_{\Omega_1} \lambda^n \frac{d\theta^{n+1}}{dr} \frac{d\psi}{dr} r dr + \\ \alpha(\theta^n(R_2))^4 \psi(R_2) R_2 = \int_{\Omega_1} \rho^n \left( \frac{dH^{n+1}}{dr} \right)^2 \psi r dr, \quad \forall \psi \in Y, \quad (1.4)\end{aligned}$$

où  $v^n = v(t_n)$ .

Nous cherchons une solution numérique du problème ci-dessus en utilisant des fonctions affines par morceaux, continues sur tout le domaine  $[0, R_4]$ . On considère une subdivision  $(r_i)_{i=0}^S$  en espace définie par:

$$0 \leq R_1 = r_1 < r_2 < \dots < r_{S_2} = R_2 < R_3 = r_{S_3} < \dots < r_{S_4} = r_S = R_4.$$

On suppose que le pas de la subdivision est inférieur à un paramètre  $h$ . Dans le chapitre I, nous avons montré que sur le domaine  $\Lambda \setminus \bar{\Omega}$  le champ  $H$  ne dépend que du temps. Par conséquent, les fonctions de base qui définissent les espaces discrétisés doivent être choisies constantes sur  $\Lambda \setminus \bar{\Omega}$ . On définit les deux espaces suivants:

$$\begin{aligned}X_h = \{ \phi \in C^0(\bar{\Omega}); \phi|_{[r_i, r_{i+1}]} \in \mathcal{P}_1([r_i, r_{i+1}]), 0 \leq i \leq S-1, \phi(R_4) = 0 \\ \text{et } \phi|_{[0, R_1]} = \text{const.}, \phi|_{[R_2, R_3]} = \text{const.} \}, \\ Y_h = \{ \psi \in C^0(\bar{\Omega}_1); \psi|_{[r_i, r_{i+1}]} \in \mathcal{P}_1([r_i, r_{i+1}]), 1 \leq i \leq S_2-1 \},\end{aligned}$$



où  $\mathcal{P}_1([a, b])$  désigne l'espace des polynômes de degré un sur  $[a, b]$ . Une base de  $X_h$  est donnée par les fonctions suivantes:

1) La première fonction  $\phi_1$  est donnée par:

$$\phi_1 = \begin{cases} 1, & 0 \leq r \leq R_1, \\ \frac{r_2 - r}{r_2 - r_1}, & r_1 \leq r \leq r_2, \\ 0, & r_2 \leq r \leq R_4. \end{cases}$$

2) Les fonctions de base correspondant aux points intérieurs sont définies par des fonctions "chapeaux" de la manière suivante. Soit  $i, 2 \leq i \leq S_2 - 1$  ou  $S_3 + 1 \leq i \leq S_4 - 1$ , on a:

$$\phi_i = \begin{cases} \frac{r - r_{i-1}}{r_i - r_{i-1}}, & r_{i-1} \leq r \leq r_i, \\ \frac{r_{i+1} - r}{r_{i+1} - r_i}, & r_i \leq r \leq r_{i+1}, \\ 0, & r \in [0, r_{i-1}] \cup [r_{i+1}, R_4]. \end{cases}$$

3) la fonction reliant l'induit à l'inducteur doit être constante dans le vide:

$$\phi_{S_2} = \begin{cases} \frac{r - R_{S_2}}{r_{S_2} - r_{S_2-1}}, & r_{S_2-1} \leq r \leq r_{S_2}, \\ 1, & r_{S_2} \leq r \leq r_{S_3}, \\ \frac{R_{S_3} - r}{r_{S_3+1} - r_{S_3}}, & r_{S_3} \leq r \leq r_{S_3+1}, \\ 0, & r \in [0, r_{S_2-1}] \cup [r_{S_3+1}, R_4]. \end{cases}$$

Pour déterminer une base de  $Y_h$ , nous considérons à nouveau trois types de fonctions différentes:

1) la première fonction  $\psi_1$  :

$$\psi_1 = \begin{cases} \frac{r_2 - r}{r_2 - r_1}, & r_1 \leq r \leq r_2, \\ 0, & r_2 \leq r \leq R_2. \end{cases}$$

2) les fonctions de base correspondant aux points intérieurs. Soit  $i, 2 \leq i \leq S_2 - 1$  on a :

$$\psi_i = \begin{cases} \frac{r - r_{i-1}}{r_i - r_{i-1}}, & r_{i-1} \leq r \leq r_i, \\ \frac{r_{i+1} - r}{r_{i+1} - r_i}, & r_i \leq r \leq r_{i+1}, \\ 0, & r \in [R_1, r_{i-1}] \cup [r_{i+1}, R_2]. \end{cases}$$

3) la dernière fonction  $\psi_{S_2}$  :

$$\psi_{S_2} = \begin{cases} \frac{r - R_2}{R_2 - r_{S_2-1}}, & r_{S_2-1} \leq r \leq R_2, \\ 0, & r \in [R_1, R_{S_2-1}]. \end{cases}$$

Soit  $H_h^n$  et  $\theta_h^n$  des fonctions de  $X_h$  et  $Y_h$ . On suppose que  $H_h^n$  et  $\theta_h^n$  définissent une approximation des fonctions  $H(t_n, \cdot)$  et de  $\theta(t_n, \cdot)$  respectivement. Le problème totalement discrétisé consiste à trouver  $(H_h^{n+1}, \theta_h^{n+1})$  dans  $X_h \times Y_h$  tels que:

$$\int_{\Lambda} \frac{\bar{\mu}^{n+1} H_h^{n+1} - \mu^n H_h^n}{\tau} \phi_h r dr + \int_{\Omega} \rho^n \frac{dH_h^{n+1}}{dr} \frac{d\phi_h}{dr} r dr = \frac{v^{n+1}}{2\pi} [\phi_h], \quad \forall \phi_h \in X_h, \quad (1.5)$$

$$\int_{\Omega_1} C_p^n \frac{\theta_h^{n+1} - \theta_h^n}{\tau} \psi_h r dr + \int_{\Omega_1} \lambda^n \frac{d\theta_h^{n+1}}{dr} \frac{d\psi_h}{dr} r dr + \alpha(\theta_h^n(R_2))^4 \psi_h(R_2) R_2 = \int_{\Omega_1} \rho^n \left( \frac{dH_h^{n+1}}{dr} \right)^2 \psi_h r dr, \quad \forall \psi_h \in Y_h, \quad (1.6)$$

où  $v^n = v(t_n)$ ,  $C_p^n = C_p(\theta_h^n)$ ,  $\lambda^n = \lambda(\theta_h^n)$  et  $\mu^n = \mu(H_h^n, \theta_h^n)$ .

Avant d'introduire quelques améliorations de ce schéma pour diminuer le coût de calcul, nous présentons les résultats de convergence obtenus. Le schéma discrétisé (1.3)-(1.4) a été mis en œuvre sur un ordinateur. En parallèle, des solutions analytiques du problème (1.1)-(1.2) ont été obtenues sous certaines hypothèses. On compare alors la solution approchée avec la solution exacte. Cette comparaison permet en outre d'évaluer l'ordre de convergence de la méthode.

Ces tests ont été réalisés en utilisant des coefficients physiques indépendants de la température. Nous avons déterminé une solution exacte du problème (1.1) pour une tension  $v$  constante ou bien de la forme  $v = V_0 e^{i\omega t}$ . Dans les deux cas la convergence en fonction du pas géométrique  $h$  est d'ordre  $O(h^2)$  en norme  $L^\infty$  et la convergence en fonction du pas de temps  $\tau$  est d'ordre  $O(\tau)$ . Des essais similaires ont été effectués avec l'équation de la chaleur (1.2). On trouve les mêmes ordres de convergence en temps et en espace que ceux obtenus pour l'équation (1.1).

## 2) La méthode des pas mixtes.

Comme nous l'avons mentionné dans l'introduction de ce chapitre, le champ magnétique et la température évoluent à des "vitesses" très différentes. Les tensions utilisées sont des signaux périodiques (non nécessairement sinusoïdaux) de fréquence de l'ordre de 10000 cycles par seconde. On constate par contre que sur des intervalles de temps de l'ordre de la seconde les propriétés physiques des matériaux dépendant de la température varient peu. Il est inutile dès lors de résoudre l'équation de la chaleur (1.5) sur les petits intervalles de temps adaptés aux variations du champ magnétique. On introduit deux pas de temps adaptés à chaque phénomène : un petit pas de temps  $\delta t$  pour le champ magnétique et un grand pas de temps  $\Delta t$  pour la thermique;  $\Delta t$  étant un multiple entier de  $\delta t$ . Typiquement,  $\Delta t$  est de l'ordre de la seconde alors que  $\delta t$  est de l'ordre de la microseconde pour une fréquence de 10 kHz.

Pour déterminer le champ magnétique et la température, nous proposons la procédure suivante. Soit  $t_n \in [0, T]$  et soit  $\theta^n : ]R_1, R_2[ \rightarrow \mathbb{R}$  une approximation de la température au

temps  $t_n$ . On calcule sur une durée  $\Delta t$  le champ magnétique en utilisant l'équation (1.5) avec le pas de temps  $\tau = \delta t$ . On évalue le champ magnétique ainsi que la puissance  $P$  dissipée dans le corps conducteur durant l'intervalle de temps  $\Delta t$ . En utilisant l'équation de la chaleur (1.6) avec le pas de temps  $\tau = \Delta t$ , on détermine la température au pas suivant et on recommence cet algorithme sur tous les pas de temps. Pour formuler rigoureusement la méthode nous allons expliciter cette procédure.

Soient  $T > 0$  et  $N, M$  des entiers, on définit les pas de temps suivants:

$$\Delta = \frac{T}{N}, \quad \delta t = \frac{\Delta t}{M},$$

$$t_{n,m} = n\Delta t + m\delta t, \quad t_n = t_{n,0}, \quad 0 \leq n < N, \quad 0 \leq m \leq M.$$

On désignera par  $H_h^{n,m}$  une approximation de  $H(t_{n,m}, \cdot)$  et par  $\theta_h^n$  une approximation de  $\theta(t_n, \cdot)$ . On introduit les notations suivantes:

$$\mu^{n,m} = \mu(H_h^{n,m}, \theta_h^n), \quad \bar{\mu}^{n,m+1} = 2\mu^{n,m} - \mu^{n,m-1}, \quad 0 \leq n < N, \quad 0 \leq m \leq M.$$

On prendra  $\mu^{n,-1} = \mu^{n,0}$ .

L'algorithme utilisé est le suivant:

(1) *Calcul du champ magnétique pour une température fixée.*

Soit  $\theta^n$  une approximation de la température au temps  $t_n$ . On calcule le champ magnétique  $H_h^{n,m}$  pour  $0 < m \leq M$  en utilisant l'équation suivante:

$$\int_{\Lambda} \frac{\bar{\mu}^{n,m+1} H_h^{n,m+1} - \mu^{n,m} H_h^{n,m}}{\delta t} \phi_h r dr + \int_{\Omega} \rho^n \frac{dH_h^{n,m+1}}{dr} \frac{d\phi_h}{dr} r dr$$

$$= \frac{v^{n,m+1}}{2\pi} [\phi_h], \quad \forall \phi_h \in X_h, \quad \forall m, 0 \leq m < M. \quad (2.1)$$

(2) *Evaluation de la puissance dissipée durant le temps  $\Delta T$ .*

On peut alors définir la puissance dissipée dans l'induit par:

$$P_h^n = \frac{\rho^n}{M} \sum_{i=0}^M \left| \frac{d}{dr} H_h^{n,i+1} \right|^2. \quad (2.2)$$

(3) *Calcul de la température au pas suivant.*

On utilise l'équation de la chaleur avec comme second membre la puissance  $P_h^n$  pour calculer  $\theta^{n+1}$ :

$$\int_{\Omega_1} C_p^n \frac{\theta_h^{n+1} - \theta_h^n}{\Delta t} \psi_h r dr + \int_{\Omega_1} \lambda^n \frac{d\theta_h^{n+1}}{dr} \frac{d\psi_h}{dr} r dr$$

$$= \int_{\Omega_1} P_h^n \psi_h r dr - \alpha(\theta_h^n(R_2))^4 \psi_h(R_2) R_2 \quad \forall \psi_h \in Y_h \quad 0 \leq n < N, \quad (2.3)$$

On obtient ainsi la température au pas de temps suivant. La température initiale étant donnée, on itère cette procédure pour  $n$  variant de 0 jusqu'à  $N - 1$ .

### 3) Une application aux matériaux non ferromagnétiques.

Beaucoup de matériaux utilisés dans l'industrie ne sont pas ferromagnétiques (cuivre, aluminium,..). Le cuivre par exemple nous intéresse au premier plan puisque les spires de l'inducteur sont généralement élaborées avec ce métal. La propriété essentielle de ces corps est l'indépendance de la perméabilité par rapport au champ magnétique. La valeur de  $\mu$  sur un intervalle de temps  $\Delta t$  reste fixe; elle est égale à  $\mu^n = \mu(\theta_h^n)$ . Cette propriété simplifie considérablement l'équation (1.5). Notre problème devient:

$$\begin{aligned} \int_{\Lambda} \mu^n \frac{H_h^{n,m+1} - H_h^{n,m}}{\delta t} \phi_h r dr + \int_{\Omega_1} \rho^n \frac{dH_h^{n,m+1}}{dr} \frac{d\phi_h}{dr} r dr \\ = \frac{v^{n,m+1}}{2\pi} [\phi_h] \quad \forall \phi_h \in X_h, \forall m, 0 \leq m < M. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Les tensions utilisées sont périodiques. Notons par  $\omega$  la fréquence angulaire. La solution calculée converge rapidement vers une solution périodique. Pratiquement cette solution est atteinte au bout d'une dizaine de périodes de la tension. Il est alors inutile de poursuivre le calcul sur  $M$  pas. Le gain de temps est considérable puisque  $M$  est de l'ordre du million. La difficulté réside dans l'évaluation du nombre de pas nécessaire pour obtenir une solution suffisamment proche de la solution périodique.

Soit  $M_\omega$  le nombre de pas nécessaire pour parcourir exactement une période de la tension i.e.

$$v(t_{n,m+M_\omega}) = v(t_{n,m}), \quad 0 \leq n \leq N-1, \quad 0 \leq m \leq M.$$

Une méthode possible consiste à évaluer l'erreur relative en chaque point de la subdivision entre deux solutions calculées pour des temps distants d'une période. On définit un petit paramètre  $\varepsilon$  représentant la précision du calcul que l'on souhaite obtenir. On poursuit le calcul du champ magnétique jusqu'à ce que l'erreur soit plus petite que  $\varepsilon$ .

Plus précisément, soit  $m_0$  donné,  $0 \leq m_0 \leq M - M_\omega$ . La tension appliquée décrit un cycle complet entre  $t_{n,m_0}$  et  $t_{n,m_0+M_\omega}$ . On peut évaluer la puissance moyenne durant ce cycle par:

$$P_h^{n,m_0} = \frac{\rho^n}{M_\omega} \sum_{j=0}^{M_\omega-1} \left| \frac{d}{dr} H_h^{n,m_0+j} \right|^2. \quad (3.2)$$

L'erreur relative de la puissance entre deux cycles successifs est donnée par:

$$\nu^{n,m_0} = \frac{\|P_h^{n,m_0+M_\omega} - P_h^{n,m_0}\|_{L^\infty(\Omega)}}{\|P_h^{n,m_0}\|_{L^\infty(\Omega)}}. \quad (3.3)$$

Si la valeur de  $\nu^{n,m_0}$  est plus petite que la précision recherchée  $\varepsilon$ , on ne poursuit plus le calcul du champ magnétique. La dernière valeur de  $P_h^{n,m}$  est une bonne approximation de la puissance moyenne. On la note  $P_h^n$ . Dans la pratique, cette valeur est rapidement atteinte. On peut considérer dès lors que l'induit reçoit durant l'intervalle de temps  $\Delta t$  la

puissance constante  $P_h^n$ . On peut ainsi calculer la température au temps  $t_{n+1}$  en utilisant l'équation de la chaleur:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_1} C^n \frac{\theta_h^{n+1} - \theta_h^n}{\Delta t} \psi_h r dr + \int_{\Omega_1} \lambda^n \frac{d\theta_h^{n+1}}{dr} \frac{d\psi_h}{dr} r dr \\ = \int_{\Omega_1} P_h^n \psi_h r dr - \alpha (\theta_h^n(R_2))^4 \psi_h(R_2) R_2 \quad \forall \psi_h \in Y_h \quad \forall n, 0 \leq n < N, \end{aligned} \quad (3.4)$$

Cette méthode diminue de manière conséquente le temps de calcul sans pour autant altérer la qualité des résultats. Typiquement, le champ magnétique devient quasi périodique au bout de cinq à six périodes de la tension. On obtient un gain de temps dont le rapport est de 1 à 100. Notons de plus que l'invariance des coefficients sur une période de temps  $\Delta t$  implique que a priori les matrices de masse et de rigidité issues de l'équation (3.1) restent les mêmes sur l'intervalle de temps  $\Delta t$ . Le calcul des matrices élémentaires ainsi que l'assemblage ne se fait qu'une fois à chaque période  $\Delta t$ . Ceci contribue bien entendu à diminuer le coût des calculs.

#### 4) Les matériaux ferromagnétiques.

Nous avons vu précédemment que l'invariance de la perméabilité magnétique en fonction du champ magnétique permet d'importantes simplifications et une forte réduction du temps de calcul. Cette propriété n'a plus lieu pour des matériaux ferromagnétiques. L'utilisation importante de ces matériaux dans l'industrie nous oblige pourtant à prendre en considération ce cas.

Dans le premier paragraphe, nous avons introduit le schéma numérique (1.5)-(1.6) permettant de prendre en compte les variations de la perméabilité en fonction de la température et du champ magnétique. Nous avons amélioré ce schéma en introduisant la méthode des "pas mixtes". Cette méthode peut encore être utilisée pour le cas ferromagnétique. Les coûts de calcul restent néanmoins très importants et il est difficile d'envisager une utilisation du schéma (2.1)-(2.3) pour un problème bidimensionnel.

On ne peut envisager une réduction conséquente des coûts de calcul que si la perméabilité magnétique est considérée comme constante sur chaque intervalle de temps  $\Delta t$ . En effet, le schéma numérique se simplifie et on peut dans ce cas utiliser l'algorithme présenté à la fin du paragraphe précédent. Notre principal but est de calculer le champ de température. Pour tenir compte cependant de l'aspect ferromagnétique, nous allons déterminer sur chaque pas de temps  $\Delta t$  une perméabilité "effective" de manière à ce que la puissance diffusée par le champ magnétique calculé par un modèle avec une perméabilité équivalente soit la même que celle calculée par le schéma (2.1)-(2.3).

On définit donc une perméabilité "équivalente" sur chaque pas de temps  $\Delta t$  nous permettant de calculer un champ de température très proche de celui obtenu par le schéma (2.1)-(2.3). La précision obtenue sur le champ magnétique par rapport au champ magnétique

exact est grossière. Néanmoins, la température est très bonne. La procédure peut se résumer à l'algorithme suivant:

- On suppose connue la température  $\theta_h^n$  ainsi que la perméabilité équivalente  $\mu^n$  au temps  $t_n$ .
- On calcule le champ magnétique ainsi que la puissance moyenne diffusée dans l'induit en utilisant la relation (3.2).
- Dans le même temps, on détermine une nouvelle perméabilité magnétique équivalente par une moyenne des perméabilités magnétiques instantanées définie ci-après dans le paragraphe 4.1.
- On calcule la température  $\theta_h^{n+1}$  au temps  $t_{n+1}$  et on réitère le processus.

Nous avons vu dans le paragraphe précédent qu'il était inutile de calculer les  $M$  pas de temps  $\delta t$  pour évaluer correctement la puissance diffusée en utilisant l'estimateur (3.3). Il en va de même dans cette méthode. On peut ainsi fortement diminuer les temps de calcul. Notons à nouveau que l'évaluation des matrices élémentaires et la procédure d'assemblage ne sont exécutés qu'une seule fois pour chaque  $\Delta t$ . Notre principal problème consiste à évaluer la perméabilité équivalente pour chaque  $\Delta t$ .

#### 4.1 Evaluation d'une perméabilité équivalente.

On peut déterminer une première solution numérique de la température en utilisant les équations (1.5), (2.2) et (1.6). Cette solution sera notre solution de référence. Comme nous l'avons déjà dit, le coût de calcul inhérent à cette méthode est élevé.

Soit  $n > 0$  et supposons que  $\mu^n$  et  $\theta_h^n$  soient connus. On calcule le champ magnétique en utilisant l'équation suivante:

$$\begin{aligned} \int_{\Lambda} \mu^n \frac{H_h^{n,m+1} - H_h^{n,m}}{\delta t} \phi_h r dr + \int_{\Omega_1} \rho^n \frac{dH_h^{n,m+1}}{dr} \frac{d\phi_h}{dr} r dr \\ = \frac{v^{n,m+1}}{2\pi} [\phi_h] \quad \forall \phi_h \in X_h. \end{aligned} \quad (4.1)$$

La tension injectée dans l'inducteur est périodique. L'expérience montre qu'après quelques périodes, le champ magnétique tend à être périodique. Grâce à la relation (3.2), on évalue  $P_h^n$  en calculant le champ magnétique sur  $M_\omega$  pas supplémentaire. En utilisant l'estimateur (3.3), on peut déterminer l'entier  $m_0$  pour lequel la puissance moyenne par cycle est considérée comme constante pour une tolérance  $\varepsilon$ .

Nous allons définir la perméabilité magnétique équivalente  $\mu^n$  en utilisant une moyenne des valeurs  $\mu^{n,m}$  de la perméabilité sur un cycle complet. Nous avons testé les quatre moyennes suivantes:

$$\mu_\gamma^n = \left[ \frac{1}{M_\omega} \sum_{m=m_0}^{m_0+M_\omega-1} (\mu^{n,m})^\gamma \right]^{\frac{1}{\gamma}}, \quad \gamma = -2, -1, 1, 2.$$

Afin de déterminer la moyenne la mieux adaptée à notre problème, nous avons testé ces quatre formules en comparant le champ de température obtenue avec ces moyennes et le champ de température de référence. L'expérience numérique montre que la moyenne harmonique ( $\gamma = -1$ ) est la meilleure approximation. Par conséquent nous prendrons  $\mu^n = \mu_{-1}^n$ . La puissance moyenne  $P_h^n$  étant connue, on peut calculer la température au pas suivant.

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_1} C^n \frac{\theta_h^{n+1} - \theta_h^n}{\Delta t} \psi_h r dr + \int_{\Omega_1} \lambda^n \frac{d\theta_h^{n+1}}{dr} \frac{d\psi_h}{dr} r dr \\ = \int_{\Omega_1} P_h^n \psi_h r dr - \alpha (\theta_h^n(R_2))^4 \psi_h(R_2) R_2. \end{aligned} \quad (4.2)$$

On obtient ainsi  $\theta_h^{n+1}$ .

La température initiale étant connue, on peut calculer le champ de température en utilisant cet algorithme sur l'intervalle  $[0, T]$ .

#### 4.2 Quelques résultats numériques.

Pour finir ce paragraphe, nous présentons l'expérience numérique qui nous a permis de déterminer la moyenne la plus adéquate pour utiliser la méthode de la perméabilité équivalente. Nous simulons tout d'abord un cas de référence en utilisant le schéma (2.1)-(2.3).

Afin d'obtenir une solution très proche de la solution du problème exact, le maillage et la subdivision en temps sont pris suffisamment fins. Nous nous appuyons sur ces résultats de référence pour juger l'efficacité d'une méthode d'évaluation de la perméabilité équivalente.

Les difficultés rencontrées sont de deux ordres. On remarque que les courants induits se localisent principalement sur le bord des induits. On est en présence d'un phénomène de peau. On doit prévoir un nombre de mailles suffisant dans ces régions. On doit tenir compte aussi des fortes variations de la perméabilité en fonction du champ magnétique. Il faut donc prévoir un pas de temps  $\delta t$  suffisamment petit.

Dans toutes les expériences réalisées, nous utilisons les caractéristiques de l'acier Ross [EDF]. La température  $\theta$  est exprimée en degré Kelvin et le champ magnétique  $H$  est exprimé en Ampère par Mètre. Les matériaux perdent leur propriété ferromagnétique à partir d'une certaine température (température de Curie  $\theta_C$ ). Au dessus de cette température critique, la perméabilité de ces matériaux est constante et vaut  $\mu_0$ . La dépendance de la perméabilité magnétique par rapport à la température et le champ magnétique est donné par la formule suivante:

$$\begin{aligned} \mu(H, \theta) &= \mu_0 \left( 1 + \sqrt{\left( \frac{1033 - \theta}{740} \right)^2 \frac{2000}{1 + \frac{H}{200}}} \right), & \text{pour } \theta \leq 1033K, \\ \mu(H, \theta) &= \mu_0, & \text{avec } \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}, \quad \text{pour } \theta > 1033K. \end{aligned}$$

La relation de dépendance de la résistivité  $\rho$  (exprimée en  $\Omega m$ ) par rapport à la température est de la forme:

$$\rho(\theta) = a + b\theta + c\theta^2 + d\theta^3,$$

avec  $a = 4.9659 \times 10^{-7}$ ,  $b = 8.4121 \times 10^{-10}$ ,  $c = -3.7246 \times 10^{-13}$  et  $d = 6.1960 \times 10^{-17}$ . La conductivité thermique  $\lambda$  (en  $W m^{-1} K^{-1}$ ) est donnée par:

$$\lambda(\theta) = 100(\tilde{a} + \tilde{b}\theta),$$

avec  $\tilde{a} = 0.11215$  et  $\tilde{b} = 1.4087 \times 10^{-4}$ ; et la capacité calorifique par unité de volume  $C_p$  (en  $J K^{-1} m^{-3}$ ) prend la forme suivante:

$$C_p(\theta) = 7.9 \times 10^6 (\hat{a} + \hat{b}\theta),$$

avec  $\hat{a} = 3.562 \times 10^{-1}$  et  $\hat{b} = 0.988 \times 10^{-4}$ . Enfin, le coefficient de radiation  $\alpha$  vaut  $0.8 \times 5.67 \times 10^{-8} W K^{-4} m^{-2}$ . Les inducteurs sont faits en cuivre; les caractéristiques de ce matériau sont les suivantes:

$$\mu = \mu_0,$$

$$\rho(\theta) = a + b\theta + c\theta^2 + d\theta^3,$$

avec  $a = -3.033 \times 10^{-9}$ ,  $b = 68.85 \times 10^{-12}$ ,  $c = -6.72 \times 10^{-15}$ ,  $d = 8.56 \times 10^{-18}$ .

$$\lambda(\theta) = 100(\tilde{a} + \tilde{b}\theta)$$

avec  $\tilde{a} = 4.1900$  et  $\tilde{b} = -6.3544 \times 10^{-4}$ .

$$C_p(\theta) = 8.94 \times 10^6 (\hat{a} + \hat{b}\theta)$$

avec  $\hat{a} = 3.562 \times 10^{-1}$  et  $\hat{b} = 1.38 \times 10^{-4}$ .

$$\alpha = 0.015 \times 5.67 \times 10^{-8} W K^{-4} m^{-2}.$$

Nous utilisons un maillage uniforme dont la taille des mailles est de l'ordre du tiers de la plus petite épaisseur de peau possible  $\delta$  donnée par:

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\sigma\mu}},$$

$$\omega = 2\pi \times 10^4 [s^{-1}],$$

$$\rho = 65 \times 10^6 [A^{-1} m V],$$

$$\mu = 2000 \times \mu_0 = 8\pi 10^{-3} [VsA^{-1} m^{-1}].$$



Pour notre cas de référence, nous considérons la plus petite épaisseur de peau possible. On trouve  $\delta = 1.510^{-5}m$  pour l'acier et  $\delta = 6.2510^{-4}m$  pour le cuivre.

On simule le chauffage d'une billette de 25 mm de rayon, par un inducteur de 34 mm de rayon intérieur. L'épaisseur de l'inducteur est de 1 mm. Pour obtenir trois mailles dans une épaisseur de peau avec un maillage équidistant, il faut prendre 5000 noeuds dans l'induit et 200 noeuds dans l'inducteur. Nous prenons pour  $\delta t$  1/64 de période pour le calcul de l'équation électromagnétique, et  $\Delta t = 1/4s$  pour l'équation de la chaleur. Nous utilisons une tension sinusoïdale de 7.7V efficace. Le temps de chauffe  $T$  est de 100s. Les graphiques suivants présentent les résultats obtenus en utilisant les quatre méthodes possibles pour calculer la perméabilité équivalente.

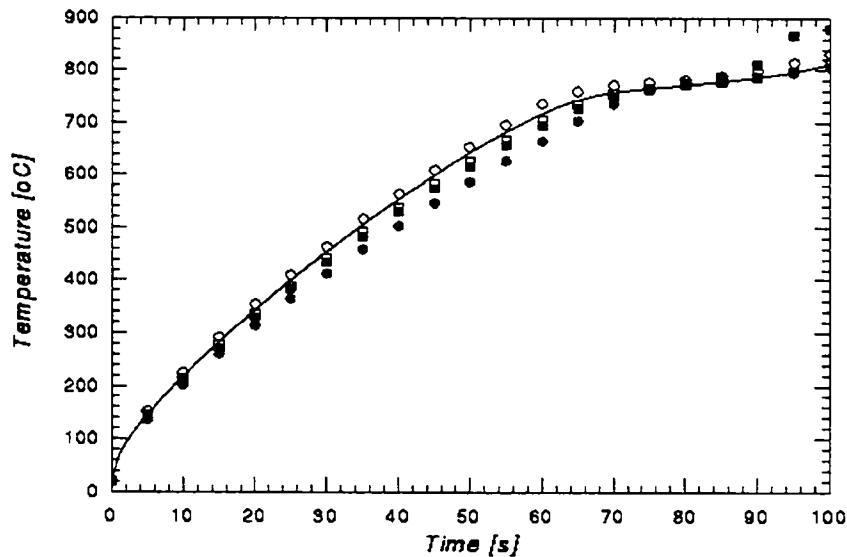


Fig. 4.1

La courbe en trait continu représente la courbe de température de référence, les symboles ●, ○, □, ■ représentent respectivement les moyennes  $\mu_2$ ,  $\mu_1$ ,  $\mu_{-1}$ ,  $\mu_{-2}$ .

### 5) Le modèle bidimensionnel.

Pour prendre en considération des géométries plus complexes que celles du disque ou de l'anneau, il est nécessaire de revenir au modèle bidimensionnel (I.4.1)-(I.4.2) du chapitre I. Les schémas numériques que nous utilisons sont identiques à ceux proposés dans les paragraphes précédents. L'aspect bidimensionnel n'apparaît que dans la discrétisation en espace. On utilise le schéma (2.1)-(2.3) pour des matériaux non ferromagnétiques et le schéma (3.1)-(3.4) dans le cas d'un matériau ferromagnétique.

Pour décrire complètement la méthode numérique, il reste à décrire les espaces de discrétisation que nous utilisons pour approcher la solution. Rappelons que le système inducteur-induit est composé d'un inducteur noté  $\Omega_0$  et de  $p$  induits  $\Omega_i$ ,  $1 \leq i \leq p$ . Nous gardons les notations introduites dans le chapitre I. On supposera que tous les ouverts sont

des polygones. On note par  $\mathcal{T}_h^i$  une triangulation de  $\bar{\Omega}^i$ :

$$\bar{\Omega}^i = \bigcup_{K \in \mathcal{T}_h^i} K,$$

où  $K$  désigne un triangle quelconque de la triangulation. On notera par  $h_K$  le diamètre de  $K$ . Le pas du maillage de  $\mathcal{T}_h$  est donné par:

$$h = \max\{h_K, K \in \mathcal{T}_h^i, 0 \leq i \leq p\}.$$

Nous supposons de plus que le maillage est non-dégénéré et uniformément régulier [RATH]. Nous avons montré dans le chapitre I que dans l'espace situé entre les conducteurs, le champ magnétique dépend uniquement du temps. A priori, il est donc inutile de discrétiser le domaine  $\bar{\Omega}'$ . Néanmoins la surface de  $\bar{\Omega}'$  intervient dans le calcul du champ magnétique. Sur un plan numérique il s'avère utile de définir un maillage  $\mathcal{T}_h'$  sur le domaine  $\bar{\Omega}'$  pour évaluer la surface située entre l'inducteurs et les induits. Le maillage de  $\bar{\Omega}'$  doit s'adapter aux maillages des conducteurs de manière à assurer la continuité de la solution approchée. Nous noterons par  $\mathcal{T}_h$  la réunion de tous les maillages i.e.:

$$\mathcal{T}_h = \bigcup_{i=0}^p \mathcal{T}_h^i \cup \mathcal{T}_h'.$$

On définit maintenant les espaces de type élément fini suivants:

$$\begin{aligned} V_h &= \{\phi \in C^0(\bar{\Omega}); \phi_K \in \mathcal{P}_1(K), \forall K \in \mathcal{T}_h, \phi = 0 \text{ sur } \Gamma_0, \phi|_{\Omega'} = \text{const}\}, \\ W_h &= \{\psi \in C^0(\bar{\Omega}_i); \psi_K \in \mathcal{P}_1(K), \forall K \in \mathcal{T}_h^i\}. \end{aligned}$$

où  $\mathcal{P}_1(K)$  est l'espace des polynômes à deux variables du premier degré sur  $K$ .

### 5.1. Une comparaison avec l'expérience physique.

La finalité de ces méthodes numériques est de s'affranchir de l'expérience physique souvent très coûteuse et moins souple dans sa réalisation. On peut très facilement changer la forme d'un inducteur ou d'un induit dans un code; on peut simuler un très grand nombre d'expériences en changeant très peu de paramètres et obtenir rapidement des prévisions. Le but est donc atteint si la simulation reproduit bien l'expérience physique. Nous donnons ici un exemple de comparaison entre un calcul effectué dans le cas d'une simulation d'une l'expérience physique réalisée en laboratoire.

L'expérience porte sur le chauffage d'un tube en acier ST 44-3 avec des inducteurs en cuivre. Les caractéristiques de l'acier ST 44-3 sont données ci-dessous. La température  $\theta$  est exprimée en Kelvins et le champ magnétique  $H$  est exprimé en Ampères par Mètre.

La perméabilité  $\mu$  exprimée en  $Tm/A$  vaut  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$  au dessus du point de Curie  $\theta_C = 1033K$  ( $760^\circ C$ ). En dessous du point de Curie, l'expression de  $\mu$  est donnée par:

$$\mu(H, \theta) = \mu_0 \left( 1 + \sqrt{\frac{a - \theta}{a}} \frac{b}{1 + \frac{H}{c}} \right),$$

avec  $a = 1033$ ,  $b = 2000$ ,  $c = 200$ .

La résistivité  $\rho$  ( $\Omega m$ ) dépend de la température  $\theta$  suivant la relation:

$$\rho^{-1}(\theta) = \tilde{a} - \tilde{b} \frac{\theta - \tilde{c}}{\tilde{d}},$$

En dessous du point de Curie ( $\theta < 1033K$ ), nous prenons  $\tilde{a} = 5.555 \times 10^6$ ,  $\tilde{b} = 4.468 \times 10^6$ ,  $\tilde{c} = 293$  et  $\tilde{d} = 740$ . Au dessus de point de Curie ( $\theta > 1033K$ ), nous prenons  $\tilde{a} = 0.952 \times 10^6$ ,  $\tilde{b} = 0.125 \times 10^6$ ,  $\tilde{c} = 1033$  et  $\tilde{d} = 240$ .

La conductivité thermique  $\lambda$  ( $W m^{-1} K^{-1}$ ) est:

$$\lambda(\theta) = \hat{a} - \hat{b} \frac{\theta - \hat{c}}{\hat{d}},$$

où, pour  $\theta < 1123$  ( $850^\circ C$ )  $\hat{a} = 70$ ,  $\hat{b} = 42$ ,  $\hat{c} = 293$ ,  $\hat{d} = 830$ . Pour  $\theta > 1123K$ , on prend les valeurs  $\hat{a} = 28$ ,  $\hat{b} = -4$ ,  $\hat{c} = 1123$ ,  $\hat{d} = 150$ .

Enfin, la capacité calorifique par unité de volume  $C_p$  (in  $JK^{-1} m^{-3}$ ) prend la forme suivante:

$$C_p(\theta) = \alpha \left( \bar{a} + \bar{b} \frac{\theta - \bar{c}}{\bar{d}} \right),$$

où  $\alpha = 8500$ . Pour  $\theta < 993K$ ,  $\bar{a} = 400$ ,  $\bar{b} = 410$ ,  $\bar{c} = 293$ ,  $\bar{d} = 680$ . Pour  $993 \leq \theta \leq 1033K$ ,  $\bar{a} = 910$ ,  $\bar{b} = 1190$ ,  $\bar{c} = 993$ ,  $\bar{d} = 60$ . Pour  $1033 \leq \theta \leq 1073K$ ,  $\bar{a} = 2100$ ,  $\bar{b} = -1500$ ,  $\bar{c} = 1033$ ,  $\bar{d} = 40$ . Enfin, pour  $\theta > 1073K$ , la chaleur spécifique est considérée comme constante:  $\bar{a} = 600$ ,  $\bar{b} = 0$ .

Les propriétés du cuivre ont été données dans le paragraphe précédent.

L'expérience consiste à chauffer la pièce pendant 91 secondes, jusqu'à atteindre une température supérieur à  $1000^\circ C$ , puis nous laissons la pièce refroidir jusqu'à 200 secondes. La figure 5.1 donne les isothermes calculées par le code dans l'induit à la fin du chauffage. L'intervalle entre deux isothermes est de  $5^\circ C$ . On désigne par  $M$ ,  $C$  et  $I$  des points de la pièce (fig 5.1). C'est en ces points que nous effectuons les mesures et que nous dresserons les comparaisons entre le modèle et l'expérience.

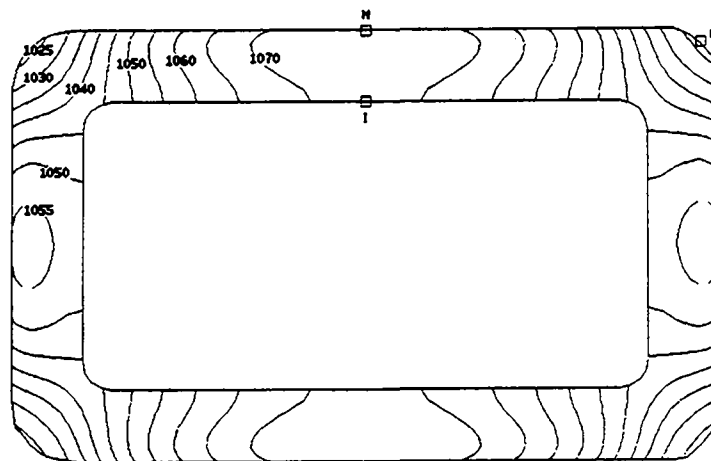


Fig. 5.1. Isothermes à la fin du chauffage.

L'expérience physique a été réalisée dans les laboratoires de l'entreprise AMYSA Yverdon S.A. On utilise un montage composé d'un inducteur de 25 spires d'une longueur de 530 mm. Les spires ont un rayon intérieur de 64 mm. L'inducteur est alimenté par un générateur tournant de 125 kW à 10kHz. La tension utilisée au début du chauffage est de 164 V. Les mesures sont effectuées à l'aide de thermocouples placés aux points *M*, *C* et *I*. Les graphiques 5.2, 5.3 et 5.4 donnent les comparaisons entre les résultats expérimentaux et la simulation numérique.

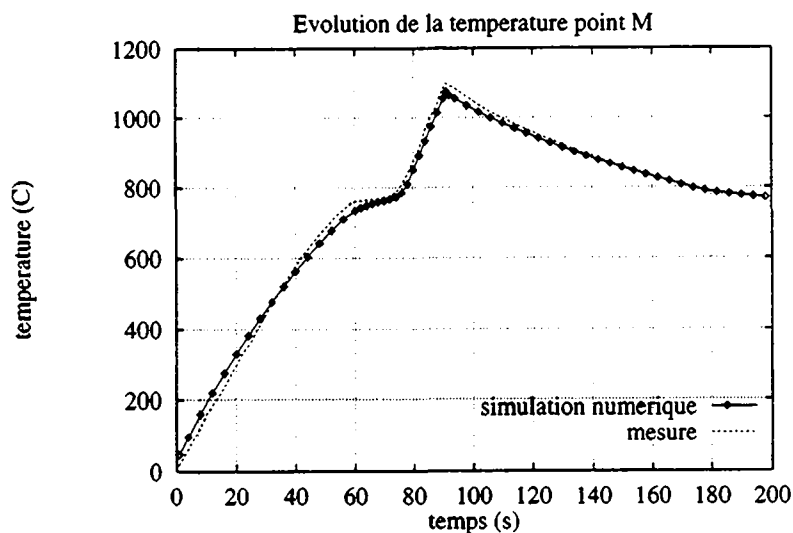


Fig. 5.2. Comparaison entre l'expérience et la simulation numérique au point *M*.

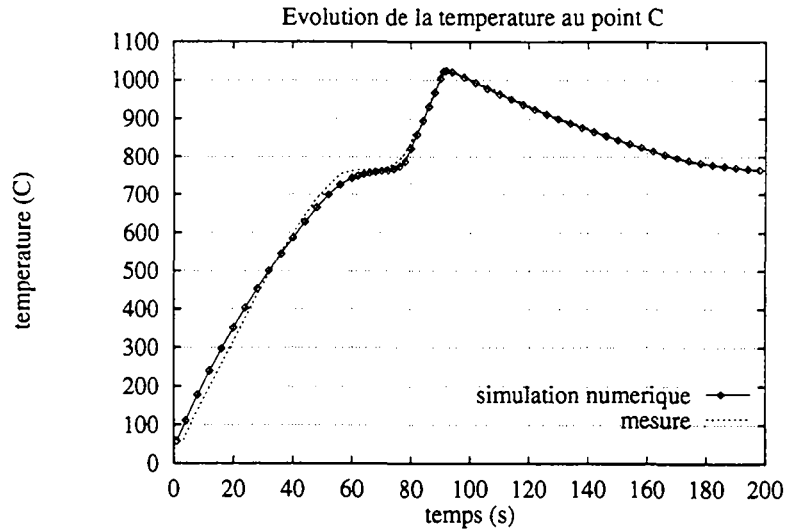


Fig. 5.3. Comparaison entre l'expérience et la simulation numérique au point *C*.

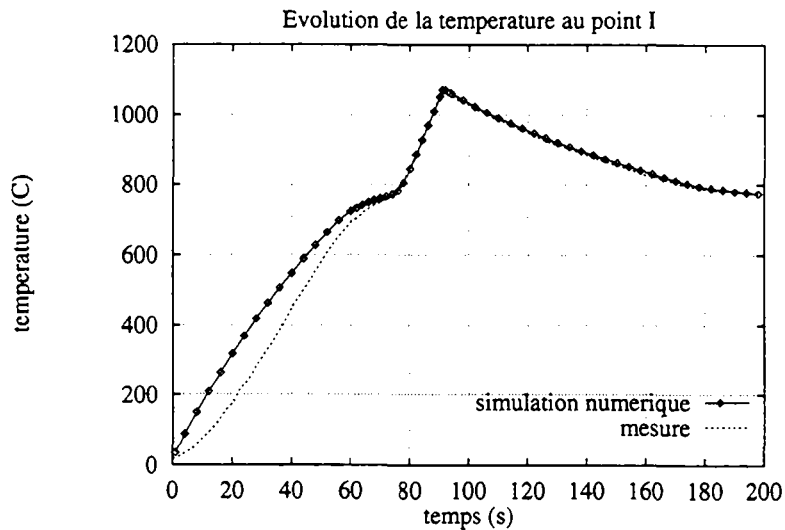


Fig. 5.4. Comparaison entre l'expérience et la simulation numérique au point *I*.

Une des principales difficultés rencontrée fut la détermination de la tension à utiliser dans le code pour simuler une expérience physique. En effet, les modèles monodimensionnel et bidimensionnel sont construits sur le principe d'un inducteur composé d'une seule spire infiniment longue alors que l'expérimentateur utilise des inducteurs multispire (voir fig. 3, 4 du chapitre I). Il faut donc prendre en compte certains paramètres comme le nombre de spires, la longueur de l'inducteur, l'écartement des spires, ...

Il est difficile de déterminer une relation précise entre la tension mesurée aux bornes de l'inducteur et la tension  $v$  utilisée dans le code. Certaines formules permettent d'obtenir un bon ordre de grandeur pour  $v$  [EDF], mais la précision est nettement insuffisante au regard de la précision recherchée (de l'ordre de 20% d'erreur sur la température).

Pour pallier ce défaut inhérent au modèle utilisé, nous utilisons pour notre part une technique d'ajustement consistant à fixer la tension  $v$  de manière à ce que la température maximale en un point soit identique pour l'expérience et la simulation. Dans notre cas,  $M$  est le point de référence.

## CHAPITRE V

### LE PROBLÈME STATIONNAIRE

#### Résumé

Nous considérons dans ce chapitre un modèle stationnaire issu des équations évolutives du deuxième chapitre. Nous montrons sous des hypothèses moins fortes que celles du premier chapitre, l'existence d'une solution au problème stationnaire.

## Introduction.

Dans ce chapitre, notre étude porte sur un problème stationnaire dérivant des équations du chauffage par induction présentées dans le deuxième chapitre. Nous supposons que le champ magnétique est une fonction périodique sinusoïdale et que l'induit est en équilibre thermique. La température de la pièce n'évolue donc plus au cours du temps. Pour cela, nous remplaçons la condition de Neumann imposée dans le problème évolutif par une condition de Dirichlet.

Dans une première partie, nous proposons un modèle mathématique satisfaisant aux hypothèses énoncées ci-dessus. Le problème stationnaire est décrit par deux équations aux dérivées partielles couplées. La première équation décrit le comportement du champ magnétique dans la pièce, la deuxième relation est l'équation de la chaleur. Nous modifions quelque peu ce problème en utilisant la transformée de Kirchhoff. Cette opération met en évidence l'opérateur de Laplace dans l'équation de la chaleur. Cette transformation nous permet d'obtenir une meilleure régularité des solutions de l'équation thermique.

Le but de ce chapitre est de prouver l'existence d'une solution  $(H, \theta)$  d'un problème stationnaire en utilisant des hypothèses moins restrictives que celles données dans le chapitre II. En particulier, nous ne supposons plus que les coefficients physiques des matériaux sont bornés. La méthode utilisée consiste à supposer dans un premier temps que les coefficients des matériaux sont bornés, indépendamment de la température, par une constante dépendante d'un paramètre  $k$ . On introduira une troncature sur les coefficients des matériaux liée au paramètre  $k$ . Nous prouverons dans une deuxième partie l'existence d'une solution  $(H_k, \theta_k)$  du problème tronqué telle que  $\theta_k$  soit bornée en utilisant une méthode de point fixe.

Dans un troisième paragraphe, nous établirons un certain nombre de résultats présentés sous forme de lemmes. Il s'agit d'estimer de manière précise la norme dans  $L^\infty(\Omega)$  de la solution d'un problème elliptique en fonction de la régularité du second membre. L'évaluation de la norme de  $u_k$  dans  $L^\infty(\Omega)$  en fonction de  $k$  nous permettra d'établir ensuite l'existence d'une solution.

La quatrième partie est consacrée à la preuve elle-même. Nous allons prouver qu'il existe un nombre  $K$  pour lequel la température reste bornée dans  $L^\infty$  indépendamment de  $k$  pour tout  $k \geq K$ . Nous utiliserons à cet effet les lemmes obtenus dans le paragraphe précédent. Nous en déduisons que la solution  $(H_K, \theta_K)$  est une solution de notre problème et que  $\theta_K$  est bornée.

Nous donnerons dans une cinquième partie quelques conclusions sur la régularité des solutions. Nous soulèverons aussi un certain nombre de questions auxquelles nous ne pouvons pas encore répondre au vu des résultats obtenus. Nous montrerons en particulier que l'existence d'une solution est liée à une "faible" croissance de la résistivité. Dans le cas contraire, nous n'avons obtenu aucune réponse ni contre-exemple.

### 1) Le modèle stationnaire.

Dans le modèle étudié dans le chapitre II, nous avons prouvé l'existence d'une solution



$(H, \theta)$  dans  $\mathcal{W}_0^{1,p} \times \mathcal{W}^{1,p/2}$  pour un  $p > 2$  du problème suivant:

$$\begin{cases} \mu \frac{\partial H}{\partial t} - \nabla \cdot (\rho(\theta) \nabla H) = 0, & \text{dans } ]0, T[ \times \Omega, \\ H(0, \cdot) = 0, & \text{dans } \Omega, \\ H = H_0, & \text{sur } ]0, T[ \times \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.1)$$

$$\begin{cases} C_p(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial t} - \nabla \cdot (\lambda(\theta) \nabla \theta) = \rho(\theta) |\nabla H|^2, & \text{dans } ]0, T[ \times \Omega, \\ \frac{\partial \theta}{\partial n} = 0, & \text{sur } ]0, T[ \times \partial\Omega, \\ \theta(0, \cdot) = \theta_0, & \text{dans } \Omega, \end{cases} \quad (1.2)$$

où  $\mu$  est une constante et  $\lambda, \rho, C_p, H_0$  et  $\theta_0$  sont des fonctions satisfaisant les hypothèses (II.2.1)-(II.2.5). Les expressions  $\rho(\theta)$  et  $\lambda(\theta)$  désignent la composition des fonctions  $\rho$  et  $\lambda$  avec la fonction  $\theta$ .

Nous avons aussi étudié un problème similaire en remplaçant la condition limite du système d'équations (1.2) par une condition de Dirichlet (problème (II.6.1)-(II.6.2)). L'hypothèse d'invariance en fonction du temps nous permet d'éliminer l'expression  $\frac{\partial \theta}{\partial t}$ . Nous avons supposé par ailleurs que le champ magnétique sur le bord des inducteurs est sinusoïdal. Les coefficients physiques étant indépendants du temps, nous pouvons donner une formulation de l'équation (1.1) en utilisant la variable complexe. Nous supposons dès lors que le champ magnétique peut s'écrire sous la forme suivante:

$$H(t, x) = \text{Re}(\exp(i\omega t)H(x)),$$

où  $\omega$  est la pulsation du champ magnétique et  $i$  le nombre imaginaire unité.

On déduit de ces considérations le modèle suivant: Trouver deux fonctions  $H : \Omega \mapsto \mathbb{C}$  et  $\theta : \Omega \mapsto \mathbb{R}$  telles que:

$$\begin{cases} i\mu\omega H - \nabla \cdot (\rho(\theta) \nabla H) = 0, & \text{dans } \Omega, \\ H = H_0, & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.3)$$

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (\lambda(\theta) \nabla \theta) = \frac{1}{2}\rho(\theta)[\nabla H]^2, & \text{dans } \Omega, \\ \theta = \theta_0, & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.4)$$

où  $[\nabla H]$  désigne le module du vecteur  $\nabla H$  i.e.:

$$[\nabla H]^2 = \partial_{x_1} H \partial_{x_1} H^* + \partial_{x_2} H \partial_{x_2} H^*,$$

et  $v^*$  est la fonction conjuguée complexe de  $v$ .

La température sur le bord du domaine  $\Omega$  est supposée égale à une constante  $\theta_0$  connue. Le terme  $\frac{1}{2}\rho(\theta)[\nabla H]^2$  du second membre de l'équation (1.4) correspond à la puissance

moyenne sur une période injectée dans l'induit. Nous avons montré dans le chapitre I que le champ magnétique dans le vide ainsi que sur le bord des pièces est indépendant des variables d'espace. La fonction  $H_0$  est donc une constante.

Les hypothèses que nous utilisons dans ce chapitre sont moins restrictives que celles données dans le chapitre II. On suppose simplement que la résistivité électrique est une fonction croissante de la température.

$$\lambda(t) \in C^0(\mathbb{R}), \lambda(t) > 0 \quad \forall t \geq 0, \quad (1.5)$$

$$\rho \in C^0(\mathbb{R}), \quad (1.6)$$

$$\text{il existe } \alpha > 0 \text{ tel que } \rho(t) > \alpha \quad \forall t > 0, \quad (1.7)$$

$$\text{la fonction } \rho(t) \text{ est croissante non bornée} \quad t > 0. \quad (1.8)$$

On fait le changement de variable suivant:

$$\beta(\theta) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\theta_0}^{\theta} \lambda(s) ds. \quad (1.9)$$

La fonction  $\lambda$  est strictement positive pour  $t > 0$ , par conséquent l'application  $\beta$  est une bijection pour toutes fonctions  $\theta$  strictement positive. En effectuant les changements de variable:

$$u \stackrel{\text{def}}{=} \beta(\theta),$$

$$r(u) = r \circ u \stackrel{\text{def}}{=} \rho \circ \theta = \rho(\theta),$$

l'équation (1.4) devient:

$$\begin{cases} -\Delta u = \frac{1}{2}r(u)[\nabla H]^2, & \text{dans } \Omega, \\ u = 0, & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Posons  $h = H - H_0$ . L'équation (1.3) devient:

$$\begin{cases} i\omega\mu h - \nabla \cdot (r(u)\nabla h) = -i\omega\mu H_0, & \text{dans } \Omega, \\ h = 0, & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Nous posons  $f = -i\omega\mu H_0$  pour simplifier les notations. Notons que  $f$  est une constante.

Notre problème consiste finalement à trouver un couple  $(h, u) : \Omega \mapsto \mathbb{C} \times \mathbb{R}$ , solution du problème:

$$\begin{cases} i\omega\mu h - \nabla \cdot (r(u)\nabla h) = f, & \text{dans } \Omega, \\ h = 0, & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.10)$$

$$\begin{cases} -\Delta u = \frac{1}{2}r(u)[\nabla h]^2, & \text{dans } \Omega, \\ u = 0, & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (1.11)$$

D'après les hypothèses (1.7)-(1.8), la fonction  $r$  réalise les conditions suivantes:

$$r \text{ est croissante, non bornée,} \quad (1.12)$$

$$r \text{ est continue,} \quad (1.13)$$

$$r(t) \geq \alpha \text{ pour tout } t. \quad (1.14)$$

Nous étudions dans le paragraphe suivant un problème dérivant des équations (1.10)-(1.11) obtenu par troncature de la fonction  $r$ . Nous supposons que la fonction  $r$  est bornée par une constante dépendant d'un paramètre  $k$ . Nous montrerons alors que, sous cette hypothèse supplémentaire le problème (1.10)-(1.11) admet une solution.

## 2) Le problème tronqué.

Soit  $k$  un réel positif, on définit la fonction tronquée  $r_k$  par:

$$r_k(s) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} r(s) & \text{sur } ]-\infty, k], \\ r(k) & \text{sur } ]k, \infty[. \end{cases}$$

Notons que la fonction  $r_k$  est une fonction continue et bornée.

On considère le problème tronqué  $\mathcal{P}_k$  suivant: Trouver deux fonctions  $h_k : \Omega \mapsto \mathbb{C}$  et  $u_k : \Omega \mapsto \mathbb{R}$  telles que:

$$\begin{cases} i\omega\mu h_k - \nabla \cdot (r_k(u_k) \nabla h_k) = f, & \text{dans } \Omega, \\ h_k = 0, & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad (2.1)$$

$$\begin{cases} -\Delta u_k = \frac{1}{2} r_k(u_k) [\nabla h_k]^2, & \text{dans } \Omega, \\ u_k = 0, & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.2)$$

Nous allons prouver que le problème (2.1)-(2.2) admet une solution en utilisant le théorème du point fixe de Schauder. Soit  $v$  une fonction de  $L^1(\Omega)$ , on lui associe la fonction  $\phi \in W^{1,2}(\Omega)$  solution de l'équation:

$$\begin{cases} i\omega\mu\phi - \nabla \cdot (r_k(v) \nabla \phi) = f, & \text{dans } \Omega, \\ \phi = 0, & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.3)$$

On note par  $T_1$  l'opérateur défini par:

$$v \mapsto \phi \stackrel{\text{def}}{=} T_1(v).$$

Supposons maintenant que  $v$  et  $\phi$  soient données; on leur associe la fonction  $g(v, \phi)$  définie par:

$$g : (v, \phi) \mapsto \frac{1}{2} r_k(v) [\nabla \phi]^2.$$

Finalement, soit  $p \in ]1, \infty[$  on notera par  $T_2$  l'opérateur inverse du Laplacien de  $W^{-1,p}(\Omega)$  sur  $W_0^{1,p}(\Omega)$ . On peut formuler le problème (2.1)-(2.2) sous la forme du problème de point fixe suivant: Trouver une fonction  $u_k : \Omega \mapsto \mathbb{R}$  telle que:

$$u_k = T(u_k) \stackrel{\text{def}}{=} T_2(g(T_1(u_k), u_k)).$$

Nous allons établir quelques lemmes nécessaires à la démonstration de l'existence d'une solution  $u_k$  du problème de point fixe.

**Lemme 2.1.**

Soit  $T$  un opérateur continu qui applique une partie convexe fermée bornée  $D$  d'un espace de Banach dans elle-même. Si  $T$  est compact, il admet un point fixe dans  $D$ .

*Preuve.*

Ce résultat est démontré dans [TRE], p. 440.  $\square$

Nous présentons maintenant une version du théorème de N.G. Meyers pour un opérateur elliptique. On donne des estimations très précises des constantes. Ces estimations seront capitales pour prouver l'existence d'une solution  $(h, u)$  telle que  $u$  soit bornée.

**Lemme 2.2 (Théorème de Meyers).**

Soit  $a$  une fonction de  $L^\infty(\Omega)$  telle que  $0 < \alpha \leq a \leq \beta < \infty$  p.p. dans  $\Omega$ . Posons

$$Lv = -\nabla \cdot (a \nabla v).$$

Il existe  $p = p(\alpha, \beta) > 2$  tel que si  $f \in W^{-1,p}(\Omega)$ , le problème:

$$\begin{cases} Lv = f, & \text{dans } \Omega, \\ v = 0, & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad (2.4)$$

admet une unique solution dans  $W_0^{1,p}(\Omega)$  avec l'estimation suivante:

$$\|v\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \leq C_{\alpha,\beta} \|f\|_{W^{-1,p}(\Omega)}. \quad (2.5)$$

De plus, il existe  $\chi > 1$  et  $C_0 > 0$  tels que pour

$$\beta > \frac{\alpha(2\chi - 1)}{2(\chi - 1)}, \quad (2.6)$$

les valeurs de  $p$  et  $C_{\alpha,\beta}$  peuvent être choisies de la manière suivante:

$$p = \frac{4 \ln \chi}{2 \ln \chi - \ln\left(\frac{2\beta - \alpha}{2\beta - 2\alpha}\right)} > 2, \quad (2.7)$$

$$C_{\alpha,\beta} = \frac{C_0}{\alpha}. \quad (2.8)$$

Les constantes  $\chi$  et  $C_0$  sont indépendantes de  $\alpha$  et de  $\beta$ .

*Preuve.*

La démonstration de ce résultat est donnée en annexe.  $\square$

**Remarque 2.1.**

La définition de  $p$  donnée par la formule (2.7) implique que  $p$  est strictement plus petite que 4. (voir la démonstration du lemme 2.2 en annexe).

**Remarque 2.2.**

Le lemme 2.2 reste valable pour des fonctions  $f$  et  $u$  à valeurs complexes si la fonction  $a$  est à valeurs réelles.

L'application du lemme 2.2 au problème (2.2) fixe la valeur de  $p$ . Cette valeur dépend de  $\alpha$  et de  $r(k)$ . On se donne alors  $q$  tel que:

$$q \in ]2, \frac{2p}{4-p}[. \quad (2.9)$$

Notons que pour ce choix l'injection de  $W^{2,p/2}(\Omega)$  dans  $W^{1,q}(\Omega)$  est compacte. Nous allons montrer que l'opérateur  $T$  réalise les conditions du lemme 2.1 dans l'espace de Banach  $W_0^{1,q}(\Omega)$ .

**Lemme 2.3.**

Soient  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^2$  et  $r$  une fonction de  $C^0(\mathbb{R})$ . On définit une application  $\tilde{r}$  de l'espace  $L^\infty(\Omega)$  dans lui-même par:

$$\tilde{r} : v \mapsto \tilde{r}(v) = r \circ v.$$

Alors, la fonction  $\tilde{r}$  est une application continue de  $L^\infty(\Omega)$  dans  $L^\infty(\Omega)$ .

*Preuve.*

Soit  $v$  un élément de  $L^\infty(\Omega)$ , nous allons montrer que  $\tilde{r}$  est continue au point  $v$ . Notons par  $K = \|v\|_{L^\infty(\Omega)}$ . La fonction  $r$  est uniformément continue sur le compact  $[-2K, 2K]$ . On a donc pour tout  $\epsilon > 0$  un réel  $\delta > 0$  tel que  $\forall t, s \in [-2K, 2K]$  avec  $|t - s| \leq \delta$  alors  $|r(t) - r(s)| \leq \epsilon$ .

On se donne  $\epsilon > 0$  et on impose que  $\delta \leq K$ . Soit  $w \in L^\infty(\Omega)$  tel que  $\|w - v\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \delta$ , on a alors  $|w(x) - v(x)| \leq \delta$  pour presque tout  $x$  dans  $\Omega$ . En utilisant la continuité uniforme de  $r$  on a  $|r(w(x)) - r(v(x))| \leq \epsilon$  pour presque tout  $x$ . On obtient donc  $\|\tilde{r}(w) - \tilde{r}(v)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \epsilon$ . D'où la continuité.  $\square$

Pour simplifier la notation, on notera  $\tilde{r}$  par  $r$ .

**Lemme 2.4.**

L'application  $T_1 : W_0^{1,q}(\Omega) \rightarrow W_0^{1,p}(\Omega)$  est continue.

*Preuve.*

Soit  $v$  une fonction de  $W_0^{1,q}(\Omega)$ . La fonction  $r_k(v) = r_k \circ v$  satisfait la condition  $\alpha \leq r_k(v) \leq r(k)$ . En utilisant le théorème de Lax-Milgram, on déduit l'existence d'une solution  $\phi$  de l'équation (2.3) dans  $W_0^{1,2}(\Omega)$  avec l'estimation suivante:

$$\|\phi\|_{W_0^{1,2}(\Omega)} \leq C_1 \|f\|_{W^{-1,2}(\Omega)}. \quad (2.10)$$

On peut réécrire l'équation (2.3) en plaçant le terme  $i\omega\mu\phi$  dans le second membre. En appliquant le lemme 2.2, on obtient grâce à la relation (2.5):

$$\|\phi\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \leq C_2(\|f\|_{W^{-1,p}(\Omega)} + \|\phi\|_{W^{-1,p}(\Omega)}).$$

En utilisant l'estimation (2.10), on trouve:

$$\|\phi\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \leq C_3\|f\|_{W^{-1,p}(\Omega)}. \quad (2.11)$$

Les constantes  $C_1, C_2$  et  $C_3$  ne dépendent pas de  $v$ .

D'autre part, soient  $u$  et  $v$  deux fonctions de  $W_0^{1,q}(\Omega)$  et posons  $\phi = T_1(u)$ ,  $\psi = T_1(v)$ . En notant par  $\varphi = \phi - \psi$ , on peut écrire:

$$\nabla \cdot (r_k(u)\nabla\varphi) - i\omega\mu\varphi = -\nabla \cdot ((r_k(u) - r_k(v))\nabla\psi),$$

En utilisant le théorème de Lax-Milgram, on montre que:

$$\|\varphi\|_{W_0^{1,2}(\Omega)} \leq C_4\|(r_k(u) - r_k(v))\nabla\psi\|_{L^2(\Omega)}.$$

On applique à nouveau le lemme 2.2, on obtient ainsi:

$$\begin{aligned} \|\varphi\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} &\leq C_5(\|(r_k(u) - r_k(v))\nabla\psi\|_{L^p(\Omega)} + \omega\mu\|\varphi\|_{W^{-1,p}(\Omega)}), \\ &\leq C_6(\|(r_k(u) - r_k(v))\|_{L^\infty(\Omega)}\|\nabla\psi\|_{L^p(\Omega)} + \|\varphi\|_{W^{1,2}(\Omega)}), \\ &\leq C_7\|(r_k(u) - r_k(v))\|_{L^\infty(\Omega)}. \end{aligned}$$

D'après le lemme 2.3 l'application  $v \mapsto \tilde{r}(v) = r \circ v$  est continue de  $L^\infty(\Omega)$  dans lui-même. L'injection de  $W^{1,q}(\Omega)$  dans  $L^\infty(\Omega)$  est continue. On en déduit la continuité de l'opérateur  $T_1$ .  $\square$

### Remarque 2.3.

On peut aussi démontrer la continuité en utilisant des suites. On montre que si une suite  $(u_n)_n$  converge vers  $u$  dans  $W_0^{1,q}(\Omega)$  alors il existe une sous-suite de  $(T_1(u_n))_n$  qui converge vers  $T_1(u)$  dans  $W_0^{1,q}(\Omega)$ . En utilisant l'argument d'unicité de la solution, on montre que toute la suite converge et on obtient ainsi la continuité.

Nous montrons maintenant la continuité de l'opérateur  $T_2g$ .

### Lemme 2.5.

L'application  $T_2g : W_0^{1,q}(\Omega) \times W_0^{1,p}(\Omega) \mapsto W_0^{1,q}(\Omega)$  est continue et compacte.

*Preuve.*

L'opérateur  $T_2$  est linéaire continu de  $L^{p/2}(\Omega)$  dans  $W^{2,p/2}(\Omega) \cap W_0^{1,p/2}(\Omega)$  pour  $p > 2$  [BRE]. C'est donc un opérateur linéaire continu et compact de  $L^{p/2}(\Omega)$  dans  $W_0^{1,q}(\Omega)$ . Il reste à montrer que l'application  $g$  de  $W_0^{1,q}(\Omega) \times W_0^{1,p}(\Omega)$  dans  $L^{p/2}(\Omega)$  est continue.

Soient  $(u, \phi)$  et  $(v, \psi)$  deux éléments de  $W_0^{1,q}(\Omega) \times W_0^{1,p}(\Omega)$ . On a :

$$\begin{aligned}
\|g(u, \phi) - g(v, \psi)\|_{L^{p/2}(\Omega)} &= \frac{1}{2} \|r_k(u)[\nabla\phi]^2 - r_k(v)[\nabla\psi]^2\|_{L^{p/2}(\Omega)} \\
&\leq \frac{1}{2} (\|(r_k(u) - r_k(v))[\nabla\phi]^2\|_{L^{p/2}(\Omega)} \\
&\quad + \|r_k(v)([\nabla\phi]^2 - [\nabla\psi]^2)\|_{L^{p/2}(\Omega)}) \\
&\leq \frac{1}{2} (\|r_k(u) - r_k(v)\|_{L^\infty(\Omega)} \|[\nabla\phi]^2\|_{L^{p/2}(\Omega)} \\
&\quad + \|r_k(v)\|_{L^\infty(\Omega)} \|[\nabla\phi]^2 - [\nabla\psi]^2\|_{L^{p/2}(\Omega)}) \\
&\leq C (\|r_k(u) - r_k(v)\|_{L^\infty(\Omega)} \\
&\quad + \|\nabla\phi - \nabla\psi\|_{L^p(\Omega)} (\|\nabla\phi\|_{L^p(\Omega)} + \|\nabla\psi\|_{L^p(\Omega)})).
\end{aligned}$$

A nouveau, on utilise la continuité de l'application  $w \mapsto r_k(w)$  dans  $L^\infty(\Omega)$  ainsi que l'injection continue de  $W^{1,q}(\Omega)$  dans  $L^\infty(\Omega)$ . On en déduit la continuité de  $g$ .  $\square$

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème principal de cette section.

**Théorème 2.1.**

Il existe  $p > 2$  tel que le problème (2.1)-(2.2) admet une solution  $(h_k, u_k)$  dans  $W_0^{1,p}(\Omega) \times W_0^{1,q}(\Omega)$ , pour tout  $q$  satisfaisant (2.9). De plus, on a l'estimation

$$\|h_k\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} + \|u_k\|_{W_0^{1,q}(\Omega)} \leq C \|f\|_{W^{-1,p}(\Omega)}^2, \quad (2.12)$$

où  $C$  est indépendant de  $u_k$  et de  $h_k$ .

*Preuve.*

Des lemmes 2.4 et 2.5, on déduit que l'opérateur  $T$  est continu et compact de  $W_0^{1,q}(\Omega)$  dans  $W_0^{1,q}(\Omega)$ . Il reste à montrer que  $T(v)$  est borné uniformément dans  $W_0^{1,q}(\Omega)$ . La relation (2.11) montre que  $T_1(v)$  est borné indépendamment de  $v$  par  $H_0$ . On peut écrire:

$$\begin{aligned}
\|T(v)\|_{W_0^{1,q}(\Omega)} &\leq \|T_2g(v, T_1(v))\|_{W_0^{2,p/2}(\Omega)}, \\
&\leq C_1 \|r_k(v)[\nabla T_1(v)]^2\|_{L^{p/2}(\Omega)}, \\
&\leq C_2 \|T_1(v)\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}^2, \\
&\leq C_3 \|f\|_{W^{-1,p}(\Omega)}^2,
\end{aligned}$$

où  $C_3$  est indépendant de  $v$ .

En prenant pour  $D$  la boule de rayon  $C_3 \|f\|_{W^{-1,p}(\Omega)}^2$  et de centre 0, on satisfait aux conditions du lemme 2.1. On obtient ainsi une solution  $u_k \in W_0^{1,q}(\Omega)$  solution de  $T(u_k) = u_k$  et le couple  $(u_k, T_1(u_k))$  est solution du problème (2.1)-(2.2).  $\square$

**Remarque 2.4.**

Le second membre de l'équation (2.2) est toujours positif. On en déduit grâce au principe du maximum faible [BRE], que la fonction  $u_k$  donnée par le théorème 2.1 est positive, ceci pour tout  $k$ .

**3) Quelques lemmes techniques.**

Nous avons montré dans le paragraphe précédent que le problème (2.1)-(2.2) admet une solution  $(h_k, u_k)$ . On peut ainsi construire une famille de solutions  $(h_k, u_k)_k$ . On souhaite déterminer comment convergent ces solutions et si la limite  $(h, u)$  ( si elle existe ) est solution du problème (1.10)-(1.11).

Si la fonction  $r$  est bornée, le couple  $(h_k, u_k)$  est solution du problème (1.10)-(1.11) avec  $k = \|r\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$ . Si la fonction  $r$  n'est pas bornée, on ne peut plus affirmer que la suite  $(r_k(u_k))_k$  est bornée dans  $L^\infty(\Omega)$ . Dans ce cas, on cherchera une solution du problème (1.10)-(1.11) comme limite de la suite des solutions des problèmes tronqués  $\mathcal{P}_k$ .

Nous allons, dans ce paragraphe, démontrer une série de lemmes nous permettant de contrôler la norme  $L^\infty$  des applications  $u_k$  en fonction de  $k$ . Nous allons démontrer que sous certaines conditions, il existe un réel  $K$  tel que  $\|u_K\|_{L^\infty(\Omega)} \leq K$ . Si tel est le cas, le lemme suivant prouve que le couple  $(h_K, u_K)$  est solution du problème (1.10)-(1.11).

**Lemme 3.1.**

Soit  $K > 0$  et  $(h_K, u_K)$  solution du problème  $\mathcal{P}_k$  (2.1)-(2.2) tel que

$$\|u_K\|_{L^\infty(\Omega)} \leq K. \quad (3.1)$$

Alors,  $(h_k, u_k)$  est solution du problème  $\mathcal{P}_k$  pour tout  $k \geq K$ .

*Preuve.*

La preuve est évidente. Si  $\|u_K\|_{L^\infty(\Omega)} \leq K$ , ceci implique que  $r_k \circ u_K = r_K \circ u_K$  p.p. pour tout  $k, k \geq K$ .  $\square$

On déduit du lemme précédent que le couple de fonctions  $(h_K, u_K)$  est solution du problème (1.10)-(1.11). Il suffit maintenant de prouver qu'il existe  $K > 0$  tel que l'on ait (3.1). D'après la remarque 2.4, la fonction  $u_k$  est minorée par 0. Il reste à prouver que  $u_k$  est majorée.

Le lemme suivant donne les estimations a priori obtenue sur  $u_k$ .

**Lemme 3.2.**

Soit  $(h_k, u_k)$  une solution de (2.1)-(2.2) dans  $W_0^{1,p}(\Omega) \times W_0^{1,q}(\Omega)$ , alors on a

$$\int_{\Omega} r_k(u_k)[\nabla h_k]^2 dx \leq \frac{1}{\mu\omega} \int_{\Omega} |f|^2 dx. \quad (3.2)$$

*Preuve.*



En multipliant la première équation du système (2.1) par le conjugué de  $h_k$  et en intégrant sur le domaine  $\Omega$ , on obtient:

$$\int_{\Omega} i\omega\mu|h_k|^2 dx + \int_{\Omega} r_k(u_k)[\nabla h_k]^2 dx = \int_{\Omega} fh_k^* dx.$$

On en déduit l'inégalité suivante:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \omega\mu|h_k|^2 dx &\leq \int_{\Omega} \text{Im}(fh_k^*) dx, \\ &\leq \int_{\Omega} |f||h_k| dx. \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient:

$$\left(\int_{\Omega} |h_k|^2 dx\right)^{1/2} \leq \frac{1}{\mu\omega} \left(\int_{\Omega} |f|^2 dx\right)^{1/2}. \quad (3.3)$$

En utilisant à nouveau l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'inégalité (3.3), on peut écrire:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} r_k(u_k)[\nabla h_k]^2 dx &= \int_{\Omega} \text{Re}(fh_k^*) dx, \\ &\leq \frac{1}{\mu\omega} \int_{\Omega} |f|^2 dx, \end{aligned}$$

d'où le résultat.  $\square$

### Remarque 3.1.

De la relation (3.2) et de l'hypothèse (1.7), on tire:

$$\int_{\Omega} [\nabla h_k]^2 dx \leq \frac{1}{\alpha\mu\omega} \int_{\Omega} |f|^2 dx. \quad (3.4)$$

La suite  $(h_k)_k$  est bornée uniformément dans  $W_0^{1,2}(\Omega)$ .

De la relation (3.2), on déduit que la suite  $(r_k(u_k)[\nabla h_k]^2)_k$  est bornée uniformément dans  $L^1(\Omega)$ . On peut par conséquent en extraire une sous-suite qui converge pour la topologie faible  $\star$  dans l'espace des mesures bornées  $\mathcal{M}$  vers une mesure bornée  $\mu_\nu$ . On montre alors qu'il existe une sous-suite de  $(u_k)_k$  qui converge vers  $u$  faiblement dans les espaces  $W_0^{1,r}(\Omega)$ ,  $1 \leq r < 2$  [CLTO].

De même, en utilisant la remarque 3.1, on peut extraire une sous-suite de  $(h_k)_k$  qui converge faiblement vers  $h$  dans  $W_0^{1,2}(\Omega)$ . Le couple  $(u, h)$  peut être vu comme une solution "très faible" du problème (1.10)-(1.11), mais nous n'avons pas prouvé que  $\mu_\nu = r(u)[\nabla h]^2$ . On peut obtenir cette dernière égalité si on montre que la fonction  $u$  est bornée. Malheureusement le simple fait que  $\mu_\nu$  soit un élément de  $\mathcal{M}$  ou de  $L^1(\Omega)$  ne suffit pas à garantir que  $u \in L^\infty(\Omega)$  comme le prouve le contre-exemple standard donné dans le lemme ci-dessous.

**Remarque 3.2.**

On peut montrer qu'il existe une fonction  $f \in L^1(\Omega)$  telle que le problème  $-\Delta u = f$  admet une solution  $u \in W_0^{1,r}(\Omega)$ ,  $1 \leq r < 2$  et  $u \notin L^\infty(\Omega)$ . En effet, prenons par exemple comme domaine  $\Omega$  le cercle de centre  $O$  du plan  $\mathbb{R}^2$  et de rayon  $\frac{1}{e}$ . Soit  $f$  la fonction définie par:

$$f = \frac{1}{r^2 \ln^2 r},$$

où  $r$  est le rayon. La fonction  $f$  est intégrable sur  $\Omega$ .

La fonction  $u = \ln(|\ln(r)|)$  est solution du problème  $-\Delta u = f$ . On vérifie que  $u$  réalise toutes les conditions du lemme.  $\square$

Pour prouver l'existence d'une solution  $(h, u)$  telle que  $u$  soit bornée, nous proposons une méthode qui s'appuie sur des résultats démontrés par Stampacchia [STAM]. L'idée consiste à mesurer les sous-domaines de  $\Omega$  dans lesquels la fonction  $u$  est "très grande". On montre alors, sous certaines conditions, que ces sous-domaines sont de mesure nulle.

Dans toute la suite de ce paragraphe, nous supposons que  $k$  est un réel positif fixé tel que:

$$r(k) > \frac{\alpha(2\chi - 1)}{2(\chi - 1)}, \quad (3.5)$$

où  $\chi$  est donné par le lemme 2.2. Notons que puisque  $r$  est supposée non bornée, on peut toujours trouver un tel  $k$ .

**Définition 3.1.**

Soit  $l$  un réel positif, on définit les sous-ensembles de  $\Omega$  suivants:

$$A_l = \{x \in \Omega; u_k(x) > l\},$$

$$\Omega_l = \{x \in \Omega; l < u_k(x) \leq l + 1\}.$$

On note de plus par  $v_l$  et  $w_l$  les fonctions suivantes:

$$v_l = \max(u_k - l, 0),$$

$$w_l = \min(v_l, 1).$$

Les fonctions  $v_l|_{A_l}$  et  $w_l|_{A_l}$  sont des éléments de  $W_0^{1,2}(A_l)$ .

**Remarque 3.3.**

Les ensembles  $A_l$  et  $\Omega_l$  ainsi que les fonctions  $v_l$  et  $w_l$  dépendent de  $k$ . On omet l'indice  $k$  afin d'alléger les notations.

**Remarque 3.4.**

Notons que si pour  $l > 0$  on a  $|A_l| = 0$ , alors  $\|u_k\|_{L^\infty(\Omega)} \leq l$ .

Cette dernière remarque motive le choix de la méthode que nous allons utiliser. L'étude des ensembles  $A_l$  nous permettra d'évaluer la norme de  $u_k$  dans  $L^\infty(\Omega)$ . Dans un premier temps nous allons estimer la mesure des domaines  $A_l$  en fonction de  $l$  indépendamment de  $k$ . Nous avons besoin de quelques lemmes préliminaires.

**Lemme 3.3.**

Soit  $\Omega$  un ouvert borné et  $U$  un ouvert inclus dans  $\Omega$ . Pour toutes fonctions  $u \in W_0^{1,2}(U)$ , on a :

$$\|u\|_{W_0^{1,2}(U)} \leq S \|\nabla u\|_{L^2(U)},$$

où  $S$  est indépendant de  $u$  et de  $U$ .

*Preuve.*

Il suffit de remarquer que si  $u \in W_0^{1,2}(U)$  alors  $u$  peut être prolongé en  $\tilde{u}$  par 0 sur  $\Omega \setminus U$  avec  $\tilde{u} \in W_0^{1,2}(\Omega)$ . On utilise ensuite l'inégalité de Poincaré, on obtient donc :

$$\|\tilde{u}\|_{W_0^{1,2}(\Omega)} \leq S \|\nabla \tilde{u}\|_{L^2(\Omega)}.$$

Mais  $\tilde{u}$  est nul sur  $\Omega \setminus U$ , d'où le lemme.  $\square$

On prendra ici  $U = A_l$ . On déduit du lemme précédent que la constante de Poincaré  $S$  est indépendante de  $l$ . Le lemme suivant nous permet de contrôler la taille des ouverts  $A_l$  en fonction de  $l$ .

**Lemme 3.4.**

Soit  $l_0$  un réel positif et  $\phi : [l_0, \infty[ \rightarrow [0, \infty[$ , une fonction décroissante. On suppose qu'il existe  $\gamma \in ]0, 1[$  telle que :

$$\forall l \in [l_0, \infty[, \quad \phi(l+1) \leq \gamma \phi(l).$$

Alors on a :

$$\phi(l) \leq C_3 \gamma^l, \quad \text{avec } C_3 = \phi(l_0) \left(\frac{1}{\gamma}\right)^{l_0+1}. \quad (3.6)$$

*Preuve.*

Soit  $l \geq l_0$  et  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $l = l_0 + n + \delta$ ,  $0 \leq \delta < 1$ . On a alors :

$$\begin{aligned} \phi(l) &= \phi(l_0 + n + \delta), \\ &\leq \gamma^n \phi(l_0 + \delta), \\ &\leq \gamma^n \phi(l_0). \end{aligned}$$

Par ailleurs, on peut écrire:

$$\begin{aligned}\gamma^n &= \gamma^{l-l_0-\delta}, \\ &= \gamma^l \left(\frac{1}{\gamma}\right)^{l_0+\delta}, \\ &\leq \gamma^l \left(\frac{1}{\gamma}\right)^{l_0+1}.\end{aligned}$$

On en déduit la relation (3.6).  $\square$

Le lemme 3.4 va nous permettre d'obtenir une première estimation de la mesure de  $A_l$ . La proposition qui suit en est une application. On montre que la fonction  $|A_l|$  a une décroissance exponentielle par rapport à  $l$ .

**Proposition 3.1.**

Soit  $(h_k, u_k)$  une solution du problème (2.1)-(2.2) donnée par le théorème 2.1. Alors, il existe  $\eta \in ]0, 1[$  et  $C_4 > 0$  tels que:

$$|A_l| \leq C_4 \eta^l, \quad \forall l.$$

Les constantes  $\eta$  et  $C_4$  sont indépendantes de  $k$  et de  $l$ . Elle dépendent par contre de  $|\Omega|$  et de  $f$ .

*Preuve.*

En multipliant l'équation (2.2) par  $w_l$  et en intégrant sur le domaine  $\Omega$ , on obtient:

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_l} \nabla u_k \cdot \nabla u_k \, dx &= \int_{A_l} \frac{1}{2} r_k(u_k) [\nabla h_k]^2 w_l \, dx, \\ &\leq \int_{A_l} \frac{1}{2} r_k(u_k) [\nabla h_k]^2 \, dx.\end{aligned}$$

On obtient donc

$$\int_{\Omega_l} |\nabla u_k|^2 \, dx \leq \int_{A_l} \frac{1}{2} r_k(u_k) [\nabla h_k]^2 \, dx. \quad (3.7)$$

Soit  $q \in ]1, 2[$ , on peut écrire grâce l'inégalité de Hölder:

$$\left( \int_{\Omega_l} |\nabla u_k|^q \, dx \right)^{\frac{1}{q}} \leq \left( \int_{\Omega_l} |\nabla u_k|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} |\Omega_l|^{\frac{1}{q} - \frac{1}{2}}.$$

Notons par  $q^*$  le réel donné par:

$$\frac{1}{q^*} = \frac{1}{q} - \frac{1}{2}.$$

De l'inégalité ci-dessus et l'injection de Sobolev de  $W^{1,q}(A_l)$  dans  $L^{q^*}(A_l)$  nous obtenons:

$$\begin{aligned} \left( \int_{A_l} |w_l|^{q^*} dx \right)^{\frac{1}{q^*}} &\leq C_{q^*} \left( \int_{\Omega_l} |\nabla u_k|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}, \\ &\leq C_{q^*} \left( \int_{\Omega_l} |\nabla u_k|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} |\Omega_l|^{\frac{1}{q} - \frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

En remarquant que  $w_l = 1$  sur  $A_{l+1}$  et en utilisant l'inégalité (3.7) ainsi que le lemme 3.2, on obtient:

$$\begin{aligned} |A_{l+1}|^{\frac{1}{q^*}} &\leq C_{q^*} |\Omega_l|^{\frac{1}{q} - \frac{1}{2}} \left( \int_{\Omega_l} |\nabla u_k|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}, \\ &\leq C_{q^*} |\Omega_l|^{\frac{1}{q} - \frac{1}{2}} \left( \int_{A_l} \frac{1}{2} r_k(u_k) [\nabla h_k]^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}, \\ &\leq C_{q^*} |\Omega_l|^{\frac{1}{q} - \frac{1}{2}} \left( \frac{1}{2\mu\omega} \int_{\Omega} |f|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

On trouve alors:

$$|A_{l+1}| \leq \left( C_{q^*} \left( \frac{1}{2\mu\omega} \int_{\Omega} |f|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \right)^{q^*} |\Omega_l|.$$

La valeur de  $q$  peut être fixée arbitrairement (par exemple  $q = \frac{3}{2}$ ). On en déduit une constante  $C > 0$  indépendante de  $k$  telle que:

$$\begin{aligned} |A_{l+1}| &\leq C |\Omega_l|, \\ &\leq C (|A_l| - |A_{l+1}|). \end{aligned}$$

Donc

$$|A_{l+1}| \leq \frac{C}{1+C} |A_l|.$$

En appliquant le lemme 3.4 à la fonction  $\phi(l) = |A_l|$  on obtient le résultat avec:

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{C}{1+C}, \\ C_4 &= |\Omega| \frac{C}{1+C}. \end{aligned}$$

Les deux constantes  $\eta$  et  $C_4$  sont indépendantes de  $k$ .  $\square$

**Remarque 3.5.**

La décroissance exponentielle du domaine  $A_l$  en fonction de  $l$  est en accord avec la remarque 3.2.

Les estimations précédentes ne sont pas suffisantes pour déterminer une solution  $(h, u)$ , avec  $u$  bornée, du problème (1.10)-(1.11). L'information que nous n'avons pas encore utilisée est la régularité de la fonction  $f$  et son utilisation dans le théorème de Meyers. Nous allons démontrer une nouvelle estimation utilisant les résultats très précis obtenus sur les constantes du théorème de Meyers. Avant tout, nous avons besoin du lemme suivant dont la démonstration se trouve dans [STAM], p. 93.

**Lemme 3.5.**

Soit  $l_0$  un réel positif et  $\phi : [l_0, \infty[ \rightarrow [0, \infty[$ , une fonction décroissante. On suppose qu'il existe  $\gamma, C_5$  des réels strictement positifs et  $\beta > 1$  tel que:

$$\phi(t) \leq \frac{C_5}{(t-l)^\gamma} (\phi(l))^\beta, \quad \forall l, t, \quad l_0 \leq l < t. \quad (3.8)$$

Alors, il existe  $d > 0$  tel que  $\phi(l_0 + d) = 0$  avec:

$$d^\gamma = C_5 (\phi(l_0))^{\beta-1} 2^{\frac{\gamma\beta}{\beta-1}}. \quad (3.9)$$

Nous appliquerons le lemme 3.5 à la fonction  $\phi(l) = |A_l|$ . On montrera qu'il existe  $l_1 > 0$  tel que  $\phi(l_1) = 0$ . D'après la remarque 3.4, on obtiendra  $\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq l_1$ . Nous allons mettre en évidence une relation entre les fonctions  $|A_l|$  du type (3.8).

**Lemme 3.6.**

Soient  $\mathcal{O}$  un ouvert borné et  $s > 2$ . L'injection de  $W^{1,2}(\mathcal{O})$  dans  $L^s(\mathcal{O})$  est continue avec pour toute fonction  $u \in W^{1,2}(\mathcal{O})$ :

$$\|u\|_{L^s(\mathcal{O})} \leq \frac{1}{2} s \|u\|_{W^{1,2}(\mathcal{O})} |\mathcal{O}|^{1/s}. \quad (3.10)$$

*Preuve.*

Soit  $s^*$  défini par:

$$\frac{1}{s^*} = \frac{1}{s} + \frac{1}{2}.$$

On a  $s^* < 2$ . En utilisant l'inégalité de Sobolev de  $W^{1,s^*}(\mathcal{O})$  dans  $L^s(\mathcal{O})$ , on trouve:

$$\|u\|_{L^s(\mathcal{O})} \leq C_{s^*} \|u\|_{W^{1,s^*}(\mathcal{O})}, \quad (3.11)$$

où  $C_{s^*} \leq \frac{s^*}{2-s^*}$ . Cette estimation est donnée dans [BRE], p. 162. On peut trouver dans [TA] une expression de la meilleure constante réalisant l'inégalité (3.11). La valeur de  $s$  est définie par  $s = \frac{2s^*}{2-s^*}$ . On obtient ainsi:

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^s(\mathcal{O})} &\leq \frac{1}{2} s \|u\|_{W^{1,s^*}(\mathcal{O})}, \\ &\leq \frac{1}{2} s \|u\|_{W^{1,2}(\mathcal{O})} |\mathcal{O}|^{\frac{1}{s^*} - \frac{1}{2}}, \\ &\leq \frac{1}{2} s |\mathcal{O}|^{\frac{1}{s}} \|u\|_{W^{1,2}(\mathcal{O})}. \end{aligned}$$

D'où la relation (3.10).  $\square$

Nous présentons maintenant le principal lemme de cette section. Nous obtenons une estimation de la mesure de  $A_l$ , pour  $l$  donné, en tenant compte la régularité de la fonction  $f$ . Ce lemme nous permettra ensuite de montrer sous certaines conditions l'existence d'une solution  $(h, u)$  du problème (1.10)-(1.11) avec  $u$  bornée.

**Lemme 3.7.**

Soit  $l > 0$ . On suppose que la fonction  $r$  satisfait les hypothèses (1.12)-(1.14). Alors, pour  $t > l$  et pour tout  $q > 2$ , on a:

$$|A_t| \leq \left[ \frac{C_6}{t-l} r(k) \frac{2pq}{p-2} \right]^q |A_t|^{1 + \frac{q(p-2)}{p}}, \quad (3.12)$$

où  $p$  est choisi conformément à (2.7). En particulier,  $p$  dépend de  $k$ . La constante  $C_6$  est indépendante de  $k, l, t$  et de  $p$ .

*Preuve.*

Notons par  $g_k$  la fonction  $\frac{1}{2} r_k(u_k) [\nabla h_k]^2$ . Soit  $l \geq 0$ , en multipliant l'équation (2.2) par  $v_l$  et en intégrant sur  $\Omega$  on trouve:

$$\int_{A_l} |\nabla u_k|^2 dx \leq \int_{A_l} g_k v_l dx.$$

Le lemme 2.2 implique que  $g_k$  est un élément de  $L^{p/2}(\Omega)$ . Posons  $s = \frac{2p}{2+p}$ , on vérifie  $1 < s < p/2$ . On note par  $s'$  le conjugué de  $s$ . On peut écrire en utilisant les lemmes 3.6 et 3.3:

$$\begin{aligned} \int_{A_l} |\nabla u_k|^2 dx &\leq \left( \int_{A_l} |g_k|^s dx \right)^{1/s} \left( \int_{A_l} |v_l|^{s'} dx \right)^{1/s'}, \\ &\leq \left( \int_{A_l} |g_k|^{p/2} dx \right)^{2/p} |A_l|^{\frac{1}{s} - \frac{2}{p}} \cdot \frac{1}{2} s' \|v_l\|_{W_0^{1,2}(A_l)} |A_l|^{1/s'}, \\ &\leq \left( \int_{A_l} |g_k|^{p/2} dx \right)^{2/p} \frac{1}{2} s' |A_l|^{\frac{1}{s} - \frac{2}{p} + \frac{1}{s'}} S \left( \int_{A_l} |\nabla u_k|^2 dx \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

où  $S$  est la constante de Poincaré donnée dans le lemme (3.3).

On obtient l'inégalité:

$$\left( \int_{A_t} |\nabla u_k|^2 dx \right)^{1/2} \leq \frac{1}{2} S s' \left( \int_{A_t} |g_k|^{p/2} dx \right)^{2/p} |A_t|^{1-\frac{2}{p}}. \quad (3.13)$$

D'autre part, soit  $q > 2$ ; en utilisant de nouveau les lemmes 3.6 et 3.3 on obtient:

$$\begin{aligned} \left( \int_{A_t} |v_l|^q dx \right)^{1/q} &\leq \frac{1}{2} q |A_t|^{1/q} \|u_k\|_{W^{1,2}(A_t)}, \\ &\leq \frac{1}{2} q S \left( \int_{A_t} |\nabla u_k|^2 dx \right)^{1/2} |A_t|^{1/q}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Soit  $t > l$ . Sur le domaine  $A_t$  on a  $v_l \geq t - l$ ; on peut donc écrire:

$$\begin{aligned} (t-l) |A_t|^{1/q} &\leq \left( \int_{A_t} |v_l|^q dx \right)^{1/q}, \\ &\leq \left( \int_{A_t} |v_l|^q dx \right)^{1/q}. \end{aligned}$$

De cette dernière estimation et des relations (3.13)-(3.14), on tire:

$$|A_t|^{1/q} (t-l) \leq \frac{1}{4} q s' S^2 \left( \int_{A_t} |g_k|^{p/2} dx \right)^{2/p} |A_t|^{1-\frac{2}{p}+\frac{1}{q}}. \quad (3.15)$$

Par hypothèse, la fonction  $r(t)$  est croissante. Par conséquent  $r_k(u_k) \leq r(k)$ .

On tire ainsi de l'estimation (2.8) l'inégalité suivante:

$$\begin{aligned} \left( \int_{A_t} |g_k|^{p/2} dx \right)^{2/p} &= \frac{1}{2} \left( \int_{A_t} r_k(u_k)^{p/2} [\nabla h_k]^p dx \right)^{2/p}, \\ &\leq \frac{1}{2} r(k) \left[ \left( \int_{\Omega} [\nabla h_k]^p dx \right)^{1/p} \right]^2, \\ &\leq \frac{1}{2} r(k) \frac{C_0^2}{\alpha^2} \|f\|_{W^{-1,p}(\Omega)}^2, \\ &\leq \frac{1}{2} r(k) \frac{C_0^2}{\alpha^2} \|f\|_{W^{-1,4}(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

En effet, on peut majorer la norme dans  $W^{-1,p}(\Omega)$  par la norme dans  $W^{-1,4}(\Omega)$  puisque  $p \leq 4$  d'après la remarque 2.1. On a en outre:

$$s' = \frac{2p}{p-2}.$$



En utilisant l'inégalité (3.15), on obtient finalement:

$$|A_t| \leq \left( \frac{S^2 C_0^2 \|f\|_{L^4(\Omega)}^2}{8\alpha^2(t-l)} \right)^q r^q(k) \left( \frac{2pq}{p-2} \right)^q |A_l|^{1 + \frac{(p-2)q}{p}}$$

On obtient l'estimation (3.12) avec

$$C_6 = \frac{S^2 C_0^2 \|f\|_{L^4(\Omega)}^2}{8\alpha^2}.$$

La constante  $C_6$  est indépendante de  $k$ .  $\square$

#### 4) Existence d'une solution bornée.

Nous démontrons dans ce quatrième paragraphe l'existence d'une solution  $(h, u)$  du problème (1.10)-(1.11) telle que  $u$  soit bornée. Comme nous l'avons indiqué dans l'introduction du troisième paragraphe, il suffit de réaliser l'hypothèse du lemme 3.1. Nous montrons que si la fonction  $r$  ne croît "pas trop vite", une telle solution existe.

#### Proposition 4.1.

Soit  $k$  donné, réalisant la condition (3.5). Il existe des constantes  $C_7 > 0$  et  $\eta \in ]0, 1[$  indépendantes de  $k$  tels que l'on ait l'estimation:

$$\|u_k\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \frac{k}{2} + C_7 \left( \frac{p}{p-2} \right)^2 r(k) \eta^{\frac{k}{2} \frac{p-2}{p}}, \quad (4.1)$$

où  $p$  est donné par la relation (2.7).

*Preuve.*

Posons  $l_0 = k/2$ . La relation (3.12) vérifie l'hypothèse (3.8) avec  $\phi(l) = |A_l|$ . On en déduit que  $|A_l| = 0$  pour  $l = l_0 + d$  où  $d$  est donné par (3.9). On obtient:

$$\|u_k\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \frac{k}{2} + d.$$

L'estimation (3.9) donne avec  $\gamma = q$ ,  $\beta = 1 + \frac{q(p-2)}{p}$  et  $C_5 = C_6^q r^q(k) \left( \frac{2pq}{p-2} \right)^q$  :

$$d^q = C_6^q \left( \frac{2pq}{p-2} \right)^q r^q(k) |A_{\frac{k}{2}}|^{\frac{q(p-2)}{p}} 2^{\frac{q\beta}{\beta-1}}.$$

On calcule:

$$d = C_6 \frac{2pq}{p-2} r(k) |A_{\frac{k}{2}}|^{\frac{p-2}{p}} 2^{\frac{\beta}{\beta-1}}.$$

Dans le lemme 3.7, la valeur de  $q$  n'est pas fixée. On peut prendre  $q = \frac{p}{p-2}$ . On trouve dans ce cas  $\beta = 2$ . On déduit l'égalité suivante:

$$d = 8C_6 \left( \frac{p}{p-2} \right)^2 r(k) |A_{\frac{k}{2}}|^{\frac{p-2}{p}}.$$

De cette dernière relation, on tire l'estimation:

$$\|u_k\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \frac{k}{2} + 8C_6 \left( \frac{p}{p-2} \right)^2 r(k) |A_{\frac{k}{2}}|^{\frac{p-2}{p}}.$$

D'après le proposition 3.1, il existe  $\eta \in ]0, 1[$  et  $C_4 > 0$  tels que:

$$|A_{\frac{k}{2}}| \leq C_4 \eta^{\frac{k}{2}},$$

où les constantes  $\eta$  et  $C_4$  sont indépendantes de  $k$ . On en déduit:

$$\|u_k\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \frac{k}{2} + C_7 \left( \frac{p}{p-2} \right)^2 r(k) \eta^{\frac{k}{2} \frac{p-2}{p}}.$$

On obtient ainsi l'estimation recherchée.  $\square$

#### **Théorème 4.1.**

Soit  $r$  une fonction satisfaisant les hypothèses (1.12)-(1.14). On suppose de plus que  $r$  réalise la condition suivante:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left( \frac{\ln \chi}{\ln(1 + \frac{\alpha}{2r(k)})} \right)^2 r(k) \exp \left[ \ln(\eta) \frac{k \ln(1 + \frac{\alpha}{2r(k)})}{4 \ln \chi} \right] = 0. \quad (4.2)$$

Alors, il existe  $p > 2$  tel que le problème (1.10)-(1.11) admette une solution  $(h, u)$  dans  $W_0^{1,p}(\Omega) \times W_0^{2,p/2}(\Omega)$  avec  $u \in L^\infty(\Omega)$ . Les constantes  $\chi$  et  $\eta$  sont données par les lemmes 2.2 et 3.1. En particulier, on a  $\eta \in ]0, 1[$  et  $\chi > 1$ .

*Preuve.*

La relation (2.7) donne:

$$p = \frac{4 \ln \chi}{2 \ln \chi - \ln\left(\frac{2r(k) - \alpha}{2r(k) - 2\alpha}\right)}.$$

On déduit de cette égalité la relation suivante:

$$\begin{aligned} \frac{p}{p-2} &= \frac{2 \ln \chi}{\ln\left(\frac{2r(k) - \alpha}{2r(k) - 2\alpha}\right)}, \\ &= \frac{2 \ln \chi}{\ln\left(1 + \frac{\alpha}{2r(k) - 2\alpha}\right)}, \\ &\leq \frac{2 \ln \chi}{\ln\left(1 + \frac{\alpha}{2r(k)}\right)}. \end{aligned}$$

De cette dernière inégalité, on obtient avec (4.1):

$$\|u_k\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \frac{k}{2} + C_7 \left( \frac{2 \ln \chi}{\ln(1 + \frac{\alpha}{2r(k)})} \right)^2 r(k) \exp \left[ \ln(\eta) \frac{k \ln(1 + \frac{\alpha}{2r(k)})}{4 \ln \chi} \right].$$

Si  $r$  satisfait la condition:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left( \frac{2 \ln \chi}{\ln(1 + \frac{\alpha}{2r(k)})} \right)^2 r(k) \exp \left[ \ln(\eta) \frac{k \ln(1 + \frac{\alpha}{2r(k)})}{4 \ln \chi} \right] = 0,$$

alors, il existe  $K$ , réalisant la relation (3.5), tel que  $\|u_K\|_{L^\infty(\Omega)} \leq K$ . En appliquant le lemme 3.1, on conclut que  $(h_K, u_K)$  est une solution du problème (1.10)-(1.11) avec  $u$  bornée. On obtient une solution  $(h, u)$  dans  $W_0^{1,p}(\Omega) \times W_0^{2,p/2}(\Omega)$ ,  $p > 2$  par application du lemme 2.2. La valeur de  $p$  dépend de  $\alpha$  et de  $r(K)$ .  $\square$

Le corollaire suivant donne une idée sur le comportement à l'infini des fonctions qui satisfont la condition (4.2).

**Corollaire 4.1.**

Soit  $r$  une fonction satisfaisant les hypothèses (1.7)-(1.8). S'il existe  $\zeta \in ]0, 1[$  tel que:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} r(k)k^{-\zeta} < \infty, \quad (4.3)$$

alors  $r$  satisfait la condition (4.2).

*Preuve.*

En utilisant un développement de  $\ln(1 + \frac{\alpha}{2r(k)})$  d'ordre 1, on obtient l'équivalence suivante pour  $k$  tendant vers l'infini:

$$\left( \frac{1}{\ln(1 + \frac{\alpha}{2r(k)})} \right)^2 \exp \left[ \ln(\eta) \frac{k \ln(1 + \frac{\alpha}{r(k)})}{4 \ln \chi} \right] \sim 4 \left( \frac{r(k)}{\alpha} \right)^2 \exp \left[ \ln(\eta) \frac{k\alpha}{4r(k) \ln \chi} \right].$$

De l'hypothèse (4.3), on déduit qu'il existe une constante  $C_8$  tel que pour  $k$  assez grand, on ait:

$$\left( \frac{\ln \chi}{\ln(1 + \frac{\alpha}{2r(k)})} \right)^2 r(k) \exp \left[ \ln(\eta) \frac{k \ln(1 + \frac{\alpha}{r(k)})}{4 \ln \chi} \right] \leq C_8 k^{3\zeta} \exp(\ln(\eta) C_8 k^{1-\zeta}).$$

La valeur de  $\ln(\eta)$  est strictement négative puisque  $\eta \in ]0, 1[$ , par conséquent la condition (4.2) est satisfaite.  $\square$

## 5) Conclusions.

Le théorème précédent montre que si la fonction  $r$  a une croissance à l'infini du type  $r(k) = k^\zeta$ ,  $\zeta \in ]0, 1[$ , on obtient l'existence d'une solution  $(h, u)$  du problème (1.10)-(1.11). La question se pose pour des croissances de type polynômial ou bien exponentiel. Peut-on prouver l'existence d'une solution  $(h, u)$  avec  $u$  bornée ou bien existe-t-il des contre-exemples à ce problème?

On peut poser aussi le problème (1.10)-(1.11) en supposant cette fois-ci que la fonction  $r$  converge vers 0 pour les hautes températures. Le problème peut être abordé par une méthode très similaire à celle présentée dans ce chapitre. On doit trouver une solution  $(h, u)$  avec  $u$  bornée si la fonction  $r(k)$  a un comportement en  $k^{-\zeta}$ ,  $\zeta \in ]0, 1[$ , à l'infini.

On peut montrer que la solution  $(h, u)$  du théorème 4.1 est très régulière. On sait que si  $u \in W^{2,p/2}(\Omega)$ , alors  $u$  est continue. Dans ce cas, l'équation (1.10) admet une unique solution  $h$  telle que  $h \in W_0^{1,p}(\Omega)$ , pour tout  $p$  [VES]. En particulier, on peut prendre  $p > 4$ . Dans ce cas, la fonction  $u$  est une fonction de  $C^1(\bar{\Omega})$ . On peut réitérer cet algorithme et montrer que si  $r$  est une fonction de  $C^k(\mathbb{R})$  alors  $u$  et  $h$  sont des fonctions de  $C^k(\bar{\Omega})$ .

Dans ce chapitre, nous avons considéré le problème (1.10)-(1.11) pour des ouverts  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^2$ . La méthode proposée peut-elle être étendue à des dimensions d'espace supérieures à deux pour des problèmes elliptiques couplées de ce type ? On connaît un résultat d'existence pour le problème tronqué [GAHE], mais on ne sait encore rien dans le cas du problème (1.10)-(1.11).

## ANNEXE

Nous donnons une démonstration du théorème de Meyers pour un opérateur elliptique linéaire. Nous portons un effort tout particulier sur l'évaluation des constantes intervenant dans ce théorème. Cette évaluation est nécessaire pour établir la démonstration du théorème d'existence du cinquième chapitre.

### **Théorème de Meyers.**

Soient  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^n$  et  $a$  une fonction de  $L^\infty(\Omega)$  telle que

$$0 < \alpha \leq a \leq \beta < \infty.$$

On définit l'opérateur linéaire  $L$  par:

$$Lu = -\nabla \cdot (a \nabla u).$$

Il existe  $p > 2$  tel que si  $f \in W^{-1,p}(\Omega)$ , le problème:

$$\begin{cases} Lu = f, & \text{dans } \Omega, \\ u = 0, & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.1)$$

admet une unique solution dans  $W_0^{1,p}(\Omega)$  avec l'estimation suivante:

$$\|u\|_{W_0^{1,p}} \leq C_{\alpha,\beta} \|f\|_{W^{-1,p}(\Omega)}. \quad (1.2)$$

De plus, il existe  $\chi > 1$  et  $C_0 > 0$  tels que si

$$\beta > \frac{\alpha(2\chi - 1)}{2(\chi - 1)}, \quad (1.3)$$

les valeurs de  $p$  et  $C_{\alpha,\beta}$  peuvent être choisies de la façon suivante:

$$p = \frac{4 \ln \chi}{2 \ln \chi - \ln\left(\frac{2\beta - \alpha}{2\beta - 2\alpha}\right)}, \quad (1.4)$$

$$C_{\alpha,\beta} = \frac{C_0}{\alpha}, \quad (1.5)$$

les constantes  $\chi$  et  $C_0$  étant indépendantes de  $\alpha$  et de  $\beta$ .

*Preuve.*

On note par  $X_p$  l'espace  $W_0^{1,p}(\Omega)$  muni de la norme:

$$\|u\|_{X_p} = \left( \int_{\Omega} |\nabla u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

et par  $Y_p$  l'espace  $W^{-1,p}(\Omega)$  muni de la norme:

$$\|u\|_{Y_p} = \min \left\{ \left( \int_{\Omega} |g|^p \right)^{\frac{1}{p}} \text{ tel que } g \in (L^p(\Omega))^n \text{ avec } \nabla \cdot g = u \right\}.$$

Les espaces  $X_p$  et  $Y_p$  sont des espaces de Banach. On définit l'opérateur  $A$  par:

$$Au = \frac{1}{\beta} Lu = -\nabla \cdot \left( \frac{a}{\beta} \nabla u \right).$$

L'équation (1.1) peut s'écrire sous la forme:

$$Au = (A + \Delta)u - \Delta u = g \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\beta} f, \quad (1.6)$$

L'opérateur  $-\Delta$  est un isomorphisme de  $X_p$  sur  $Y_p$ , pour tout  $p \in ]1, \infty[$ . Notons par  $G_p$  l'application inverse de  $Y_p$  sur  $X_p$ . On a:

$$(G_p(A + \Delta) + Id)u = G_p g,$$

où  $Id$  est l'application identité sur  $X_p$ .

Si on prouve l'inégalité suivante:

$$\|G_p(A + \Delta)\|_{\mathcal{L}(X_p, X_p)} < 1, \quad (1.7)$$

on prouve que l'opérateur  $A$  est une bijection de  $X_p$  sur  $Y_p$ . Il s'agit de déterminer les valeurs de  $p$  pour lesquelles on a la relation (1.7). Nous allons tout d'abord estimer la norme de l'opérateur  $A + \Delta$ .

Soit  $u \in X_p$ , on a:

$$\begin{aligned} \|(A + \Delta)u\|_{Y_p} &= \|\nabla \cdot \left(1 - \frac{a}{\beta}\right) \nabla u\|_{Y_p}, \\ &\leq \left\| \left(1 - \frac{a}{\beta}\right) \nabla u \right\|_{L^p(\Omega)}, \\ &\leq \sup_{x \in \Omega} \left| \frac{\beta - a(x)}{\beta} \right| \cdot \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}, \\ &\leq \frac{\beta - \alpha}{\beta} \|u\|_{X_p}. \end{aligned}$$

On obtient donc:

$$\|A + \Delta\|_{\mathcal{L}(X_p, Y_p)} \leq \frac{\beta - \alpha}{\beta}. \quad (1.8)$$

D'autre part, soit  $h$  un élément de  $(L^p(\Omega))^n$ , on peut lui associer la fonction  $v$  solution dans  $X_p$  de  $-\Delta v = \nabla \cdot h$ . On définit l'application  $\pi$  de  $(L^p(\Omega))^n$  dans lui-même par:

$$h \mapsto \pi(h) = \nabla v.$$

C'est une application linéaire continue. Par conséquent il existe  $C_p > 0$  tel que

$$\|\nabla v\|_{(L^p(\Omega))^n} \leq C_p \|h\|_{(L^p(\Omega))^n}.$$

Par définition des normes des espaces  $X_p$  et  $Y_p$ , cette dernière relation implique que  $\|G_p\|_{\mathcal{L}(Y_p, X_p)} \leq C_p$ . L'inégalité de l'énergie donne  $C_2 = 1$ . En choisissant la valeur particulière  $p = 4$ , on obtient:

$$\|\nabla v\|_{(L^4(\Omega))^n} \leq \chi \|h\|_{(L^4(\Omega))^n},$$

où  $\chi > 1$ . Le choix  $p = 4$  est arbitraire mais se révèle techniquement plus simple. Plus généralement, on peut choisir  $p_0 > 2$  quelconque. En appliquant l'inégalité d'interpolation, on peut majorer la constante  $C_p$  pour  $2 \leq p \leq 4$ . On a alors:

$$\begin{aligned} \|\nabla v\|_{(L^p(\Omega))^n} &\leq \|\nabla v\|_{(L^4(\Omega))^n}^\theta \|\nabla v\|_{(L^2(\Omega))^n}^{1-\theta}, \\ &\leq \chi^\theta \|h\|_{(L^4(\Omega))^n}^\theta \|h\|_{(L^2(\Omega))^n}^{1-\theta}, \end{aligned}$$

où  $p$  et  $\theta$  sont liés par la relation

$$\frac{1}{p} = \frac{\theta}{4} + \frac{1-\theta}{2}.$$

On a d'autre part, en utilisant à nouveau l'inégalité d'interpolation:

$$\begin{aligned} \|\nabla v\|_{(L^p(\Omega))^n} &\leq C_p \|h\|_{(L^p(\Omega))^n}, \\ &\leq C_p \|h\|_{(L^4(\Omega))^n}^\theta \|h\|_{(L^2(\Omega))^n}^{1-\theta}. \end{aligned}$$

On en déduit alors

$$C_p \leq \chi^\theta.$$

On évalue la valeur de  $\theta$ ; on trouve:

$$\theta = \frac{2(p-2)}{p}.$$

On obtient ainsi en utilisant (1.8) une estimation de la norme de l'opérateur  $G_p(A + \Delta)$ :

$$\|G_p(A + \Delta)\|_{\mathcal{L}(X_p, X_p)} \leq \chi^{\frac{2(p-2)}{p}} \frac{\beta - \alpha}{\beta}.$$

On choisit  $p$  de telle manière que la norme de l'opérateur  $G_p(A + \Delta)$  soit bornée par  $\frac{2\beta - \alpha}{2\beta}$ , soit encore:

$$\chi^{\frac{2(p-2)}{p}} \frac{\beta - \alpha}{\beta} = \frac{2\beta - \alpha}{2\beta}.$$

Comme  $\frac{2(p-2)}{p} \in [0, 1]$ , on a

$$1 \leq \chi^{\frac{2(p-2)}{p}} \leq \chi.$$

Par conséquent, le choix de  $p$  est réalisable si  $\beta$  satisfait la condition

$$\chi \geq \frac{2\beta - \alpha}{2\beta - 2\alpha},$$

soit encore

$$\beta \geq \frac{\alpha(2\chi - 1)}{2(\chi - 1)}.$$

Dans ce cas, on peut calculer  $p$  en fonction de  $\alpha$  et  $\beta$ . On trouve:

$$p = \frac{4 \ln \chi}{2 \ln \chi - \ln\left(\frac{2\beta - \alpha}{2\beta - 2\alpha}\right)}.$$

On obtient par conséquent:

$$\|G_p(A + \Delta)\|_{\mathcal{L}(X_p, X_p)} \leq \frac{2\beta - \alpha}{2\beta} < 1$$

L'opérateur  $A$  est donc inversible et la norme de  $(Id + G_p(A + \Delta))^{-1}$  est donnée par

$$\begin{aligned} \|(Id + G_p(A + \Delta))^{-1}\|_{\mathcal{L}(X_p, X_p)} &\leq \frac{1}{1 - \frac{2\beta - \alpha}{2\beta}}, \\ &\leq \frac{2\beta}{\alpha}. \end{aligned}$$

On trouve par conséquent

$$\|(G_p A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X_p, X_p)} = \|A^{-1} \Delta\|_{\mathcal{L}(X_p, X_p)} \leq \frac{2\beta}{\alpha}.$$

En écrivant alors que

$$\|A^{-1}\|_{\mathcal{L}(Y_p, X_p)} = \|A^{-1} \Delta G_p\|_{\mathcal{L}(Y_p, X_p)} \leq \|A^{-1} \Delta\|_{\mathcal{L}(X_p, X_p)} \|G_p\|_{\mathcal{L}(Y_p, X_p)},$$

on obtient l'estimation

$$\|A^{-1}\|_{\mathcal{L}(Y_p, X_p)} \leq C_p \frac{2\beta}{\alpha} \leq \chi \frac{2\beta}{\alpha}.$$



Par conséquent, pour tout  $g \in Y_p$ , le problème (1.6) admet une unique solution  $u$  dans  $X_p$  et on a l'estimation suivante:

$$\begin{aligned}\|\nabla u\|_{(L^p(\Omega))^n} &\leq \chi \frac{2\beta}{\alpha} \|g\|_{W^{-1,p}(\Omega)}, \\ &\leq \frac{2\chi}{\alpha} \|f\|_{W^{-1,p}(\Omega)}.\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Poincaré, on peut écrire:

$$\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \leq S \|\nabla u\|_{(L^p(\Omega))^n} \leq \frac{2S}{\alpha} \|f\|_{W^{-1,p}(\Omega)}.$$

D'où la relation (1.2).  $\square$

## References

- [BLP] A. Bensoussan, J. L. Lions, G. Papanicolaou, *Asymptotic Analysis for Periodic Structures*, North Holland, 1978.
- [BOGA] L. Boccardo, T. Gallouët, *Non-linear Elliptic and Parabolic Equations Involving Measure Data*, Journal of Functional Analysis, Vol 87 No1, 1989.
- [BRE] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle*, Masson Paris, 1987.
- [CI] G. Cimatti, *A Bound for the Temperature in the Thermistor Problem*, IMA Journal of Applied Mathematics 40, 15-22, 1988.
- [CLTO] S. Clain, R. Touzani, *A two-Dimensional Stationary Induction Heating Problem*, a paraître dans Math. Methodes Appl. Sci., 1993.
- [CRST] S. Clain, J. Rappaz, M. Swierkosz, R. Touzani, *Numerical Modelling of Induction Heating for Two-Dimensional Geometries*, Mathematical Models and Methods in Applied Sciences vol 3, No 6, 905-822, 1993.
- [DA] A. Dall'Aglio, *thesis*, 1992.
- [EDF] EDF/DER, *Le chauffage par induction*, note EDF/DER, 1981.
- [GAHE] T. Gallouët, R. Herbin, *Existence of a Solution to a Coupled Elliptic System*, Publication du L.A.M.A, Université de Savoie, 1993.
- [HO] S. Howison, *A Note on the Thermistor Problem in two space dimensions.*, Quarterly of Applied Mathematics clvii, Number 3, 1989.
- [LIONS] J. L. Lions, *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*, Dunod Gauthier-Villars, 1969.
- [RATH] P.A. Raviart, J.M. Thomas, *Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles*, Masson Paris, 1988.
- [SER] J. Serrin, *Pathological Solutions of Elliptic Differential Equations*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, 385-387, 1964.
- [SI] J. Simon, *Compact Sets in the Space  $L^p(0, T; B)$* , Annali di Matematica pura ed Applicata (IV), Vol. CXLVI, pp 385-387, 1987.
- [STAM] G. Stampacchia, *Equations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus*, Presses Universitaires de Montréal, 1966.
- [TA] G. Talenti, *Best Constants in Sobolev inequality*, Ann. Mat. Pura Appl. (110), p. 353-372., 1976.
- [THO] V. Thomée, *Galerkin Finite Elements Method for Parabolic Problems*, Lecture Notes in Mathematics 1054, Springer Verlag.
- [TRE] V. Trénoquine, *Analyse fonctionnelle*, Editions MIR, Moscou, 1985.
- [VES] V. Vespri, *Semigroup Theory and Application. p,419*, Lecture notes in pure and applied mathematics, vol 116, 1989.
- [ZEN] A. Ženišek, *Nonlinear Elliptic and Evolution Problems and their Finite Element Approximations*, Academic Press, 1990.

## Curriculum Vitae

Je suis né le 23 mai 1967. Après l'obtention de mon baccalauréat, je suis entré au lycée Malherbes de Caen pour effectuer les classes préparatoires aux concours d'entrée des écoles d'ingénieurs entre 1985 et 1988. J'ai poursuivi mes études à l'université de Rennes dans le cadre du magistère de mathématiques de Rennes. J'y ai obtenu successivement ma licence et ma maîtrise de mathématiques ainsi que mon diplôme de magistère en 1991. J'ai été ensuite engagé par le professeur J. Rappaz comme assistant à l'école polytechnique en avril 1991 ou j'ai collaboré avec le professeur R. Touzani et le Dr M. Swierkosz sur le problème de chauffage par induction.

