

ZUR BERECHNUNG VON VERBUNDTRÄGERN MIT BELIEBIG GEFÜGTEM QUERSCHNITT

THÈSE N° 1213 (1994)

PRÉSENTÉE AU DÉPARTEMENT DE GÉNIE CIVIL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

POUR L'OBTENTION DU GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES TECHNIQUES

PAR

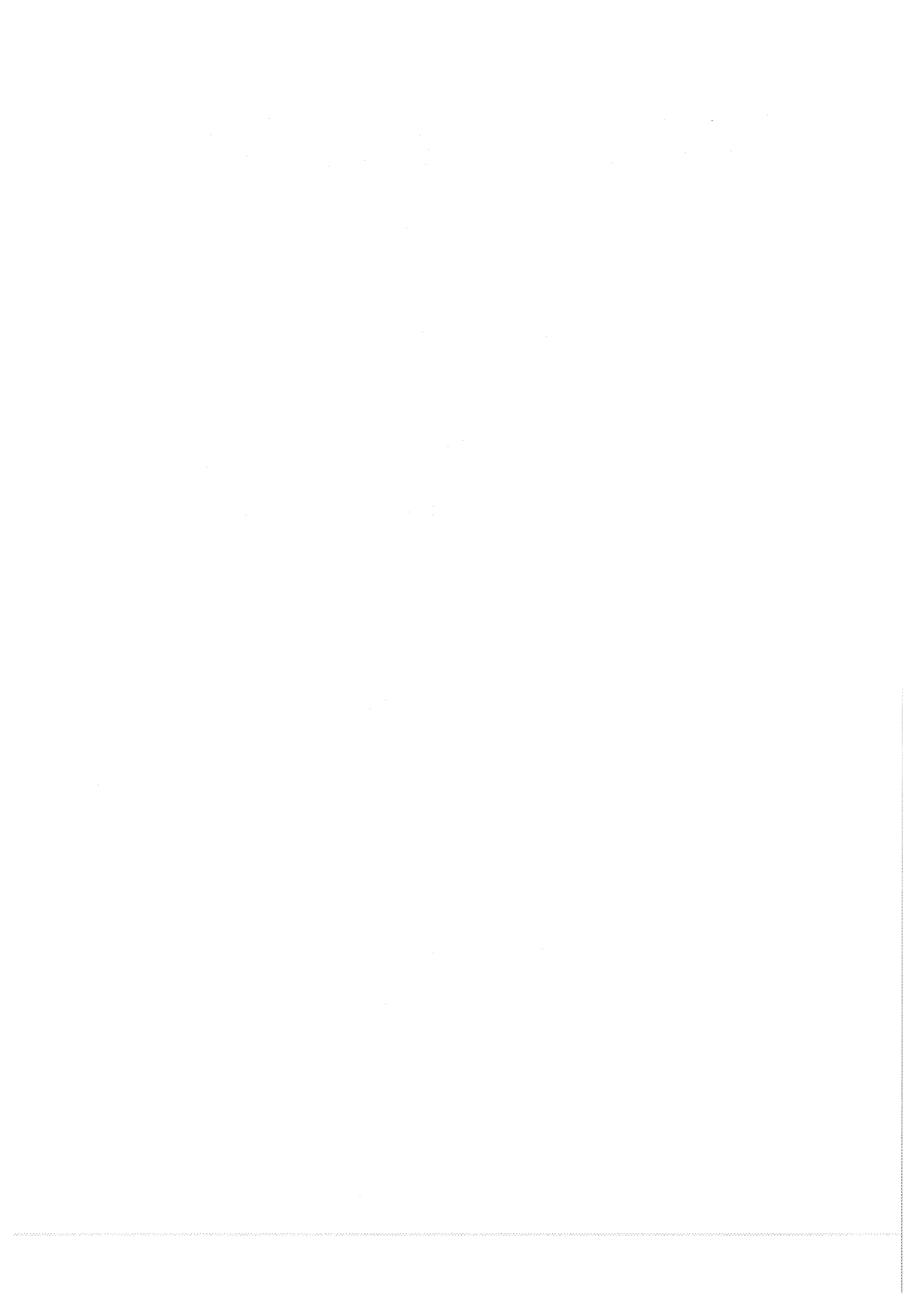
MICHAEL HOEFT

Ingénieur civil diplômé de l'Ecole Technique Supérieure de Darmstadt
de nationalité allemande

acceptée sur proposition du jury:

Prof. J. Natterer, rapporteur
M. M. Crisinel, corapporteur
Prof. P. Haller, corapporteur
Prof. M. H. Kessel, corapporteur
Prof. H. Kreuzinger, corapporteur

Lausanne, EPFL
1994

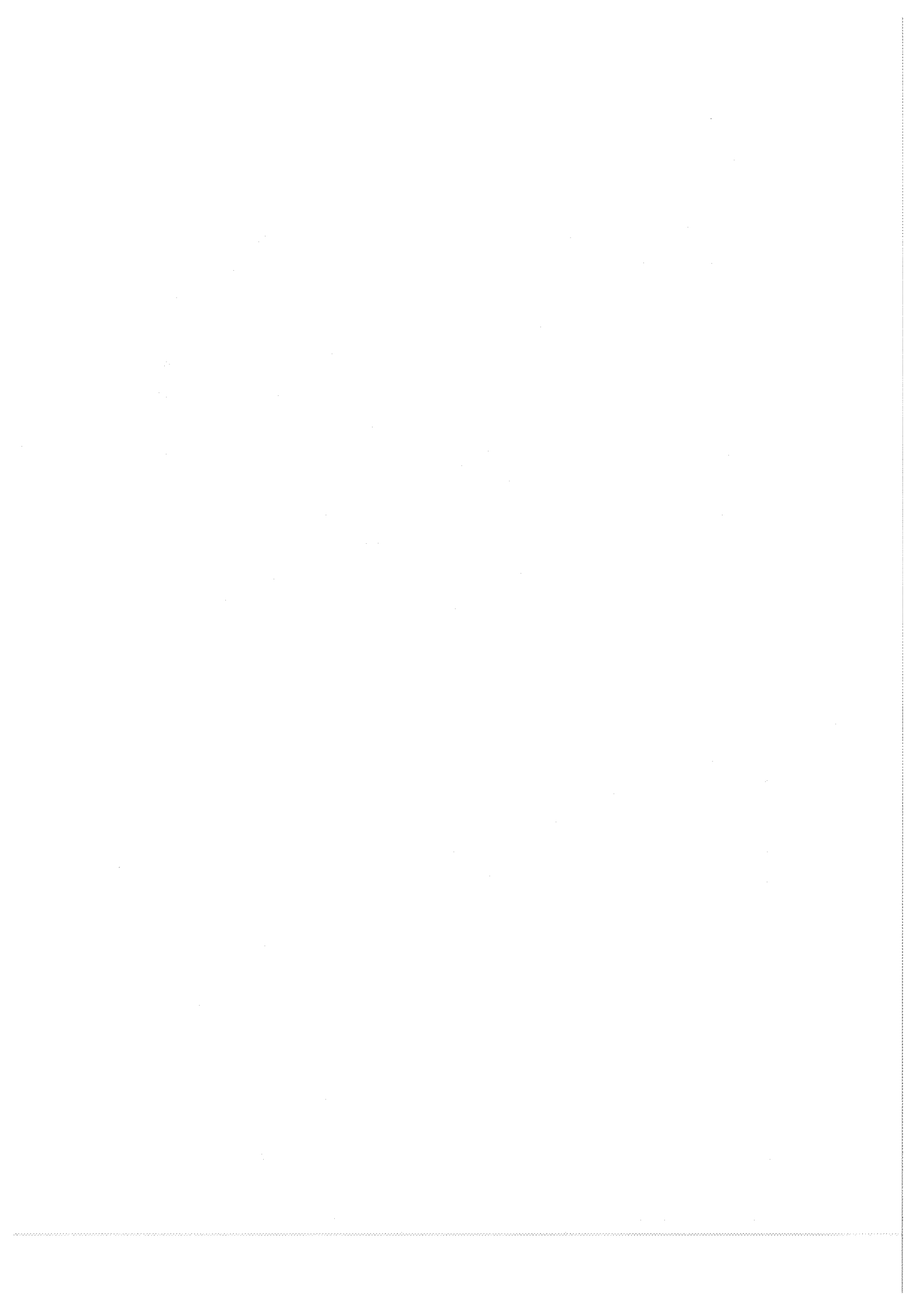


Résumé

Le but de cette thèse est de développer une méthode de calcul du deuxième ordre pour la description du comportement statique de structures constituées d'éléments composés avec interaction partielle. Le modèle ne se réfère pas à l'axe neutre de la section avec interaction totale, mais se réfère aux axes neutres des différentes sections partielles. La connaissance des valeurs propres du système d'équations différentielles est nécessaire pour trouver un ensemble de fonctions exactes, qui permettent des algorithmes numériquement stables. Pour la déduction de la matrice de transfert la définition du vecteur d'état demande une sélection soignée des éléments afin de garantir l'accomplissement consistant de toutes les conditions de bord et de transition possibles. Différents aspects du calcul de structures mixtes sont discutés. La matrice de rigidité et de transfert pour un élément d'une section composée de deux sections partielles est donnée. Les valeurs limites de flambage pour un élément simple par rapport à toutes les conditions de bord possibles sont déduites. La validité du procédé présenté est vérifiée par différents exemples de la construction en bois tirés de projets réalisés.

Abstract

This paper describes a new model for the structural behaviour of composite beam-columns with partial interaction. This second-order model doesn't make use of the centroid of the transformed cross-section area of the fully composite member, but the centroids of the partial sections are considered regardless of their geometry. In order to avoid numerical instabilities 'exact' shape functions are used to deduce the transfer matrix. The elements of the state vector are carefully selected so that boundary- and transition-conditions can be satisfied consistently. Special effects connected with the calculation of composite beam-columns are discussed. Exact stiffness and transfer matrix for the two-layer composite beam is developed analytically. The buckling loads for all possible boundary conditions of the simple element are stated. The advantages of the present method of calculation is illustrated by applying it to different problems occurring in practice of timber construction engineering.



Kurzfassung

In der vorliegenden Arbeit wird ein allgemeines Berechnungsverfahren zur Lösung des eindimensionalen Stabproblems nach Theorie I. und II. Ordnung vorgestellt, welches für Simulationsrechnungen und für die vielfältigen Bemessungsaufgaben mehrteiliger, nachgiebig zusammengesetzter Verbundträger im Holzbau flexibel eingesetzt werden kann.

Die bekannte Theorie des elastischen Verbunds wird so verallgemeinert, daß auch beliebig verzweigte Querschnitte und mehrfach geschlossene Profile berechnet werden können. Diese Ausweitung der Theorie erfordert allerdings strengere Konventionen und eine kontrollierte Behandlung der mathematischen Formulierung des Problems. Um numerische Instabilitäten bei der Anwendung des Übertragungsverfahrens zur Berechnung des Spannungs- und Verformungszustandes zu vermeiden, wird anhand von Gesetzmäßigkeiten im Aufbau des Systems simultaner Differentialgleichungen die Anzahl und der Typ der relevanten Eigenwerte allgemein bestimmt. Extreme Querschnitts- und Steifigkeitsverhältnisse werden dabei ebenso berücksichtigt wie die Eigenarten der Querschnittsausbildung und eventuell vorhandene Symmetrien. Mit Hilfe eines Eliminationsverfahrens kann ein Fundamentalsystem von Lösungen für die verbleibenden, linear unabhängigen Funktionen angegeben werden.

Zur Ableitung der Übertragungsmatrix werden die Zustandsgrößen so definiert, daß alle Rand- und Übergangsbedingungen konsistent erfüllt werden können. Hierfür ist eine von bisher bekannten Lösungen und Vorstellungen abweichende Definition des Zustandsvektors notwendig, welche sich aus dem Teilverbund-Modell ergibt. Dieses Modell beschreibt das Zusammenwirken der Teilquerschnitte ohne auf eine ausgezeichnete Achse d. h. eine fiktive neutrale Faser des Gesamtquerschnittes zurückzugreifen. Das Tragverhalten des Verbundquerschnittes kann allein mit Kenntnis der bekannten Schwerachsenabstände der homogenen Teilquerschnitte beliebiger Geometrie und deren Kopplungen beschrieben werden. Die Vorteile dieser Darstellung zeigen sich nicht nur in Form einer zur Nebendiagonalen symmetrischen Übertragungsmatrix, sondern auch bei der Berechnung von Stäben mit Randmomenten oder 'exzentrischer' Längskraft. In diesem Fall ist die Definition der 'Exzentrizität' über einen Hebelarm im Bezug auf einen mehrteiligen Verbundträger nicht mehr eindeutig und kann nur über die genaue Beschreibung der Lasteinleitung erfolgen.

Mit Hilfe des Übertragungsverfahrens sind somit alle für die Bemessungspraxis relevanten Lastfälle (Punktlast, linear veränderliche Last, Eigenspannungen) berechenbar. Einwirkungen auf das Verbundelement aus Längskräften und Randmomenten können unter bestimmten Voraussetzungen ebenso als Eigenspannungszustände behandelt werden wie dessen Vorkrümmung. In jedem Fall jedoch werden sie durch entsprechende Randbedingungen erfaßt. Mit dem Verfahren kann sowohl die diskrete als auch die kontinuierliche Verbindung der Teilquerschnitte berücksichtigt werden.

Um die Zuverlässigkeit des Verfahrens auch dann zu gewährleisten, wenn extreme Querschnitts- und Steifigkeitsverhältnisse vorliegen, sind die Übertragungsmatrizen ggf. nachzubehandeln. Hier ist insbesondere die Erweiterung des Zustandsvektors um Zustandsgrößen zu nennen, welche zur Ableitung der Übertragungsmatrix eliminiert wurden, aber unter Umständen zur Definition von Rand- oder Übergangsbedingungen benötigt werden. Durch solche Erweiterungen wird es möglich, unverdübelte und starre Fugen, Plastifizierungen der Verbindungsmittel und des Materials sowie Ausfälle einzelner Elemente infolge lokalen Versagens zu berücksichtigen.

Das Übertragungsverfahren kann effektiv für die Berechnung sequentieller Stabzüge eingesetzt werden, dagegen ist es für die Berechnung verzweigter Stabsysteme weniger geeignet. In diesem Fall ist es vorteilhaft, die Steifigkeitsmatrix für das Weggrößenverfahren direkt aus der Gesamtmatrix von Stabgruppen abzuleiten und die Struktur nach FEM zu berechnen. Die Ableitung der Element-Steifigkeitsmatrix ebenfalls unter Verwendung des Fundamentalsystems von genauen Ansatzfunktionen erfolgen. Bei der notwendigen Matrizeninversion können jedoch numerische Schwierigkeiten auftreten, die nur durch eine Begrenzung der Elementlänge vermieden werden kann. Zur direkten Programmierung werden Übertragungs- und die Steifigkeitsmatrix des zweiteiligen Verbundelementes explizit angegeben. Ein Vergleich zeigt, daß das Übertragungsverfahren wesentlich übersichtlichere Ausdrücke liefert.

Die Eignung des Verfahrens für sehr unterschiedliche Problemstellungen wird anhand verschiedener Anwendungsbeispiele aufgezeigt. Neben einer Parameterstudie zu Verbundträgern mit unterschiedlicher Dübelverteilung, wird die näherungsweise Erfassung der Schubdeformationen von homogenen Balkenquerschnitten und die implizite Berechnung der mitwirkenden Platten- bzw. Gurtbreite demonstriert. Auswertungen von Versuchen an Brettstapelträgern und Holz-Beton-Verbundplatten schließen die Arbeit ab.

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner mehrjährigen Tätigkeit am Institut für Holzkonstruktionen der Eidgenössischen Technischen Hochschule Lausanne/Schweiz. Sie ist das Ergebnis einer intensiven und von Neugier getriebenen Beschäftigung mit den Phänomenen der Verbundkonstruktionen. Die umfassenden praktischen Erfahrungen, die ich in dieser Zeit neben der wissenschaftlichen Betätigung sammeln konnte, erwiesen sich hierbei von großem Vorteil, ermöglichten sie mir doch eine realistischere Einschätzung der Bedeutung theoretischer und experimenteller Erkenntnisse für die Belange der Baupraxis.

Mein aufrichtiger Dank gilt daher dem Institutsleiter und Hauptberichter dieser Arbeit Herrn Prof. Dipl.-Ing. J. Natterer, der die Verbindung wissenschaftlicher und praktischer Arbeit im Sinne einer praxisorientierten Forschung stets gefördert hat.

Herrn Prof. Dr.-Ing. M.H. Kessel gilt mein herzlicher Dank sowohl für die Übernahme des Korreferats als auch für die gewährte Unterstützung und Ermunterung zu dieser Arbeit.

Herrn Univ.-Prof. Dr.-Ing. H. Kreuzinger danke ich ebenso wie Herrn dipl. Ing. ETHL M. Crisinel und Herrn Dr.-Ing. P. Haller für die spontane Übernahme des Korreferats und das hierbei gezeigte Interesse. Herrn Prof. R. Rivier danke ich für das Engagement als Vorsitzender der Jury und die wohlwollende Begleitung der Arbeit.

Bei meinem Kollegen Dr. P. Navi bedanke ich mich für die engagierten Diskussionen und hilfreichen Anregungen, die zum Gelingen der Arbeit beigetragen haben.

Schließlich möchte ich es nicht versäumen, allen Freunden und meiner Familie für die in der Zeit der Bearbeitung aufgebrachte Geduld, das Verständnis und die stetigen Aufmunterungen herzlichst zu danken.

Inhaltsverzeichnis

Bezeichnungen

1 Einleitung

- 1.1 Zusammengesetzte Querschnitte im Ingenieurholzbau 1
- 1.2 Arbeiten zur Verbundtheorie und Stand der Forschung 4
- 1.3 Zielsetzung der Arbeit und Vorgehensweise 8

2 Ableitung des Systems von Differentialgleichungen

- 2.1 Konventionen und Voraussetzungen der Berechnung 11
- 2.2 Gleichgewichtsaussagen 24
- 2.3 Bestimmung der Schnittgrößen 28
- 2.4 Kinematische Beziehungen 34

3 Allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems

- 3.1 Diskussion des Lösungsweges 36
- 3.2 Bildungsgesetz des charakteristischen Polynoms 40
- 3.3 Nullstellen und Typ der Ansatzfunktionen 43
- 3.4 Berechnung der Kopplungskoeffizienten 45

4 Berechnung der Übertragungsmatrix

- 4.1 Allgemeine Darstellung des Übertragungsverfahrens 49
- 4.2 Definition der Zustandsgrößen 53
- 4.3 Fundamentalsystem von Lösungen 55
- 4.4 Ableitung der Übertragungsmatrix und der Belastungsvektoren 58
- 4.5 Rand- und Übergangsbedingungen 59

5	Auswertung für den zweiteiligen Verbundquerschnitt	
5.1	Der zweiteilige Verbundträger mit und ohne Normalkraftbelastung	64
5.2	Knicklasten des zweiteiligen Verbundstabes	76
6	Besondere Aspekte der Berechnung von Verbundträgern	
6.1	Behandlung extremer Querschnitts- und Steifigkeitsverhältnisse.....	91
6.2	Behandlung von 'exzentrischen' Normalkräften	95
6.3	Kopplung verschiedener Elementtypen.....	96
6.4	Ableitung der Steifigkeitsmatrix der FEM	99
6.5	Mögliche Vereinfachungen der Berechnungen	104
7	Anwendungsbeispiele	
7.1	Kontinuierliche und diskrete Anordnung der Verbindungsmittel	108
7.2	Mitwirkende Plattenbreite bei nachgiebigem Verbund	113
7.3	Tragverhalten eines Brettstapelelementes	119
7.4	Tragverhalten einer Holz-Beton-Verbunddecke	126
8	Zusammenfassung und Ausblick	131
Anhang 1	Kennwerte und Schnittgrößen von Verbundquerschnitten	
Anhang 2	Berücksichtigung vertikaler Nachgiebigkeit in den Fugen	
Anhang 3	Übertragungsmatrix des zugbelasteten und normalkraftfreien Verbund- elementes	
Anhang 4	Berücksichtigung zusätzlicher Aussteifungen	

- Anhang 5** Steifigkeitsmatrix des zweiteiligen Verbundquerschnittes ohne Normal-
kraftbelastung
- Anhang 6** Erläuterungen zum Teilverbund-Modell
- Anhang 7** Ergebnisse der Berechnungen zu **Kapitel 7.1**
- Anhang 8** Ergebnisse der Berechnungen zu **Kapitel 7.2**
- Anhang 9** Ergebnisse der Berechnungen zu **Kapitel 7.3**
- Anhang 10** Ergebnisse der Berechnungen zu **Kapitel 7.4**

Literatur

Bezeichnungen

Deutsche Abkürzungen

- a Abstand in Richtung der lokalen y-Achse zwischen den Schwerachsen zweier Teilquerschnitte, Polynom-Koeffizient
- b Breite eines Teilquerschnittes, Polynom-Koeffizient
- c Polynom-Koeffizient, Wegfederkonstante
- c Koeffizientenvektor
- d Höhe eines Teilquerschnittes
- e Abstand in Richtung der lokalen z-Achse zwischen den Schwerachsen zweier Teilquerschnitte
- f Kraftgrößenvektor
- h Elemente eines Belastungsvektors
- k Fugensteifigkeit, Drehfederkonstante, Element der Steifigkeitsmatrix
- ℓ Element-, Stab- oder Balkenlänge
- m Anzahl Fugen eines Verbundquerschnittes
- n Anzahl Teilquerschnitte eines Verbundquerschnittes
- p Querbelastung in der Fuge zwischen zwei Teilquerschnitten
- p Belastungsvektor des Fundamentalsystems
- q Querbelastungsfunktion für ein Verbundelement
- r Belastungsvektor der Übertragungsgleichung
- t Temperatur, Elemente der Übertragungsmatrix
- u Relativverschiebung in Richtung der Stabachse in der Fuge zwischen zwei Teilquerschnitten, Verschiebung in x-Richtung
- v Verschiebung in y-Richtung
- w Verschiebung in z-Richtung
- x Koordinate
- y Koordinate
- z Zustandsvektor
- z Koordinate

A	Querschnittsfläche, Flächenmoment 0. Ordnung
B	Biegesteifigkeit
C	Koeffizient der Ansatzfunktion
D	Dehnsteifigkeit, Differential-Operator
E	Elastizitäts-Modul
F	Fundamentalmatrix
G	Gesamtmatrix für ein Stabwerksproblem
H	Horizontalkraft
I	Trägheitsmoment, Flächenmoment 2. Ordnung
I	Einheitsmatrix
M	Moment
N	Normalkraft
P	charakteristisches Polynom, Druckkraft auf Verbundelement
P	Punktmatrix
Q	Querkraft
R	Verdrehsteifigkeit
S	statisches Moment, Flächenmoment 1. Ordnung
T	Fugenschubfluß
T	Übertragungsmatrix
V	Vertikalkraft
Z	Zugkraft auf Verbundelement

Griechische Abkürzungen

α	Temperaturdehnungsmaß, geometrischer Kennwert des zweiteiligen Verbundquerschnittes
β	Eigenwert bei vertikal nachgiebigem Verbund
γ	Abminderungsfaktor für die Biegesteifigkeit, Verdrehung eines Teilverbund-Elementes
δ	Temperaturdifferenz zwischen zwei über eine Fuge verbundenen Teilquerschnitten

ε	Längsdehnung, Eigenwert bei normalkraftbelastetem, zweiteiligem Verbundelement
φ	Verdrehung
χ	Krümmung eines Teilquerschnittes
ψ	Temperaturgradient über einen Teilquerschnitt
λ	Eigenwertquadrat
σ	Normalspannung
τ	Schubspannung
ξ	dimensionslose Laufvariable
ω	geometrischer Kennwert des zweiteiligen Verbundquerschnittes
ξ	dimensionslose Laufvariable
Δ	Kennzeichnung einer Sprunggröße

Indizes

0	am Bereichsanfang
eff	effektiver Wert unter Berücksichtigung von Abminderungen
h	horizontal
i	bezogen auf den Teilquerschnitt i
j	bezogen auf die Fuge j
k	bezogen auf den Teilquerschnitt k
ℓ	am Bereichsende
m	bezogen auf den Teilquerschnitt m
s t	Stabdübel
v	vertikal, Verbindungsmedium
x	in Richtung der lokalen x-Achse
y	in Richtung der lokalen y-Achse
z	in Richtung der lokalen z-Achse
A	Elementanfang

DDrehung

EElementende

GGurt

Mbezogen auf Momentenbelastung

Nbezogen auf Normalkraftbelastung

SSteineranteil, Steg

Vbezogen auf Vertikalkraftbelastung

||parallel zur Stablängsrichtung, parallel zur Faser

⊥senkrecht zur Stablängsrichtung, senkrecht zur Faser

1 Einleitung

1.1 Zusammengesetzte Querschnitte im Ingenieurholzbau

Holz ist ein natürlicher und nachwachsender Rohstoff, dessen Wert im Zuge eines sich stärker entwickelnden Umweltbewußtseins und knapper werdender Ressourcen zunehmend höher eingeschätzt wird. Dementsprechend besteht heute mehr denn je die Verpflichtung zur Pflege und verantwortungsvollen Bewirtschaftung der Wälder sowie zur effizienteren Nutzung der dabei anfallenden Holzqualitäten und -quantitäten. Im konstruktiven Ingenieurbau, wo Holz wegen seines geringen Eigengewichtes und guter Festigkeitseigenschaften auch zur Bewältigung größerer Spannweiten eingesetzt wird, bedeutet das in erster Linie, die Streuung der Materialkennwerte und die natürliche Beschränkung der geometrischen Abmessungen in die Konzeption eines Tragwerkes einzubeziehen. Es gilt also, mit dem breiten Spektrum von Qualitäten und Abmessungen kreativ umzugehen und nicht auf bequemen Maximalforderungen zu beharren. Neben der Wahl geeigneter statischer Systeme ist es daher erforderlich, das verfügbare Bauholz mit apparativen und praxisgerechten Methoden trennscharf zu sortieren, so daß es im Tragwerk den Beanspruchungen entsprechend optimal eingesetzt werden kann. Durch geschickte Anordnung und Verbindung kleinerer Querschnitte werden nicht nur die geometrischen Restriktionen des Baustoffes Holz umgangen und leistungsfähige Verbundquerschnitte erzeugt, diese stellen unter Umständen sogar eine wirtschaftliche Alternative zum massiven Querschnitt dar. Gleichzeitig sind dabei Möglichkeiten gegeben, unterschiedliche Holzqualitäten und auch Materialien miteinander zu kombinieren, um den Verbundquerschnitt statisch und hinsichtlich anderer Kriterien optimal zu gestalten. Insbesondere aus Holz und anderen Materialien zusammengesetzte Strukturelemente gewinnen im Sinne der obigen Ausführungen zunehmend an Bedeutung.

Zusammengesetzte Querschnitte für Biegeträger und Stützen sind bereits aus historischen Holzkonstruktionen bekannt /DEI63/. Der Mangel an Stahl infolge des Ersten Weltkrieges ließ das Interesse an leistungsfähigen Holzverbundquerschnitten stark ansteigen und löste in den vierziger Jahren eine rege Forschungstätigkeit auf diesem Gebiet aus. Zur Schubübertragung wurden zunächst eingelegte Ring- und Doppelkeildübel aus Laubholz verwendet /GRA30/ /STÜ47.1/. Später setzte man als Verbindungsmittel Nägel, Schrauben,

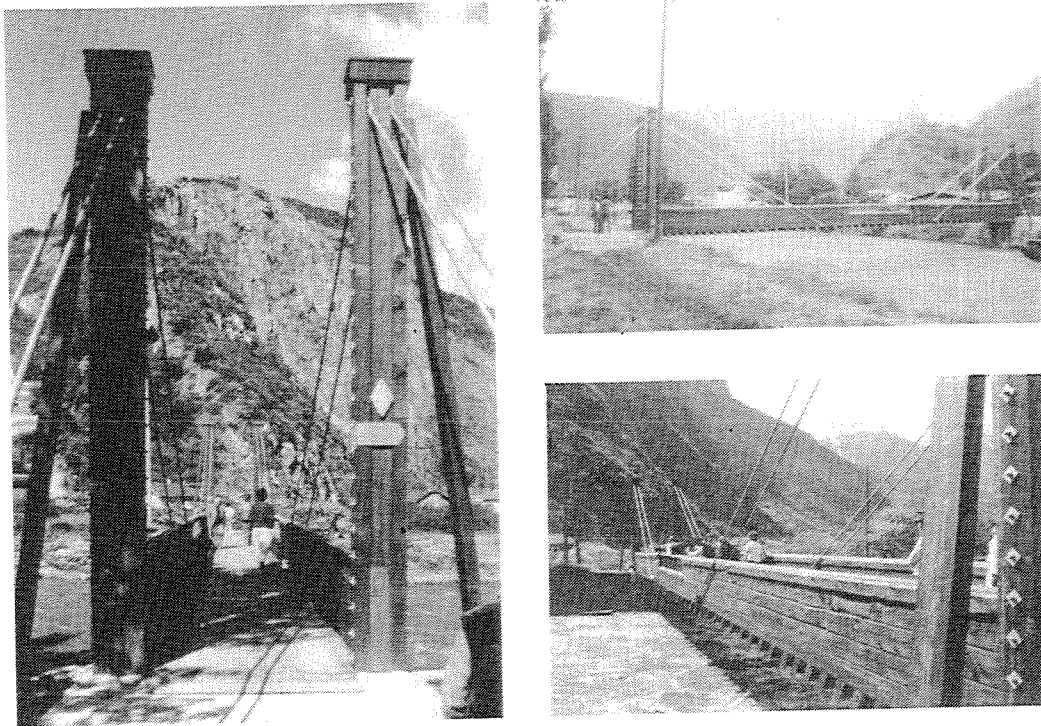


Bild 1.1-1. Fuß- und Radwegbrücke über die Dranse bei Martigny/CH

metallische Dübel (Krallendübel, Ringdübel) und für gespreizte Stäbe auch Leim ein /GRA36/ /LJU42/ /MÖH53/ /MÖH55/. Wegen der guten Transportmöglichkeiten, des geringen Gewichts und der einfachen Montage fanden zusammengesetzte Holzquerschnitte vielfach Anwendung im Brückenbau. Ein neueres Beispiel aus dem Brückenbau zeigt **Bild 1.1-1**. Die Kantholzquerschnitte sind durch Stabdübel miteinander verbunden /NAT91/.

Mit der Einführung von Brettschichtholz verloren die mechanisch verbundenen Querschnitte etwas an Bedeutung, da durch die Verleimung wesentlich steifere Träger in nahezu beliebigen Abmessungen hergestellt werden konnten. Die Produktion von Brettschichtholz ist jedoch recht aufwendig und erfordert zudem eine besondere Lizenz, so daß der Zimmermann das Brettschichtholz in der Regel als Zwischenhändler einkaufen muß und weniger gewinnbringend verkaufen kann. Bei größeren Bauteilen sind zudem der Transport, die Montage und die teilweise aufwendigen Stahlteile für die Knotendetails nicht unwesentliche Kostenfaktoren.

So ist es verständlich, daß auch im modernen Ingenieurholzbau wieder verstärkt zusammengesetzte, mechanisch verbundene Querschnitte verwendet werden. Eine

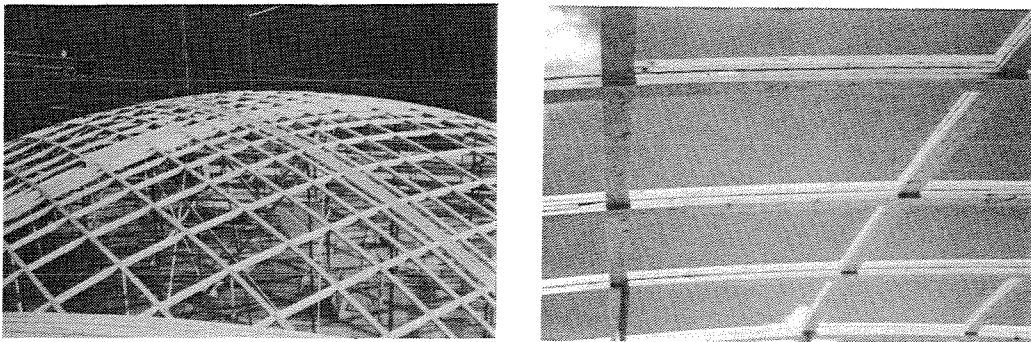


Bild 1.1-2. Kuppel in Brettstapelbauweise mit drei- bzw. vierteiligem Querschnitt

Übersicht über mögliche Querschnittsausbildungen mit Rund-, Kant- oder Profilholz wird in /NAT91/ gegeben. Dort sind auch zahlreiche neuere Anwendungsbeispiele aufgeführt. Wegen der vielfältigen Möglichkeiten zur einfachen Knotenausbildung ohne aufwendige Stahlteile und der Montagefreundlichkeit eignen sich zusammengesetzte Querschnitte hervorragend für Holzflächentragwerke. Die Brettstapelbauweise ermöglicht beispielsweise durch die verschränkte Anordnung der durchlaufenden Brettlagen in den Knoten eine gewisse Einspannung des Verbundquerschnittes, was sich auf das Tragverhalten der Struktur sehr günstig auswirkt. **Bild 1.1-2** zeigt eine Ausstellungshalle in dieser Bauweise. Die Brettlagen sind durch Holzschrauben miteinander verbunden /HOE91/.

Die Kombination von Holz mit anderen Materialien erweist sich besonders im Zusammenhang mit der notwendigen Instandhaltung und Sanierung alter Gebäude als probates Mittel zur Beseitigung von Schäden und zur Anpassung des bestehenden Tragwerks an geänderte Nutzungspläne. Eine Alternative zum Abriß alter Holzbalkendecken ist die Ergänzung des tragenden Querschnitts durch eine Betonplatte, wobei die Schubkraftübertragung zwischen Holz und Beton in der Regel durch mechanische Verbindungsmittel erfolgt. In den letzten Jahren ist das Interesse an der Holz-Beton-Verbundbauweise stark gestiegen /GOD84/ /NAT87.1/ /ZAJ89.1/. Sie wird bevorzugt dort eingesetzt, wo die Bestandsanalyse mit Hilfe zerstörungsfreier Prüfmethode eine ausreichende Resttragfähigkeit der vorhandenen Holzbalkendecken ergibt. Aber auch für Neubauten stellt der Holz-Beton-Verbund eine effektive Maßnahme zur Erhöhung der Tragfähigkeit und des Schallschutzes dar. **Bild 1.1-3** zeigt ein Beispiel aus der Sanierung /NAT92.2/ /ZÖL92/.

Die Berechnung und Bemessung von zusammengesetzten Querschnitten im Holzbau erfolgt unter Berücksichtigung der Nachgiebigkeit der Verbindungsmittel. Die in den

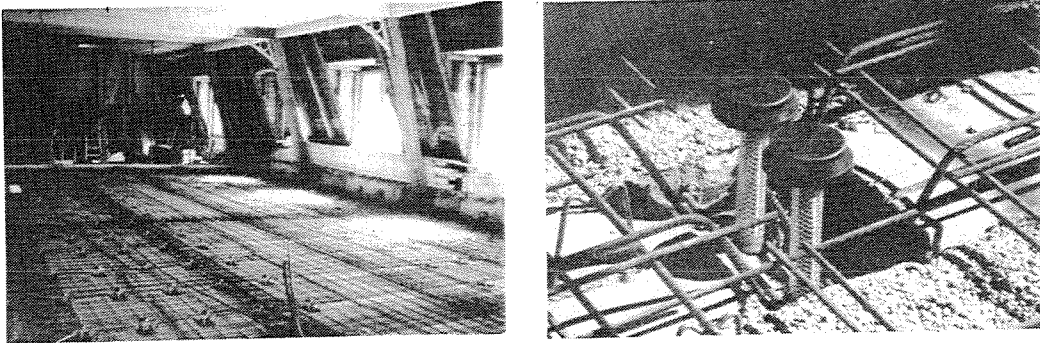


Bild 1.1-3. Sanierung alter Holzbalkendecken in Holz-Beton-Verbundbauweise

diversen nationalen Normen angegebenen Berechnungsverfahren führen jedoch häufig zu unwirtschaftlichen und auch unsicheren Bemessungen. Für den Spannungs- und Verformungszustand relevante Einflüsse auf das Tragwerk können teilweise nicht berücksichtigt und vorhandene Querschnitts- oder Systemreserven nicht ausgeschöpft werden. Zur optimalen Auslegung nachgiebig zusammengesetzter Verbundquerschnitte müssen also Berechnungsverfahren zur Anwendung kommen, die so weitgehend verallgemeinert sind, daß ein möglichst breites Spektrum denkbarer Querschnittsausbildungen, statischer Systeme und Belastungen abgedeckt wird. Der Einsatz elektronischer Rechenanlagen ist hierfür ebenso unumgänglich wie sinnvoll. Die bekannte Theorie des elastischen Verbunds muß entsprechend ausgeweitet und in numerisch stabile Algorithmen umgesetzt werden.

1.2 Arbeiten zur Verbundtheorie und Stand der Forschung

Während der letzten sechzig Jahre sind unzählige Publikationen erschienen, welche sich mit dem Tragverhalten von Verbundkonstruktionen befassen. Es ist daher nicht möglich, in einer kritischen Übersicht alle Literaturstellen ausreichend zu würdigen. In den folgenden Ausführungen werden lediglich die im Zusammenhang mit der vorliegenden Arbeit relevanten Veröffentlichungen erwähnt, ohne einen Anspruch auf Vollständigkeit zu erheben. Eine ausführlichere Literaturübersicht ist in /NAT87.1/ zu finden.

Die ersten Impulse für die Entwicklung der Theorie des elastischen Verbunds kamen aus dem Leichtbau, wo Sandwichelemente mit biegeweichen Deckschichten und schubsteifer

Kernschicht als ebene und gekrümmte Flächentragwerke eingesetzt werden. Die Berechnung des Sandwichbalkens als Sonderfall des elastischen Verbunds bereitete keine großen Schwierigkeiten, so daß sich das Interesse der Forscher bald auf das Tragverhalten geschichteter Körper /BUF62/ und orthotroper Sandwichplatten /WIE68/ richtete. Eine Übersicht über die Entwicklungen im Leichtbau geben /RZA48/ /PLA66/ und /STA74/. Die Anwendung der Theorie des mehrschichtigen Sandwichverbunds als Kontinuumsmodell für die Berechnung von Gebäudeaussteifungen wurde in verschiedenen Publikationen /BEC56/ /GIE64/ /ROS65/ /HEG84/ /KOL86/ dargestellt. Neuere Arbeiten befassen sich vorwiegend mit der Berechnung von geschichteten, anisotropen Schalenträgwerken nach der Finite-Elemente-Methode (FEM) /LIS85/ /SHM88/.

Verbundkonstruktionen aus Stahl und Stahlbeton werden im allgemeinen nach der Theorie des starren Verbunds /HEI53.1/ berechnet und bemessen. Zur Abminderung der Betonbeanspruchungen aus der Verbundwirkung oder zur Entlastung der Randdübel ist es jedoch unter Umständen erforderlich, die Verdübelung abschnittsweise zu unterbrechen /HOI54/ oder den Verdübelungsgrad stark zu reduzieren. Dementsprechend wird die Theorie des elastischen Verbunds angewendet /HEI53.2/. In letzter Zeit sind aus Gründen der Wirtschaftlichkeit und im Zusammenhang mit dem vermehrten Einsatz von Stahl-Profilblechen im Geschoßbau Anstrengungen unternommen worden, die erweiterte Theorie nach der FEM aufzubereiten, so daß gleichzeitig Plastifizierungen des Materials und der Verbindungsmittel berücksichtigt werden können /SHA88/ /BOD89/ /DAN90/.

Im Holzbau wurden zunächst vorwiegend gleiche Kantholzquerschnitte durch Dübel oder Nägel miteinander verbunden. Graf /GRA30/ /GRA36/, Stüssi /STÜ43/ /STÜ47.1/ /STÜ47.2/ und Möhler /MÖH42/ /MÖH53/ /MÖH55/ führten grundlegende experimentelle und theoretische Untersuchungen durch. Die Differentialgleichungen für den zweiteiligen Biegeträger bzw. Druckstab und die Ableitung eines praxisgerechten Bemessungsverfahrens für den Einfeldträger gehen auf Möhler /MÖH56/ zurück, dessen Arbeit von Schelling /SHE68/ /SHE82/ und Heimeshoff /HEI87/ für den dreiteiligen, einfach symmetrischen Verbundquerschnitt ergänzt wurde und Grundlage der heutigen Bemessungsregeln der DIN 1052 und der SIA 164 /DIN88/ /SIA81/ ist.

Die Vielzahl der kommentierenden und ergänzenden Publikationen zu diesen Bemessungsregeln /PIS68/ /PIS69.1/ /PIS69.2/ /PIS73/ /HEI87/ /NAT87.2/ /HEI91.1/ /HEI91.2/ verdeutlicht, daß es sich bei der Berechnung und Bemessung von Verbundkonstruktionen um

ein sehr komplexes Problem handelt, wenn man von Sonderfällen absieht. Auch für den erfahrenen Ingenieur ist die Abschätzung des Tragverhaltens und der Materialbeanspruchungen bei Veränderung gewisser Parameter mit Unsicherheiten verbunden. Zudem erschwert die mangelnde Transparenz der Berechnungsverfahren auf deren mechanischen Hintergrund und die teilweise inkonsistenten Vereinfachungen dem Einsteiger die Vorstellung vom Tragverhalten. Dieses gilt insbesondere bei der Anwendung des für Einfeldträger gültigen Verfahrens auf andere statische Systeme, wie z.B. Durchlaufträger /NAT87.1/.

Neuere Arbeiten befassen sich deshalb vorwiegend mit den Möglichkeiten der numerischen Berechnung von Verbundkonstruktionen. Der überwiegende Teil der Autoren stellt ein Berechnungsmodell nach der Finite-Elemente-Methode vor. In den U.S.A. wurde zur Berechnung von Holzbalkendecken und -brücken das Programm FEAFLO entwickelt /THO77/. In Schweden werden Holz-Beton-Verbundkonstruktionen mit dem Programm GSTRUDL berechnet /GOP84/, das auch für axiale Belastungen Näherungslösungen ermöglicht /GIR91/. Das ausgeprägt nichtlineare Verhalten der Verbindungsmittel im Holzbau kann ebenfalls mit der FEM erfaßt werden /TSU83/ /NOL91/. In Finnland wurde eine 'exakte' FEM zur Analyse von Schwingungsproblemen entwickelt, die allerdings bestimmte Querschnittseigenschaften voraussetzt /HEI89/. Als Alternative zur FEM wird vereinzelt auch die Methode der Übertragungsmatrizen (TMM=transfer matrix method) -allein oder in Kombination mit der FEM- zur linearen und nichtlinearen Berechnung des zweiteiligen Verbundträgers angewendet /SHU86/ /KNE90/ /KNE91/.

Bei der Durchsicht der häufig zitierten Literatur fällt auf, daß auch zur Ableitung der numerischen Verfahren besondere Eigenschaften des Verbundquerschnittes, des statischen Systems oder der Belastung ausgenutzt werden, um das System simultaner Differentialgleichungen zu vereinfachen und einer Lösung zuzuführen. Fast alle Autoren gehen von einem eindimensionalen Stabproblem ohne Berücksichtigung der Schubverformungen der Teilquerschnitte, einer strengen Numerierung der Teilquerschnitte und Fugen, und einer mindestens einfachen Symmetrie des unverzweigten Verbundquerschnittes aus. Lediglich Papsch /PAP73/ entwickelt eine allgemein gültige Stabtheorie für beliebig zusammengesetzte mehrteilige Stäbe mit nachgiebigem Verbund. Die Auswertung ist jedoch auf den einfachen Einfeldträger mit zweiteiligem doppelsymmetrischem Querschnitt und die Stabilitätsprobleme Kippen und Knicken beschränkt.

Eine gängige Vereinfachung zur Lösung des Differentialgleichungs-Systems für das zwei-

oder mehrteilige Verbundelement ist die Darstellung der Belastungsfunktionen durch Fourier-Reihen /SHE68/ /PAP73/. In einer weiteren Reduktion dieses Ansatzes wird häufig ein Einfeldträger unter sinusförmiger Belastung behandelt /MÖH56/ /HEI87/. Mit dieser Annahme ergibt die Berechnung eine gegenüber dem schubstarreren Querschnitt reduzierte, aber über das Feld konstante Biegesteifigkeit des Verbundquerschnittes. Im Gegensatz zur allgemeinen Formulierung des Problems kann in diesem Fall eine lineare Beziehung zwischen der Krümmung und dem äußerem Moment angegeben werden, so daß die Methoden der technischen Biegelehre direkt anwendbar sind. Dieses Konzept liegt den Berechnungsverfahren der Normen SIA 164 und DIN 1052 zugrunde /SIA81/ /DIN88/.

Eine weitere Möglichkeit zur Vereinfachung besteht darin, die Bernoulli-Hypothese in der Weise zu modifizieren, daß ein über die Höhe des Verbundquerschnittes linearer Verlauf der Dehnungen in den Schwerachsen der homogenen Teilquerschnitte postuliert wird /LOM51/ /PLE52/ /SHE68/ /HEI89/. Mit dieser Annahme kann die Berechnung des mehrteiligen auf diejenige des zweiteiligen Verbundquerschnittes zurückgeführt werden, da zwischen allen Fugenverschiebungen eine lineare Abhängigkeit besteht. Diese stellt sich aber nur dann ein, wenn die Fugensteifigkeiten in genau definierten Verhältnissen aufeinander abgestimmt sind. Wird die modifizierte Bernoulli-Hypothese lediglich der Berechnung zugrunde gelegt, in der konstruktiven Ausbildung des Querschnittes aber nicht berücksichtigt, können erhebliche Abweichungen zwischen dem berechneten und dem tatsächlichen Spannungs- und Verformungszustand auftreten /SHE68/.

Durch Symmetrien in der Querschnittsausbildung ergeben sich ebenfalls Vereinfachungen der Berechnung. Hierauf wurde verschiedentlich hingewiesen. Durch geeignete Umrechnungen der realen Querschnittskennwerte sind auch mehrteilige doppelsymmetrische Verbundquerschnitte nach der Theorie des zweiteiligen Verbunds geschlossen berechenbar /NAT87.1/.

Geschlossene Lösungen können für den zweiteiligen Einfeldträger ohne Axialbelastung mit konstanten Querschnittswerten angegeben werden, welche alle praxisrelevanten Lastfälle abdecken /NAT87.1/. Lösungen für Kragträger oder gar Durchlaufträger sind dagegen nur dann ableitbar und einigermaßen übersichtlich, wenn besondere Querschnittsverhältnisse vorausgesetzt werden /HEI91.1/ /HEI91.2/. Für allgemeine zweiteilige Verbundquerschnitte unter Axial- und Querbelastung und für allgemeine mehrteilige Verbundquerschnitte sind geschlossene Lösungen nicht bekannt.

1.3 Zielsetzung der Arbeit und Vorgehensweise

Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, ein allgemeines Berechnungsverfahren zu entwickeln, welches im Rahmen der üblichen Annahmen der Stabstatik und der Verbundtheorie flexibel für die Berechnung beliebig gefügter Querschnitte nach Theorie I. und II. Ordnung eingesetzt werden kann, ohne den Restriktionen bisher bekannter Lösungen zu unterliegen. Durch geeignete Formulierung der mechanischen Zusammenhänge und weitestgehend analytische Behandlung der das eindimensionale Stabproblem beschreibenden Differentialgleichungen soll die konsistente Ausweitung des Verfahrens auf den räumlichen Stab und auf im Rahmen dieser Arbeit nicht primär berücksichtigte Phänomene ermöglicht werden, wie z. B. Schwingungen /HEI89/ /HER92/ oder unterschiedliche Durchbiegungen der Teilquerschnitte /BOH89/ /KNE91/.

Das Verfahren der Übertragungsmatrizen -auch bekannt als Reduktionsverfahren- eignet sich besonders gut für diesen Zweck, da seine Anschaulichkeit und Übersichtlichkeit bei der Aufstellung der Leitmatrizen die Programmierung auf elektronischen Rechenanlagen erleichtert. Einfachere Systeme können ohne Diskretisierung mit einer einzigen Matrix genau beschrieben werden, was u. a. auch die einfache Berechnung von Stabilitätsgrenzen ermöglicht. Der Vorteil der wegen der Übertragung der Zustandsgrößen vom Anfang eines Stabzuges zu dessen Ende direkt ausführbaren Matrizenmultiplikationen kann nicht mehr genutzt werden, wenn für diesen Zwischenbedingungen zu berücksichtigen sind. Um eine möglichst flexible Handhabung des Übertragungsverfahrens und hohe numerische Stabilität zu gewährleisten, wird das zu gestellte Problem mit Hilfe einer Gesamtmatrix beschrieben und gelöst.

Das vorgestellte Berechnungsverfahren wurde in FORTRAN 77 auf einem Apple Macintosh[®]-PC programmiert. So weit als möglich wurde auf numerische Standard-Routinen zurückgegriffen, wie sie in zahlreichen Bibliotheken angeboten werden /ENG88/.

Die bekannte Theorie des elastischen Verbunds wird in **Kapitel 2** so verallgemeinert, daß auch beliebig verzweigte Querschnitte und mehrfach geschlossene Profile berechnet werden können. Diese Ausweitung der Theorie erfordert allerdings strengere Konventionen und eine kontrollierte Behandlung der mathematischen Formulierung des Problems. Um Näherungsansätze und numerische Instabilitäten bei der Anwendung des Übertragungsverfahrens zur Berechnung des Spannungs- und Verformungszustandes zu vermeiden, wird anhand von Gesetzmäßigkeiten im Aufbau des Systems von linearen

Differentialgleichungen höherer Ordnung die Anzahl und der Typ der relevanten Eigenwerte allgemein bestimmt. Zu diesem Zweck wird in **Kapitel 3** das Bildungsgesetz der charakteristischen Gleichung beschrieben. Extreme Querschnitts- und Steifigkeitsverhältnisse können dabei ebenso berücksichtigt werden wie die Eigenarten der Querschnittsausbildung und eventuell vorhandene Symmetrien. Mit Hilfe eines Eliminationsverfahrens kann das DGL-System des jeweiligen Problems ggf. reduziert und ein Fundamentalsystem von Lösungen für die verbleibenden, linear unabhängigen Funktionen angegeben werden.

Die Berechnung der Integrationskonstanten unter Berücksichtigung der inhomogenen Anteile aus linear veränderlicher Streckenlast und über die Teilquerschnittshöhe linear veränderlichen Eigenspannungen ist Gegenstand von **Kapitel 4**. Zur Ableitung der Übertragungsmatrix und der Lastvektoren werden die Zustandsgrößen so definiert, daß alle Rand- und Übergangsbedingungen konsistent erfüllt werden können. Hierfür ist es erforderlich, konjugierte Paare von Kraft- und Verschiebungsgrößen zu wählen, mit deren Hilfe homogene Randbedingungen komplementär erfüllt werden können. Die von bisher bekannten Lösungen und Vorstellungen /SHU86/ /KNE91/ abweichende Definition des Zustandsvektors ergibt sich aus dem Teilverbund-Modell. Dieses Modell beschreibt das Zusammenwirken zweier Teilquerschnitte über eine Fuge ohne auf eine ausgezeichnete Achse d. h. eine fiktive neutrale Faser des Gesamtquerschnittes zurückzugreifen. Das Tragverhalten wird allein durch die bekannten Schwerachsenabstände der homogenen Teilquerschnitte beliebiger Geometrie beschrieben.

Die Übertragungsmatrizen des zweiteiligen Verbundquerschnittes mit und ohne Normalkraftbelastung werden in **Kapitel 5** explizit angegeben, so daß für diesen Fall die direkte Programmierung möglich ist. Die unterschiedlichen Knickbedingungen für den normalkraftbelasteten, zweiteiligen Verbundstab werden systematisch abgeleitet.

Um die Zuverlässigkeit des Verfahrens auch dann zu gewährleisten, wenn extreme Querschnitts- oder Steifigkeitsverhältnisse vorliegen, müssen zwar vor der Ableitung der Übertragungsmatrizen lineare Abhängigkeiten und vernachlässigbare Kopplungen der Zustandsgrößen eliminiert werden, doch ist die Übertragungsmatrix immer dann um vorher eliminierte Zustandsgrößen zu erweitern, wenn diese zur Definition von Rand- oder Übergangsbedingungen benötigt werden. Diese nachträglichen Erweiterungen sind Grundvoraussetzung für die konsistente Berücksichtigung von unverdübelten und starren Fugen, von Plastifizierungen der Verbindungsmittel und des Materials sowie von Aus-

fällen einzelner Elemente infolge lokalen Versagens. Auf die notwendigen Umformungen wird in **Kapitel 6** eingegangen.

Weitere Aspekte der Berechnung von Verbundträgern werden in diesem Teil der Arbeit angesprochen. Eigenspannungszustände des Verbundelementes, die sich aus Temperaturbelastungen, sowie Zwängungen aus Auflagerverschiebungen, Verschiebungsbehinderungen und Vorkrümmung von Stabelementen ergeben, werden über Randbedingungen oder als Lastfälle in der Berechnung berücksichtigt und als solche den Schnitt- und Verformungsgrößen nach Theorie II. Ordnung aus Querbeltung überlagert. Die Berechnung von Stäben mit 'exzentrischer' Längskraft erfordert jedoch eine gesonderte Betrachtung. Es ist zu beachten, daß die Definition der 'Exzentrizität' über einen Hebelarm beim allgemeinen mehrteiligen Verbundstab nicht mehr eindeutig ist. Da das Tragverhalten des Verbundquerschnittes ohne Bezug auf eine ausgezeichnete Achse beschreibbar ist, müssen auch die Einwirkungen solchermaßen erfaßt werden können. Aus der im Rahmen dieser Arbeit verwendeten Definition des Zustandsvektors ergibt sich zwangsläufig eine Formulierung über die Lasteinleitung in den Verbundquerschnitt unter Beachtung der konstruktiven Ausbildung des entsprechenden Details.

Das Übertragungsverfahren kann effektiv für die Berechnung sequentieller Stabzüge eingesetzt werden, dagegen ist es für die Berechnung verzweigter Stabsysteme weniger geeignet /GER73/. In diesem Fall ist es vorteilhaft, die Steifigkeitsmatrix für das Weggrößenverfahren direkt aus der Gesamtmatrix von Stabgruppen abzuleiten und die Struktur nach FEM zu berechnen /OLS86/. Da für die Bestimmung der Übertragungsmatrizen das Fundamentalsystem von numerisch genauen Lösungen berücksichtigt wird, ist auch die daraus gewonnene Steifigkeitsmatrix numerisch genau. Die Steifigkeitsmatrix des zweiseitigen Verbundelementes wird explizit angegeben.

Die Eignung des Verfahrens für sehr unterschiedliche Problemstellungen wird anhand praktischer Anwendungsbeispiele in **Kapitel 7** aufgezeigt. In einer Parameterstudie werden die Zustandsgrößen eines Verbundträgers mit unterschiedlicher Dübelverteilung berechnet und verglichen. Mit der näherungsweise Erfassung der Schubdeformationen von homogenen Balkenquerschnitten und der impliziten Berechnung der mitwirkenden Platten- bzw. Gurtbreite von Plattenbalken wird die mögliche Anwendung des Verfahrens auch auf zweidimensionale Probleme demonstriert. Auswertungen von Versuchen an Brettstapelträgern und Holz-Beton-Verbundplatten schließen die Arbeit ab.

2 Ableitung des Systems von Differentialgleichungen

2.1 Konventionen und Voraussetzungen der Berechnung

Ein wesentlicher Bestandteil der Ingenieuraufgabe ist es, in Kenntnis der statischen und konstruktiven Ausbildung eines Tragwerkes oder von Tragwerksteilen ein mechanisches Modell zu entwickeln, welches das Tragverhalten möglichst realistisch erfaßt. Das Wissen um unvermeidbare Genauigkeitseinbußen bei dieser Abstraktion erlaubt in Abwägung der Genauigkeitsanforderungen Einschränkungen und Idealisierungen im mechanischen Modell, wie sie in der klassischen Baustatik verwendet werden, um die mathematische Formulierung der physikalischen Zusammenhänge zu vereinfachen und einer analytischen Lösung zugänglich zu machen. Der vermehrte Einsatz numerischer Berechnungsverfahren zur Lösung von Differentialgleichungen ermöglicht zwar die Verfeinerung des mechanischen Modells durch Aufhebung verschiedener Restriktionen und Vereinfachungen, erfordert aber einen sorgfältigeren Umgang mit den Ergebnissen der Berechnung. Da im allgemeinen analytische Lösungen nicht vorliegen, werden numerische Instabilitäten, Programmfehler oder gar fehlerhafte mechanische Modelle nur erkannt, wenn sie zur 'Entartung' einzelner Berechnungswerte oder zur Verletzung von Gleichgewichts-, Rand- oder Übergangsbedingungen führen.

Beim Verbundträger mit beliebig gefügtem Querschnitt sind Übereinstimmungen zwischen numerischen und analytischen Lösungen in Sonderfällen wegen der Vielzahl freier Parameter für den allgemeinen Fall wenig aussagekräftig und als Kontrolle für den korrekten Programmablauf ebenso unzulänglich wie Grenzwertbildungen. Während zum Beispiel die maximale Beanspruchung der Schubfuge eines zweiteiligen Verbundquerschnittes noch durch Berechnung des ideal starren Verbundquerschnittes angegeben werden kann, versagt diese Methode beim mehrteiligen Verbundträger bzw. führt zu Abschätzungen, welche in sehr weiten Grenzen streuen und in ihrer Tendenz nicht eindeutig sind. Da die Überprüfung der numerischen Berechnungen also große Schwierigkeiten bereitet, erscheint es sinnvoll, die Ableitungen für die Programmierung des Verfahrens weitestgehend analytisch und in Übereinstimmung mit bekannten Vorgehensweisen zur Lösung von Stabproblemen durchzuführen, so daß alle sich hieraus ergebenden Möglichkeiten der Kontrolle konsequent genutzt werden können.

Der Ableitung der Differentialgleichungen in **Kapitel 2.2** liegen daher folgende Vereinbarungen zugrunde:

- Es wird das eindimensionale Stabproblem nach Theorie II. Ordnung behandelt. Lediglich Dehnungen in Längsrichtung des Stabes werden berücksichtigt.
- Die Verformungen seien klein gegenüber den Systemabmessungen. Produkte von differentiellen Größen und von Verformungsgrößen werden vernachlässigt. Insbesondere gilt

$$\sin w' \approx w' \quad \text{und} \quad \cos w' \approx 1.$$

Gl. 2.01

- Alle Schnitt- und Verformungsgrößen zur Formulierung der Gleichgewichtsaussagen und der kinematischen Beziehungen werden auf die unverformte Stabachse bezogen. In **Bild 2.1-1** sind die Wirkungsrichtungen der positiven Gesamtschnittgrößen eines differentiellen Gesamtverbundelementes im kartesischen Koordinatensystem eingezeichnet.

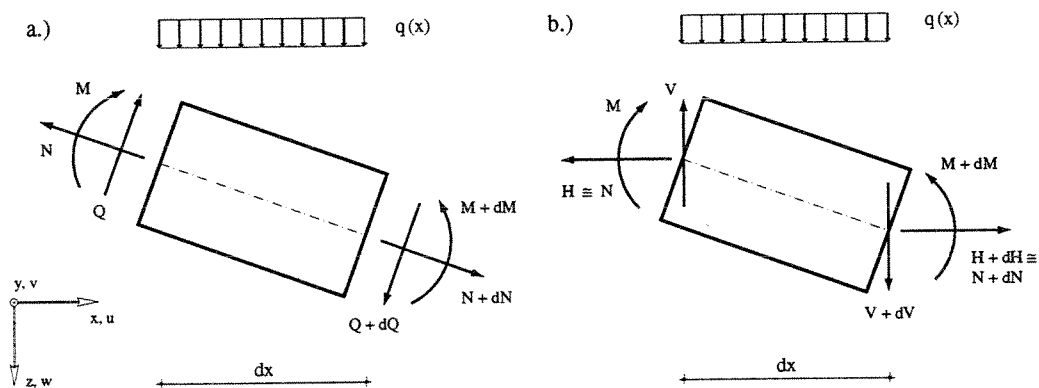


Bild 2.1-1. Wirkungsrichtung der positiven Gesamtschnittgrößen eines differentiellen Gesamtverbundelementes mit Bezug auf die verformte (a) und unverformte Stabachse (b)

Die Horizontalkomponente H wird im Hinblick auf eine einheitliche Formulierung des Stabproblems nach Theorie I. und II. Ordnung mit der Gesamtnormalkraft N gleichgesetzt /RUB88.1/ /RUB91/. Die Gesamtquerkraft Q erhält man entsprechend aus der Normal- und Vertikalkraft

$$Q = V - N w'$$

Gl. 2.02

- Die parallel zur unverformten Stabachse wirkende Längskraft ist abschnittsweise konstant und nicht verformungsabhängig. Das Superpositionsgesetz ist daher mit Einschränkungen gültig /HUG72/ /ROT87/. Zur Ableitung der Differentialgleichungen und der zugehörigen homogenen Lösungen wird angenommen, daß die äußere Längskraft entsprechend der Dehnsteifigkeiten auf die Teilquerschnitte verteilt ist. Davon abweichende Verteilungen werden über entsprechende Randbedingungen berücksichtigt.
- Der Gesamtquerschnitt und die homogenen Teilquerschnitte können beliebige geometrische Formen und Abmessungen aufweisen. Klaffende Fugen, Durchdringungen der Teilquerschnitte und Verzweigungen des Gesamtquerschnittes sind ebenso möglich wie Zellenbildungen. Wegen der Beschränkung auf das eindimensionale Stabproblem werden allerdings Effekte, die sich aus asymmetrischer Anordnung der Teilquerschnitte zur lokalen z -Achse ergeben, nicht berücksichtigt. Jeder Fuge sind genau zwei Teilquerschnitte zugeordnet. Ein Teilquerschnitt kann jedoch theoretisch an beliebig vielen Fugen beteiligt sein.
- Die Biegelinien der Teilquerschnitte sind affin. Die Berücksichtigung einer vertikalen Nachgiebigkeit in den Fugen ist unabhängig von dieser Vereinbarung möglich (siehe auch Anhang 2).

Die Form des Verbundquerschnittes bleibt in der Projektion auf die Ebene senkrecht zur verformten Stabachse erhalten. Die Bernoulli'sche Hypothese vom Ebenbleiben der Querschnitte gilt aber nur für die Teilquerschnitte. Schubverformungen der homogenen Teilquerschnitte werden nicht berücksichtigt, es sei denn durch entsprechende Diskretisierung und Einschalten fiktiver Schubfugen.

Ein Öffnen der Fugen ist nicht möglich. Die Einleitung der in positiver z -Richtung positiv angesetzten Querbelastungen in den Gesamtquerschnitt erfolgt so, daß entweder durch geometrische Zwängungen oder konstruktive Maßnahmen die Mitwirkung aller Teilquerschnitte gesichert ist. Die einzelnen Teilquerschnitte sind nicht stabilitätsgefährdet.
- Sowohl für die Teilquerschnitte als auch die Fugen gilt zumindest bereichsweise lineares Materialverhalten. Die Querschnitts- und Fugenkennwerte sind abschnittsweise konstant. Plastifizierungen können durch multilineare Approximation des Spannungs-Dehnungs-Diagrammes oder Tangentensteifigkeiten abschnittsweise erfaßt werden.

- Die Teilquerschnitte sind in Stabrichtung dehnsteif, aber nicht unbedingt biegesteif. Dehn- und biegeschlaffe, aber schubsteife Schichten (wie z. B. die Polyurethanschicht eines Sandwichbalkens) können als Fugen in die Berechnung eingeführt werden.
- Die Schubfugen verlaufen parallel zu den orthogonalen Achsen des unverformten Stabes. Es wird entsprechend -auch im verformten Zustand- zwischen horizontaler und vertikaler Nachgiebigkeit der Fuge unterschieden. Der Wert der Fugensteifigkeit ist unabhängig vom Vorzeichen des Schubflusses positiv. Die Fugensteifigkeit kann verteilt oder diskret aktiviert werden. Diskrete Verbindungsmittel werden durch entsprechende Unterteilung des Trägers in Längsrichtung und durch Übergangsbedingungen berücksichtigt.

Das Bezugssystem zur analytischen oder numerischen Behandlung von Stabproblemen wird i. d. R. so gewählt, daß Längskraft und Biegemoment bezüglich der Verzerrungsgrößen entkoppelt ausgedrückt werden können /AMB77/ /OLS86/. Bei Gültigkeit der Bernoulli'schen Hypothese und des Hook'schen Gesetzes wird die Entkopplung durch Bezug auf die mechanische Schwerachse erreicht, welche aus der Momentenbelastung keine Dehnungen erfährt und die daher auch als neutrale Faser bezeichnet wird. In Anlehnung an diese Konvention wird üblicherweise die neutrale Faser des ideal starren, mehrteiligen Verbundquerschnittes zur Aufstellung der Gleichgewichtsaussagen sowie zur Berechnung der Querschnittswerte und der Spannungen bzw. Dehnungen in den Teilquerschnitten herangezogen. Dieses Vorgehen ist zwar naheliegend, erlaubt jedoch keinerlei Aussagen über die realen Beanspruchungen im Verbundquerschnitt bei Berücksichtigung der Fugennachgiebigkeit, da die Bernoulli'sche Hypothese für den Gesamtquerschnitt nicht gültig ist. Aus diesem Grund wird inzwischen in DIN 1052 die Nulldurchgangslinie der Spannungen im mittleren von drei Teilquerschnitten als Bezugsachse verwendet /DIN88/.

Doch auch der Bezug auf *einen* Nulldurchgang der Spannungen ist zu hinterfragen, da in einem Verbundquerschnitt unter reiner Biegebeanspruchung in Abhängigkeit von den Fugensteifigkeiten maximal so viele Nulldurchgänge vorliegen wie homogene Teilquerschnitte vorhanden sind. Mindestens ist ein Nulldurchgang vorhanden, es sei denn der Gesamtquerschnitt ist durch eine gleichzeitig wirkende, äußere Längskraft überdrückt oder überzogen. Die Angabe einer fiktiven oder tatsächlichen neutralen Faser weckt also

falsche Vorstellungen von der tatsächlichen Spannungsverteilung im Verbundquerschnitt. Da im allgemeinen Fall die ideelle Biegesteifigkeit des Verbundträgers veränderlich ist, variiert auch die Lage eines eventuell vorhandenen Nulldurchgangs in einem der Teilquerschnitte über die Trägerlänge oder dieser entfällt unter Umständen sogar. Wird zusätzlich eine plastische Berechnung durchgeführt, so muß die Lage dieser Bezugsachse in jedem Berechnungsschritt für jedes Element neu ermittelt werden /DAN90/.

Im Hinblick auf eine konsistente Ausweitung der Theorie des elastischen Verbunds auf Schwingungsprobleme wird ebenfalls deutlich, daß *eine* ausgezeichnete Bezugsachse nicht benötigt wird und sogar irreführend sein kann. Die hierdurch suggerierte Koinzidenz von neutraler Faser und Schwerachse des ideal starren Verbundquerschnittes ist im allgemeinen nicht gegeben, da die Verteilung der Dehnsteifigkeiten und der Massen meist unterschiedlich ist. Für die homogenen Teilquerschnitte dagegen sind -lineares Materialverhalten vorausgesetzt- neutrale Faser und Schwerachse identisch und damit auch die Bezugsachsen für die Massen- bzw. Drehmassenträgheit und die Dehn- bzw. Biegesteifigkeit. Es erscheint daher auch für die Schwingungsanalyse sinnvoll, auf eine ausgezeichnete Achse des Verbundquerschnittes zu verzichten und sich statt dessen *auf die Schwerachsen der homogenen Teilquerschnitte* zu beziehen. Hierdurch ist die Entkopplung von Längskräften und Biegemomenten in den Teilquerschnitten gewährleistet und für den Gesamtquerschnitt können die Schnittgrößen über einfache Summenbildung ermittelt werden. Auch bei nichtlinearen Materialgesetzen kann die Berechnung starrer oder nachgiebiger Verbundquerschnitte durch ausreichend feine Diskretisierung linearisiert und ohne aufwendige Integrationen durchgeführt werden.

Im folgenden wird gezeigt, wie unter dieser Vorgabe die Schnittgrößen eines Verbundträgers und dessen Querschnittswerte ermittelt werden können. In **Bild 2.1-2** sind die für das Momentengleichgewicht relevanten Schnittgrößen eines Verbundträgers unter reiner Biegebelastung in üblicher und modifizierter Form dargestellt. Normalerweise werden die Gesamtnormalkräfte \bar{N}_i in den Teilquerschnitten i entsprechend der verwendeten Vorzeichenregelung positiv angetragen und das Momentengleichgewicht im Bezug auf die neutrale Faser des starren Gesamtquerschnittes angeschrieben /SHE82/ /HEI87.1/ /HEI87.2/ /KNE90/. Die Vorzeichen und Beträge der Gesamtnormalkräfte ergeben sich am Ende der Berechnung. Ihre Summe ist identisch Null, d. h. der Ausgleich der durch die Verbundwirkung aufgebauten inneren Normalkräfte erfolgt über den Gesamtquerschnitt.

Im Gegensatz dazu berücksichtigt die modifizierte Darstellung nach dem Teilverbund-Modell (siehe auch **Anhang 6**) die Gleichgewichtsbedingung für die in einer Fuge j durch den Schubfluß T_j aufgebaute Normalkraft N_j und gleicht sie direkt dort aus. Aus jeder definierten Fuge resultiert also ein Paar entgegengesetzt gerichteter, gleichgroßer Normalkräfte, welches mit dem Hebelarm aus dem vertikalen Schwerachsenabstand e_j der beteiligten Teilquerschnitte einen Beitrag zum Gesamtschnittmoment leistet. Diese Art der Darstellung unterstreicht, daß zwar an einer Fuge immer nur zwei Teilquerschnitte beteiligt sind, aber jeder Teilquerschnitt theoretisch über eine beliebige Anzahl Fugen mit anderen Teilquerschnitten verbunden sein kann. Die in einem Teilquerschnitt i wirkende Gesamtnormalkraft \bar{N}_i setzt sich zusammen aus dem Anteil an der äußeren Längskraft N und der Summe der Normalkräfte infolge Teilverbunden, an denen der Teilquerschnitt beteiligt ist. Für die korrekte Summenbildung sowohl der Normalkräfte in einem Teilquerschnitt als auch der Teilverbundmomente im Verbundquerschnitt müssen Vorzeichenregeln vereinbart werden.

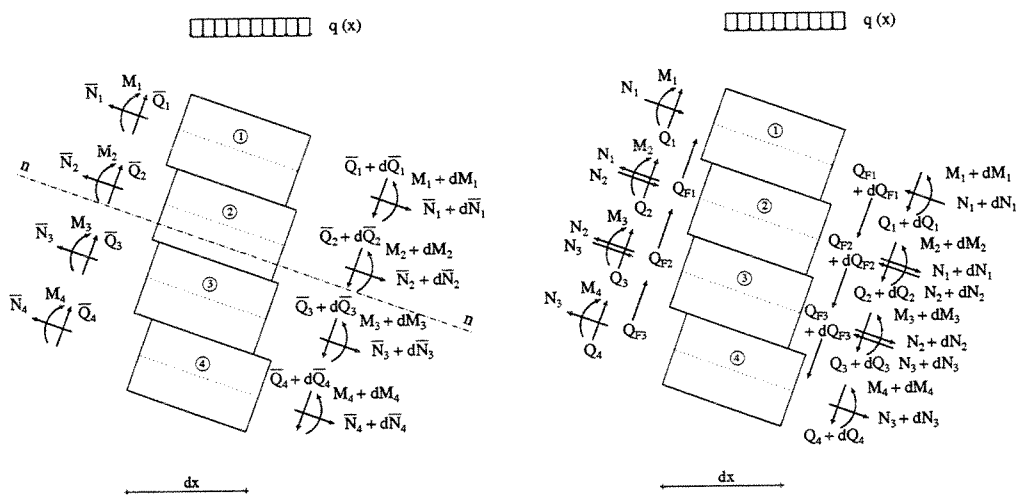


Bild 2.1-2. Schnittgrößen eines differenziellen vierteiligen Verbundelementes mit drei sequentiell definierten Fugen in üblicher (links) und modifizierter Darstellung

In **Bild 2.1-3** ist der Teilverbund j zwischen den Teilquerschnitten i und k mit den zugehörigen Schnittgrößen am differenziellen Element bei reiner Momentenbelastung dargestellt. Die Lage des Teilverbunds zur unverformten x -Achse ist beliebig, da diese nur als Bezugsachse für die elastischen Verformungen und zur Definition der relativen Lage der Schwer-

was für die Berechnung von Verbundquerschnitten mit Zellenbildung, Verzweigungen und mehrfachen Kopplungen von Teilquerschnitten Voraussetzung ist. Wird von diesen Optionen Gebrauch gemacht, so ist bei der Berechnung der Gesamtschnittgrößen zur Bemessung der Teilquerschnitte sorgfältig auf die Vorzeichen zu achten.

Die Gesamtnormalkraft \bar{N}_k in einem Teilquerschnitt k beträgt

Gl. 2.05

$$\bar{N}_k = N \frac{E_k A_k}{\sum_{i=1}^n E_i A_i} + \sum N_j^{ks} - \sum N_j^{kp}$$

N_j^{kp} – Normalkraft aus Teilverbund j mit primärem Teilquerschnitt k

N_j^{ks} – Normalkraft aus Teilverbund j mit sekundärem Teilquerschnitt k

N – äußere Längskraft

Die effektive Gesamtbiegesteifigkeit des mehrteiligen Verbundträgers mit elastischen Fugen läßt sich in ähnlicher Weise berechnen wie das Gesamtschnittmoment. Sie setzt sich zusammen aus der Summe der Eigenbiegesteifigkeiten der Teilquerschnitte und der Summe der Steineranteile $B_{Sj\text{eff}}$ an der Gesamtbiegesteifigkeit, welche durch das Zusammenwirken der Teilquerschnitte über die nachgiebigen Fugen aktiviert werden.

Gl. 2.06

$$B_{\text{eff}} = \sum_{i=1}^n B_i + B_{Sj\text{eff}} = \sum_{i=1}^n E_i I_i + \sum_{j=1}^m \gamma_j R_j |e_j|$$

Die Verdrehsteifigkeiten R_j und die hier fugenbezogenen Abminderungsfaktoren γ_j werden innerhalb des vorgestellten Berechnungsverfahrens nicht benötigt, sind aber dennoch leicht aus den bei der Berechnung anfallenden Daten bestimmbar, wenn auch nur unter bestimmten Umständen sinnvoll verwendbar. Die obige Darstellung wurde lediglich gewählt, um die Verbindung zwischen dem Teilverbundmodell und dem γ -Verfahren der DIN 1052 aufzuzeigen, in welchem allerdings querschnittsbezogene Abminderungsfaktoren γ_i verwendet werden (siehe auch Kapitel 6.6). Die Abminderungsfaktoren γ_j berücksichtigen die Nachgiebigkeit in der Fuge j , werden aber auch durch die Nachgiebigkeiten in den anderen Fugen beeinflusst. Die in Gl. 2.06 angegebenen Betragsstriche sind wegen der hier verwendeten, vorzeichenbehafteten vertikalen Hebelarme e_j und der definitionsgemäß positiven Biegesteifigkeitsanteile erforderlich.

Der analoge Aufbau von Gl. 2.04 und Gl. 2.06 erlaubt direkt die Aufteilung des Gesamt-

schnittmomentes auf die Eigenbiegemomente der Teilquerschnitte und die Teilverbundmomente der Fugen entsprechend der korrespondierenden Biegesteifigkeitsanteile an der effektiven Biegesteifigkeit des Gesamtquerschnittes.

$$M_i = \frac{E_i I_i}{B_{\text{eff}}} M \quad \text{bzw.} \quad N_j e_j = \frac{\gamma_j R_j |e_j|}{B_{\text{eff}}} M$$

Gl. 2.07

Die Anwendbarkeit des γ -Verfahrens ist jedoch beschränkt, da die Zuordnung der Verdrehsteifigkeiten R_j und der 'Abminderungsfaktoren' γ_j zu den Fugen und damit auch die Aufteilung des Gesamtmomentes ohne Auswertung weiterer Bedingungen nicht mehr nachvollziehbar ist, wenn der Querschnitt statisch unbestimmt ist. In diesem Fall gilt:

$$\begin{aligned} m &> n - 1 \\ m &\text{ - Anzahl der realen Fugen} \\ n &\text{ - Anzahl der Teilquerschnitte} \end{aligned}$$

Gl. 2.08

Zwar kann der Steineranteil $B_{S \text{ eff}}$ an der effektiven Gesamtbiegesteifigkeit nach Gl. 2.06 angegeben werden, aber die in den Fugen auftretenden Belastungen sind nicht eindeutig bestimmbar. Diese Aussagen werden klarer, wenn man die Nachgiebigkeit der Fugen zunächst vernachlässigt und den ideal starren Verbundquerschnitt betrachtet. Der Steineranteil kann in diesem Fall mit Hilfe folgender Summenformel berechnet werden

$$B_S = \frac{1}{\sum_{m=1}^n E_m A_m} \times \left[\sum_{i=1}^{n-1} \left[E_i A_i \cdot \sum_{k=i+1}^n E_k A_k \cdot (z_k - z_i)^2 \right] \right]$$

Gl. 2.09

In Matrixschreibweise lautet Gl. 2.09

$$B_S = \frac{\mathbf{d}_2^T \mathbf{H} \mathbf{d}_1}{\sum_{i=1}^n E_i A_i} \quad \text{mit} \quad \mathbf{d}_1^T = [E_1 A_1 \quad \dots \quad E_{n-1} A_{n-1}]$$

$$\mathbf{d}_2^T = [E_2 A_2 \quad \dots \quad E_n A_n]$$

Gl. 2.10

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} e_{1,2}^2 & 0 & \cdot & 0 \\ e_{1,3}^2 & e_{2,3}^2 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ e_{1,n}^2 & e_{2,n}^2 & \cdot & e_{n-1,n}^2 \end{bmatrix}$$

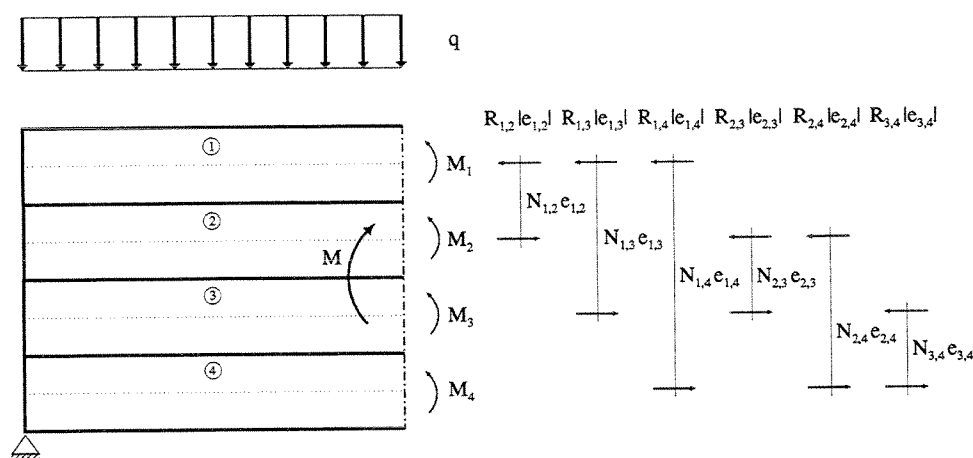


Bild 2.1-4. Aufteilung des Gesamtschnittmomentes entsprechend der Biegesteifigkeitsanteile beim Verbundquerschnitt mit maximal möglicher Anzahl von Fugen

Die Interpretation dieser Gleichung im Sinne des Teilverbundmodells ist aus **Bild 2.1-4** ersichtlich. Sieht man von mehrfachen Kopplungen zweier Teilquerschnitte ab, so können in einem n -teiligen Verbundquerschnitt maximal $n \cdot (n - 1) / 2$ Fugen bzw. Teilverbunde definiert werden, d. h. jeder Teilquerschnitt ist mit jedem anderen gekoppelt. Die Elemente der Summenformel **Gl. 2.09** sind die korrespondierenden Biegesteifigkeiten, in denen auch die mit den Elastizitätsmoduln der beteiligten Teilquerschnitte gewichteten statischen Momente der Fugen -also deren Verdrehsteifigkeiten- enthalten sind.

Gl. 2.11

$$B_{Si,k} = R_{i,k} |e_{i,k}| = \frac{E_i A_i E_k A_k e_{i,k}^2}{\sum_{m=1}^n E_m A_m} \quad \text{bzw.} \quad R_{i,k} = \frac{E_i A_i E_k A_k |e_{i,k}|}{\sum_{m=1}^n E_m A_m}$$

Die Verdrehsteifigkeiten können also ebenfalls mit Hilfe von **Gl. 2.10** ermittelt werden, wenn in der Matrix **H** die Quadrate der Hebelarme $e_{i,k}^2$ durch deren Beträge $|e_{i,k}|$ ersetzt werden.

Bei der realen Ausbildung eines Verbundquerschnittes wird in der Regel die Anzahl der Fugen auf ein Minimum beschränkt, so daß ein statisch bestimmter Querschnitt vorliegt. Das Minimum sind $(n - 1)$ Fugen, die zudem so angeordnet sein müssen, daß alle Teilquerschnitte ohne Unterbrechung miteinander verkettet sind. Die einfachste dieser Bedingung genügende Ausbildung ist diejenige des regelmäßig gegliederten Verbundquerschnittes, wie er üblicherweise für die Berechnung vorausgesetzt wird (**Bild 2.1-5**). Zur Ermittlung der Verdrehsteifigkeiten bezüglich der im Verbundquerschnitt definierten oder real ausgebildeten Fugen wird nun die idealisierte Aufteilung des Gesamtschnittmomentes bei maximaler Fugenanzahl mit der

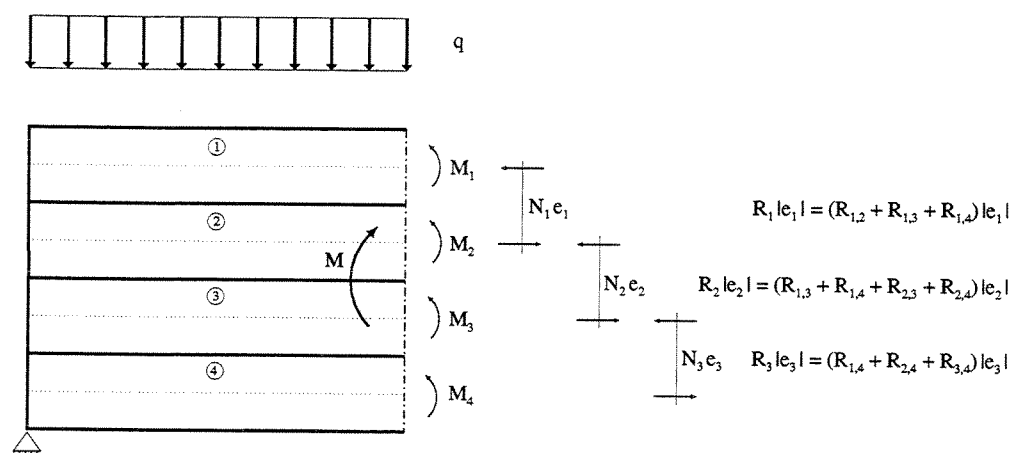


Bild 2.1-5. Aufteilung des Gesamtschnittmomentes entsprechend der Biegesteifigkeitsanteile beim Verbundquerschnitt mit minimaler Anzahl von Fugen

real möglichen Aufteilung verglichen. Teilverbundmomente nach Bild 2.1-4, für welche gemäß Bild 2.1-5 keine direkte Verbindung der zugehörigen Teilquerschnitte besteht, werden über diejenigen definierten Fugen aktiviert, welche eine indirekte Verbindung zwischen diesen Teilquerschnitten herstellen. Entsprechend wird die Verdrehsteifigkeit des substituierten Teilverbunds $R_{i,k}$ bei maximaler Fugenanzahl nach Gl. 2.11 der Verdrehsteifigkeit R_j jeder der 'auf dem Weg liegenden' Fugen zugeschlagen. Die Verdrehsteifigkeiten R_j in Bild 2.1-5 entsprechen denjenigen, die man auch auf herkömmliche Weise unter Bezug auf die neutrale Faser des ideal starren Verbundquerschnittes berechnet. Die Summen der in Bild 2.1-4 und Bild 2.1-5 eingetragenen Biegesteifigkeitsanteile sind - wie leicht überprüft werden kann - identisch.

Werden über die Mindestanzahl hinaus weitere Fugen definiert, so sind diese Substitutionen nicht mehr eindeutig durchführbar, da die Teilverbundmomente gedanklich über verschiedene Fugen aktiviert werden können. Zur eindeutigen Bestimmung der Beanspruchungen einer Fuge müssen daher die Gleichgewichtsbedingungen und die kinematischen Beziehungen ausgewertet werden, so daß schließlich ein statisch bestimmter Ersatzquerschnitt der Berechnung zugrunde gelegt wird. Dieses führt jedoch zu Ausdrücken, in denen die Verdrehsteifigkeiten der jeweiligen Fugen nicht explizit enthalten sind. Die Berechnung des allgemeinen mehrteiligen Verbundquerschnittes auf der Basis des γ -Verfahrens erweist sich in diesem Fall als unbrauchbar, da die Beziehungen nach Gl. 2.06 mechanisch nicht mehr sinnvoll interpretiert werden können. Die Summenglieder des Steineranteils an der effektiven Biegesteifigkeit müssen über Gl. 2.07 aus den bekannten Teilverbundmomenten ermittelt werden und nicht -

wie es dem Vorgehen beim γ -Verfahren entsprechen würde- umgekehrt. Daher können die Produkte aus 'Abminderungsfaktoren' γ_j und Biegesteifigkeitsanteilen in Gl. 2.06 nicht mehr eindeutig zerlegt werden und erweisen sich somit als reine Rechengrößen.

Obwohl also die explizite Berechnung von Verdreh- und Biegesteifigkeiten für das hier vorgestellte Berechnungsverfahren nur in Ausnahmefällen von Interesse ist, konnte doch gezeigt werden, daß die Schnittgrößen des allgemeinen Verbundträgers allein unter Bezug auf die Schwerachsen der homogenen Teilquerschnitte ermittelt werden können. Ein Beispiel zur Berechnung der Querschnittskennwerte und Schnittgrößen von Verbundträgern mit starren Fugen unter Anwendung des Teilverbund-Modells ist in Anhang 1 zu finden. Die eigentlichen Vorteile des Teilverbund-Modells sind jedoch in der Möglichkeit zur übersichtlichen Ableitung der Differentialgleichungen für den allgemeinen, nachgiebig zusammengesetzten Verbundquerschnitt zu sehen.

Anhand der vorhergehenden Ausführungen können die Mindestforderungen für die Definitivon eines Verbundquerschnittes bezüglich der Zahl und der Anordnung realer oder definierter Fugen folgendermaßen zusammengefaßt werden:

- Für den n-teiligen Verbundquerschnitt müssen mindestens $n - 1$ Fugen definiert sein. Unabhängig davon können deren Steifigkeiten Werte zwischen Null und Unendlich annehmen.
- Die definierten Fugen müssen die ununterbrochene Verkettung aller definierten Teilquerschnitte sicherstellen, d. h. daß jeder Teilquerschnitt mindestens an einer Fuge beteiligt sein muss.
- Mehrfache Kopplungen zweier Teilquerschnitte werden zusammengefaßt, so daß maximal $n \cdot (n - 1) / 2$ Fugen zu berücksichtigen sind. Die Steifigkeiten zusammengefaßter Fugen werden addiert.

Die Berechnungsvoraussetzungen sind hiermit vollständig aufgezählt. Zur Ableitung des DGL-Systems werden zunächst die Gleichgewichtsaussagen am Gesamtverbund- und am Teilverbundelement formuliert. Durch Einsetzen der konstitutiven Beziehungen erhält man eine Differentialgleichung, in der die Durchbiegung und die Fugenverschiebungen als unbekannte Funktionen auftreten. Der alleinige Bezug auf diese Verschiebungsgrößen weicht zwar von den Formulierungen anderer Autoren ab /MÖH56/ /SHE68/ /KNE91/, ist jedoch wegen der

besonderen Form des hierdurch entstehenden DGL-Systems sehr vorteilhaft. Die Auswertung der kinematischen Beziehungen in den Fugen des Verbundelementes liefert die erforderliche Anzahl zusätzlicher Differentialgleichungen. Dagegen werden die Gleichgewichtsaussagen an den differentiellen Teilquerschnitts-Elementen lediglich für die der Lösung des DGL-Systems nachgeschalteten Bestimmung der Teilquerschnitts-Beanspruchungen benötigt.

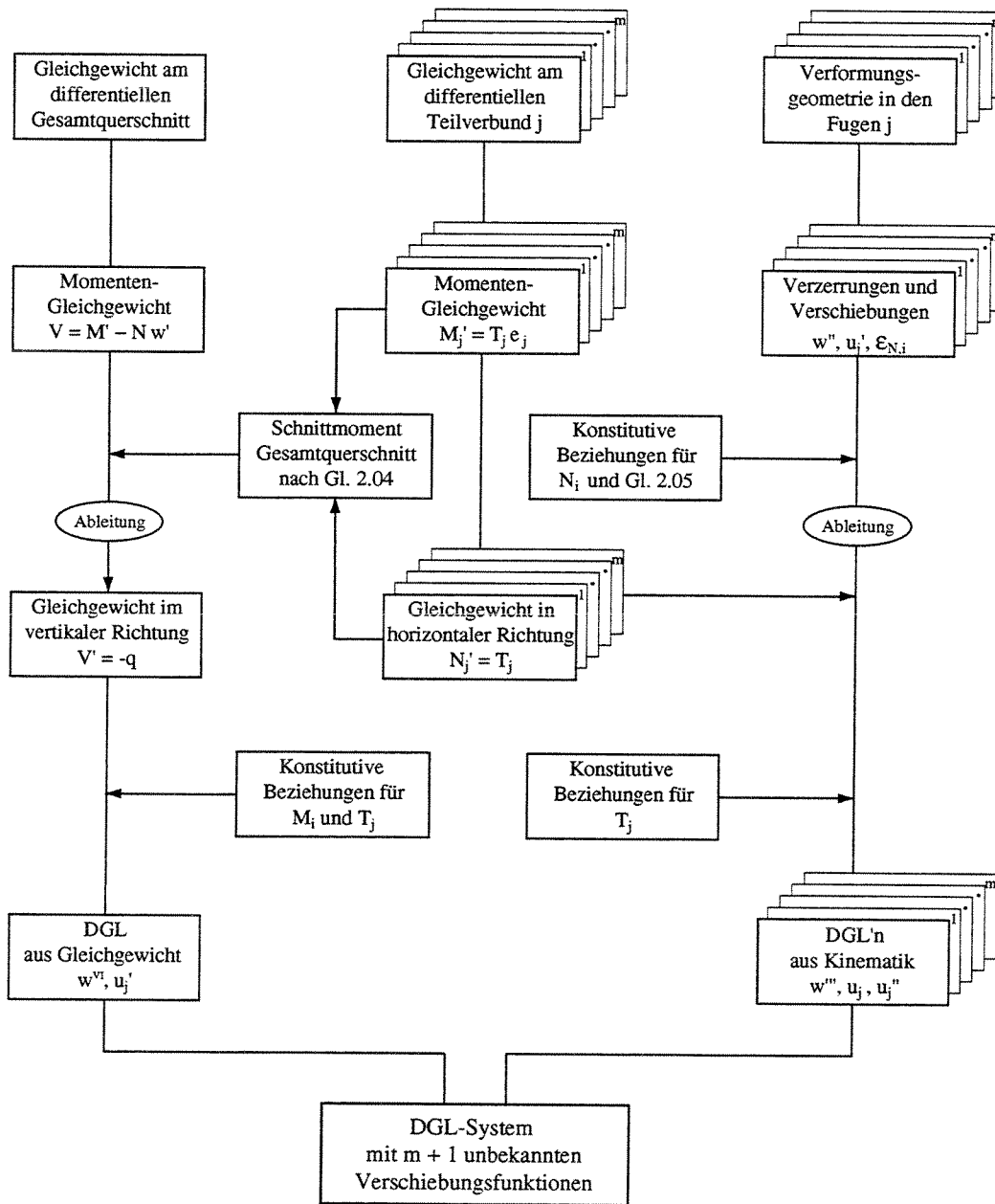


Bild 2.1-6. Ableitung des Differentialgleichungssystems für den mehrteiligen, beliebig gefügten Verbundquerschnitt

2.2 Gleichgewichtsaussagen

Die Gleichgewichtsbedingungen des differentiellen Gesamtverbund-Elementes gemäß Bild 2.1-2 können direkt angeschrieben werden. Entsprechend den Berechnungsvoraussetzungen ist die äußere Normalkraft abschnittsweise konstant.

Gl. 2.12

$$dN = 0$$

Für das Gleichgewicht in vertikaler Richtung gilt

Gl. 2.13

$$dV + q dx = 0 \quad \Rightarrow \quad V' = -q .$$

Das Momentengleichgewicht unter Berücksichtigung der äußeren Normalkraft lautet

Gl. 2.14

$$dM - V dx + N w' dx = 0 .$$

Zur vollständigen Ableitung der Gleichgewichtsbeziehungen am differentiellen Teilverbundelement ist die Verbindung zwischen primärem und sekundärem Teilquerschnitt der Fuge j in Bild 2.2-1 freigeschnitten. Mit dieser gegenüber Bild 2.1-3 verfeinerten Betrachtung ist es möglich, die schon mehrfach verwendete Hypothese zu verifizieren, daß allein die Schwerachsenabstände zwischen den Teilquerschnitten für das globale Tragverhalten maßgebend sind. Des weiteren kann gezeigt werden, daß die Lage und Ausbildung der Fugen in den Teilquerschnitten im Rahmen der Berechnungsvoraussetzungen beliebig ist. Lediglich bei der Schnittgrößenermittlung für die Teilverbundkomponenten (primärer und sekundärer Teilquerschnitt, Verbindungsmedium) ist den Besonderheiten der Fugenausbildung Rechnung zu tragen. Diese Aussage soll nicht darüber hinwegtäuschen, daß die Art der Fugenausbildung natürlich die Schubsteifigkeit des Verbindungsmediums beeinflusst. Diese ist jedoch als Verschiebungsmodul k ein Eingangsparameter und nicht ein Ergebnis der Berechnung, so daß die Frage des 'richtigen' Ansatzes für den Verschiebungsmodul k bei beliebiger Fugenausbildung ein von der hier durchgeführten Betrachtung unabhängiges Problem der Kennwertermittlung ist.

Die Gleichgewichtsbeziehungen am Teilverbundelement werden unterschieden nach denjenigen für den primären (p) bzw. sekundären (s) Teilquerschnitt und für das Verbindungsmedium (v). Der Begriff 'Verbindungsmedium' wird gewählt um zu unterstreichen, daß die Verbindung nicht linienförmig sein muß, sondern auch eine vertikale Ausdehnung haben kann. Man kann sich darunter z. B. die Polyurethan-Schicht einer Sandwichplatte vorstellen, die in Trägerrichtung zwar schubsteif ist, jedoch keine Normalspannungen aufnehmen kann.

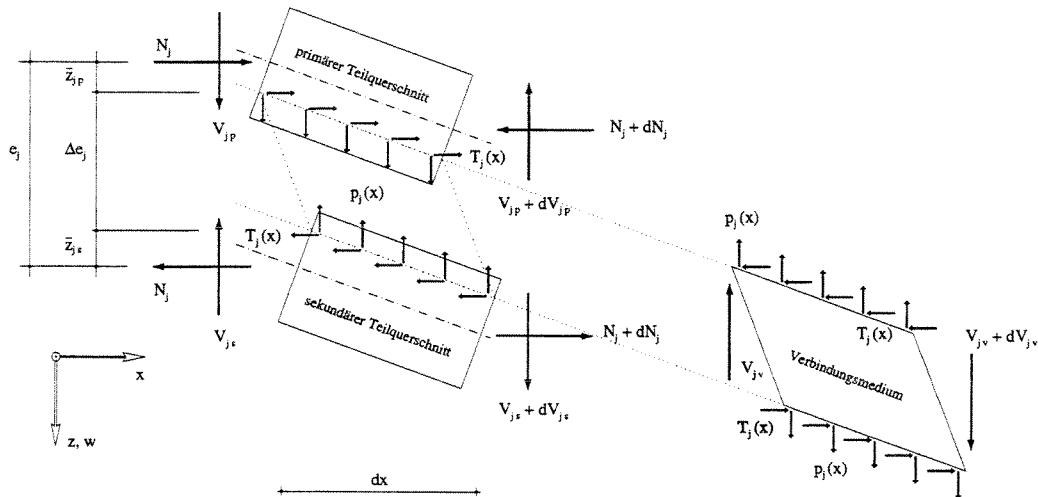


Bild 2.2-1. Teilverbund j mit freigeschnittenem Verbindungsmedium am differentiellen Element

Man erhält für das Gleichgewicht in horizontaler Richtung :

$$p : dN_{jp} - T_j dx = 0$$

$$\Rightarrow N'_{jp} = N'_{js} = N'_j = T_j$$

$$s : dN_{js} - T_j dx = 0$$

v : erfüllt

Gl. 2.15

Das Gleichgewicht in vertikaler Richtung lautet :

$$p : dV_{jp} - p_j dx = 0$$

$$\Rightarrow V'_{jp} = V'_{js} = V'_j = p_j$$

$$s : dV_{js} - p_j dx = 0$$

$$v : dV_{jv} = 0 \quad \Rightarrow \quad V'_{jv} = 0$$

Gl. 2.16

In den Momentengleichgewichten werden zunächst auch die Momentenzuwächse aus Normalkraft und Verformungen berücksichtigt (Theorie II. Ordnung). In der Momentensumme über das Teilverbundelement entfallen diese Anteile allerdings.

Gl. 2.17

$$p: -V_{jp} = T_j \bar{z}_{jp} - N_{jp} w'$$

$$s: V_{js} = -T_j \bar{z}_{js} + N_{js} w'$$

$$v: V_{jv} = T_j \Delta e_j$$

Der geometrische Zusammenhang

Gl. 2.18

$$e_j = \bar{z}_{jp} + \Delta e_j - \bar{z}_{js}$$

ist für alle denkbaren Konstellationen zutreffend, so daß die Momentensumme des Teilverbundelementes stets beschrieben werden kann durch

Gl. 2.19

$$N'_j e_j = V_j = -V_{jp} + V_{js} + V_{jv} = T_j e_j.$$

Damit ist Gl. 2.04 bestätigt, wenn berücksichtigt wird, daß das Gesamtmoment des Verbundelementes noch zusätzlich die Eigenbiegemomente der Teilquerschnitte enthält, welche im Teilverbundelement nicht erfaßt sind. Setzt man die differentielle Formulierung nach Gl. 2.04 in Gl. 2.14 ein, so erhält man

Gl. 2.20

$$\sum_{i=1}^n M'_i + \sum_{j=1}^m N'_j e_j + N w' = V.$$

Nach Einsetzen von Gl. 2.15 und einmaliger Ableitung kann Gl. 2.13 verwendet werden.

Gl. 2.21

$$\sum_{i=1}^n M''_i + \sum_{j=1}^m T'_j e_j + N w'' = -q$$

Um die Differentialgleichung mit den Verschiebungsfunktionen als Unbekannte zu erhalten, müssen die konstitutiven Gleichungen für die Eigenbiegemomente und den Fugenschubfluß herangezogen werden. Da die Verschiebungsgrößen auf die unverformte Stabachse bezogen sind, sind eventuelle Vorverformungen oder Eigenspannungszustände in den konstitutiven Gleichungen mit zu berücksichtigen. Die konstitutive Gleichung für die Eigenbiegemomente lautet

Gl. 2.22

$$M_i = (\chi - \chi_0 - \chi_{ti}) E_i I_i = - (w'' - w''_0 + \chi_{ti}) E_i I_i.$$

Hierin ist w''_0 eine eingeprägte, spannungsfreie Verkrümmung und der Term χ_{ti} steht für die Verkrümmung aus linear über die Teilquerschnittshöhe veränderlicher Temperaturdifferenz.

$$\chi_{ti} = \frac{t_{iu} - t_{i0}}{\Delta h_i} \alpha_{ti}$$

Gl. 2.23

Die konstitutive Gleichung für den Fugenschubfluß unter Berücksichtigung eines über die Elementlänge konstanten Anfangsschlupfes u_0 im Verbindungsmedium lautet

$$T_j = (u_j - u_{j0}) k_j \quad \text{für } u_j \geq u_{j0} \text{ im gesamten Bereich.}$$

Gl. 2.24

Die Fugenverschiebungen u_j sind -wie in Bild 2.2-2 dargestellt- entsprechend der positiven Wirkungsrichtung des Fugenschubflusses definiert.

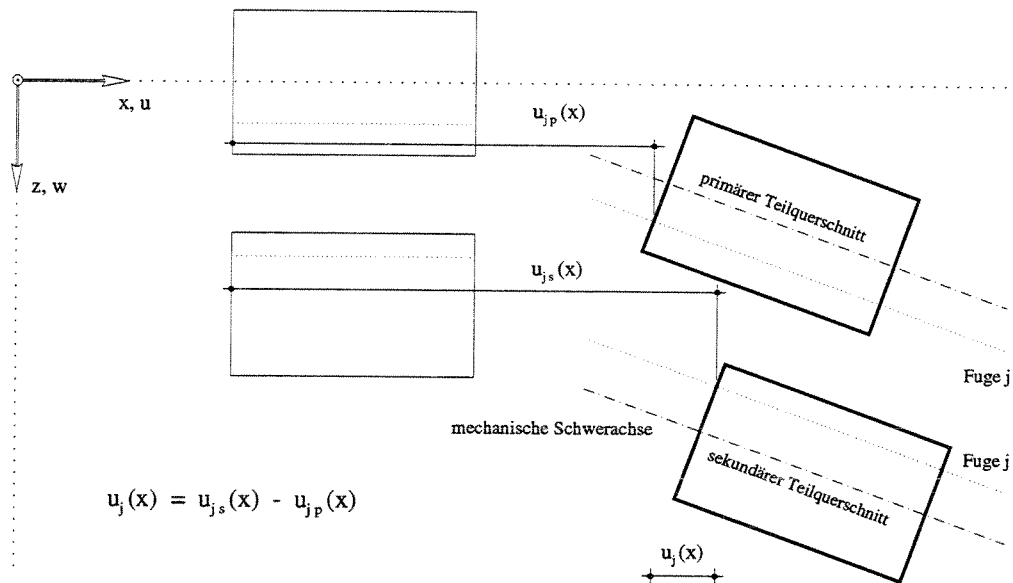


Bild 2.2-2. Definition der Fugenverschiebung u_j

Man erhält schließlich die Differentialgleichung für das n-teilige Verbundelement mit m definierten Fugen durch Ableiten von Gl. 2.22 und Gl. 2.23 und Einsetzen in Gl. 2.21. Setzt man sämtliche Vorverformungen und Eigenspannungszustände als über die Elementlänge konstant voraus, so entfallen diese Anteile in der endgültigen Differentialgleichung wegen der notwendigen Ableitungen und treten erst wieder in den inhomogenen Lösungen und bei der Schnittgrößenbestimmung auf.

$$-w^{IV} \sum_{i=1}^n E_i I_i + \sum_{j=1}^m u'_j k_j e_j + N w'' = -q$$

Gl. 2.25

2.3 Bestimmung der Schnittgrößen

Zur vollständigen und eindeutigen Beschreibung des Spannungs- und Verformungszustandes eines Verbundelementes und zur Bemessung des Verbundträgers werden sowohl Verschiebungs- als auch Schnittgrößen herangezogen. Da das im Rahmen dieser Arbeit abgeleitete Differentialgleichungssystem nur Verschiebungsfunktionen als Unbekannte enthält, müssen die Schnittgrößen aus deren Lösungen berechnet werden. Je nach Verwendung der Schnittgrößen sei hier nach globalen und lokalen Schnittgrößen unterschieden.

Die globalen Schnittgrößen dienen der vollständigen und eindeutigen Beschreibung des Spannungs- und Verformungszustandes eines Verbundelementes. Sie werden in der statischen Berechnung von Strukturen, in denen das Verbundelement entweder mit gleichen oder anderen Elementen gekoppelt ist, zur Definition von Rand- oder Übergangsbedingungen benötigt. Als lokale Schnittgrößen werden diejenigen bezeichnet, welche zur Berechnung der Beanspruchungen in den einzelnen Komponenten des Verbundquerschnittes (Teilquerschnitte und Verbindungsmedien) und zu deren Bemessung verwendet werden.

Die 'äußere' Normalkraft ist eine globale Schnittgröße und wird als bekannt vorausgesetzt. Da sie nach den Berechnungsvoraussetzungen nicht verformungsabhängig sein soll, muß ihre Größe auch in einer komplizierteren Gesamtstruktur durch eine Vorberechnung ermittelt werden. Diese Einschränkung macht unter Umständen eine iterative Berechnung erforderlich. Des weiteren werden die Normalkräfte aus Verbundwirkung N_j als globale Schnittgrößen geführt. Sie können nach Gl. 2.15 und unter Verwendung der konstitutiven Beziehung Gl. 2.24 durch die Relativverschiebungen u_j zwischen den Teilquerschnitten -in der Folge als Fugenverschiebungen bezeichnet- ausgedrückt werden.

Gl. 2.26

$$N_j = \int T_j dx = k_j \int (u_j - u_{j0}) dx = k_j \int u_j dx - k_j u_{j0} x$$

Man erhält mit Gl. 2.04 und der konstitutiven Beziehung nach Gl. 2.22 das Gesamtmoment in der Formulierung

Gl. 2.27

$$M = -w'' \Sigma E_i I_i + \Sigma k_j e_j \int u_j dx + \Sigma w_0'' E_i I_i - \Sigma \chi_{ti} E_i I_i - \Sigma k_j e_j u_{j0} x .$$

Die Gesamtvertikalkraft V bestimmt man aus Gl. 2.14, indem Gleichung Gl. 2.27 abgeleitet und darin eingesetzt wird. Dabei entfallen einige der Anteile aus Vorverformungen und Eigenstressungen des Verbundelementes bzw. dessen Komponenten.

$$V = M' + N w' = -w''' \sum E_i I_i + \sum k_j e_j u_j - \sum k_j e_j u_{j0} + N w'$$

Gl. 2.28

Die lokalen Schnittgrößen in den Teilquerschnitten werden durch Summation der aus den Teilverbunden resultierenden Belastungen ermittelt, an denen der betreffende Querschnitt entweder als primärer (Index p) oder sekundärer (Index s) Teilquerschnitt beteiligt ist. Hierzu können wiederum die in Kapitel 2.2 abgeleiteten Beziehungen verwendet werden. Zusätzlich sind die Eigenbiegemomente der Teilquerschnitte und die anteilige äußere Normalkraft zu berücksichtigen. In Bild 2.3-1 sind beispielhaft die an einem differentiellen Teilquerschnittselement angreifenden Kräfte eingezeichnet.

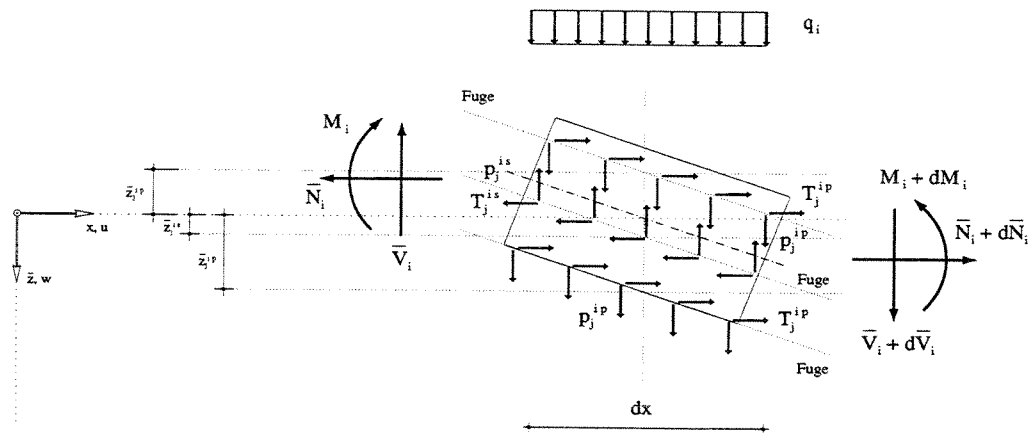


Bild 2.3-1. Differentielles Teilquerschnittselement i mit zugehörigen lokalen Schnittgrößen aus Verbundwirkung im lokalen Koordinatensystem

Das Moment M_i ist bereits durch Gl. 2.22 definiert. Die Gesamtnormalkraft in Abhängigkeit von den Verschiebungsfunktionen erhält man durch Einsetzen von Gl. 2.26 in Gl. 2.05 unter Berücksichtigung der jeweils gültigen Vorzeichen, welche durch die Bedeutung des Teilquerschnittes i für die Fuge j festgelegt sind.

$$\bar{N}_i = N \frac{E_i A_i}{\sum_{k=1}^n E_k A_k} + \sum k_j e_j \int u_j^{is} dx - \sum k_j e_j u_{j0}^{is} x - \sum k_j e_j \int u_j^{ip} dx + \sum k_j e_j u_{j0}^{ip} x$$

Gl. 2.29

Die Bemessung eines Teilquerschnittes erfordert unter anderem die Kenntnis der Schubbeanspruchungen und deren Verteilung über die Teilquerschnittshöhe. Das Integral der Schubspannungen über den Teilquerschnitt ist gleich der Gesamtquerkraft in diesem. Daher muß die Gesamtvertikalkraft des Teilquerschnittes mit Hilfe von Gl. 2.02 umgerechnet werden. Wendet

man die Berechnungsvorschrift auf die Gesamtvertikalkraft des Teilquerschnittes nach **Gl. 2.28** an, so entfällt die verformungsabhängige Komponente aus äußerer Normalkraft. Aus Gründen der Übersichtlichkeit sind Einflüsse aus eventuell vorhandenem, über den Bereich konstantem Schlupf in **Gl. 2.30** nicht berücksichtigt.

Gl. 2.30

$$\bar{V}_i = -w''' E_i I_i + \sum k_j \bar{z}_j^{ip} u_j^{ip} - \sum k_j \bar{z}_j^{is} u_j^{is} + \bar{N}_j w'$$

$$\bar{Q}_i = -w''' E_i I_i + \sum k_j \bar{z}_j^{ip} u_j^{ip} - \sum k_j \bar{z}_j^{is} u_j^{is}$$

Die Gleichung für die Gesamtvertikalkraft eines Teilquerschnittes wird dann benötigt, wenn auch das Gleichgewicht in vertikaler Richtung für das differentielle Teilquerschnitts-Element ausgewertet werden soll.

Gl. 2.31

$$\bar{V}_i' = \sum p_j^{is} - \sum p_j^{ip} - q_i$$

Mit Hilfe dieser Gleichung kann untersucht werden, ob und in welchem Maße das Verbindungsmedium auf Zug oder Druck belastet ist. Dieses ist z. B. von Interesse, wenn mechanische Verbindungsmittel wie Nägel auf Zugbelastung empfindlich sind oder ein Verbindungssystem seine Wirkung ausschließlich über Kontaktpressung erzielt. Die Art der Lasteinleitung in den Gesamtquerschnitt spielt dabei unter Umständen eine wichtige Rolle. Dieses kommt in **Gl. 2.31** durch den Term q_i zum Ausdruck, welcher die direkt auf den Teilquerschnitt einwirkenden äußeren Lasten bezeichnet. Damit können z. B. an einen Teilquerschnitt angehängte Lasten oder Quervorspannung in der Bemessung des Verbindungsmediums ausreichend berücksichtigt werden. Für die äußere Gesamtbelastung q gilt

Gl. 2.32

$$q = \sum_{i=1}^n q_i .$$

An dieser Stelle muß jedoch darauf hingewiesen werden, daß die vertikalen Streckenlasten p_j auf den Teilquerschnitt nur berechnet werden können, wenn ein statisch bestimmter Verbundquerschnitt vorliegt. Für den n -teiligen Verbundquerschnitt können lediglich $n - 1$ Gleichungen **Gl. 2.31** angeschrieben werden, weil eine Gleichung wegen linearer Abhängigkeit entfällt. Daher können auch nur $n - 1$ vertikale Streckenlasten p_j in den Fugen bestimmt werden. Die Einschränkung auf $m = n - 1$ Fugen jedoch entspricht der Bedingung für den statisch bestimmten Verbundquerschnitt (siehe **Kapitel 2.1**). Für die Berechnung der vertikalen Streckenlasten von statisch unbestimmten Querschnitten müssen die elastischen Verformungen

des Verbindungsmediums in vertikaler Richtung berücksichtigt werden. Sieht man für diese Untersuchung die horizontalen und vertikalen Relativverschiebungen in den Fugen als unabhängige Verformungen an, so kann die vertikale Nachgiebigkeit in ähnlicher Weise behandelt werden wie die horizontale Nachgiebigkeit (siehe hierzu **Anhang 2**).

Das Verbindungsmedium kann infolge seiner Funktion zur Sicherung der Schubkraftübertragung zwischen den Teilquerschnitten einer Fuge auf verschiedene Weise beansprucht werden. Wird die Schubkrafteinleitung in die beiden Teilquerschnitte auf gleicher absoluter Höhe bewerkstelligt, so ist das Verbindungsmedium lediglich auf Abscheren beansprucht. Ersatzweise können hierfür horizontale Federn angesetzt werden. Sind die absoluten z-Ordinaten der Schubkrafteinleitung jedoch verschieden, so liegt eine Schubbeanspruchung des Verbindungsmediums vor. Ersatzweise müssen dann Drehfedern eingeführt werden. Da zur Herstellung des Verbunds in der Regel stabförmige, in die Teilquerschnitte 'eingebettete' Verbindungsmittel verwendet werden, sind diese zusätzlich einer Biegebeanspruchung ausgesetzt (**Bild 2.3-2**). Anstatt von der Fugen- oder Schubsteifigkeit müsste in diesem Fall eigentlich von der Bettungs- bzw. Verdrehsteifigkeit der stabförmigen Verbindungsmittel gesprochen werden. In **Anhang 4** wird gezeigt, wie sich anhand der Gleichgewichtsbedingungen für die Verbindungsmittel diese Steifigkeiten zu einer fiktiven Fugensteifigkeit zusammenfassen lassen.

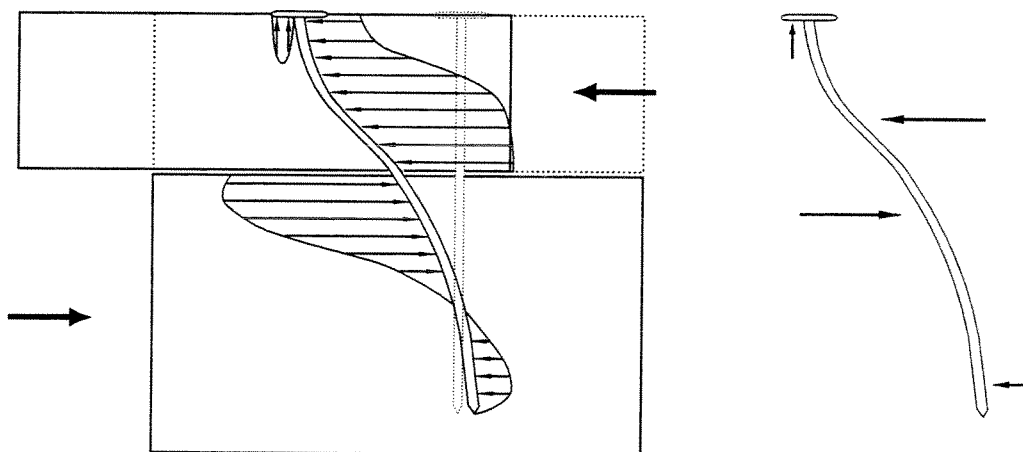


Bild 2.3-2. Bettung eines Nagels in den Verankerungsgrund und resultierende Spannungen bei horizontaler Verschiebung der beiden Teilquerschnitte gegeneinander; Resultierende der Spannungen am verformten Nagel

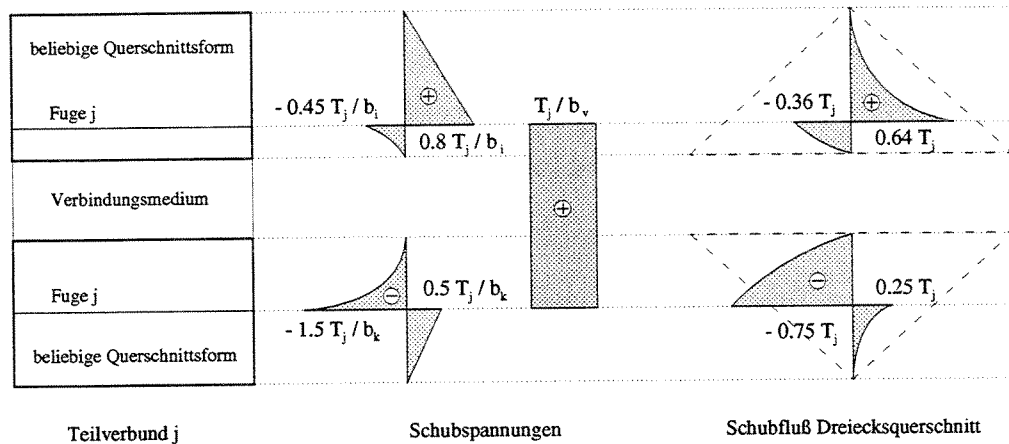


Bild 2.3-3. Verlauf der Schubspannungen in den Teilquerschnitten und im Verbindungsmedium aus dem Teilverbund j und Schubflußverlauf für einen Dreiecksquerschnitt

Analog zu diesen Betrachtungen kann für die Teilquerschnitte angegeben werden, daß die Schubkrafteinleitung in Höhe der mechanischen Schwerachse des Teilquerschnittes lediglich zu einer Veränderung der Normalkraftbeanspruchungen führt, während bei exzentrischer Einleitung gemäß Gl. 2.30 zusätzlich Querkräfte auftreten. Hieraus kann jedoch nicht geschlossen werden, daß bei zentrischer Einleitung im Teilquerschnitt keine Schubspannungen aus Verbundwirkung entstehen. Es bedeutet lediglich, daß das Integral der Schubspannungen über den Teilquerschnitt in diesem Fall gleich Null ist.

Die Teilquerschnitte erfahren aus Verbundwirkung gemäß der Theorie des elastischen Verbunds eine reine Schubfeldbeanspruchung. Die Schubspannungen, welche aus dem in den Teilquerschnitt einzuleitenden Schubfluß, dem Gleichgewicht an der Einleitungsstelle und der dort vorhandenen Teilquerschnittsbreite zu berechnen sind, klingen in vertikaler Richtung mit unterschiedlichem Vorzeichen zu beiden Teilquerschnittsrändern auf den Randwert ab. Am unbelasteten Rand ist die Schubspannung definitionsgemäß gleich Null. Der Verlauf des Schubflusses und der Schubspannungen ist von der Form des jeweiligen Teilquerschnittes abhängig. In Bild 2.3-3 sind die Schubfluß- und der Schubspannungsverläufe aus dem Teilverbund j zwischen zwei dreiecksförmigen Teilquerschnitten dargestellt. Zur Bestimmung der Spannungsspitzen werden die Schubspannungen aus der Eigenbiegung (z. B. quadratische Parabel für Rechteckquerschnitt) und diejenigen aus den Teilverbunden aufsummiert. Hierbei ist sorgfältig auf die Vorzeichen zu achten, welche nicht nur durch die Richtung des Schubflusses an der Einleitungsstelle bestimmt sind. Um die Allgemeingültigkeit des

Verfahrens sicherzustellen muß vielmehr beachtet werden, daß der positive Ast der Kurve immer auf der dem konjugierten Teilquerschnitt abgewandten Seite liegt. Die Anfangswerte des positiven und des negativen Astes ergeben sich aus dem horizontalen Gleichgewicht für die Schnitte oberhalb und unterhalb der Einleitungsstelle. Ihr Anteil am gesamten einzuleitenden Schubfluß entspricht dem Verhältnis der beiden Teilflächen zur Gesamtfläche des Teilquerschnittes, da im Gleichgewicht die anteilige Normalkraft der abgeschnittenen Fläche zu berücksichtigen ist. Der Verlauf des Schubflusses ist nur bei rechteckigen Teilquerschnitten linear. Dagegen ist beispielsweise der Verlauf der Schubspannungen bei den dreiecksförmigen Teilquerschnitten in Bild 2.3-3 zu dem den konjugierten Teilquerschnitten abgewandten Rand hin linear. Die dort angegebenen Spannungswerte sind bezogen auf die Basisbreite b des Dreiecksquerschnittes.

Die Schubspannungen werden wegen der Beschränkung auf das eindimensionale Stabproblem als über die Teilquerschnittsbreite konstant angenommen, was insbesondere für Plattenbalken oder T-Profile mit relativ dünnen und breiten Gurten eine grobe Vereinfachung darstellt. Des weiteren ist der Verlauf des Schubflusses aus Biegebeanspruchung für kompliziertere Teilquerschnittsformen oft nur schwer zu bestimmen. Mit Hilfe der eindimensionalen Theorie des elastischen Verbunds ist es möglich, den Verlauf der Schubspannungen in vertikaler oder horizontaler Richtung dennoch näherungsweise zu erfassen, wenn im interessierenden Bereich des Teilquerschnittes fiktive Fugen mit horizontalen Nachgiebigkeiten eingeführt werden. Auf diese Möglichkeit weisen verschiedene Autoren hin /KNE91/ /HER92/. In Kapitel 7.2 der vorliegenden Arbeit werden anhand eines Anwendungsbeispiels die Einsatzmöglichkeiten einer solchen Näherung demonstriert.

Das Integral der Schubspannungen aus dem Teilverbund j -also der Anteil dieses Teilverbunds an der Aufnahme der Gesamtquerkraft des Verbundquerschnittes- ist unabhängig von der Form der Teilquerschnitte und dem Modus der Schubkraftüberleitung durch das Verbindungsmedium in die Teilquerschnitte. Dieser Sachverhalt kann für beliebige Konstellationen der oben genannten Parameter unter Einhaltung der Vorzeichenkonventionen nachgerechnet werden, er geht aber auch schon aus Gl. 2.19 hervor. Für das globale Verhalten des Verbundquerschnittes sind lediglich die Schwerachsenabstände der Teilquerschnitte, deren Dehnsteifigkeiten und die experimentell oder durch Simulation anhand mechanischer Modelle zu bestimmenden Schubsteifigkeiten der Verbindungsmedien ausschlaggebend. Lediglich deren Beanspruchungen und rechnerische Steifigkeiten sind durch die lokalen Verhältnisse bestimmt.

Zur Ableitung des geometrischen Zusammenhangs werden die Strecken ausgehend vom linken Rand des Teilquerschnittes i in Höhe der Fuge j entgegen dem Uhrzeigersinn abgeschrieben. Nach Bild 2.4-1 ist wegen der Vorzeichenfestlegung der Fugenverschiebung gemäß Bild 2.2-2 der Teilquerschnitt i als primärer Teilquerschnitt definiert.

$$- \Delta e_j w' + u_j + (1 + \varepsilon_{Nk} + \varepsilon_{Mk} + \varepsilon_{Tk}) dx - u_j - du_j + \\ + \Delta e_j w' + \Delta e_j dw' - (1 + \varepsilon_{Ni} + \varepsilon_{Mi} + \varepsilon_{Ti}) dx = 0$$

Gl. 2.33

$$u_j' - (\varepsilon_{Nk} + \varepsilon_{Mk} + \varepsilon_{Tk}) + (\varepsilon_{Ni} + \varepsilon_{Mi} + \varepsilon_{Ti}) - \Delta e_j w'' = 0$$

Für die Normalkraft-Dehnungen der Teilquerschnitte wird

$$\varepsilon_{Ni} = \frac{\sum N_r^{is} - \sum N_r^{ip}}{E_i A_i} \quad \text{bzw.} \quad \varepsilon_{Nk} = \frac{\sum N_r^{ks} - \sum N_r^{kp}}{E_k A_k}$$

Gl. 2.34

eingesetzt. Der Index r steht hier stellvertretend für alle Fugen, an denen der betreffende Teilquerschnitt beteiligt ist. Die Dehnungen aus Verkrümmung der Teilquerschnitte werden im Bezug auf die unverformte Stabachse ausgedrückt.

$$\varepsilon_{Mi} = -w'' \bar{z}_{ji} \quad \text{bzw.} \quad \varepsilon_{Mk} = -w'' \bar{z}_{jk}$$

Gl. 2.35

Mit Gl. 2.18 kann zusammengefaßt werden.

$$w'' (\bar{z}_{ji} + \Delta e_j - \bar{z}_{jk}) = w'' e_j$$

Gl. 2.36

Die über die Teilquerschnitte konstanten Temperatur-Dehnungen werden zusammengefaßt zum Temperatur-Dehnungsgradienten δ_j / e_j der Fuge j .

$$\frac{\delta_j}{e_j} = \frac{\varepsilon_{Tk} - \varepsilon_{Ti}}{e_j} = \frac{\alpha_{tk} \Delta t_k - \alpha_{ti} \Delta t_i}{e_j}$$

Gl. 2.37

Gl. 2.35 bis Gl. 2.37 werden in Gl. 2.34 eingesetzt, der neue Ausdruck einmal abgeleitet und anschließend die konstitutive Gleichung für die Fugenverschiebungen Gl. 2.24 eingesetzt. Man erhält schließlich die kinematische Differentialgleichung für die Fuge j .

$$-w''' e_j + u_j'' - \frac{\sum u_r^{ks} k_r - \sum u_r^{kp} k_r}{E_k A_k} + \frac{\sum u_r^{is} k_r - \sum u_r^{ip} k_r}{E_i A_i} = 0$$

Gl. 2.38

3 Allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems

3.1 Diskussion des Lösungsweges

Das in Kapitel 2 abgeleitete Differentialgleichungs-System kann übersichtlicher in Operatorenschreibweise und in Matrizenform dargestellt werden. Für einen n-teiligen Verbundquerschnitt mit m Fugen verändern sich Gl. 2.25 und Gl. 2.38 in

Gl. 3.01

$$\begin{bmatrix} -D^4 \sum E_i I_i + D^2 N & D k_1 e_1 & \dots & D k_m e_m \\ -D^3 e_1 & D^2 - \frac{k_1}{(EA)_{1p}^{1p}} - \frac{k_1}{(EA)_{1s}^{1s}} & \dots & \nabla_{1m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -D^3 e_m & \nabla_{m1} & \dots & D^2 - \frac{k_m}{(EA)_{mp}^{mp}} - \frac{k_m}{(EA)_{ms}^{ms}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -q \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Es werden folgende Abkürzungen verwendet:

Gl. 3.02

$$\nabla_{jr} = \begin{cases} -\frac{k_r}{(EA)_{jp}^{rp}} & \text{bzw.} & -\frac{k_r}{(EA)_{js}^{rs}} & \text{bzw.} & \frac{k_r}{(EA)_{jp}^{rs}} & \text{bzw.} & \frac{k_r}{(EA)_{js}^{rp}} \\ -\frac{k_r}{(EA)_{jp}^{rp}} - \frac{k_r}{(EA)_{js}^{rs}} & \text{bzw.} & \frac{k_r}{(EA)_{jp}^{rs}} + \frac{k_r}{(EA)_{js}^{rp}} \end{cases}$$

$(EA)_{jp}^{rs}$ – Dehnsteifigkeit des Teilquerschnittes, welcher für den Teilverbund j primärer, für den Teilverbund r jedoch sekundärer Teilquerschnitt ist.

Die simultanen Differentialgleichungen sind linear, höherer Ordnung und ersten Grades. Die Besetzung der Matrix in den zu den kinematischen Beziehungen gehörigen Zeilen hängt davon ab, ob die beiden an der betrachteten Fuge j beteiligten Teilquerschnitte noch Kopplungen (Fugen r) mit anderen Teilquerschnitten aufweisen oder nicht. Das Vorzeichen der zusätzlichen Terme richtet sich nach der Funktion dieser Teilquerschnitte in der Fuge r als primäre oder sekundäre Teilquerschnitte, wie aus der ersten Zeile von Gl. 3.02 ersichtlich. Die zweite Zeile von Gl. 3.02 wird nur benötigt, wenn die an der Fuge j beteiligten Teilquerschnitte mehrfach gekoppelt sind. Die Zeilen der Matrix müssen an mindestens einer Stelle außerhalb der Diagonalen besetzt sein. Nur im Falle eines regel-

mäßig gegliederten und statisch bestimmten Verbundquerschnittes erhält man außerhalb der ersten Zeile und Spalte ein bandstrukturiertes Gleichungssystem. Wegen der vollen Besetzung der ersten Spalte und Zeile können die Vorteile dieser Struktur jedoch nicht unmittelbar genutzt werden.

Zur Lösung des Differentialgleichungs-Systems stehen prinzipiell

- analytische Verfahren
- numerische Verfahren
- hybride Verfahren

zur Verfügung. Rein analytische Lösungen des vorgelegten Problems können allgemein nur für den zweiteiligen Verbundquerschnitt angegeben werden (siehe **Anhang 3** und **Kapitel 5**). Für alle anderen Fälle ist man zumindest teilweise auf numerische Verfahren angewiesen. Rein numerische Verfahren werden ohne Berücksichtigung der Eigenwerte des Problems eingesetzt. In der Regel werden höhergradige Polynomansätze verwendet, welche die gesuchten Funktionen im allgemeinen approximieren. Die hierbei auftretenden Abweichungen von der korrekten Lösung werden durch geeignete Fehlerkorrektur-Verfahren und/oder ausreichend feine Diskretisierung des untersuchten Bereiches auf ein Minimum beschränkt. Als rein numerische Verfahren seien hier das Differenzen-Verfahren und die numerische Integration mit Hilfe von Einschnitt-Verfahren genannt.

Bei Anwendung des Differenzen-Verfahrens ist man auf äquidistante Stützstellen im interessierenden Bereich und darüber hinaus auf virtuelle Stützstellen zur konsistenten Berücksichtigung von Rand- und Übergangsbedingungen angewiesen. Wegen der Substitution der Differentialquotienten durch Differenzenausdrücke, welche mit Hilfe der Newton'schen Interpolation der an der betrachteten Stützstelle und an den um sie herum liegenden Stützstellen auftretenden Funktionswerte ermittelt werden, ist je nach Ordnung der zu lösenden Differentialgleichungen eine Mindestanzahl reeller und eine zum Teil nicht unerhebliche Anzahl virtueller Stützstellen erforderlich. Trotz einer Vielzahl von Restriktionen läßt sich das Differenzen-Verfahren sehr vorteilhaft einsetzen für statisch bestimmte Systeme mit homogenen Rand- und einfachen Übergangsbedingungen, sowie bei über die Trägerlänge veränderlichen Fugensteifigkeiten, Elastizitätsmoduln oder Querschnitten /BER74/. Die Berechnung des Verbundträgers kann in diesem Fall

effizienter gestaltet werden, wenn anstelle des Differentialgleichungs-Systems Gl. 3.01 ein System von Differentialgleichungen erster Ordnung für diejenigen Zustandsgrößen verwendet wird, welche zur eindeutigen Beschreibung des Spannungs- und Verformungszustandes erforderlich sind.

In /KNE91/ wird dieses Differentialgleichungs-System abgeleitet, um die numerische Integration mittels Einschritt-Verfahren durchführen zu können und durch die Lösung des Anfangswert-Problems direkt die Übertragungsmatrix zu gewinnen. Da die Übertragungsmatrix selbst weder für die Berechnung von Tragwerksteilen noch für diejenige des gesamten Tragwerkes verwendet wird, sondern lediglich der Ableitung der Steifigkeitsmatrix dient, sind numerische Schwierigkeiten zwangsläufig. Das Konzept, möglichst frühzeitig auf die Finite-Elemente-Methode umzusteigen, geht am Sinn einer Kombination von TMM und FEM vorbei. TMM-FEM-Verfahren werden vorteilhaft dort eingesetzt, wo unverzweigte Stabzüge in eine komplexere Struktur eingefügt werden sollen. Die Tragwerksteile ohne Verzweigungen werden vorzugsweise nach TMM, die Gesamtstruktur dagegen nach FEM berechnet. Diese Verfahrensweise führt in weiten Grenzen zu numerisch stabilen Berechnungen und die Anzahl der erforderlichen Rechenoperationen kann zum Teil erheblich reduziert werden /OLS86/.

Ein zu frühes Umsteigen eliminiert diese Vorteile und ist insofern wenig sinnvoll, als mit den gleichen Methoden und Algorithmen, mit welchen die Übertragungsmatrix ermittelt wird, auch direkt die Steifigkeitsmatrix bestimmt werden könnte (Kapitel 6.4). Ist man allerdings durch die Art des zugrunde liegenden Differentialgleichungs-Systems und die zur Verfügung stehenden numerischen Berechnungsverfahren gezwungen, das Anfangswert-Problem zu lösen, so ist die Ableitung der Übertragungsmatrix naheliegend. Es muß jedoch darauf hingewiesen werden, daß bei der in /KNE91/ geschilderten Vorgehensweise -auch im Fall, daß ein kombiniertes Verfahren gewählt würde- lineare Abhängigkeiten, wie sie sich z. B. aus jedweder offensichtlicher oder 'versteckter' Symmetrie des Querschnittes, durch starre oder unverdübete Fugen ergeben, nicht erkannt werden. Extreme Querschnittsverhältnisse führen zur Parallelisierung von Spalten oder Zeilen der Übertragungsmatrix. Die Ableitung der Steifigkeitsmatrix aus der $(2n + 2)$ -reihigen Übertragungsmatrix setzt zudem die Inversion derjenigen $(n + 1)$ -reihigen Submatrix voraus, welche für numerische Instabilitäten am anfälligsten ist. Dieser Mangel ist nur teilweise durch eine feinere Diskretisierung des Tragwerkes zu beheben.

Die Berechnung von Verbundträgern mit beliebig gefügtem Querschnitt stellt also hohe Anforderungen an die numerische Stabilität der verwendeten Algorithmen. Der Einsatz hybrider d. h. gemischt analytisch-numerischer Verfahren ist insofern sinnvoll, als hierdurch umfassende Kontroll- und Eingriffsmöglichkeiten in den Berechnungsablauf gewährleistet sind. Es können beispielsweise unnötige Matrizeninversionen vermieden und die Besetzung der zu invertierenden Matrizen innerhalb gewisser Grenzen gesteuert werden, so daß ein Minimum von Rechenoperationen erforderlich ist.

Mit Kenntnis der Eigenwerte des Differentialgleichungs-Systems Gl. 3.01 ist der weitere Berechnungsablauf zur Ableitung der Steifigkeits- oder Übertragungsmatrix analytisch darstellbar. Ein Fundamentalsystem von Lösungen wird mit Hilfe der dem Typ und der Anzahl der Eigenwerte entsprechenden 'exakten' Ansatzfunktionen für die Zustandsgrößen angegeben. Das Ziel, ein allgemeines Berechnungsverfahren abzuleiten, schließt die Verwendung von speziellen Randbedingungen eines Problems zur Auslösung der Koeffizienten der Ansatzfunktionen aus. Statt dessen werden diese durch die Zustandsgrößen selbst substituiert. Beim Übertragungsverfahren wird der Zustandsvektor am Anfang des untersuchten Bereiches, bei der Finiten-Elemente-Methode die Verschiebungsgrößen des Zustandsvektors am Anfang und Ende des untersuchten Bereiches zur Beschreibung der mechanischen Zusammenhänge verwendet. Durch die Festlegung auf ein baustatisches Berechnungsverfahren und die daran orientierte Wahl der Ansatzfunktionen, für welche trotz derer Eindeutigkeit verschiedene Formulierungen möglich sind, kann die numerische Stabilität nachhaltig beeinflußt werden.

Die Anwendung des Übertragungsverfahrens im Rahmen der vorliegenden Arbeit wird wegen der Übersichtlichkeit in der Darstellung der analytischen Zusammenhänge und der hiermit verbundenen einfachen Programmierung nahe gelegt. Die Verwendung geeigneter Ansatzfunktionen und von Anfangswerten zur Beschreibung des Tragverhaltens ermöglicht zudem eine von der Elementlänge unabhängige Ermittlung der Leitmatrix.

Der Einsatz numerischer Verfahren beschränkt sich auf die Ermittlung der Eigenwerte und -vektoren, sowie die Nullstellenbestimmung von Polynomen und die Lösung von linearen Gleichungssystemen. Durch die spezielle Form des Differentialgleichungs-Systems Gl. 3.01 können numerische Verfahren zur Bestimmung der Eigenwerte und -vektoren von Matrizen eingesetzt werden. Die genannten Verfahren sind ausgereift und als Standard-Routinen in jeder numerischen Programm-Bibliothek verfügbar /ENG88/.

Man erhält sofort den ersten Satz Eigenwerte.

$$D_{0,1,2,3} = 0$$

Gl. 3.04

Durch Einsetzen der ersten Zeile in alle kinematischen Gleichungen wird die erste Spalte zu Null, so daß das Gleichungssystem schließlich komprimiert werden kann.

$$\begin{bmatrix} \frac{k_1}{(EA)_{lp}^{1p}} + \frac{k_1}{(EA)_{ls}^{1s}} + \frac{k_1 e_1^2}{\sum E_i I_i} - D^2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -\nabla_{1m} + \frac{k_m e_1 e_m}{\sum E_i I_i} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -\nabla_{m1} + \frac{k_1 e_m e_1}{\sum E_i I_i} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{k_m}{(EA)_{mp}^{mp}} + \frac{k_m}{(EA)_{ms}^{ms}} + \frac{k_m e_m^2}{\sum E_i I_i} - D^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{q e_1}{\sum E_i I_i} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ -\frac{q e_m}{\sum E_i I_i} \end{bmatrix}$$

Gl. 3.05

Substituiert man zudem D^2 durch λ , so erhält man die Matrix in einer Form, wie sie für die Bestimmung der Eigenwerte linearer Gleichungssysteme bekannt ist.

$$P(\lambda) := \det(A - \lambda \cdot I) = 0$$

Gl. 3.06

Die Berechnung der restlichen Eigenwerte kann daher mit numerischen Standard-Routinen erfolgen. Da die Matrix A keine spezielle Struktur aufweist, wird das Verfahren von Martin, Parlett, Peters, Reinsch und Wilkinson eingesetzt, das für beliebige Matrizen anwendbar ist.

Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms Gl. 3.06 bzw. die Eigenwertquadrate sind stets positiv. Aus den berechneten Nullstellen kann nun mit Hilfe des Wurzelsatzes von Vieta das charakteristische Polynom 'konstruiert' werden. Dieses wegen der Umkehrung des normalen Weges seltsam anmutende Verfahren ist notwendig, um Besonderheiten in der Querschnittsausbildung berücksichtigen zu können. Die Bezeichnungen und Indizierungen in Gl. 3.07 sind an diejenigen des charakteristischen Polynoms Gl. 3.08 angepaßt.

$$\begin{aligned} c_{n-1} &= 1 \\ -c_{n-2} &= \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_{n-1} = \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k \\ c_{n-3} &= \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_3 + \dots + \lambda_{n-2} \lambda_{n-1} = \sum_{\substack{k,l=1 \\ (k < l)}}^{n-1} \lambda_k \lambda_l \\ &\cdot \\ &\cdot \\ (-1)^{n-1} c_0 &= \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_{n-1} \end{aligned}$$

Gl. 3.07

Aus der Struktur von Gl. 3.05 ist ablesbar, daß die Koeffizienten des charakteristischen Polynoms aufgespalten werden können in einen Anteil, der mit dem Kehrwert der Summe der Eigenbiegesteifigkeiten der Teilquerschnitte faktorisiert ist, und einen Rest.

Gl. 3.08

$$P(\lambda) = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k c_k \lambda^k \quad \text{bzw.} \quad P(\lambda) = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \left(a_k / \sum E_i I_i + b_k \right) \lambda^k$$

Zur Bestimmung dieser beiden Anteile werden in je einem Berechnungslauf mit der realen und einer fiktiven Eigenbiegesteifigkeit, aber ansonsten unveränderten Querschnittswerten, zwei Sätze von Nullstellen berechnet. Nachdem die beiden charakteristischen Polynome konstruiert sind, kann die Aufspaltung der einzelnen Koeffizienten aus einem einfachen Gleichungssystem ermittelt werden.

Gl. 3.09

$$\begin{bmatrix} 1/(\sum E_i I_i)_1 & 1 \\ 1/(\sum E_i I_i)_2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_k \\ b_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{k1} \\ c_{k2} \end{bmatrix} \quad k = 0, 1, 2 \dots n-2$$

Außerdem gilt

Gl. 3.10

$$a_{n-1} = 0 \quad b_{n-1} = 1.$$

Unter Verwendung der Struktur von Gl. 3.01 wird das charakteristische Polynom hiermit vollständig angegeben, so daß die zur Ableitung der Zusammenhänge notwendigen Einschränkungen nun aufgegeben werden können. Um die Allgemeingültigkeit zu sichern, muß der Grad des charakteristischen Polynoms um zwei erhöht, das Polynom mit der Summe der Eigenbiegesteifigkeiten der Teilquerschnitte multipliziert und die äußere Längskraft N mit Vorzeichen berücksichtigt werden. In dieser allgemeinen Darstellung kann entgegen der Aussage von Gl. 3.04 nur ein zweifacher Eigenwert Null sicher angegeben werden.

Gl. 3.11

$$\bar{P}(\lambda) = \sum_{k=2}^{n+1} (-1)^k \left(a_{k-2} + b_{k-2} \sum E_i I_i \right) \lambda^k + \sum_{k=1}^n (-1)^k b_{k-1} N \lambda^k$$

In Gl. 3.11 ist die Charakteristik des Verbundquerschnittes mit allen Besonderheiten vollständig erfaßt, da auch extreme Querschnittsverhältnisse durch die integrierte Elimination von nicht maßgebenden Eigenwerten berücksichtigt sind (siehe Kapitel 6). Diese Aussage ist unter anderem und mit Einschränkung aus Gl. 3.11 ableitbar: nicht die Anzahl m von realen oder fiktiven, aber definierten Fugen bestimmt den Grad des charakteristischen Polynoms, sondern die Anzahl n der Teilquerschnitte.

3.3 Nullstellen und Typ der Ansatzfunktionen

Für ein spezielles Verbundproblem ist das charakteristische Polynom Gl. 3.11 unter Umständen stark im Grad und wegen verschwindender Koeffizienten in der Besetzung reduziert. Die Auswirkungen einiger Besonderheiten der Querschnittsausbildung auf das charakteristische Polynom und dessen Nullstellen werden in Kapitel 6 angesprochen. Obwohl eine Vielzahl von Polynomtypen denkbar ist, sind allgemeingültige Aussagen über die Anzahl und den Typ der Nullstellen des Polynoms und damit die Eigenwerte des Problems möglich.

Die maximale Anzahl von Nullstellen richtet sich nach der Anzahl von Teilquerschnitten. Da die Nullstellen des Polynoms den Eigenwertquadraten des Differentialgleichungs-Systems entsprechen, erhält man immer eine gerade Anzahl von Eigenwerten, von denen die von Null verschiedenen stets paarweise mit positivem und negativem Vorzeichen auftreten. Wie bereits erläutert, erhält man unter allen Umständen eine einfache Nullstelle bzw. einen zweifachen Eigenwert Null. Je nachdem, ob der Verbundquerschnitt axial belastet ist und welches Vorzeichen ggf. die Normalkraft aufweist, können weitere Eigenwerte angegeben werden. Man unterscheidet:

$$N = \begin{cases} > 0 \\ = 0 \\ < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_2 > 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_2 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D_{0,1} = 0 & D_{2,3} = \pm \sqrt{\lambda_2} \\ D_{0,1,2,3} = 0 \\ D_{0,1} = 0 & D_{2,3} = \pm i \sqrt{|\lambda_2|} \end{cases}$$

Gl. 3.12

Die restlichen Nullstellen des charakteristischen Polynoms sind unabhängig von allen möglichen Besonderheiten des Verbundquerschnittes positiv.

Mit dem allgemeinen Ansatz für die von Null verschiedenen Eigenwerte

$$y_k = C_k e^{D_k x}$$

Gl. 3.13

und unter Beachtung der Resonanzen für die Eigenwerte Null, lauten die Ansätze zu den gesuchten Funktionen bei insgesamt p Nullstellen des charakteristischen Polynoms:

$$\underline{N > 0}$$

$$f(x) = C_0 + C_1 x + \sum_{k=2}^p C_{4k-2} e^{\lambda_k^{0,5} x} + \sum_{k=2}^p C_{5k-2} e^{-\lambda_k^{0,5} x}$$

Gl. 3.14

Gl. 3.14

$$\underline{N = 0}$$

$$f(x) = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3 + \sum_{k=3}^P C_{4k-2} e^{\lambda_k^{0.5} x} + \sum_{k=3}^P C_{5k-2} e^{-\lambda_k^{0.5} x}$$

$$\underline{N < 0}$$

$$f(x) = C_0 + C_1 x + C_{40} e^{-i\bar{\lambda}_2^{0.5} x} + C_{50} e^{-i\bar{\lambda}_2^{0.5} x} + \sum_{k=3}^P C_{4k-2} e^{\lambda_k^{0.5} x} + \sum_{k=3}^P C_{5k-2} e^{-\lambda_k^{0.5} x}$$

Durch einfache Umformungen können auch Hyperbelfunktionen und trigonometrische Funktionen verwendet werden.

Gl. 3.15

$$\underline{N > 0}$$

$$f(x) = C_0 + C_1 x + \sum_{k=2}^P C_{4k-2} \sinh \lambda_k^{0.5} x + \sum_{k=2}^P C_{5k-2} \cosh \lambda_k^{0.5} x$$

$$\underline{N = 0}$$

$$f(x) = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3 + \sum_{k=3}^P C_{4k-2} \sinh \lambda_k^{0.5} x + \sum_{k=3}^P C_{5k-2} \cosh \lambda_k^{0.5} x$$

$$\underline{N < 0}$$

$$f(x) = C_0 + C_1 x + C_{40} \sin \bar{\lambda}_2^{0.5} x + C_{50} \cos \bar{\lambda}_2^{0.5} x + \sum_{k=3}^P C_{4k-2} \sinh \lambda_k^{0.5} x + \sum_{k=3}^P C_{5k-2} \cosh \lambda_k^{0.5} x$$

Eine andere Möglichkeit ergibt sich aus einer Koordinatentransformation /HEE79/ /HER92/.

Gl. 3.16

$$\underline{N > 0}$$

$$f(x) = C_0 + C_1 x + \sum_{k=2}^P C_{4k-2} e^{-\lambda_k^{0.5}(x-\ell)} + \sum_{k=2}^P C_{5k-2} e^{-\lambda_k^{0.5} x}$$

$$\underline{N = 0}$$

$$f(x) = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3 + \sum_{k=3}^P C_{4k-2} e^{-\lambda_k^{0.5}(x-\ell)} + \sum_{k=3}^P C_{5k-2} e^{-\lambda_k^{0.5} x}$$

$$\underline{N < 0}$$

$$f(x) = C_0 + C_1 x + C_{40} e^{-i\bar{\lambda}_2^{0.5}(x-\ell)} + C_{50} e^{-i\bar{\lambda}_2^{0.5} x} + \sum_{k=2}^P C_{4k-2} e^{-\lambda_k^{0.5}(x-\ell)} + \sum_{k=2}^P C_{5k-2} e^{-\lambda_k^{0.5} x}$$

Die Vor- und Nachteile der verschiedenen Ansatzfunktionen sind im Zusammenhang mit dem gewählten Berechnungsverfahren zu beurteilen. Eine Einschätzung im Bezug auf das Übertragungsverfahren wird in Kapitel 4 gegeben.

3.4 Berechnung der Kopplungskoeffizienten

Die Berechnung der Eigenvektoren bzw. der Kopplungskoeffizienten zwischen den Koeffizienten der gesuchten Funktionen kann nicht direkt anhand von Gl. 3.01 erfolgen. Zunächst müssen alle linearen Abhängigkeiten und bekannte Funktionen im Gleichungssystem berücksichtigt werden. Die notwendigen Informationen über die durchzuführenden Substitutionen und die Reduktion des Gleichungssystems erhält man aus den Berechnungen zur Bestimmung des charakteristischen Polynoms. Eigenwerte und Eigenvektoren des komprimierten Gleichungssystems Gl. 3.03 deuten auf linear abhängige Fugenverschiebungen, entfallende Fugenverschiebungen etc. hin (Kapitel 6). Nach Reduktion des Gleichungssystems kann ausgeschlossen werden, daß dessen Matrix singular ist. Mit dieser Gewißheit ist es möglich, Gl. 3.01 für die folgenden Ableitungen auf der Basis von Gl. 2.33 umzustrukturieren und anstelle der Fugenverschiebungen die Normalkraftfunktionen zu verwenden.

$$\left[\begin{array}{c|c|c} -D^4 \sum E_i I_i + D^2 N & D^2 e_1 & \dots & D^2 e_m \\ \hline -D^2 k_1 e_1 & D^2 \frac{k_1}{(EA)_{1p}^{1p}} - \frac{k_1}{(EA)_{1s}^{1s}} & \dots & \nabla_{1m} \\ \hline \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hline -D^2 k_m e_m & \nabla_{m1} & \dots & D^2 \frac{k_m}{(EA)_{mp}^{mp}} - \frac{k_m}{(EA)_{ms}^{ms}} \end{array} \right] \begin{bmatrix} w \\ N_1 \\ \vdots \\ N_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -q \\ k_1 \delta_1 \\ \vdots \\ k_m \delta_m \end{bmatrix} \quad \text{Gl. 3.17}$$

Die Abkürzungen Gl. 3.02 müssen entsprechend adaptiert werden.

$$\nabla_{jr} = \begin{cases} -\frac{k_j}{(EA)_{rp}^{jp}} & \text{bzw.} & -\frac{k_j}{(EA)_{rs}^{js}} & \text{bzw.} & \frac{k_j}{(EA)_{rp}^{js}} & \text{bzw.} & \frac{k_j}{(EA)_{rs}^{jp}} \\ -\frac{k_j}{(EA)_{rp}^{jp}} - \frac{k_j}{(EA)_{rs}^{js}} & \text{bzw.} & \frac{k_j}{(EA)_{rp}^{js}} + \frac{k_j}{(EA)_{rs}^{jp}} \end{cases} \quad \text{Gl. 3.18}$$

$(EA)_{rp}^{js}$ – Dehnsteifigkeit des Teilquerschnittes, welcher für den Teilverbund r primärer, für den Teilverbund j jedoch sekundärer Teilquerschnitt ist.

Sinnvollerweise werden die Eigenvektoren auf die Koeffizienten der Durchbiegungsfunktion normiert. Zur Angabe der Gleichungssysteme, welche zur Bestimmung der Kopplungskoeffizienten benötigt werden, muß wiederum nach normalkraftfreiem und normalkraftbelastetem Verbundquerschnitt unterschieden werden. Für die folgenden Angaben werden

die Ansatzfunktionen nach Gl. 3.15 verwendet. Hiernach entfallen unter bestimmten Bedingungen einige Koeffizienten.

Gl. 3.19

$$\underline{N = 0}: C_{40} = C_{50} = 0 \qquad \underline{0 < N > 0}: C_2 = C_3 = 0$$

Die Zusammenhänge zwischen den Koeffizienten der Ansatzfunktionen werden beschrieben durch die Matrix, die man erhält, wenn die erste Spalte und die erste Zeile von Gl. 3.17 gestrichen wird. Als rechte Seite treten Vielfache der ersten Spalte auf.

Für das homogene Differentialgleichungs-System sind drei Gleichungssysteme zu unterscheiden. Aus deren jeweiliger Lösung erhält man die

- Eigenvektoren für Polynomansatz bei normalkraftfreiem Verbundquerschnitt
- Eigenvektoren für Polynomansatz bei normalkraftbelastetem Verbundquerschnitt
- Eigenvektoren für die Ansatzfunktionen aus von Null verschiedenen Eigenwerten

Im erstgenannten Fall gelten folgende Zusammenhänge:

C_i^0 – Koeffizienten der Durchbiegungsfunktion w

C_i^j – Koeffizienten der Normalkraftfunktionen N_j

Gl. 3.20

$$\underline{N = 0}: C_2^j = C_3^j = 0$$

Gl. 3.21

$$\begin{bmatrix} \frac{k_1}{(EA)_{1p}} + \frac{k_1}{(EA)_{1s}} & \cdot & \cdot & -\nabla_{1m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -\nabla_{m1} & \cdot & \frac{k_m}{(EA)_{mp}} + \frac{k_m}{(EA)_{ms}} & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_0^1 \\ \cdot \\ \cdot \\ C_0^m \end{bmatrix} = C_2^0 \begin{bmatrix} -2 k_1 e_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ -2 k_m e_m \end{bmatrix}$$

Gl. 3.22

$$\begin{bmatrix} \frac{k_1}{(EA)_{1p}} + \frac{k_1}{(EA)_{1s}} & \cdot & \cdot & -\nabla_{1m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -\nabla_{m1} & \cdot & \frac{k_m}{(EA)_{mp}} + \frac{k_m}{(EA)_{ms}} & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1^1 \\ \cdot \\ \cdot \\ C_1^m \end{bmatrix} = C_3^0 \begin{bmatrix} -6 k_1 e_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ -6 k_m e_m \end{bmatrix}$$

Als Lösung dieses Gleichungssystems erhält man die zu den Fugen j gehörigen Verdrehsteifigkeiten R_j (siehe **Anhang 1**) versehen mit dem Faktor -2 bzw. -6 .

Ist der Verbundquerschnitt dagegen normalkraftbelastet, so entfallen die Kopplungskoeffizienten des Polynomansatzes:

$$\underline{0 < N > 0}: \quad C_0^j = C_1^j = 0$$

Gl. 3.23

Die Kopplungskoeffizienten für die von Null verschiedenen Eigenwerte erhält man mit Hilfe des Gleichungssystems **Gl. 3.24**.

$$\begin{bmatrix} \frac{k_1}{(EA)_{1p}} + \frac{k_1}{(EA)_{1s}} - \lambda_k & & & -\nabla_{1m} \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ -\nabla_{m1} & & & \frac{k_m}{(EA)_{mp}} + \frac{k_m}{(EA)_{ms}} - \lambda_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{4,5k-2}^1 \\ \vdots \\ C_{4,5k-2}^m \end{bmatrix} = C_{4,5k-2}^0 \begin{bmatrix} -k_1 e_1 \lambda_k \\ \vdots \\ -k_m e_m \lambda_k \end{bmatrix}$$

Gl. 3.24

$$\underline{N = 0}: \quad k = 3 + p$$

$$\underline{0 < N > 0}: \quad k = 2 + p$$

Die partikulären Lösungen des Differentialgleichungs-Systems **Gl. 3.17** für Streckenlast lauten:

$$q = q_0 + q_1 x$$

Gl. 3.25

$$\underline{N = 0}$$

$$w_p = H_4^0 x^4 + H_5^0 x^5$$

$$N_{jp} = H_0^j + H_1^j x + H_2^j x^2 + H_3^j x^3$$

Gl. 3.26

$$\underline{0 < N > 0}$$

$$w_p = H_2^0 x^2 + H_3^0 x^3$$

$$N_{jp} = H_0^j + H_1^j x$$

Die quadratische Matrix **B** des Gleichungssystems **Gl. 3.21** wird auch zur Berechnung der partikulären Lösungen verwendet. Mit den Vektoren

$$\mathbf{k}^T = \{k_1 e_1, \dots, k_m e_m\}$$

$$\mathbf{h}_i^T = \{H_i^1, \dots, H_i^m\}$$

Gl. 3.27

können die Bestimmungsgleichungen für die Koeffizienten der Normalkraftfunktionen sehr übersichtlich dargestellt werden.

Gl. 3.28

$$\underline{N = 0}$$

$$h_2 = -12 H_4^0 \mathbf{B}^{-1} \mathbf{k}$$

$$h_3 = -20 H_5^0 \mathbf{B}^{-1} \mathbf{k}$$

$$h_0 = -24 H_4^0 \mathbf{B}^{-1} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{k}$$

$$h_1 = -120 H_5^0 \mathbf{B}^{-1} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{k}$$

$$\underline{0 < N > 0}$$

$$h_0 = -2 H_4^0 \mathbf{B}^{-1} \mathbf{k}$$

$$h_1 = -6 H_5^0 \mathbf{B}^{-1} \mathbf{k}$$

Die Koeffizienten der Durchbiegungsfunktion werden nach Zwischenrechnungen aus der ersten Zeile des Differentialgleichungs-Systems Gl. 3.17 bestimmt.

Gl. 3.29

$$\underline{N = 0}$$

$$H_4^0 = q_0 / 24 B$$

$$H_5^0 = q_1 / 120 B$$

$$\underline{0 < N > 0}$$

$$H_2^0 = -q_0 / 2 N$$

$$H_3^0 = -q_1 / 6 N$$

Die über die Elementlänge und über die Teilquerschnittshöhe konstanten Eigenspannungen und Temperaturbelastungen können auf einfache Weise berücksichtigt werden, da für die Durchbiegungsfunktion keine partikulären Lösungsanteile anzusetzen sind. Somit wird die erste Spalte von Gl. 3.17 zu Null. Nach Streichen der ersten Zeile erhält man wieder die bekannte Matrix \mathbf{B} , jedoch mit einer anderen rechten Seite.

Gl. 3.30

$$w_p = 0$$

$$N_{jp} = H_0^j$$

mit den Koeffizienten

Gl. 3.31

$$\mathbf{h}_0 = -\mathbf{B}^{-1} \boldsymbol{\delta} \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{\delta}^T = \{k_1 \delta_1, \dots, k_m \delta_m\}$$

Die über die Elementlänge konstanten, jedoch über die Teilquerschnittshöhe linear veränderlichen Eigenspannungen und Temperaturbelastungen gehen in die Ansätze für Durchbiegung und Teilverbund-Normalkräfte nicht ein.

Das Differentialgleichungs-System ist somit allgemeingültig gelöst. Mit den Angaben aus Kapitel 2 läßt sich nun ein Fundamentalsystem von Lösungen anschreiben.

4 Berechnung der Übertragungsmatrix

4.1 Allgemeine Darstellung des Übertragungsverfahrens

Das Übertragungsverfahren kann im Rahmen baustatischer Anwendungen als eine Kombination von Weg- und Kraftgrößen-Verfahren angesehen werden. Der physikalische, zu einem bestimmten Zeitpunkt oder an einem bestimmten Ort vollständig beschriebene und als bekannt vorausgesetzte Zustand wird an einen anderen Ort oder in eine andere Zeit transferiert, d. h. im mathematischen Sinne wird ein Anfangswertproblem gelöst. Die Übertragungsvorschrift ist in einer Übertragungsmatrix zusammengefaßt, der Zustand am Anfang und am Ende des betrachteten Bereiches in den entsprechenden Zustandsvektoren. Der Einfluß eventuell vorhandener Störfunktionen auf das Übertragungsverhalten wird bei statischen Problemen durch den Belastungsvektor \mathbf{r} berücksichtigt.

$$\mathbf{z}(x) = \mathbf{T}(x) \cdot \mathbf{z}(0) + \mathbf{r}(x)$$

Gl. 4.01

Die Zustandsvektoren des hier behandelten Stabproblems bestehen jeweils zur Hälfte aus konjugierten Weg- und Kraftgrößen, während beim reinen Weg- und Kraftgrößen-Verfahren jeweils die Randwerte aller Weggrößen bzw. Kraftgrößen zu Vektoren zusammengefaßt werden /KER62/ /SAA81/ /AVR82/ /TES85/. Auf den ersten Blick scheint somit die Anwendung eines dieser beiden Verfahren für baustatische Problemstellungen angemessen zu sein, da diese im mathematischen Sinne immer Randwertprobleme darstellen. Dennoch weist das Übertragungsverfahren Vorteile auf, die insbesondere für die programmtechnische Umsetzung Bedeutung erlangen. Da jeweils die Hälfte der Randbedingungen am Bereichsanfang und dessen Ende definiert wird, reduziert sich das zu lösende Gleichungssystem immer auf gleiche Weise um die Hälfte, weshalb das Übertragungsverfahren auch als Reduktionsverfahren bezeichnet wird /PET63/. Beim reinen Weg- und Kraftgrößen-Verfahren dagegen ist die Struktur des zu lösenden Gleichungssystems a priori nicht festgelegt und von den speziellen Randbedingungen des Problems abhängig.

Wird die Gültigkeit der Berechnungsvorschrift Gl. 4.01 auf einen bestimmten Bereich beschränkt, so kann man diesen als finites Element mit einer ihm eigenen Übertragungsmatrix und einem spezifischen Belastungsvektor auffassen.

$$\mathbf{z}_\ell = \mathbf{T}(\ell) \cdot \mathbf{z}_0 + \mathbf{r}_\ell$$

Gl. 4.02

Bei Verknüpfung mehrerer Elemente der gleichen Klasse erhält man die Übertragungsvorschrift für den gesamten Bereich durch rekursives Einsetzen der Gl. 4.02 für die einzelnen Abschnitte und schließlich durch einfache Matrizenmultiplikationen, wobei die Größe der Matrix unverändert bleibt. Für einen Stabzug bestehend aus drei Elementen erhält man beispielsweise folgendes Gleichungssystem:

Gl. 4.03

$$z_3 = T_3 \cdot T_2 \cdot T_1 \cdot z_0 + T_3 \cdot T_2 \cdot r_1 + T_3 \cdot r_2 + r_3$$

Weisen die Funktionen der Zustandsgrößen im betrachteten Bereich jedoch Unstetigkeiten auf, so ist dieses durch Einführung einer Abschnittsgrenze und die Definition entsprechender Übergangsbedingungen von einem Abschnitt zum nächsten zu berücksichtigen. Diese Übergangsbedingungen können in einer Punktmatrix zusammengefaßt werden. Gl. 4.03 müßte in einem solchen Fall erweitert werden.

Gl. 4.04

$$z_3 = T_3 \cdot P_2 \cdot T_2 \cdot P_1 \cdot T_1 \cdot z_0 + T_3 \cdot P_2 \cdot T_2 \cdot P_1 \cdot r_1 + T_3 \cdot P_2 \cdot r_2 + r_3$$

Treten solche Zwischenbedingungen auf oder werden gar Elemente unterschiedlicher Klassen miteinander gekoppelt, so wird der Berechnungsablauf des Übertragungsverfahrens unter Umständen erheblich gestört, da zum Teil Entkopplungen zwischen einzelnen Zustandsgrößen an den Bereichsgrenzen auftreten und in der Regel der Zustandsvektor um unbekannte Zwischenwerte erweitert werden muß. Für diese Erweiterungen können keine strengen Gesetzmäßigkeiten angegeben werden, so daß der Organisationsaufwand zu deren Berücksichtigung in einem Programm sehr groß wird /KER62/ /LEC63/. Zur Ableitung eines allgemeinen Berechnungsverfahrens und auch im Hinblick auf eine effiziente Programmierung ist es daher ratsam, die Matrizenmultiplikationen nicht direkt auszuführen, sondern die Zustandsgrößen an den Abschnittsgrenzen neben den Zustandsgrößen am Ende des Bereichs als Unbekannte in der Rechnung zu belassen. Dieses -im folgenden als Gesamtmatrix-Verfahren bezeichnete- Verfahren weist nicht nur erhebliche Vorteile bei der programmtechnischen Umsetzung auf, sondern trägt auch wesentlich zur numerischen Stabilität des hier vorgestellten Berechnungsverfahrens bei /WUN67/. Das Gesamtmatrix-Verfahren ist im Zusammenhang mit der Kopplung verschiedener Elementtypen in Kapitel 6.3 beschrieben. Der Aufbau der Punktmatrizen ist in Kapitel 4.5 dargestellt.

Die Ursachen numerischer Schwierigkeiten bei der Anwendung des Übertragungsverfahrens sind vielfältig und dementsprechend zahlreich sind die in der Literatur unterbreiteten Vorschläge zu deren Behebung /SHN55/ /BUF62/ /MAR63/ /UHR65/ /WIE68/ /HEE79/ /HER92/.

Im Hinblick auf die Berechnung von Verbundträgern mit beliebig gefügten Querschnitten scheint eine Einteilung der Ursachen numerischer Instabilitäten und die strikte Trennung von Maßnahmen zu deren Vermeidung unumgänglich und auch möglich. Man unterscheidet sinnvollerweise

- numerische Instabilitäten aufgrund der Querschnittseigenschaften,
- numerische Instabilitäten aufgrund der Elementabmessungen
- und numerische Instabilitäten aufgrund der Systemeigenschaften.

Numerische Instabilitäten aufgrund von Querschnitteigenschaften machen sich fast ausschließlich durch lineare Abhängigkeiten im Differentialgleichungs-System bemerkbar. Sehr geringe oder sehr hohe Fugensteifigkeiten, geschlossene Querschnitte oder Symmetrien in der Querschnittsausbildung und Sandwichverbund sind bekannte Auslöser. Mit der in **Kapitel 3** und **Kapitel 6.1** aufgezeigten Strategie der genauen Querschnittsanalyse wird die Anzahl und der Typ der relevanten Eigenwerte des Differentialgleichungs-Systems und damit auch der Typ sowie die Anzahl der Ansatzfunktionen auf das Minimum reduziert, welches den Aufbau eines Fundamentalsystems von Lösungen garantiert. Der Auswahl der Zustandsgrößen zur vollständigen Beschreibung des Spannungs- und Verformungszustandes kommt dabei eine besondere Bedeutung zu. Die Kriterien einer solchen Auswahl werden in **Kapitel 4.2** diskutiert.

Dem Bemühen, numerische Instabilitäten aufgrund der Querschnittseigenschaften von den durch die Elementabmessungen bedingten zu trennen, kommen die Eigenarten des Übertragungsverfahrens sehr entgegen. Die zunächst unbekanntesten Koeffizienten der Ansatzfunktionen für die Zustandsgrößen, welche das Fundamentalsystem bilden, werden von den Zustandsgrößen am Anfang des betrachteten Bereiches ausgelöst. Durch diesen Vorgang wird die Elementlänge zunächst aus der Berechnung herausgehalten, es sei denn, aufgrund der gewählten Ansatzfunktionen geht die Elementlänge auch in die Anfangswerte ein /HEE79/ /HER92/. Daher werden in **Kapitel 4.3** die in **Kapitel 3.3** vorgestellten Alternativen für die Ansatzfunktionen in diesem Zusammenhang bewertet und ausgewählt, so daß die Elementabmessungen -wie alle anderen Systeminformationen auch- zum spätestmöglichen Zeitpunkt in die Berechnung einfließen können.

Während die Bereichsgrenzen in der Regel durch die Problemstellung festgelegt sind, sind die Elementlängen und damit die Diskretisierung des Bereiches in weiten Grenzen frei wählbar.

Zur Festlegung der Elementabmessungen können Kriterien angegeben werden, welche sich an der Qualität der entstehenden Übertragungsmatrix orientieren. Akzeptiert man jedoch unbesehen gewisse 'Entartungen' der entstehenden Übertragungsmatrix, so sind Maßnahmen zur Verbesserung deren numerischen Verhaltens erforderlich. Dieses Konzept wird von verschiedenen Autoren im Zusammenhang mit der Ermittlung von Stabilitätsgrenzen und Eigenfrequenzberechnungen von stark gegliederten Systemen verfolgt, jedoch im Rahmen der vorliegenden Arbeit nicht in Betracht gezogen /SHN55/ /MAR63/ /UHR65/ /WIE68/ /GÖH70/.

Im Zusammenhang mit der Berechnung von nachgiebig zusammengesetzten Verbundquerschnitten werden verschiedentlich Grenzwerte für die Schubeinflußzahl λ angegeben, in welche die Elementlänge linear eingeht /HEI89/ /KNE91/ /HER92/. Es muß jedoch betont werden, daß solche Grenzwerte weder als Indikator für die numerische Qualität eines Verfahrens noch für sonstige, allgemeingültige Aussagen geeignet sind. Die 'erreichbare' Schubeinflußzahl hängt sowohl von der Maschinengenauigkeit, den verwendeten numerischen -meist Programm-Bibliotheken entnommenen- Subroutinen und schließlich auch von dem gestellten Verbundproblem selbst ab. Ein direkter Vergleich ist also in den wenigsten Fällen möglich.

Durch die genaue Querschnittsanalyse darf die Inversion des Fundamentalsystems zur Ableitung der Leitmatrix als gesichert angesehen werden. Bei der anschließenden, numerisch unkritischen Matrizenmultiplikation geht die Elementlänge mit ein und beeinflusst wesentlich die Qualität der abschnittsspezifischen Übertragungsmatrix. Für diese ergeben sich sodann Plausibilitätskontrollen und Reinigungsmöglichkeiten: die wegen der Wahl der Zustandsgrößen und deren Anordnung im Zustandsvektor erzwungene Symmetrie der Übertragungsmatrix kann ebenso als Indikator für zu große Elementlängen herangezogen werden, wie die bekannte Besetzungsstruktur und teilweise bekannte Besetzung der Matrix. Gegebenenfalls wird die Stablänge iterativ so angepaßt, daß die numerische Stabilität in Verbindung mit dem Gesamtmatrix-Verfahren innerhalb festgelegter Grenzen garantiert ist.

Es wird ausdrücklich darauf hingewiesen, daß zur Sicherung der numerischen Stabilität die Angabe von Fehlergrenzen, unterhalb derer bestimmte Effekte vernachlässigt werden und somit Vereinfachungen akzeptiert werden, unumgänglich ist. Bei deren willkürlicher Festlegung im Rahmen dieser Arbeit wurde der Stabilität der Berechnung im Bereich geringer Verdübelung eine größere Bedeutung zugemessen als derjenigen im Bereich nahezu starrer Verdübelung. Dennoch erweist sich das Berechnungsverfahren auch in diesem Bereich für praxisrelevante Anwendungen als überaus stabil (siehe auch **Kapitel 7.4**).

4.2 Definition der Zustandsgrößen

Die im Zustandsvektor der Gl. 4.01 zusammengefaßten Zustandsgrößen müssen bestimmten Anforderungen genügen, die zum Teil rein mathematisch, zum Teil aber auch in der gewünschten Qualität des vorgestellten Berechnungsverfahrens begründet sind.

Rein mathematisch muß die Gesamtheit der Zustandsgrößen ein Fundamentalsystem bilden, d. h. die Wronski-Determinante der zugehörigen Koeffizienten-Matrix muß verschieden sein von Null. Diese Forderung ist bei der vorliegenden Problemstellung immer erfüllt, wenn die Ansatzfunktionen entsprechend der Eigenwerte des Differentialgleichungs-Systems aufgebaut sind. Gl. 3.01 oder Gl. 3.17 geben zudem Hinweise auf die im Zustandsvektor zu berücksichtigenden Zustandsgrößen.

Mit der Durchbiegungsfunktion w , der Normalkraftfunktion N und der Fugenverschiebungsfunktion u stehen beispielsweise für den zweiteiligen Verbundquerschnitt bereits drei von sechs erforderlichen Zustandsgrößen fest. Zur Bestimmung der übrigen Zustandsgrößen muß die mechanische Bedeutung der mathematischen Forderung nach einem Fundamentalsystem vergegenwärtigt werden: der Spannungs- und Verformungszustand des Verbundelementes muß durch die Zustandsgrößen vollständig und eindeutig erfaßt werden. Im vorliegenden Fall kann man sich an den Verhältnissen beim einfachen Balken orientieren und die Steigung der Durchbiegungsfunktion w' , die Vertikalkraft V und das äußere Gesamtmoment M in den Zustandsvektor aufnehmen.

Mit diesen Zustandsgrößen ist gleichzeitig die konsistente Berücksichtigung von Rand- und Übergangsbedingungen möglich. Da Durchbiegung und Vertikalkraft, Steigung und Moment, sowie Fugenverschiebung und Normalkraft konjugierte Paare von Weg- und Schnittgrößen bilden, ist durch sie die komplementäre Erfüllung homogener Randbedingungen gewährleistet. Durch die spiegelsymmetrische Anordnung dieser Paare im Zustandsvektor und eine Faktorisierung der konjugierten Zustandsgrößen Fugenverschiebung und Normalkraft erreicht man schließlich die gewünschte Symmetrie bei der Ableitung der Übertragungsmatrix. Im Gegensatz zur Steifigkeitsmatrix der FEM wird Symmetrie der Übertragungsmatrix üblicherweise nicht zur Haupt-, sondern zur Nebendiagonalen erzeugt. Der Zustandsvektor hat dann allgemein die Form:

$$\mathbf{z}^T = \{ w, w', -u_1/e_1, -u_2/e_2, \dots, \dots, N_2 e_2, N_1 e_1, M, V \}$$

Neben dieser Form erhält man eine weitere Möglichkeit, welche allen gestellten Anforderungen genügt, wenn man die Linearkombination von Steigung der Durchbiegungsfunktion und Fugenverschiebungen als Teilverbundsverdrehungen γ_j definiert.

Gl. 4.06

$$\gamma_j = w' - u_j / e_j$$

Der entsprechende Zustandsvektor wiederum mit spiegelbildlicher Anordnung konjugierter Zustandsgrößen lautet:

Gl. 4.07

$$\mathbf{z}^T = \{ w, w', \gamma_1, \gamma_2, \dots, \dots, N_2 e_2, N_1 e_1, \Sigma M_i, V \}$$

Eine dritte Möglichkeit ist allerdings nur für den zweiteiligen Verbund anwendbar und findet hier lediglich Erwähnung, da sie in der Literatur -wenn auch in leicht anderer Form- angegeben wird /SHU86/.

Gl. 4.08

$$\mathbf{z}^T = \{ w, \gamma, u_i / e_i, \Sigma M_i, M, V \}$$

In /SHU86/ ist die Fugenverschiebung jedoch nicht faktorisiert. Außerdem werden die Zustandsgrößen in einer anderen Anordnung präsentiert. Dieser Umstand führt dazu, daß die angegebene Übertragungsmatrix keine Symmetrie zur Nebendiagonalen aufweist.

Es ist leicht erkennbar, daß eine Ausweitung dieses Zustandsvektors auf beliebige Verbundquerschnitte nicht möglich ist: da die Summe der Eigenbiegemomente mit der Fugenverschiebung konjugiert, ist im Falle mehrerer Fugenverschiebungen die Eindeutigkeit der Zuordnung nicht mehr gewährleistet.

Umfangreiche Untersuchungen mit den beiden uneingeschränkt möglichen Zustandsvektoren bestätigen, daß die Form des Zustandsvektors nach Gl. 4.05 die günstigste ist, da mit ihr die größtmögliche Anzahl und zudem mehrheitlich die praxisrelevanten Rand- und Übergangsbedingungen abgedeckt sind. Es sei jedoch darauf hingewiesen, daß mit zunehmender Anzahl Fugen und/oder Teilquerschnitten, die Zahl möglicher Rand- und Übergangsbedingungen exponentiell wächst und damit auch die Zahl zusätzlicher Rand- und Übergangsbedingungen aus Linearkombinationen der Zustandsgrößen. Dennoch können diese leicht über entsprechende Punktmatrizen berücksichtigt werden, ohne daß der Zustandsvektors notwendigerweise verändert werden müßte (siehe Kapitel 4.5).

4.3 Fundamentalsystem von Lösungen

Die Bestimmungsgleichungen für die ausgewählten Zustandsgrößen sind bereits in Kapitel 2.3 angegeben, dort jedoch in Abhängigkeit von den Fugenverschiebungsfunktionen. Wegen der in Kapitel 3 erfolgten Umstellung des Gleichungssystems Gl. 3.01 auf Gl. 3.17 sind nun die Teilverbund-Normalkräfte diejenigen Funktionen, für welche in Kapitel 3 die Ansatzfunktionen bzw. Kopplungskoeffizienten bezogen auf die Durchbiegungsfunktion angegeben sind. Die Ansatzfunktionen der restlichen Zustandsgrößen müssen also aus denjenigen der Durchbiegungsfunktion und der Normalkraftfunktionen durch Ableitungen und Linearkombinationen bestimmt werden. Es gelten folgende Zusammenhänge:

$$-u_j/e_j = -\frac{N'_j e_j}{k_j e_j^2}$$

$$M = -w'' \sum E_i I_i + \sum N_j e_j$$

$$V = -w''' \sum E_i I_i + \sum N'_j e_j + N w'$$

Gl. 4.09

Gl. 4.10

Gl. 4.11

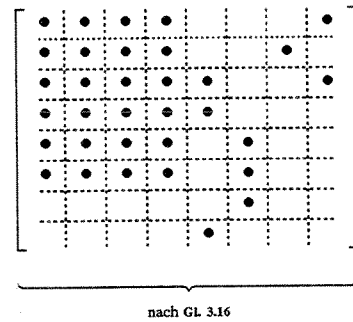
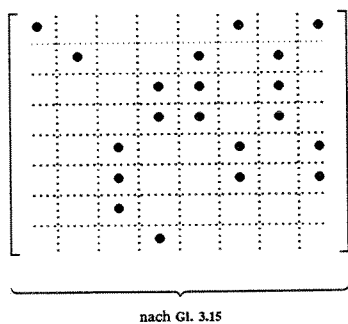
Die Gesamtheit der Ansatzfunktionen bildet das Fundamentalsystem von Lösungen. Im Zusammenhang mit der Ableitung der Übertragungsmatrix interessiert in erster Linie, welche der in Kapitel 3 alternativ angegebenen Ansatzfunktionen am besten geeignet ist, um numerische Stabilität in weiten Grenzen zu gewährleisten. In Kapitel 4.1 wurde bereits darauf hingewiesen, daß Ansatzfunktionen zu bevorzugen sind, in welche die Elementlänge an der Stelle $x=0$ nicht eingeht. Werden zusätzlich zur Bildung des Fundamentalsystems alle Besonderheiten der Querschnittsausbildung angemessen berücksichtigt, so ist die erforderliche Inversion der Fundamentalmatrix $F(0)$ gesichert.

Nicht nur unter diesem Aspekt weisen die Ansatzfunktionen nach Gl. 3.15 erhebliche Vorteile auf. Drei Gründe sprechen für deren Verwendung:

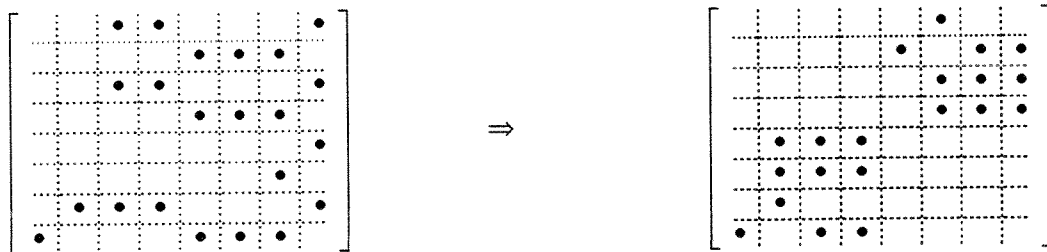
- die Elementlänge geht nicht in die Fundamentalmatrix $F(0)$ ein
- die Besetzung der Matrix $F(0)$ ist sehr dünn, das Gleichungssystem reduzierbar
- die Elemente der Inversen können teilweise analytisch bestimmt werden.

Gl. 3.14 und Gl. 3.15 sind bezüglich des erstgenannten Kriteriums als gleichwertig zu betrachten, wohingegen in den Ansatzfunktionen nach Gl. 3.16 wegen der Koordinatentransformation auf das Stabende die Elementlänge immer enthalten ist.

Die Besetzung der Matrix $F(0)$ ist mit den Ansatzfunktionen nach Gl. 3.14 wesentlich dichter. Auch im Vergleich zu Gl. 3.16 hat Gl. 3.15 in dieser Hinsicht Vorteile, wie am Beispiel der Besetzung der Fundamentalmatrix $F(0)$ für einen dreiteiligen Verbundquerschnitt ohne äußere Normalkraft gezeigt werden kann.



Mit Hilfe der Ansatzfunktionen Gl. 3.15 kann sogar die Größe der zu invertierenden Matrix durch Zeilen- und Spaltenvertauschung auf die Hälfte reduziert werden. Auf diese Weise entstehen zwei unabhängige Gleichungssysteme zur Berechnung der Koeffizienten.



Das Fundamentalsystem für den normalkraftfreien Verbundquerschnitt ist in Gl. 4.13 dargestellt. Dort werden folgende Abkürzungen verwendet:

Gl. 4.12

$$\bar{c}_{ik}^j = \frac{C_{ik}^j}{C_{ik}^0} e_j \quad \text{und} \quad \bar{c}_{ik}^j = - \frac{\bar{c}_{ik}^j}{k_j e_j^2}$$

Die Fundamentalsysteme für zug- bzw. druckbelastete Verbundquerschnitte unterscheiden sich nur unwesentlich von Gl. 4.13.

$$\begin{bmatrix} w \\ w' \\ -u_1/e_1 \\ -u_2/e_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ N_2 e_2 \\ N_1 e_1 \\ M \\ V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 & \sinh \lambda_1^{0.5} x & \cosh \lambda_1^{0.5} x & \sinh \lambda_2^{0.5} x & \cosh \lambda_2^{0.5} x & \dots & \dots \\ 0 & 1 & 2x & 3x^2 & \lambda_1^{0.5} \cosh \lambda_1^{0.5} x & \lambda_1^{0.5} \sinh \lambda_1^{0.5} x & \lambda_2^{0.5} \cosh \lambda_2^{0.5} x & \lambda_2^{0.5} \sinh \lambda_2^{0.5} x & \dots & \dots \\ \bar{c}_1^1 & 0 & 0 & 0 & \bar{c}_{41}^1 \lambda_1^{0.5} \cosh \lambda_1^{0.5} x & \bar{c}_{51}^1 \lambda_1^{0.5} \sinh \lambda_1^{0.5} x & \bar{c}_{42}^1 \lambda_2^{0.5} \cosh \lambda_2^{0.5} x & \bar{c}_{52}^1 \lambda_2^{0.5} \sinh \lambda_2^{0.5} x & \dots & \dots \\ \bar{c}_1^2 & 0 & 0 & 0 & \bar{c}_{41}^2 \lambda_1^{0.5} \cosh \lambda_1^{0.5} x & \bar{c}_{51}^2 \lambda_1^{0.5} \sinh \lambda_1^{0.5} x & \bar{c}_{42}^2 \lambda_2^{0.5} \cosh \lambda_2^{0.5} x & \bar{c}_{52}^2 \lambda_2^{0.5} \sinh \lambda_2^{0.5} x & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \bar{c}_0^2 & \bar{c}_1^2 & 0 & 0 & \bar{c}_{41}^2 \sinh \lambda_1^{0.5} x & \bar{c}_{51}^2 \cosh \lambda_1^{0.5} x & \bar{c}_{42}^2 \sinh \lambda_2^{0.5} x & \bar{c}_{52}^2 \cosh \lambda_2^{0.5} x & \dots & \dots \\ \bar{c}_0^1 & \bar{c}_1^1 & 0 & 0 & \bar{c}_{41}^1 \sinh \lambda_1^{0.5} x & \bar{c}_{51}^1 \cosh \lambda_1^{0.5} x & \bar{c}_{42}^1 \sinh \lambda_2^{0.5} x & \bar{c}_{52}^1 \cosh \lambda_2^{0.5} x & \dots & \dots \\ 0 & 0 & -2B & -6Bx & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & -6B & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} C_0 \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ \dots \\ C_{41}^0 \\ C_{51}^0 \\ C_{42}^0 \\ C_{52}^0 \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix}$$

Gl. 4.13

4.4 Ableitung der Übertragungsmatrix und der Belastungsvektoren

Die Ableitung der Übertragungsmatrix und der Belastungsvektoren aus dem Fundamentalsystem von Lösungen kann mit Hilfe der Matrizenschreibweise sehr einfach dargestellt werden. Die Störfunktionen sind im Vektor \mathbf{p} zusammengefaßt.

Gl. 4.14

$$\mathbf{z}(x) = \mathbf{F}(x) \cdot \mathbf{c} + \mathbf{p}(x)$$

$$\mathbf{z}(0) = \mathbf{F}(0) \cdot \mathbf{c} + \mathbf{p}(0)$$

$$\mathbf{c} = \mathbf{F}^{-1}(0) \cdot \mathbf{z}(0) - \mathbf{F}^{-1}(0) \cdot \mathbf{p}(0)$$

$$\mathbf{z}(x) = \mathbf{F}(x) \cdot \mathbf{F}^{-1}(0) \cdot \mathbf{z}(0) + \mathbf{p}(x) - \mathbf{F}(x) \cdot \mathbf{F}^{-1}(0) \cdot \mathbf{p}(0)$$

$$\mathbf{z}(\ell) = \underbrace{\mathbf{F}(\ell) \cdot \mathbf{F}^{-1}(0)}_{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{z}(0) + \underbrace{\mathbf{p}(\ell) - \mathbf{F}(\ell) \cdot \mathbf{F}^{-1}(0) \cdot \mathbf{p}(0)}_{\mathbf{r}}$$

$$\mathbf{z}_\ell = \mathbf{T}_\ell \cdot \mathbf{z}_0 + \mathbf{r}_\ell$$















Die Besetzung der Inversen von $\mathbf{F}(0)$ ist sehr dünn. Für das schon einmal verwendete Beispiel des dreiteiligen Verbundquerschnittes hat sie folgendes Aussehen:

$$\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & \cdot & \cdot & & & \cdot \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

Mit Kenntnis dieser Besetzungsstruktur und dadurch, daß auch einige Werte analytisch bestimmbar sind, können effektive Kontrollen in die Berechnung eingebaut werden. Auch für die Übertragungsmatrix ist die Besetzungsstruktur bekannt. Insbesondere muß diese Matrix symmetrisch zur Nebendiagonalen sein. Dieser Umstand wird ebenfalls zu Kontroll- und Lenkungszwecken verwendet.

4.5 Rand- und Übergangsbedingungen

Aus der Anwendung des Übertragungsverfahrens zur Berechnung von Verbundträgern ergibt sich zwangsweise, daß sowohl am Bereichsanfang als auch an dessen Ende jeweils die Hälfte der Zustandsgrößen bekannt sein müssen. Durch die Zusammenstellung konjugierter Weg- und Schnittgrößen im Zustandsvektor ist gesichert, daß immer eine Größe eines Paares bekannt ist. Alternativ liegt eine statische oder eine geometrische Bedingung vor. Die Gesamtheit der Bedingungen für die konjugierten Paare entspricht der Randbedingung des Verbundträgers, wie sie in der Berechnung zu berücksichtigen ist. Entsprechend wird zur Definition eventueller Übergangsbedingungen entweder die geometrische oder statische Größe eines konjugierten Paares angegeben. Die Gesamtanzahl der Übergangsbedingungen für den Verbundträger ist jedoch nicht festgelegt.

<p>①</p> $w = 0$ $w' = 0$ 	$w = 0$ $w' = 0$ $-u/e = 0$ 	$w = 0$ $w' = 0$ $Ne = 0$ 	$w = 0$ $\Sigma M_i = 0$ $\gamma = 0$ 
<p>②</p> $w = 0$ $M = 0$ 	$w = 0$ $M = 0$ $-u/e = 0$ 	$w = 0$ $M = 0$ $Ne = 0$ 	
<p>③</p> $V = 0$ $w' = 0$ 	$V = 0$ $w' = 0$ $-u/e = 0$ 	$V = 0$ $w' = 0$ $Ne = 0$ 	$V = 0$ $\Sigma M_i = 0$ $\gamma = 0$ 
<p>④</p> $V = 0$ $M = 0$ 	$Q = 0$ $M = 0$ $-u/e = 0$ 	$Q = 0$ $M = 0$ $Ne = 0$ 	

Tab. 4.5-1. Vergleich der homogenen Randbedingungen eines ein- und eines zweiteiligen Stabes

Für einen beliebig gefügten Verbundquerschnitt ist die Anzahl möglicher Rand- und Übergangsbedingungen stark von der Anzahl relevanter Fugen abhängig. In Tab. 4.5-1 ist ein Vergleich zwischen den homogenen Randbedingungen des homogenen, einteiligen Stabes und denjenigen eines zweiteiligen Verbundquerschnittes aufgezeigt. Es ist offensichtlich, daß eine sehr genaue Betrachtung der Detailausbildung eines konkreten Problems erforderlich ist, um eine Zuordnung zu den hier aufgeführten Randbedingungen zu treffen.

Im Zusammenhang mit der Anwendung des Übertragungsverfahrens ist darauf hinzuweisen, daß zur Definition der Randbedingungen neben den Elementen des Zustandsvektors nach Gl. 4.05 auch Elemente des Zustandsvektors nach Gl. 4.07 herangezogen werden. Der definierte Zustandsvektor genügt also offensichtlich nicht, alle möglichen Randbedingungen zu beschreiben, obwohl der Spannungs- und Verformungszustand damit vollständig und eindeutig beschrieben ist. Im Zustandsvektor Gl. 4.07 sind Linearkombinationen von Zustandsgrößen des Zustandsvektors Gl. 4.05 enthalten, so daß die beiden Vektoren durch eine einfache Punktmatrix ineinander überführt werden können. Im Hinblick auf das Übertragungsverfahren ist also eine systembezogene Auswahl des Zustandsvektors nicht erforderlich, da durch einfache Punktoperationen jede Art von Rand- oder Übergangsbedingung erfaßt werden kann. Die Punktmatrizen zur Überführung der Gl. 4.05 und Gl. 4.07 ineinander haben folgendes Aussehen:

$$\begin{array}{c}
 \left[\begin{array}{c} w \\ w' \\ \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ N_2 e_2 \\ N_1 e_1 \\ \Sigma M_i \\ V \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cccc|cccc}
 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & -1 & -1 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & 1
 \end{array} \right] \times \left[\begin{array}{c} w \\ w' \\ -u_1/e_1 \\ -u_2/e_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ N_2 e_2 \\ N_1 e_1 \\ M \\ V \end{array} \right]
 \end{array}$$

Gl. 4.15

$$\begin{bmatrix} w \\ w' \\ -u_1/e_1 \\ -u_2/e_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ N_2 e_2 \\ N_1 e_1 \\ M \\ V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} w \\ w' \\ \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ N_2 e_2 \\ N_1 e_1 \\ \Sigma M_1 \\ V \end{bmatrix}$$

Gl. 4.16

Die Anzahl möglicher Randbedingungen steigt mit zunehmender Anzahl relevanter Fugen überlinear. In Tab. 4.5-2 ist dargestellt, wie sich die Gesamtzahl von möglichen Randbedingungen mit wachsender Fugenanzahl entwickelt. Die Anzahl gültiger Kombinationen defi-

Anzahl relevanter Fugen	0	1	2	3
Anzahl der Zustandsgrößen	4	6	8	10
Anzahl möglicher Kombinationen	6	20	70	252
Anzahl gültiger Kombinationen	4	8	16	32
Anzahl zusätzlicher Kombinationen	0	2	10	38
Gesamtzahl gültiger Kombinationen	4	10	26	70

Tab. 4.5-2. Anzahl möglicher Randbedingungen in Abhängigkeit von der Anzahl Fugen

nierter Zustandsgrößen fällt gegenüber den möglichen Kombinationen stark ab, da konjugierte Weg- und Schnittgrößen nicht gemeinsam in einer Kombination auftreten können. Zusätzliche Kombinationen entstehen durch die oben genannten Linearkombinationen von Zustandsgrößen des originalen Zustandsvektors nach Gl. 4.05.

Für die praktische Berechnung von Verbundträgern haben viele der insgesamt gültigen Kombinationen keine Bedeutung, so daß in der programmtechnischen Umsetzung für mehrteilige Verbundquerschnitte gewisse Vereinfachungen nötig sind, um den Organisationsaufwand zur Einarbeitung der Randbedingungen einzugrenzen. Für Forschungszwecke und zur Abschätzung möglicher Fehler in den Berechnungen aufgrund dieser Vereinfachungen ist es jedoch durchaus wünschenswert, die Voraussetzungen für die genaue Berücksichtigung der Randbedingungen zu schaffen. So wird in Kapitel 5.2 eine Studie durchgeführt, um die Stabilitätsgrenzen für den dreiteilig symmetrischen Druckstab unter Berücksichtigung der verschiedenen Randbedingungen zu bestimmen und Unterschiede zu herkömmlichen Berechnungen mit vereinfachenden Annahmen aufzuzeigen.

Übergangsbedingungen werden -wie bereits im Zusammenhang mit der Berücksichtigung anderer als der originalen Zustandsgrößen gezeigt- über Punktmatrizen in die Berechnung eingearbeitet. Zur Aufstellung einer Punktmatrix, in welcher alle möglichen Übergangsbedingungen berücksichtigt sind, ist es sinnvoll, diese in drei Gruppen einzuteilen. Hiernach unterscheidet man

- bekannte Werte bestimmter Zustandsgrößen,
- bekannte Sprünge in den Zustandsgrößen
- und weggrößenabhängigen Veränderung von Schnittgrößen (Federn).

Bezüglich der verschiedenen Möglichkeiten zur weggrößenabhängigen Veränderung von Schnittgrößen sei auf Anhang 4 verwiesen. Dort wird zwar die über die Elementlänge kontinuierliche Veränderung der Schnittgrößen aufgezeigt, jedoch sind die geschilderten Zusammenhänge direkt auch auf punktuelle Federn übertragbar.

Die Punktmatrix nach Gl. 4.17 ist um jeweils eine Spalte und Zeile erweitert. Diese aus rechen-technischen Gründen normalerweise erforderliche Maßnahme kann bei Anwendung des Gesamtmatrix-Verfahrens (Kapitel 6.3) entfallen.

$$\begin{bmatrix} w \\ w' \\ -u_1/e_1 \\ -u_2/e_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ N_2 e_2 \\ N_1 e_1 \\ M \\ V \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix}_{p \text{ links}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \Delta w \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \Delta w' \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & -\Delta u_1/e_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & -\Delta u_2/e_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -k_{N_2} - \hat{k}_{N_2} - \tilde{k}_{N_2} & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & -\Delta N_2 e_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -k_{N_1} - \hat{k}_{N_1} - \tilde{k}_{N_1} & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & -\Delta N_1 e_1 \\ 0 & -\Sigma k_{M_i} - \Sigma k_{N_j} & -k_{N_1} - \hat{k}_{N_1} - \tilde{k}_{N_1} & -k_{N_2} - \hat{k}_{N_2} - \tilde{k}_{N_2} & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & -\Delta M \\ k_v & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\Delta V \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} w \\ w' \\ -u_1/e_1 \\ -u_2/e_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ N_2 e_2 \\ N_1 e_1 \\ M \\ V \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix}_{p \text{ rechts}}$$

k_{M_i} – reine Drehfeder an den Teilquerschnitten oder am Gesamtquerschnitt

Bezeichnungen \tilde{k}_{N_j} – Drehfeder an den Teilverbunden (diskrete Verdübelung) k_{N_j} – Drehfeder mit unverschieblichem Lager

\hat{k}_{N_j} – freie Drehfeder ohne Lager $\hat{k}_{N_j} = k_{N_j} \Sigma k_{M_i} / (k_{N_j} + \Sigma k_{M_i})$

Gl. 4.17

5 Auswertung für den zweiteiligen Verbundquerschnitt

5.1 Der zweiteilige Verbundquerschnitt mit und ohne Normalkraftbelastung

Die Berechnung zweiteiliger, normalkraftfreier Verbundquerschnitte wurde bereits in zahlreichen Veröffentlichungen dargestellt, doch ist die analytische Behandlung in der Regel auf einfache Belastungs- und Lagerungsfälle beschränkt /NAT87.1/. Zudem werden häufig bestimmte Geometrie- oder Steifigkeitsverhältnisse zur Ableitung einer geschlossenen Lösung vorausgesetzt /HEI91.1/ /HEI91.2/. Eine geschlossene allgemeine Lösung mit Hilfe von Übertragungsmatrizen ist lediglich in /SHU86/ angegeben. Zur Berechnung normalkraftbelasteter Verbundquerschnitte liegen zwar ebenfalls eine Reihe von Veröffentlichungen vor, jedoch basiert die analytische Behandlung in der Regel auf trigonometrischen Ansatzfunktionen für die unbekanntes Verschiebungs- oder Schnittgrößen /MÖH56/ /HUG72/ /PAP73/. Lösungen mit Hilfe genauer Ansatzfunktionen beschränken sich auf Sonderfälle /HEI89/ oder setzen z. B. die Kenntnis der Momentenfunktionen voraus /GIR91/. Für allgemeine zweiteilige Verbundquerschnitte unter Längs- und Querbelastrung sind geschlossene Lösungen bisher nicht bekannt.

Die in den vorhergehenden Kapiteln abgeleiteten Beziehungen werden daher für den zweiteiligen, normalkraftbelasteten Verbundquerschnitt mit einer definierten Fuge ausgewertet. Dabei werden die Inhomogenitäten aus linear über die Trägerlänge veränderlicher Streckenlast sowie konstante und linear über die Teilquerschnittshöhen veränderliche Temperaturänderungen berücksichtigt. Es gelten weiterhin die Berechnungsvoraussetzungen und Bezeichnungen nach Kapitel 2. Zur Aufstellung des Differentialgleichungs-Systems und dessen Lösung werden zusätzliche Abkürzungen vereinbart, wie sie für die Berechnung zweiteiliger Verbundquerschnitte üblich sind. Die Indizes für alle die Fugen betreffenden Werte können entfallen.

Gl. 5.01

$$\alpha^2 = \frac{B_s}{B}$$

$$B_s = \frac{EA_1 EA_2 e^2}{EA_1 + EA_2}$$

$$\lambda^2 = \frac{k e^2 \ell^2}{\sum EI_i \alpha^2} = \frac{k e^2 \ell^2}{B (1 - \alpha^2) \alpha^2}$$

$$\omega^2 = \frac{k}{EA_1} + \frac{k}{EA_2} = \frac{\lambda^2 (1 - \alpha^2)}{\ell^2}$$

$$e^2 = \frac{P \ell^2}{\sum EI_i} = \frac{P \ell^2}{B (1 - \alpha^2)}$$

$$r = D_2^2 + D_1^2$$

Das Differentialgleichungs-System in Operatorenschreibweise lautet damit

$$\begin{bmatrix} -\bar{D}^4 \Sigma E_i I_i + \bar{D}^2 N & \bar{D} k e \\ -\bar{D}^3 e & \bar{D}^2 - \omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -q \\ 0 \end{bmatrix}$$

Gl. 5.02

Die Ableitung erfolgt hier für einen druckbelasteten Verbundquerschnitt, so daß

$$N = -P$$

Gl. 5.03

in Gl. 5.02 eingesetzt wird. Das charakteristische Polynom

$$\bar{D}^6 - \bar{D}^4 \left(\omega^2 + \frac{k e^2}{\Sigma E_i I_i} - \frac{P}{\Sigma E_i I_i} \right) - \bar{D}^2 \frac{\omega^2 P}{\Sigma E_i I_i} = 0$$

Gl. 5.04

wird mit Hilfe der Gl. 5.01 umgeformt und gleich um zwei Grade reduziert.

$$\bar{D}^4 - \bar{D}^2 \left(\frac{\lambda^2}{\ell^2} - \frac{\varepsilon^2}{\ell^2} \right) - \frac{\varepsilon^2 \lambda^2 (1 - \alpha^2)}{\ell^4} = 0$$

Gl. 5.05

Die Eigenwerte des Differentialgleichungs-Systems können nun berechnet werden.

$$\bar{D}_{0,1}^2 = 0$$

Gl. 5.06

$$\bar{D}_{2,3}^2 = \frac{\lambda^2 - \varepsilon^2}{2\ell^2} - \frac{1}{\ell^2} \sqrt{\frac{(\lambda^2 - \varepsilon^2)^2}{4} + \varepsilon^2 \lambda^2 (1 - \alpha^2)} < 0$$

$$\bar{D}_{4,5}^2 = \frac{\lambda^2 - \varepsilon^2}{2\ell^2} + \frac{1}{\ell^2} \sqrt{\frac{(\lambda^2 - \varepsilon^2)^2}{4} + \varepsilon^2 \lambda^2 (1 - \alpha^2)} > 0$$

Da der Wurzelausdruck stets größer ist als der voranstehende Summand ist das Vorzeichen der Eigenwertquadrate -wie angegeben- klar definiert. Bei Zugbelastung ist der Wurzelausdruck stets kleiner als der voranstehende Summand, jedoch bleibt der Ausdruck unter der Wurzel stets positiv. Es treten also nur positive Eigenwertquadrate auf. Bei reiner Biegebelastung wird ein Eigenwertquadrat zu Null und das andere hat einen positiven Wert. Mit den Abkürzungen

$$D_1^2 = \bar{D}_{2,3}^2 \ell^2$$

$$D_2^2 = \bar{D}_{4,5}^2 \ell^2$$

Gl. 5.07

enthält der homogene Ansatz der gesuchten Funktionen des druckbelasteten Verbundquerschnittes je ein Paar trigonometrischer und hyperbolischer Funktionen, sowie ein Polynom ersten Grades.

Gl. 5.08

$$w_h = A_0 + A_1 \ell \zeta + A_2 \cos D_1 \zeta + A_3 \sin D_1 \zeta + A_4 \cosh D_2 \zeta + A_5 \sinh D_2 \zeta$$

$$u_h = B_0 + B_1 \ell \zeta + B_2 \cos D_1 \zeta + B_3 \sin D_1 \zeta + B_4 \cosh D_2 \zeta + B_5 \sinh D_2 \zeta$$

Die Kopplungskoeffizienten werden durch Einsetzen in die Differentialgleichung zur Beschreibung der kinematischen Beziehungen bestimmt.

Gl. 5.09

$$B_0 = B_1 = 0$$

$$B_2 = \frac{D_1^3 e / \ell}{D_1^2 + \lambda^2 (1 - \alpha^2)} \quad A_3 = F_1 \frac{D_1}{\ell} A_3$$

$$B_3 = - \frac{D_1^3 e / \ell}{D_1^2 + \lambda^2 (1 - \alpha^2)} \quad A_2 = - F_1 \frac{D_1}{\ell} A_2$$

$$B_4 = \frac{D_2^3 e / \ell}{D_2^2 - \lambda^2 (1 - \alpha^2)} \quad A_5 = F_2 \frac{D_2}{\ell} A_5$$

$$B_5 = \frac{D_2^3 e / \ell}{D_2^2 - \lambda^2 (1 - \alpha^2)} \quad A_4 = F_2 \frac{D_2}{\ell} A_4$$

Die partikuläre Lösung für über die Trägerlänge veränderliche Streckenlast erhält man mit einem Ansatz vom Typ der rechten Seite unter Berücksichtigung der Resonanzen.

Gl. 5.10

$$w_p = \frac{q_0 \ell^4}{2 \varepsilon^2 B (1 - \alpha^2)} \zeta^2 + \frac{q_0 \ell^5}{6 \varepsilon^2 B (1 - \alpha^2)} \zeta^3$$

$$u_p = - \frac{q_1 e \ell^4}{\varepsilon^2 \lambda^2 B (1 - \alpha^2)^2}$$

Die Temperaturbelastungen bzw. Eigenspannungszustände des Verbundquerschnittes gehen nach Gl. 2.22, Gl. 2.27 und Gl. 2.38 nur in die Schnittkraftberechnung ein. Die kompletten Ansätze für die Verschiebungsgrößen im Zustandsvektor können daher direkt angegeben werden.

Gl. 5.11

$$\mathbf{z}^T = \{ w, w', -u/e, Ne, M, V \}$$

$$w(\zeta) = A_0 + A_1 \ell \zeta + A_2 \cos D_1 \zeta + A_3 \sin D_1 \zeta + A_4 \cosh D_2 \zeta + A_5 \sinh D_2 \zeta + \\ + \frac{q_0 \ell^4}{2 \varepsilon^2 B (1 - \alpha^2)} \zeta^2 + \frac{q_1 \ell^5}{6 \varepsilon^2 B (1 - \alpha^2)} \zeta^3$$

Gl. 5.12

$$w'(\zeta) = A_1 - A_2 \frac{D_1}{\ell} \sin D_1 \zeta + A_3 \frac{D_1}{\ell} \cos D_1 \zeta + A_4 \frac{D_2}{\ell} \sinh D_2 \zeta + A_5 \frac{D_2}{\ell} \cosh D_2 \zeta \\ + \frac{q_0 \ell^3}{\varepsilon^2 B (1 - \alpha^2)} \zeta + \frac{q_1 \ell^4}{2 \varepsilon^2 B (1 - \alpha^2)} \zeta^2$$

$$-\frac{u(\zeta)}{e} = -A_3 \frac{F_1 D_1}{e \ell} \cos D_1 \zeta + A_2 \frac{F_1 D_1}{e \ell} \sin D_1 \zeta - A_5 \frac{F_2 D_2}{e \ell} \cosh D_2 \zeta - \\ - A_4 \frac{F_2 D_2}{e \ell} \sinh D_2 \zeta + \frac{q_1 \ell^4}{\varepsilon^2 \lambda^2 B (1 - \alpha^2)^2}$$

Im Sonderfall eines zweiteiligen Verbundquerschnittes kann das Normalkraftmoment über die kinematische Beziehung

$$N e = (u' - w'' e - \delta_t) \frac{B \alpha^2}{e} = - \left(-\frac{u'}{e} + w'' + \frac{\delta_t}{e} \right) B \alpha^2$$

Gl. 5.13

ermittelt werden. Man erhält als allgemeine Lösung für diese Zustandsgröße:

$$N e(\zeta) = A_2 F_1 k \cos D_1 \zeta + A_3 F_1 k \sin D_1 \zeta + A_4 F_2 k \cosh D_2 \zeta + A_5 F_2 k \sinh D_2 \zeta \\ - \frac{q_0 \alpha^2 \ell^2}{\varepsilon^2 (1 - \alpha^2)} - \frac{q_1 \alpha^2 \ell^3}{\varepsilon^2 (1 - \alpha^2)} \zeta - \frac{B \alpha^2 \delta_t}{e}$$

Gl. 5.14

Das äußere Moment setzt sich aus zwei Anteilen zusammen.

$$M = \Sigma M_i + N e = -\Sigma E_i I_i (w'' - w_0'' + \chi_{ti}) + (u' - w'' e - \delta_t) \frac{B \alpha^2}{e}$$

Gl. 5.15

Mit Hilfe von Gl. 5.12 und Gl. 5.14 wird die allgemeine Lösung berechnet.

$$M(\zeta) = A_2 F_3 \cos D_1 \zeta + A_3 F_3 \sin D_1 \zeta - A_4 F_4 \cosh D_2 \zeta - A_5 F_4 \sinh D_2 \zeta + \\ - \frac{q_0 \ell^2}{\varepsilon^2 (1 - \alpha^2)} - \frac{q_1 \ell^3}{\varepsilon^2 (1 - \alpha^2)} \zeta - \Sigma E_i I_i (\chi_{ti} - w_0'') + \frac{B \alpha^2}{e} \delta_t$$

Gl. 5.16

$$F_3 = \frac{D_1^2 B (1 - \alpha^2) (D_1^2 + \lambda^2)}{\ell^2 (D_1^2 + \lambda^2 (1 - \alpha^2))} \quad F_4 = \frac{D_2^2 B (1 - \alpha^2) (D_2^2 - \lambda^2)}{\ell^2 (D_2^2 - \lambda^2 (1 - \alpha^2))}$$

Zur Bestimmung der Vertikalkraft V wird Gl. 2.28 umgeformt.

Gl. 5.17

$$V = M' - P w'$$

Die allgemeine Lösung lautet damit :

Gl. 5.18

$$V(\zeta) = -A_1 \frac{\varepsilon^2 B (1 - \alpha^2)}{\ell^2} + A_2 F_5 \sin D_1 \zeta - A_3 F_5 \cos D_1 \zeta - A_4 F_6 \sinh D_2 \zeta - A_5 F_6 \cosh D_2 \zeta - q_0 \ell \zeta - \frac{q_1 \ell^2}{\varepsilon^2 (1 - \alpha^2)} - \frac{q_1 \ell^2}{2} \zeta^2$$

$$F_5 = \frac{D_1}{\ell} \left(\frac{\varepsilon^2 B (1 - \alpha^2)}{\ell^2} - F_3 \right) \quad F_6 = \frac{D_2}{\ell} \left(\frac{\varepsilon^2 B (1 - \alpha^2)}{\ell^2} + F_4 \right)$$

Man erkennt, daß die Ausdrücke recht kompliziert werden und zur Ableitung der Übertragungsmatrix umfangreiche Zwischenrechnungen erforderlich sind. Daher wird an dieser Stelle der Berechnungslauf verkürzt wiedergegeben. Zunächst sind die Koeffizienten A_0 bis A_5 durch die Zustandsgrößen am Elementanfang auszulösen.

Gl. 5.19

$$w(\zeta=0) = w_0 = A_0 + A_2 + A_4$$

$$w'(\zeta=0) = w'_0 = A_1 + A_3 \frac{D_1}{\ell} + A_5 \frac{D_2}{\ell}$$

$$-\frac{u(\zeta=0)}{e} = -\frac{u_0}{e} = -A_3 \frac{F_1 D_1}{e \ell} + -A_5 \frac{F_2 D_2}{e \ell} - A_4 \frac{F_2 D_2}{e \ell} \sinh D_2 \zeta + \frac{q_1 \ell^4}{\varepsilon^2 \lambda^2 B (1 - \alpha^2)^2}$$

$$N e(\zeta=0) = N_0 e = A_2 F_1 k + + A_4 F_2 k - \frac{q_0 \alpha^2 \ell^2}{\varepsilon^2 (1 - \alpha^2)} - \frac{B \alpha^2 \delta_i}{e}$$

$$M(\zeta=0) = M_0 = A_2 F_3 - A_4 F_4 - \frac{q_0 \ell^2}{\varepsilon^2 (1 - \alpha^2)} - \Sigma E_i I_i (\chi_{ii} - w''_0) + \frac{B \alpha^2}{e} \delta_i$$

$$V(\zeta=0) = V_0 = -A_1 \frac{\varepsilon^2 B (1 - \alpha^2)}{\ell^2} - A_3 F_5 - A_5 F_6 - \frac{q_1 \ell^2}{\varepsilon^2 (1 - \alpha^2)}$$

Nach Berechnung der Inversen dieses Gleichungssystems werden die Koeffizienten in die allgemeinen Lösungen eingesetzt, diese geordnet und in Matrizenform geschrieben. Setzt man des weiteren für $\zeta = 1$ ein, so erhält man schließlich die Übertragungsmatrix für den zweiteiligen, druckbelasteten Verbundstab.

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & t_{12} & t_{13} & t_{14} & t_{15} & t_{16} \\ 0 & t_{22} & t_{23} & t_{24} & t_{25} & \\ 0 & t_{32} & t_{33} & t_{34} & & \\ 0 & t_{42} & t_{43} & & & \\ 0 & t_{52} & & & \text{symm.} & \\ 0 & & & & & \end{bmatrix}$$

Gl. 5.20

Die Koeffizienten der Matrix lauten:

$$t_{12} = \frac{\ell}{r} \left[(\lambda^2 + D_1^2) \frac{\sin D_1}{D_1} - (\lambda^2 - D_2^2) \frac{\sinh D_2}{D_2} \right]$$

Gl. 5.21

$$t_{22} = \frac{1}{r} \left[(\lambda^2 + D_1^2) \cos D_1 - (\lambda^2 - D_2^2) \cosh D_2 \right]$$

$$t_{32} = -\frac{\varepsilon^2}{r} [\cos D_1 - \cosh D_2]$$

$$t_{42} = \frac{\varepsilon^2 \lambda^2 B \alpha^2 (1 - \alpha^2)}{r \ell} \left[\frac{\sin D_1}{D_1} - \frac{\sinh D_2}{D_2} \right]$$

$$t_{52} = \frac{\varepsilon^2 B (1 - \alpha^2)}{r \ell} \left[(\lambda^2 + D_1^2) \frac{\sin D_1}{D_1} - (\lambda^2 - D_2^2) \frac{\sinh D_2}{D_2} \right]$$

$$t_{13} = \frac{\ell \alpha^2 \lambda^2}{r} \left[\frac{\sin D_1}{D_1} - \frac{\sinh D_2}{D_2} \right]$$

Gl. 5.22

$$t_{23} = \frac{\alpha^2 \lambda^2}{r} [\cos D_1 - \cosh D_2]$$

$$t_{33} = -\frac{1}{r} \left[(\lambda^2 - D_2^2) \cos D_1 - (\lambda^2 + D_1^2) \cosh D_2 \right]$$

$$t_{43} = \frac{\lambda^2 B \alpha^2 (1 - \alpha^2)}{r \ell} \left[(\lambda^2 - D_2^2) \frac{\sin D_1}{D_1} - (\lambda^2 + D_1^2) \frac{\sinh D_2}{D_2} \right]$$

Gl. 5.23

$$t_{14} = -\frac{\ell^2}{r B (1 - \alpha^2)} [\cos D_1 - \cosh D_2]$$

$$t_{24} = \frac{\ell}{r B (1 - \alpha^2)} [D_1 \sin D_1 + D_2 \sinh D_2]$$

$$t_{34} = \frac{\ell}{r \lambda^2 B \alpha^2 (1 - \alpha^2)} \left[(\lambda^2 - D_2^2) D_1 \sin D_1 - (\lambda^2 + D_1^2) D_2 \sinh D_2 \right]$$

Gl. 5.24

$$t_{15} = \frac{\ell^2}{r \varepsilon^2 B (1 - \alpha^2)} \left[(\lambda^2 + D_1^2) \cos D_1 - (\lambda^2 - D_2^2) \cosh D_2 - r \right]$$

$$t_{25} = -\frac{\ell}{r \varepsilon^2 B (1 - \alpha^2)} \left[(\lambda^2 + D_1^2) D_1 \sin D_1 + (\lambda^2 - D_2^2) D_2 \sinh D_2 \right]$$

$$t_{16} = \frac{\ell^3}{r \varepsilon^2 B (1 - \alpha^2)} \left[(\lambda^2 + D_1^2) \frac{\sin D_1}{D_1} - (\lambda^2 - D_2^2) \frac{\sinh D_2}{D_2} - r \right]$$

Die Lastvektoren werden auf gleiche Weise berechnet. Der Lastvektor für Gleichstreckenlast lautet :

Gl. 5.25

$$\mathbf{h}_{q_0}^T = \{ h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6 \}$$

$$h_1 = \frac{q_0 \ell^4}{r \varepsilon^4 \lambda^2 B (1 - \alpha^2)^2} \left[(\lambda^2 + D_1^2) D_2^2 \cos D_1 + (\lambda^2 - D_2^2) D_1^2 \cosh D_2 - r \lambda^2 \right] + \frac{\ell^4}{2 \varepsilon^2 B (1 - \alpha^2)}$$

$$h_2 = -\frac{q_0 \ell^3}{r \varepsilon^2 B (1 - \alpha^2)} \left[(\lambda^2 + D_1^2) \frac{\sin D_1}{D_1} - (\lambda^2 - D_2^2) \frac{\sinh D_2}{D_2} \right] + \frac{\ell^3}{\varepsilon^2 B (1 - \alpha^2)}$$

$$h_3 = \frac{q_0 \ell^3}{r B (1 - \alpha^2)} \left[\frac{\sin D_1}{D_1} - \frac{\sinh D_2}{D_2} \right]$$

$$h_4 = \frac{q_0 \ell^2 \alpha^2}{r \varepsilon^2 (1 - \alpha^2)} \left[D_2^2 \cos D_1 + D_1^2 \cosh D_2 - r \right]$$

$$h_5 = \frac{q_0 \ell^2}{r \varepsilon^2 \lambda^2 (1 - \alpha^2)} \left[(\lambda^2 + D_1^2) D_2^2 \cos D_1 + (\lambda^2 - D_2^2) D_1^2 \cosh D_2 - r \lambda^2 \right]$$

$$h_6 = - q_0 \ell$$

Gl. 5.25

Der Lastvektor für linear über die Trägerlänge veränderliche Streckenlast lautet :

$$\mathbf{h}_{q_1}^T = \{ h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6 \}$$

Gl. 5.26

$$h_1 = \frac{q_1 \ell^5}{r \varepsilon^4 \lambda^2 B (1 - \alpha^2)^2} \left[(\lambda^2 + D_1^2) D_2^2 \frac{\sin D_1}{D_1} + (\lambda^2 - D_2^2) D_1^2 \frac{\sinh D_2}{D_2} - r \lambda^2 \right] + \frac{\ell^5}{6 \varepsilon^2 B (1 - \alpha^2)}$$

$$h_2 = \frac{q_1 \ell^4}{r \varepsilon^4 \lambda^2 B (1 - \alpha^2)^2} \left[(\lambda^2 + D_1^2) D_2^2 \cos D_1 + (\lambda^2 - D_2^2) D_1^2 \cosh D_2 - r \lambda^2 \right] + \frac{\ell^4}{2 \varepsilon^2 B (1 - \alpha^2)}$$

$$h_3 = - \frac{q_1 \ell^4}{r \varepsilon^2 \lambda^2 B (1 - \alpha^2)^2} \left[D_2^2 \cos D_1 + D_1^2 \cosh D_2 - r \right]$$

$$h_4 = - \frac{q_1 \ell^3 \alpha^2}{r \varepsilon^2 (1 - \alpha^2)} \left[D_2^2 \frac{\sin D_1}{D_1} + D_1^2 \frac{\sinh D_2}{D_2} - r \right]$$

$$h_5 = \frac{q_1 \ell^3}{r \varepsilon^2 \lambda^2 (1 - \alpha^2)} \left[(\lambda^2 + D_1^2) D_2^2 \frac{\sin D_1}{D_1} + (\lambda^2 - D_2^2) D_1^2 \frac{\sinh D_2}{D_2} - r \lambda^2 \right]$$

$$h_6 = - \frac{q_1 \ell^2}{2}$$

Der Lastvektor für über die Trägerlänge und die Teilquerschnitte konstante Temperaturdifferenz lautet :

Gl. 5.27

$$\mathbf{h}_{\psi_T}^T = \{ h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6 \}$$

$$h_1 = - \frac{\psi_T \ell^2 \alpha^2}{r \varepsilon^2 (1 - \alpha^2)} \left[D_2^2 \cos D_1 + D_1^2 \cosh D_2 - r \right]$$

$$h_2 = \frac{\psi_T \ell \lambda^2 \alpha^2}{r} \left[\frac{\sin D_1}{D_1} - \frac{\sinh D_2}{D_2} \right]$$

$$h_3 = - \frac{\psi_T \ell}{r} \left[\left(\lambda^2 - D_2^2 \right) \frac{\sin D_1}{D_1} - \left(\lambda^2 + D_1^2 \right) \frac{\sinh D_2}{D_2} \right]$$

$$h_4 = - \frac{\psi_T B \alpha^2}{r \varepsilon^2} \left[\left(\lambda^2 - D_2^2 \right) D_2^2 \cos D_1 + \left(\lambda^2 + D_1^2 \right) D_1^2 \cosh D_2 \right] + B \alpha^2$$

$$h_5 = - \frac{\psi_T B \alpha^2}{r} \left[D_2^2 \cos D_1 + D_1^2 \cosh D_2 - r \right]$$

$$h_6 = 0$$

Der Lastvektor für über die Trägerlänge konstante, aber über die Teilquerschnittshöhen veränderliche Temperaturdifferenz bzw. Vorkrümmung der Teilquerschnitte lautet schließlich :

Gl. 5.28

$$\mathbf{h}_{\chi_T}^T = \{ h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6 \}$$

$$h_1 = \frac{\chi_T \ell^2}{r \varepsilon^2} \left[\left(\lambda^2 + D_1^2 \right) \cos D_1 - \left(\lambda^2 - D_2^2 \right) \cosh D_2 - r \right]$$

$$h_2 = - \frac{\chi_T \ell}{r \varepsilon^2} \left[\left(\lambda^2 + D_1^2 \right) D_1 \sin D_1 + \left(\lambda^2 - D_2^2 \right) D_2 \sinh D_2 \right]$$

$$h_3 = - \frac{\chi_T \ell}{r} \left[D_1 \sin D_1 + D_2 \sinh D_2 \right]$$

$$h_4 = \frac{\chi_T \lambda^2 B \alpha^2 (1 - \alpha^2)}{r} [\cos D_1 - \cosh D_2]$$

$$h_5 = \frac{\chi_T B (1 - \alpha^2)}{r} \left[(\lambda^2 + D_1^2) \cos D_1 - (\lambda^2 - D_2^2) \cosh D_2 - r \right]$$

$$h_6 = 0$$

Gl. 5.28

Mit diesen Angaben kann eine direkte Programmierung des Übertragungsverfahrens für druckbelastete, zweiteilige Verbundquerschnitte durchgeführt werden. Die Grenzübergänge für verschwindende Normalkraftbelastung sind gewährleistet. Auch bei sehr geringen Fugensteifigkeiten ist die numerische Berechnung stabil. Die entsprechende Übertragungsmatrix kann dem Anhang 3 entnommen werden. Sie wurde in ähnlicher Weise bereits in /SHU86/ angegeben, dort allerdings mit einer anderen Kombination der Zustandgrößen.

Der Grenzübergang für eine starre Fuge wurde ebenfalls überprüft. Analytisch ist der Übergang zum homogenen Stab problemlos durchführbar, in der numerischen Berechnung treten jedoch bei unrealistisch großen Fugensteifigkeiten Schwierigkeiten auf wegen der starken Parallelisierung von Spalten und Zeilen. Die zur Fugenverschiebung gehörigen Zeilen und Spalten streben gegen Null, so daß die Matrix allein aus diesem Grund bei größer werdender Fugensteifigkeit singular zu werden droht. Genauere Angaben zu diesen Effekten sind in Kapitel 6.1 zu finden.

Der Grenzübergang für verschwindende Fugensteifigkeit ist wiederum problemlos. Die analytisch ableitbare Übertragungsmatrix ist identisch mit derjenigen, welche in /OLS86/ zur Berechnung von ebenen Stahlbetonstabtragwerken unter Verwendung von Tangentensteifigkeiten angegeben wird. Normalerweise werden die Schnittgrößen bei plastischen Berechnungen auf die mechanische Schwerachse bezogen werden, wodurch Längskräfte und Biegemomente entkoppelt sind. Um diese Entkopplung im Verlauf der iterativen Berechnung aufrechterhalten zu können, muß in jedem Iterationsschritt die Lage der Schwerachse neu bestimmt werden. Verzichtet man dagegen auf die Entkopplung, so ist das Bezugssystem frei wählbar und muß nicht verändert werden. Damit ist der Zusammenhang zu dem in dieser Arbeit entwickelten Teilverbund-Modell offensichtlich.

Da die Übertragungsmatrix für den Grenzübergang bei verschwindender Fugensteifigkeit unter anderem benötigt wird, wenn verdübelte mit nicht-verdübelten Elementen gekoppelt werden sollen, werden hier deren Koeffizienten angegeben.

Gl. 5.29

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & t_{12} & 0 & t_{14} & t_{15} & t_{16} \\ 0 & t_{22} & 0 & t_{24} & t_{25} & \\ 0 & t_{32} & 1 & t_{34} & & \\ 0 & 0 & 0 & & & \\ 0 & t_{52} & & & \text{symm.} & \\ 0 & & & & & \end{bmatrix}$$

Gl. 5.30

$$t_{12} = \frac{\ell}{\varepsilon} \sin \varepsilon$$

$$t_{14} = -\frac{\ell^2}{B(1-\alpha^2)\varepsilon^2} (\cos \varepsilon - 1)$$

$$t_{22} = \cos \varepsilon$$

$$t_{24} = \frac{\ell}{B(1-\alpha^2)\varepsilon} \sin \varepsilon$$

$$t_{32} = -(\cos \varepsilon - 1)$$

$$t_{34} = -\frac{\ell}{B(1-\alpha^2)\varepsilon} \sin \varepsilon - \frac{\ell}{B\alpha^2}$$

$$t_{52} = \frac{B(1-\alpha^2)}{\ell} \varepsilon \sin \varepsilon$$

Gl. 5.31

$$t_{15} = \frac{\ell^2}{B(1-\alpha^2)\varepsilon^2} (\cos \varepsilon - 1)$$

$$t_{16} = \frac{\ell^3}{B(1-\alpha^2)\varepsilon^3} (\sin \varepsilon - \varepsilon)$$

$$t_{25} = -\frac{\ell}{B(1-\alpha^2)\varepsilon} \sin \varepsilon$$

Die Belastungsvektoren für die vier behandelten Lastfälle sind gegenüber der ursprünglichen Form ebenfalls stark vereinfacht.

Gl. 5.32

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & 0 & h_{14} \\ h_{21} & h_{22} & 0 & h_{24} \\ h_{31} & h_{32} & \psi_T \ell & h_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ h_{51} & h_{52} & 0 & h_{54} \\ h_{61} & h_{62} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Man erkennt sofort, daß bei über die Teilquerschnittshöhe konstanter Temperaturänderung lediglich die Fugenverschiebungsfunktion zusätzliche Anteile hat, und daß das Normalkraft-

moment natürlicherweise für alle Belastungsfälle unverändert bleibt. An den Rändern kann dennoch ein Normalkraftmoment vorhanden sein. Die übrigen Koeffizienten lauten :

$$h_{14} = \frac{\chi_T \ell^2}{\varepsilon^2} (\cos \varepsilon - 1)$$

$$h_{24} = -\frac{\chi_T \ell}{\varepsilon} \sin \varepsilon$$

$$h_{34} = \frac{\chi_T \ell}{\varepsilon} \sin \varepsilon$$

$$h_{54} = \chi_T B (1 - \alpha^2) (\cos \varepsilon - 1)$$

$$h_{11} = \frac{q_0 \ell^4}{\varepsilon^4 B (1 - \alpha^2)} \left(\cos \varepsilon - 1 + \frac{\varepsilon^2}{2} \right)$$

$$h_{21} = \frac{q_0 \ell^3}{\varepsilon^3 B (1 - \alpha^2)} (-\sin \varepsilon + \varepsilon)$$

$$h_{31} = -\frac{q_0 \ell^3}{\varepsilon^3 B (1 - \alpha^2)} (-\sin \varepsilon + \varepsilon)$$

$$h_{51} = \frac{\ell^2}{\varepsilon^2} (\cos \varepsilon - 1)$$

$$h_{61} = -\ell$$

$$h_{12} = \frac{q_1 \ell^5}{\varepsilon^5 B (1 - \alpha^2)} \left(\sin \varepsilon - \varepsilon + \frac{\varepsilon^3}{6} \right)$$

$$h_{22} = \frac{q_1 \ell^4}{\varepsilon^4 B (1 - \alpha^2)} \left(\sin \varepsilon - 1 + \frac{\varepsilon^2}{2} \right)$$

$$h_{32} = -\frac{q_1 \ell^4}{\varepsilon^4 B (1 - \alpha^2)} \left(\sin \varepsilon - 1 + \frac{\varepsilon^2}{2} \right)$$

$$h_{52} = \frac{q_1 \ell^3}{\varepsilon^3} (\sin \varepsilon - \varepsilon)$$

$$h_{62} = -\frac{q_1 \ell^2}{2}$$

Zusammengefaßt können sowohl die Übertragungsmatrix als auch die Lastvektoren für den unverdübelten Verbundquerschnitt als erweiterte Form der Übertragungsmatrix und der Lastvektoren des homogenen Druckstabes angesehen werden. In Kapitel 6.1 werden nähere Angaben zur rechnerischen Behandlung von verschwindenden Fugensteifigkeiten beim allgemeinen Verbundelement gemacht.

Gl. 5.33

Gl. 5.34

Gl. 5.35

5.2 Knicklasten des zweiteiligen Verbundstabes

Die Übertragungsmatrix des zweiteiligen, druckbelasteten Verbundelementes kann direkt d. h. ohne Matrizenmultiplikationen für Stabilitätsuntersuchungen am einfachen Druckstab ohne Zwischenbedingungen ausgewertet werden. Entsprechend der an jedem Stabende definierten Randbedingungen werden bestimmte Elemente der Übertragungsmatrix zu einer dreireihigen Submatrix zusammengestellt /SHN55/. Liegen nur homogene Randbedingungen vor, so hat das reduzierte Gleichungssystem lediglich dann eine nicht-triviale Lösung, wenn dessen Hauptdeterminante identisch Null wird. Diese Forderung liefert die Knickbedingung zur Bestimmung der Eigenwerte bzw. der Knicklasten des Systems.

Die analytische Behandlung der Knickdeterminante führt in allen Fällen auf unübersichtliche Ausdrücke, aus denen die Knicklasten nicht explizit bestimmt werden können. Die Berechnung erfolgt also ausgehend von der analytisch exakten Übertragungsmatrix numerisch durch iterative Annäherung. Zur Untersuchung der Auswirkungen unterschiedlicher Randbedingungen und Fugensteifigkeiten auf die jeweilige Knicklast wird in diesem Kapitel ein Beispiel aus den Erläuterungen zur DIN 1052 /BEU89/ aufgegriffen, welches auch schon in früheren Veröffentlichungen /MÖH71/ /TAN84/ verwendet wurde. Die Allgemeingültigkeit der aus diesem Beispiel ableitbaren Aussagen ist insofern eingeschränkt, als unterschiedliche Geometrie- und Steifigkeitsverhältnisse der Teilquerschnitte nicht berücksichtigt sind. Anhand früherer Untersuchungen /NAT87.1/ können diese Einflüsse jedoch mit ausreichender Zuverlässigkeit abgeschätzt werden. Der Kern der hier gemachten Aussagen bleibt jedoch unberührt.

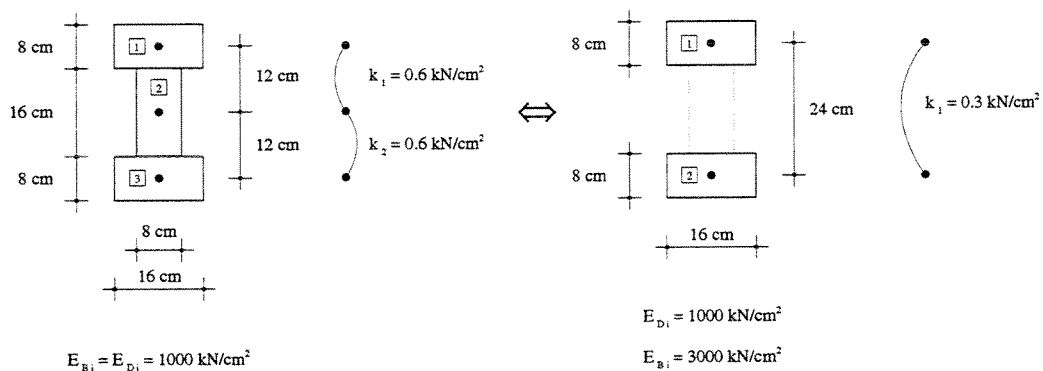


Bild 5.2-1. Dreiteiliger Verbundquerschnitt nach /BEU89/ S. 82 und äquivalenter, zweiteiliger Verbundquerschnitt zur Berechnung der Knicklasten des Stabes von 6.00 m Länge

Als Beispiel wird ein dreiteiliger, doppelsymmetrischer Verbundquerschnitt berechnet, dessen originale Abmessungen und Steifigkeiten in **Bild 5.2-1** angegeben sind. Dort sind außerdem die Kennwerte des äquivalenten, zweiteiligen Verbundquerschnittes angeschrieben. Diese ergeben sich aus der Forderung, daß nicht nur die Koeffizienten des charakteristischen Polynoms sondern auch deren Zusammensetzung gemäß **Bildungsgesetz Kapitel 3.2** für beide Querschnitte identisch sein müssen. Beim reinen Biegeproblem wird lediglich die Übereinstimmung der Koeffizienten selbst gefordert. Die sich aus dieser Forderung ergebenden Umrechnungen können /NAT87.1/ entnommen werden. Bei normalkraftbeanspruchten Querschnitten führt die o. g. zusätzliche Forderung dazu, daß rein rechnerisch nach Biege- und Normalkraftdehnungs-Elastizitäts-Modul unterschieden werden muß. Eine weitere Verschärfung dahingehend, daß auch die Koeffizientenmatrix des zugrunde liegenden DGL-Systems in Operatoranschreibweise identisch zu sein habe, ist nicht nötig. Wie Vergleichsrechnungen zeigten, wäre in diesem Fall zusätzlich zur Unterscheidung der E-Moduln auch der innere Hebelarm des zweiteiligen Verbundquerschnittes gegenüber dem Originalquerschnitt zu verändern. An den Ergebnissen der Berechnungen -auch bei gleichzeitig wirksamer Querbelastung- ändert diese strengstmögliche Formulierung der Äquivalenz jedoch nichts.

Durch die Angabe äquivalenter Querschnittskennwerte ist die Übertragungsmatrix des zweiteiligen, druckbelasteten Verbundelementes nach **Kapitel 5.1** auch für das dreiteilige, doppelsymmetrische Verbundelement verwendbar. Dabei wird stillschweigend vorausgesetzt, daß beide Fugenverschiebungs- und Normalkraftfunktionen des dreiteiligen Verbundelementes gleich sind. Alle Randbedingungen des dreiteiligen Querschnittes, welche einen unterschiedlichen Verlauf dieser Funktionen bewirken, können bei der Reduktion auf den zweiteiligen Querschnitt also nicht berücksichtigt werden. Zur systematischen Ableitung der Knickfälle sind zunächst die möglichen Kombinationen homogener Zustandsgrößen als Randbedingungen für den zweiteiligen Verbundquerschnitt zu definieren. Anschließend sind die möglichen Kombinationen zweier Randbedingungen für den Verbundstab zu untersuchen.

Nach den Ausführungen in **Kapitel 4** benötigt man zur vollständigen Beschreibung des Spannungs- und Verformungszustandes eines zweiteiligen Verbundquerschnittes sechs Zustandsgrößen. Die Definition der Randbedingungen erfolgt also über Kombinationen jeweils dreier Zustandsgrößen, wobei unterschiedliche Ordnung gleicher Elemente nicht berücksichtigt wird. Von den zwanzig möglichen Kombinationen entfallen diejenigen, in denen konjugierte Zustandsgrößen auftreten. Mit dieser Einschränkung verbleiben lediglich acht gültige Kombi-

nationen. Zusätzliche homogene Randbedingungen und damit für diese Untersuchung interessierende Kombinationen entstehen durch sinnvolle Zusammenfassungen linear unabhängiger Zustandsgrößen zu linear abhängigen Zustandsgrößen. Für den zweiteiligen Verbundquerschnitt lassen sich auf diese Weise zwei neue Zustandsgrößen ableiten. Der Differenz aus Steigung der Durchbiegungsfunktion und bezogener Fugenverschiebung wird als konjugierte Zustandsgröße die Differenz aus Gesamtmoment und Normalkraftmoment zugeordnet. Diese beiden Zustandsgrößen treten in einer Kombination von Zustandsgrößen zur Definition von Randbedingungen immer gemeinsam auf, so daß bei insgesamt sechs Zustandsgrößen lediglich zwei zusätzliche Kombinationen möglich sind. Insgesamt sind also zehn mechanisch sinnvolle Kombinationen von Zustandsgrößen als Randbedingungen zu berücksichtigen. Für den äquivalenten dreiteiligen Querschnitt wären bereits sechsundzwanzig Kombinationen zu beachten, da in diesem Fall in den beiden Fugen unterschiedliche Bedingungen möglich sind.

Für den einfachen Verbundstab ohne Zwischenbedingungen erhält man damit hundert Kombinationen von Randbedingungen. Fünfundvierzig dieser Kombinationen entfallen wegen Symmetrie, so daß fünfundfünfzig verbleiben. Neunzehn Kombinationen davon repräsentieren ein verschiebliches System und sind damit ungültig, drei der verbleibenden Kombinationen sind nur bedingt in Abhängigkeit von der Fugensteifigkeit gültig. Dreiunddreißig Kombinationen sind uneingeschränkt gültig.

In Tab. 5.2-1 sind alle möglichen Randbedingungen und deren Kombinationen für den zweiteiligen Verbundstab eingetragen. Zum Vergleich ist in Tab. 5.2-2 das entsprechende Schema für den homogenen Stab dargestellt. Die Gruppierung der Randbedingungen für den zweiteiligen Verbundquerschnitt ist so vorgenommen, daß bei Annahme einer starren Fuge der Übergang zu den Eulerfällen der vergleichbaren Kombination des homogenen Stabes gewährleistet ist. Die Nummer des Eulerfalles dieser Referenzkombination ist in Tab. 5.2-3 eingetragen.

Da im Holzbau üblicherweise der Stabilitätsnachweis für einen Verbundträger mit Hilfe einer effektiven, über die Stablänge konstanten Biegesteifigkeit wie für den homogenen Stab geführt wird, können die genauen Randbedingungen des Verbundstabes nicht berücksichtigt werden. Die Knicklasten liegen bei dieser Berechnungsweise zwischen den Knicklasten, welche mit der Summe der Eigenbiegesteifigkeiten der Teilquerschnitte bzw. der maximal möglichen Biegesteifigkeit bestimmt werden können. Die beiden Extremwerte für den Beispielquerschnitt und die unterschiedlichen Randbedingungen des homogenen Ersatzstabes sind in Tab. 5.2-4 eingetragen. Um abschätzen zu können, ob und in welcher Größenordnung Abweichungen

Rand- bedingungen	① $w = 0$ $w' = 0$	② $w = 0$ $M = 0$	③ $V = 0$ $w' = 0$	④ $V = 0$ $M = 0$
Symbol				
	●			symmetrisch
	●	●		
	●	●	×	
	●	×	×	×

Tab. 5.2-2. Kombination möglicher Randbedingungen für den homogenen Ersatzstab

Rand- bedingungen	① $w = 0$ $w' = 0$	② $w = 0$ $M = 0$	③ $V = 0$ $w' = 0$	④ $V = 0$ $M = 0$
Symbol				
	IV			symmetrisch
	III	II		
	II	I	×	
	I	×	×	×

Tab. 5.2-3. Nummer der Eulerfälle für den homogenen Ersatzstab

Randbedingungen	① $w = 0$ $w' = 0$	② $w = 0$ $M = 0$	③ $V = 0$ $w' = 0$	④ $V = 0$ $M = 0$
Symbol				
	$\frac{4492 \text{ kN}}{449 \text{ kN}}$		Werte für $k > \infty$ Werte für $k > 0$	
	$\frac{2351 \text{ kN}}{235 \text{ kN}}$	$\frac{1123 \text{ kN}}{112 \text{ kN}}$	symmetrisch	
	$\frac{1123 \text{ kN}}{112 \text{ kN}}$	$\frac{281 \text{ kN}}{28 \text{ kN}}$	×	
	$\frac{281 \text{ kN}}{28 \text{ kN}}$	×	×	×

Tab. 5.2-4. Knicklasten aus effektiver Biegesteifigkeit des homogenen Ersatzstabes bei extremen Fugensteifigkeiten

von der genaueren Berechnung auftreten, wurden für alle gültigen Kombinationen von Randbedingungen die Knicklasten bei unterschiedlichen Fugensteifigkeiten berechnet. Die Ergebnisse einiger Berechnungsläufe sind in Tab. 5.2-6 und Tab. 5.2-7 eingetragen. Die Berechnungen mit extrem großen Fugensteifigkeiten liefen in allen Fällen trotz unterschiedlicher Konvergenz auf die Grenzwerte der jeweiligen Gruppen hinaus. Die Grenzwerte für extrem geringe Fugensteifigkeiten sind dagegen nicht regelgemäß. In Tab. 5.2-5 sind die Nummern der Eulerfälle angegeben, wie sie sich aus den jeweiligen Grenzwerten ergeben. Neben den Grenzwerten gruppenfremder Eulerfälle werden bei vernachlässigbarer Fugensteifigkeit auch Grenzwerte angestrebt, die nicht mit den herkömmlichen Eulerfällen übereinstimmen. Diese 'neuen Eulerfälle' erhalten die Zusatzbezeichnung 'b'. Durch eingehendere Untersuchungen des Verbundstabes ohne Verdübelung können außer den bekannten Knickbedingungen für die Eulerfälle I bis IV auch diejenigen für die Eulerfälle Ib bis IVb direkt angegeben werden.

$$\text{Euler I : } \cos \varepsilon = 0$$

$$\text{Euler Ib : } \varepsilon \tan \varepsilon = \frac{\alpha^2}{1 - \alpha^2}$$

$$\text{Euler II : } \sin \varepsilon = 0$$

$$\text{Euler IIb : } \frac{\tan \varepsilon}{\varepsilon} = - \frac{1 - \alpha^2}{\alpha^2}$$

$$\text{Euler III : } \frac{\tan \varepsilon}{\varepsilon} = 1$$

$$\text{Euler IIIb : } \frac{\tan \varepsilon}{\varepsilon} = \frac{\alpha^2}{\alpha^2 + \varepsilon^2 (1 - \alpha^2)}$$

$$\text{Euler IV : } \sin \varepsilon / 2 = 0$$

$$\text{Euler IVb : } \frac{\varepsilon \sin \varepsilon}{\cos \varepsilon - 1} = \frac{2 \alpha^2}{1 - \alpha^2}$$

$$\text{mit } \varepsilon^2 = \frac{P \ell^2}{\sum E_i I_i}$$

$$\text{und } \alpha^2 = \frac{B_s}{B}$$

Gl. 5.36

Mit Hilfe der Knickbedingungen kann gezeigt werden, daß die Knicklasten der b-Fälle im gleichen Verhältnis zueinander stehen wie diejenigen der originalen Eulerfälle. Ist also z. B. das Verhältnis zwischen den Knicklasten der Eulerfälle II und IIb bekannt, so können alle anderen Knicklasten direkt bestimmt werden. In Bild 5.2-2 ist dieses Verhältnis in Abhängigkeit vom Geometrie- und Steifigkeitsparameter α^2 aufgezeichnet. Man erkennt, daß die Knicklasten beider Fälle sich mit zunehmendem α^2 annähern. Im Holzbau ist für zweiteilige zusammengesetzte Querschnitte der Bereich von $\alpha^2=0.65$ bis $\alpha^2=0.8$ von Interesse. Der Wert $\alpha^2=1$ gilt für alle zweiteilige Querschnitte, bei denen die Eigenbiegesteifigkeit der Teilquerschnitte gegenüber der Gesamtbiegesteifigkeit vernachlässigt

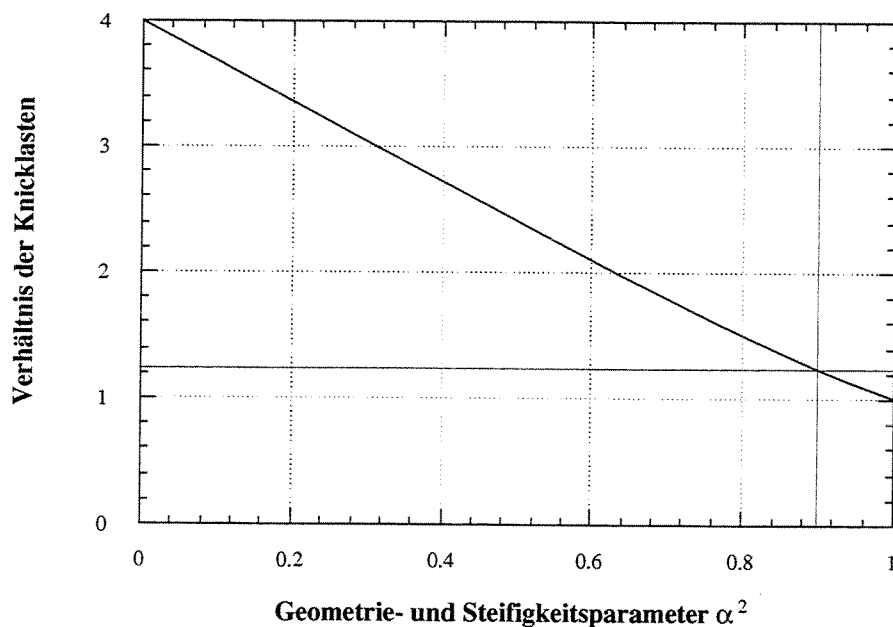


Bild 5.2-2. Verhältnis der Knicklasten für die Eulerfälle II und IIb in Abhängigkeit vom Geometrie- und Steifigkeitsparameter α^2

bar ist, wie das beispielsweise für Sandwichprofile angenommen wird. Zu diesem Sonderfall, der eine Analogie zur Berechnung des homogenen, schubelastischen Balkens ermöglicht, liegen bereits umfangreiche Untersuchungen vor /WIE68/ /HEG79/ /ROM84/ /KOL86/ /DAV87/ /AIC89/ /ALQ89/.

Die Auswertung des Diagramms für das Anwendungsbeispiel ergibt mit $\alpha^2=0.9$ einen Verhältniswert von 1.2268, d. h. eine Abminderung der Knicklast um ca. 18 % gegenüber der Referenzknicklast. Im Bezug auf das Berechnungsbeispiel erhält man im Falle einer unverdübelten Fuge als Grenzwerte folgende Knicklasten:

Euler I : 28 kN	Euler Ib : 23 kN
Euler II : 112 kN	Euler IIb : 92 kN
Euler III : 235 kN	Euler IIIb : 191 kN
Euler IV : 449 kN	Euler IVb : 367 kN

Die oberen Grenzwerte bei starrer Fuge können Tab. 5.2-3 entnommen werden. Somit sind alle Grenzwerte für die Extreme der Fugensteifigkeit bekannt. Bei der praktischen Bemessung von Verbund-Druckstäben werden die verschiedenen Randbedingungen in der Regel grob erfaßt /CLA55/ /HEG84/ /GOP91/ /GIR91/, d. h. im günstigsten Fall wird die Knicklast der Referenzkombination der entsprechenden Gruppe für den homogenen Stab

Fugensteifigkeit k [kN/cm ²]	0.01	0.60	5.00	25.00
Eulerfall				
I	$\frac{3.23}{0.07}$	$\frac{2.49}{0.77}$	$\frac{1.40}{0.58}$	$\frac{1.09}{0.64}$
II	$\frac{3.19}{0.02}$	$\frac{1.79}{0.54}$	$\frac{1.11}{0.37}$	$\frac{1.02}{0.44}$
III	$\frac{1.55}{0.48}$	$\frac{0.93}{0.49}$	$\frac{0.75}{0.62}$	$\frac{0.87}{0.68}$
IV	$\frac{0.98}{0.25}$	$\frac{0.59}{0.27}$	$\frac{0.53}{0.42}$	$\frac{0.76}{0.44}$

Tab. 5.2-8. Verhältnis der betragsgrößten und -kleinsten Knicklast innerhalb einer Gruppe zur Referenzknicklast des homogenen Druckstabes mit ideeller Biegesteifigkeit

mit ideeller Biegesteifigkeit angesetzt. Die Referenzknicklast kann so nach den Angaben in der Norm SIA 164 /SIA81/ oder DIN 1052 /DIN88/ berechnet werden. In Tab. 5.2-8 sind die Verhältnisse der betragsgrößten und -kleinsten Knicklast innerhalb einer Gruppe bezogen auf die Referenzknicklast bei verschiedenen Fugensteifigkeiten zusammengestellt.

Man erkennt anhand der zum Teil großen Abweichungen, daß die konstruktive Ausbildung der Anschlüsse eines zusammengesetzten Druckstabes einen erheblichen Einfluß auf die anzusetzende Knicklast haben kann. Wenn auch eine allgemeine Interpretation schwierig ist, so kann doch vermerkt werden, daß die Knicklasten zum überwiegenden Teil deutlich überschätzt werden. Die Fälle, in welchen die Knicklast deutlich unterschätzt wird, sind dagegen auf den Bereich sehr geringer Fugensteifigkeiten beschränkt. Da in der Regel bei sehr geringen Fugensteifigkeiten und wegen der im Holzbau häufig anzutreffenden diskreten Verteilung der stabförmigen Verbindungsmittel das Knicken der Einzelstäbe beachtet werden muß, können diese Reserven jedoch kaum genutzt werden.

Auf die Bedeutung der konstruktiven Ausbildung der Anschlüsse eines zusammengesetzten Druckstabes für das Stabilitätsproblem wurde bereits hingewiesen. Die Vermutung liegt nahe und sollte Gegenstand weitergehender Untersuchungen sein, daß auch die Berechnung des Spannungsproblems nach Theorie II. Ordnung stark von den genauen Randbedingungen des Verbundstabes abhängt. Weiterhin ist zu beachten, daß auch eine in der fiktiven Schwerachse des Verbundquerschnittes wirkende, äussere Normalkraft je nach konstruktiver Ausbildung der Lasteinleitung in diesem Querschnitt Querbelastungen erzeugen kann. Dementsprechend ist nicht mehr das Stabilitätsproblem sondern das Spannungsproblem zu behandeln /BRY87/ /KAM87/ /KAM88/.

Häufig wird die Kenntnis der Knicklast zur vereinfachten Berechnung des Spannungsproblems verwendet, indem die nach Theorie I. Ordnung ermittelten Momente und Durchbiegungen mit einem Erhöhungsfaktor versehen werden, in den das Verhältnis zwischen der mit einem Sicherheitswert belegten äusseren Normalkraft und der Knicklast eingeht. Für sinusförmige Belastung und einfache, homogene Randbedingungen liefert dieses Vorgehen korrekte Ergebnisse. Durch andersartige Belastungen auftretende Fehler können mit dem sogenannten Dischingerfaktor korrigiert werden. Stichprobenweise wurde dieses Verfahren für die häufig vorkommende Randbedingungskombination 2.2 / 2.2 gemäß Tab. 5.2-6 auch mit mehrteiligen Verbundquerschnitten getestet. Die Ergebnisse weichen

auch für Gleichstreckenlast nur unbedeutend von den genaueren Berechnungen ab und erweisen sich damit als brauchbar. Es sei jedoch darauf hingewiesen, daß andere Randbedingungen die Berechnungsgenauigkeit erheblich beeinträchtigen können. Auch zur Bestimmung der Spannungen in den Teilquerschnitten und der Beanspruchungen der Verbindungsmittel sind genauere Berechnungen erforderlich. Für den mehrteiligen Verbundquerschnitt ist zwar die Knicklast und die effektive Biegesteifigkeit nach den Angaben in Kapitel 6.5 relativ einfach zu ermitteln, doch kann mit diesen Kennwerten lediglich das globale Verhalten des Verbundstabes als einfach gelagerter Stab näherungsweise erfaßt werden.

In diesem Zusammenhang sei ein Bauschadensfall /BEC69.1/ erwähnt, welcher seinerzeit in der Fachpresse heftig diskutiert wurde /ZÄH68.1/ /MÖH68.2/ /ZÄH68.2/ /MÖH68.3/. Auf dem Hintergrund der in diesem Kapitel aufgezeigten Sachverhalte sollen hier einige andere Aspekte zur Diskussion gestellt werden. Leider sind die Angaben zu dem eingestürzten Tragwerk in der Literatur nicht so vollständig, daß eine umfassende Nachrechnung möglich wäre, doch seien anhand der vorliegenden Informationen einige qualitative Aussagen erlaubt.

Schadensursache war nach Meinung der Autoren das Versagen der Knickaussteifung für den Druckgurt eines Bretterbinders, für welche normal zur Binderrichtung aufgenagelte Schalung herangezogen wurde. Die Diskussion konzentrierte sich auf die Frage, ob und in welchem Maße eine solche Schalung aussteifende Wirkung besitzt.

Die Autoren /BEC69.1/ gelangen nach Untersuchungen am gelenkig gelagerten, drehfedernd gestützten, sowohl homogenen als auch nachgiebig zusammengesetzten Druckstab zu der Einsicht, daß die Schalung im Bereich der aus Sicherheitsgründen in Frage kommenden Stützweiten so gut wie keine aussteifende Wirkung zeigt und die zu erwartende Knicklast nur unwesentlich beeinflußt. Zur Berechnung der maßgebenden, über die Binderlänge konstanten Biegesteifigkeit des vierteiligen, genagelten Druckgurtes verwenden die Autoren die generalisierte Bernoulli-Hypothese.

Diese vereinfachende Annahme für den Dehnungsverlauf im Verbundquerschnitt ermöglicht zwar die Anwendung der für den zweiteiligen Verbund gültigen Berechnungsgleichungen, wirkt sich im vorliegenden Fall aber dahingehend aus, daß die ideelle Biegesteifigkeit um ca. 26% überschätzt wird. Die Tendenz zur Überschätzung wurde

durch Vergleichsrechnungen auch für andere Verbundquerschnitte bestätigt. Inwieweit die tatsächliche Stützweite des Verbundträgers oder aber -wie vom Autor proklamiert- der Abstand der Wendepunkte der a priori nicht bekannten Knickbiegeline für die Berechnung der ideellen Biegesteifigkeit anzusetzen ist, sei dahingestellt. Aufgrund von Untersuchungen an normalkraftfreien Durchlaufträgern /NAT87.1/ liegt jedoch die Vermutung nahe, daß ein Ansatz dieser fiktiven Stützweite zu mehr oder weniger zufälligen Ergebnissen führt, da das zugrunde liegende Modell des gelenkig gelagerten Einfeldträgers die tatsächlichen Verhältnisse nicht adäquat beschreiben kann.

Neben der nur sehr groben Erfassung der Randbedingungen liegt hier also eine weitere Ursache für mögliche Fehleinschätzungen der vorhandenen Knicklast des Systems und damit auch der aufzunehmenden Aussteifungskräfte. Aber auch die Ausführungen zur aussteifenden Wirkung der Schalung müssen hinterfragt werden.

In /BEC69.1/ wird zur Berücksichtigung der aussteifenden Wirkung der auf den Gurt genagelten Bretter die Drehfedersteifigkeit lediglich mit der Steigung der Durchbiegungsfunktion d. h. mit der Verdrehung der Teilquerschnitte gekoppelt. Die Kinematik bei der Verbiegung des vierteiligen Verbundquerschnittes wird dabei jedoch außeracht gelassen. Wie den Ausführungen im Anhang 4 der vorliegenden Arbeit entnommen werden kann, liegt bei Verbundquerschnitten, welche durch richtungstreue Schalung ausgesteift werden, zusätzlich eine Kopplung der Drehfedersteifigkeit mit der Fugenverschiebung zwischen denjenigen Teilquerschnitten vor, in welche das Nagelpaar eingeschlagen ist. Die Gleichgewichtsangabe Gl. 2.25 muß im Falle einer drehfedernden Stützung erweitert werden.

$$- w^{IV} \sum_{i=1}^n E_i I_i + \left(N + \sum_{i=1}^n k_{DMi} + \sum_{j=1}^m k_{DNj} \right) w'' + \sum_{j=1}^m (k_j e_j - k_{DNj} / e_j) u'_j = - q$$

Gl. 5.37

Da im vorliegenden Fall in jeden Teilquerschnitt nur je ein Nagel gesetzt wurde, sind diese selbst nicht drehfedernd gestützt bzw. die anzusetzende Drehfedersteifigkeit k_{DMi} ist gleich Null. Die drehfedernde Stützung wird also nur über den Verbundquerschnitt erreicht. Wie aus Gl. 5.37 hervorgeht, ist wegen der Kopplung der Drehfedersteifigkeit mit der Fugenverschiebung eine Abminderung der eigentlich in der Fuge vorhandenen Fugensteifigkeit vorzunehmen. Im vorliegenden Fall ist noch zu beachten, daß die Drehfedersteifigkeit durch die Verbindung der Teilquerschnitte 1 und 4 gemäß Bild 5.2-3 erzielt wird. Es liegt also ein statisch unbestimmter Verbundquerschnitt vor, der durch Substi-

tution der entsprechenden Fugenverschiebung statisch bestimmt gemacht werden muß. Mit der Substitution

Gl. 5.38

$$-\frac{k_{\text{DN1,4}}}{e_{1,4}} u'_{1,4} = -\frac{k_{\text{DN1,4}}}{e_{1,4}} (u'_1 + u'_2 + u'_3)$$

kann der letzte Term der linken Seite von Gl. 5.37 umgeschrieben werden.

Gl. 5.39

$$\sum_{j=1}^3 (k_j e_j - k_{\text{DN1,4}} / e_{1,4}) u'_j = \sum_{j=1}^3 \bar{k}_j e_j u'_j$$

Setzt man die in /BEC69.1/ angegebenen Werte ein, so erhält man die ideelle Fugensteifigkeit.

Gl. 5.40

$$\bar{k}_j = k_j - \frac{k_{\text{DN1,4}}}{e_{1,4} e_j} = \frac{14}{13} - \frac{2 \cdot 4,5^2 \cdot 9}{12 \cdot 9 \cdot 3} = -0,0481 \left[\frac{\text{kN}}{\text{cm}^2} \right]$$

Dieses Ergebnis verdeutlicht, daß die angesetzte Fugensteifigkeit zur Berechnung der ideellen Biegesteifigkeit des Verbundträgers voll aufgehoben ist. Es wird ferner deutlich, daß wegen der komplexen kinematischen Zusammenhänge mit einer derart stark vereinfachten Berechnung nicht mehr die Sicherheit gewährleistet werden kann, wie sie für stabilitätsgefährdete Konstruktionen zu fordern ist. Durch das 'Weiterhangeln' von einer vereinfachenden Annahme zur nächsten können am Ende inkonsistente, mechanische Modelle entstehen, welche die tatsächlichen Sachverhalte nur ungenügend zu beschreiben in der Lage sind. Im Bezug auf den untersuchten Schadensfall ist ohne eingehendere Stabilitätsuntersuchungen an dem hier vorgestellten oder anderen Modellen deshalb sogar die Schlußfolgerung zulässig, daß die aussteifende Wirkung der Schalung besser war als berechnet und der Schaden durch den zu weichen Obergurt des Binders verursacht wurde.

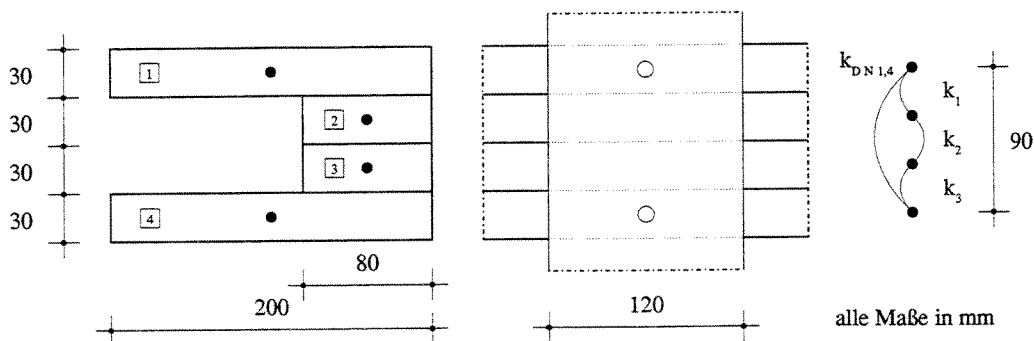


Bild 5.2-3. Druckgurt des Bretterbinders und Befestigung der Schalung nach /BEC69.1/

6 Besondere Aspekte der Berechnung von Verbundträgern

6.1 Behandlung extremer Querschnitts- und Steifigkeitsverhältnisse

Das Konzept zur Berechnung von Verbundträgern mit beliebig gefügten Querschnitten baut im wesentlichen auf die in **Kapitel 3** geschilderten Zusammenhänge auf. Die mechanischen Effekte starrer oder unverdübelter Fugen, Symmetrien, Verzweigungen und Zellenbildungen des Querschnittes sind genau dann ausreichend berücksichtigt, wenn bei der Ableitung der Übertragungsmatrix eines solchen Verbundelementes nur die relevanten Eigenwerte und Zustandsgrößen im Fundamentalsystem berücksichtigt werden.

Die Koeffizienten des charakteristischen Polynoms **Gl. 3.11** werden für ein vorgelegtes Problem aus dem zugehörigen Differentialgleichungs-System bestimmt. Nicht relevante Eigenwerte werden vorzeitig erkannt und gehen somit nicht in die Bildung des charakteristischen Polynoms ein. Die oben genannten Besonderheiten der Querschnittsausbildung machen sich dabei auf unterschiedliche Weise bemerkbar und werden in der anschließenden Berechnung auch unterschiedlich berücksichtigt.

Einen Sonderfall stellt in diesem Sinne der Sandwichverbund dar. Dieser geht in die Berechnung der Koeffizienten des charakteristischen Polynoms nicht ein. Da für Sandwichverbund die Summe der Eigenbiegesteifigkeiten der Teilquerschnitte verschwindet, entfallen auch alle mit diesem Faktor behafteten Anteile in **Gl. 3.11**. Die weitere Berechnung unterscheidet sich nur insofern von vergleichbaren Verbundquerschnitten mit Eigenbiegesteifigkeiten der Teilquerschnitte, als im Zustandsvektor **Gl. 4.05** das Gesamtmoment M und die Steigung der Durchbiegungsfunktion w' entfallen.

Starre Fugen machen sich durch extrem große Eigenwerte bemerkbar. Die Eigenvektoren bzw. die Kopplungskoeffizienten der betreffenden Normalkraftfunktion normiert auf die Durchbiegungsfunktion streben gegen einen analytisch berechenbaren Kennwert des ideal starren Verbundquerschnittes, die Kopplungskoeffizienten der Fugenverschiebungsfunktionen streben gegen Null. Mit Hilfe dieser Indikatoren können starre Fugen identifiziert und eliminiert werden, indem für den de facto vorliegenden 'neuen' Teilquerschnitt aus den über die betreffende Fuge verbundenen Teilquerschnitten die benötigten Kennwerte ermittelt und in die Berechnung eingeführt werden.

Unverdübelt Fugen machen sich dagegen durch einen gegen Null strebenden Eigenwert und gleichzeitig gegen Null gehende Kopplungskoeffizienten für die entsprechende Normalkraftfunktion bemerkbar. Im allgemeinen sind keine besonderen Maßnahmen erforderlich, da die Berechnung sich auch mit sehr geringen Fugenverschiebungen als numerisch stabil erweist. Soll jedoch explizit eine Fuge als unverdübelt definiert werden, so ist die entsprechende Zeile und Spalte im Differentialgleichungs-System Gl. 3.17 zu streichen.

Im Falle einer unverdübelt Fuge ist es unter Umständen erforderlich, die abgeleitete Übertragungsmatrix zu erweitern, um bestimmte Randbedingungen für das Element erfüllen zu können. Soll beispielsweise für einen unverdübelt, zweiteiligen 'Verbundquerschnitt' eine starre Endverdübelung berücksichtigt werden, so ist die eigentlich vierreihige Matrix in eine sechsreihige zu überführen. Durch 'Auseinanderschieben' der bekannten Werte und Einfügen der trotz unverdübelt Fuge gültigen kinematischen Beziehung erhält man die gewünschte Übertragungsmatrix. In Kapitel 5.1 ist beispielsweise die Übertragungsmatrix für den unverdübelt, zweiteiligen Querschnitt angegeben (Gl. 5.29 bis Gl. 5.35).

Symmetrien in der Querschnittsausbildung führen zu linearen Abhängigkeiten in den bestimmten Eigenwerten zugeordneten Eigenvektoren. Diese können ohne Schwierigkeiten erkannt und die entsprechenden Substitutionen durchgeführt werden. In Bild 6.1-1 sind die ursprünglich definierten und die in der Berechnung verbleibenden Teilverbunde eines sechs- und eines siebenreihigen Verbundquerschnittes gegenübergestellt.

Auch bei symmetrischen Verbundquerschnitten kann es unter Umständen erforderlich sein, die abgeleitete Übertragungsmatrix zu erweitern. Der Verbundquerschnitt des Beispiels in Kapitel 5.2 ist symmetrisch. Ein Element kann also mit einer sechsreihigen Übertragungsmatrix Gl. 6.01 berechnet werden. Sollen jedoch für den Rand z. B. unterschiedliche Normalkraft-

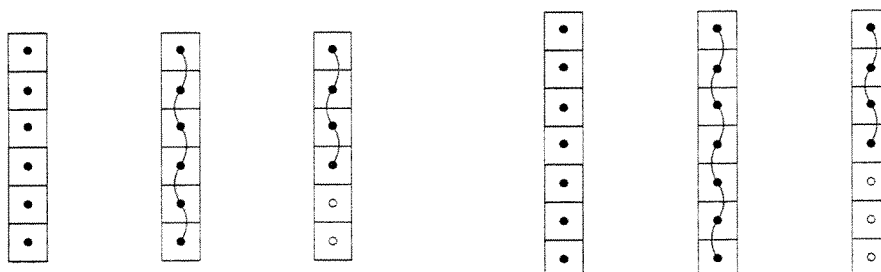


Bild 6.1-1. Reduktion des zu berechnenden Verbundquerschnittes durch Symmetrie

einleitungen berücksichtigt werden, so muß eine achtreihige Matrix Gl. 6.02 entwickelt werden. Dieses geschieht unter ausschließlicher Verwendung der Elemente aus Gl. 6.01. Wegen der Gleichwertigkeit beider Fugen wird ein Teil der Werte halbiert.

$$\begin{bmatrix} 1 & t_{12} & t_{13} & t_{14} & t_{15} & t_{16} \\ 0 & t_{22} & t_{23} & t_{24} & t_{25} & \\ 0 & t_{32} & t_{33} & t_{34} & & \\ \hline 0 & t_{42} & t_{43} & & & \\ 0 & t_{52} & & & \text{symm.} & \\ 0 & & & & & \end{bmatrix}$$

Gl. 6.01

$$\begin{bmatrix} 1 & t_{12} & t_{13}/2 & t_{13}/2 & t_{14}/2 & t_{14}/2 & t_{15} & t_{16} \\ 0 & t_{22} & t_{23}/2 & t_{23}/2 & t_{24}/2 & t_{24}/2 & t_{25} & \\ 0 & t_{32} & t_{33} & 0 & t_{34}/2 & t_{34}/2 & & \\ 0 & t_{32} & 0 & t_{33} & t_{34}/2 & & & \\ \hline 0 & t_{42} & t_{43}/2 & t_{43}/2 & & & & \\ 0 & t_{42} & t_{43}/2 & & & \text{symm.} & & \\ 0 & t_{52} & & & & & & \\ 0 & & & & & & & \end{bmatrix}$$

Gl. 6.02

Symmetrien sind nicht immer so offensichtlich, wie in den Beispielen gezeigt. Um eine numerisch stabile Berechnung zu gewährleisten, müssen alle linearen Abhängigkeiten eliminiert werden. Als anschauliches Beispiel für eine nicht unmittelbar erkennbare Symmetrie sei die generalisierte Bernoulli-Hypothese genannt /HEI89/: durch genau abgestimmte Fugensteifigkeiten gelingt es, eine lineare Abhängigkeit zwischen allen Fugenverschiebungen zu erzeugen.

Verzweigungen des Querschnittes, soweit sie nicht zu einer Zellenbildung führen, sind im Sinne des vorgestellten Berechnungsverfahrens ohne besonderen Maßnahmen zu berücksichtigen. Grundlage hierfür ist die allgemeingültige Darstellung des Tragverhaltens mit Hilfe des Teilverbund-Modells. Wegen der eindeutigen Definition des primären und sekundären Teilquerschnittes eines Teilverbundes bzw. einer Fuge und der damit verbundenen Vorzeichenregelung bestehen keinerlei Einschränkungen bezüglich der Numerierung der Teilquerschnitte und Fugen. Pro Verzweigung entsteht jedoch eine lineare Abhängigkeit in den Teilverbund-Normalkräften, was zu einer Reduktion des Gleichungssystems führt. Die Information, welche der Normalkräfte zu substituieren ist, erhält man aus den Eigenvektoren. Für die weitere Berechnung bestehen ansonsten keine Unterschiede zum normalen Ablauf. Lediglich bei der Ermittlung der Schnittkräfte in den Teilquerschnitten muß die vorher eliminierte Normalkraft mit berücksichtigt werden.

Der Verbundquerschnitt ist als statisch unbestimmt anzusehen, wenn er teilweise oder ganz aus geschlossenen Querschnittszellen besteht. Mathematisch macht sich dieses Phänomen dadurch bemerkbar, daß maximal $n-1$ Eigenwerte des Differentialgleichungssystems Gl. 3.05 gefunden werden, also weniger als es der Anzahl von Fugen entsprechen würde. Mit Hilfe eines Suchalgorithmus' müssen die Zellen identifiziert und 'aufgebrochen' werden. Durch die Zellenbildung bestehen lineare Abhängigkeiten in den Fugenverschiebungen der an einer Zelle beteiligten Fugen. Durch Einsetzen der bekannten Abhängigkeiten kann das Differentialgleichungs-System Gl. 3.05 wiederum reduziert werden. In Bild 6.1-2 ist gezeigt, wie unter zusätzlicher Ausnutzung von Symmetrien ein vielzelliger Verbundquerschnitt auf einen verzweigten reduziert wird.

Mehrfache Verbindungen zweier Teilquerschnitte sind in diesem Zusammenhang als ein Sonderfall geschlossener Zellen anzusehen.

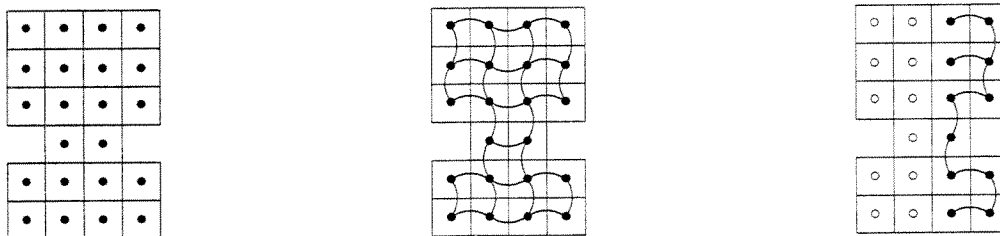


Bild 6.1-2. Verbundquerschnitt mit Zellenbildung und verbleibende Teilverbunde bei voller Ausnutzung der gegebenen Symmetrien

6.2 Behandlung von 'exzentrischen' Normalkräften

Eine der Grundannahmen der Berechnung von Verbundträgern mit beliebig gefügtem Querschnitt ist, daß eine eventuell wirkende Längskraft entsprechend der Dehnsteifigkeiten auf die Teilquerschnitte verteilt ist. In der praktischen Ausbildung von Detailpunkten, wie z. B. Stützenköpfe oder -fußpunkte, kann diese Forderung aber nicht immer erfüllt werden. Im Bestreben um eine möglichst realistische Modellisierung des Tragverhaltens muß also eine Möglichkeit gefunden werden, 'exzentrisch' angreifende Normalkräfte in der Berechnung zu berücksichtigen.

Als 'exzentrisch' werden hier alle Lasteinleitungen in den Verbundquerschnitt bezeichnet, die eine Abweichung von der oben genannten Grundannahme darstellen. Die 'Exzentrizität' kann in diesem Falle jedoch nicht explizit und qualitativ angegeben werden, sondern definiert sich über Kombinationen ausgleichender Randmomente, wie aus **Bild 6.2-1** ersichtlich.

Die 'Exzentrizität' wird also über die Superposition des Zustandes entsprechend der Grundannahme und den Lastfall Randmomente berücksichtigt. Rein rechentechnisch bedeutet dieses keinerlei Mehraufwand (siehe **Kapitel 6.3**).

Erfolgt die Lasteinleitung beidseitig in die gleichen Teilquerschnitte, so kann auch der Lastfall Temperaturdifferenz im betreffenden Teilverbunden Anwendung finden.

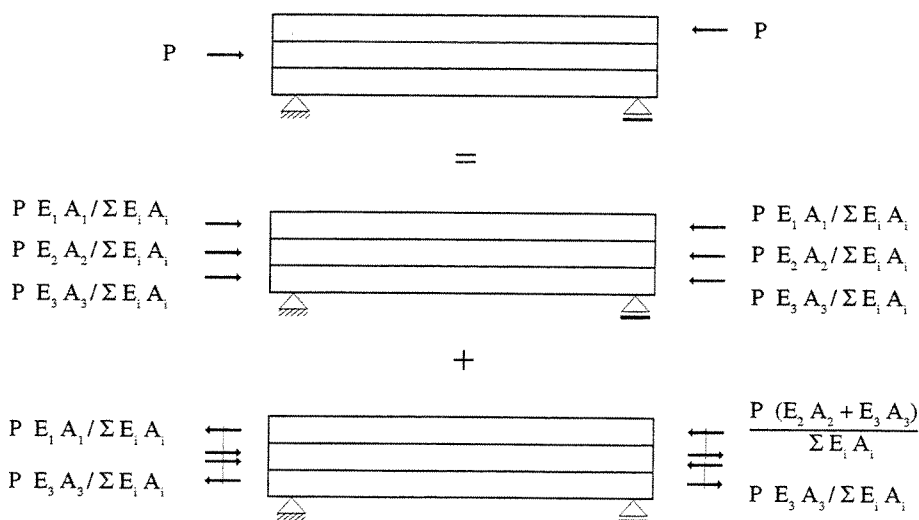


Bild 6.2-1. Berücksichtigung einer nicht den Berechnungsannahmen entsprechenden Einleitung der Längskraft am Beispiel eines dreiteiligen Verbundträgers

6.3 Kopplung verschiedener Elementtypen

Die Kopplung von Verbundelementen mit unterschiedlicher Anzahl von relevanten oder tatsächlichen Teilverbunden ist mit dem Übertragungsverfahren in seiner konventionellen Form nicht mehr effizient zu bewältigen, sondern erfordert eine flexiblere Rechentechnik [WUN67/ SAA81/ AVR82/ TES85]. Wegen der unterschiedlichen Größe der Übertragungsmatrizen ist deren direktes Ausmultiplizieren nicht mehr ohne größere Eingriffe in die Struktur der Matrizen möglich. Daher wird das rekursive Einsetzen der Bestimmungsgleichungen für die jeweiligen Elemente nach Gl. 4.04 unterbunden. Statt dessen werden alle Zustandsgrößen rechts der Kopplungsstellen in den Unbekanntenvektor aufgenommen. Der scheinbare Nachteil einer zum Teil erheblichen Vergrößerung des Gleichungssystems wird durch programmtechnisch leicht umsetzbare, an die verschiedensten Aufgabenstellungen optimal angepaßte und numerisch stabile Rechenabläufe mehr als kompensiert.

Die Gesamtübertragungsmatrix eines beliebigen Stabzuges kann mit Hilfe der je nach Problemstellung 'modifizierten' Punktmatrix gemäß Gl. 4.17 und der Übertragungsmatrizen T_p der gekoppelten Elemente dargestellt werden. In Gl. 6.03 sind die Belastungsvektoren, die Sprunggrößenvektoren, sowie alle Spaltenvektoren bekannter Zustandsgrößen auf die rechte Seite des Gleichungssystems geschrieben. Die dazu konjugierten und unbekanntes Zustandsgrößen werden durch eine Erweiterung des Unbekanntenvektor der linken Seite erfaßt.

Gegebenfalls müssen zur Berücksichtigung von Rand- oder Übergangsbedingungen, welche mit Hilfe anderer als der originalen Zustandsgrößen definiert sind, zusätzlich die Punktmatrizen nach Gl. 4.15 und Gl. 4.16 in die Berechnung eingeführt werden. Die erste Zeile von Gl. 6.03 kann entfallen, wenn am linken Rand des Bereiches keine Anfedern vorliegen. Bei gleichen Verhältnissen am rechten Rand geht die Punktmatrix in die Identitätsmatrix über. Erweiterungen des Gleichungssystems sind nur dann erforderlich, wenn Gleichsetzungen von Schnittgrößen eingearbeitet werden müssen. Dieses ist z. B. der Fall, wenn stumpfe, nicht kraftschlüssige Stöße von Brettlagen zu berücksichtigen sind (siehe Kapitel 9.3).

Zur Verdeutlichung der Zusammenhänge und zur Erläuterung dessen, was unter einer 'modifizierten' Punktmatrix zu verstehen ist, ist in Gl. 6.04 die Gesamtmatrix für den im Verbundquerschnitt abgestuften, symmetrischen Zweifeldträger (Bild 6.3-1) angegeben. Die ursprüngliche Punktmatrix ist hierbei durch die Entfernung der beiden mittleren Spalten verändert.

6.4 Ableitung der Steifigkeitsmatrix der FEM

Zur Ableitung von Steifigkeitsmatrizen der Finiten-Element-Methode in der Weggrößenformulierung können prinzipiell drei verschiedene Verfahrensweisen unterschieden werden:

- Ermittlung der Element-Steifigkeitsmatrix aus dem Fundamentalsystem von Lösungen nach Gl. 4.13
- Ermittlung der Element-Steifigkeitsmatrix aus der Übertragungsmatrix eines Elementes nach Gl. 4.14
- Ermittlung der System-Steifigkeitsmatrix eines Stabzuges aus der zugehörigen Gesamtmatrix nach Gl. 6.03.

Während die erstgenannte Möglichkeit sehr selten Anwendung findet /SAA81/ /HEI89/, wird die zweite Möglichkeit bevorzugt genutzt /AVR82/ /KNE91/. Die Autoren weisen dabei häufig auf numerische Schwierigkeiten bei der Durchführung der notwendigen Matrizeninversionen hin. Zur Lösung dieses Problems wird fast ausschließlich eine Begrenzung der Elementlänge empfohlen. Im Zusammenhang mit der Ableitung finiter Verbundelemente in der Weggrößenformulierung werden verschiedentlich Begrenzungen der Schubeinflußzahl λ empfohlen, wobei sich die Angaben /HEI89/ und /KNE91/ im wesentlichen decken. Indirekt wird aber auch in diesen Fällen die Elementlänge begrenzt, da die Schubeinflußzahl linear von der Elementlänge abhängt und ansonsten nur querschnittsbezogene Kennwerte enthält.

Aufgrund der im Sinne des Differentialgleichungs-Systems exakten Ansatzfunktionen nach Gl. 3.15 ist auch im Zusammenhang mit der Anwendung der FEM auf Verbundträger mit beliebig gefügten Querschnitten eine Berechnung ohne Fehlerausgleichs-Verfahren möglich, jedoch wird das in Kapitel 4 beschriebene Konzept zur Vermeidung von numerischen Schwierigkeiten nachhaltig geschwächt. Die numerische Stabilität bei Anwendung des im Rahmen dieser Arbeit spezifisch entwickelten Übertragungsverfahrens ist im wesentlichen durch die Trennung von querschnitts- und systembezogener Berechnung gewährleistet, so daß durch Einführung der Elementlänge zu Beginn der Berechnungen wesentliche Kontroll- und Korrekturmöglichkeiten verloren gehen. Des weiteren kann der Ablauf nicht so weitreichend schematisiert und somit auch günstig programmiert werden, wie es in diesem speziellen Fall der Berechnung von Verbundträgern mit beliebig gefügtem Querschnitt möglich ist.

Der Grundgedanke zur Anwendung eines Gesamtmatrix-Verfahrens wurde im Zusammenhang mit der Berechnung von Flächentragwerken entwickelt /WUN69/. Die Vorteile eines Umsteigens auf die FEM im Anschluß an eine Berechnung von Stabzügen mit Hilfe der TMM werden für die Berechnung von Stahlbetonrahmen genutzt /OLS86/. Das vorgestellte Verfahren /OLS86/ geht jedoch von Stabzügen ohne Zwischenbedingungen aus. Hierdurch ist das direkte Ausmultiplizieren der Übertragungsmatrizen nicht behindert. Will man jedoch ein möglichst allgemeingültiges Verfahren entwickeln, so ist auch der Umstieg auf die FEM an das Gesamtmatrix-Verfahren anzupassen.

Die Ermittlung der Element-Steifigkeitsmatrix aus dem Fundamentalsystem Gl. 4.13 kann in ähnlicher Weise wie die Ableitung der Übertragungsmatrix Gl. 4.14 beschrieben werden. Im Gegensatz zu Gl. 4.14 werden jedoch die Weggrößen am Elementanfang und an dessen Ende als bekannt vorausgesetzt, so daß die obere Hälfte der Fundamentalmatrix \mathbf{F} nach Gl. 4.13 für die Stellen $x=0$ und $x=\ell$ als Bestimmungsgleichung für den Koeffizientenvektor \mathbf{c} herangezogen werden. Es werden folgende Vereinbarungen getroffen:

Gl. 6.05

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_v(x) \\ \dots \\ \mathbf{F}_r(x) \end{bmatrix} \quad \tilde{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_v(0) \\ \dots \\ \mathbf{F}_v(\ell) \end{bmatrix} \quad \hat{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_r(0) \\ \dots \\ \mathbf{F}_r(\ell) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_v(x) \\ \dots \\ \mathbf{p}_r(x) \end{bmatrix} \quad \tilde{\mathbf{p}} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_v(0) \\ \dots \\ \mathbf{p}_v(\ell) \end{bmatrix} \quad \hat{\mathbf{p}} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_r(0) \\ \dots \\ \mathbf{p}_r(\ell) \end{bmatrix}$$

Die weiteren Definitionen in Gl. 6.06 können Gl. 6.07 entnommen werden. Die Berechnung der Steifigkeitsmatrix stellt sich damit folgendermaßen dar:

Gl. 6.06

$$\mathbf{v} = \tilde{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{c} + \tilde{\mathbf{p}} \quad \mathbf{f} = \hat{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{c} + \hat{\mathbf{p}}$$

$$\mathbf{c} = \tilde{\mathbf{F}}^{-1} \cdot \mathbf{v} - \tilde{\mathbf{F}}^{-1} \cdot \tilde{\mathbf{p}}$$

$$\mathbf{f} = \hat{\mathbf{F}} \cdot \tilde{\mathbf{F}}^{-1} \cdot \mathbf{v} + \hat{\mathbf{p}} - \hat{\mathbf{F}} \cdot \tilde{\mathbf{F}}^{-1} \cdot \tilde{\mathbf{p}}$$

$$\mathbf{f} = \underbrace{\hat{\mathbf{F}} \cdot \tilde{\mathbf{F}}^{-1}}_{\mathbf{K}} \cdot \mathbf{v} + \underbrace{\hat{\mathbf{p}} - \hat{\mathbf{F}} \cdot \tilde{\mathbf{F}}^{-1} \cdot \tilde{\mathbf{p}}}_{\mathbf{s}} \quad \mathbf{f} = \mathbf{K} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{s}$$

Zur Bestimmung der endgültigen Form der Steifigkeitsmatrix ist zu beachten, daß für die Zustandsgrößen bei der Ableitung der Übertragungsmatrix eine andere Vorzeichenkonvention gilt. In Bild 6.4-1 und Bild 6.4-2 sind daher exemplarisch für einen zweiteiligen Verbundquerschnitt die Elemente mit den Konventionen beider Verfahren gegenübergestellt. Unter Berücksichtigung dieser Zusammenhänge wird eine zur Hauptdiagonalen symmetrische Element-Steifigkeitsmatrix abgeleitet. Für den zweiteiligen Verbundquerschnitt ohne Längskraftbelastung ist die Steifigkeitsmatrix in Anhang 5 analytisch angegeben.

Zur indirekten Ermittlung der Element-Steifigkeitsmatrix aus der Übertragungsmatrix wird deren Submatrix \mathbf{t}_{12} invertiert. Alle Submatrizen ergeben sich anschließend durch Matrizenmultiplikationen. Nach Umformungen zur Berücksichtigung der unterschiedlichen Vorzeichenkonventionen erhält man wiederum eine symmetrische Steifigkeitsmatrix. Bezüglich des numerischen Verhaltens ist es unerheblich, ob die Steifigkeitsmatrix direkt aus dem Fundamentalsystem oder indirekt aus der Übertragungsmatrix berechnet wird.

$$\mathbf{z}_\ell = \mathbf{T}_\ell \cdot \mathbf{z}_0 + \mathbf{r}_\ell$$

Gl. 6.07

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{f} \end{bmatrix}_\ell = \begin{bmatrix} \mathbf{t}_{11} & \mathbf{t}_{12} \\ \mathbf{t}_{21} & \mathbf{t}_{22} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{f} \end{bmatrix}_0 + \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{v}} \\ \tilde{\mathbf{f}} \end{bmatrix}_\ell$$

$$\mathbf{f} = \mathbf{K} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{s}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{k}_{11} & \mathbf{k}_{12} \\ \mathbf{k}_{21} & \mathbf{k}_{22} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \mathbf{v}_0 \\ \mathbf{v}_\ell \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{s}_0 \\ \mathbf{s}_\ell \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_0 \\ \mathbf{f}_\ell \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{k}_{11} = -\mathbf{t}_{12}^{-1} \cdot \mathbf{t}_{11}$$

$$\mathbf{k}_{12} = \mathbf{t}_{12}^{-1}$$

$$\mathbf{k}_{21} = \mathbf{t}_{21} - \mathbf{t}_{22} \cdot \mathbf{t}_{12}^{-1} \cdot \mathbf{t}_{11}$$

$$\mathbf{k}_{22} = \mathbf{t}_{22} \cdot \mathbf{t}_{12}^{-1}$$

$$\mathbf{s}_0 = -\mathbf{t}_{12}^{-1} \cdot \tilde{\mathbf{v}}_\ell$$

$$\mathbf{s}_\ell = -\mathbf{t}_{22} \cdot \mathbf{t}_{12}^{-1} \cdot \tilde{\mathbf{v}}_\ell + \tilde{\mathbf{f}}_\ell$$

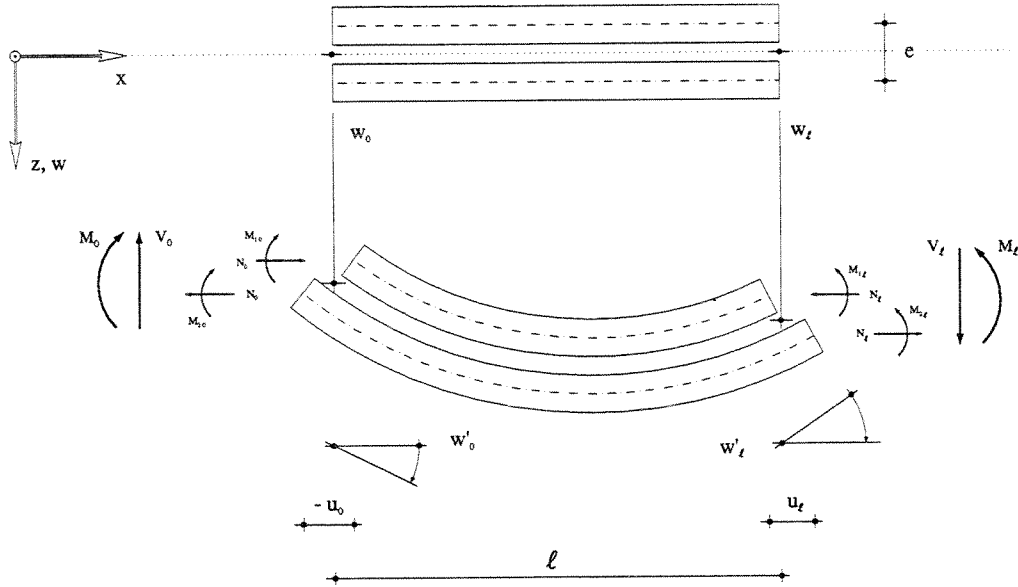


Bild 6.4-1. Definition der Zustandsgrößen für das Verfahren der Übertragungsmatrizen

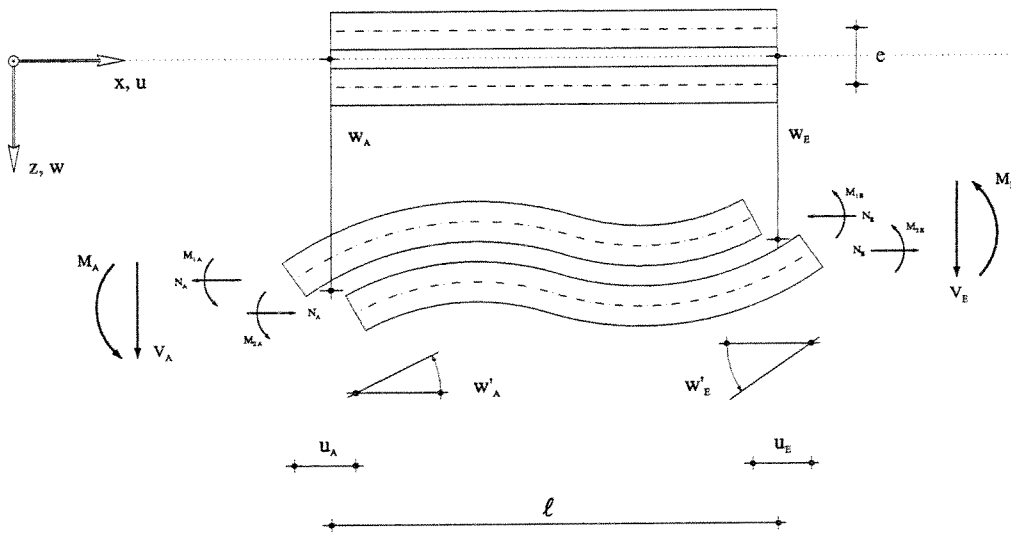


Bild 6.4-2. Definition der Zustandsgrößen für die FEM in Weggrößenformulierung

Die Berechnung der Systemmatrix eines Stabzuges aus der dazugehörigen Gesamtmatrix nach Gl. 6.03 erfolgt über die Inversion einer Submatrix, welche sich durch Streichen der ersten den Weggrößen zugeordneten und der letzten dem gesamten letzten Zustandsvektor zugeordneten Spalten ergibt. Das prinzipielle Vorgehen kann an einem einfachen Balkenelement aufgezeigt werden und ist sinngemäß auf Verbundquerschnitte direkt übertragbar. Die Gesamtmatrix für zwei gekoppelte Stabelemente ohne weitere Zwischenbedingungen kann folgendermaßen unterteilt werden:

$$\mathbf{G} \cdot \tilde{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & -1 & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \circ & -1 & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \circ & \circ & -1 & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \circ & \circ & \circ & -1 & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \circ & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & -1 & \circ & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \circ & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \circ & -1 & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \circ & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \circ & \circ & -1 & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \circ & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \circ & \circ & \circ & -1 & \circ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} w \\ w' \\ \hline M \\ V \\ w \\ w' \\ M \\ V \\ \hline w \\ w' \\ M \\ V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{bmatrix}$$

Gl. 6.08

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_{11} & \mathbf{g}_{12} & \mathbf{g}_{13} & \mathbf{g}_{14} \\ \mathbf{g}_{21} & \mathbf{g}_{22} & \mathbf{g}_{23} & \mathbf{g}_{24} \end{bmatrix}$$

Gl. 6.09

Die vollen Punkte bedeuten in dieser Darstellung bekannte, von Null verschiedene Werte, die Kreise stehen für sichere Nullen. Die Submatrix \mathbf{g}_{12} ist zu invertieren: alle benötigten Informationen -auch die Bestimmungsgleichungen für die Zwischenwerte des Stabzuges- sind anschließend durch einfache Matrizenmultiplikationen verfügbar.

Eventuell vorhandene Längskraftdehnung des Gesamt-Verbundelementes kann wie beim einfachen Stabelement durch Erweiterung der Matrix mit den gleichen Termen berücksichtigt werden, wodurch die äußere Längskraft N und die globale Verschiebung u als zusätzliche Zustandsgrößen eingeführt werden. Da die Berechnung gemäß Teilverbund-Modell gleiche Dehnung aller Teilquerschnitte infolge äußerer Längskraft unterstellt und Abweichungen von dieser Annahme als zusätzliche Lastfälle behandelt werden (siehe Kapitel 6.2), ist die Wahl eines Referenzquerschnittes für die Einbindung des Verbundelementes in eine Gesamtstruktur beliebig.

6.5 Mögliche Vereinfachungen der Berechnungen

Zur Beantwortung der Frage nach möglichen Vereinfachungen der Berechnung von Verbundträgern mit mehrteiligen, nachgiebig zusammengesetzten Querschnitten kann auf die Ausführungen in Kapitel 1.2 verwiesen werden. Da durch Vereinfachungen stets die Allgemeingültigkeit des Berechnungsverfahrens eingeschränkt wird, ist es zwingend erforderlich, nicht berücksichtigte Effekte und deren Auswirkungen auf das Tragverhalten einschätzen zu können. Das im Rahmen dieser Arbeit vorgestellte Verfahren könnte einen Beitrag leisten zur besseren Beurteilung vereinfachter Berechnungsverfahren, da vor allem lokale Effekte qualitativ und quantitativ bestimmbar werden. Die bekannten, praxisnahen Berechnungsverfahren erfassen in der Regel ausreichend gut das globale Tragverhalten statisch bestimmter Systeme mit einfachen Randbedingungen. Für statisch unbestimmte Systeme sind sie im allgemeinen jedoch nicht geeignet, da in diesem Fall der Verlauf der globalen Schnittkräfte außer vom System auch noch von der Verbundwirkung abhängt /NAT87.1/.

Vereinfachende Annahmen bezüglich der Verhältnisse im Verbundquerschnitt haben vorwiegend zum Ziel, numerische Schwierigkeiten bei extremen Verhältnissen, wie z. B. bei nahezu starrer oder unverdübelter Fuge, zu umgehen /KIE81/. Vereinfachende Annahmen bezüglich des statischen Systems und der einwirkenden Belastungen dagegen werden zumeist getroffen, wenn einfache Verfahren zur Handrechnung erwünscht sind.

Das Problem numerischer Schwierigkeiten bei Anwendung des Übertragungsverfahrens, Strategien zu deren Vermeidung und deren Umsetzung wurden bereits in Kapitel 4 bzw. Kapitel 6.1 diskutiert. Aus diesem Grund sei hier lediglich auf ein Verfahren hingewiesen, das in /WIE68/ und /GÖH70/ dargestellt ist und bei dem bereits zur Ableitung der Übertragungsmatrix vereinfachende Annahmen getroffen werden.

Die Autoren machen sich dabei zunutze, daß die Fugenverschiebungen an den Rändern einen geringen Einfluss auf die anderen Zustandsgrößen am jeweils gegenüberliegenden Rand haben. Die Störung klingt also sehr schnell ab, was mitunter die Ursache numerischer Schwierigkeiten ist, wenn entsprechende Randbedingungen zu beachten sind /HEE89/. Mit der Annahme, daß für eine Sandwichplatte die Fugenverschiebungen

Gl. 6.10

$$u_j(0) = u_j(\ell)$$

seien, wird die eigentlich sechsreihige Matrix auf eine vierreihige Matrix reduziert. Verallgemeinert man die o. g. Annahme derart, daß sie für alle Fugenverschiebungen eines mehrteiligen Verbundquerschnittes gelte, so erhält man in jedem Fall eine vierreihige Matrix zur Beschreibung des Spannungs- und Verformungszustandes. Die Autoren entwickeln diese Methode, um numerische Schwierigkeiten bei der Berechnung der Beulwerte von Sandwichplatten mit Polyurethanschicht zu vermeiden. Sie zeigen eine gute Übereinstimmung der Ergebnisse im Vergleich zu anderen Berechnungsmethoden auf.

Einer Verallgemeinerung ihrer Aussagen muß jedoch kritisch begegnet werden: da in einem Sandwichelement die Momente nur durch ein Normalkraftpaar aufgenommen werden, besteht lediglich eine schwache Kopplung zwischen dem Normalkraftpaar und der Querkraft einerseits und der Fugenverschiebung andererseits. Es liegt also nahe, die Fugenverschiebung zu vernachlässigen. Eine Anwendung auf 'normale' Verbundquerschnitte ist zumindest in dem Fall, daß ein Problem II. Ordnung vorliegt, nicht ratsam. In Kapitel 5.2 wurde gezeigt, daß gerade eine Behinderung der Fugenverschiebung an den Rändern die Knicklasten nachhaltig je nach sonstigen Randbedingungen sowohl negativ als auch positiv beeinflusst und somit nicht beliebig vorgegeben werden kann. In /WIE68/ werden jedoch nur Fälle behandelt, in denen die Beulwerte auf der sicheren Seite liegen.

Im Holzbau steht zur Berechnung von Einfeldträgern das sogenannte γ -Verfahren zur Verfügung /MÖH56/ /SHE68/ /HEI87/ /SIA81/ /DIN88/. Dieses Verfahren, welches für die Handrechnung gut geeignet ist, beruht auf der Annahme einer sinusförmigen Lastverteilung, so daß die effektive Biegesteifigkeit über die Trägerlänge konstant ist /NAT87.1/. Das γ -Verfahren wurde bereits mehrmals modifiziert und erweitert. Vorschläge zur Anwendung auf die Berechnung von Sandwichkonstruktionen wurden ebenso unterbreitet wie für die Erweiterung auf Einfeldträger mit Kragarm und Zweifeldträger mit gleichen Öffnungsweiten /AIC87.1/ /AIC87.2/ /AIC87.4/ /HEI91.2/. Im Gegensatz zu der querschnittsbezogenen Abminderung der Steineranteile an der Gesamtbiegesteifigkeit zur Berücksichtigung der Nachgiebigkeit in den Fugen nach dem γ -Verfahren, seien hier -unter ansonsten gleichen Voraussetzungen- die fugenbezogenen Abminderungsfaktoren für die Steineranteile der Fugen angegeben, wie sie sich konsistent aus dem Teilverbund-Modell ableiten. Dementsprechend wird die effektive Biegesteifigkeit berechnet:

$$B_{\text{eff}} = \sum_{i=1}^n B_i + B_{S_{j\text{eff}}} = \sum_{i=1}^n E_i I_i + \sum_{j=1}^m \gamma_j R_j e_j$$

Für den zweiteiligen Verbundquerschnitt ($n=2, m=1$) gilt:

Gl. 6.12

$$\gamma_1 = \frac{\frac{k_1 \sum E_i A_i}{E_1 A_1 E_2 A_2}}{\frac{\pi^2}{\ell^2} + \frac{k_1 \sum E_i A_i}{E_1 A_1 E_2 A_2}}$$

Für den dreiteiligen Verbundquerschnitt ($n=3, m=2$) lauten die Abminderungsfaktoren:

Gl. 6.13

$$\gamma_1 = \frac{\frac{\pi^2}{\ell^2} \frac{k_1 e_1}{R_1} + \frac{k_1 k_2 \sum E_i A_i}{E_1 A_1 E_2 A_2 E_3 A_3}}{\frac{\pi^4}{\ell^4} + \frac{\pi^2}{\ell^2} (\omega_1^2 + \omega_2^2) + \frac{k_1 k_2 \sum E_i A_i}{E_1 A_1 E_2 A_2 E_3 A_3}}$$

und

Gl. 6.14

$$\gamma_2 = \frac{\frac{\pi^2}{\ell^2} \frac{k_2 e_2}{R_2} + \frac{k_1 k_2 \sum E_i A_i}{E_1 A_1 E_2 A_2 E_3 A_3}}{\frac{\pi^4}{\ell^4} + \frac{\pi^2}{\ell^2} (\omega_1^2 + \omega_2^2) + \frac{k_1 k_2 \sum E_i A_i}{E_1 A_1 E_2 A_2 E_3 A_3}}$$

Folgende Abkürzungen werden hierbei verwendet:

Gl. 6.15

$$\omega_1^2 = \frac{k_1 (E_1 A_1 + E_2 A_2)}{E_1 A_1 E_2 A_2} \quad \text{bzw.} \quad \omega_2^2 = \frac{k_2 (E_2 A_2 + E_3 A_3)}{E_2 A_2 E_3 A_3}$$

Die Berechnung der effektiven Biegesteifigkeit vereinfacht sich dann, wenn das im Rahmen dieser Arbeit vorgestellte Berechnungsverfahren in ein Programm umgesetzt wird. In diesem Falle können die Koeffizientenanteile des charakteristischen Polynoms nach Gl. 3.11 zur Ermittlung eines Erhöhungsfaktors herangezogen werden, welcher auf die Summe der Eigenbiegesteifigkeiten appliziert wird.

Gl. 6.16

$$B_{\text{eff}} = \frac{\sum_{i=1}^n (\pi/\ell)^{2(i-1)} (a_{i-1}/\sum E_i I_i + b_{i-1})}{\sum_{i=1}^n (\pi/\ell)^{2(i-1)} b_{i-1}} \sum_{i=1}^n E_i I_i$$

Es muß jedoch darauf hingewiesen werden, daß dieser globale Kennwert zwar zur Berechnung von Durchbiegungen und zur Bestimmung von Knicklasten -allerdings mit den Einschränkungen gemäß Kapitel 5.2- ausreicht, Beanspruchungen in den Teilquerschnitten und in den Verbindungsmitteln damit jedoch nicht bestimmbar sind. Hierzu ist die Ermittlung der einzelnen, fugenbezogenen Abminderungsfaktoren zwingend erforderlich. Die weitere Berechnung kann sodann nach dem Schema für den starren Verbundquerschnitt erfolgen, wie es in Anhang 1 exemplarisch dargestellt ist.

Der Vorteil einer fugenbezogenen Abminderung ist in der anschaulichen Darstellung der mechanischen Zusammenhänge zu sehen. Während bei der querschnittsbezogenen Abminderung die Zuweisung eines -zwar beliebigen- Wertes erforderlich ist (in /DIN88/ wird dem Steineranteil des Teilquerschnittes 2 der Wert 1.0 zugewiesen), um die linearen Abhängigkeiten zu berücksichtigen, kann auf diesen Kunstgriff im Zusammenhang mit der fugenbezogenen Abminderung verzichtet werden. Einschränkungen in der Anwendung dieser vereinfachten Berechnung ergeben sich lediglich -wie beim originalen γ -Verfahren- durch die zwangsweise Numerierung der Teilquerschnitte und Fugen in der Reihenfolge ihres Auftretens. Die Berechnung des zweiteiligen Verbundquerschnittes über die fugenbezogene Abminderung ist in /NAT87.2/ in Diagrammform für den Einfeld- und Zweifeldträger, sowie verschiedene Lastfälle aufbereitet.

Weitere Vereinfachungen bei der Berechnung der fugenbezogenen Abminderungsfaktoren ergeben sich, wenn die Verbundquerschnitte aus gleichen Teilquerschnitten bestehen und in den Fugen gleiche Fugensteifigkeiten anzunehmen sind. Für den dreiteiligen Verbundquerschnitt gilt in diesem Fall unter Bezug auf die Dehnsteifigkeit der Teilquerschnitte:

$$\gamma_{1,2} = \tilde{\gamma} = \frac{\frac{\pi^2}{\ell^2} \frac{k}{EA} + \frac{3k^2}{E^2 A^2}}{\frac{\pi^4}{\ell^4} + \frac{\pi^2}{\ell^2} \frac{4k}{EA} + \frac{3k^2}{E^2 A^2}} \quad \text{und} \quad B_{\text{eff}} = EA e^2 (0.25 + 2 \tilde{\gamma})$$

Gl. 6.17

In der fugenbezogenen Darstellung können die Abminderungsfaktoren für bis zu fünfteilige Verbundquerschnitte mit unterschiedlichen Teilquerschnitten und Fugensteifigkeiten analytisch angegeben werden. Das Teilverbund-Modell bietet hierbei einen schnellen Überblick über die Verhältnisse bei Veränderung bestimmter Parameter.

7 Anwendungsbeispiele

7.1 Kontinuierliche und diskrete Anordnung der Verbindungsmittel

Das folgende Berechnungsbeispiel ist /CZI88/ entnommen, so daß ein Vergleich der Berechnungsergebnisse zumindest für den Fall möglich ist, in welchem das γ -Verfahren der DIN 1052 mit guter Näherung anwendbar ist. Weiterhin soll untersucht werden, ob und in welchem Maße Unterschiede zwischen den tatsächlichen Gegebenheiten und den Berechnungsannahmen die Zustandsgrößen beeinflussen. Alle hier zitierten Berechnungsergebnisse sind in Anhang 7 aufgelistet.

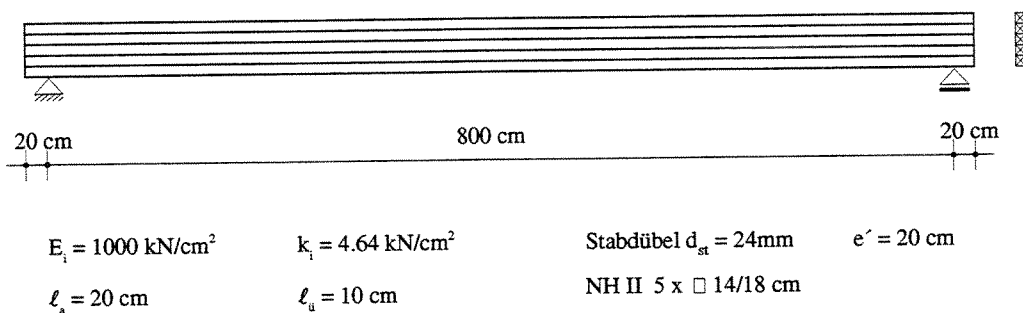


Bild 7.1-1. Geometrie des fünfteiligen, doppelsymmetrischen Verbundquerschnittes, Kennwerte der Verbindungsmittel und des statischen Systems

Die Kennwerte des Verbundquerschnittes können **Bild 7.1-1** entnommen werden. Es wird zunächst von einer gleichabständigen Verteilung der Verbindungsmittel ausgegangen und der Einfeldträger unter Gleichstreckenlast untersucht. Der Vergleich zwischen Ergebnissen der Berechnung ohne und mit Berücksichtigung des Trägerüberstandes am Auflager zeigt, daß die Durchbiegungen bei Berücksichtigung des Überstandes um etwa 4% reduziert werden. Auch die anderen Zustandsgrößen weisen relativ geringe Abweichungen auf mit Ausnahme des Fugenschubflusses, dessen Maximalwert um ca. 14 % reduziert ist. Dieser Sachverhalt zeigt deutlich die günstige Wirkung einer 'Endverdübelung' auf den Verlauf des Fugenschubflusses. Die Berechnung ohne Berücksichtigung des Überstandes ergibt für alle Zustandsgrößen Werte auf der sicheren Seite. Die folgenden Berechnungen sind jedoch ausnahmslos mit Berücksichtigung des Überstandes durchgeführt.

Der Vergleich mit den Ergebnissen der Berechnung nach dem γ -Verfahren der DIN 1052, wie sie in /CZI88/ angegeben sind, zeigt nur sehr geringe Abweichungen, die hauptsächlich auf die Andersartigkeit der tatsächlichen Lastfunktion zurückzuführen sein dürften. Das γ -Verfahren gemäß /DIN88/ kann für bestimmte fünfteilige Verbundquerschnitte nach entsprechender Anpassung der Querschnittskennwerte angewendet werden /NAT87.1/. Die Berechnung des fiktiv dreiteiligen Verbundquerschnittes ist jedoch mit größeren Fehlern behaftet, was in erster Linie auf die Ungenauigkeiten in den Angaben /DIN88/ zurückzuführen ist. Im vorliegenden Fall ist eine solche Anpassung des fünfteiligen Querschnittes nicht möglich.

Der Vergleich zwischen den Berechnungen unter der Annahme einer kontinuierlichen Verdübelung und denjenigen mit Berücksichtigung der tatsächlich ja diskret angeordneten Verbindungsmittel wurde an den in Bild 7.1-2 dargestellten statischen Systemen durchgeführt.

Um die Zahl der verwendeten Elemente und damit die Größe des Gleichungssystems gering zu halten, erfolgten sämtliche Berechnungen mit Berücksichtigung der diskreten Anordnung der Verbindungsmittel am halben System, wie in Bild 7.1-3 dargestellt. Die geometrischen Werte für die Anordnung der Verbindungsmittel können aus den Tabellen in Anhang 7 entnommen werden.

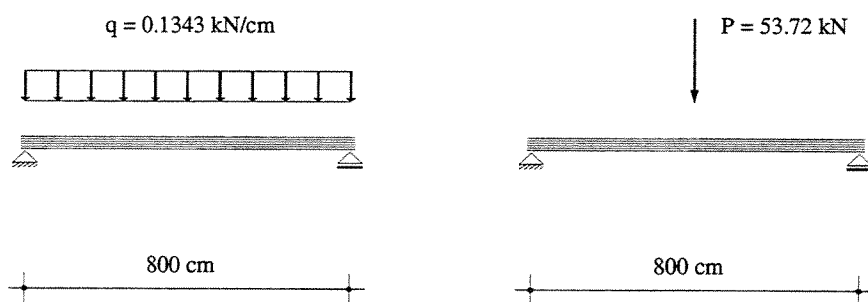


Bild 7.1-2. Statisches System und Belastung für die Berechnung des fünfteiligen Verbundträgers mit kontinuierlicher Verdübelung

Zur Einhaltung der in Bild 7.1-3 dargestellten, homogenen Randbedingungen werden am rechten Rand alle geometrischen Zustandsgrößen außer der Durchbiegung werden zu Null gesetzt, ebenso wie die Vertikalkraft. Am linken Rand sind alle statischen Zustandsgrößen außer der Vertikalkraft gleich Null. Es liegen also zwei konjugierte Randbedingungen vor.

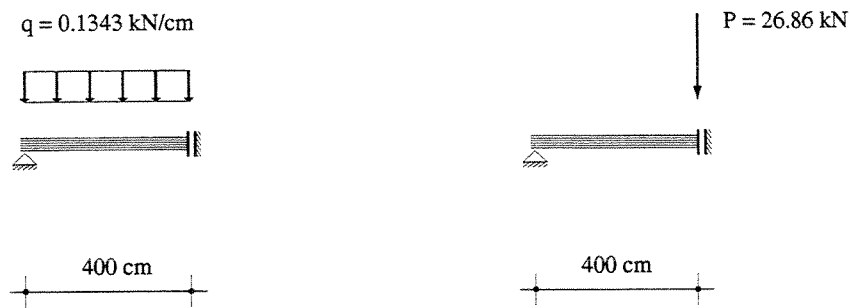


Bild 7.1-3. Statisches System und Belastung für die Berechnung des fünfteiligen Verbundträgers mit diskreter Verdübelung

Für das vorliegende Problem sind die Unterschiede in der Berechnung zwischen kontinuierlicher und diskreter Verdübelung für Gleichstreckenlast und auch für Einzellast in Feldmitte minimal, so daß die Annahme eines kontinuierlichen Verbunds als zutreffend bezeichnet werden kann, wenn die Verteilung der Verbindungsmittel gleichabständig erfolgt.

Aus den im **Anhang 7** angegebenen Belastungen der einzelnen Verbindungsmittel geht hervor, daß deren Beanspruchung recht unterschiedlich ist. In der Bemessungspraxis ist die zulässige Belastung der Verbindungsmittel häufig maßgebend für die Bemessung von Verbundquerschnitten, so daß man immer bestrebt sein wird, diese Belastung so gering wie möglich zu halten. Daher wird für Einfeldträger häufig eine vom Rand her linear zur Mitte abfallende Dichte der Verbindungsmittel gewählt. Diese Anordnung wirkt sich natürlich auf den Verlauf der Zustandsgrößen aus und es interessiert in erster Linie die Art dieser Veränderungen gegenüber den auf einfache Weise ermittelbaren Funktionen.

Bei Gleichstreckenlast kann mit der modifizierten Verteilung die Durchbiegung um ca. 10% reduziert und eine deutlich geringere Belastung der Verbindungsmittel erzielt werden. Der Maximalwert wird um ca. 31% abgemindert und gleichzeitig der Ausnutzungsgrad der Gesamtzahl Verbindungsmittel deutlich erhöht.

Dagegen sind bei Punktlast in Feldmitte keine wesentlichen Veränderungen in den Zustandsgrößen festzustellen. Lediglich der Ort des Auftretens des Maximalwertes ist verschoben. Die Durchbiegung kann nur geringfügig um ca. 3% abgemindert werden. Diesem Umstand ist Rechnung zu tragen, wenn als Hauptlastfall für das zu bemessende Bauteil eine Einzellast im inneren Drittel des Trägers anzunehmen ist.

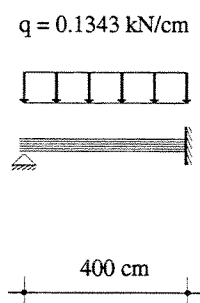


Bild 7.1-4. Statisches System und Belastung für die Berechnung des fünfteiligen Verbundträgers mit kontinuierlicher und diskreter Verdübelung

Faßt man den durch Gleichstreckenlast beanspruchten Zweifeldträger als Einfeldträger mit der Superposition der Lastfälle Gleichstreckenlast und Einzellast an der Stelle des Mittelauf-lagers auf, so ist verständlich, daß zwar die Verläufe der Zustandsgrößen qualitativ abgeschätzt werden können, nicht jedoch die Maximalwerte und die Stellen der Maxima. Zur Ableitung von Kriterien für eine effiziente Anordnung von Verbindungsmitteln in Zweifeldträgern wurde der fünfteilige Verbundquerschnitt an dem System nach **Bild 7.1-4** untersucht.

Die Berechnung mit kontinuierlicher Verdübelung zeigt eine starke Abminderung der Verbundwirkung in der Nähe des Mittelauf-lagers. Diese Aussage kann aus dem starken Anwachsen der Eigenbiegemomente der Teilquerschnitte zum Auflager hin abgeleitet werden (siehe **Anhang 7**). Das Stützenmoment wird zu 90% durch Eigenbiegung aufgenommen. Die Belastung der Verbindungsmittel entspricht konsequenterweise in etwa derjenigen des Einfeldträgers über eine Öffnung, so daß deren Ausnutzungsgrad als gering zu bewerten ist.

Gängige Vorschläge zur Optimierung der Anordnung der Verbindungsmittel orientieren sich in erster Linie am Querkraftverlauf /KNE91/ /HER92/. Dieses Konzept ist für den Einfeldträger eingeschränkt, in anderen System hauptsächlich dann erfolgversprechend, wenn recht hohe Fugensteifigkeiten erzielt werden können. Bei geringen Fugensteifigkeiten erreicht man nicht unbedingt den gewünschten Effekt. Zur Überprüfung wurden verschiedene Berechnungen unter Berücksichtigung einer querkraftorientierten Verteilung der Verbindungsmittel durch-geführt. Dabei wurde sowohl die Dichte der Verbindungsmittel, als auch die Stelle für deren Anordnung variiert und auch unterbrochene Verdübelung untersucht. Dabei stellte sich heraus, daß eine Verdübelung direkt über dem Mittelauf-lager nur sinnvoll ist bei asymmetrischer Belastung oder asymmetrischer Ausbildung des Zweifeldträgers.

Im Hinblick auf eine einfache Handhabung und in Kenntnis der Ergebnisse einer Vielzahl von Berechnungsläufen erweist sich jedoch eine andere Art der Verteilung der Verbindungsmittel als besonders effektiv, welche auch die Bedeutung der Schubverdübelung für die Verdrehsteifigkeiten der Fugen des Verbundquerschnittes unterstreicht. Orientiert man die Verteilung an der Neigung der Biegelinie, so können die Verbindungsmittel gleichabständig und bevorzugt im Bereich großer Querschnittsneigungen angeordnet werden. Hiermit erhält man bei geringerer Anzahl Verbindungsmittel um ca. 9% kleinere Durchbiegungen, bei gleicher Maximalbelastung eine deutlich bessere Ausnutzung der Verbindungsmittel und eine nicht unwesentliche Verbesserung der Verbundwirkung über dem Mittelaufleger, was sich in der Reduktion der Eigenbiegemomente um 5% bemerkbar macht.

Die Verteilung der Verbindungsmittel im konkreten Fall ist aus **Anhang 7** ersichtlich. Es wurde insbesondere der Bereich der Wendepunkte der Biegelinie und der Randbereich an den äußeren Auflagern verdübelt. Der Vorteil einer solchen Vorgehensweise konnte in mehreren Vergleichrechnungen bestätigt werden.

7.2 Mitwirkende Plattenbreite bei nachgiebigem Verbund

Die mitwirkende Plattenbreite wird bestimmt, um ein eigentlich zweidimensionales Problem -die Berechnung eines Plattenbalkens- mit den Verfahren der eindimensionalen Biegetheorie durchführen zu können. Die tatsächliche Breite des -in der Regel raumabschließenden- Gurtes wird um ein bestimmtes Maß reduziert und ein fiktiver Querschnitt den Berechnungen zugrunde gelegt. Die fiktiv angesetzte Breite des Gurtquerschnittes ergibt sich dabei aus einem Vergleich der Normalspannungsverteilungen im Gurtquerschnitt nach zwei- und eindimensionaler Theorie. Der Maximalwert der vom Steg zum Rand des Gurtes hin abfallenden Normalspannungen im Gurt nach zweidimensionaler Theorie dient als Referenzwert für die über den Gurtquerschnitt konstanten Normalspannungen nach eindimensionaler Theorie. Die Forderung, daß auch das Integral der Normalspannungen über den Gurtes nach beiden Berechnungsverfahren gleich seien, ist jedoch in der Regel nicht genau einzuhalten. Die mitwirkende Plattenbreite ist je nach Belastungsfunktion und statischem System über die Trägerlänge veränderlich und ansonsten wesentlich vom Verhältnis der Spannweite des Plattenbalkens zu dessen Gurtbreite abhängig /SHL78/ /NAT87.1/. Ähnliche Überlegungen wie für die vereinfachte Berechnung von Plattenbalken werden auch für Stäben mit geschlossenem Profil angestellt /BOE70/.

Ziel des oben geschilderten Vorgehens ist letztlich die einfache, aber dennoch möglichst genaue Ermittlung der Bemessungs-Spannungen und eines Durchbiegungswertes. Gerade im Zusammenhang mit Überlegungen zur mitwirkenden Plattenbreite für nachgiebig miteinander verbundene Gurte und Stege sollte nicht in Vergessenheit geraten, daß Spannungen und Durchbiegungen auch über einen Erhöhungsfaktor am Ende der Berechnungen korrigiert werden könnten, im Gegensatz zur Korrektur eines Eingangswertes der Berechnungen. Die Anwendung eines Abminderungsfaktors für die Gurtbreite verändert offensichtlich die Kräftebalance im nachgiebig zusammengesetzten Plattenbalken-Querschnitt, so daß nur schwer zu entscheiden ist, ob letztlich eine Korrektur oder eine einfache Veränderung vorgenommen wurde. Es erscheint daher sinnvoller und einfacher für einen gegebenen Verbundquerschnitt Korrekturen an den 'unkorrekt' ermittelten Spannungen und Durchbiegungen vorzunehmen.

Bei der Ableitung des im Rahmen dieser Arbeit vorgestellten Berechnungsverfahrens wurden affine Biegelinien der Teilquerschnitte vorausgesetzt. Daher sind in den folgenden Ausführungen die Abminderungen der Gurtbreite infolge unterschiedlicher Durchbiegungen der

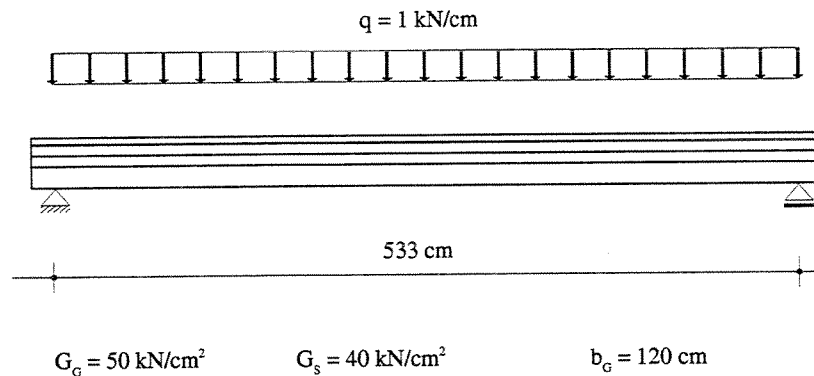


Bild 7.2-1. Statistisches System und Schub-Kennwerte des untersuchten Plattenbalkens

weit vom Steg entfernt liegenden Teile des Gurtquerschnittes nicht berücksichtigt. In /NAT87.1/ wurde bereits darauf hingewiesen, daß diese Abminderungen -dünne Gurte vorausgesetzt- vernachlässigbar sind.

Im Bereich des Holzbaus stellt sich das Problem der mitwirkenden Platten- bzw. Beplankungsbreite vorwiegend dort, wo Holzwerkstoff-Platten mit größeren Stützweiten zwischen den Längsrippen eingesetzt werden /MOE63/ /MIS77/. Bei der Sanierung alter Bausubstanz werden häufig bestehende, noch tragfähige Holzbalkendecken mit relativ großen Balkenabständen durch aufgenagelte oder aufgeschraubte Furnierschicht-Platten verstärkt.

Die vorhandenen Holzbalken sind häufig noch im Querschnitt durch Nuten für Blindböden und/oder durch teilweise Zerstörung infolge lokaler Fäulnisbildung geschwächt. In solchen Fällen ist der Gefahr des Schubbruches der alten Holzbalken in den Querschnittsschwächungen besondere Beachtung zu schenken, da sich gerade die Schubspannungsbeanspruchungen wegen der Ergänzung des Querschnittes nicht selten erhöhen. Auch für die Verformungsrechnung ist die Schubnachgiebigkeit unter Umständen von Bedeutung /BEL90/. Für die Bemessung derartiger Verbundquerschnitte sind also der sogenannte Shear-lag-Effekt und die mitwirkende Plattenbreite gleichzeitig zu beachten. Bei Anwendung des hier entwickelten Berechnungsverfahrens für Verbundträger mit beliebig gefügten Querschnitten können beide Effekte implizit berücksichtigt werden. Zu diesem Zweck wird der zu untersuchende Querschnitt so diskretisiert, daß der Gurt ausreichend fein unterteilt ist und im Holzbalkenquerschnitt an den gefährdeten Stellen Schubfugen zu liegen kommen.

Bild 7.2-2 zeigt einen durch eine KERTO-Furnierschichtplatte verstärkten Holzbalkenquerschnitt, der ursprünglich die Deckenkonstruktion eines alten Internatsgebäude bildete /NAT92.2/ /ZOE92/. Zur Abschätzung der mitwirkenden Plattenbreite und deren Auswirkungen wurde das in Bild 7.3-1 abgebildete statische System mit einer Einheits-Gleichstreckenlast mit und ohne Diskretisierung des Gurtes berechnet. Des weiteren sollte untersucht werden, ob die in den Querschnittsschwächungen des Holzbalkens auftretenden Schubspannungen ausreichenden Abstand zur Bruchspannung haben.

Die in Bild 7.2-2 und Bild 7.2-3 angegebenen Fugensteifigkeiten sind auf einfache Weise zu berechnen. Die Steifigkeiten in den fiktiven 'Fugen' des Holzbalkenquerschnittes werden nach Gl. 7.01 ermittelt. Es gehen der Gleitmodul für Nadelholz -mit Abminderungen zur Berücksichtigung des Alters- und der Hebelarm des jeweiligen Teilverbunds ein.

$$k_2 \approx \frac{G_s \cdot b_{\min}}{e_2} = \frac{400 \cdot 100}{60} = 666.67 \left[\frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \right] \quad k_3 = \frac{400 \cdot 100}{75} = 533.3 \left[\frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \right]$$

Gl. 7.01

Die Steifigkeit in der Fuge zwischen Gurt und Steg wird über den Verschiebungs-Kennwert der verwendeten Holzschrauben und deren Abstand untereinander ermittelt, wobei zweireihige Anordnung der Verbindungsmittel deren Abstand fiktiv halbiert. Der Verschiebungs-Kennwert ist in Abhängigkeit von der zulässigen Belastung auf Abscheren angegeben, de facto hängt er jedoch nur von der Plattendicke ab. Der Holzschraubendurchmesser geht nur in Form einer Begrenzung des Verschiebungskennwertes ein und wird hier nicht berücksichtigt /DIN88/.

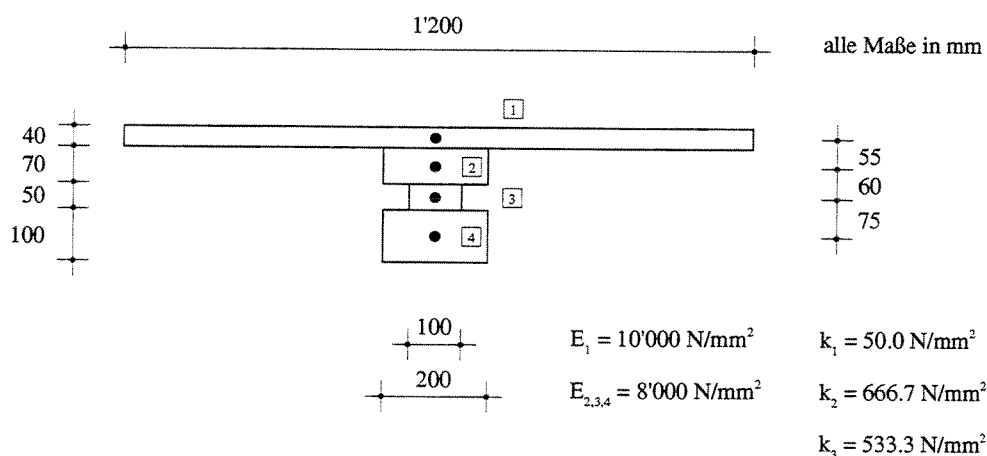


Bild 7.2-2. Abmessungen und Kennwerte des Plattenbalkenquerschnittes für die Berechnung ohne Diskretisierung des Gurtes

Gl. 7.02

$$k_1 = \frac{C}{e'} = \frac{50 h_G}{e'} = \frac{50 \cdot 40}{40} = 50 \left[\frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \right]$$

Die Indizierungen der Fugensteifigkeiten sind auf **Bild 7.2-2** bezogen. In **Bild 7.2-3** ist die Numerierung der Fugen geändert. Der Querschnitt ist dort mit Diskretisierung des Gurtes dargestellt. Ursprünglich liegt ein Verbundquerschnitt mit Verzweigung vor. Wegen dessen Symmetrie ist es jedoch möglich, einen Ersatzquerschnitt mit sequentieller Anordnung der Teilquerschnitte und Fugen anzunehmen. Entsprechend sind die in **Bild 7.2-3** angegebenen Dehnsteifigkeiten und die Fugensteifigkeiten angepaßt. Bei der Schnittkraftermittlung sind die sich aus der Berechnung ergebenden Normalkraftpaare (**Anhang 8.4**) so auf die Teilquerschnitte des realen Verbundquerschnittes aufzuteilen, wie in **Bild 7.2-4** erkennbar. Aus dieser Darstellung geht auch hervor, daß die berücksichtigten Schubverformungen aus den Schubfeldbeanspruchungen τ_{xy} in Längsrichtung der Platte auftreten.

Die Fugensteifigkeiten für die einzelnen Teilverbunde im Gurt werden nach **Gl. 7.03** bestimmt und sind in **Bild 7.2-3** angegeben.

Gl. 7.03

$$k_j = \frac{G_G h_G}{e_j}$$

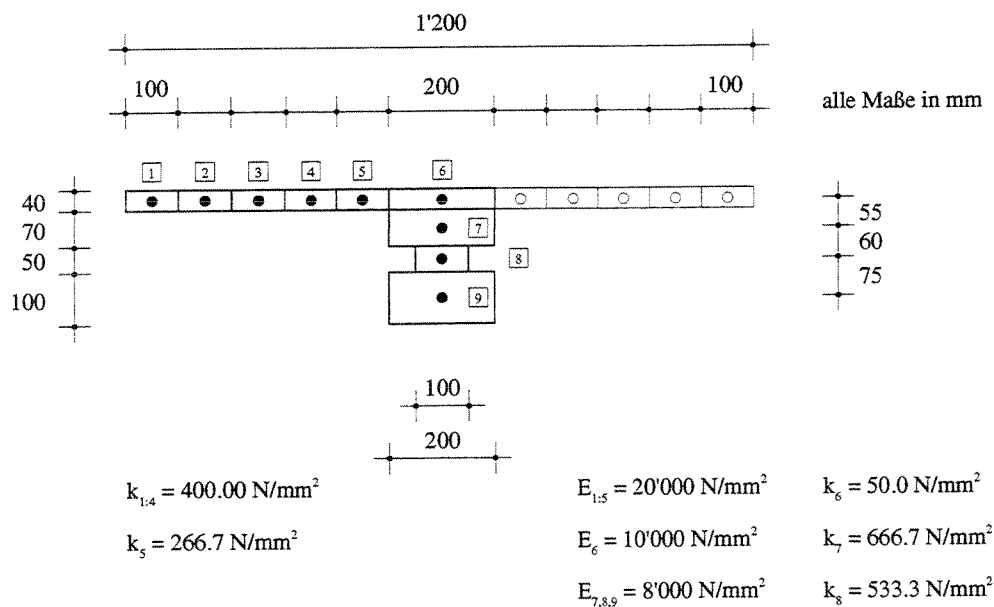


Bild 7.2-3. Abmessungen und Kennwerte des Plattenbalkenquerschnittes mit Diskretisierung des Gurtes zur Ermittlung der mitwirkenden Plattenbreite

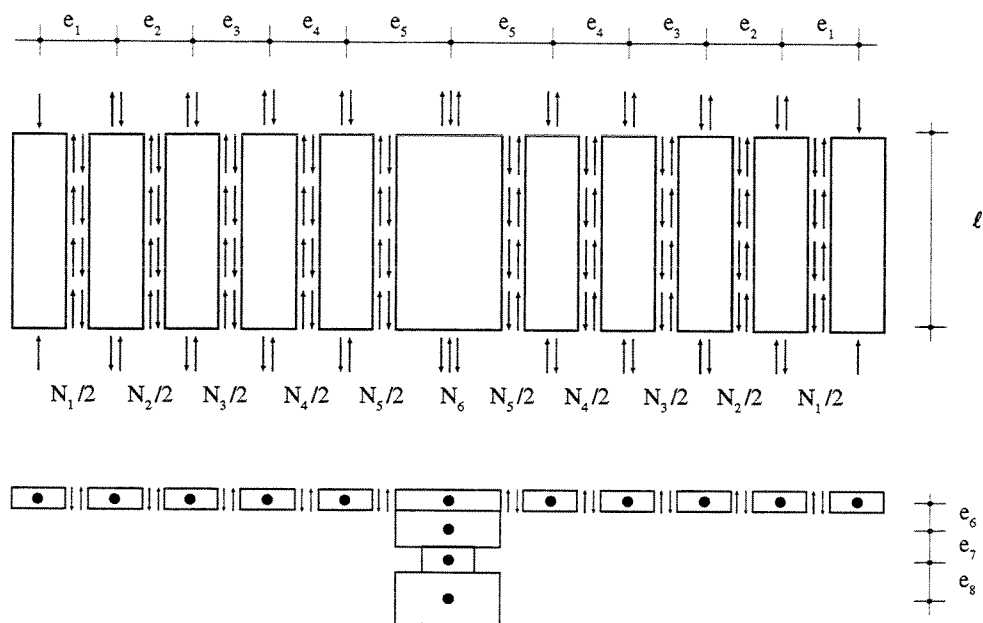


Bild 7.2-4. Prinzip der impliziten Berücksichtigung der mitwirkenden Plattenbreite und Aufteilung der Normalkräfte auf die Teilquerschnitte des realen Verbundquerschnittes

Die Eingabedaten für die Beschreibung des Verbundquerschnittes und des statischen Systems gemäß Bild 7.2-1 und Bild 7.2-2 sind in Anhang 8.1 und Anhang 8.2 aufgelistet. Außerdem befindet sich in Anhang 8.6 das Ergebnis-Protokoll des Programmsystem COMIX für die Berechnung des Verbundquerschnittes ohne Diskretisierung des Gurtes. Dieses umfaßt alle interessierenden Kennwerte des Verbundquerschnittes, die Eigenwerte und das charakteristische Polynom, sowie die Übertragungsmatrix und die Lastvektoren. Die Ergebnisse der beiden Vergleichsrechnungen sind in Anhang 8.3 und Anhang 8.4 tabellarisch aufbereitet.

Der Vergleich beider Berechnungsläufe zeigt, daß die in der Fuge zwischen Steg und Gurt aufgebaute Normalkraft ebenso wie der maximale Fugenschubfluß bei Berücksichtigung der Schubdeformation im Gurt um ca. 5% geringer ist und die Durchbiegung um ca. 5% ansteigt. Diese Werte stimmen mit den in /NAT87.1/ für $b/\ell = 0.225$ mitgeteilten überein. Die maximale Normalspannung im Gurt nimmt in Feldmitte von 2.86 kN/cm^2 um ca. 65% auf 4.4 kN/cm^2 zu (siehe auch Bild 7.2-5). Würde man also das der Berechnung der mitwirkenden Plattenbreite zugrunde liegende Konzept auf den nachgiebig zusammengesetzten Querschnitt übertragen, so müsste die Gurtbreite in einem Maße verringert werden, das ein stark abweichendes Tragverhalten des Verbundquerschnittes erwarten ließe. Dieses würde aber der Beobachtung

widersprechen, wonach das globale Verhalten des Verbundträgers sich nur in sehr geringem Maße ändert.

Da die mitwirkende Plattenbreite implizit berechnet wurde und nicht alle Zustandsgrößen des eindimensionalen Stabes in Übereinstimmung mit der genaueren Berechnung gebracht werden können, stellt sich die Frage, an welcher Forderung nach Übereinstimmung sich die Angabe der mitwirkenden Plattenbreite orientieren soll. Sinnvoll wäre die Kalibrierung auf

- die Biegesteifigkeit,
- die maximale Gurtspannung,
- die Beanspruchung im Steg oder
- die Beanspruchung der Verbindungsmittel.

Die iterative Berechnung der mitwirkenden Plattenbreite zeigte für das hier vorgestellte Beispiel eine sehr geringe Streuung. Die Werte lagen zwischen $b_{\text{eff}} = 70 \text{ cm}$ und $b_{\text{eff}} = 75 \text{ cm}$, wobei auch unterschiedliche Stellen des Trägers untersucht wurden (Anhang 8.5). Dieser Wert weicht jedoch erheblich von dem nach /DIN88/ Teil 1, Abschnitt 11 ermittelten ab ($b_{\text{eff}} = 100 \text{ cm}$).

Die Schubspannungen in den Fugen des Holzbalkens verändern sich bei Berücksichtigung der mitwirkenden Plattenbreite sehr geringfügig. Die absoluten Werte von ca. 0.02 kN/cm^2 liegen jedoch so hoch, daß bei einer Verkehrsbelastung der Decke, wie sie für öffentliche Gebäude anzusetzen ist, die Schubbeanspruchungen nicht toleriert werden können.

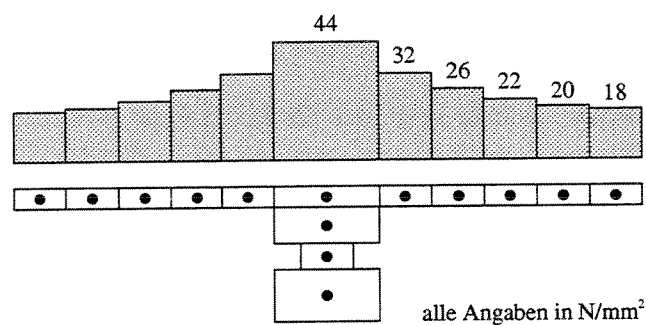


Bild 7.2-5. Normalspannungsverteilung über die Gurtbreite, wie sie sich aus der impliziten Berechnung des Verbundquerschnittes mit Diskretisierung des Gurtes ergibt

7.3 Tragverhalten eines Brettstapelelementes

Im Holzbau haben heutzutage aus Brettern zusammengesetzte Träger im Vergleich zu den fünfziger und sechziger Jahren stark an Bedeutung verloren. Nicht zuletzt wegen einiger spektakulärer Schadensfälle mit genagelten Bretterbindern (siehe auch **Kapitel 5.2**) und der unwirtschaftlichen Herstellungsweise solcher Träger sind neuere Anwendungen nicht bekannt. Dagegen werden aus Brettern zusammengesetzte Querschnitte vorteilhaft dort eingesetzt, wo vergleichsweise geringe Beanspruchungen in den Strukturelementen zu erwarten sind, so daß eine geringe Anzahl von Brettlamellen zur Erzielung der gewünschten Tragwirkung ausreicht. Diese Bedingung ist insbesondere beim Einsatz von Brettstapelelementen in leichten Flächentragwerken erfüllt. Übersteigt jedoch die Anzahl der erforderlichen Bretter ein gewisses Maß, so ist mit zum Teil erheblichen Einbußen in der Effektivität der Verbundquerschnitte zu rechnen. Dieser Effekt ist insbesondere dann zu beachten, wenn solche Querschnitte in Tragwerksteilen zur Aussteifung herangezogen werden, da die Wechselwirkung zwischen der Beanspruchung aus der eigentlichen Aufgabe im Tragwerk und der zusätzlich aufgebürdeten zumeist eine eingehendere Betrachtung erfordert.

Zur Veranschaulichung der obigen Aussagen werden im vorliegenden Kapitel Versuche an Brettstapelelementen ausgewertet, welche als Vorversuche zu Versuchen an Holz-Beton-Verbunddecken durchgeführt wurden. Die hier auszugsweise dargestellten Ergebnisse experimenteller Untersuchungen sind ebenso wie die Versuche an Holz-Beton-Verbunddecken umfangreich in /NAT93/ dokumentiert.

Die Brettstapelelemente bestehen aus 24 gleichen Brettquerschnitten von 33 mm Breite und 160 mm Höhe, welche durch zweischnittige, versetzt angeordnete Rillennägeln 33/90 im Abstand von ideell 3.75 cm verbunden sind. Bei der Hälfte der Proben wurde zusätzlich zur Nagelung im Bereich der Stösse verleimt. Die Profilierung der Bretter aus schalltechnischen Gründen wird für die folgende Auswertung der statischen Versuche vernachlässigt. Dagegen können die wegen der beschränkten Länge erforderlichen stumpfen Stösse der Brettlamellen in der Nähe der Lasteinleitungsstelle nicht vernachlässigt werden. Die Geometrie der Proben und die Art der Lastaufbringung im Versuch ist in **Bild 7.3-1** dargestellt.

Bild 7.3-2 zeigt das typischen Last-Verformungs-Diagramm einer Probe ohne zusätzliche Verleimung, **Bild 7.3-3** jene einer Probe mit zusätzlicher Verleimung. Dort sind jeweils die absolute Durchbiegung in Feldmitte und die relative Durchbiegung zwischen einem Messpunkt

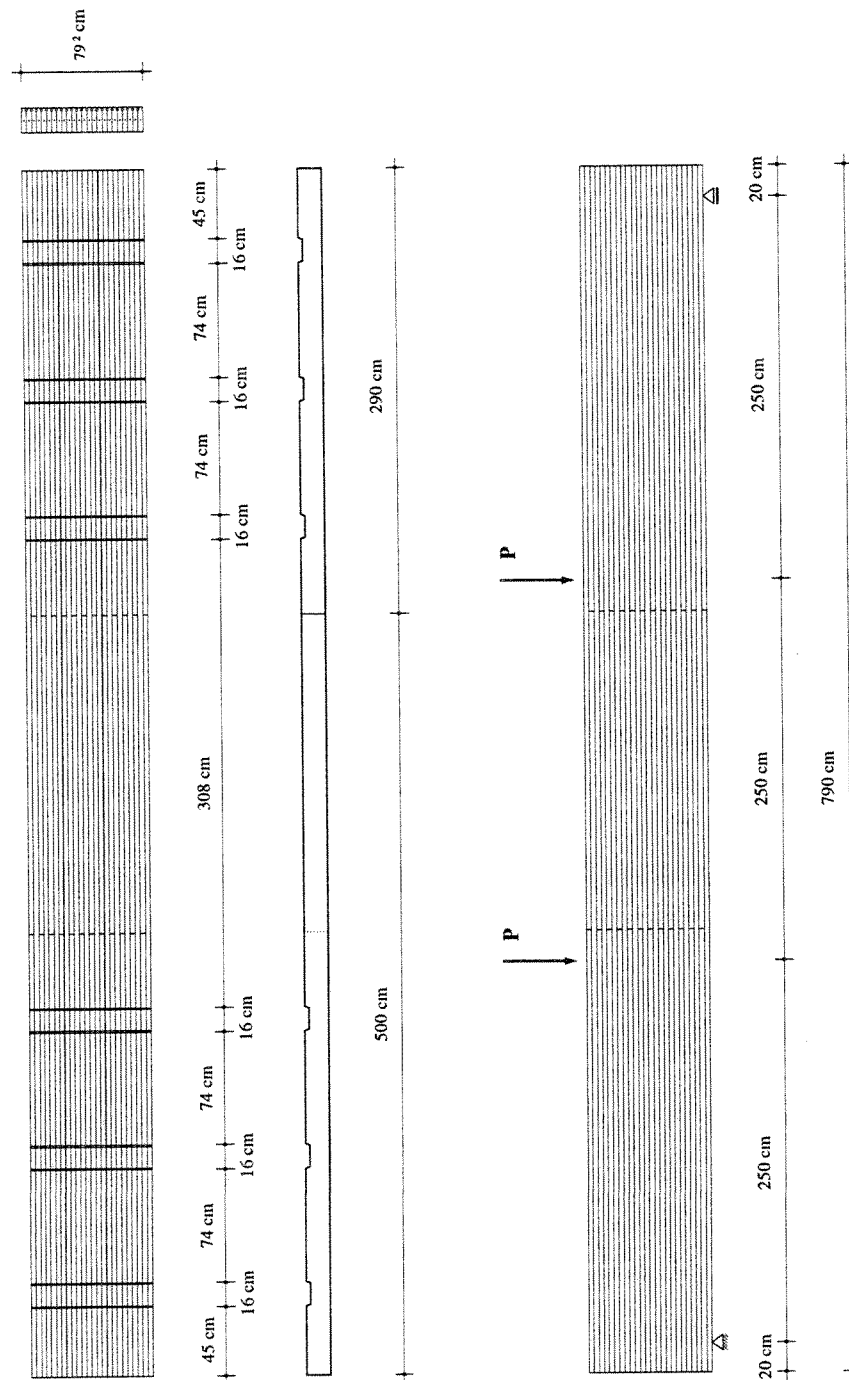


Bild 7.3-1. Geometrie des Brettstapелеlementes, Anordnung der stumpfen Stösse und Anordnung der Einzellasten im Versuch

in $x = 0.3541 \ell$ und der Feldmitte angegeben. Diese Messung dient der Kontrolle der Mess- und Berechnungsergebnisse. Die Unterschiede im Verhalten der beiden Proben sind deutlich erkennbar. Während die Probe ohne Verleimung ein ausgeprägt nicht-lineares Verhalten zeigt, verhält sich die Probe mit zusätzlicher Verleimung nahezu ideal-elastisch. In Tab. 7.3-1 sind die Steigungen der Last-Verformungskurven aus der Messung der absoluten Durchbiegung in Feldmitte angegeben. Die Werte in Klammern weisen darauf hin, daß wegen des ausgeprägt nicht-linearen Verhaltens die Steigung der Sehne zwischen Anfangs- und Endwert berechnet wurde. Die Rückrechnung von Fugensteifigkeiten kann sinnvoll nur für die verleimten Proben erfolgen. Für die nicht verleimten Proben kann lediglich eine Abschätzung der Biegesteifigkeit anhand der Tangenten der Last-Verformungskurve erfolgen.

Wegen der dichten Vernagelung der Bretter untereinander wird kontinuierlicher Verbund vorausgesetzt. In Kapitel 7.1 konnte die Berechtigung für diese Annahme nachgewiesen werden. Die stumpfen Stöße der Bretter im Feld werden bei der Berechnung berücksichtigt. Ein Vergleich zeigt, daß die Abweichung bei Vernachlässigung dieses Effektes im Bereich hoher Fugensteifigkeiten unter 2% liegt, bei geringen Fugensteifigkeiten dagegen deutlicher ausfällt. Es wurden Berechnungen mit acht verschiedenen Fugensteifigkeiten durchgeführt.

In Anhang 9 sind exemplarisch die Ergebnisse der Berechnungen mit sehr geringer und sehr hoher Fugensteifigkeit aufgelistet. Die berechneten Durchbiegungen für dazwischen liegende Werte der Fugensteifigkeit können Tab. 7.3-2 entnommen werden. Aus den Ergebnissen kann abgeleitet werden, daß die ideelle Fugensteifigkeit der zusätzlich verleimten Proben bei ca.

[kN / cm]	Probe 1	Probe 2	Probe 3	Probe 4
1. Belastung	(2.11)	(1.56)	13.6	16.3
2. Belastung	(2.11)	(1.61)	14.8	15.4
3. Belastung	(2.16)	(1.52)	14.4	15.6
Mittelwert	(2.13)	(1.57)	14.3	15.8

Tab. 7.3-1. Steigungen der Last-Verformungskurven aus der Messung der absoluten Durchbiegung in Feldmitte

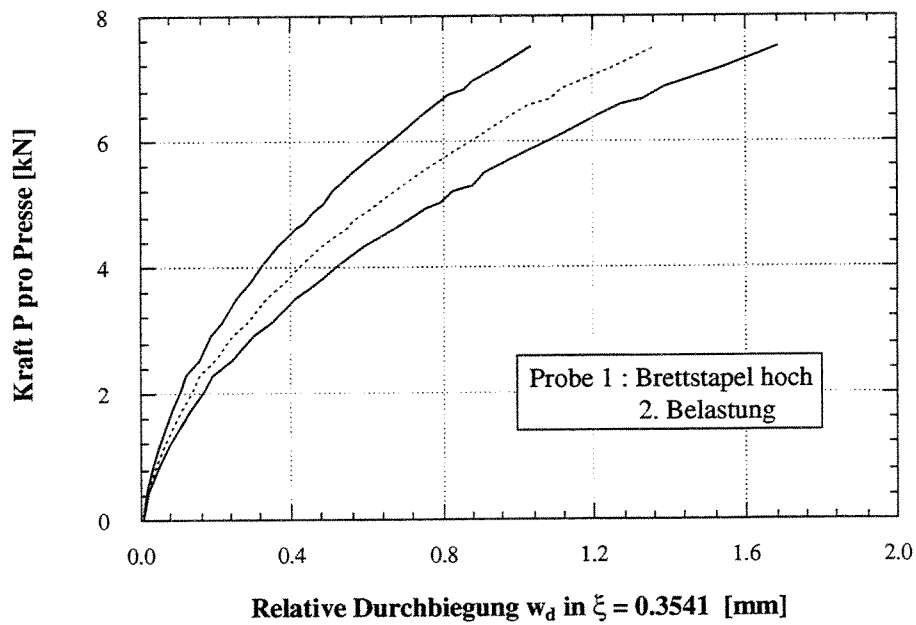
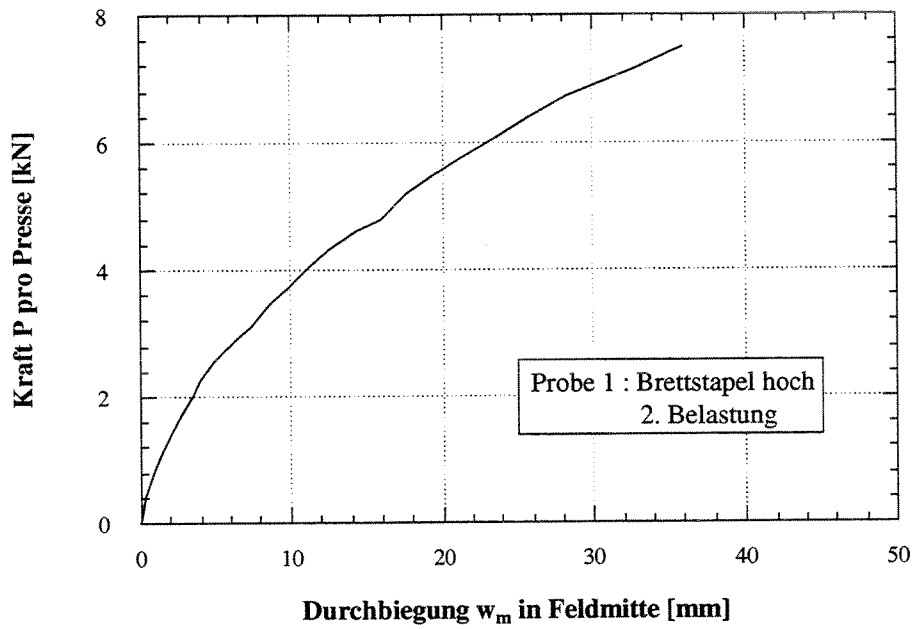


Bild 7.3-2. Typische Last-Verformungs-Diagramme einer Probe ohne zusätzliche Verleimung

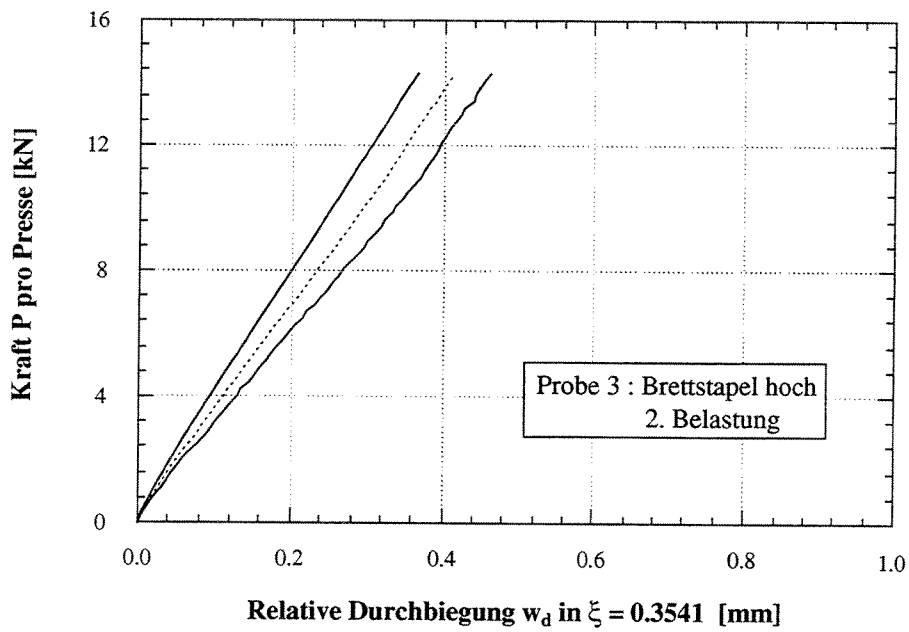
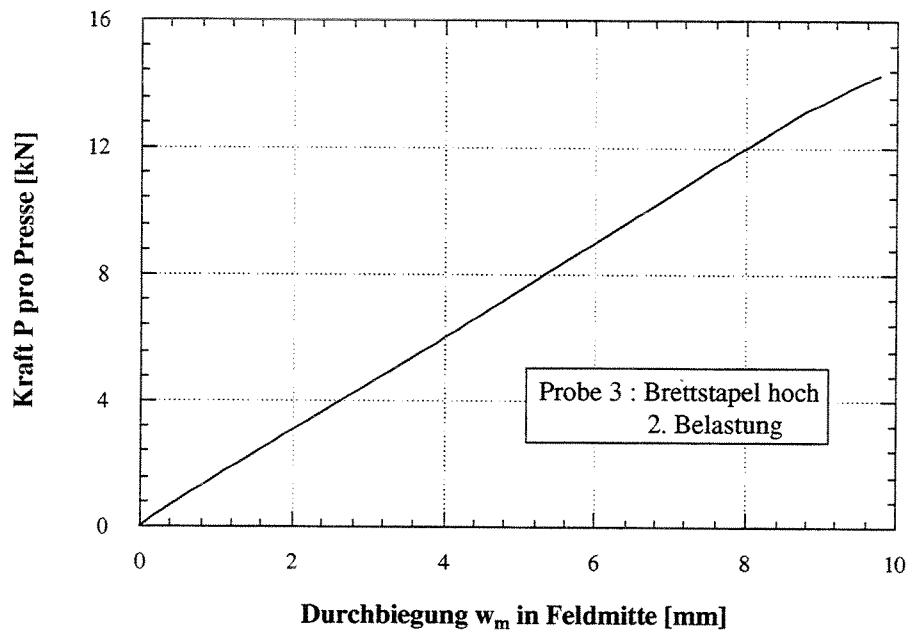


Bild 7.3-3. Typische Last-Verformungs-Diagramme einer Probe mit zusätzlicher Verleimung

	w_m	$w_{d abs}$	$w_{d rel}$	$w_{d rel} / w_m$
$k = 1.0 \text{ kN / cm}^2$	106.75 cm	100.31 cm	13.6	6.03 %
$k = 2.0 \text{ kN / cm}^2$	57.67 cm	54.83 cm	6.44	4.92 %
$k = 3.0 \text{ kN / cm}^2$	40.27 cm	38.54 cm	2.84	4.30 %
$k = 4.0 \text{ kN / cm}^2$	31.33 cm	30.10 cm	1.73	3.93 %
$k = 5.0 \text{ kN / cm}^2$	25.87 cm	24.92 cm	0.95	3.67 %
$k = 10.0 \text{ kN / cm}^2$	14.67 cm	14.19 cm	0.48	3.27 %
$k = 15.0 \text{ kN / cm}^2$	10.82 cm	10.46 cm	0.36	3.33 %
$k = 50.0 \text{ kN / cm}^2$	6.88 cm	6.60 cm	0.28	4.07 %

Tab. 7.3-2. Biegesteifigkeiten aus Durchbiegungsmessung in Feldmitte und Abweichung vom Rechenwert

50 kN/cm² und die der unverleimten Proben im Bereich um 1 kN/cm² liegt. In diesem Bereich machen sich kleine Unterschiede in der Fugensteifigkeit überproportional in den Durchbiegungen bemerkbar.

Die Werte der relativen Durchbiegung sind im Mittel bei ca. 4% der absoluten Durchbiegung in Feldmitte anzunehmen. Ein Vergleich mit den gemessenen Werten zeigt gute Übereinstimmung, wenn auch wegen der höheren Fehleranfälligkeit dieser Messung größere Abweichungen auftreten.

In Tab. 7.3-3 sind die ideellen Biegesteifigkeiten der untersuchten Proben absolut und relativ im Vergleich zur rechnerisch maximal erreichbaren Biegesteifigkeit angegeben. Während mit der Verleimung immerhin noch ca. 35% der maximalen Biegesteifigkeit erreicht werden, kann ohne diese Maßnahme nur von einer Effektivität von ca. 5% ausgegangen werden.

Dieses Ergebnis veranschaulicht, daß ab einer bestimmten Anzahl von mit mechanischen Verbindungsmitteln verbundenen Querschnitten oder -auf andere Weise ausgedrückt- einem

	Probe 1	Probe 2	Probe 3	Probe 4
zusätzliche Verleimung	○	○	●	●
Biegesteifigkeit [kN cm ²]	31'894'531	23'509'115	214'127'604	236'588'542
Abweichung	0.050	0.037	0.336	0.371

Tab. 7.3-3. Biegesteifigkeiten aus Durchbiegungsmessung in Feldmitte und Abweichung vom Rechenwert der maximalen Biegesteifigkeit

bestimmten Verhältnis zwischen Gesamthöhe des Verbundquerschnittes und Höhe der gleichen Teilquerschnitte die Steifigkeit stark reduziert wird und nur schwer einschätzbar ist. Dieses sollte insbesondere dann beachtet werden, wenn solche Verbundelemente zur Aussteifung anderer Tragwerksteile herangezogen werden sollen oder die Verbundelemente selbst auszusteifen sind. Während beim zweiteiligen Verbundquerschnitt immerhin noch 25% der maximalen Biegesteifigkeit durch die Eigenbiegesteifigkeit der Teilquerschnitte abgedeckt sind, d. h. maximal 75% der effektiven Biegesteifigkeit durch Verbundwirkung erzielt werden, sind diese Verhältnisse beim 24-teiligen Verbundquerschnitt deutlich verschoben. Die Eigenbiegesteifigkeit der Teilquerschnitte beträgt nur noch 0.17%. Ob und in welchem Maße die restlichen 99.83% aktiviert werden können, hängt natürlich entscheidend von den Fugensteifigkeiten ab. Mit Nägeln oder Schrauben -auch wenn diese dicht gesetzt sind- können nur geringe effektive Biegesteifigkeiten im Vergleich zu deren Maximalwert erreicht werden.

7.4 Tragverhalten einer Holz-Beton-Verbunddecke

Die Holz-Beton-Verbundbauweise wird bevorzugt bei der Sanierung alter Bausubstanz eingesetzt /NAT92.2/ /ZOE92/. Aber auch für Neubauten stellt sie eine wirtschaftliche Alternative dar, welche hohen statischen und bauphysikalischen Anforderungen gerecht wird. Die hier auszugsweise dargestellten Ergebnisse experimenteller Untersuchungen stehen im Zusammenhang mit dem Bau eines Schulgebäudes und sind wie die im vorhergehenden Kapitel dargestellten Versuche an Brettstapelelementen umfangreich in /NAT93/ dokumentiert.

Auf die horizontal liegenden Brettstapelelemente wird eine 12 cm dicke Betonschicht aufgebracht. Die kraftschlüssige Verbindung zwischen Holz und Beton durch Formschluß in der profilierten Fuge wird mit Hilfe von eingeleimten Dübeln gesichert, welche nach dem Aushärten des Betons quer zur Trägerachse vorgespannt werden. Die Geometrie der Proben und die Lastaufbringung im Versuch sind in Bild 7.4-1 angegeben. Außer dem Verhalten bei symmetrischer Belastung durch zwei Einzellasten wurde auch das Verhalten unter asymmetrischer Lastanordnung untersucht (siehe Anhang 10). Der Verbundquerschnitt ist in Bild 7.4-2 dargestellt.

In Tab. 7.4-1 sind die Bruchlasten der vier untersuchten Proben angegeben. Infolge der zusätzlichen Verleimung zweier Brettstapelelemente kann eine leichte, aber nicht signifikante Erhöhung der Bruchlast angenommen werden. Bei allen Proben war ein ausgeprägt linear-elastisches Verhalten bis zum Bruch festzustellen. In Bild 7.4-3 ist die für die getesteten Proben typische Last-Verformungskurve im Bruchversuch erkennbar. Aufgrund dieser Beobachtung erscheint es ausreichend die Auswertung der Versuche ebenfalls linear-elastisch durchzuführen.

Aus den Diagrammen für die verschiedenen Belastungsversuche werden wiederum die Steigungen der Last-Verformungs-Geraden herausgemessen und der Rückrechnung einer fiktiven Dübelsteifigkeit zugrunde gelegt. In Tab. 7.4-2 sind die Mittelwerte für den asymmetrischen, in Tab. 7.4-3 die Werte für den symmetrischen Lastfall zusammengestellt.

Da die Verbindung zwischen Holz und Beton durch die Formschluß erzeugenden Kerben diskret erfolgt wird auch die Berechnung solchermaßen durchgeführt. In den Bereichen zwischen den Kerben wird kein Verbund angesetzt. Die Ergebnisse der Berechnungen sind in Anhang 10 aufgelistet und graphisch aufbereitet. Die in den Kerben aufzunehmenden Schubkräfte können Tab. 7.4-4 entnommen werden.

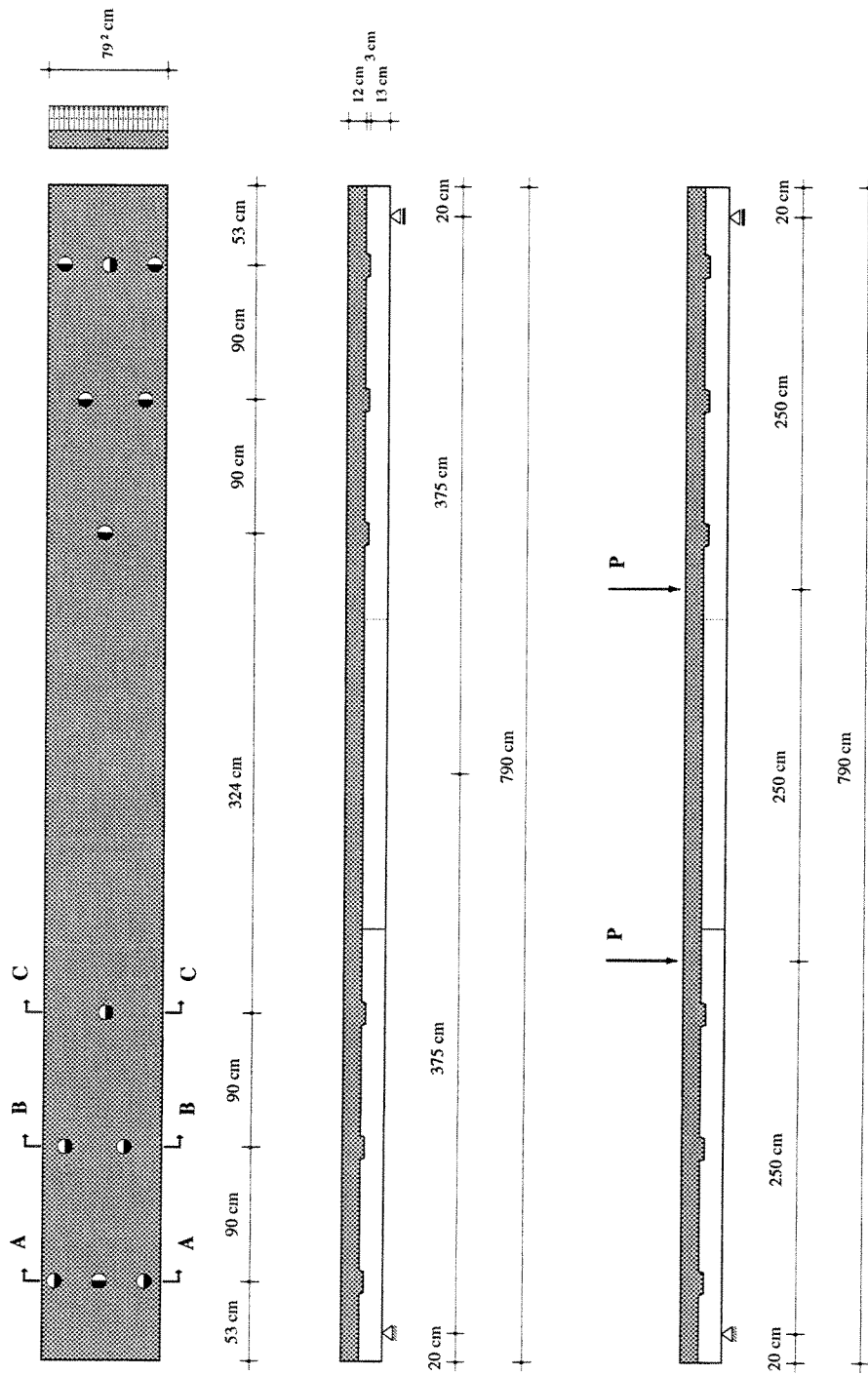
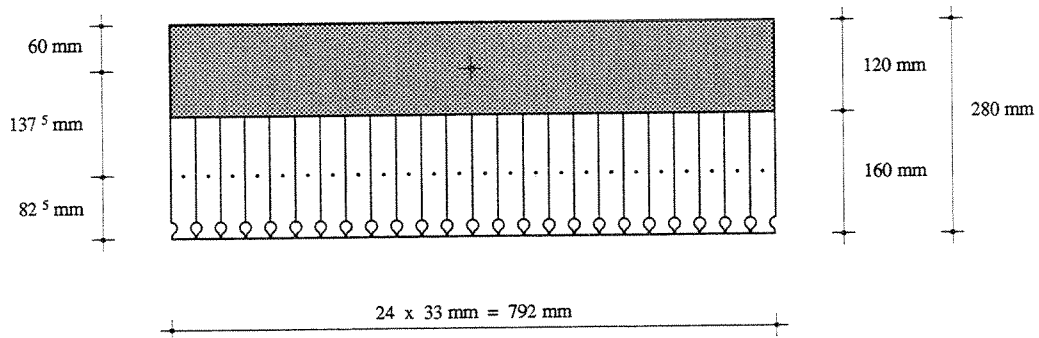


Bild 7.4-1. Geometrie der Holz-Beton-Verbunddecke, Anordnung der Dübel und symmetrische Anordnung der Einzellasten im Versuch

Normaler Querschnitt



Querschnitt in Kerbe 1 (A - A)

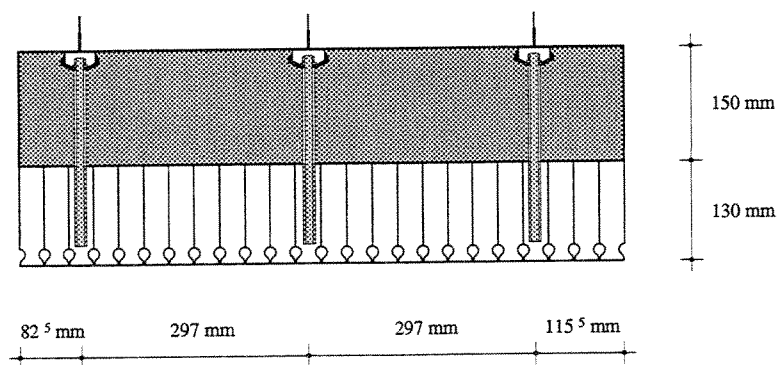


Bild 7.4-2. Geometrie des Holz-Beton-Verbundquerschnittes und Anordnung der Dübel

	Probe 1	Probe 2	Probe 3	Probe 4	Mittelwert
zusätzliche Verleimung	○	○	●	●	—
Gewicht	22.52 kN	22.38 kN	23.24 kN	23.06 kN	22.80 kN
Bruchlast	—	64.30 kN	69.01 kN	76.16 kN	69.82 kN

Tab 7.4-1. Bruchlasten der Holz-Beton-Verbundquerschnittes im Vierpunkt-Biegeversuch

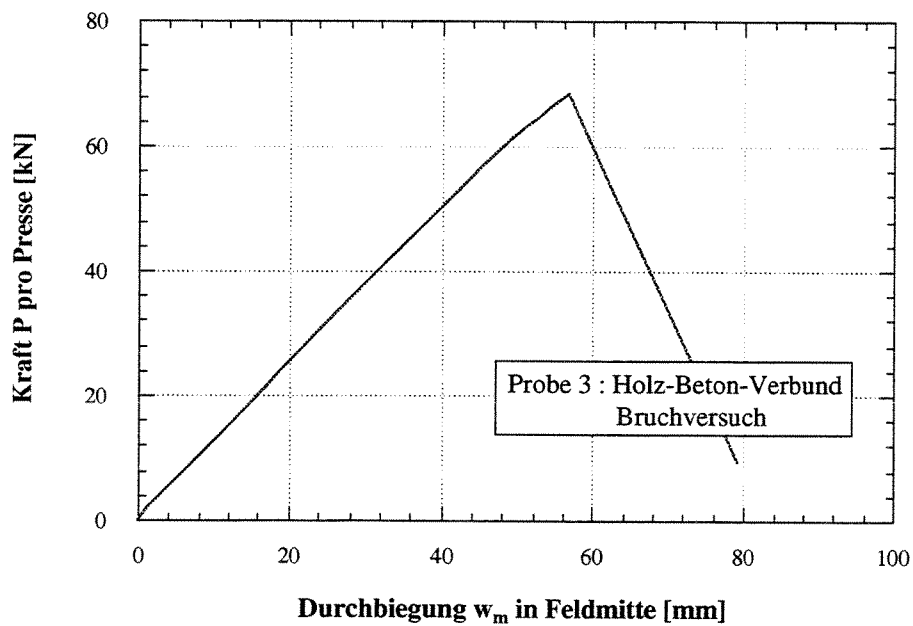


Bild 7.4-3. Typisches Last-Verformungs-Diagramm einer Probe im Vierpunkt-Biegeversuch bis zum Eintreten des Bruchs

[kN / cm]	Probe 1	Probe 2	Probe 3	Probe 4	Mittelwert
Mittelwert	24.6	25.5	24.9	—	25.0

Tab. 7.4-2. Steigungswerte der Last-Verformungskurven aus der Durchbiegungsmessung in Feldmitte bei asymmetrischer Last

[kN / cm]	Probe 1	Probe 2	Probe 3	Probe 4	Mittelwert
1. Belastung	11.5	11.5	12.0	11.3	11.58
2. Belastung	12.9	12.8	12.5	11.9	
3. Belastung	13.0	13.4	12.6	12.4	
4. Belastung	—	13.1	13.0	12.5	
5. Belastung	—	13.2	13.0	12.9	
6. Belastung	—	13.1	13.2	12.9	
7. Belastung	—	13.2	13.1	12.5	
Mittelwert	12.95	13.13	12.90	12.52	12.88

Tab. 7.4-3. Steigungswerte der Last-Verformungskurven aus der Durchbiegungsmessung in Feldmitte bei symmetrischer Last

	Kerbe 1	Kerbe 2	Kerbe 3
Schubkraft	287.9 kN	304.2 kN	238.5 kN

Tab. 7.4-4. Abschätzung der in den Kerben aufzunehmende Schubkräfte bei Erreichen der Bruchlast

Die Numerierung der Kerben erfolgt von innen nach außen. Es ist erkennbar, daß nicht die äußere Kerbe die größten Belastungen erfährt, sondern die mittlere der drei an einer Seite angeordneten Kerben. Zur Rückrechnung der Belastungen in den zur Sicherung des Formschlusses notwendigen Dübeln ist sowohl die genaue Geometrie der Kerben als auch der Reibungskoeffizient in der Fuge zwischen Holz und Beton und die Auszugssteifigkeit der Dübel zu berücksichtigen. Dieses verlangt eine gesonderte Modellbildung beispielsweise mit Hilfe der FEM.. Die oben durchgeführten Berechnungen berücksichtigen also lediglich das globale Verhalten der diskreten Verbindung.

8 Zusammenfassung und Ausblick

In der vorliegenden Arbeit wird ein allgemeines Verfahren zur Berechnung von Verbundträgern mit beliebig gefügten Querschnitten nach Biegetheorie I. und II. Ordnung entwickelt. Wegen der Beschränkung auf das eindimensionale Stabproblem wird eine eventuelle Verdrehung des Verbundelementes um dessen Längsachse und daraus resultierende Beanspruchungen nicht berücksichtigt. Dagegen kann die zweiachsige Belastung von Querschnitten, deren Hauptachsen a priori nicht bekannt sind, durch Drehung des lokalen Koordinatensystems näherungsweise erfaßt werden.

Eine weitere Einschränkung der Allgemeingültigkeit des vorgestellten Berechnungsverfahrens ergibt sich aus der alleinigen Berücksichtigung der Fugennachgiebigkeit in Längsrichtung des Verbundelementes. Mit Hilfe von auch aus anderen Lösungsansätzen bekannten Vereinfachungen zur Linearisierung des Differentialgleichungs-Systems wird jedoch gezeigt, daß die horizontalen Relativverschiebungen unabhängig von den vertikalen sind, wenn mit einer für alle Teilquerschnitte gleichen, gewichteten Durchbiegung gerechnet wird. In einer Nachlaufberechnung kann eine Umverteilung der Eigenbiegemomente in den Teilquerschnitten infolge der vertikalen Fugennachgiebigkeit berücksichtigt werden.

Zur anschaulichen Darstellung der mechanischen Zusammenhänge wird das Teilverbundmodell entwickelt, dessen Flexibilität auf die gedankliche Zerlegung der Schnittgrößen in den Teilquerschnitten zurückzuführen ist. Durch diesen Separationsansatz ist es möglich, Zuordnungen zwischen einfach bestimmbarsten Steifigkeitswerten und korrespondierenden Schnittgrößen zu treffen und eine allgemeingültige Beschreibung von beliebig gefügten Verbundquerschnitten abzuleiten. Die Gesamtbelastungen in den Teilquerschnitten ergeben sich entsprechend nach Berechnung des globalen Systems durch einfache Summenbildungen.

Um numerische Schwierigkeiten weitestgehend auszuschließen wird zunächst das Differentialgleichungs-System des vorgelegten Verbundquerschnittes analysiert. Dabei werden in einer ersten Stufe bereits lineare Abhängigkeiten und Singularitäten des Differentialgleichungs-Systems infolge starrer oder fehlender Verdübelung, versteckter oder offensichtlicher Symmetrien, Zellenbildungen und Verzweigungen erkannt und eliminiert.

Durch die allgemeine Beschreibung des charakteristischen Polynoms und die Zerlegung der darin auftretenden Koeffizienten werden die Besonderheiten des Verbundquerschnittes ausreichend berücksichtigt, da nur die für das jeweilige Problem relevanten Eigenwerte herausgefiltert werden. Ein Fundamentalsystem von Lösungen kann damit sicher gefunden werden.

Zur weiteren Berechnung wird vorteilhaft das Übertragungsverfahren eingesetzt, da nur dieses unter Verwendung bestimmter Ansatzfunktionen ein Konzept zur numerisch stabilen Berechnung von Verbundträgern mit beliebig gefügten Querschnitten ermöglicht, das auf einer Trennung zwischen querschnittsbezogener und systembezogener Berechnung beruht. Die Diskretisierung des Verbundträgers ist daher weitgehend durch Unstetigkeitsstellen bestimmt und nicht numerisch bedingt. Da zudem nur eine minimale Anzahl von Zustandsgrößen in der Berechnung mitgeführt wird, erweist sich auch bei größeren Problemstellungen das Gesamtmatrix-Verfahren als sehr vorteilhaft. Dessen Anwendung ist eine weitere Maßnahme zum Erreichen numerischer Stabilität in den Berechnungen, da die beim konventionellen Übertragungsverfahren möglichen Entkopplungen bei der Einarbeitung von Zwischenbedingungen in dieser Form nicht auftreten können.

Zur Berechnung von Strukturen mit Verzweigungen der Stäbe wird bevorzugt die FEM eingesetzt. Es wird gezeigt, daß bei der Ableitung der Element-Steifigkeitsmatrix unter sonst gleichen Voraussetzungen die Vorteile des Verfahrens auf der Basis der Übertragungsmatrizen verlorengehen. Die numerische Stabilität kann nur dann in weiten Grenzen gesichert werden, wenn die Steifigkeitsmatrix des Stabzuges aus der Gesamt-Matrix des Übertragungsverfahrens ermittelt wird. Die in der Regel unkritische Inversion einer leicht zu bestimmenden Submatrix der Gesamtmatrix liefert außerdem die Bestimmungsgleichungen für die Zustandgrößen und Unstetigkeiten in den Knoten des Stabzuges.

Das vorgestellte Berechnungsverfahren wurde in FORTRAN 77 auf einem Apple Macintosh®-PC programmiert. Durch konsequente Ausnutzung des Matrizenkalküls konnte der Einsatz handelsüblicher numerischer Standard-Routinen auf ein Minimum begrenzt werden. Neben Unterprogrammen zur Lösung von linearen Gleichungssystemen und zur Ermittlung aller Nullstellen eines Polynoms wird nur noch eine Routine zur Bestimmung der Eigenwerte und Eigenvektoren quadratischer Matrizen eingesetzt. Die hauptsächliche Programmierarbeit betrifft die Organisation der anfallenden Daten, die Algorithmen zur Querschnittsanalyse und den Aufbau der Matrizen.

Die Eignung des Verfahrens für sehr unterschiedliche Problemstellungen wird anhand verschiedener Anwendungsbeispiele aufgezeigt. In einer Parameterstudie werden die Zustandsgrößen eines Verbundträgers mit unterschiedlicher Dübelverteilung berechnet und mit bekannten Lösungen verglichen. Es zeigt sich, daß die Verteilung der Dübel über die Stablänge nicht -wie allgemein üblich- der Querkraftlinie folgend optimal ist, sondern dann, wenn sie sich an der Steigung der Durchbiegungsfunktion orientiert.

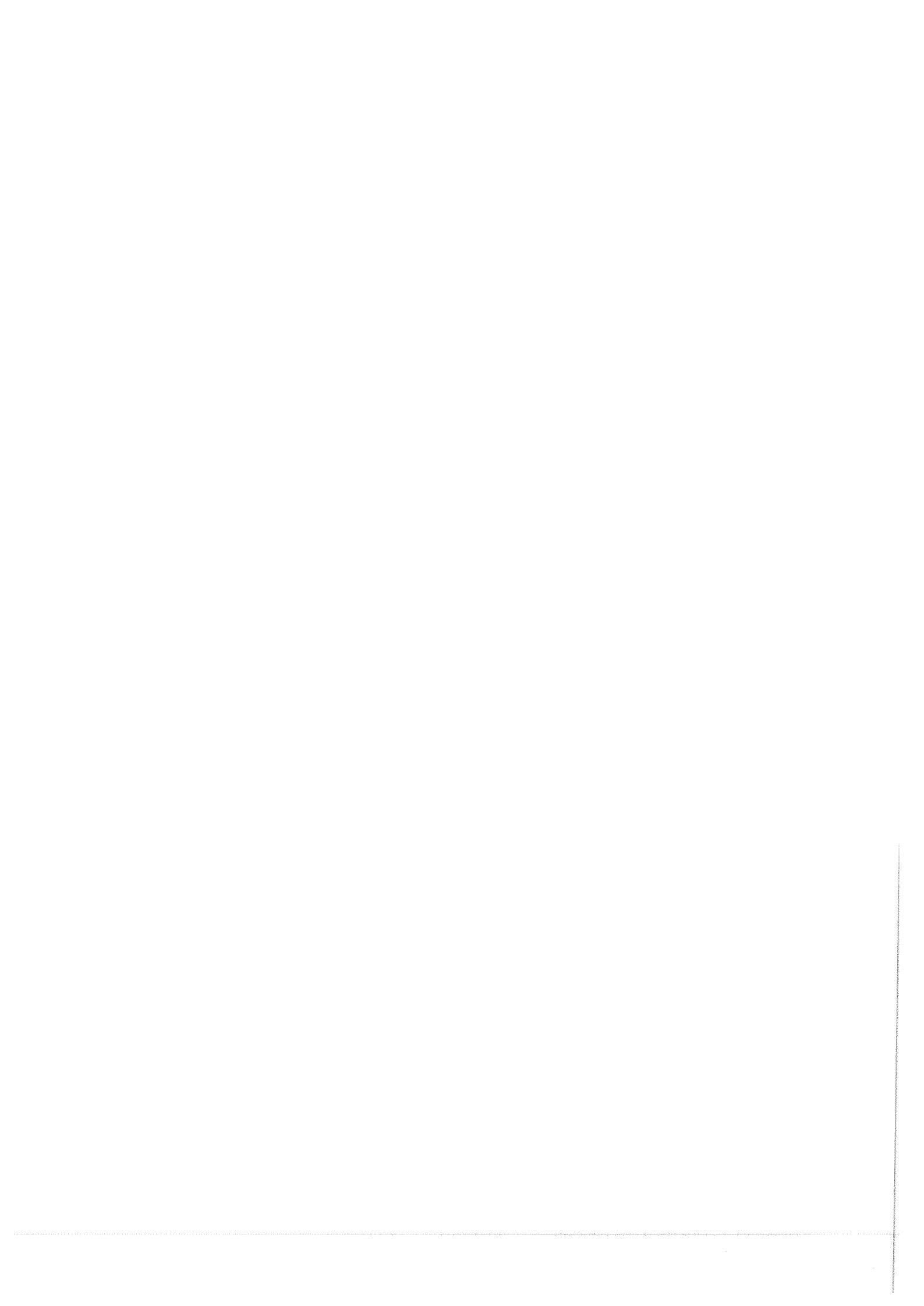
Die näherungsweise Erfassung der Schubdeformationen von homogenen Balkenquerschnitten und die implizite Berechnung der mitwirkenden Platten- bzw. Gurtbreite von Plattenbalken wird an einem typischen Beispiel aus der Altbau-Sanierung aufgezeigt. Der geringe Einfluß einer Abminderung der Gurtbreite auf das globale Tragverhalten des Verbundquerschnittes begünstigt dabei die Angleichung der maximalen Normalspannungen im homogenen Gurt an die durch Diskretisierung des Gurtes berechneten Maximalwerte.

Die Auswertungen von Versuchen an Brettstapelträgern und Holz-Beton-Verbundplatten zur Rückrechnung von Fugensteifigkeiten zeigt die hohe Flexibilität und hohe numerische Stabilität des Verfahrens in den Bereichen sehr geringer und nahezu starrer Verdübelung. In einer umfangreichen Untersuchung zu Stabilitätsgrenzen eines Stabes mit dreiteiligem Verbundquerschnitt bei unterschiedlichen Randbedingungen kann zudem demonstriert werden, wie sich die Beschreibung aller denkbaren Randbedingungen konsistent aus dem Teilverbund-Modell ergibt. Die ermittelten Knicklasten weichen zum Teil erheblich von denjenigen ab, welche über vereinfachende Annahmen bezüglich der Randbedingungen auf einfache Weise berechenbar sind

Aus der Sicht des Verfassers erscheint die konsistente Erweiterung des vorgestellten, verallgemeinerten Berechnungsverfahrens für das eindimensionale Stabproblem II. Ordnung auf die dreidimensionale Problemstellung wünschenswert. Auch das dynamische Verhalten sollte Gegenstand weiterer Untersuchungen auf der Basis des Teilverbund-Modells sein. Die umfangreichen Dokumentationen und die zahlreichen Ausführungen zu Randthemen im Anhang dieser Arbeit entspringen dem Wunsch, daß die mechanische Transparenz dieses Modells und dessen vielfältige Anwendungsmöglichkeiten auch andere Interessierte begeistern möge. Aus dem gleichen Grund enthält die Arbeit konkrete Ausarbeitungen für eine Modifikation des üblicherweise zur Berechnung und Bemessung von Verbundträgern im Holzbau eingesetzten γ -Verfahrens, dessen Existenz-

berechtigung allerdings durch die vorliegende Arbeit keineswegs geschmälert wird. Dennoch sollte das Mögliche getan werden, gerade dem Anwender von Näherungsverfahren im Verlauf der schematisierten Berechnung eine Transparenz auf den mechanischen Hintergrund zu erhalten, so daß insgesamt eine größere Sicherheit im Umgang mit solchen Hilfsmitteln gewonnen werden könnte.

Die besten Berechnungsverfahren verlieren jedoch ihren Reiz, wenn die Eingangswerte der Berechnung mit großen Unsicherheiten verbunden sind. Daher sieht der Verfasser dringlichen Bedarf an Simulationsrechnungen zur Erfassung des Bettungsverhaltens von typischen Holz-Verbindungsmiteln. Die experimentelle Ermittlung von Kennwerten der Verbindungen sollte in erster Linie der Kalibrierung mechanischer Modelle dienen und nicht als bloße Beschaffung von Berechnungswerten im Einzelfall verstanden werden.



Anhang 1

Kennwerte und Schnittgrößen von Verbundquerschnitten

Als Beispiel wird der vierteilige Verbundquerschnitt nach Bild A1-1 berechnet. Die Fugen zwischen den Teilquerschnitten werden als starr angesehen. Es sollen die Gesamtbiegesteifigkeit, die Schnittgrößen der Teilquerschnitte und der Fugen zwischen direkt benachbarten Teilquerschnitten berechnet, sowie die Schubspannungsnachweise geführt werden. Dementsprechend sind Fugen bzw. Kopplungen zwischen benachbarten Querschnitten definiert. Die Berechnung erfolgt auf der Basis des Teilverbundmodells wie es in Kapitel 2 dargestellt ist.

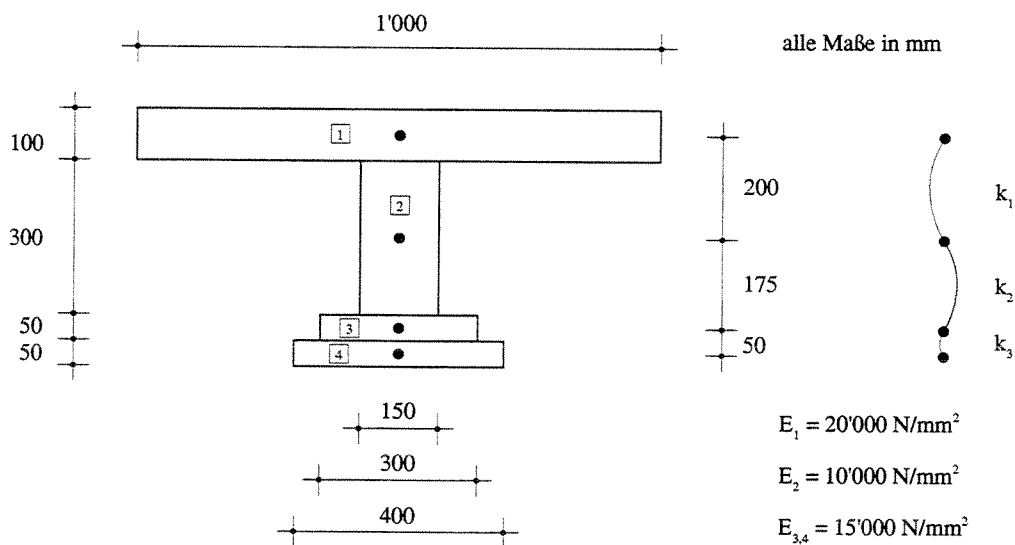


Bild A1-1. Geometrie und Kopplungen des vierteiligen Verbundquerschnittes

Die Grundwerte der Dehn- und Biegesteifigkeiten der Teilquerschnitte können ohne Vorberechnungen angegeben werden.

$$E_1 A_1 = 2.00 \cdot 10^9 \text{ N}$$

$$E_2 A_2 = 4.50 \cdot 10^8 \text{ N}$$

$$E_3 A_3 = 2.25 \cdot 10^8 \text{ N}$$

$$E_4 A_4 = 3.00 \cdot 10^8 \text{ N}$$

$$\sum_{m=1}^4 E_m A_m = 2.975 \cdot 10^9 \text{ N}$$

$$E_1 I_1 = 1.667 \cdot 10^{12} \text{ Nmm}^2$$

$$E_2 I_2 = 3.375 \cdot 10^{12} \text{ Nmm}^2$$

$$E_3 I_3 = 4.688 \cdot 10^{10} \text{ Nmm}^2$$

$$E_4 I_4 = 6.250 \cdot 10^{10} \text{ Nmm}^2$$

$$\sum_{m=1}^4 E_m I_m = 5.151 \cdot 10^{12} \text{ Nmm}^2$$

Die Elemente der Biege- und Verdrehsteifigkeitsanteile werden nach Gl. 2.11 ermittelt.

$$B_{S_{i,k}} = R_{i,k} |e_{i,k}| = \frac{E_i A_i E_k A_k e_{i,k}^2}{\sum_{m=1}^n E_m A_m} \quad \text{bzw.} \quad R_{i,k} = \frac{E_i A_i E_k A_k |e_{i,k}|}{\sum_{m=1}^n E_m A_m}$$

Im Gegensatz zur Summe der Biegesteifigkeitsanteile $B_{S_{i,k}}$ kann die Gesamtsumme der Verdrehsteifigkeiten $R_{i,k}$ mechanisch nicht interpretiert werden. Lediglich die Elemente der Menge \mathbf{R} selbst und die Summen von daraus gebildeten Teilmengen gehen in die Berechnung ein. Zu diesem Zweck ist es sinnvoll, die Elemente der Menge in Dreiecksform anzuordnen.

$$\mathbf{R} = \frac{1}{\sum_{m=1}^n E_m A_m} \left\{ \begin{array}{ccc} E_1 A_1 E_2 A_2 e_{1,2} & & \\ E_1 A_1 E_3 A_3 e_{1,3} & E_2 A_2 E_3 A_3 e_{2,3} & \\ E_1 A_1 E_4 A_4 e_{1,4} & E_2 A_2 E_4 A_4 e_{2,4} & E_3 A_3 E_4 A_4 e_{3,4} \end{array} \right\}$$

Setzt man die für den Beispielquerschnitt maßgebenden Werte ein, so erhält man

$$\mathbf{R} = \frac{10^{18}}{2.975 \cdot 10^9} \left\{ \begin{array}{ccc} 180.00 & & \\ 168.75 & 17.72 & \\ 255.00 & 30.38 & 3.38 \end{array} \right\} \quad [\text{Nmm}]$$

Die gleiche Vorgehensweise für die Biegesteifigkeitsanteile $B_{S_{i,k}}$ ergibt

$$\mathbf{B}_S = \frac{10^{20}}{2.975 \cdot 10^9} \left\{ \begin{array}{ccc} 360.00 & & \\ 632.81 & 31.01 & \\ 1'083.75 & 68.34 & 1.69 \end{array} \right\} \quad [\text{Nmm}^2]$$

Die Summe über die Elemente dieser Menge entspricht dem Steineranteil an der Gesamtbiegesteifigkeit des Verbundquerschnittes.

$$B_S = \frac{2'177.60 \cdot 10^{20}}{2.975 \cdot 10^9} = 73.20 \cdot 10^{12} \text{ Nmm}^2$$

Die Gesamtbiegesteifigkeit beträgt demnach

$$B = B_S + \sum_{m=1}^n E_m I_m = 73.197 \cdot 10^{12} + 5.151 \cdot 10^{12} = 78.348 \cdot 10^{12} \text{ Nmm}^2$$

Die Verdrehsteifigkeiten R_j der drei definierten Fugen zwischen benachbarten Teilquerschnitten erhält man nun, indem die idealisierte Aufteilung des Gesamtschnittmomentes gemäß dem Teilverbundmodell für maximale Anzahl Fugen (Bild 2.1-4) mit der real möglichen Aufteilung (Bild 2.1-5) verglichen wird. Die daraus ableitbaren Substitutionen und die Zusammenstellungen der Teilmengen aus der Grundmenge R der Verdrehsteifigkeiten R_{ik} zur Ermittlung der Verdrehsteifigkeiten R_j der realen Fugen j sind in Bild A1-2 dargestellt.

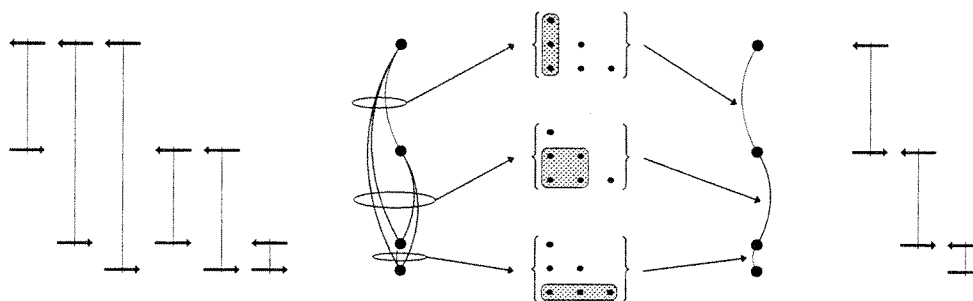


Bild A1-2. Substitutionen der fiktiven Fugen durch die realen bzw. definierten Fugen und korrespondierende Zusammenstellung der Elemente der Grundmenge R der Verdrehsteifigkeiten R_{ik} zu maßgebenden Teilmengen R_j

In Bild 2.1-5 ist bereits die formelmäßige Beschreibung dieser Substitutionen angegeben.

$$R_1 = R_{1,2} + R_{1,3} + R_{1,4} = \frac{(180.00 + 168.75 + 255.00) \cdot 10^9}{2.975} = 202.94 \cdot 10^9 \text{ Nmm}^2$$

$$R_2 = R_{1,3} + R_{1,4} + R_{2,3} + R_{2,4} = \frac{(168.75 + 255.00 + 17.72 + 30.38) \cdot 10^9}{2.975 \cdot 10^9} = 158.61 \cdot 10^9 \text{ Nmm}^2$$

$$R_3 = R_{1,4} + R_{2,4} + R_{3,4} = \frac{(255.00 + 30.38 + 3.38) \cdot 10^9}{2.975 \cdot 10^9} = 97.06 \cdot 10^9 \text{ Nmm}^2$$

Zur Ermittlung der Beanspruchungen in den Fugen werden die Fugenschubflüsse T_j bestimmt. Diese erhält man mit einer Modifikation der sogenannten 'Dübelformel', in der die Wichtung der Flächenmomente mit den zugehörigen Elastizitätsmoduln berücksichtigt ist.

$$T = \tau b = \frac{Q S}{b I} b = \frac{Q S}{I} \hat{=} Q \frac{R}{B} \left[\frac{\text{N}}{\text{mm}} \right]$$

Setzt man die Werte für den Beispielquerschnitt ein, so erhält man als Zusammenhang zwischen der Gesamtquerkraft Q und den Fugenschubflüssen T_j :

$$T_1 = \frac{R_1}{B} Q = \frac{202.94 \cdot 10^9}{78.348 \cdot 10^{12}} Q = 2.59 \cdot 10^{-3} Q$$

$$T_2 = \frac{R_2}{B} Q = \frac{158.61 \cdot 10^9}{78.348 \cdot 10^{12}} Q = 2.02 \cdot 10^{-3} Q$$

$$T_3 = \frac{R_3}{B} Q = \frac{97.06 \cdot 10^9}{78.348 \cdot 10^{12}} Q = 1.24 \cdot 10^{-3} Q$$

Die Multiplikation der Schubflüsse T_j mit den zugehörigen Hebelarmen e_j entspricht- wie in Kapitel 2.2 allgemeingültig abgeleitet- der Integration der dem Teilverbund j assoziierten Schubspannungen in den beteiligten Teilquerschnitten und damit dessen Anteil an der Aufnahme der Gesamtquerkraft Q :

$$T_1 e_1 = 200.0 \cdot 2.59 \cdot 10^{-3} Q = 0.52 Q$$

$$T_2 e_2 = 175.0 \cdot 2.02 \cdot 10^{-3} Q = 0.35 Q$$

$$T_3 e_3 = 50.0 \cdot 1.24 \cdot 10^{-3} Q = 0.06 Q$$

Den Beitrag der einzelnen Fugen zur Gesamtbiegesteifigkeit berechnet man aus

$$B_{S1} = R_1 e_1 = 202.94 \cdot 10^9 \cdot 200 = 40.588 \cdot 10^{12} \text{ Nmm}^2$$

$$B_{S2} = R_2 e_2 = 158.61 \cdot 10^9 \cdot 175 = 27.757 \cdot 10^{12} \text{ Nmm}^2$$

$$B_{S3} = R_3 e_3 = 97.06 \cdot 10^9 \cdot 50 = 4.853 \cdot 10^{12} \text{ Nmm}^2$$

Die Summe der Steifigkeiten B_{Sj} ist wieder der Steineranteil an der Gesamtbiegesteifigkeit.

$$\sum_{m=1}^3 B_{S_m} = 73.20 \cdot 10^{12} \text{ Nmm}^2 = B_S$$

Das Gesamtmoment wird entsprechend der Biegesteifigkeitsanteile aufgenommen.

$$M = \sum_{m=1}^4 M_m + \sum_{m=1}^3 N_m e_m$$

$$\sum_{m=1}^4 M_m = \frac{\sum_{m=1}^4 E_m I_m}{B} M = \frac{5.151 \cdot 10^{12}}{78.348 \cdot 10^{12}} M = 0.07 M$$

$$N_1 e_1 = \frac{B_{S1}}{B} M = \frac{40.588 \cdot 10^{12}}{78.348 \cdot 10^{12}} M = 0.52 M$$

$$N_2 e_2 = \frac{B_{S2}}{B} M = \frac{27.757 \cdot 10^{12}}{78.348 \cdot 10^{12}} M = 0.35 M$$

$$N_3 e_3 = \frac{B_{S3}}{B} M = \frac{4.853 \cdot 10^{12}}{78.348 \cdot 10^{12}} M = 0.06 M$$

Für die Normalkräfte N_j in den Teilquerschnitten aus den Teilverbunden j erhält man

$$N_j = \frac{R_j e_j}{B e_j} M = \frac{R_j}{B} M$$

Die Summation der Normalkräfte N_j in den Teilquerschnitten aus den Teilverbunden erfolgt nach Gl. 2.05 unter Berücksichtigung der Vorzeichen.

$$\bar{N}_k = N \frac{E_k A_k}{\sum_{i=1}^n E_i A_i} + \sum N_j^{ks} - \sum N_j^{kp}$$

N_j^{kp} – Normalkraft aus Teilverbund j mit primärem Teilquerschnitt k

N_j^{ks} – Normalkraft aus Teilverbund j mit sekundärem Teilquerschnitt k

N – äußere Längskraft

Der Beispielquerschnitt wird nicht durch eine äußere Normalkraft belastet und es liegen nur positive Hebelarme e_j vor, d. h. die primären Teilquerschnitte einer Fuge haben gegenüber den sekundären Teilquerschnitten stets den kleineren Index.

$$\bar{N}_1 = -N_1 = -\frac{R_1}{B} M = -\frac{202.94 \cdot 10^9}{78.348 \cdot 10^{12}} M = -25.9 \cdot 10^{-2} M$$

$$\bar{N}_2 = N_1 - N_2 = \frac{(R_1 - R_2)}{B} M = \frac{(202.94 - 158.61) \cdot 10^9}{78.348 \cdot 10^{12}} M = 5.66 \cdot 10^{-2} M$$

$$\bar{N}_3 = N_2 - N_3 = \frac{(R_2 - R_3)}{B} M = \frac{(158.61 - 97.06) \cdot 10^9}{78.348 \cdot 10^{12}} M = 7.86 \cdot 10^{-2} M$$

$$\bar{N}_4 = N_3 = \frac{R_3}{B} M = \frac{97.06 \cdot 10^9}{78.348 \cdot 10^{12}} M = 12.39 \cdot 10^{-2} M$$

Die Momentenbeanspruchungen M_i in den Teilquerschnitten werden nach dem nun bekannten Schema berechnet.

$$M_1 = \frac{E_1 I_1}{B} M = \frac{1.667 \cdot 10^{12}}{78.348 \cdot 10^{12}} M = 0.0213 M$$

$$M_2 = \frac{E_2 I_2}{B} M = \frac{3.375 \cdot 10^{12}}{78.348 \cdot 10^{12}} M = 0.0431 M$$

$$M_3 = \frac{E_3 I_3}{B} M = \frac{4.668 \cdot 10^{10}}{78.348 \cdot 10^{12}} M = 0.0006 M$$

$$M_4 = \frac{E_4 I_4}{B} M = \frac{6.250 \cdot 10^{10}}{78.348 \cdot 10^{12}} M = 0.0008 M$$

Die Querkräfte Q_i in den Teilquerschnitten sind auf gleiche Weise berechenbar, so daß hier auf die explizite Darstellung verzichtet werden kann. Generell gilt folgende Analogie:

$$\frac{N_j e_j}{M} = \frac{T_j e_j}{Q} = \frac{R_j e_j}{B} \quad \text{und} \quad \frac{M_i}{M} = \frac{Q_i}{Q} = \frac{E_i I_i}{B}$$

Nach Kapitel 2.3 können die Gesamtquerkräfte in den Teilquerschnitten i unabhängig von der Querschnittsgeometrie mit Hilfe der lokalen z -Ordinaten der Schubflüßeinleitungen in den Teilquerschnitt angegeben werden.

$$\bar{Q}_i = Q_i + \sum T_j^{ip} \bar{z}_{ji} - \sum T_j^{is} \bar{z}_{ji}$$

Im vorliegenden Fall erfolgt die Schubflüßeinleitung am Rand der Teilquerschnitte.

$$\bar{Q}_1 = Q_1 + T_1 \frac{h_1}{2} = \frac{(2 \cdot 1.6667 + 0.20294 \cdot 100)}{2 \cdot 78.348} Q = 0.1508 Q$$

$$\bar{Q}_2 = Q_2 + (T_1 + T_2) \frac{h_2}{2} = \frac{(2 \cdot 3.375 + (0.20294 + 0.15861) \cdot 300)}{2 \cdot 78.348} Q = 0.7353 Q$$

$$\bar{Q}_3 = Q_3 + (T_2 + T_3) \frac{h_3}{2} = \frac{(2 \cdot 0.0467 + (0.15861 + 0.09706) \cdot 50)}{2 \cdot 78.348} Q = 0.0822 Q$$

$$\bar{Q}_4 = Q_4 + T_3 \frac{h_4}{2} = \frac{(2 \cdot 0.0625 + 0.09706 \cdot 50)}{2 \cdot 78.348} Q = 0.0318 Q$$

Zu Kontrollzwecken kann die Summe dieser Querkräfte gebildet werden. Sie muß der Gesamtquerkraft im Verbundquerschnitt gleich sein. Die Schubspannungen in den Teilquerschnitten setzen sich den Querkraftkomponenten entsprechend aus Anteilen mit parabelförmiger (Eigenbiegung des Teilquerschnittes) und dreiecksförmiger Verteilung (Schubbelastung aus Verbund) über die Teilquerschnittshöhe zusammen. Die Querverteilung wird im Rahmen der Theorie des eindimensionalen Stabproblems als konstant angesehen. Die Schubspannungsfunktion über die Teilquerschnittshöhe lautet unter Berücksichtigung der Querschnittsform (Rechteck) und der nur am Rand angreifenden Schubflüsse

$$\tau_i(\bar{z}) = \frac{1.5 Q_i}{A_i} \left(1 - \frac{4 \bar{z}_i^2}{h_i^2} \right) + \frac{T_j^{is} h_i}{2 A_i} \left(1 - \frac{2 \bar{z}_i}{h_i} \right) + \frac{T_j^{ip} h_i}{2 A_i} \left(1 + \frac{2 \bar{z}_i}{h_i} \right)$$

Das Maximum kann in diesem Fall mit Hilfe der Gleichung

$$\bar{z}_{i \max} = \frac{(T_j^{ip} - T_j^{is}) h_i}{12 \cdot Q_i} \quad -\frac{h_i}{2} \leq \bar{z}_{i \max} \leq \frac{h_i}{2}$$

ermittelt werden. Wenn die berechnete lokale z-Ordinate außerhalb des Geltungsbereiches liegt, so ist das Maximum am Teilquerschnittsrand anzunehmen. Die Größe der maximalen Schubspannung ist damit gleich dem Fugenschubfluß dividiert durch die maßgebende Teilquerschnittsbreite. Im Beispiel hat lediglich Teilquerschnitt 2 ein Maximum im Querschnitt selbst.

$$\bar{z}_{1\max} = \frac{(0.15861 - 0.20294) \cdot 300}{12 \cdot 3.375} \cdot \frac{300}{2} = -0.3284 \cdot \frac{300}{2} = -49.26 \text{ mm}$$

Die maximale Schubspannung in Teilquerschnitt 2 beträgt :

$$\begin{aligned} \tau_2(\bar{z}_{2\max}) &= \frac{1.5 \cdot 0.0431}{300 \cdot 150} (1 - 4 \cdot 0.3284^2) \\ &+ \frac{2.02 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 150} (1 - 2 \cdot 0.3284) \\ &+ \frac{2.59 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 150} (1 + 2 \cdot 0.3284) = 17.43 \cdot 10^{-6} \text{ Q} \end{aligned}$$

Es konnte gezeigt werden, daß die Schnittgrößen und Schubspannungen in einem vierteiligen Verbundträger mit starren Fugen mit Hilfe des Teilverbundmodells konsistent berechnet werden können. Neben den Grundwerten der Dehn- und Biegesteifigkeiten gehen lediglich die Verdrehsteifigkeiten der Fugen in die Berechnung ein. Das vorgestellte Verfahren ist unabhängig von Anzahl und Geometrie der Teilquerschnitte anwendbar. Es ist ausreichend, die Lage der mechanischen Schwerachsen der Teilquerschnitte anzugeben.

Die Berechnung für die orthogonale Richtung erfolgt auf gleiche Weise wie oben dargestellt. Liegen unsymmetrische Verbundquerschnitte vor, so läßt sich das mit den E-Moduln gewichtete Zentrifugalträgheitsmoment, der Kehrwert der Abdriftnachgiebigkeit, ebenfalls mit Hilfe des Teilverbund-Modells berechnen.

$$B_{yz} = \sum_{i=1}^n B_{yz i} + \sum_{j=1}^m R_{y j} a_j = \sum_{i=1}^n B_{yz i} + \sum_{j=1}^m R_{z j} e_j$$

Hierin sind mit a_j die Schwerachsenabstände in die orthogonale Richtung bezeichnet.

Zur einfachen Erfassung von Fehlflächen (Durchbrüche etc.) können auch Teilquerschnitte mit negativen E-Moduln definiert und in die oben durchgeführten Berechnungen eingesetzt werden.

Anhang 2

Berücksichtigung vertikaler Nachgiebigkeit in den Fugen

Je nach konstruktiver Ausbildung eines Verbundquerschnittes kann es aus Gründen der Sicherheit oder Wirtschaftlichkeit erforderlich sein neben der horizontalen auch die vertikale Nachgiebigkeit in den Fugen sowie Verformungen der Teilquerschnitte in vertikaler Richtung zu berücksichtigen, in deren Folge sich unterschiedliche Biegelinien für die Teilquerschnitte einstellen. In vielen Fällen ist die vertikale Verschieblichkeit der Teilquerschnitte zueinander durch geometrische Zwängung behindert, so daß lediglich die vertikalen Verformungen der Teilquerschnitte selbst zu unterschiedlichen Biegelinien führen (Bild A2-1c). Der Einfluß dieses Effektes ist jedoch in den meisten baupraktischen Fällen vernachlässigbar /KNE91/.

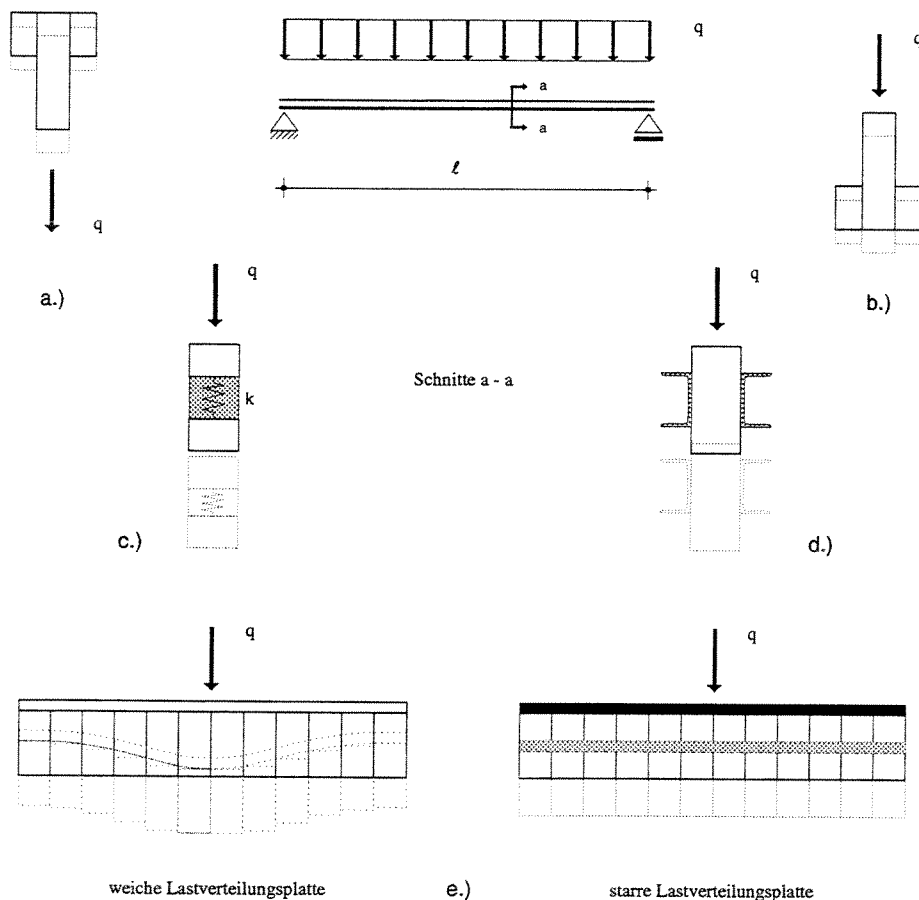


Bild A2-1. Beispiele für vertikale Nachgiebigkeit in den Fugen von Verbundquerschnitten

Geometrische Zwängungen werden häufig durch die Anordnung der Teilquerschnitte im Verbundquerschnitt für eine definierte Lastrichtung über die gesamte Länge des Verbundträgers, aber auch lokal durch 'Auffütterung' des Verbundquerschnittes an Lasteinleitungsstellen erzeugt, wie z. B. in Auflagernähe. Sind geometrische Zwängungen nicht oder nur lokal vorhanden, so können sich bei nicht-proportionaler Lastaufteilung die unterproportional belasteten und weich gekoppelten Teilquerschnitte der Belastung teilweise entziehen und in den überproportional belasteten Teilquerschnitten nicht unerhebliche Mehrbeanspruchungen hervorrufen (Bild A2-1a/b) /BAK87/ /BOH92/. Gleiches gilt für unvollständige geometrische Zwängung, wie sie z. B. bei Platten aus stehend vernagelten Brettern mit in Querrichtung biegeweicher Deckschicht und konzentrierter Lasteinleitung vorliegt (Bild A2-1e) /WIP90/.

Vertikale Nachgiebigkeit ist oft auch dann zu berücksichtigen, wenn Träger lokal ohne geometrische Zwängung verstärkt werden (Bild A2-1d) oder Verbundquerschnitte in Längsrichtung stark gegliedert sind, wie z. B. Wände in Holztafelbauweise oder Dachflächen, welche zur Aussteifung herangezogen werden (Bild A2-2) /CZI79.1/ /CZI79.2/. In all diesen Fällen bestehen wegen der unterschiedlichen Ausbildung der Teilquerschnitte große Steifigkeitsunterschiede, so daß die Verbindungsmittel in den vertikalen Fugen stark belastet werden /PRE66/ /ITA79/ /ITA81/ /TAR85/ /NAD89.1/ /NAD89.2/ /FAL89/.

Die gleichzeitige Berücksichtigung horizontaler und vertikaler Nachgiebigkeiten in den Fugen eines Verbundquerschnittes führt in der allgemeinen Formulierung auf simultane Differentialgleichungen höherer Ordnung und zweiten Grades, wenn die Veränderung des inneren

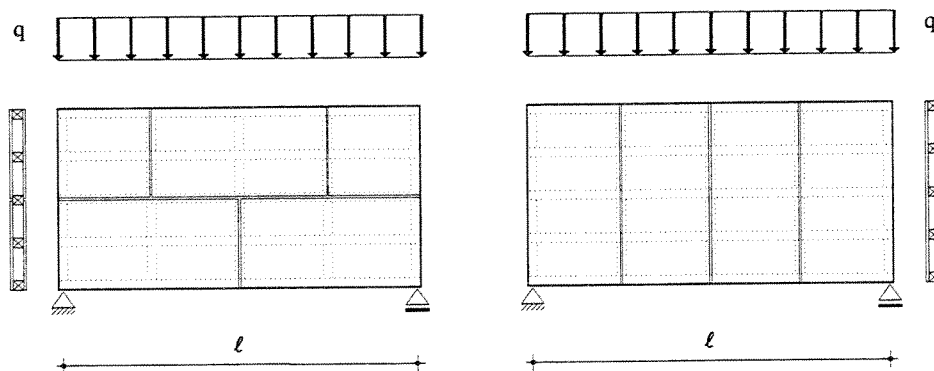


Bild A2-2. Beispiele für vertikale Nachgiebigkeit in den Fugen von Verbundquerschnitten

Hebelarmes zwischen zwei Teilquerschnitten infolge der vertikalen Nachgiebigkeit in den Gleichgewichtsaussagen und in der Verformungsgeometrie beachtet wird. Durch die Vernachlässigung dieser Effekte und besondere Vereinbarungen können die Differentialgleichungen linearisiert und die beiden orthogonalen Relativverschiebungen entkoppelt werden. Im folgenden wird der Berechnungsgang am zweiteiligen Verbundquerschnitt aufgezeigt, um anschließend die Berechnung eines beliebigen Verbundquerschnittes unter Berücksichtigung der horizontalen und vertikalen Nachgiebigkeiten auf bereits bekannte Abläufe reduzieren zu können. Auf diese Weise sind auch die Unterschiede, welche sich zu /KNE91/ ergeben, leichter erklärbar.

Soweit Abweichungen nicht ausdrücklich vermerkt sind, gelten die Berechnungsvoraussetzungen und Bezeichnungen gemäß Kapitel 2. Die Lasteinleitung in den Verbundquerschnitt wird als bekannt vorausgesetzt. Äußere Normalkraft wird aus Gründen der Übersichtlichkeit nicht berücksichtigt.

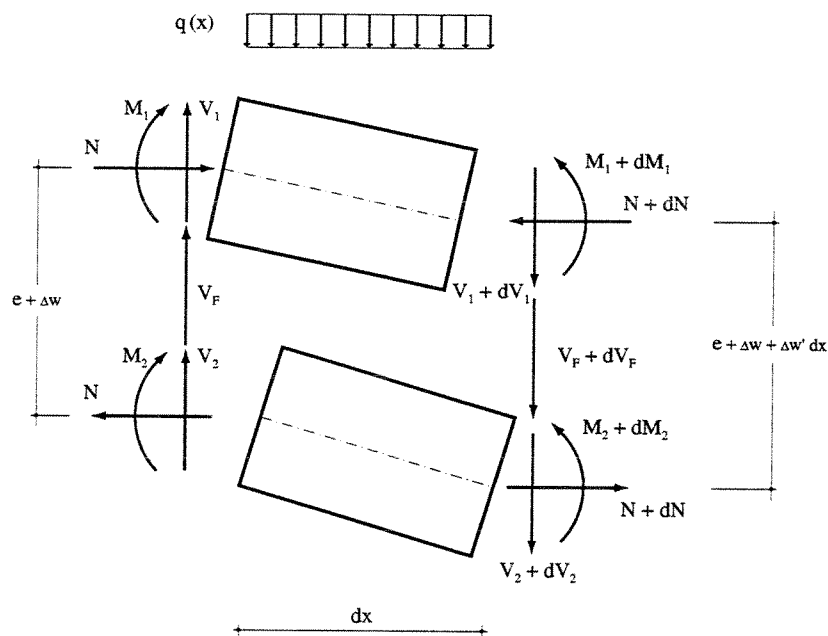


Bild A2-3. Schnittgrößen eines differentiellen zweiteiligen Verbundelementes

Die Gleichgewichtsaussagen können anhand Bild A2-3 abgeleitet werden. Die Fugen sind nicht freigeschnitten, da zunächst nur das globale Momentengleichgewicht interessiert. Allerdings werden die Schnittgrößen der Teilquerschnitte verwendet.

$$- N(e + \Delta w) + (N + dN)(e + \Delta w + \Delta w' dx) - V_1 dx - V_2 dx + dM_1 + dM_2 = 0$$

Vernachlässigt man -wie in der Differentialrechnung üblich- die Produkte differentieller Größen und faßt zusammen, so vereinfacht sich die Gleichung.

$$N \Delta w' + N'(e + \Delta w) - V + M_1' + M_2' = 0$$

Durch die Produkte aus Normalkraft und Durchbiegungsdifferenz liegt eine Differentialgleichung zweiten Grades vor. Die Vernachlässigung dieser Produkte entspricht einer Vernachlässigung des veränderlichen inneren Hebelarmes im Momentengleichgewicht. Die unterschiedlichen Durchbiegungen der Teilquerschnitte gehen dennoch durch die konstitutiven Beziehungen ein. Nach Ableitung, Berücksichtigung des vertikalen Gleichgewichts und Einsetzen der konstitutiven Beziehungen erhält man eine Gl. 2.25 ähnliche Differentialgleichung.

$$- w_1^{IV} E_1 I_1 - w_2^{IV} E_2 I_2 + u' k e = - q$$

Die kinematischen Beziehungen sind aus Bild A2-4 ersichtlich. Als Bezugslinie für die Fugenverschiebung u wird die gewichtete Durchbiegung gewählt.

$$\bar{w} = \frac{E_1 I_1 w_1 + E_2 I_2 w_2}{\sum E_i I_i}$$

Der Abstand der Schwerachsen der Teilquerschnitte wird entsprechend aufgeteilt.

$$e_j + \Delta w = a_1 + a_2 = (e_j + \Delta w) \frac{E_1 I_1}{\sum E_i I_i} + (e_j + \Delta w) \frac{E_2 I_2}{\sum E_i I_i}$$

Nur diese Konvention ermöglicht letztendlich die Entkopplung der horizontalen und vertikalen Nachgiebigkeiten. Im Gegensatz hierzu wird in /KNE91/ der Mittelwert der beiden Durchbiegungen angesetzt. Diese Annahme führt nur in dem Ausnahmefall zur Entkopplung, daß die Biegesteifigkeiten der beiden Teilquerschnitte gleich sind.

Der kinematische Zusammenhang lautet:

$$\begin{aligned} - a_1 w_1' + u - a_2 w_2' + (1 + \varepsilon_{N2}) dx + (a_2 + da_2)(w_2' + dw_2') \\ - u - du + (a_1 + da_1)(w_1' + dw_1') - (1 + \varepsilon_{N1}) dx = 0 \end{aligned}$$

Zusammengefaßt erhält man:

$$u' - N \frac{E_1 A_1 + E_2 A_2}{E_1 A_1 E_2 A_2} - a_1 w_1'' - a_2 w_2'' = 0$$

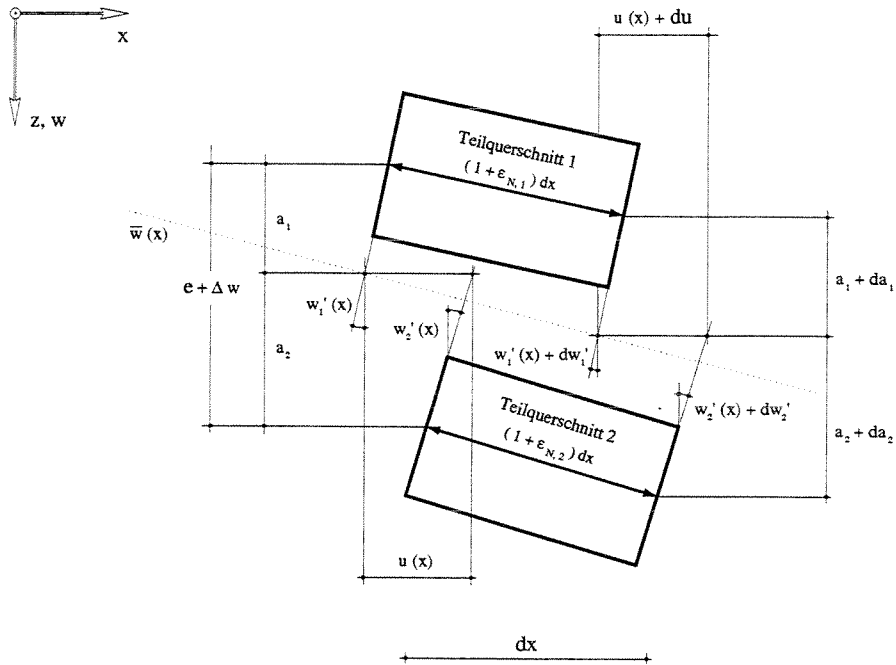


Bild A2-4. Verformungsgeometrie bei gleichzeitiger Berücksichtigung der horizontalen und der vertikalen Nachgiebigkeit in den Fugen des zweiteiligen Verbundquerschnittes

Hierin sind Produkte zweier Veränderlicher wiederum vernachlässigt. Die Nichtbeachtung der Veränderung des inneren Hebelarmes führt auf eine lineare Differentialgleichung, welche der in Kapitel 2.4 abgeleiteten sehr ähnlich ist.

$$u'' - u k \frac{E_1 A_1 + E_2 A_2}{E_1 A_1 E_2 A_2} - \frac{E_1 I_1}{\sum E_i I_i} e w_1''' - \frac{E_2 I_2}{\sum E_i I_i} e w_2''' = u'' - \omega^2 u - e \bar{w}''' = 0$$

Bei der Berechnung des zweiteiligen Verbundquerschnittes mit gleichzeitiger Berücksichtigung der vertikalen und horizontalen Nachgiebigkeit treten drei unbekannte Funktionen auf: die horizontale Fugenverschiebung sowie die Durchbiegungen der beiden Teilquerschnitte. Die drei erforderlichen, linear unabhängigen Differentialgleichungen erhält man durch die Auswertung der kinematischen Beziehungen zwischen den Verschiebungsgrößen -wie oben dargestellt- und durch die für die beiden Teilquerschnitte getrennt aufzustellenden Momentengleichgewichte. Hierbei ist zu beachten, daß die absolute Lage der horizontalen Fuge für beide Teilquerschnitte identisch ist und durch Wichtung des Schwerachsenabstandes der Teilquerschnitte mit den entsprechenden Biegesteifigkeiten bestimmt werden kann. Das Verbindungsmedium wird also linienförmig angenommen. Mit den Bezeichnungen nach Bild 2.2-1

und der konstitutiven Gleichung für die vertikale Nachgiebigkeit in der Fuge j

$$p_j = k_{j\perp} \Delta w = k_{j\perp} (w_{js} - w_{jp})$$

erhält man aus den Gleichgewichtsbedingungen die beiden Differentialgleichungen

$$-w_1^{IV} E_1 I_1 - k_{j\perp} w_1 + k_{j\perp} w_2 + k_{j\parallel} a_1 u' = -q_1$$

$$k_{j\perp} w_1 - w_2^{IV} E_2 I_2 - k_{j\perp} w_2 + k_{j\parallel} a_2 u' = -q_2$$

Schreibt man das komplette Differentialgleichungssystem in Operatorenschreibweise

$$\begin{bmatrix} -(D^4 E_1 I_1 + k_{j\perp}) & k_{j\perp} & k_{j\parallel} a_1 \\ k_{j\perp} & -(D^4 E_2 I_2 + k_{j\perp}) & k_{j\parallel} a_2 \\ -a_1 D^3 & -a_2 D^3 & D^2 - \omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -q_1 \\ -q_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

so können die Eigenwerte des Problems über die Nullstellen des charakteristischen Polynoms bestimmt werden. Nach einigen Zwischenrechnungen und Elimination der vierfachen Nullstelle Null ist die linke Seite in ein Produkte zerlegbar.

$$\left(D^2 - \omega^2 - \frac{k_{j\parallel} e^2}{\sum E_i I_i} \right) \left(1 + \frac{E_1 I_1 E_2 I_2}{k_{j\perp} \sum E_i I_i} D^4 \right) = 0$$

Der erste Klammerausdruck ist das charakteristische Polynom für die Eigenwertbestimmung bei alleiniger Berücksichtigung des horizontalen Verbunds, der zweite Klammerausdruck das charakteristische Polynom bei alleiniger Berücksichtigung des vertikalen Verbunds. Die zehn Eigenwerte des Differentialgleichungssystems sind demnach:

$$D_{0,1,2,3} = 0 \qquad D_{4,5} = \left(\omega^2 + \frac{k_{j\parallel} e^2}{\sum E_i I_i} \right)^{1/2} = \pm \frac{\lambda}{\ell}$$

$$D_{6,7,8,9} = \pm \frac{\beta}{\ell} (1 \pm i) \qquad \beta = \left(\frac{k_{j\perp} \sum E_i I_i \ell^4}{4 E_1 I_1 E_2 I_2} \right)^{1/4}$$

Für die gewichtete Durchbiegungsfunktion und die Fugenverschiebungsfunktion bei horizontal nachgiebigem Verbund erhält man somit folgende Ansätze /NAT87/:

$$\bar{w} = A_0 + A_1 \ell \zeta + A_2 \ell^2 \zeta^2 + A_3 \ell^3 \zeta^3 + A_4 \cosh \lambda \zeta + A_5 \sinh \lambda \zeta$$

$$u = -A_3 \frac{6e}{\omega^2} + A_4 \frac{\lambda e}{\ell \alpha^2} \sinh \lambda \zeta + A_5 \frac{\lambda e}{\ell \alpha^2} \cosh \lambda \zeta$$

Durch die gewichtete Durchbiegungs- und die Fugenverschiebungsfunktion wird das globale Tragverhalten erfaßt, ohne daß die vertikale Nachgiebigkeit der Fuge eingeht. Diese macht sich erst bemerkbar, wenn in einer Nachlaufberechnung die Durchbiegungsfunktionen der Teilquerschnitte d.h. lokale Umlagerungen erfaßt werden sollen.

$$\begin{aligned} w_1 = & A_0 + A_1 \ell \zeta + A_2 \ell^2 \zeta^2 + A_3 \ell^3 \zeta^3 + A_4 \cosh \lambda \zeta + A_5 \sinh \lambda \zeta + \\ & + A_6 \frac{E_2 I_2}{\sum E_i I_i} \cos \beta \zeta \cosh \beta \zeta + A_7 \frac{E_2 I_2}{\sum E_i I_i} \cos \beta \zeta \sinh \beta \zeta + \\ & + A_8 \frac{E_2 I_2}{\sum E_i I_i} \sin \beta \zeta \cosh \beta \zeta + A_9 \frac{E_2 I_2}{\sum E_i I_i} \sin \beta \zeta \sinh \beta \zeta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w_2 = & A_0 + A_1 \ell \zeta + A_2 \ell^2 \zeta^2 + A_3 \ell^3 \zeta^3 + A_4 \cosh \lambda \zeta + A_5 \sinh \lambda \zeta + \\ & - A_6 \frac{E_1 I_1}{\sum E_i I_i} \cos \beta \zeta \cosh \beta \zeta - A_7 \frac{E_1 I_1}{\sum E_i I_i} \cos \beta \zeta \sinh \beta \zeta + \\ & - A_8 \frac{E_1 I_1}{\sum E_i I_i} \sin \beta \zeta \cosh \beta \zeta - A_9 \frac{E_1 I_1}{\sum E_i I_i} \sin \beta \zeta \sinh \beta \zeta \end{aligned}$$

Die Berechnung des horizontalen Verbunds ist also unabhängig vom vertikalen Verbund möglich, in die Berechnung des vertikalen Verbunds dagegen gehen Lösungsanteile aus horizontalem Verbund ein. Dieser Sachverhalt kann damit erklärt werden, daß die Aufteilung des äußeren Momentes auf Normalkraftpaar und Eigenbiegemomente der Teilquerschnitte vor der Berechnung nicht bekannt ist. Daher ist auch die effektive anteilige Querbelastung der Teilquerschnitte unbekannt, welche für eine separate Berechnung des vertikalen Verbunds benötigt wird. Durch eine Abschätzung der Aufteilung und die Annahme, daß die Aufteilung bereichsweise konstant ist, kann die Berechnung erheblich vereinfacht werden. Andernfalls muß ein 10 x 10-Koeffizientenschema zur Bestimmung der Übertragungsmatrix invertiert werden. Der Zustandsvektor wird also um vier Elemente erweitert.

$$\mathbf{z}^T = \{w_1, w_2, w'_1, w'_2, -u/e, Ne, M_2, M_1, Q_2, Q_1\}$$

Die Bestimmungsgleichungen für die Kraftgrößen können Kapitel 2.3 entnommen werden. Darin ist lediglich die gewichtete Durchbiegung durch die jeweilige Durchbiegung des Teilquerschnittes zu ersetzen.

Will man nun die am zweiteiligen Verbundquerschnitt gewonnenen Erkenntnisse auf den mehrteiligen Verbundquerschnitt mit horizontaler und vertikaler Nachgiebigkeit in den Fugen übertragen, so können folgende Aussagen gemacht werden :

- Das globale Tragverhalten des Verbundquerschnittes kann allein durch Berücksichtigung der horizontalen Nachgiebigkeit erfaßt werden. Die so ermittelte Durchbiegungsfunktion ist aus den gewichteten Durchbiegungsfunktionen der Teilquerschnitte zusammengesetzt, aber unabhängig vom vertikalen Verbund, da sich die entsprechenden Lösungsanteile aufheben.
- Zur Erfassung lokaler Umlagerungen müssen neben den Eigenwerten des horizontalen Verbunds diejenigen des vertikalen Verbunds berücksichtigt werden. Pro vertikaler Fuge erhält man zusätzlich vier konjugiert komplexe Eigenwerte. Die Ansatzfunktionen sind je vertikaler Fuge um vier gemischt trigonometrisch-hyperbolische Anteile zu erweitern. Ebenso muß der Zustandsvektor um je vier Elemente ergänzt werden.
- Die Berechnung der Eigenwerte und der Kopplungskoeffizienten aus vertikalem Verbund kann an dem Differentialgleichungssystem erfolgen, welches man bei alleiniger Berücksichtigung des vertikalen Verbunds erhält. Das charakteristische Polynom des gemischten Problems ist aufgrund der Berechnungsannahmen immer in die Anteile aus horizontalem und vertikalem Verbund zerlegbar.

Da das Differentialgleichungssystem des Verbundproblems mit vertikaler Nachgiebigkeit einen vergleichbaren Aufbau hat und das charakteristische Polynom die gleichen Regelmäßigkeiten aufweist, können dieselben Algorithmen verwendet werden wie für die Lösung des Verbundproblems mit horizontaler Nachgiebigkeit. Folglich sind auch für den Verbundquerschnitt mit vertikaler Nachgiebigkeit freie Numerierung der Teilquerschnitte, Verzweigungen, Zellenbildungen, mehrfache und starre Kopplungen möglich, wenn die Konventionen aus der Berechnung des horizontalen Verbunds entsprechend übertragen werden.

Um im Falle des zweiteiligen Verbundquerschnittes den Einfluß einer vertikalen Nachgiebigkeit in der Fuge abschätzen zu können, sei abschließend noch die Übertragungs- und Lastmatrix dieses speziellen Problems abgeleitet.

Die beiden Gleichungen lauten

$$- w_1^N E_1 I_1 - k_{\perp} w_1 + k_{\perp} w_2 = - q_1$$

$$k_{\perp} w_1 - w_2^N E_2 I_2 - k_{\perp} w_2 = - q_2$$

Die acht Eigenwerte des Differentialgleichungssystems sind

$$D_{0,1,2,3} = 0 \quad D_{4,5,6,7} = \pm \frac{\beta}{\ell} (1 \pm i) \quad \text{mit } \beta = \left(\frac{k_{\perp} \sum E_i I_i \ell^4}{4 E_1 I_1 E_2 I_2} \right)^{1/4}$$

Die allgemeine Lösung mit Annahme von Gleichstreckenlasten q_i lautet

$$\begin{aligned} w_1 = & A_0 + A_1 \ell \zeta + A_2 \ell^2 \zeta^2 + A_3 \ell^3 \zeta^3 + \frac{q_1 E_2 I_2}{k_{\perp} \sum E_i I_i} + \frac{\sum q_i \ell^4}{24 \sum E_i I_i} \zeta^4 + \\ & + A_4 \frac{E_2 I_2}{\sum E_i I_i} \cos \beta \zeta \cosh \beta \zeta + A_5 \frac{E_2 I_2}{\sum E_i I_i} \cos \beta \zeta \sinh \beta \zeta + \\ & + A_6 \frac{E_2 I_2}{\sum E_i I_i} \sin \beta \zeta \cosh \beta \zeta + A_7 \frac{E_2 I_2}{\sum E_i I_i} \sin \beta \zeta \sinh \beta \zeta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w_2 = & A_0 + A_1 \ell \zeta + A_2 \ell^2 \zeta^2 + A_3 \ell^3 \zeta^3 + \frac{q_2 E_1 I_1}{k_{\perp} \sum E_i I_i} + \frac{\sum q_i \ell^4}{24 \sum E_i I_i} \zeta^4 + \\ & - A_4 \frac{E_1 I_1}{\sum E_i I_i} \cos \beta \zeta \cosh \beta \zeta - A_5 \frac{E_1 I_1}{\sum E_i I_i} \cos \beta \zeta \sinh \beta \zeta + \\ & - A_6 \frac{E_1 I_1}{\sum E_i I_i} \sin \beta \zeta \cosh \beta \zeta - A_7 \frac{E_1 I_1}{\sum E_i I_i} \sin \beta \zeta \sinh \beta \zeta \end{aligned}$$

Die Koeffizienten werden durch die Zustandsgrößen am linken Rand des Bereiches ausgelöst.

$$z_0^T = \{ w_{10}, w_{20}, w'_{10}, w'_{20}, M_{20}, M_{10}, Q_{20}, Q_{10} \}$$

Die Ordnung der Zustandsgrößen im Zustandsvektor ist so gewählt, daß eine zur Nebendiagonalen symmetrische Matrix entsteht. Nach Berechnung der Koeffizienten

$$\begin{aligned}
 A_0 &= \frac{w_{10} E_1 I_1 + w_{20} E_2 I_2}{\sum E_i I_i} - \frac{\sum q_i E_1 I_1 E_2 I_2}{k_{\perp} (\sum E_i I_i)^2} & A_1 &= \frac{w'_{10} E_1 I_1 + w'_{20} E_2 I_2}{\sum E_i I_i} \\
 A_2 &= -\frac{M_{10} + M_{20}}{2 \sum E_i I_i} & A_3 &= -\frac{Q_{10} + Q_{20}}{6 \sum E_i I_i} \\
 A_4 &= w_{10} - w_{20} - \frac{q_1 E_2 I_2 - q_2 E_1 I_1}{k_{\perp} \sum E_i I_i} & A_7 &= -\frac{M_{10} \ell^2}{2\beta^2 E_1 I_1} + \frac{M_{20} \ell^2}{2\beta^2 E_2 I_2} \\
 A_5 &= \frac{w'_{10} \ell}{2\beta} - \frac{w'_{20} \ell}{2\beta} + \frac{Q_{10} \ell^3}{4\beta^3 E_1 I_1} - \frac{Q_{20} \ell^3}{4\beta^3 E_2 I_2} \\
 A_6 &= \frac{w'_{10} \ell}{2\beta} - \frac{w'_{20} \ell}{2\beta} - \frac{Q_{10} \ell^3}{4\beta^3 E_1 I_1} + \frac{Q_{20} \ell^3}{4\beta^3 E_2 I_2}
 \end{aligned}$$

erhält man die Übertragungsmatrix

$$\mathbf{T} = \frac{1}{\sum E_i I_i} \begin{bmatrix}
 t_{11} & t_{12} & t_{13} & t_{14} & t_{15} & t_{16} & t_{17} & t_{18} \\
 t_{21} & t_{22} & t_{23} & t_{24} & t_{25} & t_{26} & t_{27} & \\
 t_{31} & t_{32} & t_{33} & t_{34} & t_{35} & t_{36} & & \\
 t_{41} & t_{42} & t_{43} & t_{44} & t_{45} & & & \\
 t_{51} & t_{52} & t_{53} & t_{54} & & & & \\
 t_{61} & t_{62} & t_{63} & & & \text{symm.} & & \\
 t_{71} & t_{72} & & & & & & \\
 t_{81} & & & & & & &
 \end{bmatrix}$$

mit den Elementen

$$\begin{aligned}
 t_{11} &= E_1 I_1 + E_2 I_2 \cos \beta \zeta \cosh \beta \zeta & t_{21} &= E_1 I_1 - E_1 I_1 \cos \beta \zeta \cosh \beta \zeta \\
 t_{31} &= E_2 I_2 \frac{\beta}{\ell} (\cos \beta \zeta \sinh \beta \zeta - \sin \beta \zeta \cosh \beta \zeta)
 \end{aligned}$$

$$t_{41} = - E_1 I_1 \frac{\beta}{\ell} (\cos \beta \zeta \sinh \beta \zeta - \sin \beta \zeta \cosh \beta \zeta)$$

$$t_{51} = - E_1 I_1 E_2 I_2 \frac{2\beta^2}{\ell^2} \sin \beta \zeta \sinh \beta \zeta \quad t_{61} = E_1 I_1 E_2 I_2 \frac{2\beta^2}{\ell^2} \sin \beta \zeta \sinh \beta \zeta$$

$$t_{71} = - E_1 I_1 E_2 I_2 \frac{2\beta^3}{\ell^3} (\cos \beta \zeta \sinh \beta \zeta + \sin \beta \zeta \cosh \beta \zeta)$$

$$t_{81} = E_1 I_1 E_2 I_2 \frac{2\beta^3}{\ell^3} (\cos \beta \zeta \sinh \beta \zeta + \sin \beta \zeta \cosh \beta \zeta)$$

$$t_{12} = E_2 I_2 - E_2 I_2 \cos \beta \zeta \cosh \beta \zeta \quad t_{22} = E_2 I_2 + E_1 I_1 \cos \beta \zeta \cosh \beta \zeta$$

$$t_{32} = - E_2 I_2 \frac{\beta}{\ell} (\cos \beta \zeta \sinh \beta \zeta - \sin \beta \zeta \cosh \beta \zeta)$$

$$t_{42} = E_1 I_1 \frac{\beta}{\ell} (\cos \beta \zeta \sinh \beta \zeta - \sin \beta \zeta \cosh \beta \zeta)$$

$$t_{52} = E_1 I_1 E_2 I_2 \frac{2\beta^2}{\ell^2} \sin \beta \zeta \sinh \beta \zeta \quad t_{62} = - E_1 I_1 E_2 I_2 \frac{2\beta^2}{\ell^2} \sin \beta \zeta \sinh \beta \zeta$$

$$t_{72} = E_1 I_1 E_2 I_2 \frac{2\beta^3}{\ell^3} (\cos \beta \zeta \sinh \beta \zeta + \sin \beta \zeta \cosh \beta \zeta)$$

$$t_{13} = E_1 I_1 \ell \zeta + E_2 I_2 \frac{\ell}{2\beta} (\cos \beta \zeta \sinh \beta \zeta + \sin \beta \zeta \cosh \beta \zeta)$$

$$t_{23} = E_1 I_1 \ell \zeta - E_1 I_1 \frac{\ell}{2\beta} (\cos \beta \zeta \sinh \beta \zeta + \sin \beta \zeta \cosh \beta \zeta)$$

$$t_{33} = E_1 I_1 + E_2 I_2 \cos \beta \zeta \cosh \beta \zeta \quad t_{43} = E_1 I_1 - E_1 I_1 \cos \beta \zeta \cosh \beta \zeta$$

$$t_{53} = E_1 I_1 E_2 I_2 \frac{\beta}{\ell} (\cos \beta \zeta \sinh \beta \zeta - \sin \beta \zeta \cosh \beta \zeta)$$

$$t_{63} = - E_1 I_1 E_2 I_2 \frac{\beta}{\ell} (\cos \beta \zeta \sinh \beta \zeta - \sin \beta \zeta \cosh \beta \zeta)$$

$$t_{14} = E_2 I_2 \ell \zeta - E_2 I_2 \frac{\ell}{2\beta} (\cos \beta \zeta \sinh \beta \zeta + \sin \beta \zeta \cosh \beta \zeta)$$

$$t_{24} = E_2 I_2 \ell \zeta + E_1 I_1 \frac{\ell}{2\beta} (\cos \beta \zeta \sinh \beta \zeta + \sin \beta \zeta \cosh \beta \zeta)$$

$$t_{34} = -E_2 I_2 \cos \beta \zeta \cosh \beta \zeta$$

$$t_{44} = E_1 I_1 \cos \beta \zeta \cosh \beta \zeta$$

$$t_{54} = -E_1 I_1 E_2 I_2 \frac{\beta}{\ell} (\cos \beta \zeta \sinh \beta \zeta - \sin \beta \zeta \cosh \beta \zeta)$$

$$t_{15} = -\frac{\ell^2}{2} \zeta^2 + \frac{\ell^2}{2\beta^2} \sin \beta \zeta \sinh \beta \zeta$$

$$t_{25} = -\frac{\ell^2}{2} \zeta^2 - \frac{E_1 I_1}{E_2 I_2} \frac{\ell^2}{2\beta^2} \sin \beta \zeta \sinh \beta \zeta$$

$$t_{35} = -\ell \zeta + \frac{\ell}{2\beta} (\cos \beta \zeta \sinh \beta \zeta + \sin \beta \zeta \cosh \beta \zeta)$$

$$t_{45} = -\ell \zeta - \frac{E_1 I_1}{E_2 I_2} \frac{\ell}{2\beta} (\cos \beta \zeta \sinh \beta \zeta + \sin \beta \zeta \cosh \beta \zeta)$$

$$t_{16} = -\frac{\ell^2}{2} \zeta^2 - \frac{E_2 I_2}{E_1 I_1} \frac{\ell^2}{2\beta^2} \sin \beta \zeta \sinh \beta \zeta$$

$$t_{26} = -\frac{\ell^2}{2} \zeta^2 + \frac{\ell^2}{2\beta^2} \sin \beta \zeta \sinh \beta \zeta$$

$$t_{36} = -\ell \zeta - \frac{E_2 I_2}{E_1 I_1} \frac{\ell}{2\beta} (\cos \beta \zeta \sinh \beta \zeta + \sin \beta \zeta \cosh \beta \zeta)$$

$$t_{17} = -\frac{\ell^3}{6} \zeta^3 - \frac{\ell^3}{4\beta^3} (\cos \beta \zeta \sinh \beta \zeta - \sin \beta \zeta \cosh \beta \zeta)$$

$$t_{27} = -\frac{\ell^3}{6} \zeta^3 + \frac{E_1 I_1}{E_2 I_2} \frac{\ell^3}{4\beta^3} (\cos \beta \zeta \sinh \beta \zeta - \sin \beta \zeta \cosh \beta \zeta)$$

$$t_{18} = -\frac{\ell^3}{6} \zeta^3 + \frac{E_2 I_2}{E_1 I_1} \frac{\ell^3}{4\beta^3} (\cos \beta \zeta \sinh \beta \zeta - \sin \beta \zeta \cosh \beta \zeta)$$

Der Lastvektor lautet

$$\mathbf{h}^T = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6, h_7, h_8\}$$

$$h_1 = \frac{(q_1 E_2 I_2 - q_2 E_1 I_1) E_2 I_2}{k_{j\perp} (\sum E_i I_i)^2} (1 - \cos \beta \zeta \cosh \beta \zeta) + \frac{\sum q_i \ell^4}{24 \sum E_i I_i} \zeta^4$$

$$h_2 = - \frac{(q_1 E_2 I_2 - q_2 E_1 I_1) E_1 I_1}{k_{j\perp} (\sum E_i I_i)^2} (1 - \cos \beta \zeta \cosh \beta \zeta) + \frac{\sum q_i \ell^4}{24 \sum E_i I_i} \zeta^4$$

$$h_3 = - \frac{(q_1 E_2 I_2 - q_2 E_1 I_1) E_2 I_2 \beta}{k_{j\perp} (\sum E_i I_i)^2 \ell} (\cos \beta \zeta \sinh \beta \zeta - \sin \beta \zeta \cosh \beta \zeta) + \frac{\sum q_i \ell^3}{6 \sum E_i I_i} \zeta^3$$

$$h_4 = \frac{(q_1 E_2 I_2 - q_2 E_1 I_1) E_1 I_1 \beta}{k_{j\perp} (\sum E_i I_i)^2 \ell} (\cos \beta \zeta \sinh \beta \zeta - \sin \beta \zeta \cosh \beta \zeta) + \frac{\sum q_i \ell^3}{6 \sum E_i I_i} \zeta^3$$

$$h_5 = \frac{(q_1 E_2 I_2 - q_2 E_1 I_1) E_1 I_1 E_2 I_2 2\beta^2}{k_{j\perp} (\sum E_i I_i)^2 \ell^2} \sin \beta \zeta \sinh \beta \zeta - \frac{\sum q_i E_2 I_2 \ell^2}{2 \sum E_i I_i} \zeta^2$$

$$h_6 = - \frac{(q_1 E_2 I_2 - q_2 E_1 I_1) E_1 I_1 E_2 I_2 2\beta^2}{k_{j\perp} (\sum E_i I_i)^2 \ell^2} \sin \beta \zeta \sinh \beta \zeta - \frac{\sum q_i E_1 I_1 \ell^2}{2 \sum E_i I_i} \zeta^2$$

$$h_7 = \frac{(q_1 E_2 I_2 - q_2 E_1 I_1) E_1 I_1 E_2 I_2 2\beta^3}{k_{j\perp} (\sum E_i I_i)^2 \ell^3} (\cos \beta \zeta \sinh \beta \zeta + \sin \beta \zeta \cosh \beta \zeta) - \frac{\sum q_i E_2 I_2 \ell}{\sum E_i I_i} \zeta$$

$$h_8 = - \frac{(q_1 E_2 I_2 - q_2 E_1 I_1) E_1 I_1 E_2 I_2 2\beta^3}{k_{j\perp} (\sum E_i I_i)^2 \ell^3} (\cos \beta \zeta \sinh \beta \zeta + \sin \beta \zeta \cosh \beta \zeta) - \frac{\sum q_i E_1 I_1 \ell}{\sum E_i I_i} \zeta$$

Entsprechend lassen sich auch die Übertragungs- und Lastmatrizen für mehrteilige Verbundquerschnitte ableiten. In diesem Fall müssen jedoch sowohl die Eigenwerte als auch die Leitmatrizen numerisch berechnet werden.

Anhang 3

Übertragungsmatrix des zugbelasteten und des normalkraftfreien Verbundelementes

Die Übertragungsmatrix des mit der Zugkraft Z belasteten Verbundelementes hat die Form

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & t_{12} & t_{13} & t_{14} & t_{15} & t_{16} \\ 0 & t_{22} & t_{23} & t_{24} & t_{25} & \\ 0 & t_{32} & t_{33} & t_{34} & & \\ 0 & t_{42} & t_{43} & & & \\ 0 & t_{52} & & & \text{symm.} & \\ 0 & & & & & \end{bmatrix}$$

In den Koeffizienten der Matrix treten neben den Nullstellen des charakteristischen Polynoms D_1 und D_2 weitere Abkürzungen auf:

$$D_1^2 = \frac{\lambda^2 + \varepsilon^2}{2} - \sqrt{\frac{(\lambda^2 + \varepsilon^2)^2}{4} - \varepsilon^2 \lambda^2 (1 - \alpha^2)}$$

$$D_2^2 = \frac{\lambda^2 + \varepsilon^2}{2} + \sqrt{\frac{(\lambda^2 + \varepsilon^2)^2}{4} - \varepsilon^2 \lambda^2 (1 - \alpha^2)}$$

$$r = D_2^2 - D_1^2 \qquad \alpha^2 = \frac{B_s}{B}$$

$$\lambda^2 = \frac{k e^2 \ell^2}{\sum EI_i \alpha^2} = \frac{k e^2 \ell^2}{B (1 - \alpha^2) \alpha^2}$$

$$\varepsilon^2 = \frac{Z \ell^2}{\sum EI_i} = \frac{Z \ell^2}{B (1 - \alpha^2)}$$

Die Koeffizienten der Übertragungsmatrix sind in der folgenden Auflistung spaltenweise geordnet.

$$t_{12} = \frac{\ell}{r} \left[(\lambda^2 - D_1^2) \frac{\sinh D_1}{D_1} - (\lambda^2 - D_2^2) \frac{\sinh D_2}{D_2} \right]$$

$$t_{22} = \frac{1}{r} \left[(\lambda^2 - D_1^2) \cosh D_1 - (\lambda^2 - D_2^2) \cosh D_2 \right]$$

$$t_{32} = \frac{\varepsilon^2}{r} [\cosh D_1 - \cosh D_2]$$

$$t_{42} = - \frac{\varepsilon^2 \lambda^2 B \alpha^2 (1 - \alpha^2)}{r \ell} \left[\frac{\sinh D_1}{D_1} - \frac{\sinh D_2}{D_2} \right]$$

$$t_{52} = - \frac{\varepsilon^2 B (1 - \alpha^2)}{r \ell} \left[(\lambda^2 - D_1^2) \frac{\sinh D_1}{D_1} - (\lambda^2 - D_2^2) \frac{\sinh D_2}{D_2} \right]$$

$$t_{13} = \frac{\ell \alpha^2 \lambda^2}{r} \left[\frac{\sinh D_1}{D_1} - \frac{\sinh D_2}{D_2} \right]$$

$$t_{23} = \frac{\alpha^2 \lambda^2}{r} [\cosh D_1 - \cosh D_2]$$

$$t_{33} = - \frac{1}{r} \left[(\lambda^2 - D_2^2) \cosh D_1 - (\lambda^2 - D_1^2) \cosh D_2 \right]$$

$$t_{43} = \frac{\lambda^2 B \alpha^2 (1 - \alpha^2)}{r \ell} \left[(\lambda^2 - D_2^2) \frac{\sinh D_1}{D_1} - (\lambda^2 - D_1^2) \frac{\sinh D_2}{D_2} \right]$$

$$t_{14} = - \frac{\ell^2}{r B (1 - \alpha^2)} [\cosh D_1 - \cosh D_2]$$

$$t_{24} = - \frac{\ell}{r B (1 - \alpha^2)} [D_1 \sinh D_1 - D_2 \sinh D_2]$$

$$t_{34} = \frac{\ell}{r \lambda^2 B \alpha^2 (1 - \alpha^2)} \left[(\lambda^2 - D_2^2) D_1 \sinh D_1 - (\lambda^2 - D_1^2) D_2 \sinh D_2 \right]$$

$$t_{15} = - \frac{\ell^2}{r \varepsilon^2 B (1 - \alpha^2)} \left[(\lambda^2 - D_1^2) \cosh D_1 - (\lambda^2 - D_2^2) \cosh D_2 - r \right]$$

$$t_{25} = - \frac{\ell}{r \varepsilon^2 B (1 - \alpha^2)} \left[(\lambda^2 - D_1^2) D_1 \sinh D_1 - (\lambda^2 - D_2^2) D_2 \sinh D_2 \right]$$

$$t_{16} = - \frac{\ell^3}{r \varepsilon^2 B (1 - \alpha^2)} \left[(\lambda^2 - D_1^2) \frac{\sinh D_1}{D_1} - (\lambda^2 - D_2^2) \frac{\sinh D_2}{D_2} - r \right]$$

Der Belastungsvektor für Gleichstreckenlast lautet:

$$\mathbf{h}_{q_0}^T = \{ h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6 \}$$

$$h_1 = \frac{q_0 \ell^4}{r \varepsilon^4 \lambda^2 B (1 - \alpha^2)^2} \left[(\lambda^2 - D_1^2) D_2^2 \cosh D_1 - (\lambda^2 - D_2^2) D_1^2 \cosh D_2 - r \lambda^2 \right] - \frac{\ell^4}{2 \varepsilon^2 B (1 - \alpha^2)}$$

$$h_2 = \frac{q_0 \ell^3}{r \varepsilon^2 B (1 - \alpha^2)} \left[(\lambda^2 - D_1^2) \frac{\sinh D_1}{D_1} - (\lambda^2 - D_2^2) \frac{\sinh D_2}{D_2} \right] - \frac{\ell^3}{\varepsilon^2 B (1 - \alpha^2)}$$

$$h_3 = \frac{q_0 \ell^3}{r B (1 - \alpha^2)} \left[\frac{\sinh D_1}{D_1} - \frac{\sinh D_2}{D_2} \right]$$

$$h_4 = - \frac{q_0 \ell^2 \alpha^2}{r \varepsilon^2 (1 - \alpha^2)} \left[D_2^2 \cosh D_1 - D_1^2 \cosh D_2 - r \right]$$

$$h_5 = - \frac{q_0 \ell^2}{r \varepsilon^2 \lambda^2 (1 - \alpha^2)} \left[(\lambda^2 - D_1^2) D_2^2 \cosh D_1 - (\lambda^2 - D_2^2) D_1^2 \cosh D_2 - r \lambda^2 \right]$$

$$h_6 = - q_0 \ell$$

Der Belastungsvektor für linear veränderliche Streckenlast lautet:

$$\mathbf{h}_{q_1}^T = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6\}$$

$$h_1 = \frac{q_1 \ell^5}{r \varepsilon^4 \lambda^2 B (1 - \alpha^2)^2} \left[(\lambda^2 - D_1^2) D_2^2 \frac{\sinh D_1}{D_1} - (\lambda^2 - D_2^2) D_1^2 \frac{\sinh D_2}{D_2} - r \lambda^2 \right] - \frac{\ell^5}{6 \varepsilon^2 B (1 - \alpha^2)}$$

$$h_2 = \frac{q_1 \ell^4}{r \varepsilon^4 \lambda^2 B (1 - \alpha^2)^2} \left[(\lambda^2 - D_1^2) D_2^2 \cosh D_1 - (\lambda^2 - D_2^2) D_1^2 \cosh D_2 - r \lambda^2 \right] - \frac{\ell^4}{2 \varepsilon^2 B (1 - \alpha^2)}$$

$$h_3 = \frac{q_1 \ell^4}{r \varepsilon^2 \lambda^2 B (1 - \alpha^2)^2} \left[D_2^2 \cosh D_1 - D_1^2 \cosh D_2 - r \right]$$

$$h_4 = \frac{q_1 \ell^3 \alpha^2}{r \varepsilon^2 (1 - \alpha^2)} \left[D_2^2 \frac{\sinh D_1}{D_1} - D_1^2 \frac{\sinh D_2}{D_2} - r \right]$$

$$h_5 = - \frac{q_1 \ell^3}{r \varepsilon^2 \lambda^2 (1 - \alpha^2)} \left[(\lambda^2 - D_1^2) D_2^2 \frac{\sinh D_1}{D_1} - (\lambda^2 - D_2^2) D_1^2 \frac{\sinh D_2}{D_2} - r \lambda^2 \right]$$

$$h_6 = - \frac{q_1 \ell^2}{2}$$

Der Vektor für die Belastung des Verbundquerschnittes durch unterschiedliche, aber über den Querschnitt konstante Temperaturenänderung in den Teilquerschnitten lautet:

$$\mathbf{h}_{\psi_T}^T = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6\}$$

$$h_1 = \frac{\psi_T \ell^2 \alpha^2}{r \varepsilon^2 (1 - \alpha^2)} \left[D_2^2 \cosh D_1 - D_1^2 \cosh D_2 - r \right]$$

$$h_2 = \frac{\psi_T \ell \lambda^2 \alpha^2}{r} \left[\frac{\sinh D_1}{D_1} - \frac{\sinh D_2}{D_2} \right]$$

$$h_3 = -\frac{\psi_T \ell}{r} \left[(\lambda^2 - D_2^2) \frac{\sinh D_1}{D_1} - (\lambda^2 - D_1^2) \frac{\sinh D_2}{D_2} \right]$$

$$h_4 = \frac{\psi_T B \alpha^2}{r \varepsilon^2} \left[(\lambda^2 - D_2^2) D_2^2 \cosh D_1 - (\lambda^2 - D_1^2) D_1^2 \cosh D_2 \right] + B \alpha^2$$

$$h_5 = -\frac{\psi_T B \alpha^2}{r} \left[D_2^2 \cosh D_1 - D_1^2 \cosh D_2 - r \right]$$

$$h_6 = 0$$

Der Vektor für die Belastung des Verbundquerschnittes durch über die Teilquerschnittshöhen veränderliche Temperaturänderungen in den Teilquerschnitten lautet:

$$\mathbf{h}_{\chi_T}^T = \{ h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6 \}$$

$$h_1 = -\frac{\chi_T \ell^2}{r \varepsilon^2} \left[(\lambda^2 - D_1^2) \cosh D_1 - (\lambda^2 - D_2^2) \cosh D_2 - r \right]$$

$$h_2 = -\frac{\chi_T \ell}{r \varepsilon^2} \left[(\lambda^2 - D_1^2) D_1 \sinh D_1 - (\lambda^2 - D_2^2) D_2 \sinh D_2 \right]$$

$$h_3 = -\frac{\chi_T \ell}{r} \left[D_1 \sinh D_1 - D_2 \sinh D_2 \right]$$

$$h_4 = \frac{\chi_T \lambda^2 B \alpha^2 (1 - \alpha^2)}{r} \left[\cosh D_1 - \cosh D_2 \right]$$

$$h_5 = \frac{\chi_T B (1 - \alpha^2)}{r} \left[(\lambda^2 - D_1^2) \cosh D_1 - (\lambda^2 - D_2^2) \cosh D_2 - r \right]$$

$$h_6 = 0$$

Die Übertragungsmatrix des normalkraftfreien zweiteiligen Verbundelementes hat die Form

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & \ell & t_{13} & t_{14} & t_{15} & t_{16} \\ 0 & 1 & t_{23} & t_{24} & t_{25} & \\ 0 & 0 & t_{33} & t_{34} & & \\ 0 & 0 & t_{43} & & & \\ 0 & 0 & & & \text{symm.} & \\ 0 & & & & & \end{bmatrix}$$

Die Koeffizienten der Matrix lauten:

$$t_{13} = -\frac{\ell \alpha^2}{\lambda} (\sinh \lambda - \lambda)$$

$$t_{23} = -\alpha^2 (\cosh \lambda - 1)$$

$$t_{33} = \cosh \lambda$$

$$t_{43} = -B \frac{\lambda}{\ell} \alpha^2 (1 - \alpha^2) \sinh \lambda$$

$$t_{14} = \frac{\ell^2 (\cosh \lambda - 1)}{B \lambda^2 (1 - \alpha^2)}$$

$$t_{24} = \frac{\ell \sinh \lambda}{B \lambda (1 - \alpha^2)}$$

$$t_{34} = -\frac{\ell \sinh \lambda}{B \lambda \alpha^2 (1 - \alpha^2)}$$

$$t_{15} = -\frac{\ell^2 \alpha^2}{B \lambda^2 (1 - \alpha^2)} \left(\cosh \lambda - 1 - \frac{\lambda^2}{2} \right) - \frac{\ell^2}{2 B (1 - \alpha^2)}$$

$$t_{25} = -\frac{\ell \alpha^2}{B \lambda (1 - \alpha^2)} (\sinh \lambda - \lambda) - \frac{\ell}{B (1 - \alpha^2)}$$

$$t_{16} = -\frac{\ell^3 \alpha^2}{B \lambda^3 (1 - \alpha^2)} \left(\sinh \lambda - \lambda - \frac{\lambda^3}{6} \right) - \frac{\ell^3}{6 B (1 - \alpha^2)}$$

Der Belastungsvektor für Gleichstreckenlast lautet:

$$\mathbf{h}_{q_0}^T = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6\}$$

$$h_1 = \frac{q_0 \ell^4 \alpha^2}{B \lambda^4 (1 - \alpha^2)} \left(\cosh \lambda - 1 - \frac{\lambda^2}{2} - \frac{\lambda^4}{24} \right) + \frac{\ell^4}{24 B (1 - \alpha^2)}$$

$$h_2 = \frac{q_0 \ell^3 \alpha^2}{B \lambda^3 (1 - \alpha^2)} \left(\sinh \lambda - \lambda - \frac{\lambda^3}{6} \right) + \frac{\ell^3}{6 B (1 - \alpha^2)}$$

$$h_3 = - \frac{q_0 \ell^3}{B \lambda^3 (1 - \alpha^2)} (\sinh \lambda - \lambda)$$

$$h_4 = \frac{q_0 \ell^2 \alpha^2}{\lambda^2} \left(\cosh \lambda - 1 - \frac{\lambda^2}{2} \right)$$

$$h_5 = - \frac{q_0 \ell^2}{2} \qquad h_6 = - \ell$$

Der Belastungsvektor für linear veränderliche Streckenlast lautet:

$$\mathbf{h}_{q_1}^T = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6\}$$

$$h_1 = \frac{q_1 \ell^5 \alpha^2}{B \lambda^5 (1 - \alpha^2)} \left(\sinh \lambda - \lambda - \frac{\lambda^3}{6} - \frac{\lambda^5}{120} \right) + \frac{\ell^5}{120 B (1 - \alpha^2)}$$

$$h_2 = \frac{q_1 \ell^4 \alpha^2}{B \lambda^4 (1 - \alpha^2)} \left(\cosh \lambda - 1 - \frac{\lambda^2}{2} - \frac{\lambda^4}{24} \right) + \frac{\ell^4}{24 B (1 - \alpha^2)}$$

$$h_3 = - \frac{q_1 \ell^4}{B \lambda^4 (1 - \alpha^2)} \left(\cosh \lambda - 1 - \frac{\lambda^2}{2} \right)$$

$$h_4 = \frac{q_1 \ell^3 \alpha^2}{\lambda^3} \left(\sinh \lambda - \lambda - \frac{\lambda^3}{6} \right)$$

$$h_5 = -\frac{q_1 \ell^3}{6}$$

$$h_6 = -\frac{q_1 \ell^2}{2}$$

Der Vektor für die Belastung des Verbundquerschnittes durch unterschiedliche, aber über den Querschnitt konstante Temperaturenänderung in den Teilquerschnitten lautet:

$$\mathbf{h}_{\psi_T}^T = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6\}$$

$$h_1 = -\frac{\psi_T \ell^2 \alpha^2}{\lambda^2} \left(\cosh \lambda - 1 - \frac{\lambda^2}{2} \right)$$

$$h_2 = -\frac{\psi_T \ell \alpha^2}{\lambda} (\sinh \lambda - \lambda)$$

$$h_3 = \frac{\psi_T \ell \sinh \lambda}{\lambda}$$

$$h_4 = -\psi_T B \alpha^2 (1 - \alpha^2) (\cosh \lambda - 1)$$

$$h_5 = 0$$

$$h_6 = 0$$

Der Vektor für die Belastung des Verbundquerschnittes durch über die Teilquerschnittshöhen veränderliche Temperaturänderungen in den Teilquerschnitten lautet:

$$\mathbf{h}_{\chi_T}^T = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6\}$$

$$h_1 = -\frac{\chi_T \ell^2 \alpha^2}{\lambda^2} \left(\cosh \lambda - 1 - \frac{\lambda^2}{2} \right) - \frac{\ell^2}{2}$$

$$h_2 = -\frac{\chi_T \ell \alpha^2}{\lambda} (\sinh \lambda - \lambda) - \ell$$

$$h_3 = \frac{\chi_T \ell \sinh \lambda}{\lambda}$$

$$h_4 = -\chi_T B \alpha^2 (1 - \alpha^2) (\cosh \lambda - 1)$$

$$h_5 = 0$$

$$h_6 = 0$$

Anhang 4

Berücksichtigung zusätzlicher Aussteifungen

Bei der Ableitung der Übertragungsmatrizen in Kapitel 4 wurde als einzige verformungsabhängige Größe die Belastung aus äußerer Normalkraft berücksichtigt. Im Zusammenhang mit der Berechnung und Bemessung von Aussteifungen kann es von Interesse sein, den günstigen Einfluß einer quer zur Trägerrichtung aufgebrachtten Schalung oder generell einer kraftschlüssigen Verbindung mehrerer Bauteile untereinander abzuschätzen. Deren Wirkung ist in der Regel verformungsabhängig und je nach konstruktiver Ausbildung der Anschlüsse sind für den betrachteten Träger Momenten- und/oder Normalkraftbelastungen anzusetzen. Punktuelle Aussteifungen können rechnerisch z. B. beim Übertragungsverfahren sehr einfach durch entsprechende Übergangsbedingungen (Kapitel 4.6) erfaßt werden, über die gesamte Trägerlänge wirksame Aussteifungen dagegen müssen in den Differentialgleichungen des Gleichgewichts und der Kinematik berücksichtigt werden. Für den homogenen Druckstab sind die grundlegenden Beziehungen in /BEC69.1/ holzbauspezifisch dargestellt, wobei die aussteifende Schalung als unverschieblich und in Bretteebene unverformbar angenommen wurde. In den folgenden Ausführungen werden die entsprechenden Zusammenhänge für einen Verbundquerschnitt abgeleitet. Das Verbindungsmedium selbst wird dabei ebenfalls als starr angesehen. In der Praxis treten jedoch sowohl unverschiebliche als auch frei verschiebliche gegenseitige Aussteifungen auf, so daß hier beide Fälle untersucht werden sollen.

Im Holzbau wird häufig quer zur Richtung der auszusteifenden Binder verlegte und vernagelte Bretterschalung zur Aussteifung herangezogen. Durch das Ausweichen der Binder aus deren Sollachse verdreht sich die in Querrichtung achstreu angenommene Brettschalung relativ zum Binder, so daß neben den Längskräften auch Momente übertragen werden, wenn der Anschluß dieses zuläßt. Hierdurch sind die Binder sowohl elastisch gebettet als auch drehfedernd gestützt. Für Verbundquerschnitte ist zusätzlich die drehfedernde Stützung durch die gegenseitige Verschiebung der Teilquerschnitte zu beachten.

Geht man zunächst von einem unverschieblichen und starren Verbindungsmedium aus, so setzt sich der Momentenzuwachs aus verformungsabhängigen Belastungen am differentiellen Verbundelement nach Bild A4-1 aus zwei, bei positiver Steigung der Durchbiegungslinie positiven Anteilen zusammen.

$$\Delta M'_1 = \sum_{i=1}^n k_{DMi} w'$$

$$\Delta M'_2 = \sum_{j=1}^m k_{DNj} \left(w' - \frac{u_j}{e_j} \right)$$

Die maßgebenden Verdrehsteifigkeiten für die auf die Teilquerschnitte wirkenden Streckmomente ergeben sich aus der Anordnung der Verbindungsmittel auf einem Teilquerschnitt um deren Schwerpunkt herum.

$$k_{DMi} = \sum_{k=1}^n C_k \frac{r_k^2}{\bar{e}} \quad [\text{N mm/mm}] \quad \bar{e} - \text{Abstand der vertikalen Nagelreihen}$$

Die maßgebende Verdrehsteifigkeit für das auf den gesamten Verbundquerschnitt wirkende Strecknormalkraftmoment wird durch die wirksame Verschiebungssteifigkeit der Verbindungsmittel einer Fuge j an deren primärem und sekundärem Teilquerschnitt bestimmt.

$$k_{DNj} = \frac{C_{pj} C_{sj}}{C_{pj} + C_{sj}} \frac{e_j^2}{\bar{e}} \quad [\text{N mm/mm}]$$

Der Vertikalkraftzuwachs infolge elastischer Bettung geht negativ -also entlastend- ein.

$$\Delta V' = - c w$$

Die anzusetzende Bettungssteifigkeit ergibt sich aus der Summe der Verschiebungssteifigkeiten der vertikal in Reihe liegenden Verbindungsmittel und dem Abstand dieser Reihen.

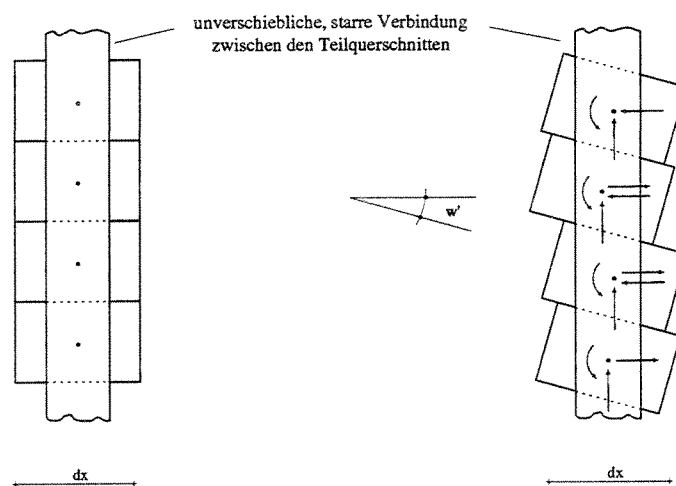


Bild A4-1. Momentenzuwachs bei Verformung des differentiellen Verbundelementes gegenüber der unverschieblichen, starren Verbindung

$$c = \sum_{i=1}^k C_i / \bar{e}$$

Die Gleichgewichts-Differentialgleichung Gl. 2.25 lautet mit den zusätzlichen Anteilen aus verformungsabhängigen Belastungen:

$$- w^{IV} \sum_{i=1}^n E_i I_i + \left(N + \sum_{i=1}^n k_{DMi} + \sum_{j=1}^m k_{DNj} \right) w'' - cw + \sum_{j=1}^m (k_j e_j - k_{DNj} / e_j) u_j' = -q$$

Man erkennt am Aufbau der Koeffizienten, daß bestimmte Effekte zusammengefaßt behandelt werden können. Die drehelastische Bettung des Verbundträgers kann demnach durch eine fiktive Erhöhung der äußeren Normalkraft unter Einhaltung der Vorzeichendefinition und gleichzeitige, fiktive Reduktion der betreffenden Fugensteifigkeiten -auch in den kinematischen Beziehungen- berücksichtigt werden. Die Effekte aus elastischer Bettung können konsistent durch eine geringfügige Erweiterung der in dieser Arbeit vorgeschlagenen Vorgehensweise zur Berechnung mehrteiliger Verbundquerschnitte erfaßt werden, indem das charakteristische Polynom um einen zusätzlichen Term ergänzt wird. Ist das Verbindungsmedium zwar richtungstreu jedoch verschieblich, so entfällt der Bettungsanteil.

Die praktische Berechnung sieht dann wie folgt aus:

- Die Koeffizienten des DGL-Systems werden zunächst -wie in Kapitel 3 dargestellt- ohne Berücksichtigung der verformungsabhängigen Belastungen ermittelt, außer daß in der ersten Zeile die Fugensteifigkeiten gemäß der angeglichenen Gl. 2.25 zu reduzieren sind.
- anhand der Eigenwerte dieses DGL-Systems wird nun das charakteristische Polynom mit den verformungsabhängigen Anteilen aufgestellt. Die äußere Normalkraft wird fiktiv erhöht, mit dem eigenbiegesteifigkeitsabhängigen Anteil der Koeffizienten des charakteristischen Polynoms multipliziert und mit geänderten Vorzeichen um eine Koeffizientenstelle verschoben (Kapitel 3.2). Die Bettung wird auf gleiche Weise berücksichtigt, nur daß der entsprechende Koeffizientenanteil mit gleichem Vorzeichen um zwei Koeffizientenstellen zu verschieben ist. Hierdurch wird das charakteristische Polynom um ein absolutes Glied erweitert. Anstelle zweier Nullstellen Null treten jetzt zwei konjugierte reelle Eigenwerte auf, wodurch zusätzlich hyperbolische Anteile in die Ansatzfunktionen aufzunehmen sind.

Ist das Verbindungsmedium jedoch verschieblich, so muß zur Bestimmung der aussteifenden Wirkung die Verdrehung des Verbindungsmediums selbst mit berücksichtigt werden. Als Beispiel sei ein Verbundträger genannt, dessen Teilquerschnitte in regelmäßigen Abständen durch außen aufgebrachte Nagelplatten verbunden sind. In diesem Fall muß das Gleichgewicht am Verbindungsmedium erfüllt sein, so daß eine Bestimmungsgleichung für dessen Verdrehungswinkel in Abhängigkeit von den Verschiebungsgrößen des Verbundproblems vorliegt. Aus Gründen der Übersichtlichkeit wird hier die Darstellung auf den zweiteiligen Verbundträger beschränkt.

Wird zunächst eine zusätzliche Verdübelung in der Fuge und eine äußere Normalkraftbelastung vernachlässigt, so gelten für das differentielle Verbundelement mit kontinuierlicher Aussteifung nach Bild A4-2 folgende Gleichgewichtsaussagen, :

$$N' = n \qquad V' = -q \qquad M'_1 + M'_2 + N'e - V = 0$$

Zusammengefaßt lautet die Gleichgewichts-Differentialgleichung:

$$- w^{IV} \sum E_i I_i + n'e = -q$$

Die Streckenmomente sind proportional zu den Verdrehungsanteilen:

$$n e = k_{DN} \varphi_N \qquad \sum m_i = \sum k_{DMi} \varphi_M$$

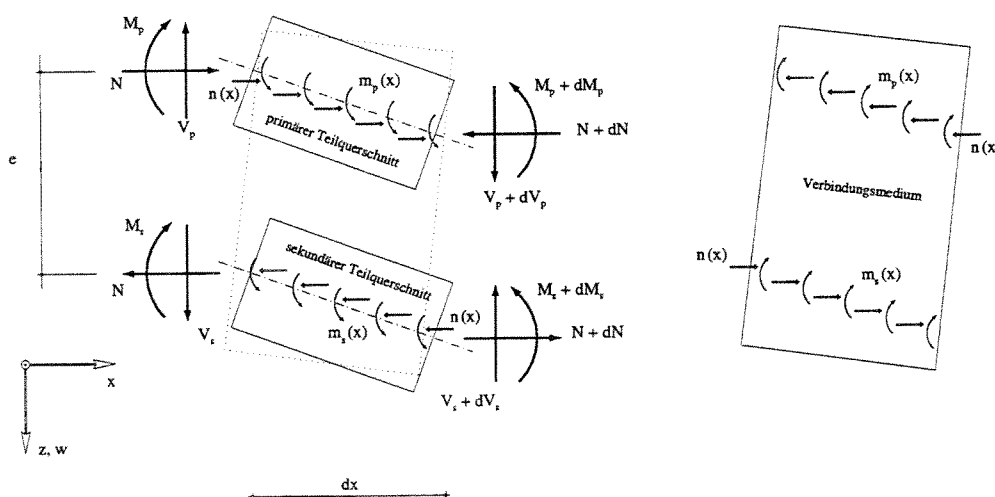


Bild A4-2. Momentenzuwachs bei Verformung des differentiellem Verbundelementes gegenüber einem verschieblichen, starren Verbindungsmedium

Da die Streckenmomente in den Teilquerschnitten und das Streckennormalkraftmoment gleich groß sein müssen, gilt:

$$k_{DN} \varphi_N = \sum k_{DMi} \varphi_M$$

Die mit der Fugenverschiebung gekoppelte Verdrehung setzt sich gerade aus den beiden o. g. Verdrehungsanteilen zusammen.

$$\frac{u}{e} = \varphi_N + \varphi_M$$

Nach Umformungen erhält man die jeweiligen Verdrehungsanteile.

$$\varphi_N = \frac{u}{e} \frac{\sum k_{DMi}}{k_{DN} + \sum k_{DMi}} \quad \varphi_M = \frac{u}{e} \frac{k_{DN}}{k_{DN} + \sum k_{DMi}}$$

Berücksichtigt man jetzt noch eine eventuell vorhandene Verdübelung der Fuge zwischen den beiden Teilquerschnitten und eine äußere Normalkraftbelastung, so lautet die Differentialgleichung nach Einsetzen der oben abgeleiteten Beziehungen:

$$-w^{IV} \sum E_i I_i + N w'' + \left(ke + \frac{1}{e} \frac{k_{DN} \sum k_{DMi}}{k_{DN} + \sum k_{DMi}} \right) u' = -q$$

Aus dem Aufbau des Koeffizienten zur Fugenverschiebungsfunktion u kann direkt abgeleitet werden, daß ein verschiebliches Verbindungsmedium nur dann aussteifende Wirkung hat, wenn dessen Anschluß an mindestens einem Teilquerschnitt Momenten- und an beiden Normalkraftaufnahmekapazität besitzt. Die Fugensteifigkeit im Differentialgleichungssystem ist entsprechend zu erhöhen. Geht die Verdrehsteifigkeit k_{DM} gegen Unendlich, so strebt die Gesamtverdrehsteifigkeit gegen k_{DN} . Das Verbindungsmedium erfährt somit keine Verbiegung und Rotation bzw. Rotation und Verbiegung sind vollkommen behindert wie z. B. bei einem mit quaderförmigen Harthölzern verdübelten Balken, wobei die Position der Hartholzdübel durch vertikal eingesetzte Bauschrauben gesichert wird. Auf die Momentenaufnahmekapazität kann ansonsten nur verzichtet werden, wenn der Hebelarm e gegen Null geht. Das Verbindungsmedium besitzt in diesem Fall also keine vertikale Ausdehnung und wird daher nur auf Schub belastet. Im Holzbau werden hauptsächlich stabförmige Verbindungsmittel eingesetzt, welche durch ihre Einbettung in die zu verbindenden Teile sowohl Momente als auch Normalkräfte übertragen können. Lediglich horizontal in Fugen eingebrachte Nagelplatten

und Leime können als reine Schubübertragungsmedien angesehen werden. Die Angabe von Verschiebungskennwerten für stabförmige Verbindungsmittel ist u. a. deswegen problematisch, weil für jede Anwendung die speziellen Bedingungen der Bettung beachtet werden müssten. Der relativ große Anteil an Biegeverformung und damit Verdrehung des Verbindungsmittels kann zwar in bestimmten Grenzen durch eine Reduktion des Achsenwinkels zur Belastungsrichtung verringert werden, doch ist dann der wegen der Kräftezerlegung auftretenden Belastung auf Herausziehen Rechnung zu tragen. Aus diesem Grund und wegen der verformungsärmeren Kraftübertragung sind formschlüssige Verbindungen mit grossen Übertragungsflächen zur Schubsicherung vorzuziehen. Diese Erkenntnis wurde beispielsweise bei der Entwicklung eines neuartigen Verbundsystems für Holz-Beton-Verbundkonstruktionen umgesetzt (siehe auch Kapitel 7.4)

Zur Untersuchung der Frage, ob und in welchem Maße geschichtete, schubelastische Bauelemente zur Aussteifung eines Verbundträgers herangezogen werden können, muß nach Ausrichtung der Fugen und Art des Anschlusses an die Gurte unterschieden werden. Brettstapelelemente mit horizontalen Fugen und kontinuierlicher Verbindung zu den Gurten können wie ein mehrteiliger Verbundquerschnitt behandelt werden, wobei die Gurte als zusätzliche Teilquerschnitte mit zu berücksichtigen sind. Voraussetzung ist allerdings, daß die Randbedingungen den Zustandsgrößen des Verbundträgers entsprechend definiert werden können. Sind die Verbundelemente beispielsweise zwischen die Gurte und vertikale Pfosten ohne weitere Verbindungen eingebaut, so sind sie einer erzwungenen Verformung ausgesetzt. Da a priori die Richtung des Schubflusses nicht bekannt ist und dieser über die wirksame Länge des Brettstapelelementes veränderlich ist, ist vor der Berechnung nicht bekannt, welcher der beiden Pfosten die Verformungen erzwingt. Es liegt also ein Kontaktproblem vor, welches mit den hier erarbeiteten Mitteln nur durch iterative Berechnung näherungsweise lösbar ist.

Das gleiche Phänomen ist zu beachten, wenn die Fugen des Brettstapelelementes vertikal verlaufen und keine weiteren Verbindungen zwischen dem tragenden Querschnitt und dem aussteifenden Element bestehen. Ist die Verformung des aussteifenden Elementes wiederum durch Pfosten erzwungen, so erfährt dieses eine reine Schubbelastung. Die Anschlüsse der Pfosten müssen die auftretenden Schubkräfte voll übernehmen und sind entsprechend zu bemessen. Die Bestimmung einer Ersatzsteifigkeit für das aussteifende Bauteil ist in diesem Fall allerdings sehr einfach. Es besteht ein linearer Zusammenhang zwischen der Anzahl der Fugen und der anzusetzenden Steifigkeit.

Anhang 5

Steifigkeitsmatrix des zweiteiligen Verbundquerschnitt ohne Normalkraftbelastung

Kraft- und Verschiebungsgrößen des finiten Elementes sind gemäß Bild A5-1 positiv definiert.

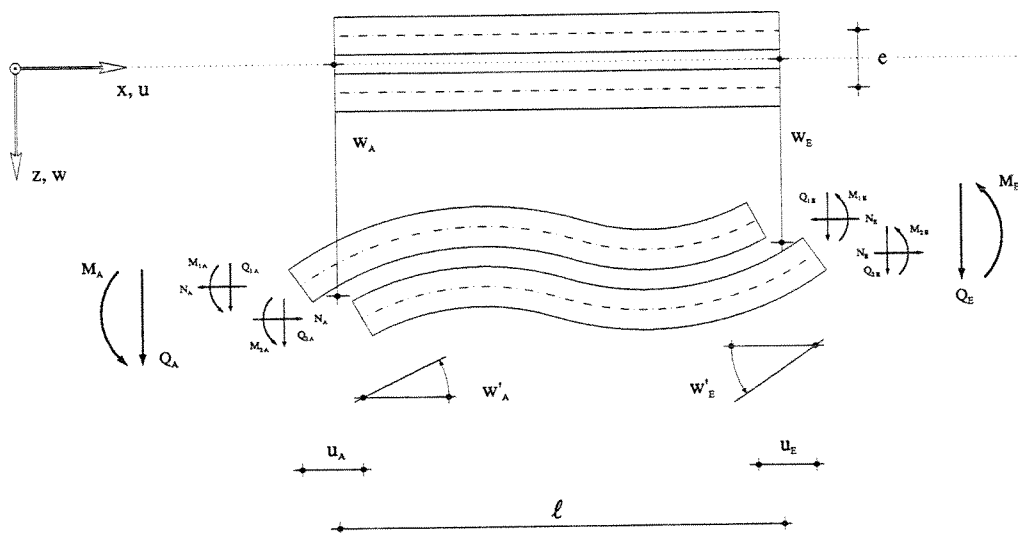


Bild A5-1. Positive Schnitt- und Verschiebungsgrößen des finiten Elementes für den zweiteiligen Verbundquerschnitt ohne Axialbelastung

Zu deren Verknüpfung über die Steifigkeitsmatrix \mathbf{K} wird der Verschiebungsvektor wie folgt definiert.

$$\mathbf{v}^T = \{ w_A, w'_A, u_A/e, w_E, w'_E, u_E/e \}$$

Dementsprechend lautet der Schnittgrößenvektor :

$$\mathbf{s}^T = \{ Q_A, M_A, N_A e, Q_E, M_E, N_E e \}$$

Die Steifigkeitsmatrix \mathbf{K} ist ähnlich besetzt wie die bekannte Steifigkeitsmatrix des einfachen Stabelementes. Starrkörperbewegungen sind lediglich für die Durchbiegung und die Verdrehung des Verbundelementes möglich, da die dritte Verschiebungsgröße mit der Relativbewegung der Verbundquerschnittsteile gekoppelt ist und somit eine Verformung des Elementes selbst voraussetzt.

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{65} & a_{66} \end{bmatrix}$$

$$\lambda^2 = \frac{k e^2 \ell^2}{\sum E_i I_i}$$

$$\text{mit } \alpha^2 = \frac{E_1 A_1 E_2 A_2 e^2}{(E_1 A_1 + E_2 A_2) B}$$

$$A = \frac{\lambda^3 (1 - \alpha^2) \sinh \lambda}{12 \alpha^2 (2 (1 - \cosh \lambda) + \lambda \sinh \lambda)}$$

$$a_{11} = -a_{14} = -a_{41} = a_{44} = \frac{12 B}{\ell^3} \frac{A}{A+1}$$

$$a_{12} = a_{21} = a_{15} = a_{51} = -a_{24} = -a_{42} = -a_{45} = -a_{54} = -\frac{6 B}{\ell^2} \frac{A}{A+1}$$

$$a_{22} = a_{55} = \frac{4 B}{\ell} \frac{A+0.25}{A+1}$$

$$a_{25} = a_{52} = \frac{2 B}{\ell} \frac{A-0.5}{A+1}$$

$$a_{13} = a_{31} = a_{16} = a_{61} = -a_{34} = -a_{43} = -a_{46} = -a_{64} = -\frac{B \lambda^2 (1 - \alpha^2)}{2 \ell^2 (A+1)}$$

$$a_{32} = a_{23} = a_{65} = a_{56} = \frac{B \lambda^2 (1 - \alpha^2)}{6 \ell A} \left[\frac{2A+0.5}{A+1} - \frac{(1 - \cosh \lambda)}{2 (1 - \cosh \lambda) + \lambda \sinh \lambda} \right]$$

$$a_{62} = a_{26} = a_{53} = a_{35} = \frac{B \lambda^2 (1 - \alpha^2)}{6 \ell A} \left[\frac{A-0.5}{A+1} + \frac{(1 - \cosh \lambda)}{2 (1 - \cosh \lambda) + \lambda \sinh \lambda} \right]$$

$$a_{63} = a_{36} = \frac{B \lambda^2 (1 - \alpha^2) \alpha^2}{\ell \lambda \sinh \lambda} \left[\frac{A-0.5}{6 A (A+1)} \lambda \sinh \lambda + \frac{2 \alpha^2 (1 - \cosh \lambda)}{\lambda^2 (1 - \alpha^2)} + \frac{(1 - \cosh \lambda)}{2 (A+1)} - 1 \right]$$

$$a_{33} = a_{66} = -\frac{B \lambda^2 (1 - \alpha^2) \alpha^2}{\ell} \left[\frac{A-0.5}{6 A (A+1)} - \frac{(\lambda - \sinh \lambda)}{2 \lambda (A+1)} + \frac{2 \alpha^2 (1 - \cosh \lambda)^2}{\lambda^3 (1 - \alpha^2) \sinh \lambda} + \frac{\cosh \lambda}{\lambda \sinh \lambda} \left[\frac{2 \alpha^2 (1 - \cosh \lambda)}{\lambda^2 (1 - \alpha^2)} + \frac{(1 - \cosh \lambda)}{2 (A+1)} - 1 \right] \right]$$

Anhang 6

Erläuterungen zum Teilverbund-Modell

Da in den Ausführungen des Hauptteils dieser Arbeit das Teilverbund-Modell nur auszugsweise und an verschiedenen Stellen dargestellt wird, soll hier nochmals der Gesamtzusammenhang aufgezeigt werden. Aus Gründen der Übersichtlichkeit werden die Zusammenhänge am zweiteiligen Verbundelement abgeleitet. Wie jedoch leicht nachzuvollziehen ist, kann bei mehrteiligen Verbundelementen auf die gleiche Weise vorgegangen werden.

Ausgehend von der Gleichgewichtsbetrachtung am Gesamtverbundelement (**Bild A6-1**) kann sukzessive eine Verfeinerung der Betrachtungsweise angestrebt werden, indem die inneren Schnittgrößen in verschiedene Anteile zerlegt und diese Teilschnittgrößen sinnvoll gruppiert werden.

Die Gleichgewichtsbedingungen für das differentielle Gesamtverbundelement lauten

$$N' = 0$$

$$V' = -q$$

$$V = M' + N w'$$

Der erste Zerlegungsschritt ist aus **Bild A6-2** ersichtlich. Die äußere Normalkraft wird gemäß Berechnungsvoraussetzung im Verhältnis der Dehnsteifigkeiten auf die Teilquerschnitte

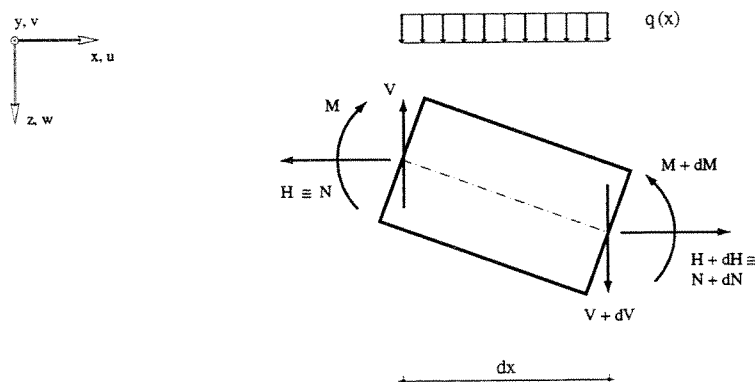


Bild A6-1. Schnittgrößen am differentiellen Gesamtverbundelement

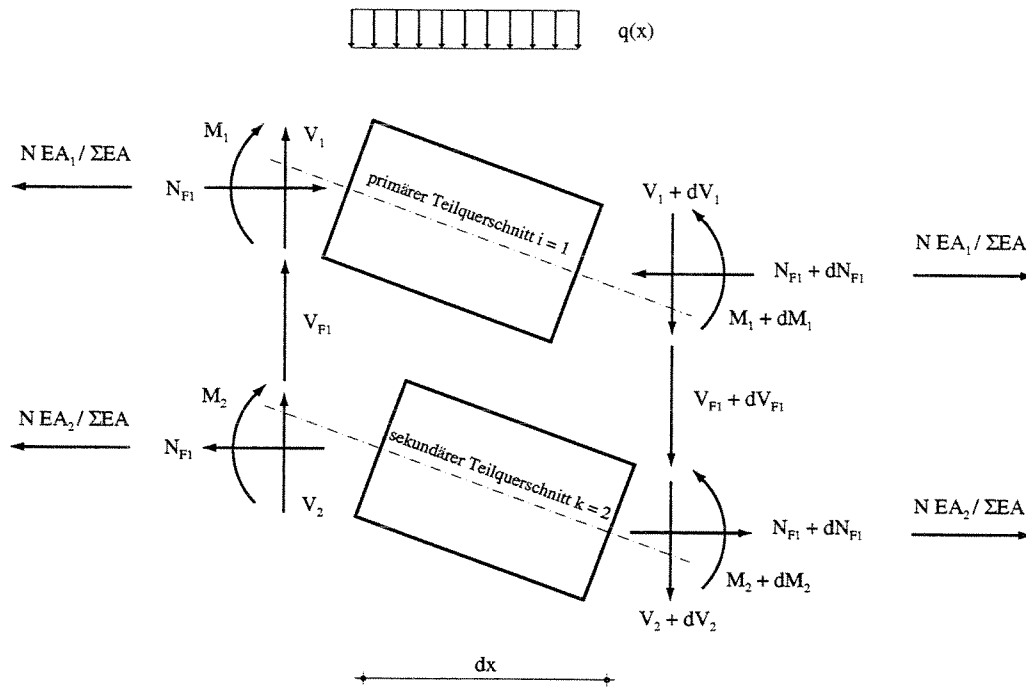


Bild A6-2. Gedankliche Zerlegung der Schnittgrößen am Gesamtverbundelement

verteilt. Außerdem wird den Teilquerschnitten ein Eigenbiegemoment zugeordnet. Der Rest des äußeren Momentes wird von dem in der Fuge zwischen den beiden Teilquerschnitten aufgebauten Normalkraftpaar mit dem Hebelarm e_{F1} abgedeckt. Aus Gleichgewichtsgründen müssen diese beiden Normalkräfte gleich groß sein. Die Gesamtvertikalkraft wird ebenfalls zerlegt in zwei Vertikalkräfte, welche den Teilquerschnitten zugeordnet sind, und einen zur Fuge gehörigen Anteil.

$$M = M_1 + M_2 + N_{F1} e_{F1}$$

$$V = V_1 + V_2 + V_{F1}$$

Im nächsten Schritt kann das Gesamtverbundelement in ein 'Eigenbiegungselement' und in ein 'Teilverbundelement' aufgesplittet werden. Bei dieser Zerlegung bleiben die äußeren Belastungen unberücksichtigt, da deren Beziehung zu den Gesamtschnittkräften bereits bekannt ist. Die beiden Elemente sind in **Bild A6-3** und **Bild A6-4** dargestellt.

Am 'Eigenbiegungselement' gelten für die homogenen Teilquerschnitte die aus der Biegelehre bekannten Momenten-Vertikalkraft- und die Momenten-Krümmungs-Beziehungen.

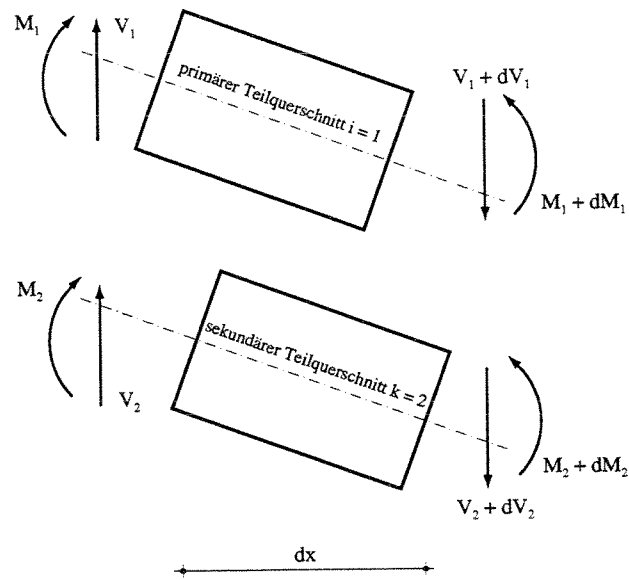


Bild A6-3. Schnittgrößen am Eigenbiegungselement

$$V_1 = M_1' = -E_1 I_1 w'''$$

$$V_2 = M_2' = -E_2 I_2 w'''$$

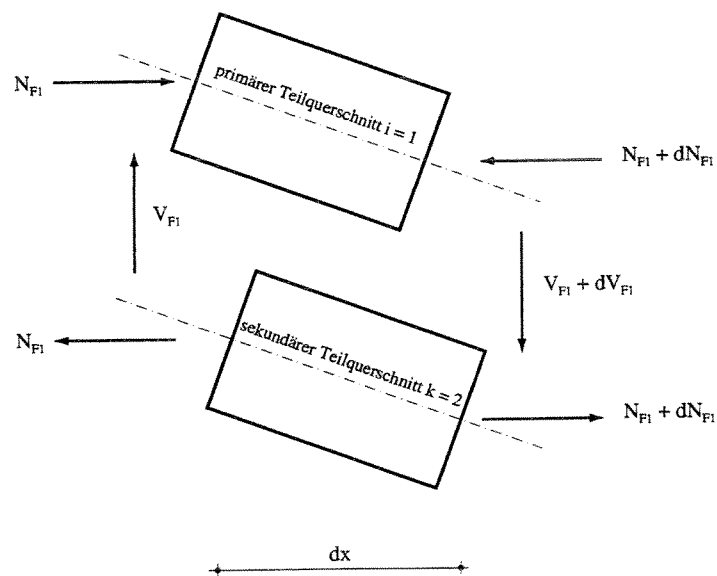


Bild A6-4. Schnittgrößen am Teilverbundelement

Das Momentengleichgewicht am Teilverbundelement lautet

$$V_{F1} = N'_{F1} e_{F1}$$

In Bild A6-5 sind die Schnittgrößen des Teilverbundelementes den einzelnen am Teilverbund beteiligten Medien zugeordnet. Mit den angegebenen Vorzeichenkonventionen erhält man folgende Zusammenhänge:

$$V_{F1} = -V_{F11} + V_{F12} + V_{F1v}$$

Die Einhaltung der Vorzeichenregelung ist zwingend erforderlich, wenn Verbundquerschnitte mit beliebiger Numerierung der Teilquerschnitte und der Fugen berechnet werden sollen. Die Kenntnis der einzelnen Schnittgrößenanteile in den verschiedenen Zerlegungsstufen ermöglicht schließlich die Ableitung der Gleichgewichtsaussagen nach Kapitel 2.1 und die Bestimmung der Schnittgrößen nach Kapitel 2.2.

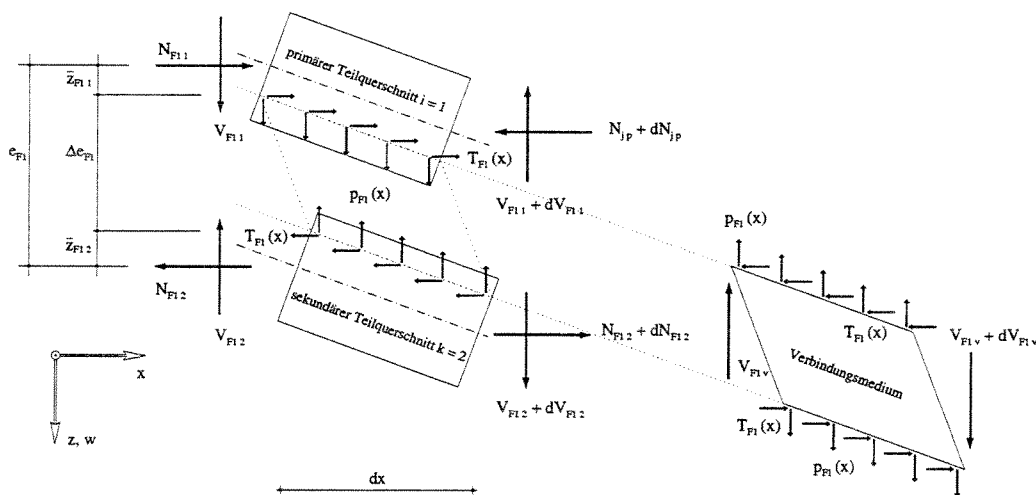


Bild A6-5. Aufteilung der Schnittgrößen am Teilverbundelement

Anhang 7

Ergebnisse der Berechnungen zu Kapitel 7.1

ZUSAMMENGESETZTER, FÜNFTEILIGER VERBUNDTRÄGER NH II 5 x 14/18, 39 STABDUEBEL \varnothing 24 mm, $e' = 20$ cm, LAST 0.1343 kN/cm'													
Elem	Ordinate	rel. Pos.	abs. Pos.	w	w'	u/e 1	u/e 2	max T	Ne 1	Ne 2	ΣMi	M	V
1	0.00	0.0	0.0	0.000	0.010	-0.006	-0.008	0.665	0.0	0.0	0.0	0.0	53.7
1	0.03	20.0	20.0	0.205	0.010	-0.006	-0.008	0.660	238.8	179.8	210.4	1047.5	51.0
1	0.05	40.0	40.0	0.407	0.010	-0.006	-0.008	0.647	474.4	356.8	379.0	2041.4	48.3
1	0.08	60.0	60.0	0.605	0.010	-0.006	-0.008	0.628	704.2	528.9	515.3	2981.5	45.7
1	0.10	80.0	80.0	0.797	0.009	-0.005	-0.007	0.605	926.2	694.6	626.3	3867.8	43.0
1	0.13	100.0	100.0	0.981	0.009	-0.005	-0.007	0.576	1138.9	852.6	717.6	4700.5	40.3
1	0.15	120.0	120.0	1.157	0.009	-0.005	-0.007	0.546	1341.0	1002.1	793.2	5479.4	37.6
1	0.18	140.0	140.0	1.324	0.008	-0.005	-0.006	0.513	1531.7	1142.5	856.4	6204.7	34.9
1	0.20	160.0	160.0	1.481	0.008	-0.004	-0.006	0.478	1710.0	1273.3	909.5	6876.2	32.2
1	0.23	180.0	180.0	1.627	0.007	-0.004	-0.005	0.442	1875.5	1394.2	954.4	7493.9	29.5
1	0.25	200.0	200.0	1.761	0.006	-0.004	-0.005	0.404	2027.7	1505.0	992.6	8058.0	26.9
1	0.28	220.0	220.0	1.884	0.006	-0.003	-0.004	0.366	2166.2	1605.4	1025.0	8568.3	24.2
1	0.30	240.0	240.0	1.996	0.005	-0.003	-0.004	0.327	2290.8	1695.5	1052.5	9025.0	21.5
1	0.33	260.0	260.0	2.094	0.005	-0.002	-0.003	0.286	2401.1	1775.0	1075.7	9427.9	18.8
1	0.35	280.0	280.0	2.180	0.004	-0.002	-0.003	0.246	2497.0	1844.0	1095.0	9777.0	16.1
1	0.38	300.0	300.0	2.253	0.003	-0.002	-0.002	0.205	2578.4	1902.4	1110.9	10072.5	13.4
1	0.40	320.0	320.0	2.314	0.003	-0.001	-0.002	0.165	2645.1	1950.2	1123.7	10314.2	10.7
1	0.43	340.0	340.0	2.361	0.002	-0.001	-0.001	0.124	2697.0	1987.4	1133.4	10502.3	8.1
1	0.45	360.0	360.0	2.394	0.001	-0.001	-0.001	0.083	2734.2	2014.0	1140.2	10636.6	5.4
1	0.48	380.0	380.0	2.414	0.001	0.000	0.000	0.041	2756.5	2029.9	1144.3	10717.1	2.7
1	0.50	400.0	400.0	2.421	0.000	0.000	0.000	0.000	2764.0	2035.2	1145.6	10744.0	0.0
1	0.53	420.0	420.0	2.414	-0.001	0.000	0.000	-0.041	2756.5	2029.9	1144.3	10717.1	-2.7
1	0.55	440.0	440.0	2.394	-0.001	0.001	0.001	-0.083	2734.2	2014.0	1140.2	10636.6	-5.4
1	0.58	460.0	460.0	2.361	-0.002	0.001	0.001	-0.124	2697.0	1987.4	1133.4	10502.3	-8.1
1	0.60	480.0	480.0	2.314	-0.003	0.001	0.002	-0.165	2645.1	1950.2	1123.7	10314.2	-10.7
1	0.63	500.0	500.0	2.253	-0.003	0.002	0.002	-0.205	2578.4	1902.4	1110.9	10072.5	-13.4
1	0.65	520.0	520.0	2.180	-0.004	0.002	0.003	-0.246	2497.0	1844.0	1095.0	9777.0	-16.1
1	0.68	540.0	540.0	2.094	-0.005	0.002	0.003	-0.286	2401.1	1775.0	1075.7	9427.9	-18.8
1	0.70	560.0	560.0	1.996	-0.005	0.003	0.004	-0.327	2290.8	1695.5	1052.5	9025.0	-21.5
1	0.73	580.0	580.0	1.884	-0.006	0.003	0.004	-0.366	2166.2	1605.4	1025.0	8568.3	-24.2
1	0.75	600.0	600.0	1.761	-0.006	0.004	0.005	-0.404	2027.7	1505.0	992.6	8058.0	-26.9
1	0.78	620.0	620.0	1.627	-0.007	0.004	0.005	-0.442	1875.5	1394.2	954.4	7493.9	-29.5
1	0.80	640.0	640.0	1.481	-0.008	0.004	0.006	-0.478	1710.0	1273.3	909.5	6876.2	-32.2
1	0.83	660.0	660.0	1.324	-0.008	0.005	0.006	-0.513	1531.7	1142.5	856.4	6204.7	-34.9
1	0.85	680.0	680.0	1.157	-0.009	0.005	0.007	-0.546	1341.0	1002.1	793.2	5479.4	-37.6
1	0.88	700.0	700.0	0.981	-0.009	0.005	0.007	-0.576	1138.9	852.6	717.6	4700.5	-40.3
1	0.90	720.0	720.0	0.797	-0.009	0.005	0.007	-0.605	926.2	694.6	626.3	3867.8	-43.0
1	0.93	740.0	740.0	0.605	-0.010	0.006	0.008	-0.628	704.2	528.9	515.3	2981.5	-45.7
1	0.95	760.0	760.0	0.407	-0.010	0.006	0.008	-0.647	474.4	356.8	379.0	2041.4	-48.3
1	0.98	780.0	780.0	0.205	-0.010	0.006	0.008	-0.660	238.8	179.8	210.4	1047.5	-51.0
1	1	800.0	800.0	0.000	-0.010	0.006	0.008	-0.665	0.0	0.0	0.0	0.0	-53.7
kleinster Wert				0.000	-0.010	-0.006	-0.008	-0.665	0.0	0.0	0.0	0.0	-53.72
größter Wert				2.421	0.010	0.006	0.008	0.665	2764.0	2035.2	1145.6	10744.0	53.72

Tab. A7-1. Tabellarische Darstellung der Berechnungsergebnisse mit dem Programmsystem COMIX für den fünfteiligen Einfeldträger mit gleichabständiger Verteilung der Verbindungsmittel
System Bild 7.1-2, Gleichstreckenlast, kontinuierlicher Verbund, ohne Überstand

ZUSAMMENGESETZTER, FÜNFTEILIGER VERBUNDTRÄGER NH II 5 x 14/18, 41 STABDUEBEL ø 24 mm, e' = 20 cm, LAST 0.1343 kN/cm'													
Elem	Ordinate	rel. Pos.	abs. Pos.	w	w'	u/e 1	u/e 2	max T	Ne 1	Ne 2	Σ Mi	M	V
1	0.00	0.0	0.0	-0.174	0.009	-0.004	-0.006	0.520	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
1	1.00	20.0	20.0	0.000	0.009	-0.005	-0.006	0.537	189.4	134.6	-647.9	0.0	0.0
2	0.00	0.0	20.0	0.000	0.009	-0.005	-0.006	0.537	189.4	134.6	-647.9	0.0	53.7
2	0.03	20.0	40.0	0.180	0.009	-0.005	-0.007	0.561	387.5	278.2	-283.8	1047.5	51.0
2	0.05	40.0	60.0	0.363	0.009	-0.005	-0.007	0.570	591.6	428.1	2.0	2041.4	48.3
2	0.08	60.0	80.0	0.547	0.009	-0.005	-0.007	0.569	796.9	580.1	227.5	2981.5	45.7
2	0.10	80.0	100.0	0.727	0.009	-0.005	-0.007	0.558	999.9	730.7	406.5	3867.8	43.0
2	0.13	100.0	120.0	0.903	0.009	-0.005	-0.006	0.540	1197.8	877.7	549.6	4700.5	40.3
2	0.15	120.0	140.0	1.073	0.008	-0.005	-0.006	0.517	1388.3	1019.1	664.8	5479.4	37.6
2	0.18	140.0	160.0	1.234	0.008	-0.004	-0.006	0.490	1569.8	1153.5	758.1	6204.7	34.9
2	0.20	160.0	180.0	1.387	0.007	-0.004	-0.006	0.460	1741.0	1280.0	834.2	6876.2	32.2
2	0.23	180.0	200.0	1.530	0.007	-0.004	-0.005	0.428	1900.9	1397.8	896.7	7493.9	29.5
2	0.25	200.0	220.0	1.663	0.006	-0.003	-0.005	0.393	2048.6	1506.3	948.1	8058.0	26.9
2	0.28	220.0	240.0	1.784	0.006	-0.003	-0.004	0.357	2183.6	1605.2	990.7	8568.3	24.2
2	0.30	240.0	260.0	1.894	0.005	-0.003	-0.004	0.319	2305.3	1694.2	1025.9	9025.0	21.5
2	0.33	260.0	280.0	1.992	0.005	-0.002	-0.003	0.281	2413.5	1773.0	1055.0	9427.9	18.8
2	0.35	280.0	300.0	2.077	0.004	-0.002	-0.003	0.242	2507.7	1841.5	1078.8	9777.0	16.1
2	0.38	300.0	320.0	2.149	0.003	-0.002	-0.002	0.202	2587.7	1899.6	1098.0	10072.5	13.4
2	0.40	320.0	340.0	2.209	0.003	-0.001	-0.002	0.163	2653.4	1947.2	1113.2	10314.2	10.7
2	0.43	340.0	360.0	2.256	0.002	-0.001	-0.001	0.122	2704.6	1984.2	1124.6	10502.3	8.1
2	0.45	360.0	380.0	2.289	0.001	-0.001	-0.001	0.082	2741.3	2010.7	1132.6	10636.6	5.4
2	0.48	380.0	400.0	2.309	0.001	0.000	0.000	0.041	2763.3	2026.6	1137.3	10717.1	2.7
2	0.50	400.0	420.0	2.316	0.000	0.000	0.000	0.000	2770.6	2031.9	1138.9	10744.0	0.0
2	0.53	420.0	440.0	2.309	-0.001	0.000	0.000	-0.041	2763.3	2026.6	1137.3	10717.1	-2.7
2	0.55	440.0	460.0	2.289	-0.001	0.001	0.001	-0.082	2741.3	2010.7	1132.6	10636.6	-5.4
2	0.58	460.0	480.0	2.256	-0.002	0.001	0.001	-0.122	2704.6	1984.2	1124.6	10502.3	-8.1
2	0.60	480.0	500.0	2.209	-0.003	0.001	0.002	-0.163	2653.4	1947.2	1113.2	10314.2	-10.7
2	0.63	500.0	520.0	2.149	-0.003	0.002	0.002	-0.202	2587.7	1899.6	1098.0	10072.5	-13.4
2	0.65	520.0	540.0	2.077	-0.004	0.002	0.003	-0.242	2507.7	1841.5	1078.8	9777.0	-16.1
2	0.68	540.0	560.0	1.992	-0.005	0.002	0.003	-0.281	2413.5	1773.0	1055.0	9427.9	-18.8
2	0.70	560.0	580.0	1.894	-0.005	0.003	0.004	-0.319	2305.3	1694.2	1025.9	9025.0	-21.5
2	0.73	580.0	600.0	1.784	-0.006	0.003	0.004	-0.357	2183.6	1605.2	990.7	8568.3	-24.2
2	0.75	600.0	620.0	1.663	-0.006	0.003	0.005	-0.393	2048.6	1506.3	948.1	8058.0	-26.9
2	0.78	620.0	640.0	1.530	-0.007	0.004	0.005	-0.428	1900.9	1397.8	896.7	7493.9	-29.5
2	0.80	640.0	660.0	1.387	-0.007	0.004	0.006	-0.460	1741.0	1280.0	834.2	6876.2	-32.2
2	0.83	660.0	680.0	1.234	-0.008	0.004	0.006	-0.490	1569.8	1153.5	758.1	6204.7	-34.9
2	0.85	680.0	700.0	1.073	-0.008	0.005	0.006	-0.517	1388.3	1019.1	664.8	5479.4	-37.6
2	0.88	700.0	720.0	0.903	-0.009	0.005	0.006	-0.540	1197.8	877.7	549.6	4700.5	-40.3
2	0.90	720.0	740.0	0.727	-0.009	0.005	0.007	-0.558	999.9	730.7	406.5	3867.8	-43.0
2	0.93	740.0	760.0	0.547	-0.009	0.005	0.007	-0.569	796.9	580.1	227.5	2981.5	-45.7
2	0.95	760.0	780.0	0.363	-0.009	0.005	0.007	-0.570	591.6	428.1	2.0	2041.4	-48.3
2	0.98	780.0	800.0	0.180	-0.009	0.005	0.007	-0.561	387.5	278.2	-283.8	1047.5	-51.0
2	1.00	800.0	820.0	0.000	-0.009	0.005	0.006	-0.537	189.4	134.6	-647.9	0.0	-53.7
3	0.00	0.0	820.0	0.000	-0.009	0.005	0.006	-0.537	189.4	134.6	-647.9	0.0	0.0
3	1.00	20.0	840.0	-0.174	-0.009	0.004	0.006	-0.520	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
kleinster Wert				-0.174	-0.009	-0.005	-0.007	-0.570	0.0	0.0	-647.9	0.0	-53.72
größter Wert				2.316	0.009	0.005	0.007	0.570	2770.6	2031.9	1138.9	10744.0	53.72

Tab. A7-2. Tabellarische Darstellung der Berechnungsergebnisse mit dem Programmsystem COMIX für den fünfteiligen Einfeldträger mit gleichabständiger Verteilung der Verbindungsmittel
System Bild 7.1-2, Gleichstreckenlast, kontinuierlicher Verbund, mit Überstand

ZUSAMMENGESETZTER, FÜNFTTEILIGER VERBUNDTRÄGER NH II 5 x 14/18, 41 STABDUEBEL ø 24 mm, e' = 20 cm, LAST P = 26.82 kN													
Elem	Ordinate	rel. Pos.	abs. Pos.	w	w'	u/e 1	u/e 2	N d	Ne 2	Ne 1	Σ Mi	M	V
1	0.00	0.00	0.0	-0.137	0.007	-0.003	-0.004	0.000	0.0	0.0	0.0	0.0	0.00
1	1.00	10.00	10.0	-0.069	0.007	-0.003	-0.004		0.1	0.1	-0.4	0.0	0.00
2	0.00	0.00	10.0	-0.069	0.007	-0.003	-0.004	6.930	124.9	83.3	-416.3	0.0	0.00
2	1.00	10.00	20.0	0.000	0.007	-0.003	-0.004		125.0	83.4	-416.8	0.0	0.00
3	0.00	0.00	20.0	0.000	0.007	-0.003	-0.004	0.000	125.0	83.4	-416.8	0.0	53.72
3	1.00	5.00	25.0	0.035	0.007	-0.003	-0.004		125.1	83.4	-150.1	266.9	53.05
4	0.00	0.00	25.0	0.035	0.007	-0.003	-0.004	7.217	255.0	171.8	-586.6	266.9	53.05
4	1.00	10.00	35.0	0.105	0.007	-0.003	-0.004		255.1	171.9	-63.3	790.7	51.71
5	0.00	0.00	35.0	0.105	0.007	-0.003	-0.004	7.393	388.2	263.4	-512.5	790.7	51.71
5	1.00	11.00	46.0	0.184	0.007	-0.003	-0.005		388.4	263.5	47.6	1351.3	50.23
6	0.00	0.00	46.0	0.184	0.007	-0.003	-0.005	7.546	524.2	357.8	-412.7	1351.3	50.23
6	1.00	11.00	57.0	0.263	0.007	-0.003	-0.005		524.3	357.9	131.1	1895.7	48.75
7	0.00	0.00	57.0	0.263	0.007	-0.003	-0.005	7.658	662.2	454.4	-337.5	1895.7	48.75
7	1.00	11.00	68.0	0.342	0.007	-0.003	-0.005		662.4	454.5	190.1	2423.8	47.27
8	0.00	0.00	68.0	0.342	0.007	-0.003	-0.005	7.744	801.8	552.7	-285.0	2423.8	47.27
8	1.00	12.00	80.0	0.429	0.007	-0.003	-0.005		801.9	552.8	272.0	2981.5	45.66
9	0.00	0.00	80.0	0.429	0.007	-0.003	-0.005	7.808	942.5	652.4	-208.2	2981.5	45.66
9	1.00	12.00	92.0	0.516	0.007	-0.003	-0.005		942.7	652.5	329.4	3519.7	44.05
10	0.00	0.00	92.0	0.516	0.007	-0.003	-0.005	7.843	1083.8	753.0	-153.9	3519.7	44.05
10	1.00	12.00	104.0	0.603	0.007	-0.003	-0.005		1084.0	753.1	364.4	4038.7	42.44
11	0.00	0.00	104.0	0.603	0.007	-0.003	-0.005	7.861	1225.5	854.4	-121.0	4038.7	42.44
11	1.00	13.00	117.0	0.696	0.007	-0.003	-0.005		1225.7	854.5	418.6	4579.0	40.69
12	0.00	0.00	117.0	0.696	0.007	-0.003	-0.005	7.863	1367.2	956.3	-68.1	4579.0	40.69
12	1.00	13.00	130.0	0.788	0.007	-0.003	-0.005		1367.4	956.5	448.9	5096.7	38.95
13	0.00	0.00	130.0	0.788	0.007	-0.003	-0.005	7.850	1508.7	1058.7	-38.1	5096.7	38.95
13	1.00	14.00	144.0	0.886	0.007	-0.003	-0.005		1509.0	1058.8	493.2	5628.8	37.07
14	0.00	0.00	144.0	0.886	0.007	-0.003	-0.005	7.821	1649.7	1161.3	6.7	5628.8	37.07
14	1.00	15.00	159.0	0.989	0.007	-0.003	-0.005		1650.0	1161.5	546.8	6169.7	35.05
15	0.00	0.00	159.0	0.989	0.007	-0.003	-0.005	7.765	1789.7	1264.0	62.2	6169.7	35.05
15	1.00	16.00	175.0	1.098	0.007	-0.003	-0.005		1790.0	1264.2	605.0	6713.3	32.90
16	0.00	0.00	175.0	1.098	0.007	-0.003	-0.005	7.673	1928.1	1366.3	124.5	6713.3	32.90
16	1.00	17.00	192.0	1.210	0.006	-0.003	-0.005		1928.3	1366.5	663.6	7253.3	30.62
17	0.00	0.00	192.0	1.210	0.006	-0.003	-0.005	7.537	2064.0	1467.7	189.9	7253.3	30.62
17	1.00	18.00	210.0	1.324	0.006	-0.003	-0.004		2064.3	1467.9	718.4	7782.7	28.20
18	0.00	0.00	210.0	1.324	0.006	-0.003	-0.004	7.352	2196.6	1567.6	254.4	7782.7	28.20
18	1.00	20.00	230.0	1.446	0.006	-0.003	-0.004		2196.9	1567.8	790.6	8319.9	25.52
19	0.00	0.00	230.0	1.446	0.006	-0.003	-0.004	7.092	2324.5	1665.0	340.7	8319.9	25.52
19	1.00	23.00	253.0	1.578	0.005	-0.003	-0.004		2324.9	1665.3	891.0	8871.3	22.43
20	0.00	0.00	253.0	1.578	0.005	-0.003	-0.004	6.701	2445.5	1758.4	463.4	8871.3	22.43
20	1.00	26.00	279.0	1.714	0.005	-0.003	-0.004		2445.8	1758.7	1000.0	9409.0	18.94
21	0.00	0.00	279.0	1.714	0.005	-0.003	-0.004	6.123	2556.0	1845.1	606.7	9409.0	18.94
21	1.00	33.00	312.0	1.864	0.004	-0.002	-0.003		2556.4	1845.4	1157.2	9960.8	14.50
22	0.00	0.00	312.0	1.864	0.004	-0.002	-0.003	5.155	2649.2	1919.6	823.3	9960.8	14.50
22	1.00	63.00	375.0	2.056	0.002	-0.001	-0.001		2649.6	1920.0	1468.8	10608.0	6.04
23	0.00	0.00	375.0	2.056	0.002	-0.001	-0.001	2.415	2693.1	1955.5	1310.8	10608.0	6.04
23	1.00	45.00	420.0	2.099	0.000	0.000	0.000		2693.2	1955.6	1446.4	10744.0	0.00
kleinster Wert				-0.137	0.000	-0.003	-0.005	0.000	0.0	0.0	-586.6	0.0	0.00
größter Wert				2.099	0.007	0.000	0.000	7.863	2693.2	1955.6	1468.8	10744.0	53.72

Tab. A7-3. Tabellarische Darstellung der Berechnungsergebnisse mit dem Programmsystem COMIX für den fünfteiligen Einfeldträger mit gleichabständiger Verteilung der Verbindungsmittel
System Bild 7.1-3, Gleichstreckenlast, diskreter Verbund, mit Überstand

ZUSAMMENGESETZTER, FÜNFTTEILIGER VERBUNDTRÄGER NH II 5 x 14/18, 41 STABDUEBEL ø 24 mm, e' = 20 cm, LAST 0.1343 kN/cm'													
Elem	Ordinate	rel. Pos.	abs. Pos.	w	w'	u/e 1	u/e 2	N d	Ne 2	Ne 1	Σ Mi	M	V
1	0.00	0.0	0.0	-0.039	0.002	-0.001	-0.002	0.000	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
1	1.00	10.0	10.0	-0.020	0.002	-0.001	-0.002		0.1	0.0	-0.2	0.0	0.0
2	0.00	0.0	10.0	-0.020	0.002	-0.001	-0.002	2.862	51.6	42.4	-187.9	0.0	0.0
2	1.00	10.0	20.0	0.000	0.002	-0.001	-0.002		51.6	42.4	-188.1	0.0	0.0
3	0.00	0.0	20.0	0.000	0.002	-0.001	-0.002	0.000	51.6	42.4	-188.1	0.0	22.4
3	1.00	10.0	30.0	0.020	0.002	-0.001	-0.002		51.7	42.5	29.2	217.5	21.1
4	0.00	0.0	30.0	0.020	0.002	-0.001	-0.002	2.996	105.6	87.4	-168.5	217.5	21.1
4	1.00	20.0	50.0	0.061	0.002	-0.001	-0.002		105.7	87.5	225.7	612.1	18.4
5	0.00	0.0	50.0	0.061	0.002	-0.001	-0.002	2.971	159.2	132.3	29.0	612.1	18.4
5	1.00	20.0	70.0	0.100	0.002	-0.001	-0.002		159.3	132.4	369.5	953.0	15.7
6	0.00	0.0	70.0	0.100	0.002	-0.001	-0.002	2.782	209.4	174.4	185.3	953.0	15.7
6	1.00	20.0	90.0	0.137	0.002	-0.001	-0.001		209.5	174.5	472.1	1240.2	13.0
7	0.00	0.0	90.0	0.137	0.002	-0.001	-0.001	2.469	253.9	211.7	308.9	1240.2	13.0
7	1.00	20.0	110.0	0.168	0.001	-0.001	-0.001		254.0	211.7	542.1	1473.6	10.3
8	0.00	0.0	110.0	0.168	0.001	-0.001	-0.001	2.065	291.2	242.6	406.1	1473.6	10.3
8	1.00	20.0	130.0	0.194	0.001	-0.001	-0.001		291.3	242.6	585.6	1653.3	7.6
9	0.00	0.0	130.0	0.194	0.001	-0.001	-0.001	1.594	320.0	266.0	481.4	1653.3	7.6
9	1.00	20.0	150.0	0.214	0.001	-0.001	-0.001		320.0	266.1	607.2	1779.4	5.0
10	0.00	0.0	150.0	0.214	0.001	-0.001	-0.001	1.077	339.4	281.3	537.9	1779.4	5.0
10	1.00	20.0	170.0	0.227	0.000	0.000	0.000		339.4	281.3	610.1	1851.7	2.3
11	0.00	0.0	170.0	0.227	0.000	0.000	0.000	0.533	349.0	288.0	577.5	1851.7	2.3
11	1.00	20.0	190.0	0.234	0.000	0.000	0.000		349.0	288.0	596.1	1870.2	-0.4
12	0.00	0.0	190.0	0.234	0.000	0.000	0.000	-0.022	348.6	286.0	601.0	1870.2	-0.4
12	1.00	20.0	210.0	0.233	0.000	0.000	0.000		348.6	286.0	565.9	1835.1	-3.1
13	0.00	0.0	210.0	0.233	0.000	0.000	0.000	-0.573	338.3	275.1	608.2	1835.1	-3.1
13	1.00	20.0	230.0	0.225	-0.001	0.001	0.001		338.3	275.1	519.5	1746.2	-5.8
14	0.00	0.0	230.0	0.225	-0.001	0.001	0.001	-1.105	318.4	255.8	597.9	1746.2	-5.8
14	1.00	20.0	250.0	0.211	-0.001	0.001	0.001		318.3	255.8	455.5	1603.7	-8.5
15	0.00	0.0	250.0	0.211	-0.001	0.001	0.001	-1.601	289.5	228.5	567.6	1603.7	-8.5
15	1.00	20.0	270.0	0.191	-0.001	0.001	0.001		289.5	228.4	371.6	1407.4	-11.2
16	0.00	0.0	270.0	0.191	-0.001	0.001	0.001	-2.041	252.7	194.0	513.9	1407.4	-11.2
16	1.00	20.0	290.0	0.166	-0.001	0.001	0.001		252.6	193.9	264.2	1157.3	-13.8
17	0.00	0.0	290.0	0.166	-0.001	0.001	0.001	-2.403	209.4	153.6	431.4	1157.3	-13.8
17	1.00	20.0	310.0	0.137	-0.002	0.001	0.002		209.3	153.5	128.1	853.6	-16.5
18	0.00	0.0	310.0	0.137	-0.002	0.001	0.002	-2.659	161.4	108.8	313.1	853.6	-16.5
18	1.00	20.0	330.0	0.105	-0.002	0.002	0.002		161.3	108.7	-44.0	496.1	-19.2
19	0.00	0.0	330.0	0.105	-0.002	0.002	0.002	-2.774	111.4	62.0	149.3	496.1	-19.2
19	1.00	20.0	350.0	0.073	-0.002	0.002	0.002		111.3	61.9	-261.5	85.0	-21.9
20	0.00	0.0	350.0	0.073	-0.002	0.002	0.002	-2.703	62.6	16.3	-72.7	85.0	-21.9
20	1.00	20.0	370.0	0.042	-0.001	0.001	0.001		62.5	16.2	-537.3	-379.9	-24.6
21	0.00	0.0	370.0	0.042	-0.001	0.001	0.001	-2.390	19.5	-24.4	-370.0	-379.9	-24.6
21	1.00	20.0	390.0	0.017	-0.001	0.001	0.001		19.4	-24.5	-888.3	-898.6	-27.3
22	0.00	0.0	390.0	0.017	-0.001	0.001	0.001	-1.759	-12.3	-54.6	-764.9	-898.6	-27.3
22	1.00	20.0	410.0	0.002	0.000	0.000	0.000		-12.3	-54.6	-1337.0	-1470.9	-30.0
23	0.00	0.0	410.0	0.002	0.000	0.000	0.000	-0.714	-25.2	-66.9	-1286.7	-1470.9	-30.0
23	1.00	10.0	420.0	0.000	0.000	0.000	0.000		-25.2	-67.0	-1593.0	-1777.2	-31.3
kleinster Wert				-0.039	-0.002	-0.001	-0.002	-2.774	-25.2	-67.0	-1593.0	-1777.2	-31.30
größter Wert				0.234	0.002	0.002	0.002	2.996	349.0	288.0	610.1	1870.2	22.42

Tab. A7-4. Tabellarische Darstellung der Berechnungsergebnisse mit dem Programmsystem COMIX für den fünfteiligen Zweifeldträger mit gleichabständiger Verteilung der Verbindungsmittel
System Bild 7.1-4, Gleichstreckenlast, diskreter Verbund, mit Überstand

ZUSAMMENGESETZTER, FÜNFTTEILIGER VERBUNDTRÄGER NH II 5 x 14/18, 41 STABDUEBEL ø 24 mm, e' = 20 cm, LAST P = 53.72 kN														
Elem	Ordinate	rel. Pos.	abs. Pos.	w	w'	u/e 1	u/e 2	max T	Ne 1	Ne 2	Σ Mi	M	V	
1	0.00	0.0	0.0	-0.116	0.006	-0.003	-0.004	0.325	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.00
1	1.00	20.0	20.0	0.000	0.006	-0.003	-0.004	0.335	118.0	78.9	-393.9	0.0	0.0	0.00
2	0.00	0.0	20.0	0.000	0.006	-0.003	-0.004	0.335	118.0	78.9	-393.9	0.0	26.86	26.86
2	0.05	20.0	40.0	0.120	0.006	-0.003	-0.004	0.352	241.8	163.6	-273.5	537.2	26.86	26.86
2	0.10	40.0	60.0	0.242	0.006	-0.003	-0.004	0.365	371.0	253.7	-175.0	1074.4	26.86	26.86
2	0.15	60.0	80.0	0.367	0.006	-0.003	-0.004	0.374	504.1	348.0	-92.6	1611.6	26.86	26.86
2	0.20	80.0	100.0	0.493	0.006	-0.003	-0.005	0.381	640.1	445.3	-22.0	2148.8	26.86	26.86
2	0.25	100.0	120.0	0.619	0.006	-0.003	-0.005	0.384	777.9	544.9	40.4	2686.0	26.86	26.86
2	0.30	120.0	140.0	0.745	0.006	-0.003	-0.005	0.387	916.7	646.1	97.6	3223.2	26.86	26.86
2	0.35	140.0	160.0	0.870	0.006	-0.003	-0.005	0.386	1055.8	748.3	152.2	3760.4	26.86	26.86
2	0.40	160.0	180.0	0.992	0.006	-0.003	-0.005	0.384	1194.4	851.1	206.5	4297.6	26.86	26.86
2	0.45	180.0	200.0	1.113	0.006	-0.003	-0.005	0.380	1331.9	954.0	263.0	4834.8	26.86	26.86
2	0.50	200.0	220.0	1.230	0.006	-0.003	-0.004	0.373	1467.6	1056.4	323.9	5372.0	26.86	26.86
2	0.55	220.0	240.0	1.343	0.006	-0.003	-0.004	0.365	1600.6	1157.9	392.3	5909.2	26.86	26.86
2	0.60	240.0	260.0	1.452	0.005	-0.003	-0.004	0.353	1729.8	1257.7	471.4	6446.4	26.86	26.86
2	0.65	260.0	280.0	1.556	0.005	-0.003	-0.004	0.337	1854.2	1354.9	565.4	6983.6	26.86	26.86
2	0.70	280.0	300.0	1.652	0.005	-0.003	-0.004	0.317	1972.2	1448.4	679.5	7520.8	26.86	26.86
2	0.75	300.0	320.0	1.741	0.004	-0.003	-0.003	0.291	2082.0	1536.7	820.6	8058.0	26.86	26.86
2	0.80	320.0	340.0	1.820	0.004	-0.003	-0.003	0.259	2181.3	1617.7	997.2	8595.2	26.86	26.86
2	0.85	340.0	360.0	1.887	0.003	-0.002	-0.003	0.216	2267.1	1688.7	1220.8	9132.4	26.86	26.86
2	0.90	360.0	380.0	1.939	0.002	-0.002	-0.002	0.161	2335.4	1746.3	1506.2	9669.6	26.86	26.86
2	0.95	380.0	400.0	1.974	0.001	-0.001	-0.001	0.091	2381.3	1785.7	1872.8	10206.8	26.86	26.86
2	1.00	400.0	420.0	1.987	0.000	0.000	0.000	0.000	2398.4	1800.5	2346.3	10744.0	26.86	26.86
3	0.00	0.0	420.0	1.987	0.000	0.000	0.000	0.000	2398.4	1800.5	2346.3	10744.0	26.86	26.86
3	0.05	20.0	440.0	1.974	-0.001	0.001	0.001	-0.091	2381.3	1785.7	1872.8	10206.8	-26.86	-26.86
3	0.10	40.0	460.0	1.939	-0.002	0.002	0.002	-0.161	2335.4	1746.3	1506.2	9669.6	-26.86	-26.86
3	0.15	60.0	480.0	1.887	-0.003	0.003	0.003	-0.216	2267.1	1688.7	1220.8	9132.4	-26.86	-26.86
3	0.20	80.0	500.0	1.820	-0.004	0.004	0.004	-0.259	2181.3	1617.7	997.2	8595.2	-26.86	-26.86
3	0.25	100.0	520.0	1.741	-0.004	0.004	0.004	-0.291	2082.0	1536.7	820.6	8058.0	-26.86	-26.86
3	0.30	120.0	540.0	1.652	-0.005	0.005	0.005	-0.317	1972.2	1448.4	679.5	7520.8	-26.86	-26.86
3	0.35	140.0	560.0	1.556	-0.005	0.005	0.005	-0.337	1854.2	1354.9	565.4	6983.6	-26.86	-26.86
3	0.40	160.0	580.0	1.452	-0.005	0.005	0.005	-0.353	1729.8	1257.7	471.4	6446.4	-26.86	-26.86
3	0.45	180.0	600.0	1.343	-0.006	0.006	0.006	-0.365	1600.6	1157.9	392.3	5909.2	-26.86	-26.86
3	0.50	200.0	620.0	1.230	-0.006	0.006	0.006	-0.373	1467.6	1056.4	323.9	5372.0	-26.86	-26.86
3	0.55	220.0	640.0	1.113	-0.006	0.006	0.006	-0.380	1331.9	954.0	263.0	4834.8	-26.86	-26.86
3	0.60	240.0	660.0	0.992	-0.006	0.006	0.006	-0.384	1194.4	851.1	206.5	4297.6	-26.86	-26.86
3	0.65	260.0	680.0	0.870	-0.006	0.006	0.006	-0.386	1055.8	748.3	152.2	3760.4	-26.86	-26.86
3	0.70	280.0	700.0	0.745	-0.006	0.006	0.006	-0.387	916.7	646.1	97.6	3223.2	-26.86	-26.86
3	0.75	300.0	720.0	0.619	-0.006	0.006	0.006	-0.384	777.9	544.9	40.4	2686.0	-26.86	-26.86
3	0.80	320.0	740.0	0.493	-0.006	0.006	0.006	-0.381	640.1	445.3	-22.0	2148.8	-26.86	-26.86
3	0.85	340.0	760.0	0.367	-0.006	0.006	0.006	-0.374	504.1	348.0	-92.6	1611.6	-26.86	-26.86
3	0.90	360.0	780.0	0.242	-0.006	0.006	0.006	-0.365	371.0	253.7	-175.0	1074.4	-26.86	-26.86
3	0.95	380.0	800.0	0.120	-0.006	0.006	0.006	-0.352	241.8	163.6	-273.5	537.2	-26.86	-26.86
3	1.00	400.0	820.0	0.000	-0.006	0.006	0.006	-0.335	118.0	78.9	-393.9	0.0	-26.86	-26.86
4	0.00	0.0	820.0	0.000	-0.006	0.003	0.004	-0.335	118.0	78.9	-393.9	0.0	0.00	0.00
4	1.00	20.0	840.0	-0.116	-0.006	0.003	0.004	-0.325	0.0	0.0	0.0	0.0	0.00	0.00
kleinster Wert				-0.116	-0.006	-0.003	-0.005	-0.387	0.0	0.0	-393.9	0.0	-26.86	
größter Wert				1.987	0.006	0.003	0.005	0.387	2398.4	1800.5	2346.3	10744.0	26.86	

Tab. A7-5. Tabellarische Darstellung der Berechnungsergebnisse mit dem Programmsystem COMIX für den fünfteiligen Einfeldträger mit gleichabständiger Verteilung der Verbindungsmittel
System Bild 7.1-2, Punktlast in Feldmitte, kontinuierlicher Verbund, mit Überstand

ZUSAMMENGESETZTER, FÜNFTTEILIGER VERBUNDTRÄGER NH II 5 x 14/18, 41 STABDUEBEL \varnothing 24 mm, $e' = 20$ cm, LAST P = 26.82 kN													
Elem	Ordinate	rel. Pos.	abs. Pos.	w	w'	u/e 1	u/e 2	N d	Ne 2	Ne 1	Σ Mi	M	V
1	0.00	0.0	0.0	-0.116	0.006	-0.003	-0.004	0.000	0.0	0.0	0.0	0.0	0.00
1	1.00	10.0	10.0	-0.058	0.006	-0.003	-0.004		0.1	0.1	-0.4	0.0	0.00
2	0.00	0.0	10.0	-0.058	0.006	-0.003	-0.004	6.529	117.7	78.6	-392.5	0.0	0.00
2	1.00	10.0	20.0	0.000	0.006	-0.003	-0.004		117.8	78.7	-392.9	0.0	0.00
3	0.00	0.0	20.0	0.000	0.006	-0.003	-0.004	0.000	117.8	78.7	-392.9	0.0	26.86
3	1.00	10.0	30.0	0.059	0.006	-0.003	-0.004		117.9	78.8	-124.8	268.6	26.86
4	0.00	0.0	30.0	0.059	0.006	-0.003	-0.004	6.865	241.5	163.3	-541.0	268.6	26.86
4	1.00	20.0	50.0	0.181	0.006	-0.003	-0.004		241.8	163.5	-4.8	805.8	26.86
5	0.00	0.0	50.0	0.181	0.006	-0.003	-0.004	7.165	370.7	253.5	-442.7	805.8	26.86
5	1.00	20.0	70.0	0.305	0.006	-0.003	-0.004		371.0	253.7	93.5	1343.0	26.86
6	0.00	0.0	70.0	0.305	0.006	-0.003	-0.004	7.384	503.9	347.8	-360.5	1343.0	26.86
6	1.00	20.0	90.0	0.431	0.006	-0.003	-0.005		504.2	348.0	175.7	1880.2	26.86
7	0.00	0.0	90.0	0.431	0.006	-0.003	-0.005	7.538	639.9	445.2	-289.9	1880.2	26.86
7	1.00	20.0	110.0	0.558	0.006	-0.003	-0.005		640.2	445.4	246.3	2417.4	26.86
8	0.00	0.0	110.0	0.558	0.006	-0.003	-0.005	7.639	777.7	544.8	-227.5	2417.4	26.86
8	1.00	20.0	130.0	0.684	0.006	-0.003	-0.005		778.0	545.0	308.7	2954.6	26.86
9	0.00	0.0	130.0	0.684	0.006	-0.003	-0.005	7.695	916.5	645.9	-170.2	2954.6	26.86
9	1.00	20.0	150.0	0.810	0.006	-0.003	-0.005		916.8	646.1	365.9	3491.8	26.86
10	0.00	0.0	150.0	0.810	0.006	-0.003	-0.005	7.709	1055.6	748.1	-115.6	3491.8	26.86
10	1.00	20.0	170.0	0.934	0.006	-0.003	-0.005		1055.9	748.3	420.6	4029.0	26.86
11	0.00	0.0	170.0	0.934	0.006	-0.003	-0.005	7.686	1194.2	850.9	-61.2	4029.0	26.86
11	1.00	20.0	190.0	1.056	0.006	-0.003	-0.005		1194.5	851.1	475.0	4566.2	26.86
12	0.00	0.0	190.0	1.056	0.006	-0.003	-0.005	7.623	1331.7	953.7	-4.7	4566.2	26.86
12	1.00	20.0	210.0	1.175	0.006	-0.003	-0.005		1332.0	953.9	531.5	5103.4	26.86
13	0.00	0.0	210.0	1.175	0.006	-0.003	-0.005	7.519	1467.4	1056.1	56.4	5103.4	26.86
13	1.00	20.0	230.0	1.291	0.006	-0.003	-0.004		1467.6	1056.4	592.6	5640.6	26.86
14	0.00	0.0	230.0	1.291	0.006	-0.003	-0.004	7.369	1600.3	1157.6	124.9	5640.6	26.86
14	1.00	20.0	250.0	1.402	0.005	-0.003	-0.004		1600.6	1157.8	661.1	6177.8	26.86
15	0.00	0.0	250.0	1.402	0.005	-0.003	-0.004	7.164	1729.5	1257.3	204.1	6177.8	26.86
15	1.00	20.0	270.0	1.509	0.005	-0.003	-0.004		1729.8	1257.5	740.4	6715.0	26.86
16	0.00	0.0	270.0	1.509	0.005	-0.003	-0.004	6.894	1853.9	1354.5	298.2	6715.0	26.86
16	1.00	20.0	290.0	1.609	0.005	-0.003	-0.004		1854.1	1354.7	834.5	7252.2	26.86
17	0.00	0.0	290.0	1.609	0.005	-0.003	-0.004	6.542	1971.9	1448.0	412.5	7252.2	26.86
17	1.00	20.0	310.0	1.702	0.004	-0.003	-0.004		1972.1	1448.2	948.8	7789.4	26.86
18	0.00	0.0	310.0	1.702	0.004	-0.003	-0.004	6.088	2081.7	1536.2	553.5	7789.4	26.86
18	1.00	20.0	330.0	1.786	0.004	-0.003	-0.003		2082.0	1536.4	1089.9	8326.6	26.86
19	0.00	0.0	330.0	1.786	0.004	-0.003	-0.003	5.505	2181.1	1617.2	730.1	8326.6	26.86
19	1.00	20.0	350.0	1.860	0.003	-0.002	-0.003		2181.3	1617.4	1266.6	8863.8	26.86
20	0.00	0.0	350.0	1.860	0.003	-0.002	-0.003	4.756	2266.9	1688.3	953.5	8863.8	26.86
20	1.00	20.0	370.0	1.920	0.003	-0.002	-0.002		2267.0	1688.4	1490.0	9401.0	26.86
21	0.00	0.0	370.0	1.920	0.003	-0.002	-0.002	3.794	2335.3	1746.0	1238.4	9401.0	26.86
21	1.00	20.0	390.0	1.965	0.002	-0.001	-0.002		2335.5	1746.1	1775.2	9938.2	26.86
22	0.00	0.0	390.0	1.965	0.002	-0.001	-0.002	2.556	2381.5	1785.5	1604.3	9938.2	26.86
22	1.00	20.0	410.0	1.989	0.001	-0.001	-0.001		2381.5	1785.6	2141.2	10475.4	26.86
23	0.00	0.0	410.0	1.989	0.001	-0.001	-0.001	0.962	2398.9	1800.6	2076.4	10475.4	26.86
23	1.00	10.0	420.0	1.992	0.000	0.000	0.000		2398.9	1800.7	2344.9	10744.0	26.86
kleinster Wert				-0.116	0.000	-0.003	-0.005	0.000	0.0	0.0	-541.0	0.0	0.00
größter Wert				1.992	0.006	0.000	0.000	7.709	2398.9	1800.7	2344.9	10744.0	26.86

Tab. A7-6. Tabellarische Darstellung der Berechnungsergebnisse mit dem Programmsystem COMIX für den fünfteiligen Einfeldträger mit gleichabständiger Verteilung der Verbindungsmittel
System Bild 7.1-3, Punktlast in Feldmitte, diskreter Verbund, mit Überstand

ZUSAMMENGESETZTER, FÜNFTTEILIGER VERBUNDTRÄGER NH II 5 x 14/18, 41 STABDUEBEL ø 24 mm, e' = 20 cm, LAST 0.1343 kN/cm'														
Elem	Ordinate	rel. Pos.	abs. Pos.	w	w'	u/e 1	u/e 2	N d	Ne 2	Ne 1	Σ Mi	M	V	
1	0.00	0.0	0.0	-0.175	0.009	-0.004	-0.006	0.000	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
1	1.00	10.0	10.0	-0.088	0.009	-0.004	-0.006		0.2	0.1	-0.7	0.0	0.0	0.0
2	0.00	0.0	10.0	-0.088	0.009	-0.004	-0.006	10.471	188.7	134.0	-645.3	0.0	0.0	0.0
2	1.00	10.0	20.0	0.000	0.009	-0.005	-0.006		188.9	134.1	-646.0	0.0	0.0	0.0
3	0.00	0.0	20.0	0.000	0.009	-0.005	-0.006		188.9	134.1	-646.0	0.0	53.7	
3	1.00	10.0	30.0	0.090	0.009	-0.005	-0.007		189.1	134.3	-116.2	530.5	52.4	
4	0.00	0.0	30.0	0.090	0.009	-0.005	-0.007	10.996	387.0	277.7	-799.0	530.5	52.4	
4	1.00	20.0	50.0	0.272	0.009	-0.005	-0.007		387.5	278.0	220.1	1551.2	49.7	
5	0.00	0.0	50.0	0.272	0.009	-0.005	-0.007	11.321	591.2	427.8	-486.9	1551.2	49.7	
5	1.00	20.0	70.0	0.456	0.009	-0.005	-0.007		591.7	428.1	478.5	2518.1	47.0	
6	0.00	0.0	70.0	0.456	0.009	-0.005	-0.007	11.387	796.7	579.8	-234.8	2518.1	47.0	
6	1.00	20.0	90.0	0.639	0.009	-0.005	-0.007		797.1	580.1	676.9	3431.4	44.3	
7	0.00	0.0	90.0	0.639	0.009	-0.005	-0.007	11.255	999.7	730.5	-29.0	3431.4	44.3	
7	1.00	20.0	110.0	0.818	0.009	-0.005	-0.007		1000.1	730.8	829.0	4290.9	41.6	
8	0.00	0.0	110.0	0.818	0.009	-0.005	-0.007	10.968	1197.5	877.4	141.0	4290.9	41.6	
8	1.00	20.0	130.0	0.991	0.008	-0.005	-0.006		1198.0	877.7	945.3	5096.7	38.9	
9	0.00	0.0	130.0	0.991	0.008	-0.005	-0.006	10.561	1388.1	1018.8	283.0	5096.7	38.9	
9	1.00	20.0	150.0	1.158	0.008	-0.004	-0.006		1388.5	1019.1	1033.7	5848.8	36.3	
10	0.00	0.0	150.0	1.158	0.008	-0.004	-0.006	10.062	1569.6	1153.2	403.2	5848.8	36.3	
10	1.00	20.0	170.0	1.315	0.008	-0.004	-0.006		1570.0	1153.5	1100.3	6547.1	33.6	
11	0.00	0.0	170.0	1.315	0.008	-0.004	-0.006	9.490	1740.8	1279.7	506.2	6547.1	33.6	
11	1.00	20.0	190.0	1.464	0.007	-0.004	-0.005		1741.1	1279.9	1149.6	7191.8	30.9	
12	0.00	0.0	190.0	1.464	0.007	-0.004	-0.005	8.862	1900.6	1397.4	595.6	7191.8	30.9	
12	1.00	20.0	210.0	1.602	0.007	-0.004	-0.005		1901.0	1397.7	1185.4	7782.7	28.2	
13	0.00	0.0	210.0	1.602	0.007	-0.004	-0.005	8.189	2048.4	1506.0	674.0	7782.7	28.2	
13	1.00	20.0	230.0	1.729	0.006	-0.003	-0.004		2048.7	1506.2	1210.1	8319.9	25.5	
14	0.00	0.0	230.0	1.729	0.006	-0.003	-0.004	7.482	2183.4	1604.8	743.4	8319.9	25.5	
14	1.00	20.0	250.0	1.845	0.005	-0.003	-0.004		2183.7	1605.0	1225.9	8803.4	22.8	
15	0.00	0.0	250.0	1.845	0.005	-0.003	-0.004	6.748	2305.1	1693.8	805.5	8803.4	22.8	
15	1.00	20.0	270.0	1.949	0.005	-0.003	-0.004		2305.4	1694.0	1234.4	9233.1	20.1	
16	0.00	0.0	270.0	1.949	0.005	-0.003	-0.004	5.993	2413.3	1772.6	861.5	9233.1	20.1	
16	1.00	20.0	290.0	2.041	0.004	-0.002	-0.003		2413.5	1772.7	1236.7	9609.2	17.5	
17	0.00	0.0	290.0	2.041	0.004	-0.002	-0.003	5.221	2507.5	1841.1	912.1	9609.2	17.5	
17	1.00	20.0	310.0	2.120	0.004	-0.002	-0.003		2507.6	1841.2	1233.8	9931.5	14.8	
18	0.00	0.0	310.0	2.120	0.004	-0.002	-0.003	4.436	2587.5	1899.2	958.2	9931.5	14.8	
18	1.00	20.0	330.0	2.187	0.003	-0.002	-0.002		2587.7	1899.3	1226.2	10200.1	12.1	
19	0.00	0.0	330.0	2.187	0.003	-0.002	-0.002	3.642	2653.2	1946.8	1000.2	10200.1	12.1	
19	1.00	20.0	350.0	2.240	0.002	-0.001	-0.002		2653.3	1946.8	1214.6	10415.0	9.4	
20	0.00	0.0	350.0	2.240	0.002	-0.001	-0.002	2.840	2704.4	1983.8	1038.4	10415.0	9.4	
20	1.00	20.0	370.0	2.280	0.002	-0.001	-0.001		2704.5	1983.9	1199.3	10576.1	6.7	
21	0.00	0.0	370.0	2.280	0.002	-0.001	-0.001	2.032	2741.1	2010.3	1073.2	10576.1	6.7	
21	1.00	20.0	390.0	2.307	0.001	-0.001	-0.001		2741.2	2010.4	1180.5	10683.6	4.0	
22	0.00	0.0	390.0	2.307	0.001	-0.001	-0.001	1.221	2763.1	2026.2	1104.8	10683.6	4.0	
22	1.00	20.0	410.0	2.320	0.000	0.000	0.000		2763.2	2026.3	1158.4	10737.3	1.3	
23	0.00	0.0	410.0	2.320	0.000	0.000	0.000	0.407	2770.5	2031.6	1133.2	10737.3	1.3	
23	1.00	10.0	420.0	2.322	0.000	0.000	0.000		2770.5	2031.6	1139.9	10744.0	0.0	
kleinster Wert				-0.175	0.000	-0.005	-0.007	0.000	0.0	0.0	-799.0	0.0	0.00	
größter Wert				2.322	0.009	0.000	0.000	11.387	2770.5	2031.6	1236.7	10744.0	53.72	

Tab. A7-7. Tabellarische Darstellung der Berechnungsergebnisse mit dem Programmsystem COMIX für den fünfteiligen Einfeldträger mit linear vom freien Rand abfallender Dichte der Verbindungsmittel System Bild 7.1-3, Gleichstreckenlast, diskreter Verbund, mit Überstand

ZUSAMMENGESETZTER, FÜNFTEILIGER VERBUNDTRÄGER NH II 5 x 14/18, 41 STABDUEBEL ø 24 mm, e' = 20 cm, LAST P = 26.82 kN													
Elem	Ordinate	rel. Pos.	abs. Pos.	w	w'	u/e 1	u/e 2	N d	Ne 2	Ne 1	Σ Mi	M	V
1	0.00	0.0	0.0	-0.092	0.005	-0.002	-0.003	0.000	0.0	0.0	0.0	0.0	0.00
1	1.00	10.0	10.0	-0.046	0.005	-0.002	-0.003		0.1	0.1	-0.3	0.0	0.00
2	0.00	0.0	10.0	-0.046	0.005	-0.002	-0.003	4.271	77.0	47.4	-248.8	0.0	0.00
2	1.00	10.0	20.0	0.000	0.005	-0.002	-0.003		77.1	47.5	-249.1	0.0	0.00
3	0.00	0.0	20.0	0.000	0.005	-0.002	-0.003	0.000	77.1	47.5	-249.1	0.0	26.86
3	1.00	5.0	25.0	0.023	0.005	-0.002	-0.003		77.1	47.5	-115.0	134.3	26.86
4	0.00	0.0	25.0	0.023	0.005	-0.002	-0.003	4.447	157.1	98.0	-376.1	134.3	26.86
4	1.00	10.0	35.0	0.071	0.005	-0.002	-0.003		157.2	98.1	-107.7	402.9	26.86
5	0.00	0.0	35.0	0.071	0.005	-0.002	-0.003	4.578	239.6	150.9	-378.1	402.9	26.86
5	1.00	11.0	46.0	0.124	0.005	-0.002	-0.003		239.7	150.9	-83.0	698.4	26.86
6	0.00	0.0	46.0	0.124	0.005	-0.002	-0.003	4.722	324.7	206.2	-363.5	698.4	26.86
6	1.00	11.0	57.0	0.178	0.005	-0.002	-0.003		324.8	206.3	-68.4	993.8	26.86
7	0.00	0.0	57.0	0.178	0.005	-0.002	-0.003	4.866	412.4	264.0	-359.0	993.8	26.86
7	1.00	11.0	68.0	0.232	0.005	-0.002	-0.003		412.5	264.1	-63.9	1289.3	26.86
8	0.00	0.0	68.0	0.232	0.005	-0.002	-0.003	5.013	502.8	324.3	-364.9	1289.3	26.86
8	1.00	12.0	80.0	0.293	0.005	-0.002	-0.003		502.9	324.4	-43.0	1611.6	26.86
9	0.00	0.0	80.0	0.293	0.005	-0.002	-0.003	5.177	596.1	387.4	-355.4	1611.6	26.86
9	1.00	12.0	92.0	0.354	0.005	-0.002	-0.003		596.2	387.5	-33.5	1933.9	26.86
10	0.00	0.0	92.0	0.354	0.005	-0.002	-0.003	5.343	692.4	453.4	-357.7	1933.9	26.86
10	1.00	12.0	104.0	0.416	0.005	-0.002	-0.003		692.5	453.5	-35.8	2256.2	26.86
11	0.00	0.0	104.0	0.416	0.005	-0.002	-0.003	5.517	791.8	522.4	-372.3	2256.2	26.86
11	1.00	13.0	117.0	0.484	0.005	-0.002	-0.003		792.0	522.5	-23.6	2605.4	26.86
12	0.00	0.0	117.0	0.484	0.005	-0.002	-0.003	5.715	894.8	595.0	-374.2	2605.4	26.86
12	1.00	13.0	130.0	0.554	0.005	-0.003	-0.004		895.0	595.1	-25.5	2954.6	26.86
13	0.00	0.0	130.0	0.554	0.005	-0.003	-0.004	5.922	1001.6	671.2	-390.9	2954.6	26.86
13	1.00	14.0	144.0	0.629	0.005	-0.003	-0.004		1001.7	671.3	-15.4	3330.6	26.86
14	0.00	0.0	144.0	0.629	0.005	-0.003	-0.004	6.156	1112.6	751.7	-397.9	3330.6	26.86
14	1.00	15.0	159.0	0.712	0.006	-0.003	-0.004		1112.7	751.8	4.4	3733.5	26.86
15	0.00	0.0	159.0	0.712	0.006	-0.003	-0.004	6.412	1228.1	837.0	-396.7	3733.5	26.86
15	1.00	16.0	175.0	0.801	0.006	-0.003	-0.004		1228.4	837.1	32.3	4163.3	26.86
16	0.00	0.0	175.0	0.801	0.006	-0.003	-0.004	6.683	1348.6	927.5	-389.0	4163.3	26.86
16	1.00	17.0	192.0	0.897	0.006	-0.003	-0.004		1348.9	927.7	66.9	4619.9	26.86
17	0.00	0.0	192.0	0.897	0.006	-0.003	-0.004	6.963	1474.2	1023.6	-375.7	4619.9	26.86
17	1.00	18.0	210.0	1.001	0.006	-0.003	-0.004		1474.5	1023.8	106.9	5103.4	26.86
18	0.00	0.0	210.0	1.001	0.006	-0.003	-0.004	7.248	1604.9	1125.7	-357.8	5103.4	26.86
18	1.00	20.0	230.0	1.117	0.006	-0.004	-0.005		1605.2	1125.9	178.4	5640.6	26.86
19	0.00	0.0	230.0	1.117	0.006	-0.004	-0.005	7.532	1740.8	1234.1	-309.2	5640.6	26.86
19	1.00	23.0	253.0	1.252	0.006	-0.004	-0.005		1741.1	1234.4	307.3	6258.4	26.86
20	0.00	0.0	253.0	1.252	0.006	-0.004	-0.005	7.771	1881.0	1348.8	-201.2	6258.4	26.86
20	1.00	26.0	279.0	1.402	0.006	-0.004	-0.005		1881.4	1349.1	495.7	6956.7	26.86
21	0.00	0.0	279.0	1.402	0.006	-0.004	-0.005	7.866	2023.0	1467.9	-25.1	6956.7	26.86
21	1.00	33.0	312.0	1.586	0.005	-0.004	-0.005		2023.5	1468.4	859.4	7843.1	26.86
22	0.00	0.0	312.0	1.586	0.005	-0.004	-0.005	7.565	2159.7	1586.1	351.5	7843.1	26.86
22	1.00	63.0	375.0	1.867	0.003	-0.002	-0.003		2160.5	1586.8	2040.7	9535.3	26.86
23	0.00	0.0	375.0	1.867	0.003	-0.002	-0.003	4.607	2243.4	1661.5	1725.5	9535.3	26.86
23	1.00	45.0	420.0	1.942	0.006	0.000	0.000		2243.6	1661.7	2933.3	10744.0	26.86
kleinster Wert				-0.092	0.000	-0.004	-0.005	0.000	0.0	0.0	-397.9	0.0	0.00
größter Wert				1.942	0.006	0.000	0.000	7.866	2243.6	1661.7	2933.3	10744.0	26.86

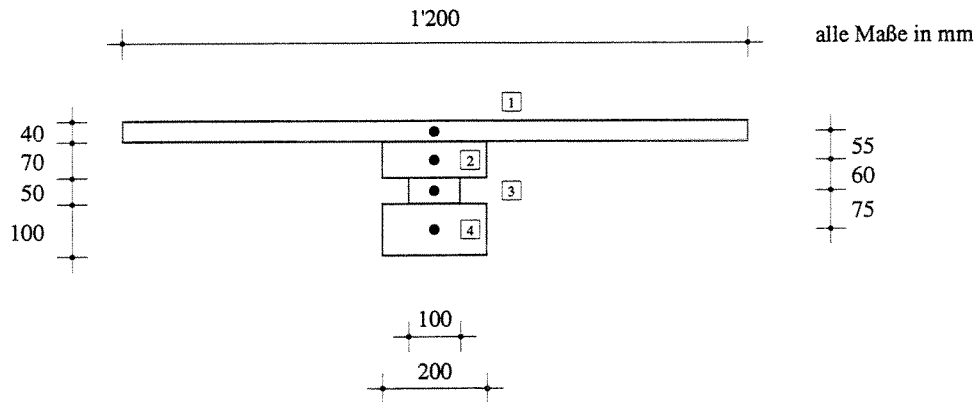
Tab. A7-8. Tabellarische Darstellung der Berechnungsergebnisse mit dem Programmsystem COMIX für den fünfteiligen Einfeldträger mit linear vom freien Rand abfallender Dichte der Verbindungsmittel System Bild 7.1-3, Punktlast in Feldmitte, diskreter Verbund, mit Überstand

ZUSAMMENSETZTER, FÜNFTEILIGER VERBUNDTRÄGER NH II 5 x 14/18, 41 STABDUEBEL \varnothing 24 mm, $e' = 20$ cm, LAST P = 26.82 kN													
Elem	Ordinate	rel. Pos.	abs. Pos.	w	w'	u/e 1	u/e 2	N d	Ne 2	Ne 1	Σ Mi	M	V
1	0.00	0.0	0.0	-0.037	0.002	-0.001	-0.001	0.000	0.0	0.0	0.0	0.0	0.00
1	1.00	10.0	10.0	-0.019	0.002	-0.001	-0.001		0.0	0.0	-0.2	0.0	0.00
2	0.00	0.0	10.0	-0.019	0.002	-0.001	-0.001	2.314	41.7	32.0	-147.4	0.0	0.00
2	1.00	10.0	20.0	0.000	0.002	-0.001	-0.001		41.7	32.0	-147.5	0.0	0.00
3	0.00	0.0	20.0	0.000	0.002	-0.001	-0.001	0.000	41.7	32.0	-147.5	0.0	24.69
3	1.00	5.0	25.0	0.009	0.002	-0.001	-0.001		41.8	32.0	-25.8	121.8	24.02
4	0.00	0.0	25.0	0.009	0.002	-0.001	-0.001	2.411	85.2	65.8	-180.2	121.8	24.02
4	1.00	10.0	35.0	0.029	0.002	-0.001	-0.001		85.2	65.9	53.2	355.3	22.68
5	0.00	0.0	35.0	0.029	0.002	-0.001	-0.001	2.445	129.2	100.3	-103.8	355.3	22.68
5	1.00	11.0	46.0	0.050	0.002	-0.001	-0.001		129.3	100.4	137.3	596.6	21.20
6	0.00	0.0	46.0	0.050	0.002	-0.001	-0.001	2.442	173.2	135.0	-19.8	596.6	21.20
6	1.00	11.0	57.0	0.071	0.002	-0.001	-0.001		173.3	135.0	205.1	821.7	19.72
7	0.00	0.0	57.0	0.071	0.002	-0.001	-0.001	2.400	216.5	169.1	50.5	821.7	19.72
7	1.00	11.0	68.0	0.091	0.002	-0.001	-0.001		216.5	169.1	259.2	1030.5	18.25
8	0.00	0.0	68.0	0.091	0.002	-0.001	-0.001	2.326	258.4	202.2	109.3	1030.5	18.25
8	1.00	12.0	80.0	0.113	0.002	-0.001	-0.001		258.5	202.2	318.4	1239.8	16.63
9	0.00	0.0	80.0	0.113	0.002	-0.001	-0.001	2.213	298.3	233.7	175.9	1239.8	16.63
9	1.00	12.0	92.0	0.133	0.002	-0.001	-0.001		298.3	233.7	365.7	1429.7	15.02
10	0.00	0.0	92.0	0.133	0.002	-0.001	-0.001	2.069	335.6	263.0	232.6	1429.7	15.02
10	1.00	12.0	104.0	0.153	0.002	-0.001	-0.001		335.6	263.0	403.1	1600.3	13.41
11	0.00	0.0	104.0	0.153	0.002	-0.001	-0.001	1.898	369.8	289.7	281.3	1600.3	13.41
11	1.00	13.0	117.0	0.172	0.001	-0.001	-0.001		369.8	289.8	444.1	1763.3	11.67
12	0.00	0.0	117.0	0.172	0.001	-0.001	-0.001	1.687	400.2	313.3	336.3	1763.3	11.67
12	1.00	13.0	130.0	0.189	0.001	-0.001	-0.001		400.2	313.4	476.4	1903.6	9.92
13	0.00	0.0	130.0	0.189	0.001	-0.001	-0.001	1.450	426.3	333.3	384.3	1903.6	9.92
13	1.00	14.0	144.0	0.206	0.001	-0.001	-0.001		426.4	333.3	509.9	2029.4	8.04
14	0.00	0.0	144.0	0.206	0.001	-0.001	-0.001	1.168	447.4	349.0	436.6	2029.4	8.04
14	1.00	15.0	159.0	0.220	0.001	0.000	-0.001		447.4	349.0	542.0	2134.8	6.02
15	0.00	0.0	159.0	0.220	0.001	0.000	-0.001	0.836	462.5	359.5	490.9	2134.8	6.02
15	1.00	16.0	175.0	0.232	0.001	0.000	0.000		462.5	359.5	570.1	2214.0	3.88
16	0.00	0.0	175.0	0.232	0.001	0.000	0.000	0.451	470.6	364.0	544.9	2214.0	3.88
16	1.00	17.0	192.0	0.240	0.000	0.000	0.000		470.6	364.0	591.3	2260.5	1.59
17	0.00	0.0	192.0	0.240	0.000	0.000	0.000	0.011	470.8	361.5	595.9	2260.5	1.59
17	1.00	18.0	210.0	0.242	0.000	0.000	0.000		470.8	361.5	602.9	2267.4	-0.82
18	0.00	0.0	210.0	0.242	0.000	0.000	0.000	-0.481	462.2	351.0	641.0	2267.4	-0.82
18	1.00	20.0	230.0	0.239	0.000	0.001	0.001		462.1	351.0	597.8	2224.1	-3.51
19	0.00	0.0	230.0	0.239	0.000	0.001	0.001	-1.048	443.3	331.3	674.8	2224.1	-3.51
19	1.00	23.0	253.0	0.225	-0.001	0.001	0.001		443.2	331.3	558.8	2107.8	-6.60
20	0.00	0.0	253.0	0.225	-0.001	0.001	0.001	-1.698	412.7	300.8	680.9	2107.8	-6.60
20	1.00	26.0	279.0	0.198	-0.001	0.001	0.001		412.5	300.7	464.3	1890.8	-10.09
21	0.00	0.0	279.0	0.198	-0.001	0.001	0.001	-2.378	369.7	258.7	633.9	1890.8	-10.09
21	1.00	33.0	312.0	0.149	-0.002	0.002	0.002		369.6	258.6	228.4	1484.7	-14.52
22	0.00	0.0	312.0	0.149	-0.002	0.002	0.002	-3.021	315.2	205.5	443.4	1484.7	-14.52
22	1.00	63.0	375.0	0.039	-0.001	0.002	0.002		314.8	205.1	-736.6	303.2	-22.98
23	0.00	0.0	375.0	0.039	-0.001	0.002	0.002	-2.564	268.6	159.9	-553.9	303.2	-22.98
23	1.00	45.0	420.0	0.000	0.000	0.000	0.000		268.5	159.8	-1723.6	-867.1	-29.03
kleinster Wert				-0.037	-0.002	-0.001	-0.001	-3.021	0.0	0.0	-1723.6	-867.1	-29.03
größter Wert				0.242	0.002	0.002	0.002	2.445	470.8	364.0	680.9	2267.4	24.69

Tab. A7-9. Tabellarische Darstellung der Berechnungsergebnisse mit dem Programmsystem COMIX für den fünfteiligen Zweifeldträger mit linear vom freien Rand abfallender Dichte der Verbindungsmittel System Bild 7.1-4, Gleichstreckenlast, diskreter Verbund, mit Überstand

ZUSAMMENGESETZTER, FÜNFTTEILIGER VERBUNDTRÄGER NH II 5 x 14/18, 41 STABDUEBEL ϕ 24 mm, $e' = 20$ cm, LAST P = 26.82 kN													
Elem	Ordinate	rel. Pos.	abs. Pos.	w	w'	u/e 1	u/e 2	N d	N e 2	N e 1	Σ Mi	M	V
1	0.00	0.0	0.0	-0.039	0.002	-0.001	-0.002	0.000	0.0	0.0	0.0	0.0	0.00
1	1.00	10.0	10.0	-0.020	0.002	-0.001	-0.002		0.1	0.0	-0.2	0.0	0.00
2	0.00	0.0	10.0	-0.020	0.002	-0.001	-0.002	2.749	49.5	38.9	-176.9	0.0	0.00
2	1.00	10.0	20.0	0.000	0.002	-0.001	-0.002		49.6	39.0	-177.1	0.0	0.00
3	0.00	0.0	20.0	0.000	0.002	-0.001	-0.002	0.000	49.6	39.0	-177.1	0.0	24.17
3	1.00	10.0	30.0	0.020	0.002	-0.001	-0.002		49.7	39.0	57.7	235.0	22.83
4	0.00	0.0	30.0	0.020	0.002	-0.001	-0.002	2.869	101.3	80.2	-128.0	235.0	22.83
4	1.00	5.0	35.0	0.030	0.002	-0.001	-0.002		101.3	80.2	-15.6	347.5	22.16
5	0.00	0.0	35.0	0.030	0.002	-0.001	-0.002	2.889	153.3	121.8	-202.8	347.5	22.16
5	1.00	15.0	50.0	0.061	0.002	-0.001	-0.002		153.4	121.9	114.2	664.8	20.15
6	0.00	0.0	50.0	0.061	0.002	-0.001	-0.002	2.930	206.2	164.5	-76.6	664.8	20.15
6	1.00	15.0	65.0	0.092	0.002	-0.001	-0.002		206.2	164.6	210.2	951.9	18.13
7	0.00	0.0	65.0	0.092	0.002	-0.001	-0.002	2.891	258.3	207.0	21.2	951.9	18.13
7	1.00	15.0	80.0	0.122	0.002	-0.001	-0.002		258.4	207.1	277.8	1208.7	16.12
8	0.00	0.0	80.0	0.122	0.002	-0.001	-0.002	2.795	308.7	248.4	94.6	1208.7	16.12
8	1.00	15.0	95.0	0.151	0.002	-0.001	-0.002		308.8	248.4	321.0	1435.3	14.10
9	0.00	0.0	95.0	0.151	0.002	-0.001	-0.002	2.659	356.6	287.9	146.2	1435.3	14.10
9	1.00	15.0	110.0	0.178	0.002	-0.001	-0.002		356.7	288.0	342.4	1631.7	12.09
10	0.00	0.0	110.0	0.178	0.002	-0.001	-0.002	2.498	401.7	325.4	177.5	1631.7	12.09
10	1.00	160.0	270.0	0.258	-0.001	0.001	0.001		401.8	325.6	391.8	1846.6	-9.40
11	0.00	0.0	270.0	0.258	-0.001	0.001	0.001	-1.733	370.6	297.1	511.2	1846.6	-9.40
11	1.00	15.0	285.0	0.243	-0.001	0.001	0.001		370.6	297.0	355.3	1690.5	-11.42
12	0.00	0.0	285.0	0.243	-0.001	0.001	0.001	-2.031	334.0	263.9	494.5	1690.5	-11.42
12	1.00	15.0	300.0	0.225	-0.001	0.001	0.001		334.0	263.9	308.4	1504.2	-13.43
13	0.00	0.0	300.0	0.225	-0.001	0.001	0.001	-2.307	292.5	226.6	466.1	1504.2	-13.43
13	1.00	15.0	315.0	0.204	-0.001	0.001	0.002		292.4	226.5	249.8	1287.6	-15.44
14	0.00	0.0	315.0	0.204	-0.001	0.001	0.002	-2.552	246.5	185.3	424.2	1287.6	-15.44
14	1.00	15.0	330.0	0.181	-0.002	0.001	0.002		246.4	185.2	177.7	1040.8	-17.46
15	0.00	0.0	330.0	0.181	-0.002	0.001	0.002	-2.756	196.8	140.6	366.0	1040.8	-17.46
15	1.00	15.0	345.0	0.156	-0.002	0.002	0.002		196.7	140.6	89.3	763.8	-19.47
16	0.00	0.0	345.0	0.156	-0.002	0.002	0.002	-2.908	144.3	93.4	288.3	763.8	-19.47
16	1.00	15.0	360.0	0.130	-0.002	0.002	0.002		144.2	93.3	-18.6	456.6	-21.49
17	0.00	0.0	360.0	0.130	-0.002	0.002	0.002	-2.994	90.4	44.6	186.7	456.6	-21.49
17	1.00	15.0	375.0	0.104	-0.002	0.002	0.002		90.3	44.5	-150.4	119.2	-23.50
18	0.00	0.0	375.0	0.104	-0.002	0.002	0.002	-2.995	36.4	-4.5	55.4	119.2	-23.50
18	1.00	15.0	390.0	0.078	-0.002	0.002	0.002		36.3	-4.5	-311.9	-248.5	-25.52
19	0.00	0.0	390.0	0.078	-0.002	0.002	0.002	-2.890	-15.8	-52.1	-112.7	-248.5	-25.52
19	1.00	15.0	405.0	0.053	-0.002	0.001	0.002		-15.8	-52.2	-510.2	-646.3	-27.53
20	0.00	0.0	405.0	0.053	-0.002	0.001	0.002	-2.652	-63.6	-96.2	-326.8	-646.3	-27.53
20	1.00	15.0	420.0	0.031	-0.001	0.001	0.001		-63.6	-96.3	-739.5	-1059.3	-27.53
21	0.00	0.0	420.0	0.031	-0.001	0.001	0.001	-2.249	-104.1	-133.9	-583.3	-1059.3	-27.53
21	1.00	40.0	460.0	0.000	0.000	0.000	0.000		-104.2	-134.0	-1684.1	-2160.6	-27.53
kleinster Wert				-0.039	-0.002	-0.001	-0.002	-2.995	-104.2	-134.0	-1684.1	-2160.6	-27.53
größter Wert				0.258	0.002	0.002	0.002	2.930	401.8	325.6	511.2	1846.6	24.17

Tab. A7-10. Tabellarische Darstellung der Berechnungsergebnisse mit dem Programmsystem COMIX für den fünfteiligen Zweifeldträger mit optimierter Verteilung der Verbindungsmittel
System Bild 7.1-4, Gleichstreckenlast, diskreter Verbund, mit Überstand



```

*****
* * * * *
ISEG IQUE IFUG ICOD IPRI ICON ISAN IBAS IEIG ITAT
* * * * *
* * * * *
4 4 3 1 5 0 0 2 0 0
* * * * *
*****
* * * * *
QUER PROF MATE Y-ORDINATE Z-ORDINATE PARAM_1 PARAM_2 PARAM_3 PARAM_4 ABS TEMP DIFF TEMP
* * * * *
* * * * *
1 1 1 0.00 0.00 4.00 75.00 0.00 0.00 1.00 0.00
2 1 2 0.00 -5.50 7.00 20.00 0.00 0.00 1.00 0.00
3 1 2 0.00 -11.50 5.00 10.00 0.00 0.00 1.00 0.00
4 1 2 0.00 -19.00 10.00 20.00 0.00 0.00 1.00 0.00
* * * * *
*****
* * * * *
FUGE QU_P QU_S ART STELFHEIT
* * * * *
* * * * *
1 1 2 2 5.00
2 2 3 2 66.67
3 3 4 2 53.33
* * * * *
*****
* * * * *
MATE D-MODUL E-MODUL G-MODUL TEMP-DEHN
* * * * *
* * * * *
1 1000.00 1000.00 50.00 1.00
2 800.00 800.00 40.00 1.00
* * * * *
*****
* * * * *
NORM ANFANG VORKRUEMM INKREMENT
* * * * *
* * * * *
1 0.00 1.00 1.00
* * * * *
*****

```

Tab. A8-2. Eingabedatei für das Programmsystem COMIX zur vollständigen Beschreibung des Verbundquerschnittes
Zahlenwerte und Bezeichnungen gemäß Bild 7.2-2

Elem	ξ	abs x	rel x	w	w'	-u1/e1	-u2/e2	-u3/e3	N3 e3	N2 e2	N1 e1	Mi	M	V
1	0.000	0	0	0.00	0.2444	-0.3125	-0.0335	-0.0323	0	0	0	0	0	266.5
1	0.030	17	17	4.06	0.2424	-0.3098	-0.0327	-0.0315	1599	1328	785	588	4300	249.8
1	0.060	33	33	8.06	0.2370	-0.3026	-0.0310	-0.0298	3131	2604	1557	1031	8323	233.2
1	0.090	50	50	11.94	0.2289	-0.2918	-0.0290	-0.0277	4566	3804	2307	1392	12068	216.5
1	0.130	67	67	15.67	0.2186	-0.2781	-0.0268	-0.0255	5894	4918	3025	1700	15336	199.9
1	0.160	83	83	19.21	0.2065	-0.2618	-0.0245	-0.0232	7111	5942	3706	1968	18727	183.2
1	0.190	100	100	22.54	0.1926	-0.2435	-0.0222	-0.0210	8216	6876	4342	2204	21640	166.6
1	0.220	117	117	25.62	0.1773	-0.2234	-0.0200	-0.0188	9212	7720	4931	2412	24275	149.9
1	0.250	133	133	28.44	0.1607	-0.2018	-0.0177	-0.0167	10099	8474	5467	2594	26633	133.3
1	0.280	150	150	30.97	0.1430	-0.1790	-0.0155	-0.0145	10878	9138	5947	2751	28714	116.6
1	0.310	167	167	33.20	0.1243	-0.1552	-0.0133	-0.0124	11551	9713	6368	2885	30517	99.9
1	0.340	183	183	35.11	0.1048	-0.1305	-0.0110	-0.0103	12119	10199	6728	2997	32043	83.3
1	0.380	200	200	36.68	0.0847	-0.1052	-0.0088	-0.0082	12583	10596	7025	3088	33292	66.6
1	0.410	217	217	37.92	0.0640	-0.0793	-0.0066	-0.0062	12943	10905	7257	3158	34263	50.0
1	0.440	233	233	38.81	0.0429	-0.0531	-0.0044	-0.0041	13200	11125	7424	3208	34956	33.3
1	0.470	250	250	39.35	0.0215	-0.0266	-0.0022	-0.0021	13353	11257	7524	3237	35372	16.7
1	0.500	267	267	39.53	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	13405	11302	7558	3247	35511	0.0
1	0.530	283	283	39.35	-0.0215	0.0266	0.0022	0.0021	13353	11257	7524	3237	35372	-16.7
1	0.560	300	300	38.81	-0.0429	0.0531	0.0044	0.0041	13200	11125	7424	3208	34956	-33.3
1	0.590	316	316	37.92	-0.0640	0.0793	0.0066	0.0062	12943	10905	7257	3158	34263	-50.0
1	0.630	333	333	36.68	-0.0847	0.1052	0.0088	0.0082	12583	10596	7025	3088	33292	-66.6
1	0.660	350	350	35.11	-0.1048	0.1305	0.0110	0.0103	12119	10199	6728	2997	32043	-83.3
1	0.690	366	366	33.20	-0.1243	0.1552	0.0133	0.0124	11551	9713	6368	2885	30517	-99.9
1	0.720	383	383	30.97	-0.1430	0.1790	0.0155	0.0145	10878	9138	5947	2751	28714	-116.6
1	0.750	400	400	28.44	-0.1607	0.2018	0.0177	0.0167	10099	8474	5467	2594	26633	-133.3
1	0.780	416	416	25.62	-0.1773	0.2234	0.0200	0.0188	9212	7720	4931	2412	24275	-149.9
1	0.810	433	433	22.54	-0.1926	0.2435	0.0222	0.0210	8216	6876	4342	2204	21640	-166.6
1	0.840	450	450	19.21	-0.2065	0.2618	0.0245	0.0232	7111	5942	3706	1968	18727	-183.2
1	0.880	466	466	15.67	-0.2186	0.2781	0.0268	0.0255	5894	4917	3025	1700	15336	-199.9
1	0.910	483	483	11.94	-0.2289	0.2918	0.0290	0.0277	4566	3803	2307	1392	12068	-216.5
1	0.940	500	500	8.06	-0.2370	0.2918	0.0310	0.0298	3130	2603	1557	1032	8323	-233.2
1	0.970	516	516	4.06	-0.2424	0.3098	0.0328	0.0314	1601	1330	785	584	4300	-249.8
1	1.000	533	533	0.00	-0.2445	0.3125	0.0334	0.0321	0	0	0	0	0	-266.5

Tab. A8-3. Tabellarische Darstellung der Berechnungsergebnisse mit dem Programmsystem COMIX für den Plattenbalken-Verbundträger unter Gleichstreckenlast
 Näherungsweise Berücksichtigung der Schubverformung des Vollholzquerschnittes

Elem	ξ	abs x	rel x	w	w'	-u1/e1	-u2/e2	-u3/e3	-u4/e4	-u5/e5	-u6/e6	-u7/e7	-u8/e8
1	0.000	0	0	0.00	0.2559	-0.0022	-0.0045	-0.0072	-0.0104	-0.0144	-0.2961	-0.0337	-0.0326
1	0.030	17	17	4.25	0.2537	-0.0022	-0.0045	-0.0072	-0.0104	-0.0144	-0.2935	-0.0329	-0.0318
1	0.060	33	33	8.43	0.2481	-0.0021	-0.0044	-0.0070	-0.0102	-0.0141	-0.2867	-0.0312	-0.0301
1	0.090	50	50	12.50	0.2398	-0.0021	-0.0043	-0.0069	-0.0099	-0.0137	-0.2764	-0.0291	-0.0280
1	0.130	67	67	16.41	0.2291	-0.0020	-0.0042	-0.0066	-0.0095	-0.0131	-0.2634	-0.0269	-0.0258
1	0.160	83	83	20.12	0.2165	-0.0019	-0.0040	-0.0063	-0.0091	-0.0124	-0.2480	-0.0246	-0.0235
1	0.190	100	100	23.61	0.2020	-0.0018	-0.0037	-0.0059	-0.0085	-0.0116	-0.2307	-0.0224	-0.0213
1	0.220	117	117	26.84	0.1861	-0.0017	-0.0035	-0.0055	-0.0079	-0.0107	-0.2117	-0.0201	-0.0191
1	0.250	133	133	29.80	0.1687	-0.0015	-0.0032	-0.0050	-0.0072	-0.0097	-0.1913	-0.0178	-0.0169
1	0.280	150	150	32.46	0.1501	-0.0014	-0.0028	-0.0045	-0.0064	-0.0087	-0.1697	-0.0156	-0.0147
1	0.310	167	167	34.80	0.1306	-0.0012	-0.0025	-0.0043	-0.0056	-0.0076	-0.1472	-0.0133	-0.0126
1	0.340	183	183	36.80	0.1101	-0.0010	-0.0021	-0.0033	-0.0047	-0.0064	-0.1238	-0.0111	-0.0105
1	0.380	200	200	38.46	0.0889	-0.0008	-0.0017	-0.0027	-0.0038	-0.0052	-0.0998	-0.0089	-0.0084
1	0.410	217	217	39.76	0.0672	-0.0006	-0.0013	-0.0020	-0.0029	-0.0039	-0.0753	-0.0067	-0.0063
1	0.440	233	233	40.70	0.0450	-0.0004	-0.0009	-0.0014	-0.0019	-0.0026	-0.0504	-0.0044	-0.0042
1	0.470	250	250	41.26	0.0226	-0.0002	-0.0004	-0.0007	-0.0010	-0.0013	-0.0253	-0.0022	-0.0021
1	0.500	267	267	41.45	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1	0.530	283	283	41.26	-0.0226	0.0002	0.0004	0.0007	0.0010	0.0013	0.0252	0.0022	0.0021
1	0.560	300	300	40.70	-0.0450	0.0004	0.0009	0.0014	0.0019	0.0026	0.0504	0.0044	0.0042
1	0.590	316	316	39.76	-0.0672	0.0006	0.0013	0.0020	0.0029	0.0039	0.0753	0.0067	0.0063
1	0.630	333	333	38.46	-0.0889	0.0008	0.0017	0.0027	0.0038	0.0052	0.0998	0.0089	0.0084
1	0.660	350	350	36.80	-0.1101	0.0010	0.0021	0.0033	0.0047	0.0064	0.1238	0.0111	0.0105
1	0.690	366	366	34.80	-0.1306	0.0012	0.0025	0.0039	0.0056	0.0076	0.1472	0.0133	0.0126
1	0.720	383	383	32.46	-0.1501	0.0014	0.0028	0.0045	0.0064	0.0087	0.1697	0.0156	0.0147
1	0.750	400	400	29.80	-0.1687	0.0015	0.0032	0.0050	0.0072	0.0097	0.1913	0.0178	0.0169
1	0.780	416	416	26.84	-0.1860	0.0017	0.0035	0.0055	0.0079	0.0107	0.2117	0.0201	0.0191
1	0.810	433	433	23.61	-0.2020	0.0018	0.0037	0.0059	0.0085	0.0116	0.2307	0.0224	0.0213
1	0.840	450	450	20.12	-0.2165	0.0019	0.0040	0.0063	0.0091	0.0124	0.2480	0.0246	0.0235
1	0.880	466	466	16.41	-0.2291	0.0020	0.0042	0.0066	0.0095	0.0131	0.2634	0.0269	0.0258
1	0.910	483	483	12.50	-0.2398	0.0021	0.0043	0.0069	0.0099	0.0137	0.2764	0.0291	0.0280
1	0.940	500	500	8.43	-0.2482	0.0021	0.0044	0.0070	0.0102	0.0141	0.2867	0.0312	0.0302
1	0.970	516	516	4.25	-0.2538	0.0022	0.0045	0.0072	0.0104	0.0144	0.2936	0.0330	0.0318
1	1.000	533	533	0.00	-0.2559	0.0022	0.0045	0.0072	0.0104	0.0144	0.2961	0.0338	0.0329

Tab. A8-4a. Tabellarische Darstellung der Berechnungsergebnisse mit dem Programmsystem COMIX für den Plattenbalken-Verbundträger unter Gleichstreckenlast
 Näherungsweise Berücksichtigung der Schubverformungen des Vollholzquerschnittes und des Gurtes

Elem	ξ	abs x	rel x	N8 e8	N7 e7	N6 e6	N5 e5	N4 e4	N3 e3	N2 e2	N1 e1	Mi	M	V
1	0,000	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	266,5
1	0,030	17	17	1616	1334	744	1440	692	478	301	145	-2450	4300	249,8
1	0,060	33	33	3166	2616	1475	2862	1376	952	599	289	-5012	8323	233,2
1	0,090	50	50	4619	3821	2185	4251	2046	1415	890	430	-7589	12068	216,5
1	0,130	67	67	5963	4940	2866	5591	2693	1865	1173	566	-10121	15536	199,9
1	0,160	83	83	7195	5970	3511	6869	3313	2295	1444	697	-12567	18727	183,2
1	0,190	100	100	8316	6909	4114	8073	3898	2701	1700	821	-14892	21640	166,6
1	0,220	117	117	9325	7758	4672	9191	4443	3081	1940	937	-17071	24275	149,9
1	0,250	133	133	10224	8516	5179	10215	4943	3430	2161	1044	-19078	26633	133,3
1	0,280	150	150	11014	9183	5634	11136	5394	3746	2360	1140	-20895	28714	116,6
1	0,310	167	167	11697	9761	6034	11948	5793	4025	2537	1226	-22503	30517	99,9
1	0,340	183	183	12273	10250	6375	12645	6135	4265	2689	1299	-23888	32043	83,3
1	0,380	200	200	12743	10649	6657	13221	6419	4464	2815	1360	-25037	33292	66,6
1	0,410	217	217	13108	10960	6878	13673	6642	4620	2914	1409	-25941	34263	50,0
1	0,440	233	233	13369	11181	7036	13998	6803	4733	2986	1443	-26592	34956	33,3
1	0,470	250	250	13525	11314	7131	14194	6899	4801	3029	1464	-26985	35372	16,7
1	0,500	267	267	13577	11359	7163	14259	6932	4824	3043	1471	-27116	35511	0,0
1	0,530	283	283	13525	11314	7131	14194	6899	4801	3029	1464	-26985	35372	-16,7
1	0,560	300	300	13369	11181	7036	13998	6803	4733	2986	1443	-26592	34956	-33,3
1	0,590	316	316	13108	10960	6878	13673	6642	4620	2914	1409	-25941	34263	-50,0
1	0,630	333	333	12743	10649	6657	13221	6419	4464	2815	1360	-25037	33292	-66,6
1	0,660	350	350	12273	10250	6375	12645	6135	4265	2689	1299	-23888	32043	-83,3
1	0,690	366	366	11697	9761	6034	11948	5793	4025	2537	1226	-22503	30517	-99,9
1	0,720	383	383	11014	9183	5635	11137	5394	3746	2360	1140	-20895	28714	-116,6
1	0,750	400	400	10224	8516	5180	10215	4943	3430	2161	1044	-19079	26633	-133,3
1	0,780	416	416	9325	7758	4672	9191	4443	3081	1940	937	-17071	24275	-149,9
1	0,810	433	433	8316	6909	4114	8073	3898	2701	1700	821	-14893	21640	-166,6
1	0,840	450	450	7195	5970	3511	6869	3313	2295	1444	697	-12567	18727	-183,2
1	0,880	466	466	5963	4940	2866	5591	2694	1865	1173	566	-10121	15536	-199,9
1	0,910	483	483	4619	3821	2185	4251	2046	1415	890	430	-7589	12068	-216,5
1	0,940	500	500	3166	2613	1475	2862	1376	952	599	289	-5009	8323	-233,2
1	0,970	516	516	1615	1328	744	1440	692	478	301	145	-2443	4300	-249,8
1	1,000	533	533	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-266,5

Tab. A8-4b. Tabellarische Darstellung der Berechnungsergebnisse mit dem Programmsystem COMIX für den Plattenbalken-Verbundträger unter Gleichstreckenlast
 Näherungsweise Berücksichtigung der Schubverformungen des Vollholzquerschnittes und des Gurtes

Elem	ξ	abs x	rel x	w	w'	-u1/e1	-u2/e2	-u3/e3	N3 e3	N2 e2	NI e1	Mi	M	V
1	0.000	0	0	0.00	0.2577	-0.3008	-0.0341	-0.0330	0	0	0	0	0	266.5
1	0.030	17	17	4.28	0.2556	-0.2981	-0.0333	-0.0322	1635	1350	755	559	4300	249.8
1	0.060	33	33	8.49	0.2499	-0.2910	-0.0315	-0.0304	3201	2646	1498	978	8323	233.2
1	0.090	50	50	12.59	0.2414	-0.2804	-0.0294	-0.0283	4667	3663	2219	1319	12068	216.5
1	0.130	67	67	16.52	0.2307	-0.2670	-0.0271	-0.0260	6023	4992	2909	1612	15536	199.9
1	0.160	83	83	20.26	0.2179	-0.2512	-0.0248	-0.0237	7265	6031	3562	1869	18727	183.2
1	0.190	100	100	23.77	0.2033	-0.2335	-0.0225	-0.0215	8393	6977	4173	2096	21640	166.6
1	0.220	117	117	27.03	0.1872	-0.2141	-0.0202	-0.0192	9410	7833	4737	2296	24275	149.9
1	0.250	133	133	30.00	0.1698	-0.1933	-0.0180	-0.0170	10315	8596	5250	2471	26633	133.3
1	0.280	150	150	32.67	0.1511	-0.1714	-0.0157	-0.0148	11111	9269	5710	2624	28714	116.6
1	0.310	167	167	35.03	0.1314	-0.1485	-0.0134	-0.0127	11799	9851	6113	2754	30517	99.9
1	0.340	183	183	37.05	0.1108	-0.1248	-0.0112	-0.0105	12379	10344	6457	2863	32043	83.3
1	0.380	200	200	38.72	0.0895	-0.1006	-0.0089	-0.0084	12853	10746	6742	2951	33292	66.6
1	0.410	217	217	40.03	0.0676	-0.0758	-0.0067	-0.0063	13221	11059	6964	3019	34263	50.0
1	0.440	233	233	40.97	0.0453	-0.0507	-0.0045	-0.0042	13483	11282	7123	3068	34956	33.3
1	0.470	250	250	41.53	0.0227	-0.0254	-0.0022	-0.0021	13640	11416	7219	3097	35372	16.7
1	0.500	267	267	41.72	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	13693	11461	7251	3106	35511	0.0
1	0.530	283	283	41.53	-0.0227	0.0254	0.0022	0.0021	13840	11416	7219	3097	35372	-16.7
1	0.560	300	300	40.97	-0.0453	0.0507	0.0045	0.0042	13483	11282	7123	3068	34956	-33.3
1	0.590	316	316	40.03	-0.0676	0.0758	0.0067	0.0063	13221	11059	6964	3019	34263	-50.0
1	0.630	333	333	38.72	-0.0895	0.1006	0.0089	0.0084	12853	10746	6742	2951	33292	-66.6
1	0.660	350	350	37.05	-0.1108	0.1248	0.0112	0.0105	12379	10344	6458	2863	32043	-83.3
1	0.690	366	366	35.03	-0.1314	0.1485	0.0134	0.0127	11799	9851	6113	2754	30517	-99.9
1	0.720	383	383	32.68	-0.1511	0.1714	0.0157	0.0148	11111	9269	5710	2624	28714	-116.6
1	0.750	400	400	30.00	-0.1698	0.1933	0.0180	0.0170	10315	8596	5250	2471	26633	-133.3
1	0.780	416	416	27.03	-0.1872	0.2141	0.0202	0.0192	9410	7832	4737	2296	24275	-149.9
1	0.810	433	433	23.77	-0.2033	0.2335	0.0225	0.0215	8393	6977	4173	2096	21640	-166.6
1	0.840	450	450	20.26	-0.2179	0.2512	0.0248	0.0237	7265	6031	3562	1869	18727	-183.2
1	0.880	466	466	16.52	-0.2306	0.2670	0.0271	0.0260	6022	4992	2909	1612	15536	-199.9
1	0.910	483	483	12.59	-0.2414	0.2804	0.0294	0.0283	4666	3663	2219	1320	12068	-216.5
1	0.940	500	500	8.49	-0.2499	0.2910	0.0315	0.0304	3200	2645	1498	979	8323	-233.2
1	0.970	516	516	4.28	-0.2556	0.2981	0.0333	0.0322	1630	1349	755	566	4300	-249.8
1	1.000	533	533	0.00	-0.2578	0.3008	0.0343	0.0331	0	0	0	0	0	-266.5

Tab. A8-5. Tabellarische Darstellung der Berechnungsergebnisse mit dem Programmsystem COMIX für den Plattenbalken-Verbundträger unter Gleichstreckenlast
 Näherungsweise Berücksichtigung der Schubverformungen des Vollholzquerschnittes und Abminderung der Breite des homogener Gurt auf $b = 75$ cm


```

VERBUNDTRAEGER MIT N-TEILIGEM QUERSCHNITT
*****

20 TEILQUERSCHNITTE DEFINIERT

4 TEILQUERSCHNITTE VERWENDET

3          FUGEN ANGEZEIGT

CODE =    0

QU  PROFIL  PARA_1  PARA_2  PARA_3  PARA_4
*****
1   1       4.00  120.00  .00     .00
2   1       7.00  20.00   .00     .00
3   1       5.00  10.00   .00     .00
4   1      10.00  20.00   .00     .00

QU  MATERIAL  EMODUL  GMODUL  KOOR_Y  KOOR_Z
*****
1   1       1000.00  50.00   .00     .00
2   2       800.00  40.00   .00    -5.50
3   2       800.00  40.00   .00   -11.50
4   2       800.00  40.00   .00   -19.00

QU  MATERIAL  TEMPER  W DEHN  DEHN K  DEHN L
*****
1   1       1.00   1.00   .00     .00
2   2       1.00   1.00   .00     .00
3   2       1.00   1.00   .00     .00
4   2       1.00   1.00   .00     .00

FU  QU_P  QU_S  STEIFHEIT  DIST_Y  DIST_Z
*****
1   1    2    5.00     .00     5.50
2   2    3   66.67    .00     6.00
3   3    4   53.33    .00     7.50

QU          BIEGESTEIFIGKEITEN          DEHNSTEIFIGKEITEN
*****
1          640000.00 kN/cm^2          480000.00 kN/cm^2
2          457333.33 kN/cm^2          112000.00 kN/cm^2
3           83333.33 kN/cm^2           40000.00 kN/cm^2
4         1333333.33 kN/cm^2          160000.00 kN/cm^2

          SUMME DER STEINER-MATRIX          SUMME DEHNSTEIFIGKEITEN
*****
          3567744000000.00 kN/cm^2          792000.00 kN/cm^2
    
```

Tab. A8-6a. Ergebnisprotokoll des Programmsystems COMIX mit allen charakteristischen und interessierenden Kennwerten des Verbundquerschnittes
Bezeichnungen gemäß Bild 7.2-3

```

SUMME BIEGESTEIFIGKEITEN                STEINER-ANTEIL
*****
      2514000.00 kN/cm^2                45047272.73 kN/cm^2

MAXIMALE BIEGESTEIFIGKEIT DES STARREN QUERSCHNITTES
*****
                                47561272.73 kN/cm^2

NEUTRALE FASER DES STARREN QUERSCHNITTES
*****
                                -5.20      cm

EFFEKTIVE BIEGESTEIFIGKEIT            REDUZ. STEINER-ANTEIL
*****
      26452354.91 kN/cm^2                23938354.91 kN/cm^2

VOLLSTAENDIGE MATRIX DES DGL-SYSTEMS
*****
-2514000.00000000 5.50000000000000 6.00000000000000 7.50000000000000
27.5000000000000 5.505952380952380E-005 -4.464285714285714E-005 .00000000000000
400.020000000000 -5.952678571428571E-004 2.262017857142860E-003 -1.666750000000000E-003
399.975000000000 .000000000000000 -1.333250000000000E-003 1.666562500000000E-003

REDUZIERTE MATRIX DES HOMOGENEN PROBLEMS
*****
1.152226105239231E-004 2.098960109103310E-005 8.204057279236280E-005
2.798753409478350E-004 3.216719527787250E-003 -4.733729116945110E-004
8.750447494033412E-004 -3.786557279236280E-004 2.859805340095470E-003

MASSGEBENDE ANZAHL EIGENWERTE DES DGL-SYSTEMS
*****
3

MASSGEBENDE ANZAHL EIGENWERTE DES PROBLEMS
*****
4

```

Tab. A8-6b. Ergebnisprotokoll des Programmsystems COMIX mit allen charakteristischen und interessierenden Kennwerten des Verbundquerschnittes
Bezeichnungen gemäß Bild 7.2-3

SUMME DER HAUPTDIAGONALENGLIEDER

6.191747478406640E-003

SUMME DER EIGENWERTE

6.191747478406640E-003

EIGENWERTE DES DGL-SYSTEMS

8.484926016577480E-005
2.607039515757810E-003
3.499858702483054E-003

MASSGEBENDE EIGENWERTE DES DGL-SYSTEMS

8.484926016577480E-005
2.607039515757810E-003
3.499858702483054E-003

KOPPLUNGS-KOEFFIZIENT DURCHBIEGUNG BEZOGEN AUF

NORMIERTE EIGENVEKTOREN DER REDUZierten MATRIX

5.47696 1.95482 .18321

NORMIERTE EIGENVEKTOREN DER REDUZierten MATRIX

FUGENVERSCHIEBUNGEN RELATIV

1.00000 .41930 -.11224
-.01049 .60664 1.00000
-.03135 1.00000 -.75397

KOPPLUNGS-KOEFFIZIENT DER DURCHBIEGUNG

1.00000 1.00000 1.00000 1.00000

AUF DURCHBIEGUNG NORMIERTE EIGENVEKTOREN

99.1074334192533 21.0048130310510 -51.7769204342951 -2494545.45454546
-13.8662643379780 405.209819694017 6151.20144362278 -2460606.06060606
-33.1443010295023 534.308260370699 -3709.83877617413 -2208484.84848485

Tab. A8-6c. Ergebnisprotokoll des Programmsystems COMIX mit allen charakteristischen und interessierenden Kennwerten des Verbundquerschnittes
Bezeichnungen gemäß Bild 7.2-3

STARRE FUGEN

KEINE

UNVERDUEBELTE FUGEN

KEINE

FUGEN MIT VORZEICHENUMKEHRUNGEN

KEINE

MASSGEBENDE FUGENVERSCHIEBUNGEN, WERTIGKEITEN UND ABMINDERUNGEN G

FUGENVERSCHIEBUNG U 1	.288469992774870	.402233756187852
FUGENVERSCHIEBUNG U 2	.310412979238265	.569923420416242
FUGENVERSCHIEBUNG U 3	.348258896657709	.604068177930911
	.947141868670844	.503316112762638

FUGENBEZOGENE STEINER-ANTEILE UND DEREN ABGE-MINDERTE WERTE

FUGE 1	-13720000.0000000	-5518647.13489734
FUGE 2	-14763636.3636364	-8414142.13414526
FUGE 3	-16563636.3636364	-10005565.6380920

ENTFALLENDE FUGENVERSCHIEBUNGEN

KEINE

SUBSTITUIERTE FUGENVERSCHIEBUNGEN

KEINE

SUBSTITUTIONS-MATRIX

	1	2	3
1	1.000000000000000	.000000000000000	.000000000000000
2	.000000000000000	1.000000000000000	.000000000000000
3	.000000000000000	.000000000000000	1.000000000000000

Tab. A8-6d. Ergebnisprotokoll des Programmsystems COMIX mit allen charakteristischen und interessierenden Kennwerten des Verbundquerschnittes
Bezeichnungen gemäß Bild 7.2-3

CHARAKTERISTISCHES POLYNOM

KOEFFIZIENT A 0 .000000000000000 .000000000000000
 KOEFFIZIENT A 1 -7.741875537023640E-010 -1.325802881764184E-010
 KOEFFIZIENT A 2 9.642435732667600E-006 2.725469094513140E-006
 KOEFFIZIENT A 3 -6.191747478406640E-003 -4.259653330634162E-003
 KOEFFIZIENT A 4 1.000000000000000 1.000000000000000

 POLYNOM-FUNKTION

KOEFF C 0 ANTEIL 1 .000000000000000
 KOEFF C 0 ANTEIL 2 .000000000000000
 KOEFF C 0 ANTEIL 3 .000000000000000

SUMME .000000000000000

KOEFF C 1 ANTEIL 1 -4.092210738699770E-011
 KOEFF C 1 ANTEIL 2 -7.332654463153660E-010
 KOEFF C 1 ANTEIL 3 -.000000000000000

SUMME -7.741875537023640E-010

KOEFF C 2 ANTEIL 1 1.737331003348213E-006
 KOEFF C 2 ANTEIL 2 7.905104729319383E-006
 KOEFF C 2 ANTEIL 3 .000000000000000

SUMME 9.642435732667600E-006

KOEFF C 3 ANTEIL 1 -3.983639880952380E-003
 KOEFF C 3 ANTEIL 2 -2.208107597454260E-003
 KOEFF C 3 ANTEIL 3 -.000000000000000

SUMME -6.191747478406640E-003

KOEFF C 4 ANTEIL 1 1.000000000000000
 KOEFF C 4 ANTEIL 2 .000000000000000
 KOEFF C 4 ANTEIL 3 .000000000000000

SUMME 1.000000000000000

ANZAHL DER EIGENWERTE DES PROBLEMS

4

MASSGEBENDE EIGENWERTE DES PROBLEMS

8.484926016577480E-005 + .000000000000000 *i
 2.607039515757810E-003 + .000000000000000 *i
 3.499858702483060E-003 + .000000000000000 *i
 .000000000000000 + .000000000000000 *i

Tab. A8-6e. Ergebnisprotokoll des Programmsystems COMIX mit allen charakteristischen und interessierenden Kennwerten des Verbundquerschnittes
 Bezeichnungen gemäß Bild 7.2-3

SUMME DER MASSGEBENDEN EIGENWERTE

6.191747478406640E-003

INVERSE MATRIX

KOEFFIZIENT 1 1 .0000000000000000
 KOEFFIZIENT 2 1 .0000000000000000
 KOEFFIZIENT 3 1 .0000000000000000
 KOEFFIZIENT 4 1 .0000000000000000
 KOEFFIZIENT 5 1 .0000000000000000
 KOEFFIZIENT 6 1 .0000000000000000
 KOEFFIZIENT 7 1 .0000000000000000
 KOEFFIZIENT 8 1 .0000000000000000
 KOEFFIZIENT 9 1 .0000000000000000
 KOEFFIZIENT 10 1 1.0000000000000000

KOEFFIZIENT 1 2 .0000000000000000
 KOEFFIZIENT 2 2 .0000000000000000
 KOEFFIZIENT 3 2 .0000000000000000
 KOEFFIZIENT 4 2 .0000000000000000
 KOEFFIZIENT 5 2 .0000000000000000
 KOEFFIZIENT 6 2 .0000000000000000
 KOEFFIZIENT 7 2 .0000000000000000
 KOEFFIZIENT 8 2 .0000000000000000
 KOEFFIZIENT 9 2 1.0000000000000000
 KOEFFIZIENT 10 2 .0000000000000000

KOEFFIZIENT 1 3 -29.7674544655795
 KOEFFIZIENT 2 3 .0000000000000000
 KOEFFIZIENT 3 3 -.286251864483027
 KOEFFIZIENT 4 3 .0000000000000000
 KOEFFIZIENT 5 3 5.826681570558900E-003
 KOEFFIZIENT 6 3 .0000000000000000
 KOEFFIZIENT 7 3 .0000000000000000
 KOEFFIZIENT 8 3 .0000000000000000
 KOEFFIZIENT 9 3 .288469992774870
 KOEFFIZIENT 10 3 .0000000000000000

KOEFFIZIENT 1 4 4.54342647677192
 KOEFFIZIENT 2 4 .0000000000000000
 KOEFFIZIENT 3 4 -6.02418119674534
 KOEFFIZIENT 4 4 .0000000000000000
 KOEFFIZIENT 5 4 -.755150612653918
 KOEFFIZIENT 6 4 .0000000000000000
 KOEFFIZIENT 7 4 .0000000000000000
 KOEFFIZIENT 8 4 .0000000000000000
 KOEFFIZIENT 9 4 .310412979238265
 KOEFFIZIENT 10 4 .0000000000000000

KOEFFIZIENT 1 5 13.5750959289640
 KOEFFIZIENT 2 5 .0000000000000000
 KOEFFIZIENT 3 5 -9.92933049420396
 KOEFFIZIENT 4 5 .0000000000000000
 KOEFFIZIENT 5 5 .569296715924423
 KOEFFIZIENT 6 5 .0000000000000000
 KOEFFIZIENT 7 5 .0000000000000000
 KOEFFIZIENT 8 5 .0000000000000000
 KOEFFIZIENT 9 5 .348258896657708
 KOEFFIZIENT 10 5 .0000000000000000

KOEFFIZIENT 1 6 .0000000000000000
 KOEFFIZIENT 2 6 -4.168433012615950E-005
 KOEFFIZIENT 3 6 .0000000000000000
 KOEFFIZIENT 4 6 1.690050425785630E-004
 KOEFFIZIENT 5 6 .0000000000000000
 KOEFFIZIENT 6 6 -1.122715771932943E-005
 KOEFFIZIENT 7 6 .0000000000000000
 KOEFFIZIENT 8 6 .0000000000000000
 KOEFFIZIENT 9 6 .0000000000000000
 KOEFFIZIENT 10 6 -1.160935547330740E-004

KOEFFIZIENT 1 7 .0000000000000000
 KOEFFIZIENT 2 7 -1.743711286441894E-005
 KOEFFIZIENT 3 7 .0000000000000000
 KOEFFIZIENT 4 7 1.281559803824790E-004
 KOEFFIZIENT 5 7 .0000000000000000
 KOEFFIZIENT 6 7 1.861340721748023E-005
 KOEFFIZIENT 7 7 .0000000000000000
 KOEFFIZIENT 8 7 .0000000000000000
 KOEFFIZIENT 9 7 .0000000000000000
 KOEFFIZIENT 10 7 -1.293322747355403E-004

KOEFFIZIENT 1 8 .0000000000000000
 KOEFFIZIENT 2 8 1.812885371533601E-003
 KOEFFIZIENT 3 8 .0000000000000000
 KOEFFIZIENT 4 8 9.663328596790890E-005
 KOEFFIZIENT 5 8 .0000000000000000
 KOEFFIZIENT 6 8 -2.279035849474950E-006
 KOEFFIZIENT 7 8 .0000000000000000
 KOEFFIZIENT 8 8 .0000000000000000
 KOEFFIZIENT 9 8 .0000000000000000
 KOEFFIZIENT 10 8 -1.907239621652040E-003

KOEFFIZIENT 1 9 .0000000000000000
 KOEFFIZIENT 2 9 -5.030333850567562E-004
 KOEFFIZIENT 3 9 .0000000000000000
 KOEFFIZIENT 4 9 -1.265145926407000E-004
 KOEFFIZIENT 5 9 .0000000000000000
 KOEFFIZIENT 6 9 -1.210452173185614E-006
 KOEFFIZIENT 7 9 .0000000000000000
 KOEFFIZIENT 8 9 -1.051275483873434E-008
 KOEFFIZIENT 9 9 .0000000000000000
 KOEFFIZIENT 10 9 6.307584298706420E-004

KOEFFIZIENT 1 10 -5.461007576890550E-002
 KOEFFIZIENT 2 10 .0000000000000000
 KOEFFIZIENT 3 10 -2.477803228499590E-003
 KOEFFIZIENT 4 10 .0000000000000000
 KOEFFIZIENT 5 10 -2.046078909881740E-005
 KOEFFIZIENT 6 10 .0000000000000000
 KOEFFIZIENT 7 10 -3.504251612911450E-009
 KOEFFIZIENT 8 10 .0000000000000000
 KOEFFIZIENT 9 10 6.307584298706420E-004
 KOEFFIZIENT 10 10 .0000000000000000

Tab. A8-6f. Ergebnisprotokoll des Programmsystems COMIX mit allen charakteristischen und interessierenden Kennwerten des Verbundquerschnittes
 Bezeichnungen gemäß Bild 7.2-3

UEBERTRAGUNGSMATRIX

KOEFFIZIENT 1 1 1.00000000000000
KOEFFIZIENT 2 1 .00000000000000
KOEFFIZIENT 3 1 .00000000000000
KOEFFIZIENT 4 1 .00000000000000
KOEFFIZIENT 5 1 .00000000000000
KOEFFIZIENT 6 1 .00000000000000
KOEFFIZIENT 7 1 .00000000000000
KOEFFIZIENT 8 1 .00000000000000
KOEFFIZIENT 9 1 .00000000000000
KOEFFIZIENT 10 1 .00000000000000

KOEFFIZIENT 1 2 533.000000000000
KOEFFIZIENT 2 2 1.00000000000000
KOEFFIZIENT 3 2 .00000000000000
KOEFFIZIENT 4 2 .00000000000000
KOEFFIZIENT 5 2 .00000000000000
KOEFFIZIENT 6 2 .00000000000000
KOEFFIZIENT 7 2 .00000000000000
KOEFFIZIENT 8 2 .00000000000000
KOEFFIZIENT 9 2 .00000000000000
KOEFFIZIENT 10 2 .00000000000000

KOEFFIZIENT 1 3 49704981621.3544
KOEFFIZIENT 2 3 3704980973.36669
KOEFFIZIENT 3 3 19728566578.3593
KOEFFIZIENT 4 3 -126187400079.693
KOEFFIZIENT 5 3 85494230457.3376
KOEFFIZIENT 6 3 -4.386947348421440E+015
KOEFFIZIENT 7 3 5.088038101913563E+015
KOEFFIZIENT 8 3 -51931727384686.1
KOEFFIZIENT 9 3 .00000000000000
KOEFFIZIENT 10 3 .00000000000000

KOEFFIZIENT 1 7 502506574.682956
KOEFFIZIENT 2 7 29385841.0600160
KOEFFIZIENT 3 7 49618085.0254146
KOEFFIZIENT 4 7 -420885157.086276
KOEFFIZIENT 5 7 249667838.134154
KOEFFIZIENT 6 7 -12636751403386.6
KOEFFIZIENT 7 7 17089481949382.7
KOEFFIZIENT 8 7 -126187400079.686
KOEFFIZIENT 9 7 .00000000000000
KOEFFIZIENT 10 7 .00000000000000

KOEFFIZIENT 1 4 -20658759781300.2
KOEFFIZIENT 2 4 -1206076080028.06
KOEFFIZIENT 3 4 -2002412579697.55
KOEFFIZIENT 4 4 17089481949382.7
KOEFFIZIENT 5 4 -10110538501421.7
KOEFFIZIENT 6 4 5.115864279356850E+017
KOEFFIZIENT 7 4 -6.939857417778370E+017
KOEFFIZIENT 8 4 5.088038101913270E+015
KOEFFIZIENT 9 4 .00000000000000
KOEFFIZIENT 10 4 .00000000000000

KOEFFIZIENT 1 8 -24495741.9726723
KOEFFIZIENT 2 8 -1707223.74828558
KOEFFIZIENT 3 8 -7519476.33503273
KOEFFIZIENT 4 8 49618085.0254175
KOEFFIZIENT 5 8 -33095293.9756263
KOEFFIZIENT 6 8 1695647346802.00
KOEFFIZIENT 7 8 -2002412579697.67
KOEFFIZIENT 8 8 19728566578.3593
KOEFFIZIENT 9 8 .00000000000000
KOEFFIZIENT 10 8 .00000000000000

KOEFFIZIENT 1 5 10803545651093.2
KOEFFIZIENT 2 5 665650389212.841
KOEFFIZIENT 3 5 1695647346801.94
KOEFFIZIENT 4 5 -12636751403386.8
KOEFFIZIENT 5 5 7947587012101.08
KOEFFIZIENT 6 5 -4.047953489311760E+017
KOEFFIZIENT 7 5 5.115864279356960E+017
KOEFFIZIENT 8 5 -4.386947348421304E+015
KOEFFIZIENT 9 5 .00000000000000
KOEFFIZIENT 10 5 .00000000000000

KOEFFIZIENT 1 9 -71640556.5340940
KOEFFIZIENT 2 9 -3900361.63449429
KOEFFIZIENT 3 9 -1707223.74828505
KOEFFIZIENT 4 9 29385841.0600133
KOEFFIZIENT 5 9 -13578696.9390556
KOEFFIZIENT 6 9 665650389212.739
KOEFFIZIENT 7 9 -1206076080027.94
KOEFFIZIENT 8 9 3704980973.36535
KOEFFIZIENT 9 9 1.00000000000000
KOEFFIZIENT 10 9 .00000000000000

KOEFFIZIENT 1 6 -221897331.654175
KOEFFIZIENT 2 6 -13578696.9390576
KOEFFIZIENT 3 6 -33095293.9756252
KOEFFIZIENT 4 6 249667838.134160
KOEFFIZIENT 5 6 -156132239.043862
KOEFFIZIENT 6 6 7947587012101.08
KOEFFIZIENT 7 6 -10110538501421.9
KOEFFIZIENT 8 6 85494230457.3349
KOEFFIZIENT 9 6 .00000000000000
KOEFFIZIENT 10 6 .00000000000000

KOEFFIZIENT 1 10 -1322823067.56308
KOEFFIZIENT 2 10 -71640556.5340940
KOEFFIZIENT 3 10 -24495741.9726635
KOEFFIZIENT 4 10 502506574.682909
KOEFFIZIENT 5 10 -221897331.654141
KOEFFIZIENT 6 10 10803545651091.5
KOEFFIZIENT 7 10 -20658759781298.3
KOEFFIZIENT 8 10 49704981621.3318
KOEFFIZIENT 9 10 533.000000000000
KOEFFIZIENT 10 10 1.00000000000000

Tab. A8-6g. Ergebnisprotokoll des Programmsystems COMIX mit allen charakteristischen und interessierenden Kennwerten des Verbundquerschnittes
Bezeichnungen gemäß Bild 7.2-3

LASTVEKTOREN

KOEFFIZIENT	1 1	24550881017.5408
KOEFFIZIENT	2 1	1322823067.56299
KOEFFIZIENT	3 1	328627977.661651
KOEFFIZIENT	4 1	-8607386206.23019
KOEFFIZIENT	5 1	3601406971.63243
KOEFFIZIENT	6 1	-173838366068898.
KOEFFIZIENT	7 1	354529832669885.
KOEFFIZIENT	8 1	-587107616332.028
KOEFFIZIENT	9 1	-142044.500000000
KOEFFIZIENT	10 1	-533.000000000000
KOEFFIZIENT	1 2	457897946666.349
KOEFFIZIENT	2 2	24550881017.5394
KOEFFIZIENT	3 2	3881703248.47508
KOEFFIZIENT	4 2	-147713377943.541
KOEFFIZIENT	5 2	57949743881.9481
KOEFFIZIENT	6 2	-2.766534661567753E+015
KOEFFIZIENT	7 2	6.097079408983630E+015
KOEFFIZIENT	8 2	-4967580799265.56
KOEFFIZIENT	9 2	-25236572.8333334
KOEFFIZIENT	10 2	-142044.500000000
KOEFFIZIENT	1 3	.000000000000000
KOEFFIZIENT	2 3	.000000000000000
KOEFFIZIENT	3 3	.000000000000000
KOEFFIZIENT	4 3	.000000000000000
KOEFFIZIENT	5 3	.000000000000000
KOEFFIZIENT	6 3	.000000000000000
KOEFFIZIENT	7 3	.000000000000000
KOEFFIZIENT	8 3	.000000000000000
KOEFFIZIENT	9 3	.000000000000000
KOEFFIZIENT	10 3	.000000000000000
KOEFFIZIENT	1 4	180104359126712.
KOEFFIZIENT	2 4	9805509149118.65
KOEFFIZIENT	3 4	4291960503188.62
KOEFFIZIENT	4 4	-73876004424873.4
KOEFFIZIENT	5 4	34136844104785.7
KOEFFIZIENT	6 4	-1.673445078480830E+018
KOEFFIZIENT	7 4	3.032075265190251E+018
KOEFFIZIENT	8 4	-9.314322167040494E+015
KOEFFIZIENT	9 4	.000000000000000
KOEFFIZIENT	10 4	.000000000000000

Tab. A8-6h. Ergebnisprotokoll des Programmsystems COMIX mit allen charakteristischen und interessierenden Kennwerten des Verbundquerschnittes
Bezeichnungen gemäß Bild 7.2-3

Anhang 9

Ergebnisse der Berechnungen zu Kapitel 7.3

Elem	Ordinate	rel. Pos.	abs. Pos.	w	w'	ufe 1	ufe 2	ufe 3	ufe 4	ufe 5	ufe 6	ufe 7	ufe 8	ufe 9	ufe 10	ufe 11
1	0.00	0.00	0.00	0.00	0.433	-0.268	-0.348	-0.399	-0.415	-0.426	-0.429	-0.431	-0.432	-0.433	-0.433	-0.433
1	0.10	25.00	25.00	10.22	0.432	-0.268	-0.346	-0.398	-0.414	-0.425	-0.428	-0.431	-0.432	-0.432	-0.432	-0.432
1	0.20	50.00	50.00	21.59	0.428	-0.269	-0.343	-0.396	-0.411	-0.422	-0.425	-0.428	-0.431	-0.432	-0.432	-0.432
1	0.30	75.00	75.00	32.27	0.425	-0.270	-0.339	-0.388	-0.406	-0.418	-0.421	-0.423	-0.424	-0.424	-0.424	-0.424
1	0.40	100.00	100.00	42.79	0.417	-0.270	-0.333	-0.386	-0.406	-0.410	-0.413	-0.416	-0.417	-0.417	-0.417	-0.417
1	0.50	125.00	125.00	53.09	0.408	-0.270	-0.322	-0.377	-0.396	-0.400	-0.402	-0.404	-0.405	-0.405	-0.405	-0.405
1	0.60	150.00	150.00	63.04	0.390	-0.267	-0.307	-0.363	-0.372	-0.382	-0.386	-0.388	-0.389	-0.389	-0.389	-0.389
1	0.70	175.00	175.00	72.52	0.387	-0.260	-0.285	-0.344	-0.350	-0.362	-0.366	-0.366	-0.366	-0.367	-0.367	-0.367
1	0.80	200.00	200.00	81.31	0.385	-0.246	-0.254	-0.315	-0.317	-0.330	-0.334	-0.334	-0.334	-0.335	-0.335	-0.335
1	0.90	225.00	225.00	89.14	0.289	-0.222	-0.208	-0.274	-0.271	-0.286	-0.285	-0.288	-0.288	-0.289	-0.289	-0.289
1	1.00	250.00	250.00	95.60	0.224	-0.181	-0.141	-0.214	-0.206	-0.222	-0.220	-0.223	-0.224	-0.224	-0.224	-0.224
2	0.00	0.00	0.00	250.00	0.224	-0.181	-0.141	-0.214	-0.206	-0.222	-0.220	-0.223	-0.224	-0.224	-0.224	-0.224
2	1.00	20.00	270.00	99.52	0.170	-0.148	-0.086	-0.165	-0.152	-0.169	-0.168	-0.170	-0.169	-0.170	-0.170	-0.170
3	0.00	0.00	270.00	100.31	0.148	-0.043	-0.152	-0.125	-0.149	-0.143	-0.148	-0.147	-0.148	-0.148	-0.148	-0.148
3	1.00	5.00	275.00	100.31	0.148	-0.043	-0.152	-0.125	-0.149	-0.143	-0.148	-0.147	-0.148	-0.148	-0.148	-0.148
4	0.00	0.00	275.00	100.31	0.088	-0.020	-0.099	-0.081	-0.098	-0.094	-0.098	-0.097	-0.098	-0.098	-0.098	-0.098
4	0.13	25.00	300.00	103.96	0.088	-0.020	-0.099	-0.081	-0.098	-0.094	-0.098	-0.097	-0.098	-0.098	-0.098	-0.098
4	0.25	50.00	325.00	105.31	0.060	-0.008	-0.048	-0.048	-0.060	-0.057	-0.060	-0.058	-0.060	-0.059	-0.060	-0.060
4	0.38	75.00	350.00	106.40	0.028	-0.002	-0.028	-0.023	-0.026	-0.027	-0.028	-0.028	-0.028	-0.028	-0.028	-0.028
4	0.50	100.00	375.00	106.75	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
4	0.63	125.00	400.00	106.40	-0.028	0.002	0.028	0.023	0.029	0.027	0.028	0.028	0.028	0.028	0.028	0.028
4	0.75	150.00	425.00	105.31	-0.060	0.006	0.060	0.048	0.060	0.057	0.060	0.059	0.060	0.059	0.060	0.060
4	0.88	175.00	450.00	103.96	-0.098	0.020	0.099	0.081	0.098	0.094	0.098	0.097	0.098	0.098	0.098	0.098
4	1.00	200.00	475.00	100.31	-0.148	0.043	0.152	0.125	0.149	0.143	0.148	0.147	0.148	0.148	0.148	0.148
5	0.00	0.00	475.00	100.31	-0.148	0.043	0.152	0.125	0.149	0.143	0.148	0.147	0.148	0.148	0.148	0.148
5	1.00	5.00	480.00	99.52	-0.170	0.148	0.086	0.165	0.152	0.169	0.166	0.170	0.169	0.170	0.170	0.170
6	0.00	0.00	480.00	99.52	-0.170	0.148	0.086	0.165	0.152	0.169	0.166	0.170	0.169	0.170	0.170	0.170
6	1.00	20.00	500.00	95.60	-0.224	0.181	0.141	0.214	0.206	0.222	0.220	0.223	0.223	0.224	0.224	0.224
7	0.00	0.00	500.00	95.60	-0.224	0.181	0.141	0.214	0.206	0.222	0.220	0.223	0.223	0.224	0.224	0.224
7	0.10	25.00	525.00	89.14	-0.289	0.222	0.208	0.274	0.271	0.286	0.285	0.288	0.288	0.289	0.289	0.289
7	0.20	50.00	550.00	81.31	-0.335	0.246	0.254	0.315	0.317	0.330	0.334	0.334	0.334	0.335	0.335	0.335
7	0.30	75.00	575.00	72.52	-0.390	0.267	0.307	0.363	0.344	0.350	0.362	0.366	0.366	0.367	0.367	0.367
7	0.40	100.00	600.00	63.04	-0.408	0.270	0.332	0.377	0.388	0.394	0.398	0.399	0.399	0.399	0.399	0.399
7	0.50	125.00	625.00	53.09	-0.417	0.270	0.333	0.386	0.398	0.400	0.402	0.404	0.405	0.405	0.405	0.405
7	0.60	150.00	650.00	42.79	-0.425	0.270	0.339	0.392	0.406	0.410	0.413	0.416	0.416	0.417	0.417	0.417
7	0.70	175.00	675.00	32.27	-0.429	0.269	0.343	0.396	0.411	0.422	0.425	0.428	0.428	0.429	0.429	0.429
7	0.80	200.00	700.00	21.59	-0.429	0.269	0.343	0.396	0.411	0.422	0.425	0.428	0.428	0.429	0.429	0.429
7	0.90	225.00	725.00	10.92	-0.432	0.268	0.346	0.399	0.414	0.425	0.428	0.431	0.431	0.432	0.432	0.432
7	1.00	250.00	750.00	0.00	-0.433	0.268	0.346	0.399	0.415	0.426	0.429	0.431	0.432	0.433	0.433	0.433
kleinster Wert																
0.000																
größter Wert																
106.745																

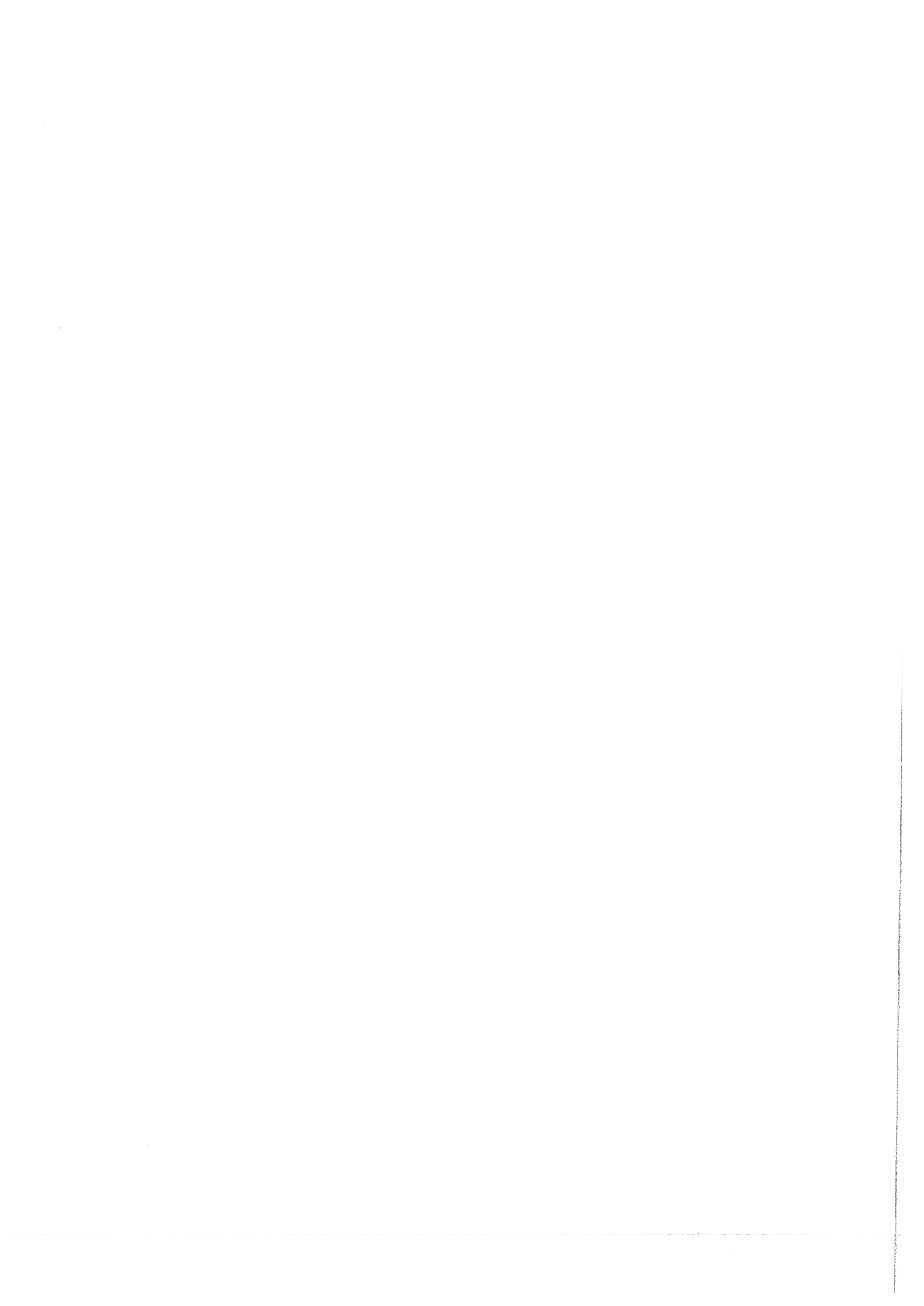
Tab. A9-1a. Tabellarische Darstellung der Berechnungsergebnisse mit dem Programmsystem COMIX für den symmetrisch punktuell belasteten Brettstapelträger Fugensteifigkeit $k = 1.00 \text{ kN/cm}^2$

Element	Ordinats	rel. Pos.	abs. Pos.	Ne 11	Ne 10	Ne 9	Ne 8	Ne 7	Ne 6	Ne 5	Ne 4	Ne 3	Ne 2	Ne 1	M	V
1	1,00	0,00	0,00	156,6	0,0	0,0	145,2	137,2	126,8	113,8	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	100,00
1	0,10	25,00	156,6	313,0	154,8	151,0	145,2	137,2	126,8	113,8	0,0	0,0	0,0	0,0	2500,0	100,00
1	0,20	50,00	313,0	469,4	308,3	301,7	280,1	274,3	258,6	227,7	195,9	178,6	112,1	59,4	5000,0	100,00
1	0,30	75,00	469,4	625,8	463,2	452,0	434,7	411,1	380,3	341,8	284,3	237,0	169,0	89,7	7500,0	100,00
1	0,40	100,00	625,8	777,0	612,0	597,0	578,7	547,5	507,0	458,0	383,3	317,5	226,9	120,9	10000,0	100,00
1	0,50	125,00	777,0	928,7	768,0	749,8	721,8	689,4	633,3	570,5	493,1	393,3	286,4	153,4	12500,0	100,00
1	0,60	150,00	928,7	1079,8	918,0	896,6	865,5	818,4	758,2	685,4	593,7	468,8	348,0	186,3	15000,0	100,00
1	0,70	175,00	1079,8	1223,8	1065,7	1041,4	1003,3	952,2	884,1	800,5	694,7	566,9	412,3	227,2	17500,0	100,00
1	0,80	200,00	1223,8	1362,7	1209,8	1183,4	1139,9	1084,3	1006,6	915,7	795,0	658,0	478,8	273,7	20000,0	100,00
1	0,90	225,00	1362,7	1496,5	1346,3	1318,7	1269,7	1212,6	1121,6	1029,9	898,8	750,8	542,0	333,4	22500,0	100,00
1	1,00	250,00	1496,5	1625,0	1481,8	1451,0	1400,0	1332,1	1204,1	1109,8	948,2	808,4	611,0	407,5	25000,0	100,00
2	0,00	0,00	0,00	1475,6	1454,3	1433,1	1386,9	1322,1	1204,1	1130,8	948,2	808,4	611,0	407,5	25000,0	0,00
2	0,00	0,00	0,00	1475,6	1454,3	1433,1	1386,9	1322,1	1204,1	1130,8	948,2	808,4	611,0	407,5	25000,0	0,00
3	0,00	0,00	0,00	1515,4	1484,6	1479,3	1383,8	1372,5	1202,3	1183,8	920,7	893,1	511,1	472,5	25000,0	0,00
3	0,00	0,00	0,00	1515,4	1484,6	1479,3	1383,8	1372,5	1202,3	1183,8	920,7	893,1	511,1	472,5	25000,0	0,00
3	0,00	0,00	0,00	1515,4	1484,6	1479,3	1383,8	1372,5	1202,3	1183,8	920,7	893,1	511,1	472,5	25000,0	0,00
4	0,13	25,00	1511,8	1533,3	1484,6	1485,5	1418,7	1363,1	1244,0	1153,5	869,6	835,0	568,1	376,7	25000,0	0,00
4	0,13	25,00	1511,8	1533,3	1484,6	1485,5	1418,7	1363,1	1244,0	1153,5	869,6	835,0	568,1	376,7	25000,0	0,00
4	0,25	50,00	1543,9	1525,0	1491,8	1432,9	1363,1	1363,1	1258,0	1144,2	884,8	813,0	577,1	319,5	25000,0	0,00
4	0,38	75,00	1549,8	1531,5	1496,0	1439,0	1363,1	1363,1	1262,9	1140,7	884,8	813,0	577,1	319,5	25000,0	0,00
4	0,50	100,00	1551,7	1533,5	1497,5	1440,8	1363,1	1363,1	1264,1	1140,7	884,8	813,0	577,1	319,5	25000,0	0,00
4	0,63	125,00	1549,8	1529,5	1496,0	1439,0	1363,1	1363,1	1264,1	1140,7	884,8	813,0	577,1	319,5	25000,0	0,00
4	0,75	150,00	1543,9	1525,0	1491,8	1432,9	1363,1	1363,1	1264,1	1144,2	884,8	813,0	578,0	326,2	25000,0	0,00
4	0,88	175,00	1533,3	1511,8	1485,5	1418,7	1363,1	1363,1	1244,0	1153,5	869,6	835,0	568,1	376,7	25000,0	0,00
4	1,00	200,00	1515,4	1484,6	1479,3	1383,8	1372,5	1372,5	1202,3	1183,8	920,7	893,1	511,1	472,2	25000,0	0,00
5	0,00	0,00	0,00	1515,4	1484,6	1479,3	1383,8	1372,5	1202,3	1183,8	920,7	893,1	511,1	472,2	25000,0	0,00
5	0,00	0,00	0,00	1515,4	1484,6	1479,3	1383,8	1372,5	1202,3	1183,8	920,7	893,1	511,1	472,2	25000,0	0,00
5	0,00	0,00	0,00	1515,4	1484,6	1479,3	1383,8	1372,5	1202,3	1183,8	920,7	893,1	511,1	472,2	25000,0	0,00
6	0,00	0,00	0,00	1475,6	1454,3	1433,1	1386,9	1322,1	1204,1	1130,8	948,2	808,4	611,0	407,5	25000,0	0,00
6	0,00	0,00	0,00	1475,6	1454,3	1433,1	1386,9	1322,1	1204,1	1130,8	948,2	808,4	611,0	407,5	25000,0	0,00
6	0,00	0,00	0,00	1475,6	1454,3	1433,1	1386,9	1322,1	1204,1	1130,8	948,2	808,4	611,0	407,5	25000,0	0,00
7	0,10	20,00	1362,7	1322,8	1346,3	1319,7	1268,7	1212,6	1121,6	1029,9	898,8	750,8	542,0	333,4	22500,0	-100,00
7	0,10	20,00	1362,7	1322,8	1346,3	1319,7	1268,7	1212,6	1121,6	1029,9	898,8	750,8	542,0	333,4	22500,0	-100,00
7	0,20	40,00	1077,9	1065,7	1041,4	1003,3	952,2	884,1	806,6	715,7	595,0	478,8	348,0	227,2	20000,0	-100,00
7	0,30	60,00	928,7	918,0	896,6	863,5	818,4	758,2	685,4	600,5	493,1	384,0	286,4	188,3	15000,0	-100,00
7	0,40	80,00	777,0	768,0	749,8	721,8	689,4	648,3	593,3	507,0	393,3	286,4	188,3	133,4	10000,0	-100,00
7	0,50	100,00	625,8	612,0	597,0	578,7	547,5	507,0	458,0	370,5	284,3	226,9	120,9	89,7	7500,0	-100,00
7	0,60	125,00	469,4	463,2	452,0	434,7	411,1	380,3	341,8	284,3	226,9	120,9	89,7	59,4	5000,0	-100,00
7	0,70	150,00	313,0	308,3	301,7	280,1	274,3	258,6	227,7	195,9	157,5	112,1	59,4	29,6	2500,0	-100,00
7	0,80	175,00	156,6	154,8	151,0	145,2	137,2	126,8	113,8	113,8	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	-100,00
7	0,90	200,00	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	-100,00
7	1,00	250,00	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	-100,00
Meinster Wert																
größter Wert																
															25000,0	100,00

Tab. A9-1b. Tabellarische Darstellung der Berechnungsergebnisse mit dem Programmsystem COMIX für den symmetrisch punktuell belasteten Brettstapelträger Fugensteifigkeit $k = 1.00 \text{ kN/cm}^2$

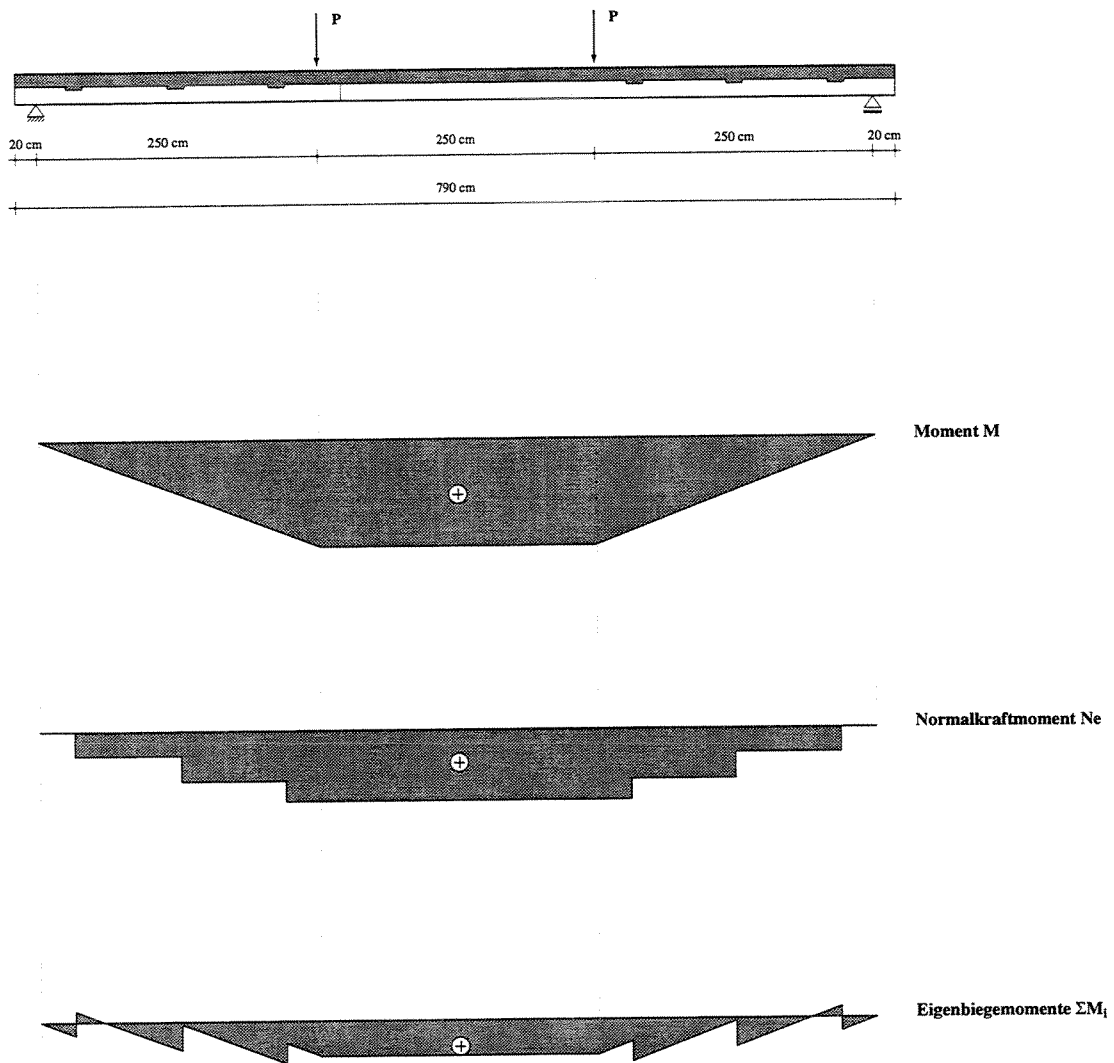
Elem	Ordinate	rel. Pos	abs. Pos	w	w'	w/e 1	w/e 2	w/e 3	w/e 4	w/e 5	w/e 6	w/e 7	w/e 8	w/e 9	w/e 10	w/e 11	
1	0,00	0,00	0,000	0,028	-0,004	-0,007	-0,010	-0,012	-0,014	-0,016	-0,017	-0,018	-0,018	-0,018	-0,018	-0,019	
1	0,10	25,00	1,888	0,028	-0,004	-0,007	-0,010	-0,012	-0,014	-0,016	-0,017	-0,018	-0,018	-0,018	-0,018	-0,019	
1	0,20	50,00	1,389	0,028	-0,004	-0,007	-0,010	-0,012	-0,014	-0,016	-0,017	-0,018	-0,018	-0,018	-0,018	-0,019	
1	0,30	75,00	2,076	0,027	-0,004	-0,007	-0,010	-0,012	-0,014	-0,016	-0,017	-0,018	-0,018	-0,018	-0,018	-0,019	
1	0,40	100,00	2,754	0,027	-0,004	-0,007	-0,010	-0,012	-0,014	-0,015	-0,017	-0,017	-0,018	-0,018	-0,019	-0,019	
1	0,50	125,00	3,420	0,026	-0,004	-0,008	-0,010	-0,012	-0,014	-0,015	-0,016	-0,017	-0,018	-0,018	-0,019	-0,019	
1	0,60	150,00	4,071	0,026	-0,004	-0,008	-0,011	-0,012	-0,014	-0,015	-0,016	-0,017	-0,018	-0,018	-0,019	-0,019	
1	0,70	175,00	4,703	0,025	-0,005	-0,008	-0,011	-0,012	-0,014	-0,015	-0,016	-0,017	-0,018	-0,018	-0,019	-0,019	
1	0,80	200,00	5,310	0,024	-0,006	-0,007	-0,011	-0,012	-0,014	-0,015	-0,016	-0,017	-0,018	-0,018	-0,019	-0,019	
1	0,90	225,00	5,882	0,022	-0,006	-0,007	-0,011	-0,012	-0,014	-0,015	-0,016	-0,017	-0,018	-0,018	-0,019	-0,019	
1	1,00	250,00	6,358	0,014	-0,009	-0,002	-0,009	-0,002	-0,010	-0,005	-0,010	-0,007	-0,010	-0,009	-0,010	-0,010	
2	1,00	20,00	6,358	0,014	-0,009	-0,002	-0,009	-0,002	-0,010	-0,005	-0,010	-0,007	-0,010	-0,009	-0,010	-0,010	
3	1,00	0,00	6,564	0,008	-0,014	0,018	-0,011	0,010	-0,009	0,005	-0,007	0,001	-0,006	-0,002	-0,004	-0,004	
3	1,00	5,00	6,564	0,008	-0,014	0,018	-0,013	0,011	-0,011	0,008	-0,009	0,002	-0,007	-0,001	-0,005	-0,003	
4	0,00	0,00	6,500	0,007	0,018	-0,013	0,011	-0,011	0,006	-0,009	0,002	-0,007	-0,001	-0,005	-0,003	-0,003	
4	0,13	25,00	6,729	0,004	0,007	-0,003	0,004	-0,003	0,002	-0,001	-0,001	0,000	-0,003	-0,001	-0,002	-0,002	
4	0,25	50,00	6,813	0,003	0,003	-0,000	0,002	-0,001	0,001	0,001	-0,001	0,000	-0,001	-0,001	-0,001	-0,001	
4	0,38	75,00	6,860	0,001	0,001	0,000	0,001	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	
4	0,50	100,00	6,876	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	
4	0,53	125,00	6,860	-0,001	-0,001	-0,000	-0,001	-0,000	-0,000	-0,000	-0,000	-0,000	-0,000	-0,000	-0,000	-0,000	
4	0,75	150,00	6,813	-0,003	-0,003	-0,000	-0,002	0,001	-0,001	-0,001	0,001	0,000	0,001	0,001	0,001	0,001	
4	0,88	175,00	6,729	-0,004	-0,007	-0,003	-0,004	0,003	-0,002	-0,002	0,003	0,000	0,003	0,001	0,002	0,002	
4	1,00	200,00	6,500	-0,007	-0,018	0,013	-0,011	0,011	-0,006	0,008	-0,002	-0,002	0,001	0,005	0,003	0,003	
5	0,00	475,00	6,500	-0,007	-0,018	0,013	-0,011	0,011	-0,006	0,009	-0,005	-0,002	0,001	0,005	0,003	0,003	
5	1,00	480,00	6,564	-0,008	-0,014	-0,016	0,011	-0,010	-0,009	-0,005	-0,005	0,007	-0,001	0,006	0,002	0,004	
6	0,00	480,00	6,564	-0,008	-0,014	-0,016	0,011	-0,010	-0,009	-0,005	-0,005	0,007	-0,001	0,006	0,002	0,004	
6	1,00	490,00	6,588	-0,014	0,008	-0,002	0,009	0,002	0,010	0,005	0,005	0,010	0,007	0,010	0,009	0,010	
7	0,00	500,00	6,588	-0,022	0,008	-0,002	0,009	0,002	0,010	0,005	0,005	0,010	0,007	0,010	0,009	0,010	
7	0,10	25,00	5,310	-0,025	0,008	0,007	0,011	0,010	0,014	0,013	0,015	0,015	0,016	0,017	0,017	0,018	
7	0,20	50,00	4,703	-0,024	0,008	0,007	0,011	0,012	0,014	0,015	0,015	0,016	0,016	0,017	0,017	0,018	
7	0,30	75,00	4,071	-0,026	0,004	0,006	0,010	0,012	0,014	0,015	0,015	0,016	0,016	0,017	0,018	0,018	
7	0,40	100,00	3,420	-0,027	0,004	0,007	0,010	0,012	0,014	0,015	0,015	0,016	0,016	0,017	0,018	0,018	
7	0,50	125,00	2,754	-0,027	0,004	0,007	0,010	0,012	0,014	0,015	0,015	0,016	0,016	0,017	0,018	0,018	
7	0,60	150,00	2,076	-0,027	0,004	0,007	0,010	0,012	0,014	0,015	0,015	0,016	0,016	0,017	0,018	0,018	
7	0,70	175,00	1,389	-0,027	0,004	0,007	0,010	0,012	0,014	0,015	0,015	0,016	0,016	0,017	0,018	0,018	
7	0,80	200,00	0,696	-0,028	0,004	0,007	0,010	0,012	0,014	0,015	0,015	0,016	0,016	0,017	0,018	0,018	
7	0,90	225,00	0,000	-0,028	0,004	0,007	0,010	0,012	0,014	0,015	0,015	0,016	0,016	0,017	0,018	0,018	
7	1,00	250,00	0,000	-0,028	0,004	0,007	0,010	0,012	0,014	0,015	0,015	0,016	0,016	0,017	0,018	0,018	
kleinster Wert				0,000	-0,028	-0,018	-0,011	-0,012	-0,014	-0,016	-0,016	-0,017	-0,018	-0,019	-0,019	-0,019	-0,019
größer Wert				6,876	0,028	0,018	0,011	0,012	0,014	0,016	0,016	0,017	0,018	0,019	0,019	0,019	0,019

Tab. A9-2a. Tabellarische Darstellung der Berechnungsergebnisse mit dem Programmsystem COMIX für den symmetrisch punktuell belasteten Brettstapelträger Fugensteifigkeit $k = 50,00 \text{ kN/cm}^2$



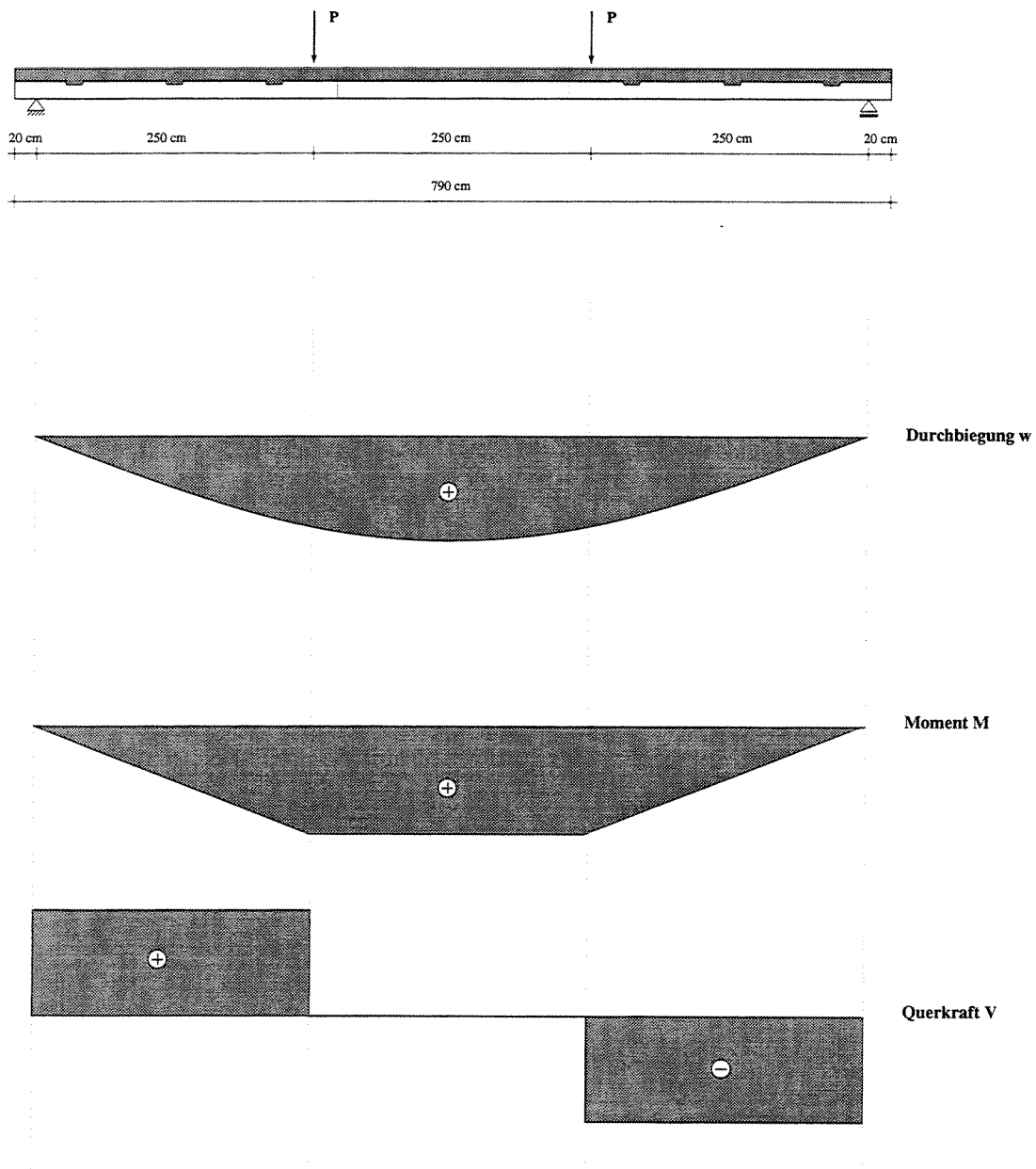
Anhang 10

Ergebnisse der Berechnungen zu Kapitel 7.4



Software COMIX © Michael Hoefft

Bild A10-1. Qualitative Darstellung der Berechnungsergebnisse aus dem Programmsystem COMIX für den symmetrisch punktuell belasteten Verbundträger
Verlauf der globalen Zustandsgrößen

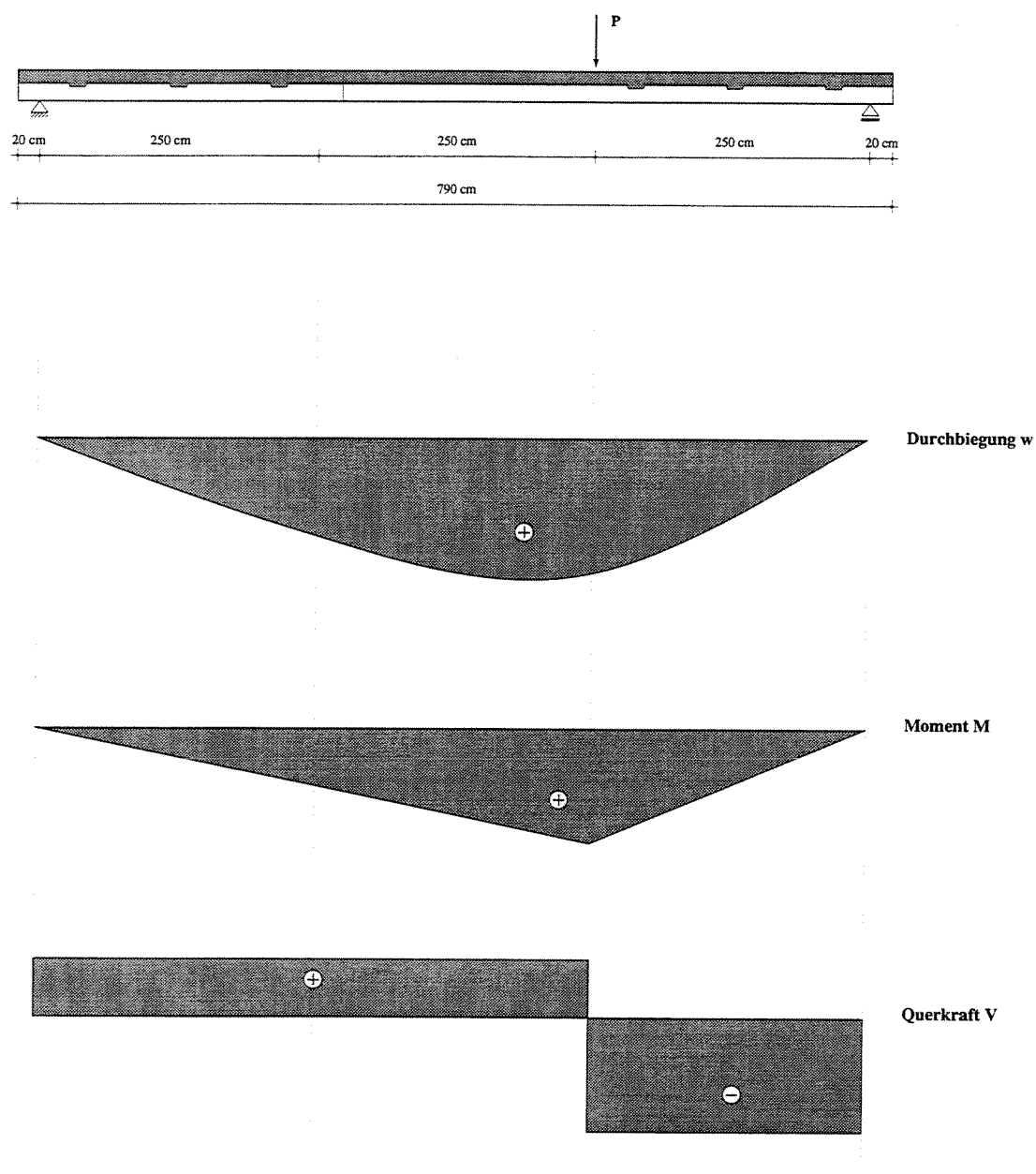


Software COMIX © Michael Hoefl

Bild A10-2. Qualitative Darstellung der Berechnungsergebnisse aus dem Programmsystem COMIX für den symmetrisch punktuell belasteten Verbundträger
Verlauf der globalen Zustandsgrößen

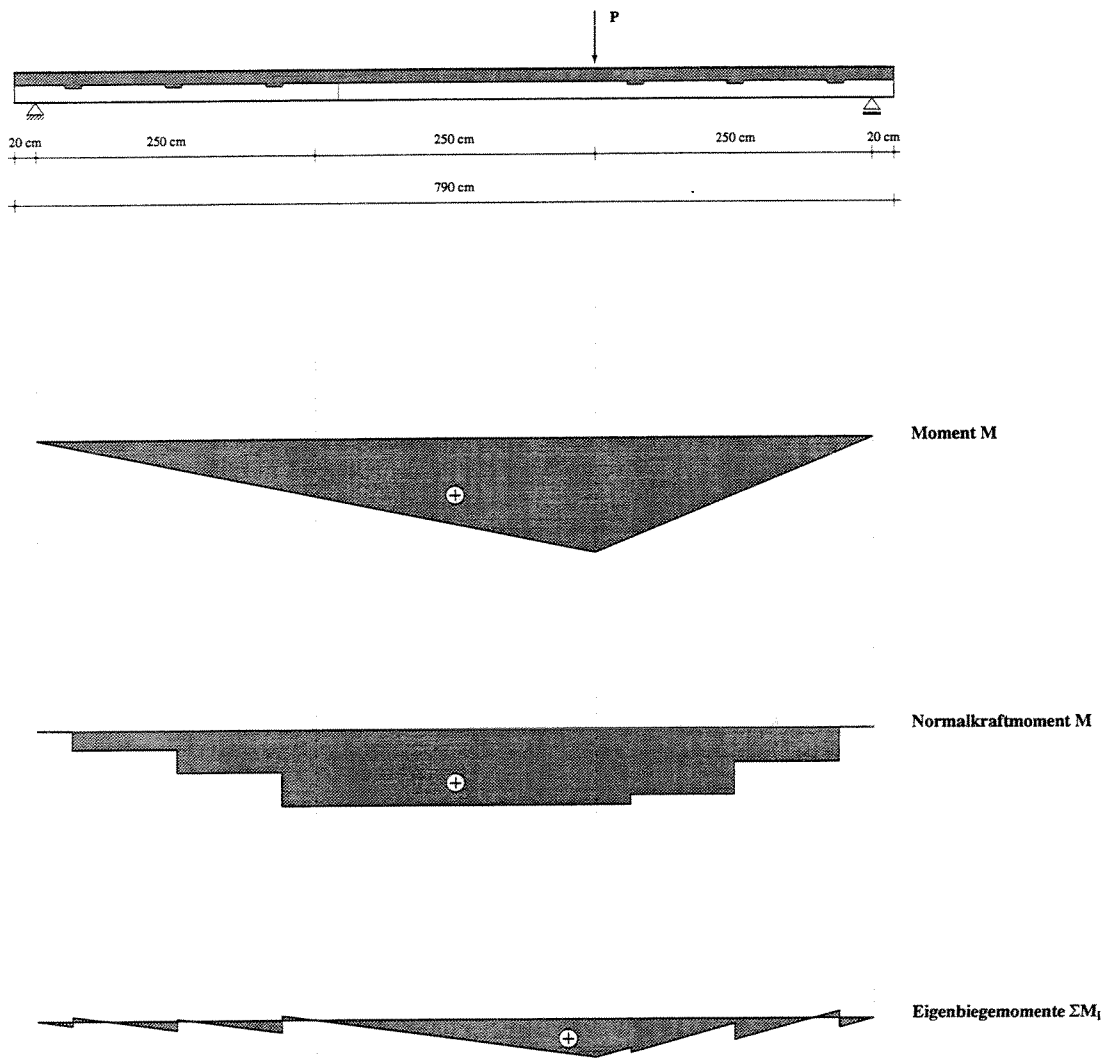
Verbundträger Expertise Triesenberg, P = 100 kN, symmetrisch										
Elem	Ordinate	rel. Pos.	abs. Pos.	w	w'	u/e	Ne	Σ Mi	M	V
1	0.00	0.00	0.00	0.00	0.031	-0.006	0.000	0.0	0.0	100.0
1	0.50	15.63	15.63	0.49	0.031	-0.005	0.168	1'562.3	1'562.5	100.0
1	1.00	31.25	31.25	0.97	0.031	-0.005	0.325	3'124.7	3'125.0	100.0
2	0.00	0.00	31.25	0.97	0.031	-0.005	5758.785	-2'633.8	3'125.0	100.0
2	0.17	15.63	46.88	1.46	0.031	-0.006	5758.948	-1'071.4	4'687.5	100.0
2	0.33	31.25	62.50	1.95	0.031	-0.006	5759.136	490.9	6'250.0	100.0
2	0.50	46.88	78.13	2.43	0.031	-0.007	5759.337	2'053.2	7'812.5	100.0
2	0.67	62.50	93.75	2.91	0.030	-0.007	5759.540	3'615.5	9'375.0	100.0
2	0.83	78.13	109.38	3.37	0.029	-0.006	5759.732	5'177.8	10'937.5	100.0
2	1.00	93.75	125.00	3.82	0.028	-0.005	5759.902	6'740.1	12'500.0	100.0
3	0.00	0.00	125.00	3.82	0.028	-0.005	11842.720	657.3	12'500.0	100.0
3	0.17	15.63	140.63	4.25	0.027	-0.006	11842.888	2'219.6	14'062.5	100.0
3	0.33	31.25	156.25	4.67	0.027	-0.006	11843.074	3'781.9	15'625.0	100.0
3	0.50	46.88	171.88	5.07	0.025	-0.006	11843.266	5'344.2	17'187.5	100.0
3	0.67	62.50	187.50	5.46	0.024	-0.006	11843.453	6'906.5	18'750.0	100.0
3	0.83	78.13	203.13	5.82	0.022	-0.005	11843.622	8'468.9	20'312.5	100.0
3	1.00	93.75	218.75	6.15	0.020	-0.004	11843.762	10'031.2	21'875.0	100.0
4	0.00	0.00	218.75	6.15	0.020	-0.004	16612.977	5'262.0	21'875.0	100.0
4	0.50	15.63	234.38	6.45	0.018	-0.004	16613.102	6'824.4	23'437.5	100.0
4	1.00	31.25	250.00	6.72	0.016	-0.004	16613.223	8'386.8	25'000.0	100.0
5	0.00	0.00	250.00	6.72	0.016	-0.004	16613.223	8'386.8	25'000.0	0.0
5	0.06	15.63	265.63	6.96	0.014	-0.003	16613.332	8'386.7	25'000.0	0.0
5	0.13	31.25	281.25	7.17	0.012	-0.003	16613.426	8'386.6	25'000.0	0.0
5	0.19	46.88	296.88	7.34	0.010	-0.002	16613.506	8'386.5	25'000.0	0.0
5	0.25	62.50	312.50	7.49	0.008	-0.002	16613.571	8'386.4	25'000.0	0.0
5	0.31	78.13	328.13	7.60	0.006	-0.001	16613.622	8'386.4	25'000.0	0.0
5	0.38	93.75	343.75	7.68	0.004	-0.001	16613.658	8'386.3	25'000.0	0.0
5	0.44	109.38	359.38	7.73	0.002	0.000	16613.680	8'386.3	25'000.0	0.0
5	0.50	125.00	375.00	7.75	0.000	0.000	16613.687	8'386.3	25'000.0	0.0
5	0.56	140.63	390.63	7.73	-0.002	0.000	16613.680	8'386.3	25'000.0	0.0
5	0.63	156.25	406.25	7.68	-0.004	0.001	16613.658	8'386.3	25'000.0	0.0
5	0.69	171.88	421.88	7.60	-0.006	0.001	16613.622	8'386.4	25'000.0	0.0
5	0.75	187.50	437.50	7.49	-0.008	0.002	16613.571	8'386.4	25'000.0	0.0
5	0.81	203.13	453.13	7.34	-0.010	0.002	16613.506	8'386.5	25'000.0	0.0
5	0.88	218.75	468.75	7.17	-0.012	0.003	16613.426	8'386.6	25'000.0	0.0
5	0.94	234.38	484.38	6.96	-0.014	0.003	16613.332	8'386.7	25'000.0	0.0
5	1.00	250.00	500.00	6.72	-0.016	0.004	16613.223	8'386.8	25'000.0	0.0
6	0.00	0.00	500.00	6.72	-0.016	0.004	16613.223	8'386.8	25'000.0	-100.0
6	0.50	15.63	515.63	6.45	-0.018	0.004	16613.102	6'824.4	23'437.5	-100.0
6	1.00	31.25	531.25	6.15	-0.020	0.004	16612.977	5'262.0	21'875.0	-100.0
7	0.00	0.00	531.25	6.15	-0.020	0.004	11843.762	10'031.2	21'875.0	-100.0
7	0.17	15.63	546.88	5.82	-0.022	0.005	11843.622	8'468.9	20'312.5	-100.0
7	0.33	31.25	562.50	5.46	-0.024	0.006	11843.453	6'906.5	18'750.0	-100.0
7	0.50	46.88	578.13	5.07	-0.025	0.006	11843.266	5'344.2	17'187.5	-100.0
7	0.67	62.50	593.75	4.67	-0.027	0.006	11843.074	3'781.9	15'625.0	-100.0
7	0.83	78.13	609.38	4.25	-0.027	0.006	11842.888	2'219.6	14'062.5	-100.0
7	1.00	93.75	625.00	3.82	-0.028	0.005	11842.720	657.3	12'500.0	-100.0
8	0.00	0.00	625.00	3.82	-0.028	0.005	5759.902	6'740.1	12'500.0	-100.0
8	0.17	15.63	640.63	3.37	-0.029	0.006	5759.732	5'177.8	10'937.5	-100.0
8	0.33	31.25	656.25	2.91	-0.030	0.007	5759.540	3'615.5	9'375.0	-100.0
8	0.50	46.88	671.88	2.43	-0.031	0.007	5759.337	2'053.2	7'812.5	-100.0
8	0.67	62.50	687.50	1.95	-0.031	0.006	5759.136	490.9	6'250.0	-100.0
8	0.83	78.13	703.13	1.46	-0.031	0.006	5758.948	-1'071.4	4'687.5	-100.0
8	1.00	93.75	718.75	0.97	-0.031	0.005	5758.785	-2'633.8	3'125.0	-100.0
9	0.00	0.00	718.75	0.97	-0.031	0.005	0.325	3'124.7	3'125.0	-100.0
9	0.50	15.63	734.38	0.49	-0.031	0.005	0.168	1'562.3	1'562.5	-100.0
9	1.00	31.25	750.00	0.00	-0.031	0.006	0.000	0.0	0.0	-100.0
Valeur minimale				0.00	-0.03	-0.01	0.00	-2633.78	0.00	-100.00
Valeur maximale				7.75	0.03	0.01	16613.69	10031.24	25000.00	100.00

Tab. A10-1. Tabellarische Darstellung der Berechnungsergebnisse aus dem Programmsystem COMIX für den symmetrisch punktuell belasteten Verbundträger
Verlauf der globalen Zustandsgrößen



Software COMIX © Michael Hoefl

Bild A10-3. Qualitative Darstellung der Berechnungsergebnisse aus dem Programmsystem COMIX für den asymmetrisch punktuell belasteten Verbundträger
Verlauf der globalen Zustandsgrößen



Software COMIX © Michael Hoefl

Bild A10-4. Qualitative Darstellung der Berechnungsergebnisse aus dem Programmsystem COMIX für den asymmetrisch punktuell belasteten Verbundträger
Verlauf der globalen Zustandsgrößen

Verbundträger Expertise Triesenberg, P = 100 kN, asymmetrisch										
Elem	Ordinate	rel. Pos.	abs. Pos.	w	w'	u/e	Ne	ΣM_i	M	V
1	0.00	0.00	0.00	0.00	0.012	-0.002	0.000	0.0	0.0	33.3
1	0.50	15.63	15.63	0.19	0.012	-0.002	0.060	520.8	520.8	33.3
1	1.00	31.25	31.25	0.38	0.012	-0.002	0.116	1'041.6	1'041.7	33.3
2	0.00	0.00	31.25	0.38	0.012	-0.002	2066.704	-1'025.0	1'041.7	33.3
2	0.17	15.63	46.88	0.57	0.012	-0.002	2066.763	-504.3	1'562.5	33.3
2	0.33	31.25	62.50	0.76	0.012	-0.002	2066.831	16.5	2'083.3	33.3
2	0.50	46.88	78.13	0.95	0.012	-0.002	2066.906	537.3	2'604.2	33.3
2	0.67	62.50	93.75	1.14	0.012	-0.002	2066.983	1'058.0	3'125.0	33.3
2	0.83	78.13	109.38	1.33	0.012	-0.002	2067.058	1'578.8	3'645.8	33.3
2	1.00	93.75	125.00	1.51	0.011	-0.002	2067.126	2'099.5	4'166.7	33.3
3	0.00	0.00	125.00	1.51	0.011	-0.002	4602.360	-435.7	4'166.7	33.3
3	0.17	15.63	140.63	1.68	0.011	-0.003	4602.432	85.1	4'687.5	33.3
3	0.33	31.25	156.25	1.86	0.011	-0.003	4602.517	605.8	5'208.3	33.3
3	0.50	46.88	171.88	2.03	0.011	-0.003	4602.611	1'126.6	5'729.2	33.3
3	0.67	62.50	187.50	2.20	0.011	-0.003	4602.710	1'647.3	6'250.0	33.3
3	0.83	78.13	203.13	2.36	0.010	-0.003	4602.810	2'168.0	6'770.8	33.3
3	1.00	93.75	218.75	2.52	0.010	-0.003	4602.908	2'688.8	7'291.7	33.3
4	0.00	0.00	218.75	2.52	0.010	-0.003	8304.959	-1'013.3	7'291.7	33.3
4	0.50	15.63	234.38	2.67	0.010	-0.004	8305.069	-492.6	7'812.5	33.3
4	1.00	31.25	250.00	2.82	0.010	-0.005	8305.207	28.1	8'333.3	33.3
5	0.00	0.00	250.00	2.82	0.010	-0.005	8305.207	28.1	8'333.3	33.3
5	0.06	15.63	265.63	2.97	0.010	-0.006	8305.368	548.8	8'854.2	33.3
5	0.13	31.25	281.25	3.12	0.010	-0.006	8305.550	1'069.4	9'375.0	33.3
5	0.19	46.88	296.88	3.27	0.009	-0.007	8305.748	1'590.1	9'895.8	33.3
5	0.25	62.50	312.50	3.41	0.009	-0.007	8305.958	2'110.7	10'416.7	33.3
5	0.31	78.13	328.13	3.54	0.008	-0.007	8306.177	2'631.3	10'937.5	33.3
5	0.38	93.75	343.75	3.67	0.007	-0.007	8306.400	3'151.9	11'458.3	33.3
5	0.44	109.38	359.38	3.78	0.007	-0.007	8306.623	3'672.5	11'979.2	33.3
5	0.50	125.00	375.00	3.87	0.006	-0.007	8306.844	4'193.2	12'500.0	33.3
5	0.56	140.63	390.63	3.95	0.005	-0.007	8307.057	4'713.8	13'020.8	33.3
5	0.63	156.25	406.25	4.02	0.003	-0.006	8307.259	5'234.4	13'541.7	33.3
5	0.69	171.88	421.88	4.06	0.002	-0.006	8307.445	5'755.1	14'062.5	33.3
5	0.75	187.50	437.50	4.08	0.001	-0.005	8307.613	6'275.7	14'583.3	33.3
5	0.81	203.13	453.13	4.07	-0.001	-0.004	8307.758	6'796.4	15'104.2	33.3
5	0.88	218.75	468.75	4.04	-0.003	-0.003	8307.876	7'317.1	15'625.0	33.3
5	0.94	234.38	484.38	3.99	-0.005	-0.002	8307.964	7'837.9	16'145.8	33.3
5	1.00	250.00	500.00	3.90	-0.007	-0.001	8308.016	8'358.7	16'666.7	33.3
6	0.00	0.00	500.00	3.90	-0.007	-0.001	8308.016	8'358.7	16'666.7	-66.7
6	0.50	15.63	515.63	3.78	-0.009	0.000	8308.033	7'317.0	15'625.0	-66.7
6	1.00	31.25	531.25	3.63	-0.010	0.001	8308.018	6'275.3	14'583.3	-66.7
7	0.00	0.00	531.25	3.63	-0.010	0.001	7240.855	7'342.5	14'583.3	-66.7
7	0.17	15.63	546.88	3.46	-0.012	0.002	7240.812	6'300.9	13'541.7	-66.7
7	0.33	31.25	562.50	3.26	-0.013	0.003	7240.742	5'259.3	12'500.0	-66.7
7	0.50	46.88	578.13	3.04	-0.014	0.003	7240.655	4'217.7	11'458.3	-66.7
7	0.67	62.50	593.75	2.81	-0.015	0.003	7240.557	3'176.1	10'416.7	-66.7
7	0.83	78.13	609.38	2.56	-0.016	0.003	7240.456	2'134.5	9'375.0	-66.7
7	1.00	93.75	625.00	2.31	-0.016	0.003	7240.360	1'093.0	8'333.3	-66.7
8	0.00	0.00	625.00	2.31	-0.016	0.003	3692.776	4'640.6	8'333.3	-66.7
8	0.17	15.63	640.63	2.05	-0.017	0.004	3692.675	3'599.0	7'291.7	-66.7
8	0.33	31.25	656.25	1.77	-0.018	0.004	3692.557	2'557.4	6'250.0	-66.7
8	0.50	46.88	671.88	1.48	-0.019	0.004	3692.431	1'515.9	5'208.3	-66.7
8	0.67	62.50	687.50	1.18	-0.019	0.004	3692.305	474.4	4'166.7	-66.7
8	0.83	78.13	703.13	0.89	-0.019	0.004	3692.185	-567.2	3'125.0	-66.7
8	1.00	93.75	718.75	0.59	-0.019	0.003	3692.081	-1'608.7	2'083.3	-66.7
9	0.00	0.00	718.75	0.59	-0.019	0.003	0.209	2'083.1	2'083.3	-66.7
9	0.50	15.63	734.38	0.30	-0.019	0.003	0.109	1'041.6	1'041.7	-66.7
9	1.00	31.25	750.00	0.00	-0.019	0.004	0.000	0.0	0.0	-66.7
Valeur minimale				0.00	-0.02	-0.01	0.00	-1025.04	0.00	-66.67
Valeur maximale				4.08	0.01	0.00	8308.03	8358.65	16666.67	33.33

Tab. A10-2. Tabellarische Darstellung der Berechnungsergebnisse aus dem Programmsystem COMIX für den asymmetrisch punktuell belasteten Verbundträger
Verlauf der globalen Zustandsgrößen

Literatur

- /ABE87/ Abelein, W. Ein einfaches Verfahren zur Berechnung von Verbundkonstruktionen
Der Bauingenieur 62 (1987) 4 S. 127-132
- /AIC87.1/ Aicher, S. Ein modifiziertes γ -Verfahren für das mechanische Analogon: drei-
Roth, v. W. schichtiger Sandwichverbund - zweiteiliger verschieblicher Verbund
Bautechnik 64 (1987) 1 S. 21-29
- /AIC87.2/ Aicher, S. Bemessung biegebeanspruchter Sandwichbalken mit dem modifizier-
ten γ -Verfahren
Bautechnik 64 (1987) 3 S. 79-86
- /AIC87.3/ Aicher, S. Untersuchungen über Nagelplatten-Spanplattenverbindungen für eine
Deimling, T. neue Stahl-Holz-Verbundbauweise
Holz als Roh- und Werkstoff 45 (1987) 6 S. 481- 486
- /AIC87.4/ Aicher, S. Zum Einfluß des Randabschlusses bei Sandwichelementen unter
Noack, D. Feuchtigkeits- und Temperaturbeanspruchung
Der Bauingenieur 62 (1987) 9 S. 263-272
- /AIC88/ Aicher, S. Zur Berechnung und Konstruktion von Verbundelementen und
Verbundmaterialien
Holz als Roh- und Werkstoff 46 (1988) 5 S. 465- 471
- /AIC89/ Aicher, S. Berechnung und Bemessung axial gedrückter Sandwich-Wand-
scheiben mit Holzwerkstoffbeplankung
Bautechnik 66 (1989) 5 S. 159-168
- /ALQ89/ Al-Quara, H. Finite Deflections of Sandwich Beams and Plates by Finite Element
Method
J. Eng. Mech. 115 (1989) 6 S. 1318-1335
- /AMB77/ Ambos, G. Zur wirklichkeitsnahen Berechnung aussteifender Bauteile von
Hochhäusern
Mitteilungen aus dem Institut für Massivbau der TH Darmstadt
Heft 24 (1977) Darmstadt
- /ANA88/ Anastasiadis, K. Einheitliche Methode für die Berechnung gekoppelter Rahmen-
Avramidis, I. E. Scheiben-Systeme auf elastischer Gründung
Bautechnik 65 (1988) 4 S. 127-140
- /AVR82/ Avramidis, I. E. Übertragungs- und Steifigkeitsmatrizen für den elastisch gebetteten
Zug- und Druckstab nach der Theorie II. Ordnung
Bautechnik 59 (1982) 3 S. 99-104
Bautechnik 59 (1982) 4 S. 140-143
- /BAK87/ Bakht, B. Load Distribution in Laminated Timber Decks
J. Struc. Eng. 113 (1987) 7 S. 1551-1570
- /BEC56/ Beck, H. Ein neues Berechnungsverfahren für gegliederte Scheiben, darge-
stellt am Beispiel des Vierendeelträgers
Der Bauingenieur 31 (1956) 12 S. 436- 443

- /BEC69.1/** Beck, H. Die aussteifende Wirkung aufgenagelter Bretterschalung bei gedrückten Gurten
Der Bauingenieur 44 (1969) 1 S. 22-27
- /BEC69.2/** Beck, H. Ein neues Berechnungsverfahren für gegliederte Scheiben
Der Bauingenieur 44 (1969) 3 S. 80-87
- /BEI85/** Beisel, T. Eigenspannungs-Schnittgrößen zur Berechnung von Verbundtragwerken im Gebrauchszustand
Sedlacek, G. Der Bauingenieur 60 (1985) 9 S. 261
- /BEL90/** Belica, A. Formulas for Shear-Lag Effect of T-, I- and Box-Beams
J. Struc. Eng. 116 (1990) 5 S. 1148-1150
- /BER74/** Bergfelder, J. Näherungsverfahren zur Berechnung allgemeiner zusammengesetzter hölzerner Biegeträger mit elastischem Verbund
Der Bauingenieur 49 (1974) 9 S. 350-357
- /BET91/** Betonkalender 1991, Teil 1 und 2
Ernst&Sohn 1991
- /BEU89/** Beuth-Kommentare, Holzbauwerke
Eine ausführliche Erläuterung zu DIN 1052 Teil 1 bis Teil 3
Beuth Bauverlag 1989
- /BOD85/** Bode, H. Hybride Verbundträger ohne Stahlberggurt für den Hochbau
Schanzenbach, J. Der Stahlbau 54 (1985) 6 S. 186-187
- /BOD89/** Bode, H. Tragverhalten von Verbundträgern bei Berücksichtigung der Dübelnachgiebigkeit
Der Stahlbau 58 (1989) 2 S. 65-74
- /BOD91/** Bode, H. Versuche mit Verbundträgern bei niedrigem Verdübelungsgrad
Der Stahlbau 60 (1991) 9 S. 263-264
- /BOE70/** de Boer, R. Die näherungsweise Ermittlung der mittragenden Breite bei geraden prismatischen Stäben mit geschlossenen dünnwandigen Profilen
Der Stahlbau 39 (1970) 1 S. 16-20
- /BOH89/** Bohnhoff, D. R. Modelling Vertically Mechanically Laminated Lumber
et al. J. Struc. Eng. 115 (1989) 10 S. 2661-2679
- /BOH92/** Bohnhoff, D. R. Modelling Horizontally Nail-Laminated Beams
J. Struc. Eng. 118 (1992) 5 S. 1393-1406
- /BOR52/** Bornscheuer, F. W. Systematische Darstellung des Biege- und Verdrehvorganges unter besonderer Berücksichtigung der Wölbkrafttorsion
Der Stahlbau 21 (1952) 1 S. 1-9
- /BRO68/** Bronstein Taschenbuch der Mathematik
Semendjajew Verlag H. Deutsch, Zürich 1968
- /BRY87/** Bryant, A. Built-Up Wood Columns
J. Struc. Eng. 113 (1987) 1 S. 107-121

- /BUF62/ Bufler, H. Die Bestimmung des Spannungs- und Verformungszustandes eines geschichteten Körpers mit Hilfe von Übertragungsmatrizen
Ingenieur-Archiv 31 (1962) 4 S. 229-240
- /BUF68/ Bufler, H. Zur Theorie diskontinuierlicher und kontinuierlicher Verdübelung
Ingenieur-Archiv 37 (1968) 3 S. 176-188
- /CAL86/ Calixto, J. M. A Geometrically Nonlinear, One-Dimensional, Composite Element for Analyzing Light-Frame Wood Structures
Wheat, D. L. J. Struc. Div. 111 (1986) S. 809-817
- /CLA55/ Clark, L. G. Buckling of Laminated Columns
J. Appl. Mech. 96 (1955) 8 S. 553-556
- /COL60/ Collatz, L. Differentialgleichungen für Ingenieure
B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart 1960
- /CZI79.1/ Cziesielski, E. Dachscheiben aus Spanplatten Teil 1
Wagner, C. Bauen mit Holz 81 (1979) 1 S. 6-10
- /CZI79.2/ Cziesielski, E. Dachscheiben aus Spanplatten Teil 2
Wagner, C. Bauen mit Holz 81 (1979) 2 S. 60-63
- /CZI88/ Cziesielski, E. Statische Berechnungen, Teil 1: Prüffähige Rechenbeispiele
Arbeitsgemeinschaft Holz e. V. Düsseldorf 1988
- /DAN90/ Daniels, B. J. Comportement et capacité portante des dalles mixtes: Modelisation mathématique et étude expérimentale
Thèse No 895 Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne 1990
- /DAV86/ Davies, J. M. An Exact Finite Element for Beam on Elastic Foundation Problems
J. Struct. Mech. 14 (1986B) 4 S. 489-499
- /DAV87/ Davies, J. M. Axially Loaded Sandwich Panels
J. Struct. Eng. 113 (1987) 11 S. 2212-2230
- /DEI63/ Deinhard, M. Die Tragfähigkeit historischer Holzkonstruktionen
Bruderverlag Karlsruhe 1963 47 S.
- /DIM81/ Dimitrov, N. Erweitertes Reduktionsverfahren und Übertragungsmatrizen für Stabwerke
Forschungsberichte aus dem Institut für Tragkonstruktionen und Konstruktives Entwerfen, Universität Stuttgart Nr. 7 1981
- /DIN88/ DIN 1052: Holzbauwerke 4 (1988)
Teil 1: Berechnung und Ausführung
Teil 2: Mechanische Verbindungen
Teil 3: Holzhäuser in Tafelbauart-Berechnung und Ausführung
- /DRÖ55/ Dröge, G. 25 Jahre Holznagelbau in Versuch und Praxis
Bautechnik 32 (1955) 2 S. 37-44
- /DRÖ61/ Dröge, G. Über zusammengesetzte Stäbe und Träger im Holzbau unter Berücksichtigung der Vorschläge für die Neufassung der DIN 1052
Jäger, J. Bautechnik 38 (1961) 10 S. 351-353

- /DUB88/ Dubas, P. Zusammengesetzte Holzstäbe mit unsymmetrischem zweiteiligem Querschnitt
SIA 106 (1988) 9 S. 243-245
- /EGN53.1/ Egner, K. Versuche mit zweiteiligen, geleimten Holzstützen
Fortschritte und Forschungen im Bauwesen Reihe D Nr. 9 1953
Frank'sche Verlagsbuchhandlung Stuttgart
- /EGN53.2/ Egner, K. Biegeschwellbelastung 35 m langer, genagelter Vollwandträger
Fortschritte und Forschungen im Bauwesen Reihe D Nr. 9 1953
Frank'sche Verlagsbuchhandlung Stuttgart
- /EHL67/ Ehlbeck, J. Praktische Berechnung und Bemessung nachgiebig zusammengesetzter Holzbauteile
Köster, P. Bauen mit Holz 69 (1967) 6 S. 289-294
Schelling, W.
- /ENG22/ Engesser, Fr. Über verdübelte Balken
Der Bauingenieur 3 (1922) 8 S. 226-229
- /ENG88/ Engeln-Müllges, G. Formelsammlung zur numerischen Mathematik mit Standard-FORTRAN 77-Programmen
Reutter, F. Bibliogr. Inst. & F.A. Brockhaus AG Zürich (1988)
- /FAL89/ Falk, R. Finite Element Modeling of Wood Diaphragms
Itani, R. J. Struc. Eng. 115 (1989) 3 S. 543-559
- /FAL83/ Falke, J. Die Berechnung regelmäßig gegliederter Träger als Kontinuum
Der Bauingenieur 58 (1983) S. 341-347
- /FIS87/ Fischer, M. Verzweigungslasten von Beul- und Gesamtstabilitätsproblemen nach der Finite-Streifen-Methode
Jianzhong, Z. Der Stahlbau 56 (1987) 12 S. 377-383
- /FOS82/ Foschi, R. O. Structural Analysis of Wood Floor Systems
J. Struc. Div. 107 (1982) 7 S. 1557-1574
- /FOS85/ Foschi, R. O. Wood Floor Behaviour : Experimental Study
J. Struc. Eng. 111 (1985) 11 S. 2497-2508
- /GEH81/ Gehri, E. Einführung in die Norm SIA 164 (1981), Holzbau Grundlagen der Berechnung und Bemessung
Institut für Baustatik und Stahlbau der ETH Zürich
Publikation Nr. 81-1 (1981)
- /GER73/ Géry, P.-M. Les matrices-transfer dans le calcul des structures
Calgaro, J.-A. Editions Eyrolles Paris 1973
- /GHA86/ Ghali, A. Stresses and Deformations of Composite Members
Favre, R. IABSE Proceedings P-94/86 (1986) S. 1-16
- /GIE64/ Gienke, E. Zur Berechnung regelmäßiger Strukturen als Kontinuum
Der Bauingenieur 33 (1964) 1 S. 39-48
- /GIR91/ Girhammar, U.A. Analysis of P- Δ Effect in Composite Concrete/Timber Beam-Columns
Gopu, V.K.A. Proc. Instn Engrs, Part 2 91 (1991) 3 S. 39-54

- /GIR93/ Girhammar, U.A. Composite Beam-Columns with Interlayer Slip - Exact Analysis
Gopu, V.K.A. J. Struc. Eng. 119 (1993) 4 S. 1265-1282
- /GOD84/ Godycki, T. et al. Verbunddecke aus Holzrippen und Betonplatte
Der Bauingenieur 59 (1984) 12 S. 477-483
- /GÖH70/ Göhring, R. Numerische Beispiele zur Berechnung der Beulwerte ebenflächiger
Sandwichkonstruktionen
VDI Fortschrittsberichte Reihe 1 Nr. 28 (1970) 95 S.
- /GOP84/ Gopu, V.K.A. Finite Element Analysis of Wood Floor Systems with GTSTRUDL
Kumar, N. J. Struc. Div. 109 (1984) S. 29-36
- /GOP91/ Gopu, V.K.A. Approximation of Second Order Effects in Composite Timber Beam-
Diago, J.C. Columns
Girhammar, U.A. J. Struc. Div. 116 (1991) S. 872-880
- /GRA30/ Graf, O. Biegeversuchen mit verdübelten Holzbalken
Der Bauingenieur 11 (1930) 10 S. 157-160
- /GRA31/ Graf, O. Aus Versuchen mit hölzernen Stützen und mit Baustangen
Der Bauingenieur 12 (1931) 49 S. 862-865
- /GRA36/ Graf, O. Versuche mit mehrteiligen hölzernen Stützen
Der Bauingenieur 17 (1936) 1 S. 1-3
- /GRA49/ Granholm, H. Om sammanata balkar och pelare med särskild hänsyn till spikade
träkonstruktioner
Chalmers Univ. of Techn. No. 88 Göteborg 1949
- /GÜL83/ Guldenpfennig, J. Zum Verhalten von gekrümmten Brettschichtträgern bei Feuchtigkeits-
Krabbe, E. änderung
Der Bauingenieur 58 (1983) S. 459-462
- /GÜN91/ Günther, G. Verbund-Modell für Stahlbetontragwerke
Mehlhorn, G. Beton- und Stahlbetonbau 86 (1991) 9 S. 226-228
- /HEE79/ Hees, G. Anwendung des Übertragungsverfahrens bei stark abklingenden
Lösungsfunktionen
Ingenieur-Archiv 49 (1979) 1 S. 1-6
- /HEE85/ Hees, G. Besonderheiten bei Berechnungen nach der Theorie II. Ordnung
Bautechnik 62 (1985) 4 S. 123-130
- /HEE89/ Hees, G. Zum Abklingen von Störungen
Baziraake, F. Bautechnik 66 (1989) 6 S. 201-206
- /HEE90/ Hees, G. Zur Linearisierung nichtlinearer Beziehungen in der Stabstatik
Bautechnik 67 (1990) 3 S. 97-103
- /HEG79/ Hegedüs, I. Buckling of Axially Compressed Cylindrical Sandwich Shells
Acta Techn. Acad. Sci. Hung. 89 (1979) S. 377-387
- /HEG84/ Hegedüs, I. Buckling of Sandwich Columns with Thick Faces Subjected to
Kollár, L. Axial Loads of Arbitrary Distribution
Acta Techn. Acad. Hung. 97 (1984) S. 123-131

- | | | |
|-----------|----------------------------|---|
| /HEG87/ | Hegedüs, I.
Kollár, L. | Stabilitätsuntersuchungen von Rahmen und Wandscheiben mit der Sandwichtheorie
Bautechnik 64 (1987) 12 S. 420-425 |
| /HEI53.1/ | Heilig, R. | Theorie des starren Verbunds
Der Stahlbau 22 (1953) 4 S. 84-90 |
| /HEI53.2/ | Heilig, R. | Theorie des elastischen Verbunds
Der Stahlbau 22 (1953) 5 S. 104-108 |
| /HEI81/ | Heimeshoff, B. | Zur Berechnung von Holz-Kastenträgern aus nachgiebig verbundenen Einzelteilen bei Torsionsbeanspruchung
Der Bauingenieur 56 (1981) S. 285-291 |
| /HEI87/ | Heimeshoff, B. | Zur Berechnung von Biegeträgern aus nachgiebig miteinander verbundenen Querschnitten im Ingenieurholzbau
Holz als Roh- und Werkstoff 45 (1987) 6 S. 237-241 |
| /HEI89/ | Heinisuo, M. | Exact Finite Element Method for Layered Beams
Tampere University of Technologie Publications 56, 1989 |
| /HEI91.1/ | Heimeshoff, B. | Nachweis der Tragsicherheit und Gebrauchstauglichkeit von Einfeldträgern, die aus nachgiebig miteinander verbundenen Querschnittsteilen bestehen, im Ingenieurholzbau
Holz als Roh- und Werkstoff 49 (1991) 7/8 S. 243-249 |
| /HEI91.2/ | Heimeshoff, B. | Näherungsverfahren zur Berechnung von Einfeldträgern mit Kragarm und von Zweifeldträgern, die aus nachgiebig miteinander verbundenen Querschnittsteilen bestehen, im Ingenieurholzbau
Holz als Roh- und Werkstoff 49 (1991) 7/8 S. 277-285 |
| /HEN72/ | Henghold, W. | Static and Dynamic Behaviour of Layered Beams Including Slip
Comp. Mat. in Eng. Des. ASME (1972) S. 81-92 |
| /HEN82/ | Henke, P.
Kiener, G. | Ein Verfahren zur Ermittlung von Stabendschnittgrößen und Stabendverformungen nach Theorie II. Ordnung bei beliebiger Belastung und Vorverformung
Der Bauingenieur 57 (1982) S. 269-274 |
| /HER92/ | Hertle, R. | Zur dynamischen Analyse von schubweich und diskret gekoppelten Mehrschichtträgern
Diss. TU München, Berichte aus dem Konstruktiven Ingenieurbau 2/92 |
| /HOE87/ | Hoefl, M. | Les constructions mixtes bois-béton
Proc. AFNOR Symposium Nancy 1987 |
| /HOE91/ | Hoefl, M.
Kaelin, J. F. | Halle d'exposition en planches visées
J. Construction 17 (1991) 9 S. 5-12 |
| /HOE92/ | Hoefl, M.
Kaelin, J. F. | Ausstellungspavillon in Brettstapelbauweise
Schweizer Baublatt (1992) 2 S. 23-30 |
| /HOI52/ | Hoischen, A. | Beitrag zur Berechnung zusammengesetzter Vollwandträger mit elastischen Verbindungsmitteln
Dissertation TU Karlsruhe 1952 |

- /HOI54/ Hoischen, A. Verbundträger mit elastischer und unterbrochener Verdübelung
Der Bauingenieur 29 (1954) 7 S. 241-244
- /HOM52/ Homberg, H. Brücke mit elastischem Verbund zwischen den Stahlhauptträgern und
der Betonfahrbahntafel
Der Bauingenieur 27 (1952) 6 S. 213-216
Zuschrift und Erwiderung
Der Bauingenieur 28 (1953) 1 S. 35-36
- /HUG72/ Hug, B. Der ausmittig gedrückte und querbelastete, ein- und mehrteilige
Holzdruckstab
Dissertation TU Karlsruhe 1972
- /ITA79/ Itani, R. Nonlinear Analysis of Sheated Wood Diaphragms
Cheung, C. J. Struc. Div. 104 (1979) S. 2137-2147
- /ITA81/ Itani, R. Partial Composite Action in Diaphragms
Hiremath, G. J. Struc. Div. 106 (1981) 4 S. 739-751
- /KAM87/ Kamiya, F. Buckling of Sheated Walls : Linear Analysis
J. Struc. Eng. 113 (1987) 9 S. 2009-2022
- /KAM88/ Kamiya, F. Buckling of Sheated Walls : Nonlinear Analysis
J. Struc. Eng. 114 (1988) 3 S. 625-641
- /KER62/ Kersten, K. Das Reduktionsverfahren der Baustatik
Springer-Verlag, Berlin 1962
- /KES84/ Kessel, M. H. Zur Bemessung von Holzdruckstäben
et al. Bauen mit Holz 86 (1984) 8 S. 195-202
- /KIE81/ Kiener, G. Steifigkeitsmatrizen nach der Theorie 2. Ordnung von elastisch
angeschlossenen Stäben im Holzbau
Der Bauingenieur 56 (1981) S. 293-297
- /KIN83/ Kindmann, R. Starr gestützte durchlaufende Träger und Stützen - Schnittgrößen nach
Theorie I. und II. Ordnung und Verzweigungslasten
Der Bauingenieur 56 (1983) S. 323-328
- /KIK90/ Kikuchi, S. Analysis of Wood Stressed-Skin Panels with Interlayer Slip under
Combined Bending and Compressive Loads
J. Struc. Div. 65 (1990) S. 359-368
- /KIR87/ Kirch, A. Mathematik wirklich verstehen
Aulis Verlag Deubner, Köln 1987
- /KLE85/ Klement, P. Die Berechnung komplizierter Verbundstabwerke unter Verwendung
üblicher Programme
Der Bauingenieur 60 (1985) 12 S. 347-350
- /KNE90/ Kneidl, R. Ein numerisches Verfahren zur Berechnung von Trägern mit
veränderlichem nachgiebigem Verbund
Der Bauingenieur 65 (1990) S. 281-288

- /KNE91/ Kneidl, R. Ein Beitrag zur linearen und nichtlinearen Berechnung von Schichtbalkensystemen
Diss. TU München, Berichte aus dem Konstruktiven Ingenieurbau 6/91
- /KOL85/ Kollar, L. P. Die paradoxe Abnahme der Tragfähigkeit infolge Verstärkung des Querschnittes
Bautechnik 62 (1985) 8 S. 264-270
- /KOL86/ Kollar, L. P. Buckling Analysis of Coupled Shear Walls by the Multilayer Sandwich Model
Acta Techn. Acad. Sci. Hung. 99 (1986) S. 317-332
- /KRÖ79/ Kröger, C. Unmittelbare Bestimmung des Verbindungsmittelabstandes e' bei mehrteiligen, kontinuierlich verbundenen Querschnitten
Bauen mit Holz 81 (1979) 12 S. 670-672
- /KUM87/ Kumar, N. Stiffness of Framing Members with Partial Composite Action
J. Struc. Eng. 113 (1987) 12 S. 2522-2524
- /LAW92/ Lawson, R. M. Tests on Composite Beams with Large Web Openings to justify Existing Design Methods
The Structural Engineer 70 (1992) 1 S. 1-7
- /LEC63/ Leckie, F. A. The Application of Transfer Matrices to Plate Vibrations
Ingenieur-Archiv 32 (1963) 2 S. 100-111
- /LEI89/ Leichti, R. J. Predicting the Load Capacity of Wood Composite I-Beams using the Tensor Polynomial Strength Theory
Tang, R. C. Wood Science and Technology 23 (1989) 2 S. 109-121
- /LIS85/ Lischke, N. Zur Anisotropie von Verbundwerkstoffen am Beispiel von Brettlagenholz
VDI-Fortschrittsberichte Reihe 5 Nr. 98 (1985)
- /LJU16/ Ljungberg, K. Beitrag zur Berechnung von Rahmenbalken (Vierendeel-Balken)
Der Eisenbau 7 (1916) 4 S. 77-83
- /LJU42/ Ljungberg, K. Einiges über gegliederte Balken und Druckstäbe
Der Bauingenieur 23 (1942) 27/28 S. 195-202
- /LOM51/ Lombardi, G. Der zusammengesetzte Druckstab aus Holz
Schweizerische Bauzeitung 69 (1951) 22 S. 301-303
- /MAH81/ Mahr, D. Elastisch gebettete Träger mit veränderlicher Steifigkeit und Bettung : Numerische Lösung
Der Bauingenieur 56 (1981) S. 349-352
- /MAR63/ Marguerre, K. Berechnung vielgliedriger Gelenkketten I.
Uhrig, R. ZAMM 44 (1963) 1 S. 1-21
- /MCC86/ McCutcheon, W. Stiffness of Framing Members with Partial Composite Action
J. Struc. Eng. 112 (1986) 7 S. 1623-1635
- /MIS77/ Mistler, L. Zur Berechnung der mittragenden Plattenbreite doppelschaliger Tafelemente
Holz als Roh- und Werkstoff 35 (1977) S. 95-98

- /MÖH42/ Möhler, K. Tragkraft und Querkraft von ein- und mehrteiligen Holzdruckstäben nach Versuch und Rechnung
Dissertation Universität Karlsruhe 1942
- /MÖH53/ Möhler, K. Biege- und Knickversuche mit zusammengesetzten Holzdruckstäben
Fortschr. u. Forsch. im Bauwesen Reihe D Nr. 9 1953
Frank'sche Verlagsbuchhandlung Stuttgart
- /MÖH55/ Möhler, K. Biege- und Knickversuche an Stützen mit zusammengesetzten, kontinuierlich vernagelten Holzquerschnitten
Fortschr. und Forsch. im Bauwesen Reihe D Nr. 20 1955
Frank'sche Verlagsbuchhandlung Stuttgart
- /MÖH56/ Möhler, K. Über das Tragverhalten von Biegeträgern und Druckstützen mit zusammengesetzten Querschnitten und nachgiebigem Verbindungsmitteln
Habilitation TU Karlsruhe 1956
- /MÖH63/ Möhler, K. et al.. Zur Berechnung doppelseitiger, geleimter Tafелеlemente
Holz als Roh- und Werkstoff 21 (1963) 8 S. 328
- /MÖH66/ Möhler, K. Die Bemessung der Verbindungsmittel bei zusammengesetzten Biege- und Druckgliedern im Holzbau
Bauen mit Holz 68 (1966) 4 S. 18-23
- /MÖH68.1/ Möhler, K. Schelling, W. Zur Bemessung von Knickverbänden und Knickaussteifungen im Holzbau
Der Bauingenieur 43 (1968) 2 S. 43-48
- /MÖH68.2/ Möhler, K. Erwiderung zu /ZAE68.1/
Der Bauingenieur 43 (1968) 7 S. 272
- /MÖH68.3/ Möhler, K. Erwiderung zu /ZAE68.2/
Der Bauingenieur 43 (1968) 11 S. 430
- /MÖH71/ Möhler, K. Wirklichkeitsnahe Berechnung schwerbelasteter Holzbauteile
Schweizerische Bauzeitung 89 (1971) 1 S. 18-23
- /MÖH79/ Möhler, K. Steck, G. Näherungsformeln zur Berechnung von Verbundbauteilen aus Vollholz und Holzwerkstoffen
Holz als Roh- und Werkstoff 37 (1979) S. 221-225
- /MÖH86/ Möhler, K. Verschiebungsgrößen mechanischer Holzverbindungen der DIN 1052 E, Teil 2 (1984)
Bauen mit Holz 88 (1986) S. 206
- /MUR88/ Muravljov, M. et al. Test of Behaviour of the Elements made by Bonding the Wood and the Concrete with the Bonding Compound based on Epoxy Resins
Proc. Symposium Bordeaux/F (1988) S. 401-408
- /NAD89.1/ Najdekr, M. Analysis of the Roof and Floor Structures of OKAL-System
Proc. Symposium Bordeaux/F (1989) S.19-28
- /NAD89.2/ Najdekr, M. Zur Analyse geleimter doppelschaliger Holztafel-Elemente
Holz als Roh- und Werkstoff 47 (1989) S. 61-66

- /NAT87.1/ Natterer, J.
Hoefl, M. Zum Tragverhalten von Holz-Beton-Verbundkonstruktionen
Forschungsbericht CERS 1345 (1987) 143 S.
- /NAT87.2/ Natterer, J. et al. Konstruktion und Bemessung von Holz-Beton-Verbunddecken
Festschrift Herbert Kupfer (1987) 8 Seiten
- /NAT89.1/ Natterer, J. Holz-Beton-Verbundkonstruktionen
Schweiz. Patentamt (1989) Gesuch Nr. 04 334/89-7
- /NAT89.2/ Natterer, J. et al. Die material-, ausführungs- und nutzungsbezogene Formoptimierung
von leichten Flächentragwerken
Forschungsbericht EPFL-IBOIS, Lausanne (1989)
- /NAT91/ Natterer, J. et al. Holzbau-Atlas 2
Institut für Int. Architektur-Dokumentation München 1991
- /NAT92.1/ Natterer, J.
Hoefl, M. Holz-Beton-Verbundkonstruktionen : Entwicklung eines neuen
Verbindungsmittels
Forschungsbericht CERS 1648 (1992) 105 S.
- /NAT92.2/ Natterer, J.
Hoefl, M. Kloster Wurmsbach: Sanierung der Holzbalkendecken
Expertise EPFL-IBOIS (1992)
- /NAT93/ Natterer, J.
Hoefl, M. Expertise Triesenberg
Versuchsbericht EPFL-IBOIS (1993)
- /NAV91/ Navi, P.,
Martensson, A. Behaviour of Timber and Concrete Composite Load-Bearing
Structures (Chap. 3.4 Environmental Dependent Behaviour)
RILEM-TC 111, Dübendorf (1991) 16 Seiten
- /NOL91/ Nolin, B. On a Theory for Composite Timber Beams with Nonlinear Connectors
Proc. TRADA London 1991 S. 3.267-3.274
- /OBH83.1/ Obholzer, A. Zur Erfassung normgerechter Kriechgesetze unter Berücksichtigung
der Spannungsgeschichte bei der elektronischen Berechnung von
Verbundtragwerken
Der Bauingenieur 58 (1983) 2 S. 51-54
- /OBH83.2/ Obholzer, A. Elektronische Berechnung von Verbundtragwerken unter
Berücksichtigung von Schwinden und Kriechen nach CEB/FIP bei
praktischen Bauabläufen
Der Bauingenieur 58 (1983) S. 471-479
- /OLS86/ Olsen, P. C. Das Übertragungs- und Weggrößenverfahren für ebene
Stahlbetontragwerke unter Verwendung der Tangentensteifigkeiten
DAfStb Heft 373 (1986) 75 S.
- /PAP73/ Papsch, E. Eine lineare Stabtheorie für mehrteilige Stäbe mit elastischem Verbund
Dissertation TU Hannover, Institut für Bautechnik und Holzbau
Mitteilung Nr. 3/1973
- /PET63/ Petersen, Ch. Das Verfahren der Übertragungsmatrizen (Reduktionsverfahren) für
den kontinuierlich elastisch gebetteten Träger
Bautechnik 40 (1963) 3 S. 87-89
- /PET80/ Petersen, Ch. Statik und Stabilität der Baukonstruktionen
Verlag Vieweg Braunschweig (1980)

- /PIS68/ Pischl, R. Ein Beitrag zur Berechnung zusammengesetzter hölzerner Biegeträger
Der Bauingenieur 43 (1968) 12 S. 448-452
- /PIS69.1/ Pischl, R. Die praktische Berechnung zusammengesetzter hölzerner Biegeträger
mit Hilfstafeln zur Berechnung der Abminderungsfaktoren
Der Bauingenieur 44 (1969) 5 S. 181-185
- /PIS69.2/ Pischl, R. Die Auslegung der Verbindungsmittel bei zusammengesetzten
hölzernen Biegeträgern
Der Bauingenieur 44 (1969) 12 S. 448-452
- /PIS73/ Pischl, R. Die direkte Bemessung der Verbindungsmittel bei zusammengesetzten
hölzernen Biegeträgern im Holzbau unter Voraussetzung von DIN
1052, Absatz 5
Der Bauingenieur 48 (1973) 12 S. 293-296
- /PLA66/ Plantema, F.H. Sandwich Construction: The Bending and Buckling of Sandwich
Beams, Plates and Shells
John Wisley & Sons New York 1966
- /PLE52/ Pleskov, P. F. Teorija rasceta derevannyh sostavnyh stertznej
Moskau 1952
- /POL72/ Polensek, A. Response of Nailed Wood-Joist Floors to Static Loads
et al. Forest Product Journal 22 (1972) S. 52-61
- /POS88/ Postulka, J. Strengthening of Wooden Ceiling Constructions
Proc. IABSE (1988) S. 441-447
- /PÖT87/ Pöttler, R. Steifigkeitsmatrix für den in Stabrichtung gebetteten Stab
Bautechnik 64 (1987) 4 S. 135-1137
- /PRE66/ Prehl, H. Die genauere Berechnung der durch Stahl verstärkten Holzquerschnitte
Bautechnik 43 (1966) 4 S. 129-135
- /RAS70.1/ Rassam, H. Y. Buckling Behaviour of Layered Wood Columns
Goodman, J. R. Wood Science and Technology 2 (1970) 4 S. 238-246
- /RAS70.2/ Rassam, H. Y. Design of Layered Wood Columns with Interlayer Slip
Goodman, J. R. Wood Science 2 (1970) 5 S. 304-311
- /RIZ79/ Rizzo, R., Lateral Deflection of a Sandwich-Panel Building Model under
Fazio, P. Combined Loading
Experimental Mechanics 19 (1979) 6 S. 193-199
- /ROM84/ Romanów Kritische Belastungen von Sandwichkonstruktionen bei Anwendung
der hyperbolischen Hypothese des dreiaxialen Verschiebungszustandes
Der Bauingenieur 59 (1984) S. 229-233
- /ROS65/ Rosman, R. Die statische Berechnung von Hochhauswänden mit Öffnungsreihen
Bauingenieur Praxis Heft 65 Ernst&Sohn Berlin (1965)
- /ROS91/ Rosman, R. Knicken und Eigenschwingungen gegliederter Stäbe
Der Bauingenieur 66 (1991) 8 S. 231-237
- /ROT87/ Rothert, H. Nichtlineare Stabstatik
Gensichen, V. Springer Verlag Berlin, Heidelberg (1987)

- /RUB88.1/ Rubin, H. Eine einheitliche Formulierung des ebenen Stabproblems bei Berücksichtigung von M- und Q-Verformungen Theorie I. und II. Ordnung, elastischer Bettung einschließlich Drehbettung sowie harmonischen Schwingungen
Der Bauingenieur 63 (1988) S. 195-204
- /RUB88.2/ Rubin, H. Ein einfaches, allgemeingültiges Lösungskonzept für lineare Differentialgleichungen beliebiger Ordnung mit konstanten Koeffizienten und mit analytischer Störfunktion
ZAMM 68 (1988) 9 S. 433-443
- /RUB91/ Rubin, H. Einheitliche Stabformeln für Theorie I. und II. Ordnung bei Berücksichtigung von M- und Q-Verformungen
Der Bauingenieur 66 (1991) S. 131-141
- /RZA48/ Rzanicy, I. Theorie der Verbundelemente in Baukonstruktionen
Strojizdat Moskau 1948
- /SAA81/ Saal, G.
Saal, H. Grundformeln des Weggrößen- und Übertragungsverfahrens für Stäbe
Der Stahlbau 50 (1981) 6 S. 188-190
- /SAT55/ Sattler, K. Ein allgemeines Berechnungsverfahren für Tragwerke mit elastischem Verbund
Veröffentlichungen des Deutschen Stahlbau-Verbandes, Heft 8 (1955)
- /SAT59/ Sattler, K. Theorie der Verbundkonstruktionen
Ernst & Sohn, Berlin 1959
- /SAZ79/ Sazinski, R. J.
Vanderbilt, M. D. Behaviour and Design of Wood Joist Floors
Wood Science 11 (1979) 4 S. 209-220
- /SHÄ70/ Schäfer, H. Die numerische Ermittlung von Übertragungsmatrizen
Der Stahlbau 39 (1970) 2 S. 54-60
- /SHA88/ Schanzenbach, J. Der Einfluß der Dübelnachgiebigkeit auf das Tragverhalten von Verbundträgern
Der Stahlbau 57 (1988) 6 S. 188-190
- /SHE68/ Schelling, W. Die Berechnung nachgiebig verbundener, zusammengesetzter Biegeträger im Ingenieurholzbau
Dissertation TU Karlsruhe 1968
- /SHE82/ Schelling, W. Zur Berechnung nachgiebig zusammengesetzter Biegeträger aus beliebig vielen Einzelquerschnitten
Ingenieurholzbau in Forschung und Praxis, Karlsruhe 1982
- /SHI82/ Shigematsu, T.
et al. Untersuchung der Stabilität einseitig gedrückter, längsausgesteifter, orthotroper Rechteckplatten mit Schubverformung
Der Stahlbau 51 (1982) 6 S. 171-176
- /SHL78/ Schlee, W. Plattenbalken und andere mehrteilige Querschnitte
Beton- und Stahlbetonbau 73 (1978) 12 S. 299-306
Zuschrift von H. Schmidt und U. Peil, Erwiderung:
Beton- und Stahlbetonbau 75 (1980) 7 S. 178-180

- /SHM88/** Schmid, A. Beitrag zur Berechnung geschichteter Schalentragwerke mittels der Methode der Finiten Elemente
Dissertation Universität Innsbruck, Institut für Baustatik und verstärkte Kunststoffe, Bericht 4/1988
- /SHN55/** Schnell, W. Berechnung der Stabilität mehrfeldriger Stäbe mit Hilfe von Matrizen
ZAMM 53 (1955) 6 S. 269
- /SHU86/** Schuler, G. Durchlaufträger mit elastischem Verbund bei abschnittsweise veränderlichen Steifigkeiten
Dissertation Universität Karlsruhe 1986
- /SHW84/** Schwarze, K. Numerische Methoden zur Berechnung von Sandwichelementen
Der Stahlbau 53 (1984) 12 S. 363-370
- /SHW91/** Schwarze, K. Bemessung von Stahltrapezprofilen nach DIN 18 807 - Schubfeldbeanspruchung
Der Stahlbau 60 (1991) 3 S. 65-76
- /SIA81/** SIA 164: Holzbau (1981)
- /STA74/** Stamm, K., Witte, H. Sandwichkonstruktionen : Berechnung, Fertigung, Ausführung
Springer Verlag New York (1974)
- /STA84/** Stamm, K. Sandwichelemente mit metallischen Deckschichten als Wandbauplatten im Bauwesen
Der Stahlbau 53 (1984) 5 S. 135-143
- /STÜ43/** Stüssi, F. Beiträge zur Berechnung und Ausbildung zusammengesetzter Vollwandträger
Schweizerische Bauzeitung 121 (1943) 8 S. 87-89
121 (1943) 9 S. 102-103
- /STÜ47.1/** Stüssi, F. Über den verdübelten Balken
Schweizerische Bauzeitung 125 (1947) 24 S. 316-319
- /STÜ47.2/** Stüssi, F. Zusammengesetzte Vollwandträger
Abhandlungen der IVBH, Band 8 (1947) S. 249
- /ZA83/** Szalai, J. Ermittlung der während der Herstellung auftretenden Eigenspannungen und Verformungen bei gekrümmten Brettschichtträgern
Bautechnik 60 (1983) 2 S. 37-41
Bautechnik 60 (1983) 3 S. 87-90
- /TAN84/** Tan, B. T. Druckstäbe mit einachsiger Biegung im Holzbau
Bautechnik 61 (1984) 6 S. 187-191
- /TAR85/** Tarpay, T. S. Continuous Timber Diaphragms
Soltis, L. A. J. Struc. Eng. 111 (1985) 5 S. 992-1001
- /TES85/** Tesár, A. Transfer Matrix Method
Fillo, L. Kluwer Academic Publisher, Amsterdam 1985

- /THO77/ Thompson, E. G. et al. FEAFLO : A Program for the Analysis of Layered Wood Systems
Computer & Structures 7 (1977) S. 237-248
- /TSU83/ Tsujino, T. Koizuma, A. Nonlinear Bending Analysis of Two-Layered Wood Beams
connected with Nails
J. Jap. Wood Res. Soc. 29 (1983) 9 S. 553
- /VAN92/ Van Dyer, D. B. Strength and Efficiency of Wood Box Columns
J. Struc. Eng. 118 (1992) 3 S. 716-722
- /UHR65/ Uhrig, R. Finite Berechnung von Schwingern mit kontinuierlich verteilter Masse
und Nachgiebigkeit
Ingenieur-Archiv 34 (1965) 2 S. 95-108
- /WIE68/ Wiedemann, J. Untersuchungen zum Randeinfluß und zur Anwendung von
Übertragungsmatrizen bei der Beulwertberechnung an Sandwichplatten
VDI Fortschrittsberichte Reihe 1 Nr. 13 (1968) 85 S.
- /WIP90/ Wipf, T.J. et al. Glued Laminated Timber Bridge Modeling
J. Struc. Eng. 116 (1990) 4 S. 1121-1134
- /WÖL87/ Wölfel, E. Nachgiebiger Verbund : Eine Näherungslösung und deren
Anwendungsmöglichkeiten
Der Stahlbau 56 (1987) 6 S. 173-180
- /WÖL90/ Wöllner, G. Stahltrapez-Platten-Verbund
Der Stahlbau 59 (1990) 12 S. 369-378
- /WUN67/ Wunderlich, W. Zur Berechnung von Rotationsschalen mit Übertragungsmatrizen
Ingenieur-Archiv 36 (1967) S. 262-279
- /ZÄH68.1/ Zähringer Zuschrift zu /MÖH68.1/
Der Bauingenieur 43 (1968) 5 S. 188
- /ZÄH68.2/ Zähringer Zuschrift zu /MÖH68.2/
Der Bauingenieur 43 (1968) 11 S. 430
- /ZAJ89.1/ Zajicek, P. Holz-Beton-Verbunddecken mit nachgiebigem Verbund
ÖIAZ 134 (1989) 2 S. 94-100
- /ZAJ89.2/ Zajicek, P. Bemessungsvorschlag für Holz-Beton-Verbunddecken
ÖIAZ 134 (1989) 9 S. 456-462
- /ZAJ89.3/ Zajicek, P. Verstärkung von Holzdecken durch Ergänzung zu einer Holz-Beton-
Verbundkonstruktion
Dissertation, Technische Universität Wien 1989
- /ZÖL92/ Zöllig, St. Holz-Beton-Verbundkonstruktionen in der Altbau-
sanierung
unveröffentlichte Diplomarbeit, EPFL-IBOIS, Lausanne 1992

Curriculum Vitae

HOEFT, Michael

10. 06. 1956 geboren in Birkenfeld/Nahe, Deutschland
- 1975 Abitur in Mainz, Deutschland
- 1976 - 1982 Studium des Bauingenieurwesens und der Architektur an der TH Darmstadt, Deutschland
- 1982-1983 Studium des Bauingenieurwesens an der ETH Lausanne, Schweiz
- 1984 Abschluss als Diplom-Ingenieur
- 1984 - 1993 Assistent am Institut für Holzkonstruktionen der ETH Lausanne, Prof. J. Natterer
- Freier Mitarbeiter im Ingenieurbüro Bois Consult Natterer S.A., Etoy, Schweiz und in der Planungsgesellschaft Natterer & Dittrich, München, Deutschland
- seit 1993 Professor für Baustatik und Holzbau an der Fachhochschule Kiel, Fachbereich Bauwesen in Eckernförde, Deutschland

Berufliche Tätigkeiten

- Forschung auf dem Gebiet der Verbundkonstruktionen, Flächentragwerke, Stabilitätsprobleme und andere
- Lehrtätigkeit und Veröffentlichungen im Bereich des Ingenieurholzbaus
- Mitglied des Technischen Ausschusses RILEM TC 111 CST
- Mitarbeit an zahlreichen ausgeführten Bauprojekten

