

# LUBRIFICATION THERMOELASTOHYDRODYNAMIQUE UNE APPROCHE GLOBALE

THESE No 1056 (1992)

PRESENTÉE AU DEPARTEMENT DE MECANIQUE

ECOLE POLYTECHNIQUE FEDERALE DE LAUSANNE

POUR L'OBTENTION DU GRADE DE DOCTEUR ES SCIENCES TECHNIQUES

PAR

**PIERRE PAHUD**

*Ingénieur mécanicien diplômé EPF  
originaire de Poliez Pittet et Bottens (VD)*

acceptée sur proposition du jury :

Prof. F. Pruvot, rapporteur  
Dr A. Curnier, corapporteur  
Prof. G. Dalmaz, corapporteur  
Prof. M. Del Pedro, corapporteur  
Dr L. Houpert, corapporteur

Lausanne, EPFL  
1992



## REMERCIEMENTS

Cette thèse a été réalisée au sein du Laboratoire de Machines-outils et Automates (LMO) de l'Institut de Mécanique appliquée et de Construction des Machines (IMECO) de l'Ecole polytechnique fédérale de Lausanne (EPFL) dirigé par Monsieur le Professeur François Pruvot.

Ma très vive gratitude va à Monsieur François Pruvot, directeur de thèse, pour m'avoir proposé d'entreprendre cette étude en me faisant profiter de son expérience et de ses judicieux conseils, ainsi que pour l'intérêt et la confiance qu'il m'a manifestés tout au long de ce travail.

J'exprime ma reconnaissance et ma sympathie au Docteur Alain Curnier du Laboratoire de Mécanique appliquée pour sa disponibilité, son aide et ses précieux apports pour la partie numérique de cette étude, et en particulier pour la mise à disposition de son programme d'éléments finis TACT.

Je tiens à remercier tout particulièrement Monsieur le Professeur Gérard Dalmaz du Laboratoire de Mécanique des Contacts (LMC) de l'Institut national des Sciences appliquées (INSA) de Lyon pour l'honneur qu'il m'a fait d'accepter d'être membre du jury et pour le soin qu'il a apporté au jugement et à la correction de la thèse.

Mes très vifs remerciements vont à Monsieur le Docteur Luc Houpert de la société Timken France, Messieurs les Professeurs de l'EPFL Michel Del Pedro directeur du Laboratoire de Mécanique appliquée (LMA) et Roland Longchamp directeur de l'Institut d'Automatique (IA) et chef du Département de Mécanique (DME) d'avoir bien voulu examiner et commenter ce travail en tant que membres du jury.

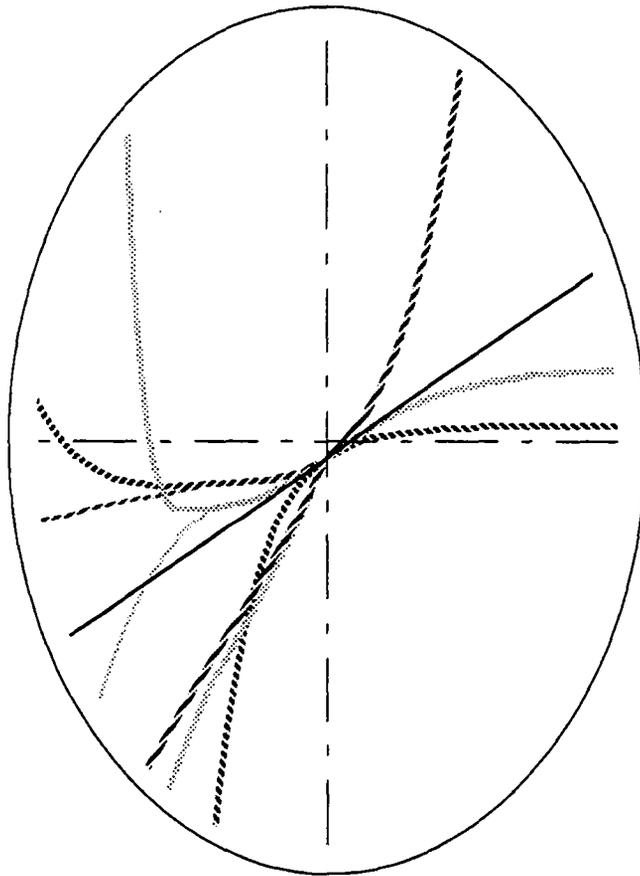
Un grand merci à tous les membres du Laboratoire, de l'Institut ou de l'Ecole qui m'ont aidé à réaliser ce travail, je pense tout spécialement à Messieurs Jacques Miauton, Kossi Agbéviade, Marc Jeanneret, Gino Crivellari ainsi qu'à Madame Christine Benoît dont l'aide fut indispensable pour la mise en forme du document écrit.

Une pensée particulière pour ceux qui dans l'ombre ont participé de près ou de loin à l'élaboration de cette thèse. Qu'ils trouvent ici l'expression de ma reconnaissance pour l'aide matérielle et morale qu'ils m'ont témoignée.



Lubrification  
thermoélastohydrodynamique

# UNE APPROCHE



# GLOBALE



*ECOLE POLYTECHNIQUE FEDERALE DE LAUSANNE*  
*Laboratoire de Machines-Outils et Automates*

Pierre Pahud



**TABLE DES MATIERES**

<b>RESUME</b>	<b>i</b>
<b>ABSTRACT</b>	<b>iii</b>
<b>NOTATIONS</b>	<b>v</b>
<b>LISTE DES SYMBOLES</b>	
<b>SYMBOLES GENERAUX</b>	<b>v</b>
Alphabet latin	v
Alphabet grec	viii
<b>SYMBOLES PROPRES AU CHAPITRE 5</b>	<b>ix</b>
Alphabet latin	ix
Alphabet grec	xi
<b>CHAPITRE 1</b>	<b>1</b>
<b>INTRODUCTION</b>	
1.1 HISTORIQUE DU TRAVAIL	1
1.2 THESE PRINCIPALE DU TRAVAIL	4
1.3 NATURE ET CADRE DU TRAVAIL	6
1.4 RESTRICTION DE L'ETUDE	7
1.5 PLAN GENERAL	8

CHAPITRE 2	9
------------	---

## ETAT DE LA RECHERCHE

2.1	UN PEU D'HISTOIRE	9
2.2	EVOLUTION SUR LE PLAN THEORIQUE	12
2.3	EVOLUTION SUR LE PLAN NUMERIQUE	13
2.4	COURTE REVUE DES TRAVAUX EXPERIMENTAUX	15
2.4.1	Caractéristiques des films minces	15
2.4.2	Caractéristiques des huiles	17
2.5	BREVE CONCLUSION	18

CHAPITRE 3	19
------------	----

## ETUDE THEORIQUE DU CONTACT LUBRIFIE

3.1	LES EQUATIONS FONDAMENTALES DE LA LUBRIFICATION	19
3.1.1	Equation de continuité	19
3.1.2	Loi fondamentale de la dynamique	20
3.1.3	Loi de conservation de l'énergie	23
3.2	LES EQUATIONS DU FILM D'HUILE	26
3.2.1	Equation de Reynolds	26
3.2.2	Equation de l'énergie	32
3.3	LES RELATIONS DES CONTACTS HERTZIENS	35
3.3.1	Modèle géométrique du contact hertzien	35
3.3.2	Notions de base des contacts élastiques	39
3.3.3	Contact de solides de révolution	41
3.3.4	Contact de profils quelconques	43
3.3.5	Contact bidimensionnel de corps cylindriques	46
3.3.6	Application aux contacts galets/pistes d'un roulement	49
3.3.7	La déformation du solide semi-infini	53

## ETUDE THEORIQUE DU CONTACT LUBRIFIE BIDIMENSIONNEL

4.1	REGIME ISOVISQUEUX RIGIDE (IVR)	55
4.1.1	Equations du film mince visqueux bidimensionnel	56
4.1.2	Calcul de la distribution de pression dans le film	58
4.1.3	Forces dues à la pression au contact	62
4.1.4	Notion de couple opposé au roulement	64
4.1.5	Puissance dissipée au contact	66
4.1.6	Forces de frottement équivalentes	68
4.1.7	Régime à faible quantité d'huile	69
4.1.8	Analyse de la consommation de puissance	75
4.1.9	Régime à hauteur de film constante à l'entrée du contact	78
4.1.10	Elévation de température dans le film d'huile	80
4.1.11	Récapitulatif et comparaison des régimes riche et limite	86
4.1.12	Application à un cas numérique test	90
4.1.13	Application à un palier à corps roulants	94
4.1.14	Confrontation expérimentale	100
4.2	REGIME PIEZOVISQUEUX RIGIDE (PVR)	103
4.3	REGIME ELASTOHYDRODYNAMIQUE (EHD)	107
4.3.1	Paramètres adimensionnels	107
4.3.2	Influence de la richesse de l'alimentation du contact sur l'épaisseur du film d'huile	112
4.3.3	Influence des effets thermiques sur l'épaisseur du film d'huile en régime permanent	114
4.4	BREVE CONCLUSION SUR L'ETUDE THEORIQUE	116

<b>CHAPITRE 5</b>	<b>119</b>
<b>ETUDE NUMERIQUE DU CONTACT LUBRIFIE</b>	
5.1 INTRODUCTION	119
5.2 FORMULATION DU PROBLEME POUR SA RESOLUTION NUMERIQUE	120
5.2.1 Formulation faible des équations de base	120
5.2.2 Lois constitutives du lubrifiant	123
5.2.3 Analyse dimensionnelle	124
5.2.4 Simplifications résultant de l'analyse dimensionnelle	126
5.2.5 Conditions à l'interface solide-liquide	127
5.2.6 Intégration à travers l'épaisseur du film	128
5.2.7 Linéarisation de la formulation faible	132
5.2.8 Cinématique des contacts lubrifiés	134
5.2.9 Élément fini "lubrifiant thermovisqueux"	134
5.3 ANALYSE DES UNITES	137
5.4 ETUDE DE "L'OPERATEUR LUBRIFICATION"	140
5.4.1 Modèle du patin incliné	140
5.4.2 Application numérique du patin incliné	144
5.4.3 Formulation faible du problème du patin incliné isotherme pour un élément fini	146
5.4.4 Le patin incliné isotherme indéformable modélisé par deux éléments finis et un seul degré de liberté	149
5.4.5 Etude de l'opérateur en régime "déformable"	153
5.4.6 La cavitation en sortie de contact	157
5.4.7 Modélisation d'une quantité d'huile constante à l'entrée du contact	157
5.4.8 Stabilisation de l'équation de la chaleur	159
5.4.9 Lois de viscosité	163
5.5 RESUME DES TECHNIQUES NUMERIQUES DEVELOPPEES POUR RESOUDRE LE PROBLEME TEHD PAR ELEMENTS FINIS	164

CHAPITRE 6	167
<b>RESULTATS DE L'ETUDE NUMERIQUE</b>	
6.1 INTRODUCTION	167
6.1.1 Définition de la zone modélisée	167
6.1.2 Modélisation du contact rigide	169
6.1.3 Modélisation du contact déformable	170
6.1.4 Application numérique de référence	176
6.2 REGIME INDEFORMABLE	177
6.2.1 Intégration de la pression et de la température	177
6.2.2 Puissance consommée en fonction du glissement	180
6.2.3 Elévation de température en fonction du glissement	182
6.3 REGIME DEFORMABLE ISOTHERME	183
6.3.1 Pressions et profils caractéristiques de film	183
6.3.2 Influence de la quantité d'huile	185
6.3.3 Hauteur centrale du film en fonction de la charge	188
6.3.4 Influence de la quantité d'huile sur la hauteur au centre du contact	190
6.3.5 Consommation de puissance en fonction de la portance	192
6.3.6 Influence des conditions d'alimentation du film sur la consommation de puissance	194
6.3.7 Conséquences hypothétiques d'une frontière d'entrée fixe	197
6.4 REGIME DEFORMABLE GENERAL	198
6.4.1 Distributions de pression au contact	200
6.4.2 Profils du film au contact	202
6.4.3 Distributions de température dans une hypothèse "adiabate"	205
6.4.4 Calcul de la dissipation par le couple opposé au roulement	207
6.4.5 Validation de la condition de roulement pur	209
6.5 REGIME THERMOPIEZOVISQUEUX DEFORMABLE ADIABATE	211
6.5.1 Hauteur du film	211
6.5.2 Température dans le film	213
6.5.3 Consommation de puissance en fonction de la charge en régime TPVE adiabatique	215
6.5.4 Remarques sur les influences des conditions d'entrée du film	216
6.6 RESUME DES RESULTATS OBTENUS ET PREMIERES PERSPECTIVES	225

<b>CHAPITRE 7</b>	<b>233</b>
<b>ETUDE EXPERIMENTALE</b>	
7.1 DISSIPATION DANS DES PALIERS DE BROCHES DE MACHINES-OUTILS	233
7.1.1 Broche d'essai	233
7.1.2 Paliers et conditions d'essais	235
7.1.3 Analyse numérique et théorique du contact galet/piste	237
7.1.4 Résultats des essais et commentaires	239
<b>CHAPITRE 8</b>	<b>245</b>
<b>CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES</b>	
8.1 COMMENTAIRES ET CONCLUSION	245
8.2 PERSPECTIVES	247
8.2.1 Perspectives sur le plan numérique	247
8.2.2 Perspectives sur le plan de la lubrification	248
8.2.3 Perspectives sur le plan technologique	248
<b>ANNEXE</b>	<b>249</b>
<b>VISCOSITE D'UNE HUILE DE LUBRIFICATION</b>	
A.1 INTRODUCTION	249
A.2 MATERIEL D'ESSAI	249
A.3 RESULTATS DES MESURES DE VISCOSITE	251
A.4 LIMITES DES MESURES DE VISCOSITE	253
<b>BIBLIOGRAPHIE</b>	<b>255</b>
<b>CURRICULUM VITAE</b>	<b>263</b>
<b>PUBLICATIONS PRINCIPALES</b>	<b>265</b>

## RESUME

Cette étude s'inscrit dans le cadre des recherches sur l'Intelligence Synthétique, menées au Laboratoire de Machines-outils et Automates de l'EPFL. Le but à long terme est la création automatique par ordinateur dans la construction mécanique.

Plus spécifiquement, cette thèse aborde une des étapes dans la conception des broches et paliers à hautes performances pour machines-outils, le comportement thermique, souvent responsable de phénomènes d'instabilité. A notre sens, ce sujet n'est pas encore complètement maîtrisé et les prévisions de comportement ne sont pas fiables.

Ce travail consiste principalement en l'étude thermoélastohydrodynamique du contact lubrifié bidimensionnel (extensible au cas tridimensionnel) au moyen du programme d'éléments finis TACT, qui autorise le couplage solide/lubrifiant. Le but est de mettre en évidence les mécanismes de consommation de puissance dans ce type de contact. L'étude est menée en parallèle sur les plans analytique, numérique et expérimental.

La partie analytique traite du régime isovisqueux rigide. On établit que la puissance dissipée est, en roulement pur, exactement calculable par le couple résistant dû à la distribution de pression non symétrique, et que le glissement qui s'établit aux deux contacts du corps roulant d'un palier est celui qui correspond au minimum de la dissipation. Dans des conditions adiabatiques, on montre que la consommation de puissance est très fortement diminuée avec l'appauvrissement du contact et que l'élévation de température dans le film est minimale pour le régime "sans débit inverse".

La partie numérique couvre l'analyse de l'opérateur lubrification et présente ses particularités. Deux techniques originales de pénalité ont été développées pour résoudre les problèmes de frontière libre, à savoir une quantité d'huile variable à l'entrée du contact et la cavitation à sa sortie. L'implantation de la méthode d'upwind SU/PG a été nécessaire pour stabiliser la résolution de l'équation de la chaleur. Le calcul de différents cas de charge montre, dans une hypothèse adiabatique, que l'appauvrissement à l'entrée du contact, tout en amenant une baisse de la température du film, augmente la puissance dissipée en régime TEHD alors qu'il la fait diminuer en régime EHD. Ce résultat pose de manière aiguë le problème de la modélisation thermique des corps en contact.

Sur le plan expérimental, des mesures de la puissance consommée par des paliers et des broches réels conçus et réalisés à l'EPFL montrent une bonne concordance avec les calculs prévisionnels. Un appareillage développé pour mesurer la viscosité des huiles courantes de lubrification à haute pression et à diverses températures est présenté. Les mesures donnent des valeurs de viscosité qui diffèrent d'environ 15% de celles du fabricant. Les coefficients thermo- et piézovisqueux sont déterminés avec une bonne précision, mais sont respectivement 10% et 43% inférieurs à ceux estimés initialement. Les mesures montrent que l'huile testée change de phase à très basse pression (1'700 bar environ) à température ambiante (21 °C).

## ABSTRACT

The present work is part of a general research program conducted by the Machine-Tools and Automata Laboratory of the Federal Institute of Technology in Lausanne on "Synthetic Intelligence". The final goal is to automatize design using computers in mechanical engineering.

More specifically, this thesis deals with one of the many steps in the design of high performance spindles and bearings for machine-tools, namely their thermomechanical behaviour. In our opinion, this subject has not yet been fully understood, and has led to unreliable products.

This work mostly consists of a two-dimensional lubricated thermo-elasto-hydrodynamic contact study (that can be extended to three-dimensional cases) using the TACT FEM program which allows for solid/lubricant coupling. The objective is to take into account the power consumption mechanism in this type of contact. Analytical, numerical and experimental investigations are conducted in parallel.

The analytical part deals with the isoviscous rigid regime. We prove that the dissipated power is exactly given, in pure rolling conditions, by the resistant torque due to the unsymmetric pressure distribution, and that the amount of sliding occurring at the two contacts of the rolling element of a bearing, is the one which leads to a minimum of dissipation. Otherwise, we can show that the power losses, in adiabatic conditions, strongly decrease with starvation, and that the film temperature is minimum when the regime is so-called "without reverse flow".

The numerical part covers the discrete lubrication operator with its distinctive characteristics. New penalty techniques have been used in order to solve the free boundary situations at the inlet of the contact zone – variable oil quantity, and at the outlet – cavitation. Implementation of an upwind SU/PG scheme was necessary in ensuring solution stability for the heat equation. Various numerical cases show that, in an adiabatic hypothesis, the starvation conditions in the inlet zone, leading to a decreasing temperature of the film, is responsible for an increase of the TEHD power losses, even when the EHD power losses become smaller. This result raises the question of thermal modelisation and boundary conditions of the contacting bodies.

In the experimental part, the approach consists of measurements of the power consumption of EPFL-developed bearings and spindles, and comparisons with calculations. Experimental and numerical values are in good agreement. An apparatus for measuring viscosity of usual lubricants at high pressures and different temperatures is presented. The results differ from that of the manufacturer by about 15% on viscosity values. The thermo- and piezo- viscous coefficients are determined with good accuracy but are respectively 10% and 43% less than what we initially estimated. The measurements show that the change-of-phase of oil occurs at very low pressures (about 1700 bar) and at room temperature (21 °C).

## NOTATIONS

## LISTE DES SYMBOLES

## SYMBOLES GENERAUX

## Alphabet latin

b	demi-largeur du contact hertzien	[m]
C	couple opposé au roulement	[N·m]
$c_p$	chaleur spécifique	[J/kg°C]
c	deuxième demi-axe du contact hertzien elliptique	[m]
$D/Dt = \partial/\partial t + \mathbf{v} \cdot \nabla$	dérivée particulaire	
d/dt	dérivée totale	
$E^* = \{\Sigma[(1-\nu_i^2)/E_i]\}^{-1}$	module d'élasticité équivalent	[Pa]
E	énergie massique	[J/kg]
	module d'élasticité	[Pa]
$\dot{E}, E_p$	dissipation, puissance dissipée	[W/m]
$\dot{E}_o$	puissance dissipée de l'entrée au centre du contact	[W/m]
EHD	relatif au régime élastohydrodynamique	
$F_1, F_2$	force de frottement au contact 1 ou 2	[N/m]
$f_i$	force de masse	[N/kg]
$Fr = V^2/gL$	Nombre de Froude	[-]
$F_R$	force de frottement associée au roulement	[N/m]
$F_S$	force de frottement associée au glissement	[N/m]
$g = 9.81 \text{ m/s}^2$	accélération terrestre	[m/s <sup>2</sup> ]
$G^\circ = \mu_1 E^*$	paramètre adimensionnel relatif aux matériaux	[-]
h	hauteur du film d'huile	[m]
$h^*$	hauteur du film d'huile à l'abscisse où le gradient de pression est nul	[m]

$h_E$	hauteur du film d'huile à l'entrée du contact, constante, imposée	[m]
$h_e$	hauteur du film d'huile à l'entrée du contact	[m]
$h_o$	hauteur du film d'huile au centre du contact	[m]
$h_o^\infty$	hauteur du film d'huile au centre du contact pour une abscisse d'entrée à l'infini en amont	[m]
$H$	enthalpie massique	[J/kg]
$H_o^\circ = h_o/R$	paramètre adimensionnel de hauteur de film au centre du contact	[-]
$H_m^\circ = h_{\min}/R$	paramètre adimensionnel de hauteur minimale du film	[-]
$H_{\min}^\circ = P_y h_{\min}/\mu_o UR^*$	paramètre adimensionnel relatif à la hauteur minimale du film	[-]
$H^\circ = h/R$	paramètre adimensionnel de hauteur de film	[-]
IVE	relatif au régime isovisqueux élastique (déformable)	
IVR	relatif au régime isovisqueux rigide (indéformable)	
$J^\circ = [P_y^2/\mu_o UR^* E^* \pi]^{1/2}$	paramètre adimensionnel relatif au régime IVE	[-]
$K$	coefficient de conductivité thermique	[W/m°C]
$k$	rigidité	[N/m]
$L$	longueur caractéristique	[m]
$M^\circ = [\mu_1 P_y^3/\mu_o UR^{*2}]^{1/2}$	paramètre adimensionnel relatif au régime PVE	[-]
$N$	vitesse de rotation	[t/min]
$P$	portance du contact	[N/m]
$p$	variable de Laplace	[s <sup>-1</sup> ]
$p^*$	pression maximale dans le film d'huile	[Pa]
$P_o$	pression au centre du contact hertzien	[Pa]
$Pe = \nabla L \rho \cdot c_p / K$	Nombre de Péclet $Pe = Re \cdot Pr$	[-]
$Pr = c_p \mu / K$	Nombre de Prandtl	[-]
PVE	relatif au régime piézovisqueux élastique (déformable)	
PVR	relatif au régime piézovisqueux rigide (indéformable)	
$P_x$	résultante de pression dans la direction x	[N/m]
$P_y$	résultante de pression dans la direction y, portance du contact	[N/m]
$P_y(x)$	primitive de la distribution de pression $p(x)$ au contact	[N]
$P_y(x)$	primitive de $P_y(x)$	[N·m]

$p$	pression	[Pa]
$p^\circ$	pression réduite	[Pa]
$Q^\circ = \mu_0 \mu_2 U^2 / K$	paramètre estimant les effets thermiques	
	à l'entrée du contact	[-]
$Q$	force concentrée	[N]
$q$	charge linéique	[N/m]
$R^* = (1/R' + 1/R'')^{-1}$	rayon de courbure équivalent	[m]
$R_e = (1/R' + 1/R'')^{-1}$	rayon de courbure équivalent au contact extérieur	[m]
$Re = \nabla L \rho / \mu$	Nombre de Reynolds	[-]
$R_i = (1/R' + 1/R'')^{-1}$	rayon de courbure équivalent au contact intérieur	[m]
$R$	rayon de courbure	[m]
$R_{xi}$	rayon de courbure dans la direction x	[m]
$R_{zi}$	rayon de courbure dans la direction z	[m]
$S$	surface	[m <sup>2</sup> ]
$s = r/R_1$	rapport de rayons	[-]
TEHD	relatif au régime thermoélastohydrodynamique	
$T$	température	[°C]
$T_o$	température de référence, température au	
	centre du contact	[°C]
TPVE	relatif au régime thermopiezovisqueux élastique (déformable)	
TPVR	relatif au régime thermopiezovisqueux rigide (indéformable)	
$t$	temps	[s]
$U = U_1 + U_2$	vitesse de roulement selon l'axe x	[m/s]
$u, v, w$	composantes cartésiennes de la vitesse $v$	[m/s]
$U_1, U_2$	vitesse de la surface 1 ou 2 suivant l'axe x	[m/s]
$U^\circ = \mu U / E^* R^*$	paramètre adimensionnel de vitesse	[-]
$V = U_1 - U_2$	vitesse de glissement	[m/s]
$V_1, V_2$	vitesse de la surface 1 ou 2 suivant l'axe y	[m/s]
$\nabla$	vitesse caractéristique	[m/s]
$v$	vecteur vitesse	[m/s]
$W = W_1 + W_2$	vitesse de roulement selon l'axe z	[m/s]
$W_1, W_2$	vitesse de la surface 1 ou 2 suivant l'axe z	[m/s]
$W^\circ = P_y / E^* R^*$	paramètre adimensionnel de charge au contact	[-]
$x, y, z$	coordonnées d'un point	[m]

## Alphabet grec

$\alpha$	coefficient de dilatation volumique du fluide	$[\text{°C}^{-1}]$
$\alpha_c$	coefficient de convection dans l'air	$[\text{W/m}^2\text{°C}]$
$\beta = h_o/h_o^\infty$	coefficient de réduction de hauteur de film	
	en fonction de l'abscisse d'entrée	$[-]$
$\chi_e$	abscisse relative d'entrée du contact en régime élastique	$[-]$
$\delta$	déplacement d'un point d'un solide	$[\text{m}]$
$\delta_{ij}$	symbole de Kronecker	$[-]$
$\Phi$	densité d'énergie du fluide	$[\text{J/m}^3]$
$\gamma$	abscisse relative	$[-]$
$\gamma^*$	abscisse relative du gradient de pression nul	$[-]$
$\gamma_e$	abscisse relative d'entrée du contact	
	en régime rigide	$[-]$
$\gamma_s$	abscisse relative de sortie du contact	$[-]$
$\nu$	coefficient de Poisson	$[-]$
$\rho$	masse volumique	$[\text{kg/m}^3]$
$\Sigma$	signe de sommation	
$\tau_{ii}$	contrainte normale	$[\text{Pa}]$
$\tau_{ij}$	contrainte généralisée ou contrainte tangentielle	$[\text{Pa}]$
$\omega, \Omega$	vitesse angulaires	$[\text{rad/s}]$
$\xi$	deuxième coefficient de viscosité	$[\text{Pa}\cdot\text{s}]$
$\psi$	coefficient de réduction de hauteur de film	
	en fonction de la température, évaluée par Q	$[-]$
$\dot{\varepsilon}_{ij}$	taux de cisaillement	$[\text{Pa/s}]$
$\mu'$	viscosité de volume	$[\text{Pa}\cdot\text{s}]$
$\mu_1$	coefficient de piézo-viscosité (ou baroviscosité)	$[\text{Pa}^{-1}]$
$\mu_2$	coefficient de thermo-viscosité	$[\text{°C}^{-1}]$
$\mu$	viscosité dynamique	$[\text{Pa}\cdot\text{s}]$
$\mu_o$	viscosité dynamique en régime IVR	$[\text{Pa}\cdot\text{s}]$
$\partial/\partial t$	dérivée locale	
$\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x} ; \frac{\partial}{\partial y} ; \frac{\partial}{\partial z} \right)$	vecteur nabla	

## SYMBOLES PROPRES AU CHAPITRE 5

## Alphabet latin

$\mathbf{a}$	vecteur des accélérations cinématiques, de composantes $a_i$	$[\text{m/s}^2]$
$A$	section, surface, aire	$[\text{m}^2]$
$\mathbf{c}$	vecteur des déplacements cinématiques, de composantes $c_i$	$[\text{m}]$
$d_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i})/2$	taux de variation relative de volume	$[-]$
$da$	surface élémentaire	$[\text{m}^2]$
$df/dt = \dot{f} + f_{,j} \cdot u_j$	différentiation totale de la fonction $f$	
$dv$	volume élémentaire	$[\text{m}^3]$
$F_i$	coefficient de fluidité moyen	
$h' = (h^2 - h^1)/\ell$	gradient discret de hauteur de film	$[-]$
$h_o$	valeur particulière de la hauteur $h$	$[\text{m}]$
$\bar{h} = (h^1 + h^2)/2$	surface médiane du film	$[\text{m}]$
$s_h$	hauteur relative au solide $s$	$[\text{m}]$
$L$	longueur caractéristique	$[\text{m}]$
$p' = (p^2 - p^1)/\ell$	gradient discret de pression	$[\text{Pa/m}]$
$p_o$	condition à la limite sur la pression	$[\text{Pa}]$
$\check{p}$	fonction test, pression virtuelle	$[\text{Pa}]$
$p_{,i} = \partial \check{p} / \partial x_i$	dérivée partielle, spatiale de la fonction test $\check{p}$	$[\text{Pa/m}]$
$\mathbf{Q}$	tenseur orthogonal des déplacements cinématiques	$[\text{m}]$
$Q_{ij}$	composante de $\mathbf{Q}$	$[\text{m}]$
$\tilde{Q}_\alpha$	débit massique dans la direction $\alpha$ , linéarisé	$[\text{kg/s}]$
$Q_\alpha$	débit massique dans la direction $\alpha$	$[\text{kg/s}]$
$q_\alpha = Q_\alpha / \rho$	débit volumique dans la direction $\alpha$	$[\text{m}^3/\text{s}]$
$\dot{q}$	source de chaleur	$[\text{J/kg}]$
$\tilde{R}$	résidu énergétique du régime permanent, linéarisé	$[\text{J/m}^2\text{s}]$
$R$	résidu énergétique du régime permanent	$[\text{J/m}^2\text{s}]$
$\dot{R}$	résidus énergétiques du régime transitoire	$[\text{J/m}^2\text{s}]$
$T$	température absolue	$[\text{°C}]$
$T_o$	condition à la limite sur la température	$[\text{°C}]$

$\check{T}$	fonction test, température virtuelle	[°C]
$s_T$	température du solide	[°C]
$u_i$	vitesse du milieu	[m/s]
$u_n = u_i \cdot n_i$	composante de la vitesse $u_i$ selon la normale à la frontière $\partial\omega$	[m/s]
$\bar{u}_\alpha = ({}^1u_\alpha + {}^2u_\alpha)/2$	vitesse de roulement moyenne	[m/s]
$\check{u}_i$	fonction test, vitesse – ou déplacement – virtuelle	[m/s]
${}^s u_1^a$	déformation du solide $s$ dans la direction de $x_1$ , approché par les fonctions de forme	[m]
${}^s u_3'$	déformation du solide $s$ dans la direction de $x_3$	[m]
${}^s u_i$	vitesse du solide $s$ dans la direction de $x_i$	[m/s]
$v$	vecteur vitesse, de composantes $v_i$	[m/s]
$V_\alpha$	vitesse de glissement	[m/s]
$X_j$	coordonnées du point matériel $X$	[m]
$x_\alpha$	$\alpha = 1, 2$ coordonnées cartésiennes dans le plan du film	[m]

## Alphabet grec

$\dot{\gamma}$	surface d'intégration ou de contrôle du film	$[m^2]$
$\partial\gamma$	frontière de la surface d'intégration $\dot{\gamma}$	$[m]$
$\varphi^a$	fonction de forme	$[-]$
$\delta$	dissipation dans le film	$[W/m]$
$\eta_j$	vecteur chaleur	$[W/m^3]$
$\eta_n = \eta_j \cdot n_j$	flux de chaleur selon la normale $n_j$ à la frontière $\partial\omega$	$[W/m^3]$
$\lambda = h'/\mu_1 h p'$	grandeur adimensionnelle auxiliaire	$[-]$
$\dot{\rho} = \partial\rho/\partial t$	dérivée temporelle de la masse spécifique	$[kg/m^3s]$
$\sigma$	entropie libre massique	$[J/kg]$
$\tau_{ij}$	contrainte généralisée	$[Pa]$
$\tau_{in} = \tau_{ij} \cdot n_j$	traction de surface, composante de $\tau_{ij}$ selon la normale à la frontière $\partial\omega$	$[Pa]$
${}^s\tau_{in}$	tractions de surface appliquées au solide	$[Pa]$
$\dot{\omega}$	volume de contrôle ou d'intégration	$[m^3]$
$\partial\omega$	frontière du volume de contrôle $\dot{\omega}$	$[m]$
$\psi$	énergie libre massique	$[J/kg]$



## CHAPITRE 1

# INTRODUCTION

### 1.1 HISTORIQUE DU TRAVAIL

L'étude du problème de la lubrification n'est certes pas nouvelle, ni du côté scientifique, où les premières approches de la théorie hydrodynamique datent des années 1880 grâce aux recherches de N.P. Petrov (1836-1920), B. Tower (1845-1904) et O. Reynolds (1842-1912), ni du côté de son application pratique où les fabricants de matériels de lubrification appliquent depuis longtemps des règles empiriques. Le problème est certainement complexe du point de vue théorique, mais il devient souvent pour ainsi dire "insaisissable" dans la pratique.

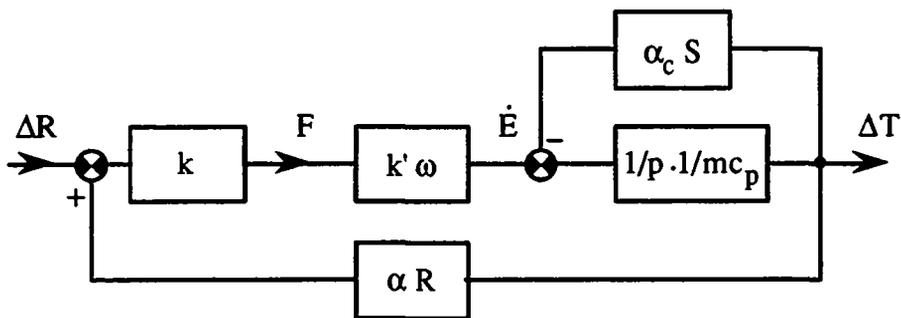
Si, dans certains domaines techniques, l'on est parvenu à un état de connaissance relativement satisfaisant, il n'en est pas encore de même en ce qui concerne les paliers à corps roulants d'organes à hautes performances, dans lesquels les vitesses de rotation et les exigences de précision sont très élevées, ce qui est notamment le cas des broches de machines-outils. Ainsi, pendant de longues années, et nous n'en sommes pas encore totalement sortis, les fabricants de machines se sont interrogés sur les raisons qui gouvernaient le fait que deux broches identiques, équipées de roulements et de systèmes de lubrification identiques pouvaient présenter, dans des conditions de travail industrielles, des durées de vie de quelques heures ou de quelques milliers d'heures, sans que l'on soit capable d'en expliquer ni le pourquoi ni le comment. Tant les fabricants de roulements que les fabricants de matériels de lubrification restaient muets devant ces phénomènes.

Certes, dans ces comportements que l'on pourrait qualifier de paradoxaux, la lubrification n'est pas seule en cause. Les méthodes de conception basées sur le "savoir-faire" montrent là leurs limites.

De nombreuses années furent nécessaires pour identifier la raison principale de ces différences entre les durées de vie prévues et la réalité : il s'agit de l'évolution de la précharge en fonction de l'état thermique du palier.

La première mise en évidence de ce fait est due au Prof. F. Pruvot (1980). Il démontra, en effet, que dans certaines conditions les paliers pouvaient parvenir à un comportement thermiquement instable, le couplage thermomécanique agissant comme une contre-réaction positive dans le système bouclé, illustré à la figure 1.1, qui décrit l'état du corps roulant.

Ces premiers résultats, obtenus d'ailleurs de nombreuses années avant leur publication, permirent à leur auteur de proposer de nouvelles méthodes de conception des paliers et des broches qui suppriment ce phénomène d'instabilité.



**Fig. 1.1 : Comportement thermomécanique d'un corps roulant.**

Les performances exigées pour les broches n'étaient-elles pas assez élevées, le marché du roulement de précision était-il d'un volume par trop insignifiant ? Toujours est-il que ces conceptions ne furent en fait adoptées ni par les industries des machines, ni par celles des paliers.

Les progrès réalisés par les fabricants d'outils, mais aussi le développement de l'automatisation provoquèrent un regain d'intérêt pour ce sujet dans la deuxième partie de la décennie 80. Les expériences malheureuses de nombre de constructeurs de machines, dans le passage de la machine manuelle à la machine à commande numérique, et les augmentations des vitesses de rotation des broches, nécessaires à l'obtention des vitesses de coupe que permettent les nouveaux outils, carbures, céramiques, etc., mirent en évidence les lacunes de la conception empirique.

Les instituts de recherche furent alors sollicités pour développer des broches à hautes performances.

Parallèlement, l'industrie européenne des roulements prit conscience de l'importance du marché des machines, plus pour l'effet de prestige que pour le volume des affaires qu'il représente. Cela sans compter que tout marché laissé vacant se voit occupé par l'industrie japonaise.

Les travaux entrepris à l'EPFL, et mis en veilleuse en 1980, avaient certes permis de mettre en évidence certains phénomènes, mais ils n'avaient pas élucidé tous les aspects du comportement des paliers. Si, sur le plan du découplage de l'évolution thermique du corps roulant et de celle de la charge à ses contacts, les résultats étaient satisfaisants, l'analyse restait néanmoins très lacunaire sur les mécanismes de dissipation de la puissance – É sur la figure 1, sur les rôles de la quantité de lubrifiant et du mode de lubrification, de même que sur le comportement thermique des paliers à corps roulants.

Nous avons donc démarré notre étude dans le but d'analyser le mécanisme de la dissipation en fonction des divers modes de lubrification, riche, pauvre, à la graisse, etc. ainsi que la relation entre cette dissipation et la charge au contact. La réactivation de la recherche dans ce domaine ne pouvait par ailleurs s'appuyer que très partiellement sur les publications existantes, les recherches menées sur la lubrification présentant rarement une approche comparable à celle que nous voulions entreprendre.

L'étude de la lubrification a été le fait de spécialistes de tribologie et le reste encore pour l'essentiel. Ainsi l'analyse et l'expérimentation ne sont pas orientées vers la conception d'organes concrets comme nous nous proposons de le faire. A titre d'exemple, très peu de littérature sur le sujet fait état de la puissance consommée par un contact lubrifié, et encore moins de la puissance consommée par un palier tout entier. De même, il est exceptionnel qu'une étude envisage les modifications dimensionnelles des éléments des roulements et donc la variation des jeux de fonctionnement et/ou des forces de précharge, dues aux échauffements de leurs composants, que ce soit en régime permanent ou plus encore, transitoire.

Notre démarche est alors, avec la volonté de la reprendre à la base, d'assimiler l'étude de la lubrification et de l'orienter clairement vers son application à la conception de paliers à hautes performances.

## 1.2 THESE PRINCIPALE DU TRAVAIL

L'approche du Prof. F. Pruvot (1983), pour le calcul de la puissance consommée par un contact lubrifié, en régime hydrodynamique, fut notre référence au départ du travail. On ne trouvait alors que peu traces – et aujourd'hui encore du reste – de telles estimations orientées vers la conception, tant dans la littérature spécialisée, que chez les fabricants de roulements, ou que chez les fabricants de matériels de lubrification.

Cette méthode de calcul se basait sur une distinction fondamentale entre deux types de régime de lubrification.

- En lubrification riche, le régime établi était considéré comme hydrodynamique surabondant et la consommation de puissance était provoquée par le couple, opposé au roulement, dû à la distribution de pression dans le film, dont la résultante s'exerce en amont du centre instantané de rotation du corps roulant. Ces hypothèses ne sont valables, comme on le verra plus loin, que pour de faibles charges sur les corps roulants, considérés par ailleurs comme indéformables.
- Pour les fortes charges sur les corps roulants et en lubrification pauvre, le régime était considéré comme élastohydrodynamique et la pression dans le film d'huile proche d'une distribution hertzienne. Le couple opposé au roulement n'étant alors plus calculable par des méthodes simples, il a été fait recours à un coefficient de friction moyen tiré de la "pratique". On trouve cette approximation chez Palmgren (1946) par exemple.

La quantité d'huile alimentant le contact n'était ainsi pas vraiment prise en compte. La chaleur produite était supposée être évacuée par l'huile ou l'air selon le mode de lubrification. En fonction du cas considéré, on pouvait alors obtenir des comportements très différents mais, surtout, les mesures effectuées sur des broches réelles ne confirmaient la plupart du temps que très approximativement les estimations calculées. Dans certains cas, on a même trouvé des rapports de six à dix entre le calcul et la mesure !

Après une phase exploratoire de la théorie des films minces visqueux, il a été possible d'établir avec certitude que la quantité d'huile alimentant le contact était, si ce n'est LE paramètre fondamental déterminant la dissipation au contact, du moins une des grandeurs importantes qu'il convenait de prendre en considération.

A partir de ces éléments, nous avons pu formuler le postulat sur lequel se fonde ce travail, qui peut être énoncé de la manière suivante :

**En régime élastohydrodynamique piézovisqueux, la consommation de puissance, l'élévation de température et la pression maximale dans le film d'huile varient de manière monotone et croissante avec la quantité d'huile alimentant le contact.**

Comme notre travail ne se veut pas purement théorique, nous avons adjoint à ce postulat un corollaire précisant les objectifs technologiques que nous désirons atteindre par cette étude.

Ce corollaire est le suivant :

**En tenant compte des impératifs d'évacuation de la chaleur produite, on peut définir des conditions de lubrification optimales permettant de garantir des performances maximales pour les paliers à corps roulants.**

Comme on peut le constater, l'approche que nous nous proposons de considérer n'est pas habituelle dans le domaine. Elle nous a paru, au départ de l'étude et cela s'est vérifié par la suite, être la seule qui nous permette d'aboutir à des outils exploitables dans la conception et la fabrication de paliers à hautes performances.

Une deuxième raison, et de taille, qui nous a poussé à entreprendre un travail sur un sujet aussi vaste et complexe, a été l'existence, au sein du Laboratoire de Mécanique Appliquée de l'EPFL, de compétences extrêmement solides dans le domaine de l'analyse numérique, du fait de la présence du Docteur A. Curnier. Ce dernier, auteur non seulement d'une thèse de doctorat dans le domaine des films minces visqueux (Curnier, 1978), mais également du programme d'éléments finis TACT, nous permettait de ne pas partir de zéro dans le domaine numérique et de disposer de l'appui d'un analyste de renom pour les développements envisagés.

### 1.3 NATURE ET CADRE DU TRAVAIL

Le présent travail se présente à l'évidence comme une démarche analytique, au sens où l'on va étudier les fondements des contacts lubrifiés, afin de comprendre les différentes contributions aux mécanismes de consommation de puissance du contact lubrifié tout d'abord, et des paliers à corps roulants par extension. Les approches seront successivement théorique, numérique et finalement expérimentale. Ces trois axes, et leur confrontation, sont indispensables et indissociables lors d'une étude qui a pour but une application concrète dans la technique.

L'approche théorique sert à la fois de base aux développements numériques, mais aussi de vérification, dans le sens où le modèle numérique ne peut être considéré comme fiable qu'à partir du moment où il reproduit avec précision les cas particuliers qui ont été étudiés sur le plan théorique. De plus, l'approche théorique sert de support au raisonnement qualitatif qui permet d'étudier et de prévoir les "tendances", ce qui n'est pas possible avec la modélisation numérique.

La vérification expérimentale, enfin, est évidemment la confrontation essentielle et ultime de la "théorie" avec la "pratique"; c'est elle qui va juger en dernier ressort du bien fondé de la modélisation et de la qualité de l'étude.

D'un point de vue général, cette étude s'inscrit dans le cadre des recherches sur "l'Intelligence synthétique" (Pruvot, 1990) menées au Laboratoire de Machines-Outils et Automates de l'EPFL. Le but à long terme de cette recherche est de parvenir, en construction mécanique, à la création automatique effectuée par un ordinateur. L'analyse conceptuelle élaborée par le Prof. F. Pruvot a montré que le processus de création automatique était possible, pour autant que l'on soit capable d'établir, par la voie de l'analyse – voie déductive, une "chaîne unique de raisons" permettant de passer de l'objet à ses spécifications – performances ou cahier des charges. En effet, si cette "chaîne" existe, il est alors possible de la parcourir dans le sens inverse, celui de la synthèse – voie inductive, afin de créer, à partir de spécifications données, l'organe ou la machine les satisfaisant au mieux.

Des résultats originaux et très prometteurs ont déjà été obtenus dans le domaine des transmissions mécaniques de puissance – cinématique linéaire – ainsi que dans celui de la fabrication assistée par ordinateur (FAO) ; dans ce dernier cas, il s'agit du développement d'un logiciel de création automatique des gammes d'usinage dans le cas du tournage (KRONOS).

Dans la conception des machines – particulièrement dans celle des broches de machines-outils – les études menées depuis plus de quinze ans maintenant sont reprises sous un jour nouveau, celui de la création de cette “chaîne unique de raisons”. Si sur les plans de la cinématique, de la statique et de la dynamique, les “outils” sont parvenus à un stade d'élaboration satisfaisant, il n'en est pas encore de même sur le plan de la thermomécanique.

Le présent travail se présente donc comme une contribution à la réalisation de cet “outil” supplémentaire, indispensable pour le but fixé, la conception automatique des machines.

#### **1.4 RESTRICTION DE L'ETUDE**

Dans le cadre de ce travail, nous limiterons, à quelques exceptions près, l'analyse au contact lubrifié plan, c'est-à-dire au contact de deux solides cylindriques de longueur infinie. Cette étude se ramène dans de nombreux cas à un contact cylindre/plan. Cette restriction a été motivée par les éléments suivants.

- Les broches à hautes performances doivent être équipées de paliers à haute rigidité et les paliers à galets, cylindriques ou coniques, sont les plus avantageux pour ces applications. Rappelons en effet qu'à dimensions extérieures égales, un roulement à galets est environ dix fois plus rigide qu'un roulement à billes.
- La consommation de puissance des paliers à galets est notablement plus importante que celle des paliers à billes. En relation avec leur grande rigidité, cette forte consommation de puissance rend les paliers à galets beaucoup plus sensibles aux risques d'instabilité thermique dans les montages traditionnels. Face à ces difficultés, la plupart des fabricants de machines ont d'ailleurs abandonné les paliers à galets pour les applications à haute vitesse, au prix d'une perte de rigidité importante. La restriction du domaine de l'étude correspond donc, en fait, à une difficulté accrue.
- L'étude du contact lubrifié présente un grand nombre de difficultés mathématiques, tant sur les plans théorique que numérique. Les simplifications qui résultent de l'approche bidimensionnelle permettent, sur le plan théorique, de pousser beaucoup plus avant les calculs et donc les raisonnements sur les mécanismes étudiés.

- Sur le plan numérique, l'approche bidimensionnelle est beaucoup plus économique en temps de calcul que l'analyse tridimensionnelle, ce qui n'est pas négligeable pour une étude de cette complexité. De plus, le fait de disposer de résultats théoriques plus poussés permet une bien meilleure vérification de la modélisation numérique, ce qui constitue un avantage précieux, tant on sait qu'un modèle numérique ne peut être considéré comme fiable que lorsqu'il a été testé de manière rigoureuse.
- L'extension du "bidimensionnel" vers le "tridimensionnel" peut être effectuée relativement facilement sur le plan numérique. Dans le cadre de nos développements, nous l'avons par ailleurs déjà prévue pour la plupart des cas.
- Enfin, dernière raison mais non la moindre, l'étude des mécanismes de consommation de puissance dans les contacts lubrifiés ne sera pas achevée en un seul travail, de durée limitée, fut-il un travail de thèse. Nous pouvons aujourd'hui estimer que de nombreuses années, vraisemblablement encore de l'ordre d'une dizaine, seront nécessaires pour traiter l'ensemble des problèmes.

## **1.5 PLAN GENERAL**

Le plan de l'étude abordera, après le chapitre suivant consacré à une brève revue de l'état de la recherche dans le domaine, les fondements théoriques de l'analyse du contact lubrifié au chapitre 3 et la présentation de notre approche originale appliquée au contact bidimensionnel au chapitre 4. Cette partie sera principalement axée sur le régime hydrodynamique isovisqueux rigide (IVR) car c'est le seul cas où des résultats théoriques peuvent être explicités. Nous aborderons ensuite la modélisation numérique avec la présentation du problème proprement dit et nous analyserons les particularités de l'opérateur et les méthodes que nous avons adoptées pour surmonter les difficultés (chapitre 5). Les résultats de nos différentes modélisations feront l'objet du chapitre 6 et une attention particulière sera portée à l'examen de l'influence de la quantité d'huile sur le comportement du contact lubrifié. Nous comparerons ensuite les résultats du modèle avec un certain nombre d'essais réalisés sur des broches réelles au chapitre 7. Enfin, nous tirerons quelques conclusions et donnerons les axes pour la poursuite de l'étude.

## CHAPITRE 2

### ETAT DE LA RECHERCHE

#### 2.1 UN PEU D'HISTOIRE

Les fondements de la science de la lubrification remontent à la fin du XIX<sup>e</sup> siècle (O. Pinkus, 1987). C'est en effet au cours d'un congrès de la "British Association for the Advancement of Science", qui s'est tenu à Montréal en 1884, que O. Reynolds lut deux contributions, l'une intitulée "On the Action of Lubricants", et l'autre "On the Friction of Journals". Pour la première fois lors de ce congrès, l'équation différentielle exprimant la nature hydrodynamique de la lubrification était discutée. La place de pionnier que O. Reynolds occupe dans le domaine de la lubrification provient de la formulation de l'équation différentielle qui porte aujourd'hui son nom et dont l'établissement fut publié par la Royal Society (O. Reynolds, 1886).

L'article de Reynolds contenait, outre l'établissement de la fameuse équation différentielle :

- une solution pour le film mince séparant deux surfaces elliptiques s'approchant l'une de l'autre à une vitesse  $V$ ,
- le concept de palier infiniment long que Reynolds se proposait de résoudre pour le cas du palier lisse et pour celui du blochet,
- les caractéristiques du blochet optimal,
- des considérations sur la cavitation dans la partie divergente du palier lisse; Reynolds fut le premier à proposer des conditions aux limites particulières à la sortie du contact,
- la formulation de la loi de variation exponentielle de la viscosité en fonction de la température,
- la notion de jeu, donc de rayons différents, dans les paliers lisses.

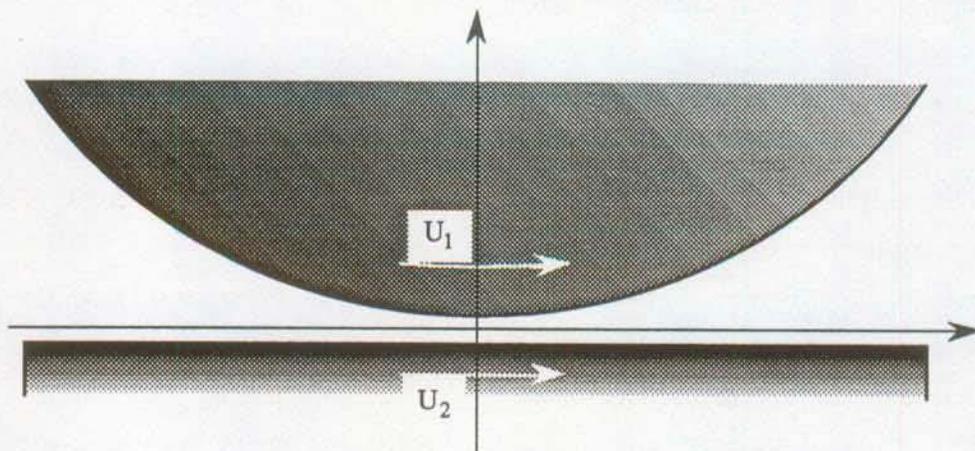
Une nouvelle science venait ainsi de voir le jour.

Son évolution, cependant, était liée à la capacité de résoudre théoriquement l'équation de Reynolds, équation non homogène aux dérivées partielles et à coefficients variables. Ce fut Arnold Sommerfeld (1858-1951) qui, le premier, parvint à intégrer théoriquement l'équation de Reynolds, en 1904. La solution qu'il obtint correspondait à une distribution de pression

antisymétrique par rapport au centre du contact. Il en résultait une portance nulle au contact et donc des résultats erronés lors du calcul des paliers et butées hydrodynamiques. Dans sa publication, Sommerfeld mentionnait déjà que ces résultats insensés devaient provenir des conditions aux limites adoptées.

Dès les débuts des tentatives de résolution du problème de la lubrification, deux voies se dessinent : la première s'oriente vers les problèmes des paliers et butées hydrodynamiques, alors que la deuxième se dirige vers les problèmes de contacts hertziens lubrifiés, c'est-à-dire les problèmes liés à la lubrification des engrenages et des paliers à corps roulants.

Nous ne fixerons des jalons temporels que pour ce qui concerne cette seconde orientation.



**Fig. 2.1 : Modèle de contact hertzien lubrifié.**

C'est en 1916 que Martin tenta pour la première fois d'appliquer la théorie hydrodynamique à la lubrification des dents d'engrenages (Martin, 1916). Il introduisit des conditions aux limites différentes de celles proposées par Sommerfeld, basées sur les travaux de H.W. Swift (1894-1960), qui avait montré que les conditions  $p = dP/dx = 0$  à la sortie du contact étaient des conditions nécessaires à la continuité du problème et au principe du minimum d'énergie. Cependant les épaisseurs de film d'huile obtenues par Martin, dans les hypothèses de solides indéformables et

de viscosité constante, étaient tellement faibles qu'elles étaient totalement irréalistes. Le postulat de l'existence d'un film fluide entre les surfaces solides était proche d'être remis en question. Pourtant, certaines évidences physiques militaient en faveur de l'existence d'un tel film. Les observations minutieuses des dents des engrenages révélèrent que les stries d'usinage restaient visibles, même après un usage prolongé, ce qui rendait un contact métal-métal peu vraisemblable.

Un nouveau pas fut franchi lorsque Grubin réussit en 1949 à résoudre le problème hydrodynamique en levant les hypothèses restrictives de Martin (Grubin & Vinogradova, 1949). Il prit en considération la déformation des solides et la variation de la viscosité avec la pression. Avec cette approche plus complète, les épaisseurs de film d'huile calculées correspondaient mieux à celles que l'on était en mesure de déterminer expérimentalement.

Ce fut le point de départ d'un formidable essor de la théorie élastohydrodynamique. Les rapides progrès des moyens numériques de calcul, dès la fin de la seconde guerre mondiale, contribuèrent dans une large mesure aux développements de la théorie de la lubrification.

Dès 1959, Dowson et beaucoup d'autres scientifiques s'attachèrent à résoudre simultanément l'équation de Reynolds, l'équation élastique et l'équation de la chaleur.

Le problème était cependant ardu, car la présence d'un pic de pression très sévère, en régime élastohydrodynamique piézo-visqueux, rendait la résolution numérique très instable.

Il fallut attendre 1965 pour que deux groupes de recherche parviennent à résoudre numériquement le problème élastohydrodynamique avec prise en compte de l'équation de la chaleur (Cheng & Sternlicht, 1965; Dowson & Whitaker, 1965-66).

La méthode adoptée par les deux équipes de chercheurs est par ailleurs identique sur le principe. Il s'agit d'une méthode de résolution, dite inverse, des équations théoriques de Reynolds, de la déformation des solides – contact hertzien – et de la chaleur.

Cette étape fut à l'évidence très importante dans le développement de la théorie élastohydrodynamique et la décennie qui suivit fut riche en résultats tant sur les plans théorique, que numérique ou expérimental, comme nous le verrons plus loin.

## 2.2 EVOLUTION SUR LE PLAN THEORIQUE

Les premiers ouvrages traitant de la lubrification hydrodynamique sont apparus au début des années 60 (Pinkus & Sternlicht, 1961) et ne traitent que comme un domaine parmi d'autres la lubrification des corps roulants. Cependant, certains groupes de recherche se consacrent déjà de façon plus spécifique aux contacts lubrifiés (Vichard & Godet, 1966) et tentent d'exprimer le problème élastohydrodynamique sous forme adimensionnelle (Archard, 1968). A partir de cette approche quelque peu simplifiée, de nombreux travaux sont consacrés à l'analyse de la rupture du film d'huile (Coyne & Elrod, 1970, 1971), ainsi qu'aux conditions d'alimentation (Wolveridge, Baglin & Archard, 1970; Dalmaz & Godet, 1974; Dalmaz, 1979). Les conditions de sortie du film, notamment les problèmes liés à la cavitation dans la zone divergente, ont été examinées par exemple par Floberg (1965) et Dalmaz (1979). Les forces de frottement apparaissant au contact font également l'objet d'études théoriques (Chiu, 1974; Dowson & Higginson, 1966), de même que leur variation en fonction de la température du film d'huile (Goksem & Heargreaves, 1978a, 1978b, 1978c). Il faut relever que les approches théoriques sont souvent limitées au cas hydrodynamique de la lubrification. En effet, la complexité du problème ne permet généralement pas un traitement théorique complet. Dans le domaine élastohydrodynamique, les travaux dits théoriques sont souvent – presque exclusivement pour les travaux actuels – des développements basés sur des relations approchées établies à partir de résultats numériques. Dans ce cas, on tente de séparer les contributions des divers paramètres. On constate dans ces divers travaux une préoccupation que l'on peut qualifier "d'académique", dans le sens où l'application à des paliers concrets fait souvent défaut.

Malgré la richesse des références, de nombreux travaux se poursuivent encore aujourd'hui. Citons les travaux de Cook (1985) dans le domaine hydrodynamique, ceux de Houpert (1984, 1985a, 1985b, 1987) dans l'application de résultats approchés au calcul des forces de frottement entre corps roulants et pistes et entre corps roulants et cage dans les paliers à billes. Parallèlement, on trouve certaines tentatives d'étendre la théorie de la lubrification de Reynolds à des fluides non newtoniens (Szeri, 1987; Peiran, 1990)

Ce bref tour d'horizon des travaux de type théorique ne doit pas nous faire oublier les travaux très importants et relativement récents de Oden (1985) pour démontrer l'existence de la solution de l'équation de Reynolds dans le régime élastohydrodynamique, ainsi que la régularité – smoothness – de la distribution de pression, même au voisinage du pic.

### 2.3 EVOLUTION SUR LE PLAN NUMERIQUE

Bien que la distinction entre les domaines théorique et numérique soit totalement arbitraire, c'est sans conteste dans le second domaine que les développements sont les plus nombreux.

La première solution numérique, datant de 1965 environ, du problème thermoélastohydrodynamique bidimensionnel, fait appel, comme nous l'avons signalé précédemment, à une méthode de résolution dite "inverse" des équations de Reynolds, de l'élasticité et de la thermique simultanément. Très grossièrement, cela signifie que l'on impose la pression et que l'on calcule l'épaisseur du film fluide. Cette méthode présente l'avantage, dans le cas de la lubrification, de posséder une stabilité nettement supérieure à la méthode dite "directe", laquelle consisterait à imposer la hauteur du film pour en déduire la pression.

Pour Cheng (1965), la résolution numérique adoptait la démarche suivante :

- découpage de la zone de contact en trois régions, l'entrée, le centre et la sortie;
- supposition des distributions de pression et de vitesse dans tout le contact, avec une position donnée du pic de pression;
- calcul de l'épaisseur du film;
- calcul de la distribution de pression correspondante aux entrée et sortie du contact;
- calcul de la distribution de température;
- recalcul du profil de pression dans la zone centrale;
- comparaison puis nouvelle itération.

Il est intéressant de constater que la presque totalité des techniques numériques de résolution du problème élastohydrodynamique présentées jusqu'à ce jour fait appel à cette méthode "inverse".

En 1972, Rodkiewicz présente une nouvelle résolution numérique du problème bidimensionnel prenant en considération la compressibilité du lubrifiant, mais n'incluant pas l'équation de la chaleur. Il utilise une méthode de Runge-Kutta pour le lubrifiant et une méthode de quadrature pour la déformation élastique.

Si la méthode inverse permet la résolution du cas des contacts fortement chargés et dans lesquels la distribution de pression montre un pic prononcé, elle ne convient que très mal au cas des contacts peu chargés dans lesquels la distribution de pression est d'allure hydrodynamique. Dans ce cas, la méthode directe est plus performante.

La première méthode générale de résolution du problème hydro- et élastohydrodynamique, sans prise en compte des effets thermiques, est due à Rohde & Oh (1975). Ils utilisèrent pour cela une méthode de Ritz-Galerkin basée sur des fonctions polynomiales d'ordre élevé.

Quelques années plus tard, Curnier (1978, 1982) présente une approche nouvelle, basée sur une modélisation par éléments finis, de la thermomécanique du contact sec et lubrifié. Cette voie particulière – de type méthode directe – est la seule de cette nature à notre connaissance. Elle présente un intérêt tout particulier, dans le cadre du présent travail, car elle a servi de point de départ à toute la partie numérique de notre étude. Elle est basée sur une modélisation, par éléments finis, à la fois du ou des solides en présence et du film fluide. La formulation faible des équations simplifiées de continuité et d'énergie de la lubrification est couplée aux équations d'équilibre et d'énergie de la thermoélastoplasticité. La solution numérique est caractérisée par une linéarisation consistante des équations de la lubrification et un algorithme implicite pour la détermination de la région plastifiée.

Nous aurons l'occasion de revenir sur la méthode, mais surtout sur les développements que nous avons dû effectuer pour parvenir notamment à la résolution du cas élastohydrodynamique, des problèmes de frontière libre aux entrées et sorties du contact ainsi qu'à la simulation de quantités finies d'huile alimentant le contact.

Le développement des méthodes inverses s'est poursuivi par leur extension aux contacts ponctuels lubrifiés – tridimensionnels – (Dalmaz, 1979) puis par l'analyse d'aspects particuliers du problème

tels que les effets thermiques (Sadeghi & Dow, 1987; Sadeghi & Sui, 1990) et la stabilité (Kostreva, 1984b) par exemple. De nouvelles formulations du type "complémentarité non linéaire" (Kostreva, 1984a) ou "variationnelle étendue" (Strozzi, 1986) ont été proposées ces dernières années.

Les progrès des méthodes numériques, notamment ceux concernant les méthodes de raffinage automatique du découpage spatial, ont été très importants dans ce domaine. Ils conduisent à des réductions notables du temps de calcul. C'est le cas de la méthode "Multigrid" (Lubrecht, ten Napel & Bosma, 1986, 1988) et de celle du même type développée par Bisset & Glander (1988).

Les tendances aujourd'hui sont à l'extension de la lubrification aux surfaces rugueuses (Sadeghi & Sui, 1990) et à des fluides non newtoniens (Wang, Hua & Zhang, 1988), à la lubrification mixte solide/liquide (Khonsari & Wang, 1990) ainsi qu'aux problèmes de lubrification élastohydrodynamique non stationnaires (Jarchow & Potthoff, 1989).

Comme on peut le constater, le sujet est encore d'actualité et les problèmes à résoudre sont nombreux.

## **2.4 COURTE REVUE DES TRAVAUX EXPERIMENTAUX**

Sans revenir sur les premières expériences de lubrification du siècle passé, on peut classer les travaux expérimentaux en deux groupes : ceux visant à mesurer les caractéristiques des films minces eux-mêmes, pression, épaisseur du film, température, pic élastohydrodynamique, mécanismes d'établissement et de rupture du film, et ceux visant à déterminer les caractéristiques du lubrifiant proprement dit.

### **2.4.1 Caractéristiques des films minces**

Les premières mesures expérimentales des films minces visqueux furent réalisées sur des machines à disques. Les premières machines et, surtout, les moyens de mesure ne permirent tout d'abord pas de mesurer la distribution de pression. Ainsi par exemple, les travaux de Crook (1958), de Bell, Kannel & Allen (1961), ou Sibley & Orcutt (1961) ne conduisirent qu'à des vérifications des

épaisseurs de films d'huile en fonction de la charge et de la vitesse. La mesure de l'épaisseur du film était réalisée par des moyens électriques, mesure de résistance ou de capacité. La corrélation entre le calcul et la mesure était toute relative, par le fait que la température influençait fortement la viscosité de l'huile, donc la hauteur de film mesurée.

Une des premières mesures du profil de pression fut effectuée par Kannel (1965) au moyen d'un film de manganine disposé à la surface de l'un des disques. Cependant, les résultats obtenus ne permirent pas encore de mettre réellement en évidence le pic élastohydrodynamique.

L'étude du contact ponctuel a été tout d'abord réalisée au moyen de machines à cylindres croisés. Dans ces conditions, le contact roulant ne pouvait évidemment pas être étudié.

C'est en 1967 que Gohar réalisa la première machine sphère-disque permettant d'étudier complètement le contact ponctuel élastohydrodynamique alors que de leur côté Wedeven & Cameron (1967-68) étudiaient la lubrification élastohydrodynamique dans les roulements à billes par une mesure d'interférence optique. A l'aide d'une machine analogue à celle de Gohar, Chiu (1974) tenta d'analyser les conditions d'alimentation à l'entrée des contacts roulants.

Plus près de nous, les moyens d'élaboration des films de manganine s'étant développés, Safa, Anderson & Leather (1983) purent mettre en évidence le pic élastohydrodynamique dans le cas d'une machine test, mais aussi sur un roulement à billes. Simultanément à la mesure de la pression, la mesure de température était obtenue par la mesure de la résistance électrique d'un film fin de titane et la mesure de l'épaisseur du film était obtenue par celle de la capacité électrique entre les disques dans la zone du contact lubrifié.

Plus récemment encore, Mokhtar & Abdel Ghany (1985) réalisèrent des mesures de pression (manganine), de température (platine) et d'épaisseur de film d'huile de contacts elliptiques obtenus sur une machine à deux disques, l'un à surface sphérique, l'autre à surface cylindrique. De leur côté Dow, Stockwell & Kannel (1987) mesurèrent les pressions, températures et hauteurs de films d'huile en régime élastohydrodynamique.

Il faut noter dans toutes ces expériences que les mesures de température dans le film sont sujettes à caution dans la mesure où les capteurs sont disposés à la surface de l'un des disques de la machine.

En roulement pur, les températures mesurées sont très faibles, quelques degrés en général. Les résultats de Safa & Co (1983) sont encore plus surprenants puisqu'ils obtiennent une "élévation de température négative" du milieu du contact, en roulement pur.

Par ailleurs, une autre observation de ces résultats nous interroge : par quel procédé l'huile chauffée par le passage au travers du contact se refroidit-elle puisqu'il n'est jamais tenu compte de la convection dans l'air. Nous verrons que notre approche, si elle ne permet pas encore de lever tous les doutes, confirme l'existence là d'un problème qui n'a pas encore été résolu.

#### **2.4.2 Caractéristiques des huiles**

Les développements de bancs d'essais permettant la détermination expérimentale des caractéristiques des films fluides ont aussi été utilisés pour déterminer les caractéristiques des huiles, en particulier la loi de variation de la viscosité avec la pression et la température. Cependant, dans cette application, les travaux sont beaucoup moins nombreux.

Relevons ceux de Foord, Hammann & Cameron (1968) qui, au moyen d'une machine de type sphère-disque et des méthodes de mesure optiques, parvinrent à estimer le coefficient piézovisqueux de plusieurs lubrifiants, par comparaison avec une fluide étalon.

Ces résultats sont à prendre avec beaucoup de précautions car les effets de la température n'étaient pas maîtrisés, et les valeurs obtenues ont été corrigées par extrapolation.

En 1985, Meuleman, Lubrecht & ten Napel utilisèrent une même machine pour mesurer les caractéristiques de deux lubrifiants pour turboréacteurs. Les paramètres tels que le module de cisaillement de Eyring et le module de compressibilité ont été déterminés. Finalement, ils développèrent un modèle de comportement des huiles dénommé "modèle thermique de Roelands-Eyring-Maxwell". Les prédictions basées sur ce modèle donnèrent, dans le cadre de leurs travaux, des résultats relativement bien corroborés par les expériences.

Nous signalerons enfin les travaux de Sharma (1987) qui, par des mesures sur une machine à disques et leur comparaison avec deux types de modélisation du comportement des lubrifiants, a déterminé les exposants piézo- et thermovisqueux de plusieurs lubrifiants utilisés dans l'aviation et l'aérospatiale. Il faut noter à nouveau que les valeurs trouvées montrent des dispersions de l'ordre de 20 % au moins en fonction de la température d'entrée de l'huile dans le contact. Par ailleurs, il est bien clair que les lubrifiants choisis diffèrent passablement de ceux utilisés dans les broches de machines-outils et sont donc, pour notre domaine, d'un bien faible secours.

Dans la mesure de viscosité par des moyens différents de ceux de la lubrification élastohydrodynamique, nous trouvons dans la littérature plusieurs voies. Ce sont principalement celles faisant appel à des viscosimètres pour hautes pressions. Plusieurs techniques ont été développées faisant appel à des corps roulants, des corps chutants ou des corps oscillants. Les travaux de Kuss (1977), Abbot (1979), Izuchi (1986) et Ducoulombier (1984) font appel à ces techniques pour déterminer la viscosité de divers liquides.

Les résultats que ces tribologues ont obtenu ne sont pas à mettre en question, mais le problème réside dans les fluides qu'ils ont testé. Ce sont essentiellement des fluides purs, et dans aucun cas des huiles de lubrification, car le but cherché n'est pas de la même nature que le nôtre.

C'est pour cette raison que nous avons nous-mêmes entrepris de construire un viscosimètre permettant d'effectuer des mesures de viscosité jusqu'à des pressions de l'ordre de 2 à 3 GPa.

## **2.5 BREVE CONCLUSION**

Comme on a pu le constater, la littérature est abondante sur le sujet. Cependant, il nous est apparu très tôt que les buts que nous poursuivions déterminaient une approche du problème tout à fait particulière qui nous a conduit à reprendre le problème à la base. Il n'était évidemment pas dans notre intention de tout refaire. Cependant, les buts que nous nous sommes fixés nous ont conduit, à partir d'outils partiels – le programme de calcul TACT du Dr. Curnier, par exemple – à résoudre nombre de problèmes que nous n'aurions jamais pensé devoir aborder. Ces "imprévus" contribuent à alourdir la recherche, mais ils constituent aussi son intérêt.

## CHAPITRE 3

# ETUDE THEORIQUE DU CONTACT LUBRIFIE

### 3.1 LES EQUATIONS FONDAMENTALES DE LA LUBRIFICATION

Les équations de la mécanique des films minces visqueux ont été dérivées des lois de comportement d'un milieu continu, soit :

- la loi de conservation de la masse ou équation de continuité,
- la loi fondamentale de la dynamique,
- la loi de conservation de l'énergie.

Ces équations constituent les fondements de la science dont la lubrification n'est qu'un domaine particulier : la dynamique des fluides.

Nous rappellerons tout d'abord ces équations sous leur forme la plus générale, dans une description spatiale ou euclidienne, (Ryhming, 1985) avant de présenter les hypothèses simplificatrices légitimes adoptées dans le cas de la lubrification.

#### 3.1.1 Equation de continuité

La formulation de l'équation de continuité est obtenue par l'expression de la conservation de la matière, dans l'espace et dans le temps. Dans sa forme différentielle, cette conservation de la masse de l'écoulement s'écrit

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho (\nabla \cdot \mathbf{v}) = 0 \quad (3.1)$$

avec la dérivée particulaire et le vecteur nabla notés

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x} ; \frac{\partial}{\partial y} ; \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad (3.2)$$

Dans le cas d'un écoulement incompressible – mais pas forcément homogène – la relation (3.1) se simplifie par le fait que

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (3.3)$$

et s'écrit

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0 \quad (3.4)$$

De plus, si l'écoulement est à la fois homogène et incompressible, l'équation de continuité se réduit à (3.3). Cette relation est valable pour les écoulements incompressibles stationnaires ou instationnaires. Pour un écoulement instationnaire et incompressible, il n'y a pas de dérivée par rapport au temps dans l'équation de continuité, bien que le vecteur vitesse  $\mathbf{v}$  dépende du temps.

On peut écrire l'équation générale de la conservation de la masse – continuité – sous une forme un peu plus explicite que (3.1) en adoptant une écriture indicielle. On obtient

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho u_i) = 0 \quad (3.5)$$

La convention adoptée est celle de la sommation en présence d'indices répétés.

### 3.1.2 Loi fondamentale de la dynamique

Les équations du mouvement relatif à l'écoulement d'un fluide visqueux sont connues sous l'appellation d'équations différentielles de la quantité de mouvement, ou équations de Navier-Stokes. Dans le cas général, elles peuvent être exprimées de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \rho \frac{Du}{Dt} &= \rho f_x + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \\ \rho \frac{Dv}{Dt} &= \rho f_y + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \\ \rho \frac{Dw}{Dt} &= \rho f_z + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \end{aligned} \quad (3.6)$$

En reprenant la notation indicielle, les équations générales de Navier-Stokes peuvent être mises sous la forme

$$\rho \left[ \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right] = \rho f_i + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \quad (3.7)$$

Un certain nombre d'hypothèses peuvent être formulées, au sujet des propriétés du fluide. Elles interviennent dans l'établissement du tenseur des taux de déformation de la particule fluide.

En ce qui nous concerne, nous resterons ici dans l'hypothèse que le fluide est newtonien, donc que le taux de cisaillement dans le fluide est proportionnel au gradient de vitesse.

Dans ces conditions, les termes du tenseur des taux de déformation, soit six composantes distinctes étant donné la symétrie, sont donnés par les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_{xx} &= \partial u / \partial x & \dot{\epsilon}_{xy} &= \dot{\epsilon}_{yx} = (\partial u / \partial y + \partial v / \partial x) / 2 \\ \dot{\epsilon}_{yy} &= \partial v / \partial y & \dot{\epsilon}_{yz} &= \dot{\epsilon}_{zy} = (\partial v / \partial z + \partial w / \partial y) / 2 \\ \dot{\epsilon}_{zz} &= \partial w / \partial z & \dot{\epsilon}_{zx} &= \dot{\epsilon}_{xz} = (\partial w / \partial x + \partial u / \partial z) / 2 \end{aligned} \quad (3.8)$$

En notation indicielle, on a la forme condensée très simple

$$\dot{\epsilon}_{ij} = (\partial u_i / \partial x_j + \partial u_j / \partial x_i) / 2 \quad (3.9)$$

Le tenseur des contraintes d'un fluide newtonien peut être défini en tenant compte des observations suivantes :

- chacune des contraintes normales  $\tau_{ii}$  est exactement égale et de signe opposé à la pression hydrostatique  $p$  lorsque les gradients de vitesse ont disparu;
- la rotation d'un fluide à la manière d'un corps solide implique la disparition des contraintes tangentielles;
- la relation entre contraintes et taux de déformation est linéaire;
- les fluides newtoniens sont isotropes;

Ces quatre conditions permettent d'écrire les termes du tenseur des contraintes, six quantités distinctes à nouveau du fait de la symétrie, de la manière suivante, en introduisant la viscosité  $\mu$  du fluide

$$\begin{aligned}
 \tau_{xx} &= -p + \xi (\nabla \cdot \mathbf{v}) + 2\mu \partial u / \partial x \\
 \tau_{yy} &= -p + \xi (\nabla \cdot \mathbf{v}) + 2\mu \partial v / \partial y \\
 \tau_{zz} &= -p + \xi (\nabla \cdot \mathbf{v}) + 2\mu \partial w / \partial z \\
 \tau_{xy} &= \tau_{yx} = \mu (\partial u / \partial y + \partial v / \partial x) \\
 \tau_{yz} &= \tau_{zy} = \mu (\partial v / \partial z + \partial w / \partial y) \\
 \tau_{zx} &= \tau_{xz} = \mu (\partial w / \partial x + \partial u / \partial z)
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

Puis, sous forme indicielle et en utilisant le symbole de Kronecker  $\delta_{ij}$

$$\tau_{ij} = [-p + \xi (\partial u_k / \partial x_k)] \delta_{ij} + 2\mu \dot{\epsilon}_{ij} \tag{3.11}$$

Au moyen des expressions des taux de déformation (3.8) et des contraintes (3.9) introduites dans (3.6), on obtient les équations générales de Navier-Stokes pour un fluide newtonien.

$$\begin{aligned}
 \rho \frac{Du}{Dt} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho f_x + \frac{\partial}{\partial x} \left[ 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} + \xi \nabla \cdot \mathbf{v} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] \\
 &\quad + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \mu \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] \\
 \rho \frac{Dv}{Dt} &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \rho f_y + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \mu \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} + \xi \nabla \cdot \mathbf{v} \right] \\
 &\quad + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \mu \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] \\
 \rho \frac{Dw}{Dt} &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho f_z + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \mu \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \right] \\
 &\quad + \frac{\partial}{\partial z} \left[ 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} + \xi \nabla \cdot \mathbf{v} \right]
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

Dans les relations (3.10) à (3.12), le coefficient  $\mu$  représente la viscosité dynamique et  $\xi$  est un deuxième coefficient de viscosité. Il est important de noter que  $\xi$  n'a pas d'intérêt pour un fluide incompressible puisque, dans ce cas,  $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$  et que tous les termes contenant  $\xi$  sont nuls. Comme  $\mu > 0$ , on peut montrer, à l'aide du deuxième principe de la thermodynamique, que pour un fluide compressible,

$$\mu' = \xi + 2\mu/3 \geq 0 \quad (3.13)$$

ou  $\mu'$  est appelée viscosité de volume. Il s'avère que la mesure expérimentale de  $\mu'$  est très difficile. Les connaissances expérimentales indiquent que la valeur de  $\mu'$  est très faible, voire négligeable. Stokes a d'ailleurs supposé que  $\mu' = 0$ , ce qui implique  $\xi = -2\mu/3$ . Cette simplification n'est vraie que dans le cas d'un gaz monoatomique, où la théorie cinétique des gaz établit cette valeur pour  $\xi$ .

Comme nous ne nous préoccupons que de fluides supposés incompressibles, récrivons, pour plus de clarté et de simplicité, les équations de Navier-Stokes pour ce cas, mais sous forme indicelle.

$$\rho \left[ \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right] = \rho f_i + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ -p \delta_{ij} + \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] \quad (3.14)$$

Nous disposons ainsi d'une expression simple que nous reprendrons plus loin dans le cas des films minces visqueux.

### 3.1.3 Loi de conservation de l'énergie

Pour obtenir l'équation intégrale d'énergie sous sa forme générale, il s'agit d'étudier le bilan d'énergie d'un fluide homogène dans un volume arbitraire  $V$ , fixe dans l'écoulement et de surface extérieure  $S$  perméable. Le fluide en mouvement est visqueux, ce qui, selon la théorie cinétique, implique un transfert de quantité de mouvement et de chaleur. Par transformation des intégrales surfaciques en intégrales de volume, à l'aide du théorème de Gauss, on obtient l'équation différentielle d'énergie (Ryhming, 1985)

$$\rho \frac{DE}{Dt} + p \nabla \cdot \mathbf{v} = \nabla \cdot (K \nabla T) + \Phi \quad (3.15)$$

Avec  $K$  le coefficient de conductivité thermique du fluide et, dans un repère cartésien,

$$\begin{aligned} \Phi = & (\tau_{xx} + p) \frac{\partial u}{\partial x} + (\tau_{yy} + p) \frac{\partial v}{\partial y} + (\tau_{zz} + p) \frac{\partial w}{\partial z} \\ & + \tau_{xy} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \tau_{yz} \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \tau_{zx} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (3.16)$$

En tenant compte de l'expression des contraintes (3.10), la fonction  $\Phi$  peut être mise sous la forme plus parlante

$$\begin{aligned} \Phi = & \mu \left[ 2(\partial u / \partial x)^2 + 2(\partial v / \partial y)^2 + 2(\partial w / \partial z)^2 \right. \\ & + (\partial u / \partial y + \partial v / \partial x)^2 + (\partial v / \partial z + \partial w / \partial y)^2 \\ & \left. + (\partial w / \partial x + \partial u / \partial z)^2 \right] + \xi [\partial u / \partial x + \partial v / \partial y + \partial w / \partial z]^2 \end{aligned} \quad (3.17)$$

La fonction  $\Phi$  représente la densité d'énergie de déformation contenue dans le fluide, composée d'un terme de compression et d'un terme de dissipation visqueuse, ce dernier représentant l'énergie qui est irréversiblement transformée en chaleur par les contraintes de cisaillement.

Avec l'équation de continuité (3.1), on peut transformer le membre de gauche de l'équation d'énergie (3.15)

$$\rho \frac{DE}{Dt} + p \nabla \cdot \mathbf{v} = \rho \left[ \frac{DE}{Dt} + p \frac{D(1/\rho)}{Dt} \right] \quad (3.18)$$

Il est avantageux d'écrire ce même membre en fonction de l'enthalpie  $H$  du lubrifiant

$$\rho \left[ \frac{DE}{Dt} + p \frac{D(1/\rho)}{Dt} \right] = \rho \left[ \frac{DH}{Dt} - (1/\rho) \frac{Dp}{Dt} \right] \quad (3.19)$$

L'expression complète de la dérivée particulière de l'enthalpie, valable pour un fluide quelconque, est

$$\frac{DH}{Dt} = c_p \frac{DT}{Dt} + \left[ (1/\rho) - T_o \left( \frac{\partial(1/\rho)}{\partial T} \right) \right] \frac{Dp}{Dt} \quad (3.20)$$

On obtient ainsi

$$\rho \left[ \frac{DE}{Dt} + p \frac{D(1/\rho)}{Dt} \right] = \rho \left[ c_p \frac{DT}{Dt} - T_o \left( \frac{\partial(1/\rho)}{\partial T} \right) \frac{Dp}{Dt} \right]$$

Puis, en faisant apparaître le coefficient de dilatation calorimétrique

$$\alpha = \rho \frac{\partial(1/\rho)}{\partial T} \quad (3.21)$$

$$\rho \left[ \frac{DE}{Dt} + p \frac{D(1/\rho)}{Dt} \right] = \rho c_p \frac{DT}{Dt} - \alpha T_o \frac{Dp}{Dt} \quad (3.22)$$

Finalement, l'équation de la chaleur prend la forme alternative de (3.15)

$$\rho c_p \frac{DT}{Dt} - \alpha T_o \frac{Dp}{Dt} = \nabla \cdot (K \nabla T) + \Phi \quad (3.23)$$

L'équation de l'énergie (3.15) exprime l'application du premier principe de la thermodynamique à une particule de fluide.

Les termes du membre de gauche de (3.15) donnent l'augmentation nette d'énergie interne et d'énergie mécanique par unité de masse et de temps pour la particule fluide suivie sur sa trajectoire. La somme de ces deux termes est égale à la chaleur apportée. Celle-ci résulte, suivant les hypothèses adoptées, de la chaleur transférée par conduction et de la production d'énergie mécanique par les forces de cisaillement.

Dans le cas d'un fluide incompressible, les termes dépendant de  $\nabla \cdot \mathbf{v}$  disparaissent; dans l'équation (3.15) le deuxième terme du membre de gauche est identiquement nul, d'où l'équation d'énergie simplifiée

$$\rho \frac{DE}{Dt} = \nabla \cdot (K \nabla T) + \Phi \quad (3.24)$$

et la fonction de dissipation  $\Phi$  de (3.17) voit s'annuler le terme en  $\xi$ .

Sous forme indicielle, l'équation de conservation de l'énergie prend, dans le cas général, la forme suivante

$$\rho \frac{dE}{dt} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( K \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) + \tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (3.25)$$

dans laquelle les  $\tau_{ij}$  ont la valeur exprimée par (3.11).

## 3.2 LES EQUATIONS DU FILM D'HUILE

### 3.2.1 Equation de Reynolds

La plupart des études relatives aux films minces visqueux considèrent l'écoulement fluide en régime stationnaire et nous ferons ici de même, car c'est une première étape. Comme nous l'avons signalé, on rencontre cependant aujourd'hui certaines études qui abordent le domaine des phénomènes instationnaires de la lubrification (Jarchow, 1989).

Pour établir les équations relatives au film d'huile, nous considérerons donc, en régime stationnaire, l'écoulement laminaire d'un fluide entre deux surfaces chargées et en mouvement l'une par rapport à l'autre (figure 3.1).

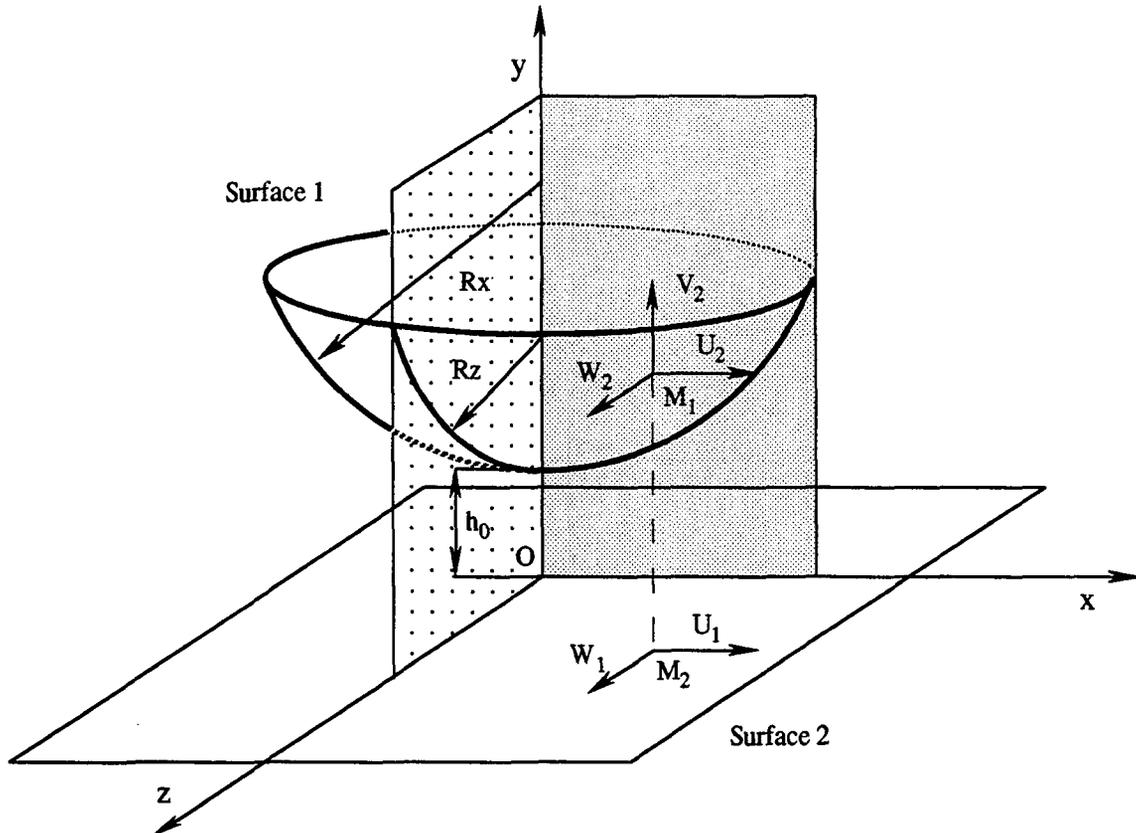
Par ailleurs, l'étude des films minces permet de poser les hypothèses suivantes (Reynolds, 1886) :

**Hypothèse 1** : l'épaisseur du film d'huile  $h$  est très petite comparée à sa longueur et à sa largeur. On peut donc négliger la courbure du film.

**Hypothèse 2** : la variation de pression à travers le film – direction  $Oy$  – est négligée. Cela implique

$$\partial p / \partial y = 0 \quad (3.26)$$

**Hypothèse 3** : les forces massiques extérieures,  $\rho f_i$  dans (3.14) sont négligées.



**Fig. 3.1 : Modèle de contact lubrifié.**

**Hypothèse 4 :** les forces d'inertie dans le fluide sont négligeables comparées aux forces de viscosité. Ces forces sont l'accélération du fluide et les forces centrifuges. Le membre de gauche de (3.14) est donc nul.

**Hypothèse 5 :** il n'y a pas de glissement entre le fluide et les surfaces portantes.

**Hypothèse 6 :** comparés à  $\partial u/\partial y$  et à  $\partial w/\partial y$ , tous les autres gradients sont négligeables. En effet  $u$ , et à un moindre degré  $w$ , sont prépondérants par rapport à  $v$ . De plus  $y$  est faible comparé à  $x$  et  $z$ .

Dans ces conditions, les équations du mouvement de Navier-Stokes (3.14) se réduisent à

$$\begin{aligned}\frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial y} [\mu(\partial u/\partial y)] \\ \frac{\partial p}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial y} [\mu(\partial w/\partial y)]\end{aligned}\quad (3.27)$$

Notons que les équations du mouvement ci-dessus ne sont pas restreintes à un fluide isovisqueux et que, par ailleurs, elles s'appliquent à un fluide aussi bien compressible qu'incompressible.

Il est possible d'intégrer les équations (3.27) selon  $y$  pour autant que l'on fasse l'hypothèse supplémentaire suivante :

**Hypothèse 7** : la viscosité du fluide ne varie pas dans l'épaisseur du film. Cette restriction reste valable pour les fluides barovisqueux puisque l'on a admis (Hyp. 2) que la pression ne variait pas dans l'épaisseur du film. Par contre, dans le cas thermovisqueux, et suivant les hypothèses faites sur la variation de température dans le film, cette démarche ne conviendra plus.

En adoptant les conditions aux limites sur les vitesses

$$\begin{aligned}y = 0 & \quad u = U_1 & \quad w = W_1 \\ y = h & \quad u = U_2 & \quad w = W_2\end{aligned}\quad (3.28)$$

l'intégration des équations du mouvement (3.27) conduit aux distributions de vitesse dans le film

$$\begin{aligned}u &= \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} (y-h)y + \frac{h-y}{h} U_1 + \frac{y}{h} U_2 \\ w &= \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial z} (y-h)y + \frac{h-y}{h} W_1 + \frac{y}{h} W_2\end{aligned}\quad (3.29)$$

Ces champs de vitesse sont valables pour autant que la viscosité soit indépendante de  $y$ , comme le précise l'Hypothèse 7.

L'équation de Reynolds est obtenue en introduisant les expressions (3.29) dans l'équation de continuité (3.5), dont le terme dépendant du temps disparaît en régime permanent, puis en intégrant à travers le film d'huile, donc suivant  $y$ , entre les valeurs limites 0 et  $h$ .

L'intégration de l'équation de continuité s'écrit

$$\int_0^h \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) dy + \int_0^h \frac{\partial}{\partial z} (\rho w) dy + [\rho v]_0^h = 0 \quad (3.30)$$

Il est possible de permuter les intégrations et dérivations en tenant compte du fait que

$$\begin{aligned} & \int_{h_1}^{h_2} \frac{\partial}{\partial x} f(x,y,z) dy = \\ & = \frac{\partial}{\partial x} \int_{h_1}^{h_2} f(x,y,z) dy - f(x,h_2,z) \frac{\partial h_2}{\partial x} + f(x,h_1,z) \frac{\partial h_1}{\partial x} \end{aligned} \quad (3.31)$$

Appliqué à l'équation de continuité (3.30), le résultat ci-dessus conduit à

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^h (\rho u) dy + \frac{\partial}{\partial z} \int_0^h (\rho w) dy + [\rho v]_0^h - [\rho u]_{h_2} \frac{\partial h}{\partial x} - [\rho w]_{h_2} \frac{\partial h}{\partial z} = 0 \quad (3.32)$$

L'introduction des champs de vitesse  $u$  et  $v$  de (3.29) dans (3.32) peut être faite, par contre l'intégration ne peut être réalisée théoriquement que si une hypothèse supplémentaire est précisée :

**Hypothèse 8 :** la masse spécifique ou densité du fluide est constante selon  $y$ , donc au travers du film mince. Cette hypothèse est différente de la notion d'incompressibilité puisque l'on suppose ici une sorte d'incompressibilité unidirectionnelle.

Dans ces conditions, on obtient, après substitution et intégration,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\rho h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{\rho h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \right] &= \frac{\partial}{\partial x} \left[ \rho h (U_1 + U_2)/2 \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \rho h (W_1 + W_2)/2 \right] \\ - \rho U_2 \frac{\partial h}{\partial x} - \rho W_2 \frac{\partial h}{\partial z} + \rho [V_2 - V_1] & \end{aligned} \quad (3.33)$$

Cette équation constitue la forme généralisée de l'équation de Reynolds dans le cadre des hypothèses énoncées.

Les conditions aux limites sur les vitesses que nous avons adoptées (3.28) ne sont pas suffisantes puisque apparaissent dans (3.33) les vitesses suivant  $y$ ,  $V_2$  et  $V_1$ , des surfaces en mouvement.

Pour le cas général du contact lubrifié tridimensionnel, on peut toujours se ramener au cas du contact d'un solide avec un plan, ce dernier n'étant animé que de vitesses linéaires selon les axes, les rotations étant, elles, reportées sur le solide convexe.

Dans le cadre des contacts lubrifiés, on se trouve généralement dans le cas où le plan ne possède pas de vitesse selon  $y$ , ce qui conduit à

$$V_1 = 0 \quad (3.34)$$

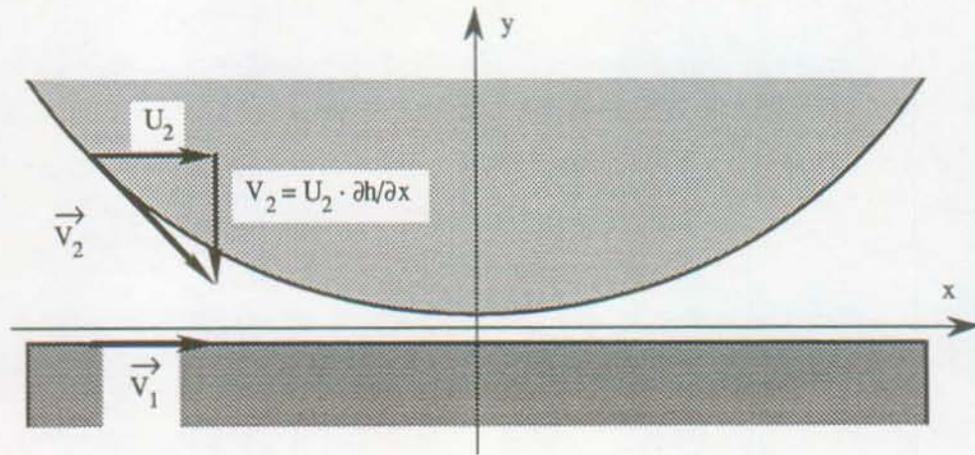
Pour ce qui est du corps convexe, on peut s'appuyer sur le modèle simplifié de la figure 3.2 pour montrer que

$$V_2 = U_2 \frac{\partial h}{\partial x} + W_2 \frac{\partial h}{\partial z} \quad (3.35)$$

Ces conditions aux limites peuvent être reportées dans l'équation de Reynolds (3.33) qui devient

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\rho h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{\rho h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \right] = \frac{\partial}{\partial x} (\rho U h/2) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho W h/2) \quad (3.36)$$

$$\text{avec} \quad U = U_1 + U_2 \quad ; \quad W = W_1 + W_2 \quad (3.37)$$



**Fig. 3.2 : Détermination des vitesses aux limites pour un contact lubrifié bidimensionnel.**

Cette dernière forme de l'équation de Reynolds permet donc les variations des propriétés du fluide dans les directions  $x$  et  $z$ .

En nous rapprochant du domaine des paliers à corps roulants, nous pouvons encore faire une hypothèse légitime :

**Hypothèse 9 :** le fluide est incompressible

et adopter des conditions aux limites sur les vitesses basées sur la cinématique de ces contacts particuliers. En effet, dans les contacts entre sphère, tonneau ou cylindre et plan, que l'on rencontre dans les paliers à corps roulants, le roulement est généralement prépondérant dans une direction (direction  $x$ ). Ainsi, les conditions aux limites sur les vitesses peuvent être approximées de la manière suivante :

$$\begin{array}{llll}
 y = 0 & u = U_1 & v = 0 & w = 0 \\
 y = h & u = U_2 & v = U_2 \frac{\partial h}{\partial x} & w = 0
 \end{array} \quad (3.38)$$

Dans ces conditions, on obtient l'équation de Reynolds habituelle du contact sphère ou tonneau et plan

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \right] = \frac{\partial h}{\partial x} U/2 \quad (3.39)$$

Si de plus on adopte la simplification suivante :

**Hypothèse 10** : les effets de bord sont négligés, c'est-à-dire qu'il n'y a pas d'écoulement suivant  $Oz$ , soit

$$w = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \quad (3.40)$$

On obtient la forme la plus simple de l'équation de Reynolds applicable aux contacts lubrifiés bidimensionnels de type cylindre sur plan, comme on peut les rencontrer dans les paliers réels entre galets et pistes de roulement.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right] = \frac{\partial h}{\partial x} U/2 \quad (3.41)$$

C'est l'équation que nous utiliserons pour nos développements théoriques ultérieurs.

### 3.2.2 Equation de l'énergie

En reprenant l'équation d'énergie sous forme indicelle (3.25) et en l'appliquant à un écoulement en régime permanent, on peut admettre que :

**Hypothèse 11** : l'énergie interne du fluide ne dépend que de la température et la chaleur spécifique du fluide est constante.

$$E = c_p T \quad (3.42)$$

De plus, si l'on considère les deux hypothèses supplémentaires suivantes :

**Hypothèse 12** : le travail des forces de pression et les pertes par conduction sont négligeables par rapport à la variation de l'énergie interne et au travail de viscosité

$$p \left[ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right] \approx 0 \quad (3.43)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ K \frac{\partial T}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ K \frac{\partial T}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ K \frac{\partial T}{\partial z} \right] \approx 0 \quad (3.44)$$

**Hypothèse 13** : la température ne dépend pas de  $y$ , ce qui implique que la chaleur échangée entre l'huile et les surfaces portantes est négligeable et que toute la chaleur produite par frottement est évacuée par le lubrifiant.

L'équation de l'énergie se simplifie, avec les hypothèses 1 à 6 et 13, à la relation

$$\rho c_p \left[ u \frac{\partial T}{\partial x} + w \frac{\partial T}{\partial z} \right] = \mu \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right] \quad (3.45)$$

Si par ailleurs on néglige les effets de bord (Hyp. 10), on obtient une forme de l'équation d'énergie pour le contact bidimensionnel

$$\rho c_p \left[ u \frac{\partial T}{\partial x} \right] = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \quad (3.46)$$

Les hypothèses 12 et 13 sont certes trop sévères par rapport à la réalité. Il faut cependant noter qu'en régime permanent dans le cas d'un roulement à galets, la température atteinte par les corps roulants n'est souvent pas négligeable, car l'énergie apportée par le cisaillement de l'huile aux lignes de contact ne peut être évacuée que par la convection de l'air entourant le galet en régime de lubrification pauvre, ou par l'huile surabondante et n'ayant pas traversé les contacts dans une lubrification riche. Nous verrons plus loin que ces hypothèses donnent des résultats proches de la réalité, contrairement aux résultats expérimentaux de Safa (1983).

On peut parvenir à une analyse plus complète du phénomène si l'on tient compte de la variation de température au travers du film (suivant Oy). Dans ces conditions, la conduction entre l'huile et les surfaces portantes ne peut être négligée car une partie de la chaleur est éliminée par l'huile, le reste se dissipant dans les pièces en contact. Il faut alors, pour être cohérent, tenir compte de

la variation de viscosité à travers le film, et l'équation de Reynolds se complique fortement.

Pour ce qui est de l'énergie, les hypothèses 12 et 13 seront remplacées par :

**Hypothèse 14** : le travail des forces de pression et les pertes par conduction à l'intérieur du fluide suivant Ox et Oz sont négligés par rapport à la variation de l'énergie interne, au travail des forces visqueuses et aux pertes par conduction entre l'huile et les surfaces portantes

$$p (\partial u / \partial x + \partial v / \partial y + \partial w / \partial z) = 0 \quad (3.47)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ K \frac{\partial T}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ K \frac{\partial T}{\partial z} \right] = 0 \quad (3.48)$$

Dans ce cas, et en conservant les hypothèses 1 à 6 et 10, on peut écrire l'équation de l'énergie

$$\rho c_p \left[ u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} \right] = \frac{\partial}{\partial y} \left[ K \frac{\partial T}{\partial y} \right] + \mu \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right] \quad (3.49)$$

Dans le cas du contact linéaire, ou si l'on néglige les effets de bord (Hyp. 10), et que l'on considère :

**Hypothèse 15** : le coefficient de conductibilité K du fluide est constant,

on tombe sur l'équation de l'énergie

$$\rho c_p \left[ u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right] = K \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \quad (3.50a)$$

On voit par (3.23) que si l'on veut tenir compte des forces de pression, le second membre de (3.50a) se verra ajouter un terme, soit par (3.23)

$$\rho c_p \left[ u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right] = K \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \alpha u T_o \frac{\partial p}{\partial x} \quad (3.50b)$$

C'est sous cette forme que l'équation de la chaleur a été formulée pour la résolution du problème élastohydrodynamique complet par voie inverse (Cheng & Sternlicht, 1965).

### 3.3 LES RELATIONS DES CONTACTS HERTZIENS

Lorsque deux solides non conformes sont mis en contact, ils se touchent initialement en un point unique ou le long d'une ligne. Sous l'action d'une force, ils se déforment, à l'endroit du premier contact, de manière à se toucher selon une surface finie, mais petite comparée aux dimensions des corps en présence. La théorie du contact se propose de prévoir l'allure de la surface de contact et l'évolution de ses dimensions en fonction de la charge appliquée, l'amplitude et la distribution des forces de surface, normales et éventuellement tangentielles, qui sont transmises au travers de l'interface, et la répartition des contraintes dans les deux solides au voisinage du contact.

Avant de rappeler les résultats principaux de cette théorie qui nous serviront dans l'étude des contacts lubrifiés, il est nécessaire de préciser la géométrie des surfaces dans la région du contact.

#### 3.3.1 Modèle géométrique du contact hertzien

Chacune des surfaces est considérée comme topographiquement régulière, tant à l'échelle microscopique que macroscopique.

Sur le plan microscopique, cela signifie qu'il n'existe pas d'irrégularités des surfaces qui pourraient conduire à une discontinuité du contact ou à des variations locales importantes de la pression de contact.

Cette hypothèse n'est à l'évidence pas toujours respectée ou réalisée dans la pratique. En effet, pour des surfaces de contact de quelques dixièmes de millimètres carrés ( $x \cdot 10^{-8} \text{ m}^2$ ), l'état de surface des corps en présence n'est souvent pas négligeable car il est de l'ordre du centième de micron ( $x \cdot 10^{-8} \text{ m}$ ) pour les billes, du dixième de micron ( $x \cdot 10^{-7} \text{ m}$ ) pour des surfaces ayant subi une superfinition, et du micron ( $x \cdot 10^{-6} \text{ m}$ ) pour des surfaces rectifiées.

Du point de vue macroscopique, les profils des surfaces sont considérés comme continus jusqu'à leur seconde dérivée dans la région du contact.

Ainsi, les surfaces des deux solides 1 et 2 en contact en un seul point O, supposé non singulier, peuvent être considérées, au voisinage de ce point, comme des surfaces du second degré (figure 3.3).

Le profil de chaque surface dans la région proche de l'origine peut être approximé par

$$y_i = A_i x_i^2 + B_i z_i^2 + C_i x_i z_i + \dots \quad i = 1, 2 \quad (3.51)$$

dans laquelle on néglige les termes d'ordre supérieur. Par un choix judicieux de l'orientation des axes, on peut faire disparaître les termes croisés  $C_i x_i z_i$ , et l'on peut écrire, dans le cas de la figure 3.3

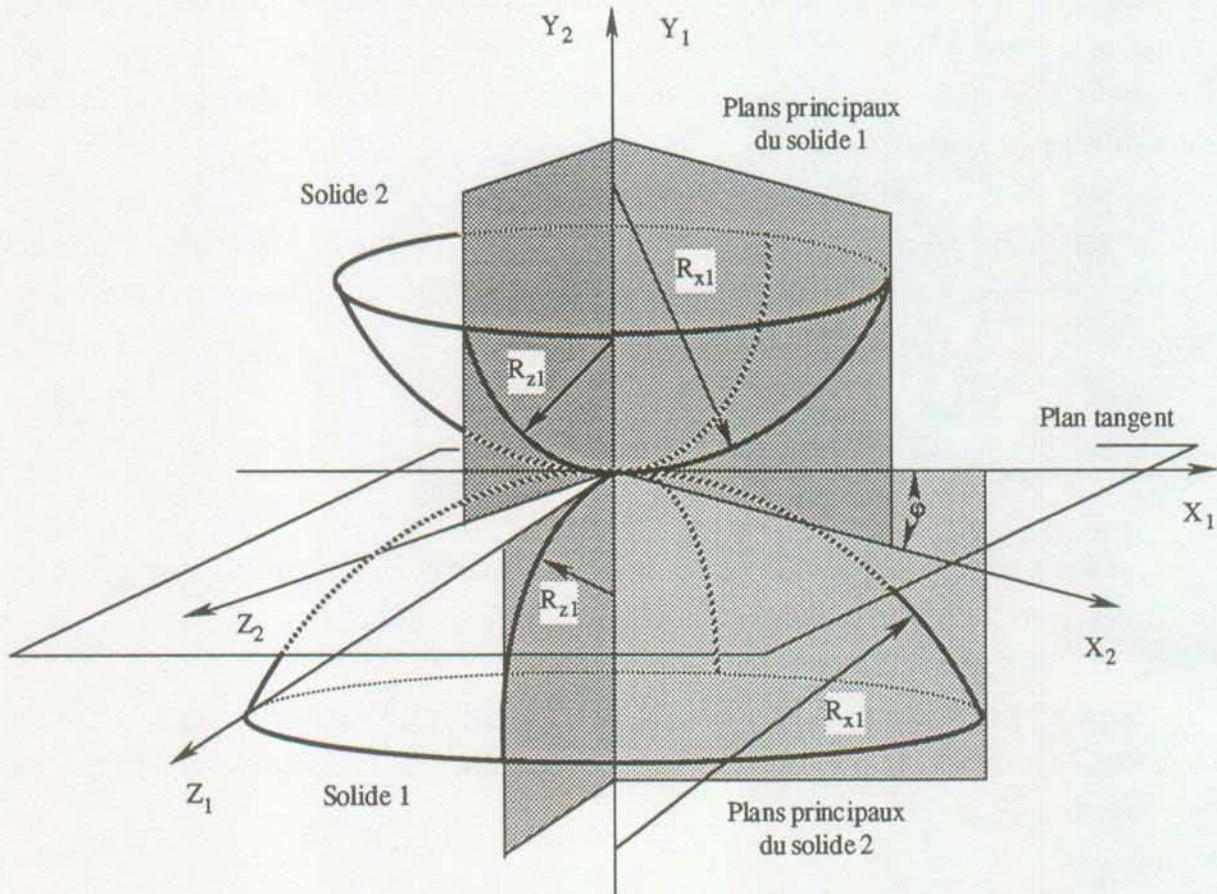


Fig. 3.3 : Géométrie générale d'un contact hertzien convexe.

$$y_1 = -(x_1^2 / 2R_{x1} + z_1^2 / 2R_{z1})$$

$$y_2 = (x_2^2 / 2R_{x2} + z_2^2 / 2R_{z2}) \quad (3.52)$$

Les quantités  $R_{x1}, R_{z1}, R_{x2}, R_{z2}$  sont les rayons de courbure principaux des solides 1 et 2.

La distance séparant les deux surfaces s'écrit alors

$$h = y_2 - y_1 \quad (3.53)$$

ce qui, dans un repère  $Oxyz$  commun aux deux solides devient

$$h = Ax^2 + Bz^2 + Cxz \quad (3.54)$$

puis, par un nouveau choix de l'orientation des axes communs

$$h = Ax^2 + Bz^2 = x^2/2R_x + z^2/2R_z \quad (3.55)$$

On peut montrer (Johnson, 1985) que si les axes  $x_1$  et  $x_2$  font entre eux un angle  $\varphi$ , alors

$$(A+B) = (1/R_{x1} + 1/R_{z1} + 1/R_{x2} + 1/R_{z2})/2$$

$$(A-B) = 1/2 \left[ (1/R_{x1} - 1/R_{z1})^2 + (1/R_{x2} - 1/R_{z2})^2 \right. \quad (3.56)$$

$$\left. + 2(1/R_{x1} - 1/R_{z1})(1/R_{x2} - 1/R_{z2}) \cos 2\varphi \right]^{1/2}$$

Les rayons de courbure sont positifs si le centre de courbure est à l'intérieur du solide correspondant, et négatifs dans le cas contraire. Les courbures  $A$  et  $B$  sont de même signe et tous les points correspondant à une distance constante  $y_2 - y_1$  se trouvent sur une ellipse.

Lorsque les plans principaux de chacune des surfaces du contact sont confondus, la forme géométrique des surfaces, dans la zone de contact, est définie par les rayons de courbure principaux  $R_{1x}, R_{1z}, R_{2x}$  et  $R_{2z}$  situés dans les plans principaux  $xOy$  et  $yOz$ . La géométrie du contact "tonneau circulaire / plan" est représentative de ce type de contact.

En effet, l'angle  $\varphi$  de (3.56) est nul et l'on obtient ainsi

$$A = (1/R_{1x} + 1/R_{2x})$$

$$B = (1/R_{1z} + 1/R_{2z}) \quad (3.57)$$

qui représentent les courbures équivalentes aux surfaces en contact. En définissant les rayons de courbure

$$R_x = 1/A = (1/R_{1x} + 1/R_{2x})^{-1}$$

$$R_z = 1/B = (1/R_{1z} + 1/R_{2z})^{-1} \quad (3.58)$$

le contact peut être considéré comme étant celui d'un solide de géométrie équivalent  $R_x$ ,  $R_z$  et d'un plan (figure 3.4).

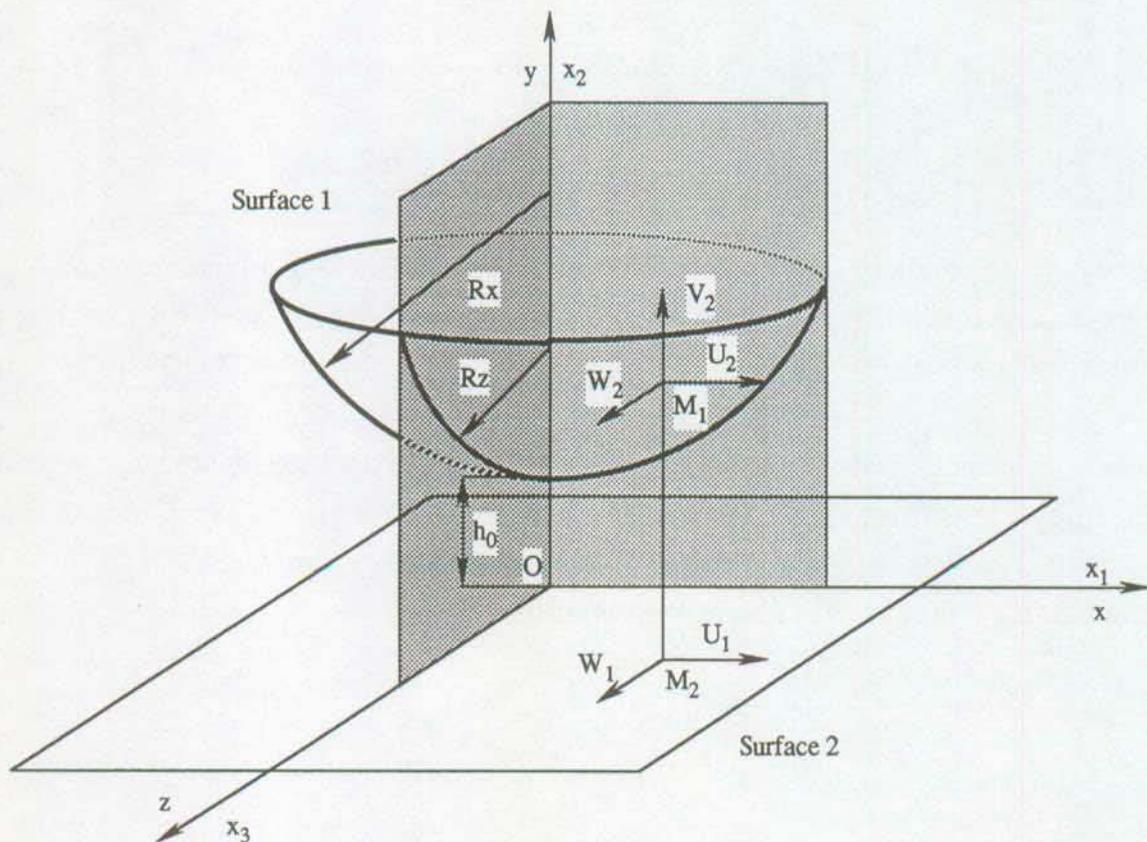


Fig. 3.4 : Modèle géométrique et cinématique "tonneau circulaire/plan".

Pour un contact sec, la distance séparant les surfaces est identique à (3.53) dans la zone de contact, alors que pour un contact lubrifié, dans lequel les surfaces sont séparées par un film d'huile continu, la distance entre les surfaces décrit l'épaisseur du film d'huile et s'écrit

$$h = h_0 + y_2 - y_1 \quad (3.59)$$

soit

$$h = h_0 + x^2/2R_x + z^2/2R_z \quad (3.60)$$

Dans le cas du contact lubrifié entre un cylindre équivalent et un plan, la courbure

$$1/R_z = 0 \quad (3.61)$$

et l'épaisseur du film d'huile se réduit à la simple expression

$$h = h_0 + x^2/2R_x \quad (3.62)$$

Dans les relations (3.60) et (3.62) la grandeur  $h_0$  est l'épaisseur du film au centre du contact. Ces relations ne sont valables, pour les contacts lubrifiés, que dans l'hypothèse de solides infiniment rigides.

### 3.3.2 Notions de base des contacts élastiques

Considérons deux solides déformables, choisis de forme convexe pour l'exemple, et soumis à une charge  $P$  les pressant l'un contre l'autre. La figure 3.5 les illustre en coupe après la déformation.

Avant déformation, la distance entre les surfaces  $S_1(x, y_1, z)$  et  $S_2(x, y_2, z)$  est donnée par la relation (3.55). Par symétrie de cette expression, la zone de contact s'étend sur une distance égale de chaque côté de  $O$ . Pendant la déformation, deux points  $T_1$  et  $T_2$  de chacun des solides se rapprochent de  $O$ , parallèlement à l'axe  $y$ , des quantités  $\delta_1$  et  $\delta_2$  respectivement. Si les solides ne se déformaient pas, leurs profils se chevaucheraient comme le montrent les courbes en pointillé sur la figure 3.4. Du fait de la pression de contact, les surfaces de chacun des solides se déplacent parallèlement à  $Oy$  des quantités  $\delta_{y1}$  et  $\delta_{y2}$  (comptées positivement pour chacun des solides) par rapport aux points éloignés  $T_1$  et  $T_2$ . Si, après déformation, les

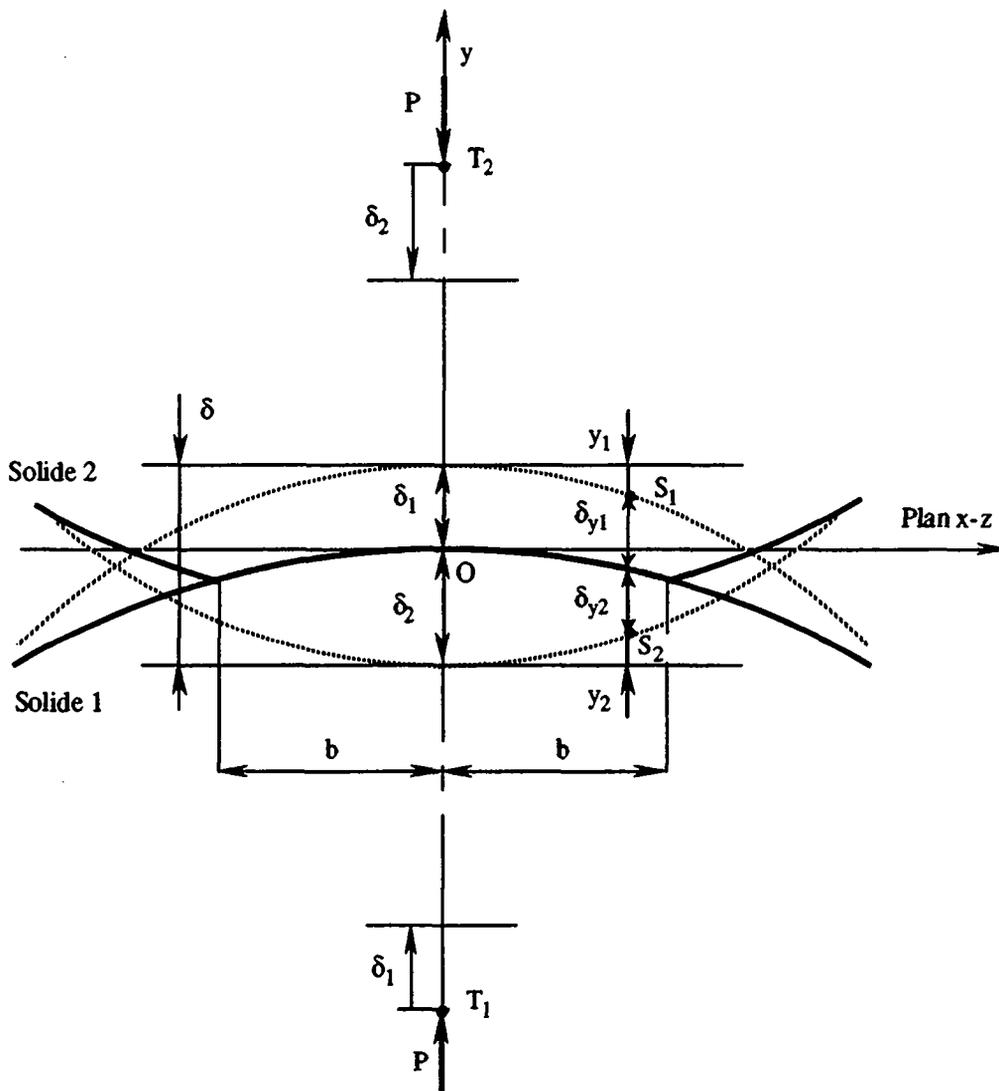
points  $S_1$  et  $S_2$  coïncident dans l'aire de contact, on peut écrire

$$\delta_{y1} + \delta_{y2} + h = \delta_1 + \delta_2 = \delta \quad (3.63)$$

Puis, par (3.55), les déplacements élastiques satisfont la relation

$$\delta_{y1} + \delta_{y2} = \delta - Ax^2 - Bz^2 \quad (3.64)$$

dans laquelle  $x$  et  $z$  sont les coordonnées communes de  $S_1$  et  $S_2$  dans le plan  $x$ - $z$ .



**Fig. 3.5 : Déformations dans un contact hertzien.**

Si les points  $S_1$  et  $S_2$  n'appartiennent pas à l'aire de contact, il s'ensuit que

$$\delta_{y1} + \delta_{y2} < \delta - Ax^2 - By^2 \quad (3.65)$$

La solution du problème consiste à déterminer la distribution de la pression transmise d'un solide à l'autre au travers de leur surface de contact de manière à ce que les déplacements élastiques résultants satisfassent (3.64) dans la zone du contact et (3.65) en dehors.

La solution de ce problème a été obtenue théoriquement pour la première fois par Hertz en 1882, en faisant les hypothèses suivantes :

- les surfaces sont non conformes d'où  $b \ll R$  ;
- les déformations sont faibles,  $b \ll R$  ;
- chaque solide peut être considéré comme un demi-espace élastique,  $b \ll R_{1,2}$ ,  $b \ll \ell$ , avec la longueur  $\ell$  représentative des dimensions du solide;
- les surfaces sont sans frottement, les forces de surface selon  $x$  et  $z$  sont nulles.

Du point de vue de l'élasticité, le problème peut être formulé comme la recherche de la distribution de la pression mutuelle  $p(x,z)$ , agissant sur une surface  $S$  de deux demi-espaces élastiques, qui provoque les déplacements normaux  $\delta_{y1}$  et  $\delta_{y2}$  satisfaisant la relation (3.64) à l'intérieur de  $S$  et la relation (3.65) à l'extérieur.

Nous ne referons pas tous les développements ici; on peut les trouver chez Johnson (1985) ou dans d'autres ouvrages traitant de ces questions. Nous allons simplement rappeler ci-après quelques résultats qui nous seront utiles pour la suite.

### 3.3.3 Contact de solides de révolution

Les solides de révolution sont caractérisés par

$$R_{x1} = R_{z1} = R_1$$

$$R_{x2} = R_{z2} = R_2 \quad (3.66)$$

Dans ce cas les courbures  $A$  et  $B$  ont pour valeur

$$A = B = (1/R_1 + 1/R_2)/2 \quad (3.67)$$

Les conditions aux limites sur les déplacements dans la zone de contact s'écrivent

$$\delta_{y1} + \delta_{y2} = \delta - (1/2R)r^2 \quad (3.68)$$

avec le rayon de courbure équivalent

$$R = (1/R_1 + 1/R_2)^{-1} = R_1 R_2 / (R_1 + R_2) \quad (3.69)$$

La surface du contact est dans ce cas un cercle, et le contact équivalent se ramène à celui d'une sphère sur un plan.

La distribution de pression répondant au problème a été proposée par Hertz et vaut

$$p = p_o [1 - (r/b)^2]^{1/2} \quad (3.70)$$

et conduit aux déplacements

$$\delta_y = \frac{1-\nu^2}{E} \frac{\pi p_o}{4b} (2b^2 - r^2) \quad , \quad r \leq b \quad (3.71)$$

La pression agissant sur chacun des solides étant la même, en posant pour le module d'élasticité équivalent,

$$E^* = \left[ (1-\nu_1^2)/E_1 + (1-\nu_2^2)/E_2 \right]^{-1} \quad (3.72)$$

on peut déterminer :

- le rayon du cercle de contact

$$b = \pi p_o R / 2E^* \quad (3.73)$$

- le rapprochement mutuel  $\delta$  de deux points éloignés dans les deux solides

$$\delta = \pi b p_o / 2E^* \quad (3.74)$$

- la force totale agissant sur le contact

$$P = 2/3 p_o \pi b^2 \quad (3.75)$$

Les grandeurs principales  $b$ ,  $\delta$ ,  $p_o$  peuvent être exprimées en fonction de la charge totale au contact

$$b = (3PR/4E^*)^{1/3} \quad (3.76)$$

$$\delta = b^2/R = (9P^2/16R E^{*2})^{1/3} \quad (3.77)$$

$$p_o = 3P/2\pi b^2 = (6PE^{*2}/\pi^3 R^2)^{1/3} \quad (3.78)$$

Les expressions des contraintes montrent que les contraintes normales sont maximales en surface alors que la contrainte de cisaillement maximale  $\tau_{\max}$  vaut environ

$$\tau_{\max} = 0.31 p_o \quad (3.79)$$

à une profondeur

$$y_m = 0.48 b \quad (3.80)$$

dans le solide.

### 3.3.4 Contact de profils quelconques

Dans le cas général, le contact entre deux corps s'établit sur une surface qui est une ellipse ayant  $b$  et  $c$  comme demi-axes.

La distribution de pression dans le contact est de type parabolique et vaut

$$p = p_o [1 - (x/b)^2 - (y/c)^2]^{1/2} \quad (3.81)$$

La force totale agissant sur les solides en contact s'obtient par intégration de (3.81), ce qui donne

$$P = 2/3 p_0 \pi bc \quad (3.82)$$

En considérant le module équivalent (3.72) et les rayons de courbure équivalents

$$R_x = R_{x1} R_{x2} / (R_{x1} + R_{x2})$$

$$R_z = R_{z1} R_{z2} / (R_{z1} + R_{z2}) \quad (3.83)$$

ainsi que

$$R_e = (R_x R_z)^{1/2} \quad (3.84)$$

On peut exprimer le rapprochement de deux points, éloignés du contact, situés chacun dans son solide respectif, par

$$\delta = (9P^2 / 16E^*{}^2 R_e)^{1/3} F_2(e) \quad (3.85)$$

Dans cette expression,  $F_2$  est une fonction contenant des intégrales elliptiques et dont la valeur est donnée à la figure 3.6 (Johnson, 1985). La grandeur  $e$  est l'argument de ces intégrales et vaut

$$e = (1 - c^2/b^2)^{1/2}, \quad c < b \quad (3.86)$$

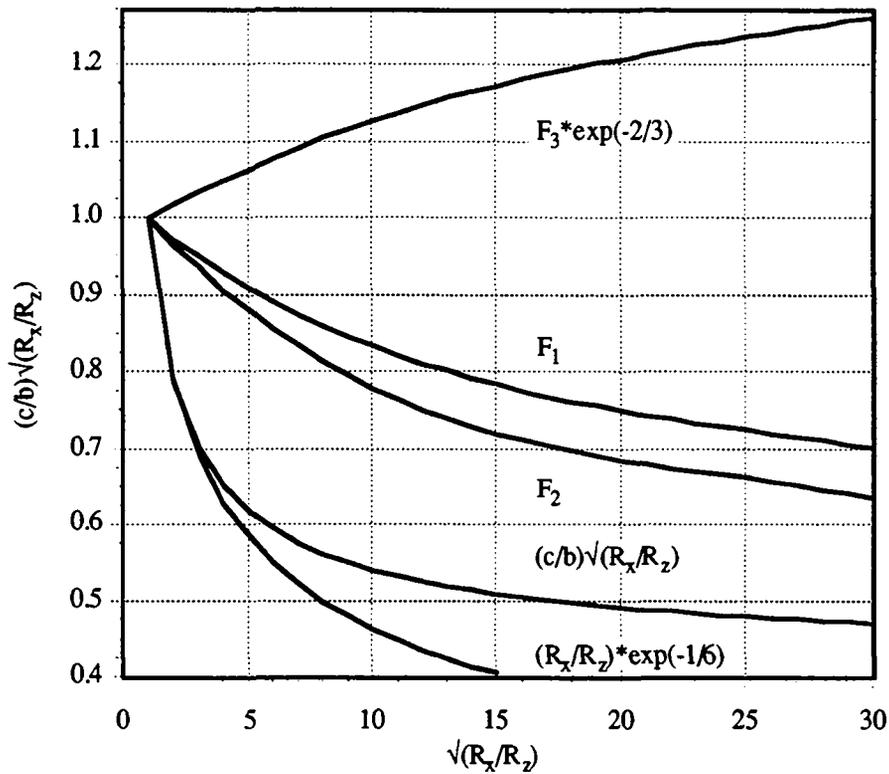
La pression maximale au centre du contact peut aussi être exprimée en fonction de ces mêmes grandeurs

$$p_0 = 3P/2\pi bc = (6PE^*{}^2/\pi^3 R_e^2)^{1/3} [F_1(e)]^{-2/3} \quad (3.87)$$

Et l'on trouvera de même la valeur de  $F_2$  sur la figure 3.6.

Pour calculer les demi-axes de l'ellipse de contact, il faut, en plus de la figure 3.6, se baser sur la relation

$$(b/c)^{1/2} = (3PR_e/4E^*)^{1/3} F_1(e) \quad (3.88)$$



**Fig. 3.6 : Contact de profils quelconques : rapport des demi-axes  $c/b$ , fonctions  $F_1$ ,  $F_2$  et  $F_3$  en fonction du rapport  $R_x/R_z$  des rayons de courbure relatifs.**

Sur le plan des contraintes, il faut noter que la valeur maximale atteinte par le cisaillement, de même que la profondeur à laquelle il se situe, dépendent du rapport  $c/b$ .

Relevons les valeurs particulières suivantes :

$c/b = 0.2$	$y_m/c = 0,745$	$\tau_{\max}/p_o = 0,322$
$c/b = 0.4$	$y_m/c = 0,665$	$\tau_{\max}/p_o = 0,325$
$c/b = 0.6$	$y_m/c = 0,590$	$\tau_{\max}/p_o = 0,323$
$c/b = 0.8$	$y_m/c = 0,530$	$\tau_{\max}/p_o = 0,317$

On retrouve évidemment les valeurs de (3.89) et (3.80) pour  $c/b = 1$ .

### 3.3.5 Contact bidimensionnel de corps cylindriques

Lorsque deux corps cylindriques d'axes tous deux parallèles à l'axe  $z$  sont pressés l'un contre l'autre par une force  $P_1$  par unité de longueur, le problème du contact devient bidimensionnel. Le contact s'effectue sur une bande de largeur  $2b$  parallèle à l'axe  $z$ .

Ce cas a été considéré par Hertz comme le cas limite du contact elliptique, lorsque  $c$  devient très grand comparé à  $b$ . Une approche alternative consiste à reconnaître a priori la nature bidimensionnelle du problème et à utiliser les résultats relatifs à un demi-espace chargé par une distribution de pression donnée (Timoshenko, 1970).

La distance entre les surfaces s'exprime par (3.53) et (3.55)

$$h = y_2 - y_1 = Ax^2 = (1/R_1 + 1/R_2)x^2/2 = x^2/2R \quad (3.89)$$

avec le rayon équivalent  $R$  défini par

$$R = (1/R_1 + 1/R_2)^{-1} = R_1 R_2 / (R_1 + R_2) \quad (3.90)$$

Il est facile de montrer que pour satisfaire les déplacements dans la zone de contact (3.63) et hors de la zone (3.64), la distribution de pression est

$$p(x) = \frac{2P_1}{\pi b^2} (b^2 - x^2)^{1/2} \quad (3.91)$$

La pression maximale, en  $x = 0$ , vaut alors

$$p_0 = 2P_1 / \pi b = (P_1 E^* / \pi R)^{1/2} \quad (3.92)$$

où  $E^*$  est le module équivalent (3.72).

La demi-largeur du contact  $b$  est définie par

$$b^2 = 4 P_1 R / \pi E^* \quad (3.93)$$

et la charge du contact est simplement

$$P_1 = \pi b^2 E^* / 4R \quad (3.94)$$

La détermination des contraintes fait apparaître la contrainte de cisaillement maximale  $\tau_{\max}$  pour

$$\tau_{\max} = 0.30 p_o \quad \text{à} \quad y_m = 0,785 b \quad (3.95)$$

La compression élastique de deux corps en contact bidimensionnel ne peut, par opposition aux cas précédents, se déduire de la seule théorie de Hertz.

Cependant, il est possible de calculer la compression d'un cylindre long, comprimé entre deux autres surfaces selon deux génératrices opposées (Johnson, 1985). La figure 3.7 illustre cette situation.

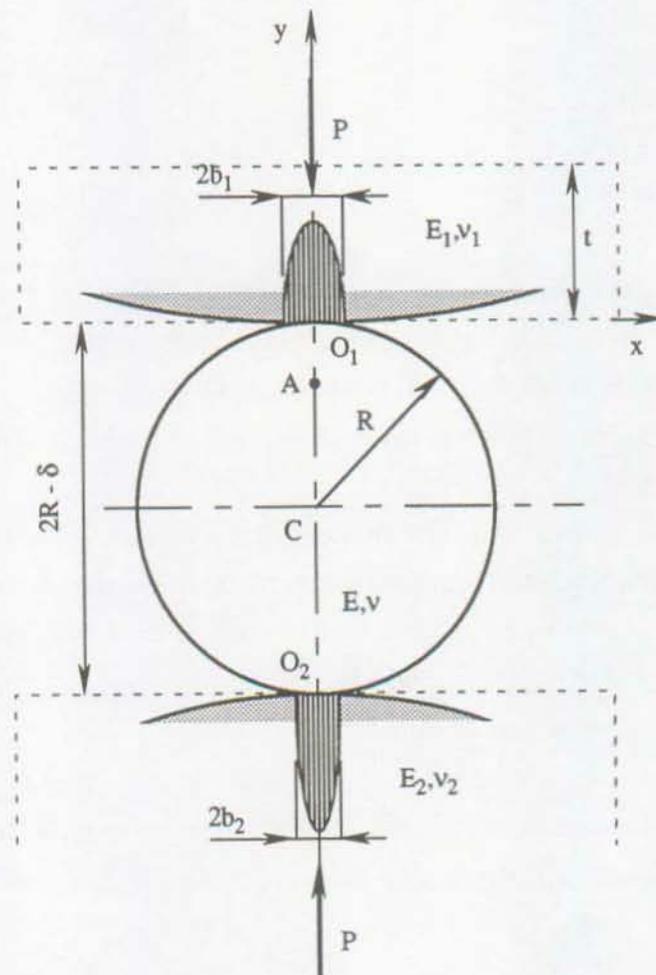


Fig. 3.7 : Compression d'un cylindre entre deux surfaces.

La force de compression par unité de longueur  $P_1$  provoque une distribution de pression hertzienne en  $O_1$

$$p = \frac{2P_1}{\pi b_1} (1-x^2/b_1^2)^{1/2} \quad (3.96)$$

et la demi-largeur du contact est

$$b_1^2 = 4P_1 R_1^* / \pi E_1^* \quad (3.97)$$

avec  $R_1^*$  et  $E_1^*$ , rayon et module équivalents au contact  $O_1$ .

Par ailleurs, la distribution des contraintes dans un cylindre soumis à deux forces concentrées égales et opposées est donnée par Timoshenko et Goodier (Timoshenko, 1970). Elle comprend la superposition d'un champ de contrainte dû à deux forces concentrées agissant sur les surfaces libres de deux massifs tangents au cylindre en  $O_1$  et  $O_2$  et d'une traction biaxiale uniforme

$$\sigma_x = \sigma_y = P_1 / \pi R \quad (3.98)$$

qui annule les contraintes à la surface circulaire du cylindre.

Comme  $b \ll R$ , on peut considérer le cylindre de la figure 3.6 comme soumis à une combinaison de forces diamétralement opposées et distribuées selon (3.96). Il s'agit ensuite de déterminer la déformation relative  $\epsilon_y$  en un point A compris entre C et  $O_1$ , sur l'axe de symétrie. L'état de contrainte au point A est la somme des trois contributions suivantes :

- les contraintes dues à la distribution de pression hertzienne au contact  $O_1$  ;
- les contraintes dues à la pression de contact en  $O_2$  qui, étant donné la grande distance entre A et  $O_2$ , peuvent être prises comme celles résultant d'une force concentrée appliquée en  $O_2$  ;
- les tractions biaxiales (3.98).

En sommant ces contributions et en intégrant  $\epsilon_y$  de  $y = 0$  à  $y = R$ , avec l'hypothèse  $b \ll R$ , on obtient le déplacement dû à la compression de la partie supérieure du cylindre comprise entre  $O_1$  et C,

$$\delta_1 = P_1(1-\nu^2) [2\ln(4R/b_1) - 1] / \pi E \quad (3.99)$$

On obtient une expression similaire pour la moitié inférieure du cylindre, ce qui permet d'écrire le raccourcissement  $\delta$  de la distance  $O_1O_2$  sous la forme

$$\delta = 2P_1(1-\nu^2) [\ln(4R/b_1) + \ln(4R/b_2) - 1] / \pi E \quad (3.100)$$

Par comparaison, la compression d'un demi-espace, relativement à un point situé à une profondeur  $d$  sous le centre de la distribution hertzienne de pression, a pour valeur

$$\delta' = P_1(1-\nu^2) [2 \ln(2d/b) - \nu/(1-\nu)] / \pi E \quad (3.101)$$

Si l'on prend  $d = R$ , on voit que l'hypothèse (3.101) sous-estime la compression vraie du cylindre (3.100) de l'ordre de 10 % dans le domaine des forces agissant en pratique sur les contacts.

Si l'un des solides en contact n'est pas cylindrique mais de section rectangulaire et d'épaisseur  $t \gg a$ , on pourra utiliser (3.101) pour calculer sa compression. Ce cas se rencontre notamment dans les paliers à galets cylindriques où le corps roulant est comprimé par deux bagues de sections que l'on peut considérer comme rectangulaires.

### 3.3.6 Application aux contacts galets/pistes d'un roulement

La compression d'un galet entre les pistes intérieure et extérieure d'un roulement peut être calculée facilement à partir des relations (3.100) et (3.101). En effet, on peut facilement assimiler les bagues de roulement à des solides de section rectangulaire, d'épaisseur  $t_1$  pour la bague intérieure et  $t_2$  pour la bague extérieure.

Les rayons de ces bagues seront  $R_1$  et  $R_2$  respectivement pour les bagues intérieure et extérieure, comme l'illustre la figure 3.8.

La déformation radiale totale sous l'effet d'une charge linéique  $P_1$  appliquée à l'ensemble sera

$$\delta = 2P_1(1-\nu^2)/\pi E \cdot [\ln(4R_o/b_1) + \ln(4R_o/b_2) - 1 + \ln(2t_1/b_1) + \ln(2t_2/b_2) - \nu/(1-\nu)] \quad (3.102)$$

où  $R_o$  est le rayon du galet.

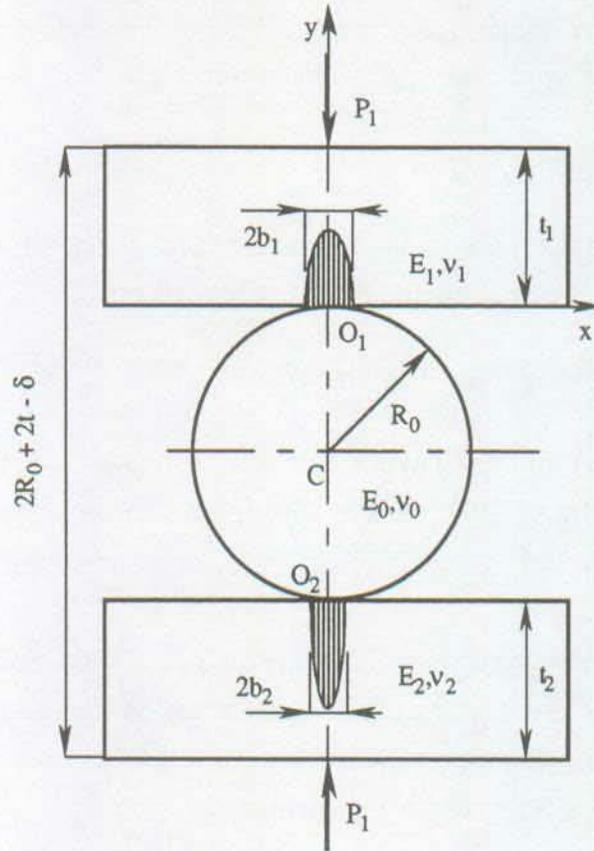


Fig. 3.8 : Contacts entre galet et pistes de roulement.

Dans la pratique, on peut simplifier un peu l'expression ci-dessus en admettant, ce qui est proche de la réalité, que l'épaisseur des bagues est de l'ordre de grandeur du rayon du galet, soit

$$t_1 \approx R_0 \quad t_2 \approx R_0 \quad (3.103)$$

On peut alors grouper les termes dans (3.102) et écrire, en supposant les bagues de même matériau,  $E_1$  et  $\nu_1$

$$\delta = 2P_1(1-\nu_0^2)/\pi E_0 \cdot [\ln(8R_0^2/b_1^2) + \ln(8R_0^2/b_2^2) - 1/(1-\nu_1)] \quad (3.104)$$

En remplaçant les  $b_i$  par leurs expressions (3.93), il vient

$$\delta = 2P_1(1-\nu_0^2)/\pi E_0 \cdot [\ln(2\pi R_0^2 E^*/P_1 R_1^*) + \ln(2\pi R_0^2 E^*/P_1 R_2^*) - 1/(1-\nu_1)] \quad (3.105)$$

avec les grandeurs équivalentes suivantes

$$E^* = [(1-v_1^2)/E_1 + (1-v_0^2)/E_0]^{-1} \quad (3.106)$$

$$R_1^* = R_1 R_o / (R_1 + R_o) \quad (3.107)$$

$$R_2^* = R_2 R_o / (R_2 - R_o) \quad (3.108)$$

et comme, dans un roulement

$$R_2 = R_1 + 2R_o \quad (3.109)$$

$$R_2^* = (R_1 + 2R_o) R_o / (R_1 + R_o) \quad (3.110)$$

Puis,

$$\delta = 4P_1(1-v_0^2)/\pi E_o \cdot [\ln (2\pi R_o^2 E^* / P_1 (R_1^* R_2^*)^{1/2}) - 1/2(1-v_1)] \quad (3.111)$$

et comme on peut formuler

$$(R_1^* R_2^*)^{1/2} = [R_1(R_1 + 2R_o)]^{1/2} R_o / (R_1 + R_o) \quad (3.112)$$

ou encore

$$(R_1^* R_2^*)^{1/2} = R_o(1+2R_o/R_1)^{1/2} / (1+R_o/R_1) \quad (3.113)$$

le déplacement  $\delta$  devient

$$\delta = 4P_1(1-v_0^2)/\pi E_o \cdot \left[ \ln \left\{ 2\pi E^* R_o (1+R_o/R_1) / P_1 (1+2R_o/R_1)^{1/2} \right\} - \right. \\ \left. - 1/2(1-v_1) \right] \quad (3.114)$$

Dans le cas de roulements entièrement en acier, les modules d'élasticité sont identiques pour les bagues et les corps roulants et

$$E^* = E/2(1-\nu^2) \quad (3.115)$$

ce qui donne, avec

$$E = 2.1 \cdot 10^{11} \text{ Pa} \quad \text{et} \quad \nu = 0.27 \quad (3.116)$$

$$E^* = 1.1326 \cdot 10^{11} \text{ Pa} \quad (3.117)$$

Dans ces conditions, la relation (3.114) peut être approchée par une relation numérique et l'on remarque que le rapport  $R_0/R_1$  a une influence négligeable sur  $\delta$  ; on obtient

$$\delta = 2.574 \cdot 10^{-10} \cdot R_0^{0.1} \cdot P_1^{0.905} \quad [\text{m}] \quad (3.118)$$

Si l'on fait apparaître la charge sur le galet  $Q$ , pour un galet de longueur  $\ell$

$$Q = P_1 \cdot \ell \quad (3.119)$$

on peut calculer la rigidité équivalente à celle des galets et des bagues en série par

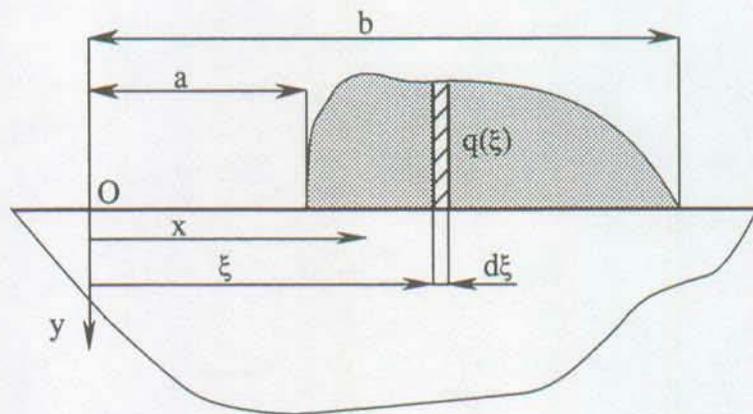
$$k = \frac{\partial Q}{\partial \delta} \quad (3.120)$$

et l'on obtient

$$k = 4.012 \cdot 10^9 \cdot R_0^{-0.1} \cdot Q^{0.095} \cdot \ell^{0.905} \quad [\text{N/m}] \quad (3.121)$$

### 3.3.7 La déformation du solide semi-infini

La résolution du problème élastohydrodynamique complet nécessite la connaissance de la déformation d'un plan d'un solide déformable soumis à une distribution de pression. Ce champ de déplacements est présenté dans de nombreux ouvrages d'élasticité (Timoshenko & Goodier, 1970).



**Fig. 3.9 : Frontière de solide soumise à une distribution de charge quelconque.**

Dans le cas bidimensionnel, une frontière rectiligne d'un solide déformable soumis à une distribution de pression, perpendiculaire à la frontière, (figure 3.9) provoque les déplacements  $y(x)$  tels que

$$y(x) = -\frac{2}{\pi E} \int_a^b q(\xi) \ln |x - \xi| d\xi \quad (3.122)$$

Dans le cas de la lubrification, ces déplacements viennent s'ajouter à l'expression de l'épaisseur du film d'huile (3.62), par exemple.



## CHAPITRE 4

# ETUDE THEORIQUE DU CONTACT LUBRIFIE BIDIMENSIONNEL

### 4.1 REGIME ISOVISQUEUX RIGIDE (IVR)

Les simplifications des diverses équations qu'autorise ce régime particulier permettent de pousser les développements théoriques relativement loin et favorisent ainsi les raisonnements et la compréhension des phénomènes de la lubrification. Cette approche nous a permis à la fois de vérifier un certain nombre de concepts et de contrôler ou "caler" le modèle numérique par éléments finis. De plus, les très bonnes correspondances que nous avons obtenues entre des calculs effectués avec les hypothèses IVR dans des systèmes réels, arbres de transmission, broches de machines-outils, laissent penser que ces applications ont des domaines de fonctionnement, à charges relativement faibles, qui sont assez proches des conditions de ce régime de lubrification. Par ailleurs, lorsque les systèmes réels qui nous intéressent s'écartent du domaine IVR, ils se situent dans un domaine "intermédiaire", mais pour ainsi dire jamais dans un régime fortement élastohydrodynamique. Une des raisons qui président à cet état de fait est certainement la prédominance des vitesses de roulement sur les vitesses de glissement dans tous les systèmes qui nous occupent en priorité. Cette particularité a poussé certains auteurs à négliger les effets thermiques dûs à la dissipation dans le film d'huile, ce qui ne nous paraît pas très réaliste face aux résultats que nous présenterons dans le chapitre réservé à l'analyse par éléments finis.

L'étude théorique, mais aussi plus tard l'étude numérique, n'aborderont que le régime permanent du contact lubrifié. Dans ces conditions, le système composé de deux corps animés de vitesses de roulement et de glissement devra toujours être en équilibre, tant sur le plan mécanique que thermique. Du point de vue mécanique, cela se traduit par un équilibre de forces, alors que du point de vue thermique cela signifie que les corps en présence sont globalement à une température constante. Comme la température ne peut être constante le long du film fluide, la chaleur fournie par le cisaillement de l'huile doit être évacuée, par convection dans l'air ou dans l'huile et par conduction dans les solides. En ce qui concerne le corps roulant proprement dit, aucune conduction ne peut être envisagée dans le cas réel et l'évacuation de la chaleur fournie aux points de contact sera due exclusivement à la convection. Ces circonstances

rendent particulièrement ardu le choix des hypothèses et des conditions aux limites en ce qui concerne la température.

#### 4.1.1 Equations du film mince visqueux bidimensionnel

Nous reprenons ici les équations établies au chapitre 3 en les adaptant au cas bidimensionnel.

##### • Equation de Reynolds

Nous avons vu que le cas bidimensionnel constituait la limite du contact tonneau/plan dans lequel on néglige les effets de bord. L'équation de Reynolds est alors donnée par (3.41), soit

$$\frac{d}{dx} \left[ \frac{h^3}{12\mu} \frac{dp}{dx} \right] = \frac{dh}{dx} U/2 \quad (4.1)$$

$$\text{avec } U = U_1 + U_2$$

Les hypothèses adoptées pour établir cette équation sont telles que  $h$  et  $p$  ne dépendent que de  $x$  seul.

Comme on suppose légitimement que  $h_0 \ll R$  et que la zone du contact est aussi très petite comparée au rayon du cylindre, on peut assimiler la vitesse  $U_2$  au produit  $R\omega$ , alors que, en toute rigueur, on aurait

$$U_2 = R\omega \cdot \cos \text{Arctg} (dh/dx) \quad (4.2)$$

ou, sous forme rationnelle

$$U_2 = R\omega [1 + (dh/dx)^2]^{-1/2} \quad (4.3)$$

comme on peut le constater en se référant à la figure 3.1.

On peut intégrer l'équation de Reynolds (4.1) une première fois suivant  $x$  et l'on obtient la relation bien connue

$$dp/dx = 6\mu U(h-h^*)/h^3 \quad (4.4)$$

dans laquelle  $h^*$  représente la hauteur du film à l'abscisse où le gradient de pression est nul, comme le montre la figure 4.1.

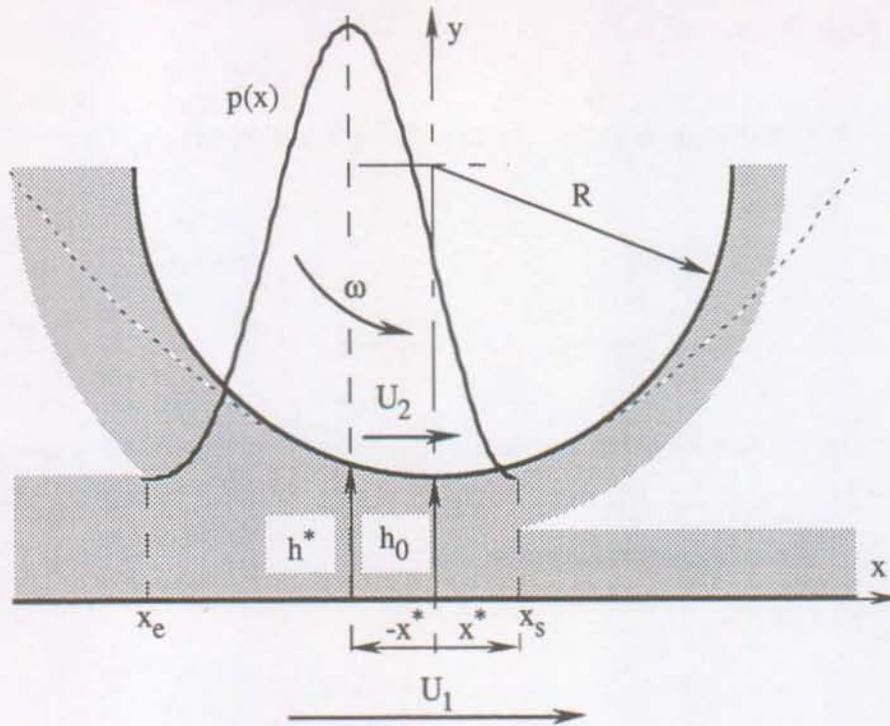


Fig. 4.1 : Représentation du contact lubrifié bidimensionnel.

- **Hauteur du film fluide**

Les surfaces des solides en présence étant approximées, dans la zone du contact, par des surfaces du second degré, la hauteur du film est décrite par (3.62), soit

$$h = h_0 + x^2/2R \quad (4.5)$$

Cette approximation ramène la surface du cylindre à une parabole. A l'abscisse  $-R$ , l'erreur sur la hauteur du film est d'importance puisque l'on trouve (figure 4.1)

$$h = h_0 + R/2 \quad (4.6)$$

alors que dans la réalité on a évidemment

$$h = h_0 + R \quad (4.7)$$

Cependant l'erreur devient négligeable après intégration, car le domaine où la géométrie diffère est loin des pressions élevées.

- **Distribution de vitesse**

Le champ de vitesse  $u(x,y)$  dans le film se déduit immédiatement de la première relation (3.29), soit

$$u = 1/2\mu \cdot dp/dx \cdot (y-h)y + (U_2-U_1)y/h + U_1 \quad (4.8)$$

- **Forme modifiée de l'équation de Reynolds**

On peut introduire l'expression de la hauteur du film (4.5) dans l'équation de Reynolds (4.4) en vue d'intégrer par rapport à  $x$ . Il est commode, au préalable, d'effectuer le changement de variable

$$\operatorname{tg} \gamma = x / \sqrt{2Rh_0} \quad ; \quad x = \operatorname{tg} \gamma \sqrt{2Rh_0} \quad (4.9)$$

ce qui entraîne

$$h = h_0(1 + \operatorname{tg}^2 \gamma) = h_0 / \cos^2 \gamma \quad (4.10)$$

A l'abscisse  $x = -x^*$  où le gradient de pression est nul,  $h = h^*$  et  $\gamma = \gamma^*$ , donc

$$h^* = h_0(1 + \operatorname{tg}^2 \gamma^*) = h_0 / \cos^2 \gamma^* \quad (4.11)$$

Ainsi l'on peut finalement obtenir le gradient de pression sous la forme

$$dp/dx = (6\mu U/h_0^2) (\cos^4 \gamma - \cos^6 \gamma / \cos^2 \gamma^*) \quad (4.12)$$

avec, évidemment

$$dx = d\gamma \sqrt{2Rh_0} / \cos^2 \gamma \quad (4.13)$$

#### 4.1.2 Calcul de la distribution de pression dans le film

On obtient la pression dans le film par intégration de (4.12) en fonction de la variable adimensionnelle  $\gamma$ . On trouve

$$p(\gamma) = 6\mu U \sqrt{2Rh_0} / h_0^2 \cdot [\gamma(1-3 \operatorname{tg}^2 \gamma^*)/8 - \sin 2\gamma \operatorname{tg}^2 \gamma^* / 4 - \sin 4\gamma / 32 \cos^2 \gamma^* + A] \quad (4.14)$$

Les quantités  $\gamma^*$  et  $A$  sont des constantes qu'il s'agit de déterminer par les conditions aux limites sur la pression. Il faut remarquer à ce stade que le gradient de pression (4.12) est une fonction paire en  $\gamma$  qui satisfait les conditions

$$\begin{aligned} dp/dx = 0 & \quad \text{pour} \quad x = \pm \infty, \quad \gamma = \pm \pi/2 \\ dp/dx = 0 & \quad \text{pour} \quad x = \pm x^*, \quad \gamma = \pm \gamma^* \end{aligned} \quad (4.15)$$

Ainsi, la distribution de pression dépendra du choix des conditions aux limites que l'on adopte.

• **Distribution impaire en  $x$  (demi-condition de Sommerfeld)**

Les conditions aux limites considérées initialement par Sommerfeld

$$p = dp/dx = 0 \quad \text{pour} \quad x = \pm \infty \quad (4.16)$$

le conduisent à une distribution de pression impaire en  $x$ , car l'on obtient dans ce cas

$$A = 0, \quad \text{et} \quad 1 - 3 \operatorname{tg}^2 \gamma^* = 0 \quad (4.17)$$

La valeur de  $\gamma^*$  s'obtient de manière directe

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \gamma^* &= \pm 1/\sqrt{3} = \pm 0.5774 \\ \gamma^* &= \pm 0.5236 \text{ rd} = \pm 30^\circ \end{aligned} \quad (4.18)$$

Comme une telle distribution de pression conduit à une portance nulle du contact d'une part, et qu'elle suppose des pressions négatives dans le film équivalentes aux pressions positives d'autre part, ce qui est physiquement inadmissible, certains auteurs, dont Pruvot (1983) par exemple, ont supposé que cette distribution était valable pour les pressions positives, soit dans le domaine  $x \leq 0$  et que la pression était nulle partout ailleurs, soit pour  $x \geq 0$ .

On le constate sur la figure 4.2, cette hypothèse ne peut tenir compte d'une éventuelle cavitation en sortie de contact, et, de plus, le gradient de pression n'est pas nul à la sortie du contact, ce qui est physiquement difficile à admettre.

Selon cette répartition, l'abscisse correspondant à la pression maximale vaut

$$x^* = 0.8165 \sqrt{Rh_0} \quad (4.19)$$

et la valeur de la pression maximale

$$p^* = 3\sqrt{6}/8 \mu U \sqrt{Rh_0} / h_0^2$$

$$p^* = 0.9186 \mu U \sqrt{Rh_0} / h_0^2 \quad (4.20)$$

• **Distribution de pression selon Martin**

Les problèmes auxquels conduisent les conditions aux limites proposées par Sommerfeld ont été contournés par Martin, lequel a supposé que la sortie du contact se situait à l'abscisse  $x^*$ , de manière telle que la pression et son gradient soient nuls à cet endroit. Les conditions aux limites sont dans ce cas

$$p = 0 \quad \text{pour} \quad x = -\infty, \quad \gamma = -\pi/2$$

$$p = 0 \quad \text{pour} \quad x \geq x^*, \quad \gamma \geq \gamma^* \quad (4.21)$$

Ces conditions introduites dans l'expression de la pression (4.14) donnent deux équations à deux inconnues

$$0 = A - \pi/4 + 3\pi/16 \cos^2 \gamma^*$$

$$0 = A + \gamma^*/2 + \sin 2\gamma^*/4 - (3\gamma^*/8 + \sin 2\gamma^*/4 + \sin 4\gamma^*/32) / \cos^2 \gamma^* \quad (4.22)$$

dont on tire les valeurs des constantes d'intégration  $\gamma^*$  et  $A$

$$A = (1 - 3 \operatorname{tg}^2 \gamma^*) \pi / 16 = 0.06337 \quad (4.23)$$

$$\gamma^* = 0.4436, \quad \operatorname{tg} \gamma^* = 0.4751 \quad (4.24)$$

et, par suite

$$x^* = 0.6719 \sqrt{Rh_0} \quad (4.25)$$

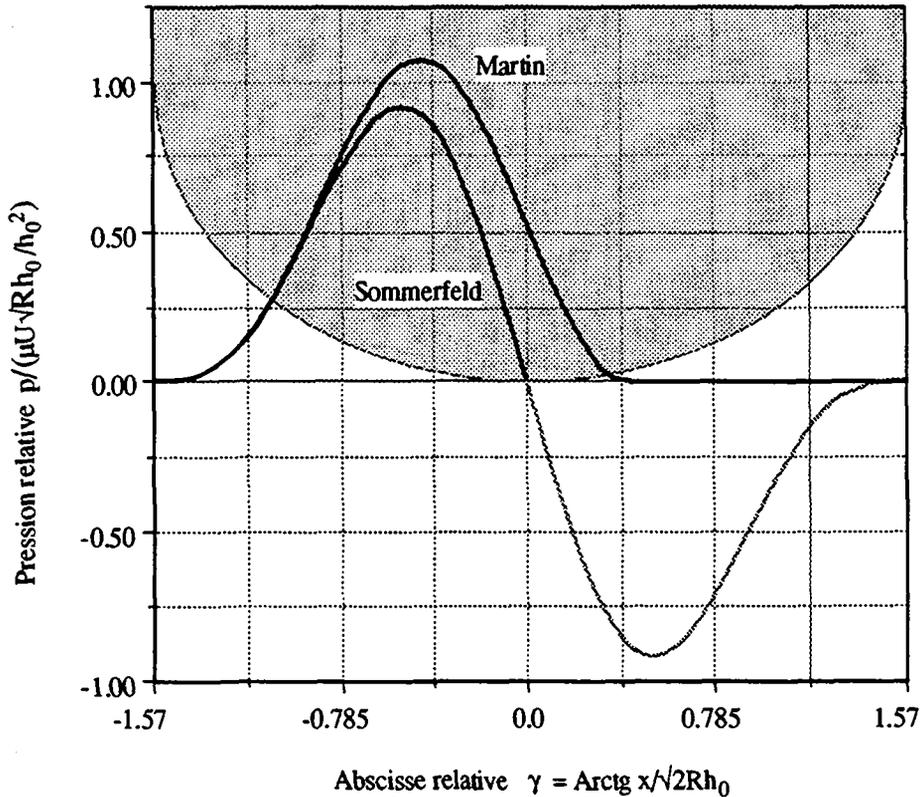
La valeur de la pression maximale est dans ce cas

$$p^* = 3\pi\sqrt{2} (1-3\text{tg}^2\gamma^*)/4 \mu U\sqrt{Rh_0}/h_0^2$$

$$p^* = 1.0755 \mu U\sqrt{Rh_0}/h_0^2 \quad (4.26)$$

Par ailleurs, la pression est nulle en  $x = x^*$  et la pression au centre du contact, en  $x = 0$ , vaut  $p^*/2$ .

Les différences entre les répartitions de Martin et de Sommerfeld sont clairement visibles sur la figure 4.2.



**Fig. 4.2 : Distributions de pression en fonction de l'abscisse du contact.**

Il faut remarquer que des calculs plus précis de la distribution de pression, par exemple en tenant compte de la vitesse vraie  $U_2$  de (4.3), ou en considérant le profil du solide non pas comme parabolique mais bien comme circulaire, ou encore en faisant intervenir la cavitation en sortie de contact, soit une dépression de quelques fractions de bar dans le pire des cas,

n'influencent que très faiblement le résultat obtenu avec les conditions de Martin. On peut même affirmer que les différences sont tout à fait négligeables.

#### 4.1.3 Forces dues à la pression au contact

La distribution de pression régnant dans le film provoque principalement une résultante selon  $y$  que l'on dénommera portance du contact  $P_y$  et une résultante sur le corps parabolique dirigée selon  $x$ , que l'on désignera par  $P_x$ .

La portance du contact  $P_y$  est évidemment la résultante la plus importante pour ce qui concerne les applications pratiques, mais nous verrons qu'il est intéressant de calculer  $P_x$ .

Les résultantes des forces de pression s'obtiennent par intégration de la distribution de pression dans le film.

Ainsi, dans les hypothèses adoptées, la portance a pour expression

$$P_y = \int_{x_e}^{x_s} p(x) dx \quad (4.27)$$

avec  $x_e$  l'abscisse d'entrée du contact, abscisse à laquelle le film fluide est constitué, et  $x_s$  l'abscisse de sortie du contact, endroit où le film se sépare.

En reprenant la variable auxiliaire  $\gamma$  on peut écrire

$$P_y = \int_{\gamma_e}^{\gamma_s} p(\gamma) d\gamma \sqrt{2Rh_0} / \cos^2 \gamma \quad (4.28)$$

En supposant l'entrée du contact à l'infini en amont du contact, comme on l'admet dans le cas de la lubrification riche

$$x_e = -\infty \quad \text{et} \quad \gamma_e = -\pi/2 \quad (4.29)$$

Après intégration, la portance peut être mise sous la forme

$$P_y = 6\mu UR/h_0 [1 + (\gamma_s + 2A) \operatorname{tg} \gamma_s - (3 + 3\gamma_s \operatorname{tg} \gamma_s - \cos^2 \gamma_s) / 4 \cos^2 \gamma_s^*] \quad (4.30)$$

Dans les deux répartitions envisagées nous obtenons :

- **demi-condition de Sommerfeld**

$$\gamma_s = 0 \quad A = 0 \quad \cos^2 \gamma^* = 3/4 \quad (4.31)$$

d'où

$$P_y = 2 \mu UR/h_o \quad (4.32)$$

- **selon Martin**

$$\gamma_s = \gamma^* = 0.4436 \quad A = 0.06337 \quad (4.33)$$

on obtient

$$P_y = 3 \cos^2 \gamma^* \mu UR/h_o = 2.4475 \mu UR/h_o \quad (4.34)$$

Cette portance  $P_y$  est très légèrement surévaluée du fait que l'on a supposé les angles petits et négligé la projection verticale des forces de pression.

Pour ce qui est de la résultante selon  $x$  des forces de pression agissant sur le cylindre nous devons tenir compte de la projection par le fait que (fig. 3.1)

$$\operatorname{tg} \theta = dh/dx = dh/d\gamma \cdot d\gamma/dx \quad (4.35)$$

et, par (4.10) et (4.13)

$$\operatorname{tg} \theta = \sqrt{2h_o/R} \cdot \operatorname{tg} \gamma \quad (4.36)$$

On peut calculer le sinus de l'angle qui est utilisé pour la projection

$$\sin \theta = \sqrt{2h_o/R} \cdot \operatorname{tg} \gamma / \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \gamma \cdot 2h_o/R} \quad (4.37)$$

Ainsi, la résultante des forces de pression selon  $x$  se calcule par

$$P_x = \int_{x_e}^{x_s} -p(x) \sin \theta \, dx \quad (4.38)$$

Avec les bornes d'intégration adoptées pour la lubrification riche (4.29)

$$P_x = \int_{-\pi/2}^{\gamma_s} -p(\gamma) \sin\theta \sqrt{2Rh_0} / \cos^2\gamma \, d\gamma \quad (4.39)$$

L'expression du  $\sin\theta$  dépend du rapport  $h_0/R$ . On peut donc envisager deux possibilités, la première consistant à admettre le  $\sin\theta$  égal à  $\text{tg}\theta$  et proportionnel à  $\text{tg}\gamma$  selon (4.36). La seconde solution est d'évaluer l'ordre de grandeur de  $h_0/R$  et d'en tenir compte. Dans le cas des roulements à galets, par exemple, on peut admettre que  $2h_0/R$  est de l'ordre de  $10^{-4}$ . Les deux résultats seront donnés ci-dessous dans les deux cas de distribution de pression traités :

- **demi-condition de Sommerfeld**

$$P_x = 4.4429 \mu U \sqrt{R/h_0}, \quad 2h_0/R \approx 0$$

$$P_x = 4.3893 \mu U \sqrt{R/h_0}, \quad 2h_0/R = 10^{-4} \quad (4.40)$$

- **selon Martin**

$$P_x = 4.6011 \mu U \sqrt{R/h_0}, \quad 2h_0/R \approx 0$$

$$P_x = 4.5514 \mu U \sqrt{R/h_0}, \quad 2h_0/R \approx 10^{-4} \quad (4.41)$$

On peut constater que les différences entre les deux distributions de pression, selon Sommerfeld ou selon Martin, sont de quelques pour-cent sur  $P_x$  et avoisinent 20 % sur  $P_y$ .

#### 4.1.4 Notion de couple opposé au roulement

Comme nous avons pu le constater lors de nos recherches bibliographiques, aucune étude sinon celle de Pruvot (1983) ne fait état de cette grandeur qui se révèle pourtant extrêmement utile et qui a de plus l'avantage d'être très parlante.

La distribution de pression qui s'établit dans le film provoque, par rapport au centre instantané

de rotation du cylindre, un couple qui s'oppose au mouvement. Il se calcule par

$$C = - \int_{x_e}^{x_s} x p(x) dx \quad (4.42)$$

ou, si l'on introduit la variable auxiliaire  $\gamma$

$$C = - \int_{x_e}^{x_s} 2Rh_0 p(\gamma) \sin\gamma / \cos^3\gamma d\gamma \quad (4.43)$$

Après intégration, on obtient

$$C = 3/2\sqrt{2} [(\gamma^* + \pi/2)(3 - 2\text{tg}^2\gamma^* + 3\text{tg}^4\gamma^*) - 3\text{tg}\gamma^*(1 - \text{tg}^2\gamma^*)] \mu UR\sqrt{R/h_0} \quad (4.44)$$

Puis numériquement dans les deux cas considérés :

- **demi-condition de Sommerfeld**

$$C = 4.4429 \mu UR\sqrt{R/h_0} = \pi\sqrt{2} \mu UR\sqrt{R/h_0} \quad (4.45)$$

- **selon Martin**

$$C = 4.6011 \mu UR\sqrt{R/h_0} \quad (4.46)$$

Il faut remarquer immédiatement que les expressions obtenues pour le couple consistent en fait simplement en les produits des  $P_x$ , calculés en (4.40) et (4.41) pour  $h_0/R \approx 0$ , par le rayon  $R$  du cylindre.

En effet, le cylindre étant soumis à une distribution de pression à sa surface, la résultante passe par le centre du cylindre et cette caractéristique s'exprime par

$$P_x \cdot \Delta y_p = P_y \cdot \Delta x_p = C \quad (4.47)$$

Et l'on obtient, dans les hypothèses choisies  $\Delta y_p = R$ . On peut ainsi calculer la position de la résultante  $P_y$  des forces de pression verticales. On trouve alors :

- **demi-condition de Sommerfeld**

$$\Delta x_p = 2.2214 \sqrt{Rh_0} \quad (4.48)$$

- **selon Martin**

$$\Delta x_p = 1.8799 \sqrt{Rh_0} \quad (4.49)$$

#### 4.1.5 Puissance dissipée au contact

Pour le contact bidimensionnel dans lequel on néglige les effets de bord, le seul terme de dissipation est celui du membre de droite de l'équation d'énergie (3.46). Il représente la dissipation due au cisaillement ou laminage de l'huile dans la zone du contact.

La dissipation volumique est donc

$$d\dot{E} = \mu (\partial u / \partial y)^2 \quad (4.50)$$

Pour trouver la puissance dissipée dans le film, par unité de largeur de contact puisque l'on est dans le cas bidimensionnel, il s'agit d'intégrer la dissipation sur le volume, d'où

$$\dot{E} = \int \int \mu (\partial u / \partial y)^2 dx dy \quad (4.51)$$

Le champ de vitesse étant donné par (4.8), sa dérivée partielle est immédiate

$$\partial u / \partial y = 1/2\mu \cdot dp/dx \cdot (2y-h) + (U_2-U_1)/h \quad (4.52)$$

Par introduction de cette expression dans (4.51) et en intégrant suivant  $y$  entre les bornes 0 et  $h$ , on obtient

$$\dot{E} = \int_{x_e}^{x_s} [h^3(dp/dx)^2/12\mu + \mu(U_2-U_1)^2/h] dx \quad (4.53)$$

Puis, en introduisant la variable  $\gamma$  et la différence des vitesses  $V = U_1-U_2$ , on trouve

$$\dot{E} = \mu\sqrt{2R/h_0} \int_{-\pi/2}^{\gamma_s} [3U^2(1 - 2\cos^2\gamma/\cos^2\gamma^* + \cos^4\gamma/\cos^4\gamma^*) + V^2] d\gamma \quad (4.54)$$

Après intégration, il vient

$$\dot{E} = 3\mu U^2 \sqrt{2R/h_0} [(\gamma_s + \pi/2)(1 - \text{tg}^2 \gamma^*) - \text{tg} \gamma_s] + 2\mu V^2 \sqrt{2R/h_0} (\gamma_s + \pi/2) \quad (4.55)$$

On obtient finalement, numériquement, pour les deux cas considérés :

- **demi-condition de Sommerfeld**

$$\dot{E} = 2.2214 (U^2 + V^2) \mu \sqrt{R/h_0} \quad (4.56)$$

- **selon Martin**

$$\dot{E} = (2.3005 U^2 + 2.8487 V^2) \mu \sqrt{R/h_0} \quad (4.57)$$

Il est très important de remarquer ici un fait tout à fait particulier qui n'a, à notre connaissance, jamais été mis en évidence, à savoir que l'expression du couple opposé au roulement conduit exactement à la même expression de la dissipation que le calcul direct, dans le cas du roulement pur. En effet, dans cette hypothèse, les vitesses  $U_1$  et  $U_2$  sont égales et la quantité  $V$  s'annule. Le couple opposé au roulement fournit alors une puissance

$$\dot{E} = C \cdot \omega \quad (4.58)$$

dans laquelle la vitesse angulaire du cylindre  $\omega$  vaut

$$\omega = U_2/R = U/2R \quad (4.59)$$

et la puissance liée au couple s'écrit

$$C = \text{cte} \cdot 1/2 \mu U^2 \sqrt{R/h_0}$$

Et l'on constate bien que les constantes de (4.45) et (4.46) sont respectivement doubles de celles apparaissant dans (4.56) et (4.57).

Cette approche de la puissance consommée par cisaillement de l'huile au contact est très parlante, et nous verrons plus loin qu'elle se vérifie parfaitement non seulement dans les hypothèses IVR, mais aussi dans les régimes élastohydrodynamiques calculés par éléments finis. Elle ne convient cependant pas lorsque le contact s'accompagne d'un glissement important, puisque le terme en  $V$  n'est pas présent dans l'expression du couple.

#### 4.1.6 Forces de frottement équivalentes

Il peut être utile, principalement pour la mise en équilibre d'un corps roulant sous l'effet des forces au contact, de déterminer des forces de frottement équivalentes au contact. Ces forces s'appliquent respectivement à la surface des corps 1 et 2 et peuvent être désignées par  $F_1$  et  $F_2$ . La puissance dissipée par ces forces qui s'opposent au mouvement doit évidemment être identique à celle calculée de manière directe par (4.57). On peut écrire

$$\dot{E} = F_1 U_1 + F_2 U_2 \quad (4.60)$$

Pour plus de commodité, écrivons cette puissance en fonction de  $U$  et  $V$ , somme et différence des vitesses des surfaces, des forces de frottement de roulement  $F_R$  et de frottement dû au glissement  $F_S$ ; alors

$$\dot{E} = F_R U + F_S V \quad (4.61)$$

qui admet les correspondances

$$\begin{aligned} U &= U_1 + U_2 & V &= U_1 - U_2 \\ F_1 &= F_R + F_S & F_2 &= F_R - F_S \end{aligned} \quad (4.62)$$

Par comparaison de (4.56) et (4.57) avec (4.61), on détermine les forces qui nous intéressent :

- **demi-condition de Sommerfeld**

$$F_R = 2.2214 \mu U \sqrt{R/h_0} = P_x/2 \quad (4.63)$$

$$F_S = 2.2214 \mu V \sqrt{R/h_0} \quad (4.64)$$

- **selon Martin**

$$F_R = 2.3005 \mu U \sqrt{R/h_0} = P_x/2 \quad (4.65)$$

$$F_S = 2.8487 \mu V \sqrt{R/h_0} \quad (4.66)$$

Nous avons ci-dessus raisonné sur les modules des forces de frottement. Pour déterminer leur sens, il suffit de considérer le fait qu'elles s'opposent à la vitesse. Nous pouvons écrire

$$F_1 = -P_x/2 - \text{cte} \cdot \mu V \sqrt{R/h_0}$$

$$F_2 = -P_x/2 + \text{cte} \cdot \mu V \sqrt{R/h_0} \quad (4.67)$$

Les constantes présentes dans ces relations ne dépendent que de la distribution de pression considérée.

#### 4.1.7 Régime à faible quantité d'huile

Les développements effectués jusqu'ici n'ont pas pris en considération la quantité d'huile alimentant le contact, celle-ci ayant été supposée suffisante pour repousser l'abscisse d'entrée du film d'huile à l'infini en amont du contact. Dans la pratique, l'infini n'existant pas, la quantité d'huile présente en amont du contact est souvent faible, surtout dans les paliers à corps roulants, où le passage successif des galets ne permet pas une réalimentation correcte en huile. En fait, les hypothèses de la lubrification riche ne sont satisfaites que si les corps roulants sont baignés d'huile. Ce cas se rencontre rarement, encore que certains fabricants de broches aient développé des broches dans lesquelles les paliers sont remplis d'huile et soumis à une légère surpression. Dans ces circonstances, la consommation de puissance des paliers est très élevée, non seulement en raison de la grande quantité d'huile, mais surtout du fait des étanchéités nécessaires à empêcher l'huile de s'échapper de la broche.

Une manière de faire apparaître une quantité d'huile limitée à l'entrée du contact consiste à imposer la "condition sans débit inverse" à l'entrée du contact. Cette condition a été utilisée par Hopkins, Birkoff et Hays pour caractériser la séparation du film à la sortie du contact et par Dalmaz (1979) à l'entrée du contact. Nous l'appliquerons ici dans un premier temps, notamment pour évaluer l'influence de la quantité d'huile sur la consommation de puissance et les autres grandeurs exprimées plus haut.

- **La condition sans débit inverse à l'entrée du contact**

La composante  $u$  de la vitesse de la particule fluide dans l'écoulement unidirectionnel d'un film mince visqueux en régime permanent et isotherme est donnée par la relation (4.8), soit

$$u = 1/2\mu \cdot dp/dx \cdot (y-h)y + (U_2-U_1)y/h + U_1 \quad (4.68)$$

Le profil des vitesses  $u(y)$ , pour une abscisse  $x$  fixée, est parabolique. La condition de non existence d'un débit inverse implique la détermination du point de l'écoulement où simultanément, comme l'illustre la figure 4.1,

$$u = 0 \quad \text{et} \quad \partial u / \partial y = 0 \quad (4.69)$$

avec comme expression du gradient de vitesse

$$\partial u / \partial y = 1/2\mu \cdot dp/dx \cdot (2y-h) + (U_1-U_2)/h \quad (4.70)$$

La deuxième condition (4.69) permet d'écrire

$$y dp/dx = h/2 \cdot dp/dx - \mu(U_1-U_2)/h \quad (4.71)$$

En introduisant cette condition dans (4.68) soumise à la première condition (4.69), puis en résolvant, on obtient l'expression du gradient de pression

$$dp/dx = 2\mu U/h^2 (1 \pm \sqrt{1-V^2/U^2}) \quad (4.72)$$

La solution qui nous intéresse est celle correspondant au signe + dans (4.72). Il est facile de voir que le signe - redonne, en roulement pur où  $V = 0$ , les conditions aux limites à l'infini en amont du contact.

Ainsi on peut donc obtenir la condition "sans débit inverse" sous la forme :

$$dp/dx = 2\mu U/h^2 (1 + \sqrt{1-V^2/U^2}) \quad (4.73)$$

Afin de déterminer l'abscisse à laquelle se produit la condition (4.73), nous utiliserons l'équation de continuité pour exprimer l'égalité des débits à l'entrée et à l'abscisse où le gradient de pression est nul, soit

$$6\mu U (h_e - h^*)/h_e^3 = 2\mu U/h_e^2 (1 + \sqrt{1-V^2/U^2}) \quad (4.74)$$

Ce qui donne la hauteur du film à l'entrée du contact  $h_e$

$$h_e = 3h^*/(2 - \sqrt{1-V^2/U^2}) \quad (4.75)$$

Dans des conditions de roulement pur,  $V = 0$ , on trouve

$$h_e = 3h^* \quad (4.76)$$

alors qu'en glissement pur,  $V/U = 1$ , il vient

$$h_e = 3h^*/2 \quad (4.77)$$

La recherche des différentes forces nous conduit à déterminer l'abscisse relative  $\gamma_e$  en fonction de  $\gamma^*$ . On a

$$h_0/\cos^2\gamma_e = \left[ 3/(2 - \sqrt{1 - V^2/U^2}) \right] \cdot h_0/\cos^2\gamma^* \quad (4.78)$$

d'où

$$\gamma_e = \text{Arccos} \left\{ \left[ 3/(2 - \sqrt{1 - V^2/U^2}) \right]^{-1/2} \cos\gamma^* \right\} \quad (4.79)$$

• **Distribution de pression avec la condition "sans débit inverse"**

Avec cette condition particulière, la distribution de pression est toujours donnée par (4.14), mais avec les nouvelles conditions aux limites

$$\begin{aligned} \gamma = -\gamma_e & & p = 0 \\ \gamma = \gamma^* & & p = dp/dx = 0 \end{aligned} \quad (4.80)$$

On remarquera qu'avec ces conditions, le gradient de pression ne peut plus être nul à l'entrée du contact.

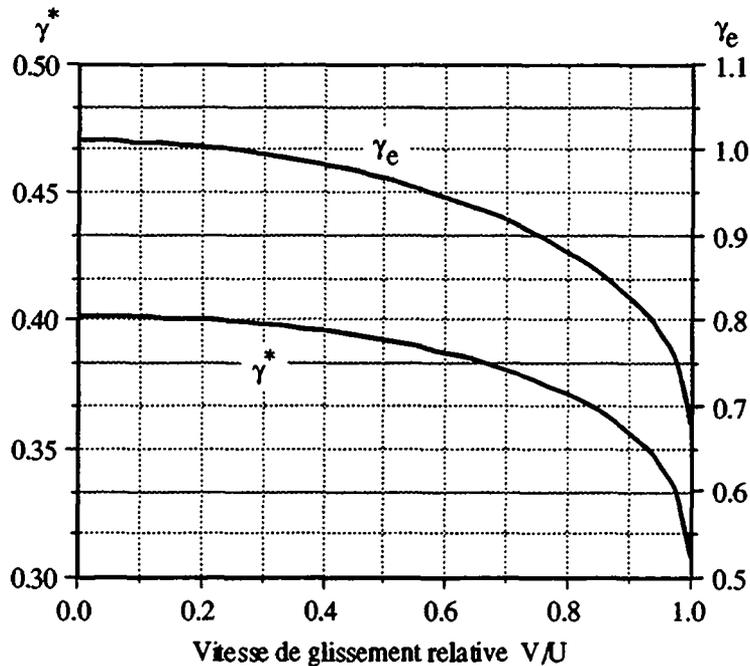
La détermination des constantes  $\gamma^*$ ,  $\gamma_e$  et  $A$  s'obtient en résolvant le système formé par (4.79) et les deux équations ci-après

$$\begin{aligned} -\gamma_e(1-3\text{tg}^2\gamma^*)/8 + \sin 2\gamma_e \text{tg}^2\gamma^*/4 + \sin 4\gamma_e/32 \cos^2\gamma^* + A &= 0 \\ \gamma^*(1-3\text{tg}^2\gamma^*)/8 - \sin 2\gamma^* \text{tg}^2\gamma^*/4 - \sin 4\gamma^*/32 \cos^2\gamma^* + A &= 0 \end{aligned} \quad (4.81)$$

Pour le cas du roulement pur,  $V = 0$  et les constantes ont pour valeur

$$\begin{aligned} \gamma^* &= 0.4016 \\ \gamma_e &= 1.0105 \\ A &= 0.04627 \end{aligned} \quad (4.82)$$

Par comparaison avec le régime surabondant, le problème est ici plus complexe, car les constantes ne dépendent plus seulement de  $U = U_1 + U_2$  mais aussi de  $V = U_1 - U_2$ . La figure 4.3 montre l'évolution des constantes  $\gamma^*$  et  $\gamma_e$  en fonction du rapport  $V/U$  que l'on peut définir comme le glissement relatif au contact.



**Fig. 4.3 : Valeur des constantes  $\gamma^*$  et  $\gamma_e$  en fonction du glissement relatif  $V/U$ .**

Dans le but de comparer les régimes surabondant et faiblement lubrifié, nous allons donner les expressions des différentes grandeurs dans le cas du roulement pur.

- **Roulement pur en régime faiblement lubrifié**

Avec les valeurs des constantes données par (4.82) on obtient, lorsque  $V = 0$  :

$$x^* = 0.6006 \sqrt{Rh_0} \quad (4.83)$$

$$p^* = 0.7853 \mu U \sqrt{Rh_0} / h_0^2 \quad (4.84)$$

$$P_y = 1.1296 \mu UR / h_0 \quad (4.85)$$

$$P_x = 0.8544 \mu U \sqrt{R/h_0}, \quad 2 h_0/R \approx 0 \quad (4.86)$$

$$C = 0.8544 \mu U R \sqrt{R/h_0} \quad (4.87)$$

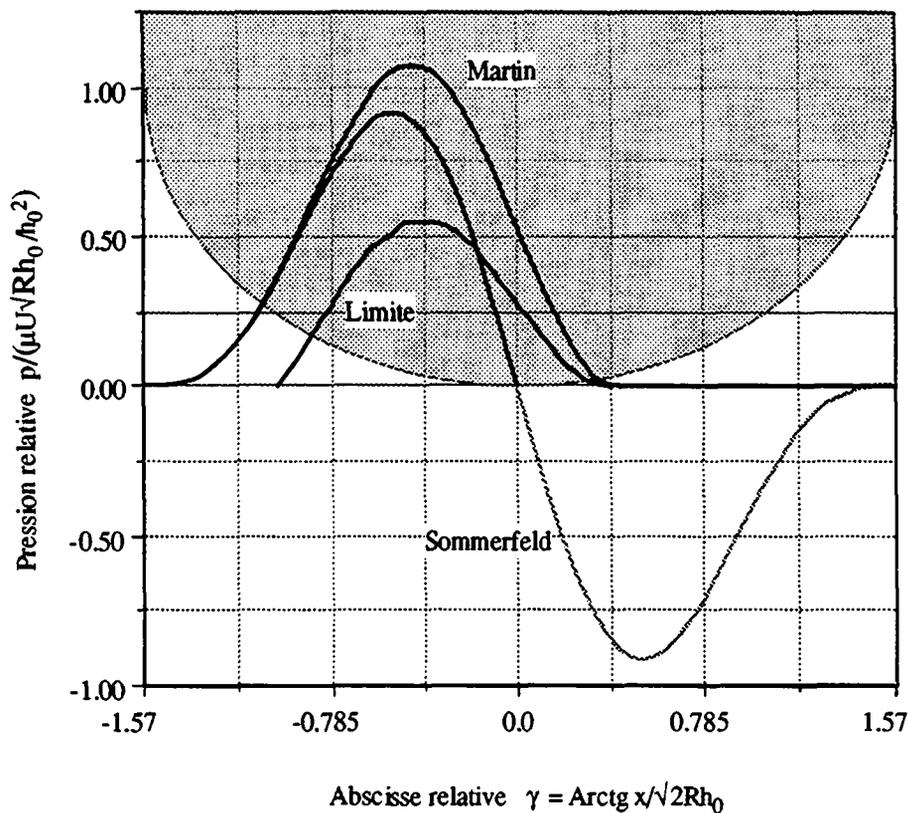
$$\Delta x_p = 0.7564 \sqrt{R h_0} \quad (4.88)$$

$$\dot{E} = 0.4272 \mu U^2 \sqrt{R/h_0} \quad (+ 1.9971 \mu V^2 \sqrt{R/h_0}) \quad (4.89)$$

$$F_R = 0.4272 \mu U \sqrt{R/h_0} = P_x/2 \quad (4.90)$$

$$F_S = 1.9971 \mu V \sqrt{R/h_0} \quad (4.91)$$

La distribution de pression  $p(x)$  est reportée à la figure 4.4, parallèlement aux distributions de Martin et de Sommerfeld, pour la même hauteur minimale du film  $h_0$ .



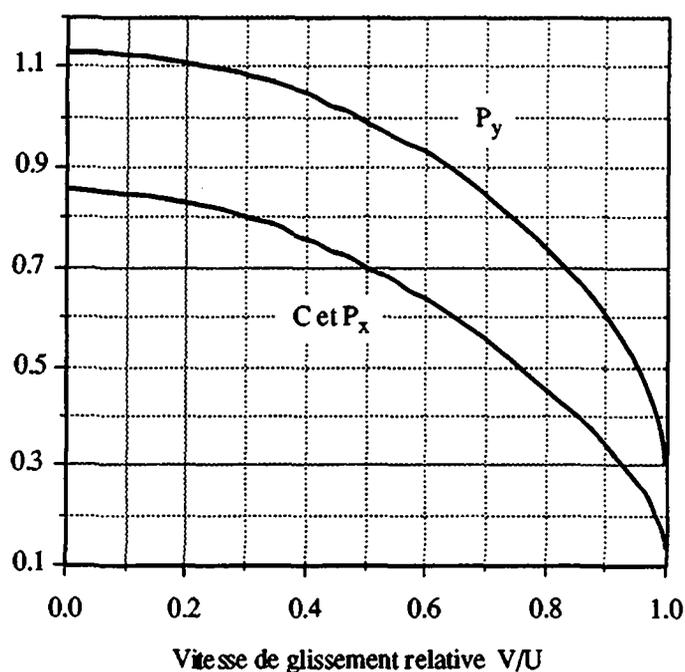
**Fig. 4.4 :** Pression dans le film en roulement pur selon les conditions d'alimentation pour une même hauteur minimale  $h_0$ .

La condition, adoptée dans ce paragraphe, d'absence de débit inverse à l'entrée du contact, fait dépendre les différentes constantes du glissement entre les solides. Il est intéressant d'étudier quelque peu cette interaction.

- **Influence du glissement sur les caractéristiques du contact faiblement lubrifié**

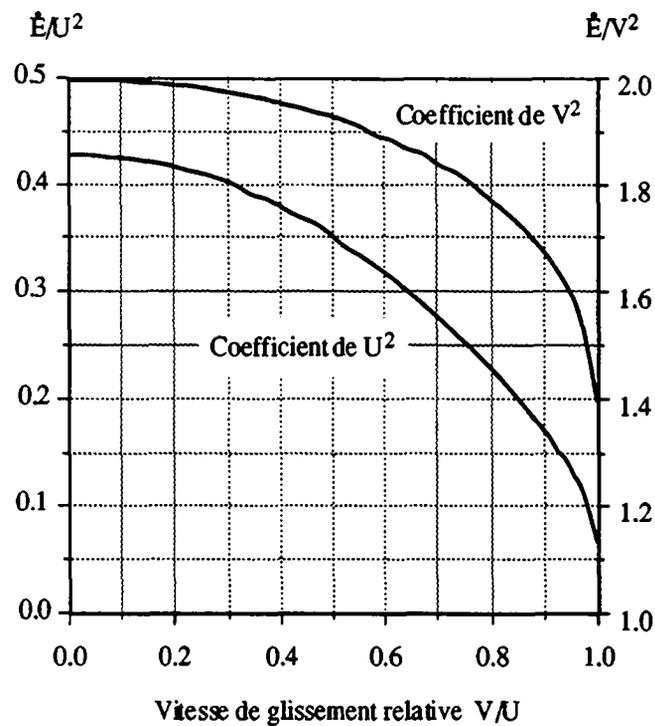
A partir des valeurs de  $\gamma^*$  et  $\gamma_e$  en fonction de  $V/U$  représentées à la figure 4.3, nous pouvons effectuer les différents calculs concernant les résultantes de pression et la puissance dissipée au contact.

L'évolution des coefficients numériques de la portance  $P_y$ , de la résultante  $P_x$  et du couple opposé au roulement est représentée à la figure 4.5.



**Fig. 4.5 : Coefficients numériques de  $P_x$ ,  $P_y$  et  $C$  en fonction de  $V/U$  en régime limite.**

On peut faire de même en ce qui concerne les coefficients de  $U^2$  et  $V^2$  dans l'expression de la puissance dissipée au contact et l'on obtient les courbes de la figure 4.6.



**Fig. 4.6 :** Coefficients de  $U^2$  et  $V^2$  intervenant dans l'expression de la puissance dissipée en régime limite.

Comme on peut le constater à la lecture des figures ci-dessus, la variation des coefficients numériques est importante en fonction du glissement. La raison de cette dépendance est que la condition "sans débit inverse" à l'entrée du contact fait varier l'abscisse d'entrée du contact en fonction de  $h_0$ , alors que pour le régime riche, cette abscisse reste constante puisque située à l'infini. Nous verrons plus loin les conséquences d'une hauteur de film d'huile constante à l'entrée du contact, quelle que soit la charge.

#### 4.1.8 Analyse de la consommation de puissance

Nous avons vu aux paragraphes précédents que la puissance dissipée au contact pouvait se mettre sous la forme

$$\dot{E} = (A_u U^2 + A_v V^2) \mu \sqrt{R/h_0} \quad (4.92)$$

où  $A_u$  et  $A_v$  sont des constantes numériques dans la lubrification riche et des valeurs dépendant du glissement  $V/U$  par (4.79) dans le régime limite.

Nous allons analyser la dépendance de la fonction de dissipation par rapport à la vitesse d'une des surfaces, l'autre vitesse restant constante. Ce cas se rencontre lorsque l'entraînement d'une des surfaces se fait par l'autre à travers le film hydrodynamique. Si la vitesse de la surface "moteur" est constante, il va s'établir un glissement partiel, en régime permanent, qui correspond à l'équilibre des corps en présence sous l'effet des différentes forces hydrodynamiques, mais aussi au minimum de la puissance dissipée dans le système. Il est facile de le montrer en exprimant l'équilibre de deux disques, l'un moteur et l'autre inerte, puis en calculant la puissance dissipée dans le régime permanent établi.

Nous ne ferons pas la démonstration ici, mais nous allons exprimer la consommation de puissance dans le cas où  $U_1$  est, par exemple, constant.

Le glissement est donné par

$$V/U = \frac{U_1 - U_2}{U_1 + U_2} \quad (4.93)$$

dont on peut extraire

$$U = 2U_1 / (1 + V/U) \quad (4.94)$$

Et la puissance dissipée devient

$$\dot{E} / \mu \sqrt{R/h_0} = 4(A_u + A_v V^2/U^2) U_1^2 / (1 + V/U)^2 \quad (4.95)$$

La représentation de cette fonction est aisée pour la lubrification surabondante car  $A_u$  et  $A_v$  sont donnés par (4.57), alors qu'elle est plus difficile en régime "sans débit inverse". Comme on peut le constater sur la figure 4.7, on trouve un minimum de  $\dot{E}$  pour

- régime riche :  $V/U = 0.08076$  (80.76 %)
 
$$U_2/U_1 = 0.1065 \quad (4.96)$$

- régime limite :  $V/U \approx 0.25$  (25 %)
 
$$U_2/U_1 \approx 0.6 \quad (4.97)$$

Pour simplifier le régime limite, on peut voir que les conditions du roulement pur donnent une approximation acceptable (courbe en gris sur la figure 4.7).

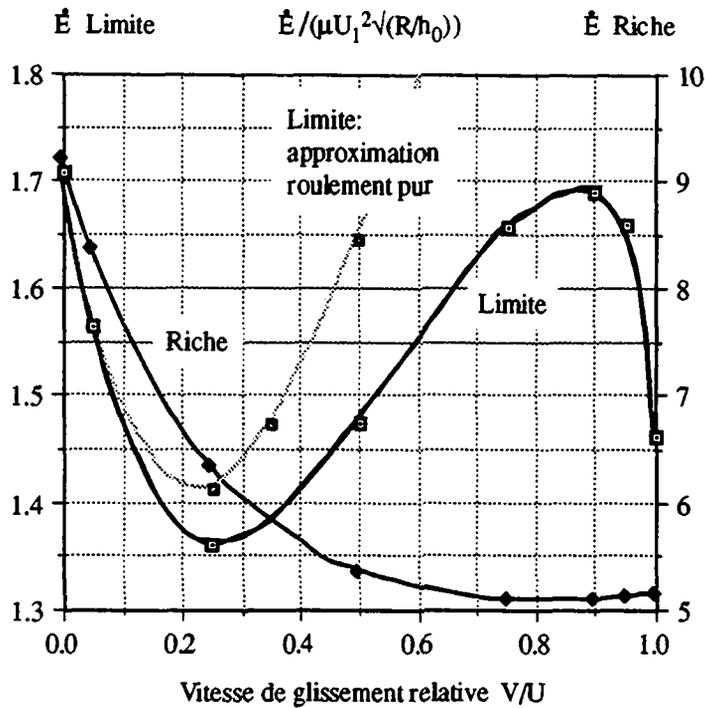


Fig. 4.7 : Puissance dissipée en fonction du glissement pour  $U_1$  constant.

Cette approximation remplace les valeurs (4.97) par celles définies ci-dessous:

- régime limite de roulement pur :

$$V/U = 0.2139 \quad (21.39 \%)$$

$$U_2/U_1 = 0.6476 \quad (4.98)$$

Nous pouvons déjà ici voir un avantage important de la diminution de la quantité d'huile à l'entrée du contact par le fait que le glissement correspondant au minimum de la dissipation est de 3 à 4 fois inférieur à ce qu'il est en régime riche et correspond en plus à une dissipation environ 4 fois inférieure. Comme on sait qu'une bonne partie de la puissance dissipée sert à chauffer l'huile, on perçoit tout l'avantage qu'il y a d'en diminuer la quantité.

#### 4.1.9 Régime à hauteur de film constante à l'entrée du contact

La condition "sans débit inverse" à l'entrée du contact conduisait à exprimer la hauteur du film à l'entrée par (4.75)

$$h_e = 3h^*/(2 - \sqrt{1 - V^2/U^2}) \quad (4.99)$$

ce qui permet d'exprimer l'abscisse  $x_e$  d'entrée du contact sous la forme

$$x_e = \left\{ \left[ 2Rh_o(1 + \sqrt{1 - V^2/U^2}) + 3x^{*2} \right] / (2 - \sqrt{1 - V^2/U^2}) \right\}^{1/2} \quad (4.100)$$

Il est évident, dans cette relation, que l'abscisse d'entrée n'est pas constante, indépendamment de la question du glissement, mais dépend directement de  $h_o$ , donc de la charge supportée par le contact. Plus précisément, l'abscisse d'entrée se rapproche du centre du contact (diminution de  $|x_e|$ ) lorsque la charge augmente et que  $h_o$  diminue.

Cette circonstance, équivalant à un appauvrissement du contact proportionnel à la charge, n'est évidemment pas réalisée dans le cas d'un palier à corps roulants faiblement lubrifié. On peut raisonnablement admettre, dans cette situation, que l'huile nécessaire à l'établissement du film hydrodynamique est celle entraînée par les surfaces en mouvement.

Ainsi, le film s'établira à l'abscisse où la distance entre les solides est égale à la somme des épaisseurs – faibles, à l'évidence – d'huile entraînées par ces surfaces. La hauteur du film à l'entrée devient une grandeur constante, indépendante de  $h_o$  et de la charge supportée par le contact :

$$h_e = \text{cte} = h_E \quad (4.101)$$

Les conditions aux limites sur la pression restent celles établies pour le régime "sans débit inverse" (4.80) et la détermination des constantes  $\gamma^*$  et  $A$  se réalise au moyen du même système d'équations (4.81).

Nous avons calculé, dans le cas du roulement pur uniquement, les valeurs des abscisses relatives  $\gamma^*$  et  $\gamma_e$  en fonction de  $h_o$  pour quatre valeurs de  $h_e$ , soit  $h_e = 0.01 \mu\text{m}$ ,  $h_e = 0.1 \mu\text{m}$ ,  $h_e = 0.7 \mu\text{m}$  et  $h_e = 2.25 \mu\text{m}$ . Les résultats sont représentés à la figure 4.8.

Sur cette figure, on aura les valeurs limites identiques, à savoir que pour

$$h_o = h_e \quad \gamma^* = \gamma_e = 0 \quad (4.102)$$

et pour  $h_0$  tendant vers zéro, on retrouve les valeurs du régime surabondant

$$h \rightarrow 0 \quad \gamma^* \rightarrow 0.4436 \quad \gamma_e \rightarrow \pi/2 \quad (4.103)$$

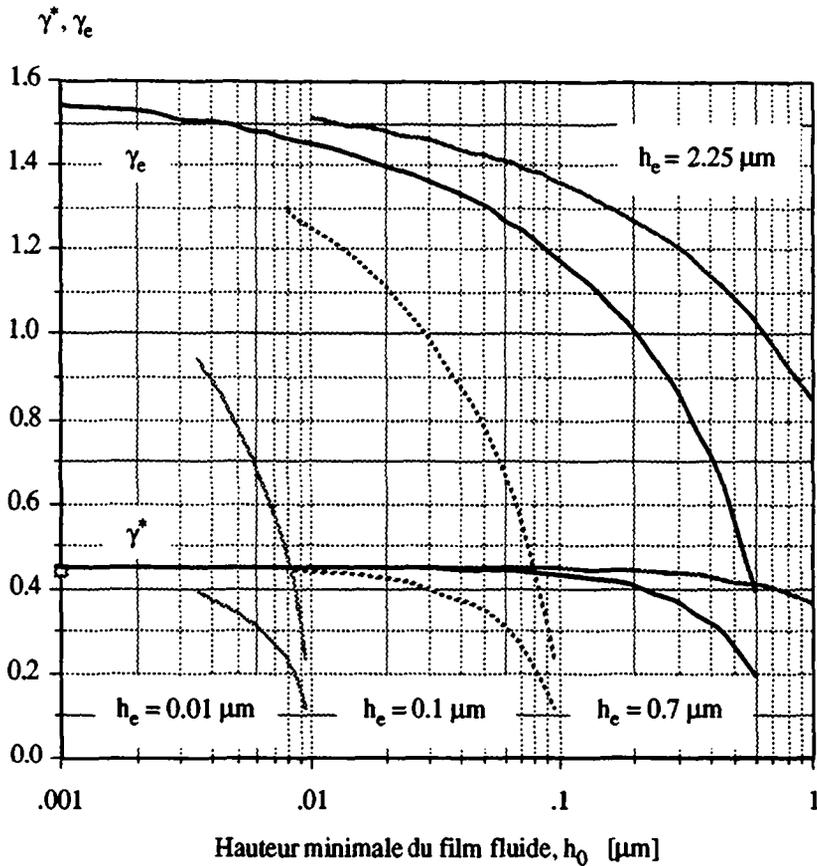


Fig. 4.8 : Abscisses relatives  $\gamma^*$  et  $\gamma_e$  en fonction de  $h_0$ , pour  $h_e = 0.01 \mu\text{m}$ ,  $0.1 \mu\text{m}$ ,  $0.7 \mu\text{m}$  et  $2.25 \mu\text{m}$ .

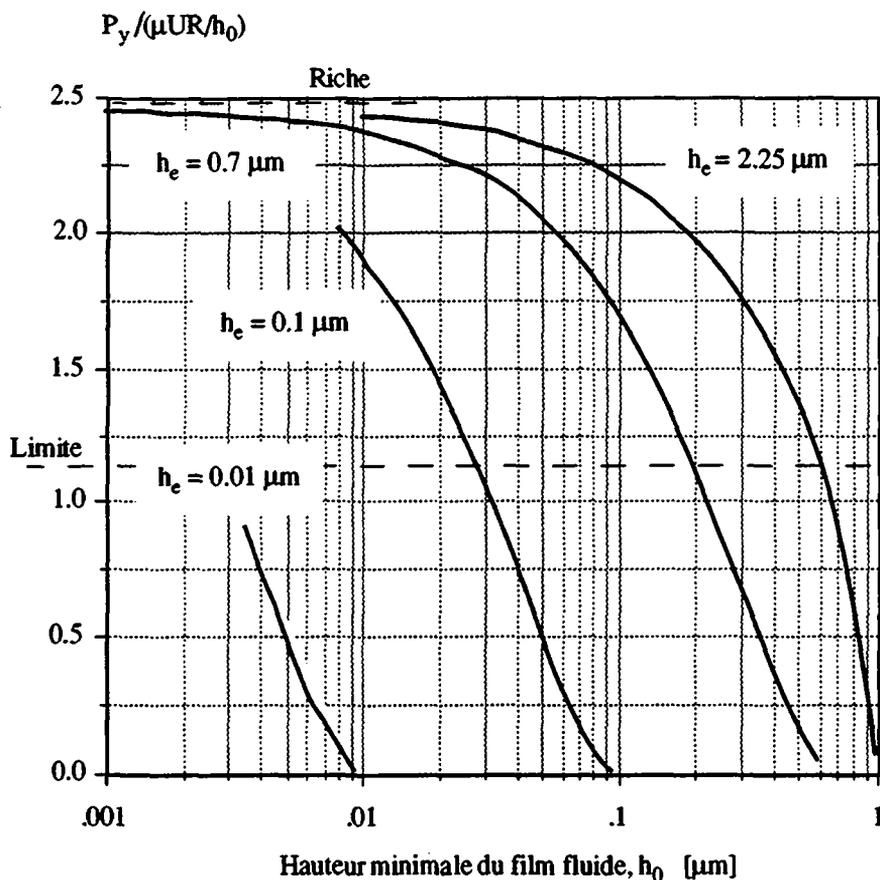
De plus, on obtient les valeurs du régime limite "sans débit inverse" (4.82) pour

$$h_0 = h_e \cos^2 \gamma^* / 3 \quad h_0 = 0.2824 h_e \quad (4.104)$$

où  $\gamma_e$  vaut, selon (4.82)

$$\gamma_e = 1.0105 \quad (4.105)$$

On peut de même calculer les coefficients de portance ou portance adimensionnelle  $P_y/(\mu UR/h_0)$  et de dissipation ou dissipation adimensionnelle  $\dot{E}/(\mu U^2 \sqrt{R}/h_0)$  que l'on a reportés sur les figures 4.9 et 4.10 en fonction de la hauteur minimale du film  $h_0$ .



**Fig. 4.9 :** Portance adimensionnelle  $P_y / (\mu UR / h_0)$  en fonction de la hauteur minimale du film  $h_0$ , pour les différentes hauteurs de film à l'entrée  $h_e$  du contact.

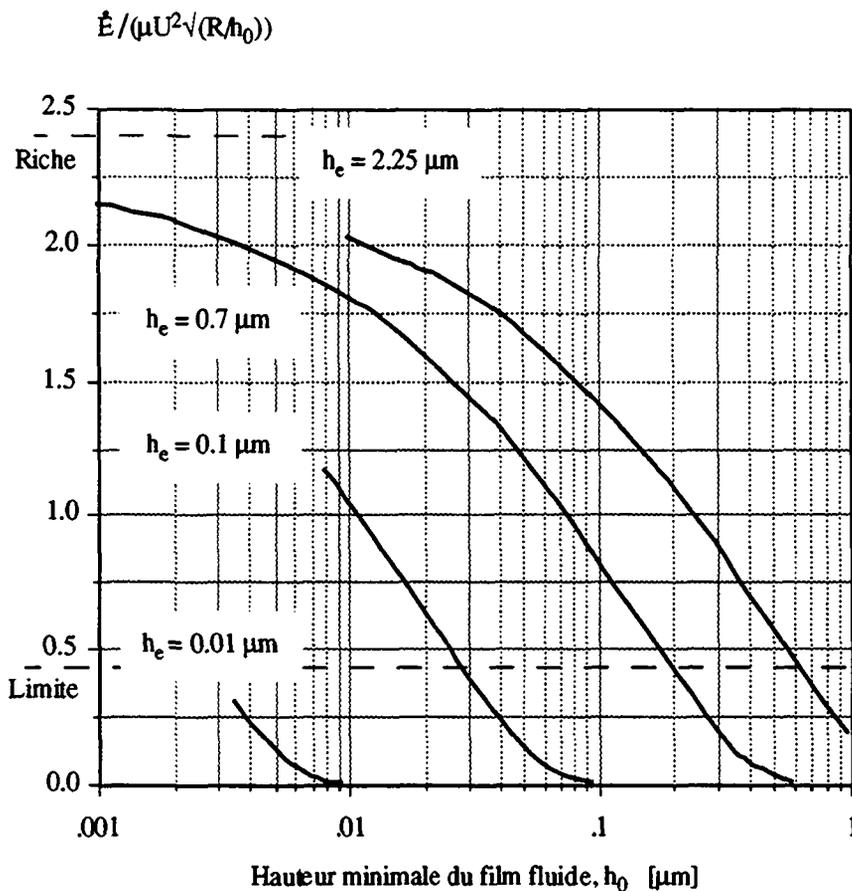
On remarquera que les indications correspondant aux régimes riche et limite sont reportées sur ces figures.

Les développements théoriques sur ce régime particulier, à hauteur de film donnée à l'entrée du contact, sont nécessaires à la comparaison avec les techniques numériques originales, que nous verrons plus loin et qui nous ont permis la modélisation d'une lubrification quelconque.

#### 4.1.10 Elévation de température dans le film d'huile

Pour cette approche thermique simplifiée, nous nous contenterons de considérer que la puissance dissipée dans le film est intégralement transformée en chaleur dans le film lui-même. Nous sommes persuadés que cette hypothèse surestime l'élévation de température dans le film.

Cependant, les résultats de la littérature montrent, en roulement pur, une élévation de température de quelques degrés seulement ne correspondant pas du tout à ce que l'on peut observer dans la réalité, sur des broches notamment. Nous avons observé, dans certains cas de lubrification pauvre par dispositif dit "air-huile", un jaunissement des pistes des roulements qui indique un cracking et/ou une combustion de l'huile dus à son échauffement. Ces observations ont été faites sur des montages avec jeu réduit et dans des conditions où les boîtiers de roulement ne dépassaient pas un échauffement de 30 °C . Ces considérations nous laissent penser qu'en régime permanent, la puissance dissipée au contact sert pour une bonne part à l'échauffement de l'huile proprement dite.



**Fig. 4.10 :** Dissipation adimensionnelle  $\dot{E}/(\mu U^2 \sqrt{R/h_0})$  en fonction de  $h_0$ , pour les différentes hauteurs considérées à l'entrée  $h_e$ .

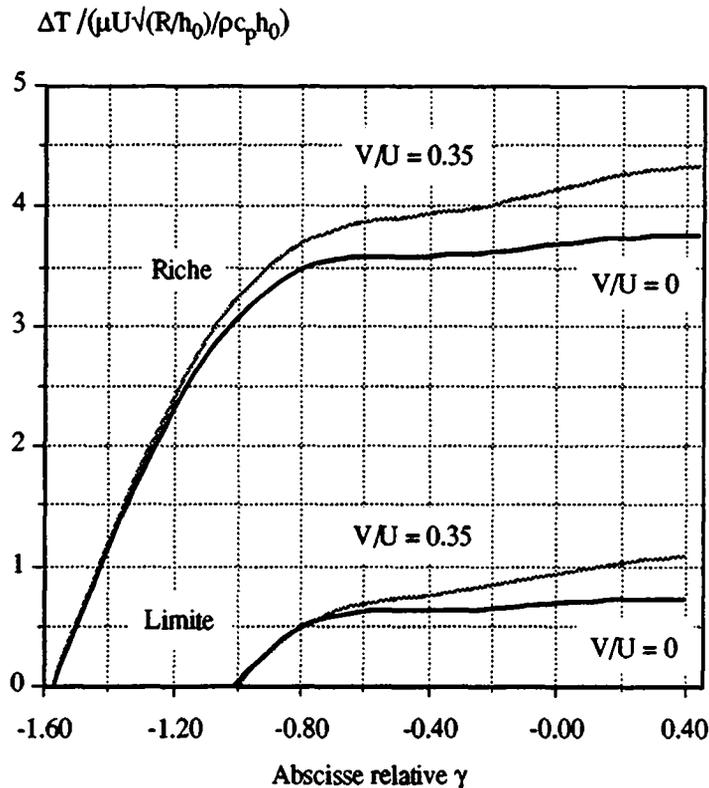
Ainsi nous nous plaçons donc dans les hypothèses qui nous ont permis d'écrire l'équation de la chaleur, au chapitre 3, sous la forme (3.46) que nous reproduisons ici

$$\rho c_p \left[ u \frac{\partial T}{\partial x} \right] = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \quad (4.106)$$

Comme les surfaces en mouvement sont, par hypothèse, thermiquement isolées, la température ne dépend donc que de  $x$  seul.

Après avoir introduit l'expression de  $\partial u/\partial y$  (4.52) puis l'abscisse relative  $\gamma$ , on peut intégrer l'équation de la chaleur afin d'obtenir la fonction  $\Delta T = f(\gamma)$ . On obtient, tous calculs faits,

$$\begin{aligned} \Delta T = \mu U \sqrt{R/h_0} / (\rho c_p h_0) \{ & 6\sqrt{2} [ (\gamma - \gamma_e) (\cos^2 \gamma^* - 1 + 3/8 \cos^2 \gamma^*) + \\ & + (\sin 2\gamma - \sin 2\gamma_e) (-2 + 1/\cos^2 \gamma^*) / 4 + \\ & + (\sin 4\gamma - \sin 4\gamma_e) / 32 \cos^2 \gamma^* ] + \\ & + 2\sqrt{2} (\gamma + \gamma_e) \cos^2 \gamma^* V^2 / U^2 \} \end{aligned} \quad (4.107)$$



**Fig. 4.11 : Elévation de température dans le film en fonction de l'abscisse relative  $\gamma$ .**

Les courbes d'échauffement dans le film fluide sont représentées à la figure 4.11 pour les régimes riche et limite, ainsi que pour deux valeurs du rapport  $V/U$ . On remarquera que l'échauffement dans le film est beaucoup plus faible en régime limite de lubrification, ce qui est d'une importance capitale dans le cas des paliers à corps roulants.

Par ailleurs, les courbes de roulement pur montrent un plateau à l'abscisse  $-\gamma^*$ , c'est-à-dire à l'endroit où  $dp/dx = 0$ . Cette caractéristique est évidente puisque, à cet endroit, la dissipation est nulle. L'échauffement à l'entrée du contact est tout à fait primordiale par rapport à l'échauffement à la sortie du contact. Nous verrons qu'il n'en est pas de même dans le régime élastohydrodynamique.

Il est bon d'exprimer de manière simple l'élévation totale de température, pour autant qu'on le puisse.

- **régime riche**

On obtient dans ce cas une expression très simple

$$\Delta T = \mu U \sqrt{R/h_0} / (\rho c_p h_0) [3.7537 + 4.6481 V^2/U^2] \quad (4.108)$$

- **régime limite "sans débit inverse"**

Comme on l'a vu précédemment, les constantes d'intégration  $\gamma^*$  et  $A$  dépendent, dans ce cas, du glissement  $V/U$ , et par conséquent il en va de même pour  $\gamma_e$ . Cette circonstance est visible sur la figure 4.11 où l'abscisse d'entrée est quelque peu différente pour les deux cas représentés.

Il est utile cependant d'exprimer une relation analogue à (4.108) pour le régime limite et les conditions de roulement pur. On trouve alors

$$\Delta T = \mu U \sqrt{R/h_0} / (\rho c_p h_0) [0.7238 (+ 3.3838 V^2/U^2)] \quad (4.109)$$

En étudiant cette relation de façon analogue à celle utilisée au paragraphe 4.1.8 pour la consommation de puissance, nous pouvons constater que les minima de l'élévation totale de température dans le film existent bel et bien, mais qu'ils ne sont pas situés aux mêmes valeurs de  $V/U$  que ceux de la dissipation.

Ainsi, dans le cas d'une vitesse  $U_1$  constante de la surface entraînant, on trouve, pour la température, les minima aux valeurs suivantes :

- **régime riche**

$$\Delta T = \mu U_1 \sqrt{R/h_0} / (\rho c_p h_0) [7.5074 + 9.2963 V^2/U^2] / (1+V/U) \quad (4.110)$$

avec un minimum pour

$$V/U = 0.344 \quad (4.111)$$

- **régime limite**

L'expression théorique de  $\Delta T$  n'est pas exprimable, mais la valeur minimale se situe à

$$V/U \approx 0.12 \quad (4.112)$$

Les courbes de la température relative sont présentées à la figure 4.12.

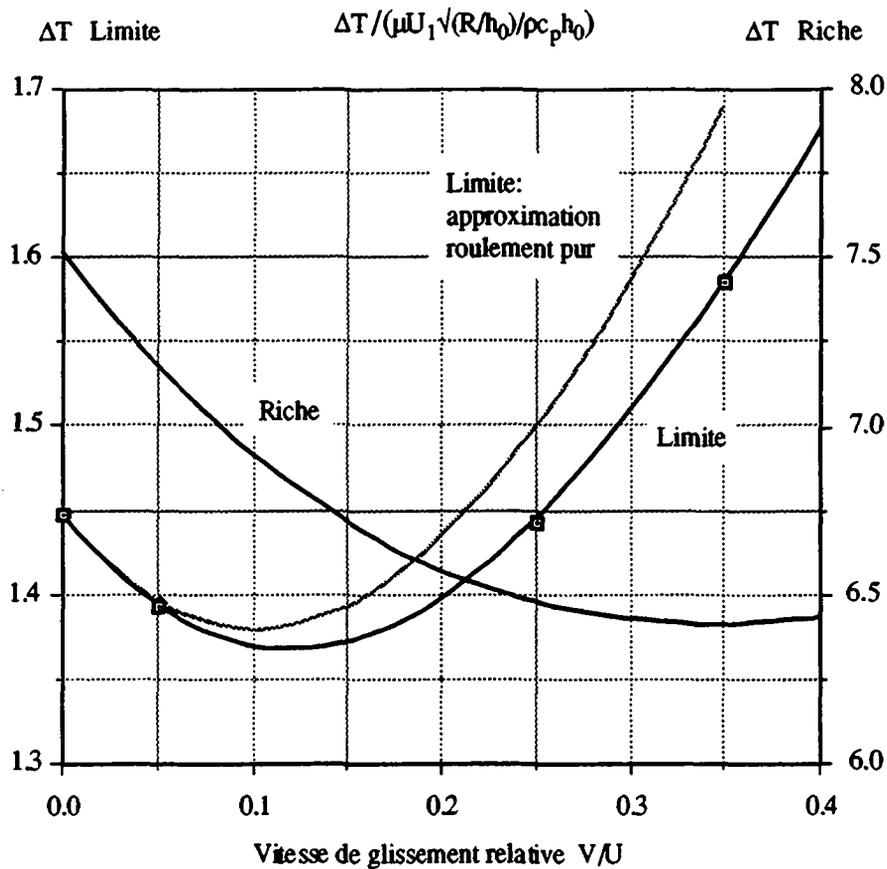


Fig. 4.12 : Echauffement adimensionnel dans le film.

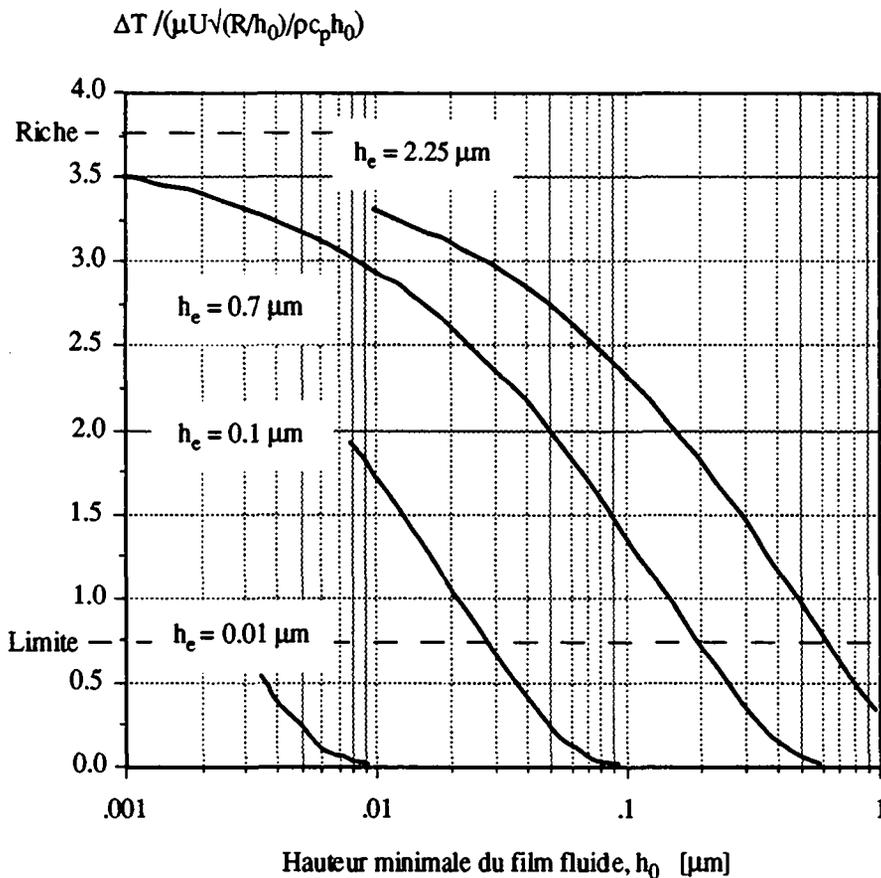
On voit à nouveau que le glissement conduisant à l'élévation totale de température minimale est largement inférieur lorsque l'alimentation du contact est réduite. On peut par ailleurs approximer algébriquement le régime limite par son expression en roulement pur, à savoir

$$\Delta T = \mu U_1 \sqrt{R/h_0} / (\rho c_p h_0) [1.4476 + 6.7676 V^2/U^2] / (1+V/U) \quad (4.113)$$

avec un minimum situé à

$$V/U = 0.102 \quad (4.114)$$

Nous avons aussi calculé et représenté à la figure (4.13) l'évolution du coefficient numérique de l'échauffement, en roulement pur, dans le régime à hauteur de film constante en entrée de contact. Ces coefficients montrent la même allure que ceux calculés pour la portance et la dissipation, et ne peuvent être exprimés par une relation simple, puisqu'ils dépendent de la grandeur  $h_0$ .



**Fig. 4.13 :** Élévation de température adimensionnelle  $\Delta T / (\mu U \sqrt{R/h_0} / \rho c_p h_0)$  en fonction de la hauteur minimale du film  $h_0$ , pour différentes hauteurs de film à l'entrée  $h_e$  considérées.

#### 4.1.11 Récapitulatif et comparaison des régimes riche et limite

Nous avons établi dans les paragraphes précédents bon nombre de relations, dans divers régimes, qui sont toutes dépendantes de la hauteur minimale du film d'huile. Du point de vue des tribologues, la mesure de la hauteur du film mince est importante, elle l'est par contre beaucoup moins pour l'ingénieur. De plus, mesurer in situ la hauteur d'un film d'huile de quelques fractions de microns dans des paliers à corps roulants pose des problèmes très difficiles à résoudre. C'est d'ailleurs pour cette raison que les épaisseurs d'huile au contact ont toujours été mesurées sur des bancs d'essai spéciaux, machines à disques ou à cylindres de dimensions largement supérieures aux rouleaux présents dans les paliers d'une broche de machine-outil notamment.

Il est une autre grandeur, essentielle pour le fonctionnement d'un palier, qu'il est généralement beaucoup plus facile de mesurer et de maîtriser : c'est la charge au contact ou portance, qui n'est autre que la grandeur  $P_y$  exprimée plus haut. En effet, les paliers de précision doivent toujours fonctionner sans aucun jeu, donc dans un état préchargé. Cette condition peut être réalisée de deux manières bien distinctes:

- La première consiste à imposer une interférence dimensionnelle au montage de manière à comprimer les corps roulants. C'est la voie la plus répandue mais qui peut causer bien des désagréments en fonctionnement, l'échauffement des corps roulants faisant varier leurs dimensions et la précharge; et surtout la force appliquée sur les corps roulants va dépendre de leur rigidité dans les déformations thermiques qui se produisent. Ainsi, par exemple, dans les paliers à galets cylindriques ou faiblement coniques, les forces peuvent croître extrêmement rapidement et provoquer la destruction du palier, du fait de la très haute rigidité des corps roulants. La situation est moins critique dans le cas des paliers à billes, car les billes ont une rigidité notablement plus faible et la croissance des forces est donc moins rapide.

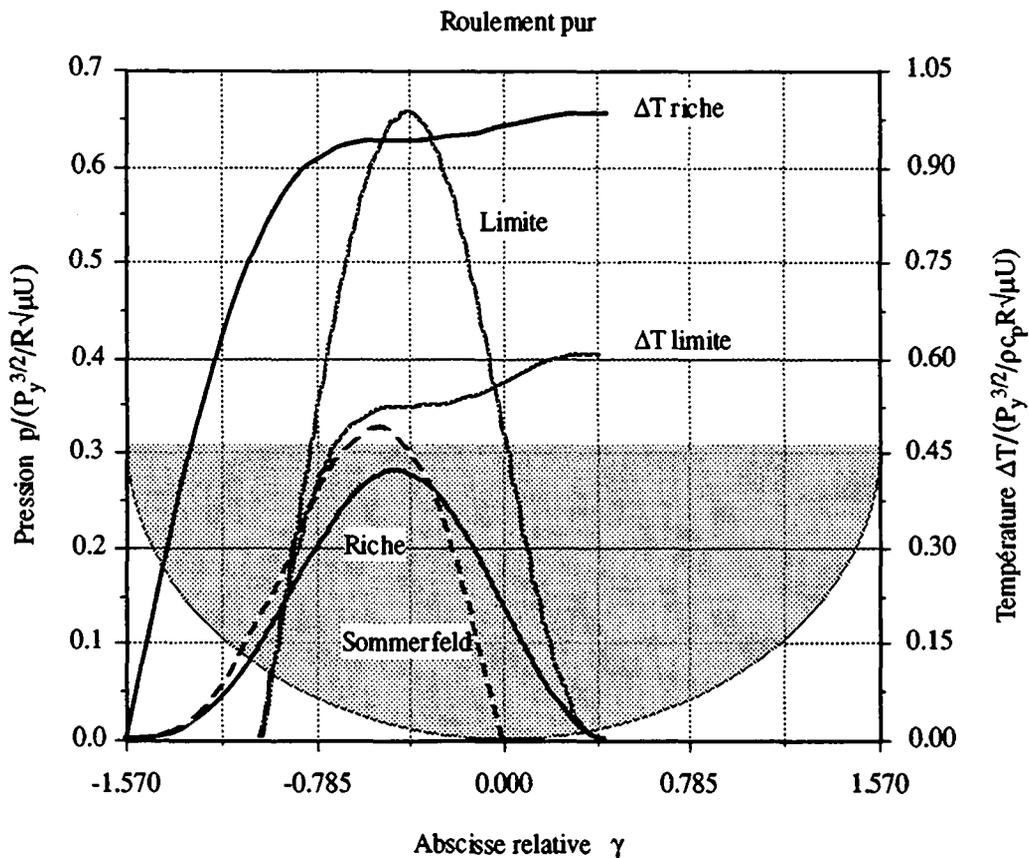
A l'inverse, certaines circonstances peuvent aboutir à la suppression de la précharge et l'on assiste à l'apparition d'un jeu dans le palier.

- La seconde technique consiste à annuler le jeu de fonctionnement par l'application, sur le palier, d'une force déterminée et maîtrisable, quel que soit l'état thermique du palier. C'est cette approche que nous avons développée et généralisée dans les méthodes de conception des broches de machines-outils auxquelles nous travaillons depuis plusieurs années. L'application d'une force quasi pure peut être réalisée par voie hydraulique ou mécanique, selon les situations. La maîtrise des efforts appliqués aux corps roulants rend

le comportement du palier parfaitement stable thermiquement et prévisible, ce qui est fondamental pour l'avenir de la conception automatisée des machines.

Dans cet esprit, les grandeurs fondamentales de la lubrification doivent être exprimées en fonction de la charge au contact.

On voit à la figure 4.14 que pour une charge au contact donnée  $P_y$ , les diverses distributions de pression calculées précédemment gardent leurs particularités mais certaines tendances observées s'inversent. C'est le cas de la pression dans le film où, en régime "sans débit inverse", la pression se révèle être notablement supérieure à ce qu'elle est en régime riche, ce qui est normal puisque la surface du contact est plus petite. La pression maximale, en régime limite, se trouve ainsi être 2.3 fois supérieure à celle régnant dans un régime surabondant.



**Fig. 4.14 : Pression et température dans le film d'huile, à charge donnée, en fonction de l'abscisse relative  $\gamma$  du contact.**

Sur la même figure, on notera que la température dans le film est par contre beaucoup plus basse en régime limite qu'en régime riche, bien que la pression dans le film y soit supérieure.

Dans le cas de la figure, en roulement pur, on obtient un accroissement de température de 38 % inférieur en régime faiblement lubrifié. Ce fait provient de ce que la consommation de puissance au contact diminue plus fortement que le débit lorsqu'on diminue la quantité d'huile alimentant le contact.

Nous avons récapitulé dans le tableau de la figure 4.15 l'ensemble des coefficients numériques des principales grandeurs utiles dans les deux cas de hauteur  $h_0$  constante et de portance  $P_y$  constante.

On remarquera dans la comparaison des régimes surabondant (hypothèse de Martin) et limite (sans débit inverse ) les avantages que l'on peut tirer d'une alimentation en huile limitée au contact. Toutes les données montrent une amélioration du comportement du contact en régime limite. Le terme de consommation de puissance dû au glissement est un des seuls qui soit supérieur en régime limite, conduisant par ailleurs à une contribution importante du glissement à l'échauffement du film. Comme nous l'illustrerons plus loin par un exemple, cette circonstance a cependant un effet positif qui est la diminution du glissement global d'un corps roulant en équilibre entre deux contacts lubrifiés. C'est une conséquence que l'on avait déjà exprimée à la figure 4.7, où l'on avait constaté que le minimum de la dissipation se situait à un glissement relatif de 25 % en régime limite alors qu'on le trouvait pour un glissement relatif de 80 % environ en régime riche.

En étudiant les courbes d'élévation globale de la température dans le film en fonction du glissement, on constate que, à force appliquée égale, pour un glissement de 25 %, l'élévation de température en régime limite est nettement plus faible qu'en régime riche ( 26 % ). C'est également vrai pour la consommation de puissance pour laquelle l'écart est encore plus important ( 67 % ). En d'autres termes, pour

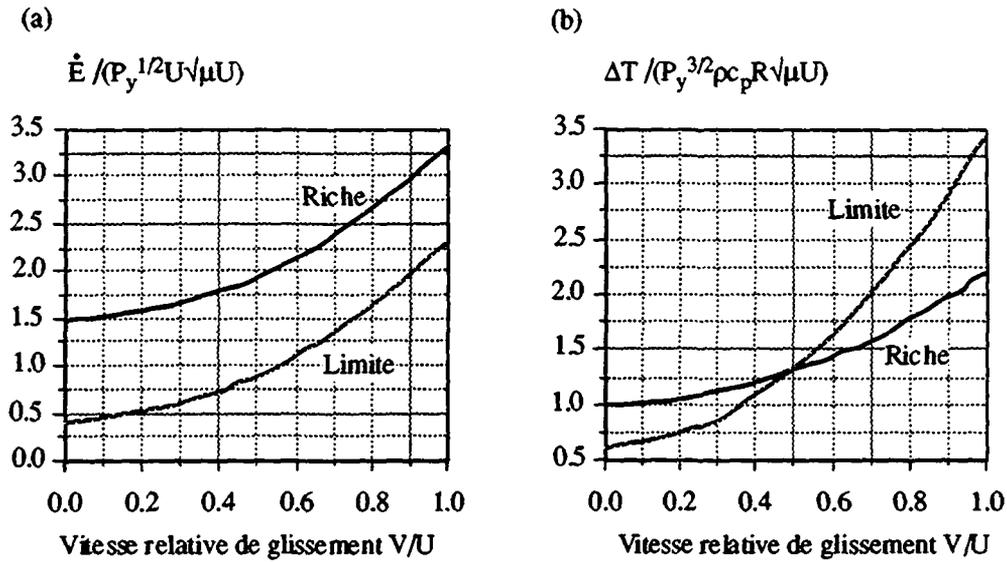
**pour une charge équivalente et 25 % de glissement, on consomme en régime limite le tiers de la puissance consommée en régime riche et l'élévation de température maximale dans le film est d'un quart plus faible qu'elle serait en régime riche.**

On peut se rapporter aux figures 4.16 a) et b) pour constater les tendances en fonction du glissement.

## REGIME DE LUBRIFICATION

	RICHE (Sommerfeld)	RICHE (Martin)	LIMITE (Ss déb. inv.)	Lim./ Rich.	Gain
<b>Hauteur <math>h_0</math> constante</b>					
$\gamma_e$	$-\pi/2$	$-\pi/2$	-1.0105	0.64	-36 %
$\gamma_s$	0	0.4436	0.4016	0.89	-9.5 %
$\gamma^*$	0.5236	0.4436	0.4016	0.89	-9.5 %
$p^*/(\mu U \sqrt{R} h_0 / h_0^2)$	0.9186	1.0755	0.7853	0.73	-27 %
$P_y / (\mu U R / h_0)$	2.0	2.4475	1.1296	0.46	-54 %
$P_x / (\mu U \sqrt{R} / h_0)$	4.4429	4.6011	0.8544	0.19	-81 %
$C / (\mu U R \sqrt{R} / h_0)$	4.4429	4.6011	0.8544	0.19	-81 %
$\dot{E} / (\mu U^2 \sqrt{R} / h_0)$	2.2214	2.3005	0.4272	0.19	-81 %
$\dot{E} / (\mu U^2 \sqrt{R} / h_0)$	$2.2214 * V^2 / U^2$	$2.8487 * V^2 / U^2$	$1.9971 * V^2 / U^2$	0.70	-30 %
$F_R / (\mu U \sqrt{R} / h_0)$	2.2214	2.3005	0.4272	0.19	-81 %
$F_S / (\mu U \sqrt{R} / h_0)$	$2.2214 * V / U$	$2.8487 * V / U$	$1.9971 * V / U$	0.70	-30 %
$\Delta T / (\mu U \sqrt{R} / h_0 / \rho c_p h_0)$	3.3322	3.7537	0.7238	0.19	-81 %
$\Delta T / (\mu U \sqrt{R} / h_0 / \rho c_p h_0)$	$3.3322 * V^2 / U^2$	$4.6481 * V^2 / U^2$	$3.3838 * V^2 / U^2$	0.73	-27 %
<b>Portance constante</b>					
$h_e / (\mu U R / P_y)$	$\infty$	$\infty$	4		
$p^*/(P_y^{3/2} / R \sqrt{\mu U})$	0.3248	0.2809	0.6541	2.33	+130 %
$P_x / (P_y^{1/2} \sqrt{\mu U})$	3.1416	2.941	0.8039	0.27	-73 %
$C / (P_y^{1/2} R \sqrt{\mu U})$	3.1416	2.9410	0.8039	0.27	-73 %
$\dot{E} / (P_y^{1/2} U \sqrt{\mu U})$	1.5708	1.4705	0.4019	0.27	-73 %
$\dot{E} / (P_y^{1/2} U \sqrt{\mu U})$	$1.5708 * V^2 / U^2$	$1.8209 * V^2 / U^2$	$1.8790 * V^2 / U^2$	1.03	+3 %
$F_R / (P_y^{1/2} \sqrt{\mu U})$	1.5708	1.4705	0.4019	0.27	-73 %
$F_S / (P_y^{1/2} \sqrt{\mu U})$	$1.5708 * V / U$	$1.8209 * V / U$	$1.8790 * V / U$	1.03	+3 %
$\Delta T / (P_y^{3/2} / \rho c_p R \sqrt{\mu U})$	1.1781	0.9803	0.6029	0.62	-38 %
$\Delta T / (P_y^{3/2} / \rho c_p R \sqrt{\mu U})$	$1.1781 * V^2 / U^2$	$1.2139 * V^2 / U^2$	$2.8185 * V^2 / U^2$	2.32	+130 %

Fig. 4.15 : Tableau récapitulatif et comparatif des principales grandeurs en lubrification surabondante et limite.



**Fig. 4.16 : Influence du glissement sur la dissipation (a) et la température maximale dans le film (b) en lubrification IVR riche et limite à charge constante au contact.**

#### 4.1.12 Application à un cas numérique test

Nous ne pouvons, dans ce travail, établir ou vérifier toutes les influences des divers paramètres sur le comportement du contact lubrifié. Ainsi, afin d'établir un certain nombre de comparaisons, entre l'approche théorique et l'approche numérique, puis entre les différentes hypothèses concernant le mode de lubrification, nous avons considéré un cas de référence que nous utiliserons tout au long de ce travail.

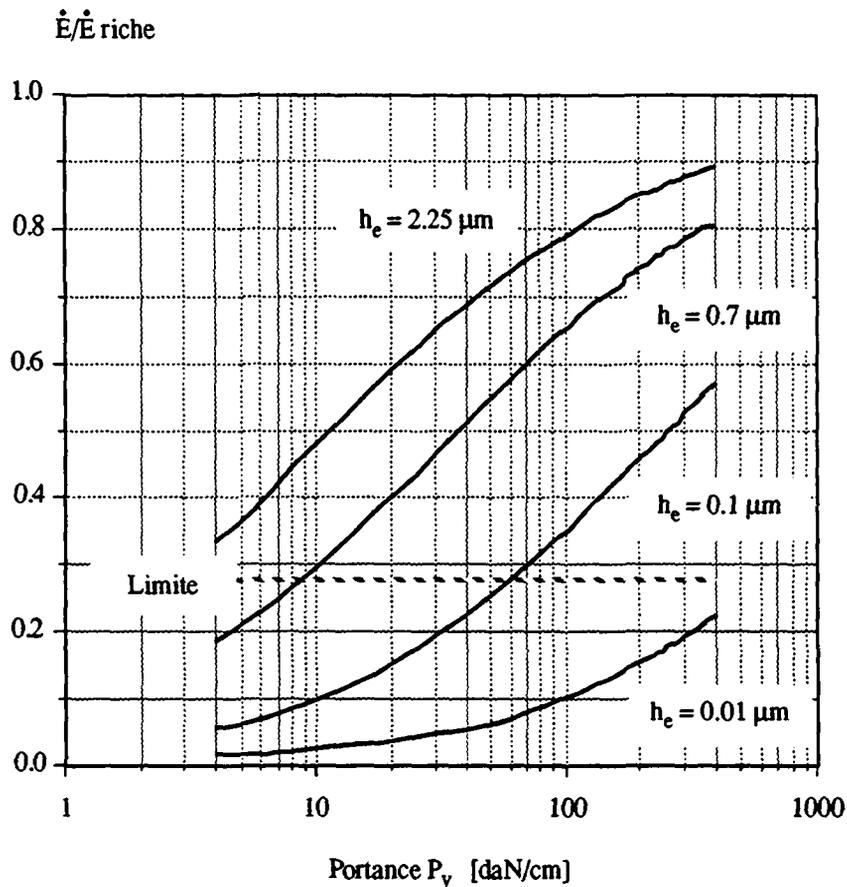
Les données relatives à cet exemple de contact cylindre-plan lubrifié sont les suivantes :

$$\begin{aligned}
 R^* &= 6 \cdot 10^{-3} \text{ m} & (E^* &= 1.318 \cdot 10^{11} \text{ Pa}) \\
 U &= 30 \text{ m/s} & V &= 0 \\
 \mu_0 &= 8.47 \cdot 10^{-3} \text{ Pa}\cdot\text{s} & \rho &= 840 \text{ kg/m}^3 \\
 (\mu_1 &= 2.317 \cdot 10^{-8} \text{ Pa}^{-1}) & c_p &= 2219 \text{ J/kg}^\circ\text{C} \\
 (\mu_2 &= -0.02 \text{ }^\circ\text{C}^{-1}) & & 
 \end{aligned}
 \tag{4.115}$$

Dans le régime isovisqueux rigide, nous avons calculé la consommation de puissance et l'élévation de température dans le film pour une lubrification surabondante, pour une

alimentation sans débit inverse et pour quatre hauteurs de film d'huile, constantes à l'entrée, soit  $2.25 \mu\text{m}$ ,  $0.7 \mu\text{m}$ ,  $0.1 \mu\text{m}$  et  $0.01 \mu\text{m}$ . Afin d'éviter les valeurs sans grande signification physique auxquelles conduit l'hypothèse IVR pour les fortes charges, nous avons représenté les consommations de puissance et les élévations de température rapportées à celles du régime riche.

Ces courbes sont reproduites aux figures 4.17 et 4.18 pour le seul cas traité, celui du roulement pur.



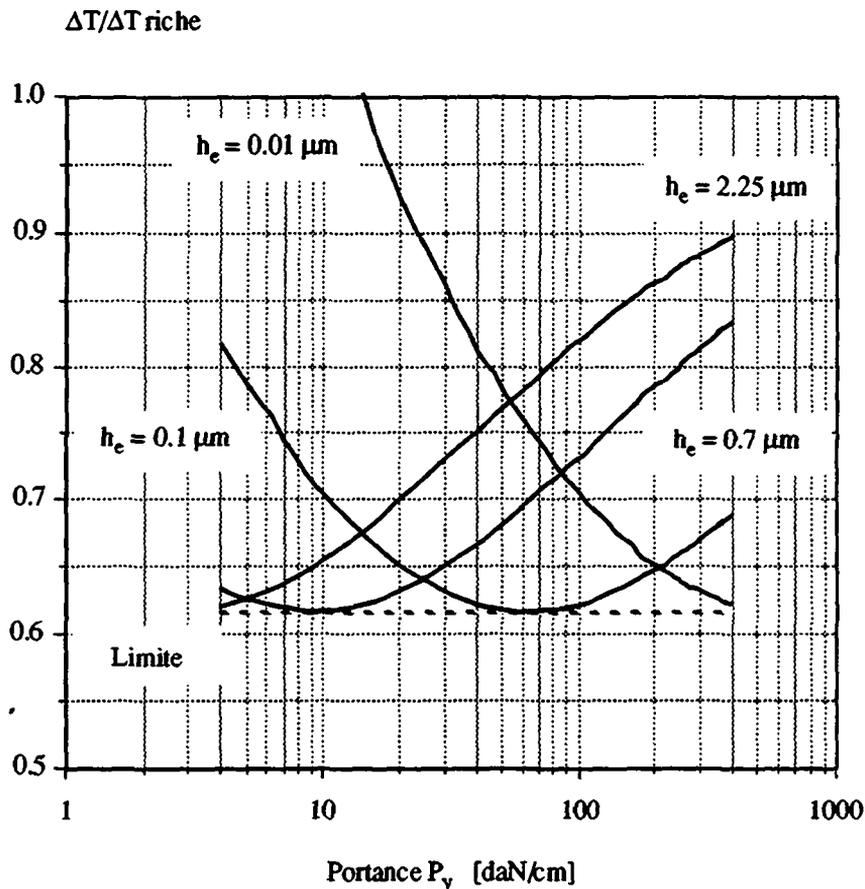
**Fig. 4.17 : Consommation de puissance relative en fonction de la portance, en roulement pur, pour diverses alimentations du contact.**

Comme nous l'avons déjà affirmé, on voit concrètement sur la figure la relation directe entre la dissipation et la quantité d'huile présente à l'entrée du contact.

Le régime "sans débit inverse" conduit à une puissance consommée qui correspond à 27 % de celle du régime riche, ceci indépendamment de la charge supportée par le contact.

Par contre, lorsque la hauteur à l'entrée détermine l'alimentation du contact, on constate que la puissance dissipée relative varie en fonction de la charge, de zéro pour une charge nulle jusqu'à une valeur finie inférieure à un pour une charge infinie, donc pour  $h_0$  tendant vers zéro. On peut donc dire que la dissipation varie de façon monotone avec la quantité d'huile alimentant le contact.

Notons que certains auteurs, tels Goksem (1978c) ou Dalmaz (1979), ont déjà examiné l'influence de la quantité d'huile alimentant le contact sur la hauteur minimale du film ou la force de friction équivalente au contact, mais dans aucun cas les relations entre charge et dissipation n'ont été exprimées comme nous l'avons fait ici, ceci pour une raison bien simple. Notre but n'est pas d'étudier le contact lubrifié pour lui-même, mais d'étudier les phénomènes de lubrification afin d'en tirer des critères pour la conception des paliers à corps roulants. Ainsi, du point de vue de l'ingénieur, ce sont les relations entre charge et dissipation qui se révèlent être prépondérantes.

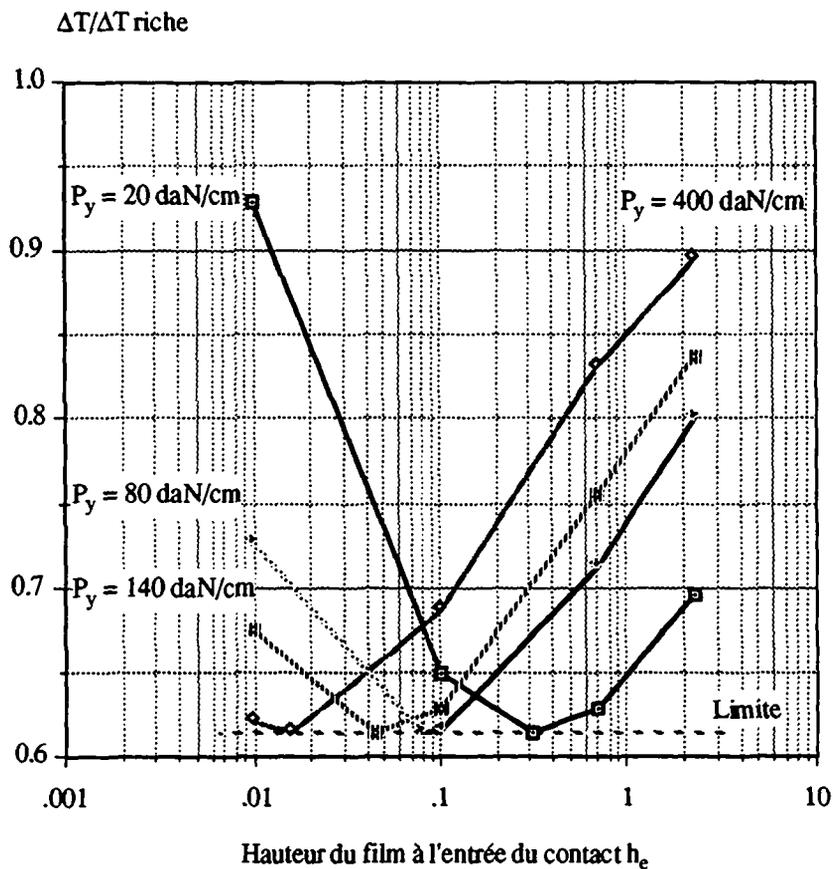


**Fig. 4.18 : Echauffement relatif en fonction de la charge au contact pour diverses conditions d'alimentation du film.**

Les courbes d'échauffement relatif en fonction de la portance, présentées à la figure 4.18, sont d'un intérêt tout à fait capital. En effet, on peut constater que l'échauffement du film d'huile ne varie pas seulement de manière monotone avec la charge, mais qu'il présente de plus un minimum en fonction de la quantité d'huile alimentant le contact. En effet, les courbes d'échauffement relatif passent toutes par la valeur 0.6029 des conditions d'alimentation "sans débit inverse".

Ainsi, dans le régime isovisqueux rigide, les conditions d'alimentation "sans débit inverse" sont celles qui minimisent l'échauffement du film hydrodynamique.

L'examen de la figure 4.19 montre que la température varie bien de façon monotone avec la hauteur du film d'huile à l'entrée du contact et que le minimum est obtenu lorsque cette hauteur est celle correspondant à l'absence de débit inverse.



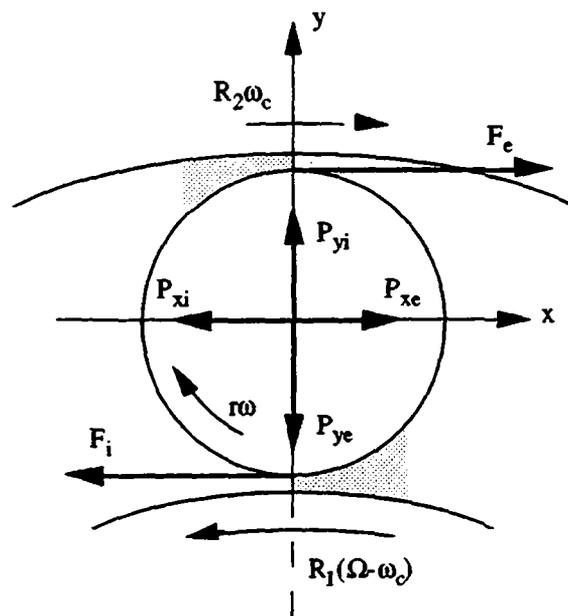
**Fig. 4.19 :** Échauffement relatif du film d'huile en fonction de la hauteur du film à l'entrée du contact pour diverses portances  $P_y$ .

#### 4.1.13 Application à un palier à corps roulants

Les relations exprimant les forces hydrodynamiques établies dans ce chapitre et résumées dans le tableau de la figure 4.15 peuvent être appliquées au corps roulant d'un palier. L'équilibre du corps roulant peut être assez facilement exprimé puisque, si l'on néglige l'action éventuelle de la cage, la somme des forces hydrodynamiques apparaissant aux contacts intérieur et extérieur doit s'annuler pour un corps roulant en régime permanent.

Pour cela, définissons tout d'abord les dimensions géométriques du palier, représenté à la figure 4.20 :

$r$	rayon du corps roulant
$R_1$	rayon de la piste intérieure
$R_2 = R_1 + 2r$	rayon de la piste extérieure
$\Omega$	vitesse angulaire de la piste intérieure (supposée imposée).



**Fig. 4.20 : Représentations géométrique et cinématique d'un corps roulant dans un palier.**

En l'absence de glissement, un roulement se comporte comme un train épicycloïdal et les relations entre les vitesses sont, avec  $s = r/R_1$

$$\begin{aligned}\omega_c &= \Omega / 2(1+s) \\ \omega &= \Omega(1+2s) / 2s(1+s)\end{aligned}\quad (4.116)$$

pour les vitesses de rotation de la cage  $\omega_c$  et de rotation propre du galet  $\omega$ .

Au cas où un certain glissement apparaît au contact, les vitesses ne sont plus synchrones et l'on doit écrire

$$\begin{aligned}\omega_c &= c_1 \cdot \Omega / 2(1+s) \\ \omega &= c_2 \cdot \Omega(1+2s) / 2s(1+s)\end{aligned}\quad (4.117)$$

avec  $c_1$  et  $c_2$  des constantes qu'il s'agira de déterminer.

Les vitesses de roulement  $U_i$  et  $U_e$  ainsi que les vitesses de glissement  $V_i$  et  $V_e$ , respectivement aux contacts intérieur et extérieur, sont données par les relations

$$\begin{aligned}U_i &= U_1 + U_{gi} = R_1 (\Omega - \omega_c) + r\omega \\ V_i &= U_1 - U_{gi} = R_1 (\Omega - \omega_c) - r\omega\end{aligned}\quad (4.118)$$

et

$$\begin{aligned}U_e &= U_2 - U_{ge} = (R_1 + 2r)\omega_c + r\omega \\ V_e &= U_2 + U_{ge} = (R_1 + 2r)\omega_c - r\omega\end{aligned}\quad (4.119)$$

dans lesquelles l'indice  $g$  se rapporte au galet ou corps roulant.

Les rayons équivalents aux contacts sont, par définition,

$$\begin{aligned}R_i &= rR_1 / (R_1 + r) = r/(1+s) \\ R_e &= rR_2 / (R_2 - r) = r(1+2s)/(1+s)\end{aligned}\quad (4.120)$$

Les forces ont les expressions définies dans le tableau de la figure 4.15. La seule modification à apporter concerne la force de pression suivant la direction  $x$ , à savoir

$$P_{xi} = \frac{R_i}{r} P_x)_i = P_x)_i / (1+s)$$

$$P_{xe} = \frac{R_e}{r} P_x)_e = P_x)_e (1+2s)/(1+s) \quad (4.121)$$

Enfin, les forces de frottement sont données par (4.67), avec les signes adaptés, soit

$$F_i = -P_{xi}/2 + cte \cdot \mu V_i \sqrt{R_i/h_{oi}}$$

$$F_e = -P_{xe}/2 + cte \cdot \mu V_e \sqrt{R_e/h_{oe}} \quad (4.122)$$

On peut sans difficulté tenir compte de la force centrifuge qui s'applique sur le corps roulant. Elle prend la forme

$$F_c = \omega_c^2 (R_i+r) \pi r^2 \rho_g \quad (4.123)$$

Les équations décrivant l'équilibre du corps roulant en régime permanent sont

$$P_{xe} + F_e - P_{xi} - F_i = 0$$

$$-P_{ye} + P_{yi} + F_c = 0 \quad (4.124)$$

$$F_i + F_e = 0$$

Une fois les forces au contact déterminées, nous pouvons calculer la dissipation, l'élévation de température dans le film ainsi que la valeur de la pression maximale dans les divers modes de lubrification étudiés.

Nous avons adopté les valeurs numériques suivantes, proches de celles d'un roulement de broche du commerce, et dont le corps roulant a un rayon de 6 mm, comme pour l'application précédente.

Données numériques :

$$\begin{aligned}
 r &= 6 \cdot 10^{-3} \text{ m} & R_1 &= 0.106 \text{ m} & R_2 &= 0.116 \text{ m} \\
 \Omega_1 &= 268.63 \text{ rd/s} & E^* &= 1.32 \cdot 10^{11} \text{ Pa} & \rho_g &= 7800 \text{ kg/m}^3 & (4.125) \\
 \mu_o &= 8.47 \cdot 10^{-3} \text{ Pa}\cdot\text{s} & c_p &= 2219 \text{ J/kg}^\circ\text{C} & \rho &= 840 \text{ kg/m}^3
 \end{aligned}$$

Le module d'élasticité équivalent permet de calculer la pression hertzienne d'un contact sec soumis à la même charge que le contact lubrifié.

Pour la résolution du système nous avons imposé la charge au contact intérieur  $P_{yi}$ . Les résultats des calculs sont donnés dans les tableaux constituant les figures 4.21 et 4.22 pour les régimes riche et limite respectivement, ainsi que pour les deux valeurs suivantes de charge au contact  $P_{yi} = 10^4 \text{ N/m}$ ,  $P_{yi} = 10^5 \text{ N/m}$ .

On peut constater à la lecture de ces résultats que la résolution du système complet – les trois équations d'équilibre satisfaites – conduit bien le système à fonctionner dans la situation de dissipation minimale. Il faut noter que dans cette situation, le glissement aux contacts, en régime riche, est très important; comme nous l'avons déjà signalé, il vaut près de 80 %, alors qu'il se situe aux alentours de 20 % en régime limite.

En ce qui concerne l'élévation de température dans le film, on retrouve bien le fait que le régime de dissipation minimale conduit à des échauffements plus importants qu'en cas de roulement pur, car les hauteurs de film y sont alors bien inférieures; la convection est donc plus faible.

Remarquons enfin que pour imposer le régime de roulement pur, il n'est pas possible de satisfaire toutes les équations d'équilibre. Seule l'équation d'équilibre des forces normales peut être satisfaite car l'on impose évidemment des glissements nuls aux contacts.

$R_1$	0.106	EQUILIBRE D'UN CORPS ROULANT EN REGIME IVR RICHE			
$r$	0.006				
$\mu$	8.47e-3				
$\rho$	8.40e+2				
$c_p$	2.219e+3				
$\Omega_1$	2.6863e+2				
$s$	5.6603774e-2	5.6603774e-2	5.6603774e-2	5.6603774e-2	
$\omega$	2.6059881e+2	2.5000179e+3	2.6338763e+2	2.5000179e+3	
$\omega_c$	1.0803542e+2	1.2711955e+2	1.1364811e+2	1.2711955e+2	
$U_i$	1.8586618e+1	3.0000215e+1	1.8008406e+1	3.0000215e+1	
$V_i$	1.5459433e+1	0.0	1.4847754e+1	0.0	
$U_e$	1.4311772e+1	3.0000215e+1	1.4990803e+1	3.0000215e+1	
$V_e$	1.1184587e+1	0.0	1.1830151e+1	0.0	
$R_i$	5.6785714e-3	5.6785714e-3	5.6785714e-3	5.6785714e-3	
$R_e$	6.3214286e-3	6.3214286e-3	6.3214286e-3	6.3214286e-3	
$h_{oi}$	2.1879913e-7	3.5315842e-7	2.1199249e-8	3.5315842e-8	
$h_{oe}$	1.6815742e-7	3.3901266e-7	1.9397208e-8	3.8696050e-8	
$P_{xi}$	1.1044093e+2	1.4031111e+2	3.4376963e+2	4.4370268e+2	
$P_{xe}$	1.1393367e+2	1.6820275e+2	3.5137590e+2	4.9786057e+2	
$P_{yi}$	1.0e+4	1.0e+4	1.0e+5	1.0e+5	
$P_{ye}$	1.1153181e+4	1.1596576e+4	1.0127611e+5	1.0159658e+5	
$F_i$	1.7463696e+0	-7.4126623e+1	3.8031371e+0	-2.3440896e+2	
$F_e$	-1.7463696e+0	-7.9825034e+1	-3.8031371e+0	-2.3627281e+2	
$\Sigma x$	0.0	-2.2193231e+1	0.0	-5.2294039e+1	
$\Sigma y$	0.0	0.0	0.0	0.0	
$\Sigma M$	0.0	-1.5395166e+2	0.0	-4.7068177e+2	
$C_1$	8.4987255e-1	1.0	8.9402542e-1	1.0	
$C_2$	1.0423878e-1	1.0	1.0535430e-1	1.0	
$V_i/U_i$	8.3175069e-1	0.0	8.2449021e-1	0.0	
$V_e/U_e$	7.8149557e-1	0.0	7.8916062e-1	0.0	
$\dot{E}_i$	2.0134540e+3	2.2238146e+3	6.0236115e+3	7.0323192e+3	
$\dot{E}_e$	1.3590612e+3	2.3947681e+3	4.4275276e+3	7.0882351e+3	
$\dot{E}_{tot}$	3.3725152e+3	4.6185827e+3	1.0451139e+4	1.4120554e+4	
$\Delta T_i$	4.3339853e+2	1.8373671e+2	1.3811883e+4	5.8102650e+3	
$\Delta T_e$	4.9433486e+2	2.0611732e+2	1.3328732e+4	5.3448856e+3	
$P_i^*$	1.2466524e+8	9.8125839e+7	4.0050499e+9	3.1030115e+9	
$P_e^*$	1.5032140e+8	1.1007836e+8	4.0189955e+9	2.8544724e+9	
$\Phi_i$	2.7177549e+8	2.7177549e+8	8.5942958e+8	8.5942958e+8	
$\Phi_e$	2.7203300e+8	2.7738765e+8	8.1973926e+8	8.1973926e+8	

Fig. 4.21 : Résultats du calcul numérique en régime riche.

$R_1$	0.106	EQUILIBRE D'UN CORPS ROULANT EN REGIME IVR LIMITE			
$r$	0.006				
$\mu$	8.47e-3				
$\rho$	8.40e+2				
$c_p$	2.219e+3				
$\Omega_1$	2.6863e+2				
$s$	5.6603774e-2	5.6603774e-2	5.6603774e-2	5.6603774e-2	
$\omega$	1.6086570e+3	2.5000179e+3	1.6144111e+3	2.5000179e+3	
$\omega_c$	1.1900417e+2	1.2711955e+2	1.2173304e+2	1.2711955e+2	
$U_i$	2.5512280e+1	3.0000215e+1	2.5257544e+1	3.0000215e+1	
$V_i$	6.2083959e+0	0.0	5.8846111e+0	0.0	
$U_e$	2.3694434e+1	3.0000215e+1	2.4050965e+1	3.0000215e+1	
$V_e$	4.3905498e+0	0.0	4.6780327e+0	0.0	
$R_i$	5.6785714e-3	5.6785714e-3	5.6785714e-3	5.6785714e-3	
$R_e$	6.3214286e-3	6.3214286e-3	6.3214286e-3	6.3214286e-3	
$h_{oi}$	1.3861061e-7	1.6299397e-7	1.3722660e-8	1.6299397e-8	
$h_{oe}$	1.2571703e-7	1.5646525e-7	1.4336504e-8	1.7859472e-8	
$P_{xi}$	3.5367396e+1	3.8352230e+1	1.1128176e+2	1.2128040e+2	
$P_{xe}$	4.0510307e+1	4.5976051e+1	1.2176631e+2	1.3608376e+2	
$P_{yi}$	1.0e+4	1.0e+4	1.0e+5	1.0e+5	
$P_{ye}$	1.1399231e+4	1.1596576e+4	1.0146414e+5	1.0159658e+5	
$F_i$	2.5714554e+0	-2.0261556e+1	5.2422705e+0	-6.4072665e+1	
$F_e$	-2.5714554e+0	-2.1819143e+1	-5.2422705e+0	-6.4582124e+1	
$\Sigma x$	0.0	-6.0662334e+0	0.0	-1.4293901e+1	
$\Sigma y$	0.0	0.0	0.0	0.0	
$\Sigma M$	0.0	-4.2080699e+1	0.0	-1.2865479e+2	
$C_1$	9.3615943e-1	1.0	9.5762642e-1	1.0	
$C_2$	6.4345821e-1	1.0	6.4575980e-1	1.0	
$V_i/U_i$	2.4334931e-1	0.0	2.3298430e-1	0.0	
$V_e/U_e$	1.8529878e-1	0.0	1.9450499e-1	0.0	
$\dot{E}_i$	6.0865472e+2	6.0785102e+2	1.8617074e+3	1.9221937e+3	
$\dot{E}_e$	5.2865018e+2	6.5457897e+2	1.6356506e+3	1.9374776e+3	
$\dot{E}_{tot}$	1.1373049e+3	1.2624300e+3	3.4973580e+3	3.8596713e+3	
$\Delta T_i$	1.5645153e+2	1.1299312e+2	4.8824332e+3	3.5731561e+3	
$\Delta T_e$	1.6131736e+2	1.2675659e+2	4.3118945e+3	3.2869603e+3	
$P_i^*$	2.4779534e+8	2.2851020e+8	7.8753927e+9	7.2261270e+9	
$P_e^*$	2.8111355e+8	2.5634458e+8	7.4095909e+9	6.6473426e+9	
$P_{hi}$	2.7177549e+8	2.7177549e+8	8.5942958e+8	8.5942958e+8	
$P_{he}$	2.7501729e+8	2.7501729e+8	8.2049985e+8	8.2049985e+8	

Fig. 4.22 : Résultats du calcul numérique en régime limite.

#### 4.1.14 Confrontation expérimentale

Afin d'évaluer la validité de l'approche théorique IVR, nous avons réalisé des mesures de consommation de puissance sur l'arbre de transmission d'une tête de fraisage. L'arbre est porté par deux roulements à rouleaux coniques de précision Timken L 507 900 montés dans un boîtier, comme le montre la figure 4.23.

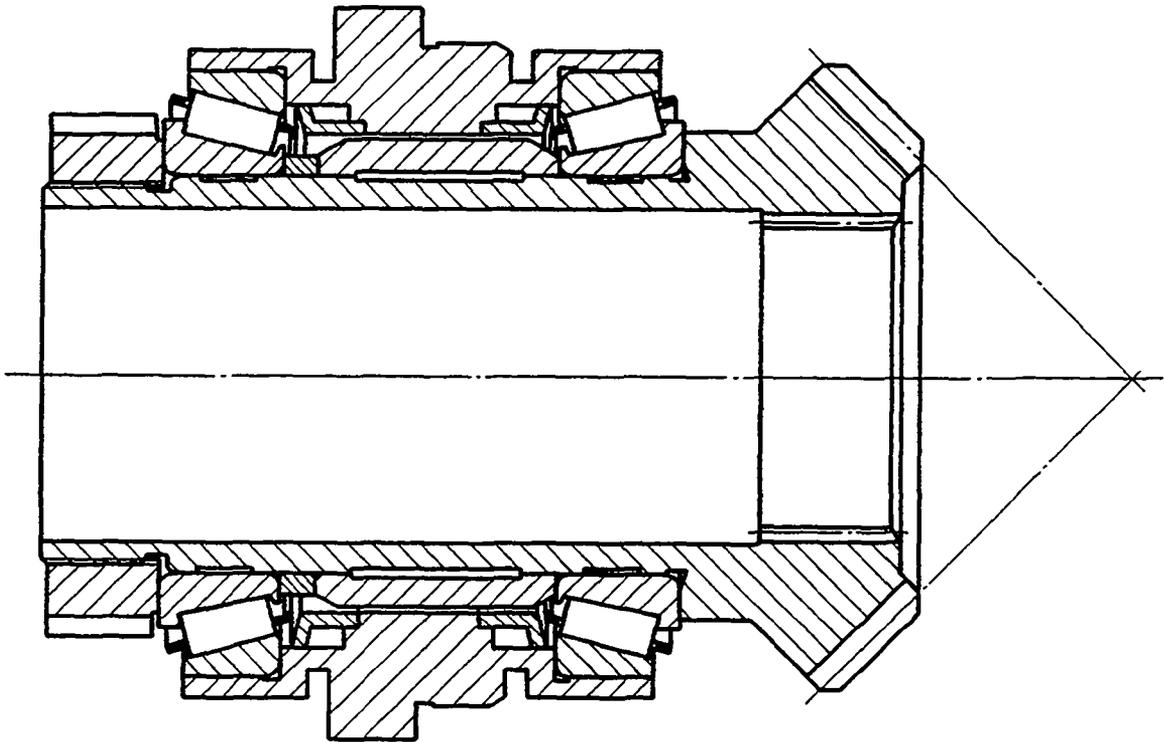


Fig. 4.23 : Arbre de transmission d'une tête de fraisage universelle.

Les dimensions des roulements sont telles que

$R_1$	=	33 mm	rayon de la piste intérieure	
$R_g$	=	3 mm	rayon du galet	
$l_g$	=	13 mm	longueur du galet	(4.126)
$n_g$	=	29	nombre de galets par roulement	
$\alpha$	$\approx$	$75^\circ$	demi-angle au sommet du cône	

Le montage des roulements a été réalisé de manière à maintenir un jeu axial de l'arbre de 8  $\mu\text{m}$  environ.

Ainsi, avec l'angle du cône considéré, le jeu disponible pour un galet, somme des jeux aux contact intérieur et extérieur est

$$j_g = 8 \cdot 10^{-6} \cdot \sin(\pi/2 - \alpha)/2$$

$$j_g = 1.035 \cdot 10^{-6} \text{ m} = 1.035 \mu\text{m} \quad (4.127)$$

L'huile utilisée lors des essais est de marque et type Mobil DTE 21 dont les caractéristiques à 40°C sont celles données dans les tableaux des figures 4.21 et 4.22.

Les calculs prévisionnels en lubrification surabondante donnent des puissances dissipées de

$$603 \text{ W à } 6000 \text{ t/min}$$

$$\text{et } 150 \text{ W à } 3000 \text{ t/min} \quad (4.128)$$

avec glissement "optimal", et

$$1130 \text{ W à } 6000 \text{ t/min}$$

$$\text{et } 282 \text{ W à } 3000 \text{ t/min} \quad (4.129)$$

dans l'hypothèse du roulement pur.

Pour une lubrification sans débit inverse, ou limite, ces valeurs tombent respectivement à

$$171 \text{ W à } 6000 \text{ t/min}$$

$$\text{et } 42.6 \text{ W à } 3000 \text{ t/min} \quad (4.130)$$

dans le cas du glissement optimal, et

$$212.6 \text{ W à } 6000 \text{ t/min}$$

$$\text{et } 52.5 \text{ W à } 3000 \text{ t/min} \quad (4.130)$$

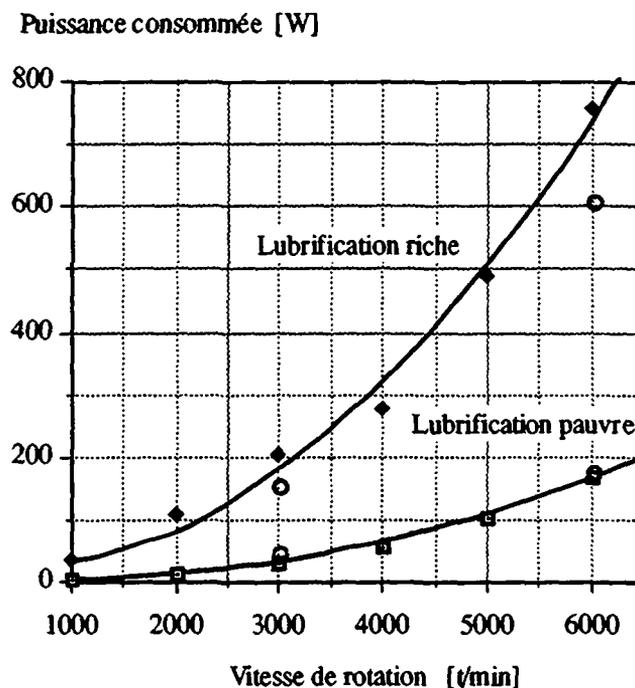
en roulement pur.

Les pressions dans le film d'huile sont, pour ce cas, très faibles, inférieures de presque un ordre de grandeur aux pressions hertziennes que l'on obtiendrait pour un contact sec.

Pour les essais, la lubrification riche était assurée par des jets d'huile d'un débit total de 0.45 litre par minute et par roulement.

Pour la lubrification pauvre, le système adopté était du type air-huile avec un débit d'huile de  $3 \text{ mm}^3$  par minute par roulement et un débit d'air d'environ 1000 litres normaux par heure.

Les résultats des mesures et des calculs prévisionnels sont reportés à la figure 4.24.



**Fig. 4.24 : Calculs en glissement optimal (cercles) et mesures de la puissance dissipée du dispositif de la figure 4.23.**

Les mesures de la puissance consommée l'ont été par l'enregistrement de la décélération de l'arbre lors de la déconnexion du dispositif d'entraînement.

On remarque la très bonne corrélation des calculs et mesures dans le cas du régime limite alors que pour le régime riche, les hypothèses du glissement optimal semblent quelque peu sous-estimer la réalité. Les valeurs expérimentales se trouvent néanmoins parfaitement cadrées par les valeurs extrêmes, glissement optimal et roulement pur, respectivement (4.128) et (4.129).

Nos calculs ont négligé certains effets, notamment l'effet de la cage et des frottements entre corps roulants et cage, de même que le frottement de l'extrémité du galet contre l'épaule de la bague intérieure.

Il est clair que dans un système aussi peu chargé, les frottements galets-cage peuvent avoir une influence relative significative surtout lorsque l'on connaît le glissement qui se produit.

#### 4.2 REGIME PIEZOVISQUEUX RIGIDE (PVR)

L'hypothèse d'un fluide de viscosité constante n'est pas conforme à la réalité, car celle-ci montre que la viscosité dépend à la fois de la pression et de la température.

Dans ce qui suit, nous montrerons l'influence de la variation de la viscosité sur les équations du film d'huile et nous constaterons que l'étude théorique dans ces nouvelles conditions n'est plus "abordable".

La variation de la viscosité avec la pression n'est pas élémentaire à mettre en évidence ou à calculer, et de nombreuses études ont tenté de chiffrer cette dépendance. Nous avons cité celles qui nous paraissent les plus dignes d'intérêt, telles les études de Sharma (1987), Foord (1968) ou Meuleman (1985).

Pour nos recherches, ce sont certainement les travaux de Sharma qui présentent le plus d'intérêt dans la mesure où les essais entrepris l'ont été au moyen d'une machine à disques, dans des conditions de roulement avec glissement variable. Les mesures effectuées ont par la suite été confrontées à des solutions numériques pour tenter d'exprimer la variation de la viscosité selon deux modèles. Le premier est de la forme la plus simple

$$\mu = \mu_0 e^{[\mu_1 p + \mu_2 (T - T_0)]} \quad (4.132)$$

alors que le deuxième adopte une variation différente avec la température

$$\mu = \mu_0 e^{[\mu_1 p + \mu_2' (1/T_0 - 1/T)]} \quad (4.133)$$

Les fluides analysés sont principalement des huiles utilisées en aéronautique et en aérospatiale et ne correspondent évidemment pas totalement à ceux que l'on utilisera en machines-outils. Cependant, il est intéressant de constater que les coefficients calculés sont relativement fortement influencés par le taux de glissement et la température initiale définis pour l'essai.

On ne peut, par ailleurs, pas dégager de tendance nette quant à la meilleure approximation à faire. Il est bien clair que les approximations de type exponentiel ne sont certainement pas correctes et les études sur l'évolution de la viscosité à très haute pression montrent que la loi exponentielle se révèle, selon le domaine, ou trop sévère ou insuffisamment sévère.

La variation exponentielle de la viscosité avec la pression a été admise très tôt dans les travaux relatifs à la lubrification. Les avantages de cette loi de variation sont importants sur le plan théorique et c'est certainement pour cette raison qu'elle a été adoptée et donne satisfaction encore aujourd'hui. De plus, dans un domaine de pression donné, on trouve toujours une exponentielle satisfaisante.

Les fabricants d'huiles de lubrification admettent de même une variation exponentielle en donnant l'estimation grossière que la viscosité double pour une augmentation de pression de 300 bar environ. C'est cette valeur qu'a retenue Pruvot (1983) et qui conduit à un coefficient de piézoviscosité

$$\mu_1 = 2.317 \cdot 10^{-8} \text{ Pa}^{-1} \quad (4.134)$$

Si l'on se réfère à Dowson et Higginson (1966) on trouve une valeur pratiquement identique étant donné qu'ils admettent une augmentation de viscosité d'un facteur mille pour une augmentation de pression de  $3.1 \cdot 10^8 \text{ Pa}$ .

On notera que les résultats de Sharma donnent des coefficients piézovisqueux généralement cinq fois plus faibles, entre  $4$  et  $7 \cdot 10^{-9} \text{ Pa}^{-1}$ .

Si l'on suppose cependant une loi de viscosité de type exponentiel, on écrira

$$\mu = \mu_0 e^{\mu_1 P} \quad (4.135)$$

dans l'équation de Reynolds (4.1).

Puis, avec les mêmes hypothèses qu'à la section 4.1, on trouvera, après la première intégration selon  $x$ ,

$$e^{-\mu_1 P} dp/dx = 6\mu_0 U(h-h^*)/h^3 \quad (4.136)$$

qui est le pendant de l'équation (4.4) dans le cas de la piézoviscosité exponentielle.

On peut alors calculer la distribution de pression en récrivant (4.136) après séparation des variables

$$e^{-\mu_1 P} dp = 6\mu_0 U(h-h^*)/h^3 dx \quad (4.137)$$

et l'on remarque que l'intégration du membre de droite est analogue à celle réalisée pour une viscosité constante.

Définissons alors pour simplifier la pression réduite  $p^\circ(x)$ ,

$$p^\circ(x) = \int_{-x_e}^{x_s} 6\mu_0 U(h-h^*)/h^3 dx \quad (4.138)$$

la distribution de pression en régime isovisqueux (4.14) étudiée pour les différentes conditions aux limites et exprimée en fonction de l'abscisse relative  $\gamma$ .

La distribution de pression en régime piézo-visqueux s'obtient alors simplement par intégration, soit

$$p(x) = \int e^{-\mu_1 P} dp = -\frac{1}{\mu_1} e^{-\mu_1 P} + \text{cte} \quad (4.139)$$

La constante d'intégration doit être choisie de manière à satisfaire aux conditions aux limites, notamment à la condition de pression nulle à l'entrée et à la sortie du contact. Il est facile de voir que la valeur de la constante est 1 et que la distribution de pression s'écrit

$$p(x) = -\frac{1}{\mu_1} \ln [1 - \mu_1 p^\circ(x)] \quad (4.140)$$

que l'on peut à l'évidence exprimer aussi en fonction de l'abscisse relative  $\gamma$

$$p(\gamma) = -\frac{1}{\mu_1} \ln [1 - \mu_1 p^\circ(\gamma)] \quad (4.141)$$

La distribution de pression obtenue possède les mêmes caractéristiques que  $p^\circ$  ; les valeurs nulles sont situées aux mêmes abscisses, le maximum aussi, mais sa valeur change, car il est nettement plus élevé, et vaut

$$p_{\max} = -\frac{1}{\mu_1} \ln [1 - \mu_1 p_{\max}^\circ] \quad (4.142)$$

L'examen de la relation (4.142) montre bien que la valeur de  $p_{\max}^{\circ}$  ne peut pas être quelconque car, pour que la relation ait un sens, le terme entre crochets doit être strictement positif. La solution piézovisqueuse obtenue n'est donc valable que si

$$p_{\max}^{\circ} < \frac{1}{\mu_j} \quad (4.143)$$

Avec la valeur de  $\mu_1$  que nous adopterons par la suite (4.134), la valeur maximale de la pression  $p_{\max}^{\circ}$  permettant d'obtenir une solution hydrodynamique PVR est donc

$$p_{\max}^{\circ} < 4.316 \cdot 10^7 \text{ Pa} \quad (1/2.317 \cdot 10^{-8}) \quad (4.144)$$

soit

$$p_{\max}^{\circ} < 431.6 \text{ bar} \quad (4.145)$$

Cette valeur est, comme on le constate, extrêmement basse et correspond à une viscosité maximale dans le contact d'une valeur  $e$  fois plus grande que  $\mu_0$ , soit  $\mu = 2.72 \mu_0$ .

Etant donné ce domaine de validité très restreint, cette voie ne sera pas développée plus loin, car elle ne permet ni formulations, ni raisonnements intéressants.

Notons en passant que la portance  $P_y$  au contact est augmentée par la piézoviscosité. Par comparaison à la relation (4.34) donnant la portance pour une distribution selon Martin dans le cas IVR

$$P_y = 2.4475 \mu_0 UR/h_0$$

on obtient dans le cas PVR, à la limite de validité des expressions, une portance qui vaut environ (Dowson & Higginson, 1966)

$$P_y \approx 2.3 \cdot 2.4475 \mu_0 U(R/h_0)_{\text{lim}} \quad (4.146)$$

Toutes les autres grandeurs exprimées pour le régime IVR n'étant pas faciles à obtenir ni réellement utilisables, nous ne tenterons pas de les évaluer.

Il est intéressant de remarquer que la particularité du régime PVR, avec la pression maximale dans le film tendant vers l'infini, est à l'origine de la prise en compte par Grubin de la déformation des solides dans la lubrification. En effet, l'hypothèse de corps rigides conduisant à des pressions infinies dans le film, il devenait évident que les corps devaient se déformer sous

l'effet de ces très hautes pressions afin de les maintenir à des valeurs finies. Nous allons aborder ci-après certains aspects de la théorie de la lubrification tenant compte de la déformation des solides en contact.

### 4.3 REGIME ELASTOHYDRODYNAMIQUE (EHD)

Dans cette section, nous rappellerons les termes de l'analyse adimensionnelle du problème, afin que les résultats présentés par les auteurs ayant résolu le problème soient compréhensibles et puissent nous servir d'éléments de comparaison pour nos résultats par éléments finis.

La résolution du problème élastohydrodynamique de manière inverse consiste, comme nous l'avons déjà précisé, à trouver une distribution de pression, dans la zone de contact, qui satisfasse l'équation de Reynolds, tout en tenant compte de la modification des propriétés du fluide et de la géométrie des solides.

Le problème faisant intervenir à la fois des équations d'écoulement et des équations de déformation des solides, la mise sous forme adimensionnelle des équations permet de simplifier quelque peu et d'éviter certains risques de divergence numérique lors de la résolution.

Nous verrons par la suite que les éléments finis que nous avons adoptés ne permettent pas cette normalisation du problème. Nous avons dû opter pour d'autres méthodes afin d'écartier les problèmes numériques que nous avons rencontrés.

#### 4.3.1 Paramètres adimensionnels

A partir des variables imposées au problème qui sont, dans le cas isotherme,

$R^*$	le rayon équivalent au contact,
$E^*$	le module d'élasticité équivalent,
$\mu_0, \mu_1$	les propriétés de viscosité du lubrifiant,
$P_y$	la portance du contact, ou charge extérieure appliquée,
$U$	la vitesse de roulement
$h$	la hauteur du film d'huile (inconnue),

il est habituel de définir les paramètres adimensionnels suivants :

- le paramètre de hauteur de film

$$H^{\circ} = h/R^* \quad (4.147)$$

- le paramètre de charge

$$W^{\circ} = P_y / 2E^* R^* \quad (4.148)$$

- le paramètre de vitesse

$$U^{\circ} = \mu_o U / 4E^* R^* \quad (4.149)$$

- le paramètre des matériaux

$$G^{\circ} = 2\mu_1 E^* \quad (4.150)$$

Ainsi, en termes adimensionnels, on peut écrire que la hauteur du film

$$H^{\circ} = f(W^{\circ}, U^{\circ}, G^{\circ})$$

est une fonction des paramètres de charge, de vitesse et des matériaux. Les principales études relatives à la hauteur du film en régime élastohydrodynamique donnent les résultats ci-dessous, (Dowson & Higginson, 1966; Dalmaz, 1979) :

- hauteur au centre du contact  $H_o^{\circ}$

Grubin : 
$$H_o^{\circ} = 1.95 (G^{\circ} U^{\circ})^{8/11} / W^{\circ 1/11} \quad (4.151)$$

Cheng : 
$$H_o^{\circ} = 1.89 (G^{\circ} U^{\circ})^{0.741} / W^{\circ 0.11} \quad (4.152)$$

- hauteur minimale du film  $H_m^{\circ}$

Dowson : 
$$H_m^{\circ} = 2.65 G^{\circ 0.54} U^{\circ 0.70} / W^{\circ 0.13} \quad (4.153)$$

ou 
$$H_m^{\circ} = 1.6 G^{\circ 0.6} U^{\circ 0.70} / W^{\circ 0.13} \quad (4.154)$$

On peut réécrire la solution (IVR) de Martin (4.34) en fonction de ces grandeurs et l'on trouve alors

$$H_o^\circ = 4.895 U^\circ / W^\circ \quad (4.155)$$

Le terme "régime élastohydrodynamique" est général et recouvre plusieurs cas; on pourra reconnaître le régime dit "isovisqueux élastique" (IVE), dans lequel la viscosité est considérée comme constante, et le régime dit "piézovisqueux élastique" (PVE) dans lequel la viscosité varie avec la pression, généralement de manière exponentielle.

D'autres auteurs, tel Johnson (1985), font intervenir d'autres paramètres adimensionnels pour caractériser le régime de lubrification.

Ainsi, le paramètre  $J^\circ$ , relatif principalement au régime IVE, s'écrit de la façon suivante

$$J^\circ = (P_y^2 / \mu_o UR^* E^* \pi)^{1/2} \quad (4.156)$$

Le paramètre de hauteur minimale de film est redéfini à partir du résultat de Martin, soit

$$H_{\min}^\circ = P_y h_{\min} / \mu_o UR^* \quad (4.157)$$

et vaut à l'évidence 2.45 en régime isovisqueux rigide.

La figure 4.25 ci-après montre l'évolution de  $H_{\min}^\circ$  en fonction de  $J^\circ$ , en régime IVE selon Johnson (1985).

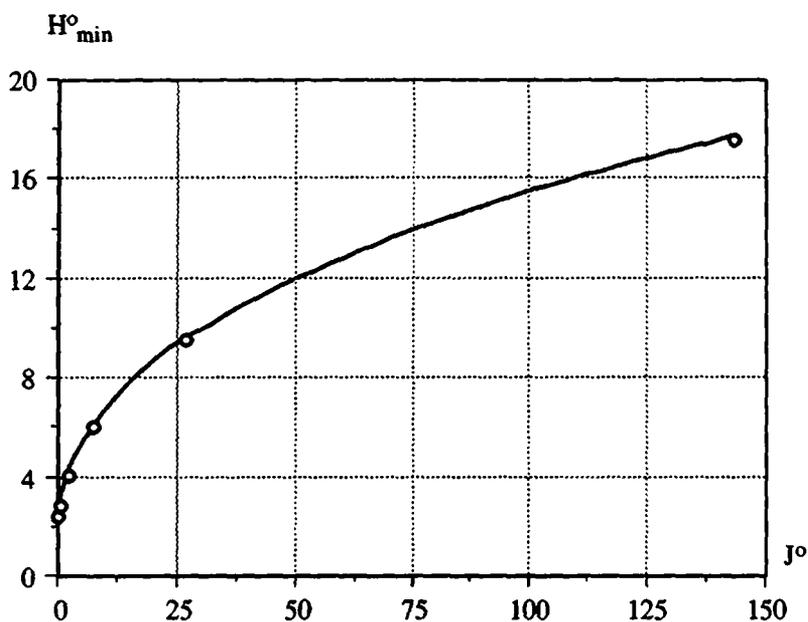
Dans le cas où la viscosité varie en fonction de la pression, on peut définir un deuxième coefficient, "complémentaire" de  $J^\circ$ , qui tient compte de l'exposant piézovisqueux

$$M^\circ = (\mu_1 P_y^3 / \mu_o UR^{*2})^{1/2} \quad (4.158)$$

En fonction de ces deux paramètres  $J^\circ$  et  $M^\circ$ , le paramètre de hauteur du film peut être approximé par

$$H_{\min}^\circ = 1.4 M^\circ 0.54 J^\circ 0.06 \quad (4.159)$$

et cela correspond environ aux résultats de Dowson et Higginson (4.153) et (4.154).



**Fig. 4.25 : Paramètre de hauteur minimale du film  $H_{\min}^0$  en fonction du paramètre  $J^0$  (IVE).**

Dans la mesure où les paramètres

$$J^0 < 0.3$$

$$M^0 < 0.7 \tag{4.160}$$

on peut assimiler le régime obtenu à l'IVR. De plus, on peut considérer la grandeur adimensionnelle  $(M^0/J^0)^{0.25}$  comme déterminante pour évaluer le régime élastohydrodynamique. Pour des valeurs de cette grandeur inférieures à l'unité, les changements de la viscosité peuvent être négligés par rapport à la déformation des solides. Revenant aux données du problème, on obtient

$$(M^0/J^0)^{1/4} = (\mu_1^4 \mu_o U E^* \pi^3 / R^*)^{1/8} \tag{4.161}$$

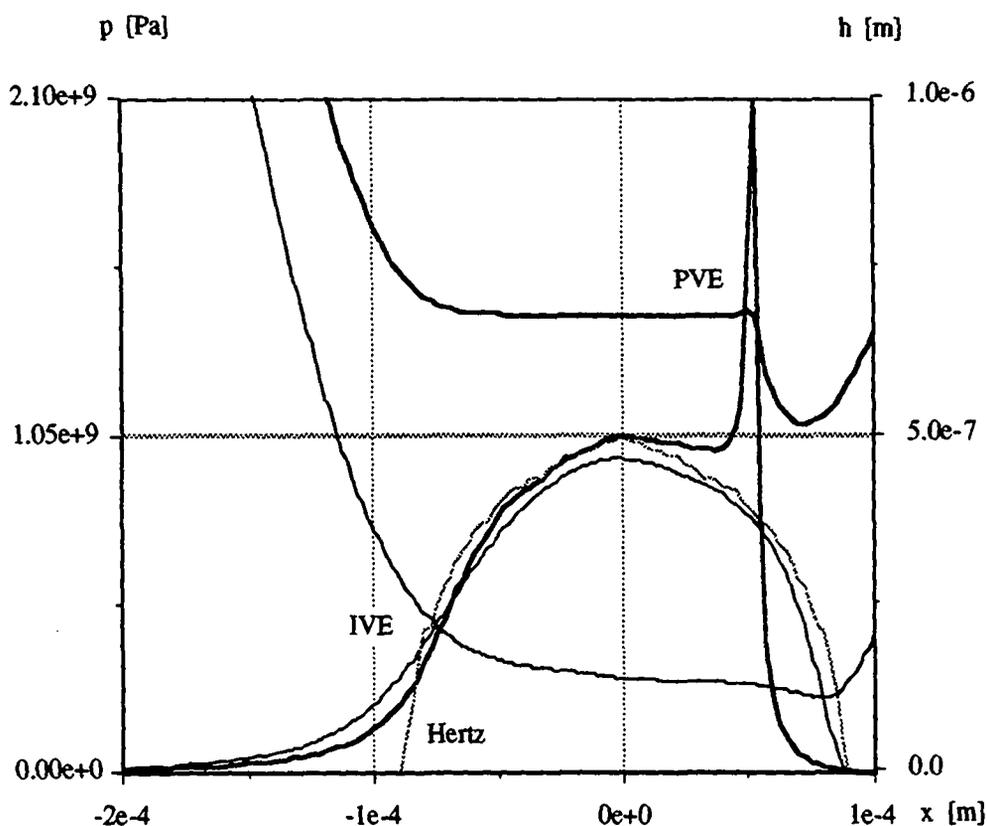
Il est alors possible de calculer cette grandeur pour les cas relatifs aux roulements de broches de machines, et l'on obtient des valeurs entre 3 et 6 pour la relation (4.161). Cela correspond à des contacts lubrifiés entre métaux tels que l'acier, en présence d'huiles minérales.

Les coefficients définis ci-dessus ne sont à l'évidence pas les seuls que l'on peut rencontrer dans la littérature, mais ils sont les plus importants car ils interviennent dans la presque totalité des coefficients définis dans les publications.

On remarquera que l'orientation vers la détermination de la hauteur du film d'huile est clairement marquée, alors que l'on ne constate aucune tentative orientée vers la puissance consommée.

De nombreux auteurs ont tenté de définir des critères de transition entre les différents régimes, IVR, PVR, IVE, ou PVE, pour la calculation des épaisseurs de films d'huile. On trouve chez Houpert (1984) une tentative intéressante d'unification des différents critères existants et la définition de nouveaux, basés sur le "curve-fitting" des nombreux résultats EDH disponibles dans la littérature.

Nous illustrons ci-dessous des profils caractéristiques de films d'huile ainsi que les distributions de pression correspondantes.



**Fig. 4.26 : Profils de pression et de hauteur de film caractéristiques en régime élastohydrodynamique, PVE ou IVE.**

$$( P_y = 1.4 \cdot 10^5 \text{ N/m}, U = 30 \text{ m/s}, R = 6 \cdot 10^{-3} \text{ m}, \\ \mu_o = 8.47 \cdot 10^{-3} \text{ Pa}\cdot\text{s}, \mu_1 = 2.317 \cdot 10^{-8} \text{ Pa}^{-1} )$$

On notera sur la figure 4.26 les caractéristiques bien connues du régime PVE avec le pic de pression en sortie de contact, correspondant au deuxième convergent du film d'huile. En régime IVE, par contre, le plateau de hauteur constante n'apparaît pas, ou imparfaitement, et à des valeurs de charge au contact très élevées; la distribution de pression ne présente pas le pic caractéristique EHD puisqu'il ne se présente pas vraiment de second convergent dans le film.

La pression au centre du contact est proche de la valeur de la pression hertzienne, mais légèrement inférieure, en particulier pour le cas isovisqueux, où la contribution de l'entrée du contact à la portance est relativement plus importante que dans le régime PVE.

Remarquons enfin que la sortie du contact lubrifié est toujours à l'extérieur de la zone de contact sec, même dans le cas où l'on est en présence d'un pic de pression très important.

#### 4.3.2 Influence de la richesse de l'alimentation du contact sur l'épaisseur du film d'huile

L'influence de la quantité d'huile en amont du contact est généralement traitée par la détermination d'un coefficient correctif à appliquer à la hauteur du film d'huile calculée.

En régime élastohydrodynamique, on peut exprimer le coefficient de réduction de la hauteur du film au centre du contact

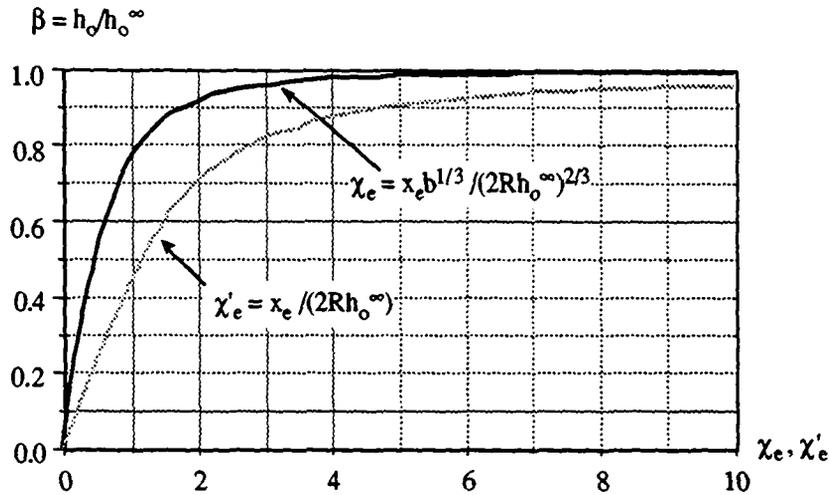
$$\beta = h_c/h_0^\infty \quad (4.162)$$

en fonction de l'abscisse d'entrée du contact, laquelle définit le domaine d'intégration des équations au moyen d'une variable adimensionnelle auxiliaire  $\chi$ , définie comme suit (Dalmaz, 1979) :

$$\chi_e = x_e b^{1/3} / (2Rh_0^\infty)^{2/3} \quad (4.163)$$

Les variations de  $\beta$  en fonction de  $\chi_e$  sont représentées à la figure 4.27.

Les résultats donnés dans cette figure montrent que lorsque l'abscisse d'entrée se rapproche du centre du contact, la quantité d'huile alimentant le contact et la hauteur du film au centre du contact diminuent.



**Fig. 4.27 : Influence de l'abscisse d'entrée sur l'épaisseur du film au centre du contact galet-plan, pour les régimes isovisqueux rigide et élastohydrodynamique.**

Pour l'approche EHD isotherme, on remarque que, pour des valeurs de  $\chi_e$  de trois environ, la hauteur du film reste très proche de ce qu'elle est en régime surabondant.

Par souci de comparaison, nous avons reporté sur la même figure la diminution de l'épaisseur minimale du film en régime isovisqueux rigide

$$\beta = h_0/h_0^\infty$$

en fonction de la variable adimensionnelle  $\chi'_e$  définie par

$$\chi'_e = x_e / (2Rh_0^\infty)^{1/2} \quad (4.164)$$

Ces courbes ne peuvent pas être comparées directement puisque celle relative au régime EHD fait intervenir la largeur du contact hertzien  $b$  alors que la relation (4.164) est presque la définition (4.9) de la variable adimensionnelle  $\gamma$ , faite au début de ce chapitre. On peut cependant constater une tendance analogue :

- la diminution de la quantité d'huile fait diminuer  $x_e$  et, ce faisant, la hauteur de film diminue. Dans le régime déformable et piézo-visqueux, la diminution de  $x_e$  modifie la position du pic élastohydrodynamique et le déplace vers la sortie du contact; sa hauteur tend à diminuer et la répartition de pression hydrodynamique se rapproche toujours plus de la répartition hertzienne des contacts secs.

### 4.3.3 Influence des effets thermiques sur l'épaisseur du film d'huile en régime permanent

L'énergie dissipée par le cisaillement du film fluide dans un contact hertzien lubrifié, et l'élévation de température qui en résulte, sont des phénomènes bien connus. La détermination de la température dans le film fluide est très importante car les fluides lubrifiants généralement utilisés ont une viscosité qui varie beaucoup avec la température : une élévation de température de 50 °C provoque la même variation de viscosité, au signe près, qu'une élévation de pression de l'ordre de 430 bars.

Comme nous l'avons signalé, de nombreuses études du problème thermique ont été réalisées, mais principalement dans les contacts linéaires, du fait des facilités que présente le problème bidimensionnel.

Chaque auteur a considéré des lois particulières pour modéliser les variations des diverses propriétés du fluide. Les principales conclusions obtenues par les auteurs sur les effets thermiques sont les suivantes, selon Dalmaz (1979) :

- en roulement pur, l'élévation de température est pratiquement nulle, le régime peut être considéré comme isotherme;
- l'élévation de température varie pratiquement comme le carré de la vitesse de glissement;
- les répartitions des températures dans la zone médiane du film selon l'axe x, ont la même allure que la répartition des pressions, mais l'élévation de température ne dépasse pas 15 °C dans un cas de lubrification élastohydrodynamique, celui de la figure 4.26 par exemple;
- le pic de pression est peu modifié;
- l'élévation maximale de la température de la surface solide ne dépasse pas 3 °C ;
- les expressions obtenues dans le cas isotherme sont justifiées et ne dépendent donc, même en régime non isotherme, pratiquement que de la viscosité à l'entrée du contact, soit  $\mu_0$  ;
- pour les hautes vitesses, plusieurs mètres par seconde, l'élévation de la température à l'entrée du contact devient non négligeable et y diminue la viscosité, d'où une diminution de la hauteur du film d'un coefficient  $\psi$  que l'on peut relier à un paramètre  $Q^\circ$  défini par

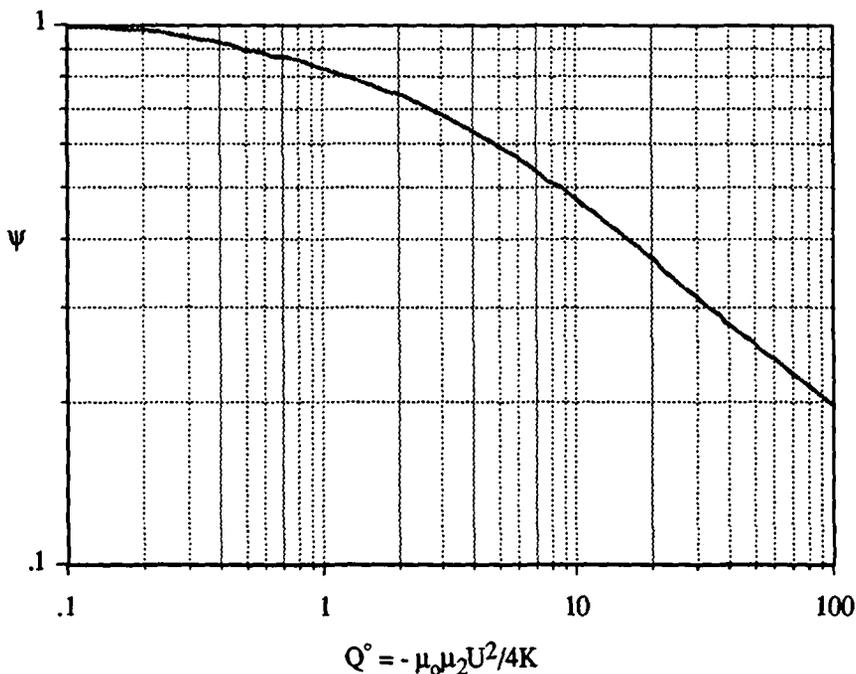
$$Q^\circ = -\mu_0 \mu_2 U^2 / 4K \quad (4.165)$$

Les résultats obtenus par Cheng montrent une variation de  $\psi$  en fonction de  $Q^\circ$  qui est représentée à la figure 4.28

Dans la relation (4.165),  $U$  est la somme des vitesses des surfaces en mouvement,  $K$  le coefficient de conduction thermique du fluide et  $\mu_2$  le coefficient de thermoviscosité pour une loi exponentielle de viscosité

$$\mu = \mu_0 e^{\mu_2 \Delta T} \quad (4.166)$$

Notons que la courbe de la figure 4.28 est caractéristique du roulement pur (Dalmaz, 1979) et que le résultat est semblable en glissement pur.



**Fig. 4.28 : Coefficient de réduction thermique  $\psi$  en fonction du paramètre  $Q^\circ$  pour le contact EHD cylindre-plan.**

Il est intéressant ici de faire l'évaluation du paramètre  $Q^\circ$  dans le cas numérique que nous avons en référence. Pour notre cas, rappelons que

$$\begin{aligned} U &= 30 \text{ m/s} & K &= 0.137 \text{ W/m}^\circ\text{C} \\ \mu_0 &= 8.47 \cdot 10^{-3} \text{ Pa}\cdot\text{s} & \mu_2 &= -0.02 \text{ }^\circ\text{C}^{-1} \end{aligned} \quad (4.126)$$

et que dans ces conditions on trouve

$$Q^{\circ} = 0.28 \quad (4.168)$$

et l'on devrait donc avoir une variation de hauteur de film quasiment pas modifiée par la température, selon la figure 4.28.

Précisons encore, sans entrer dans les détails, que nous ne sommes pas du tout convaincus de ces résultats!

En effet, si l'élévation de température dans le film ne dépassait pas 15 °C, comment expliquer certains comportements réels, dans lesquels l'échauffement de l'huile est tel qu'il se produit même un cracking voire une combustion du lubrifiant sur les pistes de roulement.

#### 4.4 BREVE CONCLUSION SUR L'ETUDE THEORIQUE

L'approche théorique nous a donc permis de nous familiariser avec les grandeurs caractéristiques de la lubrification, en l'absence de déformation des solides, et d'effectuer un certain nombre de raisonnements sur le comportement du contact lubrifié, principalement en fonction des conditions de charge et d'alimentation.

Dans la section relative au régime IVR, nous avons pu montrer les particularités de notre approche et introduire des interprétations nouvelles des concepts tels que le couple opposé au roulement, la puissance consommée et la hauteur de film à l'entrée. Par la suite, nous avons montré l'équivalence des différentes méthodes d'évaluation de la dissipation, et surtout la simplicité de celle que nous introduisons par le biais du couple opposé au roulement.

L'analyse de l'influence de la quantité d'huile a été abordée de deux manières. La première reprend la notion d'absence de débit inverse. La seconde introduit la notion de quantité d'huile entraînée par les surfaces en mouvement et définit les conditions d'alimentation du film par la hauteur à l'entrée du contact, hauteur où la distance entre les solides est égale aux épaisseurs cumulées de l'huile présente sur chacune des surfaces. L'abscisse où le film d'huile s'établit dépend donc de la charge au contact dans le régime IVR et, par suite, de la déformation des solides en régime élastique ou déformable.

Nous avons pu montrer que le régime “sans débit inverse” constitue une approche analytique intéressante car très simple à utiliser sur ce plan. Ce régime a par ailleurs une autre particularité, celle de conduire à l'élévation de température minimale dans le film avec une hypothèse adiabate. En effet, alors que la dissipation décroît avec l'appauvrissement du contact, l'élévation de température du film passe, elle, par un minimum qui correspond justement à la condition d'absence de débit refoulé.

Nous avons établi une comparaison complète entre les régimes riche et limite, ensuite de quoi nous avons montré que la quantité d'huile influence aussi le glissement qui peut apparaître aux contacts d'un roulement réel. Dans des conditions de fonctionnement correspondant à celles d'un palier de machine, le glissement qui s'établit est tel qu'il conduit au régime de dissipation minimale aux contacts.

Les mesures effectuées sur un arbre de transmission de machine-outil équipé de paliers à galets coniques non préchargés montrent une bonne corrélation avec les calculs prévisionnels d'un régime considéré comme limite. Les valeurs de puissance consommée se situent entre les valeurs théoriques relatives à un roulement pur et celles correspondant à la puissance dissipée minimale.

Pour ce qui est des régimes PVR et EHD, nous n'avons fait que présenter un certain nombre de résultats connus qui nous permettront, par la suite, de faire des comparaisons. Ces approches sont en général suffisamment complexes, et/ou orientées de façon particulière, pour que la puissance consommée n'en soit pas déductible, alors que c'est, en fait, la grandeur qui nous intéresse en tout premier lieu, dans notre métier d'ingénieur-concepteur.



## CHAPITRE 5

# ETUDE NUMERIQUE DU CONTACT LUBRIFIE

### 5.1 INTRODUCTION

Comme nous l'avons déjà mentionné au début de ce texte, nous n'avons pas abordé l'étude numérique de la lubrification sans un acquis préalable. En effet, après avoir abordé les bases théoriques, nous avons pris contact avec le Dr. A. Curnier, afin de pouvoir utiliser les travaux qu'il avait effectués dans le domaine, notamment dans sa thèse de doctorat (Curnier, 1978), et profiter des outils de calcul qu'il a développés depuis de nombreuses années, en particulier du programme d'éléments finis TACT.

La lubrification n'étant aujourd'hui plus, à proprement parler, l'aspect principal des recherches du Dr. A. Curnier dans le domaine de la mécanique des contacts, ses développements ont été arrêtés depuis la dernière publication en 1982 (Curnier, 1982).

Le programme d'analyse par éléments finis TACT est destiné principalement à traiter les problèmes de thermomécanique des solides et des fluides, en particulier les problèmes de contacts secs, avec et sans frottement, les problèmes de contacts lubrifiés et ceux d'impact. Il était donc à notre disposition, comme outil de travail et de développement, dans le cadre de notre étude. Ce programme (Curnier, 1985) est basé sur la méthode des éléments finis (MEF) – cas particulier de la méthode de Galerkin – pour la discrétisation spatiale, la méthode des itérations linéaires (MIL) – une généralisation de la méthode de Newton – pour résoudre les non-linéarités, tant géométriques que matérielles, et la méthode des différences finies (MDF) – la méthode de Newmark – pour la discrétisation temporelle des problèmes. Des méthodes de pénalité et de dualité sont implantées pour résoudre des problèmes particuliers de contact sec et d'impact. L'algorithme lié au frottement est directement inspiré de celui lié à la plasticité dans lequel une matrice tangente non symétrique consistante est établie. Le traitement du contact lubrifié est réalisé au moyen d'un élément fini particulier dont nous reparlerons.

En lubrification, l'application de méthodes faisant appel aux éléments finis a permis de surmonter les restrictions géométriques. Cependant, l'utilisation de techniques d'itération directes, appelées aussi méthodes de Newton modifiées, pour résoudre les non-linéarités, a cantonné les techniques d'éléments finis à des conditions de lubrification "douces" ou

principalement hydrodynamiques. L'introduction de la méthode des itérations linéaires par Rohde et Oh (1975) a permis de lever ces restrictions et d'utiliser les éléments finis aussi en lubrification élastohydrodynamique.

Nous verrons cependant que ces nouvelles méthodes ne résolvent pas tous les problèmes. Les tests effectués lors de l'implantation de ces techniques dans TACT (Curnier, 1978) n'ont pas permis de mettre en évidence tous les problèmes que nous avons rencontrés lorsque nous avons voulu résoudre des cas de la pratique, donc de paliers réels.

## 5.2 FORMULATION DU PROBLEME POUR SA RESOLUTION NUMERIQUE

Il est hors de notre propos de présenter ici l'ensemble du problème de la thermolubrification et du couplage avec la thermoélastoplasticité. La formulation complète peut être trouvée dans les publications de A. Curnier (1978, 1982, 1985, 1991). Nous ne sommes pas des spécialistes de l'analyse numérique, même si nous avons dû étudier certains problèmes qui en faisaient clairement partie. Il s'agit ici principalement de rappeler les résultats de la formulation faible du problème et les hypothèses simplificatrices qui peuvent parfois être adoptées.

### 5.2.1 Formulation faible des équations de base

Nous avons présenté au chapitre 3 les équations fondamentales de la lubrification. Il s'agit de l'équation de conservation de la masse (3.5) ou équation de continuité, de la loi fondamentale de la dynamique (3.7) et de l'équation de la chaleur (3.23). Nous allons ci-dessous présenter les formes faibles de ces principes de base de la thermomécanique, dans une description spatiale qui est bien adaptée aux contacts lubrifiés.

- **Equation de conservation de la masse**

La forme faible de l'équation (3.5) peut s'écrire

$$\int_{\dot{\omega}} \dot{\rho} \check{p} \, dv - \int_{\dot{\omega}} \rho \, u_i \check{p}_{,i} \, dv + \int_{\partial\omega} \rho \, u_n \check{p} \, da = 0 \quad (5.1)$$

dans laquelle  $u_i$  est la vitesse du milieu,  $u_n$  sa composante normale à la frontière  $\partial\omega$  du volume de contrôle  $\dot{\omega}$ ,  $\check{p}$  une fonction test arbitraire cinématiquement admissible, qui

peut être interprétée comme une pression virtuelle,  $dv$  et  $da$  les volume et surface élémentaires.

La superposition d'un point sur une lettre indique la dérivée partielle par rapport au temps, alors que la virgule en indice indique celle par rapport à l'espace. La convention de sommation sur les indices répétés est appliquée.

- **Equation de la dynamique**

Sous sa forme faible, l'équation (3.7) prend la forme

$$\int_{\dot{\omega}} \frac{du_i}{dt} \check{u}_i \rho \, dv = \int_{\dot{\omega}} f_i \check{u}_i \rho \, dv + \int_{\partial\dot{\omega}} \tau_{in} \check{u}_i \, da - \int_{\dot{\omega}} \tau_{ij} \check{u}_{i,j} \, dv \quad (5.2)$$

avec  $f_i$  la force de masse,  $\tau_{in} = \tau_{ij} \cdot n_{ij}$  la traction de surface,  $\tau_{ij}$  la contrainte,  $\check{u}_i$  une fonction test que l'on peut interpréter comme un déplacement virtuel pour les solides et une vitesse virtuelle pour les fluides et  $\check{u}_{i,j}$  son gradient. La différentiation par rapport au temps d'une fonction  $f$  est notée  $df/dt = \dot{f} + f_{,j} \cdot u_j$  et correspond à la dérivée particulaire.

- **Equation de l'énergie réduite**

L'énergie, dont le bilan avait été exprimé par (3.23) peut se mettre sous une forme quelque peu différente si l'on fait apparaître la densité d'énergie libre  $\psi$  et l'entropie libre massique  $\sigma$ . Avec  $T$  la température absolue,  $\dot{q}$  la source de chaleur,  $\eta_n = \eta_j \cdot n_j$  le flux de chaleur à travers la frontière, où  $\eta_j$  est le vecteur chaleur, et  $\check{T}$  une fonction test que l'on peut interpréter comme une température virtuelle, l'équation de l'énergie s'écrit :

$$\int_{\dot{\omega}} \frac{d}{dt} (\psi + \sigma T) \check{T} \rho \, dv = \int_{\dot{\omega}} \tau_{ij} u_{i,j} \check{T} \, dv + \int_{\dot{\omega}} \dot{q} \check{T} \rho \, dv + \int_{\partial\dot{\omega}} \eta_n \check{T} \, da - \int_{\dot{\omega}} \eta_j \check{T}_{,j} \, dv \quad (5.3)$$

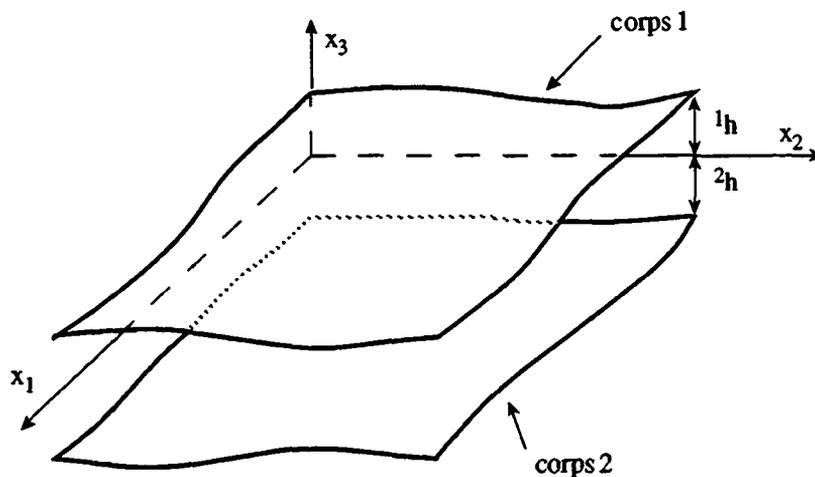
Comme la lubrification traite du débit d'un fluide visqueux entre deux surfaces en mouvement relatif de glissement, les équations fondamentales peuvent être simplifiées par l'hypothèse faite, que la hauteur de film est petite par rapport au rayon de courbure et à la longueur des surfaces adjacentes. Elles seront moyennées par leur intégration préalable à travers l'épaisseur du film. Les équations non-linéaires résultantes seront par la suite linéarisées pour leur résolution.

En toute rigueur, la théorie devrait être exprimée dans le système de coordonnées curvilinéaires naturellement défini par les surfaces des solides adjacents. Cependant, du fait du relatif parallélisme de ces surfaces, le film fluide peut être considéré comme plan et les équations établies restent valables pour des surfaces de rayon de courbure fini.

Pour l'analyse numérique, le plan de référence est défini par  $x_3 = 0$  (fig. 5.1) et l'épaisseur du film s'écrit

$$h = h(x_\alpha, t) = {}^2h - {}^1h, \quad \alpha = 1,2 \quad (5.4)$$

dans la direction  $x_3$ . L'indice supérieur gauche fait référence au numéro du solide en contact.



**Fig. 5.1 : Géométrie du contact lubrifié.**

### 5.2.2 Lois constitutives du lubrifiant

Sans prendre en considération les effets non-newtoniens apparaissant avec les hautes pressions et les taux de cisaillement élevés, le comportement du fluide est fortement influencé par les pressions et températures atteintes dans la zone de contact.

Pour en tenir compte, la

- **loi de viscosité**

d'un tel lubrifiant, dit newtonien, s'exprime par la relation linéaire

$$\tau_{ij} = -p \delta_{ij} + \xi d_{kk} \delta_{ij} + 2\mu d_{ij} \quad (5.5)$$

où  $p$  est la pression thermodynamique,  $\xi(p,T)$  et  $\mu(p,T)$  les coefficients de viscosité, et

$$d_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i})/2 \quad (5.6)$$

Cette relation a déjà été exprimée sous (3.11).

Pour un fluide incompressible  $d_{kk} \equiv 0$  et si l'on considère que la viscosité varie avec la pression et la température

$$\mu = \mu(p,T) \quad (5.7)$$

Dans beaucoup de cas, la loi empirique de type exponentiel

$$\mu = \mu_0 e^{(\mu_1 p + \mu_2 T)} \quad (5.8)$$

est utilisée pour exprimer la variation de la viscosité en fonction de la pression et de la température.

Par ailleurs, le fluide est caractérisé par une

- **loi de conduction linéaire**

qui s'écrit, si  $K$  est le coefficient de conductivité thermique,

$$\eta_{ij} = K T_{,j} \quad (5.9)$$

Finalement, on peut utiliser les relations potentielles

$$p = \rho^2 \partial\psi/\partial\rho \quad (5.10)$$

et

$$\sigma = -\partial\psi/\partial T \quad (5.11)$$

pour modifier le membre de gauche de l'équation d'énergie (5.3), avec l'aide de l'équation de continuité (5.1) et de la loi de viscosité (5.5). On obtient finalement

$$\rho \frac{d}{dt} (\psi + \sigma T) + p u_{i,i} = \rho T \frac{d\sigma}{dt} = \rho c_p \frac{dT}{dt} - \alpha T_o \frac{dp}{dt} \quad (5.12)$$

qui représente le même résultat que (3.22) que nous avons obtenu différemment.

### 5.2.3 Analyse dimensionnelle

Afin de caractériser concrètement les films minces, nous pouvons évaluer les différents nombres caractéristiques liés aux écoulements.

Dans des conditions typiquement thermoélastohydrodynamiques, les spécifications de l'huile et de l'écoulement sont :

$$\begin{array}{ll} \rho & = 10^3 \text{ Kg/m}^3 & h & = 10^{-8} \text{ m} \\ \mu & = 10^{-2} \text{ Pa}\cdot\text{s} & L & = 10^{-3} \text{ m} \\ c_p & = 2 \cdot 10^3 \text{ J/Kg}^\circ\text{C} & V & = 10 \text{ m/s} \\ K & = 0.15 \text{ W/m}^\circ\text{C} & g & = 10 \text{ m/s}^2 \\ \alpha & = 7 \cdot 10^{-4} \text{ }^\circ\text{C}^{-1} & & \end{array} \quad (5.13)$$

Les grandeurs  $h$ ,  $L$  et  $V$  sont caractéristiques de l'épaisseur du film, de la longueur du contact et de la vitesse au contact.

- **Nombre de Reynolds**

$$Re = VL\rho/\mu \quad (5.14)$$

Il représente le rapport entre les forces d'inertie et les forces de frottement visqueux dans l'écoulement. Si  $Re$  est faible, les forces de frottement sont prédominantes et l'écoulement est laminaire. Au contraire, si  $Re$  est grand, les forces d'inertie prédominent et l'écoulement devient turbulent.

On obtient ici

$$Re = 1000 \quad (5.15)$$

ce qui signifie que l'écoulement est laminaire.

- **Nombre de Prandtl**

$$Pr = \mu c_p / K \quad (5.16)$$

Il exprime l'importance relative de la conduction de la chaleur et de la dissipation visqueuse dans un écoulement. Pour un gaz, l'air par exemple, il vaut 0.7, alors qu'il peut devenir très grand pour un liquide. Cela signifie que la conduction peut souvent être négligée.

On trouve ici

$$Pr = 133 \quad (5.17)$$

- **Nombre de Péclet**

$$Pe = \rho VL \cdot c_p / K = Re \cdot Pr \quad (5.18)$$

Ce nombre est une mesure relative de la convection par rapport à la conduction. Lorsque  $Pe$  est grand, la convection prédomine et inversement.

Dans le cas présent on obtient, dans le sens du film

$$Pe = 1.3 \cdot 10^5 \quad (5.19)$$

ce qui signifie que la convection prédomine très fortement et que la conduction pourrait être négligée. Le problème se pose de manière fort différente pour le transfert de chaleur à travers le film.

- **Nombre de Froude**

$$Fr = V^2/gL \quad (5.20)$$

C'est une mesure de l'importance des forces gravitationnelles dans le fluide. On trouve, avec les valeurs numériques définies,

$$Fr = 10^4 \quad (5.21)$$

qui confirme que les forces de gravitation sont négligeables.

Le pas suivant consiste à exprimer la pression thermodynamique  $p$  en fonction des quantités viscocinématiques caractéristiques, en remarquant l'importance des termes de pression et de dissipation mise en évidence par les résultats empiriques.

#### 5.2.4 Simplifications résultant de l'analyse dimensionnelle

Après substitution des variables adimensionnelles et élimination des termes du second ordre en  $\varepsilon = h/L \ll 1$ , le retour aux variables originelles montre qu'il ne reste qu'un seul terme de la dissipation visqueuse. La densité d'énergie  $\Phi$  prend la forme

$$\begin{aligned} \Phi &= \tau_{ij}u_{i,j} = -pu_{i,i} + \xi u_{k,k}u_{i,i} + \mu(u_{i,j} + u_{j,i}) = \\ &= \tau_{\alpha\beta}u_{\alpha,\beta} + \tau_{\alpha,3}u_{\alpha,3} = -pu_{i,i} + \mu u_{\alpha,3}u_{\alpha,3} \end{aligned} \quad (5.22)$$

Ce résultat appelle les commentaires suivants :

- une théorie générale de la lubrification basée sur des fluides non-newtoniens exige la reprise complète de (5.22);
- la dissipation se réduit ici à un seul terme indépendant de  $\xi$ , quelle que soit la viscosité de volume  $\mu' = 3\xi + 2\mu \geq 0$ ;
- pour des contacts particuliers de type excentrique, le terme  $\mu u_{1,2}u_{1,2}$ , qui n'est pas pris en compte ici, peut devenir important et devra être pris en considération dans la dissipation.

Par ailleurs, dans le cas d'un écoulement laminaire ce qui est le cas ici, les forces d'inertie et de gravité sont omises et l'équation du mouvement (5.2) devient simplement

$$\int_{\dot{\omega}} (-p\check{u}_{i,i} + \mu u_{\alpha,3}\check{u}_{\alpha,3}) dv = \int_{\partial\omega} \tau_{in}\check{u}_i da \quad (5.23)$$

Considérant une variation indépendante de l'équation (5.23) par rapport à  $\check{u}_3$ , on est ramené au fait que la pression est constante dans l'épaisseur du film

$$p_{,3} = 0 \Rightarrow p(x_\alpha, t) \quad (5.24)$$

La simplification de la dissipation (5.22) et de l'équation du mouvement (5.23), combinée à l'expression modifiée de l'énergie interne du fluide (5.12), et en l'absence de source de chaleur extérieure, permet d'écrire l'équation d'énergie sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} & \int_{\dot{\omega}} [\rho c_p(\dot{T} + u_j T_{,j}) - \alpha T_o(\dot{p} + u_\beta p_{,\beta})] \check{T} dv = \\ & = \int_{\dot{\omega}} \mu u_{\alpha,3} u_{\alpha,3} \check{T} dv - \int_{\dot{\omega}} K T_{,3} \check{T}_{,3} dv + \int_{\partial\omega} \eta_n \check{T} da \end{aligned} \quad (5.25)$$

### 5.2.5 Conditions à l'interface solide-liquide

La compatibilité cinématique et les principes de la thermomécanique exprimés pour l'interface solide-liquide se réduisent à la condition de glissement sans pénétration et au principe de l'action et de la réaction, comme pour n'importe quel contact sec.

En appelant respectivement  $u_i$  et  ${}^s u_i$  les vitesses, au même point, du fluide et du solide respectivement, on peut écrire :

$$\begin{aligned} u_i(x_\alpha, {}^s h, t) &= {}^s u_i & \alpha &= 1,2 \\ T(x_\alpha, {}^s h, t) &= {}^s T & i &= 1,3 \\ \tau_{in}(x_\alpha, {}^s h, t) &= {}^s \tau_{in} & s &= 1,2 \end{aligned} \quad (5.26)$$

De même, il résulte de l'expression de la dissipation (5.22) que les seules composantes des contraintes non négligeables dans le film sont :

$$\tau_{11} = \tau_{22} = \tau_{33} = -p \quad \text{et} \quad \tau_{\alpha 3} = \mu u_{\alpha,3} \quad (5.27)$$

Par conséquent, le vecteur des forces agissant en chaque point de l'interface solide-liquide, et caractérisé par sa normale,

$${}^s n = (-{}^s h_{,1} ; -{}^s h_{,2} ; (-1)^s) \quad (5.28)$$

est donné par l'expression

$${}^s \tau_{in} = {}^s \tau_{ij} \cdot {}^s n_j = \begin{pmatrix} p {}^s h_{,1} + \mu {}^s u_{1,3} & (-1)^s \\ p {}^s h_{,2} + \mu {}^s u_{2,3} & (-1)^s \\ p(-1)^s - \mu {}^s u_{\alpha,3} & {}^s h_{,\alpha} \end{pmatrix} \quad (5.29)$$

Lorsque le contact est effectivement plan, les tractions aux frontières se réduisent à

$${}^s \tau_{in} = (-1)^s (\mu {}^s u_{1,3} ; \mu {}^s u_{2,3} ; p) \quad (5.30)$$

Lorsque, en plus, les forces de frottement visqueux sont négligées, on obtient l'expression élémentaire

$${}^s \tau_{in} = (-1)^s (0 ; 0 ; p) \quad (5.31)$$

### 5.2.6 Intégration à travers l'épaisseur du film

En considérant des variations indépendantes de l'équation du mouvement (5.23) par rapport à  $\check{u}_\alpha$ , on obtient les équations du mouvement dans le plan du film :

$$-p_{,\alpha} + (\mu u_{\alpha,3})_{,3} = 0 \quad (5.32)$$

Comme par ailleurs la pression est constante suivant l'épaisseur, une deuxième intégration suivant  $x_3$ , en tenant compte des conditions aux limites sur les vitesses de (5.26), conduit à un profil de vitesse quadratique.

Pour un fluide compressible, l'évaluation du débit moyen à travers l'épaisseur

$$Q_{\alpha} = \int_{1_h}^{2_h} \rho u_{\alpha} dx_3 \quad (5.33)$$

est délicate, alors que pour un fluide incompressible, donc lorsque  $\rho = \text{cte}$ , on obtient relativement facilement

$$Q_{\alpha} = \rho h \bar{u}_{\alpha} + \rho (\bar{h} - F_1/F_0) V_{\alpha} - \rho (F_2 - F_1 F_1/F_0) p_{,\alpha} \quad (5.34)$$

avec les coefficients de fluidité moyens  $F_i$  définis par

$$F_i = \int_{1_h}^{2_h} x_3^i / \mu dx_3 \quad (5.35)$$

La vitesse moyenne de roulement est simplement

$$\bar{u}_{\alpha} = ({}^1u_{\alpha} + {}^2u_{\alpha})/2 \quad (5.36)$$

et la vitesse de glissement

$$V_{\alpha} = {}^2u_{\alpha} - {}^1u_{\alpha} \quad (5.37)$$

et la surface médiane du film

$$\bar{h} = ({}^1h + {}^2h)/2 \quad (5.38)$$

L'intégration, à travers l'épaisseur du film, de l'équation de continuité (5.1) donne la forme faible de l'équation de la lubrification, soit :

$$\int_{\dot{\gamma}} \rho h \dot{p} da - \int_{\dot{\gamma}} Q_{\alpha} \dot{p}_{,\alpha} da + \int_{\partial \gamma} Q_n \dot{p} d\ell = 0 \quad (5.39)$$

dans laquelle  $\dot{\gamma}$  représente la surface du film et  $\partial \gamma$  sa frontière.

On peut appliquer la même procédure à l'équation de la chaleur (5.25). Cela donne

$$\int_{\dot{\gamma}} \dot{R}\check{T} da + \int_{\dot{\gamma}} R\check{T} da = \int_{\dot{\gamma}} K({}^2T_{,3} - {}^1T_{,3}) da + \int_{\partial\gamma} \eta_n \check{T} d\ell \quad (5.40)$$

Les quantités  $\dot{R}$  et  $R$  sont les résidus énergétiques, respectivement transitoire et permanent, et valent

$$\dot{R} = \int_{1_h}^{2_h} (\rho c_p \dot{T} - \alpha T \dot{p}) dx_3 \quad (5.41)$$

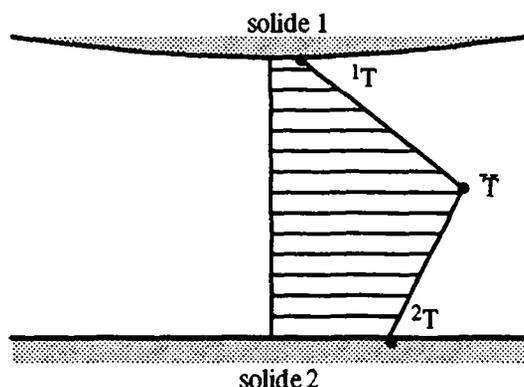
$$R = \int_{1_h}^{2_h} (\rho c_p u_j T_{,j} - \alpha T_{,o} u_{\beta} p_{,\beta}) dx_3 - \\ - [V_{\alpha} V_{\alpha} / F_o + (F_2 - F_1 F_1 / F_o) p_{,\alpha} p_{,\alpha}] \quad (5.42)$$

avec, entre les crochets de (5.42), la dissipation dans le film.

Jusqu'ici, l'étude de la lubrification thermoélastohydrodynamique développée n'a pas abordé le fait que la distribution de température à travers l'épaisseur du film est inconnue a priori. Le choix d'une telle distribution est délicat et l'on peut montrer (Curnier, 1978) qu'une distribution quartique garantirait la précision requise pour une théorie approchée.

Une telle distribution complique passablement le problème numérique et une solution intermédiaire entre la distribution quartique et une température supposée constante à travers l'épaisseur du film peut être envisagée. Il s'agit d'une distribution linéaire par morceaux, qui permet de satisfaire les conditions aux limites solide-liquide et d'avoir une température indépendante pour le milieu du film.

Cette distribution, représentée à la figure 5.2, est celle qui est implantée dans le programme d'éléments finis TACT.



**Fig. 5.2** Distribution de température linéaire par morceaux dans l'épaisseur du film.

Nous nous contenterons de présenter ici la distribution la plus simple, soit celle d'une température constante à travers le film. Cela correspond de fait à une conduction parfaite à travers l'épaisseur du film.

Il faut remarquer que pour des films d'huile dont l'épaisseur est de l'ordre de  $1/10^6$  ou de  $1/100^6$  de micron, on peut facilement imaginer que la température ne peut être pratiquement que constante dans son épaisseur.

Dans cette hypothèse

$$T_{,3} = 0 \Rightarrow T = T(x_\alpha, t) \quad (5.43)$$

La densité  $\rho(p, T)$  et la viscosité  $\mu(p, T)$  restent aussi constantes dans l'épaisseur. Il est alors possible d'intégrer analytiquement le débit moyen (5.34) ainsi que les résidus (5.41) et (5.42), pour obtenir finalement :

$$Q_\alpha / \rho = h \bar{u}_\alpha - p_{,\alpha} h^3 / 12\mu \quad (5.44)$$

$$R = \rho c_p (Q_\beta / \rho) T_{,\beta} - \alpha T_o (Q_\beta / \rho) p_{,\beta} - [\mu V_\alpha V_\alpha / h + p_{,\alpha} p_{,\alpha} h^3 / 12\mu] \quad (5.45)$$

$$\dot{R} = (\rho c_p \dot{T} - \alpha \dot{T} p) h \quad (5.46)$$

Remarquons que dans le cas où l'on tient compte de la conduction de la chaleur dans le sens du film, le résidu  $R$  de (5.45) se voit ajouter le terme ci-après

$$- hKT_{,\beta\beta} \quad (5.47)$$

### 5.2.7 Linéarisation de la formulation faible

Les expressions non linéaires (5.44) et (5.45) du débit moyen et du résidu énergétique en régime permanent doivent être linéarisées dans le but de compléter la formulation continue de la lubrification. Cette linéarisation autorise la construction d'un algorithme convergent pour la résolution qui, complété par la discrétisation des éléments finis, permet d'obtenir les solutions numériques des équations non linéaires.

Formellement, la linéarisation conduit aux expressions :

$$\tilde{Q}_\alpha(\Delta h, \Delta p, \Delta T) = Q_\alpha(h, p, T) + \Delta h \partial Q_\alpha / \partial h + \Delta p \partial Q_\alpha / \partial p + \Delta T \partial Q_\alpha / \partial T \quad (5.48)$$

$$\tilde{R}(\Delta h, \Delta p, \Delta T) = R(h, p, T) + \Delta h \partial R / \partial h + \Delta p \partial R / \partial p + \Delta T \partial R / \partial T \quad (5.49)$$

Nous allons résumer ci-après les différents gradients des débits et des résidus en écrivant pour simplifier

$$q_\alpha = Q_\alpha / \rho$$

$$r = R / \rho \quad (5.50)$$

- **Gradients des débits**

$$\frac{\partial q_\alpha}{\partial \mu} = \frac{h^3}{12\mu^2} p_{,\alpha} \quad (5.51)$$

$$\frac{\partial q_\alpha}{\partial^s u_3} \Delta^s u_3 = (-1)^s \left( \bar{u}_\alpha - \frac{h^2}{4\mu} p_{,\alpha} \right) \Delta^s u_3 \quad (5.52)$$

$$\frac{\partial q_\alpha}{\partial p} \Delta p = \frac{\partial q_\alpha}{\partial \mu} \cdot \frac{\partial \mu}{\partial p} \Delta p - \frac{h^3}{12\mu} \Delta p, \alpha \quad (5.53)$$

$$\frac{\partial q_\alpha}{\partial T} \Delta T = \frac{\partial q_\alpha}{\partial \mu} \cdot \frac{\partial \mu}{\partial T} \Delta T \quad (5.54)$$

• **Gradients résiduels**

$$\frac{\partial r}{\partial q_\beta} = c_p T, \beta - \frac{\alpha}{\rho} T_{o p, \beta} \quad (5.55)$$

$$\frac{\partial r}{\partial \mu} = \frac{\partial r}{\partial q_\beta} \cdot \frac{\partial q_\beta}{\partial \mu} + \frac{h^3}{12\mu^2 \rho} p, \beta p, \beta - \frac{1}{\rho h} V_\beta V_\beta \quad (5.56)$$

$$\frac{\partial r}{\partial^s u_3} \Delta^s u_3 = \left[ \frac{\partial r}{\partial q_\beta} \cdot \frac{\partial q_\beta}{\partial^s u_3} - (-1)^s \left( \frac{h^2}{4\mu \rho} p, \beta p, \beta - \frac{\mu}{\rho h^2} V_\beta V_\beta \right) \right] \Delta^s u_3 \quad (5.57)$$

$$\frac{\partial r}{\partial p} \Delta p = \frac{\partial r}{\partial \mu} \cdot \frac{\partial \mu}{\partial p} \Delta p - \left( \frac{\partial r}{\partial q_\beta} \frac{h^3}{12\mu} + \frac{\alpha}{\rho} T_{o q_\beta} + \frac{h^3}{6\mu \rho} p, \beta \right) \Delta p, \beta \quad (5.58)$$

$$\frac{\partial r}{\partial T} \Delta T = \frac{\partial r}{\partial \mu} \cdot \frac{\partial \mu}{\partial T} \Delta T + c_p q_\beta \Delta T, \beta \quad (5.59)$$

Le fait de tenir compte de la conduction de la chaleur dans le sens de l'écoulement (5.47) rajouterait deux termes aux gradients résiduels. Le terme (5.57) se verrait ajouter

$$- (-1)^s \frac{K}{\rho} T, \beta \beta \Delta^s u_3 \quad (5.60)$$

et le dernier gradient (5.59) serait augmenté de

$$- \frac{hK}{\rho} \Delta T, \beta \beta \quad (5.61)$$

Les équations retenues ici pour la formulation de la lubrification sont valables pour un fluide incompressible en régime permanent laminaire avec une température constante dans l'épaisseur.

### 5.2.8 Cinématique des contacts lubrifiés

Dans la majorité des cas, les mouvements dans les contacts lubrifiés entre solides déformables consistent en une petite perturbation autour du mouvement "corps rigide" de roulement et/ou glissement des corps en contact. On peut écrire le mouvement sous la forme

$$\begin{aligned}x_i &= c_i + Q_{ij} X_j + u'_i \\v_i &= \dot{c}_i + \dot{Q}_{ij} X_j \\a_i &= \ddot{c}_i + \ddot{Q}_{ij} X_j\end{aligned}\tag{5.62}$$

dans laquelle  $c$  est un vecteur et  $Q$  un tenseur orthogonal, tous deux fonctions du temps. Le petit déplacement  $u'$  est superposé à celui du point matériel  $X$  alors que  $v$  et  $a$  sont les champs des vitesses et accélérations. Les contributions  $\dot{u}'_i$  et  $\ddot{u}'_i + \dot{u}'_{i,j} v_j$  de la déformation ont été négligées par comparaison aux contributions du mouvement "corps rigide". Avec ces hypothèses cinématiques, les formes faibles des principes de base de la mécanique (5.1) à (5.3) se ramènent à des principes quasi statiques.

### 5.2.9 Élément fini "lubrifiant thermovisqueux"

Alors que l'élément "solide" utilisé est un élément standard, isoparamétrique, avec des fonctions de forme bilinéaires dans notre cas, l'élément fluide visqueux implanté dans TACT se présente comme un élément isoparamétrique, avec des fonctions de forme linéaires ou quadratiques dans l'analyse bidimensionnelle. Il est bien évidemment totalement compatible avec l'élément solide.

Du point de vue géométrique, par contre, il se présente (figure 5.3) sous des aspects non conventionnels.

L'élément consiste en une surface, représentant la surface moyenne du film équipée de bipodes nodaux pour tenir compte de l'épaisseur du film.

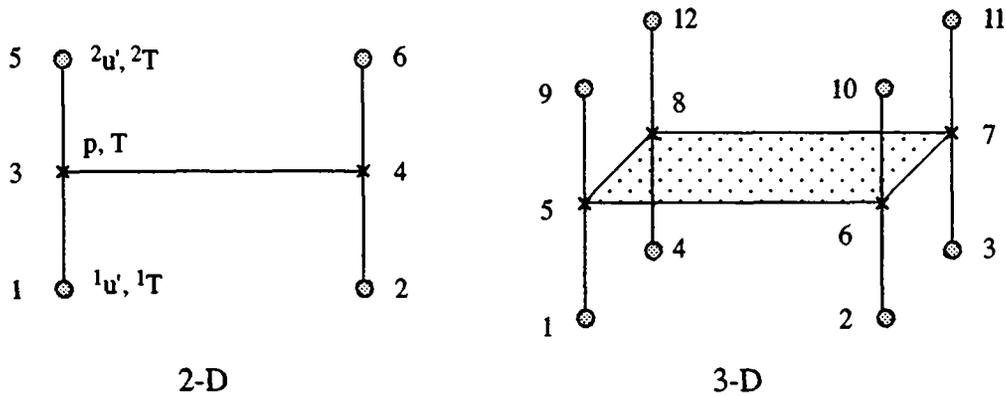


Fig. 5.3 Élément fini "lubrifiant thermovisqueux".

Les conditions de pression à travers l'interface sont simplement traitées comme n'importe quelle charge agissant sur une frontière solide. En ce qui concerne les conditions de température, un terme de pénalité est utilisé pour forcer une conduction virtuellement parfaite à travers le film. Cette technique est dérivée de celle utilisée pour le contact sec. Elle est précise et facile à utiliser.

On trouvera chez Curnier (1978, 1982, 1985, 1991) les détails concernant les formulations relatives au programme TACT. Nous ne les reproduirons pas ici. Relevons pour terminer que le vecteur solution à un bipode se présente sous la forme

$$z_j^b = \langle 1u_1^a, 1u_2^a, 1u_3^a, 1T^a, p, T, 2u_1^a, 2u_2^a, 2u_3^a, 2T^a \rangle \quad (5.63)$$

et que la matrice de l'élément lubrification bidimensionnel est explicitée à la figure 5.4. On a tenu compte, dans le tableau de cette figure, des termes de conduction de la chaleur dans le sens du film et dans l'épaisseur, ces derniers étant repérés par l'expression "ck". Ces derniers termes sont relatifs à une distribution de température linéaire par morceaux dans l'épaisseur du film.

On remarque, à la lecture de ce tableau, que le problème de la lubrification n'est pas un problème symétrique. Les couplages entre  $h$  et  $p$  sont tels que l'on doit dans tous les cas – excepté le régime isovisqueux rigide, dans certaines conditions – considérer la matrice jacobienne dans son intégralité. On connaît l'avantage, notamment du point de vue de la mémoire nécessaire, de pouvoir traiter un problème symétrique.



### 5.3 ANALYSE DES UNITES

Un examen des termes principaux, donc apparaissant sur la diagonale principale, de la matrice de "rigidité" du problème montre qu'ils ont la nature de débits. Le terme caractéristique de débit est le deuxième terme de (5.44), soit, en analyse monodimensionnelle

$$\frac{h^3}{12\mu} \frac{dp}{dx} \quad (5.64)$$

En régime élastohydrodynamique, la hauteur du film se situe entre

$$h = 10^{-6} \div 10^{-7} \text{ m} \quad (5.65)$$

La viscosité variera évidemment en fonction de la pression et de la température. Avec un coefficient piézo-visqueux

$$\mu_1 = 2.317 \cdot 10^{-8} \text{ Pa}^{-1} \quad (5.66)$$

et une viscosité à température ambiante

$$\mu_0 = 10^{-2} \text{ Pa}\cdot\text{s} \quad (5.67)$$

la viscosité variera entre  $\mu_0$  et une valeur correspondant à la pression maximale hertzienne de l'ordre de  $10^9$  Pa (10'000 bar), soit

$$\mu = 10^{-2} \div 10^8 \text{ Pa}\cdot\text{s} \quad (5.68)$$

Le gradient de pression oscillera entre zéro – au centre du contact par exemple – et des valeurs importantes, au droit du pic élastohydrodynamique.

Au pic EHD, le gradient de pression peut être estimé à

$$dp/dx = 10^9 \text{ Pa} / 10^{-6} \text{ m} = 10^{15} \text{ Pa/m} \quad (5.69)$$

Le calcul, ou plutôt l'estimation, du débit monodimensionnel exprimé par (5.64) montre, avec les valeurs ci-dessus, qu'il prendra les valeurs suivantes

$$\frac{h^3}{12\mu} \frac{dp}{dx} = 10^{-2} \div 10^{-30} \text{ m}^2/\text{s} \quad (5.70)$$

Parallèlement aux termes de débit des matrices, les termes relatifs à la déformation solide sont de la nature d'une rigidité, soit du type  $EA/L$ , avec le module d'élasticité  $E$  du matériau, pour notre cas, celui de l'acier, la surface caractéristique  $A$  de l'élément comprimé et  $L$  sa longueur caractéristique. Dans le cas bidimensionnel et pour des éléments finis dont les dimensions sont relativement proches, ce terme de rigidité est pour ainsi dire équivalent au module de l'acier, donc de l'ordre de grandeur de

$$EA/L = 10^{11} \text{ Pa} \quad (5.71)$$

La comparaison de (5.70) et (5.71) montre la difficulté qui se présente lors de la résolution d'un système linéaire dont les termes peuvent avoir jusqu'à des rapports de  $10^{40}$  entre les plus petits et les plus grands. Ces rapports sont supérieurs à ce que peuvent supporter les moyens numériques actuels de calcul.

Ce problème n'est certainement pas étranger au fait que les résultats obtenus au moyen du logiciel TACT n'ont jamais permis, jusqu'à notre travail, de résoudre des problèmes dont la solution comporte le pic EHD.

Pour surmonter cette difficulté d'unités, deux solutions s'offraient à nous :

- normer le problème en passant à des grandeurs adimensionnelles avec l'espoir que les problèmes numériques soient ainsi éliminés. Un rapide calcul des coefficients adimensionnels, présentés au chapitre 4 dans l'analyse théorique, montre que le paramètre de vitesse  $U^*$  défini par (4.149) est le plus souvent de l'ordre de  $10^{-10}$  dans les cas EHD habituels, alors que les autres paramètres,  $G^*$  ou  $W^*$ , sont plutôt de l'ordre de  $10^{-3}$ . On pourrait donc rencontrer des problèmes numériques même dans une approche adimensionnelle. Une démarche dans ce sens nous obligerait à reprendre totalement la formulation et la résolution développées dans TACT. Ce travail dépasserait le cadre de notre étude et, de plus, n'offrirait pas une alternative intéressante pour l'étude d'autres cas, tels que contacts secs ou problèmes d'élasticité, que les ingénieurs sont habitués à résoudre dans une formulation dimensionnelle.
- la deuxième solution, celle que nous avons adoptée, consiste à exprimer le problème dans un système d'unités qui diminue fortement les différences d'ordre de grandeur des pivots du système à résoudre.

Le système CGS n'étant pas un système totalement cohérent, contrairement au système dérivé du CGS, faisant intervenir

- le centimètre (cm)
- le gramme (g)
- la milliseconde (ms)

nous avons étudié ce que devenaient les expressions (5.70) et (5.71) dans ce système. On a les correspondances

$$\begin{aligned} 1 \text{ m}^2/\text{s} &= 10^4 \text{ cm}^2 / 10^3 \text{ ms} = 10 \text{ cm}^2/\text{ms} \\ 1 \text{ Pa} &= 1 \text{ Kg}/\text{ms}^2 = 10^3 \text{ g} / 10^2 \text{ cm} \cdot 10^6 \text{ ms}^2 = 10^{-5} \text{ g} / \text{cm} \cdot \text{ms}^2 = 10^{-5} \text{ bar} \\ \Rightarrow 1 \text{ g} / \text{cm} \cdot \text{ms}^2 &= 1 \text{ bar} \end{aligned}$$

On diminue ainsi de  $10^6$  le rapport entre les valeurs des pivots de la lubrification et de l'élasticité.

Cette démarche améliorerait déjà le problème, mais reste insuffisante pour l'étude des contacts fortement chargés. Après l'analyse systématique de nombreux cas, tant en ce qui concerne les caractéristiques du contact que de celles de la modélisation, nous avons pu établir qu'un nouveau gain d'un facteur  $10^6$  permettrait d'avoir des pivots très proches et d'obtenir les meilleures conditions pour la résolution numérique.

Le système d'unités que nous avons adopté est le suivant :

$$\begin{aligned} \text{longueur : } 10^{-4} \text{ m} &= \text{dmm (1/10e de millimètre)} \\ \text{masse : } 10^{-6} \text{ kg} &= \text{mg (milligramme)} \\ \text{temps : } 10^{-6} \text{ s} &= \mu\text{s (microseconde)} \end{aligned} \quad (5.72)$$

Dans ces nouvelles conditions, le cas numérique test défini par les valeurs (4.115) devient

$$\begin{aligned} R^* &= 60 \text{ dmm} & E^* &= 13.18 \text{ Pa} \cdot 10^{10} \\ U &= 0.3 \text{ dmm}/\mu\text{s} & V &= 0 \text{ dmm}/\mu\text{s} \\ \mu_0 &= 8.47 \cdot 10^{-7} \text{ mg}/\mu\text{s} \cdot \text{dmm} & \rho &= 8.4 \cdot 10^{-4} \text{ mg}/\text{dmm}^3 \\ \mu_1 &= 2.317 \cdot 10^2 \text{ 1}/(\text{Pa} \cdot 10^{10}) & c_p &= 0.2219 \text{ dmm}^2/\mu\text{s}^2 \cdot \text{°C} \\ \mu_2 &= -2.0 \cdot 10^{-2} \text{ °C}^{-1} \end{aligned} \quad (5.73)$$

Dans ces conditions, il est facile de vérifier que les pivots restent assez proches, qu'ils soient de la partie lubrification ou de la partie élasticité.

Une version ultérieure, plus élaborée, d'un programme de résolution numérique de problèmes de contacts lubrifiés devra à l'évidence comporter une telle "normalisation" interne. Pour nos travaux, nous avons gardé ces unités modifiées. Cela nous a permis de contrôler plus facilement le comportement du système.

#### **5.4 ETUDE DE "L'OPERATEUR LUBRIFICATION"**

Les difficultés rencontrées lors de la recherche de solutions EHD isothermes nous ont contraints à chercher un moyen de comprendre le comportement de l'opérateur mathématique de la lubrification, c'est-à-dire à mettre en évidence le type de fonction dont on cherchait la solution.

Les tests montraient en effet que l'implantation dans le programme TACT de l'élément lubrification n'était pas entachée d'erreur, mais que malgré cela les solutions pour les contacts fortement chargés ne pouvaient être obtenues.

Nous avons alors décidé de reprendre l'étude du palier hydrodynamique ou "coin d'huile", manuellement, dans sa formulation faible puis sa discrétisation, jusqu'à intégrer tous les termes afin d'obtenir la fonction "opérateur" de la lubrification.

##### **5.4.1 Modèle du patin incliné**

Nous allons reprendre le cas simple du patin hydrodynamique incliné, de largeur infinie, que l'on retrouve notamment chez Curnier (1978) comme exemple illustratif. Cet exemple a été choisi, pour l'étude théorique de l'opérateur, car il permet d'obtenir un modèle relativement simple, à un seul degré de liberté, pour lequel les calculs et la représentation sont encore possibles.

Définissons ainsi la géométrie de ce patin illustré à la figure 5.5.

Les équations qui gouvernent le modèle sont les équations de continuité et d'énergie.

- **Equation de continuité**

$$dq_x/dx = 0 \quad \text{d'où} \quad q_x = q_0 \quad (5.74)$$

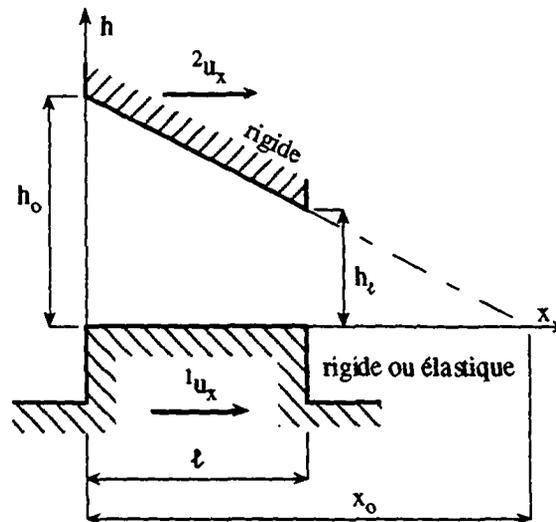


Fig. 5.5 : Le patin incliné de largeur infinie.

- **Equation d'énergie**

Dans le cas où l'on considère la température comme constante dans le film et que l'on néglige toute conduction, on a

$$c_p q_x dT/dx = \delta \quad (5.75)$$

avec le flux

$$q_x = h \bar{u}_x - h^3/12\mu \cdot dp/dx \quad (5.76)$$

et la dissipation  $\delta$

$$\delta = V_x^2 \mu/\rho h + (dp/dx)^2 h^3/12\mu\rho$$

ou, en introduisant  $q_x$ ,

$$\delta = \mu/\rho [V_x^2/h + (h\bar{u}_x - q_x)^2 \cdot 12/h^3] \quad (5.77)$$

Si l'on exprime ces équations en termes de pression et température, on peut écrire

- **Pression**

$$1/\mu \cdot dp/dx = (h\bar{u}_x - q_o) \equiv p_1 \quad (5.78)$$

- **Température**

$$1/\mu \cdot dT/dx = 1/(\rho c_p q_o) \cdot [V_x^2/h + (h\bar{u}_x - q_o)^2 \cdot 12/h^3] \equiv T_1 \quad (5.79)$$

Par conséquent, il vient

$$dT/dx = T_1/p_1 \cdot dp/dx \quad (5.80)$$

avec

$$T_1/p_1 = \frac{1}{\rho c_p q_o} \left[ \frac{h^2 V_x^2}{12(h\bar{u}_x - q_o)} + h\bar{u}_x - q_o \right] \quad (5.81)$$

Il est bon de reproduire ci-dessous les résultats principaux que l'on peut obtenir théoriquement.

- **Patin parallèle rigide**

Dans ce cas, on a évidemment  $h = h_o$  et les grandeurs  $p_1$  et  $T_1$  sont constantes. Ainsi

$$T = T_1/p_1 \cdot p + T_2 \quad (5.82)$$

avec

$$T_2 = T_o - T_1/p_1 \cdot p_o \quad (5.83)$$

et les conditions aux limites

$$p_o, T_o \quad \text{en } x = 0$$

$$p_\ell \quad \text{en } x = \ell \quad (5.84)$$

Dans le cas isovisqueux où  $\mu = \mu_o$ , on trouve finalement

$$p = p_1 \mu_o x + p_o \quad (5.85)$$

$$T = T_1 \mu_o x + T_o \quad (5.86)$$

Dans le cas thermopiezovisqueux, si la viscosité peut se mettre sous la forme

$$\mu = \mu_0 e^{(\mu_1 p + \mu_2 T)} = \mu_0 e^{\mu_2 T_2} e^{(\mu_1 + \mu_2 p_1 / T_1) p} \quad (5.87)$$

on peut obtenir la solution

$$p = -(\mu_1 + \mu_2 p_1 / T_1)^{-1} \ln \left[ 1 - x(\mu_1 + \mu_2 p_1 / T_1) p_1 \mu_0 e^{\mu_2 T_2} \right] \quad (5.88)$$

$$T = (T_1 / p_1) p + T_0 \quad (5.89)$$

• **Patin incliné rigide**

La hauteur du film est donnée, en se référant à la figure 5.5, par

$$h = h_1(x_0 - x) \quad (5.90)$$

Ainsi, on peut écrire

$$p_1 = 12\bar{u}_x / [h_1^2(x_0 - x)^2] - 12q_0 / [h_1^3(x_0 - x)^3] \quad (5.91)$$

$$T_1 = 1/\rho c_p q_0 \left\{ (V_x^2 + 12\bar{u}_x^2) / [h_1(x_0 - x)] - 24\bar{u}_x q_0 / [h_1^2(x_0 - x)^2] + \right. \\ \left. + 12q_0^2 / [h_1^3(x_0 - x)^3] \right\} \quad (5.92)$$

avec le débit donné par la relation évidente

$$q_0 = \bar{u}_x h^* \quad (5.93)$$

Dans le cas isovisqueux avec  $\mu = \mu_0$ , après intégration, on trouve la solution contenant deux constantes d'intégration  $p_3$  et  $T_3$  à déterminer par les conditions aux limites.

$$p = -12\mu_0 \bar{u}_x / [h_1^2(x_0 - x)] + 6q_0 / [h_1^3(x_0 - x)^2] + p_3 \quad (5.94)$$

$$T = \mu_0 / \rho c_p q_0 \left\{ (V_x^2 + 12\bar{u}_x^2) / h_1 \cdot \ln(x_0 - x) + \right. \\ \left. + 24\bar{u}_x q_0 / [h_1^2(x_0 - x)] - 6q_0^2 / [h_1^3(x_0 - x)^2] \right\} + T_3 \quad (5.95)$$

Dans le cas piézovisqueux, si la viscosité est donnée par la loi exponentielle habituelle

$$\mu = \mu_0 e^{\mu_1 P} \quad (5.96)$$

et que l'on définit la pression réduite

$$p^\circ = \left[ 1 - e^{-\mu_1 P} \right] / \mu_1 \quad (5.97)$$

la solution s'écrit

$$p = - 1/\mu_1 \cdot \ln(1 - \mu_1 p^\circ) \quad (5.98)$$

$$T = \int \mu_0 T_1 / (1 - \mu_1 p^\circ) dx + T_4 \quad (5.99)$$

Enfin, dans le cas thermopiézovisqueux, avec  $\mu = \mu_0 e^{(\mu_1 P + \mu_2 T)}$ , la solution ne peut être obtenue de manière théorique.

#### 5.4.2 Application numérique du patin incliné

Pour tous les essais de solutions, nous avons défini des valeurs numériques du patin qui nous permettent de contrôler les résultats. Ces valeurs numériques, qui font référence à la figure 5.5, sont les suivantes, dans des unités quelconques :

$\ell = 6$	$V_x = 6$	(glissement 100%)	
$h_0 = 6$	$V_x = 0$	(roulement pur)	
$h_z = 3$	$\bar{u}_x = 3$		
$\rho = 1$	$c_p = 2,6$	(patin parallèle)	
$\mu_0 = 1$	$c_p = 4$	(patin incliné)	(5.100)
$p_0 = 0$	$\mu_1 = 0.632$	$= 1 - 1/e$	
$T_0 = 0$	$\mu_2 = -2.35$	$= 1/e - e$	
$x_0 = 12$	$h_1 = 0.5$	(patin incliné)	

Les résultats sont résumés de manière très succincte ci-dessous.

- **Patin parallèle rigide**

Avec la condition à la limite supplémentaire  $p_t = 1$ , on trouve, rappelant que  $p_1 = T_1$  :

$$\mu = \mu_0, \quad p = T = x/6 \quad (5.101)$$

$$\mu = \mu_0 e^{(\mu_1 p + \mu_2 T)}, \quad p = T = 0.582 \ln(1 + 0.2864x) \quad (5.102)$$

- **Patin incliné rigide (glissement 100 %)**

$$\mu = \mu_0, \quad p = 8x(6-x)/(12-x)^2 \quad (5.103)$$

$$dp/dx = 144 \cdot (4-x)/(12-x)^3 \quad (5.104)$$

$$d^2p/dx^2 = -288x/(12-x)^4 \quad (5.105)$$

$$h^* = 4 \quad \text{et} \quad q_0 = 4 \cdot 3 = 12 \quad (5.106)$$

$$T = -6 \ln(1-x/12) - 72/(12-x) + 144/(12-x)^2 + 5 \quad (5.107)$$

$$\mu = \mu_0 e^{\mu_1 p}, \quad p = -1.58 \ln [1 - 5.06x(6-x)/(12-x)^2] \quad (5.108)$$

- **Patin incliné rigide (roulement pur)**

Le seul résultat qui change, du fait de la disparition de  $V_x$ , est la distribution de température (5.107). Elle devient

$$T = -4.5 \ln(1-x/12) - 72/(12-x) + 144/(12-x)^2 + 5 \quad (5.109)$$

### 5.4.3 Formulation faible du problème du patin incliné isotherme pour un élément fini

Dans le cas isotherme, la seule équation à résoudre est donc l'équation de Reynolds qui correspond à l'équation de continuité du débit au sens de (5.74) avec l'expression (5.76) de ce débit. Ecrivons-la

$$\frac{1}{12\mu_0} \frac{d}{dx} \left( h^3 e^{-\mu_1 p} \frac{dp}{dx} \right) = \bar{u}_x \frac{dh}{dx} \quad (5.110)$$

En appelant  $w(x)$  la fonction test, la forme faible de l'équation de Reynolds devient

$$\frac{1}{12\mu_0} \int_0^\ell \frac{dw}{dx} h^3 e^{-\mu_1 p} \frac{dp}{dx} dx + \bar{u}_x \int_0^\ell w \frac{dw}{dx} dx = 0 \quad (5.111)$$

quelle que soit  $w$ . Les conditions aux limites pour la fonction test sont telles que le déplacement virtuel s'annule là où le déplacement réel est connu, d'où :

$$w(0) = w(\ell) = 0 \quad (5.112)$$

Dans le cas d'éléments finis linéaires, la fonction test  $w$ , la pression  $p$  et la hauteur  $h$  sont des fonctions linéaires des valeurs aux noeuds de l'élément :

$$w(x) = (1-x/\ell) \cdot w^1 + x/\ell \cdot w^2 ; \quad dw/dx = (w^1 - w^2)/\ell \quad (5.113)$$

$$p(x) = (1-x/\ell) \cdot p^1 + x/\ell \cdot p^2 ; \quad dp/dx = (p^1 - p^2)/\ell = p' \quad (5.114)$$

$$h(x) = (1-x/\ell) \cdot h^1 + x/\ell \cdot h^2 ; \quad dh/dx = (h^1 - h^2)/\ell = h' \quad (5.115)$$

Pour un élément fini, le vecteur des travaux virtuels relatifs aux débits de pression s'écrit

$$\left\{ \begin{array}{c} F^1 \\ F^2 \end{array} \right\} = \frac{1}{12\mu_0} \int_0^\ell \left\{ \begin{array}{c} -1/\ell \\ 1/\ell \end{array} \right\} h^3 e^{-\mu_1 p} (p^1 - p^2)/\ell dx$$

d'où

$$\begin{Bmatrix} F^1 \\ F^2 \end{Bmatrix} = \frac{p'}{12\mu_0 \ell} \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} \int_0^{\ell} h^3 e^{-\mu_1 P} dx \quad (5.116)$$

Le débit d'entraînement, soit le deuxième terme de (5.111), peut s'écrire

$$\begin{Bmatrix} B^1 \\ B^2 \end{Bmatrix} = \bar{u}_x h' \int_0^{\ell} \begin{Bmatrix} 1-x/\ell \\ x/\ell \end{Bmatrix} dx \quad (5.117)$$

Puis, après intégration, et en écrivant l'indice  $e$  de l'élément

$${}^e \begin{Bmatrix} B^1 \\ B^2 \end{Bmatrix} = \bar{u}_x (e_h^1 - e_h^2) / 2 \quad (5.118)$$

Calculons la primitive de (5.116)

$$I = \int h^3 e^{-\mu_1 P} dx \quad (5.119)$$

avec  $dh/dx = h'$  et  $dp/dx = p'$ . Par intégrations successives par parties, en posant

$$\begin{aligned} u &= h^n & du &= nh^{n-1} h' dx \\ dv &= e^{-\mu_1 P} dx & v &= (-1/\mu_1 p') e^{-\mu_1 P} \end{aligned} \quad (5.120)$$

on trouve, avec  $\lambda = h'/\mu_1 h p'$

$$I = (-h^4/4h') e^{-\mu_1 P} \cdot 4 (\lambda + 3\lambda^2 + 6\lambda^3 + 6\lambda^4) \quad (5.121)$$

Par introduction de la primitive dans les expressions (5.116), avec

$$\lambda^1 = h'/\mu_1 h^1 p' \quad \text{et} \quad \lambda^2 = h'/\mu_1 h^2 p'$$

on obtient

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} F^1 \\ F^2 \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{1}{12\mu_0\mu_1\ell} \left\{ (h^1)^3 \cdot e^{-\mu_1 p^1} [1 + 3\lambda^1 + 6(\lambda^1)^2 + 6(\lambda^1)^3] - \right. \\ &\quad \left. - (h^2)^3 \cdot e^{-\mu_1 p^2} [1 + 3\lambda^2 + 6(\lambda^2)^2 + 6(\lambda^2)^3] \right\} \end{aligned} \quad (5.122)$$

Changeons encore quelque peu l'expression de manière à introduire un indice relatif au numéro de l'élément. Cela facilitera l'assemblage dans le paragraphe suivant.

Ainsi, pour l'élément  $e$ , nous pouvons écrire

$${}^e A_1 = \frac{e_{h^1} - e_{h^2}}{\mu_1 e_{h^1}} ; \quad {}^e A_2 = \frac{e_{h^2} - e_{h^1}}{\mu_1 e_{h^2}} \quad (5.123)$$

et en plus

$${}^e p_{21} = e_{p^2} - e_{p^1} \quad (5.124)$$

Nous obtenons alors la forme finale

$$\begin{aligned} {}^e \begin{Bmatrix} F^1 \\ F^2 \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{1}{12\mu_0\mu_1\ell} \left\{ (e_{h^1})^3 \cdot e^{-\mu_1 e_{p^1}} [1 + 3({}^e A_1 / {}^e p_{21}) + 6({}^e A_1 / {}^e p_{21})^2 + \right. \\ &\quad \left. + 6({}^e A_1 / {}^e p_{21})^3] - (e_{h^2})^3 \cdot e^{-\mu_1 e_{p^2}} [1 + 3({}^e A_2 / {}^e p_{21}) + \right. \\ &\quad \left. + 6({}^e A_2 / {}^e p_{21})^2 + 6({}^e A_2 / {}^e p_{21})^3] \right\} \end{aligned} \quad (5.125)$$

#### 5.4.4 Le patin incliné isotherme indéformable modélisé par deux éléments finis et un seul degré de liberté

En reprenant le patin de la figure 5.5, on peut le modéliser par deux éléments finis bidimensionnels tels que définis et représentés à la figure 5.3. Comme on ne s'intéresse qu'aux degrés de liberté du film d'huile, les noeuds des solides n'ont pas été numérotés. Ils ne servent en fait ici qu'à définir les hauteurs du film. On peut donc se référer à la modélisation de la figure 5.6 ci-après.

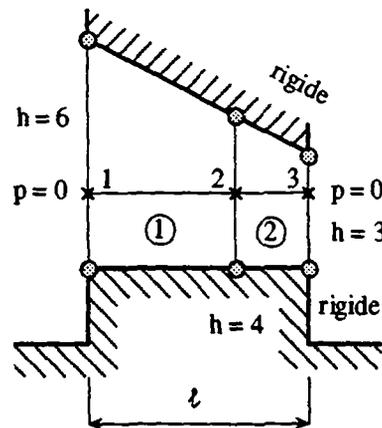


Fig. 5.6 : Modélisation du patin incliné par éléments finis.

Le noeud auquel appartient le degré de liberté – la pression – qui nous intéresse est le noeud central. Il se trouve être le noeud 2 de l'élément 1 et le noeud 1 de l'élément 2.

L'équation sous forme faible devient simplement

$$F + B = 0 \quad (5.126)$$

En sommant les contributions des éléments, les termes de l'équation ci-dessus sont donnés par

$$F = {}^1F^2 + {}^2F^1 \quad (5.127)$$

et

$$B = {}^1B^2 + {}^2B^1 \quad (5.128)$$

avec les valeurs des expressions élémentaires données par (5.125) et (5.118).

Sans reproduire théoriquement tout le développement, il est tout à fait instructif de représenter l'opérateur (F+B) en régime IVR en fonction de son seul degré de liberté, la pression, dans le cas numérique défini par les valeurs (5.100).

On constate immédiatement que la solution analytique de ce cas est donnée par (5.103) dans le cas isovisqueux et par (5.108) dans le cas piézo-visqueux. On trouve selon les cas :

$$\begin{array}{lll}
 \text{IVR} & h = 4 & p = 1 \\
 \\ 
 \text{PVR} & h = 4 & p = 1.720 \quad (\mu_1 = 0,7) \\
 \\ 
 \text{PVR} & h = 4 & p = 1.582 \quad (\mu_1 = 0,6321)
 \end{array} \tag{5.129}$$

Pour ce qui est de la solution des éléments finis intégrés théoriquement de manière exacte, obtenue par (5.126) avec les expressions (5.118) et (5.125), on trouve

$$\begin{array}{lll}
 \text{IVR} & h = 4 & p = 0.9931 \quad (432/435) \\
 \\ 
 \text{PVR} & h = 4 & p = 1.595 \quad (\mu_1 = 0,7) \\
 \\ 
 \text{PVR} & h = 4 & p = 1.491 \quad (\mu_1 = 0,6321)
 \end{array} \tag{5.130}$$

Les résultats obtenus par le programme TACT sont, pour ce cas élémentaire,

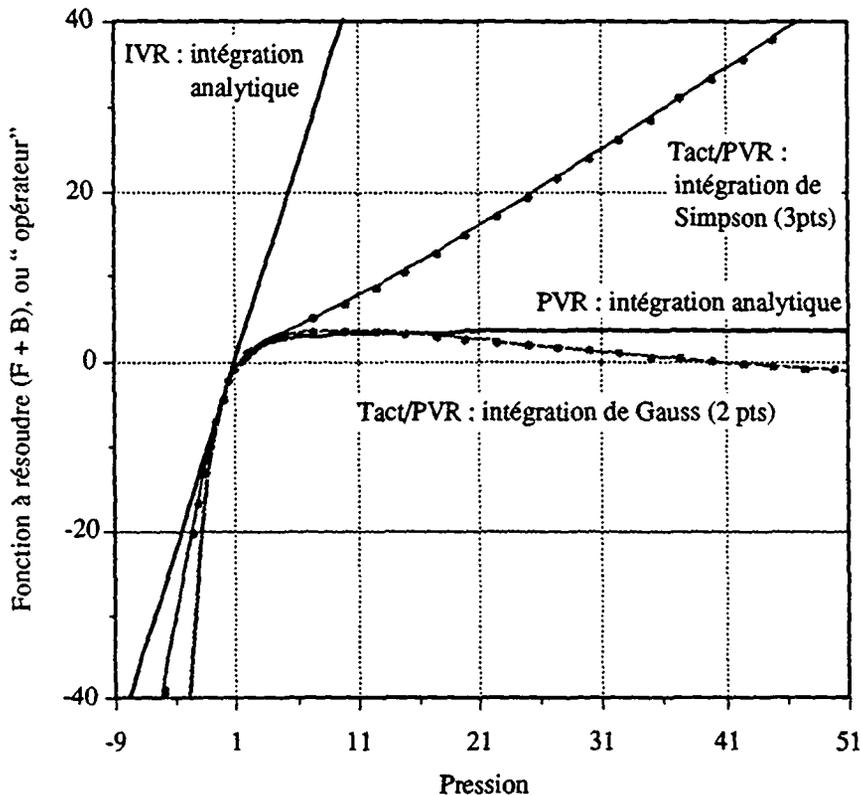
$$\begin{array}{lll}
 \text{IVR} & h = 4 & p = 0.9931 \\
 \\ 
 \text{PVR} & h = 4 & p = 1.584 \quad (\mu_1 = 0,7)
 \end{array} \tag{5.131}$$

lorsque l'intégration numérique est effectuée par une méthode de Gauss/2 points, ce qui signifie une intégration de Gauss avec deux points d'intégration par élément et par direction.

Remarquons que si le résultat de l'intégration numérique de TACT est très bon, moins de 1% de différence par rapport à une intégration exacte, le résultat des éléments finis avec un seul degré de liberté se situe à environ 8% de la solution théorique exacte, et cela seulement dans le cas barovisqueux, ce qui est normal, car l'opérateur est non linéaire. Nous devons donc, pour améliorer les résultats, augmenter la finesse du maillage.

Ce qui s'est révélé inattendu et extraordinaire fut le comportement de l'intégration numérique de l'opérateur lubrification (F+B) en fonction de  $p$ .

Nous avons reporté à la figure 5.7 les courbes  $(F+B) = f(p)$  pour les cas isovisqueux et piézovisqueux, et pour les trois types d'intégration qui nous intéressent, soit celle de Gauss, celle de Simpson et l'intégration manuelle exacte.



**Fig. 5.7 : Représentation de l'opérateur lubrification (F+B), en régime IVR et PVR pour divers types d'intégration.**

On remarque que la courbe correspondant à l'intégration manuelle présente une asymptote horizontale, pour  $p \rightarrow \infty$ , à la valeur  $B$ , soit

$$(F+B) \rightarrow B \quad \text{pour} \quad p \rightarrow \infty \quad (5.132)$$

et, fait surprenant et non expliqué, l'intégration de Gauss conduit à une asymptote de signe opposé

$$(F+B) \rightarrow -B \quad \text{pour} \quad p \rightarrow \infty \quad (5.133)$$

Ainsi, l'intégration numérique de Gauss conduit à fournir deux solutions au problème alors qu'il n'en existe bien qu'une seule lorsque l'intégration est correcte. La mise en évidence de ce phénomène nous a fait tester immédiatement des intégrations à nombre de points différents de deux (qui est l'intégration implantée initialement dans TACT). Nous avons pu vérifier que pour l'opérateur lubrification toute intégration de Gauss conduit, tôt ou tard selon le nombre de points, à une deuxième solution, avec une asymptote de signe opposé.

Un tel comportement peut, à l'évidence, conduire à des instabilités numériques lors des itérations car, entre les solutions, la pente de (F+B) passe par une valeur nulle, ce qui est source de divergence ou tout au moins de non-convergence vers la solution.

Forts de cette découverte, nous avons alors testé d'autres techniques d'intégration, particulièrement celle de Simpson. La différence principale entre les méthodes de Gauss et de Simpson réside dans le fait qu'une partie des points d'intégration de Simpson correspond aux noeuds du maillage, alors que ce n'est jamais le cas avec la méthode de Gauss.

Par une méthode de Simpson/3 points, on obtient dans le cas élémentaire, les solutions :

$$\begin{array}{llll}
 \text{IVR} & h = 4 & p = 0.9931 & \\
 \text{PVR} & h = 4 & p = 1.576 & (\mu_1 = 0,7)
 \end{array} \tag{5.134}$$

ce qui est un résultat légèrement moins bon, d'un demi pour-cent, que celui obtenu avec la méthode de Gauss.

La courbe relative à ce type d'intégration, que l'on peut examiner sur la figure 5.7, montre, dans les zones éloignées de la solution, un comportement tout à fait sain du point de vue numérique, puisque très proche d'une fonction linéaire.

Il faut noter ici que la possibilité existe – et nous l'avons utilisée comme nous le verrons par la suite – de stabiliser encore l'opérateur en ne maintenant le caractère piézovisqueux que dans les zones à pression positive, donc en considérant la viscosité comme indépendante de la pression du côté  $p < 0$ . On remarque ainsi sur la figure 5.7 que l'opérateur, intégré par Simpson, devient alors, dans le cas PVR, presque linéaire par morceaux.

C'est la technique que nous avons adoptée et développée pour nos études. Très rapidement, cette approche nous a permis de résoudre des cas fortement EHD avec un pic extrêmement violent en sortie de contact.

### 5.4.5 Etude de l'opérateur en régime "déformable"

En régime déformable, le modèle simple du patin n'est plus aussi élémentaire que précédemment, car la déformation ajoute un degré de liberté à l'opérateur. L'étude d'une fonction non linéaire, complexe dans sa forme, en fonction de deux variables, devient très vite inextricable. Dans le but de conserver la simplicité de l'étude, sans nuire à la qualité de celle-ci, nous avons eu l'idée de grouper les deux degrés de liberté et de les étudier comme s'ils n'étaient qu'un.

Tout d'abord, la modélisation du patin déformable peut être représentée comme le montre la figure 5.8.

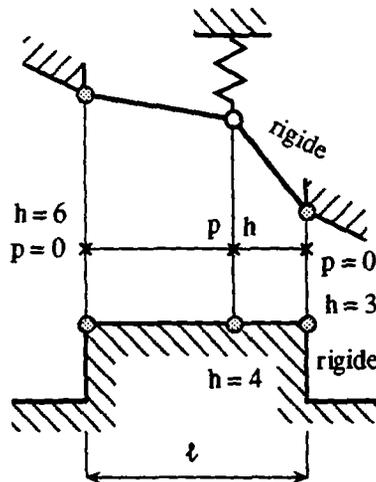


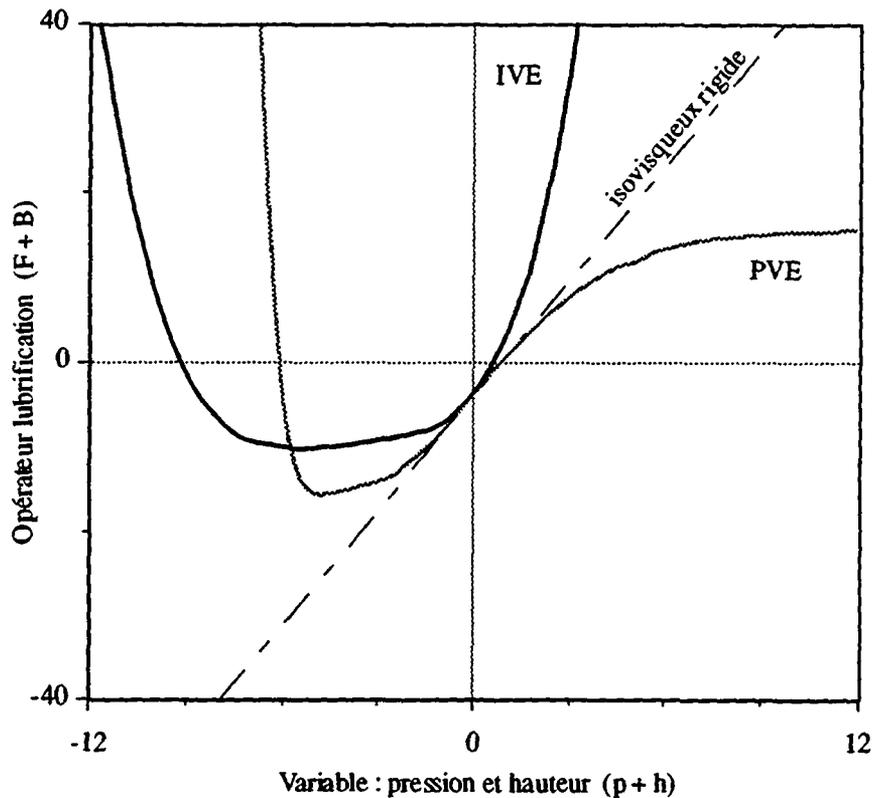
Fig. 5.8 : Modélisation du patin incliné déformable, par éléments finis.

Ensuite, l'expression de l'opérateur (F+B) de ce patin déformable peut être obtenue en substituant  ${}^1h^2 = {}^2h^1$  par la somme de la pression et de la déformation, soit

$${}^1h^2 = {}^2h^1 \quad \rightarrow \quad {}^1h^2 + {}^1p^2 = {}^2h^1 + {}^2p^1 \quad (5.135)$$

En menant à bien cette transformation, les opérateurs IVE et PVE peuvent être représentés en fonction de la variable indépendante que nous avons conservée comme étant  $p$  ; il s'agit en fait de  ${}^1p^2$  ou  ${}^2p^1$ .

On obtient ainsi les courbes de la figure 5.9. On y remarque que l'élasticité et la piézoviscosité ont des influences contraires sur l'opérateur linéaire dans le demi-plan des pressions positives. L'élasticité tend à donner une concavité vers le haut à la courbe  $f(p) = (F+B)$ , alors que la piézoviscosité a tendance à faire le contraire.



**Fig. 5.9 : Représentation des opérateurs IVE et PVE.**

La mise en évidence du comportement de l'opérateur dans le domaine des pressions négatives est fondamentale et nouvelle. On constate en effet que les deux opérateurs, IVE et PVE, ont une deuxième solution dans ce demi-plan, solution qui correspond à une hauteur de film d'huile négative et une pression dans le film négative aussi, ce qui correspond donc à une traction, avec notre convention. On est forcé de constater que cette solution ne satisfait pas la physique du phénomène et que nous devons modifier l'opérateur afin de l'éliminer.

Il faut préciser que lors de nos tentatives initiales, nous avons bien constaté que, en cours d'itération et avant la divergence complète, des pressions négatives du même ordre de grandeur que les pressions positives apparaissaient aux noeuds du maillage. De même, nous avons réussi

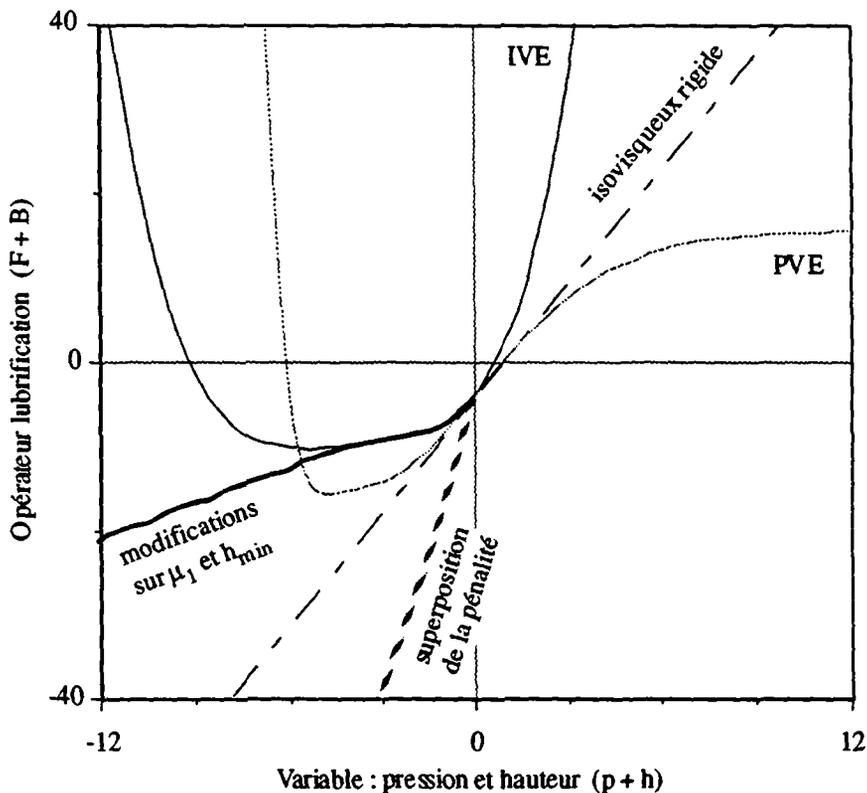
à obtenir des solutions convergées présentant des résultats avec hauteur de film et pression négatives.

Notre première action sur l'opérateur a été de borner la hauteur du film à une valeur positive très petite,  $\varepsilon$ , que l'on peut choisir en fonction du problème. Ainsi, on impose la condition

$$h \geq \varepsilon \quad (5.136)$$

Pour nos cas test, nous avons maintenu  $\varepsilon$  à des valeurs environ  $10^6$  fois inférieures aux épaisseurs de film calculées.

Couplée à la suppression de la baroviscosité pour les pressions négatives, cette modification est représentée en trait fort sur la figure 5.10

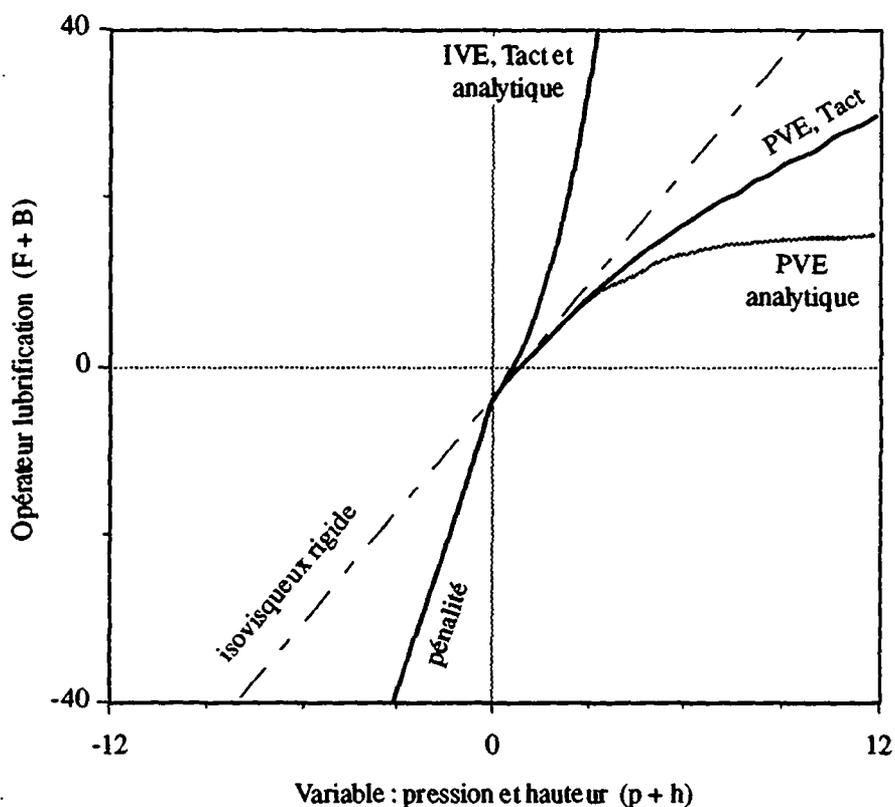


**Fig. 5.10 : Influence des modifications apportées à l'opérateur lubrification en régime IVE et PVE.**

Il s'est avéré que les actions sur la hauteur du film, la viscosité et le type d'intégration n'étaient pas suffisantes pour éliminer les risques d'instabilité numérique liés aux non-linéarités de l'opérateur.

Nous avons, par conséquent, étendu la notion de pénalité, utilisée en contact sec, pour exprimer la non pénétrabilité des surfaces en présence, au domaine des pressions négatives pouvant être tolérées dans les films minces. En superposant à l'opérateur une pénalité, dans le domaine des pressions négatives, on obtient l'effet désiré, illustré à la figure 5.10 par la courbe en pointillé gras.

L'implantation dans le programme Tact de ces modifications s'est révélée finalement simple et saine. La comparaison entre les opérateurs intégrés manuellement et numériquement, par la méthode de Simpson, est reportée à la figure 5.11. On y constate une parfaite concordance des résultats, tant en régime PVE qu'en régime IVE.



**Fig. 5.11 : Intégration numérique par le programme TACT de l'opérateur lubrification modifié, en régime IVE et PVE.**

#### 5.4.6 La cavitation en sortie de contact

L'implantation d'une méthode de pénalité, pour le domaine des pressions négatives, permet une certaine souplesse dans la tolérance de telles pressions. En effet, en fonction de la brutalité de la pénalité, l'accès aux pressions négatives est plus ou moins fortement interdit. Il est donc possible, par exemple, d'ajuster la valeur de la pénalité de manière à tolérer des dépressions correspondant à un phénomène de cavitation.

Avec cette méthode, il n'est donc plus nécessaire de fixer a priori la valeur de l'abscisse de sortie de contact par l'imposition d'une condition à la limite sur la pression. Il suffit d'imposer une valeur nulle de la pression à "une certaine distance" (sans importance aucune) de la sortie du contact et c'est la pénalité qui détermine automatiquement l'abscisse correcte de sortie du contact.

De la même manière que, dans un contact sec, la dimension de la zone de contact n'est pas connue et constitue donc une partie du problème à résoudre, la frontière de sortie du film lubrifiant est déterminée par la résolution du problème global.

Ainsi, par la même méthode de pénalité, nous agissons à la fois sur la nature de l'opérateur et sur la méthode de résolution du problème de contact lubrifié.

#### 5.4.7 Modélisation d'une quantité d'huile constante à l'entrée du contact

Sur le plan de la formulation du principe, nous avons vu dans la partie traitant des développements théoriques que nous pourrions supposer qu'une certaine quantité ou épaisseur d'huile est entraînée par les surfaces en mouvement et que les conditions de formation du film seront remplies à l'abscisse où la somme des épaisseurs d'huile entraînées par les surfaces solides sera égale à la distance séparant les solides. Il en résulte que l'abscisse d'entrée du contact est à nouveau une grandeur dépendant de la charge, donc dépendant de la solution du problème.

Il s'agit donc à nouveau de trouver une manière de pénaliser l'entrée du contact, de façon à empêcher la formation du film d'huile tant que la distance séparant les solides est supérieure à une valeur donnée  $h_e$ , hauteur du film à l'entrée du contact, à l'abscisse  $x_e$ .

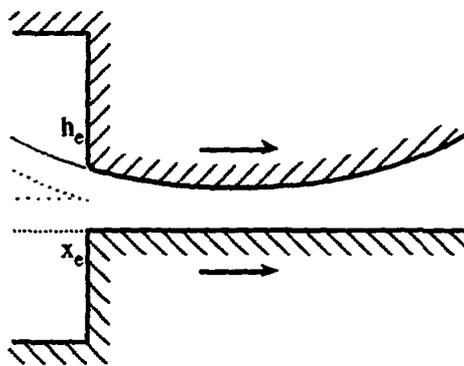
Le problème de non-formation du film se traduit par une pression nulle, donc une portance nulle tant que le film n'est pas formé. La difficulté du problème réside dans la manière de tester les différentes grandeurs qui nous intéressent afin d'imposer une pression nulle.

Toute tentative consistant à essayer d'imposer une pression nulle se heurte au fait que la pression est une des inconnues principales du problème et que la grandeur à tester, pour agir sur la pression, est la hauteur du film, autre inconnue principale. Toutes nos tentatives dans cette direction se sont soldées par des échecs.

La seule méthode que nous ayons trouvée pour résoudre ce problème, sans pénaliser la stabilité numérique, a été de réaliser une sorte de pénalité sur la géométrie du contact, et cela seulement dans l'élément lubrification. Cette pénalisation consiste en un test sur l'épaisseur du film fluide qui, s'il est vérifié, impose une hauteur très grande, entre  $10^2$  et  $10^4$  fois la hauteur réelle du film à l'entrée du contact, soit

$$\begin{array}{lll} h \geq h_e & \text{vrai} & \rightarrow h = (10^2 \div 10^4) \cdot h_e \\ & \text{faux} & \rightarrow h = h \end{array} \quad (5.137)$$

Cette technique peut être illustrée par la figure 5.12. On voit ainsi qu'en imposant une discontinuité sur l'épaisseur du film, on provoque une chute de la pression qui est proportionnelle au carré du facteur multiplicateur de  $h_e$  dans (5.137).



**Fig. 5.12 : Illustration de la modélisation d'une quantité d'huile constante à l'entrée du contact.**

Avec la technique adoptée, il est bien évident que la hauteur du film, à l'entrée du contact, n'est pas une valeur absolument constante car la variation de l'abscisse de l'entrée du contact ne peut

correspondre, au minimum, qu'à la distance séparant deux noeuds successifs, soit une longueur d'élément fini fluide. On verra dans les résultats numériques que la variation discrète de l'abscisse de la frontière d'entrée, de même que celle de la frontière de sortie et celle de la position du pic élastohydrodynamique, conduisent à des oscillations des fonctions-résultat dans lesquelles ces grandeurs interviennent; c'est le cas pour la portance et la puissance dissipée au contact. Ces "oscillations" restent cependant suffisamment faibles pour que les résultats soient tout à fait fiables.

#### 5.4.8 Stabilisation de l'équation de la chaleur

La solution du problème "conduction/convection" dans les transferts de chaleur, par la méthode standard des éléments finis, présente de sérieuses difficultés quand le terme de convection devient très fortement prédominant, c'est-à-dire lorsque le nombre de Péclet  $Pe = VL\rho c_p / K = Re \cdot Pr$  devient grand. Dans ce cas, de fausses oscillations de la solution numérique se manifestent d'elles-mêmes et ne peuvent être supprimées que par l'utilisation de techniques très particulières et adaptées, qui font appel le plus souvent à l'utilisation de fonctions-test asymétriques.

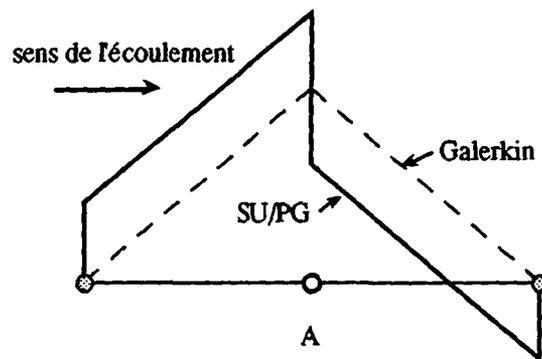
Les fonctions-test sélectionnées par Curnier (1978) pour ces éléments sont les fonctions-test standard, pondérées par des exponentielles. Malgré de nombreux cas où cette méthode se révèle efficace, elle n'est pas adaptée à notre problème, du fait de la présence d'une source de chaleur, la dissipation par cisaillement dans le film d'huile.

L'étude menée sous notre direction sur les aspects thermiques de la lubrification élastohydrodynamique par Rabemananjafy (1990) a permis de résoudre le problème des oscillations par l'utilisation de méthodes d'"upwind" développées à l'origine par Brooks (1981). Cette méthode, dite Streamline-Upwind/Petrov-Galerkin (SU/PG), repose sur l'idée de base d'ajouter à l'équation de la chaleur un terme relatif à une conduction qui n'agit que dans la direction du flux. La fonction-test modifiée est alors appliquée à tous les termes de l'équation.

Dans le cas monodimensionnel, la conduction artificielle, lorsqu'elle est sélectionnée de façon optimale, équilibre la conduction négative inhérente à la méthode de Galerkin. Les extensions aux cas multidimensionnels des procédés d'upwind sont souvent impuissantes pour les problèmes de conduction transversale et il devient évident que les effets d'upwind sont désirés seulement dans la direction du flux.

Dans la méthode SU/PG que nous utilisons, l'implantation de la conduction artificielle est construite pour n'agir que dans la direction de l'écoulement, éliminant a priori la possibilité d'une conduction transversale. Le coefficient de conduction artificielle utilisé dans le cas monodimensionnel est remplacé par un tenseur de conduction artificielle afin d'obtenir l'effet désiré.

Pour une description complète de la procédure, on peut se référer aux auteurs cités ci-dessus. Nous ne donnerons ici qu'un exemple, à la figure 5.13, illustrant la fonction-test modifiée, par rapport à la fonction habituelle de Galerkin, pour des éléments finis linéaires.



**Fig. 5.13 : Comparaison des fonctions-test SUP/PG et de Galerkin pour le noeud A d'un élément fini linéaire.**

On peut par ailleurs comparer les résultats des méthodes d'upwind exponentiel et SU/PG en étudiant la température sur le patin incliné rigide en régime isovisqueux et dans des conditions correspondant à un roulement pur.

Nous avons donné l'évolution de la température sous la forme (5.109). Ainsi, à la sortie du patin la température exacte est

$$T_s = 0.11916 \text{ } ^\circ\text{C} \quad (5.138)$$

Nous avons d'une part comparé les méthodes d'upwind, et d'autre part tenté d'évaluer le comportement de ces méthodes en fonction de la discrétisation. A la figure 5.14, la courbe continue représente la solution théorique; elle est totalement confondue avec les solutions numériques à discrétisations fines, soit cent éléments pour le cas du patin.

Pour une discrétisation régulière, mais nettement plus grossière, puisqu'elle ne fait intervenir que six éléments, la méthode d'upwind exponentiel – lorsqu'elle est stable et elle l'est ici – donne un résultat légèrement meilleur que la SU/PG, soit

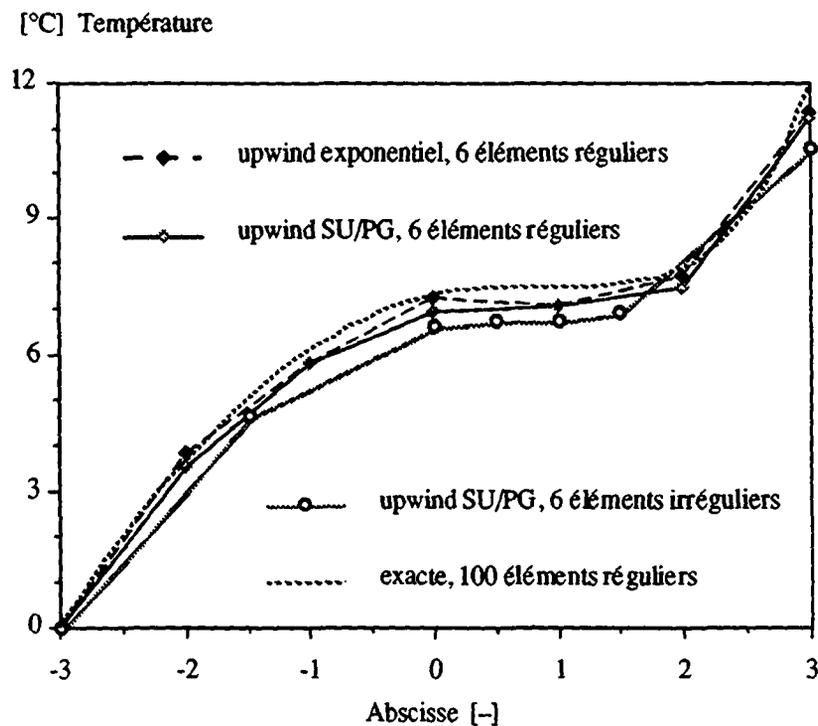
$$\text{upwind exp 6 élts : } T_s = 11.35 \text{ }^\circ\text{C} \quad (-4.8 \%)$$

$$\text{SU/PG 6 élts : } T_s = 11.20 \text{ }^\circ\text{C} \quad (-6.0 \%) \quad (5.139)$$

Nous avons encore testé l'influence de la régularité du maillage et l'on peut constater qu'un maillage irrégulier donne de moins bons résultats qu'un maillage régulier; on obtient

$$\text{SU/PG 6 élts irrég. : } T_s = 10.57 \text{ }^\circ\text{C} \quad (-11.3 \%) \quad (5.140)$$

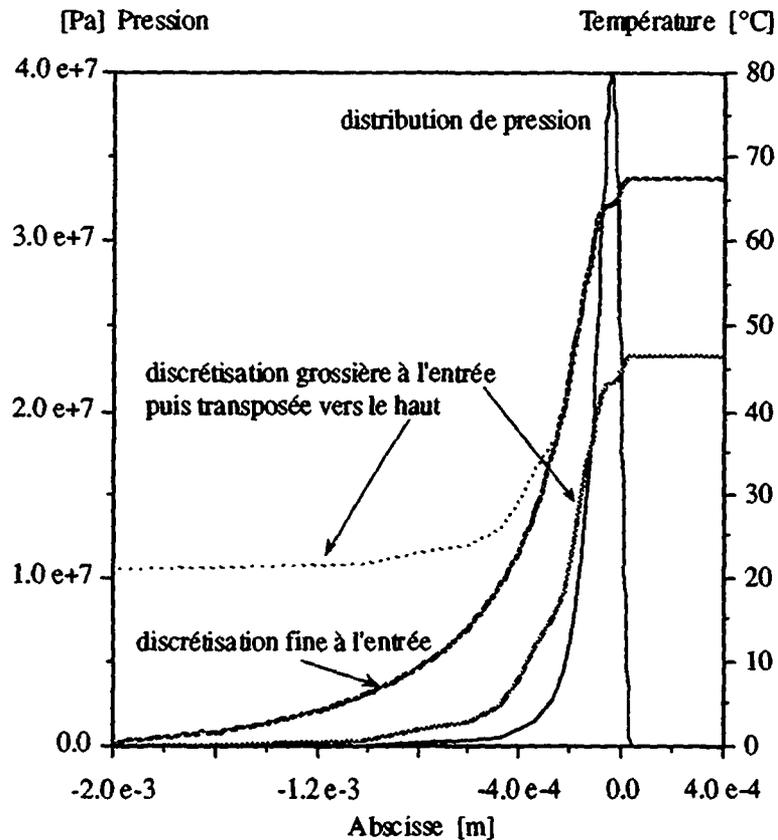
Force est de constater que l'erreur par rapport à la solution devient rapidement importante puisqu'elle atteint déjà 11 % dans un cas élémentaire. Nous verrons que ce phénomène se reproduira dans nos calculs ultérieurs en régime déformable et à viscosité non constante.



**Fig. 5.14 : Résultats des méthodes upwind appliquées au patin incliné IVR en roulement pur.**

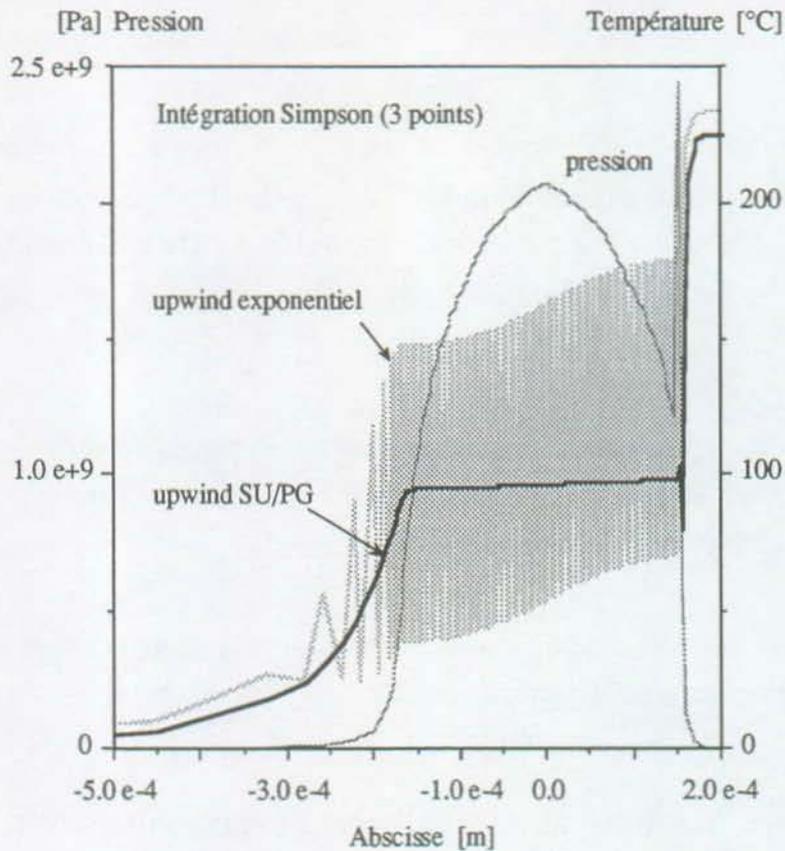
Jusqu'à présent, une discrétisation fine n'était requise que dans les zones de fortes charges et où des gradients de pression importants pouvaient apparaître. Ces résultats concernant la résolution de l'équation de la chaleur montrent qu'il sera aussi important de disposer d'une discrétisation fine dans les zones peu chargées, telles l'entrée du contact, mais où les aspects thermiques sont déterminants. La figure 5.15 montre un cas IVR résolu avec deux maillages différents.

Comme nous l'avons signalé plus haut, les méthodes d'upwind exponentiel ne sont pas adaptées à l'étude des cas EHD. Nous reproduisons ci-dessous un cas concret étudié au moyen des deux méthodes. On remarque immédiatement, sur la figure 5.16, les oscillations extrêmement importantes qui apparaissent avec la méthode exponentielle, alors qu'elles sont quasi inexistantes avec la méthode SU/PG.



**Fig. 5.15** Influence du maillage sur la solution de l'équation de la chaleur.

Il peut éventuellement subsister une oscillation près du pic, selon la circonstance. Une pénalité renforcée pourrait certainement l'amortir, au risque d'amortir aussi la solution, ce qui ne serait peut-être pas très favorable.



**Fig. 5.16 :** Illustration de l'efficacité de la stabilisation de l'équation de la chaleur par la méthode SU/PG.

#### 5.4.9 Lois de viscosité

Dans toute la partie théorique, mais aussi dans la présentation de la formulation numérique du problème de la lubrification, nous avons adopté une loi de viscosité de type exponentiel, tant en fonction de la pression que de la température. Il est bien clair que ce sont principalement des confrontations expérimentales qui devraient dicter ce choix, et non comme cela est fait généralement, le résultat d'une facilité d'écriture et/ou de programmation.

Nous avons adapté le programme de calcul afin que nous puissions introduire diverses lois de viscosité, notamment polynomiales, quadratiques, cubiques, etc. Il est bien clair que la variation exponentielle est la plus brutale, et celle qui conduit aux gradients les plus prononcés.

Rappelons que l'exposant piézovisqueux choisi  $\mu_1$  a la valeur

$$\mu_1 = 2.317 \cdot 10^{-8} \text{ Pa}^{-1}$$

ce qui signifie qu'au centre d'un contact hertzien, entre corps roulant et piste, la pression maximale admissible étant aux environs de  $2 \cdot 10^9$  Pa, la viscosité atteindrait une valeur de l'ordre de  $10^{20} \cdot \mu_0$ . Nous avons estimé a priori que de telles variations étaient irréalistes et que si la variation exponentielle était représentative à basse pression, elle l'est moins à haute pression.

Nous avons ainsi travaillé principalement avec des lois cubiques de variation de la viscosité. Elles ont l'avantage d'éviter ou de diminuer les risques de divergence numérique par dépassement de capacité mathématique des ordinateurs.

Nous verrons dans la partie expérimentale à quelle loi nous pouvons nous référer en ce qui concerne les huiles minérales courantes de lubrification.

## **5.5 RESUME DES TECHNIQUES NUMERIQUES DEVELOPPEES POUR RESOUDRE LE PROBLEME TEHD PAR ELEMENTS FINIS**

Nous avons présenté, dans ce chapitre, l'analyse du problème de la TEHD en vue de sa résolution de manière directe par la méthode des éléments finis. Nous avons mis en évidence un certain nombre de particularités du problème non linéaire de couplage entre solide et liquide. Il est bon de résumer, avant de présenter les résultats des calculs, les différentes techniques ou méthodes que nous avons été contraints de développer et d'adopter afin de parvenir à nos fins.

- **Action sur les unités**

Nous avons adopté un système d'unités spécial – dmm/mg/μs/°C – qui permet de rapprocher dimensionnellement les pivots matriciels dépendant du solide et ceux provenant du fluide.

- **Action sur la pression dans le film**

Nous avons implanté une méthode de pénalité appliquée à la pression régnant dans le fluide, de manière à ne tolérer, dans le domaine des pressions négatives, que des pressions physiquement admissibles, donc correspondant au phénomène de cavitation.

Simultanément, cette méthode de pénalité résout le problème de frontière libre en sortie de contact.

- **Action sur la hauteur minimale du film**

Nous avons adopté une technique imposant une hauteur minimale positive du film d'huile. Exclure de l'ensemble des solutions celles faisant intervenir des épaisseurs de film d'huile négatives revient à respecter la physique du problème réel.

- **Action sur la hauteur du film à l'entrée**

Dans le but de modéliser des quantités d'huile données à l'entrée du contact, nous avons implanté une méthode de pénalisation de la hauteur du film à l'entrée du contact. De cette manière, le film se forme à l'abscisse où la distance entre solides atteint, par valeurs supérieures, une valeur spécifiée.

Cette méthode résout ainsi le problème de frontière libre à l'entrée du contact.

- **Action sur l'équation de la chaleur**

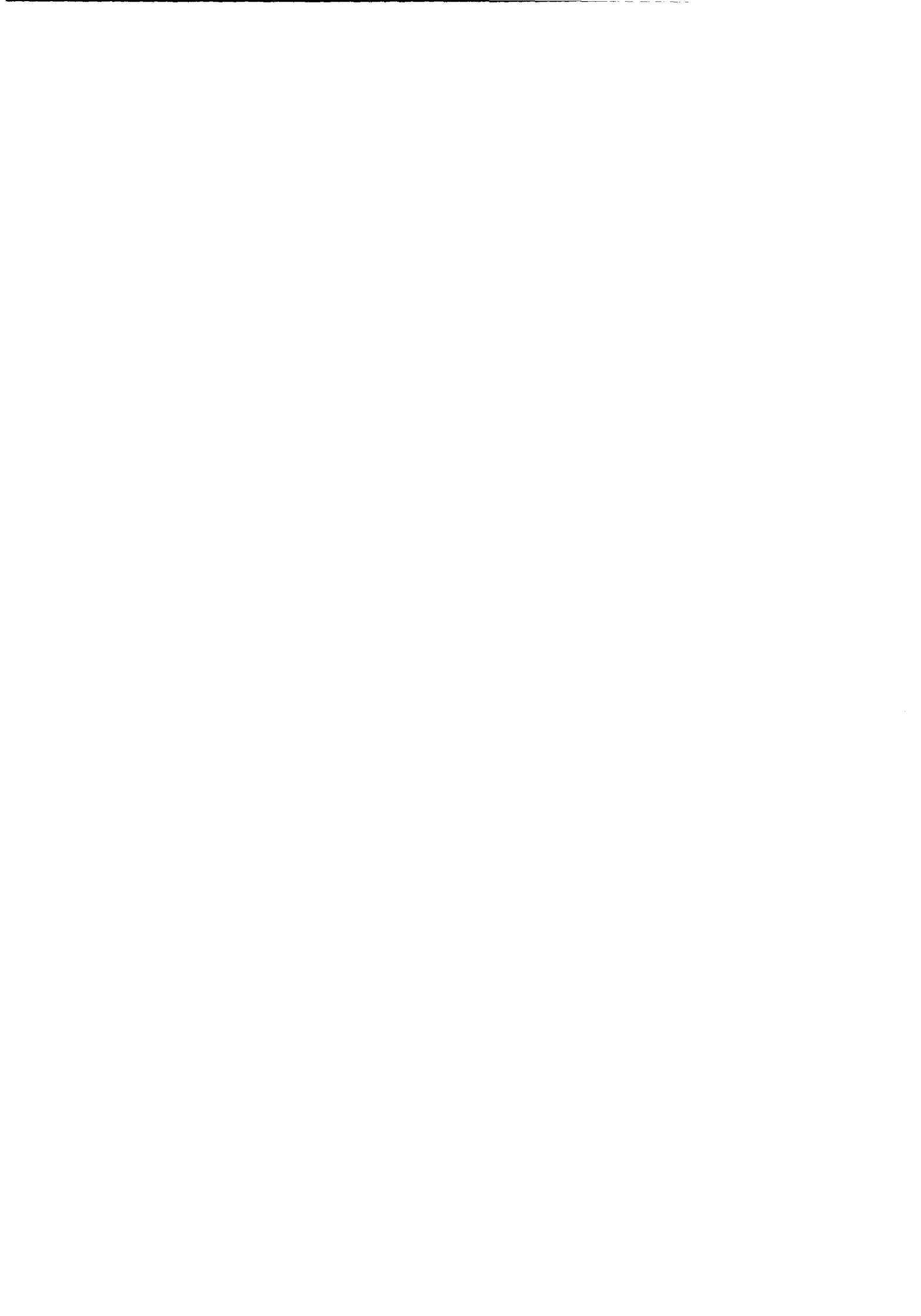
La résolution par des méthodes de Galerkin standard conduisant à des oscillations de la solution numérique, surtout en présence d'une source de chaleur et lorsque le terme de convection prédomine, nous avons implanté la technique de stabilisation dite "Streamline-Upwind Petrov-Galerkin". Elle consiste en la modification des fonctions de forme de l'élément de manière à simuler une conduction fictive dans le sens de l'écoulement.

La conduction vraie dans le sens du film peut être prise en compte.

La conduction transversale dans le film est résolue par une méthode de pénalité en supposant une distribution de température linéaire par morceaux dans l'épaisseur du film.

- **Action sur la manière de charger le contact**

En plus des diverses techniques résultant de l'analyse du problème, nous avons dû avoir recours à une méthode de continuation pour charger un contact à des valeurs très élevées. En effet, le rayon de convergence de la solution ne semble pas suffisant pour pouvoir soumettre d'un seul coup un contact à des conditions fortement élastohydrodynamiques. Ainsi, si les résultats obtenus sont satisfaisants et fiables, il reste certainement de nombreuses améliorations à apporter afin d'augmenter la rapidité du calcul et la stabilité de la convergence.



## CHAPITRE 6

# RESULTATS DE L'ETUDE NUMERIQUE

## 6.1 INTRODUCTION

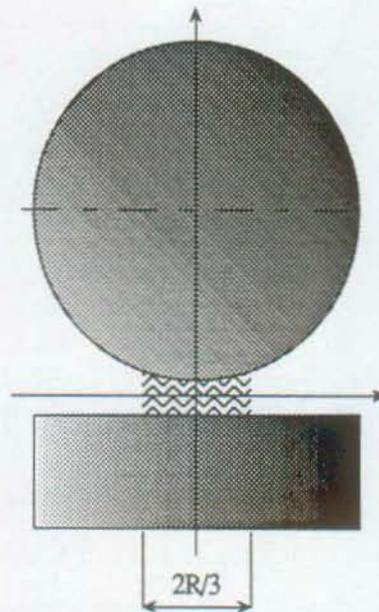
### 6.1.1 Définition de la zone modélisée

Comme c'est le cas dans tout problème numérique, particulièrement dans ceux faisant appel aux éléments finis, la qualité des résultats dépend de la qualité de la discrétisation. En effet, il s'agit bien de "qualité" d'une discrétisation, car il n'est pas toujours nécessaire de multiplier les degrés de liberté du problème à l'infini pour obtenir de bons résultats. On recherchera généralement la meilleure solution avec le nombre minimal de degrés de liberté, de manière à réduire à la fois la place mémoire occupée dans un ordinateur et le temps de calcul pour l'obtention d'une solution.

Dans notre étude numérique, nous devons discrétiser la zone du contact lubrifié entre un cylindre et un plan. Comme nous visons avant tout à nous rapprocher de la réalité des paliers à corps roulants, notre discrétisation ne s'est pas étendue sur tout le diamètre du cylindre en contact. Après plusieurs essais d'évaluation, nous avons admis que la discrétisation d'une longueur s'étendant de  $-R/3$  à  $R/3$  s'avérait suffisante pour modéliser un contact richement lubrifié (figure 6.1).

Dans tous les cas traités, nous avons maintenu la zone lubrifiée dans les limites maximales que nous venons de définir, qui s'appliquent à la lubrification riche. La zone d'entrée négligée, comprise entre  $-R$  et  $-R/3$  ne contribue que faiblement aux grandeurs caractéristiques du contact. Après calculs, son influence peut être résumée comme suit :

- négligeable sur  $P_y$  ;
- environ 10 % sur  $\dot{E}$ ,  $P_x$ ,  $C$ ,  $\Delta T$  si l'on se réfère, pour le vérifier, à la relation (4.107) et que l'on considère la viscosité comme constante et égale à  $\mu_0$  ;
- environ 5 % sur les mêmes grandeurs que ci-dessus en appliquant une extension de (4.107) pour le cas thermovisqueux, soit  $\Delta T = f(\mu_0, e, \mu_2, \Delta T)$ .



**Fig. 6.1 : Zone de modélisation du contact lubrifié.**

Ces pourcentages se réfèrent à un calcul analytique du cas indéformable, en situation de roulement pur et en considérant une approximation parabolique pour l'épaisseur du film d'huile.

Ainsi, les différences engendrées par ces simplifications sont très faibles et le seront encore plus si l'on considère les vitesses projetées des solides à l'entrée du contact. Par ailleurs, nous ne voulons pas aborder des situations de lubrification par bain d'huile, et les conditions d'alimentation doivent être clairement celles de paliers réels.

Imposer la frontière d'entrée, pour le cas de lubrification riche, à une abscisse égale à  $-R/3$  revient à fixer la hauteur du film à l'entrée à environ

$$h_e^\infty \cong 0.06 R \quad (6.1)$$

En calculant approximativement la demi-largeur maximale  $b_{\max}$  d'un contact hertzien linéaire dans un roulement, en supposant que la pression maximale au centre du contact ne dépasse généralement pas le centième du module d'élasticité réel du matériau, on obtient

$$b_{\max} = 2p_0/E^* \cdot R \quad (6.2)$$

d'où

$$b_{\max} \cong 0.04 R \quad (6.3)$$

Ainsi, la hauteur à l'entrée du contact richement lubrifié et la demi-largeur maximale du contact hertzien sont pratiquement égales.

Comme les épaisseurs de film sont de l'ordre du micron dans la zone du contact, on voit immédiatement que l'on devra disposer d'une centaine d'éléments pour une demi-largeur hertzienne, afin d'avoir des éléments lubrification dont la longueur et la hauteur soient de dimensions comparables. Dans ces conditions, ces deux grandeurs différeront au maximum d'un ordre de grandeur, ce qui est tolérable.

En fonction du rayon équivalent, on aura donc, d'après l'estimation (6.3), une longueur  $e_\ell$  d'élément dans la zone de charge

$$e_\ell \approx 4 \cdot 10^{-4} R \quad (6.4)$$

La taille des éléments fluides n'est pas sans conséquences sur la taille des éléments solides. En effet, pour des résultats fiables, on tient généralement à ce que les dimensions des éléments solides soient du même ordre de grandeur. Sans une technique de maillage appropriée, on risque rapidement de voir "exploser" le nombre d'équations à résoudre, puisqu'il est égal au nombre de degrés de liberté du maillage (cas bidimensionnel, deux degrés de liberté par noeud).

### 6.1.2 Modélisation du contact rigide

Dans les régimes où l'on ne prend pas en considération la déformation des solides, il n'est pas nécessaire de les modéliser. L'allure ou la géométrie du profil du film mince peut être directement donnée par l'élément lubrification.

Les contacts en régime IVR, PVR et TPVR s'étendant sur une longueur nettement plus faible que la demi-largeur maximale hertzienne (6.3), nous avons réalisé pour ces cas un maillage comportant un nombre réduit d'éléments de petite taille. La figure 6.2 présente la discrétisation du contact pour une demi-largeur symétrique, en prenant l'origine au centre du contact.

Le contact entier est ainsi modélisé par 98 éléments pour la zone comprise entre  $-R/3$  et  $R/3$ .

Nous avons, dans certains cas, ajouté deux éléments à l'entrée du contact afin de modéliser une zone de  $-R$  à  $R/3$ .

Dans les cas isothermes, chaque noeud fluide ne possède qu'un seul degré de liberté et le problème comporte donc environ une centaine d'équations non linéaires et pénalisées à résoudre.

												Total
Nombre d'éléments	28	1	6	1	4	1	3	1	2	1	1	49
$\epsilon \iota / R / (25/6 \cdot 10^{-4})$	1	2	3	6	9	18	27	54	81	162	233	800
$\epsilon \iota$ (R=60 dmm)	0.025	0.05	0.075	0.15	0.225	0.45	0.675	1.35	2.025	4.05	5.825	20
Abscisse [dmm]	0.7	0.75	1.2	1.35	2.25	2.7	4.725	6.075	10.125	14.175	20	

**Fig. 6.2 : Tableau donnant la longueur des éléments en régime indéformable.**

La prise en compte de la température ajoute un degré de liberté par noeud fluide et un degré de liberté par noeud solide. La taille du problème quadruple et la résolution du cas thermovisqueux est beaucoup plus longue que celle du cas isotherme, d'autant que la prise en considération de la thermique augmente très fortement la largeur de bande des matrices à traiter.

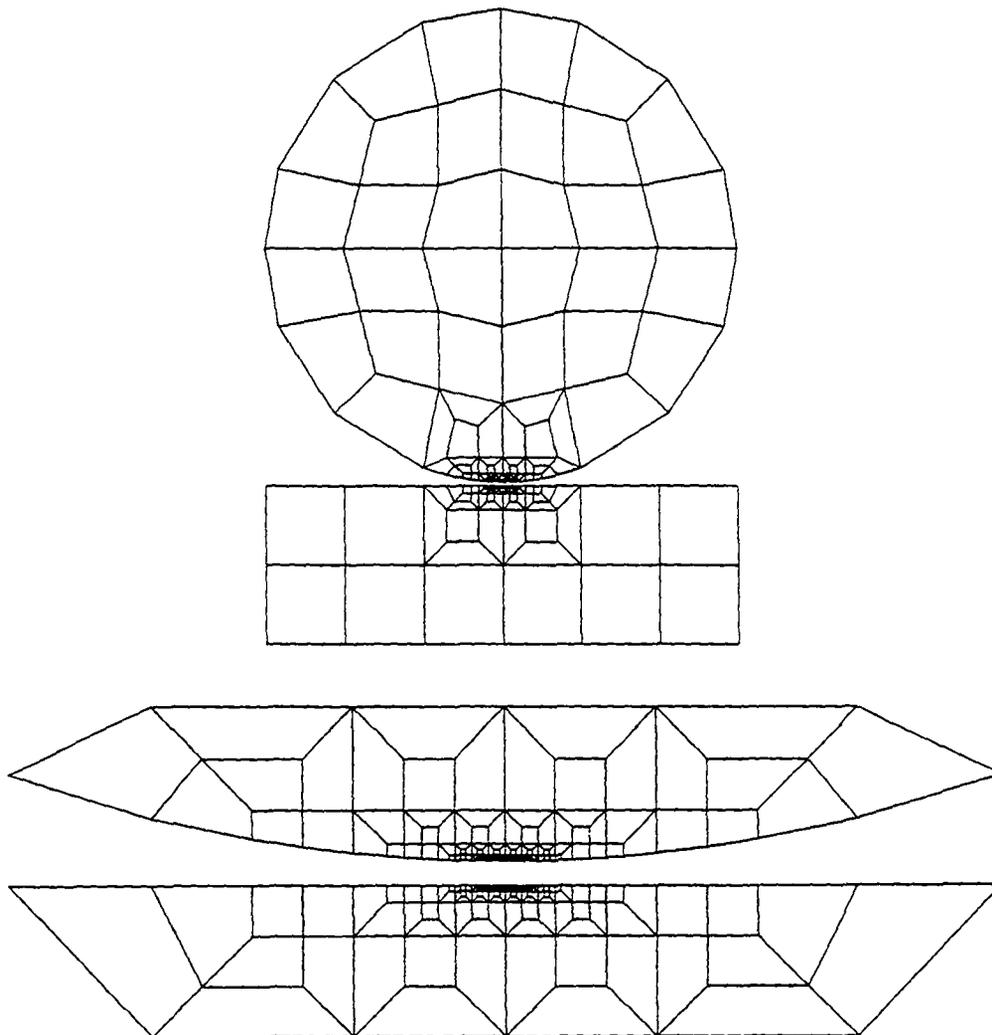
### 6.1.3 Modélisation du contact déformable

Pour ce cas de figure, nous avons modélisé de plusieurs manières le contact linéaire entre deux cylindres d'axes parallèles. Etant donné l'équivalence que l'on peut obtenir sur la courbure des corps en contact ainsi que sur l'élasticité de la matière, nous avons, dans la mesure du possible, simplifié le problème afin de ne pas trop étendre sa dimension.

Une première modélisation est tout à fait complémentaire de celle utilisée pour les cas rigides, les éléments lubrification étant exactement ceux mentionnés à la figure 6.2. Elle consiste en la modélisation des deux corps solides en présence, soit un cylindre et un corps massif

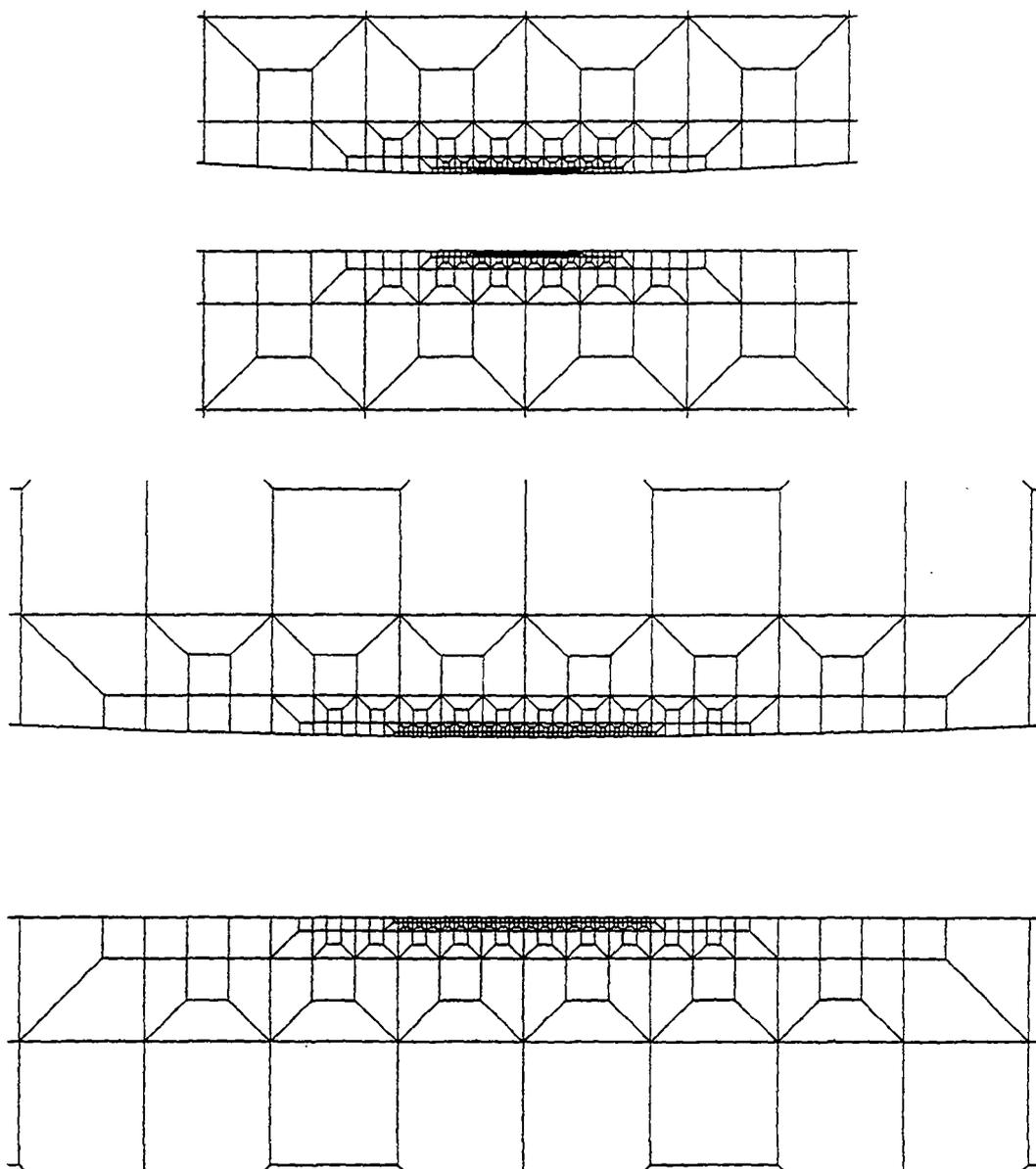
rectangulaire, maillés avec une technique permettant une progression rapide de la taille des éléments. Les figures suivantes illustrent assez clairement, par un effet de zoom, la finesse de maillage nécessaire au contact. On remarque, sur la dernière figure, que les éléments solides en contact avec le fluide ont été choisis de dimensions – longueur/hauteur – très proches, afin d'éviter certains comportements de blocage que nous craignons au début de l'étude avec notre maillage progressif. En pratique, il s'est avéré que cette couche d'éléments n'était pas indispensable, les résultats n'y étant pas sensibles.

Dans ce modèle, la zone de contact raffinée est relativement peu étendue, ce qui n'autorise son utilisation que dans des cas de contacts moyennement chargés. Cependant, la modélisation des



**Fig. 6.3a : Modélisation par éléments finis d'un contact lubrifié avec grossissement successif.**

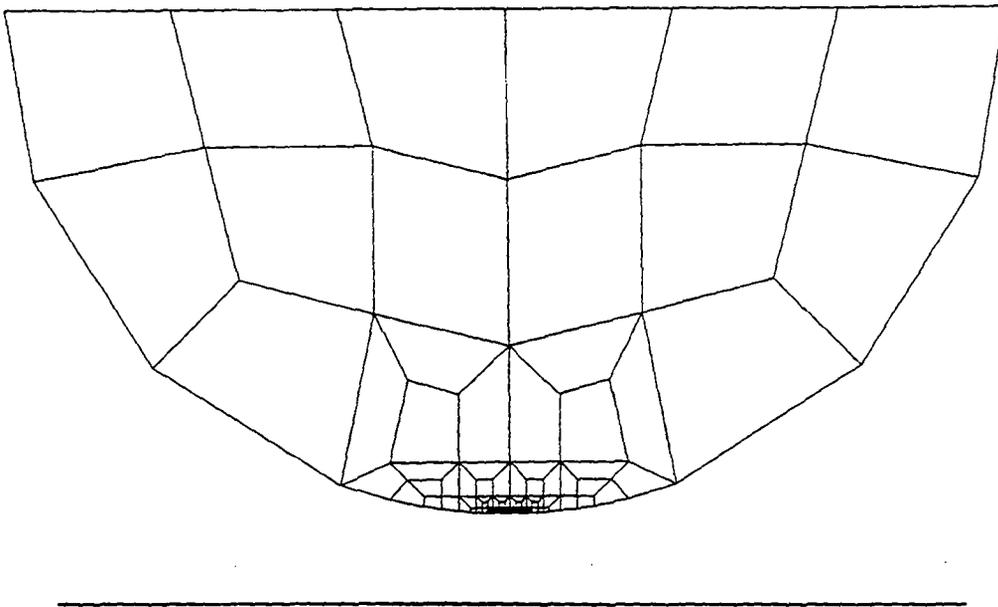
deux corps est indispensable, dans les cas thermopiezovisqueux, si l'on veut prendre en compte les flux de chaleur s'échappant dans chacun des solides. Reconnaissons que la modélisation des deux corps n'est pas à proprement parler la plus pratique, car elle met en jeu un très grand nombre d'équations.



**Fig. 6.3b : Modélisation par éléments finis d'un contact lubrifié avec grossissement successif.**

Ainsi pour toute la partie de notre étude basée sur l'hypothèse d'un comportement isotherme et adiabate, la modélisation d'un seul solide équivalent est tout à fait suffisante, et donne les mêmes résultats que la modélisation complète.

Afin de diminuer encore la taille du problème, nous avons fini par ne considérer que la moitié d'un cylindre, de rayon et module d'élasticité équivalents, en contact avec un plan indéformable (figure 6.4). De cette manière, on divise environ par deux le nombre de noeuds et d'éléments solides. Par ailleurs, on peut encore diminuer le temps de calcul en prenant soin de numérotter les noeuds de manière à concentrer les équations non linéaires dans le bas de la matrice. Ainsi, toute la partie linéaire, le solide élastique, est résolue pour elle-même une seule fois, et seule la partie non linéaire est recalculée à chaque itération.



**Fig. 6.4 : Modélisation simplifiée du contact de deux cylindres.**

La zone centrale a fait l'objet de deux maillages différents qui ont donné des résultats tout à fait semblables.

Pour le premier maillage, la zone centrale est de largeur double par rapport au contact indéformable; on a donc pour un demi-contact :

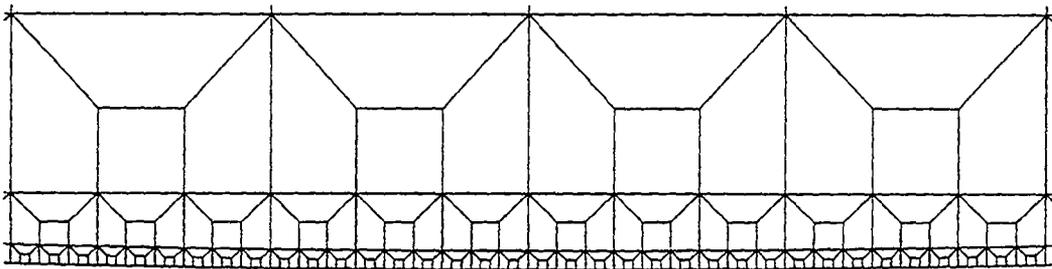
- 54 éléments de longueur

$$e_t / R = 25/6 \cdot 10^{-4} = 4.17 \cdot 10^{-4} \quad (6.5)$$

- une demi-largeur hertzienne correspondante de

$$b/R = 0.0225 \quad (6.6)$$

La figure 6.5 montre la partie centrale de ce maillage. On remarque, que dans cette version, on ne dispose pas de couche d'éléments solides quasi identiques pour la liaison avec le fluide.



**Fig. 6.5 : Discrétisation de la zone centrale du contact  $b/R = 0.0225$ .**

Dans ce cas, avec en tout 140 éléments lubrification, le problème a la taille suivante :

I/PVE :            917 équations  
                       dont 496 linéaires

T-I/PVE :         1339 équations  
                       dont 496 linéaires

Nous avons réalisé un maillage avec zone hertzienne un peu plus étendue en utilisant des éléments centraux très légèrement plus petits et deux couches superposées d'éléments carrés,

dans le but de régulariser le cisaillement. Pour un demi-contact, nous aurons, comme l'illustre la figure 6.6 :

– 76 éléments de longueur

$$e_l / R = 4 \cdot 10^{-4} \quad (6.7)$$

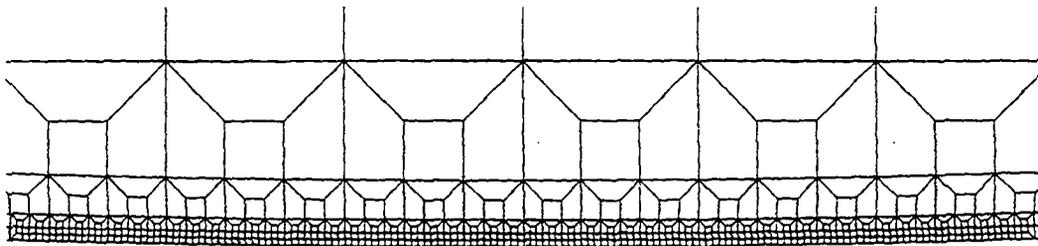
– la demi-largeur hertzienne devenant

$$b/R = 0.0304 \quad (6.8)$$

La taille du problème est évidemment fortement augmentée car nous avons en tout 186 éléments lubrification et

I/PVE :            1863 équations  
                       dont 1304 linéaires

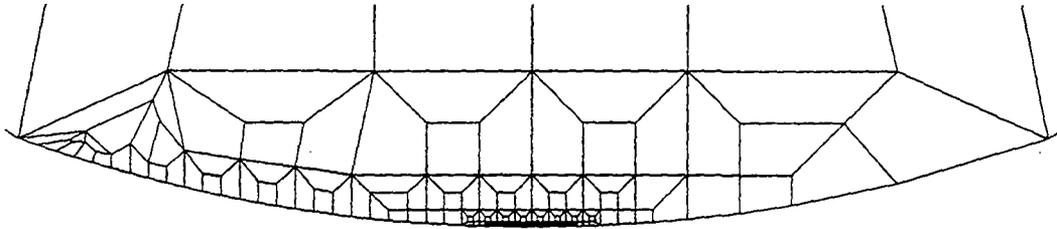
T-I/PVE :            2421 équations  
                       dont 1304 linéaires



**Fig. 6.6 : Discrétisation de la zone centrale du contact  $b/R = 0.0304$ .**

Lors de l'étude thermique, nous avons modifié une partie du modèle de la figure 6.5, de manière à examiner l'influence de la finesse du maillage à l'entrée du contact, dans le cas de solides déformables, suite à ce que nous avons constaté au chapitre 5 (figure 5.15). Pour cela, nous avons raffiné le maillage à l'entrée du contact, en portant l'attention sur le fait de créer des éléments lubrifiants de longueur constante. Cette modification est illustrée à la figure 6.7.

On y remarque des éléments solides relativement peu réguliers à l'entrée du contact; cela est dû au fait que nous avons cherché à ne pas tout changer dans le maillage. Ces éléments n'étant pas ou peu sollicités mécaniquement, ce fait est d'importance tout à fait négligeable.



**Fig. 6.7 : Raffinement du maillage à l'entrée du contact pour le modèle de la figure 6.5.**

Cette discrétisation nous permettra d'évaluer l'importance de la qualité de l'intégration à l'entrée du contact. Nous obtenons, avec cette version, 156 éléments lubrifiant et un nombre de 1475 équations (1007 équations en régime isotherme), soit 136 équations de plus que dans le cas de la figure 6.5 (90 dans le cas isotherme).

#### **6.1.4 Application numérique de référence**

Comme nous l'avons déjà fait lors de l'analyse théorique, nous comparerons tous nos résultats à un cas numérique que nous prenons comme référence. Ce cas a déjà été défini au chapitre 4 par les expressions (4.115) et adapté aux unités modifiées adoptées pour les éléments finis au chapitre 5 dans les relations (5.73).

Nous pouvons ainsi toujours nous référer aux différentes approches, théorique ou numérique, dans des exemples comparables, puisqu'ils mettent en jeu le même contact lubrifié.

Nous allons rappeler ci-dessous ces valeurs, en repérant par un indice "T" les expressions qui sont propres au programme d'éléments finis TACT.

Nous avons donc les valeurs suivantes:

$$\begin{array}{ll}
 R^* = 60 \text{ dmm} & E^* = 13.18 \text{ Pa} \cdot 10^{10} \\
 U = 0.3 \text{ dmm}/\mu\text{s} & E_T = 11.33 \text{ Pa} \cdot 10^{10} \\
 U_{1T} = 0.15 \text{ dmm}/\mu\text{s} & v_T = 0.27 \\
 U_{2T} = R^* \cdot \omega_T & V = 0 \text{ dmm}/\mu\text{s} \\
 \omega_T = 2.5 \cdot 10^{-3} \text{ rd}/\mu\text{s} & \rho = 8.4 \cdot 10^{-4} \text{ mg/dmm}^3 \quad (6.9) \\
 \mu_o = 8.47 \cdot 10^{-7} \text{ mg}/\mu\text{s} \cdot \text{dmm} & c_p = 0.2219 \text{ dmm}^2/\mu\text{s}^2 \cdot ^\circ\text{C} \\
 \mu_1 = 2.317 \cdot 10^2 \text{ 1}/(\text{Pa} \cdot 10^{10}) & K_T = 1.37 \cdot 10^{-9} \text{ mg} \cdot \text{dmm}/\mu\text{s} \cdot ^\circ\text{C} \\
 \mu_2 = -2.0 \cdot 10^{-2} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1} & G^\circ = 6108 \\
 U^\circ = 8.033 \cdot 10^{-11} & W^\circ = P_y/1582 \\
 H^\circ = h/60 &
 \end{array}$$

## 6.2 REGIME INDEFORMABLE

### 6.2.1 Intégration de la pression et de la température

Dans le but de vérifier la qualité du calcul par éléments finis, nous allons comparer des résultats obtenus par le programme TACT d'éléments finis avec ceux que nous pouvons obtenir par voie théorique. Nous avons ainsi pris le cas numérique de référence avec une hauteur de film d'huile suffisante pour que la pression maximale en régime piézo-visqueux soit calculable.

Les tableaux de la figure 6.8 résument les valeurs obtenues, avec les données numériques suivantes, en unités modifiées :

$$\begin{array}{llll}
 h_o = 0.65 \cdot 10^{-3} & U = 0.3 & \mu_1 = 0.2317 \cdot 10^3 & \rho = 0.84 \cdot 10^{-3} \\
 R = 60 & \mu_o = 0.847 \cdot 10^{-6} & \mu_2 = -0.02 & c_p = 0.2219
 \end{array}$$

A l'exception de la température, l'examen des résultats concernant le régime riche montre une bonne concordance entre les valeurs obtenues théoriquement et celles obtenues numériquement. Les différences restent de l'ordre de quelques pour-cent, environ cinq pour-cent pour la plupart des valeurs, avec un écart plus important pour la puissance consommée, qui se situe à environ douze pour-cent.

Régime riche		Théorique		TACT						
		IVR	IVR	IVR	PVR		TPVR			
					Cub	Exp	Cub	Exp		
$h_e$	1	$\infty$	3.3398	3.3398	3.3398	3.3398	3.3398	3.3398	3.3398	dmm
$x_e$	1	$-\infty$	-20	-20	-20	-20	-20	-20	-20	dmm
$h^*$	$10^{-2}$	0.7967	0.7967	0.8005	0.8005	0.8005	0.8188	0.8188	0.8188	dmm
$x^*$	1	-0.4196	-0.4196	-0.4250	-0.4250	-0.4250	-0.4500	-0.4500	-0.4500	dmm
$p^*$	$10^{-2}$	0.4039	0.4038	0.3984	0.9815	1.095	0.3210	0.3202	0.3202	$\text{Pa} \cdot 10^{10}$
$P$	$10^{-2}$	0.5741	0.5732	0.5550	0.9191	0.9532	0.4362	0.4354	0.4354	$\text{hN/dmm}$
$\dot{E}$	$10^{-4}$	0.1685	0.1548	0.1478	0.1974	0.2012	0.1249	0.1249	0.1249	$\text{hN}/\mu\text{s}$
$\Delta T$	1	75.64	69.49	46.66	68.66	70.36	37.23	37.18	37.18	$^{\circ}\text{C}$

La pression maximale, en régime PVR, obtenue théoriquement, est la suivante :

$$p^* = 1.186 \cdot 10^{-2} \text{ Pa} \cdot 10^{10}$$

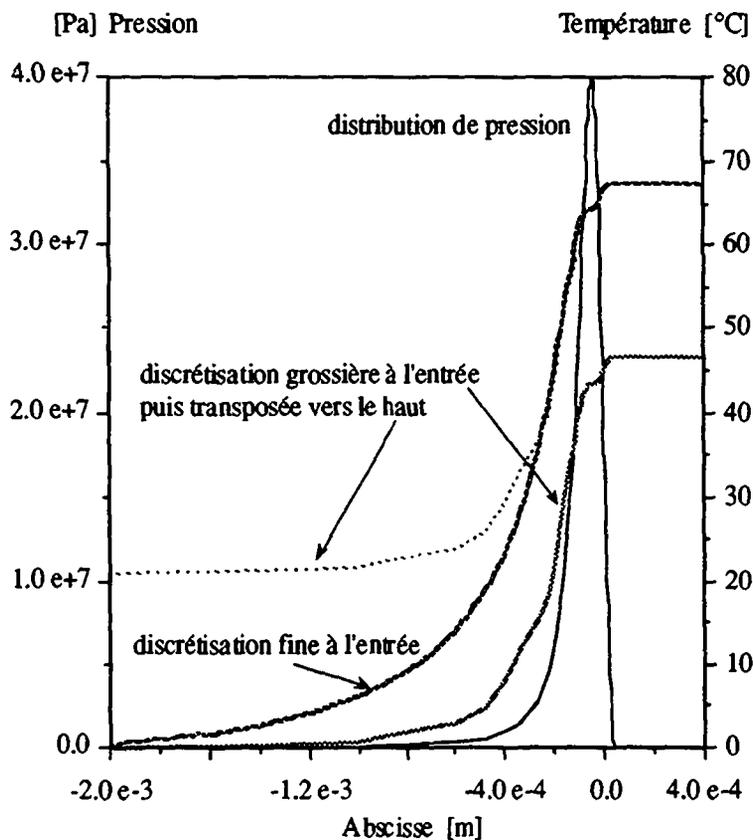
Régime limite		Théorique		TACT						
		IVR	PVR	IVR	PVR		TPVR			
					Cub	Exp	Cub	Exp		
$h_e$	$10^{-1}$	0.2302		0.2718	0.2718	0.2718	0.2718	0.2718	0.2718	dmm
$x_e$	1	1.408		-1.575	-1.575	-1.575	-1.575	-1.575	-1.575	dmm
$h^*$	$10^{-2}$	0.7672		0.7672	0.7672	0.7672	0.7672	0.7672	0.7672	dmm
$x^*$	1	-0.3751		-0.3750	-0.3750	-0.3750	-0.3750	-0.3750	-0.3750	dmm
$p^*$	$10^{-2}$	0.2949	0.4964	0.2853	0.4263	0.4661	0.3436	0.3443	0.3443	$10^{10} \text{ Pa}$
$P$	$10^{-2}$	0.2649		0.2498	0.3499	0.3510	0.2769	0.2771	0.2771	$\text{hN/dmm}$
$\dot{E}$	$10^{-4}$	0.3129		0.2870	0.3925	0.3935	0.3209	0.3212	0.3212	$\text{hN}/\mu\text{s}$
$\Delta T$	1	14.58		13.50	18.44	18.49	14.65	14.66	14.66	$^{\circ}\text{C}$

Fig. 6.8 : Tableau comparatif des résultats obtenus par voies théorique et numérique (TACT) en régime indéformable.

Par contre, en ce qui concerne la température, on constate une grande différence, environ trente pour-cent, entre le calcul théorique et le calcul numérique. Nous retrouvons ici l'effet décrit au chapitre 5 concernant la régularité du maillage à l'entrée du contact.

On remarque que, dans les résultats du régime limite, on ne retrouve pas ce phénomène et tous les résultats numériques sont dans une fourchette de moins de dix pour-cent, ce qui est tout à fait satisfaisant. N'oublions pas que le calcul théorique fait une approximation, sur la courbure, qui n'est pas faite dans le cas numérique. De plus, les différents noeuds du maillage sont reliés par des segments rectilignes, ce qui simplifie la géométrie.

Nous montrons, à la figure 6.9, l'effet d'une discrétisation grossière à l'entrée du contact par rapport à une discrétisation fine. Si la différence est significative en ce qui concerne la température, elle n'est pas mesurable sur la distribution de pression.



**Fig. 6.9 :** Effet de la discrétisation à l'entrée du contact sur la distribution de température (cas IVR riche de la figure 6.8).

Nous avons tenté d'évaluer la précision à laquelle on pouvait aboutir, si l'on veillait à faire coïncider les valeurs particulières intéressantes avec des noeuds du maillage, dans le cas d'un maillage fin. Les résultats présentés à la figure 6.10 montrent le cas d'une discrétisation à 300 éléments de longueur identique pour la modélisation du contact. On constate alors une excellente corrélation qui confirme bien la correction de la programmation, tant de l'équation de Reynolds que de l'équation de la chaleur, puisque les résultats sur les inconnues du problème diffèrent de moins d'un pour-cent.

	Théorique	TACT	Unités	Erreur relative
$h_o$	0.1607	0.1607	$\cdot 10^{-2}$ dmm	-
$h_e$	0.5691	0.5690	$\cdot 10^{-1}$ dmm	0.02
$x_e$	-0.7000	-0.7000	dmm	-
$h^*$	0.1897	0.1862	$\cdot 10^{-2}$ dmm	-1.8
$x^*$	0.1865	0.1750	dmm	-6.2
$p^*$	0.2399	0.2388	$\cdot 10^{-2}$ Pa $\cdot 10^{10}$	-0.47
$P$	0.1072	0.1065	$\cdot 10^{-1}$ hN/dmm	-0.59
$\dot{E}$	0.6292	0.6276	$\cdot 10^{-4}$ hN/ $\mu$ s	-0.25
$\Delta T$	118.6	118.1	$^{\circ}$ C	-0.45

Fig. 6.10 : Tableau comparatif concernant un maillage fin - 300 éléments.

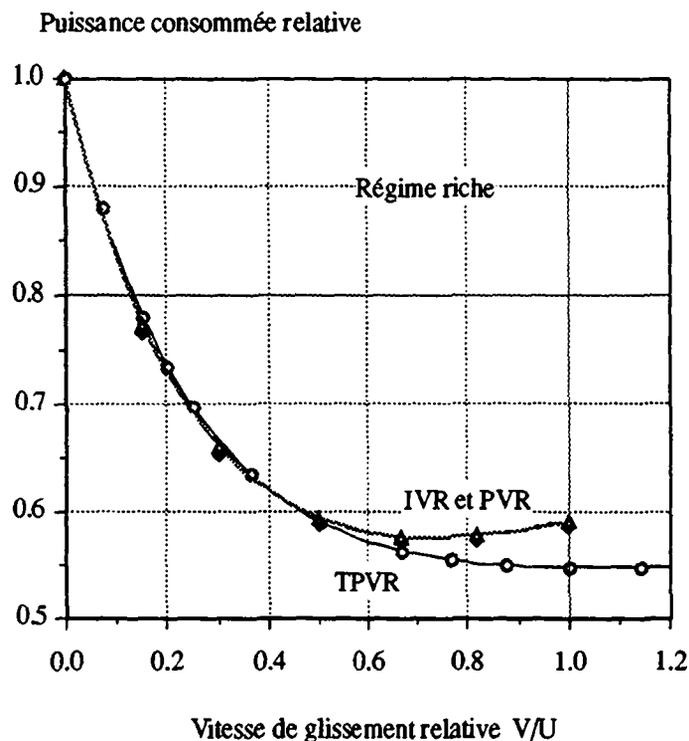
### 6.2.2 Puissance consommée en fonction du glissement

Nous avons examiné, au chapitre 4, l'évolution de la consommation de puissance et de la température dans le film en fonction du glissement, tout en considérant la vitesse de l'un des corps en présence comme constante. L'approche théorique s'était contentée d'analyser le régime isovisqueux, en mettant en évidence le fait que les minimums des fonctions apparaissaient pour des glissements bien plus faibles, lorsque les quantités d'huile à l'entrée du contact sont limitées.

Nous avons voulu montrer, par l'utilisation de la méthode numérique, l'influence de la piéoviscosité et celle de la thermoviscosité. La figure 6.11 montre la consommation de puissance relative en fonction du glissement.

On trouve, pour le régime IVR, un minimum de cette puissance pour un glissement d'environ 70 %, dans des conditions d'alimentation de type riche ( $x_e = -20$  dmm), mais pas tout à fait identiques au cas théorique de la figure 4.7 ( $x_e = -\infty$ ). On voit que le faible appauvrissement de l'alimentation du contact, provoqué par une abscisse d'entrée à valeur finie, fait déjà passer la position du minimum de puissance d'un glissement de 85 % à un glissement de 70 %.

On notera que sur la figure ci-contre, les courbes des régimes IVR et PVR sont pratiquement confondues, ce qui signifie qu'en l'absence de déformation des solides, la piézoviscosité n'influence que très peu - ou pas du tout - le glissement correspondant au minimum de puissance consommée.



**Fig. 6.11 : Puissance dissipée en fonction du glissement à  $U_1 = \text{cte}$ , en régime IVR, PVR et TPVR.**

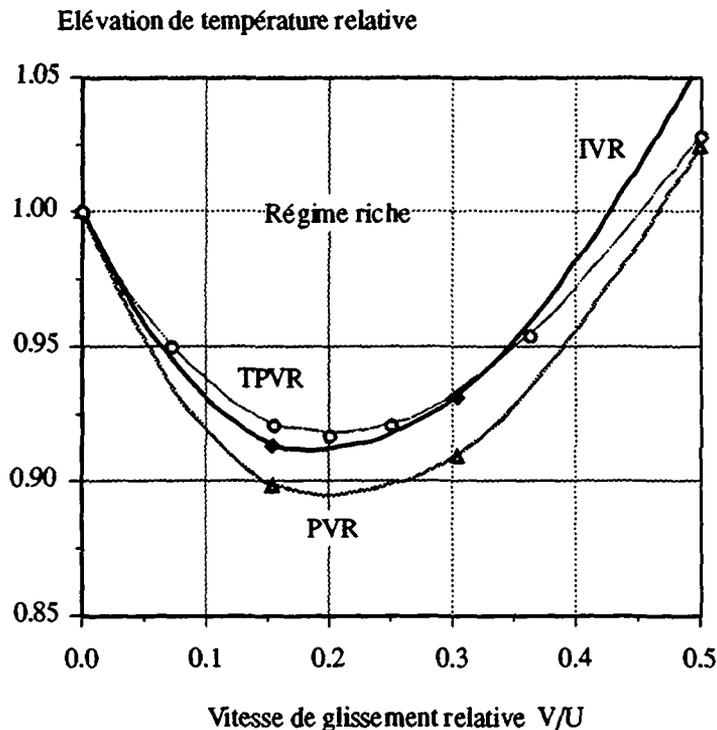
Par contre, l'influence de la thermoviscosité est nette et a tendance à repousser le minimum vers des glissements plus importants. Il faut noter que plus la thermoviscosité est prononcée, plus le minimum est repoussé loin. Nous pouvons remarquer qu'avec nos valeurs numériques, le minimum apparaît pour un glissement supérieur à 100 %. Cela signifie que l'effet d'entraînement d'un des corps en contact par l'autre n'est pas possible et que, au contraire, les deux corps tournent même en sens opposés.

Nous voyons donc que nos développements théoriques trouvent ici confirmation et extension aux régimes piézo- et thermovisqueux.

Le fonctionnement d'un palier faiblement chargé et abondamment lubrifié se fera à un régime de glissement au contact très important, glissement qui aura tendance à être augmenté par l'effet de thermoviscosité, mais peu influencé par l'effet de piézoviscosité. Dans de telles conditions, nous ne pourrions pas admettre que le palier travaille en train épicycloïdal et que le roulement est pur.

### 6.2.3 Elévation de température en fonction du glissement

Le même phénomène de minimum a été théoriquement mis en évidence pour ce qui concerne l'élévation de la température dans le film à la figure 4.12. Nous avons, là aussi, confirmé les résultats précédents tout en montrant les effets opposés des variations de viscosité en fonction respectivement de la pression et de la température. La figure 6.12 illustre les résultats que nous avons obtenus en régime riche ( $x_e = -20$  dmm), avec les valeurs numériques de notre exemple.



**Fig. 6.12 : Echauffement dans le film en fonction du glissement à  $U_1 = \text{cte}$ , en régime riche, IVR, PVR et TPVR.**

Comme précédemment, les minimums de la température ne sont pas situés aux mêmes glissements que ceux de la dissipation, car les débits fluides ne sont évidemment pas identiques dans tous les cas.

### 6.3 REGIME DEFORMABLE ISOTHERME

Nous montrerons plus loin que le régime que nous avons étudié, c'est-à-dire le roulement presque pur au centre du contact – à la déformation solide près – est une circonstance qui se révèle être très proche du régime de consommation de puissance minimale. Nous nous limiterons ainsi à ce cas cinématique qui illustre tout à fait valablement le contact corps roulant/piste dans un roulement préchargé par une force constante, lorsque la force extérieure contribue pour une part négligeable à la charge des contacts.

Les valeurs numériques sont celles mentionnées au début de ce chapitre. La vitesse de roulement est réalisée en animant le plan d'une vitesse de translation égale à  $U/2$  et le corps roulant d'une vitesse de rotation  $\omega$  autour de son centre égale à  $U/2R$ . On a donc un glissement qui croît dès que l'on s'éloigne du centre du contact.

Nous avons vérifié, dans le cas indéformable, que la différence entre le cas cinématique décrit ci-dessus et le roulement pur dans tout le film est très faible. De toute façon, un roulement pur dans tout le film constitue un cas idéal qui n'a de sens que par la simplification qu'il apporte dans une approche théorique.

#### 6.3.1 Pressions et profils caractéristiques de film

La distribution de pression dans le film, en régime piézo-visqueux, passe de manière tout à fait continue de l'allure hydrodynamique à des allures élastohydrodynamiques comme on peut le constater à l'examen de la figure 6.13.

Pour les cas d'alimentation riche du contact - toutes les courbes en traits continus - on constate un déplacement du maximum de pression vers la sortie du contact pour une charge croissante. De plus, la valeur du maximum ne décroît pas avec la charge appliquée, même pour les valeurs limites, celles correspondant à une pression hertzienne maximale de 20'000 bar. Avec les choix effectués, le pic de pression se situe à une valeur proche du double de la pression au centre du contact, pour le cas isotherme.

Distribution de pression dans le contact [10+10 Pa]

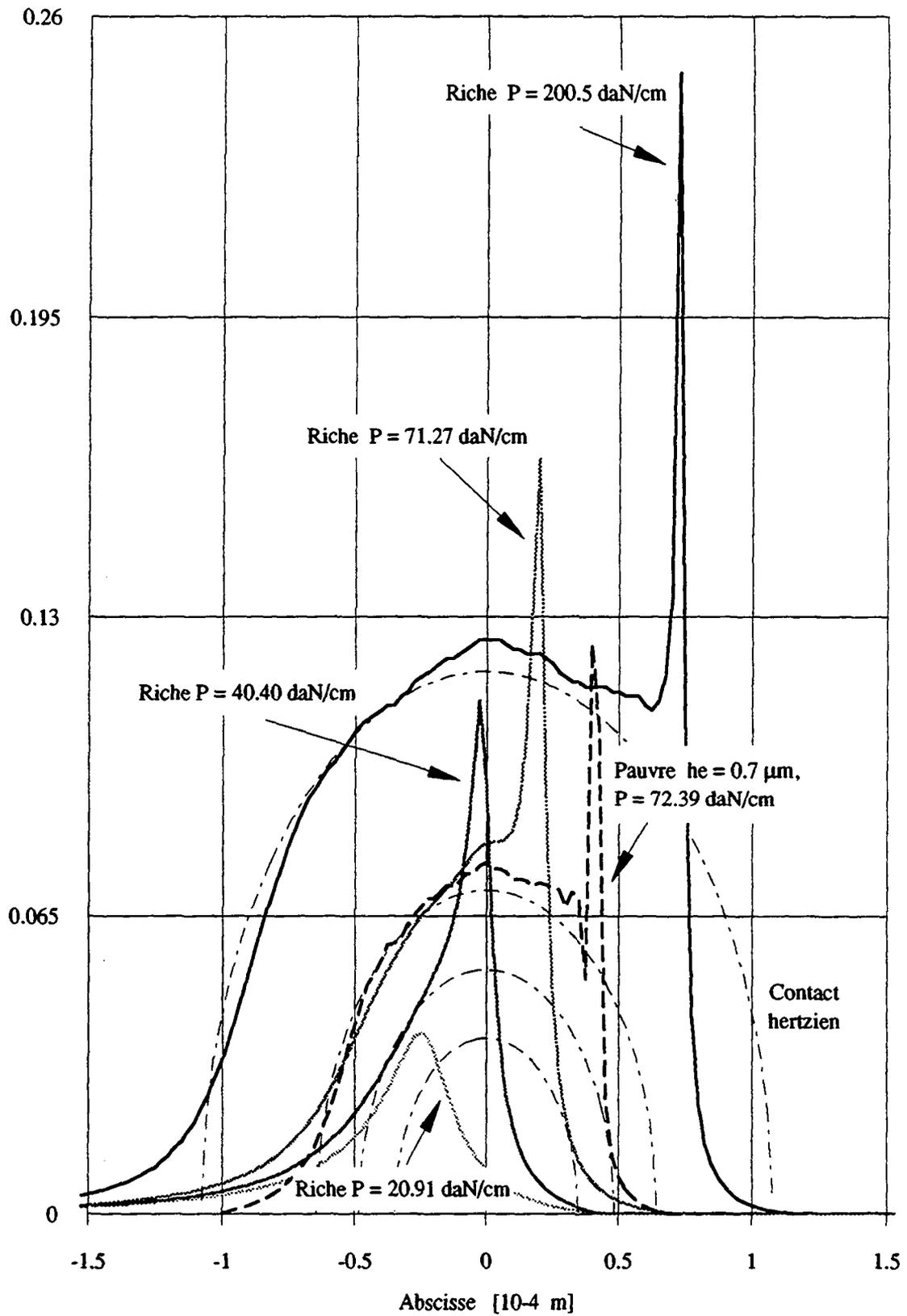


Fig. 6.13 : Distributions de pression dans le film en régime PVE.

Des essais avec une loi de piézoviscosité quartique montrent que le pic EHD devient plus important, sans pour autant que la portance au contact change de manière significative. Les écarts constatés entre les deux lois sont de l'ordre du pour-cent.

Sur la figure 6.14, les épaisseurs de film d'huile correspondant aux profils de pression de la figure 6.13 montrent que le "plateau" dans le film apparaît bien avant que la distribution de pression ne prenne une allure EHD. Ainsi, en régime riche, le cas de la portance de 40 daN/cm présente déjà un solide fortement déformé alors que le maximum de pression n'a pas atteint le centre du contact.

Pour les petites valeurs de portance, l'influence de la résultante horizontale de la pression est nettement visible; il suffit de comparer l'allure du film non déformé représenté à la même hauteur que celui correspondant à la portance de 20 daN/cm sur la figure 6.14.

On remarquera, à l'examen des figures 6.13 et 6.14, qu'il apparaît des oscillations dans la distribution de pression dès le moment où se forme le maximum local de la pression. Nous verrons plus loin que ces oscillations apparaissent aussi sur le profil de pression d'un contact hertzien non lubrifié. Il semble que le problème ne soit pas lié à la lubrification, mais bien à la déformation du solide lorsque la grandeur  $dh/dx = 0$ , c'est-à-dire lorsque la tangente au solide déformé est horizontale.

Nous n'avons pas cherché pour l'instant à déterminer la cause de cette instabilité, car elle nous entraînerait hors du domaine qui nous préoccupe en premier lieu, celui de la lubrification. Par ailleurs, cette oscillation ne se produit que sur le profil de la pression, et la déformation du solide n'en est pour ainsi dire pas affectée.

### 6.3.2 Influence de la quantité d'huile

Il est aisé de montrer l'influence de la quantité d'huile alimentant le contact sur le profil de pression et sur celui du film. Sur les figures 6.13 et 6.14, nous avons reporté un cas où la quantité d'huile est limitée à  $h_e = 0.7 \mu\text{m}$  et de même portance qu'un cas riche (70 daN/cm). On voit clairement que la diminution de l'huile à l'entrée du contact amène un régime EHD beaucoup plus prononcé, sans que la pression maximale soit très supérieure. On ne retrouve en tous cas pas le rapport que nous avons mis en évidence dans le régime IVR par voie théorique. Cet amortissement diminue également de manière très prononcée la hauteur du film au centre du contact, presque d'un facteur 2 dans le cas illustré.

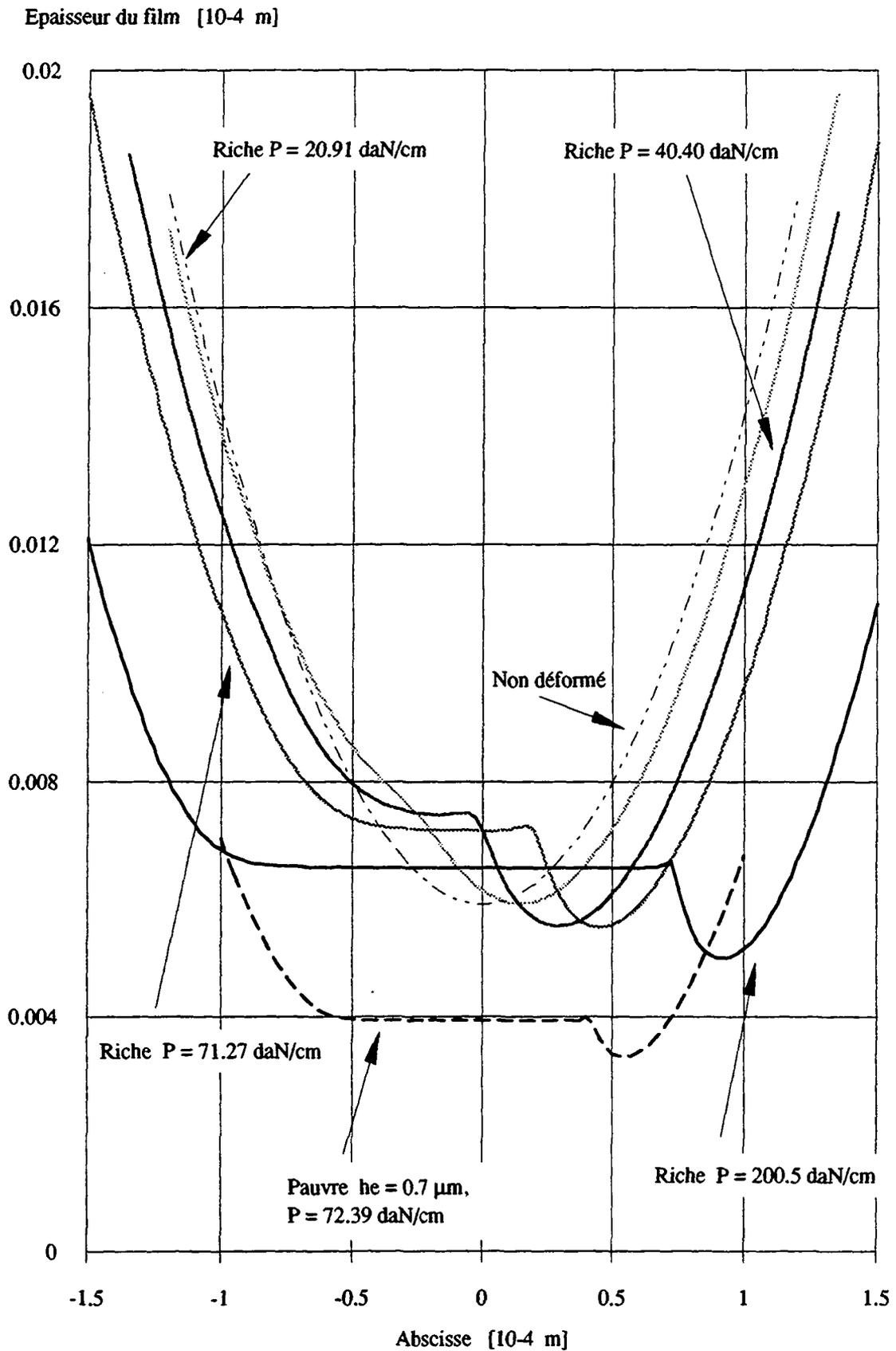
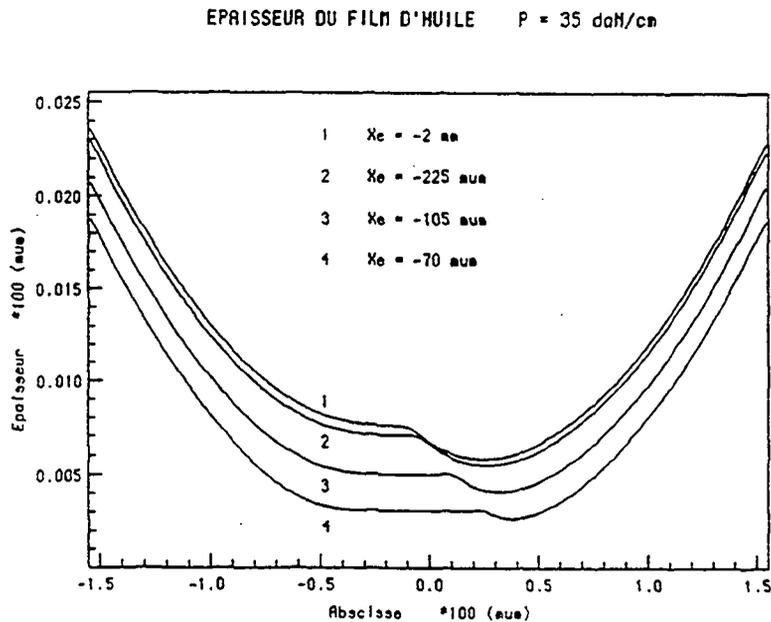
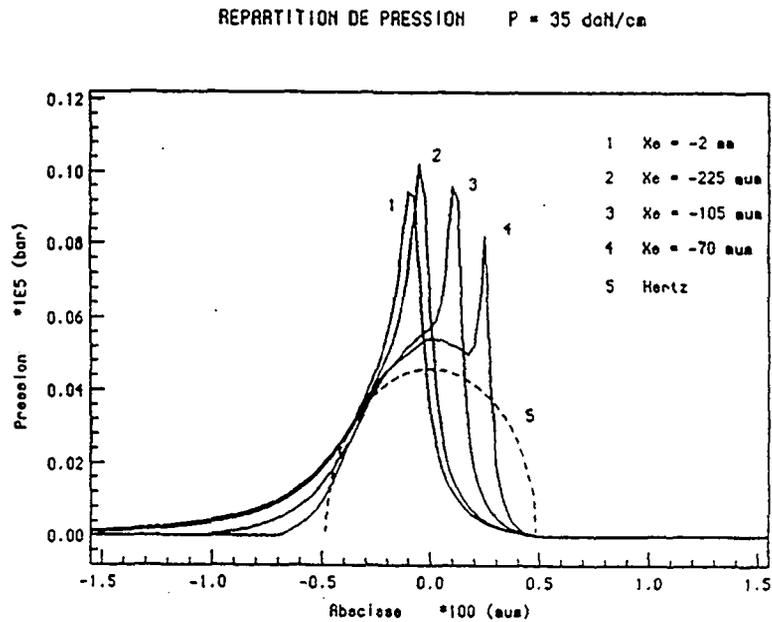


Fig. 6.14 : Epaisseurs de film d'huile en régime PVE.

On confirme bien la tendance à reporter vers la sortie du contact la position du pic EHD, à augmenter la longueur du plateau dans le film et à diminuer la hauteur du film au centre du contact, par la diminution de l'abscisse d'entrée du contact. De plus, la diminution de la hauteur du film au centre du contact s'accompagne d'une diminution de la différence entre  $h_0$  et  $h_{\min}$ , ce qui conduit à tendre vers le contact hertzien sec lorsque la quantité d'huile tend vers zéro.



**Fig. 6.15** Distribution des pressions et épaisseurs de films d'huile, pour plusieurs abscisses d'entrée, du contact PVE de portance  $P_y = 35 \text{ daN/cm}$

Cette diminution correspond de fait à la baisse de hauteur du pic EHD, jusqu'à sa disparition lors de l'absence de toute trace de lubrifiant. A ce stade, il est déjà clair que l'appauvrissement de l'alimentation du contact conduira à une diminution de la puissance consommée par cisaillement dans le film.

### 6.3.3 Hauteur centrale du film en fonction de la charge

Il ne s'agit pas pour nous de vérifier tous les résultats de la littérature, cependant, nous nous devons de comparer les résultats numériques que nous obtenons avec ceux d'autres auteurs de référence.

Ainsi, la hauteur du film d'huile au centre du contact est une grandeur qui a été exprimée sous forme théorique au chapitre 4, et nous allons comparer les résultats que nous avons obtenus avec ceux de Grubin et Cheng exprimés respectivement par les relations (4.151) et (4.152).

En introduisant, dans les relations citées, les valeurs numériques de notre cas test, on obtient

- Grubin : 
$$h_o = 5,895 \cdot 10^{-3} \cdot P_y^{-0.091} \quad (6.10)$$

- Cheng : 
$$h_o = 5.388 \cdot 10^{-3} \cdot P_y^{-0.11} \quad (6.11)$$

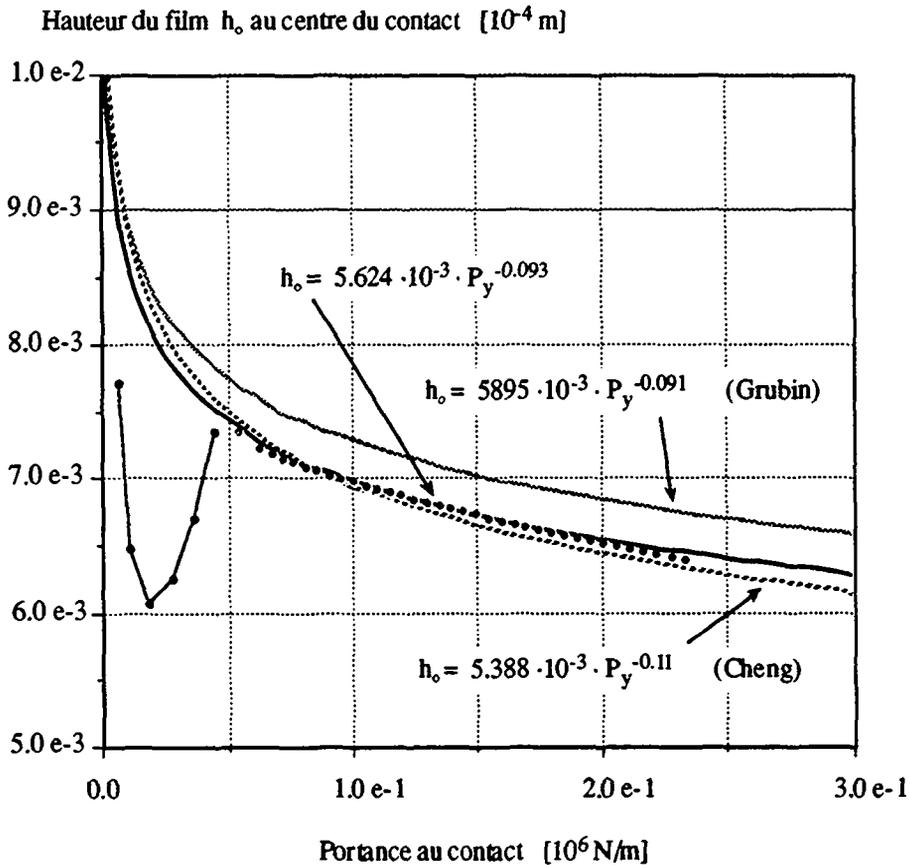
En ce qui nous concerne, avec notre abscisse d'entrée à 2 mm en amont du centre du contact, les résultats obtenus en régime riche sont reportés sur la figure 6.16. La relation de curve fitting que nous obtenons pour la partie typiquement EHD s'écrit :

$$h_o = 5.624 \cdot 10^{-3} \cdot P_y^{-0.093} \quad (6.12)$$

Remarquons que l'allure un peu particulière de  $h_o$  en fonction de  $P_y$  pour les valeurs faibles de la charge s'explique par le fait que le convergent de sortie du contact, qui définit en EHD par la hauteur appelée  $h_{\min}$ , passe au centre du contact; ce qui se voit très bien sur la figure 6.14 par exemple.

Les résultats que nous obtenons sont tout à fait comparables à ceux ayant été obtenus par des techniques très différentes. La différence principale provient du fait que les résultats exprimés par (6.10) et (6.11) sont relatifs à un roulement pur dans tout le contact.

En ce qui nous concerne, nous avons un état mixte, qui se rapproche beaucoup plus de la réalité, avec un glissement quasi nul au centre du contact, et qui augmente progressivement vers l'amont de celui-ci, jusqu'à atteindre 100 % pour une abscisse égale au rayon en valeur absolue.



**Fig. 6.16 :** Hauteur du film  $h_0$  en fonction de la charge en régime PVE riche.

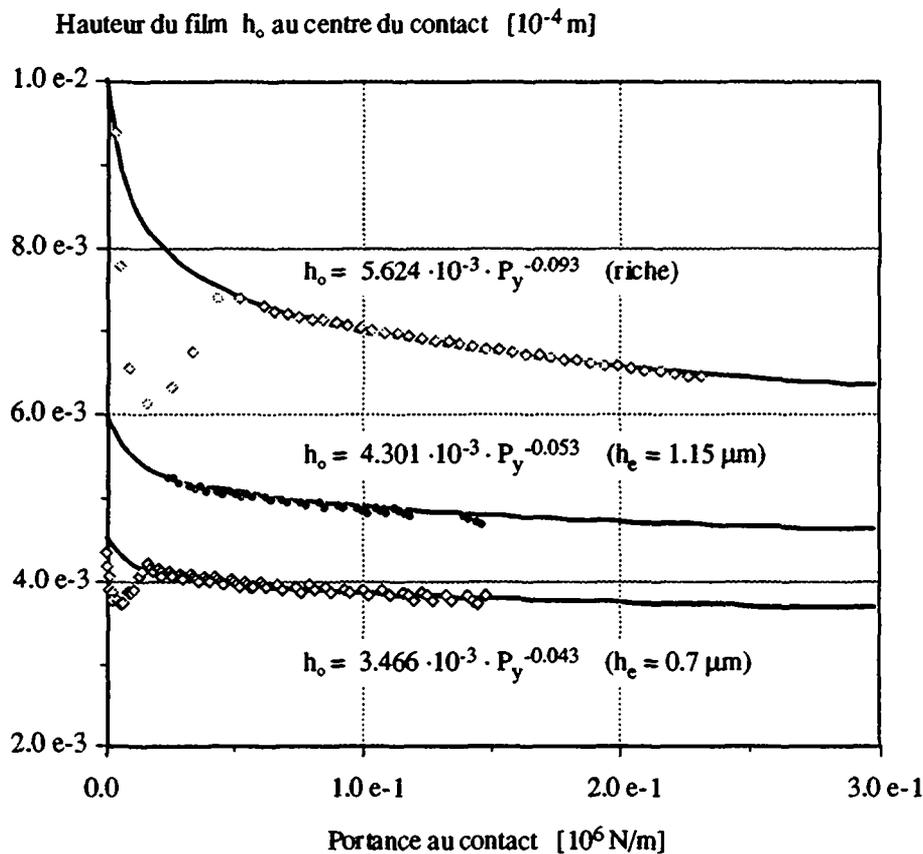
Par ailleurs, la loi de viscosité que nous avons adoptée n'est pas exponentielle, mais est remplacée par son développement limité du troisième ordre. Il faut cependant bien reconnaître que, malgré ces particularités, l'erreur relative entre les résultats de Cheng et les nôtres est inférieure à 2 % dans la gamme des charges considérée. Elle avoisinerait les 4 % pour des charges maximales admises de l'ordre de  $10^6$  N/m.

### 6.3.4 Influence de la quantité d'huile sur la hauteur au centre du contact

Reprenant les résultats isothermes que nous avons obtenus avec une alimentation riche, mais aussi avec une alimentation limitée, à frontière d'entrée variable, nous avons exprimé la hauteur du film au centre du contact  $h_o$  en fonction de la portance au contact pour trois conditions d'alimentation du contact :

- la condition riche  $x_e = -2 \text{ mm}$
- une condition avec  $h_e = 1.15 \text{ }\mu\text{m}$
- une condition avec  $h_e = 0.70 \text{ }\mu\text{m}$

Les trois courbes sont reportées à la figure 6.17, de même que les expressions obtenues par curve-fitting. La courbe correspondant à la condition d'alimentation riche est bien évidemment la même que celle présentée à la figure 6.16.



**Fig. 6.17 : Hauteur de film en fonction de la portance pour diverses conditions d'alimentation du contact.**

On remarquera que la variation de  $h_0$  en fonction de la charge diminue lors de l'appauvrissement du contact, ce qui se traduit par la diminution de l'exposant affectant la charge.

Nous pouvons faire une comparaison de nos résultats avec ceux de Dalmaz (1979), que nous avons présentés à la figure 4.27.

Considérons une valeur de portance

$$P_y = 0.1 \cdot 10^6 \text{ N/m} \quad (6.13)$$

nous obtenons, à la figure 6.17, les valeurs de hauteur au centre du contact

$$h_0^\infty = 6.98 \cdot 10^{-3} \text{ dmm} \quad (6.14)$$

pour le régime riche, et

$$h_0 = 3.86 \cdot 10^{-3} \text{ dmm} \quad (6.15)$$

pour le régime où le film d'huile s'établit lorsque la hauteur entre les corps devient inférieure ou égale à  $0.7 \mu\text{m}$ , soit, pour cette portance, à l'abscisse

$$x_e = -1.10 \text{ dmm} \quad (6.16)$$

Le rapport  $\beta = h_0/h_0^\infty$  que nous obtenons vaut alors

$$\beta = 0.553 \quad (6.17)$$

Pour nous référer à la figure 4.27, nous devons encore calculer la valeur de la variable  $\chi_e$  donnée par (4.163).

Avec nos données numériques, la demi-largeur du contact hertzien vaut

$$b = 0.761 \text{ dmm} \quad (6.18)$$

et la variable adimensionnelle correspond à la relation

$$\chi_e = 1.027 \cdot x_e \quad (6.19)$$

Avec la valeur (6.16) de  $x_e$ , on obtient, en valeur absolue :

$$\chi_e = 1.13 \quad (6.20)$$

Pour cette valeur de  $\chi_e$ , la courbe en trait plein de la figure (4.27) donne un rapport  $\beta$  qui se situe à une valeur très voisine de

$$\beta = 0.8 \quad (6.21)$$

Suite à cette comparaison, force est de constater que nos résultats donnent une dépendance beaucoup plus importante de la hauteur du plateau du film fluide en fonction de la quantité d'huile alimentant le contact. Il nous est très difficile de donner une raison à cette importante différence. Nous pouvons cependant imaginer à nouveau que les conditions de roulement proches de la réalité peuvent avoir une influence, mais il n'est absolument pas sûr que cela suffise à expliquer un pareil écart.

Nous n'avons pas cherché à tracer une courbe complète, correspondant à la courbe de la figure 4.27, car cela nous aurait demandé bon nombre de calculs pour un résultat qui nous apparaît comme secondaire, d'autant plus que nous ne sommes pas persuadés que la manière de l'exprimer, correspondant à la figure (4.27), soit la plus pratique d'emploi : à l'évidence,  $x_e$  ne peut pas être inférieur à  $b$ , dans un cas réel, ce qui n'est pas inclus dans (4.163).

### 6.3.5 Consommation de puissance en fonction de la portance

Dans notre étude théorique du régime IVR, nous avons établi une relation permettant de calculer la consommation de puissance en fonction de la portance. On trouve cette relation dans le tableau récapitulatif de la figure (4.15).

Dans le cas du régime riche que nous allons tout d'abord examiner, la relation IVR s'écrit

$$\dot{E} = 1.4705 P_y^{1/2} U \sqrt{\mu_o U} \quad (6.22)$$

Dans le cas numérique que nous avons étudié par éléments finis, cette relation devient

$$\dot{E} = 7.03 \cdot P_y^{0.5} \quad (6.23)$$

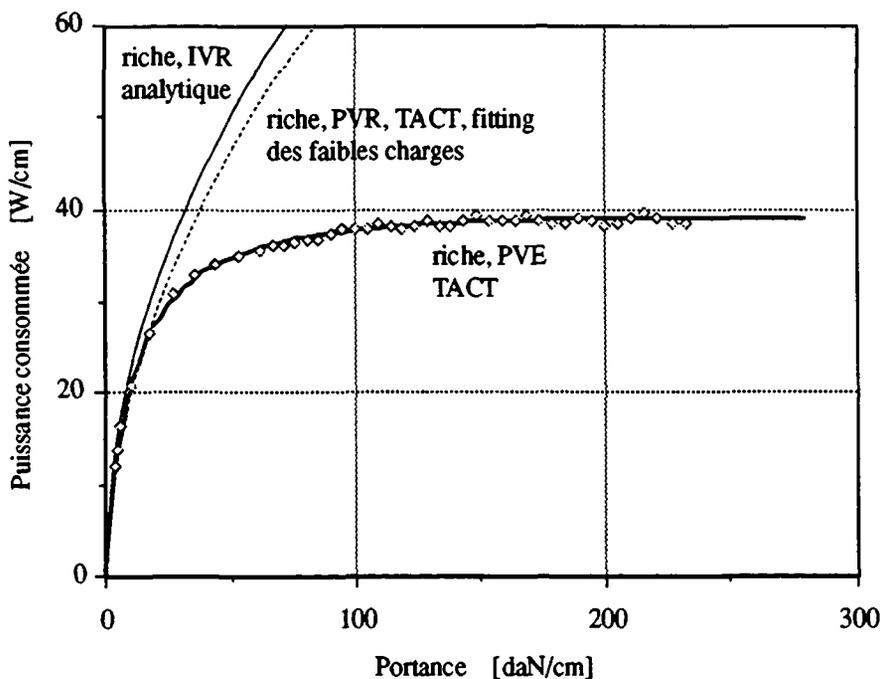
Nous avons reporté sur la figure 6.18 les différentes valeurs que nous avons calculées en régime PVR, ainsi que la fonction (6.23) ci-dessus. On remarque que cette fonction est très proche du cas PVR dans les petites valeurs de portance, pour lesquelles la pression reste

relativement basse et influence faiblement la valeur de la viscosité. La courbe obtenue par calcul PVR est située à droite de celle, théorique, obtenue en régime IVR, ce qui est normal dans la mesure où la piézoviscosité a une influence plus importante sur la portance que sur la dissipation.

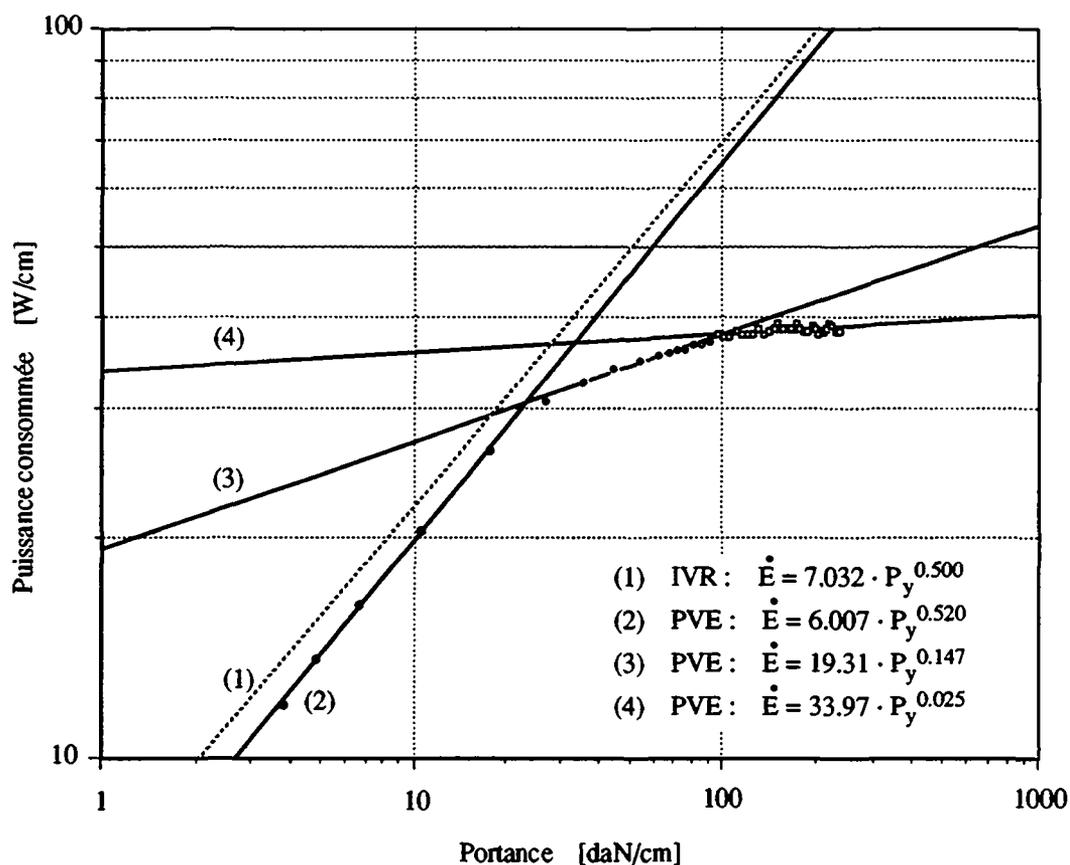
Il est assez visible que l'on peut définir en gros trois zones de charges dans lesquelles l'approximation de la dissipation est simplifiée. La première zone est celle des faibles portances où une approximation IVR s'avère proche de la réalité.

La deuxième zone est une zone de transition où la déformation des solides et la piézoviscosité jouent toutes deux un rôle important.

La dernière zone, celle des fortes charges, correspond à un domaine où la dissipation ne dépend pour ainsi dire plus de la charge. Il est plus parlant de considérer ces trois zones dans un diagramme logarithmique, comme c'est le cas à la figure 6.19. On remarque de manière tout à fait distincte l'écart entre la courbe IVR théorique (1) et les résultats d'un curve fitting sur les valeurs obtenues par TACT dans le cas des faibles charges.



**Fig. 6.18 : Consommation de puissance en fonction de la portance en régime riche.**



**Fig. 6.19 : Consommation de puissance en régime PVE riche dans une représentation logarithmique.**

### 6.3.6 Influence des conditions d'alimentation du film sur la consommation de puissance

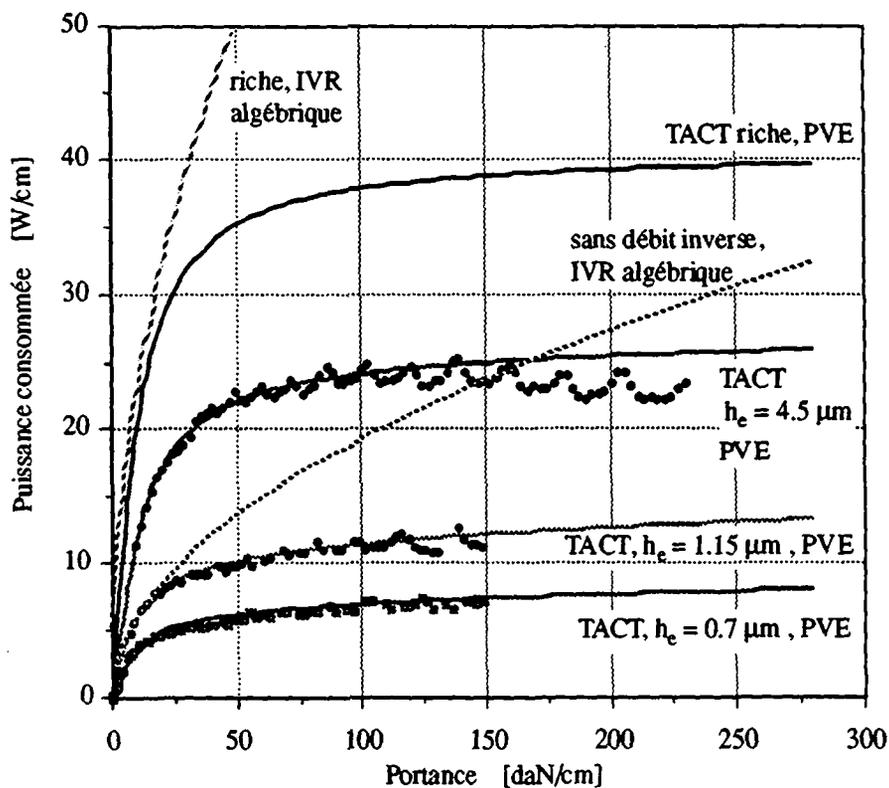
Selon la méthode que nous avons développée pour simuler une quantité d'huile limitée à l'entrée du contact, nous définissons la hauteur à laquelle le film d'huile se forme. L'abscisse d'entrée, elle, varie en fonction de la déformation des solides. La frontière se déplacera, dans ce modèle par éléments finis, au minimum d'un noeud à son proche voisin. Dans l'intervalle, la hauteur spécifiée initialement variera quelque peu, selon la courbure des solides en contact, mais aussi en fonction de la longueur des éléments à l'entrée du contact. Ainsi, nous n'avons pas une hauteur de film tout à fait constante lorsque les conditions de charge du contact varient.

Cette circonstance est bien visible sur la figure 6.20 où nous avons reporté la consommation de puissance en fonction de la portance pour différentes valeurs de hauteur de film à l'entrée. La

variation de la hauteur du film provoque les "oscillations" des courbes reproduites. En fait, nous assistons à un double phénomène à la base de ces oscillations. Comme on vient de le voir, il y a une influence de la non-constance de la hauteur d'entrée, étant donné le déplacement discret de la frontière de formation du film. Si ce phénomène se produit à l'entrée du contact, il se produira naturellement aussi en sortie de contact. De plus, la position du pic EHD et sa hauteur dépendent des conditions de charge. Cette position devra aussi passer d'un noeud du maillage à l'autre de manière discrète. Et lorsque l'abscisse du pic se situe entre deux noeuds, sa hauteur est plus faible et la pression se répartit sur les noeuds immédiatement voisins. Ce phénomène contribue aussi à faire onduler ou osciller la fonction dissipation par rapport à la charge.

Le régime riche que nous avons considéré, avec une abscisse d'entrée  $x_e = -2 \text{ mm}$ , correspond à une hauteur à cet endroit de  $h_e = 340 \mu\text{m}$  environ.

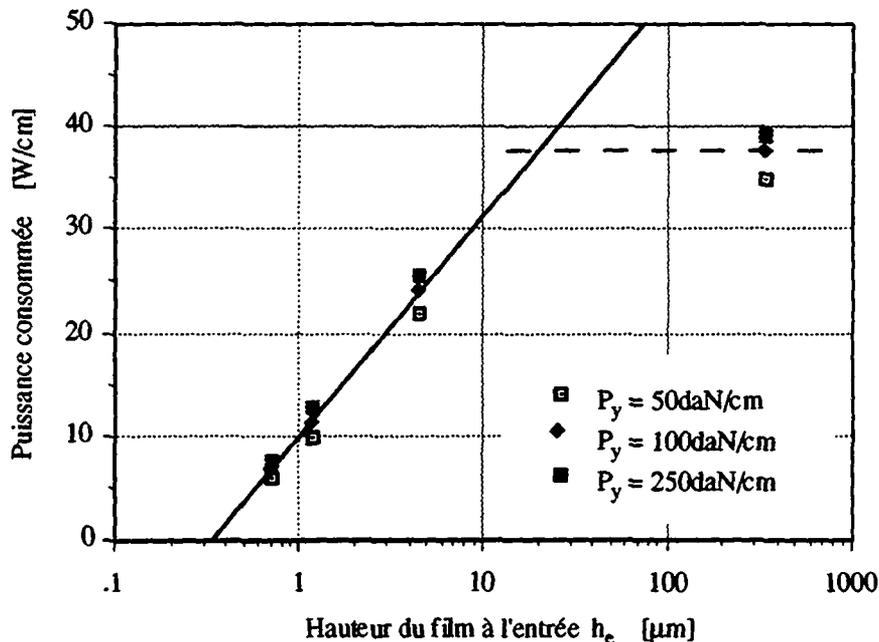
Dans ces conditions, il est normal que l'on ait une petite différence par rapport au régime analytique IVR où l'abscisse d'entrée est à l'infini.



**Fig. 6.20 : Influence de la richesse à l'entrée du contact sur la consommation de puissance.**

On peut constater à la lecture de la figure 6.20 que la diminution de la puissance consommée est très prononcée lorsque l'huile se trouve en quantité limitée à l'entrée. Pour une épaisseur d'huile de  $0.7 \mu\text{m}$  à l'entrée, correspondant par exemple à une épaisseur d'huile de  $0.35 \mu\text{m}$  entraînée par chacune des surfaces, la puissance consommée est divisée par un facteur 5 environ alors que la hauteur du film au centre du contact est divisée environ par 2, comme on peut le voir sur la figure 6.17. Ainsi, toutes conditions égales par ailleurs et en supposant que toute la puissance sert à chauffer le film, on voit que la température du film en régime PVE faiblement lubrifié sera grosso modo divisée par 2.5. Notre approche théorique du chapitre 4 nous avait donné un facteur 1.5 dans le cas IVR envisagé. Cependant, le cas théorique comparait le régime riche au régime "sans débit inverse", qui correspond plutôt à une hauteur à l'entrée du contact  $h_e = 1.15 \mu\text{m}$ . Avec ce dernier cas, la comparaison est presque parfaite.

En reportant la puissance dissipée en fonction de la hauteur du film à l'entrée pour quelques valeurs de la portance, on constate que pour les valeurs faibles de  $h_e$ , la variation de la dissipation est de type logarithmique. Pour des valeurs élevées de cette hauteur, la puissance dissipée s'écarte assez nettement de cette progression, comme le montre la figure 6.21.



**Fig. 6.21 : Puissance dissipée en fonction de la hauteur à l'entrée du contact.**

Ainsi, dans la zone où les surfaces du contact sont relativement parallèles, il semble que l'on pourrait établir assez facilement une relation entre la dissipation et la hauteur au ménisque

d'entrée. Lorsque l'huile présente en amont du contact devient surabondante, la dissipation augmente moins rapidement, ce qui provient du fait que la zone très en amont contribue peu au laminage car les pressions qui y règnent sont très faibles.

### 6.3.7 Conséquences hypothétiques d'une frontière d'entrée fixe

Nous avons tenu à montrer que l'hypothèse d'une frontière fixe à l'amont du contact correspond à des conditions d'alimentation fortement variables pour le contact.

Dans les cas présentés à la figure 6.22, nous avons fixé la frontière d'entrée du film à un noeud du maillage. Ainsi, avec la charge, la déformation des solides a pour conséquence que le contact est progressivement appauvri en lubrifiant. De ce fait, la consommation de puissance décroît progressivement en fonction de l'abscisse d'entrée, jusqu'à une valeur quasi nulle; simultanément la hauteur du film diminue fortement et le pic EHD se déplace vers la sortie du contact en s'affaiblissant.

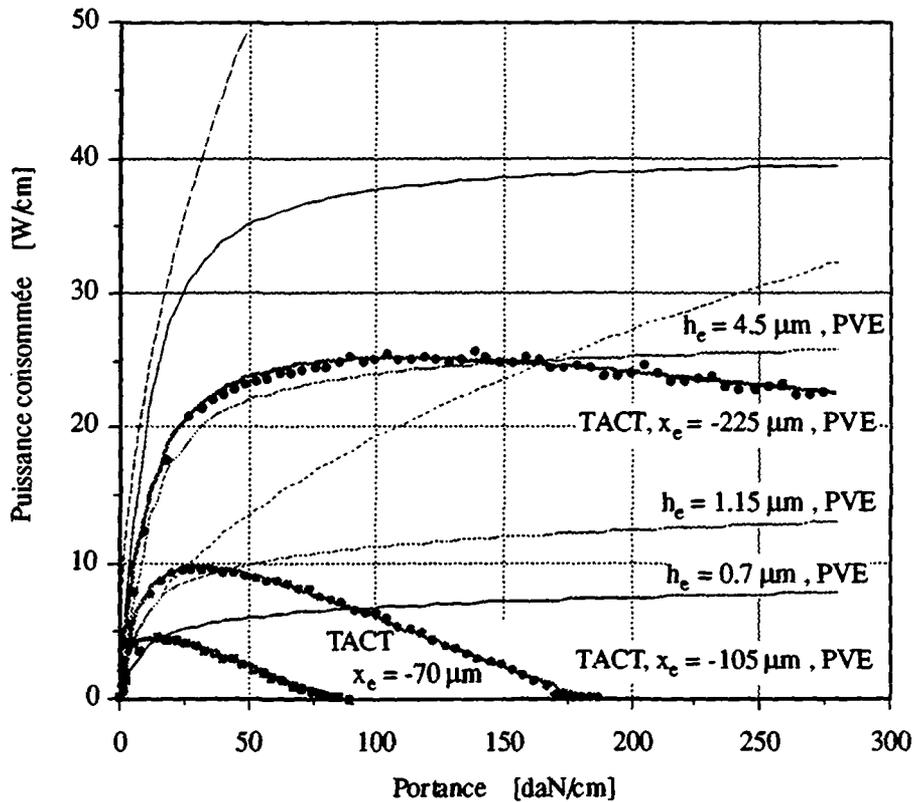
Il est possible de voir sur la figure 6.22 que les maximums des courbes de dissipation correspondent à un régime sans débit inverse mais piézovisqueux et déformable, ce qui ne correspond évidemment pas tout à fait à la courbe IVR en pointillé.

On constatera cependant que les courbes sont parfaitement continues et dérivables.

A ce stade, il est important de remarquer que cette étude de la dissipation en fonction de la charge et des conditions d'alimentation du film n'ont à notre connaissance jamais été présentées ni étudiées comme nous l'avons fait ici. Ces résultats sont pour nous essentiels, car ils fondent scientifiquement des règles pratiques plus ou moins admises mais dont les origines ne sont pas connues.

Cette étude isotherme montre l'intérêt qu'il y a à réduire la quantité d'huile alimentant le contact, dans le but de diminuer la dissipation, donc de diminuer la puissance mécanique transformée en chaleur. Des techniques particulières d'alimentation calibrée des contacts permettraient de diviser par un facteur deux à cinq la puissance dissipée, donc l'énergie calorifique fournie au lubrifiant et aux corps en contact. Si la minimisation de la dissipation augmente les performances d'un palier, il n'en demeure pas moins que la puissance générée, si faible soit-elle, doit être évacuée. En abordant la partie thermoélastohydrodynamique TEHD, nous allons compléter nos premiers résultats par l'influence de la thermique sur le comportement du film.

Le fluide sera ainsi influencé par la chaleur qu'il recevra; c'est ce qu'on appelle le régime thermopiezovisqueux déformable (TVPE).



**Fig. 6.22 : Consommation de puissance en fonction de la portance, dans l'hypothèse de frontière d'entrée du film fixe.**

#### 6.4 REGIME DEFORMABLE GENERAL

Pour pouvoir discuter concrètement des résultats que nous obtenons dans les divers régimes que nous sommes à même de calculer, nous allons considérer notre contact type soumis à une charge donnée, dans des conditions de roulement pur réelles.

L'exemple que nous avons considéré est celui où la charge au contact vaut

$$P = 140 \text{ daN/cm} = 1.4 \cdot 10^4 \text{ N/m} \quad (6.24)$$

ce qui entraîne une pression hertzienne au centre du contact de

$$p_o = 9'900 \text{ bar} \quad (\sim 0.1 \text{ Pa} \cdot 10^{10}) \quad (6.25)$$

et une demi-largeur du contact hertzien

$$b = 0.9 \cdot 10^{-4} \text{ m} \quad (0.9 \text{ dmm}) \quad (6.26)$$

L'exemple choisi n'est pas un contact extrêmement chargé puisque la pression maximale hertzienne n'est que la moitié de celle admissible dans les paliers à corps roulants. Cependant, un tel cas de charge correspond aux sollicitations que l'on rencontre généralement dans les paliers des broches de machines-outils préchargés par une force pure. On sait que les charges sur ces paliers sont généralement bien inférieures aux charges nominales.

Les cas présentés et discutés dans les trois premiers paragraphes ci-dessous sont au nombre de six et correspondent aux régimes suivants :

- contact hertzien, calcul théorique et numérique
- régime isovisqueux, riche (Riche IVE)
- régime piézo-visqueux, riche (Riche PVE)
- régime piézo-visqueux, pauvre, à hauteur d'entrée de film égale à  $0.7 \mu\text{m}$   
(Pauvre PVE  $h_e = 0.7 \mu\text{m}$ )
- régime thermo-piézo-visqueux, riche (Riche, TPVE)
- régime thermo-piézo-visqueux, pauvre, à hauteur d'entrée de film égale à  $0.7 \mu\text{m}$   
(Pauvre TPVE  $h_e = 0.7 \mu\text{m}$ ).

Nous pourrions ainsi mettre en évidence les différentes influences par l'examen des différents régimes étudiés. Précisons encore que le régime thermoélastohydrodynamique présenté est le cas particulier que l'on pourrait dénommer "adiabatique". Dans ce cas, le film d'huile est thermiquement isolé des solides et toute la chaleur produite ne sert qu'à le chauffer. Par rapport à l'approximation isotherme, cette hypothèse adiabate constitue son opposé. Notre but n'est pas, dans ce travail, de déterminer entièrement la modélisation thermique correcte des corps roulants d'un palier, mais de mettre en évidence les différentes influences que nous pouvons rencontrer. C'est pour cette raison que nous limitons notre modélisation pour l'instant à ces cas particuliers.

### 6.4.1 Distributions de pression au contact

- **Contact sec**

Les distributions de pression relatives au contact sec sont représentés en traits mixtes très fins sur la figure 6.23. On constate, comme cela avait été le cas précédemment, que la distribution de pression obtenue par TACT, mis à part les oscillations, présente une allure à tendance "parabolique" alors que la solution théorique est de type elliptique. La pression au centre du contact est surévaluée par TACT d'environ 3 % par rapport à la solution théorique exacte. L'aire de contact est par contre identique pour autant que l'on tienne compte, à l'annulation de la pression, de l'aire tributaire des derniers noeuds en contact.

- **Contact lubrifié**

Les différents cas reportés sur la figure 6.23 montrent que pour une même charge, la consommation de puissance peut fortement fluctuer. Dans le cas présenté, elle varie de 40 W/cm pour le cas riche IVE à 7.2 W/cm pour le cas pauvre PVE, soit presque d'un facteur 6.

Les régimes pauvres, ou à quantité d'huile limitée, ont une abscisse d'entrée qui, pour une hauteur d'entrée identique, ne se situe pas au même noeud dans les deux cas, ce qui est normal, mais à une distance très proche, à l'abscisse  $x_e = -1.2 \cdot 10^{-4}$  m environ.

En ce qui concerne l'entrée du contact, on constate que les cas où la pression est la plus élevée à l'entrée correspondent aussi à ceux dont la puissance dissipée est la plus importante. Ce sont les cas riches IVE et PVE. Dans le cas riche TPVE, la pression s'établit plus tardivement à l'entrée du contact, car la dissipation conduit à une élévation de la température de l'huile qui en diminue la viscosité.

La pression au centre de contact est pour ainsi dire la même pour tous les régimes ayant un pic EHD et un "plateau" dans le profil du film, c'est-à-dire pour tous les cas sauf pour le régime riche IVE. Remarquons dans ce dernier cas l'absence d'oscillations du profil de pression provenant, à notre sens, de l'absence de la circonstance  $dh/dx = 0$  à l'intérieur du film.

A ce stade de notre examen, on doit remarquer que la hauteur du pic EHD est d'autant plus grande que sa position est rapprochée du centre du contact. Dans le cas pauvre TPVE, on constate même une oscillation importante juste avant le pic lui-même. Cette circonstance se rencontre relativement fréquemment dans nos résultats, du fait de la violence du gradient de pression au pic EHD, environ 5'000 bar/micron.

Distribution de pression dans le contact [10+10 Pa]

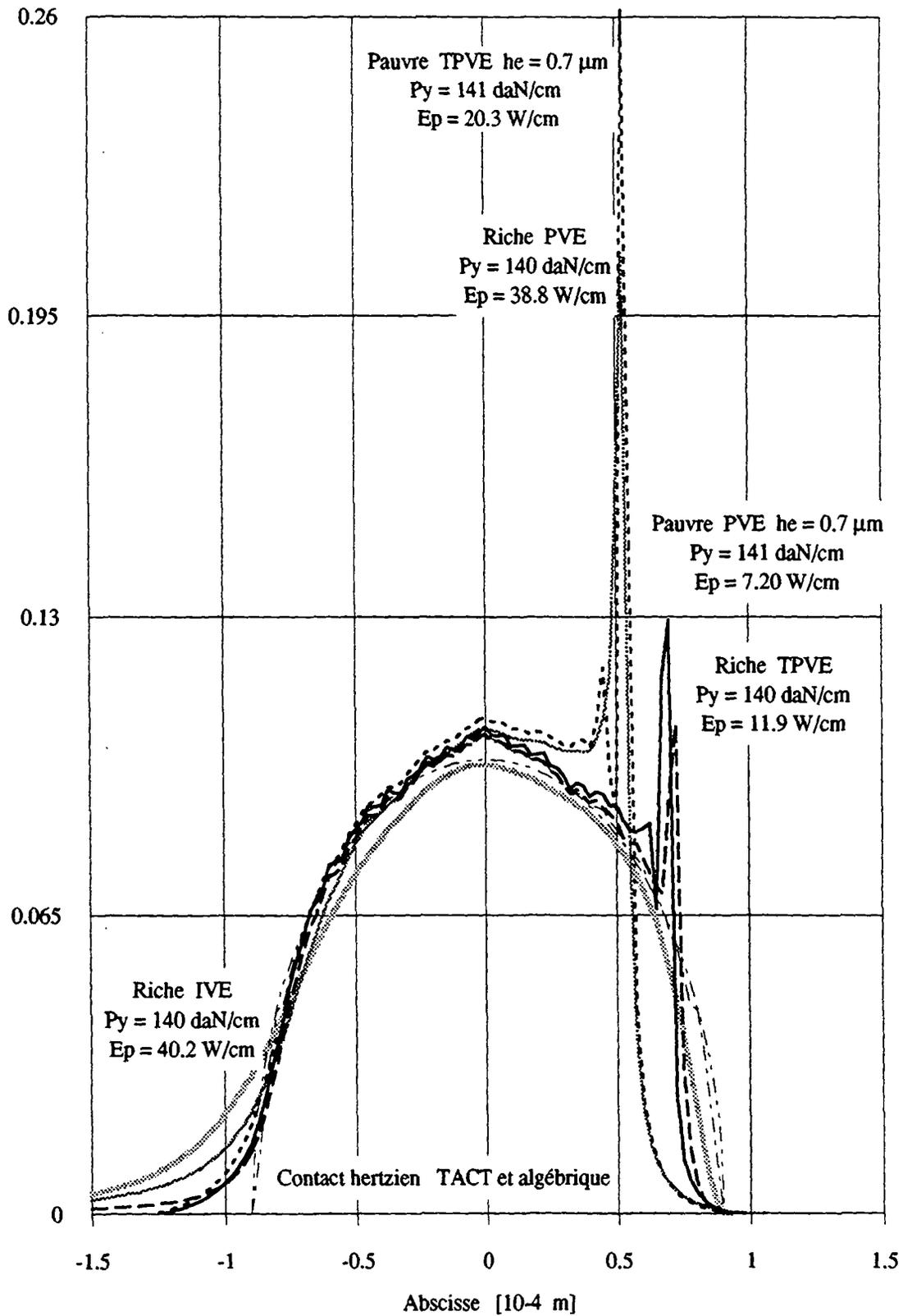


Fig. 6.23 : Distributions de pression relatives à un contact soumis à une charge  $P = 140 \text{ daN/cm}$ .

Le pic EHD est en fait comparable à l'effet d'une force concentrée et l'on sait que ce type de charge constitue un cas extrêmement sévère pour les résolutions numériques discrètes, du fait de la discontinuité qu'il représente. Lorsque le pic se rapproche de la sortie du contact, sa hauteur diminue jusqu'à être inférieure à la valeur de la pression au centre du contact.

Les oscillations du profil de pression dans la zone centrale du contact et celles qui précèdent le pic EHD, influencent de manière tout à fait négligeable les valeurs globales telles que la portance ou la dissipation.

En résumé, nous pouvons établir, pour les profils de pression, les constatations suivantes :

- l'appauvrissement du contact a un effet opposé selon que l'on considère un régime PVE isotherme ou PTVE adiabate :
  - PVE, effet EHD renforcé, pic EHD déplacé vers la droite et en diminution,
  - TPVE, effet EHD diminué, pic EHD déplacé vers la gauche et en augmentation;
- la thermoviscosité a un effet opposé selon que l'on considère un régime riche ou pauvre :
  - riche, effet EHD renforcé, pic EHD déplacé vers la droite et en diminution,
  - pauvre, effet EHD diminué, pic EHD déplacé vers la gauche et en augmentation.

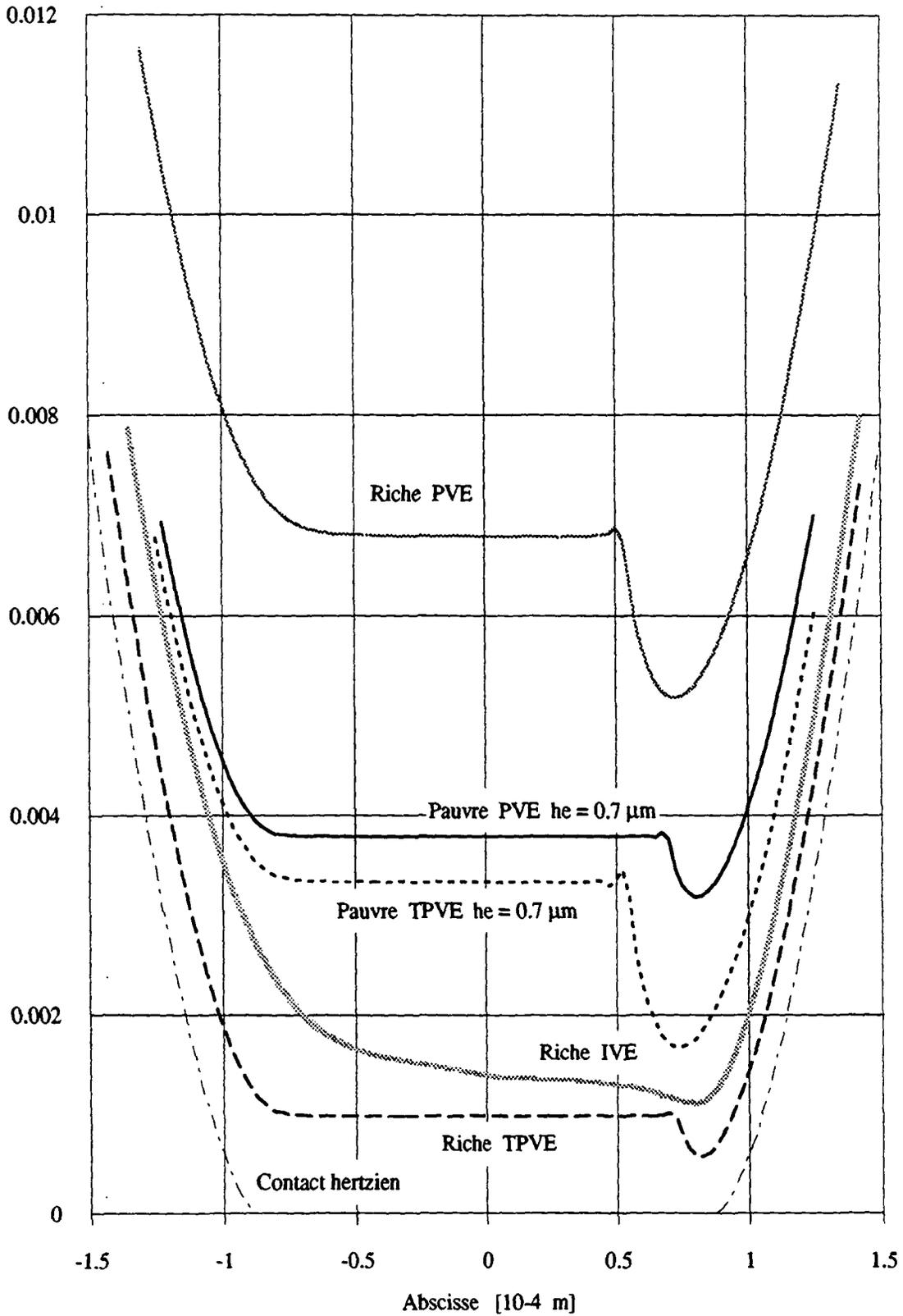
#### 6.4.2 Profils du film au contact

Après avoir quelque peu analysé les distributions de pression dans le film en fonction du type de régime, il est utile de s'attarder sur l'allure de la hauteur du film dans ces différents cas.

La figure 6.24 montre que la hauteur du film au centre du contact et la hauteur minimale du film ne sont pas seulement liées à la richesse du contact. En effet, les cas extrêmes où les hauteurs de film sont maximale et minimale sont tous deux des cas où l'alimentation du contact est riche.

Comme nous l'avons déjà dit, le cas IVE ne présente pas de domaine où la hauteur du film est constante. Dans ce cas, la viscosité n'augmentant pas avec la pression, la hauteur du film est en moyenne assez faible.

Epaisseur du film [10<sup>-4</sup> m]



**Fig. 6.24 : Hauteurs des films d'huile relatives à un contact soumis à une charge  $P = 140$  daN/cm.**

Les relations de Cheng ou Grubin (4.152) ou (4.151) ne sont dans ce cas plus valables puisqu'elles donneraient une valeur nulle pour  $h_o$ . L'examen de ces relations, cependant, montre bien que la hauteur du film au centre du contact évolue dans le même sens que la viscosité.

Pour ce qui est des autres cas, on constate que, dans des circonstances identiques, les cas thermopiezovisqueux présentent des hauteurs de film plus faibles que les cas piézovisqueux; la dissipation fait monter la température, donc baisser la viscosité moyenne des cas TPVE. En régime riche, cet effet est très prononcé du fait de la dissipation importante à l'entrée du contact, et la hauteur du plateau  $h_o$  est environ sept fois plus faible en régime TPVE qu'en régime PVE. Lorsque les conditions d'entrée du film ne permettent pas un échauffement aussi important, ce qui est le cas des régimes pauvres, la différence des hauteurs de film au plateau est beaucoup moins marquée.

Il est aussi caractéristique que la thermoviscosité a pour conséquence de marquer beaucoup plus nettement la différence entre  $h_o$  et  $h_{min}$ . Cependant cette différence est aussi liée de manière très distincte à la valeur absolue de  $h_o$ . Certains auteurs (Johnson, 1985) affirment par exemple que l'on peut admettre que  $h_{min}$  est une proportion de  $h_o$  en tout cas dans une approche isotherme. Si l'on étend cette approche au régime "adiabate", on pourrait dire, en résumé et avec des nuances en fonction de l'alimentation du contact :

- régime isotherme :  $h_{min} \cong 0.8 h_o$
- régime adiabate :  $h_{min} \cong 0.5 h_o$

On peut résumer les influences sur la hauteur du film d'huile de la manière suivante :

- l'appauvrissement du contact a un effet inverse selon que l'on considère un régime PVE isotherme ou TPVE adiabate :
  - PVE,  $h_o$  diminue et  $\Delta h = h_o - h_{min}$  diminue aussi,
  - TPVE,  $h_o$  augmente et  $\Delta h$  augmente;
- la thermoviscosité a un effet inverse selon que l'on considère un régime riche ou pauvre :
  - riche,  $h_o$  et  $\Delta h$  diminuent,
  - pauvre,  $h_o$  diminue, mais  $\Delta h$  augmente

### 6.4.3 Distributions de température dans une hypothèse "adiabate"

Nous avons déjà dû parler des aspects thermiques dans le film pour en justifier des hauteurs. Il est bien clair que les trois diagrammes  $p(x)$ ,  $h(x)$  et  $T(x)$  sont complémentaires pour l'étude comparée.

L'examen des distributions de température montre que le régime IVE conduit à des températures extrêmement élevées. L'absence de plateau dans le film provoque un laminage important dans un film très mince, du fait de la faible viscosité, non influencée par la pression. Il est bien clair que la diminution de la quantité d'huile à l'entrée amènerait une diminution sensible de l'élévation de température.

En ce qui concerne les autres régimes, on constate immédiatement que la richesse du contact a une influence déterminante sur la température au centre du contact, dans la partie à hauteur constante. Par contre, la température en sortie de contact n'est pas directement liée à celle régnant au centre. Pour l'élévation de température en sortie de contact, c'est la hauteur du pic EHD qui est déterminante, ou la différence entre la hauteur du film au plateau et la hauteur minimale. Ainsi, la thermoviscosité a tendance à provoquer une augmentation de l'élévation de température en sortie de contact.

En résumé, pour l'élévation de température dans le film, on peut faire les constatations suivantes :

- l'appauvrissement du contact a les effets suivants selon le régime considéré :
  - PVE,  $T_o$  diminue et  $\Delta T = T_s - T_o$  diminue,
  - TVPE,  $T_o$  diminue mais  $\Delta T$  augmente;
- la thermoviscosité provoque les modifications suivantes :
  - riche,  $T_o$  augmente,  $\Delta T$  augmente peu,
  - pauvre,  $T_o$  augmente,  $\Delta T$  augmente beaucoup.

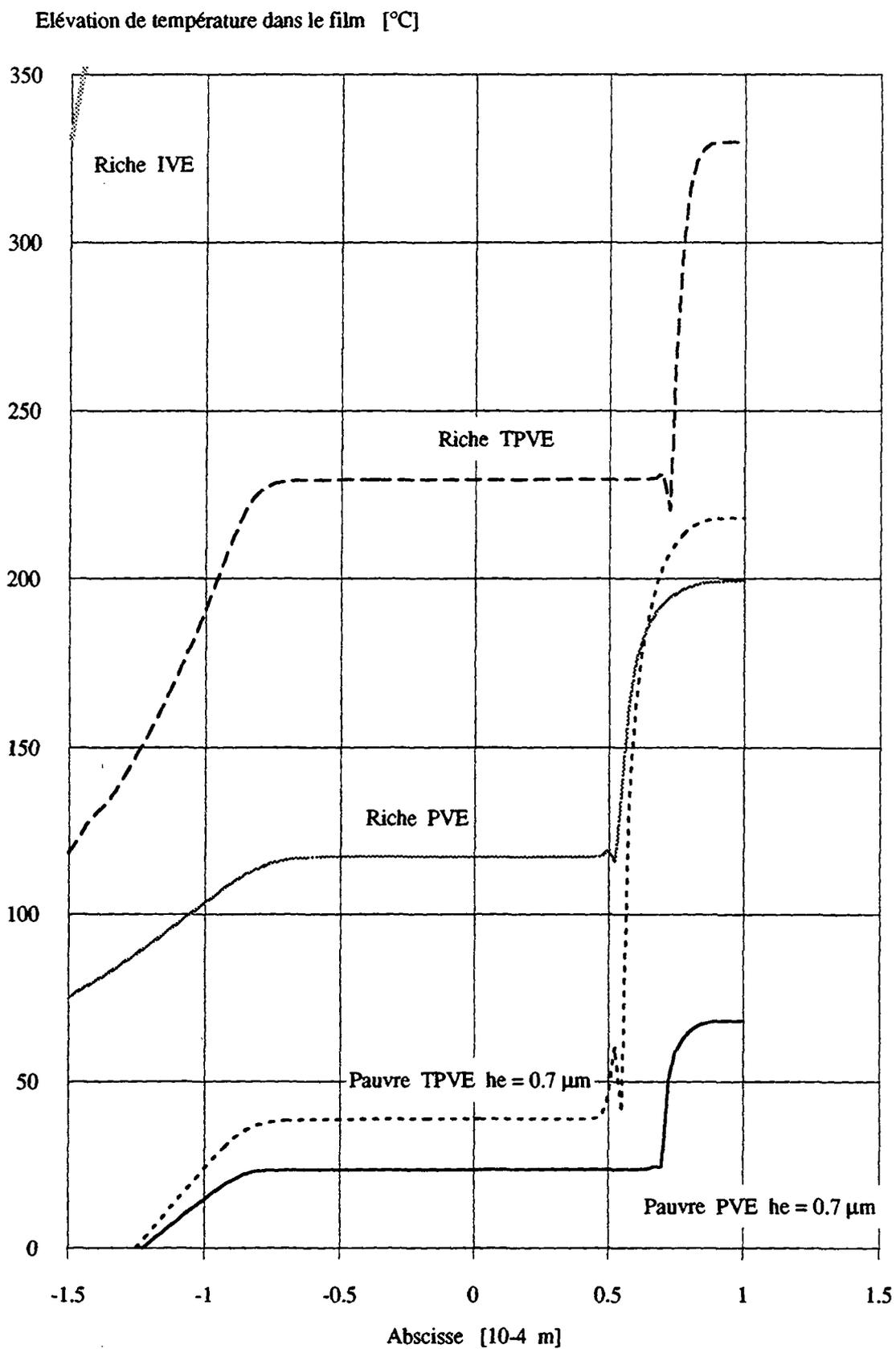


Fig. 6.25 : Distribution de température dans le film considéré comme adiabate.

#### 6.4.4 Calcul de la dissipation par le couple opposé au roulement

La particularité, présentée au chapitre 4 et exprimée par la relation 4.58, selon laquelle la dissipation peut, en roulement pur, être calculée au moyen du couple opposé au roulement, créé par la distribution de pression par rapport au centre instantané de rotation, est reprise ici afin d'étudier sa validité dans des cas quelconques déformables.

Pour chacun des exemples de distribution de pression présentés à la figure 6.23, nous calculerons la dissipation par l'intermédiaire du couple opposé au roulement afin de le comparer à la valeur obtenue numériquement par TACT. Pour calculer ce couple, nous partirons du profil de pression obtenu numériquement par TACT, soit  $p(x)$ .

Le couple opposé au roulement est exprimé par la relation suivante lorsque le centre instantané de rotation se trouve à l'origine des axes

$$C = - \int_{x_e}^{x_s} x p(x) dx \quad (6.27)$$

Connaissant la distribution  $p(x)$  par TACT, on peut aisément l'intégrer numériquement et on obtient la fonction portance  $P_y(x)$ ,

$$P_y(x) = \int p(x) dx \quad (6.28)$$

dont la portance  $P_y$  est la valeur définie par les bornes d'intégration

$$P_y = \int_{x_e}^{x_s} p(x) dx \quad (6.29)$$

Définissons la fonction  $\mathbb{P}_y(x)$ , correspondant à la primitive de  $P_y(x)$ , que l'on peut obtenir par une deuxième intégration numérique de la fonction de pression  $p(x)$

$$\mathbb{P}_y(x) = \int P_y(x) dx = \int \left\{ \int p(x) dx \right\} dx \quad (6.30)$$

La valeur correspondant à l'intégration sur toute la longueur du film sera définie par

$$\mathbb{P}_y(x) = \int_{x_e}^{x_s} P_y(x) dx = \int_{x_e}^{x_s} \left\{ \int_{x_e}^{x_s} p(x) dx \right\} dx \quad (6.31)$$

Avec les définitions (6.29) et (6.31), l'intégration par parties du couple opposé au roulement (6.27) peut être effectuée et donne

$$C = - \int_{x_e}^{x_s} x p(x) dx = - \left[ x \cdot P_y(x) - \mathbb{P}_y(x) \right]_{x_e}^{x_s} \quad (6.32)$$

Comme par ailleurs on connaît les conditions aux limites à l'entrée du contact

$$x = x_e \quad p(x_e) = P_y(x_e) = \mathbb{P}_y(x_e) = 0 \quad (6.33)$$

et, à sa sortie,

$$x = x_s \quad p(x_s) = 0 \quad P_y(x_s) = P_y \quad \mathbb{P}_y(x_s) = \mathbb{P}_y \quad (6.34)$$

le couple opposé au roulement prend la forme finale

$$C = \mathbb{P}_y - x_s \cdot P_y \quad (6.35)$$

En effectuant les calculs de couple, puis de la dissipation par

$$\dot{E} = C \cdot \omega = C \cdot U/2R \quad (6.36)$$

pour tous les cas présentés à la figure 6.23, nous obtenons les valeurs présentées dans le tableau de la figure 6.26. On constate la qualité des résultats obtenus qui se situent dans une fourchette de  $\pm 1$  % par rapport aux résultats de TACT.

Nous avons là la confirmation définitive de la qualité de l'approximation définie par (6.36) pour le calcul de la dissipation, quel que soit le régime de lubrification, pour autant que les effets de glissement soient faibles.

Régime de lubrification	IVE riche	PVE riche	PVE pauvre	TPVE riche	TPVE pauvre	
$\dot{E}$ , TACT numérique	40.2	38.8	7.20	11.9	20.3	[W/cm]
$\dot{E} = C \cdot U / 2R$ théorique	40.3	39.0	7.17	12.0	20.1	[W/cm]
erreur relative	0.25	0.52	-0.42	0.84	-0.99	%

**Fig. 6.26 : Tableau comparatif des puissances consommées, calculées par TACT et par le couple opposé au roulement, pour les cas de la figure 6.23.**

#### 6.4.5 Validation de la condition de roulement pur

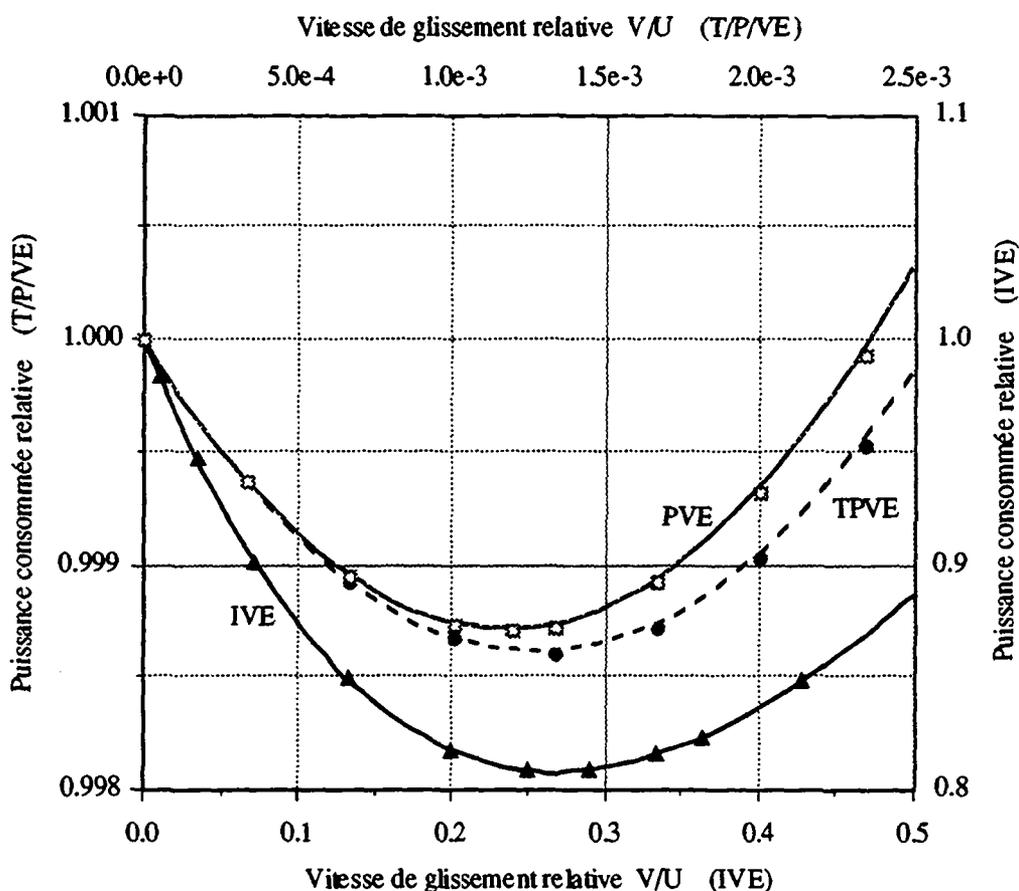
Nous avons vu au chapitre 4 d'abord, puis au paragraphe 6.2.2, l'évolution de la dissipation en fonction de la vitesse de glissement pour une vitesse constante de l'une des surfaces en mouvement,  $U_1$  par exemple. Nous avons montré que l'état d'équilibre d'un corps roulant, dans un palier réel, entraîné par la bague intérieure et soumis aux différentes résultantes de pression, admet des conditions cinématiques qui correspondent au minimum de la dissipation.

En régime IVR et PVR, la figure 6.11 a confirmé numériquement que cet équilibre correspondait à un glissement d'environ 70 %, confirmant ainsi les résultats théoriques du chapitre 4. Le régime TPVR entraînait, lui, un équilibre pour un glissement légèrement supérieur à 100 %, ce qui implique par exemple une rotation quasi nulle de la cage d'un roulement.

Nous complétons ici cette étude par l'analyse des cas déformables soumis à des conditions de charge correspondant à celles de la figure 6.23.

Nous obtenons des minimums de la dissipation qui, illustrés à la figure 6.27, se situent aux valeurs suivantes de glissement pour des conditions d'alimentation riches :

IVE	~ 27 %	de glissement relatif	V/U
PVE	~ 1.2 ‰	de glissement relatif	V/U
TPVE	~ 1.3 ‰	de glissement relatif	V/U



**Fig. 6.27 : Dissipation relative en fonction du glissement pour les différents régimes déformables riches de la figure 6.23.**

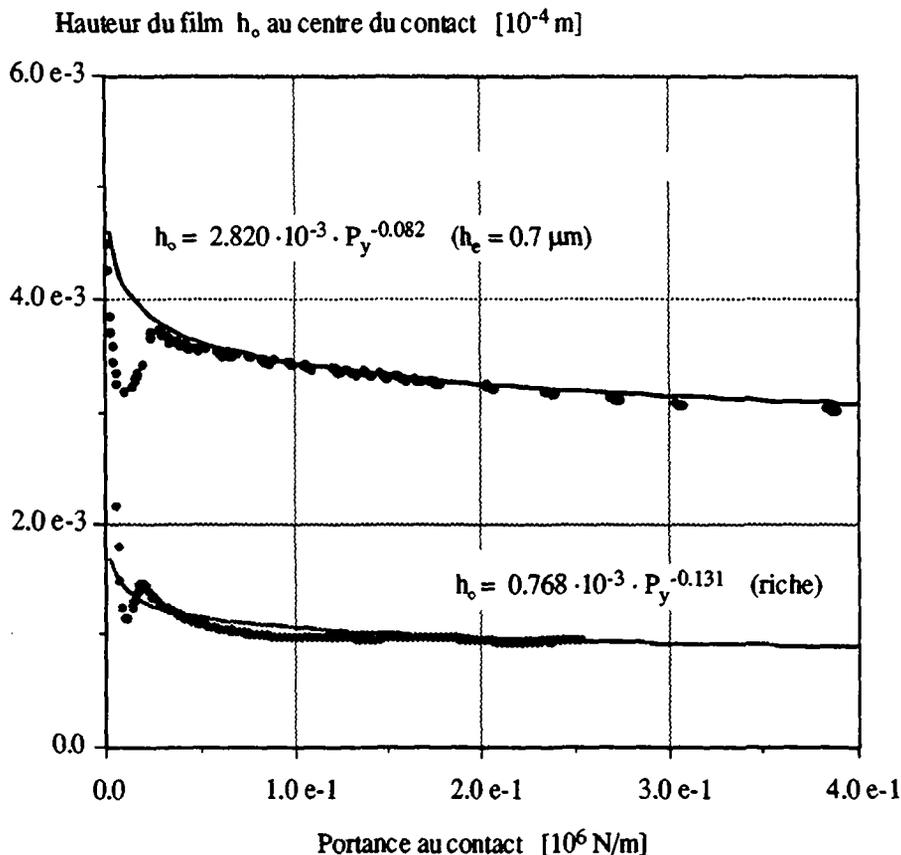
Les valeurs de glissement très faibles, qui correspondent au minimum de la dissipation, indiquent bien que, dans la réalité, les corps roulants tournent à des vitesses très proches du roulement idéal – c'est-à-dire correspondant à un fonctionnement en train épicycloïdal – d'autant plus que l'appauvrissement du contact tend à diminuer encore la valeur de ce glissement que l'on peut qualifier d'optimal.

Notre hypothèse de départ qui considère du roulement pur au centre du contact, était donc tout à fait justifiée, pour le cas des paliers de précision préchargés de machines-outils.

## 6.5 REGIME THERMOPIEZOVISQUEUX DEFORMABLE ADIABATE

### 6.5.1 Hauteur du film

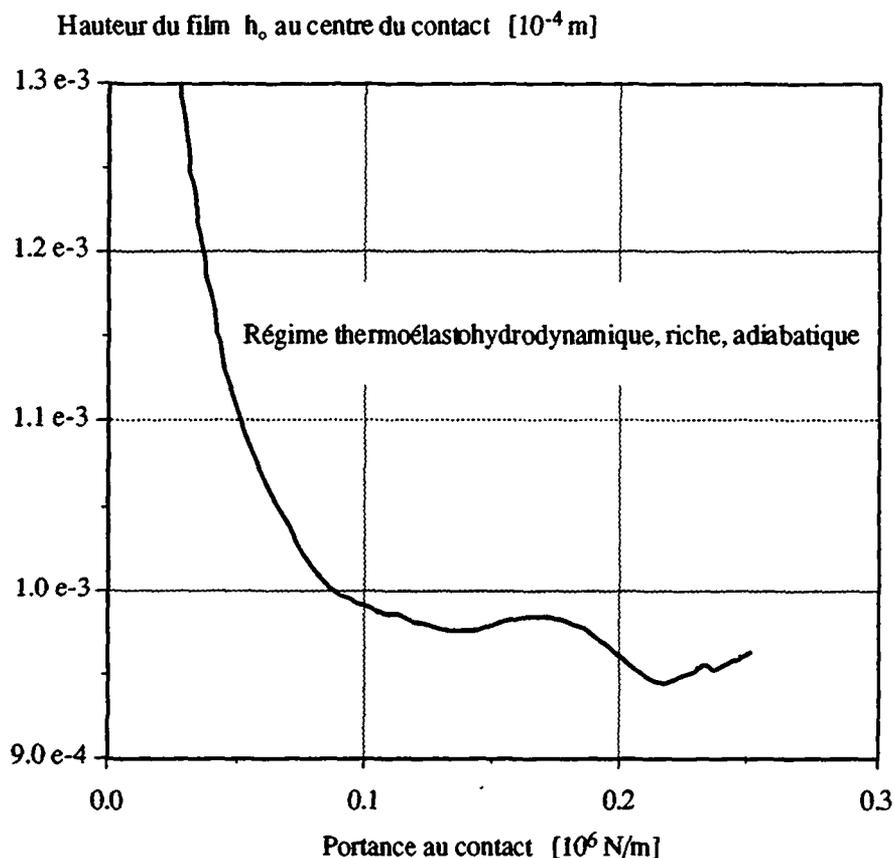
Dans le régime TPVE adiabate, la hauteur  $h_0$  du film au centre du contact évolue, en fonction de la charge, de la même manière que dans les autres régimes, à savoir qu'elle diminue lorsque  $P_y$  augmente, mais avec un exposant très faible. Comme on vient de le voir, la hauteur du film est supérieure, à charge constante, pour un contact faiblement lubrifié. La figure 6.28 montre clairement ce fait, qui est rigoureusement inverse de ce que l'on a constaté pour le régime isotherme à la figure 6.17.



**Fig. 6.28 :** Epaisseur du film au centre du contact en fonction de la portance au contact, en régimes TPVE riche et pauvre.

Ainsi, en fonction de la quantité de chaleur évacuée par les solides, on voit bien que l'on pourra avoir des tendances tout à fait différentes suivant la richesse du contact.

Il est par ailleurs un phénomène que nous n'avons pas élucidé, et qui a aussi trait à l'épaisseur du film en fonction de la charge. En effet, en régime riche, on constate, si l'on regarde de près la courbe  $h_0 = f(P_y)$ , que l'épaisseur du film ne présente pas une évolution régulière. Nous avons amplifié la courbe relative en régime riche de la figure 6.28 et nous la représentons à la figure 6.29.



**Fig. 6.29 : Hauteur du film en fonction de la portance en régime riche TPVE.**

On remarque alors que, pour des portances relativement élevées de paliers à corps roulants, la tendance s'inverse et l'épaisseur du film au centre du contact semble augmenter alors que la charge continue d'augmenter. Nous avons constaté ce phénomène sur les deux modèles de discrétisation à l'entrée du contact, mais nous ne lui avons pas trouvé d'explication satisfaisante. Nous laissons pour l'instant planer le doute sur la réalité de cette observation. En

effet, nous verrons à la section suivante que notre maillage, même raffiné à l'entrée, ne donne pas encore les meilleurs résultats, et il nous semble qu'avant d'avoir vérifié ce fait, nous devons avant tout rester prudents.

Cependant, il n'est pas exclu qu'un phénomène lié à la déformation des corps roulants diminue la zone de laminage, à l'amont du contact, de manière suffisante pour que l'élévation de température au centre du contact n'augmente plus avec la charge, et même diminue, permettant ainsi à la viscosité de conserver des valeurs élevées et d'augmenter la hauteur du film au centre du contact. Cette tendance de  $T_o$  semble visible sur la figure 6.30.

### 6.5.2 Température dans le film

Sur les figures 6.30 et 6.31 sont reportées les températures au centre du contact  $T_o$  et à sa sortie  $T_s$ , en fonction de la charge, pour les deux types d'alimentation que nous avons étudiés.

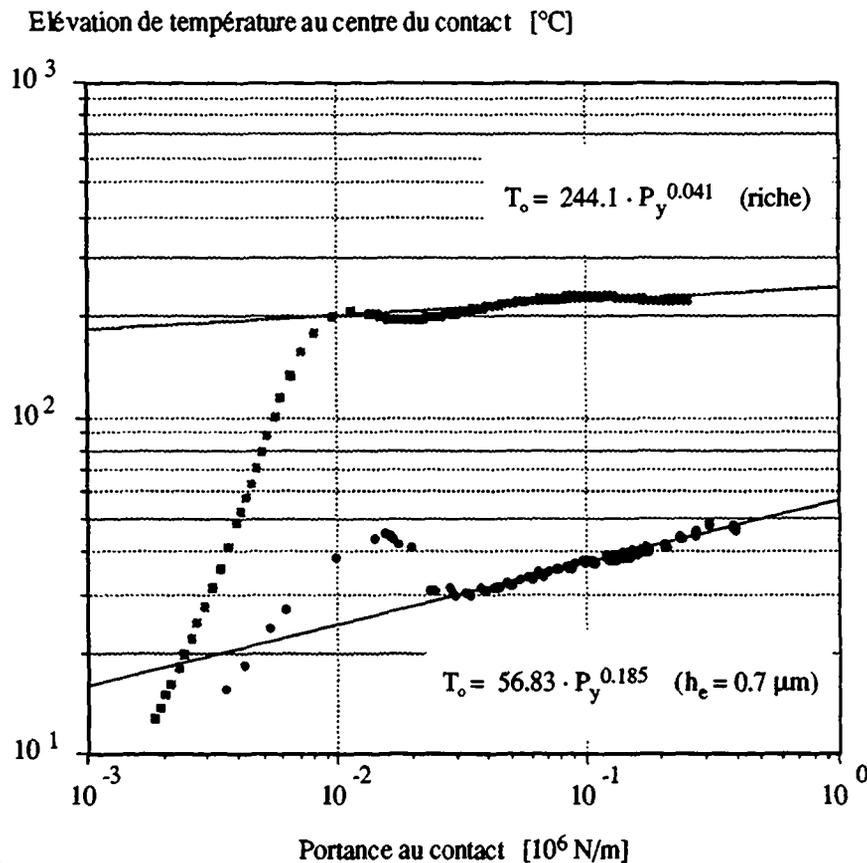


Fig. 6.30 : Elévation de température au centre du contact  $T_o$ , en fonction de la charge au contact TPVE.

On constate que la température au centre du contact est beaucoup plus élevée en régime riche qu'en régime pauvre. Ceci vient du fait que la zone de laminage à l'entrée est très importante et même déterminante pour cette température  $T_o$ . Le régime considéré, avec  $h_e = 0.7 \mu\text{m}$ , présente des élévations de température au centre du contact qui sont environ 4 à 6 fois inférieures à celles obtenues avec un régime riche.

Cette chaleur apparaissant dans une zone importante, car étendue, la transmission de chaleur aux solides sera fortement dépendante de cette température, pour autant que l'huile, en grande quantité, n'arrive pas à refroidir immédiatement les surfaces.

En fonction de la charge appliquée, le contact pauvre voit sa température évoluer plus rapidement que le contact riche. Ceci est d'ailleurs aussi le cas pour la température en sortie de contact. Comme le montre la figure 6.31, on pourrait même trouver, à charge égale, une température de l'huile en sortie de contact plus importante dans le cas d'une alimentation pauvre que dans le cas d'une alimentation riche.

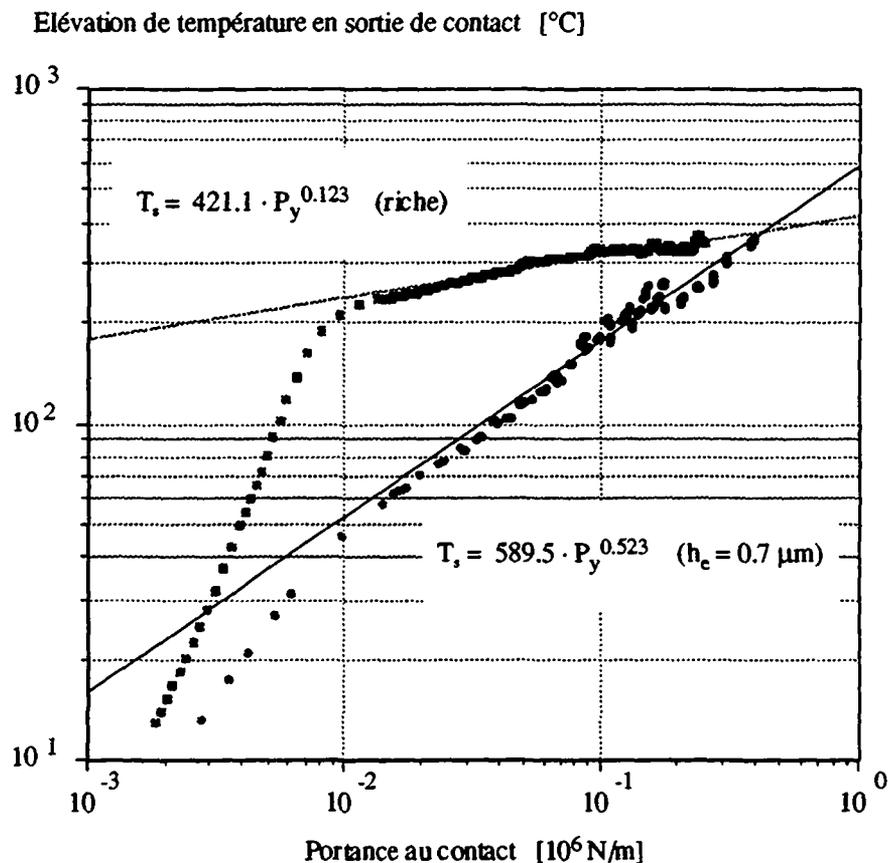


Fig. 6.31 : Elévation de température en sortie de contact.

Ces résultats concernant une hypothèse adiabatique pour le film d'huile ont tendance à contredire les propos que nous avons énoncés dans la partie traitant du contact IVR. Nous voyons ainsi qu'il n'est pas aisé de déterminer des conditions d'alimentation idéales ou optimales pour le contact lubrifié. A l'évidence, les conditions d'alimentation les plus favorables dépendront de la manière dont la chaleur sera ou non évacuée par le film d'huile.

Il est bien clair qu'une partie de la chaleur sera transmise aux surfaces solides, puis à l'air ambiant ou à l'huile présente mais n'ayant pas été laminée par le contact. Tout le problème sera de déterminer quelle part de cette chaleur devrait être transportée par le film et quelles conditions d'alimentation conduiraient à la dissipation, à la température, et aux sollicitations les mieux adaptées à l'obtention de performances élevées.

### **6.5.3 Consommation de puissance en fonction de la charge en régime TPVE adiabatique**

A nouveau, les résultats que nous obtenons en tenant compte de la variation de la viscosité avec la température montrent des tendances inverses de celles que nous avons observées dans l'hypothèse isotherme.

Ainsi, la dissipation se révèle nettement supérieure, en régime faiblement lubrifié, qu'en régime riche, sauf pour les très faibles valeurs de charge au contact.

La figure 6.32 montre ces évolutions en fonction de la portance  $P_y$  du contact.

Alors qu'en régime PVE la dissipation était réduite d'un facteur 5 environ par un appauvrissement du contact, rien de pareil ne se produit en régime TPVE adiabatique. Ainsi, on retrouve ici la conséquence d'un régime moins EHD lorsque l'on diminue la quantité d'huile à l'entrée, c'est-à-dire une augmentation de la dissipation due aux gradients de pressions fortement accentués.

Nous voyons que le régime TPVE à faible quantité d'huile se rapproche singulièrement du régime IVR sans débit inverse. C'est certainement pour cette raison que les résultats que nous avons obtenus expérimentalement en évaluant la dissipation par cette relation théorique ont donné des résultats tout à fait satisfaisants. A nouveau, on doit constater que le problème à venir, très important, sera de déterminer où se situe le cas d'un palier soumis à des conditions d'alimentation réelles entre les hypothèses adiabate et isotherme.

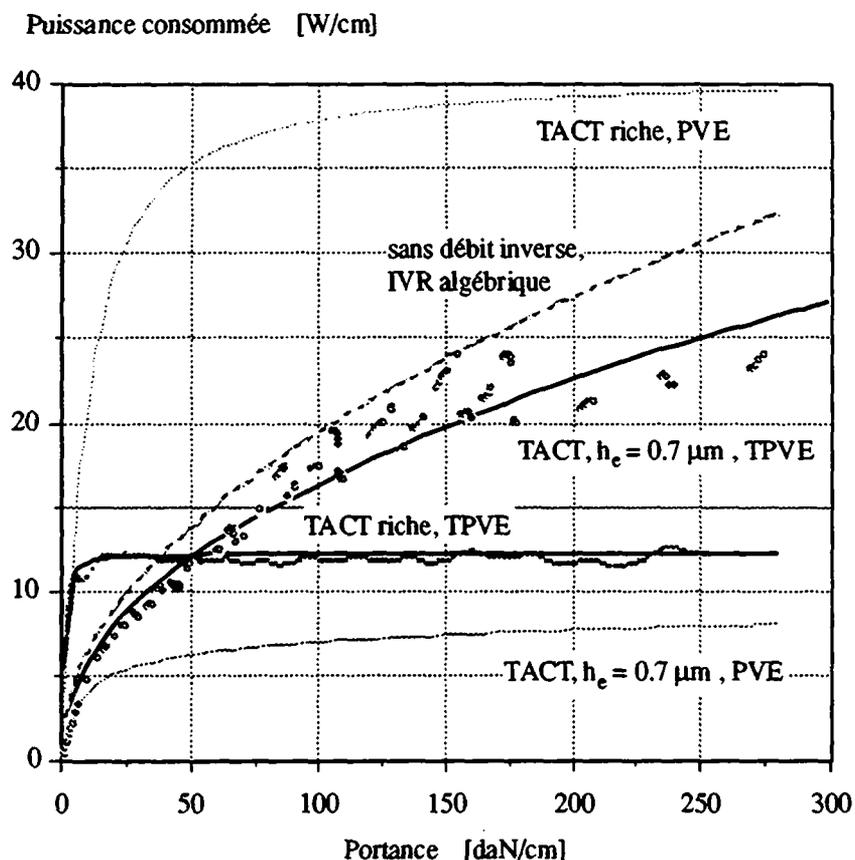


Fig. 6.32 : Dissipation en fonction de la portance en régime TPVE.

Nous n'avons pas résolu ce problème, car il pose toute la question des conditions d'échanges thermiques du corps roulant avec l'extérieur, l'air et/ou l'huile. Ces conditions devront faire l'objet d'une étude détaillée qui sort du cadre du présent travail.

#### 6.5.4 Remarques sur les influences des conditions d'entrée du film

Un des aspects importants de l'adoption d'hypothèses particulières telles que les régimes isotherme ou adiabate est la possible vérification par des considérations théoriques. Dans ces nombreuses vérifications, nous avons dû constater que, si le type de maillage décrit à la figure 6.5 était tout à fait adapté à la résolution du problème isotherme, il l'était beaucoup moins pour le régime non isotherme. Comme nous l'avons déjà dit, l'intégration de l'équation de la chaleur est meilleure avec un maillage raffiné et régulier à l'entrée du contact. Nous avons vérifié que le nouveau maillage montré à la figure 6.7 donnait entière satisfaction en régimes IVR et PVR, de même que dans des conditions de corps déformables mais faiblement chargés. Nous avons par

contre été fortement surpris par le fait que, toutes conditions égales par ailleurs, l'intégration du problème TEHD ne donnait pas satisfaction, pour une raison indéterminée, lorsque la charge devenait importante, correspondant notamment à un plateau marqué du profil du film mince.

Nous n'avons pour l'instant pas élucidé ce problème qui n'est peut-être lié qu'au raffinement du maillage. Cependant, il est assez surprenant qu'il n'apparaisse que pour des charges relativement élevées.

Afin de bien caractériser ce fait, nous avons analysé sept cas de contact, de charge ou portance pour ainsi dire égale, mais comportant des différences dans les maillages et/ou les conditions d'alimentation.

La portance au contact, pour l'ensemble des cas, est comprise entre

$$P_y = 195 \text{ [daN/cm]} \quad \text{et} \quad P_y = 203 \text{ [daN/cm]} \quad (6.37)$$

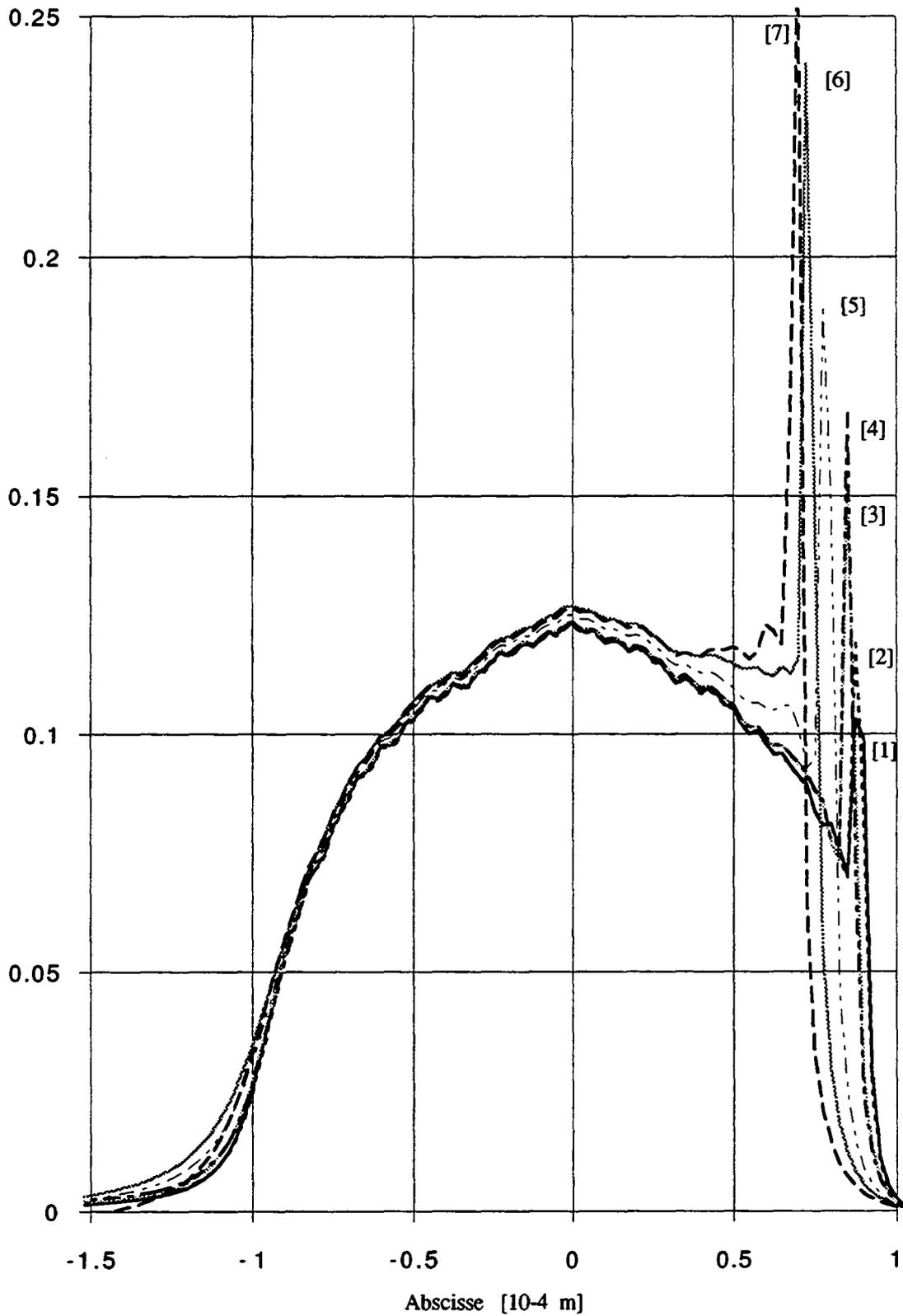
soit dans une fourchette de charges comprises dans  $\pm 2 \%$  par rapport à une valeur moyenne.

Les différents cas sont repérés sur les figures par leur numéro précisé ci-dessous :

- [1] Alimentation riche, maillage régulier et raffiné à l'entrée selon la figure 6.7.
- Tous les autres cas sont relatifs à des maillages identiques et conformes à la figure 6.5.
- [2] Alimentation riche.
- [3] Alimentation limitée,  $x_e = -2 \text{ dmm}$ .
- [4] Alimentation limitée,  $x_e = -2.25 \text{ dmm}$ .
- [5] Alimentation limitée, identique à [4], mais avec imposition d'une température  $T = 20 \text{ }^\circ\text{C}$  en  $x = -2.025 \text{ dmm}$  (point noir sur la courbe de température).
- [6] Alimentation limitée,  $x_e = -2.025 \text{ dmm}$ .
- [7] Alimentation limitée,  $x_e = -1.425 \text{ dmm}$ .

Les courbes de distribution de pression de la figure 6.33 montrent encore une fois clairement que l'appauvrissement du contact déplace le pic EHD vers le centre du contact, contrairement à ce qui se passe en régime isotherme. La figure 6.34 montre que les profils de film voient bien la hauteur au centre diminuer avec l'augmentation de la richesse du contact alors que, dans le même temps, la différence  $h_o - h_{\min}$  décroît fortement.

Distribution de pression dans le contact [10+10 Pa]



**Fig. 6.33 : Distributions de pression des cas [1] à [7],  
de portance  $P_y \cong 197$  daN/cm.**

Epaisseur du film [10<sup>-4</sup> m]

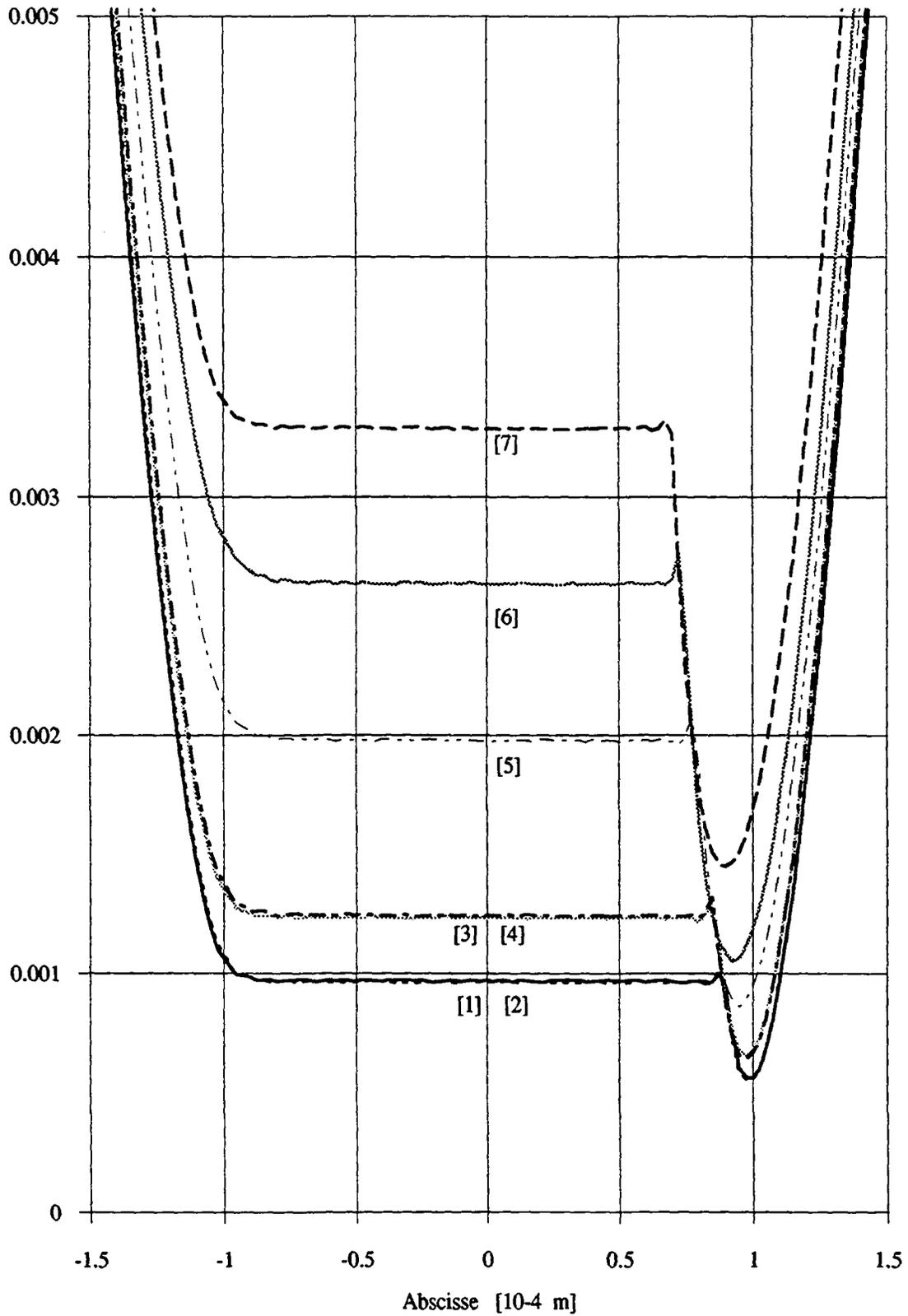


Fig. 6.34 : Profils des films d'huile des cas [1] à [7],  
de portance  $P_y \cong 197$  daN/cm.

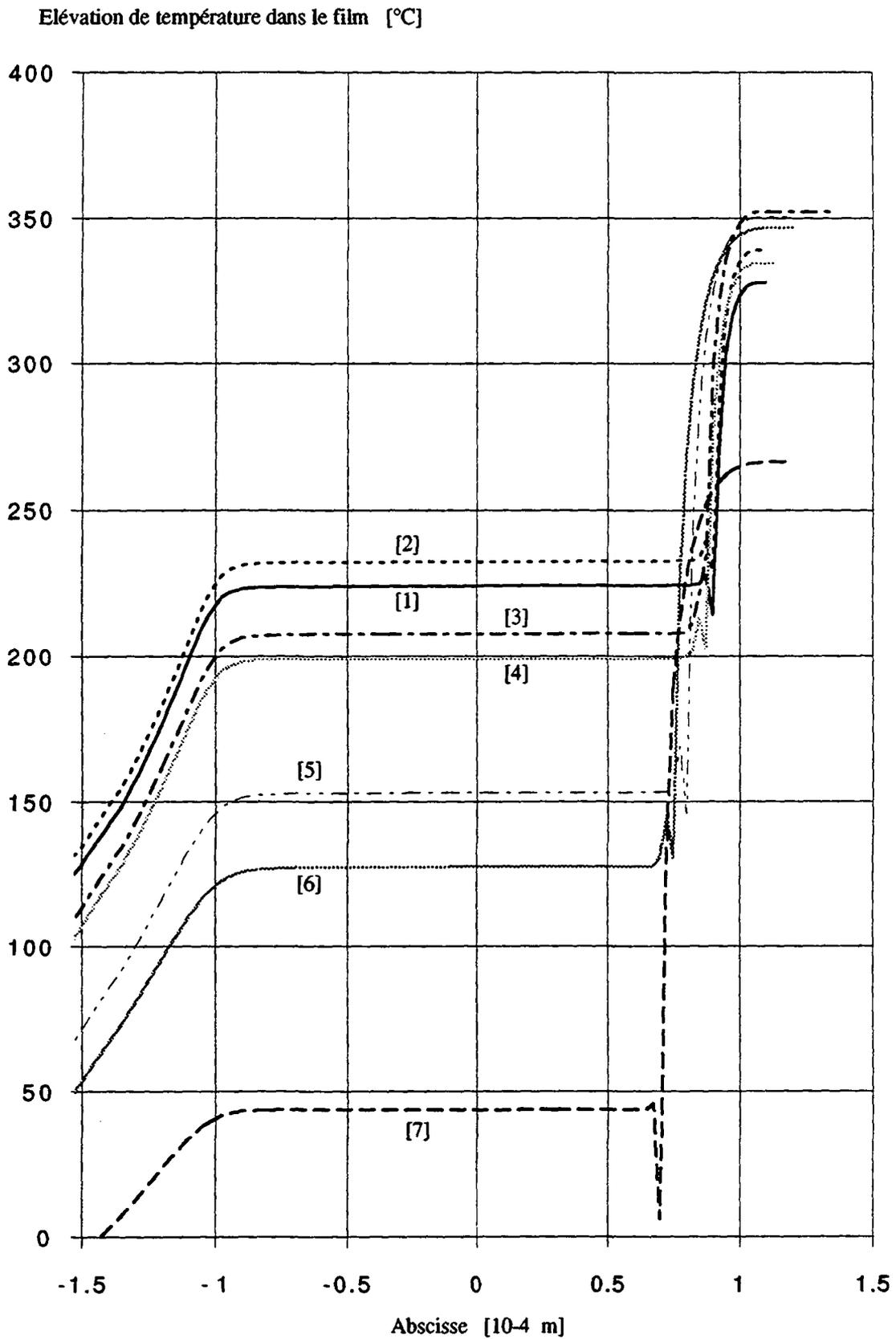


Fig. 6.35 : Elévations de température dans le film en fonction de l'abscisse, des cas [1] à [7], de portance  $P_y \cong 197$  daN/cm.

La tendance vers une diminution de la température au centre du contact, lors de son appauvrissement, s'accompagne d'une différence fortement croissante entre température de sortie et température au centre. Tout ceci est conforme pour l'instant à ce que nous avons vu. La figure 6.35 montre les élévations de température en fonction de l'abscisse du contact dans les différents cas envisagés.

La représentation de la distribution de température à l'entrée du contact, par contre, montre quelques particularités que nous avons illustrées à la figure 6.36.

On y constate notamment que le maillage dont l'entrée a été raffinée (figure 6.7) présente une croissance de la température beaucoup plus progressive, en régime riche [1], que le maillage irrégulier [2]. Ce fait a déjà été constaté. Mais le fait particulier, lorsqu'on recule la frontière d'entrée en direction du centre du contact comme le réalisent progressivement les cas [3], [4], [6] et [7], est que le saut de température subsiste à l'abscisse  $- 2,25$  drmm tant que l'entrée d'huile se fait à une abscisse égale ou supérieure à cette valeur. Cette caractéristique disparaît ensuite, comme le montrent les cas [6] et [7].

Le cas [5] est d'une espèce particulière, car il est identique au [4], sauf qu'on impose en plus une température telle que le saut soit éliminé.

Les comportements particuliers montrant des sauts dans la distribution de température présentent de plus une autre caractéristique que nous pouvons constater à la lecture du tableau de la figure 6.37.

Dans la première partie de ce tableau, nous avons reporté les différents résultats obtenus avec le programme d'éléments finis TACT. Dans la dernière colonne du tableau, nous avons reproduit les résultats du calcul théorique de la dissipation par l'intermédiaire du couple opposé au roulement résultant de la distribution de pression. A nouveau, comme dans le tableau de la figure 6.26, les résultats sont tout à fait satisfaisants et précis.

Élévation de température dans le film [°C]

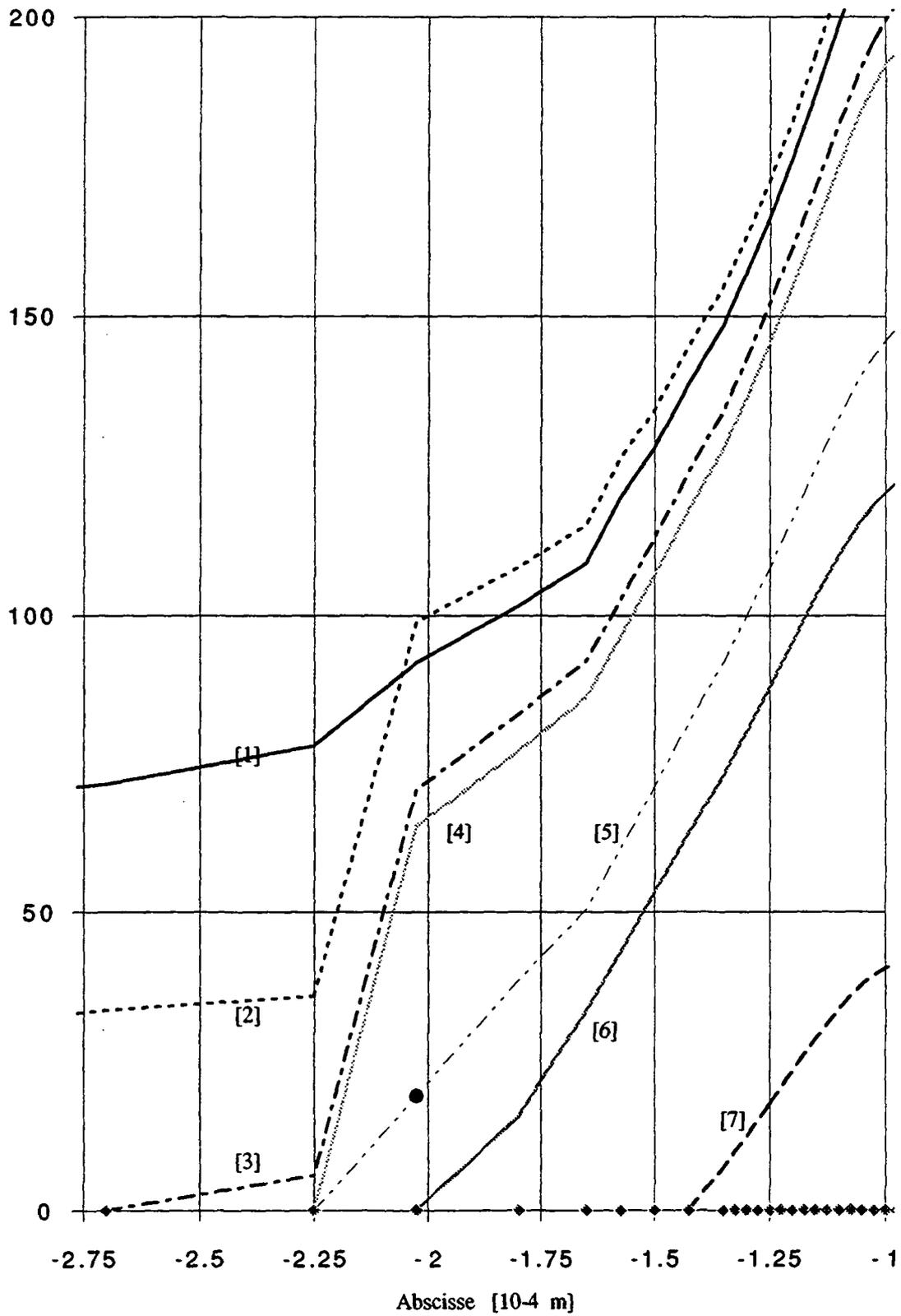


Fig. 6.36 : Distributions de température à l'entrée du contact.

Dans les deux autres colonnes de la partie de droite du tableau, nous avons recalculé théoriquement, dans l'hypothèse adiabate, les élévations de température partielles dans le film :

-  $T_o$  due à  $\dot{E}_o$  au centre du contact :

$$T_o = \dot{E}_o / \rho c_p h_o U / 2 \quad (6.38)$$

-  $T_s - T_o$  due à  $\dot{E} - \dot{E}_o$  du centre à la sortie du contact :

$$T_s - T_o = (\dot{E} - \dot{E}_o) / \rho c_p h_o U / 2 \quad (6.39)$$

Nous remarquons que dans tous les cas où la distribution de température marque un saut, les valeurs de  $T_o$  obtenues par TACT et théoriquement sont très dissemblables, les valeurs obtenues numériquement présentant des erreurs par défaut de -32 % , -53% et -22 % respectivement pour les cas [1], [2] et [3]. Les autres valeurs, en particulier les élévations de la température  $T_s - T_o$  en sortie de contact, présentent une précision tout à fait normale, de l'ordre de quelques pour-cent.

Nous pouvons donc bien affirmer, en voyant l'amélioration obtenue entre les cas [2] et [1], que la régularité du maillage à l'entrée du contact améliore la précision de l'intégration de l'équation de la chaleur . Nous ne savons pourtant pas si le problème résiduel constaté est lié à la finesse du maillage à l'entrée, puisque l'erreur de 32 % que nous constatons n'apparaît que dans les cas de charge clairement EHD.

Un approfondissement sera nécessaire pour déterminer la cause réelle de ce comportement. Cependant, quelle qu'en soit la cause, les résultats que nous présentons ne sont pas remis en cause. Tout au plus pourrions-nous être amenés à constater que le régime adiabate riche présente une consommation de puissance encore inférieure à celle que nous avons calculée.

Cas N°	RESULTATS NUMERIQUES DE TACT											ALGEBRIQUES		
	$x_e$ dmm	$h_e$ $\mu\text{m}$	$h_o$ $\mu\text{m}$	$P_y$ daN/cm	$\dot{E}$ W/cm	$\dot{E}_o$ W/cm	$\dot{E}-\dot{E}_o$ W/cm	$T_o$ $^{\circ}\text{C}$	$T_s$ $^{\circ}\text{C}$	$T_s-T_o$ $^{\circ}\text{C}$	$T_o$ $^{\circ}\text{C}$	$T_s-T_o$ $^{\circ}\text{C}$	$\dot{E}_C$ W/cm	
1	-20.00	339	0.0967	195.2	11.77	8.965	2.805	224.2	328.0	103.8	331.6	103.8	12.0	
2	-20.00	339	0.0963	195.0	16.23	13.35	2.880	232.6	339.3	106.7	495.8	107.0	16.5	
3	-2.700	4.29	0.1244	196.2	14.25	9.226	5.026	207.6	352.2	144.6	265.3	144.5	14.3	
4	-2.250	2.60	0.1233	195.9	11.16	6.478	4.682	199.0	334.9	135.9	187.9	135.8	11.2	
5	-2.250	2.65	0.1877	199.5	19.28	8.350	10.93	153.1	350.6	197.5	159.1	208.3	19.4	
6	-2.025	2.00	0.2633	202.5	26.60	10.44	16.16	127.5	346.8	219.3	141.8	219.5	27.4	
7	-1.425	0.724	0.3283	196.3	24.51	4.071	20.44	43.68	266.4	222.7	44.35	222.7	24.4	

Fig. 6.37 : Tableau comparatif des températures au centre et à la sortie du contact, calculées par TACT, puis algébriquement à partir des termes de la dissipation, pour les cas des figures 6.33 à 6.36.

## 6.6 RESUME DES RESULTATS OBTENUS ET PREMIERES PERSPECTIVES

Nous avons vu au cours de ce chapitre les résultats que l'on obtenait selon que l'on considérait un régime de lubrification riche ou pauvre, thermovisqueux ou non, isotherme ou adiabate. Les diverses influences, dans un problème multivariable, sont souvent difficiles à percevoir quand elles sont détaillées; c'est pourquoi un résumé peut permettre de mieux fixer les résultats auxquels nous avons abouti.

La figure 6.38 présente un tableau récapitulatif des résultats obtenus, sous forme de flèches indiquant les tendances que l'on observe en cas d'appauvrissement du contact, c'est-à-dire en diminuant la valeur de la hauteur du film à l'entrée du contact ou en modifiant, en diminuant en valeur absolue, l'abscisse d'entrée du film.

$\swarrow\swarrow\swarrow x_e \swarrow\swarrow\swarrow$ TENDANCES EN CAS D'APPAUVRISSMENT $\nwarrow\nwarrow\nwarrow h_e \nwarrow\nwarrow\nwarrow$		
	PVE - isotherme	TPVE - adiabate
$h_o$	→	↗
$h_o - h_{\min}$	→	↗
$\dot{E}$	→	↗ ↘
$\dot{E}_o$	→	↗ ↘
$\dot{E} - \dot{E}_o$	→	→
$T_o$	→	→
$T_s$	↘	↗ ↘
$T_s - T_o$	↘	→
Abscisse du pic EHD	→	↘
Hauteur du pic EHD	↘	↗

Fig. 6.38 : Tableau résumé des tendances au contact lors de l'appauvrissement de son alimentation.

Nous voyons à la lecture de cette figure que l'approche isotherme conduit à présenter le régime pauvre comme très profitable, tant en ce qui concerne la dissipation que la température atteinte dans le film et la sollicitation mécanique des corps en contact, puisque la hauteur du pic diminue. Nous pourrions presque dire que l'approche adiabate se situe à son opposé, puisque presque toutes les tendances sont inversées: la seule tendance commune, soulignée sur la figure, est la diminution de la température au centre du contact lors de son appauvrissement.

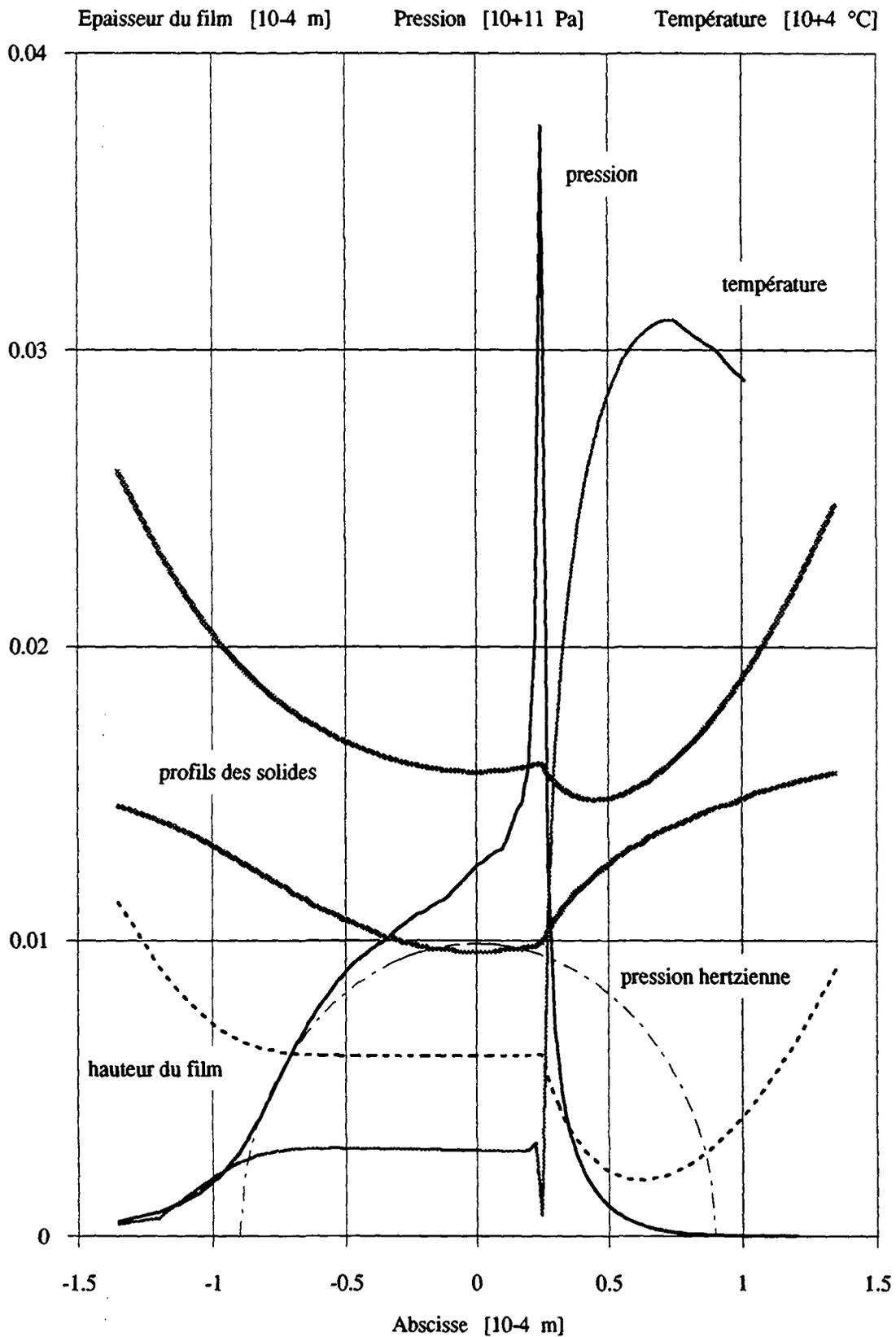
Il serait cependant imprudent de conclure que les approches isotherme et adiabate, que nous avons étudiées en détail, constituent les "bornes" du problème réel. Il faut se garder de tirer des conclusions trop hâtives car les comportements thermiques seront essentiellement déterminés par les valeurs réelles de facteurs tels les coefficients thermo- et piézo-visqueux, la proportion entre l'énergie évacuée par le fluide et l'énergie transmise aux solides par conduction, etc.

Nous estimons qu'au stade actuel de notre étude, bien que de nombreux éléments de l'analyse soient éclaircis, il en est quelques-uns que nous ne possédons pas encore. C'est le cas de la nature réelle de l'état thermique d'un contact lubrifié dans un palier préchargé. Nous n'avons pas résolu un certain nombre de problèmes liés à la modélisation des conditions aux limites du contact, principalement du point de vue de la thermique du corps roulant.

Afin d'étayer notre propos et de présenter les développements futurs de notre travail, nous avons reporté ici les premiers résultats que nous avons obtenus dans une modélisation complète du problème, c'est-à-dire des deux corps en contact et du film, tant sur le plan mécanique que sur le plan thermique. La modélisation que nous avons adoptée correspond à celle de la figure 6.3a et comporte donc encore quelques imperfections dans la finesse du maillage à l'entrée du contact.

Du point de vue thermique, les conditions aux limites adoptées consistent en un puits de chaleur au centre du corps roulant et sur la face inférieure du massif, où la température est supposée constante. Remarquons que pour le corps roulant ces conditions se rapprochent plus d'un régime transitoire que du régime permanent que nous étudions. Pour ces calculs, les conditions d'alimentation sont du type riche, avec abscisse d'entrée à 2 mm en amont du contact.

Nous avons tout d'abord reporté sur la figure 6.39 toutes les distributions caractéristiques du contact pour un cas de portance connu, celui où  $P = 140 \text{ daN/cm}$ .



**Fig. 6.39 : Modélisation complète : pression, température, épaisseur du film et déformation des 2 solides pour une charge  $P = 140$  daN/cm.**

Distribution de pression dans le contact [10+10 Pa]

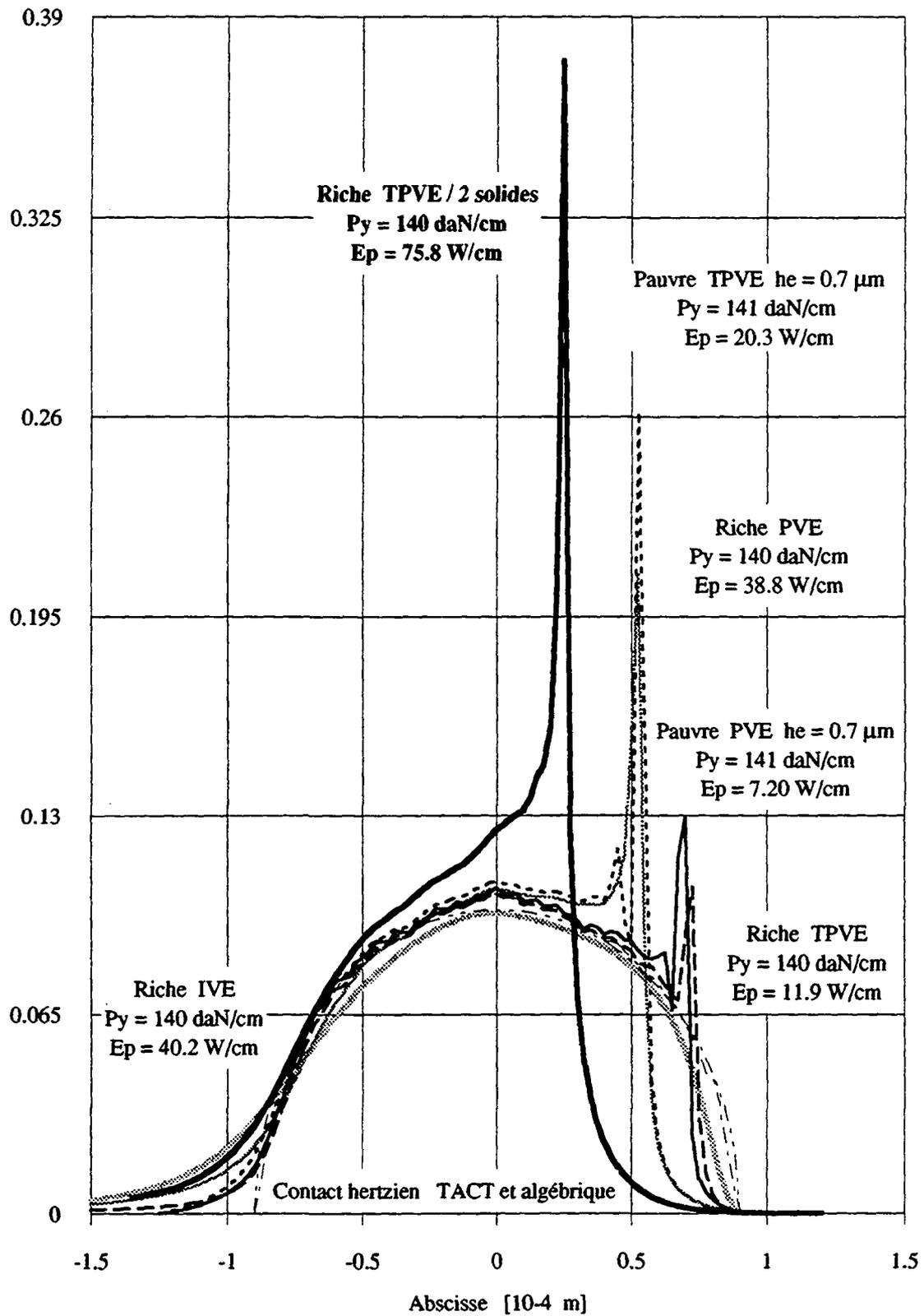


Fig. 6.40 : Distributions de pression relatives à un contact soumis à une charge  $P = 140 \text{ daN/cm}$  (cf. figure 6.23).

Epaisseur du film [ $10^{-4}$  m]

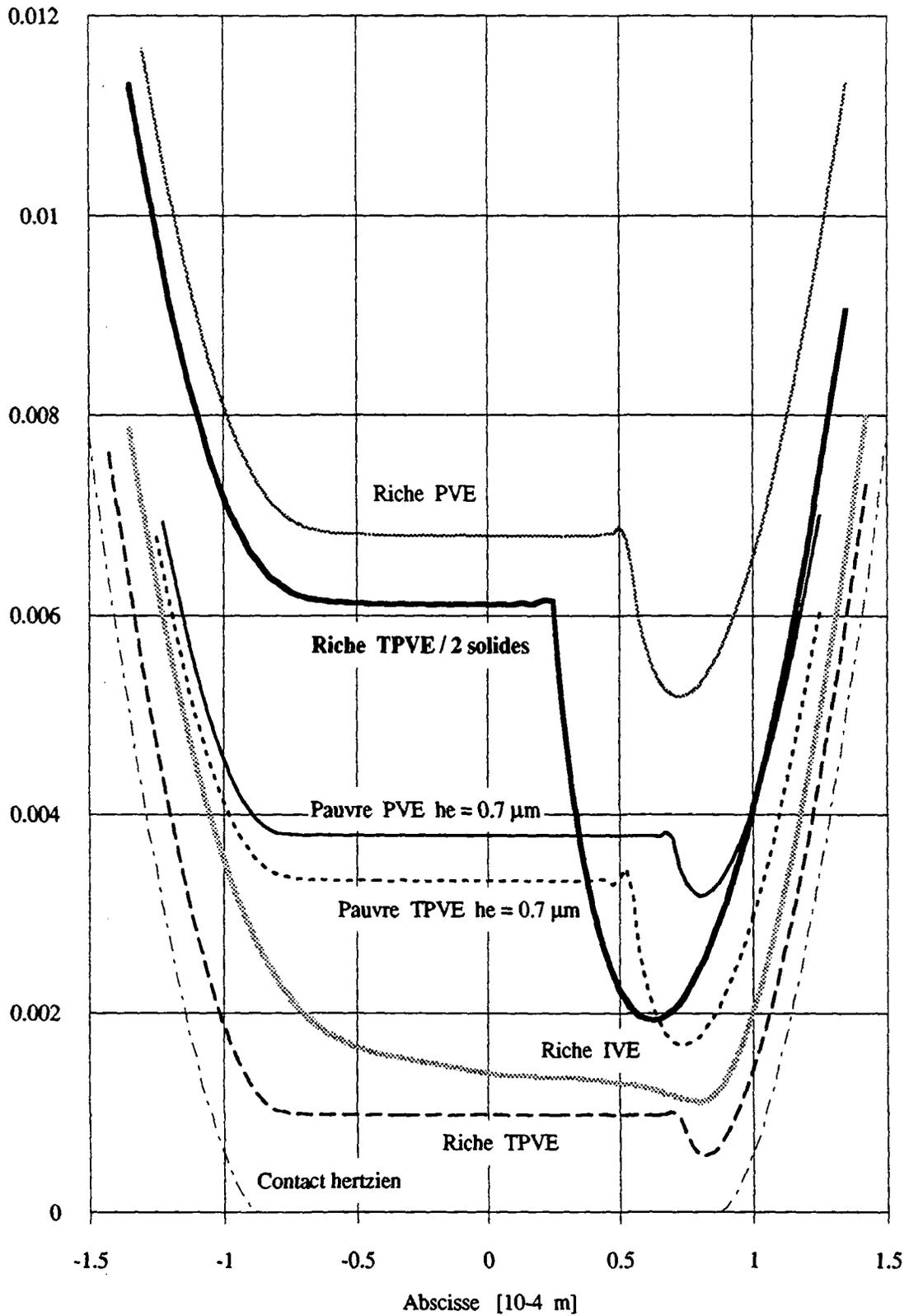


Fig. 6.41 : Hauteurs des films d'huile relatives à un contact soumis à une charge  $P = 140 \text{ daN/cm}$  (cf. figure 6.24).

On notera principalement que la hauteur du film correspond en fait à la différence d'ordonnée des deux courbes représentant les profils des solides. Dans la réalité, un "plateau" à hauteur de film constante correspond à un canal d'épaisseur constante, mais ni rectiligne ni horizontal.

Les particularités concernant la pression, la température et la hauteur du film apparaissent très clairement si l'on compare ces résultats à ceux présentés respectivement aux figures 6.23, 6.24 et 6.25 pour une charge au contact identique.

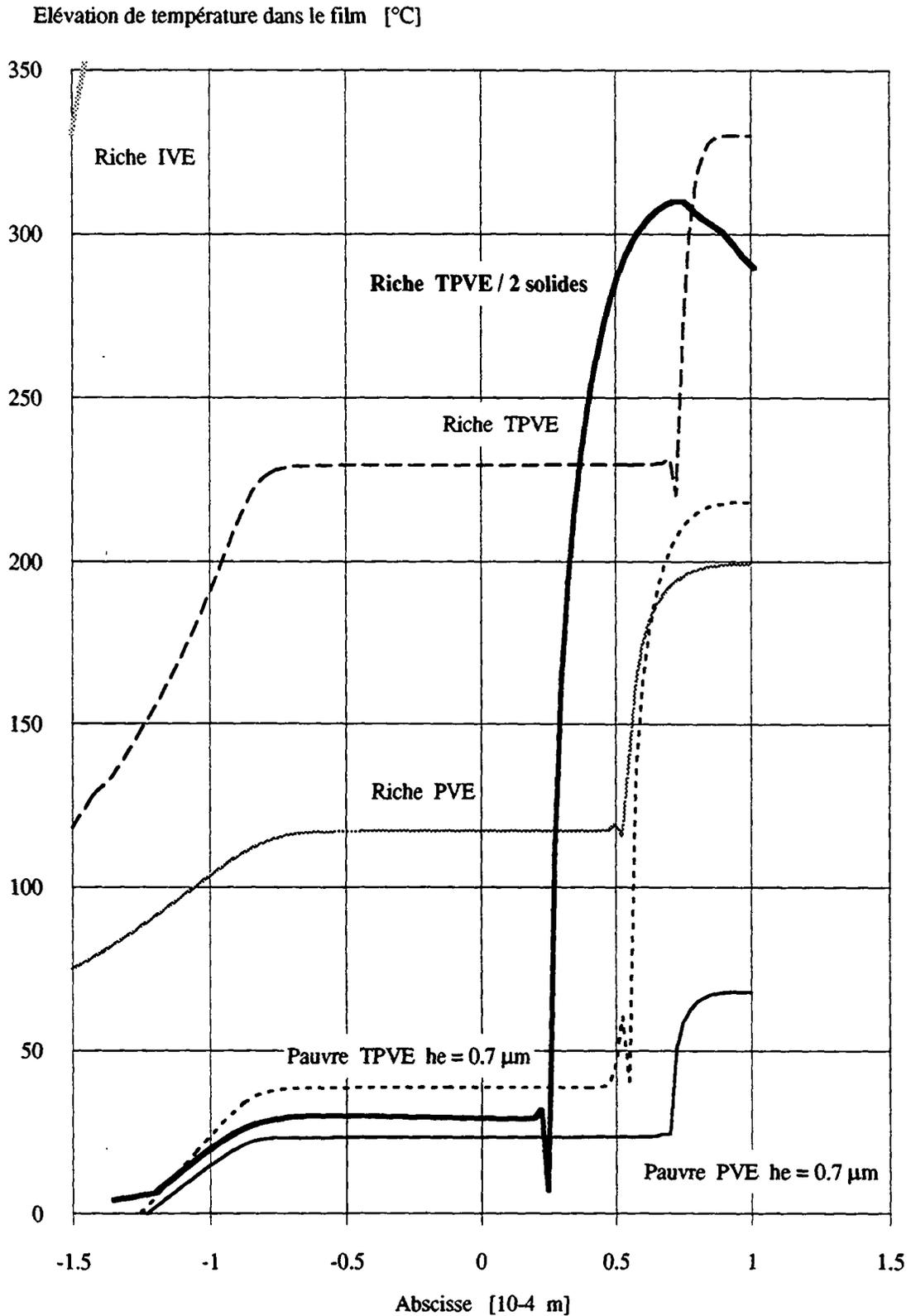
Sur le plan de la distribution de pression, on constate à la figure 6.40 que la modélisation thermomécanique des deux solides amène des conditions dont le caractère EHD est très peu marqué, le pic, très prononcé, étant situé près du centre du contact. De plus, on constate une absence de profil de type hertzien de la pression, même pour des charges relativement élevées.

La distribution de pression du régime riche TPVE avec modélisation des deux solides ne se situe pas du tout entre les distributions des régimes riches, adiabate et isotherme.

L'analyse de la hauteur du film montre, dans la modélisation complète de la figure 6.41, un "plateau" proche de celui correspondant au régime riche en hypothèse isotherme, alors que la hauteur minimale en sortie est, elle, presque comparable à celle obtenue dans une hypothèse adiabate. Dans ce cas, le profil de hauteur du film est bien "cerné" par les hypothèses extrêmes.

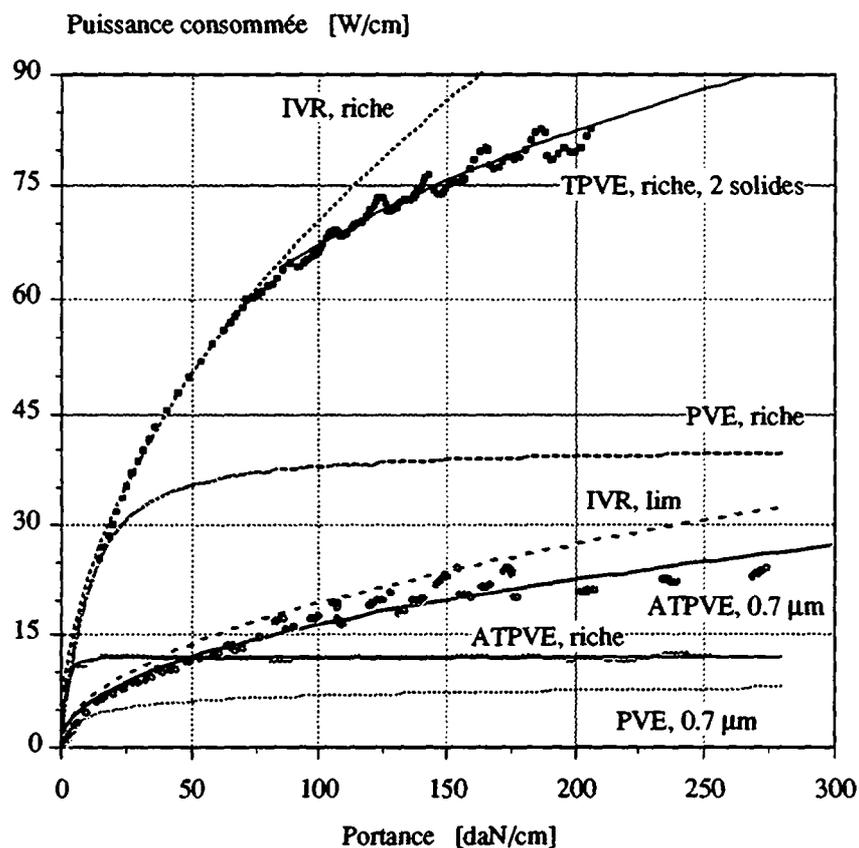
Ce résultat se comprend mieux lors de l'examen des distributions de température dans le film. Du fait de la conduction et de la convection dans les solides, la température au centre du contact reste très basse et la viscosité est donc proche de celle considérée dans le cas isotherme, la hauteur au centre du contact aussi. A la sortie du contact, le laminage de l'huile dans le second convergent provoque une très forte élévation de température dans le film, la chaleur n'ayant plus la possibilité (ou le temps) de s'évacuer par les solides. Il s'ensuit une très forte baisse de viscosité et donc une sortie de contact dont les conditions s'apparentent à celles obtenues en hypothèse adiabate.

On peut ainsi constater que l'analyse des cas limites n'est pas toujours suffisante dans un problème à très grand nombre de paramètres, complexe et très fortement non linéaire. L'affinage de la discrétisation à l'entrée du contact et l'analyse des régimes à quantité d'huile limitée seront donc, nous en sommes persuadés, porteurs de nouvelles surprises.



**Fig. 6.42 : Distributions de température relatives à un contact soumis à une charge  $P = 140 \text{ daN/cm}$  (cf. figure 6.25).**

L'analyse de l'évolution de la consommation de puissance en fonction de la portance, en régime riche et dans le cas de la modélisation complète, présente, elle aussi, des particularités intéressantes que l'on remarque sur la figure 6.43. Dans ce cas, en effet, la dissipation varie d'une manière très proche de celle du régime IVR riche pour les charges faibles et moyennes. La dissipation dépend moins de la charge quand celle-ci devient forte; elle est pratiquement proportionnelle à la puissance 0.3 de la charge contre 0.5 pour ses faibles valeurs. Il reste cependant que les valeurs de dissipation sont très élevées et il s'agira pour nous de vérifier de manière très sérieuse ces premiers résultats.



**Fig. 6.43 : Dissipation en fonction de la portance en régime TPVE avec modélisation des 2 solides (cf. figure 6.32).**

Par ailleurs, nous n'avons trouvé nulle part les valeurs des coefficients thermo- et piézo-visqueux correspondant aux huiles réellement utilisées en lubrification des paliers de broches de machines-outils. Ceci est la raison qui nous a poussé à développer un appareillage, présenté en annexe, permettant de déterminer ces valeurs avant de poursuivre la résolution des problèmes que pose la modélisation des contacts lubrifiés.

## CHAPITRE 7

### ETUDE EXPERIMENTALE

#### 7.1 DISSIPATION DANS DES PALIERS DE BROCHES DE MACHINES-OUTILS

Nous présenterons dans cette section les résultats d'une série d'essais effectués sur une broche développée au Laboratoire de machines-outils et automates de l'EPFL et destinée à remplacer la broche d'origine d'une fraiseuse aléuseuse DIXI 400 équipant l'atelier central de l'EPFL.

Les comparaisons que nous pourrions établir avec des résultats numériques ou théoriques sont rendues un peu difficiles par le fait que les conditions d'alimentation du film sont difficiles à estimer dans le cas concret d'une broche de machine. Par ailleurs, les mesures et les calculs correspondants ont été effectués avant que l'on ne détermine nous-mêmes les caractéristiques réelles de l'huile utilisée. Ainsi, nous avons réalisé les calculs avec les valeurs de viscosité données par le fabricant, mais qui ne correspondent pas tout à fait à la réalité.

##### 7.1.1 Broche d'essai

La broche utilisée pour nos essais est présentée à la figure 7.1. Elle a été développée dans notre laboratoire avec les concepts étudiés et définis par nos soins. Le nez de broche est de type ISO 50 alors que la partie arrière est destinée à l'accouplement sur la fraiseuse Dixi 400. Le cahier des charges qui a présidé à sa réalisation stipulait une rigidité au moins double de celle de la broche d'origine et une vitesse de rotation de l'ordre de 4'000 t/min.

La rigidité réellement obtenue est largement supérieure aux exigences du cahier des charges, et les derniers essais que nous avons effectués ont permis d'atteindre une vitesse de rotation de 8'600 tours par minute avec une puissance consommée de l'ordre de 4 kW seulement.

Cette broche comporte deux paliers à galets coniques montés dans des boîtiers minces et préchargés par un dispositif hydraulique. La précharge est assurée par une pression hydraulique constante, donc par une force pure. Pour éviter toute variation non contrôlée de cette précharge, le palier arrière est monté sur un disque mince, de grande rigidité radiale et de faible rigidité axiale, permettant le déplacement axial, sans jeu et sans frottement, de la bague extérieure du roulement.

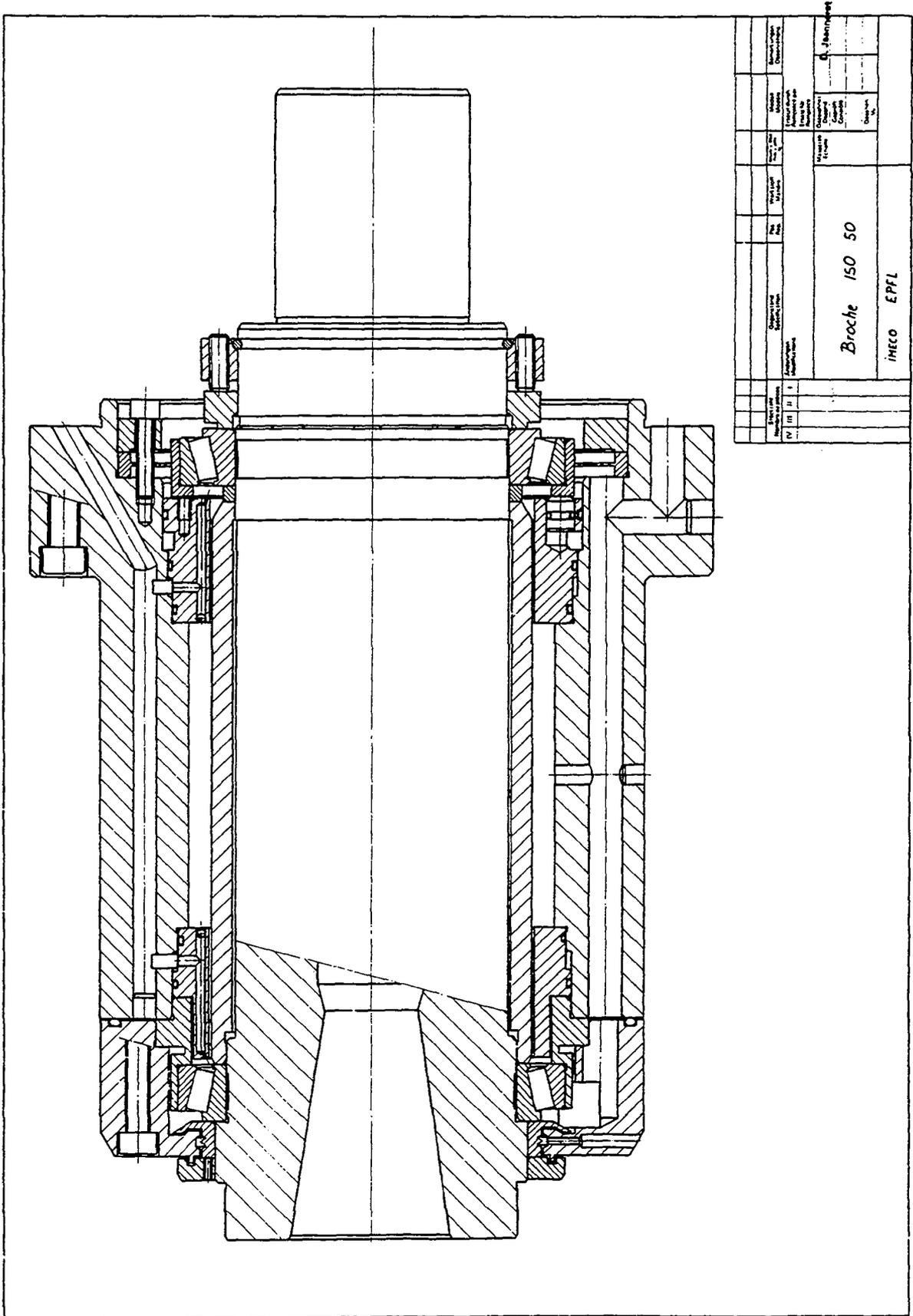


Fig. 7.1 : Dessin d'ensemble de la broche ISO 50 d'essai.

La lubrification par jets d'huile est assurée par des bagues percées de trous calibrés qui dirigent les jets d'huile sur la piste intérieure, en passant sous la cage en tôle des roulements.

### 7.1.2 Paliers et conditions d'essais

Les roulements à galets coniques sont de marque Timken et de type L225800/810. Ils ont les caractéristiques suivantes :

- rayon de piste extérieure	79 mm	
- rayon de piste intérieure	70.2 mm	
- nombre de galets	40	(7.1)
- longueur d'un galet	19 mm	
- rayon moyen d'un galet	4.4 mm	
- angle de l'axe du galet	12.5 degrés	

La vitesse de roulement au contact intérieur ou extérieur est admise à la valeur moyenne

$$U = 7.77 \text{ m/s par } 1'000 \text{ tour/minute} \quad (7.2)$$

La précharge maximale correspond à une force axiale totale de

$$F_a = 2'500 \text{ N} \quad (7.3)$$

ce qui correspond à une force normale sur un galet de

$$Q = F_a / n \sin \alpha = 290 \text{ N} \quad (7.4)$$

et à une charge linéique au contact  $P_y$

$$P_y = 15.2 \text{ daN/cm} = 1.52 \cdot 10^4 \text{ N/m} \quad (7.5)$$

La lubrification est assurée par des jets d'huile à travers des buses de 0.2 mm de diamètre. Chaque roulement est alimenté par 8 jets et le débit est fixé à 4 litres par minute pour la broche entière.

L'huile utilisée est de marque Mobil et de type

Velocite oil N° 4

avec les caractéristiques suivantes (données du fabricant) :

$$\rho = 0.846 \cdot 10^3 \text{ Kg/m}^3$$

$$\mu_o = 4.315 \cdot 10^{-3} \text{ Pa}\cdot\text{s à } 40 \text{ }^\circ\text{C (5.1 cSt)} \quad (7.6)$$

$$\mu_o = 3.384 \cdot 10^{-3} \text{ Pa}\cdot\text{s à } 50 \text{ }^\circ\text{C (4.0 cSt)}$$

La température de l'huile dans le groupe de lubrification a été maintenue constante à 30°C environ. La précharge a été ajustée par modification de la pression hydraulique dans le dispositif de précharge. Afin d'éviter toute variation de celle-ci en cours d'essai, du fait des éventuelles dilatations, un accumulateur hydraulique est disposé à l'entrée du circuit dans la broche.

L'élévation de la température de l'huile de lubrification, entre l'entrée et la sortie de la broche, se situe entre 10 et 15 °C pour 3'000 et 4'000 t/min. Les mesures ont été effectuées de manière précise, mais leur report ici n'a que peu de signification puisque nous n'en tenons pas compte.

La mesure de la dissipation, ou de la puissance consommée comme nous aimons la nommer, est réalisée, en laboratoire, par la mesure en ligne de la puissance mécanique d'entraînement. Nous disposons à cet effet d'une installation, de marque Vibrometer, de mesure du couple d'entraînement et de la vitesse de rotation. Un module électronique effectue le produit des deux grandeurs pour fournir un signal proportionnel à la puissance nécessaire à l'entraînement de la broche d'essai.

La puissance totale fournie à la broche se compose de la puissance d'entraînement ainsi que de la puissance hydraulique de lubrification. Nous avons vérifié le bilan énergétique en régime permanent et constaté que la puissance totale fournie était intégralement évacuée par l'huile, l'erreur étant de l'ordre du pour-cent.

La puissance dissipée totale mesurée est ramenée à un contact de longueur unitaire, 1 cm dans nos unités modifiées, en la divisant par le nombre total de contacts présents dans l'ensemble des deux paliers et par la longueur d'un galet de roulement. Nous obtenons ainsi une valeur moyenne, sans distinction de contact intérieur ou extérieur, comme nous le verrons par la suite.

### 7.1.3 Analyse numérique et théorique du contact galet/piste

L'analyse par les voies théorique et numérique du contact galet/piste, réalisée en conditions isothermes, nous a permis de situer le niveau de charge auquel était soumis le contact de notre palier de broche.

Nous avons tout d'abord étudié la rigidité du contact en fonction de la charge, dans le cas du contact sec et dans celui du contact richement lubrifié à diverses vitesses de rotation. Les résultats sont reportés à la figure 7.2 et montrent que le comportement d'un contact lubrifié diffère assez fortement de celui d'un contact sec.

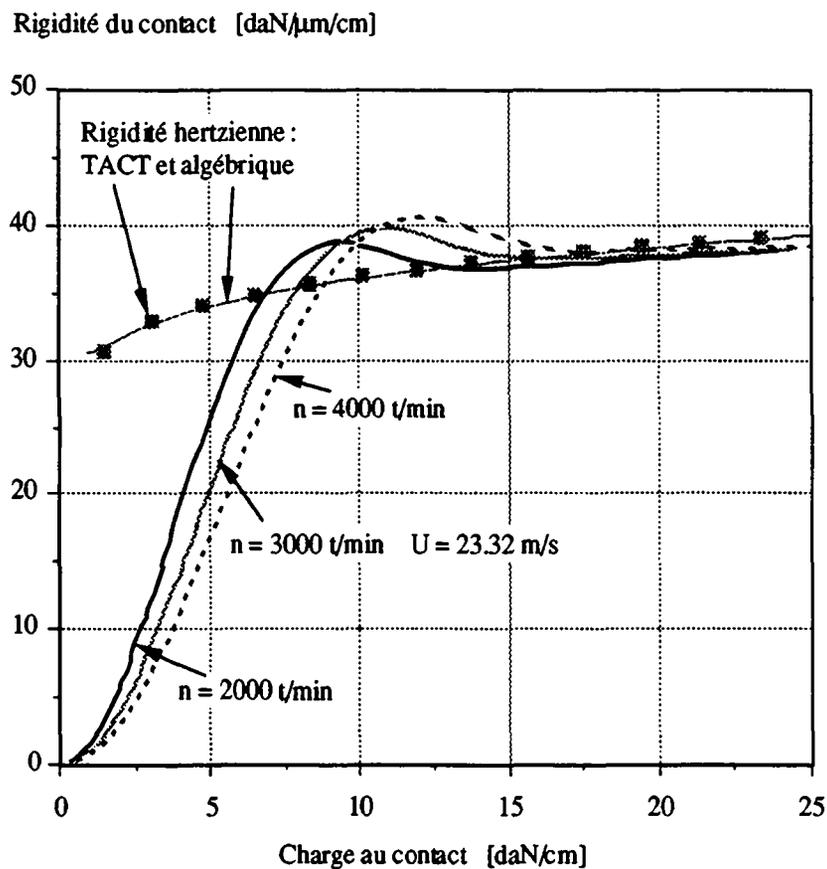


Fig. 7.2 : Rigidités des contacts sec et lubrifié en fonction de la charge.

Pour ces calculs nous avons adopté les valeurs numériques correspondant à la viscosité à 40 °C donnée par le fabricant. Le coefficient piézovisqueux, non encore déterminé expérimentalement, a été maintenu identique à la valeur adoptée au chapitre 6, soit

$$\mu_1 = 2.317 \cdot 10^{-8} \text{ Pa}^{-1} \quad (7.7)$$

Pour les charges au contact relativement élevées, la rigidité du film fluide devient très grande et n'influence pour ainsi dire plus le contact. On a donc, dans ce domaine, la même rigidité pour les contacts sec et lubrifié.

Pour les plus bas niveaux de charge, la rigidité varie beaucoup plus fortement dans le cas du contact lubrifié que dans celui du contact sec.

Dans le domaine des précharges admises pour la broche, les contacts sont de fait peu sollicités (entre 5 et 15 daN/cm) et, en fonction de la vitesse, la rigidité des contacts baisse très sensiblement; cela n'était a priori pas évident.

A la lecture de la figure 7.2, on remarque que les paliers de broche sont dans un domaine de charge qui n'est pas encore totalement EHD. En effet, les conditions EHD du contact lubrifié ne

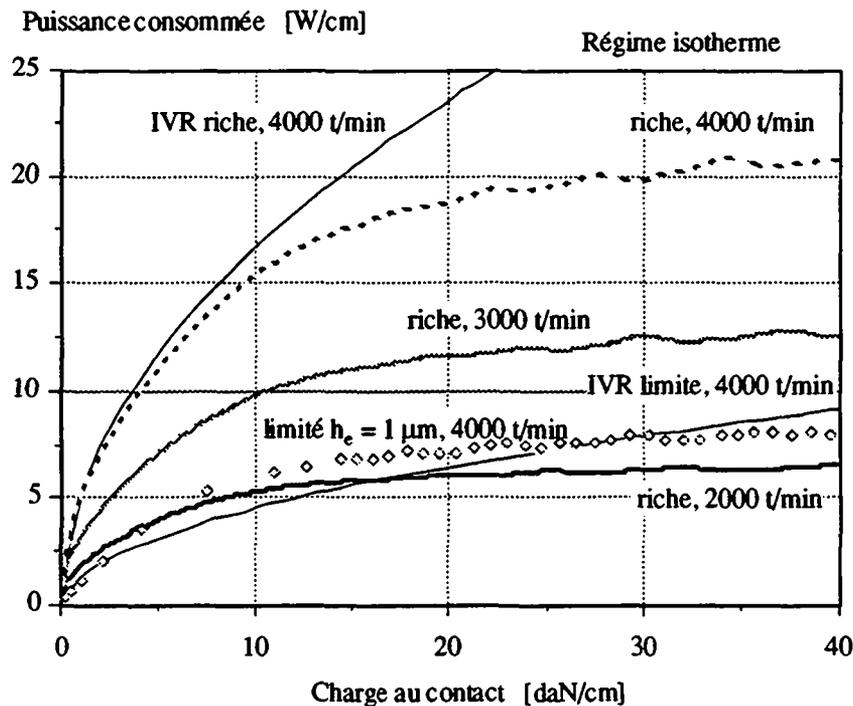


Fig. 7.3 : Consommation de puissance en fonction de la portance.

sont atteintes qu'après le maximum de la courbe de rigidité en fonction de la charge. Cette valeur maximale elle-même correspond à une courbe de pression pour laquelle la position du maximum est très voisine du centre du contact.

Le fait que les contacts des paliers de broches de machines-outils soient peu chargés, même en situation de précharge maximale, nous a quelque peu surpris, d'autant plus que les efforts extérieurs, dus à la coupe, n'influencent que peu ou pas ces conditions car ces efforts sont, dans la plupart des cas, négligeables par rapport à la précharge.

Dans ces mêmes circonstances, nous avons par ailleurs calculé la consommation de puissance, ce qui nous a permis de tracer la figure 7.3. Nous avons principalement calculé les cas de régime riche, sauf à 4'000 t/min où nous avons simulé une hauteur d'entrée de film de 1 micron. Il est vrai que les conditions de lubrification réelles, soit 4 l/min pour les deux paliers nous incitaient plutôt à considérer le régime ainsi créé comme très riche.

#### **7.1.4 Résultats des essais et commentaires**

Les différents régimes et niveaux de précharge auxquels nous avons effectué des essais sont reportés sur la figure 7.4. Nous avons effectué des essais à plus haute vitesse mais les conditions de lubrification ont été changées, le débit d'huile ayant été augmenté à 5 l/min. Pour cette raison, nous n'avons reporté ici que les essais relatifs à des conditions de lubrification identiques.

Pour chaque série d'essais relatifs à une vitesse de rotation, nous avons tracé les courbes et reporté leurs équations sur la figure. Ainsi, on peut constater que plus la vitesse est élevée, moins la dissipation dépend de la charge au contact puisque l'exposant de  $P_y$  diminue. On constate par ailleurs que la dépendance est beaucoup moins forte dans le cas réel que dans les calculs isothermes effectués par éléments finis. La figure 7.5 présentant les différentes courbes pour une vitesse de rotation de 4'000 t/min illustre bien ce fait.

Alors que les calculs isothermes montrent à 4'000 t/min une dissipation fonction de  $P_y^{0.4}$  environ, le fitting présente une fonction de  $P_y^{0.15}$  seulement.

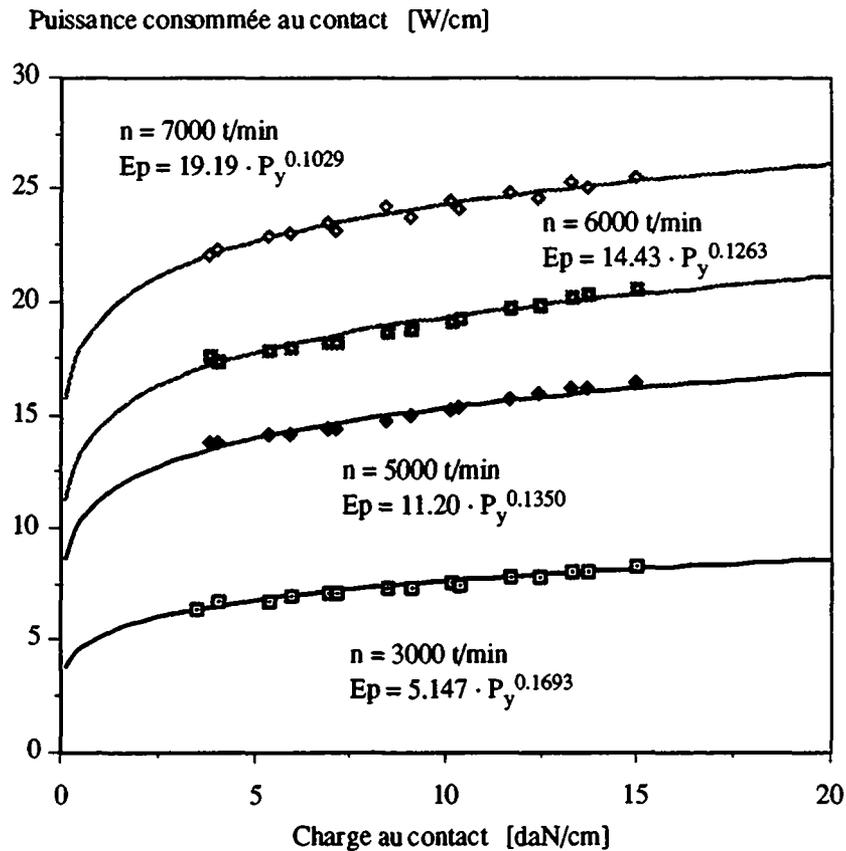
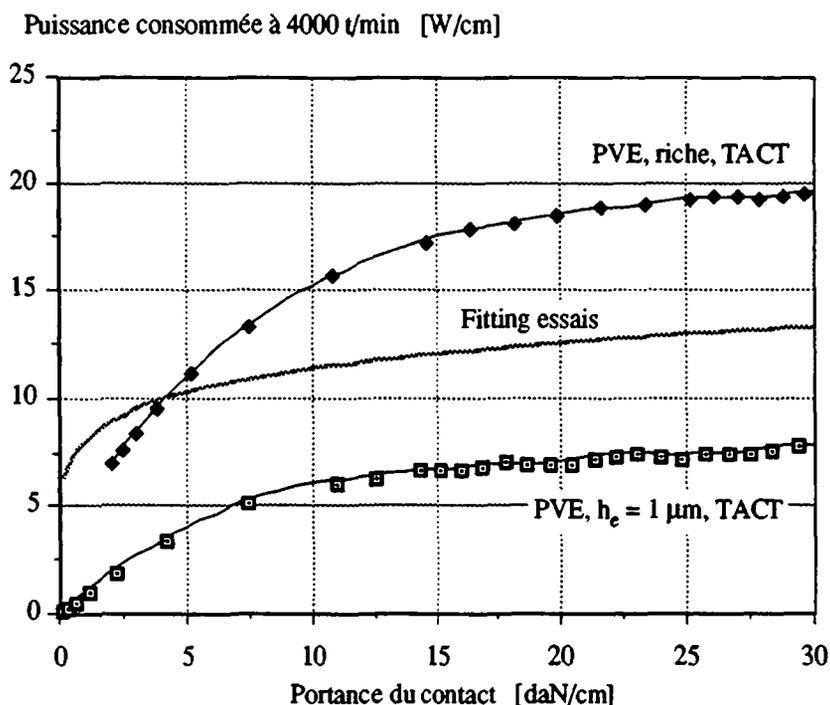


Fig. 7.4 : Essais de consommation de puissance en fonction de la portance.

Par ailleurs, la valeur même de la dissipation ne correspond ni vraiment à un régime riche, ni à un régime pauvre. Elle se situe entre les deux, ce qui nous porte à croire que les conditions d'alimentation du contact diffèrent fortement selon que l'on considère un contact corps roulant/piste intérieure ou corps roulant/piste extérieure. Dans le premier cas, du fait de la rotation de la bague, l'huile ne peut stagner sur la piste et le contact lubrifié est relativement pauvre. A l'extérieur, par contre, la piste est immobile. L'huile peut y être présente en plus grande quantité et le contact peut se trouver dans des conditions d'alimentation relativement riches. Les résultats d'essais représentés sont des "valeurs moyennes" puisqu'ils correspondent à la puissance dissipée totale divisée par le nombre de contacts que présente l'ensemble des deux paliers de la broche.

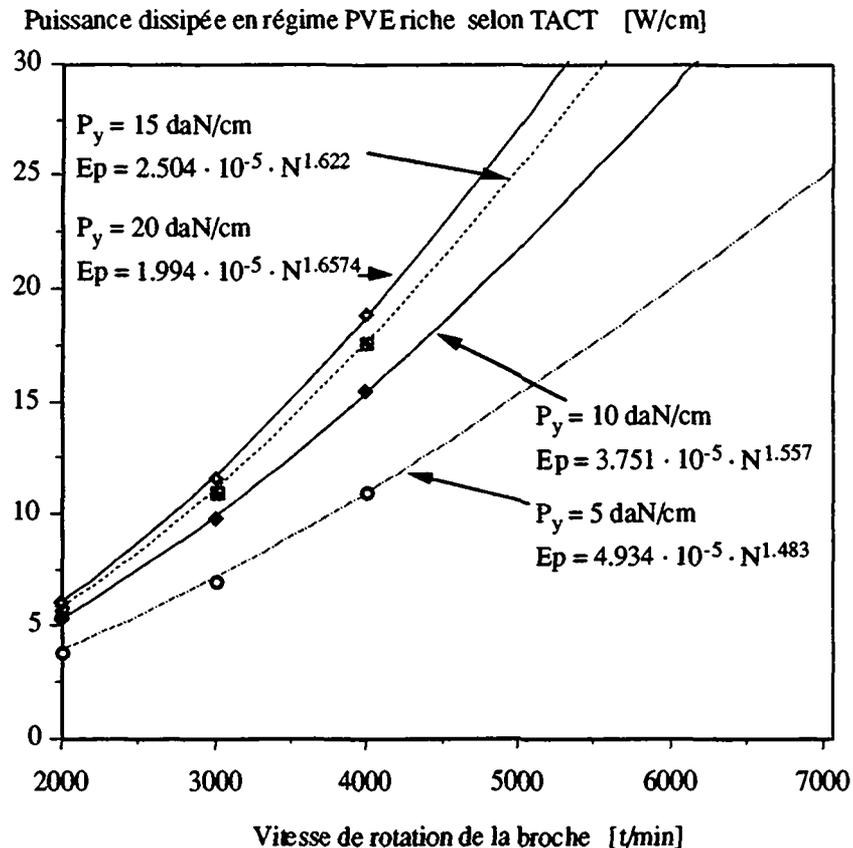
En considérant, sur la figure 7.5, une valeur moyenne entre le régime riche et le régime à hauteur d'entrée égale à  $1 \mu\text{m}$ , nous trouvons des résultats très proches des essais pour les valeurs maximales de la précharge. Cette hypothèse semble mal convenir aux cas de précharge faible.



**Fig. 7.5 :** Consommation de puissance en fonction de la portance à 4'000 t/min : essais et calculs isothermes.

Le fait que la dissipation mesurée varie peu avec la charge au contact nous fait penser que, même dans les conditions de roulement pur que nous observons dans nos essais, l'hypothèse des contacts en régime isotherme ne se vérifie pas de manière satisfaisante. En se référant pour le raisonnement à la figure 6.32, nous voyons que la prise en compte de la température a tendance à aplatir la courbe  $\dot{E} = f(P_y)$ . Cet effet, dans le cas de nos essais, aurait une nette tendance à rapprocher le calcul de la réalité des essais.

Un autre élément nous porte à accrédi-ter l'hypothèse de l'influence importante de la température: il s'agit de la manière dont évolue la dissipation en fonction de la vitesse, lorsqu'on varie la charge. Nous avons reporté à la figure 7.6 la puissance dissipée, calculée par TACT, en fonction de la vitesse, pour diverses charges au contact. Nous constatons que plus la charge augmente, plus l'influence de la vitesse augmente.

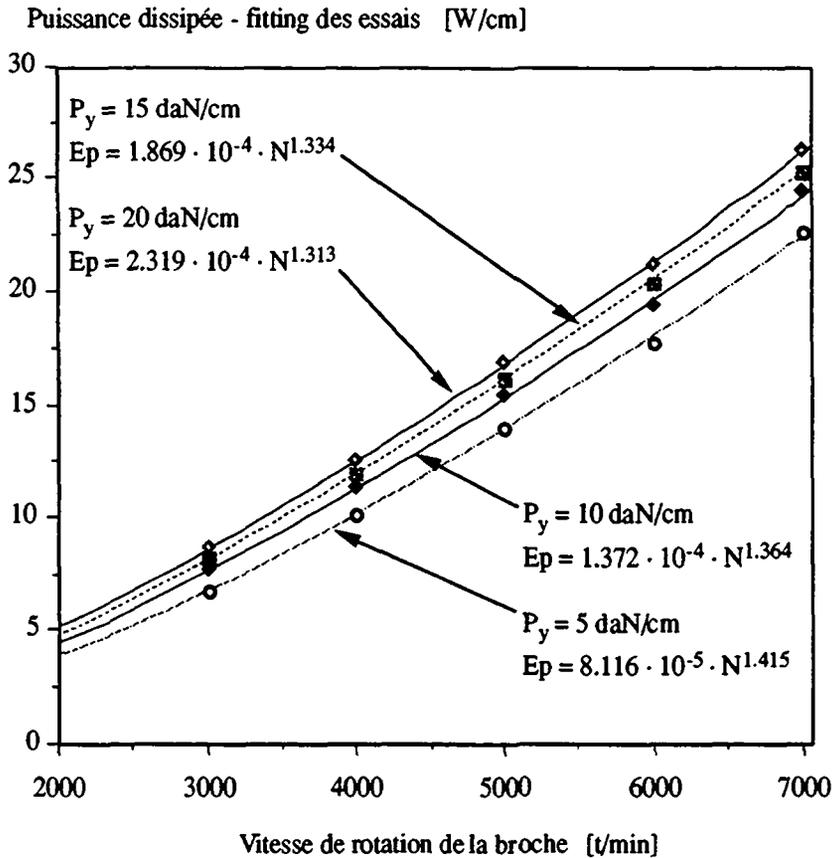


**Fig. 7.6 :** Dissipation en fonction de la vitesse, calculée par TACT.

En représentant les mêmes courbes pour les essais que nous avons effectués, nous constatons, à la figure 7.7, que l'effet est exactement opposé – l'influence de la vitesse diminue avec l'augmentation de la charge au contact. Cette inversion de tendance correspond assez précisément à ce que nous avons constaté en comparant les régimes isotherme et adiabate.

Nous n'avons malheureusement pas pu cerner de plus près le problème que nous rencontrons ici, car nous désirions tout d'abord vérifier le problème adiabate en ce qui concerne l'entrée du contact, avant de vouloir modéliser de manière satisfaisante un système aussi complexe qu'une broche entière.

Nous avons cependant pu constater que l'évaluation de la dissipation peut être dès aujourd'hui réalisée avec une bonne approximation, en considérant un contact en régime riche à la piste extérieure et un contact en régime appauvri à la piste intérieure. Par cette estimation, nous



**Fig. 7.7 : Dissipation en fonction de la vitesse, fitting des essais.**

arrivons déjà à prédire d'une manière approximative, mais tout à fait bien "calée", les états thermiques du régime permanent des broches pour lesquelles nous connaissons les sollicitations des paliers. Ceci est le cas de toutes les broches que nous développons à l'EPFL.



## CHAPITRE 8

# CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

### 8.1 COMMENTAIRES ET CONCLUSION

Le but que nous avons défini au début de ce travail consistait à analyser les phénomènes de la lubrification et les mécanismes de consommation de puissance dans les paliers de broches de machines-outils principalement. Nous avons tout d'abord étudié par voie théorique les contacts lubrifiés linéaires en régime isovisqueux. Nous avons cherché à mettre en évidence les influences des divers paramètres du problème sur la dissipation, tout en présentant une nouvelle méthode de calcul de celle-ci. Nous avons étudié les influences de la quantité d'huile alimentant le contact par l'adoption d'hypothèses d'appauvrissement diverses, notamment celle consistant à établir un régime limite dans lequel le débit inverse est annulé.

Nous avons appliqué les résultats à l'analyse des paliers et montré que le régime de glissement qui s'établissait dans un roulement de palier correspondait à celui qui minimise la dissipation. Nous avons aussi calculé et analysé des organes réels pour lesquels les calculs prévisionnels et les résultats des essais effectués montrent une bonne correspondance.

Ainsi, suivant le type de montage et de sollicitation des paliers réels, une approche IVR peut s'avérer suffisante pour prédire leur consommation de puissance. Nous avons pu constater que dans la plupart des cas rencontrés dans les machines-outils, les paliers lubrifiés à la graisse ou par l'intermédiaire de dispositifs mixtes air-huile dissipent une puissance correspondant très sensiblement à celle obtenue par un calcul IVR en régime de lubrification limite.

Cette approche n'est cependant plus suffisante lors de l'étude de paliers à hautes performances, plus sollicités par une précharge asservie que par des efforts extérieurs, et lubrifiés à l'huile.

Nous avons alors cherché à exploiter un outil de calcul existant et prévu pour l'étude des contacts lubrifiés, le programme d'éléments finis TACT du Dr. A. Curnier du LMA/EPF de Lausanne. Devant l'impossibilité d'obtenir des résultats de contacts sollicités en régime EHD, nous avons entrepris une analyse originale de l'opérateur lubrification et mis au point les méthodes de pénalisation et d'intégration qui nous ont permis de progresser, d'obtenir des solutions EHD, de modéliser des quantités d'huile variables à l'entrée du contact.

La vérification des raisonnements émis à partir de l'analyse IVR a montré une parfaite concordance entre ce régime et le régime EHD, notamment concernant l'influence des conditions d'alimentation du contact sur la puissance consommée au contact.

L'implantation de méthodes d'up-wind dans le but de stabiliser la résolution de l'équation de la chaleur s'est montrée performante et a permis d'aborder l'analyse TEHD.

La comparaison des régimes isotherme et adiabate nous a montré que les comportements de ces cas particuliers extrêmes étaient pour ainsi dire diamétralement opposés et que la modélisation réelle des solides, pour ce qui est de la thermique, est déterminante et peut amener des résultats totalement différents.

Notre objectif, qui est la compréhension du fonctionnement de paliers réels nous a incité à confronter nos calculs à la réalité et à déterminer les véritables caractéristiques des huiles industrielles utilisées pour la lubrification.

Nous avons pu vérifier que le modèle isotherme ne convient pas de manière totalement satisfaisante à la description des mécanismes de lubrification dans des paliers réels lubrifiés à l'huile. La quantité importante de paramètres entrant en jeu, très difficilement déterminables en pratique, tels que la quantité d'huile alimentant un contact, complique singulièrement le modèle et rend la prévision difficile. Cependant, on peut raisonnablement admettre que le contact corps roulant/piste extérieure est plus richement lubrifié que celui du corps roulant avec la piste intérieure, et une telle hypothèse rapproche déjà très nettement calculs et mesures. Sa mise en évidence expérimentale est cependant indispensable avant de la considérer comme valide. De plus, l'influence de conditions non isothermes devra être analysée à la lumière des caractéristiques réelles de l'huile utilisée.

Ce travail nous a permis non seulement de contribuer au développement d'un outil d'analyse, le programme d'éléments finis TACT, mais de présenter une approche particulière et originale de la consommation de puissance dans les paliers qui, nous en sommes persuadé, est une étape indispensable à la modélisation des paliers réels de machines.

Par ailleurs, l'absence de données concrètes et précises concernant les huiles courantes de lubrification nous a conduit à développer un appareillage qui, à l'avenir, nous permettra une comparaison objective des produits proposés.

## **8.2 PERSPECTIVES**

Nous l'avons déjà souvent précisé, ce travail est un pas dans la direction de la conception automatisée des broches de machines, mais il reste énormément à faire pour que les outils arrivent tous à un niveau de développement satisfaisant. La recherche future peut se voir dans les diverses directions citées ci-après.

### **8.2.1 Perspectives sur le plan numérique**

Si l'on considère les développements à court terme, il s'agit tout d'abord de poursuivre la mise au point de l'analyse TEHD, et donc de résoudre les problèmes de modélisation thermique des solides, principalement du corps roulant, et d'évaluer l'influence d'une conduction non parfaite dans le film.

En parallèle, il s'agira aussi de rechercher les causes de l'instabilité du profil de pression dans le cas où  $dh/dx = 0$  afin de l'éliminer, ou, si ce n'est pas possible, d'en évaluer les conséquences numériques.

A moyen terme, il s'agira d'étendre l'analyse réalisée dans le cas des contacts linéaires au cas des contacts ponctuels, pour étudier les paliers à billes. Si nous n'avons pas cherché à étendre immédiatement l'analyse, c'est principalement en raison du fonctionnement beaucoup moins problématique des paliers à billes, en raison de la plus faible rigidité des corps roulants. Les paliers à hautes performances devront à l'avenir allier grande vitesse de rotation et grande rigidité et cela justifie notre intérêt pour les contacts linéaires.

Plus tard et lorsque la plus grande part des problèmes sera résolue, il s'agira de synthétiser ces résultats afin d'en tirer des outils simplifiés qui puissent prendre place dans la "chaîne unique de raisons", dont nous avons parlé au tout début de ce texte, qu'il s'agira de remonter pour concevoir de nouveaux organes de manière automatisée.

A ce même terme, il s'agira de développer une théorie unifiée des contacts qui englobe contact sec et contact lubrifié. Nous avons vu, dans l'étude de l'opérateur, que la formalisation pénalisée que nous avons adoptée est très proche de celle relative au contact sec. De ce fait, une théorie unifiée ne paraît pas, aujourd'hui, relever de la fiction.

### **8.2.2 Perspectives sur le plan de la lubrification**

Dans ce domaine, le court terme sera consacré à l'étude des fluides de lubrification actuels afin d'en connaître les particularités. Une attention particulière devra être portée au problème que nous avons mentionné, celui du changement de phase, de son influence, de son comportement dynamique, etc. Quel état de fluide rencontre-t-on dans un film mince d'une fraction de micron d'épaisseur soumis à des pressions de l'ordre de 10'000 à 20'000 bar ? Telle peut être la question à laquelle il s'agira de répondre le plus rapidement possible.

Dans ce même domaine, il s'agira d'aborder les domaines de la lubrification pauvre et de la lubrification à la graisse. Dans ces deux cas, les épaisseurs de film se situent encore un ordre de grandeur en-dessous des valeurs obtenues ici, soit à la valeur de quelques centièmes de micron, et l'on peut se demander si une hypothèse de film fluide séparant complètement les solides a encore un sens. Cela d'autant plus que les épaisseurs de film sont de l'ordre de grandeur des irrégularités de la surface usinée.

A plus long terme, il s'agira d'étudier l'utilisation éventuelle de fluides particuliers, capables d'évacuer plus de chaleur, ou ayant des comportements visqueux particuliers, etc.

### **8.2.3 Perspectives sur le plan technologique**

Les premiers développements à poursuivre sont ceux qui ont pour but de minimiser la consommation de puissance de paliers à hautes performances. Dans ce sens, nos développements relatifs à une lubrification à quantité d'huile limitée peuvent apporter une amélioration sensible. Nous avons déjà obtenu, par nos concepts particuliers appliqués aux broches de machines-outils, un gain de puissance consommée d'un facteur compris entre deux et trois. L'avenir devrait nous permettre d'améliorer ces résultats.

A plus long terme et dans la perspective du développement de nouveaux paliers, des techniques de découplage de la lubrification et de l'évacuation de la chaleur devront être étudiées.

Comme on peut le constater, le travail ne manque pas dans ce domaine, même si le chemin parcouru depuis Reynolds a été très important. La recherche en lubrification a encore de beaux jours devant elle et nous comptons bien participer à l'écriture des pages de son histoire future.

## ANNEXE

# VISCOSITE D'UNE HUILE DE LUBRIFICATION

## A.1 INTRODUCTION

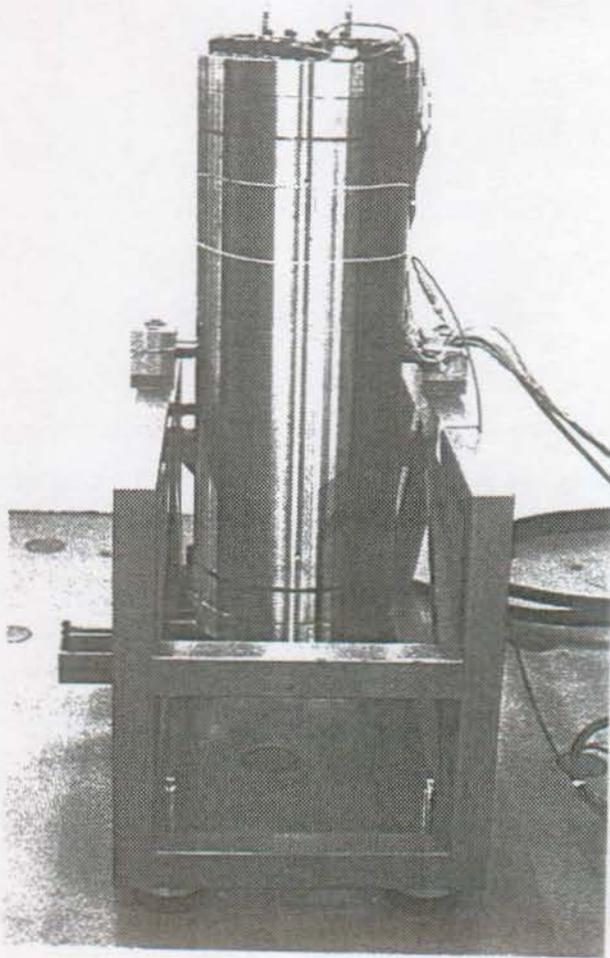
L'absence de données précises sur les huiles utilisées pour la lubrification des broches industrielles nous a conduit à développer nous-mêmes un matériel d'essai permettant de déterminer la loi de thermopiezoviscosité des huiles que nous utilisons. Nous avons donc conçu et réalisé un viscosimètre à corps chutant capable de fonctionner jusqu'à des pressions de l'ordre de 20'000 bar et des températures proches de 200°C. La mise au point de ce matériel ayant été (partiellement seulement) effectuée parallèlement aux travaux principaux, nous n'avons pas encore pu tester un grand nombre d'huiles ni pousser les essais aux limites prévues de l'appareil. Nous reproduisons ici les premières mesures obtenues avec notre viscosimètre.

## A.2 MATERIEL D'ESSAI

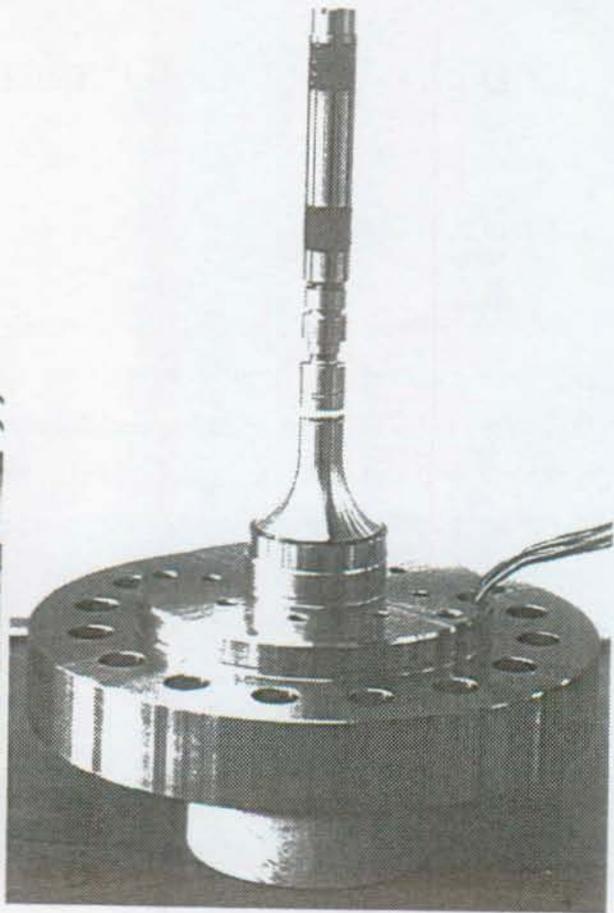
Le viscosimètre développé est du type "à corps chutant". Il permet donc une mesure relative de la viscosité et non pas une mesure absolue.

La partie centrale de l'appareil se compose d'un cylindre de mesure dans lequel un corps prismatique chute sous l'effet de la gravité. Le temps de chute est détecté par deux bobines placées près des extrémités du cylindre, à des distances supérieures à la longueur du corps chutant. Le temps mis par le corps pour franchir la distance séparant les deux bobines de détection donne la mesure relative de la viscosité. Cette partie centrale et de mesure, illustrée par les photos de la figure A.1, prend place dans un cylindre à paroi épaisse dans lequel la mise en pression est effectuée par deux pistons actionnés par un multiplicateur hydraulique de pression. La mesure de la pression est réalisée à la fois par la mesure de la pression primaire sur le multiplicateur de pression, et par des jauges de contrainte disposées sur la surface extérieure du cylindre à paroi épaisse.

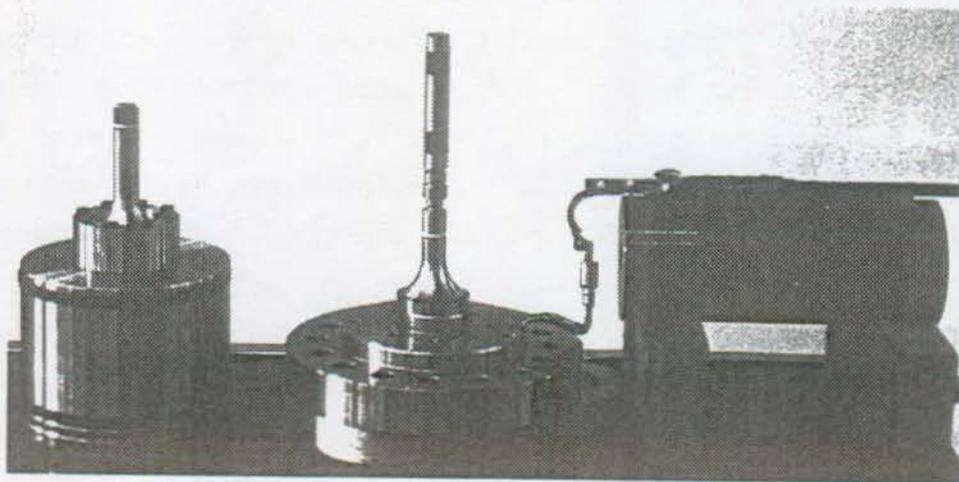
Le tout est alors mis dans une enceinte de protection, servant à la fois au doublement des forces et à la mise en pression primaire, et solidaire d'un dispositif permettant le retournement du viscosimètre pour provoquer la chute du corps. L'enceinte extérieure peut être remplie d'un fluide permettant la mise de l'ensemble à la température désirée.



Vue générale du viscosimètre



Cylindre de détection du corps chutant



Piston mobile et multiplicateur de pression, piston fixe et détection du corps chutant, cylindre à paroi épaisse

**Fig. A.1 : Illustration des éléments principaux du viscosimètre à corps chutant.**

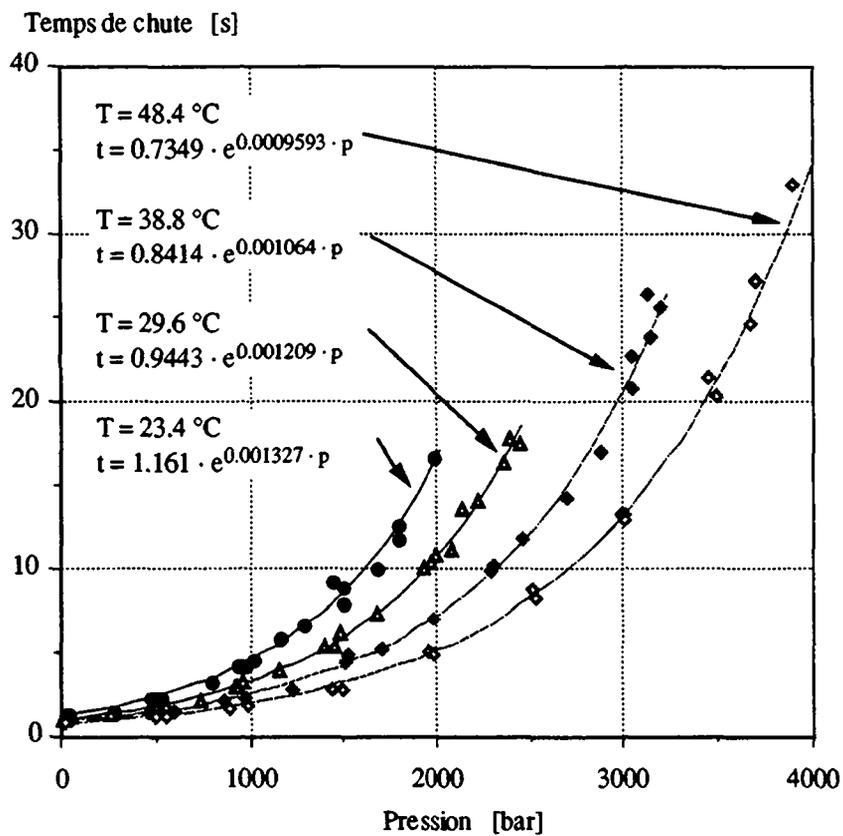
### A.3 RESULTATS DES MESURES DE VISCOSITE

Nous avons effectué nos premiers essais sur l'huile que nous utilisons pour la lubrification de nos broches à hautes performances, soit l'huile minérale

Mobil Velocite oil No 4

dont les caractéristiques de viscosité et de masse volumique ont été données sous (A.6).

Nous avons effectué cinq séries de mesures dont quatre sont reportées à la figure A.2. La première n'a pas été reportée, car réalisée à une température de 20.7 °C, elle ne fait que nuire à la lisibilité des résultats.



**Fig. A.2 : Mesure des temps de chute en fonction de la pression et de la température**

Les relations de fitting ont été reportées sur le graphique, pour ce qui concerne les variations avec la pression.

Après analyse des résultats, on peut facilement obtenir les variations du temps de chute en fonction de la pression et de la température. Nous avons finalement les relations suivantes :

$$\begin{aligned}\mu &= \mu_o e^{(\mu_1 P + \mu_2 T)} \\ \mu_1 &= 1.334 \cdot 10^{-8} \text{ Pa}^{-1} \\ \mu_2 &= -1.872 \cdot 10^{-2} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}\end{aligned}\tag{A.8}$$

Par ailleurs, la viscosité dynamique  $\mu_o$  de l'échantillon d'huile soumis aux essais a été obtenue par la mesure de la viscosité cinématique à la pression atmosphérique. Nous avons obtenu une valeur de

$$\mu = 7.519 \text{ cSt à } 25 \text{ }^\circ\text{C}\tag{A.9}$$

ce qui, compte tenu de la masse volumique déterminée en parallèle

$$\rho = 830.4 \text{ Kg/m}^3 \text{ à } 25 \text{ }^\circ\text{C}\tag{A.10}$$

donne la valeur finale

$$\mu_o = 6.244 \cdot 10^{-3} \text{ Pa}\cdot\text{s}\tag{A.11}$$

Les valeurs que nous avons mesurées permettent de comparer avec les valeurs fournies par le fabricant et que nous avons utilisées jusqu'ici. Nous obtenons, à partir de (A.8) et (A.11)

$$\begin{aligned}40 \text{ }^\circ\text{C} & \quad \mu_o = 4.715 \cdot 10^{-3} \text{ Pa}\cdot\text{s} \\ 50 \text{ }^\circ\text{C} & \quad \mu_o = 3.910 \cdot 10^{-3} \text{ Pa}\cdot\text{s}\end{aligned}\tag{A.12}$$

soit des valeurs de 10 à 15 pour-cent supérieures à celles données sous (A.6).

La plus grande différence réside cependant dans les coefficients piézo- et thermovisqueux que nous avons adoptés dans les calculs numériques par rapport à ceux que nous avons dans la réalité.

Rappelons que nous avons utilisé les valeurs suivantes :

$$\mu_1 = 2.317 \cdot 10^{-8} \text{ Pa}^{-1}$$

$$\mu_2 = -2.0 \cdot 10^{-2} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1} \quad (\text{A.13})$$

ce qui est, en ce qui concerne la piézoviscosité, très différent de la réalité puisqu'on obtient presque la moitié. Il est donc bien clair que nos calculs devront être repris à la lumière de ces nouvelles valeurs. Les résultats vont évidemment quelque peu changer, mais les tendances, elles, resteront quand même celles que nous avons discutées.

#### A.4 LIMITES DES MESURES DE VISCOSITE

L'examen de la figure A.2 montre que les pressions auxquelles nous avons pu mesurer un temps de chute fini du corps chutant augmentent avec la température. En effet, nous avons constaté qu'à une pression donnée, d'autant plus haute que la température est élevée, le corps chutant ne chute plus. Il se produit donc un phénomène de changement de nature du fluide que l'on peut certainement comparer à un changement de phase. Si tel est le cas, le changement s'opère en un passage de type liquide-solide. Il est bien clair que notre loi de thermopiezoviscosité ne serait alors plus réaliste et la mécanique du contact lubrifié ne serait plus conforme non plus à la théorie exposée ci-dessus.

Supposons que la phase de transformation soit une phase solide. Nous devons encore nous poser la question de sa nature. Sommes-nous en présence d'un solide de type cristallin, comme on peut l'admettre pour le cas de corps purs, tels les alcanes par exemple, ou d'un solide amorphe, étant donné la nature complexe d'une huile industrielle ? La question reste pour nous, aujourd'hui, encore ouverte.

Cependant, si l'élévation de température dans un contact lubrifié est bien, comme l'affirment certains auteurs, de quelques degrés seulement, les pressions atteintes dans le film font que l'on n'est plus en présence d'un film fluide au centre du contact, mais d'un troisième corps ! Le problème et son analyse changent radicalement. Si, par contre, comme nous le croyons, la plus grande part de la chaleur reste dans le film au contact, alors les températures atteintes seront certainement suffisantes pour maintenir l'huile dans un état fluide. Peut-être peut-on aussi imaginer une troisième voie qui consiste en ce que le système soit tel qu'il s'autorégule pour garantir la phase liquide au contact pour des questions de minimum d'énergie, ou de temps de transformation.

Nous n'avons ici pas la prétention de répondre à toutes ces questions, mais nous avons été surpris de constater les contradictions auxquelles nous pouvons nous heurter dans l'étude de problèmes réels de lubrification, et surpris aussi de n'en trouver mention nulle part dans la littérature. Il n'est pas certain que les modèles viscoélastiques et viscoplastiques des huiles tiennent mieux compte de ces changements de phase, lorsque les vitesses sont relativement élevées, comme c'est le cas dans les paliers de broche.

## BIBLIOGRAPHIE

Abbot, L. H., 1979, "A System for Viscosity Measurements at Elevated Pressure up to 3 GPa and Elevated Temperatures", *Trans. ASLE*, Vol. 24, N° 1.

Archard, J. F., 1968, "Non Dimensional Parameters in Isothermal Theories of Elastohydrodynamic Lubrication", *Journal Mech. Eng. Science*, N° 2, Vol. 10, pp. 165-167.

Bell, J. C., Kannel, J. W., Allen, C. M., 1961, "The Rheological Behavior of the Lubricant in the Contact Zone of a Rolling Contact System", *Trans. ASME*, series F, Vol. \*\*, pp. 423-435.

Bisset, E. J., Glander, D. W., 1988, "A Highly Accurate Approach That Resolves the Pressure Spike of Elastohydrodynamic Lubrication", *Journal of Tribology*, Vol. 110, pp. 241-246.

Bridgman, P. W., 1949, "Viscosities up to 30'000 bar", *Proc. Amer. Acad.*, Vol. 77.

Brooks, A. N., 1981, "A Petrov-Galerkin Finite Element Formulation for Convection Dominated Flows", *Docteur of Phylosophy Thesis*, California Institute of Technology, Pasadena.

Cameron, A., 1970, *Basic Lubrication Theory*, Ellis Horwood Limited, Chichester.

Cheng, H. S., Sternlicht, B., 1965, "A Numerical Solution for the Pressure, Temperature, and Film Thickness Between Two Infinitely Long, Lubricated Rolling and Sliding Cylinders, Under Heavy Loads", *Journal of Basic Engineering*, Vol. \*\*\*, pp. 695-707.

Chiu, Y. P., 1974a, "An Analysis and Prediction of Lubricant Film Starvation in Rolling Contact Systems", *Trans. ASLE*, Vol. 17, pp. 22-35.

Chiu, Y. P., 1974b, "A Theory of Hydrodynamic Friction Forces in Starved Point Contact Considering Cavitation", *Journal of Lubrication Technology*, Vol. \*\*, pp. 237-246.

Colin, F., Floquet, A., and Play, D., 1988, "Thermal Contact Simulation in 2-D and 3-D Mechanisms", *Journal of Tribology*, Vol. 110, pp. 247-252.

Cook, A. E., 1985, "Some Asymptotic Results in Hydrodynamic Lubrication Theory", *Appl. Math. Modelling*, Vol. 9, pp. 72-74.

Coyne, J., Elrod, H., 1970, "Conditions for the Rupture of a Lubricating Film, Part I: Theoretical Model", *Trans. ASME*, series F, Vol. 92, pp. 451-456.

Coyne, J., Elrod, H., 1971, "Conditions for the Rupture of a Lubricating Film, Part II: New Boundary Conditions for Reynold's Equation", *Trans. ASME*, series F, Vol. 93, pp. 156-167.

Crook, A. W., 1958, "The Lubrication of Rollers", *Phil. Trans. Roy. Soc. London*, series A, Vol. 250, pp. 387-409.

Curnier, A. R., 1978, "The Thermomechanics of Dry and Lubricated Contacts between Deformable Solids", *Docteur of Phylosophy in Engineering Thesis*, University of California, Berkeley.

Curnier, A. R., Taylor, R. L., 1982, "A Thermomechanical Formulation and Solution of Lubricated Contacts Between Deformable Solids", *Journal of Tribology*, Vol. 104, pp. 109-117.

Curnier, A. R., 1985, "TACT: A Contact Analysis Program", *Proc. Second Meeting on Unilateral Problems in Stuctural Analysis, Prescudin*, Vol. 2, pp. 97-114.

Curnier, A. R., 1991, *Méthodes Numériques en Mécanique des Solides*, Swiss Federal Institute of Technology, Lausanne.

Dalmaz, G., Godet, M., 1974, "Effets des conditions d'alimentation sur l'épaisseur du film dans les contacts hertziens lubrifiés", *Revue Mécanique*, No. 296-297, pp. 25-34.

Dalmaz, G., 1979, "Le film mince visqueux dans les contacts hertziens en régime hydrodynamique et élastohydrodynamique", *Thèse de Docteur d'Etat ès Sciences*, INSA, Lyon.

Dow, T. A., Stockwell, R. D., and Kannel, J. W., 1987, "Thermal Effects in Rolling/Sliding EHD Contacts: Part 1-Experimental Measurements of Surface Pressure and Temperature", *Journal of Tribology*, Vol. 109, pp. 503-511.

Dowson, D., Whitaker, A. V., 1965-66, "A Numerical Procedure for the Solution of the Elastohydrodynamic Problem of Rolling and Sliding Contacts Lubricated by a Newtonian Fluid", *Proc. Instn Mech. Engrs*, Vol. 180 Pt 3B, pp. 57-71.

Dowson, D., Higginson, G. R., 1966, *Elasto-Hydrodynamic Lubrication*, Pergamon Press, Oxford.

Ducoulombier, D., 1984, "Viscosité des liquides. Viscosimètre haute pression à cylindre chutant. Etude des alcanes et des alkylbenzènes", *Thèse de Docteur de 3ème Cycle*, Université de Pau et des Pays de l'Adour, Pau.

Foord, C. A., Hammann, W. C., and Cameron, A., 1968, "Evaluation of Lubricants Using Optical Elastohydrodynamics", *Trans. ASLE*, Vol. 11, pp. 31-43.

Floberg, L., 1965, "On Hydrodynamic Lubrication with special Reference to Sub-cavity Pressures and Numbers of Streamers in Cavity Regions", *Acta. Poly. Scand. Mech. Eng.*, Vol. 19.

Gadallah, N., Dalmaz, G., 1984, "Hydrodynamic Lubrication of the Rib-Roller End Contact of a Tapered Roller Bearing", *Journal of Tribology*, Vol. 106, pp. 265-274.

Gohar, R., 1967-1968, "A Ball and Plate Machine for Measuring Elastohydrodynamic Oil Films", *Proc. IME, Experimental Methods in Tribology*, Vol. 182, Part 3G, pp. 43-45.

Goksem, P. G., Hargreaves, R. A., 1978a, "The Effect of Viscous Shear Heating on Both Film Thickness and Rolling Traction in an EHL Line Contact, Part I: Fully Flooded Conditions", *Journal of Tribology*, Vol. 100, pp. 346-353.

Goksem, P. G., Hargreaves, R. A., 1978b, "The Effect of Viscous Shear Heating on Both Film Thickness and Rolling Traction in an EHL Line Contact, Part II: Starved Conditions", *Journal of Tribology*, Vol. 100, pp. 353-358.

Goksem, P. G., Hargreaves, R. A., 1978c, "An Approximate Equation for Predicting the Isothermal and Nonisothermal Starved Rolling Traction in an EHL Line Contact", *Journal of Tribology*, Vol. 100, pp. 472-478.

Grubin, A. N., Vinogradova, I. E., 1949, "Fundamentals of the Hydrodynamic Theory of Lubrication of Heavily Loaded Cylindrical Surfaces" *Tsentral. Nauk.Issledovatel Inst. Tekhnol. Mashinostroen*, Vol. 30, Moskow, DSIR London Transl., N° 337.

Hargreaves, R. A., Higginson, G. R., 1976, "Some Effects of Lubricant Starvation in Cylindrical Roller Bearings", *Journal of Tribology*, Vol. 98, pp. 66-72.

- Harris, T. A., 1984, *Rolling Bearing Analysis*, John Wiley & Sons, New York.
- Houpert, L., 1984, "The Film Thickness in Piezoviscous-Rigid Regime; Film Thickness Lubrication Regimes Transition Criteria", *Journal of Tribology*, Vol. 106, pp. 375-385.
- Houpert, L., 1985a, "Fast Numerical Calculations of EHD Sliding Traction Forces; Application to Rolling Bearings", *Journal of Tribology*, Vol. 107, pp. 234-240.
- Houpert, L., 1985b, "New Results of Traction Force Calculations in Elastohydrodynamic Contacts", *Journal of Tribology*, Vol. 107, pp. 241-248.
- Houpert, L., 1987, "Piezoviscous-Rigid Rolling and Sliding Traction Forces, Application: The Rolling Element-Cage Pocket Contact", *Journal of Tribology*, Vol. 109, pp. 363-371.
- Izuchi, M., 1986, "A High Pressure Rolling-Ball Viscosimeter up to 1 GPa", *Japanese Journal of Applied Physics*, Vol. 25, N° 7.
- Jarchow, F., Potthoff, H., 1989, "Berechnung instationärer elastohydrodynamischer Schmierkontakte", *Konstruktion*, Vol. 41, pp. 155-161.
- Johnson, K. L., 1985, *Contact Mechanics*, Cambridge University Press, Cambridge.
- Kannel, J. W., 1965-66, "Measurements of Pressures in Rolling Contact", *Proc. Instn Mech. Engrs*, Vol. 180, Part 3B, pp. 135-142.
- Khonsari, M. M., Wang, S. H., 1990, "A Theory of Thermo-Elastohydrodynamic Lubrication of Liquid-Solid Lubricated Cylinders", *Journal of Tribology*, Vol. 112, pp. 259-265.
- Kostreva, M. M., 1984a, "Elasto-Hydrodynamic Lubrication: A Non-Linear Complementarity Problem", *Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 4, pp. 377-397.
- Kostreva, M. M., 1984b, "Pressure Spikes and Stability Considerations in Elastohydrodynamic Lubrication Models", *Journal of Tribology*, Vol. 106, pp. 386-395.
- Kuss, E., 1977, "The Design of a High Pressure Viscosimeter for Temperatures up to 300 °C", *High Temperatures - High Pressures*, Vol. 9, pp. 415-421.

Lubrecht, A. A., ten Napel, W. E., and Bosma, R., 1986, "Multigrid, an Alternative Method for Calculating Film Thickness and Pressure Profiles in Elastohydrodynamically Lubricated Line Contacts", *Journal of Tribology*, Vol. 108, pp. 551-556.

Lubrecht, A. A., Venner, C. H., ten Napel, W. E., Bosma, R., 1988, "Film Thickness Calculations in Elastohydrodynamically Lubricated Circular Contacts, Using a Multigrid Method", *Journal of Tribology*, Vol. 110, pp. 503-507.

Martin, H. M., 1916, "The Lubrication of Gear Teeth", *Engineering, London*, Vol. 102, pp. 119-121.

Meuleman, P. K., Lubrecht, A. A., and ten Napel, W. E., 1985, "Traction in Elastohydrodynamic Lubrication: High Contact Pressure Experiments and a Thermal Roelands-Eyring-Maxwell Model", *Twente University of Technology Research Report nr.WB*, No. 15, pp. 1-31.

Mokhtar, M. O. A., Abdel Ghany, A. A., 1985a, "Elastohydrodynamic Behavior of Rolling Elliptical Contacts: Part I: Pressure and Temperature Distributions", *Journal of Tribology*, Vol. 107, pp. 343-351.

Mokhtar, M. O. A., Abdel Ghany, A. A., 1985b, "Elastohydrodynamic Behavior of Rolling Elliptical Contacts: Part II: Oil Film Thickness and Contact Profile", *Journal of Tribology*, Vol. 107, pp. 352-358.

Nagaraj, H. S., Sanborn, D. M., and Winer, W. O., 1978, "Direct Surface Temperature Measurement by Infrared Radiation in Elastohydrodynamic Contacts and the Correlation with the Blok Flash Temperature Theory", *Wear*, Vol. 49, pp. 43-59.

Oden, J. T., Wu, S. R., 1985, "Existence of Solutions to the Reynold's Equation of Elastohydrodynamic Lubrication", *Int. J. Engng Sci.*, Vol. 23, N° 2, pp. 207-215.

Palmgren, A., 1946, *Les roulements à billes et à rouleaux, Description-Théorie-Applications*, Dr. Ed. Grégr & Fils, Prague.

Peiran, Y., Shizhu, W., 1990, "A Generalized Reynold's Equation for Thermal Elastohydrodynamic Lubrication", *Journal of Tribology*, Vol. 112, pp. 631-636.

Pham-Quang-Hai, A., 1982, "Etude thermique du contact hertzien lubrifié", *Thèse de Docteur 3ème Cycle*, INSA, Lyon.

Pinkus, O., Sternlicht, B., 1961, *Theory of Hydrodynamic Lubrication*, MacGraw-Hill, New York.

Pinkus, O., 1987, "The Reynolds Centennial: A Brief History of the Theory of Hydrodynamic Lubrication", *Journal of Tribology*, Vol. 109, pp. 2-20.

Pinkus, O., 1990, *Thermal Aspects of Fluid Film Tribology*, ASME Press, New York.

Pruvot, F. C., 1980, "High Speed Bearings for Machine-Tool Spindles", *CIRP Annals Manufacturing Technology*, Vol. 29/1, pp. 293-297.

Pruvot, F. C., 1982, "Etude dynamique des broches", *Conception et Calcul des Machines-Outils*, Vol. 2, Swiss Federal Institute of Technology, Lausanne.

Pruvot, F. C., 1983, "Etude thermique des broches", *Conception et Calcul des Machines-Outils*, Vol. 3, Swiss Federal Institute of Technology, Lausanne.

Pruvot, F. C., 1986, "Etude statique des broches", *Conception et Calcul des Machines-Outils*, Vol. 1, Swiss Federal Institute of Technology, Lausanne.

Pruvot, F. C., 1988, "New Designs and Design Concepts of Machine-Tools and Machine Tool Subsystems", *Proc. Third International Machine-Tool Engineers Conference (IMEC), Tokyo*, Vol. 1, pp. 16-30.

Pruvot, F. C., 1990, *Conception et Calcul des Machines-Outils*, Vol. 1, Swiss Federal Institute of Technology, Lausanne.

Pruvot, F. C., 1991, *Conception et Calcul des Machines-Outils*, Vol. 2, Swiss Federal Institute of Technology, Lausanne.

Rabemananjafy, P. C., 1990, "Etude des aspects thermiques en lubrification élastohydrodynamique", *Thèse de Docteur-Ingénieur*, Swiss Federal Institute of Technology, Lausanne.

Reynolds, O., 1886, "On the Theory of Lubrication and its Application to Mr. Beauchamp Tower's Experiments, including on Experimental Determination of the Viscosity of Olive Oil", *Phil. Trans. Roy. Soc. London*, series A, Vol. 177, Part 1, pp. 157-234.

Rodkiewicz, C. M., Srinivasan, V., 1972, "Elastohydrodynamic Lubrication in Rolling and Sliding Contacts", *Trans. ASME*, series F, pp. 324-329.

Rohde, S. M., Oh, K. P., 1975, "A unified Treatment of Thick and Thin Film Elastohydrodynamic Problems by Using High Order Element Methods", *Proc. R. Soc. Lond. A.*, Vol. 343, pp. 315-331.

Ryhming, I. L., 1985, *Dynamique des fluides*, Presses polytechniques romandes, Lausanne.

Sadeghi, F., Dow, T. A., 1987a, "Thermal Effects in Rolling/Sliding Contacts: Part 2-Analysis of Thermal Effects in Fluid Film", *Journal of Tribology*, Vol. 109, pp. 512-518.

Sadeghi, F., Dow, T. A., and Johnson, R. R., 1987b, "Thermal Effects in Rolling/Sliding Contacts: Part 3-Approximate Method for Prediction of Mid-Film Temperature and Sliding Traction", *Journal of Tribology*, Vol. 109, pp. 519-524.

Sadeghi, F., Sui, P. C., 1989, "Internal Stresses in Elastohydrodynamic Lubrication of Rolling/Sliding Contacts", *Journal of Tribology*, Vol. 111, pp. 180-187.

Sadeghi, F., Sui, P. C., 1990a, "Thermal Elastohydrodynamic Lubrication of Rolling/Sliding Contacts", *Journal of Tribology*, Vol. 112, pp. 189-195.

Sadeghi, F., Sui, P. C., 1990b, "Thermal Elastohydrodynamic Lubrication of Rough Surfaces", *Journal of Tribology*, Vol. 112, pp. 341-346.

Safa, M. A., Anderson, J. C., and Leather, J. A., 1983, "Transducers for Pressure, Temperature and Oil Film Thickness Measurement in Bearings", *Sensors and Actuators*, Vol. 3, pp. 119-128.

Sharma, S. K., 1987, "Traction Behavior of Some Lubricants and Hydraulic Fluids", *Journal of Tribology*, Vol. 109, pp. 372-373.

Sibley, L. B., Orcutt, F. K., 1961, "Elasto-Hydrodynamic Lubrication of Rolling-Contact Surfaces", *Trans. ASLE*, Vol. 4, pp. 234-249.

Strozzi, A., 1986, "The Elastohydrodynamic Problem Expressed in Terms of Extended Variational Formulation", *Journal of Tribology*, Vol. 108, pp. 557-564.

Szeri, A. Z., 1987, "Some Extensions of the Lubrication Theory of Osborne Reynolds", *Journal of Tribology*, Vol. 109, pp. 21-36.

Timoshenko, S. P., Goodier, J. N., 1970, *Theory of Elasticity*, McGraw-Hill Book Co, New York.

Vichard, J.-P., Godet, M., 1966, "Les aspects modernes de l'hydrodynamique des contacts lubrifiés", *Revue de l'Institut Français du Pétrole*, Vol. 11, No. 7-8, pp. 1088-1130.

Wang, S. H., Hua, D. Y., Zhang, H. H., 1988, "A Full Numerical EHL Solution for Line Contacts under Pure Rolling Condition with a Non-Newtonian Rheological Model", *Journal of Tribology*, Vol. 110, pp. 583-586.

Wedeven, L. D., Cameron A., 1967-1968, "A Study of Elastohydrodynamic Lubrication in Rolling Bearings Using Optical Interference", *Proc. IME, Experimental Methods in Tribology*, Vol. 182, Part 3G, pp. 87-89.

Wolveridge, P. E., Baglin, K. P., and Archard, J. F. 1970-1971, "The Starved Lubrication of Cylinders in Line Contact", *Proc. Inst. Mech.Eng.* , Vol. 185, pp. 1159-1169.

Yufeng, L., Seireg, A., 1989, "Predicting the Coefficient of Friction in Sliding-Rolling Contacts", *Journal of Tribology*, Vol. 111, pp. 386-390.

## CURRICULUM VITAE

Nom : PAHUD  
Prénom : Pierre  
Adresse privée : Pontaise 47, CH - 1018 Lausanne  
021/37 09 57  
Adresse professionnelle : EPFL-IMECO  
Laboratoire de Machines-outils et Automates  
ME Ecublens  
CH - 1015 Lausanne  
021 693 29 16  
Date de naissance : 12 juin 1950  
Originaire : Poliez-Pittet et Bottens  
Etat civil : célibataire

### Formation scolaire

1957-1960 Ecole primaire à Villars s/Ollon  
1960-1966 Collège secondaire à Aigle  
1966-1968 Gymnase de la Cité Lausanne

### Etudes

1968-1972 Ecole polytechnique fédérale de Lausanne  
Section mécanique option métallurgique  
Diplôme en mécanique de la rupture

### Certificats

1966 Certificat d'étude secondaire du Collège d'Aigle  
1968 Baccalauréat ès sciences } Gymnase cantonal  
Maturité type C } La Cité  
1973 Diplôme Ing. mécanicien EPFL

### Activités professionnelles

1973-1978 Institut des Métaux et des Machines de l'EPFL  
Assistant de mécanique vibratoire de  
M. le Professeur M. Del Pedro  
1979-1986 Laboratoire de Mécanique appliquée de l'EPFL  
1er assistant de mécanique appliquée de  
M. le Professeur M. Del Pedro  
1986-1987 Université de Lausanne, chargé de cours en Biomécanique  
1986-1992 Laboratoire de Machines-outils et Automates de l'EPFL  
Adjoint scientifique de  
M. le Professeur F. Pruvot  
1989 Remplacement du Prof. F. Pruvot en année sabbatique  
Inscription au doctorat  
1989-1992 Département de Mécanique de l'EPFL, chargé de cours :  
- Conception des machines,  
- Transmissions électrohydrauliques.



## PUBLICATIONS PRINCIPALES

- "Robots industriels : une conception nouvelle dans les capteurs de forces multidirectionnels", *Ingénieurs et architectes suisses*, N° 23, pp. 425-428, 1985
- "Robotique : nouveaux capteurs de forces multidirectionnels", *La Revue Polytechnique*, N° 1469, pp. 1367-1371, 1985
- "Capteurs de forces multidirectionnels pour robots", *Machines-outils, Produire*, N° 13, pp. 45-51, 1986
- "Architectures modernes pour machines de demain", *Marché Suisse des Machines*, N° 3, 4 février 1988
- "Puissance et précision pour les broches d'usinage", *Marché Suisse des Machines*, N° 9, 28 avril 1988
- "Les commandes de puissance", *Marché Suisse des Machines*, N° 13, 23 juin 1988
- "Porte-outils : dépasser l'immobilisme de la normalisation", *Marché Suisse des Machines*, N° 16, 4 août 1988
- "Contrôle, Mesure : une intégration délicate", *Marché Suisse des Machines*, N° 21, 13 octobre 1988
- "Le passage de l'art à la science dans le domaine délicat des posages et prises de pièces", *Marché Suisse des Machines*, N° 23, 10 novembre 1988.
- "Futur des machines, Machines du Futur", *Marché Suisse des Machines*, mai 1989, 55p.
- Del Pedro, M., Pahud, P., *Mécanique vibratoire : systèmes discrets linéaires*, Presses Polytechniques Romandes, Lausanne, 253 p., 1989.

