

SIMULATION NUMERIQUE DES TRAITEMENTS DE SURFACE PAR LASER

THESE No 1011 (1992)

PRESENTEE AU DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

ECOLE POLYTECHNIQUE FEDERALE DE LAUSANNE

POUR L'OBTENTION DU GRADE DE DOCTEUR ES SCIENCES TECHNIQUES

PAR

MARCO PICASSO

Ingénieur E.C.A.M. (Lyon), D.E.S.S. calcul scientifique (Université de Besançon)
de nationalité française

acceptée sur proposition du jury :

Prof. J. Rappaz, rapporteur
Prof. O. Pironneau, corapporteur
Prof. M. Rappaz, corapporteur

Lausanne, EPFL
1992

Remerciements

Monsieur le Professeur J. Rappaz a été mon directeur de thèse pendant ces quatre années de travail. Le climat de confiance qu'il a instauré, son enthousiasme permanent et ses nombreux conseils m'ont permis de travailler dans d'excellentes conditions. Je le remercie profondément.

Ce travail est une contribution du département de mathématiques au projet Eureka 154, cofinancé par la Commission pour l'Encouragement de la Recherche Scientifique (Berne) et la compagnie Sulzer Innotec (Wintherthur), dirigé par Monsieur le Professeur M. Rappaz du département des matériaux. Je remercie vivement Monsieur M. Rappaz pour avoir suivi avec attention ce travail, lu le manuscrit et accepté d'être membre du jury.

Je souhaite également apporter mes plus vifs remerciements à Monsieur le Professeur O. Pironneau pour l'honneur qu'il m'a fait d'être membre du jury et pour l'intérêt qu'il a porté à ce travail.

Enfin, je tiens à remercier Messieurs A. Hoadley du département des matériaux, J. Pousin et R. Touzani du département de mathématiques pour les intéressantes discussions que nous avons eues ainsi que pour leurs conseils avisés.



Résumé

Nous étudions dans ce travail des modèles numériques concernant les traitements de surface par laser. Nous considérons plus particulièrement deux types de traitements : la refusion par laser (un faisceau laser refond localement une pièce mobile) et le recouvrement par laser (l'injection simultanée de poudre métallique dans le bain liquide provoque le dépôt d'une fine couche sur la pièce).

Nous proposons dans un premier temps un modèle bidimensionnel stationnaire de recouvrement par laser. Ce modèle sous-entend la résolution d'un problème de changement de phase solide-liquide, d'un problème d'hydrodynamique dans le bain liquide produit par le faisceau laser et d'un problème de surface libre.

Nous extrayons de ce modèle complexe un problème simplifié correspondant au cas où l'injection de poudre est nulle (refusion par laser) et où les mouvements de convection dans le liquide sont négligés. Ce problème correspond à la résolution d'une équation de type diffusion-convection, dégénérée sur l'interface de changement de phase (problème de Stefan stationnaire). Nous montrons l'existence d'une solution pour le problème régularisé correspondant, proposons une discrétisation par une méthode d'éléments finis, énonçons les estimations a priori et a posteriori. Un algorithme de maillage adaptatif, basé sur les estimations a posteriori, est exposé. Des résultats numériques obtenus sur un problème de changement de phase dont nous connaissons la solution exacte montrent l'efficacité de la méthode.

Finalement nous résolvons le problème complet de recouvrement par laser (problèmes de changement de phase et d'hydrodynamique) par une méthode d'éléments finis et nous discutons les résultats numériques.

Abstract

This work deals with the numerical modelling of laser surface treatments, particularly laser remelting (a laser beam melts part of a moving workpiece) and laser cladding (injection of powder in the melt pool produces a thin metallic layer on the workpiece).

A two-dimensional stationary model is presented for laser cladding. This model takes into account the solid-liquid phase change process and the important velocity field in the melt pool.

A pure thermal problem is studied, which corresponds to a laser remelting model when the liquid particles movements are neglected. The enthalpy variable is introduced and thus the model reduces to solving the so-called stationary Stefan problem (a diffusion-convection equation, degenerated on the phase change interface). We present a Finite Element discretization for the corresponding regularized problem and give some a priori and a posteriori estimates. An efficient adaptive mesh algorithm is then presented.

Finally we solve the complete laser cladding model (the two phase change and hydrodynamic problems) using a Finite Element Method and discuss some numerical results.

Table des matières

1. Introduction	1
2. Modélisation	9
2.1. Introduction	9
2.2. Lois de conservation	13
2.3. Hypothèses et conditions aux limites	15
2.4. Le modèle	21
3. Résolution par une méthode d'éléments finis d'un problème modèle de refusion par laser	27
3.1. Introduction aux méthodes de maillage adaptatif	27
3.2. Le modèle	30
3.3. Discrétisation et estimations a priori	38
3.4. Estimations a posteriori	46
3.5. Un schéma itératif	51
3.6. Un algorithme de maillage adaptatif	56
3.7. Résultats numériques	69
4. Résolution par une méthode d'éléments finis d'un problème de recouvrement par laser	97
4.1. Algorithme de découplage	98
4.2. Résolution numérique du problème de changement de phase avec hydrodynamique dans le liquide	101
4.3. Calcul de l'interface liquide-gaz	108
4.4. Résultats numériques	111
Annexes	135
Annexe 1. Un problème de solidification avec zone pâteuse	135
Annexe 2. Algorithmes unidimensionnels de déplacement des sommets	145
Bibliographie	161

Principales notations utilisées

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^N , $N = 1, 2$, de frontière $\partial\Omega$ C^1 par morceaux et d'adhérence $\bar{\Omega}$. Les opérateurs différentiels sont notés suivant les conventions habituelles, à savoir :

$$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_N} \right)^T = \text{grad } u$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = \text{div } \mathbf{v}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \nabla u \cdot \mathbf{n}$$

$$\Delta u = \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$$

$$D_x^s u = \frac{\partial^{|s|}}{\partial^{s_1} x_1 \partial^{s_2} x_2 \dots \partial^{s_N} x_N}, \quad s = (s_1, s_2, \dots, s_N) \text{ et } |s| = \sum_{i=1}^N s_i.$$

• Espaces fonctionnels :

Nous utilisons les espaces fonctionnels suivants :

pour tout m , $1 \leq m \leq \infty$:

$C^0(\Omega)$: espace des fonctions continues sur Ω .

$C^m(\Omega)$: espace des fonctions m fois continûment différentiables sur Ω .

$C^m(\bar{\Omega}) = \{u \in C^m(\Omega) ; D_x^s u \text{ possède une extension continue à } \bar{\Omega} \text{ pour tout } s \leq m\}$.

$f \in C_I^0(\bar{\Omega})$ si et seulement si

i) il existe une partition $\Omega_1, \dots, \Omega_\ell$ telle que

$$\bigcup_{j=1}^{\ell} \bar{\Omega}_j = \bar{\Omega}$$

$$\Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset, \text{ si } i \neq j,$$

ii) $f|_{\Omega_j}$ possède une extension continue sur $\bar{\Omega}_j$, $j = 1, 2, \dots, m$.

$C_I^m(\bar{\Omega}) = \{u \in C^{m-1}(\bar{\Omega}) ; D_x^s u \in C_I^0(\bar{\Omega}) \text{ pour tout } |s| = m\}$.

$C_0^\infty(\Omega) = \{u \in C^\infty(\Omega) \text{ pour tout } m \text{ et } u \text{ est à support compact dans } \Omega\}$.

pour tout $p, 1 \leq p < \infty$:

$$L^p(\Omega) = \{u : \Omega \rightarrow \mathbf{R}; u \text{ mesurable et il existe une constante } C; \int_{\Omega} |u|^p dx \leq C\}.$$

$$H^m(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) ; D_x^s u \in L^2(\Omega) ; |s| \leq m\}.$$

$$H_0^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) ; u|_{\partial\Omega} = 0\}.$$

pour $p = \infty$:

$$L^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \rightarrow \mathbf{R}; u \text{ mesurable et il existe une constante } C; |f(x)| \leq C \text{ p.p. dans } \Omega\}.$$

Nous utiliserons les normes et semi-normes suivantes :

pour tout $p, 1 \leq p < \infty$ et $u \in L^p(\Omega)$:

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

Pour tout $m, 1 \leq m < \infty$ et $u \in H^m(\Omega)$:

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} = \left(\sum_{|s|=m} \|D_x^s u\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2}, \quad \|u\|_{H^m(\Omega)} = \left(\sum_{|s| \leq m} \|D_x^s u\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2}.$$

En particulier pour $u \in H^1(\Omega)$:

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}, \quad \|u\|_{H^1(\Omega)} = \|u\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}.$$

Enfin pour $p = \infty$:

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf\{C ; |u(x)| \leq C \text{ p.p. dans } \Omega\}.$$

• Notations relatives aux grandeurs physiques :

α : indice de phase, $\alpha = s$: solide, $\alpha = \ell$: liquide, $\alpha = p$: poudre.
 Ω_α : domaine occupé par la phase α .
 $\Gamma_{\alpha\beta}$: interface séparant les phases α et β .
 \mathbf{n}_α : normale unité extérieure au domaine Ω_α .
 $\mathbf{n}_{\alpha\beta}$: normale unité de l'interface $\Gamma_{\alpha\beta}$, dirigée de la phase α vers la phase β .
 T : température dans Ω .
 ρ : densité
 k : conductivité thermique.
 c_p : chaleur spécifique massique.
 h : enthalpie massique.

• Notations relatives à la discrétisation :

Soit $(\mathcal{T}_h)_h$ une famille de triangulations de $\bar{\Omega}$. Nous notons :
 K : triangle de \mathcal{T}_h .
 h_K : diamètre de la plus petite boule contenant K .
 ρ_K : diamètre de la plus grande boule contenue dans K .
 α_K : plus petit angle du triangle K .
 $h = \max\{h_K ; K \in \mathcal{T}_h\}$.
 E : arête de \mathcal{T}_h .
 h_E : longueur de E .
 P_1 : ensemble des polynômes de degré un sur K .

CHAPITRE 1

Introduction

La constante demande de l'industrie de pointe en pièces métalliques ayant des caractéristiques exceptionnelles incite les laboratoires de recherche à développer de nouveaux procédés d'élaboration des matériaux. Les traitements de surface font l'objet d'une attention plus particulière et ont pour but d'améliorer le comportement en surface d'une pièce (dureté, résistance à l'usure ou à la corrosion), sans pour autant détériorer ses caractéristiques internes (ductilité, résistance, amortissement des vibrations). Dans ce travail nous étudions des modèles numériques concernant les *traitements de surface par laser*, où la forte densité d'énergie d'un faisceau laser est utilisée pour refondre la surface d'un matériau. Deux procédés nous intéressent plus particulièrement :

- *La refusion par laser* : un faisceau laser refond localement une pièce mobile afin de modifier, sur une fine couche, sa microstructure (cf. figure 1.1).
- *Le recouvrement par laser* : un faisceau laser refond localement une pièce mobile. L'injection simultanée, par le biais d'un gaz inerte, de poudre métallique dans le bain liquide provoque le dépôt d'une fine couche de nature et composition différentes de celles du matériau de base (cf. figure 1.2).

Les traitements de surface par laser sont appliqués industriellement sur des pièces complexes (soupapes de moteur à explosion, aubes de turbines [Mac]), mais restent des procédés délicats à mettre au point. En effet, la compréhension des phénomènes physiques impliqués lors des traitements est limitée par les difficultés de mesures (faibles dimensions du bain liquide, températures élevées) et la simulation numérique devient un outil indispensable à la maîtrise du procédé.

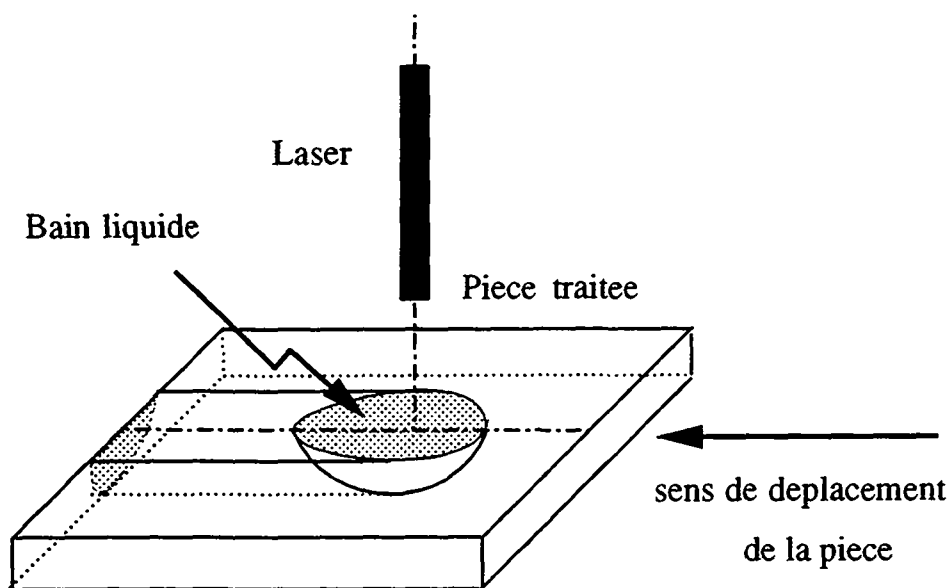


Figure 1.1 : refusion par laser.

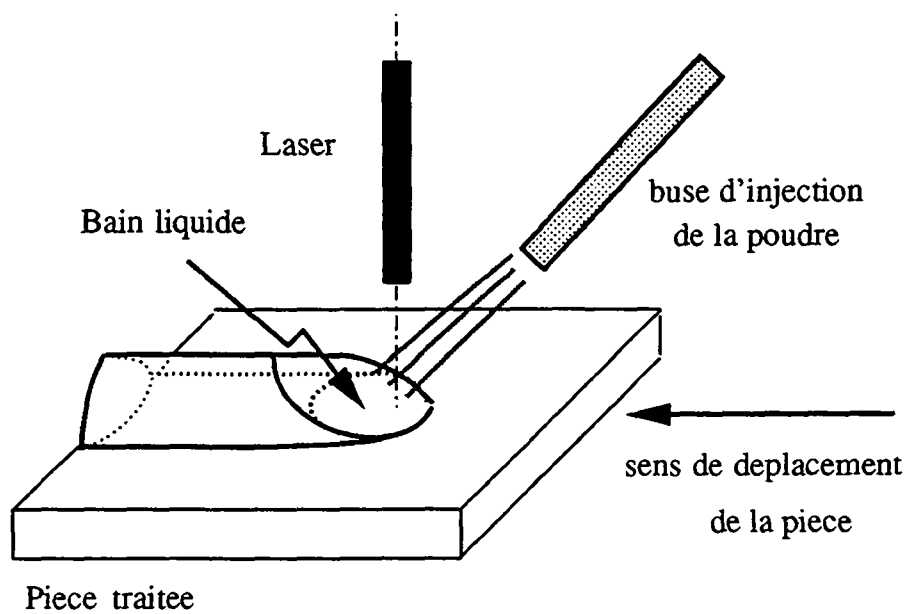


Figure 1.2 : recouvrement par laser.

La modélisation des traitements de surface par laser nécessite l'étude de phénomènes physiques intervenant à différentes échelles (cf. figure 1.3) :

- *Echelle macroscopique* ou échelle de la pièce :
étude de l'histoire thermique de la pièce lors du traitement, détermination des contraintes et déformations résiduelles après traitement.
- *Echelle mésoscopique* ou échelle du bain liquide :
étude des interactions intervenant directement sous le laser (mécanisme de fusion de la poudre, absorption et réflexion de l'énergie du laser, forme du bain liquide).
- *Echelle microscopique* ou échelle du grain :
étude de la structure microscopique de la surface de la pièce. Cette étude sous-entend la compréhension des phénomènes liés à la solidification rapide d'un matériau tels la germination et la croissance de grains dendritiques ou eutectiques ainsi que certains changements de phase à l'état solide.

La majorité de ces phénomènes, observés à différentes échelles, ont été étudiés séparément. Du point de vue macroscopique, citons l'étude du réchauffement de la pièce lors d'un traitement de refusion [Lun] et de recouvrement [Dre]. L'évaluation de la forme du bain liquide lors d'un traitement de refusion (ou de soudage) a fait l'objet de nombreuses études [Bie, Cha, Kan, Kou, Kre, Maz, Pau, Ram, Tsa, Zac]. Etant donné les forts mouvements de convection dans le bain liquide (dus à des forces thermocapillaires), il est nécessaire de résoudre, outre un problème de changement de phase dans la pièce, un problème d'hydrodynamique dans le liquide ainsi qu'un problème de surface libre (en l'occurrence l'interface liquide-gaz). Dans le cas du recouvrement par laser, les seuls modèles publiés à ce jour [Hoa2, Hoa3, Wee] sont purement thermiques et aucun modèle hydrodynamique n'a encore été formulé. Un autre sujet d'intérêt pour les industriels est le calcul des contraintes résiduelles après traitement. Les modèles les plus récents [Ros] tiennent compte des phénomènes mécaniques complexes de plasticité, de fluage et de transformation de phases à l'état solide (transformations austénitiques ou martensitiques). La fiabilité des résultats reste malgré tout limitée par la connaissance des lois de comportement du matériau.

La prédiction des caractéristiques mécaniques de la pièce après traitement (dureté, résistance à l'usure et à la corrosion) nécessite l'étude de la microstructure. Les modèles sont nombreux et la difficulté réside dans le fait que, suivant les conditions de traitement, l'interface solide-liquide a une forme complexe reflétant la nature de l'alliage. Il en résulte, selon les conditions de traitement, des microstructures très variées [Davis, Gre1, Kur, Zim]

(dendrites, eutectiques, structures en bandes). La plupart des modèles microscopiques consistent, à partir de la donnée du gradient de température et de la vitesse locale de solidification, (déterminés par un modèle macro ou mésoscopique), à prévoir les caractéristiques géométriques de la microstructure (taille du grain, espacement des bras des dendrites ou des lamelles eutectiques) [Car,David,Hoal]. A l'inverse, signalons l'existence de récents modèles macroscopiques concernant la solidification d'alliages binaires [Benn,Rap2,Vis] [Vol], dont la formulation dépend de considérations moyennes effectuées à l'échelle de la microstructure.

Remarquons, pour clore ce bref aperçu, qu'il n'existe pas pour l'instant de modèle unique permettant d'expliquer tous ces phénomènes simultanément. En outre, la technologie actuelle des ordinateurs ne permet pas de coupler des calculs tenant compte de phénomènes microscopiques, à l'échelle de toute la pièce.

Dans cette thèse nous formulons et résolvons, par une méthode d'éléments finis, un problème stationnaire et bidimensionnel de refusion et de recouvrement par laser, à l'échelle mésoscopique. Le modèle, présenté dans le chapitre suivant, a pour inconnues la température dans la pièce et tient compte de l'injection de poudre ainsi que des mouvements de convection dans le bain liquide. Ce modèle nécessite la résolution de deux problèmes de la chaleur dans les régions solide et liquide de la pièce, d'un problème d'hydrodynamique dans la région liquide et deux problèmes de surface libre (les interfaces solide-liquide et liquide-gaz), d'extrémités inconnues, délimitant la forme du bain liquide.

Un problème modèle issu de ces équations est étudié dans le chapitre 3 et correspond à un traitement de refusion par laser avec une interface liquide-gaz horizontale et un champ de vitesse dans le bain liquide donné. La variable thermodynamique "enthalpie" u est introduite pour reformuler le problème de changement de phase et conduit à la résolution numérique d'un problème de diffusion-convection, dégénéré sur l'interface solide-liquide (problème de Stefan stationnaire)

$$-\Delta\beta(u) + \mathbf{v} \cdot \nabla u = 0. \quad (1.1)$$

Ici \mathbf{v} est un champ de vitesse donné (correspondant à la vitesse de translation de la pièce par rapport au laser dans le solide et à un champ à divergence nulle dans le liquide), β une fonction continue, lipschitzienne, monotone croissante, reflétant les propriétés du matériau. Notons que, dans le cas d'un corps pur ou d'un alliage eutectique, l'enthalpie u est discontinue au passage de l'interface solide-liquide et présente de forts gradients au voisinage de la zone pâteuse dans le cas d'un alliage dendritique. Une discrétisation par une méthode d'éléments finis est étudiée et un schéma numérique efficace est proposé.

Les méthodes de maillage adaptatif suscitent un intérêt croissant auprès de la communauté des numériciens et ont pour but de produire, de façon automatique, des maillages qui s'adaptent à la solution numérique. Ces techniques paraissent particulièrement utiles dans le cadre de notre étude puisque l'enthalpie u est discontinue au passage de l'interface solide-liquide et subit des effets de type couche limite si la vitesse de traitement est importante. En outre, l'utilisation de méthodes de maillage adaptatif nous semble nécessaire dans la perspective éventuelle d'un couplage des calculs macro et microscopiques. Des estimations *a posteriori* sont donc établies pour l'équation 1.1 lorsque β est strictement croissante (i.e. lorsque l'équation 1.1 est régularisée), un algorithme de maillage adaptatif est proposé et des tests numériques sur un problème de changement de phase dont nous connaissons la solution exacte confirment l'efficacité de la méthode. Finalement la méthode est appliquée au problème modèle de refusion par laser.

Dans le chapitre 4 nous proposons une méthode numérique permettant de résoudre le modèle de recouvrement par laser énoncé dans le chapitre 2. Un algorithme permettant de découpler le calcul de l'interface liquide-gaz des autres équations est exposé. La principale difficulté numérique consiste à résoudre le problème de changement de phase 1.1 couplé avec un problème d'hydrodynamique dans le bain liquide. La vitesse v dans le bain liquide est alors solution des équations de Navier-Stokes incompressibles avec des conditions aux limites tenant compte de l'injection de poudre et des effets thermocapillaires. Les techniques numériques du chapitre 3 sont appliquées pour le problème thermique, tandis qu'une méthode de pénalisation est utilisée pour reformuler le problème d'hydrodynamique sur tout le domaine de calcul. Finalement, des résultats numériques sont présentés pour les deux types de traitement (refusion et recouvrement par laser), pour trois vitesses de traitement différentes.

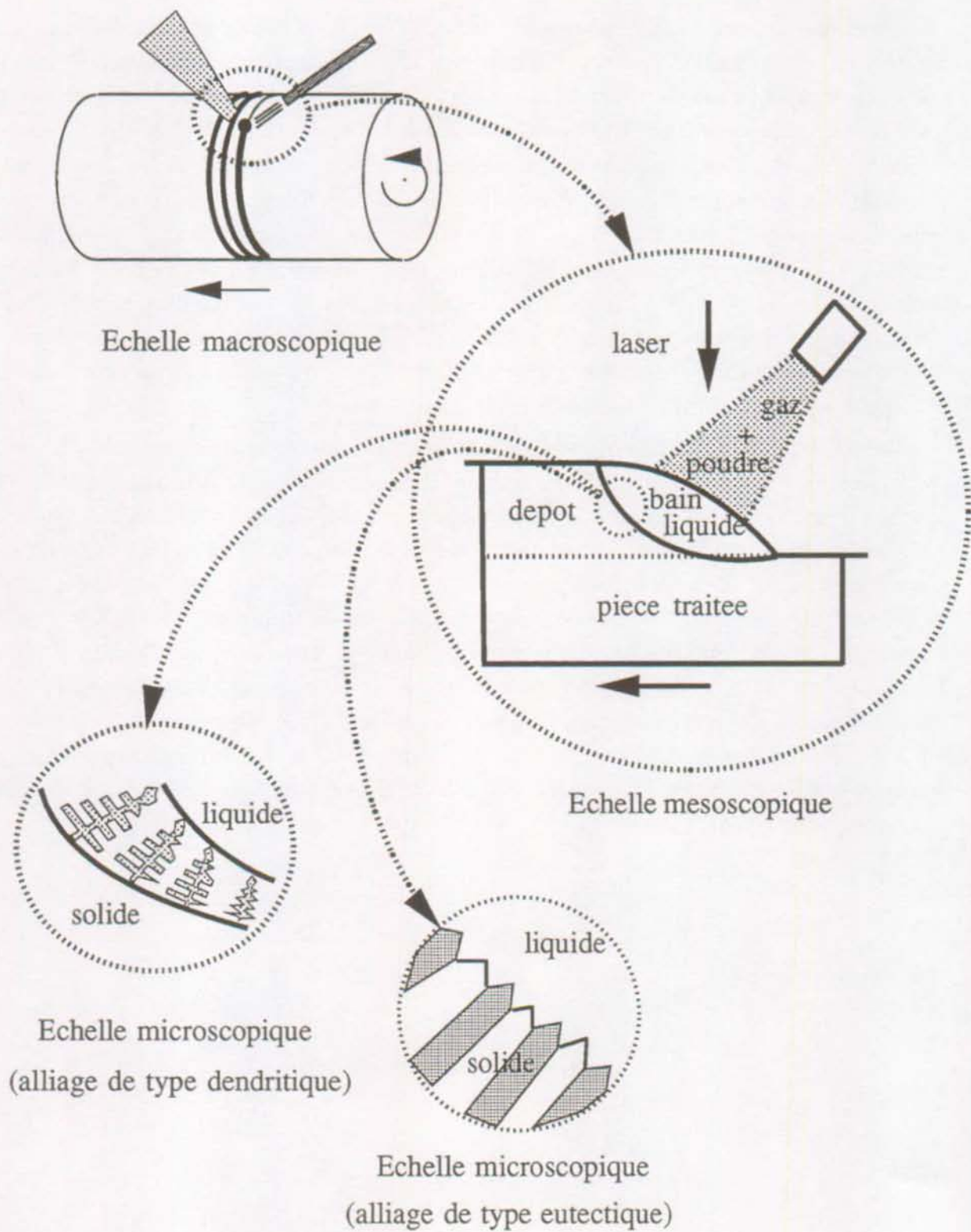


Figure 1.3 : les trois échelles intervenant lors du recouvrement par laser.

CHAPITRE 2

Modélisation

Dans ce chapitre nous exposons un modèle bidimensionnel et stationnaire de recouvrement par laser tenant compte des mouvements de convection dans le bain liquide ainsi que des effets dus à l'injection de poudre. Les phénomènes physiques que nous considérons sont présentés dans le paragraphe suivant. Nous énonçons dans le paragraphe 2.2 les équations régissant le comportement du système, issues des lois de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie. Nous proposons dans le paragraphe 2.3 des hypothèses simplificatrices et spécifions les conditions aux limites. Finalement nous formulons dans le paragraphe 2.4 le problème à résoudre.

2.1. Introduction.

Considérons d'abord le cas de la refusion par laser. Un faisceau laser refond localement une pièce mobile. Rappelons que le phénomène que nous considérons est bidimensionnel et stationnaire. L'hypothèse bidimensionnelle correspond à un traitement thermique sur une pièce effectué avec un faisceau laser dont la dimension transversale est grande devant l'extension longitudinale (l'obtention de tels faisceaux est possible par le biais de miroirs optiques produisant un foyer linéaire). L'hypothèse stationnaire est raisonnable si les dimensions longitudinale et verticale de la pièce sont grandes devant l'extension longitudinale du faisceau laser et que l'on néglige la phase transitoire de démarrage du traitement.

Un champ de vitesse important apparaît dans le bain liquide, dû à des forces thermocapillaires (i.e. des forces de surface d'origine thermique) et pouvant considérablement modifier la forme et la répartition de la température dans le bain liquide (cf. figure 2.1). Ce phénomène, connu sous le nom "d'effet Marangoni", a aussi été observé lors du soudage par laser ou lors de la fabrication de cristaux dans l'espace et a fait l'objet de nombreuses études [Bie,Cha,David,Kan] [Kou,Kre,Maz,Mys,Pau,Ram,Tsa,Zac].

Lors du revêtement par laser, il faut ajouter à ces forces thermocapillaires les effets dus à l'injection de poudre dans le bain liquide : abaissement de la température du bain,

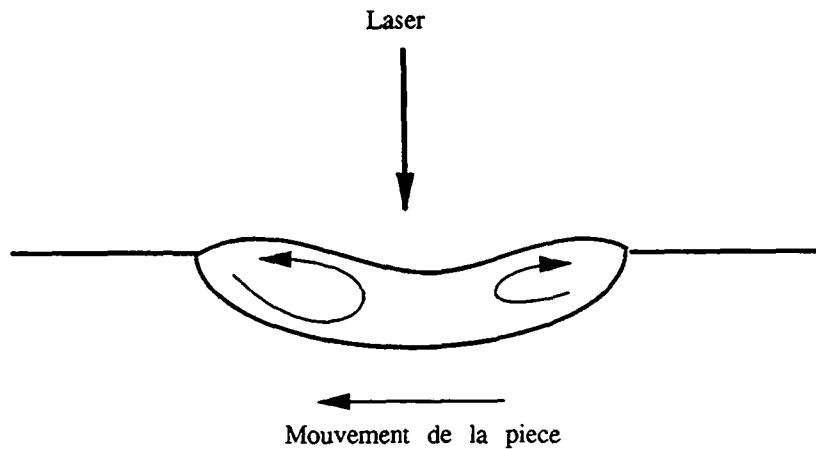


Figure 2.1 : champ de vitesse et forme de l'interface liquide-gaz lors de la refusion par laser.

pression et forces de cisaillement sur l'interface liquide-gaz. De plus, le mécanisme de fusion de la poudre dans le bain est un phénomène complexe qu'il semble difficile de modéliser avec précision. Considérons néanmoins les deux cas extrêmes suivants

- i) La poudre se transforme instantanément en liquide au moment où elle entre en contact avec le bain. Elle est ensuite transportée par l'important champ de vitesse dans le bain, se resolidifie puis continue sa trajectoire dans le solide (cf. figure 2.2).
- ii) La poudre ne fond pas sur l'interface liquide-gaz mais se mélange instantanément, à cause de l'important champ de vitesse, et fond uniformément dans le bain liquide. Hoadley [Hoa2,Hoa3] a formulé le problème thermique correspondant.

Remarquons que l'hypothèse i) implique que le bain liquide est composé d'un seul constituant, contrairement au cas ii), où le bain n'est plus à l'équilibre thermodynamique local puisque constitué de particules de poudre à l'état solide et liquide. Par contre le modèle correspondant à l'hypothèse i) n'a de sens que si le champ de vitesse dans le liquide est calculé, alors que le modèle correspondant à l'hypothèse ii) risque de fournir des résultats satisfaisants sans avoir à calculer explicitement le champ de vitesse. L'hypothèse i) correspond à rajouter, dans le modèle thermique, une condition aux limites pour le flux de chaleur, alors que l'hypothèse ii) correspond à rajouter un terme source dans l'équation.

Nous allons dans la suite de ce chapitre formuler un modèle bidimensionnel stationnaire

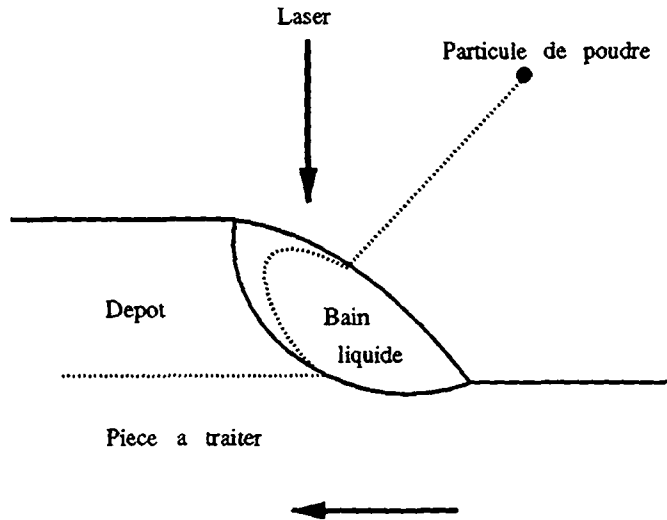


Figure 2.2 : trajectoire de la poudre lors du revêtement par laser.

tenant compte des effets du mélange gaz-poudre sur le bain liquide. Les paramètres du procédé sont :

- la vitesse de translation de la pièce,
- le débit de poudre,
- la forme du jet de poudre,
- la distribution d'énergie du faisceau laser.

Les inconnues du problème sont :

- les champs de température dans le solide et le liquide,
- le champ de vitesse dans le liquide,
- la forme du bain liquide (i.e. la forme et la position des deux interfaces solide-liquide et gaz-liquide).

La poudre est supposée vérifier l'hypothèse i) ci-dessus (i.e. se transforme instantanément en liquide au contact du bain). Les effets dynamiques du phénomène sont négligés (instabilités du bain liquide, réchauffement global de la pièce). Nous supposons que le rendement de déposition de la poudre (i.e. le rapport entre la quantité de poudre quittant la

buse et la quantité de poudre déposée sur la pièce) est unitaire. Nous supposons également connue la quantité d'énergie (délivrée par le laser) atteignant la pièce.

Dans le paragraphe suivant nous dérivons des trois lois de conservation de la dynamique (masse, quantité de mouvement et énergie) les équations dans les phases solide et liquide ainsi que les conditions de continuité de l'énergie sur l'interfaces solide-liquide. Des hypothèses simplificatrices et les conditions aux limites sont exposées dans le paragraphe 2.3. Les équations du modèle sont finalement résumées dans paragraphe 2.4.

2.2 Lois de conservation.

Considérons un domaine mésoscopique situé sous le faisceau laser (cf. figure 2.3). Rappelons que notre modèle est bidimensionnel (i.e. invariant dans une direction perpendiculaire au plan de la figure 2.3) et stationnaire. Dans le domaine de calcul considéré interagissent deux phases : la phase solide Ω_s (composée d'une partie de la pièce traitée et d'une partie du dépôt) et la phase liquide Ω_l . Pour simplifier l'exposé nous supposons dans la suite que la poudre et la pièce traitée sont issues du même matériau et ont les mêmes propriétés après avoir été refondues. Γ_{sl} représente l'interface solide-liquide, Γ_{sg} l'interface solide-gaz et Γ_{lg} l'interface liquide-gaz. La normale extérieure unité de la phase Ω_α est notée \mathbf{n}_α , $\alpha = s, l$, $\mathbf{n}_{\alpha\beta}$ est la normale unité de l'interface $\Gamma_{\alpha\beta}$, dirigée de la phase Ω_α vers la phase Ω_β , $\mathbf{t}_{\alpha\beta}$ est la tangente unité de l'interface $\Gamma_{\alpha\beta}$, telle que le repère $(\mathbf{n}_{\alpha\beta}, \mathbf{t}_{\alpha\beta})$ soit orienté dans le sens trigonométrique, $(\alpha, \beta) \in \{(s, l); (s, g); (l, g)\}$. La pièce à traiter se déplace à la vitesse horizontale V_∞ et l'injection de poudre au débit \dot{m}_p a pour conséquence de créer un dépôt d'épaisseur δ sur la pièce traitée. Remarquons que, comme indiqué sur la figure 2.3, l'interface solide-gaz Γ_{sg} est horizontale et les trois interfaces Γ_{sl} , Γ_{sg} et Γ_{lg} se raccordent aux points triples x_{slg}^1, x_{slg}^2 . De plus l'interface Γ_{lg} est horizontale au point x_{slg}^1 .

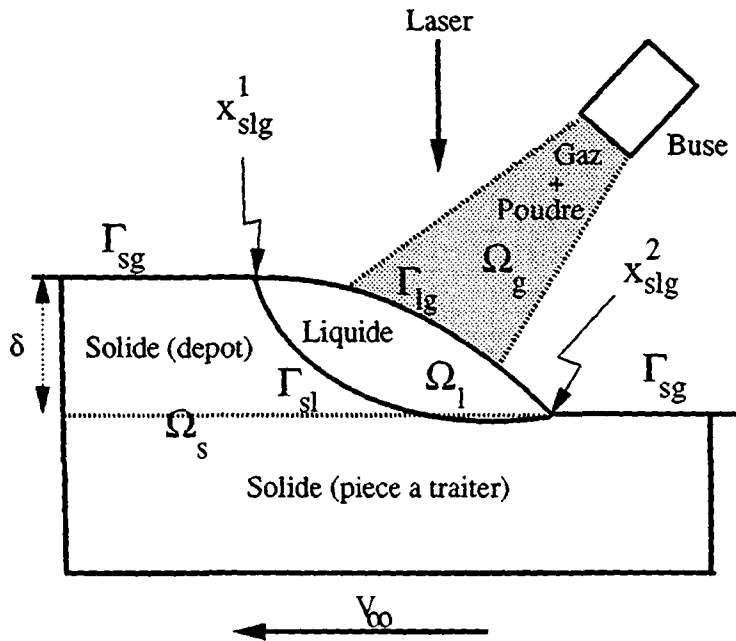


Figure 2.3 : notations.

Notre but est de formuler un modèle sur le domaine de calcul

$$\Omega_s \cup \Omega_\ell \cup \Gamma_{s\ell}.$$

Les inconnues sont

- les champs de température dans le solide T_s et le liquide T_ℓ ,
- le champ de vitesse \mathbf{v}_ℓ et de pression p_ℓ dans le liquide,
- la forme et la position des deux interfaces solide-liquide $\Gamma_{s\ell}$ et liquide-gaz $\Gamma_{\ell g}$ (l'état du mélange gaz-poudre sur l'interface $\Gamma_{\ell g}$ est supposé connu).

Puisque nous avons supposé le phénomène bidimensionnel et stationnaire dans un repère lié au laser, ces fonctions sont des fonctions de \mathbb{R}^2 seulement. Les équations régissant le comportement de ces grandeurs découlent des lois de conservation de la dynamique (masse, quantité de mouvement et énergie). Ces lois doivent être valables, non seulement globalement dans $\Omega_s \cup \Omega_\ell \cup \Gamma_{s\ell}$, mais aussi sur tout domaine arbitraire \mathcal{D} contenu dans Ω_s , Ω_ℓ et chevauchant l'interface $\Gamma_{s\ell}$.

- La loi de conservation de la masse pour un domaine $\mathcal{D} \subset \Omega_\alpha$ conduit à l'équation

$$\nabla \cdot (\rho_\alpha \mathbf{v}_\alpha) = 0 \quad \text{dans } \Omega_\alpha, \quad \alpha = s, \ell, \quad (2.1)$$

et pour un domaine \mathcal{D} chevauchant l'interface $\Gamma_{s\ell}$ à la condition de continuité du flux massique

$$\rho_s \mathbf{v}_s \cdot \mathbf{n}_{s\ell} = \rho_\ell \mathbf{v}_\ell \cdot \mathbf{n}_{s\ell} \quad \text{sur } \Gamma_{s\ell}, \quad (2.2)$$

où la masse volumique ρ_α de la phase α est une fonction de la température T_α , $\alpha = s, \ell$.

- La loi de conservation de la quantité de mouvement pour un domaine $\mathcal{D} \subset \Omega_\ell$ conduit, en utilisant 2.1, à l'équation

$$\rho_\ell (\mathbf{v}_\ell \cdot \nabla) \mathbf{v}_\ell - \nabla \cdot \Sigma_\ell = \rho_\ell \mathbf{g} \quad \text{dans } \Omega_\ell, \quad (2.3)$$

où Σ_ℓ est le tenseur des contraintes du liquide, fonction de la vitesse \mathbf{v}_ℓ et de la pression p_ℓ . Ici \mathbf{g} désigne le champ gravifique (le terme $\rho_\ell \mathbf{g}$ est le moteur de la convection naturelle).

• La loi de conservation de l'énergie pour un domaine $\mathcal{D} \subset \Omega_\alpha$, $\alpha = s, \ell$, conduit, en utilisant 2.1, à l'équation

$$\nabla \cdot (k_\alpha \nabla T_\alpha) = \rho_\alpha \mathbf{v}_\alpha \cdot \nabla h_\alpha \quad \text{dans } \Omega_\alpha, \quad \alpha = s, \ell, \quad (2.4)$$

et pour un domaine \mathcal{D} chevauchant l'interface $\Gamma_{s\ell}$, en utilisant 2.2, à la condition de continuité du flux d'énergie

$$k_s \frac{\partial T_s}{\partial n_{s\ell}} - k_\ell \frac{\partial T_\ell}{\partial n_{s\ell}} = \rho_s (\mathbf{v}_s \cdot \mathbf{n}_{s\ell}) (h_s - h_\ell) \quad \text{sur } \Gamma_{s\ell}, \quad (2.5)$$

où h_α et k_α sont l'enthalpie massique et la conductivité thermique de la phase α et sont des fonctions de la température T_α , $\alpha = s, \ell$. Notons que nous avons négligé dans 2.4 et 2.5 tous les termes d'énergie cinétique et de dissipation visqueuse. Nous avons également supposé que les phases solide et liquide vérifient la loi de Fourier pour le flux de chaleur.

2.3 Hypothèses et conditions aux limites.

Nous disposons, pour déterminer les champs T_s , T_ℓ , \mathbf{v}_ℓ , p_ℓ ainsi que les interfaces $\Gamma_{s\ell}$, $\Gamma_{\ell g}$, des équations 2.1 à 2.5 mais il nous faut encore

- spécifier les relations densité-température, contrainte-vitesse-pression et enthalpie-température,
- indiquer des conditions supplémentaires sur l'interface solide-liquide (deux pour les températures T_s , T_ℓ et une, vectorielle, pour la vitesse \mathbf{v}_ℓ),
- spécifier les conditions aux limites sur le bord du domaine de calcul $\Omega_s \cup \Omega_\ell \cup \Gamma_{s\ell}$. En particulier sur l'interface solide-gaz nous devons donner une condition pour la température T_s . Sur l'interface liquide-gaz nous devons donner une condition pour la température T_ℓ , deux pour la vitesse \mathbf{v}_ℓ et une pour le calcul de l'interface proprement dite.

Dans la suite de ce paragraphe, nous indiquons ces conditions manquantes. Nous commençons par la phase solide pour finir par l'interface liquide-gaz.

2.3.1 Hypothèses dans le solide.

• Le solide est supposé indéformable

$$\mathbf{v}_s = \mathbf{V}_\infty \quad \text{dans } \bar{\Omega}_s. \quad (2.6)$$

- L'enthalpie dans le solide est définie par

$$h_s = \int_0^{T_s} c_{p_s}(s) ds \quad \text{dans } \Omega_s, \quad (2.7)$$

c_p désignant la chaleur spécifique massique.

- Les conditions aux limites sont, sur les parois latérales et inférieure du domaine de calcul, de type Dirichlet

$$T_s = T_\infty \quad \text{sur } \partial\Omega_s \setminus (\Gamma_{sl} \cup \Gamma_{sg}). \quad (2.8)$$

2.3.2 Hypothèses sur l'interface solide-liquide.

- Si nous supposons que le solide et le liquide ont même masse volumique

$$\rho_s = \rho_\ell \quad \text{sur } \Gamma_{sl},$$

alors la condition d'adhérence du liquide sur l'interface solide-liquide

$$\mathbf{v}_s \cdot \mathbf{t}_{sl} = \mathbf{v}_\ell \cdot \mathbf{t}_{s\ell} \quad \text{sur } \Gamma_{sl},$$

la condition de continuité du flux massique 2.2 et l'égalité 2.6 conduisent à la condition

$$\mathbf{v}_\ell = \mathbf{V}_\infty \quad \text{sur } \Gamma_{sl}.$$

- Le changement de phase solide-liquide est supposé isotherme, à la température de fusion T_{sl}

$$T_s = T_\ell = T_{sl} \quad \text{sur } \Gamma_{sl}.$$

Les enthalpies du solide et du liquide satisfont

$$h_\ell - h_s = \ell_{sl} \quad \text{sur } \Gamma_{sl},$$

ℓ_{sl} étant la chaleur latente massique de changement de phase, de sorte que la relation 2.5 devient

$$k_\ell \frac{\partial T_\ell}{\partial n_{sl}} - k_s \frac{\partial T_s}{\partial n_{sl}} = \rho_s \ell_{sl} (\mathbf{V}_\infty \cdot \mathbf{n}_{sl}) \quad \text{sur } \Gamma_{sl}.$$

Les deux hypothèses ci-dessus correspondent au cas d'un corps pur ou d'un alliage eutectique (i.e. un alliage binaire se solidifiant, comme un corps pur, à une température

donnée). La solidification d'un alliage binaire hors eutectique est traitée dans l'annexe 1. Le changement de phase s'effectue alors entre deux températures (appelées température eutectique et du liquidus) et le lieu du changement de phase est une partie non nulle du domaine de calcul (appelée "région pâteuse" ou "mushy region" en anglais). Remarquons également que la condition aux limites 2.8 n'a de sens que si $T_\infty < T_{s\ell}$.

- Les effets de tension de surface (effet Gibbs-Thomson, cf. par exemple [Kur] p. 12) sont négligés sur cette interface.

2.3.3 Hypothèses dans le liquide.

- L'enthalpie dans le liquide satisfait

$$h_\ell = \int_0^{T_{s\ell}} c_{p_s}(s)ds + \int_{T_{s\ell}}^{T_\ell} c_{p_\ell}(s)ds + \ell_{s\ell} \quad \text{dans } \Omega_\ell. \quad (2.9)$$

- Le fluide est newtonien

$$\Sigma_\ell = -p_\ell \mathbf{I} + 2\mu_\ell \mathbf{D}(\mathbf{v}_\ell),$$

où μ_ℓ est la viscosité du liquide, \mathbf{I} le tenseur unitaire et \mathbf{D} le tenseur de déformation

$$\mathbf{D}(\mathbf{v}_\ell) = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{v}_\ell + \nabla^T \mathbf{v}_\ell). \quad (2.10)$$

- Le liquide est supposé vérifier l'hypothèse de Boussinesq, à savoir que les variations de densité en fonction de la température sont négligées dans l'équation de continuité 2.1 et linéaires dans le terme de force de l'équation de la quantité de mouvement 2.3. Cet effet apparaît alors comme le terme source

$$\rho_\ell \mathbf{g}(1 - b_\ell(T_{s\ell} - T_\ell)),$$

où b_ℓ est le coefficient d'expansion thermique du liquide et ρ_ℓ la densité de référence du liquide, prise à la température de changement de phase $T_{s\ell}$.

2.3.4 Hypothèses sur l'interface solide-gaz.

Supposons que le gaz présent sur l'interface ne soit pas réchauffé par le faisceau laser et arrive à température ambiante T_{amb} . Supposons encore que l'apport de chaleur du faisceau

laser apparaisse par la donnée d'un flux q_L . La condition d'équilibre des flux de chaleur sur l'interface nous fournit alors la condition aux limites pour la température T_s ,

$$k_s \frac{\partial T_s}{\partial n_{sg}} = q_L \quad \text{sur } \Gamma_{sg}.$$

2.3.5 Hypothèses sur l'interface liquide-gaz.

Il s'agit maintenant de spécifier les conditions aux limites sur l'interface liquide-gaz pour la température T_ℓ et la vitesse \mathbf{v}_ℓ . Nous devons à cet effet préciser l'état du mélange gaz-poudre sur l'interface.

- Notons \mathbf{v}_p la vitesse à laquelle les particules de poudre quittent la buse. Supposons que toutes les particules de poudre qui quittent la buse atteignent l'interface à la vitesse \mathbf{v}_p et pénètrent dans le bain liquide, alors que les particules de gaz glissent sur l'interface (cf. figure 2.4). La quantité de mouvement du mélange gaz-poudre dans la direction normale à l'interface est donc réduite à la grandeur

$$\rho_p \mathbf{v}_p \cdot \mathbf{n}_{\ell g},$$

où ρ_p est la densité partielle de poudre dans le mélange. L'équilibre du flux massique sur l'interface s'écrit alors

$$\rho_\ell \mathbf{v}_\ell \cdot \mathbf{n}_{\ell g} = \rho_p \mathbf{v}_p \cdot \mathbf{n}_{\ell g} \quad \text{sur } \Gamma_{\ell g}. \quad (2.11)$$

- Supposons d'autre part, comme dans le sous-paragraphe précédent, que la poudre ne soit pas réchauffée par le faisceau laser et arrive à température ambiante T_{amb} . Le flux d'énergie du mélange gaz-poudre sur l'interface est donc réduit à la quantité

$$\rho_p (\mathbf{v}_p \cdot \mathbf{n}_{\ell g}) h_p,$$

où h_p est l'enthalpie massique de la poudre à température ambiante, soit encore

$$h_p = \int_0^{T_{amb}} c_p ds. \quad (2.12)$$

La condition d'équilibre des flux d'énergie sur l'interface nous fournit alors la condition aux limites pour la température T_ℓ

$$k_\ell \frac{\partial T_\ell}{\partial n_{\ell g}} = q_L (n_{\ell g})_y + \rho_p (\mathbf{v}_p \cdot \mathbf{n}_{\ell g}) (h_\ell - h_p) \quad \text{sur } \Gamma_{\ell g},$$

où $(n_{\ell g})_y$ est la composante selon l'axe Oy de la normale à l'interface. Signalons que les conditions aux limites de type convectives ne sont pas considérées dans cet exposé et ont un effet négligeable.

• Ecrivons maintenant l'équilibre des forces sur l'interface. Puisque seule la poudre pénètre dans le bain, le saut des flux de quantité de mouvement s'écrit, en utilisant 2.11

$$\rho_p \mathbf{v}_p \cdot \mathbf{n}_{\ell g} (\mathbf{v}_\ell - \mathbf{v}_p).$$

D'autre part le mélange gaz-poudre est supposé non-visqueux et le saut du tenseur des contraintes est réduit au terme

$$(\Sigma_\ell + p_{gp}) \mathbf{n}_{\ell g},$$

p_{gp} étant la pression du mélange gaz-poudre (supposée constante le long de l'interface). Nous tenons compte des effets de tension de surface sur l'interface liquide-gaz en ajoutant une force normale, proportionnelle à la courbure $\mathcal{K}_{\ell g}$ de l'interface

$$\gamma_{\ell g} \mathcal{K}_{\ell g} \mathbf{n}_{\ell g}.$$

Si, de plus, le coefficient de proportionnalité $\gamma_{\ell g}$ (appelé coefficient de tension de surface) varie le long de l'interface, une force tangente apparaît (cf. par exemple [Land]). Supposons $\gamma_{\ell g}$ fonction de la température du liquide T_ℓ , l'expression de cette force est

$$\frac{d\gamma_{\ell g}}{dT_\ell} \frac{\partial T_\ell}{\partial t_{\ell g}} \mathbf{t}_{\ell g},$$

et correspond aux effets thermocapillaires (ou effet Marangoni) présentés dans la figure 2.1 (notons que dans le cas d'un alliage binaire, le coefficient de tension de surface dépend aussi de la concentration des constituants de l'alliage). L'équilibre des forces s'écrit donc

$$(\Sigma_\ell + p_{gp}) \mathbf{n}_{\ell g} = \rho_p (\mathbf{v}_p \cdot \mathbf{n}_{\ell g}) (\mathbf{v}_\ell - \mathbf{v}_p) + \gamma_{\ell g} \mathcal{K}_{\ell g} \mathbf{n}_{\ell g} + \frac{d\gamma_{\ell g}}{dT_\ell} \frac{\partial T_\ell}{\partial t_{\ell g}} \mathbf{t}_{\ell g}, \quad \text{sur } \Gamma_{\ell g}.$$

• La densité partielle de poudre ρ_p est une fonction, donnée, de l'espace. Supposons, par exemple, que la loi de répartition est une loi gaussienne, centrée en $x = x_p$, de dispersion σ_p

$$\rho_p(x) = \rho_{p0} \exp\left(-\frac{(x - x_p)^2}{\sigma_p^2}\right).$$

Il suffit, pour déterminer la constante ρ_{p0} , d'écrire la loi de conservation de la masse quittant la buse et se déposant sur l'interface liquide-gaz

$$\dot{m}_p = \int_{\Gamma_{lg}} \rho_p \mathbf{v}_p \cdot \mathbf{n}_{lg} ds. \quad (2.13)$$

Remarquons que la loi de conservation de la masse quittant la buse et se déposant sur la pièce permet de relier l'épaisseur de dépôt δ au débit massique de poudre \dot{m}_p selon la loi

$$\dot{m}_p = \rho_s V_\infty \delta. \quad (2.14)$$

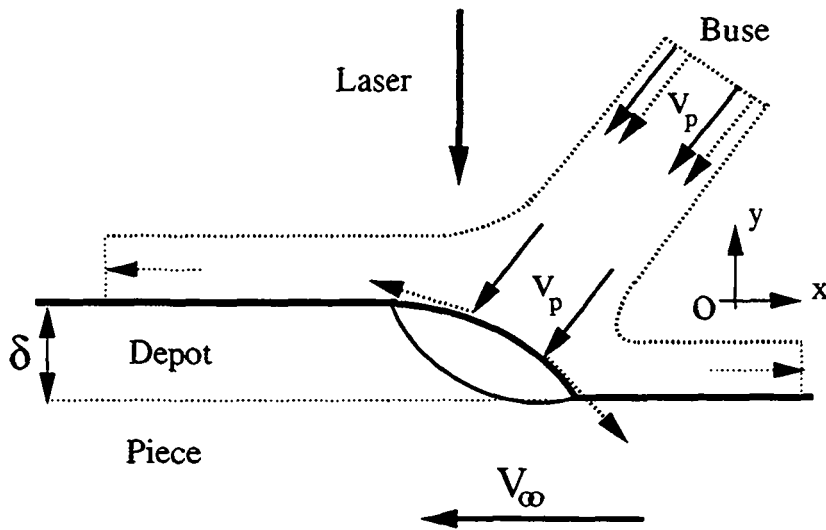


Figure 2.4 : écoulement gaz-poudre.

REMARQUE 2.1.

Les deux hypothèses de ce paragraphe qui nous semblent les plus discutables concernent

- i) l'absorption de l'énergie provenant du laser,
- ii) le comportement de la poudre sur l'interface liquide-gaz.

i) De nombreuses études expérimentales [Fre] ont montré que le coefficient d'absorption (i.e. le rapport entre l'énergie délivrée par le laser et l'énergie effectivement reçue par la pièce) dépend de nombreux paramètres (température, propriétés du matériau, géométrie du faisceau laser, débit de poudre) et peut varier entre 0.1 et 0.5.

ii) En pratique, le rapport entre la masse de poudre quittant la buse et la masse de poudre se déposant sur la pièce est compris entre 0.5 et 0.8. Il est effectivement difficile de contrôler avec précision la géométrie du jet de poudre et une partie de la poudre atteint la région solide et n'adhère pas à la pièce. De plus, les particules de poudre atteignant les parties du bain liquide trop froides ne fondent que partiellement et forment un dépôt de mauvaise qualité.

2.4 Le modèle.

Avant de présenter le modèle complet, nous introduisons quelques notations supplémentaires, nécessaires pour définir les domaines solide, liquide et les interfaces solide-liquide, liquide-gaz (cf. figure 2.5).

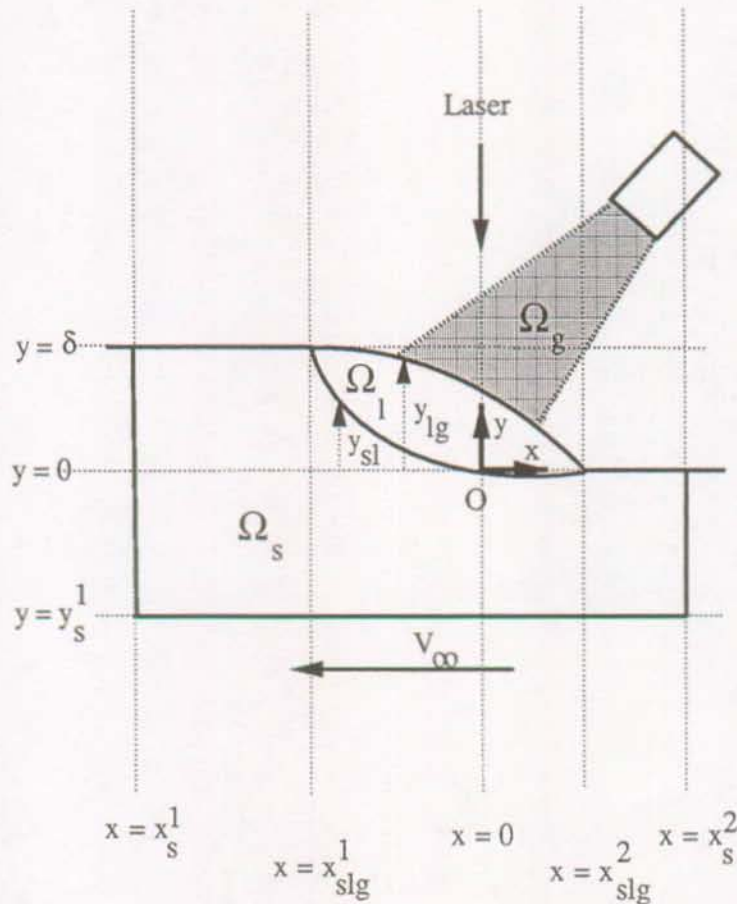


Figure 2.5 : Paramétrisations des interfaces.

Le faisceau laser est centré en $x = 0$. Les interfaces solide-liquide Γ_{sl} et liquide-gaz Γ_{lg} sont confondues au deux points triples

$$\Gamma_{sl} \cap \Gamma_{lg} = \{(x_{slg}^1; \delta)\} \cup \{(x_{slg}^2; 0)\}, \quad (2.15)$$

et sont les graphes des fonctions

$$\begin{aligned} y &= y_{sl}(x), & x_{slg}^1 &< x < x_{slg}^2, \\ y &= y_{lg}(x), & x_{slg}^1 &< x < x_{slg}^2. \end{aligned}$$

La courbure \mathcal{K}_{lg} s'exprime en fonction de y_{lg} par

$$\mathcal{K}_{lg}(y_{lg}) = \left(\frac{y'_{lg}}{(1 + y'^2_{lg})^{1/2}} \right)'.$$

Le domaine solide est défini par

$$\begin{aligned} \Omega_s &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x_s^1 < x \leq x_{slg}^1, y_s^1 < y < \delta\} \\ &\cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x_{slg}^1 < x < x_{slg}^2, y_s^1 < y < y_{sl}(x)\} \\ &\cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x_{slg}^2 \leq x < x_s^2, y_s^1 < y < 0\}, \end{aligned} \quad (2.16)$$

et le domaine liquide par

$$\Omega_\ell = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x_{slg}^1 < x < x_{slg}^2, y_{sl}(x) < y < y_{lg}(x)\}. \quad (2.17)$$

Remarquons qu'en pratique x_s^1 , x_s^2 et y_s^1 sont tels que les extrémités du domaine de calcul soient suffisamment loin du faisceau laser. Nous cherchons donc à déterminer

$$\begin{aligned} T_s &: \Omega_s && \rightarrow \mathbb{R}, \\ T_\ell &: \Omega_\ell && \rightarrow \mathbb{R}, \\ \mathbf{v}_\ell &: \Omega_\ell && \rightarrow \mathbb{R}^2, \\ p_\ell &: \Omega_\ell && \rightarrow \mathbb{R}, \\ x_{slg}^1 &\in [x_s^1, x_s^2], \\ x_{slg}^2 &\in [x_s^1, x_s^2], \\ y_{sl} &: [x_{slg}^1, x_{slg}^2] && \rightarrow \mathbb{R}, \\ y_{lg} &: [x_{slg}^1, x_{slg}^2] && \rightarrow \mathbb{R}, \end{aligned}$$

tels que

$$\rho_s \mathbf{V}_\infty \cdot \nabla h_s = \nabla \cdot (k_s \nabla T_s) \quad \text{dans } \Omega_s, \quad (2.18)$$

$$\rho_\ell \mathbf{v}_\ell \cdot \nabla h_\ell = \nabla \cdot (k_\ell \nabla T_\ell) \quad \text{dans } \Omega_\ell, \quad (2.19)$$

$$\rho_\ell (\mathbf{v}_\ell \cdot \nabla) \mathbf{v}_\ell - 2\mu_\ell \nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{v}_\ell) + \nabla p_\ell = -\rho_\ell \mathbf{g} b_\ell (T_\ell - T_{s\ell}) \quad \text{dans } \Omega_\ell, \quad (2.20)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_\ell = 0 \quad \text{dans } \Omega_\ell, \quad (2.21)$$

avec les conditions aux limites

$$T_s = T_\ell = T_{s\ell} \quad \text{sur } \Gamma_{s\ell}, \quad (2.22)$$

$$k_\ell \frac{\partial T_\ell}{\partial n_{s\ell}} = k_s \frac{\partial T_s}{\partial n_{s\ell}} + \rho_s l_{s\ell} \mathbf{V}_\infty \cdot \mathbf{n}_{s\ell} \quad \text{sur } \Gamma_{s\ell}, \quad (2.23)$$

$$\mathbf{v}_\ell = \mathbf{V}_\infty \quad \text{sur } \Gamma_{s\ell}, \quad (2.24)$$

$$k_s \frac{\partial T_s}{\partial n_{sg}} = q_L \quad \text{sur } \Gamma_{sg}, \quad (2.25)$$

$$k_\ell \frac{\partial T_\ell}{\partial n_{s\ell}} = q_L (n_{\ell g})_y + \rho_p \mathbf{v}_p \cdot \mathbf{n}_{\ell g} (h_\ell - h_p) \quad \text{sur } \Gamma_{\ell g}, \quad (2.26)$$

$$\rho_\ell \mathbf{v}_\ell \cdot \mathbf{n}_{\ell g} = \rho_p \mathbf{v}_p \cdot \mathbf{n}_{\ell g} \quad \text{sur } \Gamma_{\ell g}, \quad (2.27)$$

$$\sigma_{t_{\ell g}} = \frac{d\gamma_{\ell g}}{dT_\ell} \frac{\partial T_\ell}{\partial t_{\ell g}} + \rho_p (\mathbf{v}_p \cdot \mathbf{n}_{\ell g}) (\mathbf{v}_\ell - \mathbf{v}_p) \cdot \mathbf{t}_{\ell g} \quad \text{sur } \Gamma_{\ell g}, \quad (2.28)$$

$$\sigma_{n_{\ell g}} = \gamma_{\ell g} \mathcal{K}_{\ell g} - p_{gp} + \rho_p (\mathbf{v}_p \cdot \mathbf{n}_{\ell g})^2 \left(\frac{\rho_p}{\rho_\ell} - 1 \right) \quad \text{sur } \Gamma_{\ell g}, \quad (2.29)$$

$$T_s = T_\infty \quad \text{sur } \partial\Omega_s \setminus (\Gamma_{s\ell} \cup \Gamma_{sg}). \quad (2.30)$$

Ici h_s , h_ℓ sont les fonctions de T_s , T_ℓ définies par 2.7, 2.9, $\mathbf{D}(\mathbf{v}_\ell)$ est le tenseur des déformations défini par 2.10, h_p est définie par 2.12, ρ_p est la densité partielle de poudre du mélange gaz-poudre calculée avec 2.13, $\sigma_{n_{\ell g}}$, $\sigma_{t_{\ell g}}$ sont les contraintes normales et tangentielles du liquide sur l'interface liquide-gaz :

$$\sigma_{n_{\ell g}} = -p_\ell + \frac{\partial \mathbf{v}_\ell}{\partial \mathbf{n}_{\ell g}} \cdot \mathbf{n}_{\ell g}, \quad \sigma_{t_{\ell g}} = \frac{\partial \mathbf{v}_\ell}{\partial \mathbf{n}_{\ell g}} \cdot \mathbf{t}_{\ell g} + \frac{\partial \mathbf{v}_\ell}{\partial \mathbf{t}_{\ell g}} \cdot \mathbf{n}_{\ell g}.$$

Finalement, puisque le saut des pressions $p_\ell - p_{gp}$ sur l'interface liquide-gaz est défini à une constante près, nous devons rajouter une condition, à savoir

$$y'_{\ell g}(x_{s\ell g}^1) = 0. \quad (2.31)$$

Le problème est maintenant complet. En effet, nous avons

- sur l'interface solide-liquide la condition vectorielle pour la vitesse 2.24, deux conditions scalaires pour la température et une pour le calcul de l'interface (eq. 2.22 et 2.23),

- sur l'interface liquide-gaz une condition pour la température 2.26 deux conditions scalaires pour la vitesse et une pour le calcul de l'interface (eq. 2.27, 2.28 et 2.29).

REMARQUE 2.2.

Bien que les deux surfaces libres soient de nature différente (l'interface solide-liquide Γ_{sl} est intérieure au domaine de calcul alors que l'interface liquide-gaz Γ_{lg} est située sur le bord de celui-ci), nous avons paramétré, par soucis de clarté, les deux interfaces sous forme d'une fonction explicite $y(x)$. En général, lors de la formulation physique des phénomènes de changement de phase solide-liquide [Fri,Lio], l'interface est paramétrée par une fonction implicite $\phi(x, y) = 0$. Nous verrons dans le chapitre 4 que le traitement numérique de ces deux surfaces-libres est de toute façon différent et ne nécessite pas la paramétrisation de l'interface solide-liquide Γ_{sl} .

REMARQUE 2.3.

La refusion par laser est un cas particulier du recouvrement par laser obtenu lorsqu'on fixe $\delta = 0$ et $\rho_p = 0$. Les conditions aux limites 2.22 à 2.30 deviennent dans ce cas :

$$T_s = T_\ell = T_{s\ell} \quad \text{sur } \Gamma_{s\ell}, \quad (2.32)$$

$$k_\ell \frac{\partial T_\ell}{\partial n_{s\ell}} - k_s \frac{\partial T_s}{\partial n_{s\ell}} = \rho_s l_{s\ell} \mathbf{V}_\infty \cdot \mathbf{n}_{s\ell} \quad \text{sur } \Gamma_{s\ell}, \quad (2.33)$$

$$\mathbf{v}_\ell = \mathbf{V}_\infty \quad \text{sur } \Gamma_{s\ell}, \quad (2.34)$$

$$k_s \frac{\partial T_s}{\partial n_{sg}} = q_L \quad \text{sur } \Gamma_{sg}, \quad (2.35)$$

$$k_\ell \frac{\partial T_\ell}{\partial n_{s\ell}} = q_L (n_{lg})_y \quad \text{sur } \Gamma_{lg}, \quad (2.36)$$

$$\mathbf{v}_\ell \cdot \mathbf{n}_{lg} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_{lg}, \quad (2.37)$$

$$\sigma_{t_{lg}}(\mathbf{v}_\ell) = \frac{d\gamma_{lg}}{dT_\ell} \frac{\partial T_\ell}{\partial t_{lg}} \quad \text{sur } \Gamma_{lg}, \quad (2.38)$$

$$\sigma_{n_{lg}}(\mathbf{v}_\ell, p_\ell) = \gamma_{lg} \mathcal{K}_{lg} - p_{gp} \quad \text{sur } \Gamma_{lg}, \quad (2.39)$$

$$T_s = T_\infty \quad \text{sur } \partial\Omega_s \setminus (\Gamma_{s\ell} \cup \Gamma_{sg}). \quad (2.40)$$

La condition 2.31 est maintenant remplacée par la condition d'incompressibilité

$$\int_{\Gamma_{lg}} y_{lg}(x) dx = 0. \quad (2.41)$$

Toutes ces équations sont résolues numériquement dans le chapitre 4. Auparavant nous formulons un problème modèle que nous étudions en détail dans le chapitre suivant. Ce problème simplifié de refusion par laser correspond au cas où l'interface liquide-gaz est horizontale et le champ de vitesse \mathbf{v}_l dans le bain liquide donné.

PROBLÈME 2.1.

Trouver

$$\begin{aligned}
T_s &: \Omega_s && \rightarrow \mathbf{R}, \\
T_\ell &: \Omega_\ell && \rightarrow \mathbf{R}, \\
x_{slg}^1 &\in [x_s^1, x_s^2], \\
x_{slg}^2 &\in [x_s^1, x_s^2], \\
y_{sl} &: [x_{slg}^1, x_{slg}^2] && \rightarrow \mathbf{R},
\end{aligned}$$

tels que

$$\rho_s c_p \mathbf{V}_\infty \cdot \nabla T_s = \nabla \cdot (k_s \nabla T_s) \quad \text{dans } \Omega_s, \quad (2.42)$$

$$\rho_\ell c_{p\ell} \mathbf{v}_\ell \cdot \nabla T_\ell = \nabla \cdot (k_\ell \nabla T_\ell) \quad \text{dans } \Omega_\ell, \quad (2.43)$$

avec les conditions aux limites

$$T_s = T_\ell = T_{sl} \quad \text{sur } \Gamma_{sl}, \quad (2.44)$$

$$k_\ell \frac{\partial T_\ell}{\partial n_{sl}} - k_s \frac{\partial T_s}{\partial n_{sl}} = \rho_s \ell_{sl} (\mathbf{V}_\infty \cdot \mathbf{n}_{sl}) \quad \text{sur } \Gamma_{sl}, \quad (2.45)$$

$$k_s \frac{\partial T_s}{\partial n_{sg}} = q_L \quad \text{sur } \Gamma_{sg} \cup \Gamma_{\ell g}, \quad (2.46)$$

$$T_s = T_\infty \quad \text{sur } \partial\Omega_s \setminus (\Gamma_{sl} \cup \Gamma_{sg}), \quad (2.47)$$

les deux points triples x_{slg}^1, x_{slg}^2 étant définis par

$$\Gamma_{sl} \cap \{y = 0\} = \{(x_{slg}^1; 0)\} \cup \{(x_{slg}^2; 0)\}, \quad (2.48)$$

les domaines solide et liquide par

$$\begin{aligned}
\Omega_s &= \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 ; x_s^1 < x \leq x_{slg}^1, y_s^1 < y < 0\} \\
&\cup \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 ; x_{slg}^1 < x \leq x_{slg}^2, y_s^1 < y < y_{sl}(x)\} \\
&\cup \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 ; x_{slg}^2 < x < x_s^2, y_s^1 < y < 0\},
\end{aligned} \quad (2.49)$$

$$\Omega_\ell = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 ; x_{slg}^1 < x < x_{slg}^2, y_{sl}(x) < y < 0\}. \quad (2.50)$$

CHAPITRE 3

Résolution par une méthode d'éléments finis d'un problème modèle de refusion par laser

Dans ce chapitre nous proposons une approche numérique pour le problème 2.1, présentée à la fin du chapitre précédent. Rappelons que ce problème correspond à la refusion par laser d'un matériau avec une interface liquide-gaz horizontale et un champ de vitesse dans le liquide donné. Les équations sont reformulées en introduisant la variable enthalpie, ce qui a l'avantage de supprimer l'interface solide-liquide parmi la liste des inconnues mais conduit à la résolution d'une équation de type diffusion-convection, dégénérée sur l'interface solide-liquide (problème de Stefan stationnaire).

La discontinuité de l'enthalpie sur l'interface solide-liquide et l'apparition, pour des vitesses de déplacement de la pièce par rapport au laser importantes, de phénomènes de type couche limite, suggèrent l'utilisation d'algorithmes de maillage adaptatif. Nous présentons dans le paragraphe suivant un bref aperçu des méthodes de maillage adaptatif. Dans le paragraphe 3.2 nous reformulons le problème modèle pour la variable enthalpie, et donnons un résultat d'existence. Une discrétisation en espace par une méthode d'éléments finis, des estimations a priori et a posteriori sont présentées dans les paragraphes 3.3 et 3.4 et un schéma itératif linéaire est proposé dans le paragraphe 3.5. Un algorithme bidimensionnel de raffinement est présenté dans le paragraphe 3.6 et finalement, des résultats numériques validant l'approche sont exposés dans le paragraphe 3.7.

3.1 Introduction aux méthodes de maillage adaptatif.

Les méthodes d'éléments finis permettent aujourd'hui de résoudre numériquement la plupart des équations aux dérivées partielles sur des géométries complexes. Néanmoins, lorsque la solution présente de brusques variations, la précision du résultat dépend fortement du maillage utilisé et l'utilisateur d'un code numérique doit, dans la pratique, modifier

de nombreuses fois son maillage avant d'obtenir une solution qu'il juge satisfaisante. La tendance actuelle est donc d'intégrer aux codes numériques des algorithmes d'adaptation automatique du maillage.

Ces techniques semblent un outil indispensable dans le cadre de la simulation numérique des phénomènes de solidification et, a fortiori, pour les traitement de surface par laser puisque l'enthalpie, variable décrivant l'état du système, est discontinue au passage de l'interface solide-liquide et subit des effets de type couche limite.

Le point crucial des algorithmes de maillage automatique concerne le choix du critère d'adaptation du maillage. Ce critère est, lorsque le problème le permet, basé sur des estimations *a posteriori* permettant de majorer l'erreur entre la solution exacte u et la solution calculée u_h par une somme de fonctions locales η_K appelées *estimateurs*, dépendant des données du problème, de la taille caractéristique h_K d'un élément K du maillage et de la solution calculée elle-même

$$\|u - u_h\| \leq C \sum_K \eta_K(\text{données}, h_K, u_h). \quad (3.1)$$

L'estimateur η_K est obtenu, soit en résolvant un problème *local*, de même type que le problème à résoudre, mais de degré polynômial plus élevé, soit en reliant l'erreur au *résidu*. Les travaux précurseurs sont dûs à Babuska et Rheinbold [Bab1,Bab2] pour des problèmes elliptiques, repris dans [Ban1,Ban2]. L'estimateur η_K est obtenu en résolvant un problème local et la méthode est d'autant plus efficace que les constantes C_1 et C_2 présentes dans la relation

$$C_1 \sum_K \eta_K \leq \|u - u_h\| \leq C_2 \sum_K \eta_K, \quad (3.2)$$

sont proches l'une de l'autre. Une extension de ces méthodes sont les "h-p versions" [Dem,Ode] où des estimations du type

$$\|u - u_{h,p}\| \leq C \sum_K \eta_K(\text{données}, h_K, p_K, u_{h,p}), \quad (3.3)$$

sont établies, en fonction du pas h_K et du degré polynomial de la solution discrète p_K sur le triangle K . Un problème de déformation élastique basé sur l'estimation du résidu est traité dans [Ain,Zie]. Le problème de Stokes avec mini-élément a été traité par Verfürth [Ver], pour les deux approches (estimateur nécessitant la résolution d'un problème local et estimateur lié au résidu). Certains de ces résultats ont été améliorés [Ban3] ou étendus à des fluides non-newtoniens [Bar]. Récemment, Eriksson et Johnson [Eri1,Eri2,Joh1] ont

utilisé un formalisme unique basé sur des techniques de dualité pour traiter des équations de type elliptiques, paraboliques et de type convection-diffusion. Leur estimations a posteriori sont efficaces, au sens où elles sont reliées aux estimations a priori et ont été appliquées à d'autres problèmes [Benk]. Finalement, Pousin et Rappaz [Pou] ont formulé, dans un cadre général abstrait, des estimations basées sur le résidu. Soit $F(u) = 0$ un problème non-linéaire et $F_h(u_h) = 0$ le problème discret associé. Dès lors, si u_h tend vers u lorsque h tend vers zéro, si F et F_h ont des dérivées DF et DF_h régulières, les auteurs obtiennent l'estimation a priori

$$\|u - u_h\| \leq \|DF_h^{-1}(u)\| \|F_h(u)\|, \quad (3.4)$$

et a posteriori

$$\|u - u_h\| \leq \|DF^{-1}(u_h)\| \|F(u_h)\|. \quad (3.5)$$

Lorsque le problème ne rentre pas dans le cadre des estimations a posteriori, des critères d'adaptation liés au comportement de la solution sont pris en compte. Ainsi, pour le problème de Stefan, Nochetto, Paolini et Verdi [Noc1,Noc2] ont proposé un algorithme de maillage adaptatif basé sur les considérations heuristiques suivantes: le manque de régularité de la solution sur l'interface de changement de phase a pour conséquence de diminuer d'un ordre la convergence du problème de Stefan par rapport à un problème parabolique non-dégénéré. Le maillage peut donc être grossier (d'ordre h) loin de l'interface de changement de phase, la solution se comportant approximativement comme la solution d'un problème parabolique, mais doit être fin (d'ordre h^2) au voisinage de l'interface. Les problèmes hyperboliques non-linéaires sortent également (pour l'instant) du cadre des estimations a posteriori. Dans le cas des écoulement d'Euler hypersoniques, le critère généralement retenu est basé sur des considérations d'ordre physique, par exemple le gradient du nombre de Mach [Bri,Ley].

Une fois l'estimateur choisi, deux stratégies de modification du maillage sont envisageables : par *raffinement* (et déraffinement) ou par *déplacement* des sommets. Le but des algorithmes de raffinement est de diminuer la quantité $\sum_K \eta_K$ dans 3.1 en ajoutant des sommets au maillage. Les algorithmes de déplacement des sommets [Bon,Mil1,Mil2,Tho] ont pour but de diminuer la quantité $\sum_K \eta_K$ en déplaçant les coordonnées des sommets d'un maillage. Cette approche a pour avantage de conserver la topologie du maillage (et par conséquent la structure de la matrice éléments finis, ce qui peut s'avérer indispensable pour des situations où le maillage doit rester structuré), mais ne semble pas adaptée dans notre contexte vues les fortes variations de la solution.

3.2 Le modèle.

Nous allons, dans un premier temps, reformuler le problème 2.1. Cette formulation dite "en enthalpie" est classique [Lio, Fri] et a pour avantage, contrairement aux méthodes de suivi de front ("front-tracking methods" en anglais), d'éliminer l'interface solide-liquide parmi la liste des inconnues du problème. En contrepartie, l'équation obtenue est dégénérée et l'enthalpie est discontinue sur l'interface solide-liquide. Nous énonçons ensuite un résultat d'existence pour le problème régularisé correspondant.

Posons $\Omega = \Omega_s \cup \Omega_\ell \cup \Gamma_{s\ell}$ le domaine rectangulaire de la figure 3.1, \mathbf{n} la normale unité extérieure au bord $\partial\Omega$, Γ les parties latérales et inférieures du bord. Soit \mathbf{v} , T les variables vitesse et température définies sur tout Ω par

$$\begin{aligned} \mathbf{v} = \mathbf{v}_s = \mathbf{V}_\infty, & \quad T = T_s & \text{dans } \Omega_s, \\ = \mathbf{v}_\ell, & \quad = T_\ell & \text{dans } \Omega_\ell. \end{aligned}$$

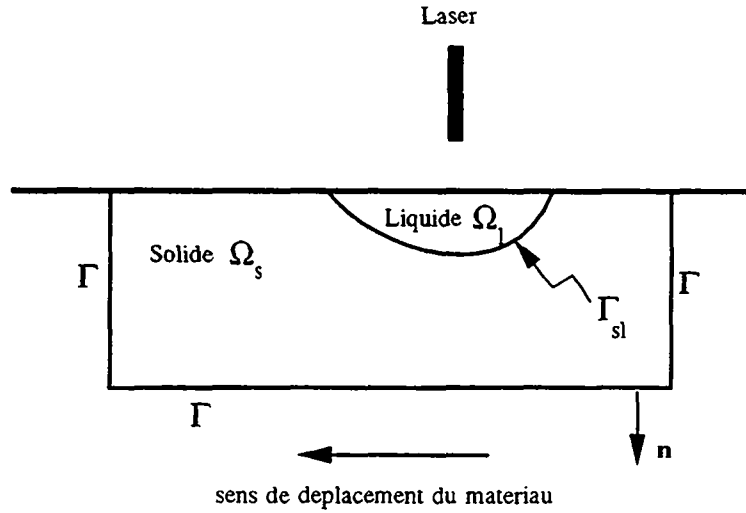


Figure 3.1: refusion d'un matériau par laser.

Nous supposons dans la suite que les fonctions c_{p_s} et k_s (resp. c_{p_ℓ} et k_ℓ) sont de classe $C^0(]0, T_{s\ell}[$ (resp. $C^0(]T_{s\ell}, +\infty[)$), ont une limite à gauche (resp. à droite) de $T_{s\ell}$, sont minorées et majorées par des constantes positives. Puisque les masses volumiques de solide et liquide sont constantes par phases et égales, nous notons

$$\rho = \rho_s = \rho_\ell.$$

La transformation de Kirchoff $K : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ définie par

$$K(x) = \int_0^x k_s(\xi) d\xi \quad x \leq T_{s\ell},$$

$$K(x) = \int_0^{T_{s\ell}} k_s(\xi) d\xi + \int_{T_{s\ell}}^x k_\ell(\xi) d\xi \quad x > T_{s\ell},$$

est croissante et inversible. Posons $\theta = K(T)$, $\theta_{s\ell} = K(T_{s\ell})$, $\theta_\infty = K(T_\infty)$, le problème 2.1 peut se formuler dans un sens classique par :

PROBLÈME 3.1.

Trouver $\theta \in C^2(\Omega_s) \cap C^2(\Omega_\ell) \cap C^1(\bar{\Omega})$ et l'interface $\Gamma_{s\ell}$ tels que :

$$\Delta\theta = \rho v \cdot \nabla h_\alpha(K^{-1}(\theta)) \quad \text{dans } \Omega_\alpha, \quad \alpha = s, \ell, \quad (3.6)$$

$$\left\{ \frac{\partial\theta}{\partial n_{s\ell}} \right\} = \rho l_{s\ell} (v \cdot n_{s\ell}) \quad \text{sur } \Gamma_{s\ell}, \quad (3.7)$$

$$\theta = \theta_{s\ell} \quad \text{sur } \Gamma_{s\ell}, \quad (3.8)$$

$$\theta = \theta_\infty \quad \text{sur } \Gamma, \quad (3.9)$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial n} = q_L \quad \text{sur } \partial\Omega \setminus \Gamma, \quad (3.10)$$

où les domaines solides et liquides sont définis par

$$\Omega_s = \{x \in \Omega; \theta(x) < \theta_{s\ell}\},$$

$$\Omega_\ell = \{x \in \Omega; \theta(x) > \theta_{s\ell}\},$$

où $\{w\}$ désigne le saut (liquide - solide) de la quantité w à travers l'interface $\Gamma_{s\ell}$ et où h_s et h_ℓ les fonctions définies par

$$h_s(x) = \int_0^x c_{p_s}(\xi) d\xi, \quad h_\ell(x) = \int_0^{T_{s\ell}} c_{p_s}(\xi) d\xi + \int_{T_{s\ell}}^x c_{p_\ell}(\xi) d\xi + l_{s\ell}.$$

Définissons maintenant la fonction $\beta : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ lipschitzienne, monotone, croissante, en vertu des propriétés de h_α , $\alpha = s, \ell$, telle que sa réciproque (multivoque) vérifie :

$$\beta^{-1}(x) = \rho h_s(K^{-1}(x)) \quad x < \theta_{s\ell}, \quad (3.11)$$

$$\beta^{-1}(x) = \rho h_\ell(K^{-1}(x)) \quad x > \theta_{s\ell}. \quad (3.12)$$

Finalement introduisons le problème variationnel ayant pour inconnue la variable "enthalpie" u :

PROBLÈME 3.2.

Trouver $u \in L^2(\Omega)$ tel que

$$\bullet \beta(u) \in H^1(\Omega) \text{ avec } \beta(u) = \theta_\infty \text{ sur } \Gamma, \quad (3.13)$$

$$\bullet \int_{\Omega} \nabla \beta(u) \cdot \nabla \varphi dx - \int_{\Omega} (\mathbf{v} \cdot \nabla \varphi) u dx = \int_{\partial\Omega \setminus \Gamma} q_L \varphi ds$$

$$\forall \varphi \in H^1(\Omega) \text{ avec } \varphi = 0 \text{ sur } \Gamma. \quad (3.14)$$

Nous avons le résultat d'équivalence entre les problèmes 3.1 et 3.2

THÉOREME 3.1.

Supposons $\mathbf{v} \in (C^0(\bar{\Omega}))^2$, $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ dans Ω , $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$ sur $\partial\Omega \setminus \Gamma$, $q_L \in C_0^\infty(\partial\Omega \setminus \Gamma)$ et $\theta_\infty \in L^2(\Gamma)$.

i) Si θ est solution du problème 3.1 et si Ω_s et Ω_ℓ sont suffisamment réguliers, alors $u = \beta^{-1}(\theta)$ est solution du problème 3.2.

ii) Si u est solution du problème 3.2, si

$$\Omega_s = \{x \in \Omega ; \beta(u(x)) < \theta_{s\ell} \text{ p.p. } \},$$

$$\Omega_\ell = \{x \in \Omega ; \beta(u(x)) > \theta_{s\ell} \text{ p.p. } \},$$

sont assez réguliers, si $u \in C^1(\Omega_s) \cap C^1(\Omega_\ell) \cap C_1^0(\bar{\Omega})$ et $\beta(u) \in C^2(\Omega_s) \cap C^2(\Omega_\ell) \cap C_1^1(\bar{\Omega})$, alors $\theta = \beta(u)$ est solution du problème 3.1.

REMARQUE 3.1.

L'avantage de la formulation variationnelle 3.14 est que l'interface solide-liquide n'apparaît plus parmi la liste des inconnues. Elle est déterminée a posteriori comme étant le lieu où l'enthalpie est discontinue :

$$\Gamma_{s\ell} = \{x \in \Omega ; 0 \leq u(x) \leq \rho \ell_{s\ell}\},$$

ou de façon équivalente :

$$\Gamma_{s\ell} = \{x \in \Omega ; \beta(u(x)) = \theta_{s\ell}\}.$$

Démonstration du théorème 3.1.

i)
Procédons par densité. Multiplions 3.6 par une fonction $\varphi \in H^2(\Omega)$ et intégrons sur Ω_α , $\alpha = s, \ell$:

$$\sum_{\alpha=s,\ell} \int_{\Omega_\alpha} \left(-\Delta\theta + \rho\mathbf{v} \cdot \nabla h_\alpha(K^{-1}(\theta)) \right) \varphi dx = 0.$$

Intégrons par parties, utilisons les propriétés de \mathbf{v} et choisissons $\varphi = 0$ sur Γ . Nous obtenons, puisque $\varphi \in C^0(\bar{\Omega})$:

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha=s,\ell} \int_{\Omega_\alpha} \left(\nabla\theta \cdot \nabla\varphi - \rho h_\alpha(K^{-1}(\theta)) (\mathbf{v} \cdot \nabla\varphi) \right) dx \\ + \int_{\Gamma} \left\{ \frac{\partial\theta}{\partial n_{s\ell}} - \rho h_\alpha(K^{-1}(\theta)) (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_{s\ell}) \right\} \varphi ds = \int_{\partial\Omega \setminus \Gamma} \frac{\partial\theta}{\partial n_{s\ell}} \varphi ds. \end{aligned}$$

Utilisons les conditions 3.7, 3.10 et posons $u = \beta^{-1}(\theta)$. Nous obtenons 3.14.

ii)
Soit $\varphi \in C^1(\bar{\Omega})$ tel que $\text{supp}(\varphi) \subset \Omega_\alpha$, $\alpha = s, \ell$. Puisque u est régulière sur Ω_α nous pouvons intégrer par parties dans l'équation 3.14. Nous obtenons, en utilisant les propriétés de \mathbf{v} :

$$\int_{\text{supp}(\varphi) \cap \Omega_\alpha} \left(-\Delta\beta(u) + (\mathbf{v} \cdot \nabla u) \right) \varphi dx = 0.$$

Posons $\theta = \beta(u)$, 3.6 est bien vérifiée. Pour obtenir les conditions sur l'interface $\Gamma_{s\ell}$, nous choisissons $\varphi \in C^1(\bar{\Omega})$ telle que $\text{supp}(\varphi) \cap \Omega_s \neq \emptyset$, $\text{supp}(\varphi) \cap \Omega_\ell \neq \emptyset$ et $\text{supp}(\varphi) \cap \partial\Omega = \emptyset$. Intégrons par parties 3.14 sur Ω_s et Ω_ℓ , nous obtenons :

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha=s,\ell} \int_{\text{supp}(\varphi) \cap \Omega_\alpha} \left(-\Delta\beta(u) + (\mathbf{v} \cdot \nabla u) \right) \varphi dx \\ - \int_{\text{supp}(\varphi) \cap \Gamma} \left\{ \frac{\partial\beta(u)}{\partial n_{s\ell}} - u(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_{s\ell}) \right\} \varphi ds = 0, \quad \alpha = s, \ell. \end{aligned}$$

Posons $\theta = \beta(u)$, utilisons 3.6, la continuité de \mathbf{v} sur Γ et la définition de β . Nous obtenons la condition 3.7. Finalement pour obtenir la condition 3.8, il suffit de choisir $\varphi \in C^1(\bar{\Omega})$ telle que $\text{supp}(\varphi) \subset \Omega_\alpha$ et $\text{supp}(\varphi) \cap (\partial\Omega \setminus \Gamma) \neq \emptyset$. \square

EXEMPLE DE TRANSFORMATION.

Dans le cas où les coefficients c_p et k sont constants par phase, l'expression de β est :

$$\begin{aligned} \beta(x) &= k_s T_{sl} + \frac{k_s}{\rho c_{p_s}} (x - u_{sl}) & x < u_{sl}, \\ \beta(x) &= k_s T_{sl} & u_{sl} \leq x \leq u_{sl} + \rho l_{sl}, \\ \beta(x) &= k_s T_{sl} + \frac{k_l}{\rho c_{p_l}} (x - u_{sl} - \rho l_{sl}) & u_{sl} + \rho l_{sl} < x. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Ici u_{sl} est une enthalpie de référence arbitraire (en effet la fonction β peut être arbitrairement déplacée suivant l'axe des abscisses).

Dans toute la suite du chapitre nous nous intéressons au problème régularisé correspondant au cas où la fonction β est remplacée par une fonction β_ε strictement croissante (un exemple de régularisation est présenté dans la figure 3.2). Le paramètre de régularisation ε est fixé et n'est pas destiné à tendre vers zéro, ceci pour plusieurs raisons :

- d'un point de vue mathématique, les estimations a posteriori ne sont valables que pour $\varepsilon > 0$,
- d'un point de vue physique, la plupart des matériaux utilisés industriellement étant des alliages, le changement de phase n'est plus isotherme, mais évolue entre deux températures, ce qui correspond en première approximation à la régularisation proposée. Le cas d'un alliage à deux constituants est traité dans l'annexe 1.

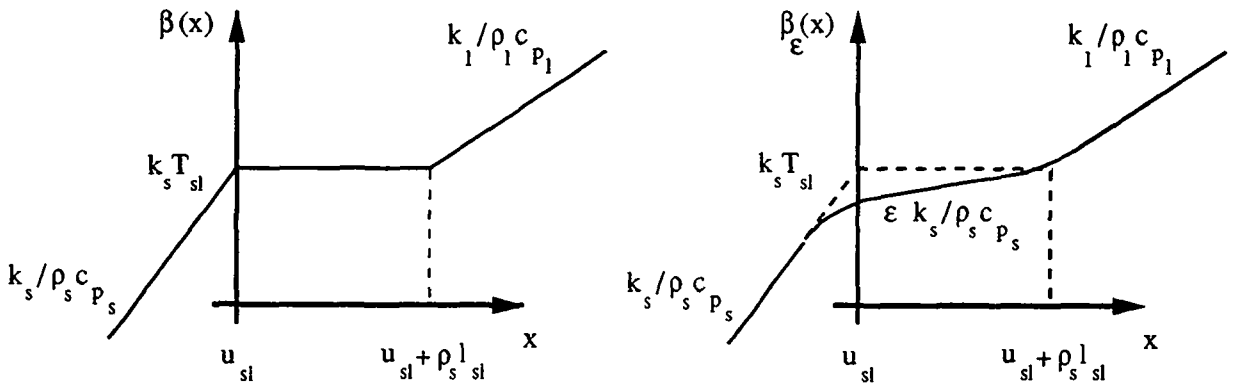


Figure 3.2: exemple de régularisation de la fonction β .

Nous allons maintenant formuler le problème régularisé sous forme variationnelle. Les

hypothèses générales sur les données sont

$$\bullet \mathbf{v} \in (C^1(\overline{\Omega}))^2, \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \text{ dans } \Omega, \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega \setminus \Gamma. \quad (3.16)$$

$$\bullet \beta_\varepsilon : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, \text{ continue, lipschitzienne, strictement croissante :}$$

$$\beta_\varepsilon(0) = 0 \quad (3.17)$$

$$0 < \varepsilon \leq \beta'_\varepsilon(x) \leq b \quad \forall x \in \mathbf{R}, \quad (3.18)$$

$$|(\beta_\varepsilon^{-1})'(x) - (\beta_\varepsilon^{-1})'(y)| \leq \frac{C}{\varepsilon^2} |x - y| \quad \forall (x, y) \in \mathbf{R}^2, \quad (3.19)$$

$$\bullet q_L \in C_0^\infty(\partial\Omega \setminus \Gamma), \quad (3.20)$$

$$\bullet u = 0 \text{ sur } \Gamma \text{ (i.e. } T_\infty = 0 \text{) pour simplifier l'exposé.} \quad (3.21)$$

Considérons l'espace de Hilbert

$$V = \{v \in H^1(\Omega); v = 0 \text{ sur } \Gamma\},$$

muni de la semi-norme $|\cdot|_{H^1(\Omega)}$ (qui est une norme sur V) et remarquons immédiatement que, en vertu des propriétés de \mathbf{v}

$$\int_{\Omega} (\mathbf{v} \cdot \nabla w) w dx = 0 \quad \forall w \in V. \quad (3.22)$$

Le problème régularisé correspondant aux équations 3.13, 3.14 et tenant compte de 3.16 est défini par :

PROBLÈME 3.3.

trouver $u \in V$ tel que

$$\int_{\Omega} \nabla \beta_\varepsilon(u) \cdot \nabla v dx + \int_{\Omega} (\mathbf{v} \cdot \nabla u) v dx = \int_{\partial\Omega \setminus \Gamma} q v ds \quad \forall v \in V. \quad (3.23)$$

L'hypothèse $\varepsilon > 0$ nous permet de nous placer dans le cadre des problèmes elliptiques quasi-linéaires sous forme conservative. Ces problèmes ont été exhaustivement étudiés dans les espaces de Hölder [Gil,Lad] et dans des espaces de Sobolev [Lad]. Nous proposons néanmoins, dans un soucis de clarté, un théorème d'existence avec sa démonstration. L'unicité de la solution n'est en général pas obtenue pour ce type d'équations, mais il est toutefois possible de trouver un résultat dans [Dou]. Pour montrer l'existence d'une solution nous utilisons le théorème de point fixe :

THÉORÈME 3.2. *Leray-Schauder ([Gil] p. 280).*

Soit Λ une application continue compacte d'un Banach B dans lui-même et supposons qu'il existe une constante C telle que

$$\|u\|_B \leq C$$

pour tout $u \in B$ et $\sigma \in [0, 1]$ satisfaisant $u = \sigma\Lambda(u)$. Alors Λ a un point fixe.

Nous pouvons maintenant énoncer le

THÉORÈME 3.3.

Si les données satisfont les hypothèses 3.16 à 3.21, alors le problème 3.3 a au moins une solution.

Démonstration.

Considérons les applications :

$$\begin{aligned} \Lambda_1 : u \in V &\rightarrow \Lambda_1(u) = \mathbf{v} \cdot \nabla u \in L^2(\Omega), \\ \Lambda_2 : f \in L^2(\Omega) &\rightarrow \Lambda_2(f) \in H^2(\Omega) \cap V \text{ unique solution de} \\ &\int_{\Omega} \nabla \Lambda_2(f) \cdot \nabla v dx = \int_{\partial\Omega \setminus \Gamma} q_L v ds - \int_{\Omega} f v dx \quad \forall v \in V. \\ \Lambda_3 : w \in H^2(\Omega) \cap V &\rightarrow \Lambda_3(w) \in V \text{ définie par} \\ \Lambda_3(w(x)) &= \beta_{\varepsilon}^{-1}(w(x)) \quad \forall x \in \Omega. \end{aligned}$$

La solution du problème 3.3 vérifie bien $u = \Lambda(u)$, avec $\Lambda = \Lambda_3 \circ \Lambda_2 \circ \Lambda_1$. Montrons que l'application Λ satisfait les hypothèse du théorème 3.2.

- Continuité de Λ .

Les applications Λ_1 et Λ_2 étant continues, il suffit de montrer que Λ_3 est continue pour que Λ le soit. Pour tout couple $u, v \in H^2(\Omega) \cap V$, nous avons, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et les hypothèses 3.18, 3.19 :

$$\begin{aligned} \|\nabla(\beta_{\varepsilon}^{-1}(u) - \beta_{\varepsilon}^{-1}(v))\|_{L^2(\Omega)} &\leq \|(\beta_{\varepsilon}^{-1})'(u)\nabla(u - v)\|_{L^2(\Omega)} + \|((\beta_{\varepsilon}^{-1})'(u) - (\beta_{\varepsilon}^{-1})'(v))\nabla v\|_{L^2(\Omega)}. \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon} \left(\|\nabla(u - v)\|_{L^2(\Omega)} + \frac{C}{\varepsilon} \|u - v\|_{L^4(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^4(\Omega)} \right), \end{aligned}$$

En utilisant la continuité de l'injection de Sobolev de $H^1(\Omega)$ dans $L^4(\Omega)$, nous avons donc

$$\|\nabla(\beta_{\varepsilon}^{-1}(u) - \beta_{\varepsilon}^{-1}(v))\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{1}{\varepsilon} \|\nabla(u - v)\|_{L^2(\Omega)} \left(1 + \frac{C}{\varepsilon} |v|_{H^2(\Omega)} \right).$$

- Compacité de Λ .

La compacité de l'application Λ_3 découle de la compacité de l'injection de $H^2(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$ et des propriétés de l'application β_ε^{-1} .

- Estimations a priori.

Reste à montrer que tout $u \in V$ et tout $\sigma \in [0, 1]$ vérifiant $u = \sigma \Lambda(u)$, u est borné dans V . Par définition, $u = \sigma \Lambda(u)$ s'écrit

$$\int_{\Omega} \nabla \beta_\varepsilon \left(\frac{u}{\sigma} \right) \cdot \nabla v dx + \int_{\Omega} (\mathbf{v} \cdot \nabla u) v dx = \int_{\partial\Omega \setminus \Gamma} q_L v ds \quad \forall v \in V. \quad (3.24)$$

En choisissant $v = u$, en utilisant la stricte croissance de β_ε , la continuité de l'application trace de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Gamma)$ et l'égalité 3.22, 3.24 conduit à :

$$\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \leq \sigma \frac{C}{\varepsilon} \|q_L\|_{L^2(\partial\Omega \setminus \Gamma)}, \leq \frac{C}{\varepsilon} \|q_L\|_{L^2(\partial\Omega \setminus \Gamma)}.$$

Il suffit d'appliquer le théorème 3.2 pour conclure. \square

3.3. Discrétisation et estimations a priori.

Pour tout $h > 0$, soit \mathcal{T}_h une décomposition de Ω en triangles K de diamètre h_K inférieur à h , régulière (cf. [Cia] p. 124), c'est-à-dire telle qu'il existe une constante σ_0 vérifiant

$$\frac{h_K}{\rho_K} \leq \sigma_0 \quad \forall K \in \mathcal{T}_h,$$

où ρ_K est la rondeur du triangle K . Notons que cette condition est équivalente à la condition sur les angles de la triangulation : il existe une constante α_0 telle que

$$\alpha_K \geq \alpha_0 > 0 \quad \forall K \in \mathcal{T}_h, \quad (3.25)$$

où α_K est le plus petit des angles du triangle K . Soit V_h l'espace d'approximation éléments finis associé à la triangulation \mathcal{T}_h défini par

$$V_h = \{v_h \in C^0(\bar{\Omega}) ; v_{h|_K} \in P_1 ; \forall K \in \mathcal{T}_h\} \cap V$$

et soit $r_h : C^0(\bar{\Omega}) \rightarrow V_h$ l'interpolant classique. Nous utiliserons dans la suite les résultats d'interpolation suivants (cf. [Cia] p. 123 et [Les] p. 23) : il existe une constante C ne dépendant ni de u , ni de h , ni de Ω telle que, pour tout triangle K de la triangulation \mathcal{T}_h , toute arête $E \subset \partial K$ de longueur h_E et toute fonction $v \in C^0(\bar{\Omega})$

$$\|v - r_h v\|_{L^2(K)} \leq C h_K |v|_{H^1(K)} \quad \text{si } v \in H^1(K), \quad (3.26)$$

$$|v - r_h v|_{H^1(K)} \leq C h_K |v|_{H^2(K)} \quad \text{si } v \in H^2(K), \quad (3.27)$$

$$\|v - r_h v\|_{L^2(E)} \leq C h_E^{1/2} |v|_{H^1(K)} \quad \text{si } v \in H^1(K). \quad (3.28)$$

Nous allons dans la suite étudier une discrétisation éléments finis du problème 3.3. Cette discrétisation est imposée par l'utilisation du schéma itératif présenté dans le paragraphe 5 et initialement proposé dans le cadre du problème de Stefan $u_t - \Delta \beta(u) = f$ par Magenes, Nochetto et Verdi [Mag,Noc3,Pao]. Ce schéma a été légèrement modifié afin d'inclure de manière implicite le terme convectif $\mathbf{v} \cdot \nabla u$ et s'est révélé très performant dans le cadre de notre étude. Insistons sur le fait que nous ne pouvons pas utiliser les résultats de convergence obtenus par les auteurs [Mag,Noc3] sur le problème de Stefan car ils ne sont valables que sur un intervalle de temps borné. La discrétisation en espace du problème 3.3 s'énonce

PROBLÈME 3.4.

Trouver $u_h \in V_h$ tel que

$$\int_{\Omega} \nabla r_h(\beta_{\varepsilon}(u_h)) \cdot \nabla v_h dx + \int_{\Omega} (\mathbf{v} \cdot \nabla u_h) v_h dx = \int_{\partial\Omega \setminus \Gamma} q_L v_h ds \quad \forall v_h \in V_h. \quad (3.29)$$

Avant de montrer l'existence d'une solution du problème 3.4, introduisons une hypothèse supplémentaires concernant la triangulation \mathcal{T}_h (cf. figure 3.3).

La triangulation est faiblement aigue, i.e.

- Pour toute arête intérieure, la somme des angles opposés est inférieure ou égale à π .
 - Pour toute arête du bord $\partial\Omega \setminus \Gamma$, l'angle opposé est inférieur ou égal à $\pi/2$.
- (3.30)

Nous verrons dans le paragraphe 3.6 que cette notion est fortement liée à la notion de triangulation de Delaunay. Nous pouvons maintenant énoncer un théorème d'existence de la solution discrète.

THÉORÈME 3.5.

Si les données et la triangulation vérifient les hypothèses 3.16 à 3.21, 3.25 et 3.30, alors le problème 3.4 a au moins une solution.

La démonstration de ce théorème fait appel au

LEMME 3.6.

Soit v_h et w_h deux éléments de V_h . Si P_1^E et P_2^E sont les deux sommets d'une arête E de la triangulation, α_1^E et α_2^E les deux angles opposés à l'arête (par convention $\alpha_2^E = \frac{\pi}{2}$ si l'arête est située sur le bord $\partial\Omega \setminus \Gamma$), alors

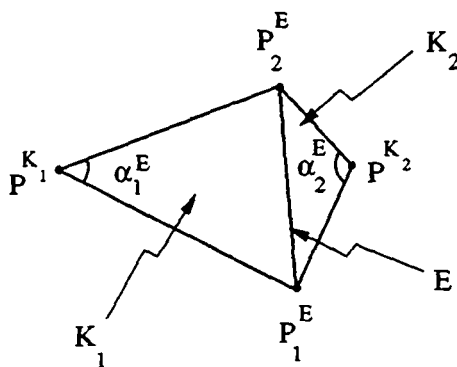
$$\int_{\Omega} \nabla v_h \cdot \nabla w_h dx = \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \frac{1}{2} \left(\frac{\cos(\alpha_1^E)}{|\sin(\alpha_1^E)|} + \frac{\cos(\alpha_2^E)}{|\sin(\alpha_2^E)|} \right) (v_h(P_1^E) - v_h(P_2^E))(w_h(P_1^E) - w_h(P_2^E)), \quad (3.31)$$

où \mathcal{E}_h désigne l'ensemble des arêtes de la triangulation \mathcal{T}_h contenues dans Ω ou situées sur le bord $\partial\Omega \setminus \Gamma$.

Démonstration.

Soit K un triangle de la triangulation \mathcal{T}_h , P_i^K , $i = 1, 2, 3$ les sommets du triangle, $x_{i,K}$, $y_{i,K}$ les coordonnées du sommet P_i^K . Les fonctions de base $\varphi_i^K(x, y)$, $i = 1, 2, 3$ du triangle K sont définies par :

$$\varphi_i^K(x, y) = a_i^K x + b_i^K y + c_i^K. \quad (3.32)$$



$$\alpha_1^E + \alpha_2^E \leq \pi$$

Figure 3.3: triangulation faiblement aigue.
Géométrie d'une arête intérieure E .

et

$$a_i^K = \frac{y_{j,K} - y_{k,K}}{2\text{mes}(K)} ; \quad b_i^K = \frac{x_{j,K} - x_{k,K}}{2\text{mes}(K)} ; \quad c_i^K = \frac{x_{j,K}y_{k,K} - x_{k,K}y_{j,K}}{2\text{mes}(K)}, \quad (3.33)$$

où $\{i, j, k\}$ désigne les permutations circulaires de $\{1, 2, 3\}$. En décomposant v_h et w_h dans la base locale, nous avons

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla v_h \cdot \nabla w_h dx \\ = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \left(\sum_{i=1}^3 v_h(P_i^K) \nabla \varphi_i^K(x, y) \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^3 w_h(P_j^K) \nabla \varphi_j^K(x, y) \right) dx dy, \end{aligned}$$

soit, en utilisant 3.32 et 3.33

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla v_h \cdot \nabla w_h dx = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \frac{1}{4\text{mes}(K)} \sum_{\{i,j,k\} \in \mathcal{S}} \overrightarrow{P_k^K P_i^K} \cdot \overrightarrow{P_k^K P_j^K} \\ (v_h(P_i^K) - v_h(P_j^K)) (w_h(P_i^K) - w_h(P_j^K)). \quad (3.34) \end{aligned}$$

(Nous avons noté \mathcal{S} l'ensemble des permutations circulaires de $\{1, 2, 3\}$). Soit P_1^E, P_2^E les sommets extrémités d'une arête intérieure E de la triangulation \mathcal{T}_h , K_1 et K_2 les deux

triangles tels que $E = K_1 \cap K_2$, α_1^E et α_2^E les deux angles opposés à l'arête E . Notons encore P^{K_1} le troisième sommet du triangle K_1 et P^{K_2} le troisième sommet du triangle K_2 (cf. figure 3.3). Nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} \overrightarrow{P^{K_i} P_1^E} \cdot \overrightarrow{P^{K_i} P_2^E} &= \|P^{K_i} P_1^E\|_2 \|P^{K_i} P_2^E\|_2 \cos(\alpha_i^E) & i = 1, 2, \\ 2mes(K_i) &= \|P^{K_i} P_1^E\|_2 \|P^{K_i} P_2^E\|_2 |\sin(\alpha_i^E)| & i = 1, 2, \end{aligned}$$

où $\|\cdot\|_2$ désigne la distance euclidienne. L'égalité 3.34 devient

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} \nabla v_h \cdot \nabla w_h dx \\ &= \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \frac{1}{2} \left(\frac{\cos(\alpha_1^E)}{|\sin(\alpha_1^E)|} + \frac{\cos(\alpha_2^E)}{|\sin(\alpha_2^E)|} \right) (v_h(P_1^E) - v_h(P_2^E)) (w_h(P_1^E) - w_h(P_2^E)). \end{aligned} \quad (3.35)$$

Nous avons posé $\alpha_2^E = \frac{\pi}{2}$ dans 3.35 si E est une arête du bord $\partial\Omega \setminus \Gamma$. Notons que les arêtes du bord Γ n'interviennent pas puisque $v_h = w_h = 0$ sur Γ . \square

Démonstration du théorème 3.5.

Nous procédons de façon analogue au cas continu (cf. théorème 3.3) et définissons les applications

$$\begin{aligned} \Lambda_1 : u_h \in V_h &\rightarrow \Lambda_1(u_h) = \mathbf{v} \cdot \nabla u_h \in L^2(\Omega). \\ \Lambda_2 : f \in L^2(\Omega) &\rightarrow \Lambda_2(f) \in V_h \text{ unique solution de} \\ &\int_{\Omega} \nabla \Lambda_2(f) \cdot \nabla v_h dx = \int_{\partial\Omega \setminus \Gamma} q_L v_h ds - \int_{\Omega} f v_h dx \quad \forall v_h \in V_h. \\ \Lambda_3 : w_h \in V_h &\rightarrow \Lambda_3(w_h) \in V_h \text{ définie par :} \\ &\Lambda_3(w_h(x)) = r_h(\beta_\epsilon^{-1}(w_h(x))) \quad \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Le lecteur pourra vérifier que la solution du problème 3.4 vérifie $u_h = \Lambda(u_h)$, avec $\Lambda = \Lambda_3 \circ \Lambda_2 \circ \Lambda_1 : V_h \rightarrow V_h$. La compacité de l'application Λ est assurée, puisque V_h est de dimension finie.

• Continuité de Λ .

Les applications Λ_1 et Λ_2 étant continues, il suffit de montrer que Λ_3 l'est pour que Λ le soit. Remarquons tout d'abord que Λ_3 a un sens puisque toute fonction u_h de V_h , $\beta_\epsilon^{-1}(u_h)$ est continue. D'autre part, puisque toutes les normes sont équivalentes en dimension finie,

il nous suffit de montrer que, si u_h et v_h éléments de V_h sont tels que $\|u_h - v_h\|_{L^\infty(\Omega)} \rightarrow 0$, alors nous avons $\|\Lambda_3(u_h) - \Lambda_3(v_h)\|_{L^\infty(\Omega)} \rightarrow 0$. Ce résultat est immédiat puisque

$$\begin{aligned} \|\Lambda_3(u_h) - \Lambda_3(v_h)\|_{L^\infty(\Omega)} &= \|r_h(\beta_\varepsilon^{-1}(u_h) - \beta_\varepsilon^{-1}(v_h))\|_{L^\infty(\Omega)}, \\ &\leq \|\beta_\varepsilon^{-1}(u_h) - \beta_\varepsilon^{-1}(v_h)\|_{L^\infty(\Omega)}, \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon} \|u_h - v_h\|_{L^\infty(\Omega)}. \end{aligned}$$

• Estimations a priori.

Pour tout $\sigma \in [0, 1]$, il reste à borner, toute fonction u_h telle que $u_h = \sigma \Lambda(u_h)$, c'est-à-dire toute fonction $u_h \in V_h$ vérifiant

$$\int_{\Omega} \nabla r_h \left(\beta_\varepsilon \left(\frac{u_h}{\sigma} \right) \right) \cdot \nabla v_h dx + \int_{\Omega} (\mathbf{v} \cdot \nabla u_h) v_h dx = \int_{\partial\Omega \setminus \Gamma} q_L v_h ds \quad \forall v_h \in V_h. \quad (3.36)$$

Si nous choisissons $v_h = u_h$ dans 3.36, si nous utilisons la propriété 3.22 et la continuité de l'application trace de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Gamma)$, nous avons :

$$\int_{\Omega} \nabla r_h \left(\beta_\varepsilon \left(\frac{u_h}{\sigma} \right) \right) \cdot \nabla u_h dx \leq C \|q_L\|_{L^2(\partial\Omega \setminus \Gamma)} \|\nabla u_h\|_{L^2(\Omega)}. \quad (3.37)$$

Appliquons le lemme 3.6 au premier terme de 3.37

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla r_h \left(\beta_\varepsilon \left(\frac{u_h}{\sigma} \right) \right) \cdot \nabla u_h dx \\ = \sigma \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \frac{1}{2} \left(\frac{\cos(\alpha_1^E)}{|\sin(\alpha_1^E)|} + \frac{\cos(\alpha_2^E)}{|\sin(\alpha_2^E)|} \right) \\ \left(\beta_\varepsilon \left(\frac{u_h(P_1^E)}{\sigma} \right) - \beta_\varepsilon \left(\frac{u_h(P_2^E)}{\sigma} \right) \right) \left(\frac{u_h(P_1^E)}{\sigma} - \frac{u_h(P_2^E)}{\sigma} \right). \end{aligned} \quad (3.38)$$

Puisque la fonction β_ε est strictement croissante $\beta_\varepsilon(\lambda_1) - \beta_\varepsilon(\lambda_2) \geq \varepsilon(\lambda_1 - \lambda_2)$, $\forall (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$. D'autre part, la triangulation étant faiblement aigue, les termes

$$\frac{\cos(\alpha_1^E)}{|\sin(\alpha_1^E)|} + \frac{\cos(\alpha_2^E)}{|\sin(\alpha_2^E)|}$$

présents dans 3.38 sont tous positifs et nous obtenons finalement :

$$\int_{\Omega} \nabla r_h \left(\beta_\varepsilon \left(\frac{u_h}{\sigma} \right) \right) \cdot \nabla u_h dx \geq \varepsilon \sigma \|\nabla \left(\frac{u_h}{\sigma} \right)\|_{L^2(\Omega)}^2 = \frac{\varepsilon}{\sigma} \|\nabla u_h\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

En reportant l'inégalité ci-dessus dans 3.37, nous avons bien :

$$\|\nabla u_h\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{C}{\varepsilon} \|q_L\|_{L^2(\partial\Omega \setminus \Gamma)}.$$

Il suffit d'appliquer le théorème 3.2 pour conclure. \square

REMARQUE 3.2.

Nous pouvons, en utilisant à nouveau le lemme 3.6, borner $\theta_h = r_h(\beta_\varepsilon(u_h))$ en fonction de u_h :

$$\|\nabla\theta_h\|_{L^2(\Omega)} \leq b\|\nabla u_h\|_{L^2(\Omega)}. \quad (3.39)$$

Dans la proposition suivante nous énonçons les estimations a priori.

PROPOSITION 3.7.

Supposons que les données et la triangulation vérifient les hypothèses 3.16 à 3.21, 3.25 et 3.30, Soit u et u_h les solutions des problèmes 3.3 et 3.4, posons $\theta = \beta_\varepsilon(u)$, $\theta_h = r_h(\beta_\varepsilon(u_h))$ et supposons que $\theta \in H^2(\Omega) \cap V$. Il existe deux constantes v_0 et C indépendantes de h et ε telle que si $\|\mathbf{v}\|_{(L^\infty(\Omega))^2} \leq v_0\varepsilon$ alors

$$i) \|\nabla(\theta - \theta_h)\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch, \quad (3.38)$$

$$ii) \|\nabla(u - u_h)\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{C}{\varepsilon^2}h. \quad (3.39)$$

Démonstration.

i)
Choisissons v_h comme fonction test dans 3.23, soustrayons avec 3.29 et intégrons par parties le terme convectif. Nous obtenons la relation :

$$\int_{\Omega} \nabla(\theta - \theta_h) \cdot \nabla v_h dx - \int_{\Omega} (\mathbf{v} \cdot \nabla v_h)(u - u_h) dx = 0 \quad \forall v_h \in V_h. \quad (3.40)$$

Evaluons l'erreur :

$$\begin{aligned} \|\nabla(\theta - \theta_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \int_{\Omega} \nabla(\theta - \theta_h) \cdot \nabla\theta dx - \int_{\Omega} \nabla(\theta - \theta_h) \cdot \nabla\theta_h dx \\ &= \int_{\Omega} \nabla(\theta - \theta_h) \cdot \nabla(\theta - r_h\theta) dx - \int_{\Omega} \nabla(\theta - \theta_h) \cdot \nabla(\theta_h - r_h\theta) dx, \end{aligned}$$

soit, en utilisant 3.40

$$\|\nabla(\theta - \theta_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} \nabla(\theta - \theta_h) \cdot \nabla(\theta - r_h\theta) dx - \int_{\Omega} (\mathbf{v} \cdot \nabla(\theta_h - r_h\theta))(u - u_h) dx.$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz et le résultat d'interpolation 3.27 conduisent à la majoration

$$\begin{aligned}
& \|\nabla(\theta - \theta_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
& \leq Ch|\theta|_{H^2(\Omega)}\|\nabla(\theta - \theta_h)\|_{L^2(\Omega)} \\
& \quad + \|\mathbf{v}\|_{(L^\infty(\Omega))^2} \left(\|\nabla(\theta - \theta_h)\|_{L^2(\Omega)} + Ch|\theta|_{H^2(\Omega)} \right) \|u - u_h\|_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned} \tag{3.41}$$

D'autre part, par définition de θ et θ_h

$$\begin{aligned}
& \|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} \\
& \leq \|\beta_\varepsilon^{-1}(\theta) - \beta_\varepsilon^{-1}(\theta_h)\|_{L^2(\Omega)} + \|\beta_\varepsilon^{-1}(\theta_h) - r_h(\beta_\varepsilon^{-1})(\theta_h)\|_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned} \tag{3.42}$$

En vertu des hypothèses 3.18 et 3.19, $\beta_\varepsilon^{-1}(\theta_h) \in H^1(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ et nous pouvons utiliser le résultat d'interpolation 3.26. De plus, en appliquant à nouveau l'hypothèse 3.19 et l'inégalité de Poincaré, 3.42 devient

$$\begin{aligned}
& \|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} \\
& \leq \frac{1}{\varepsilon} \|\theta - \theta_h\|_{L^2(\Omega)} + Ch\|\nabla\beta_\varepsilon^{-1}(\theta_h)\|_{L^2(\Omega)} \\
& \leq \frac{\tilde{C}}{\varepsilon} \left(\|\nabla(\theta - \theta_h)\|_{L^2(\Omega)} + h\|\nabla\theta_h\|_{L^2(\Omega)} \right) \\
& \leq \frac{\tilde{C}}{\varepsilon} \left((1+h)\|\nabla(\theta - \theta_h)\|_{L^2(\Omega)} + h\|\nabla\theta\|_{L^2(\Omega)} \right).
\end{aligned} \tag{3.43}$$

Finalement, 3.43 dans 3.41 donne :

$$\begin{aligned}
& \left(1 - \frac{C}{\varepsilon}(1+h)\|\mathbf{v}\|_{(L^\infty(\Omega))^2} \right) \|\nabla(\theta - \theta_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
& \leq Ch \left((1 + \frac{1}{\varepsilon}(1+h)\|\mathbf{v}\|_{(L^\infty(\Omega))^2}) |\theta|_{H^2(\Omega)} \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{\varepsilon} \|\mathbf{v}\|_{(L^\infty(\Omega))^2} \|\nabla\theta\|_{L^2(\Omega)} \right) \|\nabla(\theta - \theta_h)\|_{L^2(\Omega)} \\
& \quad + \frac{1}{\varepsilon} Ch^2 \|\mathbf{v}\|_{(L^\infty(\Omega))^2} |\theta|_{H^2(\Omega)} \|\nabla\theta\|_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned} \tag{3.44}$$

Il suffit de choisir $\|\mathbf{v}\|_{(L^\infty(\Omega))^2}/\varepsilon$ suffisamment petit de telle sorte à ce que

$$\left(1 - \frac{C}{\varepsilon}(1+h)\|\mathbf{v}\|_{(L^\infty(\Omega))^2} \right) \geq \frac{1}{2},$$

et d'appliquer l'inégalité de Young à 3.44 pour conclure.

ii)

Exprimons $u - u_h$ en fonction de $\theta - \theta_h$:

$$\|\nabla(u - u_h)\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\nabla(\beta_\varepsilon^{-1}(\theta) - r_h(\beta_\varepsilon^{-1}(\theta)))\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla(r_h(\beta_\varepsilon^{-1}(\theta)) - \beta_\varepsilon^{-1}(\theta_h))\|_{L^2(\Omega)}.$$

Puisque r_h est uniformément borné de $H^1(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$ et en utilisant le résultat d'interpolation 3.27, nous avons :

$$\|\nabla(u - u_h)\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch|\beta_\varepsilon^{-1}(\theta)|_{H^2(\Omega)} + C\|\nabla(\beta_\varepsilon^{-1}(\theta) - \beta_\varepsilon^{-1}(\theta_h))\|_{L^2(\Omega)}. \quad (3.45)$$

Puisque $(\beta_\varepsilon^{-1})'$ est lipschitzienne, $(\beta_\varepsilon^{-1})''$ est bornée par C/ε^2 (cf. hypothèse 3.19) et il suffit de remarquer que l'injection de $H^1(\Omega)$ dans $L^4(\Omega)$ est continue pour obtenir

$$|\beta_\varepsilon^{-1}(\theta)|_{H^2(\Omega)} \leq \frac{1}{\varepsilon}|\theta|_{H^2(\Omega)} \left(1 + \frac{C}{\varepsilon}|\theta|_{H^2(\Omega)}\right). \quad (3.46)$$

D'autre part nous avons aussi

$$\begin{aligned} & \|\nabla(\beta_\varepsilon^{-1}(\theta) - \beta_\varepsilon^{-1}(\theta_h))\|_{L^2(\Omega)} \\ & \leq \|((\beta_\varepsilon^{-1})'(\theta_h)\nabla(\theta - \theta_h))\|_{L^2(\Omega)} + \|((\beta_\varepsilon^{-1})'(\theta) - (\beta_\varepsilon^{-1})'(\theta_h))\nabla\theta\|_{L^2(\Omega)} \\ & \leq \frac{1}{\varepsilon}\|\nabla(\theta - \theta_h)\|_{L^2(\Omega)} + \frac{C}{\varepsilon^2}\|\theta - \theta_h\|_{L^4(\Omega)}\|\nabla\theta\|_{L^4(\Omega)} \\ & \leq \frac{1}{\varepsilon} \left(1 + \frac{C}{\varepsilon}|\theta|_{H^2(\Omega)}\right) \|\nabla(\theta - \theta_h)\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned} \quad (3.47)$$

Il suffit de reporter 3.46 et 3.47 dans 3.45 et d'utiliser i) pour conclure. \square

REMARQUE 3.3.

La condition "v suffisamment petit" est légitime car elle implique l'unicité de u et u_h , ce qui nous permet de les comparer. Cette condition n'apparaît pas dans le cas linéaire ($\beta_\varepsilon(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$).

3.4. Estimations a posteriori.

Le but de ce paragraphe est de présenter une relation du type 3.1 reliant l'erreur aux données, à la géométrie du maillage et à la solution calculée. Nous employons, comme dans [Bar,Pou,Ver], des techniques liées à l'estimation du résidu. Soit $F : V \rightarrow V'$ et $F_h : V \cap C^0(\bar{\Omega}) \rightarrow V'$ définies par

$$(F(v), w) = \int_{\Omega} \nabla \beta_{\varepsilon}(v) \cdot \nabla w dx + \int_{\Omega} (\mathbf{v} \cdot \nabla v) w dx - \int_{\partial\Omega \setminus \Gamma} q_L w ds$$

$$\forall w \in V, \quad \forall v \in V$$

$$(F_h(v), w) = \int_{\Omega} \nabla r_h \beta_{\varepsilon}(v) \cdot \nabla w dx + \int_{\Omega} (\mathbf{v} \cdot \nabla v) w dx - \int_{\partial\Omega \setminus \Gamma} q_L w ds$$

$$\forall w \in V, \quad \forall v \in V \cap C^0(\bar{\Omega}).$$

Remarquons immédiatement que si u et u_h sont solutions des problème 3.3 et 3.4 respectivement, alors

$$(F(u), v) = 0 \quad \forall v \in V, \quad (3.48)$$

$$(F_h(u_h), v_h) = 0 \quad \forall v_h \in V_h. \quad (3.49)$$

La quantité $F(u_h)$ représente le *résidu* obtenu lorsque la solution discrète est injectée dans l'équation à résoudre et en utilisant la norme duale

$$\|F(u_h)\|_{V'} = \sup_{v \in V} \frac{|(F(u_h), v)|}{|v|_{H^1(\Omega)}}, \quad (3.50)$$

nous obtenons une mesure du résidu. Le but de nos estimations a posteriori est d'abord de relier l'erreur $\theta - \theta_h$ au résidu discret $F_h(u_h)$ et ensuite d'évaluer $F_h(u_h)$ en fonction des paramètres du maillage et des données du problème.

LEMME 3.8.

Supposons que les données et la triangulation vérifient les hypothèses 3.16 à 3.21, 3.25 et 3.30, Soit u et u_h les solutions des problèmes 3.3 et 3.4, posons $\theta = \beta_{\varepsilon}(u)$ et $\theta_h = r_h \beta_{\varepsilon}(u_h)$. Alors il existe une constante C ne dépendant que de Ω telle que

$$\|\nabla(\theta - \theta_h)\|_{L^2(\Omega)} \leq C \left(\|F_h(u_h)\|_{V'} + \|G(u, u_h)\|_{V'} \right), \quad (3.51)$$

où nous notons

$$(G(u, u_h), v) = \int_{\Omega} (\mathbf{v} \cdot \nabla(u - u_h)) v dx \quad \forall v \in V \quad (3.52)$$

Démonstration.

Evaluons l'erreur :

$$\|\nabla(\theta - \theta_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} \nabla\theta \cdot \nabla(\theta - \theta_h) dx - \int_{\Omega} \nabla\theta_h \cdot \nabla(\theta - \theta_h) dx,$$

soit, en utilisant 3.23 avec $v = \theta - \theta_h$

$$\|\nabla(\theta - \theta_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 = -(F_h(u_h), \theta - \theta_h) - \int_{\Omega} (\mathbf{v} \cdot \nabla(u - u_h))(\theta - \theta_h) dx. \quad (3.53)$$

Il suffit d'appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour conclure. \square

REMARQUE 3.4.

Dans le cas linéaire ($\beta_\varepsilon(x) = x, \forall x \in \mathbf{R}$), nous pouvons remplacer 3.51 par :

$$\|\nabla(u - u_h)\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|F(u_h)\|_{V'}.$$

Le lemme suivant relie F_h et $G(u, u_h)$ en fonction des paramètres de la triangulation \mathcal{T}_h et des données du problème.

LEMME 3.9.

Supposons que les données et la triangulation vérifient les hypothèses 3.16 à 3.21, 3.25 et 3.30. Soit u, u_h les solutions des problèmes 3.3, 3.4, posons $\theta = \beta_\varepsilon(u)$, $\theta_h = r_h(\beta_\varepsilon(u_h))$ et supposons $\theta \in H^2(\Omega) \cap V$. Alors, il existe une constante C indépendante de h et ε telle que, pour tout $v \in V$:

$$\begin{aligned} \text{i) } (F_h(u_h), v) &\leq C \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left(h_K \|\mathbf{v} \cdot \nabla u_h\|_{L^2(K)} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{E \in \mathcal{E}_h \cap \partial K} h_E^{1/2} \left\| \left[\frac{\partial \theta_h}{\partial n_E} \right]_E \right\|_{L^2(E)} \right) \|\nabla v\|_{L^2(K)}, \end{aligned} \quad (3.54)$$

$$\begin{aligned} \text{ii) } (G(u, u_h), v) &\leq C \sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K \|\mathbf{v}\|_{(L^\infty(K))^2} \|(\beta_\varepsilon^{-1})'(\theta_h)\|_{L^\infty(K)} \|\nabla \theta_h\|_{L^2(K)} \|\nabla v\|_{L^2(K)} \\ &\quad + \frac{C}{\varepsilon} \|\mathbf{v}\|_{(L^\infty(\Omega))^2} \|\theta - \theta_h\|_{L^2(K)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned} \quad (3.55)$$

Nous avons noté, pour toute arête intérieure $E = K_1 \cap K_2$, \mathbf{n}_E une normale unité à E , $[v]_E = v|_{K_2} - v|_{K_1}$ le saut de la quantité v à travers l'arête E (par convention $[\partial \theta_h / \partial n_E] = \partial \theta_h / \partial n_{E|_{K_2}} - q_L$ si $E \in \partial \Omega \setminus \Gamma$) et h_E la longueur de E .

Démonstration.

i) Procédons par densité et montrons 3.54 pour $v \in H^2(\Omega) \cap V$. En vertu de 3.49, nous avons :

$$(F_h(u_h), v) = (F_h(u_h), v - v_h) \quad \forall v_h \in V_h,$$

soit, par définition de F_h :

$$(F_h(u_h), v) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left\{ \int_K \nabla \theta_h \cdot \nabla (v - v_h) dx + \int_K (\mathbf{v} \cdot \nabla u_h)(v - v_h) dx - \sum_{E \in \mathcal{E}_h^1 \cap \partial K} \int_E q_L (v - v_h) ds \right\} \quad \forall v_h \in V_h, \quad (3.56)$$

où nous avons noté \mathcal{E}_h^1 l'ensemble des arêtes de la triangulation \mathcal{T}_h situés sur le bord $\partial\Omega \setminus \Gamma$. En intégrant par parties le premier terme du second membre et en remarquant que $\Delta \theta_{h|_K} = 0$, 3.56 devient :

$$(F_h(u_h), v) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left\{ \int_K (\mathbf{v} \cdot \nabla u_h)(v - v_h) dx + \sum_{E \in \mathcal{E}_h^2 \cap \partial K} \int_E \frac{\partial \theta_h}{\partial n_K} (v - v_h) ds + \sum_{E \in \mathcal{E}_h^1 \cap \partial K} \int_E \left(\frac{\partial \theta_h}{\partial n_K} - q_L \right) (v - v_h) ds \right\} \quad \forall v_h \in V_h, \quad (3.57)$$

où \mathbf{n}_K est la normale unité extérieure du triangle K et où nous avons noté \mathcal{E}_h^2 l'ensemble des arêtes intérieures de la triangulation \mathcal{T}_h . Toute arête intérieure E de la triangulation peut s'écrire comme intersection de deux triangles K_1 et K_2 , de normales unités extérieures \mathbf{n}_{K_1} et \mathbf{n}_{K_2} . Posons $\mathbf{n}_E = \mathbf{n}_{K_1} = -\mathbf{n}_{K_2}$ et $[v]_E = v|_{K_2} - v|_{K_1}$ le saut de la quantité v à travers l'arête E . Ainsi 3.57 devient :

$$|(F_h(u_h), v)| \leq \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left| \int_K (\mathbf{v} \cdot \nabla u_h)(v - v_h) dx \right| + \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \left| \int_E \left[\frac{\partial \theta_h}{\partial n_E} \right]_E (v - v_h) ds \right| \quad \forall v_h \in V_h,$$

soit, en regroupant les arêtes par triangle

$$|(F_h(u_h), v)| \leq \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left\{ \left| \int_K (\mathbf{v} \cdot \nabla u_h)(v - v_h) dx \right| + \sum_{E \in \mathcal{E}_h \cap \partial K} \left| \int_E \left[\frac{\partial \theta_h}{\partial n_E} \right]_E (v - v_h) ds \right| \right\} \quad \forall v_h \in V_h. \quad (3.58)$$

Puisque $H^2(\Omega) \hookrightarrow C^0(\bar{\Omega})$ nous pouvons choisir $v_h = r_h v$ dans 3.58. L'inégalité de Cauchy-Schwartz appliquée sur chaque triangle ainsi que les résultats d'interpolation 3.26 et 3.28 nous mènent à :

$$|(F_h(u_h), v)| \leq C \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left\{ h_K \|\mathbf{v} \cdot \nabla u_h\|_{L^2(K)} + \sum_{E \in \mathcal{E}_h \cap \partial K} h_E^{1/2} \left\| \left[\frac{\partial \theta_h}{\partial n_E} \right]_E \right\|_{L^2(E)} \right\} |v|_{H^1(K)}. \quad (3.59)$$

ii)
En intégrant par parties 3.52 et en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous avons immédiatement

$$(G(u, u_h), v) \leq \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|\mathbf{v}\|_{(L^\infty(K))^2} \| (u - u_h) \|_{L^2(K)} \|\nabla v\|_{L^2(K)}.$$

Reste à évaluer $\|(u - u_h)\|_{L^2(K)}$:

$$\begin{aligned} \|(u - u_h)\|_{L^2(K)} &\leq \|\beta_\varepsilon^{-1}(\theta) - \beta_\varepsilon^{-1}(\theta_h)\|_{L^2(K)} + \|\beta_\varepsilon^{-1}(\theta_h) - r_h(\beta_\varepsilon^{-1}(\theta_h))\|_{L^2(K)} \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon} \|\theta - \theta_h\|_{L^2(K)} + Ch_K \|\nabla \beta_\varepsilon^{-1}(\theta_h)\|_{L^2(K)}, \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon} \|\theta - \theta_h\|_{L^2(K)} + Ch_K \|(\beta_\varepsilon^{-1})'(\theta_h)\|_{L^\infty(K)} \|\nabla \theta_h\|_{L^2(K)}. \quad \square \end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant énoncer le

THÉORÈME 3.10.

Supposons que les données et la triangulation vérifient les hypothèses 3.16 à 3.21, 3.25 et 3.30. Soit u et u_h les solutions des problèmes 3.3 et 3.4, posons $\theta = \beta_\varepsilon(u)$, $\theta_h = r_h \beta_\varepsilon(u_h)$ et supposons que $\theta \in H^2(\Omega) \cap V$. Il existe deux constantes v_0 et C indépendantes de h et ε telle que si $\|\mathbf{v}\|_{(L^\infty(\Omega))^2} \leq v_0 \varepsilon$ alors

$$\|\nabla(\theta - \theta_h)\|_{L^2(\Omega)} \leq C \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \eta_K^2 \right)^{1/2}, \quad (3.60)$$

avec

$$\begin{aligned} \eta_K^2 &= h_K^2 \|\mathbf{v}\|_{(L^\infty(K))^2}^2 \left(\|\nabla u_h\|_{L^2(K)}^2 + \|(\beta_\varepsilon^{-1})'(\theta_h)\|_{L^\infty(K)}^2 \|\nabla \theta_h\|_{L^2(K)}^2 \right) \\ &\quad + \sum_{E \in \mathcal{E}_h \cap \partial K} h_E \left\| \left[\frac{\partial \theta_h}{\partial n_E} \right]_E \right\|_{L^2(E)}^2. \quad (3.61) \end{aligned}$$

REMARQUE 3.5.

L'argument de densité, initialement utilisé par Verfürth [Ver] pour ce type d'estimateur, permet de travailler sur des fonctions continues et donc d'utiliser l'interpolant r_h . Baranger et El-Amri [Bar] obtiennent le même type d'estimateur en utilisant des fonctions test dans $H^1(\Omega)$ et l'interpolant de Clément [Cle].

REMARQUE 3.6.

Dans le cas linéaire ($\beta_\varepsilon(x) = x, \forall x \in \mathbf{R}$), nous pouvons remplacer 3.61 par :

$$\eta_K^2 = h_K^2 \|\mathbf{v}\|_{(L^\infty(K))^2}^2 \|\nabla u_h\|_{L^2(K)}^2 + \sum_{E \in \mathcal{E}_h \cap \partial K} h_E \left\| \left[\frac{\partial \theta_h}{\partial n_E} \right]_E \right\|_{L^2(E)}^2.$$

Démonstration du théorème.

Utilisons les lemmes 3.8 et 3.9. Regroupons les termes

$$\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left(h_K \|\mathbf{v} \cdot \nabla u_h\|_{L^2(K)} + \sum_{E \in \mathcal{E}_h \cap \partial K} h_E^{1/2} \left\| \left[\frac{\partial \theta_h}{\partial n_E} \right]_E \right\|_{L^2(E)} \right)$$

et

$$\sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K \|\mathbf{v}\|_{(L^\infty(K))^2} \|(\beta_\varepsilon^{-1})'(\theta_h)\|_{L^\infty(K)} \|\nabla \theta_h\|_{L^2(K)}$$

présents dans 3.54 et 3.55 et appliquons l'inégalité de Cauchy-Schwarz discrète. Nous obtenons

$$\|\nabla(\theta - \theta_h)\|_{L^2(\Omega)} \leq C \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \eta_K^2 \right)^{1/2} + \frac{C}{\varepsilon} \|\mathbf{v}\|_{(L^\infty(\Omega))^2} \|\theta - \theta_h\|_{L^2(\Omega)}.$$

Il suffit d'appliquer l'inégalité de Poincaré au dernier terme de l'équation ci-dessus et de choisir $\|\mathbf{v}\|_{(L^\infty(\Omega))^2} / \varepsilon$ suffisamment petit de telle sorte à ce que

$$1 - \frac{C}{\varepsilon} \|\mathbf{v}\|_{(L^\infty(\Omega))^2} \geq \frac{1}{2}$$

pour conclure. \square

3.5. Un schéma itératif.

Dans ce paragraphe nous proposons un algorithme permettant de résoudre le problème 3.4. Pour résoudre ce problème, nous résolvons le problème évolutif correspondant (i.e. le problème de Stefan avec convection) jusqu'à obtenir une solution stationnaire. Le schéma que nous utilisons pour résoudre le problème évolutif est directement issu d'un schéma étudié par Magenes, Nochetto et Verdi [Mag,Noc3,Pao] sur le problème de Stefan $u_t - \Delta\beta(u) = f$, légèrement modifié afin de pouvoir intégrer un terme convectif $\mathbf{v} \cdot \nabla u$ de façon implicite. Soit $u_h^0 \in V_h$ une approximation de la solution, τ l'équivalent d'un pas de temps, ω un paramètre de relaxation tel que $0 < \omega < 1/b$ (b est définie dans 3.18), répétons jusqu'à convergence le schéma suivant :

Pour $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ trouver $\theta_h^{n+1} \in V_h$ tel que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} r_h(\theta_h^{n+1} v_h) dx + \frac{\tau}{\omega} \int_{\Omega} \nabla \theta_h^{n+1} \cdot \nabla v_h dx + \tau \int_{\Omega} (\mathbf{v} \cdot \nabla \theta_h^{n+1}) v_h dx \\ = \int_{\Omega} r_h(\beta_{\varepsilon}(u_h^n) v_h) dx + \tau \int_{\Omega} (\mathbf{v} \cdot \nabla r_h \beta_{\varepsilon}(u_h^n)) v_h dx - \frac{\tau}{\omega} \int_{\Omega} (\mathbf{v} \cdot \nabla u_h^n) v_h dx \\ + \frac{\tau}{\omega} \int_{\partial\Omega \setminus \Gamma} q_L v_h ds, \quad \forall v_h \in V_h, \end{aligned} \quad (3.62)$$

et effectuer la correction

$$u_h^{n+1} = u_h^n + \omega (\theta_h^{n+1} - r_h \beta_{\varepsilon}(u_h^n)) \quad \text{dans } \Omega. \quad (3.63)$$

REMARQUE 3.7.

Appliqué à un problème linéaire ($\beta_{\varepsilon}(x) = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ et $\omega = 1$) ce schéma correspond à une discrétisation implicite des termes diffusifs et convectifs. Rappelons brièvement quelques résultats classiques. Si \mathbf{v} satisfait les hypothèses 3.16 alors le schéma est inconditionnellement stable pour la norme L^2 . Si \mathbf{v} est quelconque, il faut utiliser des techniques de décentrage [Bro,Joh2,Pir]).

Soit J le nombre de sommets de la triangulation \mathcal{T}_h , $\{x_j\}_{j=1}^{J_0}$ les sommets de \mathcal{T}_h situés dans Ω et sur $\partial\Omega \setminus \Gamma$, $\{x_j\}_{j=J_0+1}^J$ les sommets de \mathcal{T}_h appartenant à Γ et $\{\varphi_j\}_{j=1}^{J_0}$ la base canonique de V_h . Les matrices de masse M (condensée), de raideur K , de convection C et

le vecteur des conditions aux limites Q sont définies par :

$$\begin{aligned}
 M_{ij} &= \sum_K \int_K r_h(\varphi_i \varphi_j) dx & 1 \leq i, j \leq J_0, \\
 K_{ij} &= \sum_K \int_K \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j dx & 1 \leq i, j \leq J_0, \\
 C_{ij} &= \sum_K \int_K (\mathbf{v} \cdot \nabla \varphi_j) \varphi_i dx & 1 \leq i, j \leq J_0, \\
 Q_i &= \sum_K \int_{\partial K \cap (\partial \Omega \setminus \Gamma)} q_L \varphi_i ds & 1 \leq i \leq J_0.
 \end{aligned} \tag{3.64}$$

Décomposons u_h^n , θ_h^n et $r_h \beta_\varepsilon(u^n)$ dans la base canonique. Puisque les conditions aux limites sur Γ sont homogènes

$$u_h^n = \sum_{j=1}^{J_0} u_j^n \varphi_j, \quad \theta_h^n = \sum_{j=1}^{J_0} \theta_j^n \varphi_j, \quad r_h \beta_\varepsilon(u_h^n) = \sum_{j=1}^{J_0} \beta_\varepsilon(u_j^n) \varphi_j. \tag{3.65}$$

Prenons successivement $v_h = \varphi_i$, $i = 1, J_0$ dans 3.62, le schéma itératif 3.62, 3.63 correspond donc à la résolution du système linéaire

$$\begin{aligned}
 &\sum_{j=1}^{J_0} \left(M_{ij} + \frac{\tau}{\omega} K_{ij} + \tau C_{ij} \right) \theta_j^{n+1} \\
 &= \sum_{j=1}^{J_0} (M_{ij} + \tau C_{ij}) \beta_\varepsilon(u_j^n) - \sum_{j=1}^{J_0} \frac{\tau}{\omega} C_{ij} u_j^n + \frac{\tau}{\omega} Q_i \quad i = 1, J_0,
 \end{aligned} \tag{3.66}$$

et à la correction

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \omega (\theta_i^{n+1} - \beta_\varepsilon(u_i^n)) \quad i = 1, J_0. \tag{3.67}$$

L'avantage de ce schéma est que, une fois la décomposition LU de la matrice $M + \frac{\tau}{\omega} K + \tau C$ effectuée une fois pour toutes, il suffit, à chaque itération de résoudre deux systèmes linéaires triangulaires pour résoudre 3.66.

LEMME 3.11.

Si les données satisfont les hypothèses 3.16 à 3.21 alors, à chaque itération, le système linéaire 3.66 a une seule solution.

Démonstration.

Puisque, pour tout v_h dans V_h

$$\int_{\Omega} (\mathbf{v} \cdot \nabla v_h) v_h dx = 0,$$

nous pouvons écrire l'analogie matriciel

$$(U, CU) = 0, \quad \forall U \in \mathbb{R}^{J_0}.$$

Par conséquent, si U appartient au noyau de $M + \frac{\tau}{\omega}K + \tau C$, les matrices M et K étant symétriques définies positives

$$0 = (U, (M + \frac{\tau}{\omega}K + \tau C)U) = (U, (M + \frac{\tau}{\omega}K)U) \Rightarrow U = 0. \quad \square$$

Pour tout $n \geq 0$, notons U^{n+1} , Θ^{n+1} , U^n et $B(U^n)$ les vecteurs de composantes u_i^{n+1} , θ_i^{n+1} , u_i^n et $\beta_\varepsilon(u_i^{n+1})$, définis dans 3.65 et satisfaisant le schéma 3.66, 3.67. Notons également U , Θ les vecteurs de de composantes u_i , $\beta_\varepsilon(u_i)$ où les u_i sont définis par

$$u_h = \sum_{j=1}^{J_0} u_j \varphi_j,$$

et où u_h est solution du problème 3.4.

PROPOSITION 3.12.

Si les données vérifient les hypothèses 3.16 à 3.21 et si $\mathbf{v} = 0$ alors

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} U^n &= U, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \Theta^n &= \Theta. \end{aligned}$$

Démonstration.

Si $\mathbf{v} = 0$, le schéma 3.66 et 3.67 devient

$$\begin{aligned} \left(M + \frac{\tau}{\omega}K\right) \Theta^{n+1} &= MB(U^n) + \frac{\tau}{\omega}Q, \\ U^{n+1} &= U^n + \omega (\Theta^{n+1} - B(U^n)). \end{aligned}$$

Multiplions la deuxième équation à gauche par $M + \frac{\tau}{\omega}K$ et éliminons Θ^{n+1} :

$$\left(M + \frac{\tau}{\omega}K\right) (U^{n+1} - U^n) = -\tau KB(U^n) + \tau Q. \quad (3.68)$$

Ecrivons 3.68 sous forme de point fixe. Soit l'application $G : \mathbb{R}^{J_0} \rightarrow \mathbb{R}^{J_0}$ définie par

$$G(U)U - \tau \left(M + \frac{\tau}{\omega}K\right)^{-1} (KB(U) - Q) \quad \forall U = (u_1, \dots, u_{J_0})^T \in \mathbb{R}^{J_0}, \quad (3.69)$$

alors 3.68 s'écrit

$$U^{n+1} = G(U^n). \quad (3.70)$$

Il suffit que G soit contractante pour une certaine norme vectorielle $\|\cdot\|$ pour que 3.70 converge. Si G est dérivable, une condition nécessaire et suffisante est que la dérivée $DG : \mathbf{R}^{J_0} \rightarrow \mathcal{L}(\mathbf{R}^{J_0})$ (l'ensemble des applications linéaires continues de \mathbf{R}^{J_0}) définie par

$$DG(U)_{ij} = \frac{\partial G(U)_i}{\partial u_j} \quad 1 \leq i, j \leq J_0,$$

vérifie

$$\|DG(U)\| < 1 \quad (3.71)$$

pour la norme matricielle subordonnée. Si le rayon spectral de $DG(U)$ est plus petit que un, alors il est toujours possible d'exhiber une telle norme. Notre but est donc de montrer que toutes les valeurs propres de $DG(U)$ sont comprises entre 0 et 1. D'après 3.69, $DG(U)$ satisfait

$$\left(M + \frac{\tau}{\omega}K\right) (I - DG(U)) = \tau K DB(U) \quad \forall U \in \mathbf{R}^{J_0}, \quad (3.72)$$

I étant la matrice unitaire et $DB(U) = \text{diag}(\beta'_\varepsilon(u_1), \dots, \beta'_\varepsilon(u_{J_0}))$ la matrice dérivée du vecteur $B(U)$. Pour tout vecteur U de \mathbf{R}^{J_0} , notons X et λ les vecteurs propres et valeurs propres de $DG(U)$. Par définition

$$DG(U)X = \lambda X,$$

ce qui donne, en réinjectant dans 3.72

$$(1 - \lambda) \left(M + \frac{\tau}{\omega}K\right) X = \tau K DB(U) X. \quad (3.73)$$

La matrice M est diagonale et définie positive car

$$M_{ii} = \text{mes}(\text{supp } \varphi_i) > 0 \quad i = 1, J_0,$$

et sa décomposition de Choleski est $M = M^{1/2} M^{1/2}$. L'équation 3.73 peut donc s'écrire :

$$(1 - \lambda) M^{1/2} \left(I + \frac{\tau}{\omega} M^{-1/2} K M^{-1/2}\right) M^{T/2} X = \tau K DB(U) X.$$

Multiplions matriciellement par $M^{-1/2}$ et posons $Y = M^{T/2} X$. Nous avons :

$$(1 - \lambda) \left(I + \frac{\tau}{\omega} M^{-1/2} K M^{-1/2}\right) Y = \tau M^{-1/2} K DB(U) M^{-1/2} Y.$$

Posons $Z = DB(U) Y$. Puisque $DB(U)$ et $M^{-1/2}$ sont diagonales, elles commutent et nous obtenons :

$$(1 - \lambda) \left(I + \frac{\tau}{\omega} M^{-1/2} K M^{-1/2} \right) DB^{-1}(U) Z = \tau M^{-1/2} K M^{-1/2} Z. \quad (3.74)$$

Puisque K est symétrique définie positive, $M^{-1/2} K M^{-1/2}$ l'est aussi. La matrice

$$T = \left(I + \frac{\tau}{\omega} M^{-1/2} K M^{-1/2} \right)^{-1} \frac{\tau}{\omega} M^{-1/2} K M^{-1/2}$$

est donc symétrique définie positive et a toutes ses valeurs propres comprises entre 0 et 1. Ecrivons l'équation 3.74 sous la forme

$$(1 - \lambda) DB^{-1}(U) Z = \omega T Z. \quad (3.75)$$

En multipliant scalairement par Z , nous obtenons immédiatement

$$1 - \lambda > 0.$$

Appliquons la propriété du quotient de Rayleigh. nous avons :

$$(TY, Y) \leq (Y, Y)$$

et

$$\frac{1}{b} (Y, Y) \leq (DB^{-1}(U) Y, Y).$$

En injectant dans l'équation 3.75, nous avons bien

$$1 - \lambda \leq b\omega < 1.$$

PROPOSITION 3.13.

Si les données vérifient les hypothèses 3.16 à 3.21 et si v est suffisamment petit alors

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} U^n &= U, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \Theta^n &= \Theta. \end{aligned}$$

Démonstration.

Elle se fait de façon identique à celle de la proposition précédente en posant $U^{n+1} = G_V(U^n)$ où G_V satisfait

$$\left(M + \frac{\tau}{\omega} K \right) (I - DG_V(U)) = \tau K DB(U) + \tau CDG_V(U) \quad \forall U \in \mathbf{R}^{J_0}, \quad (3.76)$$

et tend, lorsque v tend vers zéro vers l'application G définie dans 3.72. \square

REMARQUE 3.8.

Pour de grandes vitesses v nous avons utilisé un schéma décentré de type Streamline Upwind Petrov-Galerkin (SUPG) [Bro,Joh2,Pir] sur les termes convectifs. Bien que nous n'ayons obtenu aucun résultat de convergence, le schéma s'est toujours révélé dans les cas pratiques inconditionnellement stable.

3.6 Un algorithme de maillage adaptatif.

Dans ce paragraphe nous proposons un algorithme de maillage adaptatif, dans un contexte bidimensionnel, basé sur les estimations a posteriori établies dans le paragraphe 3.4. Nous précisons d'abord le but de l'algorithme et nous exposons ensuite la stratégie employée.

3.6.1. But de l'algorithme de maillage adaptatif.

Le but des algorithmes de maillage adaptatif consiste, en général [Dem,Eri1,Eri2,Joh1] [Ode,Ver], étant donné une tolérance TOL fixée par l'utilisateur, à

construire une triangulation \mathcal{T}_h de Ω de façon à ce que

$$\|u - u_h\| \leq TOL,$$

Grâce aux estimations a posteriori établies au paragraphe précédent, nous savons qu'il suffit de

construire une triangulation \mathcal{T}_h de Ω de façon à ce que

$$\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \eta_K^2 \leq C TOL^2, \quad (3.77)$$

C étant une constante indépendante de h . En pratique, une telle triangulation est construite en cherchant, pour un nombre α tel que $0 < \alpha < 1$, à vérifier la relation :

$$\frac{1-\alpha}{N_e} C TOL^2 \leq \eta_K^2 \leq \frac{1+\alpha}{N_e} C TOL^2 \quad \forall K \in \mathcal{T}_h, \quad (3.78)$$

où N_e est le nombre d'éléments de la triangulation. L'inégalité de droite dans 3.78 a pour but d'assurer la relation 3.77, alors que l'inégalité de gauche a pour but de limiter le nombre d'éléments de la triangulation adaptée. Cet approche souffre, à nos yeux, d'un défaut rédhibitoire : puisque le nombre d'éléments N_e de la triangulation est inconnu, l'utilisateur du code n'a aucune idée de la tolérance TOL qu'il doit spécifier pour rester

dans la limite des ressources informatiques dont il dispose. Nous allons donc modifier 3.78 de façon à imposer le nombre final d'éléments N_e plutôt que TOL . Pour cela, il suffit de remarquer que, puisque l'estimateur $\sum_K \eta_K^2$ doit être proche de $C TOL^2$, nous pouvons réécrire 3.78 sous la forme

$$\frac{1-\alpha}{N_e} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \eta_K^2 \leq \eta_K^2 \leq \frac{1+\alpha}{N_e} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \eta_K^2 \quad \forall K \in \mathcal{T}_h. \quad (3.79)$$

REMARQUE 3.9.

La relation ci-dessus peut s'interpréter comme une méthode permettant d'approcher le problème

construire une triangulation \mathcal{T}_h de Ω à environ N_e éléments de façon à équilibrer l'estimateur local η_K^2 .

Ce problème n'a, a priori, aucun lien avec le problème qu'on peut naturellement se poser

construire une triangulation \mathcal{T}_h de Ω à environ N_e éléments de façon à minimiser l'estimateur $(\sum_K \eta_K^2)^{1/2}$.

Nous proposons dans l'annexe 2 d'étudier ce type de problèmes dans un contexte unidimensionnel. Remarquons qu'il n'existe pour l'instant aucun résultat de convergence d'algorithmes de maillage adaptatif dans un contexte bidimensionnel.

Précisons maintenant l'algorithme que nous utilisons afin de construire une triangulation vérifiant 3.78.

ALGORITHME DE MAILLAGE ADAPTATIF.

- Soit \mathcal{T}_h^1 une triangulation initiale.
- Pour $m = 1, 2, 3, \dots$
 - Calculer u_h^m solution du problème 3.4 sur la triangulation \mathcal{T}_h^m à l'aide du schéma 3.66, 3.67.
 - Pour tout triangle K de \mathcal{T}_h^m
 - Calculer l'estimateur local η_K^m défini en 3.55.
 - Si

$$(\eta_K^m)^2 > \frac{1+\alpha}{N_e} \sum_{K \in \mathcal{T}_h^m} (\eta_K^m)^2$$

alors la nouvelle triangulation \mathcal{T}_h^{m+1} est construite en raffinant l'ancienne triangulation \mathcal{T}_h^m "au voisinage" de K .

- Sinon si

$$(\eta_K^m)^2 < \frac{1-\alpha}{N_e} \sum_{K \in \mathcal{T}_h^m} (\eta_K^m)^2$$

alors la nouvelle triangulation \mathcal{T}_h^{m+1} est construite en déraffinant l'ancienne triangulation \mathcal{T}_h^m "au voisinage" de K .

- Fin de la boucle sur les triangles K de \mathcal{T}_h^m

- Construire la nouvelle triangulation \mathcal{T}_h^{m+1} .

- Si \mathcal{T}_h^{m+1} est suffisamment proche de \mathcal{T}_h^m alors s'arrêter.

- Fin de la boucle des itérations m de l'algorithme.

REMARQUE 3.10.

L'algorithme ci-dessus vise à contrôler la variance de l'estimateur. En effet, supposons que l'algorithme ait convergé, soit

$$\bar{\eta}_K^2 = \frac{1}{N} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \eta_K^2,$$

la moyenne et

$$\text{Var}(\eta_K^2) = \frac{1}{N_e} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} (\eta_K^2 - \bar{\eta}_K^2)^2$$

la variance de l'estimateur au carré. Puisque, par construction de l'algorithme, la relation

$$(1-\alpha)\bar{\eta}_K^2 < \eta_K^2 < (1+\alpha)\bar{\eta}_K^2$$

est vérifiée sur chaque élément, nous avons :

$$0 < \text{Var}(\eta_K^2) < \frac{\alpha}{N_e} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \eta_K^2. \quad (3.80)$$

REMARQUE 3.11.

Déraffiner une triangulation n'est pas une tâche nécessaire dans un contexte stationnaire. En effet, nous pourrions imaginer partir d'une triangulation \mathcal{T}_h^0 suffisamment grossière et uniquement raffiner la triangulation (cf. [Ver]). Par contre, dans un contexte évolutif (c'est, nous l'espérons, la prochaine étape de nos recherches), le déraffinement est indispensable.

3.6.2. Stratégie de construction du maillage.

Dans toute la suite du paragraphe nous décrivons les procédures de raffinement et déraffinement que nous avons utilisées pour construire la nouvelle triangulation T_h^{m+1} à partir de la précédente T_h^m .

Dans bon nombre de travaux [Bab1,Bab2,Benk,Dem,Joh1,Ode,Ver], l'implémentation des méthodes de maillage adaptatif fait appel à des stratégies inspirées des méthodes multigrille (programmation par niveau de raffinement). Ainsi, si la triangulation doit être raffinée au voisinage d'un triangle, celui-ci sera divisé en quatre nouveaux triangles et trois nouvelles arêtes seront générées sur les triangles voisins (cf. figure 3.4). Supprimer un ou plusieurs sommets s'avère dans ce contexte une tâche informatique difficile puisqu'il est nécessaire de mémoriser tous les niveaux de raffinement à partir du maillage initial. De plus, la condition sur les angles (hypothèse 3.30) n'est pas forcément satisfaite. La tendance actuelle [Ain,Geo,Noc1,Noc2,Zie] est d'utiliser des générateurs automatiques de maillage permettant de générer une triangulation à partir d'un nuage de points. Le meilleur que nous utilisons dans la suite repose sur la notion de *triangulation de Delaunay* exposée ci-dessous.

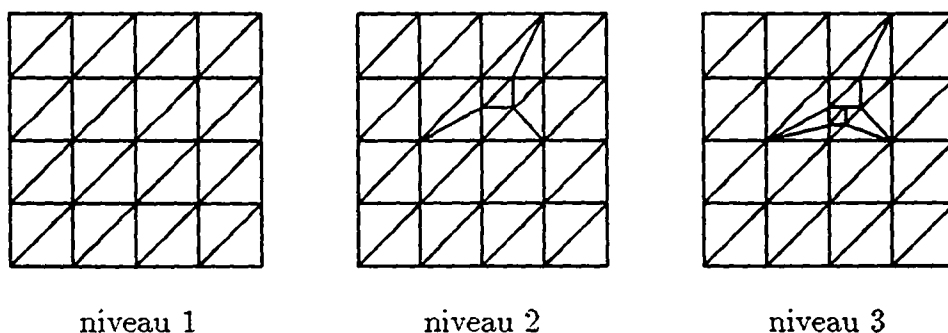


Figure 3.4: exemple de raffinement par niveaux.

DÉFINITION.

Soit Ω un ouvert polygonal convexe de \mathbb{R}^2 . Une triangulation T_h de Ω est de type *Delaunay* si, pour tout triangle K de la triangulation, le cercle circonscrit au triangle ne contient, en son intérieur, aucun autre sommet de la triangulation (cf. figure 3.5).

En vertu des propriétés géométriques du cercle, nous avons immédiatement le

LEMME 3.14.

Si T_h est une triangulation de *Delaunay*, alors pour toute arête intérieure, la somme des

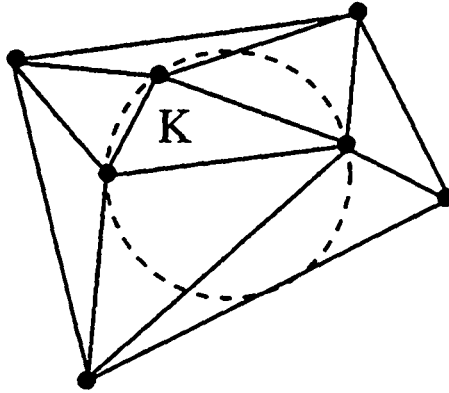


Figure 3.5: exemple de triangulation de Delaunay

angles opposés est inférieure ou égale à π .

Les triangulations de Delaunay ont été exhaustivement étudiées dans des contextes bi et tridimensionnels et il existe des algorithmes efficaces permettant, à partir d'un nuage de points $[P_i]$, de construire une triangulation de Delaunay de l'enveloppe convexe des $[P_i]$ [Geo,Ris,Slo,Wat]. Notons que le cas d'une pièce non-convexe est traité dans [Geo].

L'originalité de notre méthode consiste, à partir du nuage de points de la triangulation \mathcal{T}_h^m , de rajouter ou supprimer des sommets. Ensuite, à partir du nouveau nuage de points ainsi obtenu, nous construisons la triangulation \mathcal{T}_h^{m+1} à l'aide d'un générateur de maillage de type Delaunay.

• La procédure de raffinement consiste, chaque fois qu'un triangle K de la triangulation est trop grand c'est-à-dire lorsque

$$\eta_K^2 > \frac{1 + \alpha}{N_e} \sum_{K \in \mathcal{T}_h^m} \eta_K^2, \quad \forall K \in \mathcal{T}_h^m,$$

à rajouter un sommet dans le triangle K (cf. figure 3.6).

- Si le triangle K est intérieur (i.e. si aucune de ses arêtes ne touche le bord $\partial\Omega$), le sommet est rajouté au barycentre du triangle (cf. figure 3.6a).
- Si le triangle K a une arête commune avec le bord $\partial\Omega$ alors, si l'angle opposé à l'arête du bord est supérieur à $\pi/2$, le sommet est rajouté au centre de l'arête du bord (cf. figure 3.6b), sinon il est rajouté au centre du triangle (cf. figure 3.6c).

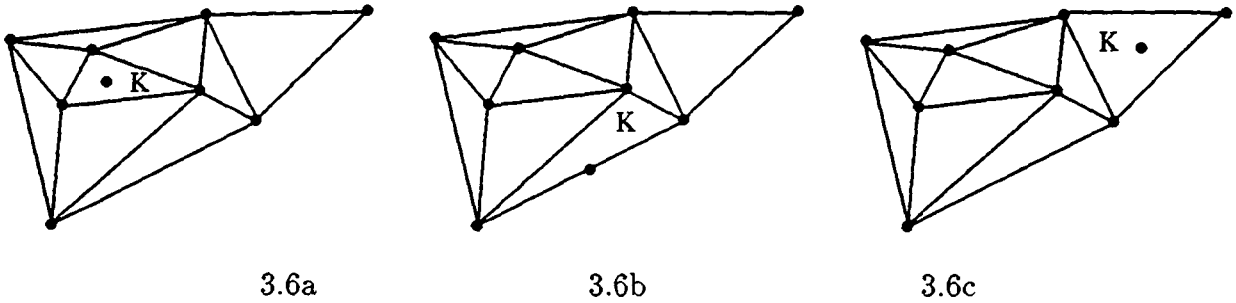


Figure 3.6: Procédure de raffinement d'un triangle intérieur (figure 3.6a), d'un triangle contenant une arête du bord et telle que l'angle opposé soit supérieur à $\pi/2$ (figure 3.6b), ou inférieur à $\pi/2$ (figure 3.6c).

Pour tout sommet P de la triangulation \mathcal{T}_h^m , notons S_P^m l'ensemble des triangles K contenant le sommet P :

$$S_P^m = \bigcup_{K \in \mathcal{T}_h^m; P \in K} K. \quad (3.81)$$

• La procédure de déraffinement consiste à déclarer *supprimables* tous les sommets P (n'étant pas sommets du rectangle Ω) tels que

$$\eta_K^2 < \frac{1 - \alpha}{N_e} \sum_{K \in \mathcal{T}_h^m} \eta_K^2 \quad \forall K \in S_P^m.$$

Ensuite, afin d'éviter de créer des "trous" dans le nouveau nuage de points, nous ajoutons un autre critère de suppression. Lorsque nous parcourons (dans l'ordre de la numérotation) l'ensemble des sommets de la triangulation \mathcal{T}_h^m , un sommet supprimable n'est *supprimé* que si aucun de ses sommets voisins n'a déjà été supprimé.

REMARQUE 3.12.

Nous avons, dans la procédure de raffinement, distingué les arêtes du bord de celle de l'intérieur de Ω car une triangulation de Delaunay n'est pas forcément faiblement aigüe (cf. hypothèse 3.30). En effet, pour une arêtes du bord $\partial\Omega \setminus \Gamma$, l'angle opposé α_K ne satisfait pas automatiquement la condition

$$\alpha_K \leq \pi/2.$$

REMARQUE 3.13.

La procédure de déraffinement est nettement plus complexe à mettre en oeuvre que la

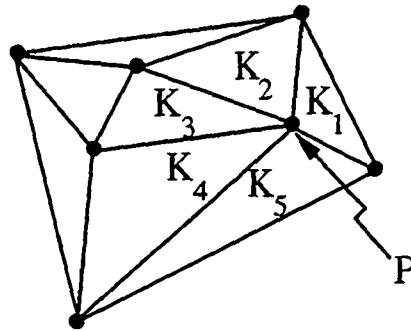


Figure 3.7: Procédure de déraffinement. Le sommet P est supprimable si

$$\eta_{K_i} < \frac{1-\alpha}{N_e} \sum_{K \in \mathcal{T}_h^m} \eta_K^2, \quad i = 1, 5.$$

Le sommet P est supprimé si aucun de ses voisins n'a déjà été supprimé.

procédure de raffinement. Nous avons, avant de retenir cette procédure, implanté plusieurs stratégies envisageables : par exemple, enlever purement et simplement les trois sommets d'un triangle trop grand, ou encore enlever les trois sommets et en rajouter un au centre. La difficulté consistait en fait à trouver deux procédures de raffinement et déraffinement "complémentaires", au sens où il fallait éviter d'ajouter et d'enlever les mêmes sommets lors de la construction de deux triangulations successives. Les résultats numériques du paragraphe 3.7 montrent que notre choix s'est avéré judicieux.

3.6.3. Régularisation du nouveau maillage.

Puisque les générateurs de Delaunay n'assurent aucune condition sur le minimum des angles de la triangulation \mathcal{T}_h^{m+1} , nous devons encore vérifier que la triangulation est régulière (hypothèse 3.25). En général (cf. par exemple [Geo]), les procédures de régularisation implantées dans les mailleurs éléments finis consistent à remplacer chaque sommet de la triangulation par le barycentre des sommets voisins. Ce procédé de régularisation est itératif et la convergence n'est pas assurée. Dans ce sous-paragraphe nous proposons une procédure de régularisation qui peut se formuler sous forme d'un problème de minimisation et nous montrons l'existence d'une solution. Appliquée à tous les sommets de la triangulation, cette procédure de régularisation nécessite la résolution de deux systèmes linéaires d'inconnues les nouvelles coordonnées des sommets de la triangulation. Cette procédure s'énonce :

chaque fois qu'un angle de la triangulation est inférieur à une valeur critique α_0 , nous remplaçons les deux sommets "opposés" par le barycentre de l'ensemble des voisins (cf. figure 3.8).

Insistons sur le fait que ce problème n'est pas trivial. En effet, soit P_i et P_j deux sommets voisins, notons Q_i^k , $k = 1, N_i$ (resp. Q_j^k , $k = 1, N_j$) les voisins de P_i (resp. P_j), autres que P_j (resp. P_i) (cf. figure 3.8). Le barycentre G_i des voisins de P_i vérifie

$$\sum_{k=1}^{N_i} \overrightarrow{G_i Q_i^k} + \overrightarrow{G_i G_j} = 0,$$

de même le barycentre G_j des voisins de P_j vérifie

$$\sum_{k=1}^{N_j} \overrightarrow{G_j Q_j^k} + \overrightarrow{G_j G_i} = 0.$$

Les deux équations ci-dessus sont couplées et nécessitent la résolution de deux systèmes linéaires d'ordre deux. Nous allons maintenant montrer que la procédure de régularisation peut être formulée sous forme d'un problème de minimisation. Considérons d'abord le cas (trivial) où seulement un noeud doit être déplacé au barycentre de ses voisins. Nous avons le

LEMME 3.15.

Soit P un sommet d'une triangulation T_h , S_P l'ensemble des éléments voisins de P défini en 3.81, Q_i , $i = 1, N_P$, les sommets voisins de P . Si S_P est convexe, alors le barycentre des Q_i est situé à l'intérieur de S_P et est l'unique solution du problème de minimisation :

trouver $G \in S_P$ tel que :

$$J(G) = \min_{Q \in S_P} J(Q)$$

où

$$J(Q) = \sum_{i=1}^N \left(|\overrightarrow{Q_i Q_{i+1}}|^2 + |\overrightarrow{Q_{i+1} Q}|^2 + |\overrightarrow{Q Q_i}|^2 \right).$$

Nous aurons donc

$$J'(G) = 0.$$

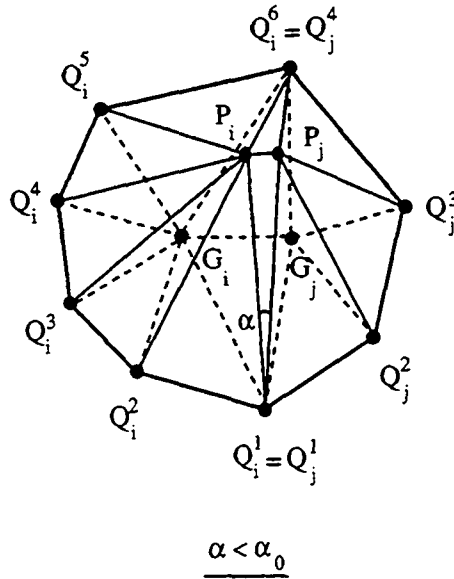


Figure 3.8: Procédure de régularisation. Les deux sommets opposés à un angle trop petit sont déplacés aux sommets barycentres de leurs voisins.

Démonstration.

Puisque la fonctionnelle J est quadratique sur le convexe fermé S_P , le problème de minimisation ci-dessus a une solution unique. Montrons que la solution n'est pas atteinte sur le bord de S_P . Considérons un point Q du bord. La dérivée de J au point Q dans la direction normale intérieure \vec{n} est donnée par

$$4 \sum_{i=1}^N \overrightarrow{QQ_i} \cdot \vec{n},$$

et est négative en vertu de la convexité de S_P . La fonctionnelle J décroît donc dans la direction normale et le minimum n'est donc pas atteint sur le bord. Le point G solution du problème de minimisation est donc tel que $J'(G) = 0$, c'est à dire

$$\sum_{i=1}^N \overrightarrow{GQ_i} = \vec{0},$$

qui est précisément la définition du barycentre des sommets Q_i . \square

Chercher le barycentre des Q_i correspond donc à déterminer les coordonnées du point qui minimise le carré de la somme des arêtes de tous les triangles inclus dans S_P . Nous allons maintenant énoncer la procédure de régularisation appliquée aux N sommets intérieurs

$P_i, i = 1, N$ d'une triangulation \mathcal{T}_h . Il s'agit donc de remplacer les coordonnées des sommets P_i de la triangulation par les coordonnées des sommets $G_i, i = 1, N$, tels que chaque sommet G_i soit le barycentre des barycentres voisins (les sommets situés sur le bord restant fixes). Pour tout triangle K de la triangulation, notons $P_{i,K}, i = 1, 2, 3$, les sommets du triangle, $x_{i,K}, y_{i,K}, i = 1, 2, 3$, leurs coordonnées. Comme dans le cas à un sommet, nous avons la

PROPOSITION 3.16.

La procédure de régularisation appliquées à tous les noeuds intérieurs d'une triangulation \mathcal{T}_h correspond à la résolution du problème de minimisation :

Trouver $(G_1, G_2, \dots, G_N) \in (\bar{\Omega})^N$ tels que

$$J(G_1, G_2, \dots, G_N) = \min_{(P_1, P_2, \dots, P_N) \in (\bar{\Omega})^N} J(P_1, P_2, \dots, P_N), \quad (3.82)$$

avec

$$J(P_1, P_2, \dots, P_N) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{i=1}^3 |\overrightarrow{P_{i+1,K} P_{i,K}}|^2.$$

Démonstration.

La démonstration est la même que dans le cas à un sommet. Le problème de minimisation a une solution unique dans le convexe fermé $(\bar{\Omega})^N$ et puisque le minimum n'est pas atteint sur le bord $\partial(\Omega^N)$, la solution satisfait $J'(G_1, G_2, \dots, G_N) = 0$. Réécrivons la fonctionnelle sous la forme

$$J(P_1, P_2, \dots, P_N) = \sum_{i=1}^N \sum_{P_j \in S_{P_i}} |\overrightarrow{P_i P_j}|^2,$$

alors la solution est telle que

$$\sum_{G_j \in S_{P_i}} \overrightarrow{G_i G_j} = \vec{0}, \quad i = 1, N,$$

ce qui signifie précisément que chaque sommet est barycentre de ses voisins. \square

L'avantage de formuler la procédure de régularisation sous forme d'un problème de minimisation est que le calcul du gradient J' de la fonctionnelle nécessite l'assemblage d'une matrice d'ordre N , dont la structure est celle de la matrice éléments finis. Ce résultat est explicité dans la

PROPOSITION 3.17.

La résolution de l'équation

$$J'(G_1, G_2, \dots, G_N) = 0$$

correspond à la résolution de deux systèmes linéaires d'ordre N , de même matrice et dont les inconnues sont les coordonnées x_i et y_i des nouveaux sommets G_i , $i = 1, N$, de la triangulation. De plus la structure de la matrice est la structure de la matrice éléments finis du problème de Dirichlet dans Ω .

Démonstration.

Soit J_K la fonctionnelle définie sur le triangle K par :

$$J_K(P_{1,K}, P_{2,K}, P_{3,K}) = \sum_{i=1}^3 |\overrightarrow{P_{i+1,K}P_{i,K}}|^2,$$

alors la dérivée vérifie

$$\begin{aligned} \frac{\partial J_K}{\partial x_{i,K}}(P_{1,K}, P_{2,K}, P_{3,K}) &= 2(x_{i,K} - x_{i-1,K}) - 2(x_{i+1,K} - x_{i,K}), & i = 1, 2, 3, \\ \frac{\partial J_K}{\partial y_{i,K}}(P_{1,K}, P_{2,K}, P_{3,K}) &= 2(y_{i,K} - y_{i-1,K}) - 2(y_{i+1,K} - y_{i,K}), & i = 1, 2, 3, \end{aligned}$$

et peut se mettre sous la forme du produit matrice-vecteur

$$\begin{aligned} \frac{\partial J_K}{\partial x_{i,K}}(P_{1,K}, P_{2,K}, P_{3,K}) &= \sum_{j=1}^3 A_{i,j}^K x_{j,K}, & i = 1, 2, 3, \\ \frac{\partial J_K}{\partial y_{i,K}}(P_{1,K}, P_{2,K}, P_{3,K}) &= \sum_{j=1}^3 A_{i,j}^K y_{j,K}, & i = 1, 2, 3, \end{aligned}$$

où la matrice A^K d'ordre 3 est définie par

$$A_{i,i-1}^K = -2 \quad ; \quad A_{i,i}^K = 4 \quad ; \quad A_{i,i+1}^K = -2 \quad , \quad i = 1, 2, 3. \quad (3.83)$$

Le calcul du gradient de la fonctionnelle J correspond donc à l'assemblage de la matrice A^K pour tout triangle $K \in \mathcal{T}_h$. Explicitons la mise en oeuvre du problème de régularisation :

Soit A une matrice d'ordre N , B^x et B^y deux vecteurs de \mathbb{R}^N initialement à zéro.

- pour tout triangle $K \in \mathcal{T}_h^{m+1}$

soit A^K la matrice d'ordre 3 définie en 3.83,
 soit $n(i)$ la numérotation globale d'un sommet intérieur $P_{i,K}$,

- pour tout $i = 1, 2, 3$
 - si $P_{i,K}$ est un sommet intérieur de la triangulation
 - pour tout $j = 1, 2, 3$
 - si $P_{j,K}$ est un sommet intérieur de la triangulation

$$A_{n(i),n(j)} = A_{n(i),n(j)} + A_{i,j}^K,$$
 - sinon

$$B_{n(i)}^x = B_{n(i)}^x + A_{i,j}^K x_{i,K},$$

$$B_{n(i)}^y = B_{n(i)}^y + A_{i,j}^K y_{i,K},$$
 - fin si
 - fin j
 - fin si
- fin i

- fin K

- résoudre les deux systèmes linéaires

$$\sum_{j=1}^N A_{i,j} x_j = B_i^x \quad i = 1, N,$$

$$\sum_{j=1}^N A_{i,j} y_j = B_i^y \quad i = 1, N. \quad \square$$

REMARQUE 3.14.

La décomposition LU de la matrice A n'est effectuée qu'une seule fois pour les deux systèmes linéaires ci-dessus.

REMARQUE 3.15.

Dans la pratique, puisque seuls les sommets "opposés" à un angle petit sont déplacés, le domaine de régularisation n'est pas forcément convexe. De plus, nous n'avons obtenu aucun résultat concernant le non croisement des sommets G_i issus de la régularisation du maillage. Un résultat unidimensionnel est présenté dans l'annexe 2.

REMARQUE 3.16.

La structure d'un programme éléments finis avec adaptation du maillage est plus complexe que celle d'un programme éléments finis standard. Signalons simplement que la structure

de données du programme doit contenir, outre le tableau des coordonnées des sommets et la table de connectivité (i.e. la liste, pour chaque triangle, de ses sommets), la notion de voisinage. Plus précisément notre programme contient l'information nécessaire pour retrouver, pour chaque élément, les éléments voisins (nécessaire au calcul du saut du gradient sur les arêtes) ainsi que, pour chaque sommet, les sommets voisins (nécessaire à la procédure de déraffinement).

3.7 Résultats numériques.

Nous présentons dans ce paragraphe des résultats numériques montrant l'efficacité de l'algorithme de maillage adaptatif du paragraphe 3.6. Dans un premier temps, nous considérons le problème de Stefan stationnaire

$$-\Delta\beta(u) + \mathbf{v} \cdot \nabla u = 0,$$

muni de conditions aux limites telles que nous puissions en calculer une solution exacte. Nous appliquons ensuite l'algorithme au problème modèle de refusion que nous avons étudié dans ce chapitre.

3.7.1 Un problème de solidification avec solution exacte.

Soit un matériau homogène de déplacement à vitesse constante $\mathbf{v} = (v, 0)^T$ par rapport à un repère Oxy . Notons Ω un domaine rectangulaire de \mathbb{R}^2 , fixe par rapport au repère Oxy et contenant une partie du matériau. La conductivité thermique du matériau est supposée constante par phase

$$\begin{aligned} k(x) &= k_s & \text{si } x < T_{s\ell}, \\ k(x) &= k_\ell & \text{si } T_{s\ell} \leq x, \end{aligned}$$

où s et ℓ désignent les indices des phases solide et liquide respectivement. Nous allons considérer les deux cas où la chaleur spécifique est, soit constante par phase

$$\begin{aligned} \rho c_p(x) &= \rho_s c_{p_s} & \text{si } x < T_{s\ell}, \\ \rho c_p(x) &= \rho_\ell c_{p_\ell} & \text{si } T_{s\ell} \leq x, \end{aligned}$$

soit, pour tout $\varepsilon > 0$ et pour

$$T_{s\ell}^\varepsilon = T_{s\ell} - \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon c_{p_s}} \ell_{s\ell} \quad (3.84)$$

donnée par

$$\begin{aligned} \rho c_p(x) &= \rho_s c_{p_s} & \text{si } x < T_{s\ell}^\varepsilon, \\ \rho c_p(x) &= \frac{\rho_s c_{p_s}}{\varepsilon} & \text{si } T_{s\ell}^\varepsilon \leq x < T_{s\ell}, \\ \rho c_p(x) &= \rho_\ell c_{p_\ell} & \text{si } T_{s\ell} \leq x. \end{aligned}$$

Notons T et u (resp. T_ε et u_ε) : $\Omega \rightarrow \mathbf{R}$ la température et l'enthalpie correspondant au premier (resp. deuxième) cas. L'enthalpie u est discontinue et définie par

$$\begin{aligned} u &= \rho_s c_{p_s} (T - T_{sl}) && \text{si } T < T_{sl}, \\ u &= \rho_\ell c_{p_\ell} (T - T_{sl}) + \rho_s l_{sl} && \text{si } T_{sl} \leq T, \end{aligned}$$

tandis que l'enthalpie u_ε est continue et définie par

$$\begin{aligned} u_\varepsilon &= \rho_s c_{p_s} (T_\varepsilon - T_{sl}) && \text{si } T_\varepsilon < T_{sl}^\varepsilon, \\ u_\varepsilon &= \frac{\rho_s c_{p_s}}{\varepsilon} (T_\varepsilon - T_{sl}) + \rho_s l_{sl} && \text{si } T_{sl}^\varepsilon \leq T_\varepsilon < T_{sl}, \\ &= \rho_\ell c_{p_\ell} (T - T_{sl}) + \rho_s l_{sl} && \text{si } T_{sl} \leq T_\varepsilon. \end{aligned}$$

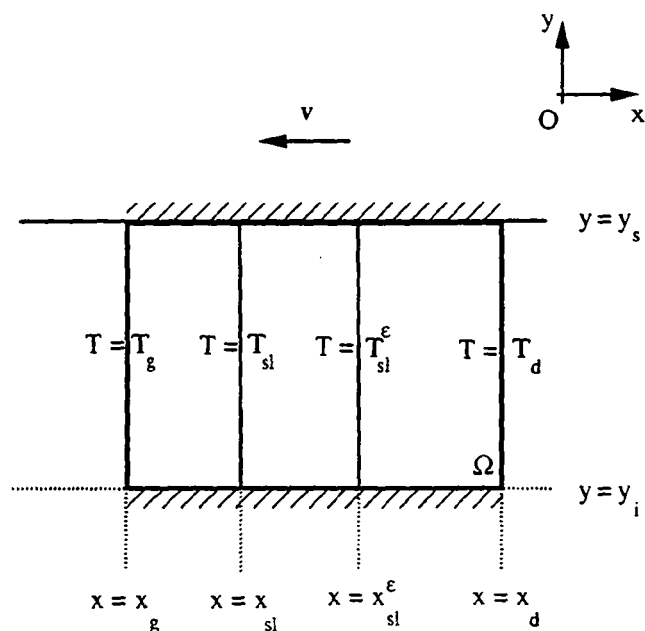


Figure 3.9: Le problème avec solution exacte.

Dans les deux cas, nous imposons sur la face latérale gauche $x = x_g$ (resp. latérale droite $x = x_d$) du rectangle Ω une température constante $T_g > T_{sl}$ (resp. $T_d < T_{sl}^\varepsilon$) et nous interdisons toute perte de chaleur par les faces latérales inférieures $y = y_i$ et supérieures $y = y_s$ (cf. figure 3.9). Les températures T et T_ε ne dépendent donc que de la variable d'espace x et les deux problèmes de solidification stationnaires s'énoncent :

Trouver $T :]x_g; x_d[\rightarrow \mathbb{R}$, $x_{s\ell} \in]x_g; x_d[$ tels que :

$$-k_s T''(x) + \rho_s c_{p_s} v T'(x) = 0, \quad \text{sur }]x_g; x_{s\ell}[, \quad (3.85)$$

$$-k_\ell T''(x) + \rho_\ell c_{p_\ell} v T'(x) = 0, \quad \text{sur }]x_{s\ell}; x_d[, \quad (3.86)$$

$$T(x) = T_g \quad x = x_g, \quad (3.87)$$

$$T(x) = T_d \quad x = x_d, \quad (3.88)$$

$$T(x) = T_{s\ell} \quad x = x_{s\ell}, \quad (3.89)$$

$$k_s T'(x-0) - k_\ell T'(x+0) = \rho_s \ell_{s\ell} v \quad x = x_{s\ell}. \quad (3.90)$$

Trouver $T_\varepsilon :]x_g; x_d[\rightarrow \mathbb{R}$, $x_{s\ell} \in]x_g; x_d[$, $x_{s\ell}^\varepsilon \in]x_g; x_d[$ tels que :

$$-k_s T_\varepsilon''(x) + \rho_s c_{p_s} v T_\varepsilon'(x) = 0, \quad \text{sur }]x_g; x_{s\ell}[, \quad (3.91)$$

$$-k_s T_\varepsilon''(x) + \frac{\rho_s c_{p_s}}{\varepsilon} v T_\varepsilon'(x) = 0, \quad \text{sur }]x_{s\ell}; x_{s\ell}^\varepsilon[, \quad (3.92)$$

$$-k_\ell T_\varepsilon''(x) + \rho_\ell c_{p_\ell} v T_\varepsilon'(x) = 0, \quad \text{sur }]x_{s\ell}^\varepsilon; x_d[, \quad (3.93)$$

$$T_\varepsilon(x) = T_g \quad x = x_g, \quad (3.94)$$

$$T_\varepsilon(x) = T_{s\ell} \quad x = x_{s\ell}, \quad (3.95)$$

$$T_\varepsilon(x) = T_{s\ell}^\varepsilon \quad x = x_{s\ell}^\varepsilon, \quad (3.96)$$

$$T_\varepsilon(x) = T_d \quad x = x_d, \quad (3.97)$$

$$T_\varepsilon'(x-0) - T_\varepsilon'(x+0) = 0 \quad x = x_{s\ell}^\varepsilon. \quad (3.98)$$

$$k_s T_\varepsilon'(x-0) - k_\ell T_\varepsilon'(x+0) = 0 \quad x = x_{s\ell}. \quad (3.99)$$

D'autre part, comme expliqué dans le paragraphe 3.2, les deux problèmes ci-dessus peuvent se formuler sous forme "enthalpique".

Trouver $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tel que :

$$-\Delta \beta(u) + \mathbf{v} \cdot \nabla u = 0 \quad \text{dans } \Omega, \quad (3.100)$$

$$u = \rho_\ell c_{p_\ell} (T_g - T_{s\ell}) \quad \text{sur } x = x_g, \quad (3.101)$$

$$u = \rho_s c_{p_s} (T_d - T_{s\ell}) \quad \text{sur } x = x_d, \quad (3.102)$$

$$\frac{\partial \beta(u)}{\partial n} = 0 \quad \text{sur } y = y_i \text{ et } y = y_s, \quad (3.103)$$

où la fonction β est définie par 3.15.

Trouver $u_\varepsilon : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ tel que :

$$-\Delta\beta_\varepsilon(u_\varepsilon) + \mathbf{v} \cdot \nabla u_\varepsilon = 0 \quad \text{dans } \Omega, \quad (3.104)$$

$$u_\varepsilon = \rho_\ell c_{p_\ell} (T_g - T_{s\ell}) \quad \text{sur } x = x_g, \quad (3.105)$$

$$u_\varepsilon = \rho_s c_{p_s} (T_d - T_{s\ell}) \quad \text{sur } x = x_d, \quad (3.106)$$

$$\frac{\partial\beta_\varepsilon(u_\varepsilon)}{\partial n} = 0 \quad \text{sur } y = y_i \text{ et } y = y_s, \quad (3.107)$$

où la fonction β_ε est définie par :

$$\begin{aligned} \beta_\varepsilon(x) &= \frac{k_s}{\rho_s c_{p_s}} x & x < -\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \rho_s \ell_{s\ell}, \\ \beta_\varepsilon(x) &= \varepsilon \frac{k_s}{\rho_s c_{p_s}} (x - \rho_s \ell_{s\ell}) + k_s T_f & -\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \rho_s \ell_{s\ell} \leq x \leq \rho_s \ell_{s\ell}, \\ \beta_\varepsilon(x) &= k_s T_{s\ell} + \frac{k_\ell}{\rho_\ell c_{p_\ell}} (x - T_{s\ell}) & \rho_s \ell_{s\ell} < x. \end{aligned} \quad (3.108)$$

Nous avons donc comparé les solutions exactes des équations différentielles 3.85 à 3.90 (resp. 3.91 à 3.99) avec la solution numérique des équations aux dérivées partielles 3.100 à 3.103 (resp. 3.104 à 3.107), calculée avec le schéma exposé dans le paragraphe 3.5 et sur les triangulations obtenues avec l'algorithme de maillage adaptatif du paragraphe 3.6.

Les deux systèmes 3.85 à 3.90 et 3.91 à 3.99 sont résolus en intégrant les équations différentielles par intervalles. Nous obtenons après calcul

$$T(x) = A_s \left(\exp\left(\frac{\rho_s c_{p_s} v}{k_s} (x - x_g)\right) - 1 \right) + T_g \quad x_g \leq x < x_{s\ell},$$

$$T(x) = A_\ell \left(\exp\left(\frac{\rho_\ell c_{p_\ell} v}{k_\ell} (x - x_d)\right) - 1 \right) + T_d \quad x_{s\ell} \leq x \leq x_d,$$

où A_s , A_ℓ et $x_{s\ell}$ satisfont le système non-linéaire

$$T_{s\ell} = A_s \left(\exp\left(\frac{\rho_s c_{p_s} v}{k_s} (x_{s\ell} - x_g)\right) - 1 \right) + T_g,$$

$$T_{s\ell} = A_\ell \left(\exp\left(\frac{\rho_\ell c_{p_\ell} v}{k_\ell} (x_{s\ell} - x_d)\right) - 1 \right) + T_d,$$

$$\rho_\ell \ell_{s\ell} v = \rho_\ell c_{p_\ell} A_\ell \exp\left(\frac{\rho_\ell c_{p_\ell} v}{k_\ell} (x_{s\ell} - x_g)\right) - \rho_s c_{p_s} A_s \exp\left(\frac{\rho_s c_{p_s} v}{k_\ell} (x_{s\ell} - x_d)\right).$$

Pour $\varepsilon > 0$, nous avons :

$$\begin{aligned} T_\varepsilon(x) &= A_s^\varepsilon \left(\exp\left(\frac{\rho_s c_{p_s} v}{k_s} (x - x_g)\right) - 1 \right) + T_g & x_g \leq x < x_{s\ell}, \\ T_\varepsilon(x) &= A_{s\ell}^\varepsilon \left(\exp\left(\frac{\rho_s c_{p_s} v}{\varepsilon k_s} (x - x_{s\ell})\right) - 1 \right) + T_{s\ell} & x_{s\ell} \leq x < x_{s\ell}^\varepsilon, \\ T_\varepsilon(x) &= A_\ell^\varepsilon \left(\exp\left(\frac{\rho_\ell c_{p_\ell} v}{k_\ell} (x - x_d)\right) - 1 \right) + T_d & x_{s\ell}^\varepsilon \leq x \leq x_d, \end{aligned}$$

où A_s^ε , $A_{s\ell}^\varepsilon$, A_ℓ^ε , $x_{s\ell}$ et $x_{s\ell}^\varepsilon$ satisfont le système non-linéaire

$$\begin{aligned} T_{s\ell} &= A_s^\varepsilon \left(\exp\left(\frac{\rho_s c_{p_s} v}{k_s} (x_{s\ell} - x_g)\right) - 1 \right) + T_g, \\ T_{s\ell}^\varepsilon &= A_{s\ell}^\varepsilon \left(\exp\left(\frac{\rho_s c_{p_s} v}{k_s} (x_{s\ell}^\varepsilon - x_{s\ell})\right) - 1 \right) + T_{s\ell}, \\ T_{s\ell}^\varepsilon &= A_\ell^\varepsilon \left(\exp\left(\frac{\rho_\ell c_{p_\ell} v}{k_\ell} (x_{s\ell}^\varepsilon - x_d)\right) - 1 \right) + T_d, \\ 0 &= \frac{A_{s\ell}^\varepsilon}{\varepsilon} \exp\left(\frac{\rho_s c_{p_s} v}{\varepsilon k_s} (x_{s\ell}^\varepsilon - x_{s\ell})\right) - A_s^\varepsilon \exp\left(\frac{\rho_s c_{p_s} v}{k_s} (x_{s\ell}^\varepsilon - x_d)\right), \\ 0 &= \rho_\ell c_{p_\ell} A_\ell^\varepsilon \exp\left(\frac{\rho_\ell c_{p_\ell} v}{k_\ell} (x_{s\ell} - x_g)\right) - \frac{\rho_s c_{p_s}}{\varepsilon} A_{s\ell}^\varepsilon. \end{aligned}$$

Les valeurs des paramètres physiques que nous avons utilisés sont décrits dans le tableau 3.1. Nous avons fait varier le paramètre ε de 0. à 0.3 et les constantes A_s , A_ℓ , A_s^ε , $A_{s\ell}^\varepsilon$, A_ℓ^ε , $x_{s\ell}$ et $x_{s\ell}^\varepsilon$ correspondantes sont indiquées dans le tableau 3.2 et ont été calculées par une routine de la bibliothèque numérique NAG*.

L'angle inférieur α_0 , en dessous duquel les sommets opposés sont régularisés (cf. paragraphe 3.6.3.) est de 10 degrés. Le critère d'arrêt pour l'algorithme d'adaptation de maillage adaptatif est

$$\frac{N_{raj}^m + N_{sup}^m}{N_{nd}^m} \leq 10^{-2}, \quad (3.109)$$

où N_{nd}^m est le nombre de sommets, N_{raj}^m le nombre de sommets rajoutés et N_{sup}^m le nombre de sommets supprimés lors de la construction de la m-ième triangulation T_h^m . Le critère d'arrêt pour le problème de changement de phase est

$$\frac{\|\Theta^{n+1} - \Theta^n\|_2}{\|\Theta^{n+1}\|_2} \leq 10^{-6},$$

*Numerical Algorithms Group

chaleur spécifique volumique du solide	$\rho_s c_{p_s}$	$3 \cdot 10^6$	$J/m^3 \text{ } ^\circ C$
chaleur spécifique volumique du liquide	$\rho_l c_{p_l}$	$3 \cdot 10^6$	$J/m^3 \text{ } ^\circ C$
conductivité thermique du solide	k_s	5.	$W/m \text{ } ^\circ C$
conductivité thermique du liquide	k_l	20.	$W/m \text{ } ^\circ C$
chaleur latente volumique	$\rho_l \ell_{sl}$	$2.5 \cdot 10^9$	J/m^3
température de fusion	T_{sl}	1300.	$^\circ C$
vitesse de déplacement de la pièce	v	$3 \cdot 10^{-4}$	m/s
température sur la face latérale gauche	T_g	2500.	$^\circ C$
température sur la face latérale droite	T_d	100.	$^\circ C$
abscisse de la face latérale gauche	x_g	-0.02	m
abscisse de la face latérale droite	x_d	0.01	m
ordonnée de la face inférieure	y_i	-0.01	m
ordonnée de la face supérieure	y_s	0.	m

Tableau 3.1 : valeurs des paramètres physiques utilisés lors de la simulation.

	$\varepsilon = 0.$	$\varepsilon = 0.05$	$\varepsilon = 0.1$	$\varepsilon = 0.2$	$\varepsilon = 0.3$
A_s^ε	34.78	34.48	34.13	33.25	31.95
A_{sl}^ε		103.4	206.7	413.3	619.6
A_l^ε	3268.	3268.	3267.	3267.	3265
x_{sl}	-0.009832	-0.009830	-0.009829	-0.009826	-0.009820
x_{sl}^ε		-0.009677	-0.009499	-0.009046	-0.008389

Tableau 3.2 : valeurs des constantes A_s , A_l , A_s^ε , A_{sl}^ε , A_l^ε , x_{sl} et x_{sl}^ε .

où Θ^n est le vecteur solution du système linéaire 3.66 à l'itération n et où $\|\cdot\|_2$ désigne la norme euclidienne. Dans la suite du paragraphe nous notons $\|\theta - \theta_h\|_h = \|\pi_h(\theta - \theta_h)\|_{L^2(\Omega)}$ la norme L^2 discrète de l'erreur, N_{it} le nombre d'itérations de l'algorithme de maillage adaptatif (i.e. le nombre de triangulations générées avant que le critère 3.109 soit satisfait), N_{stef} le nombre d'itérations du schéma permettant de résoudre le problème de Stefan stationnaire, N_{fin} le nombre d'éléments de la triangulation finale, CPU le temps CPU en secondes sur une station de travail Silicon Graphics Personal Iris 4D/35 et nous rappelons que $Var(\eta_K^2)$ désigne la variance de l'estimateur.

Les résultats pour des triangulations quasi-uniformes sont consignés dans les tableaux 3.3, 3.4 et 3.5 pour $\varepsilon = 0.3$, $\varepsilon = 0.1$ et $\varepsilon = 0$. Conformément aux résultats du paragraphe 3.3, la convergence est d'ordre deux en h pour $\varepsilon \neq 0$. Conformément à des résultats obtenus sur le problème de Stefan [Mag,Noc3,Pao], la convergence est d'un ordre inférieur à deux lorsque $\varepsilon = 0$.

Les figures 3.10 et 3.11 représentent, pour $\varepsilon = 0.3$, les enthalpies exactes et calculées sur le bord supérieur d'une triangulation quasi-uniforme.

Nous allons dans la suite étudier l'influence des paramètres :

N_e : nombre d'éléments souhaités,

α : coefficient d'équidistribution (cf. eq. 3.79),

ε : coefficient de régularisation de la fonction β_ε (qui caractérise physiquement l'intervalle de solidification),

sur les triangulations obtenues avec l'algorithme de maillage adaptatif (la triangulation initiale est toujours une discrétisation quasi-uniforme 30×10 de Ω). Nous avons d'abord appliqué l'algorithme de maillage adaptatif pour $N_e = 1000$, $\varepsilon = 0.3$ et $\alpha = 0.6$. Les figures 3.12 représentent les différentes triangulations obtenues lors des itérations.

Le tableau 3.6 donne des indications sur les triangulations obtenues en faisant varier le nombre d'éléments souhaité N_e et en gardant fixés ε et α . Remarquons d'abord que le nombre d'itérations de l'algorithme semble indépendant de N_e bien que le procédé de raffinement soit dichotomique. D'autre part le nombre d'éléments de la triangulation finale N_{fin} est toujours supérieur au nombre d'éléments souhaité N_e . Ce décalage provient du fait que les conditions nécessaires à la suppression d'un sommet sont plus sévères que les conditions nécessaires au rajout d'un sommet (cf. paragraphe 3.6.2). Notons que nous pouvons vérifier la relation 3.80 reliant la variance à l'estimateur en comparant les

Nombre de subdivisions	Nombre d'éléments	$\ \theta - \theta_h\ _h$	$\left(\sum_K \eta_K^2\right)^{1/2}$	N_{stef}	CPU
15 × 5	150	15. 10 ⁻²	7000.	87	5.3
30 × 10	600	3.6 10 ⁻²	3700.	93	22.
60 × 20	2400	1.0 10 ⁻²	2000.	90	87.
90 × 30	5400	0.56 10 ⁻²	1400.	90	231
120 × 40	9600	0.32 10 ⁻²	1000.	89	374.

Tableau 3.3 : convergence pour $\varepsilon = 0.3$.

Nombre de subdivisions	Nombre d'éléments	$\ \theta - \theta_h\ _h$	$\left(\sum_K \eta_K^2\right)^{1/2}$	N_{stef}	CPU
15 × 5	150	28. 10 ⁻²	6900.	160	9.5
30 × 10	600	7.5 10 ⁻²	4100.	126	25.
60 × 20	2400	1.9 10 ⁻²	2400.	174	161.
90 × 30	5400	1.4 10 ⁻²	1700.	174	436.
120 × 40	9600	0.57 10 ⁻²	1400.	177	720.

Tableau 3.4 : convergence pour $\varepsilon = 0.1$.

Nombre de subdivisions	Nombre d'éléments	$\ \theta - \theta_h\ _h$	$\left(\sum_K \eta_K^2\right)^{1/2}$	N_{stef}	CPU
15 × 5	150	20. 10 ⁻²	6700.	337	20.
30 × 10	600	18. 10 ⁻²	4100.	72	16.
60 × 20	2400	5.1 10 ⁻²	2500.	142	134.
120 × 40	9600	2.5 10 ⁻²	1500.	314	1262.

Tableau 3.5 : convergence pour $\varepsilon = 0$.

sixièmes et septièmes colonnes du tableau 3.6. La répartition du temps CPU par tâche est

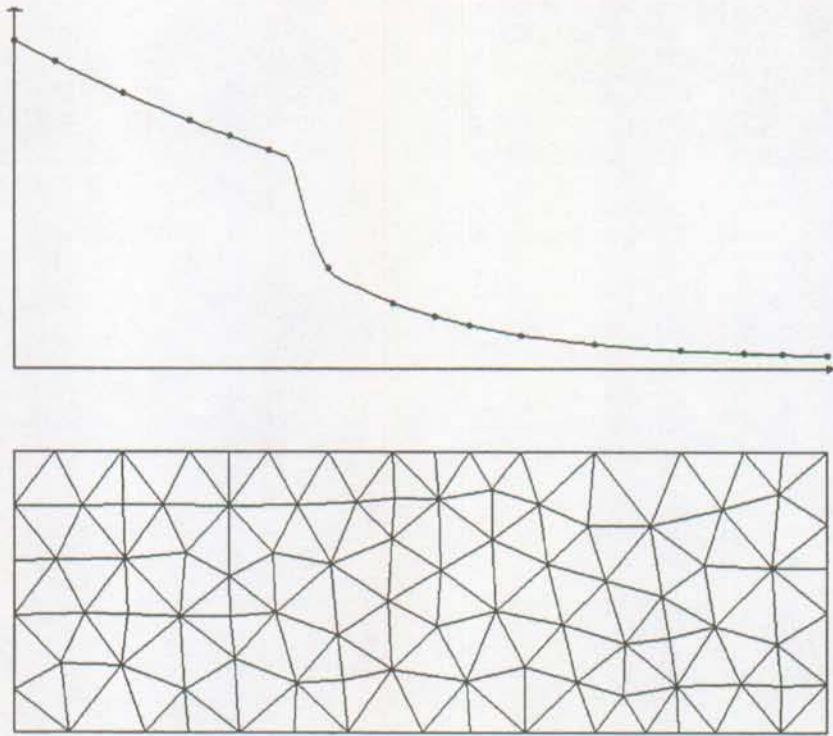


Figure 3.10: enthalpies exacte (trait continu) et calculée (points) sur le bord supérieur d'une triangulation quasi-uniforme 15×5 .

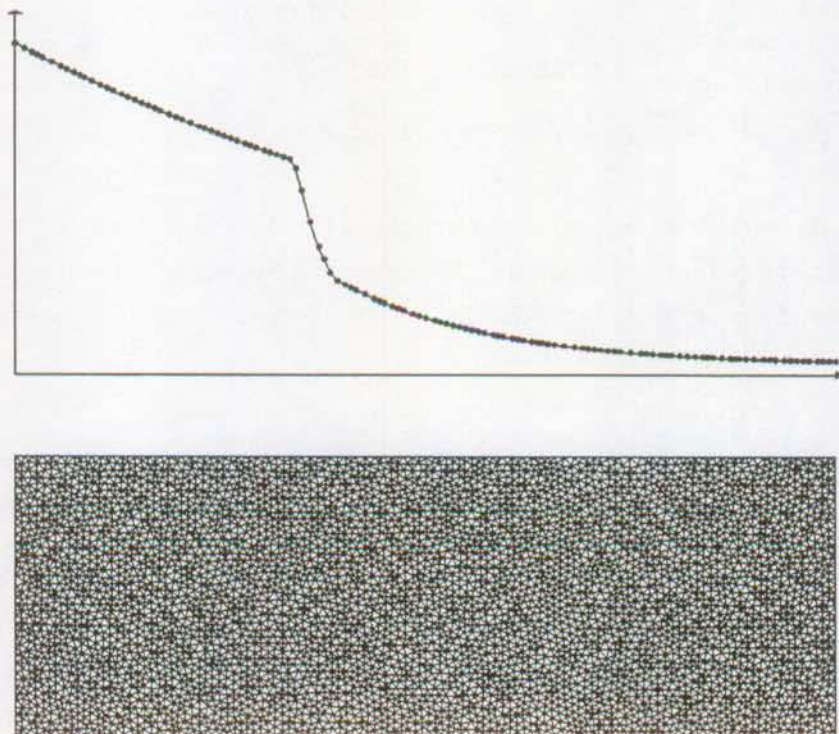


Figure 3.11: enthalpies exacte (trait continu) et calculée (points) sur le bord supérieur d'une triangulation quasi-uniforme 120×40 .

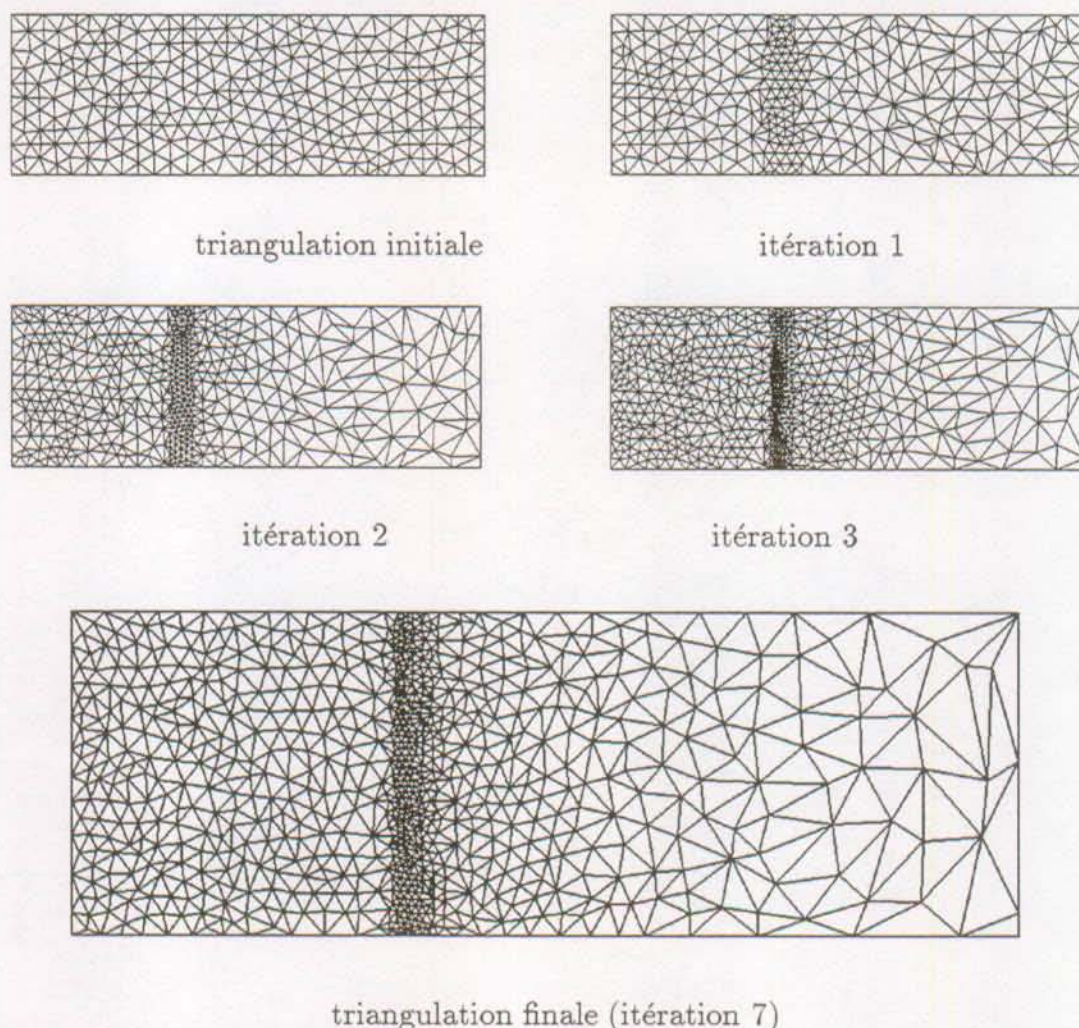


Figure 3.12: les triangulations obtenues à chaque itération ($N_e = 1000$, $\varepsilon = 0.3$, $\alpha = 0.6$).

présentée dans le tableau 3.7 pour trois valeurs de N_e différentes. Le nombre d'itérations N_{stef} nécessaires à la résolution du problème de Stefan sur chaque triangulation ainsi que le nombre d'éléments obtenus à chaque itération de l'algorithme sont résumés dans le tableau 3.8

L'efficacité de la méthode est résumée dans les tableaux 3.9, 3.10 et 3.11. Nous avons, dans les tableaux 3.9 et 3.10, pour un même temps CPU, relevé les erreurs obtenues sur une triangulation quasi-uniforme et une triangulation adaptée. Les résultats montrent clairement que l'erreur est environ deux fois plus petite pour une triangulation adaptée et pour $\varepsilon = 0.3$ et jusqu'à cinq fois plus petite pour $\varepsilon = 0.1$. Le tableau 3.11 retrace le temps CPU nécessaire pour obtenir une même erreur, pour les triangulations quasi-uniformes et adaptées et pour $\varepsilon = 0.3$. Les résultats montrent que plus ε est petit (i.e. plus le problème est non-linéaire), plus l'adaptation de maillage est intéressante.

Les figures 3.13 et 3.14 représentent les triangulations obtenues pour $N_e = 500$ et $N_e = 4000$ ainsi que les enthalpies exactes et calculées sur le bord supérieur du domaine Ω .

N_e	N_{it}	N_{fin}	$\ \theta - \theta_h\ _h$	$\left(\sum_K \eta_K^2\right)^{1/2}$	$(Var(\eta_K^2))^{1/2}$	$\frac{\alpha}{N_e} \sum_K \eta_K^2$	CPU
500	7	733	$14 \cdot 10^{-3}$	2100.	3100	11000	84
1000	8	1545	$9.0 \cdot 10^{-3}$	1500.	1400	2500	115
1500	8	2167	$6.0 \cdot 10^{-3}$	1400.	330	590	135
2000	7	2836	$4.9 \cdot 10^{-3}$	1000.	200	330	160
2500	8	3682	$2.6 \cdot 10^{-3}$	940.	120	210	203
3000	9	4515	$2.0 \cdot 10^{-3}$	850.	81	140	245
3500	8	5103	$1.9 \cdot 10^{-3}$	790.	60	110	255
4000	8	5679	$1.8 \cdot 10^{-3}$	750.	47	84	277
5000	10	7204	$1.7 \cdot 10^{-3}$	680.	32	56	340
6000	10	8979	$1.3 \cdot 10^{-3}$	600.	21	38	380

Tableau 3.6 : convergence de l'algorithme en fonction du nombre d'éléments souhaité N_e ($\varepsilon = 0.3$, $\alpha = 0.6$).

Considérons maintenant l'influence du paramètre d'équidistribution α pour $N_e = 1000$ et $\varepsilon = 0.3$. Plus α est proche de un, moins l'estimateur est équidistribué, plus l'algorithme converge rapidement et plus la triangulation est proche d'une triangulation quasi-uniforme. Par contre, plus α est proche de zéro, plus l'estimateur sera équidistribué et plus lente sera la convergence de l'algorithme. En pratique, il existe une valeur critique de α en dessous de laquelle l'algorithme ne converge plus. Nous avons tracé sur la figure 3.16 l'évolution du nombre de sommets rajoutés N_{raj} et du nombre de noeuds supprimés N_{sup} au cours des itérations pour différentes valeurs de α . Lorsque α est inférieur à 0.5, l'algorithme ne converge plus et nous observons que N_{raj} et N_{sup} sont sensiblement égaux, ce qui se traduit par le fait que, d'une itération à l'autre, les mêmes sommets sont supprimés puis rajoutés. Nous avons donc superposé, au critère d'arrêt 3.109, un critère supplémentaire,

N_e	CPU_{stef}	CPU_{sd}	CPU_{del}	CPU_η	CPU_{reg}	CPU_{num}	CPU
1000	106.	2.0	3.1	1.6	0.2	2.7	115.
2000	151.	2.6	5.3	2.5	0.2	4.7	166.5
4000	250.	3.8	9.5	4.4	0.4	8.5	277.0

Tableau 3.7 : temps CPU par tâche lors de l'adaptation de maillage pour $N_e = 1000$, $\alpha = 0.6$ et $\varepsilon = 0.3$.

CPU_{stef} : calcul de u_h et θ_h ,

CPU_{sd} : calcul de la structure de donnée (arêtes et voisins),

CPU_{del} : génération de la triangulation de Delaunay,

CPU_η : calcul des estimateurs η_K ,

CPU_{reg} : procédure de régularisation,

CPU_{num} : renumérotation des sommets,

CPU : temps total (7 itérations).

itération	1	2	3	4	5	6	7	8
N_{stef}	93	55	43	29	25	23	5	2
nombre d'éléments	612	919	1325	1479	1527	1540	1544	1545

$N_e = 1000$

itération	1	2	3	4	5	6	7	8
N_{stef}	93	53	43	34	21	10	4	4
nombre d'éléments	1034	1585	2975	4606	5524	5705	5691	5679

$N_e = 4000$

Tableau 3.8 : nombre d'itérations pour le problème de Stefan et nombre d'éléments à chaque itération de l'algorithme $N_e = 1000, 4000$, $\alpha = 0.6$ et $\varepsilon = 0.3$.

<i>CPU</i>	e_{qu}	e_{ad}	N_{qu}	N_{ad}
231 – 245	$5.6 \cdot 10^{-3}$	$2.0 \cdot 10^{-3}$	5400	4515
377 – 380	$3.2 \cdot 10^{-3}$	$1.7 \cdot 10^{-3}$	9600	8979

Tableau 3.9 : comparaison de l'erreur à temps CPU constant ($\varepsilon = 0.3$, $\alpha = 0.6$).

<i>CPU</i>	e_{qu}	e_{ad}	N_{qu}	N_{ad}
410 – 436	$14.3 \cdot 10^{-3}$	$2.1 \cdot 10^{-3}$	5400	4504
689 – 720	$5.7 \cdot 10^{-3}$	$1.2 \cdot 10^{-3}$	9600	8822

Tableau 3.10 : comparaison de l'erreur à temps CPU constant ($\varepsilon = 0.1$, $\alpha = 0.6$).

$\ \theta - \theta_h\ _h$	<i>CPU</i> _{qu}	<i>CPU</i> _{ad}	N_{qu}	N_{ad}
$1.0 - 0.9 \cdot 10^{-3}$	87	115	2400	1548
$0.56 - 0.60 \cdot 10^{-3}$	230	135	5400	2167
$0.32 - 0.26 \cdot 10^{-3}$	374	203	9600	3682

Tableau 3.11 : comparaison du temps CPU à erreur constante ($\varepsilon = 0.3$, $\alpha = 0.6$).

e_{qu} : $\|\theta - \theta_h\|_h$ pour une triangulation quasi-uniforme,

e_{ad} : $\|\theta - \theta_h\|_h$ pour une triangulation adaptée,

N_{qu} : nombre d'éléments pour une triangulation quasi-uniforme,

N_{ad} : nombre d'éléments pour une triangulation adaptée,

*CPU*_{qu} : temps CPU pour une triangulation quasi-uniforme

*CPU*_{ad} : temps CPU pour une triangulation adaptée.

à savoir lorsque

$$\frac{|N_{raj}^m - N_{sup}^m|}{N_{nd}^m} \leq 10^{-2},$$

nous cessons de supprimer les sommets. Dans ces conditions l'algorithme converge mais, en

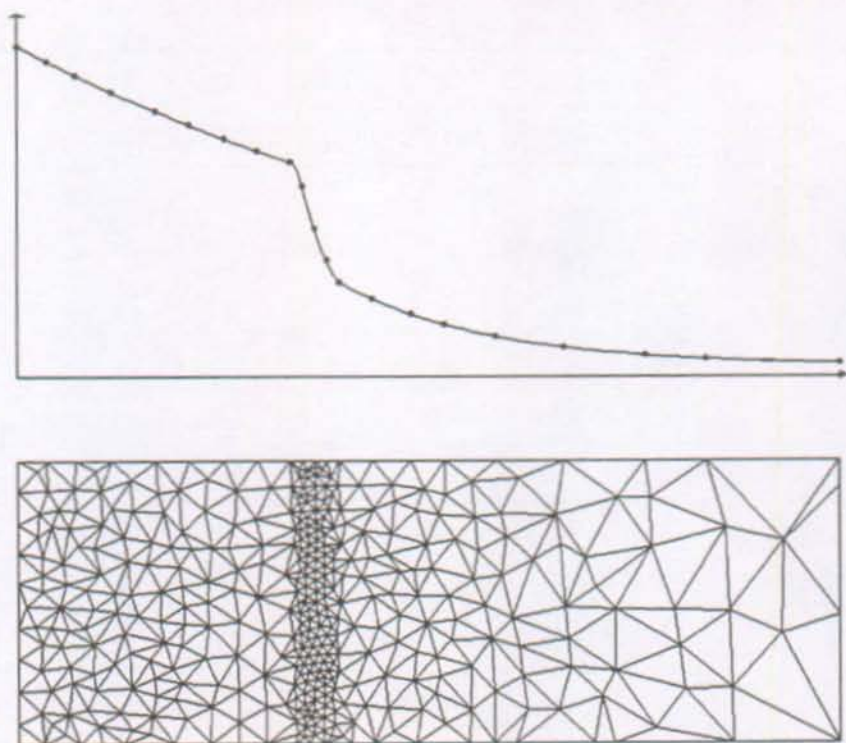


Figure 3.13: enthalpies exacte (trait continu) et calculée (points) sur le bord supérieur d'une triangulation adaptée pour $N_e = 500$, $\varepsilon = 0.3$ et $\alpha = 0.6$.

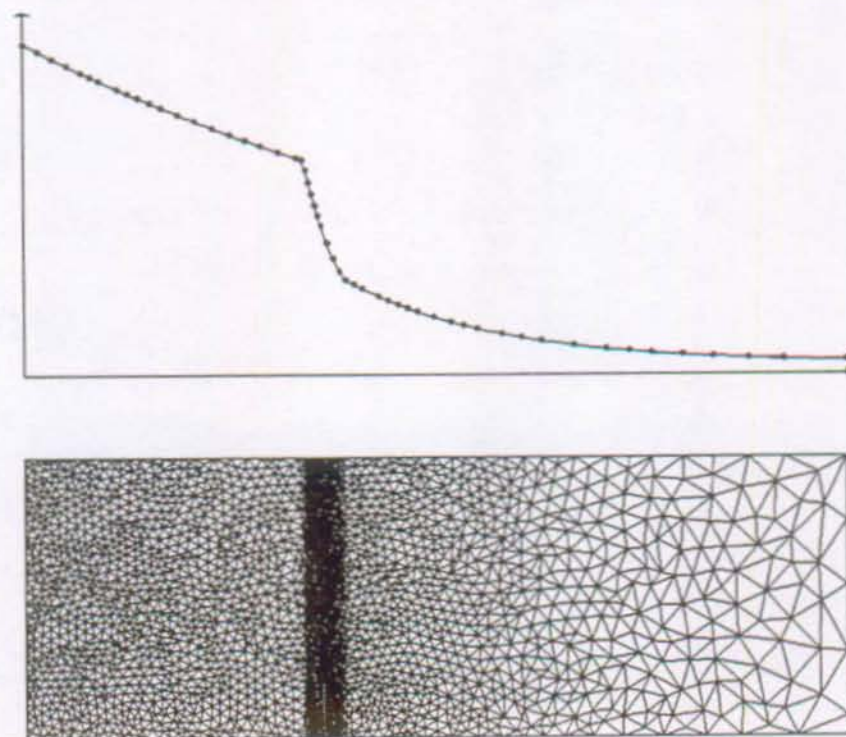


Figure 3.14: enthalpies exacte (trait continu) et calculée (points) sur le bord supérieur d'une triangulation adaptée pour $N_e = 4000$, $\varepsilon = 0.3$ et $\alpha = 0.6$.

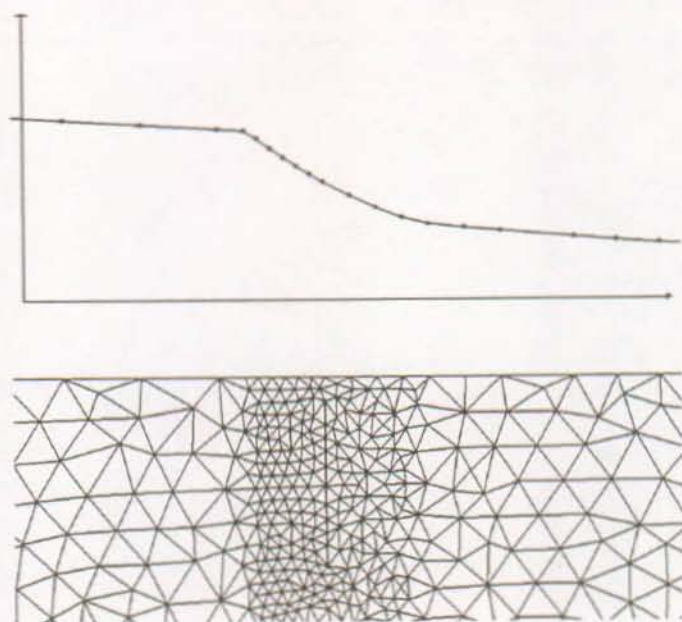


Figure 3.15: agrandissement, sur le bord supérieur, de la figure 3.14 au voisinage de l'interface.

contrepartie, le nombre d'éléments obtenu N_{fin} est environ deux fois supérieur au nombre d'éléments souhaité N_e .

Afin d'étudier le comportement de l'algorithme en fonction de la solution θ_h , nous avons fait varier ε de 0.3 à 0. Les figures 3.17 et 3.18 représentent les triangulation obtenues pour $\varepsilon = 0.2$ et 0.1 ($N_e = 1000$, $\alpha = 0.6$). Bien qu'aucun résultat théorique n'ait été établi pour $\varepsilon = 0$, l'algorithme converge et nous avons résumé les résultats dans le tableau 3.10. L'erreur, l'estimateur et le nombre d'itérations restent du même ordre lorsque ε diminue, par contre, le temps CPU augmente considérablement. En effet, plus ε est petit, plus la non-linéarité du problème de changement de phase devient importante et plus il faut itérer le schéma éléments finis 3.66, 3.67 pour obtenir la solution θ_h . Par conséquent, nous pensons que la stratégie la plus efficace dans le cas $\varepsilon = 0$ soit la suivante. Appliquer l'algorithme de maillage adaptatif avec $\varepsilon > 0$ et, après convergence, effectuer un calcul de θ_h avec $\varepsilon = 0$, sur la dernière triangulation obtenue. Nous avons comparé les résultats obtenus pour ces deux stratégies dans les figure 3.19 et 3.20. Les résultats de la figure 3.20 sont comparables avec ceux de Nochetto, Paolini et Verdi [Noc1,Noc2] pour un algorithme de maillage adaptatif sur le problème de Stefan. Rappelons que les auteurs proposent de mailler finement près de l'interface et grossièrement loin de l'interface. Notre approche tient compte, en plus, des différences de comportement de la solution en dehors de l'interface.

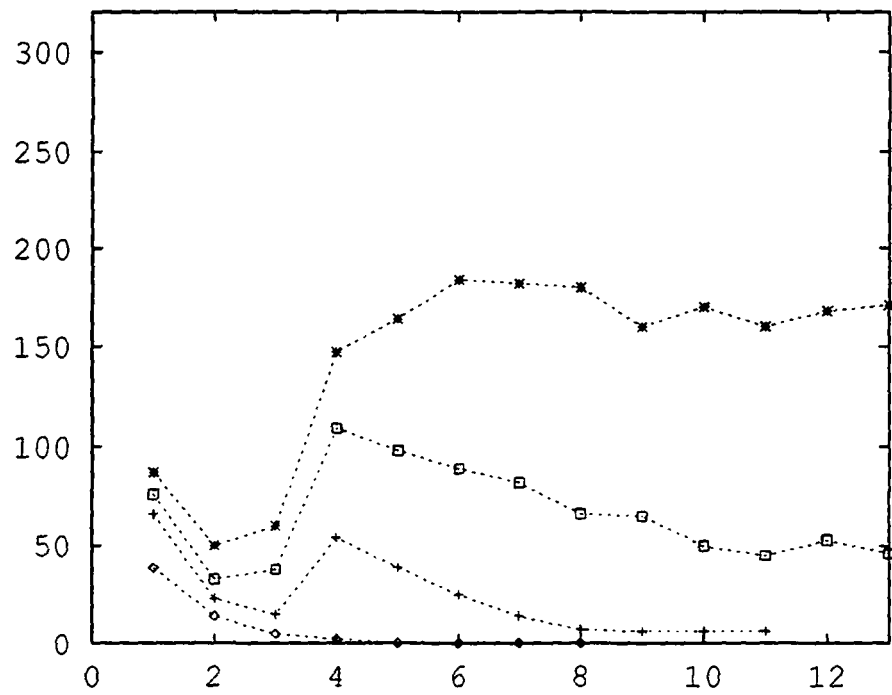
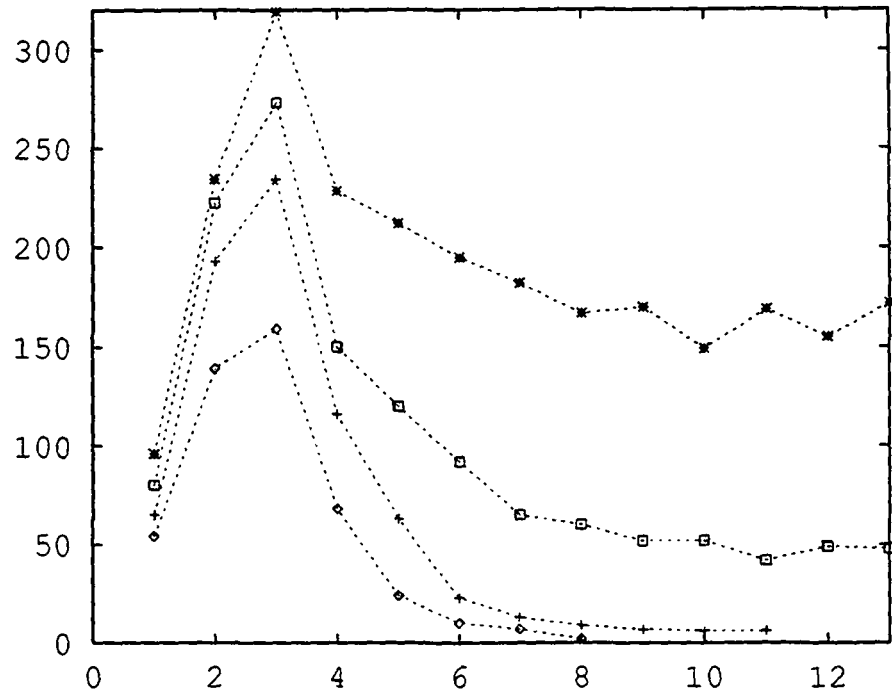


Figure 3.16: nombre de noeuds rajoutés et supprimés à chaque itération de l'algorithme pour $\alpha = 0.9$ (losanges vides), 0.6 (croix), 0.3 (carrés vides) et 0.1 (étoiles).

ε	N_{it}	N_{fin}	$\ \theta - \theta_h\ _h$	$\left(\sum_K \eta_K^2\right)^{1/2}$	CPU
0.3	7	1685	$6.6 \cdot 10^{-3}$	$1.9 \cdot 10^6$	115
0.2	8	1533	$7.7 \cdot 10^{-3}$	$2.1 \cdot 10^6$	160
0.1	8	1585	$9.6 \cdot 10^{-3}$	$2.1 \cdot 10^6$	230
0.05	8	1607	$5.8 \cdot 10^{-3}$	$2.2 \cdot 10^6$	300
0.	12	1776	$7.6 \cdot 10^{-3}$	$2.2 \cdot 10^6$	725

Tableau 3.10 : comportement de l'algorithme en fonction de ε ($N_e = 1000$, $\alpha = 0.6$).

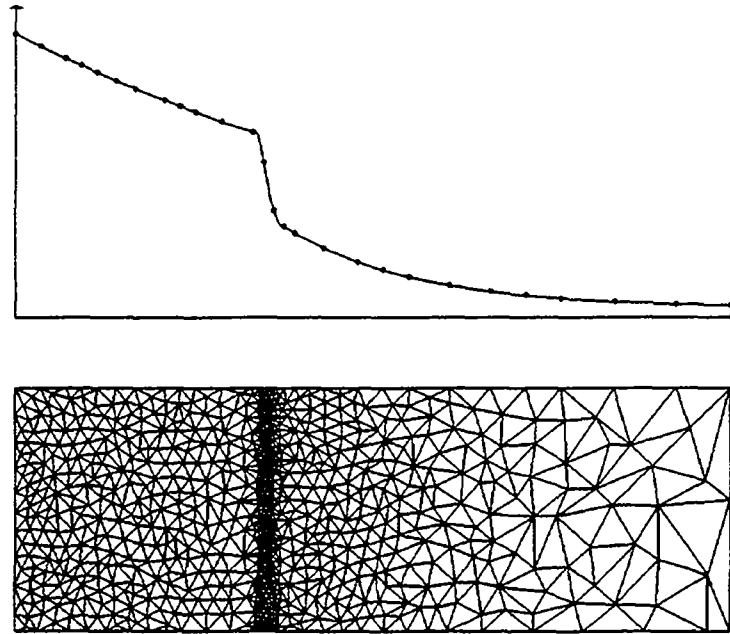


Figure 3.17: enthalpies exacte (trait continu) et calculée (points) sur le bord supérieur d'une triangulation adaptée pour $\varepsilon = 0.2$, $N_e = 1000$ et $\alpha = 0.6$.

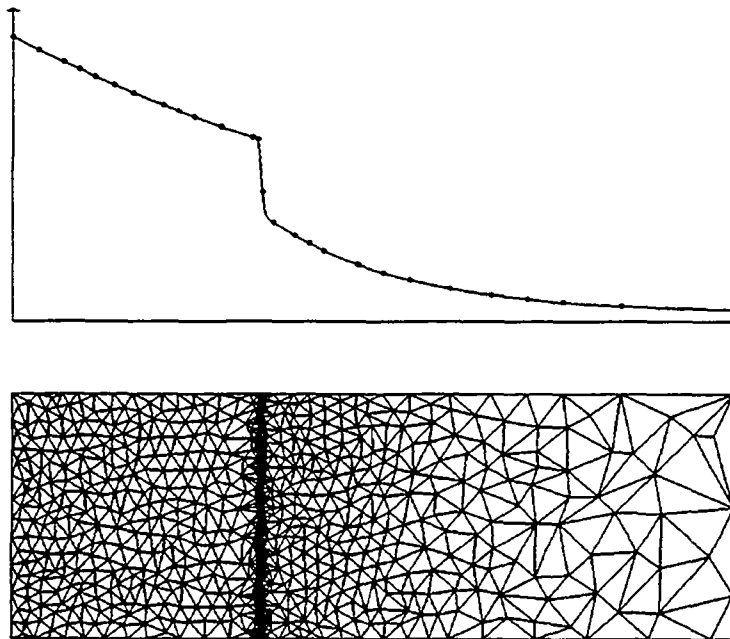


Figure 3.18: enthalpies exacte (trait continu) et calculée (points) sur le bord supérieur d'une triangulation adaptée pour $\varepsilon = 0.1$, $N_e = 1000$ et $\alpha = 0.6$.

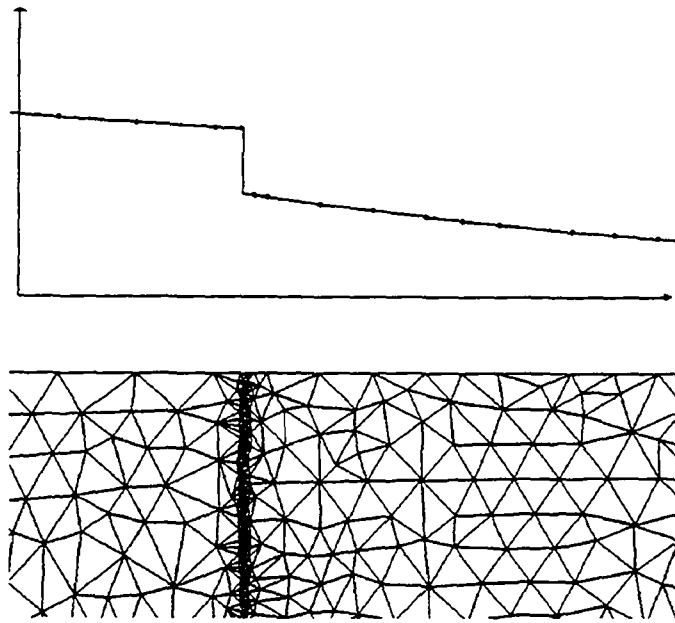


Figure 3.19: calculs avec $\varepsilon = 0$ ($N_e = 4000$, $\alpha = 0.6$).

Agrandissement au voisinage du bord supérieur de l'interface de changement de phase.

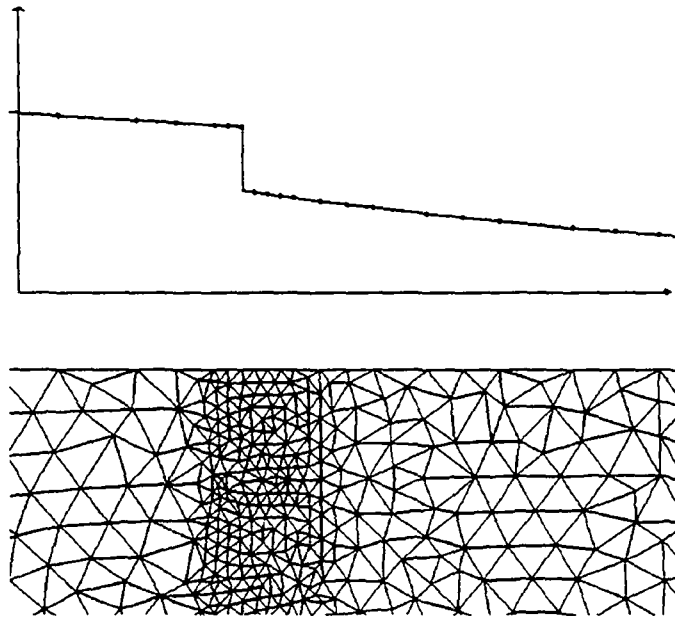


Figure 3.20: calculs avec $\varepsilon = 0$

sur la triangulation obtenue avec $\varepsilon = 0.3$ ($N_e = 4000$, $\alpha = 0.6$).

Agrandissement au voisinage du bord supérieur de l'interface de changement de phase.

3.7.2. Le problème modèle de refusion.

Revenons au problème 3.3 que nous avons étudié dans les paragraphes 3.2 à 3.5. Nous allons maintenant résoudre ce problème et appliquer l'algorithme de maillage adaptatif décrit dans le paragraphe 3.6. Nous avons ici négligé les mouvements de convection dans le liquide, ce qui revient à dire que le champ de vitesse dans la pièce \mathbf{v} est réduit à la vitesse de traitement \mathbf{V}_∞ . Le domaine de calcul Ω est rectangulaire, le faisceau laser, appliqué sur le bord supérieur $y = 0$, est centré en $x = 0$ et le flux de chaleur q_L dû au faisceau laser est modélisé par une loi gaussienne

$$q_L(x) = \frac{P_L}{\sqrt{2\pi}\sigma_L} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_L^2}\right),$$

P_L étant la puissance du laser et σ_L la dispersion du faisceau (un faisceau de dispersion σ_L provoque, dans une plaque de plexiglas, un trou de diamètre $2\sigma_L$). Afin d'étudier le comportement de la solution du problème de solidification, nous avons fait varier

- la chaleur latente ℓ_{sl} et le paramètre de régularisation ε ,
- la vitesse horizontale de traitement V_∞ (et la puissance du laser P_L de façon à obtenir un bain liquide ayant toujours les mêmes dimensions).

Toutes les valeurs des autres paramètres sont fixées et indiquées dans le tableau 3.9.

Plus la vitesse de traitement est grande, plus le terme convectif dans l'équation

$$-\Delta\beta(u) + \mathbf{v} \cdot \nabla u = 0,$$

est important et plus la région qui subit une élévation notable de température est de faible profondeur et de forte longueur (cf. figure 3.21). Conformément à la littérature [Car] et dans le but de réduire la taille du domaine de calcul, nous n'avons considéré qu'une partie de la région affectée thermiquement et imposé des conditions aux limites adéquates à la sortie. La température T_∞ que nous imposons sur le bord du domaine de calcul Ω correspond à la température d'un matériau occupant tout le demi-plan inférieur $y \leq 0$, de conductivité thermique k_s et chaleur spécifique $\rho_s c_p$, constantes, chaleur latente nulle, auquel on transmet à l'origine $x = y = 0$ une puissance P_L . Cette température satisfait donc les équations

$$\begin{aligned} -k_s \Delta T_\infty + \rho_s c_p \mathbf{V}_\infty \cdot \nabla T_\infty &= 0, & (x, y) \in]-\infty, +\infty[\times]-\infty, 0[, \\ T_\infty &\rightarrow T_{amb} & \text{lorsque } x^2 + y^2 \rightarrow +\infty, \\ k_s \frac{\partial T_\infty}{\partial n} &= P_L \delta_0, & \text{sur } y = 0, \end{aligned}$$

chaleur spécifique volumique du solide	$\rho_s c_{p_s}$	$3 \cdot 10^6$	$J/kg^\circ C$
chaleur spécifique volumique du liquide	$\rho_\ell c_{p_\ell}$	$3 \cdot 10^6$	$J/kg^\circ C$
conductivité thermique du solide	k_s	10.	$W/m^\circ C$
conductivité thermique du liquide	k_ℓ	20.	$W/m^\circ C$
température de fusion	$T_{s\ell}$	1300.	$^\circ C$
abscisse de la face latérale gauche	x_g	-0.02	m
abscisse de la face latérale droite	x_d	0.01	m
ordonnée de la face inférieure	y_i	-0.01	m
ordonnée de la face supérieure	y_s	0.	m
dispersion du faisceau laser	σ_L	0.0005	m
puissance du laser pour $V_\infty = 0.01$ m/s	P_L	$0.8 \cdot 10^5$	W/m
puissance du laser pour $V_\infty = 0.05$ m/s	P_L	$2.0 \cdot 10^5$	W/m

Tableau 3.9 : paramètres de la refusion.

et est donnée par :

$$T_\infty = T_{amb} + \frac{P_L}{k_s \pi} \exp\left(\frac{\rho_s c_{p_s} V_\infty}{2k_s} x\right) K_0\left(\frac{\rho_s c_{p_s} V_\infty}{2k_s} (x^2 + y^2)^{1/2}\right),$$

T_{amb} étant la température ambiante et K_0 la fonction de Bessel modifiée de première espèce.

Considérons d'abord la refusion, à la vitesse de traitement $V_\infty = 0.01$ m/s, d'un corps de chaleur latente nulle ($\varepsilon = 0$, $\ell_{s\ell} = 0$). Nous avons appliqué l'algorithme de maillage avec $N_e = 4000$ et $\alpha = 0.6$. Les triangulations obtenues au cours des itérations sont reproduites sur les figures 3.22 (la distribution d'énergie du laser est dessinée sur le bord supérieur du domaine de calcul) et la figure 3.23 représente les isothermes, de 100 à 1300 °C par pas de 100 °C, sur la triangulation finale.

Nous avons ensuite considéré le cas $\varepsilon = 0.1$ et $\ell_{s\ell} = 2.5 \cdot 10^9$, correspondant en première approximation aux propriétés d'un alliage binaire de type eutectique (cf. annexe 1) changeant de phase entre les deux températures $T_{s\ell}^e = 1207$ °C et $T_{s\ell} = 1300$ °C. La figure

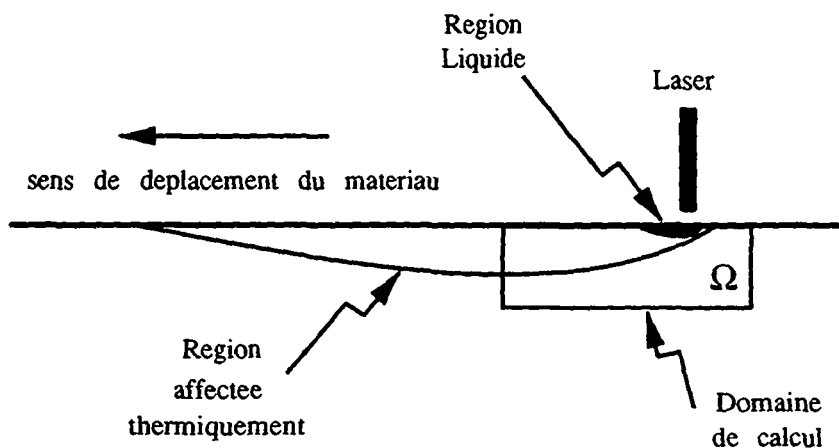


Figure 3.21: zone affectée thermiquement par le faisceau laser et domaine de calcul.

3.24 représente la triangulation obtenue ainsi que les deux isothermes de changement de phase, délimitant les régions solide, solide-liquide et liquide.

Comme l'indique la figure 3.27, plus la vitesse de traitement V_∞ augmente, plus le phénomène de couche limite devient important.

Nous avons finalement, dans un souci de curiosité, appliqué la procédure de régularisation à tous les sommets intérieurs de la dernière triangulation. Bien que la triangulation obtenue ait des angles inférieurs à ceux de la triangulation originelle (cf. figure 3.28), cette opération n'est pas intéressante puisque le déplacement des sommets se fait indépendamment de l'estimateur η_K . Par contre, ce type de régularisation peut facilement s'incorporer dans un générateur de maillage.

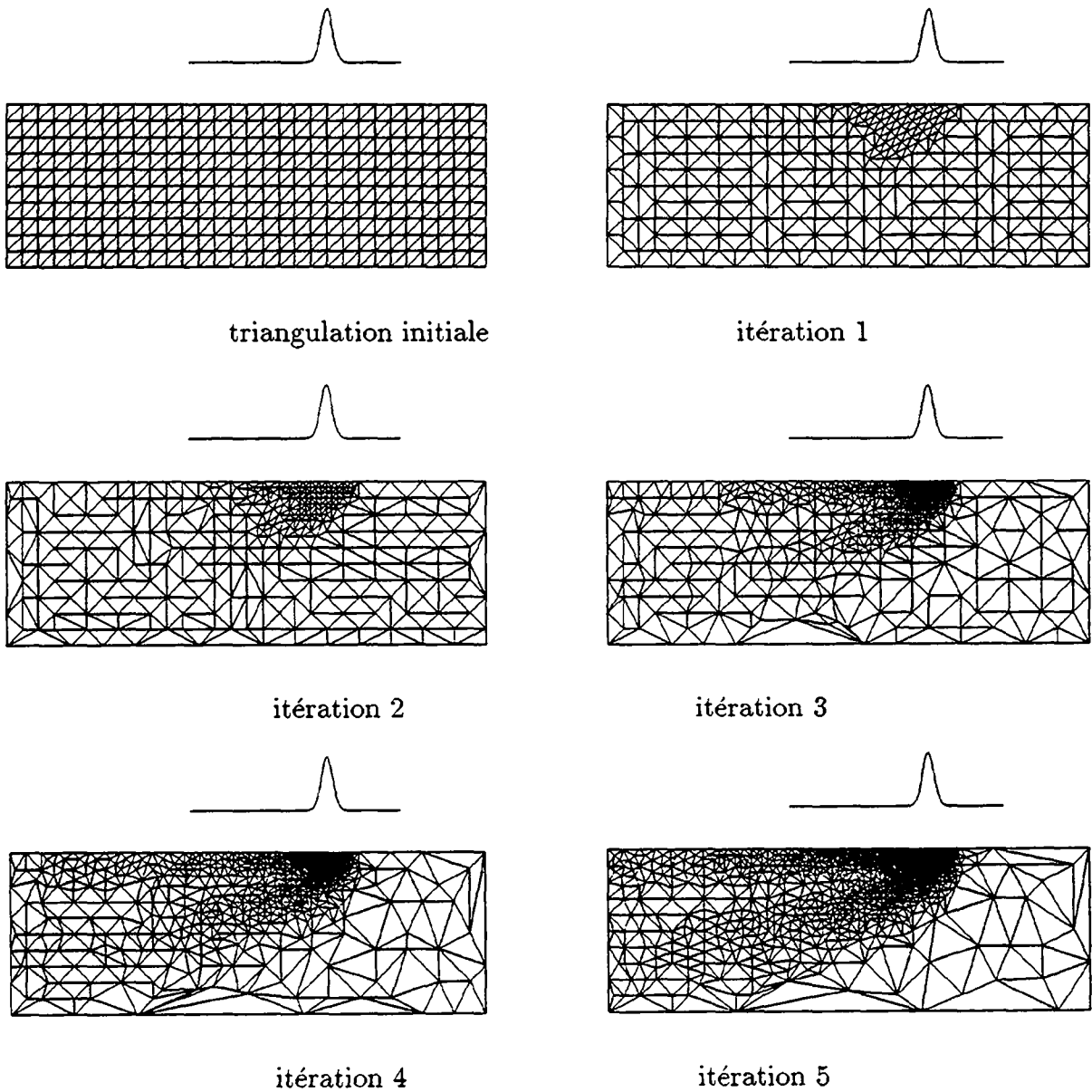


Figure 3.22: triangulations obtenues à chaque itération de l'algorithme pour un corps pur sans changement de phase.

$V_\infty = 0.01$, $\varepsilon = 0$, $l_{sl} = 0$, $N_e = 4000$ et $\alpha = 0.6$.

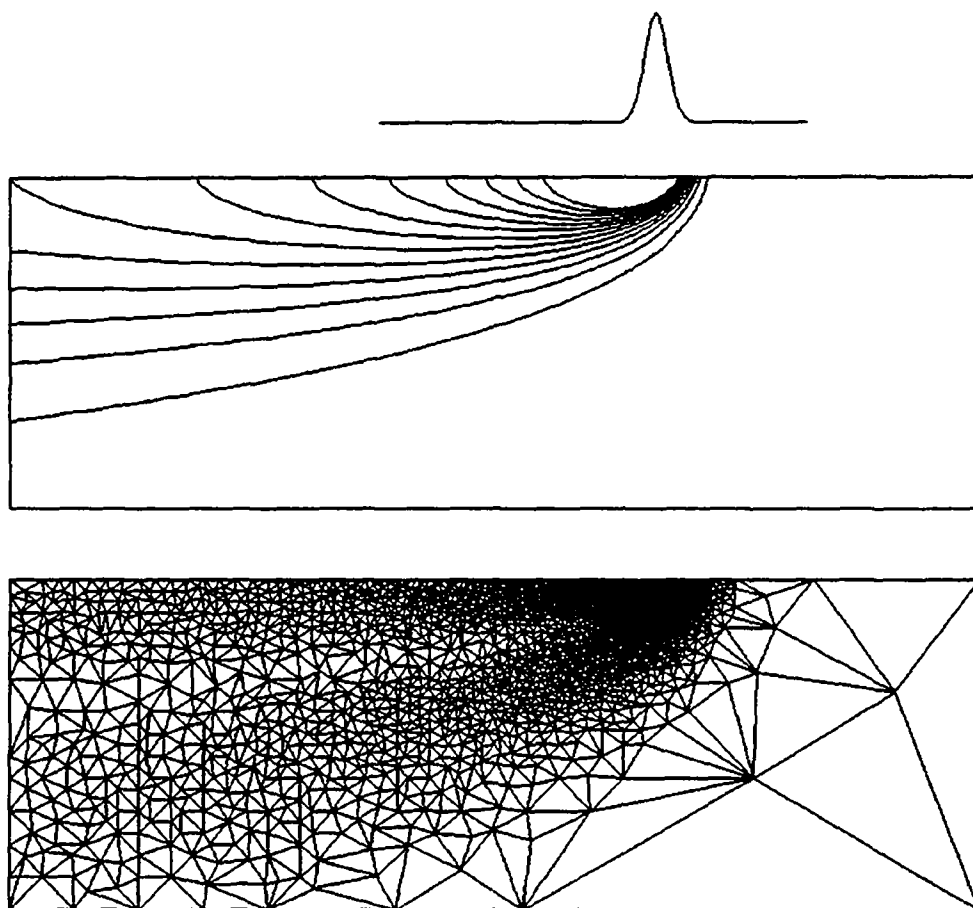


Figure 3.23: isothermes de 100 à 1300°C et triangulation finale (18 itérations, 6400 éléments), pour un corps pur sans changement de phase.
 $V_\infty = 0.01$, $\varepsilon = 0$, $l_{se} = 0$, $N_e = 4000$ et $\alpha = 0.6$.

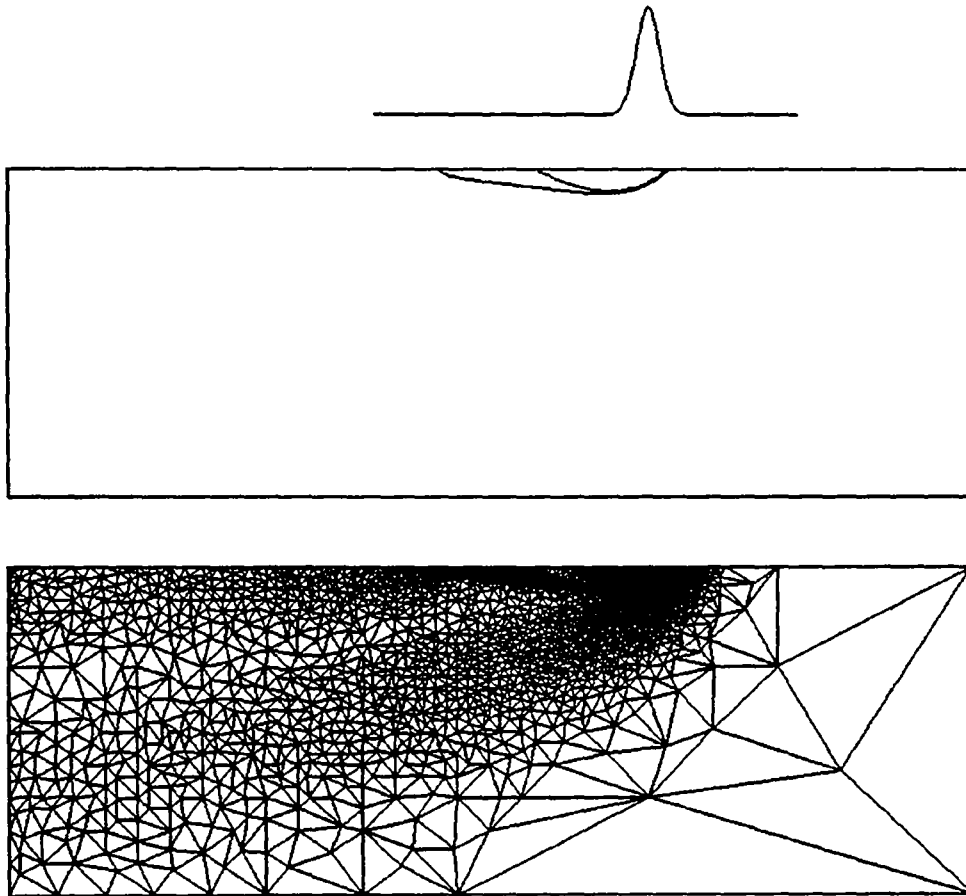


Figure 3.24: isothermes de changement de phase et triangulation obtenue pour un alliage binaire se solidifiant entre 1207 et 1300 °C.
 $V_\infty = 0.01$, $\varepsilon = 0.1$, $l_{sl} = 2.5 \cdot 10^9$, $N_e = 4000$ et $\alpha = 0.6$.

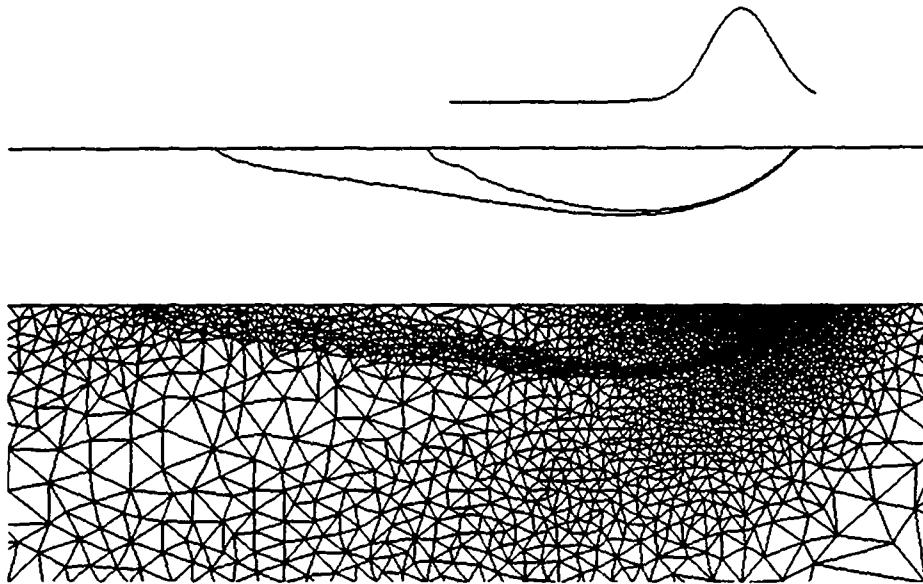


Figure 3.25: isothermes de changement de phase et triangulation obtenue pour un alliage binaire se solidifiant entre 1207 et 1300 °C. Agrandissement de la figure précédente au voisinage de l'origine.

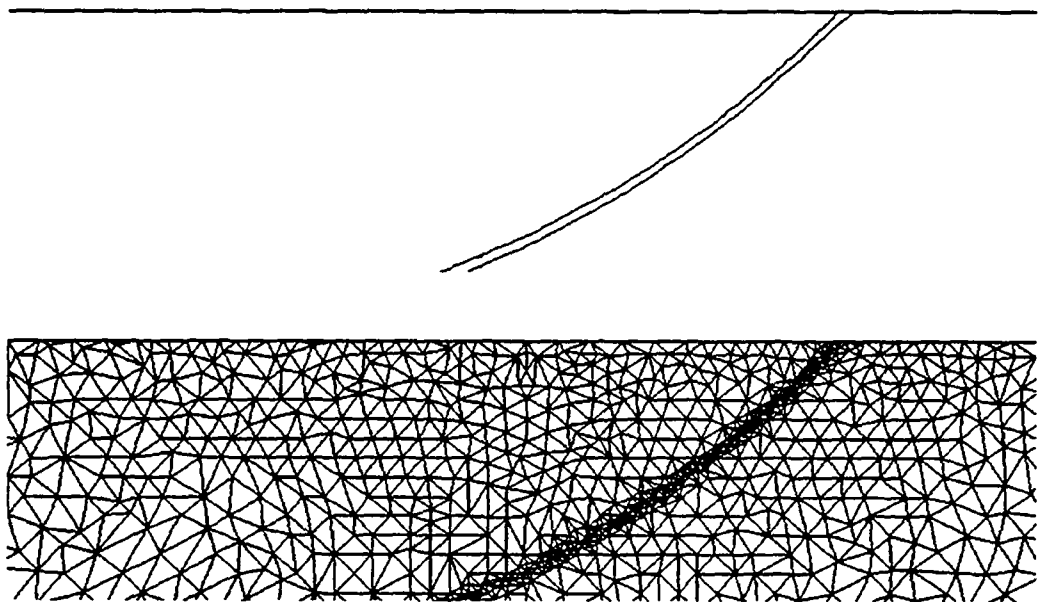


Figure 3.26: isothermes de changement de phase et triangulation obtenue pour un alliage binaire se solidifiant entre 1207 et 1300 °C. Agrandissement de la figure précédente au voisinage de l'origine.

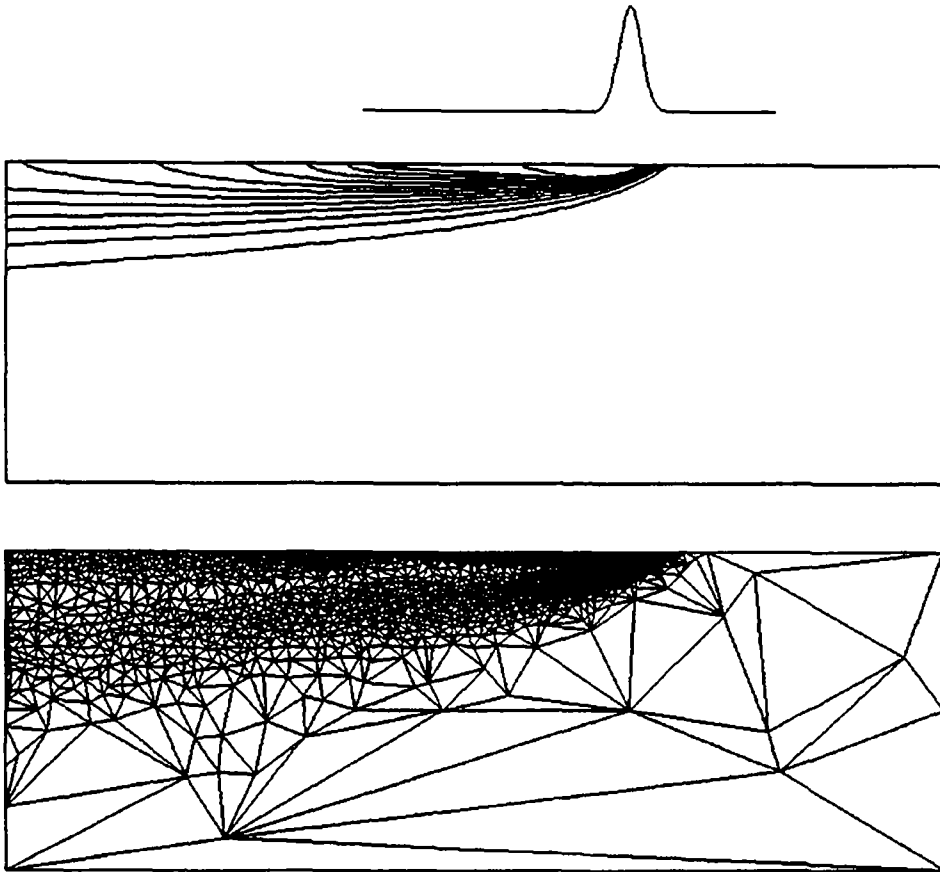


Figure 3.27: isothermes de 100 à 1300°C et triangulation obtenue pour une vitesse de traitement $V_\infty = 0.05$ m/s.
 $V_\infty = 0.05$, $\varepsilon = 0.1$, $\ell_{sl} = 2.5 \cdot 10^9$, $N_e = 4000$ et $\alpha = 0.6$.

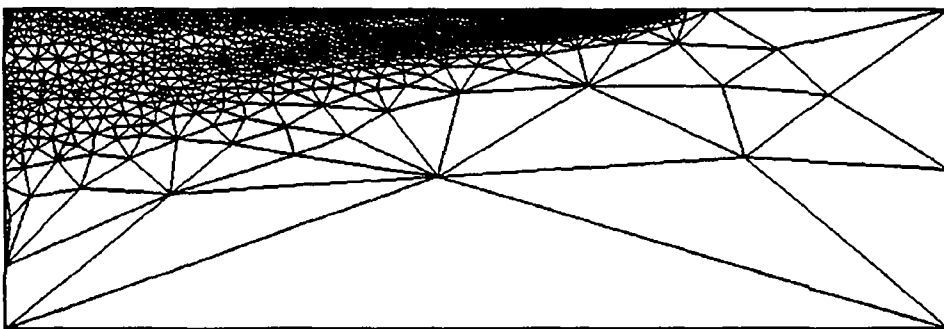


Figure 3.28: triangulation obtenue en appliquant la procédure de régularisation à tous les sommets intérieurs de la triangulation de la figure 3.27.

CHAPITRE 4

Résolution par une méthode d'éléments finis d'un problème de recouvrement par laser

Dans ce chapitre nous proposons une méthode d'éléments finis permettant de résoudre le problème stationnaire bidimensionnel de recouvrement par laser développé dans le chapitre 2. Rappelons qu'il s'agit de déterminer

- les champs de température T_s, T_ℓ dans les domaines solide Ω_s et liquide Ω_ℓ ,
- les champ de vitesse et de pression \mathbf{v}_ℓ, p_ℓ dans Ω_ℓ ,
- la forme et la position des deux interfaces solide-liquide $\Gamma_{s\ell}$ et liquide-gaz $\Gamma_{\ell g}$.

Nous exposons dans le paragraphe 4.1 un algorithme permettant de séparer le calcul de l'interface liquide-gaz des autres problèmes. A chaque itération de cet algorithme le problème majeur consiste à résoudre, sur le domaine de calcul

$$\Omega = \Omega_s \cup \Omega_\ell \cup \Gamma_{s\ell},$$

un problème de changement de phase couplé avec un problème d'hydrodynamique dans le bain liquide. Le problème de changement de phase est reformulé en utilisant, comme pour le problème modèle étudié dans le chapitre 3, la variable enthalpie u et nous aboutissons à la résolution d'un problème de diffusion-convection, dégénéré sur l'interface solide-liquide (problème de Stefan stationnaire)

$$-\Delta\beta(u) + \mathbf{v} \cdot \nabla u = 0,$$

où β est une fonction lipschitzienne, monotone croissante, contenant les propriétés du matériau. Les équations de Navier-Stokes, régissant le comportement du champ de vitesse dans le liquide sont reformulées dans tout le domaine de calcul grâce à une méthode de pénalisation, de sorte que \mathbf{v} tende vers la solution des équations de Navier-Stokes dans le liquide et vers la vitesse de translation de la pièce par rapport au laser \mathbf{V}_∞ dans le solide.

Nous proposons une discrétisation $Q_1 - P_0$ pour le couple vitesse-pression. Chaque quadrangle est coupé en deux triangles et le couple enthalpie-température est discrétisé par des éléments finis P_1 sur ces triangles.

Des résultats numériques sont ensuite exposés pour les deux types de traitement (refusion par laser et recouvrement par laser). Ils indiquent l'importance du champ de vitesse sur la forme du bain liquide.

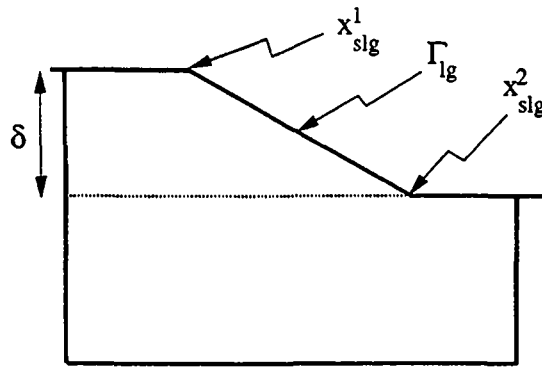
4.1 Algorithme de découplage.

Avant d'explicitier l'algorithme, dressons un bref aperçu des études concernant les problèmes de changement de phase solide-liquide avec hydrodynamique dans le liquide ainsi que les problèmes d'hydrodynamique avec surface libre.

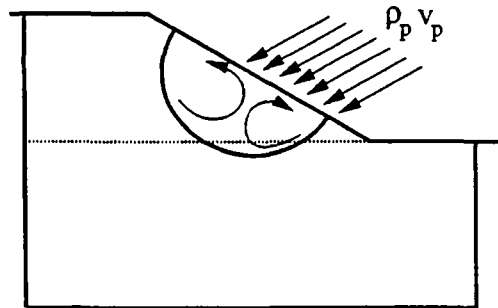
Les phénomènes de changement de phase solide-liquide avec écoulement dans le liquide ont déjà été étudiés, tant d'un point de vue théorique [Can, Gre2] que numérique [Cip] [Dro, Vol]. Le problème de changement de phase est généralement reformulé sur tout le domaine de calcul en introduisant la fonction enthalpie (cf. paragraphe 3.2). Cette formulation a pour avantage, contrairement aux méthodes de suivi de front, de ne pas avoir à suivre l'interface de changement de phase. En contrepartie l'équation est dégénérée et l'enthalpie est discontinue sur l'interface. Le problème d'hydrodynamique est lui aussi reformulé sur tout le domaine de calcul en utilisant une technique de pénalisation.

Les problèmes d'hydrodynamique avec surface libre ont également fait l'objet de plusieurs études [Bes, Cuv, Mys]. Trois conditions sont à prescrire sur la surface libre (deux pour la vitesse et une pour le calcul de l'interface) et les deux problèmes sont généralement découplés par une méthode de point fixe. L'écoulement est calculé avec deux conditions et la troisième est utilisée pour corriger la forme de l'interface.

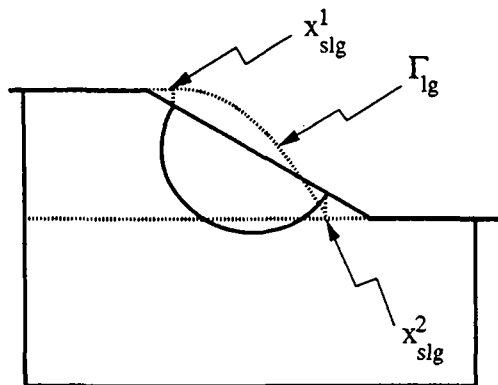
Le problème de recouvrement que nous proposons de résoudre contient donc les difficultés rencontrées pour ces deux types de problèmes. L'algorithme que nous décrivons ci-dessous (illustré par la figure 4.1), permet de découpler le calcul de l'interface liquide-gaz du problème de changement de phase avec hydrodynamique dans le liquide. Cet algorithme s'énonce :



Etape 1 : initialisation.



Etape 2 : détermination de la forme du bain. liquide



Etape 3 : correction de l'interface liquide-gaz.

Figure 4.1: algorithme de découplage.
Les étapes 2 et 3 sont répétées jusqu'à convergence.

Etape 1 : initialisation.

- Calculer l'épaisseur δ de poudre déposée sur la pièce (eq. 2.14).
- Donner une évaluation des points triples x_{slg}^1 , x_{slg}^2 et de la forme de l'interface liquide-gaz.
- Mailler le domaine de calcul $\Omega = \Omega_s \cup \Omega_\ell \cup \Gamma_{s\ell}$.

Etape 2 :

- Calculer la densité partielle de poudre ρ_p (équation 2.13).
- Résoudre le problème de changement de phase couplé avec le problème d'hydrodynamique dans le liquide (avec les conditions aux limites de vitesse normale 2.27 et traction tangentielle 2.28 sur l'interface liquide-gaz).

Etape 3 :

- Repérer les nouveaux points triples x_{slg}^1 et x_{slg}^2 .
- Calculer la traction normale du fluide sur l'interface liquide-gaz.
- Corriger la forme de l'interface liquide-gaz avec l'équation d'équilibre des forces normales (équation 2.29).
- Remailler le nouveau domaine de calcul.

Etape 4 : test de la convergence.

- Si la nouvelle interface liquide-gaz est suffisamment proche de l'ancienne, s'arrêter, sinon retourner à l'étape 2.

Dans le paragraphe suivant nous explicitons les techniques numériques que nous avons utilisé pour résoudre le problème de changement de phase avec hydrodynamique dans le liquide.

4.2 Résolution du problème de changement de phase avec hydrodynamique dans le liquide.

Dans ce paragraphe, l'interface liquide-gaz $\Gamma_{\ell g}$ et le domaine de calcul

$$\Omega = \Omega_s \cup \Omega_\ell \cup \Gamma_{s\ell}$$

sont fixés (ils ont été déterminée lors des étapes 1 ou 3 de l'algorithme du paragraphe 4.1). Il s'agit maintenant de déterminer

- les champs de température T_s, T_ℓ dans les régions solide Ω_s et liquide Ω_ℓ ,
- les champ de vitesse et de pression \mathbf{v}_ℓ, p_ℓ dans Ω_ℓ ,
- la forme et la position de l'interface solide-liquide $\Gamma_{s\ell}$.

Comme dans le paragraphe 3.2, nous introduisons l'enthalpie u pour reformuler le problème de changement de phase. Le problème d'hydrodynamique est approché par un problème pénalisé, ce qui permet de formuler les équations dans tout le domaine de calcul.

Dans la suite nous notons $\Gamma = \partial\Omega_s \setminus (\Gamma_{s\ell} \cup \Gamma_{sg})$.

4.2.1. Formulation des équations sur tout le domaine de calcul.

4.2.1.1. Le problème de changement de phase.

Nous procédons comme dans le paragraphe 3.2. Soit \mathbf{v} le champ de vitesse défini par :

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \mathbf{v}_s = \mathbf{V}_\infty && \text{dans } \Omega_s, \\ &= \mathbf{v}_\ell && \text{dans } \Omega_\ell. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Soit la fonction $K : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{aligned} K(x) &= \int_0^x k_s(\xi) d\xi && x \leq T_{s\ell}, \\ K(x) &= \int_0^{T_{s\ell}} k_s(\xi) d\xi + \int_{T_{s\ell}}^x k_\ell(\xi) d\xi && x > T_{s\ell}. \end{aligned}$$

Posons $\theta_{s\ell} = K(T_{s\ell})$, $\theta_\infty = K(T_\infty)$, nous sommes amenés à

trouver $u \in H^1(\Omega)$ avec $\beta(u) = \theta_\infty$ sur Γ et tel que :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla \beta(u) \cdot \nabla \varphi dx - \int_{\Omega} (\mathbf{v} \cdot \nabla \varphi) u dx - \int_{\Gamma_{\ell g}} \frac{\rho_p}{\rho_\ell} (\mathbf{v}_p \cdot \mathbf{n}_{\ell g}) u \varphi ds \\ = \int_{\Gamma_{s g}} q_L \varphi ds + \int_{\Gamma_{\ell g}} q_L (n_{\ell g})_y \varphi ds - \int_{\Gamma_{\ell g}} \rho_p (\mathbf{v}_p \cdot \mathbf{n}_{\ell g}) h_p \varphi ds \\ \forall \varphi \in H^1(\Omega) \text{ avec } \varphi = 0 \text{ sur } \Gamma. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Ici $\beta : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ est la fonction lipschitzienne, monotone, croissante définie en A1.21, 3.12 et contient les propriétés du matériau. La densité partielle de poudre ρ_p est définie par 2.13 et l'enthalpie de poudre h_p par 2.12. Rappelons que la variable u représente l'enthalpie volumique.

4.2.1.2. Le problème d'hydrodynamique.

Dans ce paragraphe nous formulons le problème d'hydrodynamique pénalisé. La solution de ce problème est telle qu'elle tende, lorsque le paramètre de pénalisation tend vers zéro, vers la solution \mathbf{v} définie par 4.1. Pour ce faire, nous ajoutons un terme dans l'équation de la quantité de mouvement 2.3, nul dans le liquide et grand dans le solide. Soit $\varepsilon > 0$ le paramètre de pénalisation, le terme que nous rajoutons est

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega_s} (\mathbf{v} - \mathbf{V}_\infty) dx,$$

où le domaine solide est défini par

$$\Omega_s = \{x \in \Omega; T(x) < T_{s\ell}\}, \quad (4.3)$$

avec

$$T = K^{-1}(\beta(u)). \quad (4.4)$$

Ce type de pénalisation a été étudié numériquement dans [Dro,Vol] et théoriquement dans [Can,Gre2]. La contrainte divergence nulle 2.21 est pénalisée de façon standard par la pression (cf. [Gir,Hug])

$$\nabla \cdot \mathbf{v} + \varepsilon p = 0 \quad \text{dans } \Omega,$$

(nous avons, dans un souci de clarté, noté ε tous les paramètres de pénalisation), ce qui permet d'éliminer la pression dans la formulation variationnelle. Finalement les conditions

de vitesse normale imposée 2.27 sont pénalisées par la contrainte normale $\sigma_{n_{\ell g}}$ (qui est une condition aux limites naturelle)

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_{\ell g} = \frac{\rho_p}{\rho_\ell} \mathbf{v}_p \cdot \mathbf{n}_{\ell g} + \varepsilon \sigma_{n_{\ell g}} \quad \text{sur } \Gamma_{\ell g}. \quad (4.5)$$

La formulation faible du problème pénalisé d'hydrodynamique s'énonce donc

trouver $\mathbf{v} \in (H^1(\Omega))^2$ avec $\mathbf{v} = \mathbf{V}_\infty$ sur Γ et tel que :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left((\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} + 2\mathbf{D}(\mathbf{v}) : \mathbf{D}(\mathbf{w}) + \frac{1}{\varepsilon} \nabla \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{w} \right) dx + \int_{\Omega_s} \frac{1}{\varepsilon} (\mathbf{v} - \mathbf{V}_\infty) \cdot \mathbf{w} dx \\ & = \int_{\Omega} -\rho_\ell b_\ell (T - T_{s\ell}) \mathbf{g} \cdot \mathbf{w} dx + \int_{\Gamma_{\ell g}} \frac{d\gamma_{\ell g}}{dT} \frac{\partial T}{\partial t_{\ell g}} \mathbf{w} \cdot \mathbf{t}_{\ell g} ds \\ & \quad + \int_{\Gamma_{\ell g}} \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\rho_g}{\rho_\ell} \mathbf{v}_g \cdot \mathbf{n}_{\ell g} - \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_{\ell g} \right) \mathbf{w} \cdot \mathbf{n}_{\ell g} ds \\ & \quad \forall \mathbf{w} \in (H^1(\Omega))^2 \text{ avec } \mathbf{w} = 0 \text{ sur } \Gamma. \quad (4.6) \end{aligned}$$

Ici Ω_s et T sont donnés par 4.3 et 4.4.

4.2.2. Discrétisation par une méthode d'éléments finis.

Motivons d'abord le choix de la discrétisation éléments finis. Du point de vue informatique, c'est la résolution numérique des équations de Navier-Stokes qui demande l'effort le plus important. Nous choisissons donc pour sa simplicité l'élément fini $Q_1 - P_0$, bien qu'il présente deux défauts majeurs :

- cet élément n'est pas stable au sens où il ne vérifie pas la condition inf-sup discrète. Bien que des oscillations sur la pression puissent apparaître dans certains cas particuliers [Gir], cet élément a donné pleinement satisfaction lors de nos calculs.
- Cet élément nécessite un maillage du domaine de calcul en quadrangles et ne permet pas l'implantation des méthodes de maillage adaptatif développées dans le chapitre 3. En outre, les générateurs usuels de maillages en quadrangles produisent des maillages structurés et le raffinement est à la charge de l'utilisateur.

Dans le chapitre 3 nous avons étudié un schéma numérique éléments finis P_1 pour résoudre le problème de changement de phase. Nous pouvons utiliser ce schéma à condition de "couper" chaque quadrangle en deux triangles.

Pour tout $h > 0$, notons \mathcal{Q}_h une décomposition de Ω en quadrangles Q de côté inférieur à h . Chaque quadrangle est coupé en deux triangles et \mathcal{T}_h désigne la triangulation correspondante.

4.2.2.1. Discrétisation du problème de changement de phase.

Nous utilisons la discrétisation étudiée dans le paragraphe 3.3. Rappelons que cette discrétisation est imposée par l'utilisation du schéma linéaire du paragraphe 3.5. Soit V_h l'espace discret défini par :

$$V_h = \{v_h \in C^0(\bar{\Omega}) ; v_{h|K} \in P_1 ; \forall K \in \mathcal{T}_h\},$$

et $r_{\mathcal{T}_h} : C^0(\bar{\Omega}) \rightarrow V_h$ l'interpolant continu, linéaire sur chaque triangle de la triangulation \mathcal{T}_h . Il s'agit donc de

trouver $u_h \in V_h$ avec $r_{\mathcal{T}_h}(\beta(u_h)) = r_{\mathcal{T}_h}\theta_\infty$ sur Γ tel que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla r_{\mathcal{T}_h}\beta_\varepsilon(u_h) \cdot \nabla v_h dx + \int_{\Omega} (\mathbf{v} \cdot \nabla u_h)v_h dx - \int_{\Gamma_{\ell g}} \frac{\rho_p}{\rho_\ell} (\mathbf{v}_p \cdot \mathbf{n}_{\ell g}) u_h v_h ds \\ = \int_{\Gamma_{sg}} q_L v_h ds + \int_{\Gamma_{\ell g}} q_L (n_{\ell g})_y v_h ds - \int_{\Gamma_{\ell g}} \rho_p (\mathbf{v}_p \cdot \mathbf{n}_{\ell g}) h_p v_h ds \\ \forall v_h \in V_h \text{ avec } v_h = 0 \text{ sur } \Gamma. \end{aligned} \quad (4.7)$$

4.2.2.2 Discrétisation du problème d'hydrodynamique pénalisé.

Introduisons l'espace discret

$$W_h = \{\mathbf{w}_h \in (C^0(\bar{\Omega}))^2 ; \mathbf{w}_{h|Q} \in (Q_1)^2 ; \forall Q \in \mathcal{Q}_h\},$$

et notons $r_{\mathcal{Q}_h} : C^0(\bar{\Omega}) \rightarrow V_h$ est l'interpolant continu, bilinéaire sur chaque quadrangle. Il s'agit donc de

trouver $\mathbf{v}_h \in W_h$ tel que $\mathbf{v}_h = \mathbf{V}_\infty$ sur Γ et

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left((\mathbf{v}_h \cdot \nabla) \mathbf{v}_h \cdot \mathbf{w}_h + 2\mathbf{D}(\mathbf{v}_h) : \mathbf{D}(\mathbf{w}_h) + \frac{1}{\varepsilon} r_{\mathcal{Q}_h} (\nabla \mathbf{v}_h \cdot \nabla \mathbf{w}_h) \right) dx \\ & + \int_{\Omega_{s_h}} \frac{1}{\varepsilon} (\mathbf{v}_h - \mathbf{V}_\infty) \cdot \mathbf{w}_h dx + \int_{\Gamma_{\ell_g}} \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\rho_g}{\rho_\ell} \mathbf{v}_g \cdot \mathbf{n}_{\ell_g} - \mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}_{\ell_g} \right) \mathbf{w}_h \cdot \mathbf{n}_{\ell_g} ds \\ & = \int_{\Omega} -\rho_\ell b_\ell (T_h - T_{s\ell}) \mathbf{g} \cdot \mathbf{w}_h dx + \int_{\Gamma_{\ell_g}} \frac{d\gamma_{\ell_g}}{dT} \frac{\partial T_h}{\partial t_{\ell_g}} \mathbf{w}_h \cdot \mathbf{t}_{\ell_g} ds \\ & \forall \mathbf{w}_h \in W_h \text{ avec } \mathbf{w}_h = 0 \text{ sur } \Gamma. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Ici Ω_{s_h} et T_h sont donnés par

$$\Omega_{s_h} = \{x \in \Omega; T_h(x) < T_{s\ell}\}, \quad (4.9)$$

avec

$$T_h = r_{T_h} \left(K^{-1}(\beta(u_h)) \right). \quad (4.10)$$

Remarquons que le terme provenant de la pression a été sous-intégré de façon standard [Gir].

4.2.3. Découplage des deux problèmes.

Il reste à découpler les deux équations 4.7 et 4.8. Nous avons, dans le paragraphe 3.5, étudié un algorithme efficace permettant, pour un champ de vitesse \mathbf{v} donné, de résoudre le problème de changement de phase (cf. paragraphe 3.5). La méthode de découplage des deux problèmes variationnels définis ci-dessus consiste donc logiquement, à partir d'un champ de vitesse initial, à itérer le schéma suivant :

- i) résoudre le problème de changement de phase pour un champ de vitesse donné, avec le schéma développé dans le paragraphe 3.5.
- ii) calculer un nouveau champ de vitesse (par exemple en effectuant une itération en temps de l'équation de Navier-Stokes avec terme évolutif),

Avant de préciser le point ii) réécrivons le schéma du paragraphe 3.5 en tenant compte des nouvelles conditions aux limites.

4.2.3.1. Résolution du problème de changement de phase discrétisé.

Soit $u_h^0 \in V_h$ une approximation de la solution (par exemple l'enthalpie obtenue lors de la dernière itération de l'algorithme du paragraphe 4.1), τ l'équivalent d'un pas de temps, ω un paramètre de relaxation tel que $0 < \omega < 1/b$ (b est la pente maximale de la fonction β), répétons jusqu'à convergence le schéma suivant :

Pour $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ trouver $\theta_h^{n+1} \in V_h$ avec $\theta_h = r_h \theta_\infty$ sur Γ et tel que :

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} r_{\mathcal{T}_h} (\theta_h^{n+1} v_h) dx + \frac{\tau}{\omega} \int_{\Omega} \nabla \theta_h^{n+1} \cdot \nabla v_h dx + \tau \int_{\Omega} (\mathbf{v} \cdot \nabla \theta_h^{n+1}) v_h dx \\
 & = \int_{\Omega} r_{\mathcal{T}_h} (\beta_\varepsilon(u_h^n) v_h) dx + \tau \int_{\Omega} (\mathbf{v} \cdot \nabla r_{\mathcal{T}_h} \beta_\varepsilon(u_h^n)) v_h dx - \frac{\tau}{\omega} \int_{\Omega} (\mathbf{v} \cdot \nabla u_h^n) v_h dx \\
 & \quad + \frac{\tau}{\omega} \int_{\Gamma_{sg}} q_L v_h ds + \frac{\tau}{\omega} \int_{\Gamma_{lg}} q_L (n_{lg})_y v_h ds \\
 & \quad + \frac{\tau}{\omega} \int_{\Gamma_{lg}} \rho_p (\mathbf{v}_p \cdot \mathbf{n}_{lg}) \left(\frac{1}{\rho_\ell} u_h^n - h_p \right) v_h ds \\
 & \quad \forall v_h \in V_h \text{ avec } v_h = 0 \text{ sur } \Gamma, \quad (4.11)
 \end{aligned}$$

et effectuer la correction

$$u_h^{n+1} = u_h^n + \omega (\theta_h^{n+1} - r_{\mathcal{T}_h} \beta_\varepsilon(u_h^n)) \quad \text{dans } \Omega. \quad (4.12)$$

REMARQUE 4.1.

Le dernier terme de 4.11 rend le schéma convergent sous une condition de type CFL puisqu'un terme négatif est rajouté sur la diagonale. Il est possible d'écrire ce terme de façon implicite si les coefficients de conductivité thermique et chaleur spécifique k et c_p sont constants par phase :

$$\int_{\Gamma_{lg}} \rho_p \mathbf{v}_p \cdot \mathbf{n}_{lg} \left(\frac{k_\ell}{\rho_\ell c_{p\ell}} \theta^{n+1} - h_p \right) v_h ds.$$

REMARQUE 4.2.

Comme nous l'avons déjà signalé dans le paragraphe 3.5, l'avantage de ce schéma est de n'avoir à effectuer qu'une seule fois la décomposition LU de la matrice éléments finis.

4.2.3.2. Calcul du nouveau champ de vitesse.

L'enthalpie discrète u_h et l'ancien champ de vitesse \mathbf{v}_h étant donnés, nous ajoutons un terme évolutif dans l'équation 4.8 et nous discrétisons de manière implicite. Il s'agit donc de

trouver $\mathbf{V}_h \in W_h$ avec $\mathbf{V}_h = \mathbf{V}_\infty$ sur Γ et tel que :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left((\mathbf{V}_h - \mathbf{v}_h) \cdot \mathbf{w}_h + \tau (\mathbf{v}_h \cdot \nabla) \mathbf{V}_h \cdot \mathbf{w}_h + 2\tau \mathbf{D}(\mathbf{V}_h) : \mathbf{D}(\mathbf{w}_h) + \frac{\tau}{\varepsilon} r_{\mathcal{Q}_h} (\nabla \mathbf{V}_h \cdot \nabla \mathbf{w}_h) \right) dx \\ & + \int_{\Omega_{s_h}} \frac{\tau}{\varepsilon} (\mathbf{V}_h - \mathbf{V}_\infty) \cdot \mathbf{w}_h dx + \int_{\Gamma_{\ell_g}} \frac{\tau}{\varepsilon} \left(\frac{\rho_g}{\rho_\ell} \mathbf{v}_g \cdot \mathbf{n}_{\ell_g} - \mathbf{V}_h \cdot \mathbf{n}_{\ell_g} \right) \mathbf{w} \cdot \mathbf{n}_{\ell_g} ds \\ & = -\tau \int_{\Omega} \rho_\ell b_\ell (T_h - T_{s\ell}) \mathbf{g} \cdot \mathbf{w}_h dx + \tau \int_{\Gamma_{\ell_g}} \frac{d\gamma_{\ell_g}}{dT} \frac{\partial T_h}{\partial t_{\ell_g}} \mathbf{w}_h \cdot \mathbf{t}_{\ell_g} ds \\ & \forall \mathbf{w}_h \in W_h \text{ avec } \mathbf{w}_h = 0 \text{ sur } \Gamma. \quad (4.13) \end{aligned}$$

Ici Ω_{s_h} et T_h sont donnés par 4.9 et 4.10.

REMARQUE 4.3.

La normale en chaque point du maillage est calculée par une méthode décrite dans [Eng]

4.3. Calcul de l'interface liquide-gaz.

Dans ce paragraphe le champ de vitesse pénalisé \mathbf{v} , défini sur tout le domaine de calcul, ainsi que l'enthalpie de la pièce sont connus. Leur calcul a été explicité dans le paragraphe précédent. Il s'agit maintenant de corriger la forme de l'interface liquide-gaz $\Gamma_{\ell g}$ grâce à l'équation 2.29.

4.3.1. Formulation du problème.

Reprenons tous les termes de l'équation 2.29. La courbure s'exprime en fonction de la paramétrisation $y_{\ell g}$ de l'interface comme l'opérateur différentiel du second ordre

$$\mathcal{K}_{\ell g}(y_{\ell g}) = \left(\frac{y'_{\ell g}}{(1 + y_{\ell g}^2)^{1/2}} \right)'.$$

La contrainte normale du liquide sur l'interface $\sigma_{n_{\ell g}}$ est déterminée en fonction de la vitesse normale pénalisée, grâce à l'équation 4.5

$$\sigma_{n_{\ell g}} = \frac{1}{\varepsilon} \left(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_{\ell g} - \frac{\rho_p}{\rho_\ell} \mathbf{v}_p \cdot \mathbf{n}_{\ell g} \right).$$

Les deux points triples $x_{s\ell g}^1, x_{s\ell g}^2$ sont définis par

$$\begin{aligned} x_{s\ell g}^1 &= \min\{x; (x, y) \in \partial\Omega \setminus \Gamma; \beta(u(x, y)) = \theta_{s\ell}\}, \\ x_{s\ell g}^2 &= \max\{x; (x, y) \in \partial\Omega \setminus \Gamma; \beta(u(x, y)) = \theta_{s\ell}\}. \end{aligned}$$

Notons $F : [x_{s\ell g}^1, x_{s\ell g}^2] \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction contenant tous les termes connus de l'équation 2.29

$$F_{\ell g} = \sigma_{n_{\ell g}} + p_{gp} + \rho_p (\mathbf{v}_p \cdot \mathbf{n}_{\ell g})^2 \left(1 - \frac{\rho_p}{\rho_\ell}\right).$$

Puisque le saut des pressions contenu dans le terme

$$\sigma_{n_{\ell g}} + p_{gp}$$

est défini à une constante additive près, il s'agit donc de trouver

$$y_{\ell g} : [x_{s\ell g}^1, x_{s\ell g}^2] \rightarrow \mathbb{R} \text{ et } C \in \mathbb{R}$$

tels que

$$\gamma_{\ell g} \mathcal{K}_{\ell g}(y_{\ell g}) = F_{\ell g} + C. \quad (4.14)$$

L'opérateur différentiel $\mathcal{K}_{\ell g}$ étant du second ordre, deux conditions aux limites sont nécessaires, plus une pour déterminer la constante inconnue C . Ces conditions sont imposées par la géométrie du dépôt de poudre (cf. figure 2.5) :

$$y_{\ell g}(x_{s\ell g}^1) = \delta, \quad (4.15)$$

$$y_{\ell g}(x_{s\ell g}^2) = 0, \quad (4.16)$$

$$y'_{\ell g}(x_{s\ell g}^1) = 0. \quad (4.17)$$

Nous déterminons la solution des équations 4.14 à 4.17 en appliquant un algorithme de Newton : soit $y_{\ell g}^0$ une bonne approximation de la solution (par exemple la paramétrisation du cercle passant par les deux points triples $x_{s\ell g}^1, x_{s\ell g}^2$ et dont la tangente est horizontale en $x_{s\ell g}^1$). Il s'agit, pour $n = 0, 1, 2, \dots$ et jusqu'à convergence, de trouver $y_{\ell g}^{n+1}$ vérifiant les conditions aux limites 4.15, 4.16 et 4.17 et $C \in \mathbb{R}$ tels que

$$\gamma_{\ell g} DK_{\ell g}(y_{\ell g}^n)[y_{\ell g}^{n+1} - y_{\ell g}^n] = -\gamma_{\ell g} \mathcal{K}_{\ell g}(y_{\ell g}^n) + F_{\ell g} + C, \quad (4.18)$$

où nous avons noté $DK_{\ell g}$ la dérivée de Frechet de l'opérateur $\mathcal{K}_{\ell g}$ définie par

$$DK_{\ell g}(y)[z] = \left(\frac{z'}{(1+y'^2)^3} \right)'.$$

4.3.2. Discrétisation.

Soit $x_i, i = 0, N$, les premières coordonnées des sommets de la triangulation \mathcal{T}_h situés sur le bord $\partial\Omega \setminus \Gamma$ et numérotées dans l'ordre croissant (cf. figure 4.2)

$$x_{s\ell g}^1 = x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N = x_{s\ell g}^2.$$

Soit Z_h l'espace discret défini par :

$$Z_h = \{z_h \in \mathcal{C}^0([x_{s\ell g}^1, x_{s\ell g}^2]) ; z_h(x_{s\ell g}^2) = 0\},$$

à chaque itération de l'algorithme de Newton, il s'agit donc, connaissant $y_h^n \in Z_h$ avec $y_h^n(x_{s\ell g}^1) = \delta$, de

trouver $y_h^{n+1} \in Z_h$ avec $y_h^{n+1}(x_{s\ell g}^1) = \delta$ et $C \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\begin{aligned} & -\gamma_{\ell g} \int_{x_{s\ell g}^1}^{x_{s\ell g}^2} \frac{(y_h^{n+1} - y_h^n)' z_h'}{(1 + y_h^{n+1\prime 2})^3} dx \\ & = -\gamma_{\ell g} \int_{x_{s\ell g}^1}^{x_{s\ell g}^2} \frac{y_h^{n\prime} z_h'}{(1 + y_h^{n\prime 2})^3} dx + \int_{x_{s\ell g}^1}^{x_{s\ell g}^2} (F_{\ell g} + C) z_h dx \quad \forall z_h \in Z_h. \end{aligned} \quad (4.19)$$

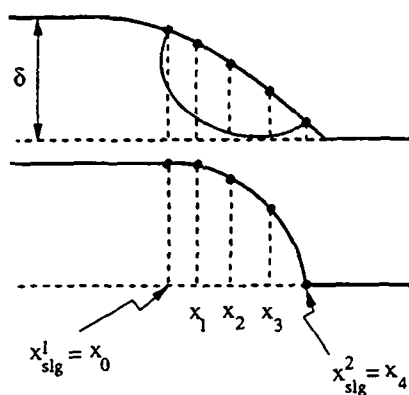


Figure 4.2: notations.

REMARQUE 4.4.

Dans le cas de la refusion par laser, la condition aux limites 4.17 est remplacée par la condition d'incompressibilité 2.41 et il s'agit de

trouver $y_h^{n+1} \in Z_h$ tel que $y_h^n(x_{slg}^1) = 0$ et $C \in \mathbb{R}$ tel que :

$$-\gamma_{lg} \int_{x_{slg}^1}^{x_{slg}^2} \frac{(y_h^{n+1} - y_h^n)' z_h'}{(1 + y_h^{n'2})^3} dx = -\gamma_{lg} \int_{x_{slg}^1}^{x_{slg}^2} \frac{y_h^{n'} z_h'}{(1 + y_h^{n'2})^3} dx + \int_{x_{slg}^1}^{x_{slg}^2} (F_{lg} + C) z_h dx,$$

$$\forall z_h \in Z_h \text{ avec } z_h(x_{slg}^1) = 0, \quad (4.20)$$

et

$$\int_{x_{slg}^1}^{x_{slg}^2} y_h dx = 0. \quad (4.21)$$

4.4. Résultats numériques.

Nous présentons dans ce paragraphe des résultats numériques pour les deux types de traitement (refusion et recouvrement par laser). Rappelons au lecteur que, dans notre modèle, la refusion par laser est un cas particulier du recouvrement par laser où nous imposons une épaisseur de dépôt nulle $\delta = 0$ ou, de façon équivalente d'après l'équation 2.14, un débit de poudre nul $\dot{m}_p = 0$. Les paramètres du procédé (ou conditions de traitement) que nous avons fait varier sont

- la vitesse de traitement V_∞ , i.e. la vitesse de déplacement de la pièce par rapport au laser,
- la distribution d'énergie du laser q_L ,
- la distribution de la quantité de mouvement de la poudre sur l'interface liquide-gaz $\rho_p \mathbf{V}_p$.

Nous avons également fait varier les grandeurs physiques caractérisant les propriétés de l'interface liquide-gaz Γ_{lg} , à savoir

- le coefficient de tension de surface γ_{lg} (intervenant dans l'équation d'équilibre des forces dans la direction normale à l'interface, équation 2.29),
- la dérivée du coefficient de tension de surface par rapport à la température $d\gamma_{lg}/dT$ (intervenant dans l'équation d'équilibre des forces dans la direction tangente à l'interface, équation 2.28).

Les propriétés de la pièce à traiter et de la poudre déposée sont celles de la Stellite-6 (c'est le matériau à partir duquel est fait la poudre utilisée lors du recouvrement d'un acier) et sont fixées pour tous les calculs (cf. tableau 4.1). Nous avons régularisé la fonction β définie dans le paragraphe 3.2 par la fonction β_ϵ définie dans le paragraphe 3.7.1. Rappelons (cf. annexe 1) que cette régularisation correspond en première approximation à considérer la solidification d'un alliage binaire entre les deux températures $T_{s\ell}^e$ (définie dans 3.84) et $T_{s\ell}$. Les conditions aux limites pour la température sur le bord Γ (équation 2.30) sont les

mêmes que dans le paragraphe 3.7.2, à savoir :

$$T_{\infty} = T_{amb} + \frac{P_L}{k_s \pi} \exp\left(\frac{\rho_s c_{p_s} V_{\infty}}{2k_s} x\right) K_0\left(\frac{\rho_s c_{p_s} V_{\infty}}{2k_s} (x^2 + y^2)^{1/2}\right);$$

T_{amb} étant la température ambiante et K_0 la fonction de Bessel modifiée de première espèce.

chaleur spécifique	$\rho_s c_{p_s} = \rho_{\ell} c_{p_{\ell}}$	$3.53 \cdot 10^6$	$J/m^3 \cdot ^{\circ}C$
conductivité thermique	$k_s = k_{\ell}$	14.7	$W/m \cdot ^{\circ}C$
densité	$\rho_s = \rho_{\ell}$	8380.	kg/m^3
chaleur latente volumique	$\rho_{\ell} \ell_{s\ell}$	$2.5 \cdot 10^9$	J/m^3
température de fusion	$T_{s\ell}$	1300.	$^{\circ}C$
paramètre de régularisation de β_{ϵ}	ϵ	0.05	
température de début de solidification	$T_{s\ell}^{\epsilon}$	1265.	$^{\circ}C$

Tableau 4.1 : valeurs des coefficients physiques caractérisant le matériau.

Précisons maintenant les conditions de traitement que nous avons choisies. Le CTML (Centre de Traitement des Matériaux par Laser) de l'Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne dispose d'un laser CO_2 d'une puissance de 1500 W, ce qui permet aux chercheurs d'effectuer des traitements de refusion et recouvrement pour des vitesses V_{∞} comprises entre 0.001 et 1 m/s, avec, dans le cas du recouvrement, des hauteurs de poudre variant entre 0.001 et 0.0002 m. Nous avons choisi trois vitesses comprises entre ces valeurs extrêmes (0.001, 0.01, 0.1 m/s), avec, dans le cas du recouvrement, trois hauteurs différentes (0.001, 0.0005, 0.0002 m). Pour chacune de ces vitesses, nous avons ajusté la puissance du laser effectivement absorbée par la pièce P_L de façon à obtenir des bains liquides de la même taille (environ 2 mm de long). Rappelons qu'en pratique, il faut multiplier la valeur de P_L par un rapport deux à dix pour obtenir la puissance effectivement délivrée par le faisceau laser. Les conditions de traitement sont consignées dans le tableau 4.2.

Sauf indication, la distribution d'énergie q_L du laser sur le bord supérieur du domaine de calcul est donné par une loi gaussienne :

$$q_L(x) = \frac{P_L}{\sqrt{2\pi}\sigma_L} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_L^2}\right),$$

V_∞ (m/s)	Refusion		Recouvrement	
	P_L (W/m)	δ (m)	P_L (W/m)	δ (m)
0.001	$0.26 \cdot 10^5$	0.	$0.26 \cdot 10^5$	0.001
0.01	$0.60 \cdot 10^5$	0.	$0.80 \cdot 10^5$	0.0005
0.1	$2.2 \cdot 10^5$	0.	$3.0 \cdot 10^5$	0.0002

Tableau 4.2 : puissance du laser P_L et épaisseur de dépôt δ en fonction de la vitesse de traitement V_∞ .

$\sigma_L = 0.0004$ m étant la dispersion du faisceau (un faisceau de dispersion σ_L provoque, dans une plaque de plexiglas, un trou de diamètre $2\sigma_L$). Sur chaque figure, nous avons reporté la distribution d'énergie du laser sur le bord supérieur. Finalement, les coordonnées extrémales du domaine de calcul x_s^1 , x_s^2 et y_s^1 (cf. figure 2.5) sont fixes pour tous les calculs

$$x_s^1 = -0.02m, \quad x_s^2 = 0.003m, \quad y_s^1 = -0.004m,$$

et les maillages initiaux sont consignés dans la figure 4.3.

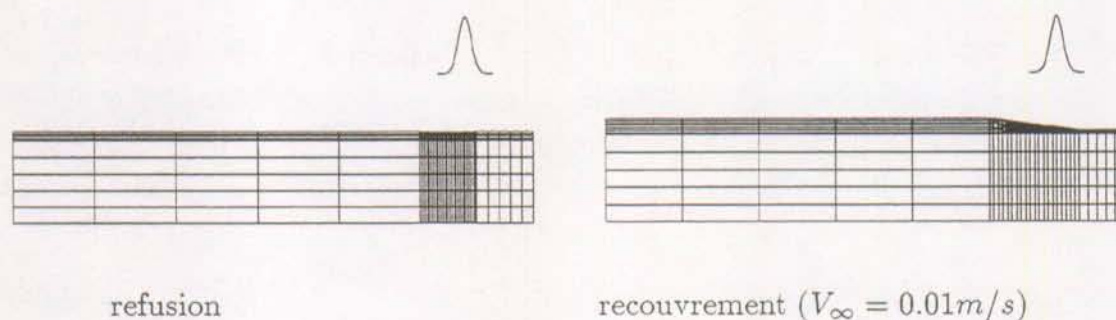


Figure 4.3: maillages initiaux grossiers pour la refusion et le recouvrement par laser.
Le maillage utilisé en pratique contient environ 2000 sommets dans la zone située sous le laser.

REMARQUE 4.5.

Les résultats numériques exposés dans ce paragraphe ne sont pas destinés à être directement comparés avec des résultats expérimentaux, et ceci pour plusieurs raisons :

- les traitements effectués au CTML le sont sur des pièces de faibles dimensions. Les pièces ont donc tendance à se réchauffer au cours du traitement et l'hypothèse stationnaire n'est plus satisfaite.
- Pour un faisceau laser de section circulaire, les phénomènes impliqués sont tridimensionnels. Bien qu'il soit possible d'obtenir, grâce à des jeux de miroirs, des faisceaux laser dont la dimension transversale est grande par rapport à l'extension longitudinale, de telles expériences sont peu réalistes étant donné le laser dont dispose le CTML.
- Les conditions aux limites réelles pour la température sont inconnues.
- Les valeurs de certains coefficients physiques sont peu connues (en particulier les propriétés de tension de surface sur l'interface liquide-gaz).
- Les phénomènes de réflexion et d'absorption du faisceau laser sur la pièce sont négligés alors qu'ils sont importants en pratique.

Dans le cas du recouvrement par laser, il faut en outre savoir que :

- le rendement de la poudre (i.e. la fraction de poudre qui colle à la pièce par rapport à la fraction de poudre qui quitte la buse) est compris entre 0.1 et 0.8 et dépend fortement des conditions de traitement. De plus, la géométrie du jet de poudre est difficilement contrôlable et en pratique, la poudre arrive dans tout le bain liquide.
- La pièce à traiter et la poudre ne sont pas constitués du même matériau (par exemple acier pour la pièce et mélange de Cobalt, Nickel et Tungstène pour la poudre). Lorsque les propriétés physiques sont très différentes, des phénomènes complexes et difficilement modélisables interviennent.
- La puissance et la quantité de poudre étant arbitrairement choisies, la profondeur refondue dans le matériau de base n'est pas contrôlée. Expérimentalement, il s'agit d'ajuster ces paramètres de façon à refondre une faible couche de la pièce. En effet, il faut assurer une bonne liaison métallurgique du dépôt sans toutefois provoquer une dilution exagérée du matériau de base. Hoadley [Hoa3] a effectué une optimi-

sation des conditions de traitement sans toutefois tenir compte des mouvements de convection dans le bain.

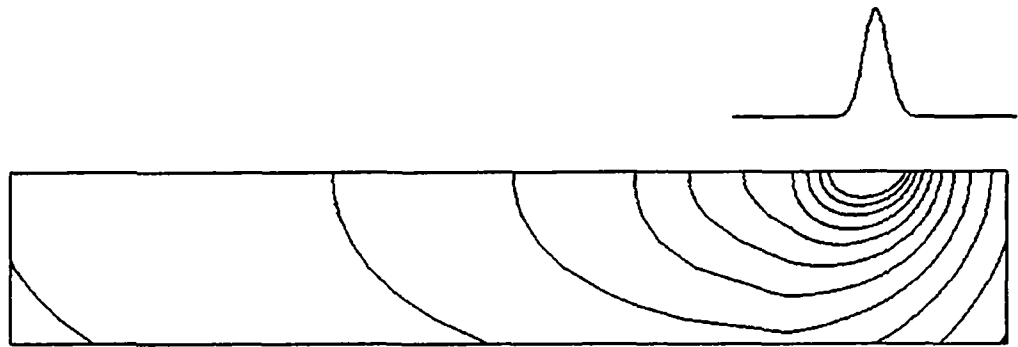
Notre modèle intéresse néanmoins fortement les chercheurs du CTML, d'une part car il permet de comprendre la physique des phénomènes existant dans le bain liquide et de pondérer leur importance respectives (par exemple l'importance du champ de vitesse dans le bain, de la position du jet de poudre).

4.4.1. Refusion par laser.

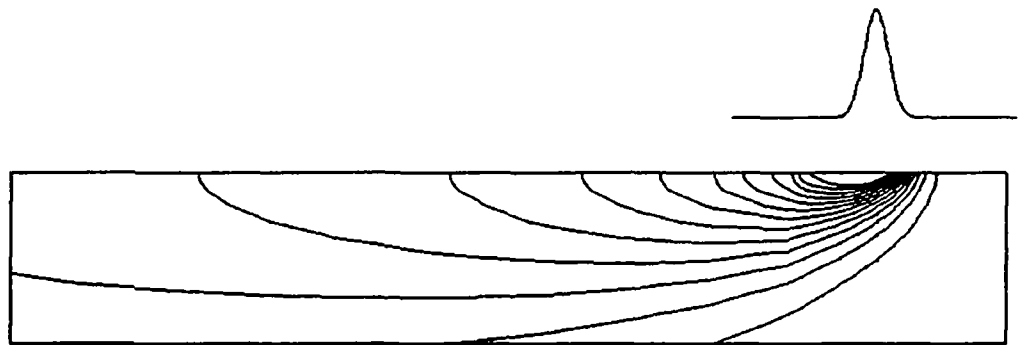
Comparons d'abord les champs de température obtenus pour trois différentes vitesses de traitement, lorsque nous négligeons les mouvements de convection dans le bain liquide i.e. lorsque

$$v_\ell = V_\infty \quad \text{dans } \Omega_\ell.$$

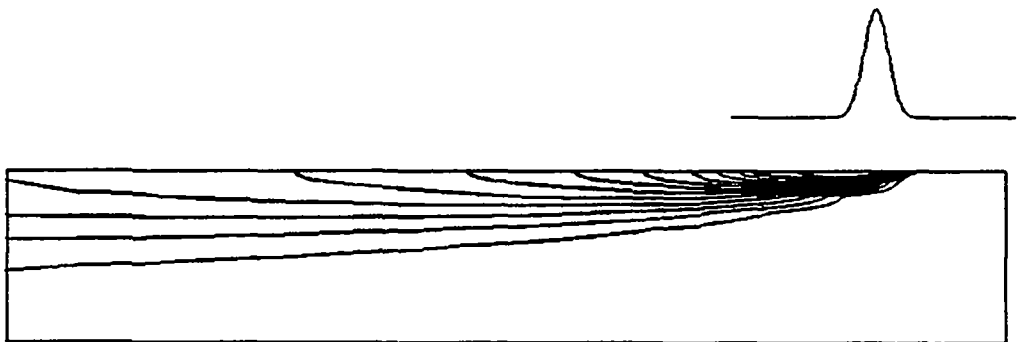
La figure 4.4 représente les isothermes dans tout le domaine de calcul et la figure 4.5 les isothermes dans le bain liquide. Plus V_∞ est grand, plus l'effet de couche limite thermique est important et plus le bain liquide a tendance à s'allonger.



$V_\infty = 0.001 \text{ m/s}$: isothermes de 400 à 1300 °C par pas de 100 °C.



$V_\infty = 0.01 \text{ m/s}$: isothermes de 100 à 1300 °C par pas de 100 °C.



$V_\infty = 0.1 \text{ m/s}$: isothermes de 100 à 1300 °C par pas de 100 °C.

Figure 4.4: comparaison des isothermes dans tout le domaine de calcul pour trois vitesses de déplacement de la pièce lors d'un traitement de refusion par laser en négligeant les mouvements de convection dans le bain.

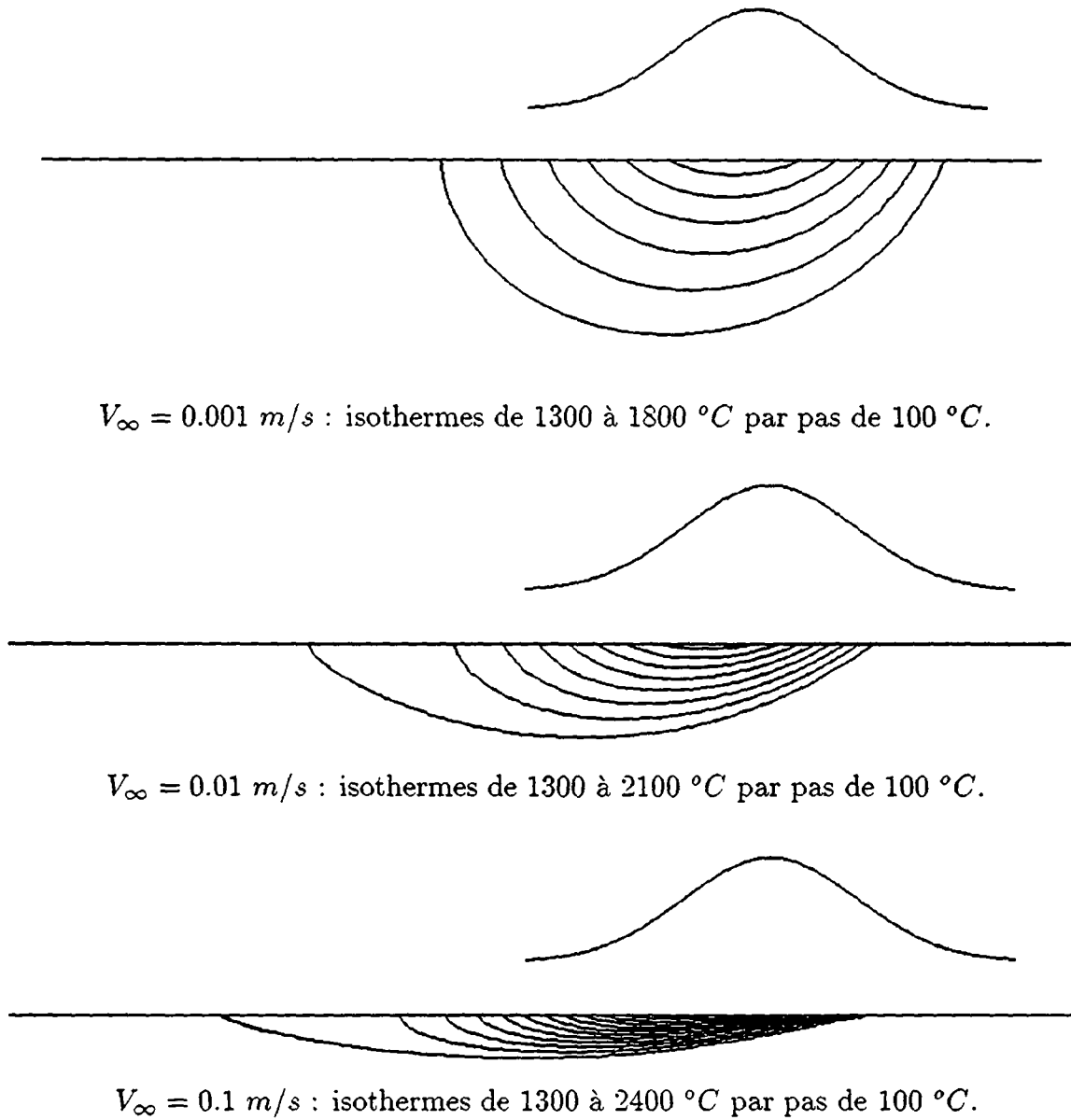


Figure 4.5: comparaison des isothermes dans le bain liquide pour trois vitesses de déplacement de la pièce lors d'un traitement de refusion par laser en négligeant les mouvements de convection dans le bain.

Dans la suite de ce sous-paragraphe, nous étudions en détail l'influence des différents paramètres du traitement à la vitesse $V_\infty = 0.01 \text{ m/s}$. En particulier, nous vérifions l'importance des mouvements de convection dans le bain sur la forme du bain liquide. Nous exposons ensuite quelques résultats pour les deux autres vitesses de traitement ($V_\infty = 0.001 \text{ m/s}$ et $V_\infty = 0.1 \text{ m/s}$).

La figure 4.6 représente les isothermes, les lignes de courant et le champ de vitesse \mathbf{v} dans le bain liquide pour $\gamma_{lg} = 1. \text{ N/m}$ et $d\gamma_{lg}/dT = -3. \cdot 10^{-4} \text{ N/m}^\circ\text{C}$. Rappelons que le premier de ces deux coefficients caractérise la rigidité de l'interface tandis que l'autre pondère l'importance des forces thermocapillaires (qui sont le moteur de la convection dans le bain liquide). Les forces thermocapillaires agissent du point le plus chaud vers le point le plus froid du bain (i.e. du centre du bain vers les bords), provoquant la formation de deux rouleaux tournant en sens inverse. Ce champ de vitesse uniformise la température et modifie considérablement la forme du bain.

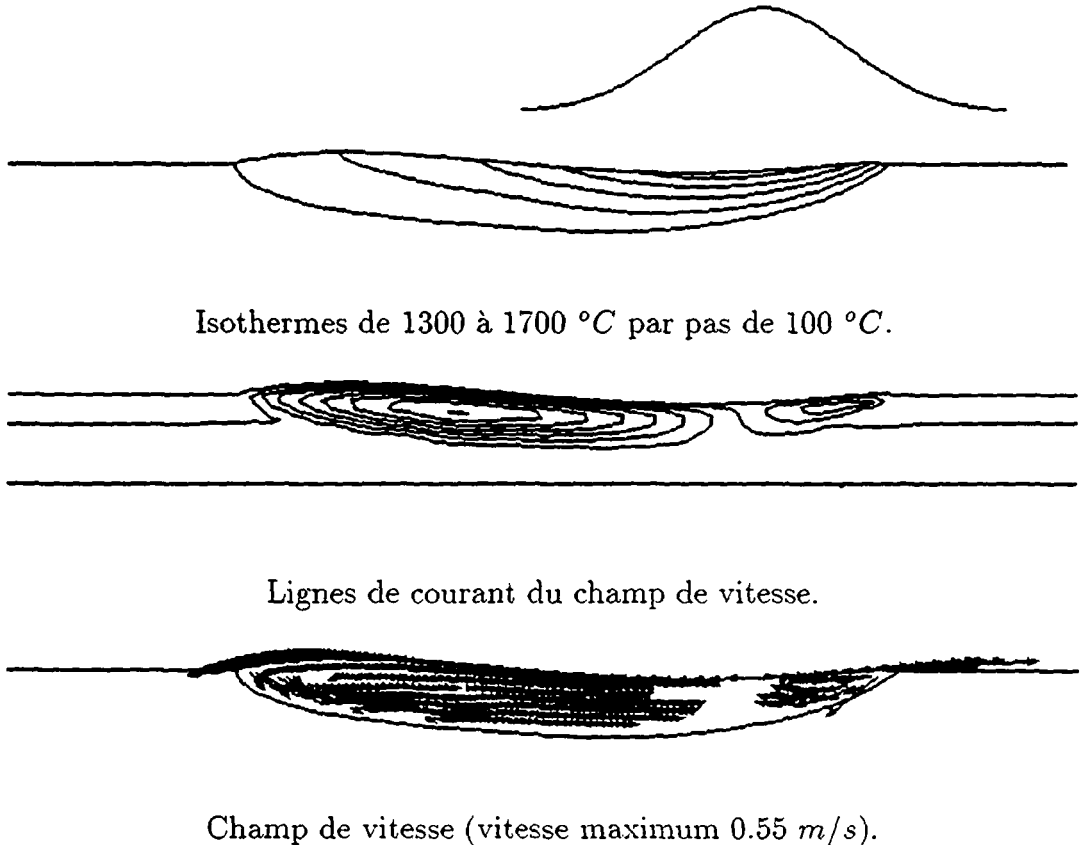
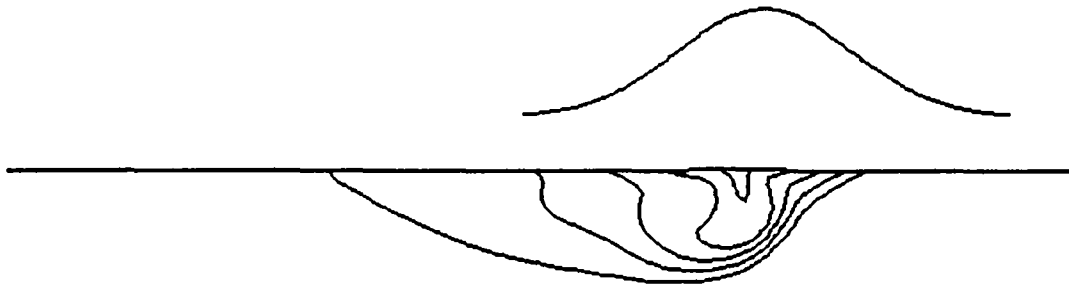


Figure 4.6: Isothermes, lignes de courant du champ de vitesse et champ de vitesse pour $V_\infty = 0.01 \text{ m/s}$, $\gamma_{lg} = 1. \text{ N/m}$ et $d\gamma_{lg}/dT = -3. \cdot 10^{-4} \text{ N/m}^\circ\text{C}$.

Nous avons considéré le cas où le coefficient $d\gamma_{lg}/dT$ est positif, ce qui a pour effet

d'inverser la direction des rouleaux du champ de vitesse. Nous avons effectué un calcul avec $d\gamma_{lg}/dT = 3 \cdot 10^{-4} \text{ N/m}^\circ\text{C}$ et comme l'indique la figure 4.7 le bain liquide a tendance à s'approfondir.



Isothermes de 1300 à 1700 °C par pas de 100 °C.



Lignes de courant du champ de vitesse (vitesse maximum 0.80 m/s).

Figure 4.7: Isothermes et lignes de courant du champ de vitesse pour $V_\infty = 0.01 \text{ m/s}$, $\gamma_{lg} = 1 \text{ N/m}$ et $d\gamma_{lg}/dT = 3 \cdot 10^{-4} \text{ N/m}^\circ\text{C}$.



Isothermes de 1300 à 1700 °C par pas de 100 °C.

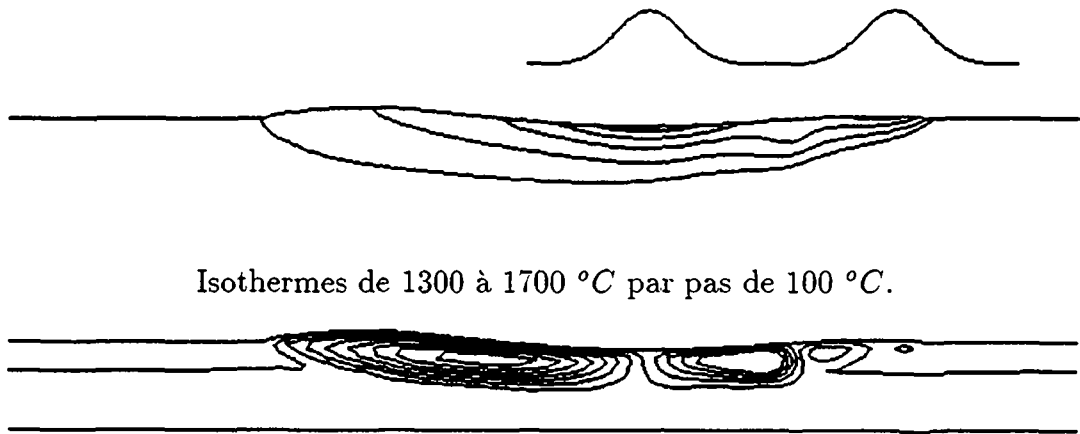


Lignes de courant du champ de vitesse (vitesse maximum 0.50 m/s).

Figure 4.8: Isothermes et lignes de courant du champ de vitesse pour $V_\infty = 0.01 \text{ m/s}$, $\gamma_{lg} = 0.5 \text{ N/m}$ et $d\gamma_{lg}/dT = -3 \cdot 10^{-4} \text{ N/m}^\circ\text{C}$.

Le coefficient de tension de surface γ_{lg} caractérise la rigidité de l'interface liquide-gaz. Comme indiqué sur les figures 4.6 et 4.8 (respectivement $\gamma_{lg} = 1. N/m$ et $\gamma_{lg} = 0.5 N/m$), plus ce coefficient est petit et plus l'interface a tendance à se déformer. Signalons que les valeurs de ce coefficient sont mal connues, particulièrement au voisinage des points triples solide-liquide-gaz.

Finalement, nous avons étudié l'influence de la distribution d'énergie du faisceau laser sur le champ de vitesse. Nous avons introduit une distribution d'énergie correspondant à deux lois gaussiennes légèrement décentrées par rapport au faisceau, correspondant au mode TEM 01 du laser. Comme le montre la figure 4.9, le gradient de température et le champ de vitesse devant le faisceau sont légèrement modifiés, alors que l'arrière du bain est peu altéré.



Isothermes de 1300 à 1700 °C par pas de 100 °C.

Lignes de courant du champ de vitesse (vitesse maximum 0.66 m/s).

Figure 4.9: Isothermes et lignes de courant du champ de vitesse pour une distribution d'énergie du laser correspondant à deux lois gaussiennes décentrées pour $V_{\infty} = 0.01 m/s$, $\gamma_{lg} = 1. N/m$ et $d\gamma_{lg}/dT = -3. 10^{-4} N/m^{\circ}C$.

Nous présentons maintenant quelques calculs pour les deux autres vitesses de traitement. A vitesse lente ($V_\infty = 0.001 \text{ m/s}$) et sans tenir compte des mouvements de convection dans le bain ($v = V_\infty$), le bain liquide est presque circulaire comme l'indique la figure 4.5. L'introduction du champ de vitesse v dans le bain a pour effet de d'allonger considérablement la forme du bain tout en diminuant sa profondeur (cf. figure 4.10). Notons que l'interface liquide-gaz est peu déformée par le champ de vitesse.

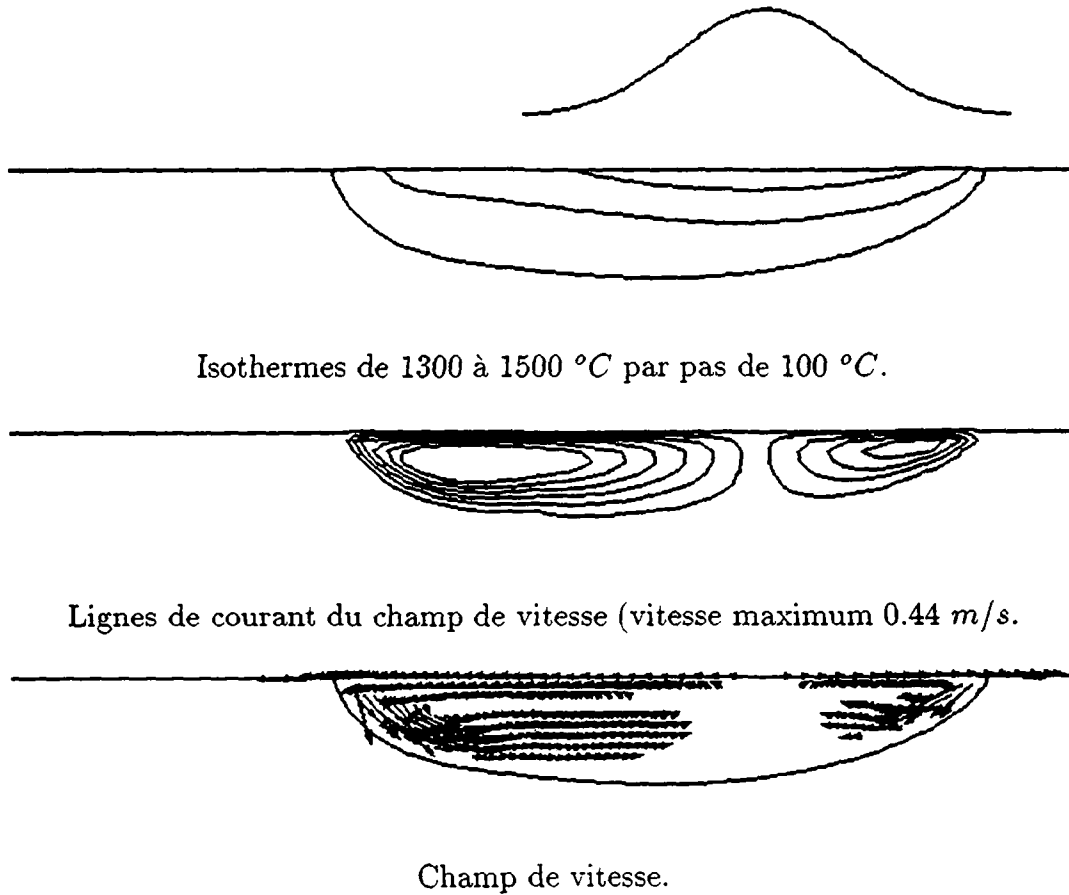
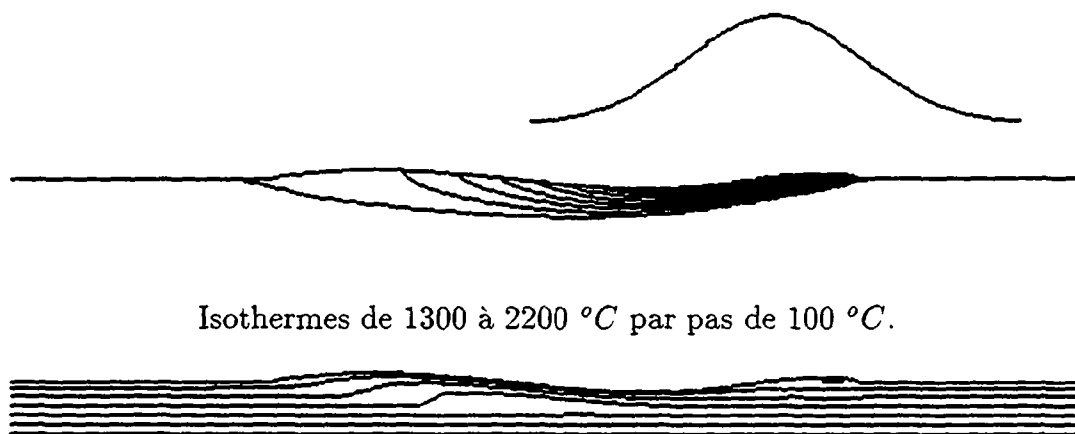


Figure 4.10: Isothermes, lignes de courant du champ de vitesse et champ de vitesse pour $V_\infty = 0.001 \text{ m/s}$, $\gamma_{lg} = 1 \text{ N/m}$ et $d\gamma_{lg}/dT = -3.10^{-4} \text{ N/m}^\circ\text{C}$.

Finalement, nous avons reporté sur la figure 4.11 les résultats d'un calcul à vitesse rapide ($V_\infty = 0.1 \text{ m/s}$).



Isothermes de 1300 à 2200 °C par pas de 100 °C.

Lignes de courant du champ de vitesse (vitesse maximum 0.36 m/s).

Figure 4.11: Isothermes et lignes de courant du champ de vitesse pour $V_\infty = 0.1 \text{ m/s}$, $\gamma_{\ell g} = 1 \text{ N/m}$ et $d\gamma_{\ell g}/dT = -1 \cdot 10^{-4} \text{ N/m}^\circ\text{C}$.

Comparons, pour les trois vitesses de traitement, la forme des bains obtenus avec et sans convection dans le liquide (figure 4.5 avec les figures 4.6, 4.10 et 4.11). Nous observons que plus la vitesse de traitement est importante, plus la différence est minime. En effet, plus la vitesse de traitement est importante, plus la différence $v_\ell - V_\infty$ devient petite.

Comme le montrent les différents calculs, la prise en compte du champ de vitesse dans le bain liquide est nécessaire à la détermination précise du champ de température dans la pièce. Des résultats numériques issus de ce modèle, les métallurgistes peuvent par exemple extraire avec précision les vitesses de solidification ainsi que les gradients de température sur l'interface solide-liquide. Il faudrait néanmoins en toute rigueur affiner considérablement le maillage de façon à tenir compte des effets de couche limite.

4.4.2. Recouvrement par laser.

La loi de distribution de la densité partielle de poudre ρ_p est supposée gaussienne, le module de la vitesse de la poudre v_p est fixé à 6 m/s et, sauf indication, l'angle d'injection est de 55° par rapport à l'horizontale. Nous avons, sur toutes les figures représentant le bain liquide, reporté la quantité de mouvement de la poudre sur l'interface liquide-gaz

$$\frac{\rho_p}{\rho_\ell} \mathbf{v}_p,$$

normalisée par la densité du liquide afin de donner des vecteurs comparables à ceux dans le bain liquide. Comme pour la refusion par laser, nous comparons d'abord les champs de température obtenus pour trois différentes vitesses de traitement, lorsque nous négligeons les mouvements de convection dans le bain liquide :

$$\mathbf{v}_\ell = \mathbf{V}_\infty \quad \text{dans } \Omega_\ell.$$

La figure 4.12 représente les isothermes dans tout le domaine de calcul et la figure 4.13 les isothermes dans le bain liquide. Comme pour la refusion, plus V_∞ est grand, plus le bain liquide a tendance à s'allonger. Notons que puisque $\mathbf{v}_\ell = \mathbf{V}_\infty$, les équations 2.27, 2.28 et 2.29 ne sont pas vérifiées et la figure 4.13 n'a pas de sens physique puisque la poudre ne peut se déposer dans tout le bain.

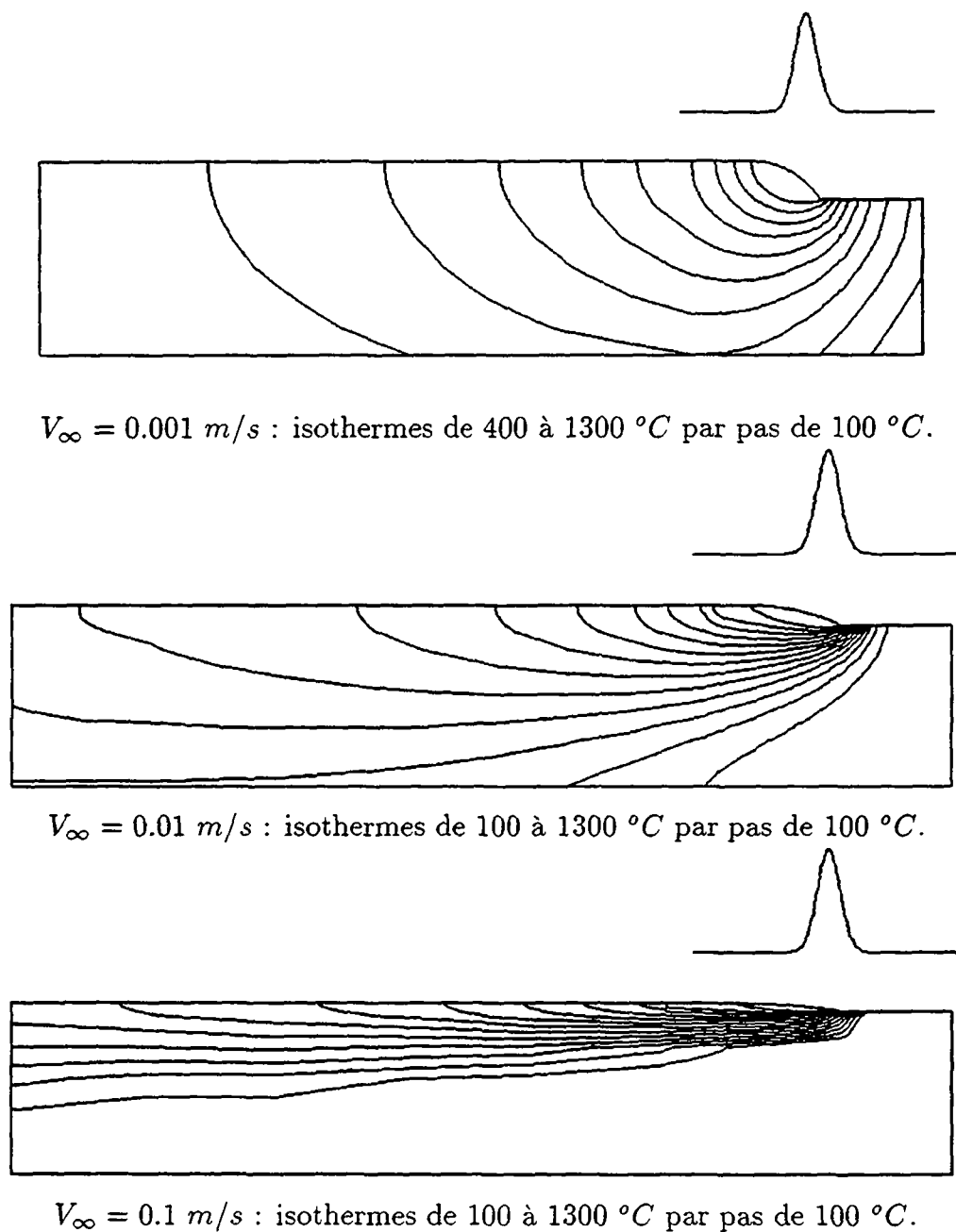


Figure 4.12: comparaison des isothermes dans tout le domaine de calcul pour trois vitesses de déplacement de la pièce lors d'un traitement de recouvrement par laser en négligeant les mouvements de convection dans le bain liquide.

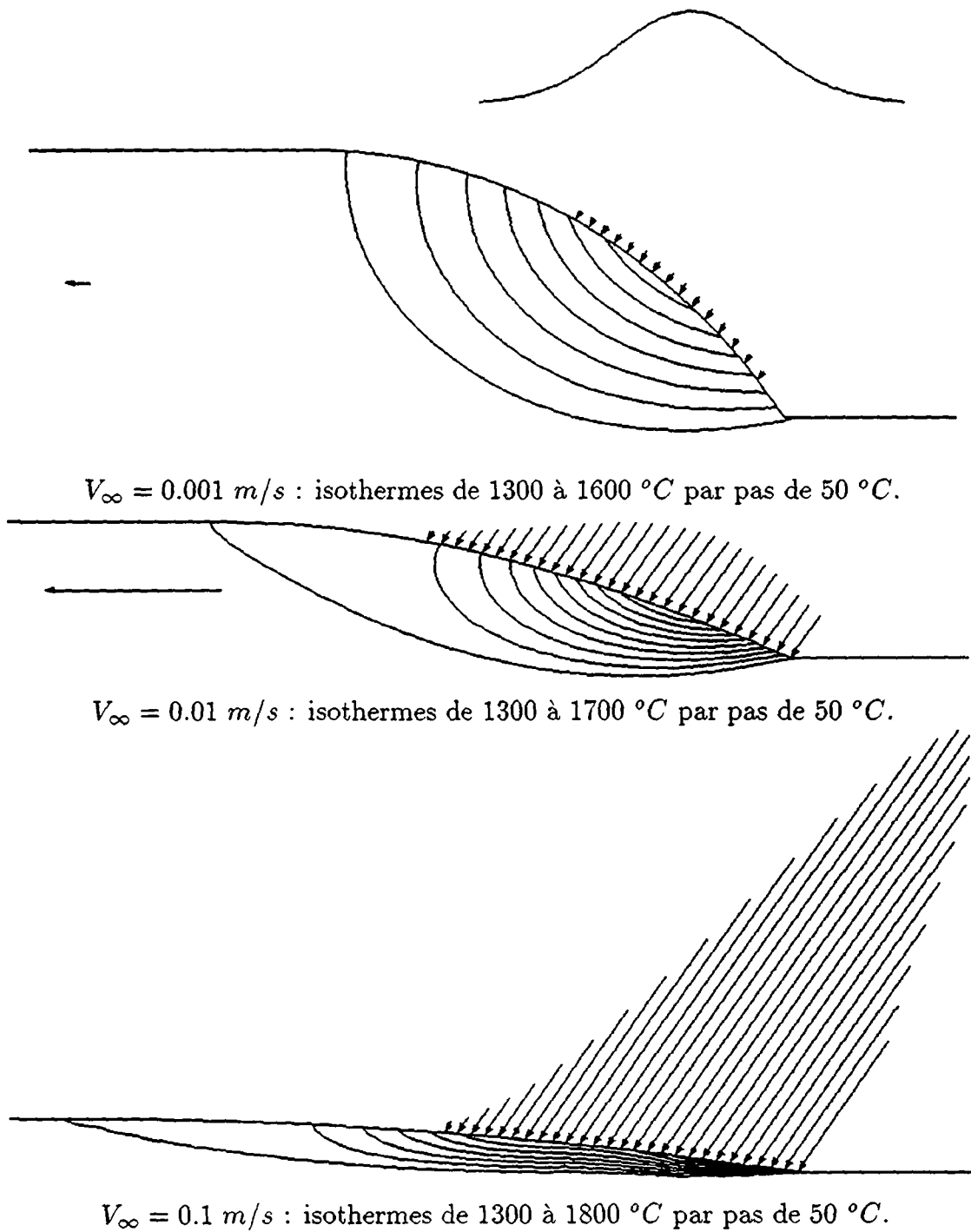


Figure 4.13: comparaison des isothermes dans le bain liquide pour trois vitesses de déplacement de la pièce lors d'un traitement de recouvrement par laser en négligeant les mouvements de convection dans le bain liquide.

Etudions la convergence numérique de l'algorithme de découplage proposé dans le paragraphe 4.1 : la figure 4.14 reproduit la forme des différents bains liquides obtenus au cours des itérations pour $V_\infty = 0.01$ m/s et en négligeant les mouvements de convection dans le bain liquide. Il faut entre 7 et 15 itérations pour obtenir la convergence de l'algorithme, soit environ 10 mn de temps CPU sur une station de travail Silicon Graphics 4D/35 (95% du temps CPU est utilisé pour résoudre le problème de changement de phase). Dans le cas où le champ de vitesse dans le liquide est calculé, le temps CPU devient nettement plus important (3 heures environ). Avant de considérer l'influence du champ de vitesse dans le bain liquide, formulons quelques remarques concernant la position du jet de poudre par rapport au bain liquide : plus la vitesse de traitement est grande, plus la position du jet doit être déterminée avec précision. En effet, pour $V_\infty = 0.001$ m/s, nous avons observé numériquement que la poudre peut être injectée indifféremment sur l'avant ou l'arrière du bain, alors qu'aux deux autres vitesses de traitement, la position du jet doit être déterminée avec précision. Si nous injectons trop de poudre à l'arrière du bain, la quantité d'énergie fournie pour refondre la poudre est insuffisante, ce qui se traduit numériquement par le fait que l'algorithme ne converge plus.

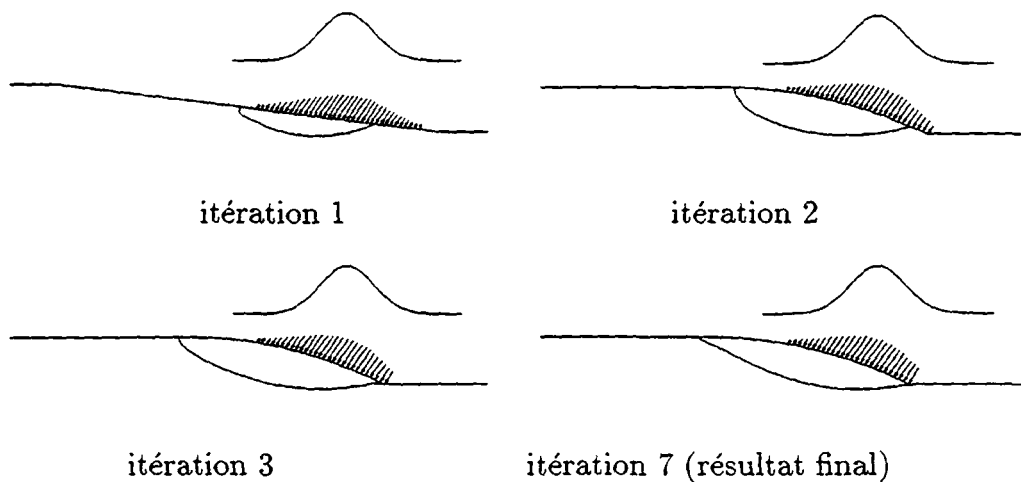
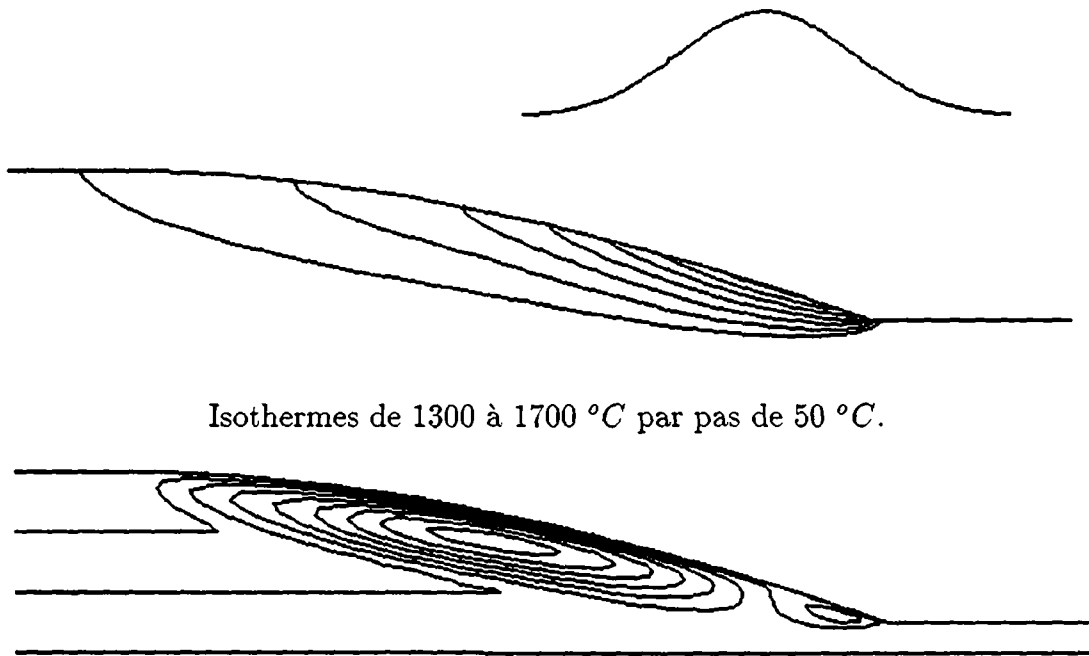


Figure 4.14: évolution de la forme du bain liquide au cours des itérations de l'algorithme de découplage du paragraphe 4.1 ($V_\infty = 0.01$ m/s, $\mathbf{v} = \mathbf{V}_\infty$).

Considérons maintenant l'influence du champ de vitesse dans le liquide. Nous avons d'abord effectué un calcul tenant compte des mouvements de convection dans le bain liquide mais en ne considérant que les forces thermocapillaires dans l'équation d'équilibre des forces tangentes 2.28. Comme dans le cas de la refusion, nous obtenons deux rouleaux tournant en sens inverse, partant du point le plus chaud (cf. figure 4.15). Nous avons indiqué sur la figure 4.16 les lignes de courant du champ de vitesse pour deux autres valeurs du coefficient $d\gamma_{lg}/dT$.



Isothermes de 1300 à 1700 °C par pas de 50 °C.

Lignes de courant du champ de vitesse (vitesse maximum 0.42m/s).

Figure 4.15: Isothermes et lignes de courant du champ de vitesse en ne tenant compte que de l'effet thermocapillaire
 $V_{\infty} = 0.01 \text{ m/s}$, $\gamma_{lg} = 10. \text{ N/m}$ et $d\gamma_{lg}/dT = -3. 10^{-4} \text{ N/m}^{\circ}\text{C}$.



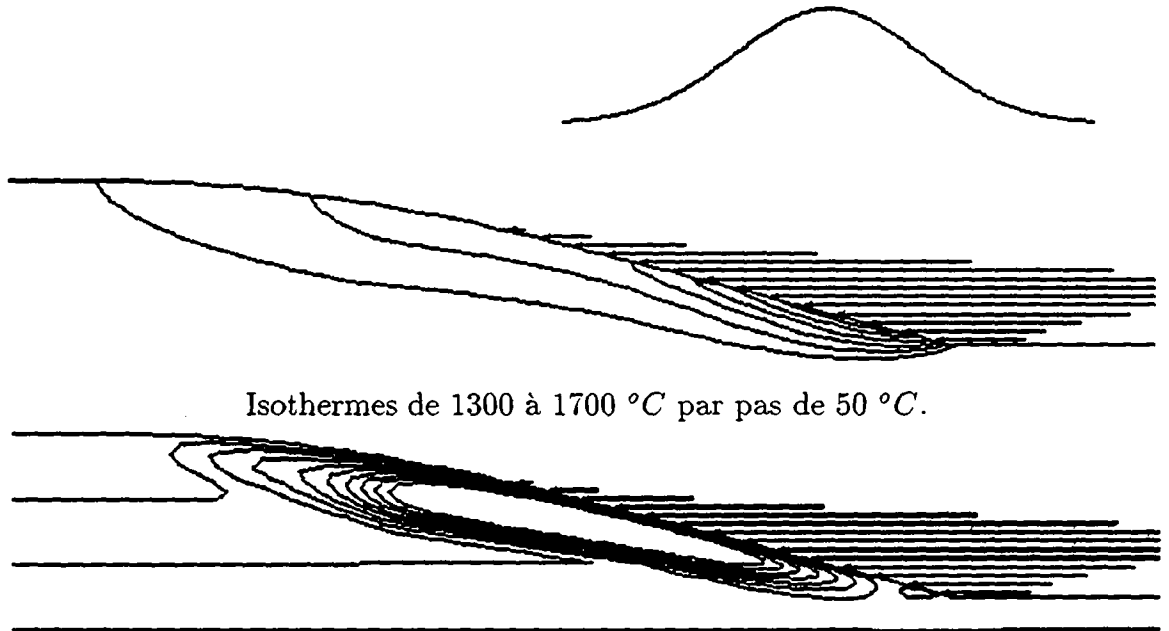
a)



b)

Figure 4.16: idem figure précédente sauf :
 $d\gamma_{lg}/dT = -1. 10^{-4}$ a) et $-5. 10^{-5} \text{ N/m}^{\circ}\text{C}$ b).

Nous avons ensuite tenu compte de l'effet de l'injection de la poudre dans le calcul du champ de vitesse v . Rappelons que l'injection de poudre a une contribution sur l'interface liquide-gaz par le biais des équations 2.27 (continuité du flux de masse dans la direction normale), 2.28 et 2.29 (équilibre des forces). La poudre transfère au liquide sa quantité de mouvement dans le sens normal à l'interface et induit une pression. Elle provoque également un effort tangent, fonction de l'angle d'injection. La figure 4.17 représente les résultats obtenus pour une injection horizontale. Nous observons, d'après le tracé des lignes de courant, que l'injection de poudre a pour effet d'annihiler le premier rouleau du champ de vitesse et de renforcer le deuxième (cf. figure 4.17).



Isothermes de 1300 à 1700 °C par pas de 50 °C.

Lignes de courant du champ de vitesse (vitesse maximum 1.10m/s).

Figure 4.17: Isothermes et lignes de courant du champ de vitesse en tenant compte de l'injection de poudre horizontale.

$V_{\infty} = 0.01 \text{ m/s}$, $\gamma_{lg} = 10. \text{ N/m}$ et $d\gamma_{lg}/dT = -3. \cdot 10^{-4} \text{ N/m}^{\circ}\text{C}$.

Présentons maintenant quelques résultats aux deux autres vitesses de traitement. Les effets de l'injection de poudre sont d'autant plus marqués que la quantité $V_\infty \delta$ est grande. Dans notre cas, la quantité de poudre injectée varie dans un rapport 25 ($V_\infty = 0.001 \text{ m/s}$, $\delta = 0.001 \text{ m}$ contre $V_\infty = 0.1 \text{ m/s}$, $\delta = 0.0002 \text{ m}$). Les figures 4.18 et 4.19 montrent les effets de l'injection de poudre sur la vitesse dans le bain pour $V_\infty = 0.001 \text{ m/s}$. L'interface liquide-gaz est circulaire, ce qui prouve que le terme de courbure est prépondérant dans l'équation 2.29. La contribution de l'injection de poudre sur la vitesse normale du liquide (équation 2.27) est négligeable mais les effets tangents (équation 2.28) restent perceptibles. Finalement, les résultats à vitesse rapide ($V_\infty = 0.1 \text{ m/s}$) sont résumé dans la figure 4.20.

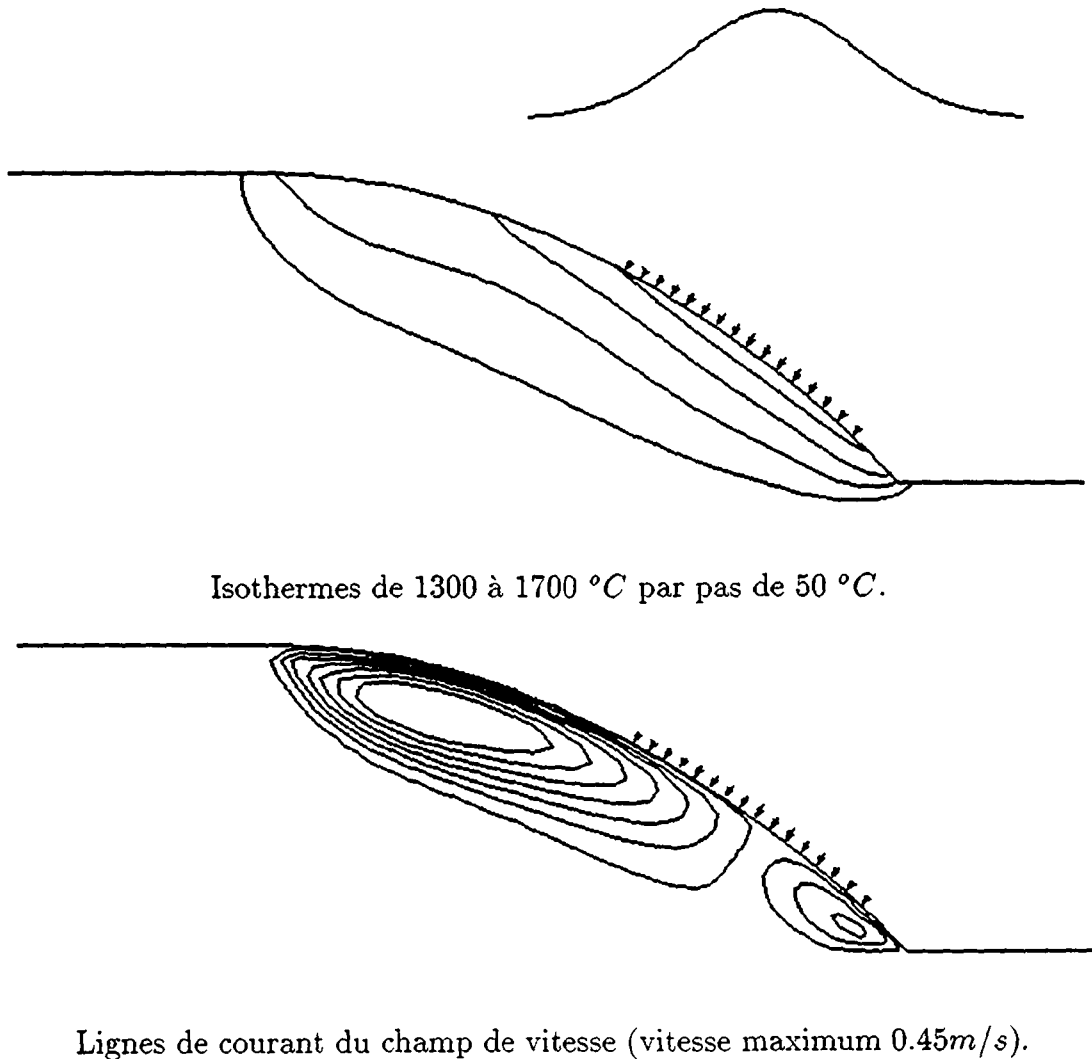
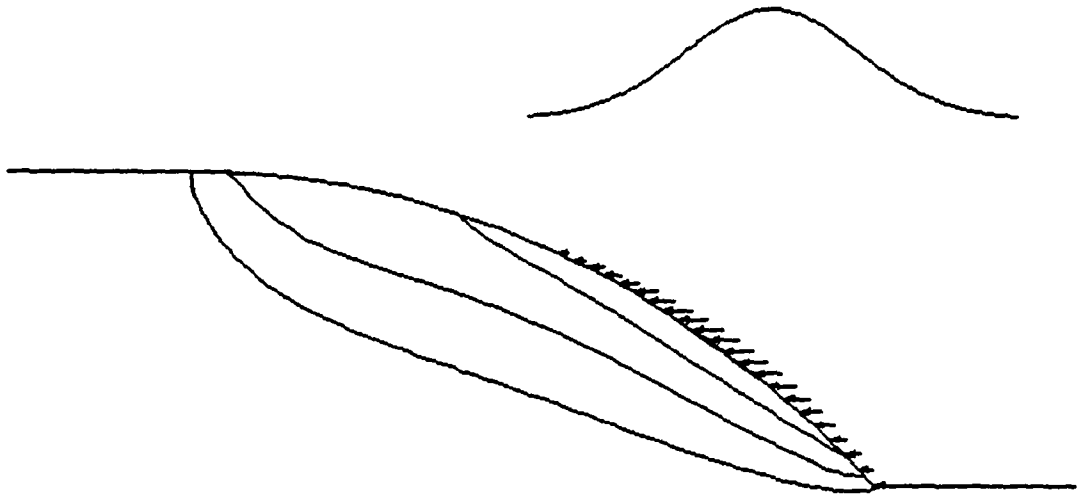
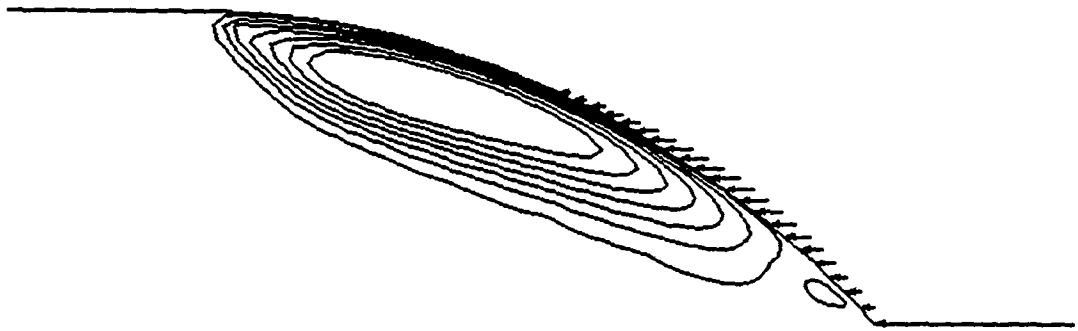


Figure 4.18: Isothermes et lignes de courant du champ de vitesse en tenant compte de l'injection de poudre.

$$V_\infty = 0.001 \text{ m/s}, \delta = 0.001 \text{ m}, \gamma_{lg} = 1. \text{ N/m} \text{ et } d\gamma_{lg}/dT = -3. \cdot 10^{-4} \text{ N/m}^\circ\text{C}.$$

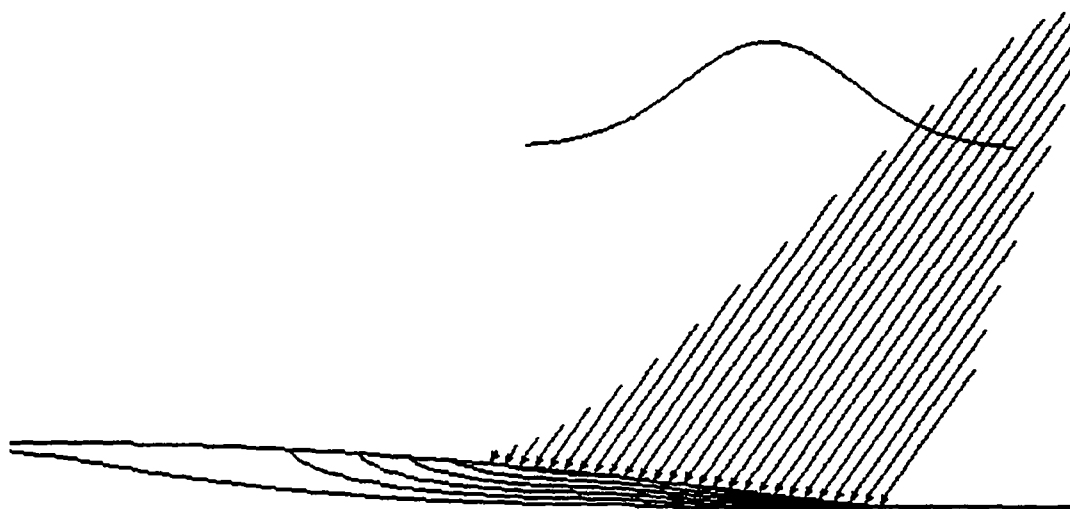


Isothermes de 1300 à 1700 °C par pas de 50 °C.

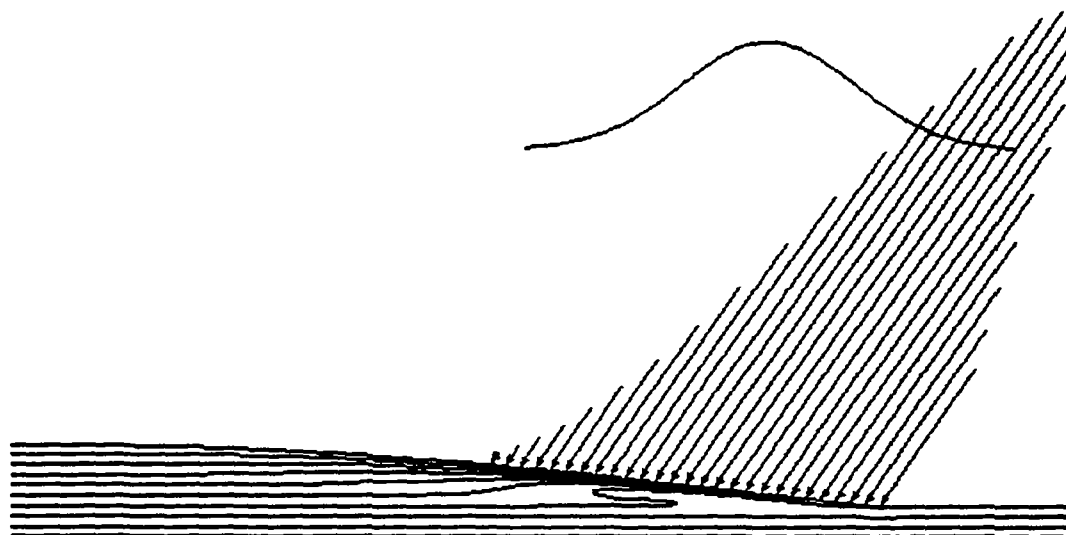


Lignes de courant du champ de vitesse (vitesse maximum 0.30m/s).

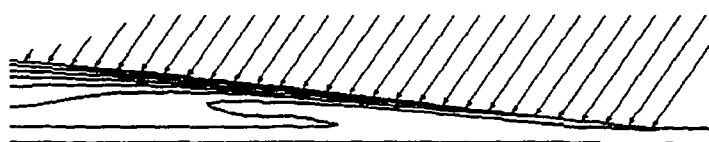
Figure 4.19: idem figure précédente avec injection horizontale.



Isothermes de 1300 à 1600 °C par pas de 50 °C.



Lignes de courant du champ de vitesse (vitesse maximum 1.0m/s).



Agrandissement des lignes de courant.

Figure 4.20: Isothermes et lignes de courant du champ de vitesse en tenant compte de l'injection de poudre.

$V_{\infty} = 0.1 \text{ m/s}$, $\delta = 0.0002 \text{ m}$, $\gamma_{lg} = 10. \text{ N/m}$ et $d\gamma_{lg}/dT = -1. 10^{-4} \text{ N/m}^{\circ}\text{C}$.

Conclusions concernant l'étude numérique du paragraphe 4.4.

Dans ce travail nous avons proposé un modèle thermique, appliqué aux traitements de surface par laser, tenant compte des phénomènes hydrodynamiques dans le bain liquide. Dans le cas de la refusion par laser, les mouvements de convection dans le bain liquide sont dus à des forces d'origine thermocapillaires (effet Marangoni) et ont pour effet de modifier considérablement la forme du bain liquide. Dans le cas du recouvrement par laser, il faut superposer aux forces thermocapillaires les forces dues à l'injection de poudre. Signalons que ces phénomènes ont été mis en évidence expérimentalement lors de vidéo rapides au CTML et à Aachen [Bie].

Notre modèle nous a donc permis de comprendre les principaux phénomènes macroscopiques intervenant dans le bain liquide mais il reste plusieurs questions auxquelles nous n'avons pas répondu dans ce travail : la poudre fond-elle instantanément sur l'interface, comment calculer le coefficient d'absorption du laser, en particulier quelles sont les interactions poudre-laser, quelle est la fraction de poudre quittant la buse d'injection qui est effectivement déposée sur la pièce ?

Il nous semble maintenant nécessaire de développer quelques modèles simples concernant ces phénomènes, ceci afin d'obtenir une simulation complète du recouvrement par laser.

Les techniques de maillage adaptatif développées dans le chapitre 3 n'ont pas été appliquées à la simulation complète du recouvrement par laser, ceci pour plusieurs raisons :

- le maillage utilisé est un maillage en quadrangles puisque nous utilisons l'élément fini $Q_1 - P_0$ pour discrétiser le champ de vitesse. L'utilisation d'un élément fini triangulaire (par exemple $4P_1 - P_1$) est nécessaire à d'éventuels calculs d'adaptation du maillage.
- Les estimations a posteriori concernant un système d'équations aux dérivées partielles n'ont pas encore été établies.

Il nous semble par conséquent opportun de continuer à développer des algorithmes de maillage adaptatif dans les deux directions suivantes : étude d'un système d'EDP et étude d'une équation évolutive.

ANNEXE 1

Changement de phase avec zone pâteuse : solidification d'un alliage binaire

Nous formulons ici un problème de changement de phase solide-liquide en considérant, contrairement au chapitre 2, que le lieu du changement de phase est une partie de mesure non-nulle du domaine de calcul, appelée zone pâteuse ou "mushy zone" en anglais (cf. figure A1.1).

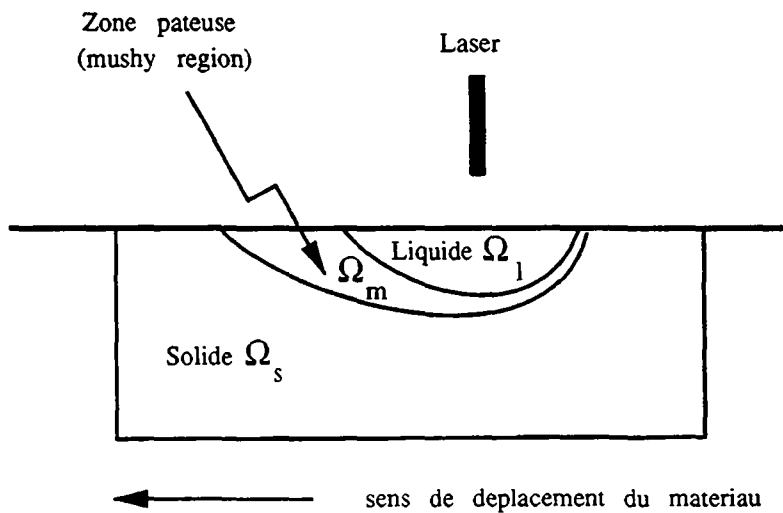


Figure A1.1 : refusion par laser avec zone pâteuse.

Prenons pour exemple le cas de la solidification d'un alliage binaire (i.e. composé de deux constituants A et B). La connaissance du diagramme de phase (cf. figure A1.2), est nécessaire à la détermination des températures de début de solidification T_{liq} (température du liquidus) et de fin de solidification T_{eut} (température eutectique).

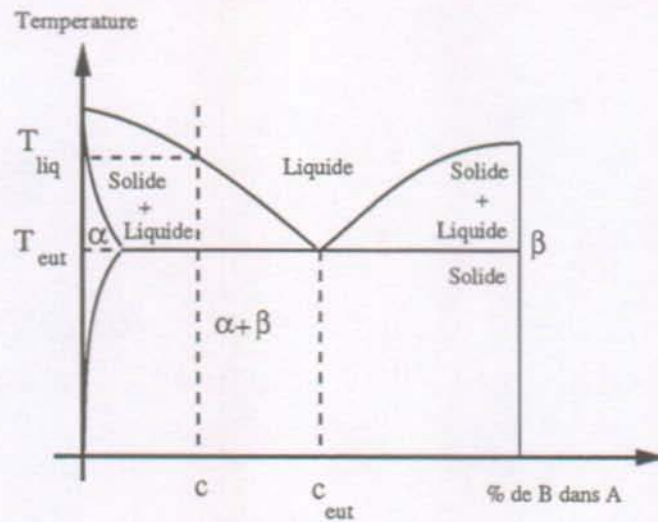


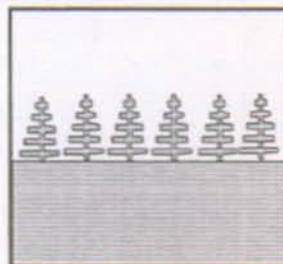
Figure A1.2 : exemple de diagramme de phase.

La modélisation de ce type de problèmes a déjà été traitée dans [Benn,Rap2], notre but est de montrer que le modèle thermique obtenu peut se mettre, comme dans le paragraphe 3.2, sous forme variationnelle.

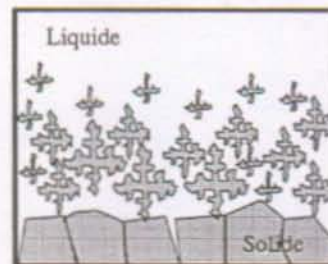
Notons Ω_s , Ω_m et Ω_ℓ les zones solide, pâteuse et liquide de la figure A1.1, Γ_{sm} et $\Gamma_{m\ell}$ les interfaces correspondantes et posons

$$\Omega = \Omega_s \cup \Omega_m \cup \Omega_\ell \cup \Gamma_{sm} \cup \Gamma_{m\ell}.$$

Si nous observons, à l'échelle microscopique, une partie de Ω_m , nous constatons que la formation du solide dans la zone pâteuse est, suivant les conditions expérimentales, de type colonnaire ou équiaxe (cf. figure A1.3).



A1.3a



A1.3b

Figure A1.3 : structure micrographiques, dendritique colonnaire (A1.3a) ou équiaxe (A1.3b).

Supposons en premier lieu que le solide et le liquide sont à l'équilibre thermodynamique local dans la zone pâteuse (i.e. les particules de solide et liquide ont même température au même point). Nous pouvons donc associer à chaque phase une température $T_\alpha : \Omega_\alpha \rightarrow \mathbf{R}$, $\alpha = s, m, l$ et nous définissons la température de la pièce $T : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ par :

$$T = T_\alpha \quad \text{dans } \Omega_\alpha, \quad \alpha = s, m, l.$$

Supposons que la température T soit continue, nous définissons alors les interfaces Γ_{sm} et Γ_{ml} par :

$$\Gamma_{sm} = \{x \in \Omega; T(x) = T_{eut}\}, \quad \Gamma_{ml} = \{x \in \Omega; T(x) = T_{liq}\},$$

les domaines Ω_s , Ω_m et Ω_l par :

$$\begin{aligned} \Omega_s &= \{x \in \Omega; T(x) < T_{eut}\}, \\ \Omega_m &= \{x \in \Omega; T_{eut} < T(x) < T_{liq}\}, \\ \Omega_l &= \{x \in \Omega; T(x) > T_{liq}\}. \end{aligned}$$

Les données du modèle concernent

- les masses volumiques, conductivités thermiques, chaleur spécifique et enthalpies massiques, définies en fonction de la température :

$$\begin{aligned} \rho_s, k_s &:]0, T_{liq}[\rightarrow]0, +\infty[, \\ \rho_l, k_l &:]T_{eut}, +\infty[\rightarrow]0, +\infty[, \\ c_p &:]0, +\infty[\rightarrow]0, +\infty[, \\ h_s &:]0, T_{liq}[\rightarrow]0, +\infty[, \text{ définie par :} \\ & \quad h_s(T) = \int_0^T c_p(s) ds, \\ h_l &:]T_{eut}, +\infty[\rightarrow]0, +\infty[, \text{ définie par :} \\ & \quad h_l(T) = \int_0^T c_p(s) ds + \ell. \end{aligned}$$

où ℓ représente la chaleur latente de changement de phase solide-liquide.

- les fractions volumiques de solide et liquide dans la zone pâteuse

$$f_s, f_l :]T_{eut}, T_{liq}[\rightarrow [0, 1],$$

déterminées à partir du diagramme de phase par la loi des leviers (la concentration c est supposée uniforme dans les phases solide et liquide à l'échelle de la microstructure) et satisfaisant :

$$\begin{aligned} f_s(T) + f_\ell(T) &= 1, & T_{eut} < T < T_{liq}, \\ f_s(T_{eut} + 0) &\neq 1, \\ f_l(T_{liq} - 0) &= 0. \end{aligned} \quad (\text{A1.1})$$

- Les champs de vitesse des particules de solide et liquide

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_s &: \Omega_s \cup \Omega_m \rightarrow \mathbf{R}^2, \\ \mathbf{v}_\ell &: \Omega_m \cup \Omega_\ell \rightarrow \mathbf{R}^2. \end{aligned}$$

La zone pâteuse est considérée comme une phase homogène, i.e. tout domaine microscopique contenu dans Ω_m se comporte comme si nous avions mélangé uniformément les particules de solide et liquide, nous pouvons donc définir la masse volumique moyenne, l'enthalpie moyenne $\rho_m, h_m :]T_{eut}, T_{liq}[\rightarrow]0, +\infty[$ et la vitesse moyenne $\mathbf{v}_m : \Omega_m \rightarrow \mathbf{R}^2$ par

$$\rho_m = \rho_s f_s + \rho_\ell f_\ell, \quad (\text{A1.2})$$

$$\rho_m h_m = \rho_s f_s h_s + \rho_\ell f_\ell h_\ell, \quad (\text{A1.3})$$

$$\rho_m \mathbf{v}_m = \rho_s f_s \mathbf{v}_s + \rho_\ell f_\ell \mathbf{v}_\ell. \quad (\text{A1.4})$$

Afin de déterminer les équations que satisfont ces grandeurs dans chacune des phases, nous considérons, comme dans le paragraphe 2.2, un domaine arbitraire \mathcal{D} inclus dans Ω_α , $\alpha = s, m, \ell$, et écrivons les lois de conservation de la mécanique (masse et énergie). Nous en déduisons les équations de conservation de la masse en régime stationnaire :

$$\nabla \cdot (\rho_s \mathbf{v}_s) = 0 \quad \text{dans } \Omega_s, \quad (\text{A1.5})$$

$$\nabla \cdot (\rho_m \mathbf{v}_m) = 0 \quad \text{dans } \Omega_m, \quad (\text{A1.6})$$

$$\nabla \cdot (\rho_\ell \mathbf{v}_\ell) = 0 \quad \text{dans } \Omega_\ell, \quad (\text{A1.7})$$

les équations de conservation de l'énergie :

$$\nabla \cdot (\rho_s h_s \mathbf{v}_s) = \nabla \cdot (k_s \nabla T) \quad \text{dans } \Omega_s, \quad (\text{A1.8})$$

$$\nabla \cdot (\rho_s f_s h_s \mathbf{v}_s + \rho_\ell f_\ell h_\ell \mathbf{v}_\ell) = \nabla \cdot (k_m \nabla T) \quad \text{dans } \Omega_m, \quad (\text{A1.9})$$

$$\nabla \cdot (\rho_\ell h_\ell \mathbf{v}_\ell) = \nabla \cdot (k_\ell \nabla T) \quad \text{dans } \Omega_\ell, \quad (\text{A1.10})$$

où la conductivité thermique $k_m :]T_{eut}, T_{liq}[\rightarrow]0, +\infty[$ est définie par :

$$k_m = k_s f_s + k_\ell f_\ell.$$

En considérant maintenant un domaine arbitraire \mathcal{D} chevauchant l'interface Γ_{sm} , nous obtenons la condition d'équilibre des flux massiques :

$$\rho_s \mathbf{v}_s \cdot \mathbf{n}_{sm} = \rho_m \mathbf{v}_m \cdot \mathbf{n}_{sm} \quad \text{sur } \Gamma_{sm}, \quad (\text{A1.11})$$

$$\rho_m \mathbf{v}_m \cdot \mathbf{n}_{m\ell} = \rho_\ell \mathbf{v}_\ell \cdot \mathbf{n}_{m\ell} \quad \text{sur } \Gamma_{m\ell}, \quad (\text{A1.12})$$

ainsi que la conditions d'équilibre des flux thermiques :

$$\begin{aligned} & \left(\rho_s h_s \mathbf{v}_s \cdot \mathbf{n}_{sm} \right)_{T_{eut}-0} - \left(\rho_s f_s h_s \mathbf{v}_s \cdot \mathbf{n}_{sm} + \rho_\ell f_\ell h_\ell \mathbf{v}_\ell \cdot \mathbf{n}_{sm} \right)_{T_{eut}+0} \\ &= \left(k_s \frac{\partial T}{\partial n_{sm}} \right)_{T_{eut}-0} - \left(k_m \frac{\partial T}{\partial n_{sm}} \right)_{T_{eut}+0}, \end{aligned} \quad (\text{A1.13})$$

$$0 = \left(k_m \frac{\partial T}{\partial n_{m\ell}} \right)_{T_{liq}-0} - \left(k_\ell \frac{\partial T}{\partial n_{m\ell}} \right)_{T_{liq}+0}. \quad (\text{A1.14})$$

Dans la suite nous notons $\rho, k, h :]0, +\infty[\rightarrow]0, +\infty[$ les densité, conductivité thermique, enthalpie massique de la pièce définies par :

$$\begin{aligned} \rho(T) &= \rho_s(T), & k(T) &= k_s(T), & h(T) &= h_s(T), & T &\leq T_{eut}, \\ \rho(T) &= \rho_m(T), & k(T) &= k_m(T), & h(T) &= h_m(T), & T_{eut} &< T < T_{liq}, \\ \rho(T) &= \rho_\ell(T), & k(T) &= k_\ell(T), & h(T) &= h_\ell(T), & T_{liq} &\leq T, \end{aligned} \quad (\text{A1.15})$$

et le champ de vitesse de la pièce $\mathbf{v} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ par :

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_\alpha \quad \text{dans } \Omega_\alpha, \quad \alpha = s, m, \ell. \quad (\text{A1.16})$$

Remarquons que l'enthalpie h est discontinue en $T = T_{eut}$ et continue en $T = T_{liq}$ en vertu des propriétés A1.1 de la fraction solide (cf figure A1.4).

Notre but est maintenant de formuler deux modèles correspondant aux deux types de microstructures schématisés dans la figure A1.3. Considérons d'abord le cas de la

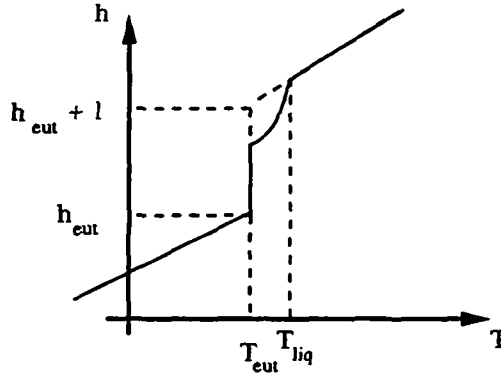


Figure A1.4 : relation enthalpie-température.

• solidification de type équiaxe :

Les particules de solide et liquide sont transportés à la même vitesse dans la zone pâteuse (cf. figure A1.3b) :

$$\mathbf{v}_s = \mathbf{v}_l = \mathbf{v}_m \quad \text{dans } \Omega_m. \quad (\text{A1.17})$$

Ce cas est théorique, car si les grains équiaxes peuvent effectivement être transportés avec le liquide lorsque la fraction volumique de solide est faible, très rapidement les grains dendritiques forment un réseau compact empêchant tout mouvement à l'échelle du bain liquide. Les équations A1.8 à A1.10 deviennent :

$$\nabla \cdot (\rho_\alpha \mathbf{v}_\alpha h_\alpha) = \nabla \cdot (k_\alpha \nabla T) \quad \text{dans } \Omega_\alpha, \quad \alpha = s, m, l, \quad (\text{A1.18})$$

et la condition A1.13

$$\begin{aligned} (\rho_s h_s \mathbf{v}_s \cdot \mathbf{n}_{sm})_{T_{eut}-0} - (\rho_m h_m \mathbf{v}_m \cdot \mathbf{n}_{sm})_{T_{eut}+0} \\ = \left(k_s \frac{\partial T}{\partial n_{sm}} \right)_{T_{eut}-0} - \left(k_m \frac{\partial T}{\partial n_{sm}} \right)_{T_{eut}+0}. \end{aligned} \quad (\text{A1.19})$$

Introduisons, comme dans le paragraphe 3.2, la fonction strictement croissante inversible $K :]0, +\infty[\rightarrow]0, +\infty[$ définie par :

$$K(x) = \int_0^x k(\xi) d\xi,$$

et posons $\theta = K(T)$, $\theta_{eut} = K(T_{eut})$. Nous cherchons donc à résoudre le

PROBLÈME A1.1.

Trouver $\theta \in C^2(\Omega_s) \cap C^2(\Omega_m \cup \Omega_\ell \cup \Gamma_{s\ell}) \cap C_f^1(\bar{\Omega})$ et l'interface Γ_{sm} tels que :

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{v} h(K^{-1}(\theta))) - \Delta \theta = 0 \quad \text{dans } \Omega \setminus \Gamma_{sm}, \quad (\text{A1.18})$$

$$\{\nabla \theta \cdot \mathbf{n}_{s\ell}\} = \{\rho h \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_{sm}\} \quad \text{sur } \Gamma_{sm}, \quad (\text{A1.19})$$

$$\theta = \theta_{eut} \quad \text{sur } \Gamma_{sm}, \quad (\text{A1.20})$$

où les domaines solide et pâteux-liquide sont définis par

$$\Omega_s = \{x \in \Omega; \theta(x) < \theta_{eut}\},$$

$$\Omega_m \cup \Omega_\ell \cup \Gamma_{m\ell} = \{x \in \Omega; \theta(x) > \theta_{eut}\},$$

où $\{w\}$ désigne le saut (mushy-solide) de la quantité w à travers l'interface Γ_{sm} et où h est la fonction définie en A1.15.

Définissons maintenant la fonction $\beta : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ lipschitzienne, monotone, croissante, en vertu des propriétés de ρ , k et c_p , telle que sa réciproque (multivoque) vérifie :

$$\beta^{-1}(x) = h(K^{-1}(x)) \quad (\text{A1.21})$$

et finalement introduisons le problème variationnel ayant pour inconnue la variable "enthalpie" h :

PROBLÈME A1.2.

Trouver $h \in L^2(\Omega)$ tel que

$$\bullet \beta(h) \in H^1(\Omega), \quad (\text{A1.22})$$

$$\bullet \int_{\Omega} \nabla \beta(h) \cdot \nabla \varphi dx - \int_{\Omega} (\rho \mathbf{v} \cdot \nabla \varphi) h dx = 0 \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega), \quad (\text{A1.23})$$

Nous avons le résultat d'équivalence entre les problèmes A1.1 et A1.2

THÉORÈME A1.1.

Supposons $\mathbf{v} \in (C^1(\bar{\Omega}))^2$

i) Si θ est solution du problème A1.1 et si Ω_s et $\Omega_m \cup \Omega_\ell \cup \Gamma_{m\ell}$ sont suffisamment réguliers, alors $h = \beta^{-1}(\theta)$ est solution du problème A1.2.

ii) Si h est solution du problème A1.2, si

$$\begin{aligned}\Omega_s &= \{x \in \Omega; \beta(h(x)) < \theta_{eut} p.p.\}, \\ \Omega_m \cup \Omega_\ell \cup \Gamma_{m\ell} &= \{x \in \Omega; \beta(h(x)) > \theta_{eut} p.p.\},\end{aligned}$$

sont assez réguliers et si $\beta(h) \in C^2(\Omega_s) \cap C^2(\Omega_m \cup \Omega_\ell \cup \Gamma_{m\ell}) \cap C^1_1(\bar{\Omega})$, si $h \in C^1(\Omega_s) \cap C^1(\Omega_m \cup \Omega_\ell \cup \Gamma_{m\ell}) \cap C^0_1(\bar{\Omega})$, alors $\theta = \beta(h)$ est solution du problème A1.1.

La courbe β définie ci-dessus est du type (h_{eut} est une enthalpie de référence arbitraire) :

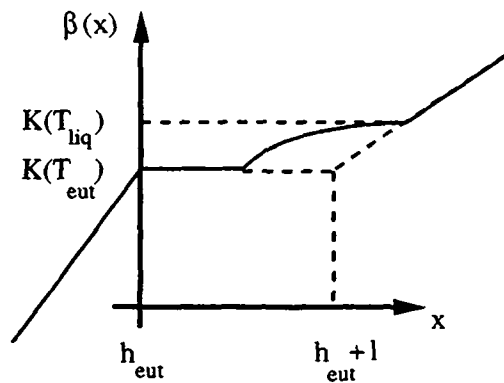


Figure A1.5 : exemple de fonction β .

et nous pouvons donc, en première approximation, considérer que la régularisation β_ϵ proposée dans la figure 3.2 correspond à la solidification d'un alliage entre les deux températures T_{eut} et T_{liq} .

• Solidification de type colonnaire :

Les particules solides de la région pâteuse sont solidaires avec le solide tandis que le liquide circule librement (\mathbf{v}_s est constant dans tout $\Omega_s \cup \Omega_m$). Supposons \mathbf{v}_m donné (cf. par exemple par un modèle exposé dans [Benn, Rapp2]). Nous pouvons exprimer la vitesse du liquide dans la zone pâteuse en fonction de la vitesse du solide et la vitesse moyenne :

$$\rho_\ell f_\ell \mathbf{v}_\ell = \rho_m \mathbf{v}_m - \rho_s f_s \mathbf{v}_s \quad \text{dans } \Omega_m.$$

L'équation A1.9 devient :

$$\ell \nabla \cdot (\rho_m \mathbf{v}_m - \rho_s f_s \mathbf{v}_s) + \nabla \cdot (\rho_m \mathbf{v}_m h_s) = \nabla \cdot (k_m \nabla T) \quad \text{dans } \Omega_m, \quad (\text{A1.24})$$

et la condition d'équilibre A1.13 :

$$\begin{aligned} \left(\rho_s h_s \mathbf{v}_s \cdot \mathbf{n}_{sm} \right)_{T_{eut}-0} - \left(\ell (\rho_m \mathbf{v}_m \cdot \mathbf{n}_{sm} - \rho_s f_s \mathbf{v}_s \cdot \mathbf{n}_{sm}) + \rho_m h_s \mathbf{v}_m \cdot \mathbf{n}_{sm} \right)_{T_{eut}+0} \\ = \left(k_s \frac{\partial T}{\partial n_{sm}} \right)_{T_{eut}-0} - \left(k_m \frac{\partial T}{\partial n_{sm}} \right)_{T_{eut}+0} \quad \text{sur } \Gamma_{sm}, \end{aligned}$$

soit, en utilisant A1.11 :

$$\begin{aligned} - \ell \left(\rho_m \mathbf{v}_m \cdot \mathbf{n}_{sm} - \rho_s f_s \mathbf{v}_s \cdot \mathbf{n}_{sm} \right)_{T_{eut}+0} \\ = \left(k_s \frac{\partial T}{\partial n_{sm}} \right)_{T_{eut}-0} - \left(k_m \frac{\partial T}{\partial n_{sm}} \right)_{T_{eut}+0} \quad \text{sur } \Gamma_{sm}. \quad (\text{A1.25}) \end{aligned}$$

Notons $\tilde{\rho}_s$, \tilde{f}_s et $\tilde{\mathbf{v}}_s$ les prolongements des fonctions ρ_s , f_s et \mathbf{v}_s sur $[0, +\infty[$ et Ω , en particulier \tilde{f}_s est définie par (cf. figure A1.6) :

$$\begin{aligned} \tilde{f}_s(T) &= 1, & T &\leq T_{eut}, \\ \tilde{f}_s(T) &= f_s(T), & T_{eut} &< T < T_{liq}, \\ \tilde{f}_s(T) &= 0, & T_{eut} &\leq T, \end{aligned} \quad (\text{A1.26})$$

et est donc discontinue en $T = T_{eut}$.

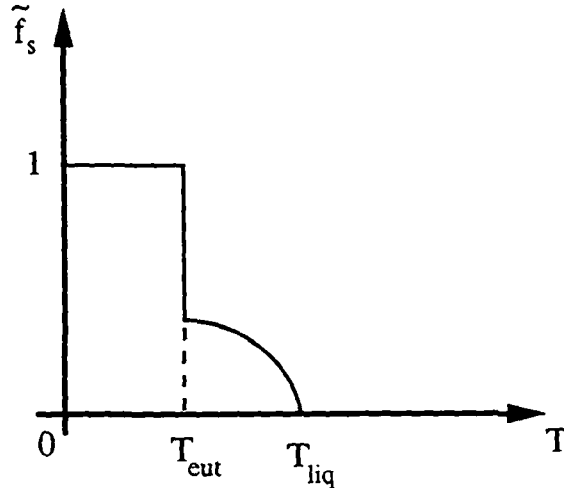


Figure A1.6 : exemple de fonction \tilde{f}_s .

Nous avons le

THÉORÈME A1.2.

Soit $\mathbf{v} \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega})$ vérifiant A1.16, A1.5 à A1.7 et A1.11 à A1.12. Supposons $T \in \mathcal{C}^2(\Omega_s) \cap \mathcal{C}^2(\Omega_m \cup \Omega_\ell \cup \Gamma_{sm}) \cap \mathcal{C}_T^1(\bar{\Omega})$. Si T est solution de A1.8, A1.24, A1.10, A1.25 et A1.14 alors T satisfait

$$\int_{\Omega} k \nabla T \cdot \nabla \varphi dx = - \int_{\Omega} \rho c_p (\mathbf{v} \cdot \nabla T) \varphi dx + \int_{\Omega} \ell (\rho \mathbf{v} - \tilde{\rho}_s \tilde{f}_s \tilde{\mathbf{v}}_s) \cdot \nabla \varphi dx$$

$\forall \varphi \in H_0^1(\Omega). \quad (\text{A1.27})$

Démonstration.

Nous procédons par densité. Considérons les équations A1.8, A1.24, A1.10 multiplions par une fonction test $\varphi \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ et intégrons. Nous avons, compte tenu des relation A1.5 à A1.7 :

$$\sum_{\alpha=s,m,\ell} \int_{\Omega_\alpha} \nabla \cdot (k_\alpha \nabla T) \varphi dx = \sum_{\alpha=s,m,\ell} \int_{\Omega_\alpha} \rho_\alpha c_p (\mathbf{v}_\alpha \cdot \nabla T) \varphi dx$$

$$+ \int_{\Omega_m} \ell \nabla \cdot (\rho_m \mathbf{v}_m - \tilde{\rho}_s \tilde{f}_s \tilde{\mathbf{v}}_s) \varphi dx.$$

Intégrons par parties le premier et le troisième terme, utilisons les définitions A1.15, A1.16 et A1.26 ainsi que les relations sur les interfaces A1.24 et A1.25. Nous obtenons bien la formulation variationnelle A1.27. \square

ANNEXE 2

Algorithmes unidimensionnels
de déplacement des sommets

Nous considérons ici le problème unidimensionnel de type "couche limite"

trouver u tel que :

$$\begin{aligned} -\varepsilon u'' + u' &= f \quad \text{sur }]0, 1[, \\ u(0) &= u(1) = 0, \end{aligned} \tag{A2.1}$$

où ε est un paramètre positif. Il est bien connu que les techniques numériques standard (différences finies centrées ou éléments finis de type Galerkin) appliquées à ce problème produisent des solutions oscillantes lorsque ε devient petit. La parade consiste à décentrer les schémas et de nombreuses techniques numériques efficaces ont été développées à ce sujet [Joh2,Pir]. Nous proposons dans cette annexe de conserver un schéma numérique centré mais d'adapter la subdivision de l'intervalle $[0, 1]$ de manière à éliminer les oscillations.

Nous allons dans un premier temps rappeler les estimations a posteriori pour ce problème. Nous étudions ensuite le problème qui consiste à déterminer la subdivision minimisant la somme des estimateurs locaux, dans un cas simplifié. Nous proposons deux algorithmes de déplacement des sommets et finalement nous présentons quelques résultats numériques.

• Estimations a posteriori :

Soit $f \in L^2(]0, 1[)$, le problème A2.2 sous forme variationnelle s'énonce

trouver $u \in H_0^1(]0, 1[)$ tel que :

$$\varepsilon \int_0^1 u'v' dx + \int_0^1 u'v dx = \int_0^1 f v dx \quad \forall v \in H_0^1(]0, 1[). \tag{A2.2}$$

Soit $x_i, i = 0, N$, les sommets d'une subdivision de l'intervalle $]0, 1[$ tels que $x_0 = 0, x_N = 1$ et $x_i - x_{i-1} > 0, i = 1, N$. Notons V_N le sous-espace discret défini par :

$$V_N = \{v \in C^0([0, 1]); v|_{]x_{i-1}, x_i[} \in P_1, i = 1, N\} \cap H_0^1(]0, 1[).$$

et $r_N : C^0([0, 1]) \rightarrow V_N$ l'opérateur classique d'interpolation. Le problème discret s'énonce

trouver $u_N \in V_N$ tel que :

$$\varepsilon \int_0^1 u'_N v'_N dx + \int_0^1 u'_N v_N dx = \int_0^1 f v_N dx \quad \forall v_N \in V_N. \quad (\text{A2.3})$$

Rappelons brièvement les estimations a priori :

LEMME A2.1.

Soit u solution de A2.2, u_N solution de A2.3, alors il existe une constante C indépendante de h et ε telle que

$$|u - u_N|_{H^1(]0, 1[)} \leq C \left(\sum_{i=1}^N (x_i - x_{i-1})^2 (\|u''\|_{L^2(]x_{i-1}, x_i[)}^2 + \frac{1}{\varepsilon^2} \|u'\|_{L^2(]x_{i-1}, x_i[)}^2) \right)^{1/2}. \quad (\text{A2.4})$$

Démonstration.

Remarquons d'abord que nous avons la propriété suivante :

$$\int_0^1 v' v dx = 0, \quad \forall v \in H_0^1(]0, 1[). \quad (\text{A2.5})$$

Choisissons $v_N \in V_N$ comme fonction test dans A2.2 et soustrayons avec A2.3, nous obtenons la relation :

$$\varepsilon \int_0^1 (u' - u'_N) v'_N dx + \int_0^1 (u' - u'_N) v_N dx = 0 \quad \forall v_N \in V_N. \quad (\text{A2.6})$$

Evaluons l'erreur :

$$|u - u_N|_{H^1(]0, 1[)}^2 = \int_0^1 (u' - u'_N) u' dx - \int_0^1 (u' - u'_N) u'_N dx,$$

soit, en vertu de A2.6 et de la propriété A2.5

$$\begin{aligned} |u - u_N|_{H^1(]0,1[)}^2 &= \int_0^1 (u' - u'_N)(u' - v'_N) dx + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^1 (u' - u'_N)(u_N - v_N) dx \quad \forall v_N \in V_N, \\ &= \int_0^1 (u' - u'_N)(u' - v'_N) dx + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^1 (u' - u'_N)(u - v_N) dx \quad \forall v_N \in V_N, \end{aligned}$$

Nous pouvons choisir, puisque $H_0^1(]0,1[) \hookrightarrow C^0([0,1])$, $v_N = r_N u$ dans l'équation ci-dessus. Nous obtenons alors le résultat en appliquant les résultats d'interpolation standard sur chaque intervalle $]x_{i-1}, x_i[$ et en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz discrète. \square

Présentons maintenant les estimations a posteriori.

LEMME A2.2.

Soit u solution de A2.2, u_N solution de A2.3, alors il existe une constante C indépendante de h et ε telle que

$$|u - u_N|_{H^1(]0,1[)} \leq \frac{C}{\varepsilon} \left(\sum_{i=1}^N (x_i - x_{i-1})^2 \|f - u'_N\|_{L^2(]x_{i-1}, x_i[)}^2 \right)^{1/2}. \quad (\text{A2.7})$$

Démonstration.

Soit $F : H_0^1(]0,1[) \rightarrow H^{-1}(]0,1[)$ l'application définie par :

$$(F(v), w) = \int_0^1 f w dx - \varepsilon \int_0^1 v' w' dx - \int_0^1 v' w dx \quad \forall (v, w) \in (H_0^1(]0,1[))^2,$$

nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} |u - u_N|_{H^1(]0,1[)}^2 &= \int_0^1 u'(u' - u'_N) dx - \int_0^1 u'_N(u' - u'_N) dx, \\ &= \frac{1}{\varepsilon} (F(u_N), u - u_N), \end{aligned}$$

et donc

$$|u - u_N|_{H^1(]0,1[)} \leq \frac{1}{\varepsilon} \|F(u_N)\|_{H^{-1}(]0,1[)}.$$

Reste à évaluer le résidu $\|F(u_N)\|_{H^{-1}(]0,1[)}$. Soit $v \in H_0^1(]0,1[)$, nous avons, en vertu de A2.6 :

$$\begin{aligned} (F(u_N), v) &= (F(u_N), v - v_N), \\ &= \sum_{i=1}^N \int_{x_{i-1}}^{x_i} (f - u'_N)(v - v_N) dx - \varepsilon \sum_{i=1}^N \int_{x_{i-1}}^{x_i} u'_N(v' - v'_N) dx \quad \forall v_N \in V_N. \end{aligned}$$

Intégrons par parties le deuxième terme du second membre. Nous avons, puisque $u''_N = 0$ sur $]x_{i-1}, x_i[$:

$$(F(u_N), v) = \sum_{i=1}^N \int_{x_{i-1}}^{x_i} (f - u'_N)(v - v_N) dx - \varepsilon \sum_{i=1}^N \left[u'_N(v - v_N) \right]_{x_{i-1}}^{x_i} \quad \forall v_N \in V_N.$$

Choisissons $v_N = r_N v$ (nous en avons le droit car $H_0^1(]0,1[) \hookrightarrow C^0([0,1])$), le deuxième terme du second membre s'annule, puisque par définition de r_N , $r_N v(x_i) = v(x_i)$. Il suffit alors d'appliquer les résultats classiques d'interpolation et de prendre le supremum de la quantité

$$\frac{|(F(u_N), v)|}{|v|_{H^1(]0,1[)}}$$

pour conclure. \square

Le but de notre algorithme est de déplacer les sommets de la subdivision afin de diminuer l'erreur entre la solution exacte u et la solution calculée u_N . Plus précisément, en vertu de l'inégalité A2.7 le problème que nous pouvons légitimement chercher à résoudre consiste à

déplacer les sommets x_i , $i = 1, N$, de façon à minimiser la fonctionnelle

$$\sum_{i=1}^N (x_i - x_{i-1})^2 \|f - u'_N\|_{L^2(]x_{i-1}, x_i[)}^2. \quad (\text{A2.8})$$

Ce problème est impossible à résoudre exactement. En effet, la dépendance de u'_N par rapport aux x_i n'est pas explicite. Nous étudierons donc dans un premier temps un problème plus simple à savoir le problème où nous négligeons la dépendance de l'estimateur par rapport à u_N . Cela revient à considérer le problème

trouver u tel que :

$$\begin{aligned} -u'' &= f \quad \text{sur }]0,1[, \\ u(0) &= u(1) = 0. \end{aligned}$$

En effet les estimations a priori et a posteriori sont pour ce problème

$$\|u - u_N\|_{H^1([0,1])} \leq C \left(\sum_{i=1}^N (x_i - x_{i-1})^2 \|f\|_{L^2([x_{i-1}, x_i])}^2 \right)^{1/2}.$$

Remarquons que dans ce cas le calcul de la subdivision adaptée et de u_N sont totalement découplés.

• Un problème de minimisation simplifié :

Introduisons \mathcal{K}_N le convexe fermé défini par

$$\mathcal{K}_N = \{ \vec{y} = (y_0, \dots, y_N)^T \in \mathbf{R}^{N+1}; y_i - y_{i-1} \geq 0, i = 1, N; y_0 = 0, y_N = 1 \},$$

et $J(N, f, \cdot) : \mathbf{R}^{N+1} \rightarrow \mathbf{R}$ la fonctionnelle définie par :

$$J(N, f, \vec{y}) = \sum_{i=1}^N (y_i - y_{i-1})^2 \|f\|_{L^2([y_{i-1}, y_i])}^2 \quad \forall \vec{y} \in \mathbf{R}^{N+1}.$$

Le problème de déplacement des sommets que nous étudions brièvement s'énonce :

PROBLÈME A2.1.

Trouver $\vec{x} \in \mathcal{K}_N$ tel que

$$J(N, f, \vec{x}) = \inf_{\vec{y} \in \mathcal{K}_N} J(N, f, \vec{y}).$$

Nous avons immédiatement le

LEMME A2.3.

Le problème A2.1 a au moins une solution \vec{x} vérifiant

$$x_i - x_{i-1} > 0, \quad i = 1, N. \quad (\text{A2.9})$$

Si de plus $f \in C^0([0, 1])$ alors \vec{x} satisfait

$$\frac{\partial J}{\partial \vec{x}}(N, f, \vec{x}) = 0. \quad (\text{A2.10})$$

Démonstration.

La fonctionnelle J est continue sur le fermé \mathcal{K}_N et le problème A2.1 au moins une solution.

Soit \vec{x} une solution du problème A2.1. Ou bien \vec{x} satisfait A2.9 et il n'y a rien à démontrer, ou bien il existe $1 < j < N$ tel que

$$x_0 = 0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{j-2} < x_{j-1} = x_j < x_{j+1} < \dots < x_N = 1.$$

Nous construisons maintenant $\vec{y} \in \mathcal{K}_N$ tel que

$$\begin{aligned} y_i &= x_i, & i &= 0, N, & i &\neq j-1, \\ y_{j-1} &= \frac{x_{j-2} + x_j}{2}. \end{aligned}$$

Nous avons d'une part

$$J(N, f, \vec{y}) \geq J(N, f, \vec{x}),$$

et d'autre part

$$\begin{aligned} J(N, f, \vec{y}) - J(N, f, \vec{x}) &= \left(\frac{x_j - x_{j-2}}{2} \right)^2 \|f\|_{L^2(x_{j-2}, \frac{x_{j-2} + x_j}{2})}^2 \\ &\quad - \left(x_j - x_{j-2} \right)^2 \|f\|_{L^2(x_{j-2}, x_j)}^2 + \left(\frac{x_j - x_{j-2}}{2} \right)^2 \|f\|_{L^2(\frac{x_{j-2} + x_j}{2}, x_j)}^2 \\ &= -\frac{3}{4} (x_j - x_{j-2})^2 \|f\|_{L^2(x_{j-2}, x_j)}^2 \leq 0, \end{aligned}$$

et donc

$$J(N, f, \vec{y}) = J(N, f, \vec{x}).$$

Si $f \in C^0([0, 1])$ alors la fonctionnelle $J(N, f, \cdot)$ est dérivable. En outre, puisqu'il existe une solution appartenant à l'intérieur de \mathcal{K}_N , alors le gradient est nul. \square

La fonctionnelle $J(N, f, \cdot)$ n'est, en général, pas convexe. En effet, explicitons la dérivée ainsi que la matrice hessienne. Nous avons :

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial x_i}(N, f, \vec{x}) &= 2(x_i - x_{i-1}) \int_{x_{i-1}}^{x_i} f^2(s) ds + (x_i - x_{i-1})^2 f^2(x_i) \\ &\quad - 2(x_{i+1} - x_i) \int_{x_i}^{x_{i+1}} f^2(s) ds - (x_{i+1} - x_i)^2 f^2(x_i), \quad i = 1, N-1, \quad (\text{A2.11}) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 J}{\partial x_{i-1} \partial x_i}(N, f, \vec{x}) &= -2 \int_{x_{i-1}}^{x_i} f^2(s) ds - 2(x_i - x_{i-1})(f^2(x_{i-1}) + f^2(x_i)), \\ & \qquad \qquad \qquad i = 2, N - 1, \\ \frac{\partial^2 J}{\partial x_{i+1} \partial x_i}(N, f, \vec{x}) &= -2 \int_{x_i}^{x_{i+1}} f^2(s) ds - 2(x_{i+1} - x_i)(f^2(x_{i+1}) + f^2(x_i)), \\ & \qquad \qquad \qquad i = 1, N - 2. \\ \frac{\partial^2 J}{\partial^2 x_i}(N, f, \vec{x}) &= - \left(\frac{\partial^2 J}{\partial x_{i-1} \partial x_i}(N, f, \vec{x}) + \frac{\partial^2 J}{\partial x_{i+1} \partial x_i}(N, f, \vec{x}) \right) \\ & \quad + 2(x_i - x_{i-1})(f^2(x_i) - f^2(x_{i-1})) \\ & \quad + 2(x_{i+1} - x_i)(f^2(x_i) - f^2(x_{i+1})) \\ & \quad + 2 \left((x_i - x_{i-1})^2 - (x_{i+1} - x_i)^2 \right) f f'(x_i), \\ & \qquad \qquad \qquad i = 1, N - 1. \end{aligned}$$

La matrice hessienne est symétrique mais n'est pas, en général, diagonale dominante. Le lemme suivant considère le cas particulier où la fonction f est constante.

LEMME A2.4.

Si f est constante non nulle sur tout \mathbb{R} alors le problème A2.1 a une solution unique.

Démonstration.

Si f est constante, la matrice hessienne est symétrique et diagonale dominante (diagonale strictement dominante sur la première et la dernière ligne). Elle est donc symétrique définie positive. Nous avons donc :

$$\left(\nabla^2 J(N, f, \vec{x}) \vec{x}, \vec{x} \right) \geq \lambda_1 \vec{x}^2,$$

où λ_1 est la plus petite valeur propre de la matrice hessienne $\nabla^2 J(N, f, \cdot)$. La fonctionnelle $J(N, f, \cdot)$ est donc convexe et le problème a une solution unique. \square

REMARQUE A2.1.

Si nous posons $\|f\|_{L^2([x_{i-1}, x_i])} = 1$, $i = 1, N$, la fonctionnelle J est quadratique, le problème A2.1 a une solution unique correspondant à la subdivision à pas constant :

$$x_i = \frac{i}{N}, \quad i = 0, N.$$

Cette notion de génération de maillage a été étendue dans un contexte bidimensionnel dans le paragraphe 3.6 (régularisation d'une triangulation). Nous référons à la bibliographie [Bon, Mil1, Mil2, Thom] pour d'autres applications du même genre. Notons encore une analogie mécanique intéressante : la solution du problème A2.1 peut s'interpréter comme la position d'équilibre d'un réseau de ressorts de raideur

$$k_i = \|f\|_{L^2(x_{i-1}, x_i)}^2, \quad i = 1, N.$$

• Algorithmes de déplacement des sommets :

Nous allons maintenant proposer deux méthodes permettant de déplacer les sommets de la subdivision. La première consiste à chercher à

MÉTHODE A2.1.

annuler une partie du gradient de la fonctionnelle définie dans A2.8.

La deuxième consiste à

MÉTHODE A2.2.

équidistribuer les termes de la fonctionnelle définie dans A2.8.

REMARQUE A2.2.

Ces deux méthodes n'ont a priori rien à avoir. En effet minimiser une fonctionnelle quadratique et équidistribuer les termes de la fonctionnelle sont deux opérations différentes. Soit k_i , $i = 1, N$, des réels positifs, considérons la fonctionnelle $J : \mathbf{R}^{N+1} \rightarrow \mathbf{R}$ définie par

$$J(\vec{y}) = \sum_{i=1}^N (y_i - y_{i-1})^2 k_i.$$

Le minimum de cette fonctionnelle sur \mathcal{K}_N est atteint au point \vec{y} tel que

$$(x_i - x_{i-1})k_i = (x_{i+1} - x_i)k_{i+1} \quad 1 \leq i \leq N - 1.$$

Par contre, équidistribuer les termes de la fonctionnelle correspond à vérifier les relations

$$(x_i - x_{i-1})^2 k_i = (x_{i+1} - x_i)^2 k_{i+1} \quad 1 \leq i \leq N - 1.$$

Précisons maintenant la mise en oeuvre des deux méthodes A2.1 et A2.2. Pour cela, nous reformulons la fonctionnelle définie dans A2.8 avec, comme inconnue, le vecteur $\vec{h} = (h_1, \dots, h_N)^T \in \mathbb{R}^N$, tel que

$$h_i = x_i - x_{i-1},$$

soit le i -ème pas de la subdivision, $i = 1, N$. Nous pouvons alors exprimer x_i en fonction de \vec{h} :

$$x_i(\vec{h}) = \sum_{j=1}^i h_j.$$

Soit \mathcal{U}_N le sous-espace défini par

$$\mathcal{U}_N = \{ \vec{h} = (h_1, \dots, h_N)^T \in \mathbb{R}^N ; h_i > 0, i = 1, N \},$$

et $G : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ la fonctionnelle définie par :

$$G(\vec{h}) = \sum_{i=1}^N h_i^2 \|f - u'_N(\vec{h})\|_{L^2([x_{i-1}(\vec{h}), x_i(\vec{h})])}^2.$$

Le problème de minimisation (que nous ne savons pas résoudre) consiste à trouver $\vec{h} \in \mathcal{U}_N$ tel que

$$G(\vec{h}) = \inf_{\vec{\ell} \in \mathcal{U}_N} G(\vec{\ell}),$$

avec la contrainte

$$\sum_{i=1}^N h_i = 1. \quad (\text{A2.12})$$

Nous savons, d'après les résultats classiques d'optimisation, pour autant que l'infimum soit un minimum, (cf. par exemple [Cia2] p. 149) qu'il existe un multiplicateur de Lagrange $\lambda_1 < 0$ tel que

$$\frac{\partial G}{\partial h_i}(\vec{h}) + \lambda_1 = 0, \quad i = 1, N.$$

La méthode A2.1. consiste à résoudre un problème voisin du problème ci-dessus où nous ne considérons qu'une partie de la dérivée de G . En effet, nous omettons de dériver le terme $\|f - u'_N(\vec{h})\|_{L^2([x_{i-1}(\vec{h}), x_i(\vec{h})])}^2$ par rapport à \vec{h} . Nous cherchons donc \vec{h} tel que

$$2h_i \|f - u'_N(\vec{h})\|_{L^2([x_{i-1}(\vec{h}), x_i(\vec{h})])}^2 + \lambda_1 = 0, \quad i = 1, N.$$

Le multiplicateur de Lagrange λ_1 est déterminé en sommant l'équation ci-dessus et en tenant compte de la contrainte A2.12. Nous obtenons après calcul :

$$\vec{h} = \vec{F}^1(\vec{h})$$

où $\vec{F}^1 : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ est définie par :

$$F_i^1(\vec{h}) = \frac{1}{C_1 \|f - u'_N(\vec{h})\|_{L^2([x_{i-1}(\vec{h}), x_i(\vec{h})])}^2}, \quad i = 1, N, \quad (\text{A2.13})$$

et

$$C_1 = \sum_{j=1}^N \frac{1}{\|f - u'_N(\vec{h})\|_{L^2([x_{j-1}(\vec{h}), x_j(\vec{h})])}^2}.$$

De même la méthode A2.2 consiste à trouver $\vec{h} \in \mathcal{U}_N$ et une constante λ_2 telle que

$$h_i^2 \|f - u'_N(\vec{h})\|_{L^2([x_{i-1}(\vec{h}), x_i(\vec{h})])}^2 + \lambda_2 = 0, \quad i = 1, N.$$

La constante λ_2 est déterminée en procédant comme pour la méthode A2.1. Nous obtenons après calcul :

$$\vec{h} = \vec{F}^2(\vec{h})$$

où $\vec{F}^2 : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ est définie par :

$$F_i^2(\vec{h}) = \frac{1}{C_2 h_i \|f - u'_N(\vec{h})\|_{L^2([x_{i-1}(\vec{h}), x_i(\vec{h})])}^2}, \quad i = 1, N. \quad (\text{A2.14})$$

et

$$C_2 = \sum_{j=1}^N \frac{1}{h_j \|f - u'_N(\vec{h})\|_{L^2([x_{j-1}(\vec{h}), x_j(\vec{h})])}^2}.$$

REMARQUE A2.3.

Une étude asymptotique, lorsque $h = \max\{h_i; 1 \leq i \leq N\}$ tend vers zéro, des estimations a posteriori pour un système d'équations différentielles est traité dans [Bena]. Les auteurs parviennent alors à résoudre exactement le problème de minimisation correspondant. Cette

méthode serait applicable dans notre contexte si nous rajoutions dans la formulation du problème de minimisation des contraintes du type

$$h_i \leq \frac{C}{N} \quad 1 \leq i \leq N,$$

où C est une constante supérieure à un.

Nous résolvons A2.13 et A2.14 par deux schéma de point fixe relaxés : soit $\vec{h}^0 \in \mathcal{U}_n$ et vérifiant la contrainte A2.12. Soit ω un paramètre de relaxation compris entre 0 et 1, pour $n = 0, 1, 2, 3, \dots$, nous calculons $h^{n+1/2}$ et h^{n+1} de la manière suivante :

$$\begin{aligned} h_i^{n+1/2} &= F_i^j(\vec{h}), \\ h_i^{n+1} &= \omega h_i^{n+1/2} + (1 - \omega) h_i^n \quad i = 1, N, \quad j = 1 \text{ ou } 2. \end{aligned} \tag{A2.15}$$

Notons qu'à chaque itération de A2.15 nous devons recalculer la solution éléments finis u_N sur la nouvelle subdivision.

• Résultats numériques

Soit $f(x) = 1$ pour tout $0 \leq x \leq 1$, la solution exacte du problème A2.2 est alors donnée par

$$u(x) = x + \frac{1 - \exp(x/\varepsilon)}{1 - \exp(1/\varepsilon)}, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Nous avons d'abord comparé, pour $\varepsilon = 0.01$, les solutions numériques du schéma centré et du schéma décentré, sur des subdivisions uniformes. Le schéma centré produit des solutions oscillantes si ε est suffisamment petit. Le schéma décentré produit une solution régulière mais est peu précis (l'ordre de convergence est d'ailleurs inférieur à l'ordre de convergence du schéma centré). Nous avons ensuite calculé les subdivisions adaptées avec un coefficient de relaxation (cf. équation A2.15) $\omega = 0.2$ et pour une solution numérique calculée avec un schéma centré. Les résultats sont consignés dans le tableau A2.1, le nombre de subdivisions de l'intervalle $[0, 1]$ variant entre 10 et 320. Comme prévu, les subdivisions adaptées produisent des solutions bien plus précises que les solutions obtenues avec des subdivisions uniformes. D'autre part, la méthode d'adaptation du maillage par équidistribution (méthode A2.2) donne des résultats meilleurs que la méthode de dérivation partielle (méthode A2.1).

Nous avons tracé sur la figure A2.1 la solution exacte u ainsi que les solutions calculées aux sommets x_i , $i = 1, N$, pour des subdivisions uniformes ($N = 10$ et $N = 20$) et pour les deux schémas (centré et décentré). Le schéma centré produit une solution oscillante, alors que le schéma décentré fournit une solution régulière, mais peu précise. La figure A2.2 représente les solutions obtenues, avec un schéma centré, sur des subdivisions adaptées par les deux méthodes A2.1 et A2.2. La méthode d'équidistribution semble la mieux adaptée.

N	e_{un}^c	e_{un}^d	e_{ad}^1	e_{ad}^2	CPU_{un}	CPU_{ad}
10	0.3	0.029	0.028	0.014	0.00021	0.06
20	0.1	0.036	0.015	0.0036	0.00051	0.11
40	0.031	0.034	0.0075	0.0011	0.0011	0.31
80	0.0071	0.023	0.0038	0.00036	0.002	0.81
160	0.0016	0.013	0.0019	0.00012	0.005	2.4
320	0.00041	0.0072	0.00097	0.000043	0.001	4

Tableau A2.1 : comparaison des résultats obtenus pour des subdivisions uniformes ou adaptées.

e_{un}^c : $\|r_N(u - u_N)\|_{L^2(]0,1[)}$ sur une subdivision uniforme
avec un schéma centré,

e_{un}^d : $\|r_N(u - u_N)\|_{L^2(]0,1[)}$ sur une subdivision uniforme
avec un schéma décentré,

e_{ad}^1 : $\|r_N(u - u_N)\|_{L^2(]0,1[)}$ sur une subdivision adaptée (méthode A2.1)
avec un schéma centré,

e_{ad}^2 : $\|r_N(u - u_N)\|_{L^2(]0,1[)}$ sur une subdivision adaptée (méthode A2.2)
avec un schéma centré,

CPU_{un} : temps CPU pour une subdivision uniforme,

CPU_{ad} : temps CPU pour une subdivision adaptée,

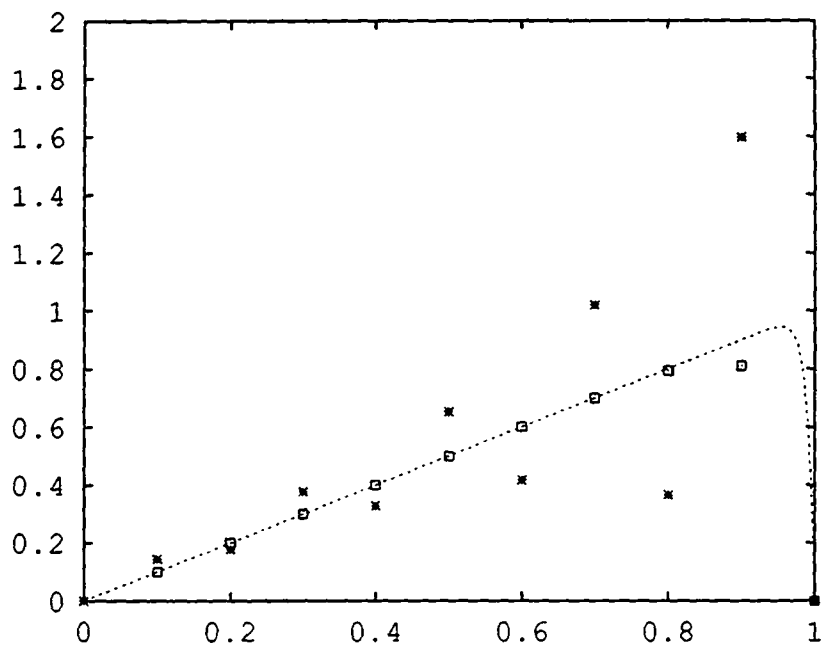
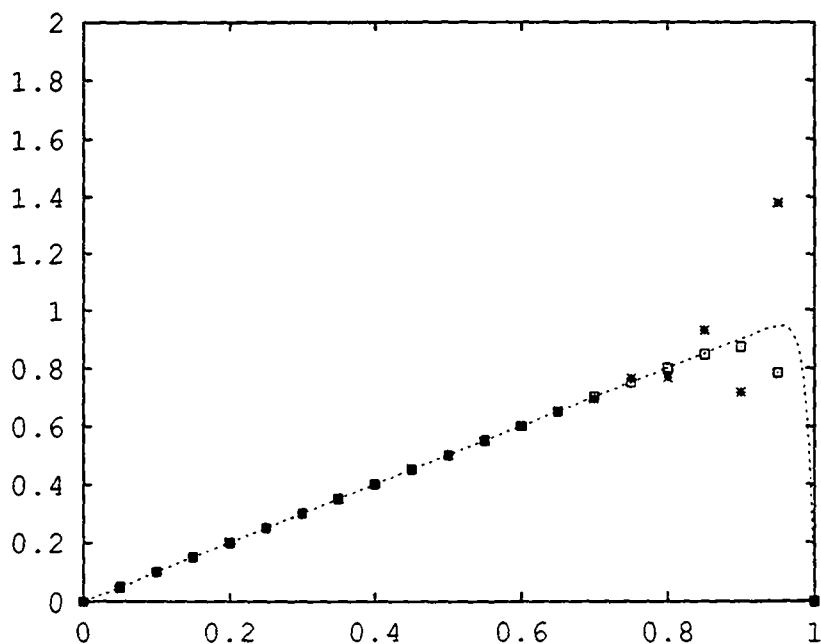
 $N = 10$  $N = 20$

Figure A2.1 : solution exacte (trait continu) et calculée sur des subdivisions uniformes avec un schéma centré (étoiles) et décentré (carrés vides) pour $N = 10$ et $N = 20$.

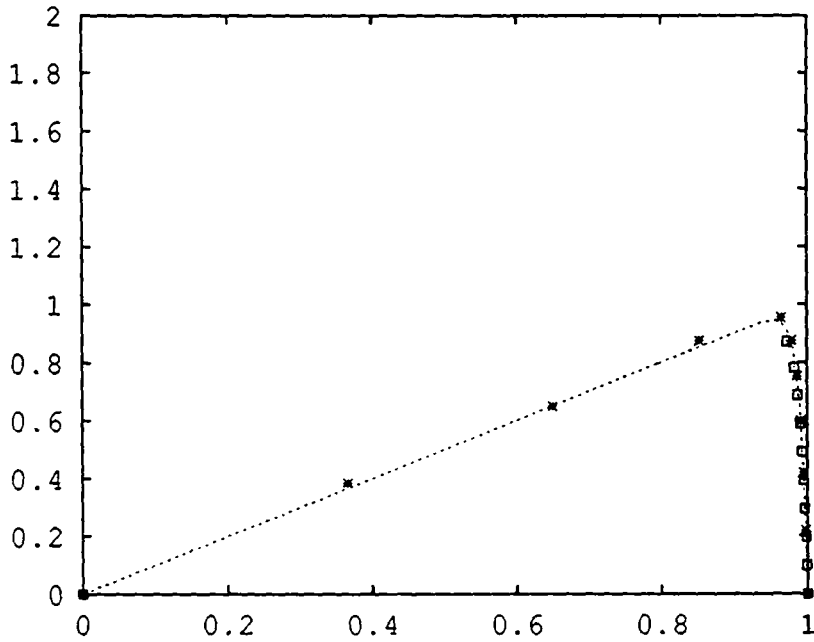
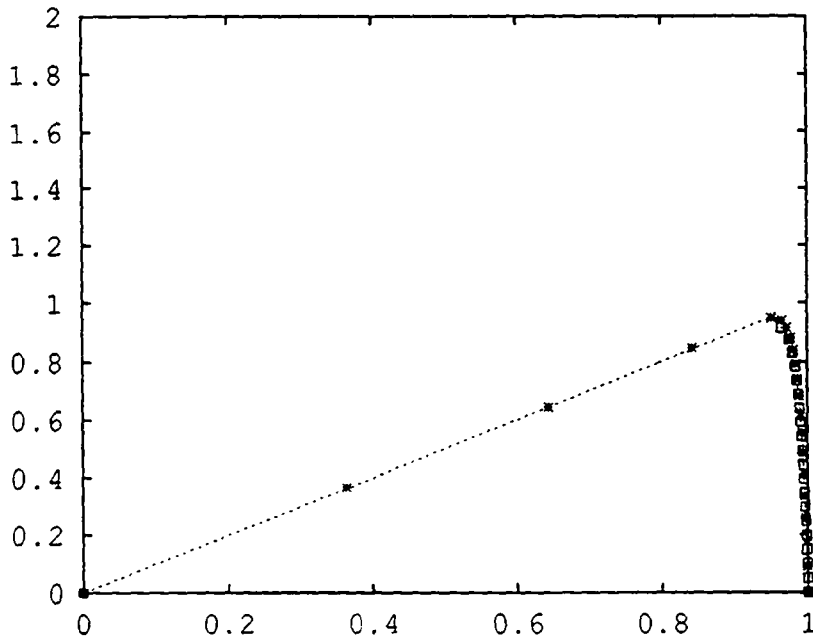
 $N = 10$  $N = 20$

Figure A2.2 : solution exacte (trait continu) et calculée avec un schéma centré sur des subdivisions adaptées avec la méthode A2.1 (carrés vides) et A2.2 (étoiles) pour $N = 10$ et $N = 20$.

Références

- [Ain] M. AINSWORTH, J.Z. ZHU, A.W. CRAIG & O.C. ZIENKIEWICZ, *Analysis of the Zienkiewicz-Zhu a Posteriori Error Estimator in the Finite Element Method*, Int. Jour. Num. Meth. Eng., 28 (1989), pp. 2164-2174.
- [Bab1] I. BABUSKA & W.C. RHEINBOLDT, *A Posteriori Error Estimates for the Finite Element Method*, Int. Jour. Num. Meth. Eng., 12 (1978), pp. 1597-1615.
- [Bab2] I. BABUSKA & W.C. RHEINBOLDT, *Error Estimates for Adaptive Finite Element Computations Method*, SIAM J. Numer. Anal., 15-4 (1978), pp. 736-754.
- [Ban1] R.E. BANK & A. WEISER, *Some a posteriori estimates for elliptic partial differential equations*, Math. Comp., 44 (1985), pp. 283-301.
- [Ban2] R.E. BANK, *Analysis of a Local a posteriori Error Estimate for Elliptic Equations, in Accuracy estimates and adaptive refinements in finite element computations*, I. Babuska, O.C. Zienkiewicz, J. Gago, E.R. de A. Oliviera, Wiley & Sons, 1985.
- [Ban3] R.E. BANK & B.D. WELFERT, *A Posteriori Error Estimates for the Stokes Problem*, SIAM J. Numer. Anal., 28-3 (1991), pp. 591-623.
- [Bar] J. BARANGER & H. EL AMRI, *Estimateurs a posteriori d'erreur pour le calcul adaptatif d'écoulements quasi-newtonien*, RAIRO Math. Modelling and Numer. Anal., 25-1 (1991), pp. 31-48.
- [Bena] H. BENALCAZAR & PH. BLANC, *estimations a posteriori pour un système d'équations différentielles*, Rapport Interne DMA (1992), Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, 1015 Lausanne, CH.
- [Benk] F. BENKHALDOUN, B. LARROUTUROU, P. LEYLAND, *Dynamic mesh adaption for unsteady non linear problems : application to flame propagation*, Num. Grid Generation in Comp. Fl. Dynamics (1988).
- [Benn] W.D. BENNON & F.P. INCROPERA, *The Evolution of Macrosegregation in Statically Cast Binary Ingotes*, Met. Trans., 18B (1987), pp. 611-616.
- [Bes] O. BESSON, J. BOURGEOIS, P.A. CHEVALIER, J. RAPPAZ, R. TOUZANI, *Numerical modelling of electromagnetic casting processes*, J. of Comp. Physics, 92 (1991), pp. 482-507.
- [Bie] H.W. BIELER, *Schmelzbaddynamik bei der Oberflächenbehandlung mit CO₂ laserstrahlung*, Thesis, Lehrstuhl für Lasertechnik RWTH, Aachen.
- [Bon] E. BONOMI, *Adaptive Meshing of Surfaces by structured Grids using Molecular Dynamics*, Proc. Vth Int. Symp. on Numerical Methods in Engineering, R. Gruber, J. Périaux and R.P.Schaw, CMP, Springer-Verlag, 1989.
- [Bri] M.O. BRISTAUX & PÉRIAUX, *Adaptive Finite Elements*, Cours du Von Karmann Institute, 1989.
- [Bro] A. BROOKS & T.J.R. HUGHES, *Streamline upwind/Petrov-Galerkin formulations for convection dominated flows*, Comp. Methods in Appl. Mech. Eng., 32 (1982), pp. 199-259.
- [Can] J.R. CANNON, E. DIBENEDETTO & G.H. KNIGHTLY, *The Bidimensional Stefan Problem with Convection : The Time Dependent Case*, Comm. in Partial Differential Equations, 14 (1983), pp. 1549-1604.
- [Car] B. CARRUPT, M. RAPPAZ & M. ZIMMERMANN, *Modeling of Microstructure Formation in Laser Treatment Processes*, Proc. IVth Conf. on Modeling of Casting and Welding Processes.
- [Cha] C.L. CHAN, R. ZEHR, J. MAZUMDER & M.M. CHEN, *3D Model for Convection in Laser weld pools*, Proc. Conf. on Modeling of Casting and Welding Processes.
- [Cia] P.G. CIARLET, *The Finite Element method for elliptic problems*, North Holland, Amsterdam, 1978.
- [Cip] F.-D. CIPRIANI, *Etude numérique de la convection thermocapillaire dans un bain fondu créé par un laser*, Thèse 901, Institut de Mécanique de Marseille II, Université Aix-Marseille II, 1991.
- [Cle] P. CLÉMENT, *Approximation by the Finite Element Method using Local Regularization*, R.A.I.R.O. n°2, pp. 77-84.

- [David] S.A. DAVID & J.M. VITEK, *Correlation between solidification parameters and weld microstructure*, *Int. Materials Review*, 34(5) (1989), pp. 213.
- [Davis] S.H. DAVIS, *Hydrodynamic interactions in directional solidification*, *J. Fluid Mech.*, 212 (1990), pp. 241-262.
- [Dem] L. DEMKOWICZ, J.T. ODEN, W. RACHOWICZ & O. HARDY, *Toward a Universal h-p Adaptive Finite Element Strategy*, *Comp. Meth. in Appl. Mech. and Engrg*, 77 (1989), pp. 79-212.
- [Dou] DOUGLAS J., DUPONT T. & SERRIN J., *Uniqueness and comparison theorems for nonlinear elliptic equations in divergence form*, *Arch. Rational Mech. Anal.*, 42 (1971), pp. 157-168.
- [Dre] J.M. DREZET & A.H.A. HOADLEY, *Modélisation thermique de la refusion et du revêtement de surface par laser*, *Rapport Interne 1991*, Département des matériaux, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne.
- [Dro] J.J. DROUX, *Simulation Numérique Bidimensionnelle et Tridimensionnelle de processus de solidification*, *Thèse 901*, Département de mathématiques, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, 1991.
- [Eng] M.S. ENGELMAN, *FIDAP Theoretical User Manual*, 1981.
- [Eri1] K. ERIKSSON & C. JOHNSON, *An Adaptive Finite Element Methods for linear elliptic Problems*, *Math. Comp.*, 50 (1988), pp. 361-383.
- [Eri2] K. ERIKSSON & C. JOHNSON, *Adaptive Finite Element Methods for Parabolic Problems*, *SIAM J. Numer. Anal.*, 28-1 (1991), pp. 43-77.
- [Fre] A. FRENK, A.F.A. HOADLEY & J.D. WAGNIÈRES, *In situ techniques for measuring the absorption during laser surface remelting*, *Met. Trans.*, 22D (1991), pp. 138.
- [Fri] A. FRIEDMAN, *Variational Principles and Free Boundary problems*, *Pure and applied Mathematics*, Wiley-Interscience, New-York, 1982.
- [Geo] P.L. GEORGES, *Génération automatique de maillages*, *RMA 16*, Masson, Paris, 1990.
- [Gil] D. GILBARG & N.S. TRUDINGER, *Elliptic Partial Differential equations of second order*, Springer-Verlag, Berlin, 1983.
- [Gir] V. GIRAULT & P.-A. RAVIART, *Finite Element Methods for Navier-Stokes equations*, Springer-Verlag, Berlin, 1986.
- [Gre1] M. GREMAUD, *Solidification rapide : étude microstructurale des alliages Al-Fe après fusion superficielle par laser*, *Thèse 885*, Département des Matériaux, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, 1990.
- [Gre2] P.-A. GREMAUD, *Analyse Numérique de problèmes de changements de phase liés à des phénomènes de solidification*, *Thèse 941*, Département de mathématiques, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, 1991.
- [Hoa1] A.F.A. HOADLEY, M. RAPPAZ, & M. ZIMMERMANN, *Heat-Flow Simulation of Laser Laser Remelting with Experimental Validation*, *Met. Trans.*, 22B (1991), pp. 101-109.
- [Hoa2] A.F.A. HOADLEY, C.F. MARSDEN & M. RAPPAZ, *A Computational Study of the Laser Cladding Process*, *Proc. of the Vth Eng. Found. Conf. on Modeling of Casting, Welding & advanced Solidif. Processes*, M. Rappaz, M.R. Ozgu & K.W. Mahin, TMS Publ., Warrendale, Penn., 1991.
- [Hoa3] A.F.A. HOADLEY & M. RAPPAZ, *A Thermal Model of Laser Cladding by Powder Injection*, *Met. Trans.* to appear (1992).
- [Hug] T.J.R. HUGHES, W.K. LIU & A. BROOKS, *F.E. analysis of incompressible viscous flows by the penalty function formulation*, *Comp. Physics*, 30 (1979), pp. 1-60.
- [Joh1] C. JOHNSON, *Adaptive Finite Element Methods for Diffusion and Convection Problems*, *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 82 (1990), pp. 301-322.
- [Joh2] C. JOHNSON, *Numerical Solution of partial differential equations by the Finite Element Method*, Cambridge University Press, Cambridge, 1987.
- [Kan] M. KANOUFF & L. BERTRAM, *A proposed Standart Problem Definition for the Calculation of a Heat and Fluid Flow in a GTA Weld Pool*, *Proc. of the Vth Eng. Found. Conf. on Modeling of Casting, Welding and advanced Solidif. Processes*, M. Rappaz, M.R. Ozgu and K.W. Mahin, TMS Publ., Warrendale, Penn., 1991.

- [Kou] S. KOU AND Y.H. WANG, *3D Convection in Laser Melted Pools*, Met. Trans., 17A (1986), pp. 2265-2277.
- [Kre] E.W. KREUTZ & N. FIRCH, *Melt Dynamics in Surface Processing with Laser radiation calculations and applications dans le traitement des matériaux par laser*, in *Laser de puissance et traitement des matériaux*, Presses Polytechniques Romandes, Ch-1015 Lausanne, 1991.
- [Kur] W. KURZ & D.J. FISHER, *Fundamentals of Solidification*, Trans Tech Publ., Aedermannsdorf (CH), 1986.
- [Lad] O.A. LADYZHENSKAYA & N.N. URAL'TSEVA, *Linear and Quasilinear elliptic equations*, Academic Press, New-York, 1968.
- [Lanc] J.F. LANCASTER, *Metallurgy of Welding*, G. Allen and Unwin Publ., London, 1990.
- [Land] L.D. LANDAU & E.M. LIFSCHITZ, *Mécanique des Fluides*, MIR, Moscou, 1971.
- [Les] P. LESAIN, *Sur la résolution de systèmes hyperboliques du premier ordre pour des méthodes d'éléments finis*, Thèse, Université Pierre et Marie Curie, 1975.
- [Ley] P. LEYLAND & R. RICHTER, *Shock Capturing using Auto-adaptive Finite Elements*, Proc. Numerical Methods for Fluid Dynamics, Reading 1992.
- [Lio] J.J. LIONS, *Quelques méthodes de résolution de problèmes aux limites non-linéaires*, Gauthier-Villars, Paris, 1969.
- [Lun] E. LUNEVILLE, *Simulation et contrôle de la trempe superficielle par laser*, Thèse, Ecole Nationale Supérieure des Techniques Avancées, 91120 Palaiseau, 1989.
- [Mac] R.M. MACINTYRE, *Laser hardfacing of turbine blade shroud interlocks*, *Lasers in Materials Processing*, E.A. Metzbower, ASM, 1983.
- [Mag] E. MAGENES, R.H. NOCHETTO & C. VERDI, *Error estimates for a linear scheme to approximate nonlinear parabolic problems*, RAIRO Model. Math. Anal. Num., 21 (1987), pp. 655-1678.
- [Maz] J. MAZUMDER & A. KAR, *Nonequilibrium Processing with Lasers*, Opto Elektronik Magazin, 4(3) (1988), pp. 261.
- [Mil1] K. MILLER & R.N. MILLER, *Moving Finite Element*, Siam J. Numer. Anal., 18(6) (1981).
- [Mil2] K. MILLER, *Recent Results on Finite Element Methods with Moving Nodes, Accuracy estimates and adaptive refinements in finite element computations*, I. Babuska, O.C. Zienkiewicz, J. Gago, E.R. de A. Oliviera, Wiley & Sons, 1985.
- [Mys] A.D. MYSHKIS & ALL., *Low-gravity Fluid Mechanics*, Springer-Verlag, Berlin, 1987.
- [Noc1] R.H. NOCHETTO, M. PAOLINI & C. VERDI, *An adaptive Finite Element method for two-phase Stefan problems in two space Variables*, Math. Comp. (July 1991), pp. 73-108.
- [Noc2] R.H. NOCHETTO, M. PAOLINI & C. VERDI, *Local Mesh Refinements for two-phase Stefan Problems in two Space Variables*, S.I.A.M. J. Sc. Statistical Comput., 12 (1991), pp. 1207-1244.
- [Noc3] R.H. NOCHETTO & C. VERDI, *An efficient linear scheme to approximate parabolic free boundary problems : error estimates and implementation*, Math. Comp., 51 (1988), pp. 27-53.
- [Ode] J.T. ODEN, T. LISZKA & W. ZHU, *An h-p Adaptive Finite Element Method for Incompressible Viscous Flows*, *The Mathematics of Finite Element and Applications 7*, J.R. Whiteman, Academic Press Limited, London, 1990.
- [Pao] M. PAOLINI, G. SACCHI, C. VERDI, *F.E. approximations of singular parabolic problems*, Int. J. for Numer. Meth. Eng., 26 (1988), pp. 1989-2007.
- [Pir] O. PIRONNEAU, *Méthodes des éléments finis pour les fluides*, RMA 7, Masson, Paris, 1988.
- [Pau] A. PAUL & T. DEBROY, *Free Surface Flow and Heat Transfer in conduction Mode Laser Welding*, Met. Trans., 19B (dec 1988), pp. 851.
- [Pou] J. POUSIN & J. RAPPAZ, *a posteriori estimates*, Comptes Rendu Acad. Sc. Paris.
- [Ram] N. RAMANAN & S.A. KORPELLA, *Fluid Dynamics of Stationary Weld Pools*, Met. Trans., 21A (1990), pp. 45-57.
- [Rap] M. RAPPAZ & V. VOLLER, *Modelling of Micro-segregation in Solidification Processes*, Met. Trans., 21A (1990), pp. 749-743.
- [Ris] J.-J. RISLER, *Méthodes mathématiques pour la CAO*, RMA 18, Masson, Paris, 1991.

- [Ros] A. ROSSELET, *Propriétés mécaniques et calcul des contraintes dans le traitement des matériaux par laser*, in *Laser de puissance et traitement des matériaux*, Presses Polytechniques Romandes, Ch-1015 Lausanne, 1991.
- [Slo] S.W. SLOAN, *a fast algorithm for constructing Delaunay triangulations in the plane*, *Adv. Eng. Soft.*, 9-1 (1987).
- [Tho] J.F. THOMPSON, Z.U.A. WARSI & C. WAYNE MASTIN, *Numerical Grid Generation*, North-Holland, New-York, 1985.
- [Tsa] M.C. TSAI & S. KOU, *The Advantage of Curvilinear Coordinates in Simulating Marangoni Convection in Deformed Weld Pools*, *Proc.*
- [Ver] R. VERFÜRTH, *A Posteriori Error Estimates for the Stokes Problem*, *Num. Math.*, 55 (1989), pp. 309-325.
- [Vis] R. VISKANTA & C. BEKERMANN, *Mathematical modeling of solidification*, in *Proc. Symp. Interdisciplinary Issues in Materials processing and manufacturing*, ASME, Boston, 1987.
- [Vol] V.R. VOLLER, A.D. BRENT & C. PRAKASH, *The modelling of heat, mass and solute transport in solidification systems*, *Int. J. heat and mass Transfer*, 32 (1989), pp. 1719.
- [Wat] D.F. WATSON, *Computing the n dimensional Delaunay triangulation with application to Voronoi polytopes*, *The Computer Journal* (1981).
- [Wee] V.M. WEERASINGHE AND STEEN W.M., *Laser Surface Cladding in Laser Surface treatments of materials*, Draper and Mazzaldi, Martinus Nijhoff, Pordrecht.
- [Zac] T. ZACHARIA, S.A. DAVID & H.G. KRAUS, *Comp. Modeling of Stationary Gas-Tungsten Arc Weld Pools and Comparison to Stainless Steel 304 Exp. Results*, *Met. Trans.*, 22B (1991), pp. 243-257.
- [Zim] M. ZIMMERMANN, *Solidification rapide de l'eutectique Al-Al₂Cu par refusion laser*, Thèse 899, Département des Matériaux, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, 1990.
- [Zac] T. ZACHARIA, S.A. DAVID & H.G. KRAUS, *Comp. Modeling of Stationary Gas-Tungsten Arc Weld Pools and Comparison to Stainless Steel 304 Exp. Results*, *Met. Trans.*, 22B (1991), pp. 243-257.
- [Zie] O.C. ZIENKIEWICZ & J.Z. ZHU, *A Simple Error Estimator and Adaptive Procedure for Practical Engineering Analysis*, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 24 (1987), pp. 337-357.

Curriculum Vitae

Né le 29 septembre 1963 à Gênes, de nationalité française par naturalisation, j'ai effectué toute ma scolarité obligatoire en France. J'ai obtenu le diplôme d'ingénieur E.C.A.M. (Ecole Catholique d'Arts et Métiers, Lyon) en 1986 et le D.E.S.S. (Diplôme d'Etudes Supérieures Spécialisées) de calcul scientifique de l'université de Besançon en 1987. J'ai effectué mon service militaire pour la Direction des Constructions des Armes Navales l'année suivante et je suis assistant-doctorant au département de mathématiques de l'Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne depuis août 1988.

