

ETUDE NUMERIQUE DES EQUATIONS D'EULER POUR DES ECOULEMENTS RADIAUX

THESE No 878 (1990)

PRESENTÉE AU DEPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

POUR L'OBTENTION DU GRADE DE DOCTEUR ES SCIENCES

PAR

JEAN-LUC ARRIGO

Mathématicien diplômé EPFL
originaire de Caneggio (TI)

acceptée sur proposition du jury :

Prof. J. Descloux, rapporteur
Prof. Y. Brenier, corapporteur
Prof. J. Ligou, corapporteur
Prof. J. Rappaz, corapporteur

Lausanne, EPFL
1990



REMERCIEMENTS.

Je remercie sincèrement Monsieur le Professeur Jean Descloux pour avoir accepté d'être mon directeur de thèse. Sa patience et ses remarques pertinentes ont été pour moi une aide des plus précieuses.

Je fais part de ma reconnaissance à Monsieur le Professeur Jacques Ligou dont les remarques ont permis de donner à mon travail son caractère appliqué. Je le remercie également pour avoir accepté d'être corapporteur.

Mes remerciements vont également à Monsieur le Professeur Naeem. A. Tahir, à qui je dois les résultats numériques de MEDUSA présentés dans ce travail, ainsi qu'à Messieurs les Professeurs Yann Brenier et Jacques Rappaz qui ont accepté d'être corapporteurs.

Je remercie tout particulièrement mon épouse Anne pour avoir si soigneusement dactylographié le manuscrit.

RESUME.

Dans le cadre d'une collaboration avec le Professeur Jacques Ligou du Département de Physique, nous étudions une méthode pour la résolution numérique des équations d'Euler en coordonnées lagrangiennes, dans le cas des symétries sphérique et cylindrique. Dans le contexte de la fusion par confinement inertiel et de la simulation du comportement de cibles, un code numérique, désigné par MEDUSA, traite ces équations avec le schéma de Richtmyer et Morton: un schéma centré auquel est ajouté un terme de viscosité artificielle de von Neumann destiné à amortir les oscillations numériques typiques de ce genre de méthodes. Les résultats numériques obtenus avec ce schéma montrent que la viscosité artificielle ne suffit pas à éliminer les oscillations numériques de façon satisfaisante.

Dans ce travail nous considérons, d'abord pour un gaz non conducteur de la chaleur, un schéma s'inspirant du schéma de Lax-Wendroff que nous adaptons au cas de maillages irréguliers. Nous étudions la précision de ce schéma et nous établissons, grâce à l'étude d'un cas simple, une condition heuristique nécessaire à sa stabilité. Nous éliminons totalement les oscillations numériques générées par notre schéma en l'hybridant à l'aide d'un schéma d'ordre 1; pour ce faire, nous généralisons la méthode de l'hybridage auto ajusté de Harten et Zwas au cas des schémas ne pouvant pas être mis sous forme conservative. Nous traitons les conditions aux limites correspondant au cas de la fusion par confinement inertiel: au centre de la cible nous réfléchissons les ondes en nous inspirant des travaux de Chorin et de Sod et à sa surface, où la pression est imposée en fonction du temps, nous utilisons le schéma de Godunov. Dans le cas du gaz conducteur de la chaleur, la diffusion thermique, que nous traitons avec un schéma Euler implicite linéarisé, est introduite au moyen d'un splitting. Finalement, nous présentons les résultats numériques obtenus avec notre méthode dans le cas de la compression d'une cible sphérique.

TABLE DES MATIERES.

1. Introduction.	1
1.1. Le contexte.	1
1.2. Les équations.	1
1.3. Nos objectifs et leur réalisation.	4
1.4. Simplifications.	7
1.5. Conditions initiale et aux limites.	9
2. Un schéma numérique pour la partie hydrodynamique.	11
2.1. Le système d'équations sans diffusion thermique.	11
2.2. Un schéma numérique à pas fractionnaires.	12
2.3. Consistance.	15
2.4. Une condition heuristique de stabilité dans le cas d'un maillage non uniforme.	19
2.5. Un schéma hybride.	27
3. Traitement numérique des conditions aux limites.	47
3.1. La condition de bord.	47
3.2. Conditions aux limites au centre de la cible.	65
4. Le cas du gaz conducteur de la chaleur.	73
5. Un exemple: la compression d'une cible sphérique	89
Bibliographie.	111

1. INTRODUCTION.

1.1. Le contexte.

Le présent travail est motivé par la simulation numérique de la fusion contrôlée dans le cas particulier du confinement inertiel. Rappelons brièvement les principes de ce mode de réalisation de la fusion nucléaire.

La surface d'une petite masse sphérique (appelée "cible") de deutérium et de tritium gazeux est soumise à un violent faisceau ionique ou laser. Une mince couche superficielle de cette cible est ainsi ionisée et volatilisée dans l'espace environnant. Une énorme onde de pression est alors engendrée par réaction à la surface de la cible et se propage vers son centre, élevant à cet endroit la densité et la température du deutérium - tritium à des valeurs telles que le processus de fusion nucléaire y est amorcé. Le dégagement de chaleur qui en résulte permet la propagation du processus de fusion du centre vers l'extérieur de la cible.

La convergence de l'onde de pression vers le centre, puis la propagation vers l'extérieur du phénomène de fusion ont lieu en un laps de temps très court. Pendant ce laps de temps, la matière reste confinée par inertie à l'intérieur d'un espace assez restreint pour qu'une température et une densité favorables à la fusion nucléaire y soient maintenues : la cible est consumée avant d'être dispersée dans l'espace environnant.

On pourra se référer à [1] pour une description plus détaillée du processus de fusion par confinement inertiel, ainsi que pour l'établissement des équations données ci-après.

1.2. Les équations.

La cible est décrite en coordonnées sphériques, en supposant que toutes les grandeurs en présence ne dépendent que du rayon R et du temps t (symétrie sphérique).

Les équations sont écrites dans le contexte lagrangien suivant:

considérons une particule se trouvant initialement à une distance r du centre de la sphère. Désignons par $\xi(r,t)$ la distance qui sépare cette même particule du centre à l'instant t . Par définition, $\xi(r,0) = r$; la variable r est " la coordonnée de Lagrange ". La vitesse est donnée en fonction de cette variable par

$$u(r,t) = \partial_t \xi(r,t). \quad (1.1)$$

La coordonnée d'Euler R et la coordonnée de Lagrange r sont reliées par le changement de variables

$$R = \xi(r,t). \quad (1.2)$$

Soit $\rho_0(r)$ la densité initiale en coordonnée de Lagrange. Nous introduisons la variable

$$m = m(r) = \int_0^r y^2 \rho_0(y) dy ; \quad (1.3)$$

$m(r)$ est la masse contenue dans un secteur de un stéradian à l'intérieur de la sphère de rayon r . Par la suite, c'est à la variable m que nous donnerons le nom de " coordonnée de Lagrange ".

L'évolution de la cible est décrite en fonction de m et de t par les équations

$$\partial_t R = u ; \quad (1.4)$$

$$\partial_t V - \partial_m (R^2 u) = 0 ; \quad (1.5)$$

$$\partial_t u + R^2 \partial_m p = 0 ; \quad (1.6)$$

$$C_{V_i} \partial_t T_i + p_i \partial_t V = \partial_m (R^2 K_i \partial_R T_i) + S_i ; \quad (1.7)$$

$$C_{V_e} \partial_t T_e + p_e \partial_t V + B_e \partial_t \rho = \partial_m (R^2 K_e \partial_R T_e) + S_e ; \quad (1.8)$$

$$p_i = n_i k T_i ; \quad (1.9)$$

$$p_e = f(\rho, T_e) . \quad (1.10)$$

Dans ce modèle, les ions et les électrons sont considérés comme deux espèces formant un seul fluide, ou " mélange ", de densité ρ , s'écoulant à la vitesse u .

Le gaz des ions est caractérisé par la pression p_i , la température T_i , le coefficient de chaleur spécifique C_{V_i} et par le coefficient de conductivité thermique K_i donné par l'expression

$$K_i = 4.3 \cdot 10^{-12} \frac{T_i^{\frac{5}{2}}}{\sqrt{M} \ln(\Lambda)} , \quad (1.11)$$

où M est le nombre de masse moyen du mélange et où Λ est une fonction de la température et de la densité du gaz des électrons ($\ln(\Lambda)$ est appelé " logarithme de Coulomb "). Les ions sont considérés selon le modèle du gaz idéal non dégénéré, caractérisé par un coefficient de compressibilité B_i égal à zéro et par l'équation d'état (1.9), où n_i est le nombre des ions par m^3 et où k est la constante de Boltzmann.

Le gaz des électrons est caractérisé par la pression p_e , la température T_e , le coefficient de chaleur spécifique C_{V_e} et par le coefficient de conductivité thermique K_e donné par l'expression

$$K_e = \frac{1}{1 + a \frac{\lambda_e}{T_e} \left| \partial_R T_e \right|} 1.83 \cdot 10^{-10} \frac{T_e^{\frac{5}{2}}}{\ln(\Lambda)} , \quad (1.12)$$

où λ_e est le libre parcours moyen des électrons et où a est une constante. Les électrons peuvent être considérés selon le modèle du gaz idéal non dégénéré ou selon celui de Fermi - Dirac. Nous donnons l'équation d'état du gaz des électrons sous la forme générale (1.10) et nous désignons dans (1.8) par B_e son coefficient de compressibilité.

Les équations (1.7) et (1.8) sont les équations d'énergie des deux espèces; S_i et S_e y désignent des termes sources. Dans (1.7), $\partial_R T_i$ désigne la dérivée de la température des ions, considérée comme fonction de la variable eulérienne R , par rapport à cette variable. La quantité $R^2 K_i \partial_R T_i$ est alors considérée comme fonction de la variable m , et dérivée par rapport à cette variable pour donner le terme de diffusion thermique $\partial_m (R^2 K_i \partial_R T_i)$. La même remarque peut être faite pour le terme $\partial_m (R^2 K_e \partial_R T_e)$ de l'équation (1.8).

L'équation (1.4) est une conséquence directe des relations (1.1) et (1.2); elle exprime le lien entre la variable eulérienne R et la variable m .

L'équation (1.5), dans laquelle V est le volume spécifique $\frac{1}{\rho}$ du mélange, exprime la conservation de la masse dans le fluide.

L'équation (1.6) est l'équation de la quantité de mouvement du mélange; p y désigne la pression totale $p_i + p_e$.

1.3. Nos objectifs et leur réalisation.

Un code numérique, désigné par "MEDUSA" et présenté dans [15], a été créé pour simuler l'ensemble du processus décrit au § 1.1. Dans ce code, les équations (1.4) à (1.10) sont traitées à l'aide d'un schéma à 5 niveaux de temps s'inspirant du schéma centré de Richtmyer et Morton présenté dans [2], p.318, adapté au cas d'un maillage irrégulier s'affinant vers le centre de la cible. Les équations ainsi discrétisées contiennent un terme de viscosité artificielle de von Neumann destiné à amortir les oscillations numériques produites au voisinage des discontinuités par de tels schémas.

La figure 1.1 montre le profil de la pression en fonction de la variable m obtenu par MEDUSA lors de la simulation de la compression d'une cible sphérique, dans le cas d'un gaz non conducteur de la chaleur. Nous y voyons une onde de pression s'éloigner du centre de la cible un peu après sa réflexion en ce point. Nous remarquons que la viscosité artificielle n'a pas suffi à supprimer les oscillations numériques, particulièrement visibles en arrière du choc.

$$3 \cdot 10^{15} \frac{N}{m^2}$$

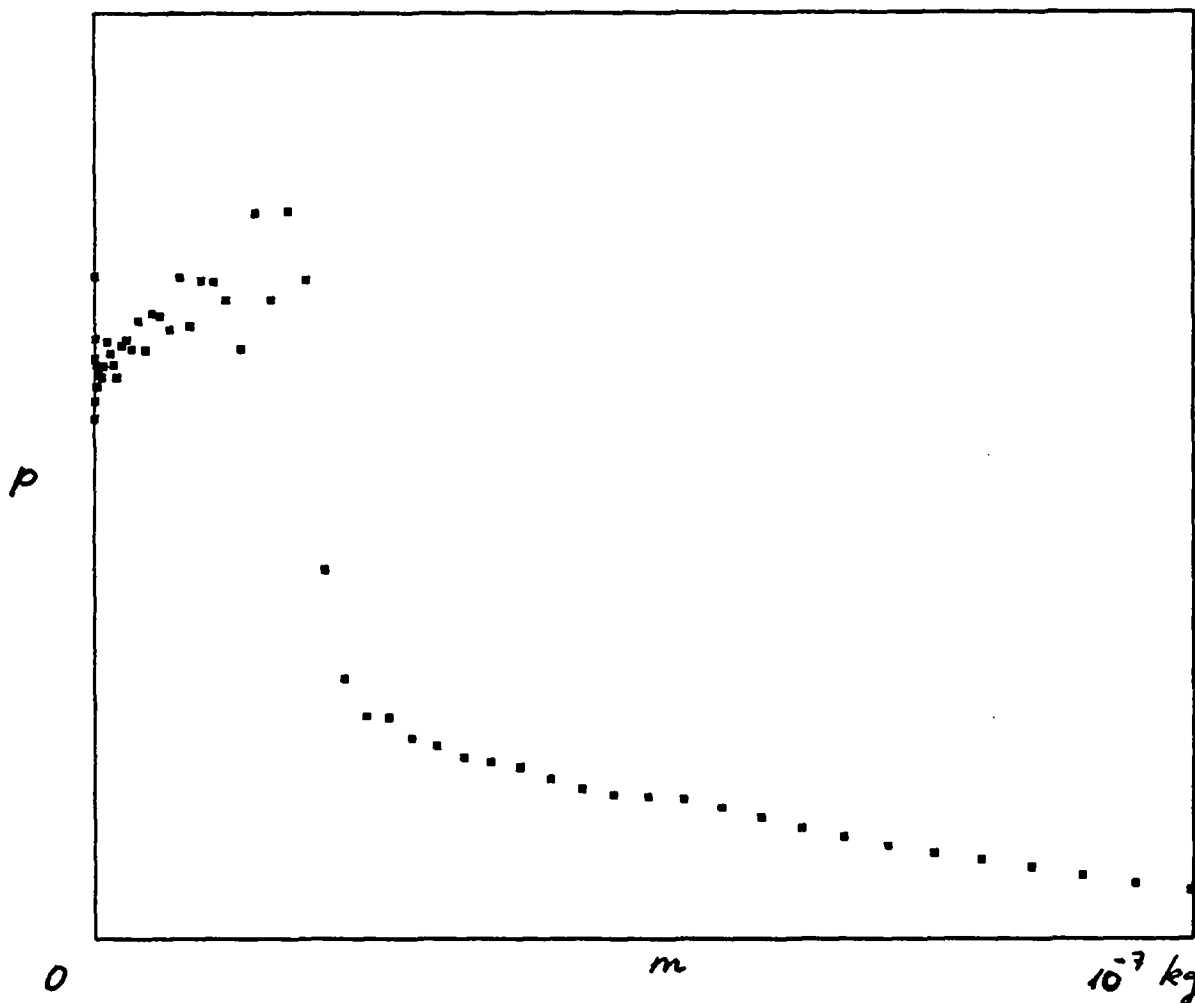


figure 1.1

Nous nous sommes fixé pour objectif de construire un schéma numérique capable de produire, en un "temps calcul" si possible inférieur à celui requis par MEDUSA, des solutions libres d'oscillations numériques sans toutefois que le profil des éventuelles discontinuités (chocs, discontinuités de contact) ne soit amorti par une diffusion numérique excessive.

Remarquons que, dans le contexte de cet objectif, les simplifications introduites au § 1.4 n'altèrent en rien les caractéristiques du modèle que nous devons traiter.

Notre méthode est composée des éléments suivants:

- i) Les parties "hydrodynamique" et "diffusion thermique" sont séparées par un splitting.

- ii) La partie "hydrodynamique" est traitée par un schéma hybride basé d'une part sur le schéma de Lax-Wendroff et d'autre part sur celui de Lax.
- iii) La "diffusion thermique" est introduite par un schéma Euler implicite linéarisé.
- iv) A la surface de la cible, la pression est imposée; nous traitons cette condition aux limites en nous inspirant du schéma de Godunov.
- v) Au centre de la cible, nous procédons de manière à obtenir une réflexion des ondes.

La méthode d'hybridage entre un schéma monotone d'ordre 1 et un schéma plus précis a été introduite par Harten et Zwas (c.f. [3]) dans le cadre d'équations de conservation et pour des maillages réguliers. A notre connaissance, les équations d'Euler en symétrie sphérique ou cylindrique n'admettent pas de formulation sous forme conservative. Pour réaliser le point ii), nous avons généralisé le procédé de Harten et Zwas pour des systèmes hyperboliques quelconques et pour des maillages irréguliers.

Au point iv) nous considérons la condition de bord obtenue en imposant une pression donnée en fonction du temps à la surface de la cible. Remarquons que MEDUSA prévoit également la condition obtenue en imposant la vitesse du fluide au bord en fonction du temps. Toutefois, la donnée de la pression à la surface de la cible nous paraît plus significative dans le contexte des exemples traités au cours de ce travail, et nous ne considérons que ce cas.

Au point v), nous réfléchissons les ondes au centre de la cible en adaptant au cas lagrangien la méthode proposée par Chorin dans [11] et utilisée par Sod dans [12] dans le cadre d'un écoulement radial en symétrie cylindrique et en coordonnées eulériennes.

Pour une même situation, la figure 1.2 présente, en trait fin continu, le profil de pression obtenu avec MEDUSA (figure 1.1) et, en pointillé, le résultat correspondant obtenu avec notre méthode.

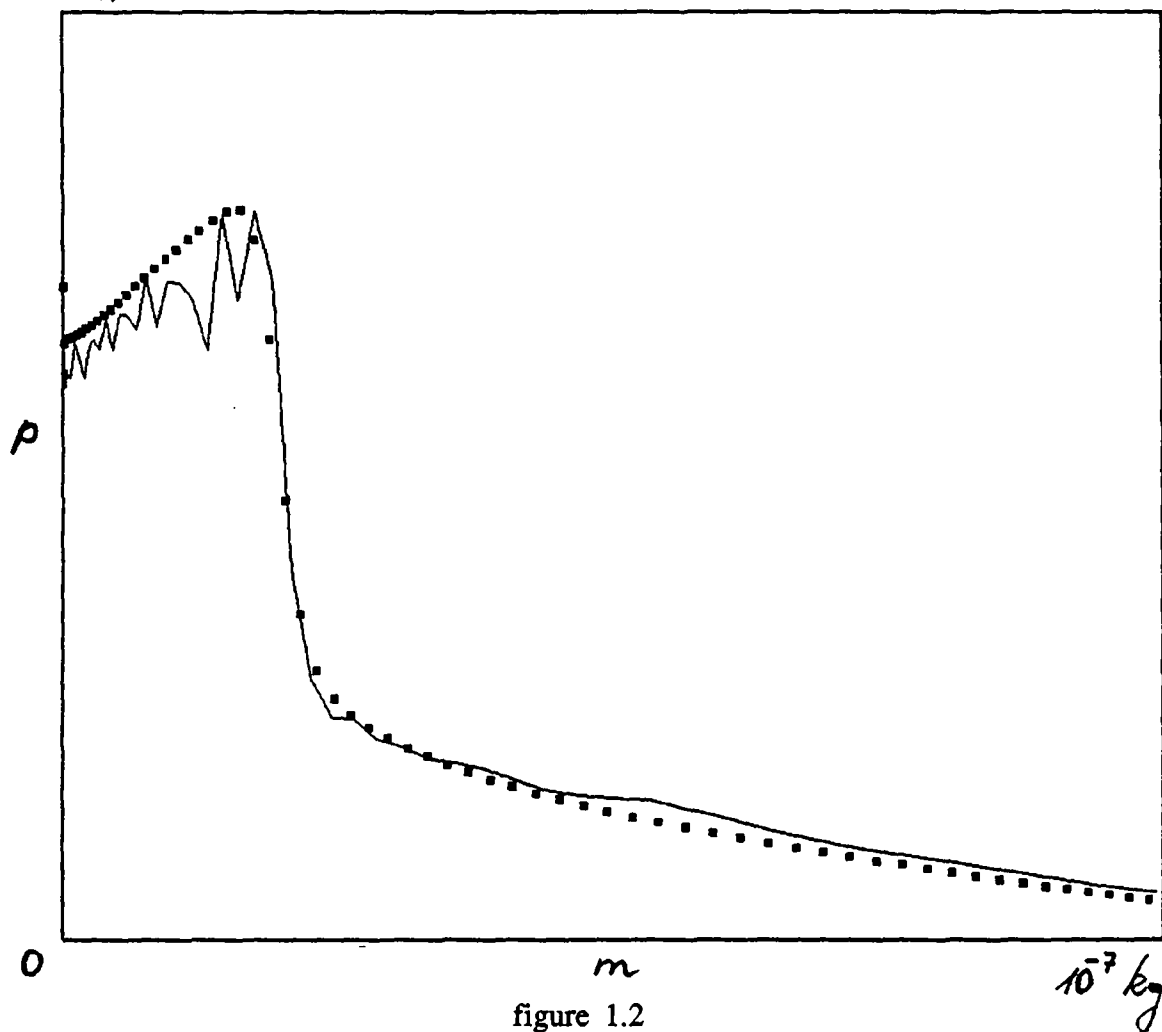
Nous observons:

- La solution obtenue par notre méthode est exempte d'oscillations.

- la diffusion numérique introduite au niveau du choc dans les deux solutions est similaire: il faut environ 5 points aux deux méthodes pour représenter cette discontinuité.
- le résultat obtenu par MEDUSA a requis 3500 pas de temps alors que notre méthode n'en a nécessité que 2959.

Au vu de cet exemple et de ceux qui seront présentés au cours de ce travail, nous estimons que nos objectifs sont atteints.

$$3 \cdot 10^{15} \frac{N}{m^2}$$



1.4. Simplifications.

Dans le cadre de ce travail, des simplifications sont apportées au modèle décrit au § 1.2.

Tout d'abord nous ignorons les termes sources, c'est-à-dire nous

posons $S_i = S_e = 0$ dans les équations (1.7) et (1.8). Dans le modèle traité par MEDUSA, ces termes sources contiennent des grandeurs telles que l'énergie apportée au système par les réactions thermonucléaires ou l'énergie déposée dans le fluide par le faisceau ionique destiné à volatiliser la surface de la cible. Le traitement de ces termes est très complexe et n'a pas d'intérêt dans le cadre des objectifs que nous nous sommes fixés, raison pour laquelle nous choisissons de les ignorer.

Nous supposons que le gaz des électrons, à l'instar du gaz des ions, est toujours idéal et non dégénéré (c.f. § 1.2). Les ions et les électrons ont ainsi le même coefficient de chaleur spécifique que nous désignerons par C_V . De plus, le coefficient de compressibilité des électrons B_e apparaissant dans l'équation (1.8) est égal à zéro. Enfin, l'équation d'état (1.10) prend la forme

$$p_e = n_e k T_e , \quad (1.13)$$

où n_e est le nombre d'électrons par m^3 .

Dans le cas du deutérium - tritium, $n_e = n_i$ et nous désignerons par n ce nombre. K_i est toujours très inférieur à K_e . Nous posons $K_i = 0$, et nous écrirons simplement K au lieu de K_e par la suite. Nous supposons enfin que les ions et les électrons ont la même température T .

Ces simplifications nous permettent de considérer un modèle de fluide à une seule espèce. En effet, en rappelant que p est la pression totale $p_i + p_e$, nous remplaçons, en les sommant, les équations (1.7) et (1.8) par l'équation d'énergie

$$2C_V \partial_t T + p \partial_t V = \partial_m (R^2 K \partial_R T) . \quad (1.14)$$

En procédant de même avec les équations (1.9) et (1.13), nous obtenons l'équation d'état

$$p = 2nkT . \quad (1.15)$$

Remarquons que si M est le nombre de masse moyen du mélange et que m_H est la masse du proton, la densité ρ est donnée par l'expression

$$\rho = nMm_H . \quad (1.16)$$

Ainsi, puisque $\rho = \frac{1}{V}$, en introduisant la constante du gaz

$$C_g = \frac{k}{Mm_H} \quad (1.17)$$

nous pouvons réécrire l'équation d'état (1.15) sous la forme

$$pV = 2C_g T . \quad (1.18)$$

Nous regroupons ci-dessous les équations du modèle que nous considérerons par la suite :

$$\partial_t V - \partial_m (R^2 u) = 0 ; \quad (1.19)$$

$$\partial_t u + R^2 \partial_m p = 0 ; \quad (1.20)$$

$$2C_V \partial_t T + p \partial_t V = \partial_m (R^2 K \partial_R T) ; \quad (1.21)$$

$$\partial_t R = u ; \quad (1.22)$$

$$pV = 2C_g T . \quad (1.23)$$

1.5. Conditions initiale et aux limites.

Il convient de compléter les équations (1.19) à (1.23) en spécifiant des conditions initiale et aux limites.

Au temps $t = 0$, le fluide est au repos et le rayon de la cible est égal à R_0 . La densité est uniformément égale à une valeur ρ_0 . La variable m parcourt donc l'intervalle $[0, \bar{m}]$, où

$$\bar{m} = \frac{(R_0)^3}{3} \rho_0 . \quad (1.24)$$

Pour des raisons de symétrie, nous imposons au centre de la cible les conditions

$$u(0,t) = 0 \quad (1.25)$$

et $\partial_{\bar{m}} T(0,t) = 0 , \forall t > 0 .$ (1.26)

A la surface de la cible , nous imposons les conditions

$$p(\bar{m},t) = h(t) \quad \forall t > 0 , \quad (1.27)$$

où h est une fonction positive donnée,

et $\partial_{\bar{m}} T(\bar{m},t) = 0 \quad \forall t > 0 .$ (1.28)

L'équation (1.28) exprime le fait que le flux de chaleur à la surface de la cible est nul.

Remarque 1.1: c'est par les variations de la pression imposée à la surface de la cible que le fluide est mis en mouvement.

2. UN SCHEMA NUMERIQUE POUR LA PARTIE HYDRODYNAMIQUE.

Dans ce chapitre, les équations (1.19) à (1.23) sont considérées sans diffusion thermique et sont réécrites au § 2.1 sous une forme appropriée. Au § 2.2., un schéma numérique à pas fractionnaires adapté à un maillage irrégulier pour la résolution de ces nouvelles équations est présenté. La précision de ce schéma est étudiée au § 2.3, et une condition C.F.L., suggérée par l'étude de la stabilité dans un cas simple, est proposée au § 2.4. Au § 2.5, notre schéma est hybridé au moyen d'un schéma s'inspirant du schéma de Lax.

2.1. Le système d'équations sans diffusion thermique.

Considérons l'équation

$$2C_V \partial_t T + p \partial_t V = 0 \quad (2.1)$$

obtenue en écrivant la relation (1.21) sans le terme de diffusion thermique $\partial_m (R^2 K \partial_R T)$.

En introduisant l'énergie totale

$$E = 2C_V T + \frac{1}{2} u^2, \quad (2.2)$$

nous pouvons écrire l'équation (2.1) sous la forme

$$\partial_t E - u \partial_t u + p \partial_t V = 0, \quad (2.3)$$

et les relations (1.19), (1.20) nous permettent d'obtenir l'équation d'énergie

$$\partial_t E + \partial_m (R^2 p u) = 0. \quad (2.4)$$

Le système (1.19) à (1.23) sans diffusion thermique devient ainsi

$$\partial_t V - \partial_m (R^2 u) = 0, \quad (2.5)$$

$$\partial_t u + \partial_m (R^2 p) = p \partial_m (R^2) , \quad (2.6)$$

$$\partial_t E + \partial_m (R^2 p u) = 0 , \quad (2.7)$$

$$\partial_t R = u , \quad (2.8)$$

$$pV = \frac{C_g}{C_V} \left(E - \frac{1}{2} u^2 \right) . \quad (2.9)$$

En introduisant les notations

$$w = (V, u, E, R)^T, \quad (2.10)$$

$$F(w) = R^2 (-u, p, pu, 0)^T, \quad (2.11)$$

$$H(w) = (0, p, 0, 0)^T, \quad (2.12)$$

$$g(w) = R^2 , \quad (2.13)$$

$$L(w) = (0, 0, 0, u)^T, \quad (2.14)$$

où l'indice T désigne la transposition, nous pouvons écrire le système (2.5) à (2.9) sous la forme

$$\partial_t w + \partial_m F(w) = H(w) \partial_m g(w) + L(w) , \quad (2.15)$$

$$pV = \frac{C_g}{C_V} \left(E - \frac{1}{2} u^2 \right) . \quad (2.16)$$

2.2. Un schéma numérique à pas fractionnaires.

Dans ce paragraphe, nous discrétisons l'équation (2.15) en adaptant le schéma de Lax-Wendroff au cas d'un maillage irrégulier.

Pour \bar{m} défini par (1.24), et pour $N \in \mathbb{N}$, nous considérons une subdivision quelconque, indépendante du temps, de l'intervalle [0, \bar{m}]

$$0 = m_1 < m_2 < \dots < m_{N-1} < m_N = \bar{m} . \quad (2.17)$$

Nous lui associons les points intermédiaires

$$m_{j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (m_{j+1} + m_j) , j = 1, 2, \dots, N-1, \quad (2.18)$$

ainsi que les quantités

$$\Delta m_{j+\frac{1}{2}} = m_{j+1} - m_j , j = 1, 2, \dots, N-1, \quad (2.19)$$

$$\Delta m_j = m_{j+\frac{1}{2}} - m_{j-\frac{1}{2}} , j = 2, 3, \dots, N-1. \quad (2.20)$$

Nous supposons par la suite que la subdivision (2.17) est telle que

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \left[\max_{1 \leq j \leq N-1} \Delta m_{j+\frac{1}{2}} \right] = 0 . \quad (2.21)$$

Remarquons que les définitions (2.18) à (2.20) impliquent que

$$\Delta m_j = \frac{1}{2} (\Delta m_{j+\frac{1}{2}} + \Delta m_{j-\frac{1}{2}}) , j = 2, 3, \dots, N-1. \quad (2.22)$$

Nous introduisons également un maillage temporel

$$0 = t^0 < t^1 < t^2 \dots \quad (2.23)$$

et les quantités

$$t^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (t^{n+1} + t^n) , \quad (2.24)$$

$$\Delta t^{n+\frac{1}{2}} = t^{n+1} - t^n , \text{ pour } n \geq 0 . \quad (2.25)$$

Pour $w_{j+\frac{1}{2}}^n$ approximation de $w(m_{j+\frac{1}{2}}, t^n)$, et pour une fonction quelconque f de w (en particulier $f(w) = w$) nous posons

$$f_{j+\frac{1}{2}}^n = f(w_{j+\frac{1}{2}}^n) , \quad (2.26)$$

$$\bar{f}_j^n = \frac{\Delta m_{j-\frac{1}{2}} f_{j+\frac{1}{2}}^n + \Delta m_{j+\frac{1}{2}} f_{j-\frac{1}{2}}^n}{2\Delta m_j} . \quad (2.27)$$

\bar{f}_j^n est l'approximation de $f(w)$ au point (m_j, t^n) obtenue par interpolation linéaire entre $m_{j-\frac{1}{2}}$ et $m_{j+\frac{1}{2}}$.

De même, pour $w_j^{n+\frac{1}{2}}$ approximation de $w(m_j, t^{n+\frac{1}{2}})$, nous posons

$$f_j^{n+\frac{1}{2}} = f(w_j^{n+\frac{1}{2}}) . \quad (2.28)$$

En nous inspirant du schéma de Lax-Wendroff (voir [2], équations 12.24 a et b) nous discrétisons l'équation (2.15) comme suit:

$$\frac{w_j^{n+\frac{1}{2}} - \bar{w}_j^n}{\frac{\Delta t^{n+\frac{1}{2}}}{2}} + \frac{F_{j+\frac{1}{2}}^n - F_{j-\frac{1}{2}}^n}{\Delta m_j} = \bar{H}_j^n \frac{g_{j+\frac{1}{2}}^n - g_{j-\frac{1}{2}}^n}{\Delta m_j} + \bar{L}_j^n , \quad (2.29)$$

$$\frac{w_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} - w_{j+\frac{1}{2}}^n}{\Delta t^{n+\frac{1}{2}}} + \frac{F_{j+1}^{n+\frac{1}{2}} - F_j^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta m_{j+\frac{1}{2}}} =$$

$$\frac{H_{j+1}^{n+\frac{1}{2}} + H_j^{n+\frac{1}{2}}}{2} \frac{g_{j+1}^{n+\frac{1}{2}} - g_j^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta m_{j+\frac{1}{2}}} + \frac{L_{j+1}^{n+\frac{1}{2}} + L_j^{n+\frac{1}{2}}}{2} . \quad (2.30)$$

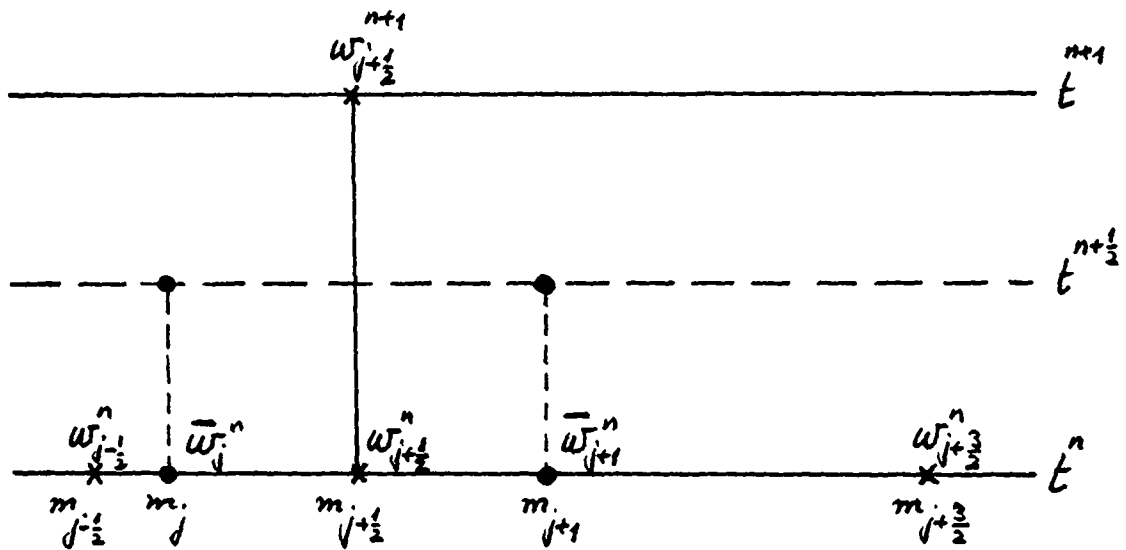


figure 2.1

2.3. Consistance.

Dans ce paragraphe, nous montrons que, pour un maillage (2.17) à (2.21) bien choisi, le schéma (2.29), (2.30) est précis d'ordre 2 au voisinage de toute valeur de m arbitrairement fixée.

Soit une valeur quelconque $\tilde{m} \in]0, \tilde{m}[$ fixée.

La relation (2.21) implique que, pour tout N assez grand, il existe un unique entier $s(N)$, que nous désignerons simplement par s , tel que

$$m_{s-\frac{1}{2}} \leq \tilde{m} < m_{s+\frac{1}{2}} . \quad (2.31)$$

Nous supposons que, lorsque N tend vers l'infini, le maillage spatial (2.17) à (2.21) est tel que

$$\Delta m_s = \Delta m_{s+\frac{1}{2}} + O(\Delta m_{s+\frac{1}{2}}^2) , \quad (2.32)$$

$$\Delta m_{s+1} = \Delta m_{s+\frac{1}{2}} + O(\Delta m_{s+\frac{1}{2}}^2) . \quad (2.33)$$

Nous nous plaçons, sans restriction de généralité, au temps $t = 0$; nous posons

$$\Delta t^{\frac{1}{2}} = \tau ,$$

et nous supposons que

$$\tau = O(\Delta m_{s+\frac{1}{2}}) . \quad (2.34)$$

Soit \tilde{w} une solution assez régulière de l'équation (2.15). Pour N assez grand, nous posons

$$\begin{aligned} w_{s-\frac{1}{2}}^0 &= \tilde{w}(m_{s-\frac{1}{2}}, 0) , \\ w_{s+\frac{1}{2}}^0 &= \tilde{w}(m_{s+\frac{1}{2}}, 0) , \\ w_{s+\frac{3}{2}}^0 &= \tilde{w}(m_{s+\frac{3}{2}}, 0) . \end{aligned} \quad (2.35)$$

Soit $w_{s+\frac{1}{2}}^1$ la quantité définie par les relations (2.35), (2.29) et (2.30) avec $j = s$ et $n = 0$.

Le résultat suivant exprime le fait que le schéma (2.29), (2.30) est précis d'ordre 2.

Proposition 2.3.1.

$$w_{s+\frac{1}{2}}^1 = \tilde{w}(m_{s+\frac{1}{2}}, \tau) + O(\Delta m_{s+\frac{1}{2}}^3) ,$$

lorsque N tend vers l'infini.

Démonstration.

Soit f une fonction assez régulière de w . Les relations (2.27), (2.22) et (2.32) permettent d'écrire

$$\bar{f}_s^0 = f_{s+\frac{1}{2}}^0 - \frac{\Delta m_{s+\frac{1}{2}}}{2} \partial_m f_{s+\frac{1}{2}}^0 + \frac{\Delta m_{s+\frac{1}{2}}^2}{4} \partial_{mm}^2 f_{s+\frac{1}{2}}^0 + O(\Delta m_{s+\frac{1}{2}}^3) . \quad (2.36)$$

De manière analogue, nous obtenons

$$\frac{f_{s+\frac{1}{2}}^0 - f_{s-\frac{1}{2}}^0}{\Delta m_s} = \partial_m f_{s+\frac{1}{2}}^0 - \frac{\Delta m_{s+\frac{1}{2}}}{2} \partial_{mm}^2 f_{s+\frac{1}{2}}^0 + O(\Delta m_{s+\frac{1}{2}}^2). \quad (2.37)$$

En écrivant l'équation (2.29) pour $j = s$, $n = 0$ et $\Delta t^{\frac{1}{2}} = \tau$ satisfaisant (2.34), et en considérant les relations (2.36), (2.37) et (2.15), nous pouvons déduire

$$\begin{aligned} w_s^{\frac{1}{2}} &= w_{s+\frac{1}{2}}^0 - \frac{\Delta m_{s+\frac{1}{2}}}{2} \partial_m w_{s+\frac{1}{2}}^0 + \frac{\tau}{2} \partial_t w_{s+\frac{1}{2}}^0 + \frac{\Delta m_{s+\frac{1}{2}}^2}{4} \partial_{mm}^2 w_{s+\frac{1}{2}}^0 \\ &- \frac{\tau \Delta m_{s+\frac{1}{2}}}{4} \partial_{mt}^2 w_{s+\frac{1}{2}}^0 + O(\Delta m_{s+\frac{1}{2}}^3). \end{aligned} \quad (2.38)$$

En comparant cette dernière relation avec le développement limité d'ordre 2 de \tilde{w} autour de $(m_{s+\frac{1}{2}}, 0)$, nous obtenons

$$w_s^{\frac{1}{2}} = \tilde{w}(m_s, \frac{\tau}{2}) + \Delta w_{s+\frac{1}{2}}^0 + O(\Delta m_{s+\frac{1}{2}}^3), \quad (2.39)$$

où nous avons posé

$$\Delta w_{s+\frac{1}{2}}^0 = \frac{\Delta m_{s+\frac{1}{2}}^2}{8} \partial_{mm}^2 w_{s+\frac{1}{2}}^0 - \frac{\tau^2}{8} \partial_{tt}^2 w_{s+\frac{1}{2}}^0. \quad (2.40)$$

Les relations (2.22) et (2.33) impliquent que

$$\Delta m_{s+\frac{3}{2}} = \Delta m_{s+\frac{1}{2}} + O(\Delta m_{s+\frac{1}{2}}^2). \quad (2.41)$$

En remplaçant s par $s+1$ dans (2.39), (2.40), et en utilisant (2.33) et (2.41) nous pouvons écrire

$$w_{s+1}^{\frac{1}{2}} = \tilde{w}(m_{s+1}, \frac{\tau}{2}) + \Delta w_{s+\frac{1}{2}}^0 + O(\Delta m_{s+\frac{1}{2}}^3). \quad (2.42)$$

Remarquons que

$$\Delta w_{s+\frac{1}{2}}^0 = O(\Delta m_{s+\frac{1}{2}}^2) . \quad (2.43)$$

Avec les notations

$$\tilde{f}(m,t) = f(\tilde{w}(m,t)) , \quad (2.44)$$

$$\partial_w \tilde{f}(m,t) = \frac{\partial f}{\partial w}(\tilde{w}(m,t)) , \quad (2.45)$$

les relations (2.28), (2.39) et (2.43) nous donnent

$$f_s^{\frac{1}{2}} = \tilde{f}(m_s, \frac{\tau}{2}) + \partial_w \tilde{f}(m_s, \frac{\tau}{2}) \Delta w_{s+\frac{1}{2}}^0 + O(\Delta m_{s+\frac{1}{2}}^3) . \quad (2.46)$$

Une expression analogue pour $f_{s+1}^{\frac{1}{2}}$ peut être obtenue grâce à (2.42) et, en tenant compte de (2.43), nous trouvons

$$\frac{f_{s+1}^{\frac{1}{2}} - f_s^{\frac{1}{2}}}{\Delta m_{s+\frac{1}{2}}} = \partial_m \tilde{f}(m_{s+\frac{1}{2}}, \frac{\tau}{2}) + O(\Delta m_{s+\frac{1}{2}}^2) , \quad (2.47)$$

$$\frac{1}{2} (f_{s+1}^{\frac{1}{2}} + f_s^{\frac{1}{2}}) = \tilde{f}(m_{s+\frac{1}{2}}, \frac{\tau}{2}) + O(\Delta m_{s+\frac{1}{2}}^2) . \quad (2.48)$$

En écrivant l'équation (2.30) pour $j = s$, $n = 0$, et $\Delta t^{\frac{1}{2}} = \tau$ satisfaisant (2.34), et en utilisant (2.47), (2.48) et (2.15), nous obtenons

$$w_{s+\frac{1}{2}}^1 = w_{s+\frac{1}{2}}^0 + \tau \partial_t \tilde{w}(m_{s+\frac{1}{2}}, \frac{\tau}{2}) + O(\Delta m_{s+\frac{1}{2}}^3) . \quad (2.49)$$

Nous avons pour la différence centrée

$$\frac{\tilde{w}(m_{s+\frac{1}{2}}, \tau) - \tilde{w}(m_{s+\frac{1}{2}}, 0)}{\tau} = \partial_t \tilde{w}(m_{s+\frac{1}{2}}, \frac{\tau}{2}) + O(\tau^2) \quad (2.50)$$

que nous réécrivons grâce à (2.34) et (2.35) sous la forme

$$\tilde{w}(m_{s+\frac{1}{2}}, \tau) = w_{s+\frac{1}{2}}^0 + \tau \partial_t \tilde{w}(m_{s+\frac{1}{2}}, \frac{\tau}{2}) + O(\Delta m_{s+\frac{1}{2}}^3) . \quad (2.51)$$

Finalement, en comparant (2.49) et (2.51), nous obtenons

$$w_{s+\frac{1}{2}}^1 = \tilde{w}(m_{s+\frac{1}{2}}, \tau) + O(\Delta m_{s+\frac{1}{2}}^3) , \quad (2.52)$$

ce qui achève la démonstration. ■

Remarque 2.3.1.: la démonstration ci-dessus utilise de façon essentielle les hypothèses (2.32) et (2.33) qui impliquent que, au voisinage de tout point m fixé, le maillage devient régulier lorsque N tend vers l'infini.

Si nous effectuons les mêmes calculs en un point m_j où l'indice j est fixé, nous obtenons que le schéma (2.29), (2.30) est encore précis d'ordre 1. Ainsi, notre schéma est consistant même au voisinage du centre.

2.4. Une condition heuristique de stabilité dans le cas d'un maillage non uniforme.

Dans ce paragraphe, nous justifions le choix d'une condition de stabilité locale pour le schéma (2.29), (2.30) dans le cas où le maillage (2.17), (2.18) possède une certaine régularité.

Notre approche est basée sur l'étude de l'équation

$$\partial_t w + A \partial_m w = 0 , \quad (2.53)$$

c'est-à-dire de l'équation (2.15) dans laquelle nous avons posé

$F(w) = Aw$, où A est une matrice constante,

$H(w) = 0$

et $L(w) = 0$, $\forall w$.

Considérons une famille de maillages de $]0, +\infty[$, dépendant d'un paramètre $h > 0$, de la forme

$$0 = m_{h,1} < m_{h,1\frac{1}{2}} < m_{h,2} < m_{h,2\frac{1}{2}} < \dots$$

satisfaisant la condition

$$m_{h,j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (m_{h,j} + m_{h,j+1}) \quad \forall j \geq 1. \quad (2.54)$$

Supposons qu'il existe une fonction $\varphi \in C^0 [0, +\infty[\cap C^1]0, +\infty[$ satisfaisant les conditions

$$\varphi'(x) > 0 \quad \forall x > 0, \quad (2.55a)$$

$$\varphi(0) = 0, \quad (2.55b)$$

et $m_{h,j+\frac{1}{2}} = \varphi(x_{h,j+\frac{1}{2}}) \quad \forall j \geq 1,$ (2.55c)

où $x_{h,j+\frac{1}{2}} = jh$.

Remarquons que les $m_{h,j}$ ne sont pas univoquement déterminés par (2.54), (2.55).

Pour (2.53), le schéma (2.29), (2.30) s'écrit

$$w_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} = C_{-1}(m_{h,j+\frac{1}{2}}, \tau) w_{j-\frac{1}{2}}^n + C_0(m_{h,j+\frac{1}{2}}, \tau) w_{j+\frac{1}{2}}^n + C_1(m_{h,j+\frac{1}{2}}, \tau) w_{j+\frac{3}{2}}^n \quad (2.56)$$

avec

$$C_{-1}(m_{h,j+\frac{1}{2}}, \tau) = \frac{\frac{1}{2} \tau A}{\Delta m_{h,j}} \left[\frac{\tau A}{\Delta m_{h,j+\frac{1}{2}}} + I \right] \quad (2.57)$$

$$C_1(m_{h,j+\frac{1}{2}}, \tau) = \frac{\frac{1}{2} \tau A}{\Delta m_{h,j+1}} \left[\frac{\tau A}{\Delta m_{h,j+\frac{1}{2}}} - I \right] \quad (2.58)$$

$$C_0(m_{h,j+\frac{1}{2}}, \tau) = I - C_{-1}(m_{h,j+\frac{1}{2}}, \tau) - C_1(m_{h,j+\frac{1}{2}}, \tau), \quad (2.59)$$

où $\Delta m_{h,j+\frac{1}{2}}$ et $\Delta m_{h,j}$ sont définis par (2.19), (2.20).

Soit $f:]0, +\infty[\times]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que

$$\Delta m_{h,j+\frac{1}{2}} = f(x_{h,j+\frac{1}{2}}, h) \quad \forall h > 0 \text{ et } j \geq 1, \quad (2.60)$$

et supposons que

$$\lim_{h \rightarrow 0_+} \frac{f(x,h)}{h} = \varphi'(x). \quad (2.61)$$

Soit $q > 0$ fixé. Nous lions τ et h par la relation

$$\tau = qh. \quad (2.62)$$

Nous pouvons écrire (2.57) sous la forme

$$C_{-1}(\varphi(x_{h,j+\frac{1}{2}}), \tau) = \frac{\frac{1}{2} \tau A}{\varphi(x_{h,j+\frac{1}{2}}) - \varphi(x_{h,j+\frac{1}{2}} - \frac{\tau}{q})} \left[\frac{\tau A}{f(x_{h,j+\frac{1}{2}}, \frac{\tau}{q})} + I \right]. \quad (2.63)$$

Le membre de droite de cette expression, ainsi que celui des expressions similaires que nous obtenons pour C_1 et C_0 , a un sens si on

remplace $x_{h,j+\frac{1}{2}}$ par $x \in]0, +\infty[$ tel que $x - \frac{\tau}{q} \geq 0$.

Soit $0 < a < b$. Compte tenu de la remarque précédente, nous pouvons définir pour $x \in [a, b]$ et $\tau \leq qa$ les fonctions

$$D_{-1}(x, \tau) = C_{-1}(\varphi(x), \tau) \quad (2.64)$$

$$D_1(x, \tau) = C_1(\varphi(x), \tau) \quad (2.65)$$

$$D_0(x, \tau) = I - D_{-1}(x, \tau) - D_1(x, \tau) . \quad (2.66)$$

Soit $T > 0$, tel que $a + \frac{T}{q} < b - \frac{T}{q}$.

Pour une condition initiale $u^0 \in L^2]a, b[$, nous considérons le schéma défini par

$$u_{\tau}^n(x) = \sum_{k=-1}^1 D_k(x, \tau) u_{\tau}^{n-1}(x + k \frac{\tau}{q}) \quad (2.67)$$

pour $x \in]a + \frac{n}{q} \tau, b - \frac{n}{q} \tau[$, et pour $\tau < qa$ et $n \in \mathbb{N}^*$ tels que $n\tau \leq T$.

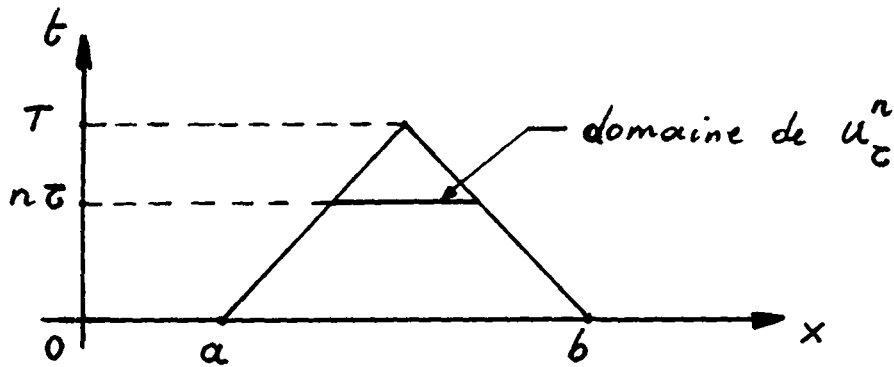


figure 2.2

Introduisons la notation $\|u\|_{n, \tau} = \left(\int_{a + \frac{n\tau}{q}}^{b - \frac{n\tau}{q}} u^2(x) dx \right)^{\frac{1}{2}}$.

Définition 2.4.1.

Le schéma (2.67) est stable s'il existe une constante M ne dépendant que de a, b et T , telle que pour tout $u^0 \in L^2]a, b[$ on ait

$$\|u_{\tau}^n\|_{n, \tau} \leq M \|u^0\|_{L^2]a, b[}$$

quel que soit $\tau < qa$ et $n \in \mathbb{N}$ avec $n\tau \leq T$.

Proposition 2.4.1.

Si (2.67) est stable,

$$\text{alors } \tau \leq \min_{a \leq c \leq b} \frac{\varphi'(c)}{|\lambda|} h \quad (2.68)$$

pour toute valeur propre λ non nulle de A.

Preuve .

Pour $x \in [a, b]$ soit

$$D_{-1}(x,0) = \frac{\frac{1}{2} qA}{\varphi'(x)} \left[\frac{qA}{\varphi'(x)} + I \right] \quad (2.69)$$

$$D_1(x,0) = \frac{\frac{1}{2} qA}{\varphi'(x)} \left[\frac{qA}{\varphi'(x)} - I \right] \quad (2.70)$$

$$D_0(x,0) = I - D_{-1}(x,0) - D_1(x,0) . \quad (2.71)$$

Pour $k = -1, 0$ et 1 , $D_k(x,0)$ est continue et $\lim_{\tau \rightarrow 0^+} D_k(x,\tau) = D_k(x,0)$ uniformément dans $[a, b]$.

On remarque que le théorème de Strang (c.f. [2], section 5.1 p. 93) a un caractère local et que sa démonstration est valable sans modification essentielle dans la situation que nous considérons.

Nous avons donc le résultat:

si le schéma (2.67) est stable, alors $\forall c \in] a, b [$ le schéma

$$U^{n+1}(x) = \sum_{k=-1}^1 D_k(c,0) U^n(x + k \frac{\tau}{q}) , \quad (2.72)$$

considéré dans $L^2(\mathbb{R})$, est stable.

On vérifie aisément que la matrice d'amplification (c.f. [2], chapitre 4) du schéma (2.72) est donnée par

$$G(s, \tau) = I - \frac{A}{\varphi'(c)} i \sin\left(s \frac{\tau}{q}\right) - \left(\frac{qA}{\varphi'(c)}\right)^2 (I - \cos\left(s \frac{\tau}{q}\right)), \quad (2.73)$$

et que la stabilité de ce schéma implique que

$$q \leq \frac{\varphi'(c)}{|\lambda|} \text{ pour toute valeur propre } \lambda \text{ non nulle de } A. \quad (2.74)$$

Ainsi, puisque la stabilité de (2.67) implique la stabilité de (2.72) pour tout $c \in] a, b [$, la relation (2.62) nous permet de conclure. ■

Sans introduire une définition rigoureuse de la stabilité, la proposition 2.4.1 suggère un critère de stabilité pour (2.29), (2.30), puisque, au changement de variable $m = \varphi(x)$ près, les schémas (2.56) et (2.67) sont équivalents.

Pour la généralisation au cas non linéaire, on procède formellement de la manière traditionnelle en remplaçant A , dans l'énoncé de la proposition 2.4.1, par la matrice obtenue par linéarisation du système (2.15).

Dans le cas des équations (2.10) à (2.16), la matrice $\frac{\partial F}{\partial w}$ prend la forme

$$A(w) = R^2 \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 2 \frac{u}{R} \\ -\frac{p}{V} & -\frac{C_g u}{C_V V} & \frac{C_g 1}{C_V V} & 2 \frac{p}{R} \\ -\frac{up}{V} & p - \frac{C_g u^2}{C_V V} & \frac{C_g u}{C_V V} & 2 \frac{pu}{R} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.75)$$

et admet les valeurs propres non nulles

$$\lambda_1 = R^2 \left(1 + \frac{C_g}{C_V} \right) \frac{P}{V} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (2.76)$$

$$\lambda_2 = - \lambda_1 .$$

Pour une condition initiale w^0 , la relation (2.68) fournit le critère suivant pour le choix du premier pas de temps:

$$\Delta t^{\frac{1}{2}} \leq \min_j \frac{\varphi'(\varphi^{-1}(m_{h,j+\frac{1}{2}}))}{\max_k (R_{k+\frac{1}{2}}^0)^2 \left(\left(1 + \frac{C_g}{C_V} \right) \frac{P_{k+\frac{1}{2}}^0}{V_{k+\frac{1}{2}}^0} \right)^{\frac{1}{2}}} h, \quad (2.77)$$

où le minimum est pris sur tous les points du maillage appartenant au domaine de définition de la solution et où le maximum est pris sur tous les points du maillage compris dans un certain voisinage de $m_{h,j+\frac{1}{2}}$. Le choix empirique de ce voisinage dépendra de chaque application.

Au $(n+1)^{\text{ème}}$ pas, un critère analogue pour le choix de $\Delta t^{\frac{n+1}{2}}$ est obtenu en remplaçant w^0 par w^n dans (2.77).

Les exemples numériques présentés au paragraphe 2.5 et au chapitre 5 montrent que ce critère de stabilité donne des résultats satisfaisants.

Nous illustrerons ce paragraphe avec l'exemple concret suivant:

pour $h > 0$, $x \geq 0$ et $j \geq 1$, posons

$$m_{h,j} = j(j-1)h^2, \quad (2.78)$$

$$m_{h,j+\frac{1}{2}} = (jh)^2, \quad (2.79)$$

$$\varphi(x) = x^2 ,$$

et $f(x,h) = 2xh$.

Avec ce choix, les relations (2.54), (2.55), (2.60) et (2.61) sont aisément vérifiées et notre critère de stabilité devient

$$\Delta t^{n+\frac{1}{2}} \leq 2 \min_{j \geq 1} \frac{j h}{\max_{k \in A_j} (R_{k+\frac{1}{2}}^n)^2 \left(1 + \frac{C_g}{C_V} \right) \frac{P_{k+\frac{1}{2}}^n}{V_{k+\frac{1}{2}}^n} }^{\frac{1}{2}} h , \quad (2.80a)$$

où A_j désigne un ensemble d'indices "voisins de j".

Si nous choisissons $A_j = \{j\}$ dans l'expression ci-dessus , nous obtenons la condition C.F.L. habituelle

$$\Delta t^{n+\frac{1}{2}} \leq \min_{j \geq 1} \frac{\Delta m_{j+\frac{1}{2}}}{\lambda(w_{j+\frac{1}{2}}^n)} , \quad (2.80b)$$

$$\text{où } \lambda(w) = R^2 \left(1 + \frac{C_g}{C_V} \right) \frac{P}{V} \right)^{\frac{1}{2}} .$$

Les expériences que nous avons effectuées dans le cas d'une cible sphérique nous ont permis de faire les observations suivantes :

1) dans l'expression (2.80b), le minimum n'est pas pris en les points $m_{j+\frac{1}{2}}$ situés près du centre de la cible, même lorsqu'une forte onde de pression converge vers ce point et s'y réfléchit (c.f. § 3.2).

Nous pouvons donc choisir empiriquement un indice $j_0 > 1$ tel que la condition

$$\Delta t^{n+\frac{1}{2}} \leq \min_{j \geq j_0} \frac{\Delta m_{j+\frac{1}{2}}}{\lambda(w_{j+\frac{1}{2}}^n)} \quad (2.80c)$$

soit équivalente à l'expression (2.80b).

2) La condition de stabilité (2.80c) n'est pas suffisante pour la méthode que nous proposerons au § 3.1 dans le cadre du traitement de la condition de bord (1.27)

Compte tenu de ces observations et après différents essais nous avons adopté avec succès, dans le cas d'une cible sphérique, la condition

$$\Delta t^{n+\frac{1}{2}} \leq \frac{2j_0 h}{\max_{k \geq j_0} (R_{k+\frac{1}{2}}^n)^2 \left(\left(1 + \frac{C_g}{C_V} \right) \frac{P_{k+\frac{1}{2}}^n}{V_{k+\frac{1}{2}}^n} \right)^{\frac{1}{2}}} h, \quad (2.80d)$$

obtenue en prenant le minimum sur les indices $j > j_0$ seulement et en posant $A_j = \{ j_0, \dots, N-1 \}$, où $j_0 > 1$ est choisi empiriquement, dans l'expression (2.80a).

Nous illustrerons l'importance du choix de l'indice j_0 dans le contexte de l'exemple numérique présenté à la fin du § 3.2 .

2.5. Un schéma hybride.

Dans ce paragraphe, nous rappelons à l'aide de l'équation scalaire

$$\partial_t u + c \partial_x u = 0, \quad c \text{ constante,}$$

le caractère oscillatoire des solutions obtenues avec le schéma de Lax-Wendroff dans le cas d'un maillage régulier.

Toujours dans le cas scalaire et pour un maillage régulier, nous nous inspirons de la méthode présentée par Harten et Zwas (c.f. [3], [4]) et nous éliminons ces oscillations en hybridant le schéma de Lax-Wendroff avec un schéma d'ordre 1.

Nous adaptons cette méthode d'hybridage au schéma (2.29), (2.30) dans le cas du système (2.15) et d'un maillage irrégulier, et nous l'appliquons au problème du choc cylindrique présenté par Ben-Artzi et Falcovitz dans [5]. Des résultats numériques sont présentés.

Soit $c \neq 0$, et le problème de trouver $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\partial_t u + c \partial_x u = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \text{ et } t > 0, \quad (2.81)$$

$$u(x,0) = u_0(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 10, & x > 0. \end{cases} \quad (2.82)$$

La solution exacte de ce problème est donnée par

$$u(x,t) = u_0(x - ct) \quad \forall x \in \mathbb{R} \text{ et } t \geq 0.$$

Soit $\Delta t > 0$, $\Delta x > 0$ et $\mu = \frac{\Delta t}{\Delta x} c$; nous supposons par la suite que $-1 \leq \mu \leq 1$. Pour $j \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$, soit $x_j = (j-1) \Delta x$ et $t^n = n \Delta t$.

Si nous remplaçons m_j par x_j dans (2.17) à (2.20), le schéma (2.29), (2.30) pour l'équation (2.81) est le schéma de Lax-Wendroff.

$$u_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} = \frac{\mu}{2} (1+\mu) u_{j-\frac{1}{2}}^n + (1-\mu^2) u_{j+\frac{1}{2}}^n - \frac{\mu}{2} (1-\mu) u_{j+\frac{3}{2}}^n. \quad (2.83)$$

La figure 2.3 montre, en pointillé, la solution de (2.81), (2.82) pour $\mu = \frac{1}{2}$ obtenue après cent pas du schéma (2.83) avec $\Delta x = 0.01$, et, en trait fin interrompu, la solution exacte correspondante.

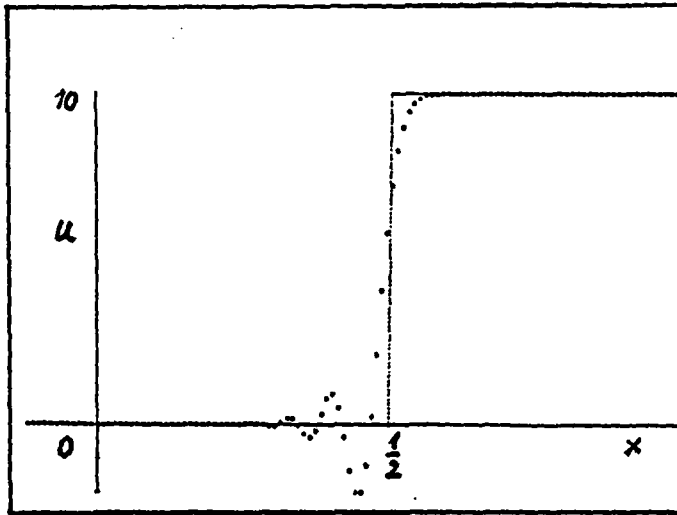


figure 2.3

Des oscillations apparaissent au voisinage du choc.

Harten et Zwas ont proposé (c.f. [3], [4]) la méthode dite de l'hybridage auto-ajusté permettant d'éliminer les oscillations numériques, telles que celles présentées précédemment, en particulier dans le cas des schémas d'ordre 2 pouvant être mis sous forme conservative, c'est-à-dire pour lesquels il existe une fonction h_2 , appelée flux numérique, telle que l'on puisse écrire $\forall j$

$$u_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} = u_{j+\frac{1}{2}}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (h_2(u_{j+\frac{3}{2}}^n, u_{j+\frac{1}{2}}^n) - h_2(u_{j+\frac{1}{2}}^n, u_{j-\frac{1}{2}}^n)) . \quad (2.84)$$

L'idée de l'hybridage est la suivante:

on considère un schéma d'ordre 1 sous forme conservative

$$u_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} = u_{j+\frac{1}{2}}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (h_1(u_{j+\frac{3}{2}}^n, u_{j+\frac{1}{2}}^n) - h_1(u_{j+\frac{1}{2}}^n, u_{j-\frac{1}{2}}^n)) , \quad (2.85)$$

et $\forall j$ et n , un paramètre $\theta_j^n \in [0,1]$ à définir.

En posant $\forall j \in \mathbb{Z}$

$$h_j^n = \theta_j^n h_1(u_{j+\frac{1}{2}}^n, u_{j-\frac{1}{2}}^n) + (1-\theta_j^n) h_2(u_{j+\frac{1}{2}}^n, u_{j-\frac{1}{2}}^n), \quad (2.86)$$

on définit le schéma hybride sous forme conservative

$$u_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} = u_{j+\frac{1}{2}}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (h_{j+1}^n - h_j^n) . \quad (2.87)$$

Remarque: si les θ_j^n sont petits dans le sens " $\theta = O(\Delta x)$ ", on peut vérifier que le schéma (2.87) est du même ordre que le schéma (2.84).

Revenons au cas scalaire et supposons que le schéma d'ordre 1 (2.85) préserve la monotonie dans le sens suivant (c.f. [7]):

Définition 2.5.1. Un schéma est dit préserver la monotonie s'il a la propriété suivante:

$$\begin{aligned} \text{S'il existe } \delta \in \{-1, 1\} \text{ tel que } \delta (u_{j+\frac{1}{2}}^n - u_{j-\frac{1}{2}}^n) \geq 0 \quad \forall j \in \mathbb{Z} , \\ \text{alors } \delta (u_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} - u_{j-\frac{1}{2}}^{n+1}) \geq 0 \quad \forall j \in \mathbb{Z} . \end{aligned}$$

Rappelons (c.f. [7]) qu'un schéma d'ordre 2, comme nous l'avons vu pour le schéma (2.83), ne préserve pas la monotonie.

La méthode de l'hybridage auto-ajusté consiste à choisir, $\forall j$, θ_j^n en fonction de u de façon à ce que le schéma (2.87) préserve, partiellement au moins, la monotonie au voisinage des discontinuités, et soit précis d'ordre 2 partout où la solution est assez régulière.

Le choix de maillages irréguliers ne permettant pas d'écrire le schéma (2.29), (2.30) sous forme conservative, nous allons adapter la méthode de l'hybridage auto-ajusté au cas de schémas ne pouvant pas être mis sous cette forme.

Dans le cas scalaire, considérons le schéma de Lax-Wendroff (2.83) et le schéma

$$u_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} = \frac{1}{4} (1+\mu)^2 u_{j-\frac{1}{2}}^n + \frac{1}{2} (1-\mu^2) u_{j+\frac{1}{2}}^n + \frac{1}{4} (1-\mu)^2 u_{j+\frac{3}{2}}^n . \quad (2.88)$$

obtenu par deux demi-pas du schéma de Lax ([6]).

On vérifie aisément que le schéma (2.88) est précis d'ordre 1 et préserve la monotonie.

La figure 2.4 montre en pointillé la solution de (2.81), (2.82) pour $\mu = \frac{1}{2}$ obtenue après cent pas du schéma (2.88) avec $\Delta x = 0.01$, et en trait fin interrompu la solution exacte correspondante.

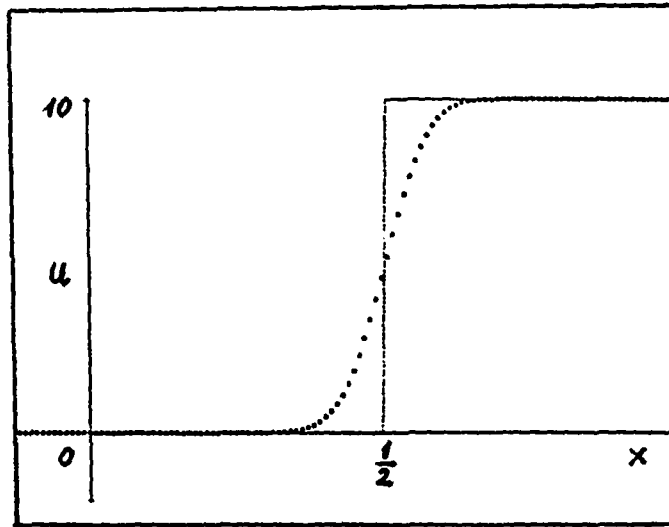


figure 2.4

Sans mettre (2.83) et (2.88) sous forme conservative, nous définissons le schéma hybride

$$u_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} = \theta_{j+\frac{1}{2}}^n (u_{j+\frac{1}{2}}^{n+1})_1 + (1-\theta_{j+\frac{1}{2}}^n)(u_{j+\frac{1}{2}}^{n+1})_2 \quad (2.89)$$

où $(u_{j+\frac{1}{2}}^{n+1})_1$ est la valeur obtenue à partir de $u_{j-\frac{1}{2}}^n$, $u_{j+\frac{1}{2}}^n$ et $u_{j+\frac{3}{2}}^n$ par (2.88), $(u_{j+\frac{1}{2}}^{n+1})_2$ celle obtenue par (2.83), et où

$$\theta_{j+\frac{1}{2}}^n = \theta(u_{j-\frac{1}{2}}^n, u_{j+\frac{1}{2}}^n, u_{j+\frac{3}{2}}^n), \quad (2.90)$$

$\theta : \mathbb{R}^3 \rightarrow [0, 1]$ étant une fonction qui reste à définir.

En introduisant (2.88) et (2.83) dans (2.89), nous obtenons le schéma

$$\begin{aligned}
 u_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} &= \frac{1}{2} (1+\mu) \left[\mu + \frac{\theta_{j+\frac{1}{2}}^n}{2} (1-\mu) \right] u_{j-\frac{1}{2}}^n \\
 &\quad + (1-\mu^2) \left(1 - \frac{\theta_{j+\frac{1}{2}}^n}{2} \right) u_{j+\frac{1}{2}}^n \\
 &\quad - \frac{1}{2} (1-\mu) \left[\mu - \frac{\theta_{j+\frac{1}{2}}^n}{2} (1+\mu) \right] u_{j+\frac{3}{2}}^n .
 \end{aligned} \tag{2.91}$$

Remarque 2.5.1 : on vérifie aisément que si la fonction θ introduite dans la relation (2.90) est telle que

$$\theta \left(u(x_{j-\frac{1}{2}}), u(x_{j+\frac{1}{2}}), u(x_{j+\frac{3}{2}}) \right) = O(\Delta x)$$

pour toute fonction u assez régulière, alors le schéma (2.91) est précis d'ordre 2.

En introduisant les quantités

$$\Delta u_j^n = u_{j+\frac{1}{2}}^n - u_{j-\frac{1}{2}}^n \quad \forall j$$

et en procédant comme dans [4], on obtient que le schéma (2.91) préserve la monotonie au sens de la définition 2.5.1 si et seulement si

$$\begin{aligned}
 &\left[\frac{1}{2} (1+\mu)\mu + \frac{1}{4} (1-\mu^2)\theta_{j-\frac{1}{2}}^n \right] |\Delta u_{j-1}^n| + \\
 &\left[1 - \mu^2 - \frac{1}{4} (1-\mu^2)(\theta_{j-\frac{1}{2}}^n + \theta_{j+\frac{1}{2}}^n) \right] |\Delta u_j^n| + \\
 &\left[-\frac{1}{2} (1-\mu)\mu + \frac{1}{4} (1-\mu^2)\theta_{j+\frac{1}{2}}^n \right] |\Delta u_{j+1}^n| \geq 0 \quad \forall j \in \mathbb{Z} .
 \end{aligned} \tag{2.92}$$

En considérant, pour j et n fixés, les cas

$$|\Delta u_{j-1}^n| = |\Delta u_j^n| = 0 , \quad |\Delta u_{j+1}^n| > 0$$

et $|\Delta u_{j-1}^n| > 0 , \quad |\Delta u_j^n| = |\Delta u_{j+1}^n| = 0 ,$

nous déduisons de l'inégalité (2.92) que les conditions

$$\theta_{j+\frac{1}{2}}^n \geq \frac{2\mu}{1+\mu} \text{ si } |\Delta u_j^n| = 0 \text{ et } |\Delta u_{j+1}^n| > 0, \quad (2.93a)$$

$$\text{et } \theta_{j+\frac{1}{2}}^n \geq \frac{-2\mu}{1-\mu} \text{ si } |\Delta u_j^n| > 0 \text{ et } |\Delta u_{j+1}^n| = 0, \quad (2.93b)$$

sont nécessaires pour que (2.91) préserve la monotonie.

Lemme 2.5.1

Soit $\varepsilon > 0$ et, $\forall j \in \mathbb{Z}$,

$$\theta_{j+\frac{1}{2}}^n = \begin{cases} \max \left\{ 0, \frac{\frac{2\mu}{1+\mu} |\Delta u_{j+1}^n| - \frac{2\mu}{1-\mu} |\Delta u_j^n|}{|\Delta u_{j+1}^n| + |\Delta u_j^n|} \right\} & \text{si } |\Delta u_{j+1}^n| + |\Delta u_j^n| > \varepsilon \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.94)$$

Alors le schéma (2.91), (2.94) est précis d'ordre 2 et $\theta_{j+\frac{1}{2}}^n$ satisfait les conditions (2.93) $\forall j$ tel que $|\Delta u_{j+1}^n| + |\Delta u_j^n| > \varepsilon$.

Preuve.

La relation (2.94) implique que, $\forall j$,

$$0 \leq \theta_{j+\frac{1}{2}}^n < \frac{\Delta x}{\varepsilon} \left| \frac{2\mu}{1+\mu} \frac{|u_{j+\frac{3}{2}}^n - u_{j+\frac{1}{2}}^n|}{\Delta x} - \frac{2\mu}{1-\mu} \frac{|u_{j+\frac{1}{2}}^n - u_{j-\frac{1}{2}}^n|}{\Delta x} \right|.$$

Ainsi, d'après la remarque 2.5.1, le schéma (2.91) est précis d'ordre 2.

Supposons maintenant $\Delta u_j^n = 0$ et $|\Delta u_{j+1}^n| > \varepsilon$ dans (2.94). Nous avons alors

$$\theta_{j+\frac{1}{2}}^n = \max \left\{ 0, \frac{2\mu}{1+\mu} \right\} \geq \frac{2\mu}{1+\mu}, \text{ et la condition (2.93a) est}$$

satisfaite.

On procède de même pour la condition (2.93b). ■

La figure 2.5 montre la solution de (2.81), (2.82) pour $\mu = \frac{1}{2}$ obtenue avec $\Delta x = 0.01$, après cent pas
 - du schéma hybride (2.91), (2.94) pour $\varepsilon = 0.01$ (en pointillé),
 - du schéma de Lax-Wendroff (2.83) (en trait continu),
 et la solution exacte correspondante (en trait fin interrompu).

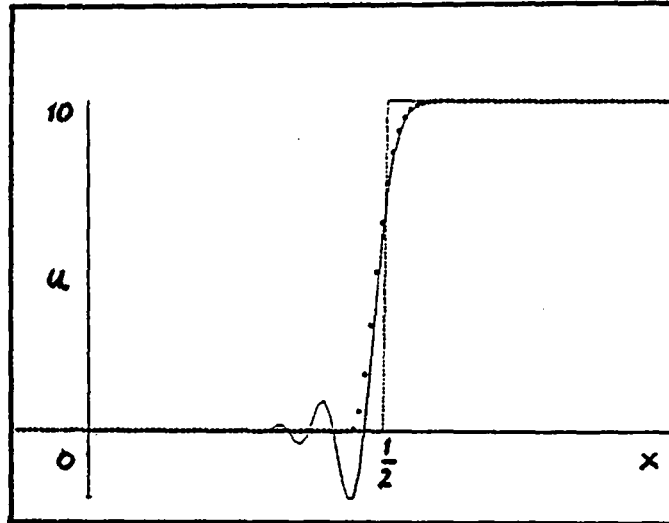


figure 2.5

Les oscillations ont disparu au prix d'une diffusion peu importante.

Revenons au schéma (2.29), (2.30) dans le contexte du système non linéaire (2.15) et d'un maillage irrégulier.

En nous inspirant du schéma de Lax (c.f. [6]) et en utilisant les notations (2.26) à (2.28) du paragraphe 2.2 nous définissons le schéma

$$\frac{w_j^{n+\frac{1}{2}} - \bar{w}_j^n}{\frac{\Delta t^{n+\frac{1}{2}}}{2}} + \frac{F_{j+\frac{1}{2}}^n - F_{j-\frac{1}{2}}^n}{\Delta m_j} = \bar{H}_j^n \frac{g_{j+\frac{1}{2}}^n - g_{j-\frac{1}{2}}^n}{\Delta m_j} + \bar{L}_j^n, \quad (2.95)$$

$$\frac{w_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} - \frac{1}{2} (w_{j+1}^{n+\frac{1}{2}} + w_j^{n+\frac{1}{2}})}{\frac{\Delta t^{n+\frac{1}{2}}}{2}} + \frac{F_{j+1}^{n+\frac{1}{2}} - F_j^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta m_{j+\frac{1}{2}}} =$$

$$\frac{H_{j+1}^{n+\frac{1}{2}} + H_j^{n+\frac{1}{2}}}{2} \frac{g_{j+1}^{n+\frac{1}{2}} - g_j^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta m_{j+\frac{1}{2}}} + \frac{L_{j+1}^{n+\frac{1}{2}} + L_j^{n+\frac{1}{2}}}{2} . \quad (2.96)$$

On remarque que ce schéma correspond à deux demi-pas du schéma de Lax et que (2.95) est identique à (2.29).

En procédant comme au paragraphe 2.3, on peut démontrer que le schéma (2.95), (2.96) est précis d'ordre 1 dans le cadre de la résolution du système (2.15).

Notons par $(w_{j+\frac{1}{2}}^{n+1})_1$ l'approximation de w en $(m_{j+\frac{1}{2}}, t^{n+1})$ obtenue avec le schéma (2.95), (2.96) et par $(w_{j+\frac{1}{2}}^{n+1})_2$ celle obtenue avec le schéma (2.29), (2.30). Comme dans le cas scalaire, nous définissons un schéma hybride en posant

$$w_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} = \theta_{j+\frac{1}{2}}^n (w_{j+\frac{1}{2}}^{n+1})_1 + (1 - \theta_{j+\frac{1}{2}}^n) (w_{j+\frac{1}{2}}^{n+1})_2 , \quad (2.97)$$

c'est-à-dire, avec les notations du paragraphe 2.2,

$$\frac{w_j^{n+\frac{1}{2}} - \bar{w}_j^n}{\frac{\Delta t^{n+\frac{1}{2}}}{2}} + \frac{F_{j+\frac{1}{2}}^n - F_{j-\frac{1}{2}}^n}{\Delta m_j} = \bar{H}_j^n \frac{g_{j+\frac{1}{2}}^n - g_{j-\frac{1}{2}}^n}{\Delta m_j} + \bar{L}_j^n , \quad (2.98)$$

$$\frac{w_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} - \frac{\theta_{j+\frac{1}{2}}^n}{2} (w_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} + w_j^{n+\frac{1}{2}}) - (1-\theta_{j+\frac{1}{2}}^n) w_{j+\frac{1}{2}}^n}{\Delta t^{n+\frac{1}{2}}} + (1 - \frac{\theta_{j+\frac{1}{2}}^n}{2}) \frac{F_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - F_j^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta m_{j+\frac{1}{2}}} =$$

$$(1 - \frac{\theta_{j+\frac{1}{2}}^n}{2}) \left(\frac{H_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} + H_j^{n+\frac{1}{2}}}{2} \frac{g_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - g_j^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta m_{j+\frac{1}{2}}} + \frac{L_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} + L_j^{n+\frac{1}{2}}}{2} \right), \quad (2.99)$$

où $\theta_{j+\frac{1}{2}}^n = \theta(w_{j-\frac{1}{2}}^n, w_{j+\frac{1}{2}}^n, w_{j+\frac{3}{2}}^n) \in [0,1] \quad \forall j$, θ étant une fonction qui reste à définir.

Nous allons maintenant adapter les conditions (2.93) au cas du schéma (2.98), (2.99) et du système (2.15).

D'abord, nous devons choisir une grandeur scalaire $\sigma(w)$ pour remplacer u dans (2.93); les essais numériques montrent que $\sigma(w) = p$ ou $\sigma(w) = \rho$ sont en général de bons choix.

Ensuite, remarquons que pour $F(w)$ définie par (2.11), les vitesses de propagation sont données par les valeurs propres non nulles de la matrice jacobienne (2.75), c'est-à-dire par $\lambda_1 = \lambda$ et $\lambda_2 = -\lambda$ où

$$\lambda = \lambda(w) = R^2 \left(1 + \frac{C_g}{C_V} \frac{p}{V} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Enfin, remarquons que $\forall v \in]-1, 1[$ fixé, les conditions (2.93), dans lesquelles on a remplacé u par $\sigma(w)$, sont vérifiées en même temps pour $\mu = v$ et $\mu = -v$ si et seulement si

$$\theta_{j+\frac{1}{2}}^n \geq \frac{2|v|}{1+|v|} \quad \forall j \text{ tel que } |\Delta\sigma(w_{j+\frac{1}{2}}^n)| + |\Delta\sigma(w_j^n)| > 0$$

$$\text{et } |\Delta\sigma(w_{j+\frac{1}{2}}^n)| |\Delta\sigma(w_j^n)| = 0. \quad (2.100)$$

(2.100) est la condition cherchée.

Par exemple, en posant pour $\varepsilon > 0$, $c \geq 2$ fixés, et $\forall j$

$$\theta_{j+\frac{1}{2}}^n = \begin{cases} \frac{cv_{j+\frac{1}{2}}^n}{1+v_{j+\frac{1}{2}}^n} \frac{||\Delta p_{j+1}^n| - |\Delta p_j^n||}{|\Delta p_{j+1}^n| + |\Delta p_j^n|} & \text{si } |\Delta p_{j+1}^n| + |\Delta p_j^n| > \varepsilon \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.101)$$

$$\text{où } v_{j+\frac{1}{2}}^n = \max_{k=j-1, j, j+1} \frac{\Delta t^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta m_{k+\frac{1}{2}}} \lambda(w_{k+\frac{1}{2}}^n),$$

on vérifie que la condition (2.100) avec $\sigma(w) = p$ et $v = v_{j+\frac{1}{2}}^n$ est satisfaite $\forall j$ tel que $|\Delta p_{j+1}^n| + |\Delta p_j^n| > \varepsilon$, et que, si on remplace dans (2.101) $w_{k+\frac{1}{2}}^n$ par $w(x_{k+\frac{1}{2}}, t^n)$ pour $k = j-1, j, j+1$, où w est assez régulière, alors

$$\theta_{j+\frac{1}{2}}^n = O(\Delta m_{j+1} + \Delta m_j). \quad (2.102)$$

Remarque 2.5.2: la relation (2.97) peut s'écrire sous la forme

$$w_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} = (w_{j+\frac{1}{2}}^{n+1})_2 + \theta_{j+\frac{1}{2}}^n \left[(w_{j+\frac{1}{2}}^{n+1})_1 - (w_{j+\frac{1}{2}}^{n+1})_2 \right],$$

et on peut démontrer que, si le maillage satisfait les hypothèses (2.32), (2.33) du paragraphe 2.3, alors la propriété (2.102) implique que le schéma (2.98), (2.99) est précis d'ordre 2.

Remarque 2.5.3.: Les tests numériques, tels que celui présenté à la fin de ce paragraphe, montrent que la dernière équation de (2.99) peut produire des approximations du rayon R qui ne sont pas strictement monotones, c'est-à-dire qui ne vérifient pas la condition

$$R_{j-\frac{1}{2}}^{n+1} < R_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} \quad \forall j.$$

Remarquons que, dans une maille $[m_{j-\frac{1}{2}}, m_{j+\frac{1}{2}}]$, le volume enfermé est égal au volume spécifique moyen multiplié par la masse contenue dans la maille. En rappelant que nous considérons un secteur de un stéradian, nous pouvons approximer cette égalité, dans le cas de la symétrie sphérique, par la relation

$$\frac{(R_{j+\frac{1}{2}}^{n+1})^3}{3} - \frac{(R_{j-\frac{1}{2}}^{n+1})^3}{3} = \frac{1}{2} (V_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} + V_{j-\frac{1}{2}}^{n+1}) \Delta m_j . \quad (2.103)$$

Si $R_{1\frac{1}{2}}^{n+1}$ est connu, cette relation permet de calculer $R_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} \forall j > 1$;
Le calcul de $R_{1\frac{1}{2}}^{n+1}$ sera discuté dans le cadre du traitement des conditions au centre (§ 3.2).

Les résultats obtenus en remplaçant la dernière équation de (2.99) par l'égalité (2.103) sont satisfaisants.

Compte tenu de la remarque 2.5.3, nous considèrerons par la suite le schéma

$$\frac{w_j^{n+\frac{1}{2}} - \bar{w}_j^n}{\frac{\Delta t^{n+\frac{1}{2}}}{2}} + \frac{F_{j+\frac{1}{2}}^n - F_{j-\frac{1}{2}}^n}{\Delta m_j} = \bar{H}_j^n \frac{g_{j+\frac{1}{2}}^n - g_{j-\frac{1}{2}}^n}{\Delta m_j} + \bar{L}_j^n , \quad (2.104)$$

$$\frac{V_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} - \frac{\theta_{j+\frac{1}{2}}^n}{2} (V_{j+1}^{n+\frac{1}{2}} + V_j^{n+\frac{1}{2}}) - (1-\theta_{j+\frac{1}{2}}^n)V_{j+\frac{1}{2}}^n}{\Delta t^{n+\frac{1}{2}}} - (1 - \frac{\theta_{j+\frac{1}{2}}^n}{2}) \frac{(R_{j+1}^{n+\frac{1}{2}})^2 u_{j+1}^{n+\frac{1}{2}} - (R_j^{n+\frac{1}{2}})^2 u_j^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta m_{j+\frac{1}{2}}} = 0 , \quad (2.105)$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{u_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} - \frac{\theta_{j+\frac{1}{2}}^n}{2} (u_{j+1}^{n+\frac{1}{2}} + u_j^{n+\frac{1}{2}}) - (1-\theta_{j+\frac{1}{2}}^n)u_{j+\frac{1}{2}}^n}{\Delta t^{n+\frac{1}{2}}} + \\
 & (1 - \frac{\theta_{j+\frac{1}{2}}^n}{2}) \frac{(R_{j+1}^{n+\frac{1}{2}})^2 p_{j+1}^{n+\frac{1}{2}} - (R_j^{n+\frac{1}{2}})^2 p_j^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta m_{j+\frac{1}{2}}} = \\
 & (1 - \frac{\theta_{j+\frac{1}{2}}^n}{2}) \frac{p_{j+1}^{n+\frac{1}{2}} + p_j^{n+\frac{1}{2}}}{2} \frac{(R_{j+1}^{n+\frac{1}{2}})^2 - (R_j^{n+\frac{1}{2}})^2}{\Delta m_{j+\frac{1}{2}}}, \quad (2.106)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{E_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} - \frac{\theta_{j+\frac{1}{2}}^n}{2} (E_{j+1}^{n+\frac{1}{2}} + E_j^{n+\frac{1}{2}}) - (1-\theta_{j+\frac{1}{2}}^n)E_{j+\frac{1}{2}}^n}{\Delta t^{n+\frac{1}{2}}} + \\
 & (1 - \frac{\theta_{j+\frac{1}{2}}^n}{2}) \frac{(R_{j+1}^{n+\frac{1}{2}})^2 p_{j+1}^{n+\frac{1}{2}} u_{j+1}^{n+\frac{1}{2}} - (R_j^{n+\frac{1}{2}})^2 p_j^{n+\frac{1}{2}} u_j^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta m_{j+\frac{1}{2}}} = 0, \quad (2.107)
 \end{aligned}$$

$$\frac{(R_{j+\frac{1}{2}}^{n+1})^3 - (R_{j-\frac{1}{2}}^{n+1})^3}{3} = \frac{1}{2} (V_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} + V_{j-\frac{1}{2}}^{n+1}) \Delta m_j. \quad (2.108)$$

La fin de ce paragraphe est consacrée à un exemple.

Dans [5], Ben-Artzi et Falcovitz proposent un schéma d'ordre 2, basé sur la résolution d'un problème de Riemann généralisé, pour l'étude du mouvement d'un fluide s'écoulant à travers une section variable.

Ils présentent les résultats obtenus avec ce schéma dans le contexte du problème test suivant:

considérons un gaz compressible et non-visqueux, caractérisé par l'équation d'état

$$pV = (\gamma-1)\left(E - \frac{1}{2}u^2\right) \quad \text{où } \gamma = 1.4, \quad (2.109)$$

initialement au repos.

Un diaphragme cylindrique de rayon $R = 100$ sépare l'espace occupé par le gaz en deux domaines; à l'intérieur du diaphragme, la densité et la pression sont uniformément égales à 1, alors qu'à l'extérieur, ces deux grandeurs sont uniformément égales à 4 (figure 2.6).

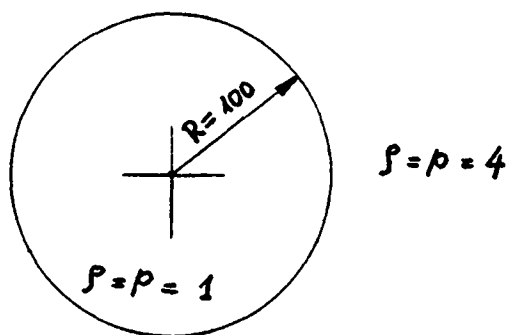


figure 2.6.

Au temps $t = 0$, le diaphragme est supprimé.

Les figures 2.8 à 2.11 présentent, pour différentes valeurs de t , la densité en fonction de R obtenue par Ben-Artzi et Falcovitz: la discontinuité initiale (figure 2.7) se décompose en un choc suivi d'une discontinuité de contact convergeant tous deux vers le centre du cylindre, et une onde de détente s'éloignant dans la direction opposée (figure 2.8). Au temps $t = 58$, le choc a été réfléchi par l'axe du cylindre (figure 2.9), se dirige vers la discontinuité de contact qui converge toujours vers le centre (figure 2.10), et rencontre cette dernière au temps $t = 90$ (figure 2.11).

Dans le cadre de ce problème, avec les notations du paragraphe 2.1, le mouvement du fluide en symétrie cylindrique est décrit par le système (2.15)

$$\partial_t w + \partial_m F(w) = H(w) \partial_m g(w) + L(w),$$

$$\text{où } w = (V, u, E, R)^T,$$

$$F(w) = R (-u, p, pu, 0)^T,$$

$$H(w) = (0, p, 0, 0)^T,$$

$$g(w) = R,$$

$$L(w) = (0, 0, 0, u)^T,$$

et où m est donné par la relation

$$m = \int_0^r y \rho_0(y) dy$$

analogue à l'expression (1.3) introduite au paragraphe 1.2 dans le cas de la symétrie sphérique.

L'équation d'état est donnée par (2.109).

Nous avons traité ce problème avec le schéma (2.104) à (2.108) que nous avons adapté au cas de la symétrie cylindrique en remplaçant les quantités $(R_{j+1/2})^{n+1/2}$ et $(R_{j-1/2})^{n+1/2}$ par R_{j+1} et R_j dans les relations (2.105) à (2.107), et en remplaçant le membre de gauche de

l'équation (2.108) par
$$\frac{(R_{j+1/2})^{n+1} - (R_{j-1/2})^{n+1}}{2} .$$

Nous avons choisi pour le paramètre d'hybridage θ l'expression

$$(2.101) \text{ avec } \varepsilon = 10^{-3} \text{ et } c = \begin{cases} 3 & \text{si } j \leq \frac{400}{\sqrt{10}} \\ 8 & \text{sinon} \end{cases} ,$$

pour le maillage les relations (2.78), (2.79) avec $h = 0.638$, et pour la condition de stabilité l'expression (2.80a) où le maximum a été pris sur tous les k tels que $|j-k| \leq 10$.

Au centre du cylindre, le problème a été traité selon la méthode présentée au paragraphe 3.2, et le domaine de calcul a été choisi assez grand pour que la solution reste constante au voisinage du bord pendant tout l'intervalle de temps considéré.

Les figures 2.12 à 2.15 montrent la densité en fonction du rayon R obtenue avec cette méthode pour les instants correspondant aux résultats des figures 2.8 à 2.11.

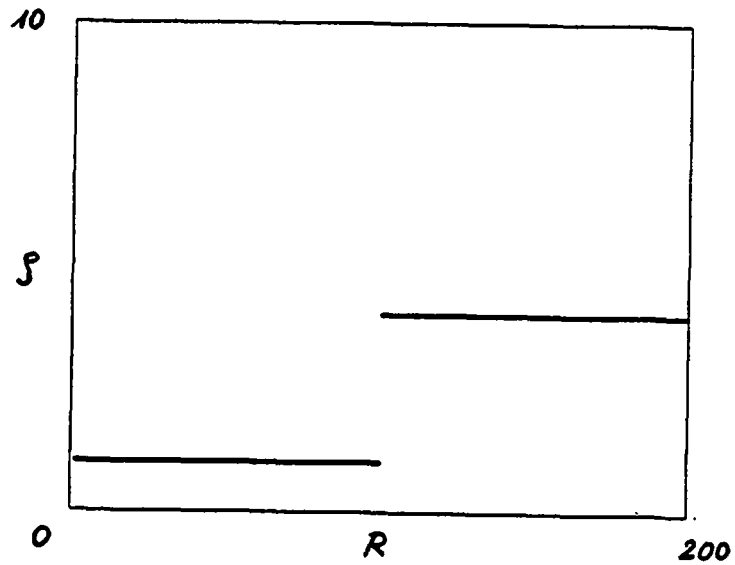


figure 2.7 $t=0$

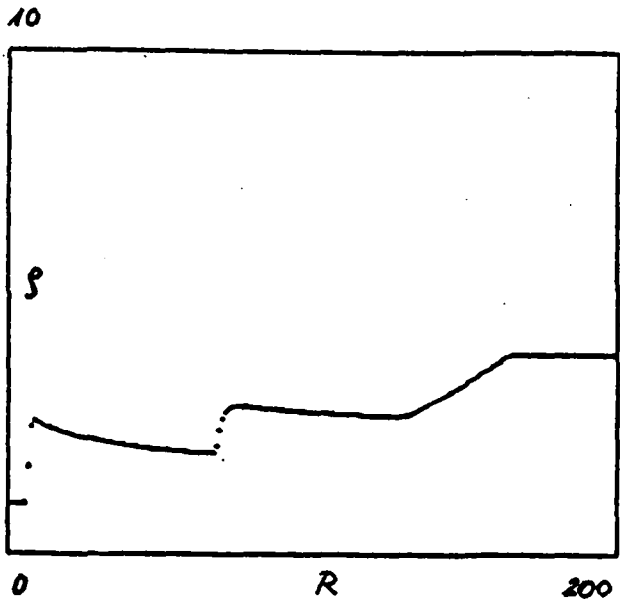


figure 2.8

$t = 54$

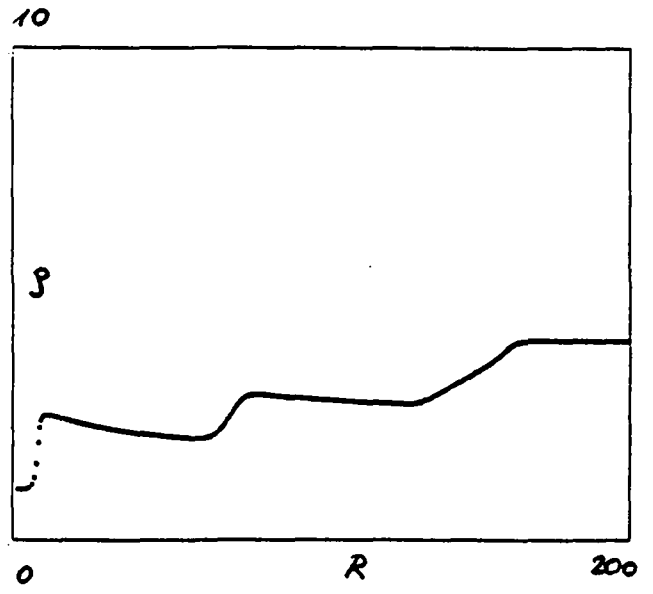


figure 2.12

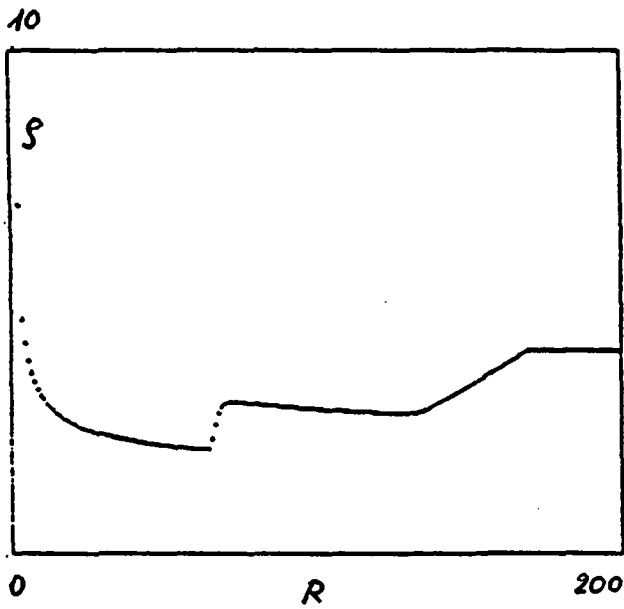


figure 2.9

$t = 58$

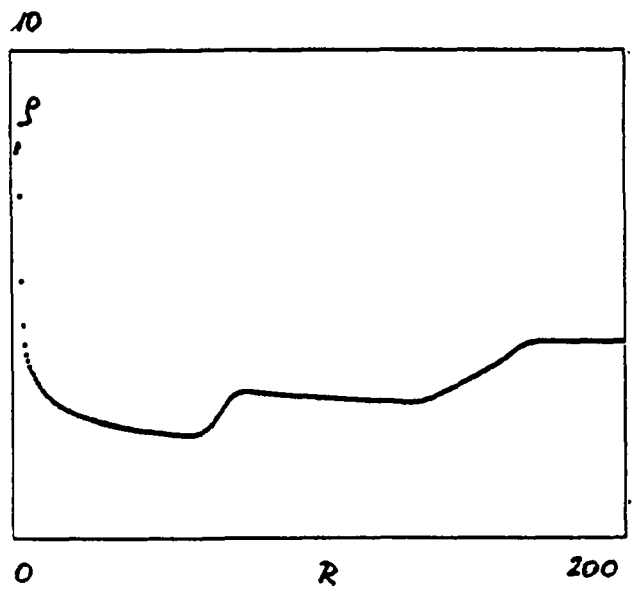


figure 2.13

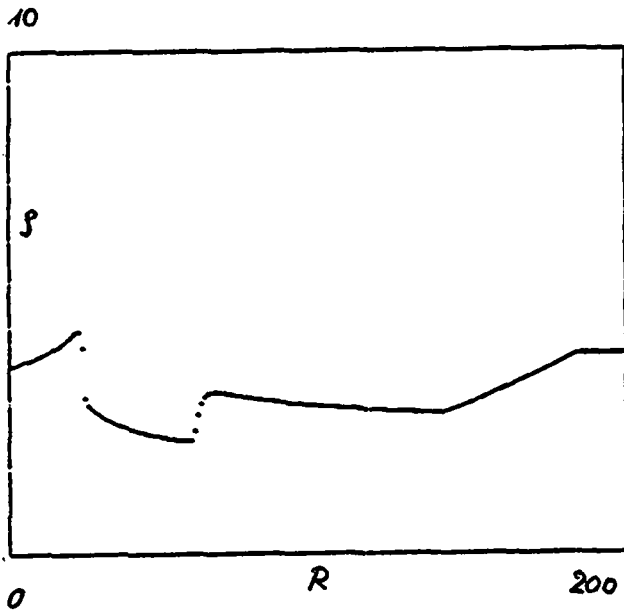


figure 2.10

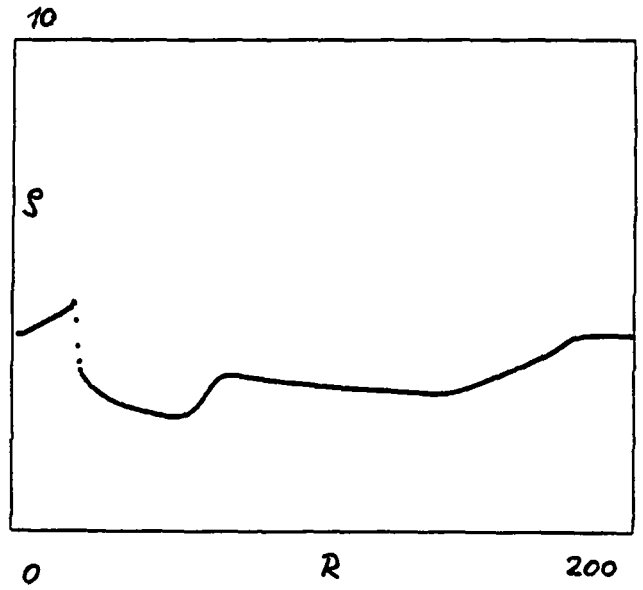


figure 2.14

$t = 70$

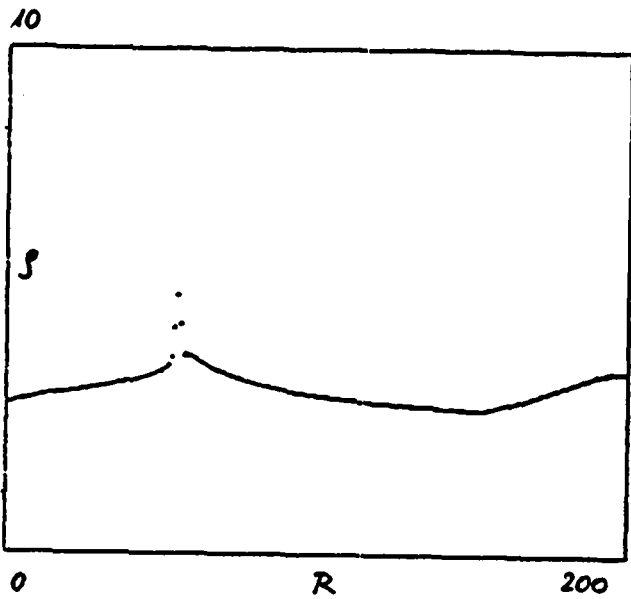


figure 2.11

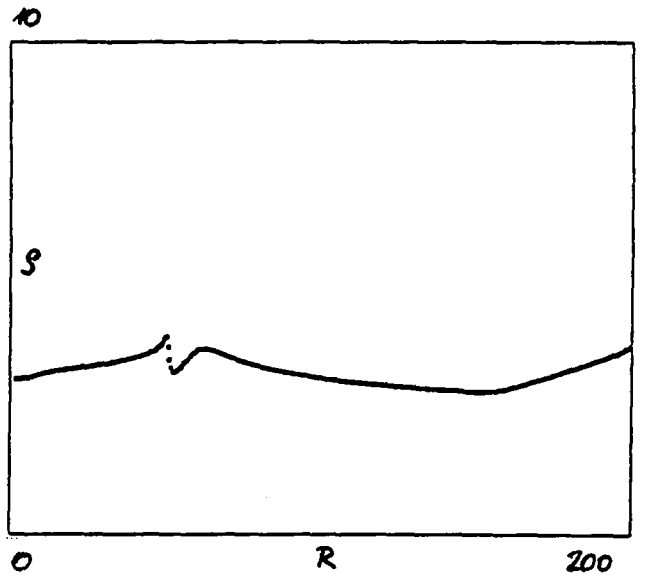


figure 2.15

$t = 90$

On remarque que notre méthode est plus diffusive que le schéma sophistiqué de Ben-Artzi et Falcovitz, et que l'interaction du choc et de la discontinuité de contact (figures 2.11 et 2.15) est légèrement déphasée dans le temps (cette interaction a lieu pour $t \approx 94$ avec notre schéma).

Toutefois, l'accord entre les résultats obtenus avec ces deux méthodes est satisfaisant.

3. TRAITEMENT NUMERIQUE DES CONDITIONS AUX LIMITES.

3.1. La condition de bord.

Au paragraphe 1.5 , nous avons introduit l'intervalle $[0, \bar{m}]$ parcouru par la variable m , et la condition de bord (1.27)

$$p(\bar{m}, t) = h(t) \quad \forall t > 0 , \quad (3.1)$$

où h est une fonction positive donnée.

Le présent paragraphe est consacré au traitement numérique de la condition (3.1) dans le cadre de la résolution du système (2.15), (2.16) avec le schéma (2.104) à (2.108).

Considérons, pour $N \in \mathbb{N}$ fixé, une subdivision de l'intervalle $[0, \bar{m}]$ et un maillage temporel satisfaisant les relations (2.17) à (2.20) et (2.23) à (2.25).

Soit n un entier positif fixé et supposons les quantités $w_{N-\frac{3}{2}}^n$, $w_{N-\frac{1}{2}}^n$ et $\Delta t^{n+\frac{1}{2}}$ connues.

Nous proposons ci-dessous une méthode, basée sur le "splitting" du système (2.15) réécrit sous une forme appropriée et sur le schéma de Godunov pour les systèmes de lois de conservation linéaires, pour déterminer une approximation $w_{N-\frac{1}{2}}^{n+1}$ de $w(m_{N-\frac{1}{2}}, t^{n+1})$, en tenant compte de la condition (3.1) (c.f. figure 3.1).

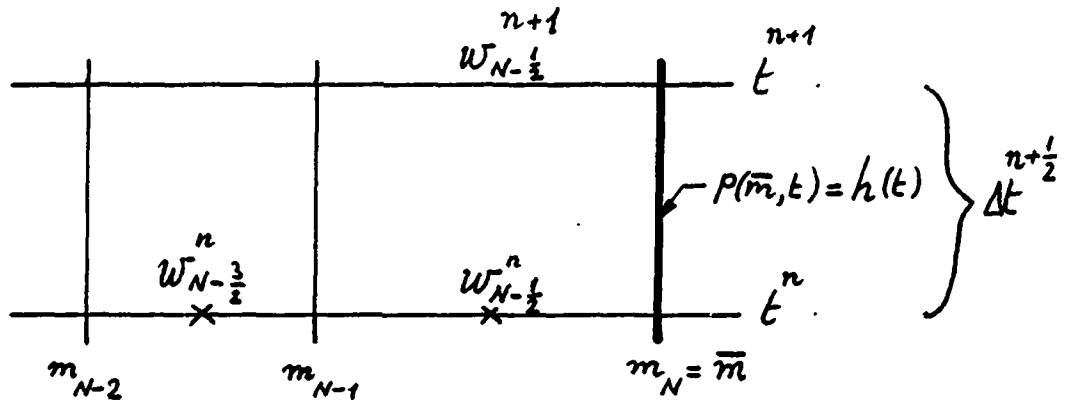


figure 3.1

Réécrivons les équations (2.5) à (2.9) sous la forme

$$\partial_t V - R^2 \partial_m u = u \partial_m (R^2) , \quad (3.2)$$

$$\partial_t u + R^2 \partial_m p = 0 , \quad (3.3)$$

$$\partial_t E + R^2 \partial_m (pu) = - pu \partial_m (R^2) , \quad (3.4)$$

$$\partial_t R = u , \quad (3.5)$$

$$p = \frac{C_g}{C_V} \frac{1}{V} (E - \frac{1}{2} u^2) . \quad (3.6)$$

Remarque 3.1.1.

Au paragraphe 1.2, nous avons relié la variable eulérienne R et la variable lagrangienne r par le changement de variables

$$R = \xi(r,t) \quad (3.7)$$

tel que

$$r = \xi(r,0) \quad \forall r, \quad (3.8)$$

puis nous avons introduit la variable

$$m = m(r) = \int_0^r y^2 \rho(y,0) dy \quad (3.9)$$

où ρ désigne la densité en coordonnée de Lagrange r .

Soit $\tilde{\rho}$ la densité en coordonnée d'Euler :

$$\tilde{\rho}(\xi(r,t), t) = \rho(r,t) . \quad (3.10)$$

La conservation de la masse et les relations (3.7) à (3.10) impliquent que , $\forall t$ et r positifs,

$$m(r) = \int_0^{\xi(r,0)} y^2 \tilde{\rho}(y,0) dy = \int_0^{\xi(r,t)} y^2 \tilde{\rho}(y,t) dy . \quad (3.11)$$

En dérivant cette dernière égalité par rapport à r nous obtenons, grâce à (3.10), la relation

$$\partial_r \xi(r,t) = \frac{r^2 \rho(r,0)}{\xi^2(r,t) \rho(r,t)} . \quad (3.12)$$

Si nous considérons R comme fonction de m et de t , les relations (3.7) (3.9) et (3.12) impliquent que

$$\partial_m R(m,t) = \partial_r \xi(r,t) \frac{dr}{dm} = \frac{V(m,t)}{R^2(m,t)} . \quad (3.13)$$

La remarque 3.1.1 nous permet d'écrire les équations (3.2) à (3.6) sous la forme

$$\partial_t V - R^2 \partial_m u = 2V \frac{u}{R} , \quad (3.14)$$

$$\partial_t u + R^2 \partial_m p = 0 , \quad (3.15)$$

$$\partial_t E + R^2 \partial_m (pu) = -2pV \frac{u}{R} , \quad (3.16)$$

$$\partial_t R = u , \quad (3.17)$$

$$p = \frac{C_g}{C_V} \frac{1}{V} (E - \frac{1}{2} u^2) . \quad (3.18)$$

Nous considérons ce système pour $m \in]m_{N-2}, m_N]$ et $t \geq t^n$, et nous nous proposons d'approximer sa solution pour la condition initiale

$$w(m, t^n) = \begin{cases} w_{N-\frac{3}{2}}^n, & m \in]m_{N-2}, m_{N-1}[\\ w_{N-\frac{1}{2}}^n, & m \in [m_{N-1}, m_N] \end{cases} \quad (3.19)$$

où w est défini par (2.10), et pour la condition de bord (3.1).

Nous procédons en deux étapes (méthode du splitting).

Tout d'abord, nous considérons le système avec second membre et sans "flux" :

$$\partial_t V = 2V \frac{u}{R}, \quad (3.20)$$

$$\partial_t u = 0, \quad (3.21)$$

$$\partial_t E = -2pV \frac{u}{R}, \quad (3.22)$$

$$\partial_t R = u, \quad (3.23)$$

$$p = \frac{C_g}{C_V} \frac{1}{V} (E - \frac{1}{2} u^2), \quad (3.24)$$

avec la condition initiale (3.19).

Pour m fixé dans $]m_{N-2}, m_N]$, le système (3.20) à (3.23) est un système d'équations différentielles ordinaires du premier ordre. On vérifie aisément que sa solution, pour la condition initiale (3.19), est donnée par

$$\tilde{V}(m, t) = V_{k+\frac{1}{2}}^n \left(1 + (t-t^n) \frac{u_{k+\frac{1}{2}}^n}{R_{k+\frac{1}{2}}^n} \right)^2, \quad (3.25)$$

$$\tilde{u}(m, t) = u_{k+\frac{1}{2}}^n, \quad (3.26)$$

$$\tilde{E}(m,t) = \frac{(u_{k+\frac{1}{2}}^n)^2}{2} + \left(E_{k+\frac{1}{2}}^n - \frac{(u_{k+\frac{1}{2}}^n)^2}{2} \right) \left(1 + (t-t^n) \frac{u_{k+\frac{1}{2}}^n}{R_{k+\frac{1}{2}}^n} \right)^{-2 \frac{C_g}{C_V}} \quad (3.27)$$

$$\tilde{R}(m,t) = R_{k+\frac{1}{2}}^n + (t-t^n) u_{k+\frac{1}{2}}^n \quad (3.28)$$

$$\text{où } k = \begin{cases} N-2 & \text{si } m \in]m_{N-2}, m_{N-1}[\\ N-1 & \text{si } m \in [m_{N-1}, m_N] \end{cases} \quad (3.29)$$

Nous considérons ensuite le système sans second membre

$$\partial_t V - R^2 \partial_m u = 0 \quad (3.30)$$

$$\partial_t u + R^2 \partial_m p = 0 \quad (3.31)$$

$$\partial_t E + R^2 \partial_m (pu) = 0 \quad (3.32)$$

$$\partial_t R = 0 \quad (3.33)$$

$$p = \frac{C_g}{C_V} \frac{1}{V} \left(E - \frac{1}{2} u^2 \right) \quad (3.34)$$

avec la condition initiale

$$w(m,t^n) = \tilde{w}(m,t^{n+1}) \quad \forall m \in]m_{N-2}, m_N] \quad (3.35)$$

où \tilde{w} est donnée par les relations (3.25) à (3.29), et avec la condition de bord (3.1)

$$p(m_N,t) = h(t) \quad \forall t > t^n \quad (3.36)$$

La quantité $R_{N-\frac{1}{2}}^{n+1}$ sera obtenue par l'équation (2.108), introduite par la remarque 2.5.3. Nous omettrons donc l'équation (3.33) par la suite.

Soit

$$\omega = (V, u, E)^T, \quad (3.37)$$

$$\varphi(\omega) = (-u, p, pu)^T, \quad (3.38)$$

et la matrice

$$A(R, \omega) = R^2 \frac{\partial \varphi}{\partial \omega}(\omega) = R^2 \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -\frac{p}{V} & -\frac{C_g u}{C_V V} & \frac{C_g}{C_V V} \\ -\frac{p}{V} u & p - \frac{C_g u^2}{C_V V} & \frac{C_g u}{C_V V} \end{bmatrix}. \quad (3.39)$$

Avec ces notations, le système (3.30) à (3.32) s'écrit sous la forme

$$\partial_t \omega + A(R, \omega) \partial_m \omega = 0. \quad (3.40)$$

Afin de nous placer dans le cas des systèmes de lois de conservation linéaires, nous introduisons les quantités

$$\tilde{V}_{N-\frac{1}{2}} = \tilde{V}(m_{N-\frac{1}{2}}, t^{n+1}), \quad (3.41)$$

$$\tilde{u}_{N-\frac{1}{2}} = \tilde{u}(m_{N-\frac{1}{2}}, t^{n+1}), \quad (3.42)$$

$$\tilde{E}_{N-\frac{1}{2}} = \tilde{E}(m_{N-\frac{1}{2}}, t^{n+1}), \quad (3.43)$$

$$\tilde{R}_{N-\frac{1}{2}} = \tilde{R}(m_{N-\frac{1}{2}}, t^{n+1}), \quad (3.44)$$

$$\tilde{p}_{N-\frac{1}{2}} = \frac{C_g}{C_V} \frac{\tilde{E}_{N-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}(\tilde{u}_{N-\frac{1}{2}})^2}{\tilde{V}_{N-\frac{1}{2}}}, \quad (3.45)$$

$$\tilde{\omega}_{N-\frac{1}{2}} = (\tilde{V}_{N-\frac{1}{2}}, \tilde{u}_{N-\frac{1}{2}}, \tilde{E}_{N-\frac{1}{2}})^T, \quad (3.46)$$

$$\tilde{A}_{N-\frac{1}{2}} = A(\tilde{R}_{N-\frac{1}{2}}, \tilde{\omega}_{N-\frac{1}{2}}) \quad (3.47)$$

et nous approchons (3.40) par le système linéaire:

$$\partial_t \omega + \tilde{A}_{N-\frac{1}{2}} \partial_m \omega = 0. \quad (3.48)$$

La matrice $\tilde{A}_{N-\frac{1}{2}}$ admet les valeurs propres

$$\lambda_1 = -\tilde{R}_{N-\frac{1}{2}}^2 \lambda \quad (3.49)$$

$$\text{où } \lambda = \left(\left(1 + \frac{C_g}{C_V} \right) \frac{\tilde{p}_{N-\frac{1}{2}}}{\tilde{v}_{N-\frac{1}{2}}} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (3.50)$$

$$\lambda_2 = 0, \quad (3.51)$$

$$\lambda_3 = -\lambda_1, \quad (3.52)$$

et les vecteurs propres correspondants

$$v_1 = (1, \lambda, \lambda \tilde{u}_{N-\frac{1}{2}} - \tilde{p}_{N-\frac{1}{2}})^T, \quad (3.53)$$

$$v_2 = (1, 0, \frac{C_V}{C_g} \tilde{p}_{N-\frac{1}{2}})^T, \quad (3.54)$$

$$v_3 = (1, -\lambda, -\lambda \tilde{u}_{N-\frac{1}{2}} - \tilde{p}_{N-\frac{1}{2}})^T. \quad (3.55)$$

Avec ces notations, soit $|\tilde{A}_{N-\frac{1}{2}}|$ la matrice telle que

$$|\tilde{A}_{N-\frac{1}{2}}| v_k = |\lambda_k| v_k \quad \text{pour } k = 1, 2, 3. \quad (3.56)$$

Nous avons

$$|\tilde{A}_{N-\frac{1}{2}}| = \tilde{R}_{N-\frac{1}{2}}^2 \left[\begin{array}{ccc} \frac{\tilde{p}_{N-\frac{1}{2}}}{\lambda \tilde{V}_{N-\frac{1}{2}}} & \frac{C_g \tilde{u}_{N-\frac{1}{2}}}{C_V \lambda \tilde{V}_{N-\frac{1}{2}}} & - \frac{C_g}{C_V \lambda \tilde{V}_{N-\frac{1}{2}}} \\ 0 & \lambda & 0 \\ - \frac{\tilde{p}_{N-\frac{1}{2}}^2}{\lambda \tilde{V}_{N-\frac{1}{2}}} & \tilde{u}_{N-\frac{1}{2}} \left(\lambda - \frac{C_g \tilde{p}_{N-\frac{1}{2}}}{C_V \lambda \tilde{V}_{N-\frac{1}{2}}} \right) & \frac{C_g \tilde{p}_{N-\frac{1}{2}}}{C_V \lambda \tilde{V}_{N-\frac{1}{2}}} \end{array} \right] \quad (3.57)$$

En nous inspirant de [8], nous introduisons un état fictif $\tilde{\omega}_{N+\frac{1}{2}}$, pour $t = t^n$ et $m > m_N$.

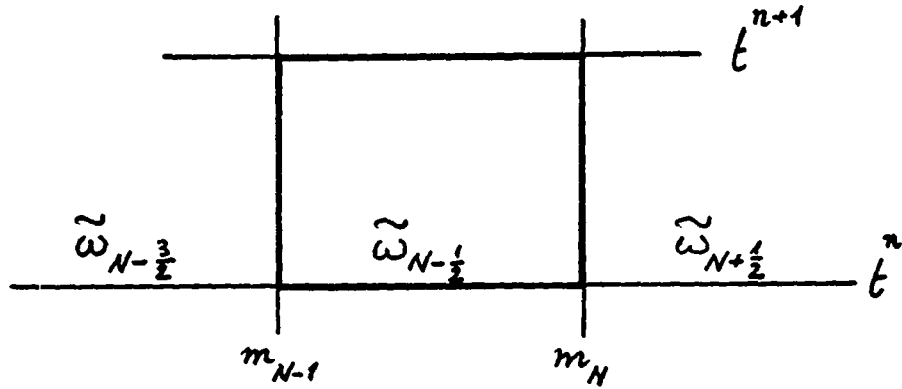


figure 3.2

Dans le contexte illustré par la figure 3.2, supposons la condition C.F.L.

$$\tilde{R}_{N-\frac{1}{2}}^2 \lambda \Delta t^{n+\frac{1}{2}} < \Delta m_{N-\frac{1}{2}}$$

satisfaite.

Le schéma de Godunov obtenu en considérant les solutions des problèmes de Riemann pour l'équation (3.48) en $m = m_{N-1}$ et en $m = m_N$, et en intégrant cette équation sur le rectangle $[m_{N-1}, m_N] \times [t^n, t^{n+1}]$ (c.f. [9]), fournit la relation

$$\begin{aligned} \omega_{N-\frac{1}{2}}^{n+1} &= \tilde{\omega}_{N-\frac{1}{2}} - \frac{\Delta t^{n+\frac{1}{2}}}{2\Delta m_{N-\frac{1}{2}}} \tilde{A}_{N-\frac{1}{2}} (\tilde{\omega}_{N+\frac{1}{2}} - \tilde{\omega}_{N-\frac{3}{2}}) \\ &+ \frac{\Delta t^{n+\frac{1}{2}}}{2\Delta m_{N-\frac{1}{2}}} |\tilde{A}_{N-\frac{1}{2}}| (\tilde{\omega}_{N+\frac{1}{2}} - 2\tilde{\omega}_{N-\frac{1}{2}} + \tilde{\omega}_{N-\frac{3}{2}}). \end{aligned} \quad (3.58)$$

Soit a_1, a_2 et $a_3 \in \mathbb{R}$ tels que $\tilde{\omega}_{N+\frac{1}{2}} - \tilde{\omega}_{N-\frac{1}{2}} = \sum_{k=1}^3 a_k v_k$. On vérifie

aisément que la relation (3.58) est équivalente à

$$\omega_{N-\frac{1}{2}}^{n+1} = \tilde{\omega}_{N-\frac{1}{2}} - \frac{\Delta t^{n+\frac{1}{2}}}{2\Delta m_{N-\frac{1}{2}}} (\tilde{A}_{N-\frac{1}{2}} + |\tilde{A}_{N-\frac{1}{2}}|) (\tilde{\omega}_{N-\frac{1}{2}} - \tilde{\omega}_{N-\frac{3}{2}}) - \frac{\Delta t^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta m_{N-\frac{1}{2}}} a_1 \lambda_1 v_1, \quad (3.59)$$

ce qui implique que $\omega_{N-\frac{1}{2}}^{n+1}$ ne dépend que de $\tilde{\omega}_{N-\frac{3}{2}}, \tilde{\omega}_{N-\frac{1}{2}}$ et a_1 . Il reste donc à déterminer a_1 .

Nous remarquons que a_1 ne dépend que de $\tilde{\omega}_{N-\frac{1}{2}}$ et de la pression \bar{p} régnant dans le secteur Ω défini par (c.f. figure 3.3):

$$\Omega = \left\{ (m,t) / \lambda_1 < \frac{m - m_N}{t} < 0, t > t^n \right\}. \quad (3.60)$$

En effet, pour $m < m_N$ et $t > t^n$, la solution du problème de Riemann défini par les relations

$$\partial_t \omega + \tilde{A}_{N-\frac{1}{2}} \partial_m \omega = 0, \quad m \in \mathbb{R}, t > t^n, \quad (3.61)$$

$$\omega(m,t^n) = \begin{cases} \tilde{\omega}_{N-\frac{1}{2}}, & m < m_N \\ \tilde{\omega}_{N+\frac{1}{2}}, & m > m_N, \end{cases} \quad (3.62)$$

est donnée par (c.f. [9])

$$\omega(m,t) = \begin{cases} \tilde{\omega}_{N-\frac{1}{2}}, & \frac{m - m_N}{t} < \lambda_1 \\ \bar{\omega} = \tilde{\omega}_{N-\frac{1}{2}} + a_1 v_1, & \lambda_1 < \frac{m - m_N}{t} < 0. \end{cases} \quad (3.63)$$

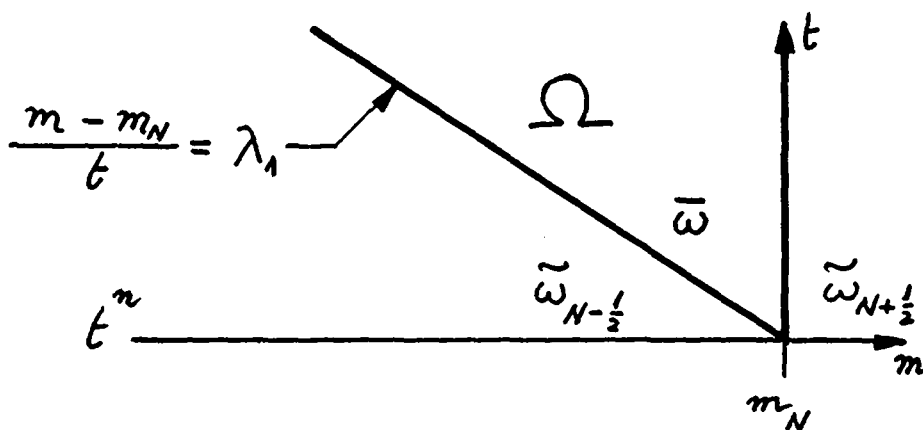


figure 3.3

La pression \bar{p} associée à $\bar{\omega} = (\bar{V}, \bar{u}, \bar{E})$ est donnée par (c.f. équation (3.34))

$$\bar{p} \bar{V} = -\frac{C_g}{C_V} \left(\bar{E} - \frac{1}{2} \bar{u}^2 \right). \quad (3.64)$$

En introduisant la relation (3.63)

$$\bar{\omega} = \tilde{\omega}_{N-\frac{1}{2}} + a_1 v_1 \quad (3.65)$$

dans (3.64), nous obtenons la relation

$$a_1^2 + \frac{2 \tilde{V}_{N-\frac{1}{2}}}{1 + \frac{C_g}{C_V}} \eta_{N-\frac{1}{2}} a_1 - \frac{2 \frac{C_V}{C_g} (\tilde{V}_{N-\frac{1}{2}})^2}{1 + \frac{C_g}{C_V}} \left(1 - \frac{\bar{p}}{\tilde{p}_{N-\frac{1}{2}}} \right) = 0, \quad (3.66)$$

$$\text{où } \eta_{N-\frac{1}{2}} = \left(1 + \frac{C_V \bar{p}}{C_g \tilde{p}_{N-\frac{1}{2}}} \right). \quad (3.67)$$

En considérant \bar{p} comme connue, (3.66) définit une équation quadratique pour a_1 dont la seule solution admissible est donnée par

$$a_1 = - \frac{\bar{V}_{N-\frac{1}{2}}}{1 + \frac{C_g}{C_V}} \left(\eta_{N-\frac{1}{2}} - \left(\eta_{N-\frac{1}{2}}^2 + 2 \left(1 + \frac{C_V}{C_g} \right) \left(1 - \frac{\bar{p}}{\bar{p}_{N-\frac{1}{2}}} \right) \right)^{\frac{1}{2}} \right) \quad (3.68)$$

En effet, l'autre solution conduit à un volume spécifique \bar{V} négatif.

Les développements qui précèdent suggèrent la méthode suivante pour le calcul de $w_{N-\frac{1}{2}}^{n+1}$ dans le contexte introduit au début de ce paragraphe et illustré par la figure 3.1 :

i) Calculer la solution du système (3.19) à (3.24) en $m = m_{N-\frac{3}{2}}$ et $m_{N-\frac{1}{2}}$, et en $t = t^{n+1}$ (c.f. équations (3.25) à (3.29)) :

pour $k = N-2$ et $N-1$, soit

$$\bar{V}_{k+\frac{1}{2}} = V_{k+\frac{1}{2}}^n \left(1 + \Delta t^{n+\frac{1}{2}} \frac{u_{k+\frac{1}{2}}^n}{R_{k+\frac{1}{2}}^n} \right)^2, \quad (3.69)$$

$$\tilde{u}_{k+\frac{1}{2}} = u_{k+\frac{1}{2}}^n, \quad (3.70)$$

$$\tilde{E}_{k+\frac{1}{2}} = \frac{(u_{k+\frac{1}{2}}^n)^2}{2} + \left(E_{k+\frac{1}{2}}^n - \frac{(u_{k+\frac{1}{2}}^n)^2}{2} \right) \left(1 + \Delta t^{n+\frac{1}{2}} \frac{u_{k+\frac{1}{2}}^n}{R_{k+\frac{1}{2}}^n} \right)^{-2 \frac{C_g}{C_V}}, \quad (3.71)$$

$$\tilde{R}_{k+\frac{1}{2}} = R_{k+\frac{1}{2}}^n + \Delta t^{n+\frac{1}{2}} u_{k+\frac{1}{2}}^n, \quad (3.72)$$

$$\tilde{\omega}_{k+\frac{1}{2}} = (\bar{V}_{k+\frac{1}{2}}, \tilde{u}_{k+\frac{1}{2}}, \tilde{E}_{k+\frac{1}{2}})^T, \quad (3.73)$$

et soit

$$\tilde{p}_{N-\frac{1}{2}} = \frac{C_g}{C_V} \frac{1}{\tilde{V}_{N-\frac{1}{2}}} (\tilde{E}_{N-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \tilde{u}_{N-\frac{1}{2}}^2) . \quad (3.74)$$

ii) Approcher ensuite la solution du système (3.30) à (3.36) en imposant, dans le secteur Ω défini par la relation (3.60), la pression \bar{p} donnée par la condition de bord (3.1) à l'instant $t^{n+\frac{1}{2}}$,

$$\bar{p} = h(t^n + \frac{\Delta t^{n+\frac{1}{2}}}{2}) , \quad (3.75)$$

et en calculant les quantités

$$a_1 , \quad (\text{équations (3.67), (3.68)})$$

$$\tilde{A}_{N-\frac{1}{2}} , \quad (\text{équations (3.39), (3.47)})$$

$$\lambda , \quad (\text{équation (3.50)})$$

$$\lambda_1 , \quad (\text{équation (3.49)})$$

$$v_1 , \quad (\text{équation (3.53)})$$

$$|\tilde{A}_{N-\frac{1}{2}}| , \quad (\text{équation (3.57)})$$

et $\omega_{N-\frac{1}{2}}^{n+1} . \quad (\text{équation (3.59)})$

Le rayon $R_{N-\frac{1}{2}}^{n+1}$ est donné par l'équation (2.108) .

A titre d'exemple considérons, dans le cas d'une cible sphérique, le système (2.15), (2.16) pour $t > 0$, $m \in [0, \bar{m}]$ avec $\bar{m} = 10^{-7}$ kg, pour les constantes

$$C_g = 3324 \frac{J}{kg^\circ K} ,$$

$$C_V = \frac{3}{2} C_g = 4986 \frac{\text{J}}{\text{kg}^\circ\text{K}},$$

et pour la condition initiale

$$V(m,0) = \frac{1}{300} \frac{\text{m}^3}{\text{kg}},$$

$$u(m,0) = 0 \frac{\text{m}}{\text{s}},$$

$$p(m,0) = 9.972 \cdot 10^8 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}, \forall m.$$

Avec ces données, la cible a un rayon initial égal à 10^{-3} m (c.f. équation (1.24)).

Au bord, nous imposons la condition (3.1), $p(\bar{m},t) = h(t)$, avec

$$h(t) = \begin{cases} \min\left\{10^5, \frac{1}{\left(1 - \frac{t}{t_0}\right)^{\frac{5}{4}}}\right\} p_0, & t < t_0 \\ 10^5 p_0, & t \geq t_0 \end{cases} \quad (3.76)$$

où p_0 est la pression initiale égale à $9.972 \cdot 10^8 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$ et où $t_0 = 134.66 \cdot 10^{-9}$ s .

Nous avons traité ce problème avec le schéma (2.104) à (2.108) pour le maillage (2.78), (2.79) où $h = 4.55 \cdot 10^{-6}$ ($N = 70$), et pour une expression du paramètre d'hybridage θ qui sera discutée au chapitre 5.

Le traitement du problème au centre de la cible ainsi que la condition de stabilité que nous avons utilisée seront présentés au paragraphe suivant.

Pour la condition de bord, nous avons procédé selon le schéma présenté ci-dessus.

Les résultats numériques montrent que ce traitement de la condition de bord peut brusquement conduire à une pression négative lorsque une forte onde de pression se propage du centre de la cible vers l'extérieur et atteint sa frontière.

La figure 3.4 présente, en fonction du temps, la pression en

$m = m_{N-\frac{1}{2}}$ obtenue avec notre méthode (en pointillé), et la pression imposée en $m = m_N$ par les relations (3.1) et (3.76) (en trait fin continu).

$$6.5 \cdot 10^{14} \frac{N}{m^2}$$

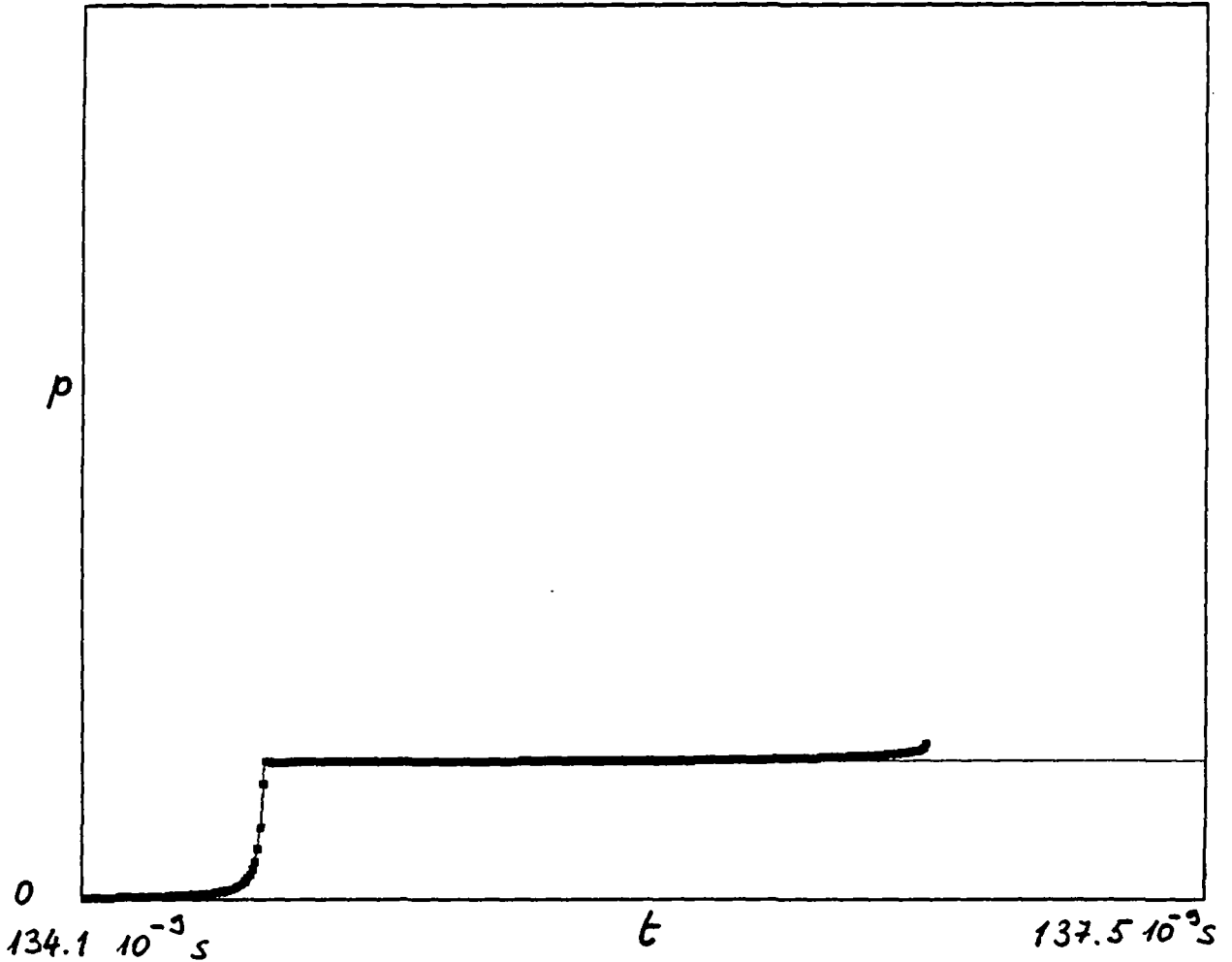


figure 3.4

A l'instant $t \approx 136.67 \cdot 10^{-9} \text{ s}$, la pression devient négative et les calculs sont interrompus.

Pour remédier au problème de la pression négative, nous introduisons deux modifications.

a) Dans le contexte illustré par la figure 3.1, nous résolvons comme au point i) le système (3.19) à (3.24) . Nous résolvons ensuite le système (3.30) à (3.36) de manière itérative :

$$\text{soit } (\omega_{N-\frac{1}{2}}^{n+1 \ 0}) = \tilde{\omega}_{N-\frac{1}{2}}.$$

A la $k^{\text{ème}}$ itération, nous considérons la matrice définie par (c.f. équation (3.39))

$$\tilde{A}_{N-\frac{1}{2}}^{k-1} = A \left(\tilde{R}_{N-\frac{1}{2}}, \frac{1}{2} (\tilde{\omega}_{N-\frac{1}{2}}^{k-1} + (\omega_{N-\frac{1}{2}}^{n+1 \ k-1}) \right), \quad (3.77)$$

et nous reprenons le procédé établi par les équations (3.48) à (3.68) (c.f. point ii)) dans lesquelles nous avons remplacé la matrice $\tilde{A}_{N-\frac{1}{2}}^{k-1}$ par la matrice $\tilde{A}_{N-\frac{1}{2}}^{k-1}$.

Nous obtenons ainsi la quantité $(\omega_{N-\frac{1}{2}}^{n+1 \ k})$, et nous posons

$$\omega_{N-\frac{1}{2}}^{n+1} = (\omega_{N-\frac{1}{2}}^{n+1 \ k}) \quad (3.78)$$

dès que

$$\frac{\| (\omega_{N-\frac{1}{2}}^{n+1 \ k}) - (\omega_{N-\frac{1}{2}}^{n+1 \ k-1}) \|}{\| (\omega_{N-\frac{1}{2}}^{n+1 \ k}) \|} < \delta, \quad (3.79)$$

où $\|\omega\|$ désigne la norme euclidienne de ω et où δ est un nombre positif choisi empiriquement.

b) Pour réduire la taille des mailles au voisinage du bord, nous modifions la grille en posant:

$$m_1 = 0, \quad (3.80)$$

$$\Delta m_{j+\frac{1}{2}} = 2jh^2, \quad 1 \leq j \leq J, \quad (3.81)$$

$$\Delta m_{j+\frac{1}{2}} = 2(2J-j)h^2, \quad J < j \leq N-1, \quad (3.82)$$

où l'indice $J < N-1$ est choisi empiriquement; les valeurs de m_j et de

$m_{j+\frac{1}{2}}$ sont alors déterminées par les relations (2.18) et (2.19) .

Remarquons que ce maillage est symétrique par rapport au point $m_{J+\frac{1}{2}}$ et qu'il est identique au maillage (2.78), (2.79) dans l'intervalle $[0, m_{J+1}]$.

La figure 3.5 montre le résultat analogue à celui de la figure 3.4 obtenu avec le maillage (3.80) à (3.82) pour $h = 4.96 \cdot 10^{-6}$ et $J = 50$ ($N = 70$), dans le cas de la condition de bord (3.1) traitée avec la méthode itérative présentée ci-dessus pour $\delta = 10^{-4}$. La figure 3.6 montre , au cours du temps, le nombre d'itérations requis pour vérifier la condition (3.79) .

Nous remarquons que l'interaction de l'onde de pression venue du centre avec la frontière est traitée de façon satisfaisante.

$$6.5 \cdot 10^{14} \frac{N}{m^2}$$

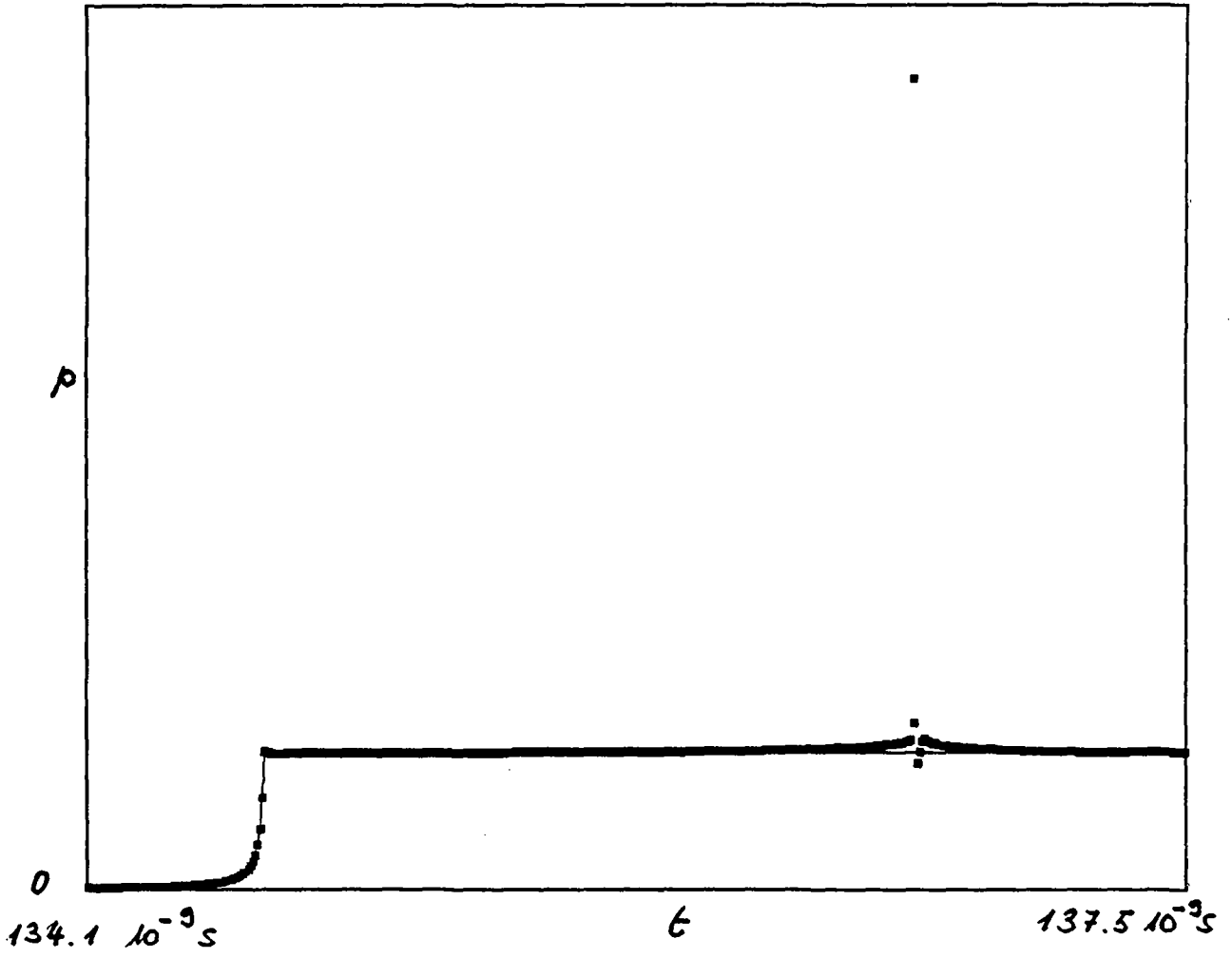


figure 3.5

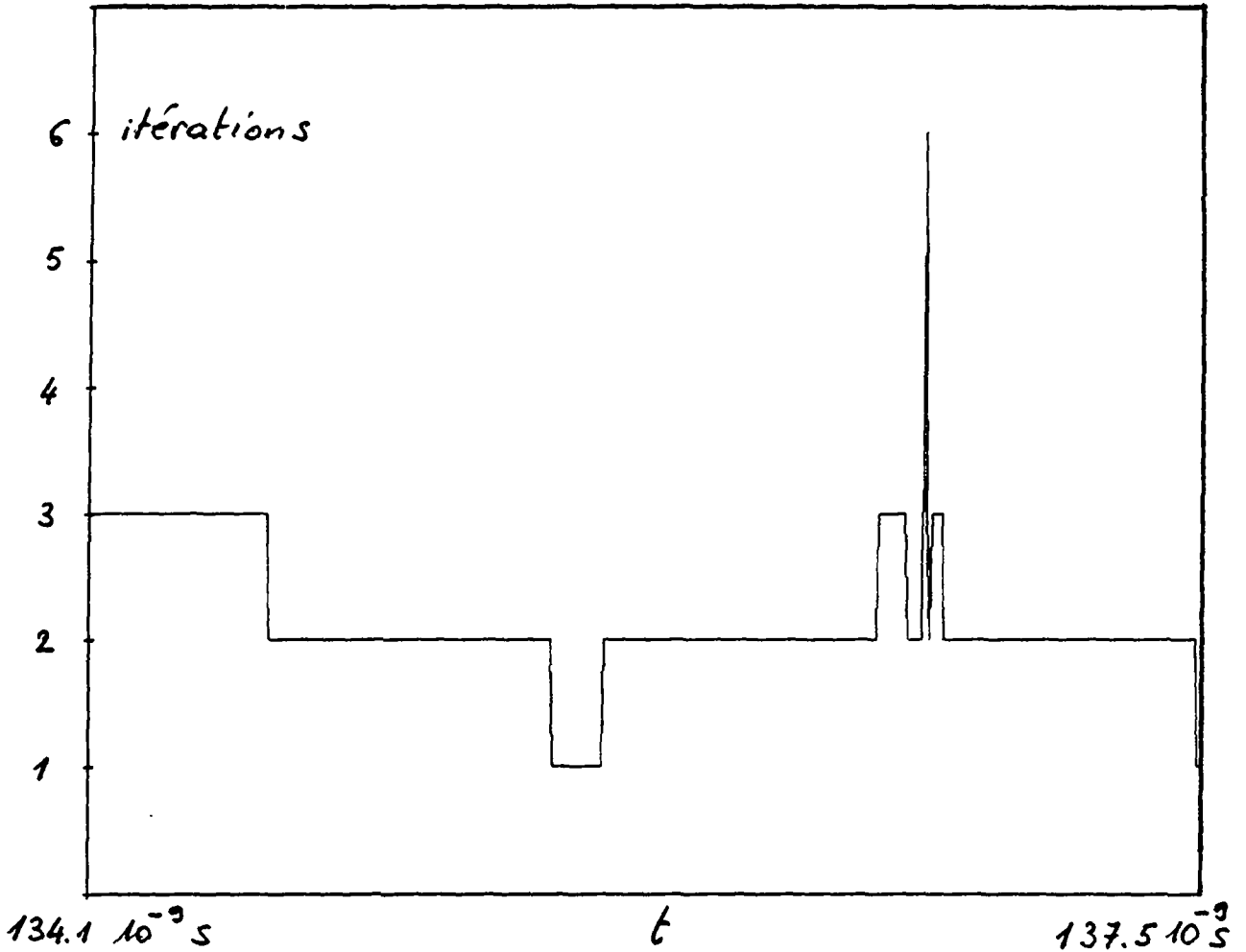


figure 3.6

Remarque 3.1.2.

Une autre variante de la méthode présentée dans ce paragraphe peut être obtenue en considérant R comme constant dans le système (3.30) à (3.36), par exemple en posant $R = \tilde{R}_{N-\frac{1}{2}}$, et en utilisant le schéma de Godunov pour les systèmes de lois de conservation non linéaires (c.f. [9], [10]) dans la maille $[m_{N-1}, m_N]$.

Dans ce cas également, la donnée de la pression \bar{p} le long de la droite $m = m_N$ suffit à déterminer la solution.

Les développements algébriques nécessaires à la mise en oeuvre de cette variante sont compliqués et nous avons choisi de ne pas les présenter dans ce travail.

3.2 Conditions aux limites au centre de la cible.

Dans ce paragraphe, nous complétons le schéma (2.104) à (2.108) par un procédé pour le calcul de la solution au centre d'une cible sphérique, en nous inspirant de la méthode proposée par Chorin dans [11] et appliquée avec succès par Sod, dans [12], au cas d'un choc cylindrique en coordonnées eulériennes.

Considérons, pour $N \in \mathbb{N}$ fixé, une subdivision de l'intervalle $[0, \bar{m}]$ satisfaisant les relations (2.17) à (2.20).

Soit n un entier positif fixé, et supposons les quantités $\Delta t^{n+\frac{1}{2}}$ et $w_{j+\frac{1}{2}}^n$, pour $j \geq 1$, connues.

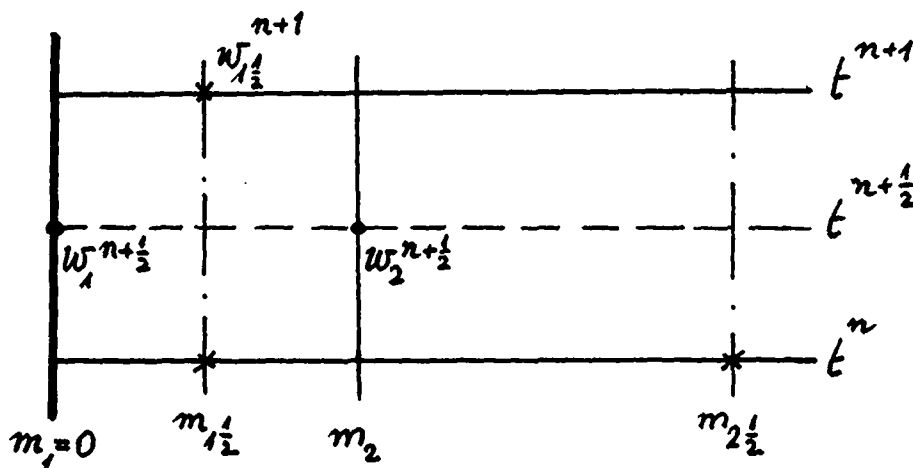


figure 3.7

Tout d'abord, nous calculons à l'aide de l'équation (2.104) les quantités $w_j^{n+\frac{1}{2}} \quad \forall j \geq 2$.

Nous procédons ensuite de façon à obtenir, entre les instants t^n et t^{n+1} , une réflexion des ondes sur la surface sphérique $m = m_{1\frac{1}{2}}$. Pour ce faire, nous supposons que, à l'instant $t = t^{n+\frac{1}{2}}$, le mouvement du fluide est symétrique par rapport à $m = m_{1\frac{1}{2}}$, c'est à dire que (c.f. figure 3.7)

$$V_1^{n+\frac{1}{2}} = V_2^{n+\frac{1}{2}},$$

$$u_1^{n+\frac{1}{2}} = - u_2^{n+\frac{1}{2}}, \quad (3.83)$$

$$E_1^{n+\frac{1}{2}} = E_2^{n+\frac{1}{2}}.$$

Au § 1.5, nous avons supposé le centre de la cible immobile (c.f. équation 1.25), et nous posons $\forall n$:

$$R_1^{n+\frac{1}{2}} = 0. \quad (3.84)$$

Les équations (2.105) à (2.107) nous permettent alors de calculer les quantités $V_{j+\frac{1}{2}}^{n+1}$, $u_{j+\frac{1}{2}}^{n+1}$ et $E_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} \forall j \geq 1$.

Il nous reste à calculer le rayon $R_{j+\frac{1}{2}}^{n+1}$, $\forall j \geq 1$.

A cet effet, nous supposons que le volume spécifique du fluide contenu dans la petite boule de masse $m_{1\frac{1}{2}}$ située au centre de la cible est uniformément égal à $V_{1\frac{1}{2}}^{n+1}$; cette approximation donne, pour le rayon de cette petite boule, la relation

$$\frac{(R_{1\frac{1}{2}}^{n+1})^3}{3} = m_{1\frac{1}{2}} V_{1\frac{1}{2}}^{n+1}. \quad (3.85)$$

Les équations (3.85) et (2.108) permettent alors de calculer les valeurs de $R_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} \forall j \geq 1$.

A titre d'illustration, considérons l'exemple de la cible sphérique présenté à la fin du paragraphe précédent.

Nous avons traité ce problème avec le schéma (2.104) à (2.108) pour le maillage (3.80) à (3.82) où $h = 4.96 \cdot 10^{-6}$ et $J = 50$

($N = 70$), et pour une expression du paramètre d'hybridage θ qui sera discutée au chapitre 5.

Pour la condition de stabilité nous avons choisi l'expression (2.80d) avec $j_0 = 20$ (seuls les points $m_{j+\frac{1}{2}} \geq m_{j_0+\frac{1}{2}} \approx 0.1 \bar{m}$ sont pris en compte: c.f. §2.4).

Au centre, nous avons appliqué la méthode présentée ci-dessus.

Au bord, nous avons utilisé la méthode itérative présentée au § 3.1 avec $\delta = 10^{-4}$.

La figure 3.8 montre, en fonction de la variable m , le profil de la pression obtenue avec notre schéma, à différents instants. L'onde de pression générée par la condition de bord (3.1), (3.76) s'approche du centre de la cible ($t = 136 \cdot 10^{-9}$ s); elle est réfléchiée en ce point ($t = 136.2 \cdot 10^{-9}$ s à $136.4 \cdot 10^{-9}$ s), et repart vers le bord ($t = 136.5 \cdot 10^{-9}$ s).

La figure 3.9 montre, en fonction du temps, les pressions obtenues en $m = m_{\frac{1}{2}}$ (en pointillé) et en $m = m_{N-\frac{1}{2}}$ (en trait fin continu). Ces résultats seront interprétés au chapitre 5.

$$4 \cdot 10^{15} \frac{N}{m^2}$$

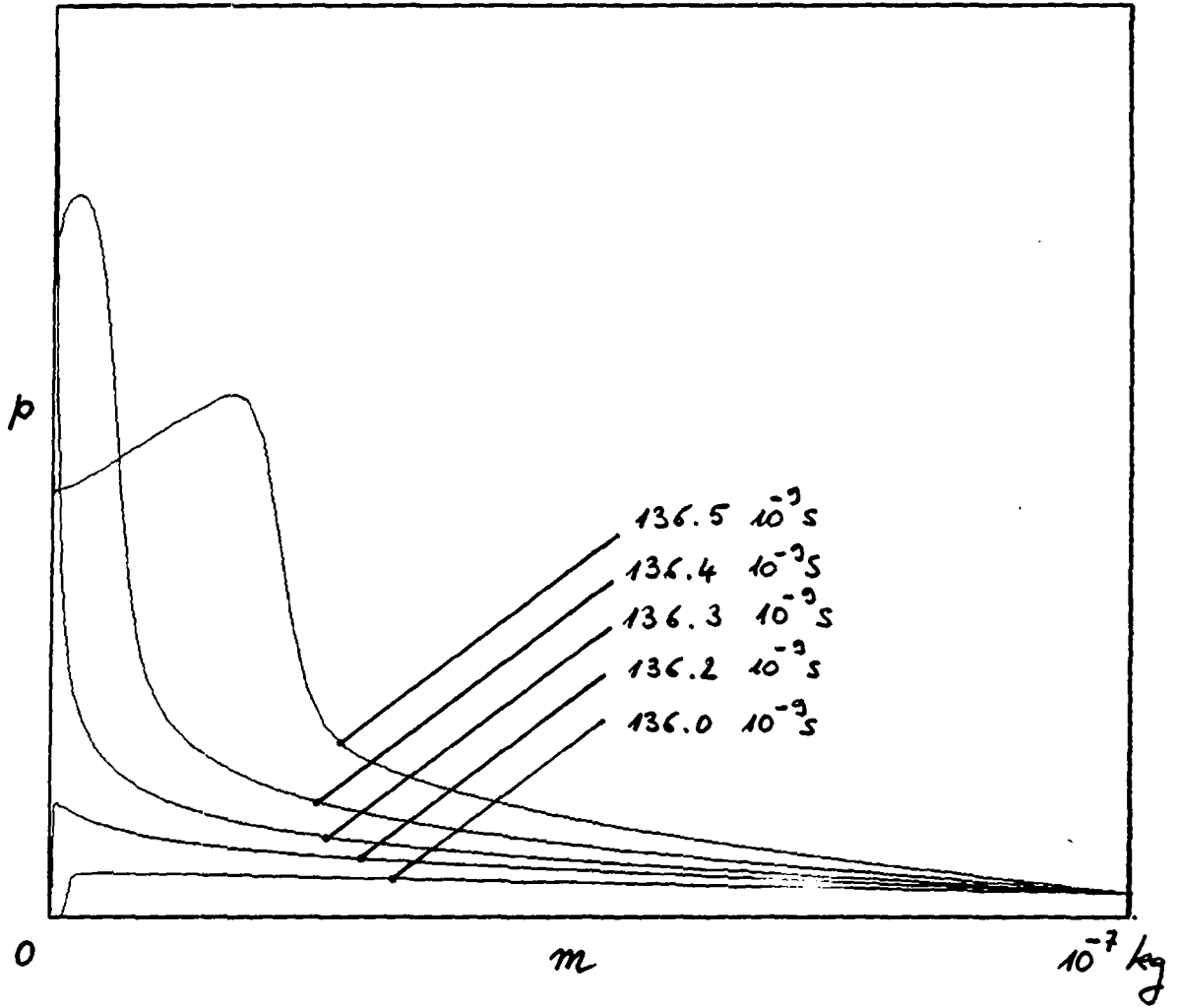


figure 3.8

$$6 \cdot 10^{15} \frac{N}{m^2}$$

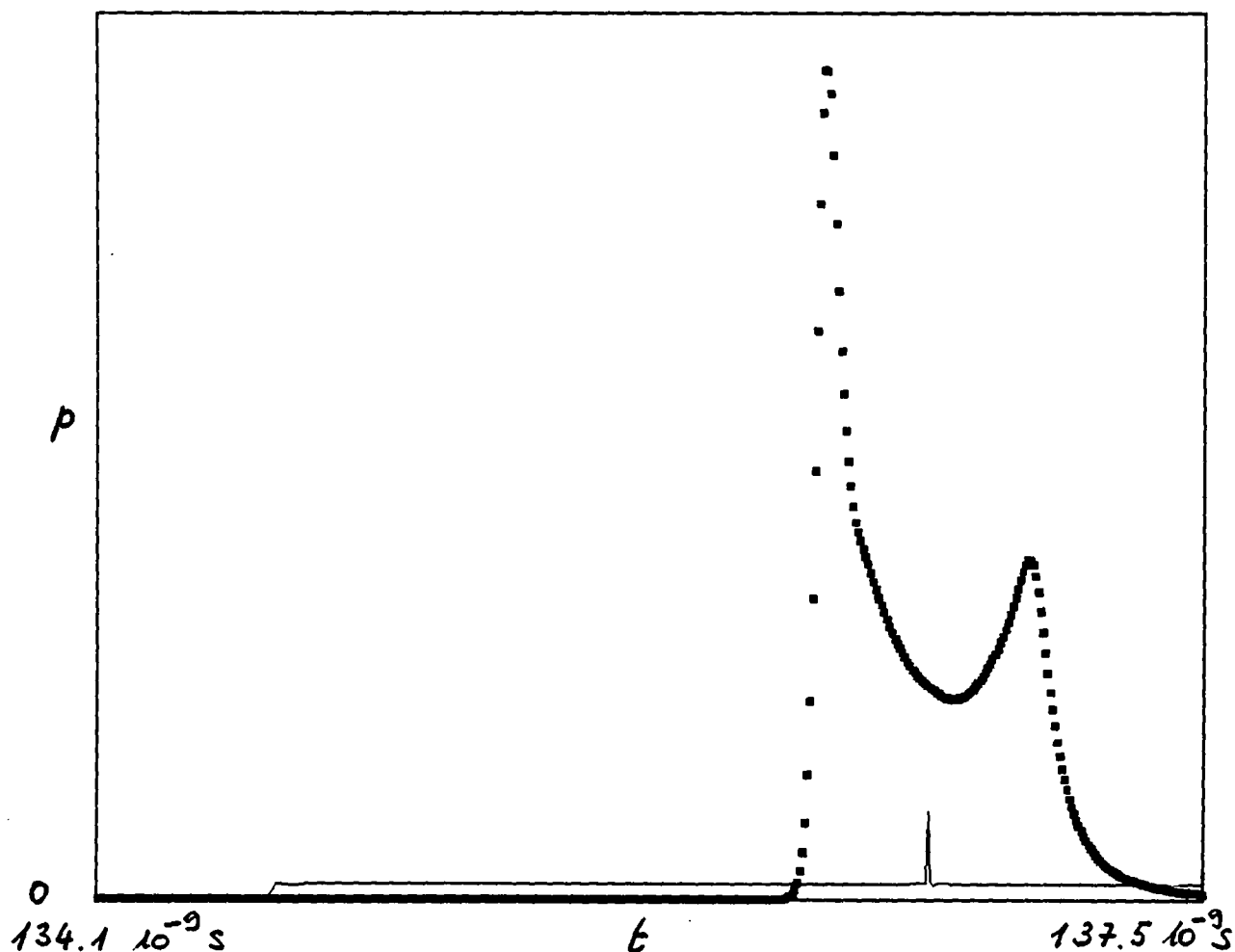


figure 3.9

Les résultats présentés ci-dessus ont nécessité 5630 pas de temps.

Les mêmes calculs effectués avec $j_0 = 6$ ($m_{j_0 + \frac{1}{2}} \approx 0.01 \bar{m}$), les autres paramètres étant inchangés, ont nécessité 18901 pas de temps (c.f. § 2.4).

A titre de comparaison, la figure 3.10 montre, en fonction du temps, les pressions en $m = m_{1\frac{1}{2}}$ obtenues avec $j_0 = 20$ (en pointillé) et $j_0 = 6$ (en trait fin continu). On remarque que la solution obtenue avec un grand nombre de pas de temps est plus diffusée.

La figure 3.11 montre, en fonction de la variable m , les profils de la pression à l'instant $t = 136.5 \cdot 10^{-9} s$ (l'onde a été réfléchi) obtenus avec $j_0 = 20$ (en pointillé noir) et avec $j_0 = 6$ (en pointillé blanc). Remarquons qu'il faut environ $136 \cdot 10^{-9} s$ à l'onde de pression générée par la condition de bord (3.1), (3.76) pour atteindre le centre de la

cible, alors que, après sa réflexion en ce point, il lui suffit de $0.4 \cdot 10^{-9}$ s pour rejoindre le bord (c.f. chapitre 5). Cette grande différence de vitesse de propagation explique l'important déphasage qui apparaît entre les deux solutions de la figure 3.11 .

$$6 \cdot 10^{15} \frac{N}{m^2}$$

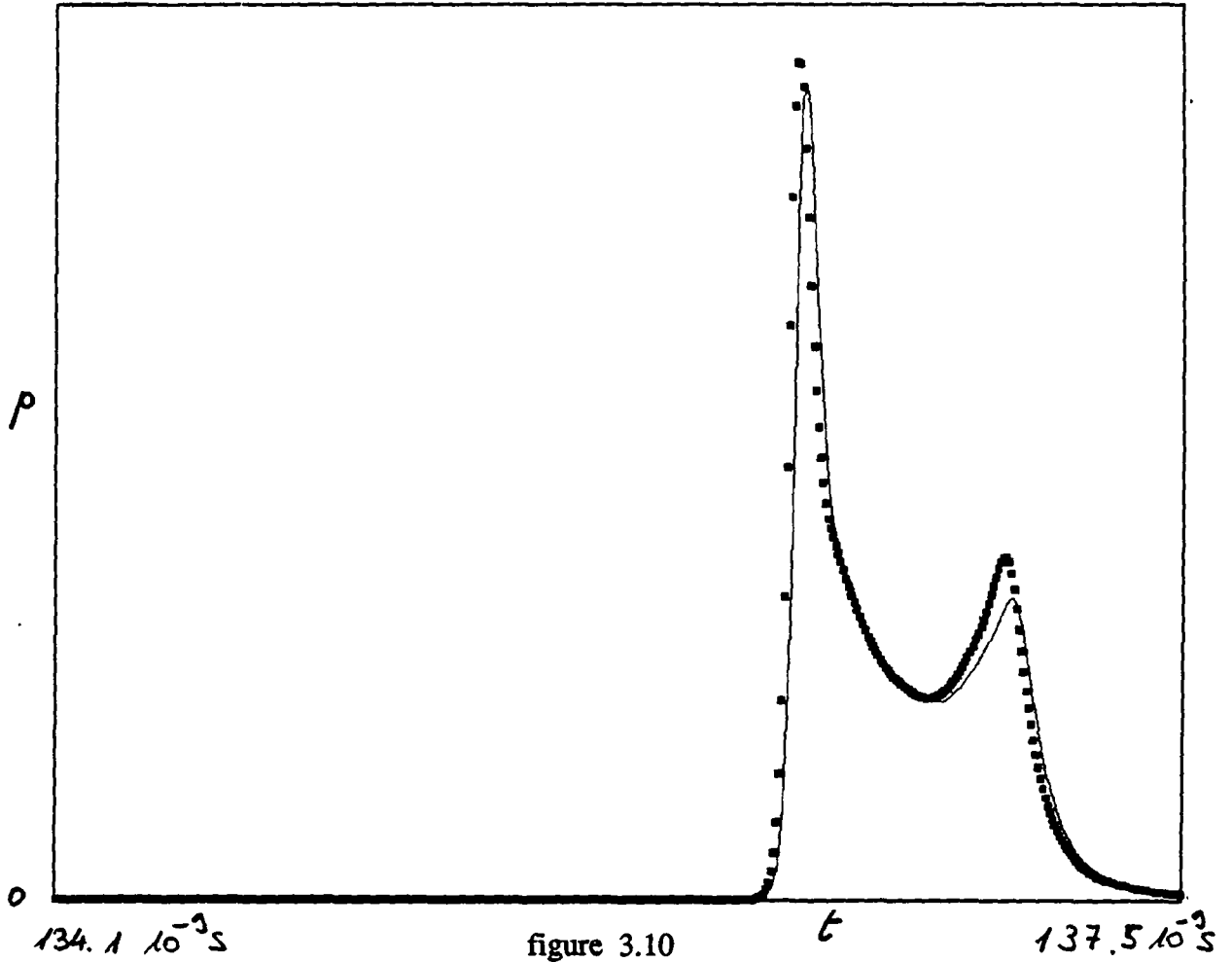


figure 3.10

$4 \cdot 10^{15} \frac{N}{m^2}$

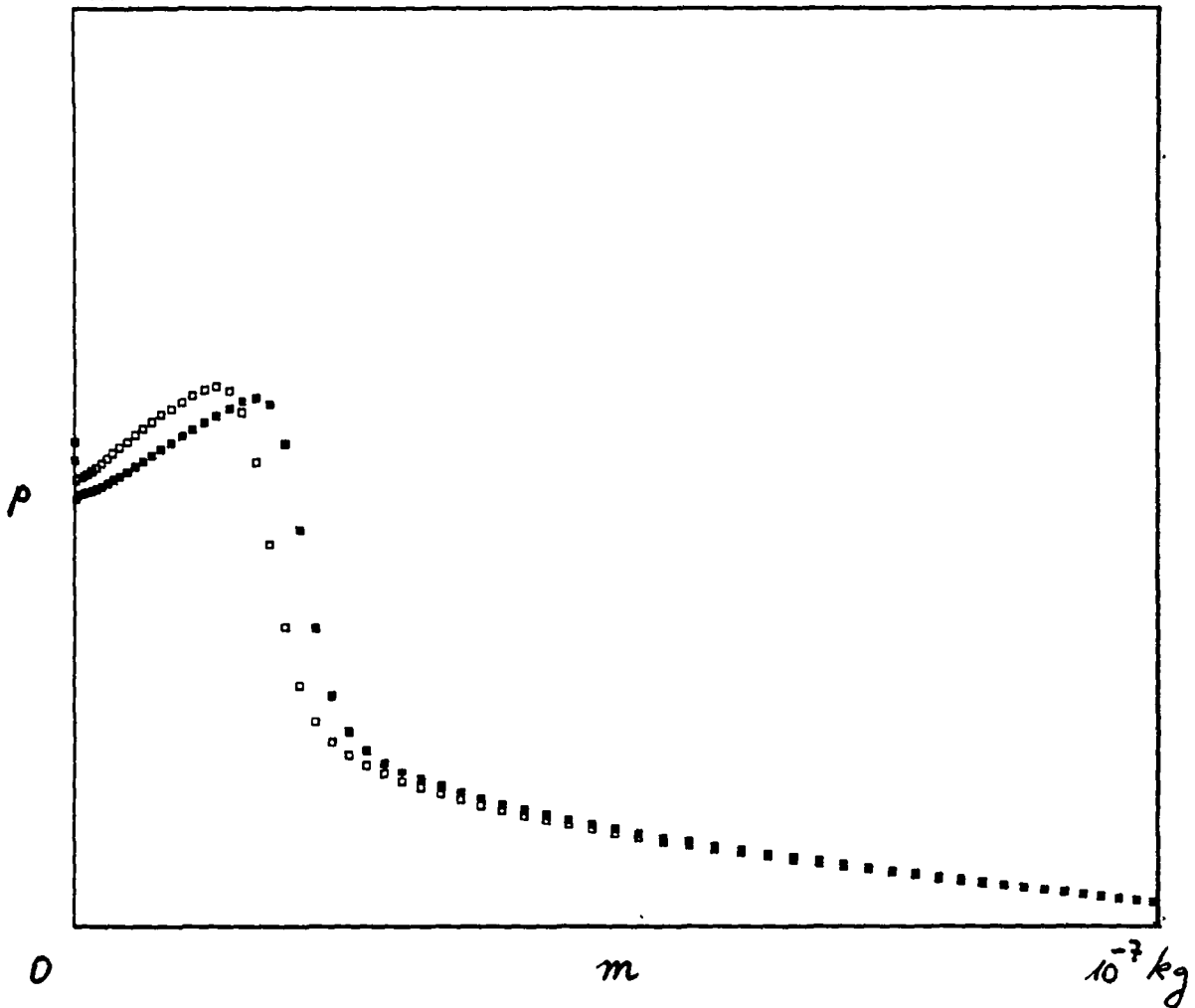


figure 3.11

Remarque 3.2.1.

Une variante simplifiée de cette méthode peut être obtenue en procédant comme suit:

pour un indice L choisi empiriquement et fixé, nous immobilisons la surface $m = m_{L+\frac{1}{2}}$ en posant $R_{L+\frac{1}{2}}^k = R_{L+\frac{1}{2}}^0 \quad \forall k$, et nous réfléchissons les ondes sur cette surface comme nous l'avons fait précédemment sur la surface $m = m_{\frac{1}{2}}$. Les points du maillage $m_{j+\frac{1}{2}}$ avec $j < L$ sont ignorés.

Les résultats présentés au § 2.5 dans le cas de la symétrie cylindrique ont été obtenus avec cette variante, pour $L = 2$.

Toutefois, dans le contexte de la fusion par confinement inertiel qui motive notre travail, la compression du centre de la cible est

particulièrement importante et nous préférons la méthode plus précise présentée au début de ce paragraphe.

4. LE CAS DU GAZ CONDUCTEUR DE LA CHALEUR.

Au chapitre 1, nous avons motivé notre travail par l'étude d'un gaz ionisé et conducteur de la chaleur, satisfaisant les équations (c.f. (1.19) à (1.23))

$$\partial_t V - \partial_m(R^2 u) = 0 , \quad (4.1)$$

$$\partial_t u + \partial_m(R^2 p) = p \partial_m(R^2) , \quad (4.2)$$

$$2C_V \partial_t T + p \partial_t V = \partial_m(R^2 K \partial_R T) + S , \quad (4.3)$$

$$\partial_t R = u , \quad (4.4)$$

$$pV = 2C_g T , \quad (4.5)$$

où $\partial_m(R^2 K \partial_R T)$ est le terme de diffusion thermique.

Ci-dessus, le coefficient de conductivité thermique K est considéré comme une fonction des quantités V , T et $\partial_R T$, comme ce sera le cas dans les exemples numériques présentés à la fin de ce chapitre et au chapitre suivant.

Des conditions aux limites viennent compléter ces équations (c.f. § 1.5) .

Aux chapitres 2 et 3 nous avons traité le système (4.1) à (4.5) sans le terme de diffusion thermique $\partial_m(R^2 K \partial_R T)$.

Dans [13] et [14], des équations de la chaleur du même type que (4.3) sont étudiées dans le cas eulérien, et des résultats numériques très satisfaisants sont obtenus avec une méthode basée sur la méthode d'Euler implicite.

Dans ce chapitre, nous nous basons sur ce qui précède pour traiter le système avec diffusion thermique en deux étapes (méthode du "splitting") :

à chaque pas de temps, nous traitons d'abord le système sans diffusion thermique à l'aide des méthodes présentées aux chapitres 2 et 3, puis nous effectuons, sur la solution ainsi obtenue, un pas de diffusion avec la méthode présentée dans ce chapitre.

Séparons tout d'abord la partie hydrodynamique et la partie diffusive.

Au § 2.1, nous avons introduit l'énergie totale

$$E = 2C_V T + \frac{1}{2}u^2 . \quad (4.6)$$

A l'aide de (4.1) et (4.2) nous obtenons la relation

$$2C_V \partial_t T + p \partial_t V = \partial_t E + \partial_m (R^2 p u) . \quad (4.7)$$

Le système (4.1) à (4.5) peut donc s'écrire sous la forme

$$\partial_t V - \partial_m (R^2 u) = 0 , \quad (4.8)$$

$$\partial_t u + \partial_m (R^2 p) = p \partial_m (R^2) , \quad (4.9)$$

$$\partial_t E + \partial_m (R^2 p u) = \partial_m (R^2 K \partial_R T) , \quad (4.10)$$

$$\partial_t R = u , \quad (4.11)$$

$$p = \frac{C_g}{C_V} \frac{1}{V} (E - \frac{1}{2}u^2) , \quad (4.12)$$

$$E = 2C_V T + \frac{1}{2}u^2 \quad (4.13)$$

que nous séparons en les deux systèmes

$$\partial_t V - \partial_m (R^2 u) = 0 , \quad (4.14)$$

$$\partial_t u + \partial_m (R^2 p) = p \partial_m (R^2) , \quad (4.15)$$

$$\partial_t E + \partial_m (R^2 p u) = 0 , \quad (4.16)$$

$$\partial_t R = u , \quad (4.17)$$

$$p = \frac{C_g}{C_V} \frac{1}{V} (E - \frac{1}{2}u^2) , \quad (4.18)$$

et

$$\partial_t V = 0 , \quad (4.19)$$

$$\partial_t u = 0 , \quad (4.20)$$

$$\partial_t E = \partial_m (R^2 K \partial_R T) , \quad (4.21)$$

$$\partial_t R = 0 , \quad (4.22)$$

$$E = 2C_V T + \frac{1}{2} u^2 . \quad (4.23)$$

Le système (4.14) à (4.18) , complété par les conditions aux limites (1.24) et (1.27) , est la "partie hydrodynamique" que nous avons traitée aux chapitres 2 et 3.

Nous désignerons par "partie diffusive" le système (4.19) à (4.23) complété par les conditions aux limites (1.26) et (1.28) :

$$\partial_m T(0,t) = 0 \quad \forall t > 0 , \quad (4.24)$$

$$\partial_m T(\bar{m},t) = 0 \quad \forall t > 0 . \quad (4.25)$$

Nous sommes maintenant à même de traiter numériquement le système (4.1) à (4.5) par la méthode du "splitting".

Considérons, pour $N \in \mathbb{N}$ fixé, une subdivision de l'intervalle $[0, \bar{m}]$ et un maillage temporel satisfaisant les relations (2.17) à (2.20) et (2.23) à (2.25) .

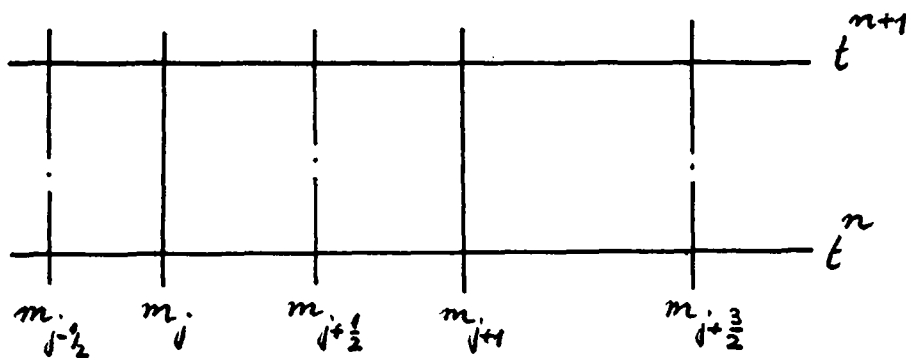


figure 4.1

Soit $n > 0$ fixé et supposons connues, au $n+1^{\text{ème}}$ pas de temps, les quantités $\Delta t^{n+\frac{1}{2}}$ et $w_{j+\frac{1}{2}}^n$, pour $j = 1, \dots, N-1$, où w est défini par la relation (2.10).

Nous traitons tout d'abord la partie hydrodynamique pour la condition initiale

$$w(m, t^n) = w_{j+\frac{1}{2}}^n, \quad m_j \leq m < m_{j+1}, \quad j = 1, \dots, N-1 \quad (4.26)$$

à l'aide des méthodes présentées aux chapitres 2 et 3, et nous désignons

par $w_{j+\frac{1}{2}}^{\tilde{n}}$ l'approximation ainsi obtenue au point $(m_{j+\frac{1}{2}}, t^{n+1})$.

Nous approximons ensuite la solution au temps t^{n+1} de la partie diffusive pour la condition initiale

$$w(m, t^n) = w_{j+\frac{1}{2}}^{\tilde{n}}, \quad m_j \leq m < m_{j+1}, \quad j = 1, \dots, N-1 \quad (4.27)$$

selon la méthode présentée ci-dessous.

Pour chaque j , les équations (4.19), (4.20) et (4.22) donnent, pour les quantités V , u et R , les relations

$$V_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} = V_{j+\frac{1}{2}}^{\tilde{n}}, \quad (4.28)$$

$$u_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} = u_{j+\frac{1}{2}}^{\tilde{n}} \quad (4.29)$$

et

$$R_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} = R_{j+\frac{1}{2}}^{\tilde{n}}, \quad (4.30)$$

et il nous reste à déterminer les quantités $E_{j+\frac{1}{2}}^{n+1}$.

A cet effet, nous approximations le terme $R^2 K \partial_R T$ au point (m_{j^*}, t^{n+1}) , où $m_{j^*} = \frac{1}{2} (m_{j+\frac{1}{2}} + m_{j-\frac{1}{2}})$, par la quantité

$$(R^2 K \partial_R T)_{j^*}^{n+1} = (R^2)_{j^*}^{n+1} K(V_{j^*}^{n+1}, T_{j^*}^{\tilde{n}}, \partial_R T_{j^*}^{\tilde{n}}) \partial_R T_{j^*}^{n+1}, \quad (4.31a)$$

où $(R^2)_{j^*}^{n+1} = \frac{1}{2} \left[(R_{j+\frac{1}{2}}^{n+1})^2 + (R_{j-\frac{1}{2}}^{n+1})^2 \right], \quad (4.31b)$

$$V_{j^*}^{n+1} = \frac{1}{2} \left(V_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} + V_{j-\frac{1}{2}}^{n+1} \right), \quad (4.31c)$$

$$T_{j^*}^{\tilde{n}} = \frac{1}{2} \left(T_{j+\frac{1}{2}}^{\tilde{n}} + T_{j-\frac{1}{2}}^{\tilde{n}} \right), \quad (4.31d)$$

$$\partial_R T_{j^*}^{\tilde{n}} = \frac{T_{j+\frac{1}{2}}^{\tilde{n}} - T_{j-\frac{1}{2}}^{\tilde{n}}}{R_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} - R_{j-\frac{1}{2}}^{n+1}} \quad (4.31e)$$

et

$$\partial_R T_{j^*}^{n+1} = \frac{T_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} - T_{j-\frac{1}{2}}^{n+1}}{R_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} - R_{j-\frac{1}{2}}^{n+1}}. \quad (4.31f)$$

Nous approximations alors le second membre de l'équation (4.21) au point $(m_{j+\frac{1}{2}}, t^{n+1})$ par l'expression

$$\partial_m (R^2 K \partial_R T)_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} = 2 \frac{(R^2 K \partial_R T)_{(j+1)^*}^{n+1} - (R^2 K \partial_R T)_{j^*}^{n+1}}{\Delta m_{j+1} + \Delta m_j}. \quad (4.32)$$

On peut démontrer que cette approximation est précise d'ordre 1 .

En utilisant les relations (4.20) et (4.23), nous éliminons la variable E de l'équation (4.21) en la réécrivant sous la forme

$$\partial_t T = \frac{1}{2C_V} \partial_m (R^2 K \partial_R T), \quad (4.33)$$

que nous discrétisons au moyen de la formule d'Euler implicite :

$$\frac{T_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} - T_{j+\frac{1}{2}}^{\tilde{n}}}{\Delta t^{n+\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2C_V} \partial_m (R^2 K \partial_R T)_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} . \quad (4.34)$$

Nous reviendrons à la variable E à l'aide de la relation (4.23) après avoir résolu l'équation (4.34) .

Remarquons que l'équation (4.34) n'a un sens que pour $j = 2, \dots, N-2$.

Remarque 4.1.: L'expression (4.34) est en fait une formule d'Euler implicite linéarisée, puisque la dépendance du coefficient de conductivité K en les quantités T et $\partial_R T$ est considérée au temps t^n lors du calcul du second membre de cette équation (c.f. les relations (4.31)) .

On peut montrer que la formule d'Euler implicite usuelle et la formule linéarisée présentée ci-dessus sont toutes deux précises d'ordre 1 et qu'elles sont inconditionnellement stables.

Nous préférons la formule linéarisée qui présente l'avantage de ne pas nécessiter l'emploi d'une méthode itérative, comme c'est le cas de la méthode d'Euler implicite non linéarisée.

Soit, pour $j = 2, \dots, N-1$, les coefficients

$$C_j^{n+1} = \frac{\Delta t^{n+\frac{1}{2}} (R^2)_{j*}^{n+1} K(V_{j*}^{n+1}, T_{j*}^{\tilde{n}}, \partial_R T_{j*}^{\tilde{n}})}{C_V \frac{R_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} - R_{j-\frac{1}{2}}^{n+1}}{2}} . \quad (4.35)$$

On vérifie aisément que, pour $j = 2, \dots, N-2$, l'expression (4.34) est équivalente à la relation

$$-\frac{C_j^{n+1}}{\Delta m_{j+1} + \Delta m_j} T_{j-\frac{1}{2}}^{n+1} + \left(1 + \frac{C_j^{n+1} + C_{j+1}^{n+1}}{\Delta m_{j+1} + \Delta m_j}\right) T_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} - \frac{C_{j+1}^{n+1}}{\Delta m_{j+1} + \Delta m_j} T_{j+\frac{3}{2}}^{n+1} = T_{j+\frac{1}{2}}^{\tilde{n}} \quad (4.36)$$

Il y a lieu d'établir des relations correspondantes pour $j = 1$ et $N-1$ au moyen des conditions aux limites.

A cet effet, nous introduisons, au centre de la cible, le point fictif $m_{\frac{1}{2}} = -m_{\frac{1}{2}}$ (c.f. figure 4.2), et nous discrétisons l'équation (4.24) en posant

$$T_{\frac{1}{2}}^{n+1} = T_{1\frac{1}{2}}^{n+1} \quad (4.37)$$

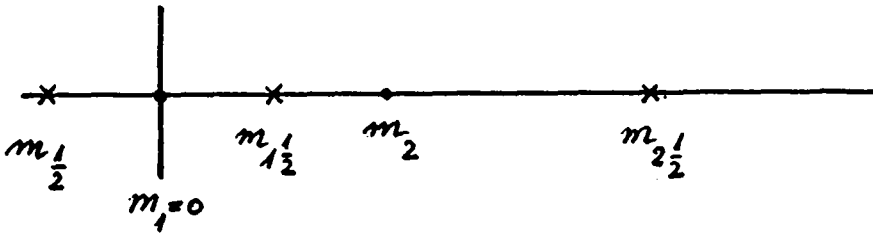


figure 4.2

En remarquant que $\Delta m_1 = \Delta m_{1\frac{1}{2}}$ nous écrivons formellement la relation (4.36) pour $j = 1$; en introduisant l'équation (4.37) dans l'expression ainsi obtenue nous trouvons

$$\left(1 + \frac{C_2^{n+1}}{\Delta m_2 + \Delta m_{1\frac{1}{2}}}\right) T_{1\frac{1}{2}}^{n+1} - \frac{C_2^{n+1}}{\Delta m_2 + \Delta m_{1\frac{1}{2}}} T_{2\frac{1}{2}}^{n+1} = T_{1\frac{1}{2}}^{\tilde{n}} \quad (4.38)$$

En procédant de manière analogue avec la condition de bord (4.25) nous obtenons pour $j = N-1$:

$$- \frac{C_{N-1}^{n+1}}{\Delta m_{N-\frac{1}{2}} + \Delta m_{N-1}} T_{N-\frac{3}{2}}^{n+1} + \left(1 + \frac{C_{N-1}^{n+1}}{\Delta m_{N-\frac{1}{2}} + \Delta m_{N-1}}\right) T_{N-\frac{1}{2}}^{n+1} = T_{N-\frac{1}{2}}^{\tilde{n}} \quad (4.39)$$

Afin de regrouper les équations (4.36) , (4.38) et (4.39) sous forme matricielle, nous introduisons la matrice A^{n+1} d'ordre $N-1$ définie par

$$A_{11}^{n+1} = 1 + \frac{C_2^{n+1}}{\Delta m_2 + \Delta m_{1\frac{1}{2}}} \quad (4.40a)$$

$$A_{12}^{n+1} = - \frac{C_2^{n+1}}{\Delta m_2 + \Delta m_{1\frac{1}{2}}} \quad (4.40b)$$

$$A_{jj-1}^{n+1} = - \frac{C_j^{n+1}}{\Delta m_{j+1} + \Delta m_j} \quad \text{pour } j = 2, \dots, N-2, \quad (4.40c)$$

$$A_{jj}^{n+1} = 1 + \frac{C_j^{n+1} + C_{j+1}^{n+1}}{\Delta m_{j+1} + \Delta m_j} \quad \text{pour } j = 2, \dots, N-2, \quad (4.40d)$$

$$A_{jj+1}^{n+1} = - \frac{C_{j+1}^{n+1}}{\Delta m_{j+1} + \Delta m_j} \quad \text{pour } j = 2, \dots, N-2, \quad (4.40e)$$

$$A_{N-1N-2}^{n+1} = - \frac{C_{N-1}^{n+1}}{\Delta m_{N-\frac{1}{2}} + \Delta m_{N-1}} \quad (4.40f)$$

$$A_{N-1N-1}^{n+1} = 1 + \frac{C_{N-1}^{n+1}}{\Delta m_{N-\frac{1}{2}} + \Delta m_{N-1}} \quad (4.40g)$$

ainsi que les vecteurs

$$T^{\tilde{n}} = (T_{1\frac{1}{2}}^{\tilde{n}}, \dots, T_{N-\frac{1}{2}}^{\tilde{n}})^T \quad (4.41)$$

et

$$T^{n+1} = (T_{1\frac{1}{2}}^{n+1}, \dots, T_{N-\frac{1}{2}}^{n+1})^T, \quad (4.42)$$

où l'indice T désigne la transposition.

Avec ces notations, les équations (4.33), (4.24) et (4.25) sont discrétisées par l'expression

$$A^{n+1} T^{n+1} = T^{\tilde{n}}. \quad (4.43)$$

Les quantités $E_{j+\frac{1}{2}}^{n+1}$ sont déterminées à l'aide de l'équation (4.23) :

$$E_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} = 2C_V T_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} + \frac{1}{2} (u_{j+\frac{1}{2}}^{n+1})^2. \quad (4.44)$$

Finalement, nous approximations la solution au temps t^{n+1} de la partie diffusive pour la condition initiale (4.27) par

$$V_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} = V_{j+\frac{1}{2}}^{\tilde{n}}, \quad (4.47)$$

$$u_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} = u_{j+\frac{1}{2}}^{\tilde{n}}, \quad (4.48)$$

$$R_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} = R_{j+\frac{1}{2}}^{\tilde{n}} \quad \text{pour } j = 1, \dots, N-1, \quad (4.49)$$

$$A^{n+1} T^{n+1} = T^{\tilde{n}} \quad (4.50)$$

et

$$E_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} = 2C_V T_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} + \frac{1}{2} (u_{j+\frac{1}{2}}^{n+1})^2 \quad \text{pour } j = 1, \dots, N-1, \quad (4.51)$$

où la matrice A^{n+1} est définie par les relations (4.35) et (4.40) .

Nous obtenons ainsi une approximation de la solution du système avec diffusion thermique (4.1) à (4.5) pour la condition initiale (4.26) .

A titre d'illustration, nous considérons l'exemple de la cible sphérique présenté à la fin du § 3.1 , en supposant le gaz conducteur de la chaleur.

Pour le coefficient de conductivité thermique K , nous utilisons l'expression (1.12) du § 1.2 ,

$$K = \frac{1}{1 + a \frac{\lambda}{T} |\partial_R T|} 1.83 \cdot 10^{-10} \frac{T^{\frac{5}{2}}}{\ln(\Lambda)}, \quad (4.52)$$

où la constante a est égale à 1 , et où le libre parcours moyen des électrons λ et le logarithme de Coulomb $\ln(\Lambda)$ sont donnés par les expressions (c.f. [15] et [16])

$$\lambda = \frac{5.7 \cdot 10^7 T^2}{2.41 \cdot 10^{26} \frac{1}{V}} \quad (4.53)$$

et

$$\ln(\Lambda) = \ln \left\{ \max \left\{ 10, 7.99 \cdot 10^{-7} (VT^3)^{\frac{1}{2}} \right\} \right\}. \quad (4.54)$$

Nous avons traité ce problème avec la méthode du "splitting" présentée dans ce chapitre.

Pour la partie hydrodynamique, nous avons utilisé le schéma (2.104) à (2.108) pour le maillage (3.80) à (3.82) où

$h = 4.96 \cdot 10^{-6}$ et $J = 50$ ($N = 70$) , et pour une expression du paramètre d'hybridage θ qui sera donnée au chapitre 5.

Pour la condition de stabilité nous avons choisi l'expression (2.80d) avec $j_0 = 20$.

Au bord, nous avons utilisé la méthode itérative présentée au § 3.1 avec $\delta = 10^{-4}$.

Au centre, nous avons appliqué la méthode présentée au § 3.2.

Pour la partie diffusive, nous avons utilisé les équations (4.47) à (4.51) établie dans ce chapitre.

La figure 4.3 montre, en fonction de la variable m , le profil de la température obtenu avec notre schéma, à différents instants.

La figure 4.4 montre le profil de la pression aux mêmes instants.

La figure 3.8 montre les résultats correspondants à ceux de la figure 4.4 dans le cas d'un gaz non conducteur de la chaleur. On remarque, en comparant ces deux figures, que l'effet diffusif de la conduction thermique est surtout sensible après que l'onde de pression générée au bord de la cible se soit réfléchiée en son centre (c.f. § 3.2) ; le profil de l'onde est alors fortement amorti par cet effet. La même remarque peut être faite en comparant les résultats de la figure 4.3 avec les profils de température de la figure 4.5 obtenus dans le cas d'un gaz non conducteur de la chaleur.

La figure 4.6 montre, en fonction du temps, les pressions obtenues en $m = m_{1\frac{1}{2}}$ dans le cas d'un gaz conducteur (en pointillé) et non conducteur (en trait fin continu) . On remarque que la conduction thermique n'a que peu d'effet sur ce résultat.

$2 \cdot 10^8 \text{ } ^\circ\text{K}$

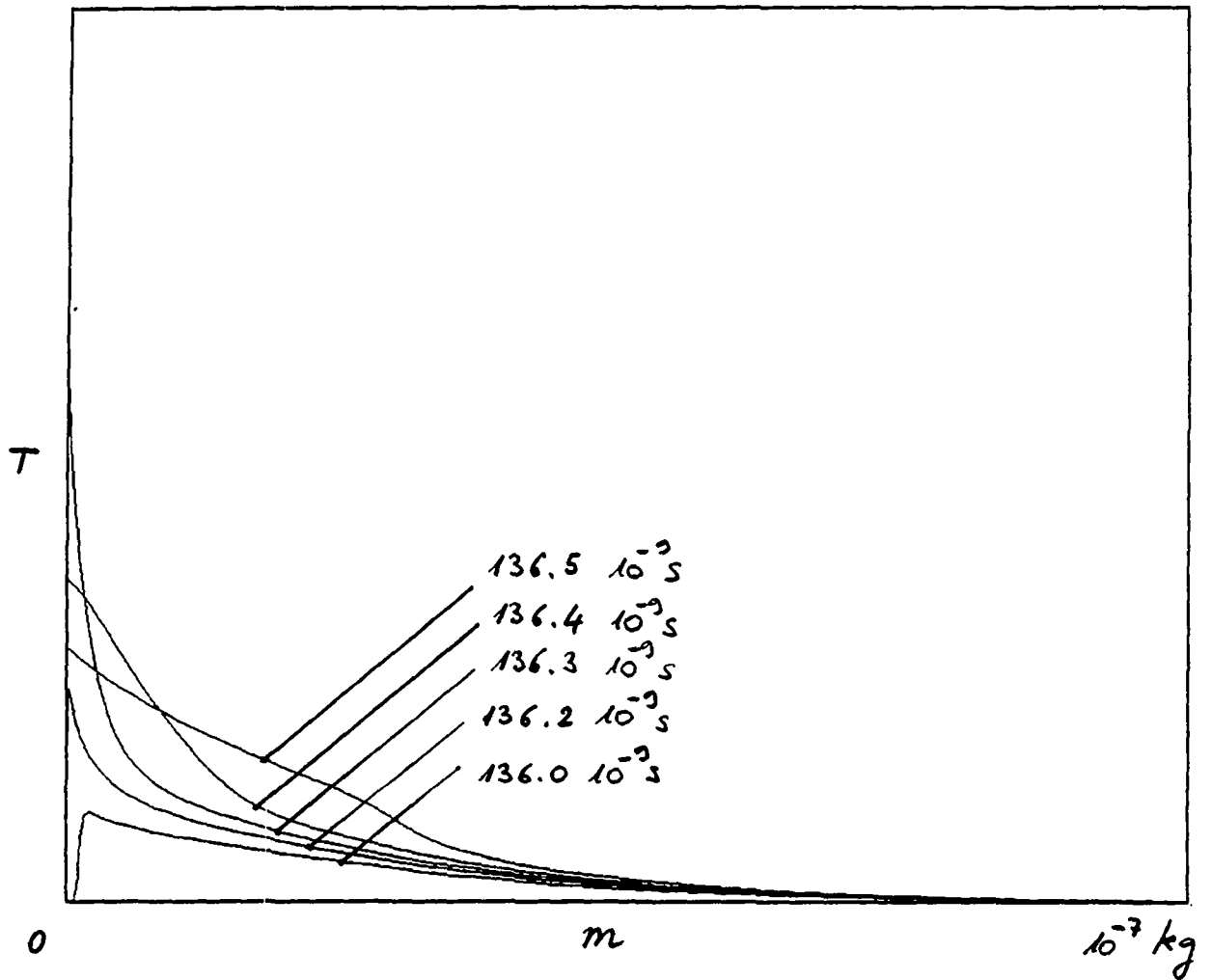


figure 4.3

$$5 \cdot 10^{15} \frac{N}{m^2}$$

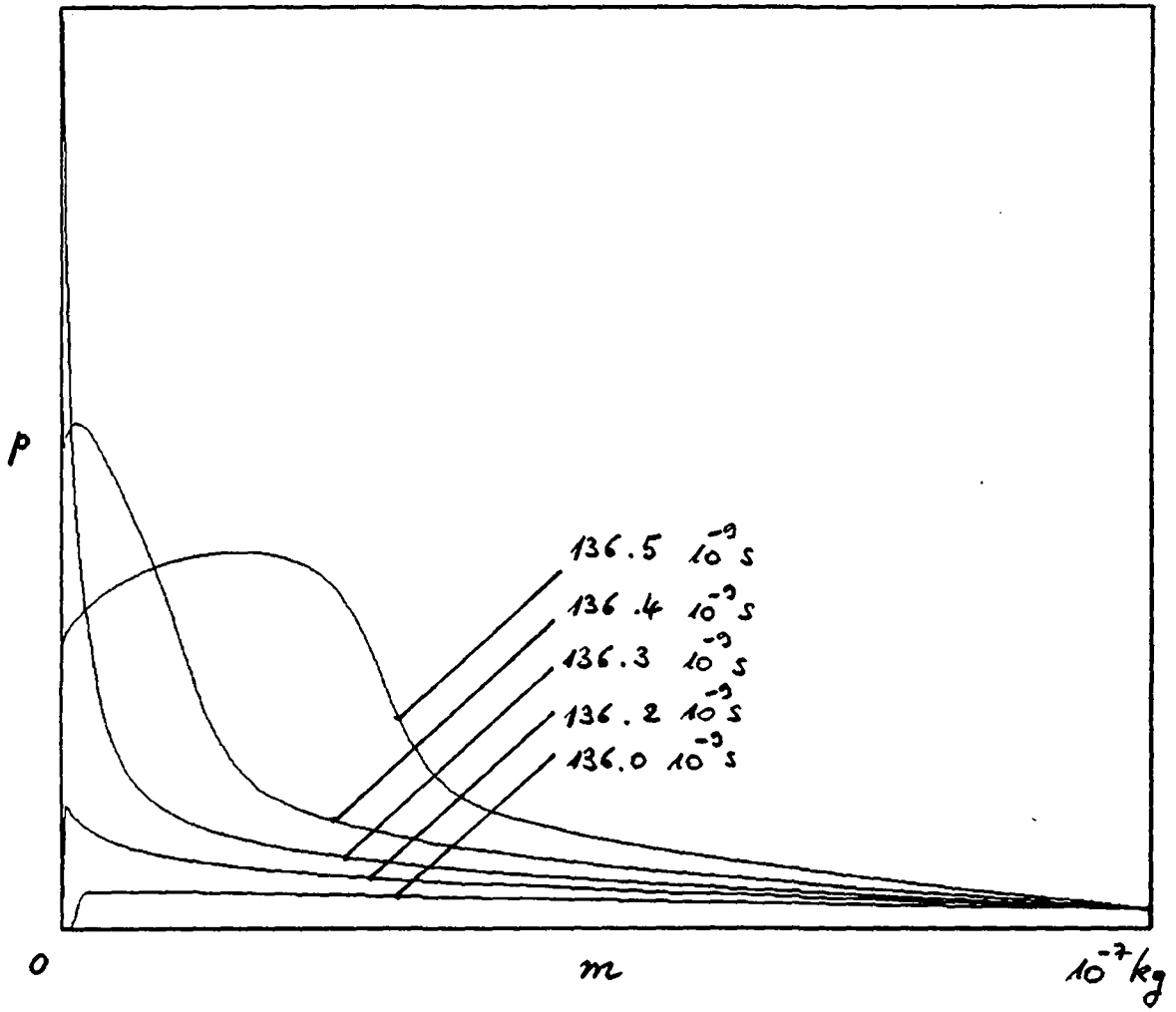


figure 4.4

$2 \cdot 10^8 \text{ } ^\circ\text{K}$

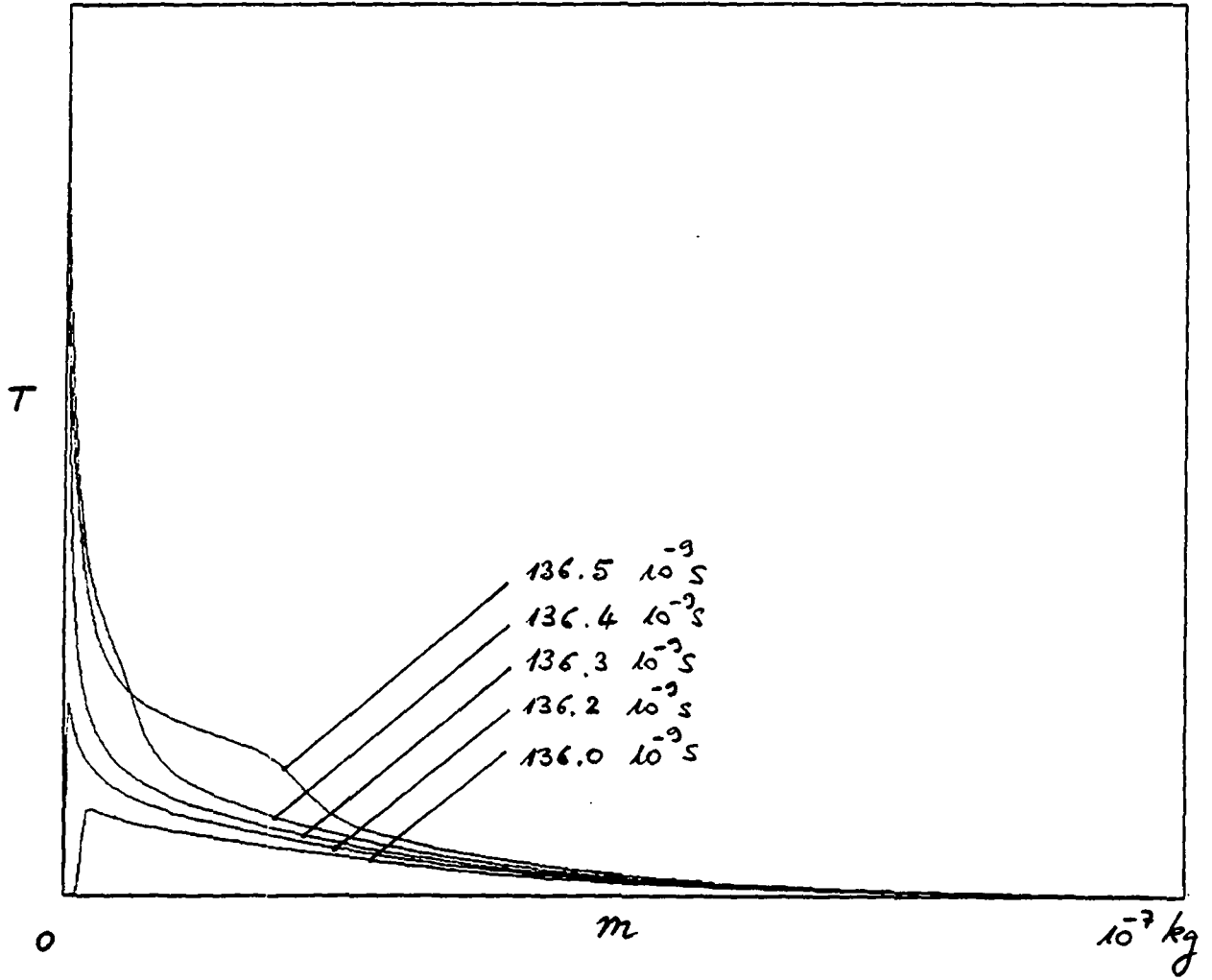


figure 4.5

$6 \cdot 10^{15} \frac{N}{m^2}$

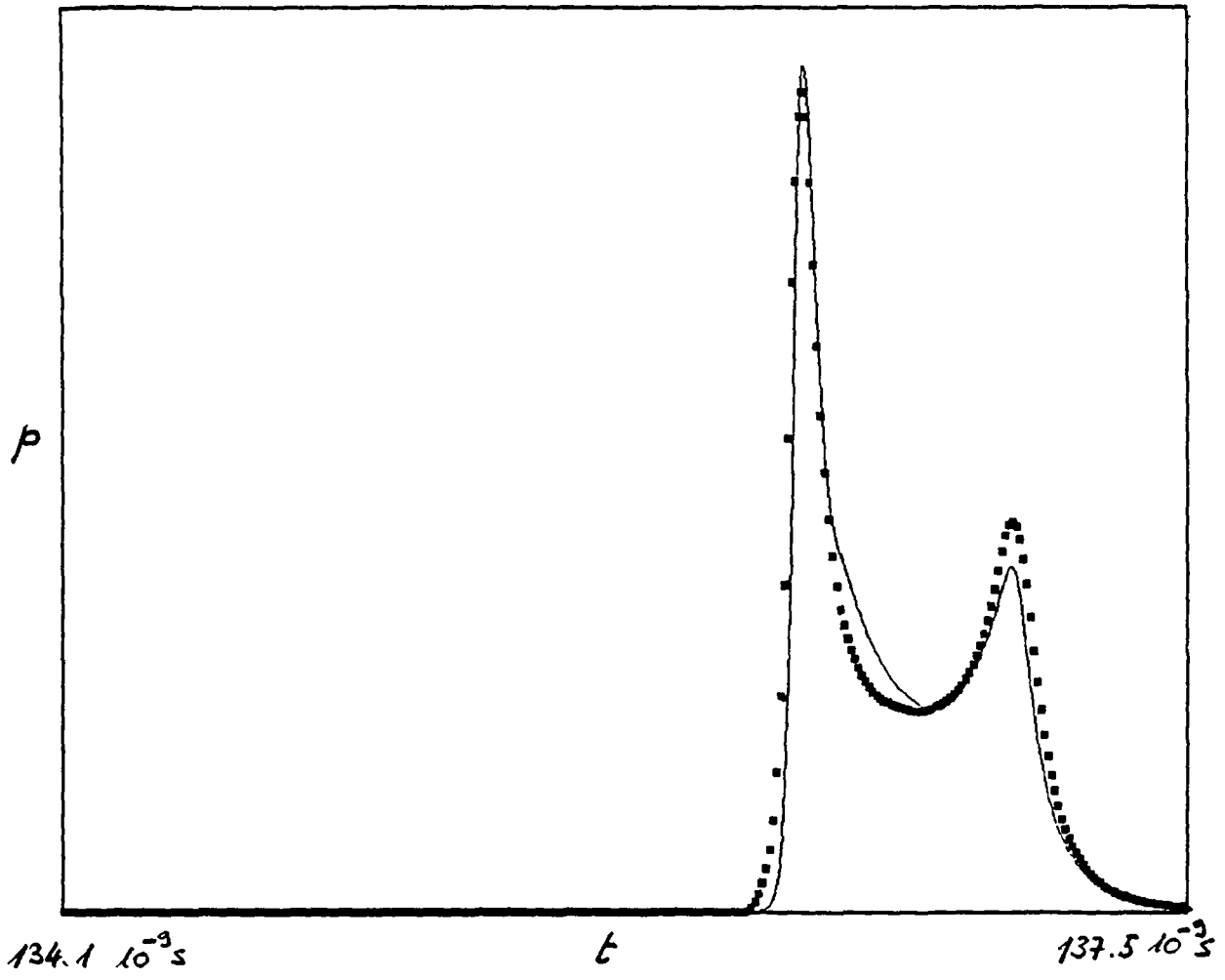


figure 4.6

5. UN EXEMPLE:

LA COMPRESSION D'UNE CIBLE SPHERIQUE.

Dans ce chapitre nous simulons la compression d'une cible sphérique, comme celle décrite au chapitre 1 dans le contexte de la fusion par confinement inertiel, en utilisant les méthodes présentées dans les chapitres 2 à 4. Dans chacun de ces chapitres, des exemples numériques particuliers illustrent les procédés qui y sont développés. Nous présentons maintenant une vue d'ensemble des résultats qui peuvent être obtenus au moyen des méthodes que nous avons étudiées.

Considérons une cible sphérique composée de $4\pi \cdot 10^{-7} \text{ k}_g$ ($\bar{m} = 10^{-7} \text{ k}_g$) d'un gaz compressible et conducteur de la chaleur, caractérisé par les constantes (c.f. chapitre 1)

$$C_g = 3324 \frac{\text{J}}{\text{k}_g \cdot \text{K}}$$

et

$$C_V = \frac{3}{2} C_g = 4986 \frac{\text{J}}{\text{k}_g \cdot \text{K}},$$

et satisfaisant les équations (c.f. (1.19) à (1.23))

$$\partial_t V - \partial_m (R^2 u) = 0, \quad (5.1)$$

$$\partial_t u + \partial_m (R^2 p) = p \partial_m (R^2), \quad (5.2)$$

$$2C_V \partial_t T + p \partial_t V = \partial_m (R^2 K \partial_R T), \quad (5.3)$$

$$\partial_t R = u, \quad (5.4)$$

$$pV = 2C_g T. \quad (5.5)$$

Le coefficient de conductivité thermique K de l'équation (5.3) est donné par (c.f. équ. (4.52) à (4.54))

$$K = \frac{1}{1 + \frac{\lambda}{T} |\partial_R T|} 1.83 \cdot 10^{-10} \frac{T^{\frac{5}{2}}}{\ln(\Lambda)} \quad (5.6)$$

où

$$\lambda = \frac{5.7 \cdot 10^7 T^2}{2.41 \cdot 10^{26} \frac{1}{V}} \quad (5.7)$$

et

$$\ln(\Lambda) = \ln \left\{ \max \left\{ 10, 7.99 \cdot 10^{-7} (VT^3)^{\frac{1}{2}} \right\} \right\} . \quad (5.8)$$

Initialement, l'état de la cible est décrit par

$$V(m,0) = \frac{1}{300} \frac{m^3}{k_g} ,$$

$$u(m,0) = 0 \frac{m}{s} ,$$

$$T(m,0) = 500 \text{ °K} ,$$

$$p(m,0) = 9.972 \cdot 10^8 \frac{N}{m^2} \quad \forall m \in [0, \bar{m}] ,$$

et son rayon est égal à $10^{-3} m$ (c.f. équ. (1.24)) .

Pour $t > 0$, la pression à la surface de la cible est donnée en fonction du temps par (c.f. § 3.1)

$$p(\bar{m},t) = \begin{cases} \min \left\{ 10^5, \frac{1}{\left(1 - \frac{t}{t_0}\right)^{\frac{5}{4}}} \right\} p_0 , & t < t_0 \\ 10^5 p_0 , & t \geq t_0 \end{cases} \quad (5.9)$$

où p_0 est la pression initiale égale à $9.972 \cdot 10^8 \frac{N}{m^2}$ et où $t_0 = 134.66 \cdot 10^{-9} s$.

La pression définie par la relation (5.9) est représentée en fonction du temps à la figure 5.1.

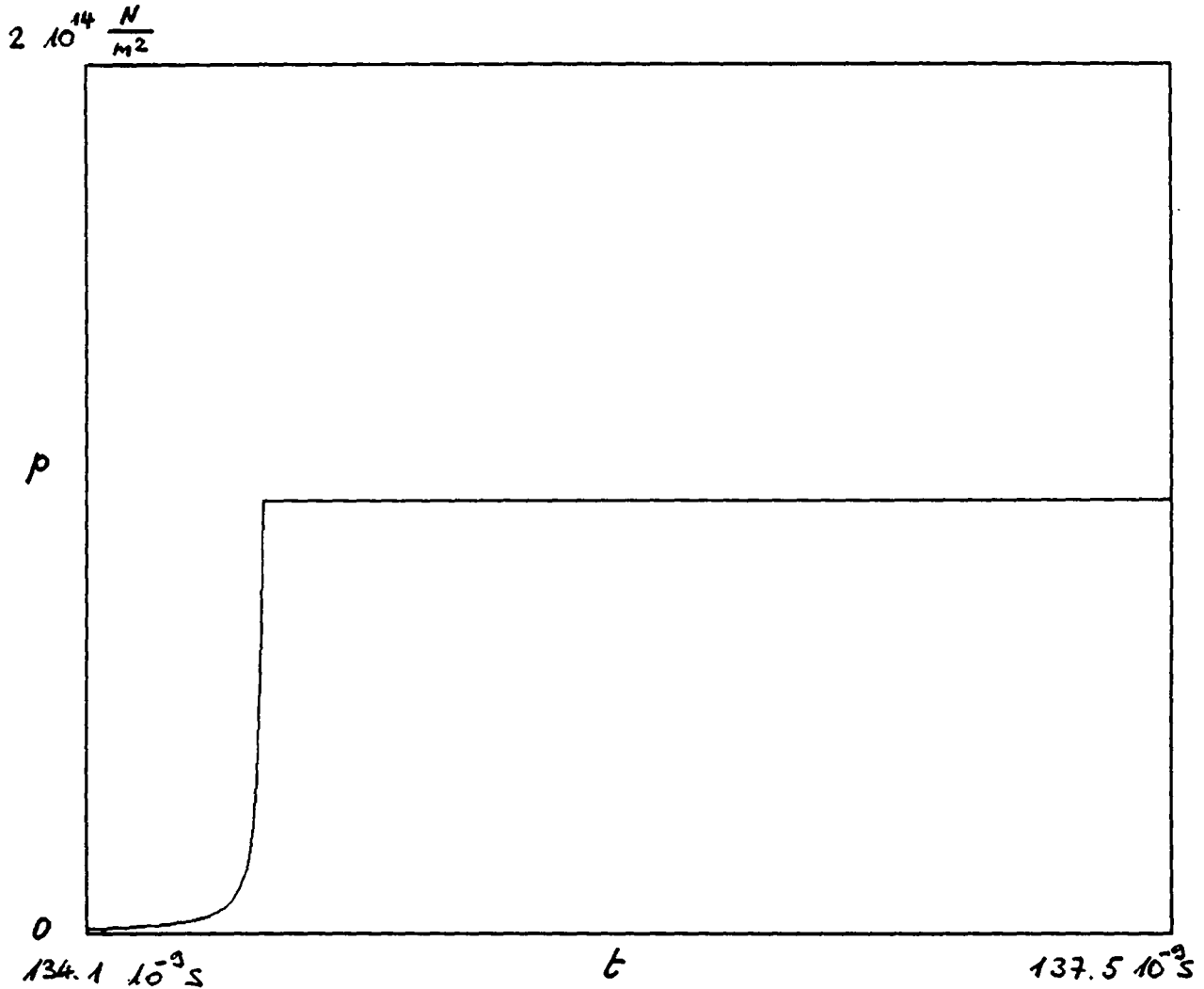


figure 5.1

Nous avons traité ce problème avec la méthode du splitting présentée au chapitre 4.

Pour la partie hydrodynamique, nous avons utilisé le schéma (2.104) à (2.108) avec le maillage (3.80) à (3.82) où $h = 4.96 \cdot 10^{-6}$ et $J = 50$ ($N = 70$), et avec la condition de stabilité (2.80d) où $j_0 = 30$ (seuls les points $m_{j+\frac{1}{2}} \geq m_{j_0+\frac{1}{2}} \approx 0.22 \bar{m}$ sont pris en compte: c.f. § 2.4).

Le paramètre d'hybridage θ donné par l'expression (2.101) du

§ 2.5, et utilisé avec succès dans le contexte du traitement d'un choc cylindrique, ne donne pas des résultats satisfaisants dans le cas de la symétrie sphérique. Après différents essais nous avons choisi, pour ce paramètre, l'expression

$$\theta_{j+\frac{1}{2}}^n = \min\left\{1, \tilde{\theta}_{j+\frac{1}{2}}^n\right\}, \quad (5.10a)$$

avec

$$\tilde{\theta}_{j+\frac{1}{2}}^n = \begin{cases} \frac{2v_{j+\frac{1}{2}}^n}{1+v_{j+\frac{1}{2}}^n} \frac{\max\left\{|\Delta\rho_{j+1}^n|, |\Delta\rho_j^n|\right\}}{|\Delta\rho_{j+1}^n|+|\Delta\rho_j^n|} & \text{si } |\Delta\rho_{j+1}^n|+|\Delta\rho_j^n| > 100 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (5.10b)$$

$$\text{où } \Delta\rho_j^n = \rho_{j+\frac{1}{2}}^n - \rho_{j-\frac{1}{2}}^n \quad (5.11)$$

et où

$$v_{j+\frac{1}{2}}^n = \max_{k=j-1, j, j+1} \frac{\Delta t^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta m_{k+\frac{1}{2}}^n} (R_{k+\frac{1}{2}}^n)^2 \left(1 + \frac{C_g}{C_V} \frac{P_{k+\frac{1}{2}}^n}{V_{k+\frac{1}{2}}^n}\right)^{\frac{1}{2}}. \quad (5.12)$$

Avec ce choix, une relation analogue à (2.102) peut être obtenue, et la remarque 2.5.2 s'applique.

Remarquons que dans l'exemple traité dans ce chapitre l'égalité

$$\theta_{j+\frac{1}{2}}^n = \tilde{\theta}_{j+\frac{1}{2}}^n$$

est vérifiée pour tout j et pour tout n .

Les résultats que nous avons obtenus montrent que le paramètre défini par l'expression (5.10) est satisfaisant.

Au bord de la cible nous avons utilisé la méthode itérative présentée au § 3.1 avec $\delta = 10^{-4}$.

Au centre, nous avons appliqué la méthode présentée au § 3.2.

Pour la partie diffusive, nous avons utilisé les équations (4.47) à (4.51) du chapitre 4.

Les figures 5.2 à 5.5 montrent les profils de la pression, de la vitesse, de la densité et de la température en fonction de la masse, un peu avant et un peu après la réflexion au centre de la cible de l'onde générée par la condition de bord (5.9). La figure 5.6 montre les profils correspondants du paramètre d'hybridage θ donné par l'expression (5.10) .

Nous remarquons (c.f. figure 5.4) que la forte élévation de densité, causée au bord de la cible par l'impulsion destinée à la comprimer, ne s'est pas encore propagée jusqu'au centre, comme c'est le cas pour la pression et la température.

Ce résultat illustre le fait que la matière se déplace avec une vitesse très inférieure à la vitesse de propagation des ondes dans le fluide de la cible.

La figure 5.7 montre en trait fin continu la pression au bord de la cible ($m = m_{N-\frac{1}{2}}$) , et en pointillé la pression en son centre ($m = m_{\frac{1}{2}}$), en fonction du temps.

Nous remarquons que l'onde générée au bord de la cible atteint le centre et s'y réfléchit à l'instant $t \approx 136.34 \cdot 10^{-9}$ s, pour rejoindre le bord et s'y réfléchir à l'instant $t \approx 136.63 \cdot 10^{-9}$ s ; l'onde atteint le centre un seconde fois à l'instant $t \approx 136.96 \cdot 10^{-9}$ s.

Les figures 5.8 et 5.9 montrent, en fonction du temps, la densité et la température au centre de la cible.

A l'instant $t \approx 136.34 \cdot 10^{-9}$ s où l'onde atteint le centre de la cible pour la première fois, la pression, la densité et la température atteignent les valeurs

$$\hat{p} = 5.35 \cdot 10^{15} \frac{N}{m^2} \approx 5 \cdot 10^6 p(m,0) ,$$

$$\hat{\rho} = 7.62 \cdot 10^3 \frac{kg}{m^3} \approx 25 \rho(m,0)$$

et

$$\hat{T} = 1.06 \cdot 10^8 \text{ } ^\circ K \approx 2 \cdot 10^5 T(m,0) .$$

Nous remarquons que le rapport $\hat{p}/\rho(m,0)$ est très inférieur aux rapports $\hat{p}/p(m,0)$ et $\hat{T}/T(m,0)$.

La figure 5.10 montre la déformation de la cible en fonction du temps. Nous y voyons, pour $k = 1, \dots, 50$, le graphe de la fonction $R_k(t)$ représentant, au temps t , la distance par rapport au centre d'une particule se trouvant initialement à la distance $R_k(0) = k\Delta R$, où ΔR est donné par

$$\Delta R = \frac{10^{-3}}{50} .$$

Nous remarquons, sur cette figure, l'onde de pression se propager du bord vers le centre où elle se réfléchit, atteindre à nouveau le bord et retourner vers le centre (comparer avec la figure 5.7).

La figure 5.11 montre une coupe de la cible subdivisée en 50 parties, à l'instant $t = 0$.

Les figures 5.12 à 5.16 montrent la même coupe à différents instants: tout d'abord, la périphérie de la cible est fortement comprimée alors qu'un voisinage du centre est laissé intact ($t = 134.00 \cdot 10^{-9}$ s, $t = 135.50 \cdot 10^{-9}$ s et $t = 136.00 \cdot 10^{-9}$ s), puis l'onde atteint le centre et la cible est complètement déformée ($t = 136.34 \cdot 10^{-9}$ s) ; enfin, le fluide se détend en commençant par le centre ($t = 137.50 \cdot 10^{-9}$ s).

Cette simulation, pour t allant de 0 à $137.50 \cdot 10^{-9}$ s, a nécessité 3672 pas de temps.

La figure 5.17 montre, en fonction du temps, la taille des pas de temps Δt tels qu'ils ont été déterminés, au cours de ce calcul, par la condition (2.80d) avec $j_0 = 30$.

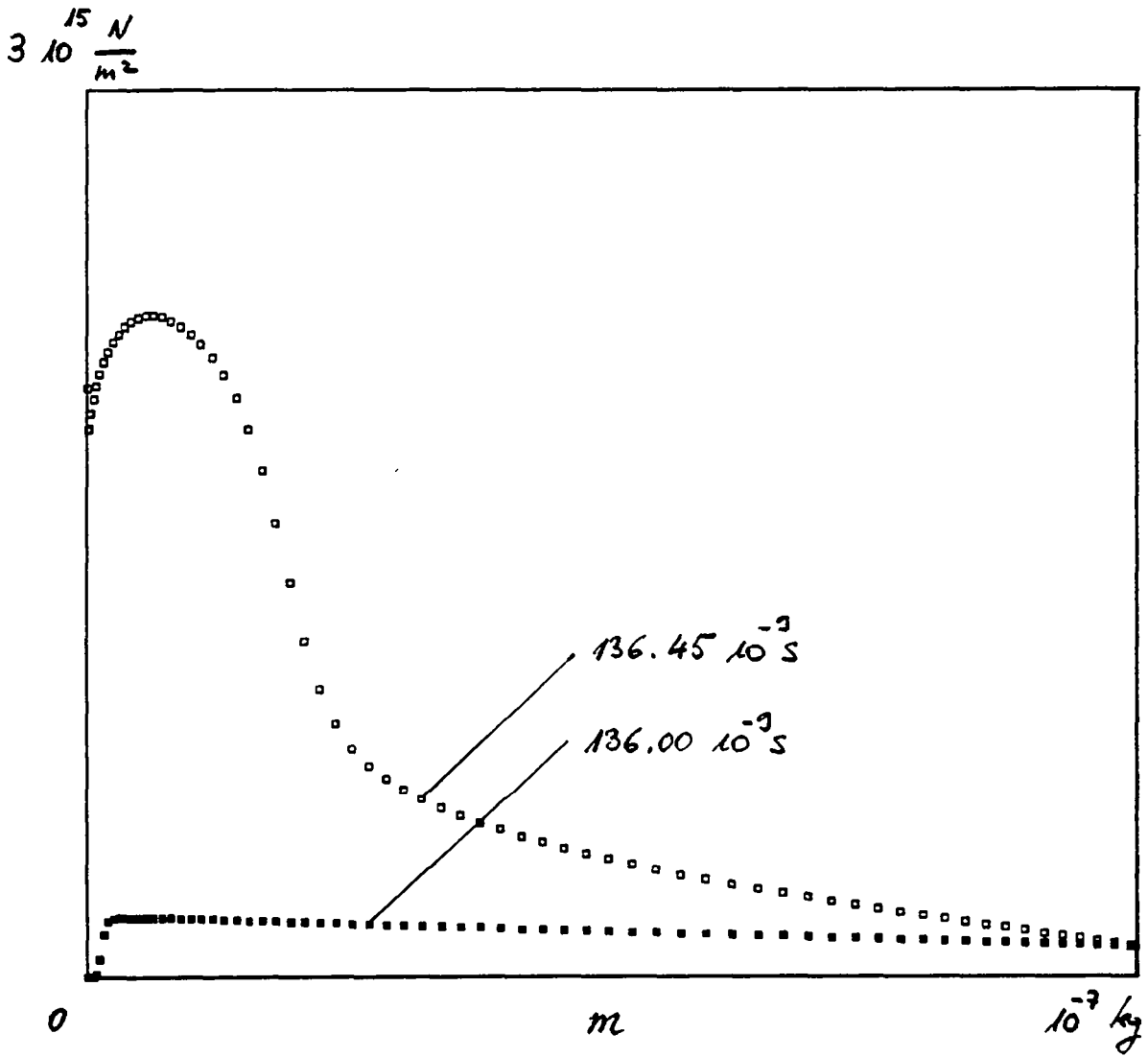


figure 5.2: pression.

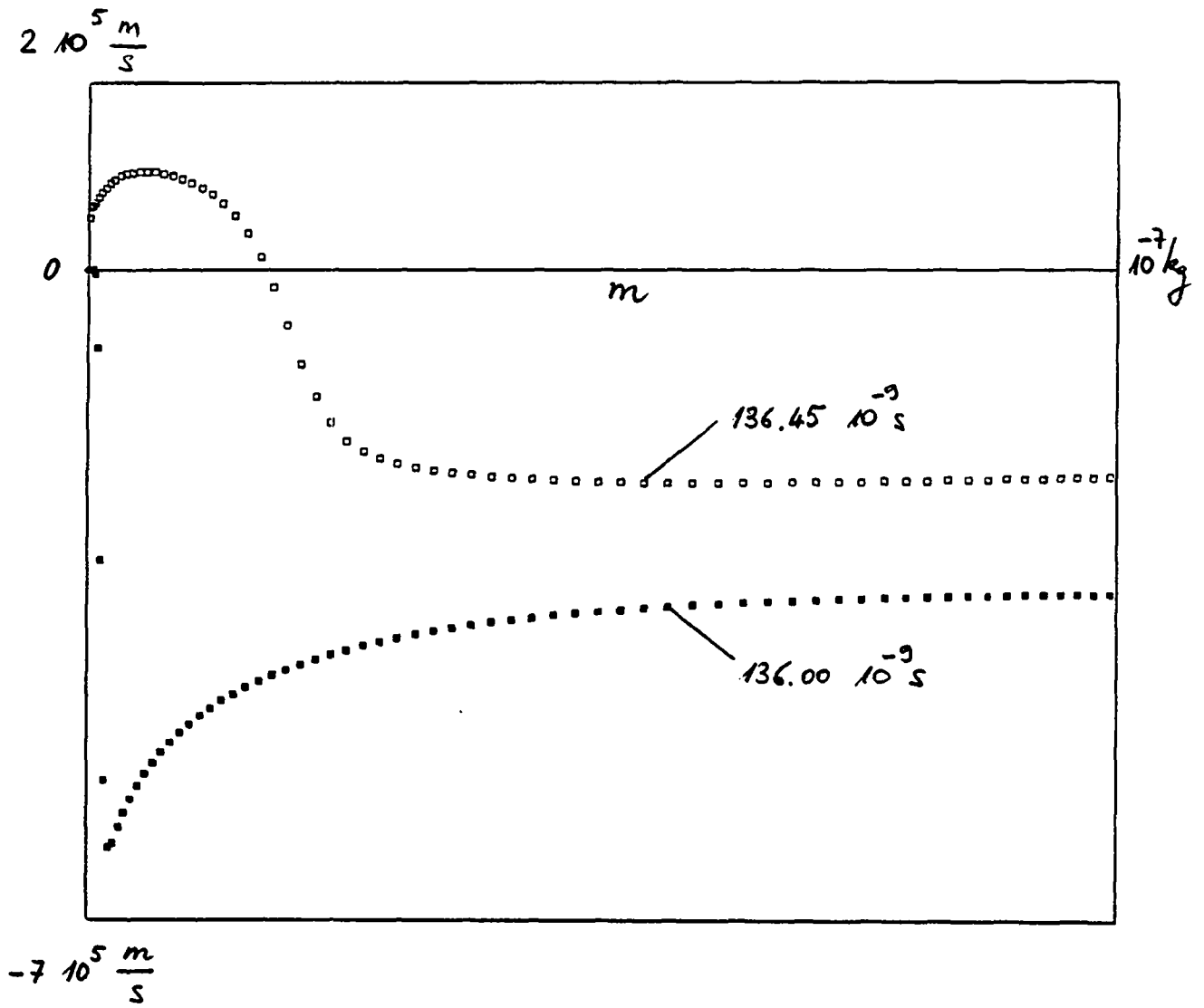


figure 5.3: vitesse.

$$3 \cdot 10^5 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

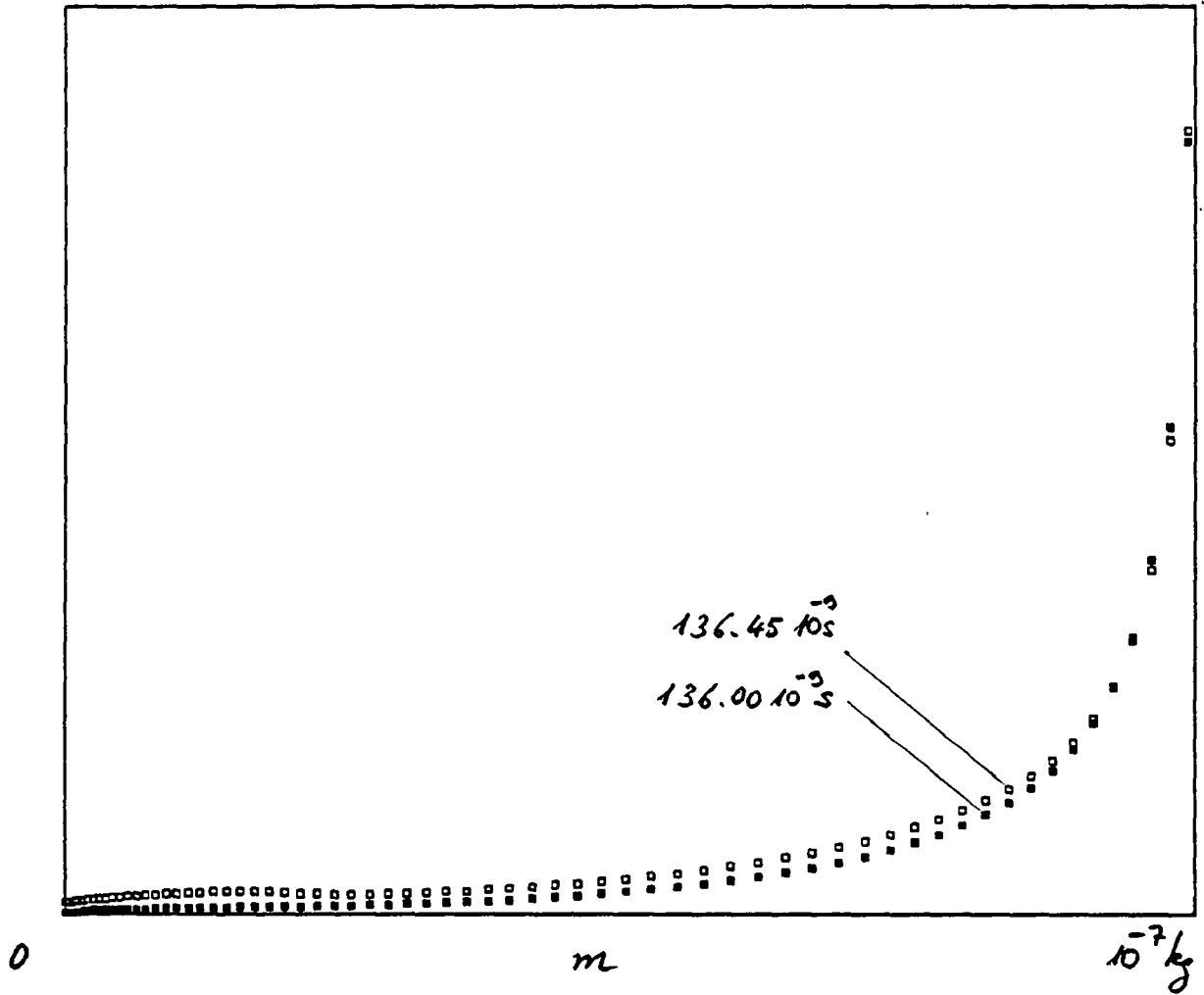


figure 5.4: densité.

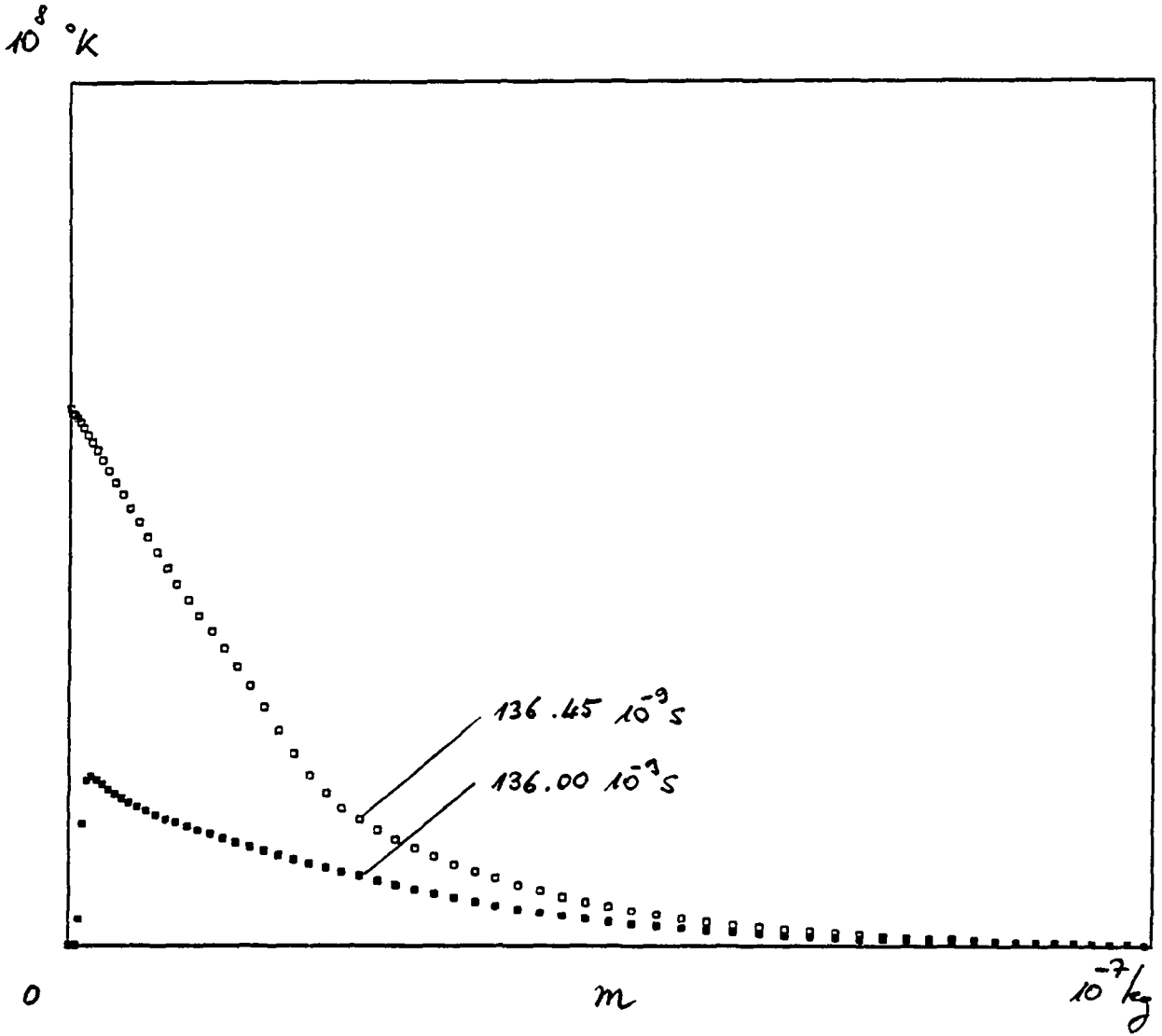


figure 5.5: température.

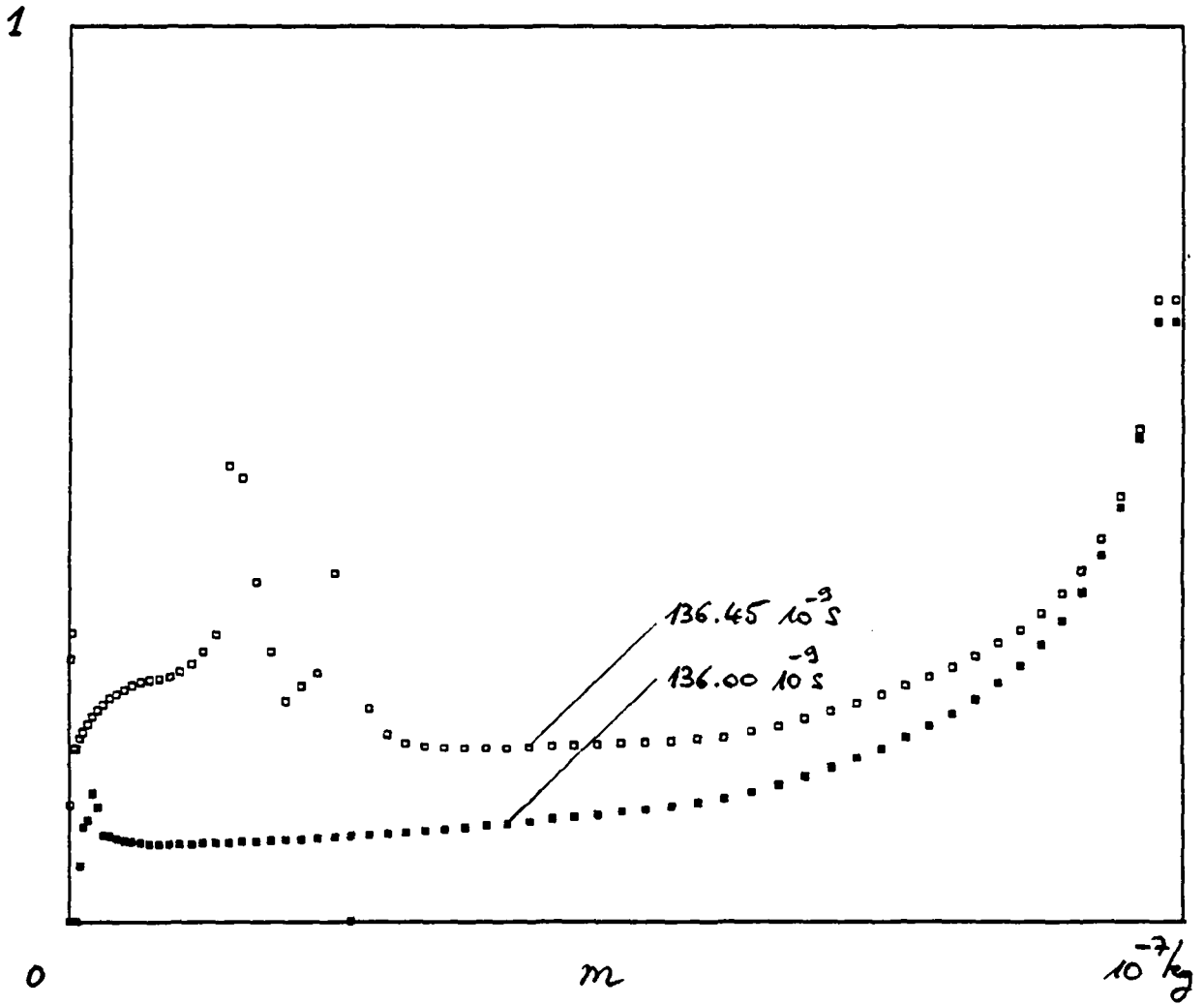


figure 5.6: paramètre θ .

$$6 \cdot 10 \frac{15 \text{ N}}{\text{m}^2}$$

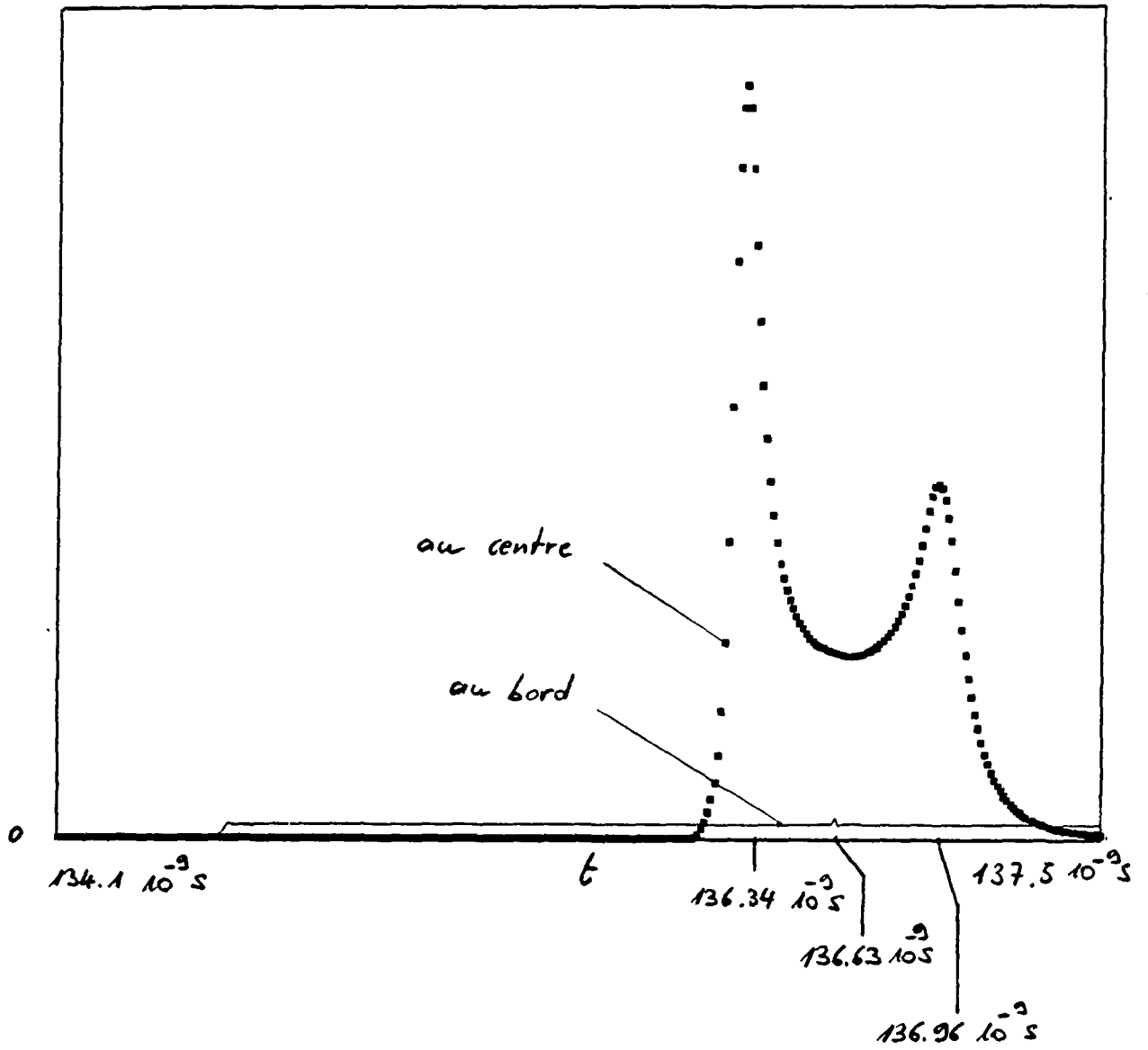


figure 5.7: pression au bord et au centre

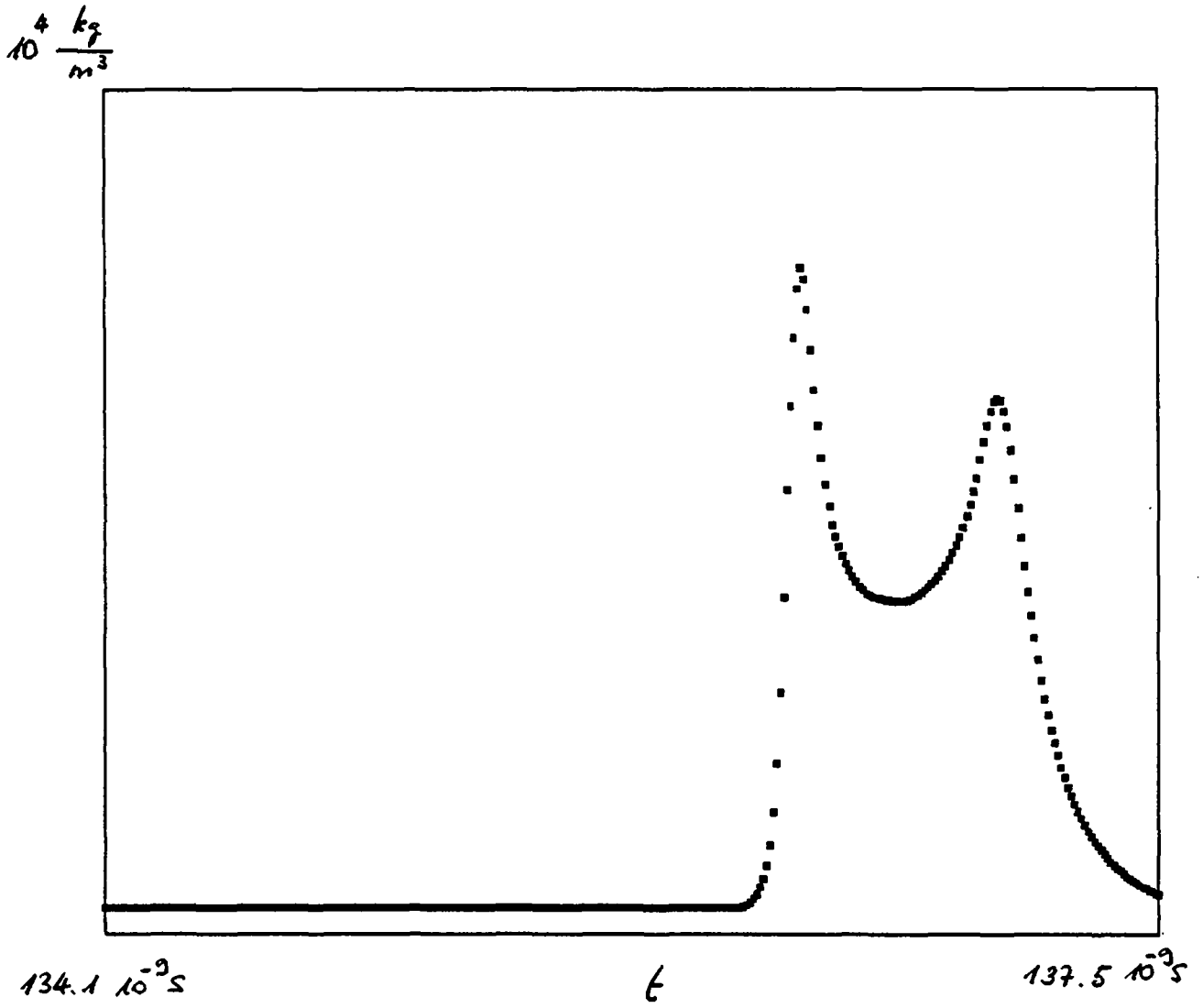


figure 5.8: densité au centre.

$1.5 \cdot 10^8 \text{ } ^\circ\text{K}$

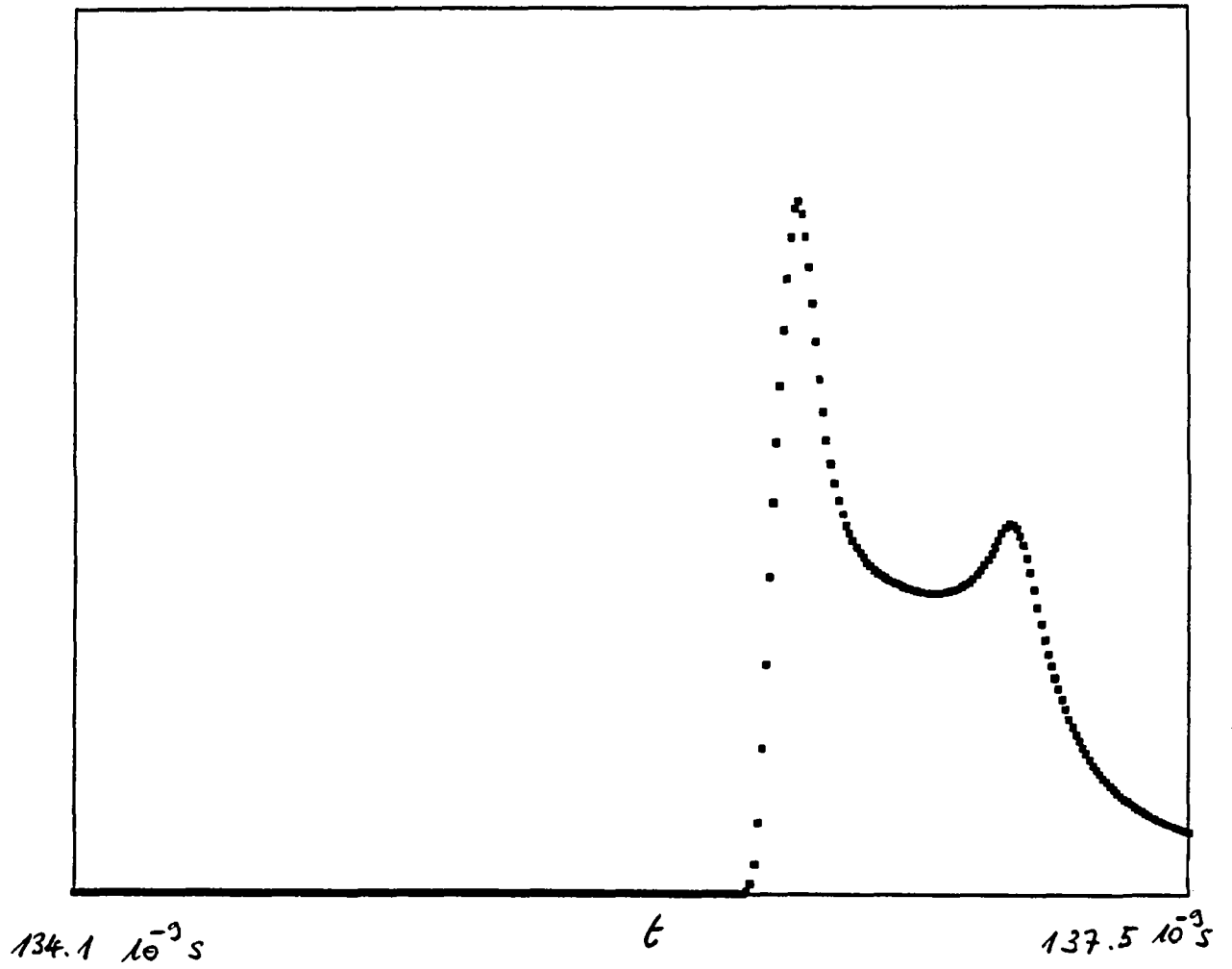


figure 5.9: température au centre.

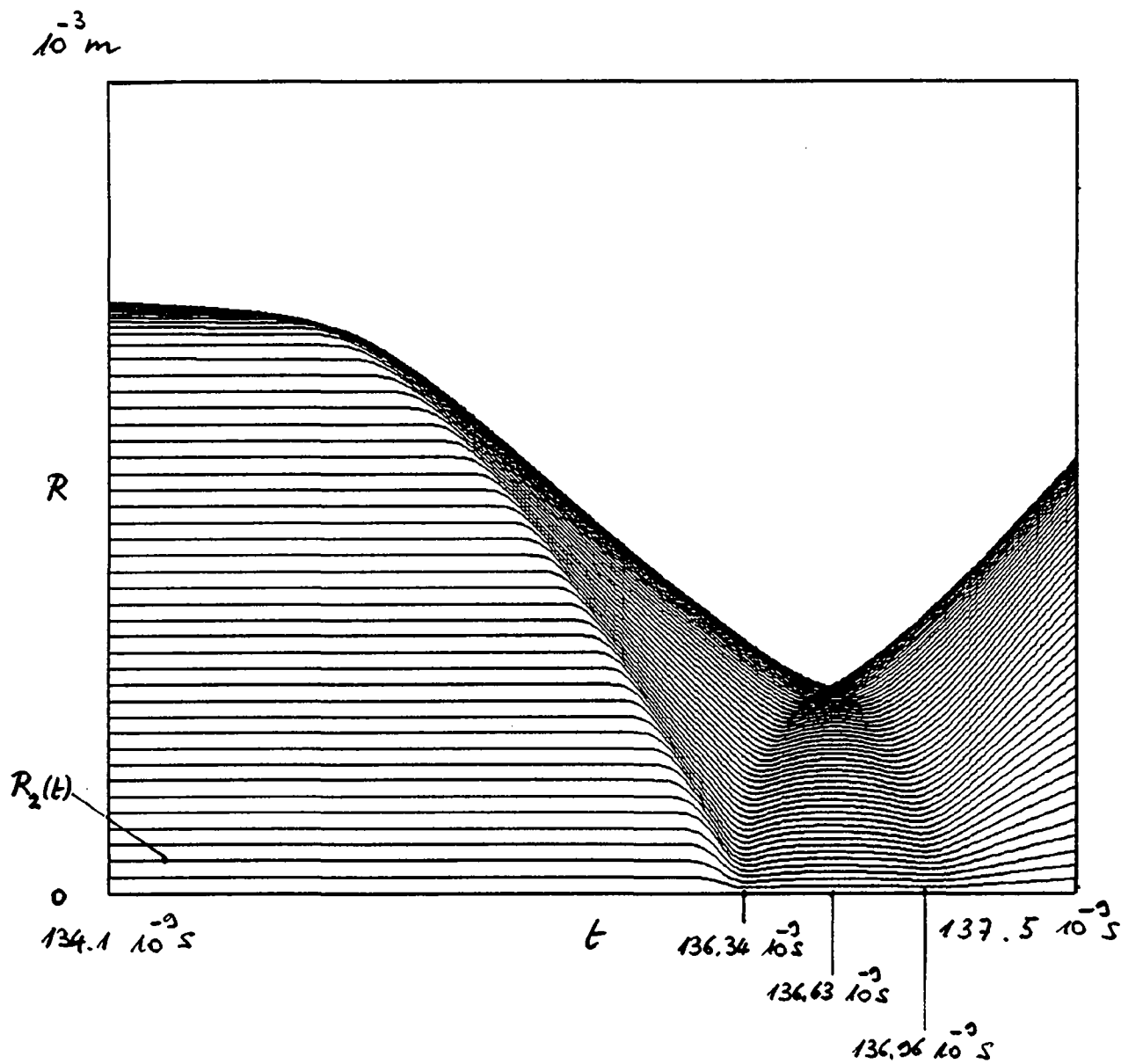


figure 5.10: déformation de la cible.

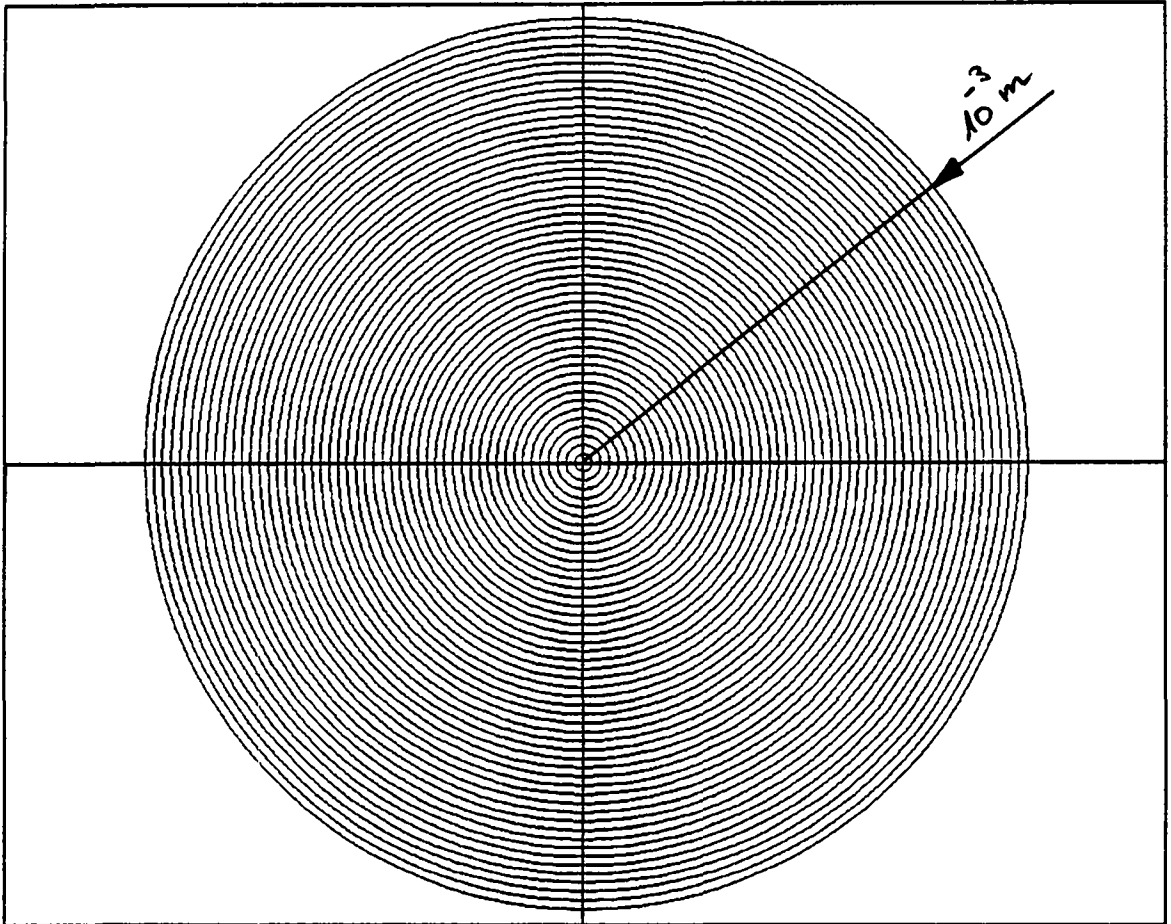


figure 5.11: cible au temps $t = 0$.

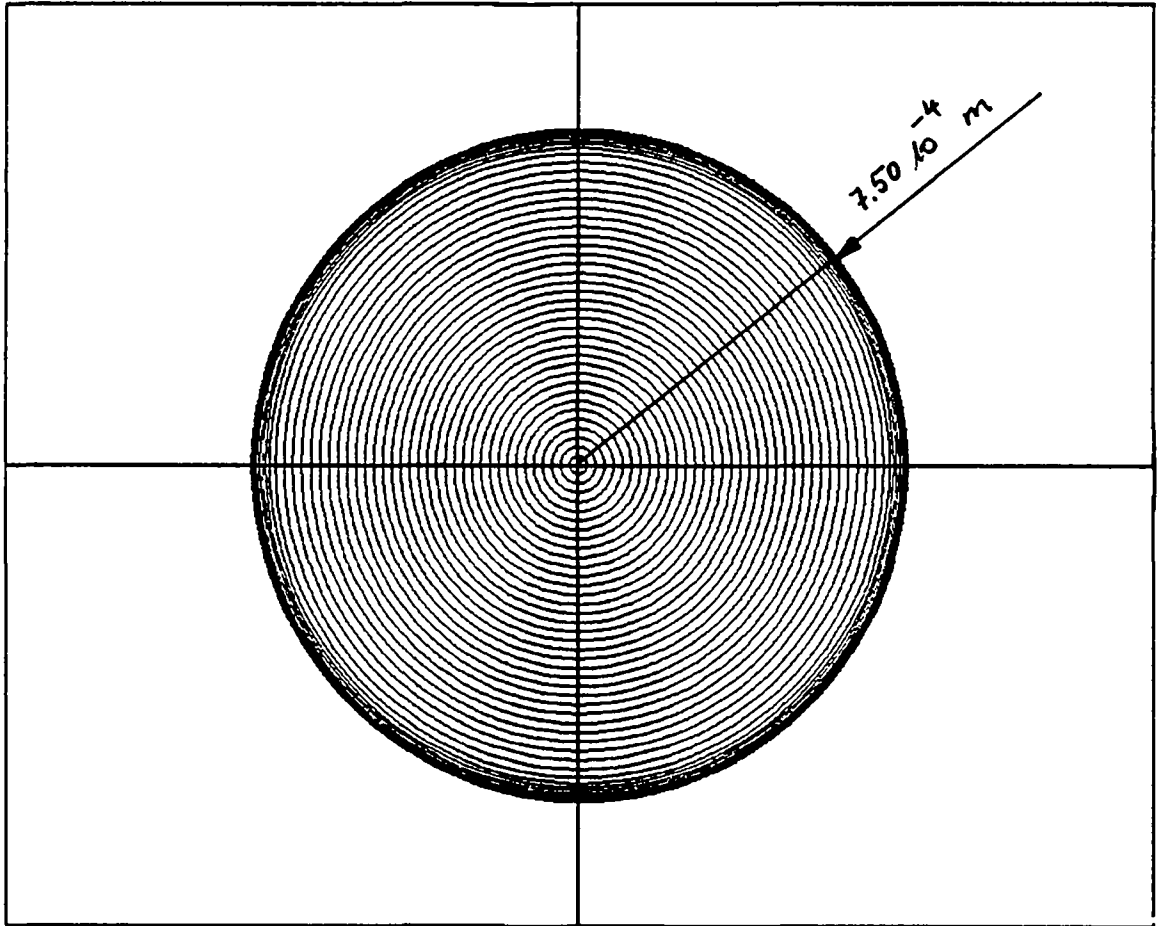


figure 5.12: cible au temps $t = 134.00 \cdot 10^{-9} \text{ s}$.

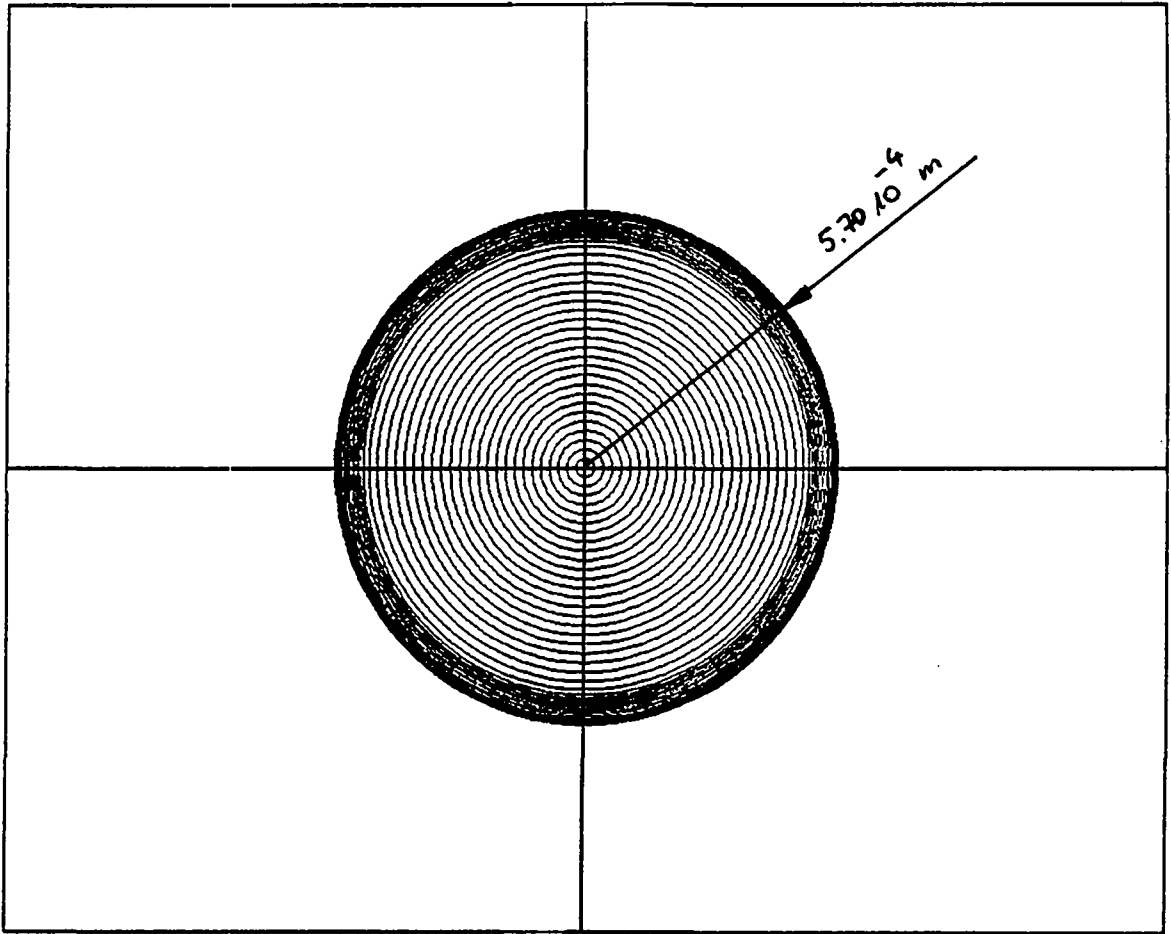


figure 5.13: cible au temps $t = 135.50 \cdot 10^{-9} \text{ s}$.

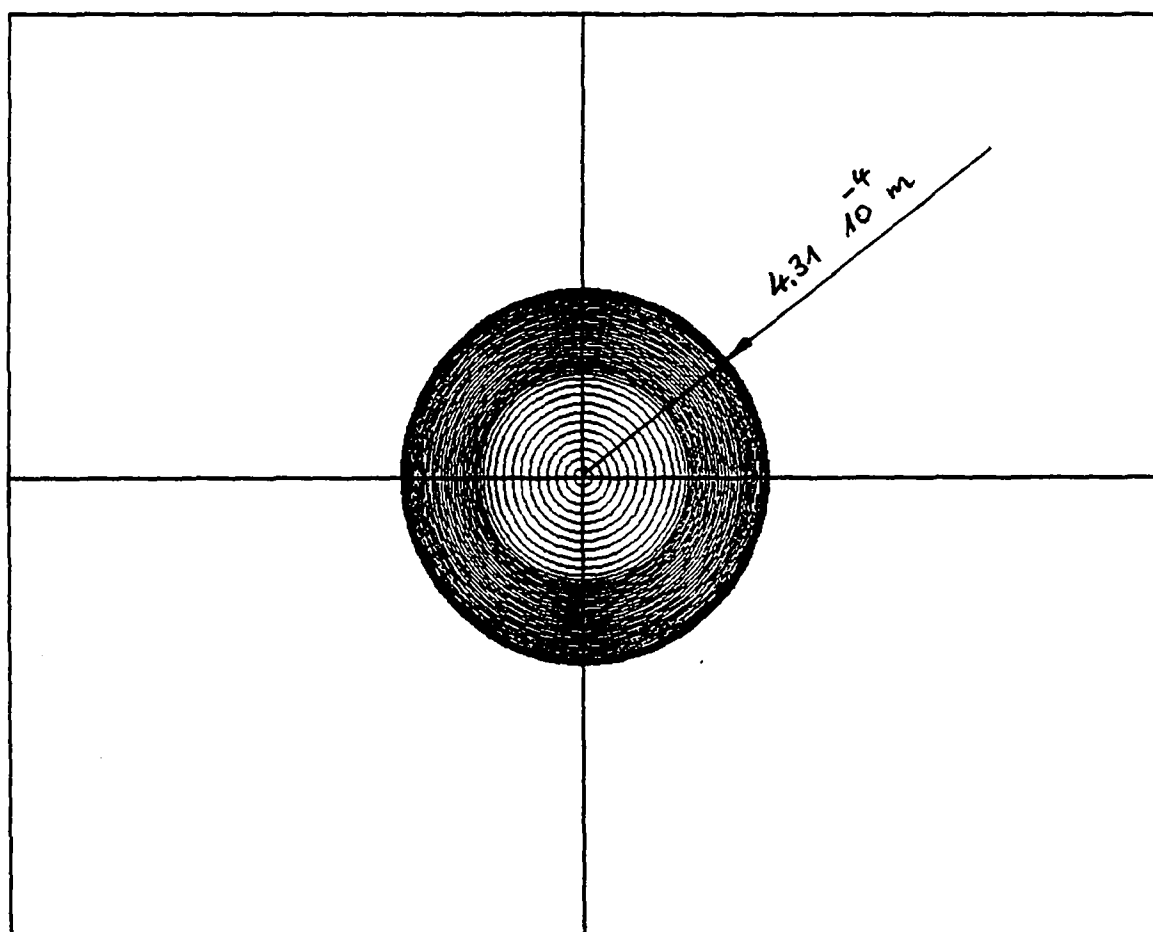


figure 5.14: cible au temps $t = 136.00 \cdot 10^{-9} \text{ s}$.

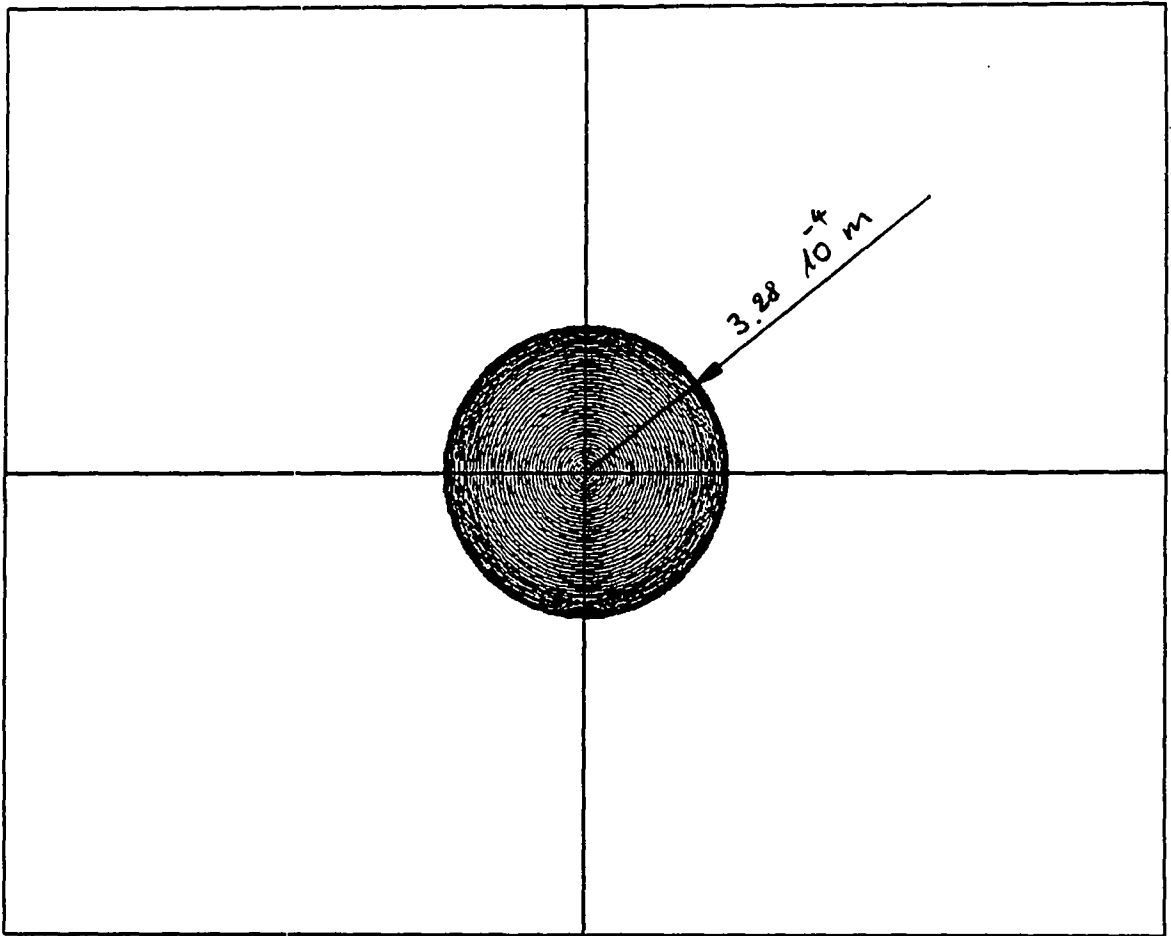


figure 5.15: cible au temps $t = 136.34 \cdot 10^{-9} \text{ s}$.

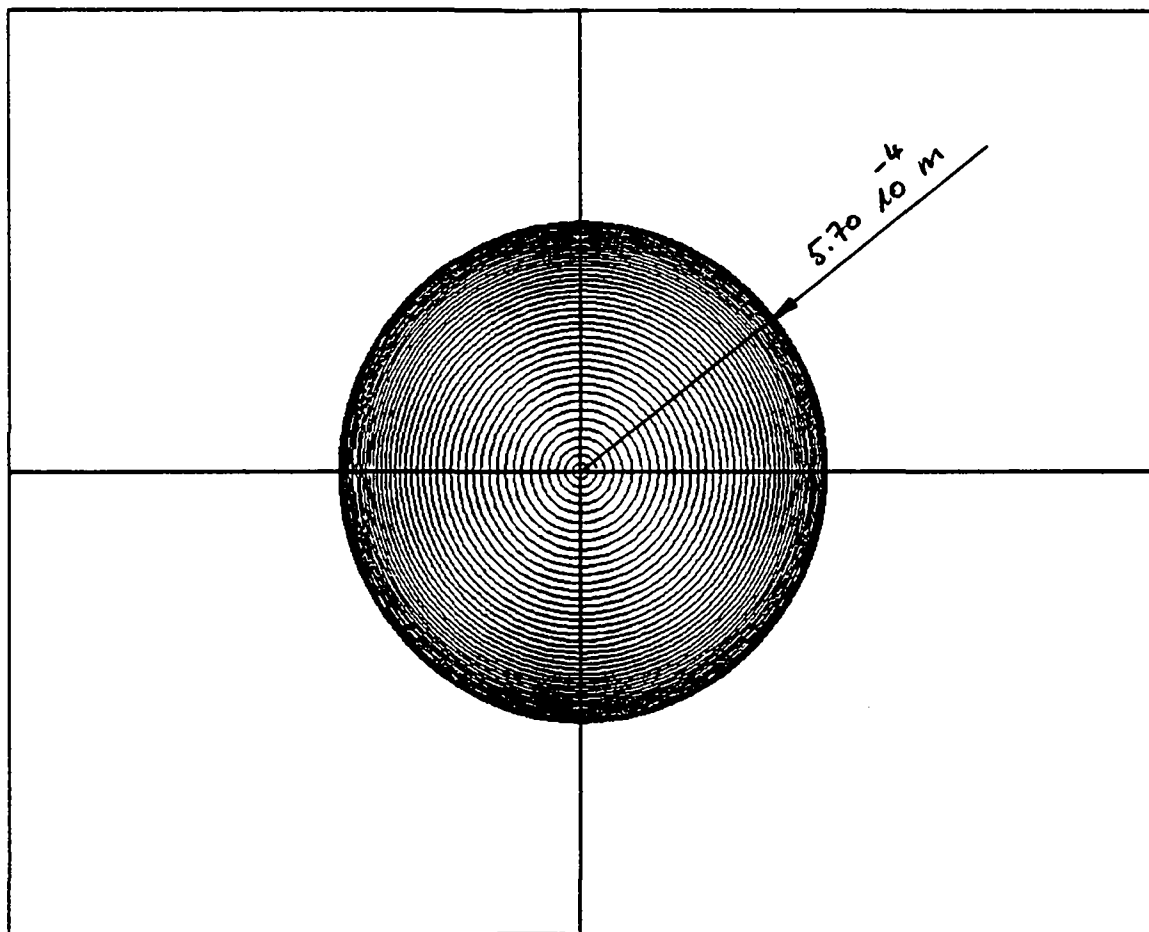


figure 5.16: cible au temps $t = 137.50 \cdot 10^{-9} \text{ s}$.

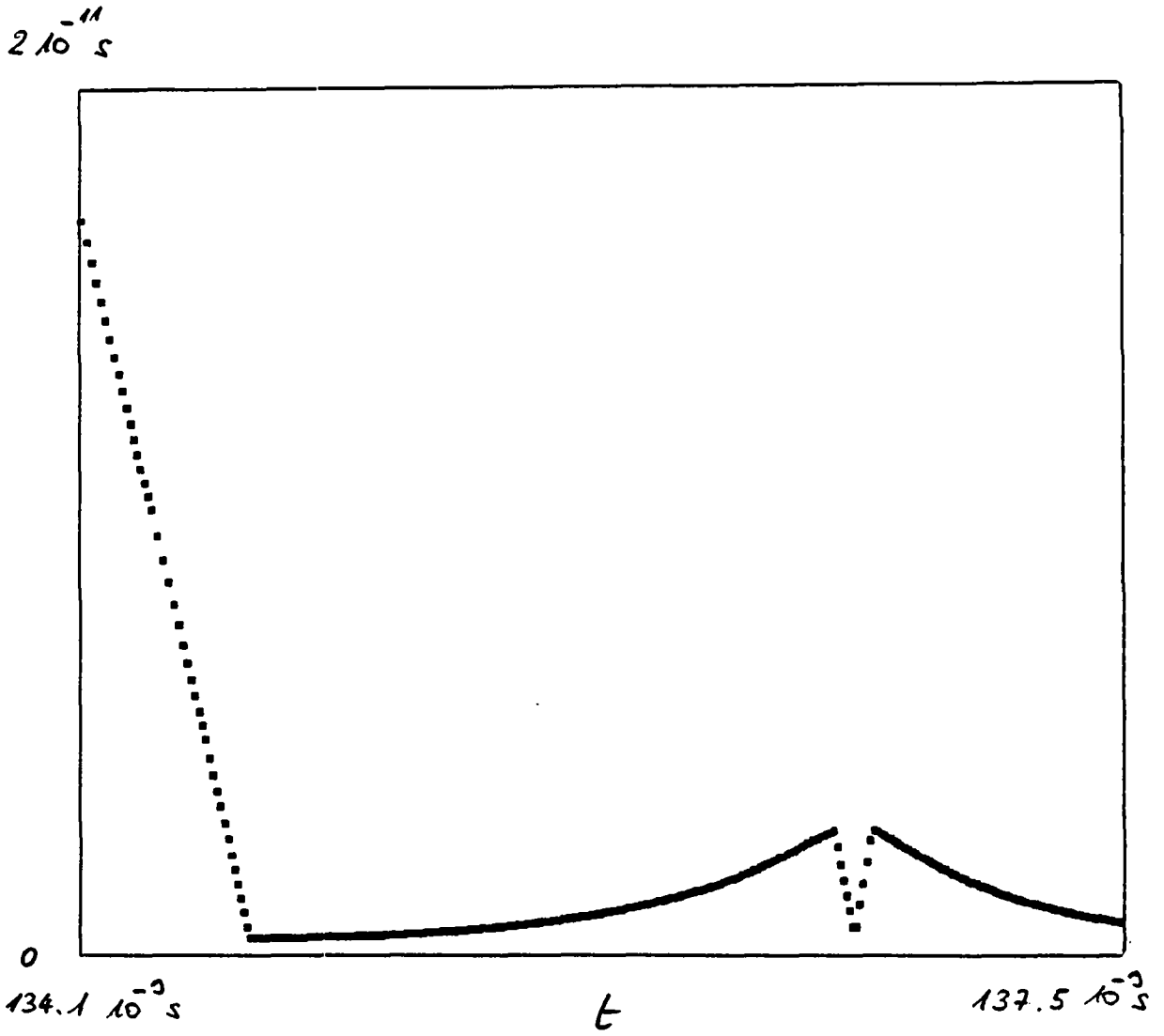


figure 5.17: pas de temps Δt .

BIBLIOGRAPHIE.

- [1] J.J. Duderstadt and G.A. Moses.
Inertial Confinement Fusion.
John Wiley and sons 1982.

- [2] R.B. Richtmyer and K.W. Morton.
Difference Methods For Initial-Value Problems.
Second edition.
John Wiley and sons 1967.

- [3] A. Harten and G. Zwas.
Self-Adjusting Hybrid Schemes for Shock Computations.
Journal of Computational Physics 9, 1972 (p.568-583) .

- [4] A. Harten.
The Artificial Compression Method for Computation of Shocks and
Contact Discontinuities: III. Self-Adjusting Hybrid Schemes.
Mathematics of computation, Vol. 32, N°142, 1978 (p.363-389) .

- [5] M. Ben-Artzi and J. Falcovitz.
An Upwind Second-Order Scheme for Compressible Duct Flows.
SIAM, J. Sci. Stat. Comput. Vol 7, N°3, 1986 (p.744-768) .

- [6] P.D. Lax.
Weak Solutions of Nonlinear Hyperbolic Equations and Their
Numerical Computation.
Comm. Pure Appl. Math. 7, 1954 (p.159-193) .

- [7] S.K. Godunov.
Finite Difference Methods for Numerical Computations of
Discontinuous Solutions of Equations of Fluid Dynamics.
Mat. Sb. N°47, 1959 (in Russian) (p.271-295) .

- [8] F. Dubois and P. Le Floch.
Boundary Conditions for Nonlinear Hyperbolic Systems of
Conservation Laws.
Ecole Polytechnique de Palaiseau, R.I. N°155, 1986.

- [9] P.A. Raviart.
Systèmes Hyperboliques et Lois de Conservation.
Cours de D.E.A. d'analyse numérique.
Ecole polytechnique de Palaiseau et université Pierre et Marie Curie de Paris VI.
- [10] J. Smoller.
Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations.
Springer-Verlag 1980.
- [11] A.J. Chorin.
Random Choice Solution of Hyperbolic Systems.
Journal of Computational Physics 22, 1976 (p.517-533) .
- [12] G.A. Sod.
A Numerical Study of a Converging Cylindrical Shock.
J. Fluid Mech. vol. 83, part 4, 1977 (p.785-794) .
- [13] Ph. Blanc.
Sur une classe d'équations paraboliques dégénérées à une dimension d'espace possédant des solutions discontinues.
Thèse N°798, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, 1989.
- [14] Arrigo J.-L. and Ph. Blanc.
Heat Equations with Limited Flux. Numerical Study of Hyperbolic Equations of Conservation.
Rapport interne du Département de Mathématiques, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, 1985.
- [15] J.P. Christiansen, D.E.T.F. Ashby and K.V. Roberts.
MEDUSA, a One-Dimensional Numerical Model for Laser Fusion Calculations.
Culham Laboratory Report CLM-130, 1973.
- [16] L. Spitzer.
Physics of Fully Ionized Gases.
Second edition.
Interscience Publishers, 1965 .

CURRICULUM VITAE.

Nom et prénom: **ARRIGO Jean-Luc**
Date de naissance: **12 Novembre 1955**
Lieu d'origine: **CANEGGIO (TESSIN)**

Formation technique:

1972-1975: **Apprentissage de mécanicien aux Ateliers
mécaniques de Vevey S.A. (ACMV).**
1975-1978: **Ecole d'ingénieurs E.T.S. de Bienne, en
mécanique.**

Formation scientifique:

1978-1983: **Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne
(EPFL), en Mathématiques.**

Expérience professionnelle:

Depuis 1984: **Assistant à l'EPFL pour différents cours de
mathématiques appliquées, notamment assistant
du Prof. B. Zwahlen pour le cours de Calcul
Différentiel et Intégral, destiné aux
étudiants de langue allemande.**

(A temps partiel)

**Maître de sciences auxiliaire à l'Ecole
Romande des Arts Graphiques (ERAG) à Lausanne
(1986/87), maître suppléant de mathématiques à
l'Ecole d'Ingénieurs de Genève (EIG)
(1987/90).**

