

REGLAGE PAR MODE DE GLISSEMENT HYBRIDE,  
APPLIQUE AU REGLAGE DE POSITION DE  
SYSTEMES ELECTROMECHANIQUES

THESE No 862 (1990)

PRESENTEE AU DEPARTEMENT D'ELECTRICITE

ECOLE POLYTECHNIQUE FEDERALE DE LAUSANNE

POUR L'OBTENTION DU GRADE DE DOCTEUR ES SCIENCES TECHNIQUES

PAR

URS BENZ

Ingénieur électricien diplômé EPFL  
originaire de Winterthur

acceptée sur proposition du jury :

Prof. H. Bühler, rapporteur  
Dr P. Feller, corapporteur  
Prof. R. Longchamp, corapporteur

Lausanne, EPFL  
1990



## AVANT - PROPOS

Au terme de ce travail, mes plus sincères remerciements s'adressent à Monsieur le Professeur H. Bühler, qui dirige avec une grande compétence scientifique le Laboratoire d'Electronique Industrielle, où l'ensemble de cette étude a été réalisé. Son esprit rigoureux d'analyse a contribué à la réalisation de ce travail.

J'exprime ma reconnaissance au président du jury Monsieur le Professeur M. Declercq et aux corapporteurs Monsieur le Docteur P. Feller et Monsieur le Professeur R. Longchamp pour avoir accepté de faire partie du jury.

Je remercie également tous les collaborateurs, anciens ou actuels, du Laboratoire d'Electronique Industrielle et plus particulièrement Madame F. Vionnet qui a effectué très aimablement la correction du manuscrit et une partie du travail de dactylographie du chapitre 6, ainsi que Monsieur G. Renggli pour son aide technique spontanée, précieuse et indispensable.

D'un point de vue non technique, mes parents méritent une immense gratitude, en particulier pour m'avoir encouragé dans les moments difficiles de doute. Enfin, Mademoiselle Miriam Lynch m'a donné toute la force nécessaire pour achever ce travail et je la remercie vivement de la patience et compréhension dont elle a témoigné.



# INTRODUCTION

La théorie du réglage par mode de glissement a été développée depuis plusieurs années déjà. Les premiers travaux ont été réalisés en URSS [1], pour être repris et poursuivis dans d'autres pays.

En fait, le mode de glissement est un mode particulier de fonctionnement des systèmes à structure variable. Le changement de structure peut se faire soit au niveau de la contre-réaction du régulateur, soit dans le système à régler lui-même au niveau de l'organe de commande [2].

Le travail présenté ici traitera uniquement de ce deuxième type de systèmes à structure variable. Le développement récent d'organes de commande à deux positions performants, tels que le variateur à courant continu ou l'onduleur, justifie de plus en plus l'application de la théorie du réglage par mode de glissement.

Les objectifs de ce travail de thèse sont reflétés par les thèmes suivants :

- application du réglage par mode de glissement au réglage de position d'entraînements réglés,
- simplification d'un système réglé par mode de glissement dans le but d'un traitement par le réglage d'état,
- étude des instabilités dues aux limitations des grandeurs internes des régulateurs et
- proposition d'une solution pour les éviter,
- étude approfondie de différentes structures de réglage de position d'un système oscillant à deux masses, représentatif d'un axe d'une machine-outil.

Après une récapitulation des connaissances du réglage par mode de glissement, on développera au chapitre 1 la contre-réaction partielle, ainsi que la notion de fonction de transfert d'un système réglé non linéaire par définition.

Un volet très important de ce travail est l'étude des limitations des grandeurs internes du système à régler. La stabilité, la rapidité et le dépassement du système réglé sont influencés par ces limitations et seront analysés. Cette étude aboutira au principe des limiteurs en cascade avec limitations variables en fonction de l'écart de réglage. Le chapitre 2 relate les développements purement théoriques y relatifs.

Tout système réglé échantillonné ou hybride peut être traité par approximation comme un système réglé continu. Au chapitre 3, on verra comment les différents organes ou éléments digitaux peuvent être décrits par des modèles pseudo-continus.

Une attention particulière est portée au principe de dimensionnement du système réglé hybride. En effet, le régulateur utilisé dans la pratique est entièrement digital, mis à part la contre-réaction de la grandeur d'état la plus rapide et liée directement à la grandeur de commande, qui est analogique. Un système réglé par une structure de réglage par mode de glissement, qu'elle soit continue ou hybride, peut être soumise à une réduction d'ordre. Cette simplification du système réglé, traitée au chapitre 4, permettra le traitement par le réglage d'état. Ainsi, toutes les méthodes  $y$  relatives, tant en continu qu'en échantillonné, pourront être appliquées.

Le chapitre 5 est consacré au réglage par mode de glissement de la position d'un système électromécanique rigide d'ordre 3. Le but est l'étude particulière des phénomènes liés au mode de glissement. Une comparaison avec le réglage d'état permettra de conclure à la similitude prononcée entre les deux types de réglage. Les instabilités dues aux limitations de vitesse seront étudiées, et une solution pour les éviter est proposée. Elle est basée sur les limitations variables définies au chapitre 2. Comme on le verra, tous les résultats quant aux limitations variables resteront applicables aussi pour le réglage d'état.

Un système électromécanique oscillant à deux masses est représentatif, parmi d'autres systèmes réels, d'un axe d'une machine-outil. Après une modélisation poussée, on traitera, au chapitre 6, les problèmes particuliers relatifs à ce type de système. La structure de réglage employée est celle du réglage par mode de glissement hybride, ce qui permet, suite aux conclusions du chapitre 5, un traitement par le réglage d'état échantillonné. Comme on le verra, la structure de réglage complète n'est pas la plus performante, d'autant plus que des instabilités apparaissent lors du changement de structure du système à régler dû à la friction.

Le programme de dimensionnement et de simulation de systèmes réglés par mode de glissement, *Slimodesi*, développé pour ce travail, sera décrit au chapitre 7. Les six modes de simulation implantés seront présentés, conjointement avec quelques problèmes particuliers rencontrés et solutions originales apportées.

# TABLE DES MATIÈRES

<b>AVANT - PROPOS</b>	iii
<b>INTRODUCTION</b>	v
<b>TABLE DES MATIÈRES</b>	vii
<b>1 RÉGLAGE PAR MODE DE GLISSEMENT</b>	1
1.1 GÉNÉRALITÉS	1
1.1.1 Notations	1
1.1.2 Système à structure variable	1
1.2 PRINCIPE ET STRUCTURE DU SYSTEME RÉGLÉ	2
1.2.1 Configuration de la structure de réglage	2
1.2.2 Loi de commutation	3
1.2.3 Système à régler	3
1.2.4 Système réglé en mode de glissement	4
1.2.5 Equations en mode de glissement	5
1.3 FONCTION DE TRANSFERT EN MODE DE GLISSEMENT	6
1.3.1 Réponse indicielle du régulateur continu	6
1.3.2 Développement général	7
1.3.3 Cas sans régulateur intégrateur	8
1.3.4 Cas avec régulateur intégrateur	8
1.4 DÉTERMINATION DES COEFFICIENTS DU RÉGULATEUR	8
1.4.1 Introduction	8
1.4.2 Imposition des pôles	9
1.4.3 Domaine du mode de glissement et choix des pôles	10
1.4.4 Grandeurs en régime stationnaire	10
1.4.5 Détermination du coefficient d'intervention directe de la consigne $k_w$ dans le cas sans régulateur intégrateur	11
1.4.6 Détermination du coefficient d'intervention directe de la consigne $k_w$ dans le cas avec régulateur intégrateur	12
1.5 CONTRE-RÉACTION D'ÉTAT PARTIELLE	13
1.5.1 Introduction	13
1.5.2 Développement théorique	13
1.5.3 Méthode à appliquer	16
1.6 RÉALISATION PRATIQUE DU RÉGLAGE PAR MODE DE GLISSEMENT HYBRIDE	17
1.6.1 Introduction	17

1.6.2	Fréquence de commutation	17
1.6.3	Réglage par mode glissement hybride	18
1.6.4	Structure de réglage hybride avec limiteurs	18
<b>2</b>	<b>SYSTÈME RÉGLÉ EN LIMITATION</b>	<b>21</b>
2.1	INTRODUCTION	21
2.2	LIMITATIONS DES GRANDEURS D'ÉTAT	23
2.2.1	Hypothèses	23
2.2.2	Définition	23
2.3	CORRECTION DE L'INTÉGRATEUR EN CAS DE LIMITATION	24
2.3.1	But	24
2.3.2	Réglage continu	24
2.3.3	Réglage échantillonné	25
2.3.4	Limitations multiples simultanées	26
2.4	LIMITATIONS VARIABLES AVEC CORRECTION	27
2.4.1	Introduction	27
2.4.2	Définition de la limitation variable	27
2.4.3	Loi de commutation	29
2.4.4	Correction de l'intégrateur	29
2.4.5	Equation matricielle en boucle ouverte	30
2.4.6	Pôles du système réglé en boucle ouverte	31
2.4.7	Tension de commande équivalente	31
2.4.8	Système réglé en mode de glissement	32
2.4.9	Pôles du système réglé en mode de glissement	33
2.4.10	Fréquence de commutation	33
2.5	LIMITATIONS VARIABLES AVEC CORRECTION IDÉALE $K_{CI} = \infty$	34
2.5.1	Introduction	34
2.5.2	Hypothèses	34
2.5.3	Régulateur intégrateur	34
2.5.4	Equation matricielle globale	35
2.5.5	Pôles du système réglé en boucle ouverte	35
2.5.6	Comparaison avec la correction réelle	36
2.5.7	Tension de commande équivalente	36
2.5.8	Système réglé en mode de glissement	37
2.5.9	Pôles du système réglé en mode de glissement	37
2.5.10	Fréquence de commutation	38
2.6	HYPOTHESES	38
2.7	INTERPRÉTATION DES LIMITATIONS VARIABLES	39
2.7.1	Introduction	39
2.7.2	Equation caractéristique en limitation	39
2.7.3	Conclusion	40



2.8	CONCLUSION	40
<b>3</b>	<b>STRUCTURE DE RÉGLAGE HYBRIDE, TRAITEMENT EN PSEUDO-CONTINU</b>	<b>43</b>
3.1	INTRODUCTION	43
3.2	APPROXIMATIONS PSEUDO-CONTINUES	43
3.2.1	Organe de mesure digital	43
3.2.2	Organe de mesure digital de vitesse et quantification	44
3.2.3	Observateur digital de vitesse et quantification	45
3.2.4	Coefficients du régulateur pseudo-continu	46
3.2.5	Conditions du traitement en pseudo-continu	47
3.2.6	Interprétation de l'élément de maintien	47
<b>4</b>	<b>SYSTÈME EN MODE DE GLISSEMENT, RÉDUCTION DE L'ORDRE DU SYSTÈME, ET TRAITEMENT PAR LE RÉGLAGE D'ÉTAT</b>	<b>49</b>
4.1	INTRODUCTION	49
4.2	HYPOTHESES	50
4.2.1	Introduction	50
4.2.2	Hypothèses principales	50
4.2.3	Hypothèses secondaires	50
4.3	DÉCOMPOSITION EN DEUX SOUS-SYSTEMES	51
4.3.1	Généralités	51
4.3.2	Décomposition générale	51
4.3.3	Système réglé en mode de glissement	52
4.4	STRUCTURES DE RÉGLAGE	54
4.4.1	Introduction	54
4.4.2	Réglage continu	54
4.4.3	Réglage échantillonné	55
4.4.4	Réglage pseudo-continu	56
4.4.5	Conclusion	57
4.5	RÉGLAGE D'ÉTAT CONTINU AVEC LIMITATIONS VARIABLES	58
4.5.1	Introduction	58
4.5.2	Notations et structure de réglage	58
4.5.3	Equations du système à régler	59
4.5.4	Système réglé hors limitation	59
4.5.5	Equation globale en boucle ouverte du système réglé en limitation	60
4.5.6	Equation globale en boucle fermée du système réglé en limitation	61
4.5.7	Conclusion	62
4.6	RÉGLAGE D'ÉTAT ÉCHANTILLONNÉ AVEC LIMITA- TIONS VARIABLES	62
4.6.1	Introduction	62

4.6.2	Notations et structure de réglage	62
4.6.3	Equations aux différences du système à régler	63
4.6.4	Système réglé hors limitation	63
4.6.5	Equation globale en boucle ouverte du système réglé en limitation	64
4.6.6	Equation en boucle fermée du système réglé en limitation	65
4.6.7	Choix du coefficient de correction de l'intégrateur	66
4.7	CONCLUSION	66
<b>5</b>	<b>EXEMPLE D'APPLICATION N° 1 :</b>	
	<b>RÉGLAGE DE POSITION D'UN SYSTÈME</b>	
	<b>ÉLECTROMÉCANIQUE RIGIDE</b>	67
5.1	INTRODUCTION	67
5.2	SYSTEME À RÉGLER	67
5.2.1	Machine à courant continu	67
5.2.2	Variateur à courant continu	68
5.2.3	Grandeurs relatives	69
5.2.4	Organe de mesure digital de la vitesse	71
5.3	DONNÉES NUMÉRIQUES	72
5.4	RÉGLAGE DE VITESSE SANS INTÉGRATEUR AVEC MESURE DE VITESSE INSTANTANÉE	73
5.4.1	Introduction	73
5.4.2	Modélisation et structure de réglage	73
5.4.3	Mode de glissement hors limitation	74
5.4.4	Pôles en mode de glissement et dimensionnement des coefficients	75
5.4.5	Régime stationnaire, coefficient $k_{wn}$	75
5.4.6	Application numérique	76
5.4.7	Réponse indicielle du régulateur continu	76
5.4.8	Influence du choix des pôles	78
5.4.9	Système en limitation de courant	81
5.4.10	Saut de consigne avec limitation de courant	82
5.5	RÉGLAGE DE POSITION SANS INTÉGRATEUR AVEC MESURE DE VITESSE INSTANTANÉE	83
5.5.1	Introduction	83
5.5.2	Modélisation et structure de réglage	83
5.5.3	Mode de glissement hors limitation	84
5.5.4	Pôles en mode de glissement et dimensionnement des coefficients	85
5.5.5	Régime stationnaire, coefficient $k_{w\theta}$	86
5.5.6	Application numérique	86
5.5.7	Réponse indicielle du régulateur continu	87
5.5.8	Influence du choix des pôles	87
5.5.9	Système en limitation de courant	89

5.5.10	Saut de consigne avec limitation de courant	90
5.5.11	Système en limitation de vitesse	91
5.5.12	Saut de consigne avec limitation de vitesse	93
5.6	INSTABILITÉS DUES AUX LIMITATIONS DE VITESSE	94
5.6.1	Introduction	94
5.6.2	Influence de $n_{\max}$ sur le comportement global	94
5.6.3	Causes des instabilités dues aux limitations	96
5.6.4	Caractéristique idéale de limitation de vitesse	96
5.6.5	Pôles en limitation variable idéale	98
5.6.6	Application de la limitation variable de vitesse par segments	100
5.6.7	Equations de mouvement pour un segment linéaire	100
5.6.8	Choix des segments de limitation variable	101
5.6.9	Saut de consigne avec limitations variables	103
5.6.10	Pôles en limitation variable de vitesse	104
5.7	RÉGLAGE DE POSITION AVEC INTÉGRATEUR	105
5.7.1	Introduction	105
5.7.2	Modélisation et structure de réglage	106
5.7.3	Mode de glissement hors limitation	107
5.7.4	Pôles en mode de glissement et dimensionnement des coefficients	107
5.7.5	Régime stationnaire	108
5.7.6	Fonctions de transfert en mode de glissement	109
5.7.7	Système réglé en mode de glissement - réglage d'état continu	109
5.7.8	Système réglé en mode de glissement - réglage d'état échantillonné	111
5.7.9	Détermination de $k_{w\theta}$	112
5.7.10	Comparaisons réglage par mode de glissement continu - réglage d'état continu	113
5.7.11	Comparaisons réglage par mode de glissement continu - réglage par mode de glissement hybride	115
5.7.12	Comparaisons réglage par mode de glissement hybride - réglage d'état échantillonné	118
5.7.13	Conclusion sur les différentes approches possibles	121
5.7.14	Essais sur banc hors limitation	122
5.7.15	Essais sur banc en limitation de vitesse	123
5.8	CONCLUSION	126
6	<b>EXEMPLE D'APPLICATION N° 2 : SYSTÈME ÉLECTROMÉCANIQUE OSCILLANT À DEUX MASSES AVEC FROTTEMENT</b>	129
6.1	INTRODUCTION	129
6.2	MODÉLISATION D'UNE MACHINE-OUTIL	129
6.2.1	Introduction	129

6.2.2	Changements de référentiels	130
6.2.3	Grandeurs nominales et relatives	131
6.2.4	Description mécanique	133
6.2.5	Equations différentielles via le Lagrangien	134
6.3	MODÉLISATION PAR UN SYSTEME OSCILLANT À DEUX MASSES	137
6.3.1	Hypothèses et définitions	137
6.3.2	Equations différentielles du modèle de l'automaticien	138
6.4	ENERGIE ET PUISSANCE DU SYSTEME	140
6.5	PULSATIONS PROPRES ET AMORTISSEMENTS RELATIFS	140
6.5.1	Introduction	140
6.5.2	Mouvement libre	141
6.5.3	Mouvement du moteur / charge bloquée	142
6.5.4	Mouvement de la charge / moteur bloqué	142
6.5.5	Relations entre pulsations propres et amortissement	143
6.5.6	Remarques sur le coefficient d'amortissement et la pulsation propre	143
6.6	DONNÉES NUMÉRIQUES	143
6.7	CHOIX DU RÉGLAGE	144
6.8	RÉGLAGE DE POSITION PAR MODE DE GLISSEMENT CONTINU, AVEC MESURES INSTANTANÉES DES VITESSES	146
6.8.1	Introduction	146
6.8.2	Modélisation et structure de réglage de position	147
6.8.3	Mode de glissement hors limitation	148
6.8.4	Cas sans amortissement - dimensionnement	149
6.8.5	Système en limitation fixe de vitesse - cas sans amortissement	151
6.8.6	Choix des coefficients de limitation	152
6.9	STABILITÉ DU SYSTEME RÉGLÉ À CHARGE BLOQUÉE	153
6.9.1	Introduction	153
6.9.2	Modélisation	154
6.9.3	Pôles du système réglé en mode de glissement à charge bloquée	154
6.10	RÉGLAGE DE POSITION HYBRIDE COMPLET	156
6.10.1	Introduction	156
6.10.2	Modélisation avec organes de mesure de vitesse	156
6.10.3	Choix des pôles	158
6.10.4	Bruit sur la commande	159
6.10.5	Dimensionnement des coefficients	160
6.10.6	Essais sur banc	161

6.11	<b>SENSIBILITÉ DU RÉGLAGE DE POSITION COMPLET</b>	163
6.11.1	Introduction	163
6.11.2	Sensibilité aux variations de paramètres	164
6.11.3	Sensibilité aux variations des coefficients	166
6.11.4	Discussion des lieux des pôles	169
6.12	<b>RÉGLAGE DE POSITION HYBRIDE PARTIEL</b>	170
6.12.1	Introduction	170
6.12.2	Dimensionnement	171
6.12.3	Simulation numérique et essais sur banc	172
6.13	<b>SENSIBILITÉ DU RÉGLAGE DE POSITION PARTIEL</b>	174
6.13.1	Introduction	174
6.13.2	Sensibilité aux variations de paramètres	174
6.13.3	Sensibilité aux variations des coefficients	175
6.13.4	Discussion des lieux des pôles	178
6.14	<b>RÉGLAGE DE POSITION HYBRIDE COTÉ CHARGE SEUL</b>	179
6.14.1	Introduction	179
6.14.2	Dimensionnement	179
6.14.3	Simulation numérique et essais sur banc	181
6.15	<b>COMPARAISON DES PERFORMANCES DES DIFFÉRENTES STRUCTURES DE RÉGLAGE</b>	184
6.16	<b>CONCLUSION</b>	185
<b>7</b>	<b>DESCRIPTION DU PROGRAMME SLIMODESI</b>	187
7.1	<b>INTRODUCTION</b>	187
7.2	<b>DESCRIPTION GÉNÉRALE DE SLIMODESI</b>	187
7.2.1	Introduction	187
7.2.2	Structure générale et utilisation	187
7.2.3	Types de fichier	189
7.2.4	Définition du système	190
7.2.5	Choix de la structure et dimensionnement	191
7.2.6	Limitations et simulation	191
7.2.7	Limitations	192
7.2.8	Modes de simulation	193
7.2.9	Sorties graphiques	195
7.3	<b>CODES DE SLIMODESI</b>	196
7.3.1	Structure interne du programme source	196
7.3.2	Quelques chiffres	196
7.4	<b>QUELQUES PRÉCISIONS SUR LA SIMULATION</b>	197
7.4.1	Introduction	197
7.4.2	Choix du coefficient de correction de l'intégrateur en cas de limitation	197
7.4.3	Equations utilisées pour la simulation	197
7.4.4	Choix du pas de calcul	200

7.4.5	Simulation avec non-linéarités	200
7.4.6	Interpolations	201
7.4.7	Simulation dans le cas hybride	202
7.5	CONCLUSION	203
<b>8.</b>	<b>CONCLUSION GÉNÉRALE</b>	<b>205</b>
	<b>BIBLIOGRAPHIE</b>	<b>209</b>
	<b>GLOSSAIRE</b>	<b>211</b>
	Indices	214
	Opérateurs	215
	<b>CURRICULUM VITAE</b>	<b>217</b>

# 1 RÉGLAGE PAR MODE DE GLISSEMENT

## 1.1 GÉNÉRALITÉS

### 1.1.1 Notations

Pour une plus grande clarté du travail, il a été fait usage d'une notation assez stricte. Les majuscules ( $U, I, \Omega$ ) désignent les grandeurs absolues exprimées en unités MKSA. En grandeurs relatives, exprimées en pu (per unit), ces variables sont notées en minuscules ( $u, i, n$ ). Les matrices et vecteurs (lignes) sont décrits par des lettres grasses respectivement majuscules ( $\mathbf{A}, \Phi$ ) et minuscules ( $\mathbf{b}, \mathbf{c}^T$ ). Les indices peuvent avoir différentes significations; les grandeurs nominales sont indicées par  $n$ , les grandeurs relatives aux variables d'état telles que le courant, la vitesse et la position sont indicées par  $i, n, \theta$ ; les grandeurs se rapportant au système à régler sont notées par  $s$ . En indice supérieur,  $s$  dénote les grandeurs en régime stationnaire. L'astérisque en indice supérieur ( $\mathbf{A}^*$ ) se rapporte au système réglé en mode de glissement. Un point superposé ( $\dot{\mathbf{x}}$ ) à une variable ou à un vecteur représente sa dérivée par rapport au temps. Pour une meilleure compréhension des développements présentés, les dimensions des matrices seront quelques fois indiquées en indice ( $[\mathbf{S}]_{(n,m)}$ ).

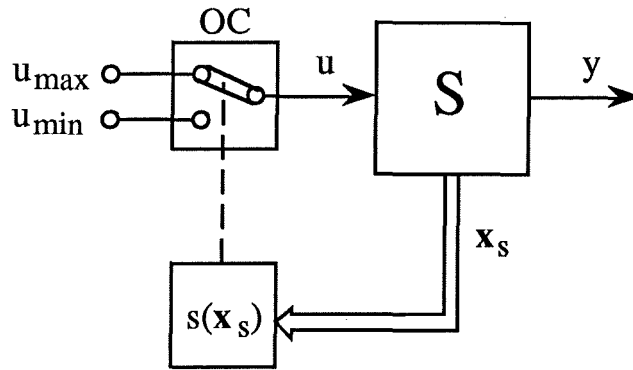
Sur les figures présentant des résultats sortis sur table traçante, les échelles sont notées souvent avec la notation scientifique : les préfixes pico-, nano-, micro-, milli-, kilo-, et méga- placés devant les unités de mesure, multiplient celles-ci respectivement par :

$$p=10^{-12} ; n=10^{-9} ; u=10^{-6} ; m=10^{-3} ; k=10^3 ; M=10^6.$$

### 1.1.2 Système à structure variable

Les développements récents dans le domaine des organes de commande par commutation permettent d'utiliser avantageusement leurs propriétés de commutation propres pour définir le changement de structure (Fig. 1.1). Dans ce travail, on admettra que l'organe de commande peut prendre deux états différents. Une loi de commutation  $s(x_s)$ , basée sur la contre-réaction d'état des grandeurs du système à régler, détermine l'état de l'organe de commande.

Dans ce contexte, un variateur à courant continu peut être utilisé pour alimenter une machine à courant continu et un onduleur triphasé pour alimenter un moteur à induction (machine synchrone ou machine asynchrone) [3]. Les exemples d'application traités dans ce travail utilisent une machine à courant continu, et représentent donc des cas de systèmes monovariables [4]. Les systèmes multivariables ne sont pas traités dans ce travail de thèse.



**Fig. 1.1** Système avec commutation de la structure au niveau de l'organe de commande.

Par mode de glissement, on désigne un mode particulier de fonctionnement des systèmes à structure variable. Il est atteint lorsque le point de fonctionnement du système réglé décrit une trajectoire dans un hyperplan dit de commutation, dans lequel la loi de commutation s'annule. En réalité, la fréquence de commutation réelle de l'organe de commande étant finie, le point de fonctionnement oscille autour de l'hyperplan de commutation.

Dans les sections 1.2 et 1.3, on présentera succinctement la théorie générale du réglage par mode de glissement. Une description détaillée peut être trouvée dans [2]. A la sect. 1.4, une généralisation est apportée avec l'étude de la contre-réaction d'état partielle.

## 1.2 PRINCIPE ET STRUCTURE DU SYSTEME RÉGLÉ

### 1.2.1 Configuration de la structure de réglage

La fig. 1.2 représente la configuration type d'un système réglé par le principe du mode de glissement. Un régulateur intégrateur  $R$  permet d'éliminer l'influence d'une perturbation quant à l'erreur statique. L'anticipation de la consigne par le coefficient  $k_w$  est profitable à la rapidité du système réglé.

On remarque que la structure de réglage aboutissant à la formation de la loi (ou stratégie) de commutation correspond à la structure optimale telle qu'elle a été synthétisée dans le cadre des théories de réglage par contre-réaction d'état [5].



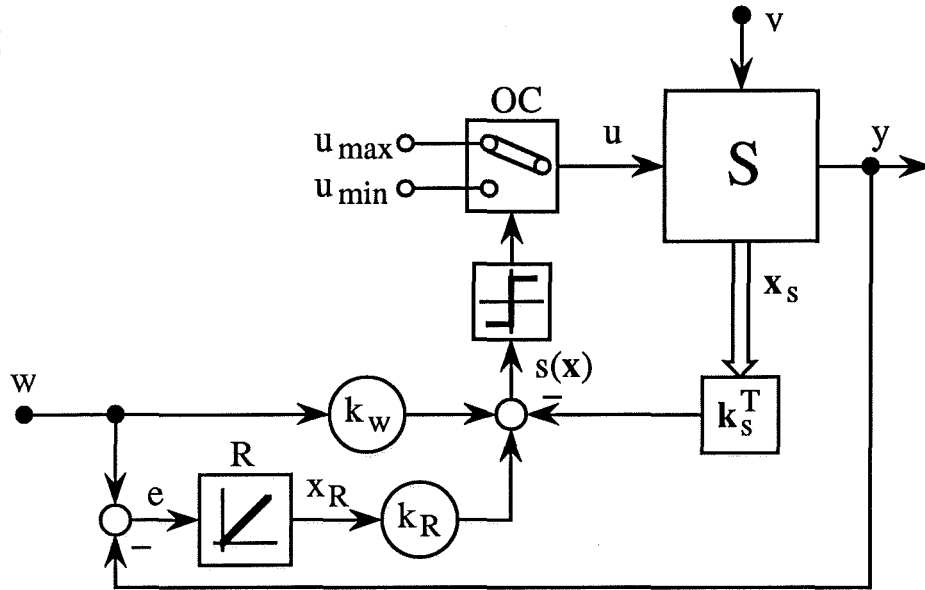


Fig. 1.2 Structure de base avec régulateur intégrateur.

S représente le système à régler.  $u$ ,  $y$  et  $v$  sont respectivement les grandeurs de commande, de sortie (ou à régler) et de perturbation du système à régler.  $w$  est la grandeur de consigne.  $k_S^T$ ,  $k_R$  et  $k_w$  sont les coefficients à déterminer.

### 1.2.2 Loi de commutation

La grandeur de commande  $u$  peut prendre deux valeurs  $u_{\max}$  et  $u_{\min}$  en fonction de la loi de commutation  $s$  selon

$$\left. \begin{array}{l} u = u_{\max} \quad \text{pour} \quad s(x) > 0 \\ u = u_{\min} \quad \text{pour} \quad s(x) \leq 0 \end{array} \right\} \quad (1.1)$$

D'une manière semblable au réglage d'état, la loi de commutation  $s$  est donnée par

$$s(x) = -k^T x + k_w w \quad (1.2)$$

### 1.2.3 Système à régler

Le système à régler S seul est toujours décrit par

$$\dot{x}_S = A_S x_S + b_S u + b_{SV} v \quad (1.3)$$

$$y = c_S^T x_S \quad (1.4)$$

Le vecteur d'état  $x_S$  du système à régler S et la grandeur d'état  $x_R$  du régulateur intégrateur R sont réunis dans le vecteur  $x$  de dimension  $n=n_S+1$  :

$$x = \begin{bmatrix} x_S \\ x_R \end{bmatrix} \quad (1.5)$$

L'équation d'état de l'intégrateur est donnée par

$$\dot{x}_R = \frac{1}{T_i} (w-y) \quad (1.6)$$

avec  $T_i$  la constante de temps d'intégration du régulateur intégrateur et  $y$  la grandeur de sortie du système à régler.

Le vecteur ligne  $\mathbf{k}^T$  de (1.2), donné par

$$\mathbf{k}^T = [ \mathbf{k}_s^T \quad -k_R ] \quad (1.7)$$

contient les coefficients de contre-réaction à calculer, et  $k_w$  est l'intervention directe de la grandeur de consigne.

Le système à régler global peut être décrit par ses équations d'état :

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u + \mathbf{b}_v v + \mathbf{b}_w w \quad (1.8)$$

$$y = \mathbf{c}^T \mathbf{x} \quad (1.9)$$

avec

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_s & \mathbf{0} \\ -\frac{1}{T_i} \mathbf{c}_s^T & 0 \end{bmatrix} \quad (1.10a)$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_s \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{b}_v = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{sv} \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{b}_w = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \frac{1}{T_i} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{c}^T = [ \mathbf{c}_s^T \quad 0 ] \quad (1.10b)$$

## 1.2.4 Système réglé en mode de glissement

### 1.2.4.1 Hypothèses

Pour la description théorique, on admet que la commutation de l'organe de commande entre  $u_{\max}$  et  $u_{\min}$  se fait à fréquence infinie :

$$f_c = \infty \quad (1.11)$$

### 1.2.4.2 Hyperplan de commutation

Compte tenu de l'hypothèse du § 1.2.4.1, le mode de glissement du système réglé est défini lorsque le point de fonctionnement décrit une trajectoire sur l'hyperplan de commutation donné par

$$s(\mathbf{x}) = 0 \quad (1.12)$$

$n$  étant l'ordre du système à régler global (intégrateur éventuel compris), l'hyperplan de commutation est un espace de dimension  $n-1$ .

Dans ce cas, on a évidemment aussi

$$\dot{s}(\mathbf{x}) = 0 \quad (1.13)$$

Compte tenu de (1.2) et (1.9), on obtient

$$\dot{\mathbf{s}}(\mathbf{x}) = -\mathbf{k}^T(\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u + \mathbf{b}_v\mathbf{v} + \mathbf{b}_w\mathbf{w}) + k_w\dot{\mathbf{w}} = 0 \quad (1.14)$$

### 1.2.4.3 Grandeur de commande équivalente

A fréquence de commutation infinie, la grandeur de commande  $u$  peut être remplacée par sa valeur moyenne qui est une grandeur continue. Elle est appelée grandeur de commande équivalente  $u_{eq}$ . De (1.14) on obtient

$$\begin{aligned} u_{eq} &= -\frac{1}{\mathbf{k}^T\mathbf{b}} \left[ \mathbf{k}^T (\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}_v\mathbf{v} + \mathbf{b}_w\mathbf{w}) - k_w\dot{\mathbf{w}} \right] = \\ &= u_{eqs} + \frac{1}{\mathbf{k}_s^T\mathbf{b}_s} \frac{k_R}{T_i} (\mathbf{w} - \mathbf{c}_s^T\mathbf{x}_s) = u_{eqs} + \frac{k_R}{\mathbf{k}_s^T\mathbf{b}_s} \dot{\mathbf{x}}_R \end{aligned} \quad (1.15a)$$

avec

$$u_{eqs} = -\frac{1}{\mathbf{k}_s^T\mathbf{b}_s} \left[ \mathbf{k}_s^T (\mathbf{A}_s\mathbf{x}_s + \mathbf{b}_{sv}\mathbf{v}) - k_w\dot{\mathbf{w}} \right] \quad (1.15b)$$

$\mathbf{k}^T\mathbf{b} = \mathbf{k}_s^T\mathbf{b}_s \neq 0$  est une condition nécessaire pour l'existence du mode de glissement. La condition d'apparition ou de subsistance du mode de glissement est

$$u_{min} \leq u_{eq} \leq u_{max} \quad (1.16)$$

### 1.2.5 Equations en mode de glissement

En introduisant (1.15) dans (1.8), on obtient l'équation d'état du système réglé en mode de glissement

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^*\mathbf{x} + \mathbf{b}_v^*\mathbf{v} + \mathbf{b}_w^*\mathbf{w} + \mathbf{b}_w^*\dot{\mathbf{w}} \quad (1.17)$$

Avec la matrice  $\mathbf{M}$ , qui est singulière,

$$\mathbf{M} = \mathbf{1} - \frac{1}{\mathbf{k}^T\mathbf{b}} \mathbf{b}\mathbf{k}^T = \begin{bmatrix} \left( \mathbf{1} - \frac{1}{\mathbf{k}_s^T\mathbf{b}_s} \mathbf{b}_s\mathbf{k}_s^T \right) & \frac{k_R}{\mathbf{k}_s^T\mathbf{b}_s} \mathbf{b}_s \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_s & \frac{k_R}{\mathbf{k}_s^T\mathbf{b}_s} \mathbf{b}_s \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \quad (1.18)$$

on a les relations complètes suivantes :

$$\mathbf{A}^* = \mathbf{M}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \left( \mathbf{M}_s\mathbf{A}_s - \frac{k_R}{T_i\mathbf{k}_s^T\mathbf{b}_s} \mathbf{b}_s\mathbf{c}_s^T \right) & \mathbf{0} \\ -\frac{1}{T_i} \mathbf{c}_s^T & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left( \mathbf{A}_s^* - \frac{k_R}{T_i\mathbf{k}_s^T\mathbf{b}_s} \mathbf{b}_s\mathbf{c}_s^T \right) & \mathbf{0} \\ -\frac{1}{T_i} \mathbf{c}_s^T & 0 \end{bmatrix} \quad (1.19a)$$

$$\mathbf{b}_v^* = \mathbf{M}\mathbf{b}_v = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_s\mathbf{b}_{sv} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{sv}^* \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.19b)$$

$$\mathbf{b}_w^* = \mathbf{M}\mathbf{b}_w = \begin{bmatrix} \frac{k_R}{T_i k_s^T} \mathbf{b}_s \\ \frac{1}{T_i} \end{bmatrix} \quad (1.19c)$$

$$\mathbf{b}_w^* = \frac{k_w}{k^T \mathbf{b}} \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \frac{k_w}{k_s^T} \mathbf{b}_s \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{sw}^* \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.19d)$$

Remarquons que la matrice  $\mathbf{A}^*$  est singulière, une relation linéaire ayant été introduite par la condition (1.12) sur l'hyperplan de commutation.

### 1.3 FONCTION DE TRANSFERT EN MODE DE GLISSEMENT

#### 1.3.1 Réponse indicielle du régulateur continu

Le réglage par mode de glissement est fondamentalement non-linéaire. Avant l'entrée en mode de glissement, le système réglé fonctionne de fait en boucle ouverte. Lorsque le point de fonctionnement atteint l'hyperplan de commutation  $s=0$ , et que les conditions nécessaires sont établies, le mode de glissement s'installe. Celui-ci est non-linéaire puisqu'il y a commutation de l'organe de commande entre deux valeurs; en considérant toutefois une fréquence de commutation infinie de la grandeur de commande, un traitement idéal linéaire est possible (les grandeurs sont notées avec un  $*$ ). Malgré tout, puisque deux modes de fonctionnement existent (hors et en mode de glissement), il n'est en principe pas possible de définir une fonction de transfert unique et exacte (dans le temps).

Rigoureusement, on ne devrait de ce fait pas parler de réponse indicielle du système réglé. Par la suite pourtant, ce terme est à prendre au sens plus large de réponse à un saut de consigne ou de perturbation.

En négligeant le temps hors mode de glissement (qui se présente en général seulement après un saut brusque de la consigne ou de la perturbation), il est loisible de définir une fonction de transfert. On peut alors parler de réponse indicielle au sens strict du terme. Cependant, cette fonction de transfert ne pourra jamais décrire exactement le comportement global (dans le temps) de tout le phénomène. Toutefois, on verra qu'en négligeant le temps hors mode de glissement, mais pas son influence, il est possible de décrire une autre fonction de transfert pour le comportement global. Au chapitre 4, on verra comment le système réglé en mode de glissement peut se décomposer en deux sous-systèmes. Cela permettra alors de vérifier cette fonction de transfert pour le comportement global dans le temps.

### 1.3.2 Développement général

En mode de glissement, le système réglé est décrit par l'équation d'état (1.17). Le point de fonctionnement se trouve sur l'hyperplan de commutation; la relation (1.12) sur la loi de commutation est satisfaite.

Le système réglé en mode de glissement idéal étant linéaire, il est loisible de définir une fonction de transfert de la grandeur de sortie  $y$  par rapport à la grandeur de consigne  $w$ . Soit  $G_w^*(s)=y(s)/w(s)$  cette fonction de transfert.

Pour la détermination de  $G_w^*(s)$  il est nécessaire de déterminer le vecteur d'état  $x$ . L'équation d'état en mode de glissement (1.17), soumise à la transformation de Laplace devient

$$s \cdot x(s) - x(t_0) = A^* x(s) + b_v^* v(s) + b_w^* w(s) + b_{\dot{w}}^* \dot{w}(s) \quad (1.20)$$

où  $x(t_0)$  sont les conditions initiales du vecteur d'état  $x$  au temps  $t=t_0$  d'entrée en mode de glissement. L'équation (1.20) est valable pour  $t \geq t_0$ .

Il faut remarquer qu'on a préféré la notation  $\dot{w}(s)$  à celle de  $s \cdot w(s)$  dans le but d'une plus grande clarté. En effet, par la suite on s'intéressera plus particulièrement au cas du saut de consigne (soit  $\dot{w}=0$  pour  $t > 0$ ) qu'au cas de la consigne variable.

La grandeur de sortie est alors donnée selon (1.9) et (1.20) par

$$y(s) = c^T x(s) = c^T (s\mathbf{1} - A^*)^{-1} [ x(t_0) + b_v^* v(s) + b_w^* w(s) + b_{\dot{w}}^* \dot{w}(s) ] \quad (1.21)$$

Dans le calcul de la réponse indicielle pour  $t \geq t_0$  (1.21), on constate donc que les conditions initiales  $x(t_0)$  ont leur importance. C'est par ce terme que l'effet de la phase hors mode de glissement ( $t=0 \dots t_0$ ) est pris en compte.

Dès lors que le saut de consigne a eu lieu en  $t=0$ , il faut considérer le terme de la dérivée de la consigne comme nul :  $\dot{w}=0$ , soit  $\dot{w}(s)=0$  dans le domaine de Laplace. On peut alors définir une fonction de transfert par rapport à la consigne  $G_w^*(s)=y(s)/w(s)$ , définie à perturbation nulle, qui est valable uniquement sur l'hyperplan de commutation  $s(x)=0$ . De (1.21), on trouve :

$$G_w^*(s) = \frac{y(s)}{w(s)} = c^T (s\mathbf{1} - A^*)^{-1} b_w^* \quad \text{pour } t \geq t_0 \quad (1.22)$$

*Remarque :* Cette fonction de transfert ne saurait, rappelons-le, décrire entièrement le comportement du système réglé; les conditions initiales déploient toute leur importance dans le calcul de la réponse indicielle, comme on le voit dans (1.21).

Par une autre approche, en négligeant le temps hors mode de glissement, c'est-à-dire en supposant que le système réglé est toujours en mode de glissement, (même avec un saut de consigne), on obtient

$$x(t_0=0) = \mathbf{0} \quad (1.23a)$$

$$\dot{w}(s) = s \cdot w(s) \quad (1.23b)$$

ce qui permet de définir une autre fonction de transfert qui, elle, décrit le phénomène globalement, en négligeant le temps hors mode de glissement, mais pas son effet :

$$G_w(s) = \frac{y(s)}{w(s)} = c^T (s\mathbf{1} - A^*)^{-1} (b_w^* + s \cdot b_w^*) \quad \text{pour } t \geq 0 \quad (1.24)$$

### 1.3.3 Cas sans régulateur intégrateur

Pour une structure de réglage sans régulateur intégrateur, on a toujours  $b_w^* = 0$ . La fonction de transfert (1.22) s'annule :

$$G_{sw}^*(s) = 0 \quad \text{pour } t \geq t_0 \quad (1.25)$$

alors que la fonction de transfert globale est

$$G_{sw}(s) = c_s^T (s\mathbf{1} - A_s^*)^{-1} \cdot s \cdot b_{sw}^* \quad \text{pour } t \geq 0 \quad (1.26)$$

### 1.3.4 Cas avec régulateur intégrateur

Compte tenu de l'allure de la matrice  $A^*$  donnée par (1.19a) dans le cas avec régulateur intégrateur, on peut écrire

$$(s\mathbf{1} - A^*)^{-1} = \begin{bmatrix} (s\mathbf{1} - A_s^* + \frac{k_R}{T_i k_s^T b_s} b_s c_s^T)^{-1} & \mathbf{0} \\ -\frac{1}{s T_i} c_s^T (s\mathbf{1} - A_s^* + \frac{k_R}{T_i k_s^T b_s} b_s c_s^T)^{-1} & \frac{1}{s} \end{bmatrix} \quad (1.27)$$

Ainsi, avec (1.10b), (1.19) et (1.22), on a :

$$G_w^*(s) = c_s^T \cdot (s\mathbf{1} - A_s^* + \frac{k_R}{T_i k_s^T b_s} b_s c_s^T)^{-1} \cdot \frac{k_R}{T_i} \frac{b_s}{k_s^T b_s} \quad \text{pour } t \geq t_0 \quad (1.28)$$

alors que (1.24) devient :

$$G_w(s) = c_s^T \cdot (s\mathbf{1} - A_s^* + \frac{k_R}{T_i k_s^T b_s} b_s c_s^T)^{-1} \cdot (\frac{k_R}{T_i} + s \cdot k_w) \frac{b_s}{k_s^T b_s} \quad \text{pour } t \geq 0 \quad (1.29)$$

On constate donc en particulier que  $G_w^*(s)$  ne dépend pas du coefficient d'intervention directe de la consigne  $k_w$ , contrairement à  $G_w(s)$ .

## 1.4 DÉTERMINATION DES COEFFICIENTS DU RÉGULATEUR

### 1.4.1 Introduction

Pour le dimensionnement d'un réglage d'état, les coefficients de contre-réaction des variables d'état peuvent être dimensionnés par la méthode d'imposition des pôles [6]. Cette méthode peut aussi être appliquée au dimensionnement d'un réglage par mode de glissement.

### 1.4.2 Imposition des pôles

Le comportement dynamique en mode de glissement est déterminé par son équation caractéristique

$$P^*(s) = \det(s\mathbf{1} - \mathbf{A}^*) = s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \dots + \alpha_1s + \alpha_0 = 0 \quad (1.30)$$

Les pôles du système réglé sont liés aux coefficients  $\alpha_i$  selon

$$P^*(s) = (s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n) \quad (1.31)$$

où  $n$  est l'ordre du système à régler, régulateur intégrateur éventuel compris.

Par une transformation linéaire

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{E} \mathbf{x} \quad (1.32)$$

l'équation d'état en mode de glissement (1.17) est transformée dans sa forme canonique de réglage [5]. Après quelques développements, on aboutit à

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1^T \\ \mathbf{e}_1^T \mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{e}_1^T \mathbf{A}^{n-1} \end{bmatrix}_{(n,n)} \quad (1.33)$$

où  $\mathbf{e}_1^T$  est un vecteur ligne auxiliaire défini par

$$\mathbf{e}_1^T \mathbf{Q}_c = [0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1] \quad (1.34)$$

avec

$$\mathbf{Q}_c = [\mathbf{b} \ \mathbf{A}\mathbf{b} \ \mathbf{A}^2\mathbf{b} \ \dots \ \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b}]_{(n,n)} \quad (1.35)$$

la matrice de commandabilité.

Finalement, les coefficients de contre-réaction  $k_i$  sont liés aux coefficients  $\alpha_i$  de l'équation caractéristique par

$$\mathbf{k}^T = c [\boldsymbol{\alpha}^T \ 1] \mathbf{E} \quad (1.36)$$

avec

$$\boldsymbol{\alpha}^T = [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \dots \ \alpha_{n-1}]_{(1,n-1)} \quad (1.37)$$

de dimension  $(1,n-1)$ , comprenant les coefficients de l'équation caractéristique, sauf  $\alpha_0$ , qui est nul :  $\mathbf{A}^*$  étant singulière (§ 1.2.4), un pôle est imposé à l'origine et un coefficient, le facteur  $c$ , peut être choisi librement. Arbitrairement, on choisira en général  $c$  de manière à avoir  $k_1=1$  :

$$c = \frac{1}{[\boldsymbol{\alpha}^T \ 1] \mathbf{e}_1} \quad (1.38)$$

où  $\mathbf{e}_1$  est la première colonne de  $\mathbf{E}$  (à ne pas confondre avec  $(\mathbf{e}_1^T)^T$  la transposée de la première ligne de  $\mathbf{E}$ ).

Les  $n-1$  pôles restants peuvent être choisis librement, réels ou complexes conjugués. Plus les pôles sont rapides, plus le domaine du mode de glissement est restreint (voir § 1.4.3). De ce fait, ces pôles devront être choisis de cas en cas, selon l'application, pour assurer le mode de glissement dans toute la plage de fonctionnement désirée.

### 1.4.3 Domaine du mode de glissement et choix des pôles

Le domaine de glissement n'existe pas dans tout l'hyperplan de commutation  $s(\mathbf{x}) = 0$ . Le domaine est limité par la condition (1.16) sur la grandeur de commande équivalente. Le vecteur d'état  $\hat{\mathbf{x}}$  se trouvant sur ses limites est donné selon (1.1) par

$$\mathbf{k}^T(\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{b}u_{\text{lim}} + \mathbf{b}_v v + \mathbf{b}_w w) - k_w \dot{w} = 0 \quad (1.39)$$

avec  $u_{\text{lim}} = u_{\text{max}}$  ou  $u_{\text{lim}} = u_{\text{min}}$ .

Bien sûr l'équation (1.12) doit être satisfaite :

$$s(\hat{\mathbf{x}}) = -\mathbf{k}^T \hat{\mathbf{x}} + k_w w = 0 \quad (1.40)$$

En observant (1.39) on remarque que la valeur des pôles, les valeurs maximales des variables du système ( $\mathbf{x}$ ,  $w$ ,  $\dot{w}$ ,  $v$ ) et le coefficient  $k_w$  agissent sur ces limites et par conséquent sur l'étendue du domaine de glissement.

Dans la pratique, le choix des pôles sera principalement effectué de sorte que les coefficients de contre-réaction ne dépassent pas certaines limites. Celles-ci dépendent en particulier du bruit sur la mesure, qui peut provenir de différentes sources. Oscillations basses ou hautes fréquences sur une mesure analogique; bruit de quantification dans le cas d'une mesure digitale. Dans ce cas, on calculera la valeur maximale du bruit et, selon les ondulations tolérées sur la commande, on fixera un coefficient maximal admissible.

### 1.4.4 Grandeurs en régime stationnaire

La détermination des grandeurs d'état en régime stationnaire doit être effectuée en utilisant l'équation du système réglé en boucle ouverte (1.8) (voir [2, § 5.4.5]). Pour ce faire, il est de plus nécessaire d'effectuer la décomposition de  $\mathbf{x}$  selon

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_a \\ \mathbf{x}_n \end{bmatrix} \quad (1.41)$$

ce qui induit aussi les décompositions suivantes :

$$\mathbf{k}^T = [ \mathbf{k}_a^T \quad k_n ] \quad ; \quad \mathbf{c}^T = [ \mathbf{c}_a^T \quad c_n ] \quad (1.42)$$



Dans le cas où on est en présence d'une contre-réaction d'état partielle (voir section 1.5), il se peut que  $k_n$  soit nul. Dans ce cas, il faut effectuer une permutation du vecteur d'état  $\mathbf{x}$  avant d'effectuer la décomposition proposée.

De la loi de commutation (1.12) qui s'annule, on peut tirer

$$x_n = -\frac{1}{k_n} \mathbf{k}_a^T \mathbf{x}_a + \frac{k_w}{k_n} w \quad (1.43)$$

ce qui permet d'écrire  $\mathbf{x}$  selon

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{n-1} \\ -\frac{1}{k_n} \mathbf{k}_a^T \end{bmatrix} \mathbf{x}_a + \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n-1} \\ \frac{k_w}{k_n} \end{bmatrix} w = \mathbf{A}_{xa} \mathbf{x}_a + \mathbf{a}_w w \quad (1.44)$$

où

$$\mathbf{A}_{xa} = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{n-1} \\ -\frac{1}{k_n} \mathbf{k}_a^T \end{bmatrix}_{(n,n-1)} ; \quad \mathbf{a}_w = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n-1} \\ \frac{k_w}{k_n} \end{bmatrix}_{(n,1)} \quad (1.45)$$

En introduisant la relation (1.44) dans (1.8) en régime stationnaire, on trouve après quelques calculs :

$$\mathbf{A} \mathbf{A}_{xa} \mathbf{x}_a^s + \mathbf{b} u_{eq}^s + \mathbf{b}_v v^s + (\mathbf{b}_w + \mathbf{A} \mathbf{a}_w) w^s = \mathbf{0} \quad (1.46)$$

ce qui permet de déduire

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_a^s \\ u_{eq}^s \end{bmatrix} = -\mathbf{F}^{-1} [ \mathbf{b}_v v^s + (\mathbf{b}_w + \mathbf{A} \mathbf{a}_w) w^s ] \quad (1.47)$$

avec

$$\mathbf{F} = [ \mathbf{A} \mathbf{A}_{xa} \quad \mathbf{b} ]_{(n,n)} \quad (1.48)$$

La grandeur d'état  $x_n^s$  est obtenue par (1.43).

#### 1.4.5 Détermination du coefficient d'intervention directe de la consigne $k_w$ dans le cas sans régulateur intégrateur

Dans le cas sans régulateur intégrateur,  $k_w$  est déterminé afin d'éviter un statisme en régime stationnaire et à perturbation nulle. Ainsi la condition

$$y^s = \mathbf{c}_a^T \mathbf{x}_a^s + c_n x_n^s = w^s \quad (1.49)$$

permet après quelques calculs [2, § 5.5.2] d'aboutir à

$$k_w = \frac{k_n}{c_n - [\mathbf{d}_a^T \quad 0] \mathbf{F}^{-1} \mathbf{a}_{ns}} \quad (1.50)$$

avec

$$\mathbf{d}_a^T = \mathbf{c}_a^T - \frac{c_n}{k_n} \mathbf{k}_a^T \quad (1.51)$$

$$\mathbf{a}_{ns} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n-1} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1.52)$$

### 1.4.6 Détermination du coefficient d'intervention directe de la consigne $k_w$ dans le cas avec régulateur intégrateur

#### 1.4.6.1 Introduction

Lorsque la structure de réglage comprend un régulateur intégrateur, on a en régime établi toujours  $y^s = w^s$  indépendamment de la perturbation  $v^s$  [2, § 5.5.3]. Le coefficient d'intervention directe de la consigne peut donc être choisi selon plusieurs critères.

#### 1.4.6.2 Grandeur d'état du régulateur intégrateur nulle en régime établi

La relation (1.47) sur le régime stationnaire devient dans ce cas particulier avec intégrateur :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_s^s \\ \mathbf{u}_{eq}^s \end{bmatrix} = -\mathbf{F}^{-1} (\mathbf{b}_v v^s + \mathbf{b}_w w^s) \quad (1.53)$$

où

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_s & \mathbf{b}_s \\ -\frac{1}{T_i} \mathbf{c}_s^T & 0 \end{bmatrix} \quad (1.54)$$

En décrivant  $\mathbf{F}^{-1}$  selon

$$\mathbf{F}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_s & \mathbf{g}_s \\ \mathbf{g}_n^T & \mathbf{g}_{nn} \end{bmatrix} \quad (1.55)$$

on voit que pour annuler  $x_R$  en régime établi [voir (1.43)]

$$x_n^s = x_R^s = -\frac{1}{k_R} (-\mathbf{k}_s^T \mathbf{x}_s^s + k_w w^s) \quad (1.56)$$

avec  $v^s = 0$ , il faut choisir

$$k_w = -\frac{1}{T_i} \mathbf{k}_s^T \mathbf{g}_s \quad (1.57)$$

#### 1.4.6.3 Compensation d'un pôle

Au paragraphe 1.3.4, nous avons vu que la fonction de transfert  $G_w^*(s)$  en mode de glissement n'est pas une fonction de  $k_w$ .

Par contre, celle décrivant le comportement global,  $G_w(s)$ , fait apparaître un zéro en  $n_0 = -k_R/k_w T_i$  {voir (1.29)}. Comme pour le réglage par contre-réaction d'état [5, sect. 19.4], il est dès lors possible de choisir  $k_w$  pour compenser un pôle  $p_i$  par ce zéro :

$$k_w = - \frac{k_R}{p_i T_i} \quad (1.58)$$

Ce procédé trouvera encore une autre justification grâce à l'approche différente du chapitre 4. Comme on le verra, le système réglé en mode de glissement peut être décomposé, ce qui permet le traitement par le réglage d'état. Le coefficient  $k_w$  peut donc être dimensionné pour compenser un pôle continu (4.27) ou échantillonné (4.46). Les deux approches se valent. La phase où le système réglé n'est pas en mode de glissement n'est pas prise en compte du point de vue du temps.

## 1.5 CONTRE-RÉACTION D'ÉTAT PARTIELLE

### 1.5.1 Introduction

Tout système réel peut être décrit par un modèle plus ou moins complet, c'est-à-dire s'approchant avec plus ou moins de précision du comportement physique réel.

Dans la réalité de la pratique, et selon le modèle choisi, il est rare de pouvoir disposer de toutes les grandeurs d'état d'un système à régler. Certaines peuvent être observées ou estimées, alors que d'autres ne sont pas mises en contre-réaction. Dans ce cas, on a à faire à une contre-réaction partielle.

La méthode de détermination des coefficients présentée à la section 1.3 est valable pour le cas de la contre-réaction de toutes les grandeurs d'état (contre-réaction globale).

L'étude de la contre-réaction d'état partielle, décrite dans cette section, est d'ordre complémentaire aux méthodes présentées dans [2] et résumées à la section 1.4.

Ces études, étant un apport nouveau, seront détaillées d'une manière plus complète que ce qui précédait. Au § 1.5.2, les développements théoriques sont exposés. La démarche de la méthode à employer lors de la détermination des coefficients est proposée au §1.5.3.

### 1.5.2 Développement théorique

Comme pour la contre-réaction d'état globale [voir (1.36)], le vecteur ligne des coefficients de contre-réaction d'état est défini par

$$\mathbf{k}^T = \mathbf{c} [ \mathbf{a}^T \ 1 ] \mathbf{E} \quad (1.59)$$

Pour les besoins de la contre-réaction partielle, il faut effectuer le cas échéant une permutation des éléments de  $\mathbf{k}^T$  de sorte que

$$\mathbf{k}'^T = [ \mathbf{k}_a^T \quad \mathbf{k}_b^T ] \quad (1.60)$$

où

$\mathbf{k}_a^T$  inclut les  $n-r$  coefficients à déterminer,

$\mathbf{k}_b^T$  inclut les  $r$  coefficients imposés (le plus souvent à zéro).

Conformément à (1.59), on obtient

$$\mathbf{k}'^T = [ \mathbf{k}_a^T \quad \mathbf{k}_b^T ] = c [ \mathbf{a}^T \quad 1 ] [ \mathbf{E}_a \quad \mathbf{E}_b ] \quad (1.61)$$

où sur les colonnes de  $\mathbf{E}$  il faut appliquer les mêmes permutations que sur  $\mathbf{k}^T$ .

L'équation caractéristique du système réglé en mode de glissement (1.30) peut être décomposée en un produit de deux polynômes selon

$$\begin{aligned} P^*(s) &= \det(s\mathbf{1} - \mathbf{A}^*) = s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \dots + \alpha_1s + \alpha_0 = \\ &= Q^*(s) R^*(s) = 0 \end{aligned} \quad (1.62)$$

avec

$$Q^*(s) = s^{n-r} + \beta_{n-r-1}s^{n-r-1} + \dots + \beta_1s + \beta_0 \quad (1.63)$$

le polynôme caractéristique dépendant des  $n-r$  pôles choisis librement, y compris celui à l'origine, et

$$R^*(s) = s^r + \delta_{r-1}s^{r-1} + \dots + \delta_1s + \delta_0 \quad (1.64)$$

le polynôme caractéristique des pôles dûs aux  $r$  coefficients imposés dans  $\mathbf{k}_b^T$ .

Compte tenu de (1.62) et du fait que le pôle à l'origine provenant de la singularité de  $\mathbf{A}^*$  est englobé dans  $Q^*(s)$ , il s'ensuit

$$\beta_0 = \alpha_0 = 0 \quad (1.65)$$

Avec (1.65) et les définitions

$$\boldsymbol{\alpha}^T = [ \alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \dots \quad \alpha_{n-1} ]_{(1,n-1)} \quad (1.66)$$

$$\boldsymbol{\delta}^T = [ \delta_0 \quad \delta_1 \quad \delta_2 \quad \dots \quad \delta_{r-2} \quad \delta_{r-1} ]_{(1,r)} \quad (1.67)$$

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \dots & \dots & \beta_{n-r-1} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \beta_1 & \beta_2 & \dots & \dots & \beta_{n-r-2} & \beta_{n-r-1} & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \beta_1 & \dots & \beta_{n-r-3} & \beta_{n-r-2} & \beta_{n-r-1} & 1 & 0 \end{bmatrix}_{(r,n)} \quad (1.68)$$

$$\boldsymbol{\beta}^T = [ 0 \quad 0 \quad \dots \quad \dots \quad \beta_1 \quad \dots \quad \beta_{n-r-3} \quad \beta_{n-r-2} \quad \beta_{n-r-1} \quad 1 ]_{(1,n)} \quad (1.69)$$

contenant  $r$  zéros et les coefficients  $\beta_i$  sauf  $\beta_0$ , la relation (1.62) peut être écrite sous forme matricielle. On obtient successivement

$$\begin{aligned}
[0 \ \alpha_1 \ \alpha_2 \ \dots \ \alpha_{n-1} \ 1] \begin{bmatrix} 1 \\ s \\ \vdots \\ s^{n-1} \\ s^n \end{bmatrix} &= \\
= [ \delta_0 \ \delta_1 \ \delta_2 \ \dots \ \delta_{r-1} \ 1 ] \begin{bmatrix} 1 \\ s \\ \vdots \\ s^{r-1} \\ s^r \end{bmatrix} [ \beta_0 \ \beta_1 \ \dots \ \beta_{n-r-1} \ 1 ] \begin{bmatrix} 1 \\ s \\ \vdots \\ s^{n-r-1} \\ s^{n-r} \end{bmatrix} &= \\
= [ \boldsymbol{\delta}^T \ 1 ] \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{S} \\ 0 & \boldsymbol{\beta}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ s \\ \vdots \\ s^{n-1} \\ s^n \end{bmatrix} & \quad (1.70)
\end{aligned}$$

Cette égalité doit être vérifiée pour toute valeur de  $s$ . Il s'ensuit par comparaison des termes de (1.70) que

$$[ \boldsymbol{\alpha}^T \ 1 ]_{(1,n)} = [ \boldsymbol{\delta}^T \ 1 ]_{(1,r+1)} \begin{bmatrix} \mathbf{S} \\ \boldsymbol{\beta}^T \end{bmatrix}_{(r+1,n)} \quad (1.71)$$

De la relation (1.61), dans laquelle on a introduit (1.71),

$$\mathbf{k}'^T = [ \mathbf{k}_a^T \ \mathbf{k}_b^T ] = c [ \boldsymbol{\delta}^T \ 1 ] \begin{bmatrix} \mathbf{S} \\ \boldsymbol{\beta}^T \end{bmatrix} [ \mathbf{E}_a \ \mathbf{E}_b ] \quad (1.72)$$

on tire la relation

$$\mathbf{k}_b^T = c (\boldsymbol{\delta}^T \mathbf{S} \mathbf{E}_b + \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{E}_b) \quad (1.73)$$

qui lie les  $r$  coefficients  $\delta_i$  du polynôme caractéristique  $P^*(s)$  aux  $r$  coefficients imposés  $\mathbf{k}_b^T$ . Ils dépendent bien sûr aussi des  $n-r$  pôles imposés, cachés dans  $\boldsymbol{\beta}^T$  et  $\mathbf{S}$  :

$$\boldsymbol{\delta}^T = (\mathbf{k}_b^T - c \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{E}_b) (c \mathbf{S} \mathbf{E}_b)^{-1} \quad (1.74)$$

$\mathbf{S} \mathbf{E}_b$  devant être régulière.

Les  $n-r$  coefficients cherchés sont alors, selon (1.72) et (1.74) :

$$\mathbf{k}_a^T = c (\boldsymbol{\delta}^T \mathbf{S} + \boldsymbol{\beta}^T) \mathbf{E}_a \quad (1.75)$$

### 1.5.3 Méthode à appliquer

Après avoir présenté au § 1.5.2 les développements menant à la relation finale (1.75) pour le calcul des coefficients de contre-réaction partielle, on résume ici brièvement la marche à suivre proprement dite du dimensionnement d'un réglage par mode de glissement avec contre-réaction d'état partielle.

- Définition du système à régler d'ordre  $n$ , le cas échéant régulateur intégrateur compris.
- Calcul de la matrice de commandabilité du système selon (1.35).
- Calcul du vecteur ligne auxiliaire  $\mathbf{e}_1^T$  selon (1.34), puis élaboration des autres lignes de la matrice de transformation  $\mathbf{E}$  selon (1.33) :

$$\mathbf{e}_2^T = \mathbf{e}_1^T \mathbf{A}$$

:

$$\mathbf{e}_n^T = \mathbf{e}_{n-1}^T \mathbf{A}$$

- Définition de la contre-réaction d'état partielle selon (1.60).  $r$  coefficients  $\mathbf{k}_b^T$  sont imposés et  $n-r$  coefficients  $\mathbf{k}_a^T$  sont à calculer.

*Remarque* : le coefficient de contre-réaction de la grandeur d'état dépendant directement de la grandeur de commande  $u$  (élément non-nul de  $\mathbf{b}$ ) ne peut pas être influencé par le choix des pôles, mais dépend uniquement du coefficient de proportionnalité  $c$ . Ce coefficient ne peut par conséquent pas être imposé et placé dans  $\mathbf{k}_b^T$ .

- En fonction du choix de la contre-réaction partielle, effectuer la permutation éventuelle des colonnes de  $\mathbf{E}$  pour obtenir  $\mathbf{E}_a$  et  $\mathbf{E}_b$ .
- Imposition des  $n-r$  pôles du sous-système  $S_a$ , dont un à l'origine.
- Calcul des coefficients  $\beta_i$  à l'aide des relations de Viète

$$\beta_0 = (-1)^{n-r} p_1 p_2 \dots p_{n-r}$$

:

$$\beta_{n-r-2} = p_1 p_2 + p_2 p_3 + \dots + p_{n-r-1} p_{n-r}$$

$$\beta_{n-r-1} = -(p_1 + p_2 + \dots + p_{n-r})$$

- Calcul des  $r$  coefficients caractéristiques  $\delta_i$  des pôles restants selon (1.74).
- Vérification des  $r$  pôles excédents selon  $R^*(s)=0$  (1.64). Si ceux-ci sont instables ou insatisfaisants, choisir  $n-r$  pôles différents pour le sous-système  $S_a$ .
- Calcul des coefficients  $\mathbf{k}_a^T$  selon (1.75).

- Permutation inverse pour obtenir le vecteur ligne de contre-réaction final  $\mathbf{k}^T$ .

## 1.6 RÉALISATION PRATIQUE DU RÉGLAGE PAR MODE DE GLISSEMENT HYBRIDE

### 1.6.1 Introduction

Jusque-là, le réglage par mode de glissement a été abordé par son côté purement théorique. Dans cette section, on traite brièvement les problèmes de réalisation pratique d'un réglage par mode de glissement, et plus particulièrement celui hybride. Dans notre cas, le mode de glissement réel est atteint par l'utilisation d'un organe à hystérèse, § 1.6.2. Au § 1.6.3, on définit tout d'abord le système hybride. L'introduction d'une chaîne de limiteurs dans le but de limiter les grandeurs d'état est présentée au § 1.6.4.

### 1.6.2 Fréquence de commutation

Pour les développements théoriques du système réglé en mode de glissement, présentés aux sections 1.2 à 1.5, on a toujours supposé une fréquence de commutation infinie de l'organe de commande (§ 1.2.4.1). Ce cas est idéal et ne peut être réalisé pratiquement. Dans la réalité, la fréquence de commutation est finie, à valeur fixe ou variable selon la méthode mise en oeuvre ([2], sect. 7.3). Tout au long de ce travail, on utilisera une loi de commutation avec hystérèse pour imposer une fréquence de commutation finie, figure 1.3.

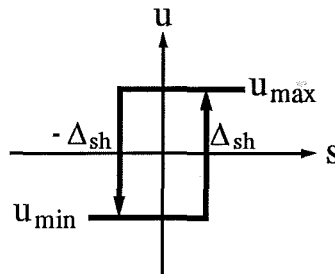


Fig. 1.3 Hystérèse sur la loi de commutation.

En notant les seuils de basculement de l'élément à hystérèse par  $\pm \Delta_{sh}$ , on peut montrer que la fréquence de commutation  $f_c$  est donnée par

$$f_c = \frac{\mathbf{k}^T \mathbf{b}}{2 \Delta_{sh}} \frac{(u_{\max} - u_{eq})(u_{eq} - u_{\min})}{u_{\max} - u_{\min}} = \frac{\mathbf{k}_s^T \mathbf{b}_s}{2 \Delta_{sh}} \frac{(u_{\max} - u_{eq})(u_{eq} - u_{\min})}{u_{\max} - u_{\min}} \quad (1.76)$$

Cette relation est valable pour autant que la trajectoire du point de fonctionnement reste proche de l'hyperplan de commutation. La fréquence maximum est atteinte lorsque  $u_{eq} = (u_{\max} + u_{\min}) / 2$  :

$$f_{c\max} = \frac{\mathbf{k}^T \mathbf{b}}{8 \Delta_{sh}} (u_{\max} - u_{\min}) = \frac{\mathbf{k}_s^T \mathbf{b}_s}{8 \Delta_{sh}} (u_{\max} - u_{\min}) \quad (1.77)$$

### 1.6.3 Réglage par mode glissement hybride

Par réglage par mode de glissement hybride, il faut entendre l'utilisation simultanée de techniques analogiques et digitales pour la réalisation du régulateur. Plus particulièrement pour les exemples d'application traités dans ce travail, on a adopté la configuration suivante (voir chapitres 5 et 6 pour plus de détails) :

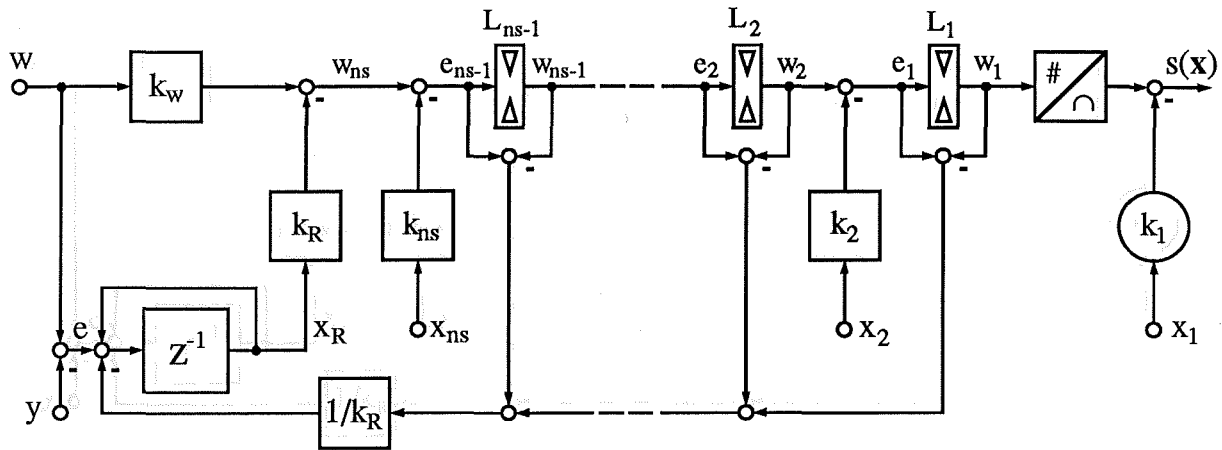
- La contre-réaction de la grandeur d'état  $x_1$ , correspondant ici au courant d'induit de la machine à courant continu, ainsi que l'élément à hystérèse (§ 1.6.4) attaquant l'organe de commande à deux positions sont réalisés analogiquement. Ce choix s'est tout naturellement imposé par la nécessité d'obtenir une fréquence de commutation élevée ( $> 10$  kHz) pour le variateur à courant continu utilisé. Au début de ce travail de thèse, les méthodes digitales d'alors ne permettaient pas d'atteindre ces performances. Aujourd'hui, grâce aux développements des processeurs de signal, on pourrait envisager une réalisation complètement digitale du régulateur. On peut cependant se demander si le jeu en vaut la chandelle étant donné qu'une mesure digitale du courant (qui n'est pas sans poser des problèmes de réalisation et de coût) serait nécessaire.
- Le variateur à courant continu utilisé (SOCAPEL SOCADYN SA-3) ne peut pas être attaqué directement à la base des transistors. On est contraint de l'utiliser dans son mode de commande par modulation de largeur d'impulsions (PWM) de fréquence  $f_{\text{PWM}}=19.6$  kHz. L'astuce réside dans le fait que la sortie de l'élément à hystérèse déterminera l'angle d'allumage minimum (-96%) ou maximum (+96%). Vu le fonctionnement asynchrone du hacheur et de l'élément à hystérèse, la fréquence de commutation réelle du hacheur sera inférieure ou égale à 19.6 kHz.
- Toutes les autres parties du régulateur, soit les contre-réactions d'état, les limiteurs et l'intégrateur, sont réalisés numériquement. Le calculateur utilisé est un microsystème 32 bits à virgule flottante, à base du microprocesseur NS32016 de National Semiconductors. Sa fréquence d'horloge est de 10 MHz. L'algorithme implanté pour le réglage de position du système élastique du chapitre 6 nécessite environ 2.4 millisecondes.

### 1.6.4 Structure de réglage hybride avec limiteurs

Dans le but d'éviter une surcharge, voire la destruction du système à régler, la nécessité de limiter certaines grandeurs d'état est évidente. Contrairement à ce qui se fait classiquement en réglage d'état par l'emploi d'une structure de réglage en cascade, on propose ici l'emploi d'une cascade (ou chaîne) de limiteurs.

La figure 1.4 montre la formation de la loi de commutation avec une chaîne de limiteurs dans le cas avec régulateur intégrateur. La structure hybride y est représentée.





**Fig. 1.4** Structure de réglage hybride avec chaîne de limiteurs.

Habituellement les limites supérieure et inférieure sont fixes. Dans cette étude, on introduira des limites variables pour améliorer le comportement global du réglage. L'étude détaillée des limitations est effectuée au chapitre 2.

L'étude et le dimensionnement d'un tel régulateur pourront être effectués soit par les méthodes pseudo-continues présentées au chapitre 3, soit en échantillonné après décomposition du système réglé en mode de glissement (chapitre 4).



## 2 SYSTÈME RÉGLÉ EN LIMITATION

### 2.1 INTRODUCTION

Indépendamment de la structure de réglage adoptée, tout système réglé soumis à des sauts de consigne et de perturbation suffisamment grands, aura tendance à évoluer de sorte que certaines grandeurs internes du système réglé prennent des valeurs inadmissiblement grandes. Pour éviter ce comportement de surcharge du système, il convient de limiter les grandeurs du système (organe de commande compris).

Comme systèmes à régler où la consigne est donnée par saut, on peut citer par exemple :

- la perceuse, dont la grandeur à régler est la vitesse. Le couple doit être limité pour éviter une accélération trop grande au démarrage et aussi pour éviter la destruction de la mèche s'il y a blocage.
- l'ascenseur, où les différents étages représentent les consignes de position. Dans ce cas, tant l'accélération et la décélération que la vitesse maximale de la cabine doivent être contrôlées, donc limitées.
- les mouvements d'initialisation d'une machine-outil (recherche des butées de fin de course).

La figure 2.1 montre comment est réalisée la limitation des grandeurs internes dans le cas du réglage d'état en cascade.

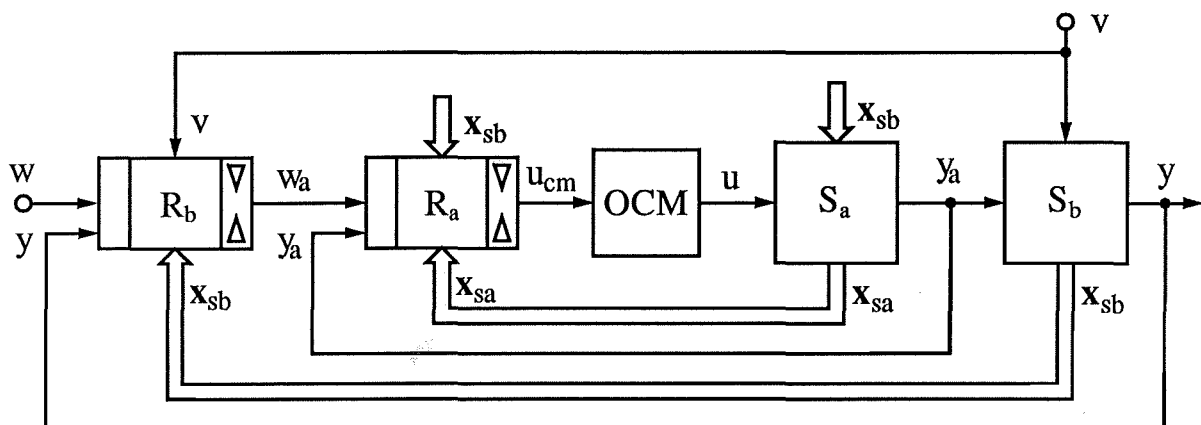
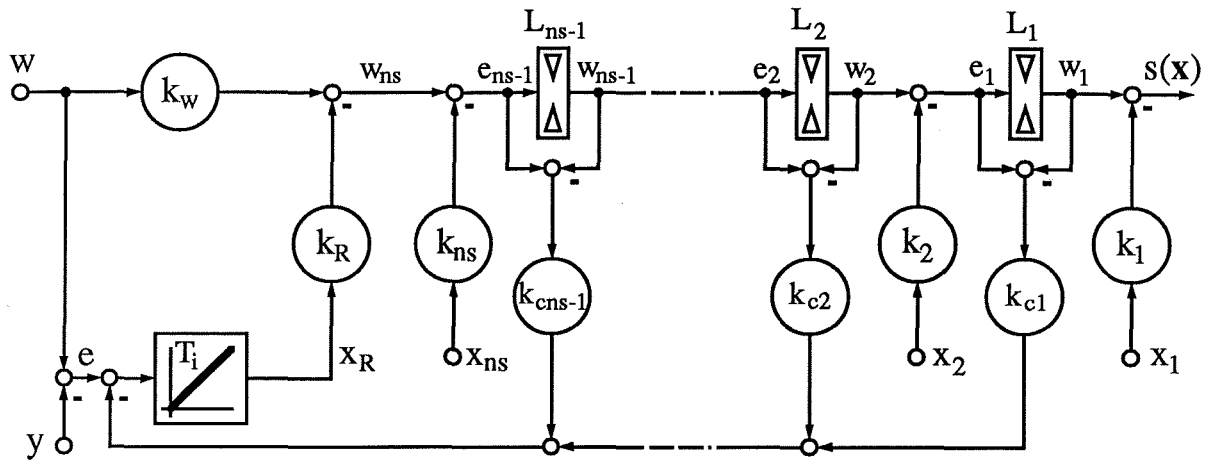


Fig. 2.1 : Réglage d'état en cascade avec limitations.

On voit que la commande de chaque régulateur est limitée avant d'attaquer le sous-système cascadié en tant que consigne.

Dans le cas du réglage par mode de glissement, dont la formation de la loi de commutation  $s$  est obtenue par une contre-réaction globale, il est possible de

limiter les grandeurs internes par l'utilisation d'une cascade (chaîne) de limiteurs insérés entre les différentes contributions de la contre-réaction d'état. Cette structure est représentée à la figure 2.2.



**Fig. 2.2 :** Structure de réglage continu avec chaîne de limiteurs pour la formation de  $s(x)$ .

A la section 2.2, on définit ce qu'est une limitation dans la structure de réglage par mode de glissement. Quelques considérations sur la correction de l'intégrateur en fonctionnement limité sont présentées à la section 2.3. Le cas du réglage hybride est aussi présenté.

Au chapitre 1, on a présenté la théorie nécessaire au dimensionnement du réglage. Dans le but d'analyser et d'expliquer les phénomènes en cas de limitation des grandeurs internes, il est nécessaire de faire une étude complémentaire en tenant compte de ces limitations.

La réalisation classique des limiteurs est à limitation fixe. L'étude du système réglé en limitation (fixe) revient alors à étudier le sous-système hors limitation.

L'originalité de la limitation introduite réside dans le fait qu'elle est variable en fonction de l'écart de réglage (§ 2.4.2). Il est dès lors nécessaire d'étudier le système réglé en limitation en tenant compte des particularités de ces limitations. Le cas général d'une structure de réglage continu avec régulateur intégrateur est traité. Deux variantes pour la correction de l'intégrateur sont étudiées. L'une, nécessaire, est la correction réelle finie (section 2.4) et l'autre, académique, est la correction idéale instantanée (section 2.5).

Pour certains systèmes, par ailleurs souvent rencontrés dans la pratique, les expressions développées se simplifient (section 2.6).

Les limitations variables seront interprétées comme coefficients variables à la section 2.7.

## 2.2 LIMITATIONS DES GRANDEURS D'ÉTAT

### 2.2.1 Hypothèses

Les grandeurs d'état internes peuvent être limitées a priori par le choix d'une structure de réglage adéquate. La grandeur à régler est limitée indirectement par la grandeur de consigne fournie au régulateur. Ainsi, la(les) grandeur(s) d'état qui forme(nt) la grandeur à régler selon (1.4) ne sont pas limitées par la structure de réglage. Cependant, dans la plupart des applications, la grandeur de sortie est également une grandeur d'état, en général  $x_{n_s}$ . Pour une plus grande généralité, on suppose par la suite que toutes les grandeurs d'état  $x_1 \dots x_{n_s-1}$  peuvent être limitées.

### 2.2.2 Définition

Chaque limiteur  $L_i$ , se rapportant à la grandeur d'état  $x_i$  (avec  $i = 1 \dots n_s-1$ , voir § 2.2.1) est décrit par son entrée  $e_i$ , sa sortie  $w_i$  et les valeurs de limitations supérieure  $w_{i\max}$  et inférieure  $w_{i\min}$  selon

$$\left. \begin{array}{l} w_i = w_{i\max} \quad \text{si} \quad e_i \geq w_{i\max} \\ w_i = e_i \quad \quad \text{si} \quad w_{i\min} < e_i < w_{i\max} \\ w_i = w_{i\min} \quad \text{si} \quad e_i \leq w_{i\min} \end{array} \right\} \quad i = 1 \dots n_s-1 \quad (2.2)$$

avec

$$e_i = w_{i+1} - k_{i+1}x_{i+1} \quad (2.3)$$

$w_{n_s}$  étant donné par

$$w_{n_s} = k_w w + k_R x_R \quad (2.4)$$

En mode de glissement, avec la limitation  $L_i$  active ( $w_{i\lim} = w_{i\max}$  ou  $w_{i\lim} = w_{i\min}$ ), la loi de commutation est donnée par

$$s_{i\lim}(\mathbf{x}) = w_{i\lim} - k_i x_i - k_{i-1} x_{i-1} - \dots - k_1 x_1 = w_{i\lim} - \mathbf{k}_{i\lim}^T \mathbf{x} = 0 \quad (2.5)$$

où le vecteur de contre-réaction d'état en limitation est donné par

$$\mathbf{k}_{i\lim}^T = [ k_1 \ k_2 \ \dots \ k_i \ 0 \ \dots \ 0 ]_{(1,n)} = [ \mathbf{k}_{i\lim}^T \ 0 ] \quad (2.6)$$

D'après (2.3)

$$k_i x_i = w_{i\lim} - k_{i-1} x_{i-1} - \dots - k_1 x_1 \quad (2.7)$$

Sous la condition que

$$| k_{i-1} x_{i-1} + \dots + k_1 x_1 | \ll | k_i x_i | \quad (2.8)$$

on voit que  $x_i$  reste limitée à  $x_{i\lim}$  si on choisit

$$w_{i\lim} = k_i x_{i\lim} \quad \text{avec} \quad i = 1 \dots n_s-1 \quad (2.9)$$

On peut, si la condition (2.8) est vraie, interpréter un réglage global comme une cascade de régulateurs proportionnels, sauf pour la grandeur à régler où un régulateur intégrateur peut être ajouté.

## 2.3 CORRECTION DE L'INTÉGRATEUR EN CAS DE LIMITATION

### 2.3.1 But

Dans le cas d'une structure de réglage avec régulateur intégrateur, il est judicieux d'effectuer une correction de l'intégrateur lorsque le système réglé est en limitation. Si cette précaution n'est pas prise,  $x_R$  dérive et tend à augmenter la différence  $e_i - w_i$  du limiteur en action. La conséquence en est une prolongation indésirable de la durée de la limitation, ce qui peut provoquer un dépassement inadmissible sur la réponse à un saut de consigne. On le voit, le comportement désastreux est dû à l'intégrateur. Pour éviter ce problème, il s'agira de ramener rapidement l'entrée  $e_i$  du limiteur à une valeur proche de la limitation  $w_{i\text{lim}}$  en effectuant une correction sur l'intégrateur de la différence  $e_i - w_i$ .

Dans cette section, on traitera brièvement le cas du régulateur analogique (§ 2.3.2). Le cas digital, bien plus appliqué actuellement est un peu plus délicat à traiter et fera l'objet du § 2.3.3.

### 2.3.2 Réglage continu

Etant donné l'utilisation de plus en plus rare de régulateurs analogiques complets, on ne va pas entrer dans le détail de réalisation de la correction de l'intégrateur. Ce sujet est traité par exemple dans [2, § 7.2.5] ou [7, § 11.3.7].

Cependant, dans ce travail, l'étude théorique du réglage par mode de glissement est effectuée principalement en pseudo-continu. C'est pourquoi le principe de la correction dans le cas du réglage continu est présenté dans son aspect théorique ci-après.

Pour parvenir au but fixé, c'est-à-dire d'éviter la dérive de l'intégrateur en cas de limitation, on met en contre-réaction sur l'intégrateur la différence entre l'entrée et la sortie du limiteur via le coefficient  $k_{ci}$ . La figure 2.2 illustre ce propos.

En cas de limitation d'une seule grandeur d'état  $x_i$ , la grandeur d'état du régulateur intégrateur est décrite par l'équation différentielle

$$\dot{x}_R = \frac{1}{T_i} e_{\text{lim}} = \frac{1}{T_i} [e - k_{ci} (e_i - w_i)] = \frac{1}{T_i} [w - \mathbf{c}^T \mathbf{x} - k_{ci} (e_i - w_i)] \quad (2.10)$$

$e_{\text{lim}}$  représentant l'écart de réglage fictif. Idéalement, si le coefficient  $k_{ci}$  tend vers l'infini, l'entrée  $e_i$  du limiteur actif  $L_i$  est ramenée à sa sortie limitée  $w_{i\text{lim}}$

$$e_i = w_i = w_{i\text{lim}} \quad \text{si} \quad k_{ci} = \infty \quad (2.11)$$

L'intégrateur ne dérive pas et se trouve aux bonnes conditions initiales pour la sortie de limitation du régulateur. L'étude complète de l'influence de la rapidité

de la correction ( $k_{ci}$ ) sur la stabilité du système réglé sera effectuée pour le cas général avec limitations variables à la section 2.4. Le cas idéal où  $k_{ci}=\infty$  est traité à la section 2.5.

### 2.3.3 Réglage échantillonné

Dans [8], on trouve une étude sur la correction de l'intégrateur en cas de limitation pour le cas du réglage d'état digital en cascade (figure 2.1). Le problème étant quasiment identique pour le cas de la structure de réglage par mode de glissement hybride, voici en résumé les résultats.

Les développements se basent sur l'introduction d'un écart de réglage fictif qui interviendrait, non seulement sur  $x_R$ , mais aussi directement sur la commande. La correction proposée est

$$e'[k] = e[k] - \frac{1}{k_w} (u[k] - u_{lim}[k]) \quad (2.12)$$

soit

$$x'_R[k+1] = x_R[k] + e[k] - \frac{1}{k_w} (u[k] - u_{lim}[k]) \quad (2.13)$$

$u$  et  $u_{lim}$  étant respectivement la commande et la commande limitée. Cette correction est indépendante de la dynamique (pôles) du système réglé et présente un inconvénient pour le cas sans anticipation de la consigne  $k_w=0$ . Comme l'écart de réglage n'intervient pas directement sur la commande, mais au travers de l'intégrateur, il semble judicieux de raisonner plutôt sur une grandeur d'état du régulateur intégrateur fictive  $x'_R$  [10].

C'est ce que propose la méthode décrite ici. Elle élimine les inconvénients cités. On se base ici sur la structure de réglage par mode de glissement hybride (figure 1.3).

Avec l'hypothèse que seul le limiteur  $L_i$  est actif, la loi de commutation s'écrit

$$\begin{aligned} s(x) &= w_{ilim}[k] - k_i x_i[k] - k_{i-1} x_{i-1}[k] - \dots - k_2 x_2[k] - k_1 x_1[k] = \\ &= w_{ilim}[k] - \mathbf{k}_{silim}^T \mathbf{x}_s[k] \end{aligned} \quad (2.14)$$

avec

$$\mathbf{k}_{silim}^T = [k_1 \dots k_{i-1} k_i \ 0 \dots 0]_{(1,ns)} \quad (2.15)$$

L'entrée du limiteur est donnée par

$$\begin{aligned} e_i[k] &= k_w w[k] + k_R x_R[k] - k_{ns} x_{ns}[k] - \dots - k_{i+1} x_{i+1}[k] = \\ &= k_w w[k] + k_R x_R[k] - \mathbf{k}_S^T \mathbf{x}_s[k] + \mathbf{k}_{silim}^T \mathbf{x}_s[k] = \\ &= k_w w[k] + k_R x_R[k] - (\mathbf{k}_S^T - \mathbf{k}_{silim}^T) \mathbf{x}_s[k] \end{aligned} \quad (2.16)$$

alors que la sortie limitée est donnée par

$$w_i[k] = w_{i\text{lim}}[k] \quad (2.17)$$

Le but de la correction de l'intégrateur en cas de limitation est d'éviter une dérive de cet intégrateur. Pour parvenir à ce but, il suffit de ramener l'entrée du limiteur  $e_i[k]$  à la valeur de sortie  $w_{i\text{lim}}[k]$ . En désignant par  $x'_R[k]$  la valeur de l'intégrateur après correction, on a

$$e'_i[k] = w_{i\text{lim}}[k] = k_w w[k] + k_R x'_R[k] - (k_s^T - k_{s\text{lim}}^T) x_s[k] \quad (2.18)$$

Par soustraction de (2.16) et (2.18), on obtient

$$e_i[k] - w_{i\text{lim}}[k] = k_R (x_R[k] - x'_R[k]) \quad (2.19)$$

La correction à effectuer sur l'intégrateur est donc

$$x'_R[k] = x_R[k] - \frac{1}{k_R} (e_i[k] - w_{i\text{lim}}[k]) \quad (2.20)$$

*Remarque :* Comme on le voit, cette correction devrait être appliquée en l'instant d'échantillonnage  $k$ . Dans la pratique, on ne l'effectuera pourtant qu'en  $k+1$ , ce qui permet un gain sur le temps de retard entre l'acquisition (mesure) des grandeurs d'état et l'envoi de la conversion digitale/analogique de  $w_1[k]$ . D'ailleurs, étant donné le calcul de  $x_R$  selon

$$x_R[k+1] = x'_R[k] + e[k] \quad (2.21)$$

le comportement réel du système réglé n'en est pas modifié.

Comparé à (2.13), on remarque que la correction s'effectue avec un coefficient de  $1/k_R$  à la place de  $1/k_w$ . Des essais tant pratiques que simulés ont montré une efficacité supérieure de la correction selon (2.20). On peut d'ailleurs montrer que le pôle en échantillonné lié à l'intégrateur corrigé selon (2.20) se trouve en  $z=0$ , ce qui démontre l'efficacité de cette correction (voir § 4.6.7).

### 2.3.4 Limitations multiples simultanées

Lorsque la grandeur d'état  $x_i$  est limitée par le limiteur  $L_i$ , il est en général fort probable que les autres limiteurs en amont ( $L_{i+1}, \dots$  et/ou  $L_{ns-1}$ ) soient aussi en action. Dans ce cas, deux solutions sont envisageables pour la correction de l'intégrateur :

- Tous les limiteurs agissent sur la correction; ainsi après correction, seul le limiteur correspondant à la grandeur d'état effectivement limitée est encore en action.
- Seul le limiteur le plus proche de l'intégrateur agit sur la correction.

L'une ou l'autre des méthodes de correction mène au même résultat quant à l'évolution des grandeurs d'état du système réglé. La première méthode est cependant plus simple à réaliser, car elle ne demande pas la recherche du limiteur actif le plus en amont. Le temps de calcul est sensiblement le même.

L'implantation dans un algorithme de réglage de la correction de l'intégrateur en cas de limitation est donc réalisée comme suit



$$x_R[k+1] = x_R[k] + w[k] - y[k] - \frac{1}{k_R} \sum_{i=1}^{ns-1} (e_i - w_i) \quad (2.22)$$

## 2.4 LIMITATIONS VARIABLES AVEC CORRECTION

### 2.4.1 Introduction

La notion de limitation de grandeurs internes est en elle-même bien connue. Le principe est appliqué tant pour le réglage classique (P, PI, ...) que pour le réglage d'état grâce à la mise en oeuvre du réglage en cascade, que ce soit en continu ou en échantillonné. Dans le premier chapitre, nous avons vu comment le principe était aussi applicable à la structure de réglage par mode de glissement, celui-ci étant fondamentalement un réglage global.

Dans tous ces cas, le but principal est atteint : éviter la détérioration ou la mise à contribution exagérée du système à régler. Pourtant, certains effets ou phénomènes non-désirés peuvent apparaître à cause de l'introduction des limitations. Le plus néfaste est l'apparition d'instabilités dans le système réglé : le régulateur passe de la limitation supérieure à celle inférieure et vice-versa pendant une durée limitée ou non. Au chapitre 5, on verra l'apparition de ce phénomène pour un cas concret.

Ces phénomènes d'instabilités sont dus à ce que les conditions de sortie de limitation sont mal posées. Les valeurs de limitations devront être choisies soigneusement. Ce type d'instabilités n'est pas dû à d'éventuels pôles instables en limitation. Ceux-ci n'influenceront que légèrement le premier phénomène observé.

Partant de l'exemple d'application du chapitre 5, l'idée de faire varier les valeurs supérieure et inférieure des limiteurs a germé. Dans le but de traiter le problème par des méthodes linéaires, ces limites variables sont définies comme des fonctions linéaires de l'écart de réglage du système réglé.

Au paragraphe 2.4.2, on posera la définition générale des limitations variables. Les développements relatifs au système réglé en boucle ouverte ou en mode de glissement seront présentés aux § 2.4.3 à 2.4.5. On tiendra compte bien sûr de la correction réelle de l'intégrateur en limitation.

En général, la correction de l'intégrateur en cas de limitation est traitée à part, et utilisée essentiellement pour la simulation numérique sur ordinateur. Dans ce travail, on va cependant aussi en tenir compte dans la modélisation du système réglé, dans le but d'en estimer l'influence sur le réglage.

### 2.4.2 Définition de la limitation variable

La définition du fonctionnement des limiteurs selon (2.2) est en fait très générale puisqu'aucune restriction n'est imposée aux valeurs limites  $w_{i\max}$  et  $w_{i\min}$ .

Pourtant, jusqu'à présent, dans la pratique, les valeurs utilisées sont constantes, représentant, somme toute, une caractéristique assez restrictive. Ce cas est appelé par la suite *limitation fixe*.

Les limitations variables par segment, définies dans ce paragraphe, introduisent un concept plus général. Les valeurs limites de la grandeur d'état  $x_i$  dépendent linéairement de l'écart de réglage  $e$  selon

$$x_{i\text{lim}} = c_i + p_i |e| \quad (2.23)$$

Plusieurs segments peuvent être définis selon (2.23). Ces segments seront délimités par les valeurs  $e_j$  et  $e_{j-1}$  de l'écart de réglage. Remarquons que si un seul segment est défini, alors il l'est entre  $e_1=0$  et  $e=\infty$ . La pente correspondante est nulle  $p_1=0$ .

La condition (2.8) sur la limitation effective de  $x_i$  n'étant pas toujours respectée (par exemple dans le cas du réglage d'un système élastique où  $n_M \cong n_L$ ), on généralise la définition (2.9) selon

$$w_{i\text{lim}} = k_{mi} x_{i\text{lim}} \quad \text{avec} \quad k_{mi} > 0 \quad i = 1 \dots n_s - 1 \quad (2.24)$$

Ainsi, les valeurs limites de chaque segment de limitation du limiteur  $L_i$  sont définies par

$$\left. \begin{array}{l} w_{i\text{max}} = + w_{i\text{lim}} \\ w_{i\text{min}} = - w_{i\text{lim}} \end{array} \right\} \quad \text{avec} \quad w_{i\text{lim}} = k_{mi} (c_i + p_i |e|) \quad (2.25)$$

ou plus précisément

$$w_{i\text{max}} = \begin{cases} k_{mi} (+c_i + p_i e) & \text{si } e \geq 0 \\ k_{mi} (+c_i - p_i e) & \text{si } e \leq 0 \end{cases} \quad (2.26a)$$

$$w_{i\text{min}} = \begin{cases} k_{mi} (-c_i - p_i e) & \text{si } e \geq 0 \\ k_{mi} (-c_i + p_i e) & \text{si } e \leq 0 \end{cases} \quad (2.26b)$$

La définition (2.25) introduit donc une double symétrie qui est représentée à la figure 2.3 pour le cas avec deux segments de limitation.

D'une manière générale on pourra définir  $k$  segments de limitation selon

$$\left. \begin{array}{l} 0 \leq |e| \leq e_1 \quad : \quad x_{i\text{lim}} = c_{i1} + p_{i1} |e| \\ \vdots \\ e_{j-1} \leq |e| \leq e_j \quad : \quad x_{i\text{lim}} = c_{ij} + p_{ij} |e| \\ \vdots \\ e_{k-1} \leq |e| \quad : \quad x_{i\text{lim}} = c_{ik} + p_{ik} |e| \end{array} \right\} \quad (2.27)$$

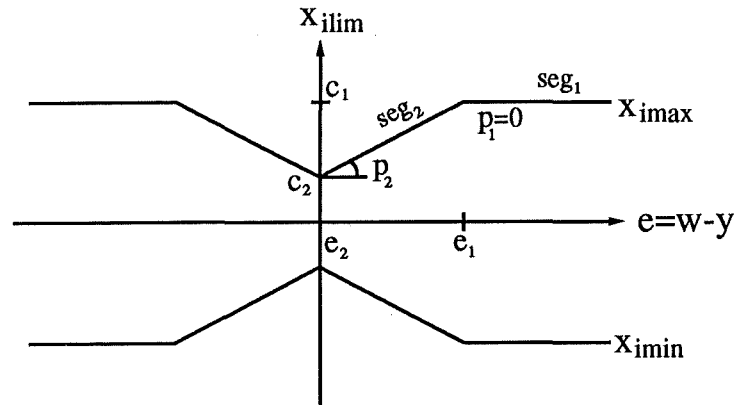


Fig. 2.3 Limitations variables avec deux segments.

### 2.4.3 Loi de commutation

En limitation de la grandeur d'état  $x_i$ , c'est-à-dire lorsque le limiteur  $L_i$  est actif, la loi de commutation est donnée par (2.5)

$$s_{ilim}(\mathbf{x}) = -\mathbf{k}_{ilim}^T \mathbf{x} + w_{ilim} \quad (2.28)$$

la valeur limite  $w_{ilim}$  étant donnée par

$$w_{ilim} = k_{mi} (c_i + p_i e) = k_{mi} (c_i + p_i (w - \mathbf{c}^T \mathbf{x})) \quad (2.29)$$

### 2.4.4 Correction de l'intégrateur

On admet bien sûr qu'un seul limiteur est actif à la fois, ce qui est le cas lorsque l'intégrateur est corrigé suffisamment rapidement.

L'entrée du limiteur est donnée par [voir (2.3) et (2.4)]

$$\begin{aligned} e_i &= k_w w + k_R x_R - k_{ns} x_{ns} - \dots - k_{i+1} x_{i+1} = \\ &= k_w w - (\mathbf{k}^T - \mathbf{k}_{ilim}^T) \mathbf{x} = k_w w - (\mathbf{k}_S^T - \mathbf{k}_{silim}^T) \mathbf{x}_S + k_R x_R \end{aligned} \quad (2.30)$$

Il s'ensuit de (2.30) et (2.29) que la différence entre l'entrée et la sortie du limiteur à mettre en correction sur l'intégrateur en cas de limitation est

$$\begin{aligned} e_i - w_{ilim} &= (k_w - k_{mi} p_i) w - (\mathbf{k}^T - \mathbf{k}_{ilim}^T - k_{mi} p_i \mathbf{c}^T) \mathbf{x} - k_{mi} c_i = \\ &= (k_w - k_{mi} p_i) w - (\mathbf{k}_S^T - \mathbf{k}_{silim}^T - k_{mi} p_i \mathbf{c}_S^T) \mathbf{x}_S + k_R x_R - k_{mi} c_i \end{aligned} \quad (2.31)$$

D'après (2.10), la grandeur d'état du régulateur intégrateur évolue en limitation selon

$$\begin{aligned} T_i \dot{x}_R &= w - \mathbf{c}^T \mathbf{x} - k_{ci} (e_i - w_{ilim}) = [k_{ci} (\mathbf{k}_S^T - \mathbf{k}_{silim}^T) - (1 + k_{ci} k_{mi} p_i) \mathbf{c}_S^T] \mathbf{x}_S + \\ &\quad + (1 - k_{ci} k_w + k_{ci} k_{mi} p_i) w - k_{ci} k_R x_R + k_{ci} k_{mi} c_i \end{aligned} \quad (2.32)$$

### 2.4.5 Equation matricielle en boucle ouverte

En cas de limitation, l'équation d'état matricielle (1.8) est légèrement différente à cause de la correction de l'intégrateur selon (2.32). On adopte de ce fait l'indice  $i_{lim}$  pour désigner ces grandeurs

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_{i_{lim}}\mathbf{x} + \mathbf{b}_{i_{lim}}\mathbf{u} + \mathbf{b}_{v_{i_{lim}}}\mathbf{v} + \mathbf{b}_{w_{i_{lim}}}\mathbf{w} + \mathbf{b}_{c_{i_{lim}}}\mathbf{c}_i \quad (2.33)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{c}^T\mathbf{x} \quad (2.34)$$

avec

$$\mathbf{A}_{i_{lim}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_s & \mathbf{0} \\ \frac{k_{ci}}{T_i} (\mathbf{k}_s^T - \mathbf{k}_{s_{i_{lim}}}^T) - \frac{1+k_{ci}k_{mi}p_i}{T_i} \mathbf{c}_s^T & -\frac{k_{ci}k_R}{T_i} \end{bmatrix} \quad (2.35a)$$

$$\mathbf{b}_{i_{lim}} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_s \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{b} \quad (2.35b)$$

$$\mathbf{b}_{v_{i_{lim}}} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{sv} \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{b}_v \quad (2.35c)$$

$$\mathbf{b}_{w_{i_{lim}}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \frac{1 - k_{ci}(k_w - k_{mi}p_i)}{T_i} \end{bmatrix} \quad (2.35d)$$

$$\mathbf{b}_{c_{i_{lim}}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \frac{k_{ci}k_{mi}}{T_i} \end{bmatrix} \quad (2.35e)$$

$$\mathbf{c}^T = [ \mathbf{c}_s^T \quad 0 ] \quad (2.35f)$$

*Remarques :*

- Pour le cas d'une structure de réglage sans régulateur intégrateur, l'équation (2.33) se réduit à l'équation matricielle du système à régler (1.3).
- Pour le cas sans correction de l'intégrateur, c'est-à-dire  $k_{ci}=0$ , on retrouve les expressions classiques (1.9).
- La matrice de système du système global en boucle ouverte  $\mathbf{A}$  dépend d'une part des paramètres des limiteurs ( $k_{ci}$ ,  $k_{mi}$  et  $p_i$ ) et d'autre part des coefficients de contre-réaction. Cette matrice ne peut donc pas être utilisée pour le dimensionnement des coefficients selon la méthode connue. Elle permettra de calculer a posteriori les pôles en limitation (§ 2.4.6).
- Les vecteurs de commande  $\mathbf{b}$  et de perturbation  $\mathbf{b}_v$  ne sont pas influencés par la limitation.
- Du fait de la correction de l'intégrateur  $\mathbf{b}_{w_{i_{lim}}}$  dépend de  $k_{ci}$ ,  $k_{mi}$ ,  $p_i$  et  $k_w$ .

- Le vecteur  $\mathbf{b}_{cilim}$  est nouveau : il exprime la dépendance intégrale de  $x_R$  par rapport à la valeur de limitation fixe  $c_i$ .

#### 2.4.6 Pôles du système réglé en boucle ouverte

Les pôles du système réglé en boucle ouverte sont donnés par l'équation caractéristique conformément à (1.30) et (1.31) appliqués à (2.35a). On trouve immédiatement

$$P_{ilim}(s) = \det(s\mathbf{1} - \mathbf{A}_{ilim}) = \left(s + \frac{k_{ci}k_R}{T_i}\right) \det(s\mathbf{1} - \mathbf{A}_s) \quad (2.36)$$

Les pôles sont évidemment ceux du système à régler sans intégrateur auxquels s'ajoute un pôle dû à l'intégrateur et sa correction

$$p_n = -\frac{k_{ci}k_R}{T_i} \quad (2.37)$$

Le pôle à l'origine de l'intégrateur est donc tiré à gauche (dans le plan  $s$ ) par sa correction en cas de limitation, proportionnellement à  $k_{ci}$ . Pour le cas limite où  $k_{ci}=\infty$ , le pôle est aussi à l'infini.

#### 2.4.7 Tension de commande équivalente

Lorsque le système réglé en limitation est en mode de glissement, la loi de commutation (2.28) et sa dérivée s'annulent

$$s_{ilim}(\mathbf{x}) = -\mathbf{k}_{ilim}^T \mathbf{x} + w_{ilim} = 0 \quad (2.38)$$

$$\dot{s}_{ilim}(\mathbf{x}) = -\mathbf{k}_{ilim}^T \dot{\mathbf{x}} + \dot{w}_{ilim} = -(\mathbf{k}_{ilim}^T + k_{mi}p_i \mathbf{c}^T) \dot{\mathbf{x}} + k_{mi}p_i \dot{w} = 0 \quad (2.39)$$

La tension de commande équivalente est tirée de (2.39) et (2.33)

$$\begin{aligned} u_{eqilim} &= -\frac{1}{(\mathbf{k}_{ilim}^T + k_{mi}p_i \mathbf{c}^T) \mathbf{b}_{ilim}} \cdot \\ &\cdot [(\mathbf{k}_{ilim}^T + k_{mi}p_i \mathbf{c}^T)(\mathbf{A}_{ilim} \mathbf{x} + \mathbf{b}_{vilim} v + \mathbf{b}_{wilim} w + \mathbf{b}_{cilim} c_i) - k_{mi}p_i \dot{w}] = \\ &= -\frac{1}{(\mathbf{k}_{ilim}^T + k_{mi}p_i \mathbf{c}^T) \mathbf{b}} \cdot \\ &\quad \cdot [(\mathbf{k}_{ilim}^T + k_{mi}p_i \mathbf{c}^T)(\mathbf{A}_{ilim} \mathbf{x} + \mathbf{b}_v v) - k_{mi}p_i \dot{w}] = \\ &= -\frac{1}{(\mathbf{k}_{silim}^T + k_{mi}p_i \mathbf{c}_s^T) \mathbf{b}_s} \cdot \\ &\quad \cdot [(\mathbf{k}_{silim}^T + k_{mi}p_i \mathbf{c}_s^T)(\mathbf{A}_s \mathbf{x}_s + \mathbf{b}_{sv} v) - k_{mi}p_i \dot{w}] \end{aligned} \quad (2.40)$$

la condition d'existence du mode de glissement étant  $(\mathbf{k}_{ilim}^T + k_{mi}p_i \mathbf{c}^T) \mathbf{b}_{ilim} = (\mathbf{k}_{silim}^T + k_{mi}p_i \mathbf{c}_s^T) \mathbf{b}_s \neq 0$ .

### 2.4.8 Système réglé en mode de glissement

En introduisant (2.40) dans (2.33) on obtient l'équation matricielle en mode de glissement

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_{ilim}^* \mathbf{x} + \mathbf{b}_{vilim}^* \mathbf{v} + \mathbf{b}_{wilim}^* \mathbf{w} + \mathbf{b}_{cilim}^* \mathbf{c}_i + \mathbf{b}_{wilim}^* \dot{\mathbf{w}} \quad (2.41)$$

En définissant et explicitant la matrice singulière  $\mathbf{M}_{ilim}$

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{ilim} &= \mathbf{1} - \frac{1}{(\mathbf{k}_{ilim}^T + k_{mi} p_i \mathbf{c}^T) \mathbf{b}_{ilim}} \mathbf{b}_{ilim} (\mathbf{k}_{ilim}^T + k_{mi} p_i \mathbf{c}^T) = \\ &= \mathbf{1} - \frac{1}{(\mathbf{k}_{ilim}^T + k_{mi} p_i \mathbf{c}^T) \mathbf{b}} \mathbf{b} (\mathbf{k}_{ilim}^T + k_{mi} p_i \mathbf{c}^T) = \\ &= \begin{bmatrix} \left[ \mathbf{1} - \frac{1}{(\mathbf{k}_{silim}^T + k_{mi} p_i \mathbf{c}_s^T) \mathbf{b}_s} \mathbf{b}_s (\mathbf{k}_{silim}^T + k_{mi} p_i \mathbf{c}_s^T) \right] & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{silim} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.42)$$

les matrices en mode de glissement sont données par

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{ilim}^* &= \mathbf{M}_{ilim} \mathbf{A}_{ilim} = \\ &= \begin{bmatrix} \left[ \mathbf{1} - \frac{1}{(\mathbf{k}_{silim}^T + k_{mi} p_i \mathbf{c}_s^T) \mathbf{b}_s} \mathbf{b}_s (\mathbf{k}_{silim}^T + k_{mi} p_i \mathbf{c}_s^T) \right] \mathbf{A}_s & \mathbf{0} \\ \frac{k_{ci}}{T_i} (\mathbf{k}_s^T - \mathbf{k}_{silim}^T) - \frac{1+k_{ci} k_{mi} p_i}{T_i} \mathbf{c}_s^T & - \frac{k_{ci} k_R}{T_i} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{silim} \mathbf{A}_s & \mathbf{0} \\ \frac{k_{ci}}{T_i} (\mathbf{k}_s^T - \mathbf{k}_{silim}^T) - \frac{1+k_{ci} k_{mi} p_i}{T_i} \mathbf{c}_s^T & - \frac{k_{ci} k_R}{T_i} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{silim}^* & \mathbf{0} \\ \frac{k_{ci}}{T_i} (\mathbf{k}_s^T - \mathbf{k}_{silim}^T) - \frac{1+k_{ci} k_{mi} p_i}{T_i} \mathbf{c}_s^T & - \frac{k_{ci} k_R}{T_i} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.43a)$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{b}_{vilim}^* &= \mathbf{M}_{ilim} \mathbf{b}_{vilim} = \mathbf{M}_{ilim} \mathbf{b}_v = \\
&= \begin{bmatrix} \left[ \mathbf{1} - \frac{1}{(\mathbf{k}_{silim}^T + k_{mi} p_i \mathbf{c}_s^T)} \mathbf{b}_s (\mathbf{k}_{silim}^T + k_{mi} p_i \mathbf{c}_s^T) \right] \mathbf{b}_{sv} \\ 0 \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{silim} \mathbf{b}_{sv} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{svilim}^* \\ 0 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{2.43b}$$

$$\mathbf{b}_{wilim}^* = \mathbf{M}_{ilim} \mathbf{b}_{wilim} = \mathbf{b}_{wilim} \tag{2.43c}$$

$$\mathbf{b}_{cilim}^* = \mathbf{M}_{ilim} \mathbf{b}_{cilim} = \mathbf{b}_{cilim} \tag{2.43d}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{b}_{wilim}^* &= \frac{k_{mi} p_i}{(\mathbf{k}_{ilim}^T + k_{mi} p_i \mathbf{c}^T)} \mathbf{b}_{ilim} = \\
&= \frac{k_{mi} p_i}{(\mathbf{k}_{ilim}^T + k_{mi} p_i \mathbf{c}^T)} \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{swilim}^* \\ 0 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{2.43e}$$

#### 2.4.9 Pôles du système réglé en mode de glissement

Les pôles du système réglé en mode de glissement sont calculés par

$$P_{ilim}^*(s) = \det(s\mathbf{1} - \mathbf{A}_{ilim}^*) = \left(s + \frac{k_{ci} k_R}{T_i}\right) \det(s\mathbf{1} - \mathbf{A}_{silim}^*) \tag{2.44}$$

Comme dans le cas du système réglé en limitation en boucle ouverte, les pôles du système réglé en limitation en mode de glissement sont ceux du système réglé en limitation en mode de glissement sans intégrateur, plus un pôle dû à l'intégrateur et sa correction

$$p_n = -\frac{k_{ci} k_R}{T_i} \tag{2.45}$$

Le pôle à l'origine de l'intégrateur est donc tiré à gauche (dans le plan  $s$ ) par sa correction en cas de limitation, en fonction de  $k_{ci}$ . Pour le cas limite où  $k_{ci} = \infty$ , le pôle est aussi à l'infini.

On constate que le pôle est indépendant de la limitation et ne dépend que du coefficient de correction  $k_{ci}$ . On peut donc simplifier la réalisation de la correction en sommant toutes les contributions provenant des limiteurs avant d'effectuer la multiplication par  $k_c$  (simplification de la structure de la fig. 2.2).

#### 2.4.10 Fréquence de commutation

La fréquence de commutation est calculée comme au § 1.6.2. On obtient après quelques développements

$$\begin{aligned}
f_{cilim} &= \frac{(\mathbf{k}_{ilim}^T + k_{mi}p_i \mathbf{c}^T) \mathbf{b}_{ilim}}{2 \Delta_{sh}} \frac{(u_{max} - u_{eq})(u_{eq} - u_{min})}{u_{max} - u_{min}} = \\
&= \frac{(\mathbf{k}_{silim}^T + k_{mi}p_i \mathbf{c}_s^T) \mathbf{b}_s}{2 \Delta_{sh}} \frac{(u_{max} - u_{eq})(u_{eq} - u_{min})}{u_{max} - u_{min}} \quad (2.46)
\end{aligned}$$

De même, la fréquence maximum est atteinte lorsque  $u_{eq} = (u_{max} + u_{min}) / 2$

$$\begin{aligned}
f_{cilimax} &= \frac{(\mathbf{k}_{ilim}^T + k_{mi}p_i \mathbf{c}^T) \mathbf{b}_{ilim}}{8 \Delta_{sh}} (u_{max} - u_{min}) = \\
&= \frac{(\mathbf{k}_{silim}^T + k_{mi}p_i \mathbf{c}_s^T) \mathbf{b}_s}{8 \Delta_{sh}} (u_{max} - u_{min}) \quad (2.47)
\end{aligned}$$

## 2.5 LIMITATIONS VARIABLES AVEC CORRECTION IDÉALE

$$k_{ci} = \infty$$

### 2.5.1 Introduction

A la section 2.4, le cas général de la limitation variable avec correction de l'intégrateur a été traité. En supposant une correction de l'intégrateur idéale instantanée, c'est-à-dire  $k_{ci} = \infty$ , les expressions (de la section 2.4) ne sont pas utilisables. Un passage à la limite n'est pas possible sur les équations finales. Il faut dès lors refaire les développements en tenant compte de  $k_{ci} = \infty$  dès le début. On verra au § 2.5.6 comment interpréter ce passage à la limite. Par rapport à la section 2.4, on ajoute l'indice  $c$  à celui de  $ilim$ , soit  $ilimc$ .

### 2.5.2 Hypothèses

Les hypothèses suivantes seront admises dans cette section

- Limitations variables selon définition (2.25)
- Correction idéale instantanée de l'intégrateur selon définition (2.32), mais avec  $k_{ci} = \infty$
- Un seul limiteur  $L_i$  actif

### 2.5.3 Régulateur intégrateur

Avec la correction instantanée admise, l'entrée  $e_i$  du limiteur est en tout instant égale à sa sortie limitée  $w_{ilim}$

$$e_i = w_{ilim} \quad (2.48)$$

avec  $w_{ilim}$  donné par (2.29). De l'expression (2.30) de  $e_i$  et avec (2.48), on obtient la valeur que prend la grandeur d'état du régulateur intégrateur

$$x_R = \frac{1}{k_R} [ w_{ilim} - k_W w + (\mathbf{k}_s^T - \mathbf{k}_{silim}^T) \mathbf{x}_s ] \quad (2.49)$$



En limitation avec correction idéale, il y a donc dépendance linéaire entre  $x_R$  et les grandeurs d'état du système à régler. Par dérivation de cette expression, on obtient l'équation différentielle

$$\dot{x}_R = \frac{1}{k_R} [ \dot{w}_{ilim} - k_w \dot{w} + (k_s^T - k_{silim}^T) \dot{x}_s ] \quad (2.50)$$

avec

$$w_{ilim} = k_{mi} [c_i + p_i(w - c_s^T x_s)] \quad (2.51)$$

$$\dot{w}_{ilim} = k_{mi} p_i \dot{w} - k_{mi} p_i c_s^T \dot{x}_s \quad (2.52)$$

D'où, compte tenu de l'équation du système à régler (1.3)

$$\begin{aligned} \dot{x}_R &= \frac{1}{k_R} [ (k_s^T - k_{silim}^T - k_{mi} p_i c_s^T) \dot{x}_s + (k_{mi} p_i - k_w) \dot{w} ] = \\ &= \frac{k_s^T - k_{silim}^T - k_{mi} p_i c_s^T}{k_R} (A_s x_s + b_s u + b_{sv} v) + \frac{(k_{mi} p_i - k_w)}{k_R} \dot{w} \end{aligned} \quad (2.53)$$

#### 2.5.4 Equation matricielle globale

En réunissant l'équation du système à régler (1.3) et (2.53), on obtient l'équation d'état matricielle globale

$$\dot{x} = A_{ilimc} x + b_{ilimc} u + b_{vilimc} v + b_{\dot{w}ilimc} \dot{w} \quad (2.54)$$

avec le vecteur-ligne  $m_s^T$  dépendant des limitations

$$m_s^T = \frac{k_s^T - k_{silim}^T - k_{mi} p_i c_s^T}{k_R} \quad (2.55)$$

les matrices en boucle ouverte s'écrivent

$$A_{ilimc} = \begin{bmatrix} A_s & 0 \\ m_s^T A_s & 0 \end{bmatrix} \quad (2.56a)$$

$$b_{ilimc} = \begin{bmatrix} b_s \\ m_s^T b_s \end{bmatrix} \quad (2.56b)$$

$$b_{vilimc} = \begin{bmatrix} b_{sv} \\ m_s^T b_{sv} \end{bmatrix} \quad (2.56c)$$

$$b_{\dot{w}ilimc} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{k_{mi} p_i - k_w}{k_R} \end{bmatrix} \quad (2.56d)$$

#### 2.5.5 Pôles du système réglé en boucle ouverte

Les pôles du système réglé en boucle ouverte en limitation avec correction idéale sont donnés par

$$P_{ilimc}(s) = \det(s\mathbf{1} - \mathbf{A}_{ilimc}) = s \cdot \det(s\mathbf{1} - \mathbf{A}_s) \quad (2.57)$$

compte tenu de (2.56a).

Les pôles sont donc ceux du système à régler sans intégrateur, plus un pôle à l'origine dû à la dépendance linéaire de  $x_R$  introduite par (2.48).

### 2.5.6 Comparaison avec la correction réelle

Les développements de la section 2.4 ont été effectués en tenant compte d'un coefficient de correction de l'intégrateur  $k_{ci}$  fini. Le cas de la correction idéale en est un cas limite, puisque  $k_{ci} = \infty$ . D'ailleurs, partant de l'équation (2.32), on peut écrire

$$\begin{aligned} \frac{T_i}{k_{ci}k_R} \dot{x}_R + x_R = & \left( \frac{1}{k_{ci}k_R} + \frac{k_{mi}p_i - k_w}{k_R} \right) w + \\ & + \left( \frac{\mathbf{k}_s^T - \mathbf{k}_{silim}^T - k_{mi}p_i \mathbf{c}_s^T}{k_R} - \frac{1}{k_{ci}k_R} \mathbf{c}_s^T \right) \mathbf{x}_s + \frac{k_{mi}c_i}{k_R} \end{aligned} \quad (2.58)$$

Avec  $k_{ci} \rightarrow \infty$ , on voit en particulier que le terme de la dérivée de  $x_R$  disparaît et on obtient la relation (2.49).

Au § 2.3.7, on a vu que lorsque  $k_{ci} \rightarrow \infty$ , le pôle  $p_n$  de l'intégrateur tend aussi vers  $-\infty$ . En comparant avec (2.57), on peut conclure qu'à la limite lorsque  $k_{ci} = \infty$  est atteint, le pôle passe de  $-\infty$  à l'origine. En fait, cela s'explique par la réduction de l'ordre du système réglé, puisque la correction idéale (2.48) introduit une dépendance linéaire sur la grandeur  $x_R$  (2.49).

### 2.5.7 Tension de commande équivalente

En mode de glissement, les mêmes relations sur la loi de commutation (2.38) et (2.39) restent valables. En introduisant dans (2.39) l'expression (2.41) de  $\dot{\mathbf{x}}$ , on trouve

$$\begin{aligned} u_{eqilimc} = & - \frac{1}{(\mathbf{k}_{ilim}^T + k_{mi}p_i \mathbf{c}^T) \mathbf{b}_{ilimc}} \cdot \\ & \cdot [ (\mathbf{k}_{ilim}^T + k_{mi}p_i \mathbf{c}^T) (\mathbf{A}_{ilimc} \mathbf{x} + \mathbf{b}_{vilimc} v + \mathbf{b}_{wilimc} \dot{w}) - k_{mi}p_i \dot{w} ] = \\ = & - \frac{1}{(\mathbf{k}_{ilim}^T + k_{mi}p_i \mathbf{c}^T) \mathbf{b}_{ilimc}} \cdot \\ & \cdot [ (\mathbf{k}_{ilim}^T + k_{mi}p_i \mathbf{c}^T) (\mathbf{A}_{ilimc} \mathbf{x} + \mathbf{b}_{vilimc} v) - k_{mi}p_i \dot{w} ] = \\ = & - \frac{1}{(\mathbf{k}_{silim}^T + k_{mi}p_i \mathbf{c}_s^T) \mathbf{b}_s} \cdot \\ & \cdot [ (\mathbf{k}_{silim}^T + k_{mi}p_i \mathbf{c}_s^T) (\mathbf{A}_s \mathbf{x}_s + \mathbf{b}_{sv} v) - k_{mi}p_i \dot{w} ] = \\ = & u_{eqilim} \end{aligned} \quad (2.59)$$

la condition d'existence du mode de glissement étant toujours  $(\mathbf{k}_{\text{ilim}}^T + k_{\text{miPi}} \mathbf{c}^T) \mathbf{b}_{\text{ilimc}} = (\mathbf{k}_{\text{silim}}^T + k_{\text{miPi}} \mathbf{c}_s^T) \mathbf{b}_s \neq 0$ .

### 2.5.8 Système réglé en mode de glissement

En introduisant (2.59) dans (2.54), on obtient l'équation matricielle en mode de glissement

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_{\text{ilimc}}^* \mathbf{x} + \mathbf{b}_{\text{vilimc}}^* v + \mathbf{b}_{\text{wilimc}}^* \dot{w} \quad (2.60)$$

La matrice  $\mathbf{M}_{\text{ilimc}}$  étant cette fois définie par

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{\text{ilimc}} &= \mathbf{1} - \frac{1}{(\mathbf{k}_{\text{ilim}}^T + k_{\text{miPi}} \mathbf{c}^T) \mathbf{b}_{\text{ilimc}}} \mathbf{b}_{\text{ilimc}} (\mathbf{k}_{\text{ilim}}^T + k_{\text{miPi}} \mathbf{c}^T) = \\ &= \begin{bmatrix} \left[ \mathbf{1} - \frac{1}{(\mathbf{k}_{\text{silim}}^T + k_{\text{miPi}} \mathbf{c}_s^T) \mathbf{b}_s} \mathbf{b}_s (\mathbf{k}_{\text{silim}}^T + k_{\text{miPi}} \mathbf{c}_s^T) \right] & \mathbf{0} \\ - \frac{1}{(\mathbf{k}_{\text{silim}}^T + k_{\text{miPi}} \mathbf{c}_s^T) \mathbf{b}_s} \mathbf{m}_s^T \mathbf{b}_s (\mathbf{k}_{\text{silim}}^T + k_{\text{miPi}} \mathbf{c}_s^T) & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{\text{silim}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{m}_s^T (\mathbf{M}_{\text{silim}} - \mathbf{1}) & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.61)$$

les matrices en mode de glissement peuvent être explicitées selon

$$\mathbf{A}_{\text{ilimc}}^* = \mathbf{M}_{\text{ilimc}} \mathbf{A}_{\text{ilimc}} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{\text{silim}} \mathbf{A}_s & \mathbf{0} \\ \mathbf{m}_s^T \mathbf{M}_{\text{silim}} \mathbf{A}_s & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{\text{silim}}^* & \mathbf{0} \\ \mathbf{m}_s^T \mathbf{A}_{\text{silim}}^* & 0 \end{bmatrix} \quad (2.62a)$$

$$\mathbf{b}_{\text{vilimc}}^* = \mathbf{M}_{\text{ilimc}} \mathbf{b}_{\text{vilimc}} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{\text{silim}} \mathbf{b}_{\text{sv}} \\ \mathbf{m}_s^T \mathbf{M}_{\text{silim}} \mathbf{b}_{\text{sv}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{\text{svilim}}^* \\ \mathbf{m}_s^T \mathbf{b}_{\text{svilim}}^* \end{bmatrix} \quad (2.62b)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_{\text{wilimc}}^* &= \mathbf{M}_{\text{ilimc}} \mathbf{b}_{\text{wilimc}} + \frac{k_{\text{miPi}}}{(\mathbf{k}_{\text{ilim}}^T + k_{\text{miPi}} \mathbf{c}^T) \mathbf{b}_{\text{ilimc}}} \mathbf{b}_{\text{ilimc}} = \\ &= \mathbf{b}_{\text{wilimc}} + \frac{k_{\text{miPi}}}{(\mathbf{k}_{\text{silim}}^T + k_{\text{miPi}} \mathbf{c}_s^T) \mathbf{b}_s} \mathbf{b}_{\text{ilimc}} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{\text{swilim}}^* \\ \dots \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.62c)$$

### 2.5.9 Pôles du système réglé en mode de glissement

Les pôles du système réglé en mode de glissement sont calculés par

$$P_{\text{ilimc}}^*(s) = \det(s\mathbf{1} - \mathbf{A}_{\text{ilimc}}^*) = s \cdot \det(s\mathbf{1} - \mathbf{A}_{\text{silim}}^*) \quad (2.63)$$

Comme dans le cas du système réglé en limitation en boucle ouverte, les pôles du système réglé en limitation en mode de glissement sont ceux du système réglé en limitation en mode de glissement sans intégrateur, plus un pôle à l'origine dû à l'intégrateur et sa correction idéale.

### 2.5.10 Fréquence de commutation

La fréquence de commutation est calculée comme au § 1.6.2. On obtient après quelques développements :

$$\begin{aligned} f_{\text{cilimc}} &= \frac{(\mathbf{k}_{\text{ilim}}^T + k_{\text{mi}} \mathbf{p}_i \mathbf{c}^T) \mathbf{b}_{\text{ilimc}} (u_{\text{max}} - u_{\text{eq}})(u_{\text{eq}} - u_{\text{min}})}{2 \Delta_{\text{sh}} u_{\text{max}} - u_{\text{min}}} = \\ &= \frac{(\mathbf{k}_{\text{silim}}^T + k_{\text{mi}} \mathbf{p}_i \mathbf{c}_s^T) \mathbf{b}_s (u_{\text{max}} - u_{\text{eq}})(u_{\text{eq}} - u_{\text{min}})}{2 \Delta_{\text{sh}} u_{\text{max}} - u_{\text{min}}} = f_{\text{cilim}} \end{aligned} \quad (2.64)$$

De même, la fréquence maximum est atteinte lorsque  $u_{\text{eq}} = (u_{\text{max}} + u_{\text{min}}) / 2$  :

$$\begin{aligned} f_{\text{cilimcmax}} &= \frac{(\mathbf{k}_{\text{ilim}}^T + k_{\text{mi}} \mathbf{p}_i \mathbf{c}^T) \mathbf{b}_{\text{ilimc}}}{8 \Delta_{\text{sh}}} (u_{\text{max}} - u_{\text{min}}) = \\ &= \frac{(\mathbf{k}_{\text{silim}}^T + k_{\text{mi}} \mathbf{p}_i \mathbf{c}_s^T) \mathbf{b}_s}{8 \Delta_{\text{sh}}} (u_{\text{max}} - u_{\text{min}}) = f_{\text{cilimmax}} \end{aligned} \quad (2.65)$$

## 2.6 HYPOTHESES

Dans cette section, nous allons imposer quelques restrictions quant aux vecteurs d'entrée  $\mathbf{b}_s$  et de sortie  $\mathbf{c}_s^T$ . Elles sont tout à fait réalistes dans une multitude de systèmes à régler concrets, en particulier ceux traités dans cette thèse (chapitres 5 et 6).

La grandeur à régler est souvent une grandeur d'état. On peut alors s'arranger pour que ce soit la grandeur d'état  $x_{\text{ns}}$ , soit

$$\mathbf{c}_s^T = [ 0 \ \dots \ 0 \ 1 ] \quad (2.66)$$

La grandeur de commande n'agit dans la plupart des cas que sur une seule grandeur d'état. On peut alors s'arranger pour que ce soit sur  $x_1$ . Le vecteur de commande  $\mathbf{b}_s$  prend donc l'allure suivante

$$\mathbf{b}_s = \begin{bmatrix} b_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.67)$$

Compte tenu de ces hypothèses, certaines expressions des sections (2.4) et (2.5) se simplifient :

$$\mathbf{k}_s^T \mathbf{b}_s = k_1 b_1$$

$$\mathbf{k}_{\text{silim}}^T \mathbf{b}_s = k_1 b_1$$

$$\mathbf{c}_s^T \mathbf{b}_s = 0$$

$$\mathbf{m}_s^T \mathbf{b}_s = 0$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{b}_{ilimc} &= \mathbf{b}_{ilim} = \mathbf{b} \\
\mathbf{m}_s^T \mathbf{M}_{silim} &= \mathbf{m}_s^T \\
\mathbf{M}_{ilimc} &= \mathbf{M}_{ilim} \\
\mathbf{A}_{ilimc}^* &= \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{silim} \mathbf{A}_s & \mathbf{0} \\ \mathbf{m}_s^T \mathbf{A}_s & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{silim}^* & \mathbf{0} \\ \mathbf{m}_s^T \mathbf{A}_s & 0 \end{bmatrix} \\
\mathbf{b}_{vilimc}^* &= \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{silim} \mathbf{b}_{sv} \\ \mathbf{m}_s^T \mathbf{b}_{sv} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{svilim}^* \\ \mathbf{m}_s^T \mathbf{b}_{sv} \end{bmatrix} \\
\mathbf{b}_{wilimc}^* &= \mathbf{b}_{wilimc} + \frac{k_{mi} p_i}{(\mathbf{k}_{silim}^T + k_{mi} p_i \mathbf{c}_s^T) \mathbf{b}_s} \mathbf{b} = \mathbf{b}_{wilimc} + \frac{k_{mi} p_i}{k_1 b_1} \mathbf{b}
\end{aligned} \tag{2.68}$$

## 2.7 INTERPRÉTATION DES LIMITATIONS VARIABLES

### 2.7.1 Introduction

Aux sections 2.4 et 2.5, on a étudié le système réglé en limitation variable. En particulier, on a calculé les pôles du système réglé en mode de glissement et en limitation (§ 2.4.9 et 2.5.9) en fonction des caractéristiques aux bornes des limiteurs. Ces pôles caractérisent le système réglé complet. On peut dès lors aussi interpréter différemment les limitations variables. En effet, pourquoi ne pas introduire ces pôles dans l'équation caractéristique du système réglé en mode de glissement, mais hors limitation (§ 1.4.2)? Ce principe est brièvement montré dans cette section. On verra ainsi qu'on peut aussi interpréter les limitations variables du point de vue de coefficients variables.

### 2.7.2 Equation caractéristique en limitation

En mode de glissement et en limitation, l'équation caractéristique du système réglé est donnée par (2.44) ou (2.63) selon qu'on considère une correction réelle ou idéale d'un intégrateur éventuel

$$P_{ilim}^*(s) = s^n + \alpha_{(n-1)ilim} s^{n-1} + \dots + \alpha_{1ilim} s + \alpha_{0ilim} = 0 \tag{2.69}$$

Les coefficients  $\alpha_{ilim}$  de cette équation caractéristique dépendent des coefficients de contre-réaction  $k_1, k_2, \dots, k_n$  dimensionnés pour le système réglé hors limitation par la méthode d'imposition des pôles (§ 1.5.3). On s'en apercevra mieux lors des développements analytiques de l'exemple d'application du chapitre 5.

En introduisant les coefficients  $\alpha_{ilim}$  de l'équation caractéristique (2.69) dans (1.36), on obtient des coefficients de contre-réaction  $k_{1ilim}, k_{2ilim}, \dots, k_{nilim}$  qui correspondent à un système réglé hors limitation, mais décrivant le même comportement que les coefficients  $k_1, k_2, \dots, k_n$  avec limitation variable sur  $x_i$ . Nous avons donc deux systèmes réglés différents qui présentent

néanmoins le même comportement dynamique. D'une part le système réglé en mode de glissement et en limitation variable de  $x_i$  avec la contre-réaction des  $i$  coefficients  $k_1 \dots k_i$  et, d'autre part le système réglé en mode de glissement hors limitation avec la contre-réaction des  $n$  coefficients  $k_{1ilim} \dots k_{nilim}$ .

### 2.7.3 Conclusion

Les développements du paragraphe précédent montrent que les limitations variables peuvent être interprétées comme un système à contre-réaction avec coefficients variables.

Le phénomène à la source de la variation des coefficients est l'état du système réglé, plus précisément son écart de réglage  $e$ . On ne peut donc pas parler de réglage adaptatif au sens usuel du terme; celui-ci se rapporte en effet à l'adaptation à un système à régler variable.

Dans notre cas, cette variation des coefficients est réalisée dans le but d'éviter un comportement instable du système réglé par sauts d'une limitation à l'autre.

## 2.8 CONCLUSION

Les développements de ce chapitre ont permis de poser la définition des limitations variables. Le comportement du système réglé en limitation variable a pu être décrit tant en boucle ouverte, qu'en fonctionnement en mode de glissement. Ces relations dépendent, pour la plupart, du coefficient de correction de l'intégrateur  $k_{ci}$ , de la pente  $p_i$  du segment de limitation et, surtout, du vecteur-ligne de contre-réaction d'état. Il n'est donc pas possible d'utiliser ces relations ni pour effectuer le dimensionnement des coefficients, ni pour définir les paramètres  $c_i$  et  $p_i$  des limitations variables.

Pour calculer  $k^T$ , on effectuera soit un dimensionnement global (sect. 1.4), soit un dimensionnement en cascade des sous-systèmes réglés en appliquant la contre-réaction d'état partielle (sect. 1.5).

Les limitations variables seront définies selon des critères liés physiquement (mécanique du mouvement) au système à régler (voir par exemple sect. 5.6).

Les relations de ce chapitre peuvent par contre être utilisées pour vérifier a posteriori les pôles des différents sous-systèmes si le dimensionnement a été effectué globalement, ou pour calculer les pôles en cas de limitation variable.

Anticipons, de plus, en précisant que ces développements pourront être quasiment décalqués pour la description d'un système réglé par une structure de réglage d'état en limitation variable, que ce soit en continu (sect. 4.5) ou en échantillonné (sect. 4.6).

Le programme *SliMoDeSi*, développé pour et pendant ce travail de thèse, permet le dimensionnement d'un réglage par mode de glissement continu et la simulation du système réglé par une structure de réglage par mode de glissement continue ou hybride. Pour étendre les possibilités du programme à la simulation

des limitations variables, l'approche mathématiquement rigoureuse de ce chapitre était une condition nécessaire (chapitre 7).





## **3 STRUCTURE DE RÉGLAGE HYBRIDE, TRAITEMENT EN PSEUDO-CONTINU**

### **3.1 INTRODUCTION**

Au chapitre 1, on a développé les méthodes de dimensionnement en continu des régulateurs par mode de glissement en se basant sur la structure de réglage de la figure 1.2.

L'étude des limitations variables, au chapitre 2, a aussi été effectuée pour un système réglé continu.

La structure de réglage par mode de glissement réalisée en hybride, présentée brièvement aux § 1.6.3 et 1.6.4, ne peut par conséquent pas être traitée directement par les méthodes continues. Deux approches différentes sont alors applicables pour le traitement.

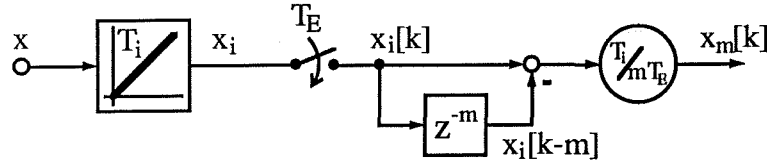
La première, présentée dans ce chapitre, consiste à transformer les parties échantillonnées du système réglé en effectuant des approximations pseudo-continues (§ 3.2.1 à 3.2.6). Comme on le verra au § 3.2.6, c'est l'élément de maintien qui pose un problème majeur pour le traitement en pseudo-continu. Si un traitement par les méthodes du réglage par mode de glissement est exigé, il faudra éliminer cet élément de maintien dans la représentation du système réglé. Cette approche peut sembler grossière, mais reste néanmoins suffisante dans certains cas (chapitre 5).

La deuxième approche consiste à considérer une réduction de l'ordre du système réglé lorsque celui-ci est en mode de glissement. On se retrouve alors avec une structure de réglage d'état digital qui peut être traitée par les méthodes échantillonnées ou pseudo-continues habituelles (chapitre 4).

### **3.2 APPROXIMATIONS PSEUDO-CONTINUES**

#### **3.2.1 Organe de mesure digital**

L'organe de mesure digital effectuant la mesure de la valeur moyenne de la grandeur à mesurer sur une ou plusieurs périodes d'échantillonnage est un type particulier d'organe de mesure, néanmoins fortement utilisé dans le domaine des entraînements réglés digitaux (mesure de la vitesse). Le cas de la moyenne glissante effectuée sur  $m$  périodes d'échantillonnages est représenté à la fig. 3.1.



**Fig. 3.1** Organe de mesure digital : moyenne glissante sur  $m$  périodes d'échantillonnages.

L'intégrateur continu est décrit par

$$\dot{x}_i = \frac{1}{T_i} x \quad (3.1)$$

alors que la partie échantillonnée de l'organe de mesure donne

$$x_m[k] = (x_i[k] - x_i[k-m]) \frac{T_i}{mT_E} \quad (3.2)$$

où  $T_E$  est la période d'échantillonnage de  $x_i$  et  $T_i$  la constante de temps d'intégration de  $x$ .

Dans le domaine de Laplace (3.2), avec (3.1), devient

$$x_m(s) = (x_i(s) - x_i(s) e^{-smT_E}) \frac{T_i}{mT_E} = x(s) \frac{1}{sT_i} (1 - e^{-smT_E}) \frac{T_i}{mT_E} \quad (3.3)$$

La fonction exponentielle peut être approchée par l'approximation de Padé

$$e^{-smT_E} \cong \frac{1 - s \frac{mT_E}{2}}{1 + s \frac{mT_E}{2}} \quad (3.4)$$

En introduisant (3.4) dans (3.3), on obtient la fonction de transfert de l'approximation pseudo-continue de l'organe de mesure digital

$$x_m \cong \frac{1}{1 + s \frac{mT_E}{2}} x(s) \quad (3.5)$$

L'organe de mesure est donc à considérer comme un filtre sur la mesure du premier ordre, de constante de temps la moitié de la durée de mesure  $mT_E$ .

### 3.2.2 Organe de mesure digital de vitesse et quantification

Dans ce paragraphe, l'organe de mesure digital présenté au § 3.2.1 est appliqué au cas de la mesure de la vitesse  $n$ . La grandeur  $x_i$  est dans ce cas la position  $\theta$ , puisque on a

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{T_\theta} n \quad (3.6)$$

où  $T_\theta$  est une constante de temps relative au choix des grandeurs nominales (voir chapitre 5).

La vitesse mesurée est donnée selon (3.2)

$$n_m[k] = (\theta[k] - \theta[k-m]) \frac{T_\theta}{mT_E} = \Delta\theta[k] \frac{T_\theta}{mT_E} \quad (3.7)$$

$\Delta\theta$  étant le déplacement parcouru pendant le temps  $mT_E$ .

Cette méthode de mesure est aussi appelée mesure de vitesse par différence.

L'approximation (3.5) permet alors d'utiliser

$$n_m(s) \cong \frac{1}{1 + s \frac{mT_E}{2}} n(s) \quad (3.8)$$

pour la description continue de l'organe de mesure digital de vitesse.

La mesure de position est quantifiée par le nombre limité de stries du capteur incrémental. Il s'ensuit que toute mesure de vitesse sera affectée par cette quantification, en se traduisant notamment par une précision statique maximale. Les études présentées dans [11] montrent que la précision théorique maximale de la mesure de vitesse par différence est donnée par

$$\tilde{n}_{mq} = \theta_\Delta \frac{T_\theta}{mT_E} = \frac{1}{N_{capn}} \frac{T_\theta}{mT_E} \quad (3.9)$$

$\theta_\Delta = 1/N_{capn}$  représentant la résolution du capteur incrémental,  $N_{capn}$  étant le nombre de stries du capteur pour un déplacement nominal.

### 3.2.3 Observateur digital de vitesse et quantification

L'utilisation d'une mesure de vitesse selon le § 3.2.2 présente l'inconvénient qu'il faut en tenir compte par une équation supplémentaire, que ce soit en échantillonné selon (3.7) ou en continu selon (3.8).

L'observateur digital d'accélération et de vitesse présenté dans [11] est une alternative à ce problème. On peut en effet montrer que celui-ci fournit quasiment la vitesse instantanée. Pour le dimensionnement d'un régulateur, on admet que l'observateur de vitesse est un dérivateur parfait de la position

$$n'_b = n \quad (3.10)$$

Des études approfondies en simulation numérique ont montré que la valeur crête-à-creux de l'erreur d'observation sur la vitesse due à la quantification de la mesure de position est de

$$\tilde{n}'_{b\Delta} = 2 \tilde{n}_{1q} = \frac{2}{N_{capn}} \frac{T_\theta}{T_E} \quad (3.11)$$

où  $\tilde{n}_{1q}$  est donné par (3.9) pour  $m=1$ , alors que la valeur absolue maximale de cette erreur est de

$$|\tilde{n}_b|_{\max} = 1.5 \tilde{n}_{1q} \quad (3.12)$$

La vitesse observée présente donc un bruit de quantification supérieur à celui de la mesure de vitesse par différence, indépendamment de  $m$  (3.9).

### 3.2.4 Coefficients du régulateur pseudo-continu

De même que pour le réglage par contre-réaction d'état [7, § 11.4.4], il est nécessaire de corriger les coefficients de contre-réaction d'un régulateur échantillonné, lorsque le dimensionnement a été fait en pseudo-continu.

La loi de commutation d'un régulateur échantillonné est donnée par

$$s[k] = -\mathbf{K}_S^T \mathbf{x}_S[k] + K_R x_{Re}[k] + K_W w[k] \quad (3.13)$$

où la composante intégrale du régulateur est calculée selon

$$x_{Re}[k] = x_{Re}[k-1] + e[k-1] \quad (3.14)$$

Après transformation de Laplace et mise en évidence de  $x_{Re}(s)$ , on trouve

$$x_{Re}(s) = \frac{e^{-sT_E}}{1 - e^{-sT_E}} e(s) \quad (3.15)$$

En introduisant l'approximation de Padé (3.4) dans (3.15), on obtient

$$x_{Re}(s) \cong \left( \frac{1}{sT_E} - \frac{1}{2} \right) e(s) \quad (3.16)$$

soit dans le domaine temporel

$$x_{Re}(t) = \frac{1}{T_E} \int e(t) dt - \frac{1}{2} e(t) = \frac{T_i}{T_E} x_{RC}(t) - \frac{1}{2} (w(t) - \mathbf{c}_S^T \mathbf{x}_S(t)) \quad (3.17)$$

où  $x_{RC}$  est la partie intégrale du comportement PI de l'intégrateur pseudo-continu

$$x_{RC}(t) = \frac{1}{T_i} \int e(t) dt \quad (3.18)$$

En introduisant (3.17) dans la loi de commutation (3.13), on obtient

$$s(x) = -\left( \mathbf{K}_S^T - \frac{K_R}{2} \mathbf{c}_S^T \right) \mathbf{x}_S + \frac{T_i}{T_E} K_R x_{RC} + \left( K_W - \frac{K_R}{2} \mathbf{c}_S^T \right) w \quad (3.19)$$

En comparant cette expression à celle d'un régulateur continu

$$s(x) = -\mathbf{k}_S^T \mathbf{x}_S + k_R x_{RC} + k_W w \quad (3.20)$$

on trouve par identification des termes les relations entre les coefficients des régulateurs échantillonné (majuscules) et continu (minuscules) :

$$\mathbf{k}_s^T = \mathbf{K}_s^T - \frac{K_R}{2} \mathbf{c}_s^T \quad \mathbf{K}_s^T = \mathbf{k}_s^T + \frac{k_R}{2} \frac{T_E}{T_i} \mathbf{c}_s^T = \mathbf{k}_s^T + \frac{K_R}{2} \mathbf{c}_s^T \quad (3.21a)$$

$$k_w = K_w - \frac{K_R}{2} \mathbf{c}_s^T \quad K_w = k_w + \frac{K_R}{2} \frac{T_E}{T_i} \mathbf{c}_s^T = k_w + \frac{k_R}{2} \mathbf{c}_s^T \quad (3.21b)$$

$$k_R = K_R \frac{T_i}{T_E} \quad K_R = k_R \frac{T_E}{T_i} \quad (3.21c)$$

Ces relations sont identiques à celles obtenues pour le réglage d'état (voir [7, § 11.4.4]), si ce n'est qu'ici,  $T_i$  n'est pas forcément égal à  $T_E$ .

### 3.2.5 Conditions du traitement en pseudo-continu

Selon [7, § 12.7.2] et [5, § 19.2.8] les conditions nécessaires sur la période d'échantillonnage sont

$$T_E \leq \frac{T_{ns}}{4} \quad (3.22)$$

où  $T_{ns}$  est la plus petite des constantes de temps dominantes du système, ou

$$T_E \leq \frac{\pi}{4\omega_0} \quad (3.23)$$

pour un système à comportement oscillant mal amorti de pulsation propre  $\omega_0$ .

### 3.2.6 Interprétation de l'élément de maintien

Pour le traitement pseudo-continu du régulateur hybride tel qu'il est représenté à la figure 1.3, on doit modéliser l'élément de maintien.

L'approximation par la fonction de transfert

$$G_{me}(s) = \frac{1}{1 + s \frac{T_E}{2}} \quad (3.24)$$

présentée dans [7, § 10.6.3] reste valable. La structure de réglage hybride de la figure 1.3 se transforme en celle de la figure 3.2.

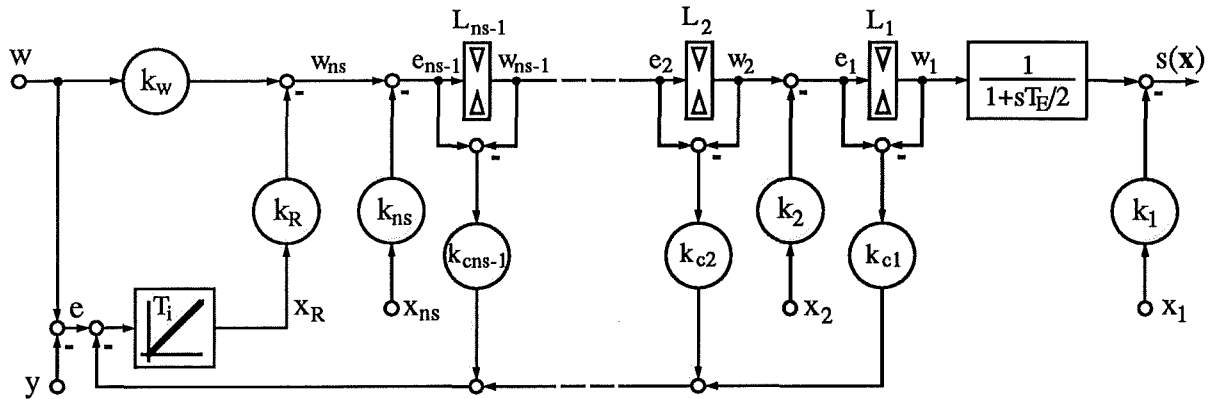


Fig. 3.2 Structure de réglage en pseudo-continu.

La loi de commutation  $s$  n'est plus une fonction linéaire du vecteur d'état  $x$ . Il n'est pas possible de compléter, à ce niveau, le modèle d'état du système à régler, par l'introduction d'une équation différentielle supplémentaire pour l'élément de maintien. En effet, celui-ci se trouve dans la contre-réaction : sa sortie est comparée à  $x_1$  pour former la loi de commutation. Les méthodes de dimensionnement du réglage par mode de glissement présentées au chapitre 1 ne sont par conséquent pas applicables à ce système réglé.

Essayons de contourner ce problème. Le bloc de fonction de transfert relatif à l'élément de maintien peut être déplacé vers la gauche. Il apparaît donc sur chaque contre-réaction d'état un filtrage qui peut cependant être reporté plus loin dans le système à régler lui-même, ce qui introduit une grandeur d'état supplémentaire. Pour ce qui est de la consigne, le filtrage apparaissant sur celle-ci doit aussi être pris en compte pour la modélisation du système à régler par une grandeur d'état supplémentaire. Des développements non reportés ici ont montré que ce système à régler n'est pas commandable (voir la définition dans [5, chap. 14]). Il n'est donc pas possible d'utiliser la structure de réglage par mode de glissement pseudo-continue représentée à la figure 3.2. Il se présente dès lors deux solutions :

- soit l'élément de maintien est carrément négligé et le problème est traité comme un réglage continu (chapitre 1, exemple d'application au § 5.7.11.4),
- soit on réduit l'ordre du système à régler lorsqu'il est en fonctionnement en mode de glissement. La sortie de l'élément de maintien devient la commande du sous-système à régler ainsi défini, lequel est réglé par une structure de réglage d'état. Les méthodes connues de l'approche pseudo-continue peuvent alors être appliquées. Cette méthode est présentée au chapitre 4, plus précisément au § 4.4.4.

## 4 SYSTÈME EN MODE DE GLISSEMENT, RÉDUCTION DE L'ORDRE DU SYSTÈME ET TRAITEMENT PAR LE RÉGLAGE D'ÉTAT

### 4.1 INTRODUCTION

Le mode de fonctionnement principal et souhaité d'un système réglé par une structure de réglage par mode de glissement est précisément le mode de glissement. Rappelons-le, il s'agit idéalement d'une commutation de l'organe de commande à fréquence infinie de sorte que le point de fonctionnement décrit une trajectoire située dans un hyperplan de commutation. Celui-ci est décrit par la loi de commutation  $s(x)=0$ . La dépendance linéaire entre grandeurs d'état ainsi introduite a pour conséquence l'introduction d'un pôle à l'origine tant en fonctionnement normal (chap. 1) qu'en limitation (chap. 2).

De fait, on peut affirmer qu'il y a redondance dans la description du système réglé en mode de glissement. Les réflexions de ce chapitre ont pour but la suppression de cette redondance. La réduction de l'ordre du système ainsi introduite, permet un traitement du système réglé par des méthodes linéaires et, en particulier, la prise en compte de l'élément de maintien dans le cas d'une structure de réglage hybride.

Pour un cas particulier de système à régler (représentant cependant la majorité des systèmes réels rencontrés), on verra que l'ensemble formé par la dernière boucle de contre-réaction, l'élément à hystérèse et l'organe de commande ont une fonction de transfert unitaire en mode de glissement. L'ordre du système réglé en mode de glissement est réduit de un. Les développements présentés permettent alors, par la suite, de considérer le système réglé par une structure de réglage d'état. L'aspect foncièrement non linéaire du réglage par mode de glissement a ainsi disparu.

A la section 4.2, on définit les hypothèses utilisées dans ce chapitre. La décomposition du système à régler original en deux sous-systèmes fait l'objet de la section 4.3. Dans la section 4.4, on verra comment considérer les structures de réglage continue et échantillonnée lors de la définition du modèle. Les considérations sur l'application des limitations variables au réglage d'état sont présentées à la section 4.5 pour le réglage continu et 4.6 pour le réglage échantillonné. La section 4.7 conclura ce chapitre.

## 4.2 HYPOTHESES

### 4.2.1 Introduction

Dans ce chapitre, deux niveaux d'hypothèses sont utilisés au cours des développements pour aboutir au résultat final. Les principales permettent une séparation du système à régler en deux sous-systèmes (§ 4.3.2), alors que les secondaires permettent de réduire le sous-système  $S_a$  réglé (§ 4.3.3).

### 4.2.2 Hypothèses principales

On suppose ici que

- le système à régler continu  $S$  est d'ordre  $n_s$  tel que

$$n_s = n_{sa} + n_{sb} \quad (4.1)$$

- les  $n_{sa}$  grandeurs d'état  $x_1 \dots x_{n_{sa}}$  sont directement soumises à l'influence de la commande  $u$ . Les  $n_{sb}$  autres ne le sont pas :

$$\mathbf{b}_s = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{sa} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

### 4.2.3 Hypothèses secondaires

Ici, on restreint un peu plus les systèmes à régler traités : le sous-système  $S_a$  est du premier ordre :

- la commande  $u$  n'agit que sur une grandeur d'état ( $x_1$ ), ce qui revient à :

$$\left. \begin{array}{l} n_{sa} = 1 \\ n_{sb} = n_s - 1 \\ \mathbf{x}_{sa} = x_{sa} = x_1 \\ \mathbf{b}_{sa} = \mathbf{b}_{sa} = \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{A}_{saa} = \mathbf{a}_{saa} \\ \mathbf{A}_{sab} = \mathbf{a}_{sab}^T \\ \mathbf{A}_{sba} = \mathbf{a}_{sba} \\ \mathbf{b}_{sva} = \mathbf{b}_{sva} \end{array} \right\} \quad (4.3)$$

- $x_1$  ne contribue pas à la grandeur à régler :

$$\mathbf{c}_{sa}^T = \mathbf{c}_{sa} = c_1 = 0 \quad (4.4)$$

En fait,  $c_1$  correspondrait au facteur de passage entre  $w_1$  et  $y$  (voir figure 4.5), en mode de glissement



### 4.3 DÉCOMPOSITION EN DEUX SOUS-SYSTEMES

#### 4.3.1 Généralités

On présente tout d'abord la décomposition générale d'un système à régler d'ordre  $n_s$  en deux sous-systèmes d'ordre  $n_{sa}$  et  $n_{sb}$  (§ 4.3.2).

Comme on le verra, seule l'hypothèse d'un sous-système  $S_a$  d'ordre un permet de réduire l'ordre du système réglé complet en mode de glissement (§ 4.3.3).

#### 4.3.2 Décomposition générale

Le système  $S$  tel qu'il est représenté globalement à la figure 4.1, respectivement par son diagramme structurel à la figure 4.2, est décrit par les équations générales (1.3) et (1.4) :

$$\dot{\mathbf{x}}_s = \mathbf{A}_s \mathbf{x}_s + \mathbf{b}_s u + \mathbf{b}_{sv} v \quad (4.5)$$

$$y = \mathbf{c}_s^T \mathbf{x}_s \quad (4.6)$$

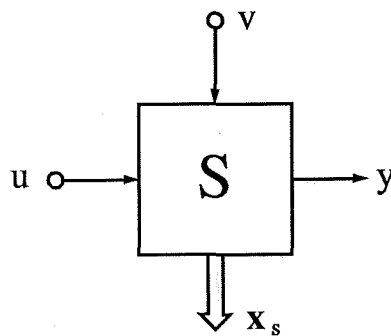


Fig. 4.1 Schéma-bloc du système à régler.

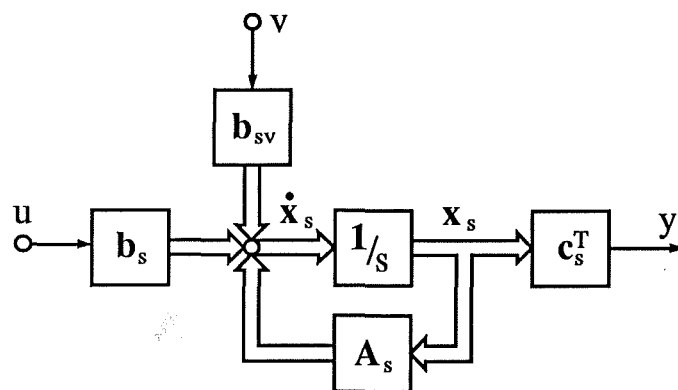


Fig. 4.2 Diagramme structurel du système à régler.

Le système à régler  $S$  est décomposé en deux sous-systèmes  $S_a$  et  $S_b$  de telle sorte que la grandeur de commande  $u$  n'agisse que sur  $S_a$  conformément aux hypothèses principales du § 4.2.2 (4.2) :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{sa} \\ \dot{x}_{sb} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{saa} & A_{sab} \\ A_{sba} & A_{sbb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{sa} \\ x_{sb} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{sa} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} b_{sva} \\ b_{svb} \end{bmatrix} v \quad (4.7)$$

$$y = \begin{bmatrix} c_{sa}^T & c_{sb}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{sa} \\ x_{sb} \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

Le diagramme structurel correspondant est représenté à la figure 4.3.

*Remarques :*

- Le vecteur partiel  $x_{sb}$  entre comme perturbation dans le sous-système  $S_a$ .
- Le vecteur partiel  $x_{sa}$  peut être considéré comme vecteur de commande pour le sous-système  $S_b$ .
- Le sous-système  $S_b$  présente  $n_{sa}$  grandeurs de commande et une grandeur de sortie  $y_b$ . Quelle que soit la structure de réglage utilisée, la commandabilité rigoureuse n'est pas garantie ([5, chap. 14]). Comme on le verra au § 4.3.3 le problème de réglage n'est bien défini que si  $n_{sa}=1$  (hypothèses secondaires du § 4.2.3) ([5, chap. 17]).

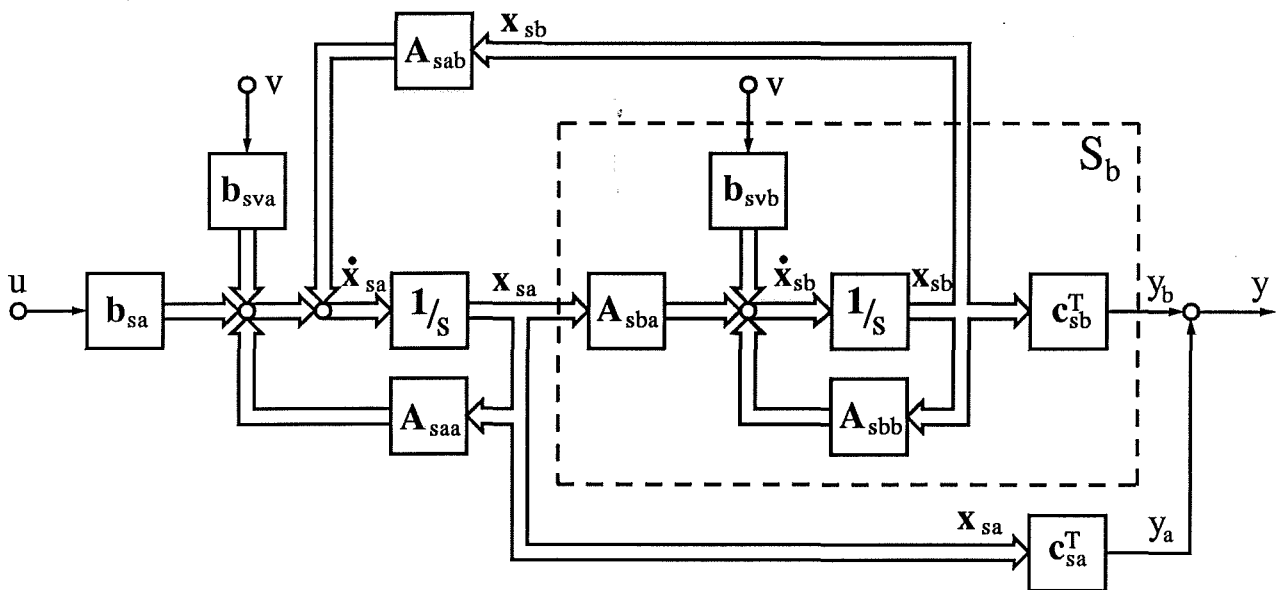


Fig. 4.3 Diagramme structurel mettant en évidence les deux sous-systèmes  $S_a$  et  $S_b$ .

### 4.3.3 Système réglé en mode de glissement

Le système à régler tel qu'il est représenté à la figure 4.3 peut être réglé par une structure de réglage par mode de glissement. Le but de la décomposition en deux sous-systèmes est de pouvoir simplifier la représentation (ou modèle) lorsque le système réglé est en mode de glissement. L'objectif est donc de définir une fonction de transfert du sous-système  $S_a$  réglé.

Pour le système réglé complet en mode de glissement et avec le sous-système  $S_a$  hors limitation, la loi de commutation, qui s'annule, peut être exprimée par :

$$s(\mathbf{x}) = w_{nsa} - k_{nsa}x_{nsa} - \dots - k_1x_1 = w_{nsa} - \mathbf{k}_{nsalim}^T \mathbf{x}_{nsa} = 0 \quad (4.9)$$

$w_{nsa}$  étant la sortie du limiteur  $L_{nsa}$  selon la définition du § 2.2.2 et  $\mathbf{k}_{nsalim}^T$  le vecteur-ligne de contre-réaction partiel en limitation de  $\mathbf{x}_{sa}$ , semblable à (2.6).

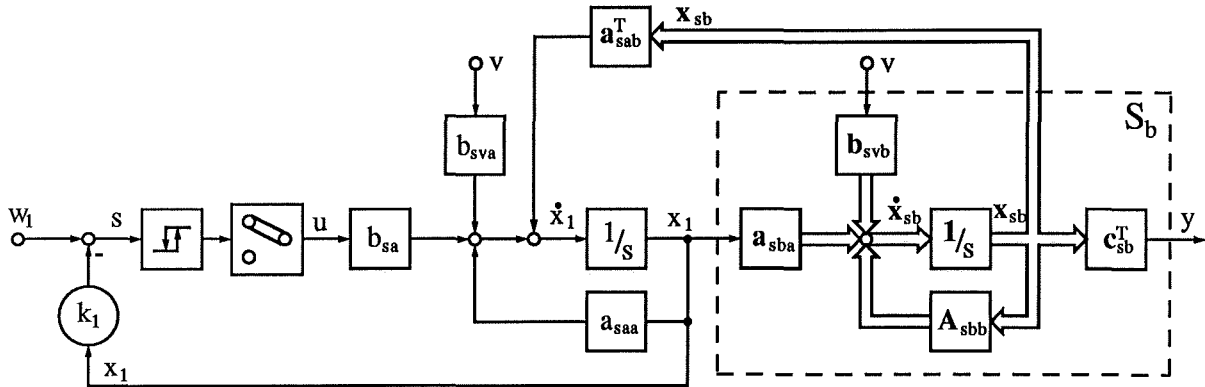


Fig. 4.4 Réglage par mode de glissement du sous-système  $S_a$ .

Pour  $n_{sa} > 1$ , on ne peut pas définir de fonction de transfert liant  $w_{nsa}$  à  $\mathbf{x}_{sa}$ . Par contre, lorsque les hypothèses secondaires du § 4.2.3 sont remplies, c'est-à-dire principalement  $n_{sa} = 1$ , on trouve immédiatement :

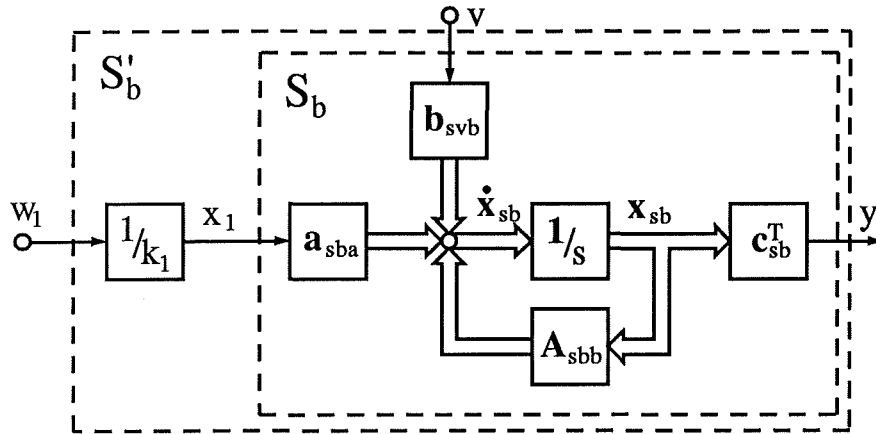
$$s(\mathbf{x}) = w_1 - k_1x_1 = 0 \quad (4.10)$$

qui permet de définir la fonction de transfert du sous-système  $S_a$  en mode de glissement :

$$G_{sa1}^*(s) = \frac{x_1}{w_1} = \frac{1}{k_1} \quad (4.11)$$

Ainsi, le sous-système  $S_a$  (d'ordre  $n_{sa} = 1$ ) réglé par mode de glissement selon la figure 4.4 peut être remplacé par le facteur de transfert  $1/k_1$  selon (4.11).  $x_1$  représente donc la commande du sous-système  $S_b$ .

Le système à régler original, avec sa structure de réglage par mode de glissement sur la grandeur d'état  $x_1$ , peut donc être réduit au sous-système  $S_b$  ( $n_{sb} = n_s - 1$ ), assorti d'un bloc de fonction de transfert d'ordre zéro (4.11). Cet ensemble sera désigné comme le sous-système  $S'_b$  (fig. 4.5). Il reçoit comme commande la consigne  $w_1$ .



**Fig. 4.5** Système à régler résultant avec sous-système  $S_a$  réglé en mode de glissement.

Le reste de la structure de réglage (contre-réactions de  $x_2 \dots x_{n_s}, x_R$ ) est celle d'un réglage d'état. Les méthodes y relatives [5, chap. 19] peuvent être appliquées (section 4.4).

## 4.4 STRUCTURES DE RÉGLAGE

### 4.4.1 Introduction

A la section 4.3, nous avons vu qu'un système réglé par une structure de réglage par mode de glissement peut être réduit lorsque ce système réglé est en mode de glissement. Ceci n'est vrai qu'à la condition que la grandeur de commande  $u$  du système à régler n'intervient que sur une grandeur d'état ( $x_1$ ) (voir hypothèses secondaires du § 4.2.3).

Ainsi, la structure de réglage par mode de glissement telle que présentée aux figures 1.3 ou 2.2, appliquée au système complet, se transforme en une structure de réglage d'état du sous-système  $S_b$ . La structure de réglage est globale, avec limiteurs en série. Dans cette section, on montre brièvement comment traiter et interpréter les cas continu, échantillonné et pseudo-continu.

### 4.4.2 Réglage continu

Compte tenu des développements précédents et de la structure de réglage de la figure 2.2, on obtient en mode de glissement le système réglé de la figure 4.6.

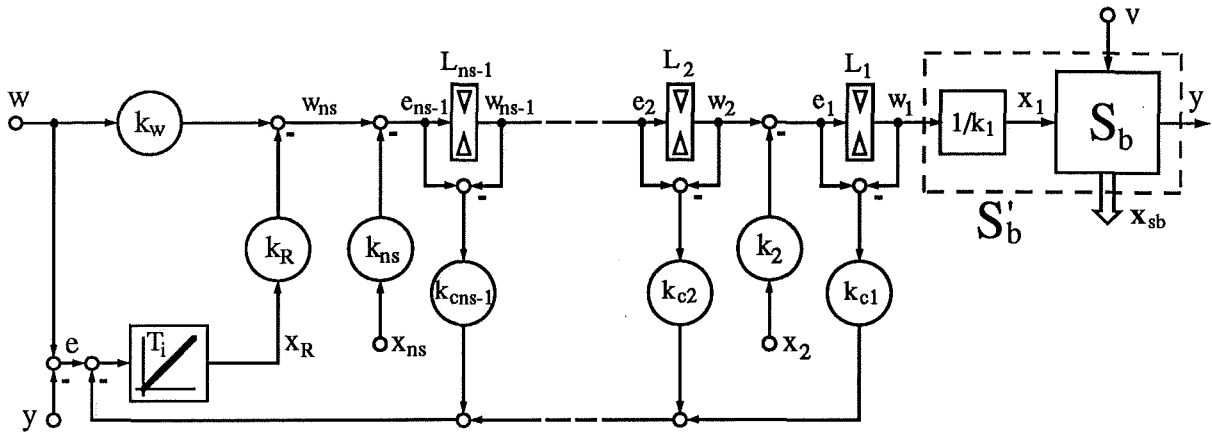


Fig. 4.6 Structure du réglage continu.

Le sous-système  $S'_b$ , d'ordre  $n_{sb}=n_s-1$  est décrit, selon (4.7), (4.3), (4.4) et (4.11), par :

$$\dot{\mathbf{x}}_{sb} = \mathbf{A}_{sbb}\mathbf{x}_{sb} + \frac{1}{k_1}\mathbf{a}_{sba}w_1 + \mathbf{b}_{svb}v \quad (4.12)$$

$$y = \mathbf{c}_{sb}^T\mathbf{x}_{sb} \quad (4.13)$$

où  $\frac{1}{k_1}\mathbf{a}_{sba}$  est le vecteur d'entrée et

$$w_1 = k_1x_1 \quad (4.14)$$

sa commande selon (4.11), avec la contre-réaction d'état :

$$\begin{aligned} w_1 &= k_w w - k_2 x_2 - \dots - k_{ns} x_{ns} + k_R x_R = \\ &= k_w w - (\mathbf{k}_s^T - \mathbf{k}_{s1lim}^T)\mathbf{x}_s + k_R x_R = \\ &= k_w w - \mathbf{k}_{sb}^T \mathbf{x}_{sb} + k_R x_R = k_w w - \mathbf{k}_b^T \mathbf{x}_b \end{aligned} \quad (4.15)$$

où

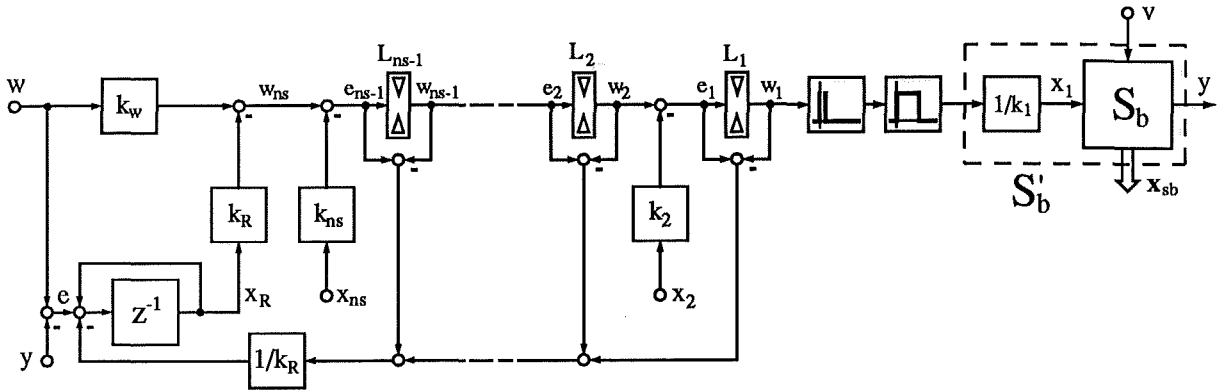
$$\mathbf{k}_b^T = [\mathbf{k}_{sb}^T \quad -k_R] = [k_2 \quad k_3 \quad \dots \quad k_{ns} \quad -k_R]_{(1,nsb+1)=(1,ns)} \quad (4.16)$$

*Remarques :*

- Pour simplifier les développements, et aussi la réalisation pratique, on choisira en général  $k_1=1$ , en accord avec le § 1.4.2 (1.38). Ainsi, on obtient  $w_1=x_1$ .
- L'expression (4.15) est valable pour le cas hors limitation des grandeurs internes du régulateur.

#### 4.4.3 Réglage échantillonné

Pour une structure de réglage hybride telle qu'elle a été présentée et définie à la section 1.6, le système réglé en mode de glissement peut-être représenté selon la figure 4.7.



**Fig. 4.7** Structure du réglage échantillonné.

Le système  $S'_b$  est décrit, en continu, par les mêmes équations qu'au § 4.4.2. La différence se situe au niveau du régulateur digital, qui introduit l'échantillonneur à pulsations et l'élément de maintien. La grandeur de commande est  $w_1$ , donnée par (4.15). Le système réglé peut être traité par les méthodes de réglage d'état digital [5, chap. 19].

*Remarque :* Le caractère échantillonné de ce régulateur et l'utilisation d'un élément de maintien induisent à chaque instant d'échantillonnage une variation par saut de la commande  $w_1$  du sous-système  $S'_b$ . Le sous-système  $S_a$ , réglé par mode de glissement sort alors transitoirement du régime en mode de glissement (voir exemple d'application au § 5.7.11). Ce sous-système étant en général très rapide, le temps hors mode de glissement, comparé à la période d'échantillonnage, pourra être, en principe, négligé. Le traitement par le réglage d'état échantillonné est alors justifié.

#### 4.4.4 Réglage pseudo-continu

Lorsque le système réglé en échantillonné selon la figure 4.7 est traité par des méthodes de dimensionnement pseudo-continues, l'élément de maintien est approché par une constante de temps équivalente de valeur la moitié de la période d'échantillonnage de réglage (§ 3.2.3) :

$$x_0 = \frac{1}{1+sT_E/2} w_1 \quad (4.17)$$

La structure de réglage du système réglé analysé en pseudo-continu est celle de la figure 4.8.

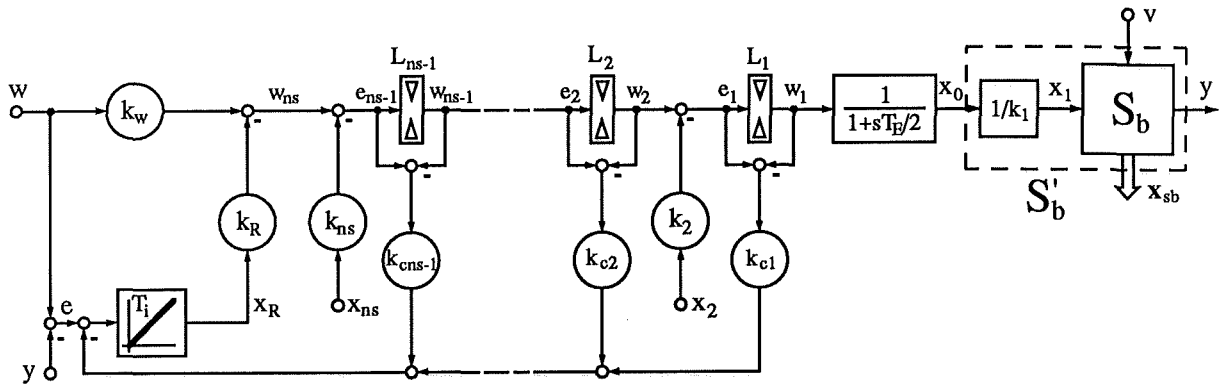


Fig. 4.8 Structure du réglage pseudo-continu.

La commande  $x_0$  du sous-système  $S'_b$  n'est plus donnée directement par la contre-réaction d'état selon (4.15), mais est à considérer comme une grandeur d'état interne du système à régler, dépendant de la commande  $w_1$  selon (4.17). Le système à régler est donc décrit par son sous-système  $S_b$  selon (4.12), auquel il faut ajouter une équation supplémentaire pour tenir compte de l'élément de maintien :

$$\dot{x}_0 = \frac{2}{T_E} (-x_1 + w_1) \quad (4.18)$$

Cette grandeur d'état n'est bien sûr pas mise en contre-réaction, d'où le vecteur de contre réaction d'état :

$$k^T = [ 0 \quad k_2 \quad \dots \quad k_{ns} \quad -k_R ]_{(1,ns+1)} \quad (4.19)$$

L'ordre du système à régler est le même que celui du système à régler initial, réglé par mode de glissement, c'est-à-dire  $n_s$ . Les méthodes de dimensionnement pseudo-continues du réglage d'état peuvent être appliquées [7].

#### 4.4.5 Conclusion

Au premier abord, il peut sembler que cette approche différente d'un même système réglé n'apporte pas grand-chose. Pourtant, elle présente un avantage capital pour la description du comportement global (dans le temps) du système réglé.

En effet, souvenons-nous que l'équation d'état en mode de glissement (1.17) (ou (2.41) en limitation) ne décrit que le phénomène se décrivant dans l'hyperplan de commutation. L'évolution du système réglé hors mode de glissement n'est pas contenue dans cette description (voir sect. 1.3).

Par contre, avec l'approche par un système réglé par une structure de réglage d'état lorsque le système réglé est en mode de glissement, on peut enfin déterminer une fonction de transfert globale (dans le temps). Bien sûr, le phénomène hors mode de glissement est toujours négligé, ce qui est tout à fait acceptable comme on le verra pour l'exemple d'application du chapitre 5.

## 4.5 RÉGLAGE D'ÉTAT CONTINU AVEC LIMITATIONS VARIABLES

### 4.5.1 Introduction

Aux sections 4.3 et 4.4, on a vu qu'un système réglé par une structure de réglage par mode de glissement peut être ramené à un sous-système réglé par une structure de réglage d'état. Au chapitre 2, on a étudié le système réglé (par mode de glissement) en limitation. Il serait dès lors intéressant de voir dans quelle mesure cette théorie des limitations variables est applicable également au réglage d'état. C'est ce qui est entrepris dans cette section. La structure pour la limitation des grandeurs internes proposée pour le réglage par mode de glissement est reprise dans le contexte du réglage d'état.

Après avoir pris quelques précautions quant aux notations (§ 4.5.2), on présentera brièvement les équations du système à régler (§ 4.5.3) et un résumé des développements pour le système réglé hors limitation (§ 4.5.4). Le système réglé en limitation sera étudié plus en détail aux § 4.5.5 et 4.5.6 pour le cas d'une structure de réglage d'état continu avec régulateur intégrateur, limitations variables internes et correction de l'intégrateur.

Des développements similaires seront effectués pour le régulateur digital à la section 4.6.

### 4.5.2 Notations et structure de réglage

La figure 4.6 représente un système à régler avec une structure de réglage d'état. Cette représentation est l'aboutissement des considérations sur le système réglé en mode de glissement. Les notations relatives au réglage par mode de glissement y sont utilisées.

Pour plus de clarté, on effectue les développements qui suivent avec la structure et les notations du réglage d'état [7; 5], comme représentées à la figure 4.9.

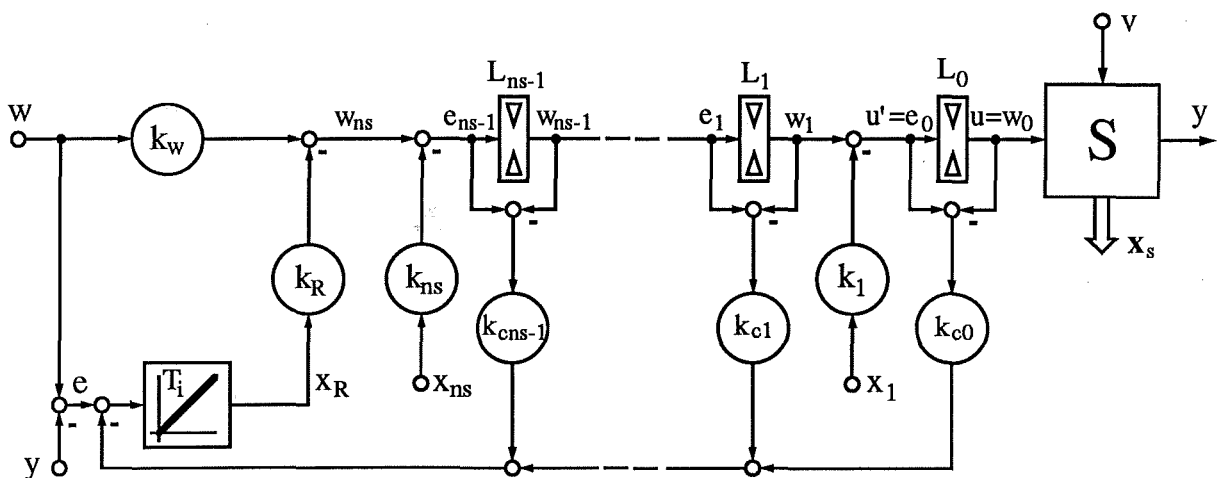


Fig. 4.9 Structure de réglage d'état continu.



Ainsi, l'ordre du système à régler  $n_s$  de cette figure ne correspond pas à l'ordre  $n_s$  de la fig. 4.6, mais à  $n_{sb}=n_s-1$ . Il y a eu décalage des notations pour tenir compte du fait que la grandeur d'état  $x_1$  du système réglé initial en mode de glissement est devenue la grandeur de commande  $u$ . Elle sera aussi désignée par  $w_0$ ; cela permettra de tenir compte dans les équations générales aussi de la limitation sur la grandeur de commande. Ainsi :

$$e_i, w_i \quad \left\{ \begin{array}{l} = \text{entrées et sorties des limiteurs des grandeurs d'état } x_1 \dots x_{n_s-1} \\ = \text{commande non limitée et limitée } u'=e_0 \text{ et } u=w_0 \text{ (i=0)} \end{array} \right.$$

### 4.5.3 Equations du système à régler

Le système à régler est décrit par les équations différentielles

$$\dot{\mathbf{x}}_s = \mathbf{A}_s \mathbf{x}_s + \mathbf{b}_s u + \mathbf{b}_{sv} v \quad (4.20)$$

$$y = \mathbf{c}_s^T \mathbf{x}_s \quad (4.21)$$

La correspondance avec la figure 4.6 et les équations (4.12) et (4.13) est réalisée pour

$$\left. \begin{array}{ll} \mathbf{A}_{sbb} & \rightarrow \mathbf{A}_s \\ \frac{1}{k_1} \mathbf{a}_{sba} & \rightarrow \mathbf{b}_s \\ \mathbf{b}_{svb} & \rightarrow \mathbf{b}_{sv} \\ \mathbf{c}_{sb}^T & \rightarrow \mathbf{c}_s^T \\ \mathbf{x}_{sb} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \vdots \\ x_{n_{sb}} \end{bmatrix} & \rightarrow \mathbf{x}_s = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n_s} \end{bmatrix} \\ e_i, w_i, e_1, w_1 & \rightarrow e_{i-1}, w_{i-1}, u', u \end{array} \right\} \quad (4.22)$$

*Remarque* :  $n_s$  correspond ici à  $n_{sb}$  du système réglé en mode de glissement.

### 4.5.4 Système réglé hors limitation

Les développements concernant le système réglé hors limitation sont connus [7]. On ne présentera donc ici qu'un bref résumé pour le cas avec régulateur intégrateur. Celui-ci est décrit par (1.6).

Le système à régler global est décrit par les mêmes équations que pour une structure de réglage par mode de glissement, soit (1.8) à (1.10).

La commande  $u$  étant donnée par

$$u = w_0 = -\mathbf{k}^T \mathbf{x} + k_w w \quad (4.23)$$

l'équation en boucle fermée est donnée par

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_G \mathbf{x} + \mathbf{b}_{Gv} v + \mathbf{b}_{Gw} w \quad (4.24)$$

avec

$$\mathbf{A}_G = \mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_s - \mathbf{b}_s \mathbf{k}_s^T & \mathbf{b}_s k_R \\ -\mathbf{c}_s^T / T_i & 0 \end{bmatrix} \quad (4.25a)$$

$$\mathbf{b}_{Gv} = \mathbf{b}_v = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{sv} \\ 0 \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{b}_{Gw} = \mathbf{b}_w + \mathbf{b}\mathbf{k}_w = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_s k_w \\ 1/T_i \end{bmatrix} \quad (4.25b)$$

La fonction de transfert par rapport à la consigne est donnée par

$$G_w(s) = \frac{1}{\det(s\mathbf{1} - \mathbf{A}_G)} \cdot \mathbf{c}^T \cdot (s\mathbf{1} - \mathbf{A}_G)_{\text{adj}} \cdot \mathbf{b}_{Gw} \quad (4.26)$$

et présente un zéro en  $n_0 = -k_R/k_w T_i$  (voir [7, § 12.2.6]). Un pôle  $p_i$  peut être compensé par ce zéro si on dimensionne  $k_w$  :

$$k_w = -\frac{k_R}{p_i T_i} \quad (4.27)$$

*Remarque :* Les pôles en boucle fermée sont ceux du système réglé original en mode de glissement, moins le pôle à l'origine (dû à  $s(\mathbf{x})=0$ ).

Ces propos seront illustrés, en particulier, par l'exemple d'application du chapitre 5 (§ 5.7.8).

#### 4.5.5 Equation globale en boucle ouverte du système réglé en limitation

Dans le cas d'une structure de réglage avec régulateur intégrateur,  $x_R$  s'écrit en limitation et avec correction d'une manière identique au cas du réglage par mode de glissement (2.32) :

$$T_i \dot{x}_R = w - \mathbf{c}^T \mathbf{x} - k_{ci} (e_i - w_{i\text{lim}}) = [k_{ci} (\mathbf{k}_s^T - \mathbf{k}_{s\text{lim}}^T) - (1 + k_{ci} k_{mi} p_i) \mathbf{c}_s^T] \mathbf{x}_s + \\ + (1 - k_{ci} k_w + k_{ci} k_{mi} p_i) w - k_{ci} k_R x_R + k_{ci} k_{mi} c_i \quad (4.28)$$

où

$$\mathbf{k}_s^T = [k_1 \dots k_{i-1} \quad k_i \dots k_{n_s}]_{(1, n_s)} \quad (4.29a)$$

$$\mathbf{k}_{s\text{lim}}^T = [k_1 \dots k_{i-1} \quad k_i \quad 0 \dots 0]_{(1, n_s)} \quad (4.29b)$$

*Remarque :* La seule différence par rapport au chapitre 2 est que les indices de limitation vont de  $0 \dots n_s - 1$ . L'indice  $i=0$  se rapporte à la limitation de la grandeur de commande  $u$ , et le vecteur de contre-réaction est dans ce cas

$$\mathbf{k}_{s0\text{lim}}^T = \mathbf{0}^T = [0 \dots 0]_{(1, n_s)} \quad (4.29c)$$

L'équation matricielle globale en boucle ouverte s'écrit alors, avec (4.28), comme (2.33) :

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_{i\text{lim}} \mathbf{x} + \mathbf{b}_{i\text{lim}} u + \mathbf{b}_{v\text{lim}} v + \mathbf{b}_{w\text{lim}} w + \mathbf{b}_{c\text{lim}} c_i \quad (4.30)$$

$$y = \mathbf{c}^T \mathbf{x} \quad (4.31)$$

avec  $\mathbf{A}_{ilim}$ ,  $\mathbf{b}_{ilim}$ ,  $\mathbf{b}_{vilim}$ ,  $\mathbf{b}_{wilim}$ ,  $\mathbf{b}_{cilim}$  et  $\mathbf{c}^T$  définis comme en (2.35).

Les pôles du système réglé en boucle ouverte s'expriment de la même manière qu'au § 2.4.6.

#### 4.5.6 Equation globale en boucle fermée du système réglé en limitation

La grandeur de commande est donnée par la somme des contre-réactions d'état et de la sortie du limiteur  $L_i$  :

$$\begin{aligned} u = w_0 &= -\mathbf{k}_{ilim}^T \mathbf{x} + w_{ilim} = -\mathbf{k}_{silim}^T \mathbf{x} + k_{mi}(c_i + p_i e) = \\ &= -(\mathbf{k}_{silim}^T + k_{mi} p_i \mathbf{c}_s^T) \mathbf{x}_s + k_{mi} p_i w + k_{mi} c_i = \\ &= -(\mathbf{k}_{ilim}^T + k_{mi} p_i \mathbf{c}^T) \mathbf{x} + k_{mi} p_i w + k_{mi} c_i \end{aligned} \quad (4.32)$$

En introduisant  $u$  dans l'équation (4.30), on trouve après quelques calculs

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_{Gilim} \mathbf{x} + \mathbf{b}_{Gvilim} v + \mathbf{b}_{Gwilim} w + \mathbf{b}_{Gcilim} c_i \quad (4.33)$$

avec

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{Gilim} &= \mathbf{A}_{ilim} - \mathbf{b}_{ilim} (\mathbf{k}_{ilim}^T + k_{mi} p_i \mathbf{c}^T) = \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}_s - \mathbf{b}_s (\mathbf{k}_{silim}^T + k_{mi} p_i \mathbf{c}_s^T) & \mathbf{0} \\ \frac{k_{ci}}{T_i} (\mathbf{k}_s^T - \mathbf{k}_{silim}^T) - \frac{1 + k_{ci} k_{mi} p_i}{T_i} \mathbf{c}_s^T & -\frac{k_{ci} k_R}{T_i} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.34a)$$

$$\mathbf{b}_{Gvilim} = \mathbf{b}_{vilim} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{sv} \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{b}_v \quad (4.34b)$$

$$\mathbf{b}_{Gwilim} = \mathbf{b}_{wilim} + \mathbf{b}_{ilim} k_{mi} p_i = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_s k_{mi} p_i \\ \frac{1 - k_{ci} (k_w - k_{mi} p_i)}{T_i} \end{bmatrix} \quad (4.34c)$$

$$\mathbf{b}_{Gcilim} = \mathbf{b}_{cilim} + \mathbf{b}_{ilim} k_{mi} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_s k_{mi} \\ \frac{k_{ci} k_{mi}}{T_i} \end{bmatrix} \quad (4.34d)$$

Les pôles du système réglé en boucle fermée sont donnés par

$$P_{Gilim}(s) = \det(s\mathbf{1} - \mathbf{A}_{Gilim}) = \left(s + \frac{k_{ci} k_R}{T_i}\right) \det(s\mathbf{1} - \mathbf{A}_{sGilim}) \quad (4.35)$$

Comparés à (2.44), on peut remarquer que ce sont les mêmes pôles qu'en mode de glissement. Seul le pôle à l'origine, décrivant justement le mode de glissement sur l'hyperplan de commutation, a disparu. Cette remarque est d'ailleurs aussi valable pour le cas du système réglé hors limitation.

### 4.5.7 Conclusion

A première vue, l'équation en boucle fermée (4.33) du réglage d'état en limitation semble très différente de l'équation (2.41) du réglage par mode de glissement en limitation. En fait, il faut nuancer les propos. D'une part, en admettant que les conditions initiales du système réglé en mode de glissement se situent sur l'hyperplan de commutation, les deux équations décrivent exactement le même phénomène. Cependant, les notations sont différentes (voir (4.22)).

D'autre part, si le système réglé par mode de glissement n'est pas toujours en mode de glissement, alors les deux équations décrivent deux comportements différents.

Toujours est-il que les développements de cette section montrent que le principe des limitations variables est aussi applicable au réglage d'état continu. A la section suivante, on résout le problème dans le cas échantillonné.

## 4.6 RÉGLAGE D'ÉTAT ÉCHANTILLONNÉ AVEC LIMITATIONS VARIABLES

### 4.6.1 Introduction

La section 4.5 montre les développements en cas de limitation d'un système réglé par une structure de réglage d'état continu. La plupart des applications réelles étant digitales ou hybrides (voir sect. 1.6), il est nécessaire d'étudier les limitations aussi en échantillonné.

Le système réglé hybride, tel qu'il est présenté au § 1.6.4, ne peut pas être traité tel quel mathématiquement d'une manière rigoureuse, du fait justement de son côté hybride. A la section 4.4, on a vu comment ce système réglé hybride peut, en mode de glissement, être réduit à un système réglé échantillonné pur (fig. 4.7). C'est une structure de réglage d'état échantillonné qui apparaît. On se propose dès lors de traiter les limitations de ce régulateur d'une manière semblable qu'à la section 4.5, mais pour le cas échantillonné.

Après la définition de la structure de réglage échantillonnée et des notations au § 4.6.2, on effectuera les développements à partir des équations aux différences du système à régler (§ 4.6.3). Le cas du système réglé hors limitation sera traité succinctement (§ 4.6.4). Le cas de la structure de réglage d'état échantillonné avec régulateur intégrateur, limitations variables internes et correction de l'intégrateur est traité plus en détail aux § 4.6.5 et 4.5.6.

### 4.6.2 Notations et structure de réglage

De même qu'au § 4.5.2, dans un souci de cohérence avec les notations habituelles concernant le réglage d'état digital [5, chap. 19], on propose ici une représentation de la structure de réglage différente de celle de la figure 4.7.

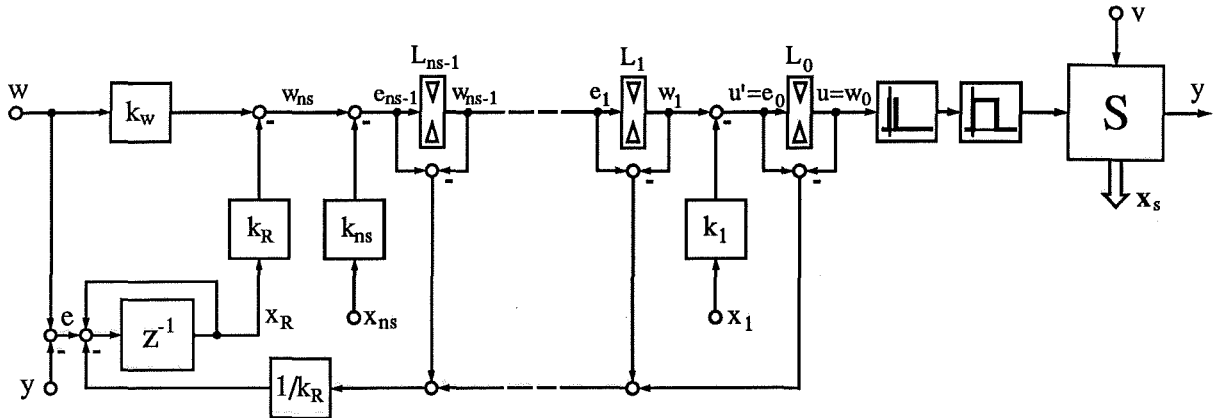


Fig. 4.10 Structure de réglage d'état échantillonné.

Ici aussi (comme au § 4.5.2)  $u'=e_0$  et  $u=w_0$  représentent les commandes avant, respectivement après limitation.

#### 4.6.3 Equations aux différences du système à régler

Les équations différentielles du système à régler continu sont données par (4.20) et (4.21), où les mêmes précautions que (4.22) doivent être prises lorsque le système réglé en mode de glissement réduit (fig. 4.7) est traité par les développements de cette section.

A partir de ces équations différentielles, on trouve les équations aux différences du système échantillonné selon

$$\mathbf{x}_s[k+1] = \mathbf{F}_s \mathbf{x}_s[k] + \mathbf{h}_s u[k] + \mathbf{h}_{sv} v[k] \quad (4.36)$$

$$y[k] = \mathbf{c}_s^T \mathbf{x}_s[k] \quad (4.37)$$

avec, en fonction de la période d'échantillonnage  $T_E$ ,

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{F}_s &= \Phi_s(T_E) \quad \circ \text{---} \bullet \quad \Phi_s(s) = (s\mathbf{1} - \mathbf{A}_s)^{-1} \\ \Psi_s &= \int_0^{T_E} \Phi_s(\tau) d\tau \\ \mathbf{h}_s &= \Psi_s \mathbf{b}_s \\ \mathbf{h}_{sv} &= \Psi_s \mathbf{b}_{sv} \end{aligned} \right\} \quad (4.38)$$

#### 4.6.4 Système réglé hors limitation

Les développements d'un système à régler avec une structure de réglage d'état digital sont connus [5, chap. 19]. Un résumé succinct est néanmoins présenté ici pour faciliter les renvois ultérieurs.

Le régulateur intégrateur étant décrit par l'équation aux différences

$$\mathbf{x}_R[k+1] = \mathbf{x}_R[k] + e[k] = \mathbf{x}_R[k] + w[k] - \mathbf{c}_s^T \mathbf{x}_s[k] \quad (4.39)$$

l'équation matricielle globale, compte tenu de (4.36) et (4.37), devient

$$\mathbf{x}[k+1] = \mathbf{F}\mathbf{x}[k] + \mathbf{h}u[k] + \mathbf{h}_v v[k] + \mathbf{h}_w w[k] \quad (4.40)$$

$$y[k] = \mathbf{c}^T \mathbf{x}[k] \quad (4.41)$$

avec

$$\mathbf{x}[k] = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_s[k] \\ x_R[k] \end{bmatrix}; \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_s & \mathbf{0} \\ -\mathbf{c}_s^T & 1 \end{bmatrix} \quad (4.42a)$$

$$\mathbf{h} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_s \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{h}_v = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_{sv} \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{h}_w = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{c}^T = [ \mathbf{c}_s^T \quad 0 ] \quad (4.42b)$$

Avec la commande

$$u[k] = w_0[k] = -\mathbf{k}^T \mathbf{x}[k] + k_w w[k] \quad (4.43)$$

l'équation en boucle fermée est

$$\mathbf{x}[k+1] = \mathbf{F}_G \mathbf{x}[k] + \mathbf{h}_{Gv} v[k] + \mathbf{h}_{Gw} w[k] \quad (4.44)$$

avec

$$\mathbf{F}_G = \mathbf{F} - \mathbf{h} \mathbf{k}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_s - \mathbf{h}_s \mathbf{k}_s^T & \mathbf{h}_s k_R \\ -\mathbf{c}_s^T & 1 \end{bmatrix} \quad (4.45a)$$

$$\mathbf{h}_{Gv} = \mathbf{h}_v = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_{sv} \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{h}_{Gw} = \mathbf{h}_w + \mathbf{h} k_w = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_s k_w \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.45b)$$

On peut montrer que l'intervention directe de la consigne  $k_w$  introduit un zéro  $n_0 = 1 - k_R/k_w$  dans la fonction de transfert en  $z$  [5, § 19.4.7]. Pour compenser avec ce zéro un pôle réel  $z_i$ , on choisira

$$k_w = \frac{k_R}{1 - z_i} \quad (4.46)$$

#### 4.6.5 Equation globale en boucle ouverte du système réglé en limitation

On admet ici un régulateur intégrateur dans la structure de réglage. Celui-ci doit aussi être corrigé en cas de limitation. La philosophie adoptée est celle décrite au § 2.3.3. La correction se fait donc sur la grandeur d'état du régulateur intégrateur à l'instant  $k+1$  via un coefficient  $k_{ci}$ . On verra au § 4.6.6 quelle valeur idéale choisir pour  $k_{ci}$ . Les grandeurs d'entrée et de sortie du limiteur sont données par les mêmes relations que (2.29) et (2.30), sauf qu'elles sont échantillonnées.

Ainsi, l'équation aux différences de la grandeur d'état du régulateur intégrateur est donnée par

$$\begin{aligned} x_R[k+1] &= x_R[k] + e[k] - k_{ci}(e_i[k] - w_{ilim}[k]) = \\ &= [ k_{ci}(\mathbf{k}_s^T - \mathbf{k}_{silim}^T) - (1 + k_{ci}k_{mi}p_i)\mathbf{c}_s^T ] \mathbf{x}_s[k] + \\ &+ (1 - k_{ci}k_w + k_{ci}k_{mi}p_i) w[k] + (1 - k_{ci}k_R)x_R[k] + k_{ci}k_{mi}c_i[k] \end{aligned} \quad (4.47)$$

*Remarque :* Rappelons que la limitation sur la commande est exprimée par l'indice  $i=0$ , avec  $\mathbf{k}_{s0lim}^T = \mathbf{0}^T$  (voir remarque du § 4.5.5).

En combinant (4.36) et (4.47), on obtient l'équation aux différences du système global ouvert :

$$\mathbf{x}[k+1] = \mathbf{F}_{ilim}\mathbf{x}[k] + \mathbf{h}_{ilim}u[k] + \mathbf{h}_{vilim}v[k] + \mathbf{h}_{wilim}w[k] + \mathbf{h}_{cilim}c_i[k] \quad (4.48)$$

$$y[k] = \mathbf{c}^T\mathbf{x}[k] \quad (4.49)$$

avec

$$\mathbf{F}_{ilim} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_s & \mathbf{0} \\ k_{ci}(\mathbf{k}_s^T - \mathbf{k}_{silim}^T) - (1+k_{ci}k_{mi}p_i)\mathbf{c}_s^T & 1 - k_{ci}k_R \end{bmatrix} \quad (4.50a)$$

$$\mathbf{h}_{ilim} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_s \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{h} ; \quad \mathbf{h}_{vilim} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_{sv} \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{h}_v ; \quad \mathbf{h}_{wilim} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 1 - k_{ci}(k_w - k_{mi}p_i) \end{bmatrix} \quad (4.50b)$$

$$\mathbf{h}_{cilim} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ k_{ci}k_{mi} \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{c}^T = [ \mathbf{c}_s^T \quad 0 ] \quad (4.50c)$$

#### 4.6.6 Equation en boucle fermée du système réglé en limitation

La grandeur de commande attaquant le système à régler est donnée par la même relation que (4.32), soit :

$$\begin{aligned} u[k] = w_0[k] &= -\mathbf{k}_{ilim}^T\mathbf{x}[k] + w_{ilim}[k] = \\ &= -(\mathbf{k}_{ilim}^T + k_{mi}p_i\mathbf{c}^T)\mathbf{x}[k] + k_{mi}p_iw[k] + k_{mi}c_i[k] \end{aligned} \quad (4.51)$$

ce qui, introduit dans (4.48), donne l'équation en boucle fermée

$$\mathbf{x}[k+1] = \mathbf{F}_{Gilim}\mathbf{x}[k] + \mathbf{h}_{Gvilim}v[k] + \mathbf{h}_{Gwilim}w[k] + \mathbf{h}_{Gcilim}c_i[k] \quad (4.52)$$

avec

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{Gilim} &= \mathbf{F}_{ilim} - \mathbf{h}_{ilim}(\mathbf{k}_{ilim}^T + k_{mi}p_i\mathbf{c}^T) = \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{F}_s - \mathbf{h}_s(\mathbf{k}_{silim}^T + k_{mi}p_i\mathbf{c}_s^T) & \mathbf{0} \\ k_{ci}(\mathbf{k}_s^T - \mathbf{k}_{silim}^T) - (1+k_{ci}k_{mi}p_i)\mathbf{c}_s^T & 1 - k_{ci}k_R \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.53a)$$

$$\mathbf{h}_{Gvilim} = \mathbf{h}_{vilim} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_{sv} \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{h}_v \quad (4.53b)$$

$$\mathbf{h}_{Gwilim} = \mathbf{h}_{wilim} + \mathbf{h}_{ilim}k_{mi}p_i = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_sk_{mi}p_i \\ 1 - k_{ci}(k_w - k_{mi}p_i) \end{bmatrix} \quad (4.53c)$$

$$\mathbf{h}_{Gcilim} = \mathbf{h}_{cilim} + \mathbf{h}_{ilim}k_{mi} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_sk_{mi} \\ k_{ci}k_{mi} \end{bmatrix} \quad (4.53d)$$

#### 4.6.7 Choix du coefficient de correction de l'intégrateur

Les pôles, dans le domaine en  $z$ , du système réglé en boucle fermée sont donnés par

$$P_{\text{Gilim}}(z) = \det(z\mathbf{1} - \mathbf{F}_{\text{Gilim}}) = [z - (1 - k_{\text{ci}}k_{\text{R}})] \det(z\mathbf{1} - \mathbf{F}_{\text{sGilim}}) \quad (4.54)$$

On constate que le pôle dû à la correction de l'intégrateur est en

$$z_0 = 1 - k_{\text{ci}}k_{\text{R}} \quad (4.55)$$

Avec  $k_{\text{ci}} = 1/k_{\text{R}}$ , on obtient un pôle à l'origine. Il correspond donc à la correction la plus rapide possible ( $p_1 = -\infty$  dans le plan  $s$ ). Le choix de ce coefficient de correction, déjà présenté en (2.20) au § 2.3.3, se justifie donc pleinement.

### 4.7 CONCLUSION

Dans ce chapitre, on a constaté qu'un système réglé par une structure de réglage par mode de glissement peut, sous certaines conditions, donner lieu à une réduction de son ordre lorsqu'il est en mode de glissement.

Le sous-système, auquel on inclut une fonction de transfert d'ordre zéro, est alors réglé par une structure de réglage d'état. Sa grandeur de commande est, à un facteur près, la grandeur d'état en mode de glissement du système réglé initial.

Cette constatation permet de traiter le système réglé en mode de glissement par les méthodes du réglage d'état. Pour un régulateur continu, cela n'a pas d'avantages (section 4.5). Par contre, ce point de vue est fort intéressant pour le système réglé échantillonné. En effet, le système original hybride (réglé par mode de glissement) ne pouvait pas être traité, puisque justement hybride.

Le système réglé est linéaire. La fonction de transfert du système réglé en boucle fermée ainsi obtenue décrit le système réglé dans son comportement global (dans le temps). Bien sûr, le temps hors mode de glissement est négligé, mais cela ne porte pas à conséquence. Cette description globale n'était pas possible par l'approche en mode de glissement, puisque la fonction de transfert établie (section 1.3) n'était valable que sur l'hyperplan de commutation.

Cette démarche consistant à étudier le système réglé en mode de glissement par les méthodes de réglage d'état est donc essentielle dans le cas d'une structure de réglage hybride selon la section 1.6.

De plus, toutes les méthodes connues du réglage d'état deviennent applicables.



## **5 EXEMPLE D'APPLICATION N° 1 : RÉGLAGE DE POSITION D'UN SYSTÈME ÉLECTROMÉCANIQUE RIGIDE**

### **5.1 INTRODUCTION**

Dans ce chapitre, on traite le premier exemple d'application. Le système à régler est un entraînement électromécanique rigide avec machine à courant continu. L'alimentation est assurée par un variateur à courant continu avec montage en pont. Ce type d'organe de commande se prête particulièrement bien au réglage par mode de glissement, puisque sa propriété intrinsèque est de présenter deux états de commutation.

A la section 5.2, on présente le système à régler et la modélisation qui aboutit aux équations d'état. La structure du réglage de position par mode de glissement est décrite à la section 5.3. Les développements analytiques complets concernant le calcul des coefficients, des pôles (en et hors limitation) concernant le réglage de vitesse et de position sans intégrateur sont présentés respectivement aux sections 5.4 et 5.5.

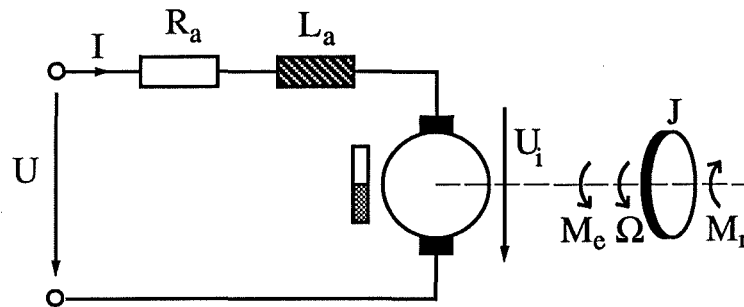
Les instabilités dues aux limitations de vitesse et les moyens pour les éviter seront présentés à la section 5.6. Pour un troisième cas de figure, le réglage de position avec intégrateur, on présentera les comparaisons entre simulations numériques et essais sur l'installation du laboratoire (section 5.7). Les développements analytiques seront aussi exposés. La section 5.8 sera consacrée à la discussion et à la conclusion.

Deux méthodes de dimensionnement différentes y seront présentées pour le réglage de position. Des résultats de simulations sur ordinateur et de mesures sur banc d'essai seront exposés aux sections 5.6 et 5.7. La section 5.8 sera consacrée aux comparaisons, à la discussion et à la conclusion.

### **5.2 SYSTEME À RÉGLER**

#### **5.2.1 Machine à courant continu**

Le flux d'excitation de la machine à courant continu utilisée dans cette étude est assuré par des aimants permanents. La figure 5.1 représente le modèle classique de la machine à courant continu.



**Fig. 5.1** Machine à courant continu à aimants permanents.

Les enroulements sont représentés par l'inductance d'induit  $L_a$  et la résistance d'induit  $R_a$ . L'équation du circuit d'induit est donnée par

$$U = R_a I + L_a \frac{dI}{dt} + U_i \quad (5.1)$$

où  $U$  est la tension d'alimentation de l'induit (tension de commande) fournie par le variateur à courant continu et  $I$  le courant d'induit. La tension induite de rotation  $U_i$  dépend du flux d'excitation  $\Phi$  et de la vitesse angulaire  $\Omega$  [ $s^{-1}$ ] du moteur selon

$$U_i = C_m \Phi \Omega \quad (5.2)$$

Le couple électromécanique  $M_e$  fourni par le moteur est

$$M_e = C_m \Phi I \quad (5.3)$$

L'équation de mouvement de la machine est donnée par

$$J \frac{d\Omega}{dt} = M_e - M_r \quad (5.4)$$

où  $J$  est le moment d'inertie total des masses tournantes rapportées au moteur et  $M_r$  le couple résistant. Pour la position  $\Theta$ , il s'ensuit l'équation de déplacement

$$\frac{d\Theta}{dt} = \Omega \quad (5.5)$$

### 5.2.2 Variateur à courant continu

Le variateur à courant continu utilisé dans notre application est représenté schématiquement à la figure 5.2.

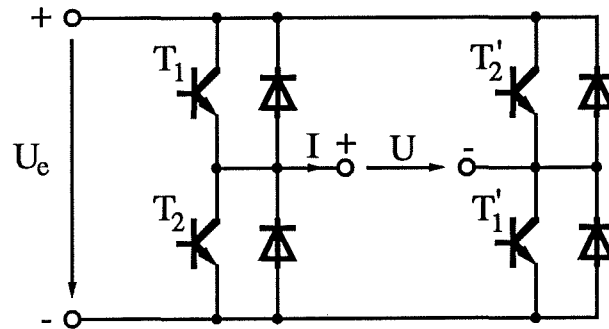


Fig. 5.2 Variateur à courant continu.

L'enclenchement des transistors  $T_1$  et  $T_1'$ , respectivement  $T_2$  et  $T_2'$ , est contrôlé par la loi de commutation au travers de l'élément à hystérèse selon le § 1.6.2 soit, avec  $U_e$  la tension continue intermédiaire :

$s \geq +\Delta_{sh}$	$T_1$ et $T_1'$ enclenchés $T_2$ et $T_2'$ déclenchés	$U = +U_e = U_{max}$	(5.6)
$-\Delta_{sh} < s < +\Delta_{sh}$	état précédent	état précédent	
$s \leq -\Delta_{sh}$	$T_1$ et $T_1'$ déclenchés $T_2$ et $T_2'$ enclenchés	$U = -U_e = U_{min}$	

### 5.2.3 Grandeurs relatives

#### 5.2.3.1 Introduction

La description d'un système en grandeurs relatives, c'est-à-dire rapportées à des valeurs nominales (excepté le temps), présente trois avantages principaux [9] :

- Toutes les grandeurs d'état apparaissant dans les équations différentielles sont de dimension 1; il en est de même des coefficients des régulateurs. Le temps n'étant pas rapporté à une grandeur nominale, des constantes de temps, à dimension temporelle, lient les grandeurs d'état à leur dérivée.
- Dans le cas d'un système à plusieurs types de mouvements (par exemple linéaire et rotatif dans le cas d'une machine-outil), on s'affranchit du problème du choix du référentiel puisqu'en grandeurs relatives la même équation décrit le phénomène.
- Des systèmes de même structure ne diffèrent plus que par des coefficients et des constantes de temps. Les comparaisons sont aisées.

### 5.2.3.2 Grandeurs nominales

Une grandeur relative  $x$  est définie par rapport à sa vraie grandeur  $X$  et sa valeur nominale  $X_n$  selon

$$x = \frac{X}{X_n} \quad (5.7)$$

On définit les grandeurs nominales suivantes

- la tension nominale  $U_n$  [V]
- le courant d'induit nominal  $I_n$  [A]
- la vitesse angulaire nominale  $\Omega_n$  [ $s^{-1}$ ]
- le couple nominal  $M_n$  [Nm]
- le déplacement angulaire nominal  $\Theta_n$  [1]
- le flux d'excitation nominal  $\Phi_n$  [Vs]

### 5.2.3.3 Equations d'état relatives

Compte tenu des définitions du § 5.2.3.2, l'équation du circuit d'induit (5.1) devient

$$u = r_a i + r_a T_a \frac{di}{dt} + u_i \quad (5.8)$$

avec  $r_a$  la résistance d'induit et  $T_a$  la constante de temps d'induit selon

$$r_a = R_a \frac{I_n}{U_n} [1] \quad ; \quad T_a = \frac{L_a}{R_a} [s] \quad (5.9)$$

Les équations (5.2) et (5.3) deviennent

$$u_i = \varphi n \quad (5.10)$$

$$m_e = \varphi i \quad (5.11)$$

pour un flux  $\varphi$  quelconque dû à l'aimant.

L'équation (5.8) s'écrit alors

$$\frac{di}{dt} = -\frac{i}{T_a} - \frac{\varphi n}{r_a T_a} + \frac{u}{r_a T_a} \quad (5.12)$$

Les équations de mouvement (5.4) et (5.5) se transforment en

$$\frac{dn}{dt} = \frac{m_e - m_r}{T_m} = \frac{\varphi i - m_r}{T_m} \quad (5.13)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{n}{T_\theta} \quad (5.14)$$

où  $T_m$  est la constante de temps mécanique du moteur, c'est-à-dire le temps de lancement pour atteindre à vide et à couple électromagnétique nominal la vitesse nominale, et  $T_\theta$  une constante de temps liant les vitesse et déplacement nominaux selon

$$T_m = J \frac{\Omega_n}{M_n} \text{ [s]} \quad ; \quad T_\theta = \frac{\Theta_n}{\Omega_n} \text{ [s]} \quad (5.15)$$

#### 5.2.3.4 Représentation schématique simplifiée du système à régler

Le système à régler, décrit en grandeurs relatives, peut être représenté comme à la figure 5.3. Pour une plus grande clarté, on y a adjoint l'élément à hystérèse sur la loi de commutation.

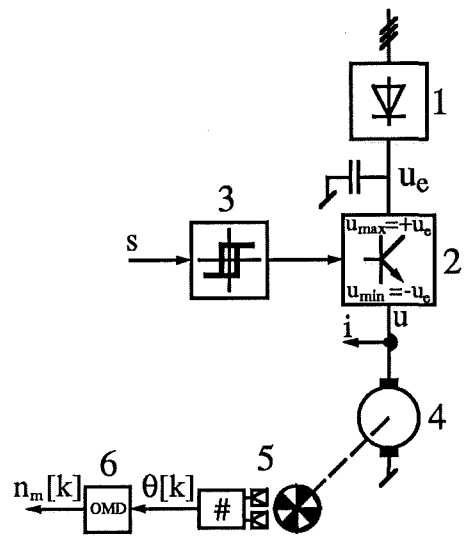


Fig. 5.3 Système à régler

Le bloc 1 représente le redresseur qui fournit la tension continue intermédiaire  $u_e$  au variateur à courant continu 2. Celui-ci est commandé par l'élément à hystérèse 3 et alimente le moteur 4 avec la tension  $u = u_{\max} = u_e$  ou  $u = u_{\min} = -u_e$ . La position angulaire de la machine est mesurée à l'aide d'un capteur (codeur) incrémental 5. L'organe de mesure digital 6 fournit la vitesse de rotation (§ 5.2.4).

#### 5.2.4 Organe de mesure digital de la vitesse

Le capteur incrémental fournit une mesure de position quantifiée dépendant de la résolution du capteur  $N_{\text{capn}}$  [impulsions/pu]. Le plus petit incrément de position mesurable est donc de

$$\theta_\Delta = \frac{1}{N_{\text{capn}}} \text{ [1]} \quad (5.16)$$

La vitesse est déduite de la position par une mesure par différence selon le § 3.2.2

$$n_m[k] = (\theta[k] - \theta[k-1]) \frac{T_\theta}{T_E} \quad (5.17)$$

et représente donc la moyenne glissante de la vitesse sur une période d'échantillonnage.

### 5.3 DONNÉES NUMÉRIQUES

Les données numériques se rapportent au banc d'essai du Laboratoire d'Electronique Industrielle sur lequel ont été réalisées les vérifications pratiques. Les simulations numériques se basent sur ce système. Les données de l'installation sont résumées dans cette section.

Pour le moteur à courant continu, du type à aimants permanents, on a

- Tension nominale  $U_n = 200$  [V]
- Courant d'induit nominal  $I_n = 20$  [A]
- Résistance d'induit nominale  $R_n = U_n / I_n = 10$  [ $\Omega$ ]
- Vitesse de rotation nominale  $\Omega_n = 1900$  [tour/min]
- Inertie du moteur seul  $J_{\text{moteur}} = 0.023$  [kgm<sup>2</sup>]
- Circuit d'induit moteur seul  $R_{\text{am}} = 260$  [m $\Omega$ ]  
 $L_{\text{am}} = 1.85$  [mH]
- Flux des aimants permanents  $\varphi = 1$

Une bobine d'induction (self) a été montée en série avec l'induit pour diminuer les ondulations du courant d'induit

- $R_b = 47$  [m $\Omega$ ]  $L_b = 6.3$  [mH]

D'où pour le circuit d'induit total :

- $R_a = R_{\text{am}} + R_b = 307$  [m $\Omega$ ]  $\rightarrow r_a = R_a / R_n = 0.0307$  [1]
- $L_a = L_{\text{am}} + L_b = 8.15$  [mH]  $\rightarrow T_a = L_a / R_a = 26.54$  [ms]

La tension continue intermédiaire du variateur à courant continu est

- $U_e = 200$  [V]  $\rightarrow u_{\text{max}} = U_e / U_n = 1$  [1]

L'inertie totale du moteur et de l'axe est de

- $J_m = 0.02585$  [kgm<sup>2</sup>]  $\rightarrow T_m = J \Omega_n / M_n = 278$  [ms]

Le déplacement nominal est défini a priori par

- $\Theta_n = 0.2$  [tour]  $\rightarrow T_\theta = \Theta_n / \Omega_n = 6.316$  [ms]

La résolution du capteur est de

- $N_{capn} = 1440$  [impulsions/ $\theta_n$ ]

L'élément à hystérèse utilisé sur la loi de commutation  $s$  possède un seuil  $\Delta s_h$  (fig. 1.4) fixé arbitrairement à

- $\Delta s_h = 0.1$  [1]

ce qui permet d'obtenir une fréquence de commutation maximum de l'ordre de 3 kHz [voir (1.77)].

## 5.4 RÉGLAGE DE VITESSE SANS INTÉGRATEUR AVEC MESURE DE VITESSE INSTANTANÉE

### 5.4.1 Introduction

Cette section présente les développements analytiques pour le réglage de vitesse du système rigide décrit à la section 5.2. On pourra ainsi effectuer par la suite une contre-réaction partielle pour le dimensionnement du réglage de position (sect. 5.5 et 5.7). Cela permettra une comparaison avec un dimensionnement global de ce réglage de position (sect. 5.5).

### 5.4.2 Modélisation et structure de réglage

Dans cette section, on étudie le réglage de vitesse avec une structure de réglage sans régulateur intégrateur et sans recours à un organe de mesure de vitesse digital; on suppose donc disposer de la mesure instantanée de la vitesse de rotation.

Dans le cas d'un régulateur hybride, l'implantation d'un observateur digital de vitesse, tel qu'il a été défini au § 3.2.3, permet d'atteindre ce but.

L'intégrateur n'est pas nécessaire à ce niveau, du fait qu'un réglage de position  $y$  sera cascadié. Les erreurs statiques éventuelles pourront donc être compensées par un intégrateur sur la position.

Les équations (5.12) et (5.13) décrivent ce système

$$\frac{di}{dt} = -\frac{1}{T_a} i - \frac{\varphi}{r_a T_a} n + \frac{1}{r_a T_a} u \quad (5.18)$$

$$\frac{dn}{dt} = \frac{\varphi}{T_m} i - \frac{1}{T_m} m_r \quad (5.19)$$

L'équation d'état matricielle (1.8) devient

$$\dot{\mathbf{x}}_s = \mathbf{A}_s \mathbf{x}_s + \mathbf{b}_s u + \mathbf{b}_{sv} m_r \quad (5.20)$$

$$y = n = \mathbf{c}_s^T \mathbf{x}_s \quad (5.21)$$

avec

$$\mathbf{x}_s = \begin{bmatrix} i \\ n \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{A}_s = \begin{bmatrix} -\frac{1}{T_a} & -\frac{\varphi}{r_a T_a} \\ \frac{\varphi}{T_m} & 0 \end{bmatrix} \quad (5.22a)$$

$$\mathbf{b}_s = \begin{bmatrix} \frac{1}{r_a T_a} \\ 0 \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{b}_{sv} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{T_m} \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{c}_s^T = [0 \quad 1] \quad (5.22b)$$

La structure de réglage continue avec limiteur de courant est représentée à la figure 5.4.

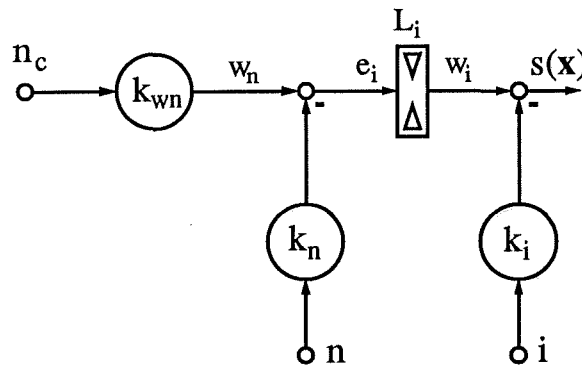


Fig. 5.4 Structure de réglage de vitesse sans intégrateur.

### 5.4.3 Mode de glissement hors limitation

La loi de commutation (1.2) est

$$s(\mathbf{x}_s) = -\mathbf{k}_s^T \mathbf{x}_s + k_{wn} n_c \quad (5.23)$$

avec

$$\mathbf{k}_s^T = [k_i \quad k_n] \quad (5.24)$$

La tension de commande équivalente obtenue par  $\dot{s}(\mathbf{x}_s)=0$  (1.13) est exprimée, après quelques calculs, par [voir (1.15b)]

$$u_{eqs} = \left( r_a - \frac{k_n r_a T_a \varphi}{k_i T_m} \right) i + \varphi n + \frac{k_n r_a T_a}{k_i T_m} m_r + \frac{k_{wn} r_a T_a}{k_i} \dot{n}_c \quad (5.25)$$

En accord avec (1.17) à (1.19), l'équation d'état en mode de glissement est

$$\dot{\mathbf{x}}_s = \mathbf{A}_s^* \mathbf{x}_s + \mathbf{b}_{sv}^* m_r + \mathbf{b}_{sw}^* \dot{n}_c \quad (5.26)$$

avec



$$\mathbf{A}_s^* = \begin{bmatrix} -\frac{k_n \varphi}{k_i T_m} & 0 \\ \frac{\varphi}{T_m} & 0 \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{b}_{sv}^* = \begin{bmatrix} \frac{k_n}{k_i T_m} \\ 1 \\ -\frac{1}{T_m} \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{b}_{sw}^* = \begin{bmatrix} \frac{k_{wn}}{k_i} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.27)$$

#### 5.4.4 Pôles en mode de glissement et dimensionnement des coefficients

Selon le § 1.4.2, on peut déterminer la liaison entre pôles  $p_i$ , coefficients de l'équation caractéristique  $\alpha_i$  et coefficients de contre-réaction  $k_i$  selon

$$\begin{aligned} P^*(s) = \det(s\mathbf{1} - \mathbf{A}_s^*) &= s \left( s + \frac{k_n \varphi}{k_i T_m} \right) = s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0 = \\ &= (s-p_1)(s-p_2) \end{aligned} \quad (5.28)$$

Après quelques calculs, on obtient donc

$$\alpha_0 = p_1 = 0 \quad (5.29a)$$

$$\alpha_1 = -p_2 = \frac{k_n \varphi}{k_i T_m} \quad (5.29b)$$

respectivement

$$k_i = c r_a T_a = 1 \quad (5.30a)$$

$$k_n = c r_a T_a \frac{T_m}{\varphi} \alpha_1 = k_i \frac{T_m}{\varphi} \alpha_1 \quad (5.30b)$$

où, selon (1.38)

$$c = \frac{1}{r_a T_a} \quad (5.30c)$$

#### 5.4.5 Régime stationnaire, coefficient $k_{wn}$

La relation (1.47) permet de calculer les grandeurs d'état en régime stationnaire

$$i^s = \frac{m_r}{\varphi} \quad (5.31a)$$

$$n^s = \frac{k_{wn}}{k_n} n_c - \frac{k_i}{k_n \varphi} m_r \quad (5.31b)$$

$$u_{eqs}^s = r_a i^s + \varphi n^s \quad (5.31c)$$

D'où le coefficient d'intervention directe de la consigne dimensionné pour annuler l'écart de réglage à couple résistant  $m_r$  nul (1.50)

$$k_{wn} = k_n \quad (5.32)$$

### 5.4.6 Application numérique

Le régulateur de vitesse est étudié en premier lieu en continu, tant pour le dimensionnement que pour la simulation numérique. Pourtant, en prévision de l'application hybride avec un organe de mesure digital de la vitesse, on limite la valeur maximale des coefficients du régulateur continu en fonction de la quantification due à cet organe de mesure (voir § 1.4.3). Dans le cas d'une mesure par différence de la vitesse sur une période d'échantillonnage, l'erreur de quantification sur la mesure de vitesse est, selon (3.9) et pour  $T_E = 2$  ms, de

$$\tilde{n}_{1q} = \frac{1}{N_{\text{capn}}} \frac{T_\theta}{T_E} = 2.19 \cdot 10^{-3}$$

En acceptant une propagation de la quantification de l'ordre de 10% sur l'entrée  $e_n$  du limiteur de courant ( $e_n = k_{wn}n_c - k_n n$ ), on voit que  $k_{wn}$  peut prendre la valeur  $k_{n\text{max}} = 45.66$ . Le choix des pôles imposés s'est porté sur

$$p_1 = 0$$

$$p_2 = -160$$

ce qui donne selon (5.30) et (5.32)

$$k_i = 1$$

$$k_n = 44.48$$

$$k_{wn} = 44.48$$

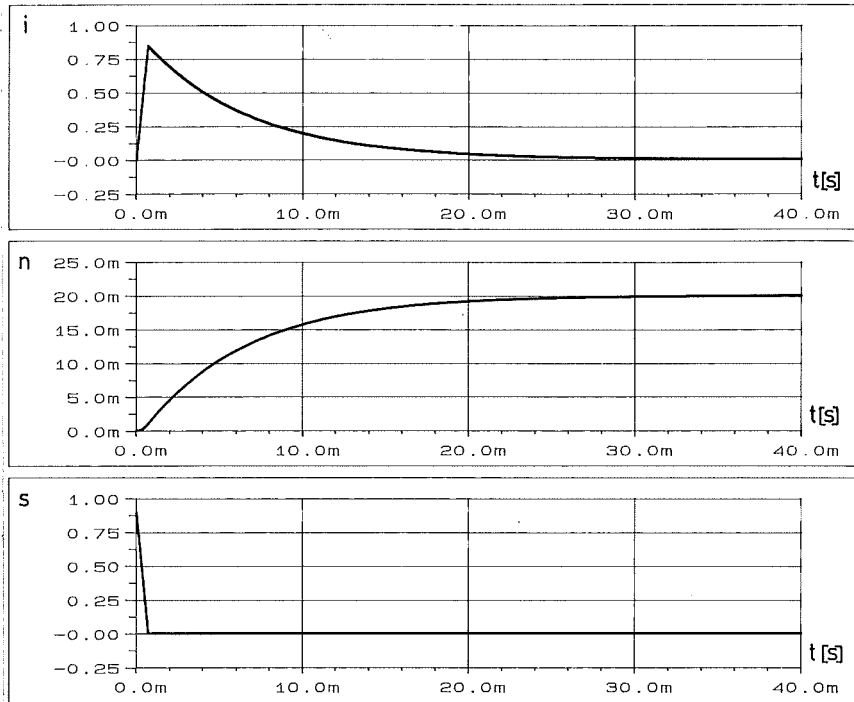
### 5.4.7 Réponse indicielle du régulateur continu

Rappelons que le terme de réponse indicielle est utilisé ici au sens large du terme (voir § 1.3.1).

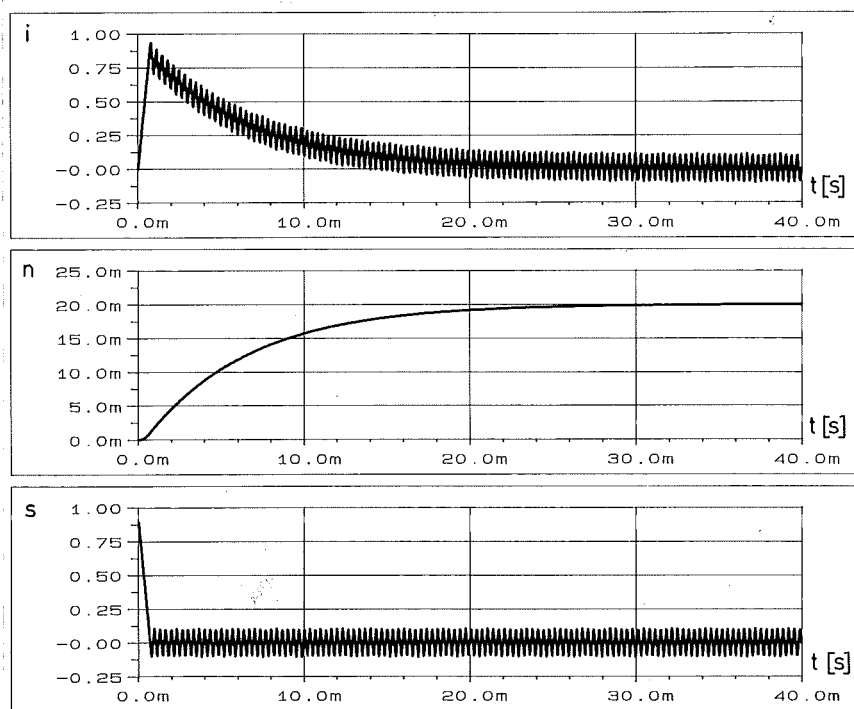
Le programme *SliMoDeSi* (chapitre 7) permet deux méthodes de simulation différentes pour une même structure de réglage : le mode de glissement idéal ( $f_c = \infty$ ) d'une part et le mode de glissement réel ( $f_c$  finie) d'autre part.

A la figure 5.5, on a représenté la simulation en mode de glissement idéal d'un saut de consigne de  $n_c = 0.02$  tel que le régulateur n'entre pas en limitation. On y a représenté le courant d'induit  $i$ , la vitesse  $n$  et la loi de commutation  $s$ . On constate bien que, juste après le saut de consigne en  $t=0$ , le système réglé quitte transitoirement le mode de glissement ( $s \neq 0$ ).

Pour une première comparaison entre les deux mode de simulation, on a calculé la même réponse en mode de glissement réel, c'est-à-dire en tenant compte de l'hystérèse sur la loi de commutation (fig. 5.6). On constate bien que lorsque le système est en mode de glissement ( $t > 0.7$  ms), le point de fonctionnement oscille autour de l'hyperplan de commutation  $s=0$ .

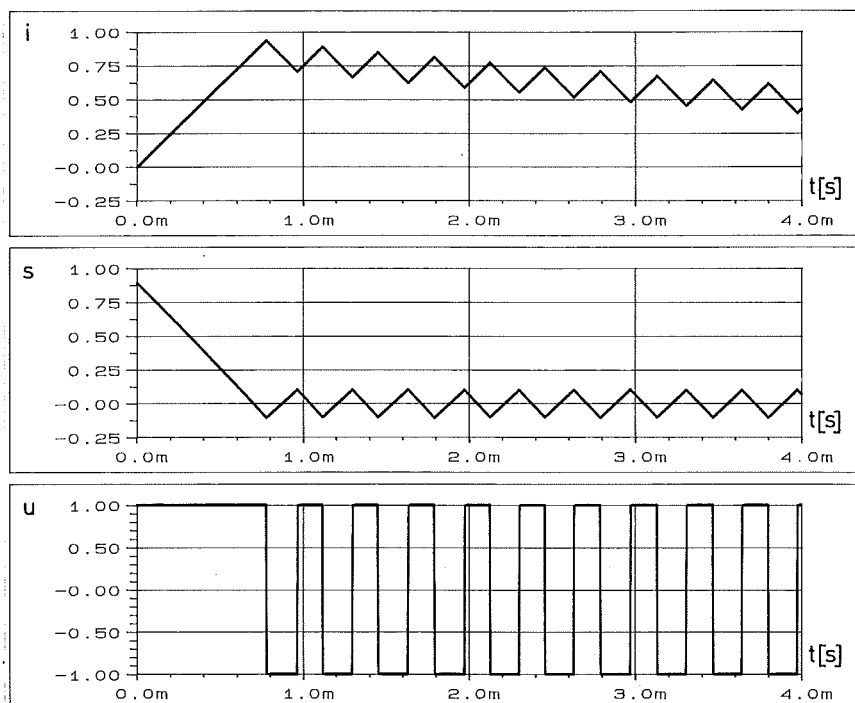


**Fig. 5.5** Réponse indicielle en mode de glissement idéal.  
 $n_c=0.02$  ;  $m_r=0$   
 $p_1=0$  ;  $p_2=-160$  ;  $k_i=1$  ;  $k_n=k_{wn}=44.48$  ;  $t_m \approx 15$  ms ;  $t_{hg} \approx 0.7$  ms



**Fig. 5.6** Réponse indicielle en mode de glissement réel.  
 $n_c=0.02$  ;  $m_r=0$   
 $p_1=0$  ;  $p_2=-160$  ;  $k_i=1$  ;  $k_n=k_{wn}=44.48$  ;  $t_m \approx 15$  ms ;  $t_{hg} \approx 0.7$  ms

Pour une appréciation meilleure de l'effet de l'hystérèse sur la loi de commutation, on a représenté à la figure 5.7 le courant d'induit  $i$ , la loi de commutation  $s$  et la grandeur de commande réelle  $u$  avec une échelle de temps fortement agrandie par rapport à celle de la figure 5.6.



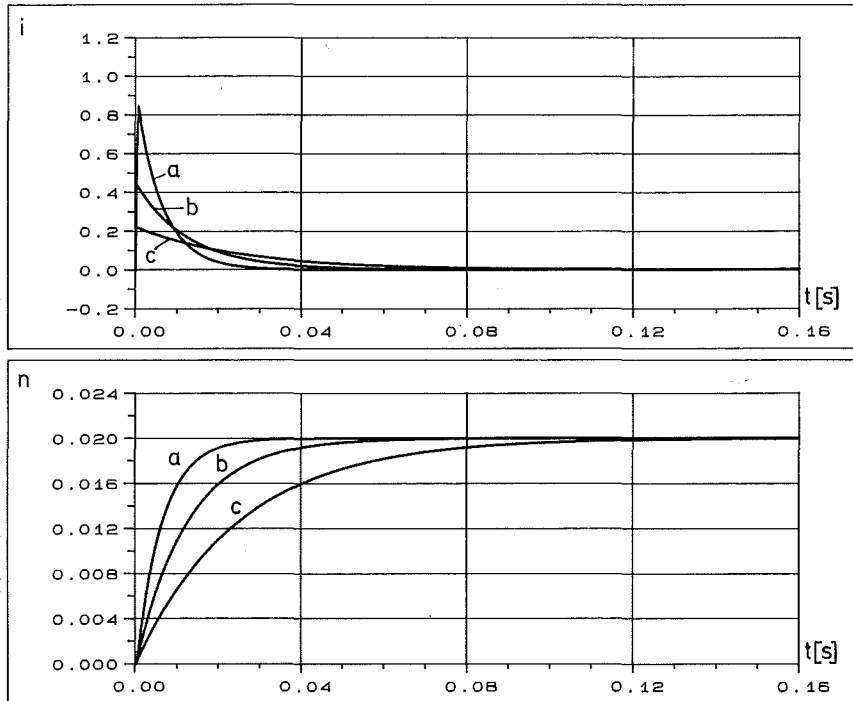
**Fig. 5.7** Réponse indicielle en mode de glissement réel.  
 $n_c=0.02$  ;  $m_r=0$   
 $p_1=0$  ;  $p_2=-160$  ;  $k_i=1$  ;  $k_n=k_{wn}=44.48$  ;  $t_{hg}\approx 0.7$  ms

#### 5.4.8 Influence du choix des pôles

Pour constater l'influence du choix des pôles sur le temps de montée  $t_m$  de la grandeur à régler (défini entre 0 et 90% de la valeur stationnaire), on a calculé les réponses indicielles en mode de glissement idéal, pour trois impositions de pôles, selon § 5.4.5, différentes (fig. 5.8).

On constate que le temps de montée est inversement proportionnel à la valeur imposée du pôle  $p_2$ , c'est-à-dire au coefficient  $k_n=k_{wn}$ .

Les pôles ont aussi une influence sur le temps où le système réglé est hors du mode de glissement ( $t_{hg}$ ), temps nécessaire au point de fonctionnement pour rejoindre l'hyperplan de commutation. La figure 5.9 montre le courant  $i$  et la loi de commutation  $s$  dans le cas du mode de glissement idéal lors des premiers instants après le saut de consigne (échelle de temps dilatée par rapport à celle de la fig. 5.8).



**Fig. 5.8** Réponses indicielles en mode de glissement idéal.

$$n_c = 0.02 ; m_r = 0$$

a)  $p_1 = 0 ; p_2 = -160 ; k_i = 1 ; k_n = k_{wn} = 44.48 ; t_m \approx 15 \text{ ms}$

b)  $p_1 = 0 ; p_2 = -80 ; k_i = 1 ; k_n = k_{wn} = 22.24 ; t_m \approx 29 \text{ ms}$

c)  $p_1 = 0 ; p_2 = -40 ; k_i = 1 ; k_n = k_{wn} = 11.12 ; t_m \approx 57 \text{ ms}$

Sur la figure 5.9, on constate que le temps hors glissement  $t_{hg}$  est proportionnel à la valeur absolue des pôles. Or  $t_{hg}$  dépend aussi de la consigne. Calculons analytiquement ce temps hors mode de glissement. En toute généralité, à l'instant  $t_0 = 0^+$  du saut de consigne, le courant et la vitesse sont nuls. La loi de commutation (5.23) devient alors en  $t = t_0$

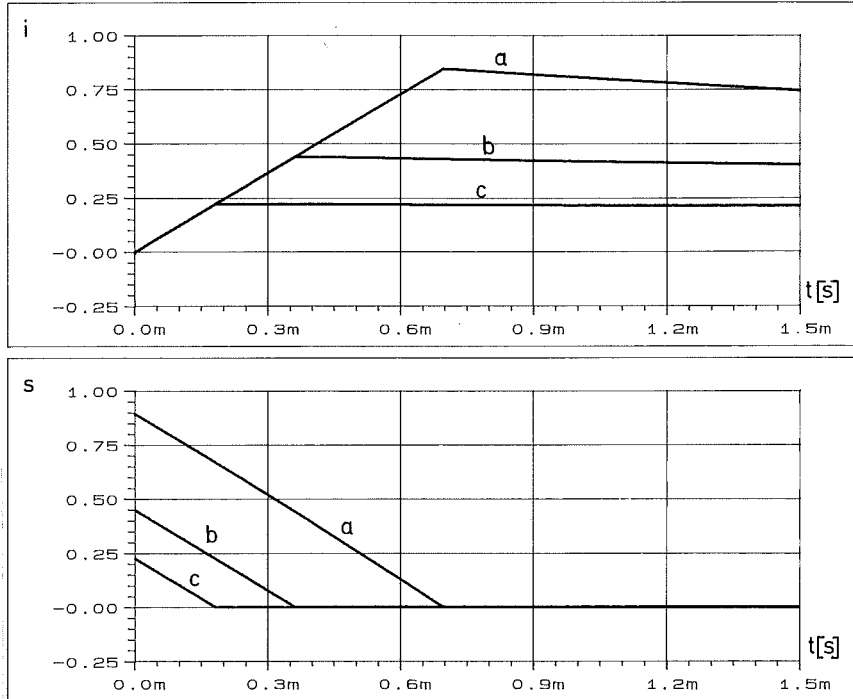
$$s(t_0) = k_{wn} n_c \quad (5.33)$$

De plus, en première approximation, le comportement du courant par rapport à la tension de commande  $u (=u_{lim})$  est linéaire, la vitesse étant quasi-nulle et le terme en  $i/T_a$  négligeable vis-à-vis de  $u/r_a T_a$  {voir (5.18)}

$$\frac{di}{dt} = \frac{u_{lim}}{r_a T_a} \quad (5.34)$$

soit

$$i = \frac{u_{lim}}{r_a T_a} t \quad (5.35)$$



**Fig. 5.9** Réponses indicielles en mode de glissement idéal.  
 $n_c=0.02$  ;  $m_r=0$   
 a)  $p_1=0$  ;  $p_2=-160$  ;  $k_i=1$  ;  $k_n=k_{wn}=44.48$  ;  $t_{hg}\approx 0.69$  ms  
 b)  $p_1=0$  ;  $p_2=-80$  ;  $k_i=1$  ;  $k_n=k_{wn}=22.24$  ;  $t_{hg}\approx 0.35$  ms  
 c)  $p_1=0$  ;  $p_2=-40$  ;  $k_i=1$  ;  $k_n=k_{wn}=11.12$  ;  $t_{hg}\approx 0.18$  ms

En introduisant (5.33) et (5.35) dans la loi de commutation, on voit qu'elle s'annule en  $t_{hg}$  selon

$$s(t_{hg}) = s(t_0) - k_i i = k_{wn} n_c - k_i \frac{u_{lim}}{r_a T_a} t_{hg} = 0 \quad (5.36)$$

soit

$$t_{hg} = \frac{k_{wn}}{k_i} \frac{r_a T_a}{u_{lim}} n_c \quad (5.37)$$

Ces relations sont valables pour le système hors limitation. On obtient pour les trois impositions de pôles de la figure 5.9 respectivement a)  $t_{hg}=0.72$  ms, b)  $t_{hg}=0.36$  ms et c)  $t_{hg}=0.18$  ms. Les résultats de simulation, obtenus sans approximations, sont presque identiques.

Le rapport  $t_{hg}/t_m$  est donc proportionnel au carré de la valeur du pôle  $p_2$ . Il s'ensuit que plus les pôles sont rapides, plus le temps hors glissement est important face au temps de montée de la grandeur à régler. Pour les exemples choisis, ce rapport correspond à a) 4.6%, b) 1.2% et c) 0.3%, ce qui est négligeable.

### 5.4.9 Système en limitation de courant

Selon la définition du § 2.4.2, la limitation variable du courant d'induit peut être définie d'une manière générale pour chaque segment selon

$$w_{ilim} = k_{mi} (c_i + p_i e) \quad (5.38a)$$

avec

$$k_{mi} = k_i \quad (5.38b)$$

$$e = n_c - n \quad (5.38c)$$

*Remarque* : Il ne faut pas confondre  $p_i$  avec un pôle : c'est la pente du segment de limitation variable. Par la suite, la signification sera précisée s'il devait y avoir un risque de confusion.

La loi de commutation (2.28) s'écrit

$$s(x_s) = -k_i i + w_{ilim} \quad (5.39)$$

ce qui permet de calculer la tension de commande équivalente selon (2.40)

$$u_{eqsilim} = (r_a - \frac{p_i r_a T_a \phi}{T_m}) i + \phi n + \frac{p_i r_a T_a}{T_m} m_r + p_i r_a T_a \dot{n}_c \quad (5.40)$$

L'équation en mode de glissement (2.41) donne

$$\dot{x}_s = A_{silim}^* x_s + b_{svilim}^* m_r + b_{swilim}^* \dot{n}_c \quad (5.41)$$

avec

$$A_{silim}^* = \begin{bmatrix} -\frac{p_i \phi}{T_m} & 0 \\ \frac{\phi}{T_m} & 0 \end{bmatrix} ; \quad b_{svilim}^* = \begin{bmatrix} \frac{p_i}{T_m} \\ -\frac{1}{T_m} \end{bmatrix} ; \quad b_{swilim}^* = \begin{bmatrix} p_i \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.42)$$

Ainsi les pôles en limitation sont donnés par l'équation caractéristique

$$\begin{aligned} P_{silim}^*(s) = \det(sI - A_{silim}^*) &= s \left( s + \frac{p_i \phi}{T_m} \right) = s^2 + \alpha_{1ilim} s + \alpha_{0ilim} = \\ &= (s - p_{1ilim})(s - p_{2ilim}) \end{aligned} \quad (5.43a)$$

soit

$$p_{1ilim} = 0 \quad (5.43b)$$

$$p_{2ilim} = -\frac{p_i \phi}{T_m} \quad (5.43c)$$

*Remarque* : Dans la pratique, on ne va jamais réaliser de limitation variable sur le courant d'induit. En effet, il n'y a aucune raison à cela, puisque le seul but de la limitation de courant est

d'éviter une surcharge du moteur. On aura donc toujours un seul segment de limitation avec une limitation fixe de courant, soit

$$p_{i1} = 0 \quad (5.44a)$$

$$c_{i1} = i_{\max} \quad (5.44b)$$

En limitation de courant, les pôles du système en mode de glissement sont donc toujours, selon (5.43), les deux à l'origine. C'est le comportement intégral de la vitesse qui s'affirme.

#### 5.4.10 Saut de consigne avec limitation de courant

Pour une limitation de courant fixe selon (5.44) et avec

$$i_{\max} = 1$$

on a tracé à la figure 5.10 la réponse à un saut de consigne suffisamment grand pour entrer en limitation. Pour ne pas charger inutilement les graphiques, on ne représentera que les simulations en mode de glissement idéal ( $f_c = \infty$ ).

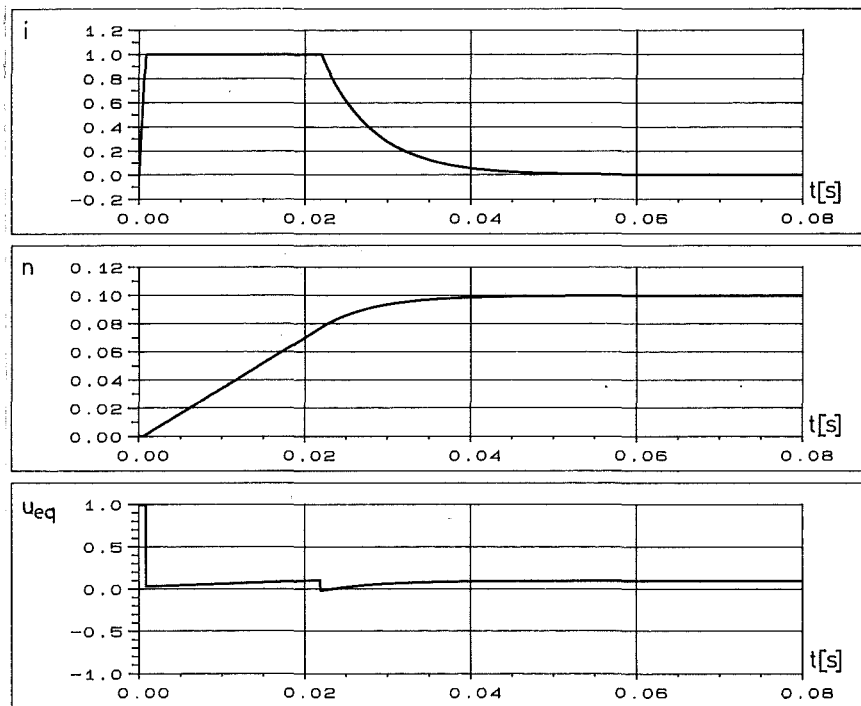


Fig. 5.10 Saut de consigne de vitesse, en mode de glissement idéal.

$$n_c = 0.1 ; m_r = 0 ; i_{\max} = 1$$

$$p_1 = 0 ; p_2 = -160 ; k_i = 1 ; k_n = k_{wn} = 44.48 ; t_{hg} \approx 0.82 \text{ ms}$$

On constate qu'une fois entré en mode de glissement, le système réglé y reste même lors des changements de structure de réglage par entrée ou sortie de limitation de courant. Le régulateur sort correctement de limitation, il n'y a pas de dépassement sur la grandeur à régler.



Dans ce cas, le temps hors mode de glissement n'est plus fonction de la consigne, ni des pôles imposés comme au § 5.4.8, mais uniquement de la valeur de la limitation de courant. En effet, le système entre en mode de glissement dès que le courant atteint  $i_{lim}$

$$i_{lim} = \frac{di}{dt} t_{hg} \quad (5.45)$$

soit

$$t_{hg} = i_{lim} \frac{r_a T_a}{u_{lim}} \quad (5.46)$$

Pour l'exemple présenté, on calcule  $t_{hg}=0.81$  ms.

## 5.5 RÉGLAGE DE POSITION SANS INTÉGRATEUR AVEC MESURE DE VITESSE INSTANTANÉE

### 5.5.1 Introduction

Après la modélisation du système à régler (§ 5.5.2), on traitera d'abord le cas de la contre-réaction globale (§ 5.5.4) avant d'étudier le cas de la contre-réaction partielle cascadée au réglage de vitesse déjà dimensionné selon la section 5.4.

### 5.5.2 Modélisation et structure de réglage

Pour un premier traitement analytique complet, on prend le cas d'un régulateur par mode de glissement sans régulateur intégrateur. Le système, d'ordre  $n_s=3$ , est décrit par les équations

$$\frac{di}{dt} = -\frac{1}{T_a} i - \frac{\varphi}{r_a T_a} n + \frac{1}{r_a T_a} u \quad (5.47)$$

$$\frac{dn}{dt} = \frac{\varphi}{T_m} i - \frac{1}{T_m} m_r \quad (5.48)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{n}{T_\theta} \quad (5.49)$$

qui, sous forme matricielle, devient

$$\dot{\mathbf{x}}_s = \mathbf{A}_s \mathbf{x}_s + \mathbf{b}_s u + \mathbf{b}_{sv} m_r \quad (5.50)$$

$$y = \theta = \mathbf{c}_s^T \mathbf{x}_s \quad (5.51)$$

avec

$$\mathbf{x}_s = \begin{bmatrix} i \\ n \\ \theta \end{bmatrix}; \quad \mathbf{A}_s = \begin{bmatrix} -\frac{1}{T_a} & -\frac{\varphi}{r_a T_a} & 0 \\ \frac{\varphi}{T_m} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{T_\theta} & 0 \end{bmatrix} \quad (5.52a)$$

$$\mathbf{b}_s = \begin{bmatrix} \frac{1}{r_a T_a} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{b}_{sv} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{T_m} \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{c}_s^T = [0 \ 0 \ 1] \quad (5.52b)$$

La figure 5.11 représente la structure de réglage correspondante, avec limiteurs de vitesse et de courant.

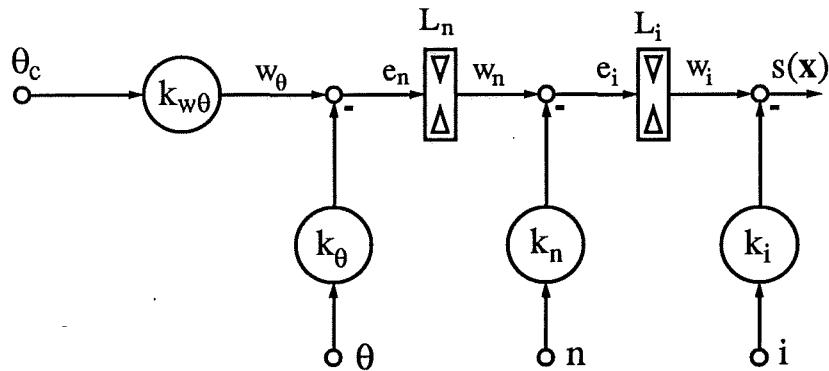


Fig. 5.11 Structure de réglage de position sans intégrateur.

### 5.5.3 Mode de glissement hors limitation

Le vecteur de contre-réaction étant

$$\mathbf{k}_s^T = [k_i \ k_n \ k_\theta] \quad (5.53)$$

la loi de commutation est

$$s(\mathbf{x}_s) = -\mathbf{k}_s^T \mathbf{x}_s + k_{w\theta} \theta_c \quad (5.54)$$

La tension de commande équivalente selon (1.15b) est

$$u_{eqs} = \left( r_a - \frac{k_n r_a T_a \varphi}{k_i T_m} \right) i + \left( \varphi - \frac{k_\theta r_a T_a}{k_i T_\theta} \right) n + \frac{k_n r_a T_a}{k_i T_m} m_r + \frac{k_{w\theta} r_a T_a}{k_i} \dot{\theta}_c \quad (5.55)$$

ce qui permet d'exprimer l'équation d'état en mode de glissement

$$\dot{\mathbf{x}}_s = \mathbf{A}_s^* \mathbf{x}_s + \mathbf{b}_{sv}^* m_r + \mathbf{b}_{sw}^* \dot{\theta}_c \quad (5.56)$$

avec

$$\mathbf{A}_s^* = \begin{bmatrix} -\frac{k_n\varphi}{k_i T_m} & -\frac{k_\theta}{k_i T_\theta} & 0 \\ \frac{\varphi}{T_m} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{T_\theta} & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{b}_{sv}^* = \begin{bmatrix} \frac{k_n}{k_i T_m} \\ -\frac{1}{T_m} \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{b}_{sw}^* = \begin{bmatrix} \frac{k_w\theta}{k_i} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.57)$$

#### 5.5.4 Pôles en mode de glissement et dimensionnement des coefficients

L'équation caractéristique du système en mode de glissement est (§ 1.4.2)

$$\begin{aligned} P^*(s) = \det(s\mathbf{1} - \mathbf{A}_s^*) &= s \left( s^2 + s \frac{k_n\varphi}{k_i T_m} + \frac{k_\theta\varphi}{k_i T_m T_\theta} \right) = \\ &= s^3 + \alpha_2 s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0 = \\ &= (s-p_1)(s-p_2)(s-p_3) \end{aligned} \quad (5.58)$$

ce qui permet de tirer les relations

$$\alpha_0 = p_1 = 0 \quad (5.59a)$$

$$\alpha_1 = p_2 p_3 = \frac{k_\theta\varphi}{k_i T_m T_\theta} \quad (5.59b)$$

$$\alpha_2 = -(p_2 + p_3) = \frac{k_n\varphi}{k_i T_m} \quad (5.59c)$$

d'où l'on déduit les coefficients de contre-réaction

$$k_i = c r_a T_a = 1 \quad (5.60a)$$

$$k_n = c r_a T_a \frac{T_m}{\varphi} \alpha_2 = k_i \frac{T_m}{\varphi} \alpha_2 \quad (5.60b)$$

$$k_\theta = c r_a T_a \frac{T_m T_\theta}{\varphi} \alpha_1 = k_i \frac{T_m T_\theta}{\varphi} \alpha_1 \quad (5.60c)$$

où, selon (1.38)

$$c = \frac{1}{r_a T_a} \quad (5.60d)$$

*Remarque* : Si le régulateur de vitesse a déjà été dimensionné, il est nécessaire d'effectuer une contre-réaction d'état partielle. Dans le cas présent, il n'est pas nécessaire de faire appel à toute l'artillerie de la section 1.5. Pour le choix du coefficient de proportionnalité  $c$ , on remarque que les relations (5.30c) et (5.60d) sont identiques. Quant au coefficient de contre-réaction de la vitesse, on constate d'après (5.30b) qu'il est proportionnel

à la somme des pôles, soit à la trace de  $A_{sn}^*$ . Il en est de même en réglage de position (5.60b). Pour le dimensionnement de  $k_\theta$ , tout en imposant  $k_n$  selon (5.30b), il faut donc uniquement que la somme des pôles dans les deux cas soit égale.

### 5.5.5 Régime stationnaire, coefficient $k_{w\theta}$

Le régime stationnaire est défini par  $\dot{x}_s=0$  et  $s(x_s)=0$ , d'où selon (1.47)

$$i^s = \frac{m_r}{\varphi} \quad (5.61a)$$

$$n^s = 0 \quad (5.61b)$$

$$\theta^s = \frac{k_{w\theta}}{k_\theta} \theta_c - \frac{k_i}{k_\theta} i^s \quad (5.61c)$$

$$u_{eqs}^s = r_a i^s \quad (5.61d)$$

A perturbation  $m_r$  nulle, l'écart de réglage s'annule pour (1.50)

$$k_{w\theta} = k_\theta \quad (5.62)$$

### 5.5.6 Application numérique

La résolution du capteur incrémental est égale à l'erreur de quantification maximale sur la mesure de position (5.16)

$$\theta_\Delta = \frac{1}{N_{capn}} = \frac{1}{1440} = 6.94 \cdot 10^{-4}$$

Les critères pour le choix des pôles maximaux sont basés sur cette quantification, ainsi que sur celle d'une mesure par différence de la vitesse. L'argumentation étant identique à celle du § 5.4.6, on admettra  $k_{nmax}=45.66$  et  $k_{\theta max}=144$ .

On impose ici deux pôles complexes conjugués à parties réelles et imaginaires égales [2, § 4.4.4]. Cette configuration est optimale, comme dans le cas du réglage par contre-réaction d'état.

$$p_1 = 0$$

$$p_{2,3} = -80 \pm j \cdot 80$$

d'où, selon (5.53) et (5.55)

$$k_i = 1$$

$$k_n = 44.48$$

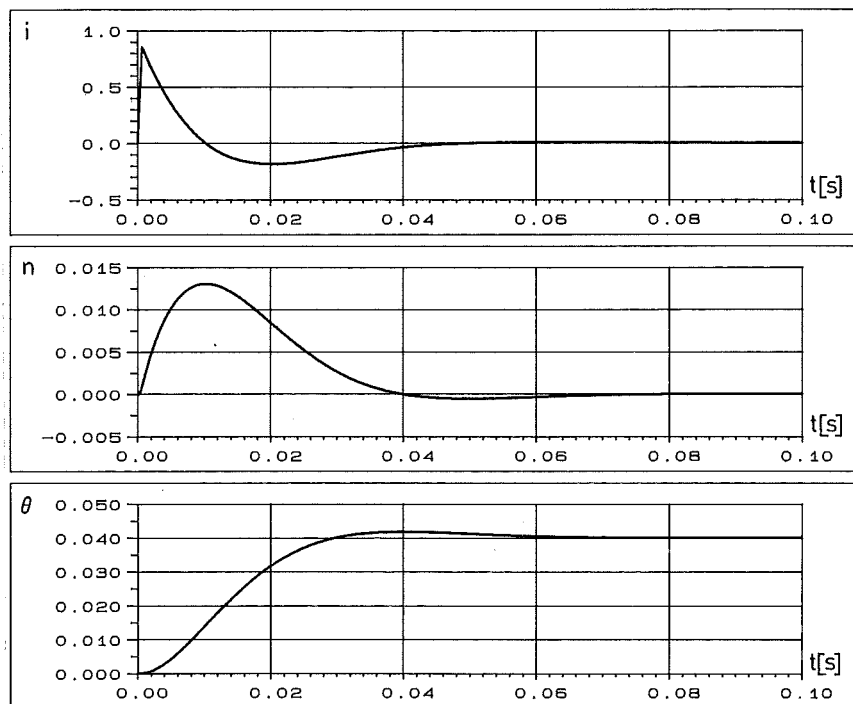
$$k_\theta = 22.48$$

$$k_{w\theta} = 22.48$$

Les pôles  $p_{2,3}$  ont également été choisis en accord avec la remarque du § 5.4.4 : leur somme est égale au pôle du réglage de vitesse (§ 5.4.6). On obtient donc le même coefficient  $k_n$  qu'au § 5.4.6.

### 5.5.7 Réponse indicielle du régulateur continu

La figure 5.12 représente la réponse indicielle à un saut de consigne de  $\theta_c=0.04$ . Le temps de montée  $t_m$  est de 29 ms. Comme il y a dépassement, il est défini entre  $t=0$  et l'instant où la grandeur à régler  $\theta$  atteint pour la première fois la consigne. L'hyperplan de commutation est atteint après  $t_{hg}=0.7$  ms. Le dépassement maximum est de l'ordre de 4.3 %.



**Fig. 5.12** Réponse indicielle en mode de glissement idéal.

$$\theta_c=0.04 ; m_r=0$$

$$p_1=0 ; p_{2,3}=-80 \pm j80 ; k_i=1 ; k_n=44.48 ; k_\theta=k_w\theta=22.48$$

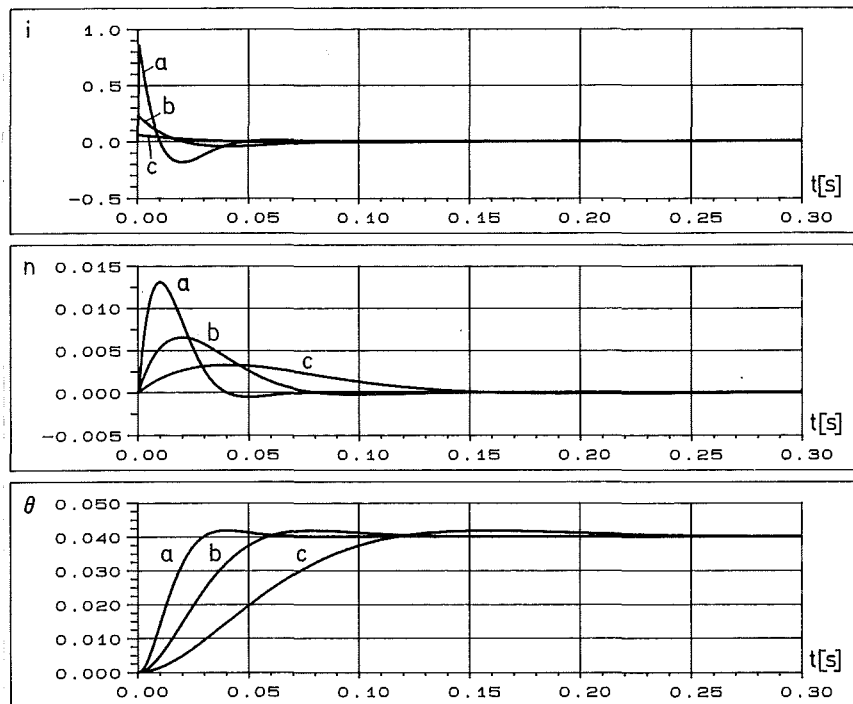
$$t_m \approx 29 \text{ ms} ; t_{hg} \approx 0.7 \text{ ms} ; \text{dépassement max. } 4.3 \%$$

### 5.5.8 Influence du choix des pôles

Pour différents choix des pôles, on a représenté à la figure 5.13 la simulation en mode de glissement idéal.

L'influence sur le temps de montée est évidente. Comme pour le réglage de vitesse (§ 5.4.8), le temps de montée est inversement proportionnel à la valeur absolue des pôles imposés.

La dynamique imposée agit aussi sur le temps hors du mode de glissement. Les premiers instants après le saut de consigne de l'allure du courant  $i$  et de la loi de commutation  $s$  sont représentés à la figure 5.14.



**Fig. 5.13** Réponses indicielles en mode de glissement idéal.

$$\theta_c = 0.04 ; m_r = 0$$

$$a) p_{2,3} = -80 \pm j80 ; k_i = 1 ; k_n = 44.48 ; k_\theta = k_{w\theta} = 22.48 ; t_m \approx 29 \text{ ms}$$

$$b) p_{2,3} = -40 \pm j40 ; k_i = 1 ; k_n = 22.24 ; k_\theta = k_{w\theta} = 5.618 ; t_m \approx 58 \text{ ms}$$

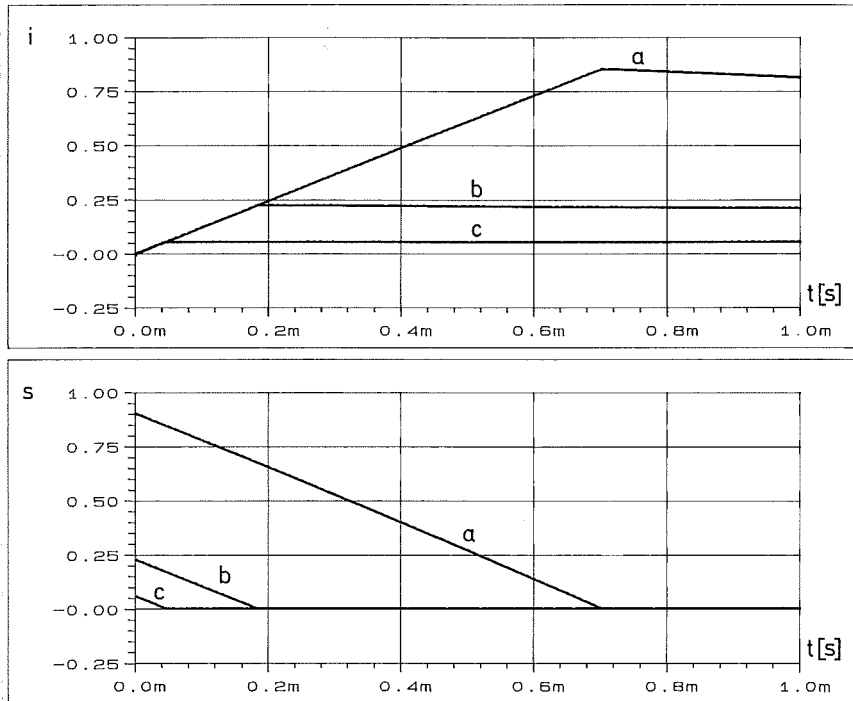
$$c) p_{2,3} = -20 \pm j20 ; k_i = 1 ; k_n = 11.12 ; k_\theta = k_{w\theta} = 1.405 ; t_m \approx 116 \text{ ms}$$

Le temps hors mode de glissement peut être estimé de la même manière qu'au § 5.4.8. Pendant ce transitoire, on suppose les variations de la vitesse  $n$  et de la position  $\theta$  suffisamment faibles pour être négligées. On admettra la même variation linéaire du courant. Après quelques calculs, on trouve

$$t_{hg} = \frac{k_{w\theta} r_a T_a}{k_i u_{lim}} \theta_c \quad (5.63)$$

Ces relations sont valables pour le système hors limitation. En tenant compte de (5.59), on constate que  $t_{hg}$  est proportionnel au carré de la valeur des pôles dans le cas de pôles réels confondus ou de pôles complexes conjugués à parties réelles et imaginaires égales.

On obtient pour les trois impositions de pôles de la figure 5.14 respectivement a)  $t_{hg} = 0.73 \text{ ms}$ , b)  $t_{hg} = 0.18 \text{ ms}$  et c)  $t_{hg} = 0.046 \text{ ms}$ . En comparaison avec les résultats de simulation, on voit que les hypothèses admises pour le calcul de  $t_{hg}$  sont justifiées.



**Fig. 5.14** Réponses indicielles en mode de glissement idéal.

$$\theta_c = 0.04 ; m_r = 0$$

$$a) p_{2,3} = -80 \pm j80 ; k_i = 1 ; k_n = 44.48 ; k_\theta = k_w \theta = 22.48 ; t_{hg} = 0.70 \text{ ms}$$

$$b) p_{2,3} = -40 \pm j40 ; k_i = 1 ; k_n = 22.24 ; k_\theta = k_w \theta = 5.618 ; t_{hg} = 0.18 \text{ ms}$$

$$c) p_{2,3} = -20 \pm j20 ; k_i = 1 ; k_n = 11.12 ; k_\theta = k_w \theta = 1.405 ; t_{hg} = 0.04 \text{ ms}$$

### 5.5.9 Système en limitation de courant

La définition de la limitation variable de courant n'est dans ce cas pas tout à fait identique à celle du § 5.4.6 (réglage de vitesse). En effet, l'écart de réglage se rapporte ici à la position. Selon la définition du § 2.4.2, la limitation variable du courant d'induit peut être définie d'une manière générale pour chaque segment selon

$$w_{ilim} = k_{mi} (c_i + p_i e) \quad (5.64a)$$

avec

$$k_{mi} = k_i \quad (5.64b)$$

$$e = \theta_c - \theta \quad (5.64c)$$

*Remarque* : Il ne faut pas confondre  $p_i$  avec un pôle : c'est la pente du segment de limitation variable.

Le vecteur de contre-réaction étant

$$k_{silim}^T = [ k_i \ 0 \ 0 ] \quad (5.65)$$

la loi de commutation (2.28) devient

$$s(\mathbf{x}_s) = -\mathbf{k}_{\text{silim}}^T \mathbf{x}_s + w_{\text{ilim}} = -k_i i + w_{\text{ilim}} \quad (5.66)$$

d'où :

$$u_{\text{eqsilim}} = r_a i + \left(\varphi - \frac{p_i r_a T_a}{T_\theta}\right) n + p_i r_a T_a \dot{\theta}_c \quad (5.67)$$

L'équation en mode de glissement (2.41) s'exprime

$$\dot{\mathbf{x}}_s = \mathbf{A}_{\text{silim}}^* \mathbf{x}_s + \mathbf{b}_{\text{svilim}}^* m_r + \mathbf{b}_{\text{swilim}}^* \dot{\theta}_c \quad (5.68)$$

avec

$$\mathbf{A}_{\text{silim}}^* = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{p_i}{T_\theta} & 0 \\ \frac{\varphi}{T_m} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{T_\theta} & 0 \end{bmatrix} \quad (5.69a)$$

$$\mathbf{b}_{\text{svilim}}^* = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{T_m} \\ 0 \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{b}_{\text{swilim}}^* = \begin{bmatrix} p_i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.69b)$$

Les pôles en limitation de courant sont alors donnés par

$$\begin{aligned} P_{\text{silim}}^*(s) &= \det(s\mathbf{1} - \mathbf{A}_{\text{silim}}^*) = s \left( s^2 + \frac{p_i \varphi}{T_m T_\theta} \right) = \\ &= s^3 + \alpha_{2\text{ilim}} s^2 + \alpha_{1\text{ilim}} s + \alpha_{0\text{ilim}} = \\ &= (s - p_{1\text{ilim}})(s - p_{2\text{ilim}})(s - p_{3\text{ilim}}) \end{aligned} \quad (5.70)$$

soit

$$p_{1\text{ilim}} = 0 \quad (5.71a)$$

$$p_{2,3\text{ilim}} = \pm j \sqrt{\frac{p_i \varphi}{T_m T_\theta}} \quad (5.71b)$$

La remarque du § 5.4.6 reste valable. On choisira toujours

$$p_{i1} = 0 \quad (5.72a)$$

$$c_{i1} = i_{\text{max}} \quad (5.72b)$$

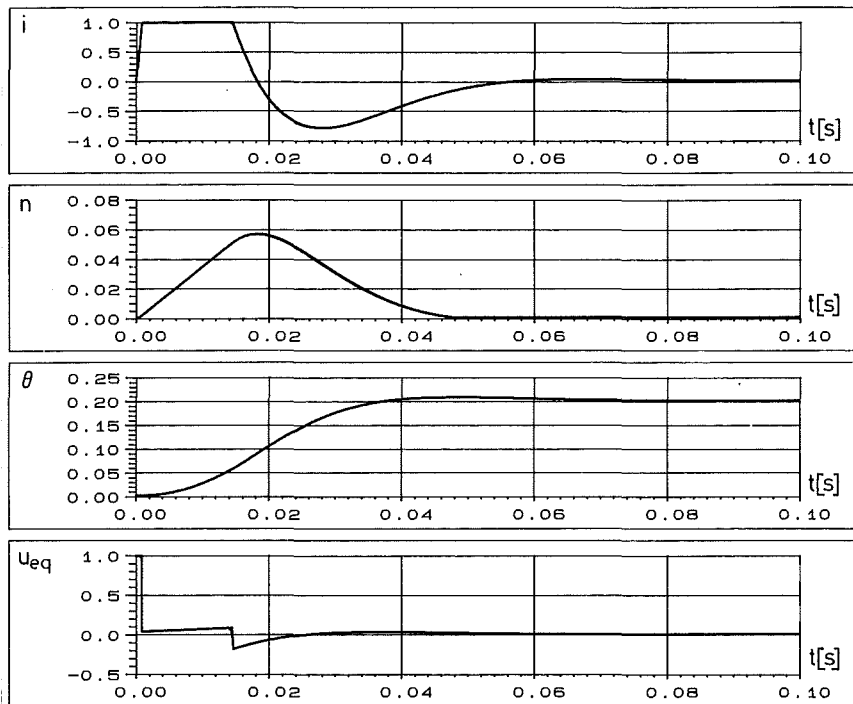
### 5.5.10 Saut de consigne avec limitation de courant

Pour un saut de consigne supérieur à celui du § 5.5.9, le système entre en limitation de courant (fixe), avec

$$i_{\text{max}} = 1$$



Le mode de glissement idéal est représenté à la figure 5.15.



**Fig. 5.15** Saut de consigne de position, en mode de glissement idéal.

$$\theta_c = 0.2 ; i_{\max} = 1$$

$$p_1 = 0 ; p_{2,3} = -80 \pm j80 ; k_i = 1 ; k_n = 44.48 ; k_\theta = k_w \theta = 22.48$$

dépassement max. 3.8 %

Le dépassement est de 3.8 %. Il est inférieur au cas hors limitation du fait que la phase finale s'est effectuée sans que le système passe en limitation inférieure ( $i = i_{\min}$ ).

### 5.5.11 Système en limitation de vitesse

En limitation variable de vitesse, les bornes du limiteur correspondant sont données par (§ 2.4.2)

$$w_{n\text{lim}} = k_{mn} (c_n + p_n e) \quad (5.73a)$$

avec

$$k_{mn} = k_n \quad (5.73b)$$

$$e = \theta_c - \theta \quad (5.73c)$$

*Remarque* :  $p_n$  est la pente du segment de limitation variable et n'est pas à confondre avec le  $n^{\text{ième}}$  pôle du système.

La loi de commutation (2.28) devient dans ce cas

$$s(\mathbf{x}_s) = -\mathbf{k}_{sn\text{lim}}^T \mathbf{x}_s + w_{n\text{lim}} = -k_i i - k_n n + w_{n\text{lim}} \quad (5.74)$$

avec

$$\mathbf{k}_{\text{snlim}}^T = [k_i \ k_n \ 0] \quad (5.75)$$

Après quelques calculs, on obtient la tension de commande équivalente

$$u_{\text{eqsnlim}} = \left(r_a - \frac{k_n r_a T_a \varphi}{k_i T_m}\right) i + \left(\varphi - \frac{p_n k_n r_a T_a}{k_i T_\theta}\right) n + \frac{k_n r_a T_a}{k_i T_m} m_r + \frac{p_n k_n r_a T_a}{k_i} \dot{\theta}_c \quad (5.76)$$

D'où l'équation en mode de glissement (2.41)

$$\dot{\mathbf{x}}_s = \mathbf{A}_{\text{snlim}}^* \mathbf{x}_s + \mathbf{b}_{\text{svnlm}}^* m_r + \mathbf{b}_{\text{swnlm}}^* \dot{\theta}_c \quad (5.77)$$

avec

$$\mathbf{A}_{\text{snlim}}^* = \begin{bmatrix} -\frac{k_n \varphi}{k_i T_m} & -\frac{p_n k_n}{k_i T_\theta} & 0 \\ \frac{\varphi}{T_m} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{T_\theta} & 0 \end{bmatrix} \quad (5.78a)$$

$$\mathbf{b}_{\text{svnlm}}^* = \begin{bmatrix} \frac{k_n}{k_i T_m} \\ -\frac{1}{T_m} \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{b}_{\text{swnlm}}^* = \begin{bmatrix} \frac{p_n k_n}{k_i} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.78b)$$

L'équation caractéristique en limitation variable de vitesse est

$$\begin{aligned} P_{\text{snlim}}^*(s) &= \det(s\mathbf{1} - \mathbf{A}_{\text{snlim}}^*) = s \left( s^2 + s \frac{k_n \varphi}{k_i T_m} + \frac{p_n k_n \varphi}{k_i T_m T_\theta} \right) = \\ &= s^3 + \alpha_{2\text{nlm}} s^2 + \alpha_{1\text{nlm}} s + \alpha_{0\text{nlm}} = \\ &= (s - p_{1\text{nlm}})(s - p_{2\text{nlm}})(s - p_{3\text{nlm}}) \end{aligned} \quad (5.79)$$

soit

$$\alpha_{0\text{nlm}} = p_{1\text{nlm}} = 0 = \alpha_0 \quad (5.80a)$$

$$\alpha_{1\text{nlm}} = p_{2\text{nlm}} p_{3\text{nlm}} = \frac{p_n k_n \varphi}{k_i T_m T_\theta} \quad (5.80b)$$

$$\alpha_{2\text{nlm}} = -(p_{2\text{nlm}} + p_{3\text{nlm}}) = \frac{k_n \varphi}{k_i T_m} = \alpha_2 \quad (5.80c)$$

respectivement

$$p_{2,3nlim} = \frac{-\alpha_{2nlim} \pm \sqrt{\alpha_{2nlim}^2 - 4\alpha_{1nlim}}}{2} \quad (5.80d)$$

*Remarque :* En comparant (5.59) et (5.80), on constate que la somme des pôles hors limitation ou en limitation de vitesse est identique.

Comme on l'a vu à la section 2.7, les limitations variables peuvent être interprétées comme coefficients variables. Les coefficients caractéristiques de (5.80) sont fonctions des coefficients de contre-réaction  $k_i$  et  $k_n$  dimensionnés selon les relations (5.60). En effectuant la substitution, on obtient

$$\alpha_{0nlim} = p_{1nlim} = 0 \quad (5.81a)$$

$$\alpha_{1nlim} = p_{2nlim} p_{3nlim} = \frac{p_n k_n \varphi}{k_i T_m T_\theta} = \frac{p_n}{T_\theta} \alpha_2 \quad (5.81b)$$

$$\alpha_{2nlim} = -(p_{2nlim} + p_{3nlim}) = \frac{k_n \varphi}{k_i T_m} = \alpha_2 \quad (5.81c)$$

En effectuant un dimensionnement global du réglage de position selon le § 5.5.4, mais avec les coefficients caractéristiques  $\alpha_{0nlim} \dots \alpha_{2nlim}$  de (5.81), on trouve à l'aide de (5.60) :

$$k_{inlim} = c r_a T_a = 1 \quad (5.82a)$$

$$k_{nnlim} = c r_a T_a \frac{T_m}{\varphi} \alpha_{2nlim} = c r_a T_a \frac{T_m}{\varphi} \alpha_2 = k_n \quad (5.82b)$$

$$k_{\theta nlim} = c r_a T_a \frac{T_m T_\theta}{\varphi} \alpha_{1nlim} = c r_a T_a \frac{T_m}{\varphi} \alpha_2 p_n = p_n k_n \quad (5.82c)$$

où, selon (1.38) :

$$c = \frac{1}{r_a T_a} \quad (5.82d)$$

On constate que les coefficients de contre-réaction du courant et de la vitesse sont inchangés. Par contre, le coefficient de contre-réaction virtuel de la position est fonction de la pente du segment de limitation.

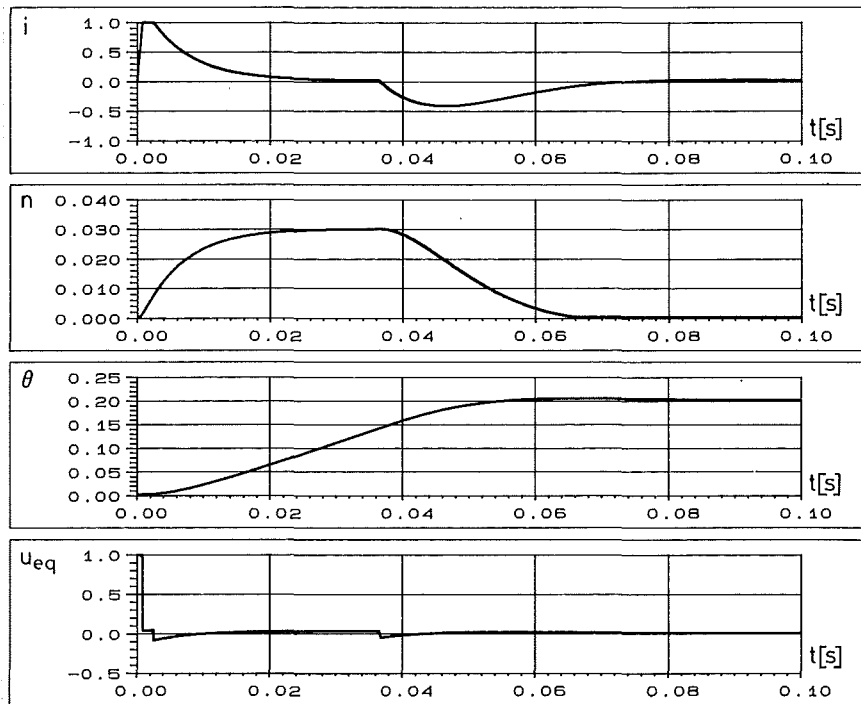
### 5.5.12 Saut de consigne avec limitation de vitesse

La limitation de vitesse est dans un premier temps choisie fixe à

$$n_{max} = 0.03$$

C'est une valeur extrêmement basse qui n'est pas réaliste. Elle est pourtant utilisée pour démontrer que le système réglé est stable et sans dépassement, même s'il entre transitoirement en limitation de vitesse. Par la suite, on verra qu'une valeur plus grande provoque des instabilités dues à la valeur de cette limitation.

Pour un saut de consigne de  $\theta_c=0.2$  (identique à celui du § 5.5.10) le système réglé entre en limitation de courant, puis en limitation de vitesse (fig. 5.16).



**Fig. 5.16** Saut de consigne de position, en mode de glissement idéal.

$$\theta_c=0.2 ; i_{\max}=1 ; n_{\max}=0.03$$

$$p_{1,2,3}=-80 \pm j80 ; k_i=1 ; k_n=44.48 ; k_\theta=k_{w\theta}=22.48$$

dépassement max. 2.0 %

## 5.6 INSTABILITÉS DUES AUX LIMITATIONS DE VITESSE

### 5.6.1 Introduction

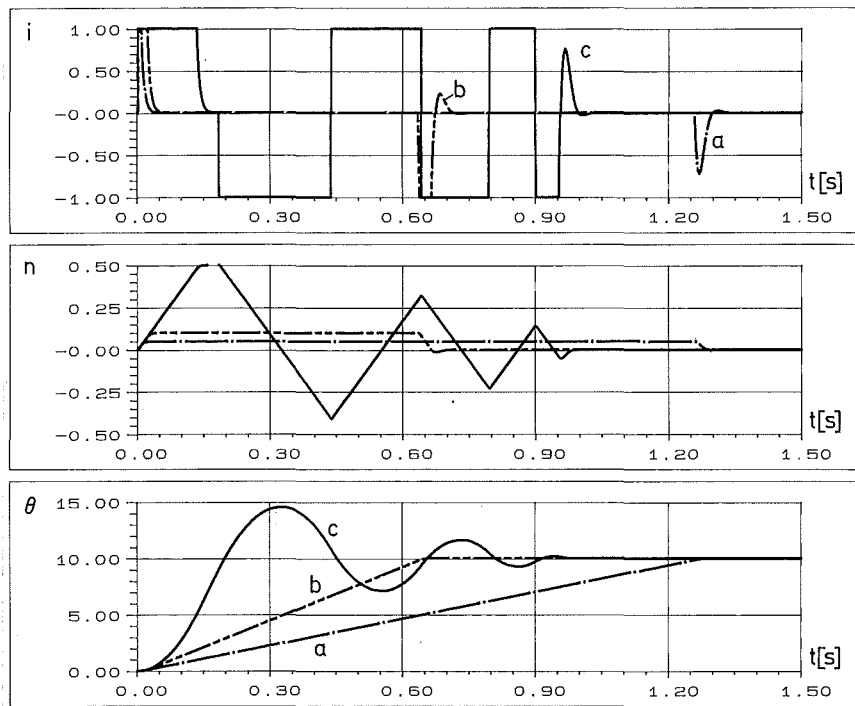
Au § 5.5.11, l'étude théorique de la limitation de vitesse dans le cadre d'un réglage de position sans intégrateur a été présentée. Les simulations numériques correspondantes (fig. 5.16) ont montré un comportement très satisfaisant. Pourtant, les choses ne se passent pas toujours aussi bien. On montrera au § 5.6.2 des exemples d'instabilités dues aux limitations. Les causes de celles-ci seront décrites au § 5.6.3. On déterminera au § 5.6.4 les conditions théoriques pour éviter ces instabilités et la solution envisagée en faisant appel à une caractéristique de limitation variable non linéaire. La variation des pôles en fonction de cette caractéristique est éclairée au § 5.6.5. Enfin, l'application pratique des solutions envisagées, faisant appel aux limitations variables par segments du deuxième chapitre, figureront aux § 5.6.6 et suivants.

### 5.6.2 Influence de $n_{\max}$ sur le comportement global

La réponse au saut de consigne de la fig. 5.16 a été réalisée en imposant une limitation de vitesse fixe très faible ( $n_{\max}=0.03$ ). Ceci a permis d'obtenir un

comportement où le système réglé sort de limitation de vitesse sans pour autant entrer en limitation de courant. Les conditions de sortie de limitation sont donc très satisfaisantes pour obtenir un comportement dynamique hors limitation (tel que souhaité par l'imposition des pôles) en fin de durée du temps de réglage.

La valeur de cette limitation n'est pourtant pas réaliste. Par une augmentation successive de  $n_{\max}$ , nous allons observer les conséquences sur le comportement global du système réglé. Trois cas sont représentés à la fig. 5.17; précisons que tous les autres paramètres ou coefficients sont inchangés.



**Fig. 5.17** Saut de consigne de position, en mode de glissement idéal.

$$\theta_c = 10 ; m_r = 0 ; i_{\max} = 1$$

$$p_{1,2,3} = -80 \pm j80 ; k_i = 1 ; k_n = 44.48 ; k_\theta = k_w \theta = 22.48$$

a)  $n_{\max} = 0.05$  ; dépass. max.  $0.007/10 = 0.7 \text{ ‰}$

b)  $n_{\max} = 0.10$  ; dépass. max.  $0.05/10 = 5 \text{ ‰}$

c)  $n_{\max} = 0.50$  ; dépass. max.  $4.5/10 = 45 \text{ ‰}$  + instabilités

Le système réglé trouve un comportement hors limitation une fois sorti de la limitation de vitesse dans le cas a). Par contre, dans les cas b) et c), le régulateur provoque l'entrée en limitation de courant à la sortie de la limitation de vitesse. Deux phénomènes peuvent alors être observés :

- un dépassement important sur la grandeur à régler (cas c),
- un mouvement oscillatoire de la grandeur à régler ( $\theta$ ) autour de la consigne, dû à des sauts successifs entre limitations inférieure et supérieure du courant (cas c uniquement). Ce phénomène sera appelé par la suite *instabilités dues aux limitations*.

### 5.6.3 Causes des instabilités dues aux limitations

L'explication physique du phénomène provoquant le premier passage en limitation inférieure de courant après la sortie de limitation de vitesse est simple. A la sortie de limitation de vitesse, le couple minimal imposable à la machine est  $i_{\min}$ . Celui-ci est insuffisant pour freiner la machine avant qu'un dépassement ait lieu. On peut aussi exprimer plus clairement le phénomène par trois arguments différents :

- le régulateur ne provoque pas assez tôt la sortie de limitation de vitesse,
- la vitesse maximum est trop élevée ( $n_{\max}$ ),
- le courant minimal,  $i_{\min}$ , est trop petit (en valeur absolue).

Les deux premiers arguments peuvent être développés comme suit. Le système réglé reste en limitation de vitesse tant que

$$|e_n| = |k_{w\theta}\theta_c - k_\theta\theta| = |k_\theta(\theta_c - \theta)| = |k_\theta e| > w_{n\lim}$$

compte tenu de la définition d'une limitation (§ 2.2.2) et de la fig. 5.11. Indépendamment des phénomènes qui suivent, la sortie de limitation de vitesse, exprimée en fonction de l'écart de réglage  $e$  dépend donc du coefficient de contre-réaction de la position  $k_\theta$ , soit des pôles imposés, et de la valeur de limitation  $w_{n\lim}$ . Etant donné qu'on ne veut pas modifier  $i_{\lim}$ , deux possibilités se profilent dès lors pour modifier l'écart de réglage auquel le système sort de limitation de vitesse :

- varier le coefficient  $k_\theta$  en limitation, ou
- varier  $w_{n\lim}$  (soit  $n_{\lim}$ ) en fonction de l'écart de réglage.

La variation du coefficient  $k_\theta$  hors limitation n'est pas possible : le comportement dynamique imposé au système réglé ne doit pas être modifié. Reste donc applicable la deuxième méthode qui a l'avantage d'être facile à mettre en oeuvre. En effet, il est facile de déterminer la vitesse maximale admissible pour permettre un freinage à temps.

### 5.6.4 Caractéristique idéale de limitation de vitesse

On se propose de calculer dans ce paragraphe le comportement dynamique du système à régler, indépendamment des régulateurs utilisés. Le but est de mettre en évidence les conditions sur le couple (courant) et la vitesse qui permettent d'éviter tout dépassement lors d'un freinage idéal.

Par intégration des équations de mouvement du système (5.13) et (5.14), on obtient

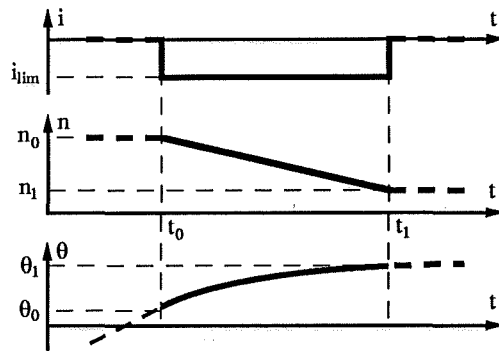
$$n(t) = \frac{1}{T_m} \int_{t_0}^t (\varphi i - m_r) dt + n_0 \quad (5.83)$$

$$\theta(t) = \frac{1}{T_\theta} \int_{t_0}^t n(t) dt + \theta_0 \quad (5.84)$$

En admettant une caractéristique de courant telle que représentée à la figure 5.18 (on néglige le temps d'établissement pour atteindre la limitation de courant), on obtient, à partir de (5.83) et (5.84),  $i=i_{lim}=\text{constante}$  et  $m_r=\text{constante}$ , après quelques calculs :

$$n(t) = \frac{\varphi i_{lim} - m_r}{T_m} (t-t_0) + n_0 \quad (5.85)$$

$$\theta(t) = \frac{\varphi i_{lim} - m_r}{2T_m T_\theta} (t-t_0)^2 + \frac{n_0}{T_\theta} (t-t_0) + \theta_0 \quad (5.86)$$



**Fig. 5.18** Allures idéales du courant, de la vitesse et de la position lors d'un freinage.

Le temps nécessaire pour passer de la vitesse  $n_0$  (en  $t=t_0$ ) à la vitesse  $n_1$  (en  $t=t_1$ ) avec le courant  $i=i_{lim}$  se déduit de (5.85)

$$t_1 - t_0 = (n_1 - n_0) \frac{T_m}{\varphi i_{lim} - m_r} \quad (5.87)$$

alors que la distance parcourue s'obtient de (5.86)

$$\theta_1 - \theta_0 = \frac{n_1^2 - n_0^2}{2T_\theta} \frac{T_m}{\varphi i_{lim} - m_r} \quad (5.88)$$

Il est loisible d'exprimer cette relation dans l'autre sens. La vitesse initiale  $n_0$ , telle que le système atteigne une vitesse finale  $n_1$  après avoir parcouru la distance  $(\theta_1 - \theta_0)$  avec un courant égal à  $i_{lim}$  et un couple résistant  $m_r$ , est donnée par

$$n_0^2 = n_1^2 - \frac{2T_\theta}{T_m} (\varphi i_{lim} - m_r) (\theta_1 - \theta_0) \quad (5.89)$$

Dans le cas où la vitesse finale  $n_1=0$ , on obtient la solution unique selon

$$n_0 = + \sqrt{-\frac{2T_\theta}{T_m} (\varphi_{i_{\min}} - m_r)(\theta_1 - \theta_0)} \quad \text{si } (\theta_1 - \theta_0) > 0 \quad (5.90a)$$

$$n_0 = - \sqrt{-\frac{2T_\theta}{T_m} (\varphi_{i_{\max}} - m_r)(\theta_1 - \theta_0)} \quad \text{si } (\theta_1 - \theta_0) < 0 \quad (5.90b)$$

En remplaçant  $\theta_1$  par la consigne de position et  $\theta_0$  par la position instantanée, on peut exprimer la vitesse limite admissible en fonction de l'écart de réglage  $e$  tel que le système s'arrête lorsque  $e$  s'annule :

$$|n_{\text{lim}}| = \sqrt{\frac{2T_\theta}{T_m} |(\varphi_{i_{\text{lim}}} - m_r)(\theta_1 - \theta_0)|} \quad (5.91)$$

En admettant de plus, par la suite, que la perturbation est un couple résistant uniquement, c'est-à-dire

$$\text{signe}(m_r) = \text{signe}(n) \quad (5.92)$$

on obtient en introduisant  $m_r = 0$  dans (5.91) une relation pour  $n_{\text{lim}}$  qui garantit dans tous les cas un freinage sans dépassement

$$|n_{\text{lim}}| = \sqrt{\frac{2T_\theta}{T_m} |\varphi_{i_{\text{lim}}} e|} \quad \text{où } e = \frac{n_{\text{lim}}^2 T_m}{\varphi_{i_{\text{lim}}} 2T_\theta} \quad (5.93)$$

L'allure de cette caractéristique est représentée à la figure 5.19 pour les quatre quadrants : les limitations inférieure  $n_{\text{min}}$  et supérieure  $n_{\text{max}}$  en fonction de l'écart de réglage  $e$ .

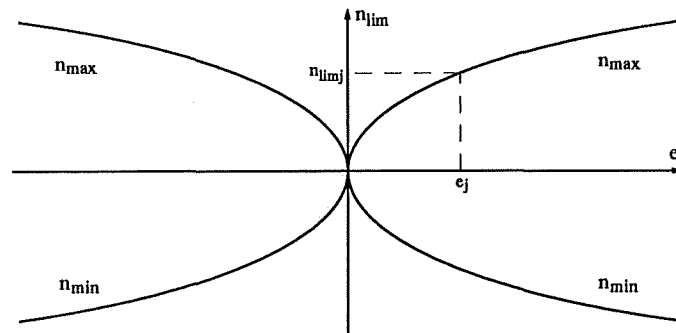


Fig. 5.19 Caractéristique idéale de limitation.

Par la suite, on ne représentera plus que le premier quadrant ( $e > 0$ ,  $n_{\text{max}}$ ), étant entendu la double symétrie de la caractéristique de limitation.

### 5.6.5 Pôles en limitation variable idéale

En fait, la caractéristique idéale (5.93) peut être approchée par un nombre infini de segments de limitation tangents. La linéarisation autour d'un point de fonctionnement  $(e_j, n_{\text{lim}j})$  donne

$$\Delta n_{\text{lim}} = p_{nj} \Delta e \quad (5.94)$$



qui peut être exprimé aussi en fonction de  $e$  selon

$$n_{limj} = c_{nj} + p_{nj}e_j \quad (5.95a)$$

La pente  $p_{nj}$  est définie par

$$p_{nj} = \left. \frac{dn_{limj}}{de} \right|_{e=e_j} = \left. \frac{n_{limj}}{2e} \right|_{e=e_j} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2T_\theta}{T_m} \phi_{lim} \frac{1}{e_j}} \quad (5.95b)$$

et la constante par

$$c_{nj} = n_{limj} - p_{nj}e_j = \left. \frac{n_{limj}}{2} \right|_{e=e_j} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2T_\theta}{T_m} \phi_{lim} e_j} \quad (5.95c)$$

Pour chaque point de fonctionnement linéarisé, il est loisible de définir les pôles en limitation variable selon (5.95) grâce aux équations (5.80). Pour le dimensionnement selon le § 5.5.6, on a représenté la variation des pôles en limitation de vitesse en fonction de l'écart de réglage (fig. 5.20).

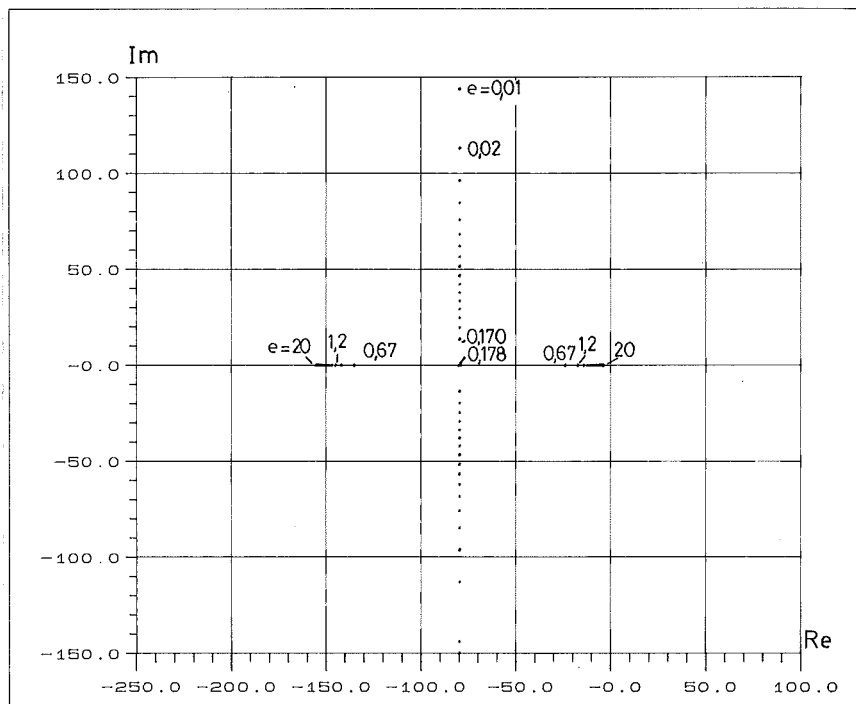


Fig. 5.20 Pôles  $p_{2,3nlim}$  en limitation variable de vitesse idéale.

$$i_{max}=1 ; p_{1nlim}=0$$

$$p_1=0 ; p_{2,3}=-80 \pm j80 ; k_i=1 ; k_n=44.48 ; k_\theta=k_{w\theta}=22.48$$

Indépendamment de l'écart de réglage  $e$ , le pôle  $p_{1nlim}$  est toujours à l'origine. Il traduit le fait que le système est en mode de glissement.

On constate que pour tout écart de réglage, la somme des pôles en limitation est égale à celle hors limitation, soit  $-160$  dans ce cas particulier. De  $e=0.18$  à  $e \rightarrow \infty$ , les pôles  $p_{2,3nlim}$  sont réels. Pour le cas limite  $e=\infty$ ,  $p_{2nlim}=0$ , alors que  $p_{3nlim}=-160=2 \cdot \text{Re}\{p_{2,3}\}$ . Pour un écart de réglage inférieur à  $0.18$ , les pôles

deviennent complexes conjugués, avec  $\text{Re}\{p_{2,3n\text{lim}}\} = -80$  et  $|\text{Im}\{p_{2,3n\text{lim}}\}| \rightarrow \infty$  pour  $e \rightarrow 0$ .

### 5.6.6 Application de la limitation variable de vitesse par segments

Les développements précédents (§ 5.6.4) ont permis de calculer une caractéristique idéale de limitation pour le cas où  $m_r = 0$  et le courant  $i_{\text{lim}}$  peut être imposé instantanément. La relation étant non linéaire, on cherche une approximation par segments linéaires de la caractéristique idéale. C'est de cette manière qu'on a abouti à la définition des limitations variables selon (2.23) au § 2.4.2. La figure 2.3 est donc à comparer avec la figure 5.19. Le nombre de segments de limitations, ainsi que les paramètres  $c_{nj}$  et  $p_{nj}$  seront choisis selon différents critères. Si le nombre de segments tend vers l'infini, ces valeurs sont données par (5.95). On a représenté à la figure 5.21 plusieurs choix possibles à titre d'exemple. Ils seront discutés ultérieurement.

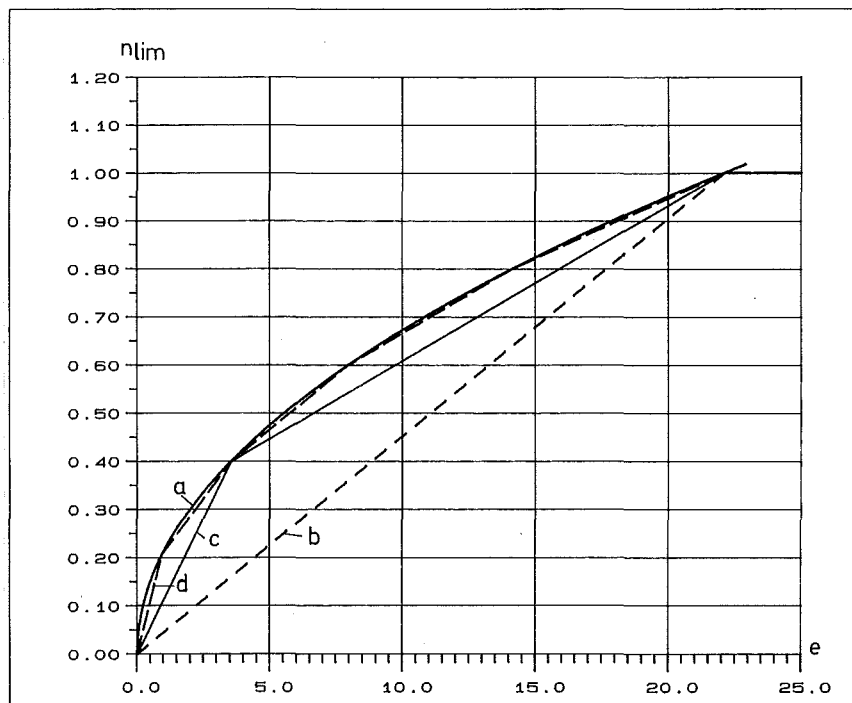


Fig. 5.21 Caractéristique de limitation.

$$i_{\text{max}} = 1 ; n_{\text{max}} = 1$$

a) idéale; b) deux, c) trois, d) six segments.

Quelques valeurs de  $(e, n_{\text{lim}})$  se trouvant sur la caractéristique idéale de limitation [voir (5.93)] sont reportées dans le tableau de la figure 5.22. Elle seront utiles pour la définition finale des segments de limitation.

### 5.6.7 Equations de mouvement pour un segment linéaire

L'imposition d'un courant constant conduit à une évolution de la vitesse telle que déterminée au § 5.6.4 et représentée à la fig. 5.19. L'application de la limitation variable de la vitesse se fait pourtant par segments linéaires (en fonction de  $e$ ) (voir § 5.6.6). On se propose ici de calculer le courant  $i$  théorique qui

permet à la vitesse  $n$  de suivre la caractéristique du segment de limitation imposée (5.73) :

$$n = n_{lim} = c_{nj} + p_{nj}e \quad (5.96)$$

On suppose qu'en  $t=t_0$ , on a  $\theta=\theta_0$  et  $n=n_0$  tel que

$$n_0 = c_{nj} + p_{nj}(\theta_c - \theta_0) \quad (5.97)$$

De l'équation (5.14), et avec (5.96), on obtient par redistribution des termes

$$\frac{d\theta}{c_{nj} + p_{nj}(\theta_c - \theta)} = \frac{dt}{T_\theta} \quad (5.98)$$

puis par intégration de  $t_0$  à  $t$

$$-\frac{1}{p_{nj}} \ln\left(\frac{c_{nj} + p_{nj}(\theta_c - \theta)}{c_{nj} + p_{nj}(\theta_c - \theta_0)}\right) = -\frac{1}{p_{nj}} \ln\left(\frac{n}{n_0}\right) = \frac{t-t_0}{T_\theta} \quad (5.99)$$

d'où l'évolution temporelle de la vitesse

$$n = n_0 e^{-p_{nj}(t-t_0)/T_\theta} \quad (5.100)$$

Par dérivation de (5.100) et comparaison avec (5.13), on aboutit à

$$\phi_i - m_r = -p_{nj} \frac{T_m}{T_\theta} n_0 e^{-p_{nj}(t-t_0)/T_\theta} \quad (5.101)$$

Idéalement, l'allure du courant est donc exponentielle et décroissante.

### 5.6.8 Choix des segments de limitation variable

Compte tenu de la caractéristique idéale de limitation (§ 5.6.4), de l'application linéarisée par segments (§ 5.6.5) et de l'allure du courant sur ces segments (§ 5.6.7), on choisira ces segments linéaires de limitation tels qu'ils se situent en-dessous de la caractéristique idéale. Les différentes caractéristiques proposées à la figure 5.21 seront donc déplacées soit vers le bas, soit vers la droite.

Compte tenu des retards introduits par les régulateurs et de la vitesse de variation réelle finie du courant, on garantit ainsi que la vitesse réelle se trouve en deçà de la caractéristique idéale. Bien sûr, compte tenu de l'allure du courant sur un segment linéaire (§ 5.6.7), le courant sera tantôt hors limitation ( $i_l < i_{lim}$ ) et tantôt en limitation (lors des changements de segment de limitation).

Ce phénomène sera appelé par la suite *sorties transitoires de la limitation de courant dues aux limitations variables de vitesse*. En fait, plus on approche finement l'allure en  $\sqrt{i_{lim}}$  de la limitation, et moins le courant sera ondulé.

Dans la pratique, on se fixe une marge d'environ 10 % sur le courant. Ainsi, les limites supérieures pour fixer les segments de limitation de vitesse se

trouvent à  $\sim 95\%$  de la valeur idéale. Les segments sont caractérisés par des paires de valeurs  $(e_j, n_{\max j})$  choisies d'après les valeurs du § 5.6.6.

Pour un fonctionnement correct dans le cas où le couple résistant n'est pas nul, il faut assurer une plage de fonctionnement hors limitation de vitesse. En effet, en écrivant la relation (5.74) en régime établi, et en tenant compte de la valeur du courant en régime établi (5.61a) {d'ailleurs aussi valable pour le cas du réglage de position avec intégrateur (sect. 5.7)}, on obtient

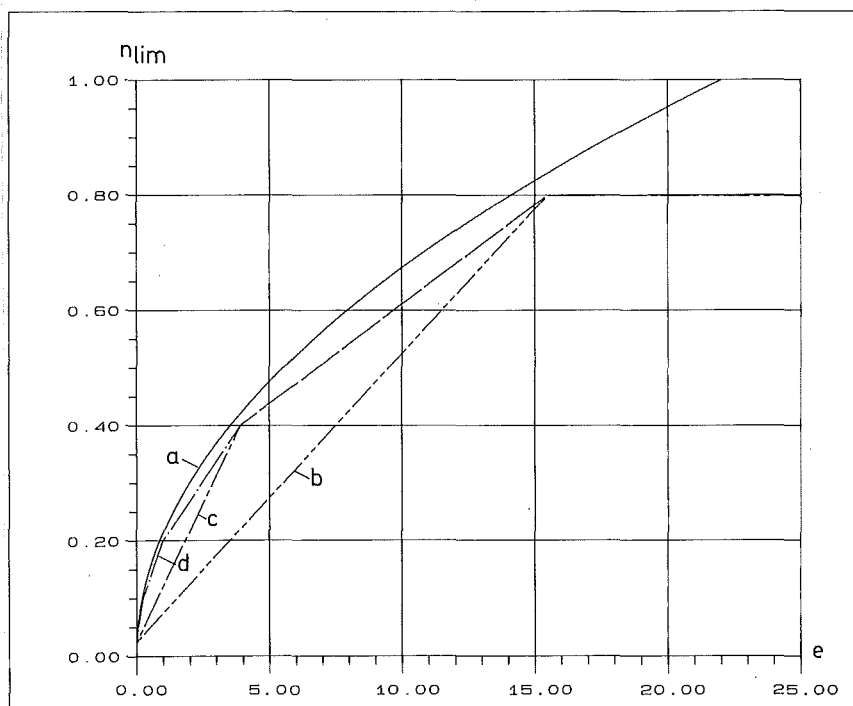
$$s(x) = w_n - k_n n - k_i i = w_n - k_i i^s = w_n - k_i m_r / \varphi = 0$$

d'où  $w_n = k_i m_r / \varphi$ .

En combinant (5.73a), (5.73b) et (5.95a), on trouve que la sortie du limiteur de vitesse doit être au moins à

$$n_{\text{lim min}} = \frac{k_i m_r \max}{k_n \varphi}$$

Cette condition garantit aussi dans le cas du réglage de position avec intégrateur (sect. 5.7) un écart de réglage nul en régime établi.



**Fig. 5.22** Différents choix de segments de limitation.

$$i_{\max}=1 ; n_{\max}=0.8 ; m_{r\max}=1 ; k_i=1 ; k_n=40$$

a) idéale ; b) deux, c) trois, d) six segments selon le tableau ci-après :

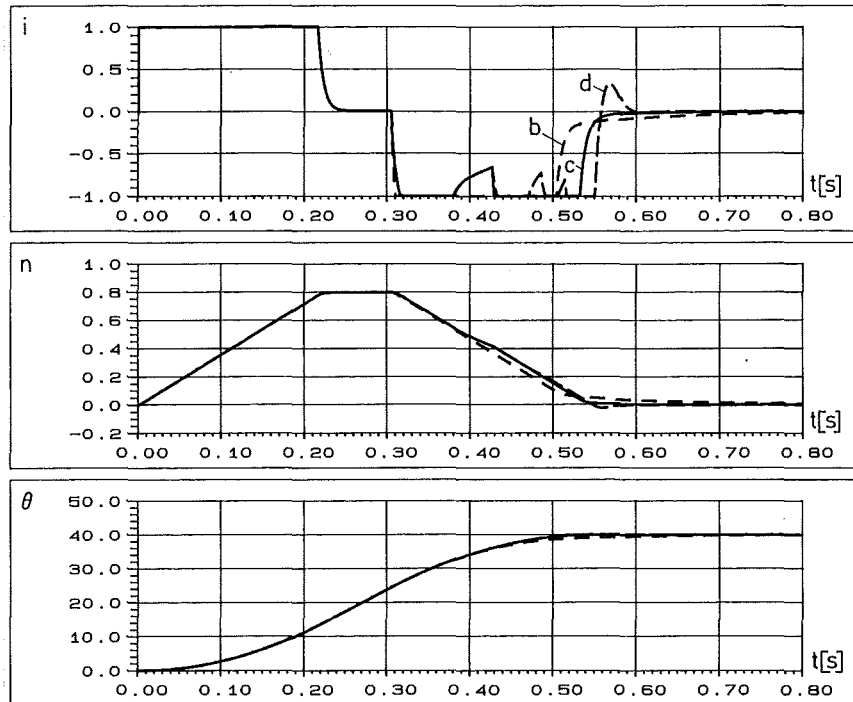
$n_{lim}(e)$	e	$e_{nj}$	$e_{nj}$		
	idéale	décalé	2 seg.	3 seg.	6 seg.
1.0	22.01	24.2			
0.9	17.83	19.6			
0.8	14.08	15.5	15.5	15.5	15.5
0.7	10.78	11.9			
0.6	7.923	8.7			
0.5	5.502	6.1			
0.4	3.521	3.9		3.9	3.9
0.3	1.981	2.2			
0.2	0.880	1.0			1.0
0.1	0.220	0.24			0.24
0.05	0.055	0.061			0.061
0 ( $k_i/k_n=0.025$ )	0	0	0	0	0

A la figure 5.22, on a représenté différents choix de limitations variables pour une vitesse maximale de 0.8 p.u. Une valeur plus grande (proche de la vitesse nominale) ne permettrait plus de garantir une réserve de tension suffisante, puisque  $u_{lim}=1$ .

Rappelons qu'en appliquant la caractéristique de limitation idéale, on pourrait atteindre les performances idéales : le freinage de la machine serait provoqué à l'ultime instant par une entrée en limitation de courant, active jusqu'au moment où l'écart de réglage est nul. Par contre, avec une approche par segments selon la fig. 5.22, on va provoquer le freinage un peu plus tôt : il est nécessaire à cause des petits retards. Cette différence de temps n'est cependant pas importante face au temps de réglage global.

### 5.6.9 Saut de consigne avec limitations variables

Dans ce paragraphe, on va montrer l'influence directe des limitations variables sur la qualité de réglage. Le cas d'une limitation fixe de vitesse à  $n_{max}=0.8$  p.u. n'est pas représenté, car il n'apporte rien de plus que dans le cas de  $n_{max}=0.5$  p.u. (fig. 5.17). Le comportement est aussi instable à cause des limitations. Pour les courbes b, c et d, on a imposé les caractéristiques de limitation respectives de la figure 5.22.



**Fig. 5.23** Saut de consigne de position, en mode de glissement idéal.

$$\theta_c = 40 ; i_{\max} = 1 ; n_{\max} = 0.8$$

$$p_1 = 0 ; p_{2,3} = -80 \pm j80 ; k_i = 1 ; k_n = 44.48 ; k_\theta = k_{w\theta} = 22.48$$

b) deux, c) trois, d) six segments selon la fig. 5.22.

Comme on l'attendait, les instabilités dues aux limitations ont disparu. La limitation variable provoque suffisamment tôt le freinage de la machine. Le dépassement est (quasiment) nul. L'évolution globale est performante, puisque le courant est pratiquement toujours en limitation.

Selon le nombre de segments de limitation choisi, de petites différences se présentent principalement sur le courant et la vitesse. En fait, plus le nombre de segments de limitation est élevé et plus le phénomène final est rapide. Cela provient du fait que les pentes des segments sont de plus en plus fortes plus on se rapproche de  $e=0$ . Les pôles respectifs deviennent aussi plus rapides (voir fig. 5.20, ou tableau du § 5.6.10).

Un segment de limitation "raide" est favorable à un phénomène final rapide (cas d). L'allure générale de la position ne varie guère.

### 5.6.10 Pôles en limitation variable de vitesse

Le comportement représenté à la figure 5.23 montre que le fait d'imposer des limitations variables de vitesse par segments provoque une entrée en limitation de courant. Dans ce cas, les pôles du système réglé sont donnés par (5.71). Pourtant, ces pôles ne sont pas représentatifs du comportement global (dans le temps) du système en limitation variable de vitesse. De ce fait, il est acceptable d'admettre les pôles de la limitation de vitesse selon (5.80), même si le courant entre (momentanément) en limitation. Cette approximation sera d'autant plus

correcte que la caractéristique idéale de limitation sera bien approchée par les segments. Dans le cas d) de la figure 5.23 (6 segments), on calcule les pôles suivants :

$n_{lim}(e)$	e		$e_{nj}$	
	idéale	6 seg.	P2,3nlim	
1.0	22.01		0 , -160	
0.9	17.83			
0.8	14.08	15.5		
0.7	10.78			
0.6	7.923			
0.5	5.502			
0.4	3.521	3.9	-5.7 , -154.3	
0.3	1.981			
0.2	0.880	1.0	-11.8 , -148.2	
0.1	0.220	0.24		
0.05	0.055	0.061	-80±j·25.99	
0.025	0	0		
			-80±j·63.09	

Comparés à la figure 5.20, on voit que les pôles varient en fonction de e de manière semblable au cas idéal.

## 5.7 RÉGLAGE DE POSITION AVEC INTÉGRATEUR

### 5.7.1 Introduction

Cette section est consacrée au réglage de position avec une structure de réglage comprenant un régulateur intégrateur. Celui-ci permet la suppression de l'erreur statique due à la perturbation. Cette structure étant celle rencontrée le plus souvent dans la pratique, elle sera étudiée et composée plus en détail que la structure sans régulateur intégrateur de la section 5.5. L'étude des limitations de vitesse de la section 5.6 reste valable.

Après l'étude en mode de glissement (§ 5.7.2 à 5.7.6), on appliquera la réduction d'ordre du système réglé en mode de glissement proposée au chapitre 4 pour le cas d'un réglage continu (§ 5.7.7) et échantillonné (§ 5.7.8). Les choix de dimensionnement du coefficient d'intervention directe de la consigne sont résumés au § 5.7.9.

Contrairement au cas sans régulateur intégrateur (section 5.5), le but n'est pas d'étudier spécifiquement que le réglage par mode de glissement. Ainsi, les § 5.7.10 à 5.7.13 seront consacrés à la comparaison des différentes approches des systèmes réglés continus et échantillonnés. Les résultats des essais pratiques seront insérés à partir du § 5.7.14 pour les cas hors et en limitation.

Les développements théoriques généraux des chapitres 1 et 2 ont été effectués de manière à séparer clairement équations du système et régulateur intégrateur. On peut en mesurer les retombées avantageuses directes dans cette section. Il n'est pas nécessaire de refaire tous les calculs : les résultats obtenus à

la section 5.5 (cas sans intégrateur) peuvent être repris en grande partie et complétés.

### 5.7.2 Modélisation et structure de réglage

La structure de réglage par mode de glissement avec régulateur intégrateur est représentée à la figure 5.24. Aux équations du système (5.47) à (5.49) s'ajoute celle de la grandeur d'état du régulateur intégrateur

$$\dot{x}_R = \frac{1}{T_i} e = \frac{1}{T_i} (w - c^T x) = \frac{1}{T_i} (\theta_c - \theta) \quad (5.102)$$

Le système global est alors décrit par les équations matricielles (1.10) :

$$\dot{x} = Ax + bu + b_v m_r + b_w \theta_c \quad (5.103)$$

$$y = \theta = c^T x \quad (5.104)$$

avec

$$x = \begin{bmatrix} i \\ n \\ \theta \\ x_R \end{bmatrix}; \quad A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{T_a} & -\frac{\varphi}{r_a T_a} & 0 & 0 \\ \frac{\varphi}{T_m} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{T_\theta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{T_i} & 0 \end{bmatrix} \quad (5.105a)$$

$$b = \begin{bmatrix} \frac{1}{r_a T_a} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad b_v = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{T_m} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad b_w = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{T_i} \end{bmatrix}; \quad c^T = [0 \ 0 \ 1 \ 0] \quad (5.105b)$$

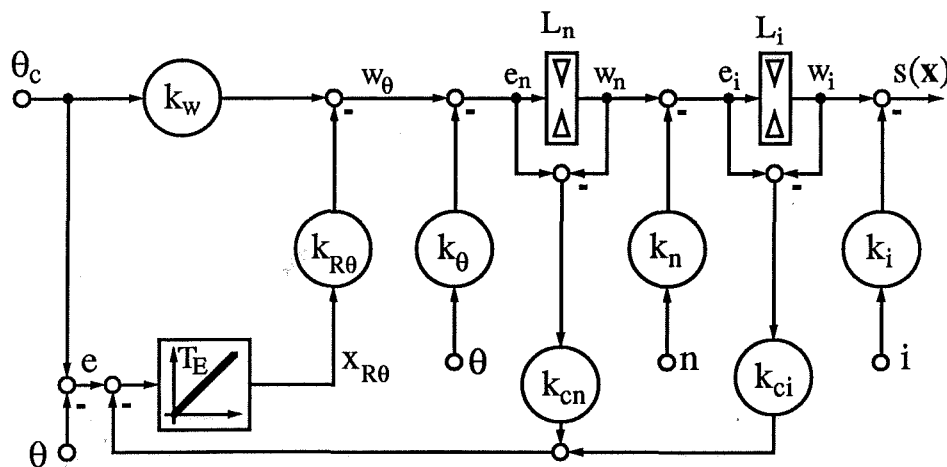


Fig. 5.24 Structure de réglage de position avec intégrateur.



### 5.7.3 Mode de glissement hors limitation

Avec le vecteur-ligne de contre-réaction selon (1.7) et (5.53)

$$\mathbf{k}^T = [ \mathbf{k}_s^T \ -k_R ] = [ k_i \ k_n \ k_\theta \ -k_R ] \quad (5.106)$$

la loi de commutation est

$$s(\mathbf{x}) = -\mathbf{k}^T \mathbf{x} + k_w \theta_c \quad (5.107)$$

La grandeur de commande équivalente selon (1.15a) et (5.55) est

$$u_{eq} = u_{eqs} + \frac{k_R}{\mathbf{k}_s^T \mathbf{b}_s} \dot{\mathbf{x}}_R = \left( r_a - \frac{k_n r_a T_a \varphi}{k_i T_m} \right) i + \left( \varphi - \frac{k_\theta r_a T_a}{k_i T_\theta} \right) n + \frac{k_n r_a T_a}{k_i T_m} m_r + \frac{k_w \theta r_a T_a}{k_i} \dot{\theta}_c + \frac{k_R r_a T_a}{k_i T_i} (\theta_c - \theta) \quad (5.108)$$

L'équation en mode de glissement est exprimée, selon (1.17), par

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^* \mathbf{x} + \mathbf{b}_v^* m_r + \mathbf{b}_w^* \theta_c + \mathbf{b}_\omega^* \dot{\theta}_c \quad (5.109)$$

avec, selon (1.19) et (5.57)

$$\mathbf{A}^* = \begin{bmatrix} -\frac{k_n \varphi}{k_i T_m} & -\frac{k_\theta}{k_i T_\theta} & -\frac{k_R}{k_i T_i} & 0 \\ \frac{\varphi}{T_m} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{T_\theta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{T_i} & 0 \end{bmatrix} \quad (5.110a)$$

$$\mathbf{b}_v^* = \begin{bmatrix} \frac{k_n}{k_i T_m} \\ -\frac{1}{T_m} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{b}_w^* = \begin{bmatrix} \frac{k_R}{k_i T_i} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{T_i} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{b}_\omega^* = \begin{bmatrix} \frac{k_w \theta}{k_i} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.110b)$$

### 5.7.4 Pôles en mode de glissement et dimensionnement des coefficients

L'équation caractéristique du système en mode de glissement est, avec (5.110a)

$$P^*(s) = \det(s\mathbf{1} - \mathbf{A}^*) = s \left( s^3 + s^2 \frac{k_n \varphi}{k_i T_m} + s \frac{k_\theta \varphi}{k_i T_m T_\theta} + \frac{k_R \varphi}{k_i T_i T_m T_\theta} \right) = s^4 + \alpha_3 s^3 + \alpha_2 s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0 =$$

$$= (s-p_1)(s-p_2)(s-p_3)(s-p_4) \quad (5.111)$$

ce qui permet de tirer les relations

$$\alpha_0 = p_1 = 0 \quad (5.112a)$$

$$\alpha_1 = -p_2 p_3 p_4 = \frac{k_R \varphi}{k_i T_i T_m T_\theta} \quad (5.112b)$$

$$\alpha_2 = p_2 p_3 + p_2 p_4 + p_3 p_4 = \frac{k_\theta \varphi}{k_i T_m T_\theta} \quad (5.112c)$$

$$\alpha_3 = -(p_2 + p_3 + p_4) = \frac{k_n \varphi}{k_i T_m} \quad (5.112d)$$

soit

$$k_i = c r_a T_a = 1 \quad (5.113a)$$

$$k_n = c r_a T_a \frac{T_m}{\varphi} \alpha_3 = k_i \frac{T_m}{\varphi} \alpha_3 \quad (5.113b)$$

$$k_\theta = c r_a T_a \frac{T_m T_\theta}{\varphi} \alpha_2 = k_i \frac{T_m T_\theta}{\varphi} \alpha_2 \quad (5.113c)$$

$$\frac{k_R}{T_i} = -c r_a T_a \frac{T_m T_\theta}{\varphi} \alpha_1 = -k_i \frac{T_m T_\theta}{\varphi} \alpha_1 \quad (5.113d)$$

où, selon (1.38)

$$c = \frac{1}{r_a T_a} \quad (5.113e)$$

### 5.7.5 Régime stationnaire

Le régime stationnaire est obtenu pour  $\dot{\mathbf{x}}=0$  et  $s(\mathbf{x})=0$ . Avec (1.47) :

$$i^s = \frac{m_r}{\varphi} \quad (5.114a)$$

$$n^s = 0 \quad (5.114b)$$

$$\theta^s = \theta_c \quad (5.114c)$$

$$x_R^s = \frac{k_i}{k_R} i^s + \frac{k_\theta - k_w \theta}{k_R} \theta_c \quad (5.114d)$$

$$u_{eq}^s = u_{eqs}^s = r_a i^s \quad (5.114e)$$

### 5.7.6 Fonctions de transfert en mode de glissement

Il est loisible de définir une fonction de transfert pour le système réglé en mode de glissement. Elle est définie sur l'hyperplan de commutation uniquement et ne tient donc pas compte du phénomène initial hors mode de glissement.

A partir de (1.28) (cas avec intégrateur), on trouve après quelques calculs

$$G_w^* = \frac{s}{\det(s\mathbf{1}-\mathbf{A}^*)} \cdot \frac{\varphi}{T_m T_\theta} \cdot \frac{k_R}{k_i T_i} \quad (5.115a)$$

Le zéro à l'origine compense le pôle à l'origine dû à l'hyperplan de commutation. Cette fonction de transfert ne présente donc pas de zéro, et ne dépend pas du coefficient d'intervention directe de la consigne  $k_w\theta$ .

La fonction de transfert pour le comportement global est donnée par (1.29) :

$$G_w = \frac{s}{\det(s\mathbf{1}-\mathbf{A}^*)} \cdot \frac{k_w\theta\varphi}{k_i T_m T_\theta} \cdot \left( s + \frac{k_R}{k_w\theta T_i} \right) \quad (5.115b)$$

Elle comporte un zéro en  $n_0 = -k_R/T_i k_w\theta$ .

### 5.7.7 Système réglé en mode de glissement - réglage d'état continu

Lorsque le système réglé est en mode de glissement selon (5.109), on a entre autres :

$$w_1 = k_i i \quad (5.116)$$

En tenant compte des développements de la section 4.3, on voit que le système réglé peut être décomposé en deux sous-systèmes dont l'un est réduit à un simple facteur de passage selon (5.116).

On peut alors définir un nouveau système S, d'ordre  $n_s$  (différent de  $n_s$  utilisé précédemment), qui lui est réglé par une structure de réglage d'état (§ 4.4.2). Les grandeurs d'état du système sont la vitesse  $n$  et la position  $\theta$ , dont les équations différentielles sont données par (5.48) et (5.49). Le courant  $i$  est, à un facteur près, la commande de ce système.

En appliquant les modifications de notation du § 4.5.3, on peut alors écrire

$$\dot{\mathbf{x}}_s = \mathbf{A}_s \mathbf{x}_s + \mathbf{b}_s u + \mathbf{b}_{sv} m_r \quad (5.117)$$

$$y = \theta = \mathbf{c}_s^T \mathbf{x}_s \quad (5.118)$$

avec

$$\mathbf{x}_s = \begin{bmatrix} n \\ \theta \end{bmatrix}; \quad \mathbf{A}_s = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{T_\theta} & 0 \end{bmatrix}; \quad u = w_1 = k_i i \quad (5.119a)$$

$$\mathbf{b}_s = \begin{bmatrix} \frac{\phi}{k_i T_m} \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{b}_{sv} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{T_m} \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{c}_s^T = [0 \quad 1] \quad (5.119b)$$

Remarquons que la grandeur de commande de ce système est  $u=w_1=k_i i$ . Cette notation permet d'obtenir une correspondance entre les coefficients  $k_n$ ,  $k_\theta$ ,  $k_R$  et  $k_{w\theta}$  du réglage par mode de glissement et ceux du réglage d'état.

Compte tenu de l'intégrateur, du vecteur-ligne de contre-réaction d'état

$$\mathbf{k}^T = [ \mathbf{k}_s^T \quad -k_R ] = [ k_n \quad k_\theta \quad -k_R ], \quad (5.120)$$

de la commande

$$u = w_1 = -\mathbf{k}^T \mathbf{x} + k_{w\theta} \theta_c \quad (5.121)$$

et des équations (4.24), (4.25) et (5.119), on obtient après quelques menus calculs l'équation en boucle fermée

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_G \mathbf{x} + \mathbf{b}_{Gv} m_r + \mathbf{b}_{Gw} \theta_c \quad (5.122)$$

avec

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} n \\ \theta \\ x_R \end{bmatrix}; \quad \mathbf{A}_G = \mathbf{A} - \mathbf{b} \mathbf{k}^T = \begin{bmatrix} -\frac{k_n \phi}{k_i T_m} & -\frac{k_\theta \phi}{k_i T_m} & \frac{k_R \phi}{k_i T_m} \\ \frac{1}{T_\theta} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{T_i} & 0 \end{bmatrix} \quad (5.123a)$$

$$\mathbf{b}_{Gv} = \mathbf{b}_v = \begin{bmatrix} -\frac{1}{T_m} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{b}_{Gw} = \mathbf{b}_w + \mathbf{b} k_w = \begin{bmatrix} \frac{k_{w\theta} \phi}{k_i T_m} \\ 0 \\ \frac{1}{T_i} \end{bmatrix} \quad (5.123b)$$

La fonction de transfert par rapport à la consigne est, selon (4.26) et (5.123) :

$$G_w(s) = \frac{1}{\det(s\mathbf{1} - \mathbf{A}_G)} \cdot \frac{k_{w\theta} \phi}{k_i T_m T_\theta} \cdot \left( s + \frac{k_R}{k_{w\theta} T_i} \right) \quad (5.124)$$

Elle possède bien un zéro en  $n_0 = -k_R/k_{w\theta} T_i$  (voir § 4.5.4).

L'équation caractéristique en boucle fermée est la même que celle en mode de glissement (5.111), à l'exception du pôle à l'origine :

$$\begin{aligned}
 P_G(s) &= \det (s\mathbf{1}-\mathbf{A}_G) = \frac{1}{s} \det (s\mathbf{1}-\mathbf{A}^*) = \\
 &= s^3 + s^2 \frac{k_n \varphi}{k_i T_m} + s \frac{k_\theta \varphi}{k_i T_m T_\theta} + \frac{k_R \varphi}{k_i T_i T_m T_\theta}
 \end{aligned} \quad (5.125)$$

La fonction de transfert (5.124) est donc bien identique à (1.115b).

### 5.7.8 Système réglé en mode de glissement - réglage d'état échantillonné

On a vu au § 4.4.3 qu'un système réglé par une structure de réglage par mode de glissement hybride peut, lorsque le point de fonctionnement se situe dans l'hyperplan de commutation, être interprété comme un sous-système réglé par une structure de réglage d'état digital.

Le sous-système, désigné désormais par  $S$  (d'ordre  $n_s$ ), est défini en continu par les équations (5.117) et (5.118). Par un passage continu-échantillonné, on définit les équations aux différences du système échantillonné :

$$\mathbf{x}_s[k+1] = \mathbf{F}_s \mathbf{x}_s[k] + \mathbf{h}_s u[k] + \mathbf{h}_{sv} m_r[k] \quad (5.126)$$

$$y[k] = \theta[k] = \mathbf{c}_s^T \mathbf{x}_s[k] \quad (5.127)$$

avec

$$\mathbf{F}_s = \Phi_s(T_E) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{T_E}{T_\theta} & 1 \end{bmatrix} \quad \circ \longrightarrow \bullet \quad \Phi_s(s) = (s\mathbf{1}-\mathbf{A}_s)^{-1} = \begin{bmatrix} 1/s & 0 \\ 1/s^2 T_\theta & 1/s \end{bmatrix} \quad (5.128a)$$

$$\Psi_s = \int_0^{T_E} \Phi_s(\tau) d\tau = \begin{bmatrix} T_E & 0 \\ \frac{T_E^2}{2T_\theta} & T_E \end{bmatrix} \quad (5.128b)$$

$$\mathbf{h}_s = \Psi_s \mathbf{b}_s = \begin{bmatrix} \frac{T_E \varphi}{k_i T_m} \\ \frac{T_E^2 \varphi}{2T_\theta k_i T_m} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{h}_{sv} = \Psi_s \mathbf{b}_{sv} = \begin{bmatrix} -\frac{T_E}{T_m} \\ -\frac{T_E^2}{2T_\theta T_m} \end{bmatrix} \quad (5.128c)$$

Compte tenu de l'intégrateur (4.39), du vecteur-ligne de contre-réaction d'état

$$\mathbf{k}^T = [\mathbf{k}_s^T \quad -k_R] = [k_n \quad k_\theta \quad -k_R], \quad (5.129)$$

de la commande

$$u[k] = w_1[k] = -\mathbf{k}^T \mathbf{x}[k] + k_w \theta_c[k] \quad (5.130)$$

et des équations (4.44), (4.45) et (5.130), on obtient après quelques menus calculs l'équation en boucle fermée

$$\mathbf{x}[k+1] = \mathbf{F}_G \mathbf{x}[k] + \mathbf{h}_{Gv} m_r[k] + \mathbf{h}_{Gw} \theta_c[k] \quad (5.131)$$

avec

$$\mathbf{F}_G = \mathbf{F} - \mathbf{h}\mathbf{k}^T = \begin{bmatrix} 1 - \frac{T_E k_n \varphi}{k_i T_m} & -\frac{T_E k_{\theta} \varphi}{k_i T_m} & \frac{T_E k_R \varphi}{k_i T_m} \\ \frac{T_E}{T_{\theta}} - \frac{T_E^2 \varphi k_n}{2T_{\theta} k_i T_m} & 1 - \frac{T_E^2 \varphi k_{\theta}}{2T_{\theta} k_i T_m} & \frac{T_E^2 \varphi k_R}{2T_{\theta} k_i T_m} \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.132a)$$

$$\mathbf{h}_{Gv} = \mathbf{h}_v = \begin{bmatrix} -\frac{T_E}{T_m} \\ -\frac{T_E^2}{2T_{\theta} T_m} \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{h}_{Gw} = \mathbf{h}_w + \mathbf{h}\mathbf{k}_w = \begin{bmatrix} \frac{T_E \varphi k_w}{k_i T_m} \\ \frac{T_E^2 \varphi k_w}{2T_{\theta} k_i T_m} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (5.132b)$$

L'équation caractéristique en  $z$  est donnée par

$$P_G(z) = \det(z\mathbf{1} - \mathbf{F}_G) = (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3) \quad (5.133)$$

Analytiquement il est quasiment impossible de déterminer les pôles en  $z$  de  $\mathbf{F}_G$ . Il est nécessaire de passer par un programme ordinateur.

### 5.7.9 Détermination de $k_{w\theta}$

Dans le cas où  $k_{w\theta}$  est déterminé pour annuler  $x_R$  en régime établi et à perturbation nulle (voir § 1.4.6.2), on obtient d'après (5.115d)

$$k_{w\theta} = k_{w\theta(x_R)} = k_{\theta} \quad (5.134)$$

Par contre, comme on l'a vu au § 1.4.6.3, il n'est pas possible d'utiliser les équations en mode de glissement pour déterminer  $k_{w\theta}$  par exemple pour compenser un pôle. En effet, dans la fonction de transfert en mode de glissement selon le § 1.3.4,  $k_{w\theta}$  n'intervient pas. Cependant, compte tenu des développements du chapitre 4, il est loisible de définir quand même une fonction de transfert du phénomène global (§ 4.4.5), ce qui a été fait au § 5.7.7 pour le cas continu (5.124).

Le coefficient  $k_{w\theta}$  peut être choisi pour compenser un pôle réel continu  $p_i$  :

$$k_{w\theta} = k_{w\theta(p_i)} = -\frac{k_R}{p_i T_i} \quad (5.135)$$

Dans le cas où  $k_{w\theta}$  est dimensionné pour compenser un pôle échantillonné réel  $z_i$ , on obtient [5] :

$$k_{w\theta} = k_{w\theta(z_i)} = \frac{k_R}{1 - z_i} \quad (5.136)$$

Il est connu que ce choix est plus favorable quant à l'allure de la réponse indicielle. Un dépassement de 4.3% est garanti pour un choix de pôles alignés.

### 5.7.10 Comparaisons réglage par mode de glissement continu - réglage d'état continu

#### 5.7.10.1 Introduction

On se propose de comparer dans ce paragraphe le réglage de position avec intégrateur pour les cas du réglage par mode de glissement continu du système (§ 5.7.3) et du réglage d'état continu du sous-système (§ 5.7.7).

#### 5.7.10.2 Application numérique

L'exemple choisi est dimensionné selon les relations (en mode de glissement) du § 5.7.4. En constatant que la trace de  $\mathbf{A}^*$  (5.110) est la même que dans le cas du réglage sans intégrateur (5.27), on obtient le même coefficient de contre-réaction  $k_n$  si on choisit les pôles tels que leurs sommes soient égales (§ 5.4.6).

On impose trois pôles alignés à parties réelles et imaginaires égales selon la fig. 5.25. Bien sûr, un pôle est à l'origine.

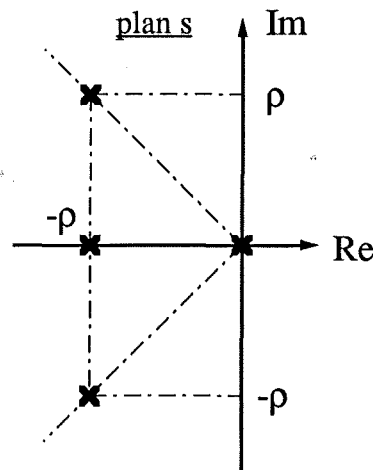


Fig. 5.25 Imposition optimale des pôles.

Cette configuration est optimale [5]. On obtient avec (5.112) et (5.113) :

$$\rho = 160/3 = 53.\bar{3}$$

$$k_n = k_i \frac{T_m}{\varphi} 3\rho = 44.48$$

$$k_\theta = k_i \frac{T_m T_\theta}{\varphi} 4\rho^2 = 19.98$$

$$\frac{k_R}{T_i} = k_i \frac{T_m T_\theta}{\varphi} 2\rho^3 = 532.74$$

Le coefficient d'intervention directe de la consigne, selon qu'il est dimensionné pour annuler  $x_R$  en régime établi (5.134), ou pour compenser le pôle réel  $p_i = -\rho$  (5.135) vaut

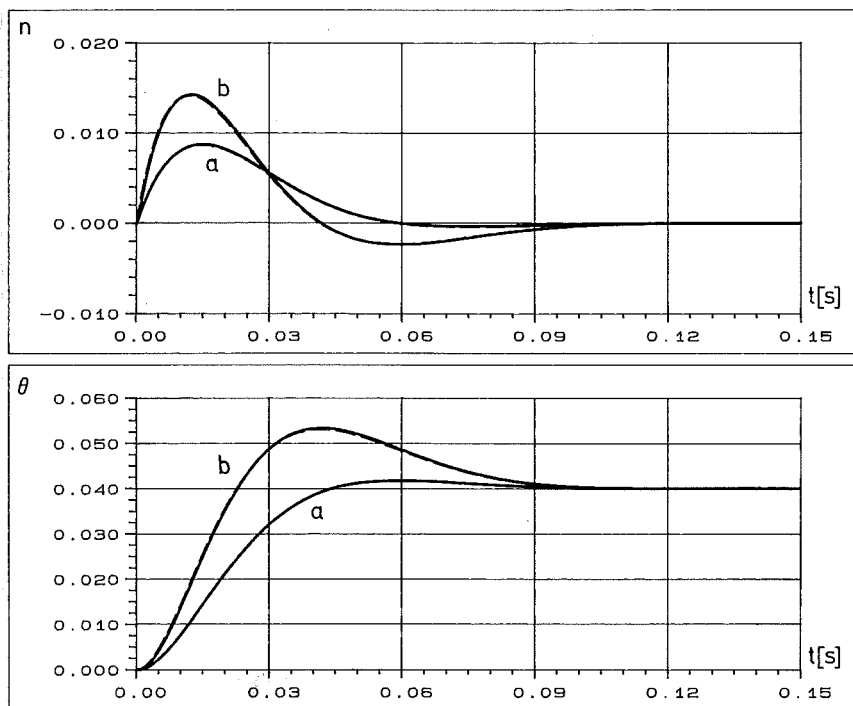
$$k_{w\theta(xR)} = k_\theta = 19.98$$

$$k_{w\theta(p_i)} = 9.99$$

### 5.7.10.3 Réponses à un saut de consigne

La réponse à un saut de consigne du système original réglé par une structure de réglage par mode de glissement continue (§ 5.7.2 à 5.7.3) et celle du sous-système réglé par une structure de réglage d'état continu (§ 5.7.7) sont représentées à la fig. 5.26. La première a été calculée avec le programme *SliMoDeSi* (chapitre 7), alors que pour la seconde on a utilisé le programme *Réglage* du Laboratoire d'Electronique Industrielle (dimensionnement et simulation de systèmes avec structure de réglage d'état continu et échantillonné, [18]).

On constate que les deux réponses se superposent pratiquement. Cela s'explique par le fait que le temps hors mode de glissement  $t_{hg}$  { toujours donné par (5.63) } est négligeable par rapport au temps de montée  $t_m$ .



**Fig. 5.26** Réponses indicielles en réglage par mode de glissement et réglage d'état

a)  $k_{w\theta(p_i)} = 9.99$  ; dép. max.  $\approx 4.4\%$  ;  $t_{hg} \approx 0.33$  ms ;  $t_m \approx 43.8$  ms

b)  $k_{w\theta(xR)} = 19.98$  ; dép. max.  $\approx 33\%$  ;  $t_{hg} \approx 0.65$  ms ;  $t_m \approx 22.6$  ms



#### 5.7.10.4 Conclusion

Le temps hors mode de glissement est proportionnel à la consigne et au coefficient d'intervention directe de la consigne (5.63). On pourrait de façon erronée en déduire que plus la consigne est grande et moins le temps hors mode de glissement est négligeable face au temps de montée. Pourtant, le temps maximum hors mode de glissement est fonction de la limitation de courant (5.46) :  $t_{hgmax}=0.81$  ms.

Dans le cas où  $k_{w\theta}$  est nul, le système ne sort pas du mode de glissement. Les réponses indicielles pour les deux approches sont alors identiques.

### 5.7.11 Comparaisons réglage par mode de glissement continu - réglage par mode de glissement hybride

#### 5.7.11.1 Introduction

Les théories pour le dimensionnement et les limitations présentées aux chapitres 1 et 2 sont valables pour une structure de réglage par mode de glissement continue.

Au chapitre 3 (§ 3.2.4), on a vu comment corriger les coefficients de contre-réaction lorsqu'ils sont implantés dans une structure de réglage hybride. Vu la difficulté d'interprétation de l'élément de maintien en gardant la structure de réglage par mode de glissement (§ 3.2.6), on compare dans ce paragraphe les cas du réglage continu et du réglage hybride où, pour le calcul des coefficients, cet élément de maintien est négligé.

#### 5.7.11.2 Application numérique

Les coefficients de contre-réaction du régulateur continu sont les mêmes que ceux du § 5.7.10.2. Avec les relations (3.21), on obtient pour les coefficients du régulateur hybride :

$$k_i = 1$$

$$K_R = k_R \frac{T_E}{T_i}$$

$$K_n = k_n$$

$$K_\theta = k_\theta + \frac{T_E}{2} \frac{k_R}{T_i} = k_\theta + \frac{K_R}{2}$$

$$K_{w\theta} = k_{w\theta} + \frac{T_E}{2} \frac{k_R}{T_i} = k_{w\theta} + \frac{K_R}{2}$$

Pour l'exemple d'application du § 5.7.10.2, on représente à la figure 5.27 la variation des coefficients en fonction de la période d'échantillonnage.

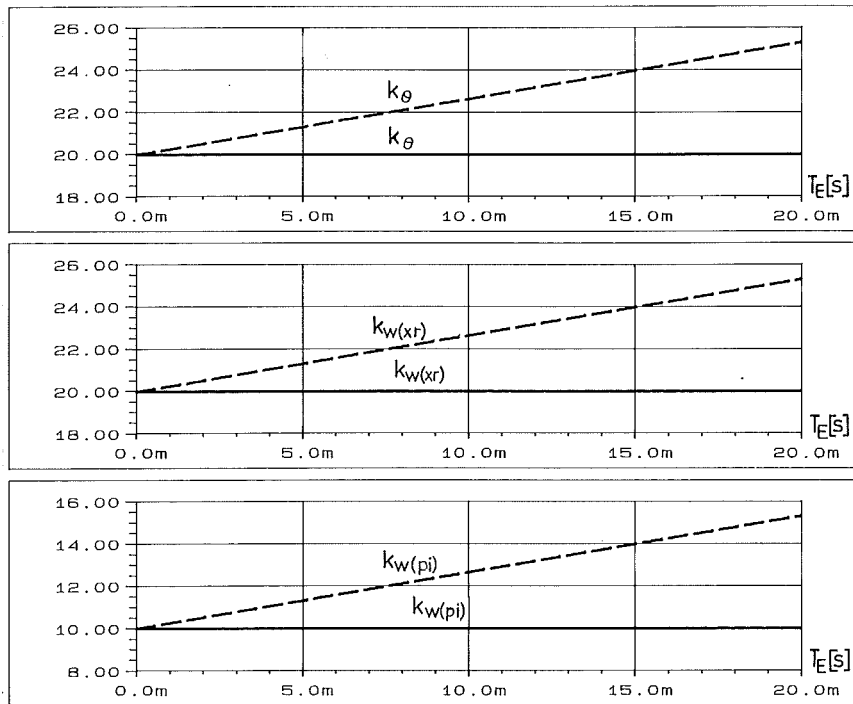


Fig. 5.27 Coefficients corrigés en fonction de la période d'échantillonnage.

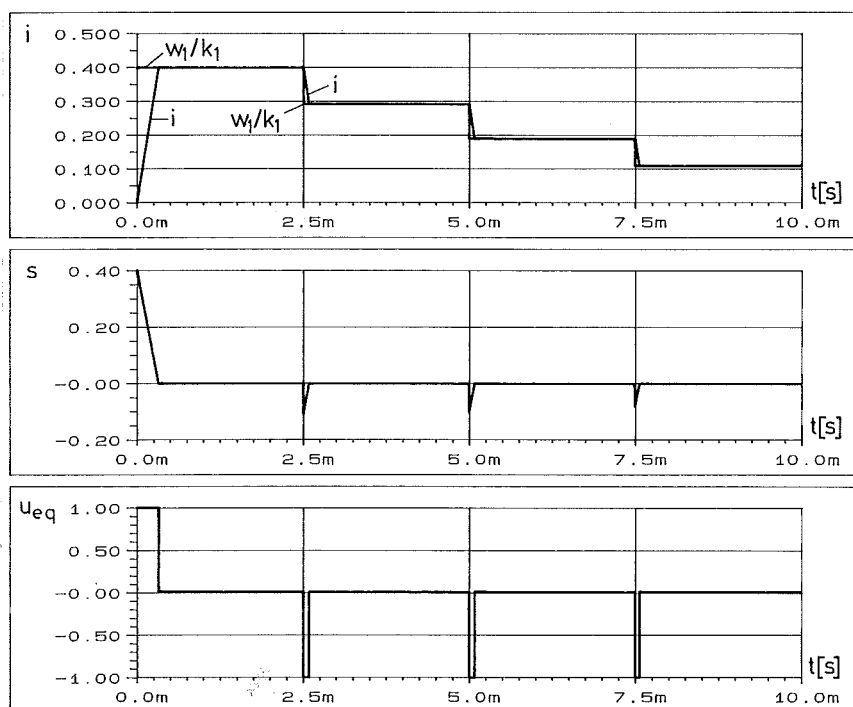


Fig. 5.28 Transitoires pour le cas du réglage par mode de glissement hybride.

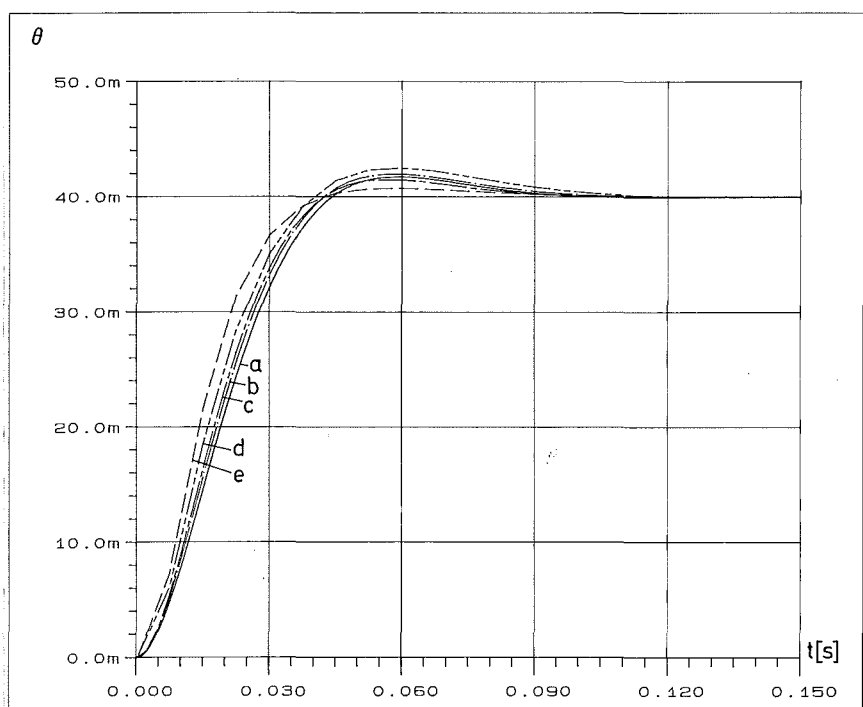
$$K_n=44.48 ; K_\theta=19.98 ; K_R=1.332 ; T_E=2.5 \text{ ms} ; K_{w\theta(\text{pi})}=9.99$$

### 5.7.11.3 Fonctionnement d'un régulateur hybride

Avant d'effectuer la comparaison entre les régulateurs continu et hybride, il est nécessaire de préciser le fonctionnement particulier du régulateur hybride.

Comme déjà mentionné au § 4.4.3, la partie échantillonnée du régulateur concerne les grandeurs d'état  $x_2 \dots x_n$  (ici  $n, \theta, x_R$ ). La sortie  $w_1$  du limiteur (de courant)  $L_1$  est convertie en grandeur continue par l'élément de maintien. La contre-réaction continue de  $x_1$  (soit le courant d'induit  $i$ ) est alors comparée à une grandeur qui varie par gradins. Il en résulte qu'à chaque instant d'échantillonnage (saut de  $w_1$ ), le système réglé sort transitoirement du fonctionnement en mode de glissement. Ce phénomène est mis en évidence à la figure 5.28 par la simulation numérique (programme *SliMoDeSi*, chap. 7) pour la machine à courant continu de la section 5.3 et les coefficients du § 5.7.10.2.

Le temps hors mode de glissement en début de période d'échantillonnage est très court vis-à-vis de celle-ci.



**Fig. 5.29** Réponses indicielles avec régulateurs continu (a) et hybride (b-e).  
 a)  $k_n=44.48$  ;  $k_\theta=19.98$  ;  $k_R=1.332$  ;  $T_i=2.5$  ms ;  $K_{w\theta(\text{pi})}=9.99$   
 b)  $K_n=44.48$  ;  $K_\theta=19.98$  ;  $K_R=1.332$  ;  $T_E=2.5$  ms ;  $K_{w\theta(\text{pi})}=9.99$   
 c)  $K_n=44.48$  ;  $K_\theta=20.65$  ;  $K_R=1.332$  ;  $T_E=2.5$  ms ;  $K_{w\theta(\text{pi})}=10.66$   
 d)  $K_n=44.48$  ;  $K_\theta=19.98$  ;  $K_R=3.996$  ;  $T_E=7.5$  ms ;  $K_{w\theta(\text{pi})}=9.99$   
 e)  $K_n=44.48$  ;  $K_\theta=21.98$  ;  $K_R=3.996$  ;  $T_E=7.5$  ms ;  $K_{w\theta(\text{pi})}=11.99$

#### 5.7.11.4 Réponses à un saut de consigne

La courbe a) de la figure 5.29 représente la réponse indicielle (hors limitation) du système réglé par la structure de réglage continu, avec les coefficients dimensionnés au § 5.7.10.2.

Pour deux périodes d'échantillonnages différentes, 2.5 et 7.5 ms, on a calculé les réponses indicielles avec les mêmes coefficients que ceux en continu (b et d),

respectivement avec les coefficients corrigés avec les relations pseudo-continues du § 5.7.11.2 (c et e).

On constate, particulièrement bien pour  $T_E=7.5$  ms, que les réponses indicielles calculées sans correction des coefficients sont plus proches du cas continu, que celles calculées avec correction des coefficients (en pseudo-continu). Au premier abord, cela peut surprendre puisque le but de la correction est d'obtenir une meilleure correspondance entre cas continu et cas hybride. Il ne faut toutefois pas oublier que pour le dimensionnement pseudo-continu, on n'a pas pris en compte l'élément de maintien. Les raisons sont explicitées au § 3.2.6.

Par ailleurs, plus  $T_E$  augmente, plus le réglage est lent.

## 5.7.12 Comparaisons réglage par mode de glissement hybride - réglage d'état échantillonné

### 5.7.12.1 Introduction

A l'instar du § 5.7.10, on se propose de comparer le réglage par mode de glissement et le réglage d'état du sous-système en mode de glissement, mais pour le cas échantillonné.

Au vu des constatations du § 5.7.11, on appliquera dans les deux cas les coefficients dimensionnés en continu (§ 5.7.10.2).

### 5.7.12.2 Pôles du sous-système échantillonné

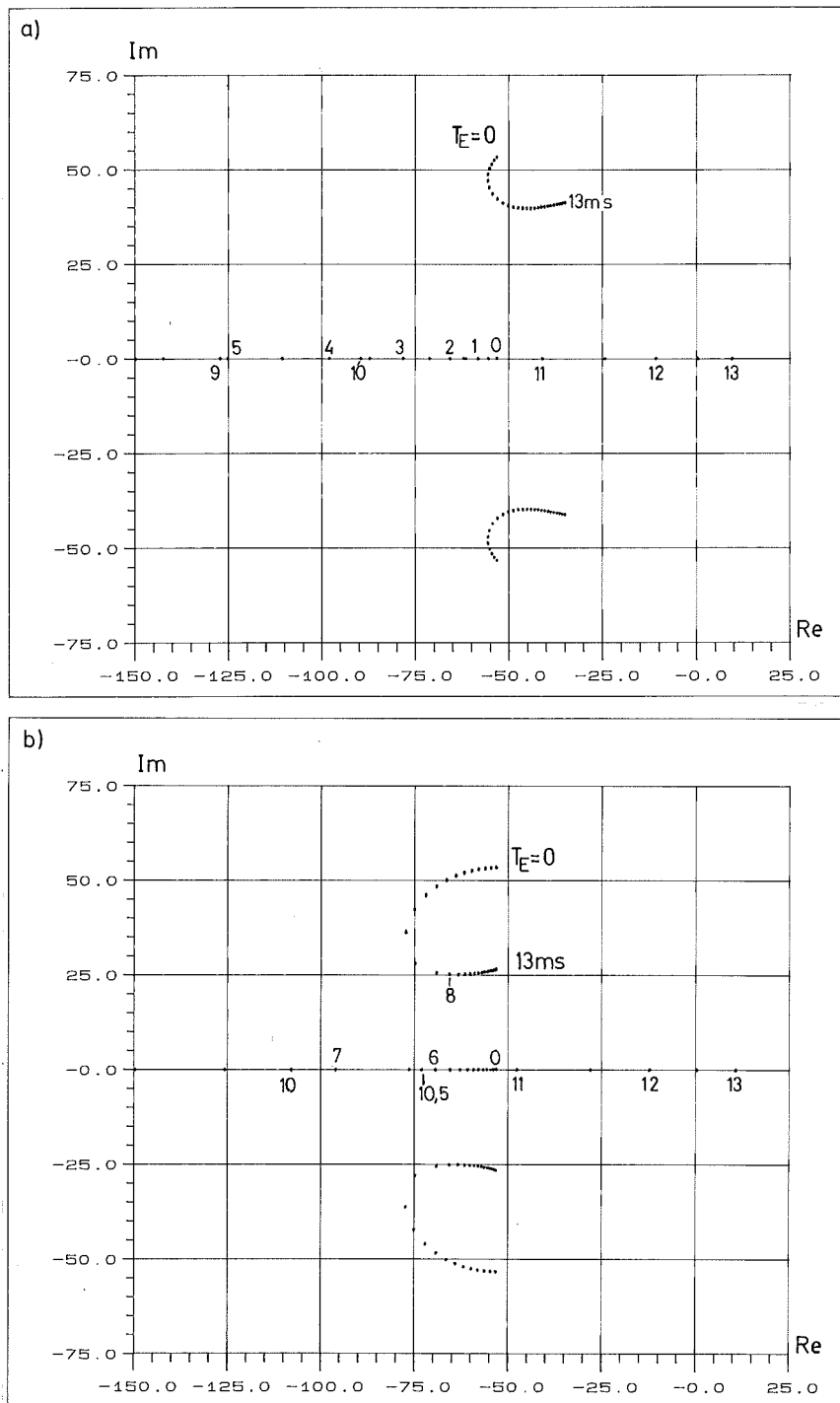
Se basant sur les développements de § 5.7.8, il est loisible de calculer les pôles du sous-système réglé par la structure de réglage d'état échantillonnée. Ainsi, on représente à la fig. 5.30 les pôles (en continu) de la matrice  $F_G$  selon (5.132a) en fonction de la période d'échantillonnage. Deux cas sont représentés : l'un en utilisant les coefficients dimensionnés pour le réglage continu, l'autre en implantant les coefficients corrigés en pseudo-continu.

Globalement, les deux caractéristiques ont le même comportement. Pour le cas limite  $T_E \rightarrow 0$ , on a bien sûr les pôles du système continu (fig. 5.25). Avec l'augmentation de  $T_E$ , le pôle réel devient, dans un premier temps plus rapide, pour bientôt devenir plus lent, voire instable.

Pour les petites valeurs de la période d'échantillonnage (1..3 ms), le pôle réel est plus rapide dans le cas sans correction des coefficients (cas a), ce qui a déjà été observé sur les réponses indicielles du § 5.7.11.4.

Malgré la correction des coefficients (cas b), on remarque que pour des valeurs grandes de  $T_E$  ( $> 5$  ms) les pôles varient sensiblement. L'effet de l'élément de maintien, qui n'a pas été pris en compte pour le dimensionnement des coefficients, se fait donc cruellement sentir.

Pour un dimensionnement adéquat des régulateurs, indépendamment de  $T_E$ , il faut effectuer un dimensionnement en échantillonné, en passant par la théorie du réglage d'état.



**Fig. 5.30** Pôles (en continu) du sous-système en mode de glissement, réglé par le réglage d'état échantillonné avec coefficients :  
 a) sans correction (§5.7.10.2)  
 b) avec correction (§ 5.7.11.2)

### 5.7.12.3 Dimensionnement échantillonné

Le sous-système réglé par une structure de réglage d'état est décrit au § 5.7.8. Les coefficients (digitaux) du régulateur peuvent être dimensionnés par les méthodes présentées dans [5]. Le programme *Réglage* [18], permettant le

dimensionnement et la simulation des systèmes réglés par une structure de réglage d'état continu ou échantillonné, a été développé au Laboratoire d'Electronique Industrielle. Il est utilisé pour calculer les coefficients du régulateur échantillonné (ou hybride).

En imposant les mêmes pôles (en continu) que pour le régulateur continu (fig. 5.25) :

$$p_1 = -\rho \quad ; \quad p_{2,3} = -\rho \pm j\rho \quad ; \quad \rho = 53.\bar{3}$$

on obtient

$$T_E = 2.5 \text{ ms}$$

$$T_E = 7.5 \text{ ms}$$

$$K_R = 1.091$$

$$K_R = 2.208$$

$$K_n = 39.91$$

$$K_n = 32.59$$

$$K_\theta = K_{w\theta(xR)} = 17.50$$

$$K_\theta = K_{w\theta(xR)} = 13.47$$

$$K_{w\theta(zi)} = 8.774$$

$$K_{w\theta(zi)} = 6.698$$

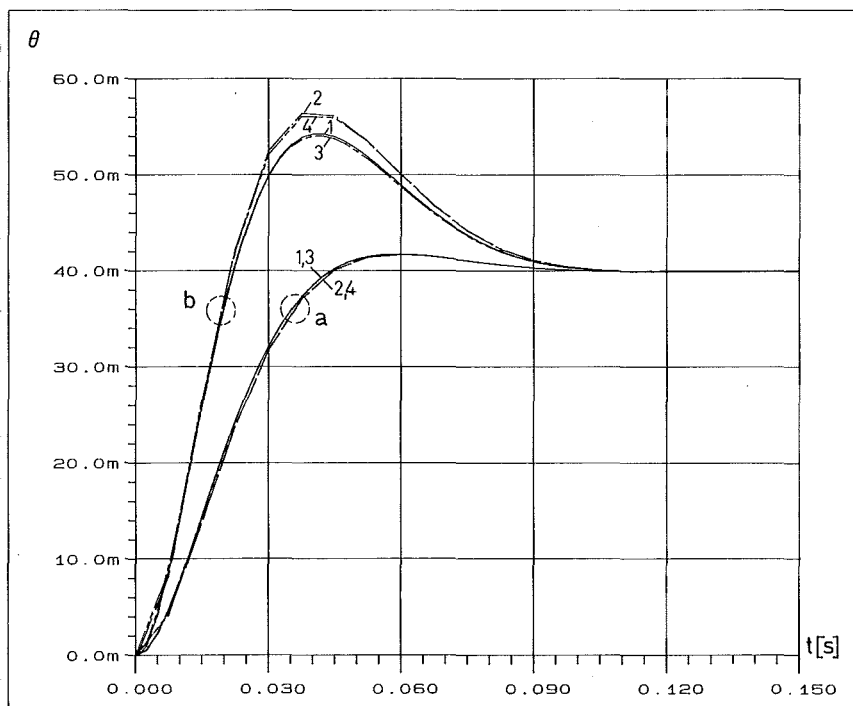


Fig. 5.31 Réponses indicielles,  $\theta_c=0.04$

1) réglage par mode de glissement hybride,  $T_E=2.5 \text{ ms}$

2) réglage par mode de glissement hybride,  $T_E=7.5 \text{ ms}$

3) réglage d'état digital,  $T_E=2.5 \text{ ms}$

4) réglage d'état digital,  $T_E=7.5 \text{ ms}$

a)  $K_{w\theta} = K_{w\theta(pi)}$  ; b)  $K_{w\theta} = K_{w\theta(xR)}$

#### 5.7.12.4 Réponses indicielles

Dans le but de comparer l'approche par le réglage d'état échantillonné du sous-système en mode de glissement, au réglage par mode de glissement hybride du système original, on a représenté à la figure 5.31 les réponses indicielles respectives, en utilisant les coefficients calculés précédemment.

On constate que les réponses indicielles sont quasiment identiques dans les deux cas de réglage. Quelques minimales différences apparaissent seulement en fonction de la période d'échantillonnage : pour  $T_E=7.5$  ms ( $T_E$  grand) le dépassement est plus fort pour le cas de  $k_{w\theta}=k_{w\theta(XR)}$ . La validité de l'approche par le réglage d'état du sous-système réglé en mode de glissement se trouve confirmée.

#### 5.7.13 Conclusion sur les différentes approches possibles

- Tant en continu qu'en échantillonné, l'approche par le réglage d'état du sous-système réglé en mode de glissement est tout à fait valable. Les comportements, étudiés en simulation, sont quasiment identiques.
- En échantillonné, et au vu de la conclusion précédente, on peut déduire que les transitoires hors mode de glissement débutant à chaque instant d'échantillonnage, peuvent être négligés par rapport à la période d'échantillonnage, et ceci indépendamment de celle-ci. En effet, plus  $T_E$  est petite, plus les sauts de la commande  $w_1$  seront petits. Les déviations sur  $s$  étant par conséquent plus petites, le système reste aussi moins longtemps hors mode de glissement.
- En conséquence, le dimensionnement d'un régulateur par mode de glissement hybride se fera avantageusement par les méthodes du réglage d'état échantillonné [5]. Le fait que la théorie correspondante est bien connue est un avantage non négligeable. De plus, il existe des programmes de synthèse performants (*Réglage* au LEI).
- Au vu des résultats du paragraphe précédent, on peut aussi admettre que le dimensionnement en continu d'un régulateur par mode de glissement hybride n'est pas toujours judicieux. Le fait que l'élément de maintien n'entre pas dans le modèle pseudo-continu du système s'avère désavantageux.
- Si toutefois un dimensionnement pseudo-continu est souhaité, il faudra tout d'abord modéliser le sous-système en mode de glissement, y ajouter une équation pour le modèle pseudo-continu de l'élément de maintien, puis traiter le tout par les méthodes de dimensionnement pseudo-continues du réglage d'état (voir § 4.4.4).

D'une manière générale, on peut conclure que les méthodes de réduction de l'ordre du système réglé en mode de glissement, avec traitement consécutif par le réglage d'état du sous-système, permettent une approche simplifiée, du fait que le système réglé devient linéaire.

## 5.7.14 Essais sur banc hors limitation

### 5.7.14.1 Introduction

Jusqu'à présent, toutes les réponses indicielles étaient calculées numériquement, dans le but d'une bonne comparaison théorique. Par ailleurs, l'application du réglage par mode de glissement pour le réglage de position de la machine à courant continu est effectuée d'une manière hybride. Au § 1.6.3 sont décrites les caractéristiques de l'environnement utilisé.

Le programme d'application *IdMesReg* a été développé pour le réglage en temps réel de la machine à courant continu. Il est écrit en Pascal et tourne sur le microsystème. On peut mémoriser on-line les grandeurs mesurées et calculées du régulateur.

Les mesures effectuées seront comparées bien sûr aux résultats de simulation effectués en hybride.

### 5.7.14.2 Dimensionnement - Choix de la période d'échantillonnage

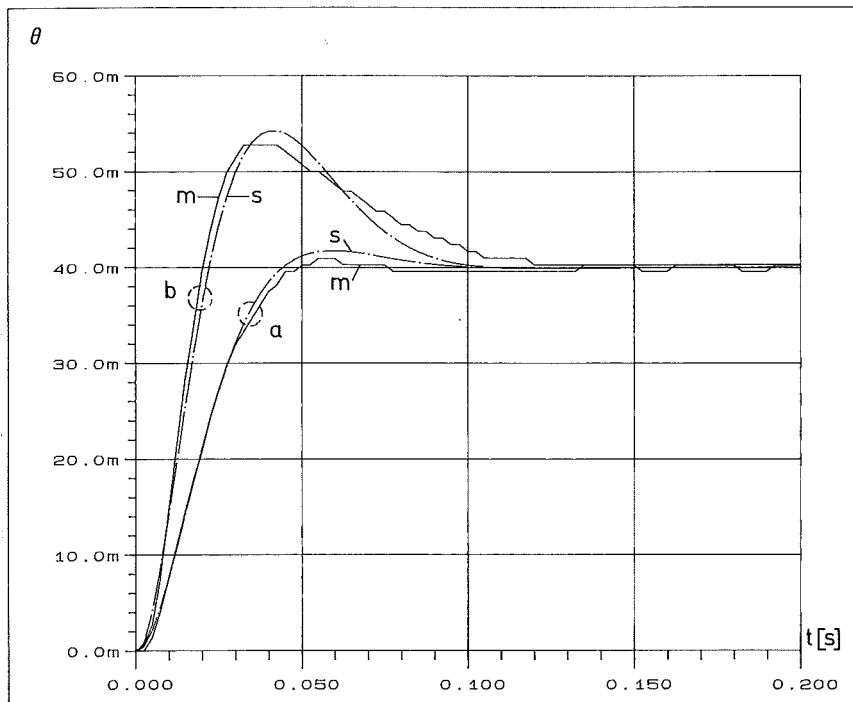
Au vu des résultats précédents, en particulier au § 5.7.12, on utilise ici les coefficients dimensionnés en échantillonné pour le système en mode de glissement (§ 5.7.12.3).

L'algorithme de réglage étant assez chargé à cause des facilités prévues pour le développement, le temps de calcul pour effectuer les mesures, élaborer le grandeur de commande et effectuer la conversion D/A de cette dernière, est de  $\sim 2.4$  ms. Pour se réserver une petite marge de sécurité, on choisira pour tous les essais pratiques  $T_E = 2.5$  ms. Le temps de retard relatif [5, sect. 19.7], compté entre la mesure et la variation de la sortie analogique, est environ de 40% (1.0 ms / 2.5 ms). Pourtant, on n'en tiendra pas compte pour le dimensionnement en échantillonné. La concordance entre simulations numériques et essais pratiques le justifie.

### 5.7.14.3 Réponses indicielles hors limitation

Les résultats des mesures effectuées sur le banc d'essai pour un saut de consigne tels que le système reste hors limitation de courant et de vitesse sont représentés à la fig. 5.32, et comparés aux simulations correspondantes.



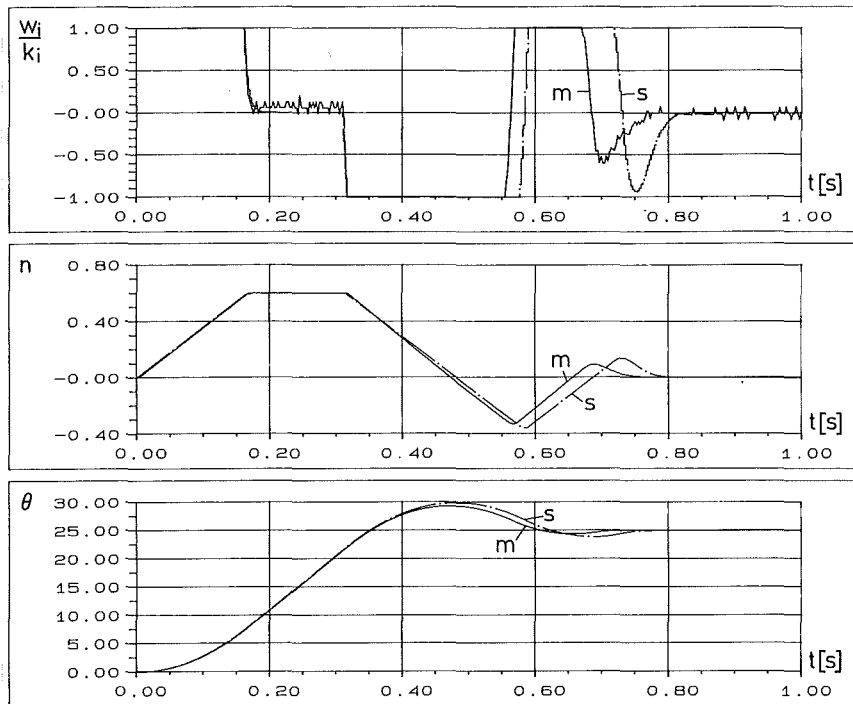


**Fig. 5.32** Réponses indicielles,  $\theta_c=0.04$ ,  $m_r \approx 0$   
 $p_1=0$  ;  $p_2=-53.3$  ;  $p_{3,4}=-53.3 \pm j53.3$   
 $k_i=1$  ;  $K_n=39.91$  ;  $K_\theta=17.50$  ;  $K_R=1.091$  ;  $T_E=2.5$  ms  
 a)  $K_{w\theta}=K_{w\theta(\pi)}=8.774$  ; b)  $K_{w\theta}=K_{w\theta(xR)}=17.50$   
 m) mesure ; s) simulation

Les résultats mesurés sont très proches de la simulation. On reconnaît par ailleurs la quantification sur la mesure de position qui vaut, selon § 5.5.6,  $\theta_\Delta=1/1440=6.94 \cdot 10^{-4}$  pu.

### 5.7.15 Essais sur banc en limitation de vitesse

Comme on l'a relevé pour le cas du réglage de position continu sans intégrateur (fig. 5.17), une limitation fixe de vitesse peut engendrer des instabilités. Pour les mêmes coefficients qu'au § 5.7.14, on a représenté à la fig. 5.33 les mesures et simulations pour une limitation fixe de  $n_{\max}=0.6$  pu.



**Fig. 5.33** Instabilités dues aux limitations

$$\theta_c=25 ; m_r \approx 0 ; i_{\max}=1 ; n_{\max}=0.6$$

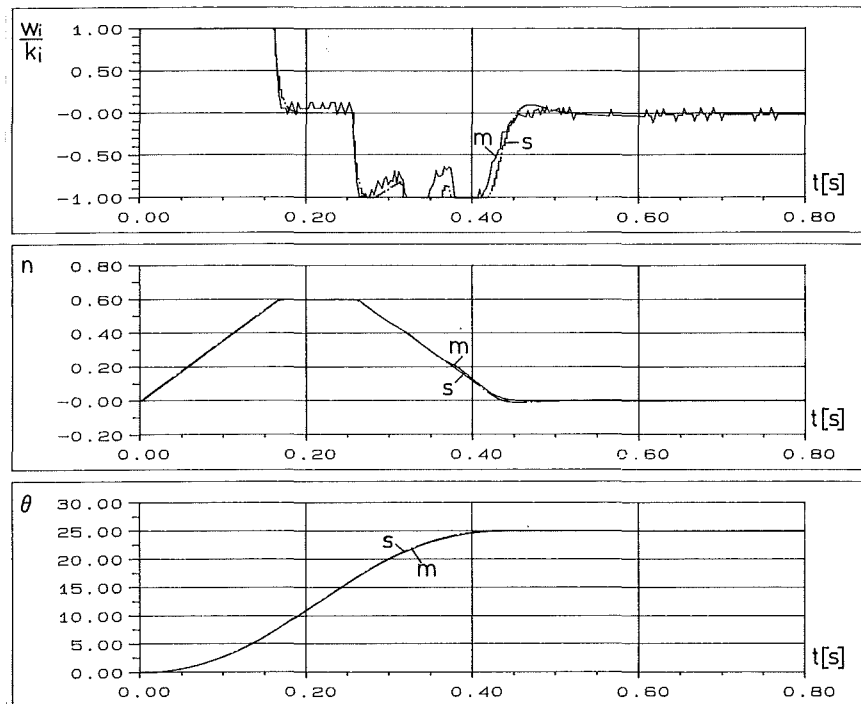
$$p_1=0 ; p_2=-53.3 ; p_{3,4}=-53.3 \pm j53.3$$

$$k_i=1 ; K_n=39.91 ; K_\theta=17.50 ; K_R=1.091 ; T_E=2.5 \text{ ms} ; K_{w\theta(p_i)}=8.7$$

m) mesure ; s) simulation

Le système réel semble un peu plus rapide, surtout en ce qui concerne la phase de freinage. L'explication peut être trouvée dans le fait que pour la simulation, on n'a pas tenu compte du couple résistant de friction réel, qui n'est pas tout à fait nul. D'autre part, il se peut que la constante de temps mécanique réelle soit un peu plus petite que celle utilisée pour la simulation.

En appliquant les limitations variables par segments décrites à la section 5.6, on obtient les résultats de la fig. 5.34.



**Fig. 5.34** Limitation de vitesse variable par six segments selon fig. 5.22

$$\theta_c=25 ; m_r \approx 0 ; i_{\max}=1 ; n_{\max}=0.6$$

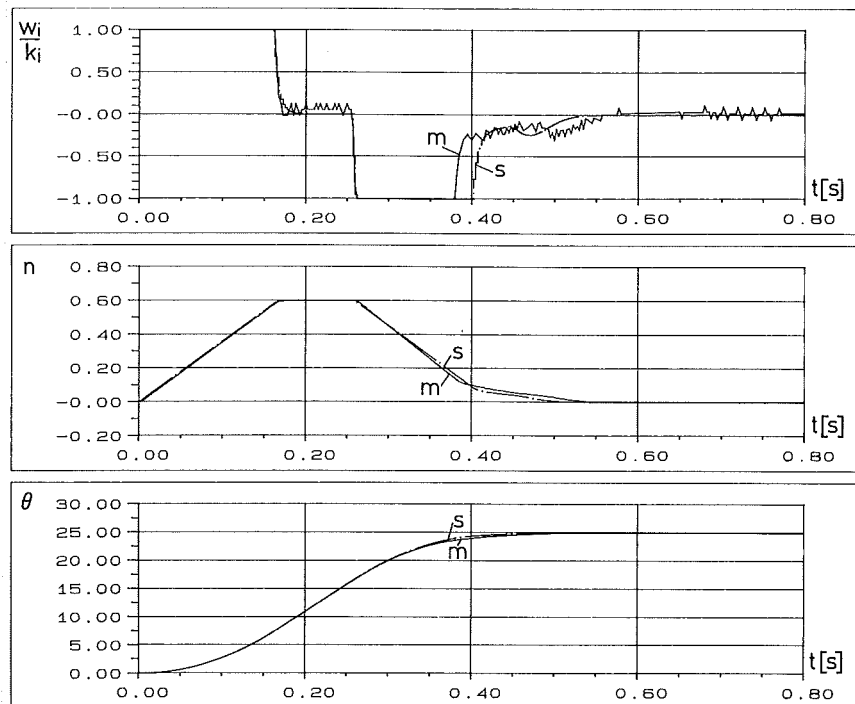
$$p_1=0 ; p_2=-53.3 ; p_{3,4}=-53.3 \pm j53.3$$

$$k_i=1 ; K_n=39.91 ; K_\theta=17.50 ; K_R=1.091 ; T_E=2.5 \text{ ms} ; K_{w\theta(p_i)}=8.7$$

m) mesure ; s) simulation

Là encore, les résultats sont très bons. La correspondance entre simulations et résultats est parfaite. On en déduit d'une manière générale que les limitations variables de vitesse montrent toute leur efficacité. La simulation numérique par *Slimodesi* se montre par ailleurs très puissante.

A titre de comparaison, on a représenté à la fig. 5.35 un cas semblable à la fig. 5.34, mais avec deux segments de limitations seulement. Par rapport au cas précédent, le système réglé sort plus vite de la limitation de courant, par contre l'approche finale s'effectue à vitesse plus faible; la phase finale est ralentie. Cela s'explique par le fait que les pôles en limitation sont plus lents dans ce cas à cause d'un segment de limitation moins raide (voir § 5.6.9).



**Fig. 5.35** Limitation de vitesse variable par deux segments selon fig. 5.22

$$\theta_c=25 ; m_r \approx 0 ; i_{\max}=1 ; n_{\max}=0.6$$

$$p_1=0 ; p_2=-53.3 ; p_{3,4}=-53.3 \pm j53.3$$

$$k_i=1 ; K_n=39.91 ; K_\theta=17.50 ; K_R=1.091 ; T_E=2.5 \text{ ms} ; K_{w\theta(p_i)}=8.7$$

m) mesure ; s) simulation

Dans tous les cas, on n'a pas tenu compte de l'organe de mesure de vitesse lors de la simulation numérique. Pourtant, il y a une bonne correspondance avec les mesures. On en déduit que cette façon de procéder n'est pas trop audacieuse.

## 5.8 CONCLUSION

Dans ce chapitre, un grand lot de problèmes différents ont été exposés.

L'étude du système en mode de glissement a été poussée analytiquement pour le cas du réglage de position sans intégrateur. Par simulation numérique et des essais sur installation, on a pu constater l'apparition d'instabilités dues aux limitations. Après avoir expliqué le phénomène, une solution a pu être trouvée par l'application des limitations variables définies au chapitre 2. On peut dès lors effectuer des sauts de consigne de toute amplitude, sans qu'il y ait de dépassement (sans parler d'instabilités).

Dans le cas du réglage par mode de glissement continu, on a constaté que les méthodes de réduction d'ordre du système proposées au chapitre 4 sont absolument valables. En effet, seul le temps hors mode de glissement est négligé, mais pas son influence sur l'évolution du système. Ainsi, les méthodes du réglage d'état deviennent applicables.

De même, pour le réglage par mode de glissement hybride, cette approche est justifiée. Les transitoires hors mode de glissement au début de chaque période d'échantillonnage peuvent être négligés.

Que ce soit en continu ou en hybride, le réglage d'une machine à courant continu par une structure de réglage par mode de glissement pourra toujours être assimilé au réglage d'état du sous-système formé par les équations différentielles sur la vitesse et la position. Le courant d'induit est à considérer comme grandeur de commande.

Les avantages majeurs en sont :

- une réduction de l'ordre du système, soit un traitement plus simple, et
- un dimensionnement possible aussi en échantillonné.

N'oublions pas de mentionner un autre avantage certain du réglage par mode de glissement. On constate qu'en mode de glissement, le courant est égal à sa consigne  $w_i$ . Le courant représente donc la commande du système réglé d'ordre réduit (voir chap. 4). Par contre, le réglage par PI ou régulateur d'état du courant introduirait une petite constante de temps. Globalement, elle provoque un ralentissement du réglage. En réglage par mode de glissement, l'inexistence de cette petite constante de temps permet un réglage plus rapide. De plus, le choix des pôles pour un dimensionnement global est libre.

Les performances du réglage sont donc accrues grâce à l'utilisation de la propriété intrinsèque du variateur de courant continu : son fonctionnement à deux états.

Les applications pratiques sur le banc d'essai ont permis de vérifier les théories et simulations développées. De par là même, le programme *SliMoDeSi* en devient un outil très intéressant pour l'étude des systèmes réglés par mode de glissement.



## **6 EXEMPLE D'APPLICATION N° 2 : SYSTÈME ÉLECTROMÉCANIQUE OSCILLANT À DEUX MASSES AVEC FROTTEMENT**

### **6.1 INTRODUCTION**

Dans ce chapitre, on traite un système électromécanique oscillant à deux masses avec frottement. Ce genre de systèmes est très répandu, en particulier dans le domaine des machines-outils. Pour mieux comprendre, et surtout justifier, le modèle élastique à deux masses utilisé, on présentera à la section 6.2 un axe d'une machine-outil standard et les développements menant à son modèle. Par de petites simplifications on aboutira au modèle oscillant d'ordre quatre pour la partie mécanique (sect. 6.3).

Les caractéristiques énergétiques et les pulsations propres, fonction de l'amortissement, seront présentées aux sections 6.5 et 6.6.

Après un bref aperçu sur les différents types de réglages rencontrés dans la pratique (sect. 6.7), on présentera le cas d'un réglage de position par mode de glissement continu global "idéal" (sect. 6.8), ce qui permettra de tirer certaines conclusions intéressantes valables aussi pour les autres types de réglage.

Le blocage, transitoire, de la charge est une réalité sur un système tel que la machine-outil. Un modèle d'ordre réduit doit être envisagé et sa stabilité doit être assurée (sect. 6.9).

Le réglage par mode de glissement hybride est appliqué pour les réglages de vitesse et de position. On étudie successivement trois types de contre-réactions plus ou moins complètes aux sections 6.10, 6.12 et 6.14. La sensibilité du système réglé aux variations des paramètres et des coefficients est étudiée en détail pour les deux premiers cas (sect. 6.11 et 6.13). On verra que les meilleures performances ne sont pas obtenues par une contre-réaction complète. Enfin, on tirera des conclusions à la section 6.6.

### **6.2 MODÉLISATION D'UNE MACHINE-OUTIL**

#### **6.2.1 Introduction**

Pour son étude, tout système doit être décrit mathématiquement : c'est la modélisation. Ce modèle peut être plus ou moins complexe selon la finesse souhaitée de la description.

Ce qui compte, c'est que le modèle soit le plus simple possible, tout en décrivant suffisamment bien le comportement dominant du système réel. Il est alors évident que, selon les phénomènes à étudier, le modèle varie. Comme corollaire, il s'ensuit que le domaine d'activité d'un ingénieur influence le choix

du modèle. Ainsi, dans le cas particulier de la machine-outil, le mécanicien travaillera généralement avec un modèle plus complexe que l'automaticien.

Dans la machine-outil, il se présente deux mouvements de nature différente :

- un mouvement de rotation : moteur et vis, et
- un mouvement linéaire : la table.

Ces deux mouvements sont liés par le pas de la vis mécanique. Il en est de même des référentiels respectifs. Il est donc possible d'exprimer toutes les grandeurs d'un mouvement linéaire dans le référentiel angulaire, et vice versa. Ces passages sont présentés au § 6.2.2. Une définition complète des grandeurs nominales et relatives est montrée au § 6.2.3.

Après ces généralités, on décrira tout d'abord la machine-outil telle qu'elle est vue par le mécanicien : les différents degrés de libertés, les masses, les inerties et les différentes rigidités seront décrites et commentées (§ 6.2.4). Tenant compte d'un type d'amortissement bien précis, on développera les équations différentielles du système en passant par la méthode de Lagrange (§ 6.2.5).

La modélisation retenue par l'automaticien sera présentée à la section suivante.

Pour de plus amples détails sur certains développements, on consultera avantageusement [9].

## 6.2.2 Changements de référentiels

Dans cette section sont présentées les relations de passage entre référentiel linéaire et référentiel rotatif, et vice versa. Elles sont établies en vraies grandeurs.

- Le pas de vis est le déplacement linéaire de la table pour une rotation de  $2\pi$  de la vis. On définit le rapport de transformation  $\alpha$  selon :

$$\text{pas} = \alpha 2\pi \quad [\text{m}] \qquad \alpha = \frac{\text{pas}}{2\pi} \quad [\text{m/rad}] \qquad (6.1)$$

- Soit  $X$  le déplacement linéaire et  $\Theta$  la rotation :

$$X = \Theta \alpha \quad [\text{m}] \qquad \Theta = \frac{X}{\alpha} \quad [\text{rad}] \qquad (6.2)$$

- Soit  $V$  la vitesse linéaire et  $\Omega$  la vitesse angulaire de rotation :

$$V = \Omega \alpha \quad [\text{m/s}] \qquad \Omega = \frac{V}{\alpha} \quad [\text{rad/s}] \qquad (6.3)$$

- Soit  $F$  la force dans le référentiel linéaire et  $M_a$  le couple dans le référentiel angulaire :



$$F = \frac{M_a}{\alpha} \quad [\text{N}] \qquad M_a = F \alpha \quad [\text{Nm}] \qquad (6.4)$$

- Soit  $m_J$  une masse dans le référentiel linéaire et  $J$  son inertie exprimée dans le référentiel angulaire :

$$m_J = \frac{J}{\alpha^2} \quad [\text{kg}] \qquad J = m_J \alpha^2 \quad [\text{kgm}^2] \qquad (6.5)$$

- Les rigidités linéaire  $K_l$  et angulaire  $K_\theta$  sont définies par :

$$K_l = \frac{F}{X} \quad [\text{N/m}] \qquad K_\theta = \frac{M_a}{\Theta} \quad [\text{Nm/rad}] \qquad (6.6)$$

- Le passage de  $K_l$  à  $K_\theta$  se fait par :

$$K_l = \frac{K_\theta}{\alpha^2} \quad [\text{N/m}] \qquad K_\theta = K_l \alpha^2 \quad [\text{Nm/rad}] \qquad (6.7)$$

- Les énergies cinétiques et potentielles sont définies par :

$$E_c = \frac{1}{2} m_J V^2 \quad [\text{Ws}=\text{kgm}^2/\text{s}^2] \qquad E_c = \frac{1}{2} J \Omega^2 \quad [\text{Ws}=\text{kgm}^2/\text{s}^2] \qquad (6.8)$$

$$E_p = \frac{1}{2} K_l X^2 \quad [\text{Ws}] \qquad E_p = \frac{1}{2} K_\theta \Theta^2 \quad [\text{Ws}] \qquad (6.9)$$

- Les puissances cinétiques et potentielles sont :

$$P_c = \frac{dE_c}{dt} = F V \quad [\text{W}=\text{kgm}^2/\text{s}^3] \qquad P_c = \frac{dE_c}{dt} = M_a \Omega \quad [\text{W}=\text{kgm}^2/\text{s}^3] \qquad (6.10)$$

$$P_p = \frac{dE_p}{dt} = K_l X V \quad [\text{W}] \qquad P_p = \frac{dE_p}{dt} = K_\theta \Theta \Omega \quad [\text{W}] \qquad (6.11)$$

### 6.2.3 Grandeurs nominales et relatives

L'automaticien a pour habitude de travailler en grandeurs relatives (rapportées aux valeurs nominales), ce qui facilite grandement le travail. Les arguments principaux sont déjà cités au § 5.2.3.1.

Pour le passage des équations en vraies grandeurs aux équations en grandeurs relatives, il faut connaître ou définir certaines grandeurs nominales (indiquées avec  $n$ ).

La dénomination de certaines variables d'état et de certains coefficients et constantes de temps est due à un choix arbitraire, souvent justifié historiquement par le fait que nous nous occupons, au LEI, d'entraînements électriques principalement. Ainsi, on raisonne en général dans un référentiel angulaire. Ci-dessous on présente pêle-mêle certaines définitions.

- Le déplacement relatif  $\theta$  est défini par :

$$\theta = \frac{\Theta}{\Theta_n} = \frac{X}{X_n} \quad (6.12)$$

- La vitesse relative  $n$  est définie par :

$$n = \frac{\Omega}{\Omega_n} = \frac{V}{V_n} \quad (6.13)$$

- Le couple relatif, ou la force relative,  $m$  sont définis par :

$$m_a = \frac{M_a}{M_n} = \frac{F}{F_n} \quad (6.14)$$

- Le passage des équations de mouvement en vraies grandeurs :

$$J \frac{d\Omega}{dt} = M_a \quad [\text{Nm}] \quad m_J \frac{dV}{dt} = F \quad [\text{N}] \quad (6.15)$$

$$\frac{d\Theta}{dt} = \Omega \quad [\text{s}^{-1}] \quad \frac{dX}{dt} = V \quad [\text{m/s}] \quad (6.16)$$

aux équations en grandeurs relatives

$$\frac{dn}{dt} = \frac{m_a}{T_m} \quad [\text{s}^{-1}] \quad (6.17)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{n}{T_\theta} \quad [\text{s}^{-1}] \quad (6.18)$$

permet de définir la constante de temps mécanique :

$$T_m = J \frac{\Omega_n}{M_n} = m_J \frac{V_n}{F_n} \quad [\text{s}] \quad (6.19)$$

et la constante de temps liant déplacement et vitesse nominaux :

$$T_\theta = \frac{\Theta_n}{\Omega_n} = \frac{X_n}{V_n} \quad [\text{s}] \quad (6.20)$$

- La définition du coefficient de rigidité relatif :

$$k = K_\theta \frac{\Theta_n}{M_n} = K_l \frac{X_n}{F_n} \quad [1] \quad (6.21)$$

permet de passer des vraies équations de rigidité (6.6) à l'équation relative :

$$m_a = k \theta \quad [1] \quad (6.22)$$

- En définissant les valeurs nominales de l'énergie et de la puissance selon :

$$E_n = \frac{1}{2} J \Omega_n^2 = \frac{1}{2} m_J V_n^2 \quad [\text{Ws}=\text{kgm}^2/\text{s}^2] \quad (6.23)$$

$$P_n = M_n \Omega_n = F_n V_n \quad [W=kgm^2/s^3] \quad (6.24)$$

les équations (6.8) à (6.11) deviennent :

$$e_c = n^2 \quad (6.25)$$

$$p_c = m_a n \quad (6.26)$$

$$\frac{de_c}{dt} = \frac{2}{T_m} p_c = \frac{2}{T_m} m_a n \quad [s^{-1}] \quad (6.27)$$

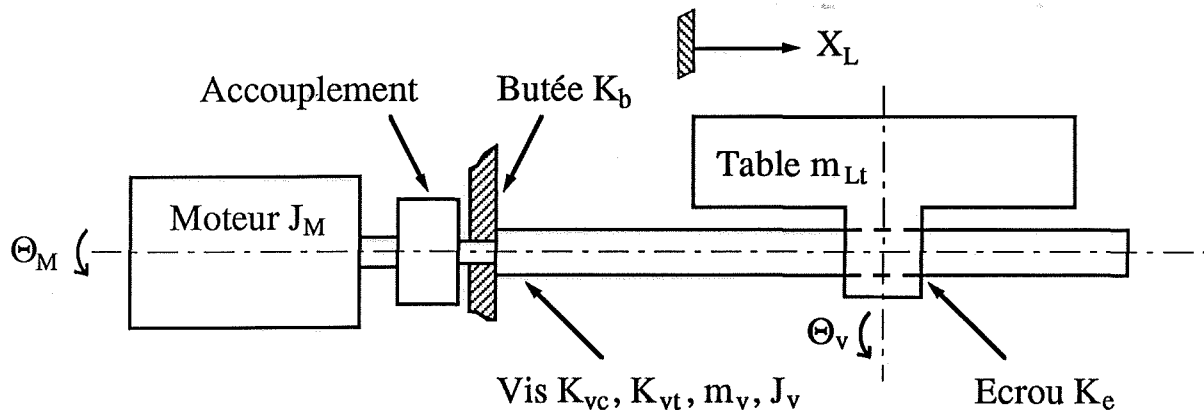
$$e_p = \frac{T_\theta}{T_m} k \theta^2 \quad (6.28)$$

$$p_p = k \theta n \quad (6.29)$$

$$\frac{de_p}{dt} = \frac{2}{T_m} p_p = \frac{2}{T_m} k \theta n \quad [s^{-1}] \quad (6.30)$$

#### 6.2.4 Description mécanique

Chaque axe d'une machine-outil peut être représenté schématiquement comme à la fig. 6.1. Cette figure, ainsi que les dénominations des grandeurs, sont largement inspirées de [12].



**Fig. 6.1** Représentation schématique d'un axe d'une machine-outil.

Voici une brève description du système, où il faut remarquer que toutes les grandeurs sont définies en vraies grandeurs.

Le moteur, d'inertie  $J_M$  [kgm<sup>2</sup>], entraîne la vis, d'inertie  $J_v$  [kgm<sup>2</sup>] et de masse  $m_v$  [kg], via un accouplement souple en flexion, mais rigide en torsion, dont l'inertie est comptée dans  $J_M$ . La vis est par ailleurs caractérisée par sa rigidité axiale en traction-compression  $K_{vc}$  [N/m] et par sa rigidité en torsion  $K_{vt}$  [Nm/rad]. Le tout est maintenu axialement par la butée, de rigidité axiale  $K_b$  [N/m]. La table de la machine-outil, de masse  $m_{Lt}$  [kg], est entraînée par la vis via l'écrou, de rigidité axiale  $K_e$  [N/m].

Le système, tel que défini à la fig. 6.1, présente trois degrés de libertés. On définit ainsi  $\Theta_M$  [rad] la position angulaire du moteur,  $\Theta_V$  [rad] la position angulaire de la vis du côté de l'écrou et  $X_L$  [m] la position axiale de la table. La différence de position angulaire entre  $\theta_M$  et  $\theta_V$  est due à la torsion de la vis et donc directement liée à  $K_{vt}$ .

Précisons d'emblée qu'en général la masse  $m_v$  de la vis est nettement inférieure à la masse  $m_{Lt}$  de la table. De même, il faut savoir que la rigidité en torsion est en général beaucoup plus grande que la rigidité en traction-compression (voir [9]).

On peut définir une rigidité axiale (traction-compression) totale  $K_t$  [N/m], qui est la résultante des contributions des rigidités axiales de la vis, de la butée et de l'écrou; on l'obtient par addition des élasticités (l'inverse des rigidités) :

$$\frac{1}{K_t} = \frac{1}{K_{vc}} + \frac{1}{K_b} + \frac{1}{K_e} \quad (6.31)$$

## 6.2.5 Equations différentielles via le Lagrangien

### 6.2.5.1 Introduction

Pour exprimer les équations différentielles du système, on exprime d'abord les énergies cinétiques et potentielles du système. Les pertes du système sont exprimées par les forces généralisées non conservatives. On peut alors appliquer le Lagrangien, ce qui fournit les équations cherchées.

La première partie est effectuée en vraies grandeurs. Les grandeurs relatives sont appliquées après avoir appliqué le Lagrangien.

### 6.2.5.2 Hypothèses

Pour les développements de ce paragraphe, plusieurs hypothèses sont admises :

- $K_{vt} \gg \alpha^2 K_{vc}$  : pour la vis, on suppose une rigidité en torsion beaucoup plus élevée qu'en traction-compression. On peut donc négliger la torsion, ce qui induit que :
- $\Theta_V = \Theta_M$  : les positions angulaires du moteur et de la vis sont égales; un degré de liberté est donc supprimé.
- On admet une force d'amortissement (référentiel linéaire) dans la vis qui est proportionnelle à la différence de vitesse entre moteur et charge (traction-compression de la vis); le coefficient d'amortissement est désigné par  $A$  [Ns/m], d'où :

$$F_A = A(\dot{X}_L - \alpha \dot{\Theta}_M) \quad [N] \quad (6.32)$$

L'amortissement du système est donc supposé se faire exclusivement dans la vis, la butée et l'écrou en traction-compression.

### 6.2.5.3 Energies cinétiques

Compte tenu des hypothèses, et en admettant que la vitesse longitudinale de la vis varie linéairement d'une extrémité à l'autre [12], on trouve les énergies cinétiques selon :

- table en translation : 
$$E_{ct} = \frac{1}{2} m_{Lt} \dot{X}_L^2 \quad (6.33a)$$

- vis en translation : 
$$E_{cvt} = \frac{1}{2} \frac{m_v}{3} (\dot{X}_L - \alpha \dot{\Theta}_M)^2 \quad (6.33b)$$

- vis en rotation : 
$$E_{cvr} = \frac{1}{2} J_v \dot{\Theta}_M^2 \quad (6.33c)$$

- moteur en rotation : 
$$E_{cmr} = \frac{1}{2} J_m \dot{\Theta}_M^2 \quad (6.33d)$$

*Remarques :* La masse de la vis est répartie uniformément sur sa longueur. La vitesse longitudinale de la vis varie linéairement d'une de ses extrémités à l'autre. L'intégration du carré de cette vitesse explique le facteur 1/3 dans (6.33b).

### 6.2.5.4 Energies potentielles

Compte tenu des hypothèses, toute l'énergie potentielle provient de la traction-compression de la vis. En tenant compte de la rigidité résultante (6.31), on a :

- compression vis-butée-écrou : 
$$E_{pvc} = \frac{1}{2} K_t (X_L - \alpha \Theta_M)^2 \quad (6.34)$$

### 6.2.5.5 Forces généralisées non conservatives

En tout, trois forces généralisées non conservatives interviennent sur le système : le couple électromagnétique du moteur  $M_e$ , la force de friction de la table  $F_T$  et l'amortissement selon (6.32). En tenant compte de l'influence respective sur chaque variable, on obtient les forces généralisées  $Q_{\Theta_M}$  et  $Q_{X_L}$  non conservatives suivantes, sur chaque variable :

- sur  $\Theta_M$  (moteur) : 
$$Q_{\Theta_M} = + M_e - \alpha^2 A \left( \dot{\Theta}_M - \frac{\dot{X}_L}{\alpha} \right) \quad (6.35a)$$

- sur  $X_L$  (charge) : 
$$Q_{X_L} = - F_T - A (\dot{X}_L - \alpha \dot{\Theta}_M) \quad (6.35b)$$

## 6.2.5.6 Equations de Lagrange

En toute généralité, on peut écrire pour chaque variable, ou degré de liberté,  $q_i$  (qui sont dans notre cas  $\Theta_M$  et  $X_L$ ) :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} (E_c - E_p) - \frac{\partial}{\partial q_i} (E_c - E_p) = Q_i \quad (6.36)$$

Comme dans notre cas particulier, et selon (6.33) et (6.34), on a :

$$\frac{\partial E_c}{\partial q_i} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial E_p}{\partial \dot{q}_i} = 0 \quad \forall q_i \quad (6.37)$$

l'équation de Lagrange se simplifie :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_i} = Q_i - \frac{\partial E_p}{\partial q_i} \quad (6.38)$$

En introduisant les relations (6.33) à (6.35) dans la Lagrangien (6.38), on obtient après quelques calculs les deux équations différentielles en vraies grandeurs :

$$(J_M + J_V + \alpha^2 \frac{m_V}{3}) \ddot{\Theta}_M - \alpha \frac{m_V}{3} \ddot{X}_L = M_e - K_t \alpha^2 \Theta_M + K \alpha X_L - \alpha^2 A (\dot{\Theta}_M - \frac{\dot{X}_L}{\alpha}) \quad (6.39)$$

$$-\alpha \frac{m_V}{3} \ddot{\Theta}_M + (m_{Lt} + \frac{m_V}{3}) \ddot{X}_L = -F_r + K_t \alpha \Theta_M - K X_L - A (\dot{X}_L - \alpha \dot{\Theta}_M) \quad (6.40)$$

## 6.2.5.7 Equations différentielles en grandeurs relatives

En introduisant les grandeurs nominales selon le § 6.2.3 dans les équations (6.39) et (6.40), et en tenant compte des relations sur le changement de référentiel du § 6.2.2, on obtient après quelques calculs et résolution du système d'équations :

$$\begin{aligned} & \frac{\Omega_n}{M_n} (J_M + J_V) \left(1 + \frac{m_V}{3m_{Lt}} + \frac{\alpha^2 m_V}{3(J_M + J_V)}\right) \ddot{\theta}_M = \\ & = \left(1 + \frac{m_V}{3m_{Lt}}\right) m_e - \alpha^2 K_t \frac{\Theta_n}{M_n} (\theta_M - \theta_L) - \alpha^2 A \frac{\Omega_n}{M_n} (\dot{\theta}_M - \dot{\theta}_L) - \frac{m_V}{3m_{Lt}} m_r \end{aligned} \quad (6.41)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\Omega_n}{M_n} (\alpha^2 m_{Lt}) \left(1 + \frac{m_V}{3m_{Lt}} + \frac{\alpha^2 m_V}{3(J_M + J_V)}\right) \ddot{\theta}_L = \\ & = \frac{\alpha^2 m_V}{3(J_M + J_V)} m_e + \alpha^2 K_t \frac{\Theta_n}{M_n} (\theta_M - \theta_L) + \alpha^2 A \frac{\Omega_n}{M_n} (\dot{\theta}_M - \dot{\theta}_L) - \left(1 + \frac{\alpha^2 m_V}{3(J_M + J_V)}\right) m_r \end{aligned} \quad (6.42)$$

*Remarques :* Dans ces équations, on voit apparaître différents termes et couplages qui peuvent surprendre et méritent de ce fait une discussion :

- Le terme  $\alpha^2 K_t \frac{\Theta_n}{M_n} (\theta_M - \theta_L)$  intervient sur les deux équations et correspond au couple transmis par la vis mécanique.
- Le terme  $\alpha^2 A \frac{\Omega_n}{M_n} (\dot{\theta}_M - \dot{\theta}_L)$  intervient sur les deux équations et correspond à l'amortissement dans la vis.
- Le couple d'entraînement intervient sur l'accélération du moteur via  $(1 + \frac{m_v}{3m_{Lt}})$ .
- Le couple résistant  $m_r$  intervient sur l'accélération de la charge via  $(1 + \frac{m_v}{3m_{Lt}})$ .
- Il y a couplage entre  $m_e$  et  $\theta_L$  (terme  $\frac{\alpha^2 m_v}{3(J_M + J_V)}$ ), mais aussi entre  $m_r$  et  $\theta_M$  (terme  $\frac{m_v}{3m_{Lt}}$ ). Ce couplage est dû à la masse non nulle de la vis.
- Les termes en  $\ddot{\theta}_M$  et  $\ddot{\theta}_L$  dépendent de  $(J_M + J_V)$ , qui est la somme des inerties de toutes les masses tournantes, respectivement de  $(\alpha^2 m_{Lt})$ , qui représente la masse de la table rapportée à la vis (inertie de la table). Les facteurs multiplicateurs dépendent de  $m_v$ , mais sont proches de 1, puisque  $m_v$  est petit face aux autres termes.

## 6.3 MODÉLISATION PAR UN SYSTEME OSCILLANT À DEUX MASSES

### 6.3.1 Hypothèses et définitions

Les équations différentielles (6.41) et (6.42) établies à la section précédente présentent un inconvénient majeur : c'est le couplage entre  $m_e$  et  $\theta_L$ , et celui entre  $m_r$  et  $\theta_M$ . Pour s'affranchir de ce couplage et par là simplifier les équations différentielles, on admet par la suite que la masse de la vis est beaucoup plus petite que celle de la table ou que l'inertie rapportée de la vis et du moteur :

$$\frac{m_v}{3m_{Lt}} \ll 1 \quad \frac{\alpha^2 m_v}{3(J_M + J_V)} \ll 1 \quad (6.43)$$

et à la limite, on suppose carrément que cette masse est nulle :

$$m_v \approx 0 \quad (6.44)$$

On pose les notations suivantes :

$$T_M = \frac{\Omega_n}{M_n} (J_m + J_v) \left(1 + \frac{m_v}{3m_{Lt}} + \frac{\alpha^2 m_v}{3(J_M + J_V)}\right) \approx \frac{\Omega_n}{M_n} (J_m + J_v) \quad (6.45a)$$

$$T_L = \frac{\Omega_n}{M_n} (\alpha^2 m_{Lt}) \left(1 + \frac{m_v}{3m_{Lt}} + \frac{\alpha^2 m_v}{3(J_M + J_V)}\right) \approx \frac{\Omega_n}{M_n} (\alpha^2 m_{Lt}) \quad (6.45b)$$

$$k_t = \frac{\Theta_n}{M_n} \alpha^2 K_t \quad (6.45c)$$

$$\alpha_t = \frac{\Omega_n}{M_n} \alpha^2 A \quad (6.45d)$$

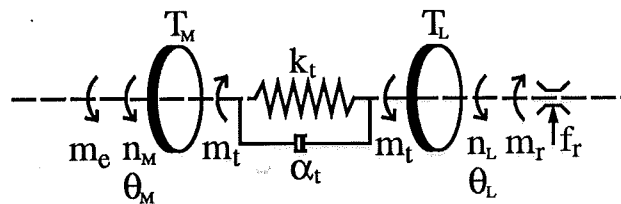
### 6.3.2 Equations différentielles du modèle de l'automaticien

En substituant (6.45) dans les équations (6.41) et (6.42), on obtient la forme suivante :

$$T_M T_\theta \ddot{\theta}_M = m_e - k_t (\theta_M - \theta_L) - \alpha_t T_\theta (\dot{\theta}_M - \dot{\theta}_L) \quad (6.46)$$

$$T_L T_\theta \ddot{\theta}_L = k_t (\theta_M - \theta_L) + \alpha_t T_\theta (\dot{\theta}_M - \dot{\theta}_L) - m_r \quad (6.47)$$

Sur la base de ces équations, il est possible de déterminer un modèle simplifié du système. Il est représenté à la figure 6.2.



**Fig. 6.2** Représentation schématique d'un système oscillant à deux masses.

Les différentes grandeurs sont :

- $T_M, T_L$  la constante de temps mécanique du moteur, respectivement de la charge. Précisons que toutes les inerties, ou masses tournantes, (moteur, accouplement, vis) interviennent sur  $T_M$ , alors que seule la masse  $m_{Lt}$  de la table détermine  $T_L$  {voir (6.45a et b)}.
- $n_M, n_L$  la vitesse de rotation du moteur, respectivement de la charge,
- $\theta_M, \theta_L$  la position angulaire du moteur, respectivement de la charge,
- $k_t$  le coefficient de rigidité de la vis (arbre),
- $\alpha_t$  le coefficient d'amortissement dans l'arbre,
- $m_t$  le couple transmis à l'arbre,
- $m_e$  le couple électromagnétique du moteur.



Avec ces définitions, et le modèle de la fig. 6.2, on peut écrire les équations (6.46) et (6.47) sous la forme d'un système d'équations différentielles du premier ordre :

$$\frac{dm_t}{dt} = \frac{k_t}{T_\theta} (n_M - n_L) + \frac{\alpha_t}{T_M} m_e - \alpha_t \left( \frac{1}{T_M} + \frac{1}{T_L} \right) m_t + \frac{\alpha_t}{T_L} m_r \quad (6.48a)$$

$$\frac{dn_M}{dt} = \frac{1}{T_M} (m_e - m_t) \quad (6.48b)$$

$$\frac{dn_L}{dt} = \frac{1}{T_L} (m_t - m_r) \quad (6.48c)$$

$$\frac{d\theta_M}{dt} = \frac{1}{T_\theta} n_M \quad (6.48d)$$

$$\frac{d\theta_L}{dt} = \frac{1}{T_\theta} n_L \quad (6.48e)$$

avec

$$m_t = k_t(\theta_M - \theta_L) + \alpha_t(n_M - n_L) \quad (6.48f)$$

Le schéma-bloc de ce système est représenté à la fig. 6.3.

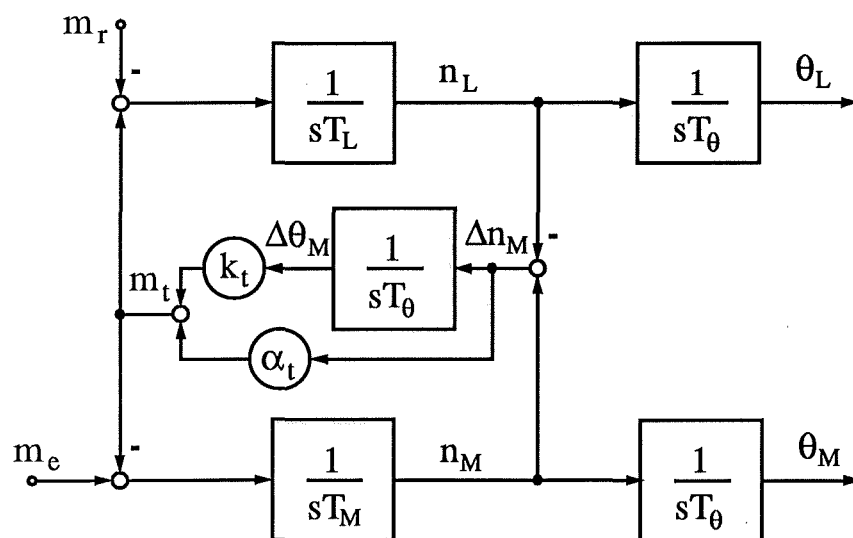


Fig. 6.3 Schéma-bloc du système oscillant à deux masses.

Le système mécanique traité dans ce chapitre est entraîné par un moteur à courant continu à aimants permanents, qui lui est alimenté par un variateur à courant continu (voir section 5.2). Le couple électromécanique fourni par le moteur est donné par (5.11) :

$$m_e = \phi i \quad (6.49)$$

alors que l'équation différentielle sur le courant est toujours (5.12) :

$$\frac{di}{dt} = -\frac{i}{T_a} - \frac{\varphi n_M}{r_a T_a} + \frac{u}{r_a T_a} \quad (6.50)$$

## 6.4 ENERGIE ET PUISSANCE DU SYSTEME

Le but des calculs qui suivent est la détermination des pertes du système. L'interprétation de celles-ci sera immédiate.

Avec l'énergie nominale définie par (6.23) :

$$E_n = \frac{1}{2} (J_M + J_L) \Omega_n^2 + \frac{1}{2} m_t V_n^2 = \frac{1}{2} (T_M + T_L) \frac{M_n}{\Omega_n} \Omega_n^2 \quad (6.51)$$

l'énergie totale du système, selon (6.25) et (6.28), est :

$$e = \frac{T_M}{T_M + T_L} n_M^2 + \frac{T_L}{T_M + T_L} n_L^2 + \frac{T_\theta}{T_M + T_L} k_t (\theta_M - \theta_L)^2 \quad (6.52)$$

Les deux premiers termes sont l'énergie cinétique du moteur, respectivement de la charge, alors que le dernier terme représente l'énergie potentielle de l'arbre (y compris la butée et l'écrou) en traction-compression.

Selon (6.27) et (6.30), la puissance relative totale peut être exprimée par :

$$\begin{aligned} p &= \frac{T_M + T_L}{2} \frac{de}{dt} = n_M(m_e - m_t) + n_L(m_t - m_r) + k_t(\theta_M - \theta_L)(n_M - n_L) = \\ &= n_M m_e - n_L m_r - \alpha_t (n_M - n_L)^2 \end{aligned} \quad (6.53)$$

où :

- $n_M m_e$  est la puissance fournie par le moteur,
- $n_L m_r$  la puissance perdue (dissipée) par friction et
- $\alpha_t (n_M - n_L)^2$  la puissance de perte due à l'amortissement du mouvement oscillatoire dans l'arbre.

*Conclusion* : L'amortissement tel qu'il a été introduit au § 6.2.5.2 répond bien au type voulu. Il est fonction de la différence des vitesses moteur et charge, c'est-à-dire qu'il amortit les oscillations dans l'arbre.

## 6.5 PULSATIONS PROPRES ET AMORTISSEMENTS RELATIFS

### 6.5.1 Introduction

Le but de cette section est la détermination des pulsations propres d'oscillations et des amortissements relatifs pour les différents cas pouvant se produire. Le plus général est celui où  $\theta_M$  et  $\theta_L$  varient : c'est le mouvement libre. Dans le cas où la charge est bloquée ( $n_L=0$ ), on déterminera la pulsation propre et l'amortissement relatif du moteur. On procédera de la même façon pour le moteur bloqué ( $n_M=0$ ), même si ce cas est académique, ne se produisant pas dans la réalité.

Plusieurs méthodes de calcul aboutissent au même résultat. Dans un premier temps, on calcule à partir des équations différentielles du système complet le mouvement libre. Les deux autres cas s'obtiennent par un passage à la limite des constantes de temps mécaniques.

### 6.5.2 Mouvement libre

On appelle mouvement libre l'état du système en boucle ouverte lorsqu'on a deux degrés de liberté, c'est-à-dire  $\theta_M$  et  $\theta_L$  sont libres.

A partir des équations différentielles (6.46) et (6.47), on obtient, après division de la première par  $T_M T_\theta$  et de la seconde par  $T_L T_\theta$ , puis par soustraction des deux :

$$(\ddot{\theta}_M - \ddot{\theta}_L) + \alpha_t \left( \frac{1}{T_M} + \frac{1}{T_L} \right) (\dot{\theta}_M - \dot{\theta}_L) + \frac{k_t}{T_\theta} \left( \frac{1}{T_M} + \frac{1}{T_L} \right) (\theta_M - \theta_L) = \frac{m_e}{T_\theta T_M} - \frac{m_r}{T_\theta T_L} \quad (6.54)$$

soit, après transformation de Laplace :

$$\begin{aligned} \theta_M(s) - \theta_L(s) &= \frac{1}{s^2 + \alpha_t \left( \frac{1}{T_M} + \frac{1}{T_L} \right) s + \frac{k_t}{T_\theta} \left( \frac{1}{T_M} + \frac{1}{T_L} \right)} \left( \frac{m_e(s)}{T_\theta T_M} - \frac{m_r(s)}{T_\theta T_L} \right) = \\ &= \frac{1}{s^2 + 2\delta_0 \omega_0 s + \omega_0^2} \left( \frac{m_e(s)}{T_\theta T_M} - \frac{m_r(s)}{T_\theta T_L} \right) \end{aligned} \quad (6.55)$$

où on a posé les définitions suivantes [13, sect. 7.3] :

- la pulsation propre du système en mouvement libre :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k_t}{T_\theta} \left( \frac{1}{T_M} + \frac{1}{T_L} \right)} \quad (6.56)$$

- le coefficient d'amortissement relatif en mouvement libre :

$$\delta_0 = \frac{\alpha_t}{2} \sqrt{\frac{T_\theta}{k_t} \left( \frac{1}{T_M} + \frac{1}{T_L} \right)} = \frac{\alpha_t}{2\omega_0} \left( \frac{1}{T_M} + \frac{1}{T_L} \right) = \frac{\alpha_t T_\theta}{2 k_t} \omega_0 \quad (6.57a)$$

soit

$$\alpha_t = 2 \delta_0 \sqrt{\frac{k_t T_M T_L}{T_\theta T_M + T_L}} \quad (6.57b)$$

La réponse indicielle du système ouvert en mouvement libre selon (6.55) à un saut de  $m_e$  ou  $m_r$ , est donnée par :

$$\theta_M(t) - \theta_L(t) = [1 - e^{-\delta_0 \omega_0 t} (\cos \omega t + \frac{\delta_0}{\sqrt{1-\delta_0^2}} \sin \omega t)] \frac{1}{k_t} \left( \frac{m_e}{1 + \frac{T_M}{T_L}} - \frac{m_r}{1 + \frac{T_L}{T_M}} \right) \quad (6.58)$$

où  $\omega$  est la pulsation réelle du système amorti :

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \delta_0^2} \quad (6.59)$$

*Remarques :*

- La solution (6.58) n'est valable que dans le cas d'un système sous-amorti, c'est-à-dire pour  $\delta_0 < 1$ .
- En régime établi, c'est-à-dire pour  $t \rightarrow \infty$ , on voit que

$$(\theta_M - \theta_L)_\infty = \frac{1}{k_t} \left( \frac{m_e}{1 + \frac{T_M}{T_L}} - \frac{m_r}{1 + \frac{T_L}{T_M}} \right) \quad (6.60)$$

Ainsi, dans le cas où  $m_e > m_r$ , la charge est toujours en retard sur le moteur (une fois le mouvement oscillatoire amorti), parce que le système dans son ensemble est en accélération positive.

### 6.5.3 Mouvement du moteur / charge bloquée

On suppose ici que la charge reste bloquée. Ceci peut arriver lorsque le couple transmis est inférieur au couple résistant (en valeurs absolues), et que celui-ci est un couple de friction. On a donc  $\dot{\theta}_L = \ddot{\theta}_L = 0$ . La pulsation propre, le coefficient d'amortissement relatif et la pulsation réelle s'obtiennent grâce à (6.56), (6.57) et (6.59) avec le passage à la limite  $T_L \rightarrow \infty$  :

$$\omega_{0M} = \sqrt{\frac{k_t}{T_\theta} \frac{1}{T_M}} \quad (6.61)$$

$$\delta_{0M} = \frac{\alpha_t}{2} \sqrt{\frac{T_\theta}{k_t} \frac{1}{T_M}} = \frac{\alpha_t}{2\omega_{0M}} \frac{1}{T_M} = \frac{\alpha_t T_\theta}{2k_t} \omega_{0M} \quad (6.62)$$

$$\omega_M = \omega_{0M} \sqrt{1 - \delta_{0M}^2} \quad (6.63)$$

### 6.5.4 Mouvement de la charge / moteur bloqué

On suppose ici que le moteur reste bloqué. On a donc  $\dot{\theta}_M = \ddot{\theta}_M = 0$ . La pulsation propre, le coefficient d'amortissement relatif et la pulsation réelle s'obtiennent grâce à (6.56), (6.57) et (6.59) avec le passage à la limite  $T_M \rightarrow \infty$  :

$$\omega_{0L} = \sqrt{\frac{k_t}{T_\theta} \frac{1}{T_L}} \quad (6.64)$$

$$\delta_{0L} = \frac{\alpha_t}{2} \sqrt{\frac{T_\theta}{k_t} \frac{1}{T_L}} = \frac{\alpha_t}{2\omega_{0L}} \frac{1}{T_L} = \frac{\alpha_t T_\theta}{2k_t} \omega_{0L} \quad (6.65)$$

$$\omega_L = \omega_{0L} \sqrt{1 - \delta_{0L}^2} \quad (6.66)$$

### 6.5.5 Relations entre pulsations propres et amortissement

On peut facilement vérifier les relations suivantes :

$$\omega_0^2 = \omega_{0M}^2 + \omega_{0L}^2 \quad (6.67a)$$

$$\delta_0^2 = \delta_{0M}^2 + \delta_{0L}^2 \quad (6.67b)$$

$$\left(\frac{\omega_{0M}}{\omega_0}\right)^2 = \frac{T_L}{T_M + T_L} \quad \left(\frac{\omega_{0L}}{\omega_0}\right)^2 = \frac{T_M}{T_M + T_L} \quad (6.67c)$$

$$\frac{k_t}{T_\theta} = T_M \omega_{0M}^2 = T_L \omega_{0L}^2 = \frac{T_M T_L}{T_M + T_L} \omega_0^2 \quad (6.67d)$$

### 6.5.6 Remarques sur le coefficient d'amortissement et la pulsation propre

La condition  $\delta_0 < 1$  est quasiment toujours remplie sur une installation réelle telle qu'une machine-outil. Selon l'ordre de grandeur de  $\delta_0$ , on parle de :

$$\delta_0 = \begin{cases} 0 \dots 0.1 & \text{amortissement faible} \\ 0.2 \dots 0.5 & \text{amortissement moyen} \\ 0.5 \dots 1 & \text{amortissement fort} \\ 0.7 & \text{amortissement relatif optimal (dépassement de 4\%)} \end{cases} \quad (6.68)$$

- La pulsation propre  $\omega_0$  augmente lorsque la rigidité  $k_t$  augmente.
- $\omega_0$  augmente lorsque  $T_M$  ou  $T_L$  diminue.
- L'amortissement relatif  $\delta_0$  augmente lorsque  $k_t$  diminue, c'est-à-dire lorsque  $\omega_0$  diminue.
- $\delta_0$  augmente lorsque l'inertie  $T_M$  ou  $T_L$  diminue.
- L'amortissement relatif à charge bloquée est nettement plus faible qu'en mouvement libre, car la pulsation propre est aussi plus faible. En effet, en général, on a :  $T_L \ll T_M$ .

## 6.6 DONNÉES NUMÉRIQUES

Les données numériques se rapportent au banc d'essai du Laboratoire d'Electronique Industrielle sur lequel ont été réalisées les vérifications pratiques. Les simulations numériques se basent sur ce système. Les données de l'installation sont résumées dans cette section.

Celles concernant le moteur à courant continu, la bobine d'induction (self de lissage) montée en série avec l'induit, le circuit d'induit total, le variateur à

courant continu, la définition du déplacement nominal, la résolution du capteur et l'hystérèse pour le réglage de courant se trouvent à la section 5.3.

- La constante de temps mécanique coté moteur est de :

$$T_M = 266 \text{ [ms]}$$

- La constante de temps mécanique coté charge est de :

$$T_L = 12 \text{ [ms]}$$

- Le coefficient de rigidité mesuré est de :

$$k_t = 10.4 \text{ [1]}$$

- Le coefficient d'amortissement relatif en mouvement libre est très délicat à déterminer. Différentes mesures sur le banc d'essai ont permis d'estimer cet amortissement à environ

$$\delta_0 = 0.4 \text{ [1]}$$

C'est la valeur qui sera utilisée par la suite comme référence pour la modélisation, le dimensionnement et le calcul des lieux de pôles.

- Il est loisible de calculer, grâce à la sect. 6.5 :

$$\omega_0 = 378.7 \text{ [rad/s]}$$

$$\omega_{0M} = 78.7 \text{ [rad/s]}$$

$$\omega_{0L} = 370.4 \text{ [rad/s]}$$

$$\delta_0 = 0.4 \text{ [1]}$$

$$\delta_{0M} = 0.0832 \text{ [1]}$$

$$\delta_{0L} = 0.3914 \text{ [1]}$$

$$\omega = 347.1 \text{ [rad/s]}$$

$$\omega_M = 78.43 \text{ [rad/s]}$$

$$\omega_L = 340.8 \text{ [rad/s]}$$

$$\alpha_t = 8.70 \cdot \delta_0 \text{ [1]}$$

- La période d'échantillonnage de référence est fixée à

$$T_E = 2.5 \text{ [ms]}$$

pour des raisons de temps de calcul, comme au chapitre 5. La condition (3.23), selon laquelle  $T_E \leq \pi/(4\omega_0)$ , n'est ainsi pas tout à fait remplie, mais on garantit néanmoins environ  $2\pi/\omega_0=6.6$  échantillons par période d'oscillation propre, ce qui est suffisant pour se rendre compte des phénomènes inhérents.

## 6.7 CHOIX DU RÉGLAGE

Le réglage du système oscillant à deux masses représenté à la fig. 6.2 peut se faire de différentes manières. Les contraintes pour le choix du type de réglage sont surtout d'origine externe, et principalement fonction des organes de mesures à disposition. La position peut être mesurée à l'aide d'un capteur incrémental côté moteur ( mouvement de rotation) et/ou d'une règle linéaire de précision côté charge (mouvement linéaire). La vitesse est calculée par différenciation de la position selon (3.7) ou mesurée à l'aide d'une dynamo tachymétrique.

Les combinaisons suivantes peuvent être rencontrées sur les machines-outils (m-o) :

Dynamo tachymétrique sur le moteur	Resolver ou capteur incrémental sur le moteur	Règle linéaire côté charge	Commentaires sur les configurations	
X	X		Config. classique pour m-o de moyenne précision ( $>1/100$ mm)	a)
X		X	Config. classique pour m-o de haute précision ( $<1/200$ mm)	b)
	X		Config. adéquate pour m-o de moyenne précision	c)
		X	Config. adéquate pour m-o de haute précision	d)
	X	X	Conf. adéquate pour m-o de très haute précision ( $<1/1000$ mm)	e)

Aujourd'hui, les deux premiers types sont encore les plus répandus. Le réglage de vitesse moteur y est donc analogique. La consigne de vitesse est fournie par une commande numérique à calculateur (CNC) qui effectue généralement uniquement un réglage digital proportionnel. Cette configuration n'est cependant pas suffisante pour les machines qui se veulent de très haute précision. Ce concept doit être modifié complètement. Ainsi, l'évolution des techniques de réglage aidant, un réglage digital complet s'impose de plus en plus. Les avantages d'une telle configuration sont multiples :

- suppression de la dynamo tachymétrique,
- possibilité de mesures on-line pour l'identification des paramètres du système, ce qui permet une
- mise en service facilitée (plus besoin de tourne-vis pour l'ajustage, au bruit, des régulateurs !)

Pour des machines-outils de moyenne précision, l'utilisation d'un capteur incrémental uniquement du côté du moteur est suffisante dans le cas où la torsion de l'arbre est acceptable (cas c). Si cette élasticité ne peut pas être négligée, une mesure du côté de la charge est nécessaire (d et e). Pour les machines de très haute précision, il est souhaitable de compenser les fréquences propres du système oscillant, ce qui nécessite alors une information complète côté moteur et côté charge (cas e).

Le Laboratoire d'Electronique Industrielle possède un banc d'essai d'un système oscillant à deux masses. A la base, c'est le même que celui, rigide, du chapitre 5, à la différence près qu'un arbre élastique est inséré entre moteur et charge. Un capteur incrémental, identique à celui côté moteur, y est implanté côté charge. Les combinaisons de réglage c, d et e sont possibles.

Indépendamment de la configuration de réglage retenue, le but final est l'obtention d'un comportement satisfaisant par rapport à un saut de consigne de position. La qualité de réglage en limitation de vitesse est plutôt secondaire, sans pour autant, bien sûr, n'avoir aucune importance : la stabilité doit tout de même être garantie. De ce fait, le concept général adopté dans ce chapitre pour le dimensionnement des régulateurs est le suivant :

- étude du système global en réglage de position, puis
- vérification de la stabilité du système réglé en limitation de vitesse.

A priori, on peut supposer qu'un système oscillant doit être traité avec plus de précautions qu'un système rigide. En effet, l'ordre du système est plus élevé, le nombre des paramètres aussi. Dans la réalité, ces derniers devant être mesurés ou éventuellement calculés, ils sont sujets à des erreurs. C'est pourquoi, il est utile d'accorder au modèle choisi et à son traitement la plus grande attention.

A la section 6.8, on présente le cas idéal du réglage de position analogique du système oscillant. On suppose disposer des valeurs instantanées de toutes les grandeurs mises en contre-réaction. Ce traitement se justifie dans le sens qu'il représente le cas idéal à atteindre.

Pour être plus proche de la réalité, on prendra en compte à la section 6.10 les organes de mesure de vitesse par différence par leur modèle pseudo-continu. Une étude théorique sur la sensibilité du système réglé aux variations des paramètres et des coefficients permettra de conclure qu'un réglage complet (contre-réaction globale) est peu adéquat pour un système réel (sect. 6.11). Les essais pratiques appuieront les thèses avancées.

Enfin, le nombre de grandeurs de contre-réaction mises en contre-réaction étant réduit, on ne pourra pas garantir un comportement du système réglé complètement exempt d'oscillations, même si les résultats sont très satisfaisants (sect. 6.12 et 6.13). On peut dès lors mettre en doute le caractère judicieux, ou nécessaire, de mesurer les grandeurs côtés moteur et charge. En effet, cette conception représente un luxe sur une machine-outil réelle, le facteur coût étant, en général, non négligeable. On verra à la section 6.14 qu'un réglage uniquement côté charge est satisfaisant dans le cas d'un amortissement suffisant dans l'arbre.

## **6.8 RÉGLAGE DE POSITION PAR MODE DE GLISSEMENT CONTINU, AVEC MESURES INSTANTANÉES DES VITESSES**

### **6.8.1 Introduction**

Le modèle retenu pour cette section représente celui du système oscillant seul. On suppose donc disposer des mesures instantanées de toutes les grandeurs d'état. Pour la mesure de position, cela est vrai de toute manière. Par contre, on ne peut disposer de la valeur instantanée de la vitesse que par l'utilisation d'un observateur de vitesse et d'accélération (§ 3.2.3). L'inconvénient en est une plus grande complexité matérielle (réglage continu) ou logicielle (réglage hybride).



Dans ce dernier cas, il faut, de plus, compter avec un bruit de quantification plus élevé que pour un organe de mesure (chap. 3).

Indépendamment de la faisabilité réelle, on néglige donc ici toute influence des organes de mesure.

Après la modélisation et la présentation de la structure de réglage de position au § 6.8.2, on détermine le système en mode de glissement au § 6.8.3, pour le cas général avec amortissement.

A amortissement nul, on montre analytiquement qu'un dimensionnement global du réglage de position (§ 6.8.4) permet d'obtenir aussi un système réglé stable en limitation de vitesse (§ 6.8.5).

### 6.8.2 Modélisation et structure de réglage de position

Les six équations différentielles (6.48) à (6.50) forment un système d'équations sur-défini,  $m_t$  étant une combinaison linéaire des autres grandeurs d'état (6.48f). Le système est d'ordre  $n_s=5$ . Le réglage se faisant côté charge, on laisse tomber (6.48d), ce qui permet de former l'équation d'état matricielle selon (1.8) :

$$\dot{\mathbf{x}}_s = \mathbf{A}_s \mathbf{x}_s + \mathbf{b}_s u + \mathbf{b}_{sv} v \quad (6.69)$$

$$y = \theta_L = \mathbf{c}_s^T \mathbf{x}_s \quad (6.70)$$

avec

$$\mathbf{x}_s = \begin{bmatrix} i \\ m_t \\ n_M \\ n_L \\ \theta_L \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{A}_s = \begin{bmatrix} -\frac{1}{T_a} & 0 & -\frac{\varphi}{r_a T_a} & 0 & 0 \\ \frac{\alpha_t \varphi}{T_M} & -\alpha_t \left( \frac{1}{T_M} + \frac{1}{T_L} \right) & \frac{k_t}{T_\theta} & -\frac{k_t}{T_\theta} & 0 \\ \frac{\varphi}{T_M} & -\frac{1}{T_M} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{T_L} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{T_\theta} & 0 \end{bmatrix} \quad (6.71a)$$

$$\mathbf{b}_s = \begin{bmatrix} \frac{1}{r_a T_a} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{b}_{sv} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\alpha_t}{T_L} \\ 0 \\ -\frac{1}{T_L} \\ 0 \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{c}_s^T = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1] \quad (6.71b)$$

La structure de réglage par mode de glissement globale, avec régulateur intégrateur, est représentée à la figure 6.4.

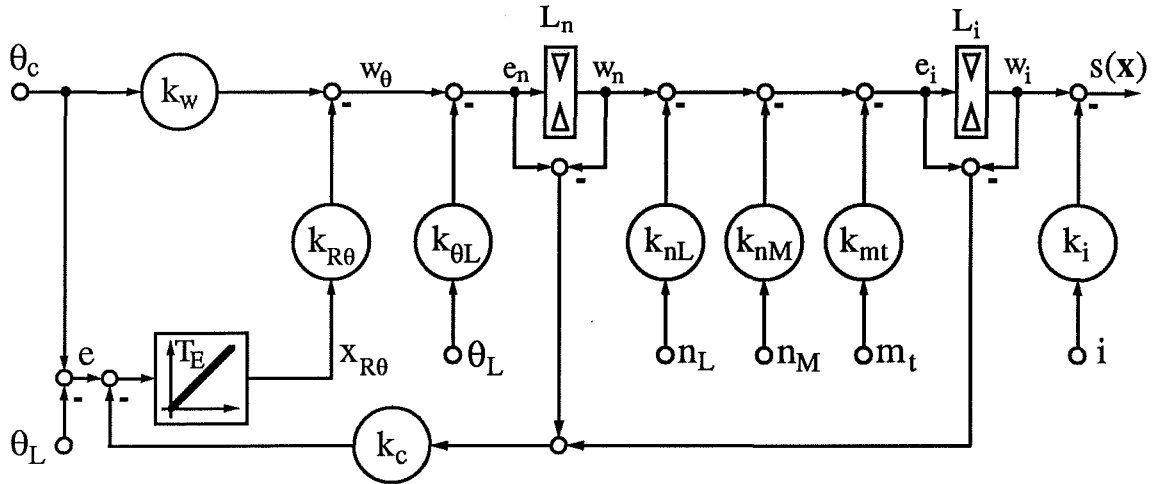


Fig. 6.4 Structure de réglage de position avec intégrateur

On constate que la contre-réaction du couple transmis  $m_t$  doit être prise en compte pour le réglage de vitesse. En effet, c'est à ce niveau que les oscillations entre moteur et charge seront compensées.

### 6.8.3 Mode de glissement hors limitation

Avec le vecteur-ligne de contre-réaction d'état

$$\mathbf{k}^T = [ \mathbf{k}_S^T \quad -\mathbf{k}_R ] = [ k_i \quad k_{mt} \quad k_{nM} \quad k_{nL} \quad k_{\theta L} \quad -k_R ] \quad (6.72)$$

on trouve la grandeur de commande équivalente  $u_{eq}$  selon (1.15a) :

$$\begin{aligned} \frac{k_i}{r_a T_a} u_{eq} = & \left[ \frac{k_i}{T_a} - \frac{\varphi}{T_m} (k_{mt} \alpha_t + k_{nM}) \right] i + \left[ k_{mt} \alpha_t \left( \frac{1}{T_M} + \frac{1}{T_L} \right) + \frac{k_{nM}}{T_M} - \frac{k_{nL}}{T_L} \right] m_t + \\ & + \left( \frac{k_i \varphi}{r_a T_a} - \frac{k_{mt} k_t}{T_\theta} \right) n_M + \frac{1}{T_\theta} (k_{mt} k_t - k_{\theta L}) n_L + \\ & + \frac{k_R}{T_i} (\theta_c - \theta_L) + \frac{1}{T_L} (-k_{mt} \alpha_t + k_{nL}) m_r + k_{w\theta} \dot{\theta}_c \end{aligned} \quad (6.73)$$

L'équation d'état en mode de glissement est :

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^* \mathbf{x} + \mathbf{b}_v^* m_r + \mathbf{b}_w^* \theta_c + \mathbf{b}_w^* \dot{\theta}_c \quad (6.74)$$

avec

$$A^* = \begin{bmatrix} a_{11}^* & a_{12}^* & -\frac{k_{mt}k_t}{k_i T_\theta} & \frac{k_{mt}k_t - k_{\theta L}}{k_i T_\theta} & -\frac{k_R}{k_i T_i} & 0 \\ \frac{\alpha_t \varphi}{T_M} & -\alpha_t \left( \frac{1}{T_M} + \frac{1}{T_L} \right) & \frac{k_t}{T_\theta} & -\frac{k_t}{T_\theta} & 0 & 0 \\ \frac{\varphi}{T_M} & -\frac{1}{T_M} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{T_L} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{T_\theta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{T_i} & 0 \end{bmatrix} \quad (6.75a)$$

où

$$a_{11}^* = \frac{-(k_{mt}\alpha_t + k_{nM})\varphi}{k_i T_M} \quad (6.75b)$$

$$a_{12}^* = \frac{k_{mt}\alpha_t}{k_i} \left( \frac{1}{T_M} + \frac{1}{T_L} \right) + \frac{k_{nM}}{k_i T_M} - \frac{k_{nL}}{k_i T_L} \quad (6.75c)$$

et

$$b_v^* = \begin{bmatrix} \frac{-(k_{mt}\alpha_t + k_{nL})}{k_i T_L} \\ \frac{\alpha_t}{T_L} \\ 0 \\ -\frac{1}{T_L} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad b_w^* = \begin{bmatrix} \frac{k_R}{k_i T_i} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{T_i} \end{bmatrix}; \quad b_w^* = \begin{bmatrix} \frac{k_w}{k_i} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.75d)$$

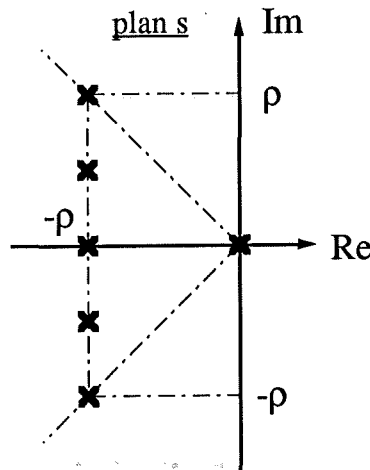
A ce stade des développements, il faut constater que les expressions deviennent lourdes et difficiles à manier. Ainsi, le calcul analytique des pôles, en tenant compte de l'amortissement dans l'arbre, est trop fastidieux. Le dimensionnement des coefficients ne peut plus être fait manuellement. Un programme ordinateur devient quasiment indispensable.

#### 6.8.4 Cas sans amortissement - dimensionnement

Lorsque l'amortissement  $\alpha_t$  est négligé, les expressions se simplifient quelque peu. Dans le but d'une étude analytique des pôles en limitation de vitesse, on effectuera un développement complet, malgré les remarques du paragraphe précédent.

Par un choix particulier des pôles en mode de glissement, les relations de Viète (§ 1.5.3) se simplifient. Par comparaison avec l'équation caractéristique, calculée à partir de (6.75a), on détermine les coefficients de contre-réaction d'état.

Dans notre cas, un petit dépassement sur la réponse indicielle est admis. Selon [7, § 12.2.2], il convient d'imposer des pôles alignés comme représenté à la figure 6.5.



**Fig. 6.5** Imposition des pôles pour le réglage de position avec intégrateur.

Après une quantité de calculs non négligeables, on obtient finalement :

$$k_i = cr_a T_a = 1 \quad (6.76a)$$

$$k_{mt} = \left[ \frac{45T_M T_\theta}{4k_t} \rho^2 - \left(1 + \frac{T_M}{T_L}\right) \right] k_i \quad (6.76b)$$

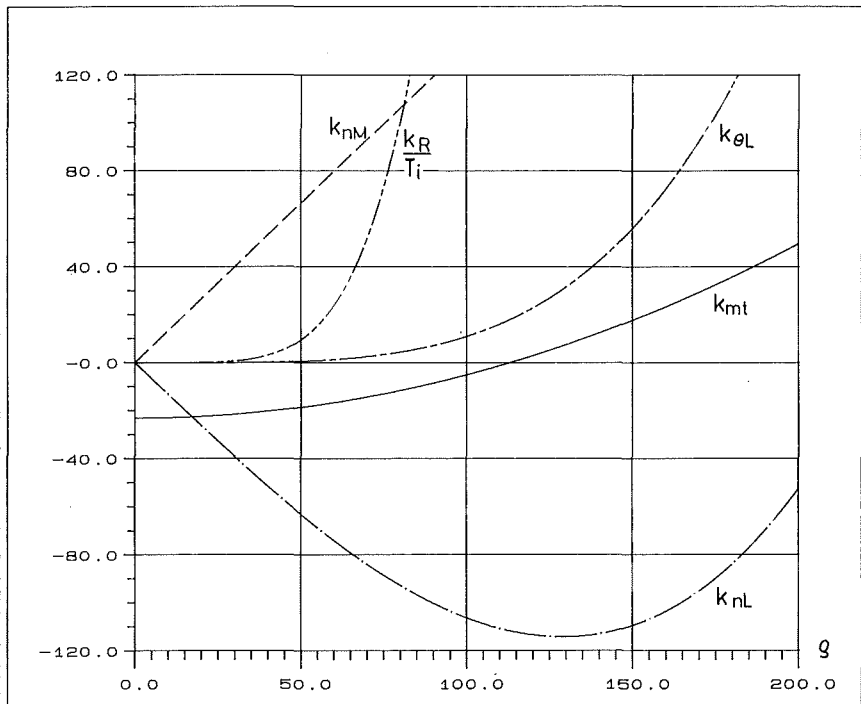
$$k_{nM} = 5\rho T_M k_i \quad (6.76c)$$

$$k_{nL} = \left( \frac{55\rho^3 T_M T_L T_\theta}{4k_t} - 5\rho T_M \right) k_i \quad (6.76d)$$

$$k_{\theta L} = \frac{9\rho^4 T_M T_L T_\theta^2}{k_t} k_i \quad (6.76e)$$

$$\frac{k_R}{T_i} = \frac{5\rho^5 T_M T_L T_\theta^2}{2k_t} k_i \quad (6.76f)$$

L'allure des coefficients en fonction de  $\rho$  est représentée à la fig. 6.6. Les paramètres utilisés sont ceux de la sect. 6.6



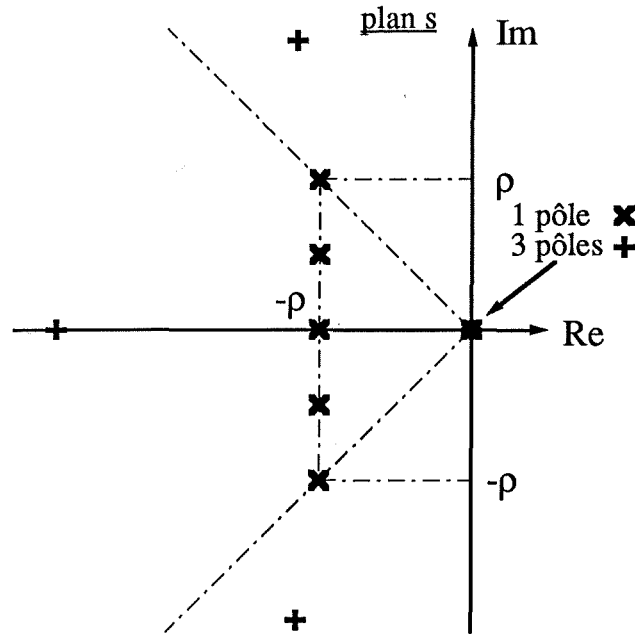
**Fig. 6.6** Variation des coefficients en fonction de la valeur absolue de la partie réelle  $\rho$  des pôles alignés, selon la fig. 6.5.

### 6.8.5 Système en limitation fixe de vitesse - cas sans amortissement

En limitation fixe de vitesse, respectivement en réglage de vitesse sans intégrateur, on peut calculer les pôles du système réglé en mode de glissement en fonction des coefficients dimensionnés globalement pour le réglage de position (§ 6.7.4). Après quelques calculs, on trouve

$$\left. \begin{aligned} p_{1,2,3} &= 0 \\ p_4 &= -2.723 \cdot \rho \\ p_{5,6} &= (-1.139 \pm j \cdot 1.938) \cdot \rho \end{aligned} \right\} \quad (6.77)$$

toujours avec l'amortissement nul. A la fig. 6.7, on représente ces pôles, en compagnie de ceux du réglage de position.



**Fig. 6.7** Pôles en réglage de position et en limitation de vitesse.  
 x : pôles imposés en réglage de position.  
 + : pôles en limitation de vitesse.

On en conclut que les coefficients d'un régulateur par mode de glissement continu peuvent être dimensionnés globalement pour le réglage de position, puisque les pôles en limitation de vitesse sont stables. Certes la composante imaginaire des deux pôles complexes est assez grande, mais peut être favorable à une réponse rapide en réglage de vitesse.

### 6.8.6 Choix des coefficients de limitation

Le choix des coefficients d'adaptation des limiteurs doit être effectué avec précaution. Lorsque le système est en limitation de vitesse et en mode de glissement, la sortie du limiteur de vitesse  $L_n$  est égale à

$$w_{nlim} = k_{nM}n_M + k_{nL}n_L + k_{mt}m_t + k_i i \quad (6.78)$$

En supposant un régime établi en limitation de vitesse, on a

$$\left. \begin{array}{l} n_M = n_L \\ m_t = m_r = m_e = \varphi i \end{array} \right\} \quad (6.79)$$

On en déduit qu'à couple résistant nul, la limitation de vitesse est assurée à une valeur  $n_{lim}$  si on choisit

$$w_{nlim} = k_{mn} n_{lim} \quad (6.80)$$

avec

$$k_{mn} = k_{nM} + k_{nL} \quad (6.81)$$

Par rapport à l'arbre rigide (§ 5.5.11), on voit que ce coefficient est différent.

## 6.9 STABILITÉ DU SYSTEME RÉGLÉ À CHARGE BLOQUÉE

### 6.9.1 Introduction

Pour assurer le bon fonctionnement du système réglé, il ne suffit pas de considérer la fonction de transfert suite à un saut de consigne. L'influence de la grandeur de perturbation est non négligeable, en particulier pour l'exemple d'application traité dans ce chapitre.

Dans le modèle retenu pour un axe d'une machine-outil, la perturbation est représentée par un couple résistant agissant sur la charge. Cette perturbation est représentative des forces résistantes agissant sur la table de la machine-outil. Elles sont essentiellement du type frottement sec et sont dues à la précontrainte des glissières et la force d'appui de l'outil sur la pièce pendant l'usinage.

Cette friction sur la charge peut provoquer son blocage : c'est le cas lorsque le couple transmis est plus petit que le couple résistant. Le système réglé peut donc prendre deux états différents :

- La charge bouge ( $n_L \neq 0$ ), le système est en mouvement libre. Dans ce cas, le modèle étudié jusqu'à maintenant est valable (sect. 6.3).
- La charge est bloquée ( $n_L = 0$ ). Le couple transmis  $m_t$  est égal au couple résistant  $m_r$ . Le système ne peut plus être décrit de la même façon : il y a réduction d'ordre. La fig. 6.8 montre le schéma-bloc du système à charge bloquée.

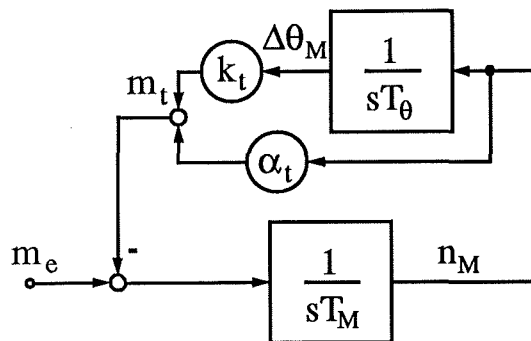


Fig. 6.8 Schéma-bloc du système oscillant à deux masses à charge bloquée.

Dans cette représentation, il n'y a plus de grandeur de perturbation à proprement parler. En fait, elle est cachée dans la grandeur d'état du couple transmis.

La grandeur à régler  $\theta_L$  n'y figure pas non plus, du fait qu'elle ne varie pas, puisque la charge est bloquée. Il est évident que le système ne peut pas rester indéfiniment dans cet état : c'est une phase transitoire. Lors du réglage du système, il y a changement de structure du système à régler. Il faut néanmoins garantir que l'état à charge bloquée soit stable.

Dans ce but, on va développer dans cette section les équations du système à charge bloquée (§ 6.9.2). Pour le cas d'un réglage de position par mode de

glissement continu idéal au sens de la sect. 6.8, on calcule analytiquement les pôles du système réglé à charge bloquée (§ 6.9.3).

Le cas du réglage par mode de glissement hybride, qui peut être traité par le biais du réglage d'état échantillonné, ne se prête pas au traitement analytique. Les pôles du système réglé à charge bloquée seront calculés numériquement à l'aide d'un programme spécialement écrit pour traiter ce cas.

## 6.9.2 Modélisation

Le système élastique à deux masses à charge bloquée est décrit par :

$$n_L = 0 \quad \text{et} \quad \frac{dn_L}{dt} = 0 \quad (6.82)$$

Il s'ensuit immédiatement, à partir des relations (6.48), les équations suivantes :

$$\frac{dm_t}{dt} = \frac{k_t}{T_\theta} n_M + \frac{\alpha_t}{T_M} m_e - \frac{\alpha_t}{T_M} m_t \quad (6.83a)$$

$$\frac{dn_M}{dt} = \frac{1}{T_M} (m_e - m_t) \quad (6.83b)$$

$$\frac{d\theta_M}{dt} = \frac{1}{T_\theta} n_M \quad (6.83c)$$

$$\frac{d\theta_L}{dt} = 0 \quad (6.83d)$$

avec

$$m_t = k_t(\theta_M - \theta_L) + \alpha_t n_M = m_r \quad (6.83e)$$

Pour éviter de redévelopper analytiquement toutes les équations matricielles, on peut constater qu'on obtient aussi le cas à charge bloquée en opérant le passage à la limite  $T_L \rightarrow \infty$  d'une part, et qu'on annule tous les termes dépendant de  $n_L$  d'autre part. En effet, une charge à constante de temps mécanique infinie ne bouge pas.

Moyennant cet artifice, la relation (6.73) pour la grandeur de commande équivalente, ainsi que les expressions des matrices du système en mode de glissement (6.75) restent valables. Bien sûr, on suppose toujours avoir une structure de réglage de position avec régulateur intégrateur sur  $\theta_L$ .

## 6.9.3 Pôles du système réglé en mode de glissement à charge bloquée

### 6.9.3.1 Cas général

En effectuant le passage à la limite pour  $T_L$ , on constate que la matrice de système en mode de glissement (6.48a) se simplifie passablement. Il est aisé de calculer l'équation caractéristique. On obtient :



$$\begin{aligned}
 P^*(s) = \det(s\mathbf{1} - \mathbf{A}^*) &= s^4 \left[ s^2 + s \left( \frac{(k_{mt}\alpha_t + k_{nM})\varphi}{k_i T_M} + \frac{\alpha_t}{T_M} \right) + \frac{k_t}{T_M T_\theta} \left( 1 + \frac{k_{mt}\varphi}{k_i} \right) \right] = \\
 &= s^4 [s^2 + sb + c]
 \end{aligned} \tag{6.84}$$

b et c étant définis implicitement. Les pôles à charge bloquée sont :

$$\left. \begin{aligned}
 p_{1,2,3,4} &= 0 \\
 p_{5,6} &= -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}
 \end{aligned} \right\} \tag{6.85}$$

Trois des pôles à l'origine sont dûs à  $n_L$ ,  $\theta_L$  (bloqués) et  $x_{R\theta}$  (qui intègre). Le quatrième est représentatif du mode de glissement. Les deux pôles  $p_{5,6}$  peuvent être réels ou complexes conjugués, selon les paramètres et coefficients. Différents cas particuliers sont brièvement évoqués ci-dessous.

### 6.9.3.2 Cas sans amortissement - pôles alignés

Dans le cas d'un dimensionnement des coefficients par imposition de cinq pôles alignés et en négligeant l'amortissement (§ 6.8.4), on obtient avec  $\varphi=1$  :

$$p_{5,6} = -\frac{5\rho}{2} \pm \sqrt{\frac{k_t}{T_L T_\theta} - 5\rho^2} \tag{6.86}$$

Les pôles sont conjugués complexes pour

$$\rho > \sqrt{\frac{k_t}{5T_L T_\theta}} = 166$$

et un des deux pôles réels devient positif (instable) pour

$$\rho < \sqrt{\frac{4k_t}{45T_L T_\theta}} = 110$$

Les valeurs numériques se rapportent au banc d'essai (sect. 6.6). On constate que pour garantir la stabilité à charge bloquée, il faudrait choisir  $\rho > 110$ . Or, pour cette valeur les coefficients de contre-réaction sont déjà très grands (voir fig. 6.6). Evidemment le cas est théorique, puisque, en particulier, l'amortissement est négligé. Pourtant, ce problème de contradictions entre valeurs des coefficients, stabilité en mouvement libre et stabilité à charge bloquée, apparaîtra d'une manière semblable pour le cas du réglage hybride.

### 6.9.3.3 Cas sans amortissement

Pour un amortissement nul,  $\alpha_t=0$ , on obtient :

$$p_{5,6} = -\frac{k_{nM}\varphi}{2k_i T_M} \pm \sqrt{\left(\frac{k_{nM}\varphi}{2k_i T_M}\right)^2 - \frac{k_t}{T_M T_\theta} \left(1 + \frac{k_{mt}\varphi}{k_i}\right)} \tag{6.87}$$

#### 6.9.3.4 Cas avec contre-réaction partielle

Lorsque les coefficients de contre-réaction  $k_{mt}$  et  $k_{nM}$  sont nuls, on obtient :

$$p_{5,6} = -\frac{\alpha_t}{2T_M} \pm \sqrt{\left(\frac{\alpha_t}{2T_M}\right)^2 - \frac{k_t}{T_M T_\theta}} \quad (6.88)$$

Quels que soient les paramètres du système à régler, ces pôles sont stables. L'amortissement absolu augmente avec  $\alpha_t$ . Cette caractéristique n'est valable que lorsqu'aucune grandeur mesurée côté moteur est mise en contre-réaction.

Cette constatation est aussi valable pour le cas du réglage hybride. Cela a son importance, puisque cette structure de réglage permet de contourner élégamment le problème de la stabilité à charge bloquée.

## 6.10 RÉGLAGE DE POSITION HYBRIDE COMPLET

### 6.10.1 Introduction

Le cas traité à la section 6.8 est plutôt académique. Le réglage d'une machine-outil n'est jamais réalisé d'une manière purement analogique. On étudiera par conséquent le cas où les réglages de vitesse et de position sont digitaux, le courant étant toujours réglé analogiquement par mode de glissement. C'est la structure hybride.

Le principe de réduction de l'ordre du système réglé en mode de glissement est appliqué (voir sect. 4.6), de la même manière que montré en détail pour le système rigide au § 5.7.8.

Les organes de mesures digitaux des vitesses moteur et charge (mesure moyenne sur une période d'échantillonnage) sont approchés par leur modèle pseudo-continu [voir (3.8)].

Ainsi, le système d'axe est traité en échantillonné par le programme *Réglage* (voir [18]), déjà utilisé au chapitre 5.

Les équations en continu du système à régler sont récapitulées au § 6.10.2. Les coefficients du régulateur échantillonné sont dimensionnés au § 6.10.3 par une imposition adéquate des pôles. L'amortissement absolu maximal est choisi en fonction de la valeur maximale des coefficients admissible.

La sensibilité de ce système réglé aux variations des paramètres, ainsi qu'aux variations des coefficients sera étudiée à la sect. 6.11.

### 6.10.2 Modélisation avec organes de mesure de vitesse

Les équations différentielles (6.48) à (6.50), propres au système, sont complétées ici par deux équations rendant compte de l'approximation pseudo-continue des organes de mesure digitaux de vitesse. Ainsi, selon (3.7), on a :

$$\frac{dn_{Mm}}{dt} = \frac{2}{T_E} (n_M - n_{Mm}) \quad (6.89)$$

$$\frac{dn_{Lm}}{dt} = \frac{2}{T_E} (n_L - n_{Lm}) \quad (6.90)$$

$n_{Mm}$  et  $n_{Lm}$  désignant les valeurs mesurées des vitesses réelles du moteur, respectivement de la charge.

L'ordre du système décrit en continu, pour le réglage par mode de glissement est alors de  $n_s=7$ , le vecteur de contre-réaction d'état étant défini par :

$$\mathbf{x} = [i \ m_t \ n_M \ n_{Mm} \ n_L \ n_{Lm} \ \theta_L]^T \quad (6.91)$$

Le principe de réduction d'ordre du système réglé hybride en mode de glissement étant acquis, on va directement passer au modèle, en continu, utilisé pour l'étude par le biais du réglage d'état échantillonné. Le courant étant admis, à un facteur près, égal à sa consigne  $w_i$ , on applique les relations (4.22) pour définir le sous-système.

Ainsi on obtient le système à régler (par une structure de réglage d'état) d'ordre  $n_s=6$  :

$$\dot{\mathbf{x}}_s = \mathbf{A}_s \mathbf{x}_s + \mathbf{b}_s w_i + \mathbf{b}_{sv} m_r \quad (6.92)$$

$$y = \theta_L = \mathbf{c}_s^T \mathbf{x}_s \quad (6.93)$$

avec

$$\mathbf{A}_s = \begin{bmatrix} -\alpha_t \left( \frac{1}{T_M} + \frac{1}{T_L} \right) & \frac{k_t}{T_\theta} & 0 & -\frac{k_t}{T_\theta} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{T_M} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{T_E} & -\frac{2}{T_E} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{T_L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{T_E} & -\frac{2}{T_E} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{T_\theta} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.94a)$$

$$\mathbf{x}_s = \begin{bmatrix} m_t \\ n_M \\ n_{Mm} \\ n_L \\ n_{Lm} \\ \theta_L \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{b}_s = \begin{bmatrix} \frac{\alpha_t \varphi}{k_i T_M} \\ \frac{\varphi}{k_i T_M} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{b}_{sv} = \begin{bmatrix} \frac{\alpha_t}{T_L} \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{T_L} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.94b)$$

$$\mathbf{c}_s^T = [ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 ] \quad (6.94c)$$

Un régulateur intégrateur sur la position de la charge est ajouté pour garantir une erreur statique nulle en régime établi. Le système réglé global est donc d'ordre  $n=n_s+1=7$ .

### 6.10.3 Choix des pôles

Le programme *Réglage* est utilisé par la suite pour effectuer le dimensionnement des coefficients du régulateur échantillonné.

Compte tenu des organes de mesure à valeur moyenne sur une période d'échantillonnage pour les vitesses, on est dans un cas de contre-réaction partielle, le vecteur-ligne correspondant étant :

$$\begin{aligned} \mathbf{k}^T &= [ k_{mt} \ k_{nM} \ k_{nMm} \ k_{nL} \ k_{nLm} \ k_{\theta L} \ -k_{R\theta} ] = \\ &= [ k_{mt} \ 0 \ k_{nMm} \ 0 \ k_{nLm} \ k_{\theta L} \ -k_{R\theta} ] \end{aligned} \quad (6.95)$$

La méthode d'imposition des pôles permet le choix de  $n_a=n-2=5$  pôles. Les deux pôles restants sont fonction des premiers, ainsi que des coefficients  $k_{nM}$  et  $k_{nL}$  imposés à zéro.

A priori, un comportement optimal avec un faible dépassement est obtenu par l'imposition de cinq pôles alignés comme représentés à la fig. 6.5. Le choix de la valeur réelle  $\rho$  des pôles se base ici sur les mêmes arguments qu'au § 5.5.6 : compte tenu de la quantification des mesures, une valeur maximale des coefficients est acceptée. Ainsi, pris indépendamment, il est loisible de définir les valeurs limites suivantes :

$$\left. \begin{aligned} k_{nMmmax} = k_{nLmmax} &= \frac{10\%}{\tilde{n}_{1q}} \approx 45.66 \\ k_{\theta Lmax} &= \frac{10\%}{\theta_{\Delta}} \approx 144 \\ k_{mtmax} &= \frac{10\%}{2k_t\theta_{\Delta}} \approx 6.93 \end{aligned} \right\} \quad (6.96)$$

Le facteur  $1/2$  dans l'estimation de  $k_{mtmax}$  provient du fait que dans l'algorithme de réglage, le couple transmis est calculé selon  $m_t=k_t(\theta_M-\theta_L)$ . Les erreurs de quantification sur  $\theta_M$  et  $\theta_L$  étant statistiquement indépendantes, le bruit s'ajoute.

*Remarques :*

- Cette manière de fixer des valeurs maximum indépendantes pour chaque coefficient, a pour conséquence que le bruit total maximum sur la commande est la somme des contributions partielles. Vu le nombre de contre-réactions ( $m_t, n_{Mm}, n_{Lm}, \theta_L$ ), il se pourrait que le bruit maximum soit inadmissible. On

verra ci-dessous une approche plus judicieuse pour l'estimation du bruit sur la commande.

- Dans le cas d'un hypothétique réglage continu, les mêmes précautions quant aux valeurs maximum des coefficients doivent être prises. Dans ce cas, c'est le bruit de mesure tel que le bruit de la dynamo ou autres perturbations, qui ne doivent pas se propager d'une manière disproportionnée sur la commande.
- Toujours pour le cas continu, on constate, en analysant la figure 6.6 qu'il peut être difficile, voire impossible de déterminer une valeur de  $\rho$  qui satisfasse simultanément toutes les conditions.
- Par extrapolation du cas continu, on peut supposer que l'allure générale de la variation des coefficients en fonction de  $\rho$  (imposé en continu, mais pour le régulateur échantillonné) est semblable. Différents dimensionnement effectués le confirment.

#### 6.10.4 Bruit sur la commande

Le bruit total sur la commande peut être estimé un peu plus rigoureusement que ci-dessus en (6.96).

Pour le réglage échantillonné, la commande est élaborée selon :

$$u[k] = k_{w\theta}\theta_c[k] - k_{mt}k_t(\theta_M[k] - \theta_L[k]) - k_{nMm}n_{Mm}[k] - k_{nLm}n_{Lm}[k] - k_{\theta L}\theta_L[k] + k_{R\theta}x_{R\theta}[k] \quad (6.97)$$

Le bruit de quantification (indice  $q$ ) s'ajoute aux mesures idéales non-bruitées (indice  $i$ ), soit :

$$\left. \begin{aligned} \theta_M[k] &= \theta_{Mi} + \theta_{Mq} \\ \theta_L[k] &= \theta_{Li} + \theta_{Lq} \\ n_{Mm}[k] &= n_{Mmi} + n_{Mmq} \\ n_{Lm}[k] &= n_{Lmi} + n_{Lmq} \end{aligned} \right\} \quad (6.98)$$

avec les erreurs de quantification sur les vitesses calculées au § 3.2.2 :

$$\left. \begin{aligned} n_{Mmq} &= \theta_{Mq} \frac{T_\theta}{T_E} \\ n_{Lmq} &= \theta_{Lq} \frac{T_\theta}{T_E} \end{aligned} \right\} \quad (6.99)$$

et les valeurs maximales pour les erreurs de quantification sur les mesures de position :

$$|\theta_{Mqmax}| = |\theta_{Lqmax}| = \theta_{\Delta} = 1 / N_{capn} \quad (6.100)$$

La composante de bruit sur la commande peut alors être exprimée par :

$$u_q = (-k_{mt}k_t - k_{nMm} \frac{T_\theta}{T_E}) \cdot \theta_{Mq} + (k_{mt}k_t - k_{nLm} \frac{T_\theta}{T_E} - k_{\theta L}) \cdot \theta_{Lq} - k_{R\theta} \cdot \theta_{Lq[k-1]} \quad (6.101)$$

Les deux sources de bruit, côtés moteur et charge, sont à considérer comme statistiquement indépendantes. Ainsi, le bruit maximal instantané sur la commande est donné par :

$$u_{qmax} = ( | -k_{mt}k_t - k_{nMm} \frac{T_\theta}{T_E} | + | k_{mt}k_t - k_{nLm} \frac{T_\theta}{T_E} - k_{\theta L} | + | k_{R\theta} | ) \cdot \theta_\Delta \quad (6.102)$$

*Remarques :*

- Pour minimiser le bruit maximum sur la commande, il faut donc minimiser chaque terme de (6.102) individuellement.
- Un calcul semblable pour le cas continu montre, en appliquant les relations (6.76), qu'un minimum existe pour cette fonction.
- Pour le cas échantillonné, avec modélisation comprenant deux organes de mesure, il ne peut pas être trouvé de minimum pour  $u_{qmax}$  dans un domaine acceptable de  $\rho$ . En fait,  $u_{qmax}$  diminue avec  $\rho$  qui augmente, ceci au moins jusqu'à  $\rho=170$ . Pour des valeurs plus grandes, le réglage devient instable : un pôle réel, non-imposable, devient négatif.

### 6.10.5 Dimensionnement des coefficients

Malgré le fait que toutes les mesures sont mises en contre-réaction, on a à faire à une contre-réaction d'état partielle : les vitesses réelles  $n_M$  et  $n_L$  ne sont pas en contre-réaction. De ce fait, le choix des pôles n'est pas absolument libre. En fait, pour un choix de cinq pôles alignés selon la fig. 6.5, tous les pôles ne sont stables que pour  $\rho=0\dots170$  (pour l'exemple numérique sect. 6.6, avec  $T_E=2.5$  ms). Pour  $\rho=148$ , on trouve :

$$k_{mt} = -6.634$$

$$k_{nMm} = 33.17$$

$$k_{nLm} = -8.590$$

$$k_{\theta L} = 12.74$$

$$k_{R\theta} = 1.004$$

$$k_{w(pi=-120)} = 3.885$$

$$k_{w(pi=-148)} = 3.246$$

Les deux pôles non imposables se trouvent alors en :

$$p_6 = -120$$

$$p_7 = -800$$

$p_7 = -2/T_E$  étant dû à un organe de mesure de vitesse.

*Remarque* : en limitation de vitesse, les pôles sont en :

$$p_{1,2} = -304 \pm j \cdot 104 = -2.05\rho \pm j \cdot 0.70\rho$$

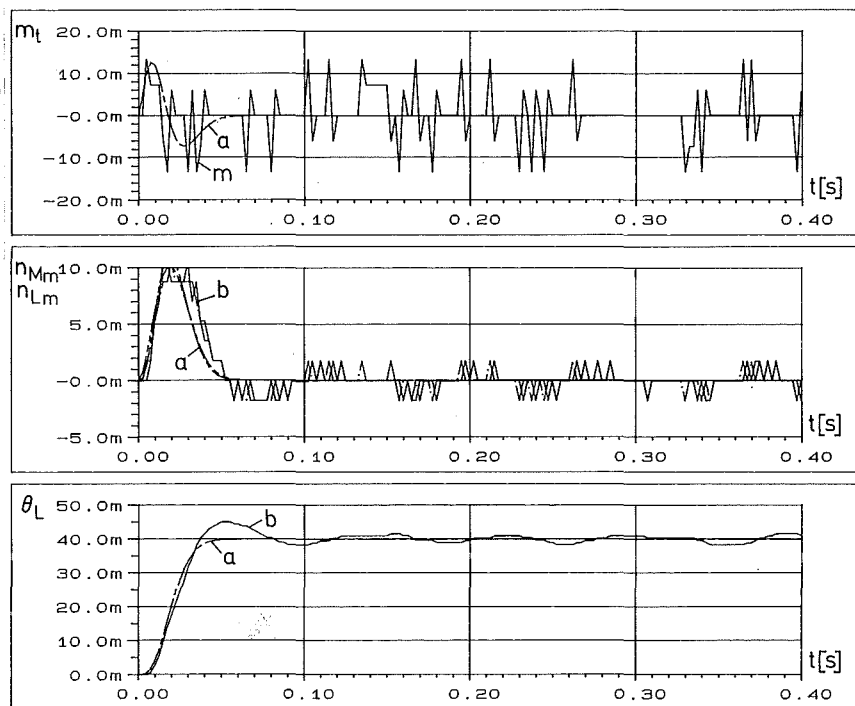
$$p_{3,4} = -125 \pm j \cdot 252 = -0.85\rho \pm j \cdot 1.70\rho$$

$$p_5 = -800$$

et assurent donc une bonne stabilité.

### 6.10.6 Essais sur banc

Contrairement aux simulations numériques, les essais sur banc ne sont pas concluants. A couple résistant nul, le système réglé est à la limite de l'instabilité (fig. 6.9a). A noter que pour les mesures sur banc, le même programme d'application *IdMesReg* qu'au chapitre 5 a été utilisé. Le couple transmis mesuré est très perturbé. Un bruit conséquent se superpose à la grandeur à régler  $\theta_L$  : il est de l'ordre de 5‰. Pourtant, le calcul du bruit maximum sur la commande selon (6.102) fournit  $u_{q\max} = 5.3\%$ , ce qui est par ailleurs confirmé par les mesures. Le bruit sur  $\theta_L$  ne s'explique donc pas par le bruit de quantification sur la commande. On verra à la fin de ce paragraphe les causes réelles.

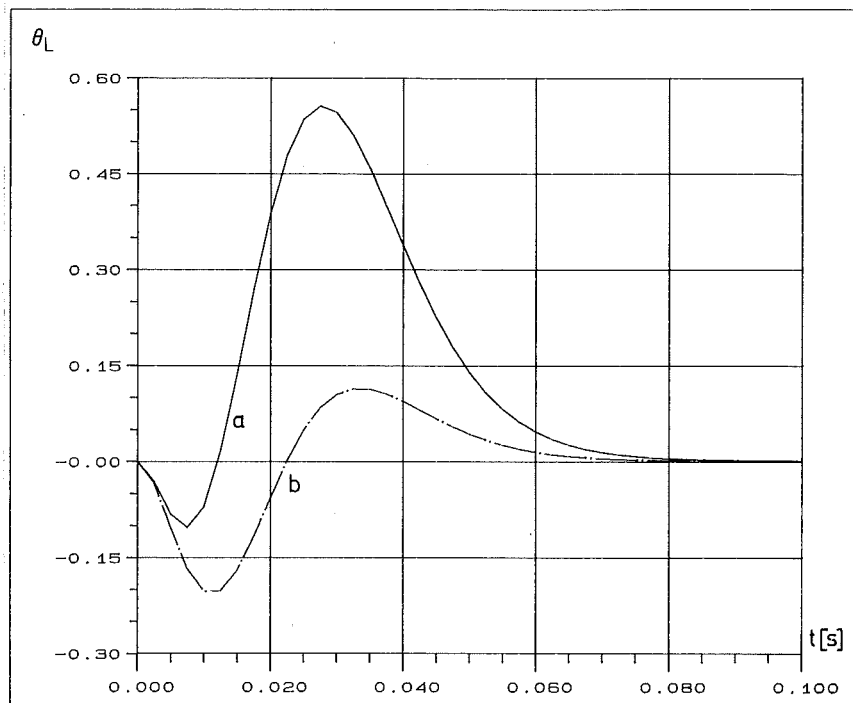


**Fig. 6.9a** Réponses indicielles avec réglage par mode de glissement hybride  
 a) simulation ( $t_m \approx 33$  ms, pas de dépassement)  
 b) mesures sur banc  
 $k_{m_t} = -6.634$ ,  $k_{n_{Mm}} = 33.17$ ,  $k_{n_{Lm}} = -8.590$ ,  $k_{\theta_L} = 12.74$ ,  $k_{R\theta} = 1.004$ ,  
 $k_{w(z_i)} = 3.885$ ,  $T_E = 2.5$  ms.

D'autres dimensionnements ont été effectués en variant les pôles imposés, le coefficient d'amortissement relatif pour la modélisation, ou la période d'échantillonnage. Dans aucun cas un réglage satisfaisant sans bruit sur  $\theta_L$  (sur banc) n'a pu être déterminé.

La figure 6.9b représente, en simulation, la réponse indicielle suite à un saut de la perturbation. Les déviations maximum sont très grandes, même avec intervention directe sur le régulateur du couple résistant (courbe b). Cette structure de réglage n'est donc pas favorable du point de vue du comportement face aux sauts de couple résistant.

Physiquement, un tel saut n'est pas applicable dans la réalité sur le banc d'essais. En effet, le couple résistant est réalisé par un frein à disque électromagnétique. La perturbation est donc une friction pure. Il n'est dès lors pas possible d'effectuer un saut de couple à charge arrêtée.



**Fig. 6.9b** Réponses indicielles suite à un saut de couple (simulation).

a)  $k_v=0$  ( $t_r \approx 80$  ms, déviation max.  $\approx 55\%$ )

b)  $k_{v(xR)}$  ( $t_r \approx 80$  ms, déviation max.  $\approx -20\%$ )

$k_{mt}=-6.634$ ,  $k_{nMm}=33.17$ ,  $k_{nLm}=-8.590$ ,  $k_{\theta L}=12.74$ ,  $k_{R\theta}=1.004$ ,  
 $k_{w(zi)}=3.885$ ,  $T_E=2.5$  ms.

Par contre, il est toujours possible d'appliquer ce couple de friction. On constate que le comportement devient franchement instable. Ce fait est moins banal qu'il n'y paraît. En fait, il faut analyser le système par un autre biais. Etant donné qu'en régime établi à perturbation nulle, un bruit est présent sur la position de la charge, cela signifie que celle-ci est perpétuellement en mouvement. Ainsi, dès que le frein est bloqué, le système entre transitoirement dans



l'état à charge bloquée tel que défini à la sect. 6.9. Il y a changement de structure. On peut calculer les pôles du système réduit par un calcul numérique :

$$p_{1,2,3} = 0 \quad ; \quad p_4 = -114 \quad ; \quad p_5 = -608 \quad ; \quad p_6 = 256 \quad ; \quad p_7 = -800$$

Le pôle  $p_6$  étant positif, le système réglé à charge bloquée est bel et bien instable. Les instabilités observées sur le banc sont donc "normales". Remarquons qu'il ne suffit pas de choisir une autre imposition des pôles pour le dimensionnement des coefficients : pour toute valeur de  $\rho$  assurant une stabilité en mouvement libre (selon le § 6.10.5 pour  $\rho=0\dots170$ ), le système est instable à charge bloquée.

Même à mâchoires (du frein) écartées, on ne peut garantir un couple résistant complètement nul. En effet, il subsiste toujours un léger couple de frottement visqueux dû aux roulements. Les phénomènes d'instabilités peuvent donc aussi apparaître sur le banc, mais à moindre mesure, lorsque le couple résistant est quasi nul. On peut parler de *micro-instabilités*. Cela explique le bruit assez grand (5 ‰) sur la grandeur à régler, observable à la fig. 6.9a : dès que la charge s'arrête, le système réglé devient instable. La charge est donc "condamnée" à bouger, à osciller autour de sa consigne.

De plus, on peut montrer que la sensibilité du système réglé aux variations des paramètres et coefficients est relativement élevée pour cette structure de réglage (sect. 6.11). Elle peut être considérablement réduite en supprimant la contre-réaction du couple transmis (sections 6.12 et 6.13). C'est d'autant plus judicieux, que cela permet d'obtenir une stabilité aussi à charge bloquée.

## 6.11 SENSIBILITÉ DU RÉGLAGE DE POSITION COMPLET

### 6.11.1 Introduction

Le système défini à la section précédente est d'ordre 6, sans compter l'intégrateur. Il est bien connu qu'un système réglé est, en principe, d'autant plus sensible aux variations des paramètres et des coefficients qu'il est complexe.

Le but des paragraphes suivants est d'estimer cette sensibilité.

Ainsi, suite au dimensionnement de la sect. 6.10, on va au § 6.11.2 étudier la variation des pôles en fonction de la variation du coefficient d'amortissement relatif  $\delta_0$ , de la rigidité  $k_t$  et du rapport  $T_M/T_L$ . Cette étude est importante du fait qu'une erreur de calcul ou d'estimation des paramètres est inévitable. Souvent, dans le cas des entraînements réglés, on ne peut déterminer les constantes de temps mécaniques qu'avec une précision de l'ordre de  $\pm 10$  à 20%. Pour un système élastique, la rigidité, si elle n'est pas calculable, est très difficilement identifiable avec précision [9]. De plus, ce paramètre ( $k_t$ ) varie dans le cas d'une machine-outil en fonction de la position de la table où est posée la pièce à usiner. La masse de la pièce influence d'ailleurs aussi  $T_L$ .

L'amortissement du système oscillant est de loin le paramètre le plus difficilement mesurable, identifiable ou calculable. Il peut dépendre fortement de la

température de l'installation et, toujours pour la machine-outil, de l'état du film d'huile sur les glissières (dépendant du service d'entretien d'une part, et des mouvements effectués dans le passé proche), de la précontrainte des glissières et aussi de la position de la table (longueur de vis variable).

La sensibilité du système réglé aux variations des coefficients, présentée au § 6.11.3, peut sembler a priori superflue, puisque ces coefficients sont implantés tels quels et en virgule flottante, dans le calculateur élaborant l'algorithme de réglage. Cependant, le problème de la sensibilité des pôles à la variation des coefficients n'est pas dissociable du problème de la sensibilité des pôles au bruit sur les variables [15, chap. 5 et 6]. Et c'est précisément ce dernier problème qui nous intéresse. L'approche directe consistant à étudier la sensibilité au bruit sur les variables est relativement compliquée et ne fournit pas des résultats directement exploitables [15]. Par ailleurs, cette méthode n'est pas adaptée pour tout type de régulateurs. Il est par conséquent intéressant d'étudier ce problème par le biais d'un autre. Le bruit de calcul est effectivement lié à la variation des coefficients puisque les deux grandeurs sont multipliées et donc bruitées.

### 6.11.2 Sensibilité aux variations de paramètres

Récapitulons : le procédé utilisé pour l'étude de la sensibilité des pôles du système réglé aux variations des paramètres du système à régler est le suivant :

- définition d'un système de référence, ou nominal, selon les valeurs de la section 6.6 ( $\delta_0=0,4$ ),
- prise en compte des organes de mesure digitaux par leur approximation pseudo-continue,
- supposition que le système est en mode de glissement, ce qui permet le traitement par le réglage d'état,
- dimensionnement des coefficients d'un régulateur d'état échantillonné avec imposition de 5 pôles alignés selon § 6.10.5,
- calcul des pôles du système réglé en boucle fermée (échantillonné) avec variation, en général de 50% à 200%, de la valeur nominale du paramètre,
- représentation des pôles dans le plan  $s$  avec paramètre variable : c'est le lieu des pôles.

Dans l'ordre, on représente aux figures 6.10 à 6.12 le lieu des pôles pour la variation de  $\delta_0$ ,  $k_t$  et du rapport  $T_M/T_L$  (la somme étant constante). Les commentaires suivront au § 6.11.4.

*Remarque* : pour les trois cas, le septième pôle se trouve en  $p_7=-800=-2/T_E$ . Il est dû à un organe de mesure de vitesse.

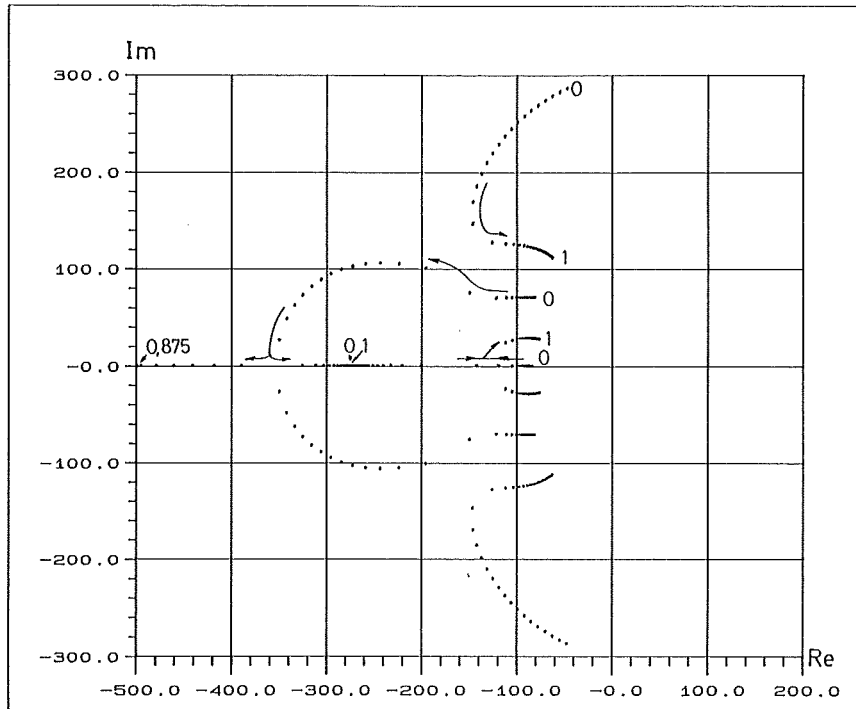


Fig. 6.10 Lieu des pôles pour  $\delta_0 = 0 \dots 0,4 \dots 1$  (par pas de 0.025)

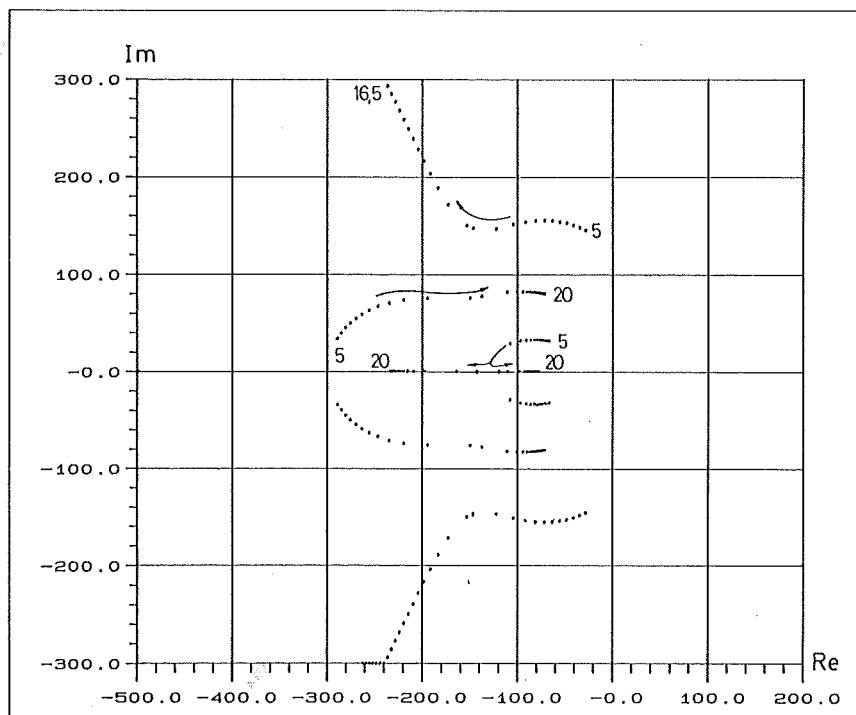


Fig. 6.11 Lieu des pôles pour  $k_t = 5 \dots 10,4 \dots 20$  (par pas de 0.5)

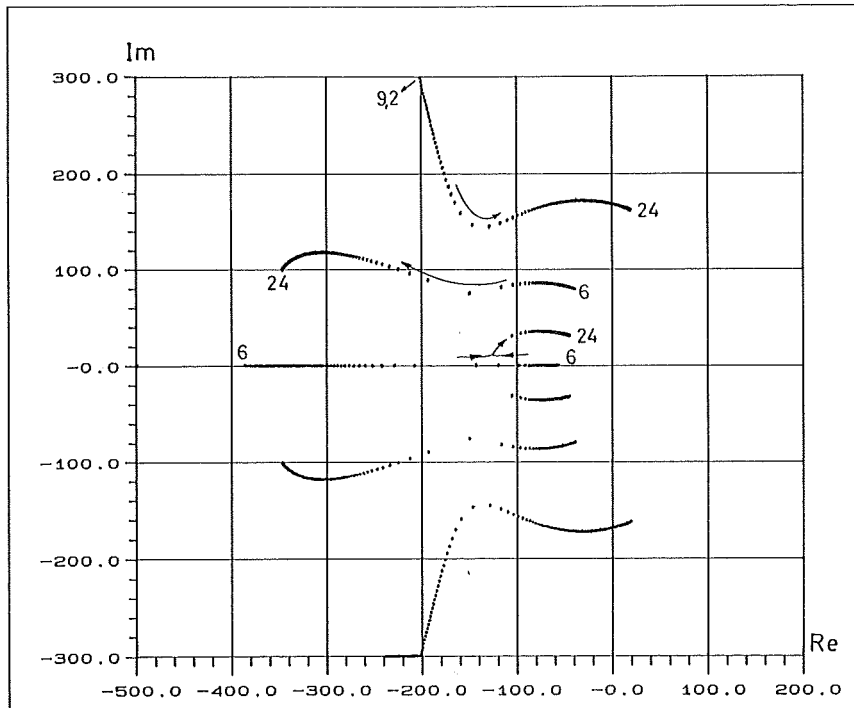


Fig. 6.12 Lieu des pôles pour  $T_L = 6 \dots 12 \dots 24$  ms et  $T_M = 278 - T_L$  ms (par pas de 0.1 ms)

### 6.11.3 Sensibilité aux variations des coefficients

Le procédé utilisé pour déterminer le lieu des pôles relatif à la variation de chaque coefficient est identique à celui utilisé pour la variation des paramètres (§ 6.11.2). Le cas pour chaque coefficient est représenté aux figures 6.13 à 6.18.

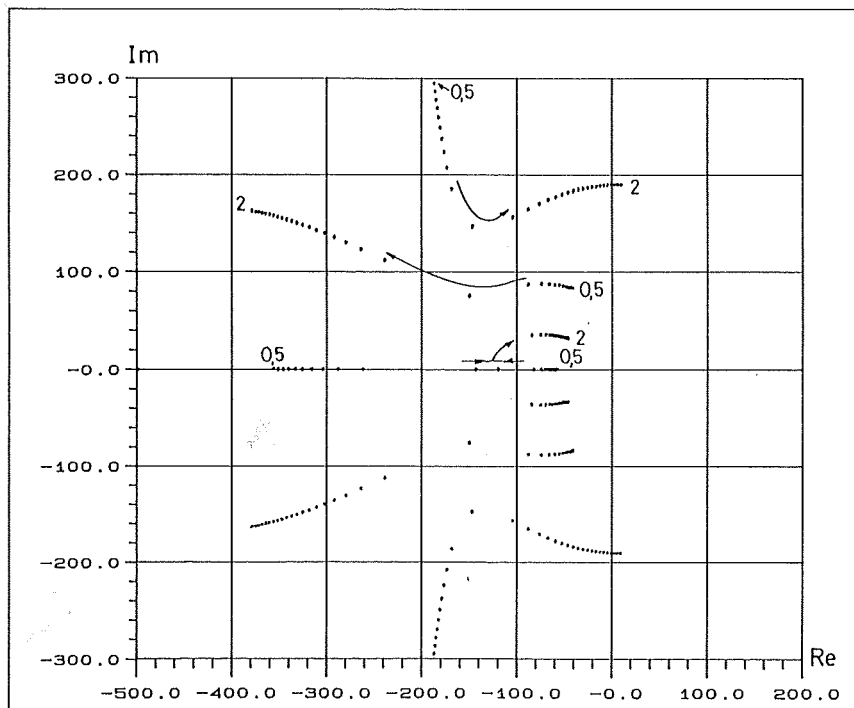


Fig. 6.13 Lieu des pôles pour  $k_{mt} = -13.53 \cdot (0,5 \dots 2)$  (par pas de 5%)

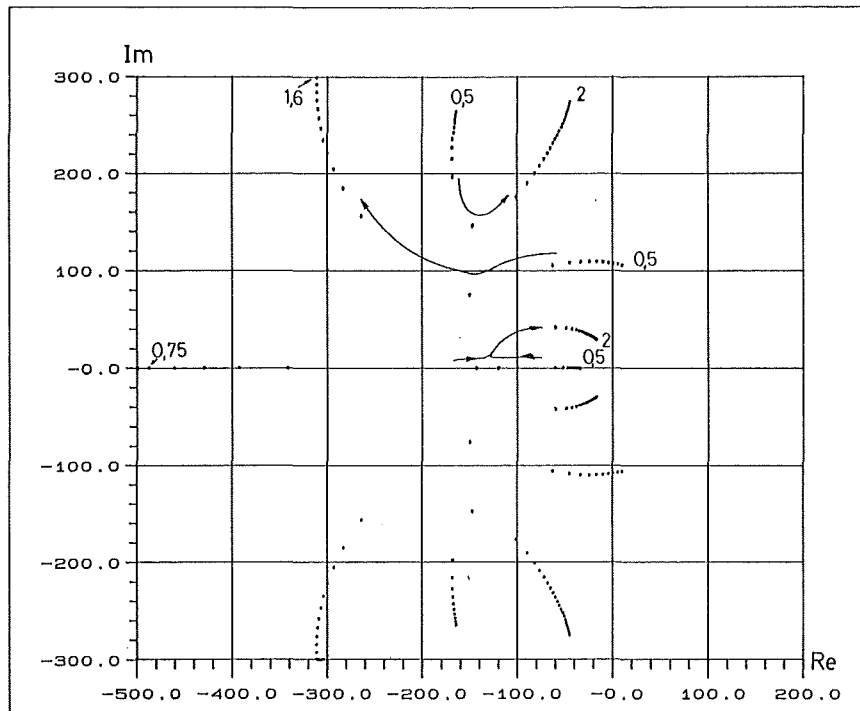


Fig. 6.14 Lieu des pôles pour  $k_{nMm} = 25.28 \cdot (0,5...2)$  (par pas de 5%)

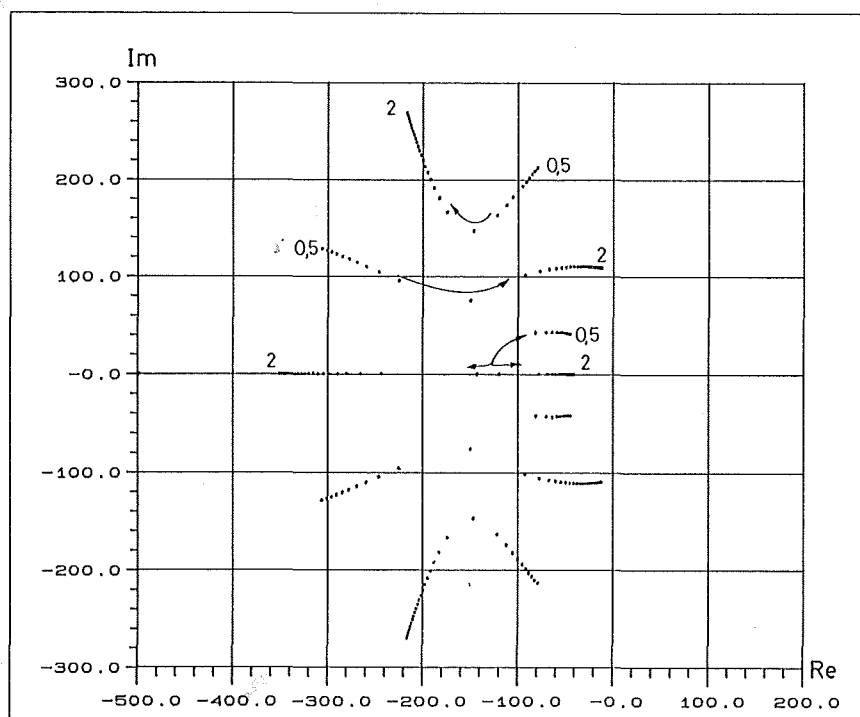


Fig. 6.15 Lieu des pôles pour  $k_{nLm} = -15.20 \cdot (0,5...2)$  (par pas de 5%)

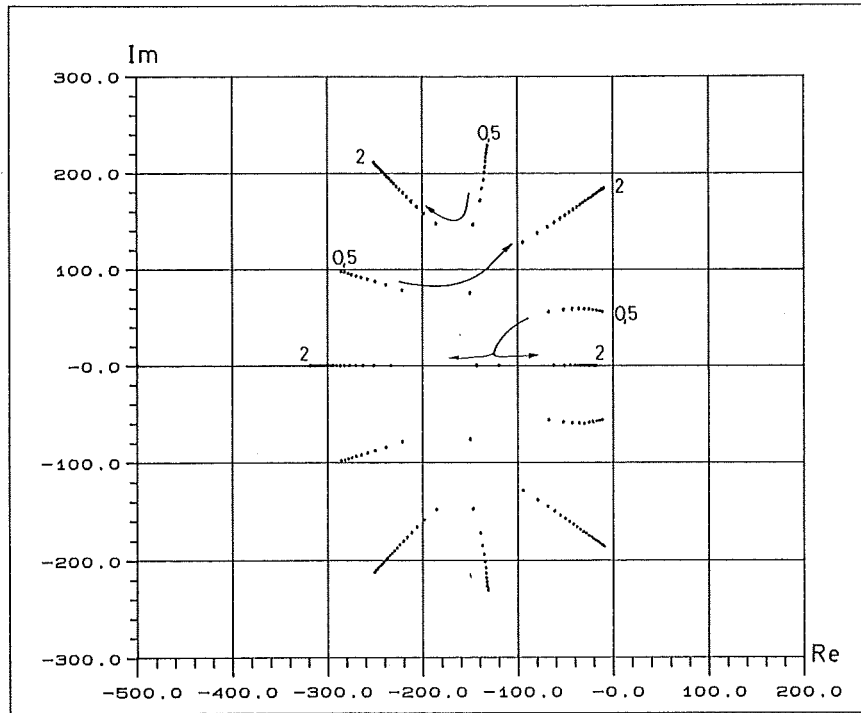


Fig. 6.16 Lieu des pôles pour  $k_{\theta L} = 3.434 \cdot (0,5 \dots 2)$  (par pas de 5%)

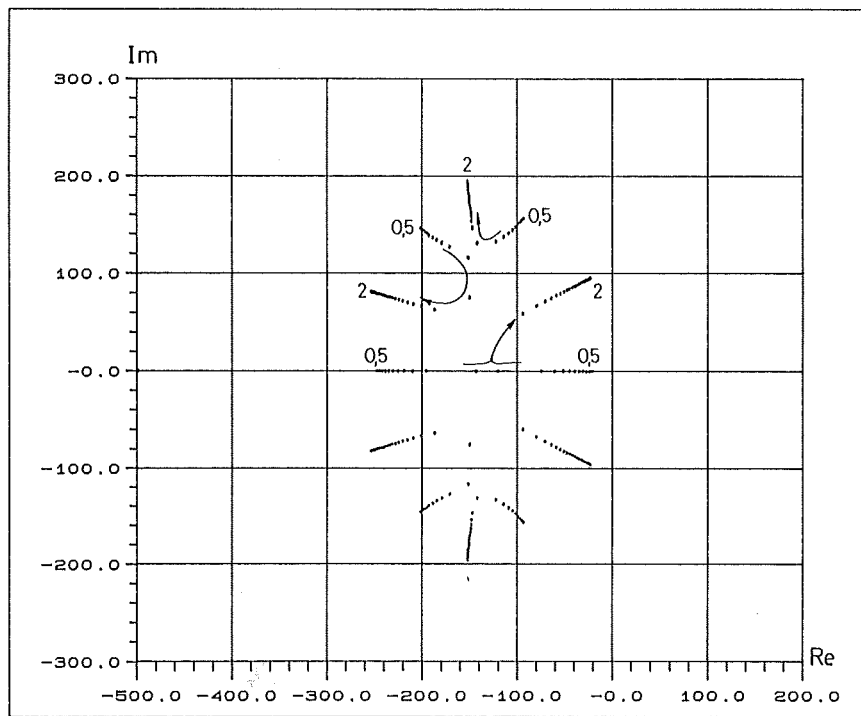
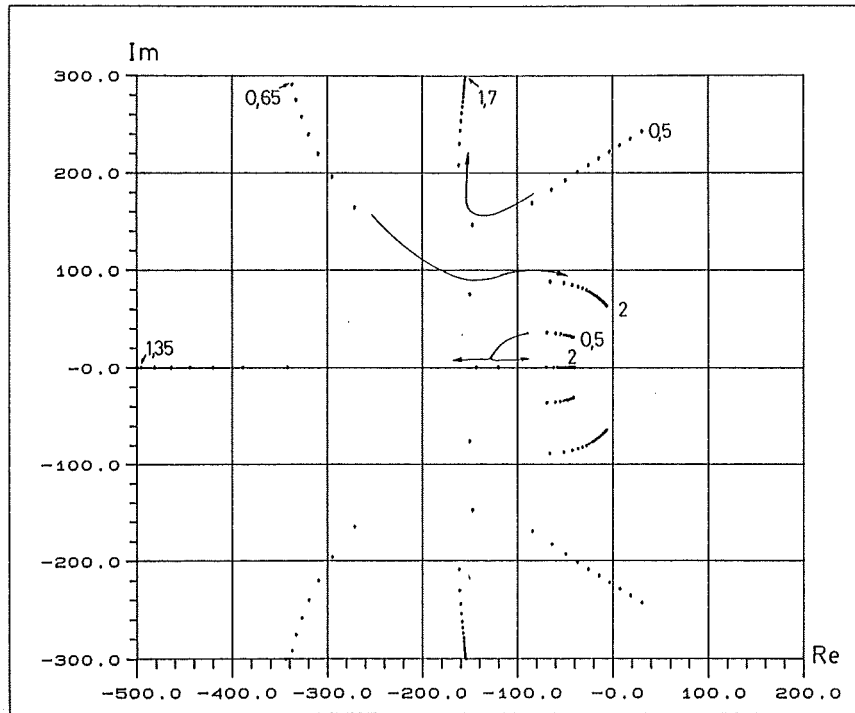


Fig. 6.17 Lieu des pôles pour  $k_{\theta R} = 0.1858 \cdot (0,5 \dots 2)$  (par pas de 5%)



**Fig. 6.18** Lieu des pôles pour  $k_i = 1 \cdot (0,5...2)$  (par pas de 5%)

*Remarque :* pour tous les cas, le septième pôle se trouve en  $p_7 = -800 = -2/T_E$ . Il est dû à un organe de mesure de vitesse.

Le cas de la fig. 6.18 est particulier. En effet,  $k_i$  n'est pas à proprement parlé un coefficient de contre-réaction du réglage d'état, mais celui du réglage par mode de glissement du courant. Avec le modèle d'état utilisé, ce coefficient représente le facteur de transfert entre la commande  $w_i$  et le courant réel  $i$ . En d'autres termes, la sensibilité par rapport à ce coefficient représente, somme toute, l'addition des sensibilités face aux variations simultanées de tous les autres coefficients.

#### 6.11.4 Discussion des lieux des pôles

Les figures présentées aux deux paragraphes précédents méritent différents commentaires :

- Il faut tout d'abord remarquer qu'une étude similaire (non reportée dans cette thèse) a été effectuée pour le cas du réglage par mode de glissement continu avec modélisation du système à régler avec mesures instantanées des vitesses (section 6.8). Pour une imposition initiale de la même configuration de pôles alignés, tous les lieux de pôles sont quasi identiques à ceux présentés dans cette section. Bien sûr font défaut les deux pôles *rapides* se situant toujours plus à gauche que les pôles dominants. Le comportement du système réglé varie d'une manière semblable, qu'il soit réglé en continu ou en échantillonné. Cette sensibilité est donc surtout liée au système à régler et à la structure de réglage.

- La sensibilité à la variation de l'amortissement réel est la moins grande de toutes. L'amortissement relatif du système réglé est, pour un amortissement réel nul ou de 1, environ de moitié inférieure à celui imposé ( $\text{Im}\{p_{1,2}\} \approx 2 \cdot \text{Re}\{p_{1,2}\}$ ). Dans tous les cas, la stabilité est garantie.
- La variation de  $k_t$  dans le sens d'une plus grande rigidité excite des oscillations rapides avec un bon amortissement relatif, alors que si le système devient plus élastique, des oscillations dominantes avec dégradation de l'amortissement absolu sont engendrées.
- Dans tous les cas, la sensibilité est très grande, en particulier autour des valeurs nominales. Ceci est très frappant pour  $T_L$  : une variation de  $-0.1$  ms (soit  $-8\%$ ) sur  $T_L$  provoque une diminution de l'amortissement absolu de près de 30% (de  $-148$  à  $-105$ ); le système réglé devient même instable pour  $T_L=24$  ms. L'amortissement absolu (valeur réelle des pôles) diminue de moitié pour une variation de  $\pm 5\%$  des coefficients ( $k_{mt}$ ,  $k_{nMm}$ ,  $k_{nLm}$ ,  $k_{\theta L}$  et  $k_j$ ).
- Compte tenu du fait que le coefficient de contre-réaction du couple transmis fournit la contribution  $k_{mt}m_t = k_{mt}k_t(\theta_M - \theta_L)$  à la grandeur de commande, le bruit sur  $\theta_M$  et  $\theta_L$  s'y propage beaucoup plus qu'à travers la contribution  $k_{\theta L}\theta_L$ . En effet, outre deux sources de bruit, il faut compter avec le coefficient de rigidité  $k_t$  qui multiplie ce bruit.

Par extrapolation, on peut conclure que la contre-réaction de  $m_t$  est beaucoup plus sensible que toutes les autres, surtout que  $k_t$  elle-même est aussi une valeur connue de manière non-précise. Il y a cumul des sensibilités.

Ceci expliquant cela, on peut comprendre le bruit sur la grandeur à régler dans la réalisation pratique sur banc d'essai.

## 6.12 RÉGLAGE DE POSITION HYBRIDE PARTIEL

### 6.12.1 Introduction

Suite aux problèmes rencontrés avec la contre-réaction globale des grandeurs mesurables de la section 6.10, on va supprimer la contre-réaction du couple transmis  $m_t$ .

Il reste donc toujours à disposition une grandeur mesurée côté moteur ( $n_{Mm}$ ) et les autres côté charge ( $n_{Lm}$ ,  $\theta_L$ ,  $x_{R\theta}$ ). Cette configuration devrait toujours permettre de compenser, en partie, les oscillations dues à l'arbre élastique, malgré une perte de qualité par rapport aux performances théoriques (c'est-à-dire sans bruit), atteignables avec contre-réaction globale (sect. 6.10).



Cette structure de réglage est traitée dans cette section. Elle nécessite donc toujours deux organes de mesure, en l'occurrence en général deux capteurs incrémentaux. Sa sensibilité est traitée à la section suivante.

Souvent, l'industriel ne désire pas équiper sa machine-outil de cette manière, pour des raisons évidentes de coût. Pour une machine-outil de précision, on ne dispose en général que d'une règle de mesure côté charge (cas d du tableau de la section 6.7). On s'en accommodera à la section 6.14.

### 6.12.2 Dimensionnement

Le vecteur de contre-réaction est :

$$\begin{aligned} \mathbf{k}^T &= [ k_{mt} \quad k_{nM} \quad k_{nMm} \quad k_{nL} \quad k_{nLm} \quad k_{\theta L} \quad -k_{R\theta} ] = \\ &= [ 0 \quad 0 \quad k_{nMm} \quad 0 \quad k_{nLm} \quad k_{\theta L} \quad -k_{R\theta} ] \end{aligned} \quad (6.103)$$

Pour le système à régler décrit au § 6.10.2, on peut donc imposer quatre pôles, ils le seront d'ailleurs d'une manière alignée selon la figure 6.5 mais sans le pôle réel, les trois autres étant calculés. On s'arrangera, si possible, pour qu'un des pôles restants soit aligné aux quatre autres (on retrouverait ainsi la configuration standard des 5 pôles alignés).

Le procédé employé pour l'imposition des pôles est en quelque sorte itératif. On impose les pôles  $p_1 \dots p_4$  d'une manière alignée, on effectue le dimensionnement et on calcule les pôles restants. Si aucun de ces pôles n'est aligné à  $p_1 \dots p_4$ , on recommence l'imposition en modifiant la valeur absolue de la partie réelle des pôles, jusqu'à ce qu'au moins un de ces pôles soit aligné. Pour les valeurs numériques de la sect. 6.6, on trouve après quelques tâtonnements successifs la configuration suivante :

$$p_{1,2} = -148 \pm j \cdot 74$$

$$p_{3,4} = -148 \pm j \cdot 148$$

$$p_{5,6} = -147 \pm j \cdot 233$$

$$p_7 = -800$$

$p_7 = -2/T_E$  étant dû à l'organe de mesure de vitesse. Les coefficients calculés sont :

$$k_{mt} = 0$$

$$k_{nMm} = 36.36$$

$$k_{nLm} = 7.569$$

$$k_{\theta L} = 33.33$$

$$k_{R\theta} = 4.070$$

$$k_{w(p_i=-148)} = 13.16$$

*Remarque* : en limitation de vitesse, les pôles sont en :

$$p_{1,2} = -315 \pm j \cdot 135 = -2.13\rho \pm j \cdot 0.91\rho$$

$$p_{3,4} = -126 \pm j \cdot 341 = -0.85\rho \pm j \cdot 2.30\rho$$

$$p_5 = -800$$

La forte composante imaginaire des pôles  $p_{3,4}$  n'est pas gênante dans le sens que la qualité de réglage en limitation de vitesse est ici d'importance secondaire. La stabilité est garantie.

### 6.12.3 Simulation numérique et essais sur banc

La simulation numérique du système réglé peut se faire de deux manières différentes : celle en réglage d'état échantillonné avec pour commande le courant  $i$ , ou celle du réglage par mode de glissement hybride qui tient compte des transitoires hors mode de glissement au début de chaque période d'échantillonnage. Cette dernière est plus proche de la réalité que la première. Pourtant, par comparaison des résultats de simulation, on constate que les réponses indicielles sont superposées. La validité de l'approche du réglage par mode de glissement hybride par une réduction de l'ordre du système et un traitement consécutif par le réglage d'état échantillonné est donc encore confirmée.

A la figure 6.19a, on a représenté la simulation du réglage par mode de glissement hybride, ainsi que les mesures effectuées sur le banc d'essai.

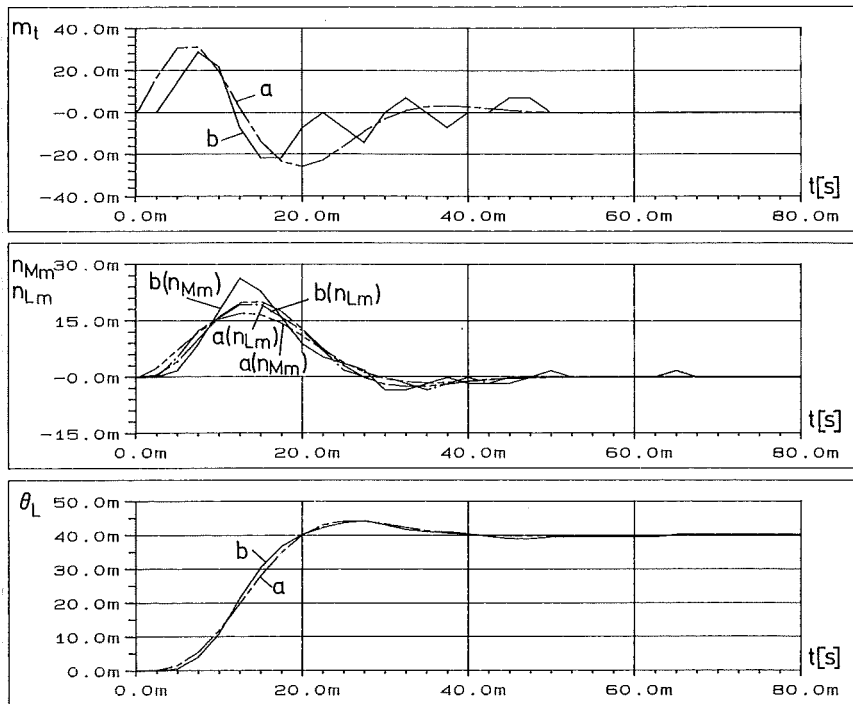
On constate que les réponses de la position charge sont quasiment superposées. Il en est presque de même avec les vitesses moteur et charge. L'allure générale du couple transmis mesuré correspond à celle simulée, même si un bruit assez conséquent se trouve sur la mesure. Le temps de montée est plus rapide que dans le cas avec contre-réaction de  $m_t$ , le dépassement de l'ordre de 10 % est acceptable.

Globalement, les résultats expérimentaux sont très satisfaisants.

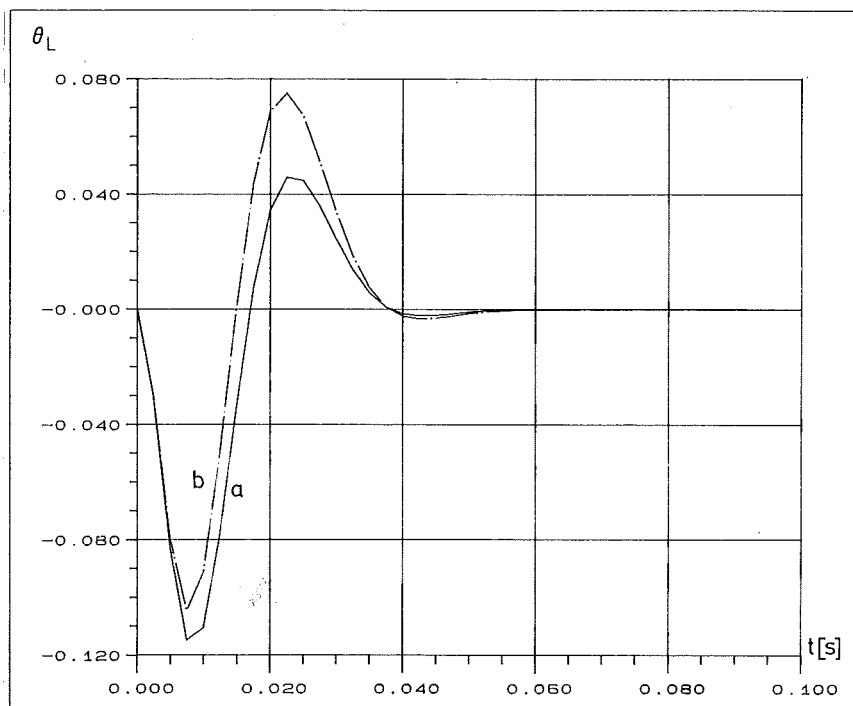
*Remarque* : Le calcul du bruit maximum sur la commande selon (6.102) fournit  $u_{q\max} = 10.3\%$  (confirmé par les mesures); il est plus grand que dans le cas avec contre-réaction de  $m_t$  (sect. 6.10). Les résultats sont pourtant meilleurs. Cela montre que les instabilités rencontrées auparavant n'étaient pas imputables au bruit de quantification, mais bel et bien aux micro-instabilités du système à charge bloquée et, à moindre mesure, à la sensibilité trop élevée du système réglé à la variation des paramètres et des coefficients.

Contrairement au cas de la contre-réaction complète (sect. 6.10), ce système réglé est stable aussi pour la structure du système à charge bloquée. Les pôles sont en :

$$p_{1,2,3} = 0 \quad ; \quad p_4 = -35 \quad ; \quad p_{5,6} = -299 \pm j \cdot 178 \quad ; \quad p_7 = -800$$



**Fig.6.19a** Réponses indicielles avec réglage par mode de glissement hybride  
 a) simulation ( $t_m \approx 20$  ms, dépassement max.  $\approx 10$  %)  
 b) mesures sur banc



**Fig.6.19b** Réponses indicielles suite à un saut de couple (simulation).  
 a)  $k_v = 0$  ( $t_r \approx 55$  ms, déviation max.  $\approx -12$ %)  
 b)  $k_{v(xR)}$  ( $t_r \approx 55$  ms, déviation max.  $\approx -10$ %)

Pour le saut de perturbation (fig. 6.19b), on constate que les performances de cette structure de réglage sont aussi meilleures que celles avec contre-réaction du couple transmis. La déviation maximum est réduite de moitié (même sans intervention directe de  $m_r$ ), alors que le temps de réglage baisse environ de 30 %.

## 6.13 SENSIBILITÉ DU RÉGLAGE DE POSITION PARTIEL

### 6.13.1 Introduction

A la section 6.11, on a analysé la sensibilité du système réglé aux variations des paramètres et des coefficients pour le cas de la contre-réaction complète du réglage de position (avec couple transmis). A titre de comparaison, et pour soutenir la remarque du § 6.12.3, on effectue ici la même étude, mais pour la structure de réglage sans contre-réaction du couple transmis (sect. 6.12).

### 6.13.2 Sensibilité aux variations de paramètres

Aux figures 6.20 à 6.22, on représente les lieux de pôles pour les variations de  $\delta_0$ ,  $k_t$  et  $T_M/T_L$ .

*Remarque :* pour tous les cas, le septième pôle se trouve en  $p_7 = -800 = -2/T_E$ . Il est dû à un organe de mesure de vitesse.

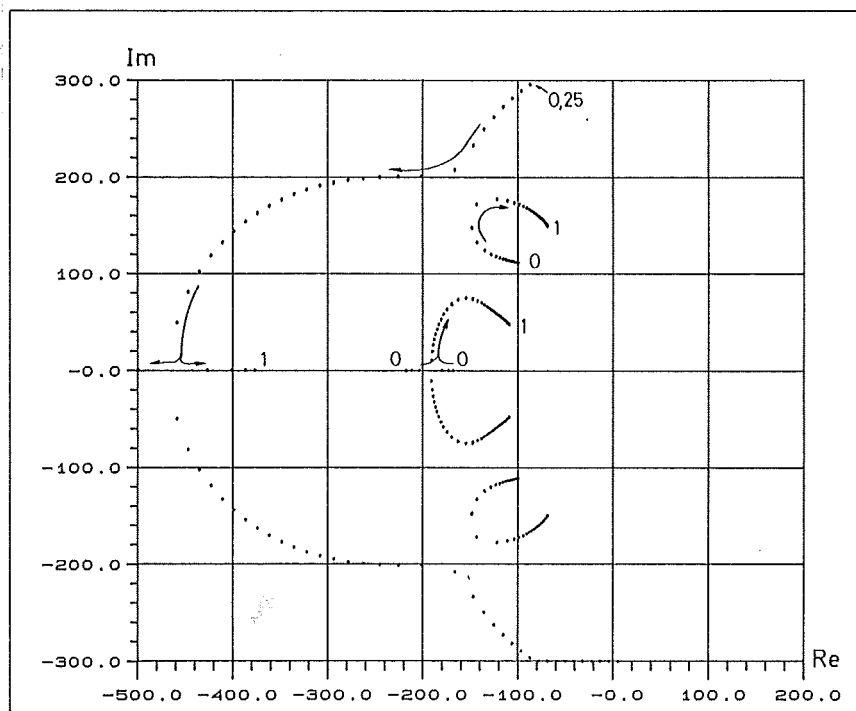


Fig. 6.20 Lieu des pôles pour  $\delta_0 = 0 \dots 0,4 \dots 1$  (par pas de 0.025)

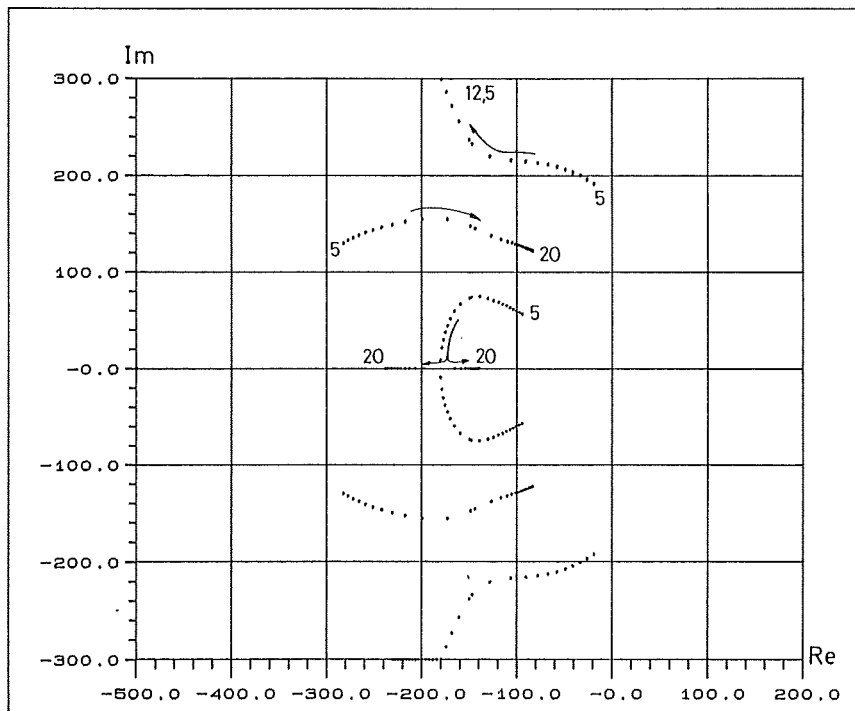


Fig. 6.21 Lieu des pôles pour  $k_t = 5 \dots 10,4 \dots 20$  (par pas de 0.5)

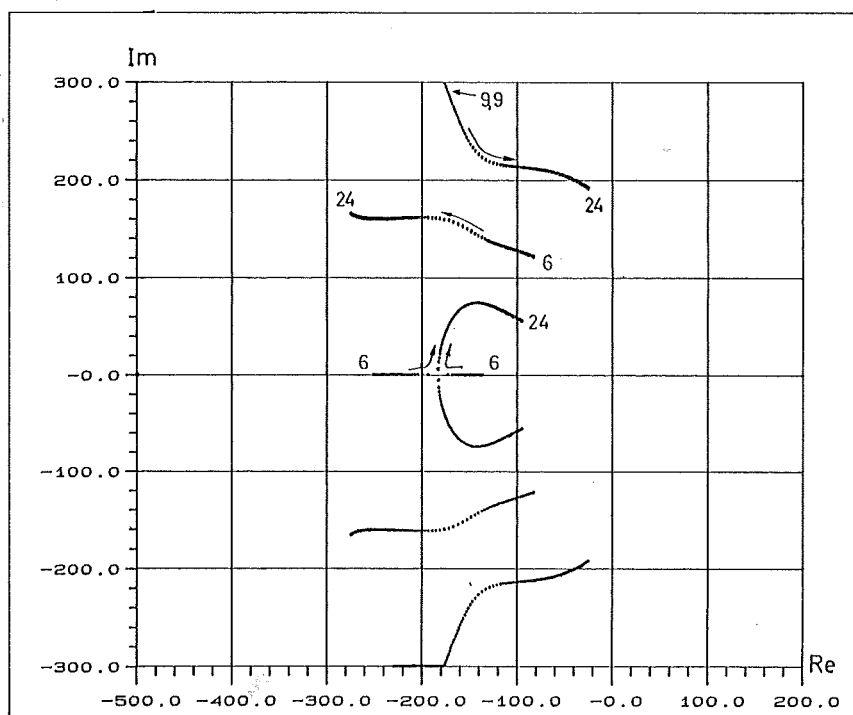


Fig. 6.22 Lieu des pôles pour  $T_L = 6 \dots 12 \dots 24$  ms et  $T_M = 278 - T_L$  ms (par pas de 0.1 ms)

### 6.13.3 Sensibilité aux variations des coefficients

Le lieu de pôles pour la variation de chaque coefficient est représenté aux figures 6.23 à 6.27.

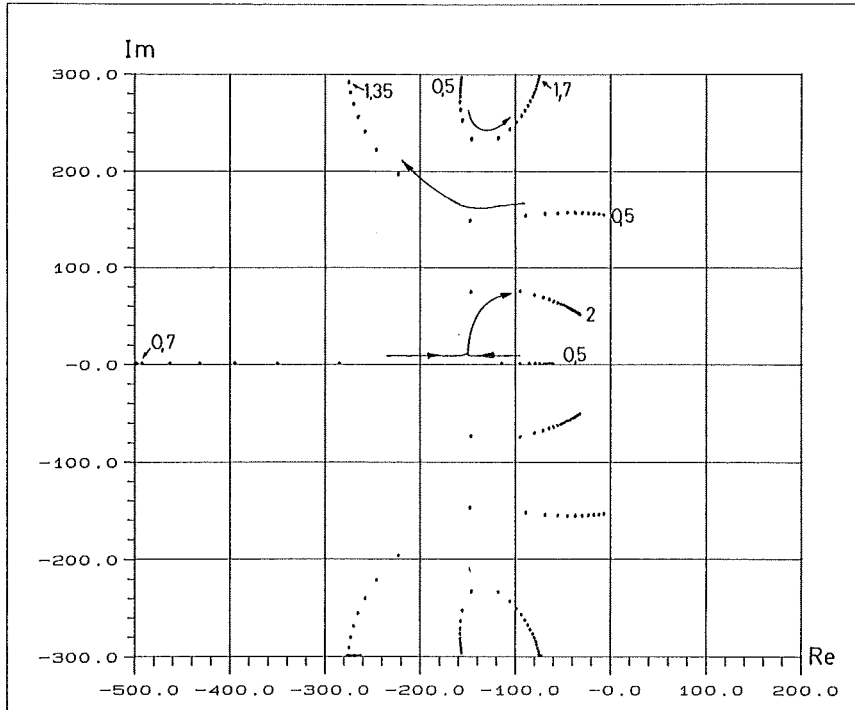


Fig. 6.23 Lieu des pôles pour  $k_{nMm} = 36.36 \cdot (0,5...2)$  (par pas de 5%)

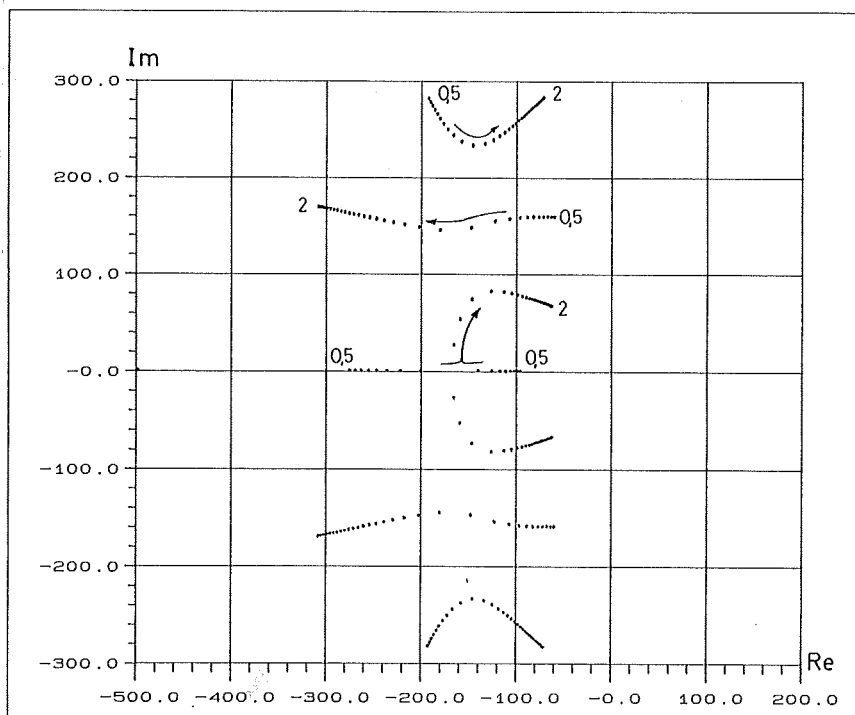


Fig. 6.24 Lieu des pôles pour  $k_{nLm} = 7.569 \cdot (0,5...2)$  (par pas de 5%)

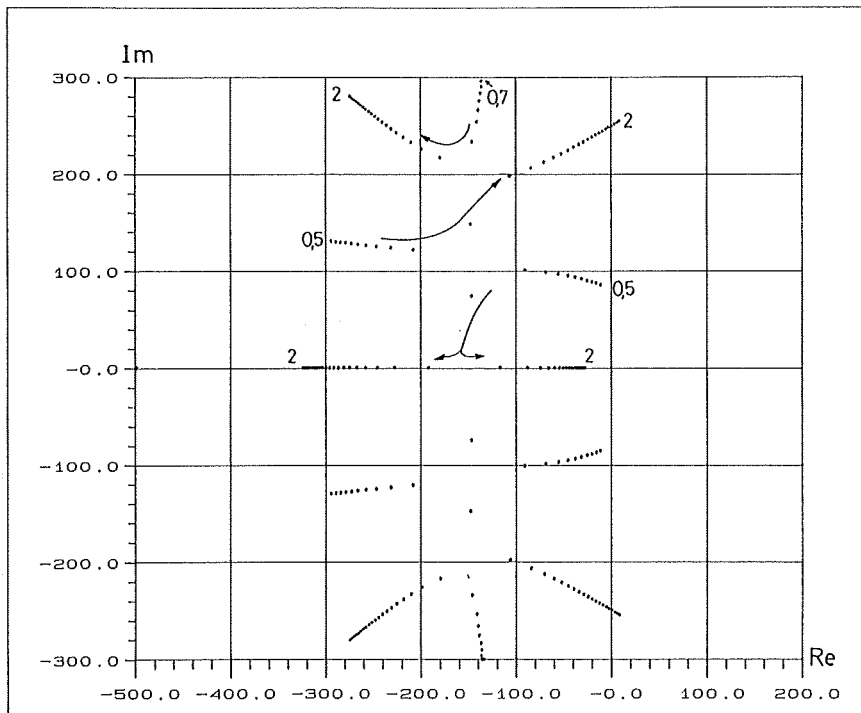


Fig. 6.25 Lieu des pôles pour  $k_{\theta L} = 33.33 \cdot (0,5 \dots 2)$  (par pas de 5%)

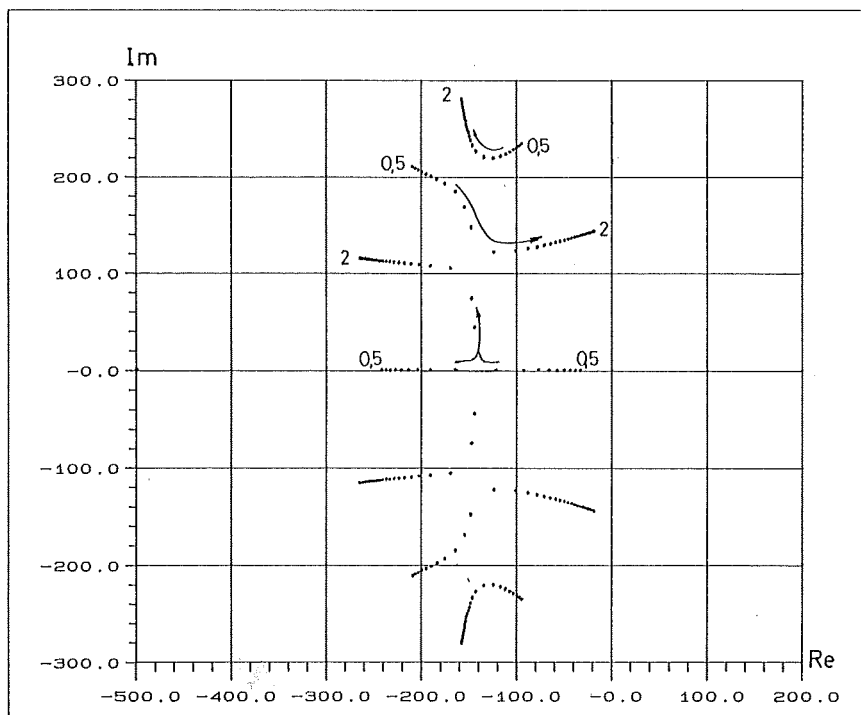


Fig. 6.26 Lieu des pôles pour  $k_{R\theta} = 4.070 \cdot (0,5 \dots 2)$  (par pas de 5%)

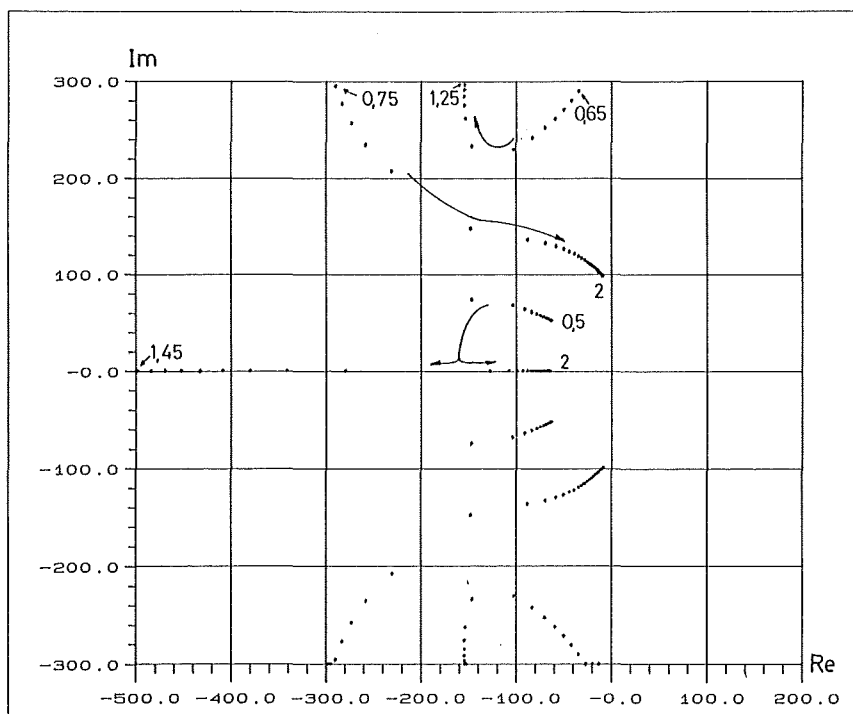


Fig. 6.27 Lieu des pôles pour  $k_i = 1 \cdot (0,5...2)$  (par pas de 5%)

*Remarque* : pour tous les cas, le septième pôle se trouve en  $p_7 = -800 = -2/T_E$ . Il est dû à un organe de mesure de vitesse.

#### 6.13.4 Discussion des lieux des pôles

Par comparaison des sensibilités respectives pour les cas du réglage avec (sect. 6.10) ou sans (sect. 6.12) contre-réaction du couple transmis, on constate d'une manière générale que ces sensibilités sont moindres dans le cas sans contre-réaction de  $m_t$ .

En particulier autour des valeurs nominales des paramètres ou coefficients, cette sensibilité a énormément diminué.

La différence est frappante pour la sensibilité à la variation de  $T_L$  (fig. 6.12 et 6.22).

Ainsi, l'élimination de la contre-réaction du couple transmis a permis de réduire considérablement la sensibilité du système réglé face aux variations des paramètres, mais aussi face aux variations des coefficients, soit indirectement au bruit de mesure.

De plus, la qualité de réglage n'en a pas pâti, tout au contraire :

- le temps de montée de la réponse indicielle a nettement diminué, passant de 33 ms (sans dépassement) à 20 ms (avec dépassement),
- le bruit sur la grandeur à régler se limite pratiquement au bruit de quantification sur la mesure de position, et
- le bruit sur la commande est de fréquence plus basse.



## 6.14 RÉGLAGE DE POSITION HYBRIDE COTÉ CHARGE SEUL

### 6.14.1 Introduction

Comme déjà remarqué à la section 6.7, il est des systèmes où il n'est pas souhaitable, voire impossible, de disposer de mesures des côtés moteur et charge. Cette section traite le cas où les mesures sont effectuées uniquement côté charge. Par rapport à la structure de réglage de la sect. 6.12, on élimine donc en plus la contre-réaction de la vitesse moteur  $n_{Mm}$ .

### 6.14.2 Dimensionnement

Le vecteur de contre-réaction est :

$$\begin{aligned} \mathbf{k}^T &= [ k_{mt} \quad k_{nM} \quad k_{nMm} \quad k_{nL} \quad k_{nLm} \quad k_{\theta L} \quad -k_{R\theta} ] = \\ &= [ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad k_{nLm} \quad k_{\theta L} \quad -k_{R\theta} ] \end{aligned} \quad (6.104)$$

*Remarque :* La mesure de la vitesse moteur n'étant pas mise en contre-réaction, on peut se passer, pour la modélisation, de cette grandeur d'état. Le modèle d'état du § 6.10.2 se simplifie d'une équation. L'ordre du système à régler devient d'ordre  $n_s=5$ .

Pour le système à régler global, on peut donc imposer trois pôles, les trois autres étant liés avec les coefficients imposés. Le choix de ces pôles n'est, a priori, pas facile. Pour se restreindre le domaine imposable, et approcher aussi un comportement optimal du système réglé, ils seront choisis alignés à parties réelles et imaginaires égales, selon

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= -\rho \\ p_{2,3} &= -\rho \pm j \cdot \rho \end{aligned} \right\} \quad (6.105)$$

Dans tous les cas, il apparaîtra une paire de pôles complexes conjugués à partie imaginaire beaucoup plus grande que celle réelle. Elle est proche, mais inférieure, à la valeur de la pulsation propre du système en mouvement libre selon (6.59) :  $\omega_0=347$ . Ces deux pôles, appelés par la suite *pôles oscillants*, expriment donc l'oscillation du système élastique en boucle fermée, qui ne peut pas être compensée du fait de la contre-réaction partielle. Pour éviter toute instabilité, il faut garantir que ces pôles soient dans la partie gauche du plan  $s$ .

Le sixième pôle, dû à l'organe de mesure de vitesse, est toujours beaucoup plus rapide que les autres.

Plus les pôles imposés  $p_{1,2,3}$  se trouvent à droite, plus les pôles oscillants  $p_{4,5}$ , à amortissement relatif très faible, sont tirés vers la gauche (dans le plan  $s$ ) et vice versa. On présente ci-dessous trois dimensionnements (a, b et c) différents pour  $T_E=2.5$  ms.

Cas	a (élast.)	a' (rig.)	b (élast.)	b' (rig.)	c (élast.)	c' (rig.)
$\rho$	40	40	56	56	75	75
Pôles pos.						
$p_1$	-40	-39	-56	-54	-75	-70
$p_{2,3}$	$-40 \pm j.40$	$-39 \pm j.39$	$-56 \pm j.56$	$-53 \pm j.52$	$-75 \pm j.75$	$-66 \pm j.65$
$p_{4,5}$	$-82 \pm j.314$	$-83 \pm j.315$	$-55 \pm j.306$	$-60 \pm j.308$	$-24 \pm j.301$	$-36 \pm j.303$
$p_6$	-859	-857	-878	-875	-898	-891
$k_{nLm}$	26.85	26.33	34.80	33.46	42.88	39.91
$k_{\theta L}$	8.991	8.563	16.47	14.83	27.86	22.61
$k_{R\theta}$	0.4334	0.4028	1.108	0.9447	2.536	1.835
$k_w(\rho_i)$	4.554	4.231	8.483	7.228	14.83	10.73
Pôles vit.						
$p_{1nlim}$	-117		-152		-184	
$p_{2,3nlim}$	$-83 \pm j.326$		$-62 \pm j.327$		$-43 \pm j.331$	
$p_{4nlim}$	-859		-878		-898	

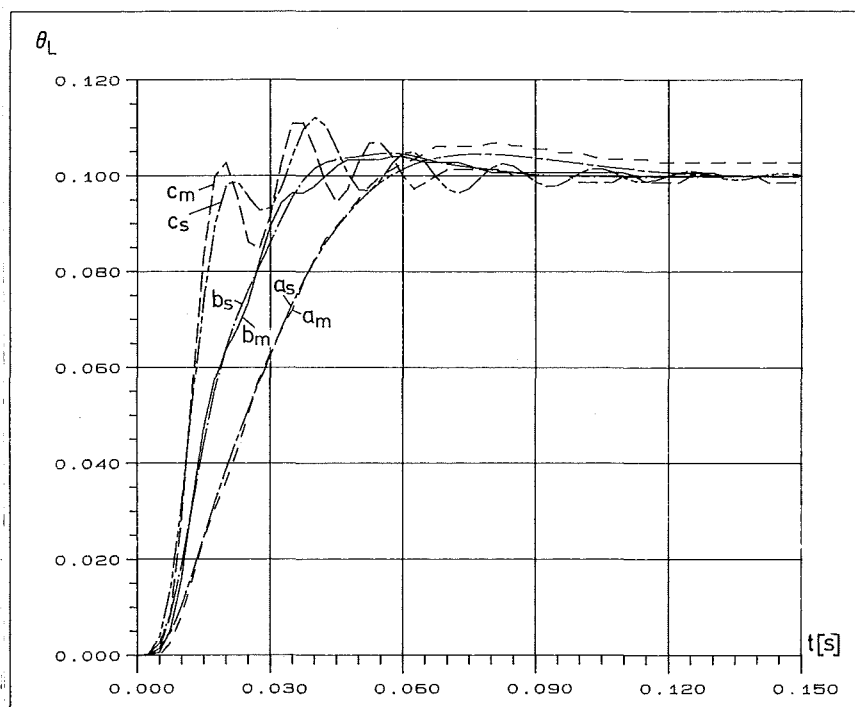
Ainsi, pour une valeur absolue  $\rho$  de la partie réelle des pôles assez faible, l'amortissement absolu des pôles oscillants peut être amélioré (cas a). Pour une certaine valeur de  $\rho$ , les pôles  $p_1$  à  $p_5$  peuvent être alignés (cas b); les oscillations s'amortissent dans un temps équivalent au temps de réglage. Pour un choix de pôles trop rapides, les pôles oscillants sont très mal amortis, et le système réglé approche de la limite de stabilité (cas c).

Ces coefficients sont dimensionnés en utilisant le modèle élastique du système à régler. Une alternative à cette manière de procéder consiste à négliger l'élasticité ( $1/k_t \rightarrow 0$ ). On retrouve le modèle rigide de l'exemple d'application du chapitre 5. L'avantage est qu'un tel système a moins de paramètres qui, de surcroît, sont plus faciles à mesurer, identifier ou calculer. En tenant compte également, dans le modèle, de l'approximation de l'organe de mesure de vitesse par différence, on peut calculer les coefficients  $k_{nm}$ ,  $k_\theta$  et  $k_R$  en imposant de même trois pôles alignés selon (6.105). Ensuite, ces coefficients, implantés dans le système élastique à la place de  $k_{nLm}$ ,  $k_{\theta L}$  et  $k_{R\theta}$ , permettent de calculer les pôles du système élastique. Ces valeurs sont indiquées dans le tableau dans les colonnes a', b' et c'. D'une manière générale, on constate que ces pôles sont très proches de ceux obtenus par le dimensionnement élastique. Ceci est d'autant plus vrai que les pôles dominants sont lents (cas a). On en déduit que cette approche reste valable pour autant qu'on vérifie a posteriori les pôles oscillants  $p_{4,5}$  du système élastique. L'inconvénient est que, pour ce faire, il est quand même nécessaire de connaître tous les paramètres du système élastique. On peut contourner ce problème en effectuant des dimensionnements successifs avec

comparaisons aux mesures sur banc. Ainsi, si les réponses indicielles du système réel sont très proches des simulations du système rigide, on pourra en déduire que les pôles oscillants sont bien amortis, et que le choix des pôles imposés était judicieux.

### 6.14.3 Simulation numérique et essais sur banc

Pour les trois cas ci-dessus, les simulations numériques en mode de glissement hybride avec *Slimodesi* et les essais sur banc sont représentés aux figures 6.28a pour le saut de consigne. Les dimensionnements "rigides" n'y sont pas montrés, car ils ne présentent que peu de différences avec ceux élastiques.



**Fig.6.28a** Réponses indicielles avec réglage par mode de glissement hybride

a)  $\rho=40$ ,  $t_m \approx 57$  ms, dépassement max.  $\approx 4.2\%$

b)  $\rho=56$ ,  $t_m \approx 38$  ms, dépassement max.  $\approx 4.8\%$

c)  $\rho=75$ ,  $t_m \approx 33$  ms, dépassement max.  $\approx 12\%$

s) simulation

m) mesures sur banc

Pour les trois cas, les correspondances entre simulations et mesures sur banc d'essais sont excellentes. Les évolutions globales, sans tenir compte des oscillations à fréquence rapide, sont identiques. La fréquence propre réelle est très proche de celle simulée. Par contre, il semblerait que ces oscillations sont amorties un peu moins rapidement dans la réalité qu'en simulation. L'amortissement relatif en mouvement libre supposé  $\delta_0=0.4$  était peut-être un brin optimiste : il serait effectivement un peu inférieur.

Le cas c présente des oscillations (amorties) qui, souvent, ne sont pas acceptables, en particulier pour une machine-outil de haute précision.

Les dimensionnements a et b présentent les meilleures réponses indicielles. Les oscillations sont amorties aussi rapidement que le temps de réglage pour le cas b et encore plus rapidement pour a.

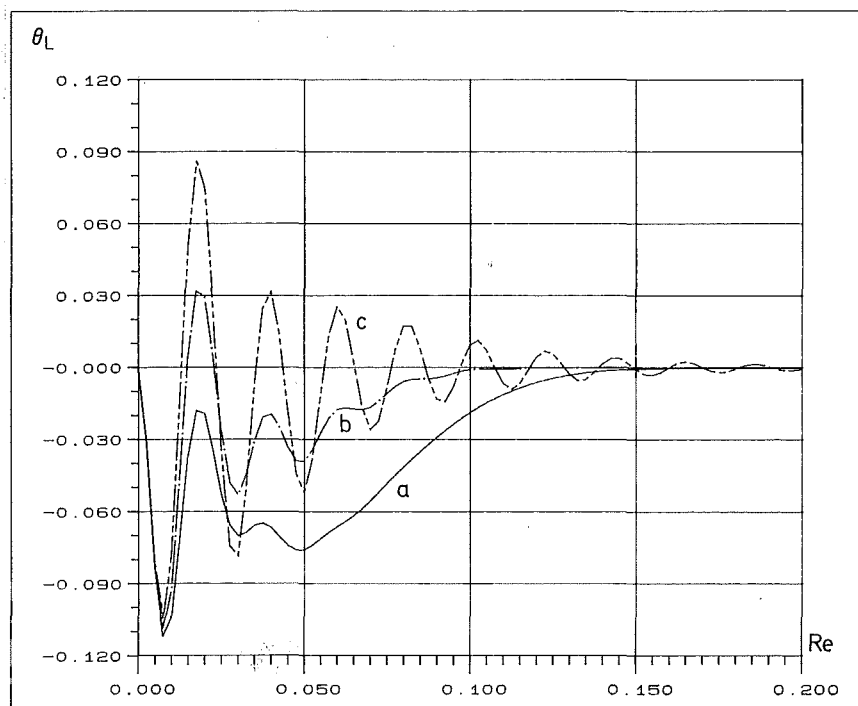
D'une manière générale, on peut affirmer que le comportement du système élastique réglé est proche du système rigide équivalent ( $k_t \rightarrow \infty$ ) pour autant que les pulsations propres du système oscillant ne soient pas trop excitées. Cette condition est remplie par un dimensionnement qui ne dépasse pas une certaine rapidité de réglage (cas a, et éventuellement b).

Les pôles du système à charge bloquée sont indépendants des coefficients de contre-réaction  $k_{nLm}$ ,  $k_{\theta L}$  et  $k_{xR\theta}$  et ne sont fonction que des paramètres  $T_M$ ,  $T_\theta$ ,  $k_t$  et  $\alpha_t$ , comme pour le cas continu (voir § 6.9.3.4). On calcule :

$$p_{1,2,3} = 0 \quad ; \quad p_{4,5} = -32 \pm j \cdot 72 \quad ; \quad p_6 = -800$$

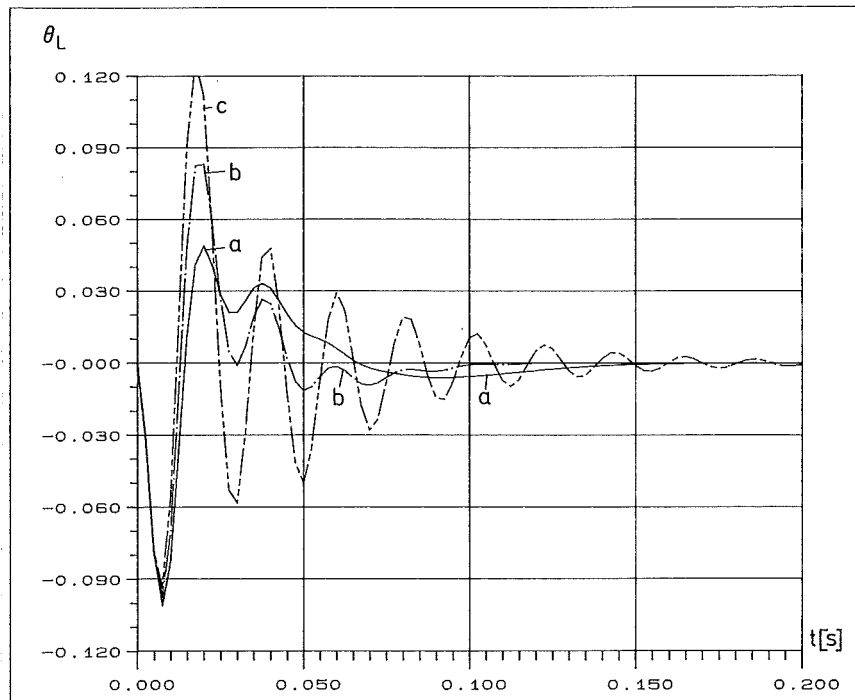
La partie imaginaire est proche de la pulsation propre à charge bloquée  $\omega_M$  (voir sect. 6.6), ce qui est dû au fait qu'aucune grandeur active n'est en contre-réaction.

Les réponses à un saut de couple sont simulées aux figures 6.28b et c pour les cas sans, respectivement avec, intervention directe du couple résistant.



**Fig.6.28b** Réponses indicielles suite à un saut de couple (simulation), sans intervention du couple :  $k_v=0$

- a)  $\rho=40$ ,  $t_r \approx 150$  ms, déviation max.  $\approx -11\%$
- b)  $\rho=56$ ,  $t_r \approx 100$  ms, déviation max.  $\approx -11\%$
- c)  $\rho=75$ ,  $t_r \approx 200$  ms, déviation max.  $\approx -11\%$



**Fig.6.28c** Réponses indicielles suite à un saut de couple (simulation), avec intervention du couple :  $k_{V(XR)}$

a)  $\rho=40$ ,  $t_r \approx 150$  ms, déviation max.  $\approx -10\%$

b)  $\rho=56$ ,  $t_r \approx 100$  ms, déviation max.  $\approx -10\%$

c)  $\rho=75$ ,  $t_r \approx 200$  ms, déviation max.  $\approx -10\%$

Là aussi, l'intervention directe du couple sur la commande n'apporte rien du point de vue déviation maximum ou temps de réglage. La mise en oeuvre ne se justifie donc nullement, d'autant plus qu'il serait nécessaire d'implanter un observateur de couple qui a le désavantage de compliquer les algorithmes de réglage (temps de calcul).

D'une manière générale, on constate que les performances sont moindres que celles de la structure avec contre-réaction de la vitesse moteur (mais avec  $k_{mt}=0$ ). On ne peut pas avoir simultanément un temps de montée rapide et aucune oscillation.

Pour un comportement "quasi rigide" du système élastique, il faut assurer un amortissement absolu des pôles oscillants meilleur que l'amortissement global de la réponse indicielle. Il faut donc "sacrifier" le temps de montée.

Il en est de même pour les sauts de couple. Indépendamment de la valeur des pôles, la déviation maximum est la même dans tous les cas. Elle est même légèrement inférieure à celle de la structure de la sect. 6.12.

## 6.15 COMPARAISON DES PERFORMANCES DES DIFFÉRENTES STRUCTURES DE RÉGLAGE

Aux sections précédentes, notamment 6.10, 6.12 et 6.14, trois structures de réglages différentes ont été étudiées. Dans tous les cas, il s'agissait du réglage de position par mode de glissement hybride du système oscillant à deux masses. Dans la modélisation, on a tenu compte de l'approximation pseudo-continue des organes de mesure (digitaux) de vitesse.

Le principe adopté pour le traitement échantillonné est celui présenté au chapitre 4. Les transitoires hors mode de glissement au début de chaque période d'échantillonnage sont négligés. Admettant le système en mode de glissement, il est loisible de réduire l'ordre du système à régler. Le sous-système ainsi formé est réglé par une structure de réglage d'état échantillonné. Les méthodes y relatives sont appliquées pour le dimensionnement des coefficients.

Les trois cas sont appelés respectivement réglage complet, réglage partiel et réglage de la charge seul. Trois comportements différents doivent être comparés :

- La réponse indicielle à un saut de consigne. Celle-ci est déterminée par le dimensionnement du régulateur, plus précisément par l'imposition des pôles.
- La stabilité de la structure du système à charge bloquée doit être garantie en prévision d'un couple résistant de friction.
- La réponse indicielle à un saut de perturbation donne une bonne indication de la résistance à la friction. Cette qualité est importante dans le cadre des machines-outils.

A priori, le réglage complet devrait donner les meilleurs résultats possibles pour la compensation des phénomènes oscillatoires. Cependant, malgré un bruit maximum sur la commande relativement faible, le bruit sur la grandeur à régler est élevé. La sensibilité du système réglé aux variations des paramètres et des coefficients est grande. D'autre part, les déviations maximum suite à un saut de couple sont très importantes, en particulier dans le cas sans intervention du couple résistant. De plus, à charge bloquée, le système est instable. Pour le banc d'essai, aucun dimensionnement stable du réglage complet ne permet d'obtenir la stabilité à charge bloquée.

En fait, c'est la mise en contre-réaction du couple transmis  $m_t$  qui n'est pas adéquate. En effet, le réglage partiel ( $k_{mt}=0$ ) élimine les problèmes rencontrés pour le réglage complet, tout en permettant une compensation des phénomènes oscillatoires très bonne. Le temps de montée a même pu être amélioré, malgré une imposition des pôles avec même valeur  $\rho$ . La déviation maximum suite à un saut de couple est cinq, respectivement deux fois, inférieure au cas du réglage complet pour les cas sans et avec intervention du couple. De plus, la stabilité à charge bloquée est assurée.

Le réglage uniquement du côté de la charge permet aussi une bonne compensation des phénomènes oscillatoires pour autant que le système réglé ne soit pas trop rapide. Dans ce cas, le temps de montée de la réponse indicielle à la consigne est nettement plus grand que pour le réglage partiel. Pour un saut de couple, la déviation maximum n'est pas très différente de celle du réglage partiel. Pour cette structure de réglage, la stabilité à charge bloquée est toujours garantie, les pôles sont indépendants des coefficients  $k_{nL}$ ,  $k_{\theta L}$  et  $k_{R\theta}$ .

## 6.16 CONCLUSION

Dans ce chapitre, différents cas de contre-réactions pour une même structure de réglage ont été traités pour un système à régler oscillant à deux masses avec amortissement, représentation type d'un axe d'une machine-outil. L'environnement réel limite en général le choix de la structure. Ainsi, il est rare de disposer de mesures provenant du côté moteur et du côté de la charge.

Le dimensionnement est effectué dans tous les cas pour le réglage de position. On a pu montrer que le système réglé en limitation de vitesse est toujours stable.

Pour une mesure de position côté charge uniquement, on retiendra la structure de réglage telle que proposée à la sect. 6.13 : contre-réaction de  $n_{Lm}$ ,  $\theta_L$  et  $x_{R\theta}$ . Deux possibilités s'offrent quant au modèle utilisé pour le dimensionnement des coefficients : soit on admet que le système est rigide à une masse (élasticité négligeable), ce qui nous ramène au système du chapitre 5, soit le modèle élastique complet est adopté, ce qui veut dire qu'une contre-réaction partielle doit être effectuée (sect. 6.13). De toute manière, il faut prendre garde à ne pas imposer des pôles trop rapides, de sorte à ne pas exciter les oscillations propres du système.

Si une mesure côté moteur est disponible, l'adjonction de la contre-réaction de la vitesse moteur  $n_{Mm}$  permet une très bonne compensation des oscillations dues à l'élasticité de l'arbre. Le système réglé est beaucoup plus rapide avec cette structure de réglage. Le comportement face aux sauts de couple résistant est très satisfaisant. La stabilité à charge bloquée est garantie.

La qualité de réglage ne peut pas être améliorée par la mise en contre-réaction supplémentaire du couple transmis  $m_t$ . Au contraire, le système réglé devient plus lent, plus perturbé, plus sensible aux variations des paramètres et coefficients et, surtout, instable à charge bloquée.

On en conclut que le choix de la structure de réglage dépend du type de machine-outil. Selon la précision et rapidité voulues, on choisira de compenser les phénomènes oscillatoires ou non. Dans le premier cas, cela suppose une bonne connaissance des paramètres du système.

L'avantage de la structure de réglage par mode de glissement utilisée est une très grande rapidité (réponse du système) quant au couple électromagnétique de la machine.

Les limitations variables, définies au chapitre 2 et décrites en détail au chapitre 5 pour un entraînement réglé, sont applicables d'une manière identique au système élastique.



## 7 DESCRIPTION DU PROGRAMME SLIMODESI

### 7.1 INTRODUCTION

Au cours de ce travail de thèse, un programme général pour les systèmes réglés par mode de glissement a été développé. Il a été appelé *SliMoDeSi* par référence à l'anglais *Sliding Mode Design and Simulation*. Il permet la définition de tout système à régler décrit par une équation d'état matricielle, le dimensionnement d'un régulateur par mode de glissement continu, ainsi que la simulation du système réglé par un régulateur par mode de glissement continu ou hybride. Cette simulation peut être effectuée en mode de glissement idéal ou réel (en tenant compte de l'hystérèse sur la loi de commutation).

Originellement écrit en Pascal-VMS sur VAX, ce programme a été transporté, en cours de route, en Turbo-Pascal sur IBM-PC ou compatibles. Cela a permis de mettre à profit les possibilités graphiques supérieures à disposition, ainsi qu'une diffusion facilitée.

A la section 7.2, on présente d'une manière générale les possibilités du programme et son utilisation. Quelques précisions seront données à la sect. 7.3 quant à l'organisation des fichiers. Enfin, la section 7.4 permettra d'exposer certaines solutions spécifiques à la simulation.

### 7.2 DESCRIPTION GÉNÉRALE DE *SLIMODESI*

#### 7.2.1 Introduction

Dans cette section, le programme *Slimodesi* est décrit globalement, en mettant l'accent sur son utilisation et sa structure générale.

Comme déjà précisé, le programme est écrit en Turbo-Pascal sur IBM-PC ou compatibles. Il est structuré globalement d'une façon linéaire, c'est-à-dire que toutes les étapes doivent être parcourues par l'utilisateur. Ce choix est historique : au moment de jeter les bases du programme sur VAX, les ressources nécessaires pour une présentation plus sophistiquée par fenêtres n'étaient pas disponibles.

En commençant par une description générale au § 7.2.2, on approfondira certaines parties du programme aux § 7.2.3 à 7.2.9.

#### 7.2.2 Structure générale et utilisation

L'environnement général du programme *Slimodesi* est représenté par le schéma-bloc de la fig. 7.1.

Le programme est conçu pour une utilisation interactive et permet à chaque étape un retour en arrière d'un ou plusieurs pas, pour effectuer des modifi-

cations. Pour ne pas charger inutilement les organigrammes, cette possibilité est admise tacitement et ne sera par conséquent pas représentée par la suite.

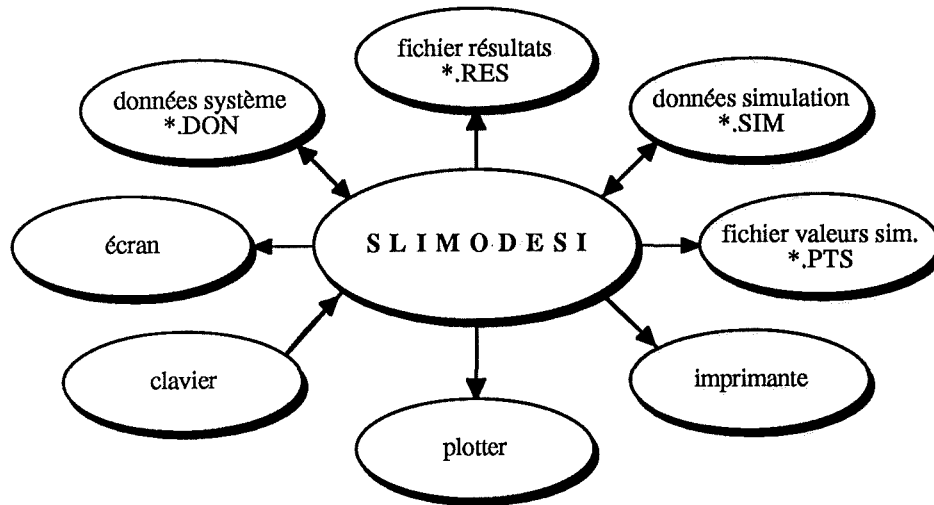


Fig. 7.1 Schéma-bloc général de *Slimodesi*.

La figure 7.2 représente la structure tout à fait générale de *Slimodesi*. On y reconnaît trois parties principales qui sont la définition du système à régler, le choix de la structure de réglage et son dimensionnement et, enfin, la vérification des pôles en limitation et la simulation numérique qui inclut aussi le traitement graphique des résultats.

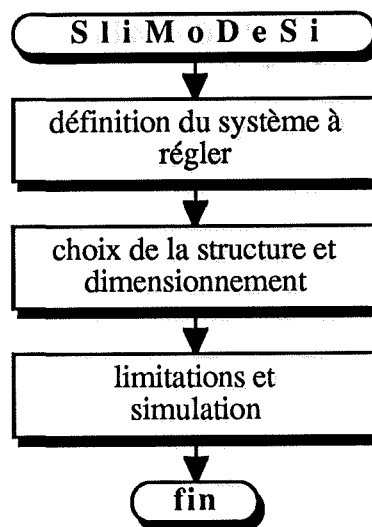


Fig. 7.2 Organigramme général de *Slimodesi*.

Le système à régler est défini continu. Le dimensionnement ne peut être effectué que pour le cas d'un régulateur par mode de glissement continu. Dans le cas d'un régulateur hybride, on fera appel au programme *Réglage* [18] pour dimensionner le régulateur du sous-système correspondant (voir chap. 4). Par contre, la simulation peut être effectuée pour les deux types de régulateurs : continu ou hybride.

Ces trois blocs seront décrits plus en détail aux § 7.2.4 à 7.2.6.

### 7.2.3 Types de fichier

Comme représentés à la fig. 7.1, quatre types de fichier peuvent être écrits et/ou lus. Ils sont repérés par l'extension qui suit le nom principal du fichier, ce qui rend agréable le traitement d'un cas, puisqu'un seul nom de fichier principal suffit. Les paragraphes suivants donnent une brève explication sur la fonctionnalité de ces fichiers.

#### 7.2.3.1 Fichier de données \*.DON

Utilisable en lecture et en écriture, ce fichier contient toutes les données nécessaires sur le système à régler, la structure du régulateur et le dimensionnement, soit :

- le système à régler,
- la structure de réglage choisie (sans/avec régulateur intégrateur),
- le type de contre-réaction défini (globale/partielle),
- le cas échéant, la répartition des coefficients à déterminer et imposés avec, pour les derniers, leur valeur,
- les pôles à imposer,
- le coefficient d'intervention directe  $k_w$ .

#### 7.2.3.2 Fichier de données de simulation \*.SIM

Conçu d'une manière similaire au fichier de données \*.DON, il permet d'y lire ou écrire les données relatives à la simulation du système à régler, soit :

- le mode de simulation,
- la consigne et la perturbation,
- les limitations internes,
- la grandeur de commande maximum,
- l'hystérèse,
- les périodes d'échantillonnages de réglage et de simulation,
- le temps de simulation et le nombre de points à mémoriser.

#### 7.2.3.3 Fichier de résultats \*.RES

Ce fichier permet, une fois ouvert, d'y écrire sur demande toutes les informations souhaitées sur :

- les données du système et du dimensionnement contenues dans \*.DON,
- les pôles, les matrices et les vecteurs du système, du système global, du système en mode de glissement et du système réglé en limitation, tant pour le cas continu qu'hybride,
- certains calculs intermédiaires,
- les données de simulation contenues dans \*.SIM.

#### 7.2.3.4 Fichier de valeurs simulées \*.PTS

En prévision d'une utilité éventuelle du stockage des résultats de simulation, il a été prévu ce fichier. Il permet d'y écrire, sous la forme d'un tableau de

valeurs, toutes les grandeurs calculées et utilisées normalement d'une manière interne dans la partie graphique de *Slimodesi*.

### 7.2.4 Définition du système

Le système à régler doit être représenté sous la forme d'une description d'état matricielle selon la relation (1.3). La matrice de système  $A_s$ , les vecteurs d'entrée de la commande  $b_s$  et de la perturbation  $b_{sv}$ , ainsi que le vecteur-ligne de sortie  $c_s^T$  doivent être introduits numériquement après avoir précisé l'ordre  $n_s$  du système. Cette définition peut être effectuée

- interactivement, ou par
- lecture d'un fichier de données \*.DON

Des modifications ultérieures de ces valeurs sont bien sûr possibles.

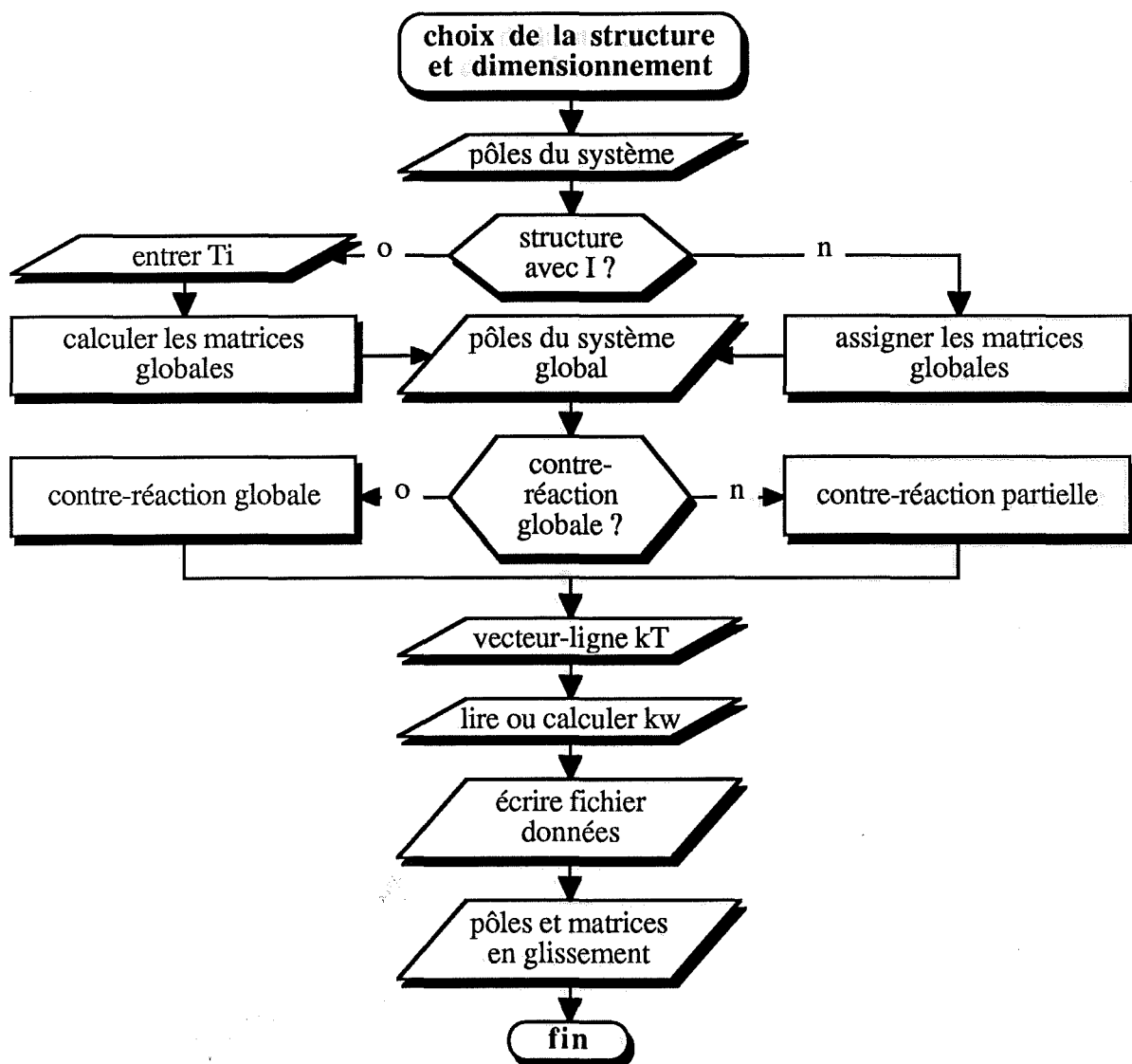


Fig. 7.3 Organigramme de la partie "choix de la structure et dimensionnement".

### 7.2.5 Choix de la structure et dimensionnement

Avant de procéder au dimensionnement du régulateur, il faut définir sa structure en y ajoutant le cas échéant un régulateur intégrateur. L'organigramme du bloc "choix de la structure et dimensionnement" est représenté à la figure 7.3.

La contre-réaction d'état pour la formation de la loi de commutation peut être globale (§ 1.4.2) ou partielle (§ 1.5.3). Ces deux méthodes de dimensionnement sont représentées à la figure 7.4.

A ce stade, le régulateur étant défini, il est loisible de sauver toutes les données dans un fichier \*.DON.

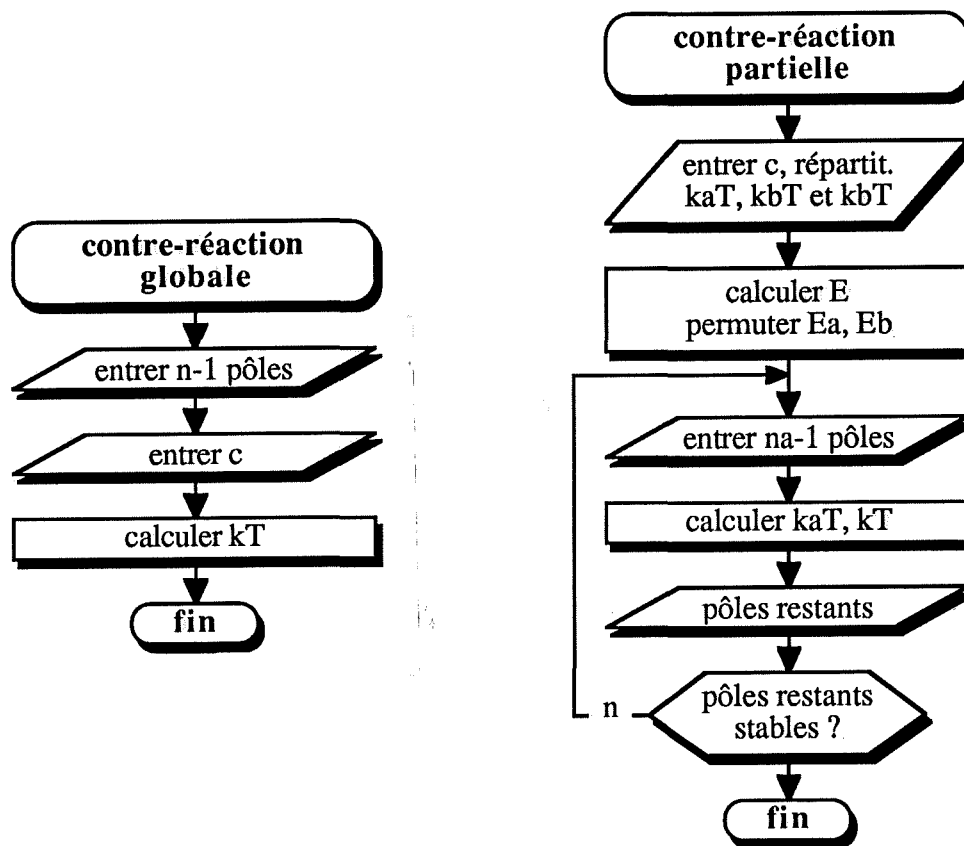


Fig. 7.4 Organigrammes représentant le dimensionnement du vecteur-ligne de contre-réaction d'état.

### 7.2.6 Limitations et simulation

La partie "limitations et simulation" du programme est représentée par son organigramme à la figure 7.5. Elle peut être séparée en quatre sous-groupes fonctionnels principaux :

- La définition des paramètres utiles à la simulation (fichier \*.SIM). Les limitations sont entrées pour chaque grandeur d'état, en précisant le nombre de segments de limitation, le coefficient d'adaptation  $k_{mi}$  selon (2.24), ainsi que pour chaque segment, une paire de valeur  $(e, x_{ilim}(e))$  (voir exemple d'application de la fig. 5.22).

- La vérification des pôles du système réglé en limitation, pour le régulateur par mode de glissement continu, aussi bien qu'hybride. Le paragraphe suivant décrit plus en détail cette partie.
- La simulation proprement dite, qui présente six modes de simulation différents. Différentes variables doivent être initialisées en fonction du mode de simulation (blocs "init.. 1...6"), avant de passer à la simulation elle-même (blocs "simul. 1...6"). Ces derniers seront discutés au paragraphe § 7.2.8.
- Le traitement graphique des résultats de simulation à l'écran, avec possibilité de sortie sur plotter ou imprimante (voir § 7.2.9).

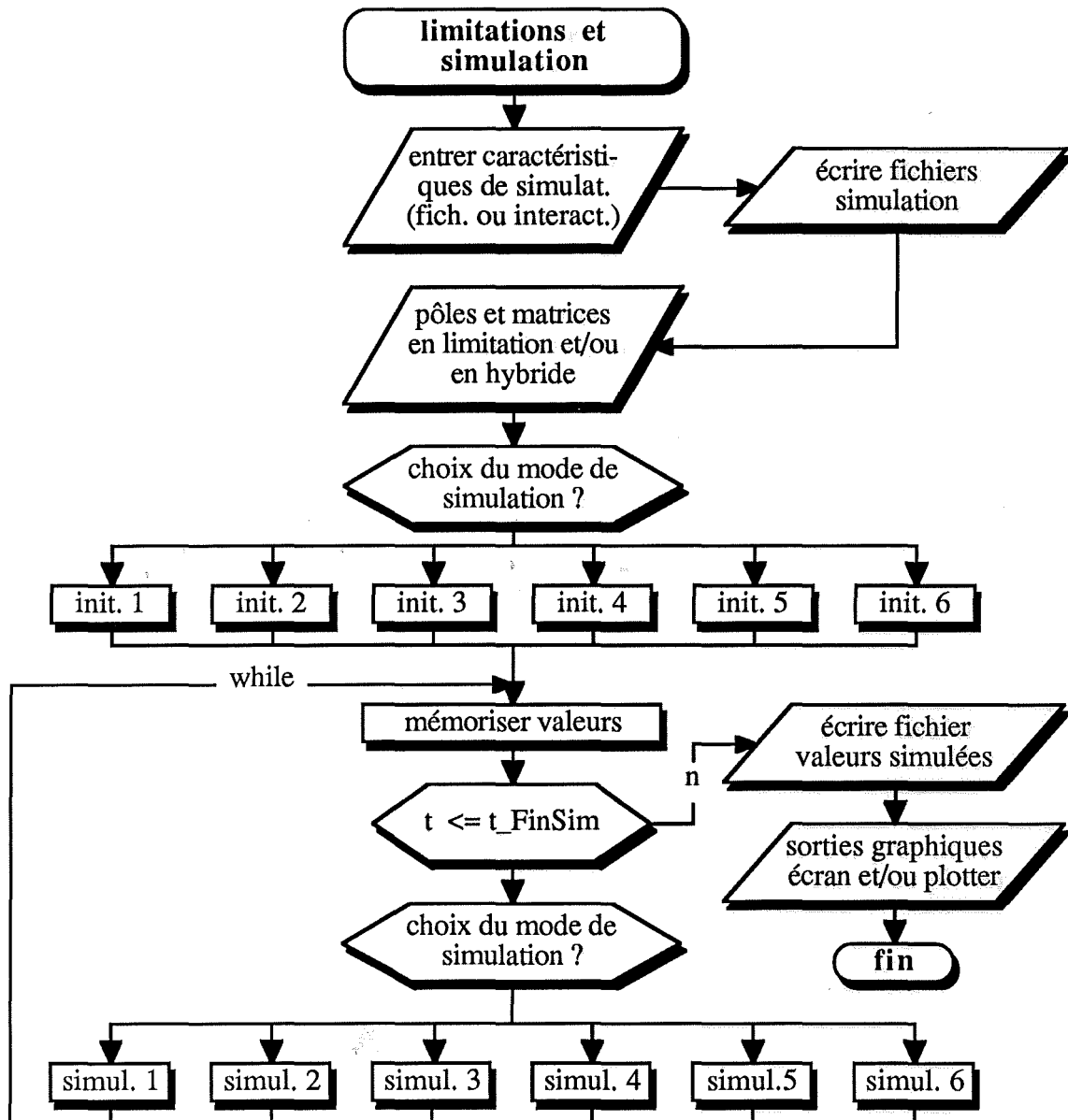


Fig. 7.5 Organigramme de la partie "limitations et simulation".

### 7.2.7 Limitations

Le bloc "pôles et matrices en limitation et/ou en hybride" est représentatif d'une étape assez importante lors de la conception d'un régulateur. Elle permet

de vérifier, en particulier, les pôles du système en limitation. Cette partie a été utilisée, par exemple, pour calculer les pôles en limitation de vitesse, dans le cas du dimensionnement global du réglage de position au chapitre 6.

Comme déjà précisé, la simulation peut être effectuée pour les deux types de régulateurs : continu et hybride. De ce fait, il est important de pouvoir calculer les pôles aussi pour ces deux cas. Ainsi, d'une manière plus générale, tant pour :

- un régulateur par mode de glissement continu (voir sect. 1.2 et 2.4), que pour
- un régulateur par mode de glissement hybride (voir sect. 4.6),

il est loisible de vérifier :

- les pôles et
- les matrices

du système réglé

- en mode de glissement ou
- en boucle ouverte,

pour les cas :

- hors limitation ou
- en limitation; dans ce cas, le calcul est effectué pour chaque segment de limitation.

### 7.2.8 Modes de simulation

Le programme *Slimodesi* permet le choix entre six modes de simulations (voir fig. 7.5). Ils peuvent être séparés en deux groupes principaux :

- La simulation du système réglé par une structure de réglage par mode de glissement continue (modes 1 à 3).
- La simulation du système réglé par une structure de réglage par mode de glissement hybride (modes 4 à 6).

Pour chaque groupe, il se présente fondamentalement deux modes de simulation :

- La simulation par le mode de glissement idéal, c'est-à-dire en admettant une fréquence de commutation de l'organe de commande infinie (modes 1 et 4). Cette méthode permet un gain de temps de calcul considérable par rapport à celle décrite ci-dessous. En effet, le choix de la période d'échantillonnage de calcul se base dans ce cas uniquement sur la rapidité du système en mode de glissement.
- La simulation en boucle ouverte à fréquence de commutation finie réelle (modes 2 et 5). Cette méthode de calcul est proche de la réalité, puisque la grandeur de commande est établie en fonction de la loi de commutation et de l'hystérèse. Ce mode permet d'analyser plus en détail l'influence des ondulations de la première grandeur d'état (le courant, dans les exemples d'application des chap. 5 et 6) sur le réglage. Son désavantage est un temps de calcul plus élevé, du fait d'un pas de calcul plus petit. Ce dernier est choisi

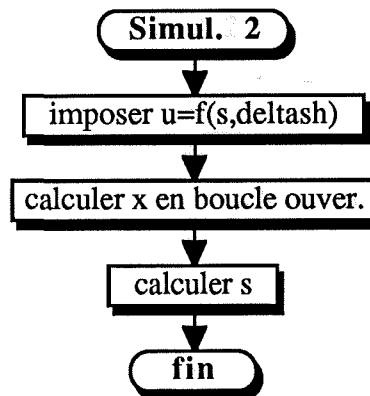
de sorte qu'une ondulation (à fréquence maximum) soit échantillonnée au moins dix fois.

Une combinaison de ces deux méthodes fondamentales peut être effectuée, en calculant tout d'abord en mode de glissement idéal (mode 1, respectivement 4) pour obtenir un gain de temps de simulation, avant de passer à la simulation détaillée avec hystérèse (mode 2, respectivement 5). Ce sont les modes 3, respectivement 6.

Voici, en résumé, les possibilités offertes :

Particularités ↓ / Modes →	1	2	3	4	5	6
Réglage continu	x	x	x			
Réglage hybride				x	x	x
Mode de glissement idéal	x		x	x		x
Mode de glissement réel		x	x		x	x

Du point de vue de la complexité de programmation, il est évident que le calcul en mode de glissement réel est beaucoup plus facile à réaliser. En effet, dans ce cas, il suffit de calculer à chaque pas de calcul la loi de commutation. Les limitations éventuelles y sont prises en compte. La grandeur de commande est ensuite imposée en fonction de  $s$  et de l'hystérèse (voir fig.7.6).



**Fig. 7.6** Organigramme de la partie simulation pour le cas du mode de glissement réel de la structure de réglage par mode de glissement continu (mode 2).

La simulation en mode de glissement idéal est beaucoup plus délicate, puisque réalisée en boucle fermée. Pour détecter les non-linéarités dues aux changements de limitations, il est aussi nécessaire de calculer la loi de commutation. Si un changement d'état est détecté, il est nécessaire d'effectuer une interpolation en temps inverse pour détecter l'instant exact de ce changement. Si ce n'était pas fait, la loi de commutation ne serait plus nulle, et la suite des calculs



de simulations serait erronée. De ce fait un certain nombre de procédures spécialisées ont dû être écrites pour traiter les différents cas.

A titre d'exemple, l'organigramme de la figure 7.7 montre la simulation du mode de glissement idéal pour le cas du régulateur continu (mode 1).

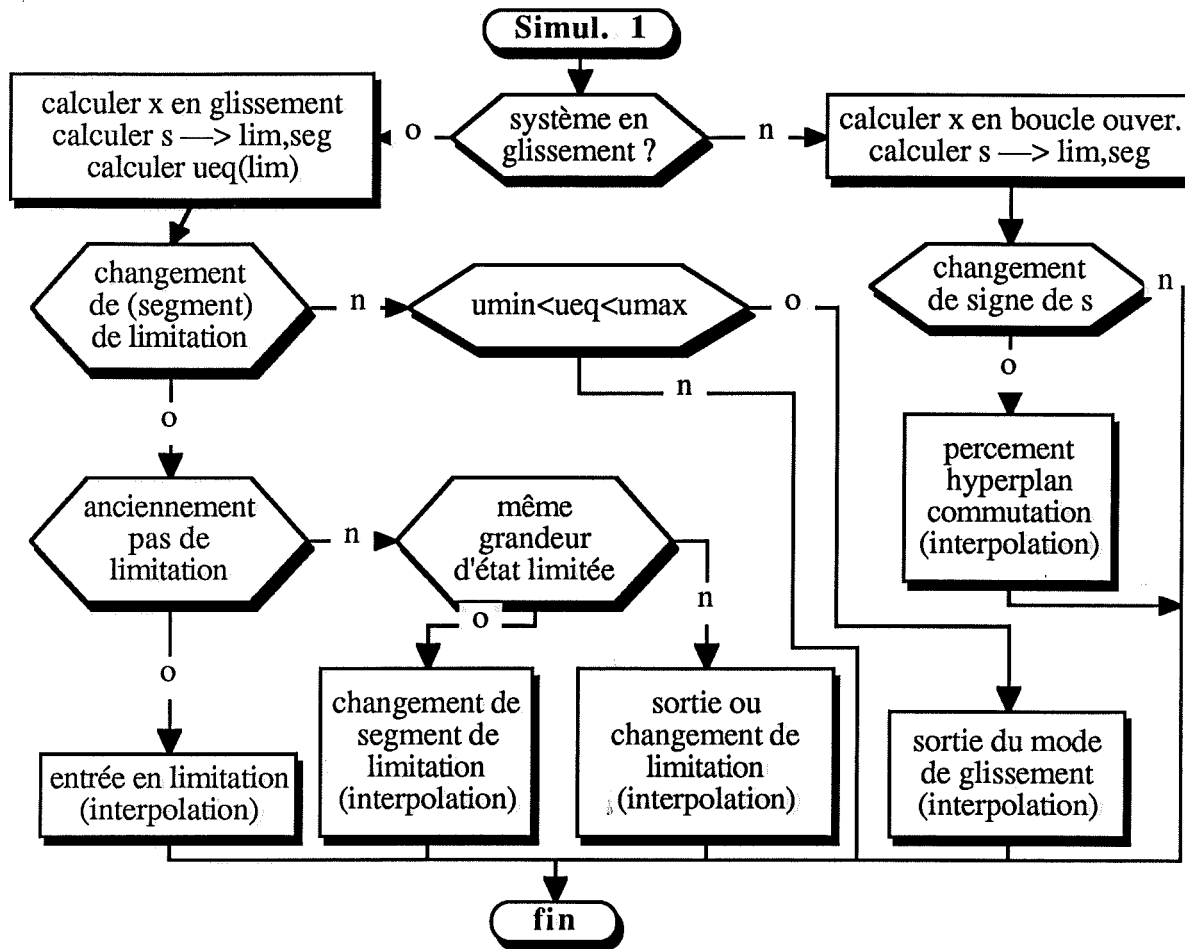


Fig. 7.7 Organigramme de la partie simulation pour le cas du mode de glissement idéal de la structure de réglage par mode de glissement continu (mode 1).

Chaque bloc de l'organigramme de la fig. 7.7 comprenant, entre autres, "interpolation", effectue l'interpolation en temps inverse pour calculer le temps exact du changement de mode de simulation (entrée, sortie ou changement de limitation, entrée ou sortie de mode de glissement). La méthode utilisée sera traitée au § 7.4.5, alors que son application est illustrée au § 7.4.6 pour le cas du régulateur hybride (mode 4).

### 7.2.9 Sorties graphiques

La partie graphique permettant le traitement des résultats de simulation n'est pas détaillée outre mesure dans ce paragraphe. Précisons seulement les possibilités suivantes :

- Affichage à l'écran automatique, en fin de simulation, de toutes les grandeurs d'état, ainsi que de  $s$  et  $u_{eq}$ .
- Toutes les grandeurs d'état, la loi de commutation  $s$ , les grandeurs de commande  $u$  et équivalente  $u_{eq}$ , ainsi que les entrées  $e_i$  et sorties  $w_i$  de tous les limiteurs peuvent être affichées.
- Calcul automatique des échelles de toutes les courbes, lors du premier affichage.
- Modifications manuelles des échelles, des labels et du titre.
- Modifications du nombre de fenêtres, du nombre de courbes par fenêtre, et des courbes affichées.
- Sortie on-line sur plotter, ainsi que sortie sur imprimante.

### 7.3 CODES DE *SLIMODESI*

#### 7.3.1 Structure interne du programme source

Le programme source de *Slimodesi* est séparé en plusieurs fichiers appelés *Unités*. Cette conception modulaire s'est imposée pour deux raisons principalement :

- la lisibilité du programme, et
- l'environnement DOS dans lequel fonctionne Turbo-Pascal, limite la longueur des fichiers sources à 64 kbytes.

Les unités peuvent être séparées en trois groupes distincts :

- celles spécifiques au programme *Slimodesi* (SLI-),
- les unités contenant des procédures générales pour le calcul matriciel, la gestion d'écran, les entrée/sorties, et appelées *librairies* (LIB-),
- les unités contenant les procédures graphiques (GRAPH-).

Au vu de la taille du programme et, surtout, de la place nécessaire à l'allocation dynamique des pointeurs, l'utilisation des recouvrements (overlays) a été nécessaire. Ainsi l'exécutable du programme se compose des fichiers *slimodesi.exe* et *slimodesi.ovr*.

#### 7.3.2 Quelques chiffres

A titre indicatif, voici quelques données chiffrées propres au programme :

- code source      spécifique à *Slimodesi* :            8500 lignes  
                           des librairies générales :            2800 lignes  
                           des librairies graphiques :        5500 lignes  
                           au total :                                16800 lignes
- taille des exécutables :      *slimodesi.exe* :    155 kbytes  
   *slimodesi.ovr* :    246 kbytes  
   au total :                                401 kbytes
- allocation dynamique des variables globales : 38 kbytes
- allocation dynamique des variables de  
   mémorisation pour la simulation :            232 kbytes

## 7.4 QUELQUES PRÉCISIONS SUR LA SIMULATION

### 7.4.1 Introduction

Dans cette section, on précise quelques solutions adoptées pour la programmation de la simulation d'un système réglé par mode de glissement.

On traitera le choix du coefficient de correction de l'intégrateur (§ 7.4.2), les équations utilisées pour la simulation (§ 7.4.3), le traitement des non-linéarités (§ 7.4.4), l'interpolation linéaire (§ 7.4.5), ainsi que le cas particulier de la simulation du régulateur hybride (§ 7.4.6).

### 7.4.2 Choix du coefficient de correction de l'intégrateur en cas de limitation

Comme on l'a vu au chapitre 2, le coefficient de correction  $k_{ci}$  de l'intégrateur (en cas de limitation) influence le pôle  $p_n$  du système réglé [voir (2.37) ou (2.45)].

On ne peut pas imposer une valeur trop grande, au risque d'introduire des problèmes de calcul numérique (pôles en particulier). Le programme propose automatiquement une valeur pour  $k_{ci}$ , telle que le pôle correspondant soit deux fois plus rapide que tous les autres pôles du système réglé. On garantit ainsi une rapidité de correction suffisante, tout en évitant les problèmes de calcul évoqués. Dans le cas hybride, ce coefficient est donné par  $k_c=1/k_R$ , en accord avec les résultats du § 4.6.7.

### 7.4.3 Equations utilisées pour la simulation

La méthode de calcul de la réponse indicielle d'un système réglé linéaire est la même, indépendamment du type de régulateur, que ce soit en boucle ouverte ou fermée et que le système est en limitation ou non.

La simulation est effectuée par un passage continu-échantillonné du système réglé, avec comme période d'échantillonnage, le pas de calcul, désigné ici par  $T_c$ .

Des précautions particulières doivent être prises lors des changements d'un état à l'autre, par exemple lors de changements de limitations.

Les développements ci-dessous sont relatifs à un système réglé en boucle ouverte, mais peuvent être généralisés aisément pour un système réglé en boucle fermée (réglage d'état) ou un système en mode de glissement (réglage par mode de glissement).

Ainsi, d'une manière tout à fait générale, un système décrit par l'équation d'état linéaire :

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}_u\mathbf{u} + \mathbf{b}_v\mathbf{v} + \mathbf{b}_w\mathbf{w} \quad (7.1)$$

devient après transformation de Laplace :

$$s\mathbf{x}(s) - \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{A}\mathbf{x}(s) + \mathbf{b}_u u(s) + \mathbf{b}_v v(s) + \mathbf{b}_w w(s) \quad (7.2)$$

soit :

$$\mathbf{x}(s) = (s\mathbf{1} - \mathbf{A})^{-1} [ \mathbf{x}(t_0) + \mathbf{b}_u u(s) + \mathbf{b}_v v(s) + \mathbf{b}_w w(s) ] \quad (7.3)$$

La transformation inverse de Laplace permet de calculer le vecteur d'état  $\mathbf{x}$  au temps  $t$  selon :

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t-t_0) \mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t-\tau) \cdot [\mathbf{b}_u u(\tau) + \mathbf{b}_v v(\tau) + \mathbf{b}_w w(\tau)] \cdot d\tau \quad (7.4)$$

avec la matrice de transition d'état  $\Phi(t)$  définie par

$$\Phi(t) \quad \circ \text{---} \bullet \quad \Phi(s) = (s\mathbf{1} - \mathbf{A})^{-1} \quad (7.5)$$

Les grandeurs de commande, de perturbation ou de consigne sont à considérer, à chaque instant  $t_0$  de calcul, comme des multiples du saut unité décalé  $\mathcal{E}(t-t_0)$  selon :

$$\left. \begin{aligned} u(t) &= \mathcal{E}(t-t_0) \cdot u \\ v(t) &= \mathcal{E}(t-t_0) \cdot v \\ w(t) &= \mathcal{E}(t-t_0) \cdot w \end{aligned} \right\} \quad (7.6)$$

ce qui permet de déterminer, à partir de l'équation (7.4), et après le changement de variable  $t=t_0+T_c$ , l'équation récurrente utilisée pour la simulation du système réglé :

$$\mathbf{x}(t_0+T_c) = \Phi(T_c) \mathbf{x}(t_0) + \Psi(T_c) \cdot [\mathbf{b}_u u + \mathbf{b}_v v + \mathbf{b}_w w] \quad (7.7)$$

où  $\Psi(T_c)$  est l'intégrale de la matrice de transition d'état :

$$\Psi(T_c) = \int_0^{T_c} \Phi(\tau) \cdot d\tau \quad (7.8)$$

Revenons aux différents cas rencontrés pour la simulation d'un système réglé par mode de glissement. Etant donné, les différents modes de simulation définis au § 7.2.8, et les limitations par segments pour chaque grandeur d'état, un nombre considérables d'équations de simulation du type (7.7) sont susceptibles d'être calculées.

Dans le tableau ci-dessous, une liste de tous les cas possibles, avec désignation des périodes d'échantillonnages correspondantes, donne une indication de la complexité. On indique, pour simplifier, uniquement la matrice de transition d'état; bien sûr, son intégrale doit aussi être déterminée.

Du point de vue de l'utilisation, il faut remarquer que ces différents cas ne coexistent pas. Il ne serait donc pas raisonnable de calculer toutes ces matrices à l'avance, d'autant plus qu'une quantité de mémoire (qui est limitée) énorme serait nécessaire. De ce fait, la solution adoptée est celle consistant à calculer au

moment opportun les matrices nécessaires à l'établissement des équations de simulation. Tout changement d'état du système réglé (changement de mode, changement de limitation, sortie ou entrée en mode de glissement) sera donc suivi par un calcul pour la détermination des matrices de simulation.

Régulateur →	Régulateur continu		Régulateur
Modes ↓ / Limitation →	Hors limitation	En limitation	hybride
Fréquence de commutation infinie, en mode de glissement	$\Phi^*(T_c^*)$	$\Phi_{ilimj}^*(T_c^*)$ $\forall i, j$	$\Phi_{1lim}^*(T_e^*)$
Fréquence de commutation infinie, hors mode de glissement	$\Phi(T_c^*)$	$\Phi_{ilimj}(T_c^*)$ $\forall i, j$	$\Phi_{1lim}(T_e^*)$ $T_e^* = T_E/N$
Fréquence de commutation finie avec hystérèse	$\Phi(T_{sw})$	$\Phi_{ilimj}(T_{sw})$ $\forall i, j$	$\Phi_{1lim}(T_{sw})$ $T_{sw} = T_E/N$

*Remarques :*

- Dans le cas du régulateur par mode de glissement hybride, pour assurer la synchronisation entre les instants d'échantillonnage de calcul et les instants d'échantillonnage de réglage, les périodes d'échantillonnage de calcul  $T_e^*$ , ou  $T_{sw}$ , sont des sous-multiples de la période d'échantillonnage de réglage  $T_E$ .
- L'élément de maintien du régulateur hybride revient à une limitation (fixe) de  $x_1$ , qui varie à chaque période d'échantillonnage de réglage.

La simulation du système réglé par une structure de réglage par mode de glissement hybride est plus complexe que celle du réglage d'état échantillonné. En effet, le mode de glissement étant un système non linéaire, il est nécessaire de calculer l'évolution du vecteur d'état avec une période d'échantillonnage de calcul plus petite que celle de réglage : à chaque instant d'échantillonnage de réglage, la sortie  $w_1$  du limiteur  $L_1$  est remise à jour. Cette grandeur varie par gradins et provoque donc la sortie du mode de glissement au début de la période d'échantillonnage de réglage  $T_E$  (voir § 7.4.6).

En cas de limitation, on peut montrer facilement que les sous-matrices de  $\Phi$  et  $\Psi$  agissant sur les  $n_s$  premières grandeurs d'état sont les mêmes dans les cas avec ou sans intégrateur. Ceci est vrai tant en boucle ouverte qu'en boucle fermée. Pour le régulateur hybride, les équations de récurrence pour la simulation numérique de  $x_s$  sont donc celles du régulateur par mode de glissement continu en limitation de  $x_1$ . La grandeur d'état du régulateur intégrateur est

remise à jour séparément à chaque instant d'échantillonnage de réglage  $T_E$  selon (2.22).

#### 7.4.4 Choix du pas de calcul

Le pas de calcul utilisé pour l'intégration numérique de l'équation (7.7) est déterminé selon différents critères.

Définissons en premier lieu les grandeurs  $\rho$  et  $\omega$ , qui sont les valeurs maximales des parties réelle, respectivement imaginaire de tous les pôles. Cette détermination a lieu pour le système hors ou en limitation et en boucle ouverte ou en mode de glissement.

Pour l'obtention d'une représentation graphique agréable par interpolation linéaire des points simulés, il est souhaitable que la variation de la pente à chaque point ne soit pas visible. Dans ce cas, on choisit selon [7, § 14.2.7] :

$$T_c \leq \frac{1}{4\rho} \quad \text{ou}$$

$$T_c \leq \frac{\pi}{12\omega}$$

Pour que l'interpolation linéaire en cas de changement de structure (voir § 7.4.6), entre deux points simulés donne des résultats corrects, il est nécessaire de respecter les conditions relatives à la méthode d'intégration d'Euler (voir [7, § 14.4.2]) :

$$T_c \leq \frac{1}{10\rho} \quad \text{ou}$$

$$T_c \leq \frac{\pi}{30\omega}$$

#### 7.4.5 Simulation avec non-linéarités

Lors de changements de limitations, ou lors de l'entrée en (ou sortie de) mode de glissement, il y a non-linéarité. Le calcul de simulation s'effectue donc avec plusieurs équations du type (7.7) différentes. Pour assurer un passage sans heurts entre les deux modèles, il faut connaître l'instant de transition d'un état à l'autre. Cela est particulièrement important pour garantir que le point de fonctionnement se trouve bien sur l'hyperplan de commutation.

Voici un exemple. Il se rapporte à l'organigramme présenté à la figure 7.7 pour le cas d'une entrée en mode de glissement. Admettons qu'au temps  $t_0$  le système réglé se trouve hors mode de glissement. Le calcul du vecteur d'état pour  $t_1 = t_0 + T_c$  permet de constater que la loi de commutation a changé de signe. Il y a donc eu pénétration de l'hyperplan de commutation. Il s'agit de calculer, par interpolation, le temps  $t^*$  où  $s(x) = 0$ . La simulation doit ensuite se poursuivre avec les équations en mode de glissement, pour autant que la grandeur de

commande équivalente se trouve bien entre les valeurs minimum et maximum. Au § 7.4.6, on traitera le cas du régulateur hybride.

### 7.4.6 Interpolations

Les valeurs du vecteur d'état obtenues par la méthode des matrices de transition d'état (exposée au § 7.4.3) sont correctes aux instants d'échantillonnage. C'est une méthode exacte. Pour autant que le pas de calcul est suffisamment petit, on peut même admettre une évolution linéaire du vecteur d'état entre les instants d'échantillonnage. Dans ce cas, il est possible d'appliquer l'interpolation linéaire pour déterminer l'instant précis d'un changement d'état du système réglé.

Celui-ci est réputé avoir eu lieu entre les instants  $t_0$  et  $t_1$ , lorsque deux fonctions spécifiées se croisent dans cet intervalle, comme représenté à la fig. 7.8. On désire connaître l'instant  $t^*$  de leur intersection. A partir de cette valeur, on pourra calculer le vecteur d'état  $x$  et toutes les autres variables à cet instant.

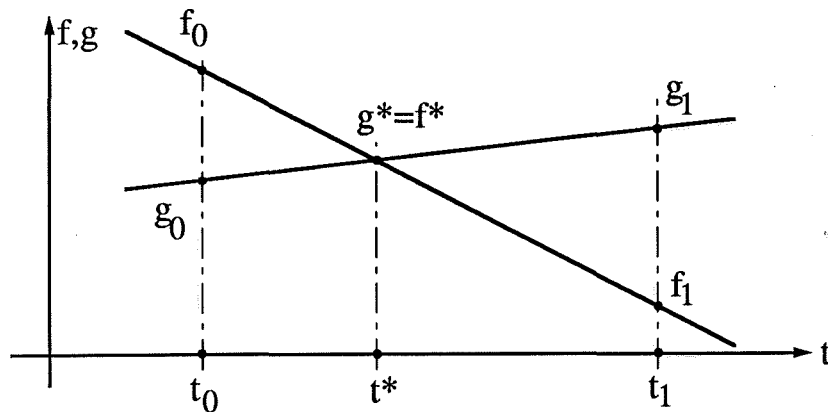


Fig. 7.8 Interpolation linéaire.

Après quelques calculs triviaux, on trouve :

$$t^* = \frac{t_1(f_0 - g_0) - t_0(f_1 - g_1)}{(f_0 - g_0) - (f_1 - g_1)} \quad (7.9)$$

et pour la valeur des fonctions en  $t^*$  :

$$f^* = g^* = \frac{f_0 g_1 - f_1 g_0}{(f_0 - g_0) - (f_1 - g_1)} \quad (7.10)$$

En notant par  $x_0$  et  $x_1$  la valeur du vecteur d'état aux instants  $t_0$  et  $t_1$ , on obtient la valeur interpolée par :

$$x^* = x_0 \frac{t^* - t_1}{t_0 - t_1} + x_1 \frac{t^* - t_0}{t_1 - t_0} \quad (7.11)$$

### 7.4.7 Simulation dans le cas hybride

La valeur de la période d'échantillonnage de réglage peut, a priori, être quelconque. Pour une simulation correcte, il est nécessaire d'effectuer celle-ci avec un pas de calcul suffisamment fin. Il est fonction des pôles du système réglé.

Les transitoires hors mode de glissement en début de période d'échantillonnage, comme représentés à la fig. 7.9, sont alors détectés correctement. Lorsque la loi de commutation change de signe entre deux pas de calcul, il faut appliquer l'interpolation décrite au paragraphe précédent.

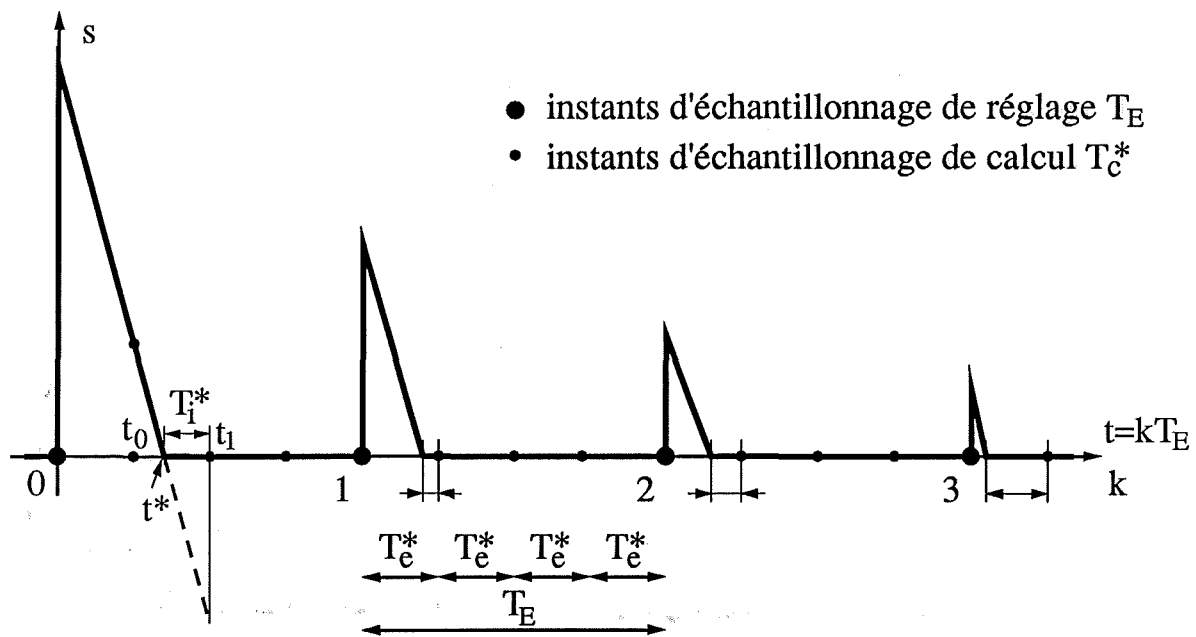


Fig. 7.9 Transitoires hors mode de glissement dans le cas du régulateur hybride. Représentation de la loi de commutation  $s(x)$ .

A l'intérieur d'une période d'échantillonnage de réglage  $k$ , la loi de commutation réelle  $s$  est donnée par :

$$s(t) = w_1[k] - k_1 x_1(t) \quad (7.12)$$

Elle est calculée avec un sur-échantillonnage selon :

$$s[k, k'] = w_1[k] - k_1 x_1[k, k'] \quad (7.13)$$

$k'$  étant le numéro d'échantillonnage de calcul ( $T_e^*$ ) à l'intérieur de la période d'échantillonnage de réglage ( $T_E$ ).

L'instant  $t^*$  d'entrée en mode de glissement (c'est-à-dire  $s(x)=0$ ) doit être calculé par interpolation. La solution adoptée pour assurer la synchronisation avec la période d'échantillonnage de réglage, est le calcul de l'évolution du vecteur d'état pour la fraction  $T_i^*$  de la période d'échantillonnage de simulation donnée par  $T_i^* = t_1 - t^* = T_e^* - (t^* - t_0)$ . L'établissement d'une nouvelle équation du type (7.7) est donc nécessaire pour effectuer un pas de calcul.



## 7.5 CONCLUSION

La description du programme *Slimodesi* de ce chapitre a mis en évidence toutes les possibilités offertes, en particulier pour la simulation. Ainsi, on a vu que deux modes de simulation sont possibles, l'un reproduisant exactement tous les phénomènes réels, l'autre en admettant un mode de glissement idéal à fréquence de commutation infinie.

La simulation du régulateur par mode de glissement hybride se différencie nettement de celle d'un régulateur d'état échantillonné [18]. Dans le second cas, le calcul du vecteur d'état aux instants d'échantillonnage de réglage est suffisant. Pour le mode de glissement, il est nécessaire de procéder à une simulation avec un sur-échantillonnage, dans le but de calculer correctement les transitoires hors mode de glissement au début de chaque période d'échantillonnage. La complexité y est aussi accrue par le fait des non-linéarités dues aux entrées en, ou sortie de mode de glissement, ainsi qu'aux limitations, qui plus est, sont variables.

Il faut préciser que l'utilisation du programme est aisée. Les messages affichés tout au long du déroulement du programme sont suffisamment explicites pour guider l'utilisateur. De plus, toutes les notations et dénominations correspondent parfaitement à celles de cette thèse.

On peut conclure que *Slimodesi* est un programme de dimensionnement et de simulations de systèmes réglés par mode de glissement performant. Les points forts sont :

- Le dimensionnement d'un régulateur par mode de glissement continu (contre-réaction globale ou partielle).
- La simulation du système réglé tant pour un régulateur par mode de glissement continu, qu'hybride.
- L'implantation de deux modes de simulation fondamentaux : mode de glissement réel et idéal ( $f_c = \infty$ ).
- L'introduction des limitations par segments des grandeurs internes.



## 8. CONCLUSION GÉNÉRALE

Par ce travail, on a montré que la structure de réglage par mode de glissement est applicable aux entraînements réglés présentant un organe de commande à structure variable. Cette structure de réglage peut être implantée en continu ou en hybride. Dans ce dernier cas, toutes les contre-réactions sont digitales, à l'exception de la première grandeur d'état, qui est influencée directement par la grandeur de commande.

On a pu montrer que le système réglé par une structure de réglage par mode de glissement peut être séparé en deux sous-systèmes lorsque le système est, précisément, en mode de glissement. Cette approche permet de réduire l'ordre du système réglé en mode de glissement, et une structure de réglage d'état apparaît.

Un avantage certain du réglage par mode de glissement par rapport au réglage d'état complet (y compris la première grandeur d'état), est l'absence de petite constante de temps. Une plus grande rapidité du système réglé est possible. L'imposition des pôles n'est plus liée à cette petite constante de temps, mais elle est libre. Des critères quant à la valeur maximum de certains coefficients seront par contre admis.

Cette réduction d'ordre du système est valable tant pour un régulateur continu qu'hybride. Dans le premier cas, le temps hors mode de glissement est négligé face au temps de réglage. Dans le second, la sortie transitoire du mode de glissement en début de chaque période d'échantillonnage est négligée. Les simulations numériques, ainsi que les essais pratiques sur banc ont montré toute la validité de ces hypothèses.

L'introduction de limitations variables pour les grandeurs internes est un concept nouveau. On a vu que par le choix d'une caractéristique de limitations, qui est une fonction linéaire de l'écart de réglage, une description d'état est possible. Elle est utilisée pour le programme de simulation. Les dépassements, voire les instabilités, pouvant apparaître en limitation peuvent alors être éliminés.

L'étude du réglage de position d'une machine à courant continu a permis de comparer le réglage par mode de glissement pur, avec l'approche par le réglage d'état du sous-système. Les instabilités en réglage de position dues aux limitations de vitesse ont pu être mises en évidence et expliquées. En appliquant les limitations variables aux limitations de vitesse, on a pu montrer toute l'efficacité de celles-ci.

L'étude systématique d'un axe d'une machine-outil a permis d'aboutir au modèle d'un système oscillant à deux masses avec amortissement. Tenant compte d'un changement de structure du système à charge bloquée (influence de

la friction), on a montré qu'un réglage de position complet, c'est-à-dire avec contre-réaction de toutes les grandeurs mesurables y compris le couple transmis, n'est pas adéquat. Deux types de contre-réactions sont proposés selon les mesures à disposition. Une compensation des phénomènes oscillatoires peut être combinée avec une grande rapidité de réglage uniquement dans le cas de mesures côtés charge et moteur.

L'apport original de ce travail peut être résumé par les points suivants :

- l'application du réglage par mode de glissement à des systèmes rencontrés dans le domaine des entraînements réglés,
- le développement de la théorie de la contre-réaction partielle pour le réglage par mode de glissement,
- l'approche par les méthodes du réglage d'état du sous-système formé par le système en mode de glissement, ce qui permet une réduction de l'ordre du système,
- l'introduction des limitations variables des grandeurs internes (avec description d'état), valables tant pour le réglage par mode de glissement, que pour le réglage d'état,
- l'étude des instabilités dues aux limitations de vitesse et proposition de solutions efficaces,
- l'application pratique du réglage par mode de glissement hybride de la position d'un moteur à courant continu, ainsi que d'un système oscillant à deux masses,
- l'étude de la sensibilité aux variations des paramètres et des coefficients d'un système oscillant à deux masses réglé,
- la définition de deux structures type pour le réglage d'axe d'une machine-outil,
- la description et la réalisation d'un programme interactif de dimensionnement et de simulation de systèmes réglés par mode de glissement,
- la réalisation d'un programme d'application de réglage pour le banc d'essai modulaire et interactif.

Pour finir, voici quelques perspectives en ce qui concerne l'évolution future dans le domaine du réglage par mode de glissement appliqué aux entraînements réglés :

- Le dimensionnement adéquat d'un système élastique n'est possible que si les paramètres essentiels tels que la rigidité et les constantes de temps mécaniques moteur et charge sont connus avec une précision suffisante. Le calcul de ces paramètres, en particulier de la rigidité, n'étant pas toujours possible, il serait intéressant de développer des procédés d'identification de ces paramètres. Les travaux menés à ce jour au LEI n'ont pas encore permis d'aboutir à une identification fiable, sûre et efficace du système élastique (voir [9]).
- Au niveau local (Laboratoire d'Electronique Industrielle), les développements sur les limitations variables peuvent être intégrés dans le programme

de dimensionnement et de simulation de systèmes réglés par réglage d'état [18].

- L'avènement des processeurs de signal permet un traitement très rapide des algorithmes de réglage. Il serait intéressant d'étudier la faisabilité et les avantages liés à l'application digitale complète du réglage par mode de glissement. D'autre part, pour un système élastique, les avantages d'un réglage plus rapide, face aux inconvénients liés au bruit de quantification plus élevé, méritent une étude approfondie.



**BIBLIOGRAPHIE**

- [1] Utkin V.I. *Sliding modes and their application in variable structure systems*. Mir, Moscou, 1979.
- [2] Bühler H. *Réglage par mode de glissement*. Presses Polytechniques Romandes, Lausanne, 1986.
- [3] Bühler H. *Traité d'électricité, Vol. XV. Electronique de puissance*. Presses Polytechniques Romandes, Lausanne, 1987.
- [4] Feller P., Benz U. *Sliding mode position control of a DC motor*. 10<sup>th</sup> IFAC World Congress, Munich, 27-31 juillet 1987, Vol. 3, pp. 325-330.
- [5] Bühler H. *Réglages échantillonnés. Vol. 2. Traitement dans l'espace d'état*. Presses Polytechniques Romandes. Lausanne, 1983.
- [6] Ackermann J. *Entwurf durch Polvorgabe*. Regelungstechnik, Bd. 25, Nr. 6, S. 173-179 und Nr. 7, S. 209-215.
- [7] Bühler H. *Conception de systèmes automatiques*. Presses Polytechniques Romandes. Lausanne, 1988.
- [8] Favre J.-P. *Correction de la composante intégrale de régulateurs digitaux en cas de limitation*. Bulletin-ASSPA, 1984-4, pp. 3-10.
- [9] Benz U. *La machine-outil traitée par un automaticien*. Rapport interne n° 89/01, LEI, EPFL. Lausanne, 1989.
- [10] Spring J.-F. *Réglage d'état digital d'une machine à courant continu*. Travail de diplôme n° 85/11, LEI, EPFL. Lausanne, 1985.
- [11] Benz U. *Observateur digital d'accélération et de vitesse*. Bulletin-ASSPA, 1987-1, pp.3-9.
- [12] Del Pedro M., Pahud P. *Mécanique vibratoire*. Presse Polytechniques Romandes. Lausanne, 1988.
- [13] Bühler H. *Traité d'électricité, Vol. XVI. Electronique de réglage et de commande*. Presses Polytechniques Romandes, Lausanne, 1988.
- [14] Akalp M. *Réglage par mode de glissement d'un axe d'une machine-outil*. Travail de diplôme, LEI, EPFL, 1987.
- [15] Colombi S. *Influence de la quantification et de non-linéarités sur la conception et la simulation de réglages digitaux..* Thèse de doctorat n° 703, EPFL, 1987.

- [16] Feller P. *Réglages analogiques modernes appliqués à la machine à courant continu et à la machine asynchrone*. Thèse de doctorat n° 548, EPFL, 1984.
- [17] Riedo P.-J. *Réglages digitaux appliqués à la machine à courant continu et à la machine synchrone*. Thèse de doctorat n° 567, EPFL, 1985.
- [18] Correvon M.  
Zoia R. *Librairie LIBSUB, concerne l'ensemble des sous-programmes utiles pour le traitement des algorithmes de réglage dans l'espace d'état, version II*. Rapport interne n° 84/03, LEI, EPFL, 1984.
- [19] Benz U. *Réglage d'axe d'une machine-outil*. Marché Suisse des Machines n° 17/1990, août 1990.
- [20] Benz U. *Identification et réglage d'axe d'une machine-outil*. Revue Précision, à paraître fin 1990.



## GLOSSAIRE

A	matrice de système d'un système continu
<b>b</b>	vecteur d'entrée d'un système continu
<b>b<sub>v</sub></b>	vecteur d'entrée de la grandeur de perturbation d'un système continu
<b>b<sub>w</sub></b>	vecteur d'entrée de la grandeur de consigne d'un système continu
<b>b<sub>w</sub><sup>•</sup></b>	vecteur d'entrée de la dérivée de la consigne d'un système continu
c	facteur de proportionnalité pour le dimensionnement des coefficients
c <sub>ij</sub>	ordonnée à l'origine du segment de limitation j de la grandeur d'état x <sub>i</sub>
c <sup>T</sup>	vecteur-ligne de sortie
e	écart de réglage
e <sub>i</sub>	entrée du limiteur L <sub>i</sub>
E <sub>c</sub>	énergie cinétique
E <sub>p</sub>	énergie potentielle
e <sup>T</sup>	vecteur-ligne auxiliaire
E	matrice auxiliaire
f <sub>c</sub>	fréquence de commutation de l'organe de commande
F	force
F	matrice de système d'un système échantillonné
G(s)	fonction de transfert
<b>h</b>	vecteur d'entrée d'un système échantillonné
<b>h<sub>v</sub></b>	vecteur d'entrée de la grandeur de perturbation d'un système échantillonné
<b>h<sub>w</sub></b>	vecteur d'entrée de la grandeur de consigne d'un système échantillonné
I	courant d'induit
i	courant d'induit relatif
J	moment d'inertie
k	instant d'échantillonnage
k <sub>c</sub>	coefficient de correction de la grandeur d'état du régulateur intégrateur
k <sub>i</sub>	coefficient de contre-réaction de la grandeur d'état x <sub>i</sub>
k <sub>mi</sub>	coefficient d'adaptation de la valeur de limitation w <sub>ilim</sub> du limiteur L <sub>i</sub>
k <sub>R</sub>	coefficient de contre-réaction de la grandeur d'état du régulateur intégrateur
k <sub>v</sub>	coefficient d'intervention directe de la grandeur de perturbation
k <sub>w</sub>	coefficient d'intervention directe de la grandeur de consigne
K <sub>l</sub>	rigidité linéaire en traction-compression
K <sub>θ</sub>	rigidité angulaire en torsion
k	rigidité relative

$k_t$	rigidité de l'arbre
$k^T$	vecteur-ligne des coefficients de contre-réaction d'état d'un régulateur continu
$K^T$	vecteur-ligne des coefficients de contre-réaction d'état d'un régulateur échantillonné ou hybride
L	inductance
$L_i$	limiteur de la grandeur d'état $x_i$
M	couple
m	couple relatif
m	masse
$M_e$	couple électromagnétique
$m_e$	couple électromagnétique relatif
$M_r$	couple résistant
$m_r$	couple résistant relatif
$M_t$	couple transmis à l'arbre
$m_t$	couple transmis à l'arbre relatif
M	matrice de passage entre système en boucle ouverte et système en mode de glissement
n	vitesse relative angulaire ou linéaire
n	dimension d'un système
$n_i$	zéro d'une fonction de transfert
$N_{capn}$	nombre d'impulsions d'un capteur incrémental pour un déplacement nominal
$p_i$	pôle d'une fonction de transfert continue
$p_{ij}$	pente du segment de limitation j de la grandeur d'état $x_i$
$P(s)$	polynôme caractéristique
$P_c$	puissance cinétique
$P_p$	puissance potentielle
$Q_c$	matrice de commandabilité
R	résistance
r	résistance relative
s	loi de commutation
S	système
t	temps
$t_{hg}$	temps hors mode de glissement
$t_m$	temps de montée
$t_r$	temps de réglage
T	constante de temps
$T_a$	constante de temps d'induit
$T_c$	période d'échantillonnage de simulation (pas de calcul)
$T_c^*$	période d'échantillonnage de simulation (mode de glissement continu)
$T_e^*$	période d'échantillonnage de simulation (mode de glissement hybride)
$T_{sw}$	période d'échantillonnage de simulation (boucle ouverte)

$T_E$	période d'échantillonnage de réglage
$T_i$	constante de temps d'intégration
$T_m$	constante de temps mécanique
$T_\theta$	constante de temps liant déplacement et vitesse nominaux.
$U$	tension
$u$	tension relative
$u$	grandeur de commande
$u_{eq}$	grandeur de commande équivalente
$u_{lim}$	grandeur de commande maximum ou minimum
$u_{max}$	grandeur de commande maximum
$u_{min}$	grandeur de commande minimum
$v$	grandeur de perturbation
$V$	vitesse linéaire
$w$	grandeur de consigne
$w_i$	sortie du limiteur $L_i$
$X$	déplacement linéaire
$x$	vecteur d'état
$x_i$	grandeur d'état $x_i$
$x_R$	grandeur d'état du régulateur intégrateur
$y$	grandeur de sortie
$z_i$	pôle d'une fonction de transfert échantillonnée
$\alpha$	pas de vis
$\alpha_t$	coefficient d'amortissement dans l'arbre
$\alpha$	coefficient de l'équation caractéristique
$\alpha^T$	vecteur-ligne contenant les coefficients de l'équation caractéristique du système à régler
$\beta$	coefficient du numérateur d'une fonction de transfert
$\beta$	coefficient d'un polynôme
$\delta$	coefficient d'un polynôme
$\delta$	coefficient d'amortissement relatif d'un système oscillant
$\Delta$	variation
$\Delta_{sh}$	hystérèse sur la loi de commutation
$\Phi$	flux
$\varphi$	flux relatif
$\Phi$	matrice de transition d'état
$\ominus$	angle ou déplacement angulaire
$\theta$	déplacement relatif angulaire ou linéaire
$\rho$	partie réelle des pôles
$\tau$	grandeur auxiliaire pour le temps

$\omega$	partie imaginaire des pôles
$\omega$	pulsation
$\Omega$	vitesse angulaire
$\Psi$	intégrale de la matrice de transition d'état
$\mathbf{1}$	matrice unité

## Indices

a	induit d'une machine à courant continu
a	sous-système a
b	sous-système b
c	consigne
c	correction
c	continu
e	échantillonné
E	échantillonnage
G	système global fermé
i	courant
i	indice général
j	indice général
L	charge
lim	système en limitation
m	grandeur mesurée
M	moteur
n	vitesse
n	nominal
n	n <sup>ième</sup> grandeur d'un vecteur
q	quantification
$\theta$	position
R	régulateur intégrateur
s	système à régler
t	arbre
v	perturbation
w	consigne
*	relatif au système réglé en mode de glissement

## Opérateurs

$j$	opérateur complexe
$s$	opérateur de la transformation de Laplace
$\mathbf{x}^T$	transposition de $\mathbf{x}$
$\dot{\mathbf{x}}$	dérivée par rapport au temps de $\mathbf{x}$
$\ddot{\mathbf{x}}$	dérivée deuxième par rapport au temps de $\mathbf{x}$
$\infty$	infini
$\det$	déterminant
$\circ \longrightarrow \bullet$	correspondance entre la fonction originale et la transformation de Laplace



**CURRICULUM VITAE**

- BENZ Urs      né le 25 mai 1962 à Berne, Suisse.
- 1968 - 1972      Ecole primaire, Avenches.
- 1972 - 1978      Ecole secondaire, Avenches.
- 1978 - 1980      Gymnase cantonal CESSNOV, maturité fédérale (type C),  
Yverdon-les-Bains.
- 1980 -1984      Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne (EPFL), Section  
d'Electricité.
- janvier 1985      Diplôme d'ingénieur électricien (EPFL).
- dès 1985      Assistant au Laboratoire d'Electronique Industrielle de l'EPFL.

