

LOCALISATION D'ONDES CLASSIQUES PAR LE DESORDRE

THESE No 700 (1987)

PRESENTÉE AU DEPARTEMENT DE PHYSIQUE

ECOLE POLYTECHNIQUE FEDERALE DE LAUSANNE

POUR L'OBTENTION DU GRADE DE DOCTEUR ES SCIENCES

PAR

CRISTINA di SAN GERMANO-FLESIA

Physicienne diplômée de l'Université de Genève
de nationalité italienne

acceptée sur proposition du jury :

Dr H. Kunz, rapporteur
Prof. R. Maynard, corapporteur
Dr R. Johnston, corapporteur
Dr K. Maschke, corapporteur

Lausanne, EPFL
1988

TABLE DES MATIERES

CHAPITRE 1. INTRODUCTION

1.1.	Les systèmes désordonnés et le problème de la localisation	1
1.2.	La localisation optique : différences et similitudes avec le problème de Schrödinger	6
1.3.	Etat du sujet	8
	1.3.1. Localisation faible	9
	1.3.2. Localisation forte	14

CHAPITRE 2. LA LOCALISATION ET LES PROPRIETES DE DIFFUSION

2.1.	Un modèle pour l'étude de la propagation d'ondes électromagnétiques dans un milieu aléatoire multidimensionnel	20
	2.1.1. Approximation scalaire	21
	2.1.2. Un réseau de canaux unidimensionnels	22
2.2.	Une expérience théorique de diffusion	25
	2.2.1. Conditions au bords	27
	2.2.2. Produit de matrices de transfert	28
	2.2.3. Produit de matrices aléatoires et le groupe symplectique	32

2.3.	Propriétés du produit de matrices aléatoires	34
	2.3.1. Le théorème de Tutubalin-Virster	34
	2.3.2. Conditions d'application du théorème de Virster au produit de matrices de transfert	35
2.4.	Comportement asymptotique des éléments de la matrice de transmission	37
CHAPITRE 3.	CALCUL NUMERIQUE DES EXPOSANTS DE LIAPUNOV D'UN PRODUIT DE MATRICES ALEATOIRES	
3.1.	Principe du programme	40
	3.1.1. Le résultat d'Oseledec	41
	3.1.2. Application numérique de la formule d'Oseledec	42
	3.1.3. Procédure d'orthonormalisation	43
3.2.	Précision numérique des résultats	44
	3.2.1. Etude de la convergence vers la région asymptotique	45
	3.2.2. Sensibilité au paramètre d'orthonormalisation	48
3.3.	Exemple de programme FORTRAN	49

CHAPITRE 4. ETUDE DE LA LONGUEUR DE LOCALISATION DANS LE CAS D'UNE DISTRIBUTION UNIFORME POUR LA CONSTANTE DIELECTRIQUE

41.	Le système unidimensionnel	55
	4.1.1. Produit de matrices réelles et indépendantes	55
	4.1.2. Une expression analytique pour γ	58
4.2.	Le fil unidimensionnel faiblement désordonné	60
4.3.	Le fil unidimensionnel fortement désordonné	63
4.4.	Le réseau bidimensionnel	67
	4.4.1. Comportement de la longueur de localisation ξ en fonction du désordre pour un ruban de largeur ℓ .	67
4.5.	Estimation de la longueur de localisation à partir du développement perturbatif de la fonction de Green.	72
	4.5.1. Développement perturbatif	73
	4.5.2. Comparaison des résultats numériques	77

CHAPITRE 5. ETUDE DE LA LONGUEUR DE LOCALISATION DANS LE CAS D'UNE DISTRIBUTION CENTREE AROUND DE DEUX VALEURS

5.1.	Le fil unidimensionnel	86
5.2.	Le réseau multidimensionnel	93
5.3.	Estimation de ξ à partir de "l'approximation de Green"	99

CHAPITRE 6. UN EXEMPLE : LE SPECTRE D'EXTINCTION DU CARBONE AMORPHE

6.1.	Description de l'expérience	104
	6.1.1. Préparation de l'échantillon et mesures	104
	6.1.2. Résultats expérimentaux	107
6.2.	Le modèle unidimensionnel	110
	6.2.1. Calcul des paramètres	113
	6.2.2 Les résultats numériques	117
	CONCLUSION	120

REMERCIEMENTS

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à Monsieur Hervé Kunz, mon directeur de thèse, pour m'avoir initiée à la physique des systèmes désordonnés et m'avoir fait bénéficier de son expérience.

Je suis aussi très reconnaissante à Robert Johnston pour une longue et fructueuse période de travail commun.

Je remercie l'Institut de Physique Théorique pour m'avoir accueillie et pour m'avoir permis de développer ce travail, et Christine Roethlisberger pour sa patience et sa constante disponibilité.

Ma gratitude va également à Vito Capozzi pour m'avoir mise en contact avec les secrets de la physique expérimentale, aux membres du jury pour avoir accepté de juger ce travail et à tous les collègues intéressés par le sujet, de Lausanne ou d'ailleurs, pour nos échanges fructueux.

Lausanne, septembre 1987

RESUME

Formulé pour la première fois, par P.W. Anderson en 1958, le concept de fonction d'ondes quantiques localisées par le désordre n'a fait que s'élargir et l'on s'est aperçu qu'il pouvait s'appliquer à d'autres situations physiques telles que la propagation d'ondes classiques, optiques et acoustiques, dans un milieu désordonné. Ce travail se consacre à l'étude de la propagation de la lumière dans un milieu à indice de réfraction aléatoire.

Chapitre 1 : Une brève introduction décrit les concepts fondamentaux et énonce les résultats de base sur la localisation optique.

Chapitre 2 : On définit un modèle pour la propagation d'une onde scalaire classique dans un milieu aléatoire multidimensionnel, formé par un réseau de canaux unidimensionnels. Ce modèle particulier qui décrit un système continu avec un nombre infini de modes, permet toutefois de conserver certains avantages d'un modèle discrétisé, comme par exemple la facilité du traitement numérique. Les propriétés de diffusion d'une onde optique de fréquence ω sur tel réseau désordonné sont décrites à partir des propriétés asymptotiques d'un produit de matrices aléatoires symplectiques. Les éléments de la matrice de transmission peuvent, de ce fait, être exprimés à partir des exposants de Liapunov du produit de matrices aléatoires de transfert.

Chapitre 3 : On y aborde le problème du calcul numérique des exposants de Liapunov d'un produit de matrices aléatoires. Une procédure d'orthonormalisation permet de contrôler les divergences numériques et la mise en oeuvre de paramètres de contrôle permet de vérifier la convergence des résultats vers la région asymptotique.

Chapitre 4 : La longueur de localisation ξ , calculée analytiquement pour un système unidimensionnel dans le cas d'une distribution uniforme entre $(1, 1+w)$ pour la constante diélectrique, montre une saturation en fonction du désordre w vers une valeur minimale ξ_{\min} indépendamment de la fréquence incidente. L'extension numérique à un ruban désordonné confirme l'existence d'un tel effet dans un système à deux dimensions. Les résultats indiquent que la longueur de localisation minimale croît avec la largeur ℓ du ruban et il n'y a pas d'évidence numérique de

l'existence d'états localisés dans un plan bidimensionnel ($\ell \rightarrow \infty$) désordonné. Une estimation de l'inverse γ de la longueur de localisation, donnée à partir du rayon de convergence du développement perturbatif de la fonction de Green, confirme ce comportement qualitativement.

Chapitre 5 : Pour une distribution de probabilité de la constante diélectrique uniforme entre $(1, 1 + w)$, la localisation des ondes électromagnétiques est très faible. Pour augmenter cet effet, un désordre est donc nécessaire qui favorise l'interférence destructive par réflexion de l'onde optique. Ceci est possible en obligeant la constante diélectrique à changer fréquemment de petites à grandes valeurs. Pour une distribution uniforme de $\varepsilon(r)$ entre $(1, 1 + \delta) \cup (1 + w - \delta, 1 + w)$, on voit apparaître des régions où la lumière est très fortement localisée. Ces régions sont séparées entre elles par des intervalles où la longueur de localisation est très grande. Ces grandes valeurs de ξ correspondent aux résonances de l'onde sur les mailles du réseau. Les conditions d'harmonicité permettent alors de calculer, tout au moins pour une chaîne unidimensionnelle désordonnée, les valeurs du désordre pour lesquelles l'interférence de l'onde à l'intérieur du système est constructive.

Chapitre 6 : Un exemple expérimental de l'existence de fréquences résonantes pour la lumière à l'intérieur d'un système désordonné est donné par le spectre d'extinction de grains de carbone amorphe. Deux "pics de transmission anormaux", pour la lumière incidente sur des échantillons de densité très inhomogène, peuvent être expliqués à partir d'un effet de localisation forte de l'onde électromagnétique à l'intérieur de l'échantillon. La simulation numérique du spectre d'extinction donne la position spectrale des pics avec une assez bonne précision.

CHAPITRE 1. INTRODUCTION

1.1. Les systèmes désordonnés et le problème de la localisation

Durant ces dernières années, plusieurs travaux ont été consacrés à l'étude des effets dus au désordre sur les ondes associées aux particules quantiques.

En 1958, Anderson [1] ouvrit tout un champ de recherche en montrant que des électrons soumis à un potentiel aléatoire décrivant leur interaction avec un milieu désordonné, ne se propageaient plus d'une région quelconque de l'espace à une autre, mais sous certaines conditions, demeuraient localisés dans une région finie de l'espace.

Dans ce cas, pour une énergie e donnée, toutes les solutions non nulles de l'équation stationnaire $H\phi = e\phi$ sont de carré intégrables

$$\int |\phi(x)|^2 dx < \infty$$

et l'amplitude de l'onde décroît rapidement dans l'espace.

Dans le cas contraire, les états sont étendus. La décroissance spatiale de l'amplitude de l'onde étant habituellement exponentielle, on définit, dans la limite $x \rightarrow \infty$, la longueur de localisation comme la longueur ξ t. q.

$$\phi(x) = e^{-\frac{|x|}{\xi}}$$

Une autre définition souvent utilisée de la longueur de localisation ξ est donnée à partir de la décroissance exponentielle de la fonction de corrélation des amplitudes du système infini

$$\bar{\rho}(r, e) = \exp(-|r|/\xi(e))$$

où $\xi(e)$ peut être aussi appelée longueur de localisation.

Toutes ces quantités ont le même ordre de grandeur.

Dans les années '70, les travaux de Ruelle, Amrein, Georgescu et Sinha [2] ont donné une caractérisation mathématique à ces concepts, en associant les états localisés et les états étendus, respectivement à la partie purement ponctuelle et à la partie purement continue du spectre de l'opérateur Hamiltonien H.

On peut en général distinguer les états localisés des états liés au sens habituel. En effet, alors qu'en général les états liés correspondent à des valeurs propres isolées de H, pour un hamiltonien aléatoire, lorsque le spectre est purement ponctuel, les valeurs propres forment un ensemble dense : le spectre est, en ce cas, formé des valeurs propres et de leurs points d'accumulation. Les états localisés sont de ce fait particulièrement intéressants et difficiles à étudier.

Ces travaux permettent de faire un lien entre les notions spectrales et la dynamique de la particule.

Considérons un état initial φ , localisé spatialement dans une région Λ et d'énergie comprise dans l'intervalle A. On peut calculer la probabilité de retour R_A de la particule dans cette région

$$R_A = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T dt \frac{1}{|\Lambda|} \int_{\Lambda} d^d x |\varphi_t(x)|^2$$

et le temps de séjour de la particule dans cette région

$$T_A = \int_0^{\infty} dt \frac{1}{|\Lambda|} \int_{\Lambda} d^d x |\varphi_t(x)|^2$$

- Alors, si le spectre est purement ponctuel,

$$R_A > 0 \quad \text{et} \quad T_A = \infty$$

la particule retourne dans cette région et y passe un temps infini.

- Si le spectre est absolument continu

$$R_A = 0 \quad T_A < \infty$$

la particule s'éloigne de cette région, n'y restant qu'un temps fini.

- Si le spectre est singulièrement continu

$$R_A = 0 \quad T_A = \infty$$

La particule quitte la région Λ , y revenant toutefois un nombre ∞ de fois.

Comme il peut être très difficile de déterminer la nature du spectre d'un hamiltonien aléatoire, il est certaines fois très utile, à partir du lien établi par les réfs. [2], d'étudier les propriétés de transport d'un système désordonné. En effet, plus une particule pourra se propager longtemps sans subir des collisions inélastiques, plus le fait qu'elle soit dans un état localisé affectera sa dynamique, mesurée par différents coefficients de transport et plus on pourra mesurer les effets de la localisation.

Le problème est alors de déterminer pour quels intervalles d'énergie et de désordre, mesuré par exemple par l'intensité maximale w des fluctuations du potentiel aléatoire, on peut prévoir l'existence d'états localisés dans le système.

On peut se demander quels sont les phénomènes qui interviennent dans les effets de localisation.

- Considérons d'abord le problème classique. Pour une particule classique d'énergie E , se mouvant dans un milieu continu avec un potentiel aléatoire $V(x)$, seules les régions pour lesquelles $E > V(x)$ sont permises. A basse énergie, il y a peu de chance que cette condition soit vérifiée et ces régions ne formeront que des îlots bien séparés les uns des autres.

La particule sera alors localisée dans une région finie de l'espace. A grande énergie, le phénomène contraire se réalise et les régions pour lesquelles $E > V(x)$ s'étendront sur presque tout le système, intercalée de temps en temps par des îlots de régions interdites $E < V(x)$. La particule sera alors dans un état étendu, et pourra facilement se propager à l'infini.

On s'attend donc à l'existence d'une énergie critique E_c telle que pour $E < E_c$ les états sont localisés et pour $E > E_c$, les états sont étendus. E_c devrait croître avec le désordre.

- Si maintenant on considère le cas quantique, de nouveaux effets viennent s'ajouter à cette image : l'effet tunnel et celui de la barrière quantique. A cause de l'effet tunnel, des régions classiquement interdites deviennent, dans un certain sens, accessibles. Même si la fonction d'onde dans ces régions devait décroître exponentiellement, on pourrait imaginer qu'il existe un effet tunnel cohérent d'une région interdite à une autre qui s'opposerait à la localisation. Le désordre toutefois peut difficilement permettre un tel effet tunnel cohérent et on s'attend à ce que les états soient encore localisés à basse énergie.

D'autre part, le phénomène de la barrière quantique intervient à son tour dans les effets de localisation : une particule passant au-dessus d'une barrière de potentiel est réfléchi par cette barrière. La présence de barrière aléatoirement répartie peut donc, par réflexions successives créer un effet d'interférence destructive pour l'onde qui se propage, diminuer l'intensité de la fonction d'onde et la faire décroître spatialement.

Ceci apparaît clairement quand on réduit la dimension de l'espace, où ces effets de retour en arrière sont amplifiés. La localisation sera donc généralement favorisée par la présence des barrières quantiques.

La localisation étant un effet d'interférence, on peut s'attendre à l'existence d'un tel phénomène dans d'autres équations d'onde que l'équation de Schrödinger.

Par exemple, on peut s'attendre à l'existence d'effets de localisation dans la propagation d'ondes optiques dans un milieu où la vitesse de l'onde est aléatoire.

On aura alors des solutions $\varphi(x, t) = e^{i\omega t} \varphi(x)$ de l'équation d'onde

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \varphi(x, t) = c^2(x) \Delta \varphi(x)$$

qui décroissent rapidement dans l'espace de sorte que

$$\int \frac{1}{c(x)} \varphi^2(x) dx < \infty$$

Il faut noter que ces solutions ont rarement été prises en considération dans les études faites depuis plusieurs années à ce sujet.

Les propriétés de transport seront, dans ce cas, exprimées en terme de coefficient de transmission pour l'onde à travers le milieu désordonné ou en terme d'intensité diffusée par le milieu aléatoire.

De même, on peut par exemple étudier la localisation des ondes acoustiques dans des matériaux désordonnés [3], ou les effets d'un fond aléatoire sur la propagation d'une onde de surface [4].

Le problème de la localisation apparaît donc être beaucoup plus général que celui considéré initialement par P.W. Anderson.

Du point de vue mathématique, il apparaît être celui de l'étude des propriétés spectrales d'opérateurs linéaires ergodiques par rapport aux translations spatiales. Du point de vue des observations physiques, il se réduit à la mesure des propriétés de transport dont l'interprétation dépend du modèle physique considéré.

Nous nous concentrerons par la suite exclusivement sur le problème de la transmission optique dans un milieu aléatoire.

1.2. La localisation optique : différences et similitudes avec le problème de Schrödinger

L'étude de la localisation d'onde classique suscite depuis quelques temps un intérêt grandissant.

Même si les phénomènes physiques qui sont à la base de la localisation (i.e. effet d'interférence) sont essentiellement les mêmes dans le cas des ondes classiques que dans le cas électronique, il y a quand même une grande différence entre les électrons pour lesquels la mise en évidence des propriétés ondulatoires responsables des effets d'interférence nécessite la mise en oeuvre du formalisme de la mécanique quantique, et les ondes classiques pour lesquelles cet aspect est naturel.

Le cas des ondes électromagnétiques présente essentiellement deux avantages :

- 1) A cause de la très grande vitesse de la lumière, le cas électromagnétique représente à peu près la seule possibilité de négliger l'excitation thermique du milieu.

Comme la self interaction de la lumière est aussi négligeable, il est possible d'étudier les effets purs du désordre, en contraste avec le cas de l'électron pour lequel les excitations thermiques et l'interaction électron-électron compliquent la chose.

2) Les effets du désordre étant plus faciles à isoler, on peut espérer, dans le cas optique, observer des manifestations macroscopiques des phénomènes de localisation.

Du point de vue expérimental, en effet, le déficit fondamental réside en ce moment dans la préparation d'une microstructure diélectrique désordonnée dans laquelle on pourra observer les effets de forte localisation prévus théoriquement.

Si on compare le cas électronique avec celui électromagnétique, la première différence que l'on remarque est la nature vectorielle des équations de Maxwell.

Des résultats récents, montrant l'influence de la polarisation sur les effets de localisation ont de ce fait accru l'intérêt de l'étude de la propagation de la lumière dans les milieux aléatoires [5,6].

D'autre part, si on se restreint au cas le plus simple d'une onde scalaire classique, décrite dans les unités où la vitesse de la lumière $c = 1$, par l'équation stationnaire

$$\Delta \varphi(x) = -\omega^2 n^2(x) \varphi(x) \quad (a)$$

où ω est la fréquence de l'onde, il est parfois utile de considérer l'analogie avec l'équation de Schrödinger stationnaire

$$-(\hbar/2m) \Delta \varphi(x) = (E - V(x)) \varphi(x) \quad (b)$$

(1) L'équation (a) peut être comparée avec une équation de Schrödinger à énergie nulle ($E = 0$) et potentiel strictement négatif ($\hbar = m = 1$)

$$2V(x) = -\omega^2 n^2(x) < 0.$$

Comme $E = 0$, n'est pas en général une valeur propre pour cette équation, un "mapping" entre les deux équations (a) et (b) n'aura de sens que pour des solutions particulières, par exemple si on considère un problème de transmission et non pas un problème aux valeurs propres.

- 2) Une autre différence fondamentale avec l'équation de Schrödinger est que, pour chaque énergie fixée, dans le cas optique, le vrai paramètre de la théorie est le produit $\omega^2 w$ où w décrit l'intensité maximale des fluctuations de la constante diélectrique, alors que dans le cas de l'électron, la variable significative est la seule largeur w de la distribution de probabilité de la variable aléatoire.

Ceci implique que, par comparaison avec l'équation de Schrödinger, la limite de grand désordre soit difficilement atteignable et que, pour $\omega = 0$, les états soient délocalisés.

1.3. *Etat du sujet*

Les études récentes sur la localisation d'onde classique ont mis en évidence deux régimes de localisation, appelés respectivement régime de localisation faible et régime de forte localisation.

La plus grande partie des études a été essentiellement consacrée jusqu'à présent, au régime de faible localisation, interprétée comme phénomène d'interférence constructive provoquant une anisotropie de la section efficace différentielle dans le voisinage de la direction de rétrodiffusion [7].

Cette anisotropie, mesurée expérimentalement avec très grande précision [8, 9, 10], est essentiellement la seule preuve expérimentale de l'existence des effets précurseurs de la localisation optique.

Les études consacrées au régime de localisation forte [11, 12] prévoient, pour une onde électromagnétique se propageant dans un milieu désordonné à trois dimensions, un seuil de mobilité qui n'a pas encore été mesuré expérimentalement.

1.3.1. La localisation faible

Soient λ la longueur d'onde incidente sur un milieu désordonné et ℓ le libre parcours moyen de la lumière à l'intérieur d'un système stochastique. A faible désordre, c'est-à-dire dans la limite $\lambda/\ell \ll 1$, les impuretés sont en concentration si faible qu'elles peuvent être considérées comme un gaz parfait et, dans ce régime, les résultats de l'équation de Boltzmann devraient être corrects.

La méthode perturbative permet d'aller au-delà du régime Boltzmannien et de voir les effets précurseurs de la localisation. Ce régime est appelé "localisation faible".

Considérons [7] le problème de la propagation d'une onde plane incidente sur un milieu inhomogène, avec une densité fixe d'impuretés. On suppose que les impuretés provoquent une diffusion purement élastique sur l'onde incidente. On assume que les impuretés diffusent indépendamment la radiation incidente, ce qui équivaut à négliger les corrélations parmi les différents centres diffuseurs. Ceci n'est valable que pour une très faible concentration d'impuretés ($\lambda/\ell \ll 1$).

Les deux longueurs caractéristiques de ce problème sont alors la longueur d'onde incidente λ et le libre parcours moyen élastique ℓ .

Si on définit la probabilité $p(\hat{s}, \hat{s}')$ que la radiation incidente dans la direction \hat{s} soit diffusée dans la direction \hat{s}' , alors, d'après les conditions de stationnarité

$$p(\hat{s}, \hat{s}') = \frac{4\pi}{\sigma_t} |\varphi(\hat{s}, \hat{s}')|^2$$

où σ_t est la section efficace totale de diffusion et $\varphi(\hat{s}, \hat{s}')$ l'amplitude diffusée.

L'expression de $p(\hat{s}, \hat{s}')$ peut être dérivée à partir de la transformée de Fourier de la fonction de corrélation des des deux propagateurs, retardé et avancé du champ libre.

$$p(\hat{s}, \hat{s}') = C(k\hat{s}, k\hat{s}'; k\hat{s}, k\hat{s}')$$

On aura alors que la probabilité de diffusion

$$p(\hat{s}, \hat{s}') = p_c(\hat{s}, \hat{s}') + p_i(\hat{s}, \hat{s}')$$

où p_c et p_i décrivent respectivement les contributions de la diffusion multiple cohérente et incohérente à la probabilité de diffusion.

A partir de la symétrie par rapport au renversement temporel du potentiel de diffusion des impuretés, les contributions cohérentes $p_c(\hat{s}, \hat{s}')$ peuvent être exprimées à tous les ordres du développement perturbatif en diffusions multiples par l'égalité

$$p_c(\hat{s}, \hat{s}') = 1/2 [C(k\hat{s}, k\hat{s}'; -k\hat{s}, -k\hat{s}') + C(-k\hat{s}, -k\hat{s}'; k\hat{s}, k\hat{s}')]$$

Dans la direction de rétrodiffusion $\hat{s} = -\hat{s}'$ et

$$p_c(\hat{s}, -\hat{s}) = C(k\hat{s}, -k\hat{s}; k\hat{s}, -k\hat{s}) = p_i(\hat{s}, -\hat{s})$$

On a alors que, dans la direction de rétrodiffusion, la probabilité totale de diffusion est exactement deux fois la probabilité de diffusion incohérente. Ceci se manifeste de façon macroscopique par une valeur deux fois plus grande de l'intensité rétrodiffusée dans un cône très étroit autour de la direction d'incidence.

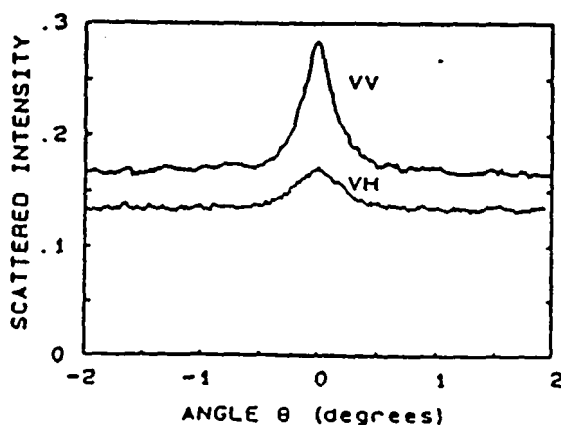
On trouve pour l'ouverture angulaire du cône

$$\Phi_c \approx \left(\frac{\lambda}{\ell} \right) \frac{\theta_d(\Omega)}{\tau}$$

où θ (Ω) est le temps de résidence de la particule à l'origine durant un intervalle de temps de l'ordre de $1/\Omega$ et Ω est le déphasage en fréquence de la radiation rétrodiffusée.

A partir des calculs théoriques, le régime de faible localisation a été testé expérimentalement.

Des expériences très précises [8,9], effectuées sur des suspensions colloïdales de sphères de polystyrène, ont confirmé en 1985 l'existence d'un phénomène de rétrodiffusion cohérent en excellent accord avec les prévisions théoriques. La dépendance angulaire de l'intensité de lumière diffusée montre un pic dans la direction $\theta = 0$ de rétrodiffusion : la largeur du cône mesuré montre un bon accord avec les prédictions (voir Fig. 1), alors que la hauteur du pic critique semble, dans ces mesures, être inférieure à la valeur 2 calculée.



Polarization dependence of the coherent back-scattering effect for 0.46- μ m-diam beads at a solid fraction of 10%. Directions of polarization are vertical-vertical (VV) and vertical-horizontal (VH). Curves are plotted at the same scale.

Figure 1.

La polarisation apparaît avoir un rôle très précis sur la hauteur du pic de rétrodiffusion.

En effet, dans le cas d'une polarisation parallèle (VV), l'intensité rétrodiffusée est à peu près 1.7 fois plus grande que l'intensité de diffusion incohérente, alors que, dans le cas de la polarisation transversale (VH), le facteur d'augmentation n'est que ~ 1.3 .

Un résultat postérieur [5] a expliqué le décalage entre la hauteur calculée et observée du pic dans la direction $\theta \approx 0$, et les effets de la polarisation.

On définit le "albedo $\alpha(\hat{K}_i, \hat{K}_f)$ " du système désordonné comme le rapport entre le flux sortant par unité d'angle solide $d\Omega$ et par unité de surface sur l'interface autour de la direction \hat{K}_f , et le flux d'énergie incidente.

Alors, pour une direction d'incidence et de sortie quasi-normale et dans le cas d'une diffusion isotropique pour une onde scalaire, on trouve les résultats suivants:

- 1) Pour $\theta = 0$, α est exactement le double de la valeur α_{inc} obtenue pour des grands angles.
- 2) La largeur angulaire dans laquelle on observe l'effet de rétrodiffusion cohérente est $\approx \lambda / 2\pi$
- 3) Très près de la direction de rétrodiffusion α varie linéairement.

L'extension au cas anisotropique est obtenue en substituant dans la définition de l'albedo α le libre parcours moyen ℓ par le libre parcours moyen de diffusion ℓ^* .

La comparaison entre les prédictions théoriques et les mesures expérimentales donne alors un très bon accord sur la hauteur du pic à $\theta = 0$.

La différence d'intensité entre la polarisation (VV) et la polarisation (VH) est expliquée à partir de la forme de l'amplitude Rayleigh diffusée par un unique diffuseur.

En effet, pour une séquence de n diffusions, si P_0 est la polarisation incidente et $P_{n//}$ et $P_{n\perp}$ sont respectivement les composantes // et \perp de P_n par rapport à P_0 , à partir de l'expression de l'amplitude Rayleigh, on aura que $P_{n//} = P'_{n//}$, ce qui implique que dans la configuration parallèle, la cohérence est entièrement maintenue, alors que $P_{n\perp}$ diffère de $P'_{n\perp}$ (pour $\forall n$ excepté que pour $n = 2$) d'un facteur

$$c(n) = \langle p_{n\perp}, p'_{n\perp} \rangle / \langle p_{n\perp}^2 \rangle$$

En ce qui concerne la localisation faible, il est intéressant de mentionner encore les mesures faites par Etemad et al., sur un échantillon solide et non-absorbant de particules colloïdales de silicium [10].

Ce travail, qui confirme les résultats précédents sur l'existence d'une anisotropie de la section efficace différentielle pour une onde électromagnétique incidente sur un système faiblement désordonné, met en évidence le fait que le pic de rétrodiffusion peut être observé seulement sur un ensemble moyenné de mesures. En d'autres mots, on ne peut remarquer l'existence d'un pic d'intensité dans la direction de rétrodiffusion qu'après avoir supprimé les fluctuations de l'intensité diffusée par un processus de moyennage des courbes mesurées.

1.3.2. La localisation forte

Le régime de localisation forte, défini par opposition au régime de faible localisation dans lequel seuls des effets précurseurs de la localisation apparaissent, est caractérisé par une valeur du paramètre $\lambda/\ell \gtrsim 1$ [13].

Dans ce cas, les corrélations entre les ondes diffusées produisent une interférence destructive qui réduit la transmission moyenne.

Comme les propriétés de diffusion dépendent alors de l'extension spatiale des corrélations des ondes, elles peuvent être décrites en terme du coefficient de diffusion $D(L)$ (où L est la longueur de l'échantillon désordonné) qui dépend de la longueur d'onde λ et du libre parcours moyen ℓ .

Quand ℓ rejoint une valeur critique qui a été prédite par Joffe et Regel [13] comme étant $\ell^* = \lambda/2\pi$ pour les électrons, les ondes sont localisées dans le sens d'Anderson et $D(L) \rightarrow 0$ si $L \rightarrow \infty$.

Un phénomène analogue aux résonances dans la diffusion de Bragg pour les électrons dans un cristal parfait a été récemment indiqué comme un mécanisme possible pour la localisation forte de la lumière [12].

L'idée de départ est que dans un système désordonné avec une densité suffisante de diffuseurs aléatoires, les sphères diélectriques sont optiquement corrélées et les résultats de la théorie de Mie pour les résonances dues à une seule diffusion ne sont pas applicables. L'hypothèse fondamentale de ce travail est qu'il soit possible, dans un super-réseau à trois dimensions faiblement désordonnées de reproduire les bandes de fréquence interdites, dues à la réflexion de Bragg et bien connues dans le cas unidimensionnel.

Ceci donnerait une clef pour une observation systématique de la localisation forte des photons dans un matériel non dissipatif avec une constante diélectrique toujours réelle.

L'existence de pseudo-gaps dans la densité d'états des photons nécessite une réinterprétation de la condition de Joffe-Regel.

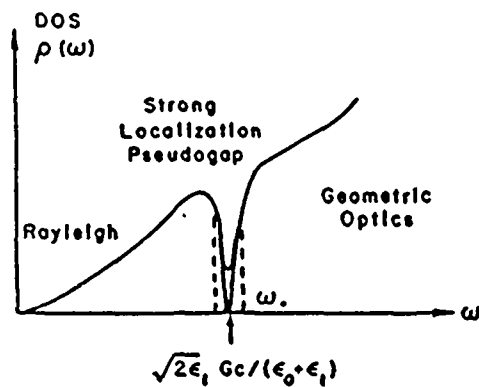
En premier lieu, cette approximation a été dérivée en utilisant l'approximation de la densité d'états des photons libres et la théorie de perturbation pour des diffusions uniques et répétées sur différentes sphères diélectriques. La procédure de moyennage sur le désordre conduit alors à un aplatissement de toutes les résonances géométriques macroscopiques.

Par contre, si on traite exactement ces résonances géométriques avant de moyenner sur le désordre, alors la longueur d'onde qui intervient dans la condition de Joffe-Regel doit être interprétée comme l'inverse de la fluctuation du vecteur d'onde dans le plan de Bragg plutôt que la longueur d'onde du photon libre. Comme cette longueur d'onde diverge au bord de bande, la localisation est possible même pour de petits désordres.

De ce point de vue, il ne faut pas négliger que la nature vectorielle du champ électromagnétique a d'importantes conséquences sur le phénomène de rétrodiffusion de Bragg.

L'existence de deux hélicités pour chaque photon de vecteur d'onde K donné, rend la réalisation des gaps en trois dimensions plus difficile que dans le cas électronique correspondant, et implique des restrictions sur les fluctuations minimales requises pour la constante diélectrique.

Le calcul de la densité d'états pour les photons dans un super-réseau désordonné montre deux régions d'états étendus respectivement à basse fréquence et à haute fréquence séparés par une région d'états localisés (pseudo-gap) (Fig. 2).



Photon density of states in a disordered superlattice exhibiting low-frequency Rayleigh scattering and high-frequency geometric-optics extended states separated by a pseudogap of strongly localized photons.

Figure 2.

Un autre résultat [12], qui prend son essor par le développement mathématique de Vollhardt et Wölfle, donne des résultats intéressants sur la localisation d'ondes classiques scalaires se propageant dans un milieu composite à deux composantes.

Le contraste d'impédance est défini comme $m = (n_2/n_1) > 1$, où n_2 et n_1 sont les indices de réfraction réels des deux matériaux présents dans l'échantillon considéré.

Les fractions de volume des deux composantes étant définies par p et $(1-p)$, la microstructure composite aura l'aspect d'un ensemble de sphères du composant mineur dispersé stochastiquement dans une matrice formée par le composant avec la plus grande fraction de volume. Les résultats montrent que l'existence des effets de localisation nécessite que le contraste d'impédance m soit plus grand qu'une certaine valeur minimale.

Cette étude part de l'idée que la localisation d'ondes ne se produit que quand la constante de diffusion effective s'approche de zéro. En suivant la voie tracée par la théorie du scaling, on peut affirmer que ceci arrive de la façon suivante.

Près du seuil de mobilité, les propriétés du champ sont homogènes seulement sur des échelles plus grandes que la longueur de corrélation $\xi > \ell$.

Pour des échelles plus petites que ξ , la constante de diffusion varie uniformément de D_0 à l'échelle du libre parcours moyen jusqu'à $D_0 \ell / \xi$ à l'échelle de ξ .

Loin du seuil, $\xi \approx 1$ et la constante effective de diffusion est donnée par D_0 . Si on approche du seuil de mobilité, ξ diverge et en conséquence la constante effective de diffusion tend vers zéro.

Vollhardt et Wölfle [14] ont identifié mathématiquement la classe des diagrammes maximalelement croisés comme la contribution dominante de la diffusion multiple à la renormalisation de la constante de diffusion près du seuil de mobilité

$$D(\omega) = D_0 \frac{1}{\xi} = D_0(\omega) \left[1 - \frac{3\gamma(\omega)}{\pi} \left[\frac{\bar{c}}{\omega} \right]^3 q(\omega) \right]$$

où
$$\gamma = -24 d^3 \text{Im} ((1-p) f_1(0) + p f_2(0))$$

est une quantité reliée à la section efficace totale de diffusion.

La localisation paraît être très étroitement liée à la diffusion résonante et on prévoit une multitude de seuils de mobilité et de régions d'états localisés.

Pour conclure, on peut encore mentionner des expériences dues à Genack [15] qui, à partir de la variation de la transmission totale en fonction de la taille de l'échantillon ont permis de déterminer le coefficient de diffusion et la longueur d'absorption du système.

Les mesures effectuées sur un milieu aléatoire ($n = 2.7$) contenant des microstructures de titanium ($n = 1.59$) n'ont pas mis en évidence l'existence des effets de localisation forte. La plus petite valeur observée pour le libre parcours moyen ℓ est encore 5 fois plus grande que la valeur ℓ^* prédite par la conjecture de Joffe-Regel.

La décroissance mesurée du coefficient de transmission $T(L)$ en fonction de la taille de l'échantillon contraste avec la saturation de l'inverse de la longueur de corrélation des fréquences mesurées en fonction de L .

Cette saturation pour grands L exclut en effet la possibilité que la décroissance exponentielle de $T(L)$ soit due à des effets de localisation.

Tout en ayant mesurés les paramètres fondamentaux de la propagation optique dans un milieu stochastique, ces mesures laissent l'importante question ouverte de combien doivent être grandes les fluctuations de l'indice de réfraction et combien doit être faible l'absorption pour pouvoir observer la localisation optique.

REFERENCES

- [1] P.W. Anderson : Phys. Rev. B109, 1492 (1958)
- [2] D. Ruelle : Nuovo Cim. 61A, 655, (1969)
W.O. Amrein et V. Georgescu : H.P.A. Vol. 46, p. 635, (1973)
- [3] C.H. Hodge : J. Sound. Vibr. 411-424 (1982)
T.R. Kirkpatrick : Phys. Rev. B31, 5746 (1985)
- [4] E. Guazzelli, E. Guyon et B. Souillard : J. Physique (Paris) 44, L837, 841 (1983)
E. Guazzelli : Thèse d'état, Université de Provence, Marseille, (1986)
- [5] E. Akkermans, P.E. Wolf et R. Maynard : Phys. Rev. Lett. 56, 1471 (1986)
- [6] M. J. Stephen et G. Cwilch : Phys. Rev. B34, 7564 (1986)
- [7] E. Akkermans et R. Maynard : J. Physique Lett. 46, L1045 (1985)
- [8] M. P. van Albada et A. Lagendijk : Phys. Rev. Lett. 55, 2692 (1985)
- [9] P.E. Wolf et G. Maret : Phys. Rev. Lett. 55, 2696, (1985)
- [10] S. Etemad, R. Thompson et M.J. Andrejco : Phys. Rev. Lett. 57, 575 (1986)
- [11] S. John : Phys. Rev. Lett. 58, 2486 (1987)
- [12] P. Sheng et Z.Q. Zhang : Phys. Rev. Lett. 57, 1879 (1986)
- [13] A.F. Joffe et A.R. Regel : Prog. Semicond. 4, 237 (1960)
- [14] D. Vollhardt et P. Wölfle : Phys. Rev. Lett. 48, 669 (1982)
- [15] A.Z. Genach : Phys. Rev. Lett. 58, 2043 (1987)

(Voir également les références citées dans ces articles).

CHAPITRE 2. LA LOCALISATION ET LES PROPRIETES DE DIFFUSION

2.1. Un modèle pour l'étude de la propagation d'ondes électromagnétiques dans un milieu aléatoire multidimensionnel

Comme on l'a dit avant, la grande majorité des études théoriques sur la propagation d'ondes classiques dans des milieux désordonnés, a été consacrée au régime de localisation faible et a essentiellement utilisé les techniques de perturbation des fonctions de Green, pour des petits désordres.

L'esprit de notre approche est, au contraire, d'étudier un modèle simple, résoluble "exactement" au moins numériquement, et qui, tenant compte de l'essentiel du phénomène, donne accès au régime de localisation forte.

2.1.1. Approximation scalaire

Pour les ondes électromagnétiques, l'équation d'ondes est généralement écrite en terme de vecteur de champ magnétique H ou de champ électrique E : par exemple, dans les unités où la vitesse de la lumière $c = 1$,

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} = \nabla^2 E = \epsilon\mu \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \quad (1)$$

où ϵ est la constante diélectrique et μ est la perméabilité magnétique du milieu.

Dans plusieurs cas, on peut en première approximation négliger la nature vectorielle de l'amplitude de l'onde. Par exemple, dans une expérience de diffusion simple, dans laquelle la radiation incidente est non-polarisée, la seule conséquence des propriétés vectorielles est la multiplication de l'intensité diffusée par un facteur de polarisation qui dépend seulement de l'angle de diffusion.

On considère donc le cas le plus simple et on étudie une fonction scalaire de l'amplitude $\varphi(r,t)$ qui est solution de l'équation d'onde

$$\nabla^2 \varphi(r,t) = \varepsilon(r) \frac{\partial^2 \varphi(r,t)}{\partial t^2} \quad (2)$$

où on a choisi la perméabilité magnétique $\mu = 1$ et la constante diélectrique $\varepsilon(r)$ comme étant fonction réelle de la position. Ceci revient à négliger la diffusion inélastique de l'onde électromagnétique avec le milieu. Ce choix est justifié par le fait que l'on voudrait étudier comment un milieu non-absorbant peut produire des fluctuations de l'amplitude de l'onde comme pur effet des variations stochastiques de l'indice de réfraction.

Pour une diffusion purement élastique, on considère une seule fréquence ω . La solution stationnaire de fréquence ω de l'équation (2) sera donc $\varphi(r)$ telle que

$$\Delta \varphi(r) = -\omega^2 \varepsilon(r) \varphi(r) \quad (3)$$

2.1.2. Un réseau de canaux unidimensionnels

On imagine la lumière se propageant dans un réseau dont les segments sont des petits guides d'ondes (Fig. 1). La constante diélectrique $\varepsilon(r)$ est une variable aléatoire dont la valeur reste constante sur chaque segment, de longueur a , du réseau. Ces variables aléatoires, sont supposées être indépendantes et avoir la même distribution de probabilité.

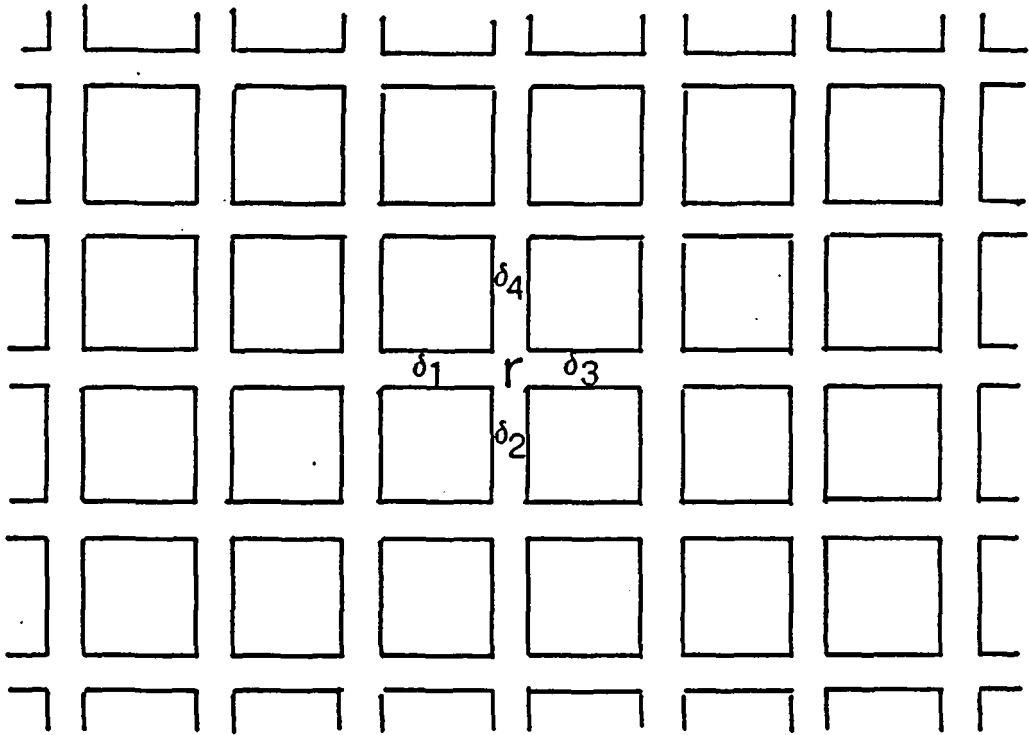
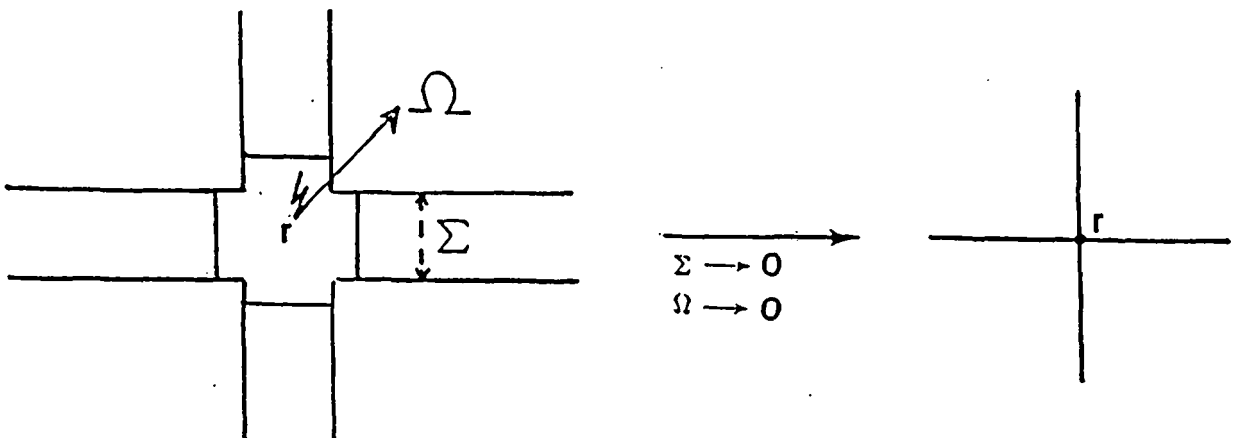


Figure 1

Pour établir les conditions de raccordement de la fonction et de sa dérivée dans les jonctions, on considère premièrement des guides d'onde de section transversale Σ finie, et on passe après à la limite pour $\Sigma \rightarrow 0$, en construisant ainsi un réseau de fils unidimensionnels (un modèle dans ce style, proposé en 1936 par Pauling pour des électrons libres se mouvant sur un réseau de liaisons unidimensionnelles a été ensuite développé par Coulson (1954) et Montroll (1970) [1]).



De l'équation stationnaire (3) il suit que

$$\operatorname{div}(\varphi(r) \nabla \varphi(r)) = (\nabla \varphi(r))^2 - \omega^2 \varepsilon(r) \varphi^2(r) \quad (4)$$

En intégrant (4) sur un petit volume Ω au voisinage du noeud r , on a, d'après le théorème de Gauss,

$$\int_{\Sigma} (\varphi(r) \operatorname{grad}(\varphi(r)))_{\perp} d\Sigma = \int_{\Omega} (\operatorname{grad} \varphi(r))^2 d\Omega - \int_{\Omega} \omega^2 \varepsilon(r) \varphi^2(r) d\Omega \quad (5)$$

où $(\varphi(r) \operatorname{grad} \varphi(r))_{\perp}$, est la composante du vecteur $(\varphi(r) \operatorname{grad} \varphi(r))$ normale à la surface.

Si on passe à la limite pour $\Omega \rightarrow 0$ et $\Sigma \rightarrow 0$ on aura

$$\int_{\Omega} (\operatorname{grad} \varphi(r))^2 d\Omega \rightarrow 0 \quad ; \quad \int_{\Omega} \omega^2 \varepsilon(r) \varphi^2(r) d\Omega \rightarrow 0 \quad (6)$$

$\varepsilon(r)$ aient été choisie être une fonction intégrable de la position.

D'autre part,

$$\int_{\Sigma} (\varphi(r) \operatorname{grad} \varphi(r))_{\perp} d\sigma \xrightarrow{\Sigma \rightarrow 0} \varphi(r) \sum_{j=1}^Z \delta_j (\nabla \varphi)(r) = 0 \quad (7)$$

où Z est le nombre de segments δ qui partent du noeud r .

Sur un segment δ qui relie deux noeuds $(r, r+\delta_i)$ du réseau, l'équation (3) peut être intégrée dans la limite $\Sigma \rightarrow 0$, car le problème est unidimensionnel.

$$\varphi(r+\delta_i x) = \varphi(r) \cos x k(r, \delta_i) + (\delta_i \nabla \varphi)(r) \frac{\sin x k(r, \delta_i)}{k(r, \delta_i)} \quad (8)$$

où $0 \leq x \leq 1$ et

$$k(r, \delta_i) = \delta_i \omega \sqrt{\varepsilon(r, \delta_i)} \quad (9)$$

$\varepsilon(r, \delta_i)$ étant la valeur prise par la constante diélectrique sur le segment δ_i considéré. En combinant (7) et (8) on peut réécrire l'équation d'onde stationnaire (3) sous la forme [2]

$$\sum_{i=1}^z J_{\omega}(r, \delta_i) \varphi(r, \delta_i) = V_{\omega}(r) \varphi(r)$$

$$J_{\omega}(r, \delta_i) = \frac{k(r, \delta_i)}{\sin k(r, \delta_i)} \quad \text{et} \quad V_{\omega}(r) = \sum_{i=1}^z \frac{k(r, \delta_i) \cos k(r, \delta_i)}{\sin k(r, \delta_i)} \quad (10)$$

d'une équation aux différences finies pour l'amplitude de l'onde dans les vertex du réseau.

Cette équation, qui est à la base de notre modèle, a des caractéristiques intéressantes :

- 1) Elle décrit un modèle continu de diffusion avec un nombre infini de modes se propageant dans le système. Ceci nous permet de tenir compte des effets dus à la diffusion multiple de l'onde électromagnétique à l'intérieur du réseau, tout en conservant certains avantages des modèles discrétisés, comme par exemple la simplicité du traitement numérique.
- 2) Dans notre modèle, les liaisons du réseau sont indépendantes entre elles, mais le désordre dans les noeuds dépend des liaisons. Ceci implique, un désordre diagonal et non diagonal corrélé dans l'équation (10).
- 3) Les termes diagonaux et non diagonaux sont du même ordre. L'absence d'un terme dominant provoque des oscillations de la valeur de l'amplitude de l'onde qui rendent particulièrement délicates les estimations analytiques et numériques.
- 4) Dans la limite $\omega \rightarrow 0$ des petites fréquences, on retrouve le Laplacien discretisé.
Dans ces conditions la structure des canaux est moins visible et il n'y aura pas de localisation.

2.2. Une expérience théorique de diffusion

Un moyen particulièrement transparent d'étudier le phénomène de localisation est de mettre en relation la longueur de localisation avec les propriétés de transmission du système : en effet, les propriétés de diffusion sont pratiquement les seules qui correspondent à des observations physiques.

Pour étudier cet aspect du problème, imaginons réaliser l'expérience de diffusion suivante dans un espace d-dimensionnel.

Considérons un échantillon rectangulaire Λ de section $\ell^{(d-1)}$ et de longueur N de notre réseau désordonné, séparant deux parties homogènes, de constante diélectrique $\epsilon=1$, d'un ensemble de $\ell^{(d-1)}$ canaux indépendants de longueur infinie.

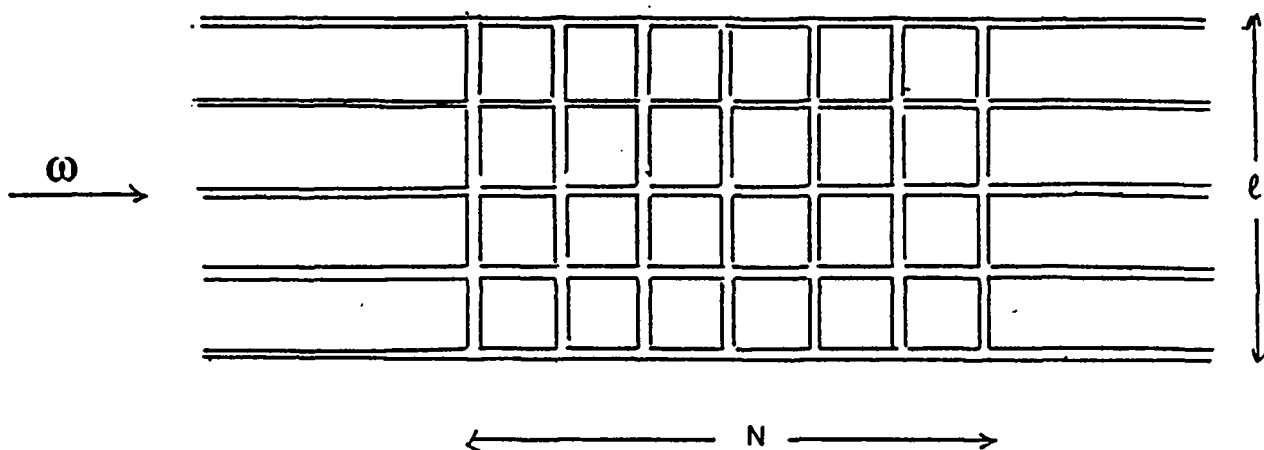


Figure 2

$$\Lambda = \{x \text{ t.q. } 0 \leq x \leq N ; y_i \text{ t.q. } 0 \leq y_i \leq \ell \mid i = 1, \dots, d - 1\}$$

Dans les notations qui suivent, on a, par simplicité, choisi la longueur a de la maille du réseau Λ comme unitaire.

On envoie, sur cet échantillon une onde électromagnétique de fréquence ω , incidente de la gauche. La lumière est supposée envoyée et recueillie dans les canaux homogènes respectivement à gauche et à droite du réseau Λ .

2.2.1. Conditions aux bords

Les conditions aux bord de Dirichelet, qui paraissent être les plus appropriées pour décrire un système réel de ce type, sont appliquées dans les $\ell^{(d-1)}$ directions transverses.

Soit φ_n le vecteur dont les $\ell^{(d-1)}$ composantes sont les valeurs de l'onde sur les $\ell^{(d-1)}$ noeuds d'une section transverse d'absisse n . A gauche et à droite de l'échantillon désordonné, l'onde sera donnée par les modes propres de propagation k_i ($i = 1, \ell$)

$$\varphi_{\omega,i}(x) = e^{i k_i(\omega) x} \varphi_i + \sum_j e^{-i k_j(\omega) x} \varphi_j r_{ij}(\omega) \quad x \leq 0 \quad (11)$$

$$\varphi_{\omega,i}(x) = \sum_j e^{i k_j(\omega) x} \varphi_j t_{ij}(\omega) \quad x \geq N \quad (12)$$

où $t_{ij}(\omega)$ et $r_{ij}(\omega)$ sont respectivement les éléments de la matrice de transmission et de la matrice de réflexion de l'onde associées à la fréquence incidente ω . Dans l'échantillon désordonné Λ , les conditions aux bord de Dirichelet imposent ℓ valeurs discrètes aux $(d-1)$ composantes du vecteur d'onde transverse q_i

$$q_i = \{ \pi m_i / \ell \mid m_i = 1, \dots, \ell \} \quad (13)$$

2.2.2. Produit de matrices de transfert

A l'intérieur de l'échantillon désordonné, l'onde sera donnée par la solution de l'équation (10) qui, écrite sous forme matricielle, devient

$$A_n \varphi_n = B_{n,n+1} \varphi_{n+1} + B_{n-1,n} \varphi_{n-1} \quad (14)$$

d'où

$$\begin{pmatrix} \varphi_{n+1} \\ \varphi_n \end{pmatrix} = T_n \begin{pmatrix} \varphi_n \\ \varphi_{n-1} \end{pmatrix} \quad (15)$$

$$T_n = \begin{pmatrix} B_{n,n+1}^{-1} A_n & -B_{n,n+1}^{-1} B_{n-1,n} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (16)$$

La matrice T_n est appelée "matrice de transfert".
 A_n et B_n sont des matrices de dimension $\ell^{(d-1)} \times \ell^{(d-1)}$
 Par exemple, sur un ruban de largeur ℓ on aura

$$\varphi_n = \begin{pmatrix} \varphi_{n,1} \\ \vdots \\ \varphi_{n,\ell} \end{pmatrix} \quad (17)$$

et les conditions au bord de Dirichlet imposent

$$\gamma_{n,0}; n,1 = 0 \qquad \gamma_{n,\ell}; n,\ell+1 = 0 \qquad (21)$$

Notre équation (14) peut donc être écrite sous la forme

$$u_n = T_n u_{n-1} \qquad (22)$$

où

$$u_n = \begin{pmatrix} \varphi_{n+1} \\ \varphi_n \end{pmatrix} \qquad (23)$$

Si la solution de l'équation d'onde est connue pour deux valeurs successives de n , alors la solution peut être calculée pour chaque valeur $n' > n$.

Il en suit que, si u_n est connu, il est possible, par la connaissance des matrices de transfert, de calculer $u_{n'}$ pour $n' > n$. En effet, en itérant l'équation (22), on obtient

$$u_{n'} = T_{n'} T_{n'-1} \dots T_{n+1} u_n \qquad (24)$$

En particulier, les éléments de u_x , à l'extérieur de l'échantillon Λ étant donnés par les équations (11) et (12), on peut calculer l'onde à droite du réseau désordonné à partir de l'onde incidente à gauche. Soit

$$u_N = T_N T_{N-1} \dots T_0 u_{-1}$$

Définissons

$$e^{i k_i(\omega) x} = b_i^x \qquad \text{et} \qquad \varphi_i(x) = a_i(x)$$

et introduisons une notation matricielle. Les équations (11) et (12) deviennent alors

$$\varphi_{\omega}(x) = r_0 b^x a + (b^x)^* a r(\omega) \qquad ; \qquad \varphi_{\omega}(x) = t(\omega) b^x a$$

où r_0 est le vecteur unité de dimension ℓ .

De l'équation (23) on peut alors écrire

$$u_{-1} = \begin{pmatrix} \varphi_0 \\ \varphi_{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_0 a + r a \\ r_0 b^{-1} a + r(\omega)(b^*)^{-1} a \end{pmatrix} \quad (25)$$

et

$$u_N = \begin{pmatrix} \varphi_{N+1} \\ \varphi_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t(\omega) b^{N+1} a \\ t(\omega) b^N a \end{pmatrix} \quad (26)$$

u_N est alors relié à u_{-1} par les éléments de la matrice $T(N)$, produit des N matrices de transfert T_n , à travers la section désordonnée

$$u_N = T_N T_{N-1} \dots T_0 u_{-1} = T(N) u_{-1} \quad (27)$$

En combinant les équations (25) et (26) avec l'équation (27) on peut exprimer les éléments de la matrice de transmission à partir des éléments de la matrice de réflexion

$$\begin{pmatrix} t(\omega) \\ 0 \end{pmatrix} = B^{-N} U^{-1} A^{-1} T(N) A U B^{-1} \begin{pmatrix} r_0 \\ r(\omega) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_0 \\ r(\omega) \end{pmatrix} \quad (28)$$

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b^+ \end{pmatrix} \quad ; \quad U = \begin{pmatrix} b & b^+ \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On trouve alors les expressions suivantes pour la matrice de transmission et pour la matrice de réflexion [3].

$$r(\omega) = -(Q_{22})^{-1} Q_{21} r_0 \quad ; \quad t(\omega) = -((Q^{-1})_{11})^{-1} r_0 \quad (29.1, 29.2)$$

En particulier si on définit $Q^{-1} = (B^+)^{-1} \tau(N) B^N$ on aura pour les éléments de la matrice de transmission

$$t_{ij}(\omega) = \exp(-i k_i - i k_j N) ((\tau(N)_{11})^{-1})_{ij} \quad (29.3)$$

Pour connaître l'allure des solutions d'un tel problème, il faut donc étudier l'expression des éléments de la matrice de transmission $t_{ij}(\omega)$ en fonction des propriétés d'un produit de matrices aléatoires de la forme (27).

2.2.3 Produit de matrices aléatoires et le groupe symplectique Décomposition symplectique des matrices de transfert T_n

Les propriétés de symétrie du spectre d'une matrice symplectique jouent, comme on le verra par la suite, un rôle très important dans la définition des propriétés asymptotiques d'un produit de matrices aléatoires et sur l'analyse des propriétés de diffusion d'un réseau désordonné.

Le groupe des matrices symplectiques réelles $Sp(d, \mathbb{R})$ est défini comme l'ensemble de toute application linéaire A qui laisse invariante la forme antisymétrique bilinéaire non-dégénéré G .

En particulier, pour qu'une matrice $A \in Sp(d, \mathbb{R})$, il est nécessaire et suffisant que la relation suivante soit satisfaite

$$\tilde{A} J A = J$$

(30)

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{1} \\ \mathbf{1} & 0 \end{pmatrix}$$

où $\mathbf{1}$ est la matrice identité de dimension d et \tilde{A} est la matrice transposée de A

Considérons le produit de matrices aléatoires donné par l'équation (27). Les matrices T_n n'appartiennent pas au groupe $Sp(2\ell, \mathbb{R})$. Il existe toutefois une décomposition symplectique de ces matrices qui nous sera très utile par la suite. En effet, chaque matrice T_n peut être réécrite sous forme d'un produit

$$T_n = \begin{pmatrix} B_{n,n+1}^{-1} A_n & -B_{n,n+1}^{-1} B_{n-1,n} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

(31)

$$= \begin{pmatrix} B_{n,n+1}^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_n & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & B_{n-1,n} \end{pmatrix}$$

et la matrice produit $T(N)$

$$T(N) = \prod_{n=0}^N T_n = \begin{pmatrix} B_{N,N+1}^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \prod_{n=0}^N D_n \begin{pmatrix} B_{0,1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (32)$$

$$D_n = \begin{pmatrix} A_n & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{n-1,n}^{-1} & 0 \\ 0 & B_{n-1,n} \end{pmatrix} \quad (33)$$

où D_n vérifie la relation $\tilde{D}_n J D_n = J$.

D_n appartient à $Sp(2\ell, \mathbb{R})$ et le produit de matrices $T(N)$ peut être réécrit sous forme d'un produit de matrices symplectiques.

2.3 Propriétés du produit de matrices aléatoires.

2.3.1. Le théorème de Tutubalin-Virster

L'étude du comportement des éléments de la matrice de transmission nous conduit donc à l'étude des propriétés d'un produit de n matrices aléatoires qui appartiennent au groupe symplectique $Sp(2\ell, \mathbb{R})$. Considérons la question suivante : quelle est la distribution de probabilité des éléments d'un produit de n matrices aléatoires quand $n \rightarrow \infty$.

Un premier résultat dû à Tutubalin (1968) [4] établi pour un groupe G de matrices unimodulaires, réelles ou complexes, a été généralisée par Virster (1970) à une large classe de groupes qui incluent le groupe des matrices symplectiques réelles.

Comme on le voit dans la réf. [5], si $G = Sp(d, \mathbb{R})$, est le groupe symplectique réel, et si $g(n)$ dénote le produit g_1, g_2, \dots, g_n d'éléments de G , $g(n)$ peut être univoquement décomposé de la manière suivante :

$$g(n) = x(n) d(n) y(n) \quad (34)$$

où $x(n)$ et $y(n)$, sont des matrices symplectiques orthogonales et $d(n)$ est une matrice diagonale de la forme

$$\lg(d(n)) = (\lambda_1(n), \lambda_2(n), \dots, \lambda_d(n), -\lambda_1(n), -\lambda_2(n), \dots, -\lambda_d(n)) \quad (35)$$

$$\text{où } \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_d$$

Le théorème de Virster décrit le comportement asymptotique de chacun des facteurs de cette décomposition et il établit les propriétés suivantes :

- 1) il existe d nombres distincts, strictement positifs $\gamma_1 < \gamma_2 < \dots < \gamma_d$. Ces nombres sont les exposants de Liapunov du produit $g(n)$
- 2) les variables aléatoires $\{ (\lambda_i(n) - \gamma_i n) / \sqrt{n} \mid i = 1, \dots, d \}$ ont une distribution de probabilité qui tend vers une distribution gaussienne avec valeur moyenne zéro.
- 3) la distribution de probabilité de $x(n)$ tend vers une distribution limite ν_n .
- 4) $y(n)$ a une distribution de probabilité qui converge vers une distribution limite ν_y
- 5) La distribution de probabilité conjointe de

$$\{x(n), ((\lambda_i(n) - \gamma_i n) / \sqrt{n}), y(n)\}$$

tend vers le produit direct de leurs distributions. Cela signifie que les facteurs de la décomposition (34) sont indépendants asymptotiquement.

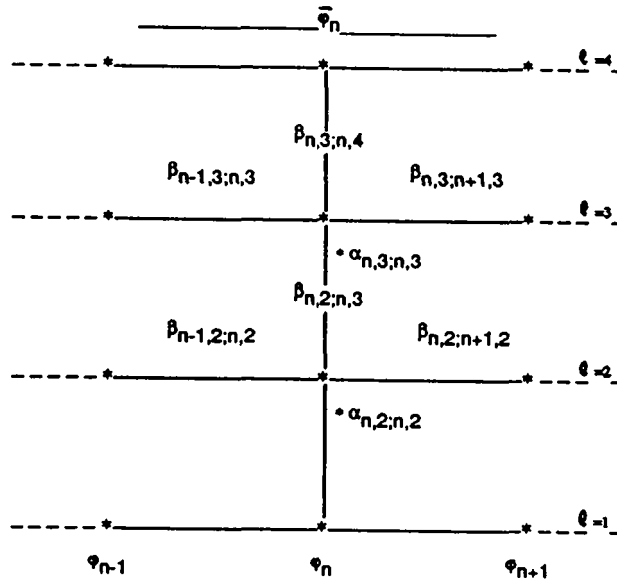
2.3.2. Conditions d'application du théorème de Virster au produit de matrices de transfert

L'application de ce théorème au cas qui nous intéresse ici, rencontre deux difficultés.

Le premier problème est que les matrices T_n sont non-indépendantes.

En effet, les matrices D_n génèrent un processus de Markov sur le groupe $Sp(d, \mathbb{R})$.

Ceci apparait clairement quand on considère comme maille unitaire sur notre réseau une section transversale d'abscisse n multiplié par les segments horizontaux qui arrivent sur les noeuds.



On voit alors que les variables aleatoires dont depend D_{n+1} n'apparaissent que dans D_n .

La deuxième condition du théorème de Virster qui n'est pas satisfaite dans notre cas, est que les matrices de transfert n'ont pas une distribution de probabilité absolument continue par rapport à la mesure de Haar (en effet, un grand nombre d'éléments des matrices T_n sont nuls). Toutefois, si on peut prouver qu'un produit $g = T_m \dots T_1$ de ces matrices satisfait une telle condition, alors le théorème de Virster peut être appliqué en considérant g comme un simple élément du produit de matrices aléatoires.

De telles matrices g sont markoviennes car les matrices T_n sont markoviennes et un ensemble markovien de T_n est utilisé pour former chaque groupe g .

En 1983, Lacroix a prouvé qu'un tel m fini existe dans le cas de matrices de transfert indépendantes pour un barreau désordonné, si le potentiel a une densité par rapport à la mesure de Lebesgue [7].

Un élément de $Sp(d, \mathbb{R})$ est une matrice avec $d(2d+1)$ éléments indépendants. Soient $(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{d(2d+1)})$ les $d(2d+1)$ variables aléatoires dans une section dans laquelle le potentiel aléatoire a $d(2d+1)$ sites $(2d+1)$ dans la direction horizontale et d dans les

directions transverses.

Considérons l'application de $\mathbb{R}^{d(2d+1)}$ dans $Sp(d, \mathbb{R})$ définie par

$$\varphi(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{d(2d+1)}) = T_{(2d+1)} \dots T_1$$

Si le Jacobien J de cette transformation n'est pas identiquement nul, alors φ est inversible pour presque toutes les valeurs de $(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{d(2d+1)})$ et la distribution de probabilité des $\{\omega_i\}$ qui est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue induit une distribution de probabilité avec une densité sur $Sp(d, \mathbb{R})$ [3].

Une généralisation due à Guivarc'h [6] du théorème de Virster au cas Markovien assure l'existence de ℓ exposants de Liapunov positifs et distincts d'un produit de matrices aléatoires, lorsque la mesure est absolument continue par rapport à la mesure de Haar. Dans ces conditions, la même méthode que celle de Lacroix devrait permettre de démontrer que nos matrices vérifient cette condition. On assume que dans le cas markovien ce résultat reste valable.

2.4. *Comportement asymptotique des éléments de la matrice de transmission.*

Les éléments de la matrice de transmission étant reliés (29.3) aux propriétés du produit de matrice aléatoire (27), leur comportement asymptotique peut être calculé en fonction de ce qu'on connaît sur la matrice $T(N)$, et précisément qu'il existe une décomposition

$$T(N) = O^1 D O^2 \tag{41}$$

avec $O^1, O^2 \in \theta(2\ell, \mathbb{R})$ où $\theta(2\ell, \mathbb{R})$ est le groupe orthogonal et

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & & & & \\ & \cdot & & & \\ & & d_2 & & \\ & & & d_1^{-1} & \\ & & & & \cdot \\ & & & & & d_2^{-1} \end{pmatrix} \quad (42)$$

dont les facteurs deviennent asymptotiquement indépendants. De plus on peut montrer que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log d_j^N = \gamma_j > 0 \quad (43)$$

En reliant les propriétés de transmission d'un long échantillon désordonné au comportement des exposants de Liapunov du produit de matrices aléatoires, R. Johnston et H. Kunz [3] démontrent alors que

1) chaque élément de la matrice de transmission $t_{ij}(\omega)$ décroît comme

$$|t_{ij}^N(\omega)|^2 = \exp(-2 \gamma_{\min} N) \quad (44)$$

où $\gamma_{\min} > 0$ est le plus petit exposant de Liapunov, donnant l'inverse de la longueur de localisation.

2) La variable

$$\frac{1}{\sqrt{N}} (\log (|t_{ij}^N(\omega)|) + \gamma_{\min} N) \quad (45)$$

a une distribution asymptotique gaussienne.

Ces résultats, en établissant le terme dominant du taux de décroissance des éléments de la matrice de transmission permettent d'une part un calcul numérique simple de la longueur de localisation à partir du calcul des exposants de Liapunov γ_j du produit de matrices aléatoires et, d'autre part, permettent de relier les effets de localisation à des propriétés physiques facilement mesurables.

Ce sont ces deux aspects que l'on va développer dans les chapitres suivants.

Références

- [1] L. Pauling : J. Chem. Phys. 4, 673 (1936)
C.A. Coulson : Proc. Phys. Soc. Lond. 67, 608 (1954)
E. W. Montroll : Quantum Theory of a Network
a). J.M.P. 11, 635, 649 (1970)
b). J.M.P. 11, 2525, 2538 (1970)
- [2] C. Flesia, R. Johnston, H. Kunz : "Strong Localisation of Classical waves : a numerical study" : Europhysics Letters 3(4) pp. 497 (1987)
- [3] R. Johnston, H. Kunz : "The conductance of a disordered wire" : J. Phys. C16, 3895 (1983)
- [4] V. N. Tutubalin : "Approximation of probability measure in variation and product of random matrices" : Theory Prob. App. 13 65, 83 (1968)
- [5] A.D. Virster : "Central limit theorem for semisimple groups" : Theory Prob. App. 13, 667, 687 (1970)
- [6] Y. Guivarc'h : "Sur les exposants de Liapunov des marches aléatoires à pas markovien" C.R. Acad. Sc. Paris, t- 292 (février 1981)
- [7] J. Lacroix : Ann. Inst. Henri Poincaré (1983).

CHAPITRE 3. CALCUL NUMERIQUE DES EXPOSANTS DE LIAPUNOV D'UN PRODUIT DE MATRICES ALEATOIRES

Le calcul analytique des exposants de Liapunov en fonction de la fréquence ω de l'onde incidente et du paramètre w qui caractérise le désordre présente des difficultés remarquables, surtout dans le cas multidimensionnel.

Les simulations numériques donnent dans ce cas une meilleure représentation de l'allure des fonctions $\gamma(\omega)$ et $\gamma(w)$ et constituent une base essentielle pour l'étude des phénomènes de localisation.

3.1. Principe du programme

La détermination numérique des exposants de Liapunov du produit de matrices de transfert présente essentiellement deux difficultés :

- la première est liée à la convergence et à la stabilité du résultat; les exposants γ_i n'étant définis que pour un système infini, on nécessite la mise en oeuvre de paramètres de contrôle qui permettent de tester l'approche numérique de la région asymptotique.
- la deuxième est, par contre, liée au temps de calcul. En effet, les matrices de transfert étant dans notre cas non-indépendantes, le temps de calcul nécessaire pour effectuer chaque produit matriciel est augmenté d'un facteur α qui dépend à la fois de la machine utilisée et de la structure même de la matrice.

La détermination de γ_{\min} à partir du théorème de Virster, nécessite l'écriture d'une relation de récurrence qui donne la décomposition asymptotique (41) du chapitre 2. L'établissement d'une telle relation, sauf dans des cas particulièrement simples, pose souvent des problèmes. D'autre part, le calcul de γ_{\min} à partir des éléments de la matrice de transmission implique, d'après les équations (29.3) et (44) du chapitre 2

$$-\gamma_{\min} \approx \frac{1}{N} \log |t_{ij}^N(\omega)| = \frac{1}{N} \log |(\tau(N)_{11}^{-1})_{ij}|$$

(1)

l'inversion de la matrice $\tau(N)_{11}$ de rang ℓ . Ceci peut provoquer, pour des valeurs assez petites du déterminant, de fortes instabilités numériques dans le système.

Pour ces raisons, c'est donc préférable d'utiliser une autre méthode afin de déterminer numériquement les exposants de Liapunov de notre système. A cette fin, un algorithme particulièrement efficace, utilisé pour la première fois dans des problèmes similaires par J. L. Pichard and J. Sarma [1], découle des résultats établis par un théorème fondamental dû à V.I. Oseledec (1968) [2].

3.1.1. Le résultat d'Oseledec

Dans le cadre de l'étude des exposants caractéristiques de Liapunov pour des systèmes dynamiques, Oseledec a établi l'existence d'une matrice asymptotique M définie à partir d'un produit $T(N)$ de matrices aléatoires T_n par la relation

$$M = \lim_{N \rightarrow \infty} (T(N)^+ T(N))^{1/2N} \quad T(N) = \prod_{n=1}^N T_n \quad (2)$$

pour laquelle V_1, \dots, V_r sont les sous-espaces propres correspondant respectivement aux valeurs propres ($\exp \gamma_1, \dots, \dots, \dots, \exp \gamma_r$).

On peut alors montrer que les logarithmes γ_i des valeurs propres de la matrice d'Oseledec M , appelés exposants caractéristiques de Liapunov du produit de matrices aléatoires, vérifient pour chaque vecteur $|v_i\rangle \in V_i$, la relation

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log \frac{\|T(N)|v_i\rangle\|}{\| |v_i\rangle \|} = \gamma_i \quad (3)$$

Tous ces résultats sont vrais avec probabilité 1 au sens de la mesure ρ sur l'espace Q formé par l'ensemble des suites infinies de produits de matrices aléatoires T_n .

A partir de ce résultat on peut remarquer que les exposants de Liapunov ne sont pas les valeurs propres de la matrice de transmission $T(N)$ mais les logarithmes des valeurs propres du produit asymptotique

$$N = \lim_{N \rightarrow \infty} (T(N)^+ T(N))^{1/2N}$$

3.1.2. Application numérique de la formule d'Oseledec

La nécessité d'établir avec la même précision numérique toutes les valeurs propres de la matrice d'Oseledec $(T(N)^+ T(N))^{1/2N}$, impose une procédure supplémentaire.

D'après la relation (3), si on définit l'exposant de Liapunov d'ordre S comme

$$\Gamma_s = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log \text{vol} (T(N) | e_1 \rangle \dots \dots T(N) | e_s \rangle) \tag{4}$$

où $| e_1 \rangle \dots \dots | e_s \rangle$ sont s vecteurs linéairement indépendants ($1 \leq s \leq 2 \ell^{(d-1)}$) tirés au hasard dans l'espace dans lequel opèrent les matrices $T(N)$, et $\text{vol} (T(N) | e_1 \rangle \dots \dots T(N) | e_s \rangle)$ est le volume de l'image par $T(N)$ du parallépipède engendré par ces s vecteurs, alors [3] avec probabilité 1

$$\Gamma_s = \sum_{i=1}^s \gamma_i \tag{5}$$

où i classe les exposants de Liapunov d'ordre 1 associés au produit de matrices $T(N)$ par ordre décroissant. Ainsi le calcul numérique du volume $\text{vol} (T(N) | e_1 \rangle \dots T(N) | e_s \rangle)$ donne, quand S augmente, les différentes sommes

$$\gamma_1, \gamma_1 + \gamma_2, \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3, \dots, \gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_s \tag{6}$$

et par conséquent, tous les exposants d'ordre 1 de T_∞ . Ce procédé permet de déterminer tous les γ_i avec la même précision, qui augmente avec le nombre N d'itérations, alors qu'avec un calcul direct des exposants caractéristiques à partir de la formule d'Oseledec (3), seule la plus grande valeur propre de la matrice $(T(N) + T(N))^{1/2N}$ peut être déterminée avec une précision suffisante.

3.1.3. Procédure d'orthonormalisation

Il reste cependant encore deux difficultés à résoudre et précisément :

- 1) la norme de chaque vecteur $T(N) | e_i \rangle$ diverge exponentiellement avec le nombre d'itération N comme $\exp(\gamma_i N)$
- 2) la direction asymptotique de chaque vecteur $T(N) | e_i \rangle$ étant donnée par le sous-espace d'Oseledec correspondant à γ_i , l'angle entre les différents vecteurs $T(N) | e_i \rangle$ tend vers zéro quand N augmente.

On peut résoudre ces deux difficultés liées au comportement asymptotique de l'algorithme par une procédure d'orthonormalisation.

Choisissons un ensemble de S vecteurs orthonormés

$$(| e_1^0 \rangle \dots | e_S^0 \rangle)$$

et redéfinissons l'image par la matrice T_0 de ces vecteurs selon la relation

$$|e_1^1\rangle = \frac{T_0 |e_1^0\rangle}{\|T_0 |e_1^0\rangle\|} \quad ; \quad |e_s^1\rangle = \frac{T_0 |e_s^0\rangle - \sum_{k=1}^{s-1} |e_k^1\rangle \langle e_k^1 | T_0 |e_s^0\rangle}{\|T_0 |e_s^0\rangle - \sum_{k=1}^{s-1} |e_k^1\rangle \langle e_k^1 | T_0 |e_s^0\rangle\|} \quad (7)$$

En itérant le processus, on obtient que l'exposant de Liapunov d'ordre s , Γ_s , s'écrit comme

$$\Gamma_s = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \log \frac{\text{vol}(|e_1^j\rangle \dots |e_s^j\rangle)}{\text{vol}(|e_1^{j-1}\rangle \dots |e_s^{j-1}\rangle)} \quad (8)$$

Il n'est cependant pas nécessaire d'effectuer la procédure d'orthonormalisation à chaque pas. Afin de minimiser le temps de calcul, on peut contrôler la précision du programme et n'appliquer la transformation (8) que chaque m iteration, la valeur de m dépendant de la largeur ℓ du système.

3.2. Précision numérique des résultats

La méthode exposée permet de calculer les exposants caractéristiques du produit de matrices aléatoires avec une précision numérique qui augmente avec le nombre d'itérations N et avec la fréquence m des processus d'orthonormalisation. Un autre paramètre de contrôle très utile pour établir la convergence des résultats numériques vers la région asymptotique est la stabilité par rapport à l'initialisation du générateur aléatoire.

La convergence vers la même valeur des résultats numériques correspondent à différentes réalisations de la suite des matrices aléatoires exprime en effet l'ergodicité du processus et permet d'estimer le nombre N d'itérations à effectuer sur le système pour approcher la région asymptotique avec la précision requise.

On donne dans la suite quelques exemples de ces tests effectués sur notre système.

3.2.1. Etude de la convergence vers la région asymptotique

Nos calculs ont été essentiellement effectués sur deux machines : un VAX 11/780 et un CRAY 1.

L'initialisation du générateur de nombres aléatoires RAN (I), du VAX a donné des résultats en accord avec ceux du générateur RANF du CRAY 1 avec une précision 3 ‰.

On étudie premièrement le rôle des paramètres pour le cas unidimensionnel et on considère ensuite l'influence du rang des matrices sur la précision des résultats.

- La figure 1 montre la convergence en fonction du nombre d'itérations N de la valeur de la longueur de localisation ξ pour un système unidimensionnel avec une distribution pour la variable aléatoire ε_i uniforme entre $(1, 1+\delta) \cup (1+w-\delta, 1+w)$, pour deux différentes initialisations I du générateur aléatoire. On voit effectivement comment, pour un nombre d'itération $N > N'=20000$ les fluctuations autour de la valeur asymptotique de ξ en fonction de I deviennent très petites.

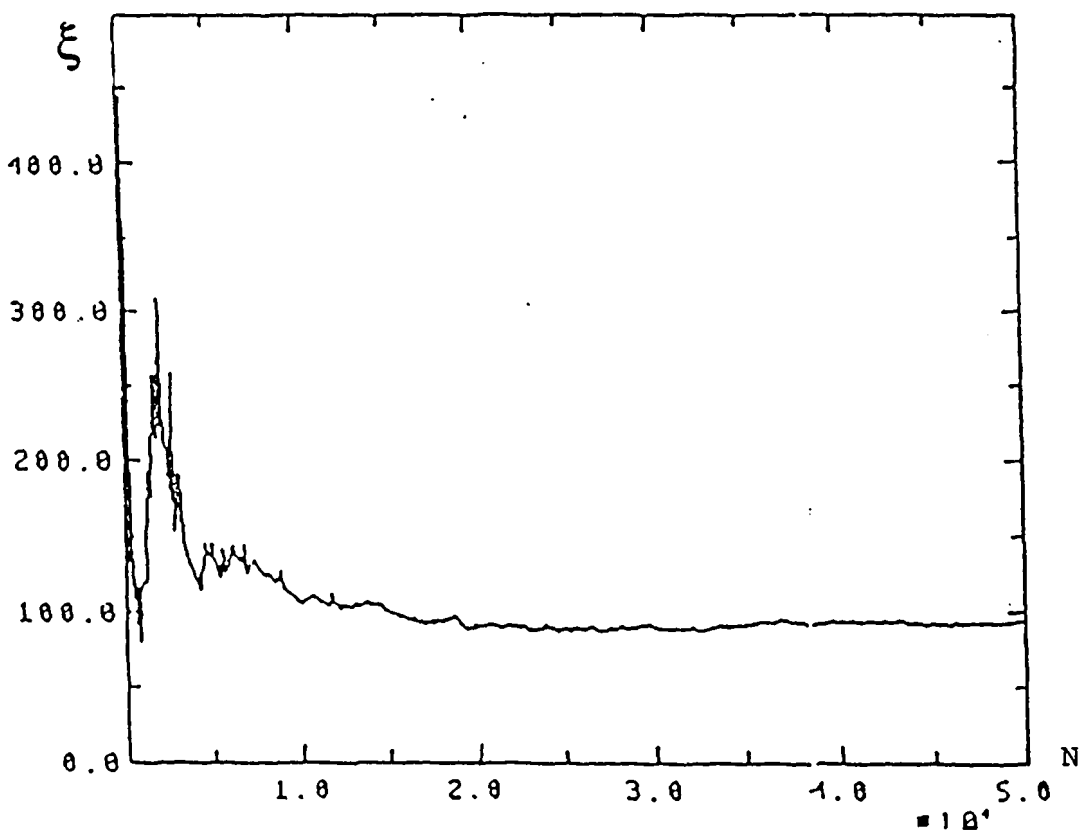
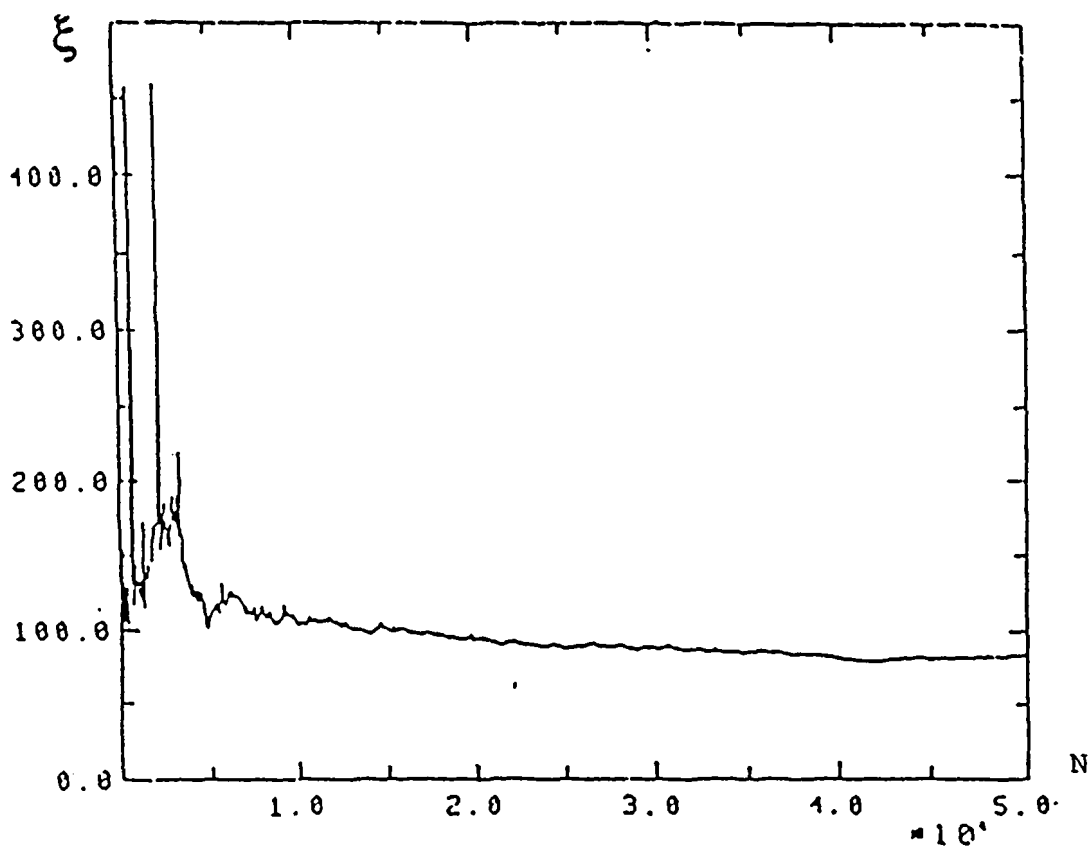


Figure 1

Longueur de localisation ξ en fonction du nombre N d'iteration pour deux choix différents de l'initialisation du générateur aléatoire. $W = 17$, $\omega = 1.5$, $\delta = 1$.

- Dans le cas d'un ruban bidimensionnel, la Table 1 montre l'influence du rang 2ℓ des matrices sur la stabilité du système numérique.

l	2ℓ		4		16		30	
	W=15	W=18	W=15	W=18	W=15	W=18	W=15	W=18
1°	3.010	2.959	4.607	0.500	6.470	0.270		
2°	2.990	3.060	4.811	0.500	6.722	0.270		

Table 1

Longueur de localisation $\xi/2$ pour deux choix différents l de l'initialisation du générateur aléatoire. $m = 3$; $N = 20'000$; $\omega = 1.5$. $\delta = 1$.

On peut remarquer que pour une orthonormalisation suffisamment fréquente ($m = 3$), la taille des matrices n'a pratiquement aucune influence sur la précision du résultat numérique, alors que l'erreur augmente avec la valeur absolue de la longueur de localisation.

Ceci est dû uniquement aux petites fluctuations ($\approx 10^{-2}$) numériques qui ne deviennent significatives pour le calcul de la longueur de localisation que si la valeur de γ est très petite. Pour contourner cette difficulté, à la place d'augmenter la précision de la machine (le VAX 11/780 a été utilisé en simple précision), ce qui doublerait le temps de calcul, on peut améliorer la précision des résultats en augmentant le nombre N d'itérations (voir Table 2).

N I	10.000	20.000	50.000	100.000
1°	4.800	4.607	4.850	4.911
2°	5.140	4.811	4.987	4.875
$\Delta\zeta$	0.340	0.204	0.137	0.036

Table 2

Longueur de localisation $\xi/2$ en fonction du nombre N d'itérations pour deux choix différents I de l'initialisation du générateur aléatoire et pour une matrice de rang 16.

$w = 15$; $m = 3$; $\omega = 1.5$, $\delta = 1$.

3.2.2. Sensibilité au paramètre d'orthonormalisation m

Comme on l'a dit avant, le paramètre d'orthonormalisation agit sur le contrôle d'une part de la divergence en $\exp(\gamma_1 N)$ de la norme de chaque vecteur $T(N)|e_i\rangle$, et d'autre part de la direction asymptotique des vecteurs $T(N)|e_i\rangle$, la première étant essentiellement sensible à la valeur γ_1 de l'exposant de Liapunov considérée, la seconde au rang des matrices.

La Table 3 illustre l'influence du paramètre m pour différentes tailles des matrices de transfert et pour 2 différentes valeurs de ξ .

m 2ℓ	10	5	3	1
10	0.2819	0.6179	3.6660	3.5710
16	0.2556	0.3900	4.5000	4.6350

Table 3

Longueur de localisation $\xi/2$ pour 2 différentes tailles des matrices aléatoires.

$w=19$, $N=20'000$; $\omega=1.5$ $\delta=1$.

3.3. Exemple de programme FORTRAN

On donne à titre d'exemple un programme FORTRAN que l'on a mis au point pour le calcul du plus petit exposant de Liapunov γ_{\min} pour un barreau tridimensionnel de largeur $(y_1 + y_2)$ dans le cas d'une distribution uniforme entre les valeurs $(1, 1+w)$ de la variable aléatoire.

Ce programme, écrit originellement par R. Johnston pour le VAX 11/780 a été ensuite réadapté pour être soumis au CRAY 1, en raison des énormes temps de calcul requis, par les calculs multidimensionnels.

On a choisi pour nos calculs, la largeur a de la maille du réseau comme étant unitaire. L'unité de mesure de fréquence est alors $[c/a]$ où c est la vitesse de la lumière dans le vide.

```
DIMENSION T(80,80),X1(80,40),XX1(80,40),D1(40)
DIMENSION XM(40),XV(80),TH(40),PH(40)
REAL NX,IG
INTEGER D, DN2, DD, DN, Y1, Y2
C -----PARAMETERS-----
C NN=OMBRE D'ITERATIONS
C W =PARAMETRE DE DESORDRE
C E =FREQUENCE INCIDENTE
C Y1, Y2=DIMENSIONS LATERALES DU RESEAU
C I1, I2=PARAMETRES D'INITIALISATION DU GENERATEUR ALEATOIRE
C MM, PM=PARAMETERS D'ORTHONORMALISATION
C -----READ-----
WRITE(*, 1002)
READ *, NN, W, E, Y1, Y2, I1, I2, MM, PM
WRITE(*, 1004) NN, W, E, Y1, Y2, I1, I2, MM, PM
1004. FORMAT(16, 2G15.4, 2I3, 2I10, I4, G10.3)
DO 231 M=1, 10
E=E+0.5
WRITE(*, 2001) E
2001 FORMAT(G15.4, I4)
DO 5 I=1, 40
XM(I)=0.
TH(I)=0.
PH(I)=1.+W*RAN(I1, I2)
5 PH(I)=E*SQRT(PH(I))
DO 11 J=1, 40
D1(J)=0.
DO 11 I=1, 80
X1(I, J)=0.
11 XX1(I, J)=0.
DO 12 I=1, 80
XV(I)=0.0
DO 12 J=1, 80
12 T(I, J)=0.
D=Y1*Y2
DN=D-1
DO 13 I=1, D
13 X1(I, I)=1.
DN2=2*D
PI=3.14
G=0.
G1=0.
G2=0.
DD1=1.
DD2=1.
XNN1=0.
XN1=0.
C -----ITERATION-----
DO 100 N=1, NN
DO 2 I=1, D
XX=1.+W*RAN(I1, I10)
XM(I+1)=E*SQRT(XX)
XX=1.+W*RAN(I1, I2)
XV(I+Y1)=E*SQRT(XX)
XX=1.+W*RAN(I1, I2)
TH(I)=E*SQRT(XX)
Z1=XM(I+1)
Z2=XM(I)
Z3=XV(I+Y1)
Z4=XV(I)
```

```
Z5=TH(I)
Z6=PH(I)
L1=I/Y1
L2=(I-1)/Y1
W1=I-Y1*L1
W2=I-1-Y1*L2
IF(I.LE.Y1)GO TO 22
T(I,I)=(Z1/TAN(Z1))+(Z2/TAN(Z2))+(Z3/TAN(Z3))+(Z4/TAN(Z4))
T(I,I)=T(I,I)+(Z5/TAN(Z5))+(Z6/TAN(Z6))
T(I,I+1)=-(Z1/SIN(Z1))*(SIN(Z5)/Z5)
T(I,I-1)=-(Z2/SIN(Z2))*(SIN(Z5)/Z5)
IF(W1.EQ.0) GO TO 20
GO TO 24
20 T(I,I)=T(I,I)-(Z1/TAN(Z1))
T(I,I+1)=0.0
24 T(I,I+Y1)=-(Z3/SIN(Z3))*(SIN(Z5)/Z5)
IF(I.GT.(Y2-1)*Y1) GO TO 23
GO TO 21
23 T(I,I)=T(I,I)-(Z3/TAN(Z3))
T(I,I+Y1)=0.0
21 IF(W2.EQ.0)GO TO 25
GO TO 29
25 T(I,I)=T(I,I)-(Z2/TAN(Z2))
T(I,I-1)=0.0
29 T(I,I-Y1)=-(Z4/SIN(Z4))*(SIN(Z5)/Z5)
32 GO TO 27
22 T(I,I)=(Z5/TAN(Z5))+(Z6/TAN(Z6))
IF(Y2.EQ.1)GO TO 28
T(I,I)=T(I,I)+(Z3/TAN(Z3))
T(I,I+Y1)=-(Z3/SIN(Z3))*(SIN(Z5)/Z5)
28 IF(I.EQ.1)GO TO 26
T(I,I)=T(I,I)+(Z2/TAN(Z2))
T(I,I-1)=-(Z2/SIN(Z2))*(SIN(Z5)/Z5)
26 IF(I.EQ.Y1)GO TO 27
T(I,I)=T(I,I)+(Z1/TAN(Z1))
T(I,I+1)=-(Z1/SIN(Z1))*(SIN(Z5)/Z5)
27 T(I,I)=T(I,I)*(SIN(Z5)/Z5)
T(I,I+D)=-(Z6*SIN(Z5))/(Z5*SIN(Z6))
2 T(I+D,I)=1.0
6 DO 6 I=1,D
6 PH(I)=TH(I)
C -----PRODUCT-----
DO 3 I=1,DN2
DO 3 J=1,D
DO 3 K=1,DN2
3 XX1(I,J)=XX1(I,J)+T(I,K)*X1(K,J)
IIM=N/MM
RIM=N/PM
RIM=RIM-IIM
IF(RIM.GT.0.0)GO TO 350
C -----GRAM-SCHMIDT-----
DO 500 J=1,D
DO 501 I=1,DN2
X1(I,J)=XX1(I,J)
JN=J-1
IF(JN.EQ.0)GO TO 67
DO 200 K=1,JN
DO 300 KK=1,DN2
XNN1=XNN1+X1(KK,K)*X1(KK,K)
300 XN1=XN1+X1(KK,K)*XX1(KK,J)
```

```
X1(I,J)=X1(I,J)-(XN1/XNN1)*X1(I,K)
XNN1=0.
200 XN1=0.
67 CONTINUE
501 CONTINUE
500 CONTINUE
C -----THE EXPONENT-----
DO 849 I=1,D
849 D1(I)=0.0
DO 700 J=1,D
DO 700 I=1,DN2
700 D1(J)=D1(J)+((X1(I,J))**2)
DO 947 I=1,1
947 DDJ=D1(I-1+D)
NX=N
G1=((NX-PM)/NX)*G1+((ALOG(DDJ))/(NX))
G3=G1/2.
IF(G1.EQ.0.)GO TO 999
IG=1./G1
GO TO 998
999 IG=555.555
998 CONTINUE
NI=NN-200
IF(N.LT.NI)GO TO 65
NI=N/20
QI=N/20.
QNI=NI
QI=QI-QNI
IF(QI.GT.0)GO TO 65
WRITE(*,1003)N,G1,G3,IG
65 CONTINUE
C -----REINITIALISATION-----
DO 800 J=1,D
DO 800 I=1,DN2
800 X1(I,J)=(X1(I,J))/(SQRT(D1(J)))
XX1(I,J)=0.
DD1=1.
DD2=1.
GO TO 100
350 CONTINUE
DO 351 J=1,D
DO 351 I=1,DN2
X1(I,J)=XX1(I,J)
351 XX1(I,J)=0.0
100 CONTINUE
231 CONTINUE
1007 FORMAT(4G15.4)
1002 FORMAT('/' NN W E Y1 Y2 I1 I2 MM PM ')
1003 FORMAT(I7,3G13.4)
STOP
END
```

Références

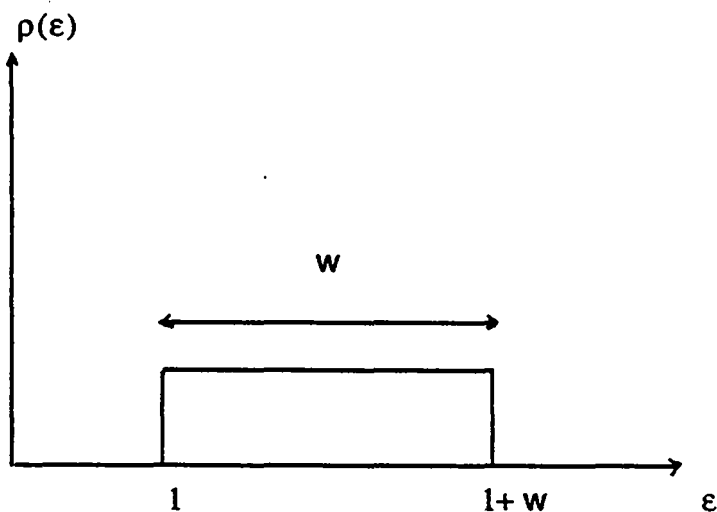
- [1] J.L. Pichard : "Contribution à une théorie quantique des phénomènes de transport par études numériques de systèmes désordonnés" - Thèse présentée à l'Université de Paris-Sud (1984)
J.L. Pichard et G. Sarma : J. Phys. C 14, L-127 (1981)
- [2] V.I. Oseledec : "A multiplicative Ergodic theorem : Ljapunov characteristic numbers for dynamical systems" : Trans. Moscow Math. Soc. 19 197-231 (1968)
- [3] G. Benettin, L. Galgani (1979) : "Intrinsic stochasticity in plasma" G. Laval et D. Gresillon (Eds), p. 93.

CHAPITRE 4. ETUDE DE LA LONGUEUR DE LOCALISATION DANS LE CAS D'UNE DISTRIBUTION UNIFORME POUR LA CONSTANTE DIELECTRIQUE

On a jusqu'ici décrit un modèle général pour étudier la propagation de la lumière dans un milieu où la constante diélectrique varie aléatoirement. On va par la suite appliquer ce modèle à différents systèmes en vue d'éclaircir le comportement de la longueur de localisation et le rôle que jouent les paramètres caractéristiques définissant le système.

Le choix de la distribution de probabilité $p(\epsilon)$ pour la variable aléatoire étant à ce stade arbitraire, on considère le cas très simple d'une distribution uniforme entre deux valeurs ($1, 1 + w$).

w devient donc notre paramètre de désordre définissant le plus grand saut permis pour la valeur de la constante diélectrique d'un intervalle à l'autre.



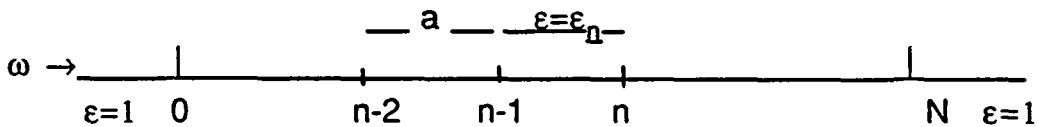
4.1. Le système unidimensionnel

Considérons l'échantillon désordonné de section $\ell^{(d-1)}$ décrit au paragraphe 2.2, dans le cas particulier où $d = 1$.

Le réseau devient un fil unidimensionnel de longueur N , coupé en N cellules de longueur $a=1$ à l'intérieur desquelles la constante diélectrique, décrite par une variable aléatoire ε_n , est constante sur toute la longueur.

Comme décrit précédemment, toutes les variables aléatoires $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n, \dots$ sont indépendantes et possèdent la même distribution de probabilité ρ . La relation de dispersion $k = \omega \sqrt{\varepsilon}$ est vérifiée dans chaque intervalle $(n-1, n)$ et implique que k_n soit une variable aléatoire avec une distribution de probabilité $h(k)$ qui dépend de ρ et telle que

$$\text{Prob } \{k \leq k_n \leq k + dk\} = h(k) \quad (1)$$



4.1.1. Produit de matrices réelles et indépendantes

Dans un tel système, l'onde à l'extérieur de l'échantillon désordonné sera donnée par

$$\varphi(x) = e^{ik_0x} + r e^{-ik_0x} \quad x \leq 0$$

$$\varphi(x) = t e^{ik_0x} \quad x \geq N$$

(2)

Considérons maintenant la fonction $\varphi(x)$ solution de l'équation d'onde stationnaire et sa dérivée $\partial_x \varphi(x)$ au point $x = n$

$$\varphi(x)|_{x=n} = A_n e^{ik_n n} + B_n e^{-ik_n n} = \varphi_n$$

$$\partial_x \varphi(x)|_{x=n} = ik_n A_n e^{ik_n n} - ik_n B_n e^{-ik_n n} = \varphi'_n$$

(3)

Les conditions de continuité de la fonction et de sa dérivée au point $x = n-1$

$$\varphi_{n-1} = A_n e^{ik_n(n-1)} + B_n e^{-ik_n(n-1)} ; \quad \varphi'_{n-1} = ik_n A_n e^{ik_n(n-1)} - ik_n B_n e^{-ik_n(n-1)}$$

(4)

permettent d'exprimer φ_n et φ'_n en fonction de φ_{n-1} et φ'_{n-1}

$$\begin{pmatrix} \varphi_n \\ \varphi'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos k_n & \frac{1}{k_n} \sin k_n \\ -k_n \sin k_n & \cos k_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_{n-1} \\ \varphi'_{n-1} \end{pmatrix}$$

(5)

Si on définit le vecteur

$$U_n = \begin{pmatrix} \varphi_n \\ \varphi'_n \end{pmatrix}$$

(6)

on peut réécrire (5) comme

$$U_n = S_n U_{n-1} \quad (7)$$

où S_n est une matrice réelle et unimodulaire. Il en suit que l'onde à droite de la boîte Λ sera exprimée en fonction de l'onde à gauche

$$U_N = S_N \dots S_n \dots S_1 U_0 = S U_0 \quad (8)$$

$$U_0 = \begin{pmatrix} 1+r \\ i k_0 (1-r) \end{pmatrix} \quad ; \quad U_N = \begin{pmatrix} t e^{i k_0 N} \\ i k_0 t e^{i k_0 N} \end{pmatrix} \quad (9)$$

à l'aide d'un produit S de matrices aléatoires réelles et indépendantes.

Pour le groupe des matrices réelles et unimodulaires $SL(2, \mathbb{R}) \approx Sp(2, \mathbb{R})$ d'après les relations établies au ch. 2 on a que

$$\frac{1}{\sqrt{N}} (\log d_N - \gamma N) \quad (10)$$

est une variable qui a asymptotiquement une distribution gaussienne et on peut écrire que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log d_N = \gamma \quad (11)$$

La relation (44) du chapitre 2 établit le comportement asymptotique du coefficient de transmission T

$$T = |t|^2 \approx \exp(-2 \gamma N) \tag{12}$$

où t est l'amplitude transmise à travers la région désordonnée et γ est l'exposant de Liapunov associé au produit de matrices aléatoires $S = S_N \dots S_n \dots S_1$. La longueur de localisation $\xi = 1 / \gamma$ représente alors le nombre minimal de mailles du réseau que l'onde doit traverser avant d'être atténuée d'un facteur 1/e.

4.1.2 Une expression analytique de γ

Le théorème de Tutubalin-Virster nous indique que la décroissance exponentielle du coefficient de transmission est gouverné par les valeurs de l'exposant caractéristique γ . Il est alors intéressant de chercher une expression analytique de γ en fonction de la distribution de probabilité choisie pour la variable aléatoire. Utilisant la définition de γ donnée à partir du théorème de Fürstenberg dans la réf. [1], exprimons explicitement γ à partir de la formule (5), on a

$$2 \gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log (\varphi_n^2 + \varphi_n'^2) \tag{13}$$

$$2 \gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \left\{ \left(\cos(k_n) \varphi_{n-1} + \frac{1}{k_n} \sin(k_n) \varphi_{n-1}' \right)^2 + \left(-k_n \sin(k_n) \varphi_{n-1} + \cos(k_n) \varphi_{n-1}' \right)^2 \right\} \tag{14}$$

ce qui devient

$$2 \gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \left\{ \varphi_{n-1}^2 \left[\left(-k_n \sin(k_n) z_{n-1} + \cos(k_n) \right)^2 + \left(\cos(k_n) z_{n-1} + \frac{1}{k_n} \sin(k_n) \right)^2 \right] \right\} \tag{15}$$

où on a défini $z_n = \varphi_n / \varphi_n'$

En inversant l'équation matricielle (5), on définit une relation de récurrence pour la variable z_n

$$z_{n-1} = \frac{z_n \cos k_n - \frac{1}{k_n} \sin k_n}{z_n k_n \sin k_n + \cos k_n} = f_n(z_n, k_n) \quad (16)$$

Comme

$$\varphi_n^2 + \varphi_n'^2 = \varphi_n'^2 (1 + z_n^2) \quad (17)$$

on trouve

$$\log \varphi_n'^2 = \log \left\{ \varphi_{n-1}'^2 \left[(-k_n \sin(k_n) z_{n-1} + \cos(k_n))^2 + \left(\cos(k_n) z_{n-1} + \frac{1}{k_n} \sin(k_n) \right)^2 \right] / (1 + z_n^2) \right\} \quad (18)$$

En itérant le processus

$$\frac{1}{N} \log \varphi_N'^2 = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \log \left\{ (-k_j \sin(k_j) z_{j-1} + \cos(k_j))^2 + \left(\cos(k_j) z_{j-1} + \frac{1}{k_j} \sin(k_j) \right)^2 \right\} / (1 + z_j^2) \quad (19)$$

La loi des grands nombres implique alors

$$\gamma = \frac{1}{2} \left\langle \log \left\{ \frac{(z \cos k + \frac{1}{k} \sin k)^2 + (\cos k - k z \sin k)^2}{z^2 + 1} \right\} \right\rangle$$

$$\gamma = \frac{1}{2} \int_{k_{\min}}^{k_{\max}} h(k) dk \int_{-\infty}^{+\infty} v(z) dz \log \left\{ \frac{(z \cos k + \frac{1}{k} \sin k)^2 + (\cos k - k z \sin k)^2}{z^2 + 1} \right\} \quad (20)$$

où $v(z)$ est la distribution de probabilité stationnaire associée au processus de Markov (16).

Cette expression analytique de γ a été évaluée par H. Kunz et G. de Tonnac (1983) [2] dans les cas limites pour le désordre w qui tend vers l'infini et vers zéro.

Les calculs explicites des résultats suivants sont donnés dans la réf. [2].

4.2. Le fil unidimensionnel faiblement désordonné

Supposons que la constante diélectrique $\epsilon(r)$ ait une distribution de probabilité $\rho(\epsilon)$ uniforme entre $(\epsilon', \epsilon' + w)$ et considérons d'abord la limite $w \ll 1$.

Cette situation se traduit dans une distribution $h(k)$ pour le nombre d'ondes

$$h(k) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha} & k' \leq k \leq k' + \alpha \quad \alpha \ll 1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (21)$$

où

$$\alpha = \omega (\sqrt{\epsilon' + w} - \sqrt{\epsilon'}) \quad ; \quad k' = \omega \sqrt{\epsilon'} \quad (22)$$

Il en suit que la limite des petites variations de la constante diélectrique ($w \ll 1$) implique que l'approximation $\alpha \ll 1$ sur le domaine de variation du nombre d'ondes soit justifiée seulement pour des petites valeurs de la fréquence ω .

De la réf. [2] on trouve pour la distribution stationnaire $v(z)$ une lorentzienne centrée en zéro et de largeur $(1/(k'+\alpha/2))$

$$v(z) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} (1 / (z-x)) = \frac{1}{\pi} \frac{\frac{1}{k'+(\alpha/2)}}{\frac{1}{(k'+(\alpha/2))^2} + z^2} \quad (23)$$

Dans la limite $\alpha \rightarrow 0$, $v(z)$ tend vers une distribution lorentzienne centrée en zéro et de largeur $1/k'$. Ceci correspond au cas $h(k) = \delta(k)$. On aura alors, comme on le voit facilement, $\gamma = 0$ et le système sera complètement transparent.

De plus, on peut déduire l'expression de $\gamma = \gamma(\alpha)$ qui, approximé au deuxième ordre donne

$$\gamma = \frac{\alpha^2 \sin^2 k'}{12 (k'+1)} \left[\frac{2(k'-1)}{k' \operatorname{tg} k'} + \frac{1}{k'^3} + \frac{1}{2} \cos 2k' \left(\frac{(1-k')^2}{k'^2(k'+1)} \right) \right] \quad (24)$$

ou bien l'expression de γ en fonction du désordre η sur l'indice de réfraction

$$\gamma = \frac{\eta^2 \sin^2 k'}{12 (k'+1)} \left[\frac{2.k' (k'-1)}{\operatorname{tg} k'} + \frac{1}{k'} + \frac{1}{2} \cos 2k' \frac{(1-k')^2}{(1+k')} \right] \quad (25)$$

Une étude numérique (voir Fig. 1) de $\gamma = \gamma(k)$ pour un désordre $\eta = 0,5$ fixé, nous permet de remarquer que :

- pour $k \rightarrow 0$, γ tend vers zéro : ceci implique que, comme on s'y attend, les grandes longueurs d'onde traversent le système indépendamment du désordre.
- quand $k > 1.7$, γ devient négatif et perd donc sa signification physique. Ce fait se relie à ce que l'on a dit précédemment sur le domaine de validité de l'approximation (21) : même pour un désordre très petit, l'expression (25) n'est valable que pour des petites fréquences ω .

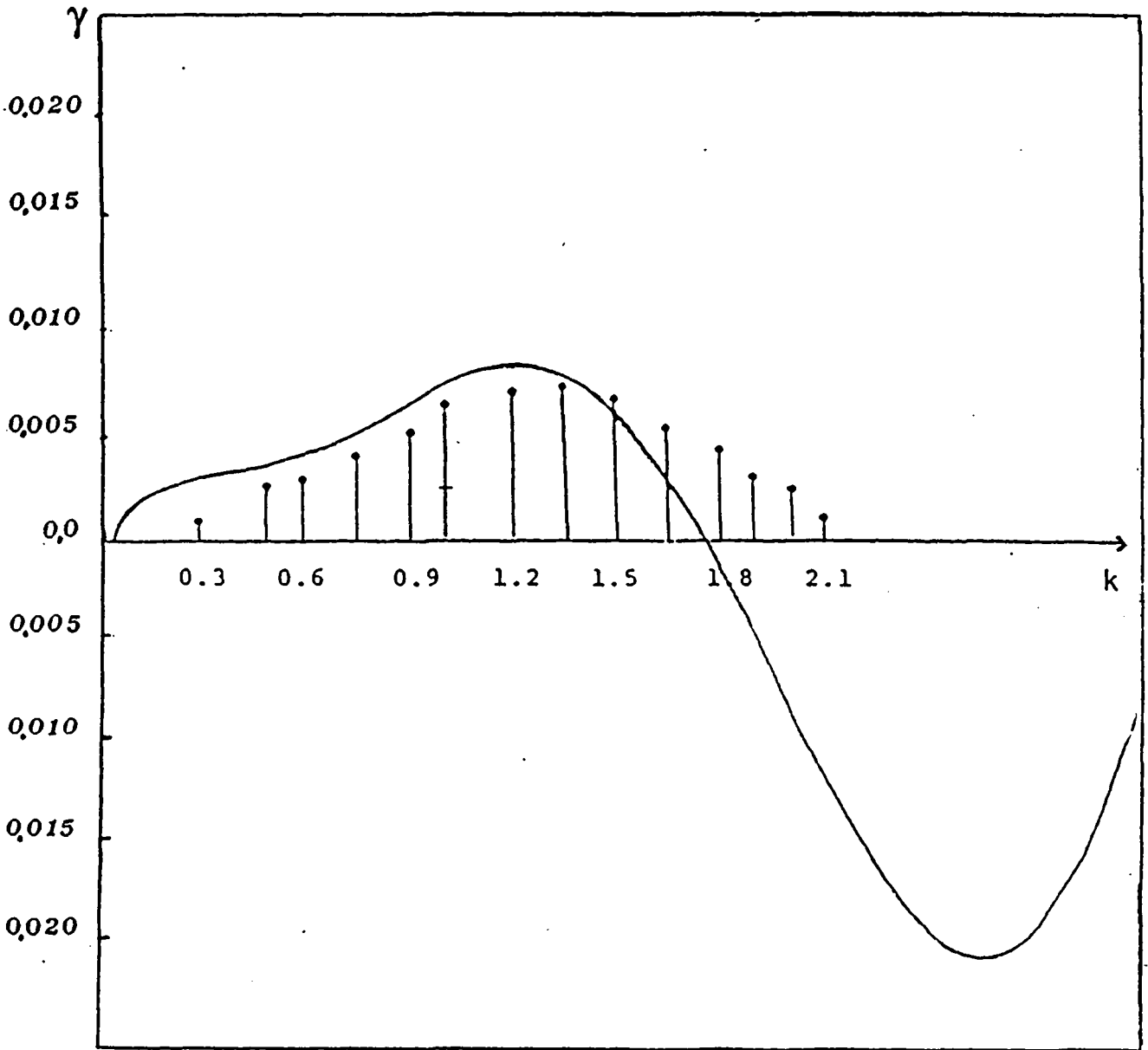


Figure 1.

Exposant de Liapunov γ en fonction du nombre d'onde K .

$$\eta = 0,5$$

Sur la fig. 1, la comparaison entre la courbe continue et l'histogramme qui représente le calcul exact de l'exposant de Liapunov confirme le domaine de validité de l'approximation faite.

4.3. Le fil unidimensionnel fortement désordonné

Dans la limite de grandes fluctuations pour la constante diélectrique, la distribution $h(k)$ sera

$$h(k) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha} & k' \leq k \leq k' + \alpha \quad \alpha \rightarrow \infty \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (26)$$

Dans ce cas, on trouve pour la distribution $v(z)$

$$v(z) = \frac{1}{\alpha} \int_{k'}^{k'+\alpha} dk \delta\left(z - \frac{1}{k \operatorname{tg} k}\right)$$

ce qui donne pour γ_∞ (27)

$$\gamma_{\alpha \rightarrow \infty} = \log \frac{1}{2} + \int_0^1 dx \int_0^1 dx' \int_0^1 d\theta \int_0^1 d\theta' \log \left| 1 - \frac{x \operatorname{tg} \theta}{x' \operatorname{tg} \theta'} \right| \quad (28)$$

Cette formule, obtenue dans la limite de grand désordre, indique un phénomène physique inattendu.

En effet, on voit de (28) que l'inverse γ de la longueur de localisation sature vers une valeur finie $\gamma_\infty > 0$ quand le désordre tend vers infini, et cela, indépendamment de la fréquence incidente sur le système.

Dans notre image, cela implique que, même en agissant sur les paramètres, il n'est pas possible de confiner l'onde dans une région plus petite que $\xi_{\infty} = 1/\gamma_{\infty}$ de notre échantillon désordonné.

Les calculs numériques de l'exposant de Liapunov γ confirment ce résultat. La Fig. 2 reporte le graphique de γ en fonction du désordre tracé une fois pour une basse fréquence et une autre fois pour une haute fréquence. On observe très bien le phénomène de saturation à très grand désordre de l'inverse γ de la longueur de localisation.

Les résultats numériques donnent $\gamma \cong 0.19$. Ayant choisi la maille de la chaîne désordonnée comme unitaire, la longueur de localisation minimale est dans notre système de l'ordre de 5 cellules. On reporte dans la Table 1 les valeurs de γ_{∞} calculées pour différentes fréquences ($w = 10^7$).

ω	γ_{∞}
0.01	0.189
2.00	0.189
50.0	0.193
100.	0.190

Table I.

Un résultat similaire [3] établissant l'existence d'un minimum de la longueur de localisation en fonction de la fréquence pour une onde électromagnétique traversant une chaîne unidimensionnelle aléatoire, a ensuite confirmé ces prévisions.

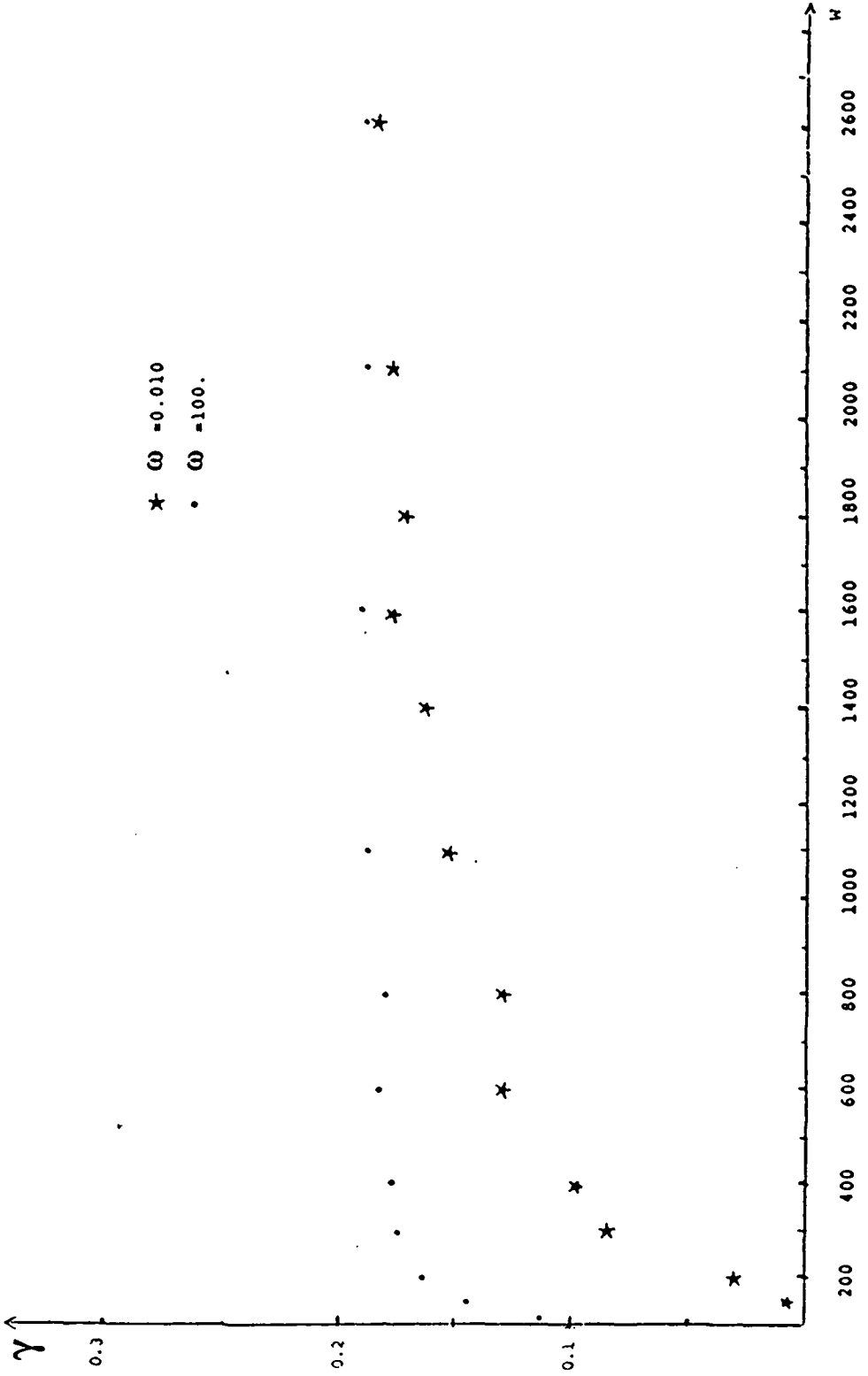


Figure 2

L'exposant de Liapunov γ en fonction du paramètre de désordre w , pour deux fréquences incidentes différentes.

Ce comportement est bien différent de celui que l'on obtient dans les mêmes conditions pour une équation de Schrödinger. En effet, dans le cas d'un électron dans un potentiel aléatoire unidimensionnel ayant une distribution de probabilité uniforme entre deux valeurs ($1, 1 + w$), et indépendantes de site à site, la longueur de localisation tend vers zéro si le désordre tend vers l'infini. On obtient d'ailleurs le même résultat pour une équation de Schrödinger unidimensionnelle, discrétisée avec un potentiel aléatoire corrélée [4]. Un résultat semblable à ce que l'on trouve ici a par contre été obtenu récemment par J. B. Bouchand, A. Cornet et al. [5, 6] qui montre l'existence d'une longueur de localisation minimale pour un électron se propageant dans un système unidimensionnel continu avec un potentiel aléatoire constant par morceaux et corrélé d'un interval à l'autre. Ce travail semble donc exclure l'hypothèse qu'il s'agisse là d'un effet purement optique. Afin d'éclaircir le phénomène, à partir des informations que nous fournissent les références citées, on est amené à se poser les questions suivantes :

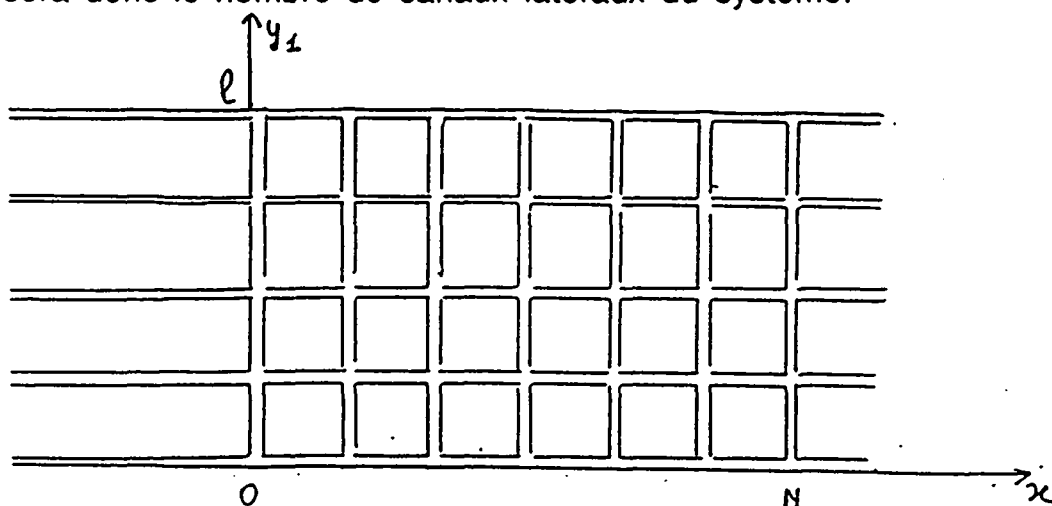
- 1) Ce phénomène est-il purement unidimensionnel ?
- 2) Quel est le rôle de la loi de probabilité définissant la variable aléatoire et par conséquent les caractéristiques physiques du système ?
- 3) Quelle est l'influence de la diffusion multiple sur certains effets de localisation ?

Ce sont là des questions auxquelles il est bien difficiles de répondre et que l'on considérera dans la suite du travail.

4.4. Le réseau bidimensionnel

Pour répondre à la première de ces questions, considérons maintenant l'échantillon désordonné Λ de section $\ell^{(d-1)}$ défini auparavant, quand $d = 2$.

Le réseau devient un ruban de longueur N et de section ℓ divisé en $N \times \ell$ cellules carrées de côté $a = 1$;
 ℓ sera donc le nombre de canaux latéraux du système.



4.4.1. Comportement de la longueur de localisation en fonction du désordre pour un ruban de largeur ℓ

Comme pour le cas unidimensionnel, choisissons une distribution uniforme pour la constante diélectrique ϵ_{ij} dans chaque section, de telle façon que, comme précédemment,

$$\rho(\epsilon) = \begin{cases} \frac{1}{w} & \epsilon' \leq \epsilon_{ij} \leq \epsilon' + w & \forall i = 1 \dots N \\ & & \forall j = 1 \dots \ell \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (29)$$

ξ sera dans ce cas une fonction du désordre w , de la fréquence incidente ω et du nombre ℓ de canaux latéraux du système.

La largeur ℓ du ruban désordonné est le premier paramètre qui nous intéresse dans l'étude du système bidimensionnel.

Le calcul numérique de γ montre que l'effet de saturation de la longueur de localisation vers une valeur minimale différente de zéro persiste dans le cas bidimensionnel pour toutes les valeurs (ω, w) que l'on a étudiées et qu'il existe donc une valeur $\xi_{\min}(\ell)$ telle que

$$\forall \omega, w \quad 0 < \xi_{\min, \ell} \leq \xi(\omega, w) \quad (30)$$

Il est intéressant d'observer l'évolution de la valeur $\xi_{\min, \ell}$ quand on augmente petit à petit le nombre ℓ de canaux latéraux. Les tests numériques nous fournissent des résultats remarquables.

1) Comme on peut le voir sur la figure 3, même pour des très petits désordres, il existe des fréquences pour lesquelles la localisation est relativement forte. Ces fréquences semblent être indépendantes de la dimension latérale ℓ .

2) Au contraire, pour des désordres suffisamment faibles, γ devient très petit quand $\omega \approx \pi$. (Fig. 3).

3) Pour de petites valeurs de ℓ , on a trouvé que le minimum de ξ est atteint pour $\omega = 1.5$ et pour $w = 20.25$. (Fig. 4).

4) Sous l'hypothèse que ces valeurs des paramètres donnent le minimum recherché indépendamment de la largeur du réseau, on a calculé γ_{\max} jusqu'à une valeur $\ell = 30$, pour $\omega = 1.5$ et $w = 20.25$.

5) Comme on le voit à la Fig. 5, la valeur minimale de la longueur de localisation augmente avec la taille latérale du système.

L'interprétation de ce graphique est très délicate.

En effet d'une part, si on extrapole pour $\ell = \infty$ la courbe donnée en Fig. 5 on trouve une longueur de localisation finie

$$\xi_{\infty} = 25$$

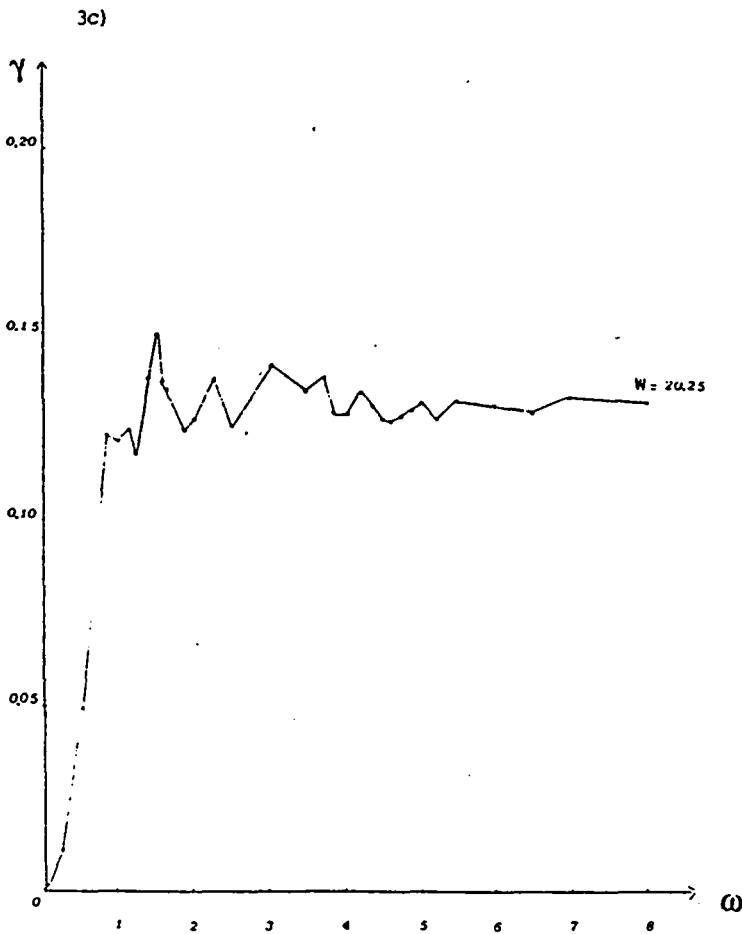
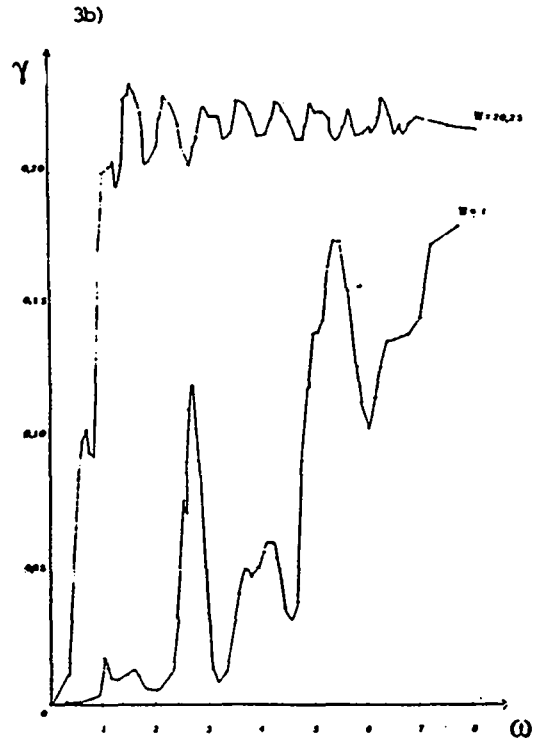
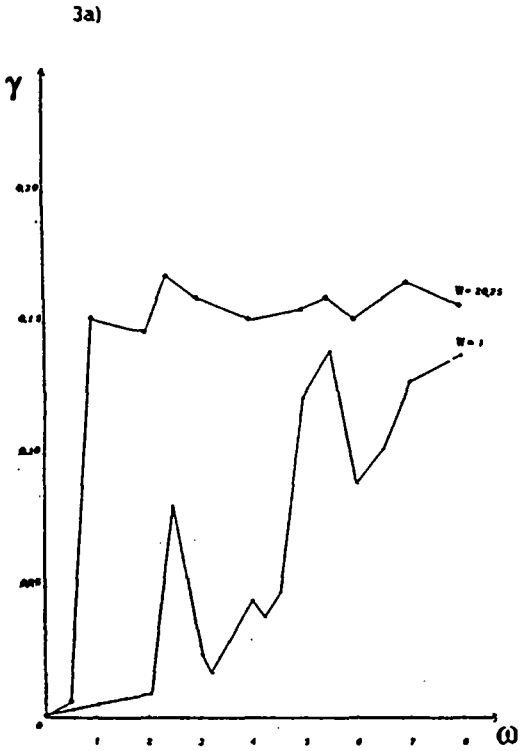


Figure 3

L'exposant de Liapunov γ en fonction de la fréquence, pour différentes valeurs de w et pour différentes valeurs de la largeur du ruban.

a) $l = 4, N = 10\ 000$; b) $l = 2, N = 10\ 000$; c) $l = 6, N = 10\ 000$

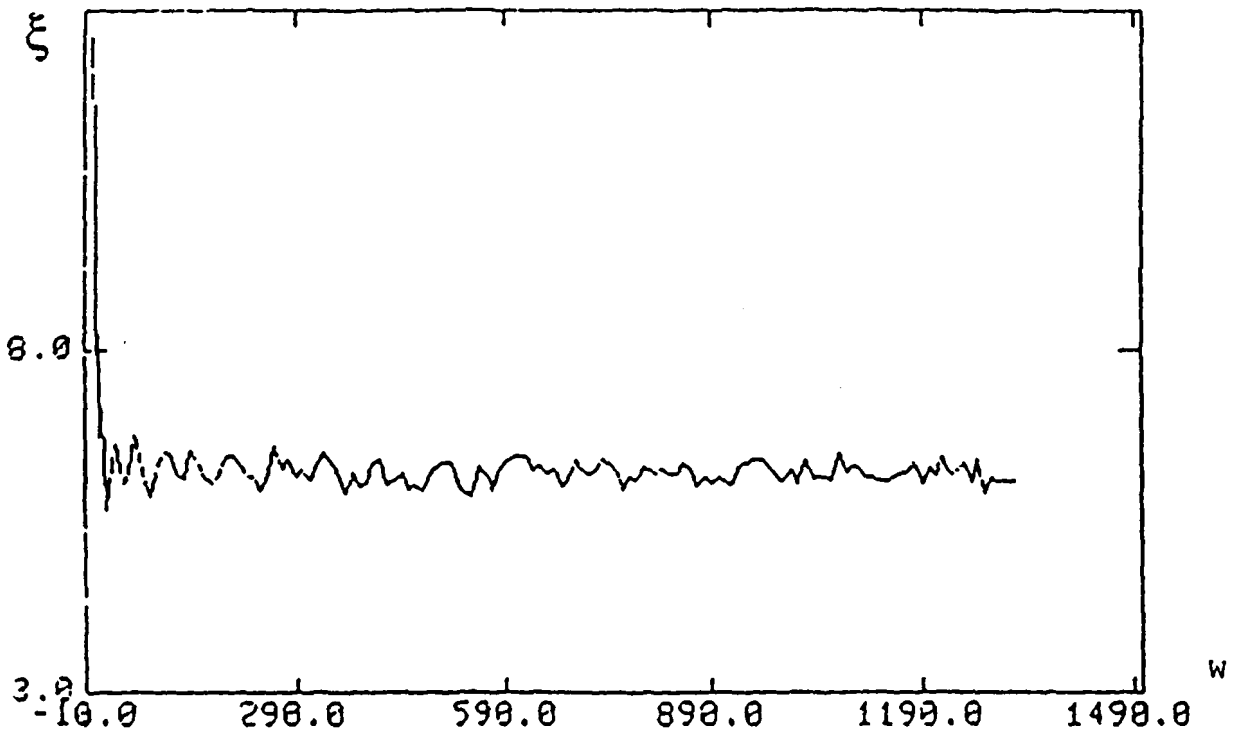


Figure 4

Longueur de localisation ξ en fonction du désordre w . $\omega = 1.5$, $N = 20\,000$, $\ell = 4$.

Pour des raisons graphiques les 4 premières valeurs de ξ ont été modifiées sur le dessin.

La Table 2 reporte les vraies valeurs de ξ .

w	ξ
1.00	162.6
2.00	71.74
3.00	41.96
4.00	13.67
5.00	7.166
6.00	8.157
7.00	7.568
8.00	6.681
9.00	6.805
10.0	7.092
20.0	5.598
30.0	6.618
40.0	6.011
50.0	6.154

Table 2.

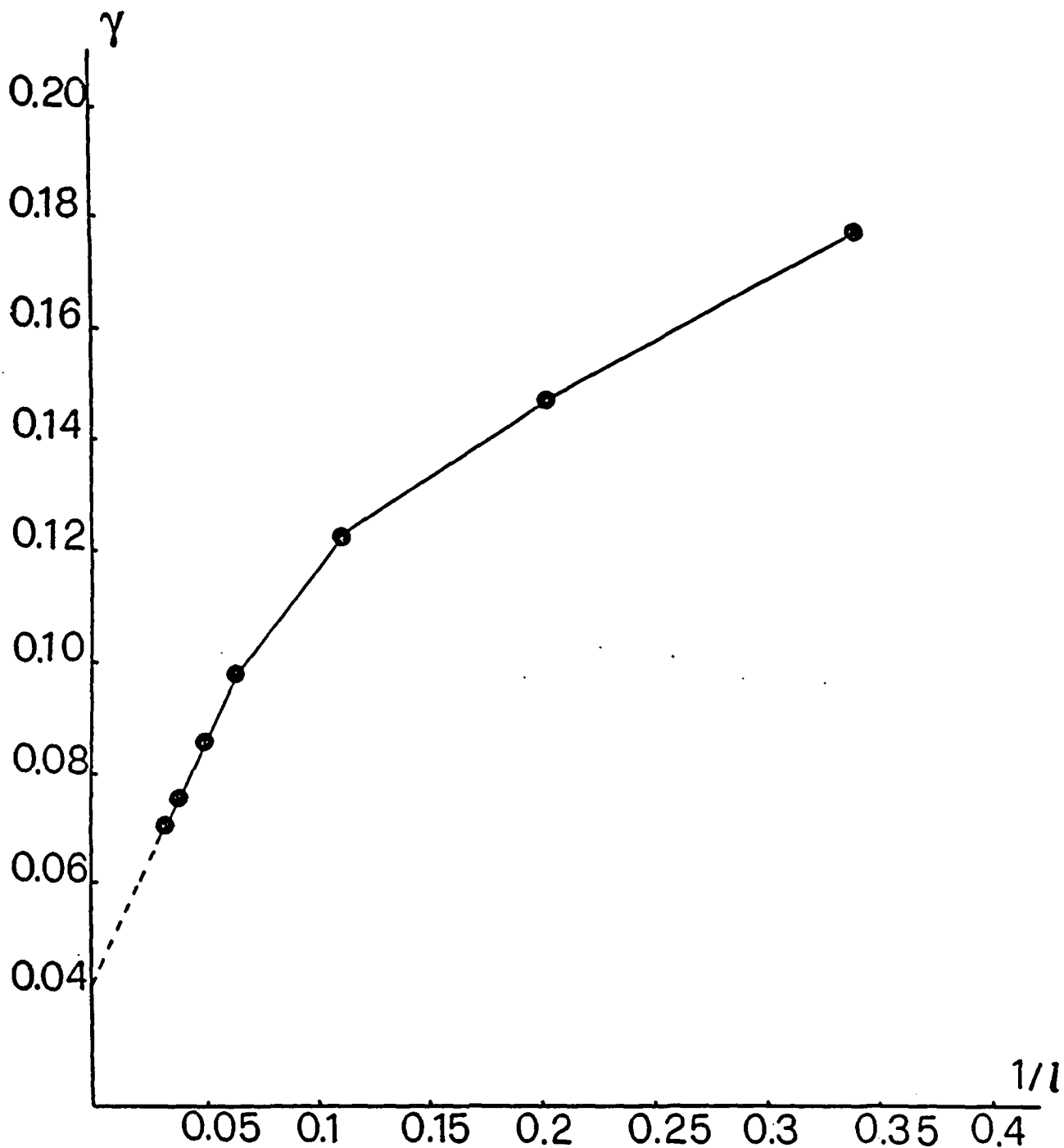


Figure 5.

γ_{\min} en fonction de $1/\ell$. $\omega = 1.5$, $w = 20.25$, $N = 20000$

Ceci impliquerait l'existence d'états localisés dans le plan bidimensionnel.

D'autre part, la Fig. 5 nous indique une variation de la pente de la droite définissant γ_{\max} dans la direction des grandes longueurs de localisation et, l'extrapolation pour $\ell = \infty$ sur la base des données que l'on possède à l'heure actuelle montre déjà une valeur très grande pour ξ minimale, de l'ordre de la taille du système.

A partir de ces considérations on peut douter de l'existence d'états localisés dans un système bidimensionnel. Ce fait contredit les idées courantes selon lesquelles tous les états seraient localisés à deux dimensions.

Malheureusement les temps de calcul prohibitifs nous ont empêché de poursuivre plus loin l'analyse numérique. Sur la base de ces données, et, en l'absence de preuves analytiques, bien compliquées dans le cas multidimensionnel, on peut quand même remarquer deux faits significatifs :

- 1) L'effet de saturation du minimum de la longueur de localisation n'est pas un phénomène strictement unidimensionnel.
- 2) La longueur de localisation pour un système bidimensionnel est très large si le désordre est simplement donné par les fluctuations de la constante diélectrique autour d'une certaine valeur, et par conséquent, le régime de localisation sera dans ce cas très difficile à atteindre.

4.5. *Estimation de la longueur de localisation à partir du développement perturbatif de la fonction de Green*

On a jusqu'à présent exprimé le problème de la localisation comme un problème de transmission à travers une région désordonnée et on a décrit des méthodes pour étudier les propriétés de transmission à travers cette région

A présent, nous allons essayer, dans l'esprit de l'article original d'Anderson, (1958) [7], d'estimer les plages de fréquence et de désordre pour lesquelles on peut attendre des états localisés et, par la même occasion, estimer la longueur de localisation [8].

4.5.1. Développement perturbatif de la fonction de Green

Considérons la région Λ comme une cavité dans le sens de la théorie électromagnétique. Les fonction propres pour l'onde scalaire sont alors solution de l'équation

$$\Delta\varphi(r) = -\omega^2 n^2(r) \varphi(r) \tag{31}$$

Examinons la fonction de Green

$$G_\varepsilon(x, y, \omega) = \left(\frac{1}{i\varepsilon - \omega^2 + n^2\Delta} \right) (x, y) \tag{32}$$

Pour la chaîne désordonnée unidimensionnelle définie auparavant, la fonction de Green G sera

$$G_\varepsilon(x, x', \omega) = \sum_{i,j} \chi_i(x) \chi_j(x') \{ \cos k_x x \cos k_x x' A_{ij} + \dots \} \tag{33}$$

où $\chi_i(x)$ est la fonction caractéristique de l'intervalle (i-1,i) et

$$A_{ij} = \sum_{\alpha} \frac{\varphi_{\alpha}^{(i)} \varphi_{\alpha}^{(j)}}{i\varepsilon - (\omega_{\alpha}^2 - \omega^2)} \tag{35}$$

Considérons notre équation (10) du chapitre 2. Les termes J_ω et V_ω dépendent de la fréquence ω : c'est le prix à payer pour la réduction de notre système à un réseau de canaux unidimensionnels. Soit

$$H(\omega) \psi_\alpha(\omega) = \lambda_\alpha(\omega) \psi_\alpha(\omega) \quad (35)$$

Dans le cas unidimensionnel on aura cette fois

$$\tilde{A}_{ij}(\omega) = \sum_{\alpha} \frac{\psi_{\alpha}(i,\omega) \psi_{\alpha}(j,\omega)}{i\varepsilon - \lambda_{\alpha}(\omega)} \quad (36)$$

Or, pour toutes les valeurs de ω telles que $\lambda_{\alpha}(\omega) = 0$, on aura $\psi_{\alpha}(i) = \psi_{\alpha}(j,\omega)$ et on peut identifier $A_{ij}(\omega)$ et $\tilde{A}_{ij}(\omega)$.

Si on suppose que la même démarche soit valable dans le cas multidimensionnel on trouve alors que la fonction de Green devient dans le cas de notre équation

$$K_{\varepsilon}(r, r', \omega) = \left(\frac{1}{i\varepsilon - V_{\omega} - J_{\omega}} \right) (r, r') \quad (37)$$

Lorsqu'on néglige le terme de "hopping" J, tous les états sont localisés, et

$$K_{\varepsilon}^0(r, r', \omega) = \delta_{r,r'} \frac{1}{i\varepsilon - V_{\omega}(r)} = \delta_{r,r'} q(r) \quad (38)$$

Alors, avec probabilité 1,

$$|K_{\varepsilon}^0(r, r', \omega)| \leq \exp \frac{|r-r'|}{\xi(\omega)} \quad \forall \varepsilon > 0 \quad (39)$$

Développons $K_{\varepsilon}^0(r, r', \omega)$ perturbativement dans les éléments non diagonaux de l'hamiltonien

$$K_{\varepsilon}(r, r', \omega) = K_{\varepsilon}^0 + K_{\varepsilon}^0 J K_{\varepsilon}^0 + \dots \quad (40)$$

c'est à dire

$$K_{\varepsilon}(r, r', \omega) = \sum_n \sum_{r_1}^{r_n} q(r_1) q(r_2) \dots q(r_n) J(r, r_1) J(r_1, r_2) \dots J(r_n, r') \delta_{r, r_1} \delta_{r_2, r_1} \dots \delta_{r, r_n} \quad (41)$$

où on somme sur tous les chemins qui vont de r à r' sur le réseau, en tenant compte que J ne connaît que ses voisins. Retenons seulement les contributions des chemins qui ne se recoupent pas: ceci revient à négliger la partie réelle de la self-énergie et devrait donner une borne supérieure pour le désordre critique w_c .

Alors, pour la loi des grands nombres, si $n \rightarrow \infty$

$$|q(r_1) \dots q(r_n)| = \exp \left(\sum_{j=1}^n \log |q(r_j)| \right) \approx e^{n \langle \log |q| \rangle} \quad (42)$$

De même,

$$|J(r, r_1) J(r_1, r_2) \dots J(r_n, r')| = \exp \left(\sum_{j=1}^n \log |J(r_j)| \right) \approx e^{n \langle \log |J| \rangle} \quad (43)$$

On a alors que

$$|K_\varepsilon(r, r', \omega)| \leq \sum_n e^{n \langle \log |q| \rangle + n \langle \log |J| \rangle} M_n(r, r') \quad (44)$$

où $M_n(r, r')$ est le nombre de chemins qui ne se recoupent pas allant de r à r' en n sauts ($n > |r - r'|$) et $M_n(r, r') \leq (z-1)^n$ où z est le nombre de voisins.

Ceci implique

$$|K_\varepsilon(r, r', \omega)| \leq \sum_{n > |r - r'|} e^{n(\langle \log |q| \rangle + \langle \log |J| \rangle + \langle \log(z-1) \rangle)} \leq \text{cts } e^{-\frac{|r - r'|}{\xi}} \quad (45)$$

où, pour que la formule ait un sens ξ doit être positif et définit comme

$$e^{1/\xi} = e^{-\langle \log |q| \rangle - \langle \log |J| \rangle - \langle \log(z-1) \rangle} \quad (46)$$

La formule (45) donne ainsi un critère pour que les états soient localisés. On peut donc à présent donner une estimation de la longueur de localisation à partir de l'estimation du rayon de convergence du développement perturbatif de la fonction de Green K. En effet,

$$n (\log (z-1) + \langle \log |q| \rangle + \langle \log |J| \rangle) \leq -\gamma |x|$$

$$\text{et } \gamma \approx -\log (z-1) - \langle \log |J_\delta| \rangle + \langle \log |V_\omega| \rangle$$

(47)

ce qui donne explicitement

$$\gamma = \xi^{-1} \approx \log \left| \sum_{\delta=1}^z \frac{k(r, \delta) \cos k(r, \delta)}{\sin k(r, \delta)} \right| - \log \left[\left| \frac{k(r, \delta)}{\sin k(r, \delta)} \right| (z-1) \right]$$

(48)

Une valeur négative pour l'inverse γ de la longueur de localisation peut indiquer la non validité de l'approximation utilisée, ou bien une région possible où les états sont étendus.

La comparaison entre les valeurs de γ estimées numériquement à partir de la formule (48) et celles calculées à partir du produit matrice aléatoire peut, en différents cas, offrir des indications intéressantes sur le domaine de validité de l'approximation utilisée et sur l'extrapolation pour $\ell = \infty$ des résultats numériques.

4.5.2. Comparaison des résultats numériques

Le calcul de l'exposant de Liapunov γ indique dans le cas d'un fil unidimensionnel comme dans le cas du système bidimensionnel, des longueurs de localisation très grandes avec un effet de saturation de la valeur minimale de ξ en fonction du désordre vers une valeur strictement positive dépendante du nombre de canaux latéraux du système.

La validité de "l'approximation de Green", testée dans le cas du fil unidimensionnel, peut fournir des renseignements très utiles sur l'évolution de ξ_{∞} quand le ruban désordonné tend vers le plan bidimensionnel.

Le fil unidimensionnel

Les figures 6 et 7 montrent la comparaison entre le comportement de γ calculé pour un fil unidimensionnel à partir du produit de matrice de transfert (Figs. 6a et 7a), et à partir de la formule (48). Même si les valeurs numériques sont différentes, on peut remarquer que l'allure des courbes est essentiellement semblable.

Sur la figure 6, on voit que la région des petits désordres, caractérisée par un exposant de Liapunov γ , du produit de matrices aléatoires qui devient très petit, correspond à une région pour laquelle le γ calculé à partir de l'approximation (48) devient négatif; ceci semble donc confirmer que ces valeurs négatives de γ indiquent des régions très faible localisation.

La région $w \cong 900-1600$ du graphique 6b montre une particularité intéressante. En effet, les valeurs négatives de γ correspondantes semblent indiquer qu'à partir de notre approximation, on sous-estime la localisation. Ceci peut être dû au fait que, en basse dimension, les chemins $M_n(r, r')$, se recoupent beaucoup et en conséquence, les estimations du rayon de convergence du développement perturbatif de la fonction de Green ne donnent pas dans ces cas, d'assez bonnes évaluations de la valeur de γ .

Au contraire, sur la figure 7, on voit comment, pour un désordre suffisamment grand ($w > 20$), les deux méthodes indiquent que les valeurs de γ , calculées en fonction de la fréquence ω , restent confinées dans une bande étroite. Ceci confirme l'existence d'un effet de saturation du minimum de la longueur de localisation, indépendamment de la fréquence incidente.

A remarquer que dans ce cas, l'approximation (48) donne pour γ des valeurs toujours positives mais beaucoup trop grandes.

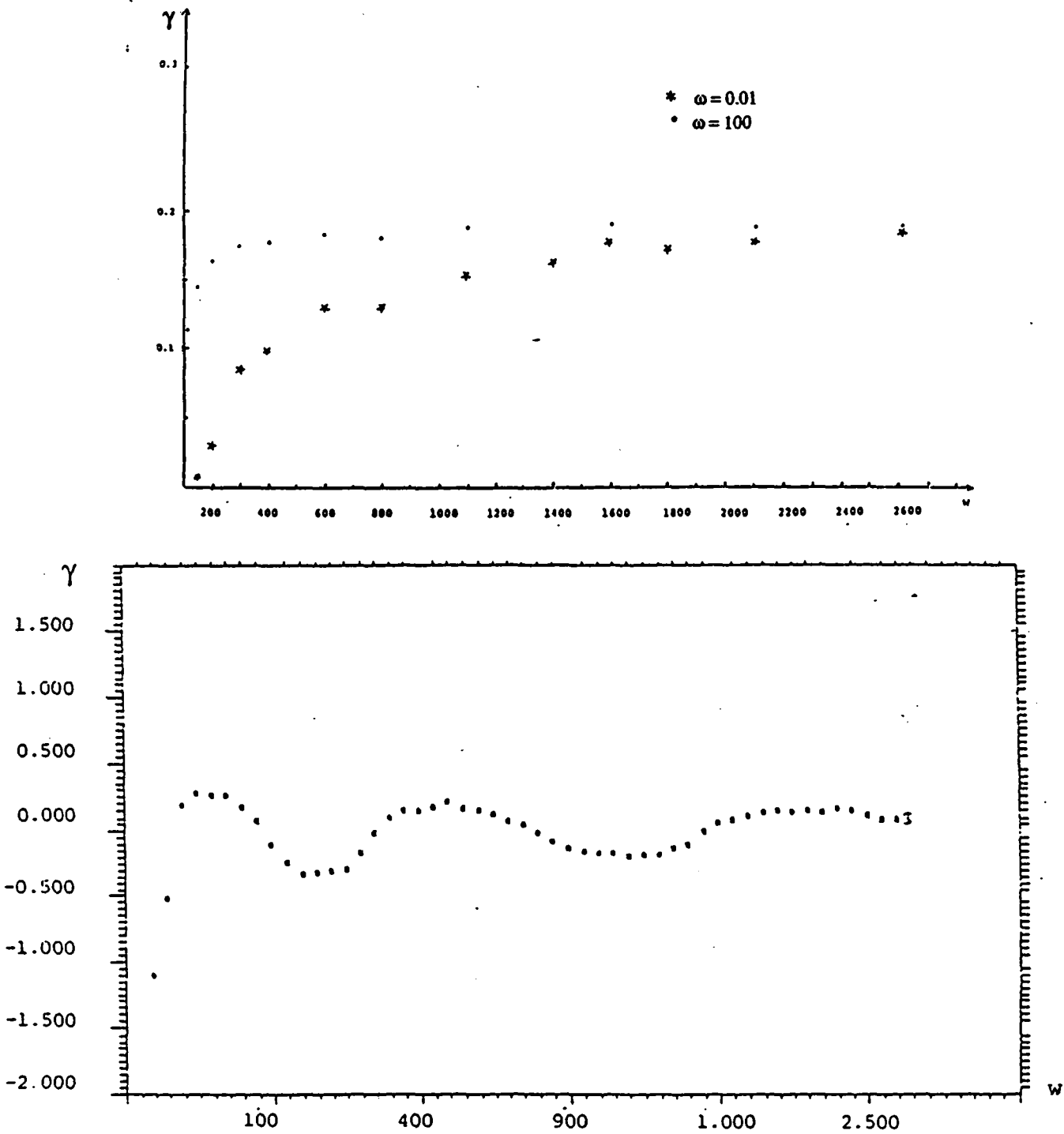


Figure 6.

γ en fonction du désordre W a) calculée à partir du produit de matrices de transfert pour $\omega = 0.01$ et $\omega = 100$; $N = 20000$ b) estimée à partir du rayon de convergence du développement perturbatif de la fonction de Green pour une fréquence intermédiaire $\omega = 1.5$. La moyenne statistique a été effectuée sur $M = 10000$ tirages .

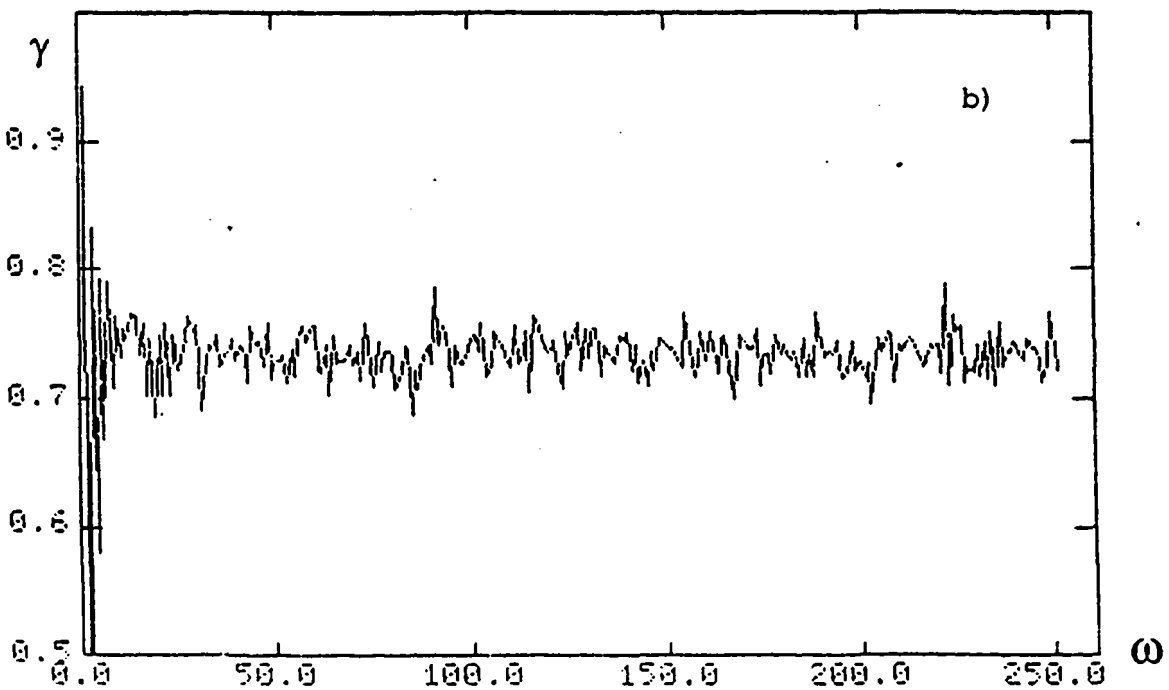
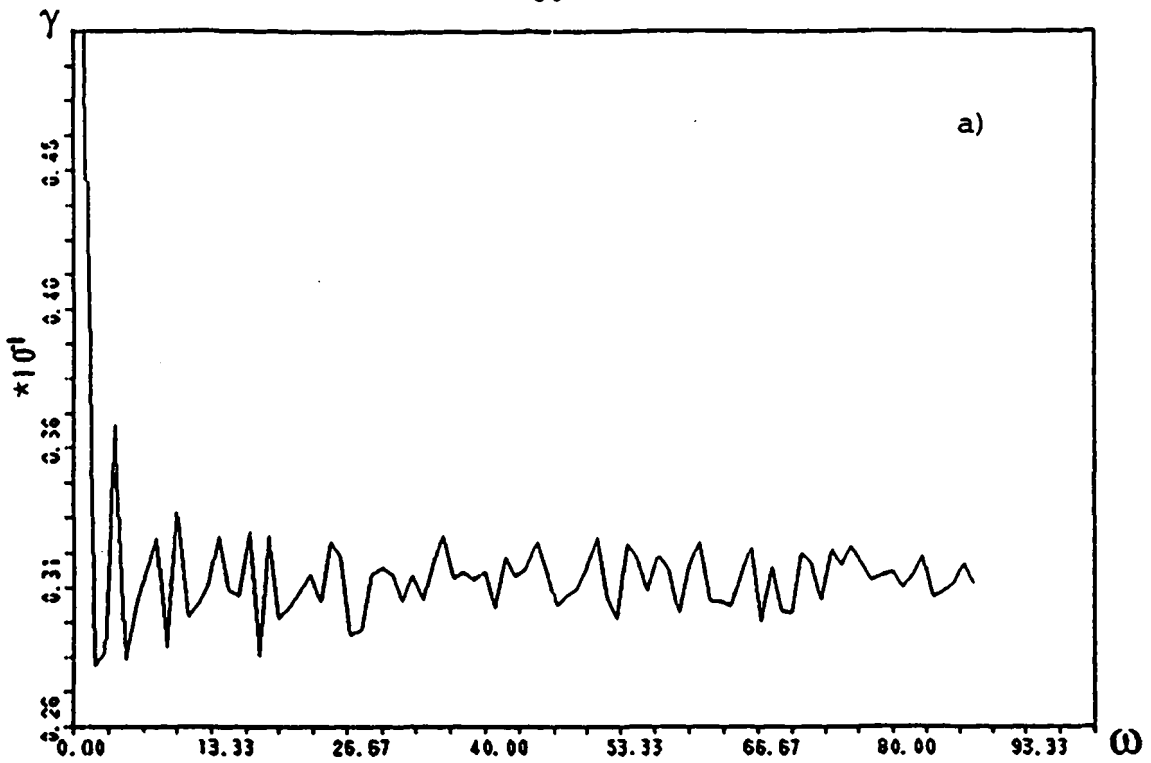


Figure 7.

γ en fonction de la fréquence ω a) calculée à partir du produit de matrices de transfert pour $W = 20.25$ et $N = 20000$ b) estimée à partir du rayon de convergence du développement perturbatif de la fonction de Green. $W = 20.25$. La moyenne statistique a été effectuée sur $M = 10000$ tirages .

Le ruban

Dans le cas du système bidimensionnel, l'estimation du rayon de convergence du développement perturbatif de la fonction de Green, calculée pour différentes valeurs de w et de ω donne toujours un γ négatif. Ce fait confirme que, pour une distribution continue et uniforme entre deux valeurs de la constante diélectrique, la localisation est très faible et éventuellement, les états sont toujours étendus (Figs. 8 et 9).

De plus, on peut remarquer que les valeurs de ω et de w choisies pour calculer ξ_{\min} en fonction de la largeur ℓ du ruban, enferment effectivement les fluctuations de la longueur de localisation minimale dans une étroite bande, aussi pour le système infini.

En conclusion, il existe une analogie évidente entre la forme des graphiques calculés à partir des deux méthodes. Toutefois, la localisation très faible ne permet pas, sur la base de ces résultats, de discerner avec une précision suffisante les limites de validité de l'approximation (48) des vrais effets de localisation. La comparaison serait beaucoup plus parlante si des régions de faible localisation succédaient à des régions de localisation très forte : il serait dans ce cas plus aisé d'évaluer les indications données par (48).

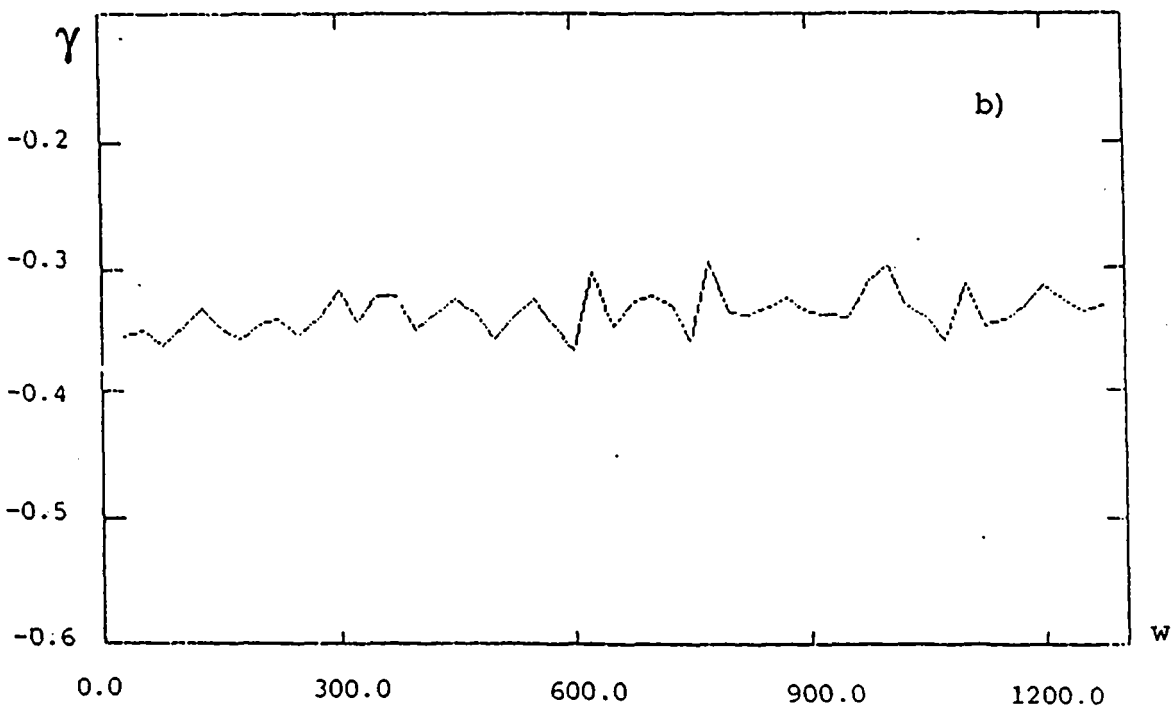
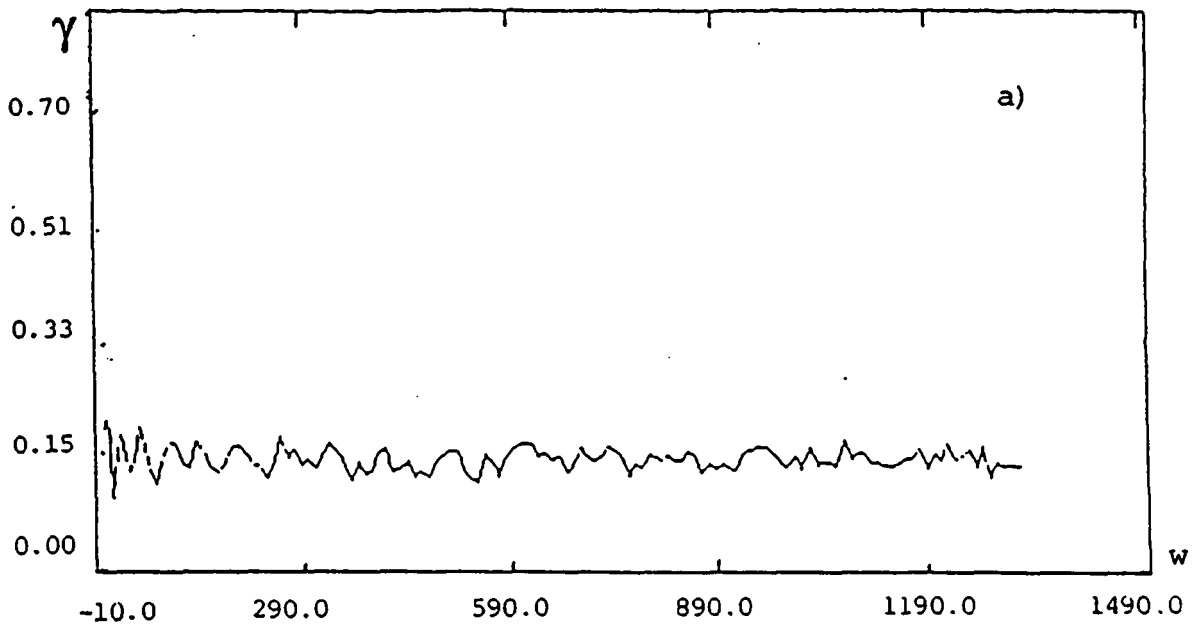
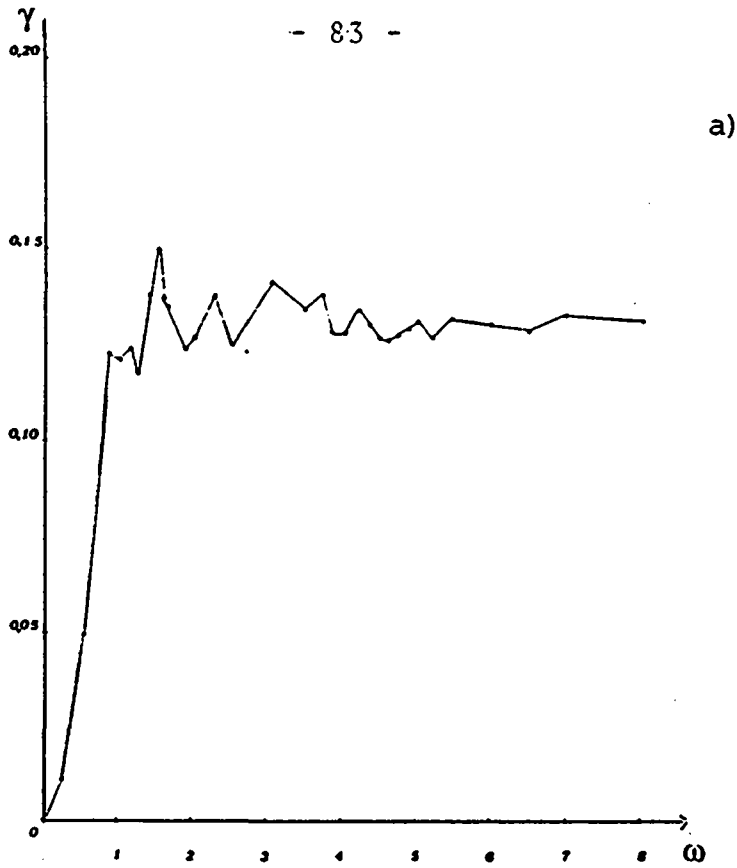
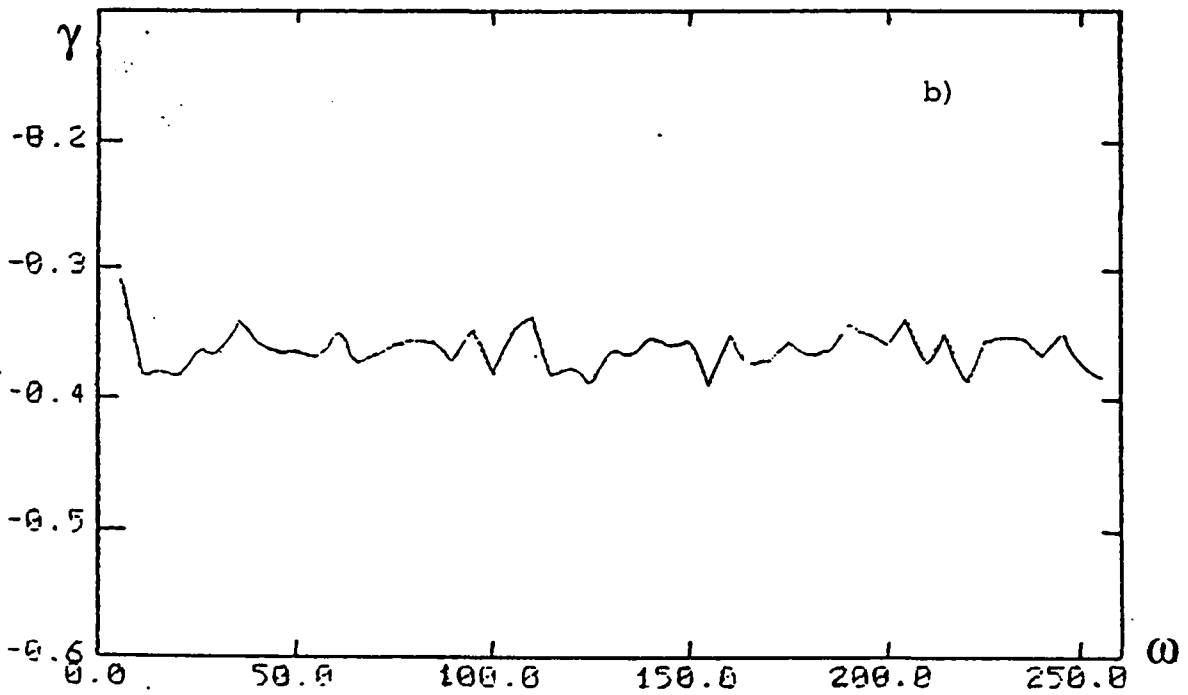


Figure 8.

γ en fonction du désordre W a) calculée à partir du produit de matrices de transfert pour $\omega = 1.5, \ell=4$ et $N = 20000$ b) estimée à partir du rayon de convergence du développement perturbatif de la fonction de Green. $\omega = 1.5$. La moyenne statistique a été effectuée sur $M = 10000$ tirages.



a)



b)

Figure 9.

γ en fonction de la fréquence ω a) calculée à partir du produit de matrices de transfert pour $W = 20.25$, $\ell = 6$ et $N = 20000$ b) estimée à partir du rayon de convergence du développement perturbatif de la fonction de Green. $W = 20.25$. La moyenne statistique a été effectuée sur $M = 10000$ tirages.

Références

- [1] K. Ishii : Sup. of Prog. of Theoretical Phys. No. 53, 77 (1973)
- [2] G. de Tonnac : Travail de diplôme (1982) sous la direction de H. Kunz
- [3] P. Sheng, B. White, Z.Q. Zhang and G. Papanicolau : Phys. Rev. B34, 4757 (1986)
- [4] R. Johnston, B. Kramer : "Localisation in one Dimensional Correlated Random Potential", Z. Phys. B. Condensed Matter 63 (1986)
- [5] J. P. Bauchand, A. Comtet, A. Georges, P. Le Doussal : "The Relaxation-Time Spectrum of Diffusion in a 1-D Random Medium, An exactly solvable case", preprint
- [6] J. P. Bauchand, A. Comtet, A. Geoges, P. Le Doussal : "A Solvable disordered model in 1-D : correlated random potential and diffusion in a random medium", preprint
- [7] P.W. Anderson : Phys. Rev. 109 1492 (1958)
- [8] H. Kunz - Cours de 3ème Cycle de la Physique en Suisse Romande : "Localisation dans les systèmes désordonnés", (1986).



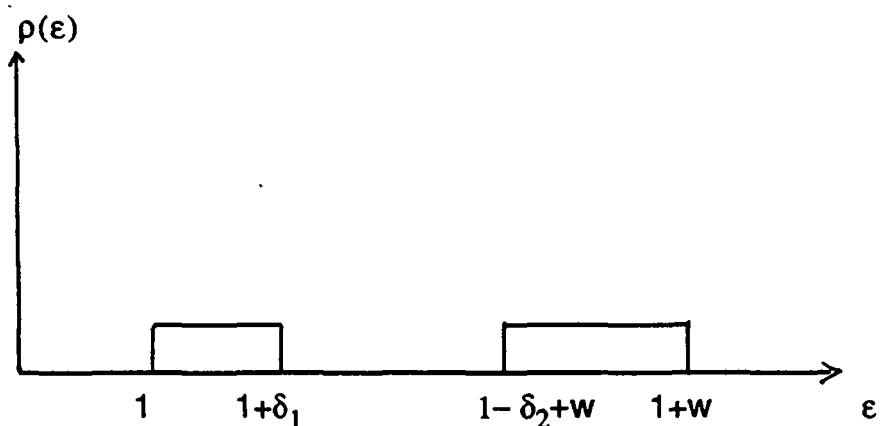
CHAPITRE 5. ETUDE DE LA LONGUEUR DE LOCALISATION DANS LE CAS D'UNE DISTRIBUTION CENTREE AUTOUR DE DEUX VALEURS

Comme on l'a vu, pour une distribution de probabilité de la constante diélectrique uniforme autour d'une valeur donnée, la localisation des ondes électromagnétiques est très faible.

Pour augmenter cet effet et accéder au régime de forte localisation, un désordre est donc nécessaire qui favorise l'interférence destructive par réflexion de l'onde optique. Ceci est possible en obligeant la constante diélectrique à changer fréquemment de petites à de grandes valeurs.

Choisissons par exemple, pour ϵ_{ij} une distribution uniforme entre

$$[1, 1+\delta_1] \cup [1-\delta_2+w, 1+w] \quad (1)$$



et étudions le comportement de ξ en fonction des trois paramètres (w, δ_1, δ_2) .

5.1. Le fil unidimensionnel

Reprenons le système unidimensionnel décrit au chapitre 4, et choisissons par simplicité $\delta_1 = \delta_2 = \delta$. Pour chaque couple de valeur (ω, w) , le cas limite $\delta = 0$ pour lequel $\rho(\varepsilon)$ comprend seulement les deux valeurs 1 et $1 + w$ rejoint, en l'augmentant de δ , le cas de la distribution uniforme quand $w = 2 \delta$.

Etudions séparément l'influence des trois paramètres :

- Soit $\delta = 0$

Notre fil unidimensionnel désordonné se réduit alors à une suite aléatoire de cellules de constante diélectrique 1 ou $(1 + w)$, dont une configuration pourrait être par exemple la suivante :



Dans ce cas la matrice S_n définie au chapitre 4 sera, pour chaque ω fixé, uniquement fonction de w .

Des conditions de résonance de l'onde électromagnétique à l'intérieur des différentes cellules, et de la relation de dispersion on aura

$$k = \omega \sqrt{\varepsilon} = \pi n / n'a \quad \forall \varepsilon \in \rho(\varepsilon) \quad (2)$$

où $n \in \mathbb{N}$ et les différentes valeurs de $n' = 1, N$ expriment les conditions d'harmonicité par rapport aux différentes réalisations possibles de la séquence $(1, 1 + w)$ à l'intérieur du fil désordonné. En particulier, on aura que $\gamma = 0$ pour chaque valeur du nombre d'onde k qui satisfait la relation (2) pour $n'=1$

La transmission du système sera alors parfaite et la longueur de localisation calculée en fonction de la fréquence ou du désordre montrera des divergences en correspondance des valeurs de résonance pour l'onde électromagnétique sur la maille unitaire du réseau. On peut établir une relation très simple entre la valeur du désordre w et la fréquence incidente ω ($a=1$)

$$\sqrt{w} = \pi n / n' \omega \quad (3)$$

Les valeurs de w qui favorisent la transmission dépendent donc de la fréquence incidente. Cette propriété peut être très utile en vue de comparer les prédictions théoriques avec des mesures expérimentales : en effet, si le "désordre réel" peut être mesuré avec une assez bonne précision, il est très difficilement contrôlable a priori, alors que la fréquence incidente peut être aisément variée.

Globalement, le spectre de transmission sera l'effet de l'interférence multiple des différents modes propres permis dans le système par les valeurs (ω, w) choisies.

La Fig. 1 montre les divergences de ξ en fonction du désordre et de la fréquence ω . On voit sur le même graphique la structure due à la diffusion multiple sur les différentes combinaisons de barrières présentes dans le fil.

La position des résonances observées et calculées à partir de la relation (3) est en excellent accord. Choisissons comme exemple la figure 1b.

On voit que les divergences (a) de la longueur de localisation correspondent à des résonances de l'onde par rapport à la cellule unitaire.

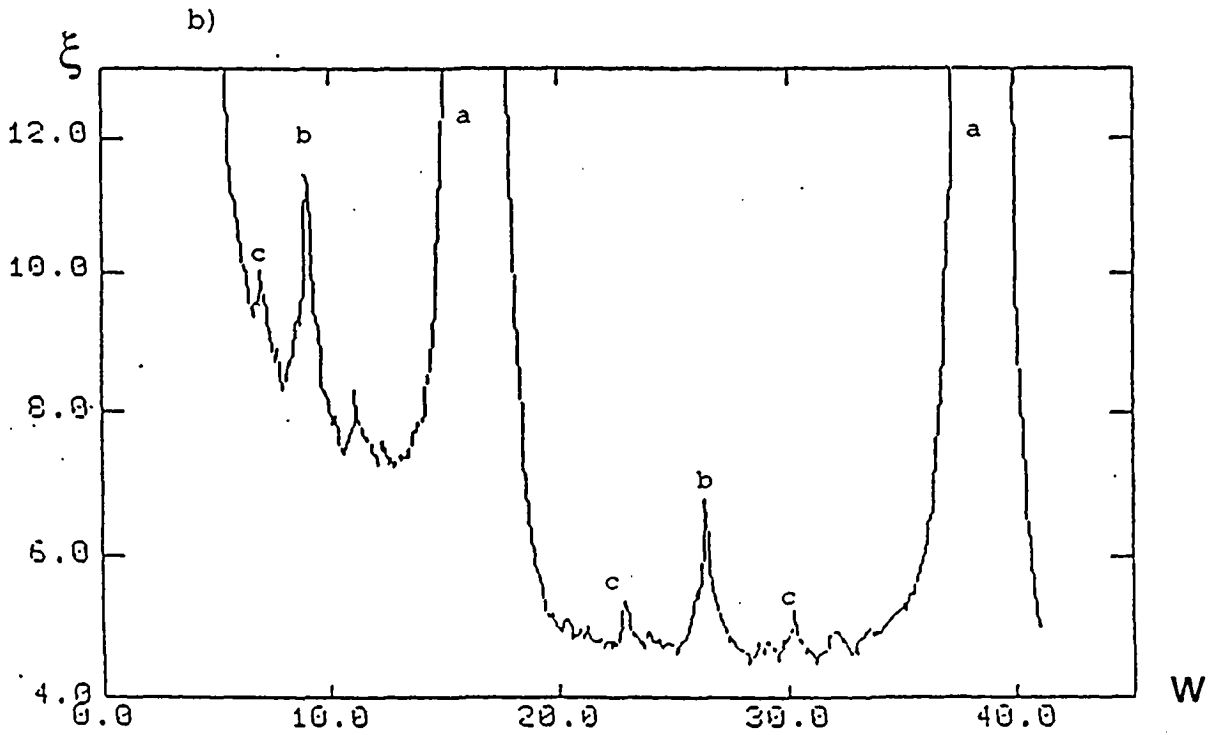
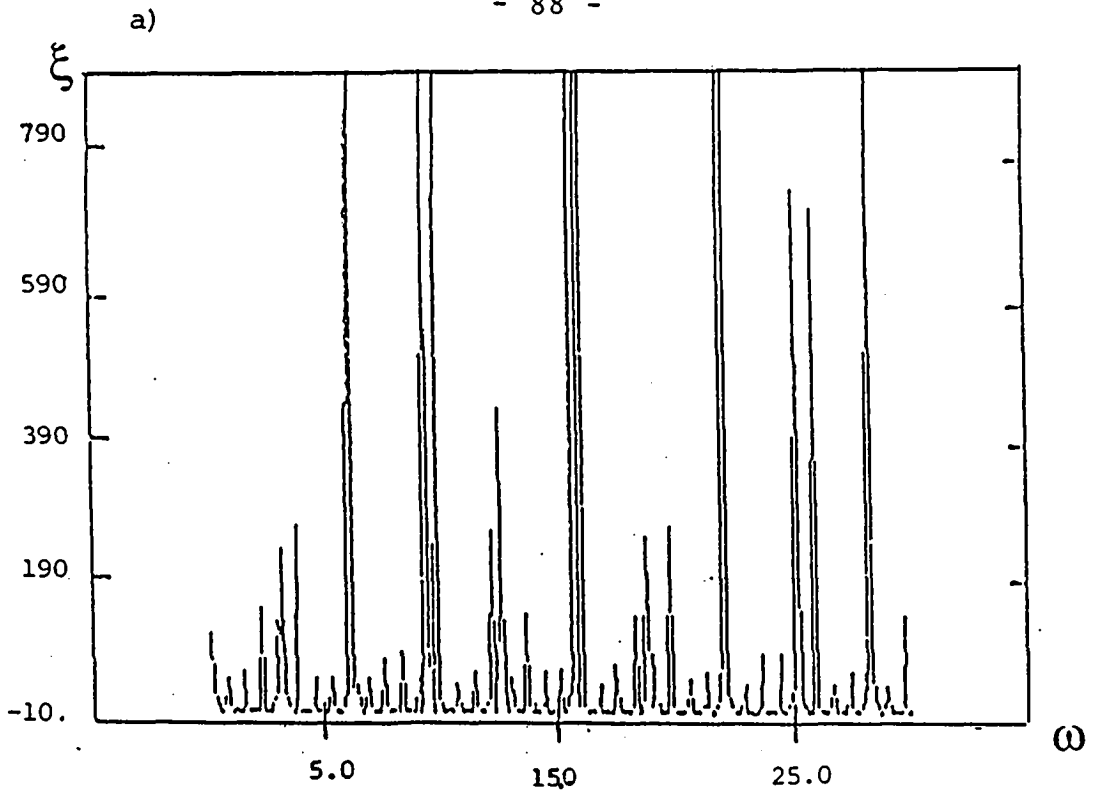


Figure 1.

a) Longueur de localisation ξ en fonction de la fréquence ω . $w = 16$, $\delta = 0$.

b) Longueur de localisation ξ en fonction du désordre w . $\omega = 1.5$, $N = 50000$, $\delta = 0$.

Résonances calculées		Résonances observées	
	<u>W</u>		<u>W</u>
(n/n'=1)	4.38	(a)	4.4
(n/n'=4/3)	7.79	(c)	7.9
(n/n'=3/2)	9.86	(b)	10.0
(n/n'=5/3)	12.18	(c)	12.2
(n/n'=2)	17.54	(a)	17.6
(n/n'=7/3)	23.88	(c)	24.0
(n/n'=5/2)	27.41	(b)	27.5
(n/n'=8/3)	31.19	(c)	31.3
(n/n'=3)	39.4	(a)	39.5

- Soit $0 < \delta < w/2$

Pour chaque valeur w donnée, l'élargissement du domaine de variation de la variable aléatoire autour des points 1 et $(1+w)$ favorise les fluctuations du nombre d'onde k au voisinage des valeurs $k = n\pi/n'a$ et augmente par conséquent l'interférence destructive qui est à l'origine des effets de localisation.

Les divergences de ξ observé pour $\delta = 0$ deviennent des "pics de transmission pour la lumière", de hauteur finie, autour des valeurs w correspondant aux fréquences harmoniques du système (Fig. 2).

D'autre part, comme les fréquences harmoniques d'ordre supérieur sont plus sensibles à l'interférence destructive créée par les fluctuations de la constante diélectrique autour des valeurs de résonance on n'aura vraisemblablement de grandes longueurs de localisation que si w et ω satisfont la relation (3) pour des petites valeurs de n .

On peut voir sur la Fig. 3 comment la hauteur des pics diminue lorsque $\omega > w$.

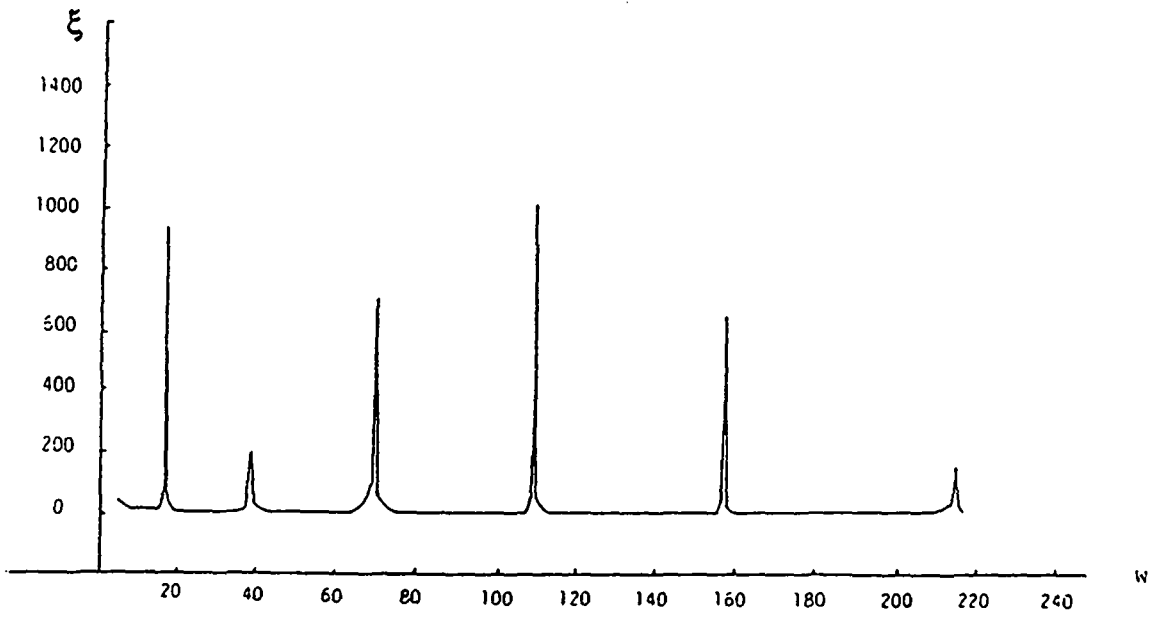


Figure 2a.

Longeur de localisation ξ en fonction du desordre w . $N = 50000$, $\omega = 1.5$, $\delta = 0.5$

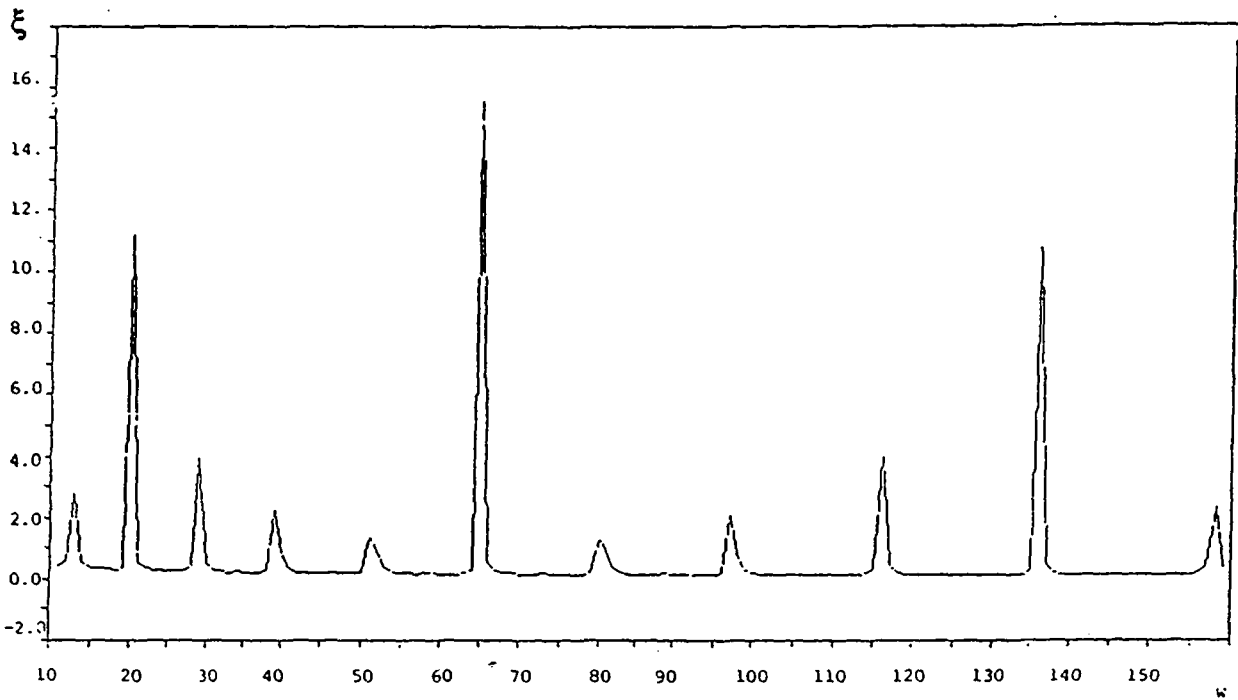


Figure 2b.

Longeur de localisation ξ en fonction du desordre w . $N = 50000$, $\omega = 3.5$, $\delta = 0.5$

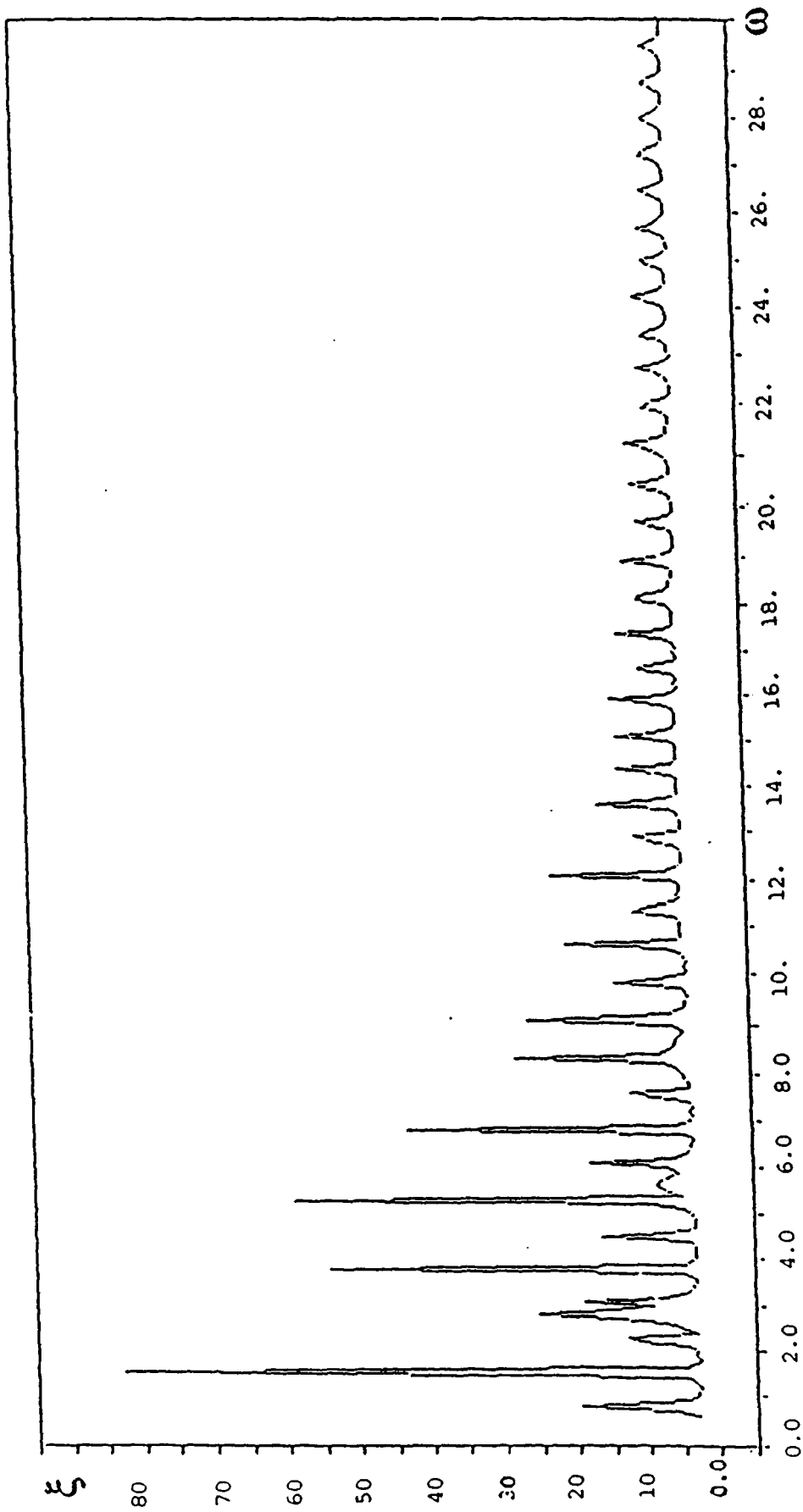


Figure 3.

Longueur de localisation ξ en fonction de la fréquence ω . $N = 50000$, $w = 17$, $\delta = 0.5$

- Soit $\delta = w/2$

Dans ce cas particulier, toutes les valeurs de la constante diélectrique entre $(1,1+w)$ deviennent équiprobables et on revient à la distribution uniforme étudiée au chapitre 4.

Le graphique 4 reproduit l'étude, en fonction du paramètre δ , de la hauteur du maximum de la longueur de localisation trouvé pour un désordre $w=17.5$ et pour une fréquence $\omega = 1.5$ (fig. 1b)

Pour $\delta = 0$, la longueur de localisation a une divergence pour $w = 17.5$. Au fur et à mesure que la valeur du paramètre augmente, ($0 < \delta < w/2$), la hauteur du pic diminue jusqu'à atteindre une valeur constante quand $\delta \equiv w/2$.

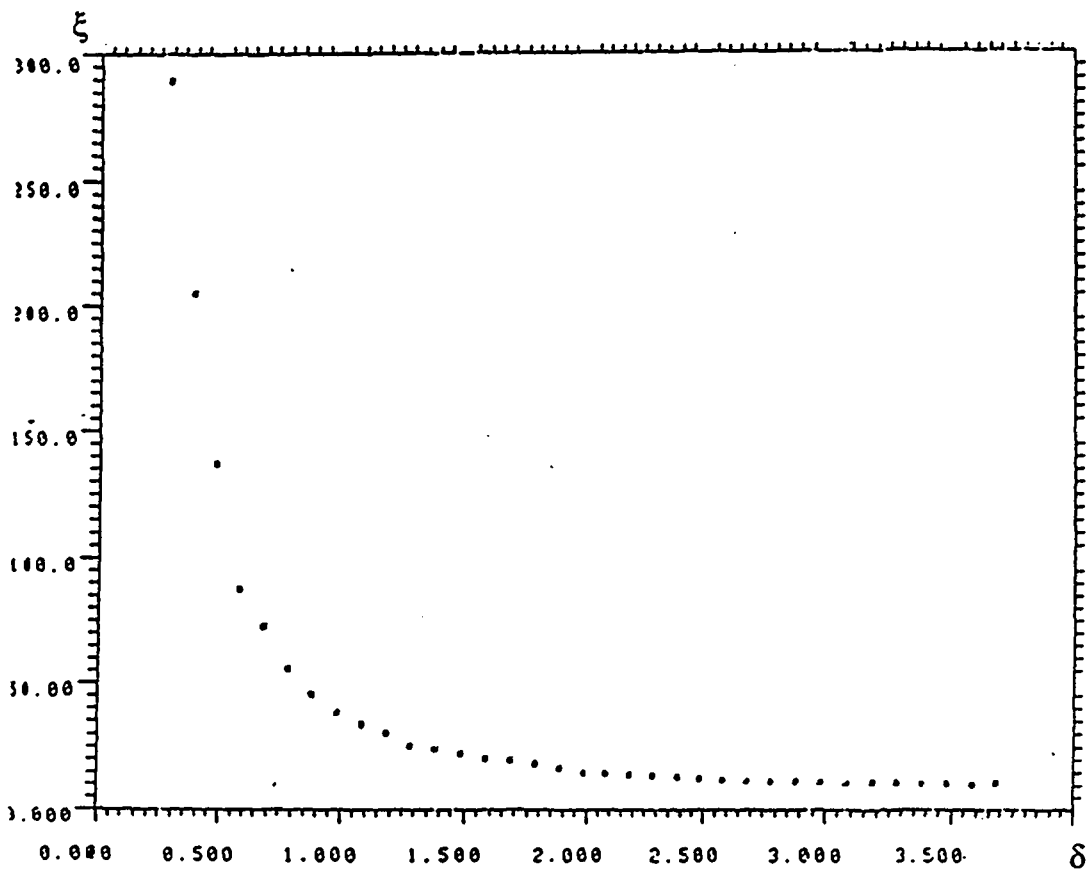


Figure 4.

Etude de la hauteur d'un maximum de la longueur de localisation ξ en fonction du paramètre δ . $w = 16.5$, $\omega = 1.5$, $N = 50000$.

Tous ces exemples numériques nous amènent à deux conclusions principales :

- 1) La diffusion multiple est la principale responsable du phénomène de localisation vue comme interférence destructive due au désordre .
- 2) La "forme" de la distribution de probabilité de la variable aléatoire est significative pour caractériser le comportement du système.

Les propriétés de transmission ne sont en effet pas caractérisées seulement par l'extension w des fluctuations possibles du désordre, mais aussi par le rapport entre les deux paramètres w et δ , définissant la structure de la fonction de distribution.

5.2. *Le réseau multidimensionnel*

On a vu au chapitre précédent comment les calculs de ξ en fonction de la largeur ℓ d'un ruban bidimensionnel ne montraient pas une évidence de l'existence d'états localisés dans le plan bidimensionnel pour une distribution de probabilité choisie uniforme autour d'une seule valeur ($w/2 + 1$).

D'autre part, les résultats unidimensionnels indiquent que l'introduction d'un nouveau paramètre δ dans la définition de la loi de probabilité favorise dans certains cas la localisation.

On est donc à ce moment particulièrement intéressé à l'influence du paramètre δ sur le comportement de la longueur de localisation en fonction de ℓ dans le cas multidimensionnel.

Le calcul numérique étant notre principal instrument dans l'étude des systèmes à plusieurs dimensions, on donne par la suite les résultats numériques obtenus à l'aide du CRAY 1, pour des rubans de largeur allant jusqu'à 35 canaux.

Malheureusement, la valeur $\ell = 35$ approche de la limite supérieure pour les possibilités numériques; en effet au-dessus de cette valeur, l'incrément du temps de calcul indispensable pour satisfaire les conditions de précision et de convergence asymptotique requises par la fiabilité des résultats ne permet pas de poursuivre plus loin l'analyse numérique sur cette voie.

La Fig. 5 montre le graphique de $\xi(\ell)$ pour un ruban de largeur ℓ et pour différentes valeurs du désordre w comprises entre $w = 15$ et $w = 20$.

L'étude de ces courbes nous permet de remarquer que :

- Les fonctions $\xi(\ell)_w$ sont non-monotones. Ceci diffère une fois de plus du comportement que l'on trouve dans le cas de l'équation de Schrödinger sur réseau pour lequel les fonctions sont monotones, tout au moins si le désordre est diagonal.
- Une caractéristique commune à toutes les courbes est une décroissance très forte de la longueur de localisation pour certaines valeurs de ℓ .
- On voit apparaître une corrélation entre le comportement de $\xi(w)$ pour le système unidimensionnel et pour le ruban.

En effet, les désordres w qui donnent les maximum de la longueur de localisation pour le système unidimensionnel sont celles pour lesquelles ξ atteint les plus petites valeurs pour un ruban de largeur finie ℓ .

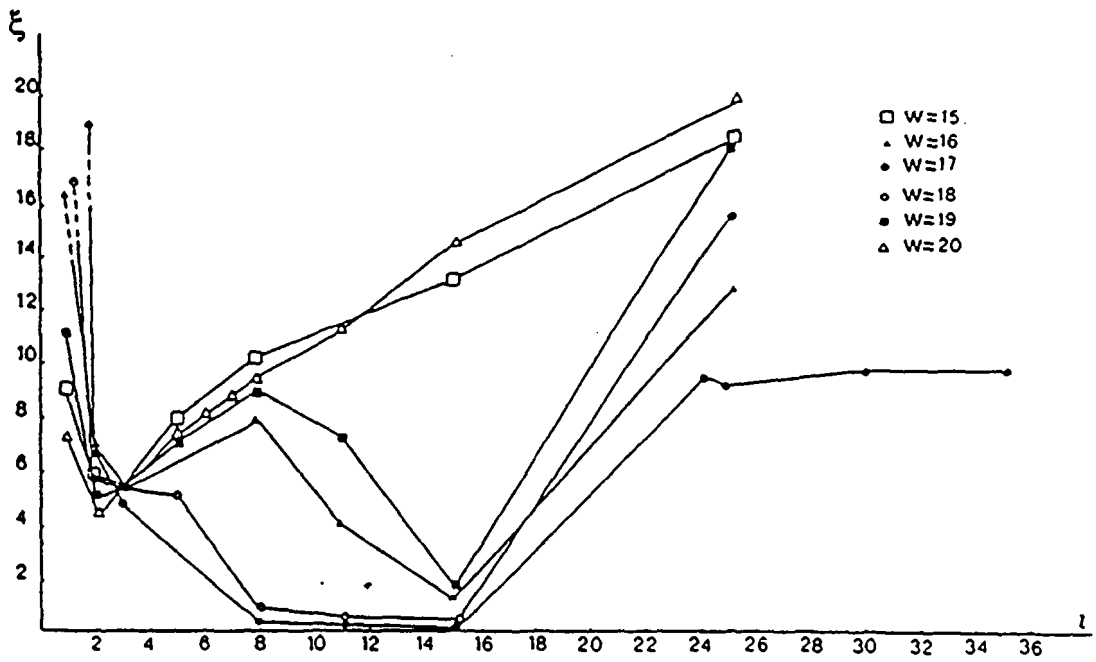


Figure 5a

Longueur de localisation ξ en fonction de la largeur ℓ du ruban pour différentes valeurs du désordre w . $N = 20000$, $\omega = 1.5$, $\delta = 0.5$

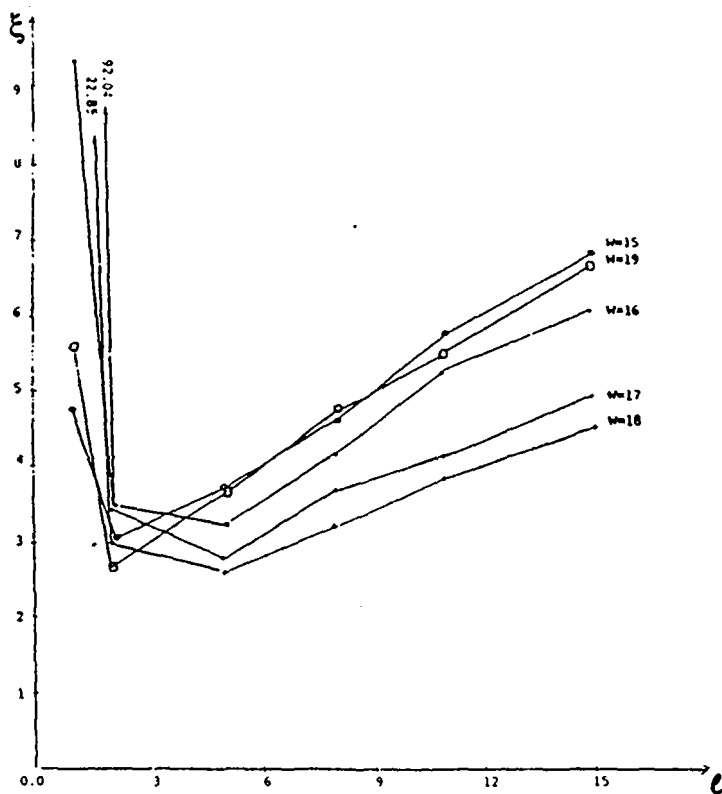


Figure 5b

Longueur de localisation ξ en fonction de la largeur ℓ du ruban pour différentes valeurs du désordre w . $N = 20000$, $\omega = 3.5$, $\delta = 0.5$

Cet effet apparaît plus clairement quand on trace $\xi(w)$ pour différentes valeurs de ℓ . (Fig. 6 et Table 1).

ℓ \ w	1	2	3	4	5	6	8	11	15	25
15	4.816	3.01	2.80	3.48	4.05	4.28	5.14	5.74	6.67	9.29
16	9.042	3.46	2.28	3.08	3.23	3.68	4.01	2.05	0.67	*
17	92.12	3.39	2.44	0.98	0.42	0.30	0.23	0.19	0.17	4.54
18	22.85	2.95	2.77	2.96	2.5	1.37	0.51	0.34	0.27	*
19	5.68	2.63	2.7	3.15	3.66	3.99	4.50	3.68	0.94	*
20	3.77	2.36	2.80	3.27	3.75	4.10	4.75	5.57	7.13	9.84
38	8.96	3.51	3.04	2.96	1.88	0.84	0.41	*	*	*
39	109.1	3.52	0.70	0.24	0.18	0.15	0.13	0.12	0.11	0.42
40	17.97	4.27	3.05	1.65	0.68	0.40	0.28	0.22	*	*

Table 1

On peut essayer d'interpréter ce résultat sur la base du phénomène unidimensionnel. Comme le système est homogène par rapport à la distribution de probabilité choisie et la longueur de la maille "a" est la même dans toutes les directions, les valeurs du désordre w compatibles avec les fréquences harmoniques par rapport à l'intervall "a" favorisent la transmission dans la direction horizontale et dans la direction verticale.

Les conditions aux bord de Dirichelet selectionnent ensuite les valeurs de ℓ pour lesquelles peuvent se former des ondes stationnaires transverses dans le système.

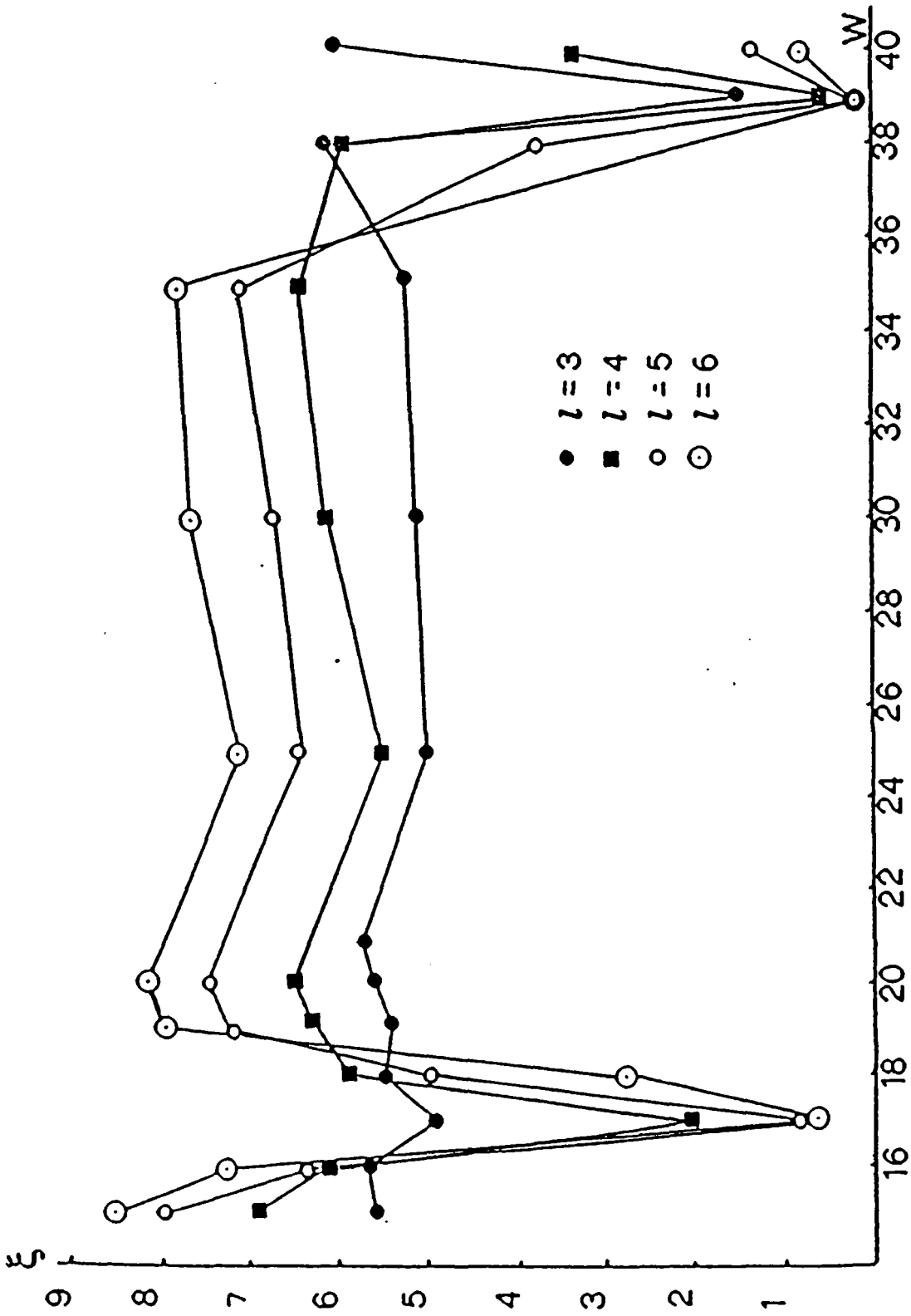


Figure 6

Longueur de localisation ξ en fonction du désordre w pour différentes valeurs de la largeur du ruban. $N = 20000$, $\omega = 1.5$, $\delta = 0.5$

Pour ces largeurs ℓ du ruban, l'onde a donc tendance à se propager dans les directions verticales et par conséquent seulement une faible intensité sera transmise selon la direction horizontale. La similitude avec le modèle unidimensionnel donnerait alors une succession de minima en fonction de la largeur ℓ du système, de plus en plus étroits, au fur et à mesure que le paramètre δ , définissant la distribution de probabilité, diminue.

Dans le cas d'un barreau tridimensionnel, les limitations numériques sur le temps de calcul et sur la précision des résultats deviennent drastiques. Le comportement observé est qualitativement le même que pour le cas bidimensionnel. On peut en effet remarquer que la valeur de ξ devient très petite pour les mêmes désordres qui donnent les minima dans le cas du ruban désordonné. Ces minima semblent toutefois être plus larges en fonction de ℓ et plus étroits en fonction du désordre que dans le cas bidimensionnel. Ceci laisse supposer qu'à 3 dimensions, les effets décrits auparavant soient amplifiés.

Les valeurs de la longueur de localisation pour un système tridimensionnel de largeurs latérales allant de 2 jusqu'à 6 sont données dans la Table 2.

$\ell \times \ell$ w	2*2	3*3	4*4	5*5	6*6
17	2.207	0.1729	0.1398	2.333	2.299
18	2.276	0.2980	0.2108	7.710	10.15

Table 2

Dans le cas d'une distribution continue, on a vu comment l'approximation (48) du chapitre 4 a donné des indications très satisfaisantes sur le comportement de la longueur de localisation, qui permettent d'avoir une idée, bien que très qualitative, sur les propriétés de transmission optique du plan bidimensionnel désordonné. On voudrait ici utiliser les mêmes arguments pour étudier la limite $\ell \rightarrow \infty$ dans le cas du ruban bidimensionnel et dans le cas du barreau.

En effet, les graphiques 6a et 6b du paragraphe précédent laissent bien des doutes sur le comportement de la longueur de localisation pour des systèmes très larges. Commençons par étudier ce que donne cette approximation pour le fil unidimensionnel.

Le fil unidimensionnel

La figure 7 illustre le comportement de la longueur de localisation ξ en fonction du désordre w pour une valeur du paramètre $\delta = 0.5$

Les valeurs négatives de ξ , dans la figure 7b, indiquent des régions de très faible localisation. La comparaison avec le graphique 7a, où ξ a été calculé par la méthode des matrices de transfert montrent comment l'existence d'une succession de "pics de transmission" déjà remarquée auparavant est confirmée par l'estimation reportée en figure 7b. Ce résultat, établi pour le cas unidimensionnel, nous fournit un test sur la validité qualitative de l'approximation (48). La comparaison des courbes 7a et 7b donne en effet une indication très claire sur la présence des régions de forte localisation dans le système. On peut donc espérer que l'estimation de la longueur de localisation à partir du développement perturbatif de la fonction de Green, nous éclaire des effets analogues pour un système multidimensionnel infini.

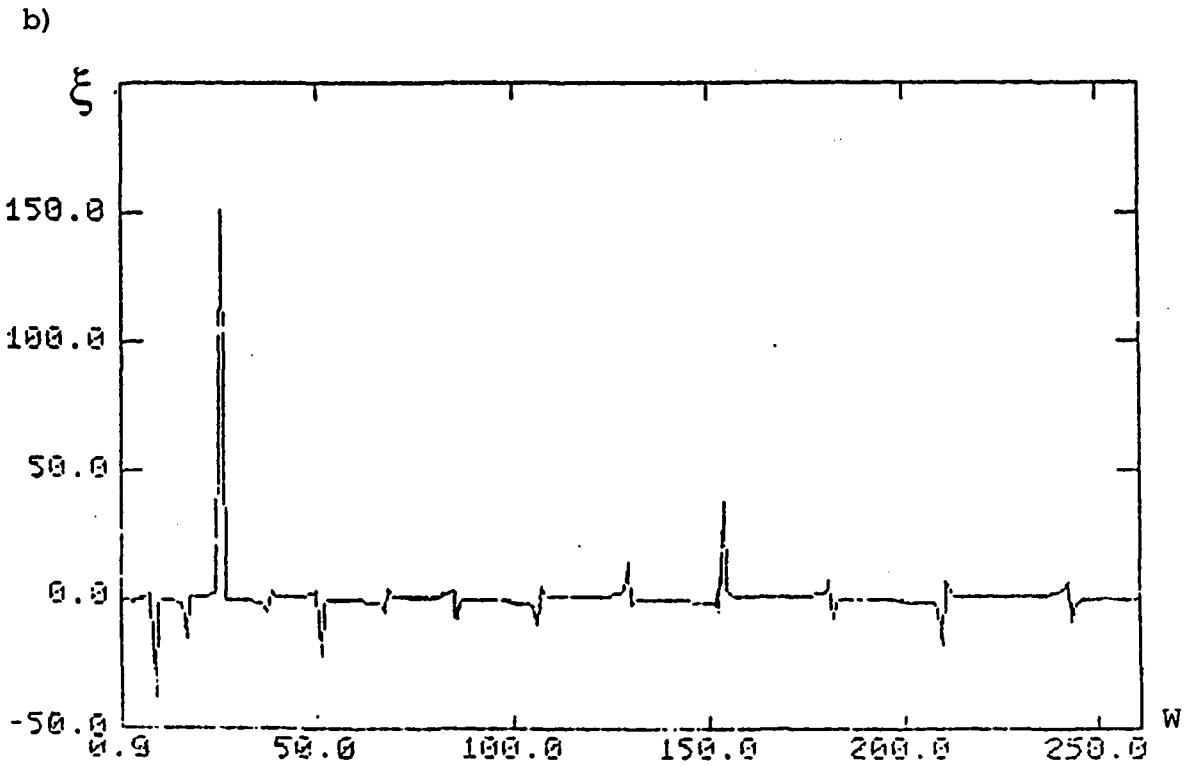
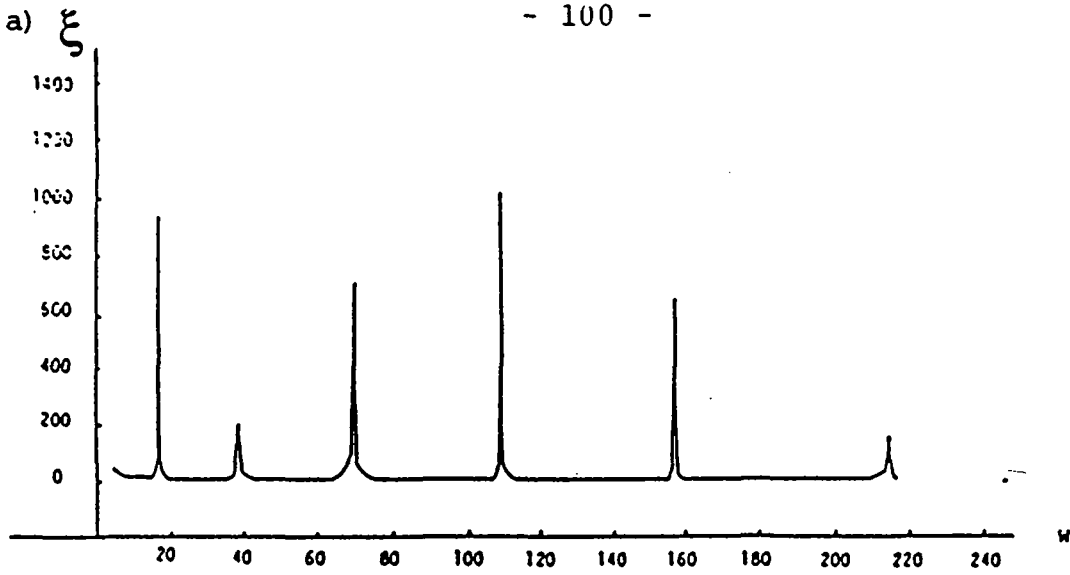


Figure 7.

a) Longueur de localisation ξ en fonction du desordre w . $N = 50000$, $\omega = 1.5$, $\delta = 0.5$

b) Longueur de localisation ξ en fonction du desordre w calculée à partir de l'approximation (48) pour un systeme unidimensionnel. La moyenne statistique à été effectuée sur $M = 10000$ tirages. $\omega = 1.5$, $\delta = 0.5$

Les systèmes multidimensionnels

La figure 8 montre un aspect très intéressant de l'allure de la longueur de localisation en fonction du désordre dans un plan bidimensionnel. La comparaison entre les graphiques 8a et 8b semblent suggérer que, pour les régions centrées autour des valeurs $w \cong 20$ et $w \cong 48$, les longueurs de localisation sont très grandes. En effet, les valeurs pour lesquelles ξ est négative dans la figure 8b, correspondant au ruban de largeur infinie, sont les mêmes qui donnent des grandes longueurs de localisation pour le ruban de largeur finie dans la figure 8a. De même, les régions pour lesquelles ξ prend des petites valeurs dans 8a, correspondent à des régions où elle est positive pour le plan bidimensionnel.

La même étude faite pour le barreau tridimensionnel de largeur infinie, révèle l'existence d'une succession de régions d'état faiblement et fortement localisées, encore plus contrastées que dans le cas bidimensionnel (fig. 9).

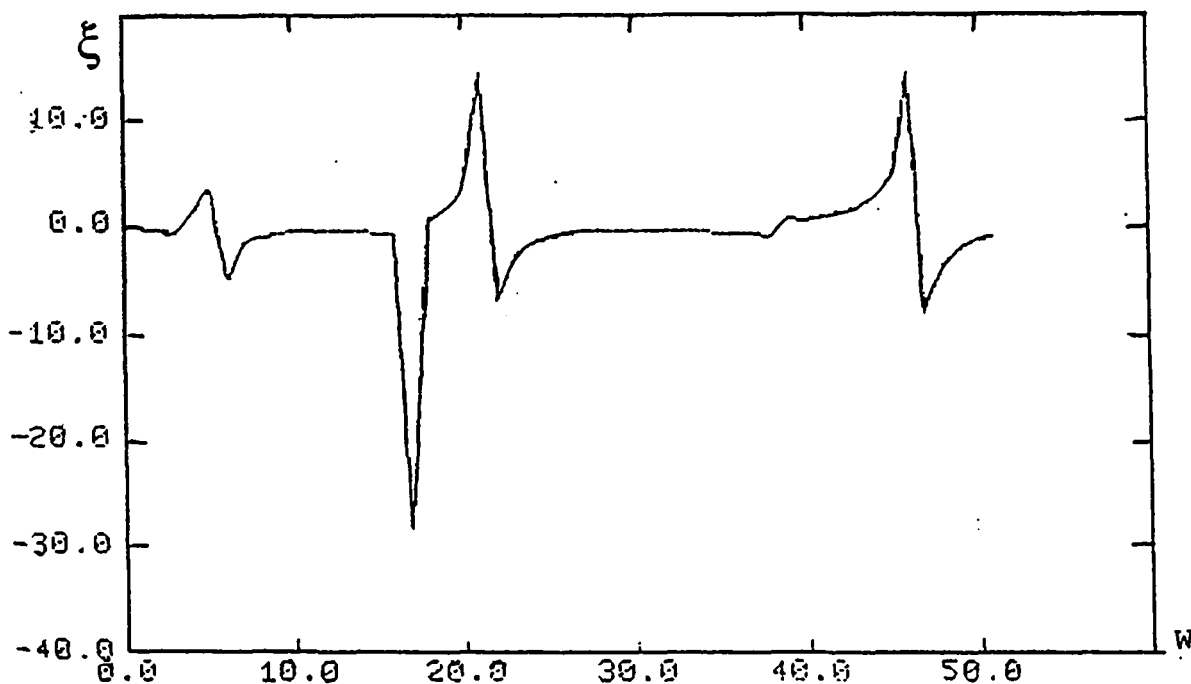


Figure 9.

Longueur de localisation ξ en fonction du désordre w calculée à partir de l'approximation (48) pour un système 3 dimensionnel. La moyenne statistique a été effectuée sur $M = 10000$ tirages . $\omega = 1.5$, $\delta = 0.5$

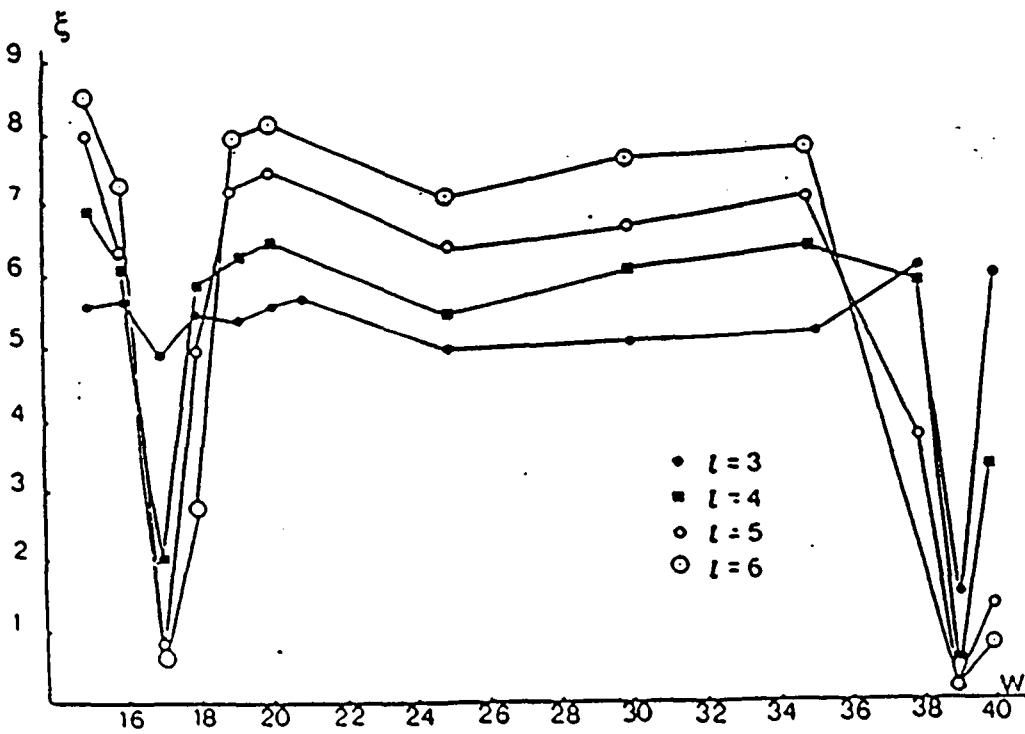
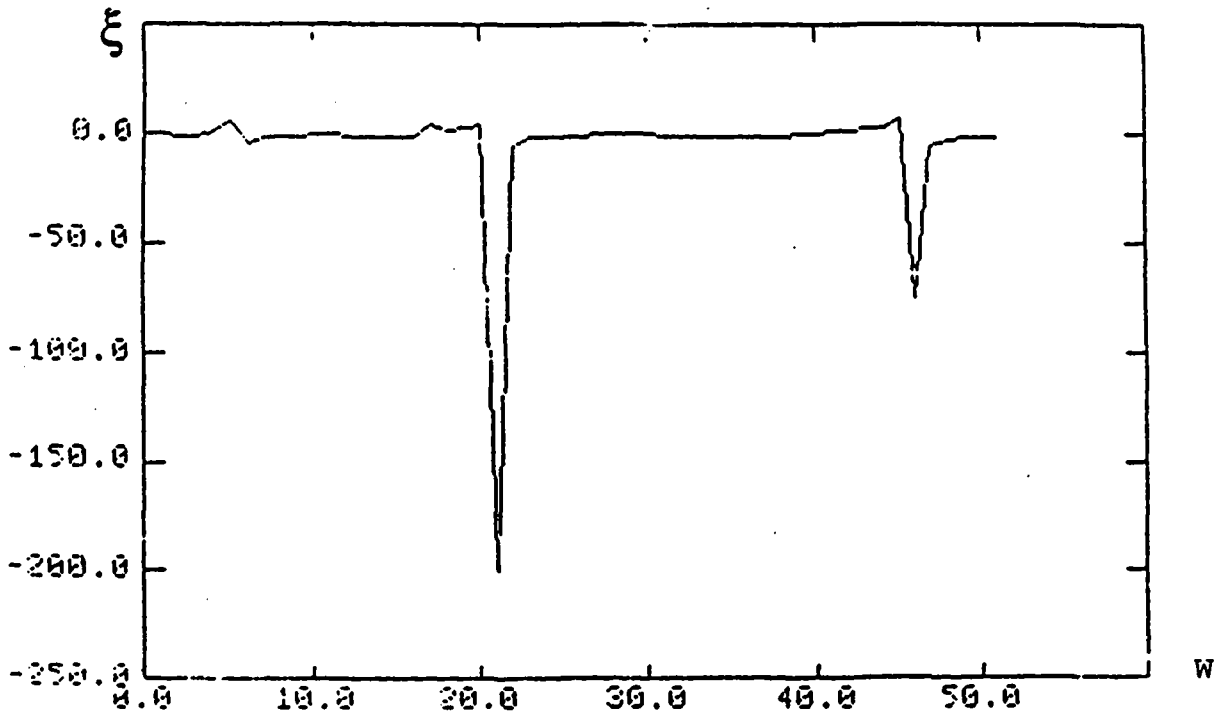


Figure 8.

a) Longueur de localisation ξ en fonction du désordre w pour différentes valeurs de la largeur ℓ du ruban. $N = 20000$, $\omega = 1.5$, $\delta = 0.5$

b) Longueur de localisation ξ en fonction du désordre w calculée à partir de l'approximation (48) pour un système bidimensionnel. La moyenne statistique a été effectuée sur $M = 10000$ tirages. $\omega = 1.5$, $\delta = 0.5$

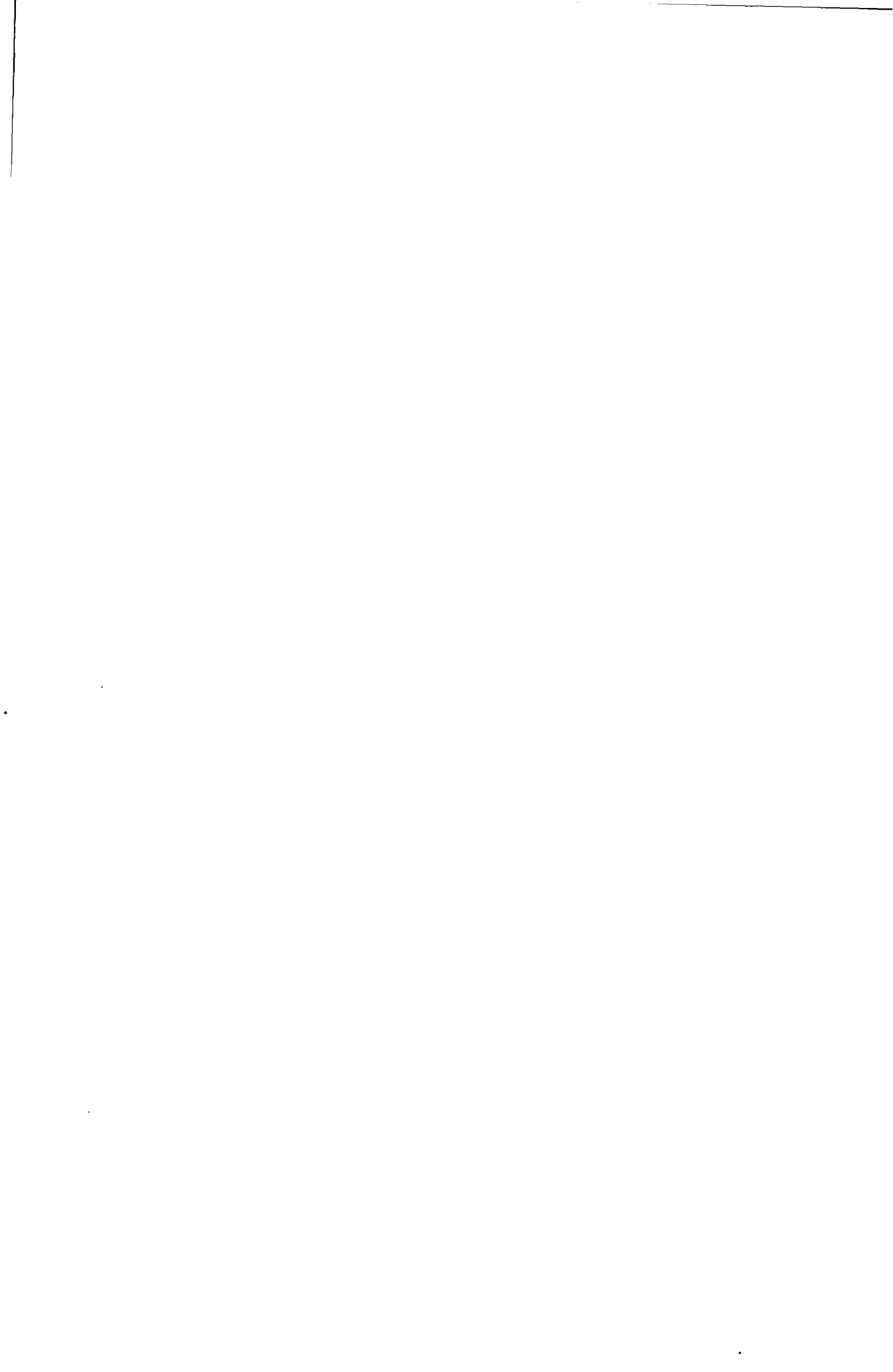
Sur les figures 8a et 9, on remarque que les intervalles où γ devient négatif sont très étroits, alors que l'on voit apparaître de grandes plages où $\gamma \geq 0$. Ceci semble suggérer l'existence de grandes régions d'états localisés séparés par une multitude de seuils de mobilité situés en correspondance de certaines valeurs du désordre w . Cette image concorde avec le résultat de la réf. [1] qui prévoit, pour une onde scalaire se propageant dans un système à 3 dimensions, une infinité de seuils de mobilité si le contraste de l'indice de réfraction est suffisamment fort. Ce fait donne une confirmation indirecte de la validité de notre modèle. En effet, la structure de notre réseau de canaux unidimensionnels permet d'une part, de conserver l'essentiel du phénomène physique tout en permettant, par un calcul numérique assez précis, d'estimer les valeurs de fréquence et de désordre correspondant à la diffusion résonante. On peut remarquer, qu'en vue de ces observations, l'influence de la "forme" de la distribution de probabilité de la variable aléatoire sur les propriétés de transport, semble être bien plus cruciale que la dimensionalité sur les effets de localisation optique.

Bien que toutes ces considérations soient très qualitatives sur le plan général, elles peuvent, une fois appliquées à un modèle physique précis, donner des interprétations très satisfaisantes de certains effets expérimentaux.

La simulation du spectre d'extinction du carbone amorphe, décrite au chapitre suivant, peut en donner un exemple.

Références

- [1] P. Sheng et Z.Q. Zhang : Phys. Rev. Lett. 57, 1879 (1986)



CHAPITRE 6. UN EXEMPLE : LE SPECTRE D'EXTINCTION DU CARBONE AMORPHE

En 1986, des mesures effectuées au Laboratoire National de Frascati par L. Colangeli, V. Capozzi, E. Bussoletti, A. Minafra [1] sur le spectre d'extinction des grains submicroniques de carbone amorphe, ont mis en évidence la présence inattendue de deux minimum dépendant de la densité de l'échantillon.

A partir des résultats et des considérations qui précèdent, on peut donner une interprétation "classique" de ce phénomène pour laquelle les simulations numériques indiquent un accord très satisfaisant avec les données expérimentales.

61. Description de l'expérience

6.1.1. Préparation de l'échantillon et mesures

Les grains utilisés dans cette expérience ont été obtenus par une décharge entre deux électrodes de carbone amorphe dans une atmosphère Ar à la pression de 1 Torr.

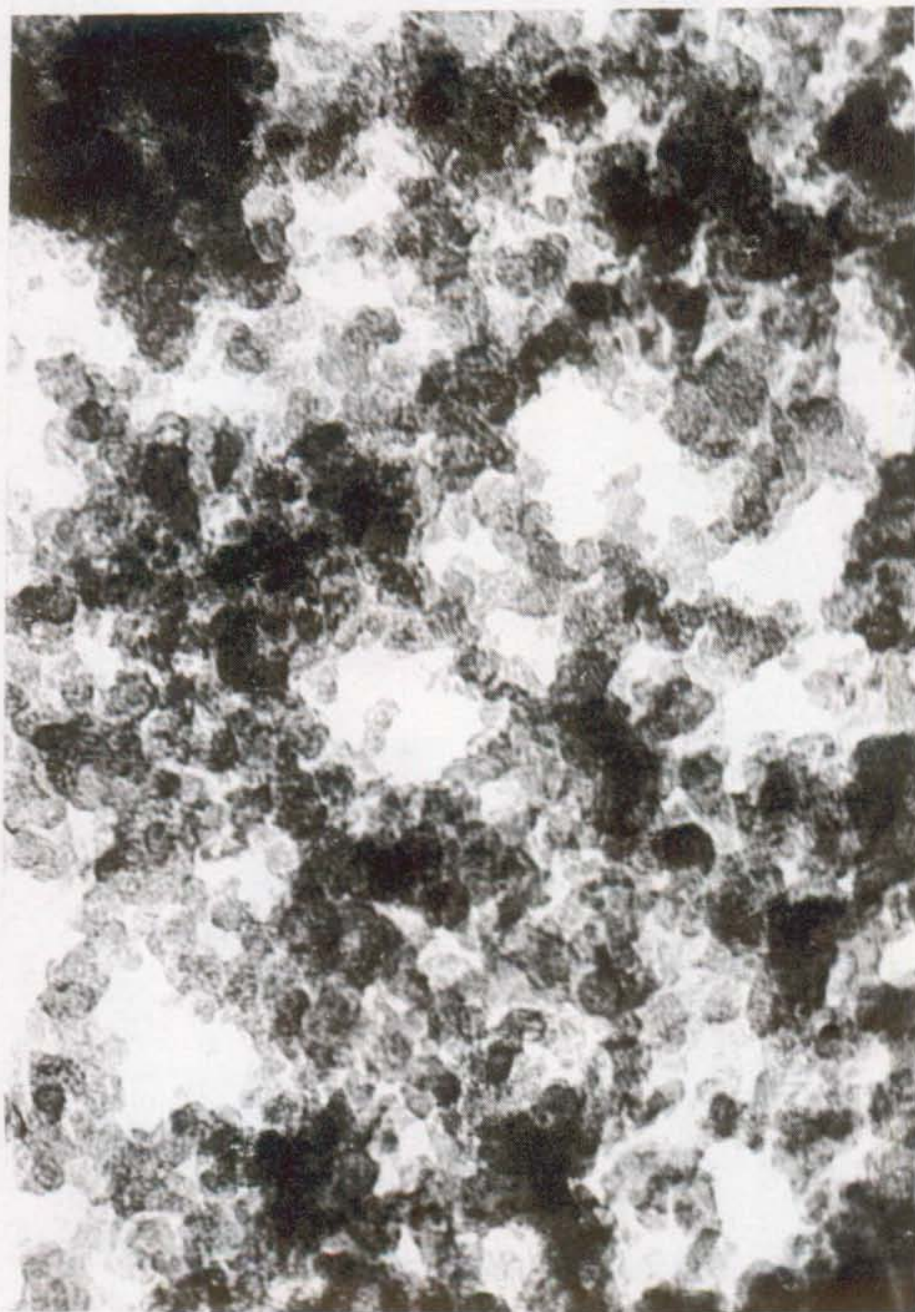
Les particules solides ainsi obtenues ont été recueillies sur un substrat de Litium Floride (LIF) à deux distances différentes de l'arc de décharge (respectivement 5, et 10 cm).

Les grains ont été simultanément recueillis sur une grille microscopique en vue d'effectuer une analyse morphologique de leur structure à l'aide du microscope électronique. L'échantillon qui se présente comme une chaîne composée de grains sphéroïdés (Fig. 1) a été placé dans une chambre à vide (10^{-9} Torr). Des méthodes de diffraction ont montré l'absence de toute structure cristalline confirmant que le matériel est totalement amorphe.



Figure 1.

a) L'image au microscope électronique d'un échantillon de grains de carbone amorphe. Le rayon moyen de chaque grain est $\approx 50 \text{ \AA}$.



b) Agrandissement d'un détail. On peut remarquer la présence de régions de faible densité et de régions de densité plus élevée, intercalées par des régions vides

A l'aide de la lumière produite par le synchrotron "Adone" du Laboratoire de Frascati, on a effectué des mesures sur le spectre d'extinction de ces échantillons dans un intervalle de longueurs d'onde comprises entre 1000-3000 Å.

Un "diviseur de faisceaux" LiF a été inséré dans le rayon lumineux avant le spectromètre pour supprimer les ordres supérieurs de diffraction et pour contrôler l'intensité de lumière qui a été détectée par un photomultiplicateur. Les signaux de référence et celui donné par l'échantillon ont été amplifiés en utilisant les techniques standards, et les données transmises ont été collectées et traitées par ordinateur.

6.1.2. Résultats expérimentaux

La Fig. 2 montre le spectre d'extinction pour des échantillons recueillis respectivement à une distance de (a) 10 cm et (b) 5 cm de l'arc de décharge.

L'analyse de cette figure met en évidence les caractéristiques suivantes :

- 1) Le spectre d'extinction (a) montre une bosse (ω_p) centrée autour de 240 nm, deux minimum respectivement à 138 nm et 199 nm et une croissance rapide de l'extinction dans les régions des très courtes longueurs d'onde.
- 2) Au contraire, sur le spectre (b), pour des longueurs d'onde plus petites que ω_p , on remarque une croissance continue de l'extinction et la structure se réduit à un large plateau qui couvre les longueurs d'onde allant de 175 nm à 240 nm.

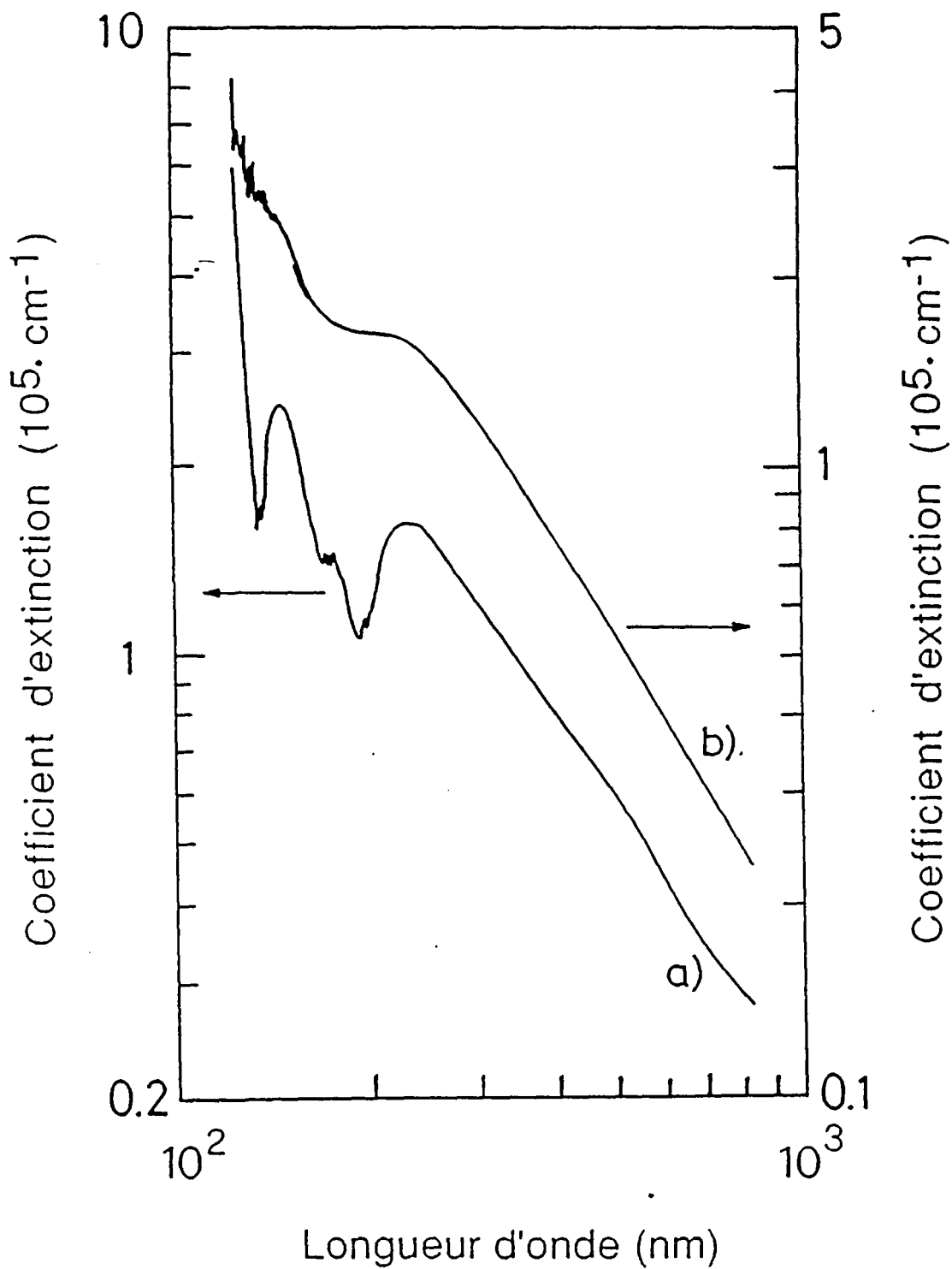


Figure 2.

Spectre d'extinction mesuré à température ambiante pour
a) un échantillon de grains de carbon amorphe, b) un film de carbon amorphe

Au-delà de cette région caractéristique, l'extinction décroît d'une façon continue selon la loi de puissance $\lambda^{-\beta}$, avec la même valeur de l'exposant $\beta \approx 1.4$ pour tous les échantillons.

Ce comportement était prévisible à cause de la structure amorphe des grains. En effet, tout matériel amorphe, montre dans le spectre d'extinction en dessous du seuil d'absorption, une croissance moins forte que celle du matériel cristallin correspondant. Or, on a pu déterminer expérimentalement (Draine and Lee, 1984)) que le graphite, qui est une des structures cristalline du carbone solide, est caractérisé par un exposant $\beta \approx 2$.

L'origine des structures dans la région des très courtes longueurs d'onde et la position de la bosse à 240 nm, ne sont pas simples à définir. Cela également, car des cas similaires n'ont pas été reportés très souvent dans la littérature concernant le carbone amorphe.

La bosse à 220 nm dans le spectre d'extinction du graphite a été communément attribuée à un mode plasmonique de surface (voir Gilra, 1971, 1972 [2]). La même explication est proposée pour le carbone amorphe [1]. En effet, si on considère une distance interatomique moyenne de 2 Å dans nos grains, on peut estimer que chaque particule solide, qui a un rayon moyen de 50 Å, est formée par à peu près 10^4 atomes. Dans ces conditions, on s'attend à ce que les électrons de surface dans l'état fondamental produisent des modes de surface collectifs.

L'identification du mode plasmonique comme responsable de la bosse à 240 nm est supportée par l'absence de toute structure d'absorption à des énergies plus petites que 5.3 eV.

En ce qui concerne l'augmentation rapide de l'absorption dans la région des très courtes longueurs d'ondes, elle est interprétée comme une transition électronique aux états excités. Cette affirmation est supportée par le fait que, dans le carbone atomique, la différence d'énergie entre les niveaux D et P est du même ordre de grandeur (≈ 10 eV) que l'énergie correspondant à ces transitions.

Ces états sont élargis par les interactions des atomes qui forment les grains.

La structure entre 125 nm et 200 nm est caractéristique du spectre d'extinction des échantillons (a) recueillis à la plus grande distance (10 cm) de l'arc de décharge. Ceci exprime un fait expérimental bien précis : les grains qui ont été recueillis à cette distance de l'arc ayant parcouru un chemin plus long, seront plus grands et moins homogènes que ceux recueillis à 5 cm, et la densité des échantillons (a) sera moins constante en conséquence. En effet, l'analyse au microscope électronique montre ces échantillons comme des longues chaînes où on remarque des régions de grande densité et des régions de densité plus faible, interaclées de temps en temps par des régions vides (Fig. 1b).

A partir de l'étude des effets produits sur la transmission optique par l'inhomogénéité de la structure des échantillons moins dense, on essaie d'interpréter les minima du spectre d'extinction comme des effets de localisation.

6.2. *Le modèle unidimensionnel*

A partir du modèle unidimensionnel du chapitre 4, on considère l'échantillon comme un morceau de longueur N d'une guide d'onde unidimensionnelle dans le vide. Ce morceau est formé par des intervalles de longueur "a" pour lesquels l'indice de réfraction est constant, alors qu'il varie aléatoirement aux jonctions. L'indice de réfraction dans chaque intervalle est considéré comme une variable aléatoire indépendante avec la même distribution de probabilité. On considère une solution $\varphi(x)$ de fréquence ω de l'équation d'onde stationnaire le long de la direction x .

$$\Delta\varphi(x) = -\omega^2 c^{-2} n^2(x) \varphi(x) \quad (1)$$

On sait alors que le coefficient de transmission $T_N(\omega)$ de cette onde à travers la région désordonnée décroît comme $T_N(\omega) \equiv \exp(-2\gamma N)$. D'autre part, le coefficient d'extinction α est défini par la relation $I=I_0 \exp(-\alpha x)$ où I_0 est l'intensité incidente et I est l'intensité lumineuse transmise à travers un échantillon de longueur x . L'exposant de Liapunov γ du produit de matrices aléatoires de transfert peut alors être identifié avec le coefficient d'extinction α si on néglige l'absorption intrinsèque du matériel: en particulier on aura $\alpha=2\gamma$. En effet, on est uniquement intéressé à l'extinction optique due aux effets d'interférence dans la structure désordonnée de nos échantillons. Dans la figure 3, cette extinction est pratiquement due à la différence entre les deux courbes a et b.

L'interprétation du système comme une chaîne unidimensionnelle est justifiée, autre que par la structure physique observée au microscope électronique, par les mesures de diffusion effectuées sur les échantillons qui montrent que l'intensité de la lumière diffusée (ailleurs que dans la direction x) est de plusieurs ordres de grandeurs plus petites que celle transmise dans l'axe du faisceau (de l'ordre 10^{-3}). De plus, le spectre de la lumière diffusée est plat et ne présente aucune structure en fonction de λ .

On peut donc vraisemblablement négliger le scattering tridimensionnel et ajouter cette très petite perte d'intensité lumineuse à l'absorption inélastique du matériel.

La distribution de probabilité de l'indice de réfraction est déterminée par les données expérimentales. Dans nos échantillons, la densité de carbone change aléatoirement entre une valeur minimale et maximale correspondant respectivement aux régions de faible et de grande densité. En conséquence, l'indice de réfraction varie entre 1 (valeur dans le vide) et une valeur maximale n_c pour le film de carbone amorphe à une longueur d'onde λ donnée. La valeur des paramètres qui définissent la distribution de probabilité de n peut être calculée de la façon suivante.

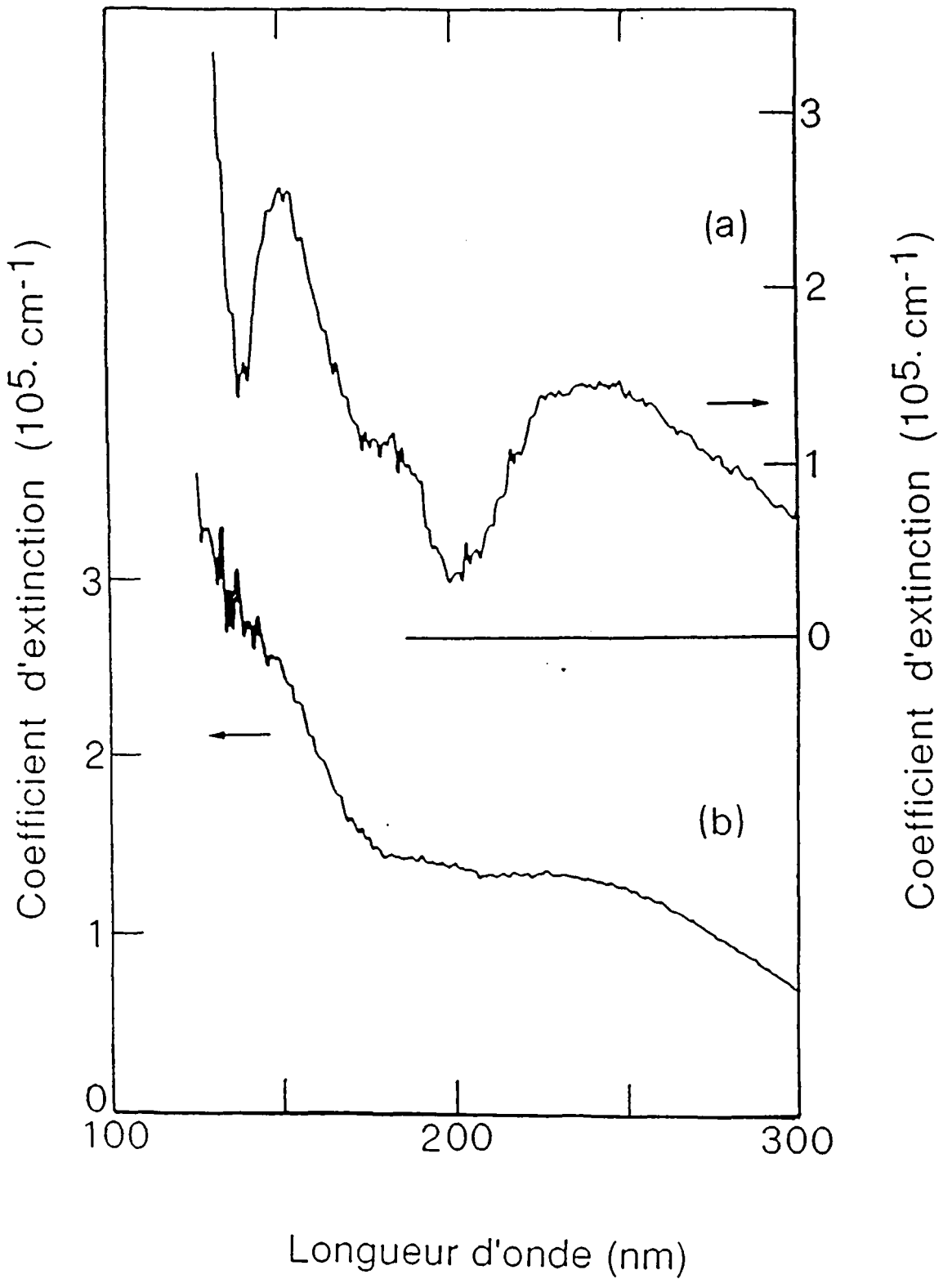


Figure 3.

Spectre d'extinction mesuré à température ambiante pour
a) un échantillon de grains de carbon amorphe ,b)un film de carbon amorphe
(échelle lineaire)

6.2.1. Calcul des paramètres

L'existence et la position par rapport à la longueur d'onde des pics de transmission correspondant aux fréquences résonantes dans la chaîne désordonnée décrite auparavant, dépendent du désordre intrinsèque du matériel. Les conditions d'harmonicité doivent être satisfaites simultanément par les deux longueurs d'onde expérimentales $\lambda_1=138$ nm et $\lambda_2=199$ nm pour lesquelles on observe les deux pics de transmission de la figure 1a. La présence de deux pics de transmission pour un même échantillon fixe d'une façon univoque la valeur des paramètres de désordre δ_1, δ_2, W qui déterminent la distribution de probabilité de "n".

Pour calculer ces valeurs, on considère d'abord un cas idéal dans lequel les régions formées par un film de carbone amorphe avec densité constante s'alternent à des régions vides. Les conditions de stationarité devant être satisfaites simultanément par les deux longueurs d'onde expérimentales λ_1, λ_2 on aura

$$m_1 \lambda_1 / 2 n_{\lambda_1} = m_2 \lambda_2 / 2 n_{\lambda_2} \quad m_1, m_2, \in \mathbb{N} \quad (2)$$

où $n_{\lambda_1}, n_{\lambda_2}$ sont les indices de réfraction expérimentaux pour le film de carbone amorphe mesuré dans la référence [4], respectivement aux longueurs d'onde λ_1, λ_2 . La relation (2) est satisfaite pour $m_2/m_1 = 1.5$. De la relation de dispersion $K = \omega n/c$ où K est le nombre d'onde, et la condition de résonance $Ka = m\pi$, on obtient

$$a = m \lambda / 2n \quad (3)$$

"a" est alors la longueur de la cellule sur laquelle l'indice de réfraction reste constant dans notre modèle.

Si on choisit $m_1 = 3$, et $m_2 = 2$, de façon à avoir $m_2/m_1 = 1.5$, on aura

$$a_1 = m_1 \lambda_1 / 2 n_{\lambda_1} = 106.7 \text{ nm} \quad ; \quad a_2 = m_2 \lambda_2 / 2 n_{\lambda_2} = 103.6 \text{ nm}$$

et (4a)

$$a_{v1} = m_1 \lambda_1 / 2 = 207 \text{ nm} \quad ; \quad a_{v2} = m_2 \lambda_2 / 2 = 199 \text{ nm}$$

(4b)

où a_{v1} et a_{v2} sont les largeurs des cavités résonantes correspondantes respectivement au fréquences λ_1 et λ_2 . Or, dans le cas réel, pour un échantillon de grains de carbone amorphe, la largeur de l'intervalle a et la densité du matériel ne sont pas strictement constants.

Ces fluctuations aléatoires structurelles peuvent être exprimées en termes de fluctuations stochastiques de l'indice de réfraction (voir Eq. (3)). Alors, la distribution des probabilités sera uniforme entre

$$(1, 1 + \delta_1) \cup (1 + w - \delta_2, 1 + w)$$

où

- δ_1 tient compte des variations de n dans les régions de très faible densité de notre échantillon et des fluctuations aléatoires de la largeur a_v des cavités résonantes vides (voir Eq.4b).
- δ_2 tient compte des variations de n dans les régions de très grande densité et des fluctuations aléatoires de la largeur de l'intervalle réel a . (Voir Eq. 4a).
- w est la largeur de la distribution.

Pour établir les valeurs des paramètres de désordre δ_1, δ_2, w on considère la largeur "a" de l'intervalle réel comme constante et du même ordre de grandeur de la cellule idéale. Alors, on peut calculer les valeurs correspondantes de l'indice de réfraction qui satisfont les conditions d'harmonicité pour les deux longueurs d'onde λ_1 et λ_2 . Pour $a = 100$ nm, et à partir de l'équation (3), si on choisit $m_1 = 3$, $m_2 = 2$, on obtient pour $n_1 = n(138 \text{ nm}) = 2.07$ et $n_2 = n(199 \text{ nm}) = 1.99$. Ces deux valeurs sont en bon accord avec les indices de réfraction pour le carbone amorphe mesuré par Duley [4]. Le choix de la deuxième et troisième harmonique est raisonnable car les harmoniques d'ordre supérieur sont beaucoup plus sensibles aux effets d'interférence destructive. D'autre part si on choisit des valeurs plus élevées des paramètres m_1, m_2 pour avoir des valeurs physiques de l'indice de réfraction estimé dans les grains de carbone amorphe il faudrait supposer que n reste constant sur des plages beaucoup plus grandes que 100 nm. Or, l'analyse au microscope électronique permet de vérifier l'existence de régions très denses d'une grandeur estimée $\approx 90-100$ nm.

D'après la définition de la distribution de probabilité pour l'indice de réfraction, on choisit alors pour le paramètre δ_2 la valeur $\delta_2 = 0.080$. Le même calcul pour la largeur $a_v = 199$ nm des cavités résonantes, nous donne $n_{v1} = n_v(138 \text{ nm}) = 1.04$ et $n_{v2} = n_v(199 \text{ nm}) = 1$.

On a alors, pour les deux autres paramètres de désordre δ_1 et w les valeurs $\delta_1 = 0.04$ et $w = 1.07$. Pour confirmer ces valeurs estimées, on a calculé numériquement γ en fonction de δ_1 pour les deux longueurs d'onde λ_1 et λ_2 en utilisant les valeurs précédentes de δ_2 et w . De ce calcul, on obtient la valeur de δ_1 qui optimise la transmission par rapport aux deux longueurs d'onde λ_1 et λ_2 . Cette valeur est $\delta_1 = 0.045$. D'autre part la figure 4 confirme que, avec une bonne approximation, la valeur $w = 1.07$ optimise la transmission par rapport aux deux fréquences résonantes précédentes. En effet, la figure 4b montre que le minimum de la courbe γ en fonction de w , calculée pour $\lambda_1 = 138$ nm, $\delta_1 = 0.045$ et $\delta_2 = 0.080$ se trouve à la valeur $w = 1.04$.

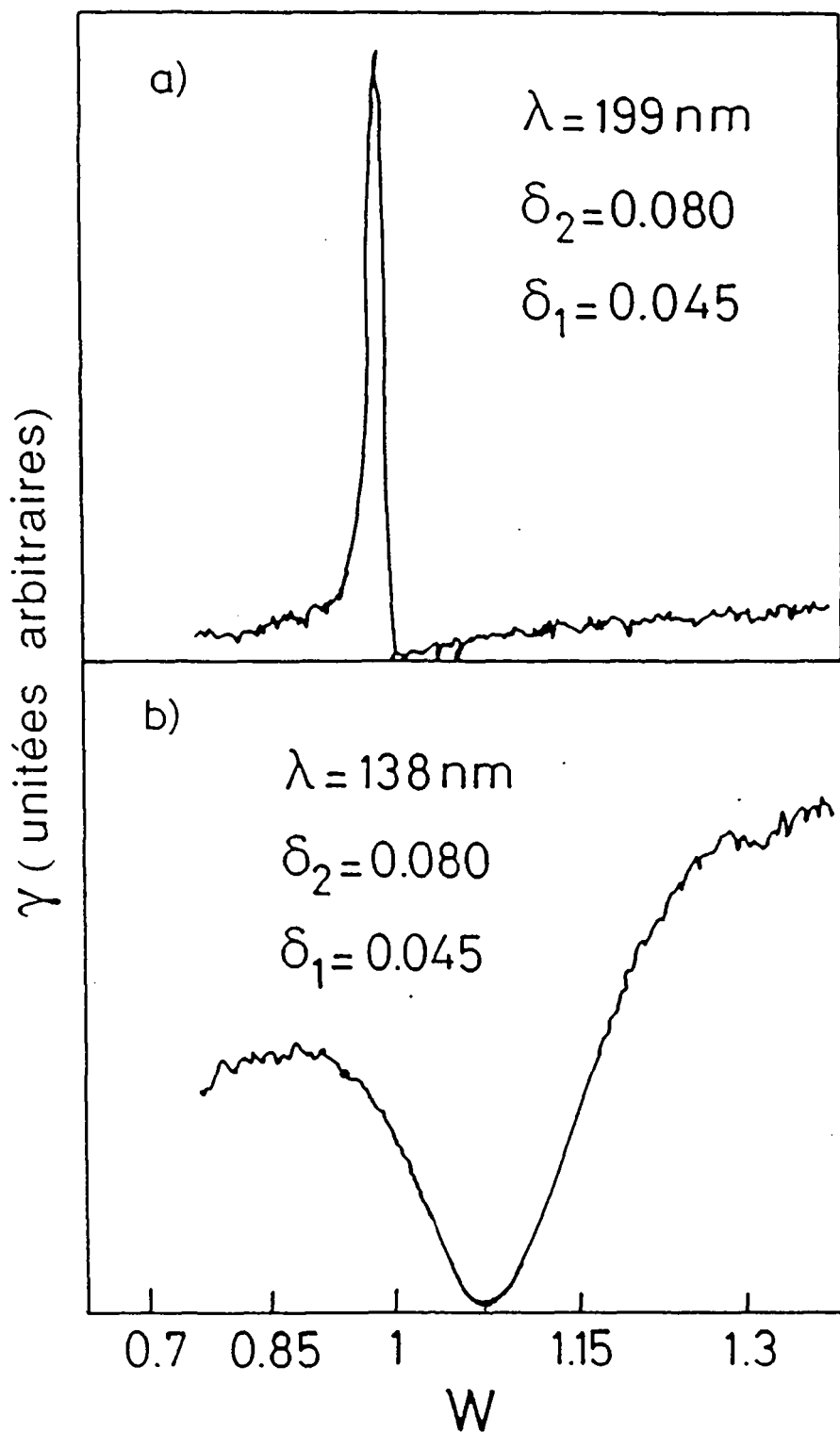


Figure 4.

γ en fonction du paramètre de désordre w pour les deux longueurs d'onde
a) 199 nm, b) 138 nm

Cette valeur est aussi en bon accord avec le résultat de la figure 4a, où le graphique de γ en fonction de w a été calculé pour $\lambda_2 = 199$ nm et pour les mêmes valeurs des paramètres δ_1, δ_2 de la figure 4b. On observe effectivement que, pour $w = 1.07$, la valeur correspondante de γ est très proche du minimum de la courbe.

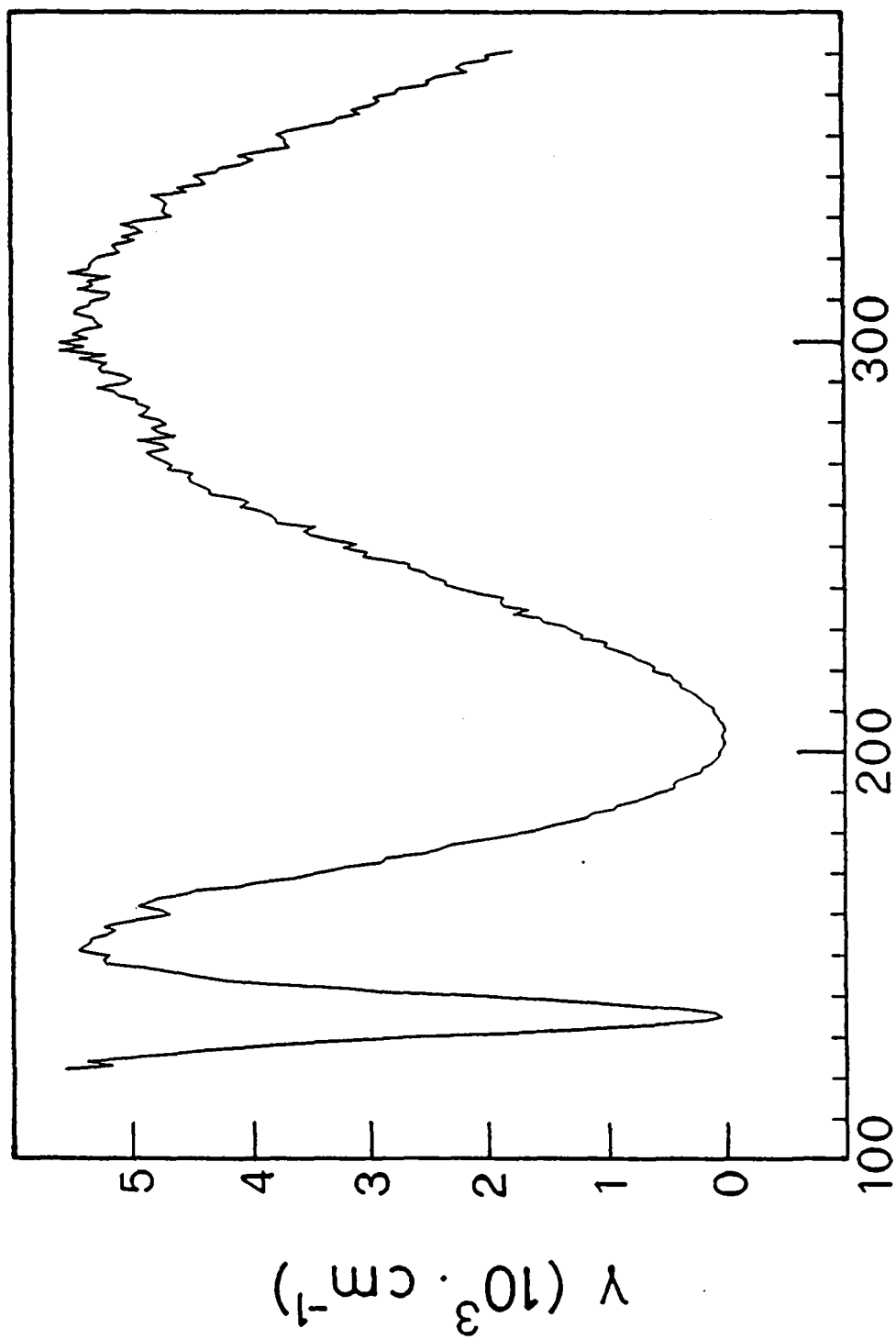
6.2.2. Les résultats numériques

Avec ce choix des paramètres pour la distribution de probabilité de $n(x)$, on a simulé numériquement le spectre d'extinction expérimental reporté dans la figure 3a.

La figure 5 montre le spectre d'extinction calculé, où on remarque la présence de deux minima respectivement à 135 nm et 202 nm qui sont en bon accord avec les minima expérimentaux de la figure 3a.

On remarque que la position spectrale des pics de transmission et la forme du spectre d'extinction calculé dans la figure 5 est très sensible au choix des paramètres δ_1, δ_2 et w . Cette sensibilité fixe d'une façon unique le choix des paramètres de désordre. En effet, une très petite variation d'un seul paramètre change complètement la forme du spectre (apparition de nouveaux pics de transmission) et un réajustement global de tous les paramètres donnera une valeur non physique pour l'indice de réfraction estimé dans les échantillons de grains de carbone amorphe.

Le modèle proposé explique donc, d'une façon très satisfaisante, les minima de la figure 3a, en termes d'effet de localisation forte pour la lumière. On peut en conclure que la structure particulière spongieuse de l'échantillon de carbone amorphe favorise les variations de l'indice de réfraction entre deux intervalles de valeurs. Quand un faisceau de lumière traverse un échantillon ayant une structure granulaire, les fluctuations de n produisent des modes optiques résonant qui sont localisés le long du milieu aléatoire. La transmission est alors augmentée pour des fréquences résonantes particulières qui correspondent aux interférences constructives de la lumière dans une agglomération de grains de carbone qui ont, dans nos expériences, une largeur d'à peu près 100 nm.



Longueur d'onde (nm)

Figure 5.

Specre d'extinction d'un échantillon de grains de carbon amorphe calculé avec les valeurs suivantes pour les paramètres de désordre : $w = 1.07$, $\delta_1 = 0.045$, $\delta_2 = 0.080$

Références

- [1] L. Colangeli, V. Capozzi, E. Bussoletti et A. Minafra : Astronomy and Astrophysics 168 349 (1986)
- [2] B. T. Draine et H. M. Lee : Astrophys. J. 28589 (1984)
- [3] D.P. Gilra : Nature 299 237 (1971)
D.P. Gilra : " Collective excitations and dust particles in space in the Scietific Results from Orbiting Astronomical Observatory OAO-2, NASA SP310, p 295.
- [4] W.W. Duley : Astrophysical J. 287 694 (1984)

CONCLUSION

Dans l'introduction de ce travail, un panorama des résultats connus sur le problème de la localisation optique avait mis l'accent sur des questions qui restent ouvertes à ce sujet et principalement :

- 1) Combien doivent être grandes les fluctuations de l'indice de réfraction pour que les effets de localisation forte de la lumière aient lieu ?
- 2) Quelles doivent être les caractéristiques physiques d'un échantillon réel pour que l'on puisse observer expérimentalement la localisation optique ?

Les principaux résultats de ce travail s'insèrent dans ce contexte, et précisément :

- En rapport à la première question sur l'étendue des fluctuations de l'indice de réfraction, les calculs montrent que la largeur w de la distribution de probabilité $p(n)$ de la variable aléatoire ne caractérise pas complètement les propriétés de transmission d'un système désordonné, et cela, indépendamment de sa dimension. La forme de la distribution de probabilité paraît jouer un rôle fondamental sur les effets d'interférence à l'intérieur d'un système désordonné et en conséquence, les effets de localisation et les propriétés de transmission du système dépendent d'une façon cruciale du rapport entre la fréquence incidente et les paramètres définissant la forme de $p(n)$.

En particulier, on trouve que pour un système bidimensionnel et pour une distribution continue entre deux valeurs $(1, 1 + w)$, il n'existe pas d'évidence numérique de la présence d'états localisés dans le plan bidimensionnel. Ceci contredit les opinions courantes, selon lesquelles tous les états seraient localisés à 2 dimensions, indépendamment de la distribution choisie pour la variable aléatoire.

Par contre, les calculs faits pour une distribution particulière, centrée autour de deux valeurs, montrent l'existence de "pics de transmission" pour la lumière qui passe, avec certaines fréquences, à travers un système désordonné. Ces pics, qui existent même pour des très petits désordres, sont le résultat d'interférences constructives à l'intérieur du système et prouvent l'existence d'une cohérence entre les phases des différentes ondes diffusées. L'existence d'une cohérence de phase en présence de désordre est un résultat un peu surprenant, qui dépend crucialement des paramètres stochastiques, mais qui est par contre indépendant de la dimensionnalité du système. Encore une fois, ces résultats s'opposent aux opinions courantes selon lesquelles la dimension du système seulement caractérise les effets de localisation.

- En ce qui concerne l'observation des effets macroscopiques de la localisation optique, l'interprétation de deux pics de transmission observés dans le spectre d'extension d'échantillons de grains de carbone amorphe en terme de localisation forte pour la lumière, donne des résultats très satisfaisants. La structure particulièrement spongieuse des échantillons de carbone amorphe favorise les variations de l'indice de réfraction entre deux intervalles de valeurs. Quand un faisceau de lumière traverse un échantillon ayant une structure granulaire, les fluctuations de n produisent des modes optiques résonant qui sont localisés le long du milieu aléatoire. La transmission est alors augmentée pour des fréquences résonantes particulières qui correspondent aux interférences constructives de la lumière dans une agglomération de grains de carbone d'une largeur d'à peu près 100 nm.

La simulation numérique du spectre d'extension donne la position spectrale des pics avec une assez bonne précision et constitue un exemple expérimental de l'existence de fréquences résonantes pour la lumière à l'intérieur d'un système désordonné. Cette interprétation implique qu'une augmentation de la transmission soit due à l'existence d'ondes électromagnétiques fortement localisées à l'intérieur d'un échantillon désordonné.

Dans ce contexte, les mesures sur le spectre d'extinction des grains de carbone amorphe indiquent l'observation expérimentale des effets de localisation forte de la lumière et décrivent un mécanisme pour son observation macroscopique.



CURRICULUM VITAE

Nom	di San Germano-Flesia
Prénom	Cristina
Nationalité	Italienne
Date et lieu de naissance	23 juillet 1956 à Turin

Etudes secondaires

1970-1975	Licée classique Institut Princesse Clotilde di Savoia - Turin
-----------	--

Etudes universitaires et activités scientifiques

1976-1977	Etudes universitaires à la section physique de l'Université de Turin
-----------	---

1977-1981	Etudes universitaires à la section de physique de l'Université de Genève (Suisse), après avoir reçu une équivalence pour les études déjà effec- tuées en Italie
-----------	--

1981-1986	Assistante à l'Institut de Physique Théorique de l'Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne. Tâches d'assistante dans les domaines de la Mécanique et de la Mécanique Analytique
-----------	---

1986-1987	Assistante à l'Institut de Physique Théorique de l'Université de Genève
-----------	--

Diplômes

- Maturité classique italienne (1975)
- Diplôme de physicien de l'Université de Genève (1981)
- Diplôme de physicien de l'Université de Turin (1983)

Participation à :

- 28-29 janvier 1982 "Deuxième Rencontre de Physique Statistique"
Ecole Supérieure de Physique et Chimie - Paris
- 9-10 septembre 1982 "The Theory of Wave Propagation in Random
Media" - Robinson College, University of
Cambridge - (England)
- 6-12 mars 1983 "Les fondements de la Mécanique Quantique"
25è Cours de perfectionnement de l'AVCP -
Montana (Suisse)
- 26-27 janvier 1984 "Quatrième Rencontre de Physique Statistique"
Ecole Supérieure de Physique et de Chimie - Paris
- 19-22 mars 1984 "4th General Conference of Condensed Matter :
Division of the European Physical Society" -
La Haye (Hollande)
- 23-28 août 1984 "International Conference on Localisation,
Interaction and Transport Phenomena in Impure
Metals" - Braunschweig (RDA)
- 16 novembre 1984 Invitation à l'Université de Genève à donner un
séminaire sur le thème : "La théorie de Lax-
Phillips dans le cas quantique"
- 24-25 janvier 1985 "Cinquième Rencontre de Physique Statistique"
Ecole Supérieure de Physique et de Chimie - Paris
- 18-22 mars 1985 "5th General Conference of Condensed Matter :
Division of the European Physical Society" -
Berlin (RFA)
- 26-27 avril 1985 Conférence à l'Université d'Udine (Italie) sur le
thème : "Homogénéisation stochastique"

- 5-10 septembre 1985 Rencontre informelle sur : "La propagation d'ondes classiques dans les systèmes désordonnés" SISSA Trieste (Italie)
- 22-25 mars 1986 "6th General Conference of Condensed Matter : Division of the European Physical Society " The Royal Institute of Technology - Stockholm (Sweden)
- 21-23 avril 1986 Rencontre informelle sur les processus multiplicatifs - Université d'Amsterdam - (The Netherlands)
- 24 avril 1986 Invitation à l'I. Physikalisches Institut Aachen (RFA) à donner un séminaire sur le thème : "Classical wave localisation : some numerical and analytical results"
- 29 septembre -
3 octobre 1986 Workshop sur le thème : "Multifractals et Processus Multiplicatifs" - University d'Orsay - Paris (France)
- 6-11 novembre 1986 Invitation au Natuurkundig Laboratorium - Amsterdam (The Netherlands) à donner un séminaire sur le thème : "Strong localisation of classical waves"
- 7-10 avril 1987 "7th General Conference of Condensed Matter : Division of the European Physical Society" - Pise (Italie)
- 7 mai 1987 Invitation à l'Université de Bari (Italie) à donner un séminaire sur le thème : "Effetti di localizzazione nello spettro di estinzione del carbone amorfo"

Publications

- "La théorie de Lax-Phillips dans le cas quantique"
Helv. Phys. Acta, Vol. 57 (1984), avec C. Piron
- "Strong Localisation of Classical Waves : A Numerical Study"
Europhysics Letters 3(4), pp. 497 (1987), avec R. Johnston et H. Kunz
- "Anomalous Dips in Absorption Spectra of Amorphous Carbon Grains"
Avec V. Capozzi et A. Minafra, (à paraître)
- "Light Standing Waves in Aggregates of Amorphous Carbon Grains"
Astrophysics and Space Science (1988), avec V. Capozzi et A. Minafra,
(à paraître)