

**MODELE NUMERIQUE DU COMPORTEMENT NON-LINEAIRE  
D'OUVRAGES MASSIFS EN BETON NON ARME**

**THESE No 682 (1987)**

PRESENTEE AU DEPARTEMENT DE GENIE CIVIL

**ECOLE POLYTECHNIQUE FEDERALE DE LAUSANNE**

POUR L'OBTENTION DU GRADE DE DOCTEUR ES SCIENCES TECHNIQUES

PAR

**PATRICE DROZ**

Ingénieur civil diplômé EPFL  
originaire de La Chaux-de-Fonds (NE)

acceptée sur proposition du jury:

Prof. R. Lafitte, rapporteur  
Prof. Dr H. Bachmann, corapporteur  
Prof. Dr M. Hirt, corapporteur  
Dr J. Wolf, corapporteur

Lausanne, EPFL  
1987



A Anne ,  
Meyem , Olivier  
et tous les autres...



## REMERCIEMENTS

Je tiens tout d'abord à remercier Monsieur le Professeur Raymond Lafitte, directeur de l'Institut d'économie et aménagements énergétiques (IENER) de l'Ecole polytechnique fédérale de Lausanne, de m'avoir honoré de sa confiance en me proposant d'effectuer ce travail de recherche. J'ai été très sensible à la façon dont il a rempli sa tâche de directeur de thèse, en particulier par sa disponibilité et la richesse de ses réflexions et de ses critiques. Au cours des nombreuses et fructueuses discussions que nous avons eues, il a su me faire partager son sens de la rigueur, aussi bien pour l'analyse des idées ou des résultats que pour leur présentation.

Je remercie très chaleureusement Monsieur Thomas Zimmermann, dr ès sc. tech., adjoint scientifique à l'IENER, qui m'a guidé tout au long de mon travail. C'est à lui que je dois mon apprentissage de la recherche scientifique et la découverte du monde des éléments finis. Il a aussi su me montrer la rigueur et la prudence avec lesquelles les problèmes de modélisation numérique doivent être abordés.

J'ai aussi le plaisir d'exprimer toute ma gratitude envers Monsieur Blaise Reborà, collaborateur scientifique à l'IENER. C'est à lui que revient la paternité des idées de base qui ont servi à construire l'élément fissuré à fonctions de formes discontinues. Avec beaucoup de patience, il a toujours su accueillir mes questions et mes doutes et apporter des réponses ou des conseils d'une grande valeur.

Je remercie également Messieurs les Professeurs Jean Descloux et Jaroslav Jirousek de l'EPFL ainsi que Monsieur Carlos Rodriguez, collaborateur scientifique à l'IENER, pour les discussions qui m'ont permis d'éclaircir certains points.

Je suis reconnaissant envers Monsieur le Professeur Bernard Vittoz, Président de l'EPFL et Monsieur le Professeur Richard Sinniger, chef du département de génie civil de l'EPFL, qui a assuré avec intérêt sa mission de président du jury. Je remercie également les membres du Jury, Messieurs les Professeurs Hugo Bachmann de l'Ecole polytechnique fédérale de Zurich et Manfred Hirt de l'EPFL ainsi que Monsieur John Wolf, dr ès sc. tech., Electrowatt SA à Zürich, d'avoir accepté d'être corapporteurs de mon travail de thèse.

Mes remerciements vont aussi à la Commission pour l'Encouragement de la Recherche Scientifique et à Bonnard & Gardel, ingénieurs-conseils S.A, Lausanne, qui ont conjointement assuré le financement de cette recherche et à Zace Services SA, Lausanne, pour avoir mis à ma disposition certains logiciels scientifiques.

Je ne peux pas manquer de remercier chaleureusement Mesdemoiselles Françoise Delaray et Anne Willomet qui ont consacré beaucoup de temps et d'énergie à la dactylographie et à la réalisation des dessins du présent mémoire. Tous les collaborateurs de l'IENER sont également remerciés pour leur soutien et leurs encouragements.

Enfin, je me permet d'exprimer ici toute ma reconnaissance à ma femme et à mes enfants qui ont su supporter avec patience les absences et les humeurs d'un "thésard".



## R E S U M E

La mécanique linéaire élastique de la rupture est appliquée à l'étude de la propagation de fissures dans le béton non armé de structures massives. Cette approche est adaptée à l'analyse de structures de grandes dimensions, prenant en compte l'effet de taille, c'est-à-dire de l'influence de la dimension de la structure sur son comportement à la ruine.

La méthode des éléments finis est appliquée au calcul de la structure en faisant l'hypothèse d'une analyse bidimensionnelle.

L'utilisation d'un critère de propagation de fissures, basé sur la mécanique linéaire de la rupture, impose la détermination de facteurs d'intensité de contraintes. Le calcul de ceux-ci est effectué à partir d'une intégrale de surface définie autour de la pointe de la fissure étudiée. Il a été démontré que cette intégrale est dérivée de l'intégrale au contour J. Elle a été étendue aux cas où des forces volumiques (gravité, inertie) interviennent, ou quand des forces de pression se manifestent dans la fissure. Cette méthode est suffisamment précise et numériquement efficace.

Pour éviter une redéfinition du réseau d'éléments finis de l'ouvrage étudié lors de la propagation d'une fissure, une modélisation "répartie" de la fissuration dans la structure a été adoptée. Cependant, les éléments élastiques fissurés utilisés habituellement ne donnant pas des résultats satisfaisants lorsque la fissure est en cisaillement, un nouvel élément fini à fissuration "répartie", dont les fonctions de forme sont discontinues, a été développé.

Le modèle ainsi défini, combinant la mécanique linéaire élastique de la rupture et une modélisation "répartie" de la fissuration a été testé en l'appliquant aux problèmes classiques de la mécanique de la rupture, pour des sollicitations statiques et dynamiques. Il conduit à des résultats satisfaisants.

A titre d'exemple, le calcul du comportement non-linéaire pendant un séisme d'une section d'un barrage poids à lac vide a été effectué. Un schéma de fissuration susceptible de se développer dans l'ouvrage a pu être déterminé.

De nombreux développements pourraient être effectués à partir de cette approche originale, afin de saisir le comportement réel des ouvrages, en tenant compte en particulier du frottement dans les fissures en cisaillement et d'un développement tridimensionnel de celles-ci.





## A B S T R A C T

Linear Elastic Fracture Mechanics (LEFM) are used to study crack propagation in unreinforced concrete of massive structures. This approach is well suited to the nonlinear analysis of structures of large dimensions, taking into account the size effect, i.e., the influence of the dimension of the structure on its behaviour at rupture.

The Finite Element method is used to calculate the structure and the hypothesis of plane strain is made.

The use of a criterion of crack propagation, based on LEFM requires the calculation of stress intensity factors. The evaluation of the latter is performed by the mean of a surface integral defined around the tip of the crack studied. It has been shown in this work that this integral is derived from the path integral J. The use of the surface integral has also been extended to the cases where body forces (gravity, inertia) act, or when the edges of the crack are subjected to pressure. This method is precise and numerically efficient.

A smeared crack model is used in order to avoid continuous remeshing during crack propagation. But, as it has been shown in this research, classical smeared crack elements do not give satisfactory results when the crack is submitted to shear loading, a new finite element, using smeared cracking but with discontinuous shape functions has been developed.

The model which combines LEFM and the smeared crack approach has been applied to different classical problems of fracture mechanics. It leads to good results under static or dynamic loading.

As an example, the nonlinear behaviour of the vertical cross section of a gravity dam during an earthquake has been calculated and the crack pattern identified.

Many further developments could be done starting from this original approach, in order to simulate more closely the real behaviour of structures, taking into account friction in the cracks and the three-dimensional development of them.



## TABLE DES MATIERES

1. INTRODUCTION	1
1.1. COMPORTEMENT A LA RUINE DES STRUCTURES EN BETON	3
1.2. MODELES NUMERIQUES EXISTANTS	5
1.2.1 Modèles basés sur un critère de résistance à la traction	5
1.2.2 Modèles utilisant un critère basé sur la mécanique de la rupture	7
a) Mécanique non-linéaire de la rupture appliquée au béton	
b) Mécanique linéaire élastique de la rupture appliquée au béton	
1.3. EFFET DE TAILLE	12
1.3.1 Influence de la taille sur le type de rupture	13
1.3.2 Mise en évidence et conséquences de l'effet de taille	14
1.4. MODELE NUMERIQUE PROPOSE	16
1.4.1 Critère de rupture et modélisation des fissures	16
1.4.2 Hypothèses de base	16
Références	18
2. PRINCIPES DE BASE DE LA MECANIQUE LINEAIRE ELASTIQUE DE LA RUPTURE	21
2.1. ENERGIE DE FISSURATION	21
2.1.1 Equation fondamentale de la mécanique de la rupture	22
2.1.2 Critère de Griffith	24
2.1.3 Taux de restitution d'énergie élastique de déformation	27
2.1.4 Intégrale J	28
2.1.5 Intégrale J indépendante du contour d'intégration	32
2.2. CONCENTRATION DE CONTRAINTES	34
2.2.1 Champ de contraintes autour d'une fissure	34
2.2.2 Champ de déplacement autour d'une fissure	37
2.3. EQUIVALENCE DES DIFFERENTES APPROCHES	38
2.4. PROPAGATION D'UNE FISSURE	40
2.4.1 Propagation d'une fissure chargée en mode de traction	40
2.4.2 Propagation d'une fissure chargée en mode mixte	41
Références	44

3.	METHODES NUMERIQUES DE LA MECANIQUE LINEAIRE CLASSIQUE DE LA RUPTURE	45
3.1.	METHODES BASEES SUR L'ANALYSE DE L'ENERGIE DE FISSURATION	45
3.2.	METHODES BASEES SUR L'ANALYSE DE LA SINGULARITE	46
3.2.1	Principe de base	46
3.2.2	Extrapolation des facteurs d'intensité de contrainte	47
3.2.3	Eléments spéciaux	48
3.2.4	Inconvénients	49
3.3.	INTEGRALE DE SURFACE	50
3.3.1	Hypothèses de base	50
3.3.2	Développement de l'intégrale de surface	51
3.4.	APPLICATION DE L'INTEGRALE DE SURFACE AUX PROBLEMES CLASSIQUES DE LA MECANIQUE DE LA RUPTURE	54
3.4.1	Définition d'une fonction $\phi$	56
3.4.2	Facteur correctif de surface	57
3.4.3	Variation de la surface d'intégration	58
3.4.4	Variation de la fonction $\phi$	63
3.4.5	Convergence de l'intégrale de surface	63
	Références	67
4.	MODELISATION DE LA FISSURE	69
4.1.	MODELE DE FISSURATION DISCRETE	69
4.2.	MODELE ELASTIQUE DE FISSURATION REPARTIE	70
4.3.	MODELE ELASTO-PLASTIQUE DE FISSURATION REPARTIE	73
4.4.	ELEMENT FISSURE A FONCTIONS DE FORME DISCONTINUES	77
4.4.1	Fonctions de forme discontinues	78
4.4.2	Matrice de rigidité de l'élément fissuré	82
	Référence	83
5.	MODELE DE PROPAGATION DE FISSURE	85
5.1.	BASES DU MODELE PROPOSE	85
5.2.	APPLICATIONS AUX PROBLEMES CLASSIQUES DE LA MECANIQUE DE LA RUPTURE	88
5.3.	DETECTION ET INITIALISATION D'UNE FISSURE	91
5.4.	VITESSE DE PROPAGATION	93

5.5. ALGORITHME DE PROPAGATION	94
5.5.1 Cas particuliers	94
5.6. EXEMPLES DE PROPAGATION QUASI-STATIQUE	96
5.6.1 Plaque fissurée épaisse en traction	96
5.6.2 Poutre préfissurée en flexion	97
5.6.3 Poutre préfissurée en mortier soumise à un chargement en mode mixte	98
Références	106
6. EXTENSION DU MODELE A DIFFERENTS TYPES DE SOLLICITATIONS	107
6.1. MISE EN PRESSION D'UNE FISSURE	107
6.1.1 Modification de l'intégrale J	107
6.1.2 Modification de l'intégrale de surface	109
6.1.3 Exemple : plaque avec fissure sous pression	112
6.2. FORCES VOLUMIQUES	114
6.2.1 Modification de l'intégrale J	114
6.2.2 Modification de l'intégrale de surface	115
6.2.3 Exemple : plaque fissurée soumise à la gravité	117
6.3. SOLLICITATIONS DYNAMIQUES	119
6.3.1 Algorithme de propagation pour une analyse dynamique	119
6.3.2 Fissure de longueur constante soumise à une charge dynamique	122
6.3.3 Fissure de longueur constante soumise à une sollicitation cyclique alternée	124
Références	127
7. APPLICATION A LA FISSURATION D'UN BARRAGE POIDS LORS D'UN SEISME	129
7.1. SEISME	130
7.2. BARRAGE POIDS	131
7.2.1 Géométrie	131
7.2.2 Caractéristiques du matériau	134
7.2.3 Conditions de fondations	134
7.2.4 Modes propres de vibration - amortissement	135
7.3. DONNEES NUMERIQUES	135
7.4. ANALYSE DU BARRAGE	137

7.4.1	$a_{\max} = 0,1 \text{ g}$	137
7.4.2	$a_{\max} = 0,2 \text{ g}$	139
7.5.	REMARQUES FINALES	142
	Références	143
8.	CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES	145
8.1.	CONCLUSIONS	145
8.2.	PERSPECTIVES DE RECHERCHE	147
ANNEXE A	TENSEURS ET NOTATION INDICIELLE	
ANNEXE B	THEORIE DE L'ELASTICITE	
ANNEXE C	ELEMENTS FINIS EN ELASTICITE LINEAIRE	
ANNEXE D	DEVELOPPEMENT DES FONCTIONS $\Phi$	
ANNEXE E	PLASTICITE INCREMENTALE - CONSTRUCTION DE LA MATRICE ELASTO-PLASTIQUE D'UN MODELE ELASTIQUE PARFAITEMENT PLASTIQUE	
ANNEXE F	COMPORTEMENT DES DIFFERENTS MODELES DE FISSURES	
ANNEXE G	DEVELOPPEMENT DES TERMES CORRECTIFS	

## PRINCIPALES NOTATIONS UTILISEES

a	: longueur de la fissure; accélération; numéro noeud local
$a_0, a_1$	: paramètres d'amortissement
$a_{max}$	: accélération maximale du séisme
b	: épaisseur; numéro noeud local
f	: fréquence
f	: force volumique
$\tilde{f}_{ct}$	: résistance à la traction du béton
g	: accélération de la pesanteur
h	: dimension de la maille, hauteur
i,j,k	; indices
$k^*$	: fonction du module de Poisson
k	: matrice de rigidité élémentaire
$\tilde{l}$	: longueur
p	: pression
t	: tractions
$\tilde{u}$	: déplacements
$\tilde{v}$	: déplacements (solution par éléments finis)
x,y	: coordonnées
A	: opération d'assemblage
B	: matrice des dérivées des fonctions de forme
$\tilde{C}$	: matrice d'amortissement
$\tilde{D}, D_f$	: matrice élastique; matrice fissurée
E	: module de Young (module d'élasticité)
G	: taux de restitution d'énergie élastique
H	: facteur correctif de surface
J	: intégrale au contour
$K_I, K_{II}$	: facteurs d'intensité de contraintes
$K_{IC}$	: facteur critique d'intensité de contraintes
$K_w$	: terme correctif en cas de pression dans la fissure
K	: matrice de rigidité globale
$\tilde{M}$	: matrice de masse
$\tilde{N}_a$	: fonction de forme relative au noeud a
P	: force ponctuelle
R, $R_e$	: rayon; rayon extérieur d'intégration
U	: énergie de déformation
V	: volume
W	: densité d'énergie de déformation

$\alpha$	: indice, angle
$\beta$	: paramètre de Newmark
$\gamma$	: paramètre de Newmark
$\delta_{ij}$	: symbole de Kronecker
$\varepsilon$	: rayon infinitésimal
$\tilde{\varepsilon}$	: tenseur des déformations
$\tilde{\phi}$	: fonction de troncature
$\xi$	: première coordonnée paramétrique
$\eta$	: deuxième coordonnée paramétrique
$\mu$	: module de glissement
$\nu$	: module de Poisson
$\omega$	: pulsation
$\sigma$	: tenseur de contraintes
$\tilde{\Gamma}$	: contour
$\Omega$	: domaine, surface
$\Phi$	: intégrale de surface donnant $K_I$ ou $K_{II}$
$\psi$	: intégrale de surface corrigeant $\Phi$ (forces volumiques)
$\sum$	: somme
$n$	: intersection
$\cup$	: réunion
$\in$	: appartenance
$\forall$	: quantificateur universel ("quel que soit ...")
$\emptyset$	: ensemble vide



## 1. INTRODUCTION

L'analyse du comportement d'une structure, jusqu'à sa ruine complète sous l'action des charges qui la sollicitent, est un élément essentiel de la conception d'un ouvrage. Les méthodes classiques de calcul à la rupture sont fondées sur la recherche de schémas de ruine statiquement ou cinématiquement admissibles, et sur le calcul de l'équilibre ultime dans les sections critiques de l'ouvrage. Ainsi, le dimensionnement à la ruine des ouvrages en béton armé ou précontraint est basé sur des critères de contrainte ultime correspondant à l'écrasement du béton et à la plastification des aciers d'armature.

Par le développement de techniques de calcul numérique, permises par l'ordinateur, il est possible d'étudier le détail de l'équilibre en différents points de la structure. Ainsi, des modèles numériques, basés sur la méthode des éléments finis ont été développées ces deux dernières décennies, dans le but de simuler la ruine de structures en béton armé. Ces méthodes ne se révèlent pas toutes adaptées au problème de la ruine d'ouvrages massifs en béton non armé, où la propagation de fissures caractérise le processus de rupture. Différents auteurs ont déjà proposé des modèles de calculs pour résoudre ce problème. Il apparaît cependant que ces méthodes n'approchent pas d'assez près le comportement réel des ouvrages et présentent certains inconvénients. On peut relever en particulier les modèles qui s'appuient sur un critère de propagation de fissures basé sur le dépassement d'une contrainte maximale de traction [1.2]; ce critère de rupture n'est pas suffisamment rigoureux car il est lié à la taille des éléments finis utilisés. D'autres modèles [1.17] utilisent un critère de mécanique de la rupture, mais font appel à une modélisation de la fissure qui entraîne une re-définition du réseau d'éléments finis à chaque pas de propagation : l'augmentation du nombre de variables qui en découle diminue l'efficacité de l'algorithme.

Le présent travail a donc pour but de développer un modèle numérique du comportement jusqu'à la ruine d'ouvrages massifs en béton non armé. Le modèle doit permettre de détecter d'apparition de fissures dans une structure sollicitée par des charges constantes ou variables dans le temps. Un critère de propagation de fissures, adapté au problème étudié, doit être utilisé afin de suivre le développement de la fissuration qui modifie la déformation globale de l'ouvrage jusqu'à la ruine de celui-ci. Il s'agit donc d'un modèle non-linéaire.

La complexité de l'étude de la propagation des fissures impose, à ce stade des connaissances, que l'on retienne l'hypothèse d'une analyse bidimensionnelle.

L'intérêt d'un tel modèle apparaît en particulier dans son application à l'étude du comportement de grands ouvrages en béton massif tels que les barrages poids. La détermination, par le calcul, de ce que peut être le schéma de fissuration d'un barrage poids sous l'effet d'un séisme est un problème important dont la résolution doit apporter une meilleure connaissance de la sécurité de l'ouvrage.

Le chapitre 1 rappelle tout d'abord les différences de comportement à la rupture du béton armé et du béton non armé. Les principaux modèles numériques existants sont ensuite brièvement exposés. L'influence que la taille de la structure peut avoir sur son comportement à la rupture est relevée. Les principes de base du modèle que l'on se propose de développer sont déduits de ces considérations.

Le chapitre 2 rappelle les équations de base de la mécanique linéaire élastique de la rupture.

Les différentes méthodes numériques utilisées en mécanique de la rupture sont présentées au chapitre 3. Une intégrale de surface permettant le calcul des facteurs d'intensité de contraintes en pointe de fissure y est développée. Ses propriétés sont ensuite étudiées.

Le chapitre 4 traite de la modélisation de la fissure dans un réseau d'éléments finis. Un nouvel élément "fissuré", proposé dans le cadre de la présente étude, y est décrit.

Le développement du modèle numérique de fissuration fait l'objet du chapitre 5. Il est appliqué aux problèmes classiques de la mécanique de la rupture afin d'en démontrer clairement la validité. L'algorithme de propagation de fissures est ensuite présenté.

Au chapitre 6, le modèle est étendu à différents types de sollicitations (forces de pression dans la fissure, forces volumiques, forces dynamiques).

A titre d'exemple, au chapitre 7, le modèle est appliqué à l'étude du comportement pendant un séisme d'une section d'un barrage poids à lac vide.

Enfin, des conclusions générales sont tirées, donnant en particulier les orientations possibles de futures recherches.

### 1.1. COMPORTEMENT A LA RUINE DES STRUCTURES EN BETON

Le principe du dimensionnement à la rupture du béton armé est basé sur le fait que l'acier d'armature doit reprendre les efforts de traction qui se manifestent dans la section considérée et que, au stade de la charge ultime, le béton, qui reprend les efforts de compression, est soumis à des contraintes qui provoquent l'écrasement, la plastification de celui-ci. Le béton en traction est fissuré et ne participe plus à l'équilibre de la section. En d'autres termes, l'armature est calculée pour contrôler le processus de fissuration et assurer l'existence d'une zone de compression où le béton atteint sa limite d'écrasement. Le contrôle de la fissuration par l'armature se traduit non seulement par la stabilisation de la propagation de fissures (fig. 1.1), mais aussi par la répartition de la fissuration dans différentes sections de la structure, ce qui limite l'ouverture de chacune des fissures.

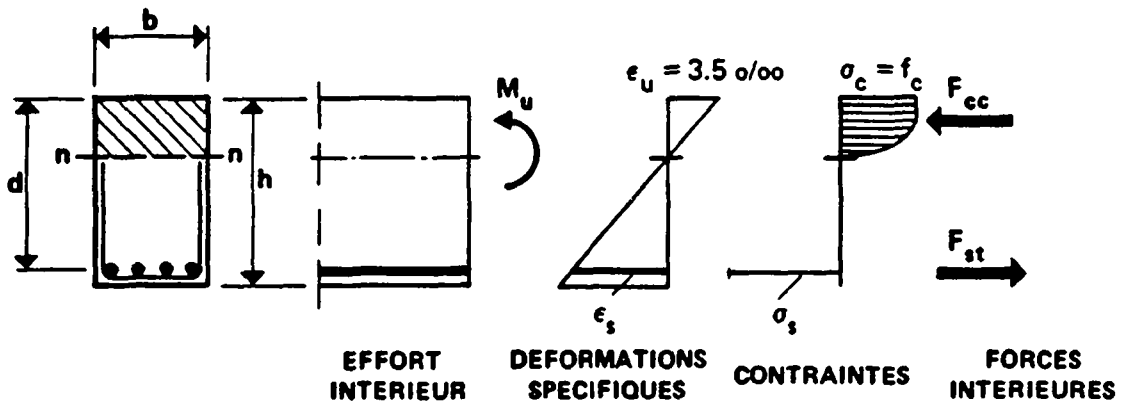


fig. 1.1 : flexion en phase ultime [1.1]

Cet effet de répartition de la fissuration n'existe pas dans le cas du béton non armé où une unique fissure se développe dans les zones où la résistance à la traction du béton est dépassée (fig. 1.2).

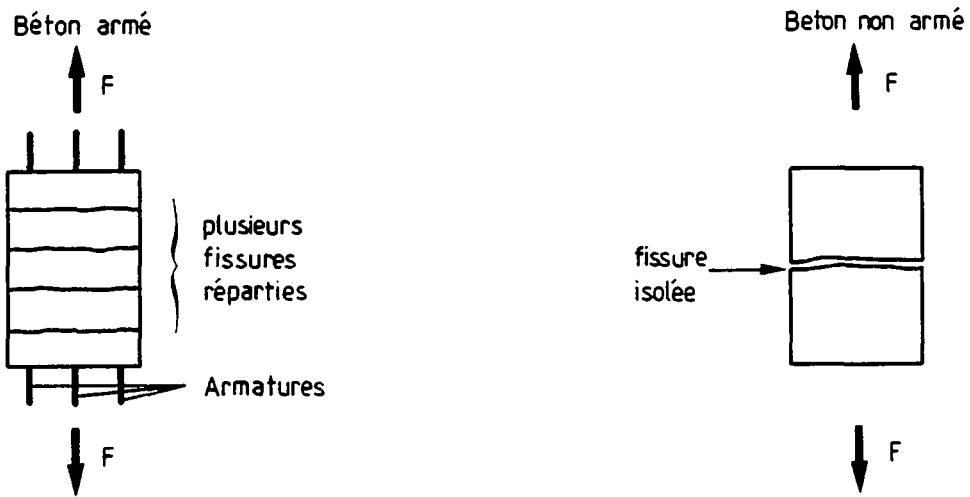


Fig. 1.2 : effet de l'armature sur la répartition des fissures dans le béton [1.2]

Les structures en béton **non armé** sont en général des structures massives, sollicitées faiblement en compression et en cisaillement. De telles structures ne sont soumises qu'exceptionnellement à des efforts de traction (barrage poids en béton pendant un séisme, par exemple).

Comme la résistance à la traction du béton est environ égale à 10% de sa résistance à la compression, la propagation de fissures joue un rôle essentiel lors de la ruine d'une telle structure. Aucune armature ne contrôlant le processus de fissuration, celui-ci ne peut être stabilisé que grâce à une redistribution des efforts permettant d'assurer l'équilibre (fig. 1.3).

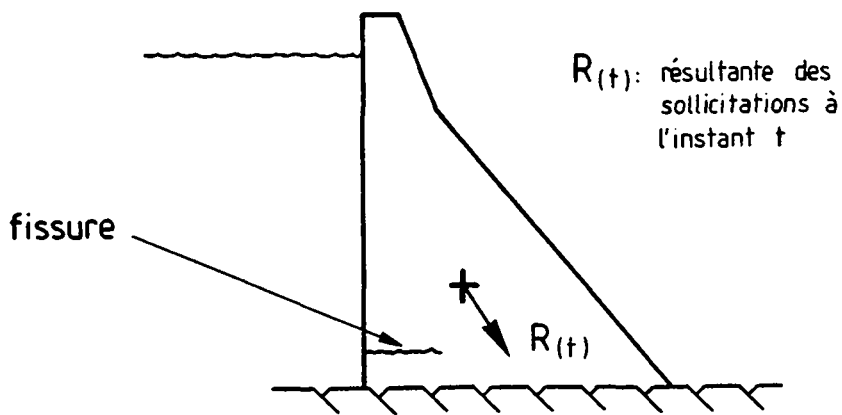


Fig. 1.3 : schéma de propagation d'une fissure dans un barrage poids (la fissure se stabilise au voisinage d'une zone en compression)

Par conséquent, l'analyse du comportement à la ruine d'une structure massive en béton non armé doit être basée sur l'étude de la propagation de la fissuration dans le corps de l'ouvrage.

## **1.2. MODELES NUMERIQUES EXISTANTS**

Les différents modèles numériques de propagation de fissures dans le béton armé ou non se distinguent principalement par le critère de rupture qu'ils utilisent. Le choix du critère de rupture dépend du type de structure étudiée, de son degré d'armature et de l'importance de ses dimensions.

### **1.2.1. Modèles basés sur un critère de résistance à la traction**

Une première approche consiste à utiliser un critère de résistance à la traction pour la propagation de fissures. Cette méthode peut être combinée soit avec une modélisation "discrète" de la fissure (§ 4.1) développée par Ngo et Scordelis [1.2], telle que l'a utilisée Skrikerud [1.2], soit avec une modélisation de type "fissuration répartie" développée par Rashid [1.4] et utilisée en particulier par Saugy, Zimmermann et Hussain [1.5] (§ 4.2). Cette approche est le plus souvent utilisée dans le cadre de l'étude du béton armé où la ruine est plutôt, comme il a été rappelé au § 1.1, la conséquence de l'écrasement du béton, c'est-à-dire que la fissuration est contrôlée par l'armature. Bazant et Cedolin [1.6] ont montré que pour des structures non armées, cette approche est inadaptée car la solution est fortement influencée par la dimension de la maille d'éléments finis.

Ce problème est illustré par l'exemple suivant.

Soit une plaque carrée fissurée jusqu'en son milieu. Deux réseaux d'éléments finis, l'un grossier, l'autre plus fin modélisent la plaque. Celle-ci est soumise à une charge répartie donnant une contrainte verticale uniforme  $\sigma$  sur les bords parallèles à la fissure (fig. 1.4).

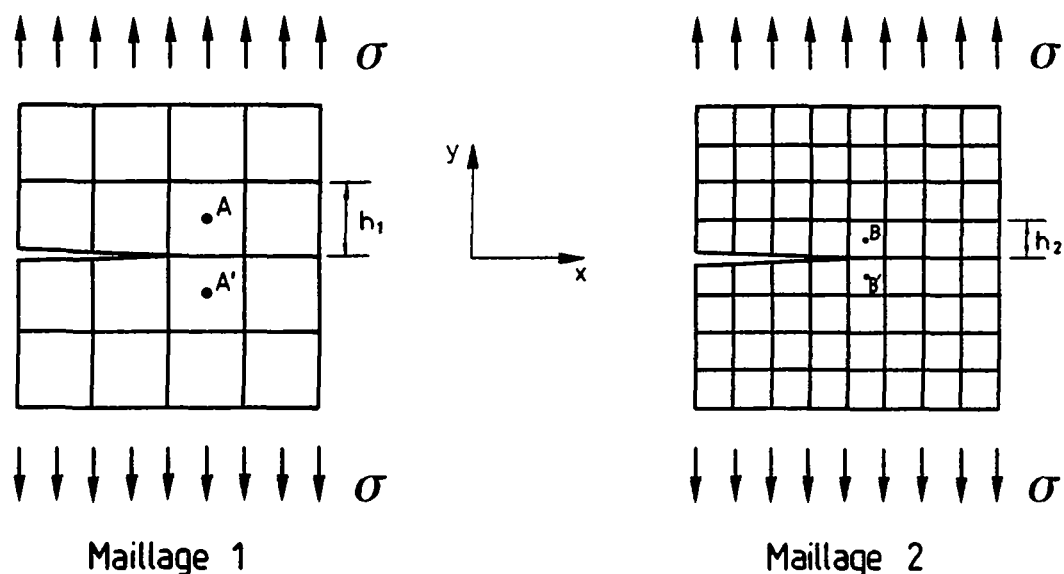


fig. 1.4 : influence du maillage sur le critère de résistance à la traction

En faisant l'hypothèse de l'utilisation d'éléments isoparamétriques à 4 noeuds et d'une intégration classique sur le domaine (annexe C), les contraintes sont évaluées au centre de chaque élément. En raison de la singularité du champ de contrainte qui règne à la pointe de la fissure et à cause d'une part de la plus ou moins grande distance entre la pointe de la fissure et le point où les contraintes sont calculées, et d'autre part de la surface plus ou moins grande des éléments considérés, les contraintes verticales sont telles que :

$$\sigma_{yA} = \sigma_{yA'} < \sigma_{yB} = \sigma_{yB'}$$

Pour une certaine contrainte extérieure  $\sigma$ , il peut apparaître que  $\sigma_A$  est inférieur à la contrainte de rupture par traction du matériau considéré ( $f_{ct}$  dans le cas du béton), alors que la contrainte  $\sigma_B$  est supérieure à cette valeur :

$$\sigma_A < f_{ct} < \sigma_B$$

Ainsi, la fissure se propage pour le maillage 2 et reste stable pour le maillage 1, d'où l'influence de la maille sur le critère de propagation. A la limite, pour un maillage extrêmement fin, la contrainte  $\sigma_B$  peut être telle qu'il y a propagation, alors que la charge extérieure  $\sigma$  est infime.

Le critère de traction maximale n'est donc pas adapté au problème de la fissuration des structures en béton non armé, où la concentration de contraintes à la pointe des fissures joue un rôle plus important que pour des pièces normalement armées.

### **1.2.2. Modèles utilisant un critère basé sur la mécanique de la rupture**

Un deuxième critère est basé sur la mécanique de la rupture. Selon le type de problème, il est nécessaire de modéliser la zone microfissurée qui se développe devant la fissure : la mécanique non-linéaire de la rupture du béton a été développée à cet effet. Sinon, la mécanique linéaire élastique de la rupture est utilisée.

#### **a) Mécanique non-linéaire de la rupture appliquée au béton**

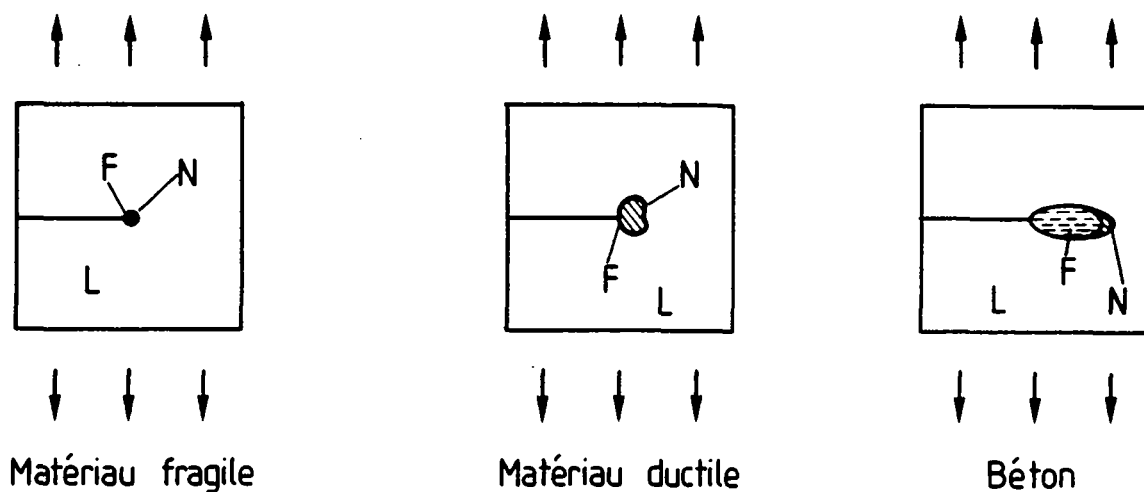
Selon le type de matériau et de structure, une zone présentant un comportement non-linéaire peut se développer devant la pointe de la fissure. Pour des matériaux présentant un comportement à la rupture de type fragile, tels que le verre, cette zone est négligée vis-à-vis des dimensions de la structure et de la fissure. La mécanique linéaire de la rupture s'applique alors. Pour certains métaux possédant un comportement à la rupture de type ductile, une zone plastique dans laquelle le matériau est en phase d'écroûissage (strain hardening) se développe devant la fissure. La mécanique non-linéaire de la rupture tient compte de cette zone plastique lors de l'étude de la stabilité de la fissure.

L'analyse de la propagation de fissures dans une structure en béton au moyen de la mécanique non-linéaire de la rupture est basée sur l'étude de la zone de microfissures discontinues qui se développent devant la pointe de la fissure. L'énergie dissipée lors de la formation de ces microfissures et de la fissure principale sert de critère de propagation.

Ce phénomène traduit un comportement non-linéaire du matériau dans la zone où se sont développées les microfissures. La figure 1.5 résume les différents comportements que peuvent avoir les matériaux en présence d'une fissure.

Dans le cas du béton, la zone microfissurée peut être mesurée expérimentalement [1.7]. L'étendue de cette zone est fonction de la granulométrie. Elle est de l'ordre de dix fois le diamètre maximal des granulats utilisés. La zone microfissurée correspond essentiellement à la région où se produit une relaxation des déformations (strain softening) [1.8, 1.9], c'est-à-dire dans la région où la contrainte de traction après avoir atteint une valeur maximale ( $f_{ct}$ ) diminue, bien que la déformation augmente (fig. 1.6).

Ainsi, lors d'un essai uniaxial à déplacement contrôlé, effectué sur une éprouvette en traction, la contrainte croît avec la déformation jusqu'à ce que la valeur critique  $f_{ct}$  soit atteinte. Une zone microfissurée locale de longueur  $w$  se forme alors avant que la ruine finale n'apparaisse.



- L : Comportement linéaire
- N : Comportement non linéaire (plasticité)
- F : Zone microfissurée

Fig. 1.5 : comportement de différents matériaux en présence d'une fissure (d'après [1.8])

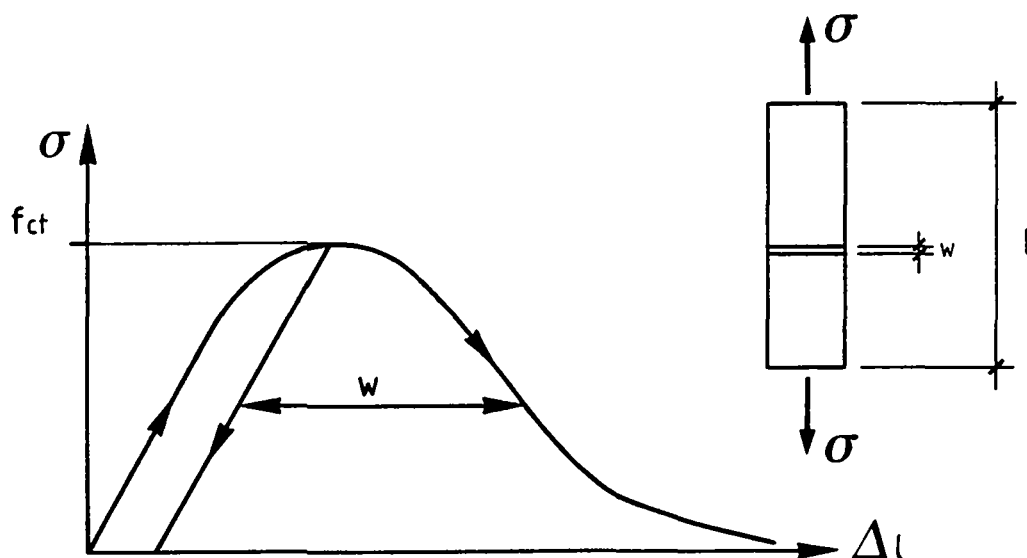


Fig. 1.6 : courbe contrainte-élongation d'une éprouvette en traction (d'après [1.9])



La majeure partie de l'élongation est localisée dans la zone microfissurée, le reste de la pièce se détendant presque élastiquement. L'élongation totale peut s'écrire :

$$\Delta l = \epsilon l + w$$

$\epsilon l$  représente la contribution de la partie non fissurée à l'élongation totale, mais présentant une décohésion limitée des agrégats ou même quelques microfissures.

La figure 1.7 représente schématiquement le processus de rupture.

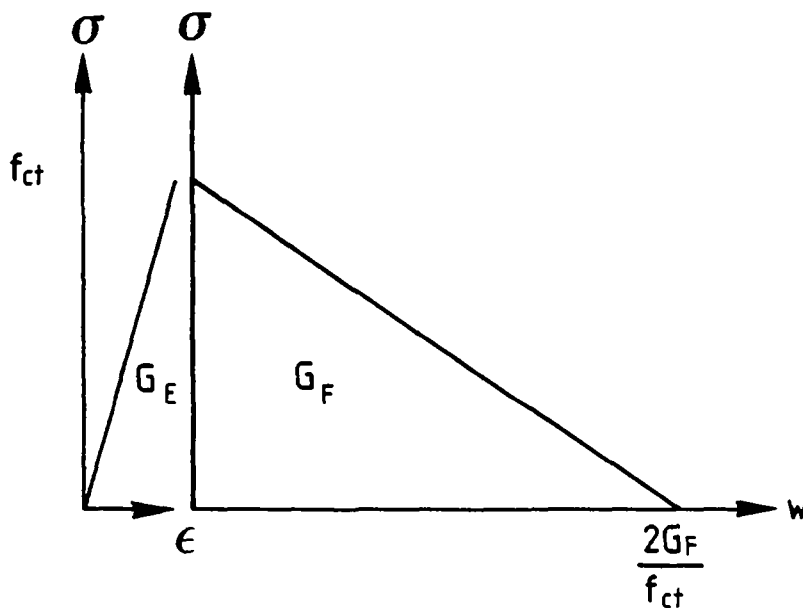


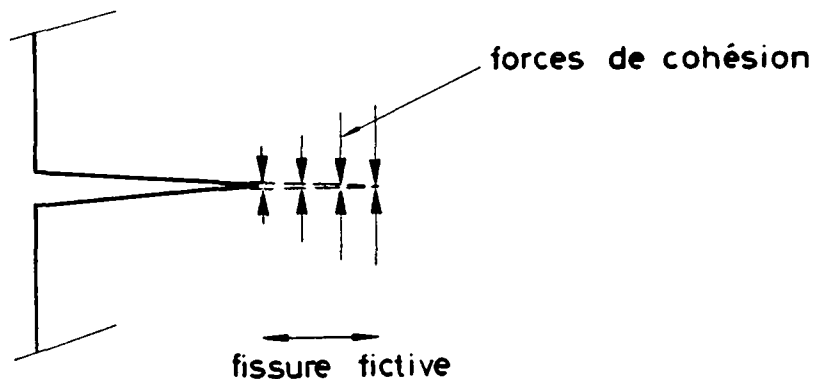
Fig. 1.7 : Approximation des courbes  $\sigma - \epsilon$  et  $\sigma - w$  [1.10]

Les surfaces  $G_E$  et  $G_F$  représentent l'énergie dissipée pendant la rupture.

- $G_E$  est une énergie volumique ( $N/m^2$ ) dissipée dans l'ensemble de la structure. Elle est caractéristique d'une rupture définie par un critère de tension maximale ( $f_{ct}$ ).
- $G_F$  est une énergie de fissuration qui a la dimension d'une énergie de surface ( $N/m$ ). Elle est caractéristique d'une rupture due à la discontinuité du milieu.  $G_F$  sert de critère de rupture à la mécanique non-linéaire de la rupture du béton et peut être déterminé expérimentalement [1.10].

- **Modèle de la fissure fictive (fictitious crack model)**

Ce modèle numérique a été développé par Hillerborg & al. [1.10]. Il utilise un modèle de fissuration "discrète". La fissure est augmentée d'une longueur fictive correspondant à la zone microfissurée. Des forces dites de cohésion  $y$  sont appliquées. Elles modélisent la branche descendante de la courbe  $\sigma - w$  (fig. 1.7 et 1.8). Ce modèle s'apparente à ceux développés par Dugdale [1.11] et Barenblatt [1.12] pour la mécanique non-linéaire de la rupture des matériaux ductiles.



**Fig. 1.8 : modèle de la fissure fictive [1.10]**

Il y a propagation de la fissure si le travail des forces de cohésion atteint la valeur  $G_f$ .

Les résultats obtenus sont indépendants du maillage, pourvu que celui-ci soit suffisamment fin. La forme de la courbe  $\sigma - w$  influence les résultats. Elle fait l'objet de nombreuses recherches [1.13, 1.14].

De plus, il est intéressant de remarquer que pour des structures de taille relativement grande, la valeur  $G_f$  tend vers la valeur  $G$  de la mécanique linéaire de la rupture (§ 1.3 et § 2.2).

- **Modèle de bande fissurée (blunt crack band model)**

Bazant et Cedolin [1.15] ont fait l'hypothèse que le phénomène de fissuration dans un matériau hétérogène tel que le béton peut être modélisée par une fissuration de type répartie. Une bande de fissures parallèles, distribuée uniformément sur l'épaisseur  $h$  d'un élément présente alors un front de

fissure  $w_c$  de même épaisseur ( $h = w_c$ ). La largeur de la bande fissurée  $w_c$  est considérée comme étant une propriété du matériau :

$$w_c \sim 3 d_a$$

où  $d_a$  est la dimension maximale des agrégats (fig. 1.9).

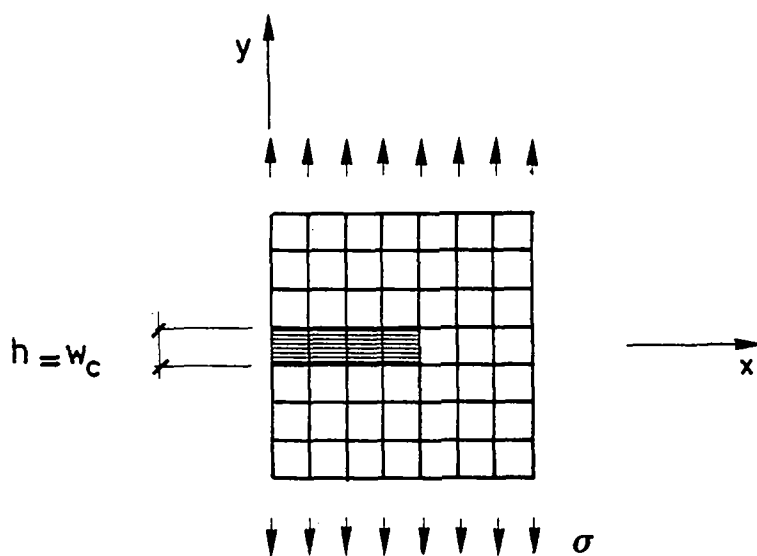


Fig. 1.9 : modèle de la bande fissurée [1.15]

L'énergie de fissuration, lors de la propagation de la zone fissurée, s'écrit :

$$G_f = W_f w_c ; W_f = \int_0^{\epsilon_0} \sigma_y d\epsilon$$

où  $W_f$  est le travail des contraintes de traction par unité de volume dans la zone de bande fissurée.

L'utilisation d'un maillage de dimension  $h$  différente est rendue possible en modifiant soit la valeur  $f_{ct}$ , soit la pente de la droite descendante de la figure 1.9 pour conserver une valeur constante de  $G_f$ .

### **b) Mécanique linéaire élastique de la rupture appliquée au béton**

Pour de grandes structures massives en béton, les dimensions sont telles que les zones microfissurées peuvent être négligées. Le matériau conserve ainsi un comportement élastique linéaire. La mécanique linéaire élastique de la rupture s'applique au calcul à la ruine de ce type de structures. Elle permet d'étudier la singularité du champ de contraintes qui règne à la pointe d'une fissure isolée et de la caractériser par un facteur d'intensité de contraintes. Ce dernier est comparé à une valeur critique, propriété du matériau considéré, ce qui détermine la stabilité de la fissure. Saouma [1.17], à la suite des travaux d'Ingraffea [1.16], a proposé un modèle d'analyse et de propagation de fissures basé sur la mécanique linéaire élastique de la rupture. Ce modèle est intégré dans un programme interactif-graphique. Il nécessite donc l'intervention de l'utilisateur pendant le calcul. La fissure est modélisée de façon "discrète" (§ 4.1), ce qui entraîne une modification constante du réseau d'éléments finis et ne permet pas de tenir compte aisément de la fermeture éventuelle de la fissure.

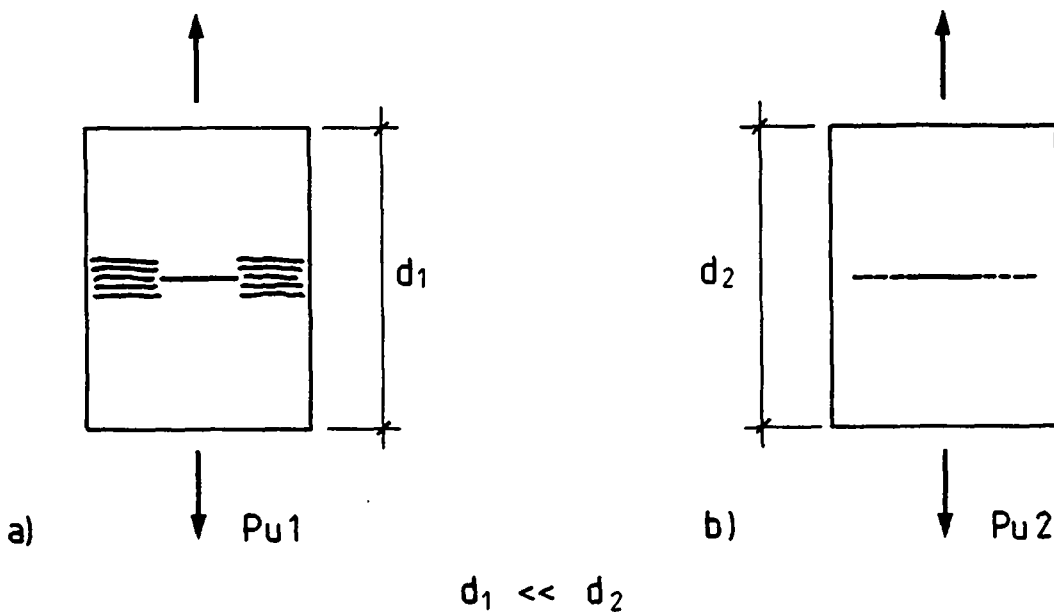
### **1.3. EFFET DE TAILLE**

L'approche du problème de la propagation de fissures lors de la ruine d'une structure au moyen de la mécanique de la rupture permet de mettre en évidence un effet de taille qui n'est en général pas pris en compte dans les méthodes conventionnelles de dimensionnement recourant à un critère de traction maximale. Cet effet de taille traduit le fait que la sollicitation nécessaire pour amener à la ruine une structure de dimensions importantes est proportionnellement plus faible que pour une structure géométriquement semblable, mais de moindre taille. Alors qu'un critère de contrainte critique est indépendant de la taille de la structure, la mécanique de la rupture tient compte, quant à elle, de l'influence des dimensions de la structure.

### 1.3.1. Influence de la taille sur le type de rupture

Deux types de ruptures peuvent se développer dans les structures présentant une fissure (fig. 1.10) :

- la rupture par dépassement d'une contrainte critique qui est caractéristique de l'extension d'une zone à comportement non-linéaire, conséquence de la plastification dans les métaux ou de la microfissuration dans les géomatériaux. La concentration de contraintes est amoindrie en pointe de fissure. La rupture est alors provoquée par la dégradation du matériau dans une partie importante de la structure. Les pièces de faible taille présentent ce type de ruptures;
- la rupture par propagation de fissures qui est liée à la concentration de contraintes en pointe de fissure. Le développement de zones microfissurées (ou plastiques) est négligeable et n'affecte pas la singularité du champ de contraintes. Cette rupture de type fragile affecte les structure de taille importante.



- a) rupture par dépassement d'une contrainte critique; développement de microfissures
- b) rupture par propagation de la fissure initiale

Fig. 1.10 : type de rupture selon la taille de la structure

La mécanique de la rupture permet d'étudier correctement la rupture par propagation de fissures. Cette approche tient compte du fait que l'énergie nécessaire à la fissuration s'accroît avec la surface du front de fissures à créer, alors que l'énergie disponible pour la fissuration croît avec le volume de la pièce considérée, ce qui se traduit par l'effet de taille.

### 1.3.2. Mise en évidence et conséquences de l'effet de taille

L'influence de la taille sur le comportement à la ruine de structures fissurées en béton a été étudié entre autres par Bazant [1.8] et Carpinteri [1.9]. Il a été mis en évidence en considérant plusieurs structures de même forme, mais de tailles différentes.

Par exemple, pour une poutre simple fissurée chargée par une force verticale  $P$  : lorsque  $P$  atteint la valeur ultime  $P_U$  conduisant à la ruine, on peut exprimer la sollicitation ultime sous forme d'une contrainte caractéristique  $\sigma_c$  telle que :

$$\sigma_c = \frac{P_u}{b d}$$

Le paramètre  $\lambda$  est défini comme caractérisant la dimension de la pièce étudiée :

$$\lambda = \frac{d}{da}$$

avec  $b$  : épaisseur

$d$  : portée

$da$  : diamètre maximal des agrégats

Le critère de résistance à la traction est indépendant de la dimension de la structure, ce qui se traduit par une droite horizontale sur le diagramme de la figure 1.11 où  $\sigma_c$  est représenté en fonction de  $\lambda$ .

Le critère basé sur la mécanique linéaire de la rupture dépend de la dimension de la structure. En effet, de par les équations de la mécanique de la rupture (par ex. (2.35)<sup>1/</sup> et (2.36)),  $\sigma_c$  est inversement proportionnel à la racine carrée de  $\lambda$ , ce qui se traduit par une droite de pente de  $- 1/2$  en coordonnées logarithmiques.

Les solutions données par la mécanique non-linéaire de la rupture conduisent à une courbe qui marque une transition entre la mécanique linéaire de la rupture et le critère de résistance à la traction [1.8] et [1.18].

---

1/ Les chiffres entre parenthèses renvoient aux équations numérotées.

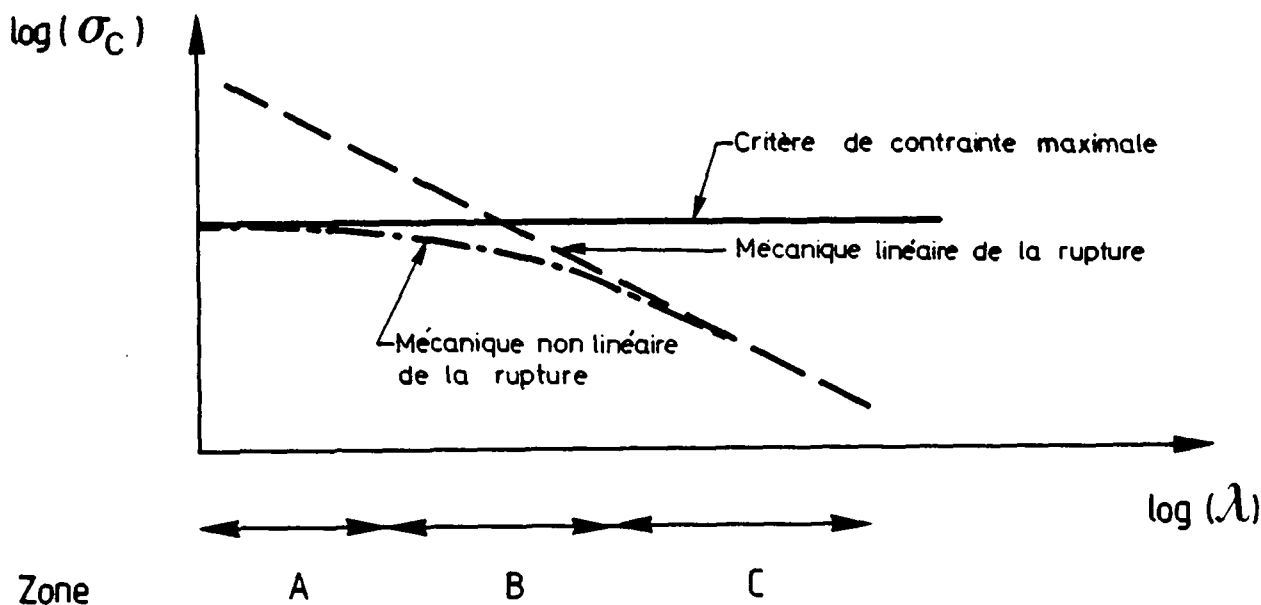


Fig. 1.11 : effet de taille pour une structure en béton non armé [1.8]

La plupart des résultats expérimentaux obtenus sur des éprouvettes de béton de tailles réduites se situent dans la zone A, où les critères de ruine de la mécanique non-linéaire de la rupture et de résistance à la traction se rejoignent. Une certaine déviation de la ligne horizontale a été observée pour des essais sur des structures de taille plus importante (zone B). La mécanique non-linéaire de la rupture permet, en considérant la zone microfissurée qui précède la fissure, de tenir compte de cet effet.

Les structures massives en béton non armé se trouvent représentées dans la zone C où la mécanique linéaire élastique de la rupture permet de représenter leur mode de ruine de type fragile. En conclusion, la mécanique linéaire de la rupture est en mesure de décrire de façon satisfaisante la ruine de grandes structures massives en béton non-armé, [1.9, 1.19].

#### **1.4. MODELE NUMERIQUE PROPOSE**

Le modèle numérique recherché doit permettre l'analyse du comportement non-linéaire de grandes structures massives en béton non armé, soumises à des sollicitations dynamiques. A partir de ce qui a été exposé précédemment il est possible de définir les bases sur lesquelles vont reposer les développements qui conduisent à ce modèle numérique.

##### **1.4.1. Critère de rupture et modélisation des fissures**

La ruine des grandes structures massives en béton non-armé est la conséquence de la propagation de fissures (§ 1.1) qui est, compte tenu de la taille de la structure et de l'absence d'armature, correctement décrite par la mécanique linéaire de la rupture (§ 1.2 et 1.3).

La modélisation de la fissure ne doit pas, pour des raisons d'efficacité numérique, engendrer une redéfinition continue du maillage d'éléments finis au cours de la propagation. Une modélisation de type "répartie" permet de conserver la discrétisation initiale. De plus, une telle modélisation donne la possibilité de simuler aisément la fermeture d'une fissure au cours de l'histoire des sollicitations dynamiques (§ 4 et § 6).

Le modèle numérique développé dans le cadre de la présente recherche, contrairement aux autres modèles existants décrits plus haut, combine un critère de mécanique linéaire de la rupture avec une modélisation de la fissure de type "répartie". Une telle méthode tient compte de la singularité du champ de contraintes en pointe de fissure et de l'influence de la taille de la structure sur le développement de la fissuration et le comportement à la ruine.

##### **1.4.2. Hypothèses de base**

Un certain nombre d'hypothèses doivent être formulées avant d'entrer dans les détails de l'élaboration du modèle :

- le béton non fissuré, compte tenu des grandes dimensions des structures massives, est considéré comme un matériau homogène isotrope suivant un comportement linéaire élastique, décrit par la mécanique des milieux continus et la théorie de l'élasticité (annexe B); les zones microfissurées et les comportements non-linéaires du matériau en pointe de fissure sont négligés;



- le comportement de la structure reste dans le domaine des petites déformations; ainsi une force appliquée selon une direction conserve celle-ci, indépendamment de la déformation de la structure; il s'agit d'un problème du premier ordre;
- le modèle proposé s'applique à des problèmes se ramenant à une analyse bidimensionnelle; l'hypothèse des déformations planes est admise pour l'étude des structures massives;
- la propagation des fissures est étudiée en faisant l'hypothèse d'une propagation quasi-statique, c'est-à-dire que la vitesse de propagation est relativement peu élevée, et ainsi les champs de contrainte et de déformation sont indépendants de la vitesse de propagation (§ 5.4).

## REFERENCES

- [1.1 ] R. Walther, M. Miehlsbradt. Cours de béton armé et béton précontraint. EPF-Lausanne.
- [1.2 ] P. Skrikerud. Modelle und Berechnungsverfahren für das Rissverhalten von unarmierten Betonbauten unter Erdbebenbeanspruchung. IBK ETH-Zürich, Diss. No 7071, 1982.
- [1.3 ] D. Ngo, A.C. Scordelis. Finite element analysis of reinforced concrete beams. J. of the American Concrete Institute, v. 64, No 14, 1967.
- [1.4 ] Y.R. Rashid. Analysis of prestressed concrete pressure vessels. Nucl. Eng. & Design, v. 7, No 4, 1968.
- [1.5 ] B. Saugy, Th. Zimmermann, B. Hussain. Three-dimensional rupture analysis of PCRV, including creep effects. Nucl. Eng. & Design, v. 28, No 1, 1974.
- [1.6 ] Z.P. Bazant, L. Cedolin. Blunt crack band propagation in finite element analysis. J. of Eng. Mech. Division, ASCE, 105, EM2, 1979.
- [1.7 ] L. Cedolin, S. dei Poli, I. Iori. The fracture process zone in concrete. Fracture and Fatigue, Italian-Swiss joint meeting, Lugano, Switzerland May, 1984.
- [1.8 ] Z.P. Bazant. Mechanics of fracture and progressive cracking in concrete structures. "Fracture mechanics of concrete" (G. Sih, A. diTomaso, Ed.) Nijhoff, 1985.
- [1.9 ] A. Carpinteri. Scale effects on fracture of plain and reinforced concrete structures. "Fracture mechanics of concrete" (G. Sih, A. diTomaso, Ed.), Nijhoff, 1985.
- [1.10] A. Hillerborg. Numerical methods to simulate softening and fracture of concrete. "Fracture mechanics of concrete" (G. Sih, A. diTomaso, Ed.), Nijhoff, 1985.
- [1.11] D.S. Dugdale. Yielding of steel sheets containing slits. J. Mech. Phys. Sol., 8, 1960.
- [1.12] G.I. Barenblatt. The mathematical theory of equilibrium of cracks in brittle fracture. Advances in Appl. Mech., 7, 1962.
- [1.13] J.G. Rots. Strain-softening analysis of concrete fracture specimens. Int. Conf. on Fracture Mech. of Concrete, Lausanne, Switzerland, Oct., 1985.
- [1.14] P.E. Roelfstra, F.H. Wittmann. Numerical method to link strain-softening with failure of concrete. Int. Conf. on Fracture Mech. of Concrete, Lausanne, Switzerland, Oct., 1985.
- [1.15] Z.P. Bazant, L. Cedolin. Finite element modeling of crack band propagation. J. of Structural Eng., ASCE, 109, ST2, 1983.

- [1.16] A.R. Ingraffea, F.E. Heuze. Finite element model for rock fracture mechanics. Int. J. for Num. & Anal. Methods in Geomechanics, v. 4, 1980.
- [1.17] V. Saouma. Interactive finite element analysis of reinforced concrete : a fracture mechanics approach. Rep. 81-5, Cornell University.
- [1.18] Z.P. Bazant. Fracture in concrete and reinforced concrete. In "Mechanics of geomaterials" (Z.P. Bazant Ed.), Wiley, 1985.
- [1.19] Th. Zimmermann. Failure analysis of concrete structures. Inv. Conf. Div. H, SMIRT8, Bruxelles, 1985, in Nucl. Eng. and Design, NO 92, 1986.



## 2. PRINCIPES DE BASE DE LA MECANIQUE LINEAIRE ELASTIQUE DE LA RUPTURE

Les principes de base de la mécanique linéaire élastique de la rupture sont rappelés dans le présent chapitre. Ceux-ci sont à l'origine de l'établissement de la méthode numérique utilisée par la suite.

L'étude des fissures, de leur stabilité et de leur propagation est d'une grande importance en construction métallique et c'est plus particulièrement dans ce domaine que la mécanique de la rupture a été développée. Cette étude peut être étendue à d'autres matériaux que les métaux. En particulier la mécanique linéaire élastique de la rupture décrit correctement la ruine par propagation de fissures dans un ouvrage massif en béton non armé, comme il a été montré au chapitre 1.

La mécanique linéaire élastique de la rupture cherche à quantifier les effets de la présence d'une fissure isolée dans un corps élastique, en vue de déterminer son éventuelle propagation. Les hypothèses de base sont les suivantes :

- le matériau étudié suit une loi contrainte-déformation de type linéaire élastique; les zones non-linéaire qui peuvent se développer en pointe de fissure sont négligées devant la taille de la fissure et de la structure étudiée;
- le corps fissuré est homogène et isotrope;

Deux approches du problème de la propagation sont alors possibles :

- l'étude de l'énergie nécessaire à la fissuration,
- l'étude de la singularité du champ de contraintes à la pointe de la fissure.

Ces deux approches décrites ci-après conduisent à des critères de propagation équivalents.

### 2.1. ENERGIE DE FISSURATION [2.1, 2.2, 2.3]

La première analyse mathématique de l'état de contrainte autour d'une fissure est due à Inglis qui, en 1913, a calculé la contrainte maximale autour d'une cavité elliptique dans une plaque infinie soumise à une traction uniforme perpendiculaire au grand axe de l'ellipse (fig. 2.1).

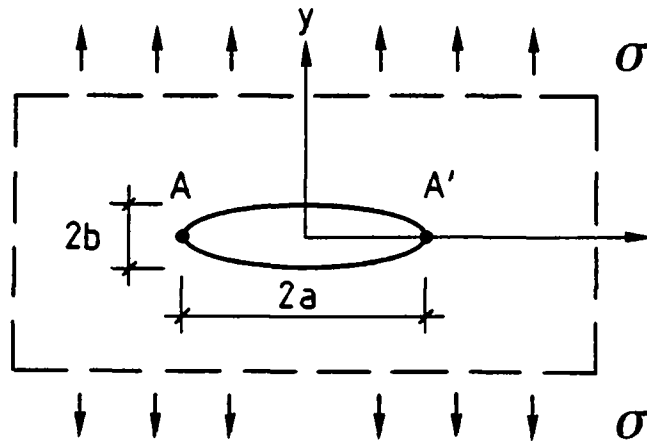


Fig. 2.1 : cavité elliptique dans une plaque infinie [2.2]

On a alors aux points A et A' :

$$\sigma_y = \sigma \left( 1 + 2 \frac{a}{b} \right) \quad (2.1)$$

Lorsque l'ellipse ressemble à une fissure, c'est-à-dire quand  $b$  tend vers zéro, l'équation précédente devient :

$$\sigma_y \sim 2 \sigma \frac{a}{b}$$

et pour  $b = 0$ , la contrainte devient infinie. Or, comme aucun matériau ne peut supporter une contrainte infinie, cela signifierait que la présence d'une fissure entraîne la rupture immédiate du corps. Ce modèle de fissure se révèle donc incomplet.

Dès 1920, Griffith a posé les bases de la mécanique de la rupture en s'appuyant sur des considérations énergétiques. Il a notamment fait l'hypothèse que le phénomène de fissuration est consommateur d'énergie, et que cette énergie ne dépend que de la surface de fissure nouvellement créée lors de l'extension de la dite fissure.

### 2.1.1. Equation fondamentale de la mécanique de la rupture

L'énergie potentielle de déformation d'un corps de volume  $V$ , en équilibre sous l'action de forces extérieures  $\underline{t}$  et de forces volumiques  $\underline{f}$  est définie par :

$$\Pi = \int_V W \, dV - \int_{S_t} t_i u_i \, dS - \int_V f_i w_i \, dV \quad (2.2)$$

où  $S$  est la surface totale du corps,  $S_t$  la portion de cette surface où s'appliquent les forces extérieures  $\underline{t}$ ;  $S_u$  est la portion de  $S$  où les déplacements  $\underline{u}$  sont imposés (fig. 2.2).

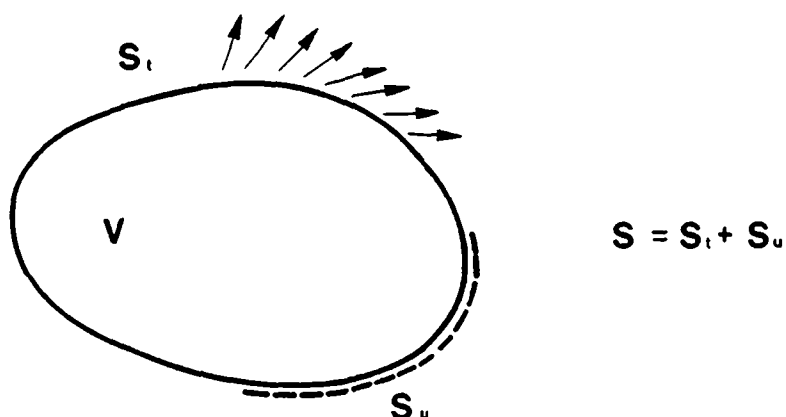


Fig. 2.2 : définition des surfaces  $S_t$  et  $S_u$

$W$  est la densité d'énergie de déformation :

$$W = \int_0^{\epsilon} \sigma_{ij} \, d\epsilon_{ij} \quad (B.19)$$

et qui, dans le cas d'un matériau présentant un comportement linéaire, s'écrit :

$$W = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \epsilon_{ij} \quad (B.19)$$

Le premier terme de l'équation (2.2) représente  $U$ , l'énergie élastique de déformation (travail des forces internes) :

$$U = \int_V W \, dV \quad (2.3)$$

1/ Certaines équations sont écrites en utilisant la notation tensorielle rappelée à l'annexe A. La définition de variables  $\sigma$ ,  $u$ ,  $\epsilon$  est donnée en annexe B).

Les termes suivants expriment le travail des forces extérieures :

$$W_{\text{ext}} = \int_{S_t} t_i u_i dS - \int_V f_i u_i dV \quad (2.4)$$

Ainsi,

$$\Pi = U - W_{\text{ext}} \quad (2.5)$$

Griffith a fait l'hypothèse que lors de l'accroissement de la longueur d'une fissure dans un corps suivant une loi linéaire de contrainte-déformation, l'énergie totale, composée de l'énergie potentielle de déformation  $\Pi$  et de l'énergie dite de surface  $W_s$ , est constante :

$$E = \Pi + W_s = \text{cste} \quad (2.6)$$

$W_s$  est l'énergie nécessaire à la création de nouvelles surfaces lors de l'allongement de la fissure. On a ainsi :

$$dE = d\Pi + dW_s = 0 \quad (2.7)$$

et, en utilisant l'équation (2.5) :

$$dW_{\text{ext}} = dU + dW_s \quad (2.8)$$

soit, pour un allongement  $da$  de la fissure :

$$\frac{dW_{\text{ext}}}{da} = \frac{dU}{da} + \frac{dW_s}{da}$$

Cette équation, qui exprime la conservation de l'énergie lors de la propagation de la fissure, est à la base des principaux développements de la mécanique de la rupture. Elle conduit en particulier au "critère de Griffith" et permet de définir le taux de restitution d'énergie de déformation  $G$ .

### 2.1.2. Critère de Griffith

Soit une plaque de dimensions infinies et d'épaisseur  $b$  unitaire, présentant une fissure de longueur  $2a$ . Les bords parallèles à la fissure sont soumis à une traction  $\sigma$  et fixés avant l'apparition de cette fissure (fig. 2.3).



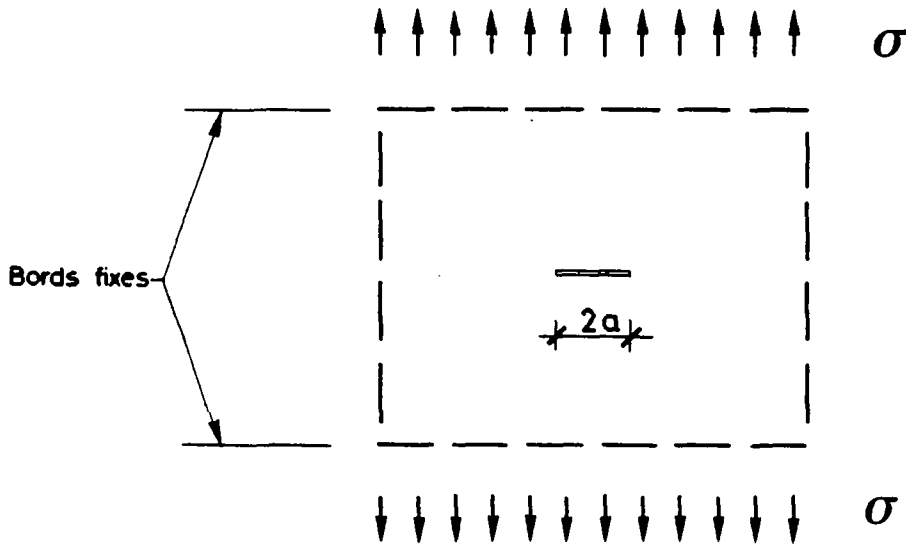


Fig. 2.3 : plaque fissurée infinie en traction

L'énergie élastique libérée par le système lors de la formation de la fissure de longueur  $2a$  s'écrit :

$$U = - \frac{\sigma^2 \pi a^2}{E^*} \quad (2.10)$$

où  $E^*$  est égal à  $E$  en contraintes planes et en déformations planes,  $E^* = \frac{E}{(1-\nu^2)}$ . L'énergie utilisée à la formation de la nouvelle surface est :

$$W_s = 4 a b \gamma = 4 a \gamma \quad (2.11)$$

où  $\gamma$  est l'énergie spécifique de rupture par unité de surface; l'épaisseur  $b$  est unitaire.

La longueur  $2a$  de la fissure créée initialement n'est pas nécessairement stable. Elle peut croître à chaque extrémité d'une longueur  $da$ , soit  $2 da$  au total, afin que la condition fixée par l'équation (2.9) soit satisfaite. Comme les bords de la plaque sont restés fixes, le travail des forces extérieures est nul et l'équation (2.9) donne :

$$\frac{dU}{da} + \frac{dW_s}{da} = 0 \quad (2.12)$$

Ainsi, la longueur de la fissure s'accroît quand la variation de  $U$  pour cette augmentation de longueur est égale et opposée à l'énergie de surface nécessaire  $dW_s$ .

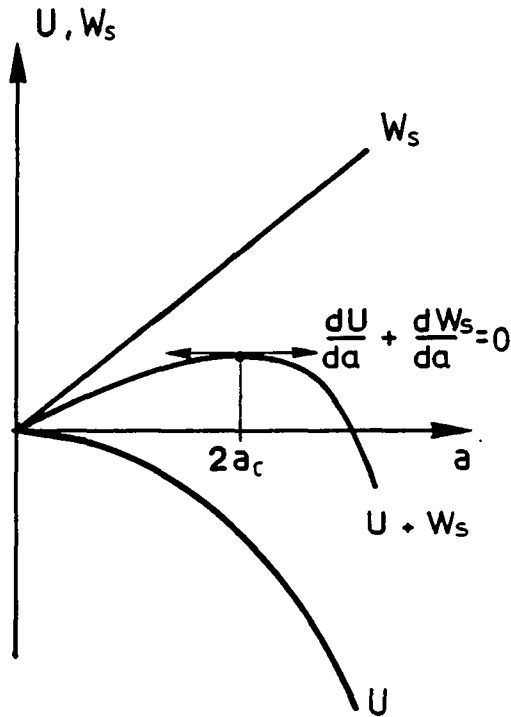


Fig. 2.4 : détermination d'une longueur critique de fissure [2.2]

La figure 2.4, construite à partir des équations (2.10) et (2.11) montre qu'il existe un maximum à la fonction  $U + W_s$  représentant une longueur de fissure critique  $2a_c$  au-delà de laquelle la fissure se propage.

En utilisant les équations (2.10), (2.11) et (2.12) on a, lors de la propagation :

$$2\gamma = \frac{\sigma^2 \pi a}{E^*}$$

d'où la longueur critique  $a_c$  :

$$a_c = \frac{2 \gamma E^*}{\sigma^2 \pi}$$

Il est également possible de déterminer la contrainte critique  $\sigma_c$  qui provoque l'extension de la fissure de longueur initiale  $2a$  :

$$\sigma_c = \sqrt{\frac{2 \gamma E^*}{\pi a}} \quad (2.13)$$

Cette dernière équation exprime le critère de stabilité de Griffith d'une fissure dans une plaque infinie en traction.

### 2.1.3. Taux de restitution d'énergie élastique de déformation

Le taux de restitution d'énergie élastique de déformation  $G$  est défini comme étant le taux de variation d'énergie de surface lors de l'accroissement  $da$  de la fissure :

$$G = \frac{dW_s}{da} = - \frac{d\Pi}{da} = \frac{d(W_{\text{ext}} - U)}{da} \quad (2.14)$$

Dans le cas de la plaque infinie en traction étudiée au § 2.1.2, l'équation (2.10) donne :

$$G = - \frac{dU}{da} = \frac{\sigma^2 \pi a}{E^*} \quad (2.15)$$

Lors de l'extension de la fissure, en considérant une de ses extrémités,  $G$  prend une valeur critique :

$$G_c = \frac{dW_s}{da} = - \frac{dU}{da} = 2 \gamma \quad (2.16)$$

La valeur de  $G_c$  se rapportant directement à  $\gamma$ , l'énergie spécifique de surface, est une propriété du matériau considéré. Le critère de Griffith s'écrit alors, en utilisant l'équation (2.13) :

$$\sigma_c = \frac{G_c E^*}{\pi a} \quad (2.17)$$

$G_c$  peut donc être utilisé comme critère de propagation de la fissure :

$G < G_c$  : la fissure est stable

$G \geq G_c$  : la fissure se propage

Il est possible, dans certains cas, d'exprimer  $G$  en fonction uniquement de l'énergie de déformation élastique  $U$ , comme le montre par exemple l'équation (2.15). L'équation des travaux virtuels rappelée à l'annexe B.10 s'écrit :

$$\int_V \sigma_{ij} \epsilon_{ij} dV = \int_S t_i u_i dS + \int_V f_i u_i dV \quad (B.35)$$

or, d'après les équations (B.19) et (2.3), l'équation B.35) peut s'écrire :

$$2U = \int_S t_i u_i dS + \int_V f_i u_i dV \quad (2.18)$$

Ainsi, pour  $S_u = \emptyset$ , alors  $S = S_t$ , et en utilisant l'équation (2.2) on obtient  $\Pi = -U$ , et donc à  $\underline{t}$  constant :

$$G = + \left. \frac{\partial U}{\partial a} \right|_t \quad (2.19)$$

De même, pour  $S_t = \emptyset$ , alors  $S = S_u$  et le travail des forces extérieures est nul; en l'absence de forces volumiques on a, à  $\underline{u}$  constant :

$$G = - \left. \frac{\partial U}{\partial a} \right|_u \quad (2.20)$$

#### 2.1.4. Intégrale J [2.4, 2.8]

En l'absence des forces volumiques  $\underline{f}$ , l'énergie potentielle de déformation  $\Pi$  d'un corps s'écrit, d'après l'équation (2.2) :

$$\Pi = \int_V W dV - \int_{S_t} t_i u_i dS \quad (2.21)$$

Pour un problème bidimensionnel, l'équation (2.21) devient :

$$\Pi = \int_{\Omega_0} W d\Omega - \int_{\Gamma_t} t_i u_i ds \quad (2.22)$$

où  $\Omega_0$  est la surface du corps considéré,  $\Gamma_0$  est son contour total.  $\Gamma_t$  est la portion de ce contour où les forces extérieures  $\underline{t}$  sont imposées et  $\Gamma_u$  la portion où les déplacements  $\underline{u}$  sont imposés. Le matériau considéré a un comportement élastique, linéaire ou non.

Si le corps considéré est fissuré (fig. 2.5), il est possible de faire l'hypothèse que les forces extérieures  $\underline{t}$  imposées sur  $\Gamma_t$  sont indépendantes de  $a$ , la longueur de la fissure, et que les lèvres de la fissure ne sont pas chargées. De plus si les déplacements imposés sur  $\Gamma_u$  sont également indépendants de  $a$ , alors la seconde intégrale de l'équation (2.22) peut être étendue au contour total  $\Gamma_0$ .

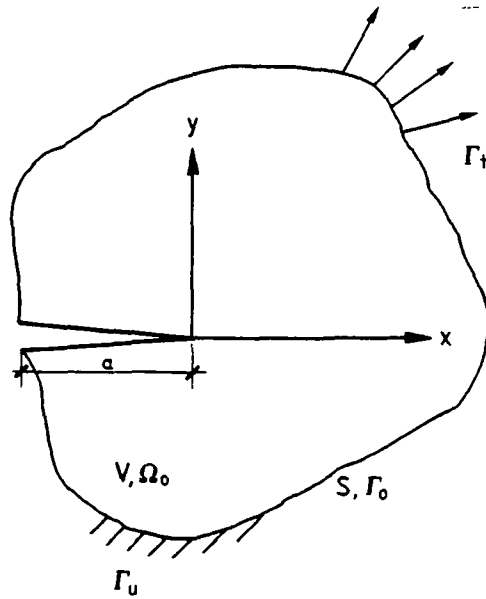


Fig. 2.5 : corps plan fissuré

En dérivant l'expression (2.22) par rapport à a, on obtient :

$$\frac{d\Pi}{da} = \int_{\Omega_0} \frac{dW}{da} d\Omega - \int_{\Gamma_0} t_i \frac{du_i}{da} ds \quad (2.23)$$

Soit  $(X, Y)$ , un repère lié à la pointe de la fissure et orienté comme le repère initial  $(x, y)$  selon la direction de la fissure (fig. 2.5 et 2.6).

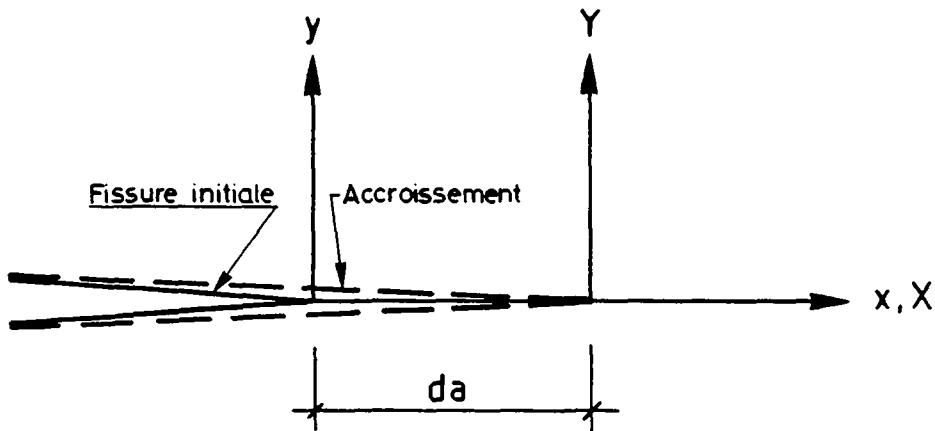


Fig. 2.6 : repère lié à la pointe de la fissure

En notant que :

$$\frac{d}{da} = \frac{\partial}{\partial a} + \frac{\partial X}{\partial a} \frac{\partial}{\partial X} = \frac{\partial}{\partial a} - \frac{\partial}{\partial X} = \frac{\partial}{\partial a} - \frac{\partial}{\partial x} \quad (2.24)$$

L'équation (2.23) s'écrit dans le système d'axes (X, Y) :

$$\begin{aligned} \frac{d\Pi}{da} = & \int_{\Omega_0} \frac{\partial W}{\partial a} d\Omega - \int_{\Gamma_0} t_i \frac{\partial u_i}{\partial a} ds \\ & - \int_{\Omega_0} \frac{\partial W}{\partial x} d\Omega + \int_{\Gamma_0} t_i \frac{\partial u_i}{\partial x} ds \end{aligned} \quad (2.25)$$

En utilisant le théorème des travaux virtuels, on peut montrer que les premiers termes de l'équation (2.25) s'annulent deux à deux, d'où l'expression :

$$- \frac{d\Pi}{da} = \int_{\Omega_0} \frac{\partial W}{\partial x} d\Omega - \int_{\Gamma_0} t_i \frac{\partial u_i}{\partial x} ds$$

soit, en notant la dérivée partielle par rapport à la première composante :

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\quad)}{\partial x} &= (\quad)_{,1} \\ - \frac{d\Pi}{da} &= \int_{\Omega_0} W_{,1} d\Omega - \int_{\Gamma_0} t_i u_{i,1} ds \end{aligned} \quad (2.26)$$

Le théorème de Green s'applique à la première intégrale :

$$- \frac{d\Pi}{da} = \int_{\Gamma_0} W n_1 ds - \int_{\Gamma_0} t_i u_{i,1} ds$$

où n est le vecteur unitaire de composants  $(n_1, n_2)$  normal à ds, élément du contour  $\Gamma$ .

En utilisant le fait que :

$$\begin{aligned} dx &= - n_2 ds \\ dy &= n_1 ds \end{aligned} \quad (2.27)$$

l'expression peut être notée :

$$-\frac{d\Pi}{da} = \int_{\Gamma_0} (W dy - t_i u_{i,1} ds) \quad (2.28)$$

Plutôt que de considérer le contour extérieur  $\Gamma_0$  du corps étudié il est possible, pour effectuer l'intégrale (2.28), d'utiliser n'importe quel contour  $\Gamma$  défini autour de la pointe de la fissure, commençant sur une des lèvres de la fissure et finissant sur l'autre (fig. 2.7).

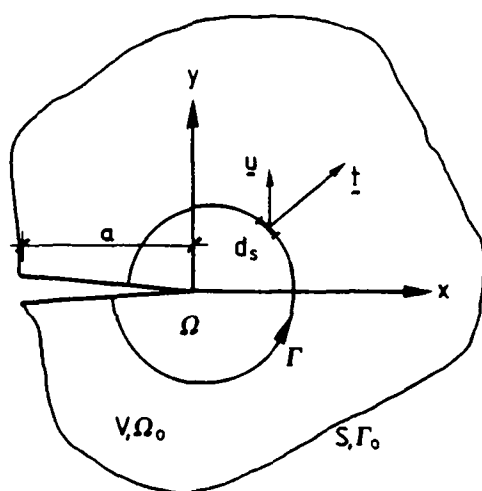


Fig. 2.7 : définition de l'intégrale J

L'intégrale J est alors définie par :

$$J = -\frac{d\Pi}{da} = \int_{\Gamma} (W n_1 - t_i u_{i,1}) ds \quad (2.29)$$

Cette intégrale est indépendante du contour d'intégration  $\Gamma$  comme il est montré au § 2.1.5. J exprime la variation d'énergie potentielle lors de l'allongement de la fissure. Ainsi, dans le cas d'un matériau à comportement linéaire, il est égal à G, le taux de restitution d'énergie de déformation élastique :

$$J = G \quad (2.30)$$

### 2.1.5. Intégrale J indépendante du contour d'intégration [2.4]

Pour démontrer que le résultat de l'intégrale J est indépendant du contour  $\Gamma$  [2.4], il est important de rappeler les hypothèses utilisées :

- le solide est considéré comme homogène,
- le matériau a un comportement élastique, linéaire ou non,
- aucune force volumique (gravité, inertie, ...) n'agit sur le corps étudié,
- les lèvres de la fissure ne sont pas chargées (par exemple, pas de pression dans la fissure),
- une seule fissure, ne donnant lieu qu'à une seule singularité du champ de contraintes, est présente dans le domaine  $\Omega$  limité par  $\Gamma$ ,
- le problème est bidimensionnel.

Soit un contour fermé  $\Gamma^*$ , limitant un domaine  $\Omega^*$  exempt de fissures. Il est possible d'appliquer le théorème de Green aux différents termes de l'expression (2.29) car il n'y a pas de singularité dans le domaine  $\Omega^*$ . Ainsi, pour le premier terme :

$$\int_{\Gamma^*} W \, dy = \int_{\Omega^*} W_{,1} \, d\Omega \quad (2.31)$$

et pour le second, en utilisant les équations (B.1 et B.2) :

$$\int_{\Gamma^*} t_i u_{i,1} \, ds = \int_{\Gamma^*} \sigma_{ij} n_j u_{i,1} \, ds = \int_{\Omega^*} (\sigma_{ij} u_{i,1})_{,j} \, d\Omega \quad (2.32)$$

en utilisant les relations (2.27) et la relation  $d\Omega = dx \, dy$ .

L'intégrale de l'équation (2.31) se développe en utilisant la définition (B.19) :

$$W_{,1} = \frac{\partial W}{\partial x} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x} = \sigma_{ij} \varepsilon_{ij,1}$$

$$\text{or,} \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (B.13)$$



donc,  $W,1 = \frac{1}{2} \sigma_{ij} u_{i,j1} + \frac{1}{2} \sigma_{ij} u_{j,i1}$

d'où, après redéfinition des indices et en utilisant l'équation (B.2) :

$$W,1 = \sigma_{ij} u_{i,j1}$$

et en utilisant l'équation (B.3) :

$$W,1 = (\sigma_{ij} u_{i,1}),j \tag{2.33}$$

ce qui revient à l'expression (2.32). Le résultat de l'intégrale J est donc

nul pour un contour  $\Gamma^*$  sans singularité :

$$J_{\Gamma^*} = 0 \tag{2.34}$$

Soit un corps comportant une fissure. On peut définir un contour fermé qui suit les lèvres de cette fissure, tel que :

$$\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4 \tag{fig. 2.8}$$

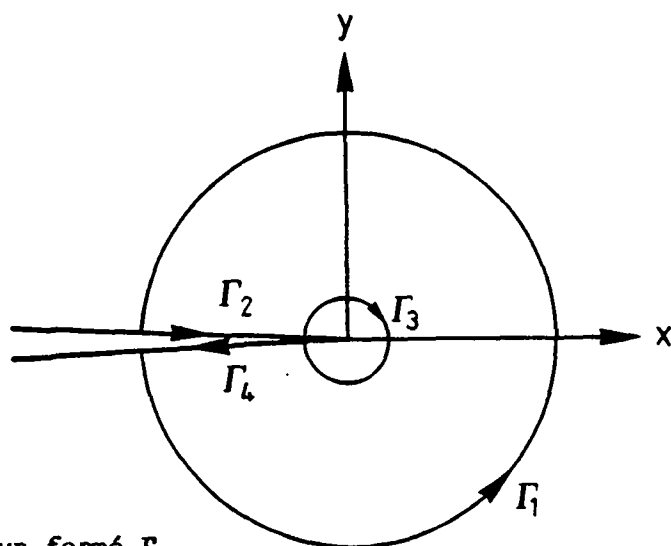


Fig. 2.8 : contour fermé  $\Gamma$

On peut admettre que  $\Gamma$  est un contour fermé sans singularité; ainsi :

$$J_{\Gamma} = J_{\Gamma_1} + J_{\Gamma_2} + J_{\Gamma_3} + J_{\Gamma_4} = 0$$

or les lèvres de la fissure ( $\Gamma_2$  et  $\Gamma_4$ ) ne sont pas chargées et  $dy$  y est nul :

$$J_{\Gamma_2} = J_{\Gamma_4} = 0$$

$$J_{\Gamma} = J_{\Gamma_1} + J_{\Gamma_3} = 0$$

$$J_{\Gamma_1} = - J_{\Gamma_3}$$

Or comme  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_3$  sont parcourus à contresens, le résultat de l'intégrale  $J$  est indépendant des contours quelconques  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_3$ .

Ce résultat établi par Rice [2.4] est d'une extrême importance, en particulier en mécanique non-linéaire de la rupture où une certaine zone plastifiée peut se développer en pointe de fissure. L'intégrale  $J$  donne une valeur des variations d'énergie pour un accroissement de fissure  $da$ .

Ainsi qu'il a été montré l'intégrale  $J$  et le taux de restitution d'énergie de déformation  $G$  sont égaux en mécanique linéaire élastique de la rupture. Ces deux grandeurs peuvent servir de critère de propagation de la fissure. Une autre approche possible est basée sur l'étude de la concentration de contraintes en pointe de fissure.

## 2.2. CONCENTRATION DE CONTRAINTES [2.1, 2.2]

### 2.2.1. Champ de contraintes autour d'une fissure

Les travaux d'Irwin ont permis de définir trois modes de chargement ou de déformation d'une fissure (fig. 2.9) :

- le **mode I** résultant d'une charge de traction perpendiculaire au plan de la fissure (ouverture de la fissure),
- le **mode II** résultant d'une charge de cisaillement, parallèle au plan de la fissure (glissement),
- le **mode III** résultant d'une charge parallèle au plan de la fissure et au front de fissure (mouvement antiplan).

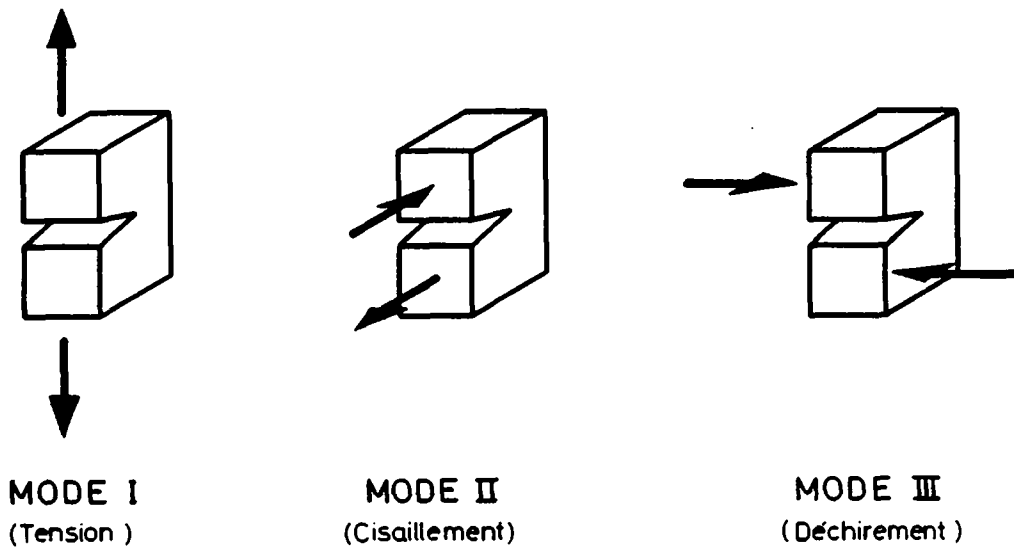


Fig. 2.9 : différents modes de chargement d'une fissure

Localement, un état quelconque de déformation d'une fissure peut être ramené à une combinaison de ces trois modes fondamentaux qui définissent un mode mixte de chargement de la fissure. Dans un problème à deux dimensions, seuls les deux premiers modes interviennent<sup>1/</sup>.

Les méthodes analytiques utilisées par la théorie de l'élasticité permettent de déterminer le champ de contraintes qui règne autour d'une fissure dans une plaque infinie chargée selon l'un des trois modes décrits précédemment [2.1 et 2.2]).

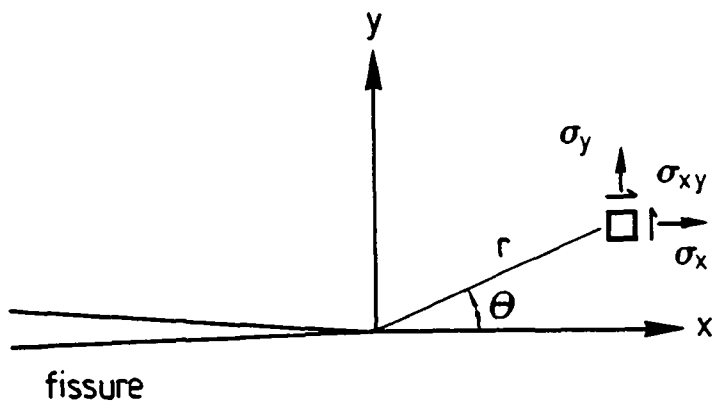


Fig. 2.10 : système de coordonnées employé pour l'analyse du champ de contraintes en pointe de fissure

1/ A trois dimensions, il est évident que la fissure peut se développer selon des formes non planes.

Dans un système de coordonnées polaires (fig. 2.10) les premiers termes des développements en série des solutions analytiques présentées ci-dessous sont inversement proportionnels à  $\sqrt{r}$ . Les contraintes sont donc infinies à la pointe de la fissure. Les termes suivants s'annulent à la pointe de la fissure, mais donnent des valeurs finies, propres aux conditions de chargement à une certaine distance de la fissure.

Ainsi, seuls les premiers termes des solutions analytiques représentent la singularité du champ de contraintes et décrivent correctement les contraintes au voisinage de la pointe de la fissure.

Les contraintes calculées pour les deux modes plans de sollicitation sont :

- **Mode I :**

$$\begin{aligned}\sigma_x^I &= \frac{K_I}{\sqrt{2 \pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}\right) + 0(r) \\ \sigma_y^I &= \frac{K_I}{\sqrt{2 \pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}\right) + 0(r) \\ \sigma_{xy}^I &= \frac{K_I}{\sqrt{2 \pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} + 0(r)\end{aligned}\tag{2.35}$$

et avec :

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi a}\tag{2.36}$$

dans le cas de la plaque infinie contenant une fissure de longueur  $2a$ , soumise à une traction uniforme biaxiale (fig. 2.11a).

- **Mode II :**

$$\begin{aligned}\sigma_x^{II} &= -\frac{K_{II}}{\sqrt{2 \pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \left[2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{2\theta}{2}\right] + 0(r) \\ \sigma_y^{II} &= \frac{K_{II}}{\sqrt{2 \pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} + 0(r) \\ \sigma_{yx}^{II} &= \frac{K_{II}}{\sqrt{2 \pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}\right) - 0(r)\end{aligned}\tag{2.37}$$

et avec :

$$K_{II} = \tau \sqrt{\pi a}\tag{2.38}$$

dans le cas d'une plaque infinie contenant une fissure de longueur  $2a$ , soumise à un cisaillement uniforme (fig. 2.11b).

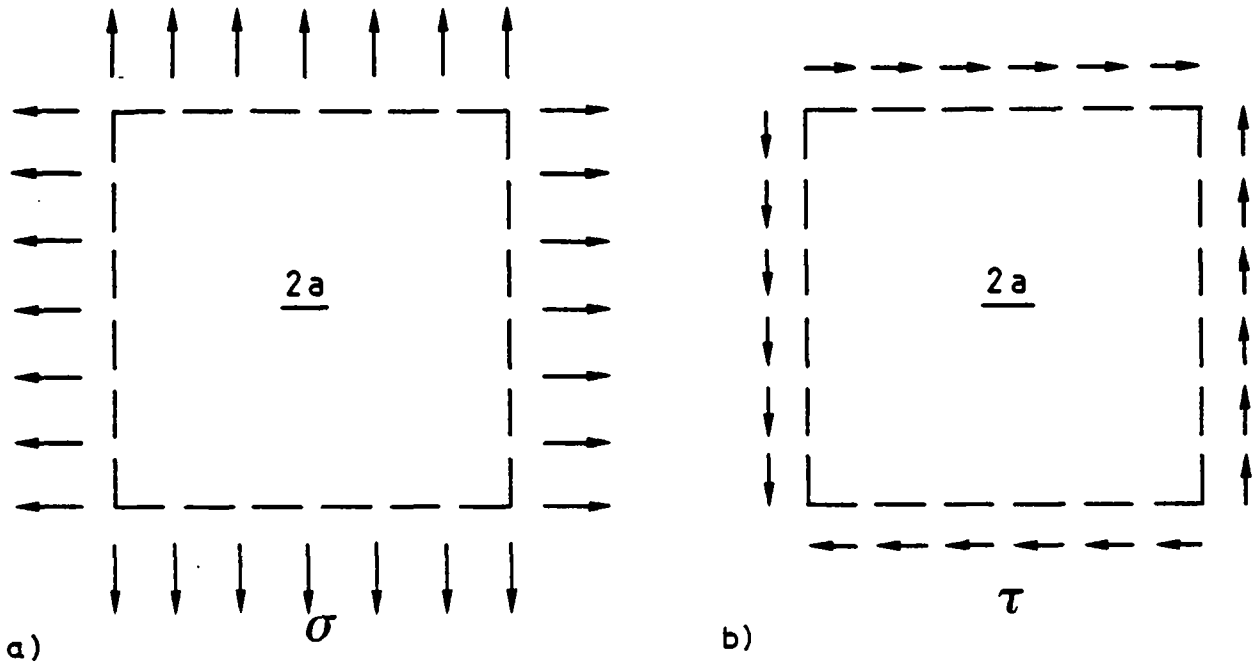


Fig. 2.11 : sollicitations en traction et en cisaillement d'une plaque infinie

Le champ de contraintes d'une fissure quelconque chargée en mode I ou II a toujours la forme des équations (2.35) ou (2.37). Seuls les facteurs  $K_I$ , respectivement  $K_{II}$  changent selon les conditions de bord.

$K_I$  et  $K_{II}$  sont les facteurs d'intensité de contraintes associés au champ de contraintes en  $1/\sqrt{r}$  au voisinage de la pointe de la fissure. Les facteurs d'intensité de contrainte sont fonction uniquement de la géométrie de la pièce fissurée, de la longueur de fissure et des conditions de bord (charges, appuis). Ils sont déterminés soit analytiquement, soit numériquement, soit expérimentalement.  $K_I$  et  $K_{II}$  s'expriment en  $N/m^{3/2}$ .

### 2.2.2. Champ de déplacement autour d'une fissure

Les relations établies en théorie de l'élasticité (voir annexe B) permettent de déterminer les champs de déplacement au voisinage de la pointe de la fissure :

- Mode I :

$$\begin{aligned} u_1^I &= \frac{K_I}{4\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left[ (2k^* - 1) \cos \frac{\theta}{2} - \cos \frac{3\theta}{2} \right] \\ u_2^I &= \frac{K_I}{4\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left[ (2k^* + 1) \sin \frac{\theta}{2} - \sin \frac{3\theta}{2} \right] \end{aligned} \quad (2.39)$$

- Mode II :

$$\begin{aligned} u_1^{II} &= \frac{K_{II}}{4\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left[ (2k^* + 3) \sin \frac{\theta}{2} + \sin \frac{3\theta}{2} \right] \\ u_2^{II} &= -\frac{K_{II}}{4\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left[ (2k^* - 3) \cos \frac{\theta}{2} + \cos \frac{3\theta}{2} \right] \end{aligned} \quad (2.40)$$

où :  $\mu$  est le module de glissement

$$k^* = (3 - \nu)/(1 + \nu) \quad \text{en contraintes planes}$$

et : (2.41)

$$k^* = 3 - 4\nu \quad \text{en déformations planes}$$

où  $\nu$  est le module de Poisson.

L'étude des champs de contrainte et de déformation au voisinage de la pointe de la fissure conduit à la définition des facteurs d'intensité de contrainte. L'équivalence avec les approches énergétiques (G, J) permet d'identifier un facteur critique d'intensité de contraintes, ce qui a été montré par Rice [2.4] et qui est résumé ci-après.

### 2.3. EQUIVALENCE DES DIFFERENTES APPROCHES

Soit une fissure quelconque, chargée en mode I. L'expression de l'intégrale J s'écrit (eq. 2.29) :

$$J = \int_{\Gamma} W \, dy - t_i u_{i,1} \, ds \quad (2.29)$$

Pour simplifier,  $\Gamma$  est un cercle de rayon  $r$  centré à la pointe de la fissure (fig. 2.12).

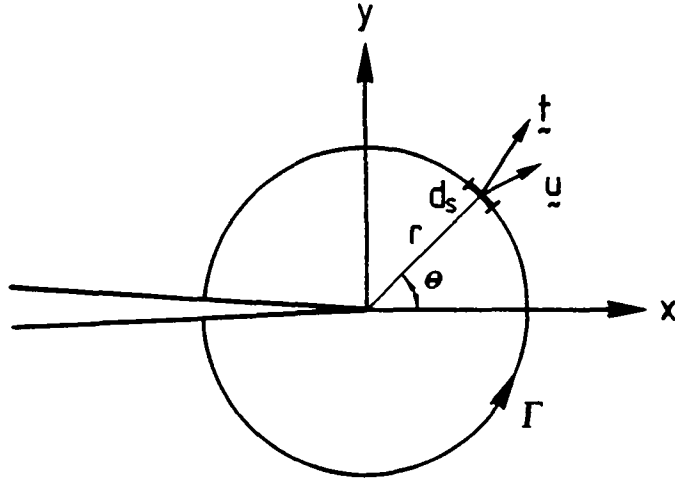


Fig. 2.12 : intégrale J : contour  $\Gamma$  circulaire

Le premier terme de J s'écrit :

$$\int_{\Gamma} W \, dy = \int_{\Gamma} \frac{1}{2} \sigma_{ij} \epsilon_{ij} \, dy \quad (2.42)$$

En utilisant les expressions de la théorie de l'élasticité (annexe B) et les équations (2.35) :

$$\int_{\Gamma} W \, dy = \frac{K_I^2}{E^*} \frac{(1 - 2\nu)}{(1 - \nu)} \quad (2.43)$$

Le deuxième terme de J peut s'écrire :

$$\int_{\Gamma} t_{ij} u_{i,1} \, ds = \int_{\Gamma} \sigma_{ij} u_{i,1} n_j \, ds \quad (2.32)$$

En remplaçant les termes de l'intégrand par les expressions données par les équations (2.35) et (2.39) :

$$\int_{\Gamma} t_i u_{i,1} \, ds = - \frac{K_I^2}{E^*} \frac{\nu}{(1 - \nu)} \quad (2.44)$$

D'après les équations (2.29), (2.30), (2.43) et (2.44) :

$$J = \frac{K_I^2}{E^*} = G \quad (2.45)$$

La même démarche peut être suivie pour le mode II par :

$$J = \frac{K_{II}^2}{E^*} = G \quad (2.46)$$

En mode mixte, c'est-à-dire pour une fissure chargée en traction et en cisaillement, le principe de superposition applicable en élasticité linéaire permet d'écrire :

$$J = \frac{K_I^2 + K_{II}^2}{E^*} \quad (2.47)$$

Cette équation exprime l'équivalence entre les deux approches basées sur des considérations énergétiques d'une part et sur la concentration de contraintes d'autre part. Cette dernière approche permet toutefois de discerner le ou les modes de chargement auxquels la fissure est soumise, ce qui influence la propagation de la fissure.

## 2.4. PROPAGATION D'UNE FISSURE

Le taux de restitution d'énergie de déformation peut servir de critère de propagation (§ 2.1.2, éq (2.12)). Une valeur critique  $G_c$ , propriété du matériau, est définie à cet effet. Comme les approches basées sur l'étude de l'énergie en pointe de fissure et celles basées sur l'analyse du champ de contraintes sont équivalentes (§ 2.3, éq. 2.47)), il est possible de définir une valeur critique du facteur d'intensité de contraintes.

### 2.4.1. Propagation d'une fissure chargée en mode de traction

Lorsqu'une fissure chargée en traction se propage, les équations (2.16) et (2.45) deviennent :



$$G_c = G = \frac{K_I^2}{E^*}$$

Le facteur d'intensité de contraintes critique est alors défini par :

$$K_{Ic} = \sqrt{G_c E^*} \quad (2.48)$$

$K_{Ic}$  est, au même titre que  $G_c$ , une valeur qui ne dépend que du matériau considéré. En mode de traction :

$$\begin{aligned} K_I < K_{Ic} & \quad : \text{ la fissure est stable} \\ K_I \geq K_{Ic} & \quad : \text{ la fissure se propage} \end{aligned} \quad (2.49)$$

$K_{Ic}$  doit être déterminé expérimentalement.

Le problème de la propagation de fissures ne peut pas toujours se ramener à l'étude d'une fissure en traction. Un critère plus général s'appliquant à un mode mixte de chargement des fissures est nécessaire.

#### 2.4.2. Propagation d'une fissure chargée en mode mixte

Le critère de propagation établi à partir du taux de restitution de l'énergie de déformation a été établi en faisant l'hypothèse d'une propagation dans une même direction que la fissure existante. Sous mode mixte, le mode de propagation est plus compliqué, car une déviation de la fissuration est observée. Cette déviation dépend du rapport  $K_{II}/K_I$ . Le critère basé sur le taux de restitution d'énergie peut être modifié en faisant l'hypothèse que la fissure se propage dans la direction où  $G$  atteint une valeur maximale [2.5]. Un tel critère revient à étudier la contrainte principale de traction maximale [2.6, 2.7]. Ce dernier critère est utilisé dans le cadre de la présente étude en raison de sa simplicité et des résultats qu'il produit comparés aux observations expérimentales. Ses hypothèses sont les suivantes :

- la propagation a lieu depuis la pointe de la fissure :
  - dans un plan perpendiculaire à la direction de traction maximale,

- quand la contrainte principale tangentielle maximale atteint la valeur de la contrainte principale qui apparaît lorsqu'en mode I le facteur critique  $K_{Ic}$  est atteint.

Les équations (2.35) et (2.37) exprimées en coordonnées polaires donnent :

$$\sigma_{\theta} = \frac{1}{\sqrt{2} \pi r} \cos \frac{\theta}{2} \left[ K_I \cos^2 \frac{\theta}{2} - \frac{3}{2} K_{II} \sin \theta \right] \quad (2.50)$$

$$\sigma_{r\theta} = \frac{1}{\sqrt{2} \pi r} \cos \frac{\theta}{2} \left[ K_I \sin \theta + K_{II} (3 \cos \theta - 1) \right] \quad (2.51)$$

Pour un angle  $\theta_0$ ,  $\sigma_{r\theta}$  est nulle. La contrainte  $\sigma_{\theta}$  est alors principale et atteint une valeur maximale. L'angle  $\theta_0$  est défini par :

$$\cos \frac{\theta_0}{2} \left[ K_I \sin \theta_0 + K_{II} (3 \cos \theta_0 - 1) \right] = 0 \quad (2.52)$$

La solution triviale  $\theta_0 = \pm \pi$  est éliminée. Le terme entre crochets de l'expression (2.52) s'exprime en fonction de  $\frac{\theta_0}{2}$  :

$$\text{tang} \frac{\theta_0}{2} = \frac{1}{4} \left( \frac{K_I}{K_{II}} \pm \sqrt{\left( \frac{K_I}{K_{II}} \right)^2 + 8} \right) \quad (2.53)$$

conduisant aux deux racines  $\theta_{01}$  et  $\theta_{02}$ .

Le signe de  $\left( \frac{d^2 \sigma_{\theta}}{d \theta^2} \right)_{\theta = \theta_{0i}}$ ,  $i = 1, 2$  identifie la valeur de l'angle pour lequel  $\sigma_{\theta}$  est minimal ou maximal. La contrainte principale est donc :

$$\sigma_2 = \sigma_{\theta}(\theta_0) = \frac{1}{\sqrt{2} \pi r} \cos \frac{\theta_0}{2} \left[ K_I \cos^2 \frac{\theta_0}{2} - \frac{3}{2} K_{II} \sin \theta_0 \right] \quad (2.54)$$

La fissure se propage si la valeur de cette contrainte principale de traction est égale à celle de la contrainte principale de traction lors de la propagation en mode I :

$$\sigma_1 = \frac{K_{Ic}}{\sqrt{2} \pi r} (\theta = 0) \quad (2.55)$$

Le critère de propagation en mode mixte s'écrit alors à partir des équations (2.54) et (2.55) :

$$\cos \frac{\theta_0}{2} \left[ K_I \cos^2 \frac{\theta_0}{2} - \frac{3}{2} K_{II} \sin \theta_0 \right] \geq K_{Ic} \quad (2.56)$$

Ainsi, une fissure soumise à un cisaillement pur se propage sous un angle d'environ  $70^\circ$  par rapport à sa direction initiale, ce qui correspond aux résultats observés expérimentalement.

A partir du calcul des facteurs d'intensité de contraintes  $K_I$  et  $K_{II}$  qui caractérisent le mode de chargement d'une fissure et l'intensité de la singularité du champ de contraintes qui règne à son extrémité, il est possible de déterminer non seulement si la fissure se propage, mais aussi la direction de sa propagation. Les critères de propagation directement basés sur l'étude du bilan énergétique en pointe de fissure ( $G, J$ ) ne donnent pas d'indication sur la direction de propagation.

Une méthode numérique, établie dans le cadre de la mécanique linéaire élastique de la rupture et basée sur le calcul des facteurs d'intensité de contraintes sera donc utilisée dans le cadre de la présente recherche.

## R E F E R E N C E S

- [2.1] D. Broek. Elementary engineering fracture mechanics. Nijhoff, 1982.
- [2.2] D.R.J. Owen, A.J. Fawkes. Engineering fracture mechanics : numerical methods and application. Pineridge, 1983.
- [2.3] A.G. Atkins, Y.W. May. Elastic and plastic fracture. Hawood, 1985.
- [2.4] J.R. Rice. A path independant integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks. Trans. ASME, J. App. Mech., 35, 1968.
- [2.5] M.A. Hussain, S.L. Pu, J.M. Underwood. Strain energy release rate for a crack under combined mode I and mode II. Fracture analysis ASTM, STP S60, 1974.
- [2.6] R.J. Nuismer. An energy release rate criterion for mixed mode fracture. Int. J. Fracture, 11, 1975.
- [2.7] F. Erdogan, G.C. Sih. On the crack extension in plates under plane loading and transverse shear. J. Basic Eng., 85, 1963.
- [2.8] M.F. Kanninen, C.H. Popelar. Advanced fracture mechanics. Oxford Univ. Press, 1985.

### 3. METHODES NUMERIQUES DE LA MECANIQUE LINEAIRE ELASTIQUE DE LA RUPTURE

La détermination des paramètres de la mécanique linéaire élastique de la rupture (G, J, K) exige une connaissance approfondie de l'état de contrainte et de déformation qui règne autour de la pointe de la fissure. Des solutions analytiques, basées sur d'importants développements mathématiques, ont été trouvées notamment par Sih, mais uniquement pour un nombre restreint de cas relativement simples [3.1, 3.2]. C'est pourquoi des méthodes numériques basées sur la méthode des éléments finis sont devenues des outils importants de la mécanique de la rupture appliquée à des structures complexes.

Les différentes méthodes numériques élaborées afin de déterminer la stabilité d'une fissure s'appuient, soit sur des considérations énergétiques, soit sur l'étude de la singularité en pointe de fissure. Ces méthodes, dont les principes sont brièvement rappelés ici, présentent des inconvénients. C'est pourquoi l'utilisation d'une méthode combinant les deux approches de la mécanique linéaire élastique de la rupture est ensuite développée.

#### 3.1. METHODES BASEES SUR L'ANALYSE DE L'ENERGIE DE FISSURATION

Les méthodes numériques de la mécanique linéaire élastique de la rupture, basées uniquement sur l'analyse de l'énergie de fissuration, ne conduisent pas à une évaluation directe des facteurs d'intensité de contraintes en mode mixte de chargement. Elles ne sont citées ici que pour mémoire.

Une première approche [3.3, 3.4] est basée sur l'évaluation du taux de restitution d'énergie de déformation G, à partir de l'équation (2.14) :

$$G = - \frac{d\pi}{da} = \frac{d(W_{\text{ext}} - U)}{da} \quad (2.14)$$

L'énergie de déformation élastique U est calculée au moyen des relations (2.3), et (B.19), à partir de la solution d'un premier calcul par éléments finis.

Un deuxième calcul est alors effectué pour une longueur de fissure augmentée d'un incrément  $\Delta a$ . G est évalué par la relation :

$$G = - \frac{\Delta \pi}{\Delta a} \quad (3.1)$$

Une autre approche est basée sur le calcul de l'intégrale J (§ 2.1.3). Elle ne nécessite pas deux calculs par éléments finis et est de ce fait souvent utilisée lors de l'étude de la stabilité d'une fissure. Cette méthode est par contre mal adaptée au problème de la propagation d'une fissure en raison de la difficulté de définir un contour d'intégration dans un réseau quelconque d'éléments finis.

### 3.2. METHODES BASEES SUR L'ANALYSE DE LA SINGULARITE

Les méthodes numériques de calcul des facteurs d'intensité de contrainte, basées sur l'analyse de la singularité du champ de contraintes au voisinage de la pointe de la fissure, font appel aux développements analytiques présentés au chapitre 2.2.

#### 3.2.1. Principe de base

Les expressions (2.39) et (2.40) donnent les déplacements  $\underline{u}$  au voisinage de la pointe de la fissure, lorsque celle-ci est chargée. En mode mixte, le principe de superposition permet d'écrire  $\underline{u}$  comme suit :

$$\begin{aligned} u_1 &= K_I u_1^I + K_{II} u_1^{II} \\ u_2 &= K_I u_2^I + K_{II} u_2^{II} \end{aligned} \quad (3.2)$$

où  $\underline{u}^I$  et  $\underline{u}^{II}$  sont les vecteurs de déplacement correspondant respectivement à des modes de traction et de cisaillement unitaires :

$$\begin{aligned} \underline{u}^I &\text{ pour } K_I = 1 && \text{et} && K_{II} = 0 \\ \underline{u}^{II} &\text{ pour } K_I = 0 && \text{et} && K_{II} = 1 \end{aligned}$$

et ainsi :

$$\begin{aligned}u_1^I &= \frac{1}{4\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} [(2k^* - 1) \cos \frac{\theta}{2} - \cos \frac{3\theta}{2}] \\u_2^I &= \frac{1}{4\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} [(2k^* + 1) \sin \frac{\theta}{2} - \sin \frac{3\theta}{2}] \\u_1^{II} &= \frac{1}{4\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} [(2k^* + 3) \sin \frac{\theta}{2} - \sin \frac{3\theta}{2}] \\u_2^{II} &= -\frac{1}{4\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} [(2k^* - 3) \cos \frac{\theta}{2} + \cos \frac{3\theta}{2}]\end{aligned}\tag{3.3}$$

en rappelant que  $k^*$  :

$$k^* = (3 - \nu)/(1 + \nu) \quad \text{en contraintes planes}$$

$$k^* = 3 - 4\nu \quad \text{en déformations planes}$$

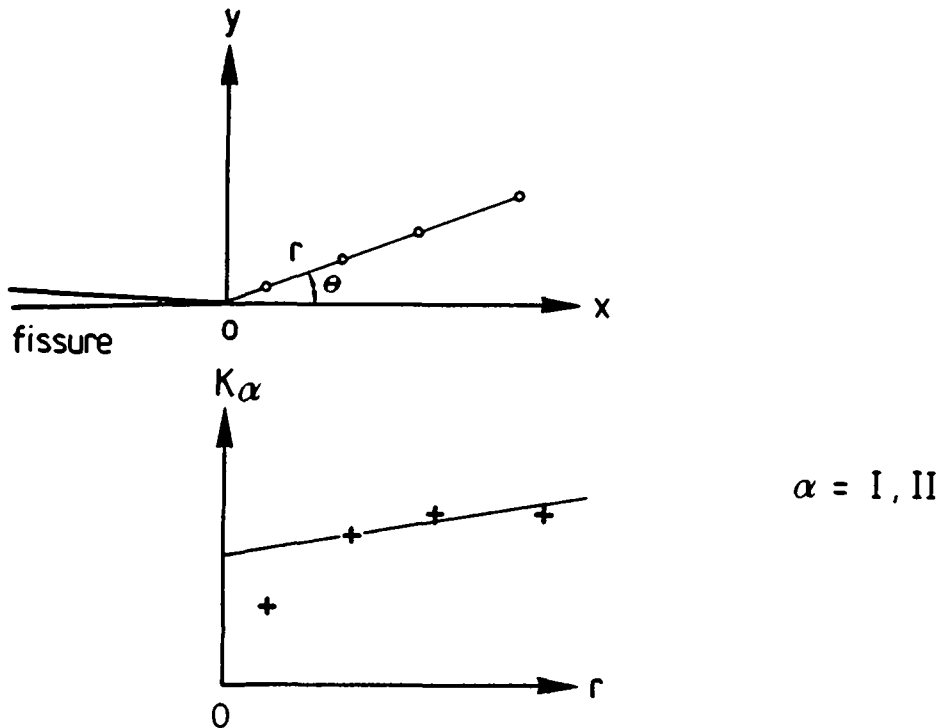
Le calcul élastique par éléments finis (annexe C) fournit une solution  $\underline{v}$  des déplacements autour de la pointe de la fissure. La solution  $\underline{v}$  est une approximation de la solution  $\underline{u}$  (éq. (3.2)) au voisinage de la pointe de la fissure :

$$\begin{aligned}v_1 &\simeq K_I u_1^I + K_{II} u_1^{II} \\v_2 &\simeq K_I u_2^I + K_{II} u_2^{II}\end{aligned}\tag{3.4}$$

Le système d'équations (3.4) permet d'évaluer  $K_I$  et  $K_{II}$  à partir des déplacements calculés en un point quelconque au voisinage de l'extrémité de la fissure.

### 3.2.2. Extrapolation des facteurs d'intensité de contrainte

L'utilisation d'éléments finis classiques ne permet pas de calculer exactement les déplacements au voisinage de la pointe de la fissure et par conséquent ne permet pas de représenter de façon satisfaisante la singularité du champ de contraintes. Les facteurs d'intensité de contrainte sont donc calculés à partir des équations (3.4) en plusieurs points situés sur des rayons émanant de la pointe ( $\theta = \text{constante}$ ). Ils sont reportés sur un graphique (fig. 3.1).



**Fig. 3.1 : extrapolation des facteurs d'intensité de contrainte**

Cette méthode conduit, par extrapolation, à la valeur de  $K_{\alpha,a} = I, II$  à l'origine. Une grande finesse du réseau est nécessaire autour de la pointe de la fissure si la singularité n'est pas modélisée par des éléments spéciaux.

### 3.2.3. Eléments spéciaux

Plusieurs types d'éléments spécialement conçus pour modéliser plus correctement les champs de contraintes et de déplacements autour de la pointe de la fissure ont été élaborés. Ils sont cités notamment par Owen et Fawkes [2.2]. Ceux-ci utilisent des fonctions de formes basées sur les équations (2.39) et (2.40) ou sur des fonctions polynomiales. Ces éléments sont donc différents dans leur formulation même des éléments du reste de la structure.



L'élément singulier développé par Barsoum [3.5] et Henshall [3.6] permet de résoudre ce problème. Cet élément est basé sur le fait que la transformation des coordonnées physiques en coordonnées paramétriques (annexe C) devient singulière dans certaines conditions. Ainsi, pour un élément plan à 8 noeuds (fig. 3.2), si les noeuds intermédiaires 5 et 8 sont déplacés au quart de la longueur des côtés, on constate que le déterminant de la matrice jacobienne associée à la transformation s'annule à la pointe de la fissure. De plus, si l'élément est dégénéré en triangle en superposant les noeuds 4 et 8 au noeud 1, les contraintes calculées à l'intérieur de l'élément sont proportionnelles à  $1/\sqrt{r}$  [2.2] comme c'est le cas pour les équations (2.35) et (2.37).



Fig. 3.2 : éléments singuliers

L'élément singulier présente l'avantage d'offrir une formulation mathématique identique à celle des autres éléments de la structure et donc de parfaitement s'intégrer dans le calcul par éléments finis. Les facteurs d'intensité de contrainte peuvent être directement déduits des déplacements des noeuds adjacents à la fissure en utilisant la méthode décrite au § 3.2.1.

### 3.2.4. Inconvénients

Les différentes méthodes de calcul des facteurs d'intensité de contrainte basées sur l'analyse de la singularité présentent toutes le même inconvénient lorsque l'étude de la propagation de la fissure est envisagée. En effet, que ce soit par un affinement local de la maille ou par l'utilisation d'éléments spéciaux, la région entourant la pointe de la fissure est différente du reste de la structure.

Une redéfinition locale du maillage d'éléments finis est alors nécessaire à chaque étape de propagation. Cette solution est souvent combinée avec une modélisation discrète de la fissure qui entraîne elle aussi un "remaillage" (§ 4.1 et [1.17]).

Une autre solution consiste à superposer au maillage original un maillage local d'éléments singuliers, ce qui nécessite la résolution d'un nouveau problème au contour [3.7] De plus en mode mixte, comme la fissure change de direction, la superposition d'un maillage local devient délicate lors de la propagation.

### 3.3. INTEGRALE DE SURFACE

La méthode proposée consiste à considérer une intégrale de surface. Il est démontré de façon originale dans ce qui suit que cette intégrale est basée d'une part sur l'énergie de déformation à la pointe de la fissure (intégrale  $J$ ) et d'autre part sur les champs de déplacements et de contraintes autour de ce point. Elle permet, sans l'utilisation d'éléments singuliers et sans un affinement excessif du réseau d'éléments finis, de calculer directement les facteurs d'intensité de contrainte  $K_I$  et  $K_{II}$ . Cette méthode apparaît comme bien adaptée au problème de la propagation de fissures.

#### 3.3.1. Hypothèses de base

Le développement de l'intégrale de surface s'appuie sur les mêmes hypothèses que celles formulées pour l'intégrale  $J$ , en particulier, aucune force volumique n'agit sur le corps considéré, et les lèvres de la fissure ne sont pas chargées. Au chapitre 6, des termes correctifs seront développés pour garantir l'indépendance du résultat de l'intégrale de surface par rapport au domaine d'intégration, dans le cas où des forces de pression agissent sur les lèvres de la fissure ou que le corps est soumis à l'action de forces volumiques.

### 3.3.2. Développement de l'intégrale de surface

Soit un petit contour  $\Gamma_\epsilon$  entourant la pointe de la fissure et englobant un domaine  $\Omega_\epsilon$ ,  $\Gamma$  est un plus grand contour limitant  $\Omega$  et  $\Gamma_{c1}$  et  $\Gamma_{c2}$  joignent  $\Gamma$  à  $\Gamma_\epsilon$  le long des lèvres de la fissure (fig. 3.3).

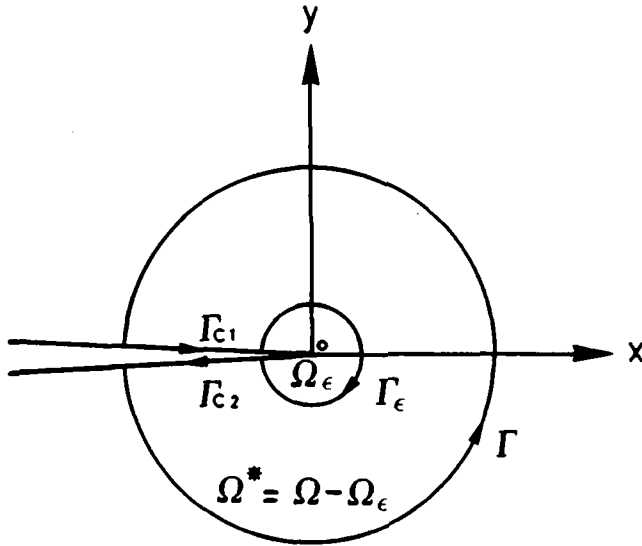


Fig. 3.3 : contours et domaine de l'intégrale de surface

Il est possible de définir un contour fermé  $\Gamma^*$  tel que :

$$\Gamma^* = \Gamma + \Gamma_{c1} + \Gamma_\epsilon + \Gamma_{c2}$$

L'intégrale  $J$  effectuée sur un tel contour est nulle (§ 2.1.5), alors que calculée sur le contour  $\Gamma_\epsilon$ , l'intégrale s'écrit :

$$J = - \int_{\Gamma_\epsilon} (W dy - t_i u_{i,1} ds) \quad (3.5)$$

Le signe négatif est dû au sens de circulation défini sur  $\Gamma_\epsilon$  (fig. 3.3).

On définit alors une fonction  $\phi$ , lisse sur le domaine  $\Omega$ , telle que :

$$\begin{cases} \phi = 0 \text{ sur } \Gamma \text{ et à l'extérieur de } \Omega \\ \phi = 1 \text{ sur } \Gamma_\epsilon \text{ et dans } \Omega_\epsilon \end{cases}$$

Sachant que le repère est orienté selon la fissure,  $dy = 0$  le long de  $\Gamma_{c1}$  et  $\Gamma_{c2}$ . De plus, comme les lèvres de la fissure ne sont pas chargées,  $t_i = 0$  sur  $\Gamma_c = \Gamma_{c1} + \Gamma_{c2}$ . Ainsi :

$$\int_{\Gamma_{C_1} + \Gamma_{C_2}} (W dy - t_i u_{i,1} ds) \phi = 0$$

et

$$\int_{\Gamma} (W dy - t_i u_{i,1} ds) \phi = 0$$

et l'on peut écrire, en utilisant la relation (2.27) :

$$\begin{aligned} J = & - \left( \int_{\Gamma_\epsilon} (W n_1 - t_i u_{i,1}) \phi ds \right. \\ & + \int_{\Gamma_C} (W n_1 - t_i u_{i,1}) \phi ds \\ & \left. + \int_{\Gamma} (W n_1 - t_i u_{i,1}) \phi ds \right) \end{aligned} \quad (3.6)$$

et, en utilisant la définition de  $\Gamma^*$  :

$$J = - \int_{\Gamma^*} (W n_1 - t_i u_{i,1}) \phi ds \quad (3.7)$$

Une intégrale a donc été définie sur le contour  $\Gamma^*$ . Cette intégrale, contrairement à l'intégrale  $J$  (2.29), n'est pas forcément nulle. Comme le contour  $\Gamma^*$  est fermé et qu'il ne comporte pas de singularité, il est possible d'appliquer la formule de Green ((2.31), (2.32)), et de passer ainsi à une intégrale sur la surface  $\Omega^* = \Omega - \Omega_\epsilon$  :

$$\begin{aligned} J = & - \int_{\Omega^*} [W_{,1} - (\sigma_{ij} u_{i,1})_{,j}] \phi d\Omega - \\ & \int_{\Omega^*} [W - \sigma_{i1} u_{i,1}) \phi_{,1} - (\sigma_{i2} u_{i,1}) \phi_{,2}] d\Omega \end{aligned}$$

La première intégrale est nulle (§ 2.1.5) :

$$J = - \int_{\Omega^*} [(W - \sigma_{i1} u_{i,1}) \phi_{,1} - (\sigma_{i2} u_{i,1}) \phi_{,2}] d\Omega$$

or comme  $W = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \epsilon_{ij}$  (B.19)

$$J = -\frac{1}{2} \int_{\Omega^*} [(\sigma_{i2} u_{i,2} - \sigma_{i1} u_{i,1}) \phi_{,1} - 2 (\sigma_{i2} u_{i,1}) \phi_{,2}] d\Omega \quad (3.8)$$

L'expression (3.7) peut être directement utilisée pour évaluer J au moyen d'une intégrale de surface. La définition d'un domaine d'intégration étant plus simple que celle d'un contour d'intégration, cette méthode peut être utilisée lors d'un calcul de propagation de fissure, par exemple si le matériau élastique présente des zones non-linéaires en pointe de fissure. Si le matériau conserve un comportement linéaire élastique, il est possible de déterminer les facteurs d'intensité de contraintes à partir de cette expression.

La solution des déplacements  $\underline{v}$ , obtenue après le calcul par éléments finis représente au mieux le champ de déplacements  $\underline{u}$  autour de la pointe de la fissure (éq. (2.39) et (2.40)). Les relations (3.4) s'écrivent :

$$\underline{v} \simeq \underline{u} = K_I \underline{u}^I + K_{II} \underline{u}^{II} \quad (3.9)$$

de plus en utilisant les relations (B.13) et (B.22) :

$$\underline{\sigma}(\underline{v}) \simeq K_I \underline{\sigma}(\underline{u}^I) + K_{II} \underline{\sigma}(\underline{u}^{II}) \quad (3.10)$$

si bien que l'expression (3.8) de l'intégrale J devient :

$$J = -\frac{1}{2} K_I \int_{\Omega^*} [(\sigma_{i2}(\underline{u}^I) v_{i,2} - \sigma_{i1}(\underline{v}) u_{i,1}^I) \phi_{,1} - (\sigma_{2i}(\underline{u}^I) v_{i,1} + \sigma_{i2}(\underline{v}) u_{i,1}^I) \phi_{,2}] d\Omega - \frac{1}{2} K_{II} \int_{\Omega^*} [(\sigma_{i2}(\underline{u}^{II}) v_{i,2} - \sigma_{i1}(\underline{v}) u_{i,1}^{II}) \phi_{,1} - (\sigma_{2i}(\underline{u}^{II}) v_{i,1} + \sigma_{i2}(\underline{v}) u_{i,1}^{II}) \phi_{,2}] d\Omega \quad (3.11)$$

Pour simplifier l'expression (3.11), on définit la fonction  $\Phi$  telle que :

$$\Phi(v, u^\alpha, \phi) = \int_{\Omega^*} [(\sigma_{i2}(u^\alpha) v_{i,2} - \sigma_{i1}(v) u_{i,1}^\alpha) \phi_{,1} - (\sigma_{2i}(u^\alpha) v_{i,1} + \sigma_{i2}(v) u_{i,1}^\alpha) \phi_{,2}] d\Omega \quad (3.12)$$

avec  $\alpha = I, II$  et l'expression (3.11) devient :

$$J = -\frac{1}{2} K_I \Phi(v, u^I, \phi) - \frac{1}{2} K_{II} \Phi(v, u^{II}, \phi) \quad (3.13)$$

En développant les deux fonctions  $\Phi(v, u^\alpha, \phi)$  et en réutilisant les relations (3.4) (annexe D "Développement des fonctions  $\Phi$ ), les facteurs d'intensité de contraintes s'écrivent directement :

$$\begin{aligned} K_I &= -\frac{E^*}{2} \Phi(v, u^I, \phi) \\ K_{II} &= -\frac{E^*}{2} \Phi(v, u^{II}, \phi) \end{aligned} \quad (3.14)$$

La fonction  $\Phi(v, u^\alpha, \phi)$  définie par (3.12) n'est autre que l'intégrale de surface proposée par Babuska & Miller [3.18]. Elle est directement liée, comme il vient d'être démontré, à l'intégrale de contour  $J$ .

#### 3.4. APPLICATIONS DE L'INTEGRALE DE SURFACE AUX PROBLEMES CLASSIQUES DE LA MECANIQUE DE LA RUPTURE

De par les propriétés de l'intégrale  $J$ , l'intégrale de surface est indépendante du domaine d'intégration. Par souci de simplicité, la surface  $\Omega$  adoptée est un disque centré à la pointe de la fissure, contenu dans les limites du corps fissuré. Une première étude des propriétés de l'intégrale de surface est basée sur la variation des dimensions du cercle limitant la surface d'intégration  $\Omega$ .

La fonction  $\phi$  introduite lors du développement de l'intégrale de surface doit être lisse sur le domaine  $\Omega$ , prendre la valeur "un" au voisinage de la pointe de la fissure et "zéro" sur le bord et à l'extérieur de  $\Omega$ . Une infinité de fonctions remplissent ces conditions. La fonction  $\phi$  la plus simple qui peut être utilisée est une fonction du second degré des variables  $x$  et  $y$  repérées à partir de la pointe de la fissure.

La zone, au voisinage de l'extrémité de la fissure, dans laquelle la fonction  $\phi$  est unitaire peut être plus ou moins étendue. Une variation des dimensions de cette zone entraîne une modification de la fonction  $\phi$  à l'extérieur de la dite zone. Les conséquences d'une telle variation sur le calcul des facteurs d'intensité de contrainte sont étudiées en second lieu.

La précision du calcul de l'intégrale de surface dépend de la densité de la maille d'éléments finis utilisée; ainsi plus le réseau d'éléments finis est dense, meilleure doit être la précision. La convergence de l'intégrale de surface est vérifiée en dernier point.

Ces trois études sont effectuées en utilisant l'intégrale de surface afin de résoudre deux problèmes classiques de la mécanique de la rupture, pour lesquels les solutions en  $K_I$  et  $K_{II}$  sont connues analytiquement :

- **problème 1** : l'étude d'une pièce rectangulaire fissurée soumise à un effort de traction,
- **problème 2** : l'étude d'une pièce rectangulaire présentant une fissure oblique soumise à un effort de traction.

Ils sont représentés sur les figures 3.4 et 3.5 qui indiquent également les valeurs analytiques (théoriques) de  $K_I$  et  $K_{II}$ . Ces dernières sont connues à environ 1 % près.

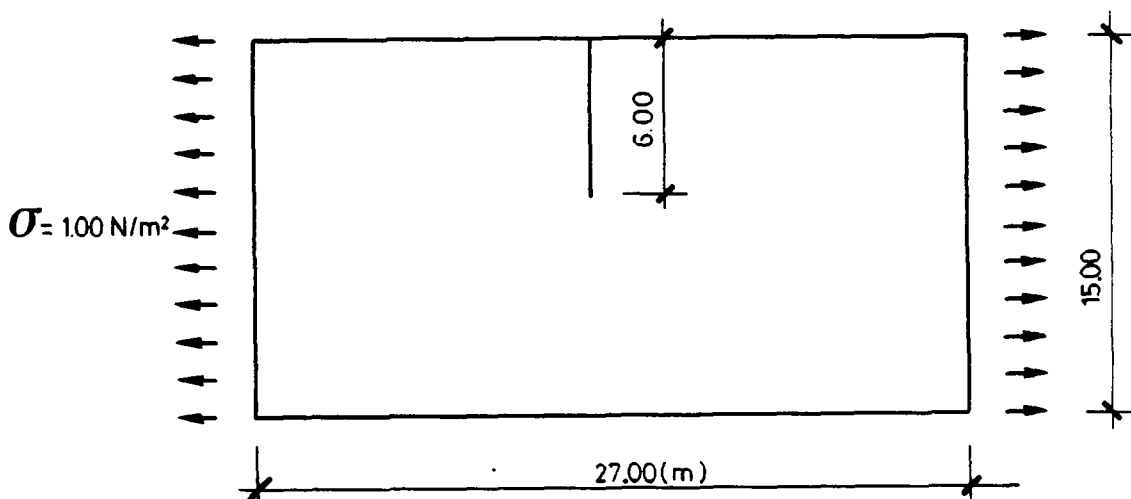


Fig. 3.4 : fissure en mode de traction

$$\begin{matrix} K_I \\ \text{th} \end{matrix} = 9,20 \text{ N/m}^{3/2} \quad , \quad \begin{matrix} K_{II} \\ \text{th} \end{matrix} = 0,00 \text{ N/m}^{3/2} \quad [3.1]$$

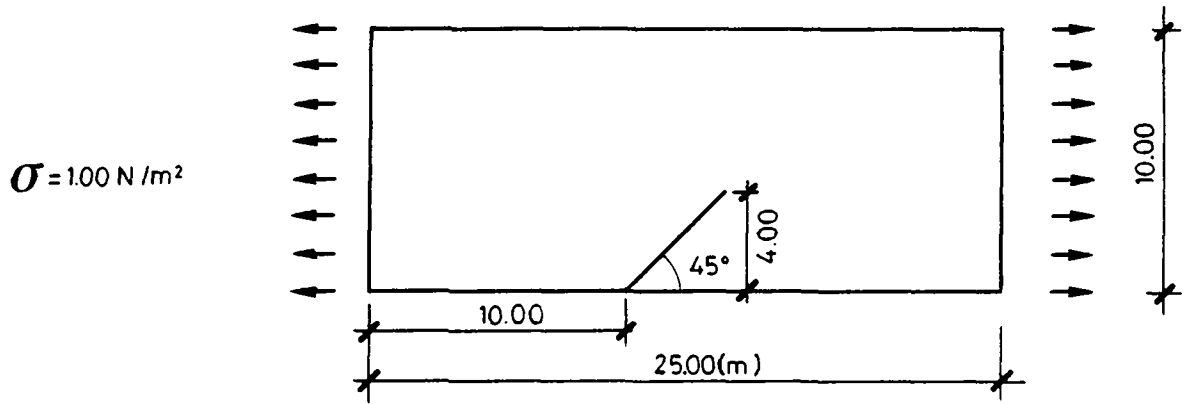


Fig. 3.5 : fissure en mode mixte :

$$\begin{matrix} K_I \\ \text{th} \end{matrix} = 5,69 \text{ N/m}^{3/2} , \quad \begin{matrix} K_{II} \\ \text{th} \end{matrix} = - 2.63 \text{ N/m}^{3/2} \quad [3.1]$$

### 3.4.1. Définition d'une fonction $\phi$

La figure 3.6 représente le disque d'intégration défini par son rayon noté  $R_e$ . Le voisinage de la pointe de la fissure dans lequel la fonction  $\phi$  vaut "un" est également défini par un disque de rayon  $R_i$ .

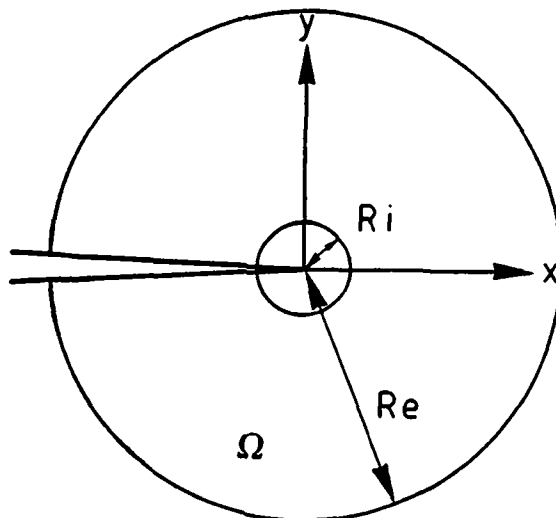


Fig. 3.6 : disque d'intégration dans un corps fissuré quelconque



La fonction  $\phi$  utilisée est une parabole définie entre les deux cercles de rayons  $R_e$  et  $R_i$ . La valeur de  $\phi$  en un point quelconque P de coordonnées  $(x, y)$  est calculée en considérant les points C et D situés sur le même rayon que P et respectivement sur les cercles de rayon  $R_e$  et  $R_i$ . Le point D est le sommet de la parabole, et la fonction  $\phi$  est nulle en C. On obtient ainsi :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \phi(x, y) = 1 & \text{si } x^2 + y^2 \leq R_i \\ \phi(x, y) = 1 - \frac{(x - x_D)^2 + (y - y_D)^2}{(x_C - x_D)^2 + (y_C - y_D)^2} & \text{si } R_i < x^2 + y^2 < R_e \\ \phi(x, y) = 0 & \text{si } x^2 + y^2 \geq R_e \end{array} \right. \quad (3.15)$$

L'étude de la variation des facteurs d'intensité de contraintes en fonction de l'étendue de la surface d'intégration se fait en gardant  $R_i$  nul, si bien que  $\phi$  est alors définie par :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \phi(x, y) = 1 - \frac{x^2 + y^2}{R_e^2} & \text{si } x^2 + y^2 \leq R_e \\ \phi(x, y) = 0 & \text{si } x^2 + y^2 > R_e \end{array} \right. \quad (3.16)$$

### 3.4.2. Facteur correctif de surface

L'intégration numérique des expressions (3.12) est effectuée sur un domaine  $\Omega_h$  qui dépend de la densité de la maille d'éléments finis et qui représente au mieux la surface d'intégration théorique définie par :

$$\Omega^* = \Omega_0 = \pi(R_e^2 - R_i^2) \quad (3.17)$$

Le facteur correctif de surface H est alors défini :

$$H = \frac{\Omega_0}{\Omega_h} \quad (3.18)$$

et l'on a :

$$\lim_{h \rightarrow 0} H = 1 \quad (3.19)$$

où  $h$  est la dimension caractéristique du maillage d'éléments finis utilisé. Pour deux cercles différents définissant deux surfaces d'intégration différentes mais incluant le même nombre de points d'intégration,  $\Omega_h$  est constant. Pour  $R_i = 0$ , on a :

$$H = \text{cste } R_e^2 \quad (3.20)$$

Les seuls termes qui varient alors dans l'expression (3.12) sont les dérivées de la fonction  $\phi$  définie précédemment :

$$\phi_{,i} = - \frac{2 x_i}{R_e^2} \quad i = 1,2 \quad (3.21)$$

Le facteur correctif de surface permet de pondérer les expressions (3.14) en fonction de l'erreur commise lors de l'intégration numérique. On a alors en un point d'intégration :

$$H \phi_{,i} = \text{cste} \quad (3.22)$$

Ainsi, si pour deux surfaces d'intégration différentes, le nombre de points d'intégration est constant, les résultats des expressions suivantes sont également constants :

$$\begin{aligned} K_I &= - H \frac{E^*}{2} \Phi (v, u^I, \phi) \\ K_{II} &= - H \frac{E^*}{2} \Phi (v, u^{II}, \phi) \end{aligned} \quad (3.23)$$

où  $\Phi$  est définie par (3.12).

### 3.4.3. Variation de la surface d'intégration

Les éléments finis utilisés pour la modélisation des pièces des problèmes 1 et 2 sont des éléments isoparamétriques à 4 noeuds (annexe C). L'hypothèse de déformation plane est appliquée (annexe B). La fissure est modélisée de façon discrète (§ 4.1). L'intégrale de surface est calculée en considérant quatre points d'intégration par élément.

**a. Problème 1** fissure en traction (fig. 3.4)

La figure 3.7 montre la variation de la valeur calculée du facteur d'intensité de contraintes  $K_I$  en fonction du rayon extérieur  $R_e$  variant de 0 à 6 m. Pour  $R_e = 6$  m, le disque d'intégration est tangent au bord de la pièce fissurée.

Trois maillages d'éléments finis sont utilisés; 50 éléments (maillage grossier), 98 éléments (moyen), 420 éléments (fin).

Pour chaque maillage, les expressions (3.14) et (3.23) sont successivement utilisées lors du calcul de  $K_I$  qui est comparé à la valeur théorique (fig. 3.4) représentée par un traitillé.

Comme attendu, on vérifie par ces calculs que :

- les valeurs de  $K_I$  sont d'autant plus proches de la valeur théorique que le maillage est fin;
- les variations de  $K_I$  en fonction de  $R_e$  sont d'autant plus fortes que le maillage est grossier;
- la pondération par le facteur correctif  $H$  fait apparaître des valeurs constantes dans les zones pour lesquelles le nombre de points d'intégration ne varie pas (éq. (3.22)); l'introduction du facteur  $H$  atténue les variations de  $K_I$ ;
- les valeurs de  $K_I$  perdent de leur précision lorsque  $R_e$  diminue sensiblement; le nombre de points d'intégration considéré est alors trop faible pour traduire correctement l'influence de la singularité.

**b. Problème 2** : fissure en mode mixte (fig. 3.5)

$R_e$  varie maintenant de 0 à 4 m, valeur pour laquelle le disque d'intégration est tangent au bord de la plaque fissurée.

Trois maillages d'éléments finis sont utilisés : 24 éléments (maillage grossier), 70 éléments (moyen), 260 élément (fin).

La figures 3.8 représente, pour ces trois maillages, la variation de  $K_I$  en fonction de  $R_e$ , avec ou sans le facteur correctif de  $H$ .

La figure 3.9 représente les variation de  $K_{II}$  (le signe négatif dépend de la convention admise dans les équations définissant  $K_{II}$  et de la géométrie du problème.

Outre les remarques déjà formulées à propos du problème 1, on constate que la précision de l'évaluation de  $K_{II}$  est supérieure à celle de  $K_I$ .





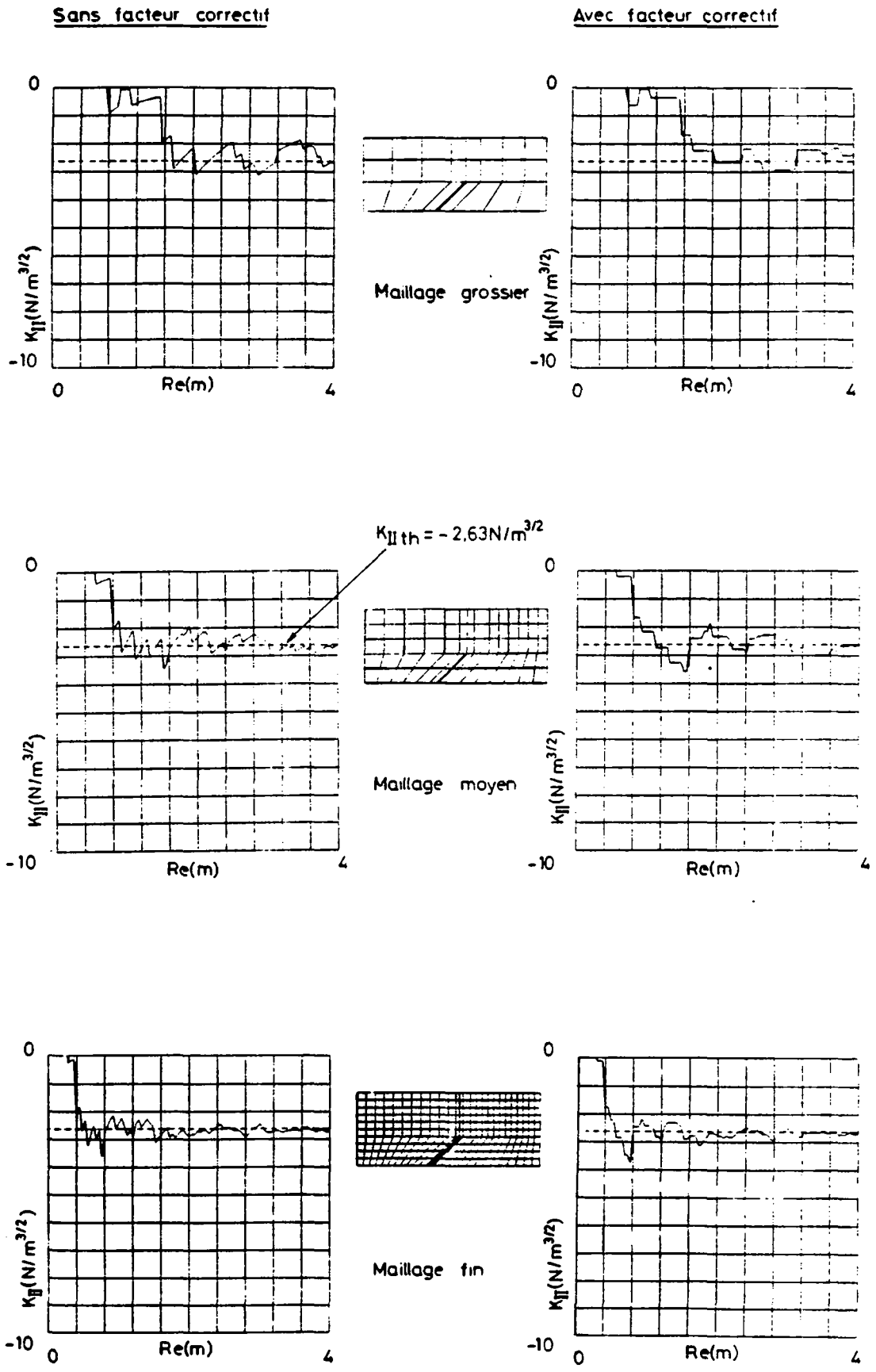


Fig. 3.9 : problème 2 - variation de  $K_{II}$  en fonction de  $Re$

#### 3.4.4. Variation de la fonction $\phi$

Pour un rayon extérieur d'intégration fixé, la fonction  $\phi$  associée au disque d'intégration peut être modifiée en faisant varier le rayon intérieur d'intégration  $R_i$ . On examine maintenant l'influence de  $R_i$  sur le calcul des facteurs d'intensité de contraintes. Les résultats obtenus pour les maillages fins des problèmes 1 et 2 sont présentés aux figures 3.10 à 3.11 (des résultats comparables ont été obtenus pour les autres maillages). Dans les deux cas  $R_e$  est fixé à sa valeur maximale (tangent au bord du modèle).

Excepté pour des valeurs de  $R_i$  proches de  $R_e$ , où le nombre de points d'intégration est trop faible, les valeurs calculées des facteurs d'intensité de contraintes sont quasiment constantes. Sans pondération par le facteur correctif  $H$ , les variations de  $K_I$  ou de  $K_{II}$  sont monotones sur la majeure partie du graphique. Ceci est dû au fait que la fonction  $\phi$  est lisse sur le disque d'intégration.

D'autres types de fonctions  $\phi$  ont été étudiés, en particulier une fonction cubique des variables  $x$  et  $y$ . Cette dernière conduit à une pondération plus forte des valeurs proches de l'origine, mais comme le nombre de points d'intégration diminue à proximité de la pointe de la fissure, le résultat final est semblable à celui obtenu avec la fonction  $\phi$  parabolique.

#### 3.4.5. Convergence de l'intégrale de surface

En conclusion des études précédentes et afin d'éviter des valeurs particulières (maxima ou minima relatifs que l'on observe sur les graphiques), il apparaît nécessaire de déterminer une valeur moyenne des facteurs d'intensité obtenus après plusieurs calculs utilisant différents disques d'intégration tels que :

$$\frac{R_{e_{\max}}}{2} < R_e < R_{e_{\max}} \quad \text{et} \quad R_i = 0 \quad (3.24)$$

où  $R_{e_{\max}}$  est le rayon du plus grand cercle possible, tangent au bord de la pièce (ou à une autre fissure).

Cette définition du calcul des facteurs d'intensité de contrainte à partir de l'intégrale de surface est fondée sur le comportement de la dite

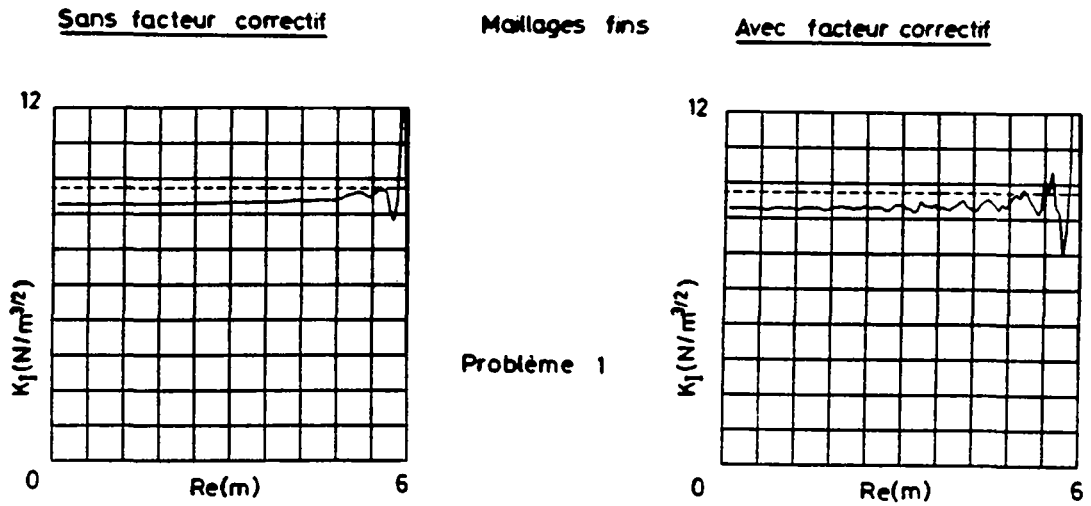


Fig. 3.10 : problème 1 - variation de  $K_I$  en fonction de  $Re_i$

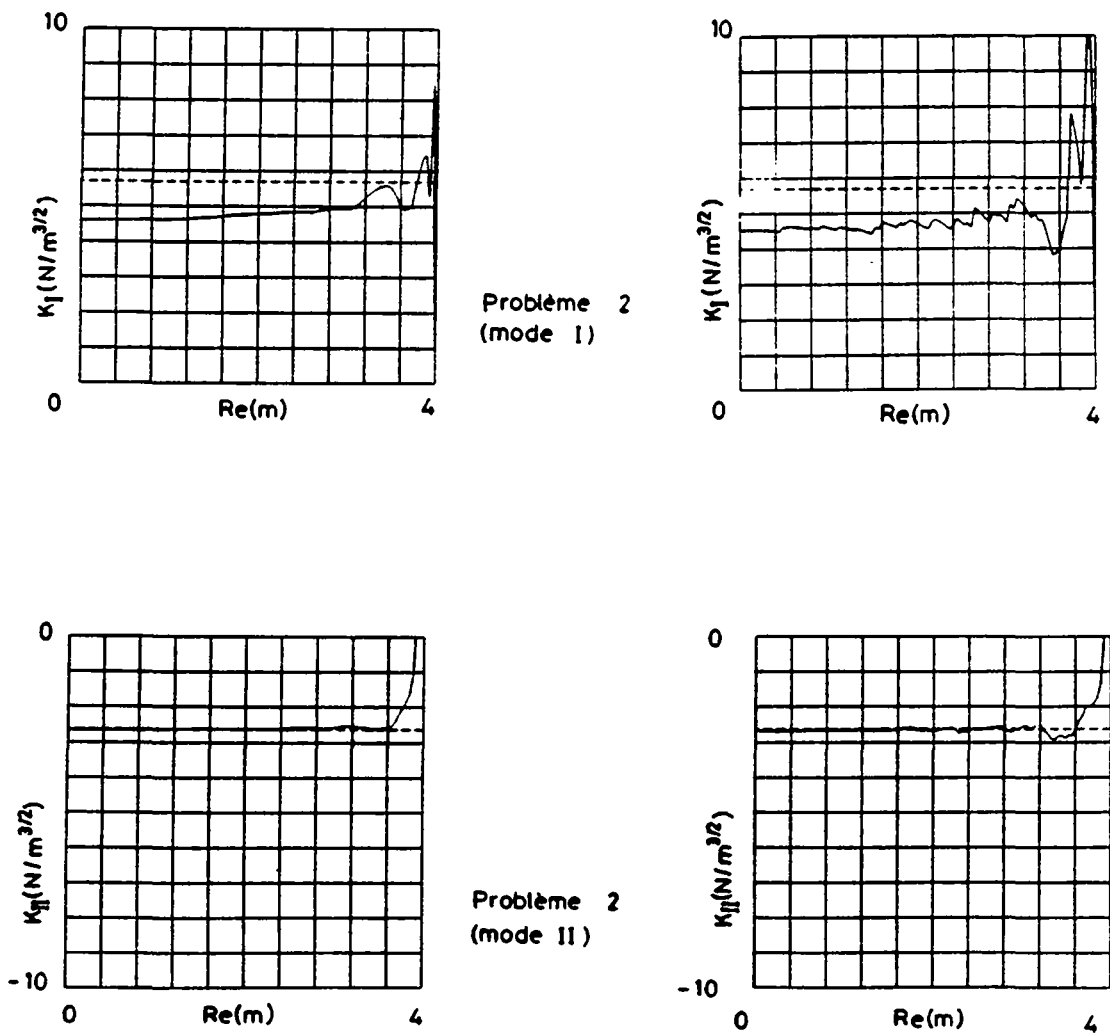


Fig. 3.11 : problème 2 - variation de  $K_I$  et  $K_{II}$  en fonction de  $Re_i$



intégrale lors des deux études précédentes. Ces dernières illustrent les différents cas de la mécanique de la rupture dans le plan, et ce pour des maillages plus ou moins denses, réguliers (problème 1) et irréguliers (problème 2). Cette définition sera vérifiée en particulier lors de l'étude de la propagation des fissures (§ 5).

Pour vérifier la convergence de l'intégrale de surface, les problèmes 1 et 2 sont à nouveau étudiés en considérant les maillages définis précédemment, auxquels sont ajoutés deux maillages très fins : 840 éléments (problème 1) et 504 éléments (problème 2).

Les facteurs d'intensité de contraintes sont la moyenne des valeurs obtenues en considérant 50 disques d'intégration. Chaque valeur est pondérée par le facteur correctif de surface  $H$  (3.23). La densité d'éléments, définie par le nombre d'éléments rapporté à la surface de la pièce est reportée en abscisse sur la figure 3.12. L'erreur en pourcent par rapport à la valeur théorique, commise sur l'évaluation des facteurs d'intensité de contraintes est reportée en ordonnée. Les résultats sont également reportés au tableau 3.1.

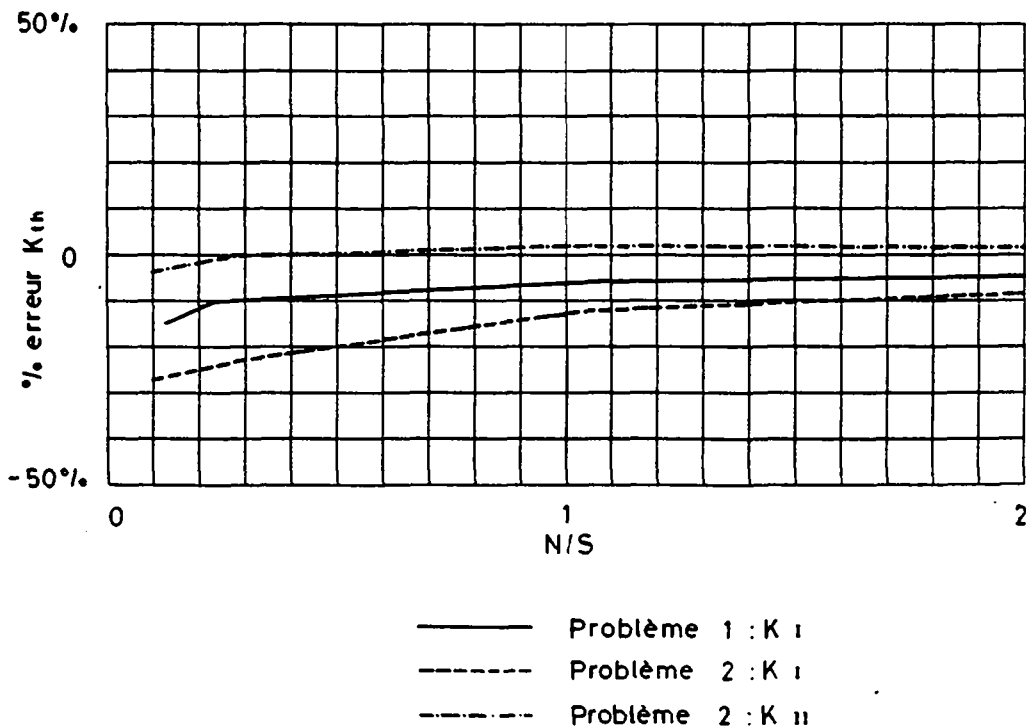


Fig. 3.12 : convergence de l'intégrale de surface



De plus, il est important de préciser que l'erreur commise sur le calcul des facteurs d'intensité de contraintes est essentiellement due à l'absence de modélisation précise de la singularité de la pointe de la fissure plutôt qu'à la méthode de calcul elle-même.

En conclusion, l'utilisation d'une intégrale de surface est une méthode numériquement efficace pour le calcul des facteurs d'intensité de contraintes. Du fait que cette méthode ne nécessite pas un affinement du réseau d'éléments finis en pointe de fissure ou l'utilisation d'éléments singuliers, elle est particulièrement adaptée à l'étude de la propagation des fissures, et à l'utilisation d'un modèle de fissuration de type répartie.

#### R E F E R E N C E S

- [3.1] D.P. Rooke, D.J. Cartwright. Compendium of stress intensity factors. HMSO, London, 1975.
- [3.2] G. Sih (Ed.). Mechanics of fracture. Noordhoff, 1977.
- [3.3] D.M. Parks. A stiffness derivative finite element technique for determination of elastic crack tip stress intensity factors. Int. J. of Fracture, 10, No 4, 1973.
- [3.4] T. Hellen. On the method of virtual crack extension. Int. J. Num. Meth. in Eng., 9, No 1, 1975.
- [3.5] R.S. Barsoum. Triangular quarter point element as elastic and perfectly-plastic crack tip element. Int. J. Num. Meth. in Eng., 11, No 1, 1977.
- [3.6] R.D. Mershall, K. Shaw. Crack tip elements are necessary. Int. J. Num. Meth. in Eng., 9, 1975.
- [3.7] J. Chapuis, B. Rebora, Th. Zimmermann. Numerical approach of crack propagation analysis in gravity dams during earthquakes, question 57. 15ème Congrès International des Grands Barrages, Lausanne, Switzerland, juin 1985.
- [3.8] I. Babuska, A. Miller. The post-proceeding approach in the finite element method. Int. J. Num. Meth. in Eng., V. 20, 1984.



#### 4. MODELISATION DE LA FISSURE

La présence d'une fissure dans une structure analysée par la méthode des éléments finis peut être modélisée de différentes façons. Le choix de la modélisation a une influence sur l'algorithme de propagation et sur le comportement de la fissure elle-même. Le présent chapitre a pour but de définir la modélisation de la fissure utilisée dans le modèle proposé.

##### 4.1. MODELE DE FISSURATION DISCRETE

La modélisation "discrète", obtenue par déconnexion des noeuds des éléments finis de chaque côté des lèvres, semble a priori la façon la plus simple de représenter une fissure (fig. 4.1).

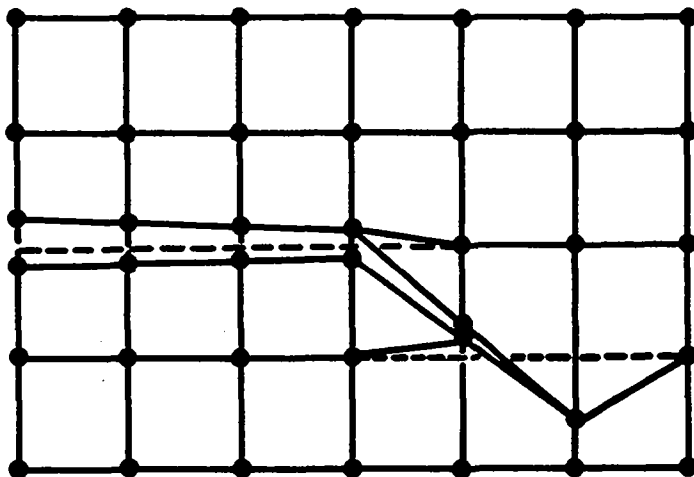


Fig. 4.1 : fissuration discrète

Ce modèle rend relativement bien compte de la singularité en pointe de fissure, surtout si des éléments singuliers sont utilisés (§ 3.2.3).

Néanmoins, lorsque la fissure se propage, elle entraîne à chaque étape de sa propagation à travers le réseau des éléments finis, la création de nouveaux noeuds et la redéfinition des éléments en fonction de ces noeuds. Ce "remaillage" est d'autant plus complexe que la fissure, soumise par exemple à un mode mixte de sollicitation, ne se propage pas sur une ligne de noeuds du réseau. Ainsi, après chaque étape de propagation, le nombre d'inconnues (déplacements à chaque noeud), et donc les dimensions du problème augmentent.

L'utilisation d'un algorithme explicite (qui par définition calcule l'état  $n+1$  à partir de l'état  $n$ ), permet d'éviter la formation de la matrice globale de rigidité (annexe C). Cette procédure semble adaptée au choix d'une modélisation discrète de la fissure, mais présente l'inconvénient de n'être stable qu'à certaines conditions. Ainsi, pour un problème dynamique, les incréments de temps doivent être très petit pour garantir la stabilité de l'algorithme.

Si l'on utilise un algorithme implicite (qui calcule l'état  $n+1$  en résolvant les équations correspondant à cet état), la matrice globale de rigidité est calculée à chaque étape de propagation. La modélisation discrète de la fissure conduit alors à une matrice globale de rigidité dont les dimensions ne cessent de croître.

Un algorithme d'optimisation peut éventuellement redéfinir le réseau pour éviter le stockage d'un grand nombre de termes nuls dans la matrice globale de rigidité.

La fissure discrète a été développée par Ngo & Scordelis [1.5]. Elle a été employée par Skrikerud pour l'analyse de la fissuration de barrages poids en béton pendant un séisme [1.3]. Saouma [1.17] utilise aussi une telle modélisation, mais combinée avec un critère de rupture basé sur la mécanique linéaire élastique de la rupture, et un algorithme implicite.

#### **4.2. MODELE ELASTIQUE DE FISSURATION REPARTIE**

Cette modélisation, développée par Rashid [1.4], permet d'éviter de changer la configuration du réseau d'éléments finis lors de la propagation d'une fissure. Seules les propriétés élastiques des éléments traversés par la fissure sont modifiées. Ainsi la rigidité des éléments fissurés, originellement isotrope, est remplacée par une rigidité localement anisotrope, selon la direction de la fissure qui traverse l'élément. La propagation d'une fissure dans une direction quelconque par rapport au maillage peut être représentée par la fissuration de plusieurs éléments situés sur le passage de la fissure réelle (fig. 4.2).

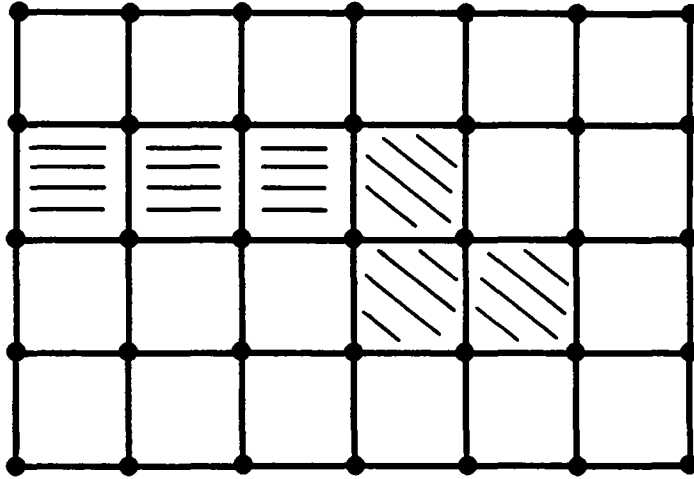


Fig. 4.2 : fissuration répartie

Soit la matrice d'élasticité bidimensionnelle (§ B.7) :

$$D_e = \frac{E^*}{1 - \nu^{*2}} \begin{vmatrix} 1 & \nu^* & 0 \\ \nu^* & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu^*}{2} \end{vmatrix}$$

Si la fissure est orientée selon l'axe local "y" (fig. 4.3), la rigidité selon "x" est annulée, et après inversion partielle, la matrice fissurée s'écrit dans le repère local<sup>1/</sup> :

$$D'_f = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & E^* & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\alpha E^*}{2(1+\nu^*)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & E^* & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \mu \end{vmatrix} \quad (4.1)$$

avec  $0 \leq \alpha \leq 1$ .

Le facteur  $\alpha$  qui est introduit ici a pour but de réduire la rigidité de cisaillement de l'élément fissuré. Certains auteurs tentent de donner une explication physique à ce coefficient en le rendant significatif du degré d'imbrication des agrégats du béton entre les lèvres de la fissure [4.1]. Cependant, même si  $\alpha$  est nul, la matrice de rigidité

1/ L'indice "prime" est significatif de l'expression d'une matrice ou d'un tenseur dans un repère local.

de l'élément (annexe C) présente des liaisons indésirables subsistant entre les noeuds séparés par la fissure. En effet, la sous-matrice de rigidité d'un élément s'écrit, au niveau nodal :

$$\tilde{k}_{ab}^e = \int_{\Omega^e} \tilde{B}_a^T \cdot \tilde{D} \cdot \tilde{B}_b \, d\Omega \quad (C.10)$$

où les matrices  $\tilde{B}$  sont formées des dérivées des fonctions de forme (annexe C).

Pour un élément fini fissuré selon l'axe local "y'" (fig. 4.3) et si  $\alpha$  est nul,  $\tilde{D}_f$  s'écrit :

$$\tilde{D}'_f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & E^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

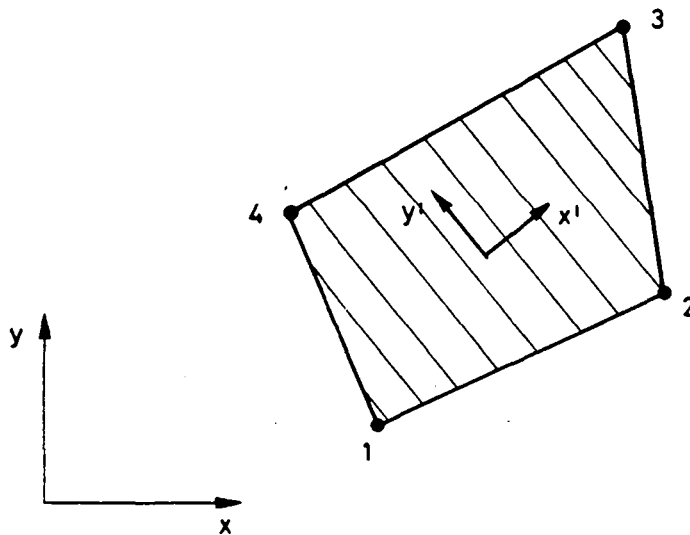


Fig. 4.3 : élément fissuré

La matrice  $k_{ab}^e$  dans le repère local devient alors :

$$k_{ab}^e = \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ 0 & E N_{a,2} & N_{b,2} \end{pmatrix} \quad (4.4)$$



La matrice de rigidité  $\tilde{k}^e$  de l'élément exprimée dans le repère local est le résultat de l'assemblage des sous-matrices  $k_{ab}^e$  :

$$\tilde{k}^e = E^* \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \textcircled{N_{1,2}} & \textcircled{N_{1,2}} & 0 & \textcircled{N_{1,2}} & \textcircled{N_{2,2}} & 0 & \textcircled{N_{1,2}} & \textcircled{N_{3,2}} & 0 & N_{1,2} & N_{4,2} \\ & & 0 & & 0 & 0 & & 0 & 0 & & 0 \\ & & & N_{2,2} & N_{2,2} & 0 & & N_{2,2} & N_{3,2} & 0 & N_{2,2} & N_{4,2} \\ & & & & & 0 & & 0 & 0 & 0 & & 0 \\ & & & & & & & N_{3,2} & N_{3,2} & 0 & N_{3,2} & N_{4,2} \\ & & & & & & & & & 0 & 0 & \\ & & & & & & & & & & & N_{4,2} & N_{4,2} \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

(sym)

Une certaine rigidité apparaît entre des noeuds pourtant séparés par la fissure (par exemple les termes entourés montrent la liaison qui existe entre les noeuds 1 d'une part et 2 ou 3 d'autre part, selon la direction "y").

Cette rigidité transversale indésirable se traduit par un mauvais comportement de l'élément fissuré en cisaillement. En particulier l'élément fissuré ne permet pas de simuler correctement une fissure soumise à un mode mixte de sollicitation. Il présente même en cisaillement un "blocage" de plus en plus prononcé quand la densité du maillage d'éléments finis augmente. Des résultats numériques qui illustrent ceci sont présentés à l'annexe F. Le tableau F.3 montre clairement l'effet de "blocage" en cisaillement qui se traduit par une erreur croissante sur  $K_{II}$  alors que le maillage est de plus en plus fin.

#### 4.3 MODELE ELASTO-PLASTIQUE DE FISSURATION REPARTIE

Ce modèle de fissure proposé par Chen [4.1] utilise des éléments de la théorie de la plasticité pour décrire le comportement du béton fissuré. Il modélise en particulier la relaxation des contraintes constatée après qu'un critère de contrainte maximal ait été atteint, ce qui rentre dans le cadre de la mécanique non-linéaire de la rupture (§ 1.2). Or, comme cela a déjà été exposé au § 1.3, la mécanique élastique de la rupture est

adaptée au problème étudié dans le cadre de cette recherche. Le modèle proposé par Chen a donc été modifié et complété pour décrire le comportement d'un matériau élasto-fragile en traction, et élastique en compression (fig. 4.4). De plus, pour simuler au mieux la présence d'une fissure dans une structure lors de l'étude des problèmes classiques de la mécanique de la rupture, le comportement anisotrope, annulant toute traction perpendiculaire à la fissure, a été complété par une loi régissant le cisaillement dans la direction de fissuration.

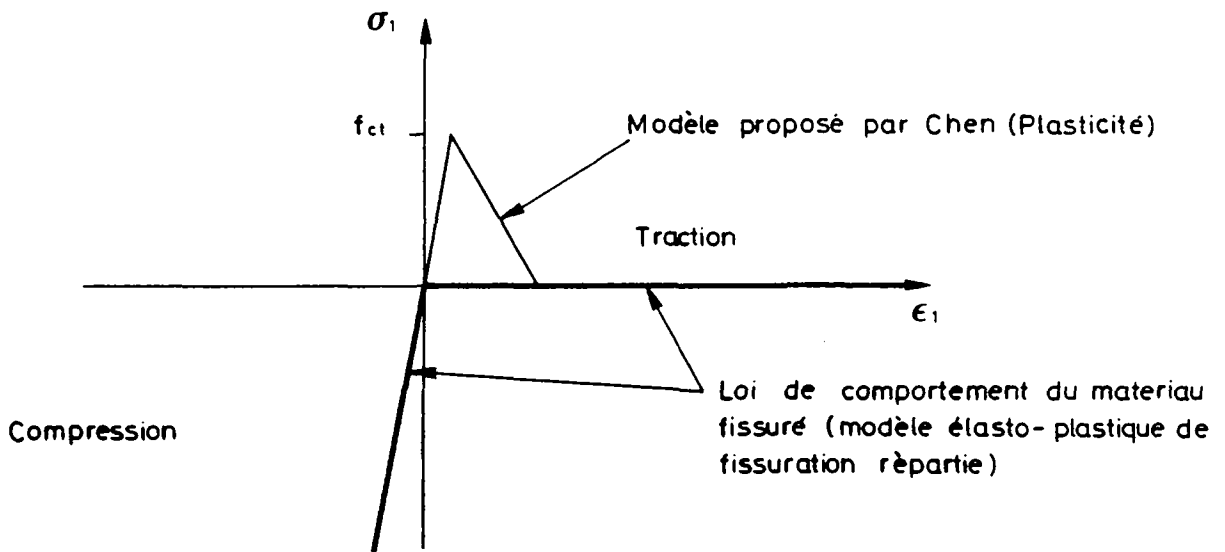


Fig. 4.4 : modification apportée au modèle de Chen [4.1] - comportement uniaxial élastique-fragile

Une fois fissuré, l'élément ne reprend plus d'effort de traction perpendiculairement à la direction de fissuration, ce qui se traduit par l'annulation des contraintes dans cette direction. L'élément retrouve un comportement élastique lorsqu'il est soumis à nouveau à un effort de compression. A l'état  $n+1$  et en chaque point d'intégration des éléments, un vecteur contrainte  $\underline{\sigma}_{tr}$  est calculé :

$$\underline{\sigma}_{tr} = \underline{\sigma}_n + \underline{D} \cdot \underline{\dot{\epsilon}}^{(i)} \quad (4.6)$$

où  $\underline{\sigma}_n$  est le vecteur contrainte calculé à l'état précédent  $n$ ,  $\underline{D}$  est la matrice d'élasticité et  $\underline{\dot{\epsilon}}^{(i)}$  l'incrément de déformation calculé à partir de l'incrément de déplacement  $\underline{\Delta d}_{n+1}^{(i)}$  (annexe E).

Pour un élément non fissuré,  $\underline{\sigma}_{tr}$  est admis comme étant l'état de contrainte du point considéré à l'itération  $i$  :

$$\underline{\sigma}^{(i)} = \underline{\sigma}_{tr} \quad (4.7)$$

Si l'élément est fissuré, deux cas se présentent :

- le point d'intégration est en compression ( $\epsilon$  perpendiculaire à la fissure est négatif), alors  $\underline{\sigma}_{tr}$  est retenu en appliquant l'équation (4.7).
- le point est en traction perpendiculairement à la fissure; la contrainte perpendiculaire à la direction de fissuration et la contrainte de cisaillement parallèle à la fissure sont annulées; dans le repère local (contraintes notées  $\sigma'$ ) orienté selon la fissure (fig. 4.3), on a :

$$\sigma'_{11}{}^{(i)} = 0 \quad (4.8)$$

$$\sigma'_{12}{}^{(i)} = 0$$

et les contraintes  $\sigma'_{22}$  et  $\sigma'_{33}$  sont modifiées en conséquence :

$$\begin{aligned} \sigma'_{22}{}^{(i)} &= \sigma'_{22} - \nu^* \sigma'_{11} \\ &\quad \text{tr} \quad \text{tr} \\ \sigma'_{33}{}^{(i)} &= \sigma'_{33} - \nu^* \sigma'_{11} \\ &\quad \text{tr} \quad \text{tr} \end{aligned}$$

$$\text{où } \underline{\sigma}'_{tr} = \underline{I} \cdot \underline{\sigma}_{tr} \quad (B.28)$$

L'état de contrainte du point considéré est donc défini dans le repère local orienté selon la fissure. Dans le repère global, on a :

$$\underline{\sigma}^{(i)} = \underline{I}^T \cdot \underline{\sigma}'^{(i)}$$

Ainsi la seule contrainte admise dans le plan de l'élément fissuré est parallèle à la direction de fissuration.

Le comportement anisotrope de l'élément fissuré se traduit non seulement par une modification des contraintes qu'il peut supporter, mais aussi par celle de la matrice de rigidité de l'élément. Cette dernière modification, qui tient compte de l'anisotropie du comportement de l'élément, est issue

de la théorie de la plasticité et débouche sur la construction d'une matrice de rigidité élasto-plastique C (annexe E).

Dans le repère local, on a :

$$\tilde{C}' = \tilde{D} - \frac{(\tilde{N} \cdot \tilde{D}) \cdot (\tilde{D} \cdot \tilde{N})}{\tilde{N} \cdot \tilde{D} \cdot \tilde{N}} \quad (4.10)$$

où  $\tilde{D}$  est la matrice élastique (B.33) et  $\tilde{N}$  est le tenseur normal à la surface de rupture décrite dans l'espace des contraintes par la relation  $\sigma'_{ii} = 0$  (4.8)

On a ainsi :

$$N_{ij} = \delta_{il} \delta_{jl} \quad (4.11)$$

où  $\delta_{ij}$  est le symbole de Kronecker (§ A.3).

En utilisant la notation indicielle, le deuxième terme de l'équation (4.10) devient :

$$\frac{(N_{rs} \cdot D_{ijtu}) \cdot (D_{rskl} \cdot N_{tu})}{N_{mn} \cdot D_{mnpq} \cdot N_{pq}} \quad (4.12)$$

Et, en utilisant la relation (4.11) et l'expression de  $D_{ijkl}$  donnée en (B.18), l'expression ci-dessus s'écrit :

$$\frac{\lambda^2 \delta_{ij} \delta_{kl} + 2\lambda\mu (\delta_{ij} \delta_{kl} \delta_{ll} + \delta_{kl} \delta_{il} \delta_{jl}) + 4\mu^2 (\delta_{il} \delta_{jl} \delta_{kl} \delta_{ll})}{\lambda + 2\mu}$$

Dans le plan, les différents indices varient de 1 à 2, si bien que la relation (E.12) qui, dans le repère local, s'écrit<sup>1/</sup> :

$$\tilde{\sigma}' = \tilde{C}' \cdot \tilde{\varepsilon}' \quad (4.13)$$

devient, en utilisant les expressions (B.32) et (4.10) :

$$\begin{pmatrix} \sigma'_{11} \\ \sigma'_{22} \\ \sigma'_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & 2\mu \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & 0 \\ \lambda & \frac{\lambda^2}{\lambda + 2\mu} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon'_{11} \\ \varepsilon'_{22} \\ \varepsilon'_{12} \end{pmatrix} \quad (4.14)$$

1/ L'équation (E.12) traite en fait des incréments de contrainte et de déformation. Ceci revient au même si l'on part d'un état nul de contrainte et de déformation.

En utilisant (B.26), on a fait implicitement l'hypothèse des déformations planes. L'expression (4.14) se simplifie :

$$\begin{pmatrix} \sigma'_{11} \\ \sigma'_{22} \\ \sigma'_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4\mu(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu} & 0 \\ 0 & 0 & 2\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon'_{11} \\ \varepsilon'_{22} \\ \varepsilon'_{12} \end{pmatrix} \quad (4.15)$$

Or, en remplaçant  $\lambda$  et  $\mu$  par leurs expressions en fonction de  $E$  et  $\nu$  (B.16) et (B.17), la relation (4.15) devient :

$$\begin{pmatrix} \sigma'_{11} \\ \sigma'_{22} \\ \sigma'_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{E}{1-\nu^2} & 0 \\ 0 & 0 & 2\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon'_{11} \\ \varepsilon'_{22} \\ \varepsilon'_{12} \end{pmatrix} \quad (4.16)$$

Le terme  $\frac{E}{1-\nu^2}$  n'est autre que  $E^*$  défini en déformations planes (B.24). Ainsi, il vient d'être montré que  $\underline{\underline{C}}$  est équivalente à la matrice fissurée  $\underline{\underline{D}}_f$  utilisée par le modèle élastique de fissuration répartie (4.1), avec  $\alpha = 1$  ( $\underline{\underline{C}}$  est définie en notation "physique",  $\underline{\underline{D}}_f$  en notation "ingénieur" annexe B).

De plus, on constate qu'imposer  $\sigma'_{12}^{(i)} = 0$  (4.8) au cours du processus itératif (§ E.3) conduit à la même solution que celle obtenue en posant  $\alpha = 0$  dans l'expression de  $\underline{\underline{D}}_f$ . Les deux modèles sont donc tout à fait équivalents. Compte tenu de leur mauvais comportement lorsque la fissure est soumise à un mode mixte de sollicitation (§ 4.2 et annexe F), un nouvel élément a été développé. Celui-ci modélise également la fissure de façon répartie. Il est basé sur l'utilisation de fonctions de forme discontinues.

#### 4.4. ELEMENT FISSURE A FONCTIONS DE FORME DISCONTINUES

La construction de cet élément, appelé par la suite "élément fissuré", est basée sur le développement de fonctions de forme (dites aussi fonctions d'interpolation) qui évitent toute connexion entre deux noeuds du même élément séparés par la fissure.

#### 4.4.1. Fonctions de forme discontinues

Les intersections de la fissure avec les côtés de l'élément fissuré définissent un "point d'entrée" et un "point de sortie" de la fissure (fig. 4.5). Ces points permettent de délimiter deux ou trois domaines selon que les points d'entrée et de sortie sont situés sur des côtés opposés ou contigus de l'élément. Ces domaines servent de support à la définition des fonctions de forme discontinues.

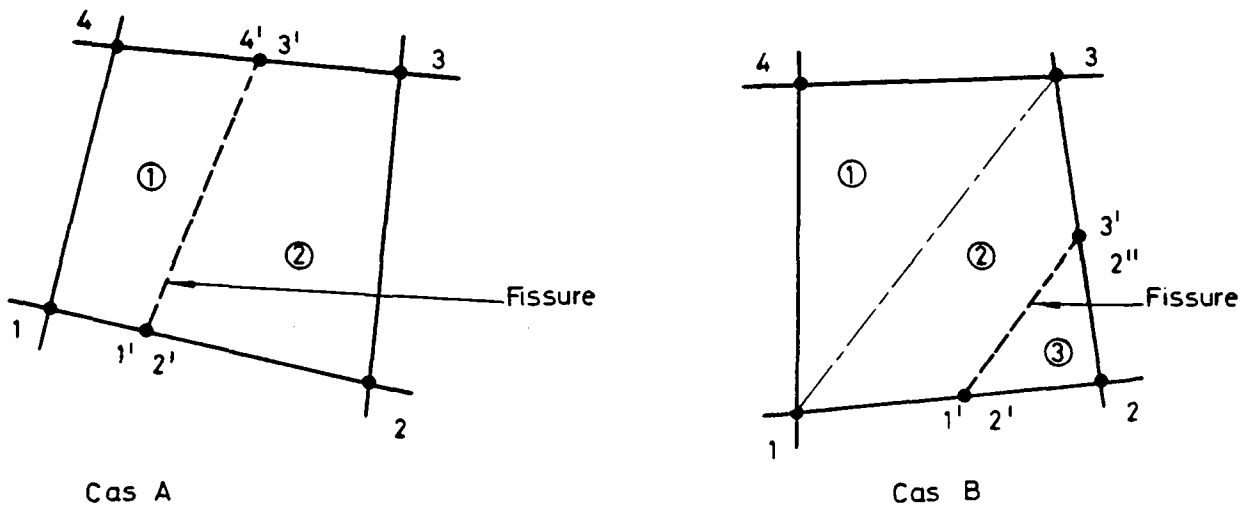


Fig. 4.5 : définition de domaines (numérotation locale des noeuds)

Les fonctions de forme  $N_a$  relatives à chacun des noeuds  $a$  de l'élément doivent remplir certaines conditions, rappelées à l'annexe C, pour que la solution obtenue converge vers la solution exacte lorsque la dimension de la maille d'éléments finis diminue. En particulier, les fonctions de forme doivent être lisses sur leur domaine d'intégration (en général, l'élément; ici leur domaine de définition). Elles doivent également être continues d'un domaine d'intégration à l'autre et remplir la conditions de complétude, qui peut se résumer par :

$$\sum_{a=1}^n N_a(\tilde{x}) = 1$$

et

$$\sum_{a=1}^n N_a(\tilde{x}) x_a = x \quad (\text{et de même pour } y).$$

et donc  $N_a(x_b) = \delta_{ab}$ , où a et b sont deux noeuds des n noeuds de l'élément (numérotation locale).

Afin d'éviter toute connexion entre deux noeuds séparés par la fissure, les fonctions de forme proposées ici accusent une discontinuité sur la ligne représentant la fissure. La figure 4.6 illustre la définition de telles fonctions lorsque les points d'entrée et de sortie sont situés sur des côtés opposés de l'élément (cas A).

Il est important de remarquer la façon dont varie la fonction de forme le long d'un bord coupé par la fissure; elle prend une valeur constante soit nulle, soit égale à un. Ainsi la fonction  $N_1$  est unitaire entre 1 et 1' et nulle entre 2' et 2. Elle est par définition nulle sur les côtés 4-3 et 2-3.

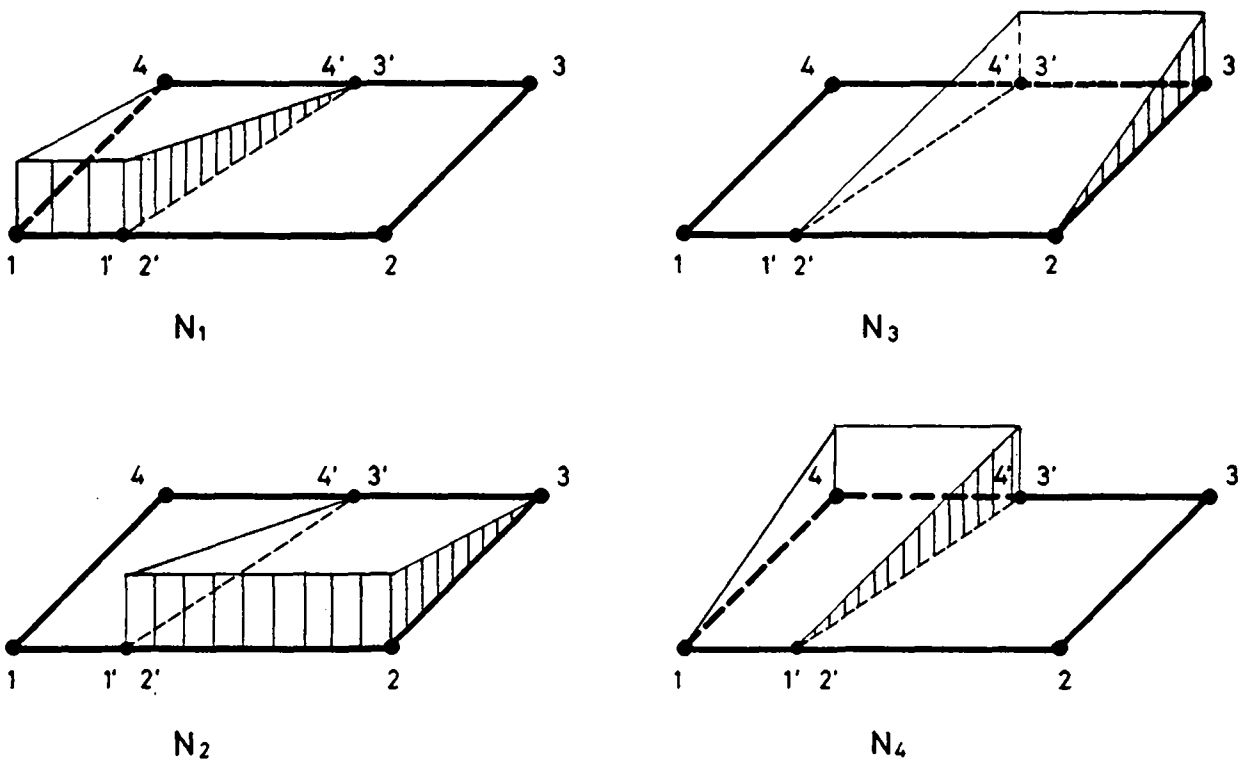


Fig. 4.6 : fonctions de forme - cas A

La figure 4.7 illustre la définition de fonctions de forme dans le cas où les points d'entrée et de sortie de la fissure sont situés sur des côtés contigus de l'élément. Les fonctions de forme  $N_1$ ,  $N_3$  et  $N_4$  sont définies par morceaux sur les domaines 1 et 2. La fonction  $N_2$  est constante sur le domaine 3.

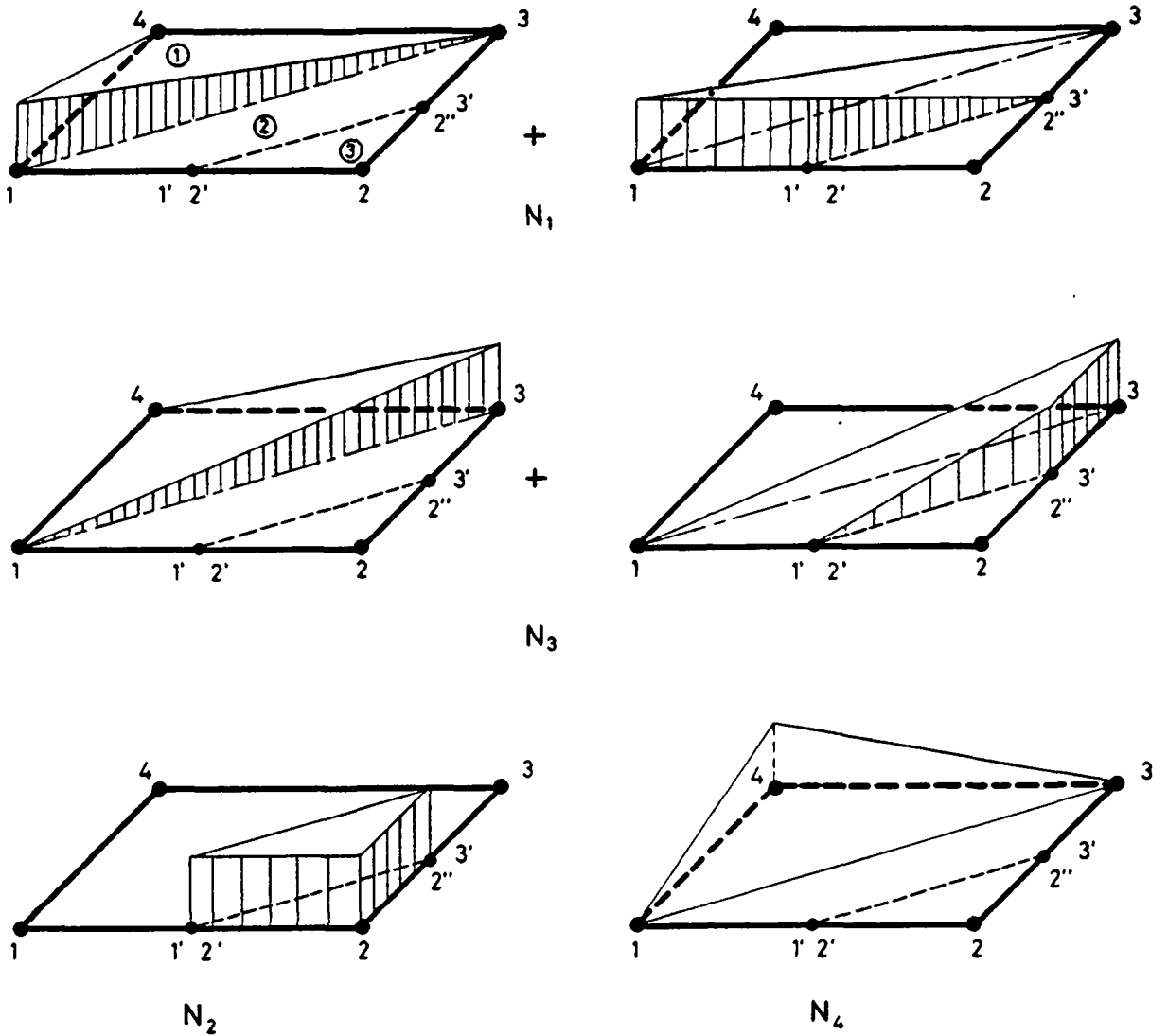


Fig. 4.7 : fonctions de forme - cas B

On constate, en considérant ce type de fonction, qu'il est inutile de définir de nouveaux noeuds correspondant aux points d'entrée et de sortie de la fissure. En effet, en ces points, les fonctions de forme prennent les mêmes valeurs qu'aux noeuds auxquels ils sont associés, si bien que les déplacements des points situés de part et d'autre de la fissure sont les mêmes que ceux des noeuds associés (par exemple, sur la figure 4.5,  $d_1 = d_1'$ ). Ceci représente une approximation qui revient à annuler les contraintes de traction perpendiculaires à la fissure qui traverse l'élément. Cette hypothèse



qui est à la base de la formulation des éléments modélisant la fissure de façon répartie (§ 4.2 et 4.3) est donc reprise ici. De ce fait, la matrice fissurée  $D_f$  (4.1) sera utilisée lors de la construction de la rigidité de l'élément fissuré au paragraphe suivant.

Les fonctions de forme ainsi construites sont lisses sur leur domaine de définition. Elles sont également continues d'un domaine à l'autre, sauf quand les domaines sont séparés par la fissure. Dans ce cas, les dérivées directionnelles perpendiculaires à la fissure présentent au bord de celle-ci une discontinuité infinie. Or comme elles sont définies de part et d'autre de la fissure, l'intégration de la rigidité de l'élément n'est pas perturbée par la discontinuité créée par la fissure.

Alors que la discontinuité des fonctions de forme, et donc des déplacements, est assurée d'un élément à l'autre, pour l'élément A (fig. 4.8) situé à l'extrémité de la fissure, la continuité n'est pas vérifiée avec l'élément B non encore fissuré, sauf aux noeuds a et b qui leur sont communs.

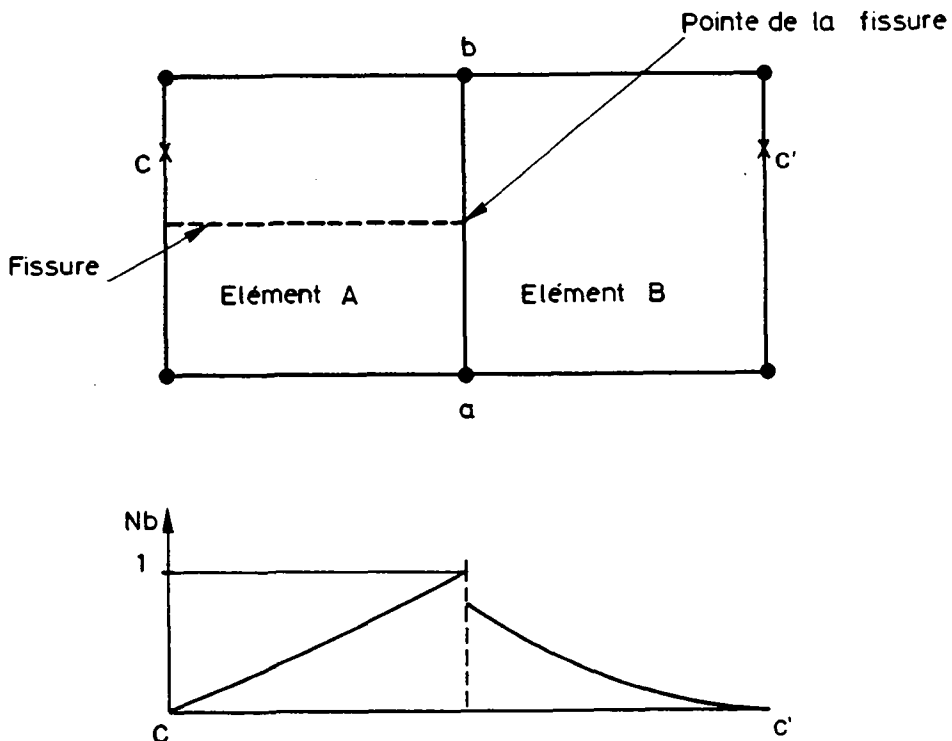


Fig. 4.8 : discontinuité entre élément fissuré à l'extrémité de la fissure et l'élément non encore fissuré

La figure 4.8 illustre la variation des fonctions de forme, dans les éléments A et B le long de CC' et met en valeur la discontinuité qui existe sur le côté a b. Le long de celui-ci, la liaison entre les deux éléments est "non conforme", mais ceci ne perturbe néanmoins pas le calcul car la discontinuité est très locale (§ 5 et annexe F). La continuité des déplacements reste assurée aux noeuds a et b.

#### 4.2.2 Matrice de rigidité de l'élément fissuré

La rigidité de l'élément à fonctions de forme discontinues est formée à partir des rigidités des différents domaines décrits précédemment.

Il est possible, afin d'éviter de définir explicitement de nouvelles fonctions de forme, d'utiliser les fonctions bilinéaires classiques de l'élément isoparamétrique à quatre noeuds sur chacun de ces domaines. Leur rigidité est calculée de façon classique (annexe C). Mais, pour tenir compte du fait que les déplacements des points a' et a'' définissant les domaines sont les mêmes que ceux des noeuds a de l'élément (a = 1,2,3,4; fig. 4.5), les termes de rigidité associés aux noeuds a' et a'' sont ajoutés à ceux des noeuds a.

Dans le cas A précité, par exemple, on peut définir les sous-matrices de rigidité au niveau nodal dans le domaine 1, à l'aide des matrices  $\tilde{B}$  définies à l'annexe C :

$$\tilde{k}_{ab}^{1l} = \int_{\Omega_1} \tilde{B}_a^T \cdot \tilde{D}_f' \cdot \tilde{B}_b \, d\Omega \quad a, b = 1, 1', 4, 4' \quad (4.17)$$

où  $\tilde{D}_f'$  est la matrice fissurée définie au § 4.2, et qui est utilisée ici pour la raison mentionnée au paragraphe précédent. Le calcul de la rigidité se fait donc dans un repère local orienté selon la fissure. Les sous-matrices de rigidité concernant les noeuds 1 et 4 s'écrivent alors :

$$\tilde{k}_{11}^{1e} = \tilde{k}_{11}^{1l} + \tilde{k}_{11}^{1l'} + \tilde{k}_{11}^{1l_1} + \tilde{k}_{11}^{1l_1'}$$

$$\tilde{k}_{14}^{1e} = \tilde{k}_{14}^{1l} + \tilde{k}_{14}^{1l'} + \tilde{k}_{14}^{1l_4} + \tilde{k}_{14}^{1l_4'}$$

$$\tilde{k}_{44}^{1e} = \tilde{k}_{44}^{1l} + \tilde{k}_{44}^{1l'} + \tilde{k}_{44}^{1l_4} + \tilde{k}_{44}^{1l_4'}$$

$$\tilde{k}_{41}^{1e} = \tilde{k}_{41}^{1l} + \tilde{k}_{41}^{1l'} + \tilde{k}_{41}^{1l_1} + \tilde{k}_{41}^{1l_1'}$$

et de même pour le domaine 2. La matrice de rigidité  $\tilde{k}^e$  de l'élément s'écrit alors :

$$\tilde{k}^e = \begin{bmatrix} \tilde{k}_{11}^e & 0 & 0 & \tilde{k}_{14}^e \\ 0 & \tilde{k}_{22}^e & \tilde{k}_{23}^e & 0 \\ 0 & \tilde{k}_{32}^e & \tilde{k}_{33}^e & 0 \\ \tilde{k}_{41}^e & 0 & 0 & \tilde{k}_{44}^e \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

On constate ainsi qu'aucune liaison n'existe entre les noeuds situés d'un côté de la fissure (1 et 4) et de l'autre côté (2 et 3). La matrice  $\tilde{k}^e$  dans le repère global s'obtient par rotation.

La construction de la matrice  $\tilde{k}^e$  pour le cas B se fait de la même façon. La rigidité correspondant au domaine 3 se réduit à la sous-matrice nodale  $\tilde{k}_{22}^e$ . Les valeurs des facteurs d'intensité de contrainte obtenus en utilisant les éléments fissurés, présentés à l'annexe F, montrent qu'il est important de réduire les contraintes de cisaillement dans ces éléments. En conséquence, le facteur  $\alpha$  associé à la définition de  $D_f$  doit être nul.

Le modèle de fissuration répartie utilisant l'élément à fonctions de forme discontinues développé ici est donc utilisé dans le modèle proposé.

#### REFERENCE

- [4.1] W.F. Chen. Plasticity in reinforced concrete. Mc Graw-Hill, 1982.



## 5. MODELE DE PROPAGATION DE FISSURE

### 5.1. BASES DU MODELE PROPOSE

Le modèle numérique de propagation de fissure décrit ci-après est basé d'une part sur la mécanique linéaire élastique de la rupture qui régit la stabilité des fissures et d'autre part sur le modèle de fissuration répartie utilisant des fonctions de forme discontinues.

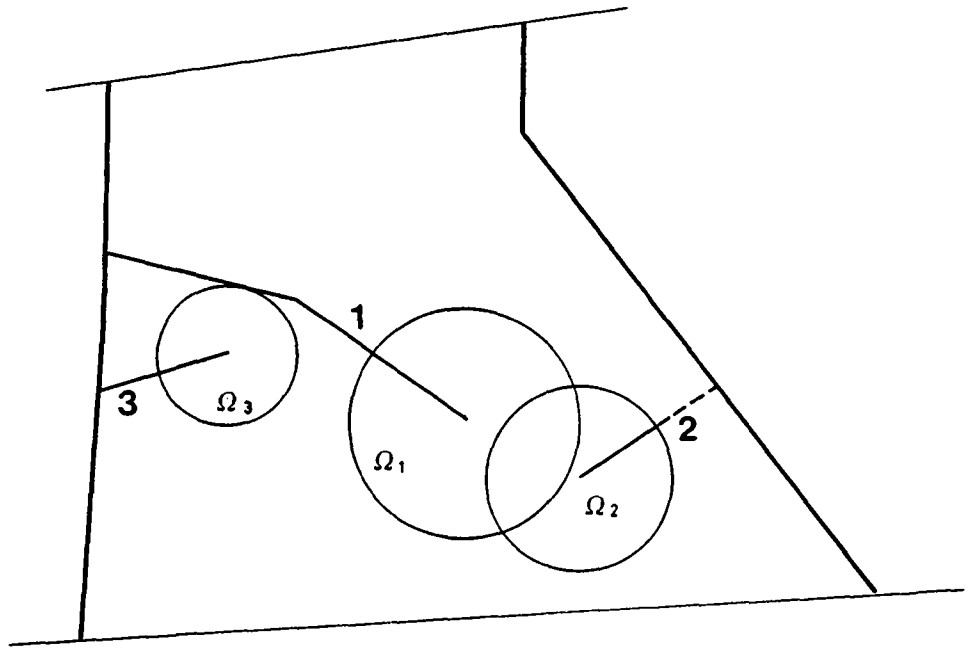
Comme il a été mentionné aux chapitres précédents, la mécanique linéaire élastique de la rupture offre un critère de ruine indépendant de la maille d'éléments finis utilisée et permet de tenir compte de la taille de la structure sur le comportement à la ruine d'un ouvrage.

L'intégrale de surface développée au chapitre 3 permet de calculer les facteurs d'intensité de contraintes à la pointe d'une fissure sans avoir recours à des éléments spéciaux, à un affinement excessif ou à une intégrale curviligne dont le contour est difficile à définir pendant la propagation. L'élément à fonctions de forme discontinues, appelé par la suite élément fissuré, permet de simuler la présence d'une fissure dans un réseau d'éléments finis sans le modifier pendant la propagation.

Au cours de la propagation, il est nécessaire de définir précisément la pointe de la fissure. Celle-ci est placée sur le bord du dernier élément fissuré; elle sert d'origine au repère des champs de contraintes et de déplacements utilisés lors du calcul de  $K_I$  et  $K_{II}$  : elle est également le centre du disque d'intégration décrit au § 3.4. La surface d'intégration la plus grande possible est alors définie au cours de la propagation en tenant compte des deux conditions suivantes :

- être contenu dans les limites de la structure analysée,
- ne contenir qu'une seule fissure.

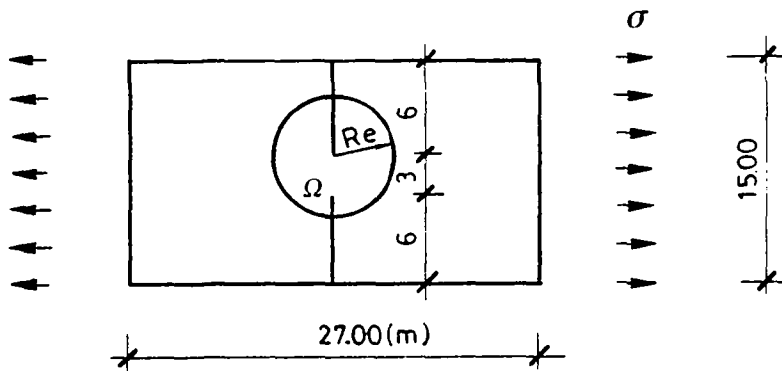
Bien évidemment, plusieurs fissures peuvent être prises en considération dans la structure. La surface d'intégration utilisée pour déterminer la stabilité d'une fissure est définie en tenant compte de l'état des autres fissures (ouvertes ou fermées) et de l'éventuelle fermeture de la fissure étudiée (fig. 5.1).



- $\Omega_1$  : surface d'intégration relative à la fissure 1 et limitée par la fissure 2
- $\Omega_2$  : surface d'intégration relative à la fissure 2 et limitée par une zone en compression dans la même fissure
- $\Omega_3$  : surface d'intégration relative à la fissure 3 et limitée par la fissure 1

**Fig. 5.1 : principe de la définition de la surface d'intégration**

La possibilité d'étendre le domaine  $\Omega_1$  défini sur la figure précédente jusqu'à la pointe de la fissure 2 est confirmée par l'exemple suivant. Une pièce rectangulaire présente deux fissures selon la figure 5.2. Le maillage utilisé est le maillage fin de 420 éléments présenté à la figure 5.4.



**Fig. 5.2 : pièce rectangulaire en traction doublement fissurée :**  
 $KI = 6,65 \text{ N/m}^{3/2} [3.1]$

La figure 5.3 montre la variation de  $K_I$  en fonction de  $Re$ , le rayon de la surface d'intégration, et met en évidence la dépendance du résultat de l'intégrale, pour des valeurs de  $Re$  comprises entre 3 m et 6 m, c'est-à-dire quand le domaine  $\Omega$  contient la pointe de la deuxième fissure. Pour  $Re$  inférieur à 3 m, les fluctuations numériques du résultat s'orientent selon une horizontale. La moyenne sur 50 valeurs de  $K_I$  pour  $Re$  compris entre 1,5 m et 3 m est  $6,85 \text{ N/m}^{3/2}$ , ce qui correspond à une erreur de 3 % sur la valeur théorique représentée par un traitillé sur la figure 5.3

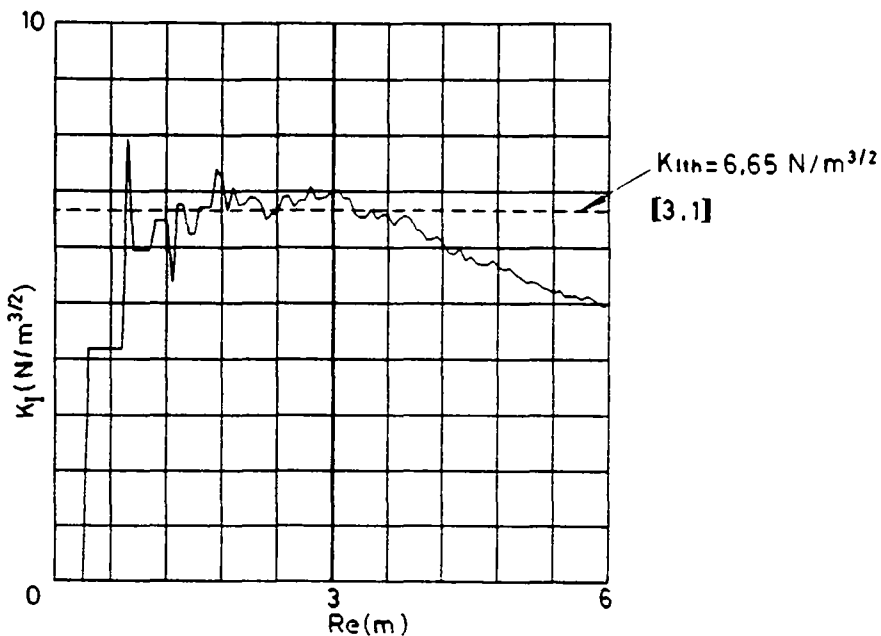


Fig. 5.3 : variation de  $K_I$  en fonction de  $Re$

L'intégrale de surface utilise, comme on l'a vu, les champs de contraintes et de déplacements théoriques qui règnent autour de la pointe d'une fissure soumise à une combinaison des modes I et II de chargement (eq. (3.9) et (3.10)). Or dans ce modèle, les contraintes calculées dans les éléments fissurés ne correspondent pas aux contraintes réelles dans un milieu continu élastique à proximité d'une fissure. L'élément fissuré simule uniquement une discontinuité dans la matière (fissure) par un milieu continu au comportement spécial. En conséquence, l'intégrale de surface ne doit pas prendre en compte le champ de contrainte dans les éléments fissurés. On constate plus loin l'influence de cette approximation.

5.2. APPLICATION AUX PROBLEMES CLASSIQUES DE LA MECANIQUE DE LA RUPTURE

Les deux problèmes classiques de la mécanique de la rupture qui ont déjà été étudiés au paragraphe 3.4 en utilisant une modélisation discrète de la fissure sont à nouveau examinés en utilisant des éléments fissurés.

La figure 5.4 présente les maillages d'éléments finis comportant les éléments fissurés utilisés pour cette étude. Les résultats obtenus avec l'une et l'autre modélisation sont comparés entre eux, et avec des valeurs théoriques (tableaux 5.1 et 5.2).

	Maillage	N <sup>1</sup> /	N/S <sup>1</sup>	K <sub>I</sub>	% erreur K <sub>I</sub>
Fissure discrète	grossier	50	0,12	7,82	- 15
	moyen	98	0,24	8,26	- 10
	fin	420	1,04	8,45	- 6
Élément fissuré	grossier	45	0,11	9,09	- 1
	moyen	91	0,23	9,35	2
	fin	405	1,00	9,30	1

Tableau 5.1 : problème 1  $K_{Ith} = 9,20 \text{ N/m}^{3/2}$

	Maillage	N <sup>1</sup> /	N/S <sup>1</sup>	K <sub>I</sub>	% erreur K <sub>Ith</sub>	K <sub>II</sub>	% erreur K <sub>II</sub>
Fissure discrète	grossier	24	0,10	4,14	- 27	- 2,53	- 4
	moyen	70	0,28	4,37	- 23	- 2,62	- 0,4
	fin	26	1,04	4,99	- 12	- 2,68	2
Élément fissuré (maillage orienté)	grossier	21	0,08	5,31	- 7	- 3,16	20
	moyen	65	0,26	5,36	- 6	- 2,57	- 2
	fin	250	1,00	5,64	- 1	- 2,59	- 2
Élément fissuré (maillage uniforme)	grossier	60	0,24	5,24	- 8	- 2,42	- 8
	moyen	240	0,96	5,75	1	- 2,36	- 10
	fin	980	3,92	5,82	2	- 2,46	- 6

Tableau 5.2 : problème 2  $K_{Ith} = 5,69 \text{ N/m}^{3/2}$   
 $K_{IIth} = - 2,63 \text{ N/m}^{3/2}$

1/ N = nombre d'éléments; S = surface de la pièce étudiée



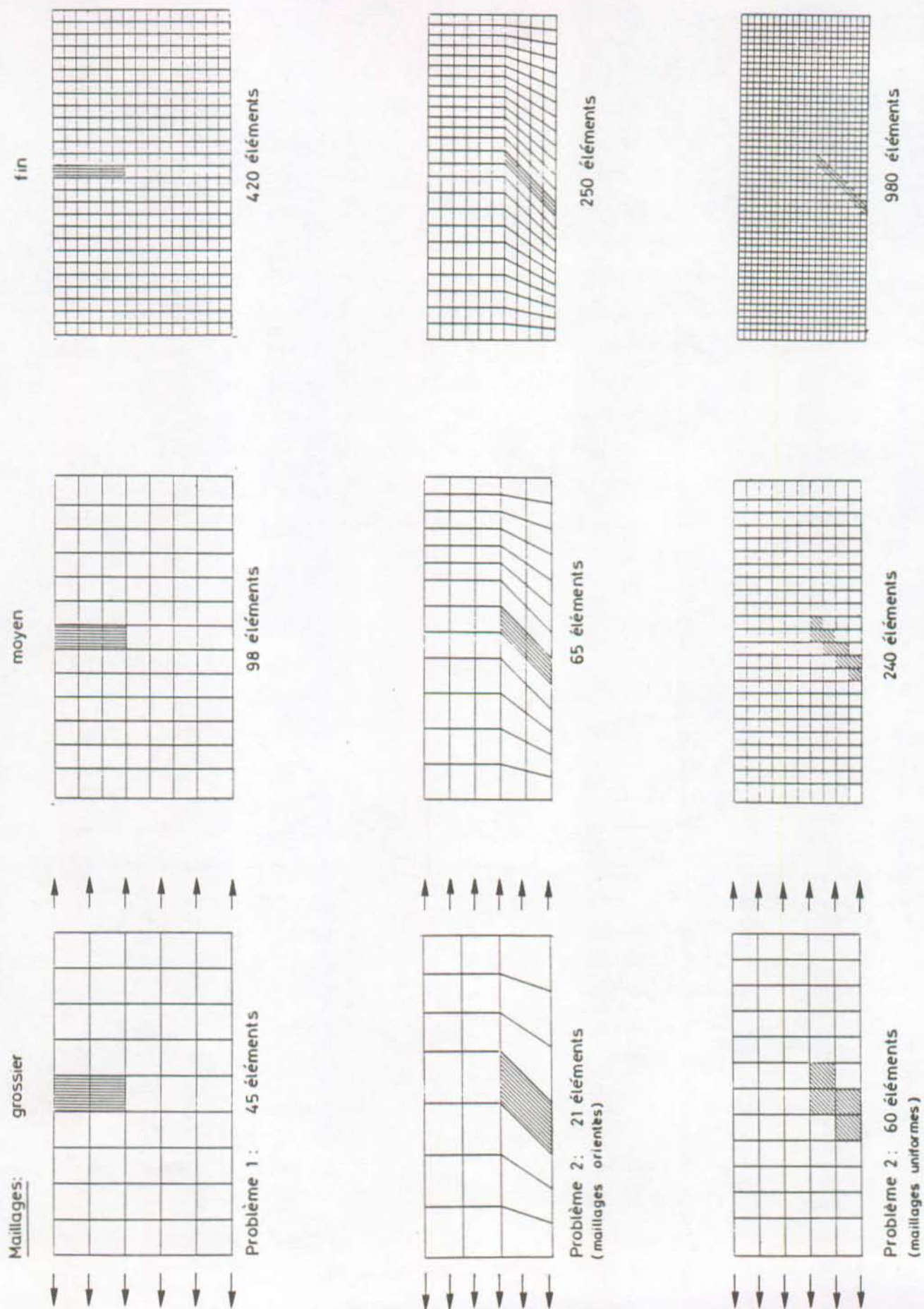


Fig. 5.4 : problèmes 1 et 2 - maillage avec éléments fissurés

On constate que les résultats obtenus en utilisant les éléments fissurés sont en général meilleurs que ceux obtenus en modélisant la fissure de façon discrète. En mode mixte, l'utilisation d'un seul élément fissuré pour modéliser la fissure est néanmoins défavorable et conduit à une valeur de  $K_{II}$  qui s'écarte fortement de la valeur théorique (20 %), alors que la valeur de  $K_I$  reste relativement précise (- 7%). Les résultats obtenus avec la modélisation discrète de la fissure sont fortement influencés par la dimension de la maille d'éléments finis, contrairement aux valeurs obtenues avec les éléments fissurés. Ceci peut s'expliquer qualitativement par le fait qu'en utilisant une modélisation discrète de la fissure, la structure reste relativement rigide lors de l'utilisation de maillages grossiers. Avec les éléments fissurés, la zone à comportement anisotrope représentant la fissure est très étendue ce qui, bien que le maillage soit grossier, diminue la rigidité de la structure et conduit à des facteurs d'intensité de contrainte sensiblement plus élevés. Ceux-ci se rapprochent des valeurs théoriques.

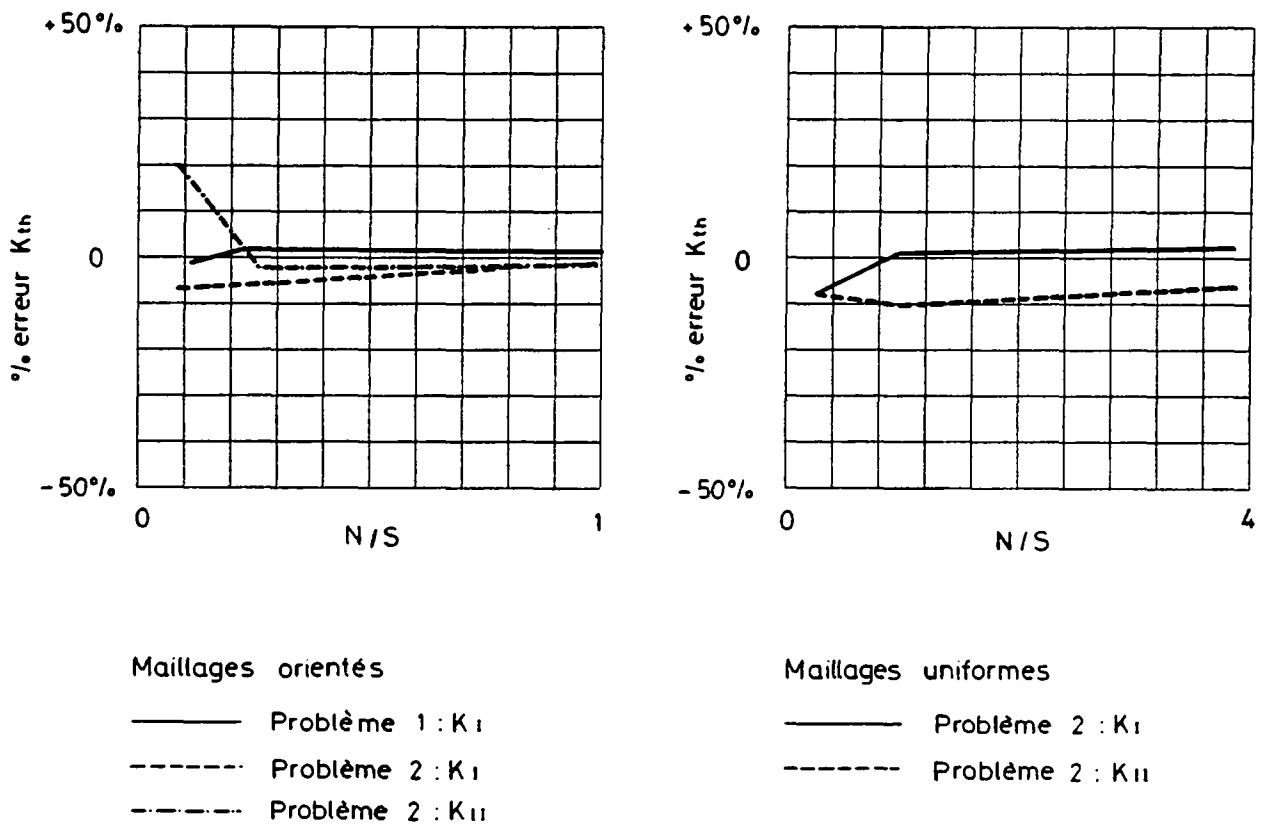


Fig. 5.5 : convergence avec des éléments fissurés

L'erreur commise sur le calcul des facteurs d'intensité de contrainte est de l'ordre de quelques pourcents pour les maillages moyen à fin.

La figure 5.5 reprend sous forme graphique les résultats de convergence reportés sur les tableaux précédents. La convergence vers la solution théorique, connue elle-même qu'à quelques pourcents près, est plus faible lorsque le maillage utilisé n'est pas orienté selon la direction de la fissure. Ceci vient du fait que l'approximation entraînée par l'utilisation de fonctions de forme discontinues dans l'élément fissuré, conduit à une moins bonne évaluation de la rigidité de l'élément fissuré lorsque celui-ci est traversé par une fissure dont les points d'entrée et de sortie sont situés sur des côtés adjacents plutôt que sur des côtés opposés (§ 4.4.2).

### 5.3. DETECTION ET INITIALISATION D'UNE FISSURE

Au cours du chargement de la structure, une ou plusieurs fissures peuvent naître et se propager. La détection et l'initialisation de nouvelles fissures sont étudiées dans ce paragraphe.

Les contraintes de traction maximale présentes dans une structure se développent en général au bord de celle-ci. Une cavité, une galerie dans un barrage créent des bords à l'intérieur de l'ouvrage, à partir desquels une fissure peut se propager. En conséquence, les nouvelles fissures qui peuvent apparaître ont leur origine au bord de la structure. Lorsqu'une fissure est présente dans la structure, elle crée de nouveaux bords à partir desquels peuvent également se développer de nouvelles fissures.

Un critère de rupture basé sur la résistance à la traction peut être utilisé pour la détection des fissures au bord d'une structure. Ainsi si  $\sigma_1$  est la plus grande contrainte principale de traction calculée dans un élément de bord, alors :

$$\text{si } \sigma_1 < f_{ct} \quad : \text{ pas de nouvelle fissure} \quad (5.1)$$

$$\text{et si } \sigma_1 > f_{ct} \quad : \text{ nouvelle fissure détectée} \quad (5.2)$$

La direction perpendiculaire à la contrainte principale  $\sigma_1$  donne la direction de la fissure au cas où celle-ci a été détectée. L'origine de la fissure est définie à mi-distance des noeuds de bord, et son extrémité à l'intersection avec une autre frontière de l'élément (fig. 5.6).

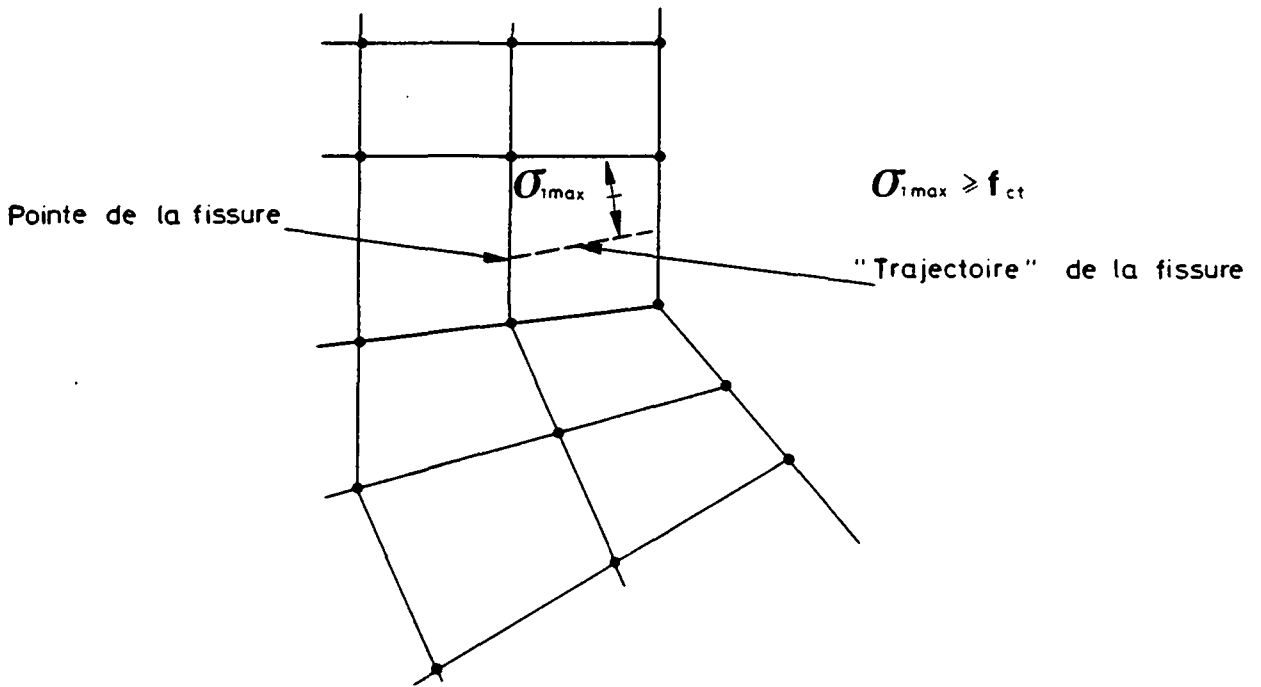


Fig. 5.6 : détection et initialisation d'une fissure

Des concentrations de contraintes peuvent apparaître à la surface d'un corps non-fissuré. Elles sont engendrées soit par des forces ou une modification brusque du système de forces agissant sur le corps, soit par des irrégularités géométriques brusques. Dans le cas de ces dernières, la singularité du champ de contraintes au voisinage d'un angle rentrant, tel que dessiné sur la figure 5.6, n'est pas du même ordre que celle qui règne autour d'une pointe de fissure. Un critère de rupture basé sur la résistance à la traction est donc adapté à la détection des fissures.

Lorsqu'un élément de bord présente une contrainte supérieure à la résistance à la traction et qu'il est donc susceptible de devenir fissuré, les éléments de bord qui lui sont adjacents présentent probablement la même caractéristique. Il n'est pas concevable que tous ces éléments se fissurent, car si l'un devient fissuré, ses voisins sont déchargés par la présence de la nouvelle fissure.

Ainsi, pour éviter l'initialisation de fissures dans des éléments contigus, les valeurs  $\sigma_{1max}$  des éléments susceptibles d'être fissurés sont ordonnés et éventuellement initialisés dans un ordre décroissant des contraintes de traction. La fissure est initialisée si les éléments adjacents ne sont pas déjà fissurés.

#### 5.4. VITESSE DE PROPAGATION [2.8, 5.1]

Si une fissure se propage rapidement, c'est-à-dire à une vitesse  $v$  supérieure à  $0,3 C_R$ , où  $C_R$  est la célérité des ondes de surface de Rayleigh du matériau considéré, on constate expérimentalement, et ceci est confirmé par le calcul, que le champ de contraintes qui règne autour de la pointe de la fissure est altéré et ne correspond plus au champ décrit par les équations (2.35) et (2.37). En particulier, en mode de traction, la zone dans laquelle se développent les contraintes de traction maximales n'est plus dans le prolongement de la fissure; les contraintes maximales de traction sont situées de part et d'autre de l'axe de la fissure et forment un angle d'environ  $60^\circ$  avec celui-ci. Ceci explique en partie la ramification des fissures qui apparaît à des vitesses de l'ordre de  $0,6 C_R$ . Ce phénomène, qui peut être décrit comme la division d'une fissure "mère" en deux fissures et la propagation de l'une ou des deux fissures, se produit pour des fissures rapides, et permet d'expliquer le fait que  $0,6 C_R$  apparaît expérimentalement comme une vitesse limite de propagation.

La modification du champ de contrainte entraîne une variation des facteurs d'intensité de contraintes en fonction de la vitesse de propagation. Le facteur critique d'intensité de contraintes dépend également de la vitesse de propagation de la fissure. Une analyse dynamique de la propagation prenant en compte ces modifications est donc nécessaire pour des fissures se propageant à des vitesses supérieures à  $0,3 C_R$ .

La vitesse de propagation d'une fissure et sa stabilité dépendent du matériau, de la géométrie du corps, de la valeur de la charge et de sa vitesse d'application. Néanmoins, les vitesses de propagation de fissures observées dans le béton sont au maximum de l'ordre de  $0,3 C_R$  (environ 600 m/s) [5.2], si bien que l'on peut considérer que les champs de contraintes et de déplacements statiques ne sont pas modifiés par la vitesse de propagation et que les facteurs d'intensité de contraintes et le facteur critique d'intensité de contraintes en sont indépendants. Une telle analyse, conduite avec cette hypothèse, est dénommée "quasi-statique"; elle n'empêche pas de faire intervenir, dans le calcul des facteurs d'intensité de contraintes, les effets des forces volumiques d'inertie qui sont développés par exemple, lors du chargement rapide d'un corps fissuré.

## 5.5. ALGORITHME DE PROPAGATION

Le calcul de la stabilité des fissures existantes et l'initialisation de nouvelles fissures s'effectuent à la suite de la définition d'un état d'équilibre statique donné par les déplacements nodaux calculés par la méthode des éléments finis. L'algorithme de propagation est décrit par les différentes séquences présentées dans le tableau 5.3. Pour l'étude des problèmes dynamiques, l'algorithme de propagation "quasi-statique" est décrit au chapitre 6.

L'incrément de propagation de la fissure, tel qu'il est défini par le présent modèle, est lié au maillage des éléments finis. L'incrément correspondant à un pas de propagation est au plus égal à la dimension maximale d'un élément. La précision de l'algorithme de propagation est donc directement fonction de la densité du maillage utilisé. Différentes méthodes numériques ont été développées par certains auteurs [1.17] pour calculer l'incrément de propagation, mais elles restent adaptées à une modélisation discrète de la fissure et ne sont correctes que dans le cas d'une propagation en mode I pur [5.3].

### 5.5.1. Cas particuliers

- **Fermeture de la fissure**

Si un élément fissuré est comprimé (étape d du tableau 5.3), celui-ci retrouve un comportement élastique, jusqu'à ce qu'il soit à nouveau en traction.

- **R e b o n d**

Si, à la suite du calcul de l'angle de propagation de la fissure, il s'avère que l'élément de pointe est à nouveau fissuré par la même fissure qui a change de direction, ("rebond" de la fissure sur la frontière de l'élément de pointe), les coordonnées du point de sortie et l'angle sont modifiés en conséquence en considérant que l'élément est fissuré dans la direction correspondant à la moyenne des deux angles de fissuration.

1. Pour chaque pas de charge : n + n+1

- forces nodales extérieures :  $\tilde{F}_{n+1} = \tilde{F}_{ext} (n+1)$
- déplacements imposés :  $\tilde{d}_{n+1} = \tilde{d} (n+1)$
- étape de propagation :  $i = 0$

2. Pour chaque étape de propagation i + i + 1

a) matrice globale de rigidité :  $K_{n+1}^{(i)} = A [k^e]$  (C.11)

b) second membre :  $F_{n+1}^{(i)} = F_{n+1} - K_{n+1}^{(i)} \cdot \tilde{d}_{n+1}$

c) résolution :  $K_{n+1}^{(i)} \cdot \tilde{d}_{n+1}^{(i)} = F_{n+1}^{(i)}$  (C.8)

d) vérification de l'ouverture ou non des éléments déjà fissurés; contrôle de la déformation perpendiculaire à la fissure :  $\epsilon_2' < \text{ou} > 0$

e) calcul des contraintes (sauf dans les éléments fissurés)  
:  $\underline{\sigma} = f(\tilde{d}_{n+1}^{(i)})$  (C.12)

f) si désiré, détection de nouvelles fissures dans les éléments du bord de la structure :  $\sigma_1 < \text{ou} > f_{ct}$

g) pour chaque fissure :

- calcul de  $K_I$ ,  $K_{II}$  et de l'angle de propagation (3.23), (2.53)

- détermination de la propagation :  $f(K_I, K_{II}) < \text{ou} > K_{IC}$  (2.56)

- si propagation : recherche du nouvel élément fissuré, calcul et mise en mémoire de ses paramètres

h) validation et initialisation des nouvelles fissures détectées à la séquence f (selon § 5.3)

i) s'il y a eu propagation d'une fissure existante ou initialisation d'une nouvelle fissure, retour en 2, sinon retour en 1.

Tableau 5.3 : algorithme d'analyse statique

## • C r o i s e m e n t

Il est possible qu'une fissure croise une autre fissure. Si cette dernière s'est refermée, la propagation a lieu normalement et l'élément d'intersection est doublement fissuré (première fissure fermée, seconde ouverte). Au cours du chargement, il peut alors arriver que les fissures de cet élément soient toutes deux ouvertes (étape d du tableau 5.3). Dans ce cas, la rigidité de l'élément est annulée. Si par contre la fissure "incidente" touche une fissure ouverte, la définition de la surface d'intégration exposée au § 5.1 conduit à une valeur nulle de  $Re$  et donc à des facteurs d'intensité de contrainte nuls. Ce problème est surmonté en forçant la propagation à travers l'élément fini dans lequel s'est produit l'intersection; celui-ci devient doublement fissuré. Le croisement complet des deux fissures ouvertes est ensuite analysé sur le même principe que la l'initialisation des fissures, c'est-à-dire que les contraintes principales de traction de l'élément adjacent à l'élément d'intersection, et situé de l'autre côté de la fissure incidente, sont comparées à un critère de traction maximale. Le recours à un critère de traction maximal est dans ce cas rendu possible du fait de la présence de la fissure ouverte qui vient d'être croisée. Le croisement de fissures dans un élément est limité à deux fissures. Au-delà, un affinement du maillage est nécessaire.

### 5.6. EXEMPLES DE PROPAGATION QUASI-STATIQUE

Trois exemples de propagation sont présentés. La force volumique de gravité n'est pas prise en considération. Il n'est également pas tenu compte de l'initialisation de nouvelles fissures.

#### 5.6.1. Plaque fissurée épaisse en traction

La pièce déjà considérée lors de l'étude du problème 1 (§ 3.4 et 5.2) est à nouveau étudiée. Elle présente une fissure initiale d'une longueur égale à celle d'un élément du maillage fin présenté sur la figure 5.7.

Le calcul est effectué en admettant  $K_{IC} = 0 \text{ N/m}^{3/2}$ , la fissure se propage



pour n'importe quelle valeur de traction extérieure  $\sigma$ . Celle-ci est appliquée entièrement en début de calcul. La propagation de la fissure est déterminée en différentes étapes. La figure 5.7 montre l'évolution de  $K_I$  en fonction de la longueur  $a$  de la fissure. Cette courbe est comparée à celle obtenue à partir des valeurs théoriques de  $K_I$  [2.1], représentée en traitillé.

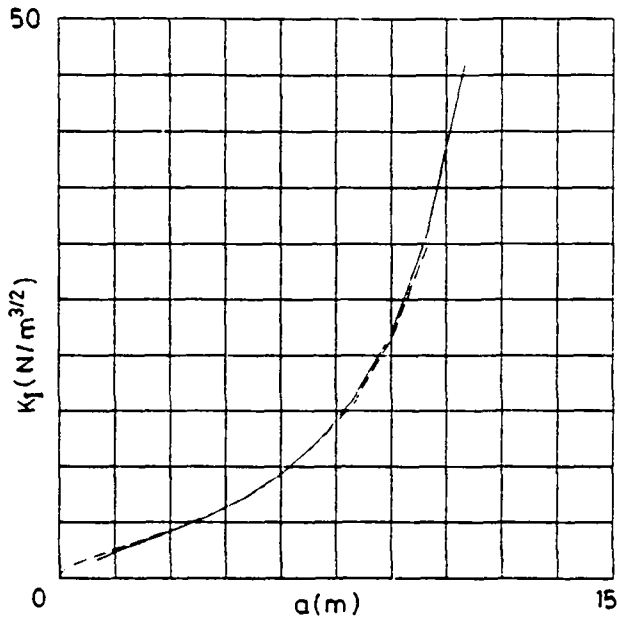


Fig. 5.7 : Variation de  $K_I$  en fonction de  $a$  (pièce rectangulaire fissurée en traction)

Les deux courbes sont pratiquement identiques lorsque la pointe de la fissure est dans la zone centrale de la pièce. Les valeurs de  $K_I$  obtenues pour des longueurs de fissures relativement petites ou relativement grandes sont légèrement moins précises, car les disques d'intégration sont plus petits au début et à la fin de la propagation (§ 3.4.3). Pour des longueurs de fissure supérieures à deux tiers de la largeur de la plaque, les valeurs théoriques de  $K_I$  ne sont pas fournies.

### 5.6.2. Poutre préfissurée en flexion

L'étude de la propagation d'une fissure dans une poutre en flexion permet de vérifier les résultats obtenus par le modèle lorsque l'intégrale de surface est calculée sur un domaine dans lequel les contraintes et les déplacements sont très variables (zones de traction et de compression).

La poutre préfissurée étudiée, dont le maillage et les dimensions sont présentés à la figure 5.8, est chargée en son milieu par une force unitaire. On pose également  $K_{IC} = 0 \text{ N/m}^{3/2}$ .

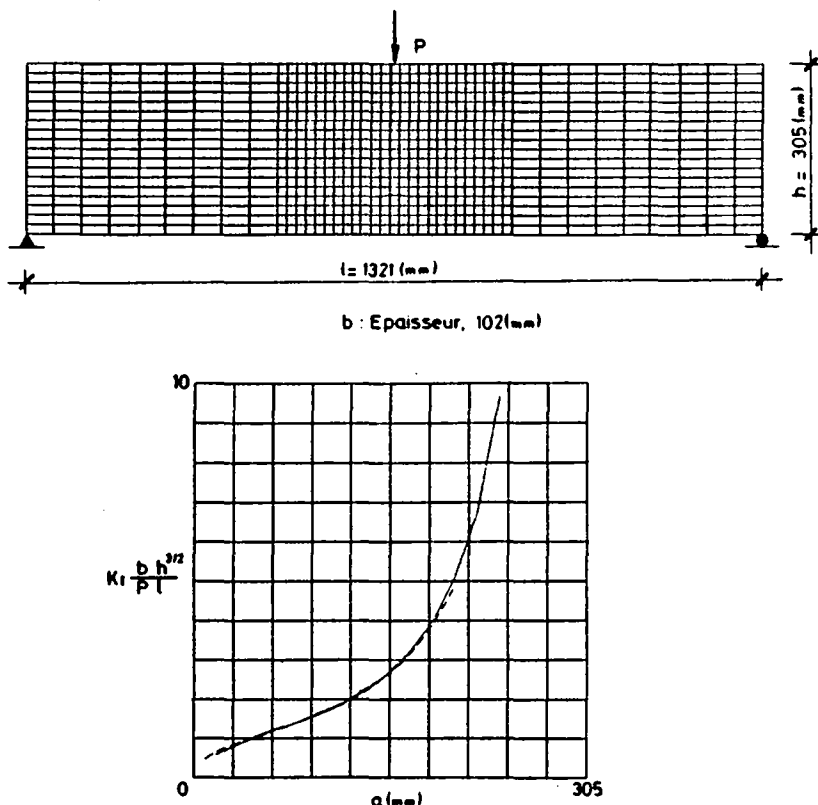


Fig. 5.8 : poutre préfissurée - variation de  $K_I$  en fonction de  $a$

La figure 5.8 représente aussi l'évolution de  $K_I$  en fonction de la longueur  $a$  de la fissure. Les deux courbes, calculée et théorique, comme précédemment, sont quasiment superposées à l'exception des zones correspondant aux valeurs extrêmes de  $a$  pour les mêmes raisons que celles formulées au paragraphe précédent.

### 5.6.3. Poutre préfissurée en mortier soumise à un chargement en mode mixte

La rupture de la poutre présentée à la figure 5.9 est à nouveau analysée. Alors que précédemment le matériau considéré était un matériau quelconque au comportement élastique, les observations expérimentales faites par Area et Ingraffea [5.4] sur plusieurs poutres en mortier, sont comparées ici au schéma de propagation de fissures obtenu par le modèle développé dans le cadre de ce travail.

Cette approche est possible, car si les dimensions de la poutre sont relativement petites, le rapport entre la dimension caractéristique (la portée, par exemple) et le diamètre maximal des agrégats (quelques mm) est relativement élevé (§ 1.3 et fig. 1.11). La mécanique linéaire élastique de la rupture est donc applicable dans ce cas.

La poutre préfissurée est chargée comme le montre la figure 5.9.

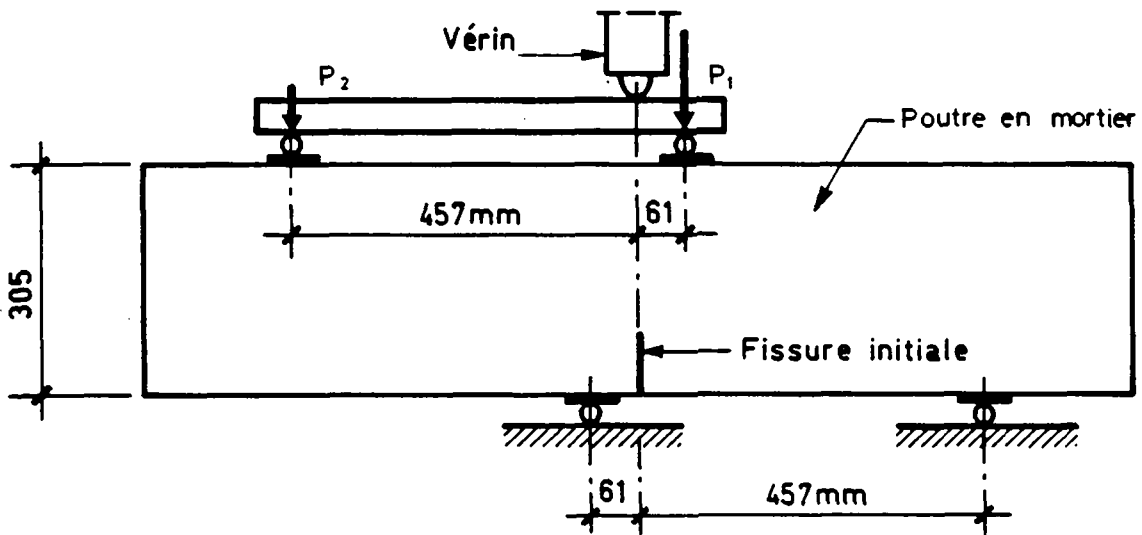
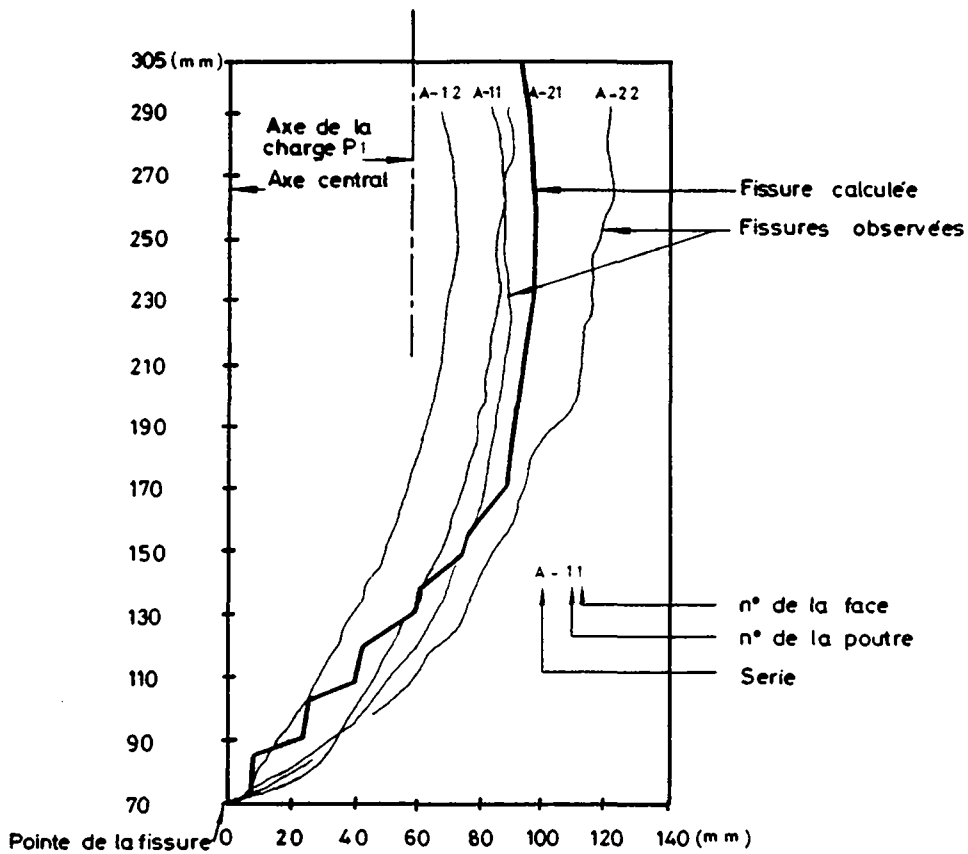


Fig. 5.9 : poutre fissurée en mortier - dispositif d'essai [5.4]

La figure 5.10 présente les trajectoires des fissures observées sur deux poutres (les fissures des deux faces sont reportées sur la même figure). Le schéma de fissuration calculé suit correctement les trajectoires observées.



**Fig. 5.10 : trajectoire des fissures**

Au début de la propagation, la fissure accuse un angle d'environ  $70^\circ$  sur la verticale, vers la droite. En effet, le moment fléchissant est nul dans la section fissurée et celle-ci est uniquement soumise à un effort de cisaillement. Elle est donc chargée en mode II pur (§ 2.4.2). Puis la fissure tend à s'orienter dans la direction correspondant au mode I pur, si bien que  $K_{II}$  diminue en valeur absolue alors que  $K_I$  augmente.

La figure 5.11 montre l'évolution des facteurs d'intensité de contraintes pendant la propagation.

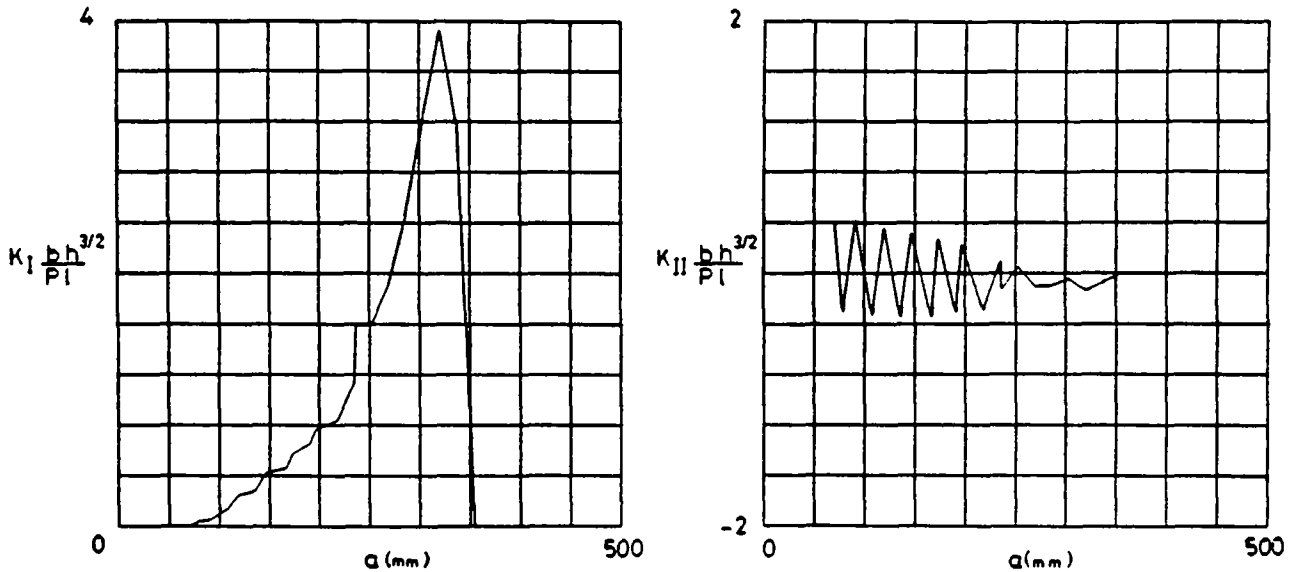
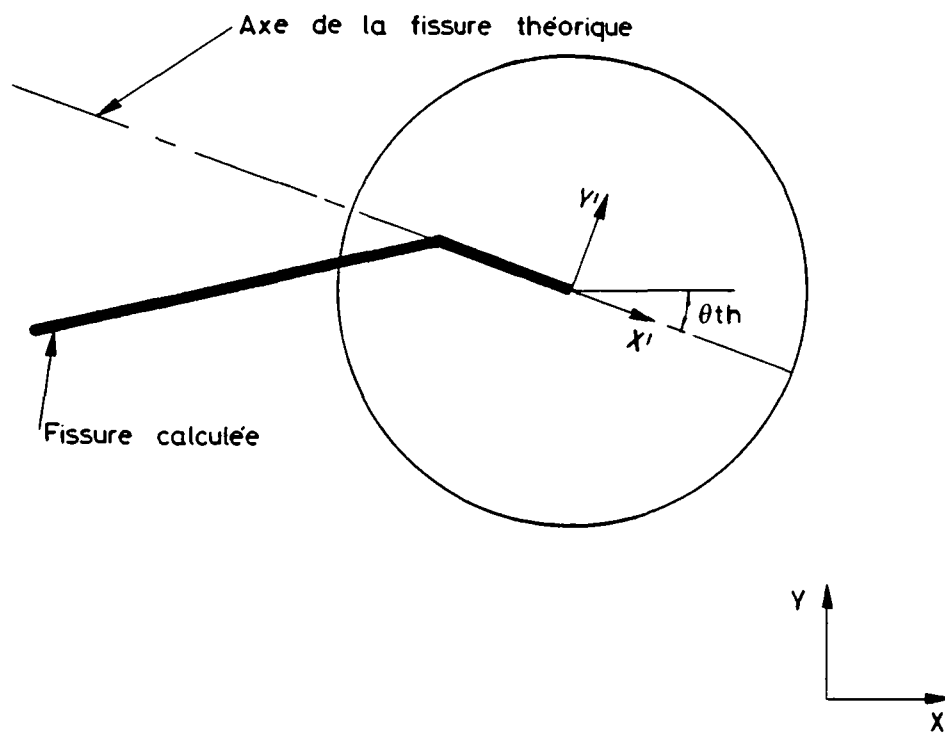


Fig. 5.11 : évolutions de  $K_I$  et  $K_{II}$  pendant la propagation

La discontinuité qui apparaît dans la courbe donnant la variation de  $K_I$  correspond à la fissuration d'un élément en deux parties, dont une très petite, ce qui perturbe localement le calcul de  $K_I$ .

Lors de la propagation de la fissure en mode mixte, la trajectoire de la fissure change d'orientation. Or, le disque d'intégration utilisé lors du calcul des facteurs d'intensité de contraintes (§ 3.4) a un rayon en général plus grand que la longueur d'un élément, donc d'un incrément de fissure. Les champs de contraintes et de déplacements calculés ne correspondent pas à ceux obtenus analytiquement (éq. (2.35), (2.37), (2.39) et (2.40)). Les premiers découlent du calcul par éléments finis, où la trajectoire de la fissure, symbolisée par une ligne brisée, est modélisée par une succession d'éléments fissurés, alors que les seconds correspondent à une fissure rectiligne ayant la direction du dernier pas de propagation. La figure 5.12 illustre cette situation.



**Fig. 5.12 : propagation d'une fissure en mode mixte**

Il en résulte une imprécision sur le calcul de  $K_I$  et  $K_{II}$ , surtout lorsque la longueur de l'incrément de fissure dans l'élément de pointe est relativement petit.

Le tableau 5.4 qui suit montre l'erreur qui peut être faite sur le calcul des facteurs d'intensité de contrainte lorsque les champs théoriques et calculés ne correspondent pas. La pièce présentant une fissure oblique, décrite au § 5.2, est à nouveau examinée en considérant le maillage uniforme fin représenté à la figure 5.4. L'angle de fissuration est de  $45^\circ$  (fissure calculée). Les champs théoriques de contrainte et de déplacement doivent également être orientés selon  $\theta_{th} = 45^\circ$ . Les valeurs de  $K_I$  et  $K_{II}$  obtenues pour des valeurs de  $\theta_{th}$  comprises entre  $0$  et  $90^\circ$  sont rapportées ci-dessous.

$\theta_{th}$	0°	10°	20°	30°	40°	45°	50°	60°	70°	80°	90°
$K_I$	2,76	3,33	3,99	4,74	5,49	5,82	6,13	6,65	6,99	7,12	7,01
$K_{II}$	-2,34	-2,60	-2,80	-2,86	-2,67	-2,46	-2,21	-1,62	-0,86	-0,02	0,1

Tableau 5.4 :

Les erreurs commises sur le calcul de  $K_I$  et  $K_{II}$  sont des valeurs extrêmes, car les champs de contraintes et de déplacements théoriques et calculés ne correspondent pas entre eux sur toute la longueur de la fissure, alors qu'en réalité les directions théoriques et calculées de la fissure sont les mêmes, au moins dans l'élément de pointe. On peut remarquer que l'erreur commise sur  $K_{II}$  n'affecte pas son signe, sauf pour une valeur extrême de  $\theta_{th}$ . Ce n'est donc pas ce problème qui est la cause des changements de signe de  $K_{II}$  (fig. 5.11).

Alors que la trajectoire de la fissure réelle est courbe, la trajectoire calculée est une ligne brisée qui épouse au mieux, selon la densité du maillage d'éléments fissurés, la trajectoire de la fissure réelle. La correction de la direction de la fissure s'effectue pas à pas lors de la propagation. Ceci explique les variations de signes observées sur l'évolution de  $K_{II}$ . Un affinement de la maille des éléments finis ne résoud pas directement ce défaut de la méthode employée, mais permet d'approcher plus finement la trajectoire réelle de la fissure, comme le montre la figure 5.13 où un maillage deux fois plus fin a été utilisé dans la zone centrale de la poutre.

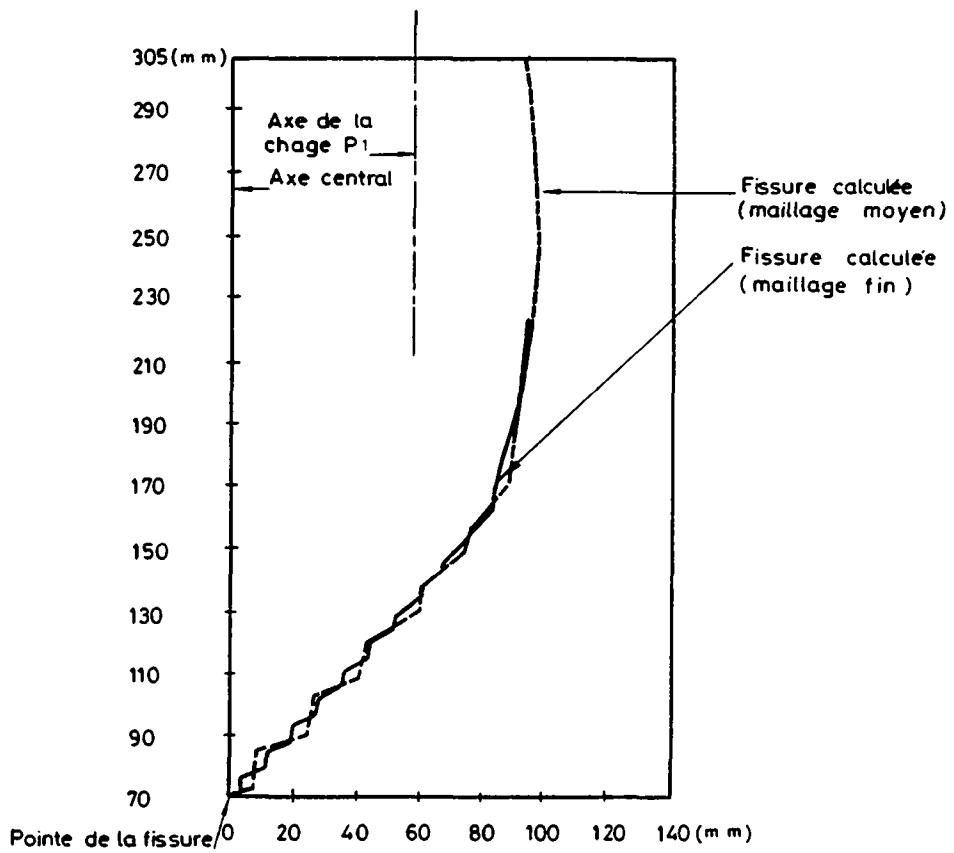


Fig. 5.13 : trajectoire des fissures calculées



La figure 5.14 compare les évolutions de  $K_I$  et  $K_{II}$  en fonction de la longueur de la fissure  $a$ , pour les maillages moyens et fins utilisés. Peu de différences sont à relever.

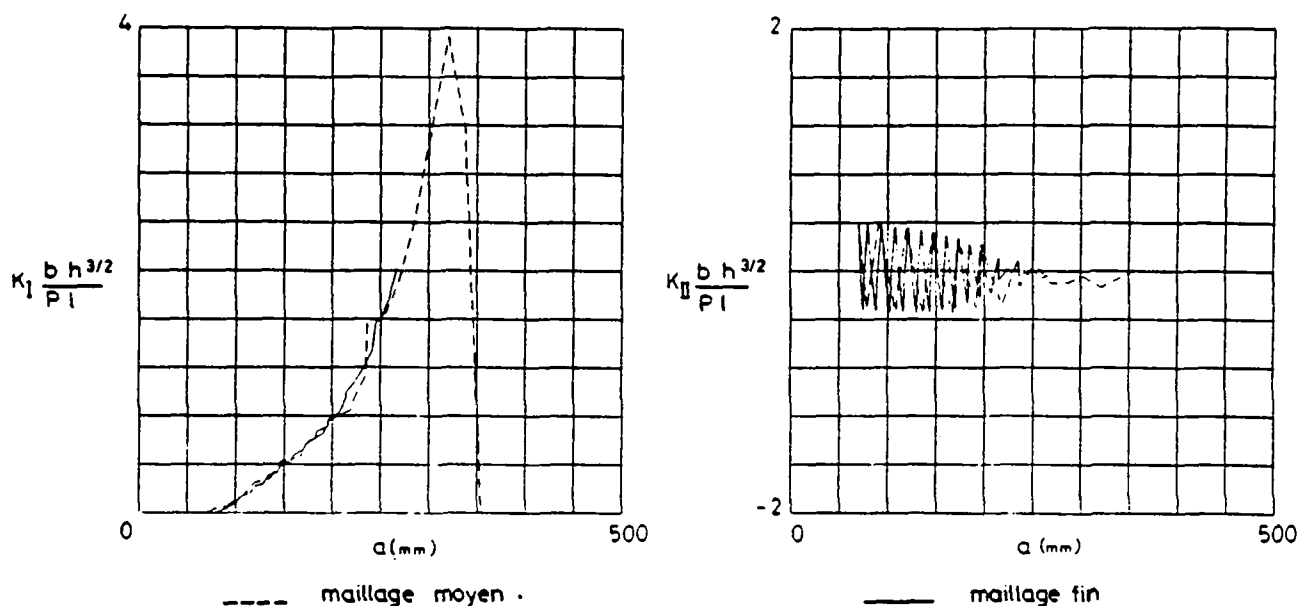


Fig. 5.14 : variation de  $K_I$  et  $K_{II}$  en fonction de  $a$  (maillages moyens et fins)

La figure 5.15 enfin, montre la variation de la fonction de  $K_I$  et  $K_{II}$  qui est comparée à  $K_{IC}$  (éq. (2.53) et (2.56)). On vérifie bien que les changements de signes observés sur  $K_{II}$  n'affectent pas le critère de propagation.

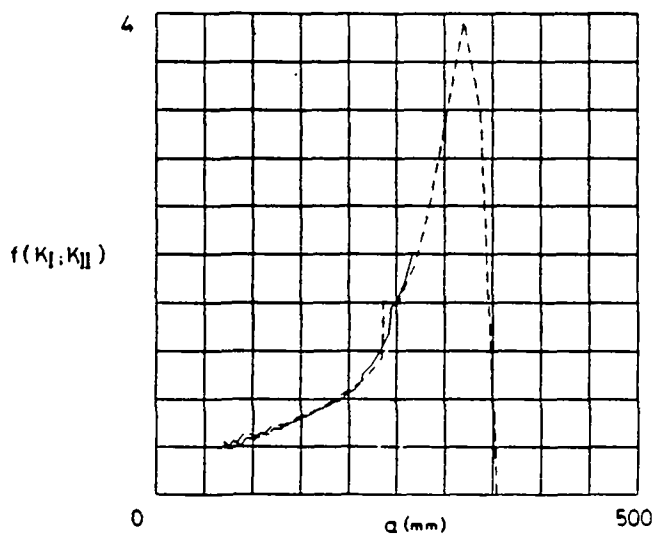


Fig. 5.15 : variation de  $f(K_I, K_{II})$  en fonction de  $a$  (maillages moyens et fins)

Les résultats des calculs présentés dans ce chapitre démontrent la validité et l'efficacité du modèle de propagation de fissures construit à partir de l'intégrale de surface et de l'élément fissuré à fonctions de forme discontinues.

#### R E F E R E N C E S

- [5.1] K. Rossmannith (Ed.). *Grundlage der Bruchmechanik*. Springer, 1982.
- [5.2] H.W. Reinhardt, Delft University of Technology, communication personnelle, Lausanne, février 1986.
- [5.3] A.R. Ingraffea, V. Saouma. Numerical modeling of discrete crack propagation in reinforced and plain concrete. in "Fracture mechanics of concrete" (Sih & diTomaso Ed.), Nijhoff, 1985.
- [5.4] M. Area, A.R. Ingraffea. Mixed mode crack propagation in mortar and concrete. Report No 81-13, Cornell University, Ithaca, N.Y.

## 6. EXTENSION DU MODELE A DIFFERENTS TYPES DE SOLLICITATIONS

L'intégrale de surface présentée au chapitre 3 a été développée en utilisant les hypothèses rappelées ci-après :

- le matériau considéré est homogène élastique et linéaire,
- une seule singularité est présente dans le domaine  $\Omega$  défini au § 3.3,
- le problème est bidimensionnel,
- les lèvres de la fissure ne sont pas chargées,
- aucune force volumique n'agit dans le solide.

Il est néanmoins possible de modifier l'intégrale  $J$ , et donc l'intégrale de surface pour pouvoir étudier des problèmes de fissures qui ne satisfont pas les hypothèses précitées, et étendre ainsi le modèle exposé aux chapitres précédents à d'autres types de sollicitations : mise en pression des fissures par un fluide, forces volumiques, forces dynamiques.

### 6.1. MISE EN PRESSION D'UNE FISSURE

L'ouverture d'une fissure peut être provoquée, ou tout au moins modifiée, par la pression d'un fluide introduit dans la fissure. Or, l'une des hypothèses de l'intégrale  $J$  est que les lèvres de la fissure considérée doivent être exemptes de toute force, au risque de rendre le résultat de l'intégrale  $J$  dépendant du contour  $\Gamma$  considéré. Un terme correctif peut être introduit afin de rendre le résultat de  $J$  indépendant de  $\Gamma$ . De même, un terme correctif doit être développé pour l'intégrale de surface.

#### 6.1.1. Modification de l'intégrale $J$

Soit  $\Gamma^*$  un contour fermé tel que  $\Gamma^* = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4$  (fig. 2.7).  $\Gamma^*$  est un contour fermé ne renfermant pas de singularité;  $\Gamma_2$  et  $\Gamma_4$  suivent les lèvres de la fissure. L'intégrale  $J$  sur le contour fermé  $\Gamma^*$  s'écrit :

$$J_{\Gamma^*} = J_{\Gamma_1} + J_{\Gamma_2} + J_{\Gamma_3} + J_{\Gamma_4} = \int_{\Gamma^*} W dy - t_i u_{i,1} ds = 0$$

Or, contrairement au cas où aucune pression n'agit sur les lèvres de la fissure, les termes de l'intégrale J relatifs aux contours  $\Gamma_2$  et  $\Gamma_4$  qui suivent les lèvres ne sont pas nuls :

$$J_{\Gamma_2} + J_{\Gamma_4} = \int_{\Gamma_2 + \Gamma_4} W dy - t_i u_{i,1} ds \neq 0 \quad (6.1)$$

car  $t_i$  est non nul sur les contours  $\Gamma_2$  et  $\Gamma_4$ .

On définit :  $\Gamma_3 = \Gamma_\epsilon$  et  $\epsilon \rightarrow 0$ , alors  $\Gamma_2 + \Gamma_4 \rightarrow \Gamma_1$ .

$\Gamma_1$  est le contour qui suit les lèvres de la fissure.

On note également  $\Gamma = \Gamma_1$ .

Ainsi :

$$J_{\Gamma^*} = \int_{\Gamma} W dy - t_i u_{i,1} ds - \int_{-\Gamma_\epsilon} W dy - t_i u_{i,1} ds + \int_{\Gamma_1} W dy - t_i u_{i,1} ds = 0 \quad (6.2)$$

$$\text{d'où : } \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma + \Gamma_1} W dy - t_i u_{i,1} ds = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\Gamma_\epsilon} W dy - t_i u_{i,1} ds = G \quad (6.3)$$

où G est le taux de restitution de l'énergie élastique (§ 2).

On peut alors définir l'intégrale J' telle que :

$$J' = \int_{\Gamma + \Gamma_1} W dy - t_i u_{i,1} ds \quad (6.4)$$

J' est indépendante du contour  $\Gamma + \Gamma_1$  et équivalente à G en mécanique linéaire élastique de la rupture.

En fait J' peut être décomposée en deux parties : l'intégrale J sur le contour  $\Gamma$  d'une part et un terme correctif d'autre part :

$$J' = J + \int_{\Gamma_1} W dy - t_i u_{i,1} ds \quad (6.5)$$

$$J' = J - \int_{\Gamma_1} t_i u_{i,1} da$$

car  $dy = 0$  sur  $\Gamma_1$

$$\text{or : } t_i = \sigma_{ji} n_j \quad (B.1)$$

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad (B.2)$$

$$\sigma_{ij} = -p \delta_{ij} \quad \text{où } p \text{ est la pression sur } \Gamma_1$$

$$J' = J + \int_{\Gamma_1} p \delta_{ij} n_j u_{i,1} ds \quad (6.6)$$

$$J' = J + \int_{\Gamma_1} p (n_1 u_{1,1} + n_2 u_{2,2}) ds$$

or  $dx = -n_2 ds$  et  $dy = n_1 ds$   
d'où :

$$J' = J - \int_{\Gamma_1} p u_{2,1} dx \quad (6.7)$$

$J'$  est l'expression de  $J$  dans le cas où une pression agit sur les lèvres de la fissure. Elle a été établie par de Lorenzi [6.1]. Palmer et Rice ont présenté une intégrale semblable dans le cas où des forces de cisaillement agissent dans la fissure [6.2].

### 6.1.2. Modification de l'intégrale de surface

Soit le contour fermé  $\Gamma^*$ , ne contenant pas la pointe de la fissure, défini par :

$$\Gamma^* = \Gamma_\epsilon + \Gamma_c + \Gamma \quad ; \quad \Gamma_c = \Gamma_c^+ + \Gamma_c^-$$

où  $\Gamma_\epsilon$  est un petit contour autour de la pointe de la fissure,  $\Gamma$  un contour plus éloigné de celle-ci et  $\Gamma_c$  joint  $\Gamma_\epsilon$  à  $\Gamma$  (fig. 6.1).

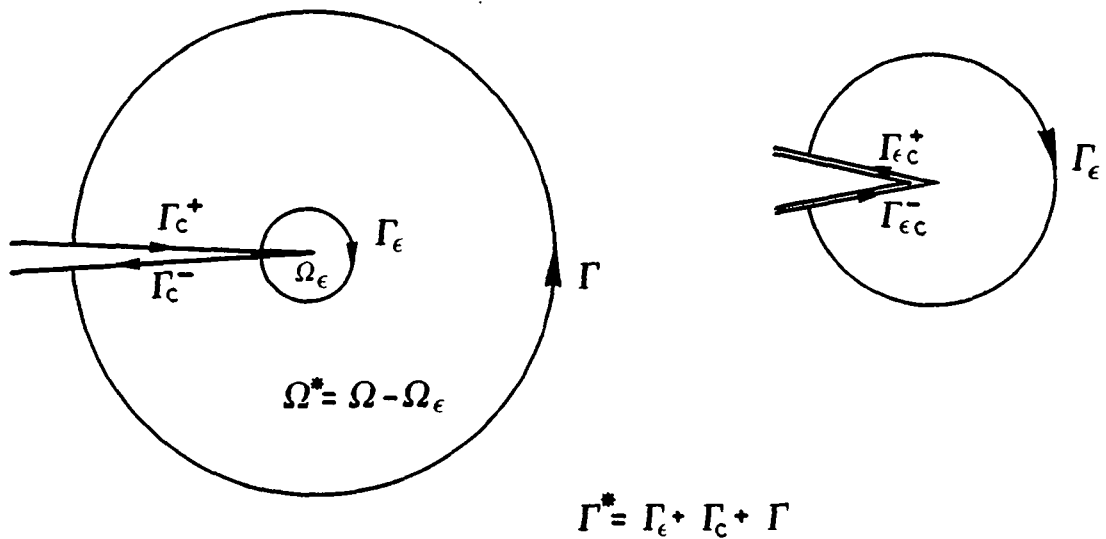


Fig. 6.1 : définition du contour  $\Gamma^*$

On définit également  $\Gamma_{\epsilon c}$  contour qui suit les lèvres de la fissure à l'intérieur du contour  $\Gamma_\epsilon$  :  $\Gamma_{\epsilon c} = \Gamma_{\epsilon c}^+ + \Gamma_{\epsilon c}^-$

L'intégrale  $J'$  effectuée sur le contour  $\Gamma_\epsilon$  s'écrit :

$$J' = - \int_{\Gamma_\epsilon} (W n_1 - t_i u_{i,1}) ds + \int_{\Gamma_{\epsilon c}} p u_{2,1} dx \quad (6.8)$$

Soit  $\phi$  une fonction définie comme précédemment (§ 3.3).

On ne modifie pas l'équation précédente en écrivant :

$$\begin{aligned}
 J' = & - \int_{\Gamma_{\varepsilon}} (W n_1 - t_i u_{i,1}) \phi \, ds + \int_{-\Gamma_{\varepsilon C}} \rho u_{2,1} \phi \, dx \\
 & - \int_{\Gamma} (W n_1 - t_i u_{i,1}) \phi \, ds - \int_{\Gamma_C} (W n_1 - t_i u_{i,1}) \phi \, ds \\
 & - \int_{\Gamma_C} \rho u_{2,1} \phi \, ds \quad (6.9)
 \end{aligned}$$

les deux dernières intégrales s'annulant l'une l'autre (6.1 à 6.4). On peut écrire :

$$J' = - \int_{\Gamma^*} (W n_1 - t_i u_{i,1}) \phi \, ds - \int_{\Gamma_C - \Gamma_{\varepsilon C}} \rho u_{2,1} \phi \, dx \quad (6.10)$$

La première intégrale s'effectuant sur un contour fermé ne possédant pas de singularité, le théorème de Green (§ 3.3) conduit à des intégrales sur le domaine  $\Omega^*$  limité par  $\Gamma^*$  :

$$\begin{aligned}
 J' = & - \int_{\Omega^*} [W,1 - (\sigma_{ij} u_{i,1})_{,j}] \phi \, d\Omega - \\
 & \int_{\Omega^*} [(W - \sigma_{11} u_{i,1}) \phi_{,1} - (\sigma_{i2} u_{i,1}) \phi_{,2}] \, d\Omega \\
 & - \int_{\Gamma_C - \Gamma_{\varepsilon C}} \rho u_{2,1} \phi \, dx \quad (6.11)
 \end{aligned}$$

La première intégrale est nulle (§ 2.1.5) et l'on peut écrire d'après l'équation (3.8) :

$$J' = J - \int_{\Gamma_1^+ + \Gamma_1^-} \rho u_{2,1} \phi \, dx \quad 1/$$

où  $\Gamma_1^+ = \Gamma_C^+ - \Gamma_{\varepsilon C}^+$  ,  $\Gamma_1^- = \Gamma_C^- - \Gamma_{\varepsilon C}^-$  et  $\Gamma_1 = \Gamma_1^+ + \Gamma_1^-$

En considérant que le champ de déplacement  $\underline{v}$  obtenu par la solution par éléments finis est une approximation du champ de déplacement théorique autour de la pointe de la fissure, il est possible, en utilisant le résultat de l'annexe G, d'écrire l'équation précédente sous la forme :

1/ La comparaison de cette équation avec l'équation (6.7) indique que la dépendance de J vis-à-vis du contour d'intégration  $\Gamma^*$  n'est pas du même type que vis-à-vis de  $\Omega^*$ .

$$J' = -\frac{1}{2} K_I \Phi(v, u^I, \phi) - \frac{1}{2} K_{II} \Phi(v, u^{II}, \phi) - \frac{1}{2} K_I \int_{\Gamma_1} \rho u_{2,1}^I \phi \, dx \quad (6.13)$$

$$J' = K_I \left[ -\frac{1}{2} \Phi(v, u^I, \phi) - \frac{1}{2} \int_{\Gamma_1} \rho u_{2,1}^I \phi \, dx \right] + K_{II} \left[ \frac{1}{2} \Phi(v, u^{II}, \phi) \right] \quad (6.14)$$

Par conséquent, la pression dans la fissure ne modifie pas le comportement de celle-ci en cisaillement. Il est donc possible, pour la démonstration, de considérer la fissure en mode de traction uniquement (mode I pur). Dans ce cas :

$$J' = -K_I \left[ \frac{1}{2} \Phi(v, u^I, \phi) + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_1} \rho u_{2,1}^I \phi \, dx \right] \quad (6.15)$$

En utilisant l'expression (2.45), on obtient :

$$K_I = -\frac{E^*}{2} \Phi(v, u^I, \phi) - \frac{E^*}{2} \int_{\Gamma_1} \rho u_{2,1}^I \phi \, dx \quad (6.16)$$

Or, d'après (2.39), on a :

$$u_{2,1}^I = +\frac{1}{4\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} (2k^* + 2) \quad \text{sur } \Gamma_1^+$$

$$u_{2,1}^I = -\frac{1}{4\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} (2k^* + 2) \quad \text{sur } \Gamma_1^-$$

et comme  $r = -x$  sur  $\Gamma_1$  :

$$u_{2,1}^I = \mp \frac{1}{4\mu} \frac{(k^* + 1)}{\sqrt{2\pi}} r^{-1/2} \quad \text{sur } \Gamma_1^\pm$$

La deuxième intégrale de (6.16) devient alors :

$$\frac{E^*}{2} \int_{\Gamma_1} p u_{2,1}^I \phi \, dx = - \frac{E^*}{8\mu} \frac{(k^* + 1)}{\sqrt{2\pi}} \left[ - \int_{R^+}^0 p r^{-1/2} \phi \, dr + \int_0^{R^-} p r^{-1/2} \phi \, dr \right] \quad (6.18)$$

où  $R^+$  est la distance entre la pointe de la fissure et l'extrémité de  $\Gamma_1^+$  sur le bord supérieur de la fissure (respectivement  $R^-$  et  $\Gamma_1^-$ ).

L'équation (6.18) est l'expression générale du terme correctif qui doit être ajouté à l'intégrale de surface lors du calcul de  $K_I$  dans le cas où des forces de pression agissent dans la fissure. Si  $R^+ = R^- = R_e$  et si la pression  $p$  est admise constante dans la fissure, cette expression devient :

$$\frac{-E^*}{4\sqrt{2\pi}} \frac{k^* + 1}{\mu} p \int_0^{R_e} r^{-1/2} \phi \, dr \quad (6.19)$$

De plus, en définissant  $\phi$ , il est possible d'intégrer directement l'expression. Ainsi, en utilisant l'équation (3.16) :

$$\frac{-E^*}{4\sqrt{2\pi}} \frac{k^* + 1}{\mu} p \int_0^{R_e} r^{-1/2} \left(1 - \frac{r^2}{R_e^2}\right) dr \quad (6.20)$$

et l'équation (6.16) devient :

$$K_I = - \frac{E^*}{2} \Phi(v, u^I, \phi) + \frac{E^*}{2} \frac{4(k^* + 1)}{5\mu \sqrt{2\pi}} p \sqrt{R_e}$$

Le terme correctif se réduit alors à une fonction linéaire de  $\sqrt{R_e}$  :

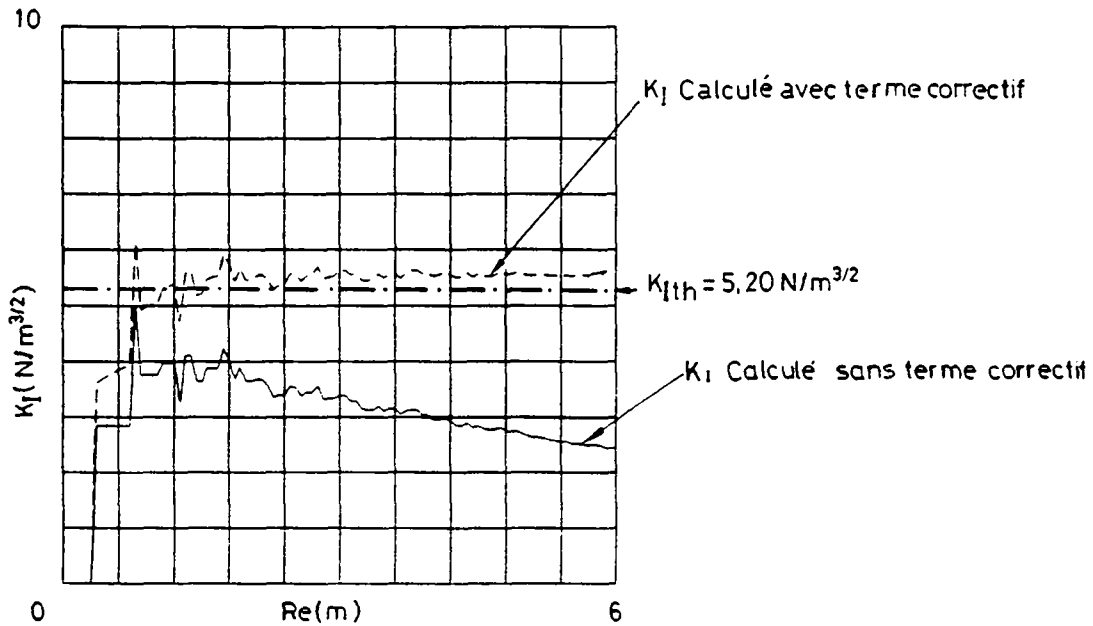
$$K_I = - \frac{E^*}{2} \Phi(v, u^I, \phi) + \frac{16}{5} p \sqrt{\frac{R_e}{2\pi}} \quad (6.21)$$

### 6.1.3 Exemple : plaque avec fissure sous pression

Dans la méthode numérique employée, l'action de la pression dans une fissure est modélisée par l'application de forces nodales aux noeuds de l'élément fissuré. Ces forces nodales tiennent compte de la longueur et de la direction de la fissure dans l'élément qu'elle traverse.



Soit une pièce rectangulaire comportant une fissure centrale sous pression. Par symétrie, il est possible d'utiliser un maillage d'éléments finis ne modélisant qu'une moitié de la pièce. Le maillage fin du problème 1 (§ 5.2) est utilisé à cet effet. Pour une pression unitaire, et compte tenu de la géométrie de la pièce et de la fissure (fig. 3.4), le facteur d'intensité de contrainte vaut théoriquement  $K_{I_{th}} = 5,20 \text{ N/m}^{3/2}$ . La figure 6.2 représente la variation de  $K_I$  calculé par l'intégrale de surface, avec et sans terme correctif, en fonction du rayon  $Re$  du disque d'intégration qui varie entre 0 et 6 m.



**Fig. 6.2 : pression dans la fissure - variation de  $K_I$  en fonction de  $Re$**

On constate que, sans terme correctif, l'intégrale de surface dépend fortement du rayon du disque d'intégration  $Re$  : la valeur de  $K_I$  diminue lorsque le rayon  $Re$  s'accroît. Pour de petits disques d'intégration, mis à part les fluctuations numériques dues au nombre limité de points d'intégration, les valeurs calculées de  $K_I$  tendent vers une grandeur proche de la valeur théorique de  $K_I$ .

En tenant compte du terme correctif développé précédemment, les valeurs de  $K_I$  restent quasiment constantes et donc indépendantes de  $Re$ . La moyenne calculée comme indiqué au § 3.4.5 est égale à  $5,54 \text{ N/m}^{3/2}$ , soit environ + 7 % de la valeur théorique.

## 6.2. FORCES VOLUMIQUES

### 6.2.1 Modification de l'intégrale J

Lorsque le corps fissuré étudié est soumis à l'action de forces volumiques (gravité, inertie), il est possible d'établir une intégrale dont le résultat est indépendant du contour effectué autour de la pointe de la fissure. Cette intégrale notée  $J''$ , présentée par différents auteurs [6.3, 6.4, 6.5, 6.6], dérive de l'expression (2.2) de l'énergie potentielle de déformation. Elle est établie de façon similaire à l'intégrale  $J$  (§ 2.1.4), en ajoutant l'hypothèse que les forces volumiques  $f_i$  sont indépendantes de la longueur de la fissure. On obtient :

$$J'' = \int_{\Gamma} (W n_1 - t_i u_{i,1}) ds - \int_{\Omega} f_i u_{i,1} d\Omega \quad (6.22)$$

Soit un contour  $\Gamma^*$  fermé et  $\Omega^*$ , le domaine qu'il délimite. Aucune singularité (pointe de fissure) n'est présente à l'intérieur de ce domaine. L'équation (6.22) s'écrit :

$$J'' = \int_{\Gamma^*} (W n_1 - t_i u_{i,1}) ds - \int_{\Omega^*} f_i u_{i,1} d\Omega$$

Le théorème de Green s'applique (§ 2.1.5) :

$$J'' = \int_{\Omega^*} [W,1 - (\sigma_{ij} u_{i,1})_{,j} - f_i u_{i,1}] d\Omega$$

$W,1 = \sigma_{ij} u_{i,j1}$  (§ 2.1.5) et  $\sigma_{ij,j} = -f_i$  (B.7), alors

$$J'' = \int_{\Omega^*} [\sigma_{ij} u_{i,j1} - (\sigma_{ij} u_{i,1})_{,j} + \sigma_{ij,j} u_{i,1}] d\Omega$$

L'intégrand est nul et donc  $J''$  est nul sur un contour fermé  $\Gamma^*$ .

L'indépendance du contour de l'intégrale  $J''$  se démontre de la même manière que pour l'intégrale  $J$  (§ 2.1.5).

$J''$  est l'expression de  $J$  en présence de forces volumiques.

### 6.2.2. Modification de l'intégrale de surface

Soit  $\Gamma_\epsilon$ , un petit contour défini autour de la pointe de la fissure,  $\Omega_\epsilon$ , le domaine qui l'entoure.  $\Gamma$  est un plus grand contour;  $\Gamma_C$  joint les contours  $\Gamma$  et  $\Gamma_\epsilon$  le long des lèvres de la fissure.  $\Omega$  est le domaine associé à  $\Gamma$  (fig. 6.1).

L'intégrale  $J''$  s'écrit :

$$J'' = - \int_{\Gamma_\epsilon} (W n_1 - t_i u_{i,1}) ds + \int_{\Omega_\epsilon} f_i u_{i,1} d\Omega \quad (6.23)$$

Le signe est dû au sens de circulation de  $\Gamma_\epsilon$  (fig. 6.1).

L'équation (6.23) n'est pas modifiée en ajoutant des termes nuls :

$$\begin{aligned} J'' = & - \int_{\Gamma_\epsilon} (W n_1 - t_i u_{i,1}) \phi ds + \int_{\Omega_\epsilon} f_i u_{i,1} \phi d\Omega \\ & - \int_{\Gamma_C} (W n_1 - t_i u_{i,1}) \phi ds - \int_{\Gamma} (W n_1 - t_i u_{i,1}) \phi ds \end{aligned} \quad (6.24)$$

où  $\phi$  est une fonction définie au § 3.3.

Il est également rappelé que le long de  $\Gamma_C$  :

$$\begin{aligned} dy = n_1 ds &= 0 \quad (\text{lèbres parallèles à } 0 \times) \\ t_i &= 0 \quad (\text{lèbres non chargées}) \end{aligned}$$

Or,  $\Gamma^* = \Gamma + \Gamma_C - \Gamma_\epsilon$ , si bien que l'expression (6.24) devient :

$$J'' = - \int_{\Gamma^*} (W n_1 - t_i u_{i,1}) \phi ds + \int_{\Omega_\epsilon} f_i u_{i,1} \phi ds \quad (6.25)$$

$$\begin{aligned} J'' = & - \int_{\Gamma^*} W \phi dy + \int_{\Gamma^*} \sigma_{ij} u_{i,1} n_j \phi ds \\ & + \int_{\Omega_\epsilon} f_i u_{i,1} \phi ds \end{aligned} \quad (6.26)$$

Le contour  $\Gamma^*$  est fermé et ne renferme pas de singularité. Il est donc possible d'appliquer la formule de Green aux deux premières intégrales de l'expression (6.26), ce qui conduit à une intégrale sur la surface  $\Omega^* = \Omega - \Omega_\epsilon$  que limite  $\Gamma^*$  (fig. 6.1). On obtient alors :

$$\begin{aligned} J'' = & - \int_{\Omega^*} (W \phi)_{,1} d\Omega + \int_{\Omega^*} (\sigma_{ij} u_{i,1} \phi)_{,j} d\Omega \\ & + \int_{\Omega_\epsilon} f_i u_{i,1} \phi ds \end{aligned} \quad (6.27)$$

$$\begin{aligned}
 J'' &= - \int_{\Omega^*} [W,1 - (\sigma_{ij} u_{i,1}),j] \phi \, d\Omega \\
 &- \int_{\Omega^*} [(W - \sigma_{ij} u_{i,1}) \phi,1 - (\sigma_{i2} u_{i,1}) \phi,2] \, d\Omega \\
 &+ \int_{\Omega_\varepsilon} f_i u_{i,1} \phi \, d\Omega
 \end{aligned} \tag{6.28}$$

La première intégrale de l'expression (6.28) se réduit, en utilisant l'équation (B.7) et la démarche exposée au § 2.1.5, à l'intégrale :

$$- \int_{\Omega^*} f_i u_{i,1} \phi \, d\Omega$$

si bien que l'intégrale  $J''$  devient :

$$\begin{aligned}
 J'' &= - \int_{\Omega^*} [(W - \sigma_{i1} u_{i,1}) \phi,1 - (\sigma_{i2} u_{i,2}) \phi,2] \, d\Omega \\
 &- \int_{\Omega^*} f_i u_{i,1} \phi \, d\Omega + \int_{\Omega_\varepsilon} f_i u_{i,1} \phi \, d\Omega
 \end{aligned} \tag{6.29}$$

La deuxième intégrale représente le terme correctif tenant compte des forces volumiques. En utilisant les résultats de l'annexe G :

$$\begin{aligned}
 J'' &= - \frac{1}{2} K_I \Phi(v, u^I, \phi) - \frac{1}{2} K_{II} \Phi(v, u^{II}, \phi) \\
 &- \frac{1}{2} K_I \int_{\Omega^*} f_i u_{i,1}^I \phi \, d\Omega - \frac{1}{2} K_{II} \int_{\Omega^*} f_i u_{i,1}^{II} \phi \, d\Omega
 \end{aligned} \tag{6.30}$$

On définit :

$$\text{où } \psi(\tilde{f}, u^\alpha, \phi) = \int_{\Omega^*} f_i u_{i,1}^\alpha \phi \, d\Omega ; \alpha = I, II \tag{6.31}$$

L'expression (6.30) s'écrit alors :

$$J'' = K_I \left[ -\frac{1}{2} \Phi (v, u^I, \phi) - \frac{1}{2} \psi (\underline{f}, u^I, \phi) \right] + K_{II} \left[ -\frac{1}{2} \Phi (v, u^I, \phi) - \frac{1}{2} \psi (\underline{f}, u^{II}, \phi) \right] \quad (6.32)$$

En utilisant les résultats de l'annexe D et en particulier le fait que les expressions de  $\Phi$  et  $\psi$  ne comportent que des termes relatifs soit au mode I, soit au mode II, une identification terme à terme est possible avec l'équation (2.47), ce qui conduit à l'expression :

$$K_\alpha = -\frac{E^*}{2} \Phi (v, u^\alpha, \phi) - \frac{E^*}{2} \int_{\Omega^*} f_i u_{i,1}^\alpha \phi \, d\Omega \quad (6.33)$$

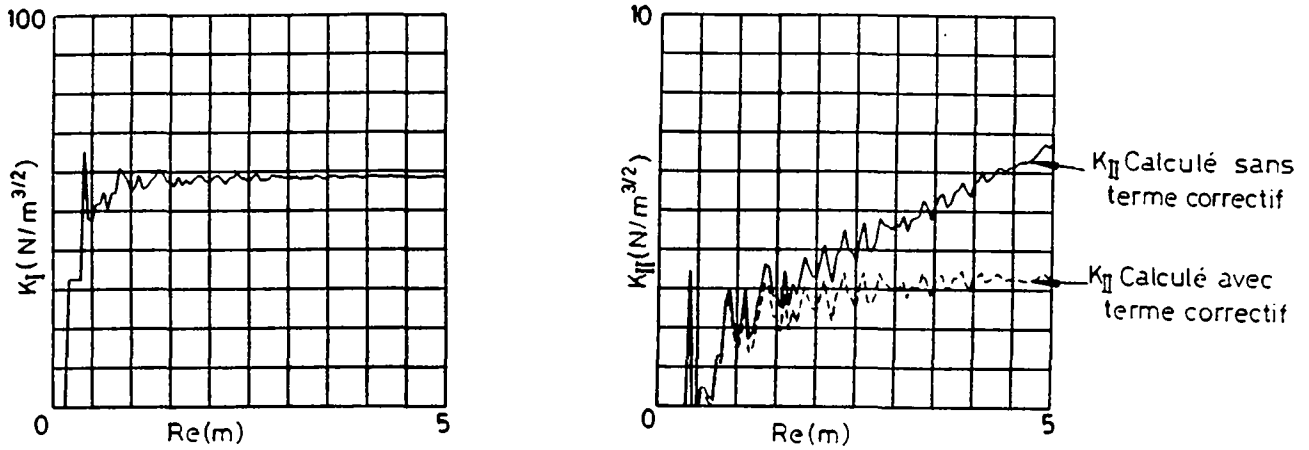
où :  $\alpha = I, II$

L'équation (6.33) représente l'expression générale de l'intégrale de surface effectuée en présence de forces volumiques  $\underline{f}$ . La deuxième intégrale corrige la première de l'influence des forces volumiques, et rend le résultat indépendant du domaine d'intégration.

Tout comme dans l'équation différentielle (B.5), les termes de gravité et d'inertie sont traités conjointement dans l'équation (6.33). C'est pourquoi l'exemple d'application qui suit ne fait intervenir que des forces volumiques de gravité. L'application aux forces d'inertie sera entreprise au paragraphe suivant qui traite des problèmes de dynamique.

### 6.2.3. Exemple : plaque fissurée soumise à la gravité

L'indépendance du résultat de l'intégrale de surface vis-à-vis du domaine d'intégration est étudiée pour une plaque carrée fissurée suspendue dans un champ gravitaire.



**Fig. 6.3 : plaque carrée fissurée jusqu'en son milieu, suspendue dans un champ gravitaire**

La fissure est modélisée par des éléments fissurés (§ 4.4) et le maillage utilisé est régulier (20 x 21 éléments). On a :

- poids volumique :  $\rho = 1 \text{ N/m}^3$ ; champ de gravité  $\tilde{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

L'intégrale de surface est calculée pour des disques centrés à la pointe de la fissure et dont le rayon extérieur  $Re$  varie de 0 à 5 m.

Les graphiques de la figure 6.3 montrent la variation de  $K_I$  et  $K_{II}$  en fonction de  $Re$ , avec et sans correction de l'intégrale de surface, selon l'équation (6.33).

En tenant compte du terme correctif, les fluctuations numériques donnant  $K_{II}$  se stabilisent selon une droite horizontale correspondant à la valeur de  $K_{II}$  cherchée.

Dans cet exemple, la valeur de  $K_I$  n'est pas modifiée par la correction apportée à l'intégrale de surface pour assurer l'indépendance du résultat vis-à-vis du domaine d'intégration. En effet, l'intégrale corrigeant la valeur calculée de l'intégrale de surface est de la forme :

$$\int_{\Omega^*} -\rho b_i u_{i,1}^\alpha \phi \, d\Omega \quad ; \quad \alpha = I, II \tag{6.34}$$

or par rapport à un axe orienté selon la fissure, les équations (2.39) et (2.40) montrent que :

$$u_{1,1}^I(\theta) = u_{1,1}^I(-\theta)$$

$$u_{2,1}^I(\theta) = -u_{2,1}^I(-\theta)$$

$$u_{1,1}^{II}(\theta) = -u_{1,1}^{II}(-\theta)$$

$$u_{2,1}^{II}(\theta) = u_{2,1}^{II}(-\theta)$$

Les expressions  $u_{2,1}^I$  et  $u_{1,1}^{II}$  sont antisymétriques. Leurs contributions s'annulent donc deux à deux de part et d'autre de l'axe x (la fonction  $\phi$  étant supposé symétrique). De plus comme  $\tilde{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ , seule la contribution de  $u_{2,1}^{II}$  intervient dans l'intégrale. Cette dernière ne corrige donc que  $K_{II}$ .

### 6.3. SOLLICITATIONS DYNAMIQUES

Comme mentionné au § 5.4, l'hypothèse d'une propagation quasi-statique est posée, ce qui revient à analyser la progression des fissures dans la structure étudiée, indépendamment de la vitesse de propagation.

#### 6.3.1. Algorithme de propagation pour une analyse dynamique

L'algorithme transitoire est un algorithme implicite utilisant la méthode de Newmark d'intégration dans le temps (annexe C). Il présente l'avantage d'être stable, indépendamment du pas de temps choisi pour la résolution du problème dynamique. Le tableau 6.1 expose les différentes séquences de l'algorithme.

1. Pour chaque pas de temps :  $t = (n+1) \Delta t$  ;  $n \leftarrow n+1$

- étape de propagation :  $i = 0$

- prédicteurs  $\tilde{d}_{n+1}^{(i)} = \tilde{d}_{n+1} = \tilde{d}_n + \Delta t \tilde{v}_n + \frac{\Delta t^2}{2} (1 - 2\beta) \tilde{a}_n$  (C.32)

$$\tilde{v}_{n+1}^{(i)} = \tilde{v}_{n+1} = \tilde{v}_n + \Delta t (1 - \gamma) \tilde{a}_n \quad (C.33)$$

- forces nodales extérieures imposées :  $\tilde{F}_{n+1} = \tilde{F}_{ext}(n+1)$

- déplacements imposés (séisme) :  $\tilde{d}_{t+1} = \tilde{d}_{(t+1)}$

2. Pour chaque étape de propagation :  $i \leftarrow i+1$

a) matrice globale de rigidité :  $\tilde{K}_{n+1}^{(i)} = \tilde{A}_{n+1} [k^e]$  (C.11)

b) second membre :  $\tilde{F}_{n+1}^{(i)} = \tilde{F}_{n+1} + \frac{1}{\beta \Delta t^2} \tilde{M} \cdot \tilde{d}_{n+1} + \left( \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \tilde{d} - \tilde{v} \right) \cdot \tilde{C} - \tilde{K}_{n+1}^{(i)} \cdot \tilde{d}_{n+1}$

c) résolution :  $\left( \frac{1}{\beta \Delta t^2} \tilde{M} + \frac{1}{\beta \Delta t} \tilde{C} + \tilde{K} \right) \tilde{d}_{n+1}^{(i)} = \tilde{F}_{n+1}^{(i)}$  (C.34)

d) correcteurs :  $\tilde{a}_{n+1}^{(i)} = \frac{1}{\beta \Delta t^2} (\tilde{d}_{n+1}^{(i)} - \tilde{d}_{n+1})$  (C.31), (C.32)

$$\tilde{v}_{n+1}^{(i)} = \tilde{v}_{n+1} + \gamma \Delta t \tilde{a}_{n+1}^{(i)} \quad (C.31), (C.33)$$

- e) vérification de l'ouverture ou non des éléments déjà fissurés; contrôle de la déformation perpendiculaire à la fissure :  $\epsilon_2' < \text{ou} > 0$

- f) calcul des contraintes (sauf dans les éléments fissurés)

$$\tilde{\sigma} = f(\tilde{d}_{n+1}^{(i)}) \quad (C.12)$$

- g) si désiré, détection de nouvelles fissures dans les éléments du bord de la structure :  $\sigma_1 < \text{ou} > f_{ct}$

- h) pour chaque fissure :

- calcul de  $K_I$ ,  $K_{II}$  et de l'angle de propagation (3.23), (2.53)

- détermination de la propagation :  $f(K_I, K_{II}) < \text{ou} > K_{IC}$  (2.56)

- si propagation : recherche du nouvel élément fissuré, calcul et mise en mémoire de ses paramètres

- i) validation et initialisation des nouvelles fissures détectées à la séquence f (§ 5.3)

- j) s'il y a eu propagation d'une fissure existante ou initialisation d'une nouvelle fissure, retour en 2 (selon la longueur de propagation admise dans un pas de temps), sinon retour en 1.

**Tableau 6.1** : algorithme dynamique de propagation



La matrice de masse  $\tilde{M}$  utilisée dans l'algorithme est construite en faisant l'hypothèse que la masse relative aux différents éléments finis est concentrée aux noeuds. De ce fait, la matrice  $\tilde{M}$  est diagonale. Lorsque l'élément considéré est fissuré, la construction de la matrice de masse est effectuée dans les différents domaines décrits au § 4.4.1, puis assemblée de la même façon que la matrice de rigidité de l'élément fissuré (§ 4.4.2).

La matrice d'amortissement visqueux  $\tilde{C}$  est établie à partir de la formulation de Rayleigh [6.7], telle que :

$$\tilde{C} = a_0 \tilde{M} + a_1 \tilde{K} \quad (6.35)$$

où  $a_0$  et  $a_1$  sont des paramètres tels que :

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = 2 \frac{\omega_n \omega_m}{\omega_n^2 - \omega_m^2} \begin{pmatrix} \omega_n & -\omega_m \\ -\frac{1}{\omega_n} & \frac{1}{\omega_m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_m \\ \xi_n \end{pmatrix} \quad (6.36)$$

où  $\xi_m$  et  $\xi_n$  sont les coefficients d'amortissement choisis, relatifs aux pulsations  $\omega_m$  et  $\omega_n$ .

Lorsqu'il y a propagation d'une fissure, celle-ci, selon les hypothèses faites au chapitre 5, se prolonge d'une longueur d'élément par étape de propagation. Pendant un pas de temps, la fissure peut se propager d'une longueur  $\Delta a$  en plusieurs étapes de propagation. La vitesse de la fissure est donc  $v = \Delta a / \Delta t$ . Cette vitesse, dans le cas du béton massif, n'a pas de réalité physique si elle dépasse la valeur  $0,3 C_R$ , soit environ 600 m/s, vitesse maximale observée dans ce matériau [5.2]. Pour être plus précis, les équations du modèle de propagation proposé ne tiennent pas compte de la vitesse de propagation de la fissure, ni des forces d'inertie qui doivent en résulter. En conséquence, il est admis artificiellement de limiter la longueur de la propagation de chacune des fissures dans un pas de temps, à la valeur de  $0,3 C_R \Delta t$ . Ainsi, lorsque la longueur de propagation correspondant à la vitesse maximale de propagation (environ 600 m/s pour le béton massif [5.2]) a été atteinte, voire même dépassée lors de la dernière étape de fissuration, la propagation de cette fissure n'est plus

prise en compte pour le pas de temps considéré. La fissure peut se propager, selon l'évolution des charges, au pas de temps suivant. Cette limitation n'est bien entendu respectée que si la dimension caractéristique d'un élément,  $h$ , est telle que :

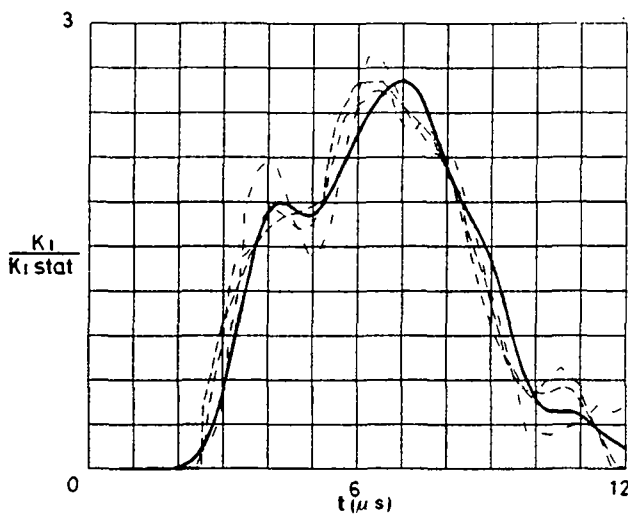
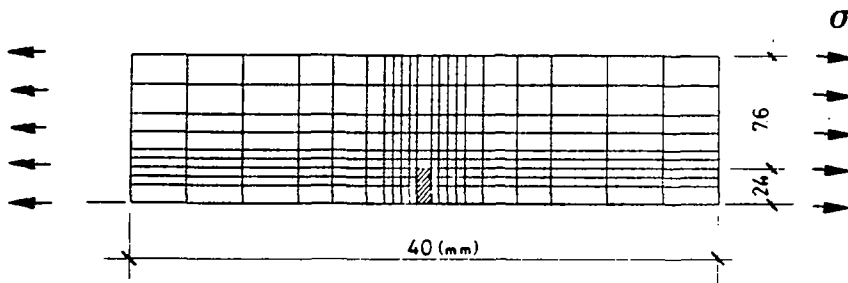
$$\frac{h}{0,3 C_R} \leq \Delta t \quad (6.37)$$

### 6.3.2. Fissure de longueur constante soumise à une charge dynamique

L'analyse du comportement d'une fissure de longueur constante soumise à une charge dynamique permet de vérifier la validité du calcul des facteurs d'intensité de contrainte en présence de forces d'inertie.

• **Pièce présentant une fissure centrale soumise à un impact en traction**

Plusieurs auteurs [6.8, 6.9, 6.10] ont étudié la variation dans le temps de  $K_I$  de la pièce fissurée décrite à la figure 6.4. La pièce est chargée subitement par une traction extérieure  $\sigma$ .



- Méthodes de calcul
- Eléments finis intégrale de surface
  - - - Différences finies extrapolation [6,8]
  - - - Eléments finis éléments singuliers [6,9]
  - - - Eléments finis intégrale J [6,10]

Fig. 6.4 : variation dans le temps de  $K_I/K_{Istat}$  (pièce fissurée soumise à un impact)

Pour ce calcul, les différents paramètres suivants ont été utilisés :

$$E = 2 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$$

$$\rho = 5000 \text{ kg/m}^3 \text{ (masse volumique)}$$

$$\nu = 0,3$$

$$\gamma = 0,5 ; \beta = 0,25$$

$$\Delta t = 9 \cdot 10^{-8} \text{ s}$$

(paramètres de Newmark, annexe C)

La figure 6.6 présente la variation dans le temps du rapport  $K_I/K_{Istat}$ , où  $K_{Istat}$  est la valeur statique de  $K_I$  obtenue pour la valeur  $\sigma$  de la charge extérieure. On précise que  $K_{Istat}$  présente une erreur de 2 % par rapport à la valeur théorique. La courbe obtenue est en accord avec celles présentées par les différents auteurs mentionnés plus haut, et qui ont utilisé d'autres méthodes que l'intégrale de surface pour le calcul de  $K_I$ .

Comme vérification de l'indépendance du résultat de l'intégrale de surface en présence de forces d'inertie, la figure 6.5 présente la variation de  $K_I/K_{Istat}$  en fonction de  $Re$  au temps  $t = 6 \mu s$ .

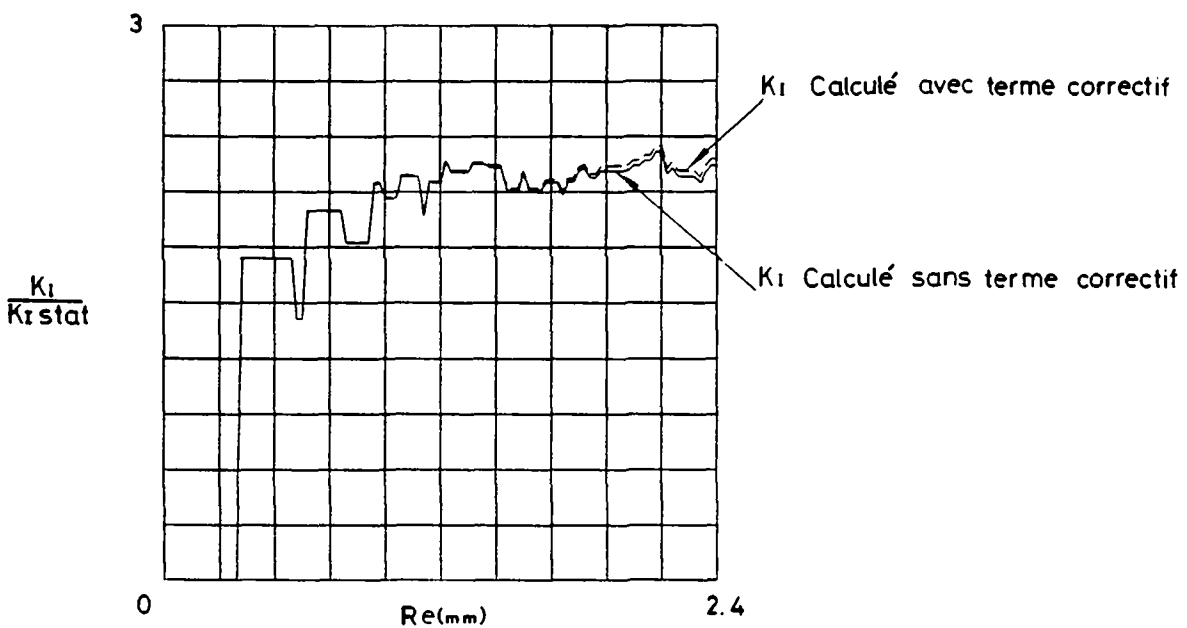


Fig. 6.5 : variation de  $K_I/K_{Istat}$  en fonction de  $Re$  ( $t = 6 \mu s$ )

### 6.3.3. Fissure de longueur constante soumise à une sollicitation cyclique alternée

L'analyse d'une fissure dans une pièce soumise à une sollicitation variant de façon cyclique alternée dans le temps (traction puis compression) permet de vérifier l'influence de la fermeture de la fissure sur le comportement global de la pièce. Lorsque que la fermeture de la fissure est détectée (étape *f* du tableau 6.1), l'élément fissuré retrouve un comportement élastique à la prochaine analyse. Ce "retard" est d'autant moins marqué que le pas de temps est réduit.

Les deux extrémités de la pièce présentée sur la figure 5.4 comportant une fissure droite (maillage grossier), sont soumises à des déplacements imposés variant dans le temps de façon cyclique. Plusieurs calculs ont été faits pour des fréquences de sollicitation variant de 1 Hz à 10 Hz.

Pour cette étude, les paramètres suivants ont été utilisés :

$$E = 3 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$$

$$\rho = 2400 \text{ kg/m}^3$$

$$\nu = 0,15$$

$$\Delta t = 0,01 \text{ s}$$

La figure 6.6 présente, pour deux fréquences (2 et 10 Hz), la variation de  $K_I$  en fonction du temps.

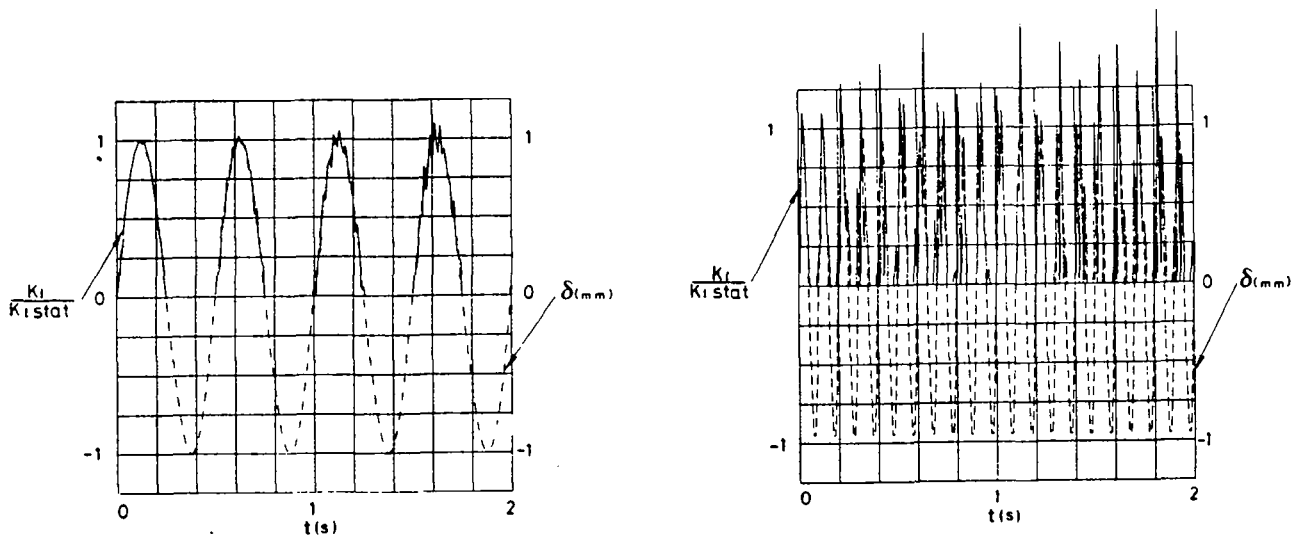


Fig. 6.6 : variation de  $K_I$  ( $\gamma = 0,5$  ;  $\beta = 0,25$ )

On remarque que pendant le cycle d'ouverture et fermeture de la fissure, la variation de  $K_I$  est perturbée par des ondes de fréquence beaucoup plus élevées. Elles correspondent à une vibration propre des éléments finis utilisés. Pour supprimer cette perturbation, très sensible à 10 Hz, il est possible d'utiliser des paramètres d'intégration dans le temps légèrement différents. L'algorithme reste inconditionnellement stable pour :

$$\beta \leq \frac{(\gamma + 0,5)^2}{4} \quad (6.37)$$

Ainsi, pour  $\gamma = 0,55$  et  $\beta = 0,28$  un amortissement numérique de 5 % à 5 Hz et de l'ordre de 20 % à 50 Hz [6.11] intervient dans le calcul et permet de supprimer ces ondes parasites.

La figure 6.7 présente alors la variation de  $K_I$  en fonction du temps pour des fréquences de 1, 2, 5 et 10 Hz.

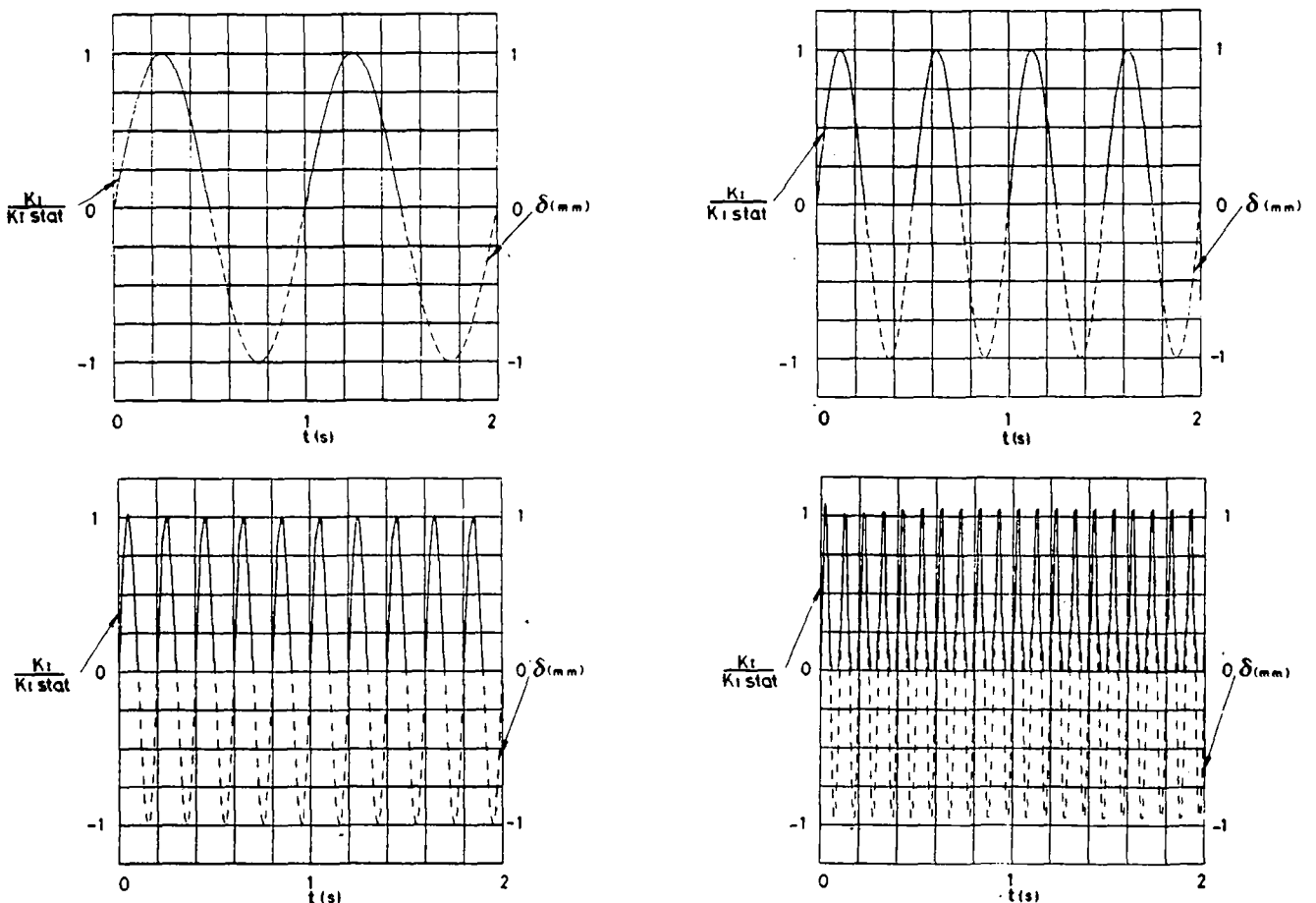


Fig. 6.7 : variation de  $K_I$  ( $\gamma = 0,55$  ;  $\beta = 0,28$ )

L'utilisation de l'intégrale de surface peut donc, comme il a été démontré dans ce chapitre, être étendue à différents types de sollicitations telles que la pression dans les fissures et l'action de forces volumiques. Le modèle traduit ainsi correctement le comportement de pièces fissurées soumises à des charges dynamiques.

## REFERENCES

- [6.1 ] H.G. de Lorenzi. Energy release rate calculation by the finite element method. G.E. report, No 82, CRD 205, 1982.
- [6.2 ] A.C. Palmer, J.R. Rice. The growth of slip surfaces in the progressive failure of over-consolidated clay. Proc. Roy. Soc. London, A.332, 1973.
- [6.3 ] AS.N. Atluri. Path independent integrals in finite elasticity and inelasticity, with body forces, inertia and arbitrary crack force conditions. Eng. Fract. Mech., vol. 16, No 3, 1982.
- [6.4 ] M. Sakata, S. Aoki, I. Ishii. J integral analysis for rotating disk. Int. Conf. Fract. Mech. Tech. (Sih & Chow, Ed.), Sijthoff & Noordhoff, 1977.
- [6.5 ] K. Kishimoto, S. Aoki, M. Sakata. On the path independent integral J. Eng. Fract. Mech., vol. 13, 1980.
- [6.6 ] H.D. Bui. Stress and crack displacement intensity factors in elastodynamics. Fracture 3, I.C.F.4, Waterloo (1979).
- [6.7 ] R.W. Clough, J. Penzien. Dynamics of structures. Mc Graw-Hill, 1975.
- [6.8 ] Y.M. Chen, M.L. Wilkins. Numerical analysis of dynamic problems. In "Elastodynamic and crack problems" (G.C. Sih, Ed.), Noordhoff, 1977.
- [6.9 ] J.A. Aberson, J.M. Anderson, W.W. King. Dynamic analysis of cracked structures using singularity finite elements. In "Elastodynamic crack problems" (G.C. Sih, Ed.), Noordhoff, 1977.
- [6.10] S. Mall. A finite element analysis of transient crack problems with a path independent integral. I.C.F.5, Cannes, 1981.
- [6.11] Th. Zimmermann, B. Rebera, C. Rodriguez. Airplane impacts on reinforced concrete shells. Rilem Symp., Berlin, juin 1982.





## 7. APPLICATION A LA FISSURATION D'UN BARRAGE POIDS LORS D'UN SEISME

Depuis une vingtaine d'années, le développement des techniques de calculs numériques et des grands ordinateurs ont fourni le moyen d'étudier le comportement dynamique de barrages pendant un tremblement de terre. En particulier, elles ont permis d'effectuer des analyses modales ou des calculs linéaires qui permettent de vérifier la sécurité de l'ouvrage si les caractéristiques ultimes du matériau ne sont pas dépassées.

Des méthodes d'analyse non-linéaires ont également été développées [1.2, 7.1], basées sur des critères de résistance à la traction du béton.

Le modèle développé dans le cadre de cette recherche, qui a comme principale caractéristique de recourir à un critère basé sur la mécanique linéaire élastique de la rupture, est appliqué ci-après au comportement d'un barrage poids pendant un séisme.

Cette étude, volontairement simplifiée, ne représente qu'un exemple d'application du modèle. Une analyse plus complète du comportement non-linéaire d'un barrage poids pourrait être effectuée en modélisant le massif de fondation et l'eau dans la retenue, rendant ainsi compte des phénomènes d'interaction sol-structure et fluide-structure. Cette modélisation pose de nombreux problèmes, encore du domaine de la recherche, et qui ne sont pas l'objet du présent travail. En effectuant un calcul simplifié, le but visé est de faire un pas de plus dans la modélisation du comportement réel d'ouvrages massifs. Il met en outre en évidence les possibilités du modèle proposé.

Les hypothèses principales qui sont à la base du modèle sont brièvement rappelées :

- L'étude du barrage poids est ramenée à l'analyse bidimensionnelle d'une section verticale d'épaisseur unitaire, en faisant l'hypothèse des déformations planes. La géométrie et le mode de résistance du barrage aux forces qui le sollicitent, tendant à le renverser ou à le cisailer justifient le calcul bidimensionnel. Les forces sismiques les plus défavorables sont pour cet ouvrage également dans la direction de la vallée.

Le calcul bidimensionnel se justifie d'autant plus si la longueur du couronnement du barrage est grande en regard de sa hauteur. Dans le cas contraire, un effet voûte se manifeste certainement, et un calcul tridimensionnel serait plein d'intérêt pour tenir compte de l'augmentation de la sécurité.

- La théorie des petites déformations est utilisée; le comportement du barrage n'est donc suivi correctement que jusqu'au début du processus de ruine finale.
- Le critère de rupture est basé sur la mécanique linéaire élastique de la rupture, qui tente de traduire correctement le phénomène de propagation de fissures dans une structure massive.
- Les fissures ouvertes sont supposées sans frottement interne; il n'est également pas tenu compte des variations des propriétés mécaniques du béton soumis à des charges répétées ou brusques. Le milieu non-fissuré est considéré comme parfaitement élastique.
- La vitesse de propagation des fissures est admise inférieure à 600 m/s si bien qu'il est possible d'effectuer une analyse quasi-statique de leur propagation.
- Seule la composante horizontale de la sollicitation sismique est appliquée à l'ouvrage.

## 7.1. SEISME

L'accélération maximale du sol,  $a_{max}$ , est la première caractéristique importante d'un séisme. Elle donne en particulier une idée de l'intensité du tremblement de terre par les relations approximatives suivantes [7.2], où  $a_{max}$  est rapporté à  $g$ , accélération de la pesanteur :

Intensité MSK	$a_{max}/g$
VI	0,06 - 0,07
VII	0,1 - 0,15
VIII	0,25 - 0,30

La durée du tremblement de terre et l'évolution des différentes phases qui le caractérisent ont également une grande influence sur le comportement des ouvrages, en particulier la phase des mouvements forts, liée à l'arrivée des ondes de cisaillement (S) [7.3, 7.4].

Le contenu en fréquence est une mesure de la quantité d'énergie présente pour chaque fréquence dans l'accélérogramme. Il est donné par le spectre de réponse d'un certain nombre d'oscillateurs à un degré de liberté, présentant différents amortissements. Celui-ci fournit les valeurs extrêmes de l'accélération, de la vitesse et du déplacement relatif lorsque chaque oscillateur, présentant une fréquence propre différente, est soumis au séisme.

La gamme de fréquences significative pour un séisme est en général comprise entre 0,1 Hz et 10 Hz [7.3].

L'accélérogramme choisi pour cette application est dérivé de l'enregistrement du Golden Gate Park aux Etats-Unis (1957), normé pour présenter une accélération maximale de 0,1 g (fig. 7.1) ou de 0,2 g. Ces accélérations maximales sont relativement élevées, mais pas hors de toute réalité pour des conditions suisses. Il est relativement court (12 s) et la phase de mouvements forts couvre la majeure partie de l'excitation. Le diagramme des déplacements obtenu par intégration de l'accélérogramme est également donné à la figure 7.1.

La figure 7.2 présente les spectres de réponse normé à 0,1 g et 0,2 g, pour des amortissements de 0 % et 5 %. Ces deux spectres de réponse donnent des valeurs maximales d'accélération d'environ 0,3 g d'une part et 0,5 g d'autre part pour une structure présentant une fréquence propre de 4 Hz et un amortissement de 5 %.

Dans le cas présent, seule la composante horizontale de l'accélération est utilisée.

## **7.2. BARRAGE POIDS**

### **7.2.1 Géométrie**

L'ouvrage étudié est un barrage poids type de 122 m de haut et 103 m à la base. Il présente un fruit amont de 0,05 et un fruit aval de 0,85. L'épaisseur au couronnement est de 9,75 m (fig. 7.3).

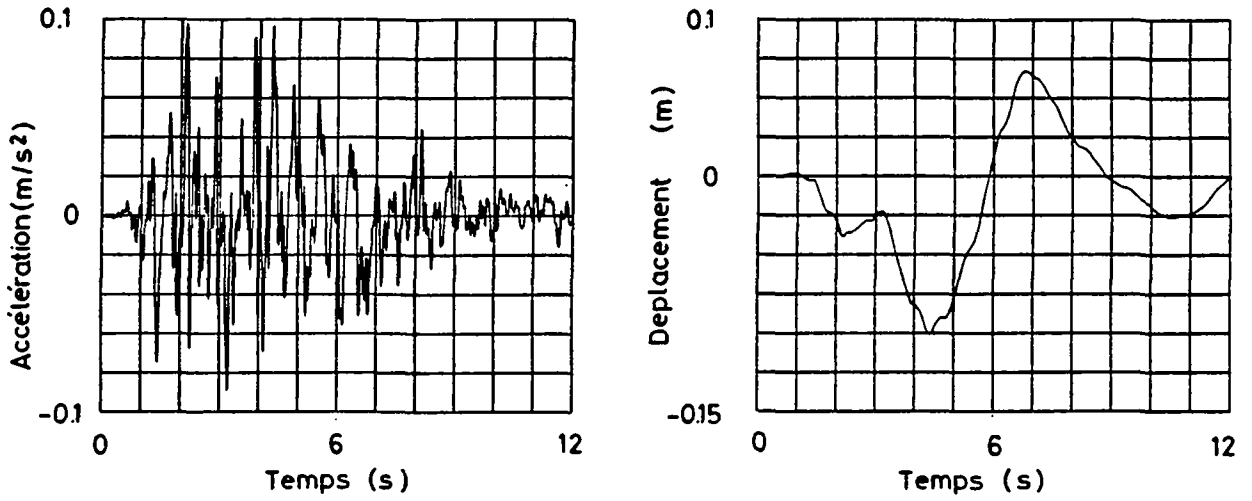


Fig. 7.1 : accélérogramme et diagramme de déplacement de l'excitation sismique (0,1 g)

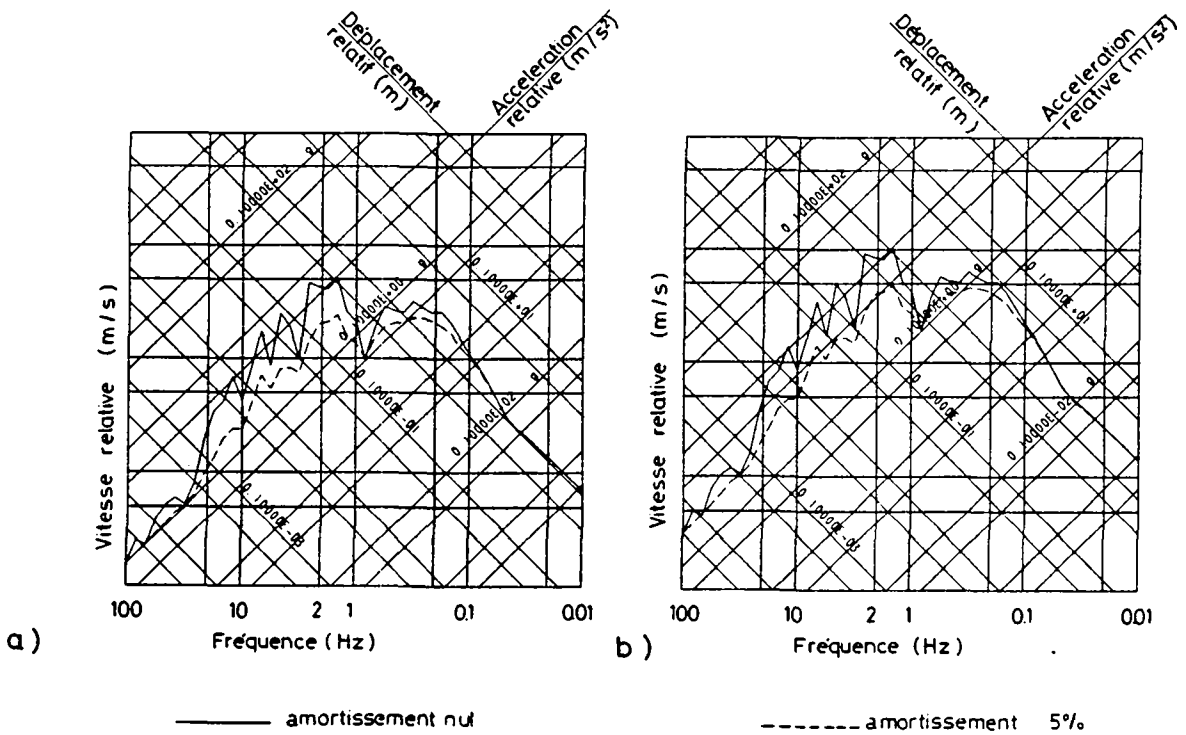


Fig. 7.2 : spectres de réponse

- a)  $a_{max} = 0,1 \text{ g}$
- b)  $a_{max} = 0,2 \text{ g}$

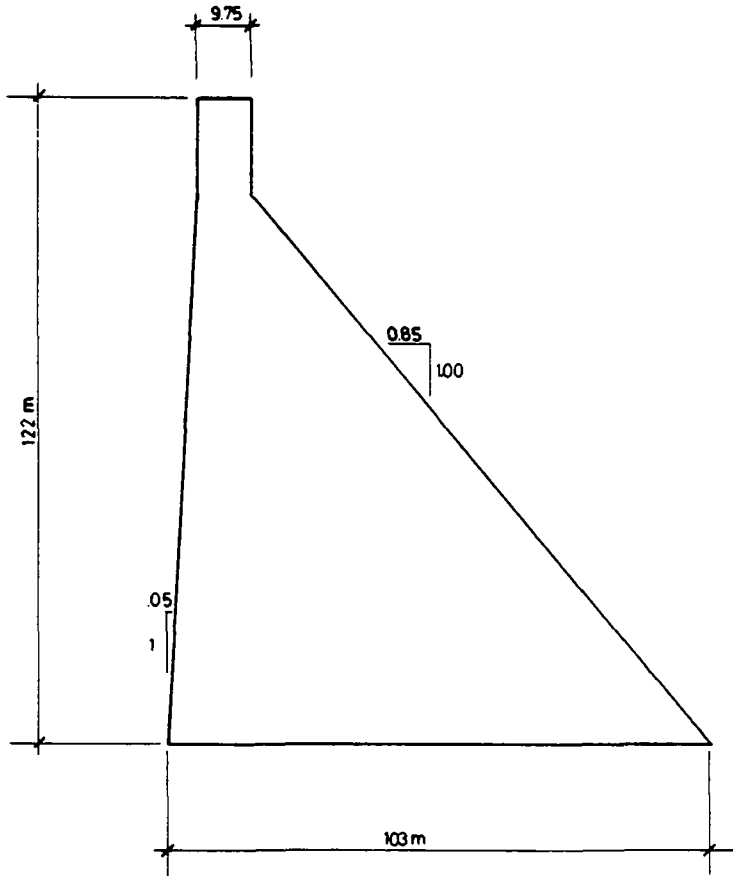


Fig. 7.3 : barrage poids étudié

### 7.2.2 Caractéristiques du matériau

Les caractéristiques suivantes du béton ont été retenues :

- module de Young  $E = 3 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$
- module de Poisson  $\nu = 0,15$
- poids volumique  $\rho = 24 \cdot 000 \text{ N/m}^3$

L'évaluation de la valeur du facteur d'intensité de contraintes critique,  $K_{IC}$ , présente un problème difficile à résoudre, donnant lieu à de nombreuses recherches et essais en laboratoire. En effet, comme il a été relevé au chapitre 1, la mécanique linéaire élastique de la rupture n'est applicable au béton que dans le cas de grandes structures massives. Or la détermination expérimentale des caractéristiques des matériaux se fait en général sur des éprouvettes de petite taille. C'est pourquoi la valeur de  $K_{IC}$  du béton normal est connue avec peu de précision et varie selon les auteurs entre  $0,5 \text{ MN/m}^{3/2}$  et  $1,5 \text{ MN/m}^{3/2}$  [7.5].

Récemment, des essais spéciaux effectués sur des bétons de barrage en Suisse par E. Brühwiller [7.6] ont montré que bien que la contrainte de résistance à la traction ( $1,8 \text{ MN/m}^2$ ) soit plus faible que pour des bétons normaux, l'énergie nécessaire à la fissuration,  $G_f$ , est plus élevée pour des bétons de barrage, en raison de la grosseur des agrégats : le chemin de la fissure qui les contourne est d'autant plus grand. La première valeur de  $K_{IC}$  retenue pour cette étude est donc  $1,5 \text{ MN/m}^{3/2}$ , qui est la valeur supérieure proposée à l'heure actuelle. On a ainsi :

- contrainte de traction maximale  $f_{ct} = 1,5 \text{ MN/m}^2$  <sup>1/</sup>
- facteur critique d'intensité de contraintes  $K_{IC} = 1,5 \text{ MN/m}^{3/2}$

Dans cet exemple, il n'est pas tenu compte des variations des caractéristiques mécaniques du matériau en fonction de la vitesse de charge ou de la fatigue. Une étude détaillée de ces points a été récemment présentée par P. Chappuis [7.7].

### 7.2.3 Conditions de fondations

Dans le calcul qui suit, on considère que le barrage est totalement encastré à une fondation parfaitement rigide.

---

1/ Cette valeur est relativement élevée en regard de celle admise dans le calcul statique d'un barrage où l'on doit notamment tenir compte de la moindre résistance des joints de bétonnage.

La sollicitation sismique horizontale est appliquée à la base de l'ouvrage (déplacements imposés dans le temps).

Ces dispositions négligent le problème de l'interaction sol-structure [7.9].

#### **7.2.4 Modes propres de vibration - amortissement**

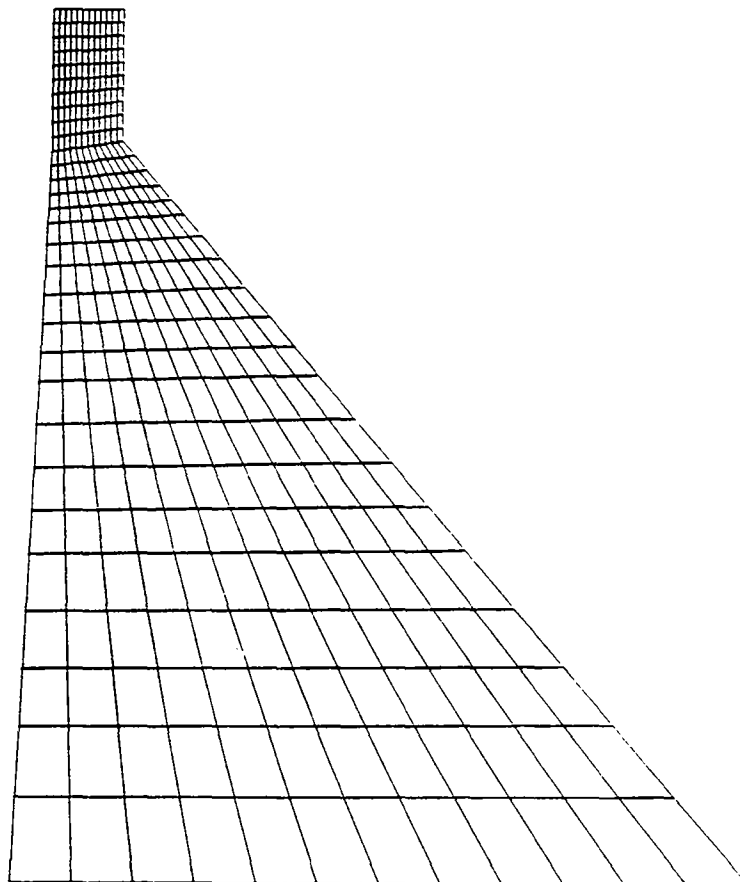
Une analyse modale du barrage dans les conditions précitées a permis de déterminer la fréquence de base de vibration de l'ouvrage étudié, qui est de 3,9 Hz. Les modes propres suivants se développent pour des fréquences de 7,5 et 10,4 Hz.

Une première dissipation d'énergie provient de l'amortissement visqueux que le béton présente sous l'action de forces dynamiques. On suppose ainsi que les forces d'amortissement sont proportionnelles à la vitesse. Des coefficients d'amortissement ont pu être déterminés par des essais de vibration sur des barrages, et les valeurs obtenues en général pour les barrages poids varient entre 2 et 5 %, et même près de 10 % pour des mouvements de grande amplitude [7.8]. Un coefficient d'amortissement de 5 % a été retenu pour cette étude. Cette valeur est sensée également tenir compte très partiellement de la perte d'énergie par rayonnement des ondes dans le sol de fondation [1.2].

### **7.3. DONNEES NUMERIQUES**

L'intervalle de temps choisi pour l'étude du phénomène transitoire est  $\Delta t = 0,01$  s; cette valeur permet de représenter correctement la sollicitation sismique et des fréquences inférieures à 10 ou 15 Hz, ce qui est suffisant car la majeure partie du contenu en fréquences de l'accélérogramme est située entre 0,1 et 10 Hz comme déjà mentionné (fig. 7.2).

La figure 7.4 représente le maillage utilisé pour l'analyse du barrage. La partie supérieure de l'ouvrage est plus finement discrétisée car c'est dans cette zone que des fissures sont susceptibles de se déclarer.



**Fig. 7.4 : maillage**

Ce maillage permet de tenir compte correctement des phénomènes dynamiques dans la gamme de fréquence désirée.

Les paramètres d'amortissement utilisés dans l'équation (6.35) sont définis à partir du coefficient d'amortissement de 5 % mentionné au § 7.3, associé à la fréquence propre de vibration du barrage de 3,9 Hz et à un coefficient de 25 %, associé à la fréquence de 100 Hz, ce qui permet de filtrer les hautes fréquences non-significatives.

Par ailleurs, l'amortissement numérique, dont l'utilité a été montrée au § 6.3.3. est introduit au moyen des paramètres de Newmark suivants :



$$\gamma = 0,55 \quad ; \quad \beta = 0,28$$

Pour limiter le nombre d'opérations par étape de propagation, un seul disque d'intégration est utilisé pour le calcul des facteurs d'intensité de contraintes (§ 3.4.5).

#### 7.4. ANALYSE DU BARRAGE

Quatre calculs du barrage à lac vide ont été effectués :

- $a_{\max} = 0,1 \text{ g}$  : calcul linéaire (c'est-à-dire sans fissuration)  
calcul non-linéaire
- $a_{\max} = 0,2 \text{ g}$  : calcul linéaire  
calcul non-linéaire

Dans les dessins qui suivent, les déplacements et la déformation du barrage sont indiqués en traitillé (facteur d'agrandissement : 100). Les fissures sont représentées sur le dessin du barrage non déformé. Les fissures ouvertes sont en trait plein; les fissures qui se sont refermées en pointillé. Les déplacements positifs ont lieu vers l'aval.

##### 7.4.1. $a_{\max} = 0,1 \text{ g}$

Le barrage s'est comporté de façon linéaire jusqu'à 4,43 s après le début de l'excitation sismique, où une fissure a été décelée à la base aval du couronnement. Cette fissure, orientée primitivement perpendiculairement au parement, s'est propagée verticalement au pas de temps suivant, pour se stabiliser pour tout le reste du séisme (fig. 7.5).

Le diagramme des déplacements horizontaux du point C situé au sommet du couronnement, côté aval, est, comme le montre la figure 7.6, quasiment identique à celui obtenu par le calcul linéaire. La figure 7.6 montre également le déplacement relatif du point C par rapport au point A situé au talon amont du barrage. On constate bien que ce déplacement différentiel présente globalement une période proche de la période propre de vibration du barrage.

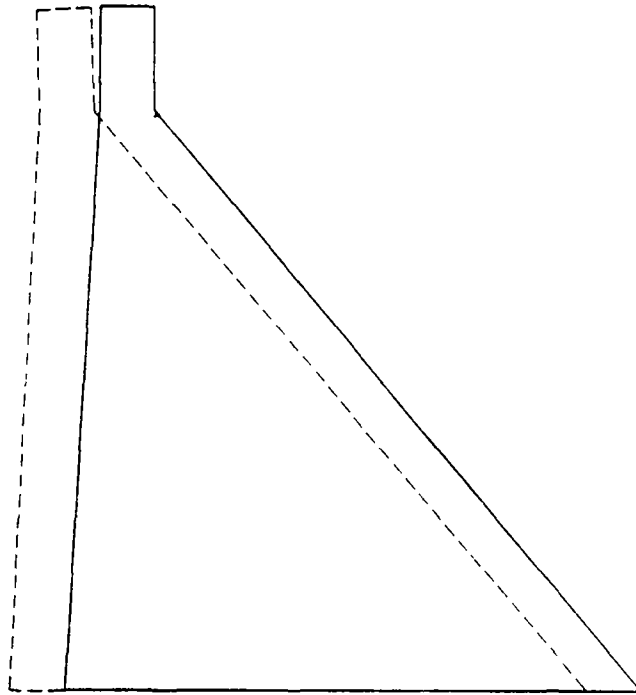


Fig. 7.5 : déformée et fissuration du barrage  
 $a_{max} = 0,1 g$  ;  $t = 4,43 s$

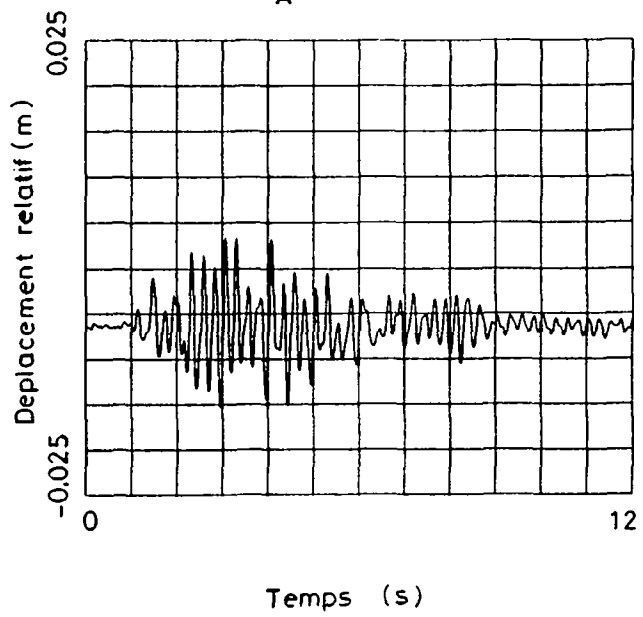
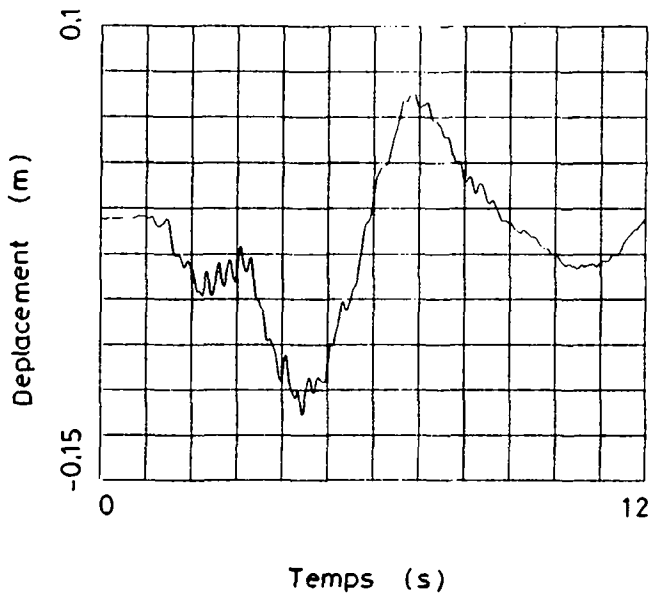
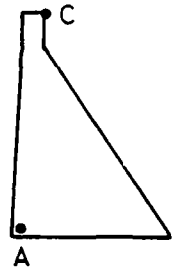


Fig. 7.6 : déplacement horizontal du point C et déplacement relatif par rapport au point A

#### 7.4.2. $a_{\max} = 0,2 \text{ g}$

Une première fissure est apparue 2,21 s après le début du séisme sur la face aval du barrage, également à la base du couronnement. Elle s'est propagée au pas de temps suivant, en s'inclinant vers le bas, pour atteindre une zone de compression où elle s'est stabilisée.

Une deuxième fissure s'est alors créée sur le parement amont, au pas de temps  $t = 2,31 \text{ s}$ , la première fissure s'étant alors refermée (en pointillés sur les dessins).

A partir de ce moment, plusieurs fissures sont détectées à la base aval du couronnement. L'une d'entre elles se propage selon une verticale. Elle est à l'origine d'un grand désordre dans l'ouvrage : cette fissure verticale crée une "colonne" qui a tendance à se détacher du corps du barrage qui reste encore en place, et à se rompre en plusieurs parties.

La figure 7.7 présente les différentes étapes de fissuration. La figure 7.8 montre l'état de la fissuration au temps  $t = 3,05 \text{ s}$ ; différents temps correspondant à une propagation ou à la détection d'une fissure sont indiquées pour quelques unes d'entre elles.

La figure 7.9 montre le diagramme du déplacement horizontal du point C en fonction du temps, superposé à la réponse du calcul linéaire. Le calcul diverge à partir de  $t = 3,60 \text{ s}$ , où l'on remarque un déplacement de 50 cm par rapport à la position au repos (le modèle ne permet pas de suivre le comportement au-delà car il faudrait alors tenir compte des grandes déformations qu'il subit).

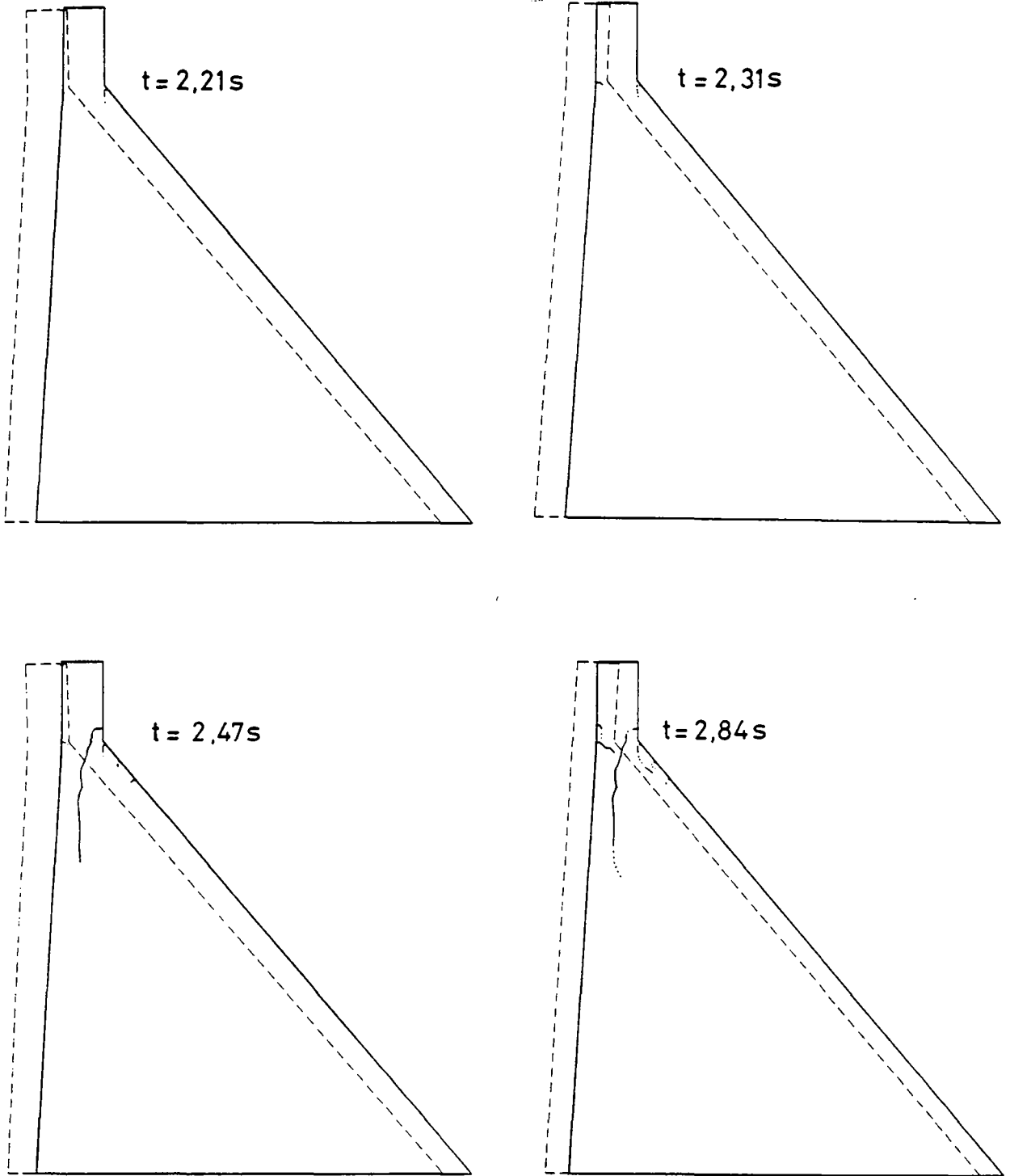


Fig. 7.7 : déformée et fissuration du barrage  
 $a_{max} = 0,2 g$

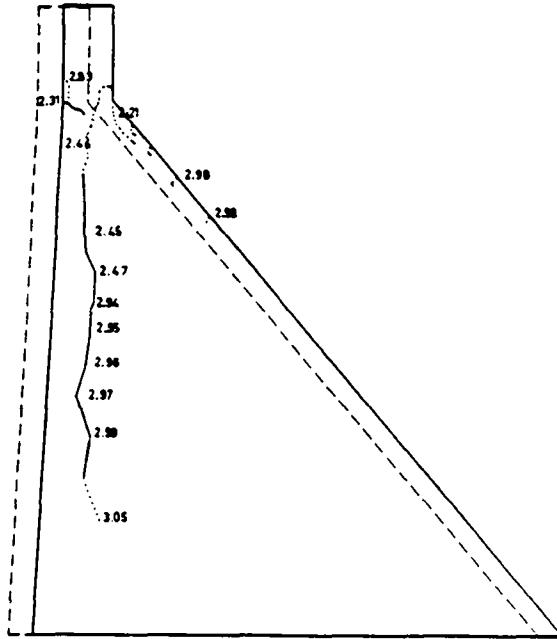


Fig. 7.8 : barrage à lac vide  
 $a_{max} = 0,2 g$  ;  $t = 3,05 s$

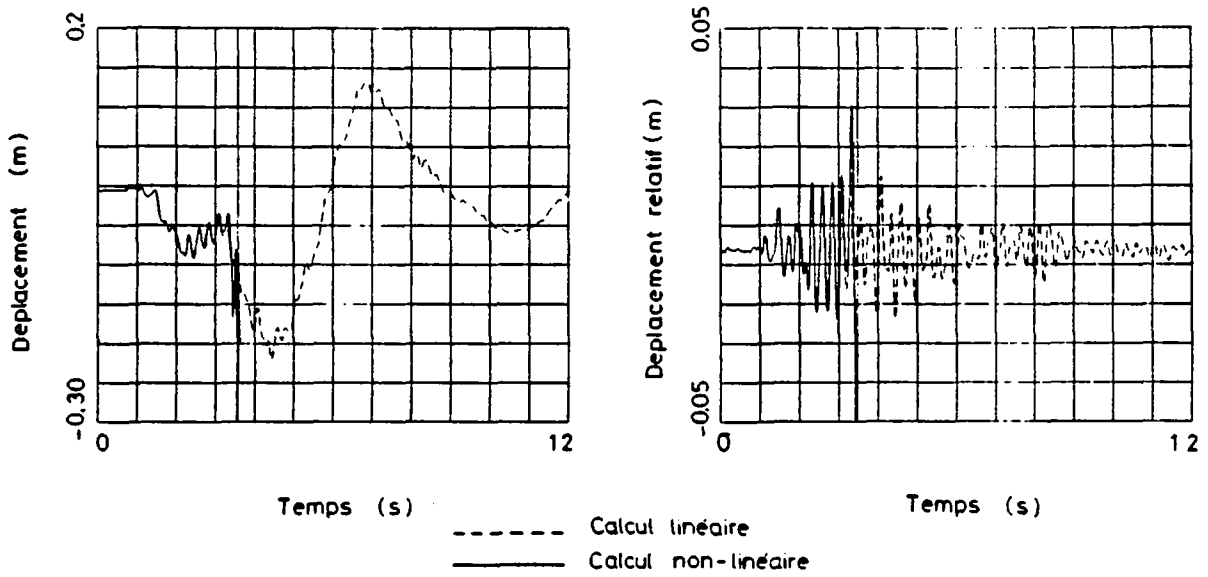


Fig. 7.9 : déplacement horizontal du point C et déplacement relatif par rapport à la base du barrage

## 7.5. REMARQUES FINALES

Les sollicitations sismiques relatives à une accélération maximale de 0,1 g engendrent une modeste fissuration de l'ouvrage; celle-ci se stabilise rapidement.

Il n'en n'est pas de même pour des sollicitations à 0,2 g, où une fissure qui prend naissance à la base aval du couronnement se propage de telle manière qu'elle tend à détacher le parement amont sur une épaisseur d'environ 10 m du reste de l'ouvrage. De multiples fissures apparaissent également sur les parements amont et aval.

Il est confirmé que les fissures qui se propagent dans le corps du barrage prennent en général naissance à la base du couronnement, aussi bien à partir du parement amont que du parement aval. Il est donc sans doute préférable de réduire les ruptures de pente dans le profil d'un ouvrage, car celles-ci sont génératrices de concentrations de contraintes. Une attention particulière devrait être également accordée à la qualité du béton dans ces zones, aussi bien à l'amont qu'à l'aval.

De plus, il convient de noter que les ouvrages réels montrent une réserve de sécurité qui n'a pas été prise en compte ici. Le modèle présenté fournit des résultats qui sont du côté de la sécurité car :

- les fissures ouvertes sont considérées sans frottement. Il n'est donc pas tenu compte de l'imbrication des agrégats du béton entre eux, phénomène particulièrement sensible lorsque la fissure est en cisaillement;
- aucun effet de voûte tridimensionnel n'est pris en compte, celui-ci se manifestant certainement lorsque la longueur du couronnement est relativement faible.

R E F E R E N C E S

- [7.1 ] N. Pal. Nonlinear earthquake response of concrete gravity dams. Report No EERC 74-14, U.C Berkeley, 1974.
- [7.2 ] Génie parasismique. Presse de l'ENPC, Paris, 1985.
- [7.3 ] P. Agbabian. Definition of seismic input. Rapport interne IENER-EPFL, 1981.
- [7.4 ] B.A. Bolt. Earthquake, a primer. Freeman, 1978.
- [7.5 ] F.H. Wittmann, Ed. Fracture mechanics of concrete. Elsevier, 1985.
- [7.6 ] E. Brühwiller, K. Rokugo & F.H. Wittmann. Influence of rate of loading on fracture energy and strain softening. Int. Conf. on Structural Mechanics in Reactor Technology (SMIRT9), Lausanne, transactions Vol. H (à paraître, 1987), et communication personnelle.
- [7.7 ] Ph. Chappuis. Modélisation non-linéaire du comportement du béton sous des sollicitations dynamiques. Thèse No 8217, ETH-Zürich, 1987.
- [7.8 ] K.J. Dreher. Seismic analysis and design considerations for concrete dams, dams and earthquake. Telford, London, 1981.
- [7.9 ] J.P. Wolf. Dynamic soil-structure interaction. Prentice Hall, 1985.
- [7.10] E.L. Wilson. Finite element for the dynamic analysis of fluid-solids systems. U.C. Berkeley, 1982.
- [7.11] IENER. Modelisation du comportement non-linéaire des digues soumises à des charges sismiques. Rapport CERS 1122, 1983.





## 8. CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

### 8.1. CONCLUSIONS

Dans l'état actuel des connaissances, il apparaît que le phénomène de propagation de fissures dans un ouvrage massif en béton non armé est correctement décrit par la mécanique linéaire élastique de la rupture. Cette méthode, qui cherche à quantifier les effets de la présence d'une fissure dans un corps élastique, homogène et isotrope, en vue de déterminer son éventuelle propagation, permet de tenir compte de l'effet de taille, c'est-à-dire de l'influence de la dimension de la structure sur son comportement à la ruine.

De plus, dans le cas d'une analyse par éléments finis, un critère de propagation de fissures basé sur la mécanique linéaire élastique de la rupture conduit à des résultats de plus en plus précis lorsque la densité du maillage d'éléments finis augmente, contrairement à une analyse basée sur un critère de contrainte maximale.

L'utilisation d'un critère de propagation de fissures basé sur la mécanique linéaire élastique de la rupture, impose la détermination de facteurs d'intensité de contraintes. De précédents chercheurs ont montré que ceux-ci peuvent être calculés à partir d'une intégrale de surface définie autour de la pointe de la fissure étudiée. L'intégration est effectuée sur la base des résultats obtenus après un calcul par éléments finis de la structure, en faisant l'hypothèse d'une analyse bidimensionnelle.

Il a été démontré, dans le cadre de cette recherche, que cette intégrale de surface est basée d'une part sur l'intégrale au contour  $J$ , et d'autre part sur l'expression des champs de déplacements et de contraintes autour de la pointe de la fissure. Elle permet, sans l'utilisation d'éléments singuliers, et sans un affinement excessif du réseau d'éléments finis, de calculer directement les facteurs d'intensité de contraintes  $K_I$  et  $K_{II}$ . Cette méthode est particulièrement bien adaptée au problème de la propagation de fissures, car la définition d'une surface d'intégration est extrêmement simple.

Le résultat de l'intégrale de surface est théoriquement indépendant de la surface d'intégration. Néanmoins, un facteur correctif de surface a été proposé dans le but de corriger l'erreur commise lors de l'intégration numérique.

L'application de cette méthode aux problèmes classiques de la mécanique de la rupture, en utilisant une modélisation discrète de la fissure, a permis de constater que l'erreur commise sur le calcul des facteurs d'intensité de contraintes est essentiellement due à l'absence de modélisation précise de la singularité du champ de contraintes à la pointe de la fissure.

Pour éviter toute redéfinition du réseau d'éléments finis de l'ouvrage étudié lors de la propagation d'une fissure, une modélisation "répartie" de la fissuration a été adoptée. Cependant, il a été établi dans le cadre de cette recherche, que les éléments élastiques fissurés utilisés habituellement ne conduisent pas à des résultats satisfaisants lorsque la fissure est en cisaillement. En effet, ces éléments, dont la rigidité présente une anisotropie selon la direction de la fissure, laissent subsister des liaisons indésirables entre les noeuds séparés par la fissure. Celles-ci conduisent même, en cisaillement, à un "blocage" de l'élément de plus en plus prononcé quand la densité du maillage d'éléments finis augmente. Il a été également prouvé que l'utilisation d'un modèle élasto-plastique de fissuration répartie conduit aux mêmes résultats.

Un nouvel élément fini à fissuration répartie a donc été développé. Cet élément "fissuré" utilise des fonctions de forme discontinues qui évitent toute connexion entre deux noeuds du même élément séparés par la fissure. En réalité, il n'est pas nécessaire de définir explicitement les fonctions de forme discontinues. Il suffit de calculer la rigidité de chacun des domaines de l'élément définis par la fissure, et d'assembler judicieusement ces rigidités.

Le modèle ainsi défini, combinant la mécanique linéaire élastique de la rupture et une modélisation "répartie" de la fissuration a été testé en l'appliquant aux problèmes classiques de la mécanique de la rupture. L'utilisation d'éléments "fissurés" conduit en général à de meilleurs résultats que lorsque la fissure est modélisée de façon discrète. L'erreur commise sur le calcul des facteurs d'intensité de contraintes est inférieure à 10 % pour des maillages moyennement denses.

L'algorithme de propagation de fissures proposé ici a également été testé, en particulier en l'appliquant au cas d'une poutre préfissurée en mortier chargée en mode mixte, étudiée expérimentalement par d'autres auteurs. La trajectoire de la fissure calculée suit de façon précise les fissures observées sur la poutre réelle.

Des termes correctifs de l'intégrale de surface ont été développés pour garantir l'indépendance du résultat de celle-ci vis-à-vis de son domaine d'intégration lorsque des forces de pression se manifestent dans la fissure, et lorsque des forces volumiques (gravité, inertie) interviennent. Il a été montré que le modèle traduit correctement le comportement de pièces pré-fissurées soumises à des sollicitations dynamiques ou cycliques. A titre d'exemple, le calcul du comportement non-linéaire pendant un séisme d'une section d'un barrage poids type, présentant un profil classique, a été effectué. Le séisme auquel l'ouvrage a été soumis présente une accélération maximale de 0,1 g ou 0,2 g. Ce dernier provoque une fissuration qui conduit à d'importants désordres dans l'ouvrage : les fissures se propagent dans l'ouvrage de telle sorte qu'elles tendent à séparer le parement amont du corps du barrage sur une épaisseur d'environ 10 m correspondant à l'épaisseur du couronnement.

## 8.2. PERSPECTIVES DE RECHERCHES

Au terme de ce travail, il est possible d'indiquer les axes principaux des recherches qui pourraient être entreprises pour acquérir une meilleure connaissance de la modélisation du comportement d'ouvrages en béton non armé :

- connaissance plus précise de la résistance à la fissuration ( $K_{Ic}$ ) du béton, et en particulier du béton de barrages;
- étude expérimentale de la vitesse de propagation des fissures; influence de la géométrie, de la vitesse de sollicitation;
- recherche expérimentale et modélisation des effets dynamiques sur la résistance à la traction et à la fissuration; influence de la fatigue;
- prise en compte dans le cadre du modèle proposé ici, des forces de frottement qui peuvent intervenir dans la fissure ouverte.

Pour le cas plus particulier de l'application du modèle au calcul des barrages en béton, des développements ultérieurs sont utiles, en particulier pour une analyse à lac plein :

- influence sur  $K_{Ic}$  de la présence d'eau dans les bétons saturés; influence des sous-pressions;

- une étude théorique et expérimentale de la mise en pression des fissures;

et aussi, de façon plus générale :

- étude de la propagation de fissures dans un milieu préfissuré tel que le rocher de fondation. Ce problème peut éventuellement être approché par une analyse de la propagation de fissures dans un milieu anisotrope;
- extension du modèle à une analyse tridimensionnelle des ouvrages. Cette analyse se heurte à de nombreux problèmes, en particulier à la définition d'un front de fissures non plan et à la modélisation tridimensionnelle de la fissuration.

Un très important travail de recherche et de développement reste à faire, montrant si besoin était la difficulté de construire des modèles cohérents simulant la réalité physique de phénomènes complexes.

## ANNEXE A : TENSEURS ET NOTATION INDICIELLE

Les équations de la mécanique des milieux continus peuvent s'écrire sous forme tensorielle. Un certain nombre de définitions et de règles relatives au calcul tensoriel sont rappelées ici.

### A.1 TENSEURS

Un tenseur apparaît en général comme une entité physique dont les composants sont les coefficients d'une relation entre deux vecteurs. Les tenseurs peuvent être classés selon leur ordre  $N$ , qui donne le nombre de composants du tenseur en fonction de la dimension de l'espace dans lequel il est défini. Ainsi, dans un espace euclidien à deux dimensions, un tenseur d'ordre  $N$  possède  $2^N$  composants.

### A.2 NOTATION INDICIELLE

Les composants d'un tenseur sont repérés par des indices qui sont de deux types :

- les indices libres, qui n'apparaissent qu'une fois dans l'expression tensorielle,
- les indices répétés, qui y apparaissent deux fois.
- Le nombre d'indices libres est égal à l'ordre du tenseur.
- Un indice répété indique une somme implicite de 1 à la dimension de l'espace dans lequel le tenseur est défini. Exemple :

$$i = 1, 3$$

$$a_{ii} = a_{11} + a_{22} + a_{33}$$

- Les indices répétés peuvent changer de dénomination. Exemple :

$$a_{ij} t_j = a_{ik} b_k = a_{in} b_n$$

- Les indices gardent leur caractère libre ou répété dans toute l'expression tensorielle.
- L'ordre de chacun des tenseurs d'une expression tensorielle doit être le même.
- La virgule exprime une dérivée partielle par rapport par rapport à une direction du système de coordonnées. Exemple :

$$(\quad)_{,i} = \frac{\partial (\quad)}{\partial x_i}$$

où  $x_i$  est le  $i$ ème vecteur de la base du repère de l'espace.

### A.3 DELTA DE KRONECKER

Le symbole  $\delta$  est défini :

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Exemples :

$$a_i \delta_{ij} = a_j$$

$$a_{ij} \delta_{jk} \delta_{li} = a_{ik} \delta_{li} = a_{lk}$$

$$a_{ij} \delta_{ij} = a_{ii}$$

### A.4 DERIVEES ET OPERATEURS

Les règles usuelles de la différenciation s'appliquent au calcul tensoriel :

$$a b_{i,j} = a b_{i,j}$$

$$(a_i + b_i)_{,j} = a_{i,j} + b_{i,j}$$

$$(a_i b_j)_{,k} = a_{i,k} b_j + a_i b_{j,k}$$

$$a_{i,jj} = \frac{\partial^2 a_i}{\partial x_j^2}$$

dérivée de coordonnée :  $x_{i,j} = \delta_{ij}$

gradient :  $u_{i,j}$

divergence :  $u_{i,i} ; \sigma_{ij,j}$

Les dérivées par rapport au temps sont en général notées par un point; ainsi :

$u_i$  : déplacement

$v_i = \dot{u}_i = \frac{d u_i}{dt}$  : vitesse

"  $a_i = \ddot{u}_i = \frac{d^2 u_i}{dt^2}$  : accélération

#### A.5 DECOMPOSITION EUCLIDIENNE D'UN TENSEUR DU SECOND ORDRE

Soit  $a_{ij}$  un tenseur non-symétrique; alors :

$$a_{ij} = a^{(ij)} + a^{[ij]}$$

où  $a^{(ij)}$  est la partie symétrique de  $a_{ij}$ , telle que :

$$a^{(ij)} = a^{(ji)}$$

et  $a^{[ij]}$  est la partie antisymétrique de  $a_{ij}$ , telle que :

$$a^{[ij]} = - a^{[ji]}$$

ainsi :

$$a^{(ij)} = \frac{1}{2} (a_{ij} + a_{ji})$$

$$a^{[ij]} = \frac{1}{2} (a_{ij} - a_{ji})$$





## ANNEXE B : THEORIE DE L'ELASTICITE

Les développements exposés dans cette annexe concernent tous les corps qui, à une certaine échelle, peuvent être considérés comme homogènes et élastiques (références [B.1, B.2]).

### B.1 TENSEUR DES CONTRAINTES

A une surface élémentaire  $dA$  dans un corps peut être associé un vecteur de contrainte  $\underline{t}^{(n)}$  agissant sur  $dA$ . Le vecteur unitaire  $\underline{n}$  oriente la surface  $dA$ .

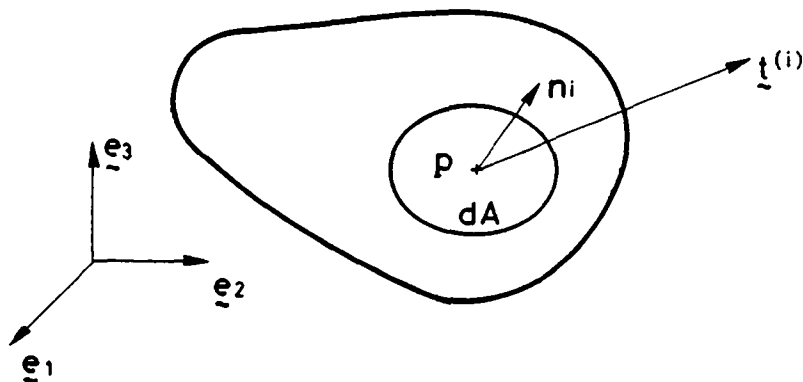


Fig. B.1 : vecteur de contrainte

L'état de contrainte en un point  $P$  peut être totalement décrit en utilisant trois surfaces élémentaires dont les vecteurs directeurs sont orientés selon la repère  $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$  (voir fig. B.2).

$$n_i = \delta_{ij} e_j$$

$\underline{t}^{(i)}$  : vecteur de contrainte associé à une surface perpendiculaire à  $\underline{e}_i$

$\sigma_{ij}$  : composante  $j$  du vecteur de contrainte  $\underline{t}^{(i)}$

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \tilde{t}^{(1)} \\ \tilde{t}^{(2)} \\ \tilde{t}^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}$$

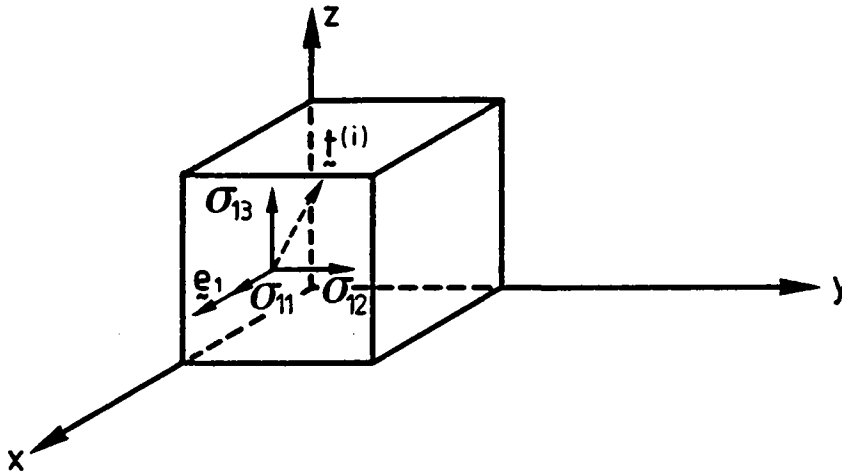


Fig. B.2 : décomposition des vecteurs de contrainte

Ainsi en notation indicielle :

$$\tilde{t}^{(i)} = t_i = \sigma_{ji} n_j \quad (B.1)$$

$\sigma_{ji}$  est le tenseur des contraintes qui définit l'état de contrainte en un point.

## B.2 EQUATIONS D'EQUILIBRE ET DE MOUVEMENT

L'équilibre d'un petit élément de volume :

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \sigma_{ji} \\ \sigma_{ij,j} &= 0 \end{aligned} \quad (B.2)$$

S'il est soumis à des forces volumiques telles que la gravité, l'équation (B.3) devient :

Dans le cas où des forces d'inertie agissent, l'équation précédente devient une équation de mouvement qui s'écrit :

$$\sigma_{ij,j} + \rho b_i = 0 \quad (B.4)$$

avec  $\rho$  : masse volumique du corps

$\underline{b}$  : accélération de la pesanteur

$$\sigma_{ij,j} + \rho b_i = \rho \ddot{u}_i \quad (B.5)$$

avec  $\ddot{u}_i$  le vecteur accélération au point considéré.

En notant l'ensemble considéré des forces volumiques :

$$f_i = \rho (b_i - \ddot{u}_i) \quad (B.6)$$

l'équation (B.5) devient :

$$\sigma_{ij,j} + f_i = 0 \quad (B.7)$$

### B.3 CHANGEMENT DE BASE ORTHOGONALE

L'expression d'un tenseur de contrainte  $\sigma_{ij}$  dans un repère  $(e_1', e_2', e_3')$  est :

$$\sigma'_{ij} = a_{ik} \sigma_{kl} a_j \quad (B.8)$$

où  $a_{ij}$  est la matrice de passage entre les deux repères.

### B.4 CONTRAINTES PRINCIPALES ET INVARIANTS

Les directions pour lesquelles  $\underline{t}^{(i)}$  est colinéaire à  $\underline{n}_i$  sont dites principales; ainsi :  $\underline{t}^{(i)} = \sigma \underline{n}_i$ , où  $\sigma$  est la valeur de la contrainte principale. Or,  $\underline{t}_i = \sigma_{ij} \underline{n}_j$  (B.1, B.2) et  $\underline{n}_i = \delta_{ij} \underline{n}_j$  (A.3) d'où :

$$(\sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij}) \underline{n}_j = 0 \quad (B.9)$$

ce qui équivaut à :

$$|\sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij}| = 0 \quad (\text{B.10})$$

expression qui revient à :

$$\sigma^3 - I_1 \sigma^2 + I_2 \sigma - I_3 = 0 \quad (\text{B.11})$$

$$I_1 = \sigma_{ii}$$

avec 
$$I_2 = \frac{1}{2} (\sigma_{ii} \cdot \sigma_{jj} - \sigma_{ij} \sigma_{ji}) \quad (\text{B.12})$$

$$I_3 = |\sigma_{ij}| = \det (\sigma_{ij})$$

Les racines de l'équation (B.11) sont les trois contraintes principales  $\sigma_k$ . Ce sont les valeurs propres du tenseur des contraintes  $\sigma_{ij}$ . Les directions principales sont les solutions  $n_k$  de l'équation (B.9) pour un  $\sigma_k$  considéré.  $I_1$ ,  $I_2$ , et  $I_3$  sont les trois premiers invariants du tenseur  $\sigma_{ij}$ .

## B.5 DEFORMATION

Le tenseur de déformation  $\epsilon_{ij}$  est défini à partir des déplacements  $u_i$  :

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) = u_{(i,j)} \quad (\text{B.13})$$

## B.6 ELASTICITE LINEAIRE

La relation constitutive qui lie les tenseurs des contraintes et des déformations s'écrit (loi de Hooke) :

$$\sigma_{ij} = D_{ijkl} \epsilon_{kl} \quad (\text{B.14})$$

$D_{ijkl}$  se réduit à deux constantes élastiques dans le cas d'un matériau homogène, isotrope et dont on peut calculer la densité d'énergie de déformation :

$$W = \int_0^\epsilon \sigma_{ij} d\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \epsilon_{ij} \quad (\text{B.15})$$

Ces deux constantes sont :

soit  $E$  : module de Young  
 $\nu$  : module de Poisson

$E$   
 $\mu$  : module de glissement

$\lambda$  : module de Lamé  
 $\mu$

$$\text{avec : } \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (\text{B.16})$$

$$\text{et } \lambda = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (\text{B.17})$$

$D_{ijkl}$  peut alors s'écrire :

$$D_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (\text{B.18})$$

ainsi l'équation (B.14) se réduit à :

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \epsilon_{kk} + 2 \mu \epsilon_{ij} \quad (\text{B.19})$$

## B.7 PROBLEMES PLANS

L'équation (B.14) peut s'écrire plus simplement en définissant des vecteurs contraintes et déformations :

$$\tilde{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} \quad (\text{B.20})$$

$$\tilde{\epsilon} = \begin{pmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{12} + \epsilon_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ 2 \epsilon_{12} \end{pmatrix} \quad (\text{B.21})$$

(notation "ingénieur")

• Etat plan de déformation

$$\varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = \varepsilon_{33} = 0$$

d'où :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{pmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{pmatrix} \quad (\text{B.22})$$

• Etat plan de contrainte

$$\sigma_{13} = \sigma_{23} = \sigma_{33} = 0$$

d'où :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{pmatrix} \quad (\text{B.23})$$

Les équations de l'état plan de déformation s'écrivent sous la même forme que celles de l'état plan de contrainte, en remplaçant  $E$  par  $E^*$  et  $\nu$  par  $\nu^*$ , tels que :

$$E^* = \frac{E}{1 - \nu^2} \quad (\text{B.24})$$

$$\nu^* = \frac{\nu}{1 - \nu} \quad (\text{B.25})$$

L'équation (B.22) s'écrit également :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda+2\mu & \lambda & 0 \\ \lambda & \lambda+2\mu & 0 \\ 0 & 0 & 2\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{pmatrix} \quad (\text{B.26})$$

(notation physique)

### B.8 CHANGEMENT DE BASE

En utilisant les expressions (B.22), (B.23) ou (B.26), l'équation (B.18) dans un problème plan se ramène à :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{D}} \cdot \underline{\underline{\varepsilon}} \quad (\text{B.27})$$

La définition de  $\underline{\underline{D}}$ , matrice d'élasticité, dépend de celle donnée à  $\underline{\underline{\varepsilon}}$  (notation "ingénieur" ou notation "physique"). Dans un autre repère ( $x'$ ,  $y'$ ) tourné d'un angle  $\theta$  par rapport à ( $x$ ,  $y$ ) (voir fig. B.3) :

$$\sigma'_{ij} = a_{ik} \sigma_{kl} a_{lj} \quad (\text{B.8})$$

ce qui s'écrit sous forme vectorielle :

$$\underline{\underline{\sigma}}' = \underline{\underline{T}} \cdot \underline{\underline{\sigma}} \quad (\text{B.28})$$

et de même pour  $\underline{\underline{\varepsilon}}$  :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}' = \underline{\underline{T}} \cdot \underline{\underline{\varepsilon}} \quad (\text{B.29})$$

$$\text{où : } \underline{\underline{T}} = \begin{pmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & \sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & -\sin \theta \cos \theta \\ -2 \sin \theta \cos \theta & 2 \sin \theta \cos \theta & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (\text{B.30})$$

si bien que :

$$\underline{\underline{\sigma}}' = \underline{\underline{T}} \cdot \underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{T}} \cdot \underline{\underline{D}} \cdot \underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{T}} \cdot \underline{\underline{D}} \cdot \underline{\underline{T}}^{-1} \cdot \underline{\underline{\varepsilon}}' \quad (\text{B.31})$$

or :  $\underline{\underline{T}}^{-1} = \underline{\underline{T}}^T$  (matrice orthogonale)

$$\underline{\underline{\sigma}}' = \underline{\underline{T}} \cdot \underline{\underline{D}} \cdot \underline{\underline{T}}^T \cdot \underline{\underline{\varepsilon}}' \quad (\text{B.32})$$

et donc :

$$\underline{\underline{D}}' = \underline{\underline{T}} \cdot \underline{\underline{D}} \cdot \underline{\underline{T}}^T \quad (\text{B.33})$$

$$\underline{\underline{D}} = \underline{\underline{T}}^T \cdot \underline{\underline{D}}' \cdot \underline{\underline{T}} \quad (\text{B.34})$$

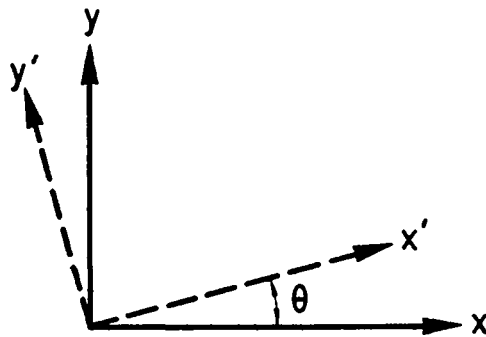


Fig. B.3 : changement de repère

### B.9 PRINCIPE DE TRAVAUX VIRTUELS

Le principe des travaux virtuels s'écrit :

$$\int_{\Omega} \tilde{\varepsilon}^* \cdot \tilde{\sigma} \, d\Omega = \int_{\Gamma_t + \Gamma_u} \tilde{t} \cdot \tilde{u}^* \, d\Gamma + \int_{\Omega} \tilde{f} \cdot \tilde{u}^* \, d\Omega \quad (\text{B.35})$$

où  $\tilde{u}^*$  est le vecteur des déplacements virtuels,  $\tilde{\varepsilon}^*$  le tenseur des déformations virtuelles qui leur sont associés,  $\Omega$  est le domaine du corps étudié,  $\Gamma_t$  la portion de surface du corps sur laquelle s'appliquent des forces de traction et  $\Gamma_u$  la portion de surface où les déplacements sont imposés. Cette expression se démontre à partir des conditions d'équilibre (B.1), (B.2) et (B.3).

### R E F E R E N C E S

- [B.1] G.E. Mase. Continuum mechanics, Schaum's outline series. Mc Graw Hill, 1970.
- [B.2] L.E. Malvern. Introduction to the mechanics of a continuous medium. Prentice Hall, 1969.



## ANNEXE C : ELEMENTS FINIS EN ELASTICITE LINEAIRE

La méthode des éléments finis est une technique numérique utilisée pour résoudre en particulier des problèmes liés à la mécanique des milieux continus. L'espace est discrétisé en éléments dont les déplacements nodaux sont les inconnues du problème. Référence : [C.1].

### C.1. FORME FORTE - FORME FAIBLE DU PROBLEME ELASTOSTATIQUE EN PETITES DEFORMATIONS

Soit le domaine  $\Omega$  limité par les contours  $\Gamma_{gi}$  et  $\Gamma_{hi}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  où  $n$  est le nombre de dimensions de l'espace (fig. C.1).

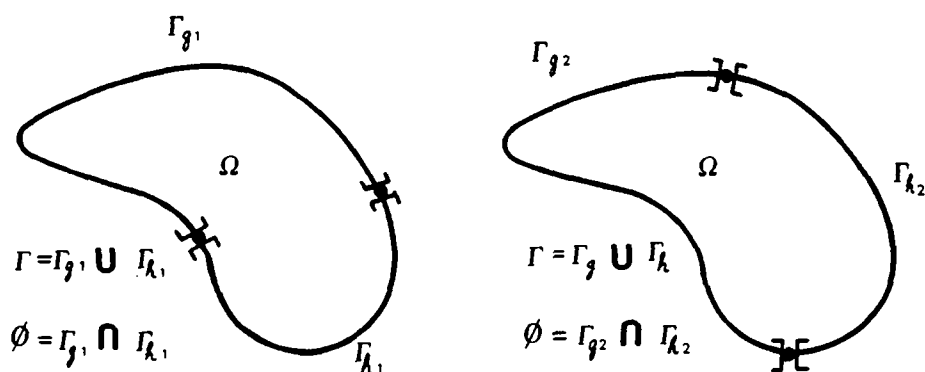


Fig. C.1 : définition du domaine  $\Omega$  ( $n = 2$ )

#### Forme forte

soit :

$$f_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

$$g_i : \Gamma_{gi} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$h_i : \Gamma_{hi} \rightarrow \mathbb{R}$$

trouver :  $u_i : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  ( $\bar{\Omega} = \Omega - \Gamma$ )

tel que :  $\sigma_{ij,i} + f_i = 0$  (B.3) (C.1)

avec :  $u_i = g_i$  sur  $\Gamma_{gi}$  (déplacements imposés)

et :  $\sigma_{ij} n_j = h_i$  sur  $\Gamma_{hi}$  (forces imposées)

**Forme faible**

Soit  $f_i, g_i, h_i$  définies comme précédemment, soit  $\tilde{S}$  et  $\tilde{V}$  deux espaces de fonction :

$$\begin{aligned} \forall u_i \in \tilde{S}_i &\rightarrow u_i = g_i \text{ sur } \Gamma_{gi} \\ \forall w_i \in \tilde{V}_i &\rightarrow w_i = 0 \text{ sur } \Gamma_{gi} \end{aligned} \quad w : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$$

Problème : trouver  $u_i \in \tilde{S}_i$  tel que

$$\begin{aligned} \forall w_i \in \tilde{V}_i &\rightarrow \\ \int_{\Omega} (\sigma_{ij,j} + f_i) w_i \, d\Omega &= 0 \end{aligned}$$

En intégrant par partie cette expression, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\sigma_{ij,j} + f_i) w_i \, d\Omega &= \int_{\Gamma} w_i \sigma_{ij} n_j \, d\Gamma - \int_{\Omega} \sigma_{ij} w_{ijj} \, d\Omega \\ + \int_{\Omega} w_i f_i \, d\Omega &= 0 \end{aligned}$$

La dernière égalité se réduit à :

$$\int_{\Omega} w_{(i,j)} \sigma_{ij} \, d\Omega = \int_{\Omega} w_i f_i \, d\Omega + \sum_1^n \left( \int_{\Gamma_{hi}} w_i h_i \, d\Gamma \right) \quad (C.2)$$

en utilisant (B.2) et les propriétés des tenseurs symétriques.

Théorème : les formes fortes et faibles sont équivalentes.

L'équation (C.2) est l'expression du principe des travaux virtuels.

Notations condensées :

En utilisant les équations (B.13) et (B.14) :

$$a(\tilde{w}, \tilde{u}) = \int_{\Omega} w_{(i,j)} C_{ijkl} u_{(k,l)} \, d\Omega$$

et, en utilisant la définition de  $\varepsilon$  (§ B.5) :

$$a(\tilde{w}, \tilde{u}) = \int_{\Omega} \varepsilon(\tilde{w})^T \cdot \tilde{D} \cdot \varepsilon(\tilde{u}) \, d\Omega$$

$$(\underline{w}, \underline{f}) = \int_{\Omega} w_i f_i d\Omega$$

$$(\underline{w}, \underline{h})_{\Gamma} = \sum_1^n \int_{\Gamma_{hi}} w_i h_i d\Gamma$$

L'équation de la forme faible s'écrit :

$$a(\underline{w}, \underline{u}) = (\underline{w}, \underline{f}) + (\underline{w}, \underline{h})_{\Gamma} \quad (C.3)$$

### C.2. FORMULATION DE GALERKIN - FORMULATION MATRICIELLE

Soit  $\underline{S}^{(h)}$  et  $\underline{V}^{(h)}$  des espaces de fonctions qui représentent des approximations de  $\underline{S}$  et  $\underline{V}$  sur le domaine  $\Omega$  discrétisé en domaines élémentaires  $\Omega^e$ ,  $1 \leq e \leq n$ . En dimension deux, ces éléments sont le plus souvent des triangles ou des quadrilatères. On définit également des noeuds, situés en général aux sommet des éléments.  $h$  est la dimension caractéristique de la maille.

$$\forall \underline{w}^{(h)} \in \underline{V}^{(h)} \rightarrow w_i \simeq 0 \text{ sur } \Gamma_{gi}$$

$$\forall \underline{u}^{(h)} \in \underline{S}^{(h)} \rightarrow \underline{u}^{(h)} = \underline{v}^{(h)} + \underline{g}^{(h)}$$

où  $\underline{v}^{(h)} \in \underline{V}^{(h)}$  et  $u_i^{(h)} \simeq g_i^{(h)}$  sur  $\Gamma_{gi}$

#### • Formulation de Galerkin

Soit  $\underline{f}$ ,  $\underline{g}$  et  $\underline{h}$  définis comme précédemment ((C.1), (C.2)) :  
trouver  $\underline{u}^{(h)} = \underline{v}^{(h)} + \underline{g}^{(h)}$  tel que :

$$\forall \underline{w}^{(h)} \in \underline{S}^{(h)} \rightarrow$$

$$a(\underline{w}^{(h)}, \underline{v}^{(h)}) = (\underline{w}^{(h)}, \underline{f}) + (\underline{w}^{(h)}, \underline{h})_{\Gamma_{hi}} - a(\underline{w}^{(h)}, \underline{g}^{(h)}) \quad (C.4)$$

Les fonctions  $w^{(h)}$  de  $\underline{V}^{(h)}$  sont définies par :

$$w_i^{(h)} = \sum_{A \in n-ng_i} N_A c_{iA}; \quad \underline{w}^{(h)} = w_i^{(h)} \underline{e}_i$$

où  $N_A$  est la fonction de forme au noeud A,  $c_{iA}$  est une constante, n l'ensemble des noeuds et  $ng_i$  l'ensemble des noeuds où les déplacements sont imposés dans la direction i. De même :

$$v_i^{(h)} = \sum_{A \in n-ng_i} N_A d_{iA} ; \quad \tilde{v}^{(h)} = v_i^{(h)} \tilde{e}_i$$

$$g_i^{(h)} = \sum_{A \in ng_i} N_A g_{iA} ; \quad \tilde{g}^{(h)} = g_i^{(h)} \tilde{e}_i$$

où  $d_{iA}$  est le déplacement (inconnu) du noeud A dans la direction i. L'équation (C.4) s'écrit alors :

$$\sum_{j=1}^{ndof} \left( \sum_{B \in n-ng_j} (N_A \tilde{e}_i, N_B \tilde{e}_j) d_{jB} \right) = (N_A \tilde{e}_i, f) + (N_A \tilde{e}_i, h) \Gamma_{hi}$$

$$- \sum_{j=1}^{ndof} \left( \sum_{B \in ng_j} (N_A \tilde{e}_i, N_B \tilde{e}_j) g_{jB} \right), \quad A \in n-ng_i, \quad 1 \leq i \leq n_{sd} \quad (C.5)$$

avec  $ndof$  le nombre de degrés de liberté

$n_{sd}$  la dimension de l'espace considéré

• **Formulation matricielle**

Cette équation est équivalente à l'équation matricielle :

$$\tilde{K} \cdot \tilde{d} = \tilde{F} \quad (C.6)$$

où  $\tilde{K} = [K_{PQ}]$  ;  $\tilde{d} = [d_Q]$  ;  $\tilde{F} = [F_P]$

$$K_{PQ} = (N_A \tilde{e}_i, N_B \tilde{e}_j) \quad (C.7)$$

$$F_P = (N_A \tilde{e}_i, f) + (N_A \tilde{e}_i, h) \Gamma - \sum_{j=1}^{ndof} \left( \sum_{B \in ng_j} (N_A \tilde{e}_i, N_B \tilde{e}_j) g_{jB} \right) \quad (C.8)$$

avec P et Q les numéros d'équations relatifs aux noeuds A dans la direction i et B dans la direction j (P = 0 si A ∈ ng<sub>i</sub>).

L'équation (C.7) s'écrit également :

$$K_{PQ} = \tilde{e}_i^T \cdot \int_{\Omega} \tilde{B}_A^T \cdot \tilde{D} \cdot \tilde{B}_B \, d\Omega \, \tilde{e}_j \quad (C.9)$$

où  $\varepsilon(N_{A \tilde{i}} e_i) = \tilde{B}_A \cdot e_i$ , avec par exemple en dimension deux :

$$\tilde{B}_A = \begin{pmatrix} N_{A,1} & 0 \\ 0 & N_{A,2} \\ N_{A,2} & N_{A,1} \end{pmatrix} \quad (C.10)$$

L'équation (C.8) peut aussi s'écrire :

$$F_P = \int_{\Omega} N_A f_i d\Omega + \int_{\Gamma_{hi}} N_A h_i d\Gamma - \sum_{j=1}^{n_{dof}} \left( \sum_B n_{hj} (N_{A \tilde{i}} e_i, N_{B \tilde{j}} e_j) g_{jB} \right)$$

Les matrices  $\tilde{K}$  et  $\tilde{F}$  sont construites à partir des contributions de chaque élément formant l'espace  $\Omega^{(h)}$ . Ainsi :

$$\begin{aligned} \tilde{K} &= A [\tilde{k}^e] ; \tilde{k}^e = [\tilde{k}_{pq}^e] \\ \tilde{k}_{pq}^e &= e_i^T \cdot \tilde{k}_{ab}^e \cdot e_j ; \tilde{k}_{ab}^e = \int_{\Omega^e} \tilde{B}_a^T \cdot \tilde{D} \cdot \tilde{B}_b d\Omega \end{aligned} \quad (C.11)$$

$\tilde{K}$  est la matrice de rigidité globale

$\tilde{k}^e$  est la matrice de rigidité élémentaire

et  $\tilde{D}$  la matrice élastique

a et b sont les numéros des noeuds de l'élément au niveau local

p et q sont les numéros des équations de l'élément au niveau local

A définit une opération d'assemblage

A partir des relations établies précédemment, il est possible de calculer l'état de contrainte en un point :

$$\tilde{\sigma}(\tilde{x}) = \tilde{D} \cdot \sum_{a=1}^{n_{en}} \tilde{B}_a(\tilde{x}) \cdot \tilde{d}_a^e \quad (C.12)$$

où  $n_{en}$  est le nombre de noeuds de l'élément considéré.

### C.3. FONCTIONS DE FORME

Les fonctions de forme utilisées en général sont polynômiales. Elles doivent remplir certaines conditions pour que la solution approchée de Galerkin converge vers la solution exacte quand la densité du maillage d'éléments finis augmente. A cet effet, les fonctions de forme doivent être :

- lisses sur le domaine  $\Omega_e$  de l'élément
- continues de part et d'autre de la frontière entre deux éléments
- remplir la condition de complétude.

Cette dernière condition exprime le fait que les fonctions de forme de l'élément doivent être capables de représenter exactement une fonction polynômiale linéaire arbitraire quand des valeurs correspondantes sont imposées aux différents noeuds. Ainsi, si l'on a :

$$\tilde{u}^{(h)}(\tilde{x}) = \sum_{a=1}^{n_{en}} N_a(\tilde{x}) \tilde{d}_a^e \quad (C.13)$$

$\tilde{d}_a^e$  les déplacements nodaux tels que :

$$\tilde{d}_a^e = \tilde{u}^{(h)}(\tilde{x}_a) \quad (C.14)$$

les fonctions de forme  $N_a$  remplissent la condition de complétude si :

$$\tilde{d}_{a_i}^e = c_0 + c_1 x_a + c_2 y_a \rightarrow \tilde{u}_i^{(h)}(\tilde{x}) = c_0 + c_1 x + c_2 y \quad (C.15)$$

Ce qui peut également s'exprimer, en reprenant l'équation (C.13), par :

$$\begin{aligned} \tilde{u}_i^{(h)}(\tilde{x}) &= \sum_{a=1}^{n_{en}} N_a(\tilde{x}) \tilde{d}_{a_i}^e \\ &= \sum_{a=1}^{n_{en}} N_a(\tilde{x}) (c_0 + c_1 x + c_2 y_a) \\ &= c_0 \sum_{a=1}^{n_{en}} N_a(\tilde{x}) + c_1 \sum_{a=1}^{n_{en}} N_a(\tilde{x}) x_a + c_2 \sum_{a=1}^{n_{en}} N_a(\tilde{x}) y_a \end{aligned} \quad (C.16)$$

Si l'on a :

$$\sum_{a=1}^{n_{en}} N_a(\tilde{x}) = 1$$

et

$$\sum_{a=1}^{n_{en}} N_a(\tilde{x}) x_a = x \text{ (et de même pour } y)$$

alors (C.15) devient :

$$u_i^{(h)}(x) = c_0 + c_1 x + c_2 y \tag{C.17}$$

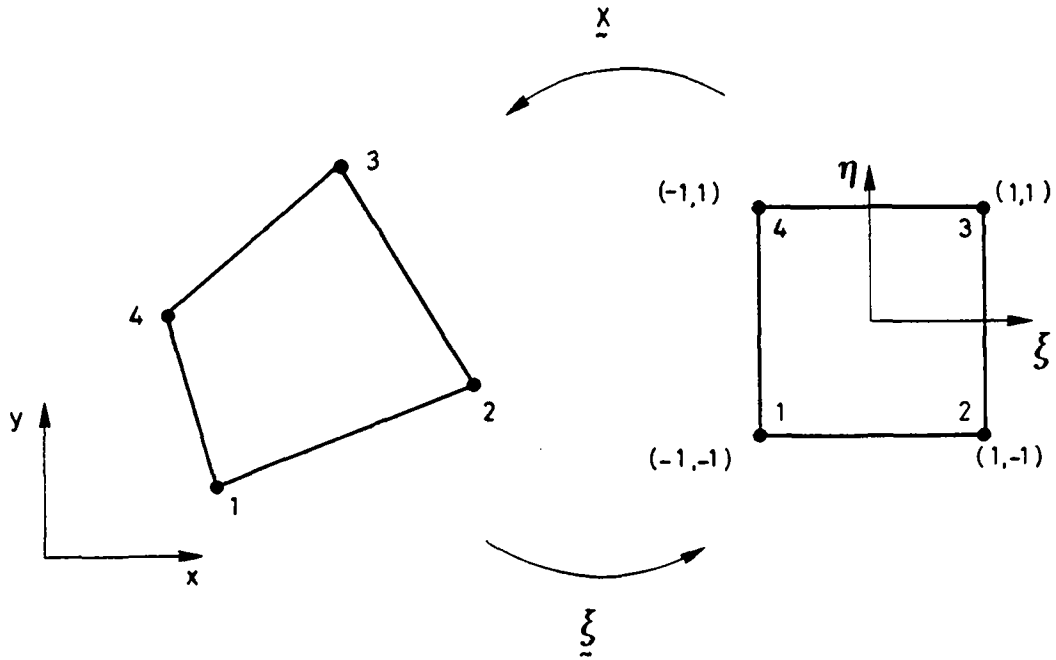
De cette dernière équation, on peut également déduire :

$$N_a(\tilde{x}_b) = \delta_{ab} \tag{C.18}$$

La propriété de complétude indique que l'élément est à même de décrire un mouvement de corps rigide.

#### C.4. ELEMENT PLAN ISOPARAMETRIQUE A QUATRE NOEUDS

Si les mêmes fonction de forme que celles définies précédemment permettent de passer des coordonnées physiques ( $\tilde{x}$ ) aux coordonnées paramétriques ( $\tilde{\xi}$ ), l'élément est dit "isoparamétrique". Ce changement de repère permet d'intégrer aisément les expressions développées dans les paragraphes précédents (fig. C.2).



**Fig. C.2 : coordonnées physiques et coordonnées paramétriques**

On peut alors écrire :

$$\tilde{x}(\tilde{\xi}) = \sum_{a=1}^{n_{en}} N_a(\tilde{\xi}) x_{\tilde{a}} \quad (C.19)$$

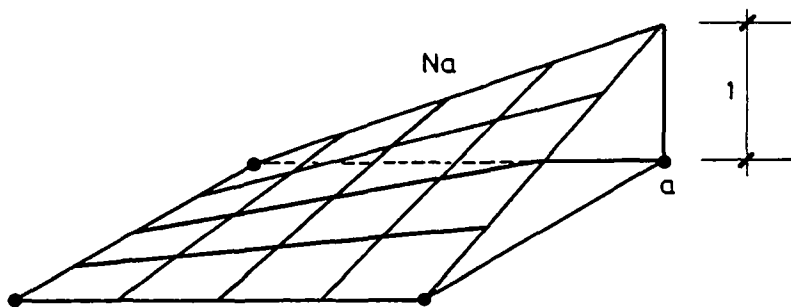
et les fonctions de  $N_a(\tilde{\xi})$  peuvent alors être définies, par exemple, par :

$$N_a(\tilde{\xi}) = N_a(\xi, \eta) = \frac{1}{4} (1 + \xi_a \xi) (1 + \eta_a \eta) \quad (C.20)$$

Ces fonctions vérifient les conditions exposées au § C.3, et :

$$u^{(h)}(\tilde{\xi}) = \sum_{a=1}^{n_{en}} N_a(\tilde{\xi}) d_a^e$$

Une fonction de forme  $N_a$  est représentée sur la figure C.3.



**Fig. C.3 : fonction de forme bilinéaire**



**C.5. INTEGRATION NUMERIQUE DE GAUSS**

L'intégration numérique sur un élément plan peut s'exprimer dans le repère local ( $\xi$ ) par :

$$\int_{\Omega_e} f(x,y) d\Omega = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(x(\xi,\eta), y(\xi,\eta)) j(\xi,\eta) d\xi d\eta \quad (C.21)$$

où  $j(\xi,\eta)$  est le déterminant de la matrice jacobienne du changement de repère :

$$j = \begin{vmatrix} x,\xi & x,\eta \\ y,\xi & y,\eta \end{vmatrix} \quad (C.22)$$

avec par exemple :  $x,\xi = \sum_{a=1}^{n_{en}} N_{a,\xi} x_a$

Si l'on considère  $n_G$  points d'intégration par direction, alors un polynôme d'un degré  $(2n_G - 1)$  dans cette direction sera intégré exactement. Ainsi :

- $n_G = 1$  :  $\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi,\eta) d\xi d\eta = 4 f(0,0)$  (C.23)

- $n_G = 2$  :  $\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi,\eta) d\xi d\eta = \sum_{\pm}^{n_G} \sum_{\mp}^{n_G} f\left(\pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \mp \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$  (C.24)

**C.6. ALGORITHMES DE NEWMARK D'INTEGRATION DANS LE TEMPS [C.1]**

La méthode de Newmark est une méthode d'intégration dans le temps de l'équation de mouvement :

$$\tilde{M} \ddot{\underline{d}} + \tilde{C} \dot{\underline{d}} + \tilde{K} \underline{d} = \underline{F} \quad (C.25)$$

où  $\tilde{M}$  est la matrice de masse,  $\tilde{C}$  la matrice d'amortissement,  $\tilde{K}$  la matrice de rigidité et  $\ddot{\underline{d}}$ ,  $\dot{\underline{d}}$ ,  $\underline{d}$  et  $\underline{F}$  respectivement les vecteurs accélération, vitesse, déplacement et forces extérieures.

L'équation (C.25) s'obtient en faisant la même démarche que celle décrite aux § C.1 - C.2, à partir de l'équation (B.5).

Les conditions initiales sont telles que :

$$\tilde{d}(0) = d_0$$

$$\dot{\tilde{d}}(0) = v_0$$

Soit  $\tilde{d}_n$ ,  $\tilde{v}_n$  et  $\tilde{a}_n$  des approximations de  $d(t_n)$ ,  $\dot{d}(t_n)$  et  $\ddot{d}(t_n)$ . En faisant l'hypothèse d'une accélération moyenne constante entre deux pas de temps, on peut écrire :

$$a_{t+\tau} = \frac{a_t + a_{t+\Delta t}}{2} \quad (C.26)$$

où  $\Delta t$  est l'incrément de temps et  $\tau \leq \Delta t$ .

En intégrant deux fois cette expression par rapport à  $\tau$ , on obtient successivement :

$$v_{t+\tau} = v_t + a_t \frac{\tau}{2} + a_{t+\tau} \frac{\tau}{2} \quad (C.27)$$

$$d_{t+\tau} = d_t + v_t \tau + a_t \frac{\tau^2}{4} + a_{t+\tau} \frac{\tau^2}{4} \quad (C.28)$$

Pour  $\tau = \Delta t$ , ces expressions deviennent :

$$v_{t+\Delta t} = v_t + \Delta t [(1-\alpha) a_t + \gamma a_{t+\Delta t}] \quad (C.29)$$

$$d_{t+\Delta t} = d_t + \Delta t v_t + \frac{\Delta t^2}{2} [(1-2\beta) a_t + 2\beta a_{t+\Delta t}] \quad (C.30)$$

avec  $\gamma = \frac{1}{2}$  et  $\beta = \frac{1}{4}$ .

### C.5.1 Formulation en déplacement

A partir des équations précédentes, on peut écrire :

$$a_{t+\Delta t} = \frac{1}{\beta \Delta t^2} d_{t+\Delta t} - \left[ \frac{1}{\beta \Delta t^2} d_t + \frac{1}{\beta \Delta t} v_t + \left(\frac{1}{2\beta} - 1\right) a_t \right] \quad (C.31)$$

et en définissant les "prédicteurs" des déplacements et des vitesses par :

$$\tilde{d}_{t+\Delta t} = \tilde{d}_t + \Delta t \tilde{v}_t + \frac{\Delta t^2}{2} (1 - 2\beta) \tilde{a}_t \quad (\text{C.32})$$

$$\tilde{v}_{t+\Delta t} = \tilde{v}_t + (1 - \gamma) \Delta t \tilde{a}_t \quad (\text{C.33})$$

On peut alors écrire :

$$\tilde{d}_{t+\Delta t} = \tilde{d}_{t+\Delta t} + \beta \Delta t^2 \tilde{a}_{t+\Delta t}$$

$$\tilde{v}_{t+\Delta t} = \tilde{v}_{t+\Delta t} + \gamma \Delta t \tilde{a}_{t+\Delta t}$$

$$\tilde{a}_{t+\Delta t} = \frac{1}{\beta \Delta t^2} \tilde{d}_{t+\Delta t} - \frac{1}{\beta \Delta t^2} \tilde{d}_{t+\Delta t}$$

si bien que l'équation (C.25) écrite au temps  $t+\Delta t$  :

$$\tilde{M} \tilde{a}_{t+\Delta t} + \tilde{C} \tilde{v}_{t+\Delta t} + \tilde{K} \tilde{d}_{t+\Delta t} = \tilde{F}_{t+\Delta t}$$

devient l'équation dite "implicite" en déplacement :

$$\left( \frac{1}{\beta \Delta t^2} \tilde{M} + \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \tilde{C} + \tilde{K} \right) \tilde{d}_{t+\Delta t} = \tilde{F}_{t+\Delta t} + \frac{1}{\beta \Delta t^2} \tilde{M} \tilde{d}_{t+\Delta t} + \tilde{C} \left( \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \tilde{d}_{t+\Delta t} - \tilde{v}_{t+\Delta t} \right) \quad (\text{C.34})$$

### C.5.2 Formulation en accélération

A partir des équations (C.29) et (C.30), on peut écrire directement l'équation dite "implicite" en accélération :

$$\left( \tilde{M} + \gamma \Delta t \tilde{C} + \beta \Delta t^2 \tilde{K} \right) \tilde{a}_{t+\Delta t} = \tilde{F}_{t+\Delta t} - \tilde{C} \left[ \tilde{v}_t + (1 - \gamma) \Delta t \tilde{a}_t \right] - \tilde{K} \left[ \tilde{d}_t + \Delta t \tilde{v}_t + \Delta t^2 (1 - 2\beta) \tilde{a}_t \right] \quad (\text{C.35})$$

Les "prédicteurs" des vitesses et déplacements sont alors définis comme précédemment (C.32), (C.33), et l'équation implicite s'écrit :

$$\left( \tilde{M} + \gamma \Delta t \tilde{C} + \beta \Delta t^2 \tilde{K}_{t+\Delta t} \right) \tilde{a}_{t+\Delta t} = \tilde{F}_{t+\Delta t} - \tilde{C} \tilde{v}_{t+\Delta t} - \tilde{K} \tilde{d}_{t+\Delta t} \quad (\text{C.36})$$

### C.5.3 Familles des algorithmes de Newmark

Différentes valeurs des paramètres  $\alpha$  et  $\beta$  (paramètres de Newmark) conduisent à la formulation de différents algorithmes. En particulier :

- pour  $\alpha = \frac{1}{2}$  et  $\beta = \frac{1}{4}$  (cas présenté au début de ce paragraphe), l'algorithme utilise l'hypothèse d'une accélération moyenne constante entre deux pas de temps. Cet algorithme implicite est inconditionnellement stable, c'est-à-dire qu'il ne donne lieu à aucune restriction quant au pas de temps  $\Delta t$  à utiliser.
- pour  $\alpha = \frac{1}{2}$  et  $\beta = 0$  (par exemple dans l'équation (C.36)), l'équation implicite en accélération devient :

$$(\underline{M} + \gamma \Delta t \underline{C}) \underline{\ddot{a}}_{t+\Delta t} = \underline{F}_{t+\Delta t} - \underline{C} \underline{\ddot{v}}_{t+\Delta t} - \underline{K}_t \underline{\ddot{d}}_{t+\Delta t} \quad (C.37)$$

Le terme  $\underline{K}_t \underline{\ddot{d}}_{t+\Delta t}$  peut s'écrire directement, sans former la matrice  $\underline{K}$  sous la forme d'un vecteur de forces nodales (degré de liberté par degré de liberté). De plus, si les matrices  $\underline{M}$  et  $\underline{C}$  sont diagonales, chaque équation relative à un degré de liberté peut être résolue indépendamment des autres. L'équation (C.37) est alors dite "explicite". Cette méthode, qui a l'avantage d'éviter de construire la matrice  $\underline{K}$ , présente l'inconvénient d'être conditionnellement stable. L'incrément de temps  $\Delta t$  utilisable est en général très petit. Il dépend des dimensions des éléments et des constantes du matériau modélisé.

La méthode implicite d'intégration dans le temps ( $\alpha = 0,5$ ,  $\beta = 0,25$ ) a été retenue dans le cadre de cette étude.

### R E F E R E N C E

- [C.1] T.J.R. Hughes. The finite element method. Prentice Hall, 1987.

ANNEXE D : DEVELOPPEMENT DES FONCTIONS  $\Phi$

Soit l'expression présentée au chapitre 3 :

$$J = -\frac{1}{2} K_I \Phi(v, u^I, \phi) + -\frac{1}{2} K_{II} \Phi(v, u^{II}, \phi).$$

$$\text{avec : } \Phi(v, u^\alpha, \phi) = \int_{\Omega^*} [(\sigma_{i2}(u^\alpha) v_{i,1} \sigma_{i1}(v) (u_{i,1}^\alpha)) \phi,1 - (\sigma_{2i}(u^\alpha) v_{i,1} + \sigma_{i2}(v) u_{i,1}^\alpha) \phi,2] d\Omega$$

$\alpha = I, II$

Comme  $v$  peut être assimilé à  $u$  tel que :

$$v = K_I u^I + K_{II} u^{II}$$

$$\sigma(v) = K_I \sigma(u^I) + K_{II} \sigma(u^{II})$$

alors :

$$\begin{aligned} \Phi(v, u^\alpha, \phi) = \int_{\Omega^*} [ & \{\sigma_{i2}(u^\alpha) (K_I u_{i,2}^I + K_{II} u_{i,2}^{II}) - \\ & (K_I \sigma_{i,1}(u^I) + K_{II} \sigma_{i,1}(u^{II})) (u_{i,1}^\alpha)\} \phi,1 - \\ & \{\sigma_{2i}(u^\alpha) (K_I u_{i,1}^I + K_{II} u_{i,1}^{II}) + \\ & (K_I \sigma_{i2}(u^I) + K_{II} \sigma_{i2}(u^{II})) u_{i,1}^\alpha\} \phi,2] d\Omega \end{aligned}$$

Pour  $\alpha = I$ , en écrivant  $\sigma_{ij}(u^\alpha) = \sigma_{ij}^\alpha$ , l'intégrale devient :

$$\begin{aligned} \Phi^I = \int_{\Omega^*} \{ & [K_I (\sigma_{i2}^I u_{i,2}^I - \sigma_{ij}^I u_{i,1}^I) + \\ & K_{II} (\sigma_{i2}^I u_{i,2}^{II} - \sigma_{i1}^{II} u_{i,1}^I)] \phi,1 - [K_I 2 (\sigma_{2i}^I u_{i,1}^{II}) + \\ & K_{II} (\sigma_{2i}^I u_{i,1}^{II} + \sigma_{2i}^{II} u_{i,1}^I)] \phi,2 \} d\Omega \end{aligned}$$

on écrit :

$$\Phi^I = K_I \Phi_1^I + K_{II} \Phi_2^I$$

$$\Phi_1^I = \int_{\Omega^*} [(\sigma_{i2}^I u_{i,2}^I - \sigma_{i1}^I u_{i,1}^I) \phi,1 - 2 (\sigma_{2i}^I u_{i,1}^I) \phi,2] d\Omega$$

$$\begin{aligned} \Phi_2^I = \int_{\Omega^*} [ & (\sigma_{i2}^I u_{i,2}^{II} - \sigma_{i1}^{II} u_{i,1}^I) \phi,1 - \\ & 2 (\sigma_{2i}^I u_{i,1}^{II} + \sigma_{2i}^{II} u_{i,1}^I) \phi,2] d\Omega \end{aligned}$$

Pour  $\alpha = II$  :

$$\begin{aligned} \Phi^{II} = \int_{\Omega^*} \{ & [K_I (\sigma_{i2}^{II} u_{i,2}^I - \sigma_{i1}^I u_{i,1}^{II}) + \\ & K_{II} (\sigma_{i2}^{II} u_{i,2}^{II} - \sigma_{i1}^{II} u_{i,1}^{II})] \phi,1 - \\ & [K_I (\sigma_{2i}^I u_{i,1}^{II} + \sigma_{2i}^{II} u_{i,1}^I) + \\ & K_{II} 2 (\sigma_{2i}^{II} u_{i,1}^{II})] \phi,2 \} d\Omega \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi_1^{II} = \int_{\Omega^*} [ & (\sigma_{i2}^{II} u_{i,2}^I - \sigma_{i1}^I u_{i,1}^{II}) \phi,1 - \\ & (\sigma_{2i}^I u_{i,1}^{II} + \sigma_{2i}^{II} u_{i,1}^I) \phi,2] d\Omega \end{aligned}$$

$$\Phi_2^{II} = \int_{\Omega^*} [(\sigma_{i2}^{II} u_{i,2}^{II} - \sigma_{i1}^{II} u_{i,1}^{II}) \phi,1 - 2 (\sigma_{2i}^{II} u_{i,1}^{II}) \phi,2] d\Omega$$

$$\Phi^{II} = K_I \Phi_1^{II} + K_{II} \Phi_2^{II}$$

Or, il peut être établi, par exemple numériquement, que :

$$\Phi_1^I = \frac{-2}{E^*}$$

$$\Phi_2^{II} = \frac{-2}{E^*}$$

et

$$\Phi_2^I = 0 \quad \text{ainsi,} \quad \Phi^I = -\frac{2 K_I}{E^*}$$
$$\Phi_1^{II} = 0 \quad \Phi^{II} = -\frac{2 K_{II}}{E^*}$$

donc

$$K_I = -\frac{E^*}{2} \Phi^I = -\frac{E^*}{2} \Phi(v, u^I, \phi)$$

$$K_{II} = -\frac{E^*}{2} \Phi^{II} = -\frac{E^*}{2} \Phi(v, u^{II}, \phi)$$

**Remarque** : en remplaçant  $\Phi^I$  et  $\Phi^{II}$  dans l'expression (D.1) :

$$J = \frac{1}{2} K_I K_I \frac{2}{E^*} + \frac{1}{2} K_{II} K_{II} \frac{2}{E^*}$$

$$\text{d'où : } J = \frac{K_I^2}{E^*} + \frac{K_{II}^2}{E^*}$$

qui est l'expression liant J à  $K_I$  et  $K_{II}$ .





ANNEXE E : PLASTICITE INCREMENTALE - CONSTRUCTION DE LA MATRICE ELASTO-PLASTIQUE D'UN MODELE ELASTIQUE PARFAITEMENT PLASTIQUE  
[E.1, E.2, 4.1]

E.1 DEFINITIONS

La figure E.1 représente la relation  $\sigma$ - $\epsilon$  en un point du corps considéré, au cours des itérations au temps  $n+1$  :

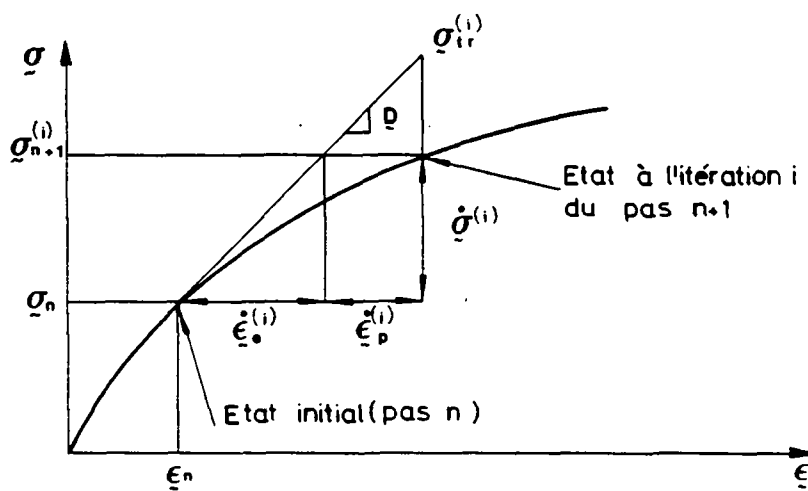


Fig. E.1 : courbe  $\sigma$ - $\epsilon$

Remarque : l'actualisation de contraintes  $\underline{\sigma}$  se fait après convergence.

• L'incrément de déformation  $\underline{\dot{\epsilon}}^{(i)}$  entre l'état de contrainte initial et l'état de contrainte à l'itération  $i$  est composé de deux parties :

- une partie qui exprime la déformation élastique :  $\dot{\underline{\epsilon}}_e$ ,
- une partie qui exprime la déformation plastique :  $\dot{\underline{\epsilon}}_p$ .

On note :

$$\underline{\dot{\epsilon}}^{(i)} = \dot{\underline{\epsilon}}_e + \dot{\underline{\epsilon}}_p = \dot{\underline{\epsilon}} \quad (E.1)$$

$$\dot{\underline{\sigma}} = \underline{D} \cdot \dot{\underline{\epsilon}}_e = \dot{\underline{\sigma}} \quad (E.2)$$

$$\dot{\underline{\sigma}}_{tr}^{(i)} = \underline{D} \cdot \dot{\underline{\epsilon}} = \dot{\underline{\sigma}}^{tr} \quad (E.3)$$

où  $\underline{D}$  est la matrice d'élasticité décrite par les équations (B.18) et (B.28).

- L'équation constitutive s'écrit alors :

$$\underline{\dot{\sigma}} = \underline{D} \cdot (\underline{\dot{\varepsilon}} - \underline{\dot{\varepsilon}}_p) \quad (\text{E.4})$$

- Le critère de rupture peut s'exprimer par :

$$f(\underline{\sigma}) = k \quad (\text{E.5})$$

où  $k$  est une constante du matériau.

- Le vecteur unitaire normal à la surface de rupture décrite par l'équation (E.5) dans l'espace des contraintes est défini par :

$$\underline{N} = \frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}} / \left\| \frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}} \right\| \quad (\text{E.6})$$

- L'état élastique peut alors être défini par :

$$\begin{aligned} f(\underline{\sigma}) < k \\ \text{ou} \\ f(\underline{\sigma}) = k \quad \text{et} \quad \underline{N} \cdot \underline{\dot{\sigma}}_{tr} \leq 0 \end{aligned} \quad (\text{E.7})$$

et l'état plastique par :

$$f(\underline{\sigma}) = k \quad \text{et} \quad \underline{N} \cdot \underline{\dot{\sigma}}_{tr} > 0 \quad (\text{E.8})$$

La dernière expression de la condition (E.7) exprime une décharge élastique après avoir atteint un état plastique.

- Ecoulement plastique

L'incrément de déformation est défini par :

$$\begin{aligned} \underline{\dot{\varepsilon}}_{pl} &= \underline{0} && \text{en phase élastique} \\ \underline{\dot{\varepsilon}}_{pl} &= \lambda \underline{N} && \text{en phase plastique} \end{aligned} \quad (\text{E.9})$$

où  $\lambda$  est un scalaire.

• Condition de consistance

La condition de consistance exprime le fait que lors du processus plastique le point considéré reste sur la surface plastique :

$$f(\underline{\sigma} + d\underline{\sigma}) = f(\underline{\sigma})$$

soit

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}} \cdot d\underline{\sigma} = 0$$

ce qui s'écrit également en utilisant (E.6) :

$$\dot{f} = \left| \left| \frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}} \right| \right| \cdot \underline{N} \cdot \dot{\underline{\sigma}} = 0 \quad (\text{E.10})$$

## E.2 MATRICE ELASTO-PLASTIQUE

A partir de la condition de consistance (E.10) et de l'équation constitutive (E.4), on peut écrire :

$$\underline{N} \cdot \dot{\underline{\sigma}} = \underline{N} \cdot \underline{D} \cdot \dot{\underline{\varepsilon}} - \underline{N} \cdot \underline{D} \cdot \dot{\underline{\varepsilon}}_p = 0$$

et en utilisant la définition de l'écoulement plastique (E.9) :

$$\underline{N} \cdot \dot{\underline{\sigma}} = \underline{N} \cdot \underline{D} \cdot \dot{\underline{\varepsilon}} - \lambda \underline{N} \cdot \underline{D} \cdot \underline{N} = 0$$

d'où

$$\lambda = \frac{\underline{N} \cdot \underline{D} \cdot \dot{\underline{\varepsilon}}}{\underline{N} \cdot \underline{D} \cdot \underline{N}}$$

L'équation constitutive s'écrit alors :

$$\dot{\underline{\sigma}} = \underline{D} \cdot (\dot{\underline{\varepsilon}} - \dot{\underline{\varepsilon}}_{p1}) = \underline{D} \cdot \dot{\underline{\varepsilon}} - \lambda \underline{D} \cdot \underline{N}$$

$$\dot{\underline{\sigma}} = \underline{D} \cdot \dot{\underline{\varepsilon}} - \frac{(\underline{N} \cdot \underline{D}) \cdot (\underline{D} \cdot \underline{N})}{\underline{N} \cdot \underline{D} \cdot \underline{N}} \cdot \dot{\underline{\varepsilon}}$$

$$\dot{\tilde{\sigma}} = \left( \tilde{D} - \frac{(\tilde{N} \cdot \tilde{D}) \cdot (\tilde{D} \cdot \tilde{N})}{\tilde{N} \cdot \tilde{D} \cdot \tilde{N}} \right) \cdot \dot{\tilde{\epsilon}} \quad (\text{E.11})$$

$$\dot{\tilde{\sigma}} = \tilde{C} \cdot \dot{\tilde{\epsilon}} \quad (\text{E.12})$$

Les équations (E.11) et (E.12) définissent la matière élasto-plastique d'un modèle élastique parfaitement plastique. La figure E.2 illustre cette définition :

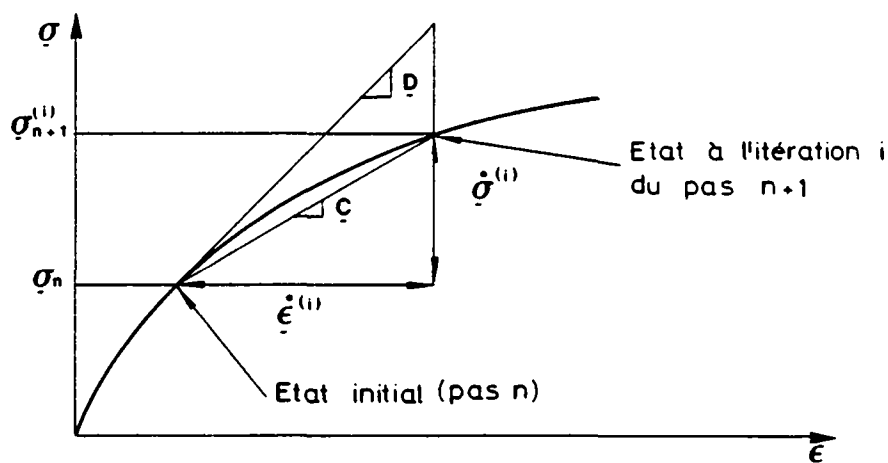


Fig. E.2 : définition de la matrice élasto-plastique

#### REFERENCES

- [E.1] J.H. Prevost. Mechanics of dissipative media, course notes. Department of Civil Engineering, Princeton University, 1987.
- [E.2] T.J.R. Hughes. Numerical implementation of constitutive models : rate independent deviatoric plasticity, Theoretical foundation for large scale computations of nonlinear material behavior (E. Nemat-Nasser, R.J. Asaro, G.A. Megemier Ed.). Martinus Nijhoff, 1984.

**ANNEXE F : COMPORTEMENT DES DIFFERENTS MODELES DE FISSURES**

- 1** : modèle de fissuration discrète (§ 3.4, § 4.1)
- 2** : modèle élastique de fissuration répartie,  $\alpha = 0$  (§ 4.2) ou modèle élastoplastique de fissuration répartie (§ 4.3)
- 3,4** : modèle utilisant des éléments à fonctions de forme discontinues (§ 4.4)
  - 3** : matrice élastique fissurée  $D_f'$ ,  $\alpha = 1$
  - 4** : matrice élastique fissurée  $D_f'$ ,  $\alpha = 0$

N = nombre d'éléments

S = surface de la pièce

	<b>Maillage</b>	<b>N</b>	<b>N/S</b>	<b>K<sub>I</sub></b>	<b>% erreur K<sub>I</sub></b>
<b>1</b>	grossier	50	0,12	7,82	- 15
	moyen	98	0,24	8,26	- 10
	fin	420	1,04	8,65	- 6
<b>2</b>	grossier	45	0,11	9,05	- 1
	moyen	91	0,23	9,35	2
	fin	405	1,00	9,30	1
<b>3</b>	grossier	45	0,11	6,53	- 29
	moyen	91	0,23	7,13	- 22
	fin	405	1,00	7,80	- 15
<b>4</b>	grossier	45	0,11	9,09	- 1
	moyen	91	0,23	9,35	2
	fin	405	1,00	9,30	1

**Tableau F.1 : problème 1**

	Maillage	N	N/S	$K_I$	% erreur $K_I$	$K_{II}$	% erreur $K_{II}$
1	grossier	24	0,10	4,14	- 27	- 2,53	- 4
	moyen	70	0,28	4,37	- 23	- 2,62	- 0,4
	fin	260	1,04	4,99	- 12	- 2,68	2
2	grossier	21	0,08	5,31	- 7	- 3,25	24
	moyen	65	0,26	5,39	- 5	- 2,77	5
	fin	250	1,00	5,65	- 1	- 2,76	5
3	grossier	21	0,08	3,57	- 37	- 2,86	9
	moyen	65	0,26	4,18	- 27	- 2,72	3
	fin	250	1,00	4,78	- 16	- 2,74	4
4	grossier	21	0,08	5,31	- 7	- 3,16	20
	moyen	65	0,26	5,36	- 6	- 2,57	- 2
	fin	250	1,00	5,64	- 1	- 2,59	- 2

Tableau F.2 : problème 2, maillage orienté

	Maillage	N	N/S	$K_I$	% erreur $K_I$	$K_{II}$	% erreur $K_{II}$
2	grossier	60	0,24	5,08	- 11	- 2,13	- 19
	moyen	240	0,96	5,66	- 1	- 1,90	- 28
	fin	980	3,92	5,77	1	- 1,74	- 34
3	grossier	60	0,24	3,47	- 39	- 2,07	- 21
	moyen	240	0,96	4,19	- 26	- 2,23	- 15
	fin	980	3,92	4,78	- 16	- 2,42	- 8
4	grossier	60	0,24	5,24	- 8	- 2,42	- 8
	moyen	240	0,96	5,75	1	- 2,36	- 10
	fin	980	3,92	5,82	2	- 2,46	- 6

Tableau F.3 : problème 2, maillage uniforme

## ANNEXE G : DEVELOPPEMENT DES TERMES CORRECTIFS

### G.1 PRESSION DANS LA FISSURE

L'équation (6.11) s'écrit, en utilisant l'équation (3.8) :

$$\begin{aligned}
 J' = & -\frac{1}{2} \int_{\Omega^*} [(\sigma_{i2} u_{i,2} - \sigma_{i1} u_{i,1}) \phi_{,1} - 2 (\sigma_{i2} u_{i,1}) \phi_{,2}] d\Omega \\
 & - \int_{\Gamma_1} p u_{2,1} \phi dx
 \end{aligned} \tag{G.1}$$

La solution  $\underline{v}$  obtenue par éléments finis est une approximation de  $\underline{u}$ , qui fait maintenant intervenir  $\dot{\underline{u}}$  qui est la solution particulière engendrée par la pression :

$$\underline{v} \simeq \underline{u} = \dot{\underline{u}} + K_I \underline{u}^I + K_{II} \underline{u}^{II} \tag{G.2}$$

et

$$\underline{\sigma}(\underline{v}) \simeq \underline{\sigma}(\underline{u}) = \dot{\underline{\sigma}} + K_I \underline{\sigma}^I + K_{II} \underline{\sigma}^{II} \tag{G.3}$$

En remplaçant certains termes de (G.1) par leurs expressions données par (G.2) et (G.3) :

$$\begin{aligned}
 J' = & -\frac{1}{2} K_I \Phi(v, u^I, \phi) - \frac{1}{2} K_{II} \Phi(v, u^{II}, \phi) \\
 & - K_I \int_{\Gamma_1} p u_{2,1}^I \phi dx - K_{II} \int_{\Gamma_1} p u_{2,1}^{II} \phi dx \\
 & - \frac{1}{2} \int_{\Omega^*} [(\dot{\sigma}_{i2} v_{i,2} - \sigma_{i1} \dot{u}_{i,1}) \phi_{,1} - (\dot{\sigma}_{2i} v_{i,1} + \sigma_{2i} \dot{u}_{i,1}) \phi_{,2}] d\Omega \\
 & - \int_{\Gamma_1} p \dot{u}_{2,1} \phi dx
 \end{aligned} \tag{G.4}$$

Le troisième terme est nul car  $u_{2,1}^{II}$  est nul sur  $\Gamma_1$ . Les deux derniers termes sont fonction de  $\dot{\underline{u}}$ . On applique le principe de superposition pour déterminer  $\dot{\underline{u}}$ ;  $\dot{\underline{u}}$  est équivalent au champ de déplacement d'une pièce non-fissurée en compression simple [2.1]. Ainsi, le dernier terme de (G.4) est nul et l'avant-dernier se réduit à :

$$- \frac{1}{2} K_I \int_{\Omega^*} \dot{\sigma}_{22} (u_{2,2}^I \phi_{,1} - u_{2,1}^I \phi_{,2}) d\Omega$$

puis, comme  $\dot{\sigma}_{22} = -\rho$ ,

$$\frac{1}{2} K_I \int_{\Omega^*} \rho (u_{2,2}^I \phi)_{,1} - \rho (u_{2,1}^I \phi)_{,2}$$

or comme  $\Gamma^* = \Gamma + \Gamma_1 + \Gamma_\varepsilon$ , le théorème de Green donne :

$$\frac{1}{2} K_I \int_{\Gamma^*} \rho u_{2,2}^I \phi dy + \frac{1}{2} K_I \int_{\Gamma^*} \rho u_{2,1}^I \phi dx$$

or  $\phi = 0$  sur  $\Gamma$ ,  $\phi = 1$  sur  $\Gamma_\varepsilon$  et  $u_{2,2}^I = 0$  sur  $\Gamma_1$ . En faisant tendre  $\varepsilon$  vers zéro on réduit enfin ce terme à :

$$\frac{1}{2} K_I \int_{\Gamma_1} \rho u_{2,1}^I \phi dx$$

Si bien que l'expression (G.4) s'écrit :

$$J' = - \frac{1}{2} K_I \Phi(v, u^I, f) - \frac{1}{2} K_{II} \Phi(v, u^{II}, \phi) - \frac{1}{2} K_I \int_{\Gamma_1} \rho u_{2,1}^I \phi dx \quad (G.5)$$

## G.2 FORCES VOLUMIQUES

L'équation (6.29) s'écrit :

$$J'' = - \int_{\Omega^*} [(W - \sigma_{i1} u_{i,1}) \phi_{,1} - (\sigma_{i2} u_{i,2}) \phi_{,2}] d\Omega - \int_{\Omega^*} f_i u_{i,1} \phi d\Omega + \int_{\Omega_\varepsilon} f_i u_{i,1} \phi d\Omega \quad (G.6)$$

La dernière intégrale tend vers zéro lorsque  $\varepsilon$  tend vers zéro.

La même démarche que celle exposée précédemment conduit à :



$$\begin{aligned}
 J'' &= -\frac{1}{2} K_I \Phi(v, u^I, \phi) - \frac{1}{2} K_{II} \Phi(v, u^{II}, \phi) \\
 &- K_I \int_{\Omega^*} f_i u_{i,1}^I \phi \, d\Omega - K_{II} \int_{\Omega^*} f_i u_{i,1}^{II} \phi \, d\Omega \\
 &- \frac{1}{2} \int_{\Omega^*} [\dot{\sigma}_{i2} v_{i,2} - \sigma_{i1} \dot{u}_{i,1}] \phi_{,1} - (\dot{\sigma}_{2i} v_{i,1} + \sigma_{2i} \dot{u}_{i,1}) \phi_{,2} \, d\Omega \\
 &- \int_{\Omega^*} f_i \dot{u}_{i,1} \phi \, d\Omega \tag{G.7}
 \end{aligned}$$

Les deux derniers termes s'écrivent :

$$\begin{aligned}
 &- \frac{1}{2} \int_{\Omega^*} [\dot{\sigma}_{i2} \dot{u}_{i,2} - \dot{\sigma}_{i1} \dot{u}_{i,1}] \phi_{,1} - 2 \dot{\sigma}_{2i} \dot{u}_{i,1} \phi_{,2} \, d\Omega \\
 &- \frac{1}{2} K_I \int_{\Omega^*} [(\dot{\sigma}_{i2} u_{i,2}^I - \sigma_{i1}^I \dot{u}_{i,1}) \phi_{,1} - (\dot{\sigma}_{2i} u_{i,1}^I + \sigma_{2i}^I \dot{u}_{i,1}) \phi_{,2}] \, d\Omega \\
 &- \frac{1}{2} K_{II} \int_{\Omega^*} [(\dot{\sigma}_{i2} u_{i,2}^{II} - \sigma_{i1}^{II} \dot{u}_{i,1}) \phi_{,1} - (\dot{\sigma}_{2i} u_{i,1}^{II} + \sigma_{2i}^{II} \dot{u}_{i,1}) \phi_{,2}] \, d\Omega \\
 &- \int_{\Omega^*} f_i \dot{u}_{i,1} \phi \, d\Omega
 \end{aligned}$$

La première et la dernière intégrale s'annulent l'une l'autre car elles correspondent à l'expression de l'intégrale  $J''$  effectuée sur un contour fermé dans un champ sans singularité, et l'on peut montrer que les termes restant se réduisent à :

$$\frac{1}{2} K_\alpha \int_{\Omega^*} f_i u_{i,1}^\alpha \phi \, d\Omega \quad \alpha = I, II$$

Si bien que l'expression (G.7) devient :

$$\begin{aligned}
 J'' &= -\frac{1}{2} K_I \Phi(v, u^I, \phi) - \frac{1}{2} K_{II} \Phi(v, u^{II}, \phi) \\
 &- \frac{1}{2} K_I \int_{\Omega^*} f_i u_{i,1}^I \phi \, d\Omega - \frac{1}{2} K_{II} \int_{\Omega^*} f_i u_{i,1}^{II} \phi \, d\Omega \tag{G.8}
 \end{aligned}$$



## CURRICULUM VITAE

Nom D R O Z  
Prénom Patrice  
Date de naissance 20 avril 1957  
Nationalités suisse et française  
Etat civil marié  
Enfants deux

### Formation et activité professionnelle

- 1982
- diplôme d'ingénieur civil EPFL
  - ingénieur chez Bonnard & Gardel S.A., Ingénieurs-Conseils, Lausanne
    - projet de tunnels autoroutiers
    - projet de barrage en terre
- 1982 - 1984
- coopération technique française
    - enseignement (physique et ouvrages hydrauliques) dans un centre de formation technique dépendant du Ministère algérien de l'hydraulique
- 1984 - 1987
- assistant scientifique à l'Institut d'économie et aménagements énergétiques - EPFL
    - recherche sur la modélisation numérique du comportement non-linéaire des structures massives en béton

