

SIMULATION ET ANALYSE NUMERIQUE DU COMPORTEMENT MECANIQUE DE STRUCTURES COMPOSITES

THESE No 676 (1987)

PRESENTÉE AU DEPARTEMENT DES MATERIAUX

ECOLE POLYTECHNIQUE FEDERALE DE LAUSANNE

POUR L'OBTENTION DU GRADE DE DOCTEUR ES SCIENCES

PAR

HAMID SADOUKI

**Ingénieur physicien diplômé EPFL
de nationalité algérienne**

acceptée sur proposition du jury :

**Prof. F.H. Wittmann, rapporteur
Prof. F. Frey, corapporteur
Prof. L. Cedolin, corapporteur
Dr A. Piguet, corapporteur**

**Lausanne, EPFL
1987**

Avant-propos.

Ce travail a été réalisé au Laboratoire des Matériaux de Construction de l'EPF-Lausanne; que tous ses membres trouvent ici l'expression de ma gratitude.

J'exprime tout particulièrement ma reconnaissance à Monsieur le Professeur F.H. Wittmann qui, par ses conseils, sa confiance et son soutien, m'a permis de mener à bien mon travail de thèse.

Je remercie chaleureusement Monsieur P.E. Roelfstra pour l'aide qu'il m'a prodiguée tout au long de ce travail et pour ses riches connaissances en méthodes numériques qu'il a su me communiquer.

Qu'il me soit aussi permis de remercier Monsieur le Professeur L. Cedolin, Monsieur le Professeur F. Frey et Monsieur le Docteur A. Piguet d'avoir bien voulu accepter de faire partie de mon jury de thèse.

Ce travail est, en partie, une contribution au Projet Inter-Institutions (ETHZ, EPFL, EMPA, TFB) intitulé " Gefüge und mechanische Eigenschaften zementgebundener Werkstoffe "; je tiens à remercier Monsieur le Professeur M. Cosandey, Président du Conseil des Ecoles Polytechniques Fédérales, d'avoir bien voulu nous octroyer les fonds nécessaires à la réalisation de ce projet.

Je remercie le Fonds National Suisse de la Recherche Scientifique qui, par son soutien financier a permis l'achèvement de ce travail.

T A B L E D E S M A T I E R E S
=====



1. INTRODUCTION	1
2. CONCEPTS DE LA MECANIQUE DE LA RUPTURE CLASSIQUE	5
2.1 Historique	7
2.2 Résistance idéale d'un matériau	8
2.3 Théorie énergétique de Griffith	11
2.3.1 Concentration des contraintes	11
2.3.2 Le critère de Griffith	12
2.3.3 Extension de la théorie aux matériaux non fragiles	15
2.4 Force d'extension de la fissure	16
2.5 Théorie linéaire élastique de la rupture	17
2.5.1 Les modes de rupture	17
2.5.2 Facteurs d'intensité de contrainte	17
2.5.3 Critère de propagation brutale	20
2.6 Relation entre G_c et K_c	20
2.7 Les forces de cohésion de Barenblatt	21
2.8 Le modèle plastique de Dugdale	23
2.9 Ecartement à fond de fissure	25
2.10 L'intégrale J de Rice	26
2.11 Courbe de résistance ou courbe-R	30
2.12 Conclusions	31
3. MODELES DE MECANIQUE DE LA RUPTURE POUR LE BETON	33
3.1 Aspects phénoménologiques de la fissuration dans le béton	35
3.1.1 Introduction	35
3.1.2 Etat initial du matériau	35
3.1.3 Développement du processus de fissuration du béton sous charge	41
3.1.4 Conclusions	45
3.2 Modèles analytiques pour la rupture du béton	46
3.2.1 Modèle multiphase linéaire élastique	46
3.2.2 Modèle probabiliste	51

3.3	Modèles tenant compte du radoucissement du matériau	55
3.3.1	Théorie de la bande microfissurée à fond obtu	55
3.3.2	Le modèle de la fissure fictive (MFF)	58
3.4	Conclusions	64
4.	METHODES NUMERIQUES POUR SIMULER LA RUPTURE DU BETON ET DETERMINATION DES PARAMETRES DE RUPTURE	67
4.1	Introduction	69
4.2	Détermination expérimentale de l'énergie de rupture	69
4.3	Application du MFF dans une analyse par la méthode des éléments finis pour simuler la propagation de fissures dans le béton	71
4.4	Influence de l'allure de la branche descendante relative au diagramme de radoucissement ($\sigma-w$) sur le diagramme ($F-\delta$)	80
4.5	Détermination numérique du diagramme de radoucisse- ment ($\sigma-w$)	83
4.6	Influence de la taille maximale des inclusions sur les paramètres de la rupture du béton	85
4.7	Conclusions	87
5.	SIMULATION ET ANALYSE DES STRUCTURES COMPOSITES	89
5.1	Introduction	91
5.2	Méthode de détermination de la géométrie des granulats	92
5.2.1	Buts	92
5.2.2	Méthode des facteurs de forme	93
5.2.3	Analyse du contour des granulats	95
5.2.3.1	Coordonnées sphériques	95
5.2.3.2	Coordonnées polaires	97
5.2.3.3	Loi des coefficients morphologiques	99
5.3	Analyse et simulation de la géométrie des granulats de la Vallée du Rhône	100
5.3.1	Détermination de leur morphologie	100
5.3.2	Génération des granulats	101

5.4	Distributions granulométriques	103
5.4.1	Généralités	103
5.4.2	Courbes granulométriques théoriques	104
5.4.3	Dimensions maximales des particules	105
5.4.4	Analyse granulométrique	107
5.4.5	Détermination de la combinaison granulométrique optimale et normes	109
5.5	Détermination de la distribution cumulée à 2D relative à une granulométrie donnée	112
5.5.1	Position du problème	112
5.5.2	Approche probabiliste	112
5.5.3	Approche numérique	118
	5.5.3.1 Génération d'une structure composite diphasée à 3D	118
	5.5.3.2 Calcul de la fonction de distribution recherchée	122
5.6	Simulation de structures composites à 2D	127
5.6.1	Structures à inclusions circulaires	127
5.6.2	Structures à inclusions polygonales	127
5.6.3	Structures réalistes	127
5.7	Effet de paroi	130
5.7.1	Définition	130
5.7.2	Détermination de l'effet de paroi en fonction de la profondeur	130
	5.7.2.1 Approche probabiliste	135
	5.7.2.2 Approche numérique	135
5.7.3	Estimation des propriétés du matériau en fonction de la distance à la paroi	137
5.7.4	Influence de l'effet de paroi sur les processus de diffusion	145
5.8	Représentation d'une structure composite par éléments finis	150
5.9	Propriétés effectives d'un matériau composite	157
5.9.1	Aperçu sur les théories des matériaux multiphases	157
5.9.2	Détermination numérique du module d'élasticité effectif d'une structure composite	162

5.9.3	Détermination numérique du retrait effectif d'une structure composite	170
5.10	Conclusions	175
6.	SIMULATION DU PROCESSUS DE FISSURATION DANS LES MATERIAUX COMPOSITES	177
6.1	Introduction	179
6.2	Dérivation des matrices de rigidité des éléments finis	180
6.3	Modélisation des inclusions	183
6.4	Modélisation de la matrice	186
6.4.1	Etat non fissuré	188
6.4.2	Modélisation d'un élément de la matrice dans un état fissuré	189
6.4.2.1	Critère d'initiation d'une fissure	189
6.4.2.2	Représentation de la fissure	190
6.4.2.3	Comportement post-pic	192
6.5	Modélisation de l'interface matrice-inclusion	197
6.5.1	Modèle de l'interface	197
6.5.2	Critères de fissuration	199
6.6	Procédure de la simulation numérique	200
6.7	Résultats de la simulation et discussion	206
6.7.1	Structure composite sollicitée en traction	206
6.7.2	Fissuration induite par le retrait hygrique	221
6.7.3	Fissuration induite par des déformations thermiques, cas du gel	226
6.8	Conclusions	231
7.	CONCLUSIONS	235
8.	REFERENCES	241
9.	RESUMES	255
	Résumé	257
	Zusammenfassung	261
	Extended summary	265
	Curriculum vitae	297

chapitre 1

INTRODUCTION



CHAPITRE 1 : INTRODUCTION

Le béton est un matériau multiphasé complexe, formé de granulats de tailles différentes et de forme irrégulière, qui sont noyés dans une matrice de pâte de ciment durcie.

En plus de ce caractère composite, des défauts précoces inhérents au matériau, dûs au procédé de fabrication et aux processus physico-chimiques ayant lieu durant le durcissement du ciment, viennent compliquer la structure du béton; lui conférant ainsi un haut degré d'hétérogénéité.

Toute propriété et tout comportement physiques, chimiques ou mécaniques du matériau sont intimement liés à sa structure.

Toute approche réaliste, permettant la prévision d'une propriété ou la description d'un comportement du matériau en liaison étroite avec sa structure, se heurtera forcément à des difficultés; difficultés dictées par la complexité de la structure même du matériau.

Cependant, une telle approche est la voie indispensable à suivre pour une meilleure appréhension des différents mécanismes gouvernant le comportement du matériau et par conséquent, à une élaboration de lois des matériaux aussi réalistes que possible.

Les différents modèles analytiques existant et traitant des propriétés des matériaux multiphasés ne donnent que des solutions peu réalistes car, ils sont souvent basés sur des hypothèses trop simplificatrices de la structure réelle du matériau et par conséquent, conduisant à des résultats souvent éloignés de la réalité.

Le but de ce travail est d'étudier, d'une façon aussi réaliste que possible, les propriétés mécaniques et le processus de fissuration d'un matériau composite comme le béton.

Dans notre approche, nous représenterons le béton par une structure composite formée de deux phases à savoir, une phase liante de mortier dans laquelle sont distribuées des inclusions qui constituent la deuxième phase.

Dans le cas d'étude du problème plus complexe, le processus de fissuration du béton, nous avons introduit une troisième phase représentant les zones interfaciales matrice-granulats. L'introduction de cette troisième phase, appelée auréole de transition du béton et caractérisée par de faibles propriétés mécaniques, est nécessaire pour une description réaliste du processus de fissuration dans lequel elle joue un rôle de prime importance.

Dans notre cas d'étude la fissuration de la structure composite peut être induite aussi bien par une sollicitation mécanique extérieure, que par un phénomène physique tel le retrait hygrique ou la dilatation thermique; ces problèmes sont particulièrement importants dans le cadre de la durabilité d'une construction.

Nous montrerons tout d'abord comment on peut simuler la géométrie de granulats naturels et par suite des structures composites représentatives du béton.

Le but de la génération de ces structures est d'étudier les propriétés complexes des matériaux composites telles la déformabilité et la formation des fissures. La seule possibilité de résoudre de tels problèmes est d'introduire des méthodes numériques appropriées. L'analyse par la méthode des éléments finis est un moyen particulièrement puissant qu'on adoptera dans notre étude. Cependant, en raison des limitations des ordinateurs existants, une pareille étude sur des structures composites à trois dimensions s'avère difficilement réalisable bien que la génération de telles structures soit possible. De ce fait, nous avons restreint notre analyse au cas de structures bidimensionnelles. La représentativité d'une structure à trois dimensions par une structure à deux dimensions a fait l'objet d'une attention particulière.

chapitre 2

CONCEPTS DE LA MECANIQUE
DE LA RUPTURE CLASSIQUE



CHAPITRE 2 : CONCEPTS DE LA MECANIQUE DE LA RUPTURE CLASSIQUE

2.1 Historique

Il serait illusoire d'énumérer la longue liste d'accidents survenus dans le monde, par rupture brutale d'une construction ou d'un appareil en service. De tels accidents se multiplièrent depuis la seconde moitié du XIXème siècle où commencèrent à se développer les constructions en acier et en d'autres alliages métalliques. Si beaucoup d'accidents sont dus à des erreurs de conception ou de dimensionnement, un grand nombre d'entre eux ont pour origine une utilisation inadéquate des matériaux [1].

En janvier 1919, un énorme réservoir de mélasse, de 15 mètres de hauteur et de 27 mètres de diamètre, se déchira soudainement, répandant 7,5 millions de litres de mélasse dans les rues de Boston et entraînant la mort de plusieurs personnes. Quelques années plus tard, plusieurs ponts cédèrent brutalement [1].

Le nombre d'accidents de ce genre s'était accru considérablement avec les Libertyships de la seconde guerre mondiale. A cette époque-là, sur les 4694 bateaux construits, près d'un tiers présentèrent des ruptures importantes [2].

Plus tard, dans les années 50, on assista à des ruptures brutales d'appareils à pression.

On a constaté que toujours dans les ruptures soudaines, il y avait à l'origine de la rupture un défaut, un vide ou une fissure. La mécanique des milieux continus ne peut prévoir ces ruptures, puisqu'elle suppose l'absence de tout défaut.

Un besoin pressant se faisait sentir pour apporter une solution à ces problèmes et l'immense effort de recherche qui fut consacré à ce domaine donna naissance à une nouvelle discipline, la mécanique de la rupture.

La mécanique de la rupture a donc pour objectif l'étude des conditions nécessaires à la propagation de fissures (ou défauts) existant dans un milieu solide et par là prévoir la fissuration afin de contribuer à l'augmentation de la résistance du matériau [3].

2.2 Résistance idéale d'un matériau

La résistance à la traction d'un solide cristallin idéal est la contrainte qui doit lui être appliquée pour provoquer sa rupture, i.e. sa séparation à travers un plan cristallin. Considérons un réseau d'espace-ment régulier r_0 (distance interatomique à l'équilibre), sujet à une contrainte de traction σ , comme montré sur la figure 2.1.

Pour calculer la contrainte σ nécessaire pour provoquer la rupture le long d'un plan XX' , nous supposerons que σ est la résultante des forces agissant entre les paires d'atomes, telles que C-C'. En première approximation nous pouvons supposer que la valeur de la force F nécessaire pour provoquer la rupture est identique à celle nécessaire à séparer une paire d'atomes isolée, telle que C-C', cela veut dire que l'on néglige les interactions de ces atomes avec les autres atomes du réseau.

Les forces d'interaction entre deux atomes peuvent être schématisées comme montré sur la figure 2.2a.

On peut approximer la contrainte résultante $\sigma(x)$ à une fonction sinusoïdale de longueur d'onde λ , comme montré sur la Fig.2.2b;

$$\sigma(x) = \sigma_c \sin \left(\frac{2\pi x}{\lambda} \right) \quad (2.1)$$

avec $x = r - r_0$

σ_c est la contrainte maximale correspondant à $x = \lambda/4$.

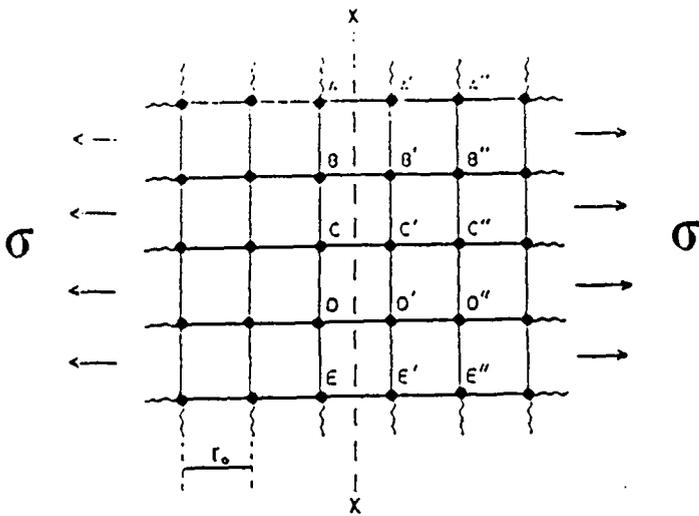


Fig. 2.1 :
Représentation schématique à 2 D d'un réseau cristallin idéal de distance inter-atomique, r_0 , soumis à une contrainte de traction.

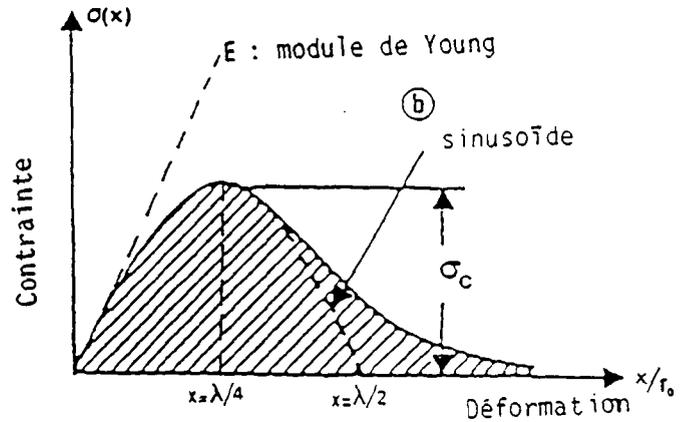
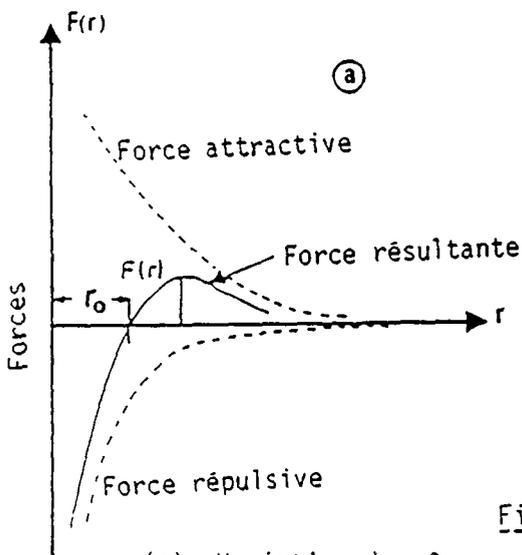


Fig. 2.2 :

- (a)- Variation des forces inter-atomiques entre deux atomes en fonction de la distance de séparation, r .
- (b)- Approximation de la courbe contrainte déformation par une sinusoïde.

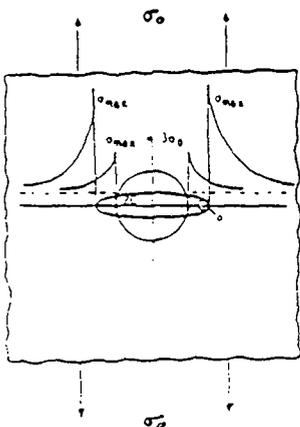


Fig. 2.3 :

Fissure elliptique dans un matériau homogène et isotrope et concentration de contraintes.

L'aire totale U_0 de la surface relative à la courbe $\sigma(r)$ représente l'énergie nécessaire pour réparer les deux plans atomiques.

$$U_0 = \int_0^{\lambda/2} \sigma(x) dx = \frac{\lambda}{2\pi} \sigma_C \left[-\cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) \right]_0^{\lambda/2} \quad (2.2)$$

$$U_0 = \frac{\lambda}{\pi} \sigma_C \quad (2.3)$$

Cette énergie U_0 est nécessaire pour créer deux surfaces; ainsi on a:

$$U_0 = 2 \gamma = \frac{\lambda}{\pi} \sigma_C \quad (2.4)$$

où γ est l'énergie de surface du matériau.

Pour de faibles déplacements l'équation (2.1) peut s'écrire:

$$\sigma(r) = \sigma_C \frac{2\pi}{\lambda} x \quad (2.5)$$

De plus on admet que la relation entre la contrainte $\sigma(r)$ et la déformation relative $r-r_0/r$ est donnée par la loi de Young:

$$\sigma(r) = E \frac{x}{r_0} \quad (2.6)$$

En substituant λ , donné par la combinaison de (2.5) et (2.6) dans l'équation (2.4), on obtient:

$$U_0 = 2\gamma = \frac{2 \sigma_C^2 r_0}{E} \quad (2.7)$$

On obtient ainsi la force de cohésion idéale ou résistance théorique en fonction de la distance interatomique à l'équilibre r_0 , de l'énergie de surface γ et du module d'élasticité E :

$$\sigma_C = \left(\frac{E \gamma}{r_0}\right)^{1/2} \quad (2.8)$$

De nombreux calculs théoriques ont indiqué que cette résistance σ_c est de l'ordre du dixième du module d'élasticité E [4].

Cette résistance idéale σ_c est de plusieurs fois supérieure à la résistance réelle. L'expérience montre que la résistance réelle d'un matériau varie de $E/1000$ à $E/100$. La raison de cette énorme différence entre la résistance observée et la résistance théorique incombe à la présence des innombrables microfissures et défauts contenus dans tout matériau réel.

L'expérience de Léonard de Vinci, datant de près de cinq siècles, a montré que la résistance à la traction d'un fil d'acier était d'autant plus faible que le fil est long. Le résultat de cette expérience illustre clairement la nature statistique de la distribution de défauts au sein du matériau [5].

2.3 Théorie énergétique de Griffith

2.3.1 Concentration des contraintes

Les pré-fissures existant dans les matériaux constituent les pré-cusseurs pour la rupture du matériau. En éliminant de telles fissures, la résistance réelle à la traction peut atteindre la résistance théorique comme ceci a été démontré par Ernsberger pour le verre [4].

Inglis fut le premier à montrer le rôle joué par les fissures en calculant la distribution des contraintes autour d'une fissure elliptique [6].

Considérons une plaque tendue percée d'un trou elliptique, comme montré sur la figure 2.3.

Inglis montra que dans ce cas, la contrainte à l'extrémité du grand axe de l'ellipse dans le sens du petit axe b est égale à $(1 + 2 c/b)$ fois la contrainte appliquée, σ_a .

$$\sigma_{\max} = \left(1 + 2 \frac{c}{b}\right) \sigma_a \quad (2.9)$$

En introduisant le rayon de courbure $\rho = b^2/c$ à l'extrémité du grand axe, on a:

$$\sigma_{\max} = \left(1 + 2 \sqrt{\frac{c}{\rho}}\right) \sigma_a \quad (2.10)$$

Dans le cas d'un évidement circulaire, la contrainte maximale atteint trois fois la contrainte appliquée.

Dans le cas d'une fissure très plate et allongée, c'est-à-dire $b/c \ll 1$, l'équation précédente peut s'écrire:

$$\sigma_{\max} = 2 \sqrt{\frac{c}{\rho}} \sigma_a \quad (2.11)$$

Dans le cas d'une fissure très aiguë, le rayon de courbure ρ tend vers zéro, la contrainte maximale devient infinie $\sigma_{\max} \rightarrow \infty$ et la résistance du matériau "devient" nulle. Le terme $2\sqrt{c/\rho}$ est appelé le facteur de concentration de contrainte, K_T qui est le rapport entre la contrainte maximale σ_{\max} , et la contrainte appliquée σ_a , il décrit l'effet de la géométrie de la fissure sur le niveau de contrainte au fond de fissure.

On peut déjà conclure sur la base des résultats d'Inglis, que plus un matériau contient de défauts, plus grand est le risque de rupture.

2.3.2 Le critère de Griffith

En utilisant la solution d'Inglis donnant les contraintes élastiques autour d'une fissure située dans une plaque infinie soumise à une traction, Griffith considère l'énergie de déformation élastique de la plaque et calcule la variation de celle-ci quand on y pratique un évidement elliptique de longueur $2c$, les contraintes à l'infini restant appliquées. La variation totale de cette énergie élastique par unité de surface s'écrit:

$$U_e = - \frac{\sigma^2 \pi c^2}{E} \quad (2.12)$$

où c est le demi grand axe du trou elliptique, σ est la contrainte normale appliquée et E est le module de Young du matériau.

Griffith compara cette variation d'énergie de déformation U_e avec l'énergie de surface de la fissure, donnée par $U_s = 4 c \gamma$ où γ est la tension superficielle ou énergie de surface par unité d'aire.

Il pose comme un principe que l'équilibre énergétique sera atteint lorsque l'énergie potentielle du système $\Sigma = U_e - U_s$ sera minimale.

Ainsi l'instabilité devrait avoir lieu si pour un incrément dc de la longueur de la fissure, on avait $dU_e > dU_s$. Donc la condition requise pour que l'extension de la fissure ait lieu, s'exprime comme suit:

$$\frac{d}{dc} (U_e - U_s) = \frac{d}{dc} \left(\frac{\sigma^2 \pi c^2}{E} - 4 c \gamma \right) = 0 \quad (2.13)$$

L'énergie de surface U_s et l'énergie de déformation élastique U_e en fonction de la longueur de la fissure ($2c$) sont montrées graphiquement sur la figure 2.4.

L'instabilité a lieu à l'endroit où la courbe Σ a un maximum, pour une contrainte donnée, ceci implique donc l'existence d'une longueur de fissure critique.

La relation donnant naissance à l'instabilité (ég. 2.13) conduit à:

$$\sigma_c^2 = \frac{2 \gamma E}{\pi c} \quad (2.14)$$

Cette relation donne la contrainte maximale pour un matériau ayant une fissure de longueur $2c$. La fissure devient instable et provoque ainsi la rupture du matériau, quand la contrainte σ appliquée normalement à la direction de la fissure dépasse la valeur critique σ_c :

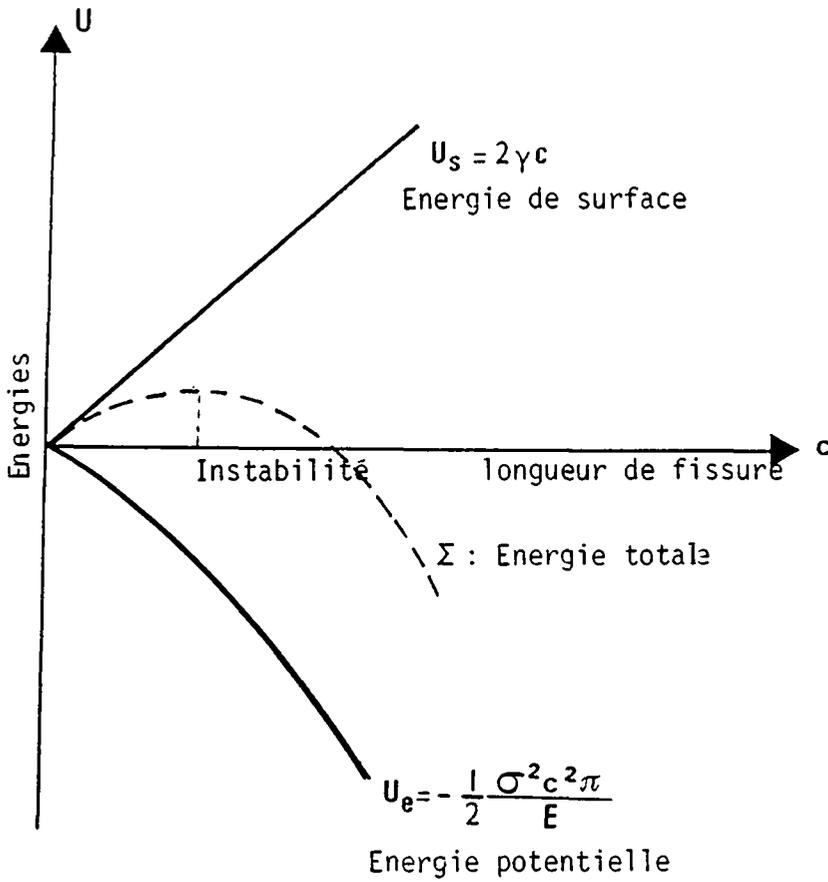


Fig. 2.4:

Représentation schématique de l'équilibre énergétique de Griffith en relation avec la longueur de la fissure.

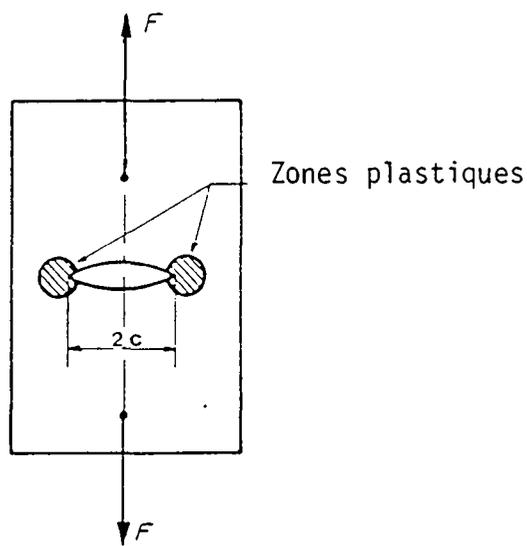


Fig. 2.5:

Localisation des zones de déformation plastique pour des matériaux comme les métaux.

$$\sigma_C = \left(\frac{2 \gamma E}{\pi c} \right)^{1/2} \quad (2.15)$$

2.3.3 Extension de la théorie de Griffith aux matériaux non fragiles

Orowan et Irwin ont remarqué qu'au moins pour les métaux il existe en avant du front de la fissure, une zone de déformation plastique dans laquelle il existe des déformations très élevées [1]. Une grande partie de l'énergie libérée par l'extension de la fissure est dissipée dans cette déformation plastique. L'existence de cette zone de dissipation d'énergie par déformation plastique a été confirmée par Wells qui a expérimentalement relevé un dégagement de chaleur croissant avec la longueur de la fissure [1]. La figure 2.5 montre schématiquement la localisation des zones plastiques.

Pour tenir compte de la déformation plastique et de la dissipation de l'énergie, Orowan et Irwin modifièrent la théorie de Griffith en ajoutant un terme plastique dans le terme d'énergie de la formule de Griffith. Le critère de Griffith généralisé s'écrit alors:

$$\sigma_C = \left\{ \frac{2E (\gamma + \gamma_p)}{\pi c} \right\}^{1/2} \quad (2.16)$$

où γ_p est l'énergie relative aux déformations plastiques.

Le terme γ_p est beaucoup plus grand que γ ; pour l'acier par exemple, γ_p est 2000 fois plus grand que γ . Dans ces conditions, la relation (2.16) peut être approximée comme suit:

$$\sigma_C \approx \left[\frac{2E \gamma_p}{\pi c} \right]^{1/2} \quad (2.17)$$

2.4 Force d'extension de la fissure

On peut définir l'énergie potentielle d'un matériau comme la différence entre la déformation élastique du solide U et le travail des forces extérieures T_e ; $P = U - T_e$. Dans un accroissement virtuel de la fissure, l'énergie libérée est $-dP$. Irwin définit alors, pour un problème plan et à chaque extrémité de la fissure le "taux de libération d'énergie potentielle" ou "force d'extension de la fissure" par:

$$G = - \frac{\partial P}{\partial A} = - \frac{1}{e} \frac{\partial P}{\partial c} \quad (2.18)$$

où e est l'épaisseur d'une plaque du matériau. G est bien une force généralisée dont le déplacement A correspondant est une surface. G est la grandeur caractéristique de la tendance à l'extension de la fissure.

Dans le cas du problème de Griffith, c'est-à-dire pour un matériau purement fragile, la fissure se propage si on a:

$$\frac{\partial}{\partial A} (P + 2 \gamma A) > 0 \quad (2.19)$$

Ainsi, en terme de "taux de libération d'énergie" G , défini par l'équation (2.18), le critère de propagation de Griffith s'écrit:

$$G > 2 \gamma \quad (2.20)$$

Pour un matériau à déformation plastique on a le critère de propagation suivant:

$$G > 2(\gamma + \gamma_p) \quad (2.21)$$

La valeur critique de G qui entraîne l'instabilité de la fissure est notée souvent par G_C . Ainsi, dans le cas du problème de Griffith, on a:

$$G_C = 2 \gamma \quad (2.22)$$

2.5 Théorie linéaire élastique de la rupture

2.5.1 Les modes de rupture

On montre que l'état le plus général de propagation d'une fissure peut être ramené à la superposition de trois modes simples; le mode I, le mode II, le mode III qui sont montrés sur la figure 2.6.

Dans le mode I ou mode par ouverture, les surfaces de la fissure se déplacent perpendiculairement l'une à l'autre (fig. 2.6.a)

Dans le mode II, ou "glissement droit", les surfaces de la fissure se déplacent dans le même plan et dans la direction normale au front de fissure (fig. 2.6.b).

Dans le mode III, appelé "glissement vis", les surfaces se déplacent dans le même plan et parallèlement au front de fissure (fig. 2.6.c) [7].

2.5.2 Facteurs d'intensité de contrainte

Diverses méthodes d'analyse permettent d'étudier le champ de contrainte au voisinage de l'extrémité d'une fissure [3-7].

On montre alors, en théorie d'élasticité, qu'en un point donné de coordonnées polaires r, θ , les contraintes σ_{ij} et les déplacements U_i au voisinage d'une fissure sollicitée en mode d'ouverture (mode I) sont donnés par les formules suivantes [7]:

$$\sigma_{ij} = K_I \frac{f_{ij}(\theta)}{\sqrt{2\pi r}} \quad (2.23)$$

$$U_i = K_I \sqrt{\frac{E}{2\pi}} g_i(\theta) \quad (2.24)$$

Dans ces 2 équations, f_{ij} et g_i sont des fonctions sinusoidales de l'angle θ , sans dimensions. La figure 2.7 montre la définition des coordonnées pour indiquer les contraintes près du front d'une fissure.

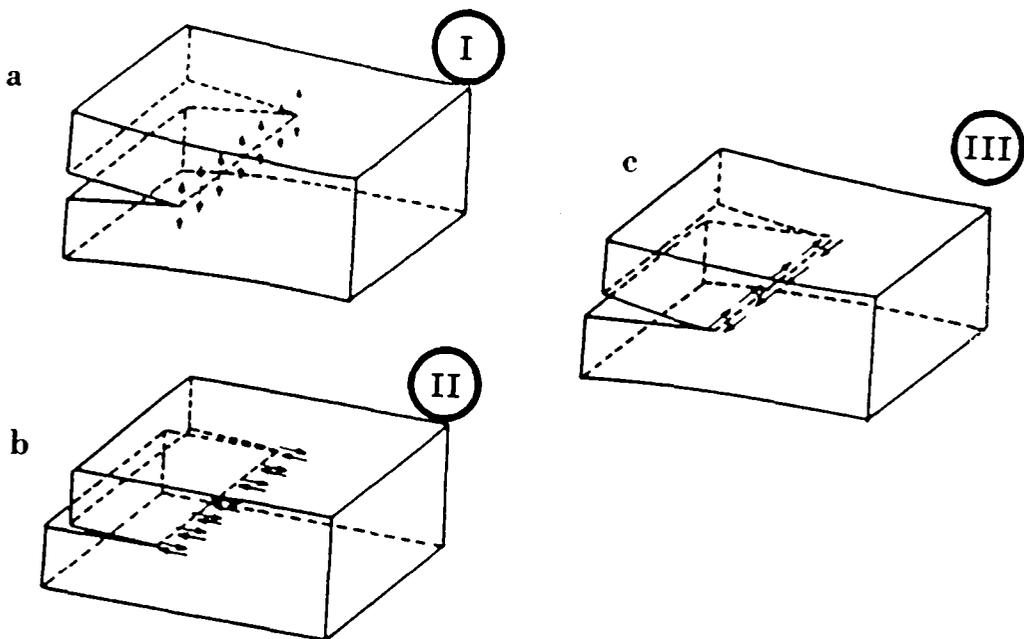


Fig. 2.6: Schéma montrant les 3 Modes de ruptures simples. Les flèches représentent le déplacement des points de la surface fissurée.
 Mode I : Mode d'ouverture
 Mode II: Mode de glissement droit
 Mode III: Mode de glissement vis

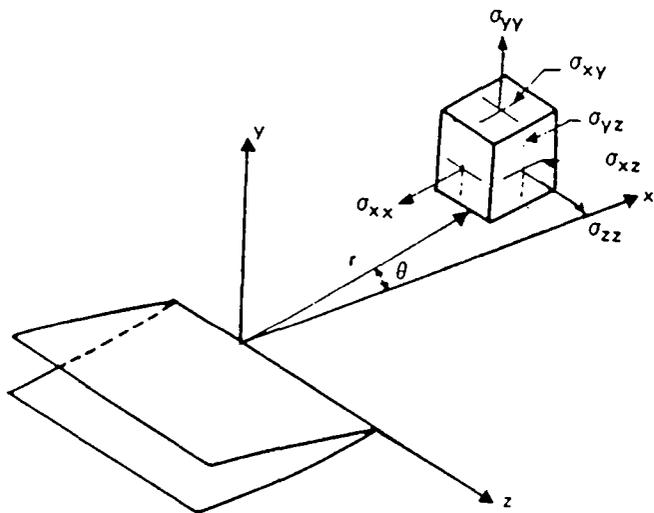


Fig. 2.7

Contraintes au voisinage de l'extrémité d'une fissure.

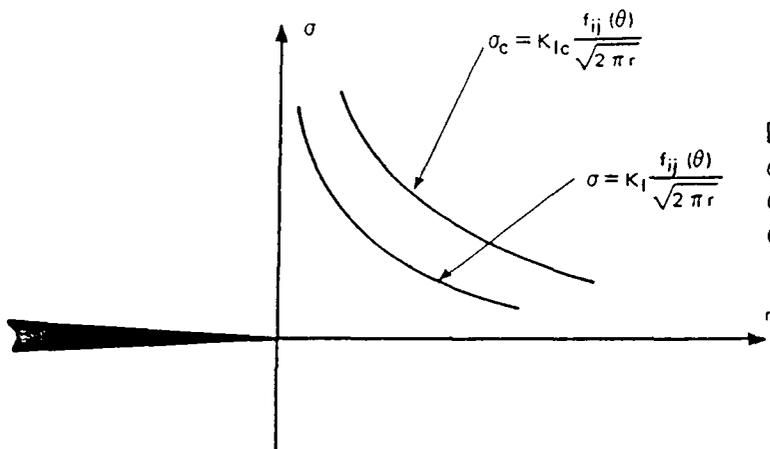


Fig. 2.8

Distributions normale et critique des contraintes à fond de fissure correspondant respectivement à K_I et K_{IC} .

En mode I les expressions des contraintes et des déplacements sont:

$$\sigma_{xx} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right] \quad (2.25)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right] \quad (2.26)$$

$$\sigma_{xy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \quad (2.27)$$

$$\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0 \quad (2.28)$$

$$\sigma_{zz} = \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \quad (2.29)$$

$$U = \frac{K_I}{G} \left(\frac{r}{2\pi} \right)^{1/2} \cos \frac{\theta}{2} \left\{ 1 - 2\nu + \sin \frac{2\theta}{2} \right\} \quad (2.30)$$

$$V = \frac{K_I}{G} \left(\frac{r}{2\pi} \right)^{1/2} \sin \frac{\theta}{2} \left\{ 2 - 2\nu - \cos \frac{2\theta}{2} \right\} \quad (2.31)$$

$$W = 0 \text{ (déformation plane)} \quad (2.32)$$

Dans ces expressions G est le module de cisaillement

Le facteur K_I est une constante indépendante de r et θ , c'est le facteur d'intensité de contrainte relatif au mode I. K_I caractérise à la fois la géométrie de la fissure et la nature de la sollicitation extérieure.

D'une façon analogue, on définit les facteurs d'intensité de contraintes K_{II} et K_{III} relatifs aux modes II et III.

Dans le cas d'une plaque infinie contenant une fissure rectiligne de longueur $2c$ soumise à une contrainte perpendiculaire à cette fissure, on montre que l'on a :

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi c} \quad (2.33)$$

Dans le cas le plus général (éprouvette de dimensions finies) on a:

$$K_I = \sigma \alpha \sqrt{\pi c} \quad (2.34)$$

α étant fonction de la géométrie de l'éprouvette et de la longueur de la fissure.

2.5.3 Critères de propagation brutale

Le facteur d'intensité de contraintes K_I fournit une mesure de la sévérité de l'environnement du fond d'une fissure. Il est logique de caractériser la résistance à la rupture par une valeur critique K_{IC} (en mode I). Une rupture brutale se produit donc lorsque le facteur d'intensité des contraintes atteint le K_{IC} , appelé ténacité du matériau.

Ce critère de rupture correspond à une distribution critique des contraintes du fond de fissure, ceci est mis en évidence schématiquement sur la figure 2.8.

2.6 Relation entre G_C et K_C

On dispose de deux critères de propagation brutale d'une fissure, un critère énergétique donné par G_C et un critère basé sur la valeur limite du facteur d'intensité des contraintes K_C . Nous allons voir la relation qui lie les deux paramètres.

Dans l'approche énergétique de Griffith, la relation entre le taux de restitution de l'énergie G et la contrainte, s'écrit pour l'état critique:

$$\sigma_C^2 = \frac{G_C E}{\pi C} \quad (2.35)$$

Par l'approche des facteurs d'intensité de contraintes, la relation entre le facteur K_I et la contrainte est donné par l'équation (2.33), à l'état critique, on a la relation suivante:

$$K_{IC} = \sigma_C \sqrt{\pi C} \quad (2.36)$$

De ces deux équations, on tire la relation entre K_{IC} et G_C :

$$G_C = \frac{K_{IC}^2}{E} \quad (2.37)$$

Cette relation est valable pour le cas des contraintes plans. Dans le cas des déformations plans, cette relation s'écrit [3-7]:

$$G_c = \frac{K_C^2}{E} (1 - \nu^2) \quad (2.38)$$

où ν est le coefficient de Poisson.

2.6 Les forces de cohésion de Barenblatt

Dans la théorie de la mécanique de la rupture linéaire élastique, les contraintes sont infinies au fond de fissure. Il est clair que du point de vue physique ceci est critiquable, puisqu'en réalité les contraintes ne peuvent jamais excéder la résistance de cohésion du matériau [3, 9].

Pour surmonter cette lacune, Barenblatt introduisit l'hypothèse des forces de cohésion. Ces forces de cohésion sont des forces attractives s'exerçant entre les particules de part et d'autre de l'axe de la fissure, comme montré sur la figure 2.9 [3].

Ces forces de cohésion dépendent de l'écartement des particules, y . Pour de faibles écartements, la relation entre les forces de cohésion et l'écartement est linéaire. Pour des écartements importants dépassant une certaine valeur y_0 , les forces sont nulles.

La relation entre les forces de cohésion et l'écartement est représentée sur la figure 2.10 [9].

Dans cette dernière figure b est la distance interatomique à l'équilibre, f_m représente la force maximale correspondant valant approximativement le dixième du module d'élasticité ($f_m \sim E/10$).

Willis [3] a montré que lorsque la fissure se propage d'une longueur unité, le travail effectué par les forces de cohésion, donné par l'aire sous la courbe $f(y)$, est :

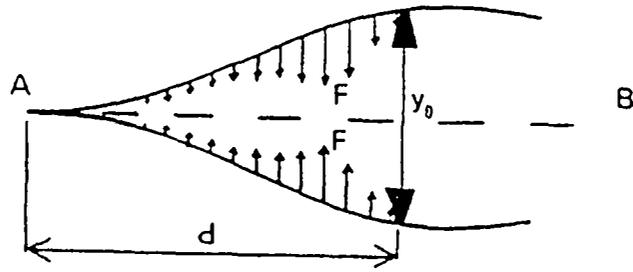


Fig. 2.9 :

Forces de cohésion dans le Modèle de Barenblatt.

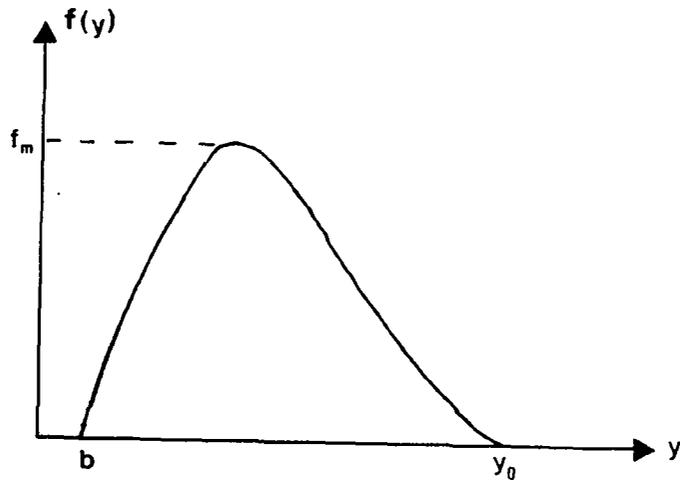


Fig. 2.10

Relation $F(y)$ entre force de cohésion et écartement.

$$G = \int_b^{y_0} f(y) dy = \frac{1-\nu^2}{E} K_{Ic}^2 \quad (\text{en déformation plane}) \quad (2.39)$$

Ceci est en parfait accord avec la théorie de Griffith si l'on identifie le G de la formule 2.39 à 2γ , énergie superficielle du matériau.

2.7 Le modèle plastique de Dugdale

Pour un matériau élastique plastique idéal, la contrainte ne peut jamais excéder la limite d'élasticité σ_t . Dans le modèle de Dugdale [10], il est supposé qu'une zone plastique étroite, de longueur s , existe au fond de fissure le long de l'axe de celle-ci. Cette zone plastique est caractérisée par des forces de cohésion particulières d'intensité constante est égale à la limite d'élasticité en traction, σ_t . Le modèle de Dugdale est schématisé sur la figure 2.11.

La longueur totale de la coupure est représentée par $2a$. La longueur $2\cdot l$ représente l'intervalle où la traction est identiquement nulle; c'est-à-dire la fissure proprement dite. Se basant sur la méthode de Westergaard [1, 3, 10], on peut calculer la longueur $2s$ de la zone plastique en considérant la fissure BB' soumise à l'infini à la contrainte d'ouverture σ , et sur AB et A'B' aux contraintes de fermetures $-\sigma_t$, sur une longueur $2s$. Cette fissure soumise à la combinaison de ces deux contraintes donnerait naissance à deux facteurs d'intensité de contrainte qui s'ajoutent [8].

$$K_I^{(1)} = \sqrt{\pi a} \sigma \quad (2.40)$$

$$K_I^{(2)} = - \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \sqrt{s} \sigma_t \quad (2.41)$$

Comme il ne peut pas y avoir de contrainte infinie à fond de fissure, comme le voudrait la théorie purement élastique, la taille s de la zone plastique est telle que:

$$K_I^{(1)} + K_I^{(2)} = 0 \quad (2.42)$$

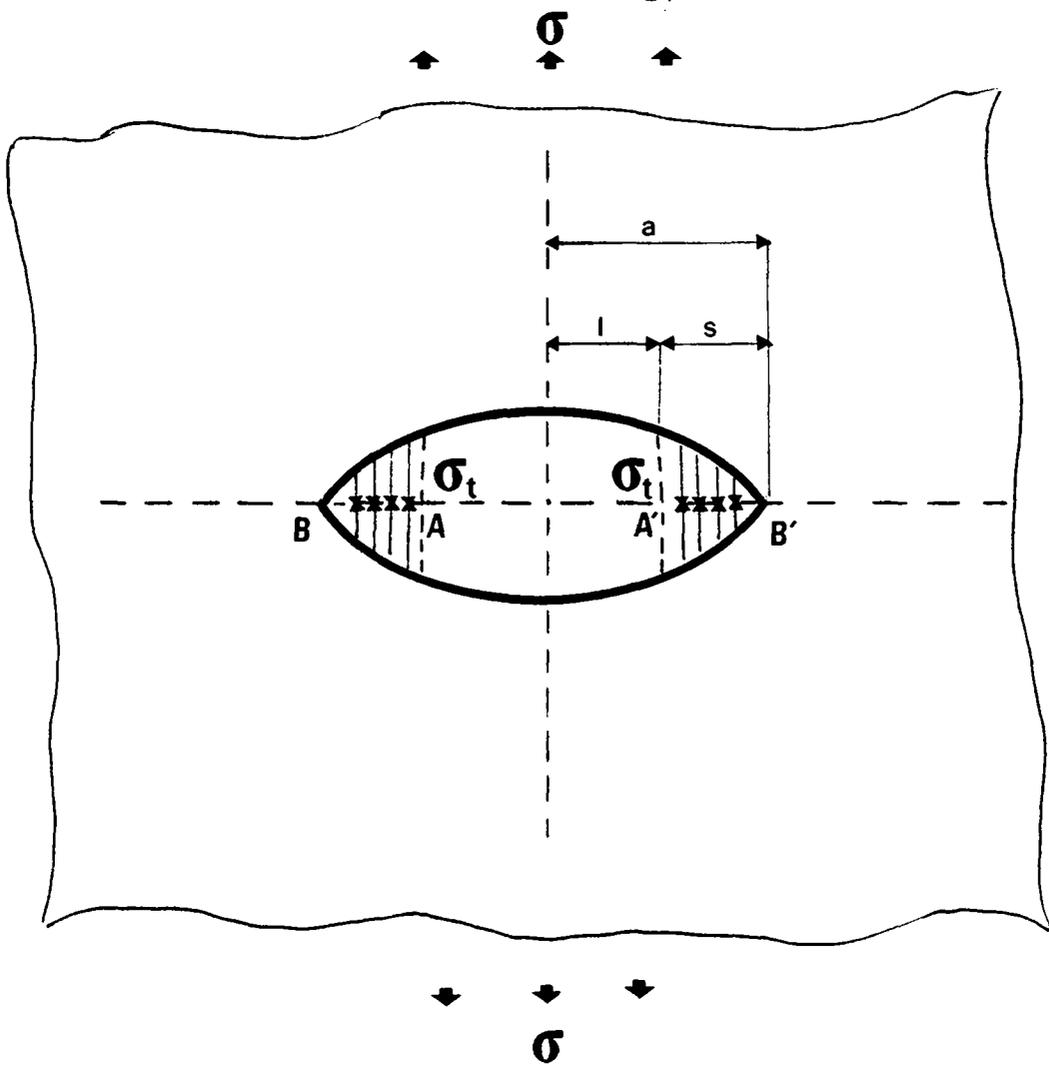


Fig. 2.II :

Modèle de Dugdale

Ce qui supprime la singularité en $1/\sqrt{r}$, on trouve:

$$s = \frac{\pi}{8} \left(\frac{K_I^{(1)}}{\sigma_t} \right)^2 \quad (2.43)$$

Ce modèle de Dugdale est utilisé, par exemple, pour décrire le développement de la zone plastique dans les plaques minces (containtes planes) de matériaux plastiques, tel l'acier.

2.8 Ecartement à fond de fissure, δ (C.T.O.D: Crack tip Opening Displacement)

Pour obtenir une simulation plus raffinée du comportement de la fissure, il est nécessaire de considérer des paramètres de rupture dont l'applicabilité est également valable en présence d'aussi bien une très petite zone plastique que d'une zone plus grande. A cette fin, on a proposé la notion d'écartement à fond de fissure (CTOD ou Crack tip opening displacement) comme un paramètre de rupture pour un matériau à comportement élasto-plastique.

C'est peut-être le paramètre le plus aisé à comprendre physiquement puisqu'on peut l'observer sur les surfaces de rupture d'un échantillon fissuré. Dans la théorie de l'écartement à fond de fissure, on postule que la fissure se propage quand le CTOD, noté δ , atteint une valeur critique δ_c caractéristique du matériau.

Dans un matériau parfaitement élastique, le CTOD est nul, ceci peut être vu d'après l'équation donnant le déplacement relatif ϕ des surfaces de la fissure normal au plan de fissure à une très faible distance r du sommet [11].

$$\phi(r) = \frac{2 K_I}{E'} \left(\frac{r}{2\pi} \right)^{1/2} \quad (2.44)$$

On montre [11] que pour une fissure de longueur $2c$ située dans un corps infini soumis à une contrainte de traction σ , le CTOD est donné par la formule suivante:

$$\delta = - \frac{8 c \sigma_t}{\pi E'} \ln \left[\cos \frac{\pi \sigma}{2 \sigma_t} \right] \quad (2.45)$$

σ_t est la limite d'élasticité en traction. E' est le module de Young E en contraintes planes ou $E/(1-\nu^2)$ en déformations planes. Connaissant la valeur critique δ_c , la formule (2.45) permet d'en déduire la contrainte critique σ_c .

2.9 L'intégrale J de Rice

L'intégrale J définie par Rice a été proposée comme critère de rupture dans les conditions où sont présentes des déformations élastiques et plastiques. Ce critère étend les concepts de la mécanique de la rupture linéaire élastique où seule une petite zone plastique est permise, au cas le plus général où l'on a des grandes zones de déformations plastiques à fond de fissure [4]. La méthode consiste à déterminer le changement de l'énergie potentielle, quand une fissure de longueur s'accroît d'une quantité dc , d'une façon analogue au taux de restitution d'énergie G , défini dans les conditions linéaires élastiques.

L'idée de Rice est en fait une généralisation des idées d'Irwin relative à l'énergie de déchirure G_I où G_I est donnée par la relation (2.38).

Dans un corps élastique, Irwin a montré que cette énergie est donnée par:

$$G_I = - \frac{dP}{dc} \quad (2.46)$$

où P est l'énergie potentielle du corps fissuré par unité d'épaisseur.

Soit un milieu homogène et élastique soumis à un champ de déformations bidimensionnel, tel que toutes les contraintes σ_{ij} dépendent seulement

des coordonnées cartésiennes x_1, x_2 [7]. Supposons alors que ce matériau contient une fissure, dont les surfaces sont parallèles à l'axe x_1 , comme montré sur la figure 2.12.

Rice a défini une intégrale curviligne de la façon suivante:

$$J = \int_{\Gamma} W dx_2 - \vec{t} \frac{\partial U}{\partial x_1} ds \quad (2.47)$$

où Γ représente un contour entourant l'extrémité de la fissure.

W est la densité de l'énergie de déformation définie par:

$$W = \int_0^{\varepsilon} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} \quad (2.48)$$

\vec{t} est le vecteur traction sur le contour:

$$t_i = \sigma_{ij} n_j \quad (2.49)$$

\vec{U} : vecteur déplacement en un point du contour Γ

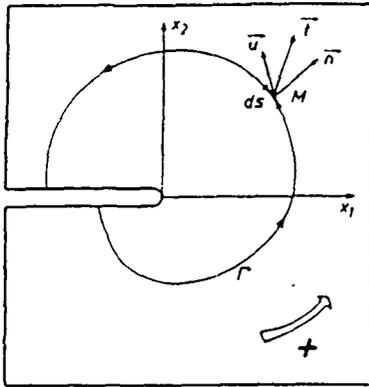
ds : élément d'arc sur Γ

J s'écrit explicitement comme suit:

$$J = \int_{\Gamma} W dx_2 - (t_1 \frac{\partial U_1}{\partial x_1} + t_2 \frac{\partial U_2}{\partial x_1}) ds \quad (2.50)$$

Rice a montré [7] que l'intégrale J possède les deux propriétés suivantes:

1. J est indépendant du chemin d'intégration Γ suivi, contournant l'extrémité de la fissure.
2. J est égal à la différence d'énergie potentielle de deux pièces chargées identiquement, mais dont la longueur c de la fissure diffère d'une grandeur infinitésimale; ce qui peut être formulé comme suit:



$$J = \int_{\Gamma} W dx_2 - \bar{t} \frac{d\bar{u}}{dx_1} ds$$

Fig. 2.12 : Définition de l'intégrale J.

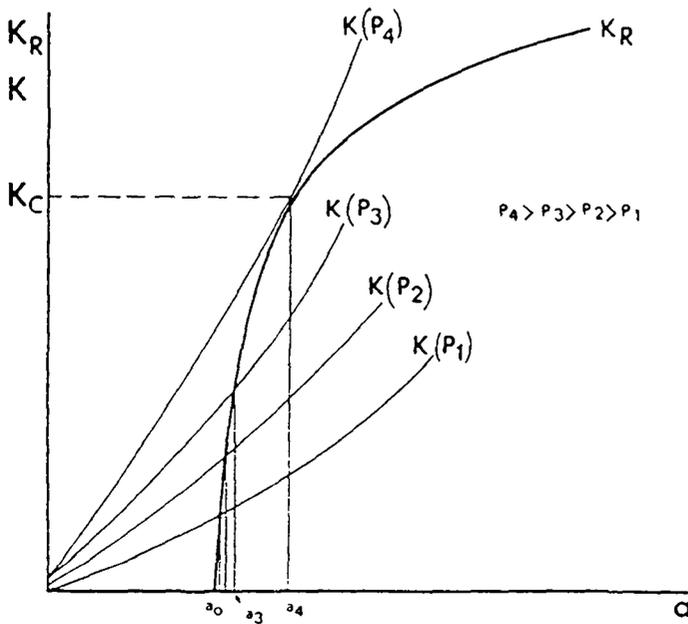


Fig. 2.13 : Exemple d'une courbe de résistance (Courbe-R) /7/.

$$J = - \frac{dP}{da} \quad (2.51)$$

En calculant J sur un contour pris dans le domaine élastique, Rice montre que:

$$J = - \frac{dP}{da} = (1-\nu^2) \frac{K_I^2}{E} \quad (\text{déformations planes}) \quad (2.52)$$

$$J = - \frac{dP}{da} = \frac{K_I^2}{E} \quad (\text{contraintes planes}) \quad (2.53)$$

J est donc égal à G, le taux de restitution d'énergie ou force d'extension de la fissure défini précédemment.

En utilisant cette interprétation, l'intégrale J peut être utilisée comme critère de rupture. Lorsque J atteint une valeur critique J_C , la fissure se propage.

Quand la déformation plastique est "étendue" ou "généralisée" à toute la section non fissurée du corps, Rice a démontré que l'intégrale J reste indépendante du chemin suivi.

Il est clair que dans ce cas le caractère irréversible de la déformation plastique et la nécessité fondamentale d'un chargement croissant ne permettent plus d'interpréter J comme une simple variation d'énergie potentielle qui accompagne la croissance d'une fissure. Cependant on admet que la valeur de J est égale à la différence d'énergie potentielle entre deux corps identiques chargés de la même façon, mais possédant des fissures de longueur voisines. Dans le cas des matériaux élasto-plastiques, J est égale à la variation d'une pseudo-énergie potentielle P qui accompagne la croissance de la fissure[7].

2.10 Courbe de résistance ou courbe-R

Quelquefois, il est possible d'observer une propagation stable de la fissure même si K augmente. La seule explication pour ce fait est que le paramètre K_C augmente en fonction de l'avancement de la fissure.

La courbe R est donc le tracé de la relation entre la résistance à la propagation de la fissure et l'accroissement de celle-ci.

Certains résultats d'expériences ont montré que les courbes R sont, pour une épaisseur du spécimen donnée, indépendantes de la géométrie du spécimen et des conditions de chargement; elles peuvent donc être utilisées comme une propriété du matériau.

La résistance à la propagation de la fissure, K_R , a été donc introduite comme une propriété du matériau dans le but de décrire la variation du taux de restitution d'énergie critique, G_C , quand la fissure se propage. K_R est défini de la même façon que K_C , mais au lieu de la longueur de la fissure initiale (a_0), on utilise la longueur de la fissure propagée ($a_0 + \Delta a$).

Un exemple de courbe R est indiqué schématiquement sur la figure 2.13 par la ligne continue, en fonction de la longueur effective de la fissure ($a_0 + \Delta a$).

Les courbes $K(P_i)$ de la figure 2.13 représentent, à charge P_i constante, les facteurs d'intensité de contrainte en fonction de la longueur de la fissure a [7]. Pour des charges P_1, P_2, P_3 , la fissuration est stable, elle s'arrête lorsque la longueur de la fissure atteint a_1 (ou a_2 ou a_3).

Lorsque la charge P atteint la valeur P_4 , ($K(P_4, a_4) > K_R$), la rupture brutale se produit après qu'une fissuration stable ait fait passer la longueur du défaut de a_0 à a_4 .

Cette courbe de résistance s'utilise de la façon suivante: si l'on connaît la longueur initiale a_0 du défaut, la courbe R du matériau et le

facteur d'intensité de contrainte K dans la pièce fissurée, la construction de la figure 2.14 permet de déterminer la charge P qui provoquera la rupture brutale; cette même construction permettra de connaître pour chaque charge P l'intensité de la fissuration stable [7].

2.11 Conclusions

Dans ce chapitre nous avons brièvement rappelé les principes de base de la mécanique de la rupture linéaire élastique isotrope. Nous verrons au chapitre suivant que l'applicabilité de cette théorie au cas du béton est sujette à caution dû principalement au caractère hautement hétérogène du matériau.

chapitre 3

MODELES DE MECANIQUE DE LA
RUPTURE POUR LE BETON

CHAPITRE 3 : MODELES DE MECANIQUE DE LA RUPTURE POUR LE BETON

3.1 Aspects phénoménologiques de la fissuration dans le béton

3.1.1 Introduction

Le béton est un matériau multiphasique. Dans une première approche, on peut le considérer comme un matériau composite formé de deux phases. La première phase est la matrice de pâte de ciment durcie dans laquelle sont noyés des granulats qui constituent la deuxième phase.

Dans la figure 3.1, on montre les diagrammes contraintes-déformations (σ - ϵ) des deux constituants, matrice de pâte de ciment durcie et granulat, et du matériau composite, le béton [12].

Il est clair, sur cette figure, que les granulats et la matrice exhibent des comportements du type fragile. La courbe σ - ϵ relative au béton dévie fortement d'un comportement linéaire même à de faibles charges. De plus, elle présente une branche descendante après que la charge maximale ait été atteinte [12, 13]. La différence des déformations entre le béton et ses constituants est principalement due à la formation et au développement des fissures, quoique la phase viscoélastique de la matrice y contribue pour une faible part.

3.1.2 Etat initial du matériau

Déjà à l'état vierge, c'est-à-dire avant tout chargement, le béton présente une multitude de microfissures. Cette préfissuration initiale a diverses origines. Dans ce qui suit, nous allons énumérer les principaux types de fissures ou défauts initiaux et leurs causes correspondantes.

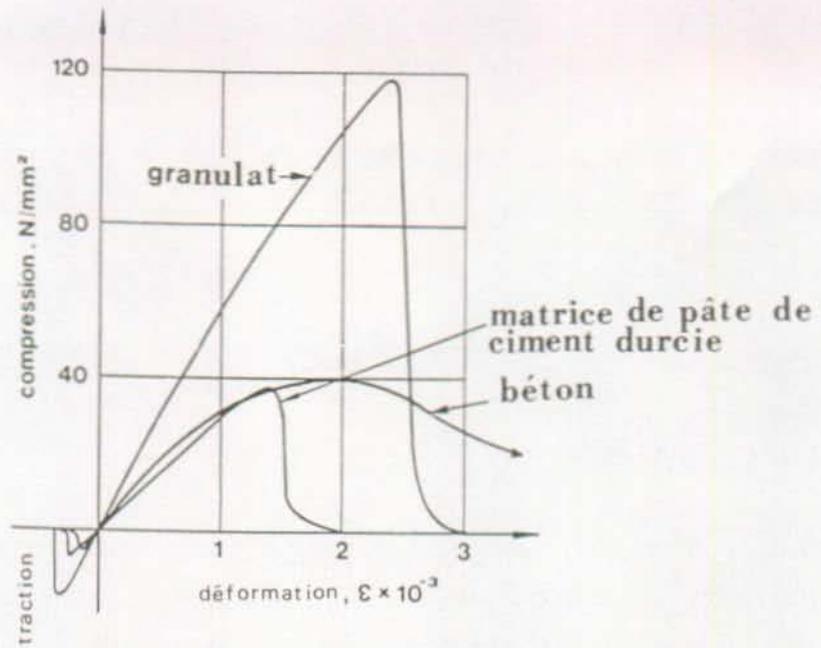


Fig. 3.1 : Diagrammes contrainte-déformation de la pâte de ciment durcie, des granulats et du béton /12/.

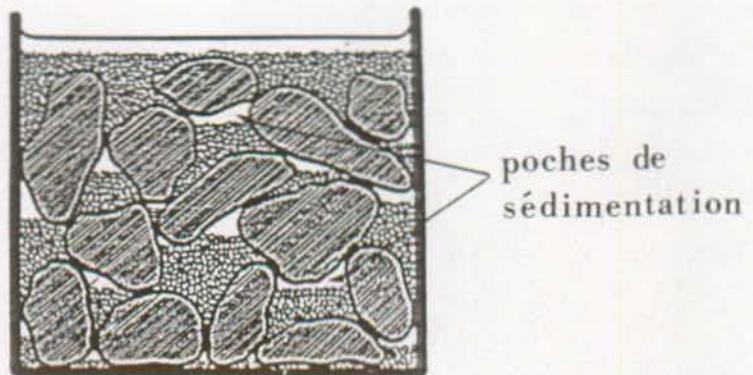


Fig. 3.2 : Représentation schématique de la sédimentation et du ressassement donnant naissance à des poches d'eau /16/.

Fissures de sédimentation

Ce sont des défauts inhérents à la mise en oeuvre du matériau. Lors du coulage du béton, des bulles s'introduisent dans le mélange. Bien que pendant la vibration une majeure partie de ces bulles remontent à la surface, certaines d'entre elles sont gênées dans leur remontée par la présence des gros granulats. Il s'y forme alors, à la base, des grosses inclusions de poches d'air ou d'eau. De telles régions affaiblissent localement l'adhérence entre la matrice et les inclusions. Les défauts sont montrés schématiquement sur la figure 3.2 [16].

De tels défauts ont tendance à s'orienter horizontalement, c'est-à-dire dans le sens normal au coulage. L'orientation préférentielle de ces défauts confère au matériau une certaine anisotropie; pour cette raison, la résistance dans le sens du coulage est toujours légèrement plus grande que la résistance perpendiculaire à cette direction [16, 51].

Fissures de retrait thermique

Les réactions d'hydratation entre le ciment et l'eau sont exothermiques, ainsi une quantité considérable de chaleur est libérée. Dans des éléments en béton, cette chaleur d'hydratation peut engendrer des élévations de température pouvant atteindre 50 °C et même davantage [54]. Tant que le béton s'échauffe, il est encore à l'état frais, par conséquent déformable. En revanche, quand il se refroidit, il est à l'état durci. Par la suite, les déformations entraînées par le refroidissement, phénomène dénommé retrait thermique, provoquent des contraintes élevées au sein du matériau. De telles contraintes peuvent être à l'origine de fissures, dites fissures thermiques [16, 28, 51, 54].

Fissures de retrait chimique

La dessiccation endogène du béton est le résultat des réactions chimiques entre le ciment et l'eau pour former des hydrates (processus d'hydrata-

tion). Le volume des hydrates formés est inférieur à la somme des volumes du ciment anhydre et de l'eau ayant réagi. Cette contraction des volumes absolus de l'ordre de quelques pourcents, appelée retrait chimique, peut occasionner des défauts dans la structure [16, 51].

Fissures de retrait capillaire

Immédiatement après la mise en place du béton frais, il se forme sur la surface une mince couche d'eau. Dépendant de la température ambiante et de la vitesse du vent, l'eau de la surface peut s'évaporer assez brutalement, on assiste alors à la formation de ménisques entre les grains, qui provoquent des forces attractives entre eux; le mécanisme est connu sous le nom de retrait capillaire. Ce retrait est empêché par les granulats ou l'armature; ce qui provoque le développement de contraintes de traction dans le béton durcissant. Des fissures peuvent apparaître si les contraintes dépassent la faible résistance à la traction du béton [16, 30, 31, 54].

Fissures de retrait hygrique

Après le décoffrage, les surfaces du béton commencent à sécher et à atteindre un équilibre avec l'humidité environnante assez rapidement, alors que les parties centrales du matériau peuvent rester dans un état de saturation d'eau pour de longues périodes. De tels gradients hygriques créent un état de contrainte qui peut engendrer des fissures de retrait [28].

Défauts liés à l'interface matrice-granulat

La structure de la pâte de ciment au voisinage des granulats dévie substantiellement de celle de la pâte formant l'ensemble de la matrice. L'observation des micrographes obtenus par microscopie électronique a révélé que l'interface consiste en plusieurs couches de structure et de

compositions distinctes. La structure multicouche de cette interface, appelée aussi auréole de transition [17, 18] est représentée schématiquement sur la figure 3.3 [32]. Immédiatement après le granulat, il existe une fine couche de cristaux d'hydroxide de calcium d'une épaisseur approximative de 10^{-3} mm. La couche suivante d'une épaisseur allant de $5 \cdot 10^{-3}$ à $10 \cdot 10^{-3}$ mm, a initialement à une très grande porosité, mais qui est réduite au cours du processus d'hydratation. Elle est formée principalement de grands cristaux hexagonaux d'hydroxide de calcium et d'autres plus petits se présentant sous forme d'un empilement de plaquettes. En s'éloignant de la surface des granulats, la pâte devient plus dure, ainsi une couche de transition avec une porosité réduite et une épaisseur de $10 \cdot 10^{-3}$ à $30 \cdot 10^{-3}$ mm est formée. Cette phase de transition est suivie de la pâte de ciment hydraté normale. Les changements structurels de cette interface durant l'évolution du processus d'hydratation semblent moins bien connus. Cependant, il a été observé que la résistance de l'interface cesse de croître à un âge comparativement jeune.

Divers travaux expérimentaux se sont attachés à la détermination des propriétés mécaniques de cette zone et leur influence sur les propriétés mécaniques du béton [17-20]. Les conclusions qui peuvent être tirées de ces études sont que l'auréole de transition présente des propriétés mécaniques faibles vis-à-vis des autres composants du béton et de ce fait joue un rôle important dans le processus de fissuration du matériau.

Dans le tableau 3.1, on résume les différents types de fissuration en fonction des différentes étapes de l'évolution de la résistance du matériau [28].

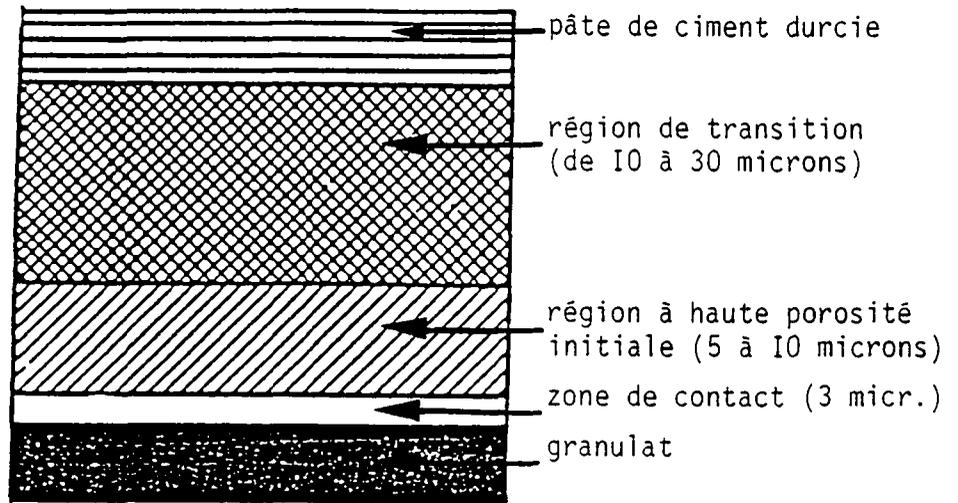


Fig. 3.3 :

Structure de l'interface matrice de pâte de ciment durcie-granulat ("Auréole de Transition") /32/.

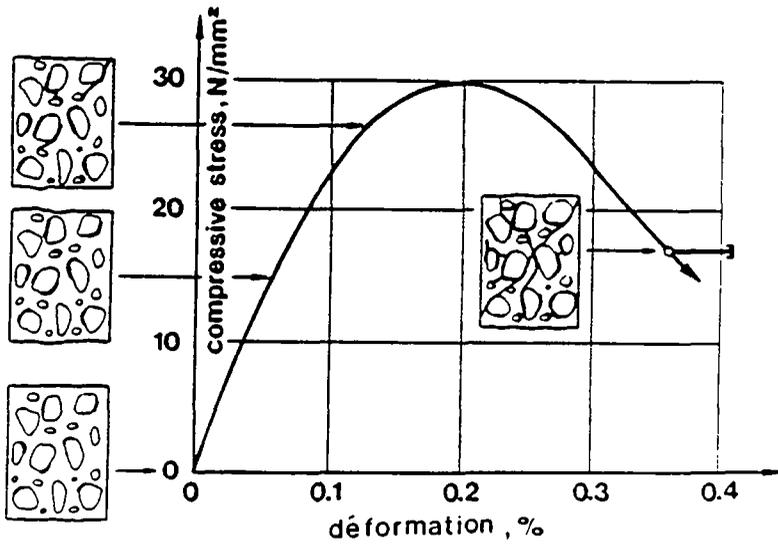


Fig. 3.4 :

Relation contrainte déformation et propagation de fissures dans un béton chargé en compression /32/.

Différentes étapes de l'évolution de la résistance	Défauts typiques
Coulage & compactage	Pores de compactage
Béton frais	Cavités de sédimentation
Béton durcissant	Fissures thermiques Fissures chimiques Fissures de retrait capillaire
Béton séchant	Fissures de retrait hygrique
Béton sous charge	Fissures interfaciales Croissance de fissures

Tableau 3.1: Périodes caractéristiques de la durée de vie d'un béton et la formation des fissures correspondantes [28].

3.1.3 Développement du processus de fissuration du béton sous charge

Un grand nombre de travaux expérimentaux ont été accomplis pour étudier l'évolution microstructurale des matériaux composites tels béton, mortier, roches, sous l'effet d'un chargement, et par là d'en déduire les mécanismes du processus de fissuration. L'appréhension de tels mécanismes est d'une importance primordiale pour la construction de modèles réalistes.

Dhir et Shanghag [14], au moyen de la microscopie optique, ont observé l'évolution de la fissuration sur des cylindres de bétons chargés en compression à différents niveaux de sollicitation. L'extraction par sciage de tranches longitudinales des échantillons testés et leur observation au microscope optique permettent de dresser le profil de l'évolution de la fissuration. Les constatations suivantes ont été révélées.

Les préfissures existantes, occasionnées par la mise en oeuvre du matériau ou aux différents types de retrait, deviennent pratiquement stables pour des sollicitations allant jusqu'à 30, voire 40 % de la résis-

tance à la compression σ_c , du béton. A partir de ce stade de sollicitation, les fissures existantes commencent à se propager d'une façon stable le long des interfaces. Au même moment, leur nombre et leur longueur croissent. Entre 70 à 80 % de σ_c , les fissures commencent à gagner le mortier. Certaines fissures sont arrêtées dans leur propagation lors de leur rencontre avec un granulat, due à la haute résistance mécanique de ce dernier. Un tel mécanisme confère au matériau un comportement plus ductile que ses constituants. Relevons aussi le fait que la fissuration se fait préférentiellement dans la direction parallèle à la charge. La figure 3.4 donne schématiquement la loi du comportement du béton sous compression pour les différents stades de fissuration [12].

La phénoménologie du processus de fissuration du béton ou du mortier sollicité en traction, a été étudiée par divers auteurs [12]. Mindess et Diamond [23] ont pu observer le développement de la fissuration sur des petites éprouvettes de mortier entaillées et chargées en traction (CT-spécimen). L'expérience a été menée grâce à un dispositif spécial de chargement couplé à un microscope électronique à balayage. On a observé que la géométrie de la fissuration est très complexe. Le profil de la fissuration ne se résume pas à la propagation d'une fissure unique, mais au développement d'une multitude de fissures qui progressent préférentiellement le long des interfaces grains de sable-pâte de ciment durcie sans toutefois se limiter à ces régions. Il est aussi à noter le rôle important que jouent les granulats comme obstacle à la propagation de certaines fissures. De plus un très grand nombre de fissures sont formées au voisinage d'une fissure initiale, comme le montre la figure 3.5 [32]. Donc la densité de fissures dans une petite zone adjacente à la surface de fracture est remarquablement plus grande que celle des zones les plus éloignées du spécimen.

Cette région à haute densité de microfissures localisée en avant du front d'une entaille ou d'une fissure initiale est appelée zone d'endommagement (process zone) et est caractéristique des matériaux composites, tels le mortier, le béton. De tels phénomènes sont aussi observés dans certaines roches. Hoagland et al. [24] ont constaté l'existence d'un déploiement considérable de microfissures se produisant dans la région

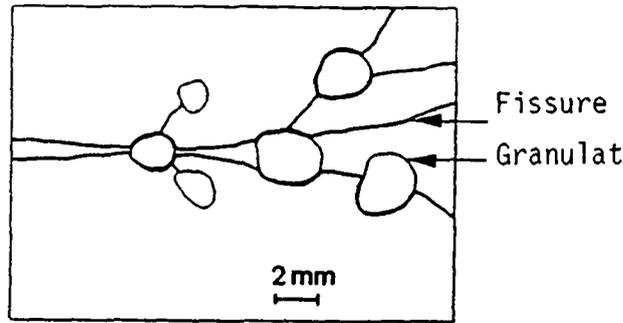


Fig.3.5: Arrêt et branchement des fissures lors de leur rencontre avec des granulats /32/.

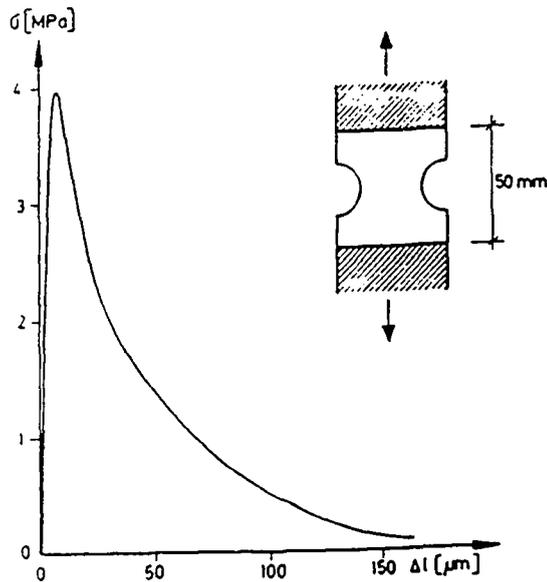


Fig.3.6: Courbe contrainte-élongation pour un béton chargé en traction/47/.

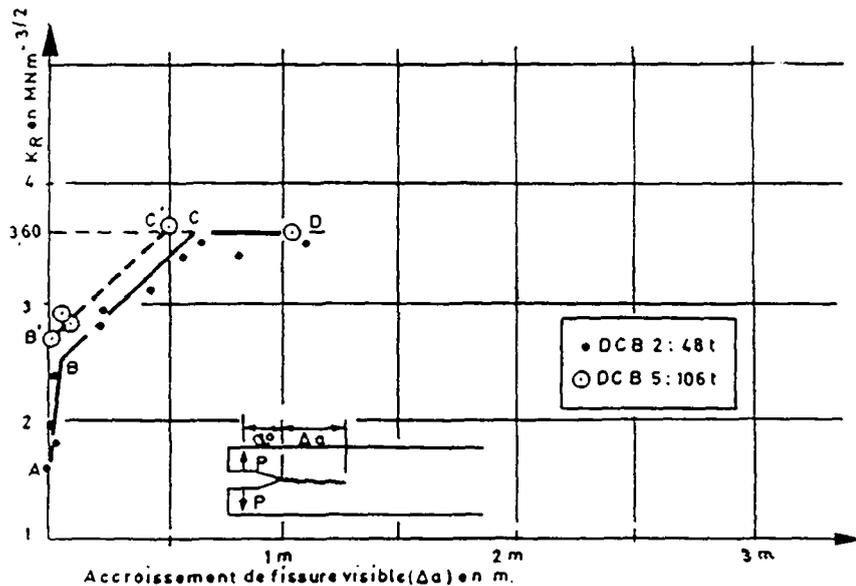


Fig.3.7: Courbes de résistances obtenues sur 2 DCB de béton normal. Les 2 courbes correspondent respectivement à des précontraintes de 48 et 106 t, introduites dans les poutres dans la direction de propagation des fissures, dans le but de guider ces dernières /25/.

qui entoure la pointe de la fissure principale d'une éprouvette entaillée chargée en traction (CT-spécimen). Dans cette expérience, la roche était du grès constitué d'un ciment de calcite et de grains de quartz.

Le comportement macroscopique typique d'une éprouvette de béton chargée en traction décrit par la courbe contrainte-déformation est donné sur la figure 3.6 [47].

Pour de faibles sollicitations, la relation contrainte-déformation du béton est presque linéaire. Aucune propagation de fissure n'est à relever. Au niveau de charge voisinant les 80 % de la résistance à la traction uniaxiale, des fissures commencent à se propager lentement. En employant une machine de très grande rigidité [33, 34], on constate que le diagramme contrainte-déformation de béton chargé en traction présente une branche descendante une fois que la charge maximale ait été atteinte; cette partie de la courbe est connue sous le nom de courbe de radoucissement de traction (tensile stress softening diagram). Cette branche descendante est une indication de la propagation lente de la fissure. La propagation de la fissure ne se fait donc pas d'une façon brutale et de ce fait, le béton ne peut être caractérisé comme matériau purement fragile. La connaissance de la courbe contrainte-déformation est essentielle puisqu'elle donne davantage d'informations sur le mode de rupture du béton. La branche descendante montre qu'un échantillon de béton chargé en traction peut supporter de grandes déformations bien que la charge maximale ait été atteinte.

L'existence de cette zone endommagée, formée d'une multitude de microfissures met en doute la validité de la mécanique de la rupture linéaire élastique et la caractérisation de la rupture du matériau par un paramètre unique K_{IC} ou G_{IC} . Pour mettre en évidence la longueur de la zone d'endommagement, Sok et al. [25] ont réalisé des expériences sur la rupture de très grandes éprouvettes de béton, du type DCB (double cantilever beam). Les éprouvettes ont une longueur de 2 m. Ils déterminent l'extension de la zone d'endommagement au fond d'entaille au moyen de la technique de la localisation unidimensionnelle d'émission acoustique.

Leurs résultats ont montré que cette zone d'endommagement était supérieure à 20 cm. Leur conclusion est que la rupture du béton ne peut pas être caractérisée par un paramètre unique de rupture. Ils ont suggéré d'utiliser le K_{IC} comme fonction de la propagation de la fissure, c'est-à-dire par une courbe de résistance (voir § 2.10). La figure 3.7 montre la courbe R obtenue par ses auteurs.

Wecharatawa et Shah [26, 27] utilisèrent aussi l'approche des courbes de résistance pour évaluer leurs résultats expérimentaux obtenus sur de grandes éprouvettes de mortier du type DT (Double Torsions Specimen) et de type DCB (Double Cantilever Beam). Ils observèrent que la longueur de la zone d'endommagement était de l'ordre de 30 cm et que cette longueur demeure constante au cours de l'évolution du processus de fissuration.

3.1.4 Conclusions

Sur la base des observations expérimentales, on peut conclure que le processus de fissuration d'un matériau composite est un phénomène très complexe et est intimement lié à la structure hétérogène du matériau. Les défauts initiaux du matériau, la présence de l'auréole de transition, zone aux faibles propriétés mécaniques, le rôle joué par les granulats comme obstacles à la propagation des fissures sont autant de facteurs qui gouvernent le processus de fissuration dans le béton. La fissuration, loin de se limiter à la propagation d'une fissure unique et bien définie, consiste en un déploiement considérable de microfissures. Il est évident que cette multifissuration consomme beaucoup d'énergie et devrait être prise en compte lorsqu'on veut réaliser des modèles de rupture réalistes. Les dimensions considérables de la zone d'endommagement sise en avant d'une entaille ou d'une fissure excluent l'application de la mécanique de la rupture linéaire élastique.

3.2 Modèles analytiques pour la rupture du béton

3.2.1 Modèle multiphase linéaire élastique

La mécanique de la rupture classique ne peut pas être appliquée directement à la description du processus de fissuration d'un matériau composite comme le béton. De ce fait, Wittmann et Zaitev [34-39] développèrent un modèle bidimensionnel pour simuler la formation et la propagation des fissures dans les matériaux composites. Dans ce modèle, le béton est considéré comme matériau diphasique composé d'une matrice, la pâte de ciment durcie, et d'inclusions.

Les structures composites sont alors générées au moyen d'un ordinateur où les inclusions, de formes polygonale ou circulaire, sont distribuées aléatoirement sur une surface donnée représentant la matrice de pâte de ciment durcie. De plus, des pré-fissures sont incorporées dans la structure au niveau des interfaces matrice-inclusions, dans le but de tenir compte des défauts initiaux d'un béton réel, c'est-à-dire les fissures dues à la sédimentation ou aux différents retraits, localisées principalement dans les interfaces.

Le concept de la mécanique de la rupture linéaire élastique est appliqué pour analyser les différents mécanismes de propagation et d'arrêt des fissures. Ces structures composites sont soumises à des chargements croissants uni ou multiaxiaux. La simulation de la propagation a été réalisée en déterminant l'augmentation minimale de la charge nécessaire à l'accroissement d'une fissure en liaison avec la configuration géométrique de la fissure et des paramètres mécaniques des deux phases et de l'interface. La propagation de la fissure peut avoir lieu soit en mode I, soit en mode II. L'orientation des pré-fissures par rapport à la direction de la charge est supposée aléatoire. Il a été démontré [36, 38] que des fissures d'embranchement stables se développent dans un champ de contrainte de compression s'il existe une fissure inclinée. La longueur l_2 de deux branchements d'une fissure qui se propage dans la

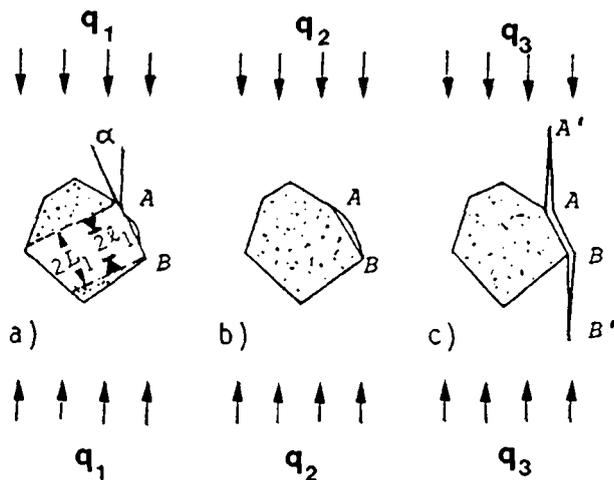


Fig. 3.8 : Une fissure de longueur initiale $2l_1$ (a) croit d'une façon instable le long de l'interface AB (b), et finalement des fissures d'embranchement stables AA' et BB' sont créées lors d'un accroissement de charge (c) /38/.

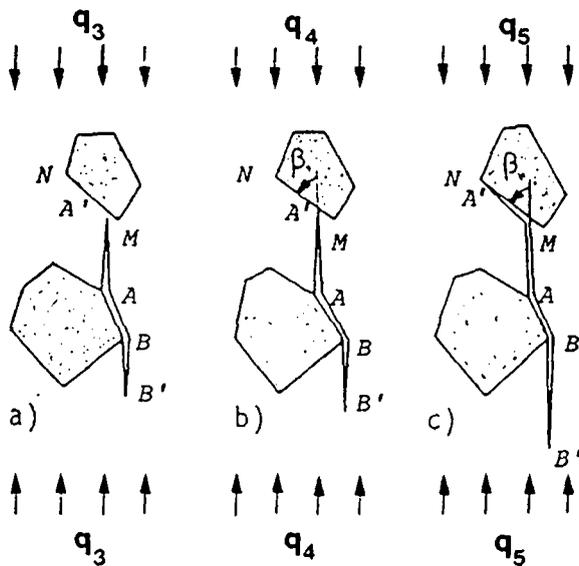


Fig. 3.9 : Au voisinage de l'inclusion de la fig.3.8c, se trouve une seconde inclusion (a), la fissure rencontre alors sur son chemin cette seconde inclusion (b), finalement la fissure se propagera le long de l'interface MN (c) /38/.

matrice à une charge donnée q est liée à la longueur $2\lambda_1$ de la fissure initiale par la relation suivante:

$$q = \sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} \frac{K_{IC}}{2A(\alpha, \rho)} \sqrt{\frac{\pi}{\lambda_1}} \quad (3.1)$$

$$\text{avec } A(\alpha, \rho) = \sin^2 \alpha \cos \alpha - \rho \sin^2 \alpha \quad (3.2)$$

où α est l'inclinaison de la fissure initiale par rapport à la direction de chargement et ρ est le coefficient de friction entre les surfaces de la fissure initiale.

Considérons une fissure initiale localisée sur un côté de l'interface d'une inclusion polygonale noyée dans une matrice, ce qui est montré schématiquement sur la figure 3.8.

On démontre qu'à une charge donnée la fissure interfaciale se propagera le long de l'interface en mode II d'une façon instable jusqu'à atteindre la longueur $2L_1$, voir figure 3.8. Cette fissure nouvellement créée se comportera comme une fissure inclinée dans une matrice. Si la sollicitation est augmentée, des fissures de branchement se propageront dans la matrice d'une façon stable (Fig. 3.8c).

La situation de la figure 3.9 est une répétition de la figure 3.8c, mais l'on suppose que la branche AA' de la fissure rencontre une seconde inclusion, ce qui se passe réellement dans le béton. La propagation ultérieure de la fissure dépendra à la fois des inclinaisons de la première et de la deuxième interfaces. Les conditions requises pour une propagation en mode I (ouverture) ou en mode II (cisaillement) sont données par les relations suivantes:

$$q_I^{INT} = \frac{2 K_{IC}^{INT} \sqrt{\pi \lambda_2} / L_1}{A(\alpha, \rho) f_1(\beta) - 3 C(\alpha, \rho) g(\beta)} \quad (3.3)$$

$$q_{II}^{INT} = \frac{2 K_{IIC}^{INT} \sqrt{\phi \lambda_2} / L_1}{A(\alpha, \rho) g(\beta) + C(\alpha, \rho) f_2(\beta)} \quad (3.4)$$

Avec:

$$C(\alpha, \rho) = \sin \alpha \cos^2 \alpha - \rho \sin^2 \alpha \cos \alpha \quad (3.5)$$

$$f_1(\beta) = 3 \cos \beta/2 + \cos 3\beta/2 \quad (3.6)$$

$$f_2(\beta) = \cos \beta/2 + 3 \cos 3\beta/2 \quad (3.7)$$

$$g(\beta) = \sin \beta/2 + \sin 3\beta/2 \quad (3.8)$$

L'indice supérieur INT est relatif à l'interface. D'après les relations (3.3) et (3.4), on voit que le mode de propagation dépend significativement du signe de β [38].

Comme la fissure rencontre sur son chemin une inclusion, une troisième possibilité de propagation s'offre à elle. En effet, la fissure peut se propager à travers l'inclusion, en gardant la même direction. Dans ce cas, la charge critique, q_I^{INCL} est donnée par la relation suivante:

$$q_I^{\text{INCL}} = \frac{K_{\text{IC}}^{\text{INCL}}}{A(\alpha, \rho)} \frac{\sqrt{\pi} \ell_2}{2 L_1} \quad (3.9)$$

L'indice INCL est relatif aux paramètres de l'inclusion.

La comparaison de trois charges critiques q_I^{INT} , $q_{\text{II}}^{\text{INT}}$, q_I^{INCL} , données respectivement par les relations (3.3), (3.4) et (3.9), décidera de la propagation future de la fissure. Dans le cas du béton normal, la fissure se propagera principalement le long de l'interface MN, car la valeur de la charge critique q_I^{INCL} serait trop grande en raison des valeurs trop élevées de la tenacité $K_{\text{IC}}^{\text{INCL}}$ des granulats utilisés dans le béton normal. Il en est autrement pour le cas du béton à haute résistance où $K_{\text{IC}}^{\text{INT}}$ est sensiblement égal à $K_{\text{IC}}^{\text{INCL}}$. Dans le béton léger, $K_{\text{IC}}^{\text{INT}}$ est beaucoup plus grand que $K_{\text{IC}}^{\text{INCL}}$, la fissure se propagera alors préférentiellement à travers l'inclusion.

Un grand nombre "d'expériences" sur ordinateur ont été réalisées pour simuler les processus de fissuration dans des structures composites, représentatives de la matrice poreuse de pâte de ciment durcie, du béton normal, du béton léger et du béton à haute résistance [36, 37].

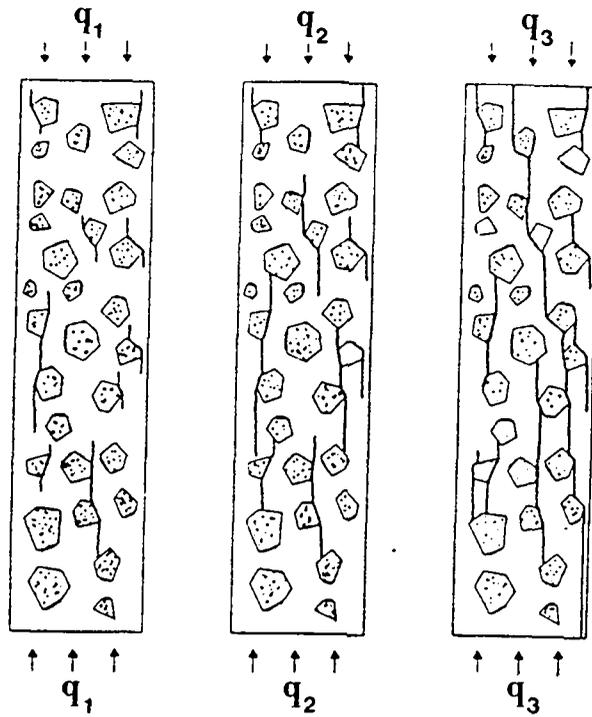


Fig. 3.I0: Trois étapes de formation de fissures dans un béton normal soumis à des charges de compression croissantes, résultats obtenus par simulation sur ordinateur /36/.

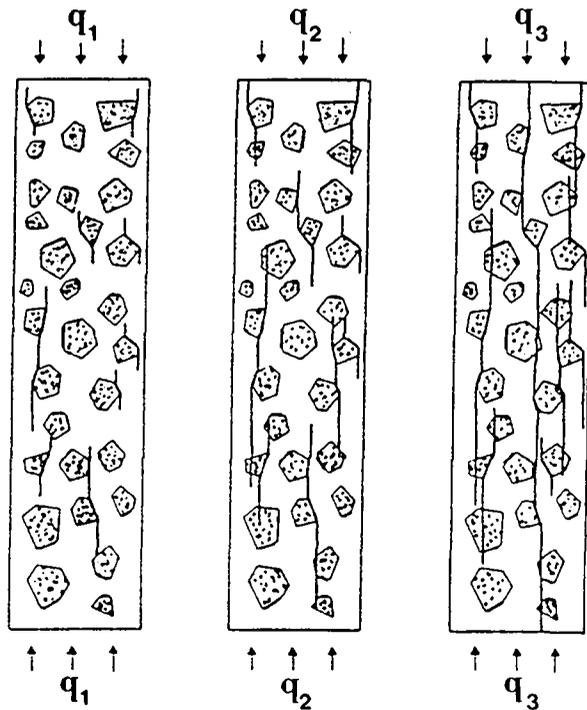


Fig. 3.II: Trois étapes de formation de fissures dans un béton à haute résistance soumis à des charges de compression croissantes, résultats obtenus par simulation sur ordinateur /36/.

La figure 3.10 [36] montre les cartes de fissuration dans le béton normal à trois niveaux de sollicitations; remarquons que les fissures se propagent dans la matrice en contournant les inclusions. En revanche, comme on peut le constater sur la figure 3.11 qui représente le développement de la fissuration dans un béton à haute résistance, beaucoup de fissures se sont propagées à travers les inclusions.

Ce modèle peut être utilisé pour étudier l'influence des inclusions, de la porosité et des pré-fissures sur les propriétés mécaniques des matériaux composites. Les résultats issus de ce modèle reflètent d'une façon satisfaisante les résultats observés expérimentalement. Due à sa complexité, cette approche n'est pas applicable pour des lois constitutives de matériau plus générales où sont présents des phénomènes importants, tels la plasticité, la friction interne, l'engrenage intergranulaire (aggregate-interlock), l'interaction entre les fissures. De plus, l'introduction des déformations initiales dans le modèle, tel le retrait de dessiccation, semble difficilement réalisable. Les résultats obtenus offrent un complément d'information aux résultats expérimentaux conventionnels et en même temps ils constituent une contribution valable pour une meilleure compréhension du comportement des matériaux composites.

3.2.2 Modèle probabiliste pour la rupture du béton

Mihashi-Izumi [39] et Mihashi-Wittmann [40] développèrent un modèle pour décrire la nature stochastique du processus de fissuration dans la pâte de ciment durcie ou dans le béton. Dans cette approche, le système-matériau est représenté par un groupe de m éléments disposés en série. Chaque élément pouvant avoir 2 à 4 phases. Cette situation est représentée schématiquement sur la figure 3.12 [39].

Chaque phase consiste en n unités contenant chacune une fissure circulaire. Ce modèle peut être représentatif de la pâte de ciment durcie comme montré sur la figure 3.13 [31].

Trois types différents de processus de rupture peuvent être considérés comme montré sur la figure 3.14. Dans le type A, deux états sont possi-

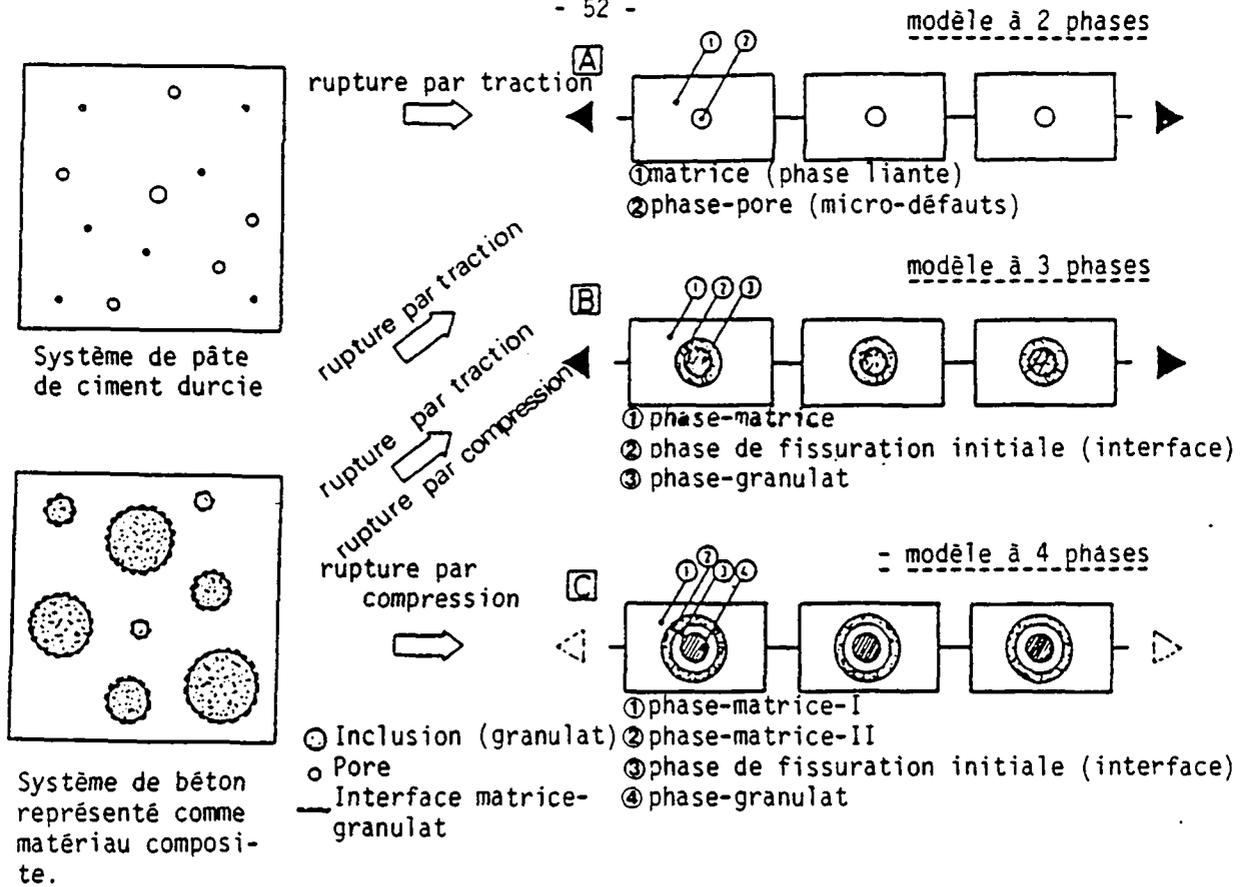


Fig. 3.12 :

Représentation schématique du modèle de liaison inter-éléments, (modèle en série) /39/.

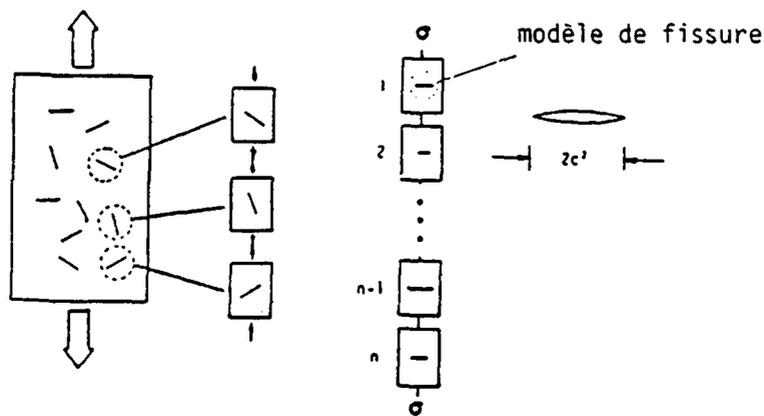


Fig. 3.13 :

Modélisation de la matrice de pâte de ciment durcie /39/.

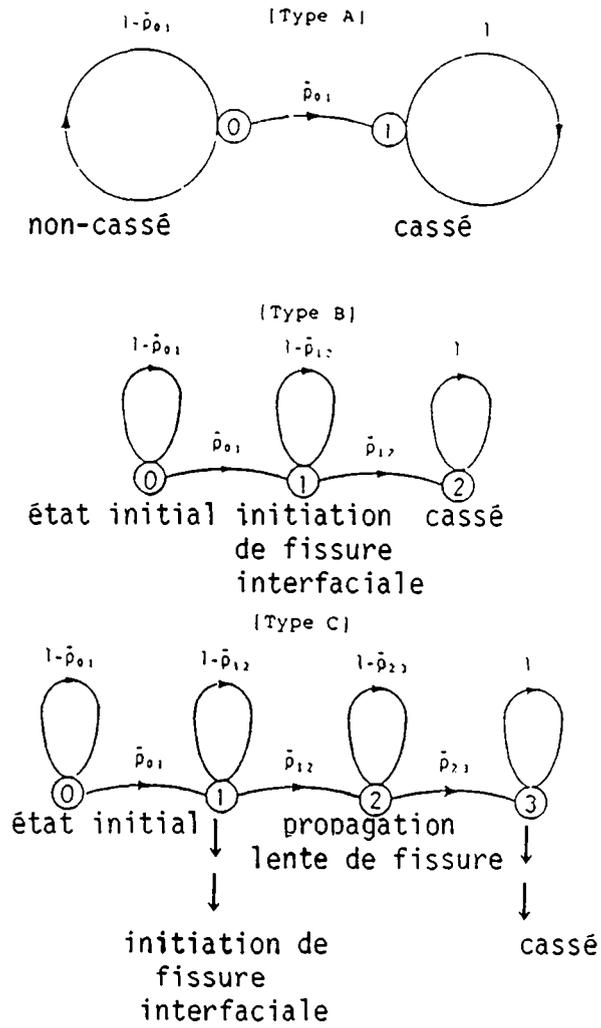


Fig. 3.14 :

Modèles mathématiques. Graphes des lignes de transition /39/.

bles, un état non cassé, un état cassé, ceci étant représentatif d'un matériau purement fragile, tel la matrice de pâte de ciment durcie en traction. Dans le type B, on considère un état intermédiaire stable pour représenter l'initiation d'une fissure dans l'interface. Finalement dans le type C, un second état intermédiaire est considéré avant la rupture complète de l'unité, ceci pour pouvoir décrire une propagation lente d'une fissure.

Dans la figure 3.14, P_{ij} représente la probabilité de transition de l'état i à l'état j .

Si l'on suppose pour le moment qu'un échantillon est chargé avec une vitesse de charge constante ($\dot{\sigma} = \text{constante}$), alors on peut montrer que la probabilité de non-rupture du matériau, $P(\sigma)$ est donnée par l'équation suivante [40, 41]:

$$P(\sigma) = \exp \left\{ - \frac{m L}{(1+\beta) \dot{\sigma}} \sigma^{1+\beta} \right\} \quad (3.9)$$

m est un paramètre relatif aux dimensions de l'échantillon. L représente la distribution statistique d'une longueur équivalente aux défauts de la structure, il est fonction de l'énergie de surface, du module d'élasticité et de la distribution des longueurs des défauts. β est une constante du matériau, dépendant de la température absolue.

La densité de probabilité $g(\sigma)$ de la résistance est:

$$g(\sigma) = \frac{m L}{\dot{\sigma}} \sigma \exp \left\{ - \frac{m L}{(1+\beta) \dot{\sigma}} \sigma^{1+\beta} \right\} \quad (3.10)$$

On peut finalement évaluer la valeur moyenne de la résistance d'un matériau ayant des défauts de structure donnés. $\bar{\sigma}$ s'exprime par la relation suivante:

$$\bar{\sigma} = \left\{ \frac{(\beta+1) \dot{\sigma}}{m L} \right\}^{\frac{1}{1+\beta}} \Gamma \left(\frac{2+\beta}{1+\beta} \right) \quad (3.11)$$

Γ est la fonction Gamma.

L'équation (3.11) montre que la résistance moyenne $\bar{\sigma}$ est une fonction décroissante du paramètre L , relatif aux dimensions des défauts, et de la taille de l'échantillon décrite par la grandeur m .

Ce modèle stochastique permet aussi de décrire l'influence de la vitesse de charge, $\dot{\sigma}$, et de la température sur la résistance du matériau. L'influence de la vitesse de charge sur la valeur moyenne de la résistance $\bar{\sigma}$, est décrite par une fonction puissance et est donnée par l'équation suivante:

$$\frac{\bar{\sigma}}{\bar{\sigma}_0} = \left(\frac{\dot{\sigma}}{\dot{\sigma}_0} \right)^{1/(1+\beta)} \quad (3.12)$$

où $\bar{\sigma}$ et $\dot{\sigma}_0$ sont des valeurs de références de la valeur moyenne de la résistance et de la vitesse de charge, respectivement. On peut aussi exprimer le coefficient de variation, rapport entre l'écart-type et la valeur moyenne. Cette théorie montre que ce coefficient de variation, $v(\sigma)/\bar{\sigma}$, ne dépend que du paramètre β , qui est une constante du matériau. Il faut souligner le fait qu'il est indépendant de la vitesse de charge. Ce fait est important pour l'étude de la fiabilité d'une construction.

La validité des résultats obtenus par cette approche a été confirmée par un grand nombre de résultats expérimentaux [40].

3.3 Modèles tenant compte du radoucissement du matériau

3.3.1 Théorie de la bande microfissurée à fond obtu (Blunt Crack Band Theory) (BCBM)

Dans ce modèle, proposé par Bazant et Oh [42], la fissure est représentée non pas par une fissure aiguë, mais par une bande d'une certaine largeur où sont réparties uniformément des microfissures parallèles. Cette bande de microfissures représente la zone endommagée du matériau, elle est de largeur finie W_c comme représentée schématiquement sur la figure 3.15 [53].

Cette bande microfissurée est caractérisée par une relation contrainte-déformation qui suppose que, dans la direction Z normale à la direction de la fissure, la déformation ε_f due à la microfissuration varie linéairement avec la contrainte σ_z . La courbe contrainte-déformation uniaxiale est représentée sur la figure 3.16, où E_t , négatif, indique la pente de la branche descendante de la courbe, c'est-à-dire la branche relative au radoucissement du matériau (strain softening), ε_0 représentant la déformation correspondant à la contrainte σ_z nulle. Dans cette approche, seul le mode I, c'est-à-dire le mode d'ouverture, est considéré.

L'énergie de rupture G_f s'écrit alors [42]:

$$G_f = W_C \int_0^{\varepsilon_0} \sigma_z d\varepsilon_f = \frac{W_C}{2} f_t^2 \left(\frac{1}{E_C} - \frac{1}{E_t} \right) \quad (3.14)$$

Dans ce modèle, la largeur de la bande W_C apparait comme une constante additionnelle du matériau. Ce modèle met donc en jeu trois constantes du matériau: la résistance à la traction f_t , l'énergie de rupture G_f et la largeur de bande W_C .

Cette approche présente de très gros avantages du point de vue numérique, en ce sens qu'on peut aisément l'implémenter dans un code de calcul par éléments finis. En effet, la propagation éventuelle d'une fissure ne nécessite pas un nouveau maillage de la structure, contrairement aux modèles de fissures discrètes où le maillage doit être reconstruit à chaque propagation de la fissure. Dans le présent modèle, une fois qu'une fissure est formée dans un élément fini, la matrice de rigidité de cet élément qui, initialement, était isotrope est remplacée par une nouvelle matrice de rigidité relative à un matériau orthotrope, et ceci se fait en réduisant progressivement la rigidité du matériau dans la direction normale à la fissure. Nous reviendrons plus en détails au chapitre 6 sur la façon d'implémenter une telle théorie dans un code de calcul par éléments finis.

La validité de cette théorie se vérifie au moyen de comparaisons avec les nombreux résultats expérimentaux publiés dans la littérature. Une

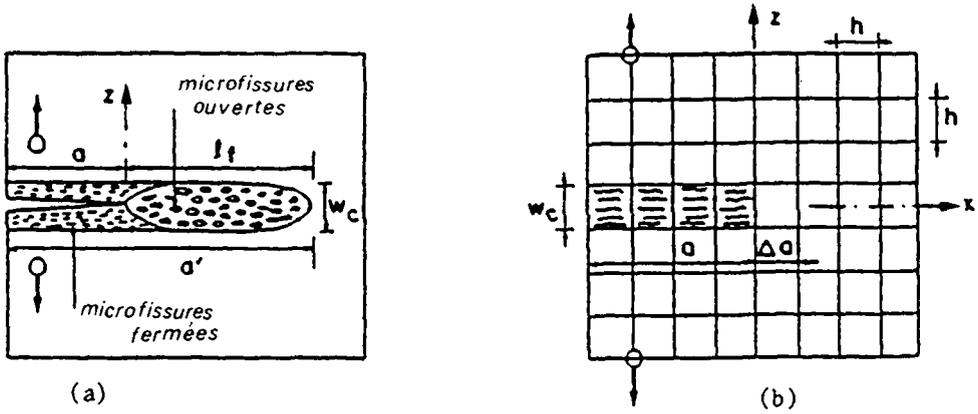


Fig. 3.15: (a)- Zone d'endommagement, bande de microfissures, formation d'une fissure aiguë.
(b)- Représentation schématique dans l'analyse par la MEF /53/.

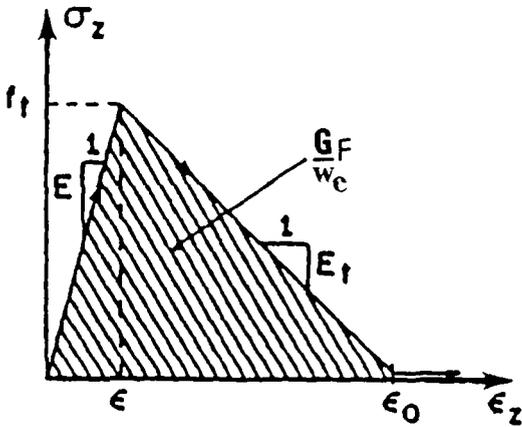


Fig. 3.16 :

Relation contrainte-déformation uniaxiale utilisée dans le Modèle de bande de microfissurée /53/.

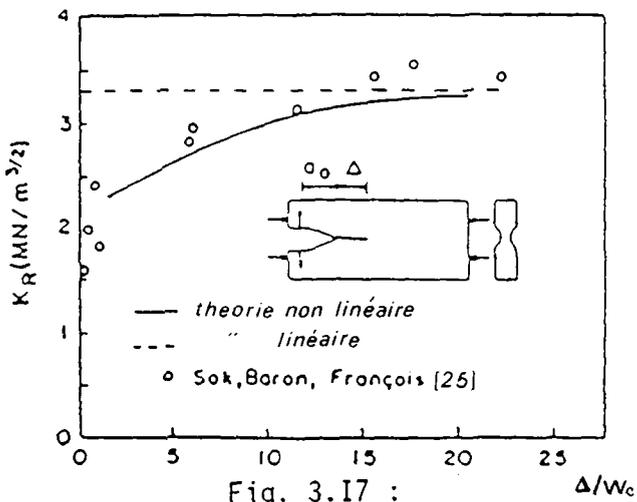


Fig. 3.17 :

Comparaison entre une courbe de résistance du béton/25/, avec les prévisions du Modèle de bande/42/.

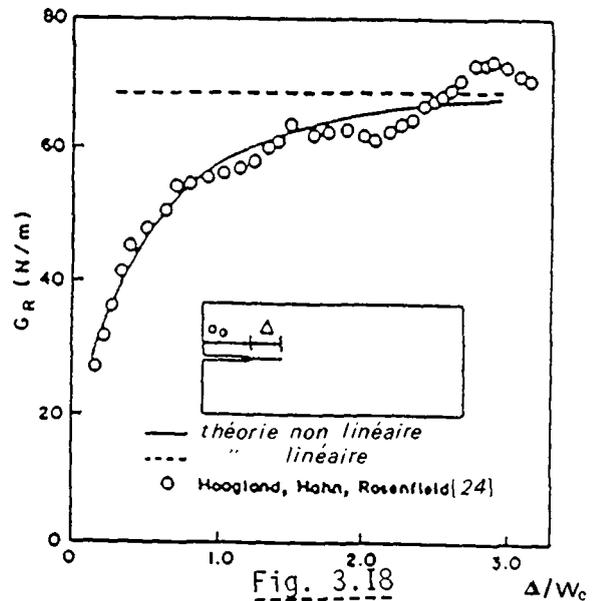


Fig. 3.18

Comparaison entre une courbe de résistance d'une roche/24/ et les prévisions du Modèle de bande/42/.

comparaison extensive des charges maximales obtenues par cette théorie non linéaire avec les résultats expérimentaux montre que ceux-ci peuvent être ajustés par une calibration des propriétés du matériau [42]. Plus encore, il a été montré que cette théorie prévoit une dépendance de l'énergie de rupture avec la propagation lente de la fissure, ce qui est similaire à ce qui a été trouvé expérimentalement, c'est-à-dire l'existence de courbes de résistance. Un ajustement des paramètres du modèle aux résultats expérimentaux a révélé que la valeur optimale de la largeur de la bande W_C , est de l'ordre de trois fois le diamètre maximal des granulats utilisés dans le béton. Notons aussi que ce modèle a été appliqué avec succès pour la rupture des roches [44]. La figure 3.17 [42] montre la comparaison entre les résultats obtenus par ce modèle et les résultats expérimentaux concernant la détermination des courbes de résistances à partir des essais accomplis sur de grandes éprouvettes de béton par Sok et al. [25]. La figure 3.18 montre aussi une bonne concordance entre les résultats obtenus par cette théorie et une courbe de résistance obtenue expérimentalement par Hoagland et al. [24] sur des éprouvettes en calcaire de Salem.

3.3.2 Le modèle de la fissure fictive (The fictitious crack model)

L'application de la mécanique de la rupture linéaire au béton nécessite l'emploi d'éprouvettes de très grandes dimensions, [25, 45]. Il est clair que de telles expériences reviennent chères, on peut difficilement envisager de multiplier le nombre d'éprouvettes pour étudier l'influence de divers paramètres. La détermination des paramètres de rupture du matériau à partir d'essais sur éprouvettes de dimensions raisonnables nécessite le développement d'un nouveau modèle tenant compte explicitement de l'influence de la zone d'endommagement (process zone). Hillerborg, Modeer et Petersson [46] développèrent un tel modèle, que ces auteurs appelèrent "modèle de la fissure fictive" (fictitious crack model-MFF).

Dans le but d'élucider l'idée de base de ce modèle, nous allons considérer une éprouvette de béton sollicitée en traction directe [47]. On sup-

pose que l'expérience se fait d'une façon stable par contrôle des déformations, il est ainsi possible de suivre la branche descendante de la courbe effort-déformation jusqu'à la charge nulle. Supposons alors que l'on mesure les élongations entre deux points dans deux régions différentes A et B de l'échantillon en fonction de la charge appliquée. Ceci est représenté schématiquement sur la figure 3.19 [47].

Comme l'éprouvette est supposée homogène et de section constante sur toute sa longueur, les courbes effort-déformation relatives aux parties A et B coïncident jusqu'à ce que la charge maximale soit atteinte. Pour des déformations plus grandes, une zone endommagée se développe dans l'éprouvette, celle-ci est localisée dans la partie A dans le cas de la figure 3.19. On constate alors que l'élongation dans la partie A, à cause du développement de microfissures, continue de croître bien que la charge décroisse; en revanche, l'élongation dans la partie B est réduite élastiquement et approche finalement zéro.

L'élongation dans la partie A inclut aussi l'élongation de la zone endommagée. Cette élongation additionnelle due à la zone fissurée est la différence W entre les branches descendantes des courbes relatives aux parties A et B (voir figure 3.19). La notion de déformation additionnelle W ainsi introduite est un point essentiel de ce modèle.

On peut maintenant décrire les propriétés des déformations de l'éprouvette au moyen de deux diagrammes:

- le diagramme contrainte-déformation, σ - ϵ , incluant la branche de déchargement
- le diagramme contrainte-élongation, σ - W , pour la zone endommagée.

Au moyen de ces deux diagrammes, on peut calculer l'élongation Δl de toute longueur de jauge l_0 .

Si on n'a pas de zone endommagée dans la jauge, l'élongation est alors:

$$\Delta l = \epsilon l_0 \quad (3.15)$$

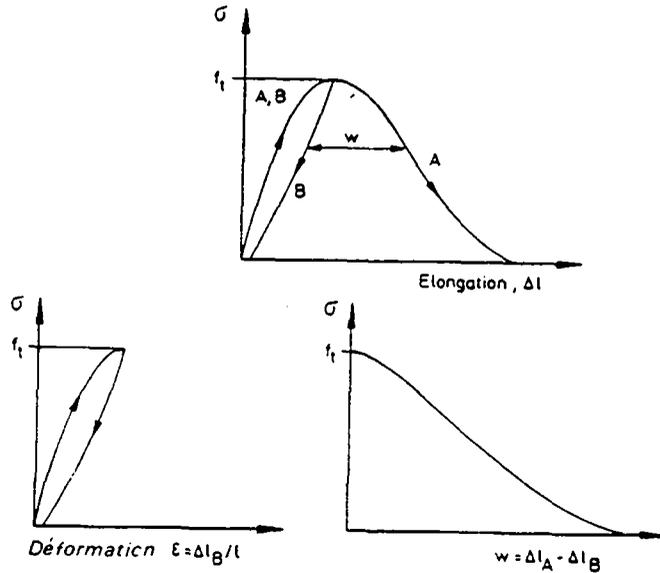
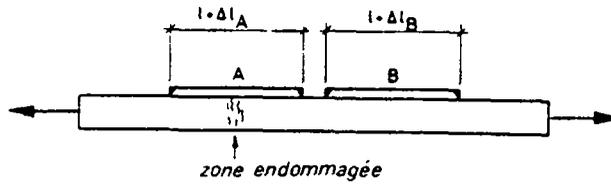


Fig. 3.19 : Principe de subdivision des déformations du matériau en un diagramme $\sigma-\epsilon$ et un diagramme $\sigma-w$ où w est la déformation additionnelle due à la formation de la zone d'endommagement /47/.

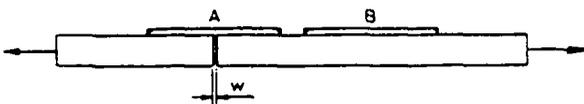


Fig. 3.20 :

Représentation simplifiée de la zone d'endommagement comme fissure fictive de largeur w /47/.

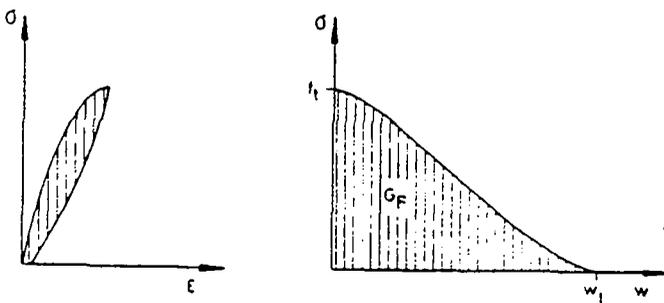


Fig. 3.21 :

Dissipation de l'énergie relative aux diagrammes $\sigma-\epsilon$, $\sigma-w$. L'aire des surfaces hachurées représente les énergies dissipées par volume unité du matériau et fissure de surface unité, respectivement /47/.

Si une zone endommagée est localisée dans la jauge, l'élongation sera alors donnée par:

$$\Delta l = \epsilon l_0 + W \quad (3.16)$$

Il est à noter que W est une longueur, contrairement à ϵ qui est une déformation.

La largeur de la zone endommagée n'apparaît pas dans les équations (3.15) et (3.16). Ceci donne une certaine liberté de faire une hypothèse convenable concernant la largeur de cette zone. La supposition la plus simple à faire est que la largeur initiale de cette zone est nulle; ainsi la largeur totale de cette zone est W . Une autre supposition possible est que la largeur de cette bande a une certaine valeur W_C et que la déformation est égale dans toute cette largeur. Cette hypothèse est utilisée par Bazant dans le BCBT [42], où cette largeur W_C a été liée à la taille des granulats.

La zone d'endommagement peut être représentée, comme montré sur la figure 3.20, par une bande de largeur W , capable de transférer des contraintes selon le diagramme σ - W . Cette zone est appelée par ses auteurs fissure fictive. Il est important de souligner la différence entre une fissure réelle qui est une séparation nette de deux surfaces entre lesquelles il n'existe pas de transfert de contraintes et une fissure fictive, zone microfissurée apte au transfert de contraintes.

Durant un essai de traction, pour rompre complètement l'éprouvette, de l'énergie est consommée dans tout le matériau. Dans ce modèle, l'énergie absorbée dans la fissure fictive est:

$$A \int_0^{w_1} \sigma dw = A G_F \quad (3.17)$$

où A est l'aire de la section de l'éprouvette, w_1 est la valeur limite de w correspondant à $\sigma = 0$, G_F est l'aire de la surface délimitée σ - W , voir figure 3.21.

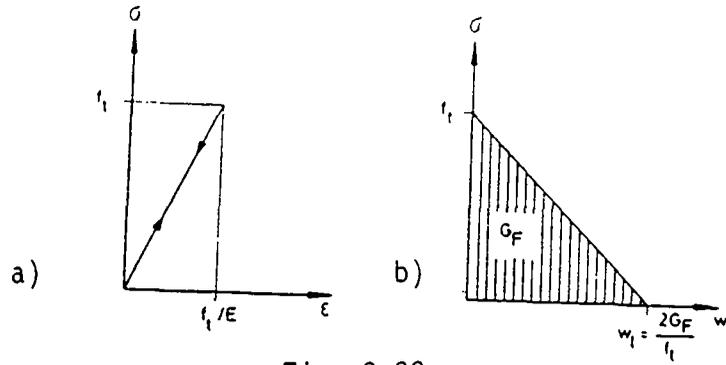


Fig. 3.22 :

Approximation des deux diagrammes du matériau de la Fig.3.3I par des courbes linéaires en vue d'une simplification pour les calculs numériques.

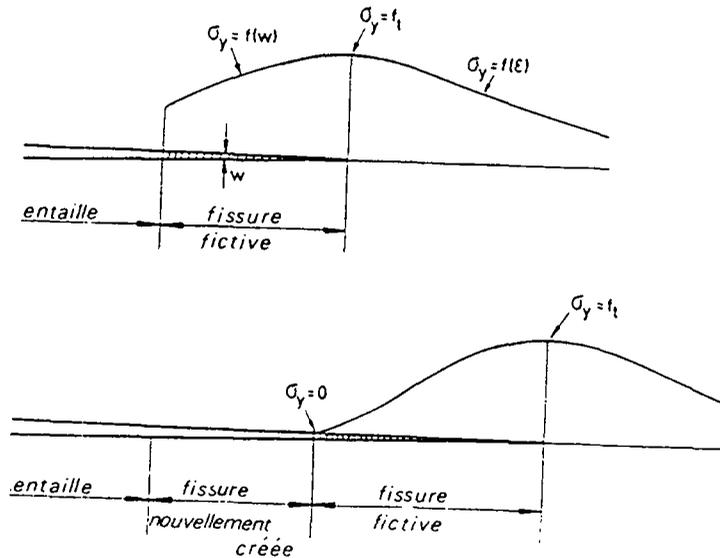


Fig. 3.23 :

Distribution des contraintes au fond d'une fissure avant et après la croissance de la fissure réelle /47/.

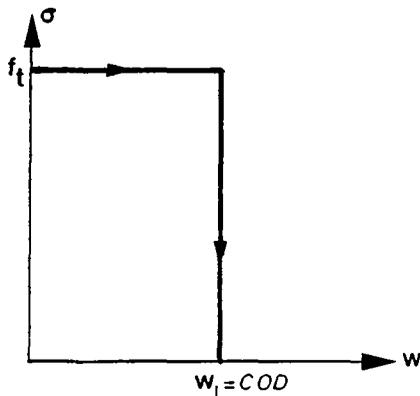


Fig. 3.24 :

Diagramme $\sigma-w$ d'après le modèle de Dugdale pour les matériaux élasto-plastiques.

G_F est donc l'énergie absorbée par unité de surface de fissure pour séparation complète des deux surfaces de la fissure. Dans la figure 3.21, les surfaces hachurées indiquent l'énergie dissipée en relation avec les diagrammes $\sigma-\epsilon$, $\sigma-W$.

D'une façon simplifiée, on peut décrire le comportement global au moyen de deux fonctions linéaires, comme montré sur la figure 3.22. En première approximation, on peut supposer qu'en dehors de la zone endommagée, partie B de l'éprouvette, le matériau est déformé élastiquement et à la fin du cycle complet de chargement aucune énergie n'a été consommée (Fig. 3.22a). Par contre, dans la zone endommagée, toute l'énergie de rupture G_F a été absorbée (Fig. 3.22b).

Le modèle de la fissure fictive peut être appliqué non seulement pour des éprouvettes en traction, mais aussi pour des situations plus complexes. Considérons par exemple le comportement d'un matériau en avant d'une fissure ou d'une entaille; alors nous pouvons supposer que toutes les parties du matériau sises le long du plan de fissure doivent suivre le chemin montré sur la figure 3.22b lors d'une éventuelle propagation de la fissure. Ceci signifie qu'en avant du front de la fissure réelle, il existe une zone d'endommagement dans laquelle la capacité de transfert de contraintes décroît avec l'élongation. La figure 3.23 montre la distribution des contraintes au voisinage du front d'une entaille ou d'une fissure réelle dans une poutre soumise à une déformation croissante.

De l'état de la figure 3.23a à l'état relatif à la figure 3.23b, une zone d'endommagement s'est développée; c'est une fissure fictive. En ces termes, la propagation de la fissure peut être considérée comme une transition du matériau, dépendante du temps ou de la sollicitation, d'un état endommagé où le transfert de contrainte est toujours possible, à l'état d'une fissure réelle. Dans chaque volume élémentaire qui est traversé par la fissure, une énergie de rupture G_F est nécessaire pour accomplir une telle transition.

Le moyen le plus approprié pour déterminer l'énergie de rupture G_F du matériau est un essai de traction direct effort-déformation, comme montré sur la figure 3.6.

Malheureusement, de tels essais de traction directe permettant l'obtention de la courbe complète effort-déformation, sont difficilement réalisables, car ils nécessitent un appareillage complexe pour que l'expérience puisse se dérouler d'une façon stable, ce qui permettrait de suivre la branche descendante [33, 48]. Un projet de recommandation de la RILEM a été récemment suggéré pour déterminer l'énergie de rupture G_F des mortiers et bétons par des essais de poutres entaillées en flexion à trois points [41]. Les bases théoriques relatives à ces essais sont présentées dans la référence [50]. Dans le chapitre 4, nous reviendrons en détail sur la détermination expérimentale de l'énergie de rupture et l'application du modèle de la fissure fictive dans un programme par éléments finis.

Le modèle de Dugdale (voir chapitre 2) apparaît comme un cas particulier du modèle de la fissure fictive. Cependant la forme du diagramme σ - W est supposée avoir la forme de la figure 3.24, c'est-à-dire caractérisée par une contrainte de plasticité constante, suivie par une rupture soudaine.

Le modèle de Barenblatt (voir chapitre 2) où des forces de cohésion sont supposées agir sur une région sise en avant du front d'une fissure réelle est probablement le modèle le plus proche de la théorie de la fissure fictive. Cependant, les forces de cohésion de Barenblatt sont des forces atomiques agissant sur des distances très faibles de l'ordre de 10^{-9} m alors que la largeur relative au modèle de la fissure fictive est beaucoup plus importante, de l'ordre de 10^{-6} à 10^{-3} m [47].

3.4 Conclusions

Le processus de fissuration du béton est un phénomène complexe. Il est fortement lié à la nature hétérogène du matériau. Cette hétérogénéité est à attribuer au caractère composite du matériau et aux défauts ou fissures initiaux.

L'existence d'une zone microfissurée de grande dimension, s'étendant en avant de la fissure principale, met en doute l'emploi de la mécanique de la rupture linéaire élastique.

L'analyse de la mécanique de la rupture du béton au moyen des courbes de résistance est peu désirable. En effet, l'analyse par les courbes R est basée sur l'observation de la croissance de la fissure; or, dans le béton, il n'est pas possible d'observer le sommet d'une fissure bien définie; une fissure peut-être bien visible, bien qu'il y ait toujours transfert de contrainte. De ce fait, la courbe R n'est pas une propriété pure du matériau. L'approche par le concept de l'ouverture à fond de fissure (C.O.D.) ou l'approche par l'intégrale J ne semblent pas applicables à la rupture du béton en raison de l'absence d'un sommet de fissure bien défini.

Des modèles, tels que le modèle de la fissure fictive ou la théorie de la bande microfissurée, tenant compte de l'adoucissement du matériau induit par le développement d'une zone microfissurée, reflètent mieux le processus réel de rupture dans le béton.

chapitre 4

METHODES NUMERIQUES POUR SIMULER LA RUPTURE DU
BETON ET DETERMINATION DES PARAMETRES DE RUPTURE

CHAPITRE 4 : METHODES NUMERIQUES POUR SIMULER LA RUPTURE DU BETON ET DETERMINATION DES PARAMETRES DE RUPTURE.

4.1 Introduction

La mécanique de la rupture linéaire élastique est inadaptée à une description réaliste de la rupture d'un matériau composite comme le béton ou le mortier.

La rupture d'un matériau composite n'est pas le résultat de la propagation instable d'une fissure critique unique, mais plutôt d'un développement progressif d'une multitude de microfissures qui finissent par provoquer la ruine de la structure composite.

Dans le but de fournir une analyse réaliste de la rupture d'une structure de béton et tenant compte de la nécessité d'une analyse numérique du problème, Hillerborg, Modder et Petersson [46] développèrent le modèle de la fissure fictive MFF, (voir § 3.3.2). Dans ce concept, l'énergie de rupture joue un rôle central. Une recommandation de la RILEM [49] concernant la détermination expérimentale de l'énergie de rupture du béton et du mortier fut récemment émise.

Dans le présent chapitre, nous allons brièvement décrire une méthode d'implantation du MFF dans un programme par éléments finis. De plus, nous verrons l'importance considérable qu'une analyse numérique appropriée des résultats expérimentaux peut apporter à une paramétrisation meilleure de la rupture du matériau.

4.2 Détermination expérimentale de l'énergie de rupture

L'énergie de rupture G_F du béton est définie comme l'énergie nécessaire à la création d'une aire unitaire de fissure. Dans la recommandation de la RILEM [49], l'énergie de rupture G_F est déterminée par des

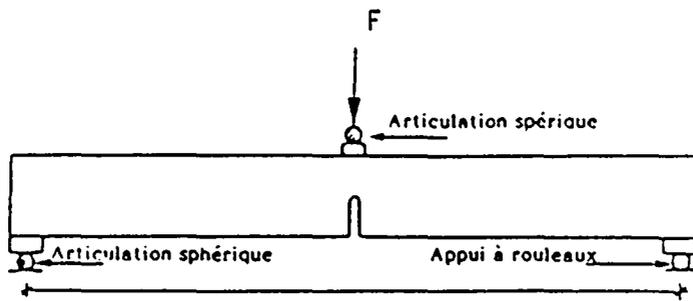


Fig. 4.1 : Poutre munie d'une encoche centrale chargée en flexion 3 points. Cet essai est recommandé pour la détermination de l'énergie de rupture du béton ou mortier /49/ .

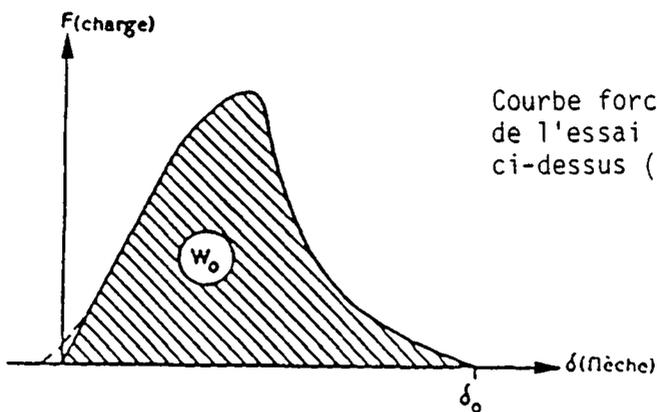


Fig.4.2 :

Courbe force-déplacement résultante de l'essai schématisé dans la figure ci-dessus (Fig.4.1).

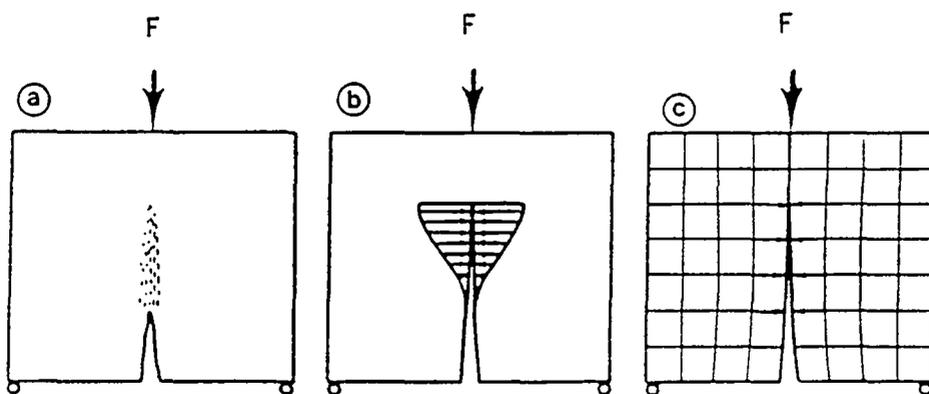


Fig.4.3 :

- a) : Zone d'endommagement (fracture zone) dans un matériau réel.
- b) : Dans le Modèle de la Fissure Fictive (MFF), cette zone est représentée par une fissure capable de transférer des contraintes.
- c) : Représentation du MFF dans la méthode des éléments finis.

essais de flexion à trois points de poutres munies d'une encoche centrale comme montré sur la figure 4.1.

L'énergie de rupture G_F est déterminée approximativement par la formule suivante:

$$G_F = \frac{W_0 + mg\delta_0}{A_{lig}} \quad (4.1)$$

où W_0 = énergie représentée par l'aire de la surface délimitée par la courbe charge-déformation ($F-\delta$) et l'axe δ

m = masse de la poutre entre les supports

g = accélération de la pesanteur

δ_0 = flèche lors de la rupture totale de la poutre

A_{lig} = aire du ligament non fissuré, définie comme la projection de la zone de rupture sur un plan perpendiculaire à la ligne moyenne de la poutre.

Remarquons que $mg\delta_0$ représente l'énergie développée par le poids propre de la poutre.

Les termes d'énergie de l'équation (4.1) peuvent être décrits graphiquement sur la figure 4.2 qui représente une courbe charge-déflexion ($F-\delta$).

4.3 Application du MFF dans une analyse par la méthode des éléments finis pour simuler la propagation de fissure dans le béton

Le modèle de la fissure fictive est particulièrement adapté pour la simulation numérique au moyen de la méthode des éléments finis (MEF). La fissure est alors représentée comme une séparation d'éléments avec une introduction simultanée de forces représentant les contraintes transférées le long de la zone fissurée [55, 56]. Cette combinaison entre le MFF et la méthode des éléments finis est schématisée sur la figure 4.3.

L'intensité des forces introduites dépend de l'ouverture W de la fissure fictive selon la courbe $\sigma-W$ du matériau.

Nous allons brièvement décrire le procédé de simulation sur un exemple. Dans la description ci-dessous, on suppose que les forces inter-éléments agissent seulement sur les points nodaux. D'autres suppositions sont bien entendu possibles, mais ne changent pas les principes généraux de la méthode.

Prenons comme exemple la poutre entaillée chargée en 3 points; ceci est montré sur la figure 4.4a.

Dans ce cas, nous pouvons supposer que le chemin de la fissure est vertical, sur l'axe YY' , et commence au fond de l'entaille, c'est-à-dire depuis le noeud 1 dans le maillage (voir fig. 4.4b).

Quand on commence à appliquer la charge P , le front de l'entaille, représenté par le noeud 1 sera soumis à de hautes tractions. La première étape sera donc de calculer la charge P_1 , qui donnera au noeud 1 une contrainte égale à f_t , résistance à la traction du matériau.

Cette charge P_1 peut être déterminée aisément par la M.E.F. Donnons par exemple une charge unité à P , celle-ci donnera une contrainte σ_1 (calculée par la M.E.F.), dans l'axe horizontal au noeud 1; alors la charge recherchée P , qui est telle que la contrainte σ_x au noeud 1 soit égale à f_t est donnée par :

$$P_1 = \frac{f_t}{\sigma_1} \cdot 1 \quad (4.2)$$

Toute croissance de la charge P , au-delà de P_1 , donnera une contrainte au noeud 1 plus grande que f_t , ce qui est bien entendu impossible d'après le modèle de la fissure fictive (MFF). Ainsi, une zone endommagée commence à naître au noeud 1 et l'on modélise cet état en séparant le noeud en deux noeuds, $1'$ et $1''$. La distance entre $1'$ et $1''$ correspond à la largeur de la fissure fictive, au niveau du noeud 1.

Entre les noeuds $1'$ et $1''$, une force de traction F_1 est introduite, correspondant à la contrainte σ_1 , où σ_1 est fonction de l'ouverture W_1 selon la courbe σ - W du matériau. Cette situation est représentée schématiquement sur la figure 4.4c.

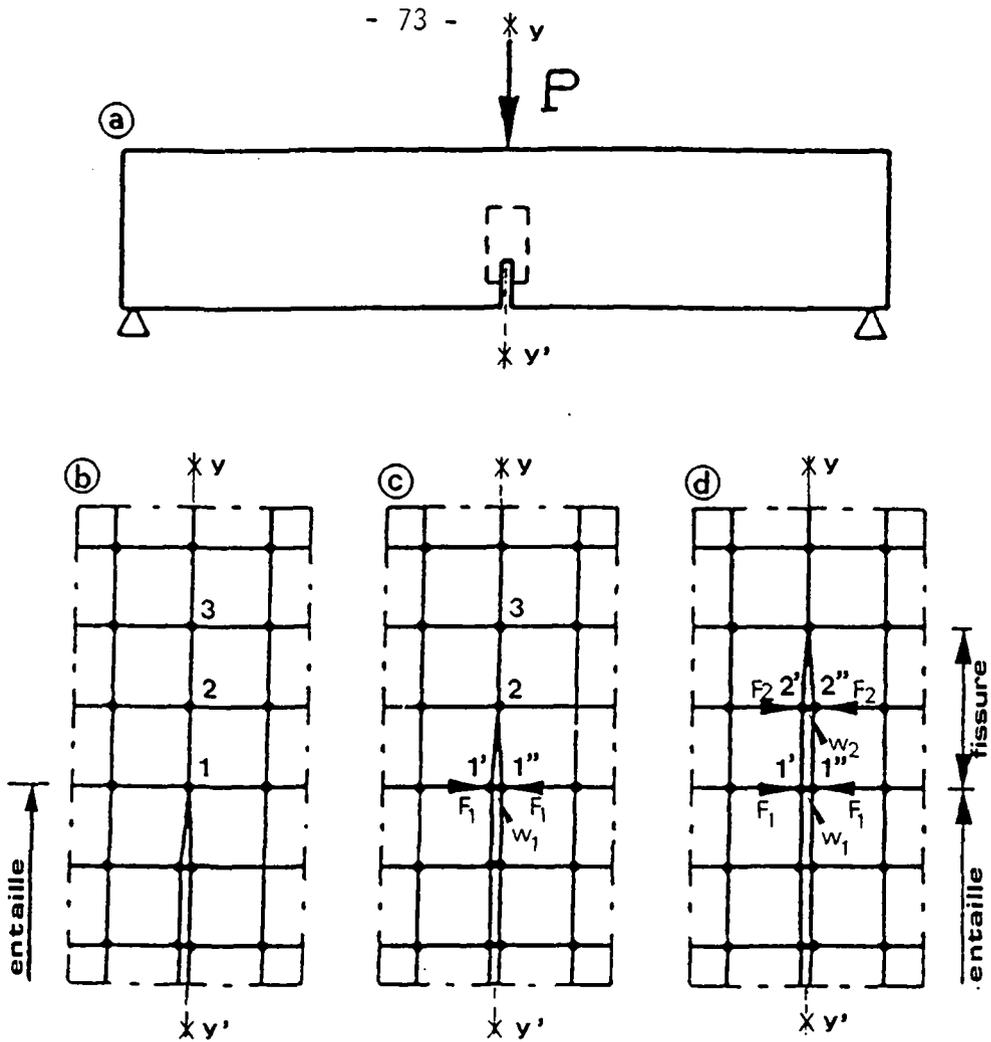


Fig.4.4 :

Représentation schématique du développement de la zone d'endommagement dans une analyse par la M.E.F..

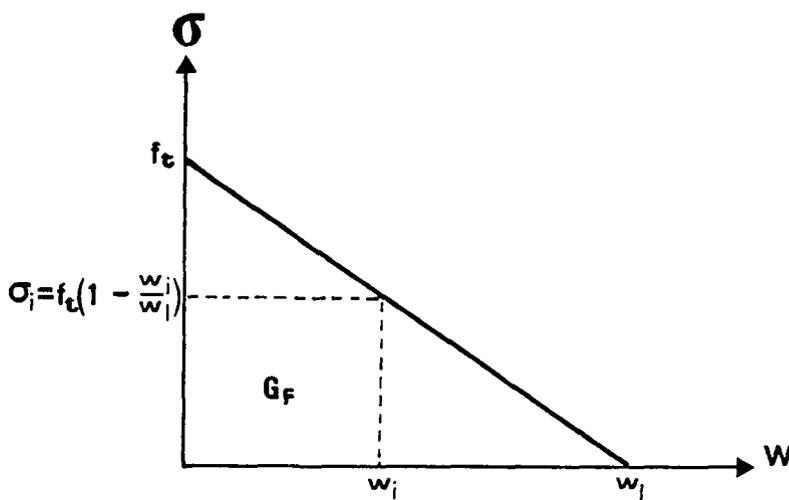


Fig.4.5 :

Diagramme du radoucissement représenté par une droite linéaire et définition des paramètres.

La figure 4.5 représente la courbe σ - W du matériau, dans ce cas particulier σ varie linéairement avec l'ouverture W .

Déterminons à présent la nouvelle charge P_2 nécessaire à l'ouverture du noeud suivant, le noeud 2. Cette charge P_2 sera telle que la contrainte $\sigma_{X,2}$ relative au noeud 2 soit égale à f_t . Pour résoudre ce problème, on utilise la méthode des flexibilités [55]. Dans cette méthode, l'ouverture W_1 s'écrit:

$$W_1 = C_1^0 P + K_{11} F_1 \quad (4.3)$$

où C_1^0 est la flexibilité, ou coefficient d'influence, au noeud 1 relatif à la charge extérieure P . K_{11} est le coefficient d'influence au noeud 1 relatif à la force F_1 . La force F s'écrit:

$$F_1 = Q_F \left(1 - \frac{W_1}{W_1}\right) \quad (4.4)$$

$$\text{avec } Q_F = e \cdot d \cdot f_t \quad (4.5)$$

où e et d sont respectivement, l'épaisseur de la poutre et la distance inter-nodale le long de l'axe vertical de la fissure.

Le critère d'ouverture du second noeud est que la contrainte en ce noeud, dépendante de la charge extérieure P et la force inter-nodale F_1 , doit être égale à f_t , ce qui peut être formulé comme suit:

$$f_t = \alpha_0 P + \alpha_1 F_1 \quad (4.6)$$

où α_0 et α_1 sont des facteurs de proportionnalité respectivement pour la charge extérieure P et la force inter-nodale F_1 . Les équations (4.3), (4.4) et (4.5) forment le système d'équations suivant:

$$W_1 = C_1^0 P + K_{11} F_1$$

$$F_1 = Q_t \left(1 - \frac{W_1}{W_e}\right) \quad (4.7)$$

$$f_t = \alpha_0 P + \alpha_1 F_1$$

Les paramètres C_1^0 , K_{11} , α et α_1 sont déterminés de la façon suivante:

On donne une valeur unité à P et l'on calcule (par la M.E.F.) la valeur de W_1 , ($W_1^{(1)}$) et de la contrainte au noeud 2, $\sigma^{(2)}$. On aura ainsi les grandeurs de C_1^0 et α_0 . On obtient de la même façon K_{11} et α_1 en donnant à F_1 la valeur unité.

La résolution du système (4.7) donne les valeurs de W_1 , F_1 et de la nouvelle charge P_2 .

La propagation suivante de la fissure jusqu'au noeud 3 nécessite une charge extérieure $P = P_3$ qui est donnée par la résolution du système d'équations suivant:

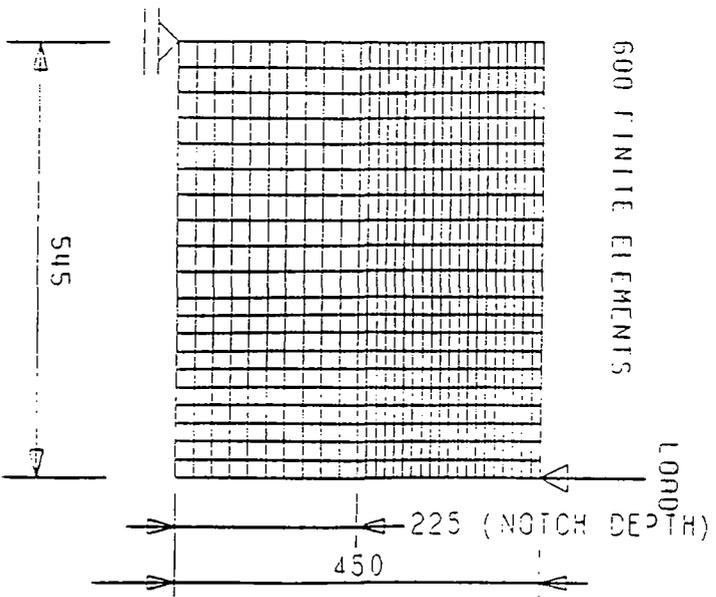
$$\begin{aligned} W_1 &= C_1^0 P + K_{11} F_1 + K_{12} F_2 \\ W_2 &= C_2^0 P + K_{21} F_1 + K_{22} F_2 \\ F_1 &= Q_t (1 - W_1/W_e) \\ F_2 &= Q_t (1 - W_2/W_e) \\ f_t &= \alpha_0 P + \alpha_1 F_1 + \alpha_2 F_2 \end{aligned} \tag{4.8}$$

Le facteur K_{ij} ($i = 1, 2, j = 1, 2$) représente la flexibilité au noeud i due à la force nodale F_j . Les facteurs du système (4.8) sont déterminés de la même façon que précédemment. Le système d'équations est alors résolu et l'on obtient ainsi les ouvertures (W_1, W_2), les forces nodales (F_1, F_2) et la nouvelle charge $P = P_3$. Ce nouvel état est schématisé sur la figure 4.4d.

La modélisation de la propagation de la fissure vers les noeuds supérieurs se fait exactement de la même façon.

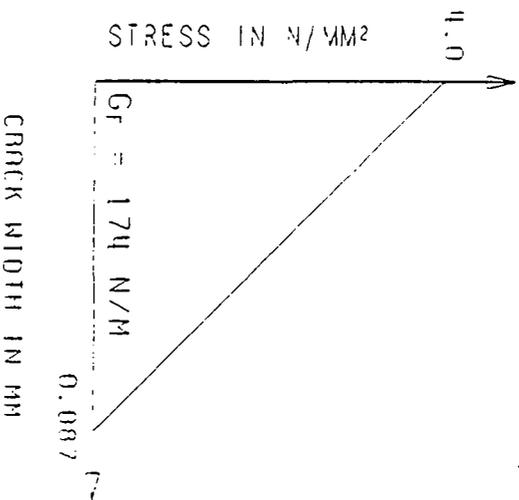
Un module, nommé FRACTURE I [57], faisant partie d'un code de calcul par éléments finis, FEMMASSE, a été développé dans le but de simuler la

BEAM GEOMETRY (IN MM)



MATERIALS PROPERTIES

STRAIN SOFTENING DIAGRAM



YOUNG'S MODULUS = 36540 N/MM²

POISSON'S RATIO = 0.20

DENSITY = 2420 KG/M³

DEPTH OF BEAM = 100

FINITE ELEMENT CODES FOR MATERIALS SCIENCE AND STRUCTURAL ENGINEERING

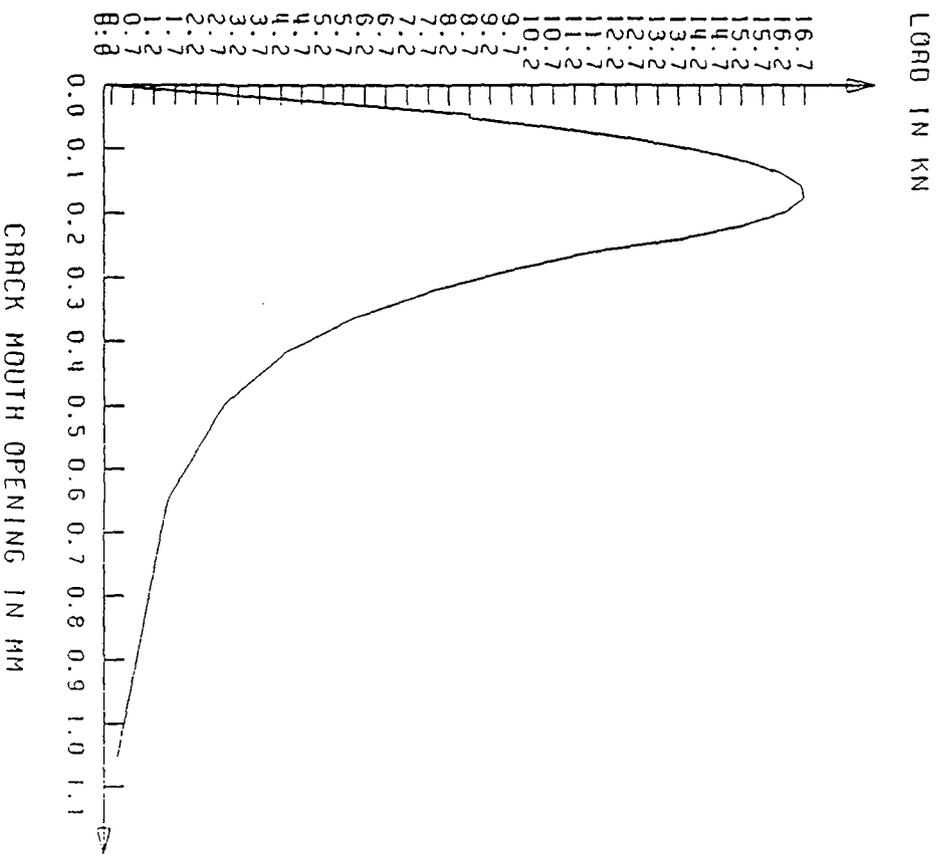
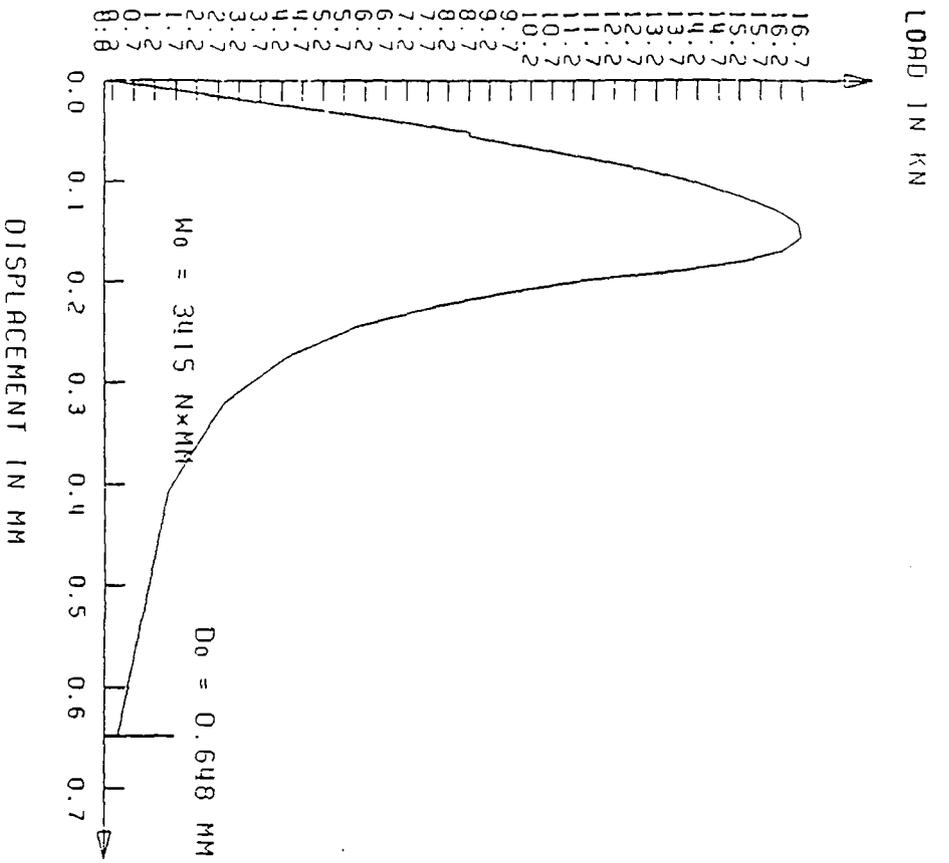
FEMRMSSE TITLE: CONCRET TYPE A (400KG/M³*3)

FRACTURE/1 W/C=0.45 AGE=21 DAYS

DATE: 85/02/13.

EPFL/LMC

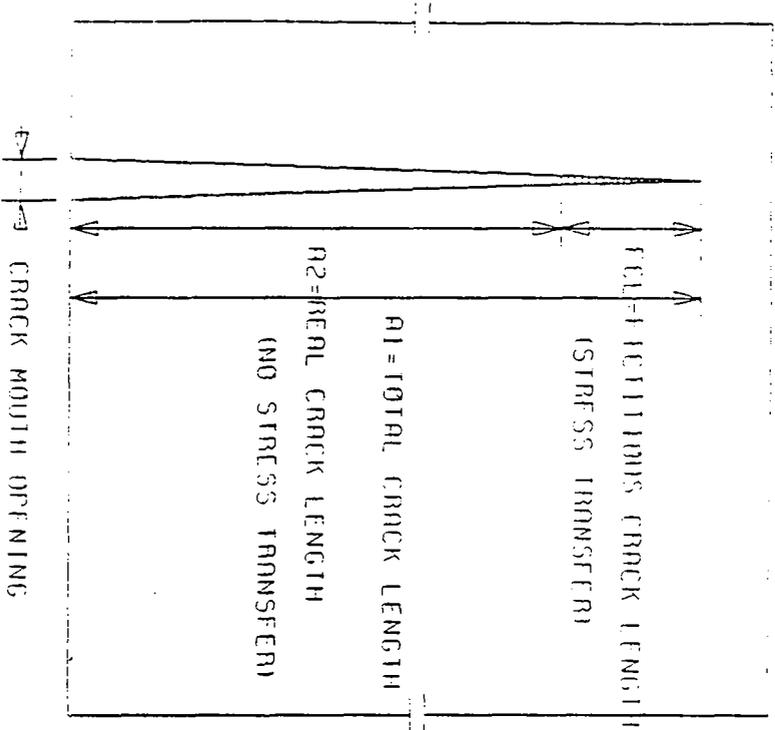
Fig. 4.6



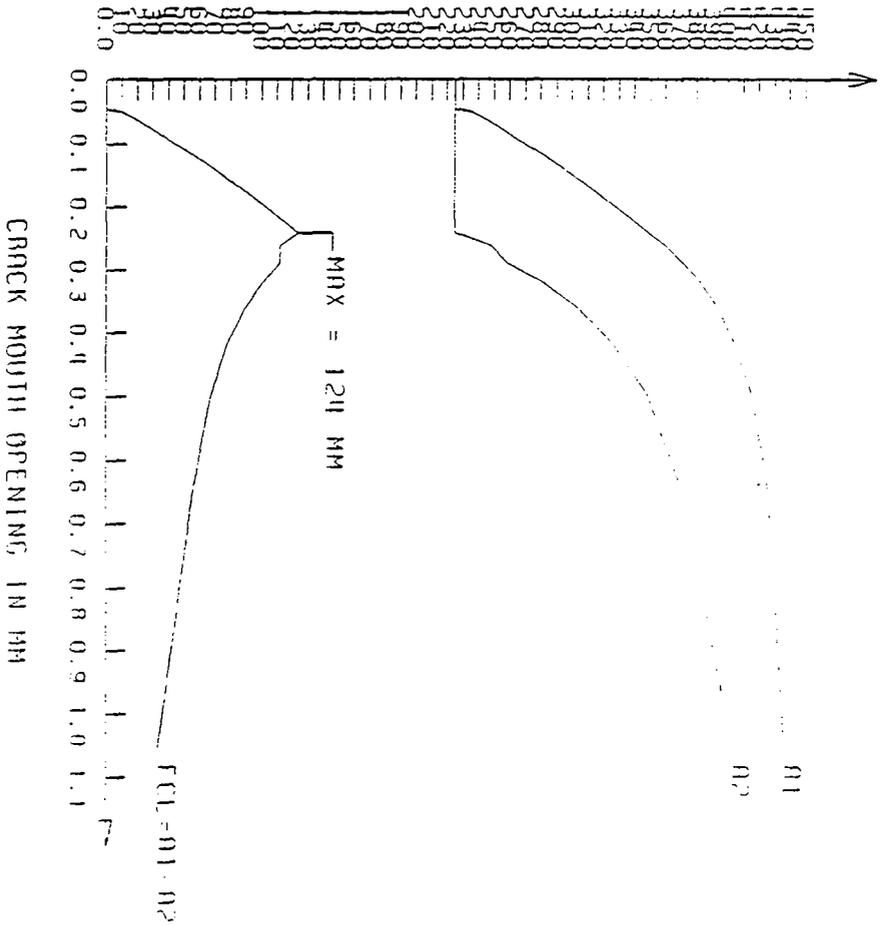
FINITE ELEMENT CODES FOR MATERIALS SCIENCE AND STRUCTURAL ENGINEERING		EPFL/LMC	2
FEM:RASSE	TITLE: CONCRET TYPE A (400KG/M**3)		
FRACTURE/1	W/C=0.45 AGE=21 DAYS		
DATE: 65/02/13.			

Fig. 4.7

DEFINITIONS



CRACK LENGTH IN MM



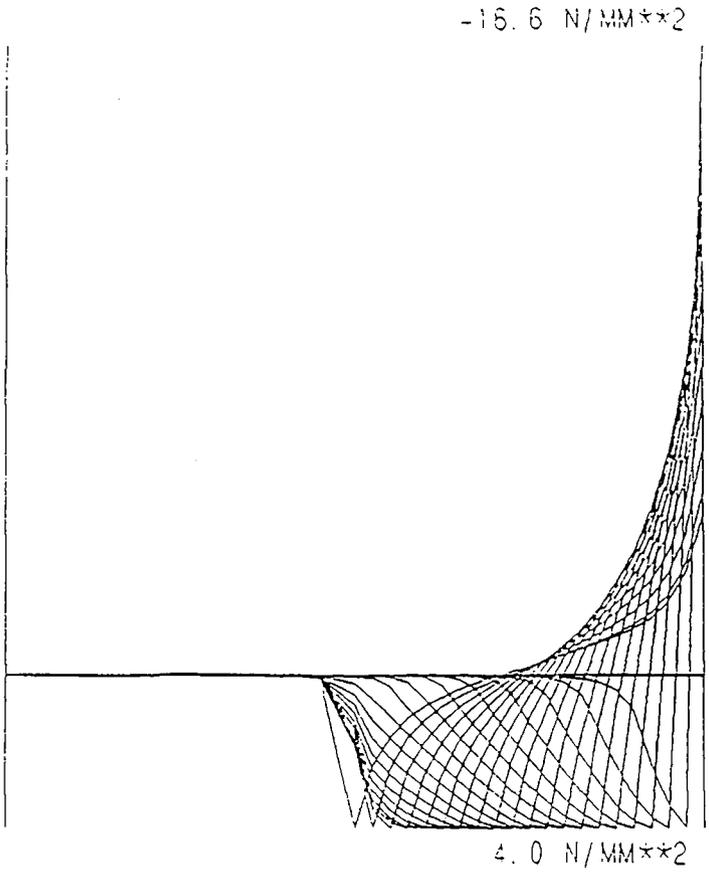
FINITE ELEMENT CODES FOR MATERIALS SCIENCE AND STRUCTURAL ENGINEERING
 FEMHNSSE
 FRACTURE/1
 DATE: 85/02/13.

TITLE: CONCRET TYPE N (400KG/M³)
 W/C=0.45 AGE=21 DAYS

FPL/ML 3

Fig. 4.8

STRESS DISTRIBUTIONS DURING CRACK PROPAGATION



FINITE ELEMENT CODES FOR MATERIALS SCIENCE AND STRUCTURAL ENGINEERING

FEMRASSSE

FRACJURE/1

DATE: 85/02/13.

TITLE: CONCRETE TYPE A (400KG/M**3)

W/C=0.45 AGE=21 DAYS

EPFL/LMC

4

Fig. 4.9

formation et la propagation de fissures dans des éléments simples en béton, tels les poutres, les CT-spécimens ou les anneaux. Ce module est basé sur la méthode décrite ci-dessus.

L'Input de ce module consiste en la géométrie de l'échantillon, la profondeur de l'entaille dans le cas où celle-ci est présente, le module d'élasticité, le coefficient de Poisson et la courbe σ - W (diagramme de radoucissement à la traction). De plus, la densité du matériau γ est aussi introduite dans le but de tenir compte de l'influence du poids propre de la structure à étudier. La courbe σ - W peut être décrite par une ligne polygonale contenant au maximum dix points.

L'Output essentiel de ce programme est donné graphiquement dans les figures 4.6 à 4.9.

4.4 Influence de l'allure de la branche descendante relative au diagramme de radoucissement (σ - W) sur le diagramme charge-déplacement (F - δ)

Dans le cas le plus simple, la branche descendante relative au radoucissement du matériau (σ - W) est supposée décrite par une simple droite (voir fig. 4.6). Récemment, Hillerborg [50] a suggéré d'utiliser plutôt une courbe bilinéaire. Cette courbe bilinéaire est caractérisée par son point de brisure (break-point) défini par les coordonnées (σ_1, W_1) dans le diagramme σ - W .

Dans ce qui suit, nous allons étudier la sensibilité du choix de la position de ce point (σ_1, W_1) sur la courbe charge-déplacement résultant d'un essai expérimental (cf. § 4.2). La figure 4.10b montre schématiquement une courbe (σ - W) linéaire et une autre bilinéaire et la définition des paramètres utilisés ci-dessous.

Dans cette étude le point A de coordonnées $\sigma = f_t$ et $W = 0$ reste inchangé; de plus l'énergie de rupture G_F représentée par l'aire de la surface délimitée par la courbe σ - W et l'axe W , est maintenue constante pour toutes variations du point de brisure B.

Pour la courbe σ - W linéaire on a:

$$W_e = \frac{2 G_F}{f_t} \quad (4.9)$$

La courbe bilinéaire est définie par les points A, B et C ayant respectivement les coordonnées suivantes:

$$A = (0, f_t) \quad (4.10)$$

$$B = (\beta W_1, \alpha f_t) ; \text{ avec } 0 < \alpha < 1 \quad (4.11)$$

$$C = (\gamma W_1, 0) \quad (4.12)$$

La condition de la constance de l'énergie G_F s'exprime par la relation suivante qui lie les paramètres d , β et γ :

$$\beta + d\gamma = 1 \quad (4.13)$$

La figure 4.10a montre les résultats obtenus par cette analyse, sous forme de diagrammes charge-déformation. La position du point de brisure a été variée systématiquement. Les 36 points choisis pour cette étude de sensibilité sont indiqués sur la figure 4.10b. Les valeurs expérimentales de l'essai (poutre entaillée flexion en 3 points) relatif à cette analyse sont repérées par des points étoilés dans la figure 4.10a

Les résultats de la figure 4.10 indiquent clairement que, pour un calcul réaliste de la courbe charge-déformation, le choix correct du point de brisure de la branche descendante bilinéaire est de prime importance. En d'autres termes, la connaissance de la valeur de l'énergie de rupture G_F et des valeurs des autres propriétés du matériau telles le module d'élasticité, la résistance à la traction, ne suffit pas à une analyse objective de la mécanique de la rupture du béton; l'allure du diagramme σ - W doit absolument entrer en ligne de compte [58, 59].

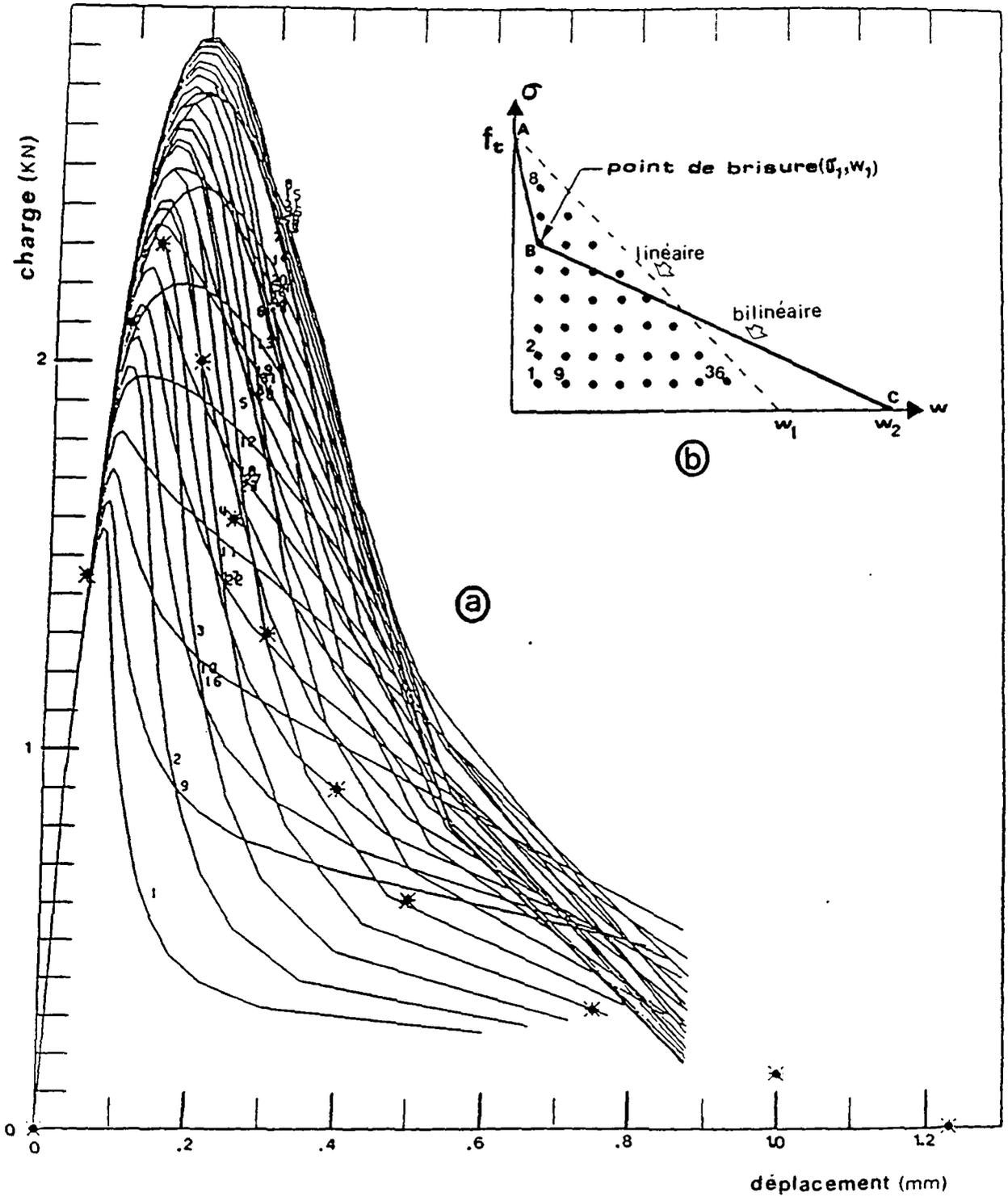


Fig. 4.10

- a) : Courbes charge-déformation calculées pour
- b) : 36 diagrammes de radoucissement bilinéaires différents, l'énergie de rupture G_F est gardée constante.

4.5 Détermination numérique du diagramme de radoucissement (σ - W)

Dans ce qui suit nous allons brièvement décrire comment il est possible de déterminer les paramètres essentiels du diagramme de radoucissement (σ - W) à partir des résultats expérimentaux qui sont donnés par la courbe charge-déformation (F - δ).

Dans l'hypothèse d'un diagramme σ - W bilinéaire, les quatre paramètres à déterminer sont la résistance à la traction f_t , les coordonnées σ_1 et W_1 du point de brisure et l'ouverture maximale de la fissure fictive définie par W_2 . Ces quatre grandeurs sont montrées sur la figure 4.10b. Dans le but de trouver un choix optimum des paramètres recherchés, il convient de minimaliser l'erreur entre la courbe expérimentale et la courbe calculée par le programme FRACTURE/1. Il suffit donc de trouver le minimum de la fonctionnelle suivante:

$$S(f_t, \sigma_1, W_1, W_2) = \int_0^{\delta_0} (F_e - F_c)^2 d\delta \quad (4.14)$$

où F_e est la courbe de charge-déformation mesurée

$F_c = F_c(f_t, \sigma_1, W_1, W_2)$ est la courbe charge-déformation calculée

La recherche des paramètres f_t, σ_1, W_1, W_2 qui minimalisent $S(f_t, \sigma_1, W_1, W_2)$ est accomplie selon la méthode de Newton-Raphson [58,60], dont une description brève est donnée ci-dessous.

Dans ce qui suit, nous utiliserons les notations suivantes:

$$\vec{X} = (x_1, x_2, x_3, x_4) = (f_t, \sigma_1, W_1, W_2) \quad (4.15)$$

$$S_i = \frac{\partial S}{\partial X_i} \quad i = 1, 4 \quad (4.16)$$

$$S_{i,j} = \frac{\partial^2 S}{\partial X_i \partial X_j} \quad i = 1, 4 ; j = 1, 4 \quad (4.17)$$

L'approximation quadratique de $S(\vec{X})$ autour d'un point \vec{X}^0 s'écrit:

$$S(\vec{X}) = S(\vec{X}^0) + \sum_{i=1}^4 (x_i - x_i^0) S_i(\vec{X}^0) + \frac{1}{2} \sum_{i,j}^4 (x_i - x_i^0)(x_j - x_j^0) S_{i,j}(\vec{X}^0) \quad (4.18)$$

En différenciant (4.18) respectivement par rapport à x_1, x_2, x_3 et x_4 , on obtient:

$$\begin{aligned} S_1(\vec{X}) &= S_1(\vec{X}^0) + (x_1 - x_1^0) S_{1,1}(\vec{X}^0) + (x_2 - x_2^0) S_{1,2}(\vec{X}^0) + (x_3 - x_3^0) S_{1,3}(\vec{X}^0) + (x_4 - x_4^0) S_{1,4}(\vec{X}^0) \\ S_2(\vec{X}) &= S_2(\vec{X}^0) + (x_1 - x_1^0) S_{2,1}(\vec{X}^0) + (x_2 - x_2^0) S_{2,2}(\vec{X}^0) + (x_3 - x_3^0) S_{2,3}(\vec{X}^0) + (x_4 - x_4^0) S_{2,4}(\vec{X}^0) \\ S_3(\vec{X}) &= S_3(\vec{X}^0) + (x_1 - x_1^0) S_{3,1}(\vec{X}^0) + (x_2 - x_2^0) S_{3,2}(\vec{X}^0) + (x_3 - x_3^0) S_{3,3}(\vec{X}^0) + (x_4 - x_4^0) S_{3,4}(\vec{X}^0) \\ S_4(\vec{X}) &= S_4(\vec{X}^0) + (x_1 - x_1^0) S_{4,1}(\vec{X}^0) + (x_2 - x_2^0) S_{4,2}(\vec{X}^0) + (x_3 - x_3^0) S_{4,3}(\vec{X}^0) + (x_4 - x_4^0) S_{4,4}(\vec{X}^0) \end{aligned} \quad (4.19)$$

Si \vec{X} est un minimum local, alors on a:

$$S_i(\vec{X}) = 0 \quad i = 1, 4 \quad (4.20)$$

Supposons que l'on recherche ce minimum au voisinage de \vec{X}^0 , alors exprimons les coordonnées de ce point comme suit: $(x_1^0 + h_1, x_2^0 + h_2, x_3^0 + h_3, x_4^0 + h_4)$. Les termes h_i ($i = 1, 4$) peuvent être calculés approximativement par le système suivant:

$$\begin{aligned} 0 &= S_1(\vec{X}^0) + h_1 S_{1,1}(\vec{X}^0) + h_2 S_{1,2}(\vec{X}^0) + h_3 S_{1,3}(\vec{X}^0) + h_4 S_{1,4}(\vec{X}^0) \\ 0 &= S_2(\vec{X}^0) + h_1 S_{2,1}(\vec{X}^0) + h_2 S_{2,2}(\vec{X}^0) + h_3 S_{2,3}(\vec{X}^0) + h_4 S_{2,4}(\vec{X}^0) \\ 0 &= S_3(\vec{X}^0) + h_1 S_{3,1}(\vec{X}^0) + h_2 S_{3,2}(\vec{X}^0) + h_3 S_{3,3}(\vec{X}^0) + h_4 S_{3,4}(\vec{X}^0) \\ 0 &= S_4(\vec{X}^0) + h_1 S_{4,1}(\vec{X}^0) + h_2 S_{4,2}(\vec{X}^0) + h_3 S_{4,3}(\vec{X}^0) + h_4 S_{4,4}(\vec{X}^0) \end{aligned} \quad (4.21)$$

Sous forme matricielle, le système s'écrit simplement:

$$\vec{\nabla}S^0 = - [H]_0 \cdot \vec{h}_0 \quad (4.22)$$

L'indice 0, indique que les grandeurs sont évaluées au point \vec{X}_0 , $\vec{\nabla}$ est le vecteur gradient et $[H]$ est la matrice Hessienne (matrice des dérivées secondes).

La solution est obtenue par inversion de la matrice $[H]_0$:

$$\vec{h}_0 = - [H]_0^{-1} \vec{\nabla}S \quad (4.23)$$

La première approche du minimum est donc: $\vec{X}^1 = \vec{X}^0 + \vec{h}_0$; on approche la solution finale par une méthode itérative qui peut être résumée par le schéma suivant:

$$\vec{X}^{i+1} = \vec{X}^i - [H]_i^{-1} \vec{\nabla}S^i \quad (4.24)$$

La matrice $[H]$ et le vecteur $\vec{\nabla}S^i$ sont évalués numériquement. Les figures 4.11 montrent la comparaison entre trois courbes expérimentales (courbes munies de points) et les courbes calculées par la méthode d'ajustement décrite ci-dessus [58].

4.6 Influence de la taille maximale des granulats sur les paramètres de la rupture du béton

La méthode d'ajustement décrite ci-dessus nous permet donc d'obtenir, à partir d'une courbe expérimentale, les paramètres essentiels du processus de rupture du béton. Dans ce contexte, les paramètres déterminés numériquement sont l'énergie de rupture et l'allure du diagramme de radoucissement. On peut ainsi étudier l'influence d'un grand nombre de facteurs, tels le rapport eau/ciment, l'âge du matériau lors du chargement, la vitesse de charge, la granulométrie, ... sur les paramètres décrivant le processus de rupture du béton [58, 61, 62].

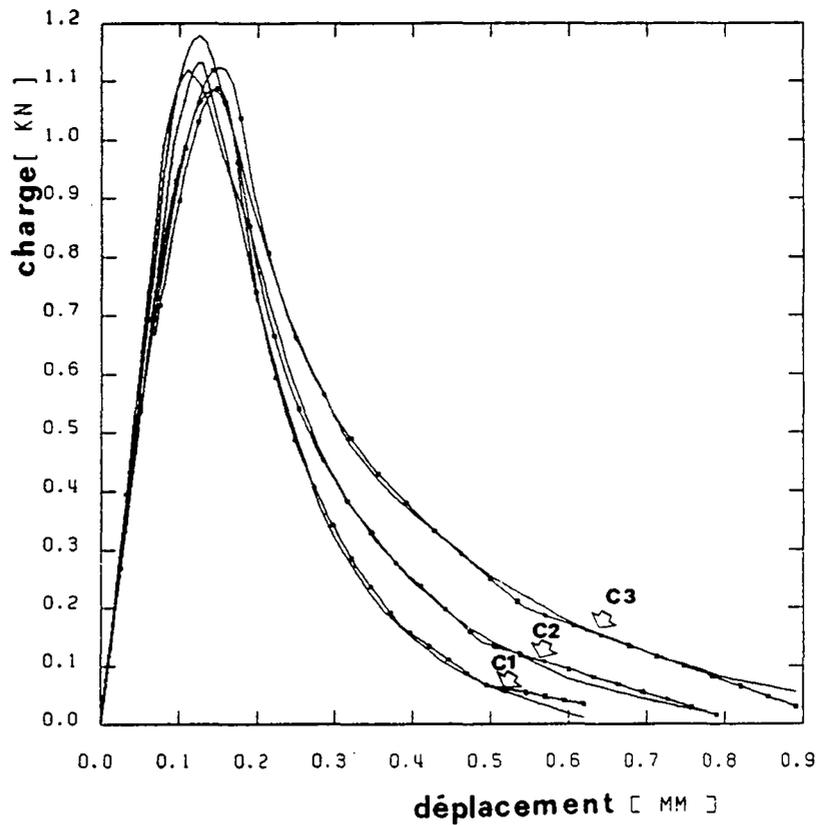


Fig.4.II :

Courbes charge-déplacement, mesurées (courbes munies d'étoiles) et ajustées, pour 3 bétons de types différents par la taille maximale de leurs granulats. Les diamètres maximum des granulats pour les 3 bétons sont 3, 8 et 16 mm respectivement pour C1, C2 et C3.

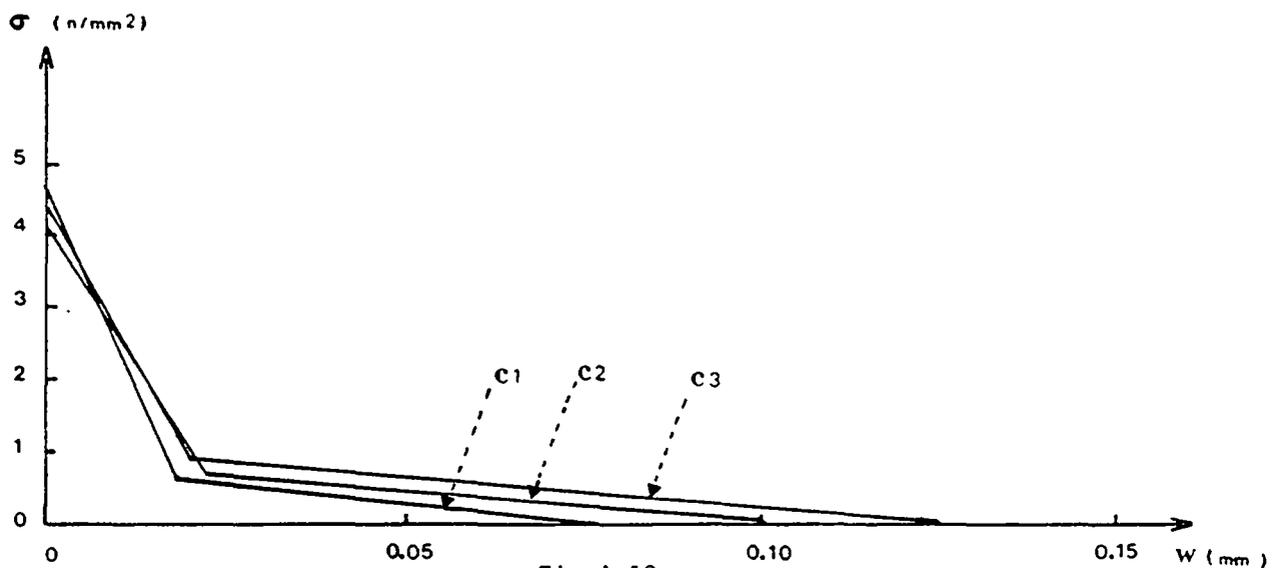


Fig.4.I2 :

Diagrammes de radoucissement bilinéaires déterminés par ajustement et correspondants aux trois bétons relatifs à la Fig. 4.II.

L'influence de la taille maximale des inclusions a été étudiée sur trois bétons de types différents (taille maximale 3, 8 et 16 mm). Les paramètres de la rupture déterminés numériquement sont indiqués sur le tableau 4.1.

Type de béton	Taille maximale des inclusions (mm)	G (RILEM) (N/m)	Paramètres du diagramme de radoucissement				
			G_F (N/m)	f_t (N/mm ²)	σ_1 (N/mm ²)	W_1 (mm)	W_2 (mm)
C ₁	3	75	63	4.7	0.57	0.017	0.077
C ₂	8	92	76	4.0	0.64	0.022	0.100
C ₃	16	122	94	4.4	0.82	0.020	0.123

Tableau 4.1: Influence de la taille maximale des granulats sur l'allure du diagramme de radoucissement.

La figure 4.11 montre la comparaison entre les courbes expérimentales et les courbes déterminées numériquement pour les trois types de béton C₁, C₂, C₃. La figure 4.12 présente les trois diagrammes bilinéaires de radoucissement résultant de cette analyse.

Ces résultats montrent que la taille maximale des inclusions joue un grand rôle dans le processus de rupture du béton. L'énergie de rupture G_F et l'ouverture maximale de la fissure fictive W_2 sont fonction croissante des dimensions des granulats. Des analyses similaires effectuées sur du béton de barrage où les granulats utilisés ont des dimensions de l'ordre de 80 mm ont aussi révélé cette tendance à l'augmentation de l'énergie de rupture G_F et de l'ouverture maximale de la fissure fictive avec la taille des inclusions. Ces deux dernières valeurs étaient respectivement de l'ordre de 230 N/m et 0,32 mm.

4.7 Conclusions

Il a été montré que la connaissance de la valeur de l'énergie de rupture G_F est insuffisante pour une prévision réaliste du processus de fissuration dans le béton. Avec une analyse numérique appropriée des résul-

tats expérimentaux, il est possible de déterminer d'une façon judicieuse les paramètres de rupture du matériau, i.e. l'énergie de rupture et les caractéristiques du diagramme de radoucissement. Un tel fait montre l'importance des méthodes numériques dans la science des matériaux.

chapitre 5

SIMULATION ET ANALYSE DES
STRUCTURES COMPOSITES

CHAPITRE 5 : SIMULATION ET ANALYSE DES STRUCTURES COMPOSITES

5.1 Introduction

Le béton est un matériau composite avec divers inhomogénéités et défauts structuraux de différentes dimensions. Ses propriétés ne peuvent pas être liées directement à sa structure complexe. Dans le but de développer des lois des matériaux basées sur des mécanismes réels, il est nécessaire d'introduire différents niveaux structuraux de matériau. L'approche des trois niveaux (Three Level Approach or TL Approach) s'avère être un moyen prometteur pour comprendre et prédire le comportement mécanique du béton [63-68]. Dans cette approche, les trois niveaux considérés sont les suivants:

Micro-niveau :

A ce niveau, des modèles de la science des matériaux basés sur des mécanismes réels sont utilisés pour décrire qualitativement et quantitativement le comportement complexe physique, chimique et mécanique de la pâte de ciment durcie. Un modèle décrivant ce micro-niveau est le modèle de München [69].

Méso-niveau :

Le méso-niveau est introduit pour tenir compte de la nature composite du matériau et de ses inhomogénéités. Cela signifie que le béton est représenté par un modèle à deux phases. La première phase, phase dispersante, est la matrice de pâte de ciment durcie parsemée de pores et de préfissures. La deuxième phase, phase dispersée, représente les granulats.

Macro-niveau :

Le macro-niveau est utilisé pour développer des lois de matériaux réalistes, directement applicables pour l'ingénieur, et basées sur

l'information recueillie sur les deux niveaux structuraux précédents. A l'échelle de ce macro-niveau, le béton est considéré comme matériau homogène.

Dans le tableau 5.1 [66], on indique les trois niveaux différents et leurs caractéristiques respectives.

Niveaux Structuraux	Traits Caractéristiques	Mécanismes	Types de modèles
Micro-niveau	Structure de la pâte de ciment durci, Xerogel	Déplacement des particules, tension capillaire, pression disjonctive, énergie de surface	Modèle de la science des matériaux (ex: Modèle de Munich /69/)
Méso-niveau	Pores, fissures, inclusions	Formation et propagation des fissures, contraintes différentielles	Modèle de l'ingénieur des matériaux (ex: béton numérique /111/)
Macro-niveau	Eléments de construction quasi-homogènes	Mécanismes apparents	Modèle de calcul de l'ingénieur constructeur. Lois des matériaux macroscopiques

Tableau 5.1: Les trois niveaux structuraux du béton, leurs traits caractéristiques, leurs mécanismes et leurs modèles [66].

5.2 Méthodes de détermination de la géométrie des granulats

5.2.1 But

Dans le but de pouvoir simuler des structures composites réalistes représentatives du béton, il est nécessaire de bien caractériser la géométrie des granulats utilisés dans la fabrication du matériau. La géométrie des granulats usuels varie fortement. D'une façon générale, on peut distinguer deux catégories de granulats; d'une part les granulats roulés de forme arrondie avec des surfaces plus ou moins lisses et ne

présentant pas d'arêtes vives; d'autre part, les granulats concassés qui sont des grains présentant des arêtes vives et des surfaces très rugueuses [70].

5.2.2 Méthodes des facteurs de forme

Plusieurs approches pour caractériser la géométrie des granulats ont été publiées et, dans beaucoup de normes relatives à la technologie du béton, on a introduit la notion des facteurs de forme [70, 71]. Nous décrivons brièvement deux méthodes.

- 1ère méthode :

On inscrit le granulat dans le plus petit parallélépipède rectangle possible, comme montré schématiquement sur la figure 5.1. Les longueurs des arêtes sont telles que: $L > D > E$. On détermine alors les 2 indices suivants:

- l'indice d'allongement $\beta = \frac{D}{L} < 1$

- l'indice d'aplatissement $\alpha = \frac{E}{D} < 1$

Le point de coordonnées (α, β) est représenté dans un graphique appelé carré des formes. La figure 5.2 montre ce carré des formes. Selon la valeur des couples d'indices α, β , on définit des régions caractérisant grossièrement la forme des granulats. Pour un ensemble de granulats, la forme moyenne est définie par le centre de gravité. Notons que dans les normes SIA 162, pour la moitié des grains au moins, le rapport de la plus grande dimension à la plus petite doit être inférieur à 2 ($L/E < 2$), ceci pour éviter la présence d'une grande quantité de granulats du type plaquettes ou aiguilles qui donnerait une mauvaise compacité au béton.

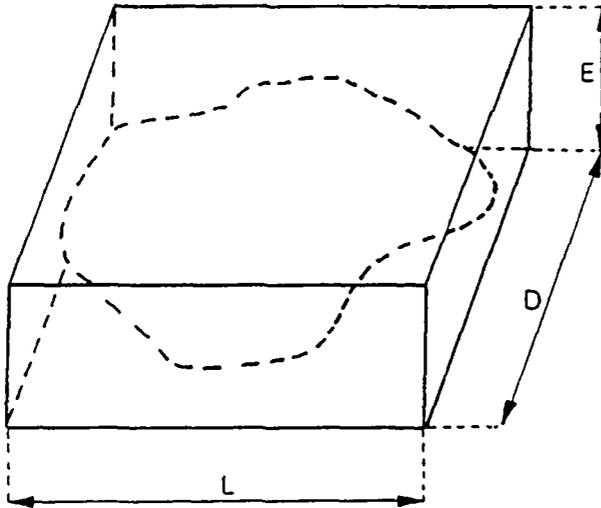


Fig. 5.1

Méthode de détermination des facteurs de forme d'un granulat en l'inscrivant dans le plus petit parallélépipède rectangle.

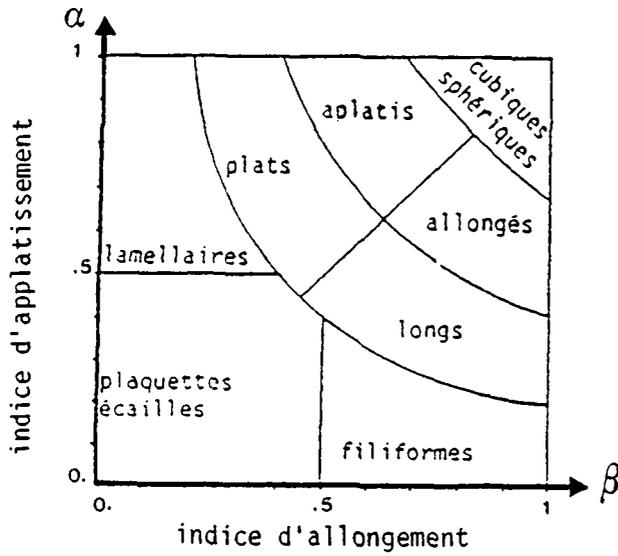


Fig. 5.2

Carré des formes.

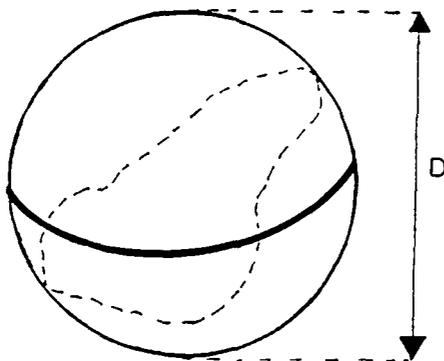


Fig. 5.3

Méthode de détermination de l'indice de sphéricité d'un granulat en l'inscrivant dans une sphère.

- 2ème méthode :

Dans cette méthode, on circonscrit une sphère au granulat, comme montré sur la figure 5.3. Ceci revient à mesurer la plus grande dimension D du granulat. On compare le volume réel du granulat à celui de la sphère circonscrite et l'on définit le coefficient de forme C ou indice de sphéricité de la façon suivante:

$$C = \frac{\text{volume réel}}{\frac{\pi D^3}{6}} \quad (5.1)$$

Pour un ensemble de granulats, le coefficient de forme est calculé par la relation (5.2):

$$C = \frac{\sum \text{volumes réels}}{\frac{\pi}{6} \sum D^3} \quad (5.2)$$

Dans la technologie du béton, il existe bien entendu des normes prescrivant les valeurs limites du coefficient C.

On peut en principe définir un grand nombre de facteurs de forme pour caractériser la géométrie des granulats [72, 73]. Il est clair que de telles méthodes, basées sur les paramètres de forme, ne donnent qu'une information grossière sur la géométrie réelle des granulats. Des méthodes plus raffinées sont nécessaires pour simuler d'une façon réaliste la géométrie des granulats.

5.2.3 Analyse du contour des granulats

5.2.3.1 Coordonnées sphériques

Pour envisager le traitement analytique permettant de décrire la géométrie d'un granulat, considérons une particule hypothétique comme montré sur la figure 5.4.

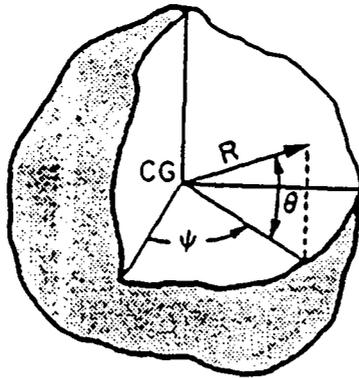


Fig. 5.4

Coordonnées sphériques. La surface de cette particule est déterminée par le rayon vecteur comme fonction des angles ϑ et ψ . L'origine des coordonnées sphériques est situé au centre de gravité, CG de la particule.

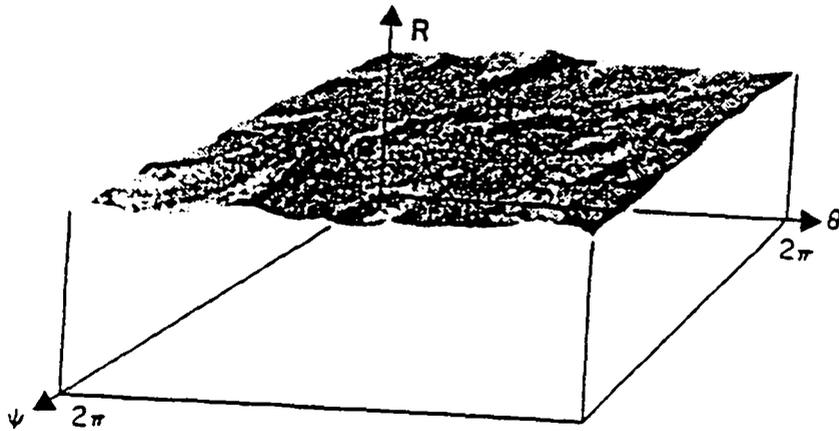


Fig. 5.5

La surface de la particule de la Fig. 5.4 est décrite dans un repère rectangulaire (R, ϑ, ψ) . Un échantillonnage de cette surface en vue d'une analyse spectrale peut être réalisé en prélevant aléatoirement un certain nombre de points /74/.

On peut définir tout point de la surface par un rayon vecteur \vec{R} ayant pour origine le centre de gravité (CG) de la particule. En coordonnées sphériques, en faisant varier θ et ϕ , le rayon vecteur \vec{R} balayera toute la surface de la particule. Dans la figure 5.5, on montre la représentation tridimensionnelle de la surface en coordonnées rectangulaires où θ et ϕ ont été transformées en coordonnées planes x-y. Cette surface peut être maintenant décomposée en une série de composantes fréquentielles. La transformation de Fourier peut être utilisée pour obtenir les amplitudes des coefficients A_n de la série résultante et leurs fréquences spatiales θ_n correspondantes. Une telle analyse tridimensionnelle nécessite l'extraction d'un très grand nombre de points de la surface de la particule à analyser. Bien qu'une telle étude tridimensionnelle ne soit pas impossible, on se restreint souvent au cas bidimensionnel en analysant par exemple la silhouette de la particule, sa projection ou une section plane.

5.2.3.2 Coordonnées polaires

L'étude morphologique de poudres ou de particules, basée sur l'analyse spectrale de Fourier, a été utilisée avec succès par un grand nombre d'auteurs [74]. Les analyses réalisées ont été limitées au cas bidimensionnel, c'est-à-dire en considérant soit la projection d'une particule sur un plan, soit une section plane de celle-ci. Considérons une section plane d'une particule comme montrée sur la figure 5.6.

Les coordonnées cartésiennes (x,y) du contour de la section de la figure 5.6 peuvent être transformées en coordonnées polaires (R, θ). Dans un repère rectangulaire (R, θ), le contour se présente sous forme de spectre qui se prête bien à l'analyse de Fourier. Un exemple de spectre de contour est représenté sur la figure 5.7.

Si $R(\theta)$ est le rayon vecteur d'un point courant du contour de la section, alors on peut écrire:

$$R(\theta) = A_0 + \sum^N A(N) \cos (N \cdot \theta + \alpha(N)) \quad (5.3)$$

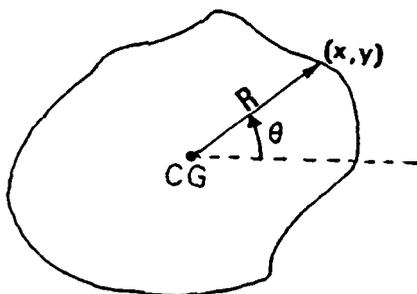


Fig. 5.6

Section plane d'une particule. Le contour peut être décrit soit par les coordonnées polaires (R, ϑ) , soit par les coordonnées rectangulaires (x, y) .

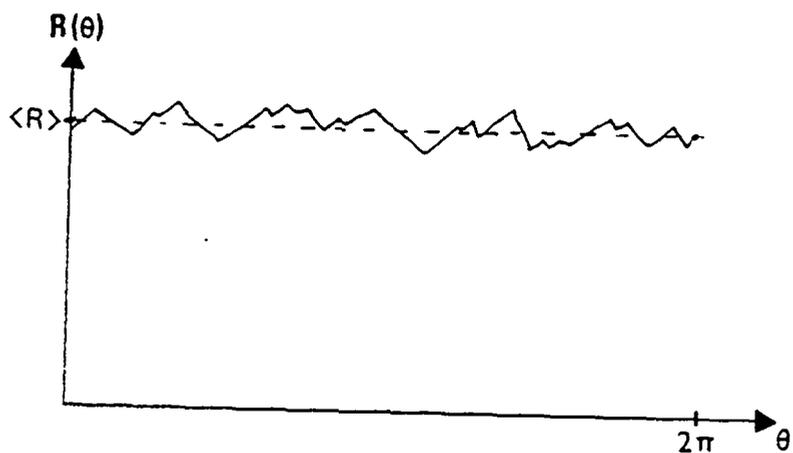


Fig. 5.7

Rayon R en fonction de l'angle ϑ dans un repère rectangulaire.

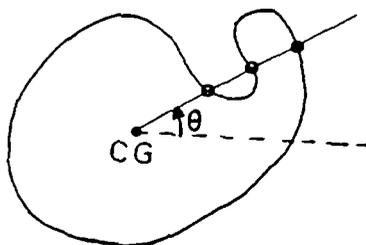


Fig. 5.8

Exemple d'une particule non holomorphe.

Chaque amplitude d'harmonique représente une contribution relative de la forme empirique de la particule [74, 75]. Il est à noter que cette analyse nécessite que le contour soit holomorphe, c'est-à-dire que pour un θ donné, il n'existe qu'une seule valeur de R . La figure 5.8 représente une particule non holomorphe où d'autres techniques d'analyse doivent être appliquées [76].

5.2.3.3 Loi des coefficients morphologiques

Un grand nombre de chercheurs travaillant indépendamment sur l'analyse morphologique de particules de différents types ont montré qu'il existe une relation simple entre les coefficients de Fourier $A(N)$ et leurs fréquences correspondantes N [74]. Le tracé du graphe d'ordonnée $\log A(N)$ et d'abscisse $\log(N)$ peut être représenté avec une bonne approximation par une droite. Ainsi, pour chaque type de particule analysé par la méthode de Fourier, les coefficients $A(N)$ calculés peuvent être représentés par la relation suivante:

$$\log A(N) = - p \log N + b \quad (5.4)$$

ou encore

$$A(N) = B \cdot N^{-P} \quad (5.5)$$

Dans la relation (5.4), p est la pente de la droite et b est l'ordonnée à l'origine. Les données issues d'un grand nombre de travaux effectués sur une grande variété de particules de types différents ont montré les mêmes relations fonctionnelles que celle décrite par la relation (5.5). Se basant sur ces résultats, Meloy [74] proposa la loi des coefficients morphologiques suivante:

Les coefficients de Fourier sont inversement proportionnels à une puissance de la fréquence du coefficient. Cette loi est donc décrite par une relation du type (5.5).

Pour une particule donnée, le graphe du logarithme de l'amplitude $A(N)$, i.e. le n -ième coefficient, en fonction du $\log N$ ou du numéro N du coef-

ficient, représente la signature de la particule. Deux postulats importants résultent des travaux de Meloy [74]:

1er postulat :

L'information utile pour la caractérisation de la forme des particules est contenue dans l'amplitude des coefficients et non dans leur phase.

2ème postulat :

Des particules ayant même genèse, même composition et même histoire doivent avoir la même signature. Les particules sont supposées avoir été créées par des processus aléatoires.

5.3 Analyse et simulation de la géométrie des granulats naturels de la Vallée du Rhône

5.3.1 Détermination de leur morphologie

Pour pouvoir caractériser la morphologie des granulats utilisés dans la confection du béton, nous avons utilisé la méthode d'analyse de Meloy décrite ci-dessus. Dans notre cas, les granulats naturels analysés sont de type roulé et proviennent de la Vallée du Rhône.

L'analyse a été faite sur une trentaine de sections de granulats prélevées sur des tranches planes de béton obtenue par sciage d'un prisme. Les contours des granulats furent reproduits sur papier en vue de leur digitalisation. Cette digitalisation réalisée au moyen d'un programme spécial [77] consiste à prélever un échantillon de points de chaque contour. Les coordonnées (x_i, y_i) de ces points sont automatiquement stockées sur bande magnétique en vue de leur traitement ultérieur. Les points-contour (x_i, y_i) prélevés furent transformés en coordonnées polaires (R_i, θ_i) et les spectres ainsi obtenus sont décomposés en séries de Fourier, comme indiqué dans le paragraphe 5.2.3. On procède alors au calcul des coefficients du Fourier.

Les résultats de cette étude sont montrés sur la figure 5.9 où les petits rectangles représentent les valeurs des logarithmes des coefficients de Fourier $A(N)$. Dans le but d'éliminer l'effet de taille, ceux-ci ont été normalisés au rayon moyen A_0 . Sur le diagramme de la figure 5.9, il est évident qu'une droite est une bonne approximation pour représenter les points trouvés. La méthode des moindres carrés permet d'obtenir les paramètres de la droite théorique, la pente p et l'ordonnée à l'origine b . La droite de la figure 5.9 représente donc la loi des coefficients morphologiques relative au type de granulats étudiés, c'est-à-dire les granulats de la Vallée du Rhône.

5.3.2 Génération des granulats

La loi des coefficients morphologiques ainsi déduite de notre analyse et représentée sur la figure 5.9 constitue la signature propre au type de granulats analysés.

Le premier postulat stipule que toute l'information relative à la morphologie des granulats est contenue dans les coefficients $A(N)$. Le second postulat de Meloy qui signifie qu'une famille de granulats ayant des genèses, des compositions et des histoires similaires et créées par des processus aléatoires doivent avoir la même signature. Ainsi, de la loi morphologique trouvée, il est possible de reconstruire des granulats de même type que ceux analysés, c'est-à-dire appartenant à la même famille. La méthode de génération de granulats du type analysé peut se résumer à l'équation suivante [74]:

$$R(\theta) = A_0 : \sum^N \bar{A}(N) \cos (N\theta + \alpha_R(N)) \quad (5.6)$$

Les coefficients $\bar{A}(N)$ sont calculés d'après les paramètres p, b de la droite de la figure 5.9.

Le terme $\alpha_R(N)$ de l'équation (5.6) est un angle de phase aléatoire. L'introduction de ce coefficient et son caractère aléatoire sont les conséquences du premier et deuxième postulats.

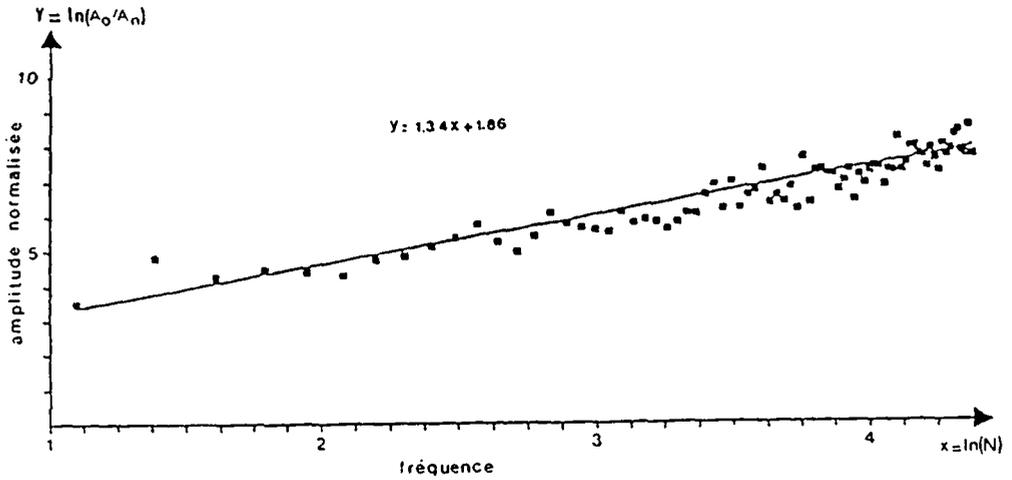


Fig. 5.9

Loi des coefficients morphologiques obtenue par analyse des granulats de la Vallée du Rhône.

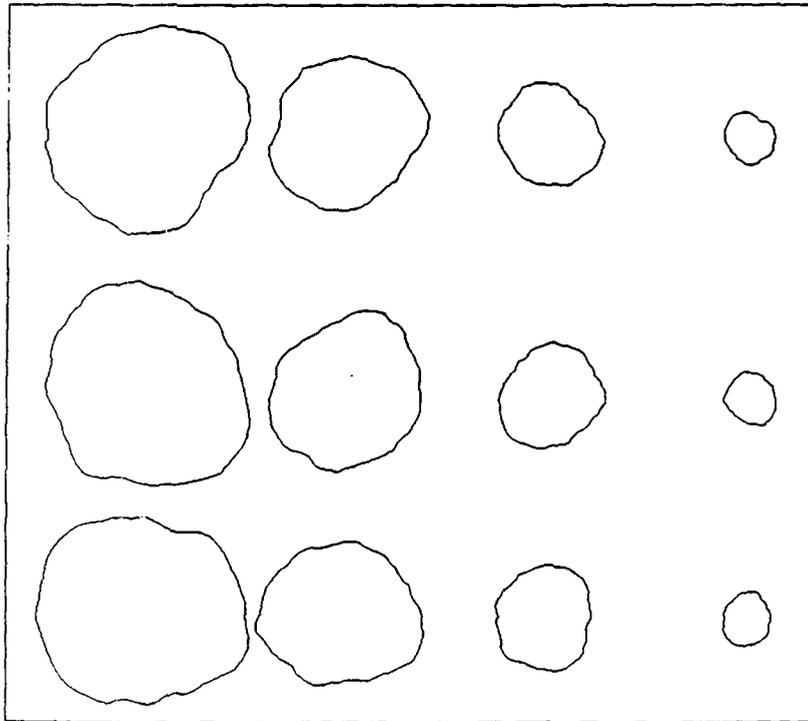


Fig. 5.10

Simulation de sections de granulats de différents rayons moyens d'après la loi morphologique de la Fig. 5.9.

Par cette méthode, on peut générer sur ordinateur des granulats du type de la Vallée du Rhône comme montré sur la figure 5.10, en utilisant la relation 5.5.

5.4 Distributions granulométriques

5.4.1 Généralités

Depuis que l'on fabrique des bétons, on s'est efforcé d'élaborer des théories, plus ou moins inspirées de l'expérience, dans le but de définir les règles de composition pour la fabrication de ces bétons.

L'étude de la composition granulaire d'un béton consiste à définir les pourcentages optimaux des granulats de différentes dimensions dont on dispose, afin de réaliser un béton dont les qualités soient celles recherchées pour la construction d'un ouvrage donné.

En général, les principales qualités requises pour un béton sont une bonne résistance, une bonne étanchéité et une longue durabilité. Pour atteindre ces objectifs, diverses conditions doivent être observées:

- le matériau, à l'état frais, doit être facilement mis en oeuvre et aisément compactable dans le but de réduire sa porosité;
- un maximum de granulats par unité de volume du matériau afin de réduire la quantité de la pâte liante nécessaire pour remplir les vides;
- un minimum de surface spécifique pour réduire la quantité d'eau de gâchage et obtenir un rapport eau/ciment faible, ce qui confère une bonne résistance au matériau.

Ces conditions sont intimement liées à la composition granulométrique du matériau.

Ainsi, le problème fondamental de la granulation consiste à trouver un ballast à forte compacité permettant, en outre, une bonne maniabilité du béton, c'est-à-dire que le matériau à l'état frais doit être suffisamment plastique pour qu'il puisse être mis en oeuvre sans qu'il y ait tendance au démélange et à la formation de nids de gravier [70, 78, 80].

5.4.2 Courbes granulométriques théoriques

Pour répondre aux qualités imposées au béton, plusieurs chercheurs, se basant sur leurs travaux expérimentaux, proposèrent différentes courbes granulométriques empiriques données sous formes de fonctions mathématiques.

La forme générale de l'équation empirique pour les courbes granulométriques la plus fréquemment utilisée est donnée par la relation suivante [81]:

$$y = f(\phi) = g \left(\frac{\phi}{\phi_m} \right)^i + (100 - g) \left(\frac{\phi}{\phi_m} \right)^h \quad (5.7)$$

ou

$$y = f(\phi_r) = g \phi_r^i + (100 - g) \phi_r^h \quad (5.8)$$

où $y = f(\phi)$ = ordonnée de la courbe cumulée relative à une particule de dimension ϕ , c'est-à-dire le pourcentage de particules ayant des diamètres inférieurs ou égaux à ϕ .

ϕ_m = diamètre maximum des particules

$\phi_r = \phi/\phi_m$ = diamètre relatif des particules

g, i, h = paramètres relatifs à la courbe théorique pouvant dépendre, entre autres, de n , rapport entre le poids du ciment à celui des granulats.

Nous mentionnerons ci-dessous les distributions granulométriques les plus utilisées dans la pratique.

Loi de Füller

En 1907, Füller et Thompson, se basant sur leurs travaux expérimentaux [78], proposèrent une loi parabolique de composition pour les granulats dans le béton, en définissant une granulométrie continue qui s'exprime par la relation suivante:

$$f(\phi) = 100 \sqrt{\frac{\phi}{\phi_m}} \quad (5.9)$$

Cette relation est un cas particulier de l'équation générale (5.7) où g est nul et h a la valeur 0,5. Cette courbe granulométrique théorique, dite loi de Füller, correspond à un béton très résistant, mais manquant de plasticité et difficile à mettre en oeuvre [78].

Loi de Bolomey

Bolomey en 1925 [82] modifia la parabole de Füller en y introduisant une constante g tenant compte du ciment et des éléments très fins de dimensions inférieures à 0,5 mm et dépendant de la nature du matériau et du degré de plasticité requis. La loi granulométrique de Bolomey s'exprime par la fonction suivante:

$$f(\phi) = g + (100 - g) \sqrt{\frac{\phi}{\phi_m}} \quad (5.10)$$

D'après les études expérimentales de Bolomey, la constante g prend des valeurs de 8 à 14. La diversité des valeurs de g , donc des courbes granulométriques, indique que l'on peut s'écarter sensiblement de l'une ou l'autre composition sans diminuer notablement les qualités du béton.

Dans le tableau 5.1, nous donnons plusieurs distributions théoriques recommandées par différentes autorités pour l'optimisation des granulométries. Ces courbes sont des cas particuliers de l'équation (5.7).

5.4.3 Dimensions maximales des particules

Dans toutes les distributions granulométriques mentionnées ci-dessus, apparaît un paramètre important, ϕ_m , c'est-à-dire le diamètre maximum des grosses particules. La valeur spécifique limite de ϕ_m dépend de la dimension minimale de la construction en béton, de la répartition des armatures au sein du matériau, du but requis pour la construction et des propriétés exigées pour le matériau.

Tableau 5.II: Paramètres de l'équation (5.7) pour l'optimisation des granulométries d'après différentes autorités [81].

$$y = g \left(\frac{\phi}{\phi_m} \right)^i + (100 - g) \left(\frac{\phi}{\phi_m} \right)^h$$

Autorité	Paramètres			Limites pour optimum		Remarques
	g	i	h	n	ϕ_m [mm]	
Füller et Thompson	0	-	0,5	6 9	5-100 20-40	Pour les granulats seulement.
EMPA	50	1	0,5	4 6	15-30 3-8	Pour les granulats seulement.
Popovics	$15 \left(1 - \frac{3}{n} \right)$	0	$\frac{0,5}{1-1,6n}$	4-10	5-100	Pour les granulats seulement.
Bolomey	8-10 10-14	0 0	0,5 0,5	6-8 6-8	20-80 20-80	Pour mélange granulats ciment Pour mélange granulats con- cassés ciment.
Popovics	15 20	0 0	0,5 0,56	4-10 4-10	5-100 2,5-150	Pour mélange granulats ciment Pour mélange granulats ciment
Caquot et Faury	$\frac{100}{2,836 \phi^{0,2} - 1}$	0	0,20	?	Combinaison de 2 granulométries, la première pour des particules telles que $0,0065 < \phi < \phi_m/2$ et la seconde pour $\phi_m/2 < \phi < \phi_m$	
	et - 672,5	0	0,20	?		

Granulat: sable et gravier sauf indications contraires. n: rapport en poids entre les granulats et le ciment. ϕ_m = taille maximale des particules.

Une augmentation de la taille maximum des granulats dans le béton peut fournir certains avantages techniques. Ainsi, une économie de ciment peut être réalisée si la taille maximale des inclusions est augmentée, car dans ce cas la quantité de granulats dans le béton est aussi augmentée [81]. De plus, plus les granulats sont gros, moins ils ont besoin d'eau, et plus résistant sera le matériau.

Donc, dans plusieurs cas, il est désirable d'utiliser des particules aussi grosses que le permettent les circonstances prévalantes. Cependant, il est recommandé par les normes une valeur limite de ϕ_m , ainsi pour la norme SIA, ϕ_m doit être inférieur à 1/3 environ de la plus petite dimension de l'ouvrage. D'après plusieurs sources, ϕ_m doit être inférieur ou égal à 1/4 de l'épaisseur minimale de la pièce à bétonner [81]. De plus, ϕ_m doit être lié à la distance inter-armatures de telle sorte que le béton puisse se frayer un passage à travers les groupes de barres rapprochées formant des mailles ou des fentes [79, 81]. La valeur de ϕ_m est aussi limitée par l'existence de l'effet dit de paroi qui prend naissance soit au voisinage des coffrages, soit le long des surfaces des armatures (cf. § 5.7).

5.4.4 Analyse granulométrique

Le premier travail à effectuer dans la confection d'un béton est de rechercher la composition, en grosseur, des granulats dont on dispose afin de les combiner dans les meilleures conditions dans le mélange qu'on doit réaliser. On doit faire alors l'analyse granulométrique des différents lots d'agrégats: sable, gravier, cailloux. Les particules de chaque lot ne sont souvent pas de tailles égales, mais ont des tailles variées se répartissant entre deux limites. L'étendue comprise entre ces deux limites extrêmes peut être divisée en un certain nombre d'intervalles appelés classes. En pratique cette subdivision en classes se fait par tamisage, chaque classe étant liée à l'ouverture d'un tamis. L'analyse granulaire d'un lot de granulats donné se fait donc en prélevant un échantillon représentatif (1 kg pour le sable, 5 kg pour le gravier) et à mesurer la masse des grains refusés par chaque tamis. La

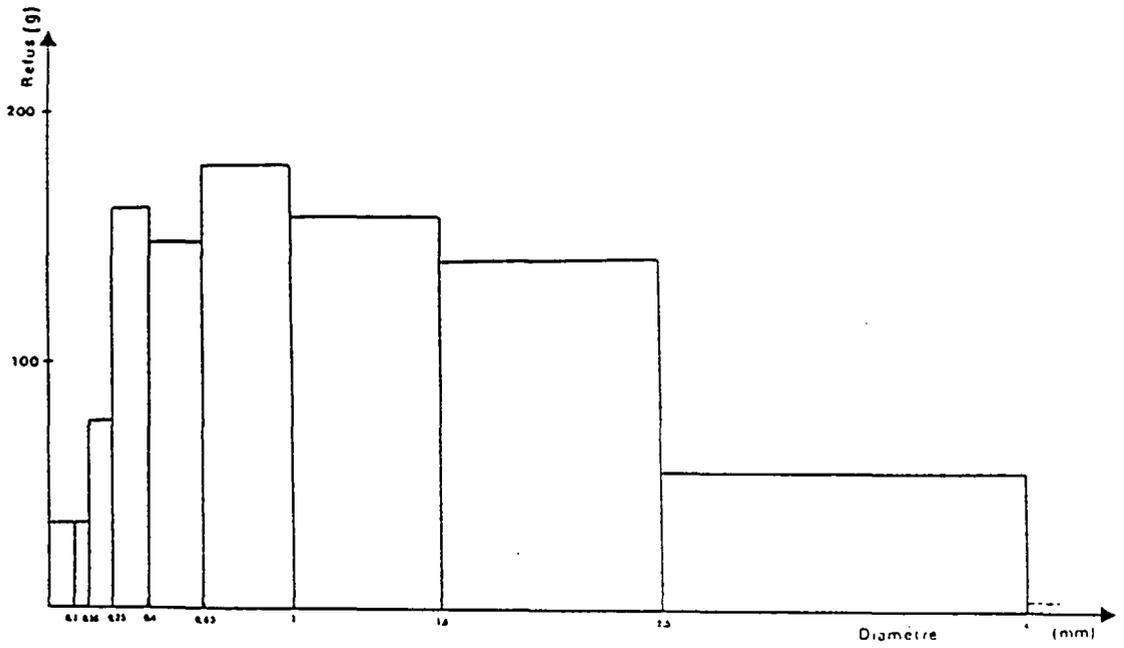


Fig. 5.II

Résultat de l'analyse granulométrique du sable de Bioley-Orjulas obtenu par tamisage.

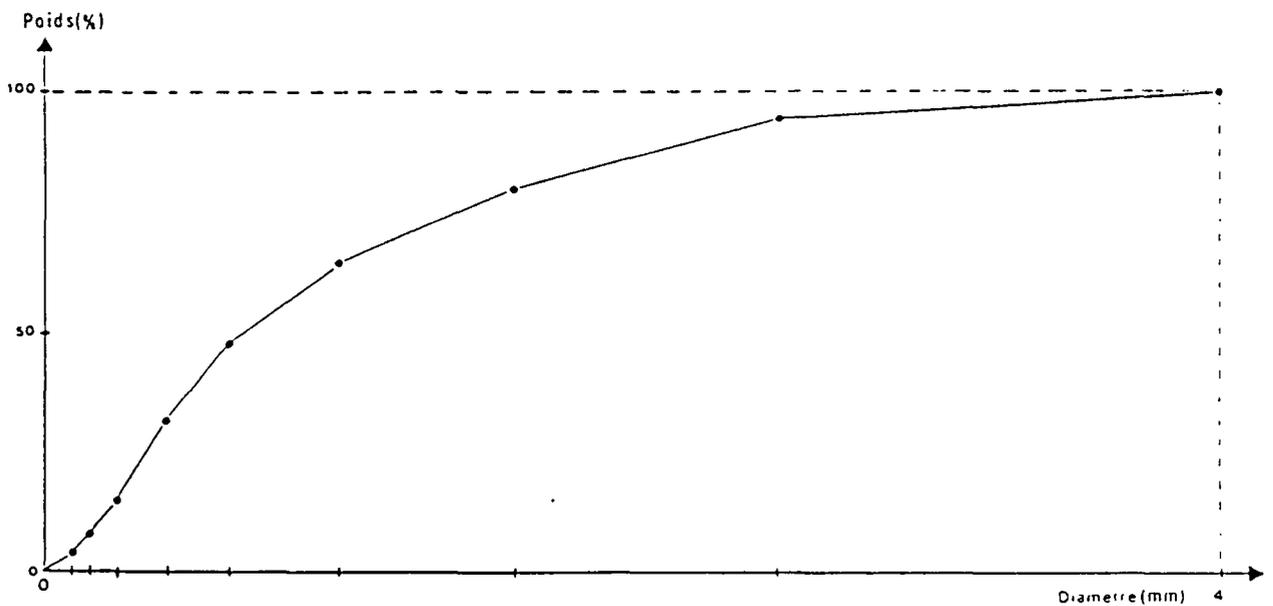


Fig. 5.I2

Distribution granulométrique cumulée correspondante à l'analyse de la Fig. 5.II .

figure 5.11 donne la répartition des grains par classe obtenue en tamisant le sable de Bioley-Orjulaz dont les dimensions limites des grains sont de 0 et 3 mm. En pratique, on ramène le poids de chaque classe au poids total de l'échantillon et l'on cumule les résultats. On porte en abscisse les dimensions des particules. On obtient ainsi la courbe granulométrique. La figure 5.12 montre la courbe granulométrique relative au sable mentionné précédemment.

5.4.5 Détermination de la combinaison granulométrique optimale et normes

Dans la fabrication du béton sur chantier, on dispose souvent de plusieurs lots différents de granulats. Chaque lot est caractérisé par sa propre granulométrie. Les granulats entrant dans la composition du matériau sont en général une combinaison des différents lots. Pour obtenir un matériau de bonne qualité, c'est-à-dire résistant et durable, il faut choisir judicieusement les proportions relatives à chaque composant entrant dans le mélange. La granulométrie du mélange doit donner un béton aussi compact que possible. Pour cette raison, la granulométrie résultante doit être définie de telle sorte à ce qu'elle se rapproche au mieux de courbes granulométriques de référence préalablement choisies ou recommandées par les normes [85, 86]. C'est ainsi que les normes SIA 162 prescrivent que le mélange des granulats doit être tel que sa courbe granulométrique soit comprise dans un fuseau granulométrique délimité par deux courbes:

a) La courbe EMPA (courbe A), dont l'équation est:

$$f(\phi) = 50 \left(\frac{\phi}{\phi_m} + \sqrt{\frac{\phi}{\phi_m}} \right) \quad (5.11)$$

b) La courbe de Füller (courbe B), donnée par:

$$f(\phi) = 100 \sqrt{\frac{\phi}{\phi_m}} \quad (5.12)$$

Pour des bétons courants, on peut étendre le fuseau jusqu'à la courbe C définie par:

$$\text{Courbe C} = \text{courbe B} + 5 \% \quad \text{pour } d > 0,5 \text{ mm} \quad (5.13)$$

Ce fuseau granulométrique est montré schématiquement sur la figure 5.14 par des courbes continues.

Le problème de la recherche de la combinaison granulométrique optimale, c'est-à-dire celle répondant aux qualités requises pour le matériau, peut être résolu par la méthode qu'on décrira ci-dessous.

Supposons que l'on dispose de N composantes. Soit, $\alpha_i(\phi)$ la distribution granulométrique de la i-ème composante. Notons, $\alpha_i(\phi_j)$ le pourcentage des grains de la i-ème composante dont les diamètres sont inférieurs ou égaux à ϕ_j . Soit β_i la proportion de la i-ème composante entrant dans une combinaison. Le problème consiste ainsi à chercher la composition qui concorde au mieux à une granulométrie $f(\phi)$ préalablement choisie ou imposée par les normes.

L'erreur relative entre le mélange défini par les proportions $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_N$ et la courbe granulométrique $f(\phi)$ en un point donné ϕ_j est:

$$e_j = \left| \sum_{i=1}^N \beta_i \alpha_i(\phi_j) - f(\phi_j) \right| \quad (5.14)$$

La déviation entre le mélange et la courbe peut s'exprimer de la façon suivante:

$$F(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_N) = \sum_{j=1}^M \left[\sum_{i=1}^N \beta_i \alpha_i(\phi_j) - f(\phi_j) \right]^2 \quad (5.15)$$

M représente le nombre de classes (ou tamis).

Les estimations de $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_N$ donnant le meilleur mélange sont celles pour lesquelles la fonction erreur-F est minimale. Les paramètres $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_N$ sont assujettis à vérifier la relation suivante:

$$\Psi(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_N) = \sum_{i=1}^N \beta_i - 1 = 0 \quad (5.16)$$

On est donc en présence d'un problème de la recherche d'un extremum lié. On forme la fonction auxiliaire suivante:

$$G(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_N, \lambda) = F(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_N) + \lambda \Psi(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_N) \quad (5.17)$$

L'extremum est ainsi obtenu en résolvant le système de (N+1) équations formé par les premières dérivées partielles de la fonction G par rapport aux β_i et la relation (5.16):

$$\frac{\partial G}{\partial \beta_i} = \frac{\partial F}{\partial \beta_i} + \lambda \frac{\partial \Psi}{\partial \beta_i} = 0 \quad i = 1, N$$
$$\Psi(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_N) = 0 \quad (5.18)$$

On obtient ainsi la combinaison donnant la granulométrie optimale.

La figure 5.13 donne les granulométries de trois composantes (0/4, 4/8 et 8/31,5), on désire alors fabriquer un béton avec un mélange de ces trois composantes dont la courbe granulométrique résultante serait aussi proche que possible de la courbe A de la figure 5.14. L'application de la méthode décrite ci-dessus donne la combinaison suivante:

$$\beta_1 = 22,21 \%$$
$$\beta_2 = 12,72 \%$$
$$\beta_3 = 65,07 \%$$

La distribution cumulée relative à cette combinaison granulométrique est montrée sur la figure 5.14 sous forme de courbe en traitillés et munie d'étoiles.

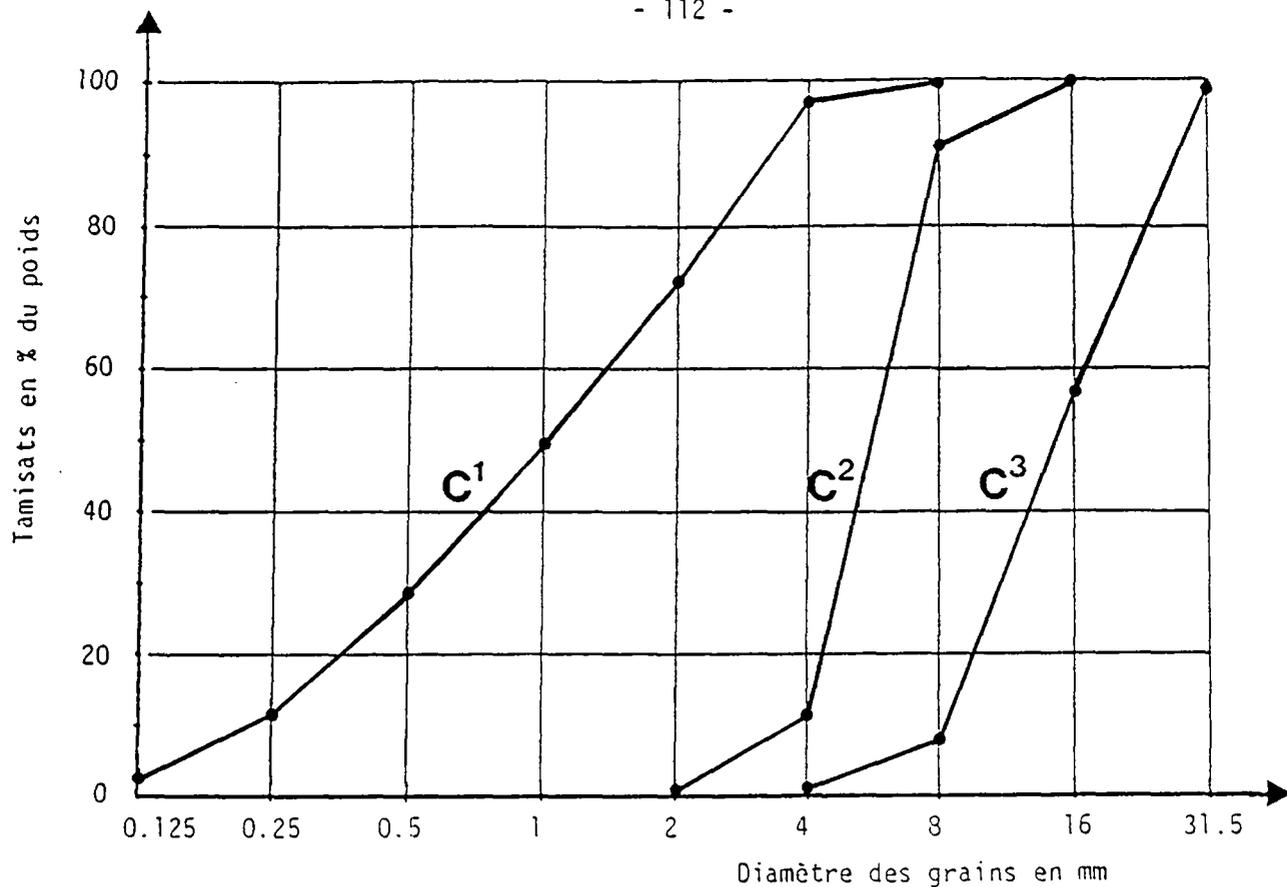


Fig. 5.13 : Trois composantes de grains de granulométries différentes. Le problème consiste à déterminer la meilleure combinaison dont la granulométrie résultante serait donnée par la courbe "A".

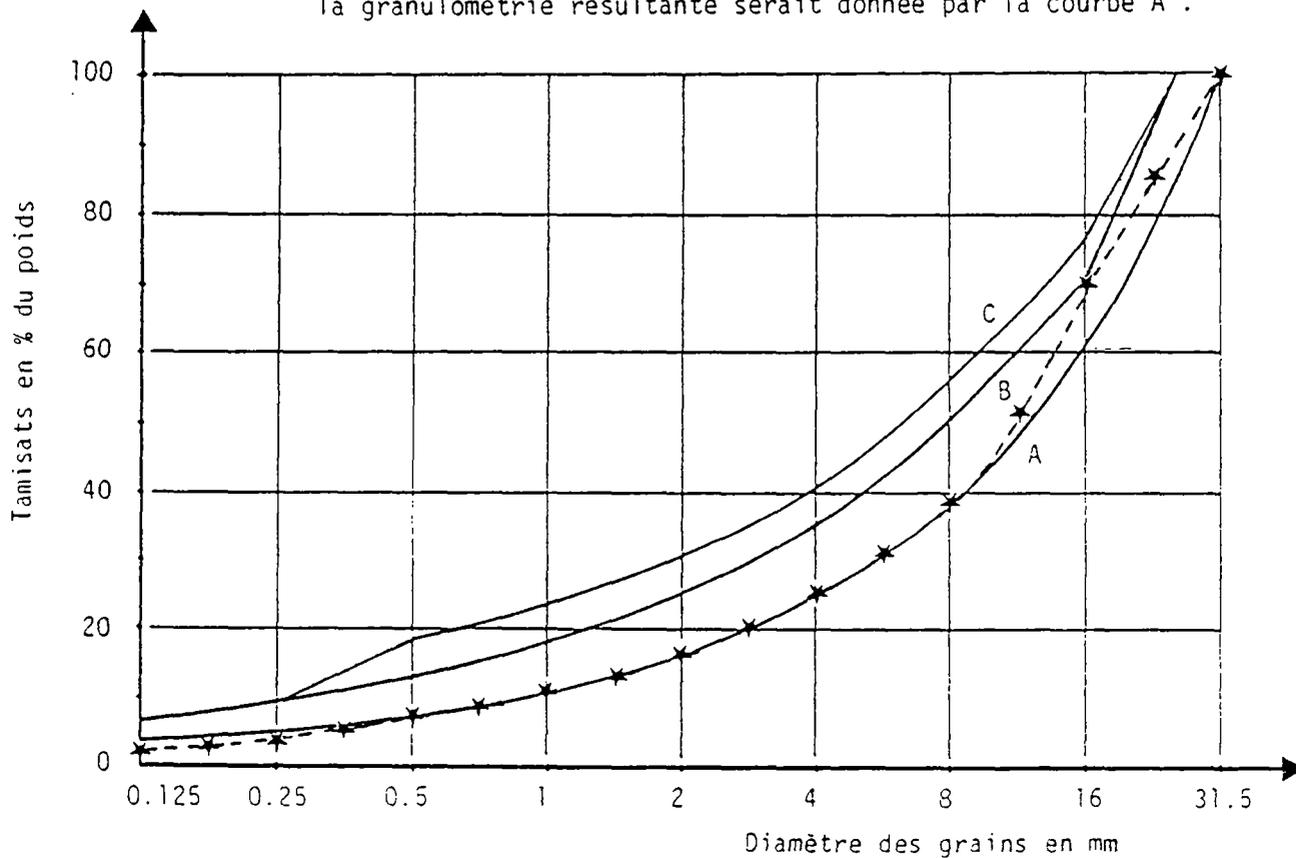


Fig. 5.14 : Fuseau granulométrique prescrit par les Normes SIA. La courbe munie d'étoiles représente la combinaison optimale des trois composantes de la Fig. 5.13 donnant une granulométrie courbe "A".

5.5 Détermination de la distribution cumulée à 2 D relative à une granulométrie donnée

5.5.1 Position du problème

Le problème à résoudre est schématisé sur la figure 5.15. Un béton ayant une distribution granulométrique donnée, $F(\phi)$, on se propose alors de déterminer la fonction de distribution, $F_{2D}(\phi)$, des diamètres des disques d'intersection (coupes planes des particules) contenus dans une section plane arbitraire du béton.

La solution à ce problème est rendue nécessaire par le fait qu'une étude numérique d'un comportement mécanique ou physique d'une structure composite à trois dimensions s'avère assez complexe malgré la puissance des ordinateurs existant actuellement. De ce fait, nous sommes amenés à nous restreindre à des études bidimensionnelles, cela signifie que nous étudions les propriétés sur des tranches planes du matériau. Nous proposons deux approches différentes pour résoudre ce problème; une approche probabiliste et une approche numérique [83, 84].

5.5.2 Approche probabiliste

Supposons que la distribution granulométrique cumulée du béton à étudier soit donnée sous la forme généralisée suivante:

$$F(\phi) = g \left(\frac{\phi}{\phi_m} \right)^i + (1 - g) \left(\frac{\phi}{\phi_m} \right)^h \quad (5.19)$$

où ϕ_m représente le diamètre de l'inclusion la plus grande.

Considérons alors un plan arbitraire π sectionnant un volume donné du matériau (cf fig. 5.15).

Dans l'analyse qui va suivre, les inclusions sont supposées de forme sphérique.

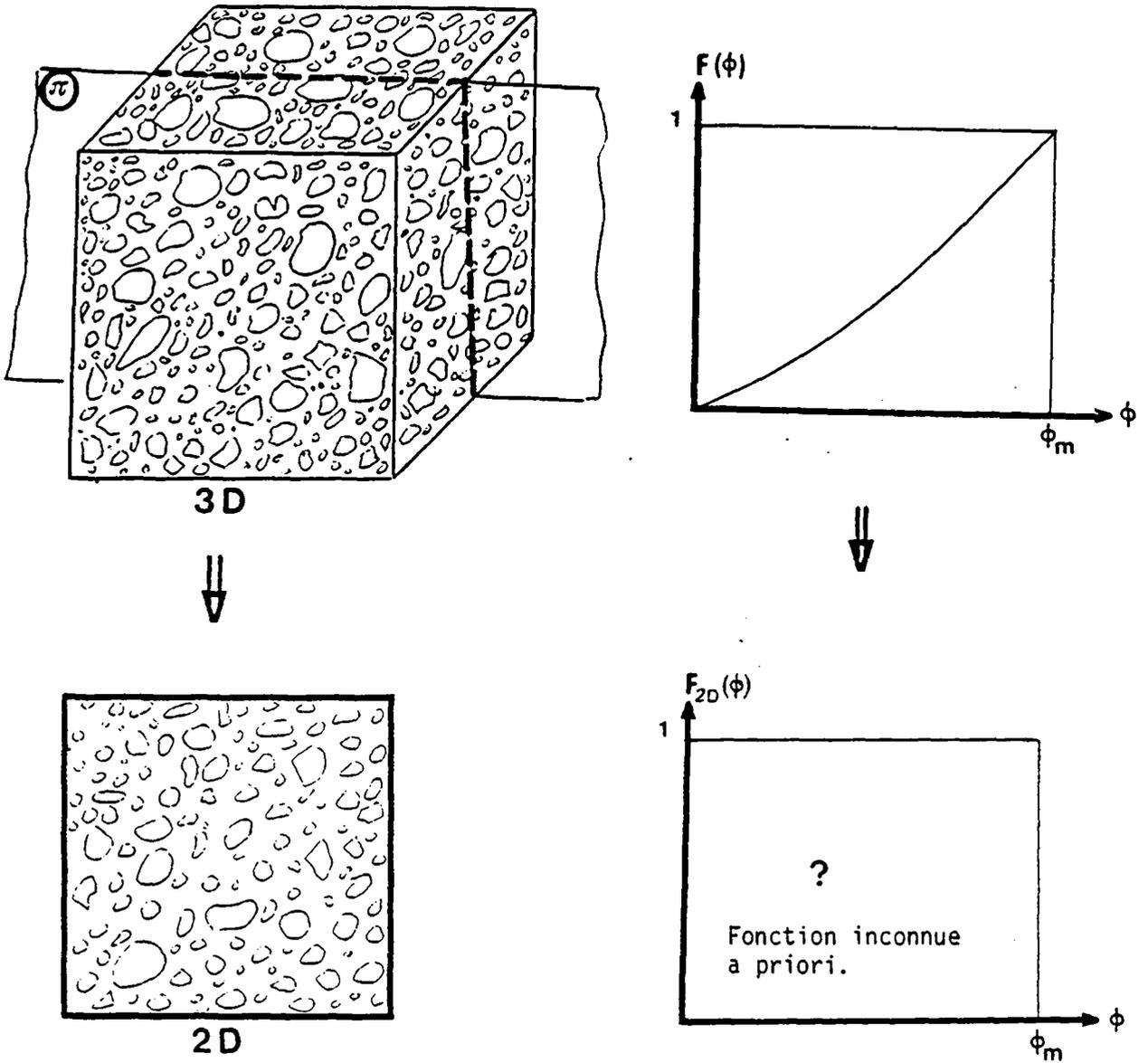


Fig.5.15 : Représentation schématique du problème de la détermination de la granulométrie à 2D à partir de la granulométrie réelle (3D).

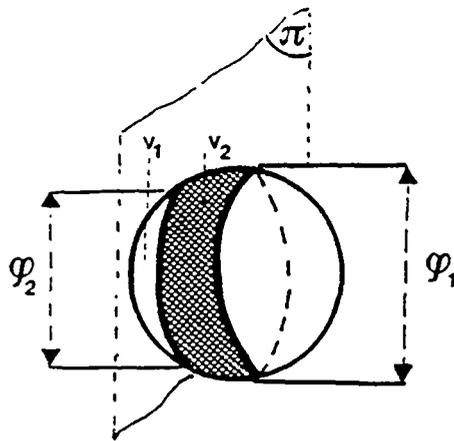


Fig.5.16 : Intersection entre un plan et une inclusion de géométrie sphérique, en vue de la détermination de la fonction de distribution des diamètres des disques d'intersection.

Soit p_0 la concentration volumique en inclusions. Pour un volume total donné du matériau V_T , p_0 est défini par:

$$p_0 = \frac{V_0}{V_T} \quad (5.20)$$

où V_0 est le volume de toutes les inclusions. p_0 peut être interprété comme la probabilité qu'a un point donné Q de se trouver dans une inclusion.

La probabilité pour qu'un point soit localisé dans une inclusion de diamètre inférieur à ϕ_1 est:

$$\bar{F}(\phi_1) = p(\phi < \phi_1) = p_0 \left[g \left(\frac{\phi_1}{\phi_m} \right)^i + (1-g) \left(\frac{\phi_1}{\phi_m} \right)^h \right] \quad (5.21)$$

La probabilité pour que ce point soit exactement dans une inclusion de diamètre ϕ_1 est donnée par la dérivée par rapport à ϕ_1 de la relation 5.21 et s'écrit:

$$p'(\phi_1) = p_0 \frac{\partial}{\partial \phi_1} p(\phi < \phi_1) \quad (5.22)$$

$$p'(\phi_1) = p_0 \left[g i \phi_1^{i-1} \cdot \phi_m^{-i} + (1-g) h \phi_1^{h-1} \phi_m^{-h} \right] \quad (5.23)$$

pour $i, h \neq -1$

$$\text{ou : } p'(\phi_1) = A \phi_1^{i-1} + B \phi_1^{h-1} \quad (5.24)$$

$$\text{avec } A = p_0 g i \phi_m^{-i} \quad (5.25)$$

$$B = p_0 (1-g) h \phi_m^{-h} \quad (5.26)$$

Analysons maintenant la probabilité pour qu'un point donné, localisé dans le plan d'intersection π , soit dans un cercle d'intersection de diamètre ϕ_2 , cette situation est schématisée sur la figure 5.16.

La probabilité qu'un tel point, s'il est dans une inclusion de diamètre ϕ_1 , soit aussi dans un cercle d'intersection de diamètre plus grand que

ϕ_2 , avec ϕ_2 inférieur à ϕ_1 , peut être calculée comme étant le rapport entre le volume de la tranche sphérique V_2 limitée par les disques de diamètres ϕ_1 et ϕ_2 , et le volume de l'hémisphère de diamètre ϕ_1 .

Le volume V de l'hémisphère est donné par:

$$V = \frac{1}{12} \pi \phi_1^3 \quad (5.27)$$

Le volume V_2 de la tranche est:

$$V_2 = V - V_1 \quad (5.28)$$

où V_1 est le volume de la calotte sphérique:

$$V_2 = \frac{\pi}{12} \phi_1^3 - \frac{\pi}{12} \left[\phi_1^3 - \left(\phi_1^2 + \frac{1}{2} \phi_2^2 \right) (\phi_1^2 - \phi_2^2)^{1/2} \right] \quad (5.29)$$

ainsi la probabilité recherchée s'écrit:

$$P_1(\phi > \phi_2) = \frac{V_2}{V} \quad (5.30)$$

$$P_1(\phi > \phi_2) = \frac{\frac{\pi}{12} \phi_1^3 - \frac{\pi}{12} \left\{ \phi_1^3 - \left(\phi_1^2 + \frac{1}{2} \phi_2^2 \right) (\phi_1^2 - \phi_2^2)^{1/2} \right\}}{\frac{\pi}{12} \phi_1^3} \quad (5.31)$$

$$P_1(\phi > \phi_2) = \frac{\left(\phi_1^2 + \frac{1}{2} \phi_2^2 \right) (\phi_1^2 - \phi_2^2)^{1/2}}{\phi_1^2 \cdot \phi_1} \quad (5.32)$$

$$P_1(\phi > \phi_2) = \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\phi_2}{\phi_1} \right)^2 \right) \left(1 - \left(\frac{\phi_2}{\phi_1} \right)^2 \right)^{1/2}$$

La probabilité P_π pour qu'un point du plan d'intersection π soit sur un disque d'intersection d'un diamètre plus grand que ϕ_2 est obtenue par l'équation suivante:

$$P_{\pi}(\phi > \phi_2) = \int_{\phi_2}^{\phi_m} p'(\phi_1) \cdot p_1(\phi > \phi_2) d\phi_1 \quad (5.34)$$

La borne inférieure de cette intégrale est ϕ_2 , car l'intersection par un plan d'une inclusion sphérique de diamètre inférieur à ϕ_2 ne peut donner naissance à un disque de diamètre plus grand que ϕ_2 .

Par l'équation (5.34), on peut calculer la fonction densité de probabilité $\dot{P}_{\pi}(\phi_2)$, c'est-à-dire la probabilité pour qu'un point donné soit dans un disque de diamètre ϕ_2 :

$$\dot{P}_{\pi}(\phi_2) = - \frac{\partial}{\partial \phi_2} \int_{\phi_2}^{\phi_m} p'(\phi_1) p_1(\phi > \phi_2) d\phi_1 \quad (5.35)$$

ou en utilisant les relations (5.24 et 5.33):

$$\dot{P}_{\pi}(\phi_2) = \frac{\partial}{\partial \phi_2} \int_{\phi_2}^{\phi_m} p_0 [A\phi^{i-1} + B\phi^{h-1}] \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\phi_2}{\phi_1} \right)^2 \right] \left[1 - \left(\frac{\phi_2}{\phi_1} \right)^2 \right]^{1/2} d\phi_1 \quad (5.36)$$

Finalement, la fonction de distribution cumulée $F_{2D}(\phi)$ est donnée simplement par intégration de l'expression (5.36). $F_{2D}(\phi)$ est la représentation à deux dimensions de la fonction de distribution granulométrique $F(\phi)$.

Distribution de Fuller à deux dimensions

Dans le cas d'une distribution granulométrique donnée par la loi parabolique de Fuller, la fonction de distribution $F_{2D}(\phi)$ représentant la probabilité qu'un point, localisé dans un plan d'intersection arbitraire, soit sur un disque d'intersection de diamètre ϕ inférieur à ϕ_2 , peut être déduite de l'équation (5.36); on trouve aisément la relation suivante donnant la densité de probabilité:

$$\dot{P}_{\pi}(\phi_2) = \frac{\partial}{\partial \phi_2} p_0 \int_{\phi_2}^{\phi_m} \frac{1}{2} \left[\phi_1^{-1/2} \phi_m^{-1/2} \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\phi_2}{\phi_1} \right)^2 \right) \left(1 - \left(\frac{\phi_2}{\phi_1} \right)^2 \right)^{1/2} \right] d\phi_1 \quad (5.37)$$

L'intégrale (5.37) peut être résolue au moyen de développement limité. Pour $\phi_2 < \phi_1$, le développement en série de Taylor du dernier facteur de l'intégrand de l'équation (5.37) donne:

$$\begin{aligned} \left[1 - \left(\frac{\phi_2}{\phi_1}\right)^2\right]^{1/2} = & 1 - 0,5 \phi_2^2 \phi_1^{-2} - 0,125 \phi_2^4 \phi_1^{-4} - 0,625 \phi_2^6 \phi_1^{-6} \\ & - 0,0391 \phi_2^8 \phi_1^{-8} - 0,0273 \phi_2^{10} \phi_1^{-10} + \dots \end{aligned} \quad (5.38)$$

En utilisant la relation (5.38) dans l'équation (5.37) on déduit la densité de probabilité \hat{p}_π puis la fonction de distribution cumulée $F_{2D}(\phi)$ qui sont données respectivement par les relations suivantes:

$$\begin{aligned} \hat{p}_\pi(\phi_2) = p_0 \{ & 0,5367 \phi_m^{-1/2} \phi_2^{-1/2} - 0,2144 \phi_m^{-4} \phi_2^3 \\ & - 0,0684 \phi_m^6 \phi_2^{-5} - 0,0376 \phi_m^8 \phi_2^{-7} - 0,025 \phi_m^{10} \phi_2^{-9} \} \end{aligned} \quad (5.39)$$

$$\begin{aligned} F_{2D}(\phi_2) = p_0 [& 1,0734 \phi_2^{0,5} \phi_m^{-0,5} - 0,0536 \phi_2^4 \phi_m^{-4} - 0,0114 \phi_2^6 \phi_m^{-6} \\ & - 0,0047 \phi_2^8 \phi_m^{-8} - 0,0025 \phi_2^{10} \phi_m^{-10} - 0,0012 \phi_2^{12} \phi_m^{-12}] \end{aligned} \quad (5.40)$$

Dans la figure 5.17 on montre la distribution granulométrique de Fuller $F(\phi)$ et sa représentation $F_{2D}(\phi)$ à deux dimensions.

On constate sur cette dernière figure que pour un ϕ donné, on a $F_{2D}(\phi) > F(\phi)$; ceci indique en fait une probabilité plus grande de trouver de petites particules dans le cas à deux dimensions que dans le cas à trois dimensions. Ce résultat peut être expliqué par le fait que les grandes particules contribuent à la surface attribuée aux plus petites si elles sont sectionnées arbitrairement.

5.5.3 Approche numérique

5.5.3.1 Génération d'une structure composite diphasée à 3D

Le but de cette étude est de simuler numériquement une structure formée de deux phases, matrice et particules, représentative du béton. Nous

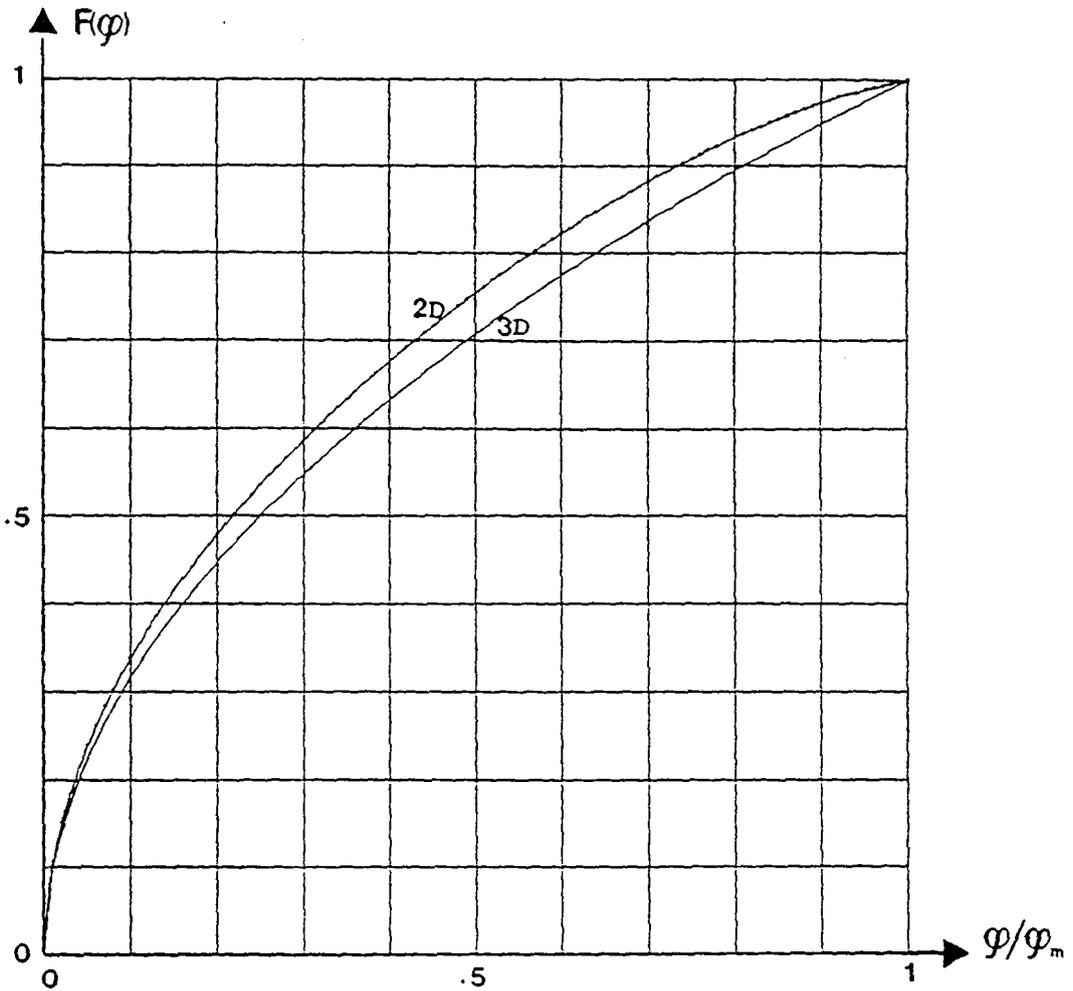


Fig. 5.17

Comparaison entre la distribution granulométrique de Fuller (3D) et sa distribution correspondante à 2D obtenue par calcul probabiliste.

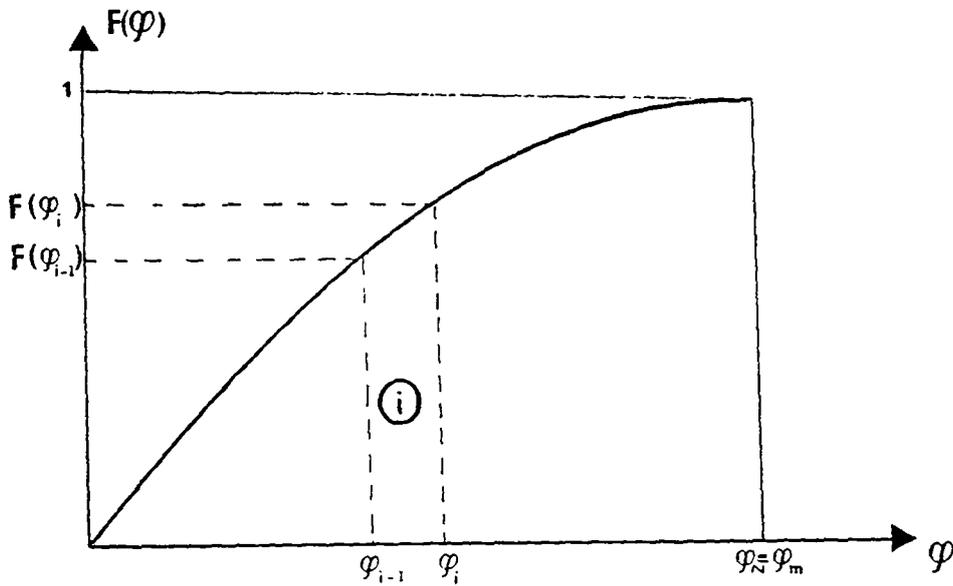


Fig. 5.18

Discrétisation d'une distribution granulométrique en vue d'une simulation numérique d'une structure composite.

supposerons dans cette approche que les particules ont une géométrie sphérique de diamètre maximal ϕ_m et suivent une distribution granulométrique de Fuller définie par la fonction $F(\phi)$. Nous considérons comme volume représentatif du matériau, un cube d'arête C égale à cinq fois le diamètre maximal ϕ_m .

Soit p_0 la concentration volumique en particules; pour évaluer le nombre de particules ayant un diamètre moyen compris entre deux valeurs données, ϕ_{i-1} et ϕ_i , nous allons subdiviser l'étendue granulométrique de largeur ϕ_m en N intervalles comme montré sur la figure 5.18.

Déterminons la valeur moyenne du nombre de particules $M(\phi_{i-1}, \phi_i)$ ayant un diamètre compris entre ϕ_{i-1} et ϕ_i suivant la loi $F(\phi)$.

Le volume total $V_T(\phi_{i-1}, \phi_i)$ occupé par cette classe de particules dans le cube est:

$$V_T(\phi_{i-1}, \phi_i) = p_0 \cdot C^3 (F(\phi_i) - F(\phi_{i-1})) \quad (5.41)$$

$$V_T(\phi_{i-1}, \phi_i) = p_0 \cdot C^3 \cdot \phi_m^{-1/2} (\phi_i^{+1/2} - \phi_{i-1}^{+1/2}) \quad (5.42)$$

Calculons le volume moyen $\langle V(\phi_{i-1}, \phi_i) \rangle$ d'une particule de diamètre ϕ compris entre ϕ_{i-1} et ϕ_i . Soit $G_{i-1,i}(\phi)$ la fonction de distribution cumulée de la variable ϕ sur le domaine (ϕ_{i-1}, ϕ_i) . Procédons comme suit pour déterminer cette fonction:

$$F(\phi) \quad : \quad [0, \phi_m] \rightarrow [0, 1]$$

$$G_{i-1,i}(\phi) : [\phi_{i-1}, \phi_i] \rightarrow [0, 1]$$

Cherchons la fonction h qui est telle que $G = h[F]$:

$$[\phi_{i-1}, \phi_i] \xrightarrow{F} [F(\phi_{i-1}), F(\phi_i)] \xrightarrow{h} [0, 1]$$

$$G(\phi_{i-1}) = h[F(\phi_{i-1})] = 0 \quad (5.43)$$

$$G(\phi_i) = h[F(\phi_i)] = 1 \quad (5.44)$$

On peut écrire:

$$\frac{h(F(\phi)) - 1}{F(\phi) - F(\phi_i)} = \frac{-1}{F(\phi_{i-1}) - F(\phi_i)} \quad (5.45)$$

$$h(F(\phi)) = G_{i-1,i}(\phi) = \frac{F(\phi) - F(\phi_{i-1})}{F(\phi_i) - F(\phi_{i-1})} \quad (5.46)$$

Ainsi

$$G_{i-1,i}(\phi) = \frac{\phi^{1/2} - \phi_{i-1}^{1/2}}{\phi_i^{1/2} - \phi_{i-1}^{1/2}} \quad (5.47)$$

D'où le volume moyen d'une sphère dont les diamètres sont répartis selon la fonction de probabilité $G_{i-1,i}(\phi)$:

$$\langle V(\phi_{i-1}, \phi_i) \rangle = \frac{\pi}{6} \int_{\phi_{i-1}}^{\phi_i} \phi^3 G'_{i-1,i}(\phi) d\phi \quad (5.48)$$

$$= \frac{\pi}{12(\phi_i^{1/2} - \phi_{i-1}^{1/2})} \int_{\phi_{i-1}}^{\phi_i} \phi^{5/2} d\phi \quad (5.49)$$

où $G'_{i-1,i}(\phi)$ représente la densité de probabilité.

$$\langle V(\phi_{i-1}, \phi_i) \rangle = \frac{\pi}{42} \frac{(\phi_i^{7/2} - \phi_{i-1}^{7/2})}{(\phi_i^{1/2} - \phi_{i-1}^{1/2})} \quad (5.50)$$

D'où le nombre de particules cherché:

$$M(\phi_{i-1}, \phi_i) = \frac{V_T(\phi_{i-1}, \phi_i)}{\langle V(\phi_{i-1}, \phi_i) \rangle} \quad (5.51)$$

$$M(\phi_{i-1}, \phi_i) = \frac{42}{\pi} P_0 C^3 \frac{(\phi_i^{1/2} - \phi_{i-1}^{1/2})^2}{\phi_m^{1/2} (\phi_i^{7/2} - \phi_{i-1}^{7/2})} \quad (5.52)$$

On peut ainsi estimer le nombre total de particules de différents diamètres entrant dans le cube. Le nombre de particules de faible diamètre est considérable; de ce fait, nous nous sommes limités dans notre étude aux particules de dimensions plus grandes que 0,35 cm. Ceci signifie que notre béton est formé de particules de diamètre plus grand que 0,35 cm, mais inférieur à $\phi_m = 3,2$ cm, qui sont noyées dans une matrice de mortier dont le granulats maximal est de 0,35 cm.

La procédure de génération sur ordinateur (CYBER-850) d'une telle structure peut être résumée comme suit:

- 1) Entrée des données (teneur, courbe granulométrique, volume).
- 2) Evaluation des nombres de particules relatifs à chaque classe définie par (ϕ_{i-1}, ϕ_i) .
- 3) Dans chaque classe, on génère M_i particules dont les diamètres ont une valeur aléatoire comprise entre ϕ_{i-1} et ϕ_i .
- 4) Les particules sont positionnées aléatoirement au sein du volume et en faisant à chaque fois des tests pour redéfinir une nouvelle position de la particule à placer au cas où il y aurait recouvrement entre cette particule et une autre. Ce positionnement est facilité par le fait que les particules ont été placées dans l'ordre décroissant de leur dimension.

5.5.3.2 Calcul de la fonction de distribution recherchée

Cette structure à 3D ainsi générée va nous permettre de déterminer la fonction de distribution $F_{2D}(\phi)$ des dimensions des particules sur un plan de section π . Une procédure a été développée à cette fin; celle-ci se résume à la résolution d'un problème d'intersection entre un plan et une sphère. La figure 5.19 montre un résultat de cette étude lorsque le cube est sectionné par un plan d'équation $Z = 2$ cm.

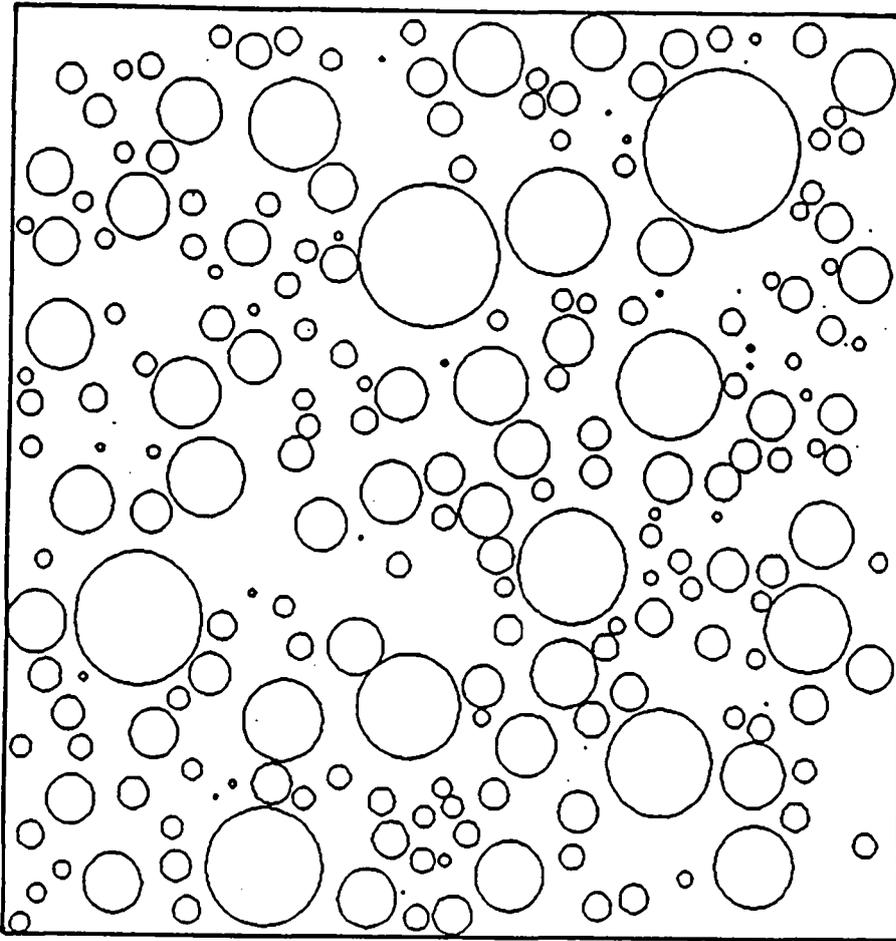


Fig. 5.19 : Représentation d'une coupe d'un cube de béton généré par ordinateur. La granulométrie suit la loi de Fuller et les inclusions sont supposées de forme sphérique.

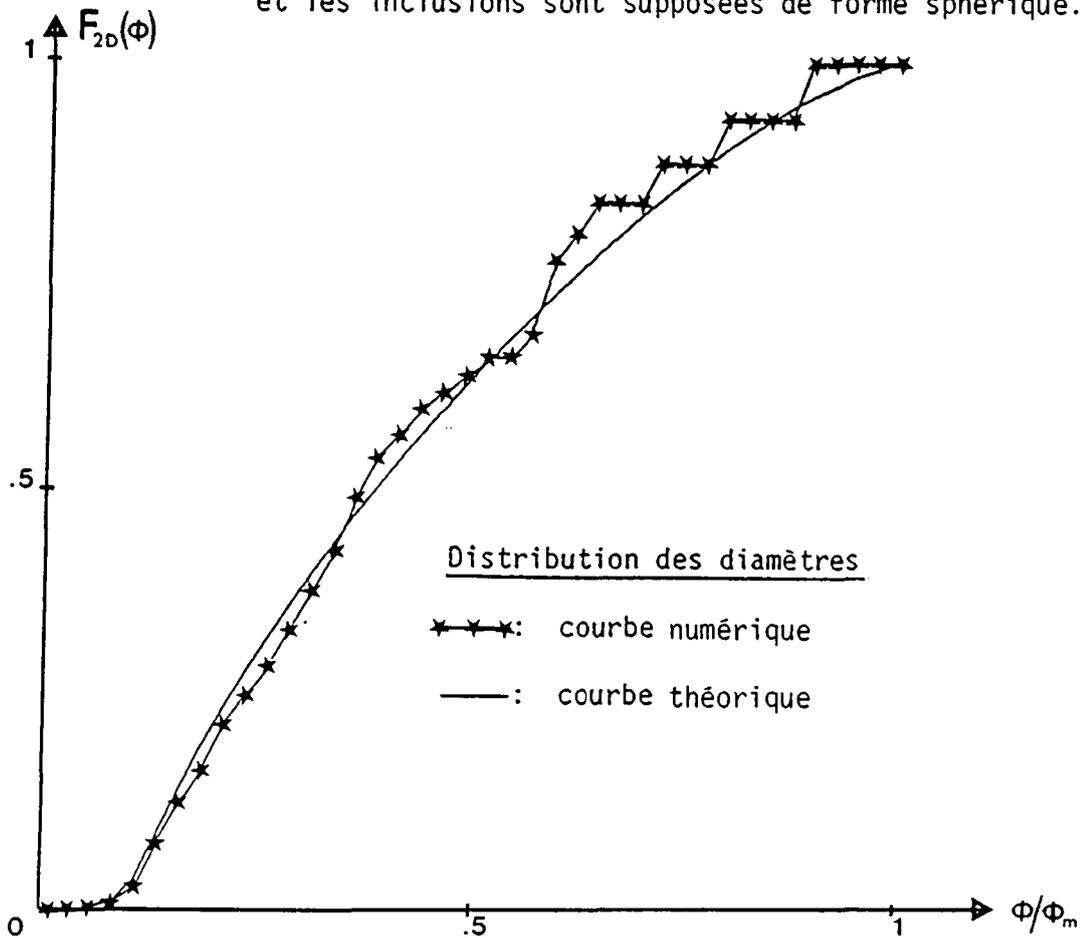


Fig. 5.20 : Distribution des diamètres des disques d'intersection de la coupe de la Fig.5.19 et distribution théorique à 2D.

Sur une telle section, la probabilité pour qu'un point donné soit dans un disque de diamètre inférieur ou égal à ϕ_i est calculée selon la formule de récurrence suivante:

$$F_{2D}(\phi_i) = p_i(\phi < \phi_i) = p_{i-1}(\phi < \phi_{i-1}) + \frac{S(\phi_{i-1}, \phi_i)}{A(\pi)} \quad (5.53)$$

où:

$S(\phi_{i-1}, \phi_i)$: surface de tous les disques de la section ayant des diamètres ϕ , tels que $\phi_{i-1} < \phi < \phi_i$.

$A(\pi)$: surface de la section d'intersection entre le plan π et le cube. Notons que, pour une section quelconque mais éloignée des surfaces du cube (cf § 5.7 "effet de paroi"), le rapport entre la surface de tous les disques $S(0, \phi_m)$ et la surface de la section $A(\phi)$ est à peu près constante et est égale à la concentration volumique en inclusion qui, dans notre cas (on s'est limité aux inclusions plus grandes que ϕ_1), est:

$$\frac{S(0, \phi_m)}{A(\pi)} = p_0 \left(1 - \sqrt{\frac{\phi_\lambda}{\phi_m}}\right) \quad (5.54)$$

La courbe étoilée de la figure 5.20 montre la distribution cumulée des diamètres obtenue par la relation (5.53) normalisée; cette courbe correspond à la section du cube de la figure 5.19. A titre comparatif, nous avons tracé sur la même figure, en trait continu, la courbe obtenue par l'analyse théorique décrite dans le paragraphe précédent et modifiée comme suit:

Dans la simulation numérique, nous nous sommes limités à des inclusions de diamètres plus grands que ϕ_λ (= 0,35 cm). La distribution cumulée $F_{2D}(\phi)$ recherchée peut être calculée comme suit:

1er cas pour $\phi < \phi_\ell$:

$$F_{2D}(\phi) = \bar{F}_{2D}\left(\frac{\phi}{\phi_m}\right) - \frac{\phi_\ell}{\phi_m} \bar{F}_{2D}\left(\frac{\phi}{\phi_\ell}\right) \quad (5.55)$$

2ème cas pour $\phi > \phi_\ell$:

$$F_{2D}(\phi) = \bar{F}_{2D}\left(\frac{\phi}{\phi_m}\right) - \frac{\phi_\ell}{\phi_m} \bar{F}_{2D}\left(\frac{\phi_\ell}{\phi_\ell}\right) \quad (5.56)$$

où $F_2\left(\frac{\phi}{\phi_j}\right)$ ($j = m$ ou ℓ) représente la distribution à 2D correspondant à une courbe de Fuller de diamètre ϕ_j (formule 5.40).

Dans les membres de droite de ces deux équations, le premier terme représente la contribution, pour un ϕ donné, de toutes les inclusions d'une distribution cumulée de Fuller pour des diamètres allant de 0 à ϕ_m , auxquels on retranche le deuxième terme qui représente la contribution relative à une distribution de Fuller pour ϕ défini dans l'intervalle $[0, \phi_\ell]$ et pondérée par la teneur relative en inclusions de diamètres inférieurs à ϕ_ℓ , représentée par le facteur $\sqrt{\phi_\ell/\phi_m}$.

Dans une section de matériau donné, la concentration surfacique en granulat est $F_{2D}(\phi = \phi_m)$ et est donnée par:

$$F_{2D}(\phi = \phi_m) = p_0 \left(1 - \sqrt{\frac{\phi_\ell}{\phi_m}}\right) \quad (5.57)$$

qui est aussi la concentration volumique en inclusion.

Pour trouver numériquement une bonne estimation de la fonction $F_{2D}(\phi)$, nous avons fait un très grand nombre de sections dans les trois directions (x, y, z) et déterminé une courbe moyenne à partir de la relation (5.53).

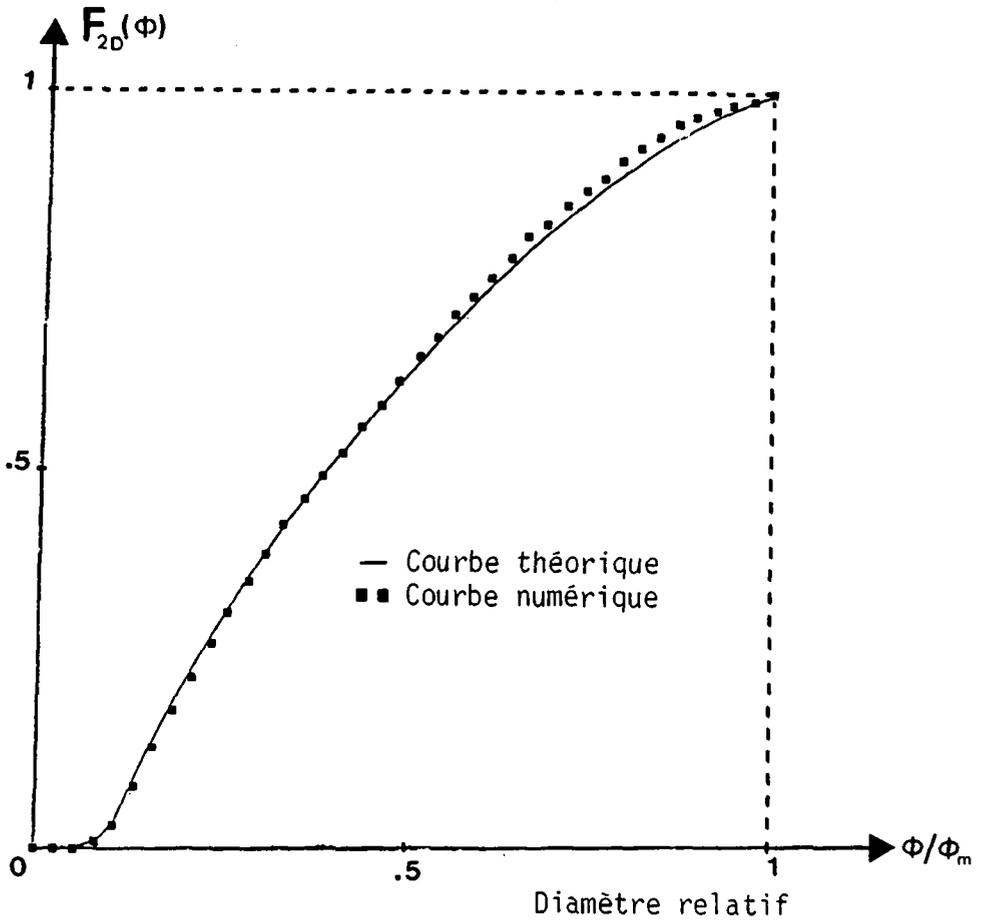


Fig. 5.21

Comparaison entre la distribution granulométrique de Fuller à 2D obtenue par calcul probabiliste et celle résultant de l'approche numérique.

Sur la figure 5.21, on a représenté la fonction de distribution $F_{2D}(\phi)$ déterminée numériquement, par des petits rectangles noircis; à titre comparatif nous avons tracé sur la même figure la courbe théorique obtenue par les relations (5.40), (5.54) et (5.55). On peut observer une très bonne concordance entre les deux approches développées.

5.6 Simulation de structures composites à 2D

5.6.1 Structure à inclusions circulaires

Pour un matériau ayant une distribution granulométrique donnée $F(\phi)$, nous avons montré que l'on peut déterminer aisément la répartition des tailles des grains $F_{2D}(\phi)$ sur une section plane du matériau.

Dans le cas le plus simple, pour présenter une structure composite à 2D, on peut assimiler les particules à des disques; ceci est une bonne approximation pour représenter un béton formé de granulats bien roulés. La figure 5.22 représente un exemple d'une telle structure générée par ordinateur. Dans cet exemple, la répartition des tailles des graines est choisie selon la loi de Fuller.

5.6.2 Structures à inclusions polygonales

Pour simuler un béton fabriqué à l'aide de granulats concassés, on peut assimiler la géométrie de telles particules à des formes polygonales. La figure 5.23 donne un exemple de simulation de la structure d'un tel béton. Dans cette structure, le nombre de côtés de chaque polygone est choisi aléatoirement entre deux limites. La distribution des dimensions des particules suit une courbe de Fuller.

5.6.3 Structures réalistes

Pour pouvoir simuler des structures composites plus réalistes, c'est-à-dire aussi ressemblantes que possible à la structure réelle du matériau,

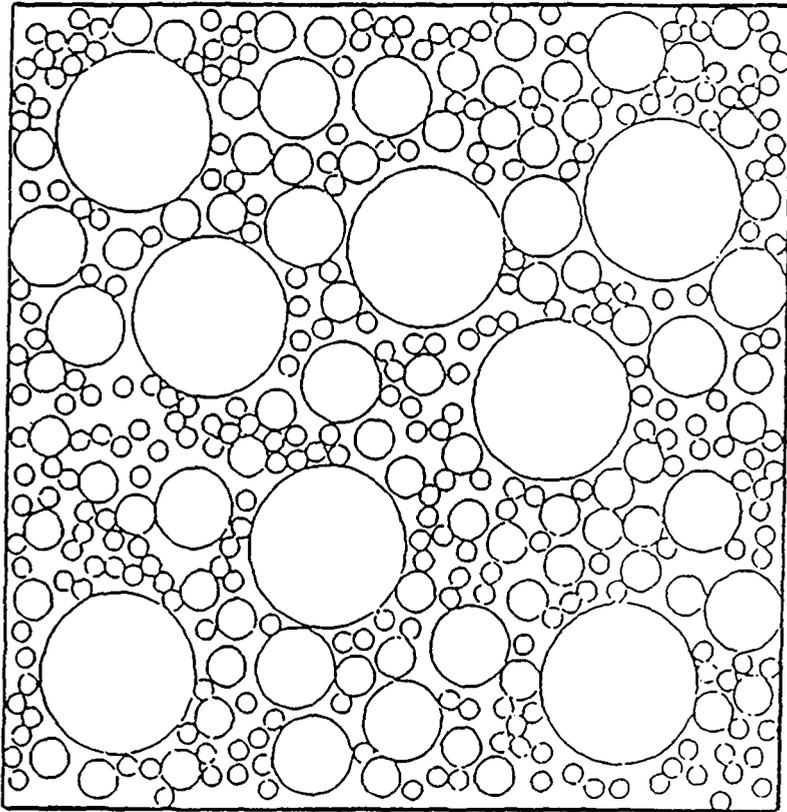


Fig. 5.22: Structure composite générée par ordinateur représentative d'un béton à granulats roulés, inclusions sphériques distribuées selon la granulométrie de Fuller.

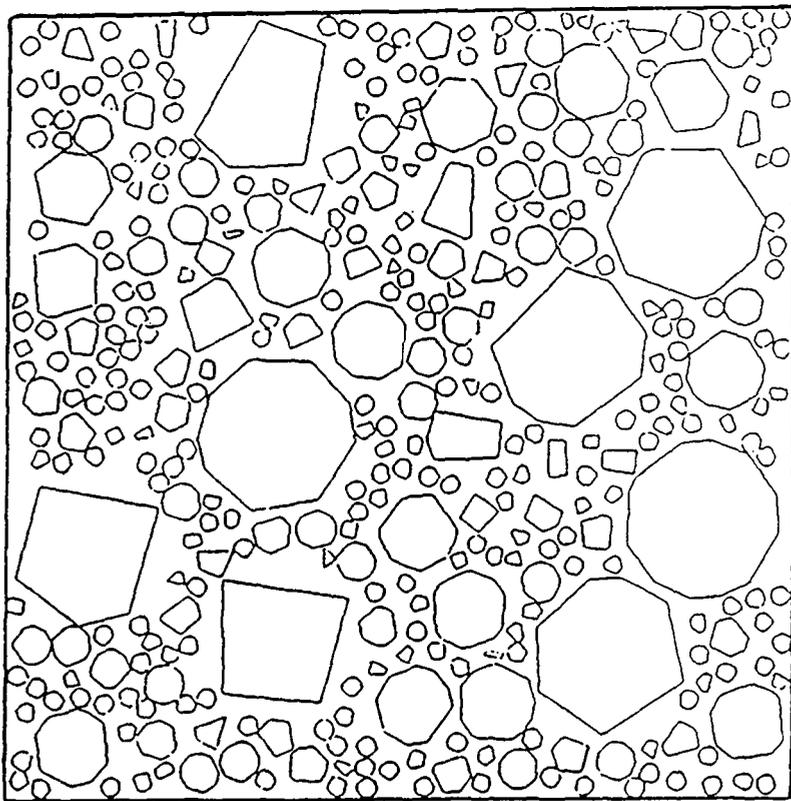


Fig. 5.23: Structure composite à inclusions polygonales distribuées selon la loi de Fuller, représentative d'un béton à granulats concassés.

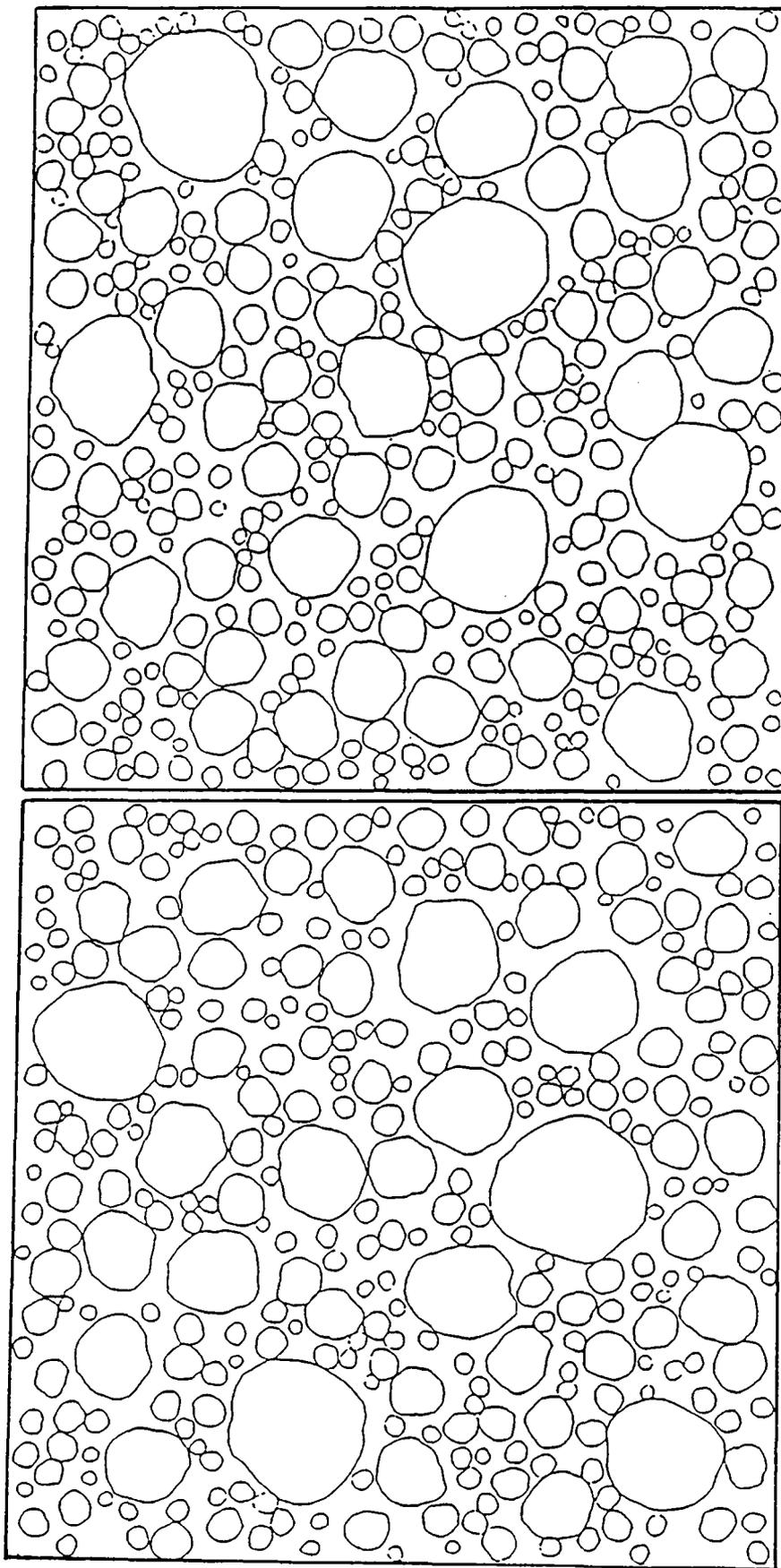


Fig.5.24

Structures composites dont la géométrie des inclusions suit la loi morphologique de la Fig.5.9 et distribuées selon la loi de Fuller.

la géométrie réelle des particules doit entrer en ligne de compte. Grâce à la loi morphologique des granulats naturels que nous avons déduite au § 5.3 et représentée dans la figure 5.9 et au moyen de la relation (5.6), on peut reconstruire des particules à géométrie similaire aux grains analysés. En se donnant en plus une répartition granulométrique et une concentration en particules, on peut générer des structures assez réalistes; la figure 5.24 donne deux exemples de structures générées et représentatives d'un béton fabriqué avec les granulats de la Vallée du Rhône.

5.7 Effet de paroi

5.7.1 Définition

Lors de la confection d'un béton, les grosses particules qui viennent buter contre le coffrage ou les armatures ont leur centre qui ne peut s'approcher de la paroi ainsi constituée à plus de leur rayon moyen. Elles ont donc tendance à laisser des vides entre elles beaucoup plus importants qu'au coeur du matériau. De ce fait, les zones les plus proches des parois sont plus riches en éléments fins que le coeur du matériau. Pour cette raison, il convient d'enrichir en éléments fins les granulométries des bétons destinés à des structures présentant un grand développement de parois [87]. La figure 5.25 montre schématiquement l'effet de paroi prenant naissance à la surface du coffrage. Le volume soumis à cet effet est souvent appelé peau du béton [88, 89].

5.7.2 Détermination de l'effet de paroi en fonction de la profondeur

5.7.2.1 Approche probabiliste

Pour pouvoir étudier l'influence de l'effet de paroi sur le comportement ou les propriétés du matériau, il est nécessaire de déterminer les granulométries en fonction de la distance aux parois et la variation de la teneur en particules.

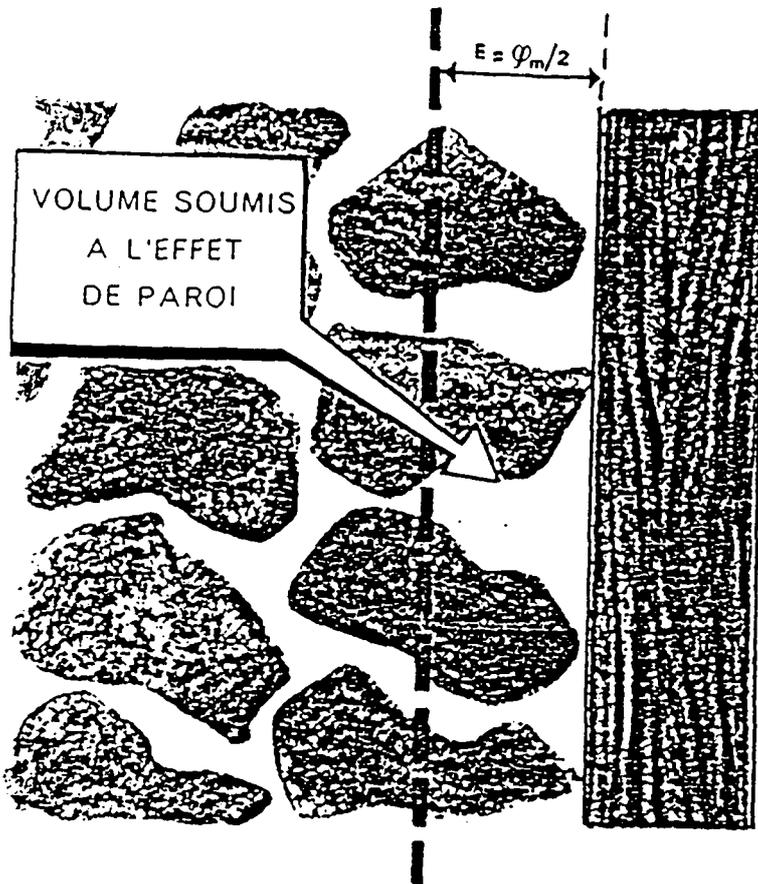


Fig. 5.25

Effet de paroi prenant naissance au voisinage du coffrage.

En principe, il est possible de déterminer la variation de ces paramètres expérimentalement. La méthode consiste à analyser des tranches minces du matériau prélevées à différentes profondeurs; cependant, en pratique, on est très vite limité par l'épaisseur des couches obtenues par sciage d'un prisme [88-90].

Nous avons vu précédemment que, connaissant la fonction de la distribution cumulée $F(\phi)$ de la taille des grains et leur teneur p_0 intervenant dans la composition d'un béton, il est possible de déterminer la distribution granulaire $F_{2D}(\phi)$ relative à une section plane du matériau. Cette étude a été faite sous l'hypothèse que les particules sont des sphères.

Dans le cas d'une fonction granulométrique de Fuller, la probabilité qu'un point donné soit dans un disque d'intersection de diamètre ϕ est donnée par la relation suivante (cf § 5.5.2):

$$\begin{aligned} p_{\pi}(\phi) = p_0 \{ & 0,5367 \phi_m^{-1/2} \phi^{-1/2} - 0,2144 \phi_m^{-4} \phi^3 \\ & - 0,0684 \phi_m^6 \phi^{-5} - 0,0376 \phi_m^8 \phi_m^{-7} - 0,025 \phi_m^{10} \phi^{-9} \} \end{aligned} \quad (5.39 \text{ bis})$$

Pour une section plane d'un volume donné, la concentration surfacique en inclusions $p_{0,2D}$ peut être calculée comme étant égale à la probabilité pour qu'un point soit dans un disque d'intersection de diamètre quelconque compris entre 0 et ϕ_m ; ainsi, $p_{0,2D}$ s'obtient en intégrant (5.39) de 0 à ϕ_m .

$$p_{0,2D} = \int_0^{\phi_m} p_{\pi}(\phi) d\phi = p_0 \quad (5.58)$$

Cette dernière relation est en fait valable pour des sections π faites loin des parois du volume donné.

Supposons alors que le plan de section π soit parallèle à une paroi du prisme donné et qu'il soit situé à une distance x de la frontière (paroi); évaluons alors la concentration surfacique $p_{0,2D}$ en inclusion

en fonction de x . Si le plan π est situé à une distance x plus grande que le rayon maximal des particules ($\phi_m/2$), la concentration $p_{0,2D}(x)$ est donnée par la relation (5.58). En effet, sur une telle surface, il est possible de trouver un disque de n'importe quel diamètre mais inférieur à ϕ_m .

Dans le cas contraire, c'est-à-dire, si la distance x entre le plan de section π et une paroi est inférieure au rayon de la plus grosse inclusion ($\phi_m/2$), la concentration se calcule de la même façon que précédemment (5.58), mais il convient de changer la borne supérieure d'intégration de ϕ_m à $2x$. En effet, dans une telle section, on ne saurait trouver des disques de diamètres plus grands que $2x$. Ainsi, dans ce cas, la fonction recherchée $p_{0,2D}(x)$ est

$$p_{0,2D}(x) = \int_0^{2x} p_{\pi}(\phi) d\phi \quad (5.59)$$

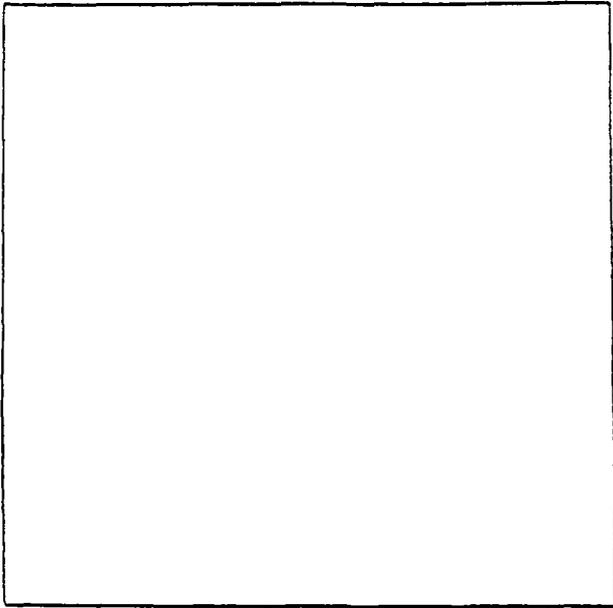
Enfinement en utilisant la relation (5.39), $p_{0,2D}(x)$ s'exprime:

$$p_{0,2D}(x) = \begin{cases} p_0 & \text{: dans le coeur du matériau } (2x > \phi_m) \\ p_0 \left\{ 1.0734 \sqrt{\frac{2x}{\phi_m}} - 0,0536 \phi_m^{-4} (2x)^4 - 0,0114 \phi_m^{-6} (2x)^6 - 0,0047 \phi_m^{-8} (2x)^8 - 0,0025 \phi_m^{-10} (2x)^{10} \right\} & \text{: dans la peau du matériau } (2x \leq \phi_m) \end{cases} \quad (5.60)$$

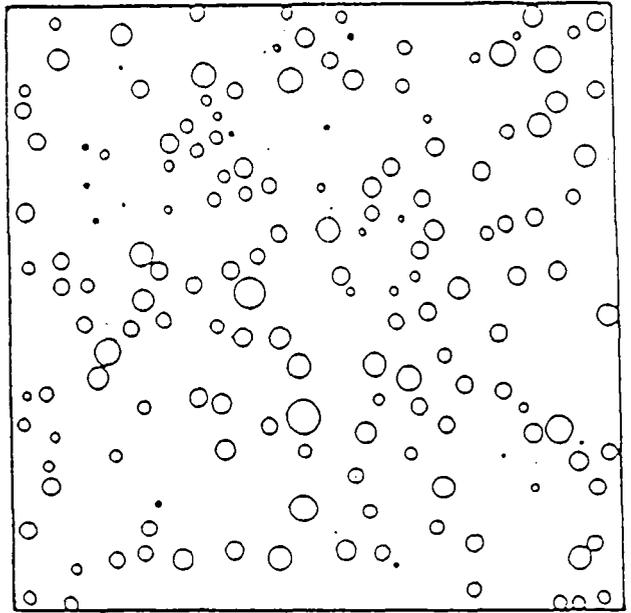
La variation de la teneur en matrice $S(x)$ en fonction de la distance à la paroi est donnée par la relation suivante :

$$S(x) = 1 - p_{0,2D}(x) \quad (5.61)$$

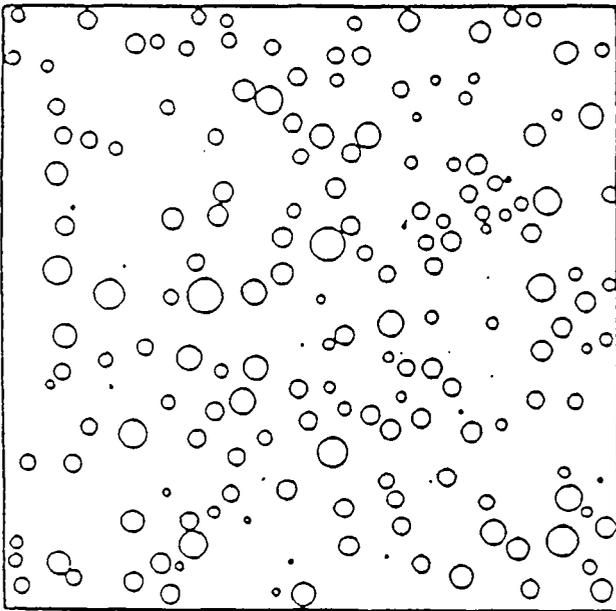
Cette fonction est représentée par la courbe en traitillés sur la figure 5.28. Le résultat est valable pour une distribution granulométrique de Fuller, l'approche demeure identique pour toute autre distribution.



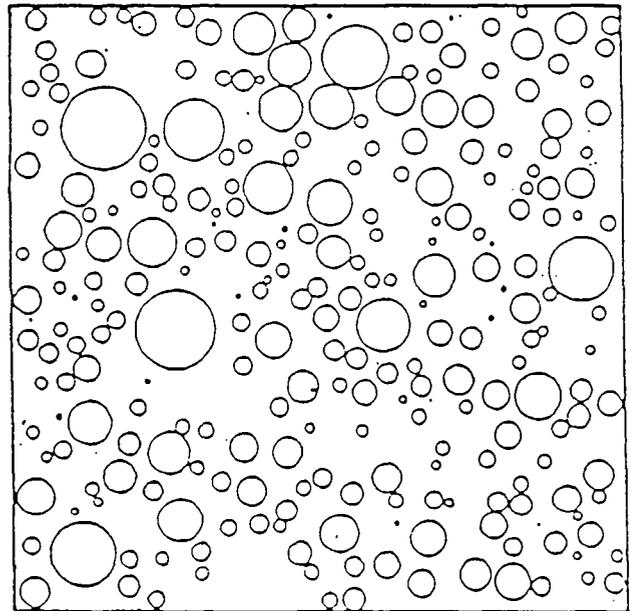
- a -



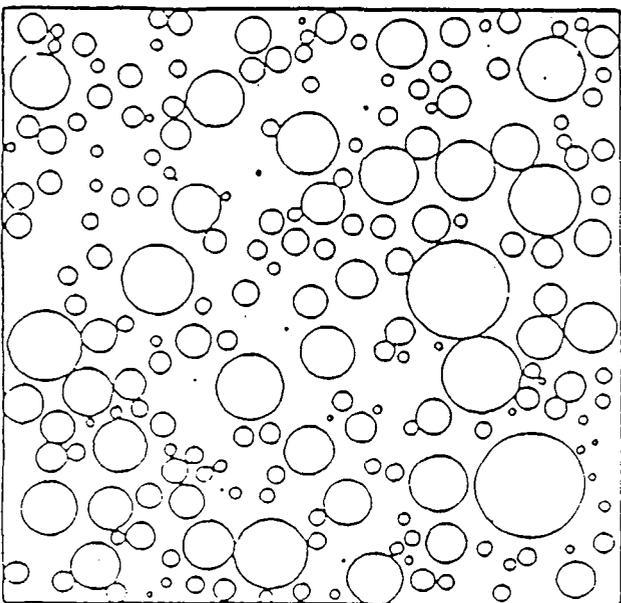
- b -



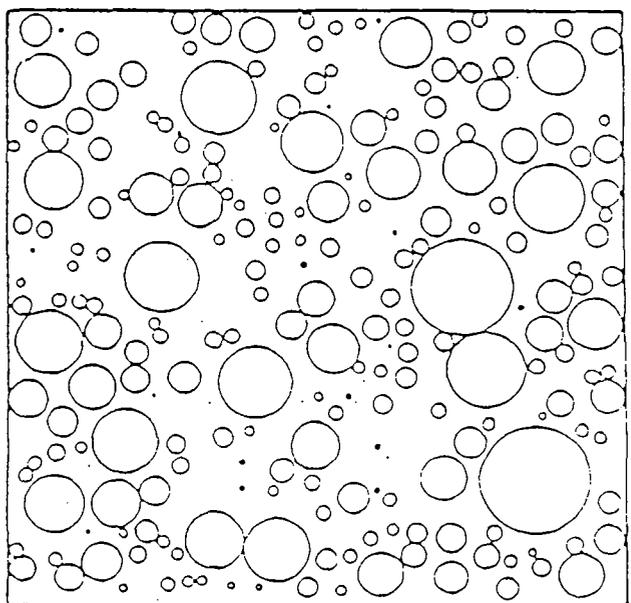
- c -



- d -



- e -



- f -

Fig.5.26: Coupes d'un cube de béton généré par ordinateur effectuées à des distances croissantes de la frontière (effet de paroi).

5.7.2.2 Approche numérique

Une autre méthode pour résoudre ce problème d'effet de paroi est la simulation numérique. Grâce à la structure composite cubique générée précédemment (§ 5.5.3), on peut déterminer la distribution granulométrique et la teneur en particules pour toute section du volume située à n'importe quelle profondeur.

La figure 5.26 montre six sections planes obtenues en interceptant le cube par des plans parallèlement à une face à des distances croissantes de celle-ci. La première coupe (Fig. 5.26a) correspond à une profondeur nulle, cette section limite est formée uniquement de la matrice. Plus on avance vers le cœur du matériau, plus grande est la teneur en particules et plus grand est le diamètre maximum des disques d'intersection, ce qui se voit clairement sur les figures 5.26b à 5.26f.

La figure 5.27 montre la répartition granulométrique de la taille des sections de particules situées sur une coupe effectuée à 8 mm de distance d'une face. Dans cet exemple, le plus grand disque d'intersection a un diamètre d'environ 12 mm, alors que le diamètre maximum ϕ_m des sphères est de 32 mm. A titre de comparaison, nous avons reporté sur le même graphe la distribution granulométrique moyenne relative à une section plane située dans le cœur du matériau, c'est-à-dire loin des parois. Cette distribution est en fait la fonction représentée par $F_{2D}(\phi)$ et déterminée précédemment au § 5.5.

Pour déterminer la relation $S(x)$ entre la teneur S en particules et la distance à la paroi, x , nous avons coupé le cube tous les millimètres et ceci dans les trois directions principales. La courbe moyenne ainsi obtenue en pénétrant le cube par les 6 faces sur une distance allant de 0 à $C/2$ (moitié de l'arête du cube) est représentée sur la figure 5.28 en trait plein. Ce résultat numérique confirme que l'effet de paroi cesse dès que l'on s'éloigne des frontières du matériau d'une distance de l'ordre du rayon du plus gros grain ($1/2 \phi_m$); cette grandeur correspond donc à l'épaisseur de la peau du matériau. Au-delà de cette zone, la teneur en inclusion demeure à peu près constante.

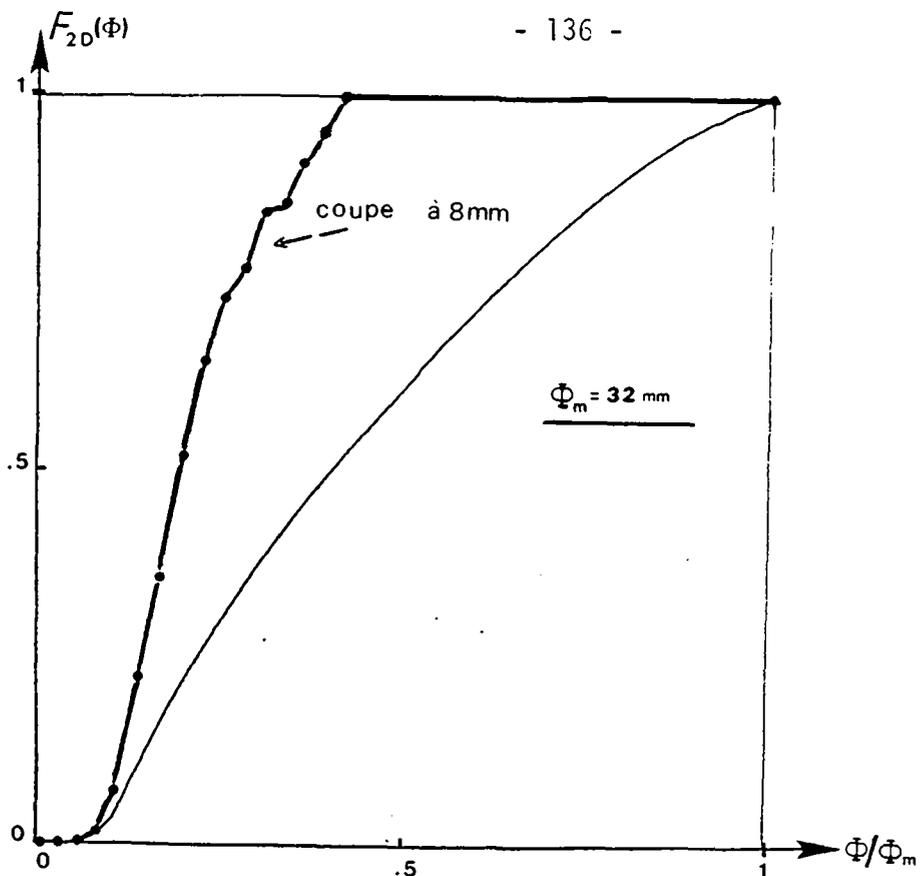


Fig. 5.27 : Distribution des diamètres des disques d'intersection d'une coupe effectuée à 8 mm d'une face d'un cube de béton et comparaison avec la distribution à 2D d'une coupe située loin des parois.

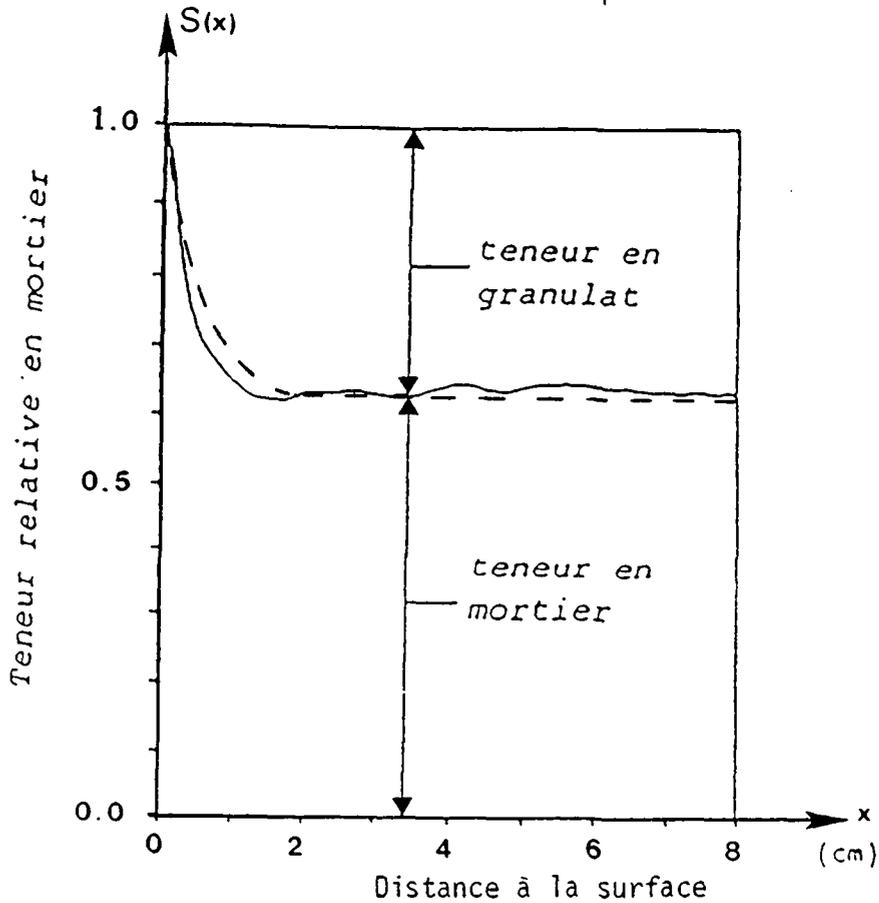


Fig.5.28 : Variation de la teneur en inclusions en fonction de la distance à la paroi pour un béton dont la granulométrie suit une loi de Fuller pour un diamètre maximum de 32 mm. Comparaison entre l'approche théorique (courbe discontinue) et l'approche numérique (courbe continue).

5.7.3 Estimation des propriétés du matériau en fonction de la distance à la paroi

A cause de cet effet de paroi qui donne naissance à une certaine hétérogénéité structurelle du matériau définie par la fonction $S(x)$, (Fig. 5.28), toutes les propriétés du matériau, telles la résistance, la déformabilité, l'absorption d'eau, le retrait, le fluage, ..., de la peau du béton diffèrent de celles du coeur du matériau. La connaissance des paramètres de cette zone proche de la surface est d'une grande importance, car la durabilité du matériau s'y trouve affectée.

Les premières estimations expérimentales de quelques propriétés de la peau du béton indiquèrent une chute de 17 % du module d'élasticité dynamique en allant du coeur à la surface du matériau, alors qu'on assista à une augmentation de l'ordre de 21 % de la porosité [89]. Il est clair que ces valeurs sont propres uniquement au béton étudié, car ces grandeurs sont dépendantes de la composition du matériau et des propriétés spécifiques à chaque phase.

Connaissant la teneur en granulats en fonction de la distance à la paroi, on peut évaluer approximativement les propriétés de la peau du matériau. Pour ce faire, nous utiliserons le modèle de Hobbs [91, 92] qui donne les propriétés d'un matériau composite à deux phases en fonction des concentrations et des propriétés spécifiques à chacune des deux phases.

Dans ce qui suit, les lettres M et G (ou m et g) se réfèrent respectivement à la matrice et aux granulats, les symboles non suivis de l'une ou l'autre de ces deux lettres se réfèrent aux propriétés du matériau composite, c'est-à-dire au béton dans notre cas.

Pour une concentration G en inclusion et sous l'hypothèse que les différences entre les coefficients de Poisson des phases et du composite sont négligeables, le module d'élasticité E du matériau s'écrit:

$$E = EM \left\{ 1 + \frac{2 G(EG - EM)}{(EG + EM) - G(EG - EM)} \right\} \quad (5.62)$$

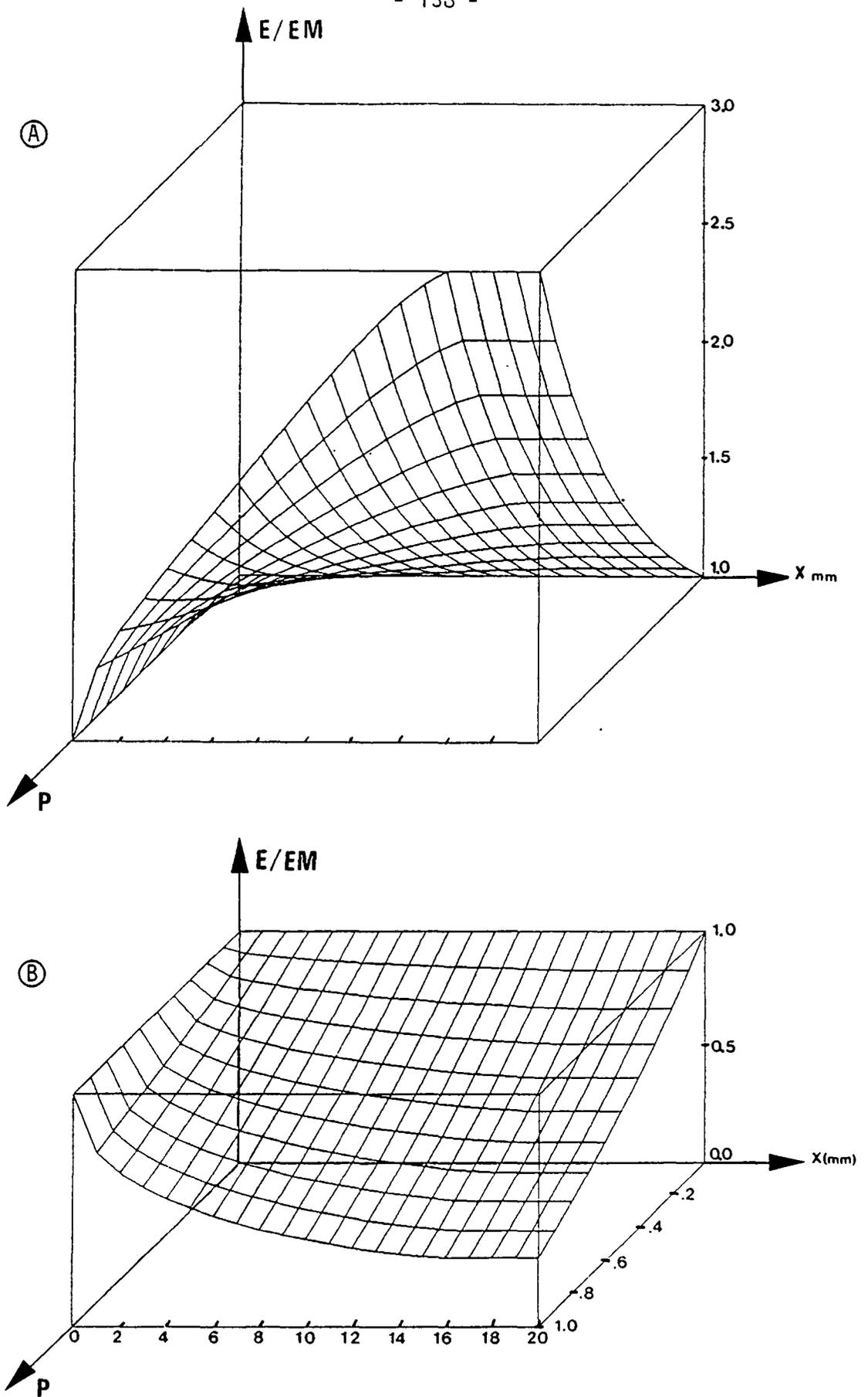


Fig. 5.29 : Variation du module d'élasticité d'un béton caractérisé par une granulométrie de Fuller et un diamètre maximum de 32 mm, en fonction de la distance à la paroi (x) et de la teneur en granulats (p).
A: $EG/EM=3$ (cas du béton normal)
B: $EG/EM=1/3$ (cas du béton léger)

Dans une tranche de matériau d'épaisseur élémentaire située à une distance x de la surface, la concentration en inclusions peut être déterminée comme au paragraphe précédent. Dans le cas d'une distribution granulométrique de Fuller et sous l'hypothèse de sphéricité des inclusions, $G(x)$ est donnée par l'équation (5.60) pour une teneur en grain p_0 du matériau. Dans ces conditions, le module d'élasticité s'écrit:

$$E(x) = \begin{cases} EM \left\{ 1 + \frac{2 p_0 (EG-EM)}{(EG+EM) - p_0 (EG-EM)} \right\} & \text{pour } 2x > \phi_m \\ & \text{(coeur du matériau)} \\ EM \left\{ 1 + \frac{2 p_{0,2D}(x) \cdot (EG-EM)}{(EG+EM) - p_{0,2D}(x) \cdot (EG-EM)} \right\} & \text{pour } 2x \leq \phi_m \\ & \text{(peau du matériau)} \end{cases} \quad (5.63)$$

où $p_{0,2D}(x)$ est donnée par la formule (5.60).

Dans la figure 5.29, on a tracé l'évolution du module d'élasticité en fonction de la distance à la paroi (axe \bar{x}) et pour toute teneur en inclusions p_0 (axe \bar{P}). L'axe vertical représente le module du matériau rapporté à celui de la matrice E/EM .

La figure 5.29 A donne l'exemple du cas d'un béton normal ayant une granulométrie de Fuller et un rapport des modules d'élasticité entre les deux phases EG/EM égal à 3.

Il faut signaler que dans tous ces graphes la concentration p_0 (axe P) maximale en inclusion est de 1, ce qui n'est évidemment pas réaliste puisqu'il faut de la pâte pour lier l'ensemble. En pratique, la concentration maximale ne dépasse pas 80 %.

Le graphe B de la même figure donne une situation où le module d'élasticité de la phase dispersée EG est inférieur à celui de la phase dispersante EM . Dans le cas de figure, $EG = EM/3$, ceci est représentatif d'un béton léger.

D'autres propriétés de la peau du matériau peuvent aussi être estimées, nous en donnerons quelques-unes ci-dessous:

- Coefficient de dilatation thermique α_t :

$$\alpha_t(x) = \begin{cases} \alpha_t M - 2 p_0 \frac{(\alpha_t M - \alpha_t G) \cdot KG}{(KM+KG) + p_0(KG-KM)} & \text{pour } 2x > \phi_m \\ & \text{(coeur du matériau)} \\ \alpha_t M - 2 p_{0,2D}(x) \frac{(\alpha_t M - \alpha_t G) \cdot KG}{(KM+KG) + p_0(KG-KM)} & \text{pour } 2x < \phi_m \\ & \text{(peau du matériau)} \end{cases} \quad (5.64)$$

Dans cette relation, KG et KM représentent respectivement les modules de compressibilité volumique des granulats et de la matrice.

La figure 5.30 représente α_t en fonction de la teneur en inclusion p_0 (axe \bar{P}) et de la distance à la paroi (\bar{x}). Les diamètres des inclusions sont supposés être distribués selon Fuller et avoir une valeur maximale ϕ_m de 32 mm. Dans le cas de figure, on a pris EG/E3 égal à 3 et $\alpha_t G / \alpha_t M = 0,3$, ce qui est assez réaliste pour un béton normal pour des températures allant de 0 à une quarantaine de degrés Celsius et pour une humidité relative donnée de l'ordre de 70 %.

- Fluage ϵ_f :

$$\epsilon_f(x,t) = \begin{cases} \epsilon_f M(t) \left(\frac{1 - p_0}{1 + p_0} \right) & 2x > \phi_m \text{ (coeur)} \\ \epsilon_f M(t) \left(\frac{1 - p_{0,2D}(x)}{1 + p_{0,2D}(x)} \right) & 2x < \phi_m \text{ (peau)} \end{cases} \quad (5.63)$$

$\epsilon_f M(t)$ représente le fluage de la matrice, phase visco-élastique, en fonction du temps. Cette approximation est valable sous les mêmes conditions que celles mentionnées pour le coefficient α_t , mais en plus nous supposons que le fluage des inclusions est négligeable (cas du béton normal). De ce fait, les tranches de matériau situées proche des bords fluent davantage que les régions centrales. Ceci peut être constaté sur la figure 5.31, où l'on a reporté sur l'axe vertical le fluage du matériau composite ϵ_f , rapporté au fluage de la matrice $\epsilon_f M$.

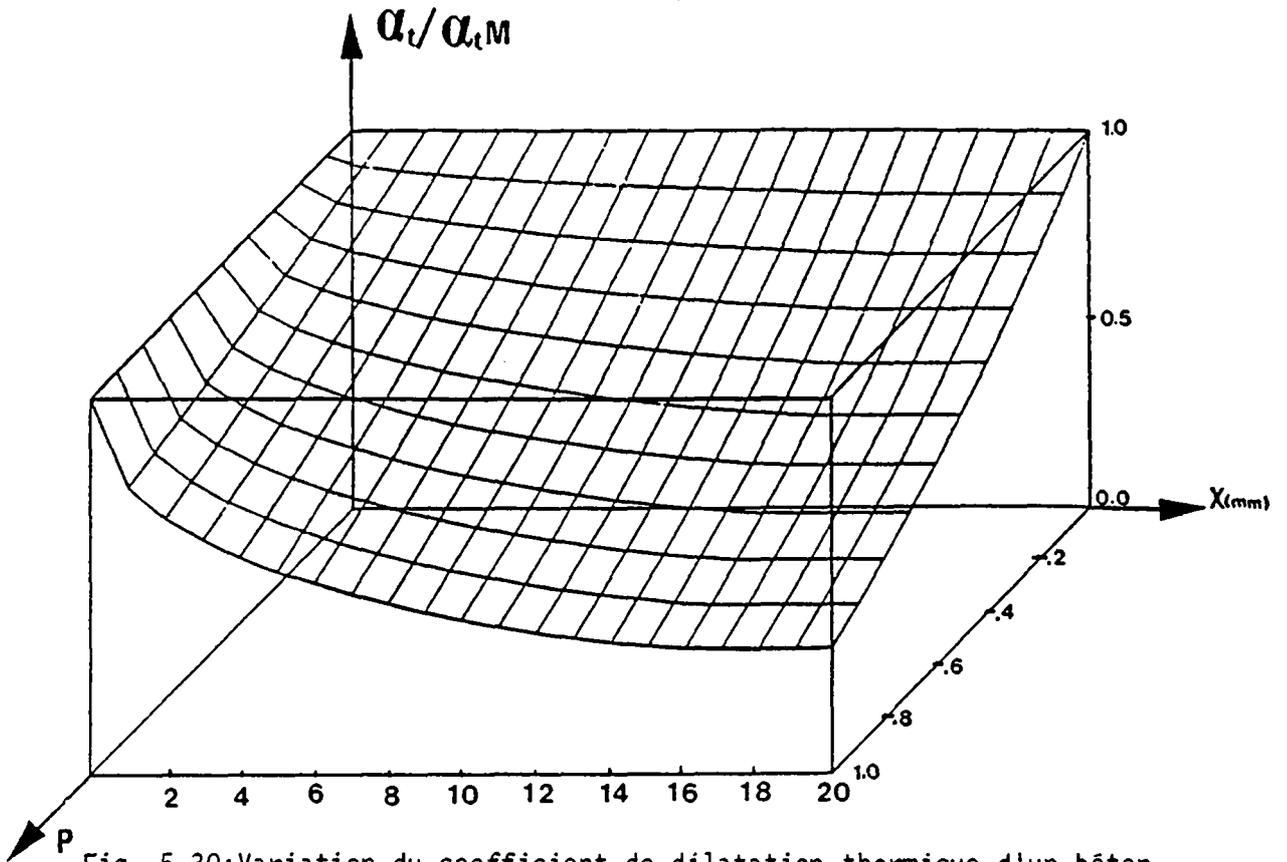


Fig. 5.30: Variation du coefficient de dilatation thermique d'un béton en fonction de la distance à la paroi(x) et de la teneur P en granulats (loi de Fuller, diam. max. 32mm, EG/EM=3, $\alpha_G/\alpha_M=0.3$)

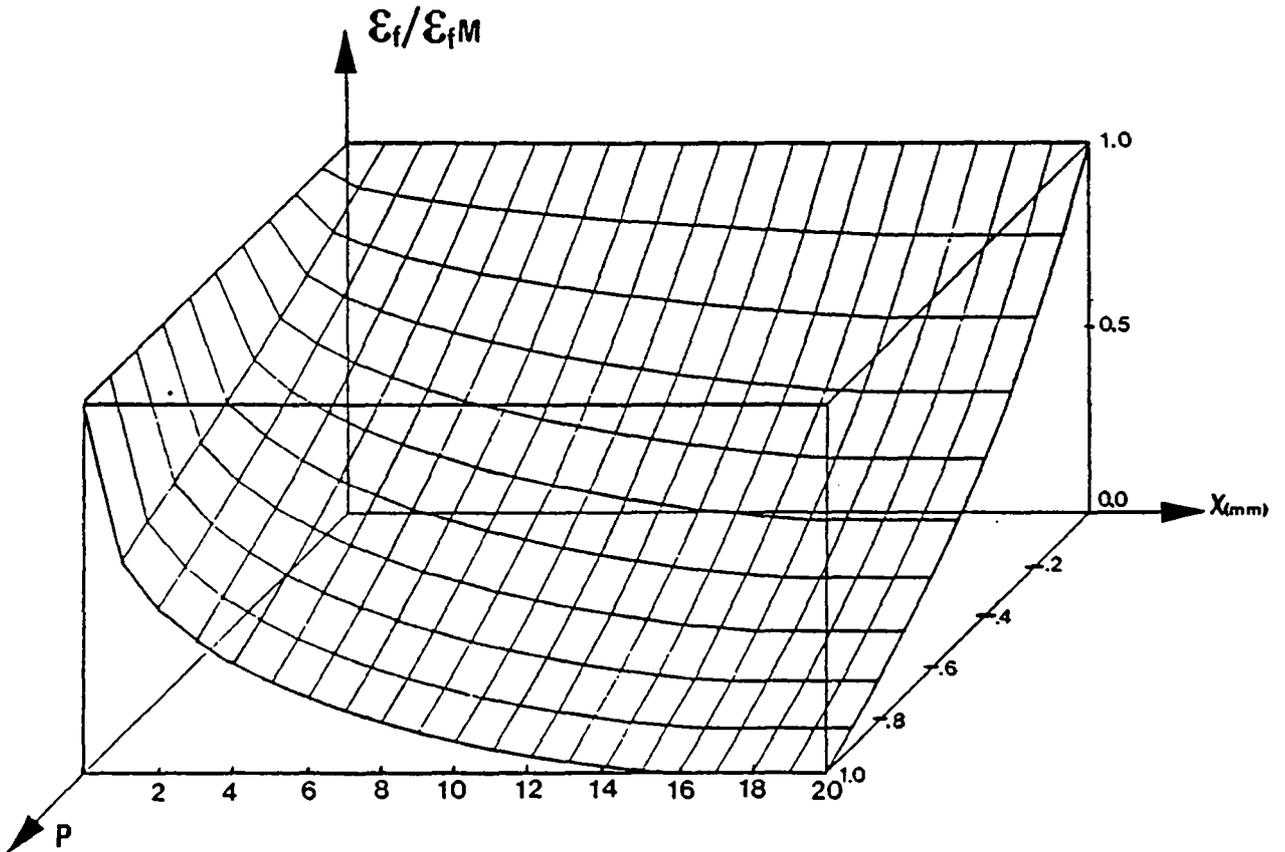


Fig. 5.3I: Variation du fluage d'un béton en fonction de la distance à la paroi (x) et de la teneur P en granulats (granulométrie de Fuller, diamètre max. 32mm, les granulats sont supposés non fluants).

- Retrait hygrique ε_r :

$$\varepsilon_r(x) = \begin{cases} \varepsilon_r M \left(1 - 2 p_0 \frac{EG}{(EM+EG) + p_0(EG-EM)} \right) & \text{pour } 2x > \phi_m \\ & \text{(coeur du matériau)} \\ \varepsilon_r M \left(1 - 2 p_{0,2D}(x) \frac{EG}{(EM+EG) + p_{0,2D}(x)(EG-EM)} \right) & \text{pour } 2x < \phi_m \\ & \text{(peau)} \end{cases} \quad (5.66)$$

Dans cette formule, le retrait $\varepsilon_r G$ des particules est négligé, ce qui est le cas pour les granulats naturels utilisés couramment dans la technologie du béton. La figure 5.32 montre deux diagrammes donnant le retrait du matériau en fonction de la distance à la surface et de la teneur en particules. Les figures A et B sont données pour des rapports EG/EM de 3 et 1/3, représentant approximativement les cas d'un béton normal et d'un béton léger respectivement.

En résumé, on peut conclure (cf. Fig. 5.29 à 5.32) que l'effet de paroi influence beaucoup les propriétés de la peau du matériau et la durabilité se trouve affectée à cause des retraits thermique et hygrique différentiels, ainsi que de la déformabilité différentielle.

Les figures que nous avons déterminées ci-dessus (Fig. 5.29 à 5.32) peuvent être utilisées pour une estimation des propriétés de la peau du béton. Il est clair que si la distribution granulométrique dévie fortement de la courbe de Fuller, il est nécessaire de refaire les calculs et d'en déduire des propriétés de la peau plus réalistes, c'est-à-dire en accord avec la granulométrie utilisée. Signalons aussi que pour une estimation plus correcte d'une propriété du matériau à une distance x donnée depuis la surface, il importe de tenir compte de la distribution granulaire $F_{2D}(\phi, x)$ de la couche du matériau située à une profondeur x . En effet dans la formulation de Hobbs concernant les propriétés effectives d'une structure composite, seule entre en ligne de compte la teneur en inclusion ($p_{0,2D}(x)$) dans les équations 5.63 à 5.66), aucune mention n'a été faite sur la distribution granulaire. Notons que cette insuffisance est propre à beaucoup de modèles analytiques donnant les propriétés effectives et que nous verrons dans le paragraphe suivant.

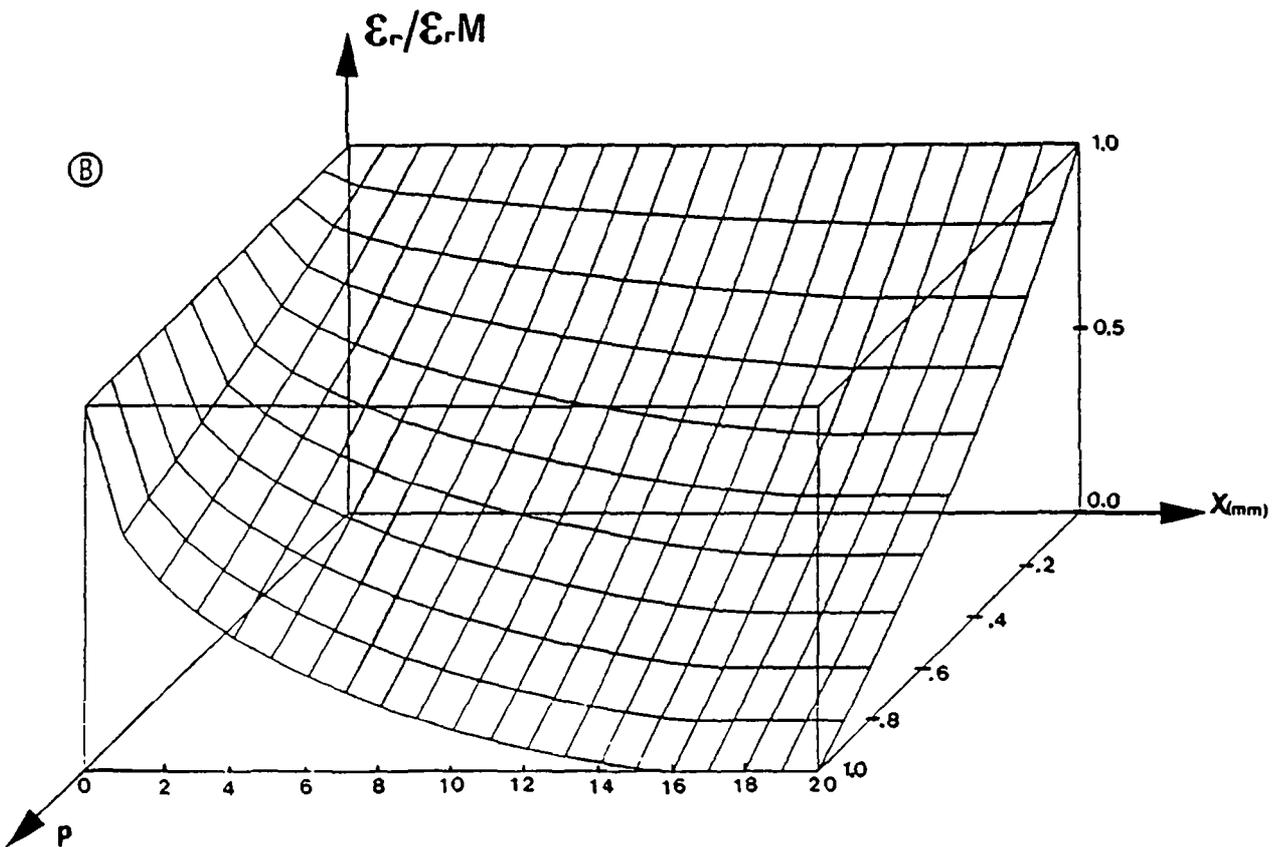
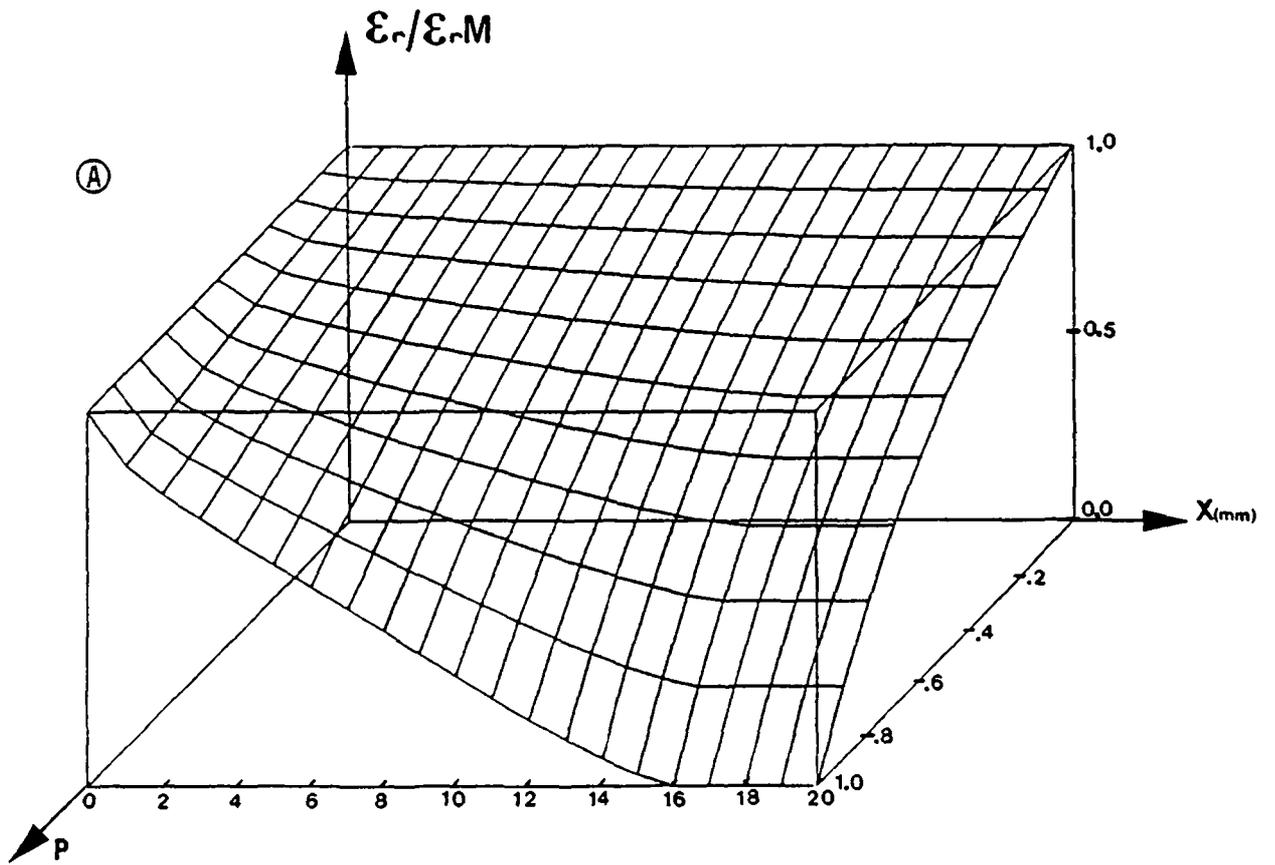


Fig. 5.32 :Variation du retrait hygrique d'un béton en fonction de la distance à la paroi (x) et de la teneur P en inclusions (granulométrie de Fuller, diam. max. 32mm, granulats non sujets au retrait)

A: $EG/EM=3$ (cas du béton normal)

B: $EG/EM=1/3$ (cas du béton léger)

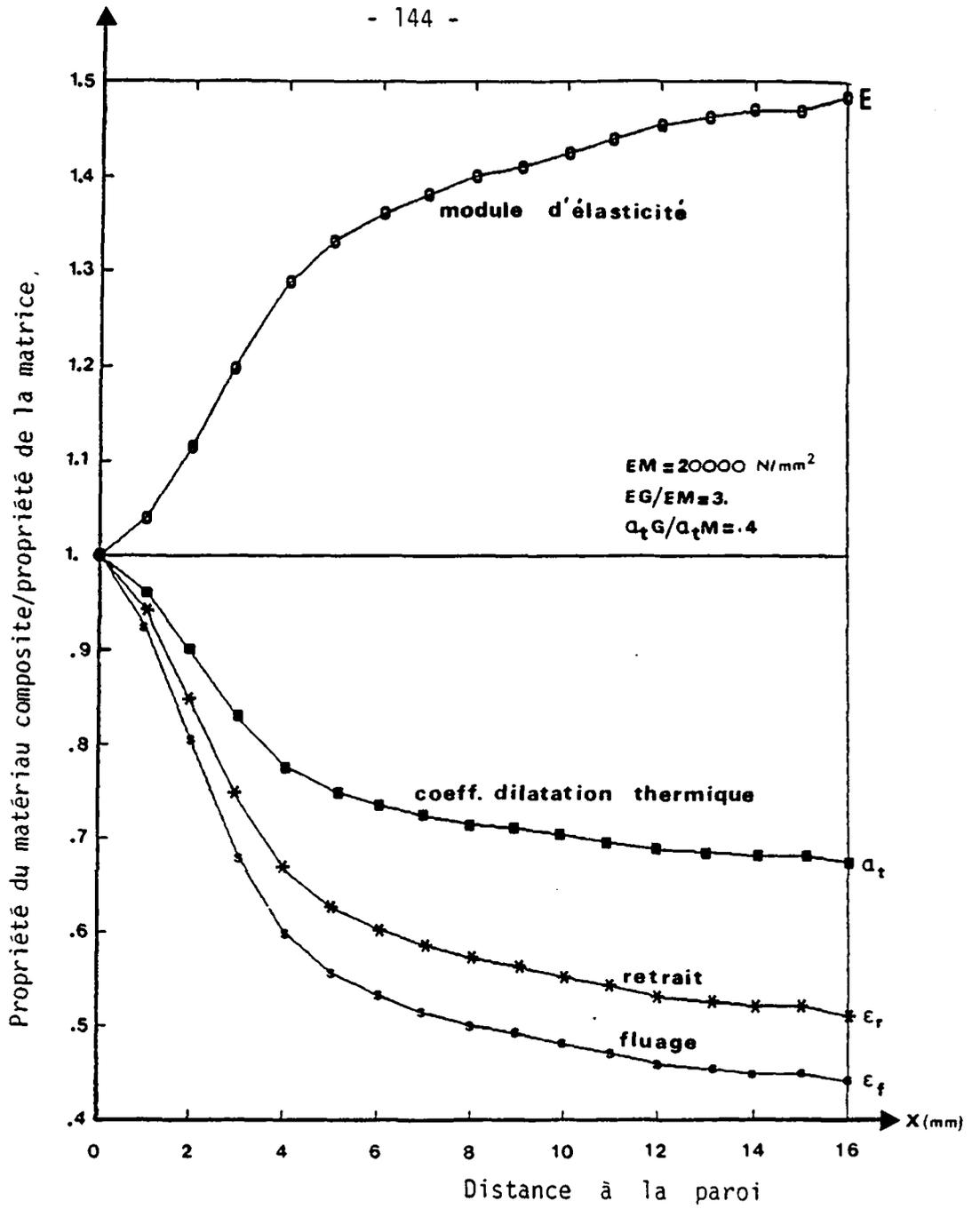


Fig. 5.33

Propriétés du cube de béton généré par ordinateur, rapportées aux propriétés de la matrice, en fonction de la distance à la paroi, calculs effectués selon la courbe $S(x)$ de la Fig. 5.28.

Finalement, sur la figure 5.33, nous donnons quatre courbes obtenues par simulation numérique relative au cube du béton généré précédemment. Ces quatre courbes représentent la variation, en fonction distance à la paroi, d'un béton dont les granulats suivent la parabole de Fuller et de diamètres compris entre 0.35 et 32 mm.

5.7.4 Influence de l'effet de paroi sur les processus de diffusion

Une construction en béton est en principe toujours placée dans un environnement, ainsi tous les agents atmosphériques interagissent avec le matériau depuis les surfaces extérieures de celui-ci. Pour cette raison, la durabilité ne doit pas être considérée principalement comme une propriété du coeur du matériau, telle la résistance, mais avant tout comme une propriété de surface, déterminée par la composition et les propriétés des zones surfaciques du matériau, c'est-à-dire de la peau du béton.

Les zones du matériau soumises à l'effet de paroi sont beaucoup plus riches en pâte de ciment durcie (matrice), de ce fait elles sont très poreuses par rapport au coeur du matériau qui, lui contient plus de granulats, matière non poreuse (cas du béton normal). Cette porosité élevée contribue à une pénétration plus rapide de l'eau, du gaz carbonique ou d'autres agents agressifs de l'air, dans le matériau et augmente les réactions chimiques dans la peau. L'étude de tels phénomènes, intimement liés aux caractéristiques de la peau du matériau, est d'une grande importance pour la durabilité de la construction. L'étude en question doit être basée en particulier sur le processus de diffusion des différents agents. Pour donner un exemple nous analyserons brièvement le cas de la diffusion hygrique (processus de séchage). L'équation différentielle régissant ce phénomène s'écrit:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \text{div} (D \vec{\text{grad}} H) \quad (5.67)$$

où: $H = H(x,t)$: humidité relative en un point x du matériau et
au temps t

$D = D(x,H)$: coefficient de diffusion de l'eau dans le matériau

Dans les matériaux de constructions poreux, le coefficient de diffusion dépend fortement de l'humidité relative H dans les pores et de la structure du matériau [93-98]. Pour introduire l'effet de paroi, on écrira le coefficient de diffusion sous la forme suivante:

$$D = A(\vec{x}) \cdot B(H) \quad (5.68)$$

où: $A(\vec{x})$: dépendance du coefficient de diffusion de la distance à la paroi

$B(H)$: dépendance du coefficient de diffusion de l'humidité relative

La dépendance $B(H)$ peut être approchée par l'expression suivante:

$$B(H) = D_0 \left(\alpha + \frac{1 - \alpha}{1 + \left(\frac{1 - H}{1 - H_C} \right)^n} \right) \quad (5.69)$$

où D_0 , α , H_C et n sont des paramètres dépendant de la nature du matériau [93, 94].

Dans le cas du béton normal, les granulats sont imperméables, ceci signifie que seule la matrice poreuse participe au phénomène de diffusion. Par conséquent, le terme $A(\vec{x})$, représentant la dépendance du coefficient de diffusion vis-à-vis de la distance à la paroi, peut être représenté par la fonction $S(x)$ (éq. 5.60, Fig. 5.28) qui est la teneur en matrice poreuse d'une couche élémentaire du matériau, située à une distance x de la surface.

Dans le cas unidimensionnel, l'équation de diffusion (5.67) s'écrit (cas d'une dalle infinie):

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D \frac{\partial H}{\partial x} \right) \quad (5.70)$$

Cette équation sera résolue numériquement pour une dalle d'épaisseur $2L$, avec les conditions initiales et aux frontières suivantes:

$$\begin{aligned}
 1) \quad H &= 1 && \text{pour } t = t_0 \text{ et } 0 < x < L \\
 2) \quad H &= H_e && \text{pour } t > t_0 \text{ et } x = 0 \\
 3) \quad \frac{\partial H}{\partial x} &= 0 && \text{pour } t > t_0 \text{ et } x = L
 \end{aligned} \tag{5.71}$$

H_e est l'humidité relative de l'environnement séchant dans lequel est placée la dalle.

L'équation 5.71 s'écrit:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{d A(x)}{dx} B(H) \frac{\partial H}{\partial x} + A(x) \frac{\partial B}{\partial H} \left(\frac{\partial H}{\partial x} \right)^2 + A(x) B(H) \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \tag{5.72}$$

Subdivisons la demi-épaisseur L en N intervalles de largeur Δx , on peut écrire:

$$H(x_{i-1}, t) = H(x_i, t) - \Delta x \frac{\partial H}{\partial x} (x_i, t) + \frac{\Delta x^2}{2} \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} (x_i, t) + \dots \tag{5.73}$$

$$H(x_{i+1}, t) = H(x_i, t) + \Delta x \frac{\partial H}{\partial x} (x_i, t) + \frac{\Delta x^2}{2} \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} (x_i, t) + \dots \tag{5.74}$$

Les combinaisons des relations (5.73) et (5.74) donnent

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{H(x_{i+1}, t) - H(x_{i-1}, t)}{2 \Delta x} \tag{5.75}$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = \frac{H(x_{i+1}, t) - 2 H(x_i, t) + H(x_{i-1}, t)}{\Delta x^2} \tag{5.76}$$

De même, on peut écrire:

$$\frac{\partial B}{\partial H} (H(x_i, t)) = \frac{B(H(x_{i+1}, t)) - B(H(x_{i-1}, t))}{H(x_{i+1}, t) - H(x_{i-1}, t)} \tag{5.77}$$

$$\frac{\partial A}{\partial x} (x_i) = \frac{A(x_{i+1}) - A(x_{i-1})}{2 \Delta x} \tag{5.78}$$

Finalement l'équation (5.72) s'écrit au point x_i :

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial t}(x_i, t) = \frac{1}{4\Delta x^2} \{ & B_i(A_{i+1}-A_i)(H_{i+1}-H_{i-1}) + A_i(B_{i+1}-B_{i-1})(H_{i+1}-H_{i-1}) \\ & + 4 A_i B_i (H_{i+1}-2H_i+H_{i-1}) \} \end{aligned} \quad (5.79)$$

ainsi, en chaque point x_i , on a une équation différentielle du premier degré du type:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = f(H, t) \quad (5.80)$$

de la fonction inconnue $H = H(t)/x=x_i$.

Pour résoudre cette dernière équation, on utilise la méthode de Runge-Kulta du 4ème ordre [99].

Il s'agit de l'algorithme suivant:

$$H(t_{j+1}) = H(t_j) + \frac{1}{6} \Delta t (N_1 + 2N_2 + 2N_3 + N_4) \quad (5.81)$$

$$\text{où: } t_{j+1} = t_j + \Delta t \quad (5.82)$$

$$N_1 = f(t_j, H(t_j))$$

$$N_2 = f\left(t_j + \frac{1}{2} \Delta t, H(t_j) + \frac{1}{2} \Delta t N_1\right) \quad (5.83)$$

$$N_3 = f\left(t_j + \frac{1}{2} \Delta t, H(t_j) + \frac{1}{2} \Delta t N_2\right)$$

$$N_4 = f(t_j + \Delta t, H(t_j) + \Delta t N_3)$$

avec les conditions initiales et aux frontières données par les relations (5.71).

La figure 5.34 montre un résultat de cette étude. L'humidité relative extérieure a été prise égale à 50 %. Les calculs ont été réalisés jusqu'à une période de séchage d'une année. Les courbes munies de carrés noircis sont relatives à la diffusion où l'influence de l'effet de paroi

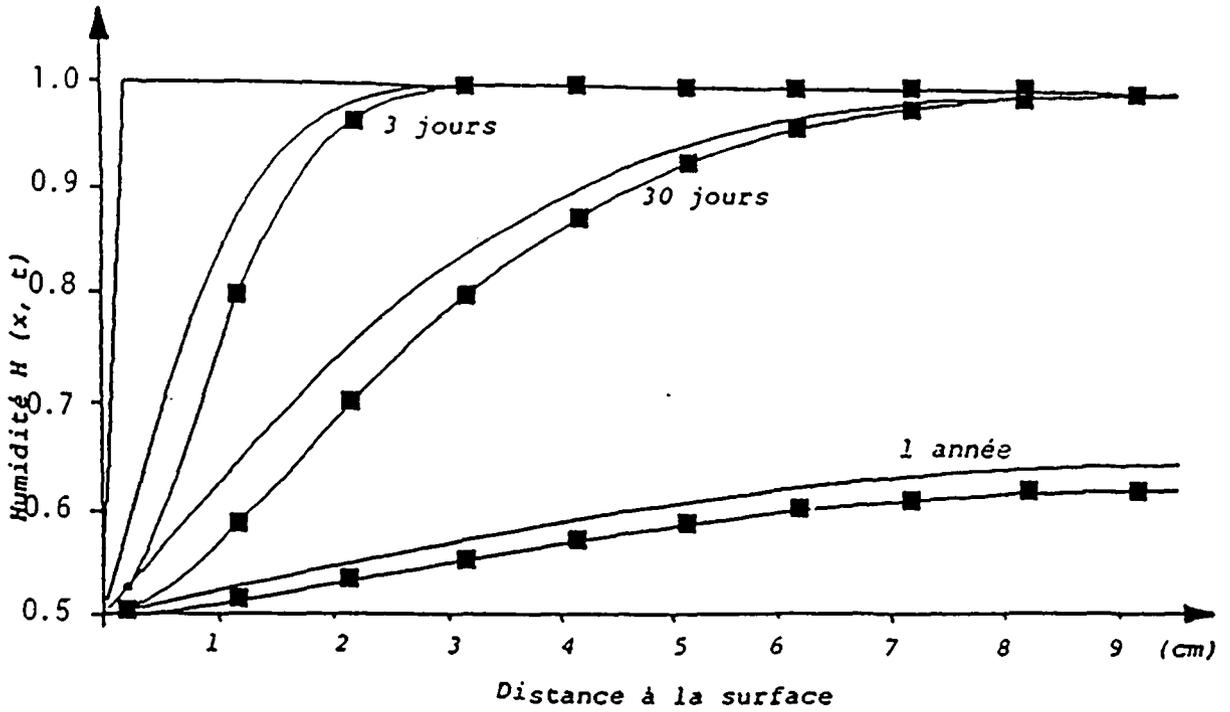


Fig. 5.34 : Distributions de l'humidité dans un béton

— : sans effet de paroi

■—■ : avec effet de paroi

a été prise en compte. A titre comparatif, la même problème a été résolu en omettant l'effet de paroi ($A(x) = \text{constante}$); les résultats sont montrés par les courbes continues de la figure 5.34 qui représentent les distributions de l'humidité pour trois périodes de séchage différentes (1 mois, 3 mois, 1 année). On remarque clairement sur cette figure que l'influence de l'effet de paroi sur un tel phénomène de diffusion n'est pas négligeable; par conséquent, pour une étude réaliste du processus de dessiccation, il importe de tenir compte d'un tel effet.

Une étude analogue peut être réalisée pour le processus de carbonatation du béton [100] qui est un facteur très important pour l'étude de la durabilité d'une construction.

5.8 Représentation d'une structure composite par éléments finis

Pour analyser le comportement physique ou mécanique d'une structure composite, nous allons utiliser la méthode des éléments finis. L'analyse par cette méthode d'une structure à trois dimensions (3D) semble actuellement difficilement réalisable malgré la puissance de calcul des ordinateurs dont nous disposons. De ce fait, dans toutes les études qui suivront nous sommes restreints au cas de structures à deux dimensions (2D).

Dans le paragraphe 5.6, nous avons montré qu'il était possible de simuler d'une façon réaliste une structure composite à 2D, représentative d'un matériau composite en tenant compte de la composition du matériau, de la distribution granulométrique des inclusions et de leur géométrie. Pour analyser le comportement d'une telle structure, par la technique numérique mentionnée ci-dessus, nous devons avant tout la subdiviser en éléments finis.

Nous décrirons notre méthode de maillage sur un exemple donné par la figure 5.35 qui représente la structure d'un béton formé d'inclusions sphériques suivant une distribution granulométrique de Fuller et de diamètres compris entre 8 et 32 mm. La structure est tout d'abord sub-

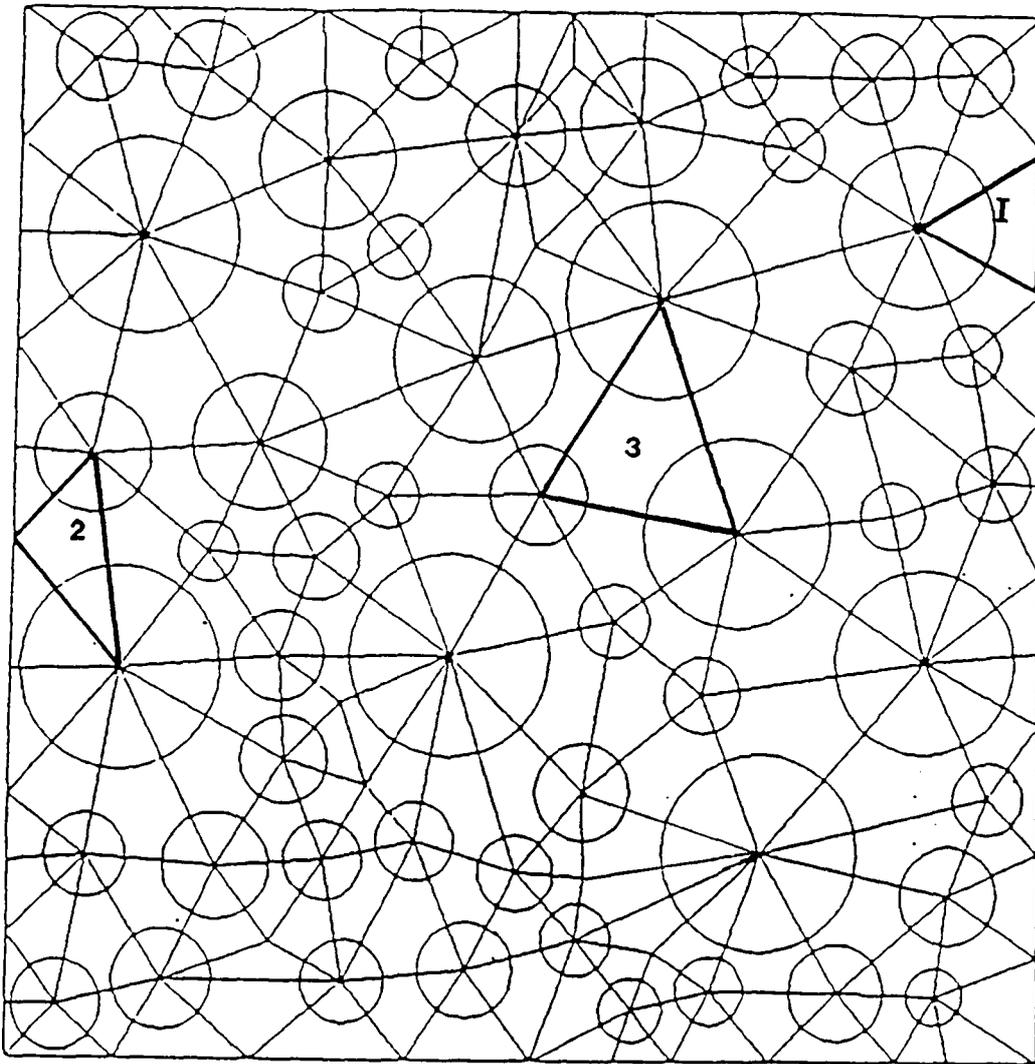


Fig. 5.35

Maillage grossier d'une structure composite consistant en super-éléments de trois types différents (types 1,2 et 3) définis dans la fig.5.36.

La géométrie des inclusions est assimilée à des disques (2D), la distribution granulométrique suit la loi parabolique de Fuller , les bornes inférieure et supérieure de l'étendue granulométrique sont respectivement de 8 et 32 mm.

divisée en éléments grossiers comme montrés sur la figure 5.35. Dans ce maillage préliminaire, trois types d'éléments, qu'on appellera super-éléments sont présents:

- Super-élément de type 1:

Triangle dont le premier sommet se trouve sur le centre d'une inclusion, les deux autres sommets sont soit dans la matrice, soit sur la frontière de la structure.

- Super-élément de type 2:

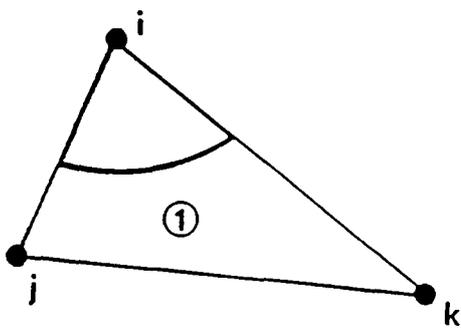
Triangle dont les deux premiers sommets sont confondus avec les centres de deux inclusions voisines, le troisième étant localisé soit dans la matrice, soit sur la frontière de la structure.

- Super-élément de type 3:

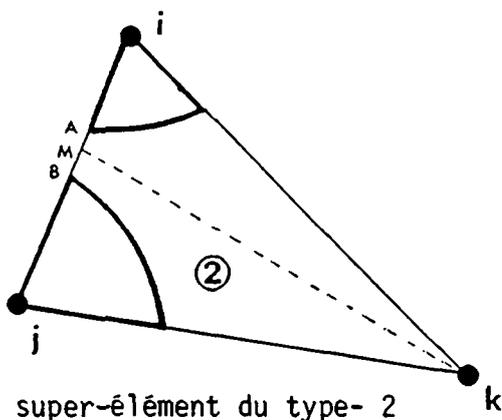
Triangle dont les trois sommets sont confondus avec les centres de trois inclusions voisines.

Ces trois types de super-éléments sont montrés sur la figure 5.36. Les points-sommets de ces triangles qui ne sont pas situés sur le centre d'une inclusion sont choisis aussi judicieusement que possible; c'est ainsi, par exemple, que la distance entre deux points successifs de la même frontière est gardée à peu près constante. Il faut signaler qu'un maillage automatique et assez régulier d'une telle structure est difficilement réalisable. Cette difficulté relève d'une part du positionnement aléatoire des inclusions, d'autre part de leurs différences de tailles. Si, ces deux caractères de la structure apparaissent comme des inconvénients du point de vue mathématique, ils sont néanmoins indispensables pour une simulation réaliste du comportement d'un matériau composite donné.

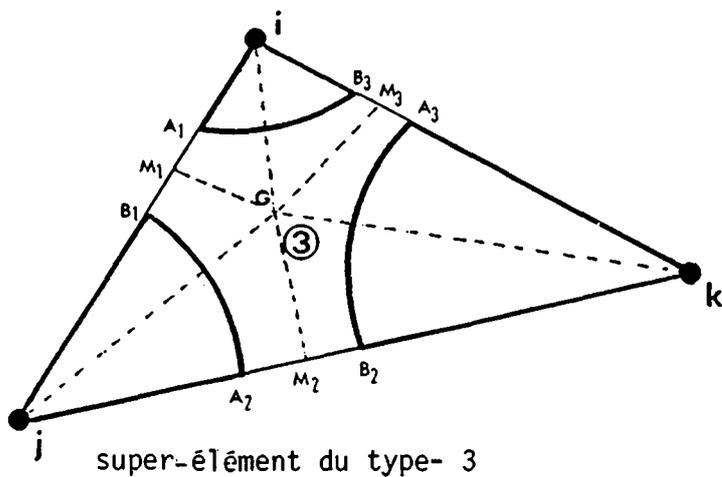
Les super-éléments du type 2 sont subdivisé en deux éléments du type 1. Cette subdivision est réalisée par le segment KM où M est le point milieu du segment AB défini dans la figure 5.36.



super-élément du type- 1



super-élément du type- 2



super-élément du type- 3

Fig. 5.36

Définition des super-éléments.

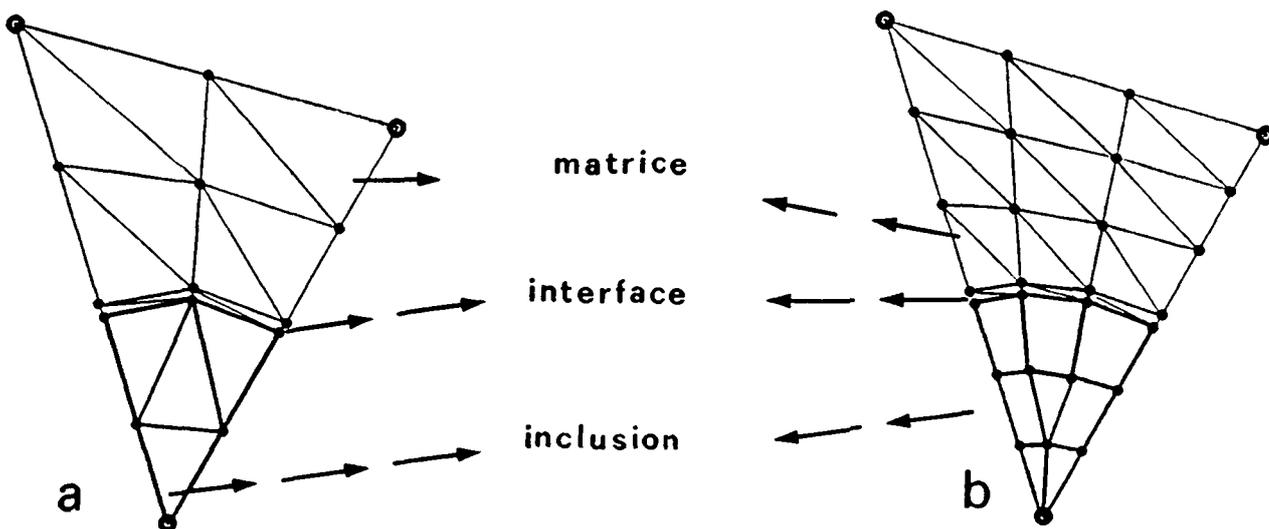


Fig. 5.37

Deux exemples de subdivision fine des super-éléments du type I, et qui ont été utilisés dans l'analyse des structures composites.

Les super-éléments du type 3 sont partagés en six éléments du type 1. Cette subdivision est définie par les points M_1 , M_2 et M_3 désignant respectivement les milieux des segments A_1B_1 , A_2B_2 et A_3B_3 et le point G qui est intérieur au triangle $M_1M_2M_3$; G peut être par exemple le centre de gravité du triangle $M_1M_2M_3$. Cette situation est visualisée sur la figure 5.36. Notons que, pour des raisons de compatibilité entre deux éléments adjacents, il importe que les points M (ou M_1 , M_2 et M_3) définis ci-dessus soient milieux des segments AB (ou A_1B_1 , A_2B_2 et A_3B_3). Le maillage grossier de la figure 5.35 est ainsi réduit à un ensemble de super-éléments du type 1.

Chaque super-élément du type 1, défini par les coordonnées de ses trois sommets et le rayon de l'inclusion, est subdivisé à son tour par des éléments finis plus fins de géométrie triangulaires ou quadrilatères. La figure 5.37a montre un exemple de subdivision d'un super-élément de type 1. Dans ce cas, on distingue 4 éléments finis triangulaires représentant le secteur de l'inclusion et 8 éléments du même type pour la matrice. Pour tenir compte de l'interface, dont les propriétés sont différentes de celles de la matrice, nous avons introduit une couronne entre l'inclusion et la matrice. Cette couronne, dont l'épaisseur est de l'ordre d'une dizaine de microns, est représentée par 4 éléments finis dans le cas de la figure 5.37a. En adoptant le mode de subdivision fine de la figure 5.37a, il en résulte le maillage fin de la structure composite de la figure 5.36 qui est représenté par la figure 5.38. Notons que, vu la faible épaisseur de l'interface, les éléments finis qui la représentent ne sont pas visibles sur le dessin de la figure 5.38. Cette technique de maillage d'une structure est réalisée automatiquement sur ordinateur grâce à un programme que nous avons mis au point sur le Cyber 850 du centre de calcul.

Il est évident que la subdivision d'un super-élément du type 1, peut être aussi fine que l'on veut; cependant, le nombre d'éléments finis total de la structure devient considérable, ce qui engendre des difficultés concernant la résolution des systèmes d'équations résultant, étant donné la limite des ordinateurs. La figure 5.37b donne un exemple d'une subdivision plus fine que la précédente. Elle consiste en:

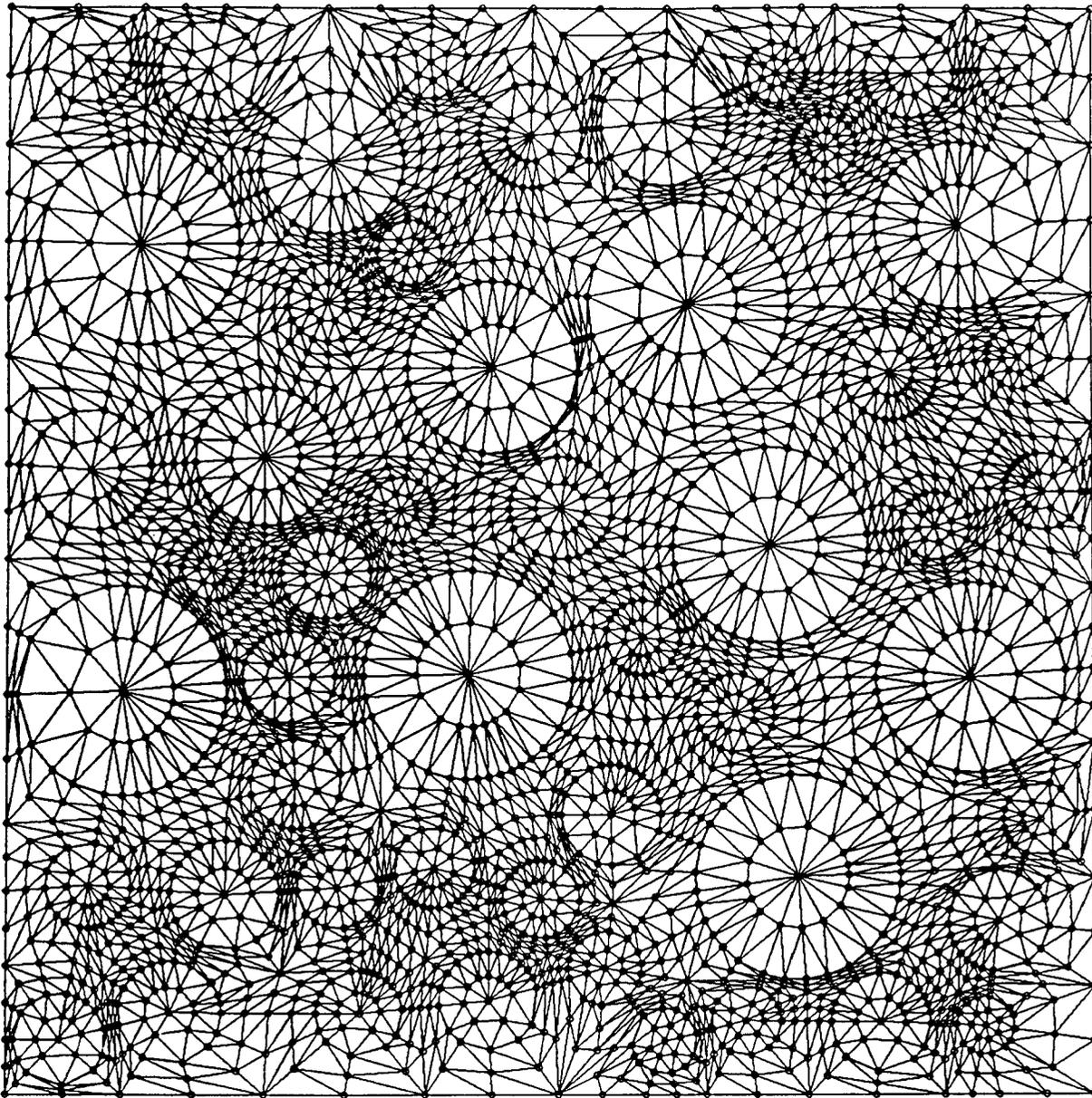


Fig. 5.38

Subdivision fine en éléments finis de la structure de la Fig.5.35 et en utilisant la décomposition des super-éléments selon la fig.5.37a.

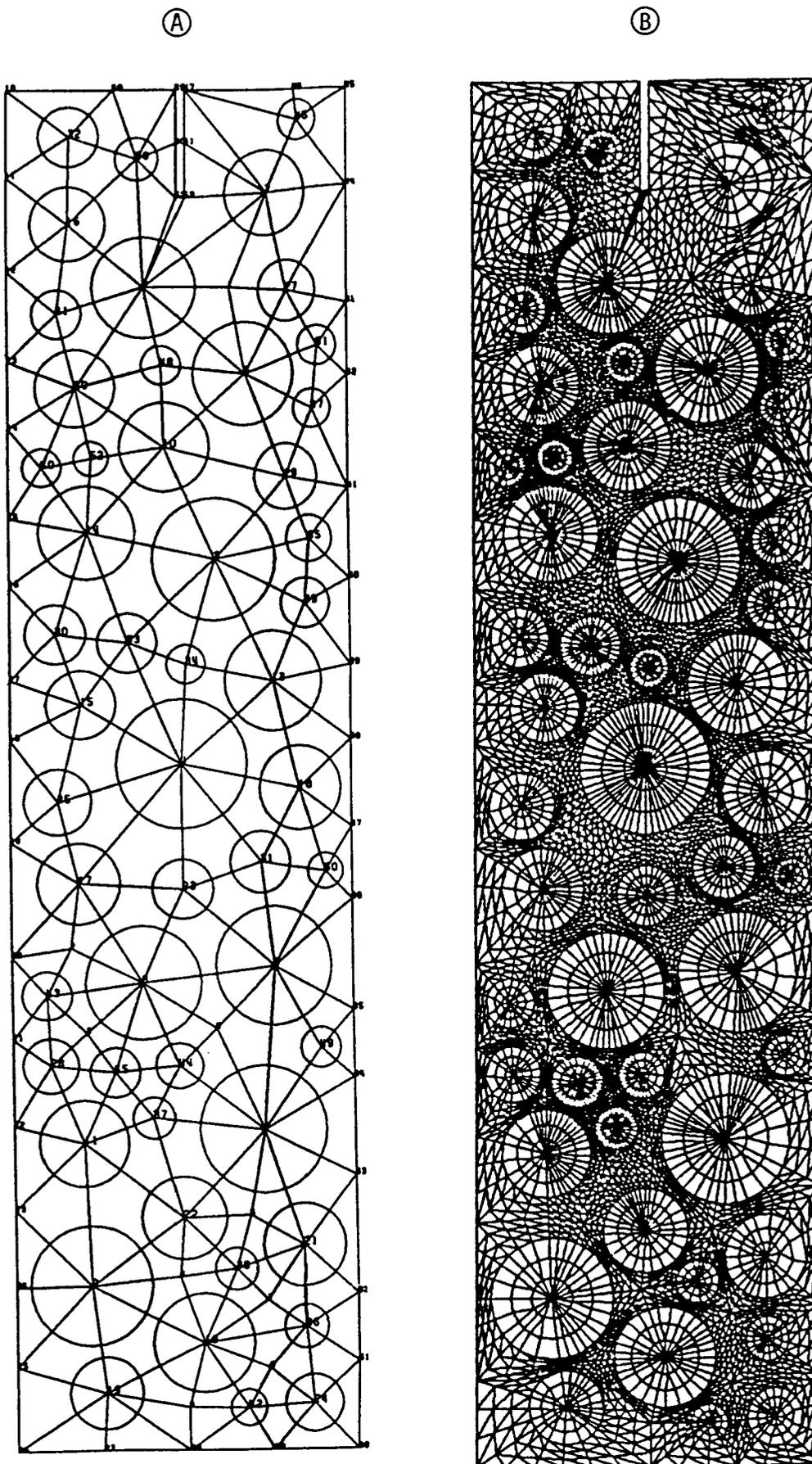


Fig. 5.39 : Représentation d'une structure composite à inclusions-disques par des éléments fins fins en utilisant le mode de subdivision de la Fig.5.37b.
A : maillage grossier
B : maillage fin

- 18 éléments triangulaires pour la matrice
- 6 éléments triangulaires pour l'interface
- 8 éléments triangulaires et quadrilatères pour l'inclusion.

Ce type de maillage a été adopté pour traiter le problème de la fissuration dans un matériau composite et qui constitue l'objet du chapitre suivant. La figure 5.39b donne un exemple d'un maillage fin obtenu à partir du maillage grossier de la structure composite de la figure 5.39a en utilisant le mode de subdivision relatif à la figure 5.37b.

Dans cette technique de maillage, nous avons bénéficié de la géométrie simple des inclusions qui sont assimilées à des disques. Pour des structures où les inclusions sont représentés par des géométries réelles, c'est-à-dire, basées sur une certaine loi morphologique des granulats réels (cf. § 5.2), la méthode de maillage adoptée est dérivée de la précédente.

Ainsi pour mailler une structure dont la géométrie des inclusions suit la loi morphologique des granulats naturels de la Vallée du Rhône, représentée dans la figure 5.9, on procède d'abord par la détermination des points nodaux d'une inclusion circulaire de rayon moyen A_0 , puis, ceux-ci sont ajustés par les paramètres de la loi morphologique via l'équation (5.6). La figure 5.40 représente un exemple de maillage d'une structure composite aléatoire dans la géométrie des inclusions, suit la loi morphologique représentée dans la figure 5.9 et basée sur le type de maillage fin décrit dans la figure 5.37b; la granulométrie suit la loi de Fuller.

5.9 Propriétés effectives d'un matériau composite

5.9.1 Aperçu sur les théories des matériaux multiphases

L'utilisation des matériaux hétérogènes ou composites existe depuis des millénaires, mais ce n'est qu'en 1873 que Maxwell décrit les propriétés physiques de solides consistant en une combinaison de maté-

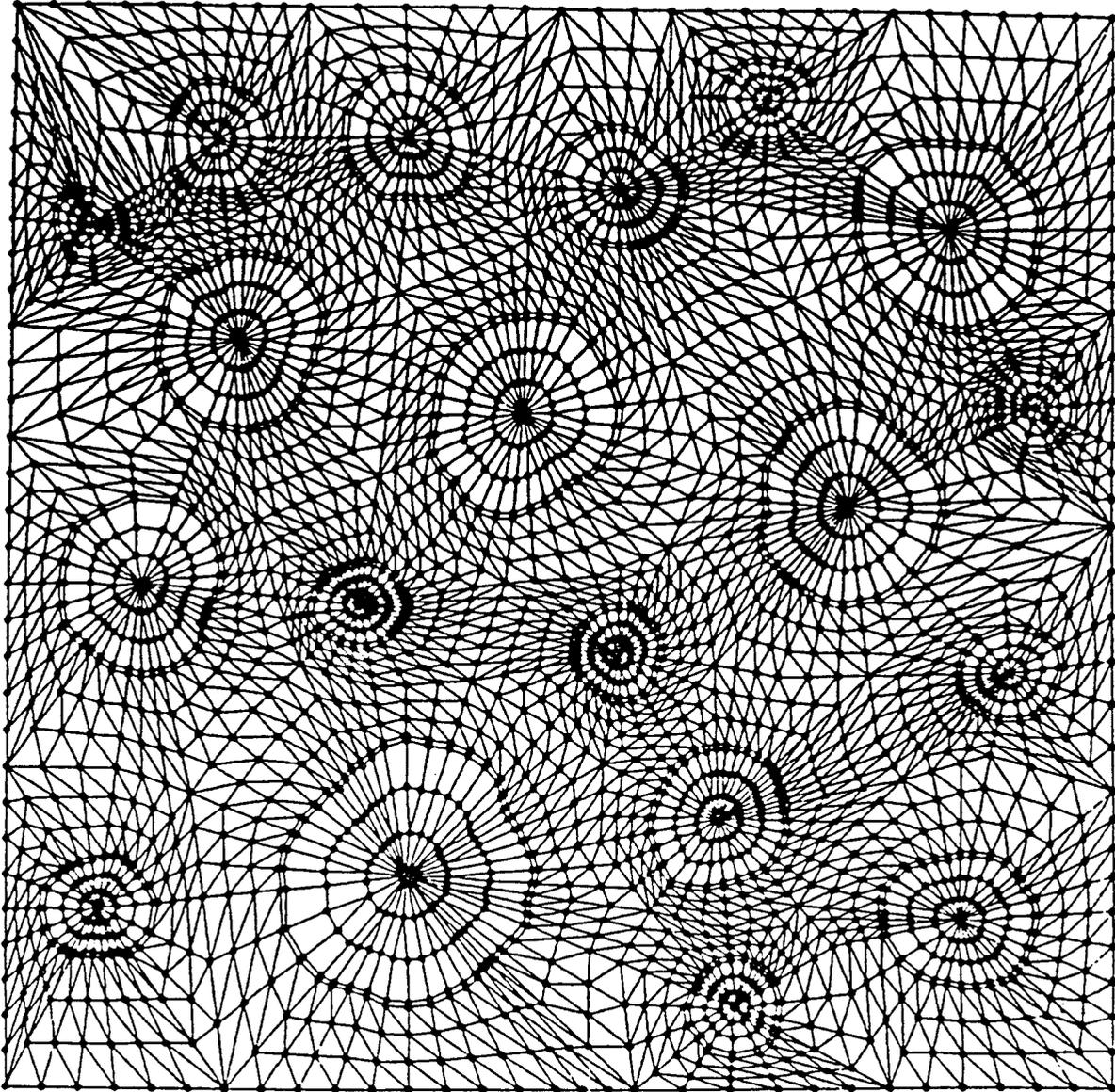


Fig. 5.40

Maillage fin d'une structure composite dont les inclusions ont une géométrie décrite par la loi morphologique représentée dans la Fig.5.9. On a adopté le mode de subdivision fine de la Fig.5.37b.

riaux différents. Si la masse, le volume ou la densité d'un matériau composite sont liés par des relations évidentes avec les concentrations et les grandeurs des phases individuelles, il en est autrement pour toutes les autres propriétés, telles le module d'élasticité, le coefficient de diffusion, la conductivité, ...

Un grand nombre de modèles analytiques ont été proposés pour prédire, par exemple le module d'élasticité d'un matériau multiphase. Probablement les premiers furent les modèles en série et en parallèle dus respectivement à Reuss et à Voigt; tous les deux ont été utilisés pour modéliser le béton. Dans le but de clarifier les théories relatives aux propriétés effectives d'un matériau multiphase, nous décrivons brièvement les modèles de Reuss et de Voigt; nous nous limitons à un matériau à deux phases [101].

Dans ce qui va suivre, les indices m et g se réfèrent aux propriétés des deux phases, l'absence d'indice est relative à la propriété du matériau composite, par exemple:

V_g : volume de la première phase

V_m : volume de la deuxième phase

V : volume du matériau composite

Considérons un matériau homogène et isotrope de volume V et de coefficient de compression volumique K , soumis à une compression hydrostatique uniforme σ . La diminution totale du volume ΔV et l'énergie de déformation totale emmagasinée dans le matériau sont données par les relations suivantes:

$$\Delta V = - \sigma \frac{V}{K} \quad (5.84)$$

$$U = \frac{\sigma^2 V}{2K} \quad (5.85)$$

Considérons à présent un matériau à deux phases macroscopiquement homogène et soumis à la même condition de charge que précédemment. L'hypo-

thèse essentielle de Reuss est que les deux phases sont soumises à la même contrainte que celle appliquée, c'est-à-dire σ .

Ainsi, l'accroissement total du volume est:

$$\Delta V = \Delta V_m + \Delta V_g \quad (5.86)$$

or, en utilisant la relation (5.84)

$$- \sigma \frac{V}{K} = - \sigma \left(\frac{V_m}{K_m} + \frac{V_g}{K_g} \right) \quad (5.87)$$

et en désignant par C_m et C_g les concentrations volumiques des deux phases, la valeur effective K du matériau composite, équivalent à un matériau homogène, s'écrit:

$$\frac{1}{K} = \frac{C_m}{K_m} + \frac{C_g}{K_g} \quad (5.88)$$

Dans le modèle de Voigt, on considère aussi un matériau homogène soumis à une compression hydrostatique σ . La déformation volumique est:

$$\epsilon = \frac{dV}{V} = - \frac{\sigma}{K} \quad (5.89)$$

L'énergie de déformation s'écrit alors:

$$W = \epsilon^2 \frac{KV}{2} \quad (5.90)$$

L'hypothèse essentielle de Voigt est que les déformations dans les deux phases sont identiques et égales à la déformation ϵ du matériau homogène équivalent. Les contraintes dans les deux phases sont alors données par:

$$\sigma_m = - \epsilon K_m \quad (5.91)$$

$$\sigma_g = - \epsilon K_g \quad (5.92)$$

L'énergie de déformation du matériau homogène équivalent est égale à la somme des énergies de déformation emmagasinées dans les deux phases; ainsi, on a:

$$W = W_m + W_g \quad (5.93)$$

$$\text{ou: } \epsilon^2 \frac{K V}{2} = \epsilon^2 \frac{K_m V_m}{2} + \epsilon^2 \frac{K_g V_g}{2} \quad (5.94)$$

En introduisant les concentrations volumiques C_m et C_g , l'équation (5.94) donne:

$$K = C_m \cdot K_m + C_g \cdot K_g \quad (5.95)$$

Plusieurs théories basées sur ces deux modèles simples (Reuss et Voigt) furent développées pour modéliser le béton [102]. C'est ainsi que Dantu [103] et Hansen [104] considèrent le béton comme un matériau stratifié; formé d'une combinaison de modèles en parallèle et en série comprenant des couches de granulats et de pâte de ciment durcie ou mortier, pour représenter la rigidité du béton.

Mills et Ono [105] considèrent le béton comme formé d'un ensemble d'éléments de Maxwell prismatiques à deux couches (i.e: juxtaposition d'une couche de granulat avec une couche de matrice). Dans ce modèle, les éléments sont orientés selon un angle arbitraire par rapport à l'axe de chargement; puis par l'emploi d'une fonction de densité probabilistique, ils introduisirent une équation qui décrit la réponse élastique d'un ensemble de ces éléments irrégulièrement orientés et fortement compactés.

D'autres théories proposées dans la littérature sont des modèles à inclusions plutôt que des modèles à couches comme ceux mentionnés ci-dessus. Le premier modèle de ce type est dû à Hashin [106] qui considéra un matériau formé de particules sphériques (1ère phase) où chacune d'entre elles est enveloppée par une coquille d'un autre matériau (2ème phase, matrice).

Notons qu'il existe beaucoup d'autres approches analytiques concernant la détermination des propriétés effectives d'un matériau composite à partir des propriétés des phases individuelles; une revue générale de ces théories est donnée dans l'article de Dougill [102].

De tels modèles analytiques, aussi élaborés soient-ils, souffrent cependant de certaines insuffisances. En effet, la structure réelle et souvent complexe du matériau composite, comme c'est le cas pour le béton, n'est pas prise en considération. Pour une approche réaliste, il est nécessaire de tenir compte de la distribution de la taille des grains, de leur géométrie et de leur répartition au sein de la phase dispersante, c'est-à-dire la matrice. La prise en compte de l'existence de la zone interfaciale, dont les propriétés sont différentes de celles des deux phases, est souvent absente dans ces théories. De plus, les phases sont considérées comme homogènes et isotropes dans tout le matériau, ce qui n'est pas toujours le cas dans un matériau réel.

5.9.2 Détermination numérique du module d'élasticité effectif d'une structure composite

La détermination d'une propriété d'un matériau multiphase pour un modèle quelconque ne peut être rigoureuse que si la structure réelle du matériau est représentée aussi fidèlement que possible dans le modèle en question. La méthode des éléments finis appliquée à l'analyse d'un comportement mécanique ou physique des structures composites simulées et représentatives d'un matériau réel (voir § 5.6) constitue un moyen d'étude puissant pour les matériaux multiphases à structure complexe comme le béton. C'est cette approche numérique que nous allons adopter dans toutes les études qui suivront.

Pour étudier quelques propriétés effectives d'un béton normal nous avons représenté sa structure par des inclusions circulaires dont les tailles suivent la loi parabolique de Fuller et sont noyées dans une matrice de mortier. Ces hypothèses représentent assez bien la structure réelle d'un béton usuel.

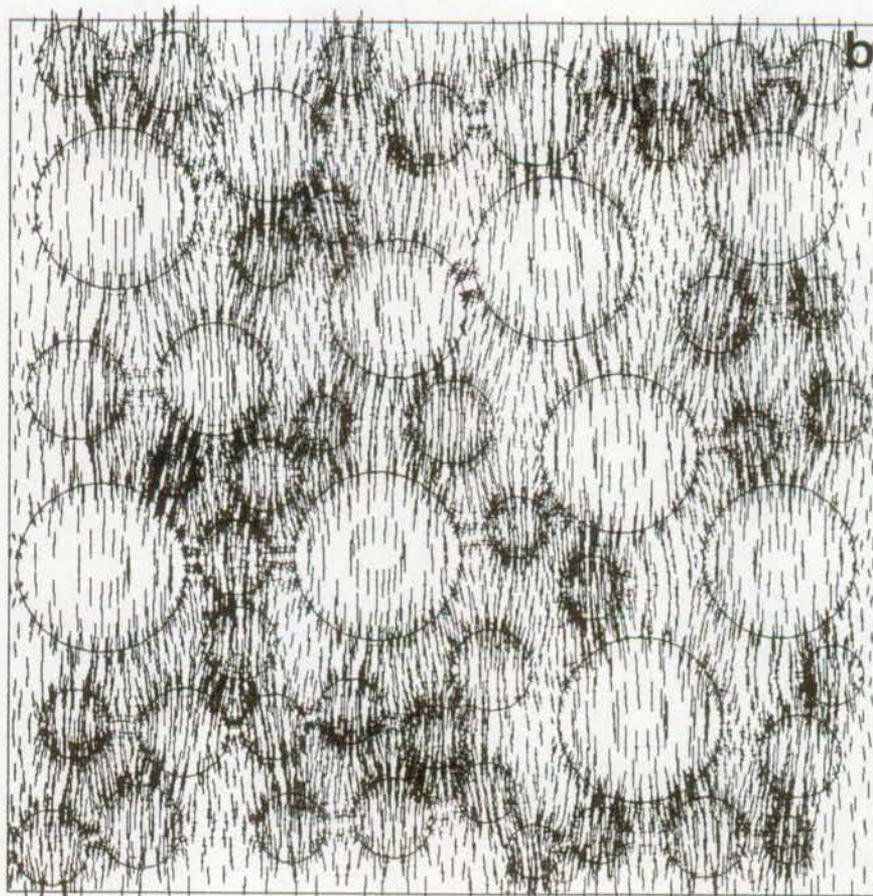
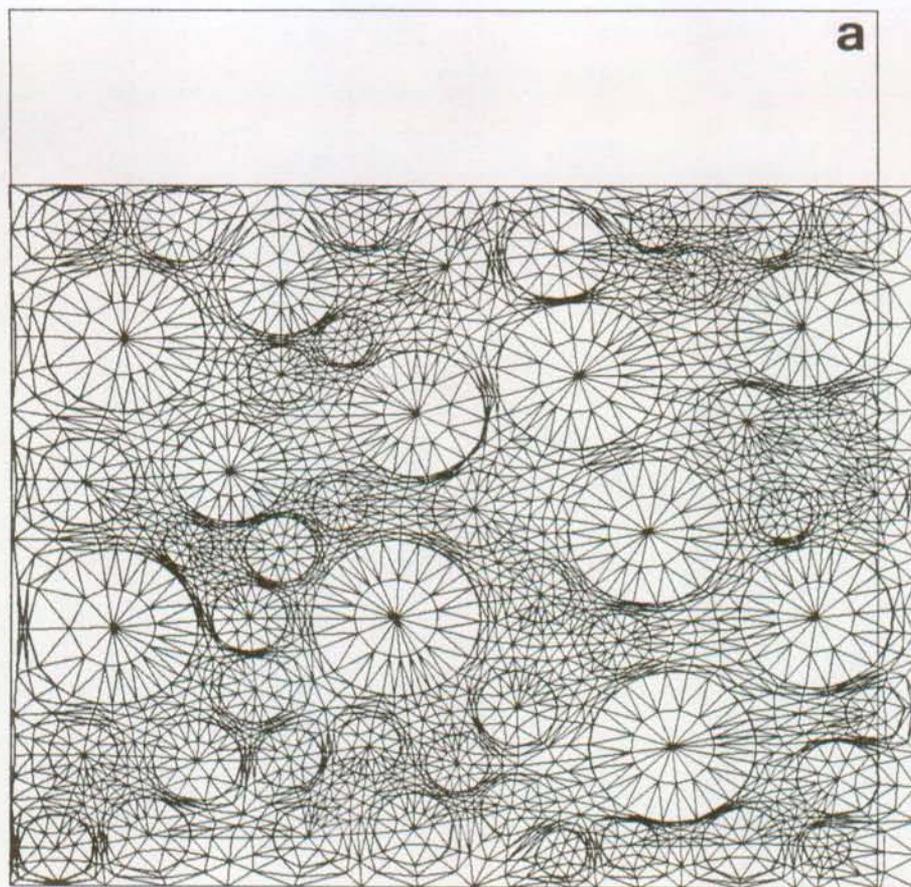


Fig. 5.41: *Comportement mécanique d'une structure composite soumise à une compression*

A: structure déformée

B: distribution des contraintes principales

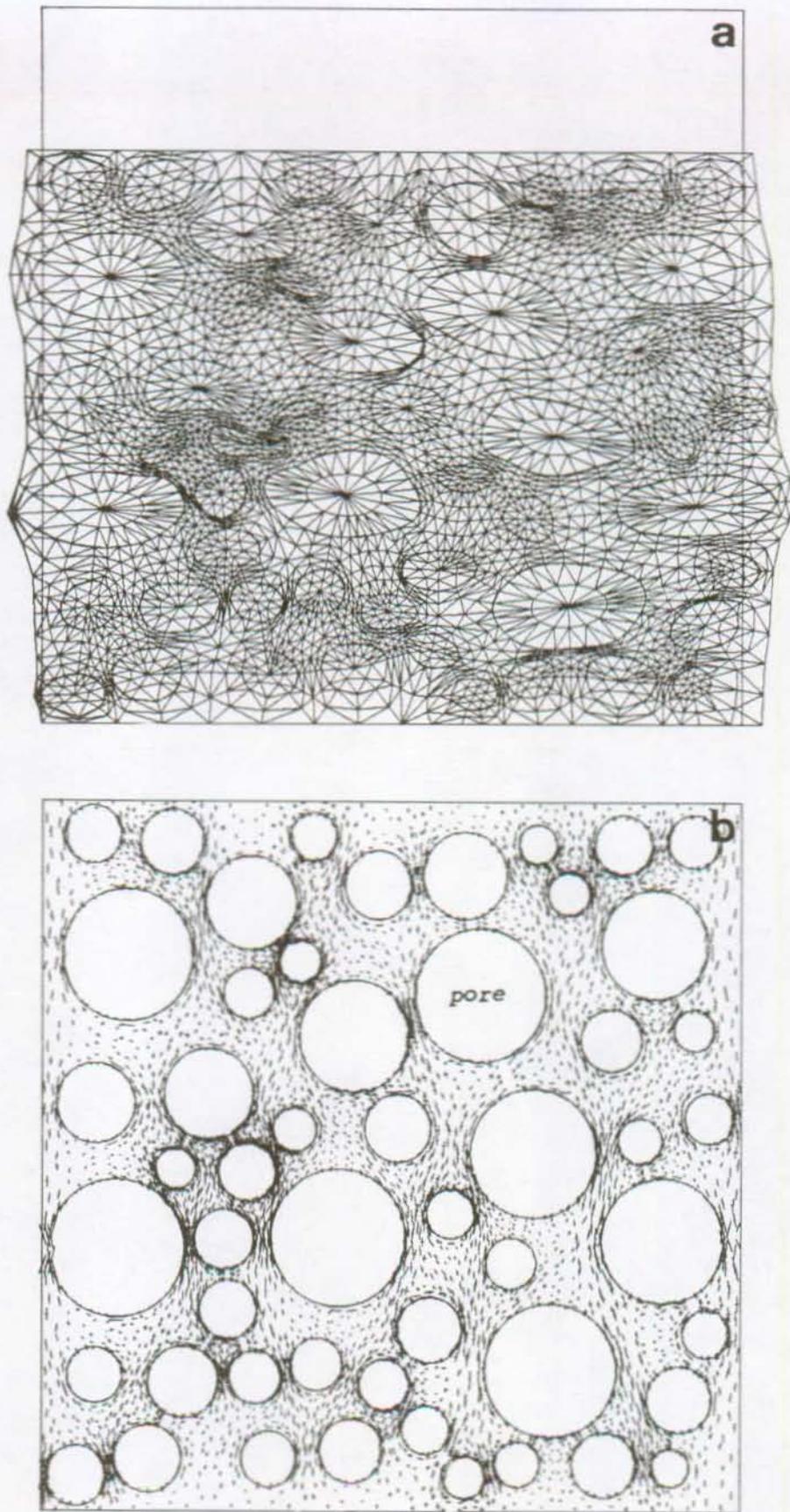


Fig. 5.42 : Comportement mécanique d'une structure poreuse soumise à une compression
A : structure déformée
B : distribution des contraintes principales

Au moyen du maillage de la structure composite représentée dans la figure 5.38, on peut aisément simuler une compression du matériau en imposant par exemple un certain déplacement sur tous les noeuds du bord supérieur de la structure, les noeuds de la base de la structure étant maintenus fixes. On peut alors calculer la force de réaction induite et par suite le module d'élasticité global de la structure. Les lois constitutives et la méthode d'analyse numérique utilisées seront explicitées dans le prochain chapitre (chapitre 6).

La figure 5.41 représente le résultat graphique de cette simulation de compression. La figure 5.41a montre la déformation de la structure. La distribution des contraintes principales au sein de chaque élément fini est montrée dans la figure 5.41b. On peut voir sur cette figure les lignes de compression qui sont quasiment parallèles à la direction verticale de la compression. On remarque aussi sur cette même figure que les contraintes développées dans les inclusions sont plus élevées que dans la matrice, ce qui est dû au fait que dans cet exemple le module d'élasticité des inclusions, E_G , est trois fois plus élevé que celui de la matrice, E_M .

Par ce moyen, nous avons réalisé une étude paramétrique du module d'élasticité effectif en fonction des propriétés élastiques des deux composants et de leurs proportions relatives. Dans les programmes développés à cette fin, les propriétés des deux phases peuvent être variées à volonté. De plus, la variation de la teneur en inclusion, désignée par la lettre g , est réalisée en augmentant ou en diminuant relativement le rayon de chaque inclusion.

En imposant un module d'élasticité quasiment nul aux inclusions, on peut simuler le comportement mécanique d'une structure poreuse, tels la matrice de pâte de ciment durcie et le béton cellulaire; dans ce contexte, la distribution granulométrique doit être remplacée par la distribution de la taille des pores. La figure 5.42 montre le résultat obtenu en simulant une compression sur une structure poreuse. Dans ce cas, toutes les contraintes sont supportées par la matrice, ce que l'on peut remarquer sur la figure 5.42b.

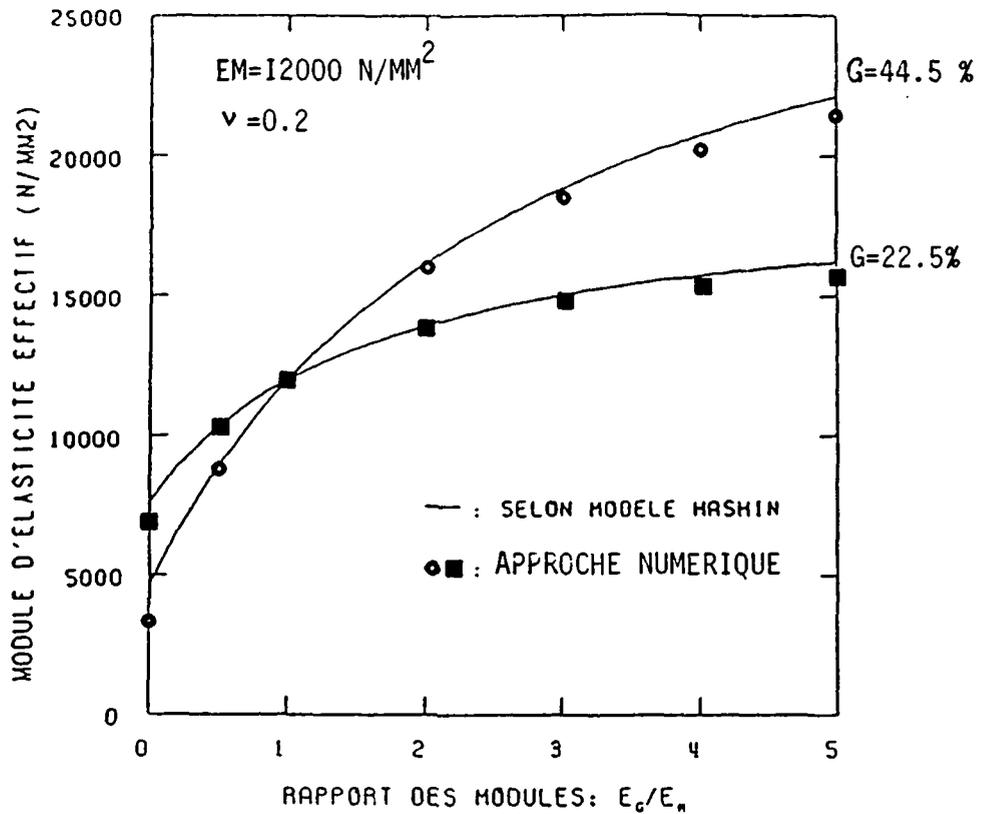


Fig. 5.43

Module d'élasticité effectif d'une structure composite en fonction du rapport des modules des 2 phases (EG/EM) et pour 2 teneurs en inclusions (22.5 % et 44.5 %)

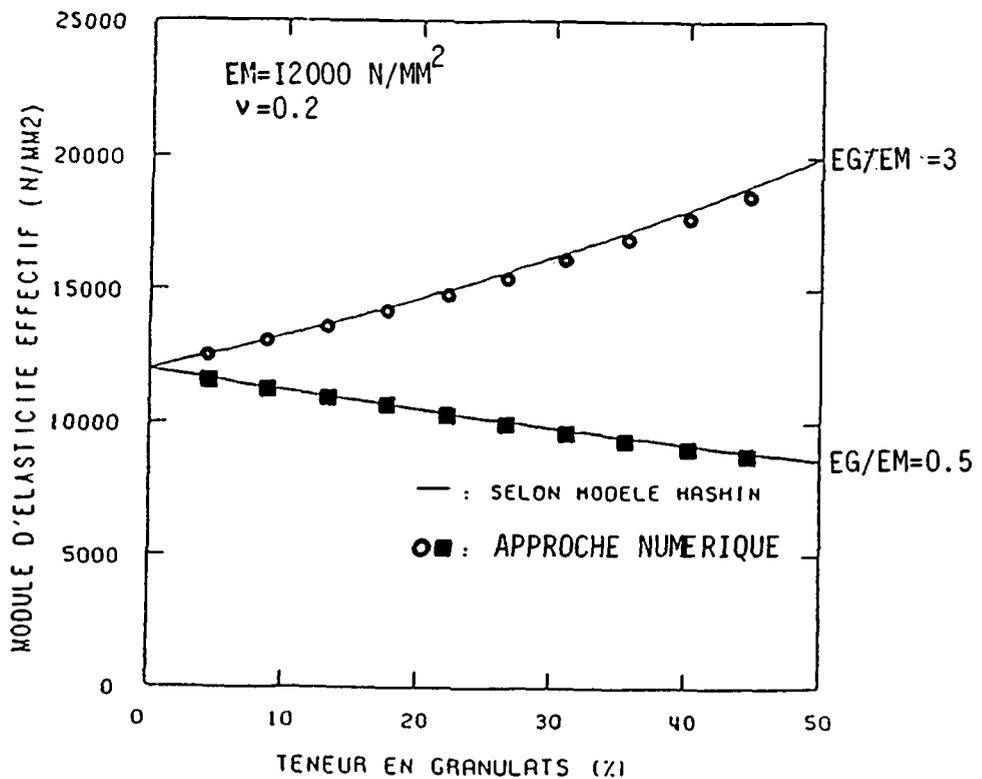


Fig. 5.44

Module d'élasticité effectif d'une structure composite en fonction de la teneur en inclusions et pour 2 rapports EG/EM différents (3 et 0.5).

Les résultats de l'étude paramétrique faite par cette simulation numérique sont donnés graphiquement sur les figures 5.43 et 5.44. La figure 5.43 représente les modules d'élasticité effectifs de deux matériaux composites de teneur en inclusions g différente (44,5 % et 22,5 %) en fonction du rapport des modules des deux phases (E_G/E_M). Dans la figure 5.44, nous avons représenté le module effectif en fonction de la teneur en granulats et ceci pour des rapports E_G/E_M de 3 et de 0,5 représentant approximativement le béton normal et le béton léger. A titre de comparaison, ces résultats numériques sont confrontés aux prévisions analytiques du modèle de Hashin [105], modèle largement utilisé dans la pratique; la formule est donnée par la relation suivante:

$$E = \left\{ \frac{(1-g) \cdot E_M + (1+g) \cdot E_G}{(1+g) \cdot E_M + (1-g) \cdot E_G} \right\} \cdot E_M \quad (5.96)$$

où E est le module d'élasticité effectif du matériau composite. Notons que cette relation est valable sous l'hypothèse que les coefficients de Poisson des deux phases et du matériau composite sont égaux à 0,2. Cette hypothèse est réaliste pour le cas du béton.

Pour mieux juger notre approche numérique, nous allons comparer nos précisions avec les mesures expérimentales obtenues par Johnston [105, 107], Dantu [103, 105] et La Rue [105, 108].

Johnston [107] mesura les modules d'élasticité du béton ayant trois rapports eau/ciment différents et cinq types de granulats de nature différente. Les caractéristiques de ces matériaux et les valeurs mesurées des modules d'élasticité (E_{exp}) sont données dans le tableau 5.3. Dans les deux dernières colonnes de ce tableau, nous avons reporté respectivement les modules d'élasticité calculés numériquement (E_{cal}) et les rapports correspondants E_{cal}/E_{exp} .

Rapport eau/ ciment	TYPE DE GRANULAT	Concentration volumique		Module d'Elasticité en [10^4 N/mm ²]				
		VM	VG	EM	EG	E [béton]		$\frac{E_{cal}}{E_{exp}}$
						Expérience	Calcul	
0,35	Basalte	0,42	0,58	1,931	7,208	4,012	3,993	0,995
	Calcaire I	0,42	0,58	1,931	7,004	3,740	3,795	1,015
	Calcaire II	0,42	0,58	1,931	5,304	3,604	3,387	0,940
	Granite	0,42	0,58	1,931	4,216	2,992	2,990	0,999
	Sable	0,42	0,58	1,931	1,632	1,904	1,756	0,922
0,45	Basalte	0,33	0,67	1,394	7,208	3,808	3,745	0,983
	Calcaire I	0,33	0,67	1,394	7,004	3,672	3,692	1,005
	Calcaire II	0,33	0,67	1,394	5,304	3,332	3,195	0,959
	Granite	0,33	0,67	1,394	4,216	2,856	2,810	0,984
	Sable	0,33	0,67	1,394	1,632	1,496	1,541	1,030
0,55	Basalte	0,29	0,71	1,108	7,208	3,672	3,655	0,995
	Calcaire I	0,29	0,71	1,108	7,004	3,740	3,601	0,963
	Calcaire II	0,29	0,71	1,108	5,304	3,264	3,092	0,947

Tableau 5.3 : Comparaison entre les modules d'élasticité obtenus par simulation numérique (E_{cal}) et les mesures expérimentales (E_{exp}) déterminées par Johnston [103, 107] sur des bétons de différentes compositions.

Valeur moyenne de E_{cal}/E_{exp} : 0,98
 Ecart type de E_{cal}/E_{exp} : 0,03
 Coefficient de variation de E_{cal}/E_{exp} : 3.06 %

TYPE DE GRANULAT	Composition du mortier (matrice)	VG	Module d'Elasticité en [10^4 N/mm ²]				
					E [béton]		E cal E exp
			EM	EG	Expérience	Calcul	
Diorite 20-40 mm	C = 700 kg/m ³	0,40	3,394	10,212	4,856	4,918	1,013
	S = 1260 kg/m ³	0,50	3,394	10,212	5,395	5,487	1,017
	E = 300 kg/m ³	0,55	3,394	10,212	5,572	5,714	1,025
Diorite 10-20 mm	C = 700 kg/m ³	0,33	3,306	10,212	4,169	4,572	1,097
	S = 1260 kg/m ³	0,42	3,306	10,212	4,621	5,053	1,093
	E = 300 kg/m ³	0,52	3,306	10,212	5,170	5,601	1,083
Diorite 10-20 mm	C = 700 kg/m ³	0,33	3,198	10,271	4,110	4,465	1,086
	S = 1260 kg/m ³	0,42	3,198	10,271	4,660	4,905	1,053
	E = 300 kg/m ³	0,52	3,198	10,271	5,082	5,451	1,072
Boules en verre 17-18 mm	C = 700 kg/m ³	0,35	3,070	7,279	3,914	4,044	1,033
	S = 1260 kg/m ³	0,45	3,070	7,279	4,228	4,375	1,035
	E = 300 kg/m ³	0,55	3,070	7,279	4,581	4,689	1,023
Calcaire (Burling.) (RM-Cart.)	C : S : E	0,43	3,669	6,200	4,090	4,357	1,065
	1:2.19:0.77	0,47	3,669	6,200	4,032	4,554	1,129
	en volume	0,52	3,669	6,200	4,562	4,708	1,032
Calcaire (Plattin)	C : S : E	0,43	3,669	7,800	4,758	4,976	1,046
	1:2.19:0.77 en volume	0,47	3,669	7,800	5,189	5,130	0,989
Calcaire (Burling.) (LM.Cart.)	C : S : E	0,43	3,669	4,640	4,032	4,055	1,006
	1:2.19:0.77	0,47	3,669	4,640	4,071	4,094	1,006
		0,52	3,669	4,640	4,140	4,142	1,000

P.S.: C, S et E désignent les quantités de ciment, de sable et d'eau respectivement.

Tableau 5.4 : Comparaison entre les modules d'élasticité obtenus par simulation numérique (E_{cal}) et les valeurs expérimentales de Dantu et La Rue [103, 105, 108].

Valeur moyenne de E_{cal}/E_{exp} : 1,045

Ecart type de E_{cal}/E_{exp} : 0,037

Coefficient de variation de E_{cal}/E_{exp} : 3,54 %

La valeur moyenne du rapport E_{cal}/E_{exp} est de 0,98 et son écart-type est de 0,030. Ceci conduit à un coefficient de variation, rapport entre l'écart-type et la valeur moyenne de ,3,1 %.

Les résultats expérimentaux obtenus par Dantu [103] et La Rue [108] sont consignés dans le tableau 5.4 et comparés avec les estimations numériques. La valeur moyenne du rapport du module d'élasticité calculé sur celui observé (E_{cal}/E_{exp}) est de 1,045 pour un écart-type de 0,037 d'où un coefficient de variation de 3,5 %. A titre de comparaison, en confrontant ces valeurs expérimentales aux prévisions théoriques du modèle de Voigt, le coefficient de variation du rapport E_{Voigt}/E_{exp} trouvé est de 9,9 %, soit près de trois fois supérieur à celui obtenu par notre approche numérique.

5.9.3 Détermination numérique du retrait effectif d'une structure composite

Avec la même approche numérique, on peut étudier le retrait effectif d'un béton en fonction du retrait propre de la matrice, des propriétés des deux phases et de leurs proportions relatives. Dans le béton, les granulats constituent la phase inerte vis-à-vis du retrait hygrique; cependant, ils ne sont pas passifs, puisqu'ils diminuent le volume de la phase active (matrice) et s'opposent à la libre déformation de celle-ci [109, 110]. L'étude paramétrique du retrait effectif en fonction de la teneur en granulats et des propriétés élastiques des deux composants est identique à l'analyse décrite au paragraphe précédant (5.9.2). Cependant, aucune charge extérieure n'est imposée à la structure composite, mais on impose un retrait ϵ_M dans toute la matrice et un retrait ϵ_G , nul pour les inclusions. Le procédé de calcul numérique utilisé sera décrit dans le chapitre 6.

Un résultat de la simulation numérique du retrait hygrique dans une structure composite est donné sur la figure 5.45. La figure 5.45a montre la déformation de la structure induite par le retrait de la matrice. Dans la figure 5.45b, nous avons reporté la distribution des contraintes

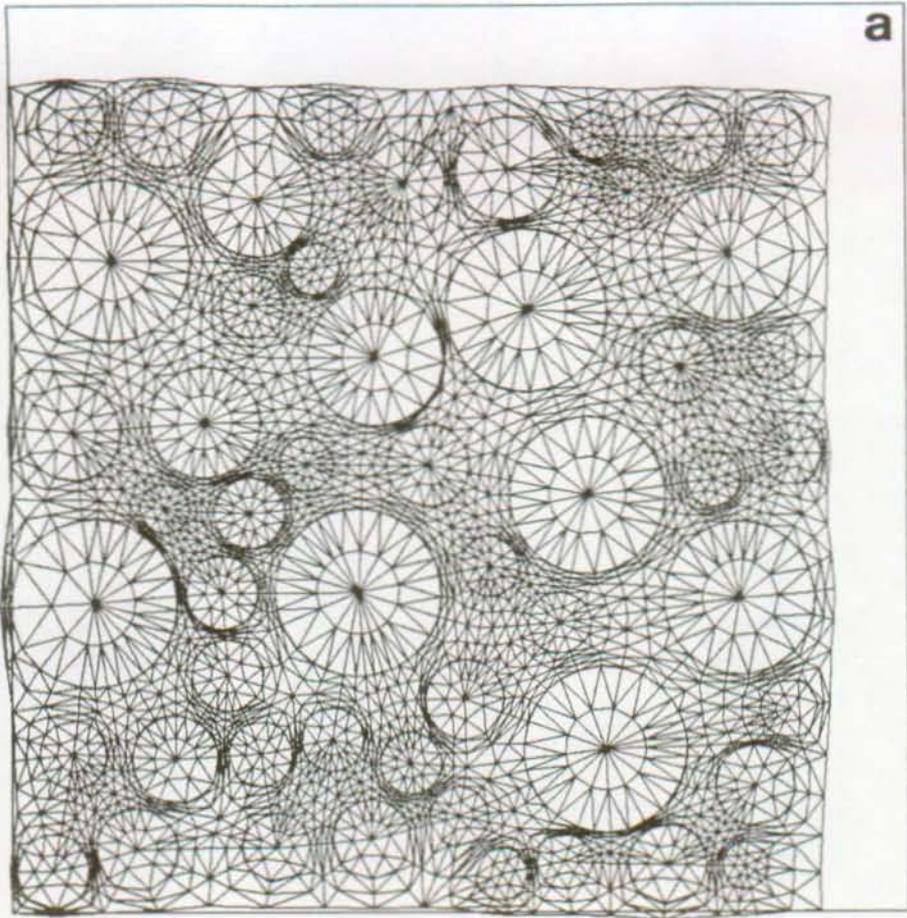


Fig.5.45 a: Déformation d'une structure composite sous l'effet du retrait.

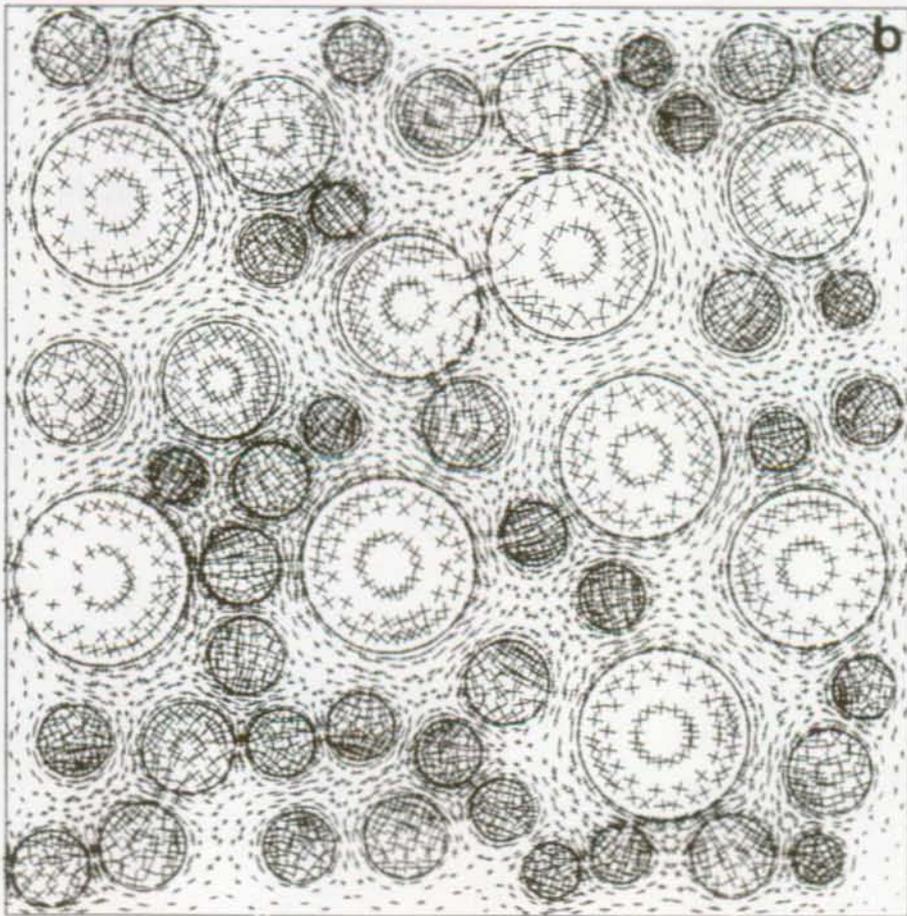
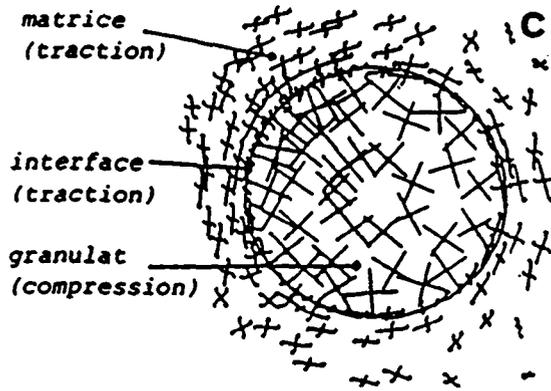


Fig.5.45b : Contraintes principales dans une structure composite induites par le retrait de la matrice.



C. Distribution des contraintes dans un détail de la Figure 5.45 b.

— : compression
—x— : traction

Fig. 5.45

Analyse du retrait dans une structure composite.

principales dans chaque élément fini. La figure 5.45c représente un détail de la figure précédente. On remarque clairement sur cette dernière figure que le retrait volumique de la matrice induit des contraintes de compression dans les inclusions et des contraintes de traction dans la matrice. Ces contraintes de traction peuvent créer des fissures dans le matériau.

En imposant aux inclusions un module d'élasticité E_G nul, on peut évaluer le retrait effectif d'un matériau poreux en fonction de sa porosité totale et de la distribution de la taille des pores.

Les figures 5.46 et 5.47 montrent quelques résultats obtenus par cette méthode de calcul où l'on a fait varier le rapport des modules d'élasticité des deux phases et leurs concentrations respectivement. A titre comparatif, nous avons reporté sur les mêmes graphes les valeurs du retrait effectif prévues par le modèle de Hobbs [?] et la méthode de self-consistante [102] et dont les équations sont données respectivement par:

$$\epsilon = \epsilon_M \left(1 - \frac{2g \frac{E_G}{E_M}}{(1 + \frac{E_G}{E_M}) + g(\frac{E_G}{E_M} - 1)} \right) \quad (5.97)$$

$$\epsilon = \epsilon_M \left(\frac{E_G - E}{E_G - E_M} \right) \cdot \frac{E_M}{E} \quad (5.98)$$

où : ϵ : retrait effectif du matériau composite

ϵ_M : retrait de la matrice

g : concentration en inclusion

E : module d'élasticité effectif du matériau composite

Les autres variables ont la même signification que dans les formules précédentes.

Des calculs analogues peuvent être faits pour déterminer par exemple le coefficient de dilatation thermique du béton en fonction de sa composition et des propriétés de ses constituants.

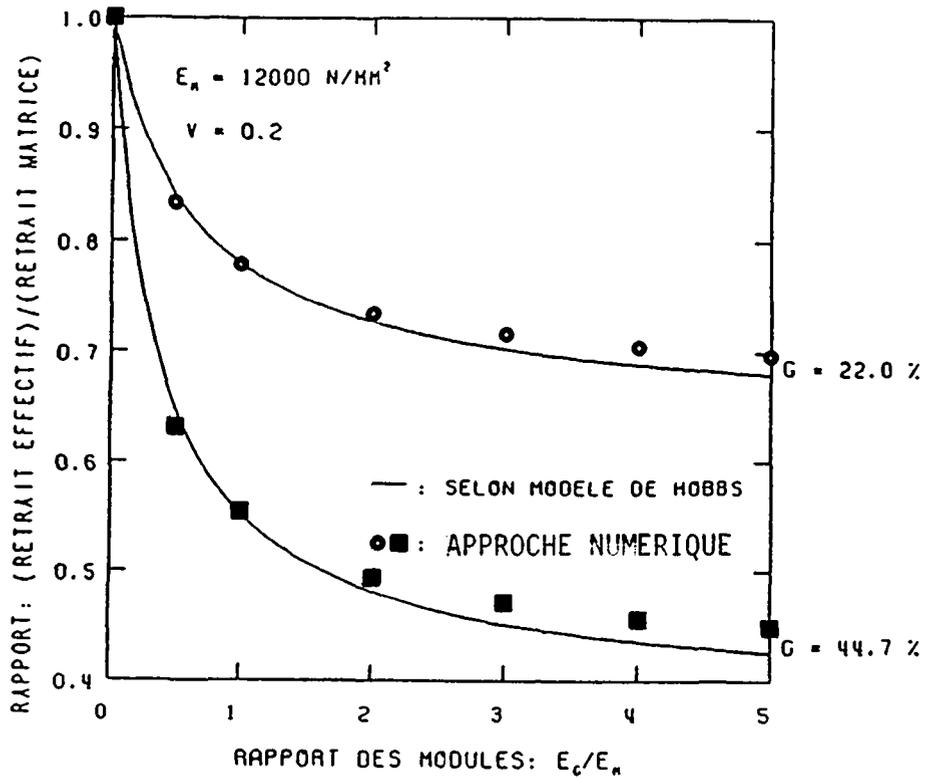


Fig. 5.46

Retrait effectif d'une structure composite en fonction du rapport des modules d'élasticité des 2 phases et pour deux teneurs en inclusions différentes (22 % et 44.7 %).

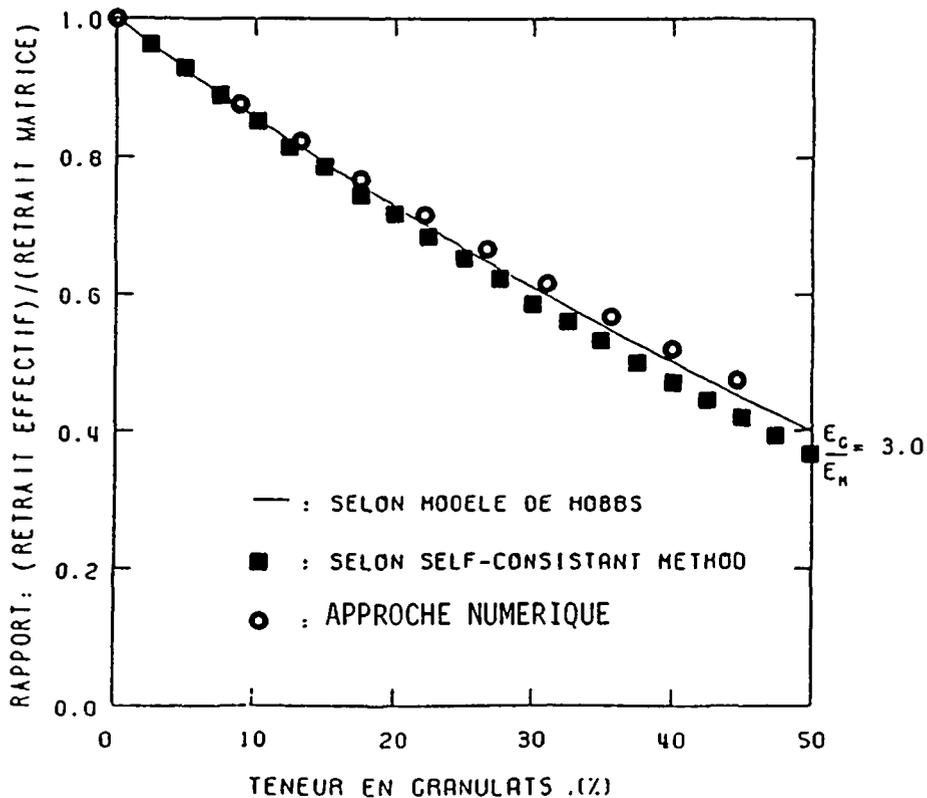


Fig. 5.47

Retrait effectif d'une structure composite en fonction de la teneur en inclusions et pour un rapport des modules d'élasticité des 2 phases de 3.

Une autre grandeur physique importante, le coefficient de diffusion hygrique, peut être déterminée au moyen des structures composites simulées et par une analyse adéquate basée sur la méthode des éléments finis du processus de diffusion [67]. Cette méthode permet de tenir compte de la structure réelle du matériau, telles l'existence de l'interface matrice-granulat, zone très poreuse par rapport à la matrice ou la présence des cavités de sédimentation localisées à la base des gros granulats [67, 68]

5.9 Conclusions

La modélisation du béton présentée dans ce chapitre a été appelée béton numérique [111]. De nombreux processus qui déterminent le comportement du béton dans une construction ne peuvent pas être traités analytiquement. Avec les méthodes numériques modernes et les ordinateurs puissants, on peut développer des matériaux-modèles, comme par exemple le béton numérique. Il est possible de simuler des structures composites représentant fidèlement le béton réel.

Les résultats obtenus par simulation concernant certaines propriétés effectives montrent un excellent accord avec les prévisions théoriques des modèles analytiques.

La méthode numérique semble avoir plusieurs avantages sur les méthodes analytiques existantes. En effet, avec la simulation numérique, la distribution granulométrique, la distribution de la phase dispersée (inclusions) dans la phase dispersante (matrice), et la morphologie des inclusions peuvent être aisément prises en considération en vue d'une étude réaliste. De tels avantages font souvent défaut dans les méthodes analytiques.

Dans un matériau composite tel que le béton, la matrice de pâte de ciment durcie est, à un certain niveau, un matériau hétérogène, ses propriétés physiques ou mécaniques ne sont pas identiques en tout point d'un échantillon de béton; elles varient autour d'une valeur moyenne

avec une certaine dispersion. La méthode numérique proposée permet aisément d'étudier la variabilité des propriétés effectives du matériau composite. Une telle étude serait trop complexe, voire même impossible avec les méthodes analytiques.

Dans un échantillon de béton séchant, la distribution de l'humidité au sein du matériau est inhomogène; il en résulte un retrait variable d'un point à l'autre du matériau; une étude analytique de ce mécanisme serait trop complexe alors que la méthode numérique permet aisément de résoudre un tel problème.

Le béton numérique permet aussi d'étudier le problème d'incompatibilité thermique des composants du béton qui est un facteur important dans le cadre de la durabilité d'une construction.

On peut optimiser systématiquement la composition d'un béton pour des buts précis.

Des problèmes aussi complexes que l'interaction entre la fissuration et les phénomènes différés (tels le retrait hygrique, le retrait thermique, le fluage) peuvent en principe être étudiés au moyen du béton numérique.

Le béton numérique s'avère être un moyen puissant pour l'établissement des lois constitutives des matériaux et son étude fournit un complément essentiel aux méthodes expérimentales.

chapitre 6

SIMULATION DU PROCESSUS DE
FISSURATION DANS LES MATERIAUX
COMPOSITES

CHAPITRE 6 : SIMULATION DU PROCESSUS DE FISSURATION DANS LES MATERIAUX COMPOSITES

6.1 Introduction

Le processus de fissuration d'un matériau composite comme le béton est un phénomène complexe. Cette complexité incombe principalement à la structure hétérogène du matériau. Par conséquent, une étude réaliste du mécanisme de fissuration doit nécessairement tenir compte de la structure réelle du matériau.

Dans le chapitre 5, nous avons montré qu'il est possible de simuler d'une façon réaliste la structure complexe d'un matériau composite comme le béton. Les premiers résultats obtenus concernant notamment la détermination des propriétés effectives ont montré un bon accord avec les prévisions des modèles analytiques et des mesures expérimentales.

Dans le présent chapitre, nous utiliserons la même approche que précédemment, c'est-à-dire le béton numérique, pour simuler le processus de fissuration dans le béton. La structure du matériau sera représentée par un matériau à deux phases, la matrice et les granulats. Dans notre cas d'étude, les granulats sont supposés avoir un comportement linéaire élastique et sans possibilité de fissuration; ils sont caractérisés par des propriétés mécaniques supérieures à celles de la matrice. Cette dernière est constituée d'un mortier dont les propriétés mécaniques telles résistance, énergie de rupture, diagramme de radoucissement sont déterminées expérimentalement et sont décrites dans le chapitre 4. Pour être aussi réaliste que possible, une troisième phase a été introduite dans les structures simulées pour tenir compte de l'interface matrice-granat, zone aux propriétés mécaniques faibles par rapport aux deux autres constituants, par conséquent plus vulnérable à la fissuration.

Ces hypothèses concernant les propriétés mécaniques des différentes phases et qui seront adoptées dans notre simulation numérique, sont réalistes pour un béton normal.

Les modélisations de ces différentes phases seront décrites en détails dans ce chapitre. La simulation numérique du processus de fissuration est réalisée au moyen de la méthode des éléments finis.

6.2 Dérivation des matrices de rigidité des éléments finis

Dans ce qui suit, nous montrerons brièvement comment on peut établir la matrice de rigidité d'un élément fini puis celle de la structure entière. Cette technique d'éléments finis est décrite en détail dans les ouvrages spécialisés [112 - 114].

Pour un milieu continu, tels ceux représentés dans les figures 5.30 et 5.31, les matrices de rigidité des éléments finis individuels peuvent être déterminées en utilisant le principe des travaux virtuels. L'établissement des équations se fait selon les étapes suivantes et ceci indépendamment du type ou de la forme de l'élément fini considéré:

- 1) Exprimer les déplacements internes $\{U\}$ en chaque point de l'élément en termes de déplacements nodaux $\{U\}_{(N)}$ au moyen de fonctions de déplacements appropriées, ϕ , qui sont prises pour approximer le vrai comportement du déplacement d'un point de l'élément.

$$\{U\} = [\phi] \{U\}_{(N)} \quad (6.1)$$

- 2) En prenant les dérivées convenables de l'équation (6.1), établir la relation entre les déformations $\{\varepsilon\}$ et les déplacements nodaux $\{U\}_{(N)}$.

$$\{\varepsilon\} = [B] \{U\}_{(N)} \quad (6.2)$$

- 3) Sélectionner la relation contrainte $\{\sigma\}$ - déformation $\{\varepsilon\}$ appropriée pour l'élément.

$$\{\sigma\} = [D] \{\varepsilon\} \quad (6.3)$$

$[D]$ est une matrice relative aux propriétés du matériau.

- 4) Substituer la relation (6.2) dans la relation (6.3) pour trouver la relation entre les contraintes $\{\sigma\}$ et les déplacements nodaux $\{U\}_{(N)}$.

$$\{\sigma\} = [D] [B] \{U\}_{(N)} \quad (6.4)$$

- 5) Appliquer le principe des travaux virtuels exprimant l'équilibre entre le travail virtuel des forces nodales, W_e , et le travail virtuel des déformations dans l'élément, W_i .

- 6) Travail virtuel des forces nodales, W_e .

$$W_e = \{\delta U\}_{(N)}^T \{F\}_{(N)} \quad (6.5)$$

où $\{F\}_N$ est le vecteur des forces nodales

$\{\delta U\}_N$ vecteur du déplacement virtuel

- 7) Travail des déformations internes dans tout le volume de l'élément, W_i .

$$W_i = \int_V \{\delta\varepsilon\}^T \cdot \{\sigma\} dV \quad (6.6)$$

D'après la relation (6.2):

$$\{\delta\varepsilon\}^T = \{\delta U\}_{(N)}^T [B]^T \quad (6.7)$$

Ainsi la relation (6.6) s'écrit:

$$W_i = \{\delta U\}_{(N)}^T \int_V [B]^T \{\sigma\} dV \quad (6.8)$$

En injectant la relation (6.4) dans (6.8), on a:

$$W_i = \{\delta U\}_{(N)}^T \left(\int_V [B]^T [D] [B] dV \right) \{U\}_{(N)} \quad (6.9)$$

8) En égalisant W_i à W_e et d'après les relations (6.5) et (6.9), on a:

$$\{\delta U\}_{(N)}^T \{F\}_{(N)} = \{\delta U\}_{(N)}^T \left(\int_V [B]^T [D] [B] dV \right) \{U\}_{(N)} \quad (6.10)$$

Puisque les relations doivent être valables pour tout déplacement virtuel $\{\delta U\}_{(N)}$, l'équation (6.10) peut s'écrire:

$$\{F\}_{(N)} = \left(\int_V [B]^T [D] [B] dV \right) \{U\}_{(N)} \quad (6.11)$$

ou

$$\{F\}_{(N)} = [k]_e \{U\}_{(N)} \quad (6.12)$$

avec

$$[k]_e = \int_V [B]^T [D] [B] dV \quad (6.13)$$

qui est la matrice de rigidité de l'élément recherché.

Généralement, les intégrales de la relation (6.13) sont évaluées numériquement.

Une fois que les matrices de rigidité de tous les éléments ont été calculées et transformées du système de coordonnées locales au système de coordonnées globales, la matrice de rigidité de la structure complète $[K]_S$ est formée par l'addition systématique des rigidités des éléments.

$$\{F\}_{(N)} = [K]_S \{U\}_{(N)} \quad (6.14)$$

Dans cette dernière relation, le vecteur colonne $\{F\}_{(N)}$ représente les forces nodales; les déplacements nodaux représentés par le vecteur $\{U\}_{(N)}$ sont déterminés par la résolution du système d'équations (6.14).

Une fois les déplacements nodaux déterminés, les contraintes dans les éléments sont calculées d'après la relation

$$\{\sigma\} = [D] [B] \{U\}_{(N)} \quad (6.4)$$

6.3 Modélisation des inclusions

On suppose dans ce qui suit que les granulats ont un comportement linéaire-élastique parfait sans aucune possibilité de fissuration [115].

Les granulats utilisés dans la confection d'un béton peuvent avoir une structure stratifiée, c'est le cas des roches sédimentaires. Cette stratification confère aux granulats un caractère orthotrope, c'est-à-dire que les propriétés du matériau dans le sens des plans de stratification sont différentes de celles relatives à la direction normale. Cette particularité peut être prise en compte dans notre étude de simulation.

Dans le cas où le granulat est un milieu isotrope, la relation entre les contraintes et les déformations (relation (6.3)) s'écrit dans le cas à 2D et dans un repère de référence (x,y) :

$$\{\sigma\}_x = [D] (\{\epsilon\}_x - \{\epsilon\}_x^i) \quad (6.15)$$

avec

$$\{\sigma\}_x = \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} \text{ contraintes, } \{\varepsilon\}_x = \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} \text{ déformations } \quad (6.16 \text{ et } 17)$$

$\{\varepsilon\}_x^0$ = vecteur des déformations initiales (telle par exemple la dilatation thermique).

L'indice x est relatif au repère de référence (x,y).

[D] est la matrice d'élasticité et s'écrit comme suit:

$$[D] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \quad (6.18)$$

E et ν représentent respectivement le module d'élasticité et le coefficient de Poisson du granulat isotrope.

La figure 6.1 illustre le cas d'un granulat à 2D à structure stratifiée et dont les axes principaux d'orthotropie (n,t) font un angle θ par rapport aux axes du repère de référence (x,y). Dans ces conditions, la relation contrainte-déformation dans le repère (x,y) s'écrit [112]:

$$\{\sigma\}_x = [T]^T [D] [T] (\{\varepsilon\}_x - [T]^{-1} \{\varepsilon\}_n^i) \quad (6.19)$$

Dans cette relation, l'indice n se réfère au repère défini par les axes d'orthotropie du granulat (n,t).

[T] est la matrice de transformation donnée par:

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \sin^2\theta & 1/2 \sin 2\theta \\ \sin^2\theta & \cos^2\theta & 1/2 \sin 2\theta \\ -\sin 2\theta & \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{bmatrix} \quad (6.20)$$

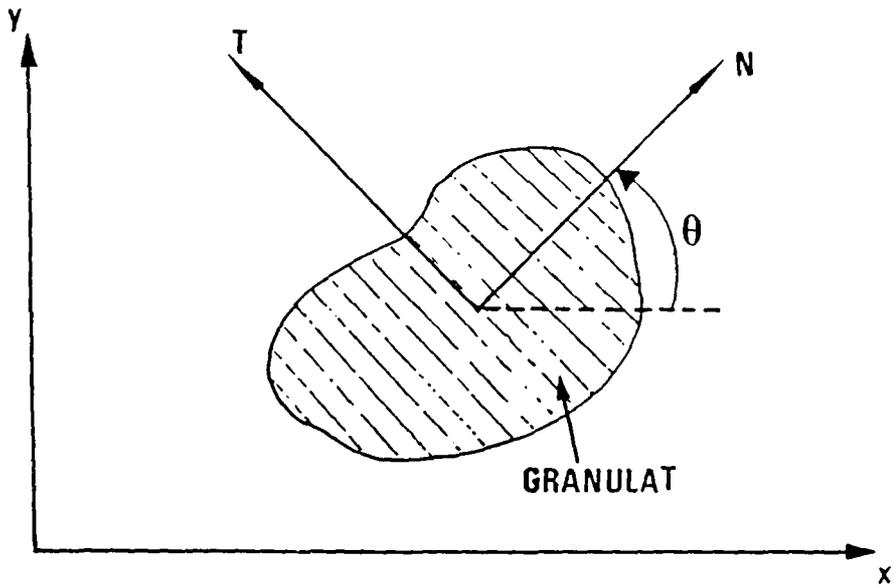


Fig. 6.1 :

Représentation schématique d'un granulat orthotrope dont les axes principaux (N,T) font un angle θ par rapport aux axes du repère principal (x,y) .

La matrice d'élasticité est:

$$[D] = \frac{E_t}{(1-\lambda v_t^2)} \begin{bmatrix} \lambda & \lambda v_t & 0 \\ \lambda v_t & 1 & 0 \\ 0 & 0 & m(1-\lambda v_t^2) \end{bmatrix} \quad (6.21)$$

avec

$$\frac{E_n}{E_t} = \lambda \quad \text{et} \quad \frac{G_t}{E_t} = m$$

Les constantes E_n , v_n sont associées au comportement dans l'axe de stratification n ; E_t , v_t et G_t (module de glissement) à la direction normale t .

Notons que ces formulations sont valables pour la condition des contraintes planes, cette hypothèse sera adoptée dans toute l'étude qui suivra.

Le maillage des inclusions consiste en des éléments finis de forme triangulaire à 3 noeuds et quadrangulaires à 4 noeuds. La figure 6.2A donne un exemple du maillage adopté pour les inclusions. Un principe variationnel standard a été utilisé pour composer les matrices de rigidité de ces éléments (voir paragraphe 6.2). Les relations résultants entre les déplacements nodaux $\{U\}_{(N),e}$ et les forces nodales $\{F\}_{(N),e}$ d'un élément e sont données par:

$$[K]_e \{U\}_{(N),e} = \{F\}_{(N),e} + \{F\}_i^1_{(N),e} \quad (6.22)$$

Les symboles de la relation (6.22) ont les mêmes significations que ceux utilisés dans la formulation générale décrite au paragraphe 6.2.

La figure 5.40 montre un maillage complet d'une structure composite à analyser; la nécessité de représenter la structure par un nombre d'éléments finis, aussi grand que possible, donne naissance à des systèmes d'équations de dimensions considérables. Dans notre approche de simulation de processus de fissuration, nous avons considéré que les inclusions

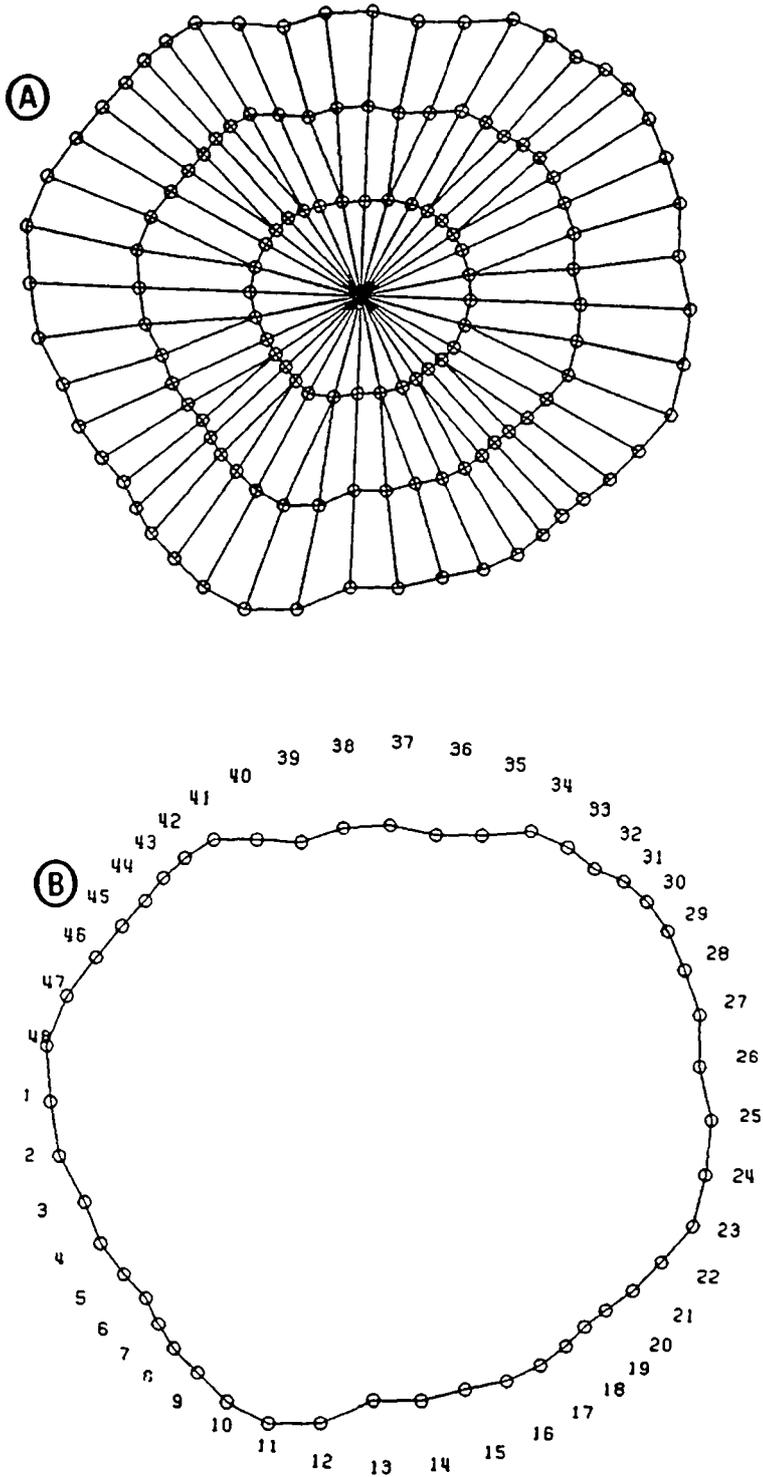


Fig. :6.2

- A : Subdivision d'un granulat par des éléments finis. Dans cet exemple le nombre total de degrés de liberté est de 258.
- B : Représentation du granulat après élimination des noeuds internes. Le nombre de degrés de liberté est passé de 258 à 96.

conservent un comportement linéaire élastique durant tout le processus de dégradation du matériau. Cette hypothèse, réaliste pour le cas d'un béton normal par exemple, a été exploitée en vue de réduire au mieux l'effort de résolution des systèmes d'équations. Cette réduction a été réalisée au moyen de la technique des soustructures [112]. Les inclusions sont considérées comme des soustructures et leurs degrés de liberté internes sont éliminés du système local d'assemblage des équations. Les figures 6.2A et 6.2B montre clairement l'efficacité de cette méthode. Le nombre total de degrés de liberté (2 fois le nombre de noeuds) de l'inclusion représentée sur la figure 6.2A qui était initialement de 258 a été réduit à 96 comme le montre la figure 6.2B. Le système d'équations des soustructures résultant est ainsi stocké sur disque pour un usage ultérieur.

6.4 Modélisation de la matrice

6.4.1 Etat non fissuré

Dans notre approche, la matrice enrobant les gros granulats est constituée par un mortier. Elle est représentée par des éléments finis triangulaires à trois noeuds. Avant toute dégradation, la matrice est supposée avoir un comportement linéaire élastique. La relation contrainte-déformation, sous l'hypothèse des contraintes planes, est donnée par la formule suivante:

$$\{\sigma\}_x = [D] (\{\epsilon\}_x - \{\epsilon\}_x^i) \quad (6.23)$$

[D] est la matrice de rigidité à l'état non fissuré qui est donnée par:

$$[D] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \quad (6.24)$$

Dans ces équations, E et ν sont respectivement le module d'élasticité et le coefficient de Poisson du mortier. Les déformations initiales éventuelles sont prises en compte dans le vecteur $\{\epsilon\}_x^i$.

6.4.2 Modélisation d'un élément de la matrice dans un état fissuré

6.4.2.1 Critère d'initiation de la fissure

La fissuration par traction représente la plus grande contribution au comportement non linéaire d'une structure en béton [117,118]. Ainsi, une description réaliste du comportement du béton en traction est de la plus grande importance, nous limiterons notre étude à ce domaine.

Quand un problème de fissuration doit être considéré, trois hypothèses de base doivent être faites:

- initiation de la fissure
- représentation de la fissure
- description du comportement post-fissuration.

Le critère d'initiation de fissure le plus largement utilisé est basé sur la résistance du matériau. On considérera alors dans notre approche, qu'une fissure prend naissance en un point donné, lorsque la contrainte en ce point dépasse la résistance à la traction f_t de la matrice.

Dans le programme de simulation numérique, on procède comme suit:

On calcule les contraintes principales dans chaque élément fini triangulaire de la matrice. La direction des axes principaux T et N est donnée par l'angle α , défini par:

$$\alpha = \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{2 \tau_{xy}}{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}} \right) \quad (6.25)$$

Les contraintes principales σ_{NN} et σ_{TT} sont données par les relations suivantes:

$$\sigma_{nn} = \frac{1}{2} \{ \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + [(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 4 \sigma_{xy}^2]^{1/2} \} \quad (6.26)$$

et

$$\sigma_{tt} = \frac{1}{2} \{ \sigma_{xx} + \sigma_{yy} - [(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 4 \sigma_{xy}^2]^{1/2} \} \quad (6.27)$$

α est l'angle entre l'axe x du repère global (x,y) et l'axe majeur N du repère local (N,T) , comme ceci est montré dans la figure 6.3.

Une fissure prend naissance dans l'élément fini considéré si la contrainte majeure σ_{nn} est telle que:

$$\sigma_{nn} > f_t \quad (6.28)$$

Cette fissure est orientée dans la direction de l'axe T . Notons que dans le type d'élément fini choisi, triangle à trois noeuds, les contraintes, dans une direction donnée, sont égales en tout point de l'élément.

6.4.2.2 Représentation de la fissure

Nous avons vu précédemment que deux techniques différentes de représentation d'une fissure peuvent être adoptées. La technique de la "fissure discrète" nécessite une redéfinition du maillage de la structure à chaque naissance d'une fissure, puisque dans ce cas on opère par ouverture de noeuds. Dans l'analyse mécanique des structures composites qui nous concerne, l'application de la notion de fissure discrète engendrera bon nombre de difficultés numériques. Cette technique est utilisable dans des problèmes simples comme ceux analysés dans le chapitre 4.

Dans le présent algorithme, nous adoptons la technique de la "fissure étalée" ("smeared crack") introduite par Rashid [119]. Cette représentation élimine le besoin d'une redéfinition continuelle du maillage et permet un chemin de propagation quelconque de la fissuration au sein de la structure.

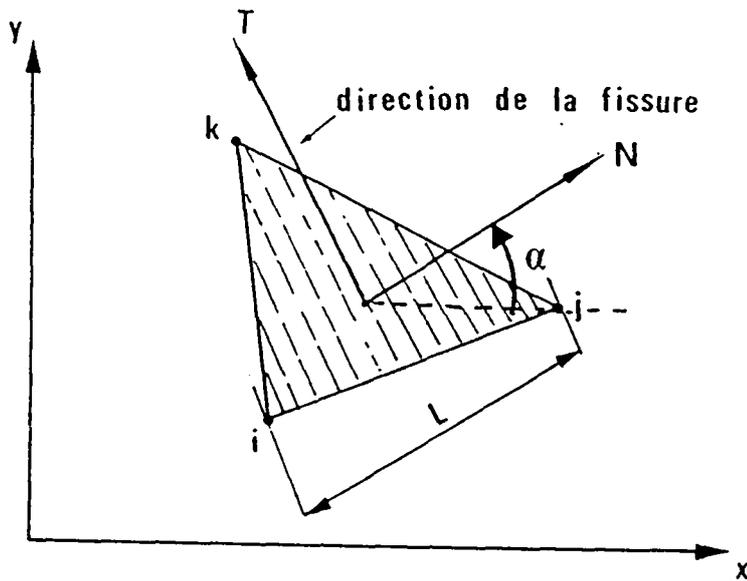


Fig. :6.3

Représentation schématique d'un élément fini de la matrice, fissuré parallèlement à l'axe T, et définition de la longueur projetée L sur l'axe normal à la fissure.

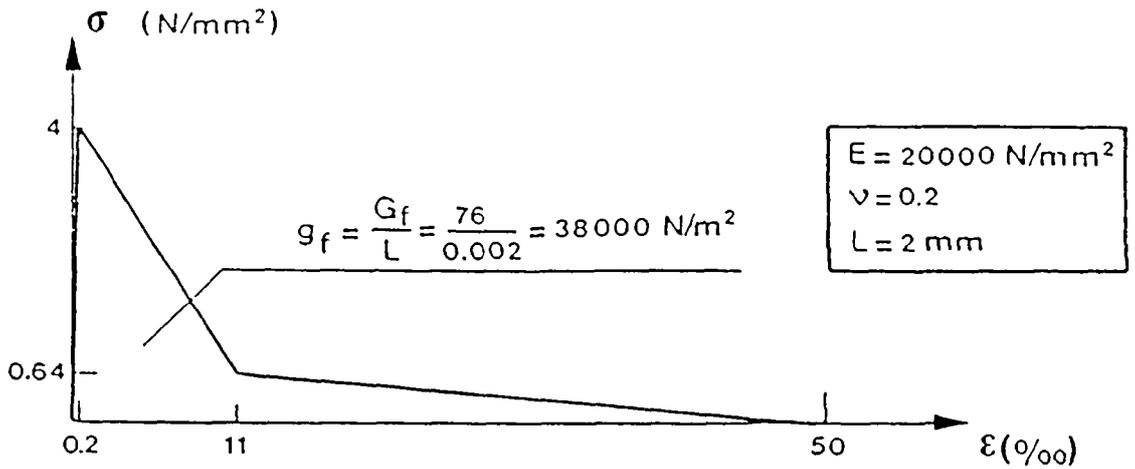


Fig. :6.4

Diagramme typique de la relation contrainte-déformation pour un élément fini de la matrice de longueur L de 2mm. L'énergie G_f de la matrice étant de 76 N/m.

6.4.2.3 Comportement post-pic

L'aspect le plus important dans la modélisation du comportement du béton (ou mortier) en traction est la description de la phase du matériau après naissance d'une fissuration qui est dans notre cas décrite par la condition $\sigma_{nn} > f_t$ (relation 6.28). Ce comportement est désigné par comportement post-pic; le pic est relatif à la contrainte maximale f_t de la courbe contrainte-déformation du matériau.

Dans le modèle de la fissure fictive, le comportement post-pic du matériau est décrit par le diagramme de radoucissement, $\sigma-w$ (voir § 3.3.2). La courbe contrainte-déformation relative à la matrice et ses paramètres mécaniques a été déterminée expérimentalement; ceux-ci ont été décrits dans le chapitre 4.

Dans l'analyse par éléments finis, le radoucissement est étalé sur tout élément fini dont la contrainte σ_{NN} dépasse la résistance à la traction, f_t ; c'est la technique de la "fissure étalée" mentionnée ci-dessus.

La figure 6.4 montre une courbe contrainte-déformation complète pour un élément de matrice (mortier) de longueur projetée L de 2 mm (voir Fig. 6.3).

L'approximation numérique de la relation contrainte-déformation est montrée dans la figure 6.5. Comme la déformation ϵ_{nn} (déformation dans la direction N normale à la fissure) croît, le module d'élasticité E_n (relatif à l'axe N) de l'élément fini fissuré est graduellement "radouci" et la contrainte maximale à la traction est changée ($\sigma(i)$ sur la figure 6.5).

On peut tenir compte des déformations résiduelles éventuelles, ϵ_{nn}^r pour pouvoir décrire des situations de déchargement d'une façon réaliste; en effet, des expériences ont montré que lors du déchargement du matériau, des déformations résiduelles subsistent (terme ϵ_{nn}^r), ceci provient du fait que les microfissures créées lors du chargement ne se

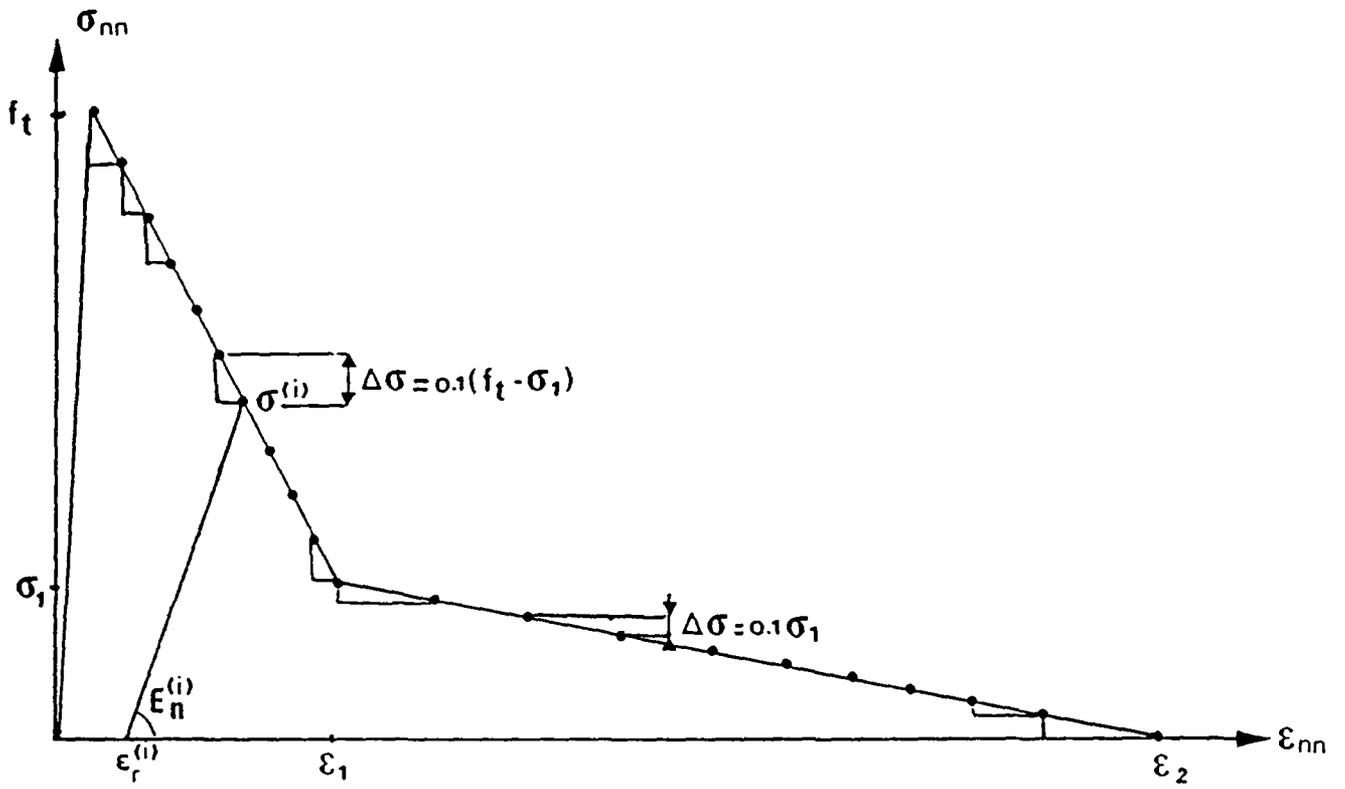


Fig. :6.5

Discretisation du diagramme contrainte-déformation pour la résolution numérique du problème.

referment pas complètement après déchargement [120, 121]. La nouvelle relation matricielle contrainte-déformation s'écrit:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{nn} \\ \sigma_{tt} \\ \sigma_{nt} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E_n}{1-\eta\nu^2} & \frac{\nu E_n}{1-\eta\nu^2} & 0 \\ \cdot & \frac{E_t}{1-\eta\nu^2} & 0 \\ \cdot & \cdot & \beta G \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{nn} - \varepsilon_{nn}^i \\ \varepsilon_{tt} - \varepsilon_{tt}^i \\ \gamma_{nt} - \gamma_{nt}^i \end{pmatrix} \quad (6.29)$$

Dans cette relation, la matrice de rigidité de l'élément fissuré a la structure d'une matrice relative à un matériau orthotrope où les axes d'orthotropie sont l'axe de la fissuration et l'axe normal (N,T).

$\eta = E_n/E$ est le coefficient de réduction du module d'élasticité relatif à la direction normale (N) de la fissure.

E_t est le module d'élasticité dans la direction parallèle à la fissure, $E_t = E$.

β est appelé facteur de rétention au cisaillement (shear retention factor) [122, 123], défini ci-dessus.

Au moyen du vecteur des déformations initiales $(\varepsilon_{nn}^i, \varepsilon_{tt}^i, \gamma_{nt}^i)$, on peut prendre en compte les déformations résiduelles, le retrait hygrique, la dilatation thermique, etc.

- Le facteur de rétention au cisaillement β

Le modèle de radoucissement en traction est basé sur le radoucissement du matériau dans la zone fissurée. Cet affaiblissement du matériau réduit la rigidité au cisaillement qui, à l'état du matériau non fissuré, avait la valeur G (voir relation (6.29)). Dans le but d'adapter la rigidité au glissement, le facteur β a été introduit [122, 123]. Le facteur β varie de 1 pour le matériau non fissuré à, 0 pour le matériau à l'état complètement rompu et pour des surfaces de rupture parfaitement lisses.

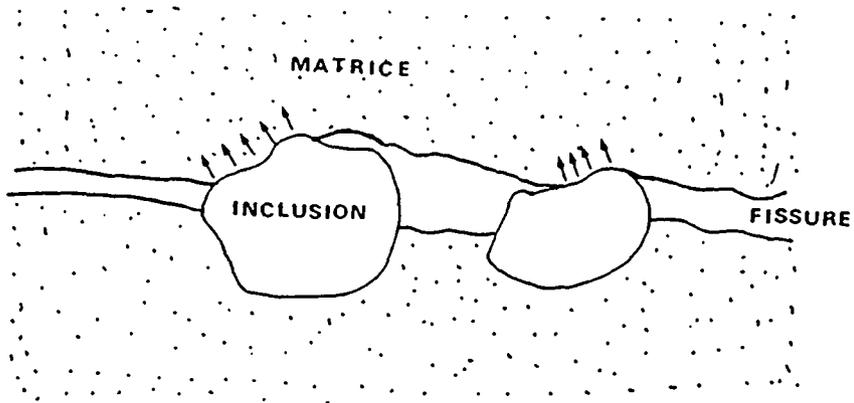


Fig. :6.6

Représentation schématique du mécanisme de l'engrenage granulaire (aggregate/interlock).

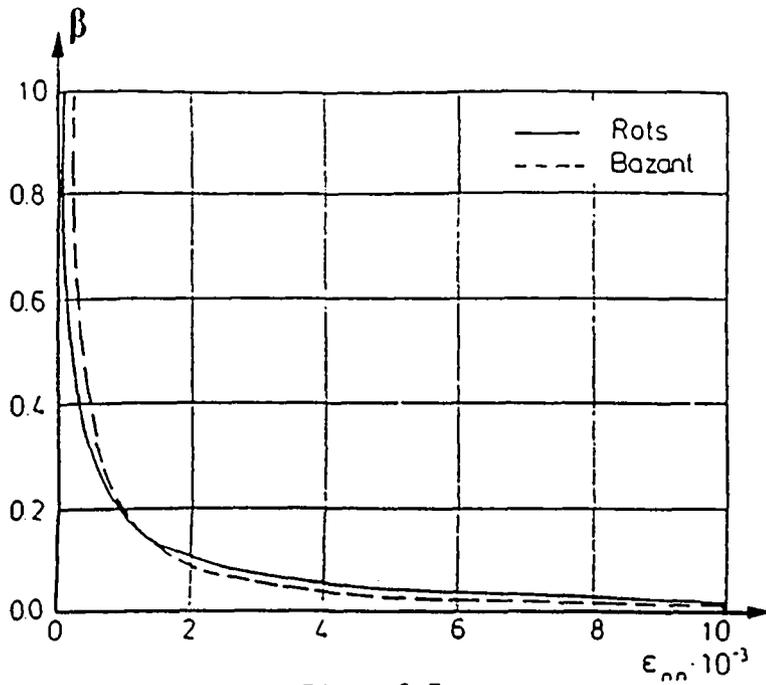


Fig. :6.7

Facteur de rétention au cisaillement en fonction de l'ouverture relative de la fissure ϵ_{nn} /123/.

Le facteur β est une fonction du mécanisme connu sous le nom de "aggrégat interlock" ou mécanisme d'engrenage granulaire. Celui-ci dépend fortement de la granulométrie du matériau et de l'ouverture relative de la fissure, c'est-à-dire de ϵ_{nn} . Ce mécanisme est schématisé sur la figure 6.6, c'est un transfert de contrainte au moyen des contacts locaux entre la matrice et les grains qui dépassent des surfaces de la fissure. Au niveau de notre approche, il s'agit d'une interaction entre la matrice de pâte de ciment durcie et les grains de sable le long des surfaces des fissures (dans notre cas, la matrice est un mortier formé de grains de sable et de pâte de ciment durcie).

Se basant sur les résultats expérimentaux de Pauley et Loeber [123, 124], différents auteurs [125, 126] ont pu formuler le facteur β . Les formules dérivées par Rots [126] et Bazant [125] sont données respectivement par:

$$\beta = \frac{1}{1 + 4447 \epsilon_{nn}} \quad (6.30)$$

et

$$\beta = \frac{1}{4762 \epsilon_{nn}} - \frac{1}{1346 \sqrt{\epsilon_{nn}}} \quad (6.31)$$

Ces deux fonctions sont montrées graphiquement sur la figure 6.7 [123]. La ressemblance entre ces deux courbes vient du fait qu'elles sont toutes deux issues des analyses des mêmes résultats expérimentaux. Soulignons aussi le fait que ces deux formules sont valables uniquement pour le cas du béton analysé et défini par sa propre composition granulaire. Dans l'analyse numérique nous avons utilisé la formule (6.30) comme première approche.

Dans le cas où un élément, préalablement fissuré en traction, retourne dans un état de compression, la rigidité initiale de cet élément est réinstaurée, la relation contrainte-déformation est décrite par l'expression matricielle (6.24)[120].

6.5 Modélisation de l'interface matrice-granulat

6.5.1 Modèle de l'interface

L'interface entre le granulat et la matrice joue un rôle important dans le processus complexe de fissuration d'un matériau composite comme le béton.

Dans le béton normal, la propagation des fissures se fait préférentiellement le long des interfaces matrice-granulats à cause de la résistance mécanique de ces zones qui est relativement faible par rapport à celles des autres constituants [20 - 22].

Pour simuler leur comportement mécanique, des éléments interfaciaux ont été introduits entre les noeuds-frontières des éléments finis des inclusions et ceux de la matrice; ces éléments sont représentés schématiquement sur la figure 6.8 [115].

La figure 6.9 montre la structure détaillée d'un élément interfacial qui est composé de deux ressorts, d'un élément de friction et d'un élément de radoucissement. Dans la même figure sont représentés les forces et les déplacements nodaux.

Dans le cas linéaire-élastique, c'est-à-dire avant toute fissuration de l'élément, la relation entre les forces et les déplacements s'écrit dans le repère (N,T) (voir Fig. 6.9).

$$\begin{pmatrix} F_{ni} \\ F_{ti} \\ F_{nj} \\ F_{tj} \end{pmatrix} = \frac{EL}{2D} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ \cdot & 1/2 & 0 & -1/2 \\ \cdot & \text{sym.} & 1 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1/2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{pmatrix} \quad (6.32)$$

L et D sont respectivement la longueur de l'interface considérée et son épaisseur. Il est à noter que l'épaisseur D de l'interface est très faible (de quelques dizaines de microns); ainsi on a $D \ll L$. E représente le module d'élasticité des ressorts.

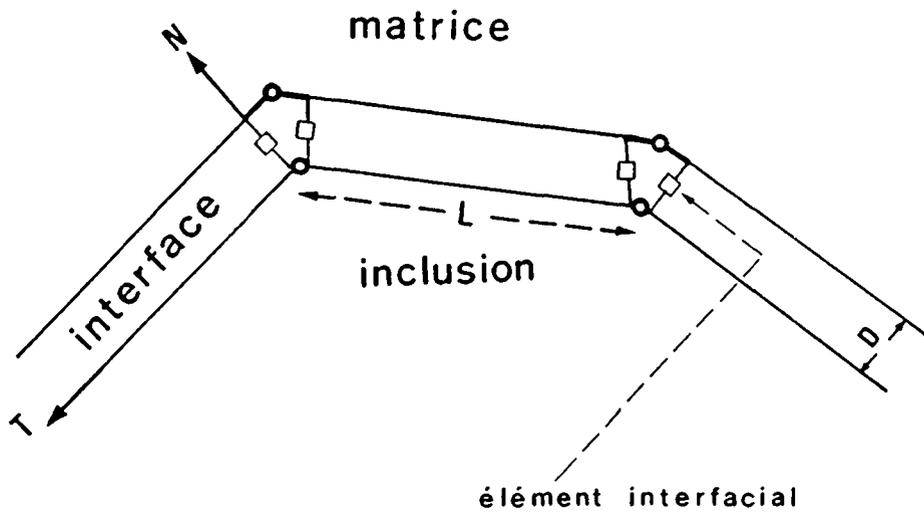


Fig. :6.8

Modélisation de l'interface matrice-granulat par des éléments interfaciaux disposés entre les noeuds des inclusions et ceux de la matrice.

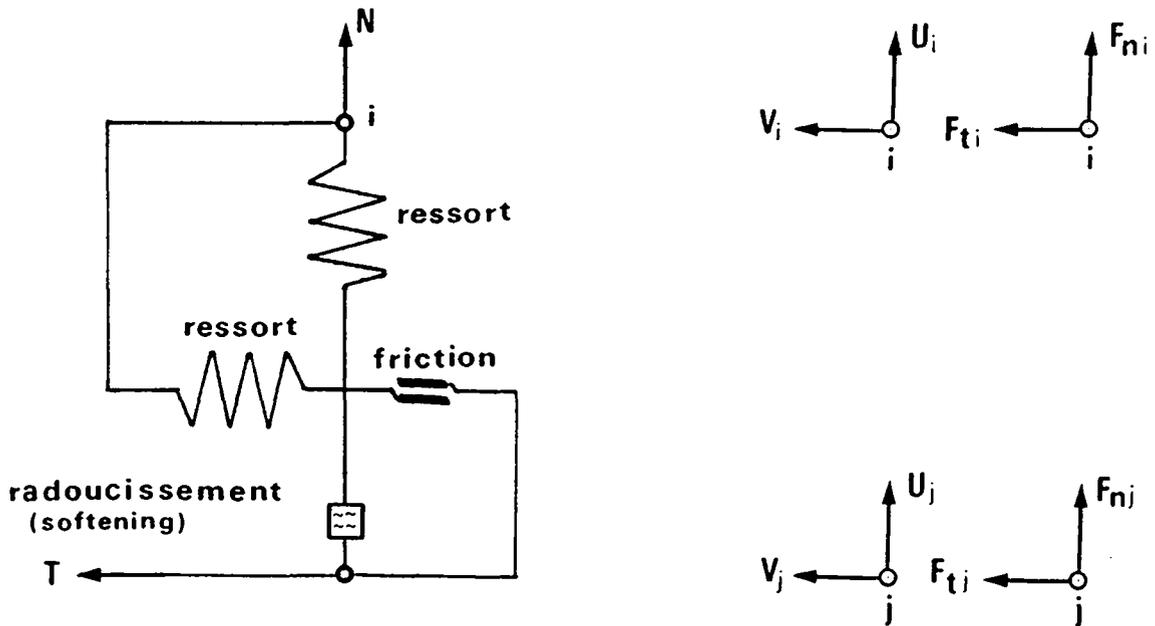


Fig. :6.9

Représentation schématique d'un élément fini interfacial, composé d'un ressort et d'un élément de friction dans l'axe T (axe parallèle à la frontière de l'inclusion), et d'un ressort et d'un élément de radoucissement dans l'axe N (axe normal à la frontière de l'inclusion) (figure de gauche). Forces et déplacements nodaux (figure de droite).

Les contraintes normales σ_{nn} et les contraintes de cisaillement σ_{nt} sont données par les relations suivantes:

$$\sigma_{nn} = E \left(\frac{U_i - U_j}{D} \right) \quad (6.33)$$

et

$$\sigma_{nt} = \frac{E}{2} \left(\frac{V_i - V_j}{D} \right) \quad (6.34)$$

6.5.2 Critères de fissuration

Les formulations ci-dessus (6.32 à 6.34) décrivent les propriétés mécaniques de l'interface dans son état non fissuré. Deux modes de fissuration possibles pour un élément interfacial ont été considérés:

- Mode I ou mode d'ouverture:

Celui-ci a lieu dans le cas de la traction dominante et sous la condition que la contrainte normale σ_{nn} dépasse la traction maximale admissible de l'interface, f_t^{int} :

$$\sigma_{nn} > f_t^{int} \quad (6.35)$$

- Mode II ou mode de glissement:

Ce mode de fissuration survient dans le cas d'une compression dominante. Le critère de fissuration adopté est le critère de Mohr-Coulomb, qui stipule que la rupture se produit lorsque la contrainte de cisaillement (σ_{nt}) atteint une valeur limite donnée. Cette valeur dépend d'une constante C^{int} , la cohésion de l'interface et, linéairement, de la contrainte normale (σ_{nn}) selon un coefficient $\text{tg } \phi$, ϕ étant l'angle de frottement interne du matériau. Le coefficient $\text{tg } \phi$ est désigné souvent par la lettre μ , appelé coefficient de frottement [116].

On a donc fissuration en mode II, lorsque la relation suivante est vérifiée:

$$|\sigma_{nt}| > c^{int} + \mu^{int} \sigma_{nn} \quad (6.36)$$

L'indice supérieur "int" est relatif aux grandeurs de l'interface.

Dans le cas de l'initiation d'une fissure par traction (critère (6.35)), la rigidité E du ressort dans la direction N est "radoucie" progressivement selon le même principe que celui adopté pour la matrice (cf. § 6.4.2.3).

Lorsqu'un élément préalablement fissuré retourne dans un état de compression, des forces de friction sont introduites. Ces forces de friction entre la matrice et l'inclusion sont fonction de la contrainte normale σ_{nn} et du coefficient de friction μ^{int} . De telles forces de friction ont tendance à freiner la propagation de la fissuration et ceci d'autant plus que la surface des granulats est rugueuse.

6.6 Procédure de la simulation numérique

La procédure de la simulation numérique du processus de fissuration dans une structure composite est constituée des étapes suivantes:

- Simulation de la structure composite

Pour représenter d'une façon réaliste la structure composite à analyser, les caractéristiques suivantes sont introduites comme paramètres d'entrée:

- . géométrie de la structure à analyser
- . teneur en inclusions
- . géométrie des inclusions
- . distribution de la taille des inclusions (granulométrie).

Cette première étape est décrite en détail dans le chapitre 5.

- Représentation de la structure par éléments finis

Les paramètres d'entrée de cette seconde étape sont les coordonnées de la structure composite simulée précédemment. Le programme de génération du maillage consiste d'abord en un maillage grossier qui, à son tour, est subdivisé en éléments finis plus petits; ceci est décrit au paragraphe 5.7.

Dans le but de réduire au mieux les efforts pour la résolution des systèmes d'équation, la technique des sousstructures a été utilisée [67, 112]. Autour de chaque inclusion, une sousstructure est définie. Ceci est illustré par la figure 6.10. La matrice de rigidité de la structure complète est obtenue par assemblage des matrices de rigidité de toutes les substructures. L'algorithme de Cuthill-McKee [67, 114, 127] a été utilisé pour une numérotation efficace des variables nodales.

- Simulation du processus de fissuration

Les paramètres d'entrée sont les propriétés mécaniques des différents constituants, les conditions de chargement et éventuellement les déformations initiales.

En réalité, dans un béton usuel, les propriétés mécaniques de la matrice ne sont pas égales en tout point, mais elles varient autour de grandeurs moyennes avec une certaine dispersion. Pour tenir compte de cette hétérogénéité de la matrice, les propriétés mécaniques des éléments finis représentant la matrice sont distribuées aléatoirement autour de valeurs moyennes.

La figure 6.11 donne schématiquement l'organigramme de la simulation.

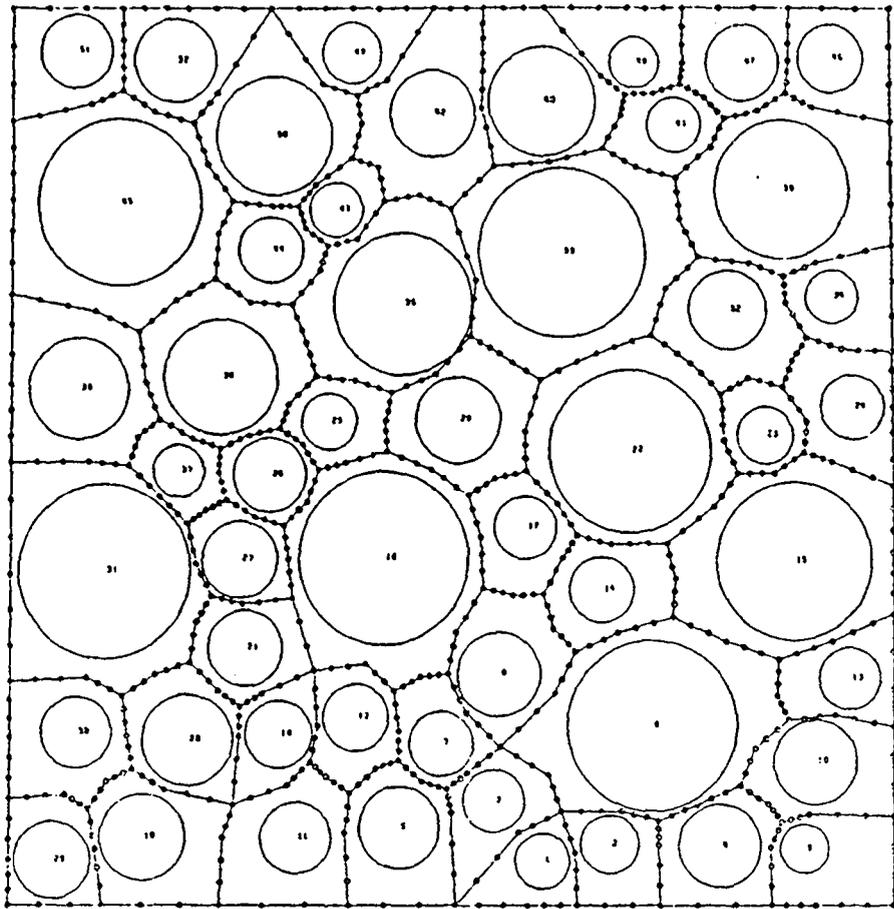


Fig. :6.10

Soustructures autour des inclusions .

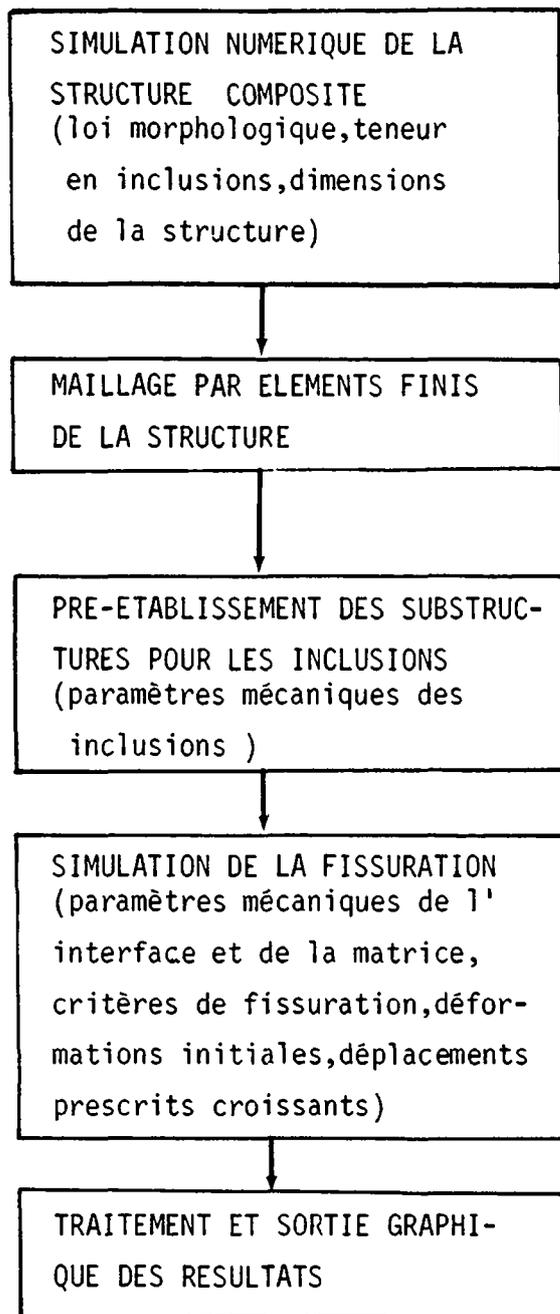


Fig. :6.II Différents modules utilisés pour la simulation

Le programme détecte tout d'abord la soustructure dans laquelle une des conditions de fissuration a lieu (selon les différents critères adoptés). Le vecteur-déplacement calculé des noeuds-frontières de cette soustructure est gelé provisoirement et les rigidités des éléments finis de la soustructure qui ont satisfait à un critère de fissuration sont alternativement "radoucisé" jusqu'à un certain niveau qui peut être ajusté par l'emploi d'un compteur d'événements (event-counter). La matrice de rigidité de la structure composite est composée une nouvelle fois et l'on procède alors à l'analyse des contraintes. Cette procédure est répétée jusqu'à ce que toutes les conditions aient été satisfaites.

Ce programme est réalisé pour étudier la fissuration d'une structure composite induite, soit par des déformations initiales (ex.: retrait hygrique, gonflement dû au gel, ...) soit par une sollicitation en traction de la structure (en imposant des déplacements croissants sur une frontière).

En principe, une analyse réaliste au moyen du béton numérique nécessite plusieurs milliers d'éléments finis. Il est clair que seuls les ordinateurs à très haute vitesse de calcul peuvent résoudre de très grands systèmes d'équation en un temps raisonnable.

Les présentes études de simulation ont été effectuées sur l'ordinateur Cyber-750 du Centre de calcul de l'EPF-Lausanne; nous nous sommes limités à des structures renfermant un nombre restreint d'inclusions.

Dans ce qui suit, nous allons présenter des résultats de la simulation numérique du processus de fissuration des différentes structures composites. La première partie des essais numériques effectués simule le processus de fissuration de structures composites sollicitées en traction uniaxiale. La deuxième partie des essais traite de la simulation de la dégradation d'un matériau composite, induite soit par un retrait hygrique de la matrice, soit par un gonflement dû au gel de la matrice poreuse saturée d'eau.

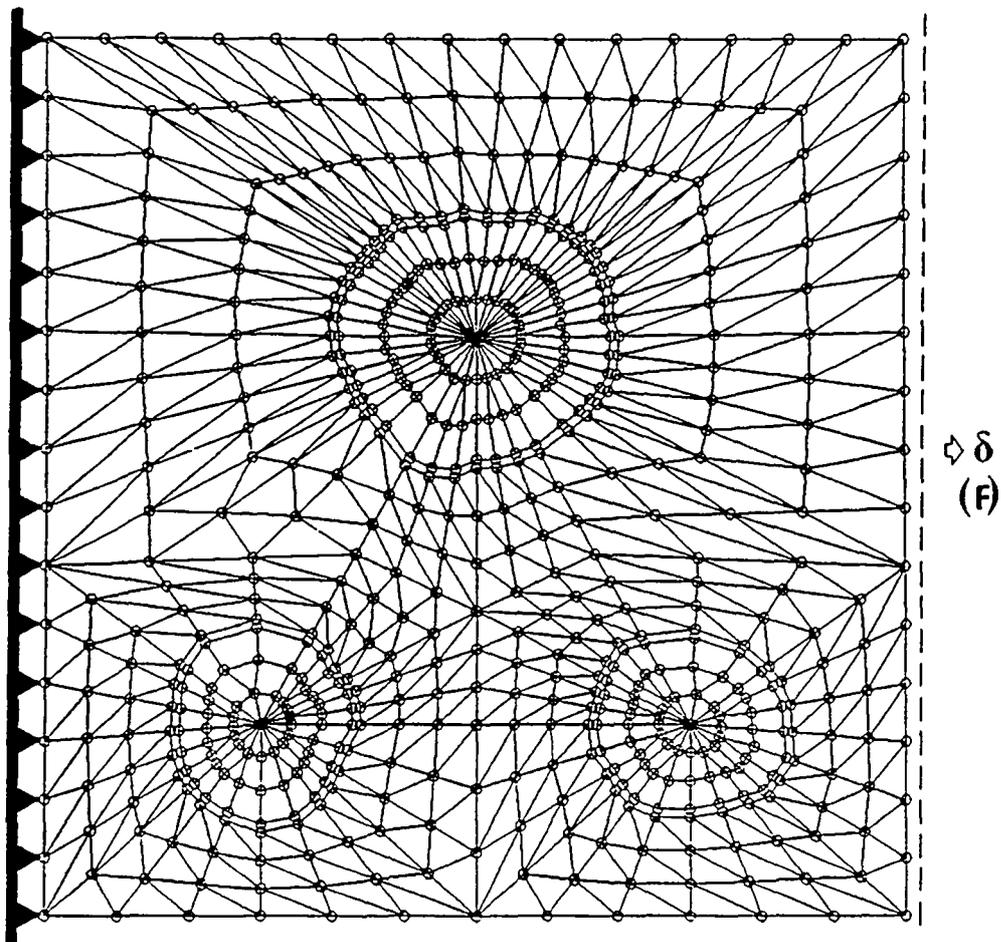


Fig. :6.12

Schématisme d'une structure composite sollicitée en traction et conditions aux frontières.

6.7 RESULTATS DE LA SIMULATION ET DISCUSSIONS

6.7.1 Structure composite sollicitée en traction

Des analyses de la formation et de la propagation des fissures dans différentes structures composites, sollicitées en traction, ont été réalisées. Ces structures sont soumises à des déplacements (δ) croissants, prescrits sur un côté de la frontière de la structure et la force de réaction résultante est calculée à chaque pas. Ce mode de sollicitation est schématisé sur la figure 6.12.

La figure 6.13 montre l'évolution du processus de fissuration d'une structure simple, formée de trois inclusions circulaires.

Dans ces figures et celles qui suivent, les éléments fissurés de la matrice sont représentés par des traits de direction parallèle à la fissure. Il convient de distinguer les fissures fictives (trait simple) et les fissures réelles (trait muni d'un cercle). Les fissures fictives représentent les éléments en cours de dégradation mais toujours aptes au transfert de contrainte, leur pouvoir de transfert de contrainte est décrit par la courbe de radoucissement $\sigma-w$. Les fissures réelles, qui surviennent dans un état de dégradation avancée de la structure (correspondant à de grands déplacements δ) sont celles pour lesquelles le transfert de contrainte tombe à zéro; elles correspondent au point extrême de la courbe de radoucissement $\sigma-w$.

La fissuration des éléments interfaciaux, matrice-inclusions, est repérée sur la figure par des petits cercles sur les contours des granulats.

Les premières dégradations du matériau naissent dans les zones interfaciales matrice-granulats, ceci s'explique par le fait que les propriétés mécaniques de ces zones sont plus faibles que celle de la matrice.

Cette structure a été sollicitée jusqu'à un déplacement δ de 0,1 mm. Le diagramme résultant, force de réaction-déplacement ($F-\delta$), est montré sur la figure 6.14. Les caractéristiques mécaniques des éléments sont données sur la même figure. Aux points A, B et C du diagramme ($F-\delta$) correspondent les cartes de fissuration données respectivement par les figures 6.13A, 6.13B et 6.13C.

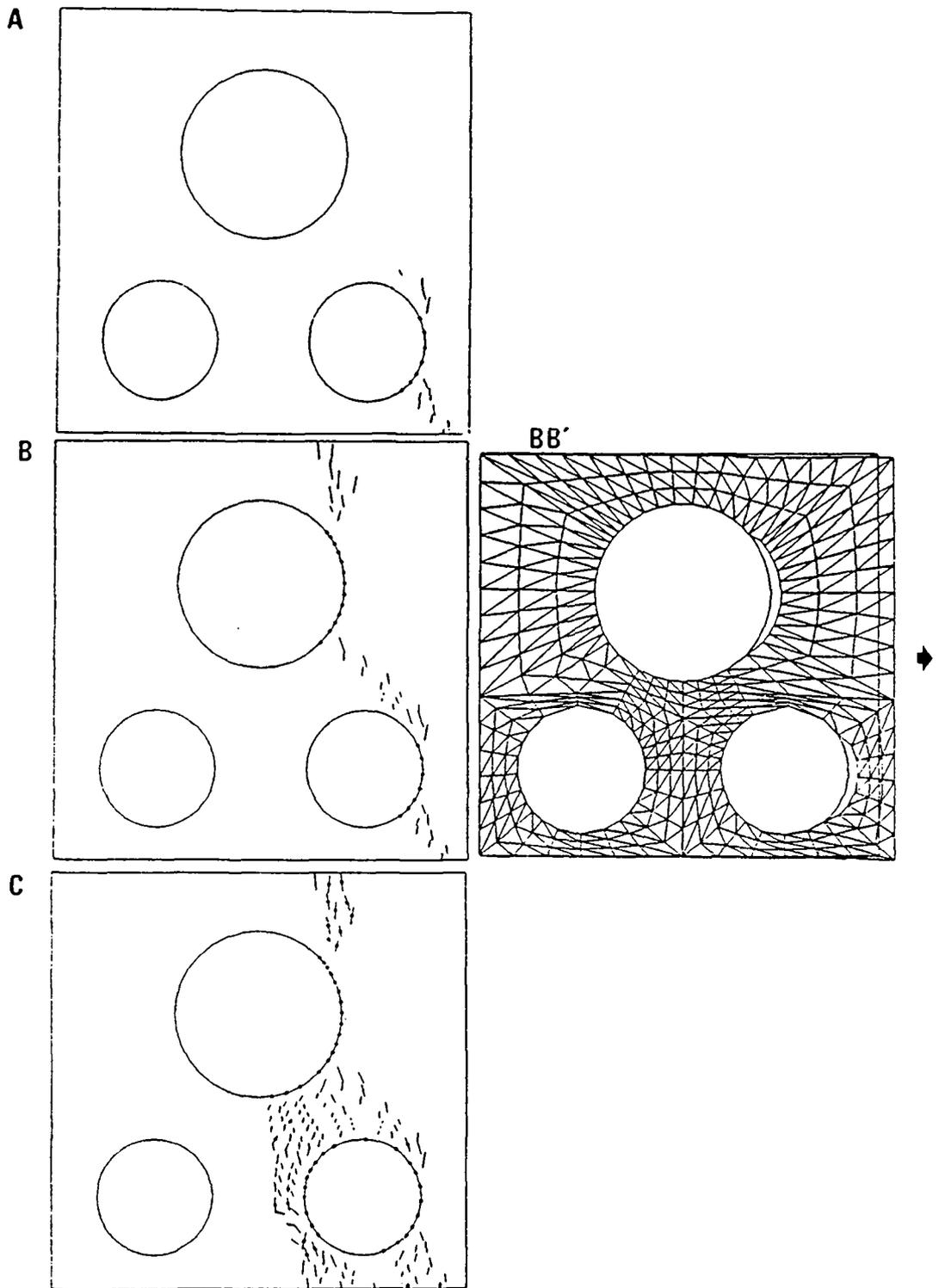


Fig. :6.13

A ,B ,C : Cartes de fissuration d'une structure composite sollicitée en traction à différents niveaux de charge.

BB' : Structure déformée correspondant à l'état de fissuration de la figure B.

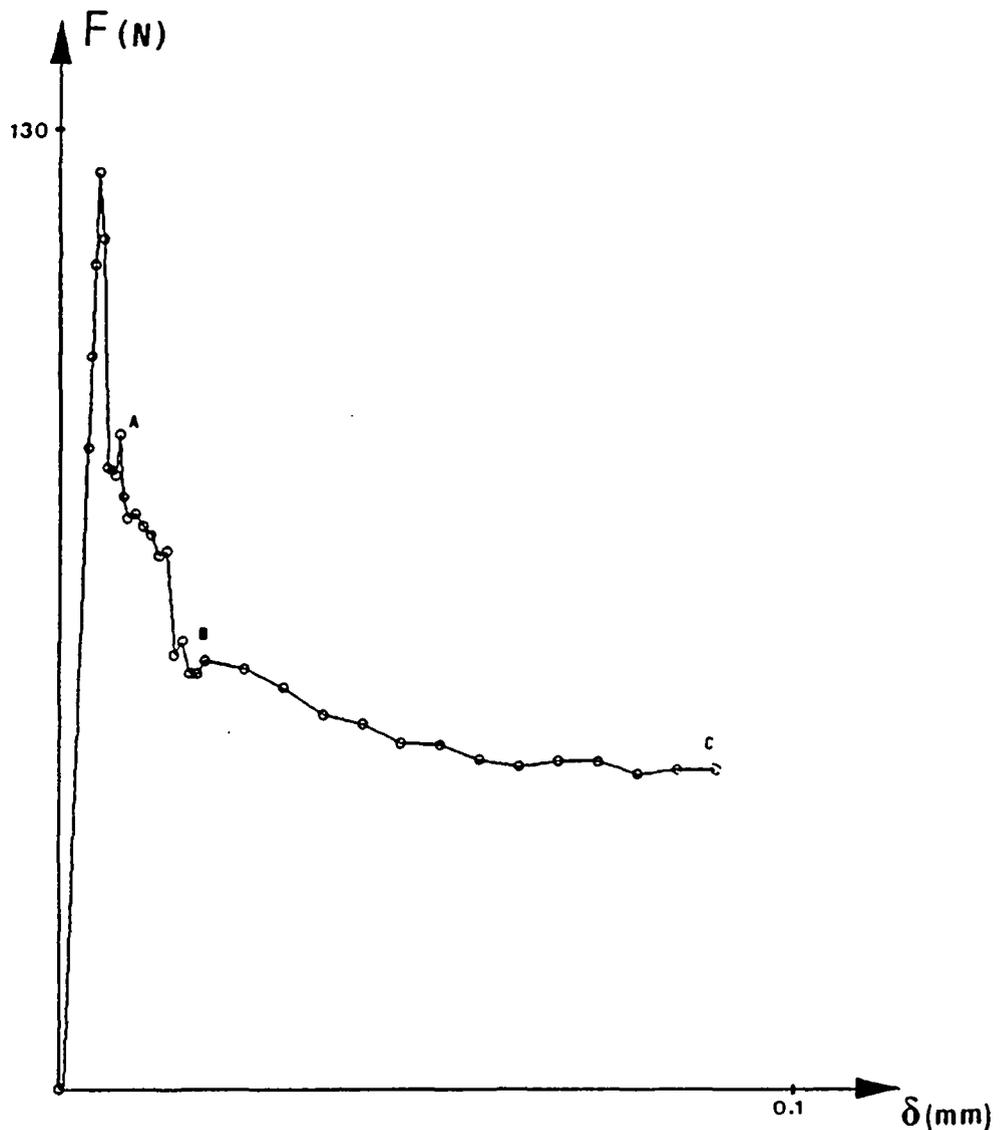


Fig. :6.14

Diagramme Force de réaction-Déplacement résultant d'une sollicitation en traction de la structure composite de la Fig.6.13. Les points A,B et C correspondent respectivement aux cartes de fissuration A,B et C de la Fig.6.13.

La force maximale est de 123 N, correspondant à une contrainte de 2.46 N/mm^2 .

Les valeurs moyennes des propriétés mécaniques sont, respectivement pour la matrice et l'interface:

Module d'élasticité : 20000 et 10000 N/mm^2
Energie de rupture : 76 et 7 N/m^2
Résistance à la traction : 4.5 et 3 N/mm^2

Le module d'élasticité des inclusions est de 60000 N/mm^2 .

Le coefficient de Poisson est de 0.2 pour tous les constituants et dans toutes les simulations réalisées.

La figure 6.13BB' représente l'état déformé de la structure correspondant à l'état de fissuration de la figure 6.13B et au point B du diagramme F- δ (les déformations sont exagérées sur les dessins, par souci de clarté). La force de réaction maximale (pic du diagramme F- δ) est de 123 Newton, ce qui correspond à une contrainte maximale de 2.46 N/mm^2 (dans cet exemple, la structure est un carré de 50 mm de côté).

Des structures comportant jusqu'à 19 inclusions ont aussi été analysées. La granulométrie des inclusions suit une distribution de Fuller et la concentration va jusqu'à 40 %, le reste étant la matrice de mortier. La géométrie des inclusions peut être en principe quelconque. Nous avons utilisé deux géométries différentes; dans l'une, les granulats sont représentés par des disques, dans l'autre la géométrie des inclusions est représentée par la loi morphologique relative aux granulats de la Vallée du Rhône dont il a été question au chapitre 5.

La figure 6.15 représente l'état fissuré d'une structure composite formé d'inclusions dont la géométrie suit la loi morphologique mentionnée précédemment. Cet état de dégradation correspond à un déplacement prescrit δ de 0,1 mm. La figure 6.15A représente l'état déformé de la structure. La figure 6.15B représente la carte de fissuration de la structure.

A titre comparatif, nous avons fait une analyse similaire sur une structure identique (même concentration en inclusions et mêmes propriétés mécaniques des phases), mais dont les granulats sont représentés par des disques.

La carte de fissuration de cette structure, au même niveau de sollicitation que la précédente (cf. Fig. 6.15), c'est-à-dire δ égal à 0,1 mm, est représentée sur la figure 6.16. Les diagrammes force de réaction-déplacement (F- δ) résultant de ces deux analyses sont montrés sur la figure 6.17.

Les aires des surfaces délimitées par les courbes (F- δ) et l'axe des déplacements (δ) représentent les énergies consommées par la fissuration des structures.

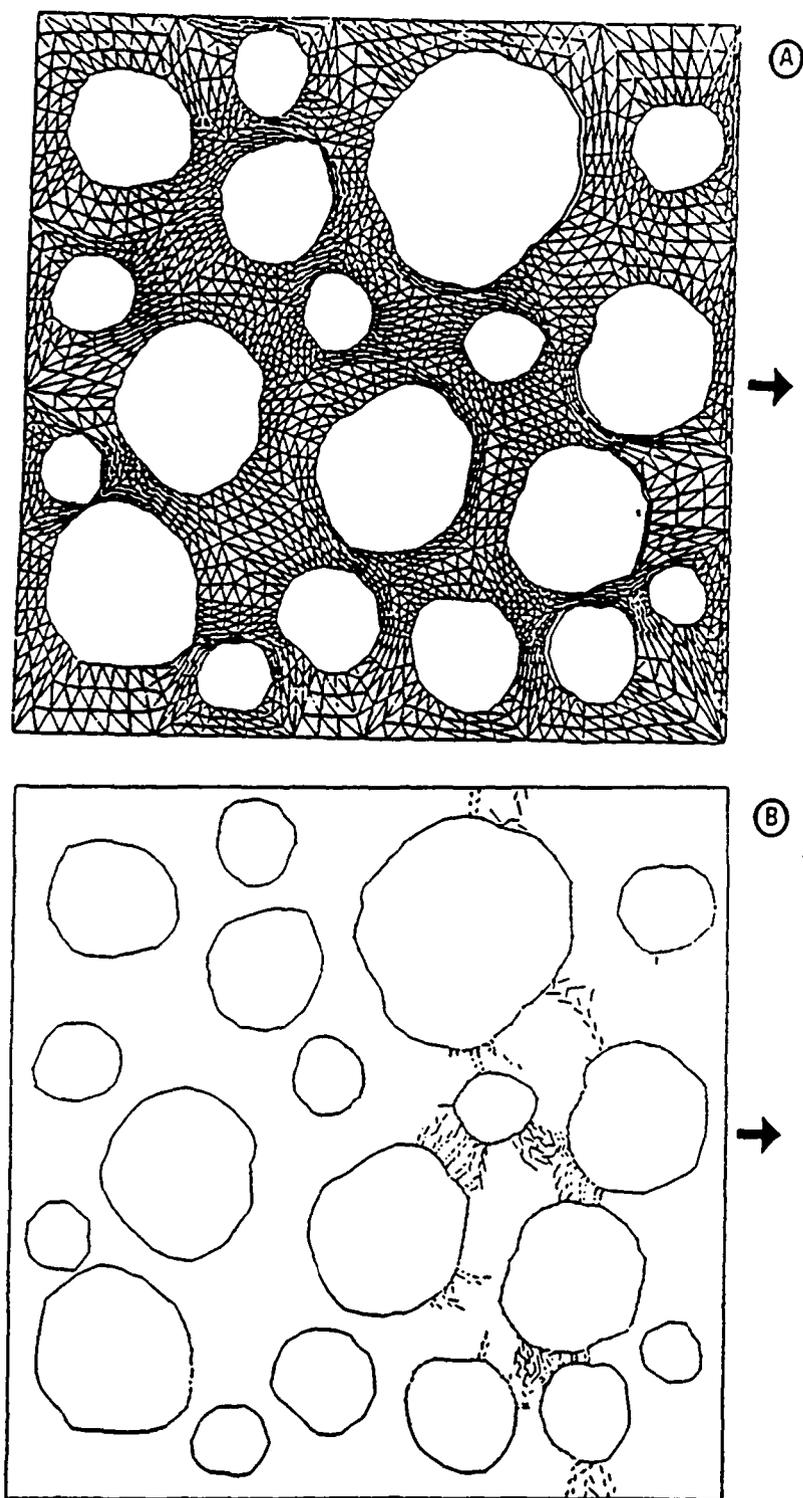


Fig. :6.15

Structure composite à inclusions aléatoires distribuées selon la loi de Fuller sollicitée en traction.

A : Déformation de la structure

B : Carte de fissuration (fissures interfaciales représentées par des petits cercles sur les contours des inclusions, les fissures de la matrice par des traits).

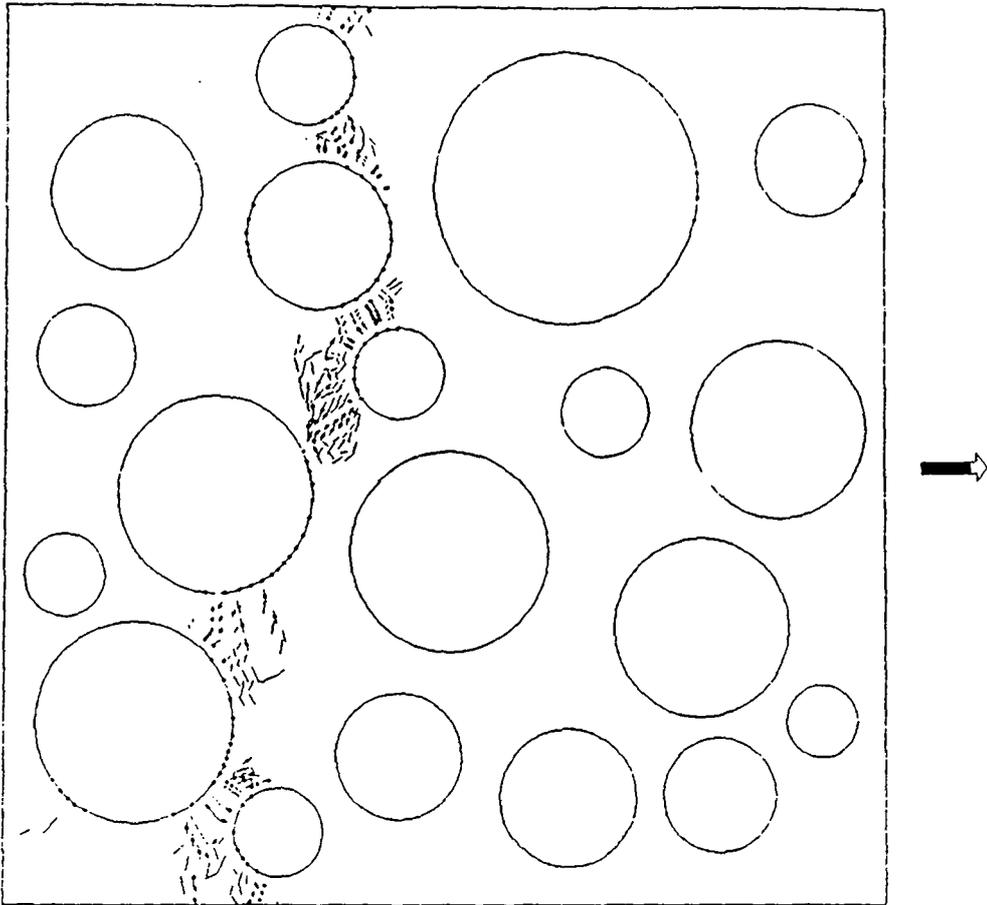
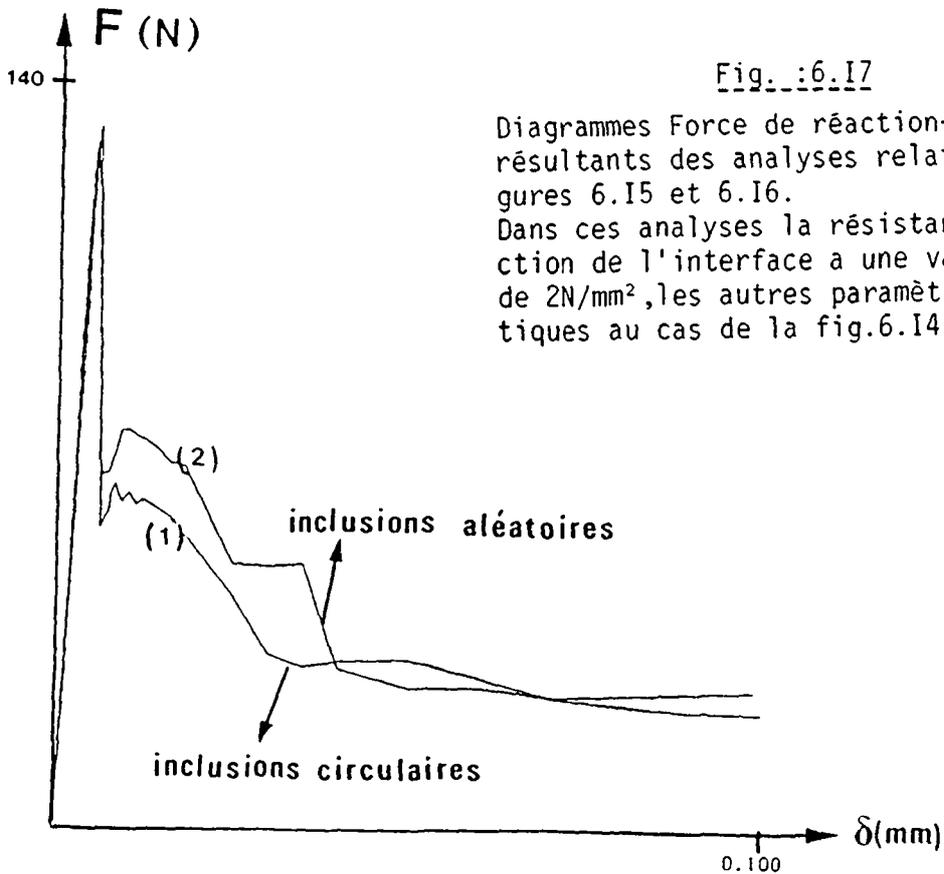


Fig.:6.16 Carte de fissuration pour une structure composite, à inclusions circulaires, et sollicitée en traction (mêmes paramètres mécaniques que ceux de la figure 6.15)



Un résultat important ressort de cette étude; l'énergie consommée par la structure formée d'inclusions à géométrie aléatoires (Fig.6.15) est plus importante que celle consommée par la structure à disques. Ce résultat, en parfait accord avec les expériences, montre que la ténacité à la rupture ou énergie de rupture (G_F) dépend beaucoup de la géométrie des surfaces des granulats. Elle est d'autant plus grande que la surface des inclusions est plus rugueuse [128,137].

L'allure de la courbe de radoucissement ($\sigma-w$) du matériau composite dépend aussi de la morphologie des surfaces des granulats comme on peut le remarquer sur les branches descendantes des diagrammes $F-\delta$ de la figure 6.17.

Ces deux phénomènes peuvent avoir plusieurs origines :

Tout d'abord, les granulats à haute angularité sont plus efficaces à arrêter la propagation des fissures, de plus, la nature anguleuse de leur contour fournit plus de points nodaux, au voisinage desquels, une microfissuration multidirectionnelle peut se développer. Le développement de ce type de microfissuration nécessitera beaucoup d'énergie et augmentera la résistance du matériau à une propagation catastrophique des fissures.

Deuxièmement, un granulat angulaire offre un meilleur effet d'engrenage avec la matrice liante qu'un granulat arrondi; ceci aura tendance à décroître la fragilité du matériau et à augmenter l'énergie nécessaire à sa rupture.

Finalement; un granulat angulaire a une plus grande surface de contact avec la matrice qu'un granulat arrondi, par conséquent plus d'énergie est nécessaire à l'arrachement des granulats .

Des expériences, effectuées sur des poutres encochées de plusieurs types de mortiers, différents les uns des autres par la forme des granulats entrant dans leur composition, ont révélé que l'énergie de rupture était d'autant plus grande que les granulats sont plus anguleux [137].

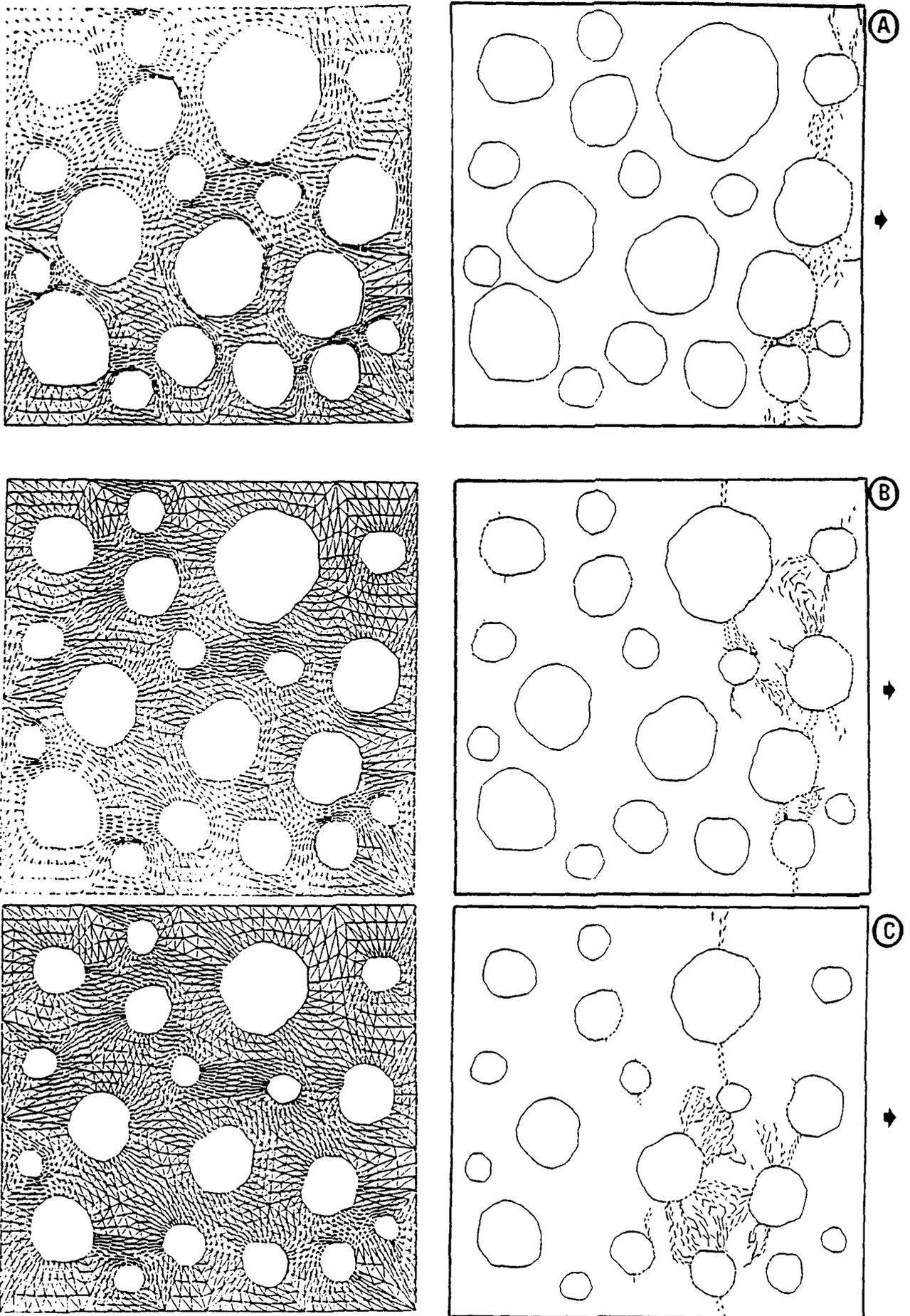


Fig. :6.18

Déformées et cartes de fissuration de 3 structures composites sollicitées en traction ayant des teneurs en inclusions de 40.30et 20 %.

Dans la figure 6.18, on a représenté l'état déformé et les cartes de fissuration de trois structures composites sollicitées en traction jusqu'à un déplacement imposé de 0,1 mm.

Les propriétés mécaniques des trois phases (matrice, inclusion et interfaces) des trois structures sont identiques. On a diminué graduellement les rayons moyens des inclusions pour obtenir les teneurs en granulats suivantes: 40 % dans la première structure (Fig. 6.18A), 30 % dans la deuxième (Fig. 6.18B) et 20 % dans la troisième (Fig. 6.18C).

Les diagrammes force de réaction-déplacement ($F-\delta$) résultant de cette analyse sont montrés sur la figure 6.19. Le calcul des énergies de fissuration des trois structures qui sont données par les aires des surfaces délimitées par les courbes ($F-\delta$) et l'axe δ , montre qu'elles sont respectivement de 54, 61 et 69 N/m.

Par conséquent, on assiste à une augmentation de l'énergie de fissuration en diminuant les dimensions des granulats. Ceci s'explique par le fait que dans les structures à grandes inclusions, une plus grande partie du chemin de la fissuration se trouve sur les interfaces matrice-granat, zones aux propriétés mécaniques faibles vis-à-vis de celles de la matrice.

Le diagramme $F-\delta$ (2) de la figure 6.17 et le diagramme $F-\delta$ (1) de la figure 6.19 correspondent à la même structure composite. Cependant, dans le premier cas la résistance à la traction moyenne de l'interface est de 2 N/mm^2 avec une dispersion de $0,5 \text{ N/mm}^2$, alors que dans le deuxième cas (Figure 6.19) cette résistance moyenne est de 3 N/mm^2 (avec une dispersion de 0.5 N/mm^2).

L'examen de ces deux diagrammes montre que la résistance à la traction de l'interface joue un rôle important dans la comportement mécanique global du matériau composite.

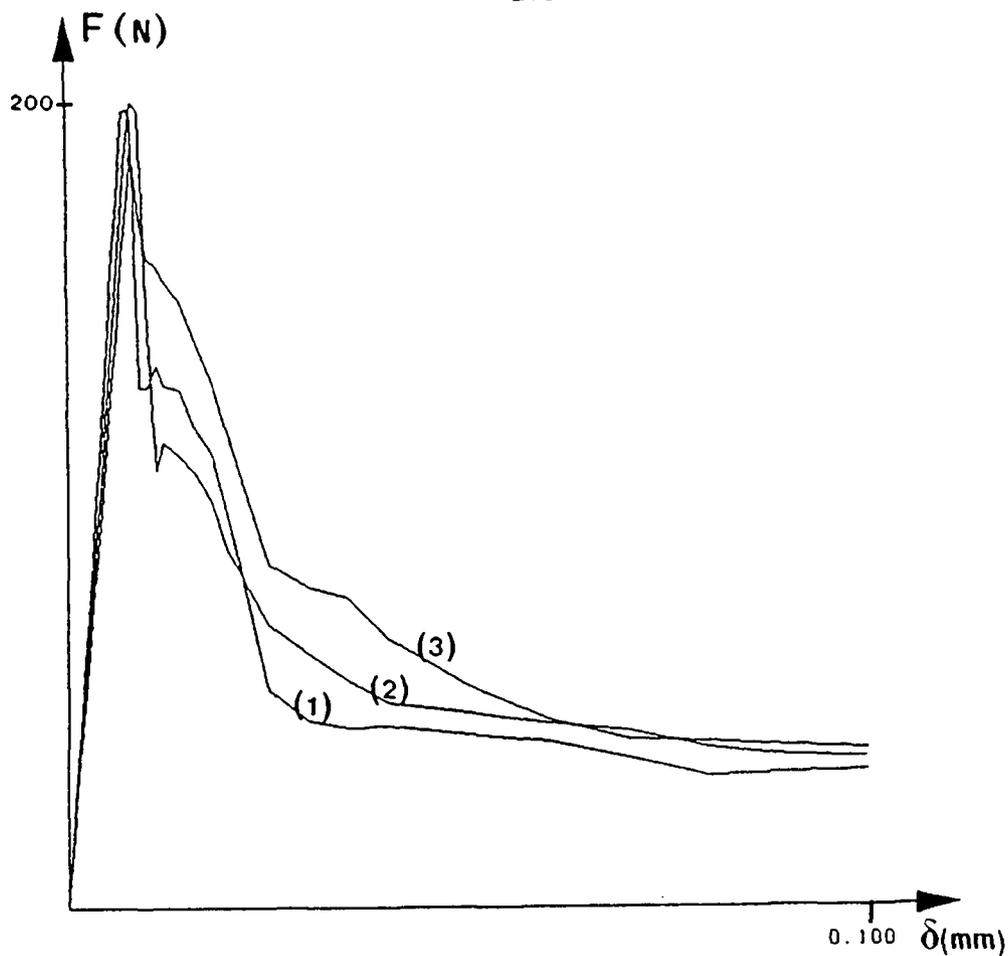


Fig. :6.19

Diagrammes Force de réaction-Déplacement résultants de l'analyse des trois structures composites de la figure 6.18. Les diagrammes (1), (2) et (3) correspondent respectivement aux structures A, B et C de la figure 6.18.

La résistance à la traction de l'interface est de 3 N/mm^2 (valeur moyenne).

Les trois structures comportent le même nombre d'inclusions, mais les concentrations sont de 0.4, 0.3 et 0.2.

En effet, la force maximale (correspondante au pic du diagramme $F-\delta$) qui était de 133 N est passée à 200 N dans le deuxième cas; ainsi, la résistance à la traction effective du matériau a passé de $1,33 \text{ N/mm}^2$ à 2 N/mm^2 (dans ce cas d'analyse les structures sont des carrés de 100 mm d'arête).

De plus, le comportement post-pic des diagrammes $F-\delta$ (correspondant au radoucissement du matériau) est très influencé par la résistance à la traction de l'interface, en particulier, on assiste à une descente de la courbe, plus douce dans le deuxième cas, c'est-à-dire le cas où la résistance de l'interface (3 N/mm^2) est plus proche de celle de la matrice ($4,5 \text{ N/mm}^2$).

Ces résultats concernant l'influence de la résistance à la traction de l'interface matrice-granulat sur le comportement mécanique du matériau composite (béton) sont en bon accord avec les prévisions expérimentales [128].

L'examen des diagrammes force-déplacements ($F-\delta$) des figures 6.14, 6.17 et 6.19, obtenus sur différentes structures composites sollicitées en traction, montre que la force de réaction F , ne décroît pas graduellement quand le déplacement δ croît. Ces résultats ne sont pas tout à fait réalistes; en effet, l'expérience montre que des spécimens de béton ou mortier, sollicités en traction uniaxiale, présentent des diagrammes force-déplacement caractérisés par une décroissance graduelle de la force pour des déplacements croissants (voir par exemple Fig. 3.6).

Ceci peut être expliqué de la façon suivante: dans l'analyse effectuée, la contrainte majeure (qui est donnée par la contrainte maximale dans le repère des axes principaux) et sa direction sont déterminées dans chaque élément fini. Si la contrainte majeure (σ_{nn}) dépasse la résistance à la traction, la direction correspondante est fixée et le radoucissement à la traction prend place dans cette direction. Cependant, la direction de la contrainte majeure, lors des chargements suivants, ne coïncide pas forcément avec la direction initialement fixée. Ceci est principalement dû aux redistributions des contraintes et des déformations au sein de la structure.

La loi constitutive appliquée dans cette simulation pour la matrice ne tient pas compte de cette situation. Ceci veut dire que les éléments fissurés gardent une certaine rigidité dans la direction du chargement; on peut aisément constater ce fait sur les cartes de fissuration des différentes structures analysées, les directions des fissures dans les éléments ne sont pas toujours normales à l'axe δ de chargement (axe horizontal). Ainsi, la rigidité globale de la structure ne décroît pas vers zéro dans la direction de chargement.

Dans le but de remédier à cet état de chose, nous avons réduit graduellement le module d'élasticité E_t (cf. Eq. 6.29) des éléments fissurés de la matrice; ceci revient à radoucir le matériau dans l'axe des fissures (axe T). Ceci est raisonnable vu les faibles dimensions de nos éléments finis représentant le mortier (matrice), et le caractère aléatoire de la distribution des microfissures au sein d'un petit élément de mortier.

La réduction du module d'élasticité dans la direction T peut être décrite comme une fonction décroissante de l'ouverture de la fissure dans la direction N (ϵ_{nn} ou W_{nn}).

En première approximation, on peut supposer que la réduction de E_t est une fonction linéaire de l'ouverture W_{nn} , ce qui peut s'écrire par la relation suivante:

$$E_t = E \left(1 - \frac{W_{nn}}{W_{nn}^l} \right) \quad (6.37)$$

où W_{nn}^l est l'ouverture maximale de la fissure fictive correspondante à une contrainte σ_{nn} nulle (point extrême du diagramme de radoucissement d'un élément de la matrice).

Les résultats (force-déplacement) obtenus avec cette modification sont beaucoup plus réalistes que ceux obtenus par l'analyse précédente.

La figure 6.20 montre la carte de fissuration d'une structure à trois inclusions sollicitée en traction, elle correspond à un déplacement

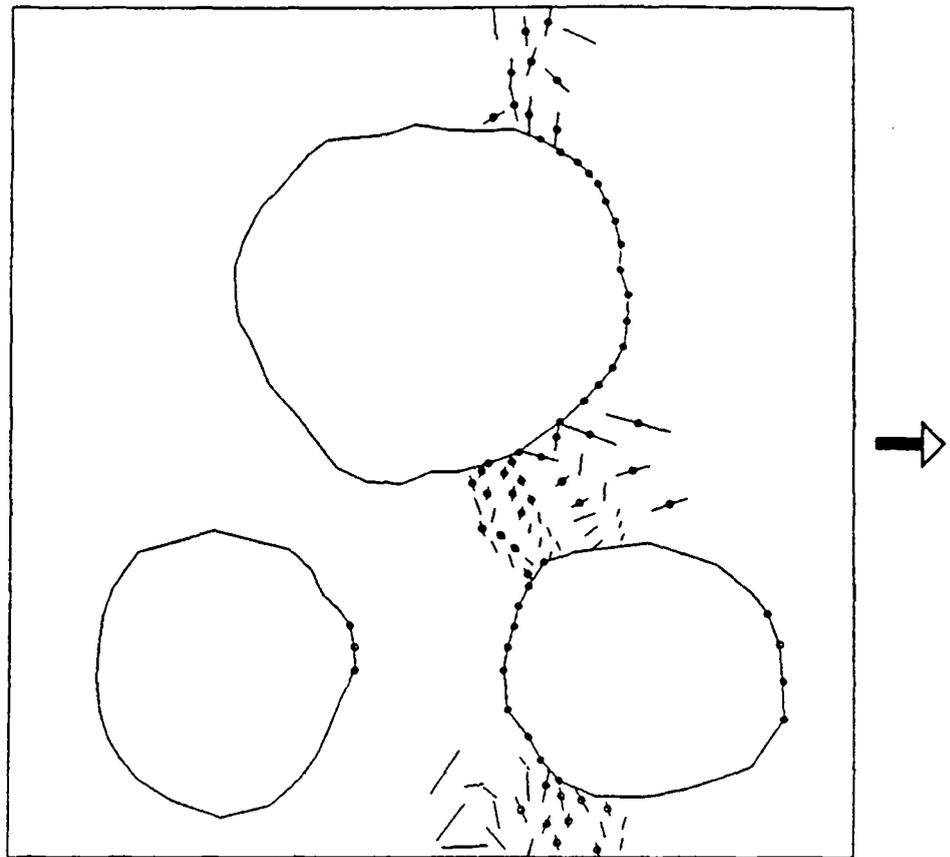


Fig. :6.20

Carte de fissuration d'une structure composite formée de 3 inclusions et sollicitée en traction. Cette situation correspond au stade final de la sollicitation.

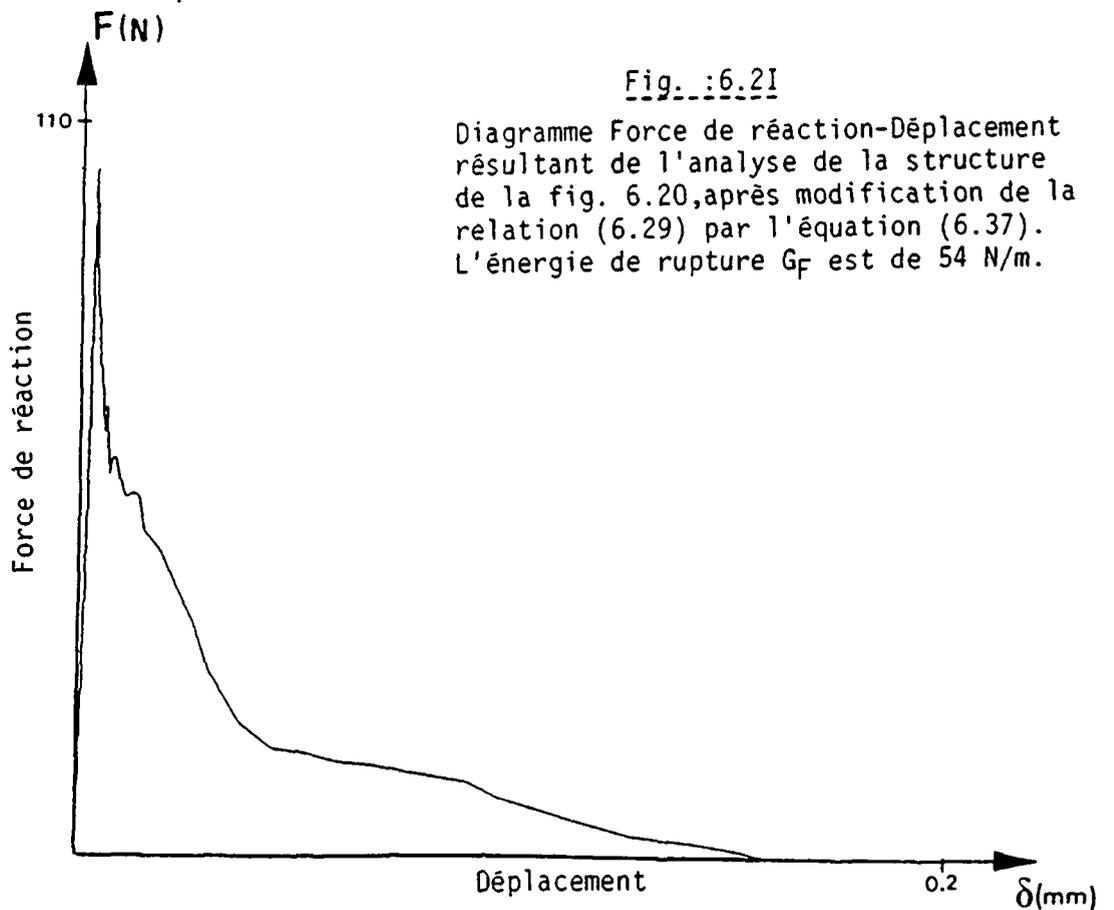


Fig. :6.21

Diagramme Force de réaction-Déplacement résultant de l'analyse de la structure de la fig. 6.20, après modification de la relation (6.29) par l'équation (6.37). L'énergie de rupture G_F est de 54 N/m.

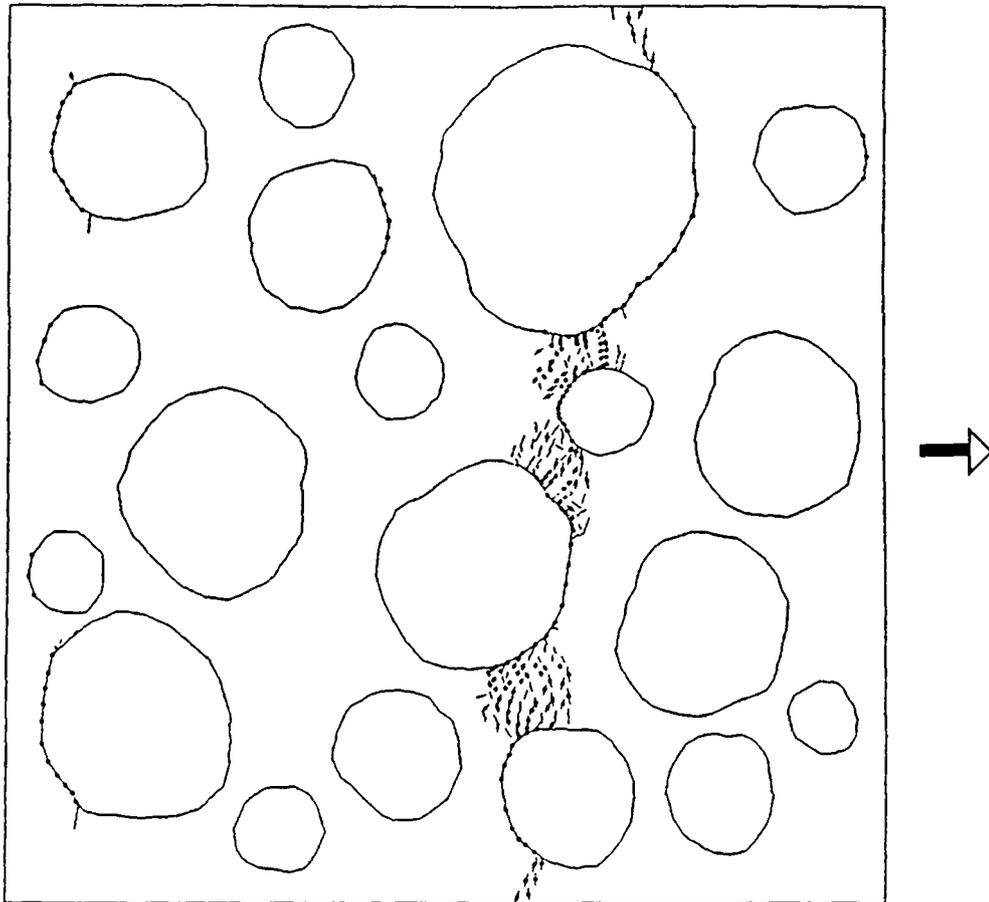
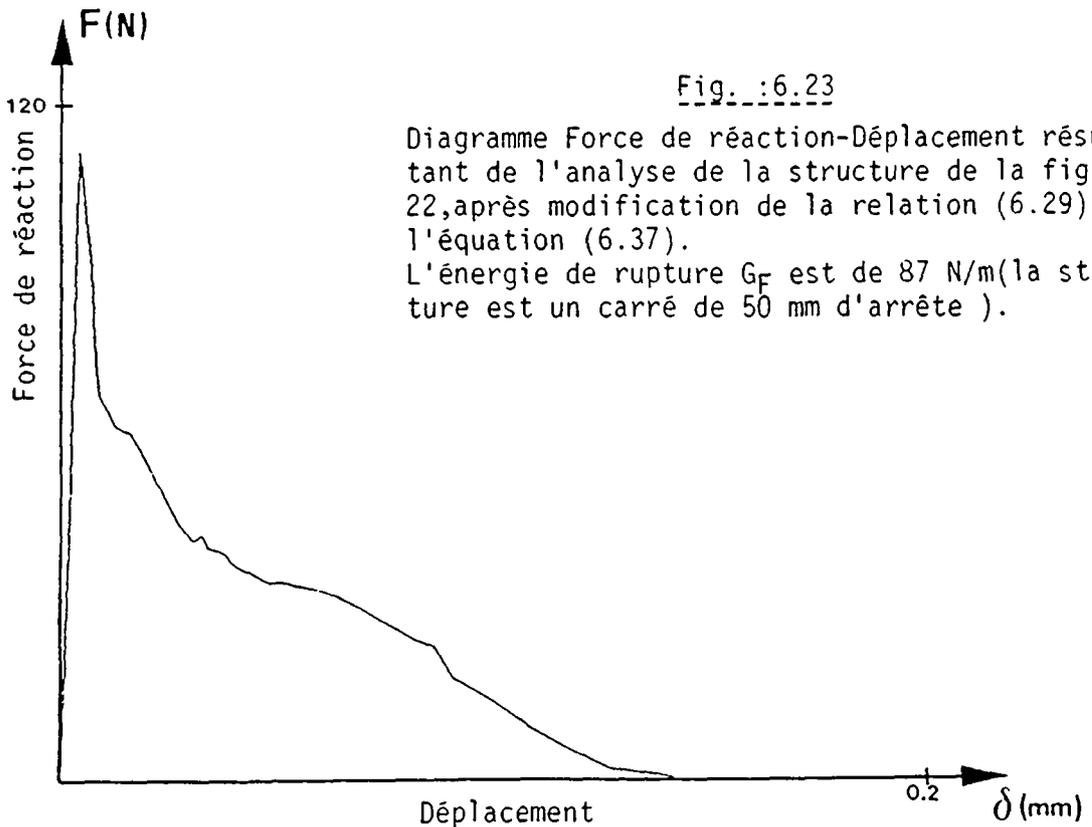


Fig. :6.22 Carte de fissuration d'une structure composite formée de 19 inclusions aléatoires soumise à une traction. Cette situation correspond au stade final de la sollicitation (i.e. rupture complète de l'échantillon).



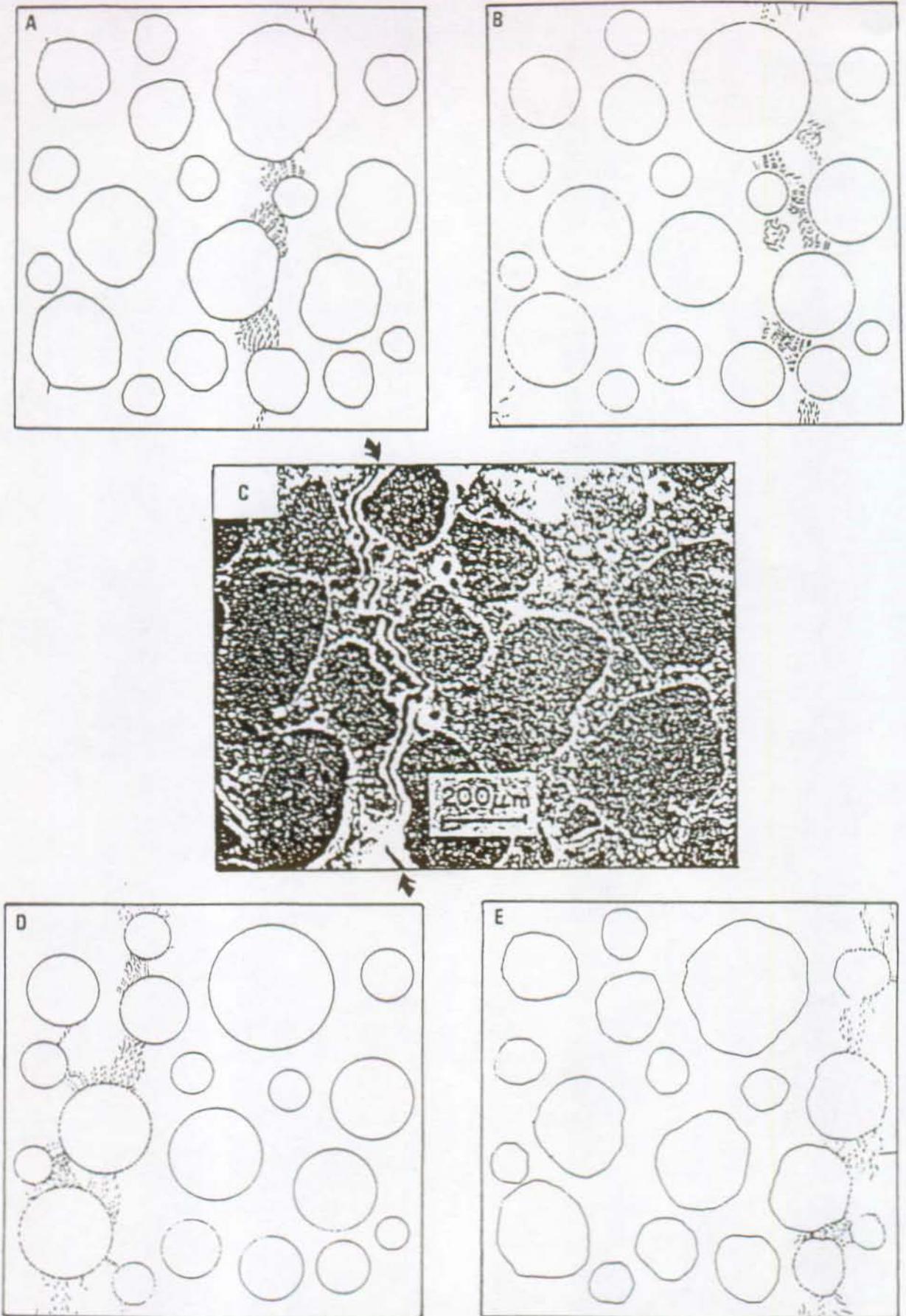


Fig.:6.24

Cartes de fissuration de 4 structures composites sollicitées en traction, situation au stade final de la sollicitation (rupture complète de l'échantillon). La photographie (fig.6.24C) montre la fissuration d'une structure réelle (mortier) /13/.

final δ de 0,16 mm. La figure 6.21 représente le diagramme force-déplacement résultant. La chute vers zéro de la force de réaction a été obtenue pour un déplacement final de 0,16 mm.

L'énergie de rupture, G_F , de cette structure, correspondant à l'aire de la surface délimitée par le diagramme F- δ est de 55 N/m.

Une structure, de mêmes dimensions (50 x 50 mm), mais formée de 19 inclusions a été analysée. La carte de fissuration, au stade final de l'on sollicitation, est représentée dans la figure 6.2.2. Le déplacement final donnant une force de réaction nulle est de 0,15 mm. L'énergie totale de rupture, G_F , est de 87 N/m. Le diagramme force de réaction-déplacement résultant de cette analyse est représenté dans la figure 6.23.

Les figures 6.24 montrent les cartes de fissuration de plusieurs structures composites analysées. Les propriétés mécaniques des éléments finis de la matrice et des interfaces sont distribuées aléatoirement autour de valeurs moyennes; ceci pour tenir compte du caractère inhomogène du mortier.

L'examen de ces figures montre clairement que la zone d'endommagement, qui, à l'état final de la sollicitation se transforme en macrofissure provoquant la rupture du matériau, est confinée dans une bande assez étroite, de l'ordre de deux fois la taille du plus gros granulats. Loin de cette bande microfissurée, quelques rares microfissures peuvent cependant se former comme on peut le constater sur les figures; il s'agit principalement de quelques dégradations des interfaces ou des zones de la matrice qui leur sont voisines; ceci a aussi été observé expérimentalement au moyen de l'interférométrie holographique sur des échantillons de béton ou de mortier [129,130].

A titre de comparaison, on montre sur la figure 6.24C la fissuration d'une structure composite réelle (mortier) sollicitée en traction [13].

6.7.2 Fissuration induite par le retrait hygrique

Les matériaux composites de construction, à base de ciment hydraulique, tels béton et mortier, subissent d'importantes contractions lors du séchage du liant. Ce phénomène est appelé retrait hygrique.

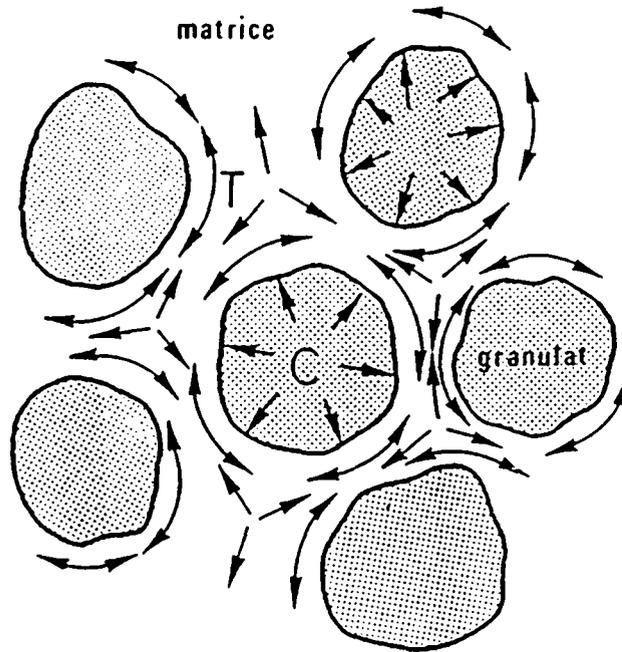


Fig. :6.25

Représentation schématique de l'état de contrainte induit par le retrait hygrique de la matrice d'un matériau composite comme le béton ou mortier. Traction (T) dans la matrice et compression (C) dans les granulats/II0/.

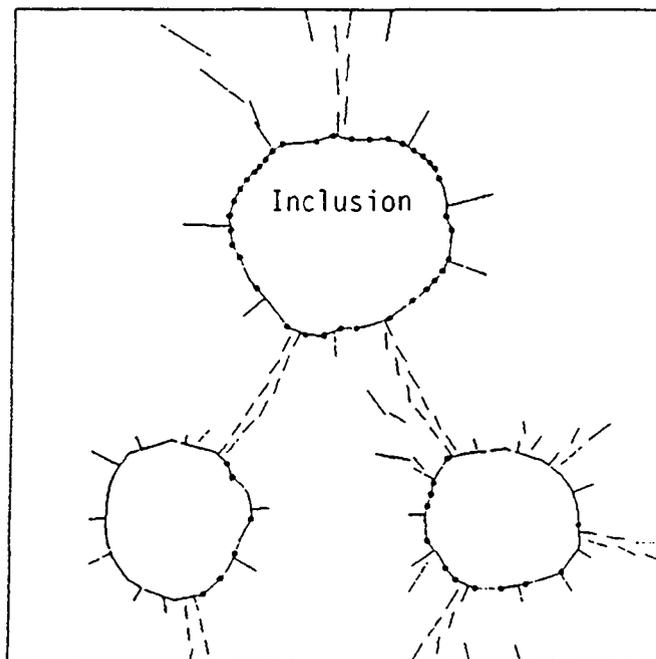


Fig. :6.26

Carte de fissuration d'une structure composite formée de 3 inclusions dont la matrice est le siège d'un retrait hygrique de -0.25‰ .

En considérant de tels matériaux comme hétérogènes, on peut distinguer, dans l'étude du retrait hygrique, deux phases. Une phase active, la matrice de pâte de ciment durcie, qui est source de variations de longueur et, une phase, formée par les granulats, qui n'a pas de retrait propre et s'oppose à la libre déformation de la matrice.

Dans le matériau composite, le retrait de la pâte est empêché par les granulats enrobés qui n'ont pas de retrait propre. La matrice est alors mise en tension et les granulats en compression. Cette situation est représentée schématiquement dans la figure 6.25 [110]. Cette mise en tension peut engendrer une fissuration selon des directions normales à l'effort de traction prédominant.

L'étude analytique d'un tel phénomène dans un matériau hétérogène aussi complexe que le béton, n'est que difficilement réalisable. En revanche, une étude numérique basée sur la représentation réaliste de la structure du matériau nous permet d'arriver à des résultats très concluants.

Avec notre modèle de simulation, on peut déterminer, en tout point de la structure, les contraintes et les déformations induites par un retrait de la matrice, et par là, de prévoir la fissuration du matériau.

Dans notre analyse, l'effet de retrait est pris en compte dans le vecteur des déformations initiales (éq. 6.29).

La figure 6.26 donne la carte de fissuration d'une structure composite formée de trois inclusions à géométrie aléatoire. Le retrait imposé à la matrice était de - 0,25 ‰.

La comparaison de ces résultats numériques avec des résultats expérimentaux, obtenus par interférométrie holographique sur des éprouvettes formées de trois inclusions, montre une bonne concordance. Les résultats expérimentaux sont montrés sur la photo de la figure 6.27 [131]. Tout comme dans la simulation numérique, on assiste à une dégradation de l'interface et à une fissuration de la matrice caractérisée par des fissures de directions plus ou moins normales au contour des granulats.

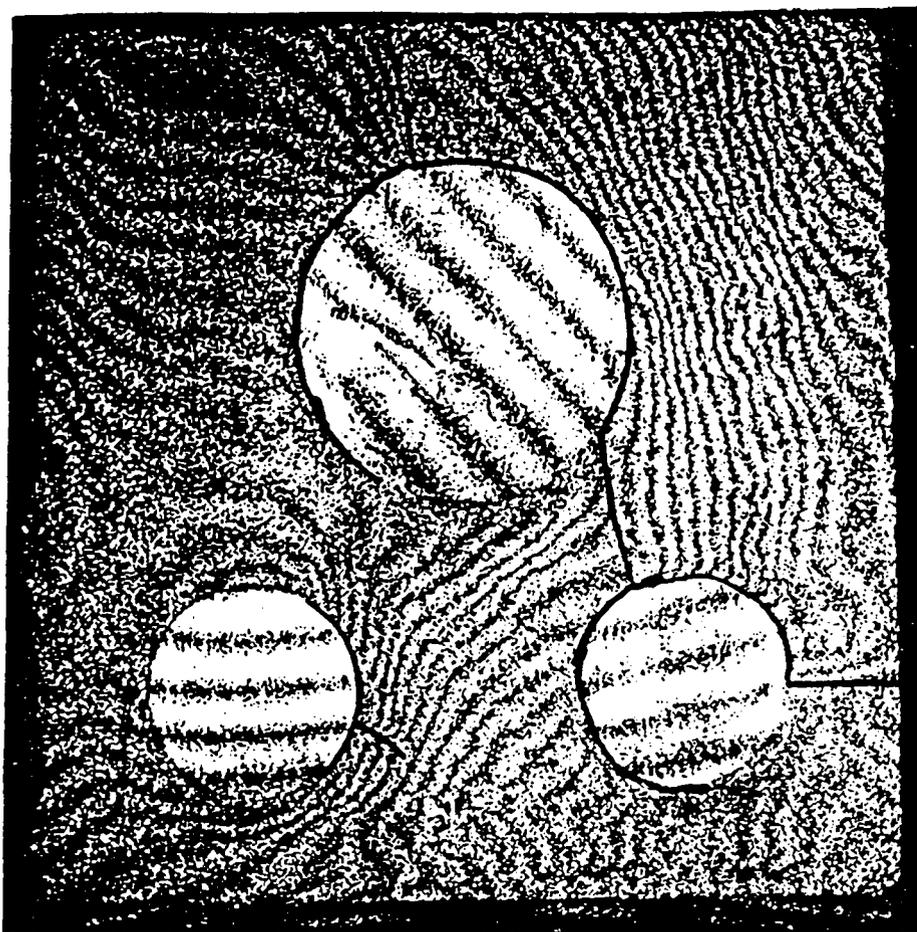


Fig. :6.27

Interférogramme montrant la fissuration d'un échantillon induite par le séchage de la matrice (retrait hygrique). L'éprouvette est formée de trois inclusions d'acier ,de forme circulaire, noyées dans une matrice de pâte de ciment durcie. Les fissures sont marquées par de gros traits noirs, ils correspondent aux fortes discontinuités des franges /I28/.

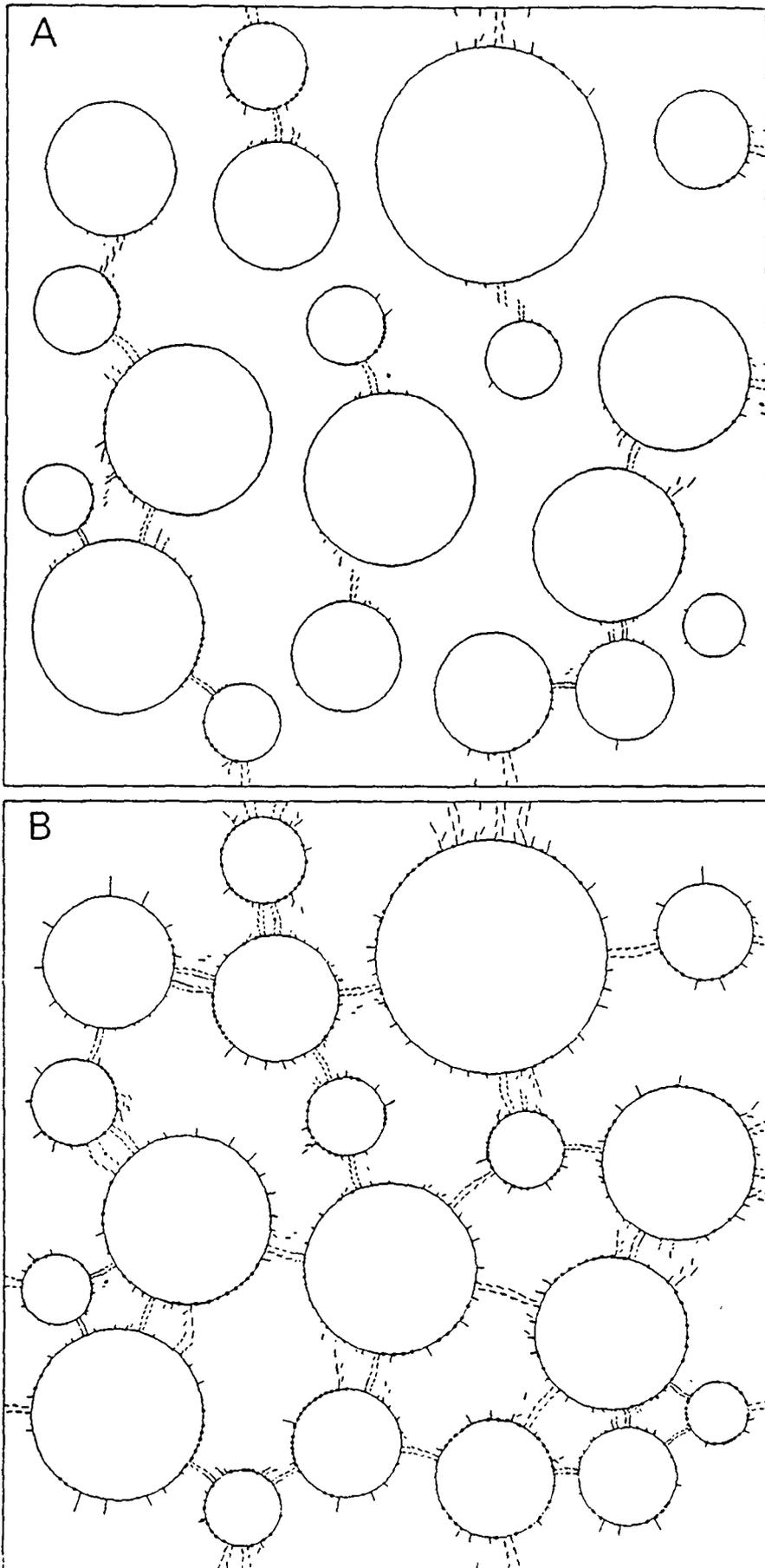


Fig. :6.28

Cartes de fissuration de structure composite dont la matrice est le siège d'un retrait hygrique qui est respectivement de -0.15 et -0.30‰ pour A et B.

Les figures 6.28 montrent les résultats numériques d'une structure composite dont la matrice est le siège d'un retrait hygrique. Ces structures sont formées de 19 inclusions correspondant à une teneur de 40 % en granulats. Dans la première analyse, le retrait imposé à la matrice était de - 0,15 ‰. Dans cette condition, comme on peut le constater sur la figure 6.28A, on assiste à une faible dégradation de la structure. Par contre, la fissuration est particulièrement intense dans le cas de la figure 6.28B où le retrait de la matrice était de - 0,25 ‰.

Grâce à cette modélisation numérique, on peut aisément étudier l'influence de différents paramètres sur le retrait effectif du matériau et la dégradation qui peut en résulter. Les paramètres pouvant influencer ce phénomène peuvent être soit d'ordre structurel (teneur en inclusion, répartition, forme, rapport eau/ciment) soit d'ordre mécanique, à savoir les propriétés mécaniques des deux phases, telles leur déformabilité ou leur résistance à la traction.

6.7.3 Fissuration induite par les déformations thermiques; cas du gel

Dans les matériaux multiphasés comme le béton, des changements de volume inégaux des différentes phases y occasionnent des contraintes lors des variations de température du matériau. Dans le cas où les différences entre les déformations thermiques des composants du matériau sont très importantes, les contraintes thermiques résultantes lors d'une variation brutale de la température peuvent considérablement réduire la durabilité de la construction à cause de la multifissuration interne.

De nombreuses dégradations de constructions en béton sont souvent constatées dans les régions désertiques à cause des changements brutaux de la température et dans des pays très froids à cause du gel [132].

Au moyen des structures composites simulant le béton, on peut aisément déterminer les contraintes thermiques dues au gel dans un béton saturé d'eau. La connaissance des contraintes internes permet de prévoir la formation éventuelle de microfissures, problème d'une importance considérable dans le cadre de la durabilité du matériau [138].

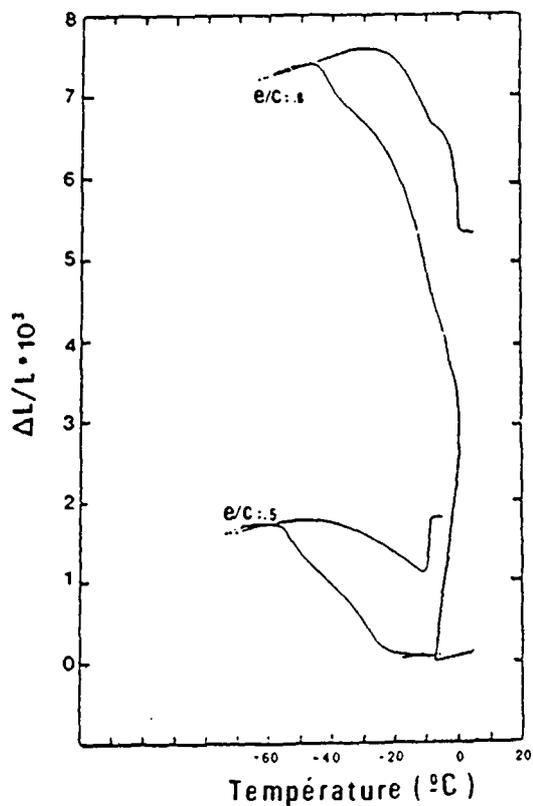


Fig. :6.29

Variations relatives des longueurs d'éprouvettes de pâte de ciment durcie en fonction de la température et pour différents rapports eau/ciment /I3I/.

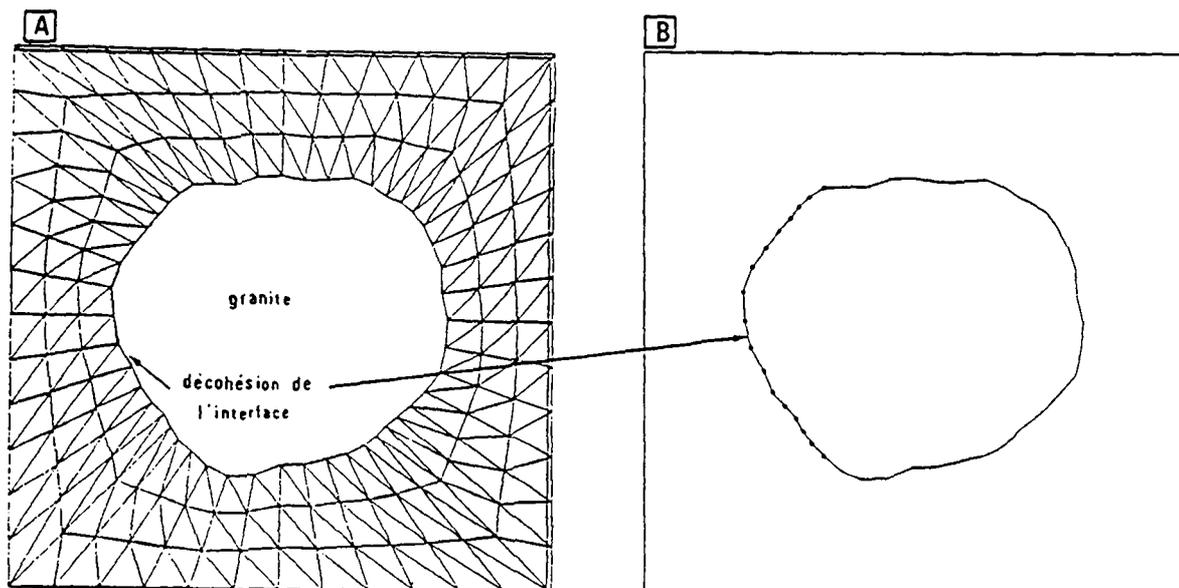


Fig. :6.30

Fissuration de l'interface d'une structure composite formée d'une inclusion de granite noyée dans une matrice sujette à un gonflement dû au gel.

Dépendant de son niveau de saturation en eau, la matrice de pâte de ciment durcie, milieu poreux, soumise à de basses températures (inférieures à 0 °C) peut être le siège d'une dilatation thermique très élevée [133, 134]. Le point de congélation de l'eau contenue dans les pores et donnant naissance à un gonflement brutal du milieu poreux, dépend en grande partie du rapport eau/ciment, du degré de saturation, des dimensions de l'échantillon et du taux de refroidissement. A titre indicatif, nous donnons sur la figure 6.29 l'évolution du changement de longueur ($\Delta l/l$) en fonction de la température pour des spécimens de pâte de ciment durcie d'une épaisseur de 1,25 mm et pour différents rapports eau/ciment [134].

Dans un béton normal, ce changement brutal des dimensions de la matrice enrobant les granulats non poreux (ex. granite) va introduire un mouvement différentiel et une dégradation de la liaison interfaciale matrice-granat. Les changements de dimensions des granulats sont quasiment négligeables par rapport à ceux de la matrice poreuse.

Dans notre approche numérique, ce gonflement dû au gel de la matrice est introduit comme vecteur de déformation initial (cf. éq. 6.29). Les dilatations relatives introduites dans la simulation numérique sont issues de différents travaux expérimentaux [133-135].

Les figures 6.30A et 6.30B représentent respectivement la déformée et l'état de fissuration d'une structure simple, formée d'une inclusion de granite et d'une matrice poreuse, siège d'un gonflement dû au gel. On constate sur cette figure une détérioration de l'interface résultant en une décohésion de l'inclusion.

Ces résultats numériques ont été confrontés à des résultats expérimentaux obtenus par la méthode de l'interferrométrie holographique. Cette méthode permet un suivi continu des déformations d'un échantillon, formé d'un nombre restreint d'inclusions (de granite ou d'acier) noyées dans une matrice poreuse et soumise à différentes vitesses de refroidissement. Les échantillons, préalablement conservés dans l'eau, sont recouverts d'un adhésif spécial [136] empêchant la migration de l'eau, ceci pour conserver un haut degré de saturation de l'échantillon.

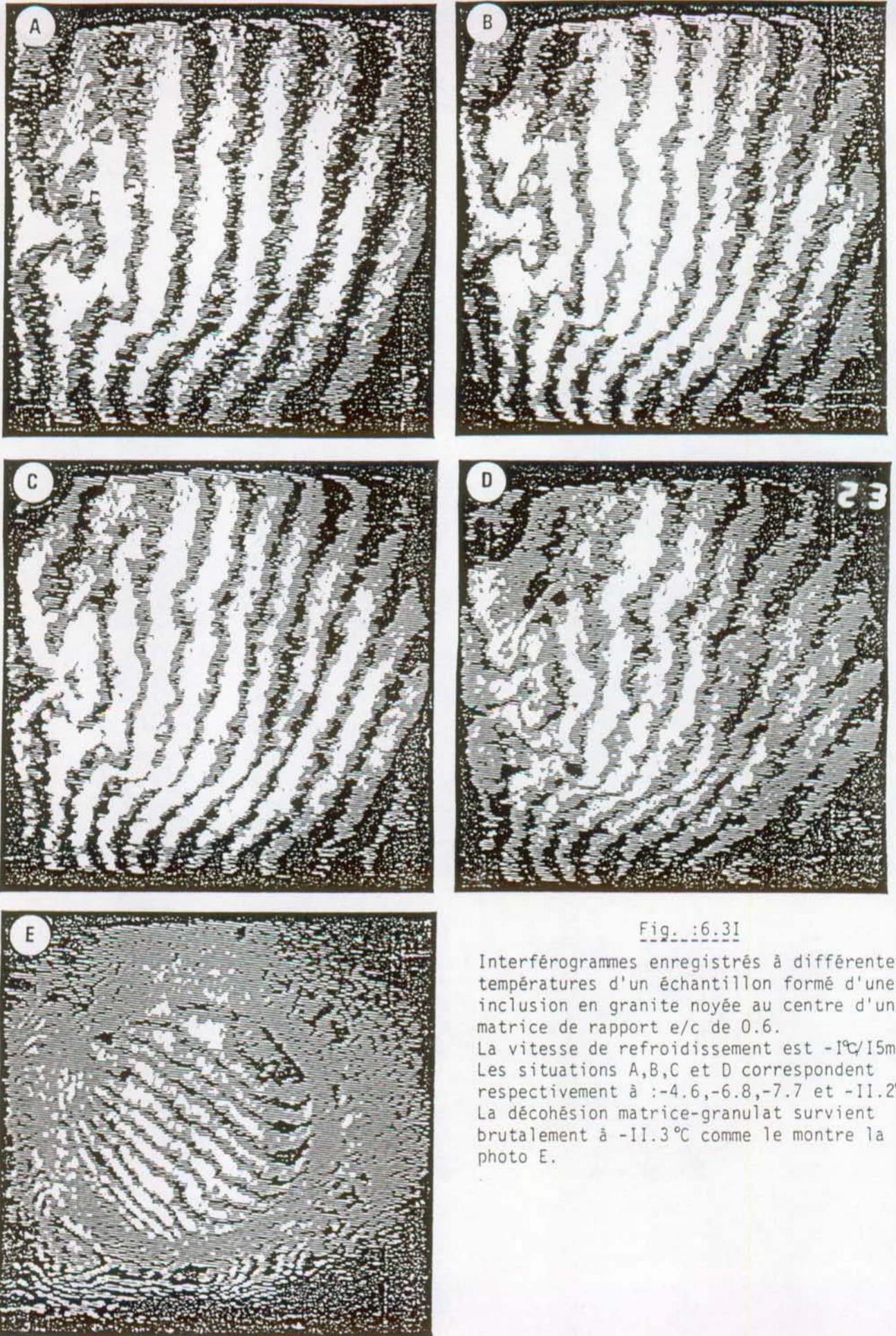


Fig. :6.31

Interférogrammes enregistrés à différentes températures d'un échantillon formé d'une inclusion en granite noyée au centre d'une matrice de rapport e/c de 0.6. La vitesse de refroidissement est $-1^{\circ}\text{C}/15\text{mn}$. Les situations A,B,C et D correspondent respectivement à $-4.6, -6.8, -7.7$ et -11.2°C . La décohesion matrice-granulat survient brutalement à -11.3°C comme le montre la photo E.

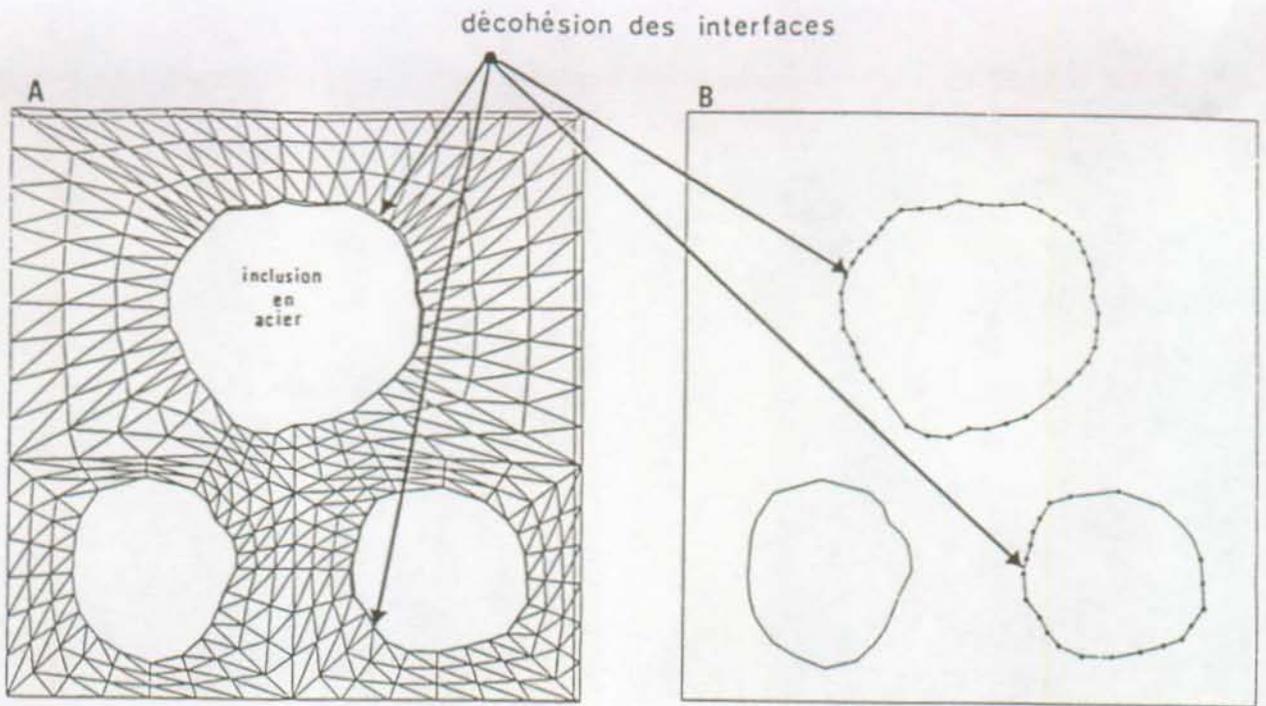


Fig. :6.32

Fissuration des interfaces matrice-granulats occasionnée par le gonflement dû au gel de la matrice poreuse saturée d'eau. Les inclusions sont en acier.

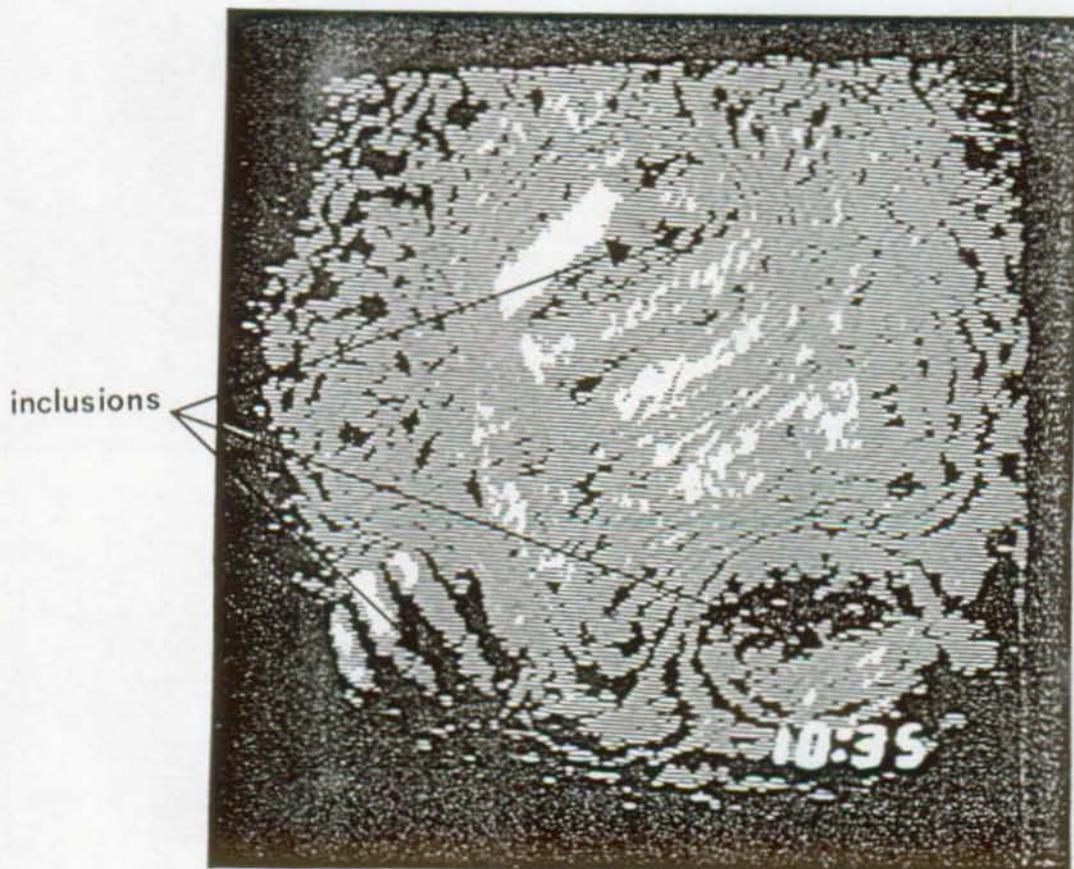


Fig. :6.33

Interférogramme enregistré à la température de -8.2°C , cette situation correspond au gonflement brutal de la matrice. L'échantillon est formé de 3 inclusions d'acier noyées dans une matrice poreuse saturée d'eau. Les décohésions matrice-granulat sont bien visibles sur la photo (rupture de la continuité des franges).

Les photographies de la figure 6.31 montrent l'évolution des déformations d'un spécimen formé d'une inclusion cylindrique de granite enrobée d'une matrice de mortier d'un rapport eau/ciment de 0,6. Cet échantillon a été soumis à une vitesse de refroidissement de $- 1^{\circ}\text{C}/15 \text{ mn}$ [131]. Les cinq photographies A, B, C, D et E correspondent respectivement à des températures de $- 4,6$; $- 6,8$; $- 7,7$; $- 11,2$ et $- 11,3^{\circ}\text{C}$. Le gonflement dû au gel de la matrice survient brutalement à $- 11,3^{\circ}\text{C}$ et l'on voit clairement, sur la photographie correspondante (6.31E) une décohésion matrice granulat (forte discontinuité des franges).

Dans les figures 6.32A et 6.32B, nous donnons un autre exemple de la simulation numérique du gel. Cette structure composite est formée de trois inclusions en acier ($E = 210000 \text{ N/mm}^2$, $\nu = 0,33$) enrobées d'une matrice identique à la précédente. Un phénomène identique au précédent se produit, à savoir un décollement partiel de l'interface induit par le gonflement dû au gel de la matrice saturée d'eau.

L'interferrométrie holographique nous a permis de contrôler ce résultat. Dans l'expérience, l'échantillon utilisé est formé de trois inclusions cylindriques en acier enveloppées d'un mortier dont le rapport eau/ciment est de 0,6. La vitesse de refroidissement était de $- 1^{\circ}\text{C}/12 \text{ mn}$. La dégradation de l'interface est survenue brutalement à $- 8,2^{\circ}\text{C}$. La photographie de cette situation est montrée dans la figure 6.33 [131].

Qualitativement, les prévisions numériques sont en bon accord avec les résultats expérimentaux.

6.8 Conclusions

Dans cette étude, nous avons montré qu'il est possible de simuler d'une façon assez réaliste le processus de fissuration d'un matériau aussi complexe que le béton en tenant compte de sa structure hautement hétérogène.

Le matériau est assimilé à une structure composite formée d'une phase dispersée supposée homogène, les granulats, et d'une phase dispersante inhomogène, la matrice de mortier. Une troisième phase, aux faibles propriétés mécaniques, a été introduite pour tenir compte de l'interface matrice-granat.

Le caractère inhomogène de la matrice et des zones interfaciales a été pris en compte dans la modélisation en introduisant une distribution aléatoire des propriétés mécaniques des différents éléments finis représentant l'un ou l'autre des constituants.

Cette modélisation nous a permis de simuler l'évolution progressive du processus de fissuration d'une structure composite sollicitée en traction et d'en déduire le comportement mécanique global du matériau, traduit par le diagramme force de réaction-déplacement.

Les résultats de l'analyse de diverses structures composites ont révélé que des facteurs tels que la composition du matériau, la géométrie des inclusions, la résistance de l'interface, influencent grandement la valeur de l'énergie de rupture et jouent un rôle important dans le comportement post-pic du matériau.

L'observation des cartes de fissuration obtenues sur des structures sollicitées en traction a révélé que la zone d'endommagement évolue dans une bande assez étroite qui dégénère en macrofissure provoquant la rupture du matériau.

La dégradation du matériau, occasionnée soit par le retrait de la matrice, soit par le gonflement dû au gel de la matrice saturée d'eau, a pu être simulée d'une façon réaliste comme l'ont confirmé les expériences basées sur l'interférométrie holographique.

Bien que notre modèle soit bidimensionnel, il reflète néanmoins certains des phénomènes observés dans la rupture du béton.

Les résultats prometteurs obtenus par cette analyse à deux dimensions et la puissance de calcul, sans cesse croissante, des ordinateurs de la génération actuelle, sont deux facteurs de stimulation pour poursuivre

des études similaires sur des structures composites à trois dimensions, reflétant mieux le matériau réel et par conséquent une description plus réaliste de son comportement.

La simulation numérique est un outil puissant pour la recherche dans la science des matériaux et fournit un complément essentiel aux méthodes expérimentales.

chapitre 7

CONCLUSIONS

CHAPITRE 7 : CONCLUSIONS

Dans ce présent travail, nous avons montré qu'il est possible de déterminer, d'une façon réaliste, les propriétés d'un matériau composite aussi complexe que le béton en tenant compte de sa structure réelle.

La géométrie de granulats naturels a pu être simulée au moyen de la loi morphologique. En plus, partant d'une distribution granulométrique appropriée et d'une teneur en inclusions donnée, il nous a été possible de simuler des structures composites représentant fidèlement la méso-structure d'un béton réel.

La simulation numérique d'une structure composite à trois dimensions et son analyse nous ont permis de mieux appréhender l'effet de parois et ses influences sur différentes propriétés et comportement du béton. Grâce à cette modélisation numérique nous avons pu estimer les propriétés d'un béton normal en fonction de la distance à la paroi.

L'influence de l'effet de paroi sur la diffusion hygrique a été bien mise en évidence. Le résultat a montré qu'il est nécessaire de prendre en compte l'effet de parois s'il l'on veut simuler d'une façon réaliste tout processus de diffusion dans un matériau composite; ce problème est particulièrement important lorsqu'on traite de la carbonatation du béton armé car il y va de la durabilité de la construction.

Différentes analyses paramétriques des propriétés effectives de structures composites ont été réalisées. Des paramètres tels que, la distribution granulométrique, la géométrie des inclusions, les teneurs relatives des différentes phases ou leurs propriétés respectives, peuvent être variés systématiquement dans notre approche, ceci nous permet de simuler des bétons de qualités différentes requis pour des constructions spécifiques.

La comparaison entre les résultats numériques, concernant les propriétés effectives d'un matériau composite, a montré un bon accord avec les prévisions des modèles analytiques et avec un grand nombre de résultats expérimentaux publiés par différents auteurs.

Cette approche numérique semble cependant avoir plusieurs avantages sur les modèles analytiques traitant des matériaux multiphasés. En effet, dans ces derniers la structure réelle du matériau composite n'entre pas en considération, ainsi des paramètres aussi importants que la distribution granulométrique ou la géométrie des inclusions sont souvent absents dans ces théories.

Dans un matériau composite tel que le béton, la pâte de ciment durcie, phase liante, est à un certain niveau hétérogène, ses propriétés physiques ou mécaniques ne sont pas identiques en tout volume élémentaire d'un échantillon du matériau; mais elles varient autour de valeurs moyennes avec une certaine dispersion. Le matériau-modèle proposé et son analyse au moyen de la méthode des éléments finis permet aisément de tenir compte du caractère inhomogène de la matrice et éventuellement de l'orthotropie de la phase granulaire. On peut ainsi étudier la variabilité des propriétés effectives du matériau composite. Une telle étude serait trop complexe, voire même impossible avec les méthodes analytiques.

Dans un échantillon de béton séchant, la distribution de l'humidité au sein du matériau n'est pas homogène; ainsi, le retrait hygrique n'est pas identique dans tout volume élémentaire du matériau; une étude analytique de ce phénomène serait trop complexe alors que l'approche numérique proposée permet d'apporter des solutions réalistes à ce problème.

Nous avons montré dans notre étude qu'il est possible de simuler un processus aussi complexe que la fissuration dans un matériau composite.

La propagation de la fissuration dans une structure composite sollicitée en traction a pu être simulée d'une façon convenable. Cette simulation a pu mettre en évidence l'influence de certains paramètres, tels la distribution granulométrique, la géométrie des inclusions ou les caractéristiques mécaniques de l'interface matrice-granulat, sur le comportement post-pic du matériau et son énergie de rupture. Les résultats de cette approche numérique sont en bon accord avec les mesures expérimentales.

L'endommagement du matériau composite, induit par un retrait hygrique de la matrice ou par une incompatibilité des déformations thermiques entre les deux phases d'un matériau comme le béton a pu être simulé

d'une façon réaliste; la confrontation de nos résultats avec l'observation expérimentale, basée notamment sur la méthode d'interférométrie holographique, a confirmé le bien fondé de notre modèle numérique.

De telles études sont particulièrement d'une grande importance pour une analyse rigoureuse concernant la durabilité d'un matériau composite comme le béton. En effet, par la philosophie même de cette approche, tout paramètre pouvant inférer sur la durabilité du matériau, telles les incompatibilités physiques ou mécaniques des différentes phases peut être étudié puisque qu'une analyse systématique et détaillée de la distribution des contraintes ou déformations internes peut être réalisée; on peut alors prévoir des dégradations locales éventuelles au sein du matériau et agir en conséquence. Une telle approche peut être utilisée pour l'élaboration de la composition adéquate d'un béton destiné à une construction spécifique.

Bien que ce modèle ne soit qu'à deux dimensions, il reflète néanmoins bon nombre d'observations et de mesures expérimentales.

Les résultats prometteurs obtenus par cette analyse à deux dimensions et la puissance des ordinateurs, sans cesse croissante, sont deux facteurs qui incitent à poursuivre sur la même voie, une étude sur des structures composites à trois dimensions, reflétant plus fidèlement le matériau réel et par conséquent, conduisant nécessairement à l'élaboration des lois des matériaux plus réalistes.

Les méthodes numériques s'avèrent être un moyen puissant dans la recherche de la science des matériaux. Si puissantes soient elles, de telles simulations numériques ne destitueront jamais l'expérimentation mais elles constituent un apport supplémentaire considérable à la voie empirique.

REFERENCES

BIBLIOGRAPHIE

1. R. LABBENS
Introduction à la mécanique de la rupture, Pluralis, Paris, 1980.
2. G. SANZ
La rupture des aciers; la rupture fragile: Collection de l'institut de recherche de la sidérurgie française, IRSID, 1974.
3. H.D. BUI
Mécanique de la rupture fragile, Masson, Paris, 1978.
4. R.N. SWAMY
Fracture mechanics applied to concrete; in Developments in Concrete Technology - 1, edited by F.D. LYDON, published by Applied Science Publishers LTD, pp. 221-281, 1979.
5. B. BARTHELEMY
Notions pratiques de mécanique de la rupture, Eyrolles, Paris, 1980.
6. J.F. KNOTT
Fundamentals of Fracture Mechanics, Butterworths, London, 1973.
7. G. SANZ
La rupture des aciers; la mécanique de la rupture. Collection de l'institut de recherche de la sidérurgie française, IRSID, 1978.
8. J. MAKLIN
La rupture des métaux, chapitre 2, édité par D. François et L. Joly, Masson & Cie, Paris, 1972.
9. G.I. BARENBLATT
The Mathematical Theory of Equilibrium Crack in Brittle Fracture, in Advances in Applied Mechanics, Vol. 7, pp. 55-125, 1962.
10. D.S. DUGDALE
Yielding of steel sheets containing slits; J. Mech. Phys. Solids, Vol. 8, pp. 100-104, 1960.
11. G.G. CHELL
Elastic-plastic fracture mechanics, in Developments in Fracture Mechanics - 1, G.G. Chell Ed., London, 1979.
12. S. ZIEGELDORF
Phenomenological Aspects of the Fracture of Concrete, in Fracture Mechanics of Concrete, edited by F.H. Wittmann, Amsterdam, Elsevier, 1983.

13. S. MINDESS
The Application of Fracture Mechanics to Cement and Concrete: A Historical Review, in *Fracture Mechanics of Concrete*, edited by F.H. Wittmann, Amsterdam, Elsevier, 1983.
14. R.K. DHIR, C.M. SANGHA
Development and propagation of microcracks in plain concrete. *Mat. and Struct.*, Vol. 7, No 37, pp. 17-24, 1974.
15. F.W. WITTMANN
Deformation of Concrete at variable moisture content, in *Mechanics of Geomaterial: rock, concrete and soils*, John Wiley & Sons Ltd, 1984.
16. F.H. WITTMANN
Cours des Matériaux de Construction II, EPF-Lausanne, 1984.
17. J.C. MASO
The bond between aggregate and hydrated cement paste. *Proc. 7th Int. Cong. on the Chemistry of Cement*, Vol. 1, subtheme VII, Paris, 1980.
18. J.C. MASO
La liaison pâte-granulats, in *Le béton hydraulique*, chapitre 14, Presses ENPC, Paris, 1982.
19. Y. KOSAKA, Y. TANIGAWA and F. OTA
Effect of aggregate-matrix interaction on mechanical properties of Concrete. *Proc. of the fifteenth Japan Congress on materials research; The Society of Materials Science*, pp. 128-132, Kyoto, Japan, 1972.
20. T.T.C. HSU, F.O. SLATE, G.M. STURMAN and G. WINTER
Microcracking of Plain concrete and the Shape of the Stress-Strain Curve, *Journal of the American Concrete Institut*, Vol. 60, pp. 209-224, 1963.
21. R. ZIMBELMANN
A contribution to cement-aggregate bond, *Cem. and Concrete Research*, Vol. 15, pp. 801-808, 1985.
22. B. HILLEMEIER, H.K. HILSDORF
Fracture Mechanics Studies on Concrete Compounds, *Cem. and Concrete Research*, Vol. 7, pp. 523-536, 1977.
23. S. MINDESS and S. DIAMOND
The Cracking and Fracture of Mortar; *Mat. and Struct.*, Vol. 15, No 86, pp. 107-113, 1982.
24. R.G. HOAGLAND, G.T. HAHN and A.R. ROSENFIED
Influence of Microstructure on fracture propagation in rock, *Rock Mechanics*, Vol. 5, pp. 77-106, 1973.

25. C. SOK, J. BARON and D. FRANÇOIS
Mécanique de la rupture appliquée au béton hydraulique. Cem. and Concrete Research, Vol. 9, pp. 641-648, 1979.
26. M. WECHARATANA and S.P. SHAH
Double torsion tests for studying slow crack growth of Portland Cement mortar; Cem. and Concrete Research, Vol. 10, pp. 833-844, 1980.
27. M. WECHARATANA and S.P. SHAH
Nonlinear Fracture Mechanics Parameters; in Fracture Mechanics of Concrete, edited by F.H. Wittmann, Amsterdam, Elsevier, 1983.
28. F.H. WITTMANN
Structure of Concrete with respect to Crack Formation; in Fracture Mechanics of Concrete, edited by F.H. Wittmann, Amsterdam, Elsevier, 1983.
29. J. BARON
La résistance à la propagation de fissure; in Le béton hydraulique, Presses de l'ENPC, Paris, 1982.
30. F.H. WITTMANN
On the action of capillary pressure in fresh concrete; Cem. and Concrete Research, Vol. 6, pp. 49-56, 1976.
31. F.H. WITTMANN
Influence of Water Reducing Admixtures on Rheological Behaviour, Capillary Shrinkage and Structure of Cement Paste; in Silicates Industriels, 1979-1.
32. H.K. HILSDORF and S. ZIEGELDORF
Fracture Energy of Concrete. Nato-Conference; Adhesion problems in the recycling of concrete, R. Kreijger-editor, pp. 101-123, Eindhoven, 1980.
33. R.H. EVANS and M.S. MARATHE
Microcracking and stress-strain curves for concrete in tension. Mat. and Struct., No 1, pp. 61-64, 1968.
34. P.E. PETERSSON
Crack growth and development of fracture zones in plain concrete and similar materials, Ph.D. Thesis, Lund Institute of Technology, Sweden, Division of Building Materials, Report TVBM-1006, 1981.
35. F.H. WITTMANN
Mechanisms and Mechanics of Fracture of Concrete; in Advances in Fracture Research, 5th Intern. Conf. on Fracture, Vol. 4, pp. 1467-1487, D. François-editor, Cannes, 1981.
36. F.H. WITTMANN and Y.B. ZAITEV
Crack Propagation and Fracture of Composite Materials such as Concrete; in Advances in Fracture Research, 5th Intern. Conf. on Fracture, Vol. 5, pp. 2261-2274, D. François-editor, Cannes, 1981.

37. Y.B. ZAITEV and F.H. WITTMANN
Simulation of crack propagation and failure of concrete. *Mat. and Struct.*, Vol. 14, No 83, pp. 357-365, 1981.
38. Y.B. ZAITEV
Crack propagation in a composite material; in *Fracture Mechanics of Concrete*, edited by F.H. Wittmann, Amsterdam, Elsevier, 1983.
39. H. MIHASHI and M. IZUMI
A Stochastic theory for concrete fracture; *Cem. and Concrete Research*, Vol. 7, pp. 411-422, 1977.
40. H. MIHASHI and F.H. WITTMANN
Stochastic approach to study the influence of rate of loading on strength of concrete, *Heron*, Vol. 25, No 3, 1980.
41. H. MIHASHI
A Stochastic Theory for Fracture of Concrete; in *Fracture Mechanics of Concrete*, edited by F.H. Wittmann, Amsterdam, Elsevier, 1983.
42. Z.P. BAZANT and B.H. OH
Crack Band Theory for Fracture of Concrete, *Mat. and Struct.*, Vol. 16, pp. 155-177, 1983.
43. Z.P. BAZANT and L. CEDOLIN
Approximate linear analysis of concrete by R-curves, *Journal of Structural Engineering*, ASCE, Vol. 110, pp. 1336-1355, 1984.
44. Z.P. BAZANT and B.H. OH
Rock Fracture via Strain-softening Finite-Elements, *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 110, No 7, pp. 1015-1035, 1984.
45. J. BARON
Comportement du béton hydraulique: fissurabilité et fragilité, étude bibliographique et critique; rapport de recherche LCPC, No 69, 1977.
46. A. HILLERBORG, M. MODEER and P.E. PETERSSON
Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements, *Cem. and Concrete Research*, Vol. 6, pp. 773-782, 1976.
47. A. HILLERBORG
Analysis of one single crack, in *Fracture Mechanics of Concrete*, edited by F.H. Wittmann, Amsterdam, Elsevier, 1983.
48. P.E. PETERSSON
Fracture energy of concrete: method of determination; *Cement and Concrete Research*, Vol. 10, pp. 78-89, 1980.
49. RILEM - Draft - Recommendation (50-FMC)
Determination of the fracture energy of mortar and concrete by means of three-point tests on notched beams, *Mat. and Struct.*, Vol. 18, No 106, pp. 285-290, 1985.

50. A. HILLERBORG
The theoretical basis of a method to determine the fracture energy G_F of concrete, *Mat. and Struct.*, Vol. 18, No 106, pp. 291-296, 1985.
51. J. BARON
Déformations, contraintes et ruptures dans le béton avant tout chargement, in *Mécanique de la Rupture, Séminaire de l'institut international d'architecture méditerranéenne*, publié par le Conseil International de la langue français, Paris, 1982.
52. S. MINDESS, F.V. LAWRENCE and C.E. KESLER
The J-integral as a fracture criterion for fiber reinforced Concrete, *Cement and Concrete research*, Vol. 7, pp. 731-742, 1977.
53. Z.P. BAZANT and B.H. OH
Concrete fracture via stress-strain relations, Report No 81-10/665c, Center for concrete and Geomaterials, Northwestern University, Evanston, Illinois, 1981.
54. I. SOROKA and C. JAEGERMANN
Deterioration and durability of concrete in hot climate, Proceedings of the RILEM Seminar on the durability of concrete structures under normal outdoor exposure, pp. 52-66, Hannover, West Germany, 1984.
55. M. MODEER
A fracture mechanics approach to failure analyses of concrete materials. Report TVBM-1001, Division of Building Materials, University of Lund, Sweden, 1979.
56. A. HILLERBORG
Numerical methods to simulate softening and fracture of concrete, in *Fracture Mechanics of Concrete: Structural application and numerical calculation*, edited by G.C. Sih and A. Di Tommaso, Martinus Nijhoff Publishers, Netherland, 1985.
57. P.E. ROELFSTRA and H. SADOUKI
Fracture I, Theory and Application, Laboratory of Building Materials, Swiss Federal Institut of Technology, Lausanne, 1986.
58. P.E. ROELFSTRA and F.H. WITTMANN
Some aspects of the Concrete of total fracture energy, in *Vorträge der 17. Sitzung des Arbeitskreiss Bruchvorgänge*, Ed. Deutscher Verband für Material-prüfung, Berlin, 1985.
59. J.G. ROTS
Strain-softening analysis of concrete fracture specimens, preprints of International Conference on Fracture Mechanics of Concrete, Vol. I, pp. 115-126, Lausanne, October 1985.
60. A.C. BAJPAI, L.R. MUSTOE and D. WALKER
Advanced Engineering Mathematics, John Wiley and Sons, 1982.

61. F.H. WITTMANN, YIUN-YUANG HUANG, P.E. ROELFSTRA, H. MIHASHI, N. NOMURA, XIN-HUA ZHANG
Influence of age of loading, water-cement ratio, and rate of loading on fracture energy of concrete; to be published.
62. A CARPENTERI, A. DI TOMMASO and M. FANELLI
Influence of material parameters and geometry on cohesive crack propagation, preprints of International Conference on Fracture Mechanics of Concrete, Vol. I, pp. 95-113, Lausanne, October 1985.
63. P.E. ROELFSTRA and F.H. WITTMANN
Stress analysis of structural members taking complex materials behaviour into consideration, Proceedings of the IABSE. Colloquium Advanced Mechanics of Reinforced Concrete, pp. 185-195, Delft, 1981.
64. F.H. WITTMANN
Modeling of Concrete behaviour, Proceedings of the Conference on Contemporary European Concrete Research, Swedish Cement and Concrete Institute, pp. 171-189, Stockholm, 1982.
65. F.H. WITTMANN
Creep and Shrinkage Mechanisms, in Creep and Shrinkage in Concrete Structures, edited by Z.P. Bazant and F.H. Wittmann, John Wiley and Sons Ltd, 1982.
66. F.H. WITTMANN
Structure and Mechanical properties of concrete, The Architectural Reports of the Tohoku University, No 22, pp. 93-112, 1983.
67. P.E. ROELFSTRA
Doctoral thesis, Swiss Federal Institute of Technology, to be published in 1987.
68. F.H. WITTMANN, P.E. ROELFSTRA and C.L. KAMP
Drying of concrete. An application of the TL-Approach, SMIRT-8, Bruxelles, August 1985.
69. F.H. WITTMANN
Grundlagen eines Modells zur Beschreibung charakteristischer Eigenschaften des Betons; Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, Heft 290, 1977.

J.P. DELISLE and F. ALOU
Cours de Matériaux de Construction - 1, EPF-Lausanne, 1978.
71. Final Report on "Aggregats" of the RILEM Technical Committee, GM-26, "Granular Materials", 1981.
72. E.E. UNDERWOOD
Stereological Analysis of Particle Characteristics, in Testing and characterization of powders and fine particles, edited by J.K. Beddow and T.P. Meloy, Heyren, London, 1980.
73. P.J. BARRETT
The shape of rock particles, a critical review, Sedimentology, Vol. 27, pp. 291-303, 1980.

74. J.K. BEDDOW and T. MELOY
Testing and characterization of powders and fine particles, edited by J.K. Beddow and T.P. Meloy, Heyren, London, 1980.
75. R. EHRLICH, P.J. BROWN, J.M. YARUS, R.S. PRZYGOCKI
The origine of shape frequency distributions and the relationship between size and shape, *Journal of Sedimentary Petrology*, Vol.50, No 2, pp 0475-0484, 1980.
76. M.W. CLARK
Quantitative Shape Analysis: A review, *Mathematical Geology*, Vol. 13, No 4, pp. 303-320, 1981.
77. G. GARCIA and S. JEANDREVIN
Programme ATABLE, *Traitement Graphique*, Centre de Calcul, EPF-Lausanne, 1980.
78. R. VALLETTE
Manuel de composition des bétons. Eyrolles-éditions, Paris, 1963.
79. C. DREUX
Connaissance du béton. Société de Diffusion des Techniques du Bâtiment et des Travaux Publics, Paris 1964.
80. J. BOLOMEY
Analyse granulométrique des ballasts et renseignements pratiques fournis par celle-ci; *Revue des Matériaux de Construction et des Travaux Publics*, pp. 106-110, Paris, 1938.
81. S. POPOVICS
Concrete-Making Materials. Hemisphere Publishing Corporaton, USA, 1979.
82. J. BOLOMEY
Détermination de la résistance à la compression des mortiers et bétons, *Bulletin Technique de la Suisse Romande*, No 17, pp. 209-213, 1925.
83. J.C. WALRAWEN
Aggregat interlock: a theoretical and experimental analysis. Doctoral thesis. Delft Institute of Technology, Delft, 1980.
84. F.H. WITTMANN, P.E. ROELFSTRA and H. SADOUKI
Simulation and Analysis of Composite Structures; *Materials Science and Engineering*, 68, pp. 239-248, 1984.
85. A.M. NEVILLE
Properties of Concrete. Pitman Publishing Ltd, London, 1963.
86. R.J. TORRENT, A. ALAREDO and E. POYARD
Combined aggregates: a computer based method to fit a desired grading, *Materials and Structure*, Vol. 17, No 98, pp. 139-144, 1984.

87. R. L'HERMITE
Au pied du mur. Société de Diffusion des Techniques du Bâtiment et des Travaux Publics, Paris, 1969.
88. P.C. KREIJGER
The skin of concrete, Composition and properties; Materials and Structures, Vol. 17, No 100, pp. 275-283, 1984.
89. M. MAMILLAN
L'hétérogénéité du béton mise en évidence par la vitesse du son; Annales de l'I.T.B.T.P., No 309-310, pp. 35-39, 1973.
90. Interuniversitäres Forschungsprojekt (ETHZ, ETHL, EMPA, TFB)
Gefüge und mechanische Eigenschaften zementgebundener Werkstoffe, Zwischenbericht über 2 Untersuchungsphasen 1981/82.
91. D.W. HOBBS
Bulk modulus, shrinkage and thermal expansion of a two phase material, Nature, Vol. 222, pp. 849-851, 1969.
92. D.W. HOBBS
The dependence of bulk modulus, Young's modulus, creep, shrinkage and thermal expansion of concrete upon aggregate volume concentration, Material and Structures, Vol. 4, No 20, pp. 107-114, 1971.
93. Z.P. BAZANT and N.J. NAJJER
Drying of concrete as a non linear diffusion problem, Cement and Concrete Research, Vol. 1, pp. 461-473, 1971.
94. Z.P. BAZANT and L.J. NAJJER
Nonlinear water diffusion in non saturated concrete; Materials and Structures, Vol. 5, No 25, 1972.
95. E.V. SØRENSEN
Water vapor permeability of hardened cement past; Technical Report 83/10, Tech. University of Denmark, 1980.
96. P. PRIM and F.H. WITTMANN
Structure and Water absorption of aerated concrete; in: Autoclaved Aerated Concrete, Moisture and Properties, edited by F.H. Wittmann, Amsterdam, Elsevier, 1983.
97. P.E. ROELFSTRA and F.H. WITTMANN
Numerical analysis of drying and shrinkage; in: Autoclaved Aerated Concrete, Moisture and Properties, edited by F.H., Wittmann, Amsterdam, Elsevier, 1983.
98. L.O. NILSSON
Hygroscopic moisture in concrete, drying measurements and related material properties, Doctoral thesis, Lund Institute of Technology, Sweden, 1980.
99. K. ARBENZ and A. WOHLHAUSER
Analyse numérique, Tome 1; Méthodes mathématiques pour l'ingénieur, Presses Polytechniques Romandes, Suisse, 1980.

100. L.M. BRIEGER and F.H. WITTMANN
Numerical Simulation of Carbonation of Concrete, in: 2th intern. Coooloquium, Materials Science and Restoration, Technische Akademic Esslingen, edited by F.H. Wittmann, pp. 635-640, September 1986.
101. R.W. ZIMMERMAN, M.S. KING and P.J.M. MONTEIRO
The elastic moduli of mortar as porous-granular material, Cement and Concrete Research, Vol. 16, pp. 239-245, 1986.
102. J.W. DOUGILL
Mechanics of Concrete Systems: Current Approaches to Assessing Material Behaviour and Some Possible Extensions, in: Creep and Shrinkage in Concrete Structures, edited by Z.P. Bazant and F.H. Wittmann, John Wiley & Sons Ltd, 1982.
103. P. DANTU
Etudes des contraintes dans les milieux hétérogènes: application au béton, Annales de l'Institut du Bâtiment et des Travaux Publics, Vol. 11, No 121, pp. 54-98, 1958.
104. T.C. HANSEN
Creep of concrete - a discussion of some fundamental problems, Bull. Swed. Cement and Concrete Research Institute, No 33, pp. 1-48, Stockholm, 1958.
105. R.H. MILLS and K. ONO
Elastic modulus of close-packed randomly oriented Maxwell elements; Materials and Structures, Vol. 5, No 27, pp. 127-133, 1972.
106. Z. HASHIN
The elastic moduli of heterogenous materials, Journal of Applied Mechanics, Vol. 29, No 1, pp. 143-150, 1962.
107. C.D. JOHNSTON
Reformation of Concrete and its constituent Materials in Uniaxial Tension, Private communication to R.H. Mills and K. Ono /105/.
108. H.A. LA RUE
Modulus of Elasticity of Aggregates and its Effect or Concrete, ASTM. Proceedings 46, pp. 1298-1310, 1946.
109. C.H. DETRICHE and J.C. MASO
Premier et second retraits des couches minces de mortier, Materials and Structures, Vol. 12, No 69, pp. 185-191, 1979.
110. C.H. DETRICHE and J.C. MASO
Modèle de Calcul du retrait des mortiers en couches minces, Materials and Structures, Vol. 13, pp. 353-360, 1980.
111. P.E. ROELFSTRA, H. SADOUKI and F.H. WITTMANN
Le béton numérique, Materials and Structures, Vol. 18, No 107, pp. 327-335, 1985.

112. O.C. ZIENKIEWICZ
The Finite Element Method, 3rd Edition, Mc Graw-Hill, London, England, 1977.
113. Finite Element Analysis of Reinforced Concrete, Published by the American Society of Civil Engineers, New-York, 1982.
114. J.A. TOMAS
The Finite Element Method in Engineering Practice and Education, in: Numerical solutions of partial differential equations, edited by J. Noye, North-Holland Publishing Company, 1982.
115. P.E. ROELFSTRA and H. SADOUKI
Fracture process in numerical concrete, preprints of international Conference on Fracture Mechanics of Concrete, Vol. I, pp. 83-94, Lausanne, Octobre 1985.
116. G.S. LANDRIANI
Les caractéristiques mécaniques des matériaux, in: Restauration des Ouvrages et des Structures; Presses de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, pp. 215-247, Paris, 1984.
117. W.G. DODGE, Z.P. BAZANT and R.H. GALLAGHER
A review of analysis methods for prestressed concrete reactor vessels, Report Oak Ridge National Laboratory, ORNL-5173, 1977.
118. R. WEGNER
Finite element models for reinforced concrete. Formulations and Computational Algorithms, in: Finite Element Analysis, edited by K.J. Bathe, J.T. Oden and W. Wunderlich, M.I.T-Press, 1977.
119. Y.R. RASHID
Analysis of prestressed concrete pressure vessels, Nuclear Engineering Design, Vol. 7, No 4, pp. 334-344, 1968.
120. H.W. REINHART
Fracture mechanics of an elastic softening material like concrete. Heron, Vol. 29, No 2, 1984.
121. V.S. GOPALARATNAM and S.P. SHAH
Softening Response of Plain Concrete in Direct Tension, American Concrete Institute Journal, No 82-27, pp. 310-323, 1985.
122. J.G. ROTIS, P. NAUTA, G.M.A. KUSTERS and J. BLAAUWENDRAAD
Smeared crack approach and fracture localization in Concrete; Heron, Vol. 30, No 1, 1985.
123. A.F. PRUIJSSERS
Description of the stiffness relation for mixed-mode fracture problems in concrete using the rough-crack model of Wolraven, Betonmechanica, A26/85-01, Delft University of Technology, 1985.
124. T. PAULEY and P.S. LOEBER
Shear transfer by aggregate interlock. Shear in Reinforced Concrete, American Concrete Institute, Vol. 1, SP-42, 1974.

125. Z.P. BAZANT and P. GAMBANOVA
Rough cracks in reinforced concrete, Journal of Structural Division, 106, pp. 819-842, 1980.
126. J.G. ROTS, G.M.A. KUSTERS, P. NAUTA
Variabele reductiefactor voor de schuifweerstand van geschenrd beton; TNO-IBBC report BI-84-33,1984.
127. E. CUTHILL and J. McKEE
Reducing the bandwidth of sparce symmetric matrices, ACM Proc. 24th National Conference, New-York, 1969.
128. V.C. LI and E. LIANG
Fracture Process in Concrete and Fiber Reinforced Concrete; Journal of Eng. Mechanics, Vol. 112, No 6, pp. 566-586, 1986.
129. L. CEDOLIN, S. Dei POLI and I. IORI
Experimental determination of the fracture process zone in concrete; Cem. and Conc. Research, Vol 13, pp. 557-567, 1987
130. L. CEDOLIN, S. Dei POLI and I. IORI
Tensile behavior of concrete; Journ. of Engineering Mechanics, ASCE, Vol. 113, No 3, pp. 431-449, 1987.
131. "Etude expérimentale des déformations différées des bétons et des roches fissurées en vue d'une modélisation numérique". Projet inter-instituts (IMAC - Institut des Mesures et d'Analyse des Contraintes, et LMC - Laboratoire des Matériaux de Construction), EPF-Lausanne. Rapport intermédiaire 1986.
132. S.D. VENEKANIN
Stresses in concrete due to thermal incompatibility of its components, Proc. Int. Coll. on Material Science and Restauration, Edited by F.H. Wittmann, Esslingen Germany, pp. 93-98, 1983.
133. N. STOCKHAUSEN
Die Dilatation hochporäser Festkörper bei Wasseraufnahme und Eisbildung, Disseratation, Techn. Univ. Münschen, 1981.
134. G.G. LITVAN
Phase Transitions of Adsorbates: IV, Mechanism of Frost Action in Hardened Cement Paste; Journal of The American Ceramic Society, Vol. 55, No 1, pp. 38-42, 1972.
135. V.S. RAMACHANDRAN, R.F. FELDMAN, J.J. BEAUDOIN
Concrete Science, treatise on current research; Heyden & Son Ltd, London, 1981.
136. V. FURLAN and F. GIRARDET
Etude d'un Adhésif et Application à la Restauration d'une Balustrade du XVIème siècle; Lithoclastia, numéro spécial, pp. 65-72, 1976.
137. N. McN. ALFORD and A.B. POOLE
The Effect of Shape and Surface Texture on Fracture Toughness of Mortars; Cem. and Concr. Research, Vol.9, pp 583-589, 1979.
138. A.M. PODVALNYI
Phenomenological aspect of concrete durability theory; Mat. and Struct, Vol. 9, No 51, pp.151-162, 1974.

RESUMES
=====

RESUME

1. Introduction

Toute prévision réaliste d'une propriété ou d'un comportement d'un matériau composite comme le béton, doit nécessairement tenir compte de la structure réelle du matériau.

Le but de ce présent travail est de simuler les propriétés et le comportement mécaniques du béton en liaison étroite avec sa structure hautement hétérogène.

Pour mener à bien cette étude, la première tâche qui nous incombe est de simuler la structure du matériau d'une façon aussi réaliste que possible.

2. Simulation de la structure du matériau

Dans notre modélisation la structure du béton est représentée par des structures composites formée d'une phase dispersante, la matrice de pâte de ciment durcie ou de mortier et d'une phase granulaire dispersée représentant les inclusions. Une troisième phase a été introduite pour tenir compte de l'auréole de transition matrice-granulats, zone aux faibles propriétés mécaniques et jouant un rôle important dans le comportement du matériau.

Dans cette étude, nous avons montré que la géométrie des granulats naturels roulés, utilisés dans la confection du béton, peut-être simulée en utilisant une loi morphologique appropriée. Avec les particules générées par ordinateur, on peut générer des structures composites arbitraires. Toute distribution de la taille des particules peut-être prise en considération; on peut ainsi générer des structures composites représentatives de bétons de granulométries différentes.

En analysant des sections planes d'une structure composite à trois dimensions générée par l'ordinateur, on a déterminé la distribution granulaire à deux dimensions correspondante à la granulométrie du matériau. La détermination de la distribution granulaire d'une section

plane d'un béton, est rendue nécessaire par le fait, que dans notre étude, nous nous sommes restreints à la simulation du comportement de structures composites à deux dimensions; cette restriction nous a été dictée par les limitations de l'ordinateur.

3. Simulation des propriétés des structures composites

La simulation de la structure composite à trois dimensions nous a permis de mieux cerner l'effet de parois et son influence sur les propriétés du matériau. Les variations en fonction de la distance à la paroi de différentes propriétés du béton ont pu être estimées.

L'influence de l'effet de paroi sur le processus de diffusion hygrique a bien été mise en évidence. Cet exemple de calcul montre l'importance qu'il faut accorder à l'effet de paroi lorsqu'on veut prévoir la durabilité d'une construction, puisque tout composant agressif contenu dans l'air ou toute solution chimique pouvant dégrader le matériau doit nécessairement et en premier lieu transiter par les couches extérieures de la construction qui sont justement le siège de l'effet de paroi.

L'analyse numérique des structures est réalisée au moyen de la méthode des éléments finis.

Des études paramétriques des propriétés effectives de structures composites ont été réalisées. Le module d'élasticité et le retrait effectifs du béton ont été déterminés en fonction des teneurs et des propriétés relatives aux deux phases. D'autres propriétés effectives peuvent aussi être déduites selon la même voie.

La confrontation de ces résultats numériques avec les prévisions des modèles analytiques et les résultats expérimentaux a montré une bonne concordance.

Cette modélisation numérique a cependant des avantages indéniables sur les théories analytiques. En effet, des facteurs structurels, aussi importants que la géométrie des inclusions, la distribution granulométrique, l'inhomogénéité ou l'orthotropie de l'une ou l'autre phase, peuvent aisément être pris en considération dans notre approche, alors qu'ils sont souvent absents dans les théories traitant des matériaux multiphasés.

4. Simulation de la fissuration d'une structure composite

Un processus aussi complexe que la fissuration d'un matériau composite comme le béton ne saurait être décrit d'une façon réaliste sans la prise en compte de sa structure hétérogène.

Grâce à la génération des structures composites représentant le béton, nous avons simulé le processus de fissuration induit par une sollicitation mécanique ou par une incompatibilité des déformations hygriques ou thermiques des deux phases.

Notre étude s'est restreinte au cas du béton normal, par conséquent nous avons considéré dans la simulation que les granulats ont un comportement linéaire élastique sans aucune possibilité de fissuration.

Dans le béton normal, les fissures se propagent préférentiellement le long des interfaces matrice-granulats, à cause des faibles propriétés mécaniques de ces dernières; elles jouent donc un rôle important dans le processus de fissuration du matériau. De ce fait, des éléments interfaciaux spéciaux ont été définis entre les noeuds-frontières décrivant le contour des inclusions et ceux de la matrice. Ces éléments interfaciaux sont composés de ressorts, d'un élément de friction et d'un élément adoucissant. La fissuration d'un tel élément peut survenir soit par traction, soit par cisaillement.

On a supposé, qu'un élément fini de la matrice présente un comportement linéaire élastique jusqu'à ce que la résistance à la traction ait été atteinte; puis survient le comportement non-linéaire localisé dans la dénommée fissure fictive où le transfert de contraintes, dans la direction normale à la fissure a toujours lieu jusqu'à une ouverture limite de la fissure. Le pouvoir de transfert de contraintes en fonction de l'ouverture de la fissure w est décrit par le diagramme de radoucissement du matériau (courbe $\sigma(w)$).

Les paramètres mécaniques de la matrice ont été préalablement déterminés par l'expérience et un traitement adéquate des mesures obtenues.

Dans l'analyse par éléments finis des structures composites, le radoucissement est étalé sur tout l'élément fini (smeared crack approach). Vu le grand nombre d'éléments finis représentant les structures à analyser, la méthode de la fissure discrète consistant en une ouverture des noeuds dont les contraintes satisfont au critère de naissance d'une fissure, n'a pas été retenue car elle nécessite une redéfinition continue du maillage.

Dans le but de tenir compte de l'inhomogénéité de la matrice, les propriétés mécaniques des éléments finis représentant cette dernière, ont été distribuées aléatoirement autour de valeurs moyennes avec une certaine dispersion.

Le développement de la fissuration dans différentes structures composites sollicitées en traction a été simulé. La confrontation entre les résultats obtenus et des résultats expérimentaux montre une bonne concordance surtout du point de vue qualitatif. L'influence de certains paramètres, tels la géométrie des inclusions, la distribution granulométrique et la résistance de l'interface, sur le comportement post-pic du matériau composite et son énergie de rupture, a bien été mise en évidence par les résultats de la simulation. L'influence de ces paramètres a été confirmée par des expériences effectuées par certains auteurs.

L'endommagement du béton induit par une incompatibilité des déformations thermiques ou hygriques des deux phases du matériau a pu être simulé d'une façon réaliste. Deux exemples ont été traités; les cas du gel et du retrait hygrique. La comparaison entre les résultats obtenus avec les résultats expérimentaux obtenus par interférométrie holographique a montré un bon accord.

5. Conclusions

Bien que ce matériau modèle, intitulé béton numérique, ne soit qu'à deux dimensions, il reflète cependant fidèlement bon nombre de résultats expérimentaux.

Il demeure néanmoins indispensable de poursuivre, des études similaires sur des structures composites à trois dimensions, les résultats ne seront que plus réalistes.

La simulation numérique est un outil puissant pour la recherche sur la science des matériaux. Elle permet de bien appréhender certains mécanismes gouvernant le comportement du matériau.

Si, de telles approches numériques ne peuvent détrôner la méthode expérimentale, elles constituent néanmoins un apport supplémentaire considérable pour une élaboration de lois de matériaux réalistes.

ZUSAMMENFASSUNG

1. Einleitung

Jede realistische Voraussage einer Eigenschaft oder eines Verhaltens eines Verbundbaustoffes wie der Beton muss notwendigerweise das wirkliche Materialgefüge miteinbeziehen. Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist, die Eigenschaften sowie das mechanische Verhalten des Betons in engem Zusammenhang mit seinem hochgradig heterogenen Gefüge zu simulieren.

Die erste Aufgabe, die uns obliegt, ist die Simulation des Materialgefüges in einer möglichst wirklichkeitsnahen Art.

2. Simulation des Materialgefüges

Das Betongefüge wird als ein Verbundgefüge einer dispersen Phase als Zementstein - oder Mörtelmatrix sowie einer körnigen, verteilten Phase, welche die Einschlüsse darstellt, modelliert. Eine dritte Phase ist eingeführt worden, um der Grenzfläche Matrix-Zuschlagkorn Rechnung zu tragen. Diese Grenzfläche weist schwache mechanische Eigenschaften auf, spielt jedoch beim Verhalten des Materials eine bedeutende Rolle.

In dieser Arbeit wird gezeigt, dass die Geometrie der runden, natürlichen Zuschlagskörner, die zur Herstellung des Betons verwendet werden, durch ein entsprechendes morphologisches Gesetz simuliert werden kann. Mit den vom Computer generierten Körnern kann ein beliebiges Verbundgefüge hergestellt werden. Jede Verteilung der Teilchengröße kann berücksichtigt werden. Somit können repräsentative Verbundgefüge von Betonen unterschiedlicher Granulometrie generiert werden.

Durch die Analyse von ebenen Querschnitten eines durch den Computer generierten, dreidimensionalen Verbundgefüges wurde die Granulometrie des Werkstoffes bestimmt. Da in dieser Arbeit die Simulation des Verhaltens des Verbundgefüges auf zwei Dimensionen beschränkt ist, war die Bestimmung der Kornverteilung eines ebenen Betonquerschnittes notwendig. Diese Einschränkung auf zwei Dimensionen wurde durch die Computerkapazität aufdiktiert.

3. Simulation der Eigenschaften des Verbundgefüges

Die Simulation des dreidimensionalen Verbundgefüges erlaubt, den Randeffekt sowie seinen Einfluss auf die Materialeigenschaften besser zu erfassen. Die Änderungen in Abhängigkeit der Distanz zum Rand kann für verschiedene Betoneigenschaften geschätzt werden.

Der Einfluss des Randeffektes auf den Feuchtigkeits-Diffusionsprozess konnte gezeigt werden. Dieses Rechenbeispiel verdeutlicht die Wichtigkeit die diesem Randeffekt beigemessen werden muss, wenn man die Beständigkeit einer Konstruktion voraussagen will. Alle aggressiven Bestandteile, die in der Luft enthalten sind, sowie jegliche chemische Lösungen, die den Werkstoff beschädigen, müssen notwendigerweise durch die äusseren Schichten der Konstruktion, wo ja gerade der Randeffekt auftritt, eindringen.

Die numerische Analyse der Gefüge ist mit Hilfe der finiten Elementmethode ausgeführt worden.

Parameterstudien der wirklichen Verbundgefügeeigenschaften wurden durchgeführt. Der Elastizitätsmodul und das Schwinden des Betons ist in Abhängigkeit der Gehalte und der entsprechenden Eigenschaften der beiden Phasen bestimmt worden. Weitere Eigenschaften konnten nach dem gleichen Vorgehen ermittelt werden.

Die numerischen Resultate stimmen gut mit den Voraussagen der analytischen Modelle und den Versuchsergebnissen überein.

Gegenüber den analytischen Theorien hat die numerische Modellbildung jedoch unverneinbare Vorteile: So wichtige Einflussgrößen wie die Geometrie der Einschlüsse, die Kornverteilung, die Inhomogenität oder die Orthotropie der einen oder anderen Phase können in der Tat durch diese Näherung leicht berücksichtigt werden. In den Theorien, die die mehrphasigen Werkstoffe beschreiben, fehlen jedoch öfters diese Einflussgrößen.

4. Simulation der Rissbildung in einem Verbundgefüge

Ein komplexer Vorgang wie die Rissbildung in einem Verbundwerkstoff wie der Beton könnte ohne Berücksichtigung seines heterogenen Gefüges in einer wirklichkeitsnahen Art nicht beschrieben werden.

Dank der Generierung von Verbundgefügen, die den Beton darstellen, konnte der Rissbildungsvorgang, der durch eine mechanische Belastung oder durch eine Unverträglichkeit der Verformungen infolge Feuchtigkeits- oder Temperatureinflüssen der beiden Phasen induziert wird, simuliert werden.

Diese Arbeit beschränkt sich auf den Fall des Normalbetons. Folglich wurde für die Simulation angenommen, dass die Zuschlagskörner ein linearelastisches Verhalten ohne irgendwelche Rissbildungsmöglichkeit aufweisen.

Im Normalbeton pflanzen sich die Risse vornehmlich entlang der Grenzflächen Matrix-Zuschlagskorn aus, da die mechanischen Festigkeitseigenschaften dieser Grenzflächen schwach sind. Sie spielen demzufolge eine wichtige Rolle im Rissbildungsvorgang des Werkstoffes. Um diese Zone zu berücksichtigen, wurden spezielle Grenzflächenelemente definiert. Diese befinden sich zwischen den Grenzknöten, die den Umfang der Einschlüsse beschreiben und den Grenzknöten der Matrix. Die Grenzflächenelemente sind aus einer Feder, einem Reibungselement und einem Entfestigungselement zusammengesetzt. Die Rissbildung eines solchen Elementes kann infolge Zug oder Schub eintreten.

Es wird angenommen, dass ein finites Element der Matrix ein linearelastisches Verhalten bis zur Zugfestigkeit aufweist. Nachher erfolgt das nichtlineare Verhalten, lokalisiert im sogenannten fiktiven Riss, wo die Spannungsübertragung in der Richtung senkrecht zum Riss bis zu einer Grenzzrissöffnung erfolgt. Die Fähigkeit der Spannungsübertragung in Abhängigkeit der Rissöffnung w wird durch das Entfestigungsdiagramm (Kurve $\sigma(w)$) des Werkstoffes beschrieben.

Die mechanischen Größen der Matrix wurden zuvor experimentell bestimmt.

Bei der Analyse der Verbundgefüge durch finite Elemente wird die Dehnungsentfestigung auf das ganze finite Element verteilt (smeared crack approach). In Anbetracht der grossen Anzahl finiter Elemente, die das zu analysierende Gefüge darstellen, wurde von der Methode des diskreten Risses abgesehen. Diese Methode beruht in einer Öffnung der

Knoten dessen Spannungen dem Kriterium eines Rissbeginnes genügen, was eine fortwährende Neudefinition der Elementmasche erfordern würde.

Die mechanischen Eigenschaften der finiten Elemente, welche die Matrix modellieren, wurden zufällig mit einer gewissen Streuung um die Mittelwerte verteilt. Dadurch sollte die Inhomogenität der Matrix berücksichtigt werden.

Die Rissfortpflanzung in verschiedenen auf Zug beanspruchten Verbundgefügen wurde simuliert. Der Vergleich zwischen den erhaltenen Resultaten und den experimentellen Resultaten zeigt eine gute Uebereinstimmung, vor allem in qualitativer Hinsicht. Die Resultate der Simulation stellen den Einfluss gewisser Parameter wie die Geometrie der Einschlüsse, die Kornverteilung und der Widerstand der Grenzschicht auf das Verhalten des Verbundwerkstoffes nach der Maximallast und seiner Bruchenergie klar. Der Einfluss dieser Parameter wurde durch von verschiedenen Autoren ausgeführten Versuche bestätigt.

Die Beschädigung des Betons, verursacht durch eine Unverträglichkeit der Verformungen infolge Feuchtigkeits- oder Temperatureinflüssen der beiden Phasen des Materials, konnte in einer realistischen Art und Weise simuliert werden. Zwei Beispiele sind behandelt worden : die Fälle des Frostes und des Schwindens infolge von Feuchtigkeitseinflüssen. Der Vergleich zwischen den erhaltenen Resultaten und den experimentellen Resultaten, die durch holographische Interferometrie erhalten wurde, hat eine gute Uebereinstimmung gezeigt.

5. Folgerungen

Obwohl dieser Modellwerkstoff, der sogenannte numerische Beton, nur zweidimensional ist, spiegelt er wahrheitsgetreu eine gute Anzahl experimenteller Resultate wider. Dennoch bleibt es unerlässlich, ähnliche Studien an 3-dimensionalen Verbundgefügen weiterzuverfolgen. Die Resultate werden noch wirklichkeitsnäher sein.

Die numerische Simulation ist ein wirksames Werkzeug für die Forschung auf dem Gebiet der Materialwissenschaften. Sie erlaubt, gewisse, das Materialverhalten beherrschende Mechanismen zu erfassen.

Auch wenn solche numerische Näherungen die experimentellen Methoden nicht verdrängen können, bilden sie dennoch einen zusätzlichen, bedeutenden Beitrag zur Erarbeitung von wirklichkeitsnahen Materialgesetzen.

EXTENDED SUMMARY

ON THE ANALYSIS OF THE MECHANICAL BEHAVIOUR OF
COMPOSITE MATERIALS BY NUMERICAL SIMULATION

1. INTRODUCTION

Any realistic prediction of the properties of a heterogenous material such as concrete must necessarily take into account the real structure of the material.

In order to develop material laws based on real mechanisms, it is necessary to introduce different structural levels of the material. The Three Level Approach recently introduced seems to be a promising means of understanding and predicting the mechanical behaviour of concrete. In this approach, the three hierarchical levels considered are the following:

Micro-level :

At this level, the models of the materials science based on real mechanisms are used to describe qualitatively and quantitatively the complex physical, chemical and mechanical behaviour of hardened cement paste. A model that describes this micro-level is the München model.

Meso-level :

The meso-level is introduced to account for the composite nature of the material and its inhomogeneities. This means that the concrete is represented by a two-phase model. The first phase, the dispersed phase, is the matrix of the hardened cement paste spangled with pores and micro-defects. The second phase, the dispersed phase, represents the aggregates.

Macro-level :

The macro-level is used to develop the realistic materials laws, directly applicable by the engineer, and based on the information accumulated on the two preceding structural levels. At this scale, concrete is considered to be a homogeneous material.

The goal of this project is the simulation of the properties and mechanical behaviour of concrete with connection to its real structure. The concrete will be represented by a two-phase structure formed by inclusions embedded in a mortar matrix. The interface between the matrix and the inclusions, called the *auréole de transition*, will be introduced as a supplementary phase in the study of the fracture process, where it plays an important role, given its weak mechanical properties with respect to the two other phases.

The first task we must undertake in this study is to simulate the structure of the material in as realistic a fashion as possible.

2. SIMULATION OF COMPOSITE STRUCTURES

2.1 Aggregate geometry

In order to simulate the composite structures representative of concrete, it is necessary to characterize the aggregate geometry. A large number of methods permitting an overall characterization of the aggregate morphology can be found in the literature. In our case, to simulate the geometry of natural gravel, we have used the method of Beddow and Meloy. One possibility for analyzing a section of a given particle is to transform its contour into polar coordinates. In a rectangular reference system, tracing the radius R as a function of the corresponding angle θ , we obtain the spectrum of the contour which can be analysed by Fourier analysis.

According to Beddow and Meloy, the geometry of particles having the same genesis can be characterized by a simple relation :

$$A(N)=f(N)$$

where $A(N)$ is the amplitude at the frequency $N\theta$.

Analyzing a sample of some thirty plane sections of aggregates coming from the same quarry (Rhone valley), we can find the relation (1) which characterizes this type of grains. The relation (1) is called law of coefficients of morphology. The relation, in log-log scale, can be represented by a straight line :

$$\text{Log } A(N) = -p \text{ Log } N + b$$

where p and b are the morphological parameters.

Figure 1 shows the morphological law obtained by analyzing the aggregates from Rhone valley. With this law we can simulate grains with a similar geometry.

2.2 Granulometric Distribution

In concrete aggregate size follows a well-defined distribution function. Generally speaking, the granulometric curves can be represented by the following equation :

$$F_{3D}(\emptyset) = g\left(\frac{\emptyset}{\emptyset_m}\right)^i + (1-g)\left(\frac{\emptyset}{\emptyset_m}\right)^h$$

where $F_{3D}(\emptyset)$: is the probability of finding a particle with a diameter less than or equal to \emptyset .

\emptyset_m : is the maximum particle diameter

g, i, h : are parameters which depend on factors such as the ratio of cement and aggregate weights.

To simulate the structure of a concrete in two dimensions it is necessary to have the appropriate granulometric distribution $F_{2D}(\emptyset)$. One method of resolving this problem is to simulate on the computer a three dimensional composite structure whose granulometry follows a given law $F_{3D}(\emptyset)$. By intersecting this structure a great many times by arbitrary planes, we can, with numerical analysis, deduce the granulometry distribution of the cuts. We thus obtain the desired function $F_{2D}(\emptyset)$. Figure 2 represents the granulometric distribution of the Fuller laws in two and three dimensions.

2.3 Composite structures in two dimensions

Knowing the morphological law characterizing the type of aggregates and the granulometric distribution $F_{2D}(\emptyset)$, one can generate on the computer composite structures that are representative of a given concrete. In Figure 3 is shown an example of a 2D structure obtained by introducing the morphological law for the aggregates of the Rhone valley (Fig. 1) and following the Fuller granulometry. Figure 4 shows another example of a composite structure representative of a concrete with crushed aggregates. The geometry in this case has been simulated by polygons in which the number of sides varies randomly between two limiting integer values.

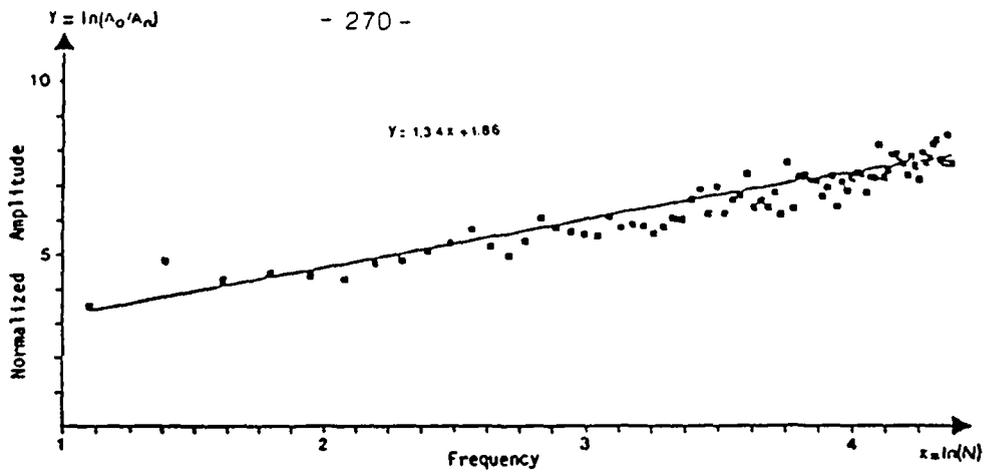


Fig. 1

Morphological law for 30 sections of local gravel (Rhône valley).

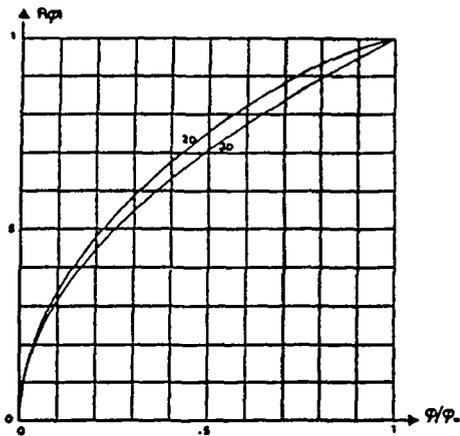


Fig. 2

Comparison between two-dimensional and three-dimensional cumulative size distributions (case of Fuller's parabola)

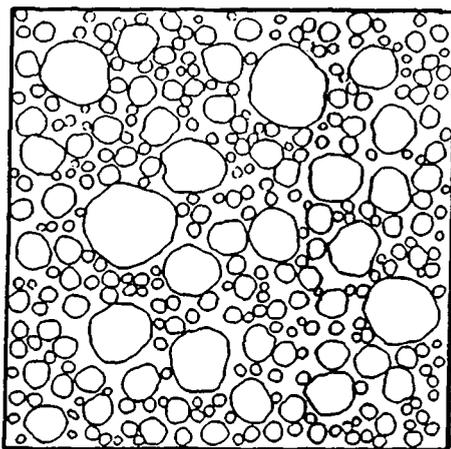


Fig. 3

Computer-generated two-dimensional composite structure with size distribution of aggregates according to Fuller's parabola. The shape of aggregates is based on the morphological law of Fig.1. It simulates concrete with aggregates of Rhône valley.

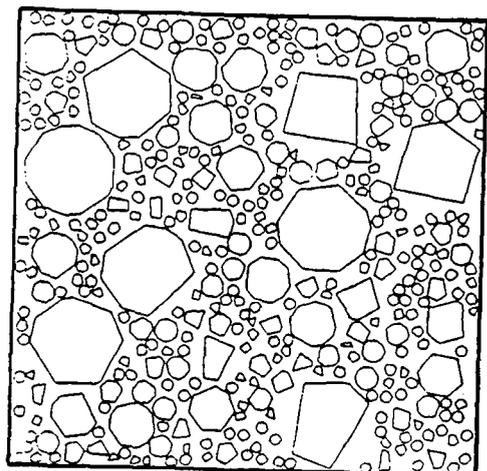


Fig. 4

Computer-generated two-dimensional composite structure with size distribution of aggregates according to Fuller's parabola. The shape of aggregates is represented by polygons. It simulates concrete with broken aggregates.

3. BORDER EFFECT

3.1 Determination of the structure of the concrete skin.

When the concrete is poured, the center of a large aggregate cannot come closer to the framework or to the reinforcements than its average radius. The spaces between the large aggregates near these obstacles are much more significant than in the interior of the material. Thus the zones closest to the borders are more rich in cement than the regions at the heart of the material.

The volume which experiences this effect is known as the skin of concrete.

The numerical simulation of composite structures in three dimensions permits us to well study this effect. Figure 5 shows eight plane intersections of a computer-generated concrete cube. These cuts were made at progressive distances from one face of the cube. The granulometry follows the Fuller parabola; the maximal diameter of the aggregates, represented by spheres, is 32 mm. We can see clearly in the figures that the farther we go into the heart of the material, the larger the concentration of inclusions and the larger the diameter of the maximal disc of intersection. For each cut of Figure 5, the largest aggregate-section is represented by a black disc. Fig. 5a represents the outer layer of the cube; Fig. 5h shows a cut at a distance of 25 mm from the wall; it is representative from its granulometry ($F_{2D}(\emptyset)$) and its inclusion concentration, of any cut made at the heart of the material.

The analysis of several generated concrete cubes has shown that the border effect ceases to exist as soon as one is farther from the border than the maximal aggregate radius ($\emptyset_m/2$). This means that the thickness of the skin of the concrete is of the order of the largest particle radius.

Figure 6 shows the 2D-granulometric distribution ($F_{2D}(\emptyset)$) of a cut 8 mm from a cube face. We see clearly in this figure that the possibility of finding a disc of intersection larger than 8 mm is zero. For comparison, we show in the same figure the average granulometric curve ($F_{2D}(\emptyset)$) relative to the slices taken at the heart of the material. Figure 7 shows the variation of relative aggregate concentration as a function of the distance from the surface.

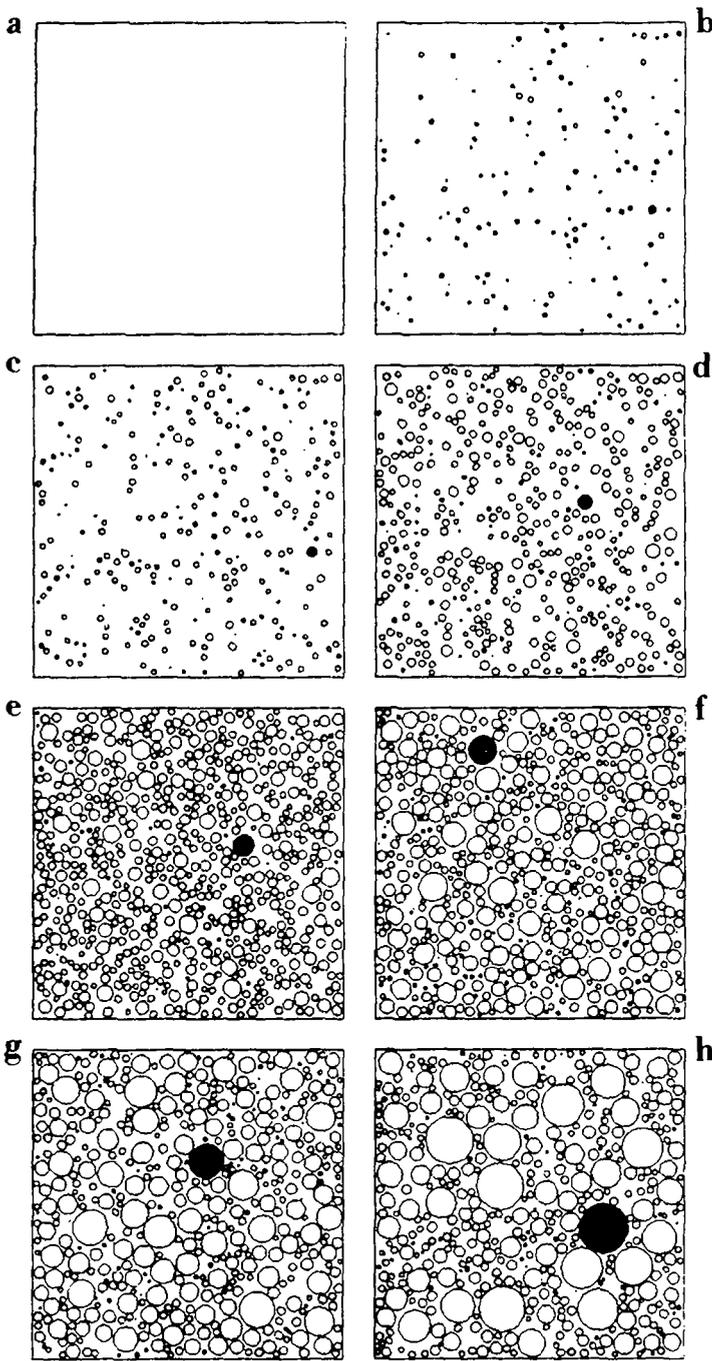


Fig. 5

Cross-sections of a computer-generated concrete made at increasing distances of the surface. Grain size distribution according to Fuller. As an indication of the border-effect, the largest circle resulting from the intersection of the spherical aggregates and the plane is shown in black.

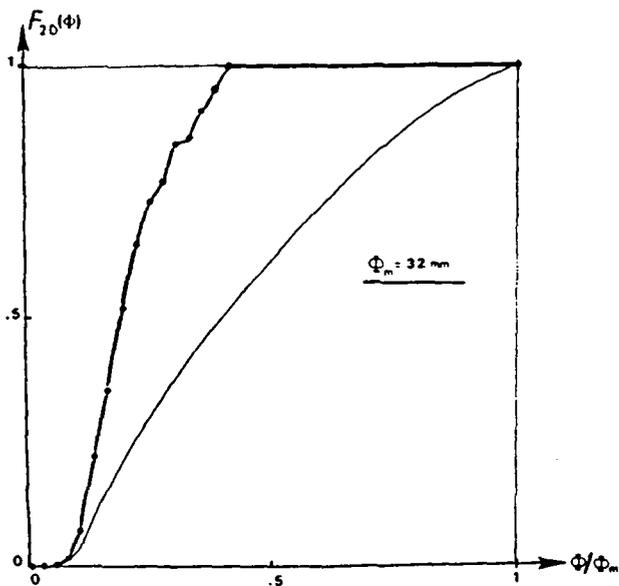


Fig. 6

Comparison of the size distribution at 8 mm from the surface with the 2D-distribution at a large distance from the surface.

3.2 Estimation of properties of the skin of a concrete

Because of this border effect, which gives rise to a certain structural heterogeneity in the material, the properties, such as resistance, deformability, absorption of water, shrinkage, creep, etc, differ in the concrete skin from those found in the interior of the material.

Knowledge of the characteristics of this zone near to the surface is of great importance because the durability of the material is affected by them.

With the determination of the granulometric composition of the superficial layers of concrete (cf §3.1), we can estimate certain material properties as functions of the distance from the border. Thus, with the curve of Figure 7 and the analytical model of Hobbs, which gives the property of a two-phase material as a function of the characteristics and the relative properties of each phase, we can study the evolution of properties of a concrete as a function of the distance from the border. Figure 8 gives graphically an estimation of the different properties of a concrete whose granulometric distribution follows the Fuller parabola for a maximal particle diameter of 32 mm. The values of the relative parameters of the two phases are indicated in the figure and are realistic for normal concrete.

The results show that the border effect influences greatly the properties of the skin of the material and that the durability is affected because, for example, of the thermal expansion and hygral shrinkage differentials as well as the differential deformability. This change in the properties, very marked in the first superficial layers, as we can see in Figure 8, plays a determining role in the process of deterioration of the surface of a concrete construction.

A concrete structure is always in contact with its environment; thus the atmospheric agents interact with the material from the exterior surfaces. For this reason, durability is not so much a property of the core material, but above all a property of the skin, determined by the composition and the properties of the superficial zones.

The zones of the material subjected to the border effect are more rich in cement paste and for this reason are more porous than in the interior, which contains more non-porous aggregate material (in the case of normal concrete). This elevated porosity contributes to the more

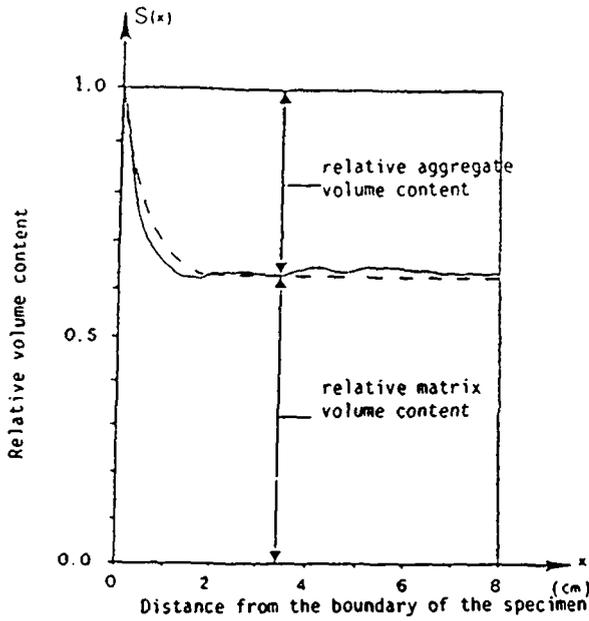


Fig. 7

Ratio of the relative volume concentration of aggregates and of mortar as functions of the distance from the surface of the specimen (the border effect).

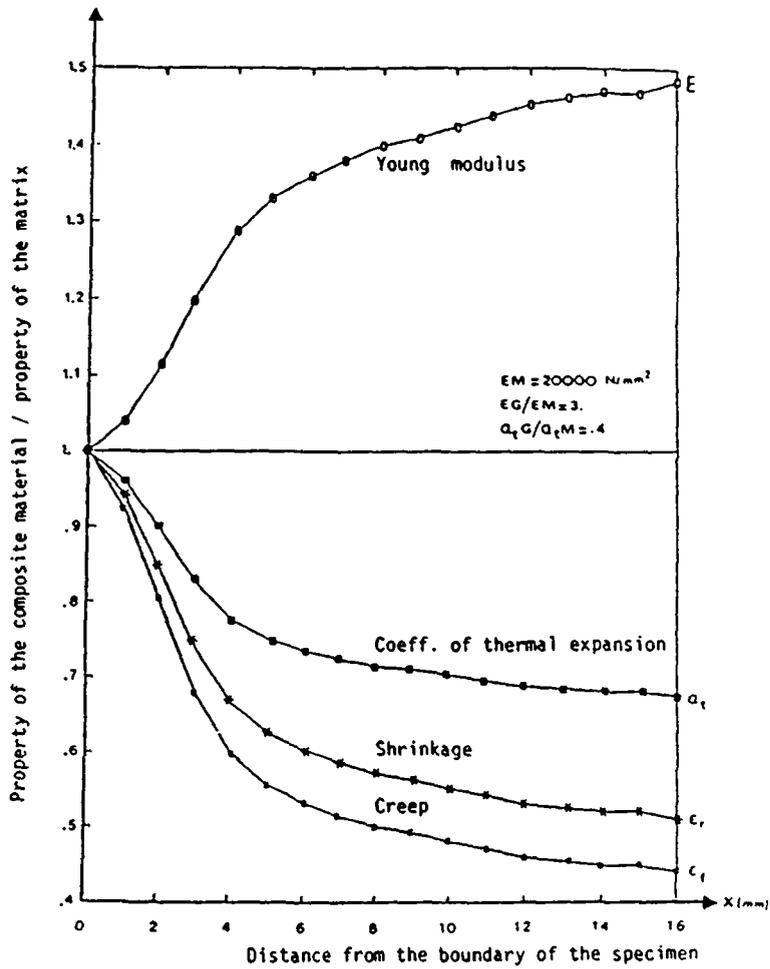


Fig. 8

Calculated concrete properties (relative to those of the matrix) as a function of the distance from the surface, for the distribution shown in Fig. 7.

rapid penetration into the material of water, carbon dioxide gas or other aggressive agents in the air and augments the speed of the chemical reactions in the skin. Such phenomena, intimately tied to the characteristics of the skin, are extremely important to the durability of the material and must be taken into account for any realistic prediction of the lifetime of a construction.

4. REPRESENTATION OF A COMPOSITE STRUCTURE BY FINITE ELEMENTS

To analyse the physical or mechanical behaviour of a composite structure, we will use the finite element method. The analysis of a 3D-structure is difficult to realize in spite of the calculating power of the computers actually at our disposal. Thus, in all that follows, we restrict ourselves to the case of 2D-structures.

In chapter 2, we demonstrated that it is possible to simulate in a realistic way a 2D composite structure representative of a concrete, taking into account its composition, the granulometric distribution of the aggregates and their geometry. We show with some examples the technique developed to represent these structures by means of finite elements.

Figure 9 shows a composite structure whose inclusions, circular in form, follow a Fuller granulometry. This structure is first subdivided into large elements. In this preliminary coarse mesh, three types of elements, which we will call super-elements, are present:

super-element of type 1 : Triangle with one corner at the center of an inclusion, the two other corners being in the matrix.

super-element of type 2 : Triangle with two corners at the centers of two neighboring inclusions, and the third localized in the matrix.

super-element of type 3 : Triangle whose three corners are at the centers of three neighboring inclusions.

These three types of super-element are shown in Figure 10.

The super-elements of types 2 and 3 are subdivided into two and six super-elements of type 1, respectively, as shown in Figure 10. The coarse mesh of Figure 9 is thus reduced to a collection of super-elements of type 1.

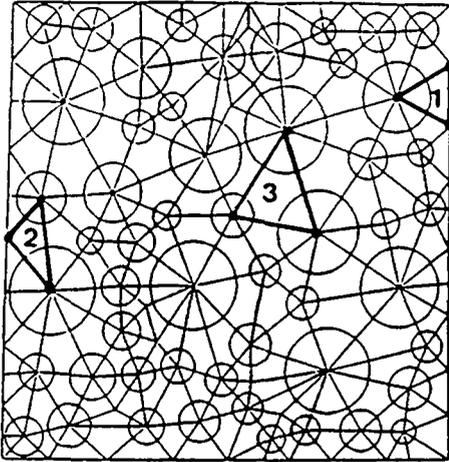
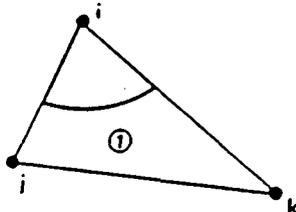
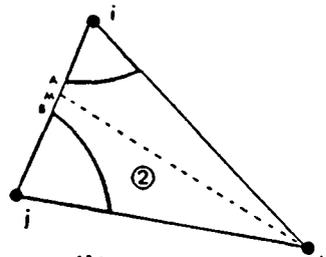


Fig. 9

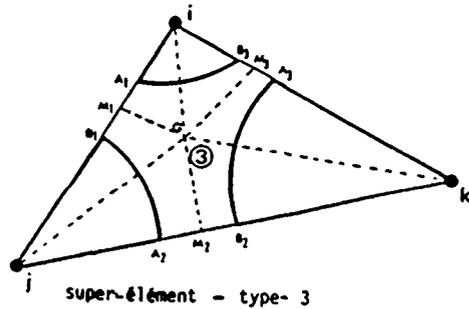
Subdivision of a composite structure in super-elements



super-élément - type-1



super-élément - type-2



super-élément - type-3

Fig. 10

Definition of the three types of super-elements

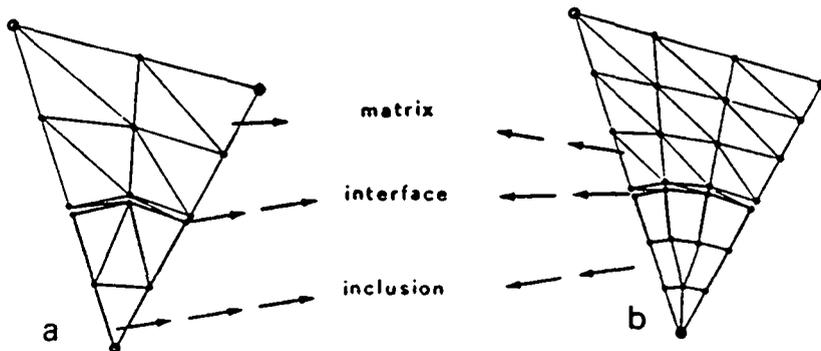


Fig. 11

Finite element meshes of super-element type 1

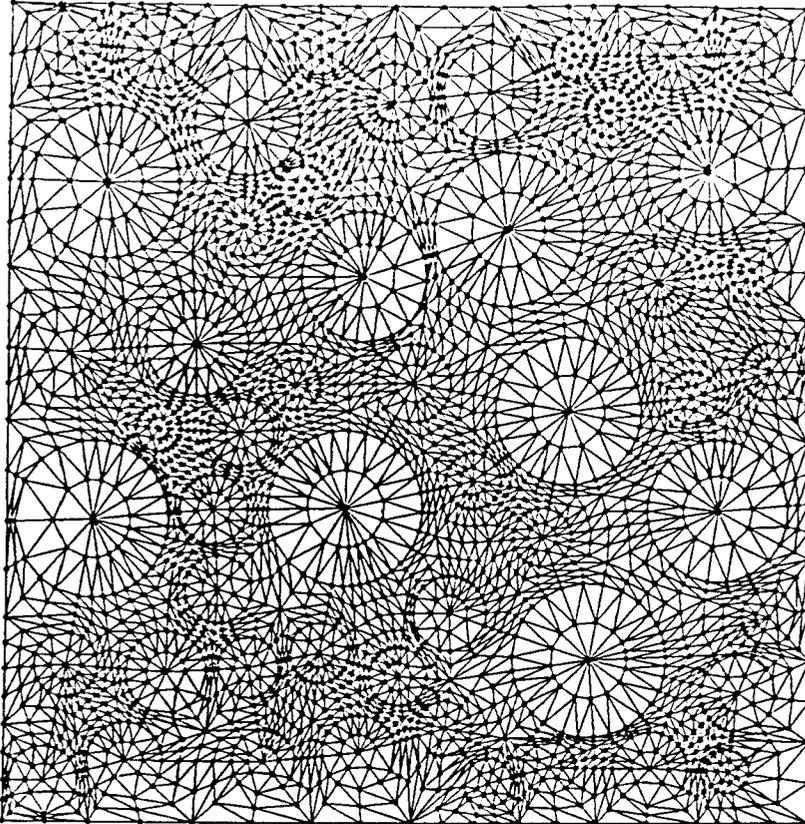


Fig. 12

Example of the resulting finite element of the composite structure of Fig. 9

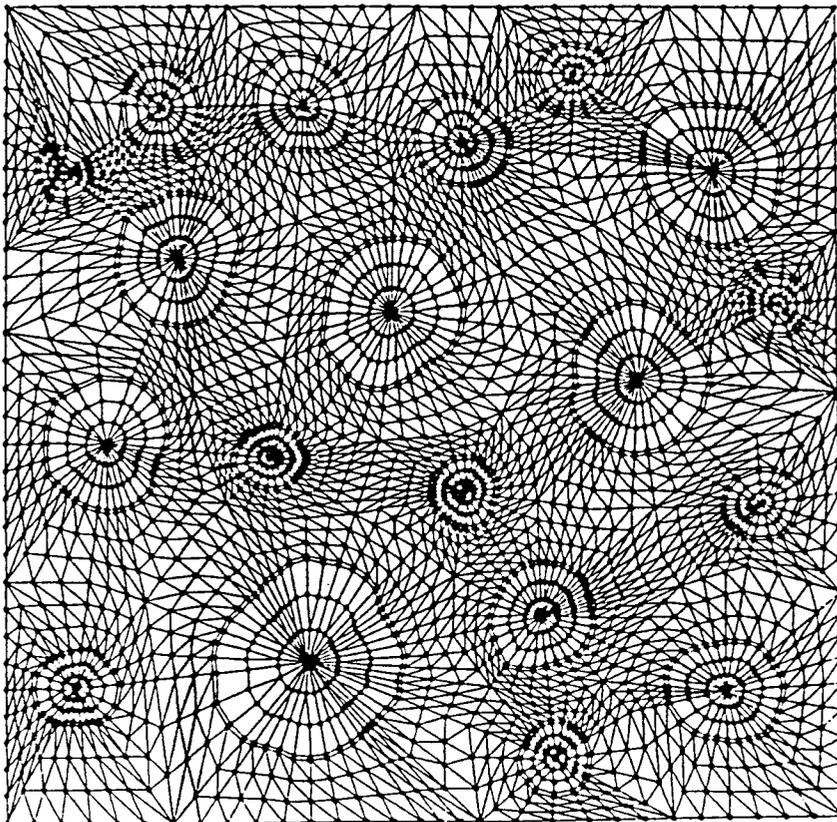


Fig. 13

Finite element mesh for concrete with aggregates shaped according to the morphological law of Fig. 1.

Each super-element of type 1, defined by its three corners and the radius of the inclusion, is subdivided in turn into finer triangular or quadrilateral finite elements. Figure 11a illustrates the subdivision of a super-element of type 1. In this case, we see four triangular finite elements representing the section of the inclusion and eight elements of the same type for the matrix. To keep track of the interface, whose properties are different from those of the matrix, we have introduced a halo between the inclusion and the matrix. This halo, whose thickness is on the order of 10 microns, is represented by four finite elements in the case of Figure 11a. The fine mesh of the composite structure of Figure 9 is represented in Figure 12. We note that, given the thinness of the interface, the finite elements which represent it are not visible in Figure 12. This mesh refinement is done automatically on the computer. It is clear that the subdivision of a super-element of type 1 can be as fine as desired; however, the total number of finite elements of the structure becomes considerable, causing difficulties with the solution of the resulting system of equations, given the limits of computers. Figure 11b gives an example of a finer subdivision. Figure 13 shows an example of a finer mesh for a composite structure where the geometry of the inclusions follows the morphological law of Figure 1.

5. DETERMINATION OF THE EFFECTIVE PROPERTIES OF A COMPOSITE STRUCTURE.

By means of the mesh of the composite structure represented in Figures 12 and 13, we can easily simulate a compression of the material by imposing for example a certain displacement on all the nodes of the upper border of the structure and keeping the nodes of the base fixed. Then we can calculate the reaction and determine the global modulus of elasticity of the structure.

The constitutive laws of the different phases are discussed in the next chapter.

Figure 14 represents graphically the result of this compression simulation. Figure 14a shows the deformation of the structure, the distribution of the principal stresses at the heart of each finite element is represented in Figure 14b. The mechanical parameters of the two phases are specific to normal concrete. This figure shows the complex state of stresses in a composite material.

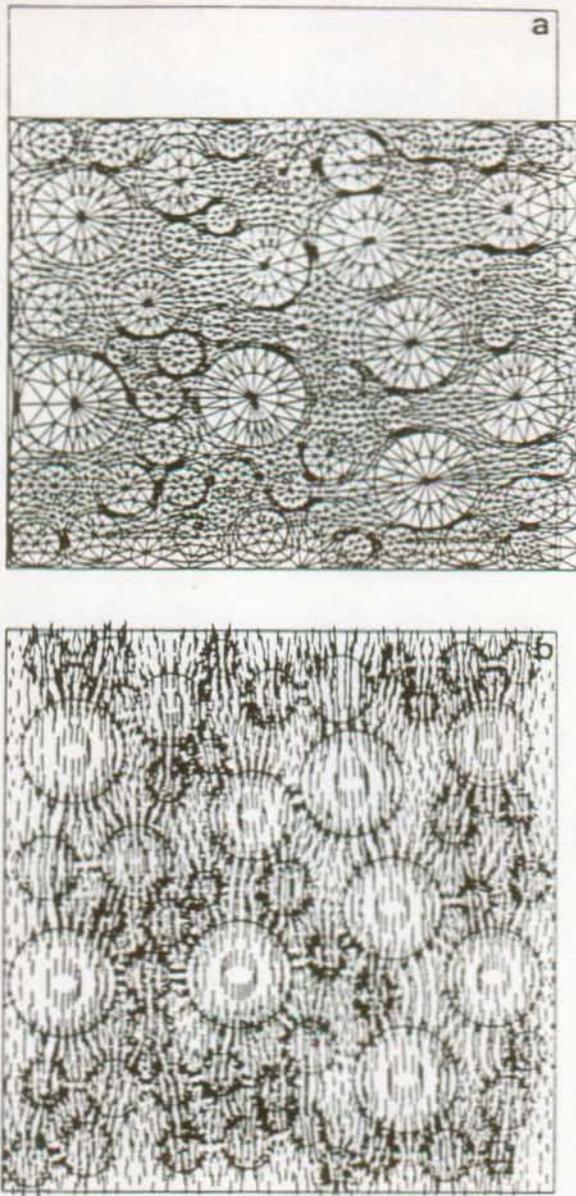


Fig. 14

Mechanical behaviour of a composite structure in compression :
a) deformation
b) principal stresses.

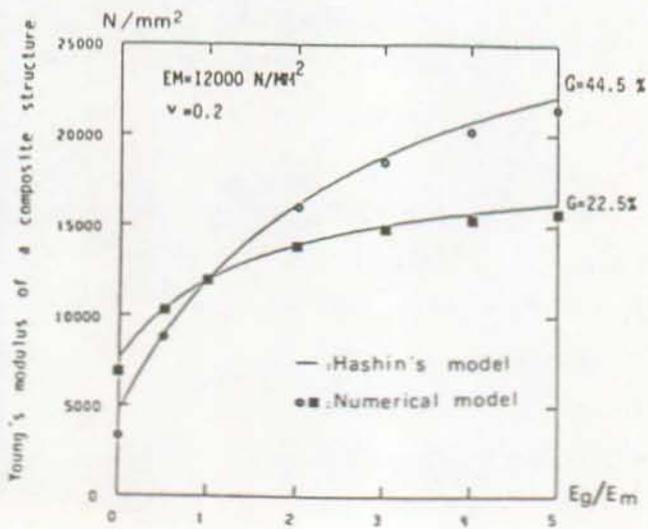


Fig. 15

Young's modulus of a composite structure as a function of the ratio of Young's moduli of the components for two different aggregate contents.

With such a model, all structural factors (granulometry, geometry of inclusions, repartition of the inclusions at the heart of the matrix, etc) and mechanical factors (modulus of elasticity, coefficient of Poisson), which may affect the effective properties can be taken into consideration. Thus, the studies of the parameters depending on these factors can be undertaken. Figure 15 shows an example of a parameter study of the effective modulus of elasticity of a composite material as a function of the ratio of the moduli of elasticity of the two phases, and for two different inclusion contents. These results are compared, on the same figure, to the predictions of the analytical model of Hashin.

With the same approach, we can study for example the effective hygral or thermal shrinkage of a concrete as function of any parameter that can influence the property under study.

Note that at this level of study, the different phases are hypothesized to have a linear-elastic behaviour.

6. SIMULATION OF THE FRACTURE PROCESS IN COMPOSITE MATERIALS.

6.1 Generalities

The process of fracture of a composite material like concrete is a complex phenomenon. This complexity arises principally from the heterogeneous nature of the material. Consequently, a realistic study of the mechanisms of cracking must necessarily take into account the actual structure of the material.

In this chapter, we use the same approach as before to simulate the fracture process in concrete. Structurally, the material will be represented by two phases : aggregate and mortar matrix. Furthermore, we assume that the aggregates have a linear-elastic behaviour without any possibility of cracking. The mechanical properties of the mortar matrix such as tensile strength, fracture energy, and strain softening diagram are determined experimentally. A third phase is introduced in the model in order to take the mortar-aggregate interface into consideration.

The modelling of these three phases will be described in this chapter. For the numerical simulation of the fracture process we used the finite element method. There are two different strategies to apply the concepts of fracture mechanics : the discrete crack and smeared crack approaches. In the present analysis, given the large number of finite elements representing the structure, the discrete crack approach seems to be less appropriate as the finite element mesh must be updated

at each step of cracking of an element. Given this difficulty, the smeared crack method, consisting of a modification of the stiffness of a cracked element, will be adopted.

6.2 Modelling of the inclusions.

The linear stress-strain relation for the inclusions is given by the following equation:

$$\{\sigma\}_x = [D] (\{\epsilon\}_x - \{\epsilon\}_x^i)$$

Where $[D]$ is the elasticity matrix :

$$[D] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix}$$

and $\{\epsilon\}_x^i$ is the initial vector of deformations.

6.3 Matrix modelling.

It is assumed that the mortar matrix behaves in a linear elastic manner until the tensile strength is reached. The nonlinear behaviour which arises once this point has been reached is localized in a so-called fictitious crack, where stress transfer normal to the crack can still take place. The stress transfer capacity is given by the strain softening diagram (σ, w) . Figure 16 shows a typical strain softening diagram for mortar. The area under this curve represents the fracture energy G_f of the material. In the triangular elements used here the softening is smeared out over the projected length of the elements, see Figure 17.

Figure 18 shows a combined (i.e. linear elastic deformation plus softening) stress-strain diagram of a matrix element with a typical projected length L of 2 mm. The numerical discretization of the stress-strain relation is shown in the same figure. As the strain ϵ_{nn} (strain in the direction n normal to the fictitious crack) increases, both the Young's modulus E_n of the softened element and the maximum tensile stress $\sigma^{(i)}$ are reduced (see Fig. 18).

The general constitutive law of a matrix element can be written as follows (in the principal axes reference system (n,t)):

$$\begin{pmatrix} \sigma_{nn} \\ \sigma_{tt} \\ \sigma_{nt} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E_n}{1-\mu\nu^2} & \frac{\nu E_n}{1-\mu\nu^2} & 0 \\ & \frac{E_t}{1-\mu\nu^2} & 0 \\ \text{Sym.} & & \beta G \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_{nn} - \epsilon_{nn}^i \\ \epsilon_{tt} - \epsilon_{tt}^i \\ \gamma_{nt} - \gamma_{nt}^i \end{pmatrix}$$

Where :

$\mu = E_n/E$ is the coefficient of reduction of Young's modulus relative to the direction normal to the crack.

$\mu = 1$ for a non cracked element,

$0 < \mu < 1$ for a partially cracked element,

$\mu = 0$ for a fully cracked element.

$G = E/2(1+\nu)$ shear modulus

$E_t = E$ is Young's modulus in the direction parallel to the crack.

This tensile softening model is based on the softening of the cracked zone of the material. The weakening of the material reduces also its shear stiffness. In order to take this phenomenon into account, we introduce a factor β , which is called shear retention factor. β varies from 1 (non-cracked element) to 0 (fully cracked element). This factor β can be approximated, for a given granulometry, by the following relation:

$$\beta = \frac{1}{1 + 4.447 \epsilon_{nn}}$$

By proper adjustment of the vector of initial deformations ($\epsilon_{nn}, \epsilon_{tt}, \gamma_{nt}$), the initial thermal, hygral or residual deformations of the matrix can be taken into consideration.

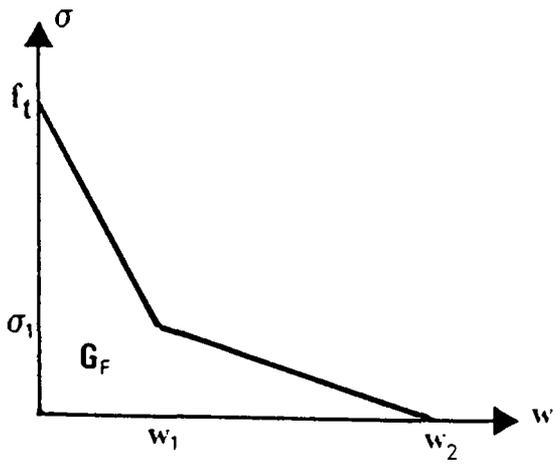


Fig. 16

Bilinear strain-softening diagram $\sigma(w)$.

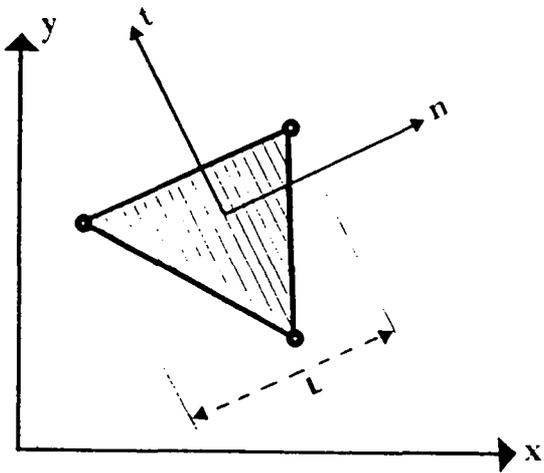


Fig. 17

Definition of the projected length L of a cracked element.

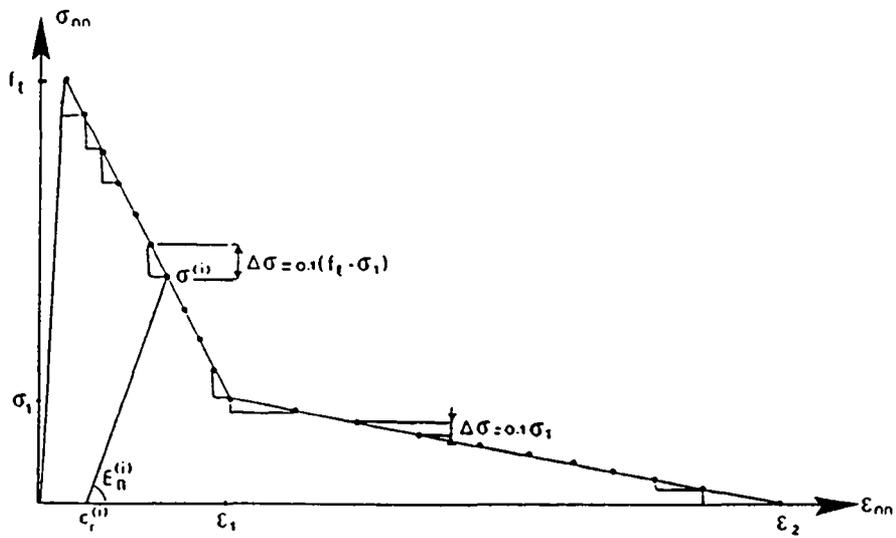


Fig. 18

Typical stress-strain diagram for the matrix showing the discretization used in numerical solution.

6.4 Matrix-aggregate interface modelling

The matrix-aggregate interface plays an important role in the fracture process of concrete. In normal concrete, cracks propagate predominantly along these zones because of their low mechanical strength.

To simulate their mechanical behaviour, we have introduced interfacial elements between the nodes of the matrix and those of the aggregates. The elements are schematically represented in Figure 19. Figure 20 shows the detailed structure of an interfacial element. It is composed of two springs, a friction element and a softening element. The normal stress σ_{nn} and the shear stress σ_{nt} are given by the following relations :

$$\sigma_{nn} = E \left(\frac{U_i - U_j}{D} \right)$$

$$\sigma_{nt} = \frac{E}{2} \left(\frac{V_i - V_j}{D} \right)$$

For notations, see Fig. 20.

Two modes of cracking are possible :

- mode I or opening mode: arises in case of a dominant tensile stress (σ_{nn}) which is greater than the tensile strength of the interface, f_t .

- mode II or shear mode: occurs in case of a dominant compressive stress σ_{nn} if the shear stress σ_{nt} satisfies the Mohr-Coulomb criterion:

$$|\sigma_{nt}| > c^{int} + \mu^{int} \sigma_{nn}$$

Where : c^{int} is the cohesion of the interface, and
 μ^{int} is the friction coefficient between matrix and aggregate.

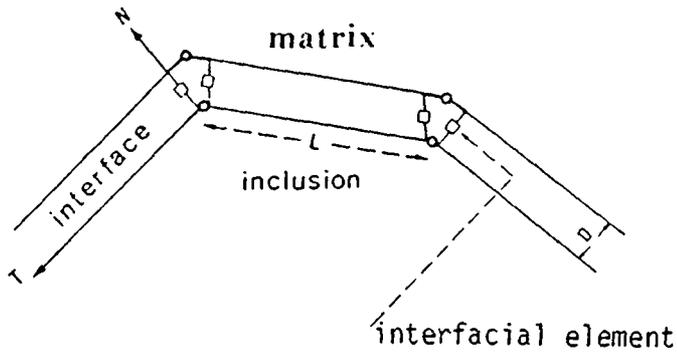


Fig. 19

Finite element discretization of the matrix-aggregate interface

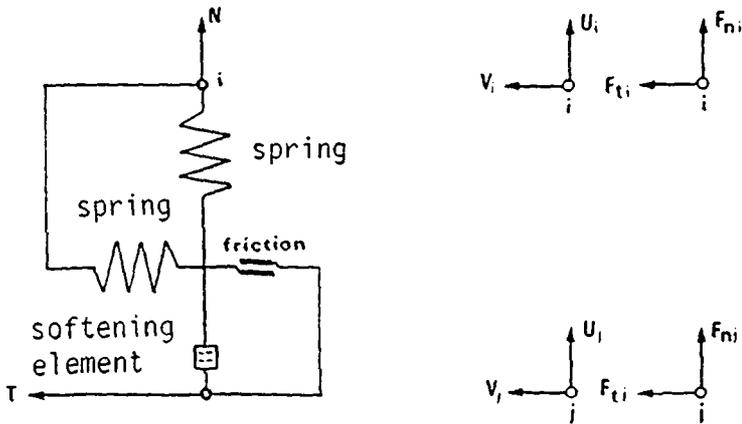


Fig. 20

Detailed structure of the interfacial element

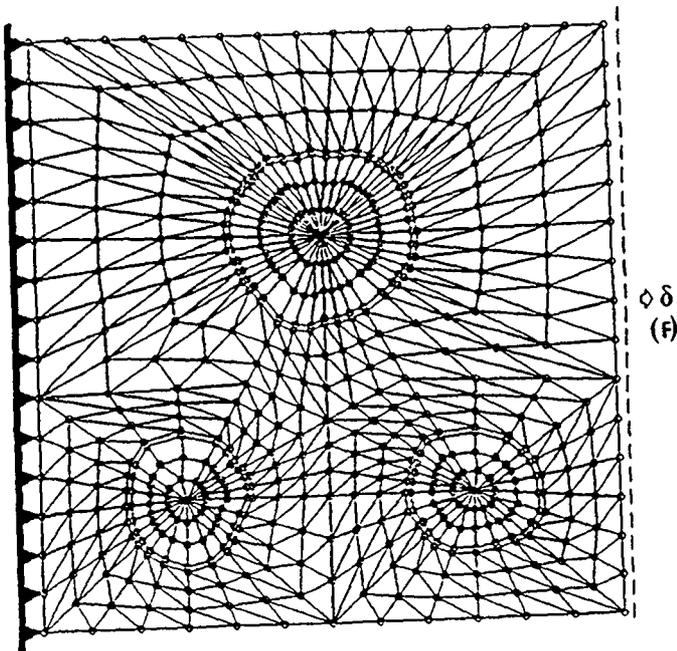


Fig. 21

Finite element mesh and boundary conditions of a composite structure under tension

7. RESULTS OF THE SIMULATION OF THE FRACTURE PROCESS IN A COMPOSITE MATERIAL.

In the following, we present some results of the numerical simulation of the fracture process in several composite structures. In the first part, the numerical simulation of fracture of a composite loaded in tension is discussed. In the second part the degradation of a composite caused by physico-mechanical incompatibility of the two phases of the material (porous matrix and aggregates) is treated with two examples: drying shrinkage and swelling due to freezing.

In reality, in concrete, the mechanical properties of a matrix are not identical in all points, but scatter around average values with a certain dispersion. In order to take this inhomogeneity into account, the material properties of the finite elements representing the matrix are statistically distributed.

7.1 Structure loaded in uni-axial tension.

To study the formation and propagation of cracks in a composite material under tension, we submit the structure to increasing displacements (δ) on one of its boundaries, and keep the opposite boundary fixed. The resulting reaction is then calculated. This mode of loading is shown schematically in Figure 21.

Figure 22 shows the evolution of the cracking process in a simple composite structure consisting of three circular inclusions loaded in tension. In these and all following figures, the partially cracked elements (fictitious crack) are indicated by strokes parallel to the crack direction and the fully cracked elements (real crack) are designed by the same symbol plus a circle halfway of the stroke (\bigcirc).

The interfacial cracks are represented by circles on the contour of the inclusions.

The first degradations of the material, arise in the interfaces, which can be explained by the fact that the mechanical strength of these zones is lower than that of the matrix.

This structure was loaded until a displacement δ of 0.1 mm. The resulting force-displacement diagram ($F-\delta$) is shown in Figure 23.

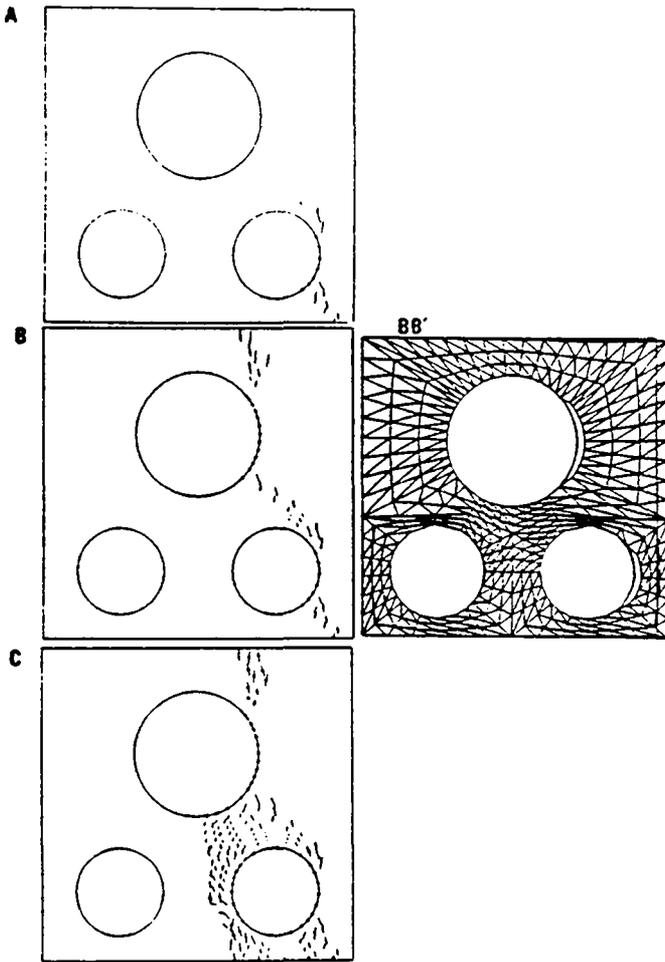


Fig. 22

a, b, c : Evolution of the crack pattern with increasing load.
bb' : Deformation corresponding to the crack pattern b.

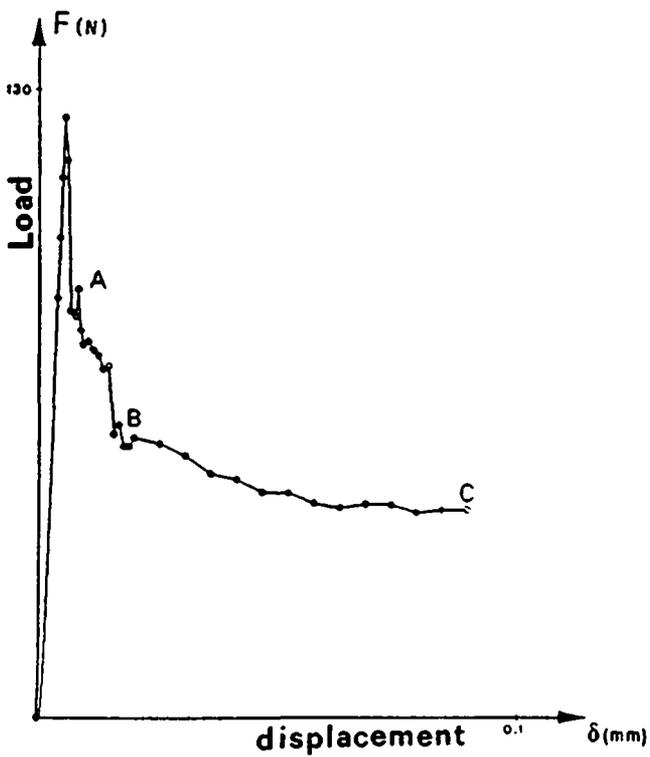


Fig. 23

Load-displacement diagram for the composite structure shown in Fig. 22. The crack patterns in the points A, B, and C are shown in figures 22 A, 22 B and 22 C respectively. The peak force is 123 N, which corresponds to of a stress of 2.46 N/mm².

Points A, B and C of the $F-\delta$ diagram correspond to the crack patterns shown in Fig. 22A, 22B and 22C respectively. Figure 23 BB' represents the deformations of the structure corresponding to the crack pattern of Figure 22 B. The maximal force is 123 N, which corresponds to an effective tensile strength of the composite material of 2.46 N/mm^2 .

Figure 24 shows a crack pattern of a composite structure of 19 inclusions whose geometry follows the morphological law for Rhone valley aggregates. This figure corresponds to a prescribed displacement δ of 0.1 mm.

An analysis has been done for a similar structure (same aggregate content, and same mechanical properties), but with circular aggregates; the resulting crack pattern is shown in Figure 25.

The resulting load-displacement diagrams of these two preceding analyses are compared in Figure 26. The area under the $F-\delta$ curves equals the energy consumed by cracking of the structures.

One important result which came out of our study is that the energy consumed by the structure with rough aggregates is higher than that of the structure with circular aggregates. This result, in good agreement with experimental findings, demonstrates that the fracture energy of concrete depends strongly on the geometry of the inclusions. Generally, fracture energy increases with increasing aggregate surface roughness.

The shape of the descending branch of the $F-\delta$ diagram, related to the softening of the material, depends also on the roughness of the aggregates, as can be seen in Figure 26.

The two phenomena may have several causes :

-First of all, the aggregates with a high angularity are more efficacious crack arresters, and, by the angular nature of their contour, have vertices around which a multidirectional microcracking can develop. This type of microcracking needs more energy so that the resistance of the material against a catastrophic propagation of cracks is enhanced.

-Secondly, an angular aggregate offers a better interlocking effect with the matrix than a rounded one; this will have a tendency to decrease the brittleness of the material and thus increases the fracture energy.

-Thirdly, an angular aggregate has a larger contact area with the matrix than a rounded one; consequently, more energy is needed for pulling out the aggregates.

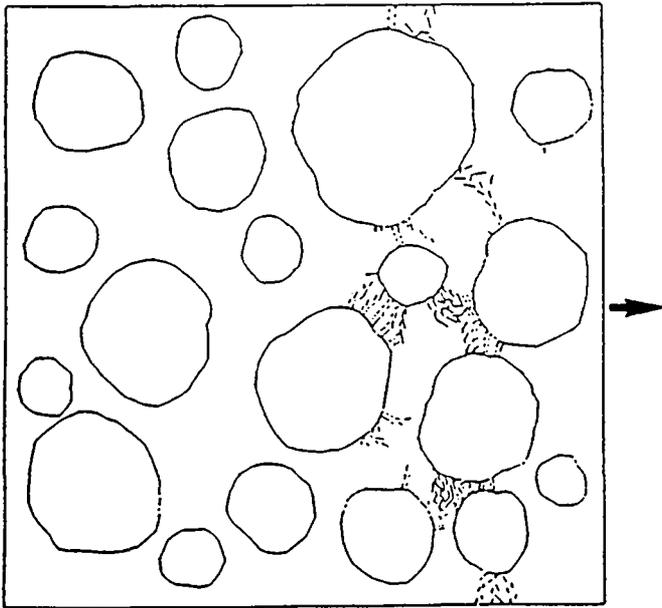


Fig. 24

Crack pattern in a composite material. Aggregate size distribution according to Fuller, aggregate shape according to morphological law of Fig. 1.

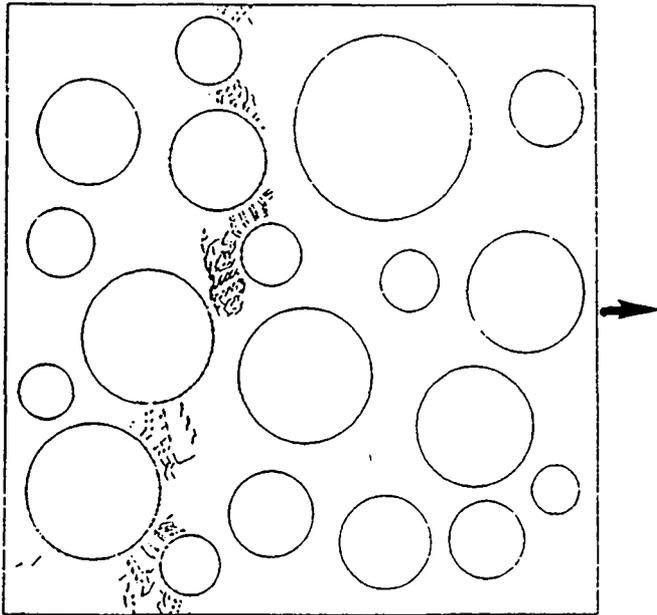


Fig. 25

Crack pattern in the same material as given in Fig. 24, circular aggregates.

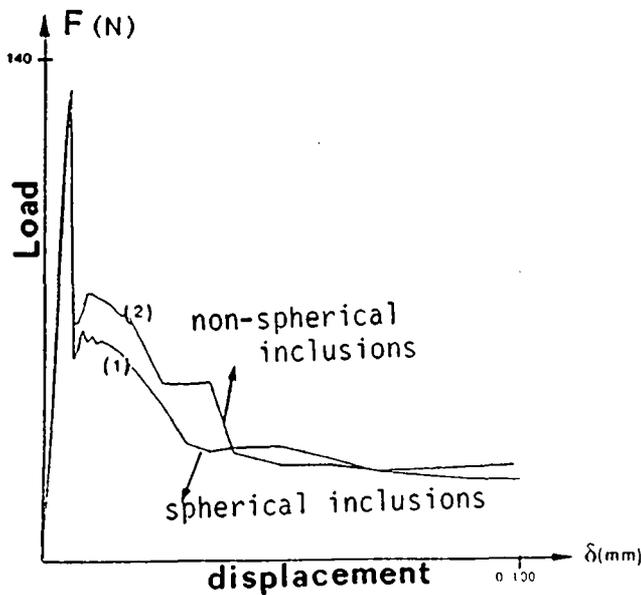


Fig. 26

Comparison of the load-displacement diagrams of the composite structures shown in Fig. 24 and 25. The tensile strength of the interface is $2 N/mm^2$ all other materials properties are the same as given in Fig. 23.

Experiments performed on notched beams made of several types of concrete, showed that the fracture energy increases with increasing roughness of aggregates.

The load-displacement diagrams shown in figures 23 and 26, which were obtained from several simulations of direct tension tests on composite structures, show that the force F fails to drop gradually to zero with increasing deformation, as should be expected when the material is close to final rupture.

This can be explained as follows. In the analysis, the direction of a crack once it has been formed is taken to be perpendicular to the principal tensile stress and fixed once and for all. Thus, readjustment of a crack to a change of the stress field - such as may arise due to further cracking elsewhere - is impossible. As a consequence, the complete composite structure retains a certain strength in the direction of the imposed load, as can be inferred, for instance, from the crack patterns shown.

In an attempt to improve this situation the Young's modulus of the material in the direction parallel to that of the cracks was also reduced as a function of the crack width. This approach gives reasonable results in our case, as the finite elements of the mortar matrix are relatively small, and as the microcracks within a small volume of mortar are oriented in a completely random fashion.

The softening of the material-which has now become isotropic in stead of uniaxial-in the tangential direction can be modelled as a first approximation by a linear law :

$$E_t = E \left(1 - \frac{W_{nn}}{W_{nn}^i} \right)$$

Where W_{nn} is the maximum width of the fictitious crack, i.e. the rightmost point in the softening diagram.

The results obtained with this modification of the softening behaviour of the mortar matrix are much more realistic than those obtained before. Figure 27 shows the crack pattern of a composite structure with 19 inclusions analysed with this modification. The total fracture energy is 87 N/m and the ultimate deformation is 0.15 mm. Figure 28 shows the corresponding load-displacement diagram.

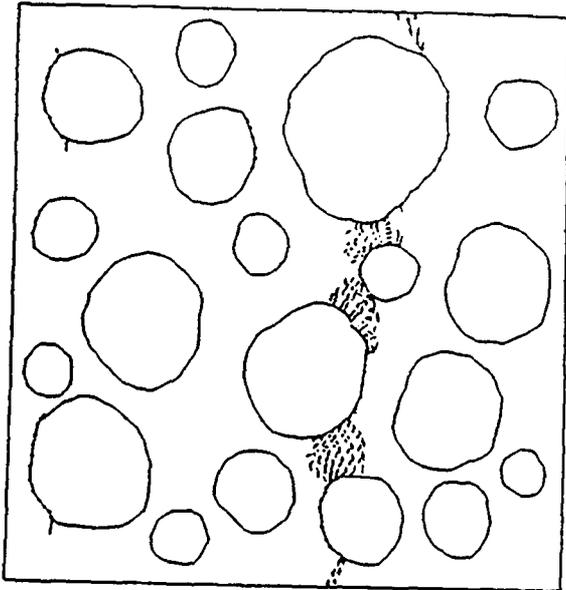


Fig. 27
Final crack pattern in a composite material with 19 inclusions, loaded until rupture occurred.

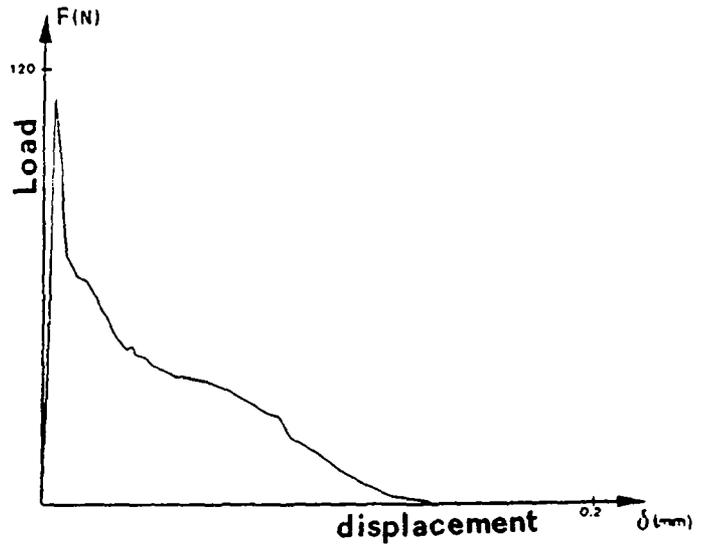


Fig. 28

Load-displacement diagram of the composite structure shown in Fig.27.
Total fracture energy : 87 N/m.

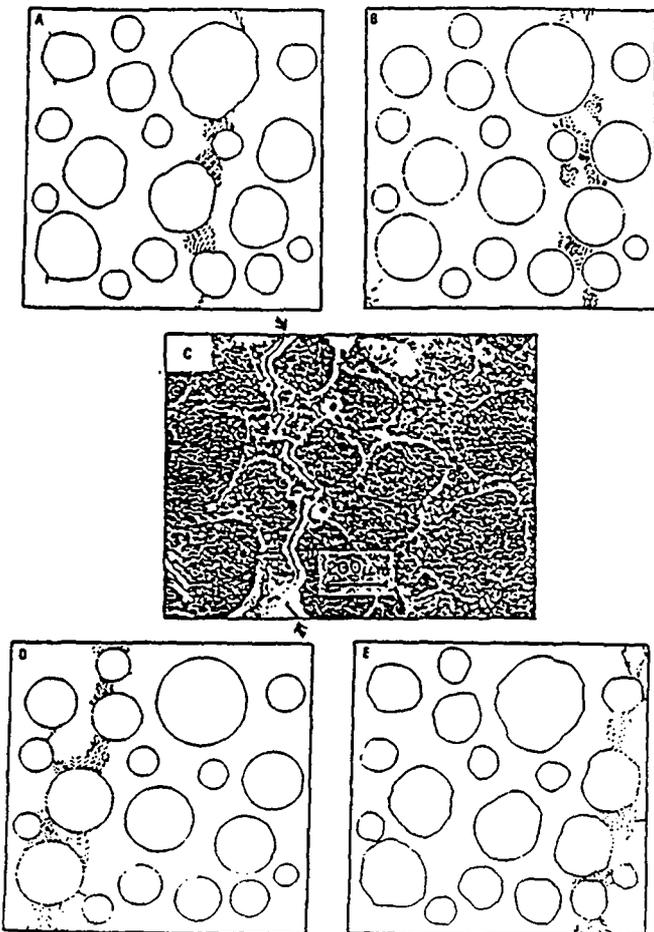


Fig. 29

Final crack patterns of 4 composite structures with statistically distributed properties of matrix and interface. The photography shows the experimentally determined crack pattern of a mortar.

A large number of composite structures, differing both structurally (shape, size distribution and concentration of aggregates) and mechanically (tensile strength, Young's modulus, fracture energy) has been analysed. All these parameters turned out to have a large influence on the global behaviour and effective properties of the composite material.

The crack patterns of figure 29 clearly show that the width of the fracture process zone (which becomes a macrocrack at the ultimate stage of loading, thus leading to the final ruin of the material) remains small, of the order of two times the diameter of the largest grain. Outside this region only sporadic microcracks can be found, usually caused by debonding of the matrix-aggregate interfaces. For comparison, a photography of the cracking of a real composite material (mortar), loaded in tension, is shown in Figure 29C.

7.2 Cracking caused by hygral shrinkage.

Cement-based composite materials such as concrete and mortar deform appreciably when their moisture content changes. In these materials, the length changes of the hardened cement paste are reduced by the stiff aggregates which are not subject to shrinkage.

Coupled with this reduction are compressive stresses in the aggregates and tensile hoop stresses in the matrix surrounding the aggregates, see Figure 30. These tensile stresses may lead to internal cracking of the material.

These phenomena can be analysed with the numerical methods developed in this thesis. Figure 31 shows the calculated crack pattern of a composite structure with three rough inclusions, for a free shrinkage strain of the mortar of 0.025%. The calculations agree well with experimental results, obtained by means of holographic interferometry, see Figure 32. As in the numerical simulations, the internal cracks can be seen to be normal to the perimeters of aggregates, and a degradation of the interface can be observed.

In this way the effective shrinkage as well as the damage caused by it can be studied easily for any set of parameters (surface texture of aggregates, aggregate concentration, strength of mortar matrix,..).

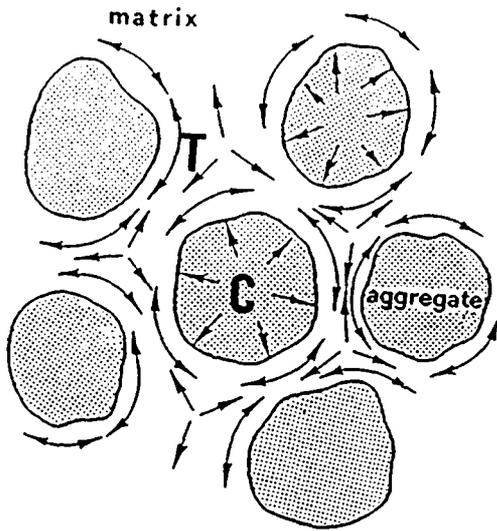


Fig. 30

State of stress caused by shrinkage of the matrix : tensile stresses in the matrix and radial compressive stresses in the aggregates.

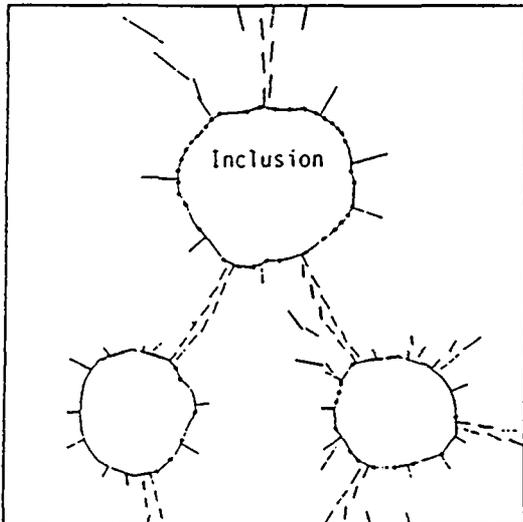


Fig. 31

Crack pattern of a composite material caused by -0.025% shrinkage of the matrix.

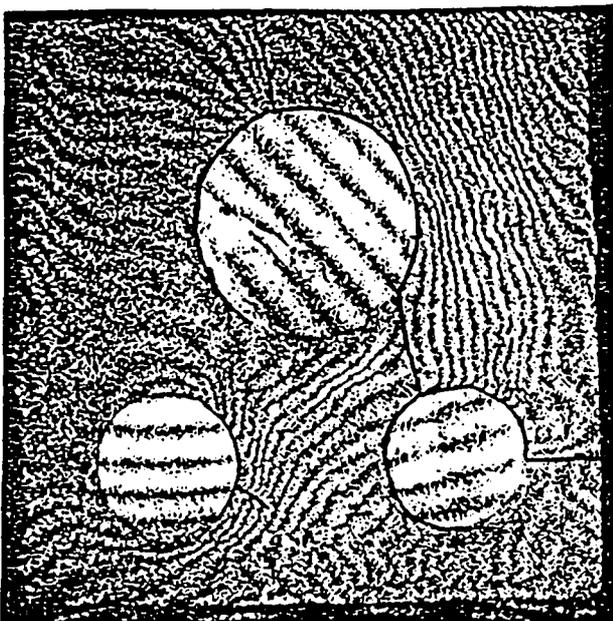


Fig. 32

Optically determined crack pattern in a specimen subjected to shrinkage. The specimen consists of a cement matrix with three cylindrical steel inclusions. The cracks, indicated by solid black lines, coincide with the discontinuities of the fringes.

7.3 Cracking caused by thermal length changes; freezing.

Temperature variations may easily cause cracking in a multiphase material such as concrete, due to different thermal dilatation coefficients of the various components, and may reduce the durability of a structure considerably. The numerical methods developed here can be applied easily to this problem.

Depending on its degree of saturation, hardened cement paste may exhibit a pronounced swelling when cooled below the freezing point of water. The actual onset of freezing of the pore water, which causes this swelling, depends on the water/cement ratio, the water content, the dimensions of the specimen and the rate of cooling. By way of illustration, Figure 33 shows the strains of hardened cement paste specimens, as a function of time, temperature and water cement ratio.

As a consequence of this swelling of the matrix, normal tensile stresses across the interface will arise, the aggregates being much stiffer than the matrix.

These stresses may lead to cracking and a debonding of the aggregates.

Numerically, the phenomenon can be taken into account in the same manner as shrinkage, i.e. by an adaptation of the initial strain vector.

Figures 34A and -B show the deformed shape and cracking of a simple composite structure with 3 inclusions. The numerical values for the dilatations introduced in these calculations were based on experimental work published elsewhere.

The figure clearly shows the partial debonding of the inclusions.

This numerical result is compared with experimental results obtained with holographic interferometry. Figure 35 shows an experimental result, the specimen is formed of three cylindrical inclusions embedded in a mortar matrix. The debonding of the inclusions occurred suddenly at -8.2° C. Qualitatively the numerical simulation agrees well with experiment.

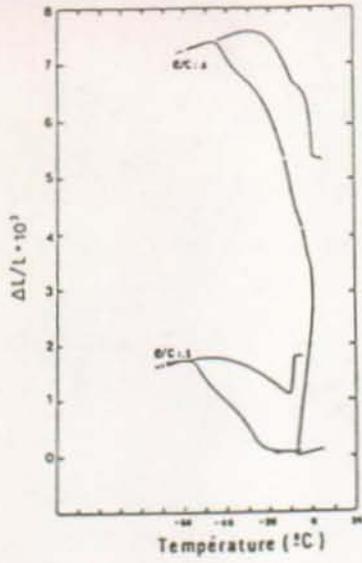


Fig. 33

Fractional length changes of hardened cement paste as a function of temperature for different water/cement ratios.

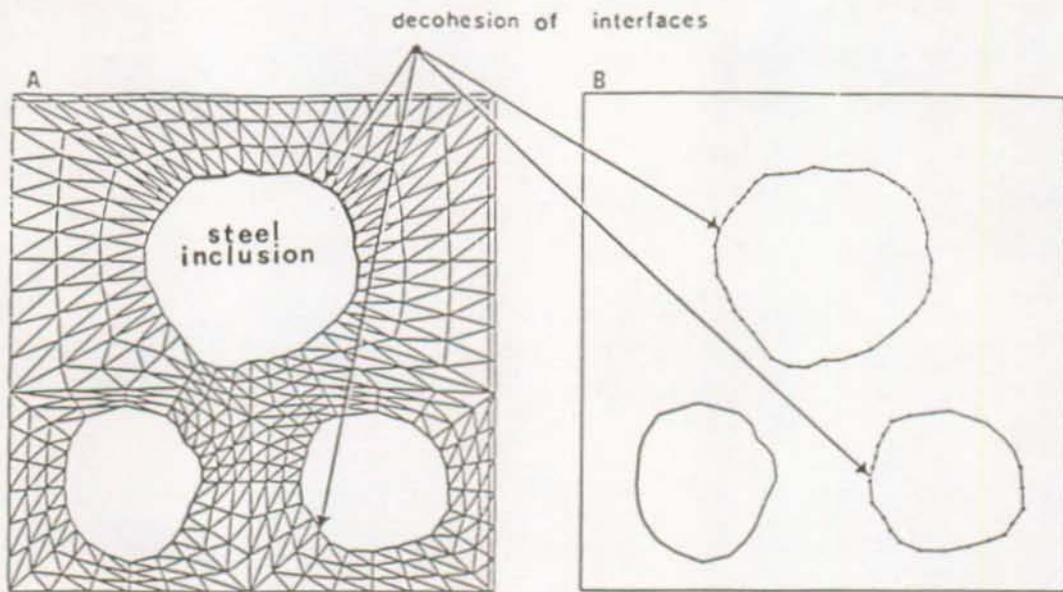


Fig. 34

Cracking of the matrix-aggregate interfaces caused by freezing induced swelling of the saturated porous matrix. Steel inclusions.

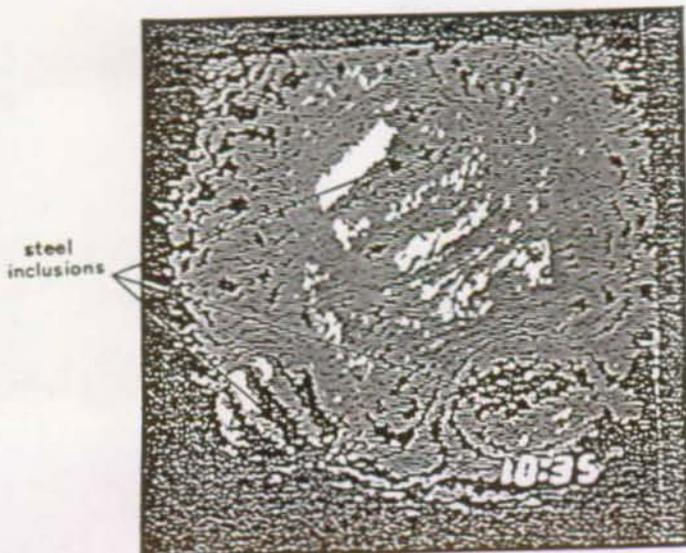


Fig. 35

Holographic interferogram taken at -8.2°C , at which temperature a sudden swelling of the matrix occurred. The photography clearly shows the rupture of the interfaces (discontinuity of the fringes).

8. CONCLUSIONS.

In this study, we have shown that it is possible to simulate in a realistic fashion the fracture process of complex materials such as concrete by taking into account their heterogeneous structure.

The material is represented by a composite structure formed by two phases, mortar matrix and aggregates. A third phase, with weak mechanical properties is introduced in order to take the mortar-aggregate interface into account.

The inhomogeneity of the mortar-matrix is introduced in the numerical modelling via a statistical distribution of the mechanical properties of the finite elements representing this phase.

The approach permits us to simulate the progressive evolution of the fracture process in composite structures loaded in tension, by which means the global mechanical behaviour of the material can be predicted.

The results of the analysis of several composite structures have revealed that parameters such as composition, shape of the inclusions, and strength of the interface have a pronounced influence on the fracture energy and play an important role in the post-peak behaviour of the material.

The observation of the crack patterns obtained by this analysis shows that the fracture process zone is confined to a narrow zone which finally degenerates into a macro-crack leading to the rupture of the material.

The degradation of the material due to the physico-mechanical incompatibility of the two phases and induced by hygral or thermal variations can be simulated in a realistic way.

Although this model is a two-dimensional one, it reflects nevertheless the real mechanisms observed in cracking of concrete.

The promising results obtained in this two dimensional approach and the continuously increasing power of the computers at our disposal, are two stimulating factors to pursue similar studies on three dimensional composite structures, which can describe the structure of the material more realistically.

Curriculum vitae

Nom et prénom :SADOUKI ; Hamid

Lieu et date
de naissance :Algérie, le 7 Novembre 1951

Nationalité :Algérienne

Etat civil :marié, un enfant

Etudes :6 années d'école primaire (Algérie)
:7 années d'école secondaire (Algérie)
:1 année à la Faculté des Sciences, Uni. d'Alger
:5 1/2 années à l'École Polytechnique Fédérale de
Lausanne (Suisse)

Diplômes et
Certificats :Baccalauréat de l'enseignement secondaire (Algerie)
:Certificat d'études supérieures en maths et physique
(Université d'Alger)
:Diplôme d'ingénieur-physicien (EPF-Lausanne)
:Certificat de 3-ième Cycle en Statistiques (EPF-L)
:Certificat de 3-ième Cycle en Informatique Technique
(EPF-L)

Emplois exercés :1 année assistant au dép. de physique (EPF-L)
:2 années enseignant à l'École Sup. des Transmissions
d'Alger (dans le cadre du service national)
:depuis Avril 1981 Assistant au dép. des matériaux
(EPF-L).

