COMMUTATION D'UNE MATRICE AVEC SA DERIVEE

THESE No 602 (1985)

PRESENTEE AU DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

ECOLE POLYTECHNIQUE FEDERALE DE LAUSANNE

POUR L'OBTENTION DU GRADE DE DOCTEUR ES SCIENCES

PAR

JEAN-CLAUDE EVARD

Mathématicien diplômé EPFL
originaire de Chézard-St-Martin (NE)

acceptée sur proposition du jury :

Prof. R. Cairoli, rapporteur
Prof. S.D. Chatterji, corapporteur
Prof. A. Derighetti, corapporteur
Prof. M.-A. Knus, corapporteur

Lausanne, EPFL
1986

AVANT - PROPOS

Le sujet de cette thèse est l'étude des solutions de l'équation différentielle matricielle non linéaire AA' = A'A. Une partie importante de notre travail a été consacrée à l'élaboration des outils appropriés à cette étude dans les deux domaines suivants :

(a) Le domaine de l'algèbre linéaire "paramétrée" qui traite notamment des matrices fonctions d'une variable, de la régularité de leurs valeurs propres et de leurs sous-espaces spectraux, des sous-espaces vectoriels fonctions d'une variable, etc.

(b) Le domaine des ensembles de matrices complexes carrées de même ordre (ou domaine des ensembles de transformations linéaires d'un espace vectoriel complexe de dimension finie) comprenant les ensembles commutatifs de matrices, la réduction simultanée d'un ensemble de matrices à une forme réduite, les sous-algèbres engendrées par une seule matrice (c'est-à-dire les ensembles de polynômes en une matrice fixée à coefficients scalaires) etc.

En raison de la grande étendue de ces domaines, nous avons décidé de limiter cette thèse à l'exposition de la partie centrale de son sujet accompagnée de quelques compléments. Nous présentons d'abord un résumé comparatif détaillé et commenté de l'ensemble des résultats de notre travail (faisant l'objet de plusieurs articles publiés ou en préparation) et de ceux obtenus par d'autres chercheurs. Nous rappelons notamment de quelle manière notre problème a été réduit au cours de travaux précédents. Nous présentons ensuite une méthode permettant d'entreprendre l'étude de la forme réduite de notre problème, ainsi que quelques applications montrant l'efficacité de cette méthode.

Le sujet principal de cette thèse est présenté au chapitre 1, le résumé mentionné ci-dessus est exposé au chapitre 2. Nous consacrons le chapitre 3 à la présentation d'une méthode de résolution de l'équation AA' = A'A due à I.J. Epstein que nous clarifions tout en montrant qu'elle s'applique à une large classe d'équations différentielles matricielles non linéaires. Nous en déduisons, au chapitre 4, notre propre méthode de résolution de l'équation AA' = A'A, mentionnée ci-dessus. Au chapitre 5, nous exposons une méthode permettant de construire aisément une famille de contre-exemples importants concernant le sujet de cette thèse. Enfin, divers compléments sont rejetés dans quatre annexes, notamment un résultat sur la séparation des valeurs propres d'une fonction matricielle continue.

TABLE DES MATIERES

NOTATION

$\mathbb{M}_{m\times n}$	$\mathbb{M}_n$ dénote l'ensemble des matrices $M = (m_{ij})$ à m lignes et n colonnes dont les coefficients m_{ij} appartiennent à $\mathbb{C}$. <u>Convention :</u> Les cas où $m=0$ ou $n=0$ sont admis, par exemple si $A \in \mathbb{M}_{m\times n}$, $B \in \mathbb{M}_{m\times p}$ et $C = (A \mid B)$, alors, dans le cas particulier où $p=0$, $C=A$.
<u>Convention :</u>	$\mathbb{C}^n$ est identifié à $\mathbb{M}_{n\times 1}$ et $\mathbb{C}$ est identifié à $\mathbb{M}_{1\times 1}$ et à $\mathbb{C}^1$.
$\mathbb{M}_n$	$\mathbb{M}_n = \mathbb{M}_{n\times n}$.
$\mathbb{M}_n^*$	$\mathbb{M}_n^*$ dénote le sous-ensemble de $\mathbb{M}_n$ formé des matrices inversibles.
I_n	I_n dénote la matrice identité dans $\mathbb{M}_n$.
$0_{m\times n}$	$0_{m\times n}$ dénote la matrice nulle dans $\mathbb{M}_{m\times n}$.
0_n	$0_n = 0_{n\times n}$.
<u>Convention :</u>	$A^0 = I_n$, pour tout $A \in \mathbb{M}_n$ (y compris $A = 0$).
$\bar{A}, {}^tA, A^*, {}^sA$	Si $A \in \mathbb{M}_{m\times n}$, alors $\bar{A}$ dénote la (matrice) conjuguée complexe de A (matrice de $\mathbb{M}_{m\times n}$ dont les coefficients sont les conjugués complexes des coefficients correspondants de A), ${}^tA$ dénote la transposée de A, A^* dénote l'adjointe de A, c'est-à-dire la matrice ${}^t\bar{A}$ et ${}^sA$ dénote la transposée secondaire de A (définie au numéro 3.8.6 de cette thèse).
Im A , Ker A	Si $A \in \mathbb{M}_{m\times n}$, alors Im A dénote l'image de A et Ker A dénote le noyau de A.
TrA, SpA, $\chi(A)$	Si $A \in \mathbb{M}_n$, alors TrA dénote la trace de A, SpA dénote le spectre de A (donc l'ensemble des valeurs propres complexes de A) et $\chi(A)$ dénote la caractéristique de Segre de A (voir paragraphe 3.2).
[A,B]	Si $A,B \in \mathbb{M}_n$, alors [A,B] dénote le commutateur de A et B, c'est-à-dire la matrice $AB - BA$.

$\prod_{i\in I} A_i$, $\prod_{i=1}^{p} A_i$	Voir paragraphe 3.5.
$\mathrm{diag}(B_1,\dots,B_p)$	Si $B_1 \in \mathbb{M}_{m_1},\dots,B_p \in \mathbb{M}_{m_p}$, alors $\mathrm{diag}(B_1,\dots,B_p) = \begin{pmatrix} B_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & B_p \end{pmatrix}$.
$\mathcal{N}_k$, $\mathcal{N}_\chi$	Voir paragraphe 3.2.
$I_{0\chi}$, I_χ	Voir paragraphe 4.2.
$f^{(o)}$, f', f'', f''', $f^{(k)}$	Si f est une application d'un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}$ dans un espace normé, alors $f^{(o)}$ dénote f; si de plus f possède une dérivée d'ordre $k \in \{1,2,\dots\}$, alors cette dérivée est dénotée par $f^{(k)}$; f', f'', f''' dénotent respectivement $f^{(1)}$, $f^{(2)}$, $f^{(3)}$.
$C^o(\Omega,F)$	Si Ω et F sont des espaces topologiques, alors $C^o(\Omega,F)$ dénote l'ensemble des applications continues de Ω dans F.
$D(\Omega,F)$, $C^k(\Omega,F)$, $A(\Omega,F)$	Si E et F sont des espaces normés sur $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R},\mathbb{C}\}$, si $k \in \{1,2,\dots\}$ et si Ω est un sous-ensemble ouvert de E, alors $D(\Omega,F)$, $C^k(\Omega,F)$, $C^\infty(\Omega,F)$ et $A(\Omega,F)$ dénotent les sous-ensembles de $C^o(\Omega,F)$ formés des applications respectivement dérivables, possédant une dérivée d'ordre k continue, possédant des dérivées de tout ordre, analytiques (au sens de Fréchet).
$\mathcal{D}_\chi(\Omega,\mathbb{M}_n)$, $\mathcal{D}^k_\chi(\Omega,\mathbb{M}_n)$	Voir paragraphe 3.2.
$\mathrm{Com}(\Omega,\mathbb{M}_n)$, $\mathrm{Pol}(\Omega,\mathbb{M}_n)$	Voir paragraphe 1.1.
$L(E,F)$	Si E et F sont des espaces vectoriels topologiques sur $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R},\mathbb{C}\}$, alors $L(E,F)$ dénote l'ensemble des applications linéaires continues de E dans F.
$L(E)$	$L(E) = L(E,E)$.

Convention :	$M_{m\times n}$ est identifié à $L(\mathbb{C}^n,\mathbb{C}^m)$. Si $A\in M_{m\times n}$, alors A dénote aussi l'application φ de $\mathbb{C}^n$ dans $\mathbb{C}^m$ définie par $\varphi(x) = Ax$, pour tout $x\in\mathbb{C}^n$.
δ_{ij}	δ_{ij} dénote le symbole de Kronecker, défini comme suit : si I est un ensemble, alors pour tout $i,j\in I$, $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$ et $\delta_{ii} = 1$.
id_E	Si E est un ensemble, alors id_E dénote l'application identique de E dans E.
F^E	Si E et F sont des ensembles, alors F^E dénote l'ensemble des applications de E dans F.
$f\|_S$	Si f est une application d'un ensemble E dans un ensemble F et si S est un sous-ensemble de E, alors $f\|_S$ dénote la restriction de f à S.
Convention :	Si E et F sont des ensembles et si $y\in F$, alors y dénote aussi l'application constante de E dans F définie par $y(x) = y$ pour tout $x\in E$.
$\bar{S}$	Si S est un sous-ensemble d'un espace topologique, alors $\bar{S}$ dénote l'adhérence de S.
span S	Si S est un sous-ensemble d'un espace vectoriel E, alors span S dénote le plus petit sous-espace vectoriel contenant S.
dim E	Si E est un espace vectoriel de dimension finie, alors dim E dénote la dimension de E.
$S_1\oplus\ldots\oplus S_p$	Si $S_1,\ldots,S_p$ sont des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel, alors $S_1\oplus\ldots\oplus S_p$ dénote la somme directe de $S_1,\ldots,S_p$.
$S^\perp$	Si S est un sous-ensemble d'un espace vectoriel H muni d'un produit scalaire, alors $S^\perp$ dénote l'ensemble des vecteurs de H qui sont orthogonaux à tous les vecteurs de S.
$S_1\perp S_2$	Si S_1 et S_2 sont des sous-ensembles d'un espace vectoriel muni d'un produit scalaire, alors $S_1\perp S_2$ dénote la relation $S_1\subset(S_2)^\perp$.
$(a\|b)$	Si $a,b\in\mathbb{C}^n$, alors $(a\|b)$ dénote le produit scalaire de a et b : $(a\|b) = b^*a$.

<u>Convention :</u> Si $\Omega, E_1, \dots, E_p, F$ sont des ensembles et si φ est une application de $E_1 \times \dots \times E_p$ dans F, alors φ dénote aussi l'application ψ de $E_1^\Omega \times \dots \times E_p^\Omega$ dans F^Ω définie par $(\psi(a_1, \dots, a_p))(t) = \varphi(a_1(t), \dots, a_p(t))$, pour tout $a_1 \in E_1^\Omega, \dots, a_p \in E_p^\Omega$, $t \in \Omega$. <u>Exemples :</u>

$(\dim E)(t) = \dim E(t)$,

$(a|b)(t) = (a(t)|b(t))$,

$(S^\perp)(t) = S(t)^\perp$,

$(A^*)(t) = (A(t))^*$,

$(\mathrm{Im}A)(t) = \mathrm{Im}A(t)$,

$(\mathrm{Sp}A)(t) = \mathrm{Sp}A(t)$,

$[A,B](t) = [A(t),B(t)]$,

$\left(\prod_{i\in I} A_i\right)(t) = \prod_{i\in I} A_i(t)$,

$(\mathrm{diag}(B_1, \dots, B_p))(t) = \mathrm{diag}(B_1(t), \dots, B_p(t))$.

On observera que dans ce cas la notation $(a|b)$ constitue un <u>abus de notation</u>, car $(a|b) = b^* a$ est une application de Ω dans $\mathbb{C}$; la notation ImA est ambiguë, car elle peut aussi être comprise comme dénotant l'ensemble $A(\Omega) = \{A(t) \in \mathbb{M}_n \mid t \in \Omega\}$.

<u>Convention :</u> Si $\Omega, E_1, \dots, E_p$ sont des ensembles et si R est une relation définie sur $E_1 \times \dots \times E_p$, alors R dénote aussi la relation S définie sur $E_1^\Omega \times \dots \times E_p^\Omega$ de la manière suivante : quels que soient $a_1 \in E_1^\Omega, \dots, a_p \in E_p^\Omega$, la relation $S(a_1, \dots, a_p)$ est satisfaite si et seulement si pour tout $t \in \Omega$ la relation $R(a_1(t), \dots, a_p(t))$ est satisfaite.

<u>Exemple :</u> Si S_1 et S_2 sont des applications d'un ensemble Ω dans l'ensemble des sous-ensembles d'un espace vectoriel muni d'un produit scalaire, alors la relation $S_1 \perp S_2$ est satisfaite si et seulement si, pour tout $t \in \Omega$, la relation $S_1(t) \perp S_2(t)$ est satisfaite.

TERMINOLOGIE

<u>Convention :</u>	D'une manière analogue aux conventions de notation, la terminologie relative aux matrices s'étend de manière naturelle aux fonctions matricielles. Par exemple, si A est une application d'un ensemble Ω dans $\mathbb{M}_n$, nous dirons qu'une application α de Ω dans $\mathbb{C}$ est une valeur propre de A si, en chaque point $t \in \Omega$, $\alpha(t)$ est une valeur propre de A(t). Nous définissons de la même manière les notions de vecteur propre, sous-espace propre (généralisé), dimension d'un sous-espace propre, multiplicité algébrique d'une valeur propre, déterminant, j^e colonne, etc, d'une fonction matricielle. Nous parlons de même de fonction matricielle hermitienne, triangulaire, nilpotente (d'indice k), etc. Nous dirons que des applications A et B de Ω dans $\mathbb{M}_n$ commutent (sur Ω) si, en chaque point $t \in \Omega$, A(t) et B(t) commutent. Par contre, cette convention ne s'applique pas à la négation d'une propriété : par exemple, nous dirons que A et B ne commutent pas s'il existe un point $t \in \Omega$ où A(t) et B(t) ne commutent pas.
Adjointe (matrice)	Voir notation A^*.
Bifurcation des valeurs propres	Voir [22] p. 148-149.
Biorthogonales (familles)	Voir paragraphe 4.2.
Caractéristique de Segre	Voir paragraphe 3.2.
Commutateur	Voir notation [A,B].
Commutatif	Si S est un sous-ensemble de $\mathbb{M}_n$, on dit que S est commutatif si pour tout $A,B \in S$, A et B commutent. Si A est une application de Ω dans $\mathbb{M}_n$, on dit que A est commutative si l'ensemble $A(\Omega) = \{A(t) \mid t \in \Omega\}$ l'est.

Commutation avec la dérivée (d'ordre k)	Si Ω est un sous ensemble ouvert de $\mathbb{R}$ et si A est une application de Ω dans $\mathbb{M}_n$ possédant une dérivée d'ordre k, alors on dit (conformément à la convention énoncée ci-dessus) que A commute avec sa dérivée d'ordre k si, en chaque point t de Ω, A(t) commute avec $A^{(k)}(t)$. Une définition plus générale est énoncée dans [22] p. 147.
Conjuguée complexe (matrice)	Voir notation $\bar{A}$.
Conservative (fonction matricielle)	Voir paragraphe 3.3.
Cyclique (matrice)	Voir [22], p. 149-150.
Fonction matricielle	On appelle fonction matricielle toute application à valeurs dans $\mathbb{M}_{m\times n}$.
Fonction matricielle de Jordan	On appelle fonction matricielle de Jordan toute fonction matricielle dont les valeurs sont des matrices de Jordan de $\mathbb{M}_n$.
Nilpotence étalée	Si A est une application d'un ensemble Ω dans $\mathbb{M}_n$ nilpotente d'indice k, on dit que la nilpotence d'indice k est étalée sur Ω si, pour tout $t_1, \ldots, t_k \in \Omega$, $A(t_1)\ldots A(t_k)=0$.
Projecteur spectral, sous-espace spectral	Voir annexe 1, ainsi que [22], p. 157-158.
Transposée secondaire	Voir numéro 3.8.6.

CHAPITRE 1

INTRODUCTION

1.1 SUJET DE CETTE THESE

Dans un article [9] paru en 1963, I.J. Epstein a présenté une méthode pour résoudre l'équation différentielle matricielle

$$A(t)A'(t) = A'(t)A(t), \quad t \in \Omega ,$$

qui exprime la commutation d'une fonction matricielle $A \in D(\Omega,\mathbb{M}_n)$ avec sa dérivée A' sur un intervalle ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}$. Il a réduit la résolution de cette équation non linéaire à la résolution d'une équation différentielle matricielle linéaire. Le sujet de ce travail est l'étude des solutions de l'équation $AA' = A'A$.

Une classe importante de solutions de cette équation est celle, que nous désignerons par $\mathrm{Com}(\Omega,\mathbb{M}_n)$, formée des fonctions matricielles $A \in D(\Omega,\mathbb{M}_n)$ *commutatives*, c'est-à-dire telles que

$$A(t)A(s) = A(s)A(t), \quad s,t \in \Omega .$$

Cependant cette classe n'englobe pas toutes les solutions; il existe en effet des fonctions matricielles extrêmement simples et régulières, par exemple des polynômes en $t \in \mathbb{R}$ à coefficients dans $\mathbb{M}_n$:

$$A(t) = \sum_{i=o}^{m} A_i t^i , \quad t \in \mathbb{R}, \ A_o ,\ldots, A_m \in \mathbb{M}_n , \ (m,n) > (3,3),$$

qui commutent avec leur dérivée, mais ne sont commutatives sur aucun intervalle. Nous présenterons au chapitre 5 de cette thèse une méthode permettant de trouver très facilement de telles fonctions.

Une partie de la classe $\mathrm{Com}(\Omega,\mathbb{M}_n)$ est constituée de fonctions matricielles de structure très simple, à savoir la sous-classe $\mathrm{Pol}(\Omega,\mathbb{M}_n)$

des polynômes en une matrice constante $C \in \mathbb{M}_n$ à coefficients dans $D(\Omega,\mathbb{C})$:

$$A(t) = \sum_{i=o}^{m} f_i(t)C^i \ , \quad t \in \Omega \ , \quad f_o ,\dots, f_m \in D(\Omega,\mathbb{C}).$$

L'inclusion $\mathrm{Pol}(\Omega,\mathbb{M}_n) \subset \mathrm{Com}(\Omega,\mathbb{M}_n)$ est stricte : en effet, il existe des couples de matrices A_o , $B_o \in \mathbb{M}_n$ qui commutent, mais ne peuvent pas être exprimées comme polynômes en une seule matrice $C \in \mathbb{M}_n$ (voir par exemple [52, p. 275]). Avec un tel couple de matrices A_o , B_o , la fonction matricielle A définie par

$$A(t) = t\,A_o + (1-t)B_o \ , \qquad t \in \mathbb{R} \ ,$$

appartient à $\mathrm{Com}(\mathbb{R},\mathbb{M}_n)$, mais pas à $\mathrm{Pol}(\mathbb{R},\mathbb{M}_n)$.

Une partie importante de ce travail est consacrée à la recherche de conditions sous lesquelles les solutions de l'équation $AA' = A'A$ appartiennent à l'une des deux classes mentionnées ci-dessus.

1.2 MOTIVATION GENERALE

Le calcul différentiel matriciel est couramment utilisé par les ingénieurs et les mathématiciens et le nombre de ses applications ne fait que croître. Dans ces applications, le problème de la commutation d'une fonction matricielle avec sa dérivée apparaît constamment, même dans les calculs les plus élémentaires. Les exemples suivants permettent de constater que les formules usuelles du calcul différentiel avec les fonctions scalaires s'appliquent aux fonctions matricielles qui commutent avec leur dérivée. Soit $A \in D(\Omega,\mathbb{M}_n)$ tel que $AA' = A'A$. Alors

$$(A^3)' = A'A^2 + AA'A + A^2A' = 3\,A^2A' \ ,$$

$$(A^n)' = n\,A^{n-1}A' \ ,$$

$$(A^{-1})' = -A^{-1}A'A^{-1} = -A^{-2}A' \ ,$$

$$(e^A)' = e^A\,A' \ ,$$

$$(f(A))' = f'(A)A' \ .$$

Dans la troisième formule, on suppose que $A(t)$, $t \in \Omega$, possède un inverse et dans la dernière que $f \in D(\Omega,\mathbb{C})$ satisfait aux conditions usuelles pour que $f(A(t))$ et $f'(A(t))$, $t \in \Omega$, soient définies.

Des motivations à l'étude des solutions de l'équation $AA' = A'A$ apparaissent explicitement dans [9], [18, th. 7.3.1 p. 140, th. 7.7.1 p. 160], ainsi que dans les publications [28] à [45].

1.3 MOTIVATION PARTICULIERE

Le problème de la commutation d'une fonction matricielle différentiable avec sa dérivée est étroitement lié à la résolution de l'équation différentielle linéaire homogène

$$x'(t) = A(t)\,x(t), \qquad t \in \Omega,$$

où $\Omega \subset \mathbb{R}$ est un intervalle ouvert non vide, $A \in C^{o}(\Omega,\mathbb{M}_n)$ et $x \in C^{1}(\Omega,\mathbb{C}^n)$ est l'inconnue.

Ce lien apparaît clairement dans l'article [34] publié par W. Magnus en 1954, où il est montré que les solutions de cette équation sont de la forme

$$x(t) = e^{B(t)}c,$$

où $c \in \mathbb{C}^n$ et ($[P,Q]$ désignant $PQ-QP$)

$$\begin{aligned}
B(t) = & \int_o^t A(\tau)d\tau + \frac{1}{2}\int_o^t \left[A(\tau_1),\ \int_o^{\tau_1} A(\tau_2)d\tau_2\right]d\tau_1 \\
& + \frac{1}{4}\int_o^t \left[A(\tau_1),\ \int_o^{\tau_1}\left[A(\tau_2),\ \int_o^{\tau_2} A(\tau_3)d\tau_3\right]d\tau_2\right]d\tau_1 \\
& + \frac{1}{12}\int_o^t \left[\left[A(\tau_1),\ \int_o^{\tau_1} A(\tau_2)d\tau_2\right],\ \int_o^{\tau_1} A(\tau_2)d\tau_2\right]d\tau_1 \\
& + \dots \ ,
\end{aligned}$$

Dans le cas particulier où

$$C(t) = \int_0^t A(\tau)d\tau \ , \qquad t \in \Omega \ ,$$

commute avec sa dérivée A(t), cette expression se réduit à

$$B(t) = \int_0^t A(\tau)d\tau \ .$$

D'autres présentations de cette motivation apparaissent dans [18, th. 7.3.1 p. 140], [28, th. 6 p. 75], [30, p. 38], [33], [35], [36], [37, p. 277-278], [38]. Une généralisation au cas où Ω est un ouvert contenu dans $\mathbb{R}^m$ est mentionnée dans [16].

CHAPITRE 2
RESUME DES RESULTATS OBTENUS

2.1 INTRODUCTION

Ce résumé contient la liste des résultats de cette thèse groupés par centres d'intérêt et commentés. Au fur et à mesure que nous avancions dans notre recherche, nous avons trouvé de nouvelles références à des travaux déjà publiés dans le même domaine. A plusieurs reprises nous avons été amenés à constater que certains d'entre eux contenaient des parties non négligeables de nos propres résultats. Nous présentons ces travaux en précisant quelles généralisations et améliorations nous leur avons finalement apportées.

Nous exposons les résultats en deux parties : la première contient ceux d'intérêt général, que nous avons établis ou améliorés en vue de forger les outils nécessaires à la réalisation de nos objectifs, tandis que la seconde contient ceux qui concernent le sujet même de cette thèse.

2.2 RESUME DES RESULTATS D'INTERET GENERAL

2.2.1 Condition pour qu'un sous-espace vectoriel E(t) ne dépende pas de t

De nombreux problèmes ont une solution générale de la forme

$$f(t) = \sum_i \alpha_i(t)e_i \ , \qquad t \in \Omega \ ,$$

où les e_i sont des vecteurs d'un espace normé $\mathbb{F}$, les α_i sont des fonctions scalaires suffisamment régulières choisies arbitrairement et Ω est un ouvert connexe d'un espace normé $\mathbb{E}$. Pour résoudre de tels problèmes, la méthode suivante peut être appliquée. Tout d'abord, on montre que les solutions du problème considéré sont de la forme

$$f(t) = \sum_i \beta_i(t)v_i(t) \ , \qquad t \in \Omega \ ,$$

où les v_i dont des fonctions à valeurs dans $\mathbb{F}$ et les β_i sont comme les α_i ci-dessus. Ensuite, on montre que le sous-espace vectoriel $E(t)$ engendré par les $v_i(t)$ ne dépend pas de t et est égal au sous-espace vectoriel engendré par les e_i .

Cette méthode s'applique à l'un des problèmes que nous avons décrit dans l'introduction, à savoir celui d'établir des conditions sous lesquelles les solutions de l'équation $AA' = A'A$ sont des polynômes en une matrice constante C, *autrement dit*

$$A(t) = \sum_i \alpha_i(t) e_i , \qquad t \in \Omega ,$$

où $e_i = C^i$. Dans ce cas, elle a permis de simplifier considérablement la démonstration du théorème 5.3 de [22].

Afin de pouvoir appliquer cette méthode, il est nécessaire de disposer d'une condition assurant qu'un sous-espace vectoriel $E(t)$ d'un espace normé $\mathbb{F}$ ne dépend pas de $t \in \Omega$, où Ω est un ouvert connexe d'un espace normé $\mathbb{E}$. Nous avons établi une telle condition dans le théorème 2.2 de [22] dans le cas particulier où $E(t)$ est un sous-espace vectoriel de dimension finie constante. Dans ce théorème,

$$E(t) = \text{span}\,\{v_1(t), \ldots, v_m(t)\}, \qquad t \in \Omega ,$$

et l'hypothèse principale est que les dérivées de $v_1 , \ldots , v_m$ au point t prennent leurs valeurs dans $E(t)$. Dans le cas particulier où $\mathbb{E} = \mathbb{R}^q$, les hypothèses peuvent être légèrement affaiblies (cf corollaire 2.3 de [22]).

Cette condition apparaît sans être énoncée explicitement dans la démonstration du lemme 3.4 de l'article [17] de S. Goff, où les arguments utilisés ne la démontrent cependant que dans le cas particulier où $\mathbb{F}$ est de dimension finie et $\mathbb{E} = \mathbb{R}$ et requièrent une hypothèse que nous n'avons pas utilisée, à savoir la continuité des dérivées des fonctions vectorielles $v_1 , \ldots v_m$. Dans l'annexe de cette thèse, nous exposons l'énoncé de la condition et la démonstration que nous avons extraits de la démonstration de S. Goff mentionnée ci-dessus. Nous présentons également deux autres démonstrations très courtes de la condition, où les dérivées $v_1', \ldots v_m'$ ne sont pas supposées continues, mais elles ne sont valables que dans le cas où $\mathbb{F}$ est de dimension finie.

Dans [24], nous avons généralisé, avec une démonstration plus simple, le théorème 2.2 de [22] au cas où E(t) est de dimension quelconque et de la forme

$$E(t) = \pi(t)(E_o), \qquad t \in \Omega .$$

L'hypothèse principale pour que E(t) soit constant est que

$$\pi'(t)(E_o) \subset E(t), \qquad t \in \Omega .$$

Le théorème 2.2 de [22] est un corollaire immédiat de cette généralisation. Nous le déduisons en définissant

$$E_o = E(t_o)$$

et

$$\pi(t)\left(\sum_{i=1}^{m} c_i v_i(t_o)\right) = \sum_{i=1}^{m} c_i v_i(t) , \qquad t \in \Omega ,$$
$$c_1 , \ldots , c_m \in \mathbb{C} .$$

Cependant le problème de généraliser le théorème 2.2 de [22] directement en remplaçant $\{v_1(t),\ldots,v_m(t)\}$ par $\{v_1(t),v_2(t),\ldots\}$ reste ouvert.

Nous avons aussi montré dans [24] qu'un projecteur P(t) possédant une dérivée P'(t) est constant si et seulement s'il commute avec elle.

Les conditions assurant qu'un sous-espace vectoriel E(t) est constant s'appliquent également aux problèmes où il s'agit de prouver que deux fonctions matricielles A et B semblables en chaque point :

$$A(t) = P(t)B(t)P(t)^{-1} , \qquad P(t) \in \mathbb{M}_n^* , \qquad t \in \Omega ,$$

sont en fait *globalement semblables* :

$$A(t) = P_o B(t) P_o^{-1} , \qquad t \in \Omega , \qquad P_o \in \mathbb{M}_n^* .$$

Une telle application a été effectuée avec succès dans la démonstration de l'un des principaux théorèmes concernant le sujet de cette thèse, à savoir le théorème 3.5 de [22].

Il s'est ainsi avéré que la condition assurant qu'un sous-espace vectoriel E(t) est constant que nous avons établie est non seulement l'outil principal de cette thèse, mais aussi un résultat ayant d'importantes perspectives d'applications.

2.2.2 Remarque sur une condition pour qu'une application soit constante

Afin d'établir notre condition assurant qu'un sous-espace vectoriel E(t) est indépendant de t, nous avons d'abord montré qu'elle implique que l'application $t \to E(t)$ est localement constante et ensuite nous avons cherché un lemme permettant de passer de la constance locale à la constance globale. Le lemme suivant se trouve à la page 46 du livre [49] de H. Cartan :

Lemme : *Soit* X *un espace topologique connexe non vide,* Y *un espace topologique séparé et* f *une application continue de* X *dans* Y *constante au voisinage de chaque point de* X. *Alors* f *est constante sur tout* X.

Pour pouvoir appliquer ce lemme au cas d'un sous-espace vectoriel E(t) de dimension finie constante d, il faut au préalable munir l'ensemble des sous-espaces vectoriels de dimension d d'une topologie séparée pour laquelle l'application $t \to E(t)$ est continue.

Nous avons remarqué que cette complication peut être évitée et que ce lemme se généralise aisément au cas où f n'est pas continue, Y n'est pas séparé et Y n'est muni d'aucune topologie. Cette généralisation fait l'objet du lemme 2.1 de [22].

Il est clair que ce lemme a également un champ d'applications très étendu.

2.2.3 Séparation des valeurs propres d'une fonction matricielle continue

Dans la première partie de la démonstration de l'un des principaux résultats connus sur les solutions de l'équation AA' = A'A, à savoir le théorème 3.5 de [22], nous avons établi implicitement le théorème suivant exprimant la possibilité de séparer les valeurs propres d'une fonction matricielle continue :

Théorème. *Soit* Ω *un ouvert d'un espace de Banach* $\mathbf{E}$, $k \in \{o,1,2,\dots\}$ $A \in C^k(\Omega, \mathbf{M}_n)$, $t_o \in \Omega$, $\mu_1, \dots, \mu_p \in \mathbf{C}$ *les valeurs propres de* $A(t_o)$, $m_1, \dots, m_p$ *leurs multiplicités algébriques,* $W_1, \dots, W_p$ *des voisinages disjoints deux à deux de* $\mu_1, \dots, \mu_p$. *Alors il existe un voisinage* $V_o \subset \Omega$ de t_o, $P \in C^k(V_o, \mathbf{M}_n^*)$, $B_i \in C^k(V_o, \mathbf{M}_{m_i})$, $i = 1,\dots,p$, *tels que*

$$A(t) = P(t)\mathrm{diag}(B_1(t),\dots,B_p(t))P(t)^{-1} ,$$

$$\mathrm{Sp}B_1(t) \subset W_1, \dots, \mathrm{Sp}B_p(t) \subset W_p , \qquad t \in V_o .$$

Nous démontrons dans l'annexe de cette thèse ce théorème dont l'intérêt général ne nous est apparu qu'après la publication de [22].

2.2.4 Remarque sur une condition pour que deux sous-espaces vectoriels soient isomorphes

Dans la démonstration du théorème de séparation des valeurs propres mentionné ci-dessus, il faut montrer que chaque sous-espace spectral de A(t) est de dimension localement constante. Pour cela nous appliquons un théorème dû à T. Kato [51, p. 33 - 34] montrant que si deux projecteurs dans un espace de Banach sont suffisamment proches, leurs images sont isomorphes. Dans cette application, il est nécessaire de savoir que cet isomorphisme peut être réalisé tout simplement par les projecteurs eux-mêmes, ce qui nous a conduits à une simplification importante de la démonstration publiée par T. Kato et à une légère amélioration du théorème. Cette amélioration fait l'objet du lemme 3.1 de [22].

2.2.5 Conditions pour qu'une famille de matrices soit une famille de polynômes en une matrice fixée

Comme nous l'avons signalé dans l'introduction, un de nos objectifs est de trouver des conditions assurant que les solutions de l'équation $AA' = A'A$ appartiennent à la classe $\mathrm{Pol}(\Omega, \mathbf{M}_n)$ des polynômes en une matrice constante. Dans ce but, nous avons établi [22, th. 6.2] la condition suivante :

Condition 1 : *Toute famille* $A = (A(t))_{t\in\Omega}$ *de matrices de la forme*

$$A(t) = P_o \operatorname{diag}\left(\sum_{i=o}^{a_1} f_{1i}(t) C_1^i, \ldots, \sum_{i=o}^{a_p} f_{pi}(t) C_p^i \right) P_o^{-1},$$

$$f_{1o}(t), \ldots, f_{pa_p}(t) \in \mathbb{C}, \qquad t \in \Omega,$$

$$C_1, \ldots, C_p \in \mathbf{M}_n, \qquad P_o \in \mathbf{M}_n^*,$$

est une famille de polynômes en une matrice constante $C \in \mathbf{M}_n$:

$$A(t) = \sum_{i=o}^{d-1} f_i(t) C^i, \qquad t \in \Omega,$$

où d *est la somme des degrés des polynômes minimaux des matrices* $C_1, \ldots C_p$.

Cette condition nous a permis d'améliorer [22, th. 7.1] le résultat principal de [19], publié par I.J. Epstein et L. Kotin en 1982, en fixant une borne non triviale au degré du polynôme de leur conclusion (cf 2.3.6).

Après la parution de [22], nous avons trouvé une importante simplification de la démonstration de la condition ci-dessus et établi l'autre condition suivante :

Condition 2 : *Soit* $A = (A(t))_{t\in\Omega}$ *une famille commutative de matrices de* $\mathbf{M}_n$ *dont chaque sous-espace propre est de dimension extrême. Alors* A *est une famille de polynômes en une matrice constante* $C \in \mathbf{M}_n$:

$$A(t) = \sum_{i=o}^{d-1} f_i(t) C^i, \qquad f_o(t), \ldots, f_{d-1}(t) \in \mathbb{C}, \qquad t \in \Omega,$$

$$d \in \{1, 2, \ldots\}.$$

Si de plus Ω est un espace topologique connexe, A *est continue et a une caractéristique de Segre constante, alors* d *est inférieur ou égal au degré (constant) du polynôme minimal de* A.

Ces deux conditions sont l'objet d'un article à paraître [25], où elles sont appliquées à l'étude des solutions analytiques de l'équation AA' = A'A. Chacune d'elles généralise le théorème bien connu [50, th. 3], publié en 1950, qui affirme que toute famille commutative de matrices diagonalisable est une famille de polynômes en une matrice fixée.

2.2.6 Notion de transposée secondaire d'une matrice

Dans l'énoncé du théorème 2, cas 5, de [9], l'auteur affirme que pour passer du cas $n_\rho > n_\sigma$ au cas $n_\rho < n_\sigma$, il suffit d'échanger le rôle des lignes et des colonnes de la matrice $X_{\rho\sigma}$, ce qui laisse croire qu'il suffit de transposer $X_{\rho\sigma}$. En fait, il faut effectuer l'opération que nous appellerons transposition secondaire de $X_{\rho\sigma}$.

Au chapitre 3 de cette thèse, nous définissons cette notion, à l'aide de laquelle nous éclaircissons l'énoncé du théorème mentionné ci-dessus. D'autre part, nous montrons que lorsque le produit des matrices A et B est défini, ${}^s(AB) = {}^sB\ {}^sA$, où s désigne la transposition secondaire; cette propriété permet de passer de l'un à l'autre des cas mentionnés ci-dessus sans calculs.

Remarquons qu'il est possible de définir quatre notions de transposition d'une matrice rectangulaire $A = (a_{ij})$ qui correspondent aux quatre bissectrices b_1, b_2, b_3, b_4 indiquées dans la figure ci-après :

L'opération de transposition secondaire mentionnée ci-dessus correspond à la symétrie par rapport à b_2 .

2.2.7 <u>Complément à un lemme sur les commutateurs itérés</u>

Dans un article [14] paru en 1974, S.L. Campbell a prouvé que les fonctions analytiques définies sur un intervalle dans $\mathbb{R}$, à valeurs dans l'espace des opérateurs linéaires hermitiens bornés d'un espace de Hilbert $\mathbb{H}$ séparable qui commutent avec leur dérivée sont commutatives. L'outil principal de sa démonstration est le lemme suivant :

<u>Lemme.</u> *Soient* $S , T \in L(H)$ *des opérateurs hermitiens satisfaisant à la condition*

$$[S , [S , T]] = 0 .$$

Alors $[S , T] = 0$.

Nous avons complété ce lemme en montrant que dans le cas particulier où $\mathbb{H} = \mathbb{C}^n$, il est encore valable lorsque S est une matrice diagonalisable et T est une matrice quelconque. Ce complément se trouve dans l'annexe de cette thèse. Nous pensions l'appliquer pour montrer que, dans le cas où $\mathbb{H} = \mathbb{C}^n$, les solutions analytiques diagonalisables de l'équation $AA' = A'A$ sont commutatives, mais une autre méthode, nous a permis dans [25] de généraliser ce résultat au cas où $A(t)$ n'a que des espaces propres de dimensions extrêmes. Il sera probablement utile dans l'étude des polynômes à coefficients dans M_n qui commutent avec leur dérivée, car dans cette étude les commutateurs itérés sont fréquemment utilisés.

Signalons que des commutateurs itérés de la forme $[S,[S,T]]$ sont utilisés dans les articles [29] et [40].

2.2.8 Méthode permettant de réduire la résolution d'une classe d'équations différentielles matricielles non linéaires à la résolution d'équations différentielles linéaires

Au chapitre 3, nous remarquons que la méthode de résolution de l'équation $AA' = A'A$ due à I.J. Epstein que nous commentons au no 2.3.1 ci-dessous, s'applique à toute une classe d'équations différentielles matricielles non linéaires et permet de ramener la résolution de celles du premier ordre, en particulier l'équation $AA' = A'A$, à la résolution d'équations différentielles linéaires et d'équations algébriques.

2.3 RESUME DES RESULTATS RELATIFS A L'EQUATION $AA' = A'A$

2.3.1 Réduction de la résolution de l'équation non linéaire $AA' = A'A$ à la résolution d'une équation linéaire

Comme nous l'avons déjà mentionné dans l'introduction de cette thèse, I.J. Epstein a publié en 1963 dans [9] une méthode permettant de réduire la résolution de l'équation non linéaire $AA' = A'A$ à la résolution d'une équation différentielle linéaire et de l'équation matricielle $[J,[X,J]] = 0$, où J est la forme réduite de Jordan de A. Il a également publié la solution générale de cette dernière équation.

Au chapitre 3 de cette thèse, nous exposons cette méthode, avec la résolution détaillée et simplifiée autant que possible de l'équation

$[J, [X, J]] = 0$. Nous éclaircissons également le cas signalé au no 2.2.6 et présentons l'application aux équations différentielles matricielles mentionnée au no 2.2.8 ci-dessus.

Dans [20] paru en 1983, J.-M. Gracia a publié une autre méthode de réduction de la résolution de l'équation $AA' = A'A$ à la résolution d'une équation différentielle linéaire, mais les hypothèses exigées sont beaucoup plus fortes que celles de la méthode d'I.J. Epstein. Cette méthode passe par la transformation des matrices en vecteurs colonnes à l'aide du produit de Kronecker; les techniques utilisées par J.-M. Gracia pour l'établir sont extrêmement intéressantes.

2.3.2 Réduction de l'étude des solutions de l'équation $AA' = A'A$ au cas où $A(t_o)$ n'a qu'une seule valeur propre

Comme nous l'avons vu au no 2.2.3, il est toujours possible de séparer les valeurs propres d'une fonction matricielle continue A dans un voisinage V_o d'un point $t_o \in \Omega$ à l'aide d'une tranformation de la forme

$$A(t) = P(t)\operatorname{diag}(B_1(t),\dots,B_p(t))P(t)^{-1}\ , \qquad t \in V_o\ ,$$

où chacune des matrices $B_1(t_o),\dots,B_p(t_o)$ n'a qu'une seule valeur propre.

Un des principaux résultats connus sur le sujet de cette thèse est que si $A \in C^1(\Omega, \mathbb{M}_n)$ commute avec sa dérivée, alors la transformation ci-dessus peut être réalisée au moyen d'une matrice de passage $P_o \in \mathbb{M}_n^*$ constante :

$$A(t) = P_o\operatorname{diag}(B_1(t),\dots,B_p(t))P_o^{-1}\ , \qquad t \in V_o\ .$$

Ce résultat montre que $AA' = A'A$ équivaut à $B_1B_1' = B_1'B_1\ ,\dots,B_pB_p' = B_p'B_p$, autrement dit l'étude des solutions de l'équation $AA' = A'A$ se réduit au cas où A n'a qu'une seule valeur propre au point t_o .

Ce résultat a été publié en 1955 par M.J. Hellman [6] dans le cas où A est analytique et Ω est un ouvert de $\mathbb{R}$, puis en 1959 par

J.S. Bogdanov et G.N. Chebotarev [8] dans le cas où $A \in C^1(\Omega, \mathbb{M}_n)$ a une caractéristique de Segre constante et Ω est un ouvert de $\mathbb{R}$. Ce dernier résultat a été généralisé dans [16] publié en 1979 par G.N. Petrovskii au cas où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^m$.

Dans le théorème 3.8 de [22], nous avons généralisé ce résultat au cas où la caractéristique de Segre de A(t) dépend de t, les valeurs propres de A peuvent bifurquer au point t_o et Ω est un ouvert d'un espace de Banach. Nous avons obtenu cette généralisation en montrant que les sous-espaces spectraux de A sont constants dans un voisinage d'un point $t_o \in \Omega$ à l'aide de la condition du no 2.2.1. Afin de pouvoir appliquer cette condition à un sous-espace spectral E(t) de A(t), nous avons projeté une base de $E(t_o)$ au moyen du projecteur spectral P(t) sur E(t) et nous avons montré que cette projection d'une base est encore une base à l'aide du résultat du no 2.2.4.

2.3.3 Réduction de l'étude des solutions de l'équation AA' = A'A au cas où A est nilpotente

Le no 2.3.2 ci-dessus montre que l'étude des solutions de l'équation AA' = A'A se réduit au cas où $A(t_o)$ n'a qu'une seule valeur propre. Si t_o est un point où les valeurs propres de A ne bifurquent pas, alors A ne possède qu'une seule valeur propre α dans un voisinage de t_o. Si A est dérivable, $\alpha = \frac{TrA}{n}$ l'est aussi et l'équation AA' = A'A est équivalente à BB' = B'B, où $B = A - \alpha I_n$ est nilpotente. Le problème est ainsi réduit à l'étude des solutions nilpotentes de l'équation AA' = A'A.

D'une manière plus générale, le problème est réduit à l'étude des solutions $C = B + \gamma I_n$ de l'équation CC' = C'C ne possédant qu'une seule valeur propre γ, choisie a priori. Si γ ne s'annule pas, C est inversible.

2.3.4 Commutativité des solutions diagonalisables de l'équation AA' = A'A

Dans un article [14] paru en 1974, S.L. Campbell a montré, à l'aide du lemme que nous avons mentionné au no 2.2.7, que toute fonction analytique A d'une variable réelle à valeurs dans l'espace des opérateurs hermitiens linéaires bornés d'un espace de Hilbert séparable $\mathbb{H}$ qui commute avec sa dérivée sur un intervalle ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}$ est commutative sur tout Ω.

Indépendamment, dans un article [17] paru en 1981, S. Goff a prouvé ce même résultat, restreint au cas particulier où $\mathbb{H} = \mathbb{C}^n$ par une démonstration plus laborieuse, mais néanmoins intéressante.

Un résultat concernant le cas plus général des solutions de l'équation $AA' = A'A$ diagonalisables de classe C^1 a été publié par J.-M. Gracia dans [20] en 1983 puis amélioré dans [23]. Cet auteur a montré, dans le cas où Ω est un intervalle ouvert dans $\mathbb{R}$, que si $A \in C^1(\Omega, \mathbb{M}_n)$ commute avec sa dérivée, est diagonalisable en chaque point de Ω et a une caractéristique de Segre constante, alors A est commutative sur tout Ω. Dans sa démonstration, il utilise la transformation des matrices en vecteurs colonnes à l'aide du produit de Kronecker.

Dans le théorème 4.1 de [22], nous avons généralisé ce résultat de J.-M. Gracia au cas où Ω est un ouvert connexe d'un espace de Banach à l'aide de la diagonalisation par blocs décrite au no 2.3.2. D'autre part, au chapitre 3 de cette thèse, nous remarquons que le résultat de J.-M. Gracia est un corollaire de celui d'I.J. Epstein que nous avons commenté au no 2.3.1.

2.3.5 Commutativité des solutions cycliques de l'équation $AA' = A'A$

Une propriété caractéristique bien connue des matrices cycliques est que l'ensemble des matrices qui commutent avec une telle matrice C coïncide avec l'ensemble des polynômes en C. Nous avons rappelé cette propriété, avec une démonstration très courte, dans le lemme 5.1 de [22].

Dans un article [2] paru en 1950, G. Ascoli a montré, dans le cas où Ω est un intervalle ouvert dans $\mathbb{R}$, que si $A \in D(\Omega, \mathbb{M}_n)$ commute avec sa dérivée et est cyclique, alors non seulement A est commutative, mais de plus (conformément à la propriété mentionnée ci-dessus), A est un polynôme en $A(t_o)$:

$$A(t) = \sum_{i=o}^{n-1} f_i(t)A(t_o)^i , \qquad t \in \Omega ,$$

où t_o est n'importe quel point fixé de Ω et $f_o ,\dots,f_{n-1} \in D(\Omega,\mathbb{C})$.

Les trois auteurs suivants ont publié indépendamment des formes moins générales de ce résultat : J.F.P. Martin [11] en 1967, J. Dieudonné [15] en 1974 et D.L. Lukes [18, th. 7.5.10 p.155] en 1982. J.F.P. Martin exige des hypothèses plus fortes et les deux autres auteurs établissent le résultat seulement dans le cas particulier où A possède n valeurs propres distinctes en chaque point de Ω et A' est continue. Ce cas particulier fait l'objet d'un exercice de N. Bourbaki [47, ex. 10, p. IV-43] publié en 1976.

Dans le théorème 5.3 de [22], nous avons généralisé le résultat de G. Ascoli au cas où Ω est un ouvert connexe d'un espace normé et, grâce à notre condition assurant qu'un sous-espace vectoriel E(t) est constant (cf no 2.2.1), nous avons pu éviter la partie désagréable de sa belle démonstration.

2.3.6 Commutativité des solutions de l'équation AA' = A'A dont chaque sous-espace propre est de dimension extrême

Ce numéro résume une généralisation des résultats mentionnés dans les deux numéros précédents. Rappelons que le numéro 2.3.4 concerne les solutions diagonalisables de l'équation AA' = A'A, autrement dit les solutions dont chaque sous-espace propre est de dimension maximale, égale à la multiplicité algébrique de la valeur propre correspondante, tandis que le numéro 2.3.5 concerne les solutions cycliques, c'est-à-dire les solutions dont chaque sous-espace propre est de dimension minimale égale à 1.

Nous considérons maintenant l'ensemble des solutions de l'équation AA' = A'A dont chaque sous-espace propre est de dimension extrême, maximale ou minimale. Cet ensemble est intéressant parce que d'une part il contient en particulier les solutions cycliques et les solutions diagonalisables et d'autre part toute solution commutative lui appartenant est nécessairement un polynôme en une matrice constante C, en vertu de la condition 2 du no 2.2.5.

Dans un article [19] paru en 1982, I.J. Epstein et L. Kotin ont montré, dans le cas où Ω est un intervalle ouvert dans $\mathbb{R}$, que toute solution $A \in C^1(\Omega, \mathbb{M}_n)$ de l'équation $AA' = A'A$ dont chaque sous-espace propre est de dimension extrême et dont la caractéristique de Segre est constante est non seulement commutative, mais en plus (conformément à la condition 2 du no 2.2.5) un polynôme en une matrice constante $C \in \mathbb{M}_n$:

$$A(t) = \sum_{i=o}^{d-1} f_i(t) C^i , \qquad t \in \Omega ,$$

où $d = n$ et $f_o , \ldots , f_{d-1} \in C^1(\Omega, \mathbb{C})$.

Grâce aux résultats mentionnés aux no 2.3.2, 2.3.5 et 2.2.5, nous avons généralisé [22, th. 7.2] une forme locale de ce théorème au cas où Ω est un ouvert connexe d'un espace de Banach, sous des hypothèses légèrement plus faibles. Nous avons en outre montré que d est inférieur ou égal au degré (constant) du polynôme minimal de A.

2.3.7 Etude des solutions de l'équation AA' = A'A à l'aide d'une décomposition de A(t) en une somme de matrices de rang 1

Dans un article [7] paru en 1955, A. Terracini a étudié les solutions de l'équation $AA' = A'A$ en décomposant $A(t)$ en une somme de matrices de rang 1 de la forme

$$A(t) = \sum_{i=1}^{m} a_i(t) b_i(t)^* , \qquad a_1(t), \ldots, a_m(t), b_1(t), \ldots, b_m(t) \in \mathbb{C}^n ,$$
$$t \in \Omega .$$

A l'aide de calculs compliqués, il a obtenu des caractérisations relativement simples des solutions d'ordre $n \leqslant 4$ dont la caractéristique de Segre est constante.

Au chapitre 4 de cette thèse, nous combinons la méthode de résolution de l'équation $AA' = A'A$ d'I.J. Epstein (no 2.3.1) avec une décomposition de la forme ci-dessus. Par cette voie, nous obtenons sans calculs les caractérisations d'A. Terracini étendues aux solutions d'ordre n quelconque. Lorsque $n \geq 5$, la plupart de ces caractérisations sont très compliquées. Néanmoins cette méthode permet d'étudier le cas non résolu des solutions nilpotentes possédant au moins un sous-espace propre de dimension non extrême. Grâce à cette méthode, nous avons trouvé une nouvelle classe de solutions commutatives, ainsi que de nouvelles propriétés de certaines classes de solutions.

L'étude des solutions de l'équation $AA' = A'A$ par cette méthode sera complétée après la rédaction de cette thèse. Les résultats seront publiés dans [26].

2.3.8 Etude des solutions analytiques de l'équation $AA' = A'A$

D'une manière générale, les fonctions analytiques possèdent des propriétés globales dont les fonctions moins régulières sont dépourvues. Par exemple, dans l'énoncé du résultat de S.L. Campbell ou de S. Goff (no 2.3.4), si l'hypothèse que A est analytique est remplacée par l'hypothèse que A est de classe C^∞ , la conclusion de l'énoncé n'est plus valable globalement, comme le montre l'exemple suivant :

$$A(t) = f(t)I_n + g(t)C_1 , \qquad t \in]-\infty,o] ,$$

$$A(t) = f(t)I_n + g(t)C_2 , \qquad t \in [o,\infty[,$$

où $f , g \in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C})$,

$$0 = g(o) = g'(o) = g''(o) = \dots ,$$

$$g(1) \neq o , \quad g(-1) \neq o ,$$

$C_1 , C_2 \in \mathbb{M}_n$ sont hermitiennes et ne commutent pas. Dans ce cas, la fonction matricielle $A \in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{M}_n)$ commute avec sa dérivée et est hermitienne sur $\mathbb{R}$. D'autre part, elle est commutative sur chacun des intervalles

$]-\infty,o]$ et $[o,\infty[$, mais $A(1)$ et $A(-1)$ ne commutent pas.

Un des principaux théorèmes du livre de H. Baumgärtel [46] affirme que *dans le cas où* Ω est un ouvert connexe dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}^m$, si $A \in A(\Omega, \mathbb{M}_n)$, alors la caractéristique de Segre de A est constante sur un ouvert Ω_A dense dans Ω. Dans la suite de ce numéro, Ω et Ω_A désigneront les ouverts décrits ci-dessus.

A l'aide de ce résultat et de la condition 2 mentionnée au no 2.2.5, nous avons montré dans [25] que lorsque A est analytique, on peut supprimer l'hypothèse exigeant que la caractéristique de Segre de A est constante dans l'énoncé du théorème d'I.J. Epstein et L. Kotin commenté au no 2.3.6. Plus *précisément, nous avons montré que si* $A \in A(\Omega, \mathbb{M}_n)$ commute avec sa dérivée et n'a que des sous-espaces propres de dimensions extrêmes, alors non seulement A est commutative sur tout Ω, mais de plus, conformément à la condition 2 du no 2.2.5, elle est un polynôme en une matrice constante $C \in \mathbb{M}_n$:

$$A(t) = \sum_{i=o}^{d-1} f_i(t)C^i , \qquad t \in \Omega, \qquad f_o ,\dots,f_{d-1} \in A(\Omega,\mathbb{C}),$$

où d est le degré (constant) du polynôme minimal de $A|_{\Omega_A}$. Ce résultat généralise et améliore celui de S. Goff mentionné au no 2.3.4.

Une de ses conséquences immédiates est que toute fonction matricielle analytique A d'ordre $n=2$ commutant avec sa dérivée est commutative sur tout Ω et est de la forme

$$A(t) = f(t)I_2 + g(t)C , \qquad t \in \Omega ,$$

où $f, g \in A(\Omega,\mathbb{C})$ et $C \in \mathbb{M}_2$.

Nous avons aussi montré dans [25] que si $A \in A(\Omega, \mathbb{M}_n)$ commute avec sa dérivée et est cyclique en un point $t_o \in \Omega$, alors

$$A(t) = \sum_{i=o}^{n-1} f_i(t)A(t_o)^i , \qquad t \in \Omega ,$$

où $f_o, \dots, f_{n-1} \in A(\Omega,\mathbb{C})$.

2.3.9 <u>Etude des polynômes en $t \in \mathbb{R}$ à coefficients dans $\mathbb{M}_n$ qui commutent avec leur dérivée</u>

Nous résumons ici les résultats d'une étude sur les polynômes en $t \in \mathbb{R}$ à coefficients dans $\mathbb{M}_n$ qui commutent avec leur dérivée, autrement dit, les solutions de l'équation $AA' = A'A$ de la forme

$$A(t) = \sum_{i=o}^{d} A_i t^i \,, \qquad t \in \mathbb{R}, \qquad A_o, \dots, A_d \in \mathbb{M}_n \,.$$

Nous avons montré que toute solution de l'équation $BB' = B'B$ sur un intervalle ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}$ de la forme

$$B(t) = C_o + f(t)C_1 + g(t)C_2 \,, \qquad t \in \Omega \,,$$

où $f, g \in A(\Omega,\mathbb{C})$ et $C_o, C_1, C_2 \in \mathbb{M}_n$, est commutative sur Ω. Ce résultat montre, en particulier, que la solution A est commutative lorsque $d \leq 2$.

D'autre part, nous avons vu au no 2.3.8 que toute solution $B \in A(\Omega,\mathbb{M}_2)$ de l'équation $BB' = B'B$ est commutative. Par conséquent, la solution A est commutative lorsque $n \leq 2$.

Dans un article [3] publié en 1952, H. Schwerdtfeger a montré que la solution A est également commutative lorsque $n = d = 3$. Pour établir ce résultat, il a étudié un système de 45 équations du 2e degré à 36 variables. Nous montrons ce résultat par une méthode beaucoup plus simple, à l'aide du théorème bien connu affirmant que le bicommutant d'une matrice $C \in \mathbb{M}_n$ coïncide avec l'ensemble des polynômes en C (à coefficients dans $\mathbb{C}$).

Des exemples publiés dans [6], [11], [14] et [19] montrent que la solution A n'est pas nécessairement commutative lorsque $(n,d) > (3,3)$ ($n \geq 3$, $d \geq 3$ et $(n,d) \neq (3,3)$). D'autre part, le dernier résultat mentionné au no 2.3.8 montre que la solution A est commutative lorsque A_o est cyclique.

En résumé, la solution A est commutative lorsque $(n,d) \not> (3,3)$ et pour chaque valeur de $(n,d) > (3,3)$, il existe des cas où la solution A est commutative et des cas où elle ne l'est pas. Le problème de trouver un critère général pour déterminer ces cas reste ouvert. Cette étude sera poursuivie après la rédaction de cette thèse et les résultats, englobant ceux mentionnés ci-dessus, seront publiés dans [27].

2.3.10 <u>Etude des solutions de l'équation $AA' = A'A$ telles que $A^2 = 0$</u>

Les solutions de l'équation $AA' = A'A$ telles que $A^2 = 0$ sont étudiées au chapitre 4 de cette thèse. Dans le cas où Ω est un intervalle ouvert dans $\mathbb{R}$, nous montrons que si $A \in C^1(\Omega, \mathbb{M}_n)$ commute avec sa dérivée, est telle que $A^2 = 0$ et est de rang constant r, alors A est de la forme

$$A = BC ,$$

où $B \in C^1(\Omega, \mathbb{M}_{n\times r})$, $C \in C^1(\Omega, \mathbb{M}_{r\times n})$ sont de rang constant r et satisfont aux relations

$$CB = 0 , \qquad C'B = CB' = 0.$$

Au chapitre 5 de cette thèse, nous montrons que, dans le cas particulier où $r = 1$, A est commutative si et seulement si

$$C(s)B(t) = 0 , \qquad s,t \in \Omega .$$

et nous en déduisons une méthode permettant de construire très facilement des exemples de fonctions matricielles analytiques sur $\mathbb{R}$ qui commutent avec leur dérivée et ne sont commutatives sur aucun intervalle. Un des exemples que nous obtenons immédiatement par cette méthode a été publié par G. Ascoli [4] en 1952 et figure également dans un exercice de N. Bourbaki [47, ex. 10, p. IV-43].

CHAPITRE 3

LA METHODE DE RESOLUTION DE L'EQUATION $AA' = A'A$ DUE A I.J. EPSTEIN

3.1 INTRODUCTION

L'objet de ce chapitre est l'exposition de la méthode de résolution de l'équation différentielle matricielle $AA' = A'A$ publiée par I.J. Epstein [9] en 1963. Cet auteur a montré, dans le cas où Ω est un intervalle ouvert dans $\mathbb{R}$, que $A \in C^1(\Omega, \mathbb{M}_n)$ commute avec sa dérivée et a une caractéristique de Segre constante χ si et seulement si $A = PJP^{-1}$, où $J \in C^1(\Omega, \mathbb{M}_n)$ est une fonction matricielle de Jordan de caractéristique de Segre χ et $P \in C^1(\Omega, \mathbb{M}_n^*)$ est une solution de l'équation différentielle $P' = PX$, où $X \in C^o(\Omega, \mathbb{M}_n)$ est elle-même une solution de l'équation matricielle $[J,[X,J]] = 0$. Il a également publié la solution générale de cette dernière équation, mais sans les calculs. Ainsi, grâce à cette méthode, la résolution de l'équation non linéaire $AA' = A'A$ est réduite à la résolution de l'équation linéaire $P' = PX$.

Nous commençons ce chapitre par une mise au point de la terminologie et de la notation relatives à la caractéristique de Segre. Nous présentons ensuite un théorème non encore publié dû à J.-M. Gracia sur la régularité de la réduction à la forme de Jordan d'une fonction matricielle. Ce théorème nous permet de clarifier les hypothèses sous lesquelles la méthode d'I.J. Epstein s'applique. Nous exposons cette méthode en l'étendant à une classe d'équations différentielles matricielles que nous décrivons.

Nous résolvons ensuite de manière détaillée l'équation $[J,[X,J]]=0$ à l'aide de quelques techniques permettant de simplifier considérablement les calculs. Au moyen de la notion de transposée secondaire d'une matrice, nous supprimons l'ambiguïté et nous effectuons sans aucun calcul le passage entre les deux cas mentionnés au no 2.2.6.

A titre d'exemple, nous démontrons le théorème dû à J-M. Gracia sur les solutions diagonalisables de l'équation $AA' = A'A$ énoncé au no 2.3.4 directement en appliquant la méthode d'I.J. Epstein. Cette méthode a aussi permis à I.J. Epstein et L. Kotin d'établir leur théorème sur les solutions dont chaque sous-espace propre est de dimension extrême (cf no 2.3.6). Le chapitre 4 de cette thèse fournit encore un autre exemple d'application de cette méthode.

Comme l'a fait I.J. Epstein, nous nous restreignons au cas des fonctions matricielles d'une variable réelle. Dans toute la suite de cette thèse, Ω désignera un intervalle ouvert non vide dans $\mathbb{R}$.

3.2 CARACTERISTIQUE DE SEGRE

Dans ce paragraphe, nous présentons la notation et la terminologie relative à la structure de Jordan d'une matrice que nous emploierons dans la suite.

Nous désignerons les blocs nilpotents irréductibles de Jordan par

$$N_1 = 0_1 \in \mathbb{M}_1 ,$$

$$N_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_k , \qquad k \in \{2,3,\dots\}.$$

Soit $C \in \mathbb{M}_n$, $\gamma_1 ,\dots,\gamma_p \in \mathbb{C}$ les valeurs propres distinctes de C et $m_1 ,\dots,m_p$ leurs multiplicités algébriques. Nous allons définir la caractéristique de Segre de C au moyen de la réduction à la forme de Jordan. Les matrices de Jordan semblables à C diffèrent par l'ordre de leurs blocs diagonaux. Parmi celles-ci, nous choisissons une matrice de Jordan J de la forme

$$J = \mathrm{diag}(J_1 ,\dots,J_p),$$

où, pour chaque $k \in \{1,\dots,p\}$,

$$J_k = \gamma_k I_{m_k} + N_k ,$$

$$N_k = \mathrm{diag}(N_{n_{k1}} ,\dots, N_{n_{ks_k}}),$$

$$n_{k1} \geq \dots \geq n_{ks_k} \geq 1, \qquad s_k \in \{1,2,\dots,m_k\},$$

et, en posant

$$n_{k,s_k+1} = n_{k,s_k+2} = \dots = 0,$$

$$(n_{11} ,\dots, n_{1n}) \geq (n_{21} ,\dots, n_{2n}) \geq \dots \geq (n_{p1} ,\dots, n_{pn}),$$

les suites finies $(a_1 ,\dots, a_n) \in \{1,2,\dots\}^n$ étant ordonnées suivant l'ordre lexicographique.

Les conditions ci-dessus déterminent de manière unique la suite finie de suites finies de nombres entiers positifs

$$\chi(C) = \left[(n_{11} ,\dots, n_{1s_1}),\dots,(n_{p1} ,\dots, n_{ps_p})\right]$$

que nous appellerons *caractéristique de Segre de* C. De nombreux auteurs n'imposent pas les conditions ci-dessus et appellent caractéristique de Segre de C la classe d'équivalence obtenue en permutant les suites $(n_{k1} ,\dots, n_{ks_k})$ dans l'expression ci-dessus.

Nous dirons que χ *est une caractéristique de Segre d'ordre* n si χ est la caractéristique de Segre d'une matrice de M_n .

Soit

$$\chi = \left[(n_{11} ,\dots, n_{1s_1}),\dots,(n_{p1} ,\dots, n_{ps_p})\right]$$

une caractéristique de Segre d'ordre n. Nous dénoterons par

(a) N_χ la matrice nilpotente associée à χ :

$$N_\chi = \operatorname{diag}(N_{n_{11}}, \dots, N_{n_{1s_1}}, \dots, N_{n_{p1}}, \dots, N_{n_{ps_p}}) .$$

(b) $\mathcal{D}_\chi(\Omega, \mathbf{M}_n)$ l'ensemble des fonctions matricielles diagonales associé à χ :

$$\mathcal{D}_\chi(\Omega, \mathbf{M}_n) = \{D = \operatorname{diag}(\lambda_1 I_{m_1}, \dots, \lambda_p I_{m_p}) ,$$

où $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont des applications de Ω dans $\mathbb{C}$ dont les valeurs $\lambda_1(t), \dots, \lambda_p(t)$ sont distinctes en chaque point $t \in \Omega\}$,

où

$$m_k = n_{k1} + \dots + n_{ks_k} , \qquad k \in \{1, \dots, p\} .$$

(c) $\mathcal{D}^k_\chi(\Omega, \mathbf{M}_n)$ l'ensemble de fonctions matricielles diagonales de classe C^k ($k \in \{0,1,2,\dots\}$) associé à χ :

$$\mathcal{D}^k_\chi(\Omega, \mathbf{M}_n) = \mathcal{D}_\chi(\Omega, \mathbf{M}_n) \cap C^k(\Omega, \mathbf{M}_n).$$

Le lemme suivant sera employé fréquemment par la suite. Il est une conséquence immédiate des définitions :

Lemme 3.2. *Soit* χ *une caractéristique de Segre d'ordre* n. *Pour tout* $D \in \mathcal{D}_\chi(\Omega, \mathbf{M}_n)$,

$$[D, N_\chi] = 0$$

et, pour tout $k \in \{0,1,2,\dots\}$, $D \in \mathcal{D}^k_\chi(\Omega, \mathbf{M}_n)$,

$$[D^{(k)}, N_\chi] = 0.$$

3.3 FONCTIONS MATRICIELLES DONT LA CARACTERISTIQUE DE SEGRE EST CONSTANTE

Les fonctions matricielles dont la caractéristique de Segre est constante sont appelées *fonctions matricielles conservatives* par plusieurs auteurs. Il est souvent avantageux de résoudre les problèmes relatifs à des fonctions matricielles d'abord dans le cas où la caractéristique de Segre est constante avant d'étudier le cas général.

Le lemme suivant, qui est une conséquence immédiate des définitions, caractérise ces fonctions :

Lemme 3.3. *Soit* χ *une caractéristique de Segre d'ordre* n *et* A *une application de* Ω *dans* $\mathbb{M}_n$ *. Alors* A *a une caractéristique de Segre constante et égale à* χ *si et seulement s'il existe* $D \in \mathcal{D}_\chi(\Omega, \mathbb{M}_n)$ *et* $P : \Omega \to \mathbb{M}_n^*$ *tels que* $A = PJP^{-1}$, *où* $J = D + N_\chi$.

Remarquons que, dans ce cas, la partie nilpotente N_χ de la forme de Jordan J de A est constante.

3.4 REGULARITE DU PASSAGE DE LA FORME DE JORDAN

Lorsque l'on réduit une fonction matricielle A de classe C^k à la forme de Jordan, il est extrêmement utile de savoir s'il existe des fonctions matricielles J et P également de classe C^k telles que $A = PJP^{-1}$, P est inversible et J est sous forme de Jordan. Il est évident que si la partie nilpotente de J n'est pas constante, alors J n'est pas continue. Par exemple, si

$$A(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ o & 1 \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbb{R},$$

alors

$$J(o) = \begin{pmatrix} 1 & o \\ o & 1 \end{pmatrix}, \qquad J(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ o & 1 \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbb{R} - \{0\} .$$

Dans ce cas A est analytique et J est discontinue. Par contre J peut être analytique même si sa caractéristique de Segre n'est pas constante; c'est le cas par exemple de

$$J(t) = \begin{pmatrix} o & o \\ o & \sin t \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Dans un article [23] non encore publié, J.-M. Gracia a établi le résultat de base suivant :

Théorème 3.4. *Si* $A \in C^k(\Omega, \mathbb{M}_n)$, *où* $k \in \{1,2,\ldots\}$ *est fixé, a une caractéristique de Segre constante* χ , *alors il existe* $D \in \mathcal{D}^k_\chi(\Omega, \mathbb{M}_n)$ *et* $P \in C^k(\Omega, \mathbb{M}_n^*)$ *tels que* $A = PJP^{-1}$, *où* $J = D + N_\chi$.

Ce résultat a un champ d'applications extrêmement vaste, mais déjà dans le cadre restreint des articles parus sur l'équation AA' = A'A, il permet d'éliminer des hypothèses superflues, par exemple dans [19, th. 3, p. 67] ou [11, th. 3, p. 1178] ou de justifier certaines affirmations, par exemple [9, (2.2), p. 267].

3.5 LA METHODE D'I.J. EPSTEIN DE RESOLUTION DE L'EQUATION AA' = A'A ETENDUE A UNE CLASSE D'EQUATIONS DIFFERENTIELLES MATRICIELLES

La première étape de la résolution de l'équation AA' = A'A par la méthode d'I.J. Epstein consiste à mettre A et A' sous la forme $A = PJP^{-1}$ et $A' = PBP^{-1}$, où J est une fonction matricielle de Jordan et P est une fonction matricielle inversible. Nous généralisons cette idée dans le lemme suivant :

Lemme 3.5.1. *Soit* $P, J \in C^k(\Omega, \mathbb{M}_n)$, *où* $k \in \{1,2,\ldots\}$ *est fixé, tels que* $P(t) \in \mathbb{M}_n^*$, $t \in \Omega$. *Posons*

$$A = PJP^{-1} \quad , \quad X = P^{-1} P' ,$$

$$B_o = J,$$

$$B_{i+1} = [X,B_i] + B_i' \in C^{k-i-1}(\Omega,\mathbb{M}_n), \qquad i \in \{0,\dots,k-1\} .$$

Alors

$$A^{(i)} = PB_iP^{-1} , \qquad i \in \{0,\dots,k\} .$$

Signalons que la substitution $X = P^{-1}P'$ ci-dessus apparaît également dans l'article [15] de J. Dieudonné.

Démonstration. Par définition, $A^{(o)} = PB_oP^{-1}$. Soit $i \in \{0,\dots,k-1\}$ tel que $A^{(i)} = PB_iP^{-1}$. Alors

$$\begin{aligned} A^{(i+1)} &= (A^{(i)})' = (PB_iP^{-1})' \\ &= P'B_iP^{-1} + PB_i'\,P^{-1} - PB_iP^{-1}P'P^{-1} \\ &= P(XB_i + B_i' - B_iX)P^{-1} \\ &= P([X,B_i] + B_i')P^{-1} \\ &= PB_{i+1}P^{-1} . \end{aligned}$$

□

Pour énoncer la méthode d'I.J. Epstein nous utiliserons la notation suivante :

Notation. Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille finie, non vide, ordonnée, de matrices de $\mathbb{M}_n$, c'est-à-dire dont l'ensemble d'indices I est fini, non vide et totalement ordonné. Nous définissons et désignons le *produit ordonné* des matrices de cette famille par

$$\prod_{i\in I} A_i = A_{i_1} A_{i_2} \dots A_{i_p} ,$$

où $(i_1 , i_2 , \dots, i_p)$ est l'unique famille d'indices telle que $I = \{i_1 , i_2 , \dots, i_p\}$ et $i_1 < i_2 < \dots < i_p$. Dans le cas particulier où $I = \{1,2,\dots,p\}$, $p \geqslant 1$, nous désignerons ce produit par

$$\prod_{i=1}^{p} A_i = \prod_{i\in I} A_i .$$

Le théorème suivant expose la méthode d'I.J. Epstein de résolution de l'équation $AA' = A'A$ étendue à la classe d'équations différentielles matricielles qui est décrite dans l'énoncé.

Théorème 3.5.2. *Soit* χ *une caractéristique de Segre d'ordre* n, $k,p,q_1,\dots,q_p \in \{1,2,\dots\}$, $f_1,\dots,f_p \in C^0(\Omega,\mathbb{C})$, $n_{11},\dots,n_{1q_1},\dots,n_{p1},\dots,n_{pq_p} \in \{0,1,\dots,k\}$ *et soit* A *quelconque. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

(a) $A \in C^k(\Omega,M_n)$ *a une caractéristique de Segre constante égale à* χ *et est solution de l'équation différentielle matricielle*

$$\sum_{i=1}^{p} f_i \prod_{j=1}^{q_i} A^{(n_{ij})} = 0. \qquad (\alpha)$$

(b) A *est de la forme* $A = PJP^{-1}$, *où* $J = D + N_\chi$, $D \in \mathcal{D}^k_\chi(\Omega,M_n)$ *et* $P \in C^k(\Omega,M_n^*)$ *est une solution de l'équation différentielle matricielle*

$$P' = PX,$$

où $X \in C^{k-1}(\Omega,M_n)$ *est elle-même une solution de l'équation différentielle matricielle*

$$\sum_{i=1}^{p} f_i \prod_{j=1}^{q_i} B_{n_{ij}} = 0\ , \qquad (\beta)$$

$B_i \in C^{k-i}(\Omega,M_n)$, $i \in \{0,1,\dots,k\}$, *étant défini par*

$$B_o = J\ ,$$

$$B_{i+1} = [X,B_i] + B_i'\ , \qquad i \in \{0,\dots,k-1\}\ .$$

Démonstration.

Montrons que (a) $\Rightarrow$ (b). Supposons que A satisfait à (a). Alors en vertu du théorème 3.4, A est de la forme $A = PJP^{-1}$, où $P \in C^k(\Omega,M_n^*)$,

$J = D + N_\chi$, $D \in \mathcal{D}^k_\chi(\Omega, M_n)$. Posons $X = P^{-1}P'$, $B_o = J$ et

$$B_{i+1} = [X, B_i] + B_i' \in C^{k-i-1}(\Omega, M_n), \qquad i \in \{0, \dots, k-1\}.$$

Alors P est une solution de l'équation $P' = PX$, $X \in C^{k-1}(\Omega, M_n)$ et d'après le lemme 3.5.1,

$$A^{(i)} = PB_iP^{-1} , \qquad i \in \{0, \dots, k\} ,$$

ce qui implique que

$$A^{(n_{ij})} = PB_{n_{ij}}P^{-1} , \qquad i \in \{1, \dots, p\} , \qquad j \in \{1, \dots, q_i\} .$$

En substituant cette expression dans l'équation (α), nous obtenons que

$$\sum_{i=1}^{p} f_i \prod_{j=1}^{q_i} PB_{n_{ij}} P^{-1} = 0 ,$$

d'où

$$P\left(\sum_{i=1}^{p} f_i \prod_{j=1}^{q_i} B_{n_{ij}} \right) P^{-1} = 0 ,$$

ce qui implique que X est une solution de l'équation (β).

Montrons que (b) => (a). Supposons que A satisfait à (b). Alors $A \in C^k(\Omega, M_n)$ et en vertu du lemme 3.3, A a une caractéristique de Segre constante et égale à χ. D'après le lemme 3.5.1, pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$, $j \in \{1, \dots, q_i\}$,

$$B_{n_{ij}} = P^{-1} A^{(n_{ij})} P .$$

En substituant cette expression dans l'équation (β), nous en déduisons que A est une solution de l'équation (α). □

Le théorème 3.5.2 permet de réduire la résolution de l'équation différentielle matricielle (α) d'ordre k en A à la résolution de l'équation différentielle matricielle (β) qui est d'ordre $k-1$ en X et de l'équation différentielle matricielle $P' = PX$ qui est du premier ordre en P. Cette réduction ne peut pas être itérée dans le cas où $k \geqslant 2$, car l'équation (β) en X n'est pas du même type que l'équation (α) en A. Par contre lorsque $k = 1$, la résolution de l'équation différentielle non linéaire (α) est réduite à la résolution de l'équation (β) qui est différentielle d'ordre 0, c'est-à-dire algébrique, et de l'équation $P' = PX$ qui est linéaire.

Dans le cas particulier où (α) est l'équation $AA' = A'A$, l'équation (β) correspondante a été résolue par I.J. Epstein, comme nous allons le voir dans la suite de ce chapitre. La méthode d'I.J. Epstein permet donc de réduire la résolution de l'équation non linéaire $AA' = A'A$ à la résolution de l'équation linéaire $P' = PX$.

3.6 APPLICATION A L'EQUATION $AA'' = A''A$

Avant de commencer l'étude de l'équation $AA' = A'A$ au moyen de la méthode d'I.J. Epstein, nous ouvrons ici une parenthèse destinée à illustrer les difficultés qui apparaissent lorsque l'on applique cette méthode à des équations différentielles matricielles d'ordre $k \geqslant 2$. Pour cela nous appliquons le théorème 3.5.2 à l'équation très simple

$$AA'' = A''A .$$

Corollaire 3.6. *Soit χ une caractéristique de Segre d'ordre n et soit A quelconque. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

(a) $A \in C^2(\Omega, M_n)$ *est une solution de l'équation*

$$[A, A''] = 0 \qquad (\alpha)$$

de caractéristique de Segre constante égale à χ .

(b) *A est de la forme $A = PJP^{-1}$, où $J = D + N_\chi$, $D \in \mathcal{D}^2_\chi(\Omega, M_n)$ et*

$P \in C^2(\Omega, M_n^*)$ *est une solution de l'équation* $P' = PX$, *où* $X \in C^1(\Omega, M_n)$ *est elle-même une solution de l'équation*

$$[J,[X,[X,J]]] + 2[J,[X,J']] + [J,[X',J]] = 0 \qquad (\beta)$$

<u>Démonstration.</u> D'après le théorème 3.5.2, l'assertion (a) équivaut à

(b') A est de la forme $A = PJP^{-1}$, où $J = D + N_\chi$, $D \in \mathcal{D}^2_\chi(\Omega, M_n)$ et $P \in C^2(\Omega, M_n^*)$ est une solution de l'équation $P' = PX$, où $X \in C^1(\Omega, M_n)$ est elle-même une solution de l'équation

$$[B_o , B_2] = 0, \qquad (\beta')$$

B_o , B_1 , B_2 étant définis par

$$B_o = J \in C^2(\Omega, M_n),$$
$$B_1 = [X, B_o] + B_o' \in C^1(\Omega, M_n),$$
$$B_2 = [X, B_1] + B_1' \in C^o(\Omega, M_n).$$

Par définition,

$$B_2 = [X,[X,J]] + 2[X,J'] + [X',J] + J'' .$$

D'autre part,

$$[J,J''] = [D + N_\chi , D'' + N_\chi] = [D, N_\chi] + [N_\chi , D''] = 0,$$

d'après le lemme 3.2, ce qui montre que les relations (β) et (β') sont équivalentes. □

Conformément au commentaire de la fin du paragraphe 3.5, le théorème 3.5.2 ne s'applique pas à l'équation (β) et le problème de résoudre cette équation est encore ouvert. Signalons cependant que dans l'annexe 3 de cette thèse, nous montrons que A est une solution de l'équation $AA'' = A''A$ si et seulement si $AA' - A'A = C$, où C est une matrice constante arbitraire.

3.7 APPLICATION A L'EQUATION $A^qA' = A'A^q$

Nous commençons l'étude de l'équation $AA' = A'A$ en appliquant le théorème 3.5.2 à l'équation plus générale $A^qA' = A'A^q$, ceci afin de mettre en évidence les perspectives d'applications de ce théorème, puis nous nous restreignons au cas particulier où $q = 1$. L'étude du cas général est encore ouverte.

Corollaire 3.7. *Soit* $q \in \{1,2,\dots\}$ *et* χ *une caractéristique de Segre d'ordre* n *et soit* A *quelconque. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

(a) $A \in C^1(\Omega, \mathbb{M}_n)$ *est une solution de l'équation*

$$[A^q \ , \ A'] = 0 \tag{α}$$

dont la caractéristique de Segre est constante et égale à χ .

(b) A *est de la forme* $A = PJP^{-1}$, *où* $J = D + N_\chi$, $D \in \mathcal{D}^1_\chi(\Omega, \mathbb{M}_n)$ *et* $P \in C^1(\Omega, \mathbb{M}^*_n)$ *est une solution de l'équation*

$$P' = PX,$$

où $X \in C^o(\Omega, \mathbb{M}_n)$ *est elle-même une solution de l'équation*

$$[J^q, [X,J]] = 0 \ . \tag{β}$$

Démonstration. D'après le théorème 3.5.2, l'assertion (a) équivaut à l'assertion

(b') A est de la forme $A = PJP^{-1}$, où $J = D + N_\chi$, $D \in \mathcal{D}^1_\chi(\Omega, \mathbb{M}_n)$ et $P \in C^1(\Omega, \mathbb{M}^*_n)$ est une solution de l'équation $P' = PX$, où $X \in C^o(\Omega, \mathbb{M}_n)$ est elle-même une solution de l'équation

$$[J^q, [X,J] + J'] = 0 \ . \tag{β'}$$

D'après le lemme 3.2, $[J,J'] = 0$, donc $[J^q,J'] = 0$. Par suite

(β') équivaut à (β) et (b) équivaut à (b'), donc à (a). □

3.8 RESOLUTION DE L'EQUATION $[J,[X,J]] = 0$

3.8.1 Données, notation, plan de résolution

D'après le corollaire 3.7, la résolution de l'équation $AA' = A'A$ se réduit à celle des équations $[J,[X,J]] = 0$ et $P' = PX$. Nous allons maintenant résoudre l'équation $[J,[X,J]] = 0$.

Fixons d'abord les données et la notation auxquelles nous nous référerons dans la suite de ce paragraphe 3.8. Soit

$$\chi = \left[(n_{11},\dots,n_{1s_1}),\dots,(n_{p1},\dots,n_{ps_p})\right]$$

une caractéristique de Segre d'ordre n et $\lambda_1,\dots,\lambda_p \in C^1(\Omega,\mathbb{C})$ des fonctions dont les valeurs $\lambda_1(t),\dots,\lambda_p(t)$ sont distinctes en chaque point $t \in \Omega$. Posons pour chaque $k \in \{1,\dots,p\}$

$$N_k = \operatorname{diag}(N_{n_{k1}},\dots,N_{n_{ks_k}}),$$

$$m_k = n_{k1} + \dots + n_{ks_k},$$

$$J_k = \lambda_k I_{m_k} + N_k,$$

$$n_k = n_{k1} = \text{indice de nilpotence de } N_k$$

et

$$D = \operatorname{diag}(\lambda_1 I_{m_1},\dots,\lambda_p I_{m_p}),$$

$$J = D + N_\chi .$$

Il résulte immédiatement des définitions que

$$N_k^{n_k} = 0, \qquad k \in \{1,\dots,p\},$$

$$D \in \mathcal{D}_\chi^1(\Omega,\mathbb{M}_n),$$

$$N_X = \mathrm{diag}(N_1, \ldots, N_p),$$
$$J = \mathrm{diag}(J_1, \ldots, J_p).$$

Soit $X \in C^0(\Omega, \mathbb{M}_n)$ et (X_{ij}) la décomposition de X en blocs telle que $X_{ij}(t) \in \mathbb{M}_{m_i \times m_j}$, pour tout $t \in \Omega$ et tout $i,j \in \{1,\ldots,p\}$.

Nous résoudrons l'équation $[J,[X,J]] = 0$ en montrant d'abord que la solution X est de la forme

$$X = \mathrm{diag}(X_{11}, \ldots, X_{pp}),$$

et ne dépend pas de D, puis en décomposant chacun des blocs X_{kk} en sous-blocs de type $n_{ki} \times n_{kj}$, $i,j \in \{1,\ldots,s_k\}$, dont nous déterminerons la forme générale.

3.8.2 Equation satisfaite par les blocs

Lemme 3.8.2. *Soit* $B \in C^0(\Omega, \mathbb{M}_n)$ *et* $r_1, \ldots, r_q \in \{1,2,\ldots\}$ *tels que* B *est de la forme*

$$B = \mathrm{diag}(B_1, \ldots, B_q),$$
$$B_i(t) \in \mathbb{M}_{r_i}, \quad t \in \Omega, \quad i \in \{1,\ldots,q\}.$$

Soit $Z \in C^0(\Omega, \mathbb{M}_n)$ *et soit* (Z_{ij}) *la décomposition de* Z *en blocs telle que*

$$Z_{ij}(t) \in \mathbb{M}_{r_i \times r_j}, \quad t \in \Omega, \quad i,j \in \{1,\ldots,q\}.$$

Alors l'équation

$$[B,[Z,B]] = 0$$

équivaut à

$$2B_i Z_{ij} B_j - B_i^2 Z_{ij} - Z_{ij} B_j^2 = 0, \quad i,j \in \{1,\ldots,q\}.$$

Démonstration. Pour chaque $i,j \in \{1,\ldots,q\}$, le bloc de la i^e ligne et j^e colonne de blocs de la fonction matricielle

$$[B,[Z,B]] = 2BZB - B^2Z - ZB^2$$

est

$$2B_iZ_{ij}B_j - B_i^2Z_{ij} - Z_{ij}B_j^2 ,$$

d'où la conclusion. □

3.8.3 La solution X est diagonale par blocs

Nous allons montrer que la solution X est diagonale par blocs au moyen d'une méthode matricielle permettant d'éviter le lourd calcul par récurrence des termes des blocs X_{ij} non diagonaux $(i \neq j)$.

Théorème 3.8.3. *Si* X *est une solution de l'équation* $[J,[X,J]] = 0$, *alors* X *est de la forme*

$$X = \mathrm{diag}(X_{11}, \ldots, X_{pp}).$$

Démonstration. Soit $i,j \in \{1,\ldots,p\}$ tels que $i \neq j$. Il faut montrer que $X_{ij} = 0$. Pour le faire, nous allons démontrer par récurrence décroissante que pour tout $k \in \{n_i + n_j , n_i + n_j - 1,\ldots,0\}$, l'assertion P(k) suivante est vraie : pour tout $k_i , k_j \in \{0,1,2,\ldots\}$,

$$k_i + k_j \geq k \Rightarrow N_i^{k_i}X_{ij}N_j^{k_j} = 0.$$

L'assertion P(o) implique que

$$X_{ij} = N_i^oX_{ij}N_j^o = 0.$$

Vérifions d'abord l'assertion $P(n_i+n_j)$. Soit $k_i , k_j \in \{0,1,2,\ldots\}$ tels que $k_i+k_j \geq n_i+n_j$. Alors $k_i \geq n_i$ ou $k_j \geq n_j$, donc $N_i^{k_i} = 0$ ou $N_j^{k_j} = 0$, d'où $N_i^{k_i}X_{ij}N^{k_j} = 0$.

Soit $k \in \{n_i+n_j , n_i+n_j - 1,\ldots,1\}$ tel que P(k) soit vraie. Montrons que P(k-1) l'est aussi. Soit $k_i , k_j \in \{0,1,2,\ldots\}$ tels que $k_i+k_j \geq k-1$. D'après le lemme 3.8.2,

$$2J_iX_{ij}J_j - J_i^2X_{ij} - X_{ij}J_j^2 = 0.$$

En remplaçant J_i par $\lambda_i I_{m_i} + N_i$ et J_j par $\lambda_j I_{m_j} + N_j$ dans cette équation, nous obtenons

$$(\lambda_i - \lambda_j)^2 X_{ij} = 2(\lambda_i - \lambda_j)(X_{ij}N_j - N_i X_{ij}) + 2N_i X_{ij} N_j - N_i^2 X_{ij} - X_{ij} N_j^2 .$$

En multipliant cette équation à gauche par $N_i^{k_i}$ et à droite par $N_j^{k_j}$, nous trouvons

$$\begin{aligned}(\lambda_i - \lambda_j)^2 & N_i^{k_i} X_{ij} N_j^{k_j} \\ &= 2(\lambda_i - \lambda_j)(N_i^{k_i} X_{ij} N_j^{k_j+1} - N_i^{k_i+1} X_{ij} N_j^{k_j}) \\ &\quad + 2N_i^{k_i+1} X_{ij} N_j^{k_j+1} - N_i^{k_i+2} X_{ij} N_j^{k_j} \\ &\quad - N_i^{k_i} X_{ij} N_j^{k_j+2} .\end{aligned}$$

En vertu de l'hypothèse de récurrence, le second membre de cette équation est nul, donc

$$(\lambda_i(t) - \lambda_j(t))^2 N_i^{k_i} X_{ij}(t) N_j^{k_j} = 0, \qquad t \in \Omega.$$

Comme par hypothèse $\lambda_i(t) \neq \lambda_j(t)$ en chaque point $t \in \Omega$, nous concluons que

$$N_i^{k_i} X_{ij} N_j^{k_j} = 0. \qquad \square$$

3.8.4 Réduction au cas où $J = N_\chi$

Le corollaire suivant montre que la solution X de l'équation $[J,[X,J]] = 0$ ne dépend pas de D, mais seulement de χ. Il montre aussi que la résolution de cette équation se réduit au cas où J est nilpotent.

Corollaire 3.8.4. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(a) $[J,[X,J]] = 0.$

(b) $X = \mathrm{diag}(X_{11}, \dots, X_{pp})$

et

$$[N_\chi, [X, N_\chi]] = 0.$$

(c) $X = \mathrm{diag}(X_{11}, \ldots, X_{pp})$

et pour tout $k \in \{1, \ldots, p\}$

$$[N_k, [X_{kk}, N_k]] = 0.$$

Démonstration. Par définition, $J = \mathrm{diag}(J_1, \ldots, J_p)$ et d'après le théorème 3.8.3, $X = \mathrm{diag}(X_{11}, \ldots, X_{pp})$ lorsque (a) est satisfaite, donc lorsque l'une des trois assertions (a), (b) ou (c) est satisfaite. Par suite, dans chacun de ces cas,

$$[J,[X,J]] = \mathrm{diag}([J_1, [X_{11}, J_1]], \ldots, [J_p, [X_{pp}, J_p]]).$$

Soit $k \in \{1, \ldots, p\}$. Comme $J_k = \lambda_k I_{m_k} + N_k$,

$$[J_k, [X_{kk}, J_k]] = [N_k, [X_{kk}, N_k]].$$

Ainsi, sous chacune des hypothèses (a), (b) ou (c)

$$\begin{aligned}[J,[X,J]] &= \mathrm{diag}([N_1, [X_{11}, N_1]], \ldots, [N_p, [X_{pp}, N_p]]) \\ &= [N_\chi, [X, N_\chi]]\end{aligned}$$

et la conclusion s'ensuit. □

3.8.5 Réduction à la résolution de l'équation $2N_r Y N_s - N_r^2 Y - Y N_s^2 = 0$

D'après le corollaire 3.8.4, la résolution de l'équation $[J,[X,J]] = 0$ se réduit à celle des équations $[N_k, [X_{kk}, N_k]] = 0$, $k = 1, \ldots, p$. Soit $k \in \{1, \ldots, p\}$. Par définition

$$N_k = \mathrm{diag}(N_{n_{k1}}, \ldots, N_{n_{ks_k}}).$$

Soit (Y_{ij}) la décomposition du bloc X_{kk} en sous-blocs telle que

$$Y_{ij}(t) \in \mathbb{M}_{n_{ki} \times n_{kj}}, \qquad t \in \Omega, \qquad i,j \in \{1, \ldots, s_k\}.$$

D'après le lemme 3.8.2, l'équation $[N_k, [X_{kk}, N_k]] = 0$ équivaut à

$$2N_{n_{ki}} Y_{ij} N_{n_{kj}} - N^2_{n_{ki}} Y_{ij} - Y_{ij} N^2_{n_{kj}} = 0, \qquad i,j \in \{1,\dots,s_k\}.$$

La résolution de l'équation $[J,[X,J]] = 0$ se réduit donc à la résolution des équations de la forme

$$2N_r Y N_s - N_r^2 Y - Y N_s^2 = 0,$$

où $r,s \in \{1,2,\dots\}$.

3.8.6 Transposée secondaire d'une matrice

Nous avons réduit la résolution de l'équation $[J,[X,J]] = 0$ à celle d'équations de la forme

$$2N_r Y_{rs} N_s - N_r^2 Y_{rs} - Y_{rs} N_s^2 = 0,$$

où $r,s \in \{1,2,\dots\}$ et l'inconnue $Y_{rs} \in C^o(\Omega, \mathbf{M}_{r \times s})$. Nous allons réduire la résolution de ces équations au cas où $r \leqslant s$ grâce à la notion de transposition secondaire que nous définissons ci-dessous. Nous verrons dans le prochain numéro que la solution Y_{sr} est la transposée secondaire de la solution Y_{rs}. La principale raison pour laquelle cette notion est bien adaptée à l'étude des équations ci-dessus est que les matrices N_k, $k = 1,2,\dots,$ sont invariantes par transposition secondaire. D'autre part, la règle de transposition secondaire d'un produit de matrices est analogue à celle de la transposition ordinaire, comme nous le verrons dans proposition 3.8.6.

Définition. *Nous appellerons transposée secondaire d'une matrice*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1s} \\ & \dots\dots\dots & \\ a_{r1} & \dots & a_{rs} \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{r \times s}$$

la matrice que nous désignerons par ${}^sA$ *suivante* :

$${}^sA = \begin{pmatrix} a_{rs} & \dots & a_{1s} \\ & \dots\dots\dots & \\ a_{r1} & \dots & a_{11} \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{s \times r},$$

autrement dit, la transposée secondaire ${}^{s}A = ({}^{s}a_{ij})$ *de* A *est définie par*

$${}^{s}a_{ij} = a_{r-j+1,s-i+1}\ , \quad i \in \{1,\dots,s\}, \quad j \in \{1,\dots,r\}.$$

Proposition 3.8.6. *Soit* $A \in M_{r\times s}$ *et* $B \in M_{s\times t}$. *Alors* ${}^{s}(AB) = {}^{s}B\ {}^{s}A$.

Démonstration. Posons $C = (c_{ij}) = AB$, $D = (d_{ij}) = {}^{s}B\ {}^{s}A$, $(a_{ij}) = A$, $({}^{s}a_{ij}) = {}^{s}A$, $(b_{ij}) = B$, $({}^{s}b_{ij}) = {}^{s}B$, $({}^{s}c_{ij}) = {}^{s}C$. Soit $i \in \{1,\dots,t\}$ et $j \in \{1,\dots,r\}$.

Alors d'une part

$${}^{s}c_{ij} = c_{r-j+1,t-i+1} = \sum_{k=1}^{s} a_{r-j+1,k}\, b_{k,t-i+1}$$

et d'autre part

$$\begin{aligned} d_{ij} &= \sum_{\ell=1}^{s} {}^{s}b_{i\ell}\, {}^{s}a_{\ell j} \\ &= \sum_{\ell=1}^{s} b_{s-\ell+1,t-i+1}\, a_{r-j+1,s-\ell+1} \\ &= \sum_{k=1}^{s} a_{r-j+1,k}\, b_{k,t-i+1}\ , \end{aligned}$$

d'où $d_{ij} = {}^{s}c_{ij}$. Par suite ${}^{s}C = D$. □

3.8.7 Résolution de l'équation $2N_r Y N_s - N_r^2 Y - Y N_s^2 = 0$

Nous avons montré au no 3.8.5 que la résolution de l'équation $[J,[X,J]] = 0$ se réduit à celle d'équations du type

$$2N_r Y_{rs} N_s - N_r^2 Y_{rs} - Y_{rs} N_s^2 = 0,$$

où $r,s \in \{1,2,\dots\}$. Nous allons résoudre ces équations dans le théorème suivant, puis nous présenterons, dans le numéro suivant, la solution générale sous forme matricielle. Cette dernière formulation est analogue à celle que I.J. Epstein a publiée dans son article [9].

Dans l'énoncé qui suit, nous agrandirons la matrice $Y_{rs}(t)$ en l'entourant par des zéros. Cette idée apparemment anodine permet non seulement de simplifier l'énoncé du théorème, mais aussi et surtout d'éviter de lourdes discussions dans la démonstration.

Théorème 3.8.7. *Soit* $r,s \in \{1,2,\dots\}$ *et* $Y = (y_{ij}) \in C^0(\Omega, M_{r\times s})$. *Soit* ${}^sY$ *la transposée secondaire de* Y. *Pour tout* $(i,j) \in \mathbb{Z}^2 - \{1,\dots,r\} \times \{1,\dots s\}$, $t \in \Omega$, *posons* $y_{ij}(t) = 0$. *Les relations suivantes sont équivalentes :*

(a) $2N_r Y N_s - N_r^2 Y - Y N_s^2 = 0.$

(b) $2N_s\, {}^sY N_r - N_s^2\, {}^sY - {}^sY N_r^2 = 0.$

(c) $y_{i+2,j+2} - 2y_{i+1,j+1} + y_{ij} = 0,\quad i \in \{1,2,\dots\},\ j \in \{\dots,s-3,\ s-2\}.$

(d) $y_{1+k,j+k} = ky_{2,j+1} - (k-1)y_{1j}\ ,\quad j \in \{\dots,s-3,s-2\},\ k \in \{0,\dots,s-j\}.$

(e) $y_{i-k,s-k} = ky_{i-1,s-1} - (k-1)y_{is}\ ,\quad i \in \{3,4,\dots\},\quad k \in \{0,\dots,i-1\}.$

De plus, chacune de ces relations implique que, quels que soient $i,j \in \mathbb{Z}$,

(α) $i \geq j+2 \Rightarrow y_{ij} = 0,$

(β) $i \geq j+2-(s-r) \Rightarrow y_{ij} = 0,$

(γ) $r = s$ et $i \geq j+1 \Rightarrow y_{ij} = 0.$

Démonstration. En vertu de la proposition 3.8.6 et du fait que ${}^sN_r = N_r$, ${}^sN_s = N_s$, les relations (a) et (b) sont les transposées secondaires l'une de l'autre, donc (a) et (b) sont équivalentes.

Montrons que (a) $\Leftrightarrow$ (c). Posons

$A = (a_{ij}) = N_r$,

$B = (b_{ij}) = N_s$,

$C = (c_{ij}) = AYB$,

$D = (d_{ij}) = A^2Y$,

$E = (e_{ij}) = YB^2$,

$F = (f_{ij}) = 2\ C - D - E = 2N_rYN_s - N_r^2Y - YN_s^2$.

Rappelons que δ_{ij} désigne le symbole de Kronecker :
$\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$, $\delta_{ii} = 1$, pour tout $i,j \in \mathbb{Z}$.

Nous allons calculer les coefficients

$$f_{ij} = 2c_{ij} - d_{ij} - e_{ij}$$

en prêtant une attention particulière aux limites de sommation. L'agrandissement de Y par des zéros formulé dans l'énoncé permettra d'éviter une discussion des 9 cas :

$i \leq r-2,\quad i = r-1,\quad i = r,$

$j = 1,\quad j = 2,\quad j \geq 3$

et d'établir une expression unique pour les coefficients f_{ij} .

Soit $i \in \{1,\dots,r\}$, $j \in \{1,\dots,s\}$. En utilisant à plusieurs reprises la définition $y_{ij} = 0$ lorsque $i \notin \{1,\dots,r\}$ ou $j \notin \{1,\dots,s\}$, nous obtenons

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{r} \sum_{\ell=1}^{s} a_{ik}y_{k\ell}b_{\ell j} = \sum_{k=1}^{r+1} \sum_{\ell=o}^{s} \delta_{k,i+1}y_{k\ell}\delta_{\ell,j-1} = y_{i+1,j-1} ,$$

$$d_{ij} = \sum_{k=1}^{r} \sum_{\ell=1}^{r} a_{ik}a_{k\ell}y_{\ell j} = \sum_{k=1}^{r} \sum_{\ell=1}^{r+1} \delta_{k,i+1}\delta_{\ell,k+1}y_{\ell j}$$

$$= \sum_{k=1}^{r+1} \delta_{k,i+1}y_{k+1,j} = y_{i+2,j} ,$$

$$e_{ij} = \sum_{k=1}^{s} \sum_{\ell=1}^{s} y_{ik}b_{k\ell}b_{\ell j} = \sum_{k=o}^{s} \sum_{\ell=1}^{s} y_{ik}\delta_{k,\ell-1}\delta_{\ell,j-1}$$

$$= \sum_{\ell=o}^{s} y_{i,\ell-1}\delta_{\ell,j-1} = y_{i,j-2} ,$$

d'où

$$f_{ij} = 2y_{i+1,j-1} - y_{i+2,j} - y_{i,j-2} .$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} F = 0 &\iff y_{i+2,j} - 2y_{i+1,j-1} + y_{i,j-2} = 0, && i \in \{1,\dots,r\} , \\ & && j \in \{1,\dots,s\} \\ &\iff y_{i+2,j} - 2y_{i+1,j-1} + y_{i,j-2} = 0, && i \in \{1,2,\dots\}, \\ & && j \in \{\dots,s-1,s\} \\ &\iff y_{i+2,j'+2} - 2y_{i+1,j'+1} + y_{i,j'} = 0, && i \in \{1,2,\dots\}, \\ & && j' \in \{\dots,s-3s-2\}, \end{aligned}$$

ce qui montre que (a) $\iff$ (c).

<u>Montrons que (c) $\Rightarrow$ (d).</u> Supposons que la relation (c) soit satisfaite. Soit $j \in \{\dots,s-3,s-2\}$. Pour tout $k \in \{o,\dots,s-j\}$, désignons par $R(k)$ la relation

$$y_{1+k,j+k} = ky_{2,j+1} - (k-1)y_{1j} .$$

Les relations $R(o)$ et $R(1)$ sont triviales. Soit $\ell \in \{1,\dots,s-j-1\}$ tel que pour tout $k \in \{o,\dots,\ell\}$ la relation $R(k)$ est satisfaite. Montrons que la relation $R(\ell+1)$ est satisfaite. L'inégalité $\ell \leqslant s-j-1$ implique que $j+\ell-1 \leqslant s-2$. Donc, d'après (c),

$$y_{\ell+2,j+\ell+1} = 2y_{\ell+1,j+\ell} - y_{\ell,j+\ell-1} ,$$

d'où, en appliquant les hypothèses $R(\ell)$ et $R(\ell-1)$,

$$\begin{aligned} y_{\ell+2,j+\ell+1} &= 2(\ell y_{2,j+1} - (\ell-1)y_{1j}) - ((\ell-1)y_{2,j+1} - (\ell-2)y_{1j}) \\ &= (\ell+1)y_{2,j+1} - \ell y_{1j} , \end{aligned}$$

ce qui montre que la relation $R(\ell+1)$ est satisfaite.

<u>Montrons que (d) $\Rightarrow$ (c).</u> Supposons que la relation (d) soit satisfaite. Soit $i \in \{1,2,\dots\}$ et $j \in \{\dots,s-3,s-2\}$. Posons $k = i-1$, $k' = i$, $k'' = i+1$ et $j' = j-i+1$. Alors $j' \leqslant j \leqslant s-2$ et

$$o \leqslant k \leqslant k' \leqslant k'' = 2 + (i-1) \leqslant (s-j) + (i-1) = s-j'.$$

Par suite, d'après (d),

$$y_{i+2,j+2} = y_{1+k'',j'+k''} = k''y_{2,j'+1} - (k''-1)y_{1,j'} ,$$

$$y_{i+1,j+1} = y_{1+k',j'+k'} = k'y_{2,j'+1} - (k'-1)y_{1,j'} ,$$

$$y_{i,j} = y_{1+k,j'+k} = ky_{2,j'+1} - (k-1)y_{1,j'} ,$$

ce qui montre que

$$y_{i+2,j+2} - 2y_{i+1,j+1} + y_{ij} = 0,$$

car $k'' - 2k' + k = i+1-2i+i-1 = 0$.

Montrons que (b) <=> (e). Posons

$$.^{s}y_{ij} = y_{r-j+1,s-i+1} , \qquad i,j \in \mathbb{Z} .$$

Alors ${}^{s}Y = ({}^{s}y_{ij})_{(i,j)\in\{1,\dots,s\}\times\{1,\dots,r\}}$ et, pour tout $(i,j)\in\mathbb{Z}^2 - \{1,\dots,s\}\times\{1,\dots,r\}$, ${}^{s}y_{ij} = 0$. En vertu de l'équivalence (a) <=> (d) du théorème 3.8.7, l'équation (b) équivaut à

$$ {}^{s}y_{1+k,j+k} = k\,{}^{s}y_{2,j+1} - (k-1)\,{}^{s}y_{1j} , \qquad j\in\{\dots,r-3,r-2\},\ k\in\{o,\dots,r-j\},$$

c'est-à-dire à

$$y_{r-j-k+1,s-k} = ky_{r-j,s-1} - (k-1)y_{r-j+1,s} ,$$
$$j\in\{\dots,r-3,r-2\}, \qquad k\in\{o,\dots,r-j\}.$$

En posant $i = r - j + 1$, nous constatons que cette relation coïncide avec (e).

Supposons que les relations équivalentes (a), (b), (c), (d), (e) soient satisfaites. Soit $i\in\{1,\dots,r\}$ et $j\in\{1,\dots,s\}$.

Montrons (α). Supposons que $i \geqslant j + 2$. Posons $k = i - 1$ et $j' = j-i+1$. Alors $j+2-i \leqslant o$ et

$$o \leqslant k \leqslant (i-1) + (s-j) = s - j' ,$$

$j' = (j+2-i) - 1 \leq -1 \leq s-2,$

donc, d'après (d),

$$y_{ij} = y_{1+k,j'+k} = ky_{2,j'+1} - (k-1)y_{1,j'} \;.$$

Comme $j' \leq j'+1 \leq -1+1 = 0$, $y_{2,j'+1} = y_{1,j'} = 0$, d'où $y_{ij} = 0$.

<u>Montrons (β).</u> Supposons que $i \geq j+2-(s-r)$. Posons $i' = s-j+i$ et $k = s-j$. Alors $i' \geq r+2 \geq 3$ et

$$o \leq k \leq k + i-1 = i'-1.$$

Donc, d'après (e),

$$y_{ij} = y_{i'-k,s-k} = ky_{i'-1,s-1} - (k-1)y_{i',s} \;.$$

Comme $i' \geq r+2$, il s'ensuit que $i'-1 > r$, $i' > r$, d'où $y_{i'-1,s-1} = y_{i's} = 0$ et $y_{ij} = 0$.

<u>Montrons (γ).</u> Supposons que $r = s$ et que $i \geq j+1$. Si $i > j+1$, alors $y_{ij} = o$ d'après (α). Supposons que $i = j+1$.

Soit $k \in \{o,\dots,r\}$. Posons $j' = o$. Alors

$j' \leq j-1 = i-2 \leq r-2 = s-2,$

$o \leq k \leq r = s = s-j'$,

donc, d'après (d),

$$y_{1+k,j'+k} = ky_{2,j'+1} - (k-1)y_{1,j'} = ky_{21} \;.$$

Ainsi pour tout $k \in \{o,\dots,r\}$, $y_{1+k,k} = ky_{21}$ et en particulier

$$y_{r,r-1} = (r-1)y_{21} \;, \qquad y_{ij} = jy_{21} \;.$$

Posons $i' = s+1$ et $k' = s-1$. Alors

$i' = (s-2) + 3 \geq j' + 3 = 3,$

$o \leq k' < s = i'-1,$

donc, d'après (e),

$$y_{21} = y_{i'-k',s-k'} = k'y_{i'-1,s-1} - (k'-1)y_{i's} = (s-1)y_{s,s-1}$$

$= (r-1)y_{r,r-1}$.

Il s'ensuit que

$$y_{r,r-1} = (r-1)y_{21} = (r-1)^2 y_{r,r-1} ,$$

d'où

$$r(r-2)y_{r,r-1} = 0.$$

Si $r \neq 2$, alors $y_{r,r-1} = 0$, $y_{21} = (r-1)y_{r,r-1} = 0$ et $y_{ij} = jy_{21} = 0$. Si $r = 2$, alors $2 \leq j+1 = i \leq r = 2$, ce qui implique que $i = 2$ et $j = 1$. Posons $i'' = 1$ et $j'' = 0$. Alors $j'' = r-2 = s-2$. Donc, d'après (c), $y_{i''+2,j''+2} - 2y_{i''+1,j''+1} + y_{i''j''} = 0$, c'est-à-dire $y_{32} - 2y_{21} = 0$. D'autre part, $y_{32} = y_{r+1,r} = 0$, par suite $y_{ij} = y_{21} = 0$. □

3.8.8 Forme générale des solutions de l'équation $2N_rYN_s - N_r^2Y - YN_s^2 = 0$

Soit $Y \in C^o(\Omega, M_{r\times s})$ une solution de l'équation $2N_rYN_s - N_r^2Y - YN_s^2 = 0$. Nous allons voir que le théorème 3.8.7 permet d'écrire explicitement la forme générale de la solution Y. Pour simplifier la typographie, nous attribuerons des valeurs numériques à r et s dans l'exposition des trois cas $r > s$, $r = s$ et $r < s$ ci-dessous.

1er cas $r > s$. Fixons $s = 5$ par exemple et soit $r \in \{6,7,\ldots\}$. Selon les relations (d) et (α) du théorème 3.8.7, la solution Y est de la forme

$$Y = \left(\begin{array}{ccccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ o & 2b_1 & 2b_2-a_1 & 2b_3-a_2 & 2b_4-a_3 \\ o & o & 3b_1 & 3b_2-2a_1 & 3b_3-2a_2 \\ o & o & o & 4b_1 & 4b_2-3a_1 \\ o & o & o & o & 5b_1 \\ \hline & & 0 & & \end{array}\right),$$

où les fonctions $a_1, \ldots, a_5$, $b_1, \ldots b_5 \in C^o(\Omega, \mathbb{C})$ peuvent être choisies arbitrairement.

2e cas : $r = s$. Fixons $r = s = 5$ par exemple. Selon les relations (d) et (γ) du théorème 3.8.7, la solution Y est de la forme

$$Y = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ o & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ o & o & 2b_2-a_1 & 2b_3-a_2 & 2b_4-a_3 \\ o & o & o & 3b_2-2a_1 & 3b_3-2a_2 \\ o & o & o & o & 4b_2-3a_1 \end{pmatrix},$$

où les fonctions $a_1, \ldots, a_5$,$b_2, \ldots, b_5 \in C^o(\Omega, \mathbb{C})$ peuvent être choisies arbitrairement.

3e cas : $r < s$. Fixons $r = 5$ par exemple et soit $s \in \{6,7,\ldots\}$. En vertu de l'équivalence des relations (a) et (b) du théorème 3.8.7, la solution Y est la transposée secondaire de la solution du 1er cas. Par conséquent Y est de la forme

$$Y = \left(\begin{array}{c|cccccc} & 5b_5 & 4b_4-3a_5 & 3b_3-2a_4 & 2b_2-a_3 & b_1 & a_1 \\ & o & 4b_5 & 3b_4-2a_5 & 2b_3-a_4 & b_2 & a_2 \\ 0 & o & o & 3b_5 & 2b_4-a_5 & b_3 & a_3 \\ & o & o & o & 2b_5 & b_4 & a_4 \\ & o & o & o & o & b_5 & a_5 \end{array}\right),$$

où les fonctions $a_1, \ldots, a_5$,$b_1, \ldots b_5 \in C^o(\Omega, \mathbb{C})$ peuvent être choisies arbitrairement.

3.9 APPLICATION AUX SOLUTIONS DIAGONALISABLES DE L'EQUATION AA' = A'A

La méthode de résolution de l'équation $AA' = A'A$ d'I.J. Epstein nous permet de démontrer directement le théorème suivant sur les solutions diagonisables de cette équation dû à J.-M. Gracia (cf no 2.3.4).

<u>Théorème 3.9</u> *Soit* $A \in C^1(\Omega, \mathbf{M}_n)$ *une fonction matricielle commutant avec sa dérivée, diagonalisable en chaque point de* Ω *et possédant une caractéristique de Segre constante. Alors* A *est commutative.*

<u>Démonstration.</u> Soit χ la caractéristique de Segre (constante) de A. Comme A est diagonalisable, $N_\chi = 0$ et en vertu du corollaire 3.7, A est de la forme $A = PDP^{-1}$, où $D \in \mathcal{D}^1_\chi(\Omega, \mathbf{M}_n)$ et $P \in C^1(\Omega, \mathbf{M}_n^*)$ est une solution de l'équation $P' = PX$, où $X \in C^0(\Omega, \mathbf{M}_n)$ est elle-même une solution de l'équation $[D,[X,D]] = 0$. Par définition de $\mathcal{D}^1_\chi(\Omega, \mathbf{M}_n)$, D est de la forme

$$D = \mathrm{diag}(\lambda_1 I_{m_1}, \ldots, \lambda_p I_{m_p}),$$

où $m_1, \ldots, m_p \in \{1, \ldots, n\}$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in C^1(\Omega, \mathbb{C})$ sont des fonctions dont les valeurs $\lambda_1(t), \ldots, \lambda_p(t)$ sont distinctes en chaque point $t \in \Omega$. D'après le théorème 3.8.3, X est de la forme

$$X = \mathrm{diag}(X_1, \ldots, X_p), \qquad X_1(t) \in \mathbf{M}_{m_1}, \ldots, X_p(t) \in \mathbf{M}_{m_p}, \qquad t \in \Omega.$$

Décomposons P en blocs de la manière suivante :

$$P = \left(P_1 \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, P_p\right), \qquad P_1(t) \in \mathbf{M}_{n\times m_1}, \ldots, P_p(t) \in \mathbf{M}_{n\times m_p}, \qquad t \in \Omega.$$

Soit $k \in \{1, \ldots, p\}$. Posons

$$E_k(t) = P_k(t)(\mathbb{C}^{m_k}), \qquad t \in \Omega.$$

Comme $A = PDP^{-1}$, E_k est le sous-espace propre de A correspondant à la valeur propre λ_k. Soit $p_{k1}, \ldots, p_{k,m_k}$ les colonnes de P_k et $x_{k1}, \ldots, x_{km_k}$ celles de X_k. Alors, pour tout $t \in \Omega$, $(p_{k1}(t), \ldots, p_{km_k}(t))$ est une base de $E_k(t)$. D'autre part les relations $P' = PX$ et $X = \mathrm{diag}(X_1, \ldots, X_p)$ impliquent que $P_k' = P_k X_k$ et par suite

$$p_{ki}'(t) = P_k(t)x_{ki}(t) \in E(t), \qquad i \in \{1,\dots,m_k\}, \qquad t \in \Omega.$$

En vertu du corollaire 2.3 de [22], E_k est constant.

Soit $t, t_o \in \Omega$. Alors $E_k(t_o) = E_k(t)$ est le sous-espace propre de $A(t)$ correspondant à la valeur propre $\lambda_k(t)$, donc $p_{k1}(t_o),\dots,p_{km_k}(t_o)$ sont des vecteurs propres de $A(t)$ correspondant à cette même valeur propre. Il s'ensuit que

$$A(t) = P(t_o)D(t)P(t_o)^{-1}, \qquad t \in \Omega,$$

et par conséquent A est commutative sur Ω. □

CHAPITRE 4

ETUDE DES SOLUTIONS DE L'EQUATION AA' = A'A PAR DECOMPOSITION DE A EN UNE SOMME DE FONCTIONS MATRICIELLES DE RANG 1

4.1 INTRODUCTION

Rappelons tout d'abord que la méthode de résolution d'I.J. Epstein exposée au chapitre précédant montre que les solutions $A \in C^1(\Omega, M_n)$ de l'équation AA' = A'A de caractéristique de Segre constante χ sur un intervalle ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}$ sont les fonctions matricielles de la forme $A = PJP^{-1}$, où $J \in C^1(\Omega, M_n)$ est une fonction matricielle de Jordan de caractéristique de Segre χ et $P \in C^1(\Omega, M_n^*)$ est une solution de l'équation $P' = PX$, $X \in C^o(\Omega, M_n)$ étant une solution de l'équation $[J,[X,J]] = 0$.

La forme générale de X calculée au chapitre précédent, est relativement compliquée et il n'est généralement pas possible d'établir des expressions des solutions P de l'équation $P' = PX$ suffisamment simples pour permettre l'étude des solutions $A = PJP^{-1}$ de l'équation AA' = A'A.

Dans ce chapitre, nous présentons une méthode permettant dans certains cas de contourner cette difficulté. Elle consiste à décomposer A en une somme de fonctions matricielles de rang 1, c'est-à-dire à mettre A sous la forme

$$A = \sum_k f_k \, a_{i_k} \, b_{i_k}^* ,$$

où (f_k) est une famille de fonctions scalaires, (a_i) et (b_i) sont des familles de fonctions vectorielles et $b_{i_k}^*$ désigne le transposé conjugué complexe de b_{i_k} .

Grâce à cette décomposition combinée avec la méthode de résolution d'I.J. Epstein, nous établissons directement une caractérisation des solutions de l'équation $AA' = A'A$ dont la caractéristique de Segre χ est constante. Cette caractérisation ne fournit pas une méthode pour calculer les solutions de l'équation $AA' = A'A$, mais, par contre, elle permet dans de nombreux cas d'établir une forme générale des solutions ainsi que de nouvelles propriétés.

Nous présentons ensuite quelques applications. Puisque l'étude des solutions de l'équation $AA' = A'A$ ayant une caractéristique de Segre χ constante se réduit au cas où la solution A ne possède qu'une seule valeur propre α (cf no 2.3.3), nous nous restreindrons à ce cas. Le cas où chaque sous-espace propre de A est de dimension extrême ayant déjà été traité (cf no 2.3.6), nous ne considérerons que celui où le sous-espace propre de A correspondant à l'unique valeur propre α est de dimension d intermédiaire, c'est-à-dire

$$1 < d < m,$$

où m est la multiplicité algébrique de la valeur propre α. Cette condition implique que $n \geqslant 3$.

Lorsque n=3, le seul cas répondant aux restrictions décrites ci-dessus est celui où

$$\chi = [(2,1)].$$

Lorsque n=4, trois caractéristiques de Segre sont à considérer, à savoir

$$\chi = [(3,1)], \qquad \chi = [(2,2)], \qquad \chi = [(2,1,1)].$$

Dans [7], A. Terracini a généralisé l'étude des quatre cas mentionnés ci-dessus en étudiant les solutions dont la caractéristique de Segre est

$$\chi = [(2,1,1,\ldots,1)],$$
$$\chi = [(2,2,1,1,\ldots,1)],$$
$$\chi = [(3,1,1,\ldots,1)].$$

Dans cette thèse, nous limitons l'exposé des applications de la méthode établie dans ce chapitre à l'étude des deux cas suivants, qui généralisent tous les cas mentionnés ci-dessus :

$$\chi = [(2,2,\ldots,2,1,1,\ldots,1)],$$
$$\chi = [(3,3,\ldots,3,1,1,\ldots,1)].$$

Cette généralisation nous permet de compléter et de simplifier les résultats d'A. Terracini, tout en évitant ses calculs assez compliqués.

Dans le cas où

$$\chi = [(2,2,\ldots,2,1,1,\ldots,1)]$$

(où 2 apparaît r fois), nous montrons que les solutions de l'équation $AA' = A'A$ sont de la forme

$$A = \alpha I_n + LR^* ,$$

où L et R sont des fonctions matricielles $n \times r$ telles que les colonnes de R sont orthogonales à celles de L et de L'. Nous remarquons que le cas particulier où la valeur propre α de A est nulle coïncide avec le cas où A est de rang r et

$$A^2 = 0.$$

Ce résultat nous permettra au chapitre 5 de construire aisément des exemples de solutions analytiques non commutatives de l'équation $AA' = A'A$.

Dans le cas particulier où

$$\chi = [(2,2,\ldots,2)],$$

nous avons eu la surprise de découvrir que les solutions de l'équation $AA' = A'A$ sont nécessairement commutatives, bien que la dimension d de leur unique sous-espace propre soit l'opposé d'une dimension extrême, à savoir

$$d = \frac{n}{2} .$$

Nous montrons en effet que dans ce cas les solutions sont de la forme

$$A = \alpha I_n + L_o F R_o^* ,$$

où les $\frac{n}{2}$ colonnes de R_o sont orthogonales aux $\frac{n}{2}$ colonnes de L_o. Dans le cas particulier où $\chi = [(2,2)]$, A. Terracini a aussi constaté que la solution A est commutative, mais sans établir l'expression ci-dessus.

Dans le cas où

$$\chi = [(3,3,\ldots,3,1,1,\ldots,1)]$$

(où 3 apparaît r fois), nous montrons que les solutions de l'équation $AA' = A'A$ sont de la forme

$$A = \alpha I_n + L_o R^* + L R_o^* ,$$

où les r colonnes de L_o sont orthogonales à celles de R et R_o, les r colonnes de R_o sont orthogonales aux r colonnes de L et $R^*L' = R'^*L$. Dans ce cas, l'unique sous-espace propre de A est de dimension $n-2r$ et contient un sous-espace vectoriel constant de dimension r; par exemple dans le cas où $\chi = [(3,1)]$, le sous-espace propre de $A(t)$ est un plan $\pi(t)$ contenant une droite fixe d_o. D'autre part, la nilpotence d'indice 3 de la fonction matricielle $B = A - \alpha I_n$ est étalée sur Ω, ce qui implique que B^2 est commutative.

Dans l'étude des autres cas, par la méthode exposée dans ce chapitre, que nous poursuivons actuellement, nous ne rencontrons de sérieuses difficultés que dans les cas où, dans la caractéristique de Segre $\chi = [(n_1, n_2, \ldots, n_s)]$ de la solution de l'équation $AA' = A'A$, il existe un indice k tel que $n_k = n_{k+1} + 1$. Le seul de ces cas que nous avons réussi à résoudre pour le moment est celui commenté ci-dessus, où $\chi = [(2,2,\ldots,2,1,1,\ldots,1)]$. Les résultats de cette recherche seront publiés dans [26].

Comme au chapitre précédant, nous nous restreindrons au cas des fonctions matricielles d'une variable réelle et Ω désignera un intervalle ouvert non vide dans $\mathbb{R}$.

4.2 NOTATION ET LEMMES

Notation. Soit

$$\chi = [(n_{11},\dots,n_{1s_1}),\dots,(n_{p1},\dots,n_{ps_p})]$$

une caractéristique de Segre d'ordre n. Posons

$$m_k = n_{k1} + \dots + n_{ks_k},\dots,\ k \in \{1,\dots,p\}.$$

Nous désignerons par $I_{o\chi}$ l'ensemble des numéros des lignes nulles de la matrice N_χ et par I_χ son complémentaire, autrement dit

$$I_{o\chi} = \{n_{11}, n_{11} + n_{12},\dots,m_1, m_1 + n_{21},\dots,m_2,\dots,n\},$$
$$I_\chi = \{1,2,\dots n\} - I_{o\chi}.$$

Si $M = (m_{ij}) \in \mathbb{M}_{r\times s}$, nous définissons *l'adjoint* $M^* = (m^*_{ij}) \in \mathbb{M}_{s\times r}$ de M par

$$m^*_{ij} = \overline{m}_{ji},\quad i \in \{1,\dots,s\},\quad j \in \{1,\dots,r\},$$

où $\overline{m}_{ji}$ désigne le conjugué complexe de m_{ji}.

Conformément à l'usage nous définissons le produit scalaire dans $\mathbb{C}^n$ par $(a|b) = b^*a$, pour tout $a,b \in \mathbb{C}^n$. Suivant la convention de la page x, si a et b sont des applications de Ω dans $\mathbb{C}^n$, alors $(a|b)$ dénote l'application b^*a de Ω dans $\mathbb{C}$, ce qui constitue un abus de notation (bien commode).

Dans la décomposition des solutions de l'équation $AA' = A'A$ en fonctions matricielles de rang 1

$$A = \sum_k f_k\, a_{i_k}\, b^*_{i_k}$$

que nous allons effectuer dans ce chapitre, nous verrons que les deux familles de fonctions vectorielles (a_i) et (b_i) satisfont à la relation

$$(a_i|b_j) = \delta_{ij},\quad i,j \in \{1,\dots,n\}.$$

De tels couples de familles sont appelés *familles biorthogonales* par de nombreux auteurs. Nous rassemblons quelques conséquences de cette relation dans le lemme ci-dessous que nous utiliserons à maintes reprises dans la suite.

<u>Lemme 4.2.1.</u> *Soit* $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{C}^n$. *Posons*

$$P = \left[a_1 \middle| \cdots \middle| a_n\right], \qquad Q = \left[b_1 \middle| \cdots \middle| b_n\right].$$

Les relations suivantes sont équivalentes :

(a) $\quad (a_i | b_j) = \delta_{ij}, \qquad i,j \in \{1,\dots,n\}.$

(b) $\quad (b_i | a_j) = \delta_{ij}, \qquad i,j \in \{1,\dots,n\}.$

(c) $\quad P$ *est inversible et* $P^{-1} = Q^*$.

(d) $\quad Q$ *est inversible et* $Q^{-1} = P^*$.

(e) $\quad \sum_{i=1}^{n} a_i\, b_i^* = I_n$.

(f) $\quad \sum_{i=1}^{n} b_i\, a_i^* = I_n$.

(g) $\quad x = \sum_{i=1}^{n} (x | b_i) a_i, \qquad x \in \mathbb{C}^n.$

(h) $\quad x = \sum_{i=1}^{n} (x | a_i) b_i, \qquad x \in \mathbb{C}^n.$

De plus si ces relations équivalentes sont satisfaites, alors

(α) $\quad a_1, \dots, a_n$ *sont linéairement indépendants.*

(β) $\quad b_1, \dots, b_n$ *sont linéairement indépendants.*

<u>Démonstration.</u> Les équivalences suivantes sont immédiates ou bien connues :

$$(a) \iff (b),$$

$$(a) \iff Q^*P = I_n \iff (c) \iff PQ^* = I_n \iff (e),$$

$$(b) \iff P^*Q = I_n \iff (d) \iff QP^* = I_n \iff (f).$$

D'autre part, pour tout $x \in \mathbb{C}^n$,

$$\sum_{i=1}^{n} (x|b_i)a_i = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i^*\right) x,$$

$$\sum_{i=1}^{n} (x|a_i)b_i = \left(\sum_{i=1}^{n} b_i a_i^*\right) x,$$

ce qui montre que (e) <=> (g) et (f) <=> (h). Enfin, il est évident que (c) implique (α) et que (d) implique (β). $\square$

Le lemme suivant n'est qu'un cas particulier trivial du précédent, mais il a des conséquences importantes *relatives* à la méthode exposée dans ce chapitre. En effet, pour chaque sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^n$ de la forme

$$E(t) = \mathrm{span}\{a_{j_1}(t), \ldots, a_{j_q}(t)\},$$

une simple inspection des colonnes $j_1, \ldots, j_q$ de la matrice $X(t) = (x_{ij}(t))$ figurant dans le lemme ci-dessous permet de voir immédiatement si

$$a'_{j_1}(t), \ldots, a'_{j_q}(t) \in E(t)$$

et si cette condition est satisfaite, $E(t)$ ne dépend pas de t (cf no 2.2.1). De même, une simple inspection des lignes $i_1, \ldots, i_p$ de la matrice $X(t)$ permet de voir immédiatement si le sous-espace vectoriel

$$F(t) = \mathrm{span}\{b_{i_1}(t), \ldots, b_{i_p}(t)\}$$

est constant.

<u>Lemme 4.2.2.</u> *Soit* $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in C^1(\Omega, \mathbb{C}^n)$ *des fonctions vectorielles telles que*

$$(a_i|b_j) = \delta_{ij}, \qquad i,j \in \{1, \ldots, n\}.$$

Posons

$$x_{ij} = (a'_j|b_i), \qquad i,j \in \{1, \ldots, n\}.$$

Alors

$$a'_j = \sum_{i=1}^{n} x_{ij}\, a_i \,,$$

$$b'_j = -\sum_{i=1}^{n} \bar{x}_{ji} b_i \,, \qquad j \in \{1,\dots,n\}.$$

<u>Démonstration.</u> Soit $i,j \in \{1,\dots,n\}$. L'hypothèse

$$(a_i | b_j) = \delta_{ij} \,,$$

implique que

$$(a_i | b'_j) = -(a'_i | b_j) = -x_{ji} \,.$$

D'après le lemme 4.2.1,

$$a'_j = \sum_{i=1}^{n} (a'_j | b_i) a_i = \sum_{i=1}^{n} x_{ij} a_i \,,$$

$$b'_j = \sum_{i=1}^{n} (b'_j | a_i) b_i = -\sum_{i=1}^{n} \bar{x}_{ji} b_i \,. \qquad \square$$

Pour établir que les solutions de l'équation $AA' = A'A$ dont la caractéristique de Segre est $[(2,2,\dots,2)]$, $[(3,3,\dots,3,1,1,\dots,1)]$, sont respectivement de la forme $A = \alpha I_n + L_o F R_o^*$, $A = \alpha I_n + L_o R^* + L R_o^*$, nous appliquerons le lemme suivant :

<u>Lemme 4.2.3.</u> *Soit* $k \in \{0,1,2,\dots\}$. *Soit* $F \in C^k(\Omega, M_{m\times n})$ *une fonction matricielle dont les colonnes prennent leurs valeurs dans un sous-espace vectoriel* E_o *de* $\mathbb{C}^m$ *constant de dimension* r. *Alors il existe* $G_o \in M_{m\times r}$ *de rang* r *et* $H \in C^k(\Omega, M_{r\times n})$ *tels que* $F = G_o H$ *et* $\operatorname{Im} G_o = E_o$.

<u>Démonstration.</u> Soit $(e_1, \dots, e_r)$ une base de E_o. Soit $j \in \{1,\dots n\}$ et $t \in \Omega$. Désignons par F_j la j^e colonne de F. Comme par hypothèse $F_j(t) \in E_o$, il existe $h_{1j}(t),\dots,h_{rj}(t) \in \mathbb{C}$ tels que

$$F_j(t) = h_{1j}(t) e_1 + \dots + h_{rj}(t) e_r \,.$$

D'après le lemme 5.2 de [22], $h_{1j}, \dots, h_{rj} \in C^k(\Omega, \mathbb{C})$. Posons

$G_o = \left[e_1 \vdots \cdots \vdots e_r\right] \in M_{m\times r}$ et $H = (h_{ij}) \in C^k(\Omega, M_{r\times n})$. Alors G_o est de rang r et par définition, $F = G_o H$, $\mathrm{Im} G_o = E_o$. □

4.3 CARACTERISATION DES SOLUTIONS DE L'EQUATION AA' = A'A

Théorème 4.3.1. *Soit* χ *une caractéristique de Segre d'ordre* n *et soit* A *quelconque. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

(a) $A \in C^1(\Omega, M_n)$ *est une solution de l'équation* $AA' = A'A$ *de caractéristique de Segre constante* χ.

(b) A *est de la forme*

$$A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, a_i\, b_i^* + \sum_{i\in I_\chi} a_i\, b_{i+1}^* ,$$

où $\lambda_1 ,\ldots,\lambda_n \in C^1(\Omega,\mathbb{C})$ *sont des fonctions scalaires telles que*

$$D = \mathrm{diag}(\lambda_1 ,\ldots,\lambda_n) \in \mathcal{D}^1_\chi(\Omega, M_n)$$

et $a_1 ,\ldots,a_n ,b_1 ,\ldots,b_n \in C^1(\Omega,\mathbb{C}^n)$ *sont des fonctions vectorielles telles que*

$$(a_i | b_j) = \delta_{ij} ,$$

$$(a_j' \,|\, b_i) = - (a_j | b_i') = x_{ij} , \qquad i,j \in \{1,\ldots,n\},$$

où $X = (x_{ij})$ *est une solution de l'équation*

$$[J,[X,J]] = 0,$$

J *étant défini par* $J = D + N_\chi$.

Rappelons que l'équation $[J,[X,J]] = 0$ a été résolue au paragraphe 3.8. Cette équation exprime la commutation de A avec sa dérivée, tandis que les autres conditions de l'assertion (b) expriment que la caractéristique de Segre de A est χ.

Démonstration. Pour tout $j \in \{1,\dots,n\}$, nous désignerons par e_j la j^e colonne de la matrice I_n .

Montrons que (a) $\Rightarrow$ (b). Supposons que A satisfait à (a).

D'après le corollaire 3.7, A est de la forme $A = PJP^{-1}$, où

$J = D + N_\chi$,

$$D = \operatorname{diag}(\lambda_1 ,\dots,\lambda_n) \in \mathcal{D}^1_\chi(\Omega, \mathbf{M}_n)$$

et $P \in C^1(\Omega, \mathbf{M}^*_n)$ est une solution de l'équation $P' = PX$, où la fonction matricielle $X \in C^0(\Omega, \mathbf{M}_n)$ est elle-même une solution de l'équation $[J,[X,J]] = 0$.

Pour chaque $j \in \{1,\dots,n\}$, désignons la j^e colonne des fonctions matricielles P et $(P^{-1})^*$ respectivement par a_j et b_j . Alors par définition

$$D = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i e_i^* , \qquad N_\chi = \sum_{i \in I_\chi} e_i e_{i+1}^* ,$$

$$a_j = Pe_j , \qquad b_j = (P^{-1})^* e_j , \qquad j \in \{1,\dots,n\},$$

d'où

$$\begin{aligned} A = PJP^{-1} &= PDP^{-1} + PN_\chi P^{-1} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, Pe_i \, e_i^* \, P^{-1} + \sum_{i \in I_\chi} Pe_i \, e_{i+1}^* \, P^{-1} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, a_i \, b_i^* + \sum_{i \in I_\chi} a_i \, b_{i+1}^* . \end{aligned}$$

D'autre part, quels que soient $i,j \in \{1,\dots,n\}$,

$$(a_i | b_j) = b_j^* a_i = e_j^* P^{-1} Pe_i = e_j^* e_i = \delta_{ij} ,$$

ce qui implique que

$$(a_i'|b_j) = -(a_i|b_j').$$

L'équation $P' = PX$ implique que $X = P^{-1}P'$, par suite,

$$(a_j'|b_i) = b_i^* a_j' = e_i^* P^{-1} P' e_j = e_i^* X e_j = x_{ij} ,$$

où x_{ij} est le terme de la i^e ligne, j^e colonne de X, ce qui achève de montrer que A satisfait à (b).

<u>Montrons que (b) $\Rightarrow$ (a).</u> Supposons que A satisfait à (b).

Posons

$$P = \left(a_1 \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, a_n\right), \qquad Q = \left(b_1 \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, b_n\right).$$

D'après le lemme 4.2.1, P et Q sont inversibles et

$$P^{-1} = Q^*.$$

Par suite

$$a_j = Pe_j , \qquad b_j = Qe_j = (P^{-1})^* e_j , \qquad j \in \{1,\ldots,n\},$$

d'où

$$\begin{aligned} A &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, a_i \, b_i^* + \sum_{i \in I_X} a_i \, b_{i+1}^* \\ &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, Pe_i \, e_i^* \, P^{-1} + \sum_{i \in I_X} Pe_i e_{i+1}^* P^{-1} \\ &= PDP^{-1} + PN_X P^{-1} = PJP^{-1} . \end{aligned}$$

D'autre part, quels que soient $i,j \in \{1,\ldots,n\}$,

$$e_i^* X e_j = x_{ij} = (a_j'|b_i) = b_i^* a_j' = e_i^* P^{-1} P' e_j ,$$

d'où

$$X = P^{-1}P', \qquad P' = PX.$$

Par conséquent, en vertu du corollaire 3.7, A satisfait à (a). $\square$

Considérons maintenant le cas particulier où la solution A de l'équation $AA' = A'A$ ne possède qu'une seule valeur propre α :

Corollaire 4.3.2. *Soit χ une caractéristique de Segre d'ordre n de la forme*

$$\chi = [(n_1, n_2, \ldots, n_s)]$$

et soit A *quelconque. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

(a) $A \in C^1(\Omega, \mathbb{M}_n)$ *est une solution de l'équation* $AA' = A'A$ *de caractéristique Segre constante* χ.

(b) *Il existe* $\alpha \in C^1(\Omega, \mathbb{C})$, $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in C^1(\Omega, \mathbb{C}^n)$ *tels que*

$$A = \alpha I_n + \sum_{i \in I_\chi} a_i \, b_{i+1}^* ,$$

$$(a_i | b_j) = \delta_{ij} ,$$

$$(a_j' | b_i) = -(a_j | b_i') = x_{ij} , \qquad i,j \in \{1, \ldots, n\},$$

où $X = (x_{ij}) \in C^0(\Omega, \mathbb{M}_n)$ *est une solution de l'équation*

$$[N_\chi, [X, N_\chi]] = 0.$$

Démonstration. Par définition,

$$\mathcal{D}_\chi^1(\Omega, \mathbb{M}_n) = \{\alpha I_n \mid \alpha \in C^1(\Omega, \mathbb{C})\}.$$

Il s'ensuit, en vertu du théorème 4.3.1 que l'assertion (a) est équivalente à l'assertion

(b') A est de la forme

$$A = \alpha \sum_{i=1}^{n} a_i \, b_i^* + \sum_{i \in I_\chi} a_i \, b_{i+1}^* ,$$

où $\alpha \in C^1(\Omega, \mathbb{C})$ et $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in C^1(\Omega, \mathbb{C}^n)$ sont des fonctions vectorielles telles que

$$(a_i | b_j) = \delta_{ij} ,$$

$$(a'_j | b_i) = - (a_j | b'_i) = x_{ij} , \qquad i,j \in \{1,\dots,n\},$$

où $X = (x_{ij}) \in C^0(\Omega, \mathbb{M}_n)$ est une solution de l'équation $[N_\chi , [X, N_\chi]] = 0.$

Si A satisfait à (b') ou à (b), alors, d'après le lemme 4.2.1,

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \, b_i^* = I_n ,$$

ce qui montre l'équivalence de (b') et (b) et par conséquent celle de (a) et (b). □

4.4 APPLICATIONS

4.4.1 Le cas $\chi = [(2,2,\dots,2,1,1,\dots,1)]$

Théorème 4.4.1. *Soit* χ *une caractéristique de Segre d'ordre* n *de la forme*

$$\chi = [(n_1 ,\dots,n_r ,\dots,n_s)],$$

où

$$1 \leqslant r \leqslant s,$$

$$n_1 = \dots = n_r = 2$$

et si $r < s$

$$n_{r+1} = \dots = n_s = 1.$$

Soit A *quelconque. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

(a) $A \in C^1(\Omega, \mathbb{M}_n)$ *est une solution de l'équation* $AA' = A'A$ *de caractéristique de Segre constante* χ.

(b) A *est de la forme*

$$A = \alpha I_n + LR^* ,$$

où $\alpha \in C^1(\Omega,\mathbb{C})$ *et* $L,R \in C^1(\Omega,\mathbb{M}_{n\times r})$ *sont des fonctions matricielles de rang* r *telles que*

$$R^*L = 0,$$

$$R^*L' = 0 ,$$

autrement dit les colonnes de $R(t)$ *sont orthogonales à celles de* $L(t)$ *et de* $L'(t)$ *en chaque point* $t\in\Omega$.

De plus, si A *satisfait à* (b), *alors*

$$R'^*L = 0$$

et, en chaque point $t\in\Omega$, $\alpha(t)$ *est l'unique valeur propre de* $A(t)$, *le sous-espace propre correspondant est*

$$\mathrm{Ker}(A(t) - \alpha(t)I_n) = (\mathrm{Im}R(t))^{\perp}.$$

Ce sous-espace vectoriel est de dimension $n-r \geq r$ *et contient le sous-espace vectoriel* $L(t)$ *de dimension* r.

Démonstration.

Montrons que (a) $\Rightarrow$ (b). Supposons que A satisfait à (a). Par définition

$$I_{0\chi} = \{2,4,\ldots,2r,2r+1,2r+2,\ldots,n\},$$

$$I_\chi = \{1,3,\ldots,2r-1\},$$

donc en vertu du corollaire 4.3.2, il existe $\alpha\in C^1(\Omega,\mathbb{C})$ et $a_1,\ldots,a_n,b_1,\ldots,b_n\in C^1(\Omega,\mathbb{C}^n)$ tels que

$$A = \alpha I_n + a_1b_2^* + a_3b_4^* + \ldots + a_{2r-1}b_{2r}^* \qquad (1)$$

$$(a_i|b_j) = \delta_{ij} , \qquad i,j\in\{1,\ldots,n\}, \qquad (2)$$

$$(a_j'|b_i) = -(a_j|b_i') = x_{ij} , \qquad i,j\in\{1,\ldots,n\}, \qquad (3)$$

où $X = (x_{ij}) \in C^o(\Omega, \mathbb{M}_n)$ est une solution de l'équation

$$[N_X, [X, N_X]] = 0 \tag{4}$$

Posons

$$L = \left(a_1 \middle| a_3 \middle| \cdots \middle| a_{2r-1}\right),$$

$$R = \left(b_2 \middle| b_4 \middle| \cdots \middle| b_{2r}\right).$$

L'équation (1) équivaut à $A = \alpha I_n + LR^*$, le système d'équations (2) implique que $R^*L = 0$ et, d'après le lemme 4.2.1, L et R sont de rang r.

Par définition,

$$N_X = \mathrm{diag}(N_2, N_2, \ldots, N_2, 0_{n-2r}).$$

Soit $(X_{ij}) = X$ la décomposition de X en blocs telle que

$$X_{ij}(t) \in \mathbb{M}_{q_i \times q_j}, \qquad t \in \Omega, \qquad i,j \in \{1,\ldots,r+1\},$$

où $q_1 = \ldots = q_r = 2$ et $q_{r+1} = n-2r$. D'après le lemme 3.8.2, l'équation (4) équivaut au système d'équations

$$N_2 X_{ij} N_2 = 0, \qquad i,j \in \{1,\ldots,r\},$$

compte tenu du fait que $N_2^2 = 0$. Il est immédiat que $Y = (y_{ij}) \in C^o(\Omega, \mathbb{M}_2)$ satisfait à l'équation $N_2 Y N_2 = 0$ si et seulement si $y_{21} = 0$. Par suite l'équation (4) équivaut à

$$x_{2i,2j-1} = 0, \qquad i,j \in \{1,\ldots,r\}.$$

D'après (3), ce système d'équations équivaut au système

$$(a'_{2j-1} | b_{2i}) = 0, \qquad i,j \in \{1,\ldots,r\}.$$

qui s'écrit matriciellement

$$R^*L' = 0.$$

Comme

$$0 = (R^*L)' = R'^*L + R^*L',$$

l'équation $R^*L' = 0$ équivaut à l'équation $R'^*L = 0$

L'équation $R^*L = 0$ implique que $B = A - \alpha I_n = LR^*$ satisfait à $B^2 = 0$. Par conséquent, α est l'unique valeur propre de A. L'égalité $\mathrm{Ker}\, B = (\mathrm{Im} R)^{\perp}$ résulte de l'inclusion $(\mathrm{Im} R)^{\perp} \subset \mathrm{Ker}\, B$ et du fait que B est de rang r, car L et R sont de type $n \times r$ et de rang r.

Montrons que (b) => (a). Supposons que A satisfait à (b). Alors $A \in C^1(\Omega, M_n)$ et

$$\begin{aligned}
[A,A'] &= [\alpha I_n + LR^*, \alpha' I_n + L'R^* + LR'^*] \\
&= [LR^*, L'R^*] + [LR^*, LR'^*] \\
&= LR^*L'R^* - L'R^*LR^* + LR^*LR'^* - LR'^*LR^* \\
&= 0,
\end{aligned}$$

car $R^*L = R'^*L = R^*L' = 0$.

D'autre part la fonction matricielle

$$B = A - \alpha I_n = LR^*$$

est de rang r, car L et R sont de type $n \times r$ et de rang r. L'équation $R^*L = 0$ implique que $B^2 = 0$. Comme toute matrice C de rang r telle que $C^2 = 0$ est semblable à la matrice de Jordan N_χ, A est semblable à $\alpha I_n + N_\chi$. Par conséquent, la caractéristique de Segre de A est χ. □

4.4.2 Solutions de l'équation $AA' = A'A$ telles que $A^2 = 0$

Corollaire 4.4.2. *Soit* $r \in \{1,2,\ldots\}$ *et* A *quelconque. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

(a) $A \in C^1(\Omega, M_n)$ *est une solution de l'équation* $AA' = A'A$ *de rang constant* r *et telle que* $A^2 = 0$.

(b) *A est de la forme*

$$A = LR^*,$$

où $L, R \in C^1(\Omega, M_{n\times r})$ *sont des fonctions matricielles de rang* r *telles que*

$$R^* L = 0,$$

$$R^* L' = 0.$$

Démonstration. Les hypothèses $A^2 = 0$ et A est de rang r équivalent à l'assertion suivante : zéro est l'unique valeur propre de A et la caractéristique de Segre de A est

$$\chi = [(n_1, \ldots, n_r, \ldots, n_s)],$$

où $s = n - r$, $n_1 = \ldots = n_r = 2$ et si $s > r$, alors $n_{r+1} = \ldots = n_s = 1$. Il s'ensuit que l'équivalence de (a) et (b) est une conséquence directe du théorème 4.4.1 . □

4.4.3 Un nouveau cas où les solutions de l'équation $AA' = A'A$ sont nécessairement commutatives

Théorème 4.4.3. *Considérons la caractéristique de Segre d'ordre pair* $n = 2r$:

$$\chi = [(2, 2, \ldots, 2)]$$

et soit A *quelconque. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

(a) $A \in C^1(\Omega, M_n)$ *est une solution de l'équation* $AA' = A'A$ *de caractéristique de Segre constante* χ.

(b) *A est de la forme*

$$A = \alpha I_n + L_o F R_o^*,$$

où $F \in C^1(\Omega, M_r^*)$, $r = \frac{n}{2}$, L_o, $R_o \in M_{n\times r}$ *sont de rang* r *et telles que*

$$R_o^* L_o = 0,$$

autrement dit les sous-espaces vectoriels $\mathrm{Im}\, L_o$ *et* $\mathrm{Im}\, R_o$ *de* $\mathbb{C}^n$ *sont de dimension* $r = \frac{n}{2}$ *et orthogonaux, donc compléments orthogonaux l'un de l'autre.*

De plus, si A *satisfait aux deux conditions équivalentes* (a) *et* (b), *alors :*

(α) *La nilpotence d'indice 2 de la fonction matricielle* $B = A - \alpha I_n$ *est étalée sur* Ω, *c'est-à-dire que*

$$B(s)B(t) = 0, \qquad s,t \in \Omega,$$

et en particulier B *et* A *sont commutatives.*

(β) *Le sous-espace propre de* A *correspondant à son unique valeur propre* α *est* $\mathrm{Im}\, L_o$ *et celui de* A^* *correspondant à l'unique valeur* $\bar{\alpha}$ *est* $\mathrm{Im}\, R_o$. *Ces deux sous-espaces propres sont donc constants, de dimension* $r = \frac{n}{2}$ *et compléments orthogonaux l'un de l'autre.*

<u>Montrons que (a) => (b).</u> Supposons que A satisfait à (a). Alors, en vertu du théorème 4.4.1, A est de la forme

$$A = \alpha I_n + L R^* ,$$

où $\alpha \in C^1(\Omega,\mathbb{C})$ et $L,R \in C^1(\Omega,\mathbb{M}_{n\times r})$ sont des fonctions matricielles de rang r telles que

$$R^*L = R^*L' = R'^*L = 0.$$

Comme L et R sont de rang $r = \frac{n}{2}$, l'équation $R^*L = 0$ équivaut à

$$\mathrm{Im}L = (\mathrm{Im}R)^{\perp} .$$

D'autre part l'équation $R^*L' = 0$ équivaut à $\mathrm{Im}L' \subset (\mathrm{Im}R)^{\perp}$. Il s'ensuit que

$$\mathrm{Im}L' \subset \mathrm{Im}L.$$

Désignons par $a_1 ,\ldots,a_r$ les colonnes de L. Comme L est de rang r, $(a_1(t),\ldots,a_r(t))$ est une base de $\mathrm{Im}L(t)$ et d'après l'inclusion ci-dessus,

$a_1'(t),\dots,a_r'(t) \in \mathrm{Im}L(t)$,

en chaque point $t \in \Omega$. Par conséquent, en vertu du corollaire 2.3 de [22], le sous-espace vectoriel $\mathrm{Im}L(t)$ ne dépend pas de $t \in \Omega$. Comme $\mathrm{Im}R(t) = (\mathrm{Im}L(t))^{\perp}$, ceci implique que $\mathrm{Im}R(t)$ ne dépend pas de $t \in \Omega$.

D'après le lemme 4.2.3, il existe des matrices L_o, $R_o \in M_{n\times r}$ de rang r et des fonctions matricielles $D,E \in C^1(\Omega,M_r)$ telles que

$$L = L_o\,D, \qquad R = R_o\,E.$$

Comme L,L_o, R,R_o sont de rang r,

$$\mathrm{Im}L_o = \mathrm{Im}L, \qquad \mathrm{Im}R_o = \mathrm{Im}R.$$

Par suite

$$\mathrm{Im}R_o = (\mathrm{Im}L_o)^{\perp},$$

d'où

$$R_o^*\,L_o = 0.$$

D'autre part

$$A = \alpha I_n + LR^* = \alpha I_n + L_o D E^* R_o^* = \alpha I_n + L_o\,F\,R_o^*,$$ où $F = D\,E^*$. Comme L et R sont de rang r, D et E le sont aussi et $F \in C^1(\Omega,M_r^*)$.

<u>Montrons que (b) implique (a), (α) et (β).</u> Supposons que A satisfait à (b). Il est immédiat que $A \in C^1(\Omega,M_n)$. Posons $B = A - \alpha I_n$. Alors

$$B = L_o\,F\,R_o^*$$

et pour tout $s,t \in \Omega$,

$$B(s)B(t) = L_oF(s)R_o^*L_oF(t)R_o^* = 0,$$

car $R_o^*L_o = 0$. Il s'ensuit que B et A sont commutatives et par conséquent $[A,A'] = 0$.

Comme L_o, $R_o \in M_{n\times r}$ sont de rang r et $F(t) \in M_r^*$, $t \in \Omega$, B est de rang r. D'autre part $B^2 = 0$. Par conséquent la forme réduite de Jordan de B est N_χ et la caractéristique de Segre de A est χ.

Comme B est nilpotent, α est l'unique valeur propre de A et Ker B est le sous-espace propre correspondant. Les équations $B = L_o F R_o^*$ et $R_o^* L_o = 0$ impliquent que $\mathrm{Im}L_o \subset \mathrm{Ker}\, B$. D'autre part,

$$r = \dim \mathrm{Im}L_o \leqslant \dim \mathrm{Ker}\, B = n - \mathrm{rang}\, B = n - r = r,$$

ce qui implique que $\dim \mathrm{Im}L_o = \dim \mathrm{Ker}\, B$ et par suite $\mathrm{Ker}\, B = \mathrm{Im}L_o$.

La fonction matricielle

$$A^* = \bar{\alpha}\, I_n + R_o\, F^*\, L_o^*$$

satisfait à la condition (b^*) obtenue de (b) en remplaçant (α, L_o, F, R_o) par $(\bar{\alpha}, R_o, F^*, L_o)$. Par conséquent $\bar{\alpha}$ est l'unique valeur propre de A^* est le sous-espace propre correspondant est $\mathrm{Im}R_o$. □

4.4.4 Le cas $\chi = [(3,3,\ldots,3,1,1,\ldots,1)]$

Théorème 4.4.4. *Soit χ une caractéristique de Segre d'ordre n de la forme*

$$\chi = [(n_1, \ldots, n_r, \ldots, n_s)],$$

où

$$1 \leqslant r \leqslant s,$$

$$n_1 = \ldots = n_r = 3$$

et si $r < s$

$$n_{r+1} = \ldots = n_s = 1.$$

Soit A *quelconque. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

(a) $A \in C^1(\Omega, M_n)$ *est une solution de l'équation* $AA' = A'A$ *de caractéristique de Segre constante* χ.

(b) *A est de la forme*

$$A = \alpha I_n + L_o R^* + L R_o^* ,$$

où $\alpha \in C^1(\Omega,\mathbb{C})$ *et* $L_o , R_o \in M_{n\times r}$, $L, R \in C^1(\Omega, M_{n\times r})$ *sont tels que*

$$R_o^* L_o = R^* L_o = R_o^* L = 0,$$

$$R^* L' = R'^* L,$$

les fonctions matricielles $\left(L_o \,\vdots\, L\right)$ *et* $\left(R_o \,\vdots\, R\right)$ *sont de rang constant* $2r$ *et la fonction matricielle* $R^* L$ *est de rang constant* r.

De plus si A *satisfait à ces deux assertions équivalentes, alors*

(α) *La nilpotence d'indice* 3 *de la fonction matricielle* $B = A - \alpha I_n$ *est étalée sur* Ω, *c'est-à-dire que*

$$B(s)B(t)B(u) = 0, \qquad s,t,u \in \Omega.$$

En particulier, la fonction matricielle B^2 *est commutative.*

(β) *Le sous-espace propre de* A *correspondant à son unique valeur propre* α *est de dimension* $n-2 \geq r$ *et contient un sous-espace vectoriel constant de dimension* r, *à savoir* $\mathrm{Im} L_o$. *Le sous-espace propre de* A^* *correspondant à son unique valeur propre* $\bar{\alpha}$ *est de dimension* $n-2 \geq r$ *et contient un sous-espace vectoriel constant de dimension* r, *à savoir* $\mathrm{Im} R_o$, *qui est orthogonal à* $\mathrm{Im} L_o$.

(γ) *Si* $s = r$, *c'est-à-dire* $n = 3r$, *alors les sous-espaces propres de* A *et* A^* *sont respectivement les sous-espaces constants* $\mathrm{Im} L_o$ *et* $\mathrm{Im} R_o$; *d'autre part,* $\mathrm{Im}\left(L_o \,\vdots\, L\right) = (\mathrm{Im} R_o)^\perp$ *et* $\mathrm{Im}\left(R \,\vdots\, R_o\right) = (\mathrm{Im} L_o)^\perp$ *sont constants.*

<u>Démonstration.</u>

<u>Montrons que (a) $\Rightarrow$ (b).</u> Supposons que A satisfait à (a). Par définition

$$I_{0\chi} = \{3,6,\ldots,3r,3r+1,3r+2,\ldots,n\},$$

$$I_{\chi} = \{1,2,4,5,\ldots,3r-2,3r-1\},$$

donc, en vertu du corollaire 4.3.2, il existe $\alpha \in C^1(\Omega,\mathbb{C})$ et $a_1,\ldots,a_n,b_1,\ldots,b_n \in C^1(\Omega,\mathbb{C}^n)$ tels que

$$A = \alpha I_n + a_1b_2^* + a_2b_3^* + a_4b_5^* + a_5b_6^* + \ldots + a_{3r-2}b_{3r-1}^* + a_{3r-1}b_{3r}^* \tag{1}$$

$$(a_i|b_j) = \delta_{ij}, \quad i,j \in \{1,\ldots,n\}, \tag{2}$$

$$(a_j'|b_i) = -(a_j|b_i') = x_{ij}, \quad i,j \in \{1,\ldots,n\}, \tag{3}$$

où

$X = (x_{ij}) \in C^0(\Omega,\mathbb{M}_n)$ est une solution de l'équation

$$[N_\chi,[X,N_\chi]] = 0 \tag{4}$$

Posons

$$L_1 = \left(a_1 \,\middle|\, a_4 \,\middle|\, \ldots \,\middle|\, a_{3r-2}\right), \qquad L_2 = \left(a_2 \,\middle|\, a_5 \,\middle|\, \ldots \,\middle|\, a_{3r-1}\right),$$

$$R_2 = \left(b_2 \,\middle|\, b_5 \,\middle|\, \ldots \,\middle|\, b_{3r-1}\right), \qquad R_3 = \left(b_3 \,\middle|\, b_6 \,\middle|\, \ldots \,\middle|\, b_{3r}\right).$$

L'équation (1) équivaut à

$$A = \alpha I_n + L_1R_2^* + L_2R_3^* . \tag{5}$$

D'après le lemme 4.2.1, les fonctions matricielles $\left(L_1 \,\middle|\, L_2\right)$ et $\left(R_2 \,\middle|\, R_3\right)$ sont de rang constant 2r et les fonctions matricielles L_1, L_2, R_2, R_3 sont de rang constant r.

Par définition

$$N_\chi = \mathrm{diag}(N_3, N_3, \ldots, N_3, 0_{n-3r}).$$

Soit (X_{ij}) la décomposition de X en blocs telle que

$$X_{ij}(t) \in \mathbb{M}_{q_i \times q_j}, \quad t \in \Omega, \quad i,j \in \{1,\ldots,r+1\},$$

où $q_1 = \dots = q_r = 3$ et $q_{r+1} = n-3r$.

D'après le lemme 3.8.2, l'équation (4) équivaut au système d'équations

$$2N_3X_{ij}N_3 - N_3^2X_{ij} - X_{ij}N_3^2 = 0, \qquad i,j \in \{1,\dots,r\}, \tag{6}$$

avec, dans le cas où $3r < n$,

$$N_3^2X_{i,r+1} = 0, \qquad i \in \{1,\dots,r\}, \tag{7}$$

$$X_{r+1,j}N_3^2 = 0, \qquad j \in \{1,\dots,r\}. \tag{8}$$

Soit $Y = (y_{ij}) \in C^0(\Omega, \mathbb{M}_3)$. D'après (d) et ($\gamma$) du théorème 3.8.7, Y est une solution de l'équation

$$2N_3YN_3 - N_3^2Y - YN_3^2 = 0$$

si et seulement si

$$Y = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} \\ 0 & y_{22} & y_{23} \\ 0 & 0 & 2y_{22}-y_{11} \end{pmatrix}.$$

Par suite (6) équivaut à

$$x_{3i-1,3j-2} = x_{3i,3j-2} = x_{3i,3j-1} = 0,$$

$$x_{3i,3j} = 2x_{3i-1,3j-1} - x_{3i-2,3j-2}, \qquad i,j \in \{1,\dots,r\}.$$

Supposons que $3r < n$. Soit $Y = \left(y_1 \mid y_2 \mid y_3\right) \in C^0(\Omega, \mathbb{M}_{(n-3r)\times 3})$. Il est immédiat que $YN_3^2 = 0$ équivaut à $y_1 = 0$ et que $N_3^2Y^* = 0$ équivaut à $y_3^* = 0$. Donc (7) et (8) équivalent à

$$x_{3i,j} = 0, \qquad i \in \{1,\dots,r\}, \qquad j \in \{3r+1,\dots,n\},$$

$$x_{i,3j-2} = 0, \qquad i \in \{3r+1,\dots,n\}, \qquad j \in \{1,\dots,r\}.$$

Ainsi, d'après le lemme 4.2.2, pour tout $j \in \{1,\dots,r\}$,

$$a'_{3j-2} = \sum_{i=1}^{r} x_{3i-2,3j-2}\, a_{3i-2} ,$$

$$b'_{3j} = - \sum_{i=1}^{r} \bar{x}_{3j,3i}\, b_{3i} ,$$

ce qui montre qu'en chaque point $t \in \Omega$,

$$a'_1(t),\ a'_4(t),\dots,a'_{3r-2}(t) \in \mathrm{Im}L_1(t),$$

$$b'_3(t),\ b'_6(t),\dots,b'_{3r}(t) \in \mathrm{Im}R_3(t).$$

Comme L_1 et R_3 sont de rang r, $(a_1(t),\ a_4(t),\dots,a_{3r-2}(t))$ et $(b_3(t),b_6(t),\dots,b_{3r}(t))$ sont respectivement des bases de $\mathrm{Im}L_1(t)$ et de $\mathrm{Im}R_3(t)$, en chaque point $t \in \Omega$. Par conséquent, en vertu du corollaire 2.3 de [22], les sous-espaces vectoriels $E_L = \mathrm{Im}L_1$ et $E_R = \mathrm{Im}R_3$ sont constants.

Il s'ensuit, d'après le lemme 4.2.3, qu'il existe $L_o ,R_o \in M_{n\times r}$ de rang r et $D,E \in C^1(\Omega,M_r)$ tels que

$$L_1 = L_oD, \qquad \mathrm{Im}L_o = E_L ,$$

$$R_3 = R_oE, \qquad \mathrm{Im}R_o = E_R .$$

L'équation (5) devient donc

$$\begin{aligned} A &= \alpha I_n + L_1R_2^* + L_2R_3^* \\ &= \alpha I_n + L_oDR_2^* + L_2E^*R_o^* \\ &= \alpha I_n + L_oR^* + LR_o^* , \end{aligned}$$

où

$$L = L_2E^*, \qquad R = R_2D^*.$$

Comme L_1 et R_3 sont de rang r, D et E le sont aussi, ce qui implique que

$$\mathrm{Im}\, L = \mathrm{Im}\, L_2 \,,$$

$$\mathrm{Im}\, R = \mathrm{Im}\, R_2 \,.$$

D'autre part, le système d'équations (2) implique que

$$\mathrm{Im}\, L_1 \perp \mathrm{Im}\, R_2 \,,$$

$$\mathrm{Im}\, L_1 \perp \mathrm{Im}\, R_3 \,,$$

$$\mathrm{Im}\, L_2 \perp \mathrm{Im}\, R_3 \,,$$

c'est-à-dire

$$\mathrm{Im}\, L_o \perp \mathrm{Im}\, R,$$

$$\mathrm{Im}\, L_o \perp \mathrm{Im}\, R_o \,,$$

$$\mathrm{Im}\, L \perp \mathrm{Im}\, R_o \,,$$

ce qui s'écrit matriciellement

$$R^{*}L_o = R_o^{*}L_o = R_o^{*}L = 0.$$

Ces équations impliquent que

$$R'^{*}L_o = R_o^{*}L' = 0$$

et donc que

$$0 = [A,A'] = [L_oR^{*} + LR_o^{*}\,, L_oR'^{*} + L'R_o^{*}]$$

$$= L_o(R^{*}L' - R'^{*}L)R_o^{*} \,.$$

Comme L_o et R_o sont de type $n \times r$ et de rang r, il s'ensuit que $R^{*}L' = R'^{*}L$.

Les égalités $\mathrm{Im}L_1 = \mathrm{Im}L_o$, $\mathrm{Im}L_2 = \mathrm{Im}L$, $\mathrm{Im}R_2 = \mathrm{Im}R$, $\mathrm{Im}R_3 = \mathrm{Im}R_o$ impliquent que

$$\mathrm{Im}\,\left(L_1 \,\vdots\, L_2\right) = \mathrm{Im}\,\left(L_o \,\vdots\, L\right),$$

$$\mathrm{Im}\,\left(R_2 \,\vdots\, R_3\right) = \mathrm{Im}\,\left(R \,\vdots\, R_o\right),$$

ce qui prouve que les fonction matricielles $\operatorname{Im}\left(L_o \mid L\right)$ et $\operatorname{Im}\left(R \mid R_o\right)$ sont aussi de rang constant 2r.

Le système d'équations (2) implique que $R_2^*L_2 = I_r$. Comme D(t) et E(t) sont inversibles en chaque point $t \in \Omega$,

$$R^*L = DR_2^*L_2E^* = DE^*$$

est aussi de rang constant r.

<u>Montrons que (b) implique (a), (α), (β) et (γ).</u> Supposons que A satisfait à (b). Cette hypothèse implique directement que $A \in C^1(\Omega, \mathbb{M}_n)$ et que $R'^*L_o = 0$, $R_o^*L' = 0$. Il s'ensuit que $[A,A'] = 0$.

Posons $B = A - \alpha I_n$. Les équations

$$B = L_oR^* + LR_o^*,$$

$$R_o^*L_o = R^*L_o = R_o^*L = 0$$

impliquent que pour tout $s,t,u \in \Omega$,

$$B(s)B(t) = L_oR^*(s)L(t)R_o^*,$$

$$B(s)B(t)B(u) = 0.$$

D'autre part,

$$B = L_oR^* + LR_o^* = \left(L_o \mid L\right)\left(R \mid R_o\right)^*.$$

Comme $\left(L_o \mid L\right)$ et $\left(R \mid R_o\right)$ sont de type $n \times 2r$ et de rang 2r, B est aussi de rang 2r. Par hypothèse, R^*L, L_o, R_o sont de rang r et respectivement de type $r \times r$, $n \times r$, $n \times r$, ce qui implique que $B^2 = L_oR^*LR_o^*$ est aussi de rang r. Comme toute matrice $M \in \mathbb{M}_n$ de rang 2r telle que M^2 est de rang r et $M^3 = 0$ est semblable à la matrice de Jordan N_χ, en chaque point $t \in \Omega$, B(t) est semblable à N_χ et, par conséquent, la caractéristique de Segre de A est constante et égale à χ.

Puisque la fonction matricielle $B = A - \alpha I_n$ est nilpotente et de rang 2r, α est l'unique valeur propre de A et le sous-espace propre correspondant, à savoir Ker B, est de dimension $n-2r$. Les équations $B = L_oR^* + LR_o^*$, $R_o^*L_o = 0$ et $R^*L_o = 0$ impliquent que $\mathrm{Im}L_o \subset \mathrm{Ker}\, B$.

La fonction matricielle

$$A^* = \bar{\alpha}\, I_n + R_oL^* + RL_o^*$$

satisfait à la condition (b^*) obtenue de (b) en remplaçant (α, L_o, R, L, R_o) par $(\bar{\alpha}, R_o, L, R, L_o)$. Par suite $\bar{\alpha}$ est l'unique valeur propre de A^*, le sous-espace propre correspondant et de dimension $n-2r$ et contient le sous-espace constant $\mathrm{Im}R_o$.

Les équations $R_o^*L_o = R^*L_o = R_o^*L = 0$ impliquent que

$$\mathrm{Im}L_o \perp \mathrm{Im}\begin{pmatrix} R \,\vdots\, R_o \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{Im}R_o \perp \mathrm{Im}\begin{pmatrix} L_o \,\vdots\, L \end{pmatrix}.$$

Dans le cas particulier où $r = s$, $n = 3r$, le sous-espace propre de A est de dimension $n-2r = r$, donc égal à $\mathrm{Im}L_o$, le sous-espace $\mathrm{Im}\begin{pmatrix} L_o \,\vdots\, L \end{pmatrix}$ est de dimension $2r = n-r$, donc égal au complément orthogonal de $\mathrm{Im}R_o$; de même, le sous-espace propre de A^* est $\mathrm{Im}R_o$ et $\mathrm{Im}\begin{pmatrix} R \,\vdots\, R_o \end{pmatrix} = (\mathrm{Im}L_o)^{\perp}$. □

<u>Remarque.</u> Dans le cas particulier où $r = 1$, c'est-à-dire $\chi = [(3,1,1,\dots,1)]$, la caractérisation (b) du théorème ci-dessus devient :

A *est de la forme*

$$A = \alpha I_n + a_ob^* + ab_o^*,$$

où $\alpha \in C^1(\Omega, \mathbb{C})$, $a_o, b_o \in \mathbb{C}^n$, $a, b \in C^1(\Omega, \mathbb{C}^n)$ *sont tels que* $\begin{pmatrix} a_o \,\vdots\, a \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} b \,\vdots\, b_o \end{pmatrix}$ *sont de rang* 2, $(a|b)$ *ne s'annule pas sur* Ω,

$$(a_o|b_o) = (a_o|b) = (a|b_o) = 0,$$

$$(a'|b) = (a|b').$$

Cette formulation est légèrement plus simple que celle publiée par A. Terracini dans [7, p. 110], qui est la suivante :

Per il simbolo caratteristico [(311 ... 1)] *la forma più generale di una matrice* A *permutabile con la derivata è*

$$A = mI + \mu(b_i\bar{\eta}_j) + \lambda(\bar{c}_i\zeta_j),$$

dove le $\bar{c}_i$, $\bar{\eta}_j$ *sono costanti, mentre* m, λ, μ *le* b_i *e le* ζ_j $(1 \leqslant i \leqslant n\ ;\ 1 \leqslant j \leqslant n)$ *sono funzioni di* t *soddisfacenti alle condizioni*

$$(4.16)\quad [b\bar{\eta}] = [\bar{c}\bar{\eta}] = [\bar{c}\zeta] = 0,$$

$$(4.17)\quad [b'\zeta] - [b\zeta'] = \left(\frac{\lambda'}{\lambda} - \frac{\mu'}{\mu}\right)[b\zeta].$$

Les propriétés (α), (β) et (γ) ne sont pas formulées dans [7].

CHAPITRE 5
EXEMPLES DE SOLUTIONS ANALYTIQUES NON COMMUTATIVES DE L'EQUATION $AA' = A'A$

5.1 INTRODUCTION

Ce chapitre est consacré à la présentation d'une méthode permettant de construire aisément des exemples de solutions analytiques non commutatives de l'équation $AA' = A'A$. Nous avons vu au chapitre 4 que les solutions A de rang constant r telles que $A^2 = 0$ sont de la forme

$$A = LR^*,$$

où L et R sont des fonctions matricielles $n \times r$ de rang r telles que

$$R^*L = 0, \qquad R^*L' = 0.$$

Dans le cas particulier où $r = 1$, cette expression se réduit à

$$A = ab^*,$$

où a, b sont des fonctions vectorielles telles que

$$(a|b) = 0, \qquad (a|b') = 0.$$

Nous allons voir dans ce chapitre que les solutions de cette forme fournissent les exemples désirés. Pour cela, nous établirons une condition nécessaire et suffisante pour que A soit commutative, puis une condition suffisante pour qu'elle ne le soit pas.

Dans tout ce chapitre, Ω désignera un intervalle ouvert non vide dans $\mathbb{R}$.

5.2 CONDITIONS ASSURANT LA COMMUTATIVITE D'UNE FONCTION MATRICIELLE DE LA FORME $A = ab^*$, OU $(a|b) = 0$

5.2.1 Condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction matricielle de la forme $A = ab^*$, où $(a|b) = 0$, soit commutative

Théorème 5.2.1. *Soit* $A = (A(t))_{t\in I}$ *une famille non vide de matrices de* M_n *de la forme*

$$A(t) = a(t)b(t)^*, \qquad t\in I,$$

où a *et* b *sont des applications de* I *dans* $\mathbb{C}^n - \{0\}$ *telles que*

$$(a|b) = 0.$$

Posons

$$E_a = \text{span}\,\{a(t)\,|\,t\in I\},$$

$$E_b = \text{span}\,\{b(t)\,|\,t\in I\}.$$

Alors les trois assertions suivantes sont équivalentes :

(a) A *est commutative.*

(b) *La nilpotence d'indice 2 de* A *est étalée sur* I, *c'est-à-dire que*

$$A(s)A(t) = 0, \qquad s,t\in I.$$

(c) $E_a \perp E_b$.

Démonstration. Les implications (c) $\Rightarrow$ (b) et (b) $\Rightarrow$ (a) sont évidentes. Il reste à montrer que (a) $\Rightarrow$ (c). Supposons que l'assertion (a) soit satisfaite. Afin de prouver que (c) l'est aussi, il suffit de montrer que pour tout $s,t\in I$, $(a(s)|b(t)) = 0$.

Soit $s,t\in I$. L'hypothèse (a) implique que

$$a(s)b(s)^*a(t)b(t)^* = a(t)b(t)^*a(s)b(s)^*, \tag{1}$$

d'où

$$a(s)b(s)^*a(t)b(t)^*a(s) = 0,$$

car $b(s)^*a(s) = (a(s)|b(s)) = 0$ par hypothèse. Comme $a(s) \neq 0$, il s'ensuit que

$$(b(s)^*a(t))(b(t)^*a(s)) = 0,$$

c'est-à-dire que $(a(t)|b(s)) = 0$ ou $(a(s)|b(t)) = 0$. Si $(a(t)|b(s)) = 0$, l'équation (1) implique que

$$a(t)(b(t)^*a(s))b(s)^* = 0.$$

Puisque $a(t) \neq 0$ et $b(s) \neq 0$, il s'ensuit que

$$(a(s)|b(t)) = b(t)^*a(s) = 0. \qquad \square$$

5.2.2 Condition suffisante pour qu'une fonction matricielle de la forme $A = ab^*$, où $(a|b) = 0$, ne soit pas commutative

Corollaire 5.2.2. *Soit* $A = (A(t))_{t \in I}$ *une famille non vide de matrices de* M_n *de la forme*

$$A(t) = a(t)b(t)^*, \qquad t \in I,$$

où a *et* b *sont des applications de* I *dans* $C^n - \{0\}$ *telles que*

$$(a|b) = 0.$$

Supposons de plus que les composantes $a_1, \dots, a_n$ *de la fonction vectorielle* $a = (a_i)$ *sont linéairement indépendantes dans l'espace vectoriel complexe* $\mathbb{C}^I$ *des applications de* I *dans* $\mathbb{C}$*. Alors la famille* A *n'est pas commutative.*

Démonstration. Supposons que A soit commutative. Soit $t_o \in I \neq \emptyset$. Désignons par $b_1, \dots, b_n$ les composantes de la fonction vectorielle $b = (b_i)$. En vertu de l'implication (a) $\Rightarrow$ (c) du théorème 5.2.1, l'hypothèse que A est commutative implique que, pour tout $t \in I$,

$$\overline{b_1(t_o)}a_1(t) + \dots + \overline{b_n(t_o)}a_n(t) = (a(t)|b(t_o)) = 0,$$

c'est-à-dire que

$$\overline{b_1(t_o)}a_1 + \dots + \overline{b_n(t_o)}a_n = 0.$$

Comme par hypothèse $b(t_o) \neq 0$, cette équation exprime que $a_1, \ldots, a_n$ sont linéairement dépendants, ce qui est contraire à l'hypothèse. □

5.2.3 Condition suffisante pour qu'une fonction matricielle de la forme $A = ab^*$, où $(a|b) = 0$, commute avec sa dérivée et ne soit pas commutative

Corollaire 5.2.3. *Soit* $a,b \in C^1(\Omega, \mathbb{C}^n - \{0\})$ *des fonctions vectorielles telles que*

$$(a|b) = 0, \qquad (a'|b) = 0$$

et les composantes $a_1, \ldots, a_n$ *de* $a = (a_i)$ *sont linéairement indépendantes dans l'espace vectoriel complexe* $\mathbb{C}^\Omega$. *Alors la fonction matricielle*

$$A = ab^*$$

commute avec sa dérivée et n'est pas commutative.

Démonstration. La fonction matricielle A commute avec sa dérivée, d'après le corollaire 4.4.2, et n'est pas commutative, en vertu du corollaire 5.2.2. □

Remarque. Le corollaire 5.2.3 permet de construire des exemples de solutions non commutatives de l'équation $AA' = A'A$, dont les valeurs propres $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ et leurs multiplicités algébriques respectives $m_1, \ldots m_p$ peuvent être choisies a priori. En effet, il suffit de considérer des fonctions matricielles de la forme

$$A = P_o \operatorname{diag}(\alpha_1 I_{m_1} + A_1, \ldots, \alpha_p I_{m_p} + A_p) P_o^{-1},$$

où $P_o \in M_n^*$, $A_1, \ldots, A_p$ sont des fonctions matricielles nilpotentes commutant avec leur dérivée, par exemple de la forme indiquée dans l'énoncé du corollaire 4.4.2, et l'une de ces fonctions est de la forme indiquée dans l'énoncé du corollaire 5.2.3.

5.2.4 Le cas n = 3

Corollaire 5.2.4. *Soit* $a = (a_i) \in C^1(\Omega, \mathbb{C}^3)$ *une fonction vectorielle telle que, pour tout sous-intervalle* Ω_s *ouvert non vide de* Ω, *les restrictions* $a_1\big|_{\Omega_s}$, $a_2\big|_{\Omega_s}$, $a_3\big|_{\Omega_s}$ *sont linéairement indépendantes dans l'espace vectoriel complexe* $\mathbb{C}^{\Omega_s}$. *Posons*

$$b = (b_i) = a \times a' ,$$

c'est-à-dire

$$b_1 = a_2 a_3' - a_3 a_2' ,$$

$$b_2 = a_3 a_1' - a_1 a_3' ,$$

$$b_3 = a_1 a_2' - a_2 a_1' .$$

Alors la fonction matricielle

$$A = ab^*$$

commute avec sa dérivée, mais n'est pas commutative.

Démonstration. Par hypothèse, les fonctions a_1, a_2, a_3 sont linéairement indépendantes dans $\mathbb{C}^{\Omega}$, ce qui implique que $a_1 \neq 0$, c'est-à-dire qu'il existe un point $t_1 \in \Omega$ tel que $a_1(t_1) \neq 0$. Comme a_1 est continue, il s'ensuit que a_1 ne s'annule pas sur un intervalle ouvert $\Omega_1 \subset \Omega$, voisinage de t_1.

Montrons par l'absurde que $b_3\big|_{\Omega_1} \neq 0$. Supposons que cette fonction soit nulle. Alors

$$\left(\frac{a_2(t)}{a_1(t)}\right)' = \frac{a_2'(t)a_1(t) - a_2(t)a_1'(t)}{a_1(t)^2} = \frac{b_3(t)}{a_1(t)^2} = 0, \qquad t \in \Omega_1 .$$

Puisque Ω_1 est connexe, il s'ensuit que la fonction $\frac{a_2}{a_1}$ est constante sur Ω_1, autrement dit, il existe $c \in \mathbb{C}$ tel que $a_2\big|_{\Omega_1} = c\, a_1\big|_{\Omega_1}$. Ceci implique

que les restrictions $a_1\big|_{\Omega_1}$, $a_2\big|_{\Omega_1}$, $a_3\big|_{\Omega_1}$ sont linéairement dépendantes dans $\mathbb{C}^{\Omega_1}$, contrairement à l'hypothèse. Donc $b_3\big|_{\Omega_1} \neq 0$.

Il existe donc un point $t_2 \in \Omega_1$ tel que $b_3(t_2) \neq 0$. Il s'ensuit, par continuité, que b_3 ne s'annule pas sur un intervalle ouvert $\Omega_2 \subset \Omega_1$, voisinage de t_2 .

D'autre part l'équation $b = a \times a'$ implique qu'en chaque point $t \in \Omega$ $b(t)$ est orthogonal à $a(t)$ et à $a'(t)$, c'est-à-dire que $(a|b) = 0$ et $(a'|b) = 0$. Il s'ensuit immédiatement que A commute avec sa dérivée sur Ω. En vertu du corollaire 5.2.2, $A\big|_{\Omega_2}$ n'est pas commutative sur Ω_2 , donc à fortiori A n'est pas commutative sur Ω. □

5.3 EXEMPLES DE SOLUTIONS ANALYTIQUES NON COMMUTATIVES DE L'EQUATION $AA' = A'A$

L'exemple suivant a été publié par G. Ascoli dans [4]. Il apparaît également dans un exercice de N. Bourbaki [47, p. IV - 43, exercice 10], ainsi que dans [6] et [11].

<u>Exemple 5.3.1.</u> Posons pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$a(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ t^2 \end{pmatrix}, \qquad b(t) = a(t) \times a'(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ -2t \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$A(t) = a(t)b(t)^* = \begin{pmatrix} t^2 & -2t & 1 \\ t^3 & -2t^2 & t \\ t^4 & -2t^3 & t^3 \end{pmatrix}.$$

Alors en vertu du corollaire 5.2.4, A est une fonction matricielle analytique qui commute avec sa dérivée sur $\mathbb{R}$ et pourtant n'est pas commutative.

Nous remarquons que A est un polynôme en t à coefficients dans M_n de degré 4, donc de degré >3, conformément à ce que nous avons signalé au no 2.3.9.

Exemple 5.3.2. Posons pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$a(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ 1 \\ e^{-t} \end{pmatrix}, \qquad b(t) = a(t) \times a'(t) = \begin{pmatrix} -e^{-t} \\ 2 \\ -e^t \end{pmatrix},$$

$$A(t) = a(t)b(t)^* = \begin{pmatrix} -1 & 2e^t & -e^{2t} \\ -e^{-t} & 2 & -e^t \\ -e^{-2t} & 2e^{-t} & -1 \end{pmatrix}.$$

Alors en vertu du corollaire 5.2.4, A est une fonction matricielle analytique qui commute avec sa dérivée sur $\mathbb{R}$ et pourtant n'est pas commutative.

ANNEXE 1 : SEPARATION DES VALEURS PROPRES D'UNE FONCTION MATRICIELLE CONTINUE

Voici la démonstration du théorème sur la séparation des valeurs propres d'une fonction matricielle continue que nous avons énoncé au numéro 2.2.3 de cette thèse. Dans cette démonstration, nous utilisons les propriétés élémentaires bien connues des projecteurs spectraux et sous-espaces spectraux d'un opérateur, donc en particulier d'une matrice carrée, qui sont exposées, par exemple, dans [46] ou [51]. Rappelons d'abord l'énoncé du théorème :

Théorème. *Soit* Ω *un ouvert non vide d'un espace de Banach* $\mathbb{E}$ *sur* $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$, $r \in \{0,1,2,\dots\}$, $A \in C^r(\Omega,\mathbb{M}_n)$, $t_o \in \Omega$. *Désignons par* $\mu_1,\dots,\mu_p \in \mathbb{C}$ *les valeurs propres distinctes de* $A(t_o)$ *et par* $m_1,\dots,m_p$ *leurs multiplicités algébriques respectives. Soit* $W_1,\dots,W_p \subset \mathbb{C}$ *des voisinages disjoints deux à deux de* $\mu_1,\dots,\mu_p$ *respectivement. Alors il existe un voisinage* $\Omega_o \subset \Omega$ *de* t_o, $P \in C^r(\Omega_o,\mathbb{M}_n^*)$ *et, pour chaque* $k \in \{1,\dots,p\}$, $B_k \in C^r(\Omega_o,\mathbb{M}_{m_k})$ *tels qu'en chaque point* $t \in \Omega_o$

$$A(t) = P(t)\,\mathrm{diag}(B_1(t),\dots,B_p(t))P(t)^{-1},$$

$$\mathrm{Sp}B_1(t) \subset W_1,\dots,\mathrm{Sp}B_p(t) \subset W_p .$$

Démonstration. Soit $D_1 \subset W_1,\dots,D_p \subset W_p$ des disques ouverts non vides de centres $\mu_1,\dots,\mu_p$ respectivement et soit $\Gamma_1,\dots,\Gamma_p$ les cercles constituant les bords de $D_1,\dots,D_p$ respectivement.

D'après le lemme 3.7 de [22], il existe un voisinage $\Omega_1 \subset \Omega$ de t_o tel que pour tout $t \in \Omega_1$

$$\mathrm{Sp}A(t) \subset D_1 \cup \dots \cup D_p .$$

Pour chaque $t \in \Omega_1$, $k \in \{1,\dots,p\}$, nous désignerons par $\pi_k(t)$ le *projecteur spectral de* $A(t)$ *relatif à* Γ_k et par $E_k(t)$ le *sous-espace spectral de* $A(t)$

relatif à Γ_k , autrement dit,

$$\pi_k(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_k}(zI_n - A(t))^{-1}dz,$$

$$E_k(t) = (\pi_k(t))(\mathbb{C}^n),$$

où le cercle Γ_k est paramétré de manière à être parcouru une fois dans le sens direct dans $\mathbb{C}$. Définissons

$$\tilde{\pi}_k(t) = id_{E_k(t)} \circ \pi_k(t)\big|_{E_k(t_o)}$$

($\pi_k(t)$ est une application de $\mathbb{C}^n$ dans $\mathbb{C}^n$, tandis que $\tilde{\pi}_k(t)$ est une application de $E_k(t_o)$ dans $E_k(t)$). Alors en chaque point $t \in \Omega_1$,

$$\mathbb{C}^n = E_1(t) \oplus \ldots \oplus E_p(t),$$

car $SpA(t) \subset D_1 \cup \ldots \cup D_p$ et $D_1 , \ldots, D_p$ sont disjoints deux à deux. D'autre part, pour tout $k \in \{1,\ldots,p\}$,

$$\dim E_k(t_o) = m_k ,$$

car $SpA(t_o) \cap D_k = \{\alpha_k\}$.

D'après le lemme 3.3 de [22], il *existe un voisinage* $\Omega_o \subset \Omega_1$ de t_o tel que pour tout $t \in \Omega_o$, $k \in \{1,\ldots,p\}$, $\tilde{\pi}_k(t)$ est un isomorphisme de $E_k(t_o)$ sur $E_k(t)$.

Soit $t \in \Omega_o$, $k \in \{1,\ldots,p\}$ et soit $(e_{k1}(t_o),\ldots,e_{km_k}(t_o))$ une base de $E_k(t_o)$. Posons, pour tout $i \in \{1,\ldots,m_k\}$,

$$e_{ki}(t) = \pi_k(t)e_{ki}(t_o),$$

$$P_k(t) = \left\{e_{k1}(t) \,\middle|\, \ldots \,\middle|\, e_{km_k}(t)\right\}.$$

Comme $\tilde{\pi}_k(t)$ est un ismomorphisme de $E_k(t_o)$ sur $E_k(t)$, $(e_{k1}(t),\ldots,e_{km_k}(t))$ est une base de $E_k(t)$.

Il est aisé de voir que $A(t)$ commute avec $\pi_k(t)$, ce qui implique que

$$A(t)E_k(t) \subset E_k(t).$$

D'autre part, $P_k(t)$ est une application surjective de $\mathbb{C}^{m_k}$ sur $E_k(t)$. Il s'ensuit que, pour tout $i \in \{1,\dots,m_k\}$, il existe $b_{ki}(t) \in \mathbb{C}^{m_k}$ tel que

$$A(t)e_{ki}(t) = P_k(t)b_{ki}(t).$$

Posons

$$B_k(t) = \left(b_{k1}(t) \,\vdots\, \dots \,\vdots\, b_{km_k}(t)\right) \in M_{m_k},$$

$$B(t) = \mathrm{diag}(B_1(t),\dots,B_p(t)),$$

$$P(t) = \left(P_1(t) \,\vdots\, \dots \,\vdots\, P_p(t)\right).$$

Alors par définition, pout tout $k \in \{1,\dots,p\}$,

$$A(t)P_k(t) = P_k(t)B_k(t),$$

$$A(t)P(t) = P(t)B(t).$$

Comme $\mathbb{C}^n = E_1(t) \oplus \dots \oplus E_p(t)$, les colonnes de $P(t)$ forment une base de $\mathbb{C}^n$, autrement dit, $P(t)$ est inversible, d'où, pour tout $t \in \Omega_o$,

$$A(t) = P(t)B(t)P(t)^{-1}.$$

Comme A est de classe C^r, il en est de même de $\pi_1 ,\dots,\pi_p ,P_1 ,\dots, P_p ,P$ et $B = P^{-1}AP$, sur Ω_o .

Soit $t \in \Omega_o$ et $k \in \{1,\dots,p\}$. Montrons que $\mathrm{Sp}B_k(t) \subset D_k$. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}B_k(t)$ et soit x un vecteur propre de $B_k(t)$ correspondant à cette valeur propre λ. Posons $y = P_k(t)x$. Alors d'une part,

$$A(t)y = A(t)P_k(t)x = P_k(t)B_k(t)x = \lambda P_k(t)x = \lambda y$$

et d'autre part, comme $P_k(t)$ est de rang m_k , $\mathrm{Ker}\, P_k(t) = \{0\}$, donc $y \neq 0$. Par suite y est un vecteur propre de $A(t)$ correspondant à la valeur propre λ.

Puisque $t \in \Omega_o$,

$\lambda \in SpA(t) \subset D_1 \cup \ldots \cup D_p$

et il existe $i \in \{1,..,p\}$ tel que $\lambda \in D_i$. Montrons par l'absurde que $i = k$. Supposons que $i \neq k$. Comme par définition $y \in ImP_k(t) = E_k(t)$,

$$y = \pi_k(t)y = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_k}(zI_n - A(t))^{-1}y\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_k}\frac{dz}{z-\lambda}\,y = 0,$$

car $\lambda \in D_i$ et $i \neq k$ impliquent que $\lambda \notin \overline{D}_k$. Or $y \neq 0$. Donc $i = k$ et $\lambda \in D_k$. □

ANNEXE 2 : COMPLEMENT RELATIF AUX CONDITIONS ASSURANT QU'UN SOUS-ESPACE VECTORIEL E(t) NE DEPEND PAS DE t

Au numéro 2.2.1 de cette thèse, nous avons commenté des conditions que nous avons établies dans [22] et [24], assurant qu'un sous-espace vectoriel $E(t)$ d'un espace normé $\mathbb{F}$ ne dépend pas de t et nous avons signalé que dans le cas particulier où $\mathbb{F}$ est de dimension finie, les démonstrations établissant ces conditions sont beaucoup plus courtes.

Dans cette annexe, nous présentons trois de ces démonstrations très courtes. La première est celle que nous avons mentionnée au numéro 2.2.1 de cette thèse : elle apparaît implicitement dans la démonstration du lemme 3.4 de l'article [17] de S. Goff, d'où nous l'avons extraite et elle n'est valable que sous l'hypothèse supplémentaire que les dérivées $a_1' ,\dots,a_m'$ des fonctions vectorielles $a_1 ,\dots,a_m$, figurant dans l'énoncé du théorème ci-dessous, sont continues. Les deux autres démonstrations que nous présentons n'utilisent pas cette hypothèse.

Pour alléger l'écriture, nous nous limitons au cas où t est une variable réelle, mais la simplification principale est due à l'hypothèse que $\mathbb{F}$ est de dimension finie.

Voici le théorème que nous allons démontrer de trois manières différentes :

<u>Théorème.</u> *Soit* Ω *un intervalle ouvert non vide dans* $\mathbb{R}$ *et soit* $(E(t))_{t\in\Omega}$ *une famille de sous-espaces vectoriels de* $\mathbb{C}^n$, *de même dimension* m, *telle qu'il existe des fonctions vectorielles* $a_1 ,\dots,a_m \in D(\Omega,\mathbb{C})$ *satisfaisant aux conditions qu'en chaque point* $t\in\Omega$ $(a_1(t),\dots,a_m(t))$ *est une base de* $E(t)$ *et*

$$a_1'(t),\dots,a_m'(t)\in E(t).$$

Alors l'application $E : t\to E(t)$ *est constante sur* Ω.

Démonstrations.

Première partie commune aux trois démonstrations : Comme Ω est connexe, il suffit, d'après le lemme 2.1 de [22], de prouver que l'application E est constante au voisinage de chaque point de Ω. Soit $t_o \in \Omega$.

Posons

$$A = (a_{ij}) = \left(a_1 \,\vdots \cdots \vdots\, a_m\right).$$

Soit $t \in \Omega$ et $j \in \{1,\ldots,m\}$. Par hypothèse, $a_j'(t) \in E(t) = \operatorname{Im} A(t)$, donc il existe $b_j(t) \in \mathbb{C}^m$ tel que $a_j'(t) = A(t)b_j(t)$. Posons $B = \left(b_1 \,\vdots \cdots \vdots\, b_m\right)$. Alors par définition,

$$A' = AB.$$

Deuxième partie commune aux deux premières démonstrations : Comme A est de rang m, il existe $i_1, \ldots, i_m \in \{1,\ldots,n\}$ tels que le déterminant de la fonction matricielle

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{i_1 1} & \cdots & a_{i_1 m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i_m 1} & \cdots & a_{i_m m} \end{pmatrix}$$

est non nul en t_o, donc, par continuité, non nul en chaque point d'un intervalle ouvert $\Omega_o \subset \Omega$ voisinage de t_o.

L'équation $A' = AB$ implique que

$$\tilde{A}' = \tilde{A}B.$$

Fin de la première démonstration (extraite de l'article [17] de S. Goff et légèrement simplifiée) :

Hypothèse supplémentaire : $a_1', \ldots, a_m'$ sont continues.

L'hypothèse supplémentaire implique que $B = \tilde{A}^{-1}\tilde{A}'$ est continue sur Ω_o. Par conséquent, il existe une solution $X \in C^1(\Omega_o, M_m^*)$ de l'équation différentielle

$$X' = -BX.$$

Posons

$$Y = AX.$$

Alors

$$Y' = A'X + AX' = A'X - ABX = 0.$$

Comme Ω_o est connexe, il s'ensuit que Y est constant sur Ω_o.

D'autre part, comme X est de rang m,

$$\mathrm{Im}Y(t) = \mathrm{Im}A(t) = E(t), \qquad t \in \Omega_o,$$

d'où

$$E(t) = \mathrm{Im}Y(t) = \mathrm{Im}Y(t_o) = E(t_o), \qquad t \in \Omega_o. \qquad \square$$

<u>Fin de la deuxième démonstration :</u> Posons

$$X(t) = A(t)\tilde{A}(t)^{-1}, \qquad t \in \Omega_o.$$

Alors

$$X' = A'\tilde{A}^{-1} - A\tilde{A}^{-1}\tilde{A}'\tilde{A}^{-1} = A'\tilde{A}^{-1} - A\tilde{A}^{-1}\tilde{A}B\tilde{A}^{-1} = (A' - AB)\tilde{A}^{-1} = 0.$$

Comme Ω_o est connexe, il s'ensuit que X est constant sur Ω_o.

D'autre part,

$$\mathrm{Im}X(t) = \mathrm{Im}A(t) = E(t), \qquad t \in \Omega_o,$$

d'où

$$E(t) = \mathrm{Im}X(t) = \mathrm{Im}X(t_o) = E(t_o), \qquad t \in \Omega_o. \qquad \square$$

<u>Fin de la troisième démonstration.</u>

Posons $A_o = A(t_o)$.

Montrons d'abord que $A_o^* A_o \in M_m^*$. Pour cela il suffit de montrer que

$\operatorname{Ker} A_o^* A_o = \{0\}$. Soit $x \in \operatorname{Ker} A_o^* A_o$. Alors $A_o x \in \operatorname{Ker} A_o^* = (\operatorname{Im} A_o)^{\perp}$, d'où $A_o x \in (\operatorname{Im} A_o) \cap (\operatorname{Im} A_o)^{\perp} = \{0\}$. Par conséquent, $x \in \operatorname{Ker} A_o = \{0\}$, car A_o est de rang m.

Comme l'application $t \to A_o^* A(t)$ est continue sur Ω et $A_o^* A(t_o) = A_o^* A_o$ est inversible, il s'ensuit que $A_o^* A(t)$ est inversible en chaque point t d'un intervalle ouvert $V_o \subset \Omega$, voisinage de t_o.

Posons

$$X(t) = A(t)(A_o^* A(t))^{-1}, \qquad t \in V_o .$$

Alors

$$X A_o^* A = A,$$

d'où

$$X' A_o^* A = (X A_o^* A)' - X A_o^* A' = A' - X A_o^* A' = A' - X A_o^* AB = A' - AB = 0.$$

Comme $A_o^* A$ est de rang m, il s'ensuit que $X' = 0$. Par conséquent X est constant sur V_o, car V_o est connexe.

D'autre part,

$$\operatorname{Im} X(t) = \operatorname{Im} A(t) = E(t), \qquad t \in V_o ,$$

d'où

$$E(t) = \operatorname{Im} X(t) = \operatorname{Im} X(t_o) = E(t_o), \qquad t \in V_o . \qquad \square$$

ANNEXE 3 : COMMUTATION D'UNE FONCTION MATRICIELLE AVEC SES DERIVEES D'ORDRES SUPERIEURS

Nous formulons ci-dessous quelques remarques concernant l'étude de la commutation d'une fonction matricielle avec ses dérivées d'ordres supérieurs qui ne constituent qu'un premier pas dans cette étude, où l'essentiel du travail reste encore à acomplir.

Dans cette annexe, Ω désignera un intervalle ouvert non vide dans $\mathbb{R}$.

La proposition suivante caractérise les solutions de l'équation $AA'' = A''A$. Rappelons que ce problème a déjà été abordé au paragraphe 3.6.

Proposition 1. *Soit* $A \in C^2(\Omega, \mathbb{M}_n)$. *Les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

(a) $AA'' = A''A$.

(b) *Il existe une matrice constante* $C_o \in \mathbb{M}_n$ *dont la trace est nulle et telle que* A *est une solution de l'équation*

$$AA' - A'A = C_o .$$

Démonstration. On constate que

$$[A,A']' = [A',A'] + [A,A''] = [A,A''] .$$

Comme Ω est connexe, il s'ensuit que $[A,A''] = 0$ équivaut à $[A,A']$ est une matrice constante C_o . Comme la trace d'un commutateur est nulle, la trace de C_o est nécessairement nulle. □

Le corollaire suivant est une conséquence immédiate de cette proposition.

Corollaire 2. *Toute fonction matricielle* $A \in C^2(\Omega, \mathbb{M}_n)$ *qui commute* *avec sa dérivée première commute nécessairement avec sa dérivée seconde.*

Remarque 3. La réciproque est fausse : si $A \in C^2(\Omega, \mathbb{M}_n)$ commute avec sa dérivée seconde, A ne commute pas nécessairement avec sa dérivée première. Par exemple, si $A_o, B_o \in \mathbb{M}_n$ ne commutent pas et si

$$A(t) = A_o + t B_o, \qquad t \in \mathbb{R},$$

alors A commute avec $A'' = 0$, mais ne commute pas avec $A' = B_o$.

Proposition 4. *Soit* $A \in C^\infty(\Omega, \mathbb{M}_n)$ *tel que*

$$[A, A'] = 0 \tag{1}$$

et pour tout $i \in \{0,1,2,\dots\}$

$$[A^{(i)}, A^{(i+1)}] = 0 \Rightarrow [A^{(i)}, A^{(i+3)}] = 0. \tag{2}$$

Alors pour tout $i, j \in \{0,1,2,\dots\}$

$$[A^{(i)}, A^{(j)}] = 0.$$

De plus si A *est analytique, alors* A *est commutative.*

Démonstration. Posons

$$C_{ij} = [A^{(i)}, A^{(j)}], \qquad i,j \in \{0,1,2,\dots\}.$$

Montrons par récurrence que pour tout $k \in \{1,2,\dots\}$, pour tout $\ell \in \{1,\dots,k\}$, l'assertion (R_ℓ) suivante est vraie

$$C_{i,i+\ell} = 0, \qquad i \in \{0,1,2,\dots\}, \tag{R_ℓ}$$

Prouvons (R_1) par récurrence. L'équation $C_{o1} = 0$ coïncide avec l'hypothèse (1). Soit $i \in \{0,1,2,\dots\}$ tel que $C_{i,i+1} = 0$. Cette équation implique que $C_{i,i+2} = 0$, d'après le corollaire 2 et que $C_{i,i+3} = 0$, d'après l'hypothèse (2). Par suite

$$0 = C'_{i,i+2} = C_{i+1,i+2} + C_{i,i+3} = C_{i+1,i+2}.$$

Ainsi l'assertion (R_1) est démontrée.

Soit $k \in \{1,2,\ldots\}$ tel que pour tout $\ell \in \{1,\ldots k\}$ l'assertion (R_ℓ) est vraie. Soit $i \in \{0,1,2,\ldots\}$. Si $k > 1$, l'assertion (R_{k-1}) implique que $C_{i+1,i+k} = 0$ et si $k = 1$, cette équation est triviale. D'autre part l'hypothèse (R_k) implique que $C_{i,i+k} = 0$, d'où

$$0 = C'_{i,i+k} = C_{i+1,i+k} + C_{i,i+k+1} = C_{i,i+k+1} .$$

Ainsi l'assertion (R_{k+1}) est démontrée.

Donc, pout tout $\ell \in \{1,2,\ldots\}$, l'assertion (R_ℓ) est vraie, ce qui implique que pour tout $i,j \in \{0,1,2,\ldots\}$ $A^{(i)}$ commute avec $A^{(j)}$.

Si A est analytique, on en déduit, en développant A en série de Taylor au voisinage d'un point $t_0 \in \Omega \neq \emptyset$, que A est commutative au voisinage de t_0. Comme $\Omega \times \Omega$ est connexe, ceci implique par le théorème du prolongement analytique que la fonction analytique B définie par

$$B((s,t)) = A(s)A(t) - A(t)A(s), \qquad (s,t) \in \Omega \times \Omega,$$

est nulle sur $\Omega \times \Omega$. □

Remarque 5. La commutation d'une fonction matricielle avec sa dérivée première n'implique pas la commutation avec la dérivée tierce. En effet, si tel était le cas, en vertu de la proposition 4, toute fonction matricielle $A \in \mathcal{A}(\Omega, \mathbb{M}_n)$ commutant avec sa dérivée serait commutative, contrairement aux exemples présentés au chapitre 5.

ANNEXE 4 : COMPLEMENT A UN LEMME DE S.L. CAMPBELL SUR LES COMMUTATEURS ITERES

Au numéro 2.2.7 de cette thèse, nous avons commenté un lemme que S.L. Campbell a publié dans [14] en 1974. Nous présentons dans cette annexe le complément à ce lemme que nous avons annoncé. Le lemme de S.L. Campbell concerne la commutation d'opérateurs S et T linéaires, hermitiens et bornés, opérant dans un espace de Hilbert séparable. Dans le complément ci-dessous, S et T sont des transformations linéaires d'un espace vectoriel, S est diagonalisable au sens algébrique et T est quelconque.

Lemme. *Soit* E *un espace vectoriel sur un corps commutatif* $\mathbb{K}$, S *et* T *des transformations linéaires de* E, S *étant supposée être diagonalisable au sens algébrique, tandis que* T *est quelconque. Alors*

$$[S,[S,T]] = 0 \Rightarrow [S,T] = 0.$$

Démonstration. Supposons que $[S,[S,T]] = 0$. L'hypothèse que S est diagonalisable au sens algébrique signifie qu'il existe une base algébrique $(s_i)_{i\in I}$ de E constituée de vecteurs propres de S. Soit $(\sigma_i)_{i\in I}$ la famille des valeurs propres de S correspondant à cette famille de vecteurs propres.

Soit $j \in I$. Posons $t_j = Ts_j$. Comme $(s_i)_{i\in I}$ est une base algébrique de E, il existe une famille $(\tau_i)_{i\in I}$ à support fini d'éléments $\mathbb{K}$ telle que

$$t_j = \sum_{i\in I} \tau_i\, s_i\,.$$

Alors, par hypothèse,

$$0 = [S,[S,T]]s_j = (S^2T - 2\,STS + TS^2)s_j = (S^2T - 2\sigma_j ST + \sigma_j^2 T)s_j$$

$$= (S^2 - 2\sigma_j S + \sigma_j^2\, id_E)t_j = \sum_{i\in I} \tau_i (S^2 - 2\sigma_j S + \sigma_j^2\, id_E)s_i$$

$$= \sum_{i\in I} \tau_i(\sigma_i^2 - 2\sigma_j\sigma_i + \sigma_j^2)s_i = \sum_{i\in I} \tau_i(\sigma_i - \sigma_j)^2 s_i \ .$$

Il s'ensuit que pour tout $i \in I$

$$\tau_i(\sigma_i - \sigma_j)^2 = 0,$$

car la famille de vecteurs $(s_i)_{i\in I}$ est linéairement indépendante. Comme $\mathbb{K}$ n'a pas de diviseurs de zéro, ce système d'équations implique que pour tout $i \in I$

$$\tau_i(\sigma_i - \sigma_j) = 0.$$

D'autre part

$$[S,T]s_j = (ST - TS)s_j = (ST - \sigma_j T)s_j = (S - \sigma_j \mathrm{id}_E)t_j$$

$$= \sum_{i\in I} \tau_i(S - \sigma_j \mathrm{id}_E)s_i = \sum_{i\in I} \tau_i(\sigma_i - \sigma_j)s_i = 0.$$

Ainsi, pour tout $j \in I$, $[S,T]s_j = 0$ et comme $(s_i)_{i\in I}$ est une base de E, il s'ensuit que $[S,T] = 0$. □

J.-M. Gracia nous a signalé que, dans le cas particulier où E est de dimension finie, le lemme ci-dessus peut être déduit de son article [54] (ligne 12, p. 198). Cette information ne nous est parvenue que peu de temps avant la fin de la dactylographie de cette thèse. Il est possible que certains des résultats de cet article permettent de simplifier encore un peu le paragraphe 3.8 de cette thèse.

BIBLIOGRAPHIE

(a) Publications traitant une partie du sujet de cette thèse (dans l'ordre chronologique)

1 N.P. Erugin, Privodimyye sistemy (Reducible systems), Trudy Fiz-Mat. Inst. im V.A. Steklova XIII (1946).

2 G. Ascoli, Sulle matrici permutabili con la propria derivata, Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino 9 : 245-250 (1950).

3 H. Schwerdtfeger, Sur les matrices permutables avec leur dérivée, Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino 11 : 329-333 (1952).

4 G. Ascoli, Remarque sur une communication de M.H. Schwerdtfeger, Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino 11 : 335-336 (1952).

5 V. Amato, Commutabilità del prodotto di una matrice per la sua derivata, Matematiche (Catania) IX (II) : 176-179 (1954).

6 M.J. Hellman, Lie algebras arising from systems of linear differential equations, Dissertation, Dept. of Mathematics, New York Univ., 1955.

7 A. Terracini, Matrici permutabili con la propria derivata, Ann. Mat. Pura Appl. 40 : 99-112 (1955).

8 J.S. Bogdanov and G.N. Chebotarev, On matrices which commute with their derivatives (in Russian), Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat. 2(4) : 27-37 (1959).

9 I.J. Epstein, Condition for a matrix to commute with its integral, Proc. Amer. Math. Soc. 14 : 266-270 (1963).

10 N.J. Rose, On the eigenvalues of a matrix which commutes with its derivative, Proc. Amer. Math. Soc. 4 : 752-754 (1965).

11 J.F.P. Martin, Some results on matrices which commute with their derivatives, SIAM J. Appl. Math. 15(5) : 1171-1183 (1967).

12 I.V. Parnev, Some classes of matrices that commute with their derivatives (in Russian), Trudy Ryazan. Radiotekhn. Inst. 42 : 142-154 (1972).

13 G. Politi, Una osservatione sulle matrici permutabili con la propria derivata, Bolletino U.M.I. 8(4) : 293-295 (1973).

14 S.L. Campbell, Commutation properties of the coefficient matrix in the differential equation of an inner function, Proc. of the A.M.S. 42(2) : 507-512 (1974).

15 J. Dieudonné, Sur un théorème de Schwerdtfeger, Ann. Polon. Math. XXIX : 87-88 (1974).

16 G.N. Petrovskii, Matrices that commute with their partial derivatives, Vestsi Akad. Navuk BSSR Minsk Ser. Fiz. i Mat. 4 : 45-47, 140 (1979).

17 S. Goff, Hermitian function matrices which commute with their derivative, Linear Algebra Appl. 36(3) : 33-40 (1981).

18 D.L. Lukes, Differential Equations, Mathematics in Sciences and Engineering Volume 162, Academic Press, 1982 (chap.7).

19 L. Kotin and I.J. Epstein, On matrices which commute with their derivatives, Linear and Multilinear Algebra 12 : 57-72 (1982).

20 J.-M. Gracia, Sobre matrices que commutan con su derivada, Actas del Encuentro Internacional de Algebra Lineal y Aplicaciones celebrad en Vitoria-Gasteiz los dias 28,29 y 30 Septiembre de 1983, Universidad del Pais Vasco, Editadas por J.-M. Gracia, I. Zaballa y M.ª A. Beitia (p. 203-221).

21 J.-M. Gracia, Matrices which commute with their difference, Linear Algebra Appl. 54 : 114-117 (1983).

22 J.-Cl. Evard, On matrix functions which commute with their derivative, Linear Algebra Appl. 68 : 145-178 (1985).

(b) <u>Documents en préparation traitant une partie du sujet de cette thèse.</u>

23 J.-M. Gracia, Smooth jordanization of conservative matrices, en préparation.

24 J.-Cl. Evard, Conditions for a vector subspace E(t) and for a projector P(t) not to depend on t, a été accepté et sera publié dans Linear Algebra and its Applications.

25 J.-Cl. Evard, Sufficient conditions for a family of matrices to be a family of polynomials in a single matrix and applications to the study of analytic solutions of the matrix differential equation AA' = A'A, en finition.

26 J.-Cl. Evard, Etude des solutions de l'équation différentielle matricielle non linéaire A(t)A'(t) = A'(t)A(t) au moyen d'une décomposition de A(t) en une somme de matrices de rang 1, en préparation.

27 J.-Cl. Evard, Sur les polynômes en $t \in \mathbb{R}$ à coefficients matriciels commutant avec leur dérivée, en préparation.

(c) Publications contenant une motivation à l'étude du sujet de cette thèse

28 J. Cronin, Differential Equations, M. Dekker Inc., 1980 (th. 6 p. 75).

29 N.P. Erugin, Une remarque sur l'article de L. Shifner (en russe, résumé en français), Izvestia Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 5 : 377-380 (1941).

30 N.P. Erugin, Linear Systems of Ordinary Differential Equations with Periodic and Quasi-periodic Coefficients, Academic Press, 1966 (p. 38-39).

31 S. Goff, The Bohl transformation and oscillation of linear differential systems, Doctoral Thesis, Univ. of Massachusetts, Amherst, 1978.

32 L.M. Kuznecova, Periodic solutions of a system in the case when the matrix of the system does not commute with its integral (in Russian), Differentsial'nye Uravneniya (Ryazan) 7 : 151-161 (1976).

33 J.A. Lappo-Danilevsky, Mémoires sur la Théorie des Systèmes des Equations Différentielles Linéaires, Chelsea Publishing Company, 1953.

34 W. Magnus, On the exponential solution of differential equations for a linear operator, Comm. Pure Appl. Math. VII : 649-673 (1954).

35 J.F.M. Martin, On the exponential representation of solutions of systems of linear differential equations and an extension of Erugin's theorem, Doctoral Thesis, Stevens Institute of Technology, Hoboken, N.J., 1965.

36 R. Mulholland, Exponential representations for linear systems, IEEE Trans. Automatic Control 16 : 97-98 (1971).

37 V.V. Nemytskii and V.V. Stepanov, Qualitative Theory of Differential Equations, Princeton University Press, 1960 (p. 277-278).

38 A. Shenitzer, Exponential solutions of second order systems. Div. Electromag. Res. Inst. Math. Sci. New York Univ., Res. Rep. no BR-17 (1956).

39 L. Shifner, On the integration of some differential systems in finite form (in Russian, summary in English), Izvestia Akad. Nauk SSSR. Ser. Mat. 4 : 341-348 (1940).

40 L. Shifner, Again on the integration of the differential systems (in Russian, summary in English), Izvestia Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 4 : 417-422 (1940).

41 E.I. Troickii, A study of the solutions of a system of three linear homogeneous differential equations whose matrix commutes with its integral (in Russian), Trudy Ryazan. Radiotekhn. Inst. 53 : 109-115, 188-189 (1974).

42 I.M. Vulpe, A theorem due to Erugin, Differential Equations 8(12) : 1666-1671 (1972).

43 J. Wei and E. Norman, On global representations of the solutions of linear differential equations as a product of exponentials, Proc. Amer. Math. Soc. 15 : 327-334 (1964).

44 R. Wilcox, Bounds for approximate solutions to the operator differential equation $\dot{Y}(t) = M(t)Y(t)$; applications to Magnus expansion and to $\ddot{u} + (u+f(t))u = o$, J. Math. Anal. Appl. 39 : 92-111 (1972).

45 A. Wouk, Integral representation of the logarithm of matrices and operators, J. Math. Anal. Appl. 11 : 131-138 (1965).

(d) Autres publications citées dans cette thèse

46 H. Baumgärtel, Analytic Perturbation Theory for Matrices and Operators, Birkhäuser Verlag, 1985.

47 N. Bourbaki, Fonctions d'une Variable Réelle, Hermann, 1976 (ex. 10 p. IV-43).

48 N. Bourbaki, Espaces Vectoriels Topologiques, Masson, 1981.

49 H. Cartan, Cours de Calcul Différentiel, Hermann, 1977.

50 M.P. Drazin, J.W. Dungey and K.W. Gruenberg, Some theorems on commutative matrices, J. London Math. Soc. 26 : 221-228 (1951).

51 T. Kato, Perturbation Theory for Linear Operators, Springer-Verlag, 1980.

52 H.B. Philips, Functions of matrices, Am. J. of Math XLI : 266-278 (1919).

53 D.A. Suprunenko and R.I. Tyshkevich, Commutative Matrices, Academic Press, 1968.

54 J.-M. Gracia, Dimension of the solution spaces of the matrix equations $[A,[A,X]] = 0$ and $[A,[A,[A,X]]] = 0$, Linear and Multilinear Algebra 9 : 195-200 (1980).

REMERCIEMENTS

J'aimerais exprimer ici ma reconnaissance à mon Directeur de Thèse, Monsieur le Professeur R. Cairoli pour le sujet de thèse extrêmement fertile qu'il m'a proposé, pour la confiance qu'il m'a accordée, pour sa constante disponibilité et pour ses nombreuses et très pertinentes critiques. Mes remerciements s'adressent également à Messieurs les Professeurs S.D. Chatterji, A. Derighetti et M.-A. Knus, membres du Jury, pour le temps et le soin qu'ils ont consacrés à l'examen de ma thèse, ainsi que pour diverses suggestions concernant la suite de ce travail. Ils s'adressent aussi à Monsieur le Professeur T. Liebling, Président du Jury, pour sa grande disponibilité concernant les questions d'organisation. J'aimerais aussi remercier Monsieur le Professeur J.-M. Gracia pour les nombreuses et précieuses informations qu'il m'a communiquées, dont je n'ai eu connaissance malheureusement qu'au moment de l'achèvement de cette thèse, mais qui ont néanmoins permis de réaliser d'importantes améliorations de la présentation. Je remercie mon collègue G. Rojas pour m'avoir traduit des articles publiés en russe et en espagnol. Je remercie mon collègue C. El-Hayek d'avoir relu la première version de cette thèse. Enfin je remercie Madame E. Gindraux pour la compétence et le soin qu'elle a apportés à la dactylographie de cette thèse.

CURRICULUM VITAE

Je suis né le 5 juillet 1942 à Genève et je suis originaire de Chézard-St-Martin, situé dans le canton de Neuchâtel. J'ai suivi les écoles primaires et secondaires à Genève. J'ai obtenu une maturité scientifique au Collège de Genève (devenu Collège Calvin par la suite) en 1961. Après avoir exercé des activités de diverses natures, j'ai commencé des études de mathématiques à l'EPFL en 1974. Cette école m'a décerné un diplôme de mathématicien en janvier 1979. Depuis lors j'ai préparé cette thèse de doctorat ainsi que quelques publications tout en travaillant comme assistant au département de mathématiques de l'EPFL.

Publications

1 On Matrix Functions which Commute with their Derivative. Linear Algebra and its Applications 68 : 145-178 (1985).

2 Conditions for a Vector Subspace E(t) and for a Projector P(t) not to depend on t. Paraîtra dans Linear Algebra and its Applications.

D'autres articles sont en préparation.