

ITÉRATIONS MONOTONES DANS UN ESPACE DE BANACH ORDONNÉ ET APPLICATIONS AUX ÉQUATIONS DE THOMAS-FERMI ET DE LANE-EMDEN-FOWLER

THÈSE N° 500 (1983)

PRÉSENTÉE AU DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

POUR L'OBTENTION DU GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES

PAR

GEORGES IFFLAND

Ingénieur physicien EPFL
originaire de Zurich

acceptée sur proposition du jury :

Prof. B. Zwahlen, rapporteur

Prof. H. Amann, corapporteur

Prof. C. Stuart, corapporteur

J'aimerais remercier toutes les personnes qui m'ont aidé à réaliser ce travail.

Mes remerciements à Monsieur le Professeur Bruno Zwahlen, qui a dirigé ma thèse, pour ses précieux conseils et l'intérêt qu'il a porté à mon travail.

Je remercie Monsieur le Professeur Charles A. Stuart (corapporteur) et Monsieur le Professeur Herbert Amann (corapporteur externe) d'avoir accepté de faire partie du jury.

Je remercie mes collègues Dr Pierre Bader et Christian Khanmy.

Enfin, mes remerciements vont à Madame M. Martin qui a dactylographié le texte avec beaucoup de soins et de compétences.

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION	vi
NOTATIONS ET DEFINITIONS	xi
1. ITERATIONS MONOTONES DANS UN ESPACE DE BANACH ORDONNE	
1.1 INTRODUCTION	1
1.2 CONE ET RELATION D'ORDRE	2
1.3 CONES PARTICULIERS ET LEURS PROPRIETES	4
1.3.1 Cônes particuliers	4
1.3.2 Convergence de suites monotones	5
1.3.3 Construction d'un cône dans E	6
1.3.4 Opérateurs linéaires positifs	7
1.4 EXEMPLES D'ESPACES DE BANACH ORDONNES	8
1.4.1 Espaces de dimension finie	8
1.4.2 Espaces de suites	8
1.4.3 Espaces de fonctions	11
1.4.4 Tableau récapitulatif	24
1.5 ITERATIONS MONOTONES ET POINTS FIXES	26
1.6 ITERATIONS ALTERNEES	29
1.7 DIFFERENTIABILITE PAR RAPPORT A UN CONE	32
1.8 AUTRES METHODES ITERATIVES MONOTONES	34
1.8.1 Itérations monotones pour l'équation $x = F(x)$	34
1.8.2 Itérations monotones pour l'équation $Lx = F(x)$	36
1.8.3 Méthode de Newton	39
1.8.4 Méthode de Newton simplifiée	44
1.8.5 Illustrations graphiques	46
1.9 SOUS-SOLUTION, SUR-SOLUTION, SOLUTION STRICTEMENT POSITIVE	52
1.9.1 Existence d'une sous-solution et d'une sur-solution	52
1.9.2 Cas d'inexistence d'une sur-solution stricte	54
1.9.3 Solution strictement positive	56

2. EQUATIONS DIFFERENTIELLES SEMI-LINEAIRES, DU DEUXIEME ORDRE

2.1 INTRODUCTION	60
2.2 LE PRINCIPE DU MINIMUM	63
2.3 EQUATION DIFFERENTIELLE LINEAIRE A COEFFICIENTS CONTINUS	66
2.3.1 Second membre dans $C(\bar{I})$	66
2.3.2 Second membre dans $C_{\mu,0}(I)$ avec $\mu \in [0,1)$	68
2.3.3 $B_{11} = 1, B_{12} = 0$ et second membre dans $C_{\mu,0}(I)$ avec $\mu \in [0,2)$	72
2.4 EQUATION DIFFERENTIELLE LINEAIRE A COEFFICIENTS NON BORNES	78
2.4.1 L'équation sans second membre	78
2.4.2 Second membre dans $C_{\mu,0}(I)$ avec $\mu < 2$	80
2.5 EQUATION DIFFERENTIELLE LINEAIRE A POINT SINGULIER REGULIER	86
2.5.1 Point singulier régulier. Méthode de Frobenius-Fuchs	86
2.5.2 Construction de deux solutions linéairement indépendantes	87
2.5.3 Second membre dans $C_{\mu,0}(I)$ avec $\mu < 2$	90
2.6 OPERATEUR DE NEMYCKII	92
2.7 PROBLEME AUX LIMITES NON LINEAIRE	94
2.7.1 Hypothèses générales	94
2.7.2 Non-linéarité croissante	97
2.7.3 Non-linéarité avec une condition locale de croissance	98
2.7.4 Non-linéarité décroissante	108
2.7.5 Méthode de Newton	113
2.7.6 Résultats d'unicité	115

3. EQUATIONS DE THOMAS-FERMI ET DE LANE-EMDEN-FOWLER

3.1 L'EQUATION DE THOMAS-FERMI	119
3.1.1 Introduction	119
3.1.2 Les problèmes aux limites (3.7) et (3.8)	122
3.1.3 Le problème (3.4) sur \mathbb{R}_+	128
3.1.4 Le problème à extrémité libre (3.3)	133
3.2 L'EQUATION DE LANE-EMDEN-FOWLER	135
3.2.1 Introduction	135
3.2.2 Résultats préliminaires	137
3.2.3 $p < 0$	144

3.2.4	$-1 < p < 0$	146
3.2.5	$0 \leq p \leq 1$	150
3.2.6	$p \geq 1$	153
3.2.7	$1 < p < 5$	155
3.2.8	Régularité des solutions	159
3.2.9	Quelques remarques	162
3.3	SOLUTIONS A SYMETRIE SPHERIQUE DE L'EQUATION $\Delta u + \lambda u^p = 0$	166
3.3.1	Résultats préliminaires	166
3.3.2	Un problème aux limites	169
3.3.3	Méthodes itératives pour le problème aux limites (3.105)	175
3.3.4	Un problème dans \mathbb{R}^N	179
3.3.5	Problèmes singuliers	182
	RÉFÉRENCES	202
	CURRICULUM VITAE	



INTRODUCTION

Le but de ce travail est d'appliquer les méthodes d'itérations monotones, développées par M.A. Krasnosels'kii, H. Amann, et d'autres auteurs, à deux problèmes de la physique. La première application est l'équation de Thomas-Fermi, venant de la mécanique quantique. Cette équation permet d'estimer le potentiel électrique dans un atome lourd (que nous supposerons neutre ou ionisé positivement) et par conséquent la répartition moyenne des électrons. L'autre problème vient de l'astrophysique; il s'agit de l'équation de Lane-Emden-Fowler, établie pour évaluer la densité de matière d'une étoile, en équilibre hydrostatique. Dans chacun de ces exemples, il s'agit de déterminer les solutions positives d'un problème aux limites (avec une extrémité libre), pour une équation différentielle semi-linéaire du deuxième ordre. L'étude de ces deux problèmes nous amène à un problème plus général, celui de la recherche de solutions positives et à symétrie sphérique, de l'équation $\Delta u + \lambda u^p = 0$ (dans un domaine de \mathbb{R}^N , à symétrie sphérique).

On peut attribuer l'origine de ces méthodes d'itérations monotones à O. Perron, qui a introduit les notions de sous-solution et de sur-solution d'une équation aux dérivées partielles, pour la résolution d'un problème (linéaire) de la théorie du potentiel [77]. Une application à un problème non linéaire figure dans le livre de Courant et Hilbert [78;pp.369 - 373]. C'est à partir du milieu des années 1960, que ces méthodes ont connu un développement important, depuis la parution d'un livre de Krasnosels'kii [2] et d'un article de H.B. Keller & D. Cohen [79]. Dans [79], les auteurs étudient un problème aux limites non linéaire, pour une équation elliptique du deuxième ordre. Les travaux de D. Cohen [80], H.B. Keller [65], Simpson & Cohen [81], H. Amann [63], D. Sattinger [82], [83], pour ne citer que ceux-là, fournissent d'autres applications à des problèmes elliptiques (ou paraboliques) du deuxième ordre. Notons que c'est l'existence d'un principe du maximum qui permet l'utilisation des méthodes d'itérations monotones d'une manière naturelle. D'un point de vue abstrait, on est amené à étudier des équations non linéaires dans des espaces de Banach ordonnés. Dans plusieurs de ses travaux, Amann a fait le lien entre les méthodes abstraites et les applications, notamment aux problèmes aux limites elliptiques; il a publié un excellent article de synthèse sur ces ques-

tions [9].

Donnons quelques indications sur le contenu de notre travail, qui est divisé en trois chapitres. Dans le premier chapitre est présenté le point de vue abstrait. Un rappel est fait de certains résultats tirés du livre de Krasnosel'skii [2] et de l'article d'Amann [9]; en particulier, ceux qui concernent les itérations monotones. Nous étudions quelques variantes de ces méthodes. Le deuxième chapitre est consacré à l'application de ces résultats à un problème aux limites assez général, pour une équation différentielle (ordinaire) semi-linéaire, du deuxième ordre. Un certain type de singularité (pour la variable indépendante) est admis dans les coefficients de l'opérateur différentiel, ainsi que dans la non-linéarité. Les applications des méthodes d'itérations monotones aux équations de Thomas-Fermi et de Lane-Emden-Fowler font l'objet du dernier chapitre.

Dans le problème de Thomas-Fermi considéré ici, on cherche une solution positive, de classe C^2 , de l'équation

$$x''(t) = t^{-\frac{1}{2}} x^{3/2}(t) \quad (1)$$

à laquelle s'ajoute l'une des conditions aux limites

$$x(0) = 1, \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0, \quad (2)$$

pour le modèle de l'atome neutre, ou

$$x(0) = 1, x(T) = 0, -T x'(T) = q, \quad (3)$$

pour l'atome ionisé positivement; dans ce dernier cas, $q \in (0,1)$ est donné et il s'agit aussi de déterminer T .

Plus généralement, nous considérons l'équation

$$x''(t) = t^r x^p(t) \quad (4)$$

soumise à la même condition aux limites (2) ou (3). Nous montrons l'existence et l'unicité d'une solution, pour tout $r > -2$ et tout $p \geq 1$. Cette solution peut être approchée par une suite monotone.

L'équation de Thomas-Fermi a été introduite en 1927, simultanément par L.H. Thomas [27] et par E. Fermi [28]. Parmi les nombreux travaux consacrés

à cette équation, citons en particulier : Brillouin [26], March [31], Hille [84], Lieb & Simon [32] et Brézis [85]. Luning & Perry dans [86] et Mooney dans [37] ont construit des suites monotones (différentes), qui approchent uniformément la solution de l'équation (1), avec la condition

$$x(0) = 1, x(a) = 0 \quad (\text{où } a \text{ est un paramètre}).$$

Luning [87] et Mooney [38] ont adapté leur méthode à l'équation (1), avec la condition

$$x(0) = 1, b x'(b) = x(b) \quad (\text{où } b \text{ est un paramètre}).$$

Dans le problème de Lane-Emden-Fowler, il s'agit de déterminer une solution positive, de classe C^2 , de l'équation

$$-\frac{1}{t^2} (t^2 x'(t))' = x^p(t) \quad (5)$$

avec l'une des conditions :

$$x(0) = 1, \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0, \text{ ou} \quad (6)$$

$$x(0) = 1, x(T) = 0 \quad (\text{où } T \text{ est à déterminer}). \quad (7)$$

Le problème (5), (6) a une solution si et seulement si $p \geq 5$, alors que le problème (5), (7) a une solution si et seulement si $p < 5$. Dans tous ces cas, il y a unicité. Nous montrerons comment approcher cette solution, par une suite monotone, lorsque $-1 < p < 5$. Pour $p = 0, 1$ ou 5 , la solution est connue explicitement.

Un travail de I.J.H. Lane [42], publié en 1869, est à l'origine de l'équation (5). Lane s'est intéressé à déterminer la densité de matière à l'intérieur du soleil, avec le choix $p = 1.5$ ou 2.5 ; son modèle repose sur l'hypothèse d'un "équilibre convectif", notion introduite en 1862 par Lord Kelvin. Une discussion systématique de cette équation (pour $p \geq 0$) a été entreprise par R. Emden, dans son livre *Gaskugeln* [44], publié en 1907. Ces résultats ont été ensuite améliorés par R.H. Fowler [46], [47]. Un bon résumé de ces études est contenu dans le livre de Chandrasekhar [48]; des contributions plus récentes sont mentionnées dans un article de J.S.W. Wong [49]. Dans [55], Luning & Perry ont proposé une méthode d'itérations monotones, valable pour le problème (5), (7) avec $-1 < p < 0$ et $0 < p < 2$. Nous adaptons leur méthode pour $2 \leq p < 5$. Nous proposons d'autres méthodes d'itérations monotones pour

$-1 < p < 0$ et $0 < p < 1$.

Plus généralement, nous nous intéressons aux solutions strictement positives, à symétrie sphérique, de classe C^2 , de l'équation

$$\Delta u + \lambda u^p = 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}, \quad (8)$$

où \mathcal{D} est un domaine à symétrie sphérique de \mathbb{R}^N ; \mathcal{D} sera l'un des domaines suivants : $B_R := \{\xi \in \mathbb{R}^N; |\xi| < R\}$, $B_R \setminus \{0\}$, \mathbb{R}^N ou $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$. Pour $N \geq 3$, nous obtenons les résultats suivants.

1) Soit $\mathcal{D} = B_R$ et $\lambda > 0$. Alors l'équation (8), avec la condition $u = 0$ sur ∂B_R , n'a pas de solution si $p \geq (N+2) / (N-2)$ et a une solution positive unique (qui est à symétrie sphérique) si $p < (N+2)/(N-2)$ (et $p \neq 1$). Cette solution peut être obtenue par des itérations monotones, pour $-1 < p < (N+2)/(N-2)$ (avec $p \neq 0$ et 1).

2) Soit $\mathcal{D} = \mathbb{R}^N$ et $\lambda > 0$. Alors l'équation (8) n'a pas de solution si $1 \leq p < (N+2) / (N-2)$ et a une solution positive (à symétrie sphérique), qui s'annule à l'infini, si $p \geq (N+2) / (N-2)$.

3) Soit $\mathcal{D} = B_R \setminus \{0\}$ et $\lambda < 0$. L'équation (8), avec la condition $u = 0$ sur ∂B_R , n'a pas de solution positive pour $p \geq N / (N-2)$ et n'a pas de solution positive à symétrie sphérique pour $p \leq -1$. Comme les solutions positives de (8) ne sont pas bornées à l'origine, nous considérons le problème

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda u^p = 0 & \text{dans } B_R \setminus \{0\} \\ u = 0 & \text{sur } \partial B_R \\ u > 0 & \text{dans } B_R \setminus \{0\} \\ \lim_{|\xi| \rightarrow 0} |\xi|^{N-2} u(\xi) = c & \text{(où } c \text{ est un paramètre).} \end{cases} \quad (9)$$

Pour $1 \leq p < N / (N-2)$, le problème (9) a une solution à symétrie sphérique. Pour $-1 < p < 1$, il existe un $\lambda^* < 0$ tel que le problème (9) a une solution à symétrie sphérique si $\lambda > \lambda^*$ et n'en a pas si $\lambda < \lambda^*$. Quand elle existe, la solution à symétrie sphérique (unique pour $p \geq 0$) peut être obtenue par des itérations monotones.

4) Soit $\mathcal{D} = \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ et $\lambda < 0$. Considérons le problème

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda u^p = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^N \setminus \{0\} \\ u > 0 & \text{dans } \mathbb{R}^N \setminus \{0\} \\ u(\xi) = o(|\xi|^{2-N}) & \text{à l'infini.} \end{cases} \quad (10)$$

Le problème (10) n'a pas de solution pour $p \geq N / (N-2)$ et n'a pas de solution à symétrie sphérique si $p < 1$. Si $1 \leq p < N / (N-2)$, (10) a une solution à symétrie sphérique qui vérifie

$$\lim_{|\xi| \rightarrow 0} |\xi|^{N-2} u(\xi) = c \quad (\text{où } c \text{ est un paramètre}).$$

Cette solution peut être approchée par une suite monotone.

Faisons le lien avec les problèmes précédents. Supposons que u soit une solution à symétrie sphérique de (8). Alors $u : r \mapsto u(r)$, où $r = |\xi|$, doit satisfaire à

$$(r^{N-1} u'(r))' + \lambda r^{N-1} u^p(r) = 0. \quad (11)$$

Avec $N = 3$ et $\lambda = 1$ nous retrouvons l'équation de Lane-Emden-Fowler (5). Pour $N = 3$, $\lambda = -1$ et $p = \frac{3}{2}$, définissons $x : r \mapsto r u(r)$; alors x est solution de l'équation de Thomas-Fermi (1). Une discussion de l'équation (11), avec la condition $u'(0) = 0$ et $u(1) = 1$, a été faite par Joseph & Lundgren [60]. Une autre application de (11) est l'équation de Föppl-Hencky ($N=4$, $p=-2$ et $\lambda=2$), de la théorie des membranes élastiques [88], [12]. L'équation $\Delta u + \lambda u^p = 0$ intervient en mécanique des milieux poreux [89], en mécanique quantique [90] et en géométrie différentielle [91], [72].

NOTATIONS ET DÉFINITIONS

Notations

\dot{A}	:= $A \setminus \{0\}$
$\circ A$: intérieur de A
\bar{A}	: adhérence de A
∂A	: bord (ou frontière) de A
$B = (B_1, B_2)$: condition aux limites, p. 61
$B(x, \rho)$: boule ouverte, de centre x et de rayon ρ
B_ρ	:= $B(0, \rho)$
$BC(S)$: espace de fonctions bornées et continues, p. 13
$C(X)$: espace de fonctions continues, p. 11
$C^\mu(X)$: espace de fonctions μ -Hölder continues, p. 15
$C^k(\bar{\Omega})$: espace de fonctions k fois continûment différentiables, p. 16
$C^{k+\mu}(\bar{\Omega})$: espace de fonctions k fois Hölder continûment différentiables, p. 16
$C_{\mu, \nu}(I)$: espace de fonctions, p. 22
$C^1_0(\bar{I})$: espace de fonctions, p. 17
$C^1_B(\bar{I})$: espace de fonctions, p. 109
conv	= enveloppe convexe
cste	= une constante (non définie)
$d(\cdot, \cdot)$: distance dans un espace métrique
D_i	: dérivée partielle par rapport à la i -ème variable
D_J	: ensemble de fonctions, p. 92
$D(L_0)$ (p. 66), $D(L_\mu)$ (pp 69, 72, 78), $D(L)$ (p. 94)	: domaines
D_μ (p. 95), D'_μ (p. 105), D'' (p. 107)	: domaines
E_0	:= $C_{0,0}(I) = C(\bar{I})$, p. 66
E_μ	:= $C_{\mu,0}(I)$, p. 69
$F'_+(x)$: dérivée à droite de F en x , p. 32
$F'_-(x)$: dérivée à gauche de F en x
Id	= identité
Im	= image

- $K(E_1, E_2), K(E)$: espaces d'opérateurs linéaires compacts, p. 7
 $K_+(E_1, E_2), K_+(E)$: cônes, p. 7
 K_0, K_μ : opérateurs intégraux, pp 68 - 69
 $L(p. 94), L_0$ (p. 66), L_μ (pp 69, 72, 78) : opérateurs différentiels
 $L^p(D)$: espace de fonctions de puissance p-ième intégrable, p. 18
 $L(E_1, E_2), L(E)$: espaces d'opérateurs linéaires continus, p. 7
 $L_+(E_1, E_2), L_+(E)$: cônes, p. 7
 $\mathbb{N} := \{0, 1, 2, \dots\}$: ensemble des entiers naturels
 $\dot{\mathbb{N}}$ = $\{1, 2, \dots\}$
 P_+ : cône des fonctions à valeurs positives, p. 11
 P_μ : cône dans E_μ , 69
 $P_{\mu, \nu}$: cône dans $C_{\mu, \nu}(I)$, p. 22
 P_C (p. 12), P_S (p. 8), P_α (p. 13), P^* (p. 7) : cônes
 \mathbb{R} : ensemble des nombres réels
 \mathbb{R}_+ : les réels positifs (≥ 0)
 $\dot{\mathbb{R}}_+$: les réels strictement positifs (> 0)
 $\mathbb{R}_- := \mathbb{R} \setminus \dot{\mathbb{R}}_+$: les réels négatifs
 \mathbb{R}^N : espace euclidien à N dimensions
 \mathbb{R}_+^N : cône dans \mathbb{R}^N , p. 8
 Re : partie réelle
 S_1 : sphère unité
 W^* : constante, p. 70

 μ' : constante, p. 72
 μ_0 : constante, p. 81
 μ'_0 : constante, p. 105
 T^* : constante, p. 80

 (\cdot, \cdot) : intervalle ouvert (dans \mathbb{R})
 $[\cdot, \cdot]$: intervalle fermé
 $[\cdot, \cdot), (\cdot, \cdot]$: intervalles semi-ouverts
 $\langle \cdot, \cdot \rangle$: segment conique (ou intervalle d'ordre), p. 3
 $\leq, <, \ll$: p. 2
 (E, P) : espace de Banach E ordonné par le cône P, p. 2

\emptyset	: ensemble vide
$ \cdot $: norme euclidienne
$\ \cdot\ _0$: norme dans $C(X)$, p. 11
$\ \cdot\ _k$: norme dans $C^k(\bar{\Omega})$, p. 16
$\ \cdot\ _\mu$: norme dans E_μ , p. 69
$\ \cdot\ _{\mu,\nu}$: norme dans $C_{\mu,\nu}(I)$, p. 22

(x_n) désigne la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$

x^p désigne la fonction : $\xi \mapsto (x(\xi))^p$, où $p \in \mathbb{R}$ et x est une fonction à valeurs réelles positives

Définitions

application compacte	26
" complètement continue	26
" concave pour l'ordre	40
" continûment différentiable à droite (à gauche)	32
" (fortement, strictement) convexe pour l'ordre	40
" " " croissante	26, 36
" " " décroissante	26
" différentiable à droite (à gauche)	32
" (fortement, strictement) positive	26
" " " sous-linéaire	55
" " " sur-linéaire	55
compatibilité (d'une sous-solution avec une sur-solution)	26, 96
cône	2
" complètement régulier	4
" conjugué	7
" épointé	2
" générateur	4
" normal	4
" positif	2
" régulier	4
" solide	4
" total	4

dérivée à droite (à gauche)	32
domaine = ouvert connexe	
espace de Banach ordonné	2
fortement positif, élément	2
intervalle d'ordre	3
norme monotone	4
" semi-monotone	4
opérateur de Nemyckiĭ	92
" (fortement, strictement) positif	7
P-ouvert, ensemble	32
point singulier régulier	86
polynôme indiciel	86
positif, cône	2
" , élément	2
principe du minimum	63
rayon spectral	7
relation d'ordre	2
segment conique	3
solution maximale	26
" minimale	26
sous-solution	26, 36, 96
" stricte	26
strictement positif, élément	2
suite alternée	29
" (fortement, strictement) croissante	3
" " " décroissante	3
" majorée	4
" minorée	4
" monotone	3
sur-solution	26, 36, 96
" stricte	26
voisinage à droite (à gauche)	32

CHAPITRE 1

ITERATIONS MONOTONES DANS UN ESPACE DE BANACH ORDONNE

1.1 INTRODUCTION

Ce premier chapitre contient des résultats, connus pour la plupart, sur des méthodes itératives monotones pour la recherche d'une solution d'une équation dans un espace de Banach ordonné par un cône.

Nous rappelons la définition, de M. A. Krasnosel'skii [2], d'un cône dans un espace de Banach réel E ; ce cône fait de E un espace de Banach ordonné et permet d'introduire la notion de suite monotone (§1.2). Nous reprenons les définitions données par Krasnosel'skii de quelques cônes particuliers (cône solide, total, générateur, normal, régulier, complètement régulier) et mentionnons certaines de leurs propriétés (§1.3). Comme illustration de ce qui précède et aussi en vue des applications au troisième chapitre, 26 exemples d'espaces de Banach ordonnés sont étudiés au §1.4. Après avoir donné les définitions d'une sous-solution et d'une sur-solution d'une équation dans E , nous voyons comment construire par itération une suite monotone à partir de la sous-solution ou de la sur-solution; sous certaines hypothèses cette suite converge vers la solution de l'équation (§1.5). Cette méthode, présentée dans [2], est la plus simple des méthodes itératives monotones. Nous donnons ensuite des variantes de cette méthode (§§1.6 à 1.8) : la méthode de l'itération alternée a été utilisée par C. Stuart [12], la méthode de Newton monotone a été étudiée par J. Vandergraft [13], [14]. Le problème de la recherche d'une solution d'une équation se ramène donc à celui de la recherche d'une sous-solution et d'une sur-solution (compatibles). Cependant, ce dernier problème n'est pas trivial. Au §1.9, nous construisons une sous-solution et une sur-solution pour un cas particulier; nous voyons aussi qu'il peut ne pas exister de sous-solution et sur-solution compatibles même s'il y a une solution.

Dans tout ce chapitre, E désigne un espace de Banach réel.

1.2 CÔNE ET RELATION D'ORDRE

Définition. Un sous-ensemble $P \subset E$ est un *cône* si :

- (i) $\forall \lambda \in \mathbb{R}_+ : \lambda P \subset P$
- (ii) $P + P \subset P$
- (iii) $P \cap (-P) = \{0\}$
- (iv) $\bar{P} = P$.

On note $\dot{P} := P \setminus \{0\}$ le *cône époinché* et $\overset{\circ}{P}$ l'intérieur de P . Pour Bourbaki [1;IIp.11] P est un *cône pointé, convexe, saillant, fermé*.

Le cône P permet d'introduire une *relation d'ordre* dans E , notée \leq , où $x \leq y$ si $y - x \in P$. Nous écrirons aussi $y \geq x$ au lieu de $x \leq y$.

Cette relation (réflexive, antisymétrique, transitive) est compatible avec

(a) la structure vectorielle :

$$x \leq y \Rightarrow \forall z \in E : x + z \leq y + z$$

$$x \geq 0 \Rightarrow \forall \lambda \in \mathbb{R}_+ : \lambda x \geq 0$$

(b) la topologie :

Si (x_n) est une suite qui converge vers x et si $\forall n \in \mathbb{N} : x_n \geq 0$, alors $x \geq 0$.

Réciproquement, soit E un espace de Banach dans lequel est définie une relation d'ordre \leq compatible avec la structure vectorielle et la topologie.

Alors l'ensemble $P := \{x \in E \mid x \geq 0\}$ est un cône appelé le *cône positif* (Bourbaki [1;IIp.13] démontre que P satisfait à (i) - (iii); la condition (b) implique que P est fermé).

Définitions. Un espace de Banach E muni d'un cône P est appelé un *espace de Banach ordonné* et noté (E, P) , ou simplement E s'il n'y a pas d'ambiguïté.

Un élément $x \in P$ est dit *positif*. Un élément $x \in \dot{P}$ est dit *strictement positif*. Un élément $x \in \overset{\circ}{P}$ est dit *fortement positif*.

On note $x < y \Leftrightarrow y - x \in \dot{P}$
 $x \ll y \Leftrightarrow y - x \in \overset{\circ}{P}$.

Définition. Etant donnés $x, y \in E$, on appelle *intervalle d'ordre* ou *segment conique* l'ensemble

$$\langle x, y \rangle := \{ z \mid x \leq z \leq y \}.$$

C'est un ensemble fermé et convexe. On suppose habituellement que $x \leq y$, sinon $\langle x, y \rangle = \emptyset$.

De plus : $\langle x, y \rangle = (x+P) \cap (y-P)$.

Définitions. La suite (x_n) d'éléments de E est *croissante* si $\forall n \in \mathbb{N} : x_n \leq x_{n+1}$. Elle est *strictement croissante* si $\forall n \in \mathbb{N} : x_n < x_{n+1}$. Elle est *fortement croissante* si $\forall n \in \mathbb{N} : x_n \ll x_{n+1}$. Une suite (x_n) est *décroissante* si $(-x_n)$ est une suite croissante. Une suite est *monotone* si elle est soit croissante, soit décroissante.

Nous utiliserons le même symbole pour désigner la relation d'ordre dans E et celle dans \mathbb{R} .

1.3 CONES PARTICULIERS ET LEURS PROPRIETES

1.3.1 Cônes particuliers

Définitions. Un cône P est *solide* si $P \neq \emptyset$. Un cône P est *total* si $E = \overline{P - P}$; il est *générateur* si $E = P - P$.

Proposition 1.1. Tout cône solide est générateur.
Krasnosel'skii [2;p.17].

Définition. Un cône P est *normal* s'il existe un $\delta \in \dot{\mathbb{R}}_+$ tel que
 $\forall x, y \in P \cap S_1 : \|x + y\| \geq \delta$.

Définition. La norme dans E est *semi-monotone* s'il existe un $\kappa \in \dot{\mathbb{R}}_+$ tel que
 $\forall x, y \in P$ avec $x \leq y : \|x\| \leq \kappa \|y\|$. En particulier la norme est *monotone* si l'on peut choisir $\kappa = 1$.

Proposition 1.2. P est un cône normal si et seulement si l'une des conditions suivantes est vérifiée :

- (i) la norme dans E est semi-monotone
- (ii) il existe une norme monotone équivalente à la norme dans E
- (iii) tout segment conique est borné
- (iv) il existe un $\gamma \in \dot{\mathbb{R}}_+$ tel que $\forall x, y \in P : \max(\|x\|, \|y\|) \leq \gamma \|x + y\|$
- (v) si (x_n) et (y_n) sont deux suites d'éléments de P , avec
 $\forall n \in \mathbb{N} : x_n \leq y_n$ et $y_n \rightarrow 0$, alors $x_n \rightarrow 0$
- (vi) si (x_n) , (y_n) et (z_n) sont trois suites d'éléments de E , avec
 $\forall n \in \mathbb{N} : z_n \leq x_n \leq y_n$, $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = z$, alors $x_n \rightarrow z$.

Krasnosel'skii [2;p.24,54], Bohl [3;p.31].

Définitions. Une suite (x_n) est *majorée* s'il existe un \hat{x} tel que
 $\forall n \in \mathbb{N} : x_n \leq \hat{x}$. Elle est *minorée* s'il existe un \bar{x} tel que $\forall n \in \mathbb{N} : x_n \geq \bar{x}$.

Définitions. Un cône P est *régulier* si toute suite croissante et majorée converge. Un cône P est *complètement régulier* si toute suite croissante et bornée converge.

Remarquons que P est régulier si et seulement si toute suite décroissante et

minorée converge. P est complètement régulier si et seulement si toute suite monotone et bornée converge.

Proposition 1.3. Tout cône complètement régulier est régulier. [2;p.37].

Proposition 1.4. Tout cône régulier et solide est complètement régulier. [2;p.38].

Proposition 1.5. Tout cône régulier est normal. [2;p.37].

Proposition 1.6. Supposons qu'il existe une fonctionnelle $f : P \rightarrow \mathbb{R}_+$ telle que :

(i) si (x_n) est une suite d'éléments de P , avec $\inf_{n \in \mathbb{N}} \|x_n\| > 0$,
alors $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_0 + \dots + x_n) = \infty$

(ii) si $x, y \in P$, avec $x \leq y$, alors $f(x) \leq f(y)$
alors P est un cône régulier.

[2;p.42].

Proposition 1.7. Supposons qu'il existe une fonctionnelle $f : P \rightarrow \mathbb{R}_+$ telle que :

(i) si (x_n) est une suite d'éléments de P , avec $\inf_{n \in \mathbb{N}} \|x_n\| > 0$,
alors $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_0 + \dots + x_n) = \infty$

(ii) l'image d'un sous-ensemble borné de P est bornée
alors P est un cône complètement régulier.

[2;p.41].

1.3.2 Convergence de suites monotones

Proposition 1.8. Soit (x_n) une suite monotone d'éléments de (E, P) , où P est un cône normal. Si l'on peut extraire de (x_n) une sous-suite convergente, alors (x_n) converge (vers la même limite).

Démonstration. Sans nous restreindre, nous supposons que (x_n) est une suite croissante; appelons (y_n) la sous-suite convergente et x sa limite.

On a $\forall n \in \mathbb{N} : y_n \leq x$, d'où $\forall n \in \mathbb{N} : x_n \leq x$.

Fixons $m \in \mathbb{N}$; la suite (x_n) étant croissante, il existe $n(m) \in \mathbb{N}$ tel que

$\forall n \geq n(m) : y_m \leq x_n \leq x$, donc $0 \leq x - x_n \leq x - y_m$. Par la proposition 1.2, il existe $\kappa > 0$ tel que $\|x - x_n\| \leq \kappa \|x - y_m\|$. D'où $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x - x_n\| \leq \kappa \|x - y_m\|$ et comme $y_m \rightarrow x$, on a aussi $x_n \rightarrow x$. ■

Proposition 1.9. Une suite monotone, dont l'ensemble des termes est relativement compact dans E, converge.

Démonstration. Nous supposons que cette suite (x_n) est croissante. Soit $A := \{x_0, x_1, \dots, x_n, \dots\}$ l'ensemble des termes de la suite. Par hypothèse, \bar{A} est compact : la suite (x_n) a au moins une valeur d'adhérence ([4;p.34]).

Supposons que (y_n) et (z_n) soient deux sous-suites convergentes de (x_n) : $y_n \rightarrow y$ et $z_n \rightarrow z$. Soit $m \in \mathbb{N}$; comme (x_n) est croissante : $\exists n(m) \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n(m) : z_m \leq y_n \leq y$. Donc $\forall m \in \mathbb{N} : z_m \leq y$, d'où $z \leq y$. De même $y \leq z$, ce qui démontre l'unicité de la valeur d'adhérence, donc la convergence de la suite (x_n) ([4;p.34]). ■

1.3.3 Construction d'un cône dans E

Soit $F \subset E$. Définissons un ensemble P_F par :

$$P_F := \{x \in E \mid x = \lambda z, z \in F, \lambda \in \mathbb{R}_+\}$$

et une famille d'ensembles \mathcal{F} par :

$$\mathcal{F} := \{F \subset E \mid F \neq \emptyset, F \text{ fermé, borné, convexe, } 0 \notin F\}.$$

Proposition 1.10. Soit $F \in \mathcal{F}$. Alors P_F est un cône complètement régulier. Si de plus $\overset{0}{F} \neq \emptyset$, P_F est un cône solide. [2;p.18,47].

Proposition 1.11. Soit P un cône et $F := \overline{\text{conv}(P \cap S_1)}$. Si $0 \notin F$, alors $F \in \mathcal{F}$ et $P = P_F$.

Démonstration. Il est clair que $F \in \mathcal{F}$, $F \subset P$ et $P_F \subset P$. Montrons que $P \subset P_F$. Soit $x \in \overset{\circ}{P}$, alors $z := \frac{x}{\|x\|} \in P \cap S_1 \subset F$; donc $x = \lambda z$ où $\lambda := \|x\|$, $z \in F$. Ainsi $x \in P_F$. ■

Corollaire. Soit P un cône tel que $0 \notin \overline{\text{conv}(P \cap S_1)}$. Alors P est un cône complètement régulier.

1.3.4 Opérateurs linéaires positifs

Soit (E_1, P_1) et (E_2, P_2) deux espaces de Banach ordonnés, avec P_1 un cône total. Considérons $L(E_1, E_2)$ l'espace de Banach des opérateurs linéaires continus de $E_1 \rightarrow E_2$. L'ensemble :

$$L_+(E_1, E_2) := \{L \in L(E_1, E_2) \mid L(P_1) \subset P_2\}$$

est un cône [5;p.8].

Définitions. $L \in L_+(E_1, E_2)$ est appelé un *opérateur positif*. $L \in L_+(E_1, E_2)$ est *strictement positif* si $L(\overset{\circ}{P}_1) \subset \overset{\circ}{P}_2$. Dans le cas où P_2 est solide, on dit que $L \in L_+(E_1, E_2)$ est *fortement positif* si $L(\overset{\circ}{P}_1) \subset \overset{\circ}{P}_2$.

Considérons $K(E_1, E_2)$ l'espace de Banach des opérateurs linéaires compacts de $E_1 \rightarrow E_2$, muni de la norme de $L(E_1, E_2)$. C'est un sous-espace vectoriel fermé de $L(E_1, E_2)$. L'ensemble :

$$K_+(E_1, E_2) := \{K \in K(E_1, E_2) \cap L_+(E_1, E_2)\}$$

est un cône dans $K(E_1, E_2)$ [5; p.6].

Notations. Si $E = E_1 = E_2$:

$$L(E) := L(E, E)$$

$$L_+(E) := L_+(E, E)$$

$$K(E) := K(E, E)$$

$$K_+(E) := K_+(E, E)$$

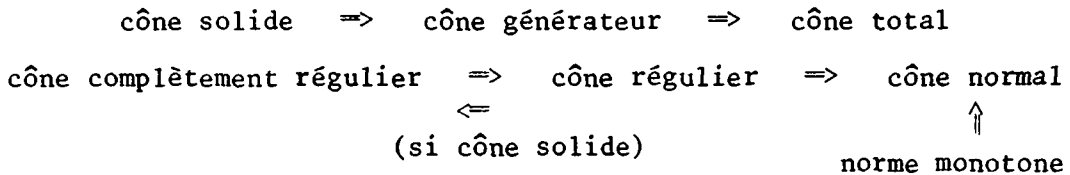
Si $E_2 = \mathbb{R}$: $P^* := L_+(E, \mathbb{R})$ est le *cône conjugué* de P . Pour $L \in L(E)$,

$r(L) := \lim_{n \rightarrow \infty} \|L^n\|^{1/n}$ est le *rayon spectral* de L .

Proposition 1.12 (Krein-Rutman). Soit (E, P) un espace de Banach ordonné avec P un cône total. Soit $K \in K_+(E)$ avec $r(K) > 0$. Alors $r(K)$ est une valeur propre de K et de l'opérateur dual K^* avec les vecteurs propres dans P et P^* respectivement. Krein & Rutman [6;p.262].

1.4 EXEMPLES D'ESPACES DE BANACH ORDONNES

Nous donnons quelques exemples d'espaces de Banach E munis d'un cône P . Nous ne démontrons pas que E est un espace de Banach (voir [7]) ni que P est un cône. Les propriétés de ces espaces (E,P) sont ensuite résumées dans un tableau. Pour l'établir, nous utiliserons les résultats du §1.3.1 :



1.4.1 Espaces de dimension finie

En dimension finie, tout cône est complètement régulier et tout cône générateur est solide.

1. \mathbb{R}^N , $N \in \mathbb{N}$, avec la norme euclidienne $|\cdot|$.

$\mathbb{R}_+^N := \{x = (\xi_1, \dots, \xi_N) \mid \xi_i \in \mathbb{R}_+ \text{ } i = 1, \dots, N\}$ est un cône complètement régulier et solide.

$$\mathbb{R}_+^{\circ N} = \{x \in \mathbb{R}_+^N \mid \xi_i \in \mathring{\mathbb{R}}_+ \text{ } i = 1, \dots, N\}.$$

En particulier $N = 1$: \mathbb{R}_+ est un cône dans \mathbb{R} et $\mathbb{R}_+^{\circ} = \mathring{\mathbb{R}}_+$. Il est possible de définir d'autres cônes. Par exemple :

$\{x = (\xi_1, \dots, \xi_{N-1}, 0) \mid \xi_i \in \mathbb{R}_+ \text{ } i = 1, \dots, N-1\}$ est un cône non total dans \mathbb{R}^N .

1.4.2 Espaces de suites

Nous considérons des espaces de suites :

$$\{x = (\xi_0, \dots, \xi_i, \dots) \mid \xi_i \in \mathbb{R} \text{ } i \in \mathbb{N}\}.$$

L'ensemble P_S suivant sera un cône générateur pour les exemples 2 à 5 :

$$P_S := \{x = (\xi_0, \dots, \xi_i, \dots) \mid \xi_i \in \mathbb{R}_+ \text{ } i \in \mathbb{N}\}.$$

2. ℓ^p , $1 \leq p < \infty$, l'espace des suites telles que la norme :

$$\|x\| := \left(\sum_{i \in \mathbb{N}} |\xi_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

est finie.

P_S est un cône générateur, non solide, complètement régulier.

Démonstration. (i) P_S n'est pas solide :

Soit $x \in P_S$ et $\rho \in \mathbb{R}_+$ quelconques, alors $\exists j \in \mathbb{N}$ tel que $\xi_j \leq \frac{\rho}{4}$. Soit $y := (\xi_0, \dots, \xi_{j-1}, -\frac{\rho}{4}, \xi_{j+1}, \dots)$ alors $\|x - y\| = \xi_j + \frac{\rho}{4} \leq \frac{\rho}{2}$, d'où $y \in B(x, \rho)$; mais $y \notin P_S$.

(ii) P_S est complètement régulier :

partons de l'inégalité :

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}_+ \text{ et } 1 \leq p < \infty : (\alpha + \beta)^p \geq \alpha^p + \beta^p. \quad (1.1)$$

Soit $x, y \in P_S$, en utilisant (1.1) et la définition de la norme dans ℓ^p :

$$\|x + y\|^p \geq \|x\|^p + \|y\|^p.$$

Soit (x_n) une suite d'éléments de P_S avec $\delta := \inf_{n \in \mathbb{N}} \|x_n\| > 0$, alors :

$$\forall m \in \mathbb{N} : \|x_0 + \dots + x_m\|^p \geq \|x_0\|^p + \dots + \|x_m\|^p \geq (m+1)\delta;$$

ainsi $\lim_{m \rightarrow \infty} \|x_0 + \dots + x_m\|^p = \infty$. La proposition 1.7 s'applique. ■

3. ℓ^∞ (ou m) l'espace des suites bornées. La norme est :

$$\|x\| := \sup_{i \in \mathbb{N}} |\xi_i|.$$

P_S est un cône solide, normal, non régulier.

Démonstration. (i) $x := (1, 1, \dots, 1, \dots) \in P_S^0$.

(ii) Soit $x, y \in P_S$ avec $x \leq y$, alors $\forall i \in \mathbb{N}$:

$$0 \leq \xi_i \leq \eta_i \leq \sup_{i \in \mathbb{N}} \eta_i = \|y\|$$

où $x = (\xi_0, \dots, \xi_i, \dots)$ et $y = (\eta_0, \dots, \eta_i, \dots)$.

Donc $\|x\| \leq \|y\|$; par la proposition 1.2, P_S est un cône normal.

(iii) Considérons la suite (x_n) dans ℓ^∞ définie par :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_0 = 0 \\ x_1 = (1, 0, \dots, 0, \dots) \\ \dots \\ x_n = (1, 1, \dots, 1, 0, \dots) \\ \quad \quad \quad \uparrow \\ \quad \quad \quad \text{n-ième terme} \\ \dots \end{array} \right. \quad (1.2)$$

elle est croissante et majorée par $(1, 1, \dots, 1, \dots) \in \ell^\infty$ mais elle ne converge pas car $\forall n \in \mathbb{N} : \|x_{n+1} - x_n\| = 1$. ■

4. c l'espace des suites convergentes. La norme est :

$$\|x\| := \sup_{i \in \mathbb{N}} |\xi_i|.$$

P_S est un cône solide, normal, non régulier.

(Même démonstration que pour l'exemple 3).

5. c_0 l'espace des suites qui convergent vers 0. La norme est :

$$\|x\| := \sup_{i \in \mathbb{N}} |\xi_i|.$$

P_S est un cône générateur, régulier, non complètement régulier (donc non solide par la proposition 1.4).

Démonstration. (i) P_S est régulier :

Soit (x_n) une suite à termes positifs, croissante et majorée par \hat{x} . Nous écrivons $x_n := (\xi_0^n, \dots, \xi_i^n, \dots)$ et $\hat{x} := (\hat{\xi}_0, \dots, \hat{\xi}_i, \dots)$. Fixons $i \in \mathbb{N}$: la suite $(\xi_i^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante, majorée par $\hat{\xi}_i$, donc converge vers un ξ_i . Nous définissons ainsi $x := (\xi_0, \dots, \xi_i, \dots)$. Puisque $\hat{\xi}_i \rightarrow 0$, $\xi_i \geq 0$: $\xi_i \rightarrow 0$ et $x \in c_0$. Nous devons encore vérifier que $x_n \rightarrow x$, c'est-à-dire que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{i \in \mathbb{N}} (\xi_i - \xi_i^n) = 0.$$

Fixons $n_0 \in \mathbb{N}$; $x - x_{n_0} \in c_0$ s'exprime :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ : \exists i(\varepsilon) \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall i \geq i(\varepsilon) : \xi_i - \xi_i^{n_0} \leq \varepsilon.$$

Pour tout $i \in \mathbb{N}$, la suite $(\xi_i - \xi_i^n)_{n \in \mathbb{N}}$ à termes positifs est décroissante,

donc : $\forall n \geq n_0 : \sup_{i \geq i(\varepsilon)} (\xi_i - \xi_i^n) \leq \varepsilon$.

Fixons $i \leq i(\varepsilon)$. Comme $\xi_1^n \rightarrow \xi_i$ si $n \rightarrow \infty$:

$$\exists n_i(\varepsilon) \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq n_i(\varepsilon) : \xi_i - \xi_1^n \leq \varepsilon.$$

Soit $\hat{n} := \max_{i \leq i(\varepsilon)} n_i(\varepsilon)$, alors : $\forall n \geq \hat{n} : \sup_{i \leq i(\varepsilon)} (\xi_i - \xi_1^n) \leq \varepsilon$.

Posons $N := \max(n_0, \hat{n})$, alors : $\forall n \geq N : \sup_{i \in \mathbb{N}} (\xi_i - \xi_1^n) \leq \varepsilon$.

(ii) P_S n'est pas complètement régulier : reprenons la suite (x_n) dans c_0 , définie par (1.2). Elle est croissante et $\forall n \in \mathbb{N} : \|x_n\| = 1$; mais elle ne converge pas. ■

1.4.3 Espaces de fonctions.

Dans les exemples suivants, nous considérons des espaces de Banach, de fonctions définies sur un ensemble S et à valeurs réelles. S'il est fermé, l'ensemble P_+ défini par :

$$P_+ := \{f : S \rightarrow \mathbb{R} \mid f(s) \in \mathbb{R}_+ \text{ } s \in S\} \quad (1.3)$$

est un cône générateur.

6. $C(X)$, X espace métrique compact, l'espace des fonctions continues muni de la norme :

$$\|f\|_0 := \max_{\xi \in X} |f(\xi)|.$$

P_+ défini par (1.3) est un cône solide, normal et

$$P_+^0 = \{f \in P_+ \mid f(\xi) > 0 \text{ } \xi \in X\}.$$

Démonstration. (i) P_+ est un cône solide car la fonction constante égale à 1 est dans P_+^0 .

Soit $f \in P_+$ avec $\rho := \min_{\xi \in X} f(\xi) > 0$. Soit $g \in B(f, \rho)$, alors $\forall \xi \in X : g(\xi) > f(\xi) - \rho \geq 0$; d'où $f \in P_+^0$. Prenons maintenant $f \in P_+$, avec $\min_{\xi \in X} f(\xi) = 0$ et $\rho > 0$. Alors $g := f - \frac{\rho}{2} \in B(f, \rho)$ mais $\min_{\xi \in X} g(\xi) = -\frac{\rho}{2}$; d'où $g \notin P_+$ et $f \notin P_+^0$.

(ii) La norme est monotone, donc P_+ est normal (proposition 1.2). ■

7. $C(K)$, K compact d'intérieur non vide de \mathbb{R}^N où $N \geq 1$, un cas particulier de l'exemple 6. P_+ est un cône solide, normal, non régulier.

Démonstration. Il nous reste à montrer que P_+ n'est pas régulier.

Soit $\xi' \in K$, alors $\exists \rho > 0$ tel que $D := \overline{B(\xi', \rho)} \subset K$. Définissons une suite (g_n) d'éléments de P_+ par :

$$g_n(\xi) := \begin{cases} 1 - \left[\frac{|\xi - \xi'|}{\rho} \right]^n & \xi \in D \\ 0 & \xi \in K \setminus D \end{cases}$$

Cette suite est croissante et majorée par la fonction constante égale à 1 dans K . Mais ce n'est pas une suite de Cauchy. En effet, soit $v \in \mathbb{K}$ avec $|v| = 1$. Posons $\xi_n := \xi' + 2^{-1/n} \rho v$, alors $\xi_n \in D$ et $\left[\frac{|\xi_n - \xi'|}{\rho} \right]^n = \frac{1}{2}$. Donc $\forall n \in \mathbb{N} :$

$$\begin{aligned} \|g_{2n} - g_n\|_0 &= \max_{\xi \in D} \left[\frac{|\xi - \xi'|}{\rho} \right]^n \left(1 - \left[\frac{|\xi - \xi'|}{\rho} \right]^n \right) \geq \left[\frac{|\xi_n - \xi'|}{\rho} \right]^n \left(1 - \left[\frac{|\xi_n - \xi'|}{\rho} \right]^n \right) = \\ &= \frac{1}{4} . \end{aligned}$$

8. $C(I)$, I intervalle compact de \mathbb{R} , muni du cône :

$$P_c := \{f \mid t_1, t_2 \in I \text{ avec } t_1 \leq t_2 \Rightarrow 0 \leq f(t_1) \leq f(t_2)\}. \quad (1.4)$$

P_c est un cône total, non générateur, complètement régulier.

Démonstration. (i) Une fonction est égale à la différence de deux fonctions croissantes si et seulement si elle appartient à $VB(I)$, l'ensemble des fonctions à variation bornée; donc $P_c - P_c \neq C(I)$. Plus précisément :

$$P_c - P_c = C(I) \cap VB(I) \text{ (voir l'exemple 15).}$$

D'autre part $C^1(I) \subset C(I) \cap VB(I)$ et $C^1(I)$ est dense dans $C(I)$ ([8;p.29]), d'où $\overline{P_c - P_c} = C(I)$.

(ii) P_c est complètement régulier : soit (f_n) une suite croissante et bornée. Ecrivons $I = [a, b]$ et considérons la suite $(f_n(b))$; elle est croissante et bornée, donc elle converge. Remarquons que $f \in P_c \Rightarrow \|f\|_0 = f(b)$. Donc

$\forall n, p \in \mathbb{N} : \|f_{n+p} - f_n\|_0 = f_{n+p}(b) - f_n(b)$, ainsi (f_n) est une suite de Cauchy. ■

9. $B(S)$, S ensemble non vide, l'espace des fonctions bornées définies sur S , muni de la norme :

$$\|f\| = \sup_{s \in S} |f(s)|.$$

P_+ défini par (1.3) est un cône solide, normal et

$$P_+^0 = \{f \in P_+ \mid \inf_{s \in S} f(s) > 0\}.$$

(La démonstration est semblable à celle de l'exemple 6).

10. $B(D)$, D dans \mathbb{R}^N (où $N \geq 1$) d'intérieur non vide (par exemple $D = \mathbb{R}^N$), un cas particulier de l'exemple 9. P_+ est un cône solide, normal, non régulier.

(Pour montrer que P_+ n'est pas régulier, utiliser la suite (g_n) de l'exemple 7).

11. $BC(S)$, S espace topologique, l'espace des fonctions bornées et continues muni de la norme :

$$\|f\| = \sup_{s \in S} |f(s)|.$$

P_+ défini par (1.3) est un cône solide, normal et

$$P_+^0 = \{f \in P_+ \mid \inf_{s \in S} f(s) > 0\}.$$

(La démonstration est semblable à celle de l'exemple 6).

12. $BC(D)$, D dans \mathbb{R}^N (où $N \geq 1$) d'intérieur non vide, un cas particulier de l'exemple 11. P_+ est un cône solide, normal, non régulier.

(Voir l'exemple 7).

13. $BC(S)$, S espace topologique, l'espace de Banach de l'exemple 11 muni cette fois du cône :

$$P_\alpha := \{f \in BC(S) \mid f(s) \geq \alpha \|f\|, s \in S\}$$

où $\alpha \in (0, 1)$. (Remarquons que si $\alpha = 0 : P_0 = P_+$; si $\alpha = 1 : P_1$ ne comprend que les fonctions constantes; pour $\alpha > 1 : P_\alpha = \emptyset$). P_α est un cône solide,

complètement régulier.

Démonstration. (i) La fonction constante $f(s) = 1, s \in S$, est dans P_α^0 :
soit $\rho := \frac{1-\alpha}{1+\alpha} > 0$ et $g \in B(f, \rho)$ d'où $\forall s \in S$:

$$1 - \rho < g(s) < 1 + \rho \quad \text{et} \quad \|g\| \leq 1 + \rho.$$

$$\alpha \|g\| \leq \alpha(1+\rho) = 1 - \rho < g(s) \Rightarrow g \in P_\alpha.$$

(ii) Soit (f_n) une suite croissante et bornée. On a :

$$\forall n, p \in \mathbb{N} \quad \|f_{n+p} - f_n\| \leq \frac{1}{\alpha} (f_{n+p}(s) - f_n(s)) \quad s \in S. \quad (1.5)$$

Pour un s fixé, la suite $(f_n(s))$ est croissante et bornée, donc elle converge. Par (1.5), (f_n) est une suite de Cauchy. ■

14. $VB(I)$, $I = (a, b)$ intervalle borné de \mathbb{R} , l'espace des fonctions à variation bornée, muni de la norme :

$$\|f\| = |f(a_+)| + V(f, I)$$

$$\text{où} \quad \begin{cases} f(a_+) := \lim_{t \downarrow a} f(t) \text{ (existe, voir [7])} \\ V(f, I) \text{ est la variation totale de } f \text{ sur } I. \end{cases}$$

P_+ défini par (1.3) est un cône solide, non normal.

Démonstration. (i) Soit f la fonction constante égale à 1. Soit $g \in B(f, \frac{1}{2})$ d'où $|(f-g)(a_+)| + V(f-g, I) < \frac{1}{2} \Rightarrow g(a_+) > \frac{1}{2}$ et $V(f-g, I) < \frac{1}{2}$. Donc $\forall t \in I$:
 $|(f-g)(t) - (f-g)(a_+)| = |g(t) - g(a_+)| < \frac{1}{2}$ et aussi $\forall t \in I$:
 $g(t) > g(a_+) - \frac{1}{2} > 0 \Rightarrow g \in P_+$ et $f \in P_+^0$.

(ii) P n'est pas normal.

Sans perte de généralité, prenons $I = (0, 1)$. Soit f la fonction constante égale à 1. Définissons une suite $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de la manière suivante :

$$g_n(t) := \begin{cases} 1 & \frac{i}{n} < t \leq \frac{i+1}{n} \quad i \text{ pair} \\ 0 & \frac{i}{n} < t \leq \frac{i+1}{n} \quad i \text{ impair} \end{cases} \quad i = 0, 1, \dots, n-1$$

alors $V(g_n, I) = n-1$ et $\|g_n\| = n$.

De plus, $\forall n \in \mathbb{N} : 0 \leq g_n \leq f$. Si P_+ était normal, il serait possible, par la proposition 1.2, de trouver un $\kappa > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N} : \|g_n\| \leq \kappa \|f\|$; d'où la contradiction avec $\|g_n\| = n$. ■

15. $VB(I)$, $I = (a,b)$ intervalle borné de \mathbb{R} , l'espace de Banach de l'exemple 14 muni cette fois du cône P_c défini par (1.4). P_c est un cône générateur, non solide, complètement régulier.

Démonstration. (i) Une fonction à variation bornée est la différence de deux fonctions croissantes que l'on peut toujours choisir à valeurs positives. Ainsi $P_c - P_c = VB(I)$.

(ii) P_c n'est pas solide.

Soit $f \in P_c$ et $\rho \in \mathbb{R}_+$ arbitraires. Comme f est une fonction croissante et bornée sur (a,b) , $\exists t^* \in (a,b)$ tel que $f(t_+^*) = f(t_-^*) = f(t^*)$. Soit $g \in VB(I)$ définie par :

$$g(t) := \begin{cases} f(t) & t \in (a, t^*) \\ f(t) - \frac{\rho}{2} & t \in [t^*, b) \end{cases}$$

$\|f - g\| = V(f-g, I) = \frac{\rho}{2} \Rightarrow g \in B(f, \frac{\rho}{2})$.
D'autre part, $g(t_+^*) = f(t^*) - \frac{\rho}{2}$, $g(t_-^*) = f(t^*)$ d'où $g(t_+^*) - g(t_-^*) = -\frac{\rho}{2}$;
 g n'est pas une fonction croissante donc $g \notin P_c$ et $f \notin P_c$.

(iii) Remarquons que $f \in P_c \Rightarrow \|f\| = f(b_-)$. Soit (f_n) une suite d'éléments de P_c avec $\delta := \inf_{n \in \mathbb{N}} \|f_n\| > 0$.

$\|f_0 + \dots + f_n\| = f_0(b_-) + \dots + f_n(b_-) = \|f_0\| + \dots + \|f_n\| \geq (n+1)\delta$.
Ainsi $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_0 + \dots + f_n\| = \infty$. P_c est complètement régulier (proposition 1.7). ■

16. $C^\mu(X)$, $\mu \in (0,1)$, X espace métrique compact contenant au moins un point d'accumulation, l'espace des fonctions μ -Hölder continues muni de la norme :

$$\|f\|_\mu := \|f\|_0 + H_\mu(f)$$

où $H_\mu(f) := \sup_{\substack{\xi, \eta \in X \\ \xi \neq \eta}} \frac{|f(\xi) - f(\eta)|}{(d(\xi, \eta))^\mu} < \infty$

P_+ défini par (1.3) est un cône solide, non normal.

Amann [9;p.629].

17. $C^k(\bar{\Omega})$, $k \in \mathbb{N}$, Ω domaine borné non vide de \mathbb{R}^N avec $N \geq 1$, l'espace des fonctions k fois continûment différentiables dans Ω (par continuité chaque dérivée partielle d'ordre inférieur ou égal à k admet un prolongement unique dans $\bar{\Omega}$). Il est muni de la norme :

$$\|f\|_k := \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha f\|_0 \quad \text{où } \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N) \in \mathbb{N}^N \\ |\alpha| = \sum_{i=1}^N \alpha_i$$

P_+ défini par (1.3) est un cône solide, non normal.

[9;p.629,632].

18. $C^1(I)$, I intervalle compact de \mathbb{R} , un cas particulier de l'exemple 17.

P_+ est un cône solide, non normal et

$$\overset{o}{P}_+ = \{f \in P_+ \mid f(t) > 0 \quad t \in I\}.$$

Démonstration (du dernier point). (i) Soit $f \in P_+$ avec $\rho := \min_{t \in I} f(t) > 0$ (par exemple $f(t) = 1$, $t \in I$). Soit $g \in B(f, \rho)$ donc $g(t) > f(t) - \rho \geq 0$ d'où $g \in P_+$ et $f \in \overset{o}{P}_+$.

(ii) Soit $f \in P_+$ tel qu'il existe $t^* \in I$ avec $f(t^*) = 0$. Prenons un $\rho > 0$ quelconque et définissons $g := f - \frac{\rho}{2}$. Alors $\|f - g\|_1 = \frac{\rho}{2}$, $g \in B(f, \rho)$, mais $g(t^*) = -\frac{\rho}{2}$ d'où $g \notin P_+$ et $f \notin \overset{o}{P}_+$. ■

19. $C^{k+\mu}(\bar{\Omega})$, $k \in \mathbb{N}$, $\mu \in (0,1)$, Ω domaine borné non vide de \mathbb{R}^N avec $N \geq 1$, l'espace des fonctions k fois continûment différentiables dont toutes les dérivées partielles d'ordre k sont μ -Hölder continues. Il est muni de la norme :

$$\|f\|_{k+\mu} := \|f\|_k + \sum_{|\alpha|=k} H_\mu(D^\alpha f).$$

P_+ défini par (1.3) est un cône solide, non normal [9;p.629,632].

20. $C_0(I)$, $I = [a,b]$ intervalle compact de \mathbb{R} , l'espace des fonctions dans $C(I)$ qui sont nulles en a et b . La norme est celle de $C(I)$. P_+ est un cône générateur, non solide, normal, non régulier.

Démonstration. (i) Soit $f \in \dot{P}_+$ et $\rho \in \dot{\mathbb{R}}_+$ quelconques.

Si $\rho > 2 \|f\|_0$, alors $-f \in B(f, \rho)$ d'où $f \notin \overset{\circ}{P}_+$.

Si $\rho \leq 2 \|f\|_0$, $\exists t_1, t_2$ avec $a < t_1 < t_2 < b$ tels que $f(t_1) = f(t_2) = \frac{\rho}{4}$ et $f(t) \leq \frac{\rho}{4}$ pour $t \in [a, t_1] \cup [t_2, b]$. Définissons $g \in C_0(I)$ par :

$$g(t) := \begin{cases} -f(t) & a \leq t \leq t_1 \\ f(t) - \frac{\rho}{2} & t_1 \leq t \leq t_2 \\ -f(t) & t_2 \leq t \leq b \end{cases}$$

Alors, $\|f - g\|_0 = \frac{\rho}{2}$, $g \in B(f, \rho)$ mais $g(t_1) = -\frac{\rho}{4}$ donc $g \notin P_+$ et $f \notin \overset{\circ}{P}_+$.

(ii) la norme étant monotone, P_+ est un cône normal (proposition 1.2).

(iii) Montrons que P_+ n'est pas régulier, Sans perte de généralité, prenons $I := [-2, 2]$. Définissons une suite (f_n) par :

$$f_n(t) := \begin{cases} 0 & -2 \leq t \leq -1 \\ 1 - |t|^n & -1 \leq t \leq 1 \\ 0 & 1 \leq t \leq 2 \end{cases}$$

Cette suite est croissante et majorée par $\hat{f} \in C_0(I)$, où

$$\hat{f}(t) := \begin{cases} 2 + t & -2 \leq t \leq -1 \\ 1 & -1 \leq t \leq 1 \\ 2 - t & 1 \leq t \leq 2 \end{cases}$$

Mais $\forall n \in \dot{\mathbb{N}} : \|f_{2n} - f_n\|_0 = \max_{t \in [0, 1]} t^n(1-t^n) = \frac{1}{4}$. ■

21. $C_0^1(I)$, $I = [a, b]$ intervalle compact de \mathbb{R} , l'espace des fonctions dans $C^1(I)$ qui sont nulles en a et b . La norme est celle de $C^1(I)$. P_+ est un cône solide, non normal et

$$\overset{\circ}{P}_+ = A := \{f \in P_+ \mid f(t) > 0, t \in (a, b) \text{ et } f'(a) > 0, f'(b) < 0\}.$$

Démonstration. (i) $A \neq \emptyset$ car cet ensemble contient la fonction définie par $t \mapsto \sin \frac{\pi(t-a)}{b-a}$.

Montrons que $A \subset \overset{\circ}{P}_+$. Soit $f \in A$, alors $\exists t_1$ et t_2 , avec $a < t_1 < t_2 < b$, tels que $f'(t) \geq \frac{f'(a)}{2}$ si $a \leq t \leq t_1$ et $f'(t) \leq -\frac{f'(b)}{2}$ si $t_2 \leq t \leq b$. Posons $\delta := \min \left(\frac{f'(a)}{2}, -\frac{f'(b)}{2} \right)$, $\min_{t \in [t_1, t_2]} f(t) > 0$. Soit $g \in B(f, \delta)$. Pour

$t \in [a, t_1]$ $g'(t) > f'(t) - \delta \geq 0$; en intégrant : $g(t) \geq 0$. Pour $t \in [t_1, t_2]$ $g(t) > f(t) - \delta \geq 0$. Pour $t \in [t_2, b]$ $g'(t) < f'(t) + \delta \leq 0$; en intégrant : $g(t) \geq 0$. Ce qui démontre que $g \in P_+$ donc $f \in \overset{\circ}{P}_+$. Montrons que :
 $f \in P_+ \setminus A \Rightarrow f \notin \overset{\circ}{P}_+$. Soit $f \in P_+ \setminus A$ et $\delta \in \overset{\circ}{\mathbb{R}}_+$. Définissons $g \in C^1_0(I)$ par
 $g(t) := f(t) - \delta c \sin \frac{\pi(t-a)}{b-a}$ où $c := \frac{b-a}{2(\pi+b-a)} > 0$. Alors $\|f - g\|_0 \leq c\delta$,
 $\|f' - g'\|_0 \leq \frac{c\pi}{b-a} \delta$ et $g \in B(f, \delta)$. Comme $f \in P_+ \setminus A$, il existe un $t^* \in I$, tel
que $f(t^*) = f'(t^*) = 0$. Si $t^* \in \overset{\circ}{I}$: $g(t^*) < 0$, donc $g \notin P_+$. Si $t^* = a$: $g'(a) < 0$;
si $t^* = b$: $g'(b) > 0$. Dans ces deux derniers cas, il est possible de trouver un
 $\bar{t} \in (a, b)$ tel que $g(\bar{t}) < 0$, donc $g \notin P_+$. Ce qui démontre que $f \notin \overset{\circ}{P}_+$ et, par consé-
séquent, $A = \overset{\circ}{P}_+$.

(ii) Montrons que P_+ n'est pas normal. Sans perte de généralité, prenons
 $I := [-2\pi, 2\pi]$ et soit $f \in P_+$ définie par $f(t) := 4\pi^2 - t^2$. Formons une suite
 (g_n) d'éléments de P_+ où

$$g_n(t) := \begin{cases} 0 & -2\pi \leq t \leq -\pi \\ 1 + \cos(2n+1)t & -\pi \leq t \leq \pi \\ 0 & \pi \leq t \leq 2\pi \end{cases}$$

Alors $\forall n \in \mathbb{N}$ et $\forall t \in [-\pi, \pi]$: $f(t) \geq f(\pi) = 3\pi^2 > 2 = \|g_n\|_0$ d'où
 $\forall n \in \mathbb{N}$: $0 \leq g_n \leq f$. Mais $\|g_n\|_1 = 2n + 3$; par la proposition 1.2 : P_+ n'est
pas normal. ■

22. $L^p(D)$, $1 \leq p < \infty$, D sous-ensemble Lebesgue-mesurable de \mathbb{R}^N (avec $N \geq 1$)
de mesure non nulle, l'espace de toutes les classes d'équivalence de fonc-
tions mesurables, de puissance p -ième intégrable. La norme est

$$\|f\|_{L^p(D)} := \left(\int_D |f(\xi)|^p d\xi \right)^{1/p}.$$

$P := \{f \in L^p(D) \mid f(\xi) \geq 0 \text{ presque partout dans } D\}$ est un cône générateur,
non solide, complètement régulier.

Démonstration. Il est clair que P est un cône générateur. Krasnosel'skii
[2;p.41] démontre que P est complètement régulier à l'aide de la proposition
1.7. Montrons que P n'est pas solide.

Soit $f \in \overset{\circ}{P}$ et $\rho \in \overset{\circ}{\mathbb{R}}_+$. Si l'on choisit $M \in \overset{\circ}{\mathbb{R}}_+$ assez grand,

$D' := \{\xi \mid 0 < f(\xi) \leq M\}$ a une mesure non nulle. Alors, on peut trouver un
sous-ensemble mesurable $D'' \subset D'$ tel que $0 < \text{mes}(D'') < \left(\frac{\rho}{2M}\right)^p$. Définissons
 $g \in L^p(D)$ par :

$$g(\xi) := \begin{cases} f(\xi) & \xi \in D \setminus D'' \\ -f(\xi) & \xi \in D'' \end{cases}$$

$$\|f - g\|_P^P = 2^P \int_{D''} |f(\xi)|^P d\xi \leq 2^P M^P \text{mes}(D'') < \rho^P, \text{ d'où } g \in B(f, \rho).$$

Comme $\text{mes}(D'') > 0 : g \notin P, \text{ donc } f \notin \overset{\circ}{P}$. ■

23. $L^\infty(D)$, ou $M(D)$, D comme dans l'exemple 22, l'espace de toutes les classes d'équivalence de fonctions mesurables et essentiellement bornées. La norme est :

$$\|f\|_{L^\infty(D)} := \sup_{\xi \in D} |f(\xi)|.$$

$P := \{f \in L^\infty(D) \mid f(\xi) \geq 0 \text{ p.p.}\}$ est un cône normal, solide.

Si $\overset{\circ}{D} \neq \emptyset : P$ est non régulier.

Démonstration. (i) La norme est monotone, donc P est normal.

(ii) La fonction constante $f(\xi) = 1, \xi \in D$, est dans $\overset{\circ}{P}$.

(iii) Si $\overset{\circ}{D} \neq \emptyset$ utiliser la suite (g_n) de l'exemple 7 pour démontrer que P n'est pas régulier. ■

24. $W^{k,p}(\Omega)$, $k \in \mathbb{N}$, $1 \leq p < \infty$, Ω domaine borné non vide de \mathbb{R}^N ($N \geq 1$), l'espace de toutes les classes d'équivalence de fonctions $f \in L^p(\Omega)$ ayant des dérivées en distribution $D^\alpha f \in L^p(\Omega) \forall \alpha \in \mathbb{N}^N$ avec $|\alpha| \leq k$. La norme est

$$\|f\|_{W^{k,p}(\Omega)} := \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha f\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/p}.$$

$P := \{f \in W^{k,p}(\Omega) \mid f(\xi) \geq 0 \text{ p.p. dans } \Omega\}$ est un cône générateur, non normal. Si $kp > N$ (et $\partial\Omega$ assez régulier) P est solide par le théorème d'injection de Sobolev.

Amann [9;p.630,632].

25. $E_1 := \{f \in C(\mathbb{R}) \cap C^1([0,1]) \mid \int_0^1 f(s) ds = 0 \text{ et}$

$$\forall t \in \mathbb{R} : f(t) = f(1+t) = f(1-t)\}$$

muni de la norme :

$$\|f\|_{E_1} := \max_{t \in [0,1]} |f(t)| + \max_{t \in [0,1]} |f'(t)|$$

est un espace de Banach.

$$K := \{f \in E_1 \mid f'(t) \leq 0, t \in [0, \frac{1}{2}]\}$$

est un cône générateur, non solide, normal, non régulier. Cet espace de Banach ordonné a été introduit par Emmerth [10], [11] dans son étude de l'équation de Choquard.

Démonstration. (i) K est un cône générateur et normal [10;p.44-46].

(ii) K n'est pas solide.

Soit $f \in \dot{K}$ et $\rho \in \mathbb{R}_+$. Comme $f(t) = f(1-t)$ et f' continue : $f'(\frac{1}{2}) = 0$.
On doit avoir : $\int_0^{\frac{1}{2}} f(s) ds = 0$, f ne peut pas être constante dans $[0, \frac{1}{2}]$. Ainsi $\exists t_0 \in (0, \frac{1}{2})$ tel que $f'(t_0) < 0$; par la continuité de f' , il est possible de choisir t_0 de manière à avoir aussi $\forall t \in [t_0, \frac{1}{2}] : f'(t) \geq -\frac{\rho}{8}$.

Définissons $g_0 \in C^1([0, \frac{1}{2}])$ par :

$$g_0(t) := \begin{cases} f(t) - f(t_0) + 2f'(t_0)(t_0-t) + c & 0 \leq t \leq t_0 \\ -f(t) + f(t_0) + c & t_0 \leq t \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

où $c := 4d + f(t_0) - 2f'(t_0)t_0^2$
 $d := \int_{t_0}^{\frac{1}{2}} (f(s) - f(t_0)) ds$.

Ce choix de c fait que $\int_0^{\frac{1}{2}} g_0(s) ds = 0$. Prolongeons g_0 en une fonction $g \in C(\mathbb{R})$ en posant :

$$\begin{cases} g(t) := g_0(t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ g(t) = g(1-t) = g(1+t) & t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Comme $g'(\frac{1}{2}) = 0 : g \in C^1([0,1])$, donc $g \in E_1$.

Mais $g \notin K$ car $g'(t_0) = -f'(t_0) > 0$.

Pour établir que $\dot{K} = \emptyset$, il n'y a plus qu'à montrer que $g \in B(f, \rho)$.

Soit $t \in [t_0, \frac{1}{2}] : 0 \geq f'(t) \geq -\frac{\rho}{8}$ nous donne :

$$0 \geq f(t) - f(t_0) \geq -\frac{\rho}{8} (t-t_0) \geq -\frac{\rho}{16}$$

$$0 \geq d \geq -\frac{\rho}{16} (t-t_0)^2 \geq -\frac{\rho}{64} .$$

Pour $t \in [t_0, \frac{1}{2}]$ $f(t) - g_0(t) = 2f(t) - f(t_0) - c =$
 $= 2(f(t) - f(t_0)) + 2 f'(t_0) t_0^2 - 4d,$
 d'où $|f(t) - g_0(t)| \leq \frac{\rho}{4}.$

Pour $t \in [0, t_0]$ $f(t) - g_0(t) = 2 f'(t_0)(t_0^2 - t_0 + t) - 4d,$ d'où $|f(t) - g_0(t)| \leq \frac{\rho}{8}.$

Nous avons obtenu $\|f - g_0\|_0 \leq \frac{\rho}{4}.$

D'autre part, pour $t \in [0, \frac{1}{2}]$ $|f'(t) - g'_0(t)| \leq \frac{\rho}{4}.$

Ainsi $\|f - g\|_{E_1} = \|f - g_0\|_1 < \rho.$

(iii) K n'est pas régulier.

Définissons une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}, f_n \in C(\mathbb{R})$ donné par :

$$f_n(t) := \begin{cases} c_n & 0 \leq t \leq \frac{1}{8} \\ c_n - \int_{1/8}^t (8s-1)^{1/n} (3-8s)^{1/n} ds & \frac{1}{8} \leq t \leq \frac{1}{4} \\ -f_n(\frac{1}{2} - t) & \frac{1}{4} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ f_n(1+t) = f_n(1-t) & t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

où $c_n := \int_{1/8}^{1/4} (8s-1)^{1/n} (3-8s)^{1/n} ds > 0.$

Alors, $f_n \in C^1(\mathbb{R})$ car

$$f'_n(t) = \begin{cases} 0 & 0 \leq t \leq \frac{1}{8} \\ -(8t-1)^{1/n} (3-8t)^{1/n} & \frac{1}{8} \leq t \leq \frac{3}{8} \\ 0 & \frac{3}{8} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ f'_n(1+t) = -f'_n(1-t) & t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$\int_0^1 f_n(s) ds = 2 \int_0^{1/2} f_n(s) ds = 0;$ d'où $f_n \in E_1.$

Pour $t \in [\frac{1}{8}, \frac{3}{8}]$ $f'_{n+1}(t) - f'_n(t) =$

$$= (8t-1)^{\frac{1}{n+1}} (3-8t)^{\frac{1}{n+1}} \left[\frac{1}{(8t-1)^{\frac{1}{n(n+1)}} (3-8t)^{\frac{1}{n(n+1)}}} - 1 \right] \leq 0.$$

Ainsi la suite (f_n) est croissante.

Soit $\hat{f} \in C(\mathbb{R})$ défini par

$$\hat{f}(t) := \begin{cases} 1 - (4t)^2 & 0 \leq t \leq \frac{1}{4} \\ (2-4t)^2 - 1 & \frac{1}{4} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \hat{f}(1+t) = \hat{f}(1-t) & t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

$\hat{f} \in C^1(\mathbb{R})$ car

$$\hat{f}'(t) = \begin{cases} -32t & 0 \leq t \leq \frac{1}{4} \\ -16(1-2t) & \frac{1}{4} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \hat{f}'(1+t) = -\hat{f}'(1-t) & t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Comme $\int_0^1 \hat{f}(s) ds = 0$, $\hat{f} \in E_1$.

Pour $t \in [0, \frac{1}{8}] \cup [\frac{3}{8}, \frac{1}{2}]$: $\hat{f}'(t) - f'_n(t) = -32t \leq 0$.

Pour $t \in [\frac{1}{8}, \frac{3}{8}]$: $\hat{f}'(t) \leq \hat{f}'(\frac{1}{8}) = -4$ et $f'_n(t) \geq f'_n(\frac{1}{4}) = -1$;

d'où $\hat{f}'(t) - f'_n(t) < 0$.

Ce qui établit que \hat{f} est un majorant pour la suite (f_n) . Mais (f_n) n'est pas une suite de Cauchy :

$$\begin{aligned} \|f_{2n} - f_n\|_{E_1} &\geq \max_{t \in [0, \frac{1}{2}]} |f'_{2n}(t) - f'_n(t)| = \\ &= \max_{t \in [\frac{1}{8}, \frac{3}{8}]} (8t-1)^{\frac{1}{2n}} (3-8t)^{\frac{1}{2n}} |1-(8t-1)^{\frac{1}{2n}}(3-8t)^{\frac{1}{2n}}| = \frac{1}{4}. \end{aligned} \quad \blacksquare$$

26. $C_{\mu, \nu}(I)$, μ et $\nu \in \mathbb{R}$, $I = (a, b)$ intervalle ouvert et borné, l'espace vectoriel défini par :

$$C_{\mu, \nu}(I) := \{f \in C(I) \mid \lim_{t \downarrow a} (t-a)^\mu f(t) \text{ et } \lim_{t \uparrow b} (b-t)^\nu f(t) \text{ existent}\}$$

Muni de la norme :

$$\|f\|_{\mu, \nu} := \sup_{t \in I} (t-a)^\mu (b-t)^\nu |f(t)|$$

c'est un espace de Banach. Le sous-ensemble

$$P_{\mu, \nu} := \{f \mid f(t) \geq 0 \quad t \in I\}$$

est un cône solide, normal, non régulier et

$$\begin{aligned} P_{\mu, \nu}^{\circ} = A := \{f \mid f(t) > 0 \quad t \in I; \lim_{t \downarrow a} (t-a)^\mu f(t) > 0 \text{ et} \\ \lim_{t \uparrow b} (b-t)^\nu f(t) > 0\}. \end{aligned}$$

Démonstration. (i) La fonction définie par $t \mapsto (t-a)^{-\mu} (b-t)^{-\nu}$ est dans A.

De plus, $A = \{f \mid \inf_{t \in I} (t-a)^\mu (b-t)^\nu f(t) > 0\}$.

Soit $f \in A$, $\rho := \inf_{t \in I} (t-a)^\mu (b-t)^\nu f(t) > 0$ et $g \in B(f, \rho)$, d'où l'on tire que $g \in P_{\mu, \nu}$ donc $A \subset P_{\mu, \nu}^0$.

Prenons maintenant $f \in P_{\mu, \nu} \setminus A$ et montrons que $f \notin P_{\mu, \nu}^0$. Soit $\rho \in \mathbb{R}_+$. Définissons $g \in C_{\mu, \nu}(I)$ par

$$g(t) := f(t) - \frac{\rho}{2} (t-a)^{-\mu} (b-t)^{-\nu}. \text{ Alors } g \in B(f, \rho).$$

Comme $f \in P_{\mu, \nu} \setminus A$: $\inf_{t \in I} (t-a)^\mu (b-t)^\nu g(t) = -\frac{\rho}{2} < 0$ donc $g \notin P_{\mu, \nu}$ et $f \notin P_{\mu, \nu}^0$.

(ii) La norme est monotone, donc $P_{\mu, \nu}$ est normal.

(iii) Pour montrer que $P_{\mu, \nu}$ n'est pas régulier, nous pouvons supposer, sans perte de généralité, que $I = (0, 1)$. Alors la suite (f_n) définie par

$$f_n(t) := t^{-\mu} (1-t)^{-\nu} (1-t^n) \text{ pour } t \in (0, 1) \text{ est croissante et } \|f_n\|_{\mu, \nu} = 1.$$

Mais ce n'est pas une suite de Cauchy car $\forall n \in \mathbb{N} : \|f_{2n} - f_n\|_{\mu, \nu} = \frac{1}{4}$.

Ainsi $P_{\mu, \nu}$ n'est pas complètement régulier. Le résultat cherché vient de la proposition 1.4. ■

Remarques. (i) $\mu = \nu = 0$; alors $C_{0, 0}(I) = C(\bar{I})$.

(ii) Soit $\bar{\mu}, \bar{\nu} \in \mathbb{R}$ alors

$$\forall \mu > \bar{\mu} : \begin{cases} C_{\bar{\mu}, \bar{\nu}}(I) \subset C_{\mu, \bar{\nu}}(I) \\ \text{si } f \in C_{\bar{\mu}, \bar{\nu}}(I) \text{ alors } \lim_{t \downarrow a} (t-a)^\mu f(t) = 0 \\ \text{et } \|f\|_{\mu, \bar{\nu}} \leq \text{cste } \|f\|_{\bar{\mu}, \bar{\nu}} \end{cases}$$

$$\forall \nu > \bar{\nu} : \begin{cases} C_{\bar{\mu}, \bar{\nu}}(I) \subset C_{\bar{\mu}, \nu}(I) \\ \text{si } f \in C_{\bar{\mu}, \bar{\nu}}(I), \text{ alors } \lim_{t \uparrow b} (b-t)^\nu f(t) = 0 \\ \text{et } \|f\|_{\bar{\mu}, \nu} \leq \text{cste } \|f\|_{\bar{\mu}, \bar{\nu}}. \end{cases}$$

(iii) Si μ et $\nu < 0$, alors $C_{\mu, \nu}(I) \subset C_0(\bar{I})$.

1.4.4 Tableau récapitulatif

Tous ces exemples sont résumés dans un tableau. Dans chaque cas, le cône est total. Lorsque le cône est normal, la norme est monotone.

Pour les exemples 6, 9, 11, 23 ($D^0 = \emptyset$), la question de la régularité du cône dépend de l'ensemble sur lequel est construit l'espace de Banach. Comme dans ces exemples, le cône est solide, il est alors régulier si et seulement s'il est complètement régulier.

Pour l'exemple 24, il reste à démontrer si le cône est solide ou non lorsque $k_p \leq N$.

espace	cône	générateur	solide	complètement régulier	régulier	normal
1. \mathbb{R}^N	\mathbb{R}_+^N	oui	oui	oui	oui	oui
2. ℓ^p $1 \leq p < \infty$	P_S	oui	non	oui	oui	oui
3. ℓ^∞ (ou m)	P_S	oui	oui	non	non	oui
4. c	P_S	oui	oui	non	non	oui
5. c_0	P_S	oui	non	non	oui	oui
6. $C(X)$	P_+	oui	oui			oui
7. $C(K)$	P_+	oui	oui	non	non	oui
8. $C(I)$	P_C	non	non	oui	oui	oui
9. $B(S)$	P_+	oui	oui			oui
10. $B(D)$	P_+	oui	oui	non	non	oui
11. $BC(S)$	P_+	oui	oui			oui
12. $BC(D)$	P_+	oui	oui	non	non	oui
13. $BC(S)$	P_α	oui	oui	oui	oui	oui
14. $VB(I)$	P_+	oui	oui	non	non	non
15. $VB(I)$	P_C	oui	non	oui	oui	oui
16. $C^\mu(X)$ $\mu \in (0,1)$	P_+	oui	oui	non	non	non
17. $C^k(\bar{\Omega})$	P_+	oui	oui	non	non	non
18. $C^1(I)$	P_+	oui	oui	non	non	non
19. $C^{k+\mu}(\bar{\Omega})$	P_+	oui	oui	non	non	non
20. $C_0(I)$	P_+	oui	non	non	non	oui
21. $C_0^1(I)$	P_+	oui	oui	non	non	non
22. $L^p(D)$ $1 \leq p < \infty$	P	oui	non	oui	oui	oui
23. $L^\infty(D)$	P	oui	oui			oui
si $\overset{\circ}{D} \neq \emptyset$		oui	oui	non	non	oui
24. $W^{k,p}(\Omega)$	P	oui		non	non	non
si $kp > N$		oui	oui	non	non	non
25. E_1	K	oui	non	non	non	oui
26. $C_{\mu,\nu}(I)$	$P_{\mu,\nu}$	oui	oui	non	non	oui

1.5 ITERATIONS MONOTONES ET POINTS FIXES

Soit (E, P) un espace de Banach ordonné. Considérons un sous-ensemble $D \subset E$ et une application $F : D \rightarrow E$. Nous nous intéressons aux points fixes de F , i.e. aux solutions de l'équation

$$x = F(x). \quad (1.6)$$

Définitions. $\varphi \in D$ est une *sous-solution* de (1.6) si $\varphi \leq F(\varphi)$; c'est une *sous-solution stricte* si $\varphi < F(\varphi)$. $\psi \in D$ est une *sur-solution* de (1.6) si $\psi \geq F(\psi)$; c'est une *sur-solution stricte* si $\psi > F(\psi)$. Une sous-solution φ et une sur-solution ψ sont *compatibles* si $\varphi \leq \psi$.

Définitions. Une solution x de (1.6) est une *solution minimale* dans $\langle y, z \rangle$ si $x \in \langle y, z \rangle$ et si pour toute solution w de (1.6) dans $\langle y, z \rangle$ on a $w \geq x$. Une solution x de (1.6) est une *solution maximale* dans $\langle y, z \rangle$ si $x \in \langle y, z \rangle$ et si pour toute solution w de (1.6) dans $\langle y, z \rangle$ on a $w \leq x$.

Définitions. Une application $F : D \rightarrow E$ est *croissante* si $x, y \in D$ avec $x \leq y \Rightarrow F(x) \leq F(y)$; elle est *strictement croissante* si $x, y \in D$ avec $x < y \Rightarrow F(x) < F(y)$. Dans le cas où P est un cône solide, F est *fortement croissante* si $x, y \in D$ avec $x < y \Rightarrow F(x) \ll F(y)$. Une application F est *décroissante* (respectivement *strictement décroissante*, *fortement décroissante*) si l'application $(-F)$ est croissante (respectivement strictement croissante, fortement croissante). Une application $F : D \rightarrow E$, avec $D \cap P \neq \emptyset$, est *positive* si $F(D \cap P) \subset P$; elle est *strictement positive* si $F(D \cap \overset{\circ}{P}) \subset \overset{\circ}{P}$. Dans le cas où P est un cône solide, F est *fortement positive* si $F(D \cap \overset{\circ}{P}) \subset \overset{\circ}{P}$.

Rappelons qu'une application $F : D \rightarrow E$ est *compacte* si F est continue et $F(D)$ est relativement compact. Une application F est *complètement continue* si elle est compacte sur les sous-ensembles bornés de D .

Proposition 1.13. Soit $F : D \rightarrow E$ une application croissante. Supposons l'existence de φ et $\psi \in D$ respectivement sous-solution et sur-solution de (1.6), compatibles et telles que $\langle \varphi, \psi \rangle \subset D$. Alors la suite (x_n) définie par

$$x_0 := \varphi \quad x_{n+1} := F(x_n) \quad (n \in \mathbb{N}) \quad (1.7)$$

est croissante et la suite (y_n) définie par

$$y_0 := \psi \quad y_{n+1} := F(y_n) \quad (n \in \mathbb{N}) \quad (1.8)$$

est décroissante et on a :

$$\varphi = x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n \leq y_n \leq \dots \leq y_1 \leq y_0 = \psi. \quad (1.9)$$

Démonstration. Comme $F(\langle \varphi, \psi \rangle) \subset \langle \varphi, \psi \rangle$ les suites (1.7) et (1.8) sont bien définies.

$x_n \leq x_{n+1} \Rightarrow x_{n+1} = F(x_n) \leq F(x_{n+1}) = x_{n+2}$. Puisque $x_0 = \varphi \leq F(\varphi) = x_1$: (x_n) est croissante.

$y_n \geq y_{n+1} \Rightarrow y_{n+1} = F(y_n) \geq F(y_{n+1}) = y_{n+2}$. Puisque $y_0 = \psi \geq F(\psi) = y_1$: (y_n) est décroissante.

$x_n \leq y_n \Rightarrow x_{n+1} = F(x_n) \leq F(y_n) = y_{n+1}$. Par hypothèse $x_0 = \varphi \leq \psi = y_0$ donc $\forall n \in \mathbb{N} : x_n \leq y_n$. On établit ainsi les inégalités (1.9). ■

Proposition 1.14. En plus des hypothèses de la proposition 1.13, supposons que l'une des trois conditions suivantes soit vérifiée :

- (i) P est un cône régulier
- (ii) F est une application compacte
- (iii) F est complètement continue, P est normal

alors les suites définies par (1.7) et (1.8) convergent.

Démonstration. Si P est régulier, les deux suites convergent par (1.9). Si F est compacte, la convergence découle de la proposition 1.9. Si P est normal, $\langle \varphi, \psi \rangle$ est un ensemble borné (proposition 1.2); F étant complètement continue, la restriction de F à $\langle \varphi, \psi \rangle$ est compacte et on est ramené au cas précédent. ■

Proposition 1.15. En plus des hypothèses de la proposition 1.13, supposons que les trois conditions suivantes soient vérifiées :

- (i) F est continue
- (ii) la suite (x_n) définie par (1.7) converge vers \bar{x}
- (iii) la suite (y_n) définie par (1.8) converge vers \hat{x}

alors \bar{x} est la solution minimale et \hat{x} la solution maximale de (1.6) dans $\langle \varphi, \psi \rangle$.

Démonstration. F étant continue, \bar{x} et \hat{x} sont des solutions de (1.6); par (1.9) : $\varphi \leq \bar{x} \leq \hat{x} \leq \psi$. Soit $x \in \langle \varphi, \psi \rangle$ une solution de (1.6), alors $x_0 \leq x \leq y_0 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \ x_{n+1} \leq x \leq y_{n+1}$ et à la limite $\bar{x} \leq x \leq \hat{x}$. Toute solution de (1.6) dans $\langle \varphi, \psi \rangle$ est dans $\langle \bar{x}, \hat{x} \rangle$. ■

Remarque. Si $\bar{x} = \hat{x}$, la solution de (1.6) est unique dans $\langle \varphi, \psi \rangle$.

Réunissons les résultats donnés par les propositions 1.13 à 1.15 dans le cas où P est un cône normal :

Corollaire. Supposons que le cône P dans E soit normal. Soit $F : D \subset E \rightarrow E$ une application croissante et complètement continue. Supposons qu'il existe φ et $\psi \in D$ respectivement sous-solution et sur-solution de (1.6), compatibles et telles que $\langle \varphi, \psi \rangle \subset D$. Alors la suite (x_n) définie par (1.7) est croissante et converge vers la solution minimale de (1.6) dans $\langle \varphi, \psi \rangle$; la suite (y_n) définie par (1.8) est décroissante et converge vers la solution maximale de (1.6) dans $\langle \varphi, \psi \rangle$.

Voir aussi Amann [9;p.639]

1.6 ITERATIONS ALTERNEES

Définition. Une suite (x_n) est *alternée* si l'on peut écrire :
 $x_0 \leq x_2 \leq \dots \leq x_3 \leq x_1$, autrement dit : la sous-suite formée de tous les termes d'indice pair et celle formée de tous les termes d'indice impair sont monotones; l'une des sous-suites est croissante, l'autre décroissante et chaque terme de la sous-suite croissante est inférieur à n'importe quel terme de la sous-suite décroissante.

Proposition 1.16. Soit $F : D \subset E \rightarrow E$ une application décroissante. Supposons qu'il existe $\varphi \in D$ avec $\varphi < F(\varphi)$, $\varphi \leq F(F(\varphi))$ et $\langle \varphi, F(\varphi) \rangle \subset D$. Alors la suite (x_n) définie par

$$x_0 := \varphi \quad x_{n+1} := F(x_n) \quad (n \in \mathbb{N}) \quad (1.10)$$

est formée d'éléments dans $\langle \varphi, F(\varphi) \rangle$ et elle est alternée. On a donc :

$$\varphi = x_0 \leq x_2 \leq \dots \leq x_{2n} \leq x_{2n+1} \leq \dots \leq x_3 \leq x_1 = F(\varphi). \quad (1.11)$$

Démonstration. Posons $\psi := F(\varphi)$ et $G := F \circ F$. Comme $F(\langle \varphi, \psi \rangle) \subset \langle \varphi, \psi \rangle$ on a aussi $G(\langle \varphi, \psi \rangle) \subset \langle \varphi, \psi \rangle$. G est une application croissante, $\varphi \leq G(\varphi)$ et $\psi \geq G(\psi)$. Par la proposition 1.13, la suite (u_n) définie par $u_0 := \varphi$, $u_{n+1} := G(u_n)$ est croissante et la suite (v_n) définie par $v_0 := \psi$, $v_{n+1} := G(v_n)$ est décroissante et :

$$\varphi = u_0 \leq u_1 \leq \dots \leq u_n \leq v_n \leq \dots \leq v_0 = F(\varphi).$$

Soit (x_n) la suite définie par (1.10), alors $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_{2n} = u_n$ et $x_{2n+1} = v_n$. ■

Proposition 1.17. En plus des hypothèses de la proposition 1.16, supposons que l'une des trois conditions suivantes soit vérifiée :

- (i) P est un cône régulier
- (ii) F est une application compacte
- (iii) F est complètement continue, P est normal

alors les deux sous-suites (x_{2n}) et (x_{2n+1}) extraites de la suite (1.10) convergent.

(Voir la proposition 1.14).

Proposition 1.18. En plus des hypothèses de la proposition 1.16, supposons que les trois conditions suivantes soient vérifiées :

- (i) F est continue
- (ii) la sous-suite (x_{2n}) converge vers \bar{x}
- (iii) la sous-suite (x_{2n+1}) converge vers \hat{x}

alors $\varphi \leq \bar{x} = F(\hat{x}) \leq F(\bar{x}) = \hat{x} \leq F(\varphi)$.

Si $z \in \langle \varphi, F(\varphi) \rangle$ est une solution de (1.6) alors $z \in \langle \bar{x}, \hat{x} \rangle$.

Démonstration. F étant continue : $\bar{x} = F(\hat{x})$ et $\hat{x} = F(\bar{x})$; par (1.11) : $\bar{x} \leq \hat{x}$.

Soit $z \in \langle \varphi, F(\varphi) \rangle$ une solution de (1.6) : $x_0 \leq z \leq x_1 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}$

$x_{2n} \leq z \leq x_{2n+1}$ d'où $z \in \langle \bar{x}, \hat{x} \rangle$. ■

Proposition 1.19. En plus des hypothèses de la proposition 1.16, supposons que l'une des deux conditions suivantes soit vérifiée :

- (i) F est une application compacte
- (ii) F est complètement continue, P est un cône normal

alors la sous-suite (x_{2n}) extraite de la suite définie par (1.10) converge vers \bar{x} , la sous-suite (x_{2n+1}) converge vers \hat{x} et l'équation (1.6) a une solution dans $\langle \bar{x}, \hat{x} \rangle$.

Démonstration. L'existence de \bar{x} et \hat{x} vient de la proposition 1.17. Si P est normal, $\langle \bar{x}, \hat{x} \rangle$ est borné (proposition 1.2) et la restriction de F à $\langle \bar{x}, \hat{x} \rangle$ est compacte. De plus $\langle \bar{x}, \hat{x} \rangle$ est fermé et convexe et l'image de $\langle \bar{x}, \hat{x} \rangle$ par F est dans $\langle \bar{x}, \hat{x} \rangle$. Ainsi F a un point fixe dans $\langle \bar{x}, \hat{x} \rangle$ par le théorème de Schauder ([15;p.26]). ■

Remarque. Si $\bar{x} = \hat{x}$ la solution de (1.6) est unique dans $\langle \varphi, F(\varphi) \rangle$ et c'est \bar{x} .

Proposition 1.20. Si $F + \text{Id} : \langle \varphi, \psi \rangle \rightarrow E$ est strictement croissante et si $\varphi \leq x = F(y) \leq y = F(x) \leq \psi$, alors $x = y$.

Démonstration. Supposons, ab absurdo, que $x < y$. Alors $F(x) + x < F(y) + y$ donc $y + x < x + y$, d'où la contradiction. ■

Réunissons les résultats précédents dans le cas où P est un cône normal :

Corollaire. Supposons que le cône P dans E soit normal. Soit $F : D \subset E \rightarrow E$ une application décroissante et complètement continue. Supposons qu'il existe $\varphi \in D$ avec $\varphi < F(\varphi)$, $\varphi \leq F(F(\varphi))$ et $\langle \varphi, F(\varphi) \rangle \subset D$.

Alors la suite (x_n) définie par (1.10) est alternée. La sous-suite (x_{2n}) converge vers un $\bar{x} \in \langle \varphi, F(\varphi) \rangle$; la sous-suite (x_{2n+1}) converge vers un $\hat{x} \in \langle \varphi, F(\varphi) \rangle$ et l'on a :

$$\varphi \leq \bar{x} = F(\hat{x}) \leq F(\bar{x}) = \hat{x} \leq F(\varphi).$$

De plus, F a un point fixe dans $\langle \bar{x}, \hat{x} \rangle$; F n'a pas de point fixe dans $\langle \varphi, F(\varphi) \rangle \setminus \langle \bar{x}, \hat{x} \rangle$.

Remarque. Au § 1.9.3 seront données des conditions suffisantes pour que $\bar{x} = \hat{x}$.

1.7 DIFFERENTIABILITE PAR RAPPORT A UN CONE

Ce qui suit est un rappel de définitions et de résultats tirés du livre de Kranosel'skii [2] et d'articles de H. Amann [9] et [16].

Définitions. Soit (E, P) un espace de Banach ordonné. Un sous-ensemble $D \subset E$ est un *voisinage à droite* (respectivement un *voisinage à gauche*) d'un point $x \in E$ s'il existe un $\rho \in \mathbb{R}_+$ tel que $B(x, \rho) \cap (x+P) \subset D$ (respectivement $B(x, \rho) \cap (x-P) \subset D$). Un sous-ensemble $D \subset E$ est *P-ouvert* (respectivement *(-P) - ouvert*) si D est un voisinage à droite (respectivement à gauche) de chacun de ses points.

P et tout ouvert de E sont P -ouverts.

Définition. Soit (E_1, P) un espace de Banach ordonné et E_2 un espace de Banach. Soit $x \in E_1$ et D un voisinage à droite de x . Une application $F : D \rightarrow E_2$ est *différentiable à droite au point x* s'il existe un opérateur linéaire continu $L \in L(\overline{P-P}, E_2)$ tel que

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \in P}} \frac{\|F(x+h) - F(x) - Lh\|}{\|h\|} = 0.$$

Un tel opérateur est déterminé de manière unique et noté $F'_+(x)$: c'est la *dérivée à droite de F en x* .

Définitions. Soit $D \subset E_1$ un P -ouvert. On dit que $F : D \rightarrow E_2$ est *différentiable à droite* si F a une dérivée à droite en chaque point $x \in D$. Dans ce cas, l'application $F'_+ : D \rightarrow L(\overline{P-P}, E_2)$ est la *dérivée à droite de F* . Si F'_+ est continue, on dit que F est *continûment différentiable à droite*. On définit de même la différentiabilité à gauche.

Proposition 1.21. Soit (E_1, P) un espace de Banach ordonné, E_2 un espace de Banach, D un voisinage à droite d'un point $x \in E_1$. Soit $F : D \rightarrow E_2$ une application différentiable à droite au point x .

(i) Si F est complètement continue, alors $F'_+(x) | _P$ est complètement continue.

- (ii) Si F est complètement continue et P est générateur, alors $F'_+(x)$ est un opérateur linéaire compact.
 - (iii) Si D est ouvert, P est générateur, F est continue et continûment différentiable à droite sur D , alors F est différentiable au sens de Fréchet sur D et $\forall y \in D \quad F'_+(y) = F'(y)$.
- [2;p.102] et [9;p.640]

Proposition 1.22. Soit (E_1, P_1) et (E_2, P_2) deux espaces de Banach ordonnés avec P_1 générateur. Soit $D \subset E_1$ convexe et P_1 -ouvert. On suppose que $F : D \rightarrow E_2$ est continue et différentiable à droite. Alors :

- (i) F est croissante si et seulement si $\forall x \in D : F'_+(x)$ est un opérateur linéaire positif.
 - (ii) Si $\forall x \in D \setminus$ (ensemble dénombrable) : l'opérateur linéaire $F'_+(x)$ est strictement positif (respectivement fortement positif, avec P_2 solide), alors F est strictement croissante (respectivement fortement croissante).
- [16;p.184]

1.8 AUTRES METHODES ITERATIVES MONOTONES

1.8.1 Itérations monotones pour l'équation $x = F(x)$

Soit (E, P) un espace de Banach ordonné. Ce qui suit est une variante du §1.5 pour le cas où F n'est pas une application croissante.

Proposition 1.23. Soit $F : D \subset E \rightarrow E$. Supposons qu'il existe une sous-solution $\varphi \in D$ et une sur-solution $\psi \in D$ de l'équation (1.6), compatibles et telles que $\langle \varphi, \psi \rangle \subset D$. S'il existe un opérateur linéaire $\Gamma \in L(E)$ tel que :

(i) $(\text{Id} + \Gamma)^{-1} \in L_+(E)$

(ii) $F + \Gamma$ est croissante

alors la suite (x_n) définie par :

$$x_0 := \varphi \quad x_{n+1} := x_n + (\text{Id} + \Gamma)^{-1}(F(x_n) - x_n) \quad (1.12)$$

est croissante et la suite (y_n) définie par :

$$y_0 := \psi \quad y_{n+1} := y_n + (\text{Id} + \Gamma)^{-1}(F(y_n) - y_n) \quad (1.13)$$

est décroissante et l'on a :

$$\varphi = x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n \leq y_n \leq \dots \leq y_1 \leq y_0 = \psi. \quad (1.14)$$

Démonstration. Les définitions (1.12) et (1.13) sont équivalentes à :

$$x_0 := \varphi \quad x_{n+1} := (\text{Id} + \Gamma)^{-1}(F(x_n) + \Gamma x_n) \quad (1.15)$$

$$y_0 := \psi \quad y_{n+1} := (\text{Id} + \Gamma)^{-1}(F(y_n) + \Gamma y_n). \quad (1.16)$$

Posons $G := (\text{Id} + \Gamma)^{-1}(F + \Gamma)$; $G : D \rightarrow E$ est croissante. On vérifie que $\varphi \leq G(\varphi)$ et $\psi \geq G(\psi)$. La proposition 1.13 s'applique : (x_n) est une suite croissante et (y_n) une suite décroissante; elles vérifient (1.14). ■

Proposition 1.24. En plus des hypothèses de la proposition 1.23, supposons que l'une des cinq conditions suivantes soit vérifiée :

(i) P est régulier

(ii) $(\text{Id} + \Gamma)^{-1}(F + \Gamma)$ est compacte

(iii) $F + \Gamma$ est compacte

(iv) P est normal et $(\text{Id} + \Gamma)^{-1}(F + \Gamma)$ est complètement continue

(v) P est normal et $F + \Gamma$ est complètement continue
alors les suites (x_n) et (y_n) définies par (1.12) et (1.13) convergent.

Démonstration. Si P est régulier, les deux suites convergent par (1.14).
Posons $G := (\text{Id} + \Gamma)^{-1}(F + \Gamma)$. Avec les hypothèses (ii) ou (iii) G est une application compacte de D dans E . Avec les hypothèses (iv) ou (v), G est complètement continue. La conclusion découle de la proposition 1.14. ■

Remarque. Supposons que E soit de dimension infinie. Alors $(\text{Id} + \Gamma)^{-1}$ ne peut pas être un opérateur linéaire compact [17;p.158]. Même si F est bornée et continue, l'application G définie ci-dessus peut ne pas être compacte dans ce cas.

Proposition 1.25. En plus des hypothèses de la proposition 1.23, supposons que les trois conditions suivantes soient vérifiées :

- (i) F est continue
 - (ii) la suite (x_n) définie par (1.12) converge vers \bar{x}
 - (iii) la suite (y_n) définie par (1.13) converge vers \hat{x}
- alors \bar{x} est la solution minimale et \hat{x} la solution maximale de (1.6) dans $\langle \varphi, \psi \rangle$.

Démonstration. Passons à la limite dans (1.12) et (1.13) :
 $\bar{x} = \bar{x} + (\text{Id} + \Gamma)^{-1}(F(\bar{x}) - \bar{x})$ et $\hat{x} = \hat{x} + (\text{Id} + \Gamma)^{-1}(F(\hat{x}) - \hat{x})$ d'où $\bar{x} = F(\bar{x})$ et $\hat{x} = F(\hat{x})$. Nous utilisons ensuite la proposition 1.15 pour démontrer que \bar{x} est la solution minimale et \hat{x} la solution maximale dans $\langle \varphi, \psi \rangle$. ■

Cas particulier. $E := \mathbb{R}$, $P := \mathbb{R}_+$, $D := [0, 1]$, $F \in C^1(D)$. Posons

$\alpha := \min_{x \in D} F'(x)$. Soit $\Gamma := \max(-\frac{1}{2}, -\alpha)$, alors :

- (i) $1 + \Gamma > 0$
- (ii) $F + \Gamma$ est une fonction croissante.

Les formules (1.12) et (1.13) deviennent : $x_{n+1} := x_n + \frac{F(x_n) - x_n}{1 + \Gamma}$ et $y_{n+1} := y_n + \frac{F(y_n) - y_n}{1 + \Gamma}$. Si l'on peut trouver x_0 et $y_0 \in D$, tels que $x_0 < y_0$, $x_0 < F(x_0)$ et $y_0 > F(y_0)$ alors les suites (x_n) et (y_n) convergent respectivement vers la solution minimale et la solution maximale de l'équation $x = F(x)$ dans $[0, 1]$.

1.8.2 Itérations monotones pour l'équation $Lx = F(x)$

Soit (E_1, P_1) et (E_2, P_2) deux espaces de Banach ordonnés. Soit L un opérateur linéaire de E_1 dans E_2 , $D(L)$ son domaine (un sous-espace vectoriel de E_1), et F une application : $D \subset E_1 \rightarrow E_2$. Nous nous intéressons aux solutions de l'équation :

$$Lx = F(x). \tag{1.17}$$

Définitions. Une application $F : D \subset E_1 \rightarrow E_2$ est *croissante* si $\forall x, y \in D$ avec $y - x \in P_1 : F(y) - F(x) \in P_2$; elle est *strictement croissante* si $\forall x, y \in D$ avec $y - x \in \dot{P}_1 : F(y) - F(x) \in \dot{P}_2$; dans le cas où P_2 est solide, elle est *fortement croissante* si $\forall x, y \in D$ avec $y - x \in \dot{P}_1 : F(y) - F(x) \in \overset{0}{P}_2$.

Si F est une application croissante et si L a un inverse $L^{-1} \in L_+(E_2, E_1)$, l'équation (1.17) est équivalente à

$$x = L^{-1} F(x) \tag{1.18}$$

et nous pouvons utiliser les résultats du §1.5. Si F est décroissante (i.e. $(-F)$ est croissante) et si $L^{-1} \in L_+(E_2, E_1)$ voir le §1.6. Nous allons considérer d'autres cas.

Proposition 1.26. Soit $L : D(L) \rightarrow E_2$ un opérateur linéaire et $F : D \subset E_1 \rightarrow E_2$, avec $\tilde{D} := D \cap D(L) \neq \emptyset$. Supposons l'existence d'une *sous-solution* $\varphi \in \tilde{D}$ de (1.17), i.e.

$$L\varphi \leq F(\varphi) \quad (\text{ou } F(\varphi) - L\varphi \in P_2) \tag{1.19}$$

et d'une *sur-solution* $\psi \in \tilde{D}$ de (1.17), i.e.

$$L\psi \geq F(\psi) \quad (\text{ou } F(\psi) - L\psi \in -P_2) \tag{1.20}$$

telles que φ et ψ soient compatibles et $\langle \varphi, \psi \rangle \subset D$. Supposons que l'on puisse trouver Γ_1 et $\Gamma_2 \in L(E_1, E_2)$ tels que :

- (i) $(L + \Gamma_j)^{-1} \in L_+(E_2, E_1)$
- (ii) $F + \Gamma_j$ est croissante sur $\langle \varphi, \psi \rangle$ j = 1, 2

alors la suite (x_n) définie par :

$$x_0 := \varphi \quad x_{n+1} := (L + \Gamma_1)^{-1}(F(x_n) + \Gamma_1 x_n) \tag{1.21}$$

est croissante, la suite (y_n) définie par :

$$y_0 := \psi \quad y_{n+1} := (L+\Gamma_2)^{-1}(F(y_n) + \Gamma_2 y_n) \quad (1.22)$$

est décroissante et l'on a :

$$\varphi = x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n \leq y_n \leq \dots \leq y_1 \leq y_0 = \psi. \quad (1.23)$$

Démonstration. Définissons G_1 et G_2 par :

$$G_j := (L+\Gamma_j)^{-1}(F+\Gamma_j) \quad j = 1, 2 \quad (1.24)$$

Alors, $G_j : D \rightarrow E_1$ est croissante; $\varphi \leq G_1(\varphi)$ et $\psi \geq G_2(\psi)$. De plus, $\forall n \in \mathbb{N} : x_n, y_n \in \tilde{D}$. A l'aide de la proposition 1.13, nous voyons que (x_n) est une suite croissante et (y_n) une suite décroissante. Pour obtenir (1.23), il n'y a plus qu'à établir que $\forall n \in \mathbb{N} : x_n \leq y_n$. La suite (x_n) étant croissante : $Lx_{n+1} + \Gamma_1 x_{n+1} = F(x_n) + \Gamma_1 x_n \leq F(x_{n+1}) + \Gamma_1 x_{n+1}$, d'où :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad Lx_n \leq F(x_n). \quad (1.25)$$

La suite (y_n) étant décroissante : $Ly_{n+1} + \Gamma_2 y_{n+1} = F(y_n) + \Gamma_2 y_n \geq F(y_{n+1}) + \Gamma_2 y_{n+1}$ d'où

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad Ly_n \geq F(y_n). \quad (1.26)$$

Nous avons $x_0 \leq y_0$. Faisons l'hypothèse de récurrence : $x_n \leq y_n$. Compte tenu de (1.25) : $(L+\Gamma_2)(y_{n+1}-x_n) = F(y_n) + \Gamma_2 y_n - Lx_n - \Gamma_2 x_n \geq (F+\Gamma_2)(y_n-x_n) \geq 0$, d'où :

$$y_{n+1} \geq x_n. \quad (1.27)$$

$(L+\Gamma_1)(y_{n+1}-x_{n+1}) = Ly_{n+1} + \Gamma_1 y_{n+1} - F(x_n) - \Gamma_1 x_n \geq (F+\Gamma_1)(y_{n+1}-x_n) \geq 0$ par (1.26) et (1.27), d'où : $y_{n+1} \geq x_{n+1}$. Ainsi (1.23) est démontré. ■

Proposition 1.27. En plus des hypothèses de la proposition 1.26, supposons que l'une des huit conditions suivantes soit vérifiée pour Γ_1 et Γ_2 :

- (i) P_1 est régulier
- (ii) $(L+\Gamma)^{-1}(F+\Gamma)$ est compacte
- (iii) F est continue, $(F+\Gamma)(D)$ est borné et $(L+\Gamma)^{-1} \in K_+(E_2, E_1)$
- (iv) $F + \Gamma$ est compacte
- (v) P_1 est normal et $(L+\Gamma)^{-1}(F+\Gamma)$ est complètement continue
- (vi) P_1 est normal, F est continue, l'image par F d'un ensemble fermé et borné est bornée, $(L+\Gamma)^{-1} \in K_+(E_2, E_1)$

- (vii) P_1 est normal et $F + \Gamma$ est complètement continue
 (viii) P_2 est normal, F est continue et $(L+\Gamma)^{-1} \in K_+(E_2, E_1)$
 (où $\Gamma = \Gamma_1$ ou Γ_2)

alors les suites (x_n) et (y_n) définies par (1.21) et (1.22) convergent.

Démonstration. Nous définissons G_1 et G_2 par (1.24). Avec les hypothèses (i), (ii), (iii), (v) ou (vi), il n'y a pas de difficulté à se ramener à la proposition 1.14. Avec l'hypothèse (iv), $(F+\Gamma_j)(D)$ est relativement compact; par la continuité de $(L+\Gamma_j)^{-1}$, G_j est une application compacte [18;p.205]. Avec l'hypothèse (vii), G_j est complètement continue puisque $F + \Gamma_j$ est complètement continue et $(L+\Gamma_j)^{-1} \in L(E_2, E_1)$. Avec l'hypothèse (viii), $(F+\Gamma_j)(\langle \varphi, \psi \rangle) \subset \langle (F+\Gamma_j)(\varphi), (F+\Gamma_j)(\psi) \rangle$ qui est borné. Dans chaque cas, on se ramène donc à la proposition 1.14. ■

Proposition 1.28. En plus des hypothèses de la proposition 1.26, supposons que les trois conditions suivantes soient vérifiées :

- (i) F est continue
 (ii) la suite (x_n) définie par (1.21) converge vers \bar{x}
 (iii) la suite (y_n) définie par (1.22) converge vers \hat{x}

alors \bar{x} est la solution minimale et \hat{x} la solution maximale de (1.17) dans $\langle \varphi, \psi \rangle$.

Démonstration. $F, \Gamma_1, \Gamma_2, (L+\Gamma_1)^{-1}, (L+\Gamma_2)^{-1}$ étant continues :

$\bar{x} = (L+\Gamma_1)^{-1}(F(\bar{x})+\Gamma_1\bar{x})$ et $\hat{x} = (L+\Gamma_2)^{-1}(F(\hat{x}) + \Gamma_2\hat{x})$; d'où : $L\bar{x} = F(\bar{x})$ et $L\hat{x} = F(\hat{x})$. Par la proposition 1.15, \bar{x} est la solution minimale et \hat{x} la solution maximale. ■

Cas particulier. $E_1 = E_2 = E$. S'il existe un $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $(L + \lambda \text{Id})^{-1} \in L_+(E)$ et $F + \lambda \text{Id}$ soit croissante, nous pouvons choisir $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \lambda \text{Id}$ dans la proposition 1.26.

Remarque. Si P_1 est générateur, $D \subset E_1$ est P_1 -ouvert et $F : D \rightarrow E_2$ est continue et différentiable à droite, la condition (ii) : $F + \Gamma_j$ est croissante sur $\langle \varphi, \psi \rangle$ de la proposition 1.26 est alors équivalente à :

$$\forall x \in \langle \varphi, \psi \rangle : F'_+(x) + \Gamma_j \in L_+(E_1, E_2)$$

ou $\forall x \in \langle \varphi, \psi \rangle, \forall h \in P_1 : F'_+(x) h \geq - \Gamma_j h.$

1.8.3 Méthode de Newton

La méthode suivante est une variante de la méthode de Newton classique; nous nous intéressons ici à la recherche de points fixes d'une application, par des itérations monotones. Les éléments des suites itératives se trouvent dans un segment conique (et non dans une boule fermée, comme c'est le cas pour la méthode de Newton classique [19;chap. 18]).

Soit (E_1, P_1) et (E_2, P_2) deux espaces de Banach ordonnés, où P_1 est un cône générateur. Soit $L : D(L) \subset E_1 \rightarrow E_2$ un opérateur linéaire et $F : D \subset E_1 \rightarrow E_2$, avec $D \cap D(L) \neq \emptyset$. Nous nous intéressons à une solution de l'équation (1.17) : $Lx = F(x)$.

Proposition 1.29. Supposons que D soit P_1 -ouvert et F soit différentiable à droite dans D . Supposons l'existence d'une sous-solution $\varphi \in D(L) \cap D$ de (1.17) : $L\varphi \leq F(\varphi)$ et d'une sur-solution $\psi \in D(L) \cap D$ de (1.17) : $L\psi \geq F(\psi)$, qui soient compatibles et telles que $\langle \varphi, \psi \rangle \subset D$. Si $\forall x \in \langle \varphi, \psi \rangle$:

- (i) $[L - F'_+(x)]^{-1} \in L_+(E_2, E_1)$
- (ii) $\forall y \in \langle \varphi, \psi \rangle$ avec $y \geq x$: $F(y) - F(x) \geq F'_+(x)(y-x)$

alors la suite (x_n) définie par :

$$x_0 := \varphi \quad x_{n+1} := [L - F'_+(x_n)]^{-1}(F(x_n) - F'_+(x_n)x_n) \quad (1.28)$$

est croissante et majorée par ψ .

Démonstration. Remarquons que $x_1 \in D(L - F'_+(\varphi)) = D(L)$.

$(L - F'_+(\varphi)) x_1 = F(\varphi) - F'_+(\varphi)\varphi \geq L\varphi - F'_+(\varphi)\varphi$; d'où : $x_1 \geq \varphi$. Utilisant l'hypothèse (ii) : $(L - F'_+(\varphi)) x_1 = F(\varphi) - F'_+(\varphi)\varphi \leq F(\psi) - F'_+(\varphi)\psi \leq L\psi - F'_+(\varphi)\psi$; d'où $x_1 \leq \psi$. Ainsi $x_1 \in D(L) \cap \langle x_0, \psi \rangle$. Le reste de la démonstration se fait par récurrence. Supposons que $x_{n+1} \in D(L) \cap \langle x_n, \psi \rangle$. Il est clair que $x_{n+2} \in D(L - F'_+(x_{n+1})) = D(L)$. Puisque $x_{n+1} \leq \psi$, $(L - F'_+(x_{n+1})) x_{n+2} = F(x_{n+1}) - F'_+(x_{n+1}) x_{n+1} \leq F(\psi) - F'_+(x_{n+1})\psi \leq L\psi - F'_+(x_{n+1})\psi$; d'où $x_{n+2} \leq \psi$. Puisque $x_{n+1} \geq x_n$, $(L - F'_+(x_n)) x_{n+1} = F(x_n) - F'_+(x_n)x_n \leq F(x_{n+1}) - F'_+(x_n)x_{n+1}$; d'où :

$$Lx_{n+1} \leq F(x_{n+1}). \quad (1.29)$$

Ainsi $(L - F'_+(x_{n+1})) x_{n+2} = F(x_{n+1}) - F'_+(x_{n+1}) x_{n+1} \geq Lx_{n+1} - F'_+(x_{n+1}) x_{n+1}$;
 d'où $x_{n+2} \geq x_{n+1}$. Nous avons établi que $\forall n \in \mathbb{N} : x_{n+1} \in D(L) \cap \langle x_n, \psi \rangle$,
 autrement dit : la suite (x_n) est croissante et majorée par ψ . ■

Supposant que F soit différentiable à gauche dans D (au lieu de l'être à droite), nous obtenons la proposition 1.30 (qui se démontre sans peine si l'on tient compte de la démonstration de la proposition 1.29) :

Proposition 1.30. Supposons que D soit $(-P_1)$ -ouvert et F soit différentiable à gauche dans D . Supposons l'existence d'une sous-solution $\varphi \in D(L) \cap D$ de (1.17) : $L\varphi \leq F(\varphi)$ et d'une sur-solution $\psi \in D(L) \cap D$ de (1.17) :

$L\psi \geq F(\psi)$, qui soient compatibles et telles que $\langle \varphi, \psi \rangle \subset D$. Si $\forall x \in \langle \varphi, \psi \rangle$:

- (i) $[L - F'_-(x)]^{-1} \in L_+(E_2, E_1)$
- (ii) $\forall y \in \langle \varphi, \psi \rangle$ avec $y \leq x : F(x) - F(y) \geq F'_-(x)(x-y)$

alors la suite (y_n) définie par :

$$y_0 := \psi \quad y_{n+1} := [L - F'_-(y_n)]^{-1}(F(y_n) - F'_-(y_n)y_n) \quad (1.30)$$

est décroissante et minorée par φ .

Cas particulier. $E_1 = E_2 = \mathbb{R}$, $P_1 = P_2 = \mathbb{R}_+$ et $F \in C^2$. Alors $\forall x, y \in \mathbb{R}$:

$$F(y) - F(x) - F'(x)(y-x) = F''(z)(y-x)^2 \quad (1.31)$$

où $z \in (x, y)$ si $x < y$, $z \in (y, x)$ si $x > y$.

La condition (ii) de la proposition 1.29 est vérifiée si et seulement si F est convexe dans $\langle \varphi, \psi \rangle$, alors que la condition (ii) de la proposition 1.30 est vérifiée si et seulement si F est concave dans $\langle \varphi, \psi \rangle$.

Définitions. (Amann [9]) Soit D un sous-ensemble convexe non vide de E_1 .

Une application $F : D \rightarrow E_2$ est *convexe pour l'ordre* si $\forall \tau \in (0, 1)$ et

$\forall x, y \in D$ avec $x < y$ ou $x > y$:

$$F(x + \tau(y-x)) \leq F(x) + \tau(F(y) - F(x)). \quad (1.32)$$

Avec l'inégalité stricte $<$ dans (1.32), F est *strictement convexe pour l'ordre*. Dans le cas où P_2 est solide et s'il y a le signe $<<$ dans (1.32), F est *fortement convexe pour l'ordre*. On dit que F est *concave pour l'ordre* si $(-F)$ est convexe pour l'ordre.

Proposition 1.31. Soit D un sous-ensemble P_1 -ouvert de E_1 et $F : D \rightarrow E_2$ une application continue et différentiable à droite. Alors les trois affirmations suivantes sont équivalentes :

- (i) F est convexe pour l'ordre
- (ii) $\forall x, y \in D$ avec $x < y : F'_+(x)(y-x) \leq F'_+(y)(y-x)$
- (iii) $\forall x, y \in D$ avec $x < y$ ou $x > y : F(y) \geq F(x) + F'_+(x)(y-x)$.

De plus, si les signes \leq sont remplacés respectivement par $<$ ou \ll , les affirmations (ii) ou (iii) sont équivalentes respectivement à la convexité stricte ou forte pour l'ordre.

[9;pp690-692]

Corollaire. Supposons que les hypothèses de la proposition 1.31 soient vérifiées. Si $\forall x, y \in D$, avec $x < y$, l'opérateur linéaire $F'_+(y) - F'_+(x)$ est :

- (i) positif, alors F est convexe pour l'ordre
- (ii) strictement positif, alors F est strictement convexe pour l'ordre
- (iii) fortement positif, alors F est fortement convexe pour l'ordre.

[9;p.692]

Remarque. Si dans la proposition 1.29 nous supposons que F est convexe pour l'ordre, alors la condition (ii) est vérifiée. Si F est concave pour l'ordre, c'est la condition (ii) de la proposition 1.30 qui est vérifiée.

Proposition 1.32. En plus des hypothèses de la proposition 1.29, supposons que F soit continue, que $\forall x \in \langle \varphi, \psi \rangle : F'_+(x) \geq F'_+(\varphi)$, que P_1 soit normal et que l'une des six conditions suivantes soit vérifiée :

- (i) P_1 est régulier
- (ii) $[L-F'_+(\varphi)]^{-1}(F-F'_+(\varphi))$ est complètement continue
- (iii) $[L-F'_+(\varphi)]^{-1} \in K_+(E_2, E_1)$ et l'image par F d'un ensemble fermé et borné est un ensemble borné
- (iv) $F - F'_+(\varphi)$ est complètement continue
- (v) F est complètement continue
- (vi) P_2 est normal et $[L-F'_+(\varphi)]^{-1} \in K_+(E_2, E_1)$

alors la suite (x_n) définie par (1.28) converge vers la solution minimale de (1.17) dans $\langle \varphi, \psi \rangle$.

Démonstration. Si P_1 est régulier, le résultat est trivial. Pour les autres cas, construisons une suite auxiliaire (\tilde{x}_n) , définie par :

$$\tilde{x}_n := [L-F'_+(\varphi)]^{-1}(F(x_n) - F'_+(\varphi) x_n) \quad n \in \mathbb{N}. \quad (1.33)$$

En utilisant (1.29) :

$$(L-F'_+(\varphi)) \tilde{x}_n = F(x_n) - F'_+(\varphi) x_n \geq Lx_n - F'_+(\varphi) x_n$$

d'où $\tilde{x}_n \geq x_n$.

$$L\tilde{x}_n = F(x_n) + F'_+(\varphi)(\tilde{x}_n - x_n) \leq F(x_n) + F'_+(x_n)(\tilde{x}_n - x_n)$$

d'où $\tilde{x}_n \leq [L-F'_+(x_n)]^{-1}(F(x_n) - F'_+(x_n)x_n) = x_{n+1}$. Nous avons établi :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n \leq \tilde{x}_n \leq x_{n+1}. \quad (1.34)$$

Montrons la convergence de la suite (\tilde{x}_n) . Posons $H := [L-F'_+(\varphi)]^{-1}(F-F'_+(\varphi))$. P_1 étant un cône normal, l'ensemble $\langle \varphi, \psi \rangle$ est borné. Avec l'une des hypothèses (ii) à (vi), l'ensemble $H(\langle \varphi, \psi \rangle)$ est relativement compact (utiliser la proposition 1.21 pour l'hypothèse (v)). Par construction, les éléments de la suite (\tilde{x}_n) sont dans $H(\langle \varphi, \psi \rangle)$. La relation (1.34) montre que (\tilde{x}_n) est croissante; la convergence de la suite (\tilde{x}_n) vers une limite, que nous appellerons \bar{x} , découle de la proposition 1.9.

Par (1.34) et la proposition 1.2, c'est la suite (x_n) qui converge vers cette même limite \bar{x} . Les applications F , $F'_+(\varphi)$ et $[L-F'_+(\varphi)]^{-1}$ étant continues, \bar{x} est une solution de (1.17). Soit $z \in \langle \varphi, \psi \rangle$ une solution de (1.17); supposons que $z \geq x_n$, alors $(L-F'_+(x_n)) x_{n+1} = F(x_n) - F'_+(x_n) x_n \leq F(z) - F'_+(x_n) z = Lz - F'_+(x_n)z$ d'où $x_{n+1} \leq z$. Comme $x_0 \leq z$, \bar{x} est bien la solution minimale. ■

Nous obtenons un résultat similaire si nous supposons la différentiabilité à gauche de F . Pour la démonstration de la proposition 1.33, il faut construire une suite (\tilde{y}_n) :

$$\tilde{y}_n = [L-F'_-(\psi)]^{-1}(F(y_n) - F'_-(\psi)y_n) \quad n \in \mathbb{N} \quad (1.35)$$

à partir de la suite (y_n) de (1.30). Le reste de la démonstration découle de celle de la proposition 1.32.

Proposition 1.33. En plus des hypothèses de la proposition 1.30, supposons que F soit continue, que $\forall x \in \langle \varphi, \psi \rangle : F'_-(x) \geq F'_-(\psi)$, que P_1 soit normal et que

l'une des six conditions suivantes soit vérifiée :

- (i) P_1 est régulier
- (ii) $[L-F'_-(\psi)]^{-1}(F-F'_-(\psi))$ est complètement continue
- (iii) $[L-F'_-(\psi)]^{-1} \in K_+(E_2, E_1)$ et l'image par F d'un ensemble fermé et borné est un ensemble borné
- (iv) $F - F'_-(\psi)$ est complètement continue
- (v) F est complètement continue
- (vi) P_2 est normal et $[L-F'_-(\psi)]^{-1} \in K_+(E_2, E_1)$

alors la suite (y_n) définie par (1.30) converge vers la solution maximale de (1.17) dans $\langle \varphi, \psi \rangle$.

Remarque. Les formules (1.28) et (1.30) peuvent s'écrire différemment. La définition (1.28) de la suite (x_n) est équivalente à :

$$x_0 := \varphi \quad x_{n+1} := x_n - [L-F'_+(x_n)]^{-1}(Lx_n - F(x_n)) \quad (1.36)$$

et la définition (1.30) est équivalente à :

$$y_0 := \psi \quad y_{n+1} := y_n - [L-F'_-(y_n)]^{-1}(Ly_n - F(y_n)). \quad (1.37)$$

Lien formel avec la méthode de Newton classique. Supposons que F soit différentiable au sens de Fréchet; alors $F'_+ = F'_- = F'$ (proposition 1.21). Supposons aussi que $L \in L(E_1, E_2)$. Posons $G := L - F$, alors $G' = L - F'$; $Lx = F(x)$ si et seulement si $G(x) = 0$. La formule (1.36) devient :

$x_{n+1} := x_n - [G'(x_n)]^{-1}G(x_n)$. Nous retrouvons la formule de la méthode de Newton ([19;chap.18], [20;pp189-201]).

Ordre de convergence. Pour la méthode de Newton classique, l'ordre de convergence est quadratique. Montrons que c'est le cas ici :

Proposition 1.34. Supposons que la norme dans (E_1, P_1) soit monotone. En plus des hypothèses des propositions 1.29 et 1.32, supposons que F soit convexe pour l'ordre et qu'il existe $\omega \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall x, y \in \langle \varphi, \psi \rangle$, avec $x \leq y$,

$$\|F'_+(x) - F'_+(y)\| \leq \omega \|x - y\|.$$

Alors l'ordre de convergence de l'itération (1.28), vers la solution minimale \bar{x} , est quadratique, i.e. il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N} : \|\bar{x} - x_{n+1}\| \leq \theta \|\bar{x} - x_n\|^2.$$

Démonstration. Utilisant la proposition 1.31 : $(L-F'_+(\psi))(\bar{x}-x_{n+1}) \leq$
 $\leq (L-F'_+(x_n))(\bar{x}-x_{n+1}) = F(\bar{x}) - F(x_n) - F'_+(x_n)(\bar{x}-x_n) \leq (F'_+(\bar{x}) - F'_+(x_n))(\bar{x}-x_n)$.
 D'où $\bar{x} - x_{n+1} \leq [L-F'_+(\psi)]^{-1}(F'_+(\bar{x}) - F'_+(x_n))(\bar{x}-x_n)$. La norme étant monotone :
 $\|\bar{x} - x_{n+1}\| \leq \|[L-F'_+(\psi)]^{-1}\| \|F'_+(\bar{x}) - F'_+(x_n)\| \|\bar{x} - x_n\| \leq$
 $\leq \omega \|[L-F'_+(\psi)]^{-1}\| \|\bar{x} - x_n\|^2 =: \theta \|\bar{x} - x_n\|^2$. ■

1.8.4 Méthode de Newton simplifiée

La méthode précédente fait intervenir un opérateur inverse $[L-F'_+(x_n)]^{-1}$ qui est différent pour chaque pas de l'itération. Nous allons considérer une méthode où l'on utilise le même opérateur inverse au cours de l'itération. Comme précédemment, (E_1, P_1) et (E_2, P_2) sont deux espaces de Banach ordonnés, où P_1 est un cône générateur. Le domaine $D(L)$ de l'opérateur linéaire $L : D(L) \rightarrow E_2$ est un sous-espace vectoriel de E_1 . L'application F va de $D \subset E_1$ dans E_2 , où $D \cap D(L) \neq \emptyset$.

Les deux propositions suivantes se déduisent immédiatement de la proposition 1.26. Pour démontrer la proposition 1.35, poser $\Gamma_1 = \Gamma_2 = -F'_+(\varphi)$; pour la proposition 1.36, poser $\Gamma_1 = \Gamma_2 = -F'_-(\psi)$.

Proposition 1.35. Supposons l'existence d'une sous-solution $\varphi \in D(L) \cap D$ de (1.17) : $L\varphi \leq F(\varphi)$ et d'une sur-solution $\psi \in D(L) \cap D$ de (1.17) : $L\psi \geq F(\psi)$, compatibles et telles que $\langle \varphi, \psi \rangle \subset D$. Supposons que D soit un voisinage à droite de φ et que F soit différentiable à droite au point φ . Si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

- (i) $[L-F'_+(\varphi)]^{-1} \in L_+(E_2, E_1)$
- (ii) $F - F'_+(\varphi)$ est croissante dans $\langle \varphi, \psi \rangle$

alors la suite (x_n) définie par

$$x_0 := \varphi \quad x_{n+1} := [L-F'_+(\varphi)]^{-1}(F(x_n) - F'_+(\varphi) x_n) \quad (1.38)$$

est croissante, et la suite (y_n) définie par

$$y_0 := \psi \quad y_{n+1} := [L-F'_+(\varphi)]^{-1}(F(y_n) - F'_+(\varphi) y_n) \quad (1.39)$$

est décroissante. De plus :

$$\varphi = x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n \leq y_n \leq \dots \leq y_1 \leq y_0 = \psi. \quad (1.40)$$

Proposition 1.36. Supposons l'existence d'une sous-solution $\varphi \in D(L) \cap D$ de (1.17) et d'une sur-solution $\psi \in D(L) \cap D$ de (1.17), compatibles et telles que $\langle \varphi, \psi \rangle \subset D$. Supposons que D soit un voisinage à gauche de ψ et que F soit différentiable à gauche au point ψ . Si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

- (i) $[L-F'_-(\psi)]^{-1} \in L_+(E_2, E_1)$
- (ii) $F - F'_-(\psi)$ est croissante dans $\langle \varphi, \psi \rangle$

alors la suite (x_n) définie par

$$x_0 := \varphi \quad x_{n+1} := [L-F'_-(\psi)]^{-1}(F(x_n) - F'_-(\psi) x_n) \quad (1.41)$$

est croissante, et la suite (y_n) définie par

$$y_0 := \psi \quad y_{n+1} := [L-F'_-(\psi)]^{-1}(F(y_n) - F'_-(\psi) y_n) \quad (1.42)$$

est décroissante. De plus :

$$\varphi = x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n \leq y_n \leq \dots \leq y_1 \leq y_0 = \psi. \quad (1.43)$$

Remarque. Les hypothèses des propositions 1.35 et 1.36 ne sont compatibles que si $F'_+(\varphi) = F'_-(\psi)$. Alors les suites définies par (1.38), respectivement (1.39), sont identiques à celles définies par (1.41), respectivement (1.42).

Les deux propositions 1.37 et 1.38, qui suivent, sont des conséquences de la proposition 1.27. Pour démontrer la proposition 1.37, poser $\Gamma = -F'_+(\varphi)$; pour la proposition 1.38, prendre $\Gamma = -F'_-(\psi)$. Remarquons que la condition (viii) : "P₁ est normal et F est complètement continue" implique la condition (vii), par la proposition 1.21.

Proposition 1.37. En plus des hypothèses de la proposition 1.35, supposons que l'une des neuf conditions suivantes soit vérifiée :

- (i) P₁ est régulier
- (ii) $[L-F'_+(\varphi)]^{-1}(F-F'_+(\varphi))$ est compacte
- (iii) $[L-F'_+(\varphi)]^{-1} \in K_+(E_2, E_1)$, F est continue, $(F-F'_+(\varphi))(D)$ est borné
- (iv) $F - F'_+(\varphi)$ est compacte
- (v) P₁ est normal, $[L-F'_+(\varphi)]^{-1}(F-F'_+(\varphi))$ est complètement continue
- (vi) P₁ est normal, $[L-F'_+(\varphi)]^{-1} \in K_+(E_2, E_1)$, F est continue, l'image par F d'un ensemble fermé et borné est bornée

- (vii) P_1 est normal et $F - F'_+(\varphi)$ est complètement continue
- (viii) P_1 est normal et F est complètement continue
- (ix) P_2 est normal, $[L-F'_+(\varphi)]^{-1} \in K_+(E_2, E_1)$, F est continue

alors les suites (x_n) et (y_n) , définies par (1.38) et (1.39), convergent.

Proposition 1.38. En plus des hypothèses de la proposition 1.36, supposons que l'une des neuf conditions suivantes soit vérifiée :

- (i) P_1 est régulier
- (ii) $[L-F'_-(\psi)]^{-1}(F-F'_-(\psi))$ est compacte
- (iii) $[L-F'_-(\psi)]^{-1} \in K_+(E_2, E_1)$, F est continue, $(F-F'_-(\psi))(D)$ est borné
- (iv) $F - F'_-(\psi)$ est compacte
- (v) P_1 est normal, $[L-F'_-(\psi)]^{-1}(F-F'_-(\psi))$ est complètement continue
- (vi) P_1 est normal, $[L-F'_-(\psi)]^{-1} \in K_+(E_2, E_1)$, F est continue, l'image par F d'un ensemble fermé et borné est bornée
- (vii) P_1 est normal et $F - F'_-(\psi)$ est complètement continue
- (viii) P_1 est normal et F est complètement continue
- (ix) P_2 est normal, $[L-F'_-(\psi)]^{-1} \in K_+(E_2, E_1)$, F est continue

alors les suites (x_n) et (y_n) , définies par (1.41) et (1.42), convergent.

Proposition 1.39. En plus des hypothèses de la proposition 1.35, respectivement 1.36, supposons que les trois conditions suivantes soient vérifiées :

- (i) F est continue
- (ii) la suite (x_n) définie par (1.38), respectivement (1.41), converge vers \bar{x}
- (iii) la suite (y_n) définie par (1.39), respectivement (1.42), converge vers \hat{x}

alors \bar{x} est la solution minimale et \hat{x} la solution maximale de (1.17) dans $\langle \varphi, \psi \rangle$.

(Conséquence de la proposition 1.28).

1.8.5 Illustrations graphiques

Nous allons considérer ces diverses méthodes itératives dans le cas où $E_1 = E_2 = \mathbb{R}$, $P_1 = P_2 = \mathbb{R}_+$, $F \in C^2$ et L est l'identité. Nous montrons comment construire graphiquement une solution de l'équation $x = F(x)$ à partir

d'une sous-solution stricte φ ou d'une sur-solution stricte ψ .

1. Itérations monotones (§1.5)

F est croissante. Les deux suites sont :

$$\begin{aligned} x_0 &= \varphi & x_{n+1} &= F(x_n) \\ y_0 &= \psi & y_{n+1} &= F(y_n) \end{aligned}$$

et $x_n \rightarrow \bar{x}$, $y_n \rightarrow \hat{x}$.

Sur la figure 1, nous voyons que si x_0 est choisi dans $\langle \bar{x}, z \rangle$, la suite (x_n) converge vers \bar{x} et non vers z ; dans ce cas x_0 n'est pas une sous-solution. De même, si nous choisissons $y_0 \in \langle z, \hat{x} \rangle$, la suite (y_n) converge vers \hat{x} . Le point fixe z ne peut pas être atteint par cette méthode.

2. Itérations alternées (§1.6)

F est décroissante. La suite est :

$$\begin{aligned} x_0 &= \varphi & x_{n+1} &= F(x_n) \\ \text{et } \bar{x} &= \lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n} & \hat{x} &= \lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n+1} . \end{aligned}$$

Dans l'exemple représenté par la figure 2, les deux sous-suites convergent vers la même limite $\bar{x} = \hat{x}$, qui est un point fixe de F. Par contre, dans l'exemple représenté par la figure 3, $\bar{x} < \hat{x}$.

3. Itérations monotones (§1.8.1 ou §1.8.2)

Déterminons $a := \min \{F'(x) \mid x \in \langle \varphi, \psi \rangle\}$. Montrons que $\varphi < F(\varphi)$ et $\psi > F(\psi) \Rightarrow a < 1$. Par définition : $a \leq F'(x)$ pour $x \in \langle \varphi, \psi \rangle$, d'où $a(\psi - \varphi) \leq F(\psi) - F(\varphi) < \psi - \varphi$; donc $a < 1$. L'itération (1.12) devient, avec $\Gamma = -a$:

$$x_0 = \varphi \quad x_{n+1} = x_n + \frac{F(x_n) - x_n}{1 - a} .$$

Voyons comment construire géométriquement x_{n+1} à partir de x_n . Considérons la figure 4; dans le plan Oxy, traçons la droite de pente a et passant par le point $(x_n, F(x_n))$. L'équation de cette droite est : $y = ax + F(x_n) - ax_n$. Son intersection avec la diagonale $y = x$ donne $x = \frac{F(x_n) - ax_n}{1 - a}$, i.e. x_{n+1} . Nous pouvons faire la même construction pour la suite définie par (1.13), qui est :

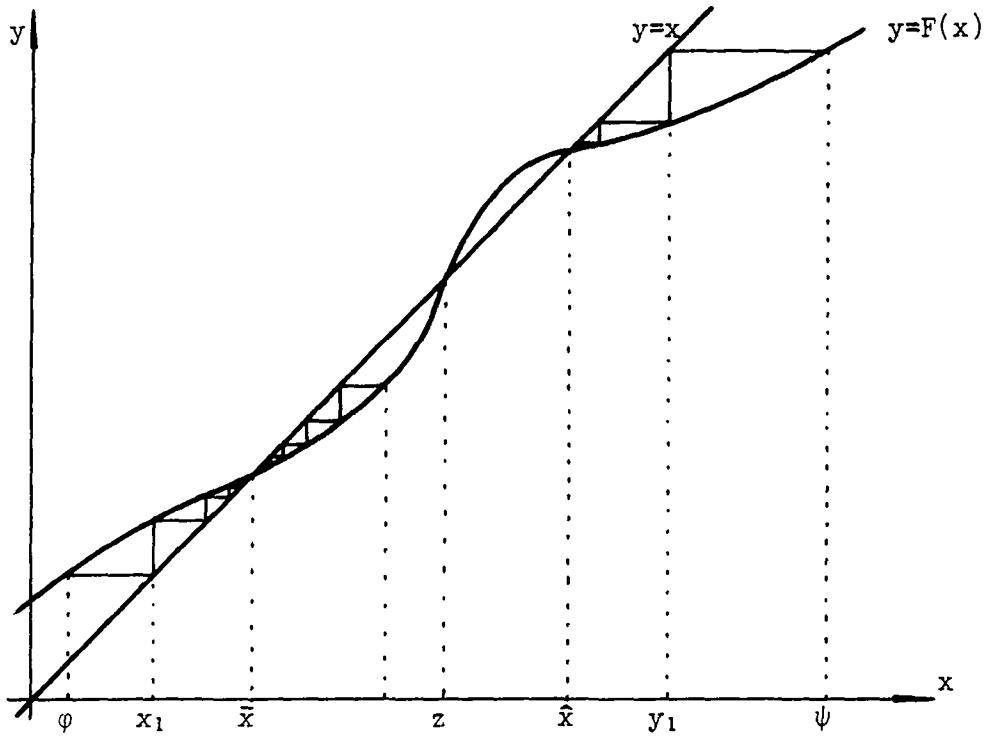


figure 1

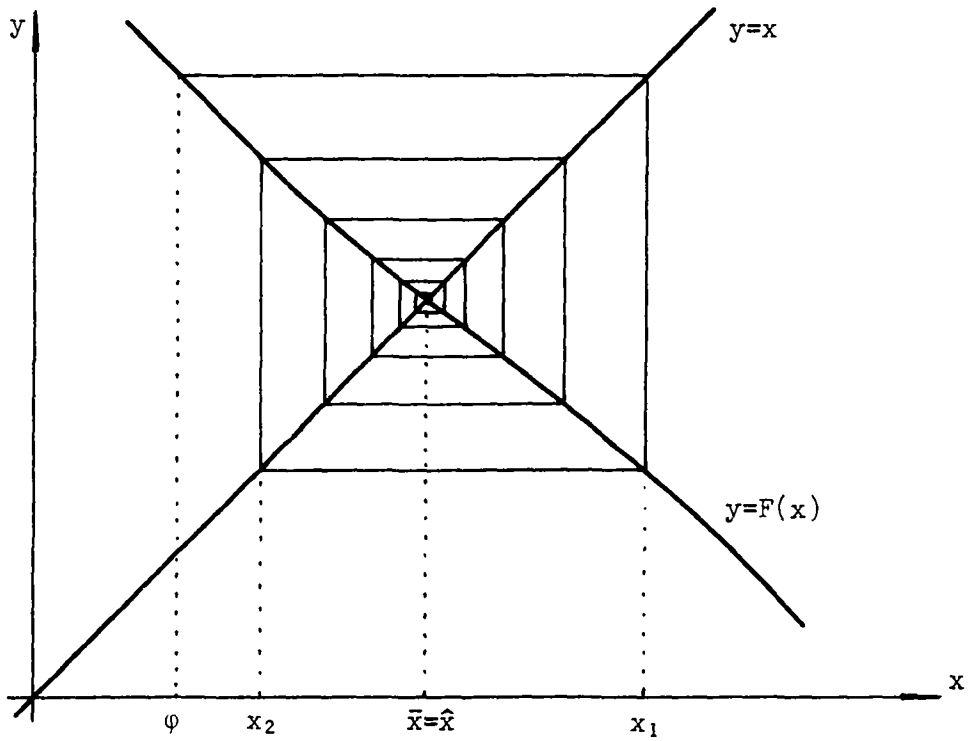


figure 2

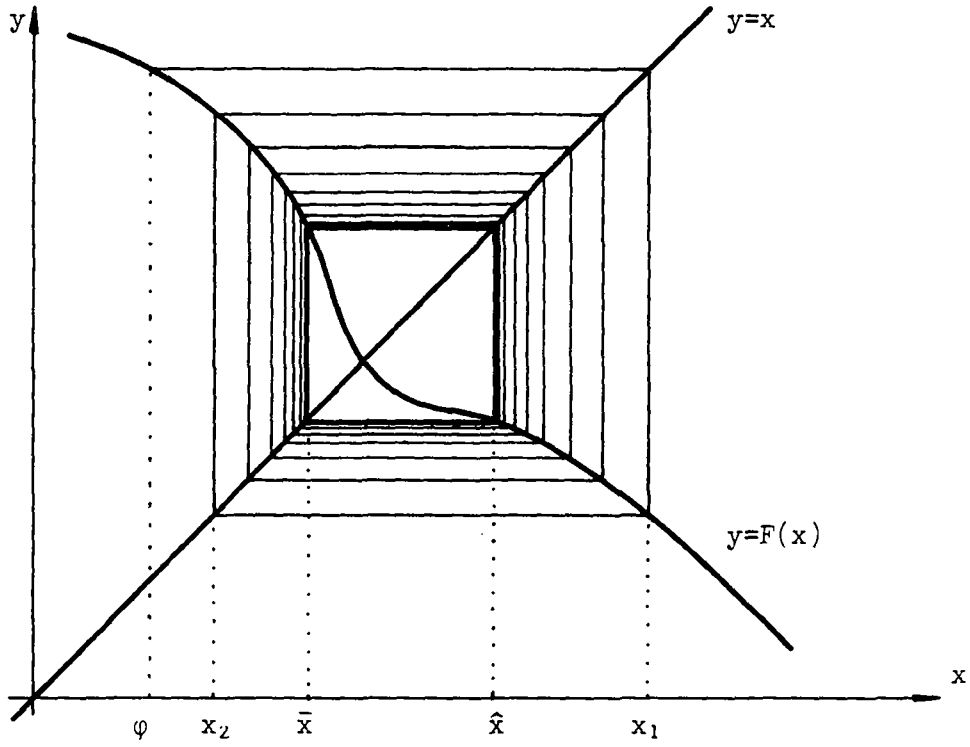


figure 3

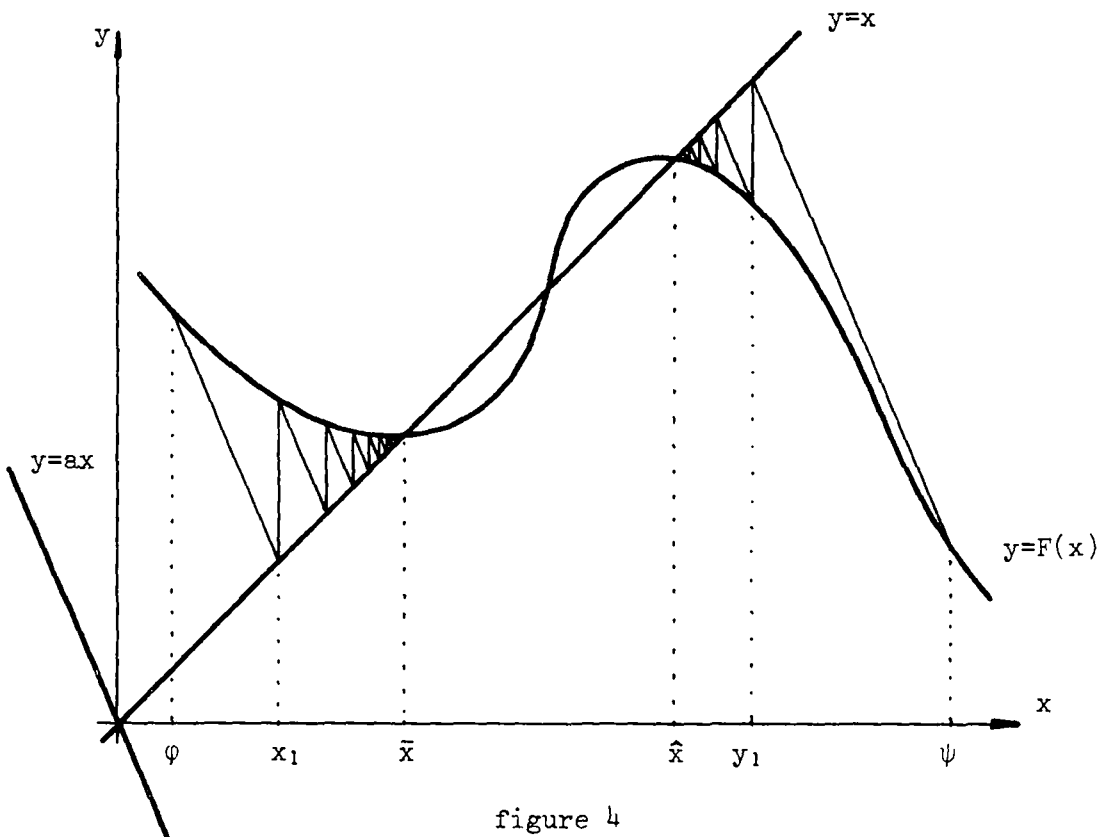


figure 4

$$y_0 = \psi \quad y_{n+1} = y_n + \frac{F(y_n) - y_n}{1-a} .$$

4. Méthode de Newton (§1.8.3.)

Nous considérons les deux cas particuliers : (a) F est convexe, (b) F est concave.

(a) F est convexe (figure 5)

F a un point fixe dans $\langle \varphi, \psi \rangle$, appelons-le \bar{x} (théorème de Bolzano). Puisque F est convexe : $F'(\bar{x})(\psi - \bar{x}) \leq F(\psi) - F(\bar{x}) < \psi - \bar{x}$, d'où $F'(\bar{x}) < 1$ et aussi $\forall x \in \langle \varphi, \bar{x} \rangle : F'(x) < 1$. L'itération (1.28) devient :

$$x_0 = \varphi \quad x_{n+1} = \frac{F(x_n) - F'(x_n)x_n}{1 - F'(x_n)} = x_n - \frac{x_n - F(x_n)}{1 - F'(x_n)} .$$

Construisons géométriquement x_{n+1} à partir de x_n . Dans le plan Oxy, traçons la tangente au graphe de F, qui passe par $(x_n, F(x_n))$; son équation est $y = F'(x_n)x + F(x_n) - F'(x_n)x_n$. L'intersection de cette tangente avec la diagonale $y = x$ nous donne

$$x = \frac{F(x_n) - F'(x_n)x_n}{1 - F'(x_n)} , \text{ i.e. } x_{n+1} .$$

(b) F est concave (figure 6)

Dans ce cas, nous construisons la suite (y_n) , à partir de $y_0 = \psi$, par l'itération :

$$y_{n+1} = \frac{F(y_n) - F'(y_n)y_n}{1 - F'(y_n)} = y_n - \frac{y_n - F(y_n)}{1 - F'(y_n)} .$$

Vérifions que $F'(y_n) < 1$. F a un point fixe \bar{y} dans $\langle \varphi, \psi \rangle$: il suffit de montrer que $F'(\bar{y}) < 1$. Par la concavité de F : $F'(\bar{y})(\bar{y} - \varphi) \leq F(\bar{y}) - F(\varphi) < \bar{y} - \varphi$.

5. Méthode de Newton simplifiée (§1.8.4)

Dans ce contexte, on se ramène au cas 3 ci-dessus.

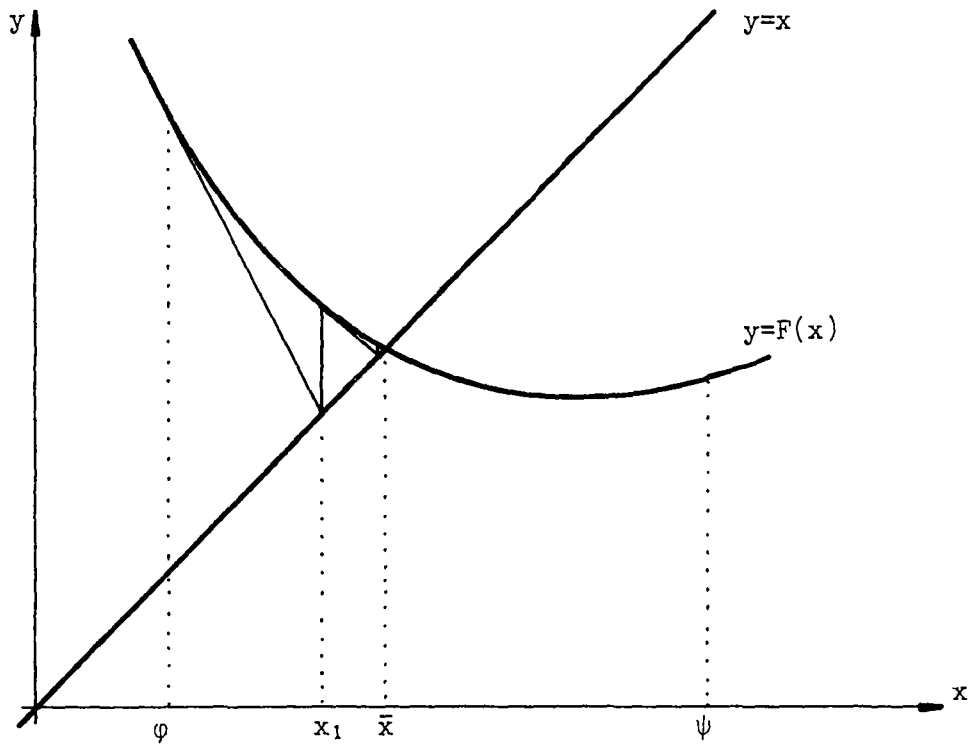


figure 5

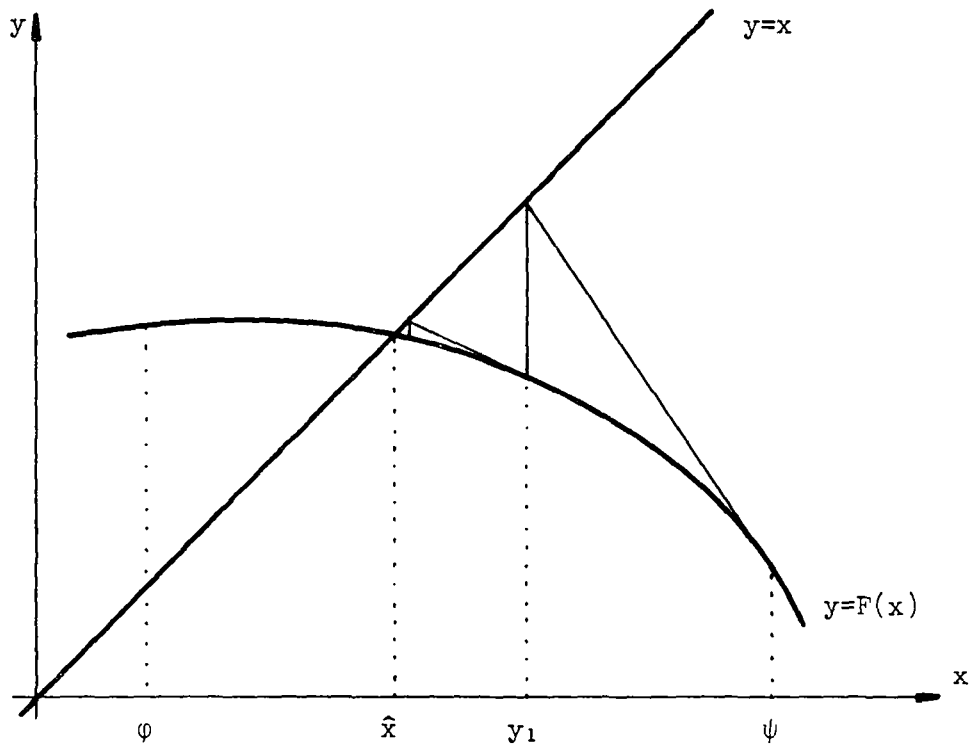


figure 6

1.9 SOUS-SOLUTION, SUR-SOLUTION, SOLUTION STRICTEMENT POSITIVE

1.9.1 Existence d'une sous-solution et d'une sur-solution

Il n'y a pas de méthode générale permettant de trouver une sous-solution ou une sur-solution. Les méthodes particulières présentées ci-dessous ont pour origine une construction figurant dans le livre de P. Bailey, etc.

[21;pp.148-149].

Soit (E, P) un espace de Banach ordonné par le cône générateur P . Nous considérons l'équation (1.6) :

$$x = F(x).$$

Proposition 1.40. Soit $F : E \rightarrow E$. Supposons qu'il existe un opérateur linéaire $\Gamma : E \rightarrow E$ tel que :

(i) $\forall x, y$ avec $x < y : F(y) - F(x) \leq \Gamma(y-x)$

(ii) $[\text{Id} - \Gamma]^{-1} \in L_+(E)$

alors l'équation (1.6) a une sous-solution φ et une sur-solution ψ , qui sont compatibles. (La construction de φ et ψ est donnée dans la démonstration).

Démonstration. Soit \tilde{x} un élément quelconque de E . Posons $w := F(\tilde{x}) - \tilde{x}$.

Comme P est un cône générateur : $w = w_+ - w_-$, où $w_+, w_- \in P$ (la décomposition

n'est pas unique). Soit $z_1 := [\text{Id} - \Gamma]^{-1} w_-$, $z_2 := [\text{Id} - \Gamma]^{-1} w_+$; alors

$z_1, z_2 \in P$. Soit $\varphi := \tilde{x} - z_1$ et $\psi := \tilde{x} + z_2$. φ est une sous-solution de (1.6) :

$$F(\varphi) - \varphi = F(\tilde{x} - z_1) - \tilde{x} + z_1 \geq F(\tilde{x}) - \Gamma z_1 - \tilde{x} + z_1 = w + (\text{Id} - \Gamma) z_1 = w_+ \geq 0.$$

ψ est une sur-solution de (1.6) : $F(\psi) - \psi = F(\tilde{x} + z_2) - \tilde{x} - z_2 \leq F(\tilde{x}) +$

$$+ \Gamma z_2 - \tilde{x} - z_2 = w - (\text{Id} - \Gamma) z_2 = -w_- \leq 0. \text{ La compatibilité de } \varphi \text{ et } \psi \text{ se vé-}$$

rifie : $\psi - \varphi = z_2 + z_1 \in P$. ■

Si F n'est pas définie sur E mais sur un sous-ensemble $D \subset E$, il faut s'assurer que $\tilde{x}, \varphi, \psi \in D$.

Corollaire. Supposons qu'il existe un nombre réel $\omega < 1$ tel que $\forall x, y$ avec $x < y : F(y) - F(x) \leq \omega(y-x)$. Alors l'équation (1.6) a une sous-solution et une sur-solution qui sont compatibles.

C'est un cas particulier de la proposition 1.40 avec $\Gamma = \omega \text{Id}$. Dans ce cas,
 $\varphi = \tilde{x} - \frac{w_-}{1-\omega}$ et $\psi = \tilde{x} + \frac{w_+}{1-\omega}$.

Remarques. (i) Supposons que F soit décroissante. Nous pouvons alors prendre $\omega = 0$ dans le corollaire. Ainsi l'équation (1.6) a une sous-solution φ et une sur-solution ψ ; $\varphi = \tilde{x} - w_-$ et $\psi = \tilde{x} + w_+$.

(ii) La décomposition $w = w_+ - w_-$ n'est pas unique. Soit $w = w_+^* - w_-^*$ une autre décomposition, où $w_+^*, w_-^* \in P$. Alors $\varphi^* = \tilde{x} - [\text{Id} - \Gamma]^{-1} w_-^*$ est une sous-solution de (1.6) et $\psi^* = \tilde{x} + [\text{Id} - \Gamma]^{-1} w_+^*$ est une sur-solution de (1.6). Posons $u := w_+ - w_+^*$; alors $w_- - w_-^* = u$, $\varphi = \varphi^* - [\text{Id} - \Gamma]^{-1} u$ et $\psi = \psi^* + [\text{Id} - \Gamma]^{-1} u$. Si $w_+ \geq w_+^*$, alors $\varphi \leq \varphi^*$ et $\psi \geq \psi^*$.

(iii) Supposons que \tilde{x} soit une sous-solution; alors $w \in P$. Nous pouvons choisir $w_- = 0$. Une sur-solution est donnée par $\psi = \tilde{x} + [\text{Id} - \Gamma]^{-1} (F(\tilde{x}) - \tilde{x})$. Dans le corollaire : $\psi = \frac{F(\tilde{x}) - \omega \tilde{x}}{1-\omega}$.

(iv) Supposons que \tilde{x} soit une solution; alors $w = 0$. Avec le choix $w_+ = w_- = 0$, la construction de la proposition 1.40 donne $\varphi = \psi = \tilde{x}$. Si $w_+ = w_- \neq 0$, $\varphi = \tilde{x} - z_1$ et $\psi = \tilde{x} + z_1$.

Soit (E_1, P_1) et (E_2, P_2) deux espaces de Banach ordonnés, où P_2 est un cône générateur. Nous considérons maintenant l'équation (1.17) :

$$Lx = F(x).$$

Proposition 1.41. Soit $F : E_1 \rightarrow E_2$ et L un opérateur linéaire : $E_1 \rightarrow E_2$.

Supposons qu'il existe un opérateur linéaire $\Gamma : E_1 \rightarrow E_2$ tel que :

(i) $\forall x, y$ avec $x < y : F(y) - F(x) \leq \Gamma(y-x)$

(ii) $[L - \Gamma]^{-1} \in L_+(E_2, E_1)$

alors l'équation (1.17) a une sous-solution φ et une sur-solution ψ , qui sont compatibles. (La construction de φ et ψ est donnée dans la démonstration).

Démonstration. Soit \tilde{x} un élément quelconque de E_1 . Posons $w := F(\tilde{x}) - L\tilde{x}$.

Alors il existe $w_+, w_- \in P_2$ tels que $w = w_+ - w_-$. Soit $z_1 := [L - \Gamma]^{-1} w_-$,

$z_2 := [L - \Gamma]^{-1} w_+$; alors $z_1, z_2 \in P_1$. Soit $\varphi := \tilde{x} - z_1$ et $\psi := \tilde{x} + z_2$. φ est

une sous-solution de (1.17) : $F(\varphi) - L\varphi = F(\tilde{x}-z_1) - L\tilde{x} + Lz_1 \geq F(\tilde{x}) - \Gamma z_1 - L\tilde{x} + Lz_1 = w + (L-\Gamma) z_1 = w_+ \geq 0$. ψ est une sur-solution de (1.17) : $F(\psi) - L\psi = F(\tilde{x}+z_2) - L\tilde{x} - Lz_2 \leq F(\tilde{x}) + \Gamma z_2 - L\tilde{x} - Lz_2 = w - (L-\Gamma) z_2 = -w_- \leq 0$. De plus $\psi - \varphi = z_2 + z_1 \in P_1$. ■

Si F (ou L) n'est pas définie sur E_1 , mais sur un sous-ensemble $D \subset E_1$, il faut s'assurer que $\tilde{x}, \varphi, \psi \in D$.

Exemple. ([21;pp.148-149]). Soit $I = (a,b)$ un intervalle borné et $f \in C(\bar{I} \times \mathbb{R})$. Supposons qu'il existe un nombre $\gamma < \frac{\pi^2}{(b-a)^2}$ tel que $\forall t \in \bar{I}, \forall s_1, s_2 \in \mathbb{R}$ avec $s_1 < s_2 : f(t, s_2) - f(t, s_1) \leq \gamma(s_2 - s_1)$. Considérons le problème différentiel :

$$\begin{cases} -y'' = f(t,y) & t \in I \\ y(a) = y(b) = 0 \end{cases} \quad (1.44)$$

Soit $v \in C^2(\bar{I})$, avec $v(a) = v(b) = 0$. Soit w la fonction définie par $w(t) := v''(t) + f(t, v(t))$, $t \in \bar{I}$. Soit $w_+(t) := \max\{0, w(t)\}$, $w_-(t) := \max\{0, -w(t)\}$ pour $t \in \bar{I}$. z_1 et z_2 sont les solutions uniques des problèmes linéaires :

$$\begin{cases} -z_2'' - \gamma z_2 = w_+ \\ z_2(a) = z_2(b) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -z_1'' - \gamma z_1 = w_- \\ z_1(a) = z_1(b) = 0 \end{cases}$$

Alors $\varphi := v - z_1$ est une sous-solution de (1.44) et $\psi := v + z_2$ est une sur-solution.

1.9.2 Cas d'inexistence d'une sur-solution stricte

L'équation (1.6) ou (1.17) peut avoir une solution, sans qu'il y ait une sur-solution (ou sous-solution) stricte.

Exemple. Soit $F : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $F(x) = x^2 - 2$. L'équation $x = F(x)$ a la solution $x^* = 2$, mais $\forall x > x^* : x < F(x)$.

Définitions. Soit (E_1, P_1) et (E_2, P_2) deux espaces de Banach ordonnés. Soit $D \subset P_1$ un ensemble étoilé par rapport à l'origine. Une application $F : D \rightarrow E_2$ est *sur-linéaire* si :

- (i) $F(0) \leq 0$
- (ii) $\forall x \in D, \quad \forall \theta \in (0,1) : \theta F(x) \geq F(\theta x)$.

Elle est *strictement sur-linéaire* si $\theta F(x) > F(\theta x)$ dans (ii). Dans le cas où P_2 est un cône solide, elle est *fortement sur-linéaire* si $\theta F(x) \gg F(\theta x)$ dans (ii). F est (*strictement, fortement*) *sous-linéaire* si $(-F)$ est (*strictement, fortement*) *sur-linéaire*.

Exemple. Soit $F : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$; F est sur-linéaire si et seulement si le graphe de F n'est nulle part au-dessus du segment joignant l'origine au point $(x, F(x))$.

Toute application F , convexe pour l'ordre avec $F(0) \leq 0$, est sur-linéaire.
Toute application F , concave pour l'ordre avec $F(0) \geq 0$, est sous-linéaire.

Proposition 1.42. Soit (E, P) un espace de Banach ordonné, avec P un cône solide. Soit $D \subset P$ un ensemble étoilé par rapport à l'origine. Soit $F : D \rightarrow E$ une application fortement croissante, fortement sur-linéaire. Alors F ne peut pas avoir deux points fixes strictement positifs comparables. Si $\psi > F(\psi)$, F ne peut pas avoir de point fixe non nul dans $\langle 0, \psi \rangle$.

[9;p.695]

Autrement dit, si F a un point fixe strictement positif x^* dans D , alors (1.6) n'a pas de sur-solution stricte dans $x^* + P$.

Donnons un résultat analogue pour l'équation (1.17) :

Proposition 1.43. Soit (E_1, P_1) et (E_2, P_2) deux espaces de Banach ordonnés, avec P_1 un cône solide. Soit $D \subset P_1$ un ensemble étoilé par rapport à l'origine. Soit $F : D \rightarrow E_2$ une application strictement croissante, strictement sur-linéaire. Soit L un opérateur linéaire : $E_1 \rightarrow E_2$, ayant un inverse $L^{-1} \in L_+(E_2, E_1)$ fortement positif. Alors l'équation (1.17) ne peut pas avoir deux solutions strictement positives comparables. Si $L\psi > F(\psi)$, l'équation (1.17) n'a pas de solution non nulle dans $\langle 0, \psi \rangle$.

Démonstration. Puisque l'inverse L^{-1} existe, l'équation (1.17) : $Lx = F(x)$ est équivalente à l'équation : $x = L^{-1}F(x)$. L'application $L^{-1}F : D \rightarrow E_1$ est fortement croissante, fortement sur-linéaire. Nous sommes ramenés à la proposition 1.42. ■

1.9.3 Solution strictement positive

Les méthodes précédentes permettent d'établir dans certains cas l'existence d'une solution strictement positive. Par exemple $\varphi = 0$ est une sous-solution stricte de (1.6) si $F(0) > 0$; si la méthode des itérations monotones du §1.5 s'applique, alors les suites monotones convergent vers des solutions strictement positives de (1.6).

La méthode des itérations alternées du §1.6 peut nous assurer l'unicité de la solution positive. Supposons en effet que $F : P \rightarrow E$ soit décroissante, avec $F(0) > 0$. La méthode des itérations alternées, si elle s'applique, nous donne \bar{x} et \hat{x} tels que $0 \leq \bar{x} = F(\hat{x}) \leq F(\bar{x}) = \hat{x} \leq F(0)$. Comme F est décroissante : $F(P) \subset \langle 0, F(0) \rangle$. Si de plus il est possible de montrer que $\bar{x} = \hat{x}$, alors l'unicité de la solution positive de (1.6) est établie. Nous allons envisager de tels cas ci-dessous.

Proposition 1.44. Soit (E, P) un espace de Banach ordonné, avec P un cône solide. Soit $D \subset P$ un ensemble étoilé par rapport à l'origine. Soit $F : D \rightarrow E$ une application fortement décroissante, telle que $\forall x \in D, \forall \theta \in (0, 1) : F(x) < \theta F(\theta x)$. Si $0 < \bar{x} = F(\hat{x}) \leq \hat{x} = F(\bar{x})$, alors $\bar{x} = \hat{x}$.

Démonstration. Supposons, ab absurdo, que $\bar{x} < \hat{x}$; alors $\bar{x} \ll \hat{x}$ puisque F est fortement décroissante. Il existe un nombre $\rho \in (0, 2 \|\hat{x}\|)$ tel que $B(\hat{x} - \bar{x}, \rho) \subset P$. Définissons $\theta := 1 - \frac{\rho}{2 \|\hat{x}\|}$; $\|\theta \hat{x} - \bar{x} - (\hat{x} - \bar{x})\| = \frac{\rho}{2} \Rightarrow \theta \hat{x} - \bar{x} \in B(\hat{x} - \bar{x}, \rho) \Rightarrow \theta \hat{x} \geq \bar{x}$ et $\theta \in (0, 1)$. Il existe un θ_0 minimal tel que $\bar{x} \leq \theta_0 \hat{x}$ [2;p.20]. $\theta_0 \in (0, 1) \Rightarrow \theta_0 \hat{x} - \bar{x} = \theta_0 F(\bar{x}) - F(\hat{x}) > \theta_0 [F(\bar{x}) - F(\theta_0 \hat{x})] \geq 0$. F étant fortement décroissante : $F(\bar{x}) \gg F(\theta_0 \hat{x})$, d'où $\theta_0 \hat{x} \gg \bar{x}$. Alors, il existe un nombre $\rho_1 \in (0, 2\theta_0 \|\hat{x}\|)$ tel que $B(\theta_0 \hat{x} - \bar{x}, \rho_1) \subset P$. Soit $\theta_1 := \theta_0 - \frac{\rho_1}{2 \|\hat{x}\|}$; $\|\theta_1 \hat{x} - \bar{x} - (\theta_0 \hat{x} - \bar{x})\| = \frac{\rho_1}{2} \Rightarrow \theta_1 \hat{x} - \bar{x} \in B(\theta_0 \hat{x} - \bar{x}, \rho_1) \Rightarrow \theta_1 \hat{x} \geq \bar{x}$. Par définition $\theta_1 < \theta_0$ ce qui contredit le fait que θ_0 est minimal; donc $\bar{x} = \hat{x}$. ■

Corollaire. Soit (E_1, P_1) et (E_2, P_2) deux espaces de Banach ordonnés, avec P_1 un cône solide. Soit $D \subset P_1$ un ensemble étoilé par rapport à l'origine. Soit $F : D \rightarrow E_2$ une application strictement décroissante, telle que $\forall x \in \overset{\circ}{D}$, $\forall \theta \in (0, 1) : F(x) < \theta F(\theta x)$. Soit L un opérateur linéaire : $E_1 \rightarrow E_2$, ayant un inverse $L^{-1} \in L_+(E_2, E_1)$ fortement positif. Si $0 < \bar{x} \leq \hat{x}$, $L\bar{x} = F(\hat{x})$ et $L\hat{x} = F(\bar{x})$, alors $\bar{x} = \hat{x}$.

Proposition 1.45. Soit (E, P) un espace de Banach ordonné, avec P un cône solide. Soit $D \subset P$ un ensemble étoilé par rapport à l'origine. Soit $F : D \rightarrow E$ une application fortement décroissante, telle que $\forall x \in \overset{\circ}{D}$, $\forall \theta \in (0, 1) : F(x) > \theta F(\theta x)$. Si $0 \ll \bar{x} = F(\hat{x}) \leq \hat{x} = F(\bar{x})$, alors $\bar{x} = \hat{x}$.

Démonstration. Comme $\bar{x} \in \overset{\circ}{P} : \exists \rho > 0$ tel que $B(\bar{x}, \rho) \subset P$. Soit $\theta := \frac{\rho}{2 \|\hat{x}\|} > 0$; $\|\bar{x} - \theta \hat{x} - \bar{x}\| = \frac{\rho}{2} \Rightarrow \bar{x} - \theta \hat{x} \in B(\bar{x}, \rho) \subset P \Rightarrow \theta \hat{x} \leq \bar{x} \leq \hat{x}$, donc $\theta \leq 1$. Il existe un θ_0 maximal $\in (0, 1]$, tel que $\theta_0 \hat{x} \leq \bar{x}$ [2;p.20]. Si $\theta_0 = 1 : \bar{x} = \hat{x}$ et la démonstration est achevée. Montrons que si $\theta_0 < 1$, θ_0 ne peut pas être maximal : $\bar{x} - \theta_0 \hat{x} = F(\hat{x}) - \theta_0 F(\bar{x}) > \theta_0 [F(\theta_0 \hat{x}) - F(\bar{x})] \geq 0$. F étant fortement décroissante : $F(\theta_0 \hat{x}) \gg F(\bar{x})$, d'où $\bar{x} \gg \theta_0 \hat{x}$. Alors il existe un nombre $\rho_1 > 0$ tel que $B(\bar{x} - \theta_0 \hat{x}, \rho_1) \subset P$. Soit $\theta_1 := \theta_0 + \frac{\rho_1}{2 \|\hat{x}\|} > \theta_0$; $\|\bar{x} - \theta_1 \hat{x} - (\bar{x} - \theta_0 \hat{x})\| = \frac{\rho_1}{2} \Rightarrow \bar{x} - \theta_1 \hat{x} \in B(\bar{x} - \theta_0 \hat{x}, \rho_1) \Rightarrow \bar{x} \geq \theta_1 \hat{x} > \theta_0 \hat{x}$; ceci montre que θ_0 n'est pas maximal. ■

Corollaire. Soit (E_1, P_1) et (E_2, P_2) deux espaces de Banach ordonnés, avec P_1 un cône solide. Soit $D \subset P_1$ un ensemble étoilé par rapport à l'origine. Soit $F : D \rightarrow E_2$ une application strictement décroissante, telle que $\forall x \in \overset{\circ}{D}$, $\forall \theta \in (0, 1) : F(x) > \theta F(\theta x)$. Soit L un opérateur linéaire : $E_1 \rightarrow E_2$, ayant un inverse $L^{-1} \in L_+(E_2, E_1)$ fortement positif. Si $0 \ll \bar{x} \leq \hat{x}$, $L\bar{x} = F(\hat{x})$ et $L\hat{x} = F(\bar{x})$, alors $\bar{x} = \hat{x}$.

Dans les résultats d'unicité suivants, F est une application croissante.

Proposition 1.46. Soit (E,P) un espace de Banach ordonné, avec P un cône solide. Soit $D \subset P$ un ensemble étoilé par rapport à l'origine. Soit $F : D \rightarrow E$ une application fortement croissante, fortement sous-linéaire. Alors F a, au plus, un point fixe strictement positif. De plus, si $\psi > 0$ est une sur-solution stricte de (1.6), alors F n'a pas de point fixe non nul dans $\langle 0, \psi \rangle$.
[9;p.694]

Corollaire. Soit (E_1, P_1) et (E_2, P_2) deux espaces de Banach ordonnés, avec P_1 un cône solide. Soit $D \subset P_1$ un ensemble étoilé par rapport à l'origine. Soit $F : D \rightarrow E_2$ une application strictement croissante, strictement sous-linéaire. Soit L un opérateur linéaire : $E_1 \rightarrow E_2$, ayant un inverse $L^{-1} \in L_+(E_2, E_1)$ fortement positif. Alors l'équation (1.17) a au plus une solution strictement positive. De plus, si $\psi > 0$ est une sur-solution stricte de (1.17), alors cette équation n'a pas de solution non nulle dans $\langle 0, \psi \rangle$.

Proposition 1.47. Soit (E,P) un espace de Banach ordonné, avec P un cône solide. Soit $D \subset E$ un ensemble convexe. Soit $F : D \rightarrow E$ une application fortement croissante, fortement concave pour l'ordre. Supposons que $x_0 \in D$ soit un point fixe de F . Alors F a au plus un point fixe x^* avec $x^* > x_0$. De plus, si ψ , avec $\psi > x_0$, est une sur-solution stricte de (1.6), alors F n'a pas de point fixe dans $\langle x_0, \psi \rangle$, autre que x_0 . En particulier, si F a un point fixe minimal, alors F a au plus deux points fixes.
[9;p.694]

Corollaire 1. Soit (E_1, P_1) et (E_2, P_2) deux espaces de Banach ordonnés, avec P_1 un cône solide. Soit $D \subset E_1$ un ensemble convexe. Soit $F : D \rightarrow E_2$ une application strictement croissante, strictement concave pour l'ordre. Soit $L : E_1 \rightarrow E_2$ un opérateur linéaire, ayant un inverse $L^{-1} \in L_+(E_2, E_1)$ fortement positif. Supposons que $x_0 \in D$ soit une solution de l'équation (1.17). Alors (1.17) a au plus une solution x^* avec $x^* > x_0$. De plus, si $\psi > x_0$ est une sur-solution stricte de (1.17), alors cette équation n'a pas de solution dans $\langle x_0, \psi \rangle$, autre que x_0 . En particulier, si l'équation (1.17) a une solution minimale, elle a alors au plus deux solutions.

Corollaire 2. Supposons que les hypothèses de la proposition 1.47, respectivement de son corollaire 1, soient satisfaites et que 0 soit une solution de

l'équation (1.6), respectivement (1.17). Alors l'équation (1.6), respectivement (1.17), a au plus une solution strictement positive et elle n'a pas de sur-solution stricte qui soit supérieure à cette solution.



CHAPITRE 2

EQUATIONS DIFFERENTIELLES SEMI-LINEAIRES, DU DEUXIEME ORDRE

2.1 INTRODUCTION

Nous allons appliquer les méthodes décrites au chapitre 1 à des problèmes aux limites faisant intervenir une équation différentielle ordinaire semi-linéaire, du deuxième ordre.

Considérons l'équation différentielle :

$$A_2(t) x''(t) + A_1(t) x'(t) + A_0(t) x(t) = g(t, x(t)) \quad t \in I \quad (2.1)$$

où $I = (a, b)$ est un intervalle ouvert, borné.

Nous faisons l'hypothèse suivante :

$$\forall t \in I : A_2(t) \neq 0. \quad (2.2)$$

Le coefficient A_0 peut être décomposé en $A_0 = A_+ - A_-$, où pour $t \in I$:

$A_+(t) := \max(A_0(t), 0)$ et $A_-(t) := \max(-A_0(t), 0)$. L'équation (2.1) devient :

$$-x'' - \frac{A_1}{A_2} x' - \frac{A_+}{A_2} x + \frac{A_-}{A_2} x = -\frac{g(\cdot, x)}{A_2} \quad \text{dans } I.$$

Si $A_2(t) > 0$ sur I , nous écrivons :

$$-x'' - \frac{A_1}{A_2} x' + \frac{A_-}{A_2} x = \frac{A_+ x - g(\cdot, x)}{A_2} \quad \text{dans } I.$$

Si $A_2(t) < 0$ sur I :

$$-x'' - \frac{A_1}{A_2} x' + \frac{A_+}{|A_2|} x = \frac{A_- x + g(\cdot, x)}{|A_2|} \quad \text{dans } I.$$

Ainsi, compte tenu de l'hypothèse (2.2), nous pouvons, sans perte de généralité, écrire l'équation (2.1) sous la forme :

$$-x''(t) + c_1(t) x'(t) + c_0(t) x(t) = f(t, x(t)) \quad t \in I \quad (2.3)$$

avec $\forall t \in I : c_0(t) \geq 0$.

Comme conditions aux limites, nous prenons :

$$B_1x = \alpha \qquad B_2x = \beta \qquad (2.4)$$

où

$$B_1x := B_{11} x(a) - B_{12} x'(a)$$
$$B_2x := B_{21} x(b) + B_{22} x'(b).$$

Notons $B := (B_1, B_2)$; (2.4) devient $Bx = (\alpha, \beta)$. Nous faisons quelques hypothèses sur ces nombres B_{ij} :

$$\left\{ \begin{array}{l} B_{11}, B_{12}, B_{21}, B_{22} \geq 0 \\ (B_{11} + B_{12})(B_{21} + B_{22}) > 0 \\ \text{Si } \forall t \in I : c_0(t) = 0, \text{ alors } B_{11} + B_{21} > 0. \end{array} \right. \qquad (2.5)$$

Nous aborderons le problème suivant : certaines hypothèses étant faites sur c_0 , c_1 et f , est-il possible de trouver une fonction $x \in C^1(\bar{I}) \cap C^2(I)$, qui soit solution de (2.3) - (2.4) ? Si $B_{12} = B_{22} = 0$, nous pouvons admettre $x \in C(\bar{I}) \cap C^2(I)$.

La première étape va être la recherche d'une fonction de Green pour le problème linéaire (cas où f ne dépend pas de x). Au §2.2, nous rappelons le principe du minimum et quelques-uns de ses corollaires. Dans le cas où les coefficients c_0 et c_1 sont dans $C(\bar{I})$, l'existence de la fonction de Green est bien connue : elle découle de l'hypothèse que c_0 ne prend que des valeurs positives; puis nous étudions la régularité de la solution de l'équation linéaire, en fonction du second membre (§2.3). Au §2.4, nous considérons une équation différentielle linéaire avec des coefficients dans $C(I)$, non nécessairement bornés; supposant connues deux solutions u_1 et u_2 , linéairement indépendantes, de l'équation (2.3) sans second membre, nous pouvons donner la fonction de Green d'un problème aux limites où $x(a) = 0$ et $B_2x = \beta$; nous étudions la régularité de la solution de l'équation linéaire en fonction du second membre. Dans le cas particulier où a (ou b) est un point singulier régulier, il est possible de déterminer ces solutions particulières u_1 et u_2 , grâce à la méthode de Frobenius - Fuchs (§2.5). Dans chacun des cas, nous obtenons un opérateur compact comme inverse de l'opérateur différentiel avec les conditions aux limites homogènes.

Nous abordons ensuite le problème non linéaire (2.3) - (2.4). Au §2.6, l'opérateur de Nemyckiĭ va nous permettre d'écrire ce problème sous forme abstraite, comme équation dans un espace de Banach ordonné. Nous faisons le lien au §2.7 entre le problème aux limites (2.3) - (2.4) et les méthodes itératives du premier chapitre.

N.B. Soit x une fonction définie sur un intervalle J . La notation $x = 0$ signifie $\forall t \in J : x(t) = 0$; $x \neq 0$ si et seulement si $\exists t_0 \in J$ tel que $x(t_0) \neq 0$. De même $x \geq 0$ veut dire $\forall t \in J : x(t) \geq 0$; on note $x > 0$ si et seulement si $x \neq 0$ et $\forall t \in J : x(t) \geq 0$. Par contre si nous écrivons : $x > 0$ dans J , c'est pour dire $\forall t \in J : x(t) > 0$.

2.2 LE PRINCIPE DU MINIMUM

Nous rappelons quelques résultats en nous référant au livre de Protter & Weinberger [22]. Comme précédemment $I = (a, b)$.

Proposition 2.1 (principe du minimum). Soit $x \in C^1(\bar{I}) \cap C^2(I)$ qui satisfait à l'inégalité différentielle :

$$-x''(t) + c_1(t) x'(t) + c_0(t) x(t) \geq 0 \quad t \in I$$

où : $c_0 \geq 0$ dans I
 c_0 et c_1 sont bornés sur tout sous-intervalle fermé de I .

Si x a un minimum $m \leq 0$ en un point $t_0 \in I$, alors $x = m$ dans \bar{I} .
 [22;p.6]

Proposition 2.2. Soit $x \in C^1(\bar{I}) \cap C^2(I)$ une fonction non constante qui satisfait à l'inégalité différentielle :

$$-x'' + c_1 x' + c_0 x \geq 0 \quad \text{dans } I$$

où : $c_0 \geq 0$ dans I
 c_0 et c_1 sont bornés sur tout sous-intervalle fermé de I .

Si x a un minimum ≤ 0 au point a , et si la fonction $t \mapsto c_1(t) + (t-a) c_0(t)$ est bornée supérieurement en $t = a$, alors $x'(a) > 0$. Si x a un minimum ≤ 0 au point b , et si la fonction $t \mapsto c_1(t) - (b-t) c_0(t)$ est bornée inférieurement en $t = b$, alors $x'(b) < 0$.

[22;p.7]

Proposition 2.3. Soit $x \in C^1(\bar{I}) \cap C^2(I)$ qui satisfait aux inégalités

$$\begin{cases} -x'' + c_1 x' + c_0 x \geq 0 & \text{dans } I \\ B_1 x \geq 0, B_2 x \geq 0 \end{cases}$$

où : $c_0 \geq 0$ dans I
 c_0 et c_1 sont bornés sur tout sous-intervalle fermé de I
 B_1 et B_2 vérifient (2.5)
 Si $B_{11} = 0$, $t \mapsto c_1(t) + (t-a) c_0(t)$ est bornée supérieurement en $t=a$
 Si $B_{21} = 0$, $t \mapsto c_1(t) - (b-t) c_0(t)$ est bornée inférieurement en $t=b$.

Alors se présente l'alternative :

soit $x > 0$ dans I

soit $x = 0$.

Démonstration. (i) Supposons que x soit une fonction constante. Alors x doit vérifier : $c_0 x \geq 0$ dans I , $B_{11} x \geq 0$, $B_{21} x \geq 0$; par l'hypothèse (2.5), on ne peut pas avoir simultanément $B_{11} = B_{21} = 0$ et $c_0 = 0$, donc $x \geq 0$.

(ii) Au cas où x n'est pas constante, supposons, ab absurdo, qu'il existe $t_0 \in I$ avec $x(t_0) < 0$; par la proposition 2.1, $x(t_0)$ ne peut pas être un minimum. Si $x(a)$ est minimum, alors $x(a) < 0$ et $x'(a) \geq 0$; de plus $x'(a) > 0$ si $B_{11} = 0$ (proposition 2.2), d'où $B_{11} x(a) - B_{12} x'(a) < 0$, ce qui contredit l'hypothèse $B_1 x \geq 0$. Si $x(b)$ est un minimum, alors $x(b) < 0$ et $x'(b) \leq 0$; de plus $x'(b) < 0$ si $B_{21} = 0$ (proposition 2.2), d'où $B_{21} x(b) + B_{22} x'(b) < 0$, ce qui contredit l'hypothèse $B_2 x \geq 0$. Nous avons donc démontré que $x \geq 0$.

(iii) Supposons qu'il existe $t_0 \in I$ avec $x(t_0) = 0$, alors $x = 0$ dans \bar{I} . ■

Dans le cas particulier où $B_{12} = B_{22} = 0$, nous obtenons le corollaire suivant :

Proposition 2.4. Soit $x \in C^1(\bar{I}) \cap C^2(I)$ qui satisfait aux inégalités :

$$\begin{cases} -x'' + c_1 x' + c_0 x \geq 0 & \text{dans } I \\ x(a) \geq 0, x(b) \geq 0 \end{cases}$$

où : $c_0 \geq 0$ dans I

c_0 et c_1 sont bornés sur tout sous-intervalle fermé de I .

Alors se présente l'alternative :

soit $x > 0$ dans I

soit $x = 0$.

La proposition suivante est un corollaire de la proposition 2.3 :

Proposition 2.5. Soit $x \in C^1(\bar{I}) \cap C^2(I)$ une solution du problème :

$$\begin{cases} -x'' + c_1 x' + c_0 x = 0 & \text{dans } I \\ B_1 x = B_2 x = 0 \end{cases}$$

où : $c_0 \geq 0$ dans I

c_0 et c_1 sont bornés sur tout sous-intervalle fermé de I

B_1 et B_2 vérifient (2.5)

si $B_{11} = 0$, $t \mapsto c_1(t) + (t-a) c_0(t)$ est bornée supérieurement en $t = a$

si $B_{21} = 0$, $t \mapsto c_1(t) - (b-t) c_0(t)$ est bornée inférieurement en $t = b$

alors $x = 0$.

Si $B_{12} = B_{22} = 0$, nous obtenons le cas particulier :

Proposition 2.6. Soit $x \in C(\bar{I}) \cap C^2(I)$ une solution de :

$$\begin{cases} -x'' + c_1 x' + c_0 x = 0 & \text{dans } I \\ x(a) = x(b) = 0 \end{cases}$$

où : $c_0 \geq 0$ dans I

c_0 et c_1 sont bornés sur tout sous-intervalle fermé de I

alors $x = 0$.

Contre-exemple à la proposition 2.5. Fixons : $a = 0$, $b = 1$, $B_{11} = B_{22} = 0$,
 $B_{12} = B_{21} = 1$, $c_0 = 0$, $c_1 : t \mapsto \frac{1}{t}$, $x : t \mapsto t^2 - 1$. Alors :

$$\begin{cases} -x'' + c_1 x' + c_0 x = 0 & \text{dans } (0,1) \\ B_1 x = B_2 x = 0 \end{cases}$$

mais $\forall t \in [0,1) : x(t) < 0$, car la fonction c_1 n'est pas bornée supérieurement en $t = 0$.

2.3 EQUATION DIFFERENTIELLE LINEAIRE A COEFFICIENTS CONTINUS

2.3.1 Second membre dans $C(\bar{I})$

Considérons l'équation différentielle linéaire :

$$-x''(t) + c_1(t) x'(t) + c_0(t) x(t) = f(t) \quad t \in I \quad (2.6)$$

avec les conditions aux limites :

$$Bx = (\alpha, \beta). \quad (2.7)$$

Nous faisons les hypothèses suivantes :

- (i) $c_0, c_1 \in C(\bar{I})$; $c_0 \geq 0$
- (ii) B vérifie (2.5)
- (iii) $f \in C(\bar{I})$.

Notons $E_0 := C(\bar{I})$ l'espace de Banach ordonné des fonctions continues sur \bar{I} (voir l'exemple 7 du §1.4). Il est muni du cône solide et normal $P_0 := P_+$.

Définissons un opérateur linéaire (non borné) $L_0 : E_0 \rightarrow E_0$ par :

$$L_0 := -\frac{d^2}{dt^2} + c_1(t) \frac{d}{dt} + c_0(t) \quad t \in I$$

sur le domaine :

$$D(L_0) := \{x \in E_0 \mid x \in C^2(\bar{I})\}.$$

Le problème (2.6) - (2.7) devient : trouver $x \in D(L_0)$ tel que :

$$\begin{cases} L_0 x = f \\ Bx = (\alpha, \beta). \end{cases} \quad (2.8)$$

Ce problème a au plus une solution (proposition 2.5). Considérons les deux problèmes auxiliaires :

$$\begin{cases} L_0 v = f \\ Bv = 0 \end{cases} \quad (2.9)$$

$$\begin{cases} L_0 w = 0 \\ Bw = (\alpha, \beta). \end{cases} \quad (2.10)$$

Si de tels v et w existent, alors $x = v + w$ est la solution de (2.8).

Lemme 2.7. L'équation $L_0 u = 0$ a deux solutions $u_1, u_2 \in C^2(\bar{I})$ qui vérifient :

- (i) $B_1 u_1 = B_2 u_2 = 1, B_1 u_2 = B_2 u_1 = 0$
- (ii) $u_1, u_2 > 0$ dans I
- (iii) u_1 et u_2 sont linéairement indépendantes; leur wronskien $W(u_1, u_2)$ prend des valeurs strictement positives sur \bar{I} .

Démonstration. (i) Soit y_1 et y_2 deux solutions linéairement indépendantes quelconques de l'équation $L_0 u = 0$; leur wronskien $W(y_1, y_2)$ ne s'annule pas dans \bar{I} . Nous allons déterminer des coefficients a_1, a_2, a_3, a_4 dans \mathbb{R} , tels que $u_1 := a_1 y_1 + a_2 y_2$ et $u_2 := a_3 y_1 + a_4 y_2$ vérifient les conditions (i) à (iii) du lemme. Il est nécessaire que :

$$\begin{cases} B_1 u_1 = a_1 B_1 y_1 + a_2 B_1 y_2 = 1 \\ B_2 u_1 = a_1 B_2 y_1 + a_2 B_2 y_2 = 0 \\ B_1 u_2 = a_3 B_1 y_1 + a_4 B_1 y_2 = 0 \\ B_2 u_2 = a_3 B_2 y_1 + a_4 B_2 y_2 = 1. \end{cases}$$

Si $\Delta := B_1 y_1 B_2 y_2 - B_2 y_1 B_1 y_2 \neq 0$, ce système linéaire a une solution unique a_1, a_2, a_3, a_4 . Nous allons donc montrer que $\Delta \neq 0$. Par la proposition 2.5, l'un au moins des nombres $B_1 y_1$ ou $B_2 y_1$ est non nul; supposons que $B_1 y_1 \neq 0$. Posons $\lambda := \frac{B_1 y_2}{B_1 y_1}$; alors $B_1(y_2 - \lambda y_1) = 0$ et $\frac{\Delta}{B_1 y_1} = B_2(y_2 - \lambda y_1)$.

Supposons, ab absurdo, que $\Delta = 0$, alors $B_1(y_2 - \lambda y_1) = B_2(y_2 - \lambda y_1) = 0$; d'où $y_2 = \lambda y_1$ par la proposition 2.5, ce qui est en contradiction avec l'indépendance linéaire de y_1 et y_2 . Si $B_2 y_1 \neq 0$ le raisonnement est le même. Ainsi la condition (i) est vérifiée.

(ii) Par la proposition 2.3, u_1 et $u_2 > 0$ dans I . La condition (ii) est vérifiée.

(iii) $W(u_1, u_2) = (a_1 a_4 - a_2 a_3) W(y_1, y_2) = \frac{W(y_1, y_2)}{\Delta} \neq 0$ dans \bar{I} ; u_1 et u_2 sont linéairement indépendantes. Pour réaliser la condition (iii), il suffit de vérifier que $W(a) := W(u_1, u_2)(a) > 0$. Compte tenu des conditions $B_1 u_1 = 1$ et $B_1 u_2 = 0$, nous obtenons $B_{11} W(a) = u_2'(a)$ et $B_{12} W(a) = u_2(a)$. Puisque $u_2(a) \geq 0$ et $B_1 u_2 = 0 : u_2'(a) \geq 0$. Ainsi $(B_{11} + B_{12}) W(a) = u_2(a) + u_2'(a) > 0$; d'où $W(a) > 0$. ■

Définissons un opérateur linéaire $K_0 \in L(E_0)$ par :

$$(K_0 f)(t) := u_1(t) \int_a^t \frac{u_2(s)}{W(s)} f(s) ds + u_2(t) \int_t^b \frac{u_1(s)}{W(s)} f(s) ds \quad (2.11)$$

$$t \in \bar{I}$$

où u_1 et u_2 sont les fonctions définies dans le lemme 2.7 et $W := W(u_1, u_2)$ est leur wronskien.

Lemme 2.8. $K_0 \in K_+(E_0)$, $\text{Im}(K_0) \subset D(L_0)$ et $v = K_0 f$ est la solution du problème (2.9).

[17;p.147] et [18;pp.243 - 244]

Lemme 2.9. Le problème (2.10) a la solution

$$w = \alpha u_1 + \beta u_2 \quad (2.12)$$

où u_1, u_2 sont les fonctions définies dans le lemme 2.7.

Comme conséquence de ces deux lemmes, nous avons le résultat d'existence :

Proposition 2.10. $x \in D(L_0)$ est la solution de (2.8) si et seulement si

$$x = K_0 f + w \quad (2.13)$$

où w est définie par (2.12).

Proposition 2.11. Soit $x \in D(L_0)$ qui satisfait à :

$$\begin{cases} L_0 x \geq f \\ B_1 x \geq \alpha, B_2 x \geq \beta \end{cases}$$

alors $x \geq K_0 f + w$.

Démonstration. Posons $g := L_0 x$, alors $K_0 g \geq K_0 f$ par le lemme 2.8. Par la proposition 2.10 : $x = K_0 g + u_1 B_1 x + u_2 B_2 x \geq K_0 f + \alpha u_1 + \beta u_2 = K_0 f + w$. ■

2.3.2 Second membre dans $C_{\mu,0}(I)$ avec $\mu \in [0,1)$

Le cas précédent, avec un second membre f dans $C(\bar{I})$, est le cas classique. Nous allons maintenant supposer la continuité de f sur I seulement, I étant l'intervalle ouvert $I := (a,b)$. Plus précisément, nous prenons $f \in C_{\mu,0}(I)$, avec $\mu \in [0,1)$; plus loin nous traiterons le cas $\mu \in [1,2)$. Rappelons que :

$$C_{\mu,0}(I) := \{f \in C(I) \mid \lim_{t \downarrow a} (t-a)^\mu f(t) \text{ et } \lim_{t \uparrow b} f(t) \text{ existent}\}.$$

Pour simplifier, notons $E_\mu := C_{\mu,0}(I)$. C'est un espace de Banach ordonné, muni du cône $P_\mu := P_{\mu,0}$ et de la norme :

$$\|f\|_\mu := \sup_{t \in I} (t-a)^\mu |f(t)|.$$

Ce cône P_μ est solide, normal et non régulier (voir l'exemple 26 du §1.4). En particulier $E_0 = C_{0,0}(I) = C(\bar{I})$.

Pour $\mu \in [0,1)$ fixé, nous définissons un opérateur linéaire (non borné)

$L_\mu : E_0 \rightarrow E_\mu$ par :

$$L_\mu := -\frac{d^2}{dt^2} + c_1(t) \frac{d}{dt} + c_0(t) \quad t \in I \quad (2.14)$$

sur le domaine :

$$D(L_\mu) := \{x \in E_0 \mid x \in C^1(\bar{I}) \text{ et } x'' \in E_\mu\}.$$

Le problème (2.6) - (2.7) devient : trouver $x \in D(L_\mu)$ tel que :

$$\begin{cases} L_\mu x = f \\ Bx = (\alpha, \beta) \end{cases} \quad (2.15)$$

avec les hypothèses suivantes :

- (i) $c_0, c_1 \in C(\bar{I})$; $c_0 \geq 0$
- (ii) B vérifie (2.5)
- (iii) $f \in E_\mu = C_{\mu,0}(I)$, où $\mu \in [0,1)$.

Comme $f \in E_\mu$, on a aussi $f \in L^1(I)$ et :

$$|f(t)| \leq \|f\|_\mu (t-a)^{-\mu} \quad t \in (a,b]$$

$$\|f\|_{L^1} \leq \frac{(b-a)^{1-\mu}}{1-\mu} \|f\|_\mu = \text{cste} \|f\|_\mu.$$

Nous pouvons définir sur E_μ un opérateur linéaire $K_\mu : E_\mu \rightarrow E_0$ par :

$$(K_\mu f)(t) := u_1(t) \int_a^t \frac{u_2(s)}{W(s)} f(s) ds + u_2(t) \int_t^b \frac{u_1(s)}{W(s)} f(s) ds \quad t \in \bar{I} \quad (2.16)$$

où u_1 et u_2 sont les fonctions définies dans le lemme 2.7 et $W := W(u_1, u_2)$ est leur wronskien.

Lemme 2.12. Soit $f \in E_\mu$ (avec $0 \leq \mu < 1$). Alors :

- (i) $\forall t \in \bar{I} : |(K_\mu f)(t)| \leq \kappa_1 \|f\|_\mu$
- (ii) $\forall t \in \bar{I} : |(K_\mu f)'(t)| \leq \kappa_2 \|f\|_\mu$
- (iii) $\forall t \in (a, b] : |(K_\mu f)''(t)| \leq \kappa_3 \|f\|_\mu + |f(t)|.$

Démonstration. (i) $|(K_\mu f)(t)| \leq W^* \|u_1\|_0 \|u_2\|_0 \int_a^b |f(s)| ds \leq \kappa_1 \|f\|_\mu$
 où $W^* := \max \{W^{-1}(t) \mid t \in \bar{I}\} > 0.$

(ii) $|(K_\mu f)'(t)| = |u_1'(t) \int_a^t \frac{u_2(s)}{W(s)} f(s) ds + u_2'(t) \int_t^b \frac{u_1(s)}{W(s)} f(s) ds| \leq$
 $\leq W^* \{ \|u_1'\|_0 \|u_2\|_0 + \|u_1\|_0 \|u_2'\|_0 \} \|f\|_{L^1} \leq \kappa_2 \|f\|_\mu.$

(iii) $|(K_\mu f)''(t)| = |u_1''(t) \int_a^t \frac{u_2(s)}{W(s)} f(s) ds + u_2''(t) \int_t^b \frac{u_1(s)}{W(s)} f(s) ds - f(t)| \leq$
 $\leq W^* \{ \|u_1''\|_0 \|u_2\|_0 + \|u_1\|_0 \|u_2''\|_0 \} \|f\|_{L^1} + |f(t)| \leq \kappa_3 \|f\|_\mu + |f(t)|.$

Lemme 2.13. Soit $f \in E_\mu$ (avec $0 \leq \mu < 1$). Alors :

- (i) $\|K_\mu f\|_0 \leq \kappa_1 \|f\|_\mu$
- (ii) $(K_\mu f)' \in E_0$ et $\|(K_\mu f)'\|_0 \leq \kappa_2 \|f\|_\mu$
- (iii) $(K_\mu f)'' \in E_\mu$ et $\|(K_\mu f)''\|_\mu \leq \kappa_4 \|f\|_\mu.$

Démonstration. Les propriétés (i) et (ii) sont des conséquences immédiates du lemme 2.12.

$$\lim_{t \downarrow a} (t-a)^\mu (K_\mu f)''(t) = - \lim_{t \downarrow a} (t-a)^\mu f(t), \text{ donc } (K_\mu f)'' \in E_\mu.$$

Utilisant la propriété (iii) du lemme 2.12, nous trouvons une constante κ_4 telle que : $|(t-a)^\mu (K_\mu f)''(t)| \leq \kappa_4 \|f\|_\mu$, d'où le résultat.

Lemme 2.14. $K_\mu \in K_+(E_\mu, E_0)$, $\text{Im}(K_\mu) \subset D(L_\mu)$ et $v = K_\mu f$ est la solution du problème

$$\begin{cases} L_\mu v = f \\ Bv = 0. \end{cases} \quad (2.17)$$

Démonstration. (i) $K_\mu \in L(E_\mu, E_0)$ par le lemme 2.13 (i). Soit (f_n) une suite bornée dans E_μ , i.e. $\exists \gamma \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall n \in \mathbb{N} : \|f_n\|_\mu \leq \gamma$. Pour tout $t \in \bar{I}$:
 $|(K_\mu f_n)(t)| \leq \kappa_1 \|f_n\|_\mu \leq \kappa_1 \gamma$; d'autre part, $\forall t, t_0 \in \bar{I}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$:
 $|(K_\mu f_n)(t) - (K_\mu f_n)(t_0)| = \left| \int_{t_0}^t (K_\mu f_n)'(s) ds \right| \leq \kappa_2 \gamma |t - t_0|$, donc la famille
 $A := \{K_\mu f_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ est équicontinue en tout point $t_0 \in \bar{I}$. Par le théorème d'Arzelà-Ascoli [18;p.200], A est un ensemble relativement compact dans E_0 .

Ainsi $K_\mu \in K_+(E_\mu, E_0)$, la positivité étant déduite de la définition (2.16).

(ii) Soit $f \in E_\mu$, alors $K_\mu f$ et $(K_\mu f)' \in E_0$, $(K_\mu f)'' \in E_\mu$ par le lemme 2.13; donc $K_\mu f \in D(L_\mu)$.

(iii) Reprenant, de la démonstration du lemme 2.12, les expressions de $(K_\mu f)'$ et $(K_\mu f)''$, nous obtenons $L_\mu K_\mu f = f$. De même, nous avons

$$B_1 K_\mu f = B_1 u_2 \int_a^b \frac{u_1(s)}{W(s)} f(s) ds = 0 \text{ et } B_2 K_\mu f = B_2 u_1 \int_a^b \frac{u_2(s)}{W(s)} f(s) ds = 0.$$

Donc $K_\mu f$ est la solution de (2.17). ■

Nous obtenons l'existence d'une unique solution dans $C^1(\bar{I})$ du problème (2.15) :

Proposition 2.15. $x \in D(L_\mu)$ est la solution de (2.15) si et seulement si

$$x = K_\mu f + \alpha u_1 + \beta u_2$$

où u_1 et u_2 sont les fonctions définies dans le lemme 2.7. Les estimations suivantes sont valables pour la solution :

$$\begin{aligned} \|x\|_0 &\leq \kappa_1 \|f\|_\mu + \kappa_5 (|\alpha| + |\beta|) \\ \|x\|_{C^1(\bar{I})} &\leq \kappa_6 \|f\|_\mu + \kappa_7 (|\alpha| + |\beta|) \\ \|x''\|_\mu &\leq \kappa_4 \|f\|_\mu + \kappa_8 (|\alpha| + |\beta|). \end{aligned}$$

Démonstration. Nous utilisons les estimations du lemme 2.13.

$$\|x\|_0 \leq \|K_\mu f\|_0 + |\alpha| \|u_1\|_0 + |\beta| \|u_2\|_0 \leq \kappa_1 \|f\|_\mu + \kappa_5 (|\alpha| + |\beta|)$$

où $\kappa_5 := 2 \max (\|u_1\|_0, \|u_2\|_0)$.

$$\|x'\|_0 \leq \kappa_2 \|f\|_\mu + |\alpha| \|u_1'\|_0 + |\beta| \|u_2'\|_0$$

$$\|x\|_{C^1(\bar{I})} \leq \kappa_6 \|f\|_\mu + \kappa_7 (|\alpha| + |\beta|) \text{ où } \kappa_6 := \kappa_1 + \kappa_2 \text{ et}$$

$\kappa_7 := \kappa_5 + 2 \max (\|u_1'\|_0, \|u_2'\|_0)$.

$$\|x''\|_\mu \leq \kappa_4 \|f\|_\mu + \kappa_8 (|\alpha| + |\beta|) \text{ où } \kappa_8 := 2 \max (\|u_1''\|_\mu, \|u_2''\|_\mu). \quad \blacksquare$$

Proposition 2.16. Soit $x \in D(L_\mu)$ qui satisfait à :

$$\begin{cases} L_\mu x \geq f \\ B_1 x \geq \alpha, B_2 x \geq \beta \end{cases}$$

alors $x \geq K_\mu f + \alpha u_1 + \beta u_2$.

(Ce résultat découle du lemme 2.14 et de la proposition 2.15).

2.3.3 $B_{11} = 1, B_{12} = 0$ et second membre dans $C_{\mu,0}(I)$ avec $\mu \in [0,2)$

Pour $\mu \in [0,2)$, les résultats précédents se généralisent à condition de ne pas imposer de condition sur la dérivée première en a ; ce qui revient à fixer $B_1 x := x(a)$. Nous considérons donc l'équation (2.6) avec les conditions aux limites :

$$x(a) = \alpha, B_2 x = \beta. \quad (2.18)$$

Nous faisons les hypothèses suivantes :

- (i) $c_0, c_1 \in C(\bar{I})$; $c_0 \geq 0$
- (ii) $B_{21}, B_{22} \geq 0$ et $B_{21} + B_{22} > 0$
- (iii) $f \in C_{\mu,0}(I)$, où $\mu \in [0,2)$.

Comme précédemment, nous notons $E_\mu := C_{\mu,0}(I)$ et définissons un opérateur linéaire non borné $L_\mu : E_0 \rightarrow E_\mu$ par (2.14), sur le domaine :

$$D(L_\mu) := \{x \in E_0 \mid x'' \in E_\mu\}.$$

Pour $0 \leq \mu < 1$, la condition $x'' \in E_\mu$ implique que $x'' \in C(I) \cap L^1(I)$; d'où $x' \in E_0$. Ainsi l'opérateur L_μ défini ci-dessus coïncide avec l'opérateur L_μ du §2.3.2 dans ce cas.

Le problème (2.6), (2.18) devient : trouver $x \in D(L_\mu)$ tel que :

$$\begin{cases} L_\mu x = f \\ x(a) = \alpha, B_2 x = \beta. \end{cases} \quad (2.19)$$

Lemme 2.17. Pour $0 \leq \mu < 2$ et pour tout $t \in (a,b]$:

$$\int_t^b (s-a)^{-\mu} ds \leq \kappa_9 (t-a)^{1-\mu'}$$

où $\mu' \in [1,2)$ est défini par :

$$\mu' := \begin{cases} 1 & 0 \leq \mu < 1 \\ 1 + \varepsilon_0 \text{ (avec } \varepsilon_0 \in (0,1) \text{ arbitraire)} & \mu = 1 \\ \mu & 1 < \mu < 2. \end{cases}$$

Démonstration. Pour $\mu \neq 1$, un simple calcul conduit au résultat. Pour $\mu = 1$, donnons-nous un $\varepsilon_0 > 0$; alors :

$$(t-a)^{\varepsilon_0} \int_t^b \frac{ds}{s-a} = (t-a)^{\varepsilon_0} \ln \frac{b-a}{t-a}, \text{ qui est borné sur } \bar{I}. \quad \blacksquare$$

Lemme 2.18. Soit u_1 et u_2 les fonctions définies dans le lemme 2.7 et soit $W := W(u_1, u_2)$ leur wronskien. Si $f \in E_\mu$ ($0 \leq \mu < 2$), alors :

(i) $u_2 f \in L^1(I)$

(ii) $\forall t \in \bar{I} : \left| \int_a^t \frac{u_2(s)}{W(s)} f(s) ds \right| \leq \kappa_{10} (t-a)^{2-\mu} \|f\|_\mu$

(iii) $\forall t \in (a, b] : \left| \int_t^b \frac{u_1(s)}{W(s)} f(s) ds \right| \leq \kappa_{11} (t-a)^{1-\mu'} \|f\|_\mu$

(iv) $\ell_1 := \lim_{t \downarrow a} (t-a)^{\mu-2} \int_a^t \frac{u_2(s)}{W(s)} f(s) ds$ existe

(v) $\ell_2 := \lim_{t \downarrow a} (t-a)^{\mu'-1} \int_t^b \frac{u_1(s)}{W(s)} f(s) ds$ existe.

Démonstration. (i) Puisque $u_2(a) = B_1 u_2 = 0$, nous avons pour tout $t \in I$: $0 \leq u_2(t) = u_2'(t^*)(t-a)$, où $t^* \in (a, t)$, et aussi $\forall t \in \bar{I} : u_2(t) \leq \|u_2'\|_0 (t-a)$.

Pour $t \in I : |u_2(t)f(t)| \leq \|u_2'\|_0 \|f\|_\mu (t-a)^{1-\mu}$. Comme $\mu < 2$, $u_2 f \in L^1(I)$.

(ii) Posons à nouveau $W^* := \max \{W^{-1}(t) \mid t \in \bar{I}\} > 0$.

Pour $t \in \bar{I} : \left| \int_a^t \frac{u_2(s)}{W(s)} f(s) ds \right| \leq W^* \|u_2'\|_0 \|f\|_\mu \int_a^t (s-a)^{1-\mu} ds =$
 $= \kappa_{10} (t-a)^{2-\mu} \|f\|_\mu$.

(iii) Pour $t \in (a, b] : \left| \int_t^b \frac{u_1(s)}{W(s)} f(s) ds \right| \leq W^* \|u_1\|_0 \|f\|_\mu \int_t^b (s-a)^{-\mu} ds \leq$
 $\leq \kappa_{11} (t-a)^{1-\mu'} \|f\|_\mu$, par le lemme 2.17.

(iv) Puisque $\mu < 2$, nous pouvons appliquer la règle de l'Hospital pour le calcul de la limite :

$$\begin{aligned} \ell_1 &= \lim_{t \downarrow a} \frac{\int_a^t \frac{u_2(s)}{W(s)} f(s) ds}{(t-a)^{2-\mu}} = \lim_{t \downarrow a} \frac{u_2(t)(t-a)^{\mu-1} f(t)}{(2-\mu)W(t)} = \\ &= \frac{u_2'(a)}{(2-\mu)W(a)} \lim_{t \downarrow a} (t-a)^\mu f(t), \text{ qui existe puisque } f \in E_\mu. \end{aligned}$$

(v) Pour $0 \leq \mu < 1 : f \in L^1(I)$ et $\mu' = 1$, d'où

$$\ell_2 = \int_a^b \frac{u_1(s)}{W(s)} f(s) ds.$$

Pour $1 \leq \mu < 2$: $\mu' > 1$ et nous appliquons la règle de l'Hospital :

$$\ell_2 = \lim_{t \rightarrow a} \frac{\int_t^b \frac{u_1(s)}{W(s)} f(s) ds}{(t-a)^{1-\mu'}} = \frac{u_1(a)}{(\mu'-1)W(a)} \lim_{t \rightarrow a} (t-a)^{\mu'} f(t), \text{ qui existe puisque}$$

$\mu' = \mu$ pour $\mu \in (1,2)$ et $\mu' = 1 + \varepsilon_0$ pour $\mu = 1$; dans ce dernier cas $\ell_2 = 0$. ■

Nous définissons sur E_μ un opérateur linéaire $K_\mu : E_\mu \rightarrow E_0$ par la formule (2.16). Il faut utiliser cette formule avec $t \in (a,b]$, puis l'étendre à $t \in \bar{I}$ par passage à la limite; la justification se trouve dans le lemme 2.18, points (iv) et (v). Le lemme 2.20 montrera que K_μ est un opérateur continu :

$$E_\mu \rightarrow E_{\mu'-2}.$$

Lemme 2.19. Soit $f \in E_\mu$ (avec $0 \leq \mu < 2$). Alors :

- (i) $\forall t \in \bar{I} : |(K_\mu f)(t)| \leq \kappa_{12} (t-a)^{2-\mu'} \|f\|_\mu$
- (ii) $\forall t \in (a,b] : |(K_\mu f)'(t)| \leq \kappa_{13} (t-a)^{1-\mu'} \|f\|_\mu$
- (iii) $\forall t \in (a,b] : |(K_\mu f)''(t)| \leq \kappa_{14} (t-a)^{1-\mu'} \|f\|_\mu + |f(t)|.$

Démonstration. (i) Pour $t \in \bar{I} : |(K_\mu f)(t)| \leq u_1(t) \left| \int_a^t \frac{u_2(s)}{W(s)} f(s) ds \right| + u_2(t) \left| \int_t^b \frac{u_1(s)}{W(s)} f(s) ds \right| \leq (\kappa_{10} \|u_1\|_0 (t-a)^{\mu'-\mu} + \kappa_{11} \|u_2\|_0) (t-a)^{2-\mu'} \|f\|_\mu \leq \kappa_{12} (t-a)^{2-\mu'} \|f\|_\mu$, où l'on a utilisé le lemme 2.18 et le fait que $\mu' - \mu \geq 0$.

(ii) Pour $t \in (a,b] : |(K_\mu f)'(t)| \leq |u_1'(t)| \left| \int_a^t \frac{u_2(s)}{W(s)} f(s) ds \right| + |u_2'(t)| \left| \int_t^b \frac{u_1(s)}{W(s)} f(s) ds \right| \leq (\kappa_{10} \|u_1'\|_0 (t-a)^{1+\mu'-\mu} + \kappa_{11} \|u_2'\|_0) (t-a)^{1-\mu'} \|f\|_\mu \leq \kappa_{13} (t-a)^{1-\mu'} \|f\|_\mu$.

(iii) Pour $t \in (a,b] : |(K_\mu f)''(t)| \leq |u_1''(t)| \left| \int_a^t \frac{u_2(s)}{W(s)} f(s) ds \right| + |u_2''(t)| \left| \int_t^b \frac{u_1(s)}{W(s)} f(s) ds \right| + |f(t)| \leq (\kappa_{10} \|u_1''\|_0 (t-a)^{1+\mu'-\mu} + \kappa_{11} \|u_2''\|_0) (t-a)^{1-\mu'} \|f\|_\mu + |f(t)| \leq \kappa_{14} (t-a)^{1-\mu'} \|f\|_\mu + |f(t)|.$ ■

Lemme 2.20. Soit $f \in E_\mu$ (avec $0 \leq \mu < 2$). Alors :

- (i) $K_\mu f \in E_{\mu'-2}, \|K_\mu f\|_{\mu'-2} \leq \kappa_{12} \|f\|_\mu$

(ii) $(K_\mu f)' \in E_{\mu'-1}$, $\|(K_\mu f)'\|_{\mu'-1} \leq \kappa_{13} \|f\|_\mu$

(iii) $(K_\mu f)'' \in E_\mu$, $\|(K_\mu f)''\|_\mu \leq \kappa_{15} \|f\|_\mu$.

Démonstration. (i) $K_\mu f \in E_{\mu'-2}$ si $\ell := \lim_{t \downarrow a} (t-a)^{\mu'-2} (K_\mu f)(t)$ existe. C'est le cas par le lemme 2.18 : $\ell = \ell_2 u_2'(a)$ si $0 \leq \mu \leq 1$ et $\ell = \ell_1 u_1(a) + \ell_2 u_2'(a)$ si $1 < \mu < 2$.

(ii) $(K_\mu f)' \in E_{\mu'-1}$ si $\ell' := \lim_{t \downarrow a} (t-a)^{\mu'-1} (K_\mu f)'(t)$ existe. Par le lemme 2.18 : $\ell' = \ell_2 u_2'(a)$.

(iii) $(K_\mu f)'' \in E_\mu$ si $\ell'' := \lim_{t \downarrow a} (t-a)^\mu (K_\mu f)''(t)$ existe. Par le lemme 2.18 : $\ell'' = - \lim_{t \downarrow a} (t-a)^\mu f(t)$ si $\mu \in (0,2)$ et $\ell'' = \ell_2 u_2''(a) - f(a)$ si $\mu = 0$.

Les estimations pour les normes se déduisent du lemme 2.19; prendre $\kappa_{15} := 1 + \kappa_{14} (b-a)^{1+\mu-\mu'}$. ■

Remarque. Prenons le cas où $0 \leq \mu < 1$, alors $K_\mu f \in E_{-1}$. Ce résultat est plus fort que celui du lemme 2.13, où l'on avait $K_\mu f \in E_0$.

Lemme 2.21. $K_\mu \in L_+(E_\mu, E_{\mu'-2}) \cap K_+(E_\mu, E_0)$, $\text{Im}(K_\mu) \subset D(L_\mu)$ et $v = K_\mu f$ est la solution du problème

$$\begin{cases} L_\mu v = f \\ v(a) = B_2 v = 0. \end{cases} \quad (2.20)$$

Démonstration. (i) $K_\mu \in L_+(E_\mu, E_{\mu'-2})$ par le lemme 2.20 et la définition (2.16). Soit (f_n) une suite bornée dans E_μ , i.e. $\exists \gamma \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$: $\|f_n\|_\mu \leq \gamma$. Pour tout $t \in \bar{I}$ et tout $n \in \mathbb{N}$: $|(K_\mu f_n)(t)| \leq \kappa_{12} (b-a)^{2-\mu'} \gamma$, par le lemme 2.19 (i). Utilisant le théorème d'Arzelà-Ascoli, on obtient que $K_\mu \in K(E_\mu, E_0)$, à condition de vérifier l'équicontinuité de la famille $\{K_\mu f_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ en tout point $t_0 \in \bar{I}$. Prenons $t_0 \in (a, b]$ et donnons-nous un $\varepsilon > 0$. Définissons $\delta_1 := \frac{t_0 - a}{2}$, $\gamma' := \max \{(t-a)^{1-\mu'} \mid t_0 - \delta_1 \leq t \leq t_0 + \delta_1\}$, $\delta_2 := \varepsilon (\kappa_{13} \gamma \gamma')^{-1}$ et $\delta := \min(\delta_1, \delta_2)$. Alors $t \in (a, b]$, avec $|t - t_0| \leq \delta$, implique : $|(K_\mu f_n)(t) - (K_\mu f_n)(t_0)| = \left| \int_{t_0}^t (K_\mu f_n)'(s) ds \right| \leq \kappa_{13} \gamma \left| \int_{t_0}^t (s-a)^{1-\mu'} ds \right| \leq \kappa_{13} \gamma \gamma' \delta_2 = \varepsilon$.

Prenons $t_0 = a$ et donnons-nous un $\varepsilon > 0$. Définissons $\delta := \left(\frac{\varepsilon}{\kappa_{12} \gamma} \right)^{\frac{1}{2-\mu'}}$.

Comme $K_\mu f_n \in E_{\mu'-2}$, avec $\mu' - 2 > 0$, on a $(K_\mu f_n)(a) = 0$. Alors $a \leq t \leq a + \delta$ implique $|(K_\mu f_n)(t) - (K_\mu f_n)(a)| = |(K_\mu f_n)(t)| \leq \kappa_{12} \gamma (t-a)^{2-\mu'} \leq \kappa_{12} \gamma \delta^{2-\mu'} = \varepsilon$.

(ii) Soit $f \in E_\mu$. Par le lemme 2.20, $K_\mu f \in E_0$ et $(K_\mu f)'' \in E_\mu$; d'où $K_\mu f \in D(L_\mu)$.

(iii) A partir de l'expression (2.16), il est facile de vérifier que $L_\mu K_\mu f = f$. De plus $B_2 K_\mu f = 0$ et nous avons vu que $(K_\mu f)(a) = 0$. Ainsi $K_\mu f$ est la solution de (2.20). ■

Nous obtenons l'existence d'une unique solution dans $C(\bar{I})$ du problème (2.19) :

Proposition 2.22. $x \in D(L_\mu)$ est la solution de (2.19) si et seulement si :

$$x = K_\mu f + \alpha u_1 + \beta u_2$$

où u_1 et u_2 sont les fonctions définies dans le lemme 2.7. Les estimations suivantes sont valables pour la solution :

$$\|x\|_0 \leq \kappa_{16} \|f\|_\mu + \kappa_{17} (|\alpha| + |\beta|)$$

$$\|x'\|_{\mu'-1} \leq \kappa_{13} \|f\|_\mu + \kappa_{18} (|\alpha| + |\beta|)$$

$$\|x''\|_\mu \leq \kappa_{15} \|f\|_\mu + \kappa_{19} (|\alpha| + |\beta|).$$

Démonstration. Constatons que $\|K_\mu f\|_0 \leq (b-a)^{2-\mu'} \|K_\mu f\|_{\mu'-2} \leq \kappa_{12} (b-a)^{2-\mu'} \|f\|_\mu =: \kappa_{16} \|f\|_\mu$. Alors $\|x\|_0 \leq \kappa_{16} \|f\|_\mu + \kappa_{17} (|\alpha| + |\beta|)$, où $\kappa_{17} := 2\max(\|u_1\|_0, \|u_2\|_0)$.

Utilisant le lemme 2.20 (ii), $\|x'\|_{\mu'-1} \leq \kappa_{13} \|f\|_\mu + \kappa_{18} (|\alpha| + |\beta|)$, où $\kappa_{18} := 2\max(\|u_1'\|_{\mu'-1}, \|u_2'\|_{\mu'-1})$.

De même, $\|x''\|_\mu \leq \kappa_{15} \|f\|_\mu + \kappa_{19} (|\alpha| + |\beta|)$, où $\kappa_{19} := 2\max(\|u_1''\|_\mu, \|u_2''\|_\mu)$. ■

Proposition 2.23. Soit $x \in D(L_\mu)$ qui satisfait à :

$$\begin{cases} L_\mu x \geq f \\ x(a) \geq \alpha, B_2 x \geq \beta \end{cases}$$

alors $x \geq K_\mu f + \alpha u_1 + \beta u_2$.

(Ce résultat découle du lemme 2.21 et de la proposition 2.22).

Remarque. Le cas $f \in C_{0,\nu}(I)$, avec $\nu \neq 0$, se traite de manière analogue; il faut supposer que $B_{22} = 0$ et $B_{21} = 1$, i.e. $B_2x = x(b)$. Les résultats se généralisent au cas où $f \in C_{\mu,\nu}(I)$, avec μ et $\nu \neq 0$.

2.4 EQUATION DIFFERENTIELLE LINEAIRE A COEFFICIENTS NON BORNES

2.4.1 L'équation sans second membre

Nous considérons le cas où les coefficients c_0 et c_1 dans l'équation (2.6) sont continus sur l'intervalle semi-ouvert $(a, b]$, mais ne sont pas nécessairement bornés au point a . Nous supposons l'existence de deux solutions linéairement indépendantes de l'équation sans second membre :

$$-y'' + c_1 y' + c_0 y = 0 \quad \text{dans } I = (a, b) \quad (2.21)$$

Avec certaines hypothèses, il est possible de construire la fonction de Green pour un type de problème aux limites. Comme précédemment, nous notons

$E_\mu := C_{\mu,0}(I)$. Nous définissons un opérateur linéaire L_μ par :

$$L_\mu := -\frac{d^2}{dt^2} + c_1(t) \frac{d}{dt} + c_0(t) \quad t \in I$$

sur le domaine

$$D(L_\mu) := \{x \in E_{\mu-2} \mid x' \in E_{\mu-1} \text{ et } x'' \in E_\mu\}.$$

Remarque. Il ne suffit pas que x soit dans $E_{\mu-2} \cap C^2((a, b])$ pour appartenir à $D(L_\mu)$. Donnons un contre-exemple : soit $I = (0, 1)$ et $x : t \mapsto t \sin \frac{1}{t}$. Alors $x' : t \mapsto \sin \frac{1}{t} - \frac{2}{t^2} \cos \frac{1}{t}$; $\lim_{t \downarrow 0} x(t) = 0$ mais $\lim_{t \downarrow 0} tx'(t)$ n'existe pas. Ainsi $x \in E_0$, $x' \notin E_1$.

Nous faisons les hypothèses suivantes :

- $$\left\{ \begin{array}{l} \text{(i)} \quad c_1 \in E_1, c_0 \in E_2, c_0 \geq 0. \\ \text{(ii)} \quad \exists y_1 \text{ et } y_2, \text{ deux solutions linéairement indépendantes de l'équation (2.21).} \\ \text{(iii)} \quad \exists r_1, r_2 \in \mathbb{R}, \text{ avec } r_1 > 0 \geq r_2, \text{ tels que } y_1 \text{ et } y_2 \\ \text{puissent être mis sous la forme :} \\ y_1(t) = (t-a)^{r_1} g_1(t) \quad t \in \bar{I} \\ y_2(t) = (t-a)^{r_2} g_2(t) \quad t \in (a, b] \\ \text{où } g_1, g_2 \in D(L_2), g_1(a) \text{ et } g_2(a) > 0. \\ \text{(iv)} \quad \lim_{t \downarrow a} (t-a)(g_1 g_2' - g_1' g_2)(t) < (r_1 - r_2) g_1(a) g_2(a). \end{array} \right. \quad (2.22)$$

Lemme 2.24. Supposons vérifiées les hypothèses (2.22). Alors :

- (i) $\text{Im}(L_\mu) \subset E_\mu$.
- (ii) $y_1 \in D(L_{2-r_1})$ et $L_{2-r_1} y_1 = 0$
 $y_2 \in D(L_{2-r_2})$ et $L_{2-r_2} y_2 = 0$.
- (iii) Le wronskien $W(y_1, y_2)$ peut être mis sous la forme :

$$W(y_1, y_2)(t) = T(t)(t-a)^{r_1+r_2-1} \quad t \in (a, b]$$

où $T \in C(\bar{I})$, $T < 0$ dans \bar{I} .

Démonstration. (i) Par hypothèse $c_0 \in E_2$ et $c_1 \in E_1$. Si $x \in D(L_\mu)$, alors $c_0 x$, $c_1 x'$ et $x'' \in E_\mu$; d'où $L_\mu x \in E_\mu$.

(ii) Par hypothèse $y_1 \in E_{-r_1}$, $y_2 \in E_{-r_2}$ et $g_1, g_2 \in D(L_2)$. Pour $t \in (a, b]$, $y_1'(t) = (t-a)^{r_1-1} [r_1 g_1(t) + (t-a) g_1'(t)]$ et $y_1''(t) = (t-a)^{r_1-2} \times [r_1(r_1-1) g_1(t) + 2r_1(t-a) g_1'(t) + (t-a)^2 g_1''(t)]$; ainsi $y_1 \in D(L_{2-r_1})$. De même $y_2 \in D(L_{2-r_2})$. Comme y_1 et y_2 sont solutions de (2.21), $L_{2-r_1} y_1 = L_{2-r_2} y_2 = 0$.

(iii) $W(y_1, y_2)(t) = (t-a)^{r_1+r_2-1} T(t)$, où pour $t \in (a, b]$:

$$T(t) := (r_2 - r_1) g_1(t) g_2(t) + (t-a)(g_1 g_2' - g_1' g_2)(t). \quad (2.23)$$

$T \in E_0$ et par l'hypothèse (2.22), point (iv), $T(a) < 0$. Comme $W(y_1, y_2)$ a un signe constant dans $(a, b]$, nous avons $T < 0$ dans \bar{I} . ■

Nous introduisons une condition à la limite b de l'intervalle I . Soit $x \in C^1((a, b])$:

$$B_2 x = B_{21} x(b) + B_{22} x'(b) \quad (2.24)$$

où $B_{21}, B_{22} \geq 0$ et $B_{21} + B_{22} > 0$.

Lemme 2.25. Supposons vérifiées les hypothèses (2.22). Soit u_1 et u_2 les fonctions définies par :

$$u_1 := \xi y_1 + y_2 \quad \text{dans } (a, b]$$

$$u_2 := \eta y_1 \quad \text{dans } \bar{I}$$

où $\xi := -B_2 y_2 (B_2 y_1)^{-1}$ et $\eta := (B_2 y_1)^{-1}$.

Alors :

$$(i) \quad u_1 \in D(L_{2-r_2}) \quad \text{et} \quad L_{2-r_2} u_1 = 0$$

$$u_2 \in D(L_{2-r_1}) \quad \text{et} \quad L_{2-r_1} u_2 = 0.$$

$$(ii) \quad B_2 u_1 = u_2(a) = 0 \quad \text{et} \quad B_2 u_2 = 1.$$

$$(iii) \quad u_1, u_2 > 0 \quad \text{dans } I, \quad \eta > 0.$$

$$(iv) \quad W(u_1, u_2) = -\eta W(y_1, y_2) > 0 \quad \text{dans } (a, b].$$

Démonstration. (i) Montrons que $B_2 y_1 \neq 0$. Comme $y_1(a) = 0$ et $L_{2-r_1} y_1 = 0$, l'hypothèse $B_2 y_1 = 0$ amène à une contradiction, puisque l'on aurait alors $y_1 = 0$ (proposition 2.5). Les nombres ξ et η sont donc bien définis. La condition (i) du lemme est vérifiée, compte tenu de l'hypothèse $r_1 > r_2$.

$$(ii) \quad u_2(a) = \eta y_1(a) = 0$$

$$B_2 u_1 = \xi B_2 y_1 + B_2 y_2 = 0$$

$$B_2 u_2 = \eta B_2 y_1 = 1.$$

(iii) Par la proposition 2.3 : $u_2 > 0$ dans I , u_1 a un signe constant dans I , y_1 a le signe de $B_2 y_1$ dans I . Par hypothèse, $g_1(a) > 0$ donc il existe un $\delta > 0$ tel que $y_1(t) > 0$ pour $t \in (a, a+\delta)$; d'où $y_1 > 0$ dans I , $B_2 y_1 > 0$, $\eta > 0$. Pour $t \in (a, b]$: $u_1(t) = (t-a)^{r_2} [\xi (t-a)^{r_1-r_2} g_1(t) + g_2(t)]$; comme $r_1 > r_2$ et $g_2(a) > 0$, il existe un $\delta > 0$ tel que $u_1(t) > 0$ pour $t \in (a, a+\delta)$. Donc $u_1 > 0$ dans I .

(iv) $W(u_1, u_2) = W(\xi y_1 + y_2, \eta y_1) = W(y_2, \eta y_1) = -\eta W(y_1, y_2) > 0$ dans $(a, b]$, par le lemme 2.24. ■

2.4.2 Second membre dans $C_{\mu, 0}(I)$ avec $\mu < 2$.

Notons : $W = W(u_1, u_2)$ le wronskien des deux fonctions définies dans le lemme 2.25.

$$\Gamma^* := \frac{1}{\eta} \max \{-\Gamma^{-1}(t) \mid t \in \bar{I}\} > 0, \text{ voir les lemmes 2.24 et 2.25.}$$

Le résultat suivant est une généralisation du lemme 2.17.

Lemme 2.26. Soit $\mu \in \mathbb{R}$, $r_1 > 0$ et $t \in (a, b]$, alors :

$$\int_t^b (s-a)^{1-r_1-\mu} ds \leq \gamma_1 (t-a)^{2-r_1-\mu_0}$$

où μ_0 est défini par :

$$\mu_0 := \begin{cases} 2-r_1 & \mu < 2-r_1 \\ 2-r_1 + \varepsilon_0 \text{ (avec } \varepsilon_0 \in (0, r_1) \text{ arbitraire)} & \mu = 2-r_1 \\ \mu & \mu > 2-r_1 \end{cases}$$

Démonstration. (i) $\mu < 2-r_1$: $\int_t^b (s-a)^{1-r_1-\mu} ds < \frac{(b-a)^{2-r_1-\mu}}{2-r_1-\mu}$.

(ii) $\mu = 2-r_1$, voir la démonstration du lemme 2.17.

(iii) $\mu > 2-r_1$: $\int_t^b (s-a)^{1-r_1-\mu} ds < \frac{(t-a)^{2-r_1-\mu}}{\mu+r_1-2}$. ■

Lemme 2.27. Soit u_1 et u_2 les fonctions définies dans le lemme 2.25. Si $f \in E_\mu$, avec $\mu < 2-r_2$, alors :

(i) $u_2 W^{-1} f \in L^1(I)$.

(ii) $\forall t \in \bar{I} : \left| \int_a^t \frac{u_2(s)}{W(s)} f(s) ds \right| \leq \gamma_2 (t-a)^{2-r_2-\mu} \|f\|_\mu$

(iii) $\forall t \in (a, b] : \left| \int_t^b \frac{u_1(s)}{W(s)} f(s) ds \right| \leq \gamma_3 (t-a)^{2-r_1-\mu_0} \|f\|_\mu$.

(iv) $\ell_1 := \lim_{t \downarrow a} (t-a)^{\mu_0+r_2-2} \int_a^t \frac{u_2(s)}{W(s)} f(s) ds$ existe.

(v) $\ell_2 := \lim_{t \downarrow a} (t-a)^{\mu_0+r_1-2} \int_t^b \frac{u_1(s)}{W(s)} f(s) ds$ existe.

Démonstration. (i) Pour $t \in I : |(u_2 W^{-1} f)(t)| \leq T^* \|u_2\|_{-r_1} \|f\|_\mu (t-a)^{1-r_2-\mu}$, par les lemmes 2.24 et 2.25. Comme $\mu < 2-r_2$, $u_2 W^{-1} f \in L^1(I)$.

(ii) Pour $t \in \bar{I} : \left| \int_a^t \frac{u_2(s)}{W(s)} f(s) ds \right| \leq T^* \|u_2\|_{-r_1} \|f\|_\mu \int_a^t (s-a)^{1-r_2-\mu} ds = \gamma_2 (t-a)^{2-r_2-\mu} \|f\|_\mu$.

(iii) Pour $t \in (a, b] : \left| \int_t^b \frac{u_1(s)}{W(s)} f(s) ds \right| \leq T^* \|u_1\|_{-r_2} \|f\|_\mu \int_t^b (s-a)^{1-r_1-\mu} ds \leq \gamma_3 (t-a)^{2-r_1-\mu_0} \|f\|_\mu$, par le lemme 2.26.

(iv) Puisque $\mu < 2 - r_2$, donc $\mu_0 < 2 - r_2$, nous pouvons utiliser la règle de l'Hospital pour le calcul de la limite

$$\begin{aligned} \ell_1 &= \lim_{t \downarrow a} \frac{\int_a^t \frac{u_2(s)}{W(s)} f(s) ds}{(t-a)^{2-r_2-\mu_0}} = \lim_{t \downarrow a} \frac{u_2(t)(t-a)^{\mu_0-r_1} f(t)}{-(2-r_2-\mu_0)\eta T(t)} = \\ &= \frac{1}{(2-r_2-\mu_0)\eta |T(a)|} \lim_{t \downarrow a} (t-a)^{\mu-r_1} (u_2 f)(t) \lim_{t \downarrow a} (t-a)^{\mu_0-\mu}, \end{aligned}$$

qui existe puisque $u_2 \in E_{-r_1}$, $f \in E_\mu$ et $\mu_0 - \mu \geq 0$.

(v) Pour $\mu < 2 - r_1$: $\mu_0 + r_1 - 2 = 0$ et $\forall t \in I$:

$|(u_1 W^{-1} f)(t)| \leq T^* \|u_1\|_{-r_2} \|f\|_\mu (t-a)^{1-r_1-\mu}$, donc $u_1 W^{-1} f \in L^1(I)$ et

$$\ell_2 = \int_a^b \frac{u_1(s)}{W(s)} f(s) ds.$$

Pour $\mu \geq 2 - r_1$: $\mu_0 + r_1 - 2 > 0$. Nous appliquons la règle de l'Hospital :

$$\begin{aligned} \ell_2 &= \lim_{t \downarrow a} \frac{\int_t^b \frac{u_1(s)}{W(s)} f(s) ds}{(t-a)^{2-r_1-\mu_0}} = \lim_{t \downarrow a} \frac{u_1(t)(t-a)^{\mu_0-r_2} f(t)}{(2-r_1-\mu_0)\eta T(t)} = \\ &= \frac{1}{(\mu_0+r_1-2)\eta |T(a)|} \lim_{t \downarrow a} (t-a)^{\mu-r_2} (u_1 f)(t) \lim_{t \downarrow a} (t-a)^{\mu_0-\mu}, \text{ qui} \end{aligned}$$

existe puisque $u_1 \in E_{-r_2}$, $f \in E_\mu$ et $\mu_0 - \mu \geq 0$. ■

Définissons sur E_μ un opérateur linéaire K_μ , par la formule :

$$(K_\mu f)(t) := u_1(t) \int_a^t \frac{u_2(s)}{W(s)} f(s) ds + u_2(t) \int_t^b \frac{u_1(s)}{W(s)} f(s) ds \quad (2.25)$$

$t \in (a, b]$

Nous montrerons plus loin (lemme 2.29) que K_μ est un opérateur continu :

$E_\mu \rightarrow E_{\mu_0-2}$. Si $\mu \leq 2$, alors $\mu_0 \leq 2$ et $E_{\mu_0-2} \subset E_0$. Dans ce cas, la définition

de $(K_\mu f)(t)$ peut être étendue à $t \in \bar{I}$, par continuité. Si $\mu < 2$, alors

$\mu_0 < 2$, et $K_\mu \in K_+(E_\mu, E_0)$; ce résultat figure dans le lemme 2.30.

Lemme 2.28. Soit $f \in E_\mu$, avec $\mu < 2 - r_2$. Alors $\forall t \in (a, b]$:

- (i) $|(K_\mu f)(t)| \leq \gamma_4 (t-a)^{2-\mu_0} \|f\|_\mu.$
- (ii) $|(K_\mu f)'(t)| \leq \gamma_5 (t-a)^{1-\mu_0} \|f\|_\mu.$
- (iii) $|(K_\mu f)''(t)| \leq \gamma_6 (t-a)^{-\mu_0} \|f\|_\mu + |f(t)|.$

Démonstration. (i) Pour $t \in (a, b]$: $|(K_\mu f)(t)| \leq u_1(t) \left| \int_a^t \frac{u_2(s)}{W(s)} f(s) ds \right| + u_2(t) \left| \int_t^b \frac{u_1(s)}{W(s)} f(s) ds \right| \leq (\gamma_2 \|u_1\|_{-r_2} (t-a)^{\mu_0-\mu} + \gamma_3 \|u_2\|_{-r_1}) (t-a)^{2-\mu_0} \|f\|_\mu \leq \gamma_4 (t-a)^{2-\mu_0} \|f\|_\mu$, puisque $\mu_0 - \mu \geq 0$.

(ii) Pour $t \in (a, b]$: $|(K_\mu f)'(t)| \leq |u_1'(t)| \left| \int_a^t \frac{u_2(s)}{W(s)} f(s) ds \right| + |u_2'(t)| \left| \int_t^b \frac{u_1(s)}{W(s)} f(s) ds \right| \leq (\gamma_2 \|u_1'\|_{1-r_2} (t-a)^{\mu_0-\mu} + \gamma_3 \|u_2'\|_{1-r_1}) (t-a)^{1-\mu_0} \|f\|_\mu \leq \gamma_5 (t-a)^{1-\mu_0} \|f\|_\mu$.

(iii) Pour $t \in (a, b]$: $|(K_\mu f)''(t)| \leq |u_1''(t)| \left| \int_a^t \frac{u_2(s)}{W(s)} f(s) ds \right| + |u_2''(t)| \left| \int_t^b \frac{u_1(s)}{W(s)} f(s) ds \right| + |f(t)| \leq (\gamma_2 \|u_1''\|_{2-r_2} (t-a)^{\mu_0-\mu} + \gamma_3 \|u_2''\|_{2-r_1}) (t-a)^{-\mu_0} \|f\|_\mu + |f(t)| \leq \gamma_6 (t-a)^{-\mu_0} \|f\|_\mu + |f(t)|$. ■

Lemme 2.29. Soit $f \in E_\mu$, avec $\mu < 2 - r_2$. Alors :

- (i) $K_\mu f \in E_{\mu_0-2}$, $\|K_\mu f\|_{\mu_0-2} \leq \gamma_4 \|f\|_\mu$.
- (ii) $(K_\mu f)' \in E_{\mu_0-1}$, $\|(K_\mu f)'\|_{\mu_0-1} \leq \gamma_5 \|f\|_\mu$.
- (iii) $(K_\mu f)'' \in E_{\mu_0}$, $\|(K_\mu f)''\|_{\mu_0} \leq \gamma_7 \|f\|_\mu$.

Démonstration. (i) Vérifions que $\ell := \lim_{t \downarrow a} (t-a)^{\mu_0-2} (K_\mu f)(t)$ existe. Utilisons les résultats (iv) et (v) du lemme 2.27 :

$\ell = \ell_1 \lim_{t \downarrow a} (t-a)^{-r_2} u_1(t) + \ell_2 \lim_{t \downarrow a} (t-a)^{-r_1} u_2(t)$, qui existe puisque $u_1 \in E_{-r_2}$ et $u_2 \in E_{-r_1}$.

(ii) $(K_\mu f)' \in E_{\mu_0-1}$ si $\ell' := \lim_{t \downarrow a} (t-a)^{\mu_0-1} (K_\mu f)'(t)$ existe. Par le lemme 2.27 : $\ell' = \ell_1 \lim_{t \downarrow a} (t-a)^{1-r_2} u_1'(t) + \ell_2 \lim_{t \downarrow a} (t-a)^{1-r_1} u_2'(t)$, qui existe puisque $u_1' \in E_{1-r_2}$ et $u_2' \in E_{1-r_1}$.

(iii) $(K_\mu f)'' \in E_{\mu_0}$ si $\ell'' := \lim_{t \downarrow a} (t-a)^{\mu_0} (K_\mu f)''(t)$ existe. Par le lemme 2.27 : $\ell'' = \ell_1 \lim_{t \downarrow a} (t-a)^{2-r_2} u_1''(t) + \ell_2 \lim_{t \downarrow a} (t-a)^{2-r_1} u_2''(t) - \lim_{t \downarrow a} (t-a)^{\mu_0-\mu} \lim_{t \downarrow a} (t-a)^\mu f(t)$, qui existe puisque $\mu_0 - \mu \geq 0$.

(iv) les estimations pour les normes se déduisent du lemme 2.28; prendre $\gamma_7 := \gamma_6 + (b-a)^{\mu_0-\mu}$. ■

Remarque. Supposons que $\mu < 2$; alors $\mu_0 < 2$ et $E_{\mu_0-2} \subset E_0$. Dans le lemme précédent, nous avons montré que si $f \in E_\mu$ alors $K_\mu f \in E_{\mu_0-2}$. Ceci entraîne que $(K_\mu f)(a) := \lim_{t \downarrow a} (K_\mu f)(t) = 0$. Grâce à cette propriété et aux estimations du lemme 2.28, il est possible d'établir la compacité de l'opérateur $K_\mu : E_\mu \rightarrow E_0$.

Lemme 2.30. Soit $\mu < 2$. Alors $K_\mu \in L_+(E_\mu, E_{\mu_0-2}) \cap K_+(E_\mu, E_0)$, $\text{Im}(K_\mu) \subset D(L_{\mu_0})$ et $v = K_\mu f$, avec $f \in E_\mu$, est la solution du problème

$$\begin{cases} L_{\mu_0} v = f \\ v(a) = B_2 v = 0. \end{cases} \quad (2.26)$$

Démonstration. (i) $K_\mu \in L_+(E_\mu, E_{\mu_0-2})$ par les lemmes 2.25 et 2.29. Montrons que $K_\mu \in K(E_\mu, E_0)$. Soit (f_n) une suite bornée dans $E_\mu : \exists \gamma \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall n \in \mathbb{N} : \|f_n\|_\mu \leq \gamma$. Pour tout $t \in \bar{I}$ et tout $n \in \mathbb{N} : |(K_\mu f_n)(t)| \leq \gamma \gamma_4 (t-a)^{2-\mu_0}$. La compacité est établie à l'aide du théorème d'Arzelà-Ascoli, à condition de vérifier l'équicontinuité de la famille $\{K_\mu f_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ en tout point $t_0 \in \bar{I}$. Prenons $t_0 \in (a, b]$ et fixons $\varepsilon > 0$. Définissons $\delta_1 := \frac{t_0^{-a}}{2}$, $\gamma' := \max \{(t-a)^{1-\mu_0} \mid t_0 - \delta_1 \leq t \leq t_0 + \delta_1\}$, $\delta_2 := \varepsilon (\gamma_5 \gamma \gamma')^{-1}$ et $\delta := \min(\delta_1, \delta_2) > 0$. Alors $t \in (a, b]$, avec $|t - t_0| \leq \delta$, implique : $|(K_\mu f_n)(t) - (K_\mu f_n)(t_0)| = \left| \int_{t_0}^t (K_\mu f_n)'(s) ds \right| \leq \gamma_5 \gamma \left| \int_{t_0}^t (s-a)^{1-\mu_0} ds \right| \leq \gamma_5 \gamma \gamma' \delta_2 = \varepsilon$.

Prenons $t_0 = a$ et donnons-nous un $\varepsilon > 0$. Définissons $\delta := \left(\frac{\varepsilon}{\gamma_4 \gamma}\right)^{\frac{1}{2-\mu_0}}$. Alors $a \leq t \leq a + \delta$ implique : $|(K_\mu f_n)(t) - (K_\mu f_n)(a)| = |(K_\mu f_n)(t)| \leq \gamma_4 \gamma (t-a)^{2-\mu_0} \leq \gamma_4 \gamma \delta^{2-\mu_0} = \varepsilon$.

(ii) Soit $f \in E_\mu$. Par le lemme 2.29, $K_\mu f \in D(L_{\mu_0})$.

(iii) Il est facile de vérifier que $L_{\mu_0} K_\mu f = f$ pour $f \in E_\mu$. Nous avons vu que $(K_\mu f)(a) = 0$; de plus $B_2 K_\mu f = 0$ puisque $B_2 u_1 = 0$. Ainsi $K_\mu f$ est la solution de (2.26). ■

Proposition 2.31. Soit $f \in E_\mu$, avec $\mu < 2$. Alors $x \in D(L_{\mu_0})$ est la solution de

$$\begin{cases} L_{\mu_0} x = f \\ x(a) = 0, \quad B_2 x = \beta \end{cases} \quad (2.27)$$

si et seulement si $x = K_{\mu} f + \beta u_2$, u_2 étant définie dans le lemme 2.25. Les estimations suivantes sont valables pour la solution :

$$\|x\|_{\mu_0-2} \leq \gamma_4 \|f\|_{\mu} + \gamma_8 |\beta|$$

$$\|x'\|_{\mu_0-1} \leq \gamma_5 \|f\|_{\mu} + \gamma_9 |\beta|$$

$$\|x''\|_{\mu_0} \leq \gamma_7 \|f\|_{\mu} + \gamma_{10} |\beta|.$$

Démonstration. (i) Par le lemme 2.30, $K_{\mu} f \in D(L_{\mu_0})$; $u_2 \in D(L_{2-r_1})$ par hypothèse et $D(L_{2-r_1}) \subset D(L_{\mu_0})$ puisque $\mu_0 \geq 2 - r_1$. Ainsi $x = K_{\mu} f + \beta u_2 \in D(L_{\mu_0})$; comme $B_2 u_2 = 1$, x est solution de (2.27). La solution de (2.27) est unique (proposition 2.5).

(ii) Les estimations pour la solution se déduisent du lemme 2.29. Prendre

$$\begin{aligned} \gamma_8 &:= (b-a)^{\mu_0+r_1-2} \|u_2\|_{-r_1} \\ \gamma_9 &:= (b-a)^{\mu_0+r_1-2} \|u_2'\|_{1-r_1} \\ \gamma_{10} &:= (b-a)^{\mu_0+r_1-2} \|u_2''\|_{2-r_1}. \end{aligned} \quad \blacksquare$$

Proposition 2.32. Soit $f \in E_{\mu}$, avec $\mu < 2$, et $x \in D(L_{\mu_0})$, qui satisfont à

$$\begin{cases} L_{\mu_0} x \geq f \\ x(a) = 0, \quad B_2 x \geq \beta. \end{cases}$$

Alors $x \geq K_{\mu} f + \beta u_2$.

(Ce résultat découle du lemme 2.30 et de la proposition 2.31).

2.5 EQUATION DIFFERENTIELLE LINEAIRE A POINT SINGULIER REGULIER

2.5.1 Point singulier régulier. Méthode de Frobenius-Fuchs.

Nous considérons un cas particulier du § 2.4, celui où le point a est un point singulier régulier. Ce qui suit peut être adapté pour le cas où b est un point singulier régulier, ou pour le cas où a et b le sont tous deux. Nous allons montrer l'existence de deux solutions linéairement indépendantes y_1 et y_2 de l'équation (2.21), qui satisfont aux hypothèses (2.22). Ceci est possible grâce à la méthode de Frobenius-Fuchs, méthode sur laquelle nous donnons quelques rappels.

Considérons l'équation différentielle linéaire sans second membre

$$y''(t) + \frac{p(t)}{t-t_0} y'(t) + \frac{q(t)}{(t-t_0)^2} y(t) = 0. \quad (2.28)$$

Par définition, le point t_0 est un *point singulier régulier* de (2.28), si p et q sont des fonctions analytiques au voisinage de t_0 (dans le plan complexe), mais $p/(t-t_0)$ et $q/(t-t_0)^2$ ne le sont pas toutes deux.

Si t_0 est un point singulier régulier, il existe un $R > 0$ tel que, si $|t - t_0| \leq R$, les séries

$$p(t) = \sum_{i=0}^{\infty} p_i (t-t_0)^i$$
$$q(t) = \sum_{i=0}^{\infty} q_i (t-t_0)^i$$

convergent uniformément.

Le polynôme P défini par :

$$P(r) := r^2 + (p_0 - 1) r + q_0 \quad (2.29)$$

est appelé le *polynôme indiciel* de l'équation (2.28).

Soit r_1 et r_2 les racines de ce polynôme, avec $\operatorname{Re} r_1 \geq \operatorname{Re} r_2$. Considérons l'intervalle $[t_0, t_0 + R]$. Une solution particulière de (2.28), sur cet intervalle, est y_1 définie par :

$$y_1(t) := (t-t_0)^{r_1} A(t)$$

où A est une fonction analytique, dont la série entière a un rayon de convergence supérieur à R. Elle s'écrit :

$$A(t) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i (t-t_0)^i$$

où a_0 peut être choisi égal à 1.

Une autre solution particulière de (2.28), linéairement indépendante de y_1 , est y_2 définie par :

$$y_2(t) := (t-t_0)^{r_2} B(t) + \chi y_1(t) \ln(t-t_0)$$

où B est une fonction analytique, dont la série entière a un rayon de convergence supérieur à R. Elle s'écrit :

$$B(t) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i (t-t_0)^i$$

où b_0 peut être choisi égal à 1. Si $r_1 - r_2 \notin \mathbb{N}$: $\chi = 0$. Dans les autres cas, χ peut être non nul; en particulier $r_1 = r_2$ implique $\chi \neq 0$.

Des résultats plus détaillés, notamment les formules de récurrence pour les coefficients a_i et b_i , se trouvent dans les livres de Bender & Orszag [23; p.68-76], Boyce & DiPrima [24; p.169-195].

2.5.2 Construction de deux solutions linéairement indépendantes.

Grâce à la méthode de Frobenius-Fuchs, nous pouvons construire deux solutions u_1 et u_2 , linéairement indépendantes, à valeurs strictement positives dans I, de l'équation (2.21). Nous faisons les hypothèses suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(i)} \quad c_0, c_1 \in C((a,b]); \quad c_0 \geq 0. \\ \text{(ii)} \quad a \text{ est un point singulier régulier.} \end{array} \right. \quad (2.30)$$

Définissons deux fonctions p et q par :

$$\begin{aligned} p(t) &:= - (t-a) c_1(t) \\ q(t) &:= - (t-a)^2 c_0(t) . \end{aligned} \quad t \in (a,b]$$

Par hypothèse, p et q sont analytiques au voisinage de a. Il existe un nombre $R \in (0, b-a]$, tel que les deux séries suivantes convergent uniformément

pour $t \in \bar{I}_1$, où $I_1 := (a, a+R)$:

$$\begin{cases} p(t) = \sum_{i=0}^{\infty} p_i (t-a)^i \\ q(t) = \sum_{i=0}^{\infty} q_i (t-a)^i \end{cases} \quad (2.31)$$

L'hypothèse $c_0 \geq 0$ implique que $q_0 \leq 0$.

Lemme 2.33. Avec les hypothèses (2.30), le polynôme indiciel de l'équation (2.21) a deux racines réelles r_1 et r_2 , telles que :

$$\begin{aligned} r_2 < 0 < r_1 & \quad \text{si } q_0 < 0 \\ r_2 = 0 < r_1 = 1 - p_0 & \quad \text{si } q_0 = 0 \quad \text{et } p_0 < 1 \\ r_2 = 0 = r_1 & \quad \text{si } q_0 = 0 \quad \text{et } p_0 = 1 \\ r_2 = 1 - p_0 < 0 = r_1 & \quad \text{si } q_0 = 0 \quad \text{et } p_0 > 1. \end{aligned}$$

De plus : $r_1 = 1$ si et seulement si $p_0 = -q_0$

$r_1 > 1$ si et seulement si $p_0 < -q_0$.

Démonstration. (i) Le polynôme indiciel P de (2.21) est donné par

$P(r) = r^2 + (p_0 - 1)r + q_0$. Son discriminant est $\Delta = (p_0 - 1)^2 - 4q_0 \geq 0$, donc r_1 et r_2 sont des racines réelles. Si $q_0 < 0$, alors $\Delta > 0$ et r_1, r_2 sont distinctes. Comme $P(0) = q_0 < 0$, on a $r_2 < 0 < r_1$.

(ii) $q_0 = 0$ donne $\Delta = (p_0 - 1)^2$. Les racines de P sont 0 et $1 - p_0$:

$$p_0 < 1 \Rightarrow r_2 = 0 \quad \text{et} \quad r_1 = 1 - p_0 > 0$$

$$p_0 = 1 \Rightarrow r_1 = r_2 = 0$$

$$p_0 > 1 \Rightarrow r_2 = 1 - p_0 < 0 \quad \text{et} \quad r_1 = 0.$$

(iii) Si $r_1 = 1$: $r_1 = \frac{1}{2} (1 - p_0 + \sqrt{\Delta}) = 1 \Leftrightarrow 1 + p_0 = \sqrt{\Delta} \Rightarrow (1 + p_0)^2 = \Delta \Leftrightarrow p_0 = -q_0$. Réciproquement, $p_0 = -q_0 \Rightarrow 1 + p_0 > 0$.

(iv) Si $r_1 < 1$: $r_1 = \frac{1}{2} (1 - p_0 + \sqrt{\Delta}) < 1 \Leftrightarrow 1 + p_0 > \sqrt{\Delta} \Rightarrow (1 + p_0)^2 > \Delta \Leftrightarrow p_0 > -q_0$. Réciproquement, $p_0 > -q_0 \Rightarrow 1 + p_0 > 0$. Par conséquent, $r_1 > 1 \Leftrightarrow p_0 < -q_0$. ■

Pour ce qui suit, nous supposons que $r_1 > 0$. Nous excluons le cas où

$q_0 = 0$ et $p_0 \geq 1$ simultanément dans (2.31). Dans I_1 , l'équation

$-y'' + c_1 y' + c_0 y = 0$ a deux solutions réelles z_1 et z_2 , linéairement indépendantes, de la forme :

$$\begin{aligned} z_1(t) &= (t-a)^{r_1} A(t) \\ z_2(t) &= (t-a)^{r_2} B(t) + \chi z_1(t) \ln(t-a) \end{aligned}$$

où A et B sont analytiques, les séries $A(t) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i(t-a)^i$ et $B(t) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i(t-a)^i$ convergent uniformément pour $t \in \bar{I}_1$; $a_0 = b_0 = 1$, $r_1 > 0$, $r_2 \leq 0$. Si $r_2 = 0$ et $r_1 \notin \mathbb{N}$, alors $\chi = 0$.

Définissons l'intervalle ouvert $I_2 := (a+R, b)$; $I_2 = \emptyset$ si $R = b - a$. Alors $I = I_1 \cup I_2 \cup \{a + R\}$, si $R < b - a$; $I = I_1$ si $R = b - a$. Dans I_2 (si $I_2 \neq \emptyset$), l'équation $-y'' + c_1 y' + c_0 y = 0$ a deux solutions réelles z_3 et z_4 dans $C^2(\bar{I}_2)$, linéairement indépendantes et qui satisfont à $z_3(a+R) = z_4'(a+R) = 1$, $z_3'(a+R) = z_4(a+R) = 0$.

Nous construisons deux fonctions y_1 et y_2 de la manière suivante :

$$y_1(t) := \begin{cases} z_1(t) & t \in \bar{I}_1 \\ z_1(a+R) z_3(t) + z_1'(a+R) z_4(t) & t \in \bar{I}_2 \end{cases} \quad (2.32)$$

$$y_2(t) := \begin{cases} z_2(t) & t \in (a, a+R] \\ z_2(a+R) z_3(t) + z_2'(a+R) z_4(t) & t \in \bar{I}_2. \end{cases} \quad (2.33)$$

Comme précédemment, nous posons $E_{\mu} := C_{\mu,0}(I)$.

Lemme 2.34. Supposons que les conditions suivantes soient vérifiées :

- (i) $c_0, c_1 \in C((a, b])$; $c_0 \geq 0$.
- (ii) a est un point singulier régulier.
- (iii) Si $q_0 = 0$, alors $p_0 < 1$ dans (2.31).

Alors la fonction y_1 définie par (2.32) et la fonction y_2 définie par (2.33) satisfont aux conditions (2.22).

Démonstration. (i) a étant un point singulier régulier de (2.21), le coefficient c_0 est dans E_2 et le coefficient c_1 dans E_1 .

(ii) Par construction y_1 et y_2 sont dans $C^2((a, b])$; ce sont des solutions linéairement indépendantes de (2.21). En effet pour $t \in I_1$, le wronskien $W(y_1, y_2)(t) = W(z_1, z_2)(t) \neq 0$; pour $t \in \bar{I}_2$: $W(y_1, y_2)(t) =$

$$= W(z_1, z_2)(a+R) W(z_3, z_4)(t) \neq 0.$$

(iii) Définissons deux fonctions g_1 et g_2 , dans $C^2((a,b])$, par :

$$\left. \begin{aligned} g_1(t) &:= (t-a)^{-r_1} y_1(t) \\ g_2(t) &:= (t-a)^{-r_2} y_2(t) \end{aligned} \right\} t \in (a,b]$$

Pour $t \in I_1$: $g_1(t) = A(t)$; d'où $g_1 \in C^2(\bar{I})$, donc $g_1 \in D(L_2)$. De plus $g_1(a) = 1$.

Pour $t \in I_1$: $g_2(t) = B(t) + \chi(t-a)^{r_1-r_2} A(t) \ln(t-a)$; donc $g_2 \in E_0$ et $g_2(a) = 1$ puisque $r_1 > 0 \geq r_2$ par l'hypothèse (iii).

Pour $t \in I_1$: $g_2'(t) = B'(t) + \chi(t-a)^{r_1-r_2-1} g_3(t)$, où g_3 est la fonction définie par $g_3(t) := (r_1-r_2)A(t) \ln(t-a) + (t-a) A'(t) \ln(t-a) + A(t)$. Comme $g_3 \in C_{r_1-r_2,0}(I_1)$: $g_2' \in E_1$.

Pour $t \in I_1$: $g_2''(t) = B''(t) + \chi(r_1-r_2-1)(t-a)^{r_1-r_2-2} g_3(t) + \chi(t-a)^{r_1-r_2-1} g_3'(t)$. Or $g_3'(t) = (r_1-r_2+1) A'(t) \ln(t-a) + (r_1-r_2)(t-a)^{-1} A(t) + (t-a) A''(t) \ln(t-a) + 2A'(t)$; donc $g_2'' \in C_{1,0}(I_1)$ et $g_2'' \in E_2$.

Nous avons démontré que $g_2 \in D(L_2)$.

(iv) Pour $t \in I_1$: $(g_1 g_2' - g_1' g_2)(t) = A(t) B'(t) + \chi A(t)(t-a)^{r_1-r_2-1} g_3(t) - A'(t) B(t) - \chi A(t) A'(t)(t-a)^{r_1-r_2} \ln(t-a)$. D'où :
 $\lim_{t \downarrow a} (t-a)(g_1 g_2' - g_1' g_2)(t) = \chi \lim_{t \downarrow a} (t-a)^{r_1-r_2} g_3(t) = 0$.

Ainsi, toutes les hypothèses (2.22) sont vérifiées. ■

Nous pouvons donc utiliser les résultats du § 2.4. Par le lemme 2.25, nous construisons deux solutions linéairement indépendantes u_1 et u_2 de l'équation (2.21), qui sont strictement positives dans I et qui satisfont à $B_2 u_1 = u_2(a) = 0$ et $B_2 u_2 = 1$, B_2 étant défini par (2.24).

2.5.3 Second membre dans $C_{\mu,0}(I)$ avec $\mu < 2$.

A l'aide de la formule (2.25), ces solutions u_1 et u_2 permettent de définir un opérateur linéaire $K_\mu \in L_+(E_\mu, E_{\mu-2}) \cap K_+(E_\mu, E_0)$, pour $\mu < 2$. Rappelons que

$$\mu_0 = \begin{cases} 2 - r_1 & \mu < 2 - r_1 \\ 2 - r_1 + \varepsilon_0 (\varepsilon_0 \in (0, r_1) \text{ arbitraire}) & \mu = 2 - r_1 \\ \mu & \mu > 2 - r_1 \end{cases}$$

Finalement, nous obtenons l'existence et l'unicité d'une solution du problème (2.27), à l'aide de la proposition 2.31 :

Proposition 2.35. Supposons que les conditions suivantes soient vérifiées :

- (i) $c_0, c_1 \in C((a, b])$; $c_0 \geq 0$.
- (ii) a est un point singulier régulier.
- (iii) Si $q_0 = 0$, alors $p_0 < 1$ dans (2.31).
- (iv) $f \in E_\mu$, avec $\mu < 2$; $\beta \in \mathbb{R}$.

Alors $x \in D(L_{\mu_0})$ est la solution du problème (2.27) :

$$\begin{cases} L_{\mu_0} x = f \\ x(a) = 0, B_2 x = \beta \end{cases}$$

si et seulement si $x = K_\mu f + \beta u_2$, u_2 étant définie dans le lemme 2.25.

2.6 OPERATEUR DE NEMYCKII

Soit J un intervalle fermé dans \mathbb{R} , borné ou non, d'intérieur non vide. Comme précédemment, I désigne l'intervalle (a,b) , ouvert, borné, non vide. Dans $C(\bar{I})$ définissons le sous-ensemble D_J par :

$$D_J := \{x \in C(\bar{I}) \mid \forall t \in \bar{I} : x(t) \in J\}. \quad (2.34)$$

Désignons par $\mathbf{1}$ la fonction constante sur \bar{I} , dont la valeur est 1. P_+ est le cône des fonctions positives dans $C(\bar{I})$.

Si J est borné, $J = [E_1, E_2]$: $D_J = \langle E_1 \mathbf{1}, E_2 \mathbf{1} \rangle$.

Si $J = [E_1, \infty)$: $D_J = E_1 \mathbf{1} + P_+$.

Si $J = (-\infty, E_2]$: $D_J = E_2 \mathbf{1} - P_+$.

Si $J = \mathbb{R}$: $D_J = C(\bar{I})$.

Soit $f : \bar{I} \times J \rightarrow \mathbb{R}$. Nous définissons l'opérateur de Nemyckiř F de f par :

$$(F(x))(t) := f(t, x(t)) \quad t \in \bar{I} \quad (2.35)$$

pour tout $x \in D_J$.

Proposition 2.36. Soit $f \in C(\bar{I} \times J)$ et F son opérateur de Nemyckiř. Alors :

- (i) $F : D_J \rightarrow C(\bar{I})$; c'est une application continue et l'image par F d'un ensemble borné est bornée.
- (ii) Si pour tout $t \in \bar{I}$, la fonction $f(t, \cdot) : J \rightarrow \mathbb{R}$ est (strictement) croissante, alors F est (strictement) croissante.

Amann [9;p.646]

Pour $f : I \times J \rightarrow \mathbb{R}$, donnons une définition analogue de F :

$$(F(x))(t) := f(t, x(t)) \quad t \in I \quad (2.36)$$

pour tout $x \in D_J$.

Proposition 2.37. Soit $f \in C(I \times J)$. Supposons l'existence de μ et $\nu \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} &\text{tels que pour tout } \xi_0 \in J : f(\cdot, \xi_0) \in C_{\mu, \nu}(I), \quad \lim_{t \downarrow a} (t-a)^\mu f(t, \xi_0) = \\ &= \lim_{\xi \rightarrow \xi_0} \lim_{t \downarrow a} (t-a)^\mu f(t, \xi) \text{ et } \lim_{t \uparrow b} (b-t)^\nu f(t, \xi_0) = \lim_{\xi \rightarrow \xi_0} \lim_{t \uparrow b} (b-t)^\nu f(t, \xi). \end{aligned}$$

Alors l'application F définie par (2.36) a les propriétés suivantes :

- (i) $F : D_J \rightarrow C_{\mu, \nu}(I)$; c'est une application continue et l'image par F d'un ensemble borné de D_J est un ensemble borné de $C_{\mu, \nu}(I)$.
 - (ii) Si pour tout $t \in I$, la fonction $f(t, \cdot) : J \rightarrow \mathbb{R}$ est (strictement) croissante, alors F est (strictement) croissante.
- (Pour la définition de $C_{\mu, \nu}(I)$, voir l'exemple 26 du §1.4).

Démonstration. (i) Définissons une fonction g par :

$$g(t, \xi) := (t-a)^\mu (b-t)^\nu f(t, \xi) \quad \text{pour } t \in I, \xi \in J$$

$$g(a, \xi) := (b-a)^\nu \lim_{t \downarrow a} (t-a)^\mu f(t, \xi) \quad \text{pour } \xi \in J$$

$$g(b, \xi) := (b-a)^\mu \lim_{t \uparrow b} (b-t)^\nu f(t, \xi) \quad \text{pour } \xi \in J.$$

Avec nos hypothèses : $g \in C(\bar{I} \times J)$. Soit G son opérateur de Nemyckiï; par la proposition 2.36, $G : D_J \rightarrow C(\bar{I})$ est continue et l'image d'un borné est bornée. La relation entre F et G est la suivante : $\forall x \in D_J$:

$$(G(x))(t) = (t-a)^\mu (b-t)^\nu (F(x))(t), \quad t \in I.$$

Ainsi $F : D_J \rightarrow C_{\mu, \nu}(I)$; F est continue et applique un ensemble borné dans un borné puisque pour tout $x \in D_J$: $\|F(x)\|_{\mu, \nu} = \|G(x)\|_0$.

(ii) Supposons que pour tout $t \in I$, $f(t, \cdot)$ soit croissante. Soit $x_1, x_2 \in D_J$, avec $x_1 < x_2$. Alors pour tout $t \in I$: $(F(x_2) - F(x_1))(t) = f(t, x_2(t)) - f(t, x_1(t)) \geq 0$; donc $F(x_2) \geq F(x_1)$. Si de plus, pour tout $t \in I$, $f(t, \cdot)$ est strictement croissante : $F(x_1) = F(x_2)$ implique que $x_1 = x_2$, d'où la croissance stricte de F . ■

2.7 PROBLEME AUX LIMITES NON LINEAIRE

2.7.1 Hypothèses générales

Considérons le problème aux limites non linéaire introduit au §2.1 :

$$\begin{cases} -x''(t) + c_1(t) x'(t) + c_0(t) x(t) = f(t, x(t)) & t \in I \\ Bx = (\alpha, \beta) \end{cases} \quad (2.37)$$

où (i) $I = (a, b)$ est un intervalle ouvert, borné.

(ii) $c_0, c_1 \in C((a, b])$; $c_0 \geq 0$.

(iii) $f : (a, b] \times J \rightarrow \mathbb{R}$; J est un intervalle fermé, borné ou non.

(iv) $B = (B_1, B_2)$

$$B_1 x = B_{11} x(a) - B_{12} x'(a)$$

$$B_2 x = B_{21} x(b) + B_{22} x'(b)$$

avec B_{11}, B_{12}, B_{21} et $B_{22} \in \mathbb{R}_+$.

(v) $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$; dans certains cas, il faut $\alpha = 0$.

Comme précédemment, nous notons $E_\mu := C_{\mu,0}(I)$ l'espace de Banach ordonné présenté dans l'exemple 26 du §1.4. Il est muni de la norme $\|\cdot\|_\mu$ et du cône normal P_μ .

Définissons un opérateur différentiel linéaire

$$L := -\frac{d^2}{dt^2} + c_1(t) \frac{d}{dt} + c_0(t) \quad t \in I \quad (2.38)$$

sur le domaine $D(L) := \{x : (a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid x \in C^2((a, b])\}$.

Nous utiliserons l'un des cinq ensembles d'hypothèses suivants :

$$\begin{cases} (i) & c_0, c_1 \in C(\bar{I}). \\ (ii) & (B_{11} + B_{12})(B_{21} + B_{22}) > 0, \\ & c_0 = 0 \Rightarrow B_{11} + B_{21} > 0. \\ (iii) & 0 \leq \mu < 1. \end{cases} \quad (2.39)$$

$$\begin{cases} (i) & c_0, c_1 \in C(\bar{I}). \\ (ii) & B_{11} = 1, B_{12} = 0, B_{21} + B_{22} > 0. \\ (iii) & 0 \leq \mu < 2. \end{cases} \quad (2.40)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(i)} \quad c_0 \text{ et } c_1 \text{ sont analytiques au voisinage de } a. \\ \text{(ii)} \quad B_{11} = 1, B_{12} = 0, B_{21} + B_{22} > 0. \\ \text{(iii)} \quad \alpha = 0. \\ \text{(iv)} \quad 0 \leq \mu < 2. \end{array} \right. \quad (2.41)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(i)} \quad c_0 \in E_2, c_1 \in E_1. \\ \text{(ii)} \quad B_{11} = 1, B_{12} = 0, B_{21} + B_{22} > 0. \\ \text{(iii)} \quad \alpha = 0. \\ \text{(iv)} \quad \text{L'équation } Ly = 0 \text{ a deux solutions linéairement} \\ \quad \text{indépendantes } y_1 \text{ et } y_2 \text{ qui satisfont aux conditions} \\ \quad \text{(2.22) (iii) et (iv).} \\ \text{(v)} \quad \mu < 2. \end{array} \right. \quad (2.42)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(i)} \quad a \text{ est un point singulier régulier de l'équation } Ly = 0. \\ \text{(ii)} \quad B_{11} = 1, B_{12} = 0, B_{21} + B_{22} > 0. \\ \text{(iii)} \quad \alpha = 0. \\ \text{(iv)} \quad \text{Si } q_0 = 0 \text{ alors } p_0 < 1 \text{ dans les séries (2.31).} \\ \text{(v)} \quad \mu < 2. \end{array} \right. \quad (2.43)$$

A chacune de ces conditions, nous associons un sous-ensemble D_μ de $D(L) \cap C(\bar{I})$, défini par :

$$D_\mu := \{x \in C(\bar{I}) \mid x'' \in E_\mu\} \text{ avec (2.39), (2.40) ou (2.41).} \quad (2.44)$$

$$D_\mu := \{x \in E_{\mu_0-2} \mid x' \in E_{\mu_0-1}, x'' \in E_{\mu_0}\} \text{ avec (2.42) ou} \quad (2.45)$$

(2.43), μ_0 étant le nombre défini dans le lemme 2.26.

Nous avons montré précédemment (§§2.3 à 2.5) que pour chacun des ensembles d'hypothèses (2.39) à (2.43), il existe un opérateur linéaire K_μ et deux fonctions u_1 et u_2 qui ont les propriétés suivantes :

$$K_\mu \in K_+(E_\mu, E_0); \text{ Im}(K_\mu) \subset D_\mu. \quad (2.46)$$

$$Lu_1 = Lu_2 = 0; u_1 \text{ et } u_2 \text{ sont linéairement indépendantes.} \quad (2.47)$$

$$w := \alpha u_1 + \beta u_2 \in D_\mu \quad (\alpha=0 \text{ si } u_1 \notin D_\mu) \text{ et } Bw = (\alpha, \beta). \quad (2.48)$$

Si $g \in E_\mu$, alors $x := K_\mu g + w$ est l'unique solution du (2.49)
 problème linéaire :

$$\begin{cases} Lx = g \\ Bx = (\alpha, \beta). \end{cases}$$

Si $g \in E_\mu$, $x \in D_\mu$ satisfont à (2.50)

$$\begin{cases} Lx \geq g \\ B_1x \geq \alpha, B_2x \geq \beta, \end{cases}$$

alors $x \geq K_\mu g + w$.

(Même résultat avec \geq remplacé par \leq).

Nous appelons *sous-solution* de (2.37) une fonction $\varphi \in D(L) \cap D_J$, telle que

$$\begin{cases} L\varphi \leq f(\cdot, \varphi) \quad \text{dans } I \\ B_1\varphi \leq \alpha, B_2\varphi \leq \beta \end{cases} \quad (2.51)$$

où D_J est le sous-ensemble de $C(\bar{I})$ défini par (2.34).

Une *sur-solution* de (2.37) est une fonction $\psi \in D(L) \cap D_J$, telle que :

$$\begin{cases} L\psi \geq f(\cdot, \psi) \quad \text{dans } I \\ B_1\psi \geq \alpha, B_2\psi \geq \beta. \end{cases} \quad (2.52)$$

La sous-solution φ et la sur-solution ψ sont *compatibles* si $\varphi \leq \psi$.

Nous notons $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un segment conique dans $C(\bar{I})$.

Sur f , nous imposons une condition de continuité :

$$\begin{cases} f \in C((a, b] \times J); \exists \mu \in \mathbb{R} \text{ tel que } \forall \xi_0 \in J : \\ f(\cdot, \xi_0) \in E_\mu \text{ et } \lim_{t \downarrow a} (t-a)^\mu f(t, \xi_0) = \lim_{\xi \rightarrow \xi_0} \lim_{t \downarrow a} (t-a)^\mu f(t, \xi). \end{cases} \quad (2.53)$$

Lemme 2.38. Supposons vérifiées la condition (2.53) et l'une des conditions (2.39) à (2.43). Soit $x \in D(L) \cap D_J$ une solution de (2.37). Alors $x \in D_\mu$; μ étant le nombre figurant dans la condition (2.53) et D_μ l'ensemble défini par (2.44) ou (2.45).

Démonstration. Soit F l'application définie par (2.36) à partir de f . Par la proposition 2.37, $F(x) \in E_\mu$. Par (2.49), x satisfait à $x = K_\mu F(x) + w$. Par (2.46) et (2.48) : $x \in D_\mu$. ■

2.7.2. Non-linéarité croissante

Nous faisons une hypothèse de croissance sur f :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall t \in (a, b], \text{ la fonction } f(t, \cdot) : J \rightarrow \mathbb{R} \text{ est} \\ \text{croissante.} \end{array} \right. \quad (2.54)$$

Définissons une formule de récurrence :

$$\left\{ \begin{array}{l} Lx_{n+1} := f(\cdot, x_n) \quad \text{dans } I \\ Bx_{n+1} := (\alpha, \beta). \end{array} \right. \quad (2.55)$$

Proposition 2.39. Supposons vérifiées les conditions (2.53) et (2.54), ainsi que l'une des conditions (2.39) à (2.43). Supposons l'existence d'une sous-solution $\varphi \in D_\mu$ et d'une sur-solution $\psi \in D_\mu$, compatibles, de (2.37). Alors la suite (x_n) construite à l'aide de (2.55), à partir de $x_0 := \varphi$, est croissante et converge uniformément vers $\bar{x} \in D_\mu \cap D_J$, la solution minimale de (2.37) dans $\langle \varphi, \psi \rangle$. La suite (y_n) construite à l'aide de (2.55), à partir de $y_0 := \psi$, est décroissante et converge uniformément vers $\hat{x} \in D_\mu \cap D_J$, la solution maximale de (2.37) dans $\langle \varphi, \psi \rangle$.

Démonstration. (i) Soit F l'application définie par (2.36) à partir de f . Grâce aux conditions (2.53) et (2.54), $F : D_J \rightarrow E_\mu$ est continue, croissante et applique un sous-ensemble borné de D_J dans un ensemble borné de E_μ (proposition 2.37).

(ii) Définissons une application H par :

$$\forall x \in D_J : H(x) := K_\mu F(x) + w. \quad (2.56)$$

Par (2.46), $H : D_J \rightarrow E_0$ est complètement continue et croissante.

(iii) Par hypothèse, $\varphi \in D_\mu$ et satisfait à (2.51); de plus $F(\varphi) \in E_\mu$. Par (2.50) : $\varphi \leq K_\mu F(\varphi) + w = H(\varphi)$. De même $\psi \geq H(\psi)$. D'autre part $H(\langle \varphi, \psi \rangle) \subset \langle \varphi, \psi \rangle$ et le cône P_0 de E_0 est normal. Les hypothèses des proposi-

tions 1.13, 1.14 et 1.15 sont vérifiées pour H. La suite (x_n) définie par $x_0 := \varphi$, $x_{n+1} := H(x_n)$ est croissante et converge, dans la norme de E_0 , vers la solution minimale \bar{x} dans $\langle \varphi, \psi \rangle$ de l'équation :

$$x = H(x). \tag{2.57}$$

La suite (y_n) définie par $y_0 := \psi$, $y_{n+1} := H(y_n)$ est décroissante et converge vers la solution maximale \hat{x} dans $\langle \varphi, \psi \rangle$ de (2.57).

(iv) $\forall n \in \mathbb{N} : x_{n+1} = H(x_n) = K_\mu F(x_n) + w$. Par (2.49) :

$$\begin{cases} Lx_{n+1} = F(x_n) \\ Bx_{n+1} = (\alpha, \beta). \end{cases}$$

Ainsi, x_{n+1} et y_{n+1} vérifient (2.55).

(v) Un point fixe x de H est une solution de (2.37) et $x \in D_\mu$ par le lemme 2.38. Donc $\bar{x} \in D_\mu$ est la solution minimale et $\hat{x} \in D_\mu$ est la solution maximale dans $\langle \varphi, \psi \rangle$ du problème (2.37). ■

2.7.3 Non-linéarité avec une condition locale de croissance

En plus de la condition de continuité (2.53), imposons la condition suivante sur f, avec le même nombre μ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Pour tout sous-intervalle compact } J' \text{ de } J, \text{ il existe un} \\ \text{nombre } k(J') \geq 0 \text{ tel que } \forall \xi_1, \xi_2 \in J', \text{ avec } \xi_1 < \xi_2, \\ \text{et } \forall t \in (a, b] : \\ \\ (t-a)^m [f(t, \xi_2) - f(t, \xi_1)] \geq -k(J')(\xi_2 - \xi_1) \tag{2.58} \\ \\ \text{où } m \text{ est un entier défini par :} \\ \\ m := \begin{cases} 0 & \text{si } \mu \leq 0 \\ 1 & \text{si } 0 < \mu \leq 1 \\ 2 & \text{si } 1 < \mu < 2 \end{cases} \end{array} \right.$$

Exemples. Sans nous occuper de la dépendance en t, voyons comment réaliser la condition (2.58) pour une fonction d'une variable réelle. Soit $g : J \rightarrow \mathbb{R}$, J étant un intervalle fermé. Supposons que l'une des conditions suivantes

soit vérifiée :

(i) g est croissante.

(ii) g est localement lipschitzienne, i.e. pour tout sous-intervalle compact J' de J , il existe une constante $\ell(J')$ telle que $\forall \xi_1, \xi_2 \in J'$:

$$|g(\xi_2) - g(\xi_1)| \leq \ell(J') |\xi_2 - \xi_1|.$$

(iii) $g \in C^1(J)$.

(iv) g est convexe; au cas où J est de la forme $[\bar{E}_1, E_2]$ ou $[E_1, \infty)$, il faut ajouter l'existence de la dérivée à droite $g'_+(\bar{E}_1)$.

Alors, pour chacun de ces quatre cas, la condition suivante est vérifiée :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall J' \text{ sous-intervalle compact de } J, \text{ il existe un} \\ \text{nombre } k(J') \geq 0 \text{ tel que } \forall \xi_1, \xi_2 \in J', \text{ avec } \xi_1 < \xi_2 : \\ g(\xi_2) - g(\xi_1) \geq -k(J')(\xi_2 - \xi_1). \end{array} \right.$$

Avec la condition (i) : $k(J') = 0$

" " " (ii) : $k(J') = \ell(J')$

" " " (iii) : $k(J') = \max \{|g'(\xi)|, \xi \in J'\}$

" " " (iv) : $k(J') = \max(0, -g'_+(\xi'))$, avec $J' = [\xi', \xi'']$.

Supposons l'existence d'une sous-solution φ et d'une sur-solution ψ , compatibles, de (2.37). Nous définissons :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\xi} := \min \{\varphi(t) \mid t \in \bar{I}\} \\ \hat{\xi} := \max \{\psi(t) \mid t \in \bar{I}\}. \end{array} \right. \quad (2.59)$$

Alors $[\bar{\xi}, \hat{\xi}]$ est un sous-intervalle compact de J .

Nous allons distinguer trois cas, selon la valeur de μ , pour lesquels nous obtenons une solution du problème (2.37) par des itérations monotones.

1er cas : $\mu \leq 0$

Dans ce cas, la condition (2.58) devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Pour tout sous-intervalle compact } J' \text{ de } J, \text{ il existe} \\ \text{un nombre } k(J') \geq 0 \text{ tel que } \forall \xi_1, \xi_2 \in J', \text{ avec} \\ \xi_1 < \xi_2, \text{ et } \forall t \in \bar{I} : \\ f(t, \xi_2) - f(t, \xi_1) \geq -k(J')(\xi_2 - \xi_1). \end{array} \right. \quad (2.60)$$

Définissons une formule de récurrence :

$$\left\{ \begin{array}{l} (L+k) x_{n+1} := f(\cdot, x_n) + kx_n \text{ dans } I \\ Bx_{n+1} := (\alpha, \beta), \end{array} \right. \quad (2.61)$$

où k est un paramètre.

Proposition 2.40. Supposons vérifiées les conditions (2.53), (2.60), ainsi que l'une des conditions (2.39), (2.40), (2.41) ou (2.43). Supposons l'existence d'une sous-solution $\varphi \in D_0$ et d'une sur-solution $\psi \in D_0$, compatibles, de (2.37). Soit $J' := [\bar{\xi}, \hat{\xi}]$, le sous-intervalle compact de J , défini par (2.59). Alors, la suite (x_n) construite à partir de $x_0 := \varphi$ à l'aide de la formule de récurrence (2.61), où $k := k(J')$, est croissante et converge uniformément vers $\bar{x} \in D_\mu \cap D_{J'}$, la solution minimale de (2.37) dans $\langle \varphi, \psi \rangle$. La suite (y_n) construite à partir de $y_0 := \psi$ à l'aide de (2.61), où $k := k(J')$, est décroissante et converge uniformément vers $\hat{x} \in D_\mu \cap D_{J'}$, la solution maximale de (2.37) dans $\langle \varphi, \psi \rangle$.

Démonstration. Définissons sur $\bar{I} \times J'$ une fonction g par $(t, \xi) \mapsto f(t, \xi) + k\xi$; g satisfait aux conditions (2.53) et (2.54), avec $\mu = 0$. Dans $D_{J'}$, le problème (2.37) est équivalent au problème :

$$\left\{ \begin{array}{l} (L+k) x = g(\cdot, x) \text{ dans } I \\ Bx = (\alpha, \beta). \end{array} \right. \quad (2.62)$$

φ est une sous-solution et ψ une sur-solution de (2.62). Comme $k \geq 0$, nous sommes ramenés à la proposition 2.39, dans laquelle $\mu = 0$. Les solutions \bar{x} et \hat{x} ainsi obtenues sont dans D_μ , par le lemme 2.38 (où μ est le nombre donné par la condition (2.53)). ■

2me cas : $0 < \mu \leq 1$

La condition (2.58) s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Pour tout sous-intervalle compact } J' \text{ de } J, \text{ il existe un} \\ \text{nombre } k(J') \geq 0 \text{ tel que } \forall \xi_1, \xi_2 \in J', \text{ avec } \xi_1 < \xi_2, \\ \text{et } \forall t \in (a, b] : \\ f(t, \xi_2) - f(t, \xi_1) \geq - \frac{k(J')}{t-a} (\xi_2 - \xi_1). \end{array} \right. \quad (2.63)$$

Définissons une formule de récurrence :

$$\left\{ \begin{array}{l} (L + \frac{k}{t-a}) x_{n+1}(t) := f(t, x_n(t)) + \frac{k}{t-a} x_n(t) \quad t \in I \\ x_{n+1}(a) := 0, B_2 x_{n+1} := \beta, \end{array} \right. \quad (2.64)$$

où k est un paramètre.

Proposition 2.41. Supposons vérifiées les conditions (2.43), (2.53) et (2.63).

Supposons l'existence d'une sous-solution $\varphi \in D_\mu$ et d'une sur-solution $\psi \in D_\mu$, compatibles, de (2.37). Soit $J' := [\bar{\xi}, \hat{\xi}]$, le sous-intervalle compact de J , défini par (2.59). Alors la suite (x_n) construite à partir de $x_0 = \varphi$ à l'aide de la formule de récurrence (2.64), où $k := k(J')$, est croissante et converge uniformément vers $\bar{x} \in D_\mu \cap D_{J'}$, la solution minimale de (2.37) dans $\langle \varphi, \psi \rangle$. La suite (y_n) construite à partir de $y_0 = \psi$ à l'aide de (2.64), où $k := k(J')$, est décroissante et converge uniformément vers $\hat{x} \in D_\mu \cap D_{J'}$, la solution maximale de (2.37) dans $\langle \varphi, \psi \rangle$.

Démonstration. Définissons sur $(a, b] \times J'$ une fonction g par

$(t, \xi) \mapsto f(t, \xi) + \frac{k}{t-a} \xi$; g satisfait aux conditions (2.53) et (2.54), avec $\mu = 1$. Dans $D_{J'}$, le problème (2.37) est équivalent au problème :

$$\left\{ \begin{array}{l} (L + \frac{k}{t-a}) x(t) = g(t, x(t)) \quad t \in I \\ x(a) = 0, B_2 x = \beta. \end{array} \right. \quad (2.65)$$

φ est une sous-solution et ψ une sur-solution de (2.65). a est aussi un point singulier de l'équation $(L + \frac{k}{t-a}) y = 0$, dont le polynôme indiciel est le même que celui de l'équation $Ly = 0$. L'opérateur $L + \frac{k}{t-a}$ ($t \in I$) vérifie (2.43) et le domaine D_μ qui lui est associé par (2.45) est identique à celui

associé à L. Comme $c_0(t) + \frac{k}{t-a} \geq 0$ dans I, nous sommes ramenés à la proposition 2.39, avec $\mu = 1$. Les solutions \bar{x} et \hat{x} ainsi obtenues sont dans D_μ , par le lemme 2.38 (où μ est le nombre donné par la condition (2.53)). ■

Supposons que le point a soit un point régulier de l'équation $Ly = 0$, i.e. les coefficients c_0 et c_1 sont analytiques au voisinage de a. Alors, a est un point singulier régulier de l'équation $(L + \frac{k}{t-a})y = 0$, dont le polynôme indiciel est $P(r) = r^2 - r$, avec racines $r_1 = 1$ et $r_2 = 0$. L'opérateur $(L + \frac{k}{t-a})$, avec $k \geq 0$, vérifie (2.43) (i) et (iv). L'ensemble D_1 qui lui est associé par (2.45), avec $\mu = 1$, est :

$$\left\{ \begin{array}{l} D_1 = \{x \in E_{\varepsilon_0-1} \mid x' \in E_{\varepsilon_0}, x'' \in E_{\varepsilon_0+1}\} \\ \text{avec } \varepsilon_0 \in (0,1) \text{ arbitraire.} \end{array} \right. \quad (2.66)$$

Nous obtenons le corollaire suivant :

Proposition 2.42. Supposons vérifiées les hypothèses de la proposition 2.41, la condition (2.43) étant remplacée par la condition (2.41) et l'ensemble D_1 étant donné par (2.66). Alors les mêmes conclusions sont valables; les solutions \bar{x} et \hat{x} sont dans l'ensemble D_μ défini par (2.44) et dans D_1 donné par (2.66). Autrement dit :

$$\begin{array}{l} \text{si } \mu < 1 : \bar{x}, \hat{x} \in \{x \in E_{\varepsilon_0-1} \mid x' \in E_0, x'' \in E_\mu\} \\ \text{si } \mu = 1 : \bar{x}, \hat{x} \in \{x \in E_{\varepsilon_0-1} \mid x' \in E_{\varepsilon_0}, x'' \in E_1\} \end{array}$$

avec $\varepsilon_0 \in (0,1)$ arbitraire.

3me cas : $1 < \mu < 2$

La condition (2.58) est :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Pour tout sous-intervalle compact } J' \text{ de } J, \text{ il existe un} \\ \text{nombre } k(J') \geq 0 \text{ tel que } \forall \xi_1, \xi_2 \in J', \text{ avec } \xi_1 < \xi_2, \\ \text{et } \forall t \in (a, b] : \\ f(t, \xi_2) - f(t, \xi_1) \geq -\frac{k(J')}{(t-a)^2} (\xi_2 - \xi_1). \end{array} \right. \quad (2.67)$$

Définissons une formule de récurrence :

$$\begin{cases} (L + \frac{k}{(t-a)^2}) x_{n+1}(t) := f(t, x_n(t)) + \frac{k}{(t-a)^2} x_n(t) & t \in I \\ x_{n+1}(a) := 0, B_2 x_{n+1} := \beta \end{cases} \quad (2.68)$$

où k est un paramètre.

Contrairement aux cas précédents, nous ne pouvons plus nous ramener à la proposition 2.39. Nous nous appuyons sur les lemmes suivants :

Lemme 2.43. Soit (x_n) une suite de fonctions dans $C(\bar{I})$, telle que :

- (i) la suite (x_n) est monotone
- (ii) $\forall t \in \bar{I}, \exists \gamma(t) \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall n \in \mathbb{N} : |x_n(t)| \leq \gamma(t)$
- (iii) $\exists \mu < 1$ tel que $\forall n \in \mathbb{N} : x'_n \in E_\mu$
- (iv) $\exists \gamma_0 \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall n \in \mathbb{N} : \|x'_n\|_\mu \leq \gamma_0$.

Alors la suite (x_n) converge uniformément dans \bar{I} .

Démonstration. (i) Etablissons l'équicontinuité de la famille $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ en tout point $t_0 \in \bar{I}$. Prenons d'abord $t_0 \in (a, b]$ et fixons $\varepsilon > 0$. Soit $\delta_1 := \frac{t_0 - a}{2}$, $\gamma_1 := \max\{(t-a)^{-\mu} \mid t_0 - \delta_1 \leq t \leq t_0 + \delta_1\}$, $\delta_2 := \frac{\varepsilon}{\gamma_0 \gamma_1}$, $\delta := \min(\delta_1, \delta_2) > 0$. Alors $t \in (a, b]$, avec $|t - t_0| \leq \delta$, implique : $|x_n(t) - x_n(t_0)| = |\int_{t_0}^t x'_n(s) ds| \leq \|x'_n\|_\mu |\int_{t_0}^t (s-a)^{-\mu} ds| \leq \gamma_0 \gamma_1 |t - t_0| \leq \gamma_0 \gamma_1 \delta_2 = \varepsilon$. Prenons $t_0 = a$ et fixons un $\varepsilon > 0$. Soit $\delta := \left[\frac{(1-\mu)\varepsilon}{\gamma_0} \right]^{\frac{1}{1-\mu}}$. Alors $a \leq t \leq a + \delta$ implique : $|x_n(t) - x_n(a)| \leq \frac{\gamma_0}{1-\mu} (t-a)^{1-\mu} \leq \frac{\gamma_0}{1-\mu} \delta^{1-\mu} = \varepsilon$.

(ii) Par le théorème d'Arzelà-Ascoli, la suite (x_n) contient une sous-suite convergente. Grâce à l'hypothèse (i) et à la proposition 1.8, la suite (x_n) converge uniformément dans I . ■

Lemme 2.44. Soit $x_1, x_2 \in E_\mu$, avec $\mu < 0$. Alors $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}$, avec $\varepsilon > \mu$: $\langle x_1, x_2 \rangle \subset E_\varepsilon$; de plus $x \in \langle x_1, x_2 \rangle$ implique que $\lim_{t \downarrow a} (t-a)^\varepsilon x(t) = 0$.

Démonstration. Soit $x \in \langle x_1, x_2 \rangle$. Alors $\forall t \in (a, b] : (t-a)^\mu |x(t)| \leq \max(\|x_1\|_\mu, \|x_2\|_\mu)$. Soit $\varepsilon > \mu$, alors $\forall t \in (a, b] : (t-a)^\varepsilon |x(t)| = (t-a)^{\varepsilon-\mu} (t-a)^\mu |x(t)| \leq \text{cste} (t-a)^{\varepsilon-\mu}$. Comme $\varepsilon - \mu > 0$, $\lim_{t \downarrow a} (t-a)^\varepsilon x(t) = 0$ et $x \in E_\varepsilon$. ■

Proposition 2.45. Supposons vérifiées les conditions (2.43), (2.53) et (2.67). Supposons l'existence d'une sous-solution $\varphi \in D_\mu$ et d'une sur-solution $\psi \in D_\mu$, compatibles, de (2.37). Soit $J' := [\bar{\xi}, \hat{\xi}]$, le sous-intervalle compact de J , défini par (2.59). Alors la suite (x_n) construite à partir de $x_0 := \varphi$ à l'aide de la formule de récurrence (2.68), où $k := k(J')$, est croissante et converge uniformément vers $\bar{x} \in D_\mu \cap D_{J'}$, la solution minimale de (2.37) dans $\langle \varphi, \psi \rangle$. La suite (y_n) construite à partir de $y_0 := \psi$ à l'aide de (2.68), où $k := k(J')$, est décroissante et converge uniformément vers $\hat{x} \in D_\mu \cap D_{J'}$, la solution maximale de (2.37) dans $\langle \varphi, \psi \rangle$.

Démonstration. (i) Soit F l'application définie par (2.36) à partir de f . Par la proposition 2.37, $F : D_J \subset E_0 \rightarrow E_\mu$ est continue et applique un borné dans un borné. Définissons sur $(a, b] \times J'$ une fonction g par $(t, \xi) \mapsto f(t, \xi) + \frac{k}{(t-a)^2} \xi$; g satisfait à (2.54). Soit $r_1 > 0$ la plus grande racine du polynôme indiciel de l'équation $Ly = 0$. Soit μ_0 le nombre défini dans le lemme 2.26, i.e.

$$\mu_0 = \begin{cases} 2 - r_1 & \mu < 2 - r_1 \\ 2 - r_1 + \varepsilon_0 (\varepsilon_0 \in (0, r_1) \text{ arbitraire}) & \mu = 2 - r_1 \\ \mu & \mu > 2 - r_1. \end{cases}$$

Choisissons arbitrairement un nombre ρ dans $(\mu_0 - 2, 0)$. Alors $\rho > \mu - 2$ et $\rho > -r_1$. Définissons un ensemble $D := E_\rho \cap \langle \varphi, \psi \rangle$. $D \neq \emptyset$ car $\varphi, \psi \in D$; en effet, $\varphi, \psi \in D_\mu$ par hypothèse, donc $\varphi, \psi \in E_{\mu_0-2}$ et comme $\mu_0 - 2 < \rho$: $E_{\mu_0-2} \subset E_\rho$. Soit G l'application définie par (2.36), à partir de g , sur D . C'est une application croissante. Montrons que $G : D \subset E_\rho \rightarrow E_{\rho+2}$, que l'application est continue et que $G(D)$ est borné dans $E_{\rho+2}$. Soit $x \in D$, alors $\lim_{t \downarrow a} (t-a)^{\rho+2} (G(x))(t) = k \lim_{t \downarrow a} (t-a)^\rho x(t)$ puisque $\rho + 2 - \mu > 0$; donc $G(x) \in E_{\rho+2}$. G est continue puisque $\forall x_1, x_2 \in D : \|G(x_1) - G(x_2)\|_{\rho+2} \leq \text{cste} \|F(x_1) - F(x_2)\|_\mu + k \|x_1 - x_2\|_\rho$. D est un segment conique dans E_ρ ; comme le cône P_ρ de E_ρ est normal, D est borné dans E_ρ (proposition 1.2). De même D est borné dans E_0 . Alors $G(D)$ est borné puisque $\forall x \in D$:

$$\|G(x)\|_{\rho+2} \leq \text{cste} \|F(x)\|_\mu + k \|x\|_\rho.$$

(ii) Soit $P(r)$, le polynôme indiciel de l'équation $Ly = 0$. Le polynôme indiciel

de l'équation $(L + \frac{k}{(t-a)^2})y(t) = 0$ est $P(r) - k$. Ses racines sont r_1' , r_2' et puisque $k \geq 0$: $r_1' \geq r_1 > 0$. L'opérateur $L + \frac{k}{(t-a)^2}$ ($t \in I$) satisfait à (2.43) (i) et (iv). Soit μ_0' le nombre qui lui est associé par le lemme 2.26, i.e.

$$\mu_0' := \begin{cases} 2 - r_1' & \mu < 2 - r_1' \\ 2 - r_1' + \varepsilon' \ (\varepsilon' \in (0, r_1') \text{ arbitraire}) & \mu = 2 - r_1' \\ \mu & \mu > 2 - r_1'. \end{cases} \quad (2.69)$$

Soit D_μ' l'ensemble défini par (2.45), i.e.

$$D_\mu' := \{x \in E_{\mu_0'-2} \mid x' \in E_{\mu_0'-1}, x'' \in E_{\mu_0'}\}. \quad (2.70)$$

Nous avons vu aux §§ 2.4 et 2.5 qu'il existe une fonction u_2 et, pour tout $\mu < 2$, un opérateur linéaire K_μ tels que :

- a) $K_\mu \in L_+(E_\mu, E_{\mu_0'-2})$; $\text{Im}(K_\mu) \subset D_\mu'$.
- b) $u_2 \in D_\mu'$ et $B_2 u_2 = 1$.
- c) Si $g \in E_\mu$, alors $x := K_\mu g + \beta u_2$ est l'unique solution du problème linéaire :

$$\begin{cases} (L + \frac{k}{(t-a)^2}) x(t) = g(t) & t \in I \\ x(a) = 0, B_2 x = \beta. \end{cases} \quad (2.71)$$

- d) Si $g \in E_\mu$, $x \in D_\mu'$ satisfont à

$$\begin{cases} (L + \frac{k}{(t-a)^2}) x(t) \geq g(t) & t \in I \\ x(a) = 0, B_2 x \geq \beta, \end{cases} \quad (2.72)$$

alors $x \geq K_\mu g + \beta u_2$. (Même résultat avec \geq remplacé par \leq).

(iii) Montrons que $D_\mu \subset D_{\rho+2}'$. Comme $\rho > -r_1 \geq -r_1'$: $\rho + 2 > 2 - r_1'$ et le nombre μ_0' défini par (2.69) pour $\mu = \rho + 2$ est $\mu_0' = \rho + 2$. Alors

$$D_{\rho+2}' = \{x \in E_\rho \mid x' \in E_{\rho+1}, x'' \in E_{\rho+2}\}. \quad (2.73)$$

Puisque $\rho > \mu_0 - 2$: $D_{\rho+2}' \supset D_\mu$.

(iv) Définissons une application H sur D :

$$\forall x \in D : H(x) := K_{\rho+2} G(x) + \beta u_2. \quad (2.74)$$

Grâce aux propriétés (a) et (b) et à (2.73), $H : D \subset E_\rho \rightarrow D_{\rho+2}' \subset E_\rho$ est une application continue et croissante.

(v) La sous-solution φ de (2.37) est dans E_ρ , donc $G(\varphi) \in E_{\rho+2}$. Par la propriété (d) : $\varphi \leq K_{\rho+2} G(\varphi) + \beta u_2 = H(\varphi)$. De même, $\psi \geq H(\psi)$. Soit $x \in D$, alors $H(x) \in \langle \varphi, \psi \rangle$ puisque H est croissante; donc $H(D) \subset D$. Par la proposition 1.13, la suite (x_n) définie par $x_0 := \varphi$, $x_{n+1} := H(x_n)$ est croissante et la suite (y_n) définie par $y_0 := \psi$, $y_{n+1} := H(y_n)$ est décroissante; $\forall n \in \mathbb{N}$: $\varphi \leq x_n \leq y_n \leq \psi$.

(vi) A l'aide du lemme 2.43, nous établissons la convergence dans E_0 de la suite (x_n) . Par le lemme 2.29 : $x'_{n+1} = (K_{\rho+2} G(x_n))' + \beta u_2' \in E_{\rho+1}$ et $\|x'_{n+1}\|_{\rho+1} \leq \text{cste} \|G(x_n)\|_{\rho+2} + \text{cste}$. Comme $G(D)$ est borné dans $E_{\rho+2}$, il existe un $\gamma_0 \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$: $\|x'_{n+1}\|_{\rho+1} \leq \gamma_0$. Les hypothèses du lemme 2.43 sont vérifiées (avec $\mu = \rho + 1 < 1$). Donc la suite (x_n) converge dans E_0 vers \bar{x} . De même la suite (y_n) converge dans E_0 vers \hat{x} et $\varphi \leq \bar{x} \leq \hat{x} \leq \psi$.

(vii) Montrons que $\bar{x} \in D$ et $x_n \rightarrow \bar{x}$ pour la norme de E_ρ . (De même $\hat{x} \in D$ et $y_n \rightarrow \hat{x}$ pour la norme de E_ρ). Comme $\bar{x} \in \langle \varphi, \psi \rangle$ et $\varphi, \psi \in E_{\mu_0-2}$, le lemme 2.44 nous donne : $\bar{x} \in E_\rho$ et $\lim_{t \downarrow a} (t-a)^\rho \bar{x}(t) = 0$. Définissons une fonction $z \in E_0$ par : $z(a) := 0$ et $\forall t \in (a, b]$: $z(t) := (t-a)^\rho \bar{x}(t)$. Soit (z_n) la suite de fonctions définies par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $z_n(a) := 0$ et $z_n(t) := (t-a)^\rho x_n(t)$, pour $t \in (a, b]$. Par le lemme 2.44, $\lim_{t \downarrow a} z_n(t) = 0$; donc $z_n \in E_0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Puisque $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n(a) = 0 = z(a)$ et puisque la suite (x_n) converge uniformément vers \bar{x} , la suite (z_n) converge simplement vers z . La suite (z_n) est croissante puisque (x_n) l'est. Par le théorème de Dini, z_n converge uniformément dans \bar{I} vers z . Donc $\|x_n - \bar{x}\|_\rho = \|z_n - z\|_0 \rightarrow 0$.

(viii) Par la proposition 1.15, \bar{x} est la solution minimale et \hat{x} la solution maximale dans D de l'équation :

$$x = H(x). \tag{2.75}$$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = H(x_n) = K_{\rho+2} G(x_n) + \beta u_2$. Par la propriété (c) :

$$\begin{cases} (L + \frac{k}{(t-a)^2}) x_{n+1}(t) = (G(x_n))(t) & t \in I \\ x_{n+1}(a) = 0, B_2 x_{n+1} = \beta. \end{cases}$$

Ainsi x_{n+1} et y_{n+1} vérifient (2.68).

(ix) Toute solution x de (2.75) est une solution de (2.37). Ainsi $\bar{x}, \hat{x} \in D_\mu$, par le lemme 2.38. Réciproquement, toute solution de (2.37), étant dans D_μ , est aussi une solution de (2.75). Ce qui démontre que \bar{x} est la solution minimale et \hat{x} la solution maximale de (2.37) dans $\langle \phi, \psi \rangle$. ■

Remarque. Il n'est pas évident à priori que \bar{x} ou \hat{x} soient dans E_ρ ($\rho < 0$), car E_ρ n'est pas fermé dans E_0 . En effet, soit (z_n) la suite de fonctions dans E_ρ définies par : $\forall n \in \mathbb{N}, z_n(a) := 0$ et $z_n(t) := (t-a)^{-\rho+1/n} \ln(t-a)$, $t \in (a,b]$. Cette suite converge, uniformément dans $[a,b]$, vers une fonction z : $z(a) = 0$ et $\forall t \in (a,b] : z(t) = (t-a)^{-\rho} \ln(t-a)$. Mais $z \notin E_\rho$.

Au lieu de la condition (2.43), prenons la condition (2.41), i.e. supposons les coefficients c_0 et c_1 analytiques au voisinage de a . Nous pouvons adapter la proposition 2.45 à ce cas.

Proposition 2.46. Supposons vérifiées les conditions (2.41), (2.53) et (2.67). Soit D'' l'ensemble défini par :

$$D'' := \{x \in E_{\mu-2} \mid x' \in E_{\mu-1}, x'' \in E_\mu\}. \quad (2.76)$$

Supposons l'existence d'une sous-solution $\phi \in D''$ et d'une sur-solution $\psi \in D''$, compatibles, de (2.37). Soit $J' := [\bar{\xi}, \hat{\xi}]$, le sous-intervalle compact de J , défini par (2.59). Alors la suite (x_n) construite à partir de $x_0 := \phi$ à l'aide de la formule de récurrence (2.68), où $k := k(J')$, est croissante et converge uniformément vers $\bar{x} \in D'' \cap D_{J'}$, la solution minimale de (2.37) dans $\langle \phi, \psi \rangle$. La suite (y_n) construite à partir de $y_0 := \psi$ à l'aide de (2.68), où $k := k(J')$, est décroissante et converge uniformément vers $\hat{x} \in D'' \cap D_{J'}$, la solution maximale de (2.37) dans $\langle \phi, \psi \rangle$.

Démonstration. a est un point singulier régulier de l'équation

$(L + \frac{k}{(t-a)^2}) y(t) = 0$. Son polynôme indiciel est $P(r) = r^2 - r - k$, avec la racine positive $r_1' = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1+4k} \geq 1$. Choisissons un $\rho \in (\mu-2, 0)$. Alors $\rho > \mu - 2 > -1 \geq -r_1'$ et $D'' \subset D_{\rho+2}'$. Le reste de la démonstration ne présente pas de difficulté. Il suffit de reprendre celle de la proposition 2.45. Cependant le point (ix) de cette démonstration doit être reconsidéré. Toute solution x de (2.75) est une solution de (2.37). Par le lemme 2.38, \bar{x} et \hat{x} sont dans l'ensemble D_μ défini par (2.44). Montrons que toute solution

$x \in D_\mu$ de (2.37) est dans D'' , et par conséquent une solution de (2.75). Les coefficients c_0 et c_1 étant analytiques au voisinage de a , la solution particulière u_2 de l'équation $Ly = 0$ l'est aussi. Nous avons choisi u_2 telle que $u_2(a) = 0$ (lemme 2.7), donc $u_2 \in E_{-1} \subset E_{\mu-2}$ et $u_2', u_2'' \in E_0 \subset E_{\mu-1}$; ainsi $u_2 \in D''$. Par le lemme 2.20 et la proposition 2.22, $x \in D''$. Nous avons ainsi démontré que \bar{x} est la solution minimale et \hat{x} la solution maximale de (2.37) dans $\langle \varphi, \psi \rangle$. De plus $\bar{x}, \hat{x} \in D''$. ■

2.7.4 Non-linéarité décroissante

Nous allons imposer une condition de décroissance à f :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall t \in (a, b], \text{ la fonction } f(t, \cdot) : J \rightarrow \mathbb{R} \text{ est} \\ \text{décroissante.} \end{array} \right. \quad (2.77)$$

Nous construisons une suite alternée à l'aide de la formule de récurrence (2.55) :

$$\left\{ \begin{array}{l} Lx_{n+1} := f(\cdot, x_n) \quad \text{dans } I \\ Bx_{n+1} := (\alpha, \beta). \end{array} \right.$$

Proposition 2.47. Supposons vérifiées les conditions (2.53) et (2.77), ainsi que l'une des conditions (2.39) à (2.43). Supposons l'existence d'une sous-solution stricte $\varphi \in D_\mu$ de (2.37). Posons $x_0 := \varphi$ et définissons x_1 à l'aide de la formule de récurrence (2.55). Supposons que x_1 soit dans D_J et construisons x_2 par (2.55). Si $x_2 \geq \varphi$, alors :

(i) La suite (x_n) définie par (2.55), à partir de $x_0 := \varphi$, est alternée. La sous-suite (x_{2n}) est croissante et converge uniformément vers $\bar{x} \in D_\mu \cap D_J$. La sous-suite (x_{2n+1}) est décroissante et converge uniformément vers $\hat{x} \in D_\mu \cap D_J$.

(ii) $\varphi \leq \bar{x} \leq \hat{x} \leq x_1$ et \bar{x}, \hat{x} vérifient :

$$\left\{ \begin{array}{l} L\bar{x} = f(\cdot, \hat{x}) \text{ et } L\hat{x} = f(\cdot, \bar{x}) \text{ dans } I \\ B\bar{x} = B\hat{x} = (\alpha, \beta). \end{array} \right. \quad (2.78)$$

(iii) Le problème (2.37) a au moins une solution dans $D_\mu \cap \langle \bar{x}, \hat{x} \rangle$ et n'en a pas dans $\langle \varphi, x_1 \rangle \setminus \langle \bar{x}, \hat{x} \rangle$.

Démonstration. Soit F l'application définie par (2.36) à partir de f . Grâce aux conditions (2.53) et (2.77), $F : D_J \rightarrow E_\mu$ est continue, décroissante et applique un sous-ensemble borné de D_J dans un sous-ensemble borné de E_μ . Définissons une application H par :

$$\forall x \in D_J \quad H(x) := K_\mu F(x) + w. \quad (2.79)$$

Par (2.46) et (2.48), $H : D_J \rightarrow D_\mu \subset E_0$; H est complètement continue et décroissante. Par (2.50) : $\varphi \leq H(\varphi)$. Comme φ est une sous-solution stricte de (2.37) : $\varphi < H(\varphi)$. Soit x_1 défini par (2.55); $x_1 \in D_J$ par hypothèse et vérifie $x_1 = H(x_0) \in D_\mu$. Soit x_2 défini par (2.55); alors $x_2 \in \langle \varphi, x_1 \rangle$ et $H(\langle \varphi, x_1 \rangle) \subset \langle \varphi, x_1 \rangle$. Par la proposition 1.16, la suite (x_n) définie par $x_0 := \varphi$, $x_{n+1} := H(x_n)$ est alternée et $\forall n \in \mathbb{N} : x_0 \leq x_{2n} \leq x_{2n+1} \leq x_1$. Cette suite est identique à celle définie par (2.55), à partir de $x_0 := \varphi$. Le cône P_0 de E_0 est normal. Les propositions 1.18 et 1.19 impliquent que la sous-suite (x_{2n}) converge uniformément vers \bar{x} , que la sous-suite (x_{2n+1}) converge uniformément vers \hat{x} et que $x_0 \leq \bar{x} = H(\hat{x}) \leq H(\bar{x}) = \hat{x} \leq x_1$. De plus, l'équation $x = H(x)$ a une solution dans $\langle \bar{x}, \hat{x} \rangle$ et n'en a pas dans $\langle x_0, x_1 \rangle \setminus \langle \bar{x}, \hat{x} \rangle$. Par (2.49), \bar{x} et \hat{x} vérifient (2.78) et $\bar{x}, \hat{x} \in D_\mu$. Dans D_J , tout point fixe de H est une solution de (2.37), et réciproquement. ■

Il est intéressant de savoir si ces limites \bar{x} et \hat{x} sont égales. Si tel est le cas, $\bar{x} = \hat{x}$ est l'unique solution de (2.37) dans $\langle \varphi, \psi \rangle$. Nous aborderons cette question dans les propositions 2.50 et 2.51.

Définissons l'espace de fonctions :

$$C_B^1(\bar{I}) := \{x \in C^1(\bar{I}) \mid Bx = 0\}, \text{ où } B \text{ vérifie (2.5)}. \quad (2.80)$$

Muni de la norme de $C^1(\bar{I})$ et du cône

$$P := \{x \in C_B^1(\bar{I}) \mid \forall t \in \bar{I} : x(t) \geq 0\}$$

c'est un espace de Banach ordonné. Si $B_{12} = B_{22} = 0$, nous retrouvons l'espace $C_0^1(\bar{I})$ de l'exemple 21, §1.4. Définissons les sous-ensembles de P suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} A_1 := \{x \in P \mid \forall t \in \bar{I} : x(t) > 0\} \\ A_2 := \{x \in P \mid \forall t \in (a,b) : x(t) > 0, x(a) = 0, x'(a) > 0\} \\ A_3 := \{x \in P \mid \forall t \in [a,b) : x(t) > 0, x(b) = 0, x'(b) < 0\} \\ A_4 := \{x \in P \mid \forall t \in I : x(t) > 0, x(a) = x(b) = 0, x'(a) > 0, x'(b) < 0\} \\ A := \bigcup_{i=1}^4 A_i. \end{array} \right. \quad (2.81)$$

Lemme 2.48. Le cône P de $C_B^1(\bar{I})$ est solide et $\overset{\circ}{P} = A$, l'ensemble défini par (2.81).

Démonstration. (i) $A \neq \emptyset$. La fonction x_0 définie sur \bar{I} par $t \mapsto B_{11}B_{21}(b-a)(t-a)(b-t) + B_{11}B_{22}(t-a)(2b-a-t) + B_{12}B_{21}(b-t)(t-2a+b) + 2(b-a)B_{12}B_{22}$ est dans A ; la condition (2.5) fait que $x_0 \neq 0$.

(ii) $A \subset \overset{\circ}{P}$. Si $x \in A_1$, posons $\rho := \min \{x(t) \mid t \in \bar{I}\}$. Si $x \in A_2$, $\exists t_1 \in I$ tel que $x'(t) \geq \frac{1}{2} x'(a)$ pour $t \in [a, t_1]$; posons $\rho := \min\{\frac{1}{2} x'(a), \min(x(t) \mid t \in [t_1, b])\}$. Si $x \in A_3$, $\exists t_2 \in I$ tel que $x'(t) \leq \frac{1}{2} x'(b)$ pour $t \in [t_2, b]$; posons $\rho := \min\{-\frac{1}{2} x'(b), \min(x(t) \mid t \in [a, t_2])\}$. Si $x \in A_4$, $\exists t_1, t_2 \in I$, avec $t_1 < t_2$, tels que $x'(t) \geq \frac{1}{2} x'(a)$ pour $t \in [a, t_1]$ et $x'(t) \leq \frac{1}{2} x'(b)$ pour $t \in [t_2, b]$; posons $\rho := \min\{\frac{1}{2} x'(a), -\frac{1}{2} x'(b), \min(x(t) \mid t \in [t_1, t_2])\}$. Dans chaque cas : $\rho > 0$. Soit $y \in C_B^1(\bar{I})$ tel que $\|x - y\|_{C^1} \leq \rho$. Alors $\forall t \in \bar{I} : x(t) - \rho \leq y(t)$ et $x'(t) - \rho \leq y'(t) \leq x'(t) + \rho$. Prenant x dans l'un des A_i , nous obtenons chaque fois $y \in P$.

(iii) $x \in P \setminus A$ implique $x \notin \overset{\circ}{P}$. Soit $x \in P \setminus A$ et $\rho > 0$ quelconques. Soit $y := x - \rho d x_0$, où $d := \frac{1}{2} (\|x_0\|_{C^1})^{-1}$. Alors $\|y - x\|_{C^1} = \frac{1}{2} \rho$. Comme $x \in P \setminus A$, il existe $t^* \in \bar{I}$ tel que $x(t^*) = x'(t^*) = 0$. De $y(t^*) = -\rho d x_0(t^*)$ et $y'(t^*) = -\rho d x_0'(t^*)$, nous tirons que $y \notin P$, donc $x \notin \overset{\circ}{P}$. ■

Lemme 2.49. Supposons vérifiée la condition (2.39). Soit P le cône solide dans l'espace $C_B^1(\bar{I})$ défini par (2.80) et P_μ le cône dans E_μ . Alors $K_\mu(\overset{\circ}{P}_\mu) \subset \overset{\circ}{P}$.

Démonstration. Avec la condition (2.39), $D_\mu := \{x \in C^1(\bar{I}) \mid x'' \in E_\mu\}$ et $f \in E_\mu$ entraîne $K_\mu f \in D_\mu$, $BK_\mu f = 0$. D'où $K_\mu : E_\mu \rightarrow C_B^1(\bar{I})$. Par le lemme 2.14, $K_\mu(P_\mu) \subset P$. Soit $f \in \overset{\circ}{P}_\mu$ et $x := K_\mu f$. Alors $Lx = f$ et $Bx = 0$. Par la proposition 2.3, $\forall t \in I : x(t) > 0$. Si $x(a) = 0$, alors 0 est un minimum de $x(t)$ dans \bar{I} ; d'où $x'(a) > 0$ par la proposition 2.2. Si $x(b) = 0$, alors $x'(b) < 0$. Ainsi $x \in \overset{\circ}{P}$. ■

Proposition 2.50. Supposons vérifiées les conditions (2.39), (2.53) et (2.77), avec $0 \in J$. Soit \bar{x} et $\hat{x} \in D(L) \cap D_J$, tels que :

(i) $0 < \bar{x} \leq \hat{x}$.

(ii) $L\bar{x} = f(\cdot, \hat{x})$ et $L\hat{x} = f(\cdot, \bar{x})$ dans I

$$B\bar{x} = B\hat{x} = 0.$$

(iii) f vérifie :

$$\forall \theta \in (0,1), \forall \xi \in (0, \|\hat{x}\|_0] : f(\cdot, \xi) < \theta f(\cdot, \theta\xi) \text{ dans } I. \quad (2.82)$$

(iv) $f(\cdot, \hat{x}) \geq 0$ dans I .

Alors $\bar{x} = \hat{x}$.

Démonstration. (i) L'application F , définie par (2.36) à partir de f , est décroissante. Soit H l'application définie par :

$$\forall x \in D := \langle 0, \hat{x} \rangle \cap C_B^1(\bar{I}), H(x) := K_\mu F(x). \quad (2.83)$$

D est un ensemble étoilé par rapport à l'origine; \bar{x} et \hat{x} sont dans D et satisfont à $\bar{x} = H(\hat{x})$, $\hat{x} = H(\bar{x})$. $H : D \rightarrow C_B^1(\bar{I})$ est décroissante. Avec l'hypothèse (iv), $F(\hat{x}) \geq 0$. Si $F(\hat{x}) = 0$, alors $H(\hat{x}) = \bar{x} = 0$. Mais $\bar{x} > 0$ par hypothèse, d'où $F(\hat{x}) > 0$ et $\bar{x} \in \overset{\circ}{P}$ par le lemme 2.49.

(ii) Montrons que H est fortement décroissante dans $D \cap \langle \bar{x}, \hat{x} \rangle$. Comme K_μ est fortement positif, il suffit de vérifier que F est strictement décroissante dans $D \cap \langle \bar{x}, \hat{x} \rangle$. Supposons, ab absurdo, qu'il existe $x_1, x_2 \in D \cap \langle \bar{x}, \hat{x} \rangle$, avec $x_1 < x_2$, tels que $F(x_1) = F(x_2)$. Alors $\forall t \in I, f(t, x_1(t)) = f(t, x_2(t))$. Puisque $\bar{x} \in \overset{\circ}{P}$, il existe un $t^* \in I$ tel que $0 < x_1(t^*) < x_2(t^*)$. Posons $\theta := \frac{x_1(t^*)}{x_2(t^*)}$; alors $\theta \in (0,1)$. Avec l'hypothèse (iii), $\theta f(t^*, x_1(t^*)) = \theta f(t^*, \theta x_2(t^*)) > f(t^*, x_2(t^*))$, d'où la contradiction.

(iii) Montrons que :

$$\forall x \in \dot{D}, \forall \theta \in (0,1) : H(x) < \theta H(\theta x). \quad (2.84)$$

Avec l'hypothèse (iii), $\forall x \in \dot{D}$ et $\forall \theta \in (0,1) : F(x) \leq \theta F(\theta x)$. Montrons que l'inégalité est stricte :

$$\forall x \in \dot{D} \text{ et } \forall \theta \in (0,1) : F(x) < \theta F(\theta x). \quad (2.85)$$

Supposons, ab absurdo, qu'il existe $x \in \dot{D}$ et $\theta \in (0,1)$ tels que $F(x) = \theta F(\theta x)$. Alors $\forall t \in I, f(t, x(t)) = \theta f(t, \theta x(t))$. Puisque $x > 0$, il existe $t^* \in I$ tel que $x(t^*) > 0$. D'où $f(t^*, x(t^*)) = \theta f(t^*, \theta x(t^*)) > f(t^*, x(t^*))$ et la contradiction. K_μ étant fortement positif, nous obtenons (2.84).

(iv) La proposition 1.44, appliquée à H, dans l'espace de Banach $C_B^1(\bar{I})$, ordonné par le cône solide P, nous donne le résultat. ■

Remarque. Les hypothèses peuvent être affaiblies. Au lieu de (iii), il suffit que F vérifie (2.85) et soit strictement décroissante. L'hypothèse (iv) est alors superflue.

Proposition 2.51. Supposons vérifiées les conditions (2.39), (2.53) et (2.77), avec $0 \in J$. Soit $\bar{x}, \hat{x} \in D(L) \cap D_J$, tels que :

(i) $0 < \bar{x} \leq \hat{x}$.

(ii) $L\bar{x} = f(\cdot, \hat{x})$ et $L\hat{x} = f(\cdot, \bar{x})$ dans I

$$B\bar{x} = B\hat{x} = 0.$$

(iii) f vérifie :

$$\forall \eta \in (0,1), \forall \xi \in (0, \|\hat{x}\|_0] : f(\cdot, \xi) > \eta f(\cdot, \eta\xi) \text{ dans I.} \quad (2.86)$$

(iv) $f(\cdot, \hat{x}) \geq 0$ dans I.

Alors $\bar{x} = \hat{x}$.

La démonstration se calque sur celle de la proposition 2.50. Il s'agit de se ramener cette fois à la proposition 1.45. L'hypothèse (iii) peut être affaiblie. Il suffit que F soit strictement décroissante et vérifie

$$\forall x \in \dot{D} \text{ et } \forall \eta \in (0,1) : F(x) > \eta F(\eta x). \quad (2.87)$$

L'hypothèse (iv) doit être maintenue pour démontrer que $\bar{x} \in \overset{0}{P}$.

Remarque. Dans le lemme 2.49 et les propositions 2.50, 2.51, nous avons imposé la condition (2.39) pour assurer que $\bar{x}, \hat{x} \in C^1(\bar{I})$ et que $h : t \mapsto c_1(t) + (t-a) c_0(t)$ est bornée supérieurement dans \bar{I} . Supposons maintenant la condition (2.43) vérifiée. Au voisinage de a, $h(t) = -\frac{1}{t-a} (p(t) + q(t)) = -\frac{p_0+q_0}{t-a} + \text{fonction analytique}$. h est bornée supérieurement dans \bar{I} si et seulement si $p_0 + q_0 \geq 0$. Par le lemme 2.33, la racine r_1 du polynôme indiciel est dans $(0,1]$. Si $r_1 = 1$ et $\mu < 1 : p_0 + q_0 = 0$ et $\bar{x}, \hat{x} \in C^1(\bar{I})$, par le lemme 2.29. Donc, la condition (2.39) peut être remplacée par la condition (2.43), avec $\mu < 1$ et $p_0 + q_0 = 0$ (i.e. $r_1 = 1$). Les propositions 2.50 et 2.51 sont encore valables dans ce cas.

2.7.5 Méthode de Newton

Nous allons appliquer au problème (2.37) les résultats des §§1.8.3 et 1.8.4, concernant la méthode de Newton monotone et la méthode simplifiée. Nous considérons uniquement les conditions aux limites $\alpha = \beta = 0$ et supposons vérifiée la condition (2.39), avec $\mu = 0$. Alors $D(L) = C^2(\bar{I})$.

Désignons par \tilde{L} la restriction de L au domaine

$$\tilde{D} := \{x \in C^2(\bar{I}) \mid Bx = 0\}.$$

\tilde{L} est un opérateur linéaire : $\tilde{D} \subset E_0 \rightarrow E_0$.

Nous supposons $f \in C(\bar{I} \times J)$ et désignons par F son opérateur de Nemyckiĭ.

Définissons un sous-ensemble de D_J par :

$$\left\{ \begin{array}{l} D_J^+ := \{x \in D_J \mid \forall t \in \bar{I} : x(t) < \bar{E}_2\}, \text{ si} \\ J = [\bar{E}_1, \bar{E}_2] \text{ ou } (-\infty, \bar{E}_2] \\ \text{ou} \\ D_J^+ := D_J, \text{ si } J \text{ est non borné à droite.} \end{array} \right. \quad (2.88)$$

Alors D_J^+ est un ensemble P_0 -ouvert dans E_0 .

Lemme 2.52. Soit $f \in C(\bar{I} \times J)$, une fonction différentiable par rapport à la seconde variable, qui vérifie :

$$\left\{ \begin{array}{l} D_2 f \in C(\bar{I} \times J) \text{ et} \\ \text{pour tout } t \in \bar{I}, \text{ la fonction } D_2 f(t, \cdot) : J \rightarrow \mathbb{R} \text{ est} \\ \text{négative et décroissante.} \end{array} \right. \quad (2.89)$$

Alors l'opérateur de Nemyckiĭ F de f est convexe pour l'ordre et continûment différentiable à droite dans D_J^+ . La dérivée à droite $F'_+(x)$, pour $x \in D_J^+$, vérifie :

$$\forall h \in E_0, \forall t \in \bar{I} : (F'_+(x)h)(t) = D_2 f(t, x(t))h(t); \quad (2.90)$$

de plus $F'_+(x)(P_0) \subset -P_0$.

Démonstration. (i) $\forall t \in \bar{I}, \forall x \in D_J^+, \forall h \in P_0$, avec $x + h \in D_J^+$:

$$(F(x+h) - F(x))(t) = f(t, (x+h)(t)) - f(t, x(t)) = D_2 f(t, x(t))h(t) + o(\|h\|).$$

Comme $E_0 = P_0 - P_0$, nous obtenons la relation (2.90). Il faut vérifier que $F'_+(x)$ est borné. Pour tout $h \in E_0$: $\|F'_+(x)h\|_0 = \max_{t \in \bar{I}} |D_2f(t, x(t))h(t)| \leq \|h\|_0 \max \{|D_2f(t, \xi)|; t \in \bar{I}, -\|x\|_0 \leq \xi \leq \|x\|_0\}$. Soit $h \in P_0$; alors $\forall t \in \bar{I} : (F'_+(x)h)(t) = D_2f(t, x(t))h(t) \leq 0$. Ainsi $-F'_+(x) \in L_+(E_0)$.

(ii) Montrons que F est continûment différentiable. Soit G l'opérateur de Nemyckiï de D_2f . Par la proposition 2.36, $G : D_J \rightarrow E_0$ est une application continue. Soit $x_1, x_2 \in D_J^+$ et $h \in E_0$; alors $\|F'_+(x_1)h - F'_+(x_2)h\|_0 = \max_{t \in \bar{I}} |(G(x_1) - G(x_2))(t)h(t)| \leq \|G(x_1) - G(x_2)\|_0 \|h\|_0$. G étant continue, $F'_+ : D_J \rightarrow L(E_0)$ est continue.

(iii) Soit $x_1, x_2 \in D_J^+$, avec $x_2 - x_1 \in \dot{P}_0$. Par hypothèse : $\forall t \in \bar{I}$, $D_2f(t, x_2(t)) \geq D_2f(t, x_1(t))$; d'où

$$\forall h \in P_0 : F'_+(x_2)h \geq F'_+(x_1)h. \quad (2.91)$$

En utilisant la proposition 1.31, nous établissons la convexité pour l'ordre de F . ■

Nous appliquons la méthode de Newton au problème

$$\begin{cases} Lx = f(\cdot, x) \text{ dans } I \\ Bx = 0 \end{cases} \quad (2.92)$$

qui s'écrit aussi :

$$\tilde{L}x = f(\cdot, x) \text{ dans } I. \quad (2.93)$$

Proposition 2.53. Supposons vérifiées la condition (2.39), avec $\mu = 0$, et les hypothèses du lemme 2.52. Supposons l'existence d'une sous-solution $\varphi \in D_J^+$ et d'une sur-solution ψ , comptables, de (2.92). Alors la suite (x_n) , définie à partir de $x_0 := \varphi$ par

$$\begin{cases} [L - D_2f(\cdot, x_n)]x_{n+1} = f(\cdot, x_n) - D_2f(\cdot, x_n)x_n \text{ dans } I \\ Bx_{n+1} = 0, \end{cases} \quad (2.94)$$

est croissante et converge uniformément vers \bar{x} , la solution minimale de (2.92) dans $\langle \varphi, \psi \rangle$.

Démonstration. (i) Montrons que $\forall x \in D_J^+ : [\tilde{L} - F'_+(x)]^{-1} \in K_+(E_0)$. Fixons $x \in D_J^+$. Par le lemme 2.9, il existe un opérateur linéaire $K(x) \in K(E_0)$, tel que si $g \in E_0$, alors $v := K(x)g$ est dans \tilde{D} et c'est l'unique solution de l'équation $[\tilde{L} - D_2f(\cdot, x)]v = g$ dans I . Et aussi de l'équation $[\tilde{L} - F'_+(x)]v = g$. D'où $[\tilde{L} - F'_+(x)]^{-1} = K(x) \in K_+(E_0)$.

(ii) Nous avons ainsi vérifié l'hypothèse (i) de la proposition 1.29. L'hypothèse (ii) est vérifiée, puisque F est convexe pour l'ordre. La suite (x_n) définie par (2.94) est croissante et majorée par ψ . Grâce à (2.91), nous pouvons utiliser la proposition 1.32, avec la condition (vi), pour démontrer la convergence uniforme de la suite (x_n) , vers la solution minimale \bar{x} de (2.92) dans $\langle \varphi, \psi \rangle$. ■

La proposition qui suit traite de la convergence de la méthode de Newton simplifiée. Sa démonstration repose sur les propositions 1.35 et 1.37, avec la condition (ix).

Proposition 2.54. Supposons vérifiées la condition (2.39), avec $\mu = 0$, et les hypothèses du lemme 2.52. Supposons l'existence d'une sous-solution $\varphi \in D_J^+$ et d'une sur-solution ψ , compatibles, de (2.92). Alors la suite (x_n) définie à partir de $x_0 = \varphi$ par

$$\begin{cases} [L - D_2f(\cdot, \varphi)]x_{n+1} = f(\cdot, x_n) - D_2f(\cdot, \varphi)x_n & \text{dans } I \\ Bx_{n+1} = 0 \end{cases} \quad (2.95)$$

est croissante et converge uniformément vers \bar{x} , la solution minimale de (2.92) dans $\langle \varphi, \psi \rangle$.

Remarque. Les autres cas : $\mu \neq 0$ ou (2.39) remplacé par (2.43) sont plus difficiles à traiter. Nous ne savons rien sur $[\tilde{L} - F'_+(x)]^{-1}$, sauf dans des cas particuliers.

2.7.6 Résultats d'unicité.

Nous donnons deux résultats d'unicité, pour le problème (2.37), qui seront utilisés dans le chapitre 3.

Proposition 2.55. Supposons vérifiée la condition (2.77). Alors le problème (2.37) a, au plus, une solution.

Démonstration. (i) Supposons l'existence de x et y , deux solutions de (2.37), et posons $w := x - y$. Si w est de signe constant dans I , alors $w = 0$ (par la condition (2.77) et la proposition 2.3).

(ii) Supposons, ab absurdo, que w change de signe; donc

$I_- := \{t \in \bar{I} \mid w(t) < 0\} \neq \emptyset$. Soit I' une composante connexe de I_- ; alors $Lw > 0$ dans $\overset{\circ}{I}'$. Par la proposition 2.1,

$$\inf \{w(t) \mid t \in \overset{\circ}{I}'\} = \min \{w(t) \mid t \in \partial I'\} < 0.$$

Comme w est continue, ce n'est possible que si a ou $b \in \partial I'$. Si $a \in \partial I'$, alors $I' = [a, t_1)$ et $w(t_1) = 0$; par la proposition 2.3 : $w \geq 0$, d'où la contradiction. De même si $b \in \partial I'$, la proposition 2.3 donne la contradiction : $w \geq 0$ dans I' . ■

Proposition 2.56. Supposons vérifiées les conditions (2.39), (2.53) et (2.54). Soit $J_+ := J \cap \mathbb{R}_+$; supposons que $0 \in J$ et $\dot{J}_+ \neq \emptyset$. Supposons de plus que f vérifie les deux conditions suivantes :

(i) $f(\cdot, 0) \geq 0$ dans I .

(ii) $\forall \theta \in (0, 1), \forall \xi \in \dot{J}_+, \theta f(\cdot, \xi) < f(\cdot, \theta \xi)$ dans I .

Alors le problème (2.37), avec $\alpha = \beta = 0$, a , au plus, une solution continue et strictement positive.

Démonstration. (i) Soit $C_B^1(\bar{I})$, l'espace de Banach défini par (2.80), muni du cône solide P . Soit F l'application définie par (2.36) à partir de f . Alors $F : D_J \rightarrow E_\mu$ est croissante (proposition 2.37). Soit $D := D_J \cap P$; D est un ensemble étoilé par rapport à l'origine dans $C_B^1(\bar{I})$ et $\dot{D} = D_{J_+} \cap \dot{P} \neq \emptyset$. Montrons que F est strictement sous-linéaire sur D . Par l'hypothèse (i), $F(0) \geq 0$. Par l'hypothèse (ii) : $\forall \theta \in (0, 1), \forall x \in \dot{D}, \theta F(x) \leq F(\theta x)$. Il reste à établir que :

$$\forall \theta \in (0, 1), \forall x \in \dot{D}, \theta F(x) < F(\theta x). \quad (2.96)$$

Supposons qu'il existe $\theta \in (0,1)$ et $x \in \dot{D}$ tels que $\theta F(x) = F(\theta x)$. Alors $\forall t \in I$, $\theta f(t, x(t)) = f(t, \theta x(t))$. Comme $x > 0$, il existe $t^* \in I$ tel que $x(t^*) > 0$. Alors $\theta f(t^*, x(t^*)) = f(t^*, \theta x(t^*)) > \theta f(t^*, x(t^*))$, d'où la contradiction.

(ii) Soit H l'application définie par :

$$\forall x \in D, H(x) := K_\mu F(x).$$

Alors $H : D \rightarrow D_\mu \subset C_B^1(\bar{I})$; l'application est croissante et fortement sous-linéaire (lemme 2.49). Par la proposition 1.46, H a, au plus, un point fixe strictement positif. Comme toute solution continue de (2.37), avec $\alpha = \beta = 0$, est un point fixe de H , le résultat est démontré. ■

Remarques (i) L'hypothèse (ii) peut être affaiblie. Il suffit que F soit strictement sous-linéaire, i.e. vérifie (2.96).

(ii) Nous pouvons remplacer la condition (2.39) par la condition (2.43), avec $p_0 + q_0 = 0$ (i.e. $r_1 = 1$) et $\mu < 1$. La proposition 2.56 est encore valable puisque toute solution continue de (2.37) est alors dans $C^1(\bar{I})$.

CHAPITRE 3

EQUATIONS DE THOMAS-FERMI ET DE LANE-EMDEN-FOWLER

3.1 L'EQUATION DE THOMAS-FERMI

3.1.1 Introduction

Commençons par citer Léon Brillouin [26;p.3] :

Thomas et Fermi ont indiqué une méthode très ingénieuse, qui donne des renseignements précieux sur la structure des atomes, et permet d'évaluer la répartition moyenne des électrons autour du noyau. Cette méthode peut d'ailleurs s'étendre au cas des molécules ou même des réseaux cristallins. Sa valeur réside en ceci, qu'elle représente une approximation semi-classique de la mécanique ondulatoire.

L'atome de Thomas-Fermi a été utilisé par Hartree comme première étape dans la construction d'un champ self-consistent, et cette méthode a été employée depuis par presque tous les auteurs. Dirac a repris cette question d'un point de vue théorique, et démontré qu'effectivement la méthode du champ self-consistent conduit au modèle d'atome de Thomas-Fermi, lorsqu'on passe à la limite de la mécanique classique, c'est-à-dire lorsqu'on suppose la constante h de Planck très petite, ou qu'on considère des trajectoires à grand nombre de quanta.

Les travaux mentionnés sont : Thomas [27], Fermi [28], Hartree [29], Dirac [30].

L'équation de Thomas-Fermi permet d'estimer le potentiel électrique V pour un atome neutre isolé, "assez lourd" :

$$\Delta V = c V^{3/2} \quad \text{dans } \mathbb{R}^3$$

où c est une constante positive.

Une solution à symétrie sphérique $V(r)$ doit satisfaire à :

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dV}{dr}(r) \right) = c V^{3/2}(r) \text{ pour } r > 0. \quad (3.0)$$

Définissons une fonction x par $x(r) := r V(r)$. Alors :

$$x''(r) = c r^{-1/2} x^{3/2}(r) \quad r > 0.$$

L'équation de Thomas-Fermi est valable pour d'autres systèmes que les atomes neutres isolés. Par exemple : les atomes ionisés, les molécules, les réseaux cristallins, etc.; voir March [31], Lieb & Simon [32]. Ces cas se distinguent par des conditions aux limites différentes.

Nous considérons deux cas :

(a) *un atome ionisé positivement et isolé* [33;pp 47-52], [34;pp 129-131].

Après un choix ad hoc des constantes, nous obtenons le problème suivant :

$$\begin{cases} x''(t) = t^{-1/2} x^{3/2}(t) & t \in (0, T) \\ x(t) = 0 & t \geq T \\ x(0) = 1 \\ -Tx'(T) = q \end{cases} \quad (3.1)$$

où $q \in (0, 1)$ est donné. Ce nombre est défini physiquement par $q = (Z-N)/Z$, où Z est le nombre de protons et N le nombre d'électrons, avec $Z > N$. Nous prenons q réel et non pas seulement rationnel.

Il s'agit de trouver $T \in \dot{\mathbb{R}}_+$ et $x \in BC(\mathbb{R}_+) \cap C^1((0, T])$ qui satisfont à (3.1).

Mentionnons que Fermi et Amaldi [35] ont introduit un terme correctif dans la définition de q , pour tenir compte des atomes ionisés négativement. Voir aussi [33;pp 65-71], [34;pp 137-138].

(b) *un atome neutre et isolé* [27], [28] :

$$\begin{cases} x''(t) = t^{-1/2} x^{3/2}(t) & t > 0 \\ x(0) = 1 \\ \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0. \end{cases} \quad (3.2)$$

Nous montrerons que la solution de (3.2) s'obtient comme limite de la solution de (3.1) lorsque q tend vers 0.

Nous traitons des problèmes plus généraux. Au lieu de (3.1), nous considérons :

$$\begin{cases} x''(t) = t^r x^p(t) & t \in (0, T) \\ x(t) = 0 & t \geq T \\ x(0) = 1 \\ -T x'(T) = q \end{cases} \quad (3.3)$$

et au lieu de (3.2) :

$$\begin{cases} x''(t) = t^r x^p(t) & t > 0 \\ x(0) = 1 \\ \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0 \end{cases} \quad (3.4)$$

où $r > -2$, $p \geq 1$, $q \in (0, 1)$ sont donnés.

Supposons que (T, x) soit une solution de (3.3) et définissons une fonction $y \in BC(\mathbb{R}_+) \cap C^1((0, T])$ par :

$$y(t) := \begin{cases} 1 - \frac{t}{T} - x(t) & t \in [0, T] \\ 0 & t \geq T. \end{cases} \quad (3.5)$$

Alors (T, y) est solution du problème

$$\begin{cases} -y''(t) = t^r (1 - \frac{t}{T} - y(t))^p & t \in (0, T) \\ y(t) = 0 & t \geq T \\ y(0) = 0 \\ -T y'(T) = 1 - q. \end{cases} \quad (3.6)$$

Réciproquement, si (T, y) est une solution de (3.6), alors (T, x) est une solution de (3.3), avec x défini par (3.5).

Nous allons procéder de la façon suivante :

- (1) Nous fixons T et montrons l'existence et l'unicité de la solution y_T du problème aux limites

$$\begin{cases} -y''(t) = t^r(1 - \frac{t}{T} - y(t))^p & t \in (0, T) \\ y(0) = y(T) = 0. \end{cases} \quad (3.7)$$

Alors $x_T \in BC(\mathbb{R}_+) \cap C^1((0, T])$, la fonction définie par :

$$x_T(t) := \begin{cases} 1 - \frac{t}{T} - y_T(t) & t \in [0, T] \\ 0 & t \geq T \end{cases}$$

est l'unique solution de

$$\begin{cases} x''(t) = t^r x^p(t) & t \in (0, T) \\ x(0) = 1, x(T) = 0. \end{cases} \quad (3.8)$$

- (2) La famille $\{x_T \mid T > 0\}$ est strictement croissante dans l'espace de Banach ordonné $BC(\mathbb{R}_+)$. Lorsque T tend vers l'infini, la famille (x_T) tend vers une fonction $x \in BC(\mathbb{R}_+)$, qui est l'unique solution de (3.4).
- (3) La fonction $Q \in C(\dot{\mathbb{R}}_+)$ définie par $Q(T) := -Tx_T'(T)$ est strictement décroissante, $\lim_{T \downarrow 0} Q(T) = 1$, $\lim_{T \rightarrow \infty} Q(T) = 0$. D'où l'existence et l'unicité de la solution du problème (3.3).

3.1.2 Les problèmes aux limites (3.7) et (3.8).

Nous montrons, par des méthodes d'itérations monotones, l'existence d'une solution du problème (3.7) :

$$\begin{cases} -y''(t) = t^r(1 - \frac{t}{T} - y(t))^p & t \in (0, T) \\ y(0) = y(T) = 0 \end{cases}$$

où $r > -2$, $p \geq 1$, $T > 0$ sont donnés.

La fonction φ , nulle sur $[0, T]$, est une sous-solution stricte de (3.7). Une sur-solution stricte de (3.7), compatible avec φ , est donnée par la fonction ψ définie sur $[0, T]$ par $t \mapsto 1 - \frac{t}{T}$. Nous allons utiliser les résultats du §2.7.3.

Posons $I := (0, T)$ et $J := [0, 1]$. Définissons sur $(0, T] \times J$, une fonction f par :

$$\forall t \in (0, T], f(t, \xi) := \begin{cases} t^r (1 - \frac{t}{T} - \xi)^p & 0 \leq \xi \leq 1 - \frac{t}{T} \\ 0 & 1 - \frac{t}{T} \leq \xi \leq 1 \end{cases}$$

Pour $p > 1$:

$$\forall t \in (0, T], D_2 f(t, \xi) = \begin{cases} -p t^r (1 - \frac{t}{T} - \xi)^{p-1} & 0 \leq \xi \leq 1 - \frac{t}{T} \\ 0 & 1 - \frac{t}{T} \leq \xi \leq 1 \end{cases}$$

Cette fonction f satisfait à la condition de décroissance (2.77), à la condition de continuité (2.53), avec $\mu = -r$, et à la condition (2.58), avec

$$k = \begin{cases} pT^r & \text{si } r \geq 0 \\ pT^{r+1} & \text{si } -1 \leq r < 0 \\ pT^{r+2} & \text{si } -2 < r < -1. \end{cases}$$

La sur-solution $\hat{\psi}$ ne convient pas lorsque $r < 0$. Pour $-1 \leq r < 0$, nous construisons une nouvelle sur-solution de (3.7) de la manière suivante. Soit ψ_1 la solution du problème

$$\begin{cases} -\psi_1''(t) + \frac{pT^{r+1}}{t} \psi_1(t) = \frac{pT^{r+1}}{t} \hat{\psi}(t) & t \in I \\ \psi_1(0) = \psi_1(T) = 0. \end{cases} \quad (3.9)$$

Lemme 3.1. Pour $r \geq -1$, la fonction ψ_1 définie par (3.9) appartient à l'ensemble D_1 , donné par (2.66). C'est une sur-solution de (3.7), compatible avec la sous-solution φ .

Démonstration. 0 est un point singulier régulier de l'équation $-y''(t) + \frac{pT^{r+1}}{t} y(t) = 0$. Les racines du polynôme indiciel sont $r_1 = 1$ et $r_2 = 0$. Le second membre de l'équation différentielle dans (3.9) est dans E_1 . Par la proposition 2.35, la solution ψ_1 de (3.9) est dans l'ensemble $\{x \in E_{\varepsilon_0 - 1} \mid x' \in E_{\varepsilon_0}, x'' \in E_{\varepsilon_0 + 1}\}$, où $\varepsilon_0 \in (0, 1)$ est arbitraire, ensemble qui est exactement D_1 . Montrons que $\psi_1 < \hat{\psi}$. En effet :

$$\begin{cases} -(\hat{\psi} - \psi_1)''(t) + \frac{pT^{r+1}}{t} (\hat{\psi} - \psi_1)(t) = 0 & t \in I \\ (\hat{\psi} - \psi_1)(0) = 1, (\hat{\psi} - \psi_1)(T) = 0 \end{cases}$$

d'où $\hat{\psi} > \psi_1$ par la proposition 2.4. Utilisons la propriété (2.58) :
 $\psi_1''(t) + t^r(1 - \frac{t}{T} - \psi_1(t))^p = \frac{pT^{r+1}}{t} (\psi_1 - \hat{\psi})(t) + t^r(1 - \frac{t}{T} - \psi_1(t))^p \leq$
 $\leq t^r(1 - \frac{t}{T} - \hat{\psi}(t))^p = 0$, pour $t \in (0, T)$. Donc ψ_1 est une sur-solution de (3.7);
 ψ_1 est compatible avec φ , puisque $\psi_1 > 0$. ■

Nous disposons d'une sur-solution de (3.7) lorsque $-2 < r < -1$, à condition que T soit assez petit. Soit ψ_2 la fonction définie par

$$\psi_2(t) := A t^{r+2} (1 - \frac{t}{T}) \quad t \in \bar{I} \quad (3.10)$$

$$\text{où } A := [(-r-1)(r+2)]^{-1} > 0.$$

Lemme 3.2. Pour $-2 < r < -1$, la fonction ψ_2 , définie par (3.10), appartient à l'ensemble

$$D'' := \{x \in E_{-r-2} \mid x' \in E_{-r-1}, x'' \in E_{-r}\}, \text{ voir (2.76)}. \quad (3.11)$$

De plus, ψ_2 est une sur-solution de (3.7) si $T \leq T^*$, où

$$T^* := [(-r-1)(r+2)]^{\frac{1}{r+2}} > 0.$$

Si $T^* < T$, ψ_2 vérifie :

$$\begin{cases} -\psi_2''(t) \geq t^r(1 - \frac{t}{T} - \psi_2(t))^p & t \in (0, T^*) \\ \psi_2(0) = 0, \psi_2(T^*) = 1 - \frac{T^*}{T} = \hat{\psi}(T^*). \end{cases} \quad (3.12)$$

Démonstration. Il est clair que $\psi_2 \in D''$ et $\psi_2(0) = \psi_2(T) = 0$. Si $t \leq T^*$, alors $\psi_2(t) \leq \hat{\psi}(t)$ et $\psi_2''(t) + t^r(1 - \frac{t}{T} - \psi_2(t))^p =$
 $= t^r[A(r+1)(r+2) - \frac{A}{T}(r+2)(r+3)t + (1 - \frac{t}{T})^p(1 - At^{r+2})^p] \leq t^r[-A(-r-1)(r+2)+1] = 0$.
Ainsi ψ_2 est une sur-solution de (3.7) si $T \leq T^*$. Pour $T > T^*$, ψ_2 satisfait à (3.12). ■

Proposition 3.3. Le problème (3.7) a une solution unique dans

$C(\bar{I}) \cap C^2((0, T])$, qui est strictement positive. Cette solution est dans

$C^2(\bar{I})$ si $r \geq 0$, dans $C^1(\bar{I})$ si $-1 < r < 0$, dans $\{x \in E_{\varepsilon_0-1} \mid x' \in E_{\varepsilon_0}, x'' \in E_1\}$

si $r = -1$ ($\varepsilon_0 \in (0, 1)$ est arbitraire), dans D'' donné par (3.11) si

$-2 < r < -1$.

Démonstration. (i) L'unicité de la solution découle de la proposition 2.55.

(ii) Pour $r \geq 0$, l'existence vient de la proposition 2.40. Utiliser la sur-solution $\hat{\psi}$. La solution est dans $C^2(\bar{I})$.

(iii) Pour $-1 \leq r < 0$, l'existence est établie par la proposition 2.42. Utiliser la sur-solution ψ_1 , donnée par (3.9). Si $r > -1$, la solution est dans $C^1(\bar{I})$.

(iv) Pour $-2 < r < -1$ et $T \leq T^*$, ψ_2 donné par (3.10) est une sur-solution. L'existence de la solution de (3.7) découle de la proposition 2.46.

(v) Pour $-2 < r < -1$ et $T > T^*$, nous ne connaissons pas de sur-solution. Cependant, grâce à la proposition 2.46, nous pouvons construire une suite croissante (x_n) , à partir de $x_0 := \varphi$, à l'aide de la formule de récurrence

$$\begin{cases} -x_{n+1}''(t) + \frac{pT^{r+2}}{t^2} x_{n+1}(t) = t^r \left(1 - \frac{t}{T} - x_n(t)\right)^p + \\ \quad + \frac{pT^{r+2}}{t^2} x_n(t) \quad t \in I \\ x_{n+1}(0) = x_{n+1}(T) = 0. \end{cases} \quad (3.13)$$

Nous devons vérifier que les termes de la suite sont majorés par $\hat{\psi}$, pour que la définition (3.13) ait un sens. La démonstration se fait par récurrence, en utilisant la propriété (2.58). Nous avons $x_0 < \hat{\psi}$. Supposons que $x_n < \hat{\psi}$.

Alors :

$$\begin{cases} -(\hat{\psi} - x_{n+1})''(t) + \frac{pT^{r+2}}{t^2} (\hat{\psi} - x_{n+1})(t) \geq 0 \quad t \in I \\ (\hat{\psi} - x_{n+1})(0) = 1, (\hat{\psi} - x_{n+1})(T) = 0 \end{cases}$$

d'où $\hat{\psi} > x_{n+1}$, par la proposition 2.4. Définissons une fonction X par

$$X(t) := \begin{cases} \psi_2(t) & 0 \leq t < T^* \\ \hat{\psi}(t) & T^* \leq t \leq T. \end{cases} \quad (3.14)$$

Comme $\psi_2(T^*) = \hat{\psi}(T^*)$, $X \in C(\bar{I})$. De plus $X \in E_{-2-r}$. Montrons que X est un majorant pour la suite (x_n) . La démonstration se fait par récurrence. Sur $(0, T^*)$,

nous avons $x_0 < \psi_2$. Supposons que $x_n < \psi_2$; alors : $-(\psi_2 - x_{n+1})''(t) + \frac{pT^{r+2}}{t^2} (\psi_2 - x_{n+1})(t) \geq 0$ en vertu de (2.58) et (3.12). De plus $(\psi_2 - x_{n+1})(0) = 0$ et $(\psi_2 - x_{n+1})(T^*) \geq 0$. Par la proposition 2.4, $\psi_2 > x_{n+1}$ dans $[0, T^*]$. La convergence uniforme dans \bar{I} de la suite (x_n) vers la solution de (3.7) se déduit de la proposition 2.46. ■

Remarques. (i) Grâce aux résultats du §2.7.3, il est possible d'approcher la solution y de (3.7) à l'aide de deux suites monotones (x_n) et (y_n) , qui convergent uniformément dans \bar{I} vers y et qui vérifient :

$$\forall n \in \mathbb{N} : \varphi \leq x_n \leq x_{n+1} \leq y \leq y_{n+1} \leq y_n \leq \psi.$$

Cependant, pour $-2 < r < -1$ et $T > T^*$, nous n'avons pas trouvé de sur-solution permettant de construire la suite décroissante (y_n) . Ces suites sont définies de la manière suivante :

(a) pour $r \geq 0$: $x_0 := \varphi$, $y_0 := \hat{\psi}$ et la formule de récurrence :

$$\begin{cases} -x_{n+1}''(t) + pT^r x_{n+1}(t) = t^r(1 - \frac{t}{T} - x_n(t))^p + pT^r x_n(t) & t \in I \\ x_{n+1}(0) = x_{n+1}(T) = 0 \end{cases} \quad (3.15)$$

(b) pour $-1 \leq r < 0$: $x_0 := \varphi$, $y_0 := \psi_1$ (ou $\hat{\psi}$) et la formule de récurrence :

$$\begin{cases} -x_{n+1}''(t) + \frac{pT^{r+1}}{t} x_{n+1}(t) = t^r(1 - \frac{t}{T} - x_n(t))^p + \frac{pT^{r+1}}{t} x_n(t) & t \in I \\ x_{n+1}(0) = x_{n+1}(T) = 0 \end{cases} \quad (3.16)$$

(c) pour $-2 < r < -1$ et $T \leq T^*$: $x_0 := \varphi$, $y_0 := \psi_2$ et la formule de récurrence (3.13).

(d) pour $-2 < r < -1$ et $T > T^*$: $x_0 := \varphi$ et la formule de récurrence (3.13). La suite (x_n) est majorée par la fonction X , définie par (3.14).

(ii) La solution du problème (3.7) peut être approchée par d'autres suites monotones. Remplaçons le problème (3.7) par le problème équivalent

$$\begin{cases} -y''(t) + pt^r y(t) = t^r[(1 - \frac{t}{T} - y(t))^p + py(t)] & t \in I \\ y(0) = y(T) = 0. \end{cases} \quad (3.17)$$

Définissons sur $(0, T] \times J$ une fonction g par

$$\forall t \in (0, T], g(t, \xi) := \begin{cases} f(t, \xi) + pt^r \xi & 0 \leq \xi \leq 1 - \frac{t}{T} \\ 0 & 1 - \frac{t}{T} \leq \xi \leq 1 \end{cases}$$

Alors :

$$\forall t \in (0, T], D_2g(t, \xi) = \begin{cases} pt^r [1 - (1 - \frac{t}{T} - \xi)^{p-1}] & 0 \leq \xi \leq 1 - \frac{t}{T} \\ 0 & 1 - \frac{t}{T} \leq \xi \leq 1 \end{cases}$$

Ainsi la condition de croissance (2.54) est vérifiée dans le segment conique $\langle 0, \hat{\psi} \rangle$. D'autre part, l'équation linéaire sans second membre :

$-y''(t) + pt^r y(t) = 0$ a un coefficient non borné en 0 si $r < 0$. Dans ce cas, il est possible de trouver deux solutions linéairement indépendantes, y_1 et y_2 , qui vérifient la condition (2.22). Ce sont :

$$y_1(t) := \sqrt{t} I_\nu(2\sqrt{p} \nu t^{\frac{1}{2\nu}}) \quad t \in \bar{I}$$

$$y_2(t) := \sqrt{t} K_\nu(2\sqrt{p} \nu t^{\frac{1}{2\nu}}) \quad t \in (0, T]$$

où $\nu := (r+2)^{-1} > 0$ et

I_ν et K_ν sont des fonctions de Bessel modifiées [36;p.374], solutions de l'équation différentielle :

$$z^2 w'' + zw' - (z^2 + \nu^2)w = 0.$$

Les fonctions y_1 et y_2 sont toutes deux continues à l'origine. La condition (2.22) (iii) est vérifiée avec $r_1 = 1$ et $r_2 = 0$. Le wronskien est constant : $W(y_1, y_2) = \frac{-1}{2\nu} < 0$. Ainsi la condition (2.42) est vérifiée. Une sur-solution de (3.17) est donnée par la solution ψ de

$$\begin{cases} -\psi''(t) + pt^r \psi(t) = pt^r \hat{\psi}(t) & t \in I \\ \psi(0) = \psi(T) = 0. \end{cases}$$

Nous pouvons alors démontrer la proposition 3.3 à l'aide de la proposition 2.39. Les suites monotones, qui convergent vers la solution de (3.7), sont définies par $x_0 := \varphi$, $y_0 := \psi$ (ou $\hat{\psi}$) et la formule de récurrence

$$\begin{cases} -x_{n+1}''(t) + pt^r x_{n+1}(t) = t^r \left[\left(1 - \frac{t}{T}\right)^p - x_n(t) \right] & t \in I \\ x_{n+1}(0) = x_{n+1}(T) = 0. \end{cases} \quad (3.18)$$

Cette méthode a été utilisée par J.W. Mooney [37] pour $r = -\frac{1}{2}$ et $p = \frac{3}{2}$.

Nous pouvons aborder le problème aux limites (3.8) :

$$\begin{cases} x''(t) = t^r x^p(t) & t \in I \\ x(0) = 1, x(T) = 0 \end{cases}$$

où $r > -2$, $p \geq 1$, $T > 0$ sont donnés.

Proposition 3.4. Le problème (3.8) a une unique solution dans $C(\bar{I}) \cap C^2((0, T])$, qui est strictement positive. Cette solution est dans $C^2(\bar{I})$ si $r \geq 0$, dans $C^1(\bar{I})$ si $-1 < r < 0$, dans $\{x \in E_0 \mid x' \in E_{\varepsilon_0}, x'' \in E_1\}$ si $r = -1$ ($\varepsilon_0 \in (0, 1)$ est arbitraire), dans D''' si $-2 < r < -1$, où

$$D''' := \{x \in E_0 \mid x' \in E_{-r-1}, x'' \in E_{-r}\}. \quad (3.19)$$

Démonstration. (i) L'unicité de la solution se déduit de la proposition 2.55.

(ii) Définissons une fonction x par :

$$x(t) := 1 - \frac{t}{T} - y(t) \quad t \in \bar{I} \quad (3.20)$$

où y est la solution du problème (3.7). Alors x est la solution de (3.8). De plus $x > 0$, puisque $y < \hat{\psi}$. ■

3.1.3 Le problème (3.4) sur \mathbb{R}_+

Nous avons vu dans le §3.1.2 que pour chaque valeur de $T > 0$ le problème (3.8) a une solution unique. Définissons une fonction x_T par :

$$x_T(t) := \begin{cases} x(t) & 0 \leq t \leq T \\ 0 & t \geq T \end{cases} \quad (3.21)$$

où x est la solution du problème (3.8). Alors $x_T \in BC(\mathbb{R}_+)$. Définissons une application $S : \mathbb{R}_+ \rightarrow BC(\mathbb{R}_+)$ par

$$S(T) := x_T. \quad (3.22)$$

Lemme 3.5. S est une application continue et strictement croissante.

Démonstration. (i) Soit $0 < T_1 < T_2$. Désignons par u_1 et u_2 les solutions du problème (3.8), pour $T = T_1$ et $T = T_2$ respectivement. Montrons que $(u_2 - u_1)(t) > 0$ si $t \in (0, T_1]$. Nous savons déjà que $(u_2 - u_1)(T_1) > 0$. Supposons, ab absurdo, qu'il existe $\bar{t} \in (0, T_1)$ tel que $(u_2 - u_1)(\bar{t}) = 0$. Alors u_1 et u_2 sont deux solutions de

$$\begin{cases} u''(t) = t^r u^p(t) & t \in (0, \bar{t}) \\ u(0) = 1, u(\bar{t}) = u_1(\bar{t}) = u_2(\bar{t}). \end{cases}$$

La solution de ce problème est unique, par la proposition 2.55; donc $u_1 = u_2$ dans $[0, \bar{t}]$. Nous avons établi que $(u_2 - u_1)(t) \geq 0$ dans $[0, T_1]$. Donc, pour $t \in [0, T_1]$, $0 \leq u_2^p(t) - u_1^p(t) \leq p\hat{\psi}^{p-1}(t)(u_2 - u_1)(t) \leq p(u_2 - u_1)(t)$. Par conséquent :

$$\begin{cases} -(u_2 - u_1)''(t) + pt^r(u_2 - u_1)(t) \geq 0 & t \in (0, T_1) \\ (u_2 - u_1)(0) = 0, (u_2 - u_1)(T_1) > 0 \end{cases}$$

et, par la proposition 2.4, $\forall t \in (0, T_1) : (u_2 - u_1)(t) > 0$. En particulier $(u_2 - u_1)(\bar{t}) > 0$, d'où la contradiction. Nous avons démontré que $S(T_1) < S(T_2)$, et même plus :

$$\forall t \in (0, T_2) : (S(T_1))(t) < (S(T_2))(t). \quad (3.23)$$

(ii) Comme précédemment, soit $0 < T_1 < T_2$ et u_1, u_2 les solutions correspondantes du problème (3.8). Montrons que :

$$\forall t \in (0, T_1) : u_1'(t) < u_2'(t). \quad (3.24)$$

Grâce à (3.23), $\forall t \in (0, T_1) : (u_2 - u_1)''(t) = t^r(u_2^p(t) - u_1^p(t)) > 0$. D'où $t(u_2 - u_1)''(t) = (t(u_2 - u_1)'(t))' - (u_2 - u_1)'(t) > 0$, si $t \in (0, T_1)$. Intégrons entre a et t , où $0 < a < t < T_1$:

$$t(u_2 - u_1)'(t) - (u_2 - u_1)(t) > a(u_2 - u_1)'(a) - (u_2 - u_1)(a). \quad (3.25)$$

Nous savons, par la proposition 3.4, que $\lim_{t \rightarrow 0} tu_1'(t) = \lim_{t \rightarrow 0} tu_2'(t) = 0$. Faisons tendre a vers 0 dans (3.25) : $t(u_2 - u_1)'(t) > (u_2 - u_1)(t)$ si $t \in (0, T_1)$, d'où (3.24).

(iii) De (3.24) et $(u_2 - u_1)(0) = 0$, nous déduisons que

$$\max \{(u_2 - u_1)(t) \mid 0 \leq t \leq T_1\} = u_2(T_1).$$

La solution de (3.8) est une fonction décroissante. Donc

$$\|S(T_1) - S(T_2)\| = u_2(T_1) = (S(T_2))(T_1).$$

Pour $t \in [0, T_2]$: $0 \leq u_2(t) \leq 1 - \frac{t}{T_2}$. En particulier : $0 \leq u_2(T_1) \leq 1 - \frac{T_1}{T_2}$
 et $\lim_{T_2 \rightarrow T_1} u_2(T_1) = 0$. D'où la continuité de S . ■

Ne considérant que des valeurs entières du paramètre T , nous tirons de la famille $\{x_T \mid T > 0\}$, définie par (3.21), une suite (x_n) , où :

$$\forall n \in \dot{\mathbb{N}} : x_n := x_{T=n} = S(n). \quad (3.26)$$

Chaque fonction x_n , $n \in \dot{\mathbb{N}}$, a les propriétés suivantes :

$$x_n \in BC(\mathbb{R}_+) \cap C^2((0, n]) \quad (3.27)$$

$$\begin{cases} \text{si } r \geq 0, x_n \in C^2([0, n]) \\ \text{si } -1 < r < 0, x_n \in C^1([0, n]) \\ \text{si } r = -1, x'_n \in C_{\varepsilon_0, 0}(0, n), \varepsilon_0 \in (0, 1) \text{ arbitraire} \\ \text{si } -2 < r < -1, x'_n \in C_{-1-r, 0}(0, n) \end{cases} \quad (3.28)$$

$$\begin{cases} \text{en particulier : il existe un } \mu \in [-r-1, 1), \text{ tel que} \\ x'_n \in C_{\mu, 0}(0, n) \end{cases} \quad (3.29)$$

$$\begin{cases} x''_n(t) = t^r x_n^p(t) \quad t \in (0, n) \\ x_n(0) = 1, x_n(n) = 0 \end{cases} \quad (3.30)$$

$$\begin{cases} x_n \text{ est une fonction décroissante; } x_n \text{ est strictement} \\ \text{décroissante sur } [0, n]. \end{cases} \quad (3.31)$$

$$\forall t \geq 0 : 0 \leq x_n(t) \leq 1; \forall t \in [0, n] : x_n(t) \leq 1 - \frac{t}{n}. \quad (3.32)$$

La suite (x_n) est strictement croissante dans $BC(\mathbb{R}_+)$. Elle est bornée par 1. Elle converge donc simplement vers une fonction x , à valeurs dans $[0, 1]$:

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, x(t) := \lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t). \quad (3.33)$$

Nous montrerons que x est dans $BC(\mathbb{R}_+)$ et que la convergence est uniforme sur tous les intervalles compacts.

Lemme 3.6. La fonction x définie par (3.33) est dans $BC(\mathbb{R}_+) \cap C^2(\dot{\mathbb{R}}_+)$.

C'est une solution de l'équation : $x''(t) = t^r x^p(t)$, $t > 0$.

Démonstration. (i) Soit $T > 0$. Posons $I := (0, T)$ et $N :=$ partie entière $(T+1)$.

Définissons, dans $C(\bar{I})$, une suite croissante (z_n) par : $\forall n \in \mathbb{N}, z_n := x_{n+N}|_{\bar{I}}$.

Par (3.29), il existe un $\mu \in [-r-1, 1)$, tel que $\forall n \in \mathbb{N}$:

$z'_n \in C_{\mu, 0}(0, n+N) \subset C_{\mu, 0}(I)$. Par (3.24) : la suite (z'_n) est croissante.

Compte tenu de (3.31), $\forall n \in \mathbb{N} : z'_0 \leq z'_n \leq 0$; d'où $\|z'_n\|_{\mu, 0} \leq \|z'_0\|_{\mu, 0}$.

Nous appliquons le lemme 2.43 et en déduisons la convergence, uniforme dans \bar{I} , de la suite (z_n) vers z .

(ii) Définissons une suite (v_n) par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n(t) := tz'_n(t) \text{ si } t \in (0, T] \text{ et } v_n(0) := 0.$$

La suite (v_n) est croissante dans $C(\bar{I})$, puisque $\mu < 1$. Alors $\forall n \in \mathbb{N}$,

$v'_n(t) = z'_n(t) + tz''_n(t) = z'_n(t) + t^{1+r} z_n^p(t)$, $t \in (0, T]$. Comme $\mu + 1 + r \geq 0$, voir (3.29), $v'_n \in C_{\mu, 0}(I)$ et $\|v'_n\|_{\mu, 0} \leq \|z'_n\|_{\mu, 0} + T^{\mu+1+r} \|z_n^p\|_0 \leq \|z'_0\|_{\mu, 0} + T^{\mu+1+r}$. La suite (v_n) satisfait aux hypothèses du lemme 2.43, aussi converge-t-elle, uniformément dans \bar{I} , vers une fonction v .

(iii) Partons de l'identité : $\forall t \in \bar{I}, t^2 z_n(t) = \int_0^t s(sz'_n(s) + 2z_n(s)) ds$. Par la convergence uniforme, $t^2 z(t) = \int_0^t s(v(s) + 2z(s)) ds$. En dérivant : $v(t) = tz'(t)$, pour $t \in I$.

(iv) Compte tenu de (3.30), $\forall n \in \mathbb{N}$ et $\forall t \in \bar{I}$:

$$tv_n(t) = t^2 z'_n(t) = \int_0^t (s^{2+r} z_n^p(s) + 2v_n(s)) ds.$$

Par la convergence uniforme : $tv(t) = \int_0^t (s^{2+r} z^p(s) + 2v(s)) ds$. En dérivant : $t^{2+r} z^p(t) = tv'(t) - v(t) = t^2 \left(\frac{v(t)}{t}\right)' = t^2 z''(t)$. D'où $z''(t) = t^r z^p(t)$, $t \in I$.

(v) La fonction x définie par (3.33) est donc bornée par 1 et continue sur tout intervalle $[0, T]$; ainsi $x \in BC(\mathbb{R}_+)$. De même, $x \in C^2(\dot{\mathbb{R}}_+)$ et satisfait à $x''(t) = t^r x^p(t)$, pour $t > 0$. ■

Le lemme suivant nous donne le comportement de x à l'infini. Ce résultat peut être obtenu à l'aide d'un théorème dû à A. Mambriani [39], [40]; voir aussi Bellman [41;p.151]. Nous en donnons une démonstration simplifiée, adaptée à notre problème.

Lemme 3.7. Soit $x \in BC(\mathbb{R}_+) \cap C^2(\mathbb{R}_+)$, une solution positive de l'équation : $x''(t) = t^r x^p(t)$, $t > 0$ (avec $r > -2$ et $p \geq 0$). Alors :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0.$$

Démonstration. (i) La solution x , étant dans $BC(\mathbb{R}_+)$ et positive, doit être convexe et décroissante. Donc la limite $\ell := \lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$ existe et $\ell \geq 0$.

(ii) Si $x(0) = 0$, alors $\ell = 0$ et le résultat est démontré.

(iii) Si $x(0) > 0$, supposons que $\ell > 0$. Alors, $\forall t \geq 0 : x(0) \geq x(t) \geq \ell > 0$. Fixons $T > 0$, alors $\forall t \in (0, T) : x''(t) = t^r x^p(t) \geq \ell^p t^r \geq \frac{\ell^p}{T} t^{r+1}$. Intégrons : $x'(T) - x'(t) \geq \frac{\ell^p}{T} \frac{T^{r+2} - t^{r+2}}{r+2}$, pour $t \in (0, T)$. Intégrons cette nouvelle inégalité : $(T-t)x'(T) - x(T) + x(t) \geq \frac{\ell^p}{T(r+2)} \left[\frac{T^{r+3}(r+2)}{r+3} - T^{r+2}t + \frac{t^{r+3}}{r+3} \right]$, avec $t \in (0, T)$.

Faisons tendre t vers 0 : $Tx'(T) - x(T) + x(0) \geq \frac{\ell^p T^{r+2}}{r+3}$. Nous obtenons : $Tx'(T) \geq \frac{\ell^p T^{r+2}}{r+3} - x(0)$. En choisissant T suffisamment grand : $x'(T) > 0$, d'où la contradiction. ■

Proposition 3.8. Le problème (3.4) a une solution unique dans $BC(\mathbb{R}_+) \cap C^2(\mathbb{R}_+)$, qui est à valeurs strictement positives.

Démonstration. L'existence vient des lemmes 3.6 et 3.7. Montrons l'unicité. Supposons, ab absurdo, que x_1 et x_2 soient deux solutions de (3.4) et posons $w := x_2 - x_1$. S'il existe un $T > 0$, tel que $w(T) = 0$, alors $w = 0$ dans $[0, T]$, par la proposition 2.55. Puisque nous supposons l'existence d'un $\bar{t} > 0$, tel que $w(\bar{t}) \neq 0$, il suit que $w(t) \neq 0$ pour $t \geq \bar{t}$. Alors w est une fonction strictement positive et convexe (ou négative et concave). Comme $w(0) = 0$, $\lim_{t \rightarrow \infty} w(t) = \infty$ (ou $-\infty$). D'où la contradiction, puisque $\lim_{t \rightarrow \infty} w(t) = 0$ par hypothèse. ■

3.1.4 Le problème à extrémité libre (3.3)

Pour un $T > 0$ fixé, nous avons désigné par x_T l'unique solution du problème (3.8), prolongée par 0 sur $[T, \infty)$. Comme $\forall T > 0 : x_T \in C^1((0, T])$, nous pouvons définir une application $Q : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ par :

$$Q(T) := -T x_T'(T). \quad (3.34)$$

Lemme 3.9. Q est une application continue, strictement décroissante et

$$Q(T) = 1 - \int_0^T s^{r+1} x_T^p(s) ds. \quad (3.35)$$

Démonstration. (i) $T > 0$ étant fixé, soit x_T la solution de (3.8). Alors $x_T'(T) - x_T'(t) = \int_t^T s^r x_T^p(s) ds$, pour $t \in (0, T)$. Par une seconde intégration : $(T-t)x_T'(T) + x_T(t) = \int_t^T \int_\theta^T s^r x_T^p(s) ds d\theta = \int_t^T (s-t)s^r x_T^p(s) ds$.

Faisant tendre t vers 0, nous obtenons (3.35), compte tenu du résultat :

$$\lim_{t \downarrow 0} t \int_t^T s^r ds = 0 \text{ (pour } r > -2).$$

(ii) Soit $0 < T_1 < T_2$. Alors $Q(T_1) - Q(T_2) = \int_0^{T_2} s^{r+1} x_{T_2}^p(s) ds - \int_0^{T_1} s^{r+1} x_{T_1}^p(s) ds > \int_0^{T_1} s^{r+1} (x_{T_2}^p - x_{T_1}^p)(s) ds > 0$, par le lemme 3.5.

(iii) La continuité de Q découle de celle de l'application S . ■

Lemme 3.10. $\lim_{T \downarrow 0} Q(T) = 1$ et $\lim_{T \rightarrow \infty} Q(T) = 0$.

Démonstration. (i) Partons de (3.35) : $0 \leq 1 - Q(T) = \int_0^T s^{r+1} x_T^p(s) ds \leq \int_0^T s^{r+1} ds = \frac{T^{r+2}}{r+2}$, d'où $\lim_{T \downarrow 0} [1 - Q(T)] = 0$.

(ii) Soit $T > 0$. La solution x_T du problème (3.8) est une fonction convexe, donc $\forall t \in [0, T] : x_T(t) \geq -x_T'(T)(T-t)$. Avec la notation (3.34) :

$$\forall t \in [0, T] : x_T(t) \geq Q(T)(1 - \frac{t}{T}). \quad (3.36)$$

D'autre part, $x_T'(T) \leq 0$ d'où $Q(T) \geq 0$. La limite $\ell := \lim_{T \rightarrow \infty} Q(T)$ existe, puisque Q est décroissante, et $\ell \geq 0$. Montrons que si $\ell > 0$, on aboutit à une contradiction. Nous avons vu que la solution x de (3.4) est un majorant pour la solution x_T de (3.8), pour tout $T > 0$. Reprenons (3.36) :

$$\forall t \in [0, T] : x(t) \geq x_T(t) \geq Q(T)(1 - \frac{t}{T}) \geq \ell(1 - \frac{t}{T}).$$

Pour $t = \frac{T}{2} : x(\frac{T}{2}) > \frac{\ell}{2}$. Comme T peut être choisi arbitrairement grand, c'est une contradiction avec $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$. ■

Proposition 3.11. Le problème (3.3) a une solution unique x dans $BC(\mathbb{R}_+)$, qui est positive et dans $C^2((0,T])$. Elle est dans $C^2([0,T])$ si $r \geq 0$, dans $C^1([0,T])$ si $-1 < r < 0$. Si $r = -1 : x' \in C_{\varepsilon_0,0}(0,T)$, $\varepsilon_0 \in (0,1)$ arbitraire, et $x'' \in C_{1,0}(0,T)$. Si $-2 < r < -1 : x' \in C_{-r-1,0}(0,T)$ et $x'' \in C_{-r,0}(0,T)$.

Démonstration. Il suffit de montrer que la donnée du paramètre $q \in (0,1)$ permet de déterminer de manière unique la valeur de T dans (3.3). Nous sommes alors ramenés à la proposition 3.4.

L'application Q définie par (3.34) est strictement décroissante (lemme 3.9) et prend toutes les valeurs dans $[0,1]$ lorsque T parcourt \mathbb{R} (lemme 3.10). Donc $q \in (0,1)$ étant donné, il existe un unique $T \in \mathbb{R}_+$ tel que $Q(T) = q$. ■

3.2 L'EQUATION DE LANE-EMDEN-FOWLER

3.2.1 Introduction

L'équation de Lane-Emden-Fowler est une équation différentielle semi-linéaire du deuxième ordre :

$$-\frac{1}{t^2} (t^2 x'(t))' = x^p(t), \quad p \text{ est un paramètre réel.} \quad (3.37)$$

Cette équation (avec $p > 0$) vient de théories de l'astrophysique de la fin du siècle passé. Le problème était de déterminer la configuration d'équilibre d'une étoile. Avec les hypothèses suivantes :

- (1) l'étoile est un système isolé, composé d'un fluide en équilibre hydrostatique,
- (2) la densité de matière ρ est à symétrie sphérique,
- (3) l'étoile est composée d'un gaz polytrophe, c'est-à-dire que la pression P et la densité ρ sont liées par l'équation d'état : $P = c_1 \rho^{1+1/p}$

et en posant $x(t) := c_2 \rho^{1/p}(r)$ (où $t := c_3 r$; c_1, c_2, c_3 sont des constantes), on obtient l'équation (3.37) pour la fonction x .

Citons les travaux de I.J.H. Lane [42], A. Ritter [43], R. Emden [44], [45], R.H. Fowler [46], [47]. De nombreuses références sont données par S. Chandrasekhar [48] et J.S.W. Wong [49].

Si la densité ρ au centre de l'étoile est prescrite, le choix de la constante c_2 permet de fixer $x(0) = 1$. D'autre part, pour des raisons physiques, une solution de (3.37) doit être positive. Le problème est donc de trouver une fonction x de classe C^2 telle que :

$$\begin{cases} -\frac{1}{t^2} (t^2 x'(t))' = x^p(t) \\ x(0) = 1 \\ x(t) \geq 0. \end{cases} \quad (3.38)$$

Nous verrons que deux cas peuvent se présenter : soit $x(t) > 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}_+$, soit $x(t)$ s'annule pour une valeur finie de t . Distinguons les deux problèmes :

trouver $x \in C(\mathbb{R}_+) \cap C^2(\dot{\mathbb{R}}_+)$ tel que

$$\begin{cases} -\frac{1}{t^2} (t^2 x'(t))' = x^p(t) & t > 0 \\ x(0) = 1 \\ x(t) > 0 & t \geq 0 \end{cases} \quad (3.39)$$

ou trouver $T > 0$, $x \in C([0,T]) \cap C^2(0,T)$ tels que

$$\begin{cases} -\frac{1}{t^2} (t^2 x'(t))' = x^p(t) & t \in (0,T) \\ x(0) = 1, x(T) = 0 \\ x(t) > 0 & t \in [0,T]. \end{cases} \quad (3.40)$$

Nous établirons l'existence et l'unicité de la solution du problème (3.38) : cette solution est la solution du problème (3.39) pour $p \geq 5$, du problème (3.40) pour $p < 5$. Nous montrerons, pour $-1 < p < 5$, comment obtenir cette solution par des itérations monotones ou alternées. De plus, la solution est de classe C^∞ et ses dérivées d'ordre impair s'annulent à l'origine.

Remarques. (i) Considérons le problème

$$\begin{cases} -\frac{1}{\tau^2} (\tau^2 y'(\tau))' = y^p(\tau) \\ y(0) = y_0 > 0 \\ y(\tau) \geq 0. \end{cases} \quad (3.41)$$

Supposons connue la solution x de (3.38). Alors la fonction y définie par

$$y(\tau) := y_0 x(t), \text{ où } \tau := y_0^{\frac{1-p}{2}} t \quad (3.42)$$

satisfait à (3.41).

(ii) La solution du problème (3.38) est connue explicitement pour $p = 0, 1$ et 5 :

pour $p = 0$: $T = \sqrt{6}$, $x(t) = 1 - \frac{t^2}{6}$, solution de (3.40)
 pour $p = 1$: $T = \pi$, $x(t) = \frac{\sin t}{t}$, solution de (3.40)
 pour $p = 5$: $x(t) = (1 + \frac{t^2}{3})^{-\frac{1}{2}}$, solution de (3.39).

(iii) Pour des valeurs entières et demi-entières de p comprises entre 1.5 et 4.5, la solution de (3.38), donc aussi de (3.40), a été obtenue numériquement

et tabulée par J. Miller & D. Sadler [50]. Nous avons représenté ces solutions sur la figure 7.

3.2.2 Résultats préliminaires

Lemme 3.12. Supposons que x soit une solution continue, à valeurs strictement positives, de l'équation (3.37) sur un intervalle $[0, b)$. Alors x est une fonction strictement décroissante dans $(0, b)$, $x \in C^2([0, b))$, $x'(0) = 0$ et $x''(0) = -\frac{1}{3} x^p(0)$.

Démonstration. (i) Définissons sur $[0, b)$ une fonction y par $t \mapsto tx(t)$. Alors $y'(t) = x(t) + tx'(t)$ et $y''(t) = t^{-1}(t^2x'(t))' = -tx^p(t)$, pour $t \in (0, b)$. Intégrons cette dernière équation entre a et $\frac{b}{2}$, où $0 < a < \frac{b}{2}$: $y'(a) = y'(\frac{b}{2}) + \int_a^{b/2} s x^p(s) ds$. Faisant tendre a vers 0, nous établissons la continuité de y' en 0. D'où l'existence de la limite : $\lim_{t \downarrow 0} tx'(t) = y'(0) - x(0)$. Nous obtenons par conséquent : $\lim_{t \downarrow 0} t^2x'(t) = 0$.

Soit $0 < a < t < b$. Intégrons (3.37) entre a et t : $t^2 x'(t) - a^2x'(a) = -\int_a^t s^2 x^p(s) ds$ et faisons tendre a vers 0 : $t^2 x'(t) = -\int_0^t s^2 x^p(s) ds$. Nous obtenons :

$$x'(t) = -\frac{1}{t^2} \int_0^t s^2 x^p(s) ds. \quad (3.43)$$

La décroissance stricte de x est démontrée.

(ii) Appliquons le théorème de la moyenne dans (3.43) : $x'(t) = -\frac{t}{3} x^p(\bar{t})$, où $\bar{t} \in (0, t)$; d'où $x'(0) = 0$. Pour le calcul de $x''(0)$, nous nous servons de la règle de l'Hospital dans (3.43) :

$$x''(0) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{x'(t) - x'(0)}{t} = -\lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t^3} \int_0^t s^2 x^p(s) ds = -\frac{x^p(0)}{3}. \quad \blacksquare$$

Nous allons montrer que le problème (3.40) n'a pas de solution pour $p \geq 5$; pour $p < 5$, c'est le problème (3.39) qui n'en a pas.

Lemme 3.13. Supposons que x soit une solution, de classe C^2 , de l'équation

$$-x''(t) = t^r x^p(t), \text{ où } p \neq -1, r \in \mathbb{R}. \quad (3.44)$$

Alors x satisfait à

FONCTIONS D'EMDEN

(valeurs numériques tirées de [50])

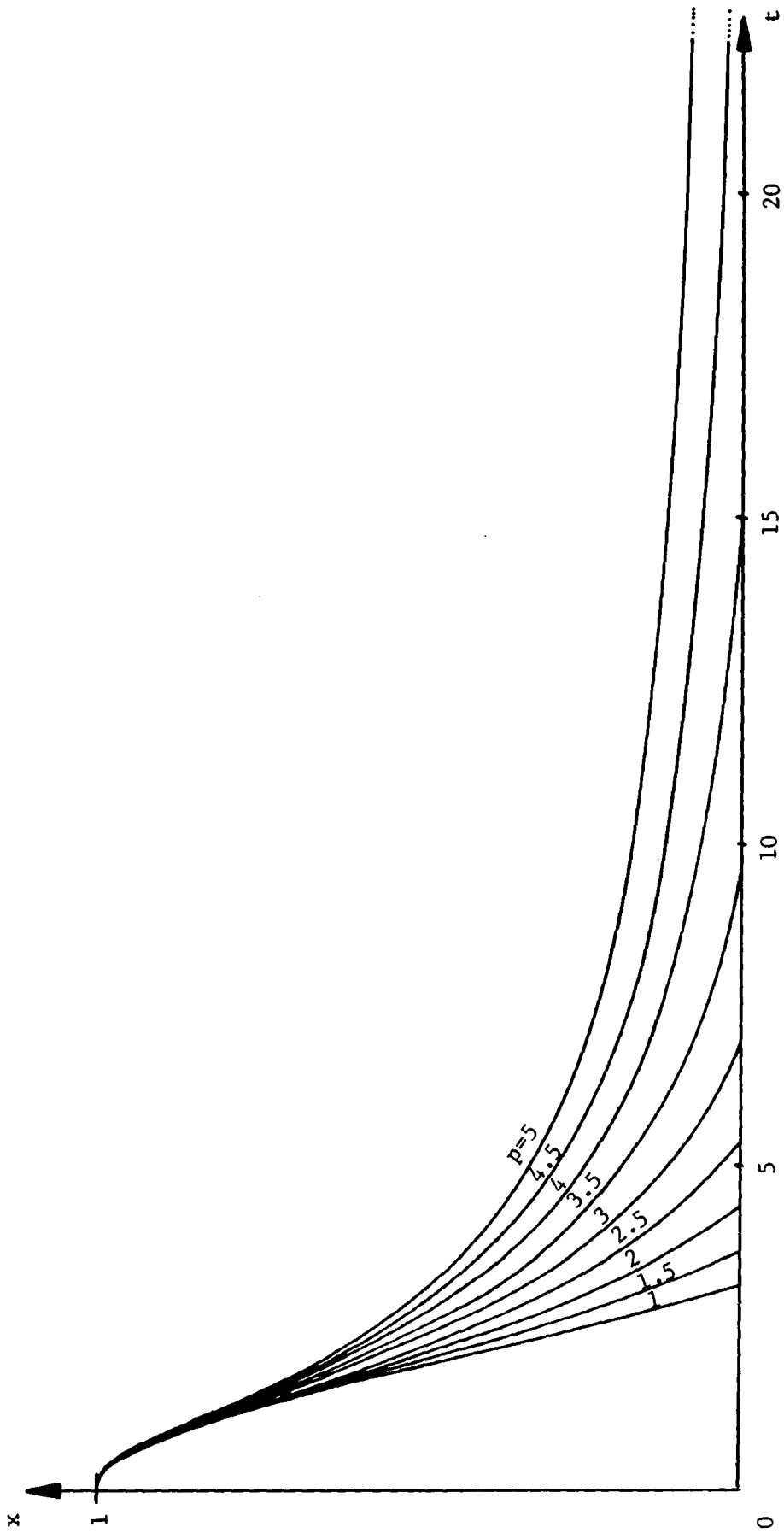


figure 7

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [t(x'(t))^2 - (xx')(t) + \frac{2}{p+1} t^{r+1} x^{p+1}(t)] &= \\ &= \frac{p+2r+3}{p+1} t^r x^{p+1}(t). \end{aligned} \tag{3.45}$$

Démonstration. $[t(x')^2 - xx' + \frac{2}{p+1} t^{r+1} x^{p+1}]' =$
 $= 2t x'x'' - xx'' + \frac{2(r+1)}{p+1} t^r x^{p+1} + 2t^{r+1} x^p x' =$
 $= (x''+t^r x^p)(2tx'-x) + (1+ \frac{2(r+1)}{p+1}) t^r x^{p+1} = \frac{p+2r+3}{p+1} t^r x^{p+1}.$ ■

Un résultat semblable, en relation avec l'équation : $-x'' + x = t^{1-p} x^p$, a été donné par G. Sansone [51;p.22]. C'est une généralisation d'une identité due à Z. Nehari pour $p = 5$ [52;p.134].

Lemme 3.14. Le problème (3.40) n'a pas de solution pour $p \geq 5$.

Démonstration. Supposons, ab absurdo, que (T,x) soit une solution de (3.40). Définissons sur $[0,T]$ une fonction y par : $t \mapsto tx(t)$. Alors (T,y) est une solution du problème :

$$\begin{cases} -y''(t) = t^{1-p} y^p(t) & t \in (0,T) \\ y(0) = y(T) = 0 \\ y(t) > 0 & t \in (0,T). \end{cases} \tag{3.46}$$

D'après le lemme 3.12 : $y'(0) = x(0) = 1$. L'identité (3.45), avec $r = 1 - p$, nous donne pour $t \in (0,T)$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [t(y'(t))^2 - (yy')(t) + \frac{2}{p+1} t^{2-p} y^{p+1}(t)] &= \\ &= \frac{5-p}{p+1} t^{1-p} y^{p+1}(t). \end{aligned} \tag{3.47}$$

Nous l'intégrons entre 0 et T :

$$T(y'(T))^2 - \frac{2}{p+1} \lim_{t \downarrow 0} t^{2-p} y^{p+1}(t) = \frac{5-p}{p+1} \int_0^T s^{1-p} y^{p+1}(s) ds.$$

Par le lemme 3.12 : $y'(T) = Tx'(T) < 0$ et $\lim_{t \downarrow 0} t^{2-p} y^{p+1}(t) = \lim_{t \downarrow 0} t^3 x^{p+1}(t) = 0$.

Nous obtenons :

$$0 < \frac{5-p}{p+1} \int_0^T s^{1-p} y^{p+1}(s) ds \leq 0, \text{ puisque } p \geq 5; \text{ d'où}$$

la contradiction. ■

Lemme 3.15. Supposons que x soit une solution du problème (3.39), avec $p \geq 0$. Alors $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$.

Démonstration. La solution x étant continue et à valeurs strictement positives, elle est strictement décroissante par le lemme 3.12. Il existe un $\ell \geq 0$, tel que $\ell = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$ et $\forall t \in \mathbb{R}_+ : x(t) \geq \ell$. Avec (3.43) :

$$-x'(t) = \frac{1}{t^2} \int_0^t s^2 x^p(s) ds \geq \frac{\ell^p}{3} t$$

et $x(t) \leq 1 - \frac{\ell^p}{6} t^2$. D'où $\ell = 0$, puisque x est positive. ■

Lemme 3.16. Soit $p > 1$ et $a \geq 0$. Supposons que $x \in C^2([a, \infty))$ vérifie :

$$\begin{cases} -\frac{1}{t^2} (t^2 x'(t))' = x^p(t) & t > a \\ x(t) > 0 & t \geq a. \end{cases} \quad (3.48)$$

Soit $\sigma := \frac{2}{p-1} > 0$ et v la fonction définie sur $[a, \infty)$ par $t \mapsto t^\sigma x(t)$. Alors $v \in BC([a, \infty))$.

Démonstration. (i) Substituons v à x dans (3.48). Nous obtenons :

$$t^2 v''(t) + 2 \frac{p-3}{p-1} t v'(t) - 2 \frac{p-3}{(p-1)^2} v(t) + v^p(t) = 0. \quad (3.49)$$

(ii) Cas où $1 < p < 5$. Faisons le changement de variable $\theta := -\ln t$ et posons $z(\theta) := v(t)$. Si $a = 0$ dans (3.36), alors θ parcourt \mathbb{R} . Si $a > 0$: $\theta \in (-\infty, -\ln a]$. Alors $z'(\theta) = \frac{dz}{d\theta}(\theta) = -t v'(t)$ et $z'(\theta) + z''(\theta) = t^2 v''(t)$, ce qui, introduit dans (3.49), nous donne :

$$z''(\theta) + \frac{5-p}{p-1} z'(\theta) - \frac{2(p-3)}{(p-1)^2} z(\theta) + z^p(\theta) = 0. \quad (3.50)$$

Multiplions (3.50) par z' et intégrons :

$$\frac{1}{2} (z')^2 + \frac{5-p}{p-1} \int (z'(\theta))^2 d\theta - \frac{p-3}{(p-1)^2} z^2 + \frac{z^{p+1}}{p+1} = \text{cste},$$

d'où : $\frac{z^{p-1}}{p+1} \leq \frac{\text{cste}}{z^2} + \frac{p-3}{(p-1)^2} (z \neq 0)$; z doit donc être bornée, ainsi que v .

(iii) Cas où $p \geq 5$. Posons $\theta := \ln t$ et $z(\theta) := v(t)$. Si $a = 0$, alors $\theta \in \mathbb{R}$. Si $a > 0$, $\theta \in [\ln a, \infty)$. Nous avons $z'(\theta) = \frac{dz}{d\theta}(\theta) = t v'(t)$ et $z''(\theta) - z'(\theta) = t^2 v''(t)$, que nous introduisons dans (3.49) :

$$z'' + \frac{p-5}{p-1} z' - \frac{2(p-3)}{(p-1)^2} z + z^p = 0. \quad (3.51)$$

Multiplions par z' et intégrons :

$$\frac{1}{2} (z')^2 + \frac{p-5}{p-1} \int (z'(\theta))^2 d\theta - \frac{p-3}{(p-1)^2} z^2 + \frac{z^{p+1}}{p+1} = \text{cste},$$

d'où : $\frac{z^{p-1}}{p+1} \leq \frac{\text{cste}}{z^2} + \frac{p-3}{(p-1)^2} (z \neq 0)$, ce qui montre que v est bornée dans $[a, \infty)$. ■

Lemme 3.17. Le problème (3.39) n'a pas de solution pour $p < 5$.

Démonstration. Supposons, ab absurdo, que x soit une solution de (3.39).

Traitons séparément les trois cas : $1 < p < 5$, $0 \leq p \leq 1$, $p < 0$.

(i) Cas où $1 < p < 5$. Faisons le changement de variable $\tau := t^{-1}$ et définissons une fonction w par $w(\tau) := x(t)$. Alors w est continue dans \mathbb{R}_+ et satisfait à :

$$-w''(\tau) = \tau^{-4} w^p(\tau) \quad \tau > 0 \quad (3.52)$$

$$w(0) = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0 \quad (\text{lemme 3.15})$$

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} w(\tau) = x(0) = 1 \quad (3.53)$$

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} w'(\tau) = - \lim_{t \downarrow 0} t^2 x'(t) = 0 \quad (\text{lemme 3.12}). \quad (3.54)$$

Comme $w''(\tau) \leq 0$ et $w(0) = 0$: $w(\tau) \geq \tau w'(\tau)$. La propriété (3.54) implique que $w'(\tau) \geq 0$. Nous obtenons :

$$\forall \tau > 0, w'(\tau) [w(\tau) - \tau w'(\tau)] \geq 0. \quad (3.55)$$

Posons $r = -4$ dans l'identité (3.45) :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} [\tau (w'(\tau))^2 - (w w')(\tau) + \frac{2}{p+1} \tau^{-3} w^{p+1}(\tau)] = \\ = \frac{p-5}{p+1} \tau^{-4} w^{p+1}(\tau), \tau > 0. \end{cases} \quad (3.56)$$

Intégrons entre a et b , où $0 < a < b$:

$$\frac{p-5}{p+1} \int_a^b s^{-4} w^{p+1}(s) ds = b(w'(b))^2 - w(b)w'(b) + \frac{2}{p+1} b^{-3} w^{p+1}(b) + w'(a) [w(a) - a w'(a)] - \frac{2}{p+1} a^{-3} w^{p+1}(a) \geq -w(b) w'(b) - \frac{2}{p+1} a^{-3} w^{p+1}(a),$$

compte tenu de (3.55).

Faisons tendre b vers l'infini, en considérant (3.53) et (3.54) :

$$\frac{p-5}{p+1} \int_a^\infty s^{-4} w^{p+1}(s) ds \geq -\frac{2}{p+1} a^{-3} w^{p+1}(a). \quad (3.57)$$

Nous montrons que :

$$\lim_{a \rightarrow 0} a^{-3} w^{p+1}(a) = 0. \quad (3.58)$$

Soit $\sigma := \frac{2}{p-1} > 0$. On peut trouver une constante C telle que $\forall t \geq 0$: $t^\sigma x(t) \leq C$ (lemme 3.16). Alors $\forall \tau > 0$: $0 \leq \tau^{-3} w^{p+1}(\tau) = t^3 x^{p+1}(t) \leq C^{p+1} t^{3-\sigma(p+1)} = C^{p+1} \tau^{(5-p)/(p-1)}$, d'où (3.58).

Introduisons ce résultat dans (3.57) :

$$\frac{p-5}{p+1} \int_0^\infty s^{-4} w^{p+1}(s) ds \geq 0$$

d'où la contradiction puisque $p - 5 < 0$.

(ii) Cas où $0 \leq p \leq 1$. Définissons une fonction y sur \mathbb{R}_+ par $t \mapsto tx(t)$. Alors y vérifie :

$$\begin{cases} -y''(t) = t^{1-p} y^p(t) & t > 0 \\ y(0) = 0, y'(0) = 1 \\ y(t) > 0 & t > 0 \end{cases}$$

d'où

$$y'(t) = 1 - \int_0^t s^{1-p} y^p(s) ds. \quad (3.59)$$

Puisque y est concave et ne prend que des valeurs strictement positives sur \mathbb{R}_+ , elle doit nécessairement être croissante sur \mathbb{R}_+ . Soit $t > 1$, alors (3.59) nous donne :

$$\begin{aligned} y'(t) &= 1 - \int_0^1 s^{1-p} y^p(s) ds - \int_1^t s^{1-p} y^p(s) ds \leq \\ &\leq 1 - y^p(1) \int_1^t s^{1-p} ds \leq 1 - y^p(1)(t-1). \end{aligned}$$

On en déduit que, si t est suffisamment grand, y' prend des valeurs strictement négatives, d'où la contradiction.

(iii) Cas où $p < 0$. Par le lemme (3.12), x est une fonction décroissante. Avec (3.43) :

$$\forall t > 0 : \frac{x'(t)}{t} = -\frac{1}{t^3} \int_0^t s^2 x^p(s) ds \geq -\frac{x^p(t)}{3}.$$

x est solution de l'équation différentielle : $0 = \frac{1}{t^2} (t^2 x'(t))' + x^p(t) =$

$= x''(t) + \frac{2}{t} x'(t) + x^p(t) \geq x''(t) + \frac{x^p(t)}{3} > x''(t)$. Ainsi x est une fonction strictement concave et décroissante; elle doit nécessairement s'annuler, d'où la contradiction. ■

Lemme 3.18. Soit $\bar{t}, \bar{x} \in \mathbb{R}_+$ et $\bar{y} \in \mathbb{R}$. Alors, il existe $t^* > \bar{t}$, tel que le problème :

$$\begin{cases} -\frac{1}{t^2} (t^2 x'(t))' = x^p(t) & t \in I \\ x(\bar{t}) = \bar{x}, x'(\bar{t}) = \bar{y} \\ x(t) > 0 & t \in I \end{cases} \quad (3.60)$$

où $I := (\bar{t}, t^*)$

a une solution dans $C^2(\bar{I})$.

Démonstration. Soit $D := [\bar{t}, 2\bar{t}] \times [\frac{\bar{x}}{2}, \frac{3\bar{x}}{2}] \times [\bar{y} - \bar{t}, \bar{y} + \bar{t}]$. D est un sous-ensemble compact de \mathbb{R}^3 . Définissons sur D la fonction h par $(t, \xi, \eta) \mapsto -\frac{2}{t} \eta - \xi^p$; cette fonction est dans $C(D)$. Le théorème d'existence de Peano [53;p.78] nous donne $t^* \in (\bar{t}, 2\bar{t})$ et l'existence d'une solution $x \in C^2(\bar{I})$, $I := (\bar{t}, t^*)$, de :

$$\begin{cases} x''(t) = -x^p(t) - \frac{2}{t} x'(t) & t \in I \\ x(\bar{t}) = \bar{x}, x'(\bar{t}) = \bar{y}. \end{cases}$$

Par hypothèse $x(t) \geq \frac{\bar{x}}{2} > 0$, pour $t \in \bar{I}$; x est donc une solution de (3.60). ■

Lemme 3.19. Supposons l'existence d'une solution du problème (3.38). Alors se présente l'alternative :

soit le problème (3.39) a une solution ($p \geq 5$),

soit le problème (3.40) a une solution ($p < 5$).

Démonstration. (i) Soit x_0 une solution de (3.38). Désignons par x un prolongement de x_0 à un intervalle maximal I . Montrons que $\forall t \in \overset{\circ}{I} : x(t) > 0$. Supposons, ab absurdo, qu'il existe un $t^* \in \overset{\circ}{I}$, tel que $x(t^*) = 0$. Comme x est positive et de classe $C^1 : x'(t^*) = 0$. D'autre part, la relation (3.43) implique que $x'(t^*) < 0$; d'où la contradiction.

(ii) Si $I = [0, \infty) : x$ est solution de (3.39).

(iii) Si I est borné : x étant continue, positive et décroissante sur \bar{I} (lemme 3.12), il suit que $x \in C(\bar{I})$. Ainsi I est fermé : $I = [0, T]$. Si $x(T) = 0$, (T, x) est une solution de (3.40). Le cas $x(T) > 0$ est exclu par le lemme 3.18; en effet, I ne serait pas maximal.

(iv) Si $p < 5$, (3.39) n'a pas de solution (lemme 3.17). Si $p \geq 5$, (3.40) n'en a pas (lemme 3.14). D'où l'alternative. ■

3.2.3 $p < 0$

Nous démontrons l'existence et l'unicité d'une solution du problème (3.40), à l'aide d'un résultat dû à S. Taliaferro [54]. Cet auteur considère le problème suivant : trouver $y \in C([0, 1]) \cap C^2(0, 1)$ qui vérifie :

$$\begin{cases} -y''(\tau) = \phi(\tau) y^p(\tau) & \tau \in (0, 1) \\ y(0) = y(1) = 0 \\ y(\tau) > 0 & \tau \in (0, 1) \end{cases} \quad (3.61)$$

où $p < 0$, $\phi \in C(0, 1)$ et $\phi(\tau) > 0$ pour $\tau \in (0, 1)$.

Lemme 3.20. Le problème (3.61) a une solution si et seulement si :

$$\int_0^1 s(1-s) \phi(s) ds < \infty. \quad (3.62)$$

Si elle existe, la solution de (3.61) est unique. De plus, la $\lim_{\tau \downarrow 0} y'(\tau)$ existe (dans \mathbb{R}) si et seulement si

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \phi(s) s^p ds < \infty \quad (3.63)$$

et la $\lim_{\tau \uparrow 1} y'(\tau)$ existe si et seulement si

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 \phi(s) (1-s)^p ds < \infty. \quad (3.64)$$

[54; pp. 897-898]

Proposition 3.21. Pour $p < 0$, le problème (3.40) a une unique solution (T, x) , avec $x \in C([0, T]) \cap C^2([0, T])$. Si $-1 < p < 0$: $x \in C^1([0, T])$.

Démonstration. (i) Considérons le problème

$$\begin{cases} -y''(\tau) = \tau^{1-p} y^p(\tau) & \tau \in (0,1) \\ y(0) = y(1) = 0 \\ y(\tau) > 0 & \tau \in (0,1). \end{cases} \quad (3.65)$$

Posons $\phi(\tau) := \tau^{1-p}$ pour $\tau \in [0,1]$. Les deux conditions (3.62) et (3.63) sont vérifiées. Par le lemme 3.20, le problème (3.65) a une solution unique $y \in C([0,1]) \cap C^1([0,1]) \cap C^2(0,1)$. De plus $y'(0) > 0$ (proposition 2.2). La condition (3.64) est vérifiée si et seulement si $-1 < p$; d'où $y \in C^1([0,1])$ pour $-1 < p < 0$.

(ii) Posons :

$$T := [y'(0)]^{-\frac{1-p}{2}} > 0. \quad (3.66)$$

Faisons le changement de variable $t := T\tau$ et définissons une fonction x par :

$$\begin{cases} x(t) := \frac{y(\tau)}{y'(0)\tau} & \text{si } \tau \in (0,1) \\ x(0) := 1. \end{cases} \quad (3.67)$$

Alors $t \in [0,T]$ lorsque τ parcourt $[0,1]$, $x \in C([0,T]) \cap C^2(0,T)$,

$$\begin{aligned} x'(t) &= \frac{dx}{dt}(t) = [Ty'(0)]^{-1} \frac{y'(\tau)\tau - y(\tau)}{\tau^2}, \quad t \in (0,T) \\ -\frac{1}{t^2} (t^2 x'(t))' &= -[T^2 y'(0)\tau]^{-1} y''(\tau) = x^p(t), \quad t \in (0,T) \end{aligned} \quad (3.68)$$

$x(T) = 0$ et $x(t) > 0$ pour $t \in [0,T)$. Ainsi (T,x) est une solution de (3.40).

Par le lemme 3.12 : $x \in C^2([0,T])$. Si $-1 < p < 0$, $y'(1)$ existe et

$$x'(T) = \frac{y'(1)}{y'(0)T}; \text{ dans ce cas } x \in C^1([0,T]).$$

(iii) Il reste à démontrer l'unicité de la solution de (3.40). Soit (T_1, x_1)

une solution de (3.40). Posons $\tau := \frac{t}{T_1}$ et $y_1(\tau) := T_1^{\frac{p-3}{1-p}} t x_1(t)$. Alors

$\tau \in [0,1]$ lorsque t parcourt $[0,T_1]$ et y_1 est une solution de (3.65), dans

$C([0,1]) \cap C^2(0,1)$. Supposons que (T_2, x_2) soit une autre solution de (3.40).

Posons $\tau' := \frac{t}{T_2}$ et $y_2(\tau') := T_2^{\frac{p-3}{1-p}} t x_2(t)$. Alors $\tau' \in [0,1]$ lorsque t varie

dans $[0,T_2]$ et y_2 est une solution de (3.65), dans $C([0,1]) \cap C^2(0,1)$. La

solution de (3.65) étant unique ; $y_1 = y_2$. Par le lemme 3.12 : $x_1'(0) = x_2'(0)$.

D'où $T_1^{\frac{2}{p-1}} = y_1'(0) = y_2'(0) = T_2^{\frac{2}{p-1}}$, donc $T_1 = T_2$ et $x_1 = x_2$. ■

Corollaire. Le problème (3.38) a une solution unique pour $p < 0$.

Démonstration. L'existence vient de la proposition 3.21. Montrons l'unicité. Soit x une solution de (3.38). Elle est définie sur un intervalle borné (lemme 3.17). Par le lemme 3.19 : x peut être prolongée par une solution de (3.40). Or la solution de (3.40) est unique. ■

3.2.4 $-1 < p < 0$

Nous avons démontré, dans la proposition 3.21, que le problème (3.40) a une solution unique (T, x) , avec $x \in C^1([0,1])$, lorsque $-1 < p < 0$. Cette solution peut être obtenue par une méthode itérative. Au lieu de (3.40), nous considérons le problème (3.65) :

$$\begin{cases} -y''(\tau) = \tau^{1-p} y^p(\tau) & \tau \in (0,1) \\ y(0) = y(1) = 0 \\ y(\tau) > 0 & \tau \in (0,1). \end{cases}$$

La solution de (3.65) sera approchée par une suite alternée. Ensuite le changement de variable $t := T\tau$, avec $T := [y'(0)]^{-\frac{1-p}{2}}$, nous donne la solution (T, x) de (3.40), où $x(t) := [y'(0)\tau]^{-1}y(\tau)$.

Avec $p < 0$, la non-linéarité dans (3.65) est décroissante et non bornée en 0. Nous ne pouvons pas appliquer tels quels les résultats du §2.7.4.

Rappelons que $C_0^1([0,1]) = \{x \in C^1([0,1]) \mid x(0) = x(1) = 0\}$. Soit P_1 son cône des fonctions positives. P_1 est un cône solide et $P_1^0 = \{x \in P_1 \mid \forall \tau \in (0,1) : x(\tau) > 0; x'(0) > 0 \text{ et } x'(1) < 0\}$; voir l'exemple 21 du §1.4.3. Notons $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ un segment conique dans cet espace.

Considérons le problème linéaire :

$$\begin{cases} -z''(\tau) = \tau^{1-p} h^p(\tau) & \tau \in (0,1) \\ z(0) = z(1) = 0. \end{cases} \quad (3.69)$$

Lemme 3.22. Soit $-1 < p < 0$ et $h \in P_1^0$. Alors le problème (3.69) a une solution unique dans P_1^0 .

Démonstration. h étant dans $\overset{\circ}{P}_1$: $h'(0) > 0$ et $h'(1) < 0$. Définissons une fonction h^* par $h^*(\tau) := \tau^{1-p} h^p(\tau)$, si $0 < \tau < 1$, et $h^*(0) = 0$. Alors $\lim_{\tau \downarrow 0} h^*(\tau) = 0$ et $\lim_{\tau \uparrow 1} (1-\tau)^{-p} h^*(\tau) = [-h'(1)]^p$, donc $h^* \in C_{0,-p}(0,1)$. Par le lemme 2.14, (3.69) a une solution (unique) dans $C^1([0,1])$. Cette solution est dans $\overset{\circ}{P}_1$ (proposition 2.2). ■

Soit $A := 6^{-p/(1-p^2)}$ et h_0 la fonction définie sur $[0,1]$ par $h_0(\tau) := A\tau$.

Soit z_0 la solution de (3.69) qui lui correspond. Le calcul nous donne

$$z_0(\tau) = A^{1/p} \tau(1-\tau^2), \text{ pour } \tau \in [0,1]. \quad (3.70)$$

Alors $z_0 \in \overset{\circ}{P}_1$, puisque $z_0'(0) = A^{1/p}$ et $z_0'(1) = -2A^{1/p}$. A partir de z_0 formons la suite (z_n) , définie par la formule de récurrence

$$\begin{cases} -z_{n+1}''(\tau) = \tau^{1-p} z_n^p(\tau) & \tau \in (0,1) \\ z_{n+1}(0) = z_{n+1}(1) = 0. \end{cases} \quad (3.71)$$

Comme $z_0 \in \overset{\circ}{P}_1$, tous les éléments z_n de la suite sont dans $\overset{\circ}{P}_1$ (lemme 3.22).

Lemme 3.23. $z_1 - z_0$ et $z_2 - z_0$ sont dans $\overset{\circ}{P}_1$.

Démonstration. (i) Montrons que : $\forall \tau \in (0,1]$, $h_0(\tau) > z_0(\tau)$. Puisque z_0 est strictement concave et $z_0(0) = h_0(0)$, il suffit de vérifier que $h_0'(0) \geq z_0'(0)$. Or $h_0'(0) - z_0'(0) = A - A^{1/p} = A^{1/p} [6^{1/(1+p)} - 1] > 0$.

(ii) Pour $\tau \in (0,1)$: $(z_1 - z_0)''(\tau) = \tau^{1-p} [h_0^p(\tau) - z_0^p(\tau)] < 0$; de plus $(z_1 - z_0)(0) = (z_1 - z_0)(1) = 0$. D'où $z_1 - z_0 \in \overset{\circ}{P}_1$.

(iii) Montrons que : $\forall \tau \in (0,1]$, $h_0(\tau) > z_1(\tau)$. Il suffit de vérifier que $h_0'(0) \geq z_1'(0)$. Puisque z_1 est la solution de (3.71), pour $n = 0$, $z_1'(0) = \int_0^1 (1-s) s^{1-p} z_0^p(s) ds$. Remplaçons z_0 par son expression (3.70) : $z_1'(0) = A \int_0^1 s(1-s)^{p+1} (1+s)^p ds \leq A \int_0^1 (1-s)^{p+1} ds = \frac{A}{p+2} < A = h_0'(0)$.

(i) Pour $\tau \in (0,1)$: $(z_2 - z_0)''(\tau) = \tau^{1-p} [h_0^p(\tau) - z_1^p(\tau)] < 0$; de plus $(z_2 - z_0)(0) = (z_2 - z_0)(1) = 0$. D'où $z_2 - z_0 \in \overset{\circ}{P}_1$. ■

Proposition 3.24. La suite (z_n) définie par (3.71) est alternée et converge, uniformément dans $[0,1]$, vers une fonction dans $\langle z_0, z_1 \rangle_1$, qui est la solution de (3.65).

Démonstration. (i) Définissons une application $H : \langle z_0, z_1 \rangle_1 \subset \mathbb{C}([0,1]) \rightarrow \mathbb{C}([0,1])$

par :

$$\begin{cases} (H(h))(\tau) := (1-\tau) \int_0^\tau s^{2-p} h^p(s) ds + \tau \int_\tau^1 (1-s) s^{1-p} h^p(s) ds, \\ \tau \in (0,1) \\ (H(h))(0) = (H(h))(1) = 0. \end{cases} \quad (3.72)$$

Il est facile de vérifier que $H(\langle z_0, z_1 \rangle_1) \subset \overset{0}{P}_1$, en se servant de la relation :

$$(H(h))'(\tau) = - \int_0^\tau s^{2-p} h^p(s) ds + \int_\tau^1 (1-s) s^{1-p} h^p(s) ds, \quad \tau \in [0,1]. \quad (3.73)$$

Soit $h \in \langle z_0, z_1 \rangle_1$. Alors z est la solution de (3.69) si et seulement si $z = H(h)$. En particulier :

$$\forall n \in \mathbb{N} : z_{n+1} = H(z_n). \quad (3.74)$$

Comme $p < 0$, H est strictement décroissante. Par le lemme 3.23,

$H(\langle z_0, z_1 \rangle_1) \subset \langle z_0, z_1 \rangle_1$. Ainsi la suite est alternée (proposition 1.16) et :

$$z_0 < z_2 < \dots < z_{2n} < z_{2n+1} < \dots < z_3 < z_1.$$

(ii) Estimons $\|(H(h))'\|_0$ pour $h \in \langle z_0, z_1 \rangle_1$. Par (3.73) :

$$\begin{aligned} |(H(h))'(\tau)| &\leq \int_0^\tau s^{2-p} z_0^p(s) ds + \int_\tau^1 (1-s) s^{1-p} z_0^p(s) ds \leq \\ &\leq \int_0^1 s^{1-p} z_0^p(s) ds = A \int_0^1 s(1+s)^p (1-s)^p ds \leq \frac{A}{p+1}. \end{aligned}$$

$$\forall h \in \langle z_0, z_1 \rangle_1 : \|(H(h))'\|_0 \leq \frac{A}{p+1}. \quad (3.75)$$

(iii) La sous-suite (z_{2n}) est croissante et par (3.75) : $\forall n \in \mathbb{N}, \|z'_{2n}\|_0 \leq \text{cste}$.

Grâce au lemme 2.43, (z_{2n}) converge, uniformément dans $[0,1]$, vers une fonction \bar{z} .

De même, la sous-suite (z_{2n+1}) converge, uniformément dans $[0,1]$, vers une fonction \hat{z} avec $\bar{z} \leq \hat{z}$.

Montrons que $\hat{z} \in \langle z_0, z_1 \rangle_1$. Il suffit de vérifier

que $\hat{z} \in C^1([0,1])$. Définissons une suite (v_n) par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall \tau \in [0,1] : v_n(\tau) := \int_0^\tau s^{2-p} z_{2n}^p(s) ds.$$

C'est une suite strictement décroissante. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $\tau \in (0,1)$:

$v'_n(\tau) = \tau^{2-p} z_{2n}^p(\tau)$. Comme $\lim_{\tau \downarrow 0} v'_n(\tau) = 0$ et $\lim_{\tau \uparrow 1} (1-\tau)^{-p} v'_n(\tau) = [-z_{2n}'(1)]^p$, alors $v'_n \in C_{0,-p}(0,1)$. De plus, $\forall n \in \mathbb{N}$ et $\forall \tau \in (0,1) : v'_n(\tau) \leq \tau^{2-p} z_0^p(\tau) \leq A(1-\tau)^p$, d'où $\|v'_n\|_{0,-p} \leq A$.

Par le lemme 2.43, (v_n) converge, uniformément dans $[0,1]$, vers une fonction v .

Définissons une suite (w_n) par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall \tau \in [0,1] : w_n(\tau) = \int_\tau^1 (1-s) s^{1-p} z_{2n}^p(s) ds.$$

C'est une suite strictement décroissante. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $\tau \in (0,1)$:

$w'_n(\tau) = - (1-\tau) \tau^{1-p} z_{2n}^p(\tau)$, d'où $w'_n \in C([0,1])$ et $\|w'_n\|_0 \leq A$. Par le lemme 2.43, (w_n) converge, uniformément dans $[0,1]$, vers une fonction w . Puisque $\forall n \in \mathbb{N} : z'_{2n+1} = w_n - v_n$, nous avons montré que (z'_{2n+1}) converge, uniformément dans $[0,1]$, vers $w - v$. De la relation :

$$z_{2n+1}(\tau) = \int_0^\tau z'_{2n+1}(s) ds, \quad \tau \in [0,1], \quad n \in \mathbb{N}$$

nous tirons, par passage à la limite,

$$\hat{z}(\tau) = \int_0^\tau (w-v)(s) ds, \quad \tau \in [0,1].$$

Ainsi $\hat{z} \in C^1([0,1])$. La démonstration pour \bar{z} est analogue.

(iv) Montrons la continuité de H . Soit $h_1, h_2 \in \langle z_0, z_1 \rangle_1$. La formule des accroissements finis nous donne (pour $p < 1$) :

$$\forall \tau \in (0,1) : |h_2^p(\tau) - h_1^p(\tau)| \leq |p| z_0^{p-1}(\tau) |h_2(\tau) - h_1(\tau)| \quad (3.76)$$

Pour $\tau \in (0,1)$: $|(H(h_2) - H(h_1))(\tau)| \leq$
 $\leq |p| \|h_2 - h_1\|_0 \left\{ (1-\tau) \int_0^\tau s^{2-p} z_0^{p-1}(s) ds + \tau \int_\tau^1 (1-s) s^{1-p} z_0^{p-1}(s) ds \right\} \leq$
 $\leq |p| \|h_2 - h_1\|_0 \int_0^1 (1-s) s^{2-p} z_0^{p-1}(s) ds =$
 $= A \frac{p-1}{p} |p| \|h_2 - h_1\|_0 \int_0^1 (1-s)^p s(1+s)^{p-1} ds \leq A \frac{p-1}{p} \frac{|p|}{p+1} \|h_2 - h_1\|_0.$

D'où $\forall h_1, h_2 \in \langle z_0, z_1 \rangle_1 : \|H(h_2) - H(h_1)\|_0 \leq \text{cste} \|h_2 - h_1\|_0.$

(v) Comme \bar{z} et $\hat{z} \in \langle z_0, z_1 \rangle_1$, par passage à la limite :

$$z_0 < \bar{z} = H(\hat{z}) \leq \hat{z} = H(\bar{z}) < z_1.$$

Il reste à démontrer que $\bar{z} = \hat{z}$. Supposons, ab absurdo, que $\bar{z} < \hat{z}$. Définissons une application $\tilde{H} : \overset{\circ}{P}_1 \subset C_0^1([0,1]) \rightarrow C_0^1([0,1])$ par la formule (3.72). \tilde{H} est fortement décroissante, $\bar{z} = \tilde{H}(\hat{z})$ et $\hat{z} = \tilde{H}(\bar{z})$. Si $h \in \overset{\circ}{P}_1$ et $\theta \in (0,1)$, alors $\tilde{H}(\theta h) = \theta^p \tilde{H}(h)$. Comme $\bar{z} \in \overset{\circ}{P}_1$, il existe un $\theta \in (0,1)$ tel que $\bar{z} - \theta \hat{z} \in \overset{\circ}{P}_1 \setminus \overset{\circ}{P}_1$. Donc $\hat{z} = \tilde{H}(\bar{z}) < \tilde{H}(\theta \hat{z}) = \theta^p \tilde{H}(\hat{z}) = \theta^p \bar{z} < \theta^{-1} \bar{z}$, d'où $\bar{z} - \theta \hat{z} \in \overset{\circ}{P}_1$ et la contradiction. Ainsi $z := \bar{z} = \hat{z}$ vérifie $z = \tilde{H}(z) = H(z)$. C'est la solution de (3.65). ■

C.D. Luning et W.L. Perry ont proposé une autre méthode itérative pour résoudre le problème (3.65), avec $-1 < p < 0$. Leur méthode donne également une suite alternée [55].

3.2.5 $0 \leq p \leq 1$

Pour $p = 0$ ou 1 , la solution de (3.40) est connue explicitement. L'unicité se vérifie facilement. Pour $0 < p < 1$, nous allons construire la solution du problème (3.65), qui est unique, par des itérations monotones.

Lemme 3.25. La solution continue et strictement positive du problème (3.65) est unique pour $0 < p < 1$ (si elle existe).

Démonstration. (i) Supposons, ab absurdo, que y_1 et y_2 soient deux solutions de (3.65) et définissons $w := y_2 - y_1$. Alors :

$$\begin{cases} w''(\tau) = \tau^{1-p}(y_1^p(\tau) - y_2^p(\tau)) & \tau \in (0,1) \\ w(0) = w(1) = 0. \end{cases} \quad (3.77)$$

L'identité suivante est valable pour $\tau \in [0,1]$:

$$(y_1 y_2' - y_2 y_1')(\tau) = \int_0^\tau s^{1-p} [y_1^p y_2^p (y_2^{1-p} - y_1^{1-p})](s) ds. \quad (3.78)$$

En effet, $(y_1 y_2' - y_2 y_1')' = y_1 y_2'' - y_2 y_1'' = \tau^{1-p} y_1^p y_2^p (y_2^{1-p} - y_1^{1-p})$. Une intégration donne (3.78). Il faut remarquer que $w \in C^2([0,1])$.

Si $w'(0) > 0$, il existe alors un $\delta \in (0,1]$, tel que $w(\delta) = 0$ et $w(\tau) > 0$, $\forall \tau \in (0,\delta)$. Nécessairement : $w'(\delta) \leq 0$. D'autre part, $(y_1 y_2' - y_2 y_1')(\delta) > 0$, par (3.78). D'où le résultat contradictoire : $w'(\delta) > 0$.

Si $w'(0) < 0$, il existe un $\delta \in (0,1]$, tel que $w(\delta) = 0$ et $w(\tau) < 0$, $\forall \tau \in (0,\delta)$. Il faut alors que $w'(\delta) \geq 0$. Mais (3.78) nous donne : $w'(\delta) < 0$.

(ii) Il est donc nécessaire que $w'(0) = 0$. Intégrons deux fois (3.77) :

$$w(\tau) = \int_0^\tau (\tau-s) s^{1-p} (y_1^p(s) - y_2^p(s)) ds, \quad \tau \in [0,1]. \quad (3.79)$$

Puisque y_1 et y_2 sont des fonctions concaves :

$$\forall \tau \in [0,1] : y_i(\tau) \geq y_i\left(\frac{1}{2}\right) y_0(\tau) \geq m y_0(\tau), \quad i = 1,2$$

$$\text{où } m := \min [y_1\left(\frac{1}{2}\right), y_2\left(\frac{1}{2}\right)] > 0$$

et y_0 est la fonction définie par :

$$y_0(\tau) := \begin{cases} 2\tau & 0 \leq \tau \leq \frac{1}{2} \\ 2(1-\tau) & \frac{1}{2} \leq \tau \leq 1. \end{cases}$$

L'inégalité (3.76) est valable aussi pour $p \in (0,1)$:

$$\forall \tau \in (0,1) : |y_2^p(\tau) - y_1^p(\tau)| \leq pm^{p-1} y_0^{p-1}(\tau) |y_2(\tau) - y_1(\tau)|.$$

Introduisons ceci dans (3.79) :

$$|w(\tau)| \leq pm^{p-1} \int_0^\tau (\tau-s) s^{1-p} y_0^{p-1}(s) |w(s)| ds, \tau \in [0,1].$$

En particulier, si $\tau \in [0, \frac{1}{2}]$:

$$|w(\tau)| \leq 2^{p-2} p m^{p-1} \int_0^\tau |w(s)| ds.$$

D'où $w = 0$ dans $[0, \frac{1}{2}]$, par le lemme de Gronwall. Alors pour $\tau \in [\frac{1}{2}, 1]$:

$$|w(\tau)| \leq 2^{p-1} p m^{p-1} \int_{\frac{1}{2}}^\tau (\tau-s) s^{1-p} (1-s)^{p-1} |w(s)| ds \leq$$

$$\leq \text{cste} \int_{\frac{1}{2}}^\tau |w(s)| ds;$$

d'où $w = 0$ dans $[\frac{1}{2}, 1]$. ■

Nous allons définir deux fonctions φ et ψ qui seront respectivement sous-solution et sur-solution (compatibles) de (3.65).

Soit $\alpha := \frac{3-p}{1-p}$, $\beta := \frac{2}{1-p}$, $\gamma := \frac{3-p}{2(5-p)}$, $\delta := \frac{1}{5-p}$,

$$A := \left[\frac{(1-p)(5-p)}{2(3-p)} \right]^{\frac{1}{1-p}} = \left(\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta} \right)^{\frac{1}{1-p}} \text{ et}$$

$$B := \left[\frac{(5-p)^2}{3-p} \right]^{\frac{1}{1-p}} = (2\gamma\delta)^{\frac{-1}{1-p}}.$$

Comme $p \in (0,1)$: $\alpha > 3$, $\beta > 2$ et $\frac{1}{5} < \delta < \frac{1}{4} < \gamma < \frac{3}{10}$. Soit φ et ψ les fonctions définies sur $[0,1]$ par :

$$\varphi(\tau) := A\tau^\alpha(1-\tau)^\beta \text{ et } \psi(\tau) := B\tau^\gamma(1-\tau)^\delta. \quad (3.80)$$

Alors $\varphi \in C^2([0,1])$ et $\psi \in C([0,1]) \cap C^2(0,1)$.

Lemme 3.26. φ est une sous-solution et ψ est une sur-solution du problème (3.65); φ et ψ sont compatibles.

Démonstration. (i) Compatibilité.

Nous avons : $\alpha - \gamma > 0$, $\beta - \delta > 0$, $\frac{A}{B} = \left[\frac{1-p}{2(5-p)} \right]^{\frac{1}{1-p}} < 1$. Alors $\forall \tau \in [0,1]$:

$$(\psi - \varphi)(\tau) = B\tau^\gamma(1-\tau)^\delta \left[1 - \frac{A}{B} \tau^{\alpha-\gamma}(1-\tau)^{\beta-\delta} \right] \geq 0.$$

(ii) φ est une sous-solution.

En effet : $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$, $\varphi \geq 0$ et $\forall \tau \in [0,1]$:

$$\varphi''(\tau) + \tau^{1-p}\varphi^p(\tau) = A\tau^{1-p+\alpha p}(1-\tau)^{\beta p} [A^{p-1} + P(\tau)]$$

$$\begin{aligned} \text{où } P(\tau) &:= \alpha(\alpha-1)(1-\tau)^2 - 2\alpha\beta\tau(1-\tau) + \beta(\beta-1)\tau^2 = \\ &= (\alpha+\beta)(\alpha+\beta-1)\tau^2 - 2\alpha(\alpha+\beta-1)\tau + \alpha(\alpha-1). \end{aligned}$$

Soit $\bar{P} := \min \{P(\tau) \mid \tau \in [0,1]\}$. Il suffit de vérifier que :

$$A^{p-1} + \bar{P} \geq 0. \quad (3.81)$$

Comme $\frac{\alpha}{\alpha+\beta} = 2\gamma \in (0,1)$: $P'(\tau) = 2(\alpha+\beta-1)[(\alpha+\beta)\tau - \alpha] = 0$ si et seulement si $\tau = \bar{\tau} := \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$. De plus $P''(\tau) = 2(\alpha+\beta-1)(\alpha+\beta) > 0$, d'où $\bar{P} = P(\bar{\tau}) = -\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta} = -A^{p-1}$; (3.81) est vérifiée.

(iii) ψ est une sur-solution.

En effet, $\psi(0) = \psi(1) = 0$, $\psi \geq 0$ et $\forall \tau \in [0,1]$:

$$\psi''(\tau) + \tau^{1-p}\psi^p(\tau) = B\tau^{1-p+\gamma p}(1-\tau)^{\delta p} [B^{p-1} + \tau^\varepsilon(1-\tau)^\zeta Q(\tau)]$$

$$\text{où } \varepsilon := \gamma(1-p) + p - 3 = -\frac{(3-p)(9-p)}{2(5-p)} < 0$$

$$\zeta := \delta(1-p) - 2 = -\frac{9-p}{5-p} < 0$$

$$\begin{aligned} Q(\tau) &:= \gamma(\gamma-1)(1-\tau)^2 - 2\gamma\delta\tau(1-\tau) + \delta(\delta-1)\tau^2 = \\ &= (\gamma+\delta)(\gamma+\delta-1)\tau^2 - 2\gamma(\gamma+\delta-1)\tau + \gamma(\gamma-1) = \\ &= -\frac{\tau^2}{4} + \gamma\tau + \gamma(\gamma-1). \end{aligned}$$

Soit $\hat{Q} := \max \{Q(\tau) \mid \tau \in [0,1]\}$. Il suffit de vérifier que :

$$\forall \tau \in (0,1) : B^{p-1} + \tau^\varepsilon(1-\tau)^\zeta \hat{Q} \leq 0. \quad (3.82)$$

Comme $\bar{\tau} := 2\gamma \in (0,1)$: $Q'(\tau) = -\frac{\tau}{2} + \gamma = 0$ si et seulement si $\tau = \bar{\tau}$. D'où $\hat{Q} = Q(\bar{\tau}) = -2\gamma\delta < 0$. D'autre part $\inf \{\tau^\varepsilon(1-\tau)^\zeta \mid \tau \in (0,1)\} \geq 1$. Ainsi $\forall \tau \in (0,1)$:

$$B^{p-1} + \tau^\varepsilon(1-\tau)^\zeta \hat{Q} < B^{p-1} + \hat{Q} = 0, \text{ d'où (3.82).} \quad \blacksquare$$

Nous définissons une nouvelle sur-solution ψ_1 de (3.65), compatible avec φ , par :

$$\begin{cases} -\psi_1''(\tau) = \tau^{1-p} \psi^p(\tau) & \tau \in (0,1) \\ \psi_1(0) = \psi_1(1) = 0. \end{cases} \quad (3.83)$$

Contrairement à ψ , cette sur-solution ψ_1 est dans $C^2([0,1])$.

Donnons-nous une formule de récurrence :

$$\begin{cases} -y_{n+1}''(\tau) = \tau^{1-p} y_n^p(\tau) & \tau \in (0,1) \\ y_{n+1}(0) = y_{n+1}(1) = 0. \end{cases} \quad (3.84)$$

La proposition qui suit est une conséquence immédiate de la proposition 2.39, puisque la non-linéarité est croissante.

Proposition 3.27. La suite (y_n) construite à l'aide de (3.84), à partir de $y_0 := \varphi$, est croissante et la suite (Y_n) construite à l'aide de (3.84), à partir de $Y_0 := \psi_1$, est décroissante. Ces deux suites convergent, uniformément dans $[0,1]$, vers la même limite y . Cette fonction y est dans $C^2([0,1])$ et c'est la solution de (3.65).

La proposition suivante se démontre comme la proposition 3.21. La transformation (3.66), (3.67) est possible puisque la solution de (3.65) est dans $C^2([0,1])$.

Proposition 3.28. Pour $0 \leq p \leq 1$, le problème (3.40) a une unique solution (T,x) , avec $x \in C^2([0,T])$.

Corollaire. Le problème (3.38) a une solution unique, pour $0 \leq p \leq 1$.

3.2.6 $p \geq 1$

Nous établissons l'existence et l'unicité de la solution du problème (3.38) sur un intervalle $[0, \sqrt{6}]$. De là, nous déduisons l'existence de la solution du problème (3.40), pour $1 \leq p < 5$, et du problème (3.39), pour $p \geq 5$.

Proposition 3.29. La solution du problème (3.38) est unique pour $p \geq 1$.

Démonstration. (i) Si (3.38) a une solution, celle-ci doit satisfaire à la relation (3.43) :

$$x'(t) = -\frac{1}{t^2} \int_0^t s^2 x^p(s) ds.$$

Intégrons ce résultat :

$$x(t) = 1 - \frac{1}{t} \int_0^t s(t-s) x^p(s) ds. \quad (3.85)$$

(ii) Supposons, ab absurdo, que x_1 et x_2 soient deux solutions de (3.38) et définissons $w := x_2 - x_1$. Par le lemme 3.12, x_1 et x_2 sont bornées par 1, d'où :

$$|x_1^p(t) - x_2^p(t)| \leq p|w(t)|.$$

$$\text{Par (3.85) : } |w(t)| \leq \frac{p}{t} \int_0^t s(t-s) |w(s)| ds \leq p \int_0^t s |w(s)| ds.$$

Donc $w = 0$, par le lemme de Gronwall. ■

Soit $I := (0, \sqrt{6})$ et soit P_+ le cône des fonctions positives dans $C(\bar{I})$. Définissons une application $F : P_+ \subset C(\bar{I}) \rightarrow C(\bar{I})$ par :

$$\begin{cases} (F(x))(t) := 1 - \frac{1}{t} \int_0^t s(t-s) x^p(s) ds & t \in (0, \sqrt{6}] \\ (F(x))(0) := 1. \end{cases} \quad (3.86)$$

Définissons une formule de récurrence :

$$x_{n+1} := F(x_n) \quad n \in \mathbb{N}. \quad (3.87)$$

Lemme 3.30. Pour $p \geq 1$, le problème (3.38) a une solution x , qui est dans $C^2(\bar{I})$. La suite (x_n) définie par (3.87), à partir de $x_0 := 0$, est alternée et converge vers x , uniformément dans \bar{I} .

Démonstration. (i) L'application F est complètement continue et décroissante.

Pour $t \in \bar{I}$:

$$x_1(t) = 1 \text{ et } x_2(t) = 1 - \frac{t^2}{6}.$$

Ainsi $x_0 < x_2 < x_1$. La suite (x_n) est bien définie et alternée (proposition 1.16). Les sous-suites (x_{2n}) et (x_{2n+1}) convergent, la première vers \bar{x} et la seconde vers \hat{x} (proposition 1.17). Par la proposition 1.18 : $x_0 < \bar{x} = F(\hat{x}) \leq F(\bar{x}) = \hat{x} < x_1$.

(ii) Montrons que $\bar{x} = \hat{x}$. Posons $w = \hat{x} - \bar{x}$. Nous avons :

$$\forall t \in \bar{I} : 0 \leq \hat{x}^p(t) - \bar{x}^p(t) \leq p\hat{x}^{p-1}(t) w(t) = pw(t).$$

Pour $t \in I : 0 \leq w(t) = \frac{1}{t} \int_0^t s(t-s)(\hat{x}^p(s) - \bar{x}^p(s)) ds \leq p \int_0^t sw(s) ds$.

D'où $w = 0$, par le lemme de Gronwall. Alors $x := \bar{x} = \hat{x}$ vérifie $x = F(x)$, c'est donc la solution de (3.38), dans \bar{I} . Par le lemme 3.12 : $x \in C^2(\bar{I})$. ■

La proposition suivante découle du lemme 3.19 (existence) et de la proposition 3.29 (unicité).

Proposition 3.31. Pour $0 \leq p < 5$, le problème (3.40) a une unique solution (T, x) , avec $x \in C^2([0, T])$.

Proposition 3.32. Pour $p \geq 5$, le problème (3.39) a une unique solution, qui est dans $BC(\mathbb{R}_+) \cap C^2(\mathbb{R}_+) \cap L^q(\mathbb{R}_+)$, où $q > \frac{p-1}{2}$.

Démonstration. (i) L'existence vient du lemme 3.19 et l'unicité de la proposition 3.29. La solution x est dans $BC(\mathbb{R}_+) \cap C^2(\mathbb{R}_+)$, grâce au lemme 3.12.

(ii) Posons $q^* := \frac{p-1}{2}$. Le lemme 3.16 nous donne une constante γ_0 telle que

$$\sup_{t \in \mathbb{R}_+} t^{\frac{1}{q^*}} x(t) \leq \gamma_0.$$

$$\begin{aligned} \text{Alors : } 0 < \int_0^\infty x^q(s) ds &= \int_0^1 x^q(s) ds + \int_1^\infty (s^{\frac{1}{q^*}} x(s))^q s^{\frac{-q}{q^*}} ds \leq \\ &\leq 1 + \frac{q^* \gamma_0^q}{q - q^*}. \end{aligned}$$

■

Remarque. Pour $p = 5$, la solution de (3.39) est connue; c'est $x(t) = (1 + \frac{t^2}{3})^{-\frac{1}{2}} < \frac{\sqrt{3}}{t}$. Alors $x \in L^q(\mathbb{R}_+)$, avec $q > 1$ (au lieu de $q > 2$).

3.2.7 $1 < p < 5$

Aux §§3.2.4 et 3.2.5 ($-1 < p < 0$ et $0 < p < 1$), nous avons obtenu, par une méthode itérative, la solution du problème (3.65), équivalent au problème (3.40). Bien que la non-linéarité dans (3.65) soit croissante pour $1 < p < 5$, il n'est pas possible d'appliquer les résultats du §2.7.2 dans ce cas. En effet, la non-linéarité étant strictement sur-linéaire pour $p > 1$, il n'existe pas de sur-solution stricte de (3.65), qui soit compatible avec la solution (proposition 1.43). Nous allons remplacer (3.40) par un problème équi-

valent. La solution de ce problème sera approchée par une méthode itérative monotone.

Soit (T,x) la solution du problème (3.40). Posons $\lambda := T^2$, $\tau := \frac{t}{T}$ et définissons une fonction $y : \tau \mapsto \tau x(T\tau)$, pour $\tau \in [0,1]$. Alors $t \in [0,T]$, $y \in C^2([0,1])$ et (λ,y) est solution du problème :

$$\begin{cases} -y''(\tau) = \lambda \tau^{1-p} y^p(\tau) & \tau \in (0,1) \\ y(0) = y(1) = 0 \\ y'(0) = 1 \\ y(\tau) > 0 & \tau \in (0,1) \end{cases} \quad (3.88)$$

et de plus :

$$\lambda = \left[\int_0^1 (1-s) s^{1-p} y^p(s) ds \right]^{-1}. \quad (3.89)$$

Le problème (3.88) a donc au moins une solution. Soit (λ,y) une solution de (3.88), alors $y \in C^1([0,1])$ et $\lambda > 0$. Posons $T := \sqrt{\lambda}$, $t := T\tau$ et définissons une fonction $x : t \mapsto \frac{T}{t} y\left(\frac{t}{T}\right)$, pour $t \in (0,T]$ et $x(0) := 1$. Alors $\lim_{t \downarrow 0} x(t) = y'(0) = 1 = x(0)$, $x(T) = y(1) = 0$, $x \in C([0,T])$ et (T,x) est la solution de (3.40). Ainsi (3.88) a au plus une solution puisque la solution de (3.40) est unique. Nous avons établi le lemme suivant.

Lemme 3.33. Le problème (3.88) a une unique solution (λ,y) , avec $\lambda > 0$ et $y \in C^1([0,1])$, pour $1 < p < 5$.

Définissons deux suites (λ_n) et (y_n) , à partir de $y_0 : \tau \mapsto \tau$, où $\tau \in [0,1]$, à l'aide de la formule de récurrence :

$$\begin{cases} \lambda_n := \left[\int_0^1 (1-s) s^{1-p} y_n^p(s) ds \right]^{-1} \\ -y_{n+1}''(\tau) = \lambda_n \tau^{1-p} y_n^p(\tau) & \tau \in (0,1) \\ y_{n+1}(0) = y_{n+1}(1) = 0. \end{cases} \quad (3.90)$$

Alors $\forall n \in \mathbb{N} : y_n'(0) = 1$.

Dans [55] et [56], C.D. Luning et W.L. Perry ont considéré une généralisation du problème (3.88) :

$$\begin{cases} -y''(\tau) = \lambda a(\tau) y^p(\tau) & \tau \in (0,1) \\ y(0) = y(1) = 0 \\ y'(0) = 1 \\ y(\tau) > 0 & \tau \in (0,1) \end{cases} \quad (3.91)$$

avec $a \in C(0,1)$, $\forall \tau \in (0,1) : a(\tau) > 0$ et $\int_0^1 s^p(1-s)a(s)ds < \infty$.

Ils construisent deux suites (λ_n) et (y_n) , à partir de $y_0 : \tau \mapsto \tau$, où $\tau \in [0,1]$, à l'aide de la formule de récurrence :

$$\begin{cases} \lambda_n := [\int_0^1 (1-s) a(s) y_n^p(s) ds]^{-1} \\ -y_{n+1}''(\tau) = \lambda_n a(\tau) y_n^p(\tau) & \tau \in (0,1) \\ y_{n+1}(0) = y_{n+1}(1) = 0. \end{cases} \quad (3.92)$$

Alors $\forall n \in \mathbb{N} : y_n'(0) = 1$.

Ces auteurs établissent la monotonie de ces deux suites (pour $p > 0$).

Lemme 3.34. Soit $p > 0$ et a comme ci-dessus. Soit (λ_n) et (y_n) les suites définies par (3.92). Alors la suite (λ_n) est strictement croissante dans $\dot{\mathbb{R}}_+$ et la suite (y_n) est strictement décroissante dans $C^1([0,1])$; $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall \tau \in (0,1)$, $0 < y_{n+1}(\tau) < y_n(\tau)$.

[55;p.876]

Leur démonstration de la convergence de ces deux suites est fautive. Elle devient correcte si l'on ajoute la condition suivante :

$$a \in L^1(0,1). \quad (3.93)$$

Dans le problème (3.89), cette condition est vérifiée si et seulement si $p < 2$. La condition (3.93) est donc une condition trop restrictive pour le problème (3.89). Nous établissons la convergence des deux suites définies par (3.90), grâce au lemme suivant.

Lemme 3.35. Soit $p > 0$ et (λ_n) , (y_n) les deux suites définies par (3.92). Supposons l'existence d'une solution (λ, y) du problème (3.91). Alors la suite (λ_n) tend vers une limite $\bar{\lambda}$, la suite (y_n) converge vers \hat{y} , uniformément dans $[0,1]$, $(\bar{\lambda}, \hat{y})$ est une solution de (3.91), $\bar{\lambda} \leq \lambda$ et $\hat{y} \geq y$.

Démonstration. (i) Montrons que $\forall n \in \mathbb{N} : \lambda_n < \lambda$ et $y_n > y$. Il est clair que $y_0 > y$; de plus, $\forall \theta \in (0,1)$, il existe un seul $\tau_0(\theta) \in (0,1)$ tel que $\theta y_0(\tau_0) = y(\tau_0)$. Faisons l'hypothèse de récurrence suivante : $y_n > y$ et $\forall \theta \in (0,1)$, il existe au plus un $\tau_n(\theta) \in (0,1)$ tel que $\theta y_n(\tau_n) = y(\tau_n)$.

Première conséquence : $\lambda^{-1} = \int_0^1 (1-s) a(s) y^p(s) ds < \int_0^1 (1-s) a(s) y_n^p(s) ds = \lambda_n^{-1}$, d'où $\lambda_n < \lambda$.

Deuxième conséquence : $y_{n+1} > y$. En effet, posons $\theta := (\frac{\lambda_n}{\lambda})^{\frac{1}{p}} < 1$ et $w := y - y_{n+1}$. Comme $y_n(0) = y(0)$ et $y_n'(0) = y'(0) = 1$, il existe un $\delta > 0$ tel que :

$$w''(\tau) = a(\tau) [\lambda_n y_n^p(\tau) - \lambda y^p(\tau)] = \lambda a(\tau) [\theta^p y_n^p(\tau) - y^p(\tau)] < 0, \\ \text{si } \tau \in (0, \delta).$$

Nous avons donc : $w(0) = w'(0) = w(1) = 0$, $w''(\tau) < 0$ pour $\tau \in (0, \delta)$ et par l'hypothèse de récurrence : w'' change au plus une fois de signe dans $(0,1)$. On en conclut que $w(\tau) < 0$, pour $\tau \in (0,1)$.

Troisième conséquence : $\forall \theta \in (0,1)$, il existe au plus un $\tau_{n+1}(\theta) \in (0,1)$ tel que $\theta y_{n+1}(\tau_{n+1}) = y(\tau_{n+1})$. En effet, posons $\gamma := (\frac{\theta \lambda_n}{\lambda})^{1/p} < 1$ et $v := y - \theta y_{n+1}$. Comme $y_n(0) = y(0)$ et $y_n'(0) = y'(0) = 1$, il existe un $\delta > 0$ tel que :

$$v''(\tau) = a(\tau) [\theta \lambda_n y_n^p(\tau) - \lambda y^p(\tau)] = \lambda a(\tau) [\gamma^p y_n^p(\tau) - y^p(\tau)] < 0, \\ \text{si } \tau \in (0, \delta).$$

Nous avons donc : $v(0) = v(1) = 0$, $v'(0) = 1 - \theta > 0$, $v''(\tau) < 0$ pour $\tau \in (0, \delta)$ et par l'hypothèse de récurrence : v'' s'annule au plus une fois dans $(0,1)$. Alors v ne peut pas s'annuler plus d'une fois dans $(0,1)$.

Le résultat annoncé s'obtient par induction.

(ii) La suite (λ_n) , étant croissante et bornée par λ , converge vers un $\bar{\lambda} \leq \lambda$. La suite (y_n) est décroissante et minorée par y . Estimons $\|y_n'\|_0$.

A partir de (3.92), pour $\tau \in (0,1)$:

$$|y_{n+1}'(\tau)| \leq 1 + \lambda_n \int_0^\tau a(s) y_n^p(s) ds \leq 1 + \bar{\lambda} \int_0^\tau a(s) y_0^p(s) ds < \\ < 1 + \bar{\lambda} \int_0^1 a(s) s^p ds < \infty.$$

D'où $\forall n \in \mathbb{N} : \|y'_n\|_0 \leq \text{cste}$. Par le lemme 2.43, la suite (y_n) converge, uniformément dans $[0,1]$, vers une fonction $\hat{y} \geq y$.

(iii) Il reste à montrer que $(\bar{\lambda}, \hat{y})$ est une solution de (3.91). Pour $\tau \in (0,1)$, en faisant tendre n vers l'infini dans :

$$y_{n+1}(\tau) = \tau - \lambda_n \int_0^\tau (\tau-s) a(s) y_n^p(s) ds$$

nous obtenons :

$$\hat{y}(\tau) = \tau - \bar{\lambda} \int_0^\tau (\tau-s) a(s) \hat{y}^p(s) ds,$$

$$\hat{y}'(\tau) = 1 - \bar{\lambda} \int_0^\tau a(s) \hat{y}^p(s) ds \text{ et}$$

$$\hat{y}''(\tau) = -\bar{\lambda} a(\tau) \hat{y}^p(\tau).$$

En particulier $\hat{y}'(0) = 1$. Le couple $(\bar{\lambda}, \hat{y})$ est une solution de (3.91). ■

Corollaire. Soit (λ_n) et (y_n) les deux suites définies par (3.92). Alors se présente l'alternative suivante :

(i) La suite (λ_n) n'est pas bornée. Dans ce cas, le problème (3.91) n'a pas de solution et la suite (y_n) converge vers 0.

(ii) La suite (λ_n) converge. Dans ce cas, le problème (3.91) a une solution $(\bar{\lambda}, \hat{y})$ telle que $\lambda_n \rightarrow \bar{\lambda}$ et y_n converge vers \hat{y} , uniformément dans $[0,1]$. Si (λ, y) est une autre solution de (3.91), alors $\lambda > \bar{\lambda}$ et $y < \hat{y}$.

Revenons au problème (3.88), qui a une solution unique (lemme 3.33). Nous obtenons, grâce au lemme 3.35, la convergence des deux suites (λ_n) et (y_n) définies par (3.90).

Proposition 3.36. Soit (λ_n) et (y_n) les suites définies par (3.90), avec $1 < p < 5$. Alors la suite (λ_n) est croissante et converge vers λ , la suite (y_n) est décroissante et converge vers y , uniformément dans $[0,1]$, et (λ, y) est la solution du problème (3.88).

3.2.8 Régularité des solutions

Nous allons démontrer que la solution du problème (3.39) ou (3.40) est non seulement deux fois différentiable à l'origine, résultat figurant dans le

lemme 3.12, mais est de classe C^∞ au voisinage de l'origine. Pour cela, nous étudions une équation auxiliaire dans \mathbb{R}^3 .

Soit x une solution de l'équation (3.37) : $-\frac{1}{t^2} (t^2 x')' = x^p$, avec $x(0) > 0$. Nous la supposons définie sur un intervalle borné $[0, R]$, tel que $x(t) > 0$, pour $t \in [0, R]$. Soit $B_R \subset \mathbb{R}^3$, la boule ouverte de rayon R , centrée en 0. Définissons une fonction $u : \bar{B}_R \rightarrow \mathbb{R}_+$ par :

$$u(\xi) := x(|\xi|) \quad \xi \in \bar{B}_R. \quad (3.94)$$

Alors $u \in C(\bar{B}_R)$ et $\forall \varepsilon > 0$:

$$-\Delta u = u^p \quad \text{dans } B_R \setminus \bar{B}_\varepsilon. \quad (3.95)$$

Lemme 3.37. La fonction u définie par (3.94) est dans $C^\infty(B_R)$ et c'est une solution à symétrie sphérique, à valeurs strictement positives, de l'équation :

$$-\Delta u = u^p \quad \text{dans } B_R. \quad (3.96)$$

Démonstration. (i) $u \in C^1(B_R)$. Notons $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ et $r = |\xi|$. Il est clair que $u \in C^1(B_R \setminus \{0\})$ et

$$\frac{\partial u}{\partial \xi_i}(\xi) = \frac{x'(r)}{r} \xi_i \quad \text{pour } \xi \neq 0, i = 1, 2, 3.$$

Par le lemme 3.12 : $x'(0) = 0$, d'où :

$$\frac{\partial u}{\partial \xi_1}(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(h, 0, 0) - u(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x(|h|) - x(0)}{h} = 0.$$

De même $\frac{\partial u}{\partial \xi_2}(0) = \frac{\partial u}{\partial \xi_3}(0) = 0$. Établissons la continuité de $\frac{\partial u}{\partial \xi_i}$ en 0. Par le lemme 3.12 : $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{x'(t)}{t} = -\frac{x^p(0)}{3}$; il existe donc une constante γ telle que :

$$\left| \frac{x'(t)}{t} \right| \leq \gamma \quad t \in (0, R).$$

Alors $\left| \frac{\partial u}{\partial \xi_i}(\xi) \right| \leq \gamma |\xi_i|$, $\forall \xi_i \in (0, R)$, $i = 1, 2, 3$. D'où $\lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{\partial u}{\partial \xi_i}(\xi) = 0$

($i = 1, 2, 3$) et $u \in C^1(B_R)$.

(ii) u est une solution faible de (3.96). Posons $f := u^p$; comme $u(\xi) > 0$ ($\forall \xi \in \bar{B}_R$), $f \in C^1(B_R)$. Soit :

$$C^1_0(B_R) := \{u \in C^1(B_R) \mid \text{support } u \subset B_R\}.$$

Appliquons la formule de Green [57;p.17] à (3.95). Posons $D := B_R \setminus \bar{B}_\epsilon$; alors $\forall v \in C^1_0(B_R)$:

$$\begin{aligned} \int_D f v \, d\xi &= - \int_D v \Delta u \, d\xi = \int_D \nabla v \cdot \nabla u \, d\xi - \int_{\partial B_R} v \frac{\partial u}{\partial n} \, dS - \int_{\partial B_\epsilon} v \frac{\partial u}{\partial n} \, dS = \\ &= \int_D \nabla v \cdot \nabla u \, d\xi - x'(\epsilon) \int_{\partial B_\epsilon} v \, dS. \end{aligned}$$

Faisons tendre ϵ vers 0; il reste :

$$\forall v \in C^1_0(B_R) : \int_{B_R} \nabla u \cdot \nabla v \, d\xi = \int_{B_R} f v \, d\xi, \quad (3.97)$$

i.e. u est une solution faible de (3.96).

(iii) u est une solution classique de (3.96). Soit $f := u^p$; $f \in C^1(B_R)$. Par un lemme de Weyl [58;p.199], la relation (3.97) entraîne que u est égale presque partout à une fonction deux fois continûment Hölder-différentiable.

Puisque u est continue : $u \in C^{2+\mu}(B_R)$. Alors $\forall v \in C^1_0(B_R)$:

$$\int_{B_R} (\Delta u + f) v \, d\xi = \int_{B_R} (v \Delta u + \nabla u \cdot \nabla v) \, d\xi = \int_{\partial B_R} v \frac{\partial u}{\partial n} \, dS = 0.$$

D'où $0 = \Delta u + f = \Delta u + u^p$ dans B_R .

(iv) $u \in C^\infty(B_R)$. Des estimations de Schauder, il résulte que si $f \in C^{k+\mu}(B_R)$, $u \in C^2(B_R)$ et $\Delta u = f$ dans B_R , alors $u \in C^{k+2+\mu}(B_R)$, voir [57;p.104]. Nous avons établi que $u \in C^{2+\mu}(B_R)$. Si $u \in C^{k+\mu}(B_R)$, alors $f := u^p \in C^{k+\mu}(B_R)$ et $u \in C^{k+2+\mu}(B_R)$. Par induction, on montre que $u \in C^k(B_R)$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Ainsi $u \in C^\infty(B_R)$. ■

Revenons aux problèmes unidimensionnels (3.39) et (3.40). Une solution x de (3.37), définie sur un intervalle $[0, R]$ où elle prend des valeurs strictement positives, nous donne la fonction $u : \xi \mapsto x(|\xi|)$, de \bar{B}_R dans \mathbb{R}_+ . Par le lemme 3.37 : $u \in C^\infty(B_R)$, donc x est C^∞ à l'origine et partout où elle ne s'annule pas. Dans le problème (3.40), x s'annule en T . Pour $k \geq 2$, la dérivée d'ordre k existe en T (est continue à gauche en ce point) si

$$k \leq [p] + 2 \quad ([p] = \text{partie entière de } p).$$

Proposition 3.38. (i) Pour $p < 5$, le problème (3.40) a une solution unique (T, x) avec $x \in C^\infty([0, T])$ et

$$\begin{aligned} x &\in C^{2+[p]}([0,T]) && \text{si } p \geq 0 \\ x &\in C^1([0,T]) && \text{si } -1 < p < 0 \\ x &\in C([0,T]) && \text{si } p \leq -1 . \end{aligned}$$

(ii) Pour $p \geq 5$, le problème (3.39) a une solution unique x , qui est dans $C^\infty(\mathbb{R}_+) \cap BC(\mathbb{R}_+) \cap L^q(\mathbb{R}_+)$ où $q > \frac{p-1}{2}$ (si $p = 5 : q > 1$).

(iii) Pour tout $p : \forall k \in \mathbb{N}, x^{(2k+1)}(0) = 0$.

3.2.9 Quelques remarques

1. La solution de l'équation de Lane-Emden-Fowler a été tabulée par J. Miller & D. Sadler [50], pour des valeurs demi-entières du paramètre p , comprises entre 1 et 4.5. Nous avons reporté ces résultats sur la figure 7 (p. 138). Soit (T_1, x_1) et (T_2, x_2) les solutions du problème (3.40), pour $p = p_1$, respectivement $p = p_2$. Supposons : $1 \leq p_1 < p_2 < 5$. Est-il vrai, comme le laisse supposer la figure, que $T_1 < T_2$ et $x_1 < x_2$? Qu'en est-il si $p_1 < 1$ ou $p_1, p_2 < 1$?

2. La méthode itérative (3.90) permet d'obtenir des bornes inférieures pour la valeur de T dans le problème (3.40), avec $1 \leq p < 5$. En effet, posons $T_n := \sqrt{\lambda_n}$; la suite (λ_n) est croissante et converge vers $\lambda = T^2$, donc la suite (T_n) est croissante et converge vers T .

Nous avons effectués les premiers calculs pour $p = 1$. Avec (3.90), nous obtenons, pour $\tau \in [0,1]$:

$$\begin{aligned} y_0(\tau) &= \tau \\ \lambda_0 &= 6 \\ y_1(\tau) &= \tau(1-\tau^2) \\ \lambda_1 &= \frac{60}{7} \\ y_2(\tau) &= \tau(1-\tau^2)\left(1 - \frac{3}{7}\tau^2\right) \\ \lambda_2 &= \frac{294}{31} \\ y_3(\tau) &= \tau(1-\tau^2)\left(1 - \frac{18}{31}\tau^2 + \frac{3}{31}\tau^4\right) \\ \lambda_3 &= \frac{1240}{127} \\ y_4(\tau) &= \tau(1-\tau^2)\left(1 - \frac{239}{381}\tau^2 + \frac{55}{381}\tau^4 - \frac{5}{381}\tau^6\right) \end{aligned}$$

$$\lambda_4 = \frac{25146}{2555}$$

$$y_5(\tau) = \tau(1-\tau^2)\left(1 - \frac{1636}{2555} \tau^2 + \frac{82}{511} \tau^4 - \frac{52}{2555} \tau^6 + \frac{3}{2555} \tau^8\right)$$

$$\lambda_5 = \frac{13'950'300}{1'414'477} .$$

D'où les bornes inférieures pour T : $T_n = \sqrt{\lambda_n}$, $n = 0, \dots, 5$. Dans le cas $p = 1$, la solution (T, x) de (3.40) est connue explicitement et $T = \pi$.

n	λ_n	T_n	$T - T_n$
0	6	2.44949...	0.69210...
1	8.57143...	2.92770...	0.21389...
2	9.48387...	3.07959...	0.06200...
3	9.76378...	3.12470...	0.01689...
4	9.84188...	3.13718...	0.00442...
5	9.86251...	3.14046...	0.00113...
	$\lambda = 9.86960\dots$	$T = \pi = 3.14159\dots$	

3. Nous n'avons pas de méthode itérative permettant d'approcher la solution du problème (3.40) ou (3.65), lorsque $p \leq -1$. Il est peut-être possible d'utiliser l'itération (3.71), à condition de choisir une fonction de départ z_0 convenable. C'est parce que la solution de (3.65) a sa première dérivée non bornée en 1 (lorsque $p \leq -1$) que la fonction z_0 définie par (3.70) ne convient pas.

4. Pour $p > 5$, nous n'avons pas de méthode itérative pour estimer la solution de (3.39) sur \mathbb{R}_+ tout entier. Nous pouvons transformer le problème (3.39) en un problème sur un intervalle borné. Par la méthode des itérations alternées (3.87), nous avons pu approcher la solution de (3.39) dans l'intervalle $[0, \sqrt{6}]$, en particulier dans $[0, 1]$. Supposons donc connues les valeurs $x(1)$ et $x'(1)$ pour la solution x de (3.39). Nous savons aussi que $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$. En posant $\theta := t^{-1}$ et $w : \theta \mapsto x(\theta^{-1})$, nous obtenons une solution du problème

$$\begin{cases} -w'' = \theta^{-4} w^p & \theta \in (0,1) \\ w(0) = 0, w(1) = x(1) \\ w'(1) = -x'(1) \\ w(\theta) > 0 & \theta \in (0,1) . \end{cases} \quad (3.98)$$

Le problème (3.98) a une solution unique (et la condition $w(0) = 0$ est superflue). Par le lemme 3.16, w' n'est pas bornée en 0. Posons $z : \theta \mapsto w(\theta) - x(1)\theta$. Alors z est la solution (unique) de (3.99) - (3.100) :

$$\begin{cases} -z'' = \theta^{-4} (z+x(1)\theta)^p & \theta \in (0,1) \\ z(0) = z(1) = 0 \\ z(\theta) > 0 & \theta \in (0,1) \end{cases} \quad (3.99)$$

$$z'(1) = -x'(1) - x(1) < 0. \quad (3.100)$$

L'itération :

$$\begin{cases} -z''_{n+1} = \theta^{-4} (z_n + x(1)\theta)^p & \theta \in (0,1) \\ z_{n+1}(0) = z_{n+1}(1) = 0 \end{cases} \quad (3.101)$$

est croissante à partir de $z_0 := 0$, sous-solution de (3.99), et converge vers la solution minimale de (3.99). Nous allons voir que cette solution minimale ne satisfait pas à (3.100).

R.H. Fowler [46], [47] a étudié le comportement des solutions de l'équation (3.37) : $-\frac{1}{t^2} (t^2 x')' = x^p$. Pour $p > 5$, il y a quatre types de solutions strictement positives [48;p.144] :

- (i) type E. C'est une solution de (3.37) définie sur $[0, \infty)$. Il y a une seule solution prenant une valeur $x(0)$ donnée. En particulier, si $x(0) = 1$, c'est la solution de (3.39). Une solution de type E se comporte comme At^σ à l'infini, où $\sigma = \frac{2}{p-1}$. Le nombre de zéros de la fonction $t \mapsto x(t) - At^\sigma$ n'est pas borné si $t \rightarrow \infty$.
- (ii) type F. Solution définie sur un intervalle borné $[a, b]$, où $a > 0$, avec $x(a) = x(b) = 0$.

- (iii) type D. Solution définie sur $[a, \infty)$, où $a > 0$, avec $x(a) = 0$. Ce type de solution se comporte comme $\frac{B}{t}$ lorsque $t \rightarrow \infty$.
- (iv) type 0. Solution définie sur $[a, \infty)$, où $a > 0$, avec $x(a) = 0$. Elle se comporte comme At^σ à l'infini. Le nombre de zéros de $t \mapsto x(t) - At^\sigma$ n'est pas borné si $t \rightarrow \infty$.

Fowler a démontré que par un point donné (t_0, x_0) du plan (t, x) , avec $t_0 > 0$ et $x_0 > 0$ (x_0 pas trop grand), passent deux solutions de type D et deux solutions de type F. En t_0 , la valeur de la première dérivée d'une solution E ou 0 est toujours comprise entre les valeurs des premières dérivées des deux solutions de type D.

Nous en déduisons que par un point (t_0, x_0) donné, avec $t_0 > 0$ et $x_0 > 0$, passent une solution minimale et une solution maximale, définies sur $[t_0, \infty)$, de l'équation (3.37); elles sont les deux de type D.

Revenons au problème (3.99). La solution minimale z de (3.99), obtenue par l'itération (3.101) à partir de $z_0 = 0$, permet de construire une solution \bar{x} de (3.37), sur $[1, \infty)$. Alors \bar{x} doit être la solution minimale de (3.37), sur $[1, \infty)$, passant par $(1, x(1))$. Comme \bar{x} est de type D, elle ne peut être la solution de (3.39).

3.3 SOLUTIONS A SYMETRIE SPHERIQUE DE L'EQUATION $\Delta u + \lambda u^p = 0$.

Les résultats des §§ 3.1 et 3.2 nous permettent de déterminer, sous certaines conditions, une solution de l'équation $\Delta u + \lambda u^p = 0$. Si l'on cherche une solution à symétrie sphérique de cette équation, dans \mathbb{R}^3 , on est conduit à résoudre l'équation $\frac{1}{t^2} (t^2 x')' + \lambda x^p = 0$. Avec $\lambda = 1$, nous retrouvons l'équation de Lane-Emden-Fowler (3.37); avec $\lambda < 0$, c'est l'équation de Thomas-Fermi (3.0).

3.3.1 Résultats préliminaires

Soit Ω un domaine borné de \mathbb{R}^N , avec $N \geq 1$, et J un intervalle (non nécessairement fermé, ni borné). Dans certains cas, Ω sera la boule ouverte B_R , centrée à l'origine, de rayon R . Soit $f : \Omega \times J \rightarrow \mathbb{R}$. Considérons le problème

$$\begin{cases} -\Delta u = f(\cdot, u) & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.102)$$

Nous appelons solution de (3.102), une fonction $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, avec $u(\Omega) \subset J$, qui vérifie (3.102).

Lemme 3.39. Supposons que Ω soit régulier, $N \geq 2$, $J := \mathbb{R}$ et $f : \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifie les conditions suivantes.

(i) f est localement Hölder continue dans $\bar{\Omega} \times \mathbb{R}$; $f(\cdot, 0) = 0$ dans $\bar{\Omega}$.

(ii) Si $N \geq 3$: $\forall \xi \in \bar{\Omega}, |f(\xi, s)| \leq c_1 + c_2 |s|^p$, où $1 < p < \frac{N+2}{N-2}$.
 Si $N \geq 2$: $\forall \xi \in \bar{\Omega}, |f(\xi, s)| \leq c_3 e^{c(s)}$, où $\lim_{s \rightarrow \infty} s^{-2} c(s) = 0$.

(iii) $f(\cdot, s) = o(|s|)$ pour $s \rightarrow 0$, uniformément dans $\bar{\Omega}$.

(iv) $\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{f(\cdot, s)}{s} = \infty$, uniformément dans $\bar{\Omega}$.

(v) $\exists c_4 > 0$, tel que $\forall |s| \geq c_4 : \int_0^s f(\cdot, t) dt \leq \theta s f(\cdot, s)$ dans $\bar{\Omega}$, où $\theta \in [0, \frac{1}{2})$.

Alors (3.102) a une solution strictement positive.

A. Ambrosetti & P.H. Rabinowitz [69;p.362]. Une généralisation est donnée par

D.G. de Figueiredo, P.-L. Lions & R. Nussbaum [66;p.60].

Lemme 3.40. Supposons que Ω soit régulier, $J := \mathbb{R}_+$ et $f : \bar{\Omega} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ vérifie les conditions suivantes.

(i) f est localement Hölder continue dans $\bar{\Omega} \times \mathbb{R}_+$; $f(\cdot, 0) = 0$ dans $\bar{\Omega}$.

(ii) $\liminf_{s \downarrow 0} \frac{f(\cdot, s)}{s} > \lambda_1$, uniformément dans $\bar{\Omega}$.

(iii) $\limsup_{s \rightarrow \infty} \frac{f(\cdot, s)}{s} < \lambda_1$, uniformément dans $\bar{\Omega}$.

(λ_1 est la première valeur propre de $-\Delta$, avec la condition : 0 sur $\partial\Omega$).

Alors (3.102) a une solution strictement positive.

H. Berestycki & P.-L. Lions [70;p.19]. La démonstration se fait à l'aide d'itérations monotones.

Soit, en particulier, $f : s \mapsto s^p$ (avec $p \geq 0$), ne dépendant pas de $\xi \in \bar{\Omega}$.

Si $p \in (0, 1)$, les hypothèses du lemme 3.40 sont vérifiées. En effet : $\lambda_1 > 0$, $\lim_{s \rightarrow 0} s^{-1} f(s) = \infty$, $\lim_{s \rightarrow \infty} s^{-1} f(s) = 0$. L'existence d'une solution de (3.102) est établie dans ce cas particulier. L'unicité se déduit d'un résultat de

T. Laetsch [68;p.20]. Indépendamment de ces travaux, D.G. Aronson & L.A. Peletier [89] ont démontré le résultat suivant.

Corollaire 3.41. Supposons que Ω soit régulier, $J := \mathbb{R}_+$ et $f : s \mapsto \lambda s^p$ (ne dépend pas de $\xi \in \bar{\Omega}$). Si $p \in (0, 1)$ et $\lambda > 0$, le problème (3.102) a une solution unique, qui est strictement positive.

[89;p.382]

Lemme 3.42. Supposons que f vérifie la condition de décroissance

$$\forall s_1, s_2 \in J, \text{ avec } s_1 < s_2, f(\cdot, s_1) \geq f(\cdot, s_2) \text{ dans } \Omega. \quad (3.103)$$

Alors (3.102) a, au plus, une solution.

Démonstration. (i) Supposons que u_1 et u_2 soient deux solutions comparables de (3.102) et convenons que $u_1 \leq u_2$. Avec la condition (3.103), on a : $\Delta(u_2 - u_1) \geq 0$ dans Ω , $u_2 - u_1 = 0$ sur $\partial\Omega$. On obtient $u_2 \leq u_1$, grâce au principe du maximum [57;p.15]. D'où $u_1 = u_2$.

(ii) Supposons que u_1 et u_2 soient deux solutions de (3.102) et posons $w := u_2 - u_1$. Soit $\Omega_+ := \{\xi \in \Omega \mid w(\xi) > 0\}$. Si $\Omega = \emptyset$, u_1 et u_2 sont comparables et l'on est ramené au point (i). Supposons, ab absurdo, que $\Omega_+ \neq \emptyset$. Dans Ω_+ : $\Delta w = f(\cdot, u_1) - f(\cdot, u_2) \geq 0$. Par le principe du maximum faible [57;p.15] :

$$\sup \{w(\xi) \mid \xi \in \Omega_+\} = \sup \{w(\xi) \mid \xi \in \partial\Omega_+\}.$$

Ainsi, il existe un $\xi_0 \in \partial\Omega_+$, tel que $w(\xi_0) > 0$; donc $\xi_0 \in \partial\Omega_+ \cap \Omega_+$. Mais Ω_+ est ouvert dans \mathbb{R}^N , puisque w est continue. D'où la contradiction, et $\Omega_+ = \emptyset$. ■

Des résultats semblables ont été obtenus par H. Amann [63;p.138], [64;p.179] et H.B. Keller [65;p.367].

Lemme 3.43. Soit $\Omega := B_R$ et $J := \mathbb{R}_+$. Supposons que f ne dépende pas de $\xi \in B_R$ et que $f \in C^1(\mathbb{R}_+)$. Si $u \in C^2(\bar{B}_R)$ est une solution strictement positive de (3.102), alors u est à symétrie sphérique et $\forall \xi \in \dot{B}_R : \frac{\partial u}{\partial r}(\xi) < 0$ (dérivée dans la direction d'un rayon de B_R).

B. Gidas, W.M. Ni & L. Nirenberg [61;p.209], B. Gidas [62;p.257]. La condition $f \in C^1(\mathbb{R}_+)$ peut être remplacée par $f = f_1 + f_2$, avec $f_1 \in C^1(\mathbb{R}_+)$ et f_2 croissante [61;p.219].

Le lemme suivant est une conséquence d'une identité établie par S.I. Pohožaev [59;p.1410] et généralisée par de Figueiredo, etc. [66;p.46], Kazdan & Warner [67;p.587].

Lemme 3.44. Soit $N \geq 3$. Supposons que Ω soit étoilé (par rapport à l'un de ses points), avec un bord $\partial\Omega$ de classe $C^{1+\mu}$, que $J := \mathbb{R}_+$ et que f soit indépendante de $\xi \in \Omega$ et continue. Si

$$\forall s \geq 0, \frac{2N}{N-2} \int_0^s f(t) dt \leq s f(s), \tag{3.104}$$

alors (3.102) n'a pas de solution strictement positive.

[59;p.1410]

Corollaire 3.45. Soit $N \geq 3$, $J := \mathbb{R}_+$, $f : s \mapsto s^p$ (où $p > 0$) et Ω un domaine étoilé. Le problème (3.102) n'a pas de solution strictement positive si

$$p \geq \frac{N+2}{N-2}.$$

[59;p.1410]

L'hypothèse faite sur Ω , d'être étoilé, a son importance. Soit $0 < r < R$ et définissons un domaine non étoilé $\Omega := \{\xi \in \mathbb{R}^N \mid r < |\xi| < R\}$. Soit $f : s \mapsto s^p$ (où $p \geq 0$). Le problème (3.102) a une solution strictement positive, pour tout $p > 1$ [67;pp.588-589].

3.3.2 Un problème aux limites

Nous abordons le problème suivant : étant donnés $\lambda, p \in \mathbb{R}$ et $R > 0$, trouver une fonction $u \in C^2(B_R) \cap C(\bar{B}_R)$, qui soit solution de

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u^p & \text{dans } B_R \subset \mathbb{R}^N \quad (N \geq 1) \\ u = 0 & \text{sur } \partial B_R \\ u > 0 & \text{dans } B_R. \end{cases} \quad (3.105)$$

Si $\lambda \leq 0$, (3.105) n'a pas de solution (principe du maximum).

Intéressons-nous à une solution à symétrie sphérique de (3.105). Posons $t := |\xi|$, pour $\xi \in \bar{B}_R$, et définissons $y : t \mapsto u(\xi)$, sur $[0, R]$. Alors u est une solution à symétrie sphérique de (3.105), si et seulement si $y \in C^2([0, R]) \cap C([0, R])$ satisfait à

$$\begin{cases} (t^{N-1} y')' + \lambda t^{N-1} y^p = 0 & t \in (0, R) \\ y(R) = 0, y'(0) = 0 \\ y(t) > 0 & t \in [0, R). \end{cases} \quad (3.106)$$

Lemme 3.46. Soit $N \geq 1$ et $p \neq 1$. Supposons qu'il existe un $\lambda_0 > 0$ et un $R_0 > 0$, tels que (3.106) possède une solution y_0 . Alors (3.106) a une solution y , pour tout $\lambda > 0$ et tout $R > 0$, telle que

$$\forall t \in [0, R], y(t) = \left[\frac{\lambda_0 R_0^2}{\lambda R^2} \right]^{\frac{1}{p-1}} y_0 \left(\frac{R_0}{R} t \right). \quad (3.107)$$

Corollaire 3.47. Soit $N \geq 1$ et $p \neq 1$. Le problème (3.106) a une solution si et seulement s'il existe un $T > 0$ et une fonction $x \in C^2([0, T]) \cap C([0, T])$ qui vérifient

$$\begin{cases} (t^{N-1} x')' + t^{N-1} x^p = 0 & t \in (0, T) \\ x(0) = 1, x(T) = 0, x'(0) = 0 \\ x(t) > 0 & t \in [0, T). \end{cases} \quad (3.108)$$

Démonstration. Si y est solution de (3.106), pour λ et R donnés, définissons

$$T := R \sqrt{\lambda} (y(0))^{\frac{p-1}{2}}$$

et une fonction x sur $[0, T]$ par

$$x(t) := (y(0))^{-1} y\left(\frac{R}{T} t\right).$$

Alors $x(0) = 1$ et (T, x) est une solution de (3.108). ■

Remarque. Pour $N = 3$, le problème (3.108) s'écrit

$$\begin{cases} -\frac{1}{t^2} (t^2 x')' = x^p & t \in (0, T) \\ x(0) = 1, x(T) = 0, x'(0) = 0 \\ x(t) > 0 & t \in [0, T]; \end{cases} \quad (3.109)$$

c'est le problème (3.40).

Corollaire 3.48. Soit $N \geq 1$ et $p \neq 1$. Le problème (3.106) a une solution si et seulement s'il existe une fonction $y \in C^2([0, 1]) \cap C([0, 1])$ telle que

$$\begin{cases} (t^{N-1} y')' + \lambda t^{N-1} y^p = 0 & t \in (0, 1) \\ y(1) = 0, y'(0) = 0 \\ y(t) > 0 & t \in [0, 1). \end{cases} \quad (3.110)$$

Si (3.108) a une solution (T, x) , alors (3.110) a une solution y_λ , pour tout $\lambda > 0$, et

$$\|y_\lambda\|_0 = y_\lambda(0) = \frac{2}{T^{p-1}} \frac{1}{\lambda^{\frac{1}{1-p}}}. \quad (3.111)$$

Remarque. Si $p > 1$ dans (3.111) : $\lim_{\lambda \downarrow 0} y_\lambda(0) = \infty$ et $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} y_\lambda(0) = 0$. Si $p < 1$: $\lim_{\lambda \downarrow 0} y_\lambda(0) = 0$ et $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} y_\lambda(0) = \infty$.

Le lemme suivant est une généralisation du lemme 3.12.

Lemme 3.49. Soit $N \geq 3$, $\lambda > 0$, $R > 0$ et $p \in \mathbb{R}$. Supposons que $y \in C^2(0, R) \cap C([0, R])$ vérifie

$$\begin{cases} (t^{N-1} y')' + \lambda t^{N-1} y^p = 0 & t \in (0, R) \\ y(t) > 0 & t \in [0, R). \end{cases} \quad (3.112)$$

Alors y est strictement décroissante, $y \in C^2([0, R])$, $y'(0) = 0$ et $y''(0) = -\frac{\lambda}{N} y^p(0)$.

Démonstration. Grâce au lemme 3.46, il suffit de le vérifier pour un choix particulier de λ et R . Fixons

$$\lambda := (N-2)^{2(N-1)/(N-2)} \text{ et } R := (N-2)^{-1/(N-2)}. \quad (3.113)$$

Introduisons la transformation

$$\tau := \left[\int_t^\infty \theta^{1-N} d\theta \right]^{-1} = (N-2) t^{N-2} \text{ et } z(\tau) := \tau y(t) \quad (3.114)$$

dans (3.112). On obtient la relation

$$t^{N-1} y'(t) = \tau z'(\tau) - z(\tau) \quad t \in (0, R). \quad (3.115)$$

Avec le choix (3.113) de λ et R , $\tau \in [0, 1]$ si $t \in [0, R]$ et z est solution de

$$\begin{cases} z''(\tau) + \tau^{\alpha-p} z^p(\tau) = 0 & \tau \in (0, 1) \\ z(0) = 0 \\ z(\tau) > 0 & \tau \in (0, 1) \end{cases} \quad (3.116)$$

où $\alpha := \frac{4-N}{N-2} > -1$.

Soit $0 < a < \frac{1}{2}$. Intégrons (3.116) : $z'(a) = z'(\frac{1}{2}) + \int_a^{\frac{1}{2}} \tau^\alpha y^p(t(\tau)) d\tau$.

Comme y est continue sur $[0, R]$ et $\alpha > -1$, la limite de $z'(a)$ existe lorsque a tend vers 0. De (3.115), on tire

$$\lim_{t \downarrow 0} t^{N-1} y'(t) = 0. \quad (3.117)$$

Intégrons (3.112) : $t^{N-1} y'(t) + \lambda \int_0^t s^{N-1} y^p(s) ds = 0$, $t \in (0, R)$. D'où la formule :

$$y'(t) = - \frac{\lambda}{t^{N-1}} \int_0^t s^{N-1} y^p(s) ds, \quad t \in (0, R). \quad (3.118)$$

La décroissance stricte est démontrée. Appliquons le théorème de la moyenne à (3.118) : $0 \leq -y'(t) \leq \frac{\lambda}{N} y^p(\bar{t}) t$, où $\bar{t} \in (0, t)$; d'où $y'(0) = 0$. Pour le calcul de $y''(0)$, nous utilisons la règle de l'Hospital dans (3.118) :

$$y''(0) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{y'(t)}{t} = -\lambda \lim_{t \downarrow 0} t^{-N} \int_0^t s^{N-1} y^p(s) ds = -\frac{\lambda}{N} y^p(0). \quad \blacksquare$$

Lemme 3.50. Soit $N \geq 3$, $\lambda > 0$ et $R > 0$. Alors (3.106) a une solution pour tout $p < 0$.

Démonstration. Grâce au lemme 3.46, il suffit de le vérifier pour le choix particulier (3.113) de λ et R . Considérons le problème

$$\begin{cases} z''(\tau) + \tau^{\alpha-p} z^p(\tau) = 0 & \tau \in (0,1) \\ z(0) = z(1) = 0 \\ z(\tau) > 0 & \tau \in (0,1) \end{cases} \quad (3.119)$$

où $\alpha = \frac{4-N}{N-2} > -1$.

Définissons $\phi : \tau \mapsto \tau^{\alpha-p}$, $\tau \in (0,1)$. Alors

$$\int_0^1 \tau(1-\tau) \phi(\tau) d\tau = \int_0^1 \tau^{1+\alpha-p}(1-\tau) d\tau < \infty \text{ (car } 1+\alpha-p > 0),$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \tau^p \phi(\tau) d\tau = \int_0^{\frac{1}{2}} \tau^\alpha d\tau < \infty \text{ (car } \alpha > -1) \text{ et}$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 (1-\tau)^p \phi(\tau) d\tau = \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-\tau)^p \tau^{\alpha-p} d\tau < \infty \text{ si et seulement si } p > -1.$$

Le lemme 3.20 s'applique : (3.119) a une solution (unique) z et

$z \in C^2(0,1) \cap C^1([0,1]) \cap C([0,1])$; $z \in C^1([0,1])$ si et seulement si $p > -1$.

A l'aide de la transformation (3.114), définissons $t := \left(\frac{\tau}{N-2}\right)^{1/(N-2)}$ et

$y(t) := \tau^{-1} z(\tau)$. Alors y vérifie (3.112), où λ et R sont définis par (3.113).

De plus $z(1) = 0$ implique $y(R) = 0$. Une fois la continuité de y sur $[0,R]$

établie, celle de y'' sur $[0,R)$ découle du lemme 3.49 et en plus $y'(0) = 0$; y

est alors une solution de (3.106). Vérifions donc que y est continue en 0 :

$$\lim_{t \downarrow 0} y(t) = \lim_{\tau \downarrow 0} \frac{z(\tau)}{\tau} = z'(0). \quad \blacksquare$$

Revenons au problème (3.105) et considérons séparément les cas $N \geq 3$, $N = 2$ et $N = 1$.

Proposition 3.51. Soit $N \geq 3$, $\lambda > 0$ et $R > 0$. Alors le problème (3.105)

(i) n'a pas de solution si $p \geq \frac{N+2}{N-2}$,

(ii) a une solution unique si $p < 1$ ou $1 < p < \frac{N+2}{N-2}$; elle est à symétrie sphérique,

(iii) pour $p = 1$, a une solution si et seulement si $\lambda = \lambda_1$ (où $\lambda_1 > 0$ est la première valeur propre de $-\Delta$ avec la condition : 0 sur ∂B_R); si $\lambda = \lambda_1$, il y a une infinité de solutions, toutes à symétrie sphérique.

Démonstration. Si $p \geq \frac{N+2}{N-2}$, le corollaire 3.45 établit l'inexistence d'une solution de (3.105). Si $p \geq 0$, le lemme 3.43 s'applique et toute solution est à symétrie sphérique; l'unicité est alors démontrée dans [61;p.224], pour $p > 1$.

L'existence d'une solution, lorsque $1 < p < \frac{N+2}{N-2}$, vient du lemme 3.39 (prolonger f sur \mathbb{R} , en posant $f(s) = 0$ pour $s < 0$, et choisir les constantes $c_1 = 0$, $c_2 = c_4 = 1$, $\theta = (p+1)^{-1}$). Le corollaire 3.41 donne l'existence et l'unicité de la solution pour $0 < p < 1$. Si $p < 0$, l'existence d'une solution à symétrie sphérique est démontrée dans le lemme 3.50; l'unicité vient du lemme 3.42, puisque la non-linéarité est décroissante. Les cas $p = 0$ et $p = 1$ sont bien connus. ■

Remarque. Soit $N = 3$. Alors (3.105) n'a pas de solution pour $p \geq 5$. Par conséquent, (3.109) n'a pas de solution pour $p \geq 5$; on retrouve le lemme 3.14. Pour $p = 1$, (3.105) a une solution u si et seulement si $\lambda = \lambda_1 = (\pi/R)^2$; alors $u : \xi \mapsto A|\xi|^{-1} \sin \sqrt{\lambda_1} |\xi|$, $\xi \in \bar{B}_R$, $A > 0$ arbitraire.

Proposition 3.52. Soit $N = 2$, $\lambda > 0$ et $R > 0$. Alors le problème (3.105)

- (i) a une solution unique si $0 \leq p < 1$ ou $p > 1$; elle est à symétrie sphérique,
- (ii) a au plus une solution si $p < 0$,
- (iii) pour $p = 1$, a une solution si et seulement si $\lambda = \lambda_1$; dans ce cas, il y a une infinité de solutions, toutes à symétrie sphérique.

(Reprendre la démonstration de la proposition 3.51 et, dans le lemme 3.39, choisir $c_3 = 1$ et $c(s) = s$).

Proposition 3.53. Soit $N = 1$, $\lambda > 0$ et $R > 0$. Alors le problème (3.105)

- (i) a une solution unique si $p \neq 1$ (elle est symétrique),
- (ii) pour $p = 1$, a une solution u si et seulement si $\lambda = \lambda_1 = \left(\frac{\pi}{2R}\right)^2$; alors $u : \xi \mapsto A \cos \sqrt{\lambda_1} \xi$, $\xi \in [-R, R]$, $A > 0$ arbitraire.

Démonstration. (du point (i)). Si u est une solution symétrique de (3.105), elle doit satisfaire à

$$\begin{cases} u'' + \lambda u^p = 0 & \text{dans } (0, R) \\ u(R) = 0, u'(0) = 0 \\ u(t) > 0 & t \in [0, R]. \end{cases} \quad (3.120)$$

Par le corollaire 3.47, l'existence d'une solution de (3.105) est établie s'il existe $T > 0$ et $x \in C^2([0, T]) \cap C([0, T])$ tels que

$$\begin{cases} -x'' = x^p \text{ dans } (0,T) \\ x(0) = 1, x(T) = 0, x'(0) = 0 \\ x(t) > 0 \quad t \in [0,T]. \end{cases} \quad (3.121)$$

L'existence d'une solution de (3.121) se démontre aisément. L'équation $x'' + x^p = 0$, avec la condition initiale $x(0) = 1$ et $x'(0) = 0$, a une solution (locale) x . Une solution de (3.121) est nécessairement strictement concave et strictement décroissante. Donc cette solution x est prolongeable sur un intervalle maximal, notons-le $[0,T]$, et $x(T) = 0$ (sinon $[0,T]$ ne serait pas maximal). Une solution de (3.121) donne une solution de (3.120), donc une solution symétrique de (3.105). L'unicité de la solution de (3.105) est garantie par les lemmes 3.43, pour $p \geq 0$, et 3.42, pour $p < 0$. ■

Remarques. (i) La solution de (3.121) peut être obtenue sous forme implicite; (3.121) a une solution (unique) pour tout $p \in \mathbb{R}$ (aussi $p = 1$). Supposons que (T,x) soit la solution de (3.121), avec $p > -1$. Alors $-x'' x' = x^p x'$ dans $(0,T)$. En intégrant et tenant compte de $x(0) = 1, x'(0) = 0$ et $x' < 0$ dans $(0,T)$, il vient

$$x' = -\sqrt{\frac{2}{p+1}} \sqrt{1 - x^{p+1}} \text{ dans } (0,T).$$

Puisque $x(T) = 0$,

$$\int_0^{x(t)} (1-s^{p+1})^{-\frac{1}{2}} ds = \sqrt{\frac{2}{p+1}} (T-t), \quad t \in [0,T], \quad p > -1. \quad (3.122)$$

On obtient T en posant $t = 0$ dans (3.122) : $\sqrt{2(p+1)} T = (p+1) \int_0^1 (1-s^{p+1})^{-\frac{1}{2}} ds = \int_0^1 \sigma^{-p/(p+1)} (1-\sigma)^{-\frac{1}{2}} d\sigma = \sqrt{\pi} \Gamma(\frac{1}{p+1}) / \Gamma(\frac{p+3}{2(p+1)})$; voir [36;p.258], Γ désigne la fonction gamma. D'où

$$T = \sqrt{\frac{\pi}{2(p+1)}} \frac{\Gamma(\frac{1}{p+1})}{\Gamma(\frac{p+3}{2(p+1)})}, \quad \text{où } p > -1.$$

Un calcul analogue, pour $p \leq -1$, donne

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{x(t)} (s^{p+1}-1)^{-\frac{1}{2}} ds &= \sqrt{\frac{-2}{p+1}} (T-t), \quad t \in [0,T] \\ T &= \sqrt{\frac{-\pi}{2(p+1)}} \frac{\Gamma(\frac{p-1}{2(p+1)})}{\Gamma(\frac{p}{p+1})} \end{aligned} \right\} \quad p < -1$$

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{x(t)} (-2 \ln s)^{-\frac{1}{2}} ds &= T - t \\ T &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \end{aligned} \right\} p = -1$$

(ii) Si $N \geq 1$ et $p = 0$, la solution de (3.105) s'obtient explicitement.

C'est $u : \xi \mapsto \frac{\lambda}{2N} (R^2 - |\xi|^2)$, $\xi \in \bar{B}_R$.

(iii) Soit $N \geq 1$ et $p \geq 0$, $p \neq 1$. Le problème (3.105) a une solution pour tout $\lambda > 0$ (R étant fixé). Cette propriété tombe si l'on impose une autre condition au bord. Considérons le problème

$$\left\{ \begin{aligned} -\Delta u &= \lambda u^p && \text{dans } B_1 \subset \mathbb{R}^N \ (N \geq 3) \\ u &= 1 && \text{sur } \partial B_1, \end{aligned} \right. \quad (3.123)$$

où $\lambda > 0$, $p > 1$ sont donnés.

Posons $v := u - 1$. Si u est solution de (3.123), alors v satisfait à

$$\left\{ \begin{aligned} -\Delta v &= \lambda(1+v)^p && \text{dans } B_1 \\ v &= 0 && \text{sur } \partial B_1 \\ v &> 0 && \text{dans } B_1. \end{aligned} \right. \quad (3.124)$$

Toute solution de (3.124) est à symétrie sphérique (lemme 3.43). Définissons $t := |\xi|$, pour $\xi \in B_1$, et $y : t \mapsto v(\xi)$, $t \in [0,1]$. Cette fonction y est solution du problème

$$\left\{ \begin{aligned} (t^{N-1} y')' + \lambda t^{N-1} (1+y)^p &= 0 && t \in (0,1) \\ y(1) = 0, y'(0) &= 0 \\ y(t) &> 0 && t \in (0,1) \end{aligned} \right. \quad (3.125)$$

où $\lambda > 0$, $p > 1$ et $N \geq 3$.

Un tel problème a été étudié par D.D. Joseph & T.S. Lundgren [60]. Ces auteurs ont en particulier montré l'existence d'un λ^* tel que (3.125) n'a pas de solution pour tout $\lambda > \lambda^*$. Ce résultat s'applique aussi à (3.123).

3.3.3 Méthodes itératives pour le problème aux limites (3.105).

Nous allons montrer, dans le cas $N \geq 3$, comment obtenir la solution du problème

(3.105), pour $-1 < p < \frac{N+2}{N-2}$ (avec $p \neq 0$ et 1), par des méthodes d'itérations monotones. Il s'agit d'une généralisation, au cas $N \geq 3$, de résultats obtenus dans le § 3.2 pour $N = 3$. Après avoir transformé le problème (3.105) en un problème équivalent, nous obtenons la solution du problème transformé par une itération monotone pour $0 < p < \frac{N+2}{N-2}$ ($p \neq 1$) ou par une itération alternée pour $-1 < p < 0$.

Soit u la solution du problème (3.105), pour $p \neq 1$; elle est à symétrie sphérique. Le problème (3.105) est équivalent au problème unidimensionnel (3.106) :

$$\begin{cases} (t^{N-1} y')' + \lambda t^{N-1} y^p = 0 & t \in (0, R) \\ y(R) = 0, y'(0) = 0 \\ y(t) > 0 & t \in [0, R]. \end{cases}$$

Grâce au lemme 3.46, il suffit de connaître la solution de (3.106) pour un choix particulier de λ et R . Soit λ et R définis par (3.113). Introduisons la transformation (3.114) : $\tau := (N-2) t^{N-2}$ et $z(\tau) := \tau y(t)$. Alors $\tau \in [0, 1]$, si $t \in [0, R]$, et pour $p > -1$: $z \in C^1([0, 1])$; c'est la solution de

$$\begin{cases} -z''(\tau) = \tau^{\alpha-p} z^p(\tau) & \tau \in (0, 1) \\ z(0) = z(1) = 0 \\ z(\tau) > 0 & \tau \in (0, 1), \end{cases} \quad (3.126)$$

où $\alpha = \frac{4-N}{N-2} > -1$.

Nous donnons, pour $-1 < p < 0$, une méthode itérative permettant d'obtenir la solution de (3.126) comme limite d'une suite alternée. Définissons la formule de récurrence

$$\begin{cases} -z_{n+1}''(\tau) = \tau^{\alpha-p} z_n^p(\tau) & \tau \in (0, 1) \\ z_{n+1}(0) = z_{n+1}(1) = 0 \\ z_{n+1}(\tau) > 0 & \tau \in (0, 1). \end{cases} \quad (3.127)$$

Introduisons l'espace de Banach $C_0^1([0, 1])$, ordonné par le cône des fonctions positives P_1 . P_1 est un cône solide (exemple 21 du § 1.4.3). Notons $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ un segment conique dans cet espace. On tiendra compte de la propriété :
 $-1 < \alpha \leq 1$; $\alpha \leq 0$ si $N \geq 4$.

Considérons le problème linéaire

$$\begin{cases} -z''(\tau) = \tau^{\alpha-p} h^p(\tau) & \tau \in (0,1) \\ z(0) = z(1) = 0. \end{cases} \quad (3.128)$$

Le lemme suivant est une généralisation du lemme 3.22.

Lemme 3.54. Soit $-1 < p < 0$, $\alpha > -1$ et $h \in \overset{\circ}{P}_1$. Alors le problème (3.128) a une solution unique, qui est dans $\overset{\circ}{P}_1$.

Démonstration. h étant dans $\overset{\circ}{P}_1$: $h'(0) > 0$ et $h'(1) < 0$. Définissons une fonction h^* par $h^*(\tau) := \tau^{\alpha-p} h^p(\tau)$, pour $\tau \in (0,1)$. Alors $h^* \in L^1(0,1)$ et la solution z de (3.128) est dans $C_0^1([0,1])$. Par la proposition 2.2, $z \in \overset{\circ}{P}_1$. ■

La non-linéarité dans (3.126) étant décroissante (pour $p < 0$), il s'agit de trouver un $z_0 \in \overset{\circ}{P}_1$, tel que les premiers itérés, z_1 et z_2 , par la formule (3.127), vérifient : $z_1 - z_0 \in \overset{\circ}{P}_1$ et $z_2 - z_0 \in \overset{\circ}{P}_1$. Alors tous les itérés sont dans $\overset{\circ}{P}_1$ et la suite (z_n) est alternée.

Soit h_0 la fonction définie sur $[0,1]$ par $h_0(\tau) := A\tau$, avec

$$A := \begin{cases} 6^{-p/(1-p^2)} & \text{si } N = 3 \\ 2^{-p/(1-p^2)} (\alpha+1)^{-1/(1-p)} & \text{si } N \geq 4. \end{cases} \quad (3.129)$$

Soit $z_0 \in \overset{\circ}{P}_1$, la solution de (3.128) où $h := h_0$. On obtient

$$\begin{cases} z_0(\tau) = B\tau(1-\tau^{\alpha+1}), \tau \in [0,1], \text{ avec} \\ B := [(\alpha+2)(\alpha+1)]^{-1} A^p. \end{cases} \quad (3.130)$$

Définissons z_1 et z_2 , à partir de z_0 , par la formule (3.127).

Lemme 3.55. $z_1 - z_0$ et $z_2 - z_0$ sont dans $\overset{\circ}{P}_1$.

Démonstration. On suppose : $N \geq 4$ (pour $N = 3$, voir le lemme 3.23); alors $-1 < \alpha \leq 0$.

(i) Montrons que $\forall \tau \in (0,1]$, $h_0(\tau) > z_0(\tau)$. Comme z_0 est strictement concave et $z_0(0) = h_0(0)$, il suffit de vérifier que $h_0'(0) \geq z_0'(0)$. Or $h_0'(0) - z_0'(0) = A - B = A^p (A^{1-p} - \frac{1}{(\alpha+2)(\alpha+1)}) > A^p (A^{1-p} - \frac{1}{\alpha+1}) = \frac{A^p}{\alpha+1} (2^{-p/(1+p)} - 1) > 0$.

(ii) Pour $\tau \in (0,1)$, $(z_1 - z_0)''(\tau) = \tau^{\alpha-p} (h_0^p(\tau) - z_0^p(\tau)) < 0$; de plus $(z_1 - z_0)(0) = (z_1 - z_0)(1) = 0$. D'où $z_1 - z_0 \in P_1$.

(iii) Montrons que $\forall \tau \in (0,1]$, $h_0(\tau) > z_1(\tau)$. Il suffit de vérifier que $h_0'(0) \geq z_1'(0)$. Puisque z_1 est défini par (3.127), où $n = 0$, on a : $z_1'(0) = \int_0^1 (1-s) s^{\alpha-p} z_0^p(s) ds$. Introduisons l'expression (3.130) :

$$z_1'(0) = B^p \int_0^1 (1-s) s^{\alpha(1-s^{\alpha+1})^p} ds.$$

Par hypothèse $\alpha \leq 0$, donc $1 - s \leq 1 - s^{\alpha+1}$, pour tout $s \in [0,1]$.

$$z_1'(0) \leq B^p \int_0^1 s^{\alpha(1-s^{\alpha+1})^{p+1}} ds = \frac{B^p}{(\alpha+1)(p+2)} < \frac{B^p}{\alpha+1}.$$

Comme $\alpha + 2 \leq 2$: $B^p \leq 2^{-p}(\alpha+1)^{-p} A^{p^2}$. D'où

$$\begin{aligned} h_1'(0) - z_1'(0) &> A - (\alpha+1)^{-1} B^p \geq A - 2^{-p}(\alpha+1)^{-1-p} A^{p^2} = \\ &= A^{p^2} (A^{1-p^2} - 2^{-p}(\alpha+1)^{-1-p}) = 0. \end{aligned}$$

(iv) Pour $t \in (0,1)$, $(z_2 - z_0)''(\tau) = \tau^{\alpha-p} (h_0^p(\tau) - z_1^p(\tau)) < 0$; de plus $(z_2 - z_0)(0) = (z_2 - z_1)(1) = 0$. D'où $z_2 - z_0 \in P_1$. ■

Proposition 3.56. La suite (z_n) définie par (3.127) est alternée et converge, uniformément dans $[0,1]$, vers une fonction dans $\langle z_0, z_1 \rangle_1$, qui est solution de (3.126).

C'est une généralisation de la proposition 3.24, dans laquelle $\alpha = 1$ (i.e. $N = 3$). La démonstration de la proposition 3.56, pour $\alpha > -1$, ne présente aucune difficulté nouvelle.

Ainsi la suite (z_n) , construite par (3.127) à partir de z_0 défini en (3.130), converge vers la solution du problème (3.126), pour $p \in (-1,0)$.

Considérons $p \in (0, \frac{N+2}{N-2})$, avec $p \neq 1$. Transformons (3.126) en un problème équivalent. Comme $z'(0) > 0$, posons $\mu := [z'(0)]^{p-1}$ et $Z := [z'(0)]^{-1} z$.

Alors (μ, Z) est la solution de

$$\begin{cases} -Z''(\tau) = \mu \tau^{\alpha-p} Z^p(\tau) & \tau \in (0,1) \\ Z(0) = Z(1) = 0, Z'(0) = 1 \\ Z(\tau) > 0 & \tau \in (0,1). \end{cases} \quad (3.131)$$

Nous pouvons appliquer la méthode (3.92) à la résolution du problème (3.131), après avoir vérifié que $\int_0^1 s^p(1-s) a(s) ds < \infty$. Cette condition est réalisée puisque $a(\tau) = \tau^{\alpha-p}$ et $\alpha > -1$.

Définissons deux suites (λ_n) et (y_n) , à partir de $y_0 : \tau \mapsto \tau$, pour $\tau \in [0,1]$, à l'aide de la formule de récurrence :

$$\begin{cases} \lambda_n := [\int_0^1 (1-s) s^{\alpha-p} y_n^p(s) ds]^{-1} \\ -y'_{n+1}(\tau) = \lambda_n \tau^{\alpha-p} y_n^p(\tau) \quad \tau \in (0,1) \\ y_{n+1}(0) = y_{n+1}(1) = 0. \end{cases} \quad (3.132)$$

L'existence d'une solution unique de (3.131) étant établie, la convergence des suites (λ_n) et (y_n) découle du lemme 3.35.

Proposition 3.57. Soit $N \geq 3$, $\alpha = (4-N)/(N-2)$ et $0 < p < (N+2)/(N-2)$, $p \neq 1$. Soit (λ_n) et (y_n) les suites définies par (3.132). Alors la suite (λ_n) est croissante et converge vers μ , la suite (y_n) est décroissante et converge vers Z , uniformément dans $[0,1]$, et (μ, Z) est la solution du problème (3.131).

Remarque. La proposition 3.57 ne démontre pas l'existence d'une solution de (3.131). Au contraire, c'est à partir de l'existence d'une solution de (3.131) que l'on peut démontrer la convergence des suites (λ_n) et (y_n) ; c'est pour cette raison que nous avons imposé une restriction sur α . Il serait intéressant de vérifier la validité de la proposition 3.57 pour n'importe quel $\alpha > -1$.

3.3.4 Un problème dans \mathbb{R}^N .

Nous nous intéressons à l'existence d'une solution, de classe C^2 , du problème

$$\begin{cases} \Delta u + u^p = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^N \ (N \geq 3) \\ u > 0 & \text{dans } \mathbb{R}^N, \end{cases} \quad (3.133)$$

où $p > 1$.

Grâce au lemme suivant, nous pouvons nous restreindre à des $p \geq \frac{N+2}{N-2}$.

Lemme 3.58. Le problème (3.133) n'a pas de solution pour $1 \leq p < \frac{N+2}{N-2}$.

B. Gidas & J. Spruck [71; pp.525-526].

Remarque. Nous avons montré, dans le lemme 3.17, que le problème (3.133) n'a pas de solution à symétrie sphérique si $N = 3$ et $p < 5$.

Supposons que u soit une solution à symétrie sphérique de (3.133). Posons $t := |\xi|$, $\xi \in \mathbb{R}^N$, et $x : t \mapsto u(\xi)$. Alors $x \in C^2(\mathbb{R}_+)$ est solution de

$$\begin{cases} (t^{N-1} x')' + t^{N-1} x^p = 0 & t > 0 \\ x'(0) = 0 \\ x(t) > 0 & t > 0. \end{cases} \quad (3.134)$$

En intégrant (3.134), on obtient les deux relations

$$x'(t) = -\frac{1}{t^{N-1}} \int_0^t s^{N-1} x^p(s) ds, \quad t > 0, \quad \text{et} \quad (3.135)$$

$$x(t) = x(0) - \frac{1}{N-2} \int_0^t s(1-\frac{s}{t})^{N-2} x^p(s) ds, \quad t > 0. \quad (3.136)$$

Nous montrons l'existence d'une solution de (3.136), c'est-à-dire de (3.134), par une méthode d'itérations alternées.

Lemme 3.59. Soit $p \geq \frac{N+2}{N-2}$ et $A > 0$. Alors (3.134) a une solution unique x , telle que $x(0) = A$. De plus $x \in C^2(\mathbb{R}_+) \cap BC(\mathbb{R}_+)$ et $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$.

Démonstration. (i) Soit $b := \sqrt{2N} A^{\frac{1}{2}(1-p)}$, $I := (0, b)$ et P_+ le cône des fonctions positives dans $C(\bar{I})$. Définissons une application $F : P_+ \subset C(\bar{I}) \rightarrow C(\bar{I})$ par

$$\begin{cases} (F(x))(t) := A - \frac{1}{N-2} \int_0^t s(1-\frac{s}{t})^{N-2} x^p(s) ds, & t \in (0, b) \\ (F(x))(0) := A. \end{cases} \quad (3.137)$$

F est une application complètement continue et décroissante. Définissons une suite (x_n) , à partir de $x_0 := 0$, par la formule de récurrence

$$x_{n+1} := F(x_n) \quad n \in \mathbb{N}. \quad (3.138)$$

Pour $t \in \bar{I}$: $x_1(t) = A$ et $x_2(t) = \frac{A^p}{2N} (b^2 - t^2)$. Ainsi $x_0 < x_2 < x_1$. La suite (x_n) est bien définie et alternée (proposition 1.16). Les sous-suites (x_{2n}) et (x_{2n+1}) convergent, la première vers \bar{x} et la seconde vers \hat{x} (proposition 1.17). Par la proposition 1.18 : $x_0 < \bar{x} = F(\hat{x}) \leq F(\bar{x}) = \hat{x} < x_1$. Montrons que $\bar{x} = \hat{x}$. Soit $w := \hat{x} - \bar{x}$. Alors $\forall t \in \bar{I}$:

$$0 \leq \hat{x}^p(t) - \bar{x}^p(t) \leq p x_1^{p-1}(t) w(t) = p A^{p-1} w(t).$$

Pour $t \in I$, $0 \leq w(t) = \frac{1}{N-2} \int_0^t s(1-\frac{s}{t})^{N-2} (\hat{x}^p(s) - \bar{x}^p(s)) ds \leq \frac{pA^{p-1}}{N-2} \int_0^t s w(s) ds$.

D'où $w = 0$, par le lemme de Gronwall; et $x := \bar{x} = \hat{x}$ vérifie $x = F(x)$, donc x satisfait à

$$\begin{cases} (t^{N-1} x')' + t^{N-1} x^p = 0 & t \in I \\ x(0) = A, x'(0) = 0 \\ x(t) > 0 & t \in I. \end{cases} \quad (3.139)$$

(ii) Cette solution x de (3.139) peut être prolongée sur un intervalle maximal \tilde{I} . Par (3.135), x est décroissante, donc bornée; x' est localement bornée. \tilde{I} ne peut pas être borné. Supposons, ab absurdo, que $\tilde{I} = [0, R]$; alors $x(R) = 0$, sinon \tilde{I} ne serait pas maximal. Mais x ne peut pas s'annuler puisque $p \geq \frac{N+2}{N-2}$ (proposition 3.51). Donc $\tilde{I} = \mathbb{R}_+$ et l'existence d'une solution de (3.134), vérifiant $x(0) = A$, est démontrée.

(iii) Supposons que x_1 et x_2 soient deux solutions de (3.134), avec $x_1(0) = x_2(0) = A$. Alors $\forall t > 0$,

$$\begin{aligned} |(x_2 - x_1)(t)| &\leq \frac{1}{N-2} \int_0^t s(1-\frac{s}{t})^{N-2} |(x_2^p - x_1^p)(s)| ds \leq \\ &\leq \frac{pA^{p-1}}{N-2} \int_0^t s |(x_2 - x_1)(s)| ds. \end{aligned}$$

D'où $x_1 = x_2$, par le lemme de Gronwall. L'unicité est établie.

(iv) $x \in C^2(\mathbb{R}_+)$ par le lemme 3.49. x étant décroissante et positive, la limite $\ell := \lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$ existe et $\forall t \geq 0 : x(t) \geq \ell \geq 0$; ainsi $x \in BC(\mathbb{R}_+)$. Montrons que $\ell = 0$. Par (3.136) :

$$\forall t > 0, x(t) \leq x(0) - \frac{\ell^p}{N-2} \int_0^t s(1-\frac{s}{t})^{N-2} ds = x(0) - \frac{\ell^p}{2N} t^2.$$

D'où $\ell = 0$, puisque $x > 0$ sur \mathbb{R}_+ . ■

L'existence d'une solution du problème (3.134) démontre l'existence d'une solution à symétrie sphérique de (3.133).

Proposition 3.60. Soit $p \geq \frac{N+2}{N-2}$. Alors (3.133) a une solution u dans $C^2(\mathbb{R}^N) \cap BC(\mathbb{R}^N)$, à symétrie sphérique, telle que $\lim_{\xi \rightarrow \infty} u(\xi) = 0$.

Remarques. (i) Soit u une solution de (3.133). On en tire une infinité de solutions de (3.133) : d'une part par translation, d'autre part par changement d'échelle.

(ii) Soit $p = \frac{N+2}{N-2}$. Dans ce cas les solutions de (3.133) sont connues explicitement. Elles sont de la forme

$$u(\xi) = \left[\frac{a\sqrt{N(N-2)}}{a^2 + |\xi - \xi_0|^2} \right]^{\frac{N-2}{2}}, \quad \xi \in \mathbb{R}^N, \quad (3.140)$$

où $a > 0$ et $\xi_0 \in \mathbb{R}^N$ sont arbitraires. Toute solution de (3.133), de classe C^2 , est de la forme (3.140), donc à symétrie sphérique [72;p.428].

(ii) Le problème (3.133) n'a pas de solution si $N = 1$. En effet, une solution (de classe C^2) strictement positive de l'équation $u'' + u^p = 0$, dans \mathbb{R} , doit être strictement concave; ces deux propriétés sont incompatibles.

3.3.5 Problèmes singuliers

Il a été remarqué plus haut, que le problème (3.105) n'a pas de solution pour $\lambda \geq 0$ (conséquence du principe du maximum). Il n'en est plus de même si B_R est remplacé par $\dot{B}_R := B_R \setminus \{0\}$. Considérons le problème suivant : étant donné $p \in \mathbb{R}$, $R > 0$ et $\mu > 0$, existe-t-il une fonction $u \in C^2(\dot{B}_R) \cap C(\dot{B}_R \cup \partial B_R)$, qui soit solution de

$$\begin{cases} \Delta u = \mu u^p & \text{dans } \dot{B}_R \subset \mathbb{R}^N \quad (N \geq 3) \\ u = 0 & \text{sur } \partial B_R \\ u > 0 & \text{dans } \dot{B}_R ? \end{cases} \quad (3.141)$$

Nous montrons dans la proposition 3.62, que (3.141) n'a pas de solution pour $p \geq N/(N-2)$, en nous appuyant sur un résultat dû à H. Brézis et L. Véron [73].

Lemme 3.61. Soit $p \geq N/(N-2)$ et $R > 0$. Supposons l'existence d'une solution $v \in C^2(\dot{B}_R)$ de l'équation

$$\Delta v = |v|^{p-1} v \quad \text{dans } \dot{B}_R. \quad (3.142)$$

Alors, il existe une fonction dans $C^2(B_R)$, qui coïncide avec v dans \dot{B}_R . [73;pp. 1 et 5].

Proposition 3.62. Le problème (3.141) n'a pas de solution si $p \geq N / (N-2)$.

Démonstration. Supposons, ab absurdo, que u soit une solution de (3.141). Définissons $v := \mu^{1/(p-1)} u$. Alors $v \in C^2(\dot{B}_R)$ et vérifie (3.142). Par le lemme 3.61, il existe une fonction $\tilde{v} \in C^2(B_R) \cap C(\bar{B}_R)$, solution de

$$\begin{cases} \Delta \tilde{v} = \tilde{v}^p & \text{dans } B_R \\ \tilde{v} = 0 & \text{sur } \partial B_R \\ \tilde{v} > 0 & \text{dans } \dot{B}_R; \end{cases}$$

ceci est en contradiction avec le principe du maximum. ■

Intéressons-nous à une solution à symétrie sphérique de (3.141). Posons $r := |\xi|$, pour $0 < |\xi| \leq R$, et définissons $U : r \mapsto u(\xi)$, pour $r \in (0, R]$. Alors u est une solution à symétrie sphérique de (3.141), si et seulement si $U \in C^2(0, R) \cap C((0, R])$ satisfait à

$$\begin{cases} (r^{N-1} U')' - \mu r^{N-1} U^p = 0 & r \in (0, R) \\ U(R) = 0 \\ U(r) > 0 & r \in (0, R). \end{cases} \quad (3.143)$$

Introduisons la transformation

$$t := (N-2)^{2-N} r^{N-2} \quad \text{et} \quad x(t) := tU(r). \quad (3.144)$$

Alors U est une solution de (3.143) si et seulement si $x \in C^2(0, T) \cap C((0, T])$ satisfait à

$$\begin{cases} x''(t) - \mu t^{\alpha-p} x^p(t) = 0 & t \in (0, T) \\ x(T) = 0 \\ x(t) > 0 & t \in (0, T), \text{ où} \end{cases} \quad (3.145)$$

$$T := (N-2)^{2-N} R^{N-2} \quad \text{et} \quad \alpha := \frac{4-N}{N-2} \in (-1, 1]. \quad (3.146)$$

Proposition 3.63. Le problème (3.141) n'a pas de solution à symétrie sphérique si $p \leq -1$.

Démonstration. Il suffit de vérifier que (3.145) n'a pas de solution si $p \leq -1$. Supposons, ab absurdo, que x soit une solution de (3.145). Alors x est strictement convexe dans $(0, T)$. En particulier :

$$\forall t \in \left(\frac{T}{2}, T\right), \quad x(t) < \frac{2}{T} x\left(\frac{T}{2}\right)(T-t). \quad (3.147)$$

Vu que $\alpha - p > 0$, on a pour tout $t \in (\frac{T}{2}, T)$:

$$\begin{aligned} x'(t) - x'(\frac{T}{2}) &= \mu \int_{\frac{T}{2}}^t s^{\alpha-p} x^p(s) ds > \\ &> \mu 2^{2p-\alpha} T^{\alpha-2p} x^p(\frac{T}{2}) \int_{\frac{T}{2}}^t (T-s)^p ds = \\ &= \kappa \int_{\frac{T}{2}}^t (T-s)^p ds, \text{ où } \kappa > 0. \end{aligned}$$

D'où $\forall t \in (\frac{T}{2}, T)$: $0 > x'(t) > x'(\frac{T}{2}) + \kappa \int_{\frac{T}{2}}^t (T-s)^p ds$.

L'intégrale prend des valeurs positives arbitrairement grandes lorsque t tend vers T , d'où la contradiction. ■

Etudions le comportement à l'origine des solutions du problème (3.145).

Lemme 3.64. Soit $-1 < p \leq 1$. Supposons que x soit une solution de (3.145). Alors $x \in C([0, T])$.

Démonstration. Il s'agit de montrer que x est bornée lorsque t tend vers 0 (la continuité en découle). Distinguons les deux cas : $-1 < p < 0$ et $0 \leq p \leq 1$.

(i) Soit $-1 < p < 0$. Intégrant l'équation différentielle, on obtient pour $t \in (0, \frac{T}{2})$:

$$x'(t) = x'(\frac{T}{2}) - \mu \int_t^{\frac{T}{2}} s^{\alpha-p} x^p(s) ds.$$

Comme $\alpha - p > -1$, $x(\frac{T}{2}) > 0$ et x est décroissante, on a :

$$x'(t) > x'(\frac{T}{2}) - \mu x^p(\frac{T}{2}) (\alpha-p+1)^{-1} (\frac{T}{2})^{\alpha-p+1}.$$

D'où $\forall t \in (0, \frac{T}{2})$: $x(t) < x(\frac{T}{2}) + \text{cste} (\frac{T}{2} - t)$.

(ii) Soit $0 \leq p \leq 1$. Intégrant deux fois l'équation différentielle, on obtient pour $t \in (0, T)$:

$$x(t) = \mu \int_t^T (s-t) s^{\alpha-p} x^p(s) ds - x'(T)(T-t). \quad (3.148)$$

Utilisons l'inégalité

$$\forall a \in \mathbb{R}_+ \text{ et } \forall p \in [0,1] : a^p \leq 1 + a. \quad (3.149)$$

Compte tenu de $2 + \alpha - p > 0$ et de (3.149), $\forall t \in (0,T)$:

$$\begin{aligned} x(t) &\leq -Tx'(t) + \mu \frac{T^{2+\alpha-p}}{2+\alpha-p} + \mu \int_t^T s^{1+\alpha-p} x(s) ds = \\ &= \kappa + \mu \int_t^T s^{1+\alpha-p} x(s) ds, \text{ où } \kappa > 0. \end{aligned}$$

Par le lemme de Gronwall, $\forall t \in (0,T)$:

$$x(t) \leq \kappa \exp \{ \mu(2+\alpha-p)^{-1} T^{2+\alpha-p} \}. \quad \blacksquare$$

La situation est différente pour $1 < p < N / (N-2)$. Rappelons un résultat de L. Véron [74].

Lemme 3.65. Soit $1 < p < N / (N-2)$, $R > 0$ et $\mu > 0$. Supposons l'existence d'une solution $u \in C^2(\dot{B}_R)$, de l'équation

$$\begin{cases} \Delta u = \mu u^p & \text{dans } \dot{B}_R \\ u > 0 & \text{dans } \dot{B}_R. \end{cases} \quad (3.150)$$

Alors se présente l'alternative :

- (i) soit $\lim_{|\xi| \rightarrow 0} |\xi|^{2/(p-1)} u(\xi) = \ell(p,N,\mu)$
 où $\ell(p,N,\mu) := \left[\frac{1}{\mu} \left(\frac{2}{p-1} \right) \left(\frac{2p}{p-1} - N \right) \right]^{\frac{1}{p-1}}$
- (ii) soit $\lim_{|\xi| \rightarrow 0} |\xi|^{N-2} u(\xi) = c \in \mathbb{R}_+$.

Voir [74; p.227], [75;p.867].

A l'aide de la transformation (3.144), on obtient le corollaire suivant.

Corollaire 3.66. Soit $1 < p < N / (N-2)$, $T > 0$ et $\mu > 0$. Supposons l'existence d'une solution $x \in C^2(0,T)$ de l'équation

$$\begin{cases} x''(t) - \mu t^{\alpha-p} x^p(t) = 0 & t \in (0,T) \\ x(t) > 0 & t \in (0,T). \end{cases} \quad (3.151)$$

Alors se présente l'alternative :

(i) soit $\lim_{t \downarrow 0} t^{(\frac{N}{N-2} - p)/(p-1)} x(t) = (N-2)^{-2/(p-1)} \mathfrak{L}(p, N, \mu)$

(ii) soit $x \in C([0, T])$.

Nous montrons l'existence de solutions bornées du problème (3.145), pour $-1 < p < N / (N-2)$. Considérons donc le problème suivant. Etant donnés $p \in (-1, N/(N-2))$, $T > 0$ et $A > 0$, pour quels $\mu > 0$ existe-t-il une fonction $x \in C^2(0, T) \cap C([0, T])$, qui soit solution de

$$\begin{cases} x''(t) - \mu t^{\alpha-p} x^p(t) = 0 & t \in (0, T) \\ x(0) = A, x(T) = 0 \\ x(t) > 0 & t \in (0, T) ? \end{cases} \quad (3.152)$$

Soit $S := \{ \mu > 0 \mid (3.152) \text{ a une solution} \}$. Si $1 \leq p < N / (N-2)$, $S = (0, \infty)$. Pour $-1 < p < 1$, S est un intervalle borné. Si elle existe, la solution peut être obtenue par une suite monotone, uniformément convergente.

Lemme 3.67. Soit $-1 < p < 0$, $A > 0$ et $T > 0$. Alors (3.152) n'a pas de solution si $\mu \geq \tilde{\mu}$, où

$$\tilde{\mu} := \frac{A^{1-p} T^{p-2-\alpha} \Gamma(\alpha+3)}{\Gamma(2+\alpha-p) \Gamma(p+1)}. \quad (3.153)$$

Démonstration. Une solution de (3.152) doit vérifier, pour $t \in [0, T]$,

$$\begin{aligned} x(t) &= A(1 - \frac{t}{T}) - \mu(1 - \frac{t}{T}) \int_0^t s^{1+\alpha-p} x^p(s) ds - \\ &\quad - \mu t \int_t^T (1 - \frac{s}{T}) s^{\alpha-p} x^p(s) ds. \end{aligned} \quad (3.154)$$

D'où

$$-T x'(T) = A - \mu \int_0^T s^{1+\alpha-p} x^p(s) ds. \quad (3.155)$$

La condition $x(t) > 0$, dans $[0, T]$, impose $x'(T) \leq 0$. Par la convexité de x : $x(t) < A(1 - \frac{t}{T})$, $t \in (0, T)$. Introduisons ces conditions dans (3.155) :

$$\begin{aligned} A &\geq \mu \int_0^T s^{1+\alpha-p} x^p(s) ds > \mu A^p \int_0^T s^{1+\alpha-p} (1 - \frac{s}{T})^p ds = \\ &= \mu A^p T^{2+\alpha-p} \int_0^1 s^{1+\alpha-p} (1-s)^p ds = \\ &= \mu A^p T^{2+\alpha-p} \frac{\Gamma(2+\alpha-p) \Gamma(p+1)}{\Gamma(\alpha+3)} = \mu A (\tilde{\mu})^{-1}. \end{aligned}$$

Nous obtenons ainsi une condition nécessaire pour l'existence d'une solution de (3.152). Autrement dit, (3.152) n'a pas de solution si $\mu \geq \tilde{\mu}$. ■

Lemme 3.68. Soit $0 \leq p < 1$, $A > 0$ et $T > 0$. Alors (3.152) n'a pas de solution si $\mu \geq \hat{\mu}$, où

$$\begin{cases} \hat{\mu} := \frac{2(p+1)}{(1-p)^2} T^{p-\alpha-2} A^{1-p}, & \text{si } N \geq 4 \\ \hat{\mu} := \frac{p+1}{2} \left(\frac{3-p}{1-p}\right)^2 T^{p-3} A^{1-p}, & \text{si } N = 3. \end{cases} \quad (3.156)$$

Démonstration. (i) Soit x une solution de (3.152). Multiplions l'équation différentielle par x' et intégrons :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (x'(T))^2 - \frac{1}{2} (x'(t))^2 &= \mu \int_t^T s^{\alpha-p} x'(s) x^p(s) ds, \text{ d'où} \\ (x'(t))^2 &\geq -2\mu \int_t^T s^{\alpha-p} x'(s) x^p(s) ds. \end{aligned} \quad (3.157)$$

Distinguons les deux cas : $N \geq 4$ et $N = 3$.

(i) $N \geq 4$. Alors $\alpha - p < 0$ et (3.157) donne

$$(x'(t))^2 > -2\mu T^{\alpha-p} \int_t^T x'(s) x^p(s) ds = \frac{2\mu T^{\alpha-p}}{p+1} x^{p+1}(t).$$

Comme x est décroissante, $-x'(t) x^{-\frac{p+1}{2}}(t) > \sqrt{\frac{2\mu T^{\alpha-p}}{p+1}}$.

Intégrons : $\frac{2}{1-p} x^{\frac{1-p}{2}}(t) > \sqrt{\frac{2\mu T^{\alpha-p}}{p+1}} (T-t)$.

Compte tenu de $x(0) = A$, nous obtenons une condition nécessaire pour l'existence d'une solution de (3.152) :

$$\left(\frac{2}{1-p}\right)^2 A^{1-p} > \frac{2T^{2+\alpha-p}}{p+1} \mu.$$

Donc (3.152) n'a pas de solution si

$$\mu \geq 2(p+1)(1-p)^{-2} T^{p-\alpha-2} A^{1-p} = \hat{\mu}.$$

(ii) Soit $N = 3$. Alors $\alpha = 1$ et $\alpha - p > 0$. De (3.157) :

$$(x'(t))^2 > \frac{2\mu t^{1-p}}{p+1} x^{p+1}(t).$$

D'où $-x'(t) x^{\frac{-p+1}{2}}(t) > \sqrt{\frac{2\mu}{p+1}} t^{\frac{1-p}{2}}$.

Intégrons : $\frac{2}{1-p} x^{\frac{1-p}{2}}(t) > \frac{2}{3-p} \sqrt{\frac{2\mu}{p+1}} (T^{\frac{3-p}{2}} - t^{\frac{3-p}{2}})$.

Nous obtenons la condition nécessaire :

$$\left(\frac{1}{1-p}\right)^2 A^{1-p} > \frac{2}{(3-p)^2(p+1)} T^{3-p} \mu.$$

Donc (3.152) n'a pas de solution si

$$\mu \geq \frac{p+1}{2} \left(\frac{3-p}{1-p}\right)^2 A^{1-p} T^{p-3} = \hat{\mu}. \quad \blacksquare$$

Si x est une solution de (3.152), nous définissons une fonction

$y : t \mapsto A(1 - \frac{t}{T}) - x(t)$, pour $t \in [0, T]$. Alors x est solution de (3.152) si et seulement si $y \in C^2(0, T) \cap C([0, T])$ satisfait à

$$\begin{cases} -y''(t) = \mu t^{\alpha-p} (A(1 - \frac{t}{T}) - y(t))^p & t \in (0, T) \\ y(0) = y(T) = 0 \\ 0 < y(t) < A(1 - \frac{t}{T}) & t \in (0, T). \end{cases} \quad (3.158)$$

Définissons $\psi : t \mapsto A(1 - \frac{t}{T})$, où $t \in [0, T]$. Notons $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un segment conique dans $C([0, T])$. Soit $-1 < p < N / (N-2)$. Fixons un nombre $\eta \in (0, 1)$; si $p \geq 0$, la valeur $\eta = 1$ est admise. Soit $H : \langle 0, \eta\psi \rangle \subset C([0, T]) \rightarrow C([0, T])$, l'application définie par

$$\begin{cases} (H(y))(t) := (1 - \frac{t}{T}) \int_0^t s^{1+\alpha-p} (A(1 - \frac{s}{T}) - y(s))^p ds + \\ + t \int_t^T (1 - \frac{s}{T}) s^{\alpha-p} (A(1 - \frac{s}{T}) - y(s))^p ds, & t \in (0, T], \\ (H(y))(0) := 0, \end{cases} \quad (3.159)$$

où $y \in \langle 0, \eta\psi \rangle$. Alors y est une solution de (3.158) si et seulement si $y = \mu H(y)$.

Lemme 3.69. Soit $-1 < p < 0$, $A > 0$ et $T > 0$. Alors (3.158) a une solution pour tout $\mu \in (0, 2^{p-1} \tilde{\mu}]$, où $\tilde{\mu}$ est donné par (3.153).

Démonstration. (i) Soit $D := \langle 0, \frac{1}{2} \psi \rangle$. Pour $p < 0$, l'application H , définie sur D par (3.159), est strictement croissante. Si $y \in D : H(y)$ est une fonction concave, qui s'annule en 0 et T . Montrons que $\mu H(D) \subset D$. Comme $H(0) > 0$,

il suffit de vérifier que $\mu H(\frac{1}{2} \psi) \leq \frac{1}{2} \psi$. Cette condition est équivalente à

$$-\mu(H(\frac{1}{2} \psi))'(T) \leq \frac{1}{2} \frac{A}{T}. \quad (3.160)$$

$$\begin{aligned} \text{Par (3.159) : } - (H(\frac{1}{2} \psi))'(T) &= (\frac{1}{2})^P \frac{A^P}{T} \int_0^T s^{1+\alpha-P} (1 - \frac{s}{T})^P ds = \\ &= (\frac{1}{2})^P A^P T^{1+\alpha-P} \frac{\Gamma(2+\alpha-P) \Gamma(p+1)}{\Gamma(\alpha+3)} = (\frac{1}{2})^P \frac{A}{T} (\tilde{\mu})^{-1}. \end{aligned}$$

La condition (3.160) est vérifiée pour $\mu \leq 2^{P-1} \tilde{\mu}$.

(ii) D est un ensemble fermé, borné, convexe, envoyé dans lui-même par l'application compacte μH . Par le théorème de Schauder, μH a un point fixe dans $\mu H(D)$. ■

Donnons une formule de récurrence :

$$\begin{cases} -y_{n+1}''(t) = \mu t^{\alpha-P} (A(1 - \frac{t}{T}) - y_n(t))^P & t \in (0, T) \\ y_{n+1}(0) = y_{n+1}(T) = 0. \end{cases} \quad (3.161)$$

Proposition 3.70. Soit $-1 < p < 0$, $A > 0$, $T > 0$ et $\mu > 0$. Alors il existe un $\mu^* \in (0, \infty)$, tel que (3.158) a une solution pour tout $\mu < \mu^*$ et n'a pas de solution si $\mu > \mu^*$. Pour tout $\mu < \mu^*$, la suite (y_n) définie par (3.161), à partir de $y_0 := 0$, est croissante et converge, uniformément dans $[0, T]$, vers la solution minimale de (3.158).

Démonstration. (i) Si \hat{y} est une solution de (3.158) pour un certain $\mu_0 > 0$, alors \hat{y} est une sur-solution du problème (3.158) pour tout $\mu \leq \mu_0$, car $\hat{y} = \mu_0 H(\hat{y}) \geq \mu H(\hat{y})$. D'autre part, 0 est une sous-solution compatible avec \hat{y} . Par la proposition 2.39, la suite (y_n) est croissante et converge uniformément vers la solution minimale de (3.158).

(ii) Ainsi l'existence d'une solution pour un certain $\mu_0 > 0$ implique l'existence d'une solution pour tout $\mu \in (0, \mu_0]$. Il existe au moins un μ_0 pour lequel (3.158) a une solution (lemme 3.69). Par le lemme 3.67, le problème (3.158) n'a pas de solution si $\mu \geq \tilde{\mu}$. L'existence de $\mu^* \in (0, \infty)$ est démontrée. ■

Le problème (3.152) a donc une solution maximale pour tout $\mu \in (0, \mu^*)$. Nous ne savons pas s'il a d'autres solutions. Pour $p \geq 0$, l'unicité peut être établie.

Proposition 3.71. Soit $0 \leq p < N / (N-2)$, $A > 0$, $T > 0$ et $\mu > 0$. Alors le problème (3.152) a, au plus, une solution.

Démonstration. Supposons que x_1 et x_2 soient deux solutions de (3.152) et posons $w := x_1 - x_2$. Supposons, ab absurdo, qu'il existe un $t_0 \in (0, T)$, tel que $w(t_0) \neq 0$. Sans perte de généralité : $w(t_0) > 0$. Par continuité, il existe t_1 et t_2 , tels que $0 \leq t_1 < t_2 \leq T$, $w(t_1) = w(t_2) = 0$ et $w(t) > 0$ si $t \in (t_1, t_2)$. Dans cet intervalle, $w''(t) = \mu t^{\alpha-p} (x_1^p - x_2^p)(t) \geq 0$; d'où la contradiction, puisque $w(t) \leq 0$ par le principe du maximum. ■

Lemme 3.72. Soit $0 \leq p < 1$, $A > 0$ et $T > 0$. Alors (3.158) a une solution pour tout $\mu \in (0, \tilde{\mu}]$, où $\tilde{\mu}$ est le nombre défini par (3.153).

Démonstration. Soit $\psi : t \mapsto A(1 - \frac{t}{T})$, pour $t \in [0, T]$, et $D := \langle 0, \psi \rangle$. Montrons que $\mu H(D) \subset D$. Pour $p \geq 0$, H est une application décroissante et $H(\psi) = 0$. Il s'agit de montrer que $\mu H(0) \leq \psi$. Cette condition a lieu si et seulement si

$$-\mu(H(0))'(T) \leq \frac{A}{T}. \quad (3.162)$$

Par (3.159), $-(H(0))'(T) = \frac{A^p}{T} \int_0^T s^{1+\alpha-p} (1 - \frac{s}{T})^p ds = A^p T^{1+\alpha-p} \frac{\Gamma(2+\alpha-p) \Gamma(p+1)}{\Gamma(\alpha+3)} = \frac{A}{T} (\tilde{\mu})^{-1}$. Le théorème de Schauder donne l'existence d'une solution de (3.158). ■

Pour montrer l'existence d'un μ^* , nous introduisons un problème avec conditions initiales. Soit $0 \leq p < 1$, $T > 0$ et $\gamma < 0$. Par le lemme 3.64, il existe une solution $z \in C^2((0, T]) \cap C([0, T])$, du problème

$$\begin{cases} z''(t) = t^{\alpha-p} z^p(t) & t \in (0, T) \\ z(T) = 0, z'(T) = \gamma \\ z(t) > 0 & t \in (0, T). \end{cases} \quad (3.163)$$

Soit $\varphi : t \mapsto T - t$, où $t \in [0, T]$. Définissons une application $G : P_+ \subset C([0, T]) \rightarrow C([0, T])$, par

$$(G(z))(t) := \int_t^T (s-t) s^{\alpha-p} z^p(s) ds, \quad t \in [0, T]. \quad (3.164)$$

La solution (unique) z de (3.164) vérifie

$$z = G(z) - \gamma\varphi. \quad (3.165)$$

Introduisons la formule de récurrence

$$Z_{n+1} = G(Z_n) - \gamma\varphi. \quad (3.166)$$

Puisque pour tout $\gamma < 0$, (3.163) a une solution unique z_γ , dans $C([0, T])$, on peut définir une application g sur $(-\infty, 0)$, par

$$g(\gamma) := z_\gamma(0). \quad (3.167)$$

Lemme 3.73. Soit $0 \leq p < 1$, $T > 0$ et $\gamma < 0$. Alors l'application g , définie par (3.167), est strictement décroissante et continue; de plus

$$A^* := \lim_{\gamma \uparrow 0} g(\gamma) > 0. \quad (3.168)$$

Ainsi g est un homéomorphisme de \mathbb{R}_- sur $[A^*, \infty)$.

Démonstration. (i) L'application G , définie par (3.164), est strictement croissante et complètement continue, de P_+ dans P_+ . Soit $\gamma < 0$; la suite (Z_n) définie par (3.166), à partir de $Z_0 := 0$, est croissante (proposition 1.13). Montrons qu'elle est bornée. Pour $n \geq 1$ et $t \in [0, T]$:

$$\begin{aligned} Z_n(t) \leq Z_{n+1}(t) &= \int_t^T (s-t) s^{\alpha-p} Z_n^p(s) ds - \gamma(T-t) \leq \\ &\leq \int_t^T s^{1+\alpha-p} Z_n^p(s) ds - \gamma T \leq \int_t^T s^{1+\alpha-p} Z_1^{p-1}(s) Z_n(s) ds - \gamma T = \\ &= |\gamma|^{p-1} \int_t^T s^{1+\alpha-p} (T-s)^{p-1} Z_n(s) ds - \gamma T. \end{aligned}$$

Comme $1 + \alpha - p > -1$ et $p - 1 > -1$, le lemme de Gronwall nous donne

$$Z_n(t) \leq \kappa := T|\gamma| \exp \{ |\gamma|^{p-1} \int_0^T s^{1+\alpha-p} (T-s)^{p-1} ds \} < \infty.$$

Par (3.164), $\forall n \in \mathbb{N}$ et $\forall t \in (0, T]$:

$$Z'_{n+1}(t) = - \int_t^T s^{\alpha-p} Z_n^p(s) ds + \gamma.$$

D'où l'estimation, avec $t \in (0, T)$,

$$|t^p Z'_{n+1}(t)| < \int_t^T s^\alpha Z_n^p(s) ds + |\gamma| T^p < \frac{\kappa^p T^{\alpha+1}}{\alpha+1} + |\gamma| T^p.$$

Par le lemme 2.43, la suite (Z_n) converge vers une limite z , uniformément dans $[0, T]$; par la continuité de G : z vérifie (3.165) et c'est la solution de (3.163).

(ii) Soit $\gamma_1 < \gamma_2 < 0$ et z_1, z_2 les solutions correspondantes de (3.163). Montrons que $z_1 > z_2$. z_1 est la limite de la suite (Z_n) définie par (3.166), à partir de $Z_0 := 0$, avec $\gamma = \gamma_1$; de même z_2 est la limite de la suite (\tilde{Z}_n)

définie par (3.166), à partir de $Z_0 := 0$, avec $\gamma = \gamma_2$. Faisons l'hypothèse de récurrence : $Z_n > \tilde{Z}_n$. Alors

$$Z_{n+1} = G(Z_n) - \gamma_1 \varphi > G(\tilde{Z}_n) - \gamma_2 \varphi = \tilde{Z}_{n+1}.$$

Comme $Z_1 = -\gamma_1 \varphi > -\gamma_2 \varphi = \tilde{Z}_1$, on a pour tout $n \geq 1$: $Z_n > \tilde{Z}_n$. En passant à la limite : $z_1 > z_2$. En particulier, $g(\gamma_1) = z_1(0) > z_2(0) = g(\gamma_2)$; l'égalité est exclue par la proposition 3.71.

(iii) Soit $\gamma_1 < \gamma_2 < 0$ et z_1, z_2 les solutions correspondantes. Par ce qui précède : $0 < z_1 - z_2 = G(z_1) - G(z_2) + (\gamma_2 - \gamma_1) \varphi$. Comme $z_2 > -\gamma_2 \varphi$, on a l'inégalité :

$$0 < z_1^p - z_2^p < p |\gamma_2|^{p-1} \varphi^{p-1} (z_1 - z_2).$$

Pour $t \in [0, T]$: $0 \leq z_1(t) - z_2(t) \leq \int_t^T s^{1+\alpha-p} (z_1^p - z_2^p)(s) ds + (\gamma_2 - \gamma_1) T \leq p |\gamma_2|^{p-1} \int_t^T s^{1+\alpha-p} (T-s)^{p-1} (z_1 - z_2)(s) ds + (\gamma_2 - \gamma_1) T$. Comme $1 + \alpha - p > -1$ et $p - 1 > -1$, le lemme de Gronwall donne :

$$z_1(t) - z_2(t) \leq (\gamma_2 - \gamma_1) T \exp \left\{ p |\gamma_2|^{p-1} \int_0^T s^{1+\alpha-p} (T-s)^{p-1} ds \right\}.$$

Donc $\|z_1 - z_0\| \rightarrow 0$ et $|g(\gamma_1) - g(\gamma_2)| \rightarrow 0$ si $|\gamma_1 - \gamma_2| \rightarrow 0$.

(iv) Par (3.165), g n'est pas bornée lorsque $\gamma \rightarrow -\infty$. Comme g est strictement décroissante, positive et continue sur $(-\infty, 0)$, la limite $A^* = \lim_{\gamma \uparrow 0} g(\gamma)$ existe et $A^* \geq 0$. Montrons que $A^* \neq 0$. Soit z_γ la solution de (3.163) pour un γ donné. Définissons $x_\gamma : t \mapsto z_\gamma(t) / g(\gamma)$. Alors x_γ est la solution de (3.152) avec $A = 1$ et $\mu = g^{p-1}(\gamma)$. Si A^* était nul, (3.152) aurait une solution pour μ arbitrairement grand, ce qui contredit le lemme 3.68. ■

Lemme 3.74. Soit $0 \leq p < 1$ et $T > 0$. Alors le problème (3.163) a une solution pour $\gamma = 0$. Cette solution (unique) vaut A^* à l'origine.

Démonstration. Le problème (3.163) a une solution z_γ , pour tout $\gamma < 0$. Construisons une suite (z_n) en définissant, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$z_n := z_\gamma, \text{ la solution de (3.164) pour } \gamma = \frac{-1}{n+1}.$$

Par (3.164) : $z_n'(t) = - \int_t^T s^{\alpha-p} z_n^p(s) ds - \frac{1}{n+1}$, $t \in (0, T)$.

Soit $0 \leq n < m$. Comme (z_n) est une suite décroissante (voir la démonstration

du lemme 3.73, point (ii)) :

$$(z_n - z_m)'(t) = \int_t^T s^{\alpha-p} (z_m^p - z_n^p)(s) ds + \frac{1}{m+1} - \frac{1}{n+1} < 0, \quad t \in (0, T).$$

Pour $t \in [0, T]$, $(z_n - z_m)(0) > (z_n - z_m)(t) > (z_n - z_m)(T) = 0$. Si $n > m \geq 0$, les signes d'inégalité sont renversés, d'où

$$\forall n, m \in \mathbb{N} : \|z_n - z_m\|_0 = |z_n(0) - z_m(0)|. \quad (3.169)$$

Nous montrons que (z_n) est une suite de Cauchy. Soit n et $q \in \mathbb{N}$:

$$\|z_n - z_{n+q}\|_0 = |z_n(0) - z_{n+q}(0)| = \left| g\left(\frac{-1}{n+1}\right) - g\left(\frac{-1}{n+1+q}\right) \right|.$$

Soit $\varepsilon > 0$; par la continuité de g , il existe un $\delta > 0$, tel que $|\gamma_1 - \gamma_2| < \delta$ entraîne $|g(\gamma_1) - g(\gamma_2)| < \varepsilon$. Choisissons un $N \in \mathbb{N}$, tel que $\frac{1}{N+1} < \delta$. Alors $\forall n \geq N$ et $\forall q \geq 0$,

$$\left| \frac{1}{n+1+q} - \frac{1}{n+1} \right| = \frac{1}{n+1} \frac{q}{n+1+q} < \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{N+1} < \delta.$$

Ce qui démontre : $\|z_n - z_{n+q}\|_0 < \varepsilon$. La suite (z_n) converge, uniformément dans $[0, T]$, vers une fonction z . Par la continuité de G , c'est une solution de (3.165), avec $\gamma = 0$. Par la définition de A^* : $z(0) = A^*$. L'unicité découle de la proposition 3.71. ■

Proposition 3.75. Soit $0 \leq p < 1$, $A > 0$, $T > 0$ et $\mu > 0$. Alors il existe un $\mu^* \in (0, \infty)$, tel que (3.152) a une solution (unique) si et seulement si $\mu \leq \mu^*$.

Démonstration. (i) Soit $\gamma \leq 0$ et z_γ la solution correspondante de (3.163); $g(\gamma) \geq A^* > 0$ est le nombre défini par (3.167). Soit $x_\gamma : t \mapsto [A/g(\gamma)] z_\gamma(t)$, où $t \in [0, T]$. Alors x_γ est la solution de (3.152) avec $\mu = [A/g(\gamma)]^{1-p}$. Puisque (3.163) a une solution pour tout $\gamma \leq 0$ et puisque g est un homéomorphisme de \mathbb{R} sur $[A^*, \infty)$, le problème (3.152) a une solution pour tout $\mu \leq \mu^*$, où

$$\mu^* := (A/A^*)^{1-p} \in (0, \infty). \quad (3.170)$$

(ii) Soit $\mu > \mu^*$ et supposons, ab absurdo, que x soit une solution de (3.152). Définissons $z : t \mapsto \mu^{1/(p-1)} x(t)$, pour $t \in [0, T]$. Alors x est une solution de (3.163), avec

$$z(0) = \mu^{1/(p-1)} A < (\mu^*)^{1/(p-1)} A = A^*.$$

C'est en contradiction avec le lemme 3.73. L'unicité vient de la proposition 3.71 ■

Proposition 3.76. Soit $-1 < p < 1$, $A > 0$ et $T > 0$. Le nombre $\mu^* = \mu^*(p, A, T, N)$, défini dans les propositions 3.70 et 3.75, a les propriétés suivantes :

(i) $\forall \eta$ et $\theta > 0$, $\mu^*(p, \eta A, \theta T, N) = \eta^{1-p} \theta^{-(2+\alpha-p)} \mu^*(p, A, T, N)$,

(ii) $\mu^*(p, A, T, N) = A^{1-p} T^{-(2+\alpha-p)} \mu^*(p, 1, 1, N)$,

(iii) μ^* est une fonction décroissante de T et $\lim_{T \rightarrow \infty} \mu^*(p, A, T, N) = 0$.

Démonstration. (i) Soit $0 < \mu < \mu^*(p, A, T, N)$ et x_μ la solution correspondante du problème (3.152). Soit η et $\theta > 0$; introduisons le changement d'échelle $\tau := \theta t$ et définissons

$$x : \tau \mapsto \eta x_\mu(\tau/\theta), \text{ pour } \tau \in [0, \theta T].$$

Alors x satisfait à

$$\begin{cases} x''(\tau) = \nu \tau^{\alpha-p} x^p(\tau) & \tau \in (0, \theta T) \\ x(0) = \eta A, \quad x(\theta T) = 0 \\ x(\tau) > 0 & \tau \in (0, \theta T), \end{cases} \quad (3.171)$$

où $\nu := \mu \eta^{1-p} \theta^{-(2+\alpha-p)}$. Donc $\mu^*(p, \eta A, \theta T, N) \leq \eta^{1-p} \theta^{-(2+\alpha-p)} \mu^*(p, A, T, N)$.

(ii) Soit $\nu > \eta^{1-p} \theta^{-(2+\alpha-p)} \mu^*(p, A, T, N)$. Supposons, ab absurdo, que x soit une solution de (3.171). Définissons $t := \tau/\theta$ et $\tilde{x} : t \mapsto \eta^{-1} x(\theta t)$, pour $t \in [0, T]$. Alors \tilde{x} est une solution de (3.152), avec $\mu = \nu \eta^{p-1} \theta^{2+\alpha-p} > \mu^*(p, A, T, N)$; d'où la contradiction. La propriété (i) est établie. Les autres en découlent immédiatement, puisque $2 + \alpha - p > 0$. ■

Remarques. (i) Le nombre A^* défini par (3.168) dépend de p , T et N . Supposons-le connu pour $T = 1$. Par (3.170) : $\mu^*(p, 1, 1, N) = [A^*(p, 1, N)]^{p-1}$, d'où

$$\mu^*(p, A, T, N) = A^{1-p} T^{-(2+\alpha-p)} [A^*(p, 1, N)]^{p-1}.$$

(ii) Pour $p = 0$, la solution de (3.152) peut être obtenue explicitement. Elle existe pour tout $\mu \leq \mu^*$, où

$$\mu^* := (\alpha+2) A T^{-(\alpha+2)} = \frac{N}{N-2} A T^{-N/(N-2)}.$$

Par le lemme 3.72 : $\mu^* \geq \tilde{\mu}$, où $\tilde{\mu}$ est donné par (3.153). Calculons $\tilde{\mu}$:

$$\tilde{\mu} = \frac{AT^{-(2+\alpha)}\Gamma(\alpha+3)}{\Gamma(2+\alpha)\Gamma(1)} = (\alpha+2) AT^{-(2+\alpha)} = \mu^*.$$

Pour $p = 0$, l'estimation du lemme 3.72 est optimale. Par le lemme 3.68 : $\mu^* < \hat{\mu}$, où $\hat{\mu}$ est donné par (3.156). Calculons $\hat{\mu}$:

$$\hat{\mu} = 2AT^{-(\alpha+2)} = \frac{2}{\alpha+2} \mu^* = \left(2 - \frac{4}{N}\right) \mu^*, \text{ si } N \geq 4,$$

$$\hat{\mu} = 4.5AT^{-3} = 1.5\mu^*, \text{ si } N = 3.$$

Pour $p = 0$, l'estimation du lemme 3.68 est optimale si et seulement si $N = 4$.

Pour le dernier cas, où $1 \leq p < N/(N-2)$, les résultats du § 3.1.2 sont applicables. Il faut remarquer que $r := \alpha - p > -2$.

Proposition 3.77. Soit $1 \leq p < N/(N-2)$, $A > 0$, $T > 0$ et $\mu > 0$. Alors le problème (3.152) a une solution (unique).

Démonstration. La proposition 3.4 montre l'existence d'une solution unique x_R , pour tout $R > 0$, du problème

$$\begin{cases} x''(\tau) = \tau^{\alpha-p} x^p(\tau) & \tau \in (0,R) \\ x(0) = 1, x(R) = 0 \\ x(\tau) > 0 & \tau \in (0,R). \end{cases} \quad (3.172)$$

Définissons $a := (\mu A^{p-1})^{1/(p-2-\alpha)}$ et soit x_R la solution du problème (3.172), pour $R := T/a$. Soit $t := at$ et $x : t \mapsto A x_R(\tau)$, $t \in [0,T]$. Alors x est la solution de (3.152). L'unicité vient de la proposition 3.71. ■

Pour $1 \leq p < N/(N-2)$, la connaissance de la solution x_R de (3.172), pour tout $R > 0$, permet d'obtenir la solution de (3.152), pour n'importe quel choix des paramètres A , T et μ dans $(0, \infty)$. La solution d'un problème équivalent à (3.172), peut être approchée par une suite monotone. Définissons $y : \tau \mapsto 1 - \frac{\tau}{R} - x(\tau)$, où $\tau \in [0,R]$; x est une solution de (3.172) si et seulement si $y \in C^2(0,R) \cap C([0,R])$ satisfait à

$$\begin{cases} -y''(\tau) = \tau^{\alpha-p} \left(1 - \frac{\tau}{R} - y(\tau)\right)^p & \tau \in (0,R) \\ y(0) = y(R) = 0 \\ 0 < y(\tau) < 1 - \frac{\tau}{R} & \tau \in (0,R). \end{cases} \quad (3.173)$$

Définissons une formule de récurrence

$$\begin{cases} -y_{n+1}'' + \frac{pR^{2+\alpha-p}}{\tau^2} y_{n+1} = \tau^{\alpha-p} \left(1 - \frac{\tau}{R} - y_n\right)^p + \frac{pR^{2+\alpha-p}}{\tau^2} y_n, \tau \in (0, R) \\ y_{n+1}(0) = y_{n+1}(R) = 0. \end{cases} \quad (3.174)$$

De la proposition 3.3 découle le résultat suivant.

Proposition 3.78. Soit $1 \leq p < N/(N-2)$ et $R > 0$. Une suite (y_n) peut être définie par la formule de récurrence (3.174), à partir de $y_0 := 0$. Cette suite est croissante et converge, uniformément dans $[0, R]$, vers la solution de (3.173).

Revenons au problème (3.141). Pour $-1 < p < N/(N-2)$, nous avons obtenu des solutions à symétrie sphérique, qui sont $O(|\xi|^{2-N})$ à l'origine. Pour $-1 < p \leq 1$, toute solution à symétrie sphérique a ce comportement à l'origine. Ajoutons donc une condition au problème (3.141) :

$$\lim_{|\xi| \rightarrow 0} |\xi|^{N-2} u(\xi) = c. \quad (3.175)$$

Regroupons les résultats précédents.

Proposition 3.79. Soit $-1 < p < N/(N-2)$, $\mu > 0$, $c > 0$ et $R > 0$. Alors :

- (i) pour $-1 < p < 0$, il existe un $\mu^0(p, c, R, N) \in (0, \infty)$, tel que le problème (3.141), avec la condition (3.175), a une solution à symétrie sphérique si $\mu < \mu^0$ et n'en a pas si $\mu > \mu^0$,
- (ii) pour $0 \leq p < 1$, il existe un $\mu^0(p, c, R, N) \in (0, \infty)$, tel que le problème (3.141), avec la condition (3.175), a une solution à symétrie sphérique si et seulement si $\mu \leq \mu^0$,
- (iii) pour $1 \leq p < N/(N-2)$, le problème (3.141), avec la condition (3.175), a une solution à symétrie sphérique,
- (iv) pour $0 \leq p < N/(N-2)$, le problème (3.141), avec la condition (3.175), a au plus une solution à symétrie sphérique.

Remarques. (i) Donnons la relation entre μ^0 et μ^* . Elle s'obtient par la transformation (3.144).

$$\mu^0(p, c, R, N) = \mu^*(p, A, T, N)$$

si et seulement si $A = (N-2)^{2-N} c$ et $T = (N-2)^{2-N} R^N$.

(ii) Le problème (3.141) ne peut pas avoir de solution à symétrie sphérique, bornée à l'origine. Si c'était le cas, on aurait $c = 0$ dans la condition (3.175) et (3.145) devrait avoir une solution s'annulant à l'origine; ce qui est impossible puisque cette solution doit prendre des valeurs strictement positives dans $(0, T)$.

(iii) Si $\mu = 0$, le problème (3.141), avec la condition (3.175), a la solution bien connue :

$$u(\xi) = c(|\xi|^{2-N} - R^{2-N}), \quad \xi \in \dot{B}_R.$$

(iv) Admettons la dimension d'espace $N = 1$ dans (3.141). Le problème (3.141), avec la condition $u(0) = 1$, s'écrit

$$\begin{cases} u''(t) = \mu u^p(t) & t \in (-R, 0) \cup (0, R) \\ u(\pm R) = 0, u(0) = 1 \\ u(t) > 0 & t \in (-R, R). \end{cases} \quad (3.176)$$

Si $p \geq 1$, (3.176) a une solution pour tout $\mu > 0$ (proposition 3.4, avec $r = 0$). Si $-1 < p < 1$, (3.176) a une solution si et seulement si $\mu \leq \mu^0$, où

$$\mu^0 := \frac{2(1+p)}{R^2(1-p)^2}.$$

La solution pour $\mu = \mu^0$ est $u^0 : t \mapsto (1 - \frac{|t|}{R})^{2/(1-p)}$, $t \in [-R, R]$. Elle vérifie $(u^0)'(\pm R) = 0$.

* * *

Abordons un problème dans \mathbb{R}^N , semblable à (3.141). Etant donnés $p \in \mathbb{R}$ et $\mu > 0$, existe-t-il une fonction $u \in C^2(\mathbb{R}^N \setminus \{0\})$, qui soit solution de

$$\begin{cases} \Delta u = \mu u^p & \text{dans } \mathbb{R}^N \setminus \{0\} \quad (N \geq 3) \\ u(\xi) = o(|\xi|^{2-N}) & \text{à l'infini} \\ u > 0 & \text{dans } \mathbb{R}^N \setminus \{0\} ? \end{cases} \quad (3.177)$$

Le problème (3.177) n'a pas de solution pour $p \geq N/(N-2)$. C'est une conséquence du résultat de Brézis et Véron (lemme 3.61) et du lemme suivant.

Lemme 3.80. Supposons que $u \in C^2(\mathbb{R}^N)$, où $N \geq 1$, vérifie

$$\begin{cases} \Delta u \geq 0 & \text{dans } \mathbb{R}^N \\ u \geq 0 & \text{dans } \mathbb{R}^N \\ \lim_{\xi \rightarrow \infty} u(\xi) = 0. \end{cases}$$

Alors $u = 0$.

Démonstration. Définissons $M : R \mapsto \max\{u(\xi); |\xi| \leq R\}$, pour tout $R > 0$.

Soit $0 < R_1 < R_2$, alors $M(R_1) \leq M(R_2)$, par le principe du maximum faible [57;p.15]. D'autre part, u tend vers 0 à l'infini, d'où $\lim_{R \rightarrow \infty} M(R) = 0$. Il suit que $M(R) = 0$, pour tout R , et $u = 0$. ■

Cherchons les solutions à symétrie sphérique de (3.177). Posons $r := |\xi|$, pour $0 < |\xi| < \infty$, et définissons $U : r \mapsto u(\xi)$, où $r \in (0, \infty)$. Alors u est une solution à symétrie sphérique de (3.177), si et seulement si $U \in C^2(0, \infty)$ satisfait à

$$\begin{cases} (r^{N-1} U')' - \mu r^{N-1} U^p = 0 & r \in (0, \infty) \\ U(r) = o(r^{2-N}) \text{ à l'infini} \\ U(r) > 0 & r \in (0, \infty). \end{cases} \quad (3.178)$$

Introduisons la transformation

$$t := (N-2)^{2-N} r^{N-2} \text{ et } x(t) = tU(r). \quad (3.179)$$

Alors U est une solution de (3.178) si et seulement si $x \in C^2(0, \infty)$ satisfait à

$$\begin{cases} x''(t) - \mu t^{\alpha-p} x^p(t) = 0 & t \in (0, \infty) \\ \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0 \\ x(t) > 0 & t \in (0, \infty), \text{ où} \end{cases} \quad (3.180)$$

$$\alpha := \frac{4-N}{N-2} \in (-1, 1]. \quad (3.181)$$

Proposition 3.81. Le problème (3.177) n'a pas de solution à symétrie sphérique si $p < 1$.

Démonstration. (i) Il suffit de vérifier que (3.180) n'a pas de solution dans ces cas. Supposons, ab absurdo, que x soit une solution de (3.180); c 'est une fonction strictement convexe, strictement décroissante et $\lim_{t \rightarrow \infty} x'(t) = 0$.

(ii) Soit $p \leq 0$. Intégrons (3.180). Comme $\alpha - p + 1 > 0$:

$$-x'(t) = \mu \int_t^\infty s^{\alpha-p} x^p(s) ds \geq \mu x^p(t) \int_t^\infty s^{\alpha-p} ds = \infty,$$

d'où la contradiction.

(iii) Soit $0 < p < 1$. Définissons une fonction v , sur $[1, \infty)$, par

$$v(t) := \begin{cases} A t \left(T^{\frac{\alpha+1}{2}} - t^{\frac{\alpha+1}{2}} \right)^{\frac{2}{1-p}} & 1 \leq t < T \\ 0 & t \geq T \end{cases}$$

où
$$A := \left[\mu \frac{2}{1+p} \left(\frac{1-p}{\alpha+1} \right)^2 \right]^{\frac{1}{1-p}}$$

$$T := \left[1 + \left[\frac{x(1)}{A} \right]^{\frac{1-p}{2}} \right]^{\frac{2}{\alpha+1}} > 1.$$

Cette fonction v a les propriétés suivantes : $v(1) = x(1)$, $v(T) = v'(T) = v''(T) = 0$, $v \in C^2([1, \infty))$ et

$$v''(t) \leq \mu t^{\alpha-p} v^p(t), \quad \forall t \geq 1.$$

Définissons $w : t \mapsto x(t) - v(t)$, pour $t \geq 1$. Alors $w \in C^2([1, \infty))$, $w(1) = 0$ et $w(T) = x(T) > 0$. Par continuité, il existe un $t_0 \in [1, T)$, tel que $w(t_0) = 0$ et $w(t) > 0$, $\forall t \in (t_0, T]$. Dans cet intervalle : $w''(t) \geq \mu t^{\alpha-p} (x^p(t) - v^p(t)) > 0$. Comme $\lim_{t \rightarrow \infty} w(t) = 0$, il existe un $t_1 > T$, tel que $w''(t_1) = 0$. Alors $w''(t_1) = \mu t_1^{\alpha-p} x^p(t_1) > 0$; d'où la contradiction. ■

Remarque. L'idée de la démonstration (pour $0 < p < 1$) vient d'un résultat de P. Benilan, etc. [76]. Ce résultat permet de montrer que (3.177) n'a pas de solution si $0 < p < 1$.

Pour $1 < p < N/(N-2)$, le comportement à l'origine d'une solution de (3.180)

est de l'un des deux types prévus par le corollaire 3.66. Il existe une solution de chaque type. La fonction

$$x : t \mapsto \left[\frac{1}{\mu} \frac{(1+\alpha)(2+\alpha-p)}{(p-1)^2} \right]^{\frac{1}{p-1}} t^{-\frac{2+\alpha-p}{p-1}}, \quad t \in (0, \infty)$$

est une solution de (3.180). Cherchons une solution bornée à l'origine. Etant donné $p \in [1, N/(N-2))$, $A > 0$ et $\mu > 0$, trouver une fonction

$x \in C^2(0, \infty) \cap C(\mathbb{R}_+)$, qui satisfait à

$$\begin{cases} x''(t) = \mu t^{\alpha-p} x^p(t) & t \in (0, \infty) \\ x(0) = A, \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0 \\ x(t) > 0 & t \in \mathbb{R}_+ \end{cases} \quad (3.182)$$

Proposition 3.82. Soit $1 \leq p < N/(N-2)$, $A > 0$ et $\mu > 0$. Alors le problème (3.182) a une solution, qui est unique.

Démonstration. La proposition 3.8 montre l'existence d'une solution unique \tilde{x} , du problème

$$\begin{cases} x''(\tau) = \tau^{\alpha-p} x^p(\tau) & \tau \in (0, \infty) \\ x(0) = 1, \lim_{\tau \rightarrow \infty} x(\tau) = 0 \\ x(\tau) > 0 & \tau \in \mathbb{R}_+ \end{cases} \quad (3.183)$$

Définissons $a := (\mu A^{p-1})^{1/(p-2-\alpha)}$ et soit \tilde{x} la solution de (3.183). Soit $t := a\tau$ et $x : t \mapsto A \tilde{x}(t/a)$, $t \in \mathbb{R}_+$. Alors x est la solution de (3.182). ■

Ainsi est démontrée l'existence d'une solution à symétrie sphérique du problème (3.177), satisfaisant à la condition (3.175), lorsque $1 \leq p < N/(N-2)$. Une méthode pour le calcul de cette solution est de résoudre le problème (3.152), avec des T de plus en plus grands. Lorsque T tend vers l'infini, on obtient la solution de (3.182). La justification se trouve dans le lemme 3.6.

Remarque. Le problème correspondant à (3.177), pour $N = 1$, est :

$$\begin{cases} x''(t) = \mu x^p(t) & t \in (0, \infty) \\ \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0 \\ x(t) > 0 & t \in (0, \infty) \end{cases} \quad (3.184)$$

Ajoutons la condition $x(0) = 1$. Pour $p \geq 1$, (3.184) a une solution (unique),

d'après la proposition 3.8. Pour $p < 1$, (3.184) n'a pas de solution. Faisons la démonstration pour $0 < p < 1$. Supposons, ab absurdo, que x soit solution de (3.184). Alors x doit vérifier :

$$-x' x^{-(p+1)/2} = \sqrt{\frac{2\mu}{p+1}}$$

et pour tout $t > 0$:

$$1 - x^{\frac{1-p}{2}}(t) = \frac{1-p}{2} \sqrt{\frac{2\mu}{p+1}} t.$$

D'où la contradiction lorsque t tend vers l'infini. Pour $p \leq 0$, voir la démonstration de la proposition 3.81.



RÉFÉRENCES

- [1] N. Bourbaki, *Espaces vectoriels topologiques*, chapitres 1 à 5. Paris, Masson, 1981.
- [2] M.A. Krasnosel'skiĭ, *Positive solutions of operator equations*. Groningen, P. Noordhoff, 1964.
- [3] E. Bohl, *Monotonie : Lösbarkeit und Numerik bei Operatorgleichungen*. Berlin, Springer, 1974.
- [4] G. Choquet, *Cours d'analyse*, tome 2. Paris, Masson, 1969.
- [5] H. Amann, *Nonlinear operators in ordered Banach spaces and some applications to nonlinear boundary value problems*. In : *Nonlinear operators and the calculus of variations (Bruxelles 1975)*, ed. by J.P. Gossez. Berlin, Springer, 1976 (Lecture Notes in Mathematics, 543).
- [6] M.G. Krein & M.A. Rutman, *Linear operator leaving invariant a cone in a Banach space*. Amer. Math. Soc. Transl. (1) 10 (1962), 199 - 325.
- [7] N. Dunford & J.T. Schwartz, *Linear operators*, vol. 1. New York, Interscience, 1967.
- [8] K. Yosida, *Functional analysis*. Berlin, Springer, 1968.
- [9] H. Amann, *Fixed point equations and nonlinear eigenvalue problems in ordered Banach spaces*. SIAM Rev. 18 (1976), 620 - 709.
- [10] I.B. Emmerth, *Bifurcation de solutions d'une équation différentielle non linéaire à argument avancé*. Lausanne, thèse EPFL 240, 1976.
- [11] I.B. Emmerth, *On the existence of solutions of a non-linear differential equation with delay*. Arch. Rational Mech. Anal. 68 (1978), 155 - 169.
- [12] C.A. Stuart, *Integral equations with decreasing nonlinearities and applications*. J. Differ. Equations 18 (1975), 202 - 216.
- [13] J.S. Vandergraft, *Partially ordered spaces and Newton's method for convex operators*. University of Maryland, Computer Science Center, 1966 (Tech. Rep. TR 66 - 29).
- [14] J.S. Vandergraft, *Newton's method for convex operators in partially ordered spaces*. SIAM J. Numer. Anal. 4 (1967), 406 - 432.
- [15] E. Zeidler, *Vorlesungen über nichtlineare Funktionalanalysis I : Fixpunktsätze*. Leipzig, Teubner, 1976.

- [16] H. Amann, *Multiple positive fixed points of asymptotically linear maps*. J. Functional Anal. 17 (1974), 174 - 213.
- [17] T. Kato, *Perturbation theory for linear operators*. Berlin, Springer, 1966.
- [18] J. Wloka, *Funktionalanalysis und Anwendungen*. Berlin, de Gruyter, 1971.
- [19] L.W. Kantorowitsch & G.P. Akilow, *Funktionalanalysis in normierten Räumen*. Berlin, Akademie Verlag, 1964.
- [20] J. Stoer, *Einführung in die numerische Mathematik I*. Berlin, Springer, 1972.
- [21] P.B. Bailey, L.F. Shampine & P.E. Waltman, *Nonlinear two point boundary value problems*. New York, Academic Press, 1968.
- [22] M.H. Protter & H.F. Weinberger, *Maximum principles in differential equations*. Englewood Cliffs, Prentice-Hall, 1967.
- [23] C.M. Bender & S.A. Orszag, *Advanced mathematical methods for scientists and engineers*. New York, McGraw-Hill, 1978.
- [24] W.E. Boyce & R.C. DiPrima, *Elementary differential equations and boundary value problems*, 3^d ed. New York, Wiley, 1977.
- [25] F. Brauer & J.A. Nohel, *Qualitative theory of ordinary differential equations*. New York, Benjamin, 1969.
- [26] L. Brillouin, *L'atome de Thomas-Fermi et la méthode du champ "self-consistent"*. Paris, Hermann, 1934.
- [27] L.H. Thomas, *The calculation of atomic fields*. Proc. Cambridge Phil. Soc. 23 (1927), 542 - 548.
- [28] E. Fermi, *Un metodo statistico per la determinazione di alcune proprietà dell'atomo*. Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. (6) 6 (1927), 602 - 607.
- [29] D.R. Hartree, *The wave mechanics of an atom with a non-Coulomb central field*. Proc. Cambridge Phil. Soc. 24 (1928), 89 - 132.
- [30] P.A.M. Dirac, *Note on exchange phenomena in the Thomas atom*. Proc. Cambridge Phil. Soc. 26 (1930), 376 - 385.
- [31] N.H. March, *The Thomas-Fermi approximation in quantum mechanics*. Adv. in Phys. 6 (1957), 1 - 101.
- [32] E.H. Lieb & B. Simon, *The Thomas-Fermi theory of atoms, molecules, and solids*. Adv. in Math. 23 (1977), 22 - 116.

- [33] P. Gombás, *Die statistische Theorie des Atoms und ihre Anwendungen*. Wien, Springer, 1949.
- [34] P. Gombás, *Statistische Behandlung des Atoms*. In : *Handbuch der Physik*, Bd 36. Berlin, Springer, 1956.
- [35] E. Fermi & E. Amaldi, *Le orbite ∞ s degli elementi*. Mem. Accad. d'Italia (1) 6 (1934), 119 - 149.
- [36] *Handbook of mathematical functions*. Ed. by M. Abramowitz & I. Stegun. Washington, National Bureau of Standards, 1972.
- [37] J.W. Mooney, *Monotone methods for the Thomas-Fermi equation*. Quart. Appl. Math. 36 (1978), 305 - 314.
- [38] J.W. Mooney, *Constructive existence theorems for problems of Thomas-Fermi type*. Math. Methods Appl. Sci. 1 (1979), 554 - 565.
- [39] A. Mambriani, *Su una particolare equazione differenziale*. Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. (6) 9 (1929), 142 - 144.
- [40] A. Mambriani, *Su un teorema relativo alle equazioni differenziali ordinarie del 2^o ordine*. Ibidem, 620 - 625.
- [41] R. Bellman, *Stability theory of differential equations*. New York, Dover, 1969 (1ère ed. 1953).
- [42] I.J.H. Lane, *On the theoretical temperature of the sun under the hypothesis of a gaseous mass maintaining its volume by its internal heat and depending on the laws of gases known to terrestrial experiment*. Amer. J. Sci. and Arts (2) 4 (1869), 57 - 74.
- [43] A. Ritter, *Untersuchungen über die Höhe der Atmosphäre und die Konstitution gasförmiger Weltkörper*. Wiedemann Annalen der Physik 5 - 20 (1878 - 1883), 18 articles. Voir Chandrasekhar [48;p. 178] pour les références exactes.
- [44] R. Emden, *Gaskugeln : Anwendung der mechanischen Wärmetheorie auf kosmologische und meteorologische Probleme*. Leipzig, B.G. Teubner, 1907.
- [45] R. Emden, *Thermodynamik der Himmelskörper*. In : *Encykl. Math. Wissensch.* Bd 6, 2. Teil, 2. Hälfte. Leipzig, B.G. Teubner, 1925.
- [46] R.H. Fowler, *The solution of Emden's and similar differential equations*. Monthly Notices Roy. Astron. Soc. 91 (1930), 63 - 91.
- [47] R.H. Fowler, *Further studies of Emden's and similar differential equations*. Quart. J. Math. 2 (1931), 259 - 288.

- [48] S. Chandrasekhar, *An introduction to the study of stellar structure*. New York, Dover, 1967 (1ère éd. 1939).
- [49] J.S.W. Wong, *On the generalized Emden-Fowler equation*. SIAM Rev. 17 (1975), 339 - 360.
- [50] J. Miller & D. Sadler, *Emden Functions*. London, British Assoc. for the Advancement of Science, 1932 (Mathematical Tables, 2).
- [51] G. Sansone, *Su un' equazione differenziale non lineare della fisica nucleare*. Symposia Math. 6 (1971), 3 - 136.
- [52] Z. Nehari, *On a nonlinear differential equation arising in nuclear physics*. Proc. Roy. Irish Acad. Sect. A 62 (1963) 117 - 135.
- [53] H. Heuser, *Lehrbuch der Analysis II*. Stuttgart, B.G. Teubner. 1981.
- [54] S.D. Taliaferro, *A nonlinear singular boundary value problem*. Nonlinear Anal. 3 (1979), 897 - 904.
- [55] C.D. Luning & W.L. Perry, *Positive solutions of negative exponent generalized Emden-Fowler boundary value problems*. SIAM J. Math. Anal. 12 (1981), 874 - 879.
- [56] C.D. Luning & W.L. Perry, *Convergence of Berryman's iterative method for some Emden-Fowler equations*. J. Math. Phys. 22 (1981), 1591 - 1595.
- [57] D. Gilbarg & N.S. Trudinger, *Elliptic partial differential equations of second order*. Berlin, Springer, 1977.
- [58] G. Hellwig, *Partial differential equations*. New York, Blaisdell, 1964.
- [59] S.I. Pohožaev, *Eigenfunctions of the equation $\Delta u + \lambda f(u) = 0$* . Soviet Math. (Doklady Akad. Nauk SSSR) 6 (1965), 1408 - 1411.
- [60] D.D. Joseph & T.S. Lundgren, *Quasilinear Dirichlet problems driven by positive sources*. Arch. Rational Mech. Anal. 49 (1972), 241 - 269.
- [61] B. Gidas, W.M. Ni & L. Nirenberg, *Symmetry and related properties via the maximum principle*. Commun. Math. Phys. 68 (1979), 209 - 243.
- [62] B. Gidas, *Symmetry properties and isolated singularities of positive solutions of nonlinear elliptic equations*. In : Nonlinear partial differential equations in engineering and applied science, ed. by R.L. Sternberg. New York, Dekker, 1980.
- [63] H. Amann, *On the existence of positive solutions of nonlinear elliptic boundary value problems*. Indiana Univ. Math. J. 21 (1971), 125 - 146.
- [64] H. Amann, *A uniqueness theorem for nonlinear elliptic boundary value problems*. Arch. Rational Mech. Anal. 44 (1971), 178 - 181.

- [65] H.B. Keller, *Elliptic boundary value problems suggested by nonlinear diffusion processes*. Arch. Rational Mech. Anal. 35 (1969), 363 - 381.
- [66] D.G. de Figueiredo, P.-L. Lions & R.D. Nussbaum, *A priori estimates and existence of positive solutions of semilinear elliptic equations*. J. Math. Pures et Appl. 61 (1982), 41 - 63.
- [67] J.L. Kazdan & F.W. Warner, *Remarks on some quasilinear elliptic equations*. Comm. Pure Appl. Math. 28 (1975), 567 - 597.
- [68] T. Laetsch, *Uniqueness for sublinear boundary value problems*. J. Diff. Equations 13 (1973), 13 - 23.
- [69] A. Ambrosetti & P.H. Rabinowitz, *Dual variational methods in critical point theory and applications*. J. Functional Anal. 14 (1973), 369 - 381.
- [70] H. Berestycki & P.-L. Lions, *Some applications of the method of super and subsolutions*. In : Bifurcation and nonlinear eigenvalue problems (Villetaneuse 1978), ed. by C. Bardos etc. Berlin, Springer, 1980 (Lecture Notes in Mathematics, 782).
- [71] B. Gidas & J. Spruck, *Global and local behavior of positive solutions of nonlinear elliptic equations*. Comm. Pure Appl. Math. 34 (1981), 525 - 598.
- [72] B. Gidas, *Symmetry and isolated singularities of conformally flat metrics and of solutions of the Yang-Mills equations*. In : Seminar on differential geometry, ed. by S.T. Yau. Princeton Univ. Pr., 1982.
- [73] H. Brézis & L. Véron, *Removable singularities for some nonlinear elliptic equations*. Arch. Rational Mech. Anal. 75 (1980), 1 - 6.
- [74] L. Véron, *Singular solutions of some nonlinear elliptic equations*. Nonlinear Anal. 5 (1981), 225 - 242.
- [75] L. Véron, *Solutions singulières d'équations elliptiques semi-linéaires*. C.R. Acad. Sc. Paris 288A (1979), 867 - 869.
- [76] P. Benilan, H. Brézis & M.G. Crandall, *A semilinear equation in $L^1(\mathbb{R}^N)$* . Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) 2 (1975), 523 - 555.
- [77] O. Perron, *Eine neue Behandlung der ersten Randwertaufgabe für $\Delta u = 0$* . Math. Z. 18 (1923), 42 - 54.
- [78] R. Courant & D. Hilbert, *Methods of mathematical physics*, vol. 2. New York, Interscience, 1965.
- [79] H.B. Keller & D.S. Cohen, *Some positive problems suggested by nonlinear heat generation*. J. Math. Mech. 16 (1967), 1361 - 1376.

- [80] D.S. Cohen, *Positive solutions of a class of nonlinear eigenvalue problems*. J. Math. Mech. 17 (1967), 209 - 215.
- [81] R.B. Simpson & D.S. Cohen, *Positive solutions of nonlinear elliptic eigenvalue problems*. J. Math. Mech. 19 (1970), 895 - 910.
- [82] D.H. Sattinger, *Monotone methods in nonlinear elliptic and parabolic boundary value problems*. Indiana Univ. Math. J. 21 (1972), 979 - 1000.
- [83] D.H. Sattinger, *Topics in stability and bifurcation theory*. Berlin, Springer, 1973 (Lecture Notes in Mathematics, 309).
- [84] E. Hille, *Some aspects of the Thomas-Fermi equation*. J. Anal. Math. 23 (1970), 147 - 170.
- [85] H. Brézis, *Some variational problems of the Thomas-Fermi type*. In : Variational inequalities and contemporary problems, ed. by R.W. Cottle, etc.. Chichester, Wiley, 1980.
- [86] C.D. Luning & W.L. Perry, *An iterative technique for solution of the Thomas-Fermi equation utilizing a nonlinear eigenvalue problem*. Quart. Appl. Math. 35 (1977), 257 - 268.
- [87] C.D. Luning, *An iterative technique for obtaining solutions of a Thomas-Fermi equation*. SIAM J. Math. Anal. 9 (1978), 515 - 523.
- [88] R.W. Dickey, *The plane circular elastic surface under normal pressure*. Arch. Rational Mech. Anal. 26 (1967), 219 - 236.
- [89] D.G. Aronson & L.A. Peletier, *Large time behaviour of solutions of the porous medium equation in bounded domains*. J. Diff. Equations 39 (1981), 378 - 412.
- [90] B. Gidas, *Euclidean Yang-Mills and related equations*. In : Bifurcation phenomena in mathematical physics and related topics, ed. by C. Bardos & D. Bessis. Dordrecht, Reidel, 1980.
- [91] C. Loewner & L. Nirenberg, *Partial differential equations invariant under conformal or projective transformations*. In : Contributions to analysis, ed. by L. Ahlfors, etc.. New York, Academic Press, 1974.

CURRICULUM VITAE

Je suis né le 17 novembre 1947 à Nyon. J'ai suivi les écoles primaires et secondaires à Lausanne. En 1965, j'ai été immatriculé à l'EPFL, dans la section de physique; j'ai obtenu le diplôme d'ingénieur-physicien en janvier 1970. Depuis février 1970, je suis assistant au Département de mathématiques de l'EPFL. En novembre 1974, j'ai obtenu le certificat de 3e cycle de l'EPFL, en mathématiques.

