

**APPROCHE THÉORIQUE DE LA CONCEPTION  
DE LA STRUCTURE MÉCANIQUE  
D'UN ROBOT INDUSTRIEL**

**THÈSE No 322 (1979)**  
**PRÉSENTÉE AU DÉPARTEMENT DE MÉCANIQUE**

**ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE**  
**POUR L'OBTENTION DU GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES TECHNIQUES**

par

**MARC-OLIVIER DEMAUREX**  
Ingénieur-mécanicien EPFL  
originaire de Gilly et Vinzel (VD)

acceptée sur proposition du jury:

Professeur C.W. Burckhardt, EPFL, rapporteur  
Professeur G. Spinnler, EPFL, corapporteur  
*Docteur M. Salmon, SASIB, Bologne, Italie, corapporteur*

EPF-Lausanne  
JUIN 1979

A mon Grand-Père

*Ernest G. BRIEGER*

Ingénieur

Je tiens à remercier pour leur collaboration  
les membres du Jury et ceux de l'Institut de  
Microtechnique de l'EPFL , particulièrement  
le Dr Eric Gerelle qui apporta la rigueur du  
mathématicien à l'intuition du technicien.

## TABLE DES MATIERES

0. <u>AVANT-PROPOS</u>	5
0.1. Le RI et l'automatisation	5
0.2. Le RI et le monde du travail	6
0.3. Définitions du RI	7
0.4. Les générations de RI	9
0.5. Cycle élémentaire de travail	9
0.6. Différentes approches pour l'utilisation des RI	10
0.7. Les capteurs d'environnement	11
1. <u>INTRODUCTION</u>	13
1.1. Description d'un robot industriel	16
1.2. Description d'un bras de RI	18
1.3. Description d'un élément articulation	20
1.4. Eléments structures	20
2. <u>FACTEUR DE QUALITE Q</u>	21
2.1. Etude des fréquences propres d'un bras de RI	21
2.2. Fréquences propres et lois de similitude dimensionnelle	24
2.2.1. Oscillateur harmonique à un degré de liberté	24
2.2.1.1. Cas de l'oscillateur harmonique linéaire	24
2.2.1.2. Cas de l'oscillateur harmonique angulaire	25
2.2.1.3. Cas de l'oscillateur harmonique	26
2.2.2. Système à n degrés de liberté	26
2.3. Définition du facteur de qualité Q	28

3. <u>FREQUENCE PROPRE MINIMALE D'UN BRAS DE RI</u>	29
3.1. Problème	30
3.2. Commande d'un oscillateur harmonique	31
3.3. Solution de l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique	32
3.4. Recherche d'une expression simplifiée pour le dépassement	36
3.5. Trois exemples de commande	40
3.5.1. Vitesse constante	40
3.5.2. Accélération constante	41
3.5.3. Jerk constant	42
3.5.4. Exemple numérique	43
3.6. Remarques	45
3.6.1. Sur le dépassement	45
3.6.2. Sur les lois de mouvement	46
3.6.2.1. Loi de mouvement à profil "triangulaire"	46
3.6.2.2. Loi de mouvement à profil "trapézoïdal"	47
3.6.2.3. Loi de mouvement avec phase de freinage	50
4. <u>VALEUR MINIMALE DU FACTEUR DE QUALITE Q</u>	53
4.1. Facteur de qualité Q calculé à priori	53
4.2. Abaque	54
4.3. Remarques	56
5. <u>FACTEUR DE RAIDEUR MASSIQUE a</u>	57
5.1. Introduction	57
5.2. Définition du facteur de raideur massique a	58

6. <u>MODELE SIMPLIFIE D'UN BRAS DE RI</u>	60
6.1. Bras de RI réduit à un système à 3 degrés de liberté	62
6.2. Bras de RI réduit à un système à 2 degrés de liberté	65
6.3. Bras de RI réduit à un système à 1 degré de liberté	66
7. <u>EQUATIONS SIMPLIFIEES ET FREQUENCES PROPRES MINIMALES A PRIORI DES ELEMENTS ARTICULATIONS</u>	67
7.1. Bras de RI réduit à un système à 2 degrés de liberté	68
7.2. Bras de RI réduit à un système à 3 degrés de liberté	70
7.3. Exemples	72
7.3.1. Bras de RI réduit à un système à 2 degrés de liberté	72
7.3.2. Bras de RI réduit à un système à 3 degrés de liberté	73
8. <u>REFLEXIONS ECONOMIQUES ET TECHNOLOGIQUES</u>	
<u>FACTEUR D'ELANCEMENT b</u>	74
8.1. Facteur d'élançement b	77
8.1.1. Facteur d'élançement b faisant intervenir le côté esthétique	77
8.1.1.1. Cas d'un bras de RI à un degré de liberté	77
8.1.1.2. Cas d'un bras de RI à j degrés de liberté	79
8.1.2. Facteur d'élançement b faisant intervenir le côté économique	82
8.1.2.1. Coût "matière"	83
8.1.2.2. Coût "technologique"	83
8.1.2.3. Coût total	83
8.1.3. Valeur du facteur d'élançement b	85
8.2. Choix technologiques	86
8.3. Fréquence propre à priori des articulations: expression simplifiée	89

9. <u>CONCLUSION</u>	91
9.1. Organigramme pour la conception d'un bras de RI	91
9.2. Cahier des charges	92
9.3. Facteur de qualité Q	95
9.4. Facteur de raideur massique a et d'élanement b	97
9.5. Fréquence propre de chaque articulation	99
9.6. Performances des articulations	99
9.7. Exemple de calcul d'un bras de RI	101
9.8. Conclusion	104
10. <u>ANNEXES</u>	105
A. Table des matières des annexes	I
B. Désignations, symboles, unités	II
C. Stick-slip	IV
D. Commande	X
E. Lois de similitude	XIX
F. Catalogue	XXIII
G. Bibliographie	XXIV
H. Curriculum vitae	XXXIII
<u>ANNEXES COMPLEMENTAIRES</u>	AC 1
Table des matières des annexes complémentaires	AC 2
A. Désignations, symboles, unités	AC 5
B. Les sources d'énergie	AC 6
C. Les coordonnées	AC 17
D. Rappels généraux	AC 24
E. Les moteurs	AC 41
F. Les paliers	AC 77
G. Les réducteurs	AC 111
H. La structure	AC 134
I. Les capteurs de position	AC 139
J. Bibliographie	AC 146

## 0. AVANT - PROPOS

Les Robots Industriels (RI) sont apparus sur le marché des machines pour l'automatisation des places de travail au cours de l'année 1962 aux Etats-Unis, avec les "Unimate<sup>r</sup>" de Unimation Inc.

Ce sont principalement les progrès de l'électronique et de l'informatique qui sont à la base de leur développement.

Le RI peut être considéré comme un périphérique d'ordinateur, c'est-à-dire comme un outil de travail qui exécute ses ordres dans le monde physique.

La machine-outil est affectée à l'usinage par enlèvement de matière; le RI est généralement destiné à la manipulation:

- de pièces, par exemple: chargement et déchargement de machines, montage;
- d'outils, par exemple: montage, peinture, soudage par points ou électrique.

### 0.1. LE RI ET L'AUTOMATISATION

Le RI entre en concurrence avec les moyens habituels de l'automatisation, qui sont la machine spécialisée et le manipulateur simple.

Comme la technologie évolue actuellement de plus en plus rapidement et que la vie d'un produit diminue toujours plus vite, une nouvelle vision de l'automatisation s'impose: c'est l'automatisation flexible. Celle-ci est caractérisée par ses possibilités d'adaptation rapide à un nouveau produit (E.3)\*. L'homme possède cette qualité mais son coût le limite

\* Les références entre parenthèses renvoient à la bibliographie en fin des annexes.



à la construction de prototypes ou de petites séries. La machine spécialisée est à l'antipode de nos préoccupations vue son absence de souplesse et son adaptabilité limitée. Par contre, elle convenait parfaitement à la grande série dont la production dure dans le temps. Actuellement toutes les machines de production évoluent vers une flexibilité plus grande, y compris pour les grandes séries.

Le RI est seulement un des moyens que l'on développe pour parvenir à cette flexibilité.

## 0.2. LE RI ET LE MONDE DU TRAVAIL

Quelle est l'influence de ce nouveau moyen d'automatisation sur les conditions de travail de l'ouvrier ?

Une étude psychologique à été effectuée au Danemark (G.4)(H.8) pour mesurer la satisfaction de l'ouvrier au travail suivant le degré de mécanisation de celui-ci :

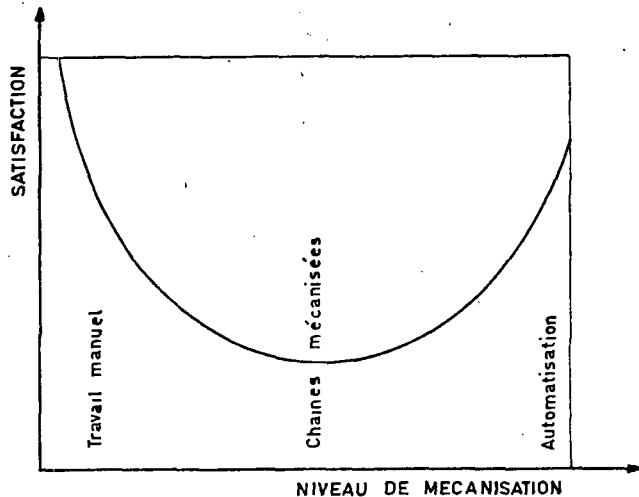


Fig. 0-1 Relation entre le niveau de mécanisation et la satisfaction dans le travail.

Il ressort de cette étude que l'ouvrier trouve de la satisfaction dans un travail manuel. Plus l'ouvrier est considéré comme un servent de la machine, plus cette satisfaction diminue. Quand le travail se limite aux procédés de réglage, de contrôle et de surveillance des installations, la satisfaction augmente à nouveau. En effet, la machine est remise au service de l'ouvrier.

Néanmoins, on pourrait penser que les ouvriers constituent l'obstacle principal à l'introduction du RI dans l'industrie puisqu'il tend à les remplacer. Il a été montré au "Seminar on Industrial Robots and Programmable Logical Controllers" à Copenhague en septembre 1977 (H.8) (G.4)(E.3), que ce n'est pas le cas, pour peu que les ouvriers soient informés en permanence des buts poursuivis par leur direction (diminution des coûts, augmentation de la productivité, progrès technique, élimination des travaux désagréables) et que soient garantis l'emploi et la formation continue pour les nouvelles technologies (recyclage). L'introduction des RI est comparable à celle d'une nouvelle technologie.

La réticence provient généralement d'un manque d'information au sein de la direction de l'entreprise, le nom "Robot" étant associé par la littérature à la "Science Fiction". C'est une des raisons qui pousse de plus en plus à nommer RI (IR en anglais) le Robot Industriel.

### 0.3. DEFINITIONS DU RI

On trouve dans la littérature (B.5) plusieurs définitions du RI:

- *"C'est un appareil programmable qui, dans une chaîne de production, peut faire une multitude de manipulations d'une façon autonome".* Il y a deux aspects à relever: on peut le programmer et il est universel dans son emploi;
- *"Le Robot Industriel est un manipulateur équipé de plusieurs degrés de liberté, il peut être muni de pinces ou d'outils*

*et il travaille d'une façon automatique". Avec cette définition la structure du bras apparaît avec ses articulations, mais cette définition n'inclut pas un RI plus évolué qui aurait des yeux et peut-être d'autres organes lui permettant une interaction avec son entourage;*

- *"Le Robot Industriel est un appareil de manipulation programmable et anthropomorphe". Sa ressemblance avec l'homme ne doit pas être extérieure, mais relative à son fonctionnement. Le RI doit remplacer l'ouvrier-esclave qui a un bras, un oeil et un sens tactile;*
- *Selon J. Guittet (G.3): "Le Robot est un appareil automatique adaptable à un environnement complexe et remplaçant ou prolongeant une ou plusieurs fonctions de l'homme agissant sur son environnement". Les caractéristiques d'un tel RI sont les suivantes:*
  - *action sur l'environnement qui implique une certaine manipulation;*
  - *automaticité, partielle ou totale;*
  - *polyvalence, permettant l'exécution de tâches diverses;*
  - *adaptativité, permettant l'exécution d'une tâche donnée dans un environnement variable.*

Un tel RI est tributaire de plusieurs capteurs sensoriels (vision, capteurs de forces, de couples, de proximité par exemple) en plus des capteurs de positions. Il existe actuellement au stade de recherche (par exemple, aux Charles Stark Draper Laboratories (N.1)(N.2)(N.5), Hitachi, Mitsubishi (B.13), Université de Nottingham, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne) mais les réalisations industrielles sont peu nombreuses, par exemple le HI-T-HAND "Expert 4" de Hitachi LTD travaille avec un capteur de forces.

#### 0.4. LES GENERATIONS DE RI

Les RI sont habituellement classés selon leur degré de développement en plusieurs générations (D.2)(E.2:14):

- *Génération 1*: Ils sont programmables, avec plusieurs degrés de liberté;
- *Génération 1,5*: Ils s'adaptent en outre à l'environnement par l'intermédiaire de capteurs de forces, de couples, de proximité, par exemple;
- *Génération 2*: Ils possèdent de plus une vision sélective telles une caméra de télévision ou une matrice de diodes;
- *Génération 3*: Ils utilisent la coordination oeil-main, l'apprentissage adaptatif et la faculté de jugement.

La génération 1 des RI, qui est la plus courante actuellement, ne ferait pas partie de la définition de J. Guittet.

#### 0.5. CYCLE ELEMENTAIRE DE TRAVAIL

La procédure de travail d'un cycle élémentaire d'un RI se présente sous la forme suivante:

1. d'une position de référence ou antérieure, le RI se dirige vers la pièce à manipuler; ceci demande au maximum la définition d'un point de l'espace et son orientation, c'est-à-dire 6 degrés de liberté;
2. le RI connaît et/ou reconnaît la pièce et/ou sa position. La connaissance dépend du programme de travail, la reconnaissance demande l'emploi de capteurs d'environnement;
3. le RI saisit la pièce au moyen d'un organe de préhension par exemple une pince multi-doigts;

4. le RI dirige la pièce dans le posage (par exemple une machine à charger, une platine de montage) par un chemin quelconque (point par point), ou selon un parcours défini (chemin continu pour l'exécution d'une ligne droite par exemple). Cette opération s'effectue de deux manières:
  - a) soit directement, le posage et la pièce étant bien définis;
  - b) soit par une approche rapide suivie d'une recherche locale de position (emploi de capteur d'environnement);
5. le RI se dessaisit de la pièce (dans son posage);
6. le RI refait la même opération ou exécute différentes opérations successives, selon le même schéma, avant de revenir à son point de départ.

#### 0.6. DIFFERENTES APPROCHES POUR L'UTILISATION DES RI

Il existe deux approches pour l'utilisation des RI dans l'industrie:

1. le RI remplace l'ouvrier, sans réaménagement de la place de travail, ni changement de la conception du produit fabriqué. Si cette approche est choisie, le RI deviendra toujours plus sophistiqué, tant du point de vue mécanique que du côté commande, il exigera des capteurs d'environnement toujours plus nombreux, des investissements de plus en plus élevés;
2. l'autre approche est bien définie par J.F. Engelberger (E.2:15): *"Plutôt que d'accabler le constructeur de Robots Industriels de tâches incompatibles avec les qualités des RI, les utilisateurs doivent adapter leurs processus de fabrication aux propriétés particulières du RI."* En d'autres termes, il serait plus judicieux de "penser robot", de la

conception au produit fini, d'étudier les places de travail (fabrication, montage) dans cette optique, sans tenir compte des procédés habituels (par exemple, manipulations et montages manuels). Par exemple :

- pour faciliter la mise en place d'un axe dans son logement, on prévoira des chanfreins plus grands sur l'axe et dans le logement;
- on choisira les coordonnées principales du RI de manière à faciliter le travail à effectuer. Si les pièces à monter ont toutes un axe perpendiculaire au plan de travail on prendra une translation d'axe perpendiculaire au plan de travail comme coordonnée principale, par exemple les coordonnées cartésiennes ou cylindriques.

D'une manière générale, ce type de conception, appelée *Robotique*, a été peu étudiée à l'avantage du développement de la commande. Ce manque d'intérêt allié à une carence de l'information a engendré la *peur du robot* dont a souffert l'implantation de nouvelles installations industrielles.

Le développement de cette deuxième approche, l'emploi du RI selon ses possibilités qui ne cessent d'augmenter, remet en question dans un cadre industriel l'avenir de la troisième génération, dont le but est d'imiter davantage l'Homme.

#### 0.7. LES CAPTEURS D'ENVIRONNEMENT

Il ne faut pas pour autant négliger les capteurs d'environnement simples, tels que les capteurs de forces ou une vision sélective, ou autres astuces facilitant le travail, par exemple la tête de montage à point de rotation fictif développée aux Charles Stark Draper Laboratories à Cambridge, Massachusetts (N.5). Comme les pièces fabriquées et les posages

auront toujours des tolérances de fabrication, il existera une certaine dispersion des cotes réelles, ce qui demandera au RI une adaptation locale à son travail. Cette adaptation peut être faite par l'intermédiaire de capteurs simples d'environnement. De même dans de nombreux types d'industries, en microtechnique par exemple, le traitement des pièces plates en vrac pose un problème qui peut être résolu par un système de reconnaissance de position (vision sélective).

---

## 1. INTRODUCTION

Les Robots Industriels (RI) sont apparus sur le marché en 1962. Dès le début, ils ont été considérés comme faisant partie du domaine de la machine-outil et traités comme tel. De ce fait, on a sous-estimé les problèmes inhérents à leurs qualités propres tels ceux de leur commande, de leur asservissement et de leur structure mécanique. Habituellement, cette structure, le bras de robot industriel (bras de RI) est calculée sur des bases exclusivement dynamiques (par exemple, vitesse, couple pour des grands mouvements), négligeant les effets de sa fréquence propre sur son comportement (pour les mouvements fins).

Ces deux modes de mouvement relatifs aux RI sont décrits dans un rapport du C.S. Draper Laboratory (N.3:R800:45):

- les "*Grands mouvements*" (gross motions) qui caractérisent la puissance du bras de RI, généralement à la base des calculs;
- les "*Mouvements Fins*" (fine motions) qui caractérisent la précision de travail, souvent oubliés.

*Le but de ce travail est l'étude du bras de RI dans le sens de trouver des règles simples menant à une conception optimale de la structure mécanique, satisfaisant au cahier des charges. Cette conception tient compte des possibilités techniques existantes, économiques et esthétiques.*

Le bras de RI est un système mécanique complexe possédant généralement de quatre à six degrés de liberté, composé d'éléments divers et variés (par exemple: moteurs, paliers) dont les caractéristiques peuvent être connues ou calculées.



Pour atteindre le but fixé trois démarches s'offraient à nous :

1. une *étude expérimentale* des éléments composant le bras de RI et de leurs assemblages permettrait de déduire des critères d'optimisation. Une telle étude, qui conduit à la réalisation ou à l'achat de nombreux matériels coûteux, serait longue et hors de nos possibilités financières;
2. une *étude par simulation* sur ordinateur, outre sa complexité, est hors de nos moyens;
3. il existe la possibilité d'une *étude théorique* mettant en évidence des paramètres simples.

Comme tous les éléments entrant dans la conception d'un bras de RI sont connus, c'est cette démarche que nous avons choisie.

Les caractéristiques d'une nouvelle construction sont dictées par le *cahier des charges* :

- *la charge à manipuler* qui comprend soit l'organe de préhension (par exemple une pince multi-doigts) et la pièce si le RI est destiné à la manipulation ou au montage, soit l'outil de travail (par exemple un pistolet à peindre) si le RI est développé pour la manipulation d'outils;
- *le volume de travail* qui avec le genre de travail détermine le choix des coordonnées principales du bras de RI;
- *la précision absolue* que nous définissons comme l'amplitude maximale de vibration de la structure et le plus petit déplacement;
- *la cadence* qui donne une information sur la vitesse de travail.

La cadence est le seul élément de cette liste qui ne soit pas bien défini. Elle impose un temps pour un certain parcours mais laisse libre le choix de la loi de mouvement. Cette remarque permettra de lier la commande et la structure du RI.

La charge à manipuler, le volume de travail et la cadence caractérisent le mode "grands mouvements".

La précision et la cadence caractérisent le mode "mouvements fins".

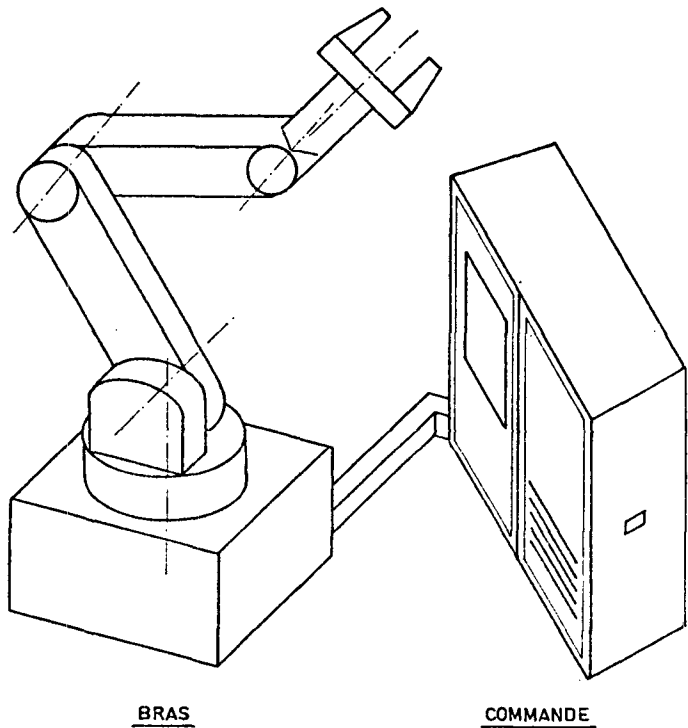
Généralement un bras de RI est calculé pour remplir les exigences dues au mode "grands mouvements" et aucun critère permettant de caractériser les exigences dues au mode "mouvements fins" n'existe. C'est cette lacune que nous avons voulu combler.

Des considérations concernant les fréquences propres de la structure mécanique et les caractéristiques des éléments de construction nous ont conduit à une méthode basée sur la détermination de trois critères caractéristiques:

1. *Le Facteur de Qualité Q* qui caractérise l'ensemble de la construction. Il est indépendant de la grandeur du bras de RI et permet de comparer des constructions entre elles. Il peut être calculé à priori pour une nouvelle construction. Les performances d'un bras de RI dépendent fortement du facteur de qualité  $Q$  et des lois de mouvement qui le régissent, ce qui sera démontré au moyen de formules simplifiées;
2. *Le Facteur de Raideur Massique a* qui caractérise l'articulation. Il dépend de la technologie choisie et apporte une simplification des équations des fréquences du bras de RI;
3. *Le Facteur d'Elancement b* qui caractérise l'élanement du bras de RI tout en faisant intervenir un côté économique et esthétique.

Ces trois critères sont liés. Réunis dans le tableau Qab (Chapitre 8) ils orientent vers un choix optimal des actuateurs en fonction des exigences du mode "mouvements fins". Il ne reste plus qu'à vérifier les caractéristiques dynamiques de ces actuateurs pour le mode "grands mouvements".

### 1.1. DESCRIPTION D'UN ROBOT INDUSTRIEL



*Fig. 1-1 Robot Industriel (RI).*

Le Robot Industriel est composé de deux parties principales:

1. *le bras de RI* qui est une structure mécanique généralement élancée, rigide, versatile, travaillant avec rapidité et précision. En outre il possède un outil de travail spécifique.
2. *la Commande* qui est le cerveau du robot. Elle gouverne le bras de RI.

La commande se décompose elle même en deux parties:

- I. une partie "information": élaboration des ordres;
- II. une partie "puissance" : asservissements.

Pour transmettre l'information et la puissance, il existe des liaisons entre le bras et la commande, par exemple des cables électriques, des tuyaux hydrauliques.

Le robot industriel est caractérisé par une grande fiabilité: un MTBF de sept à huit cent heures (MTBF = Mean Time Between Failure: temps moyen entre pannes).(E.2)

### 1.2. DESCRIPTION DU BRAS DE RI

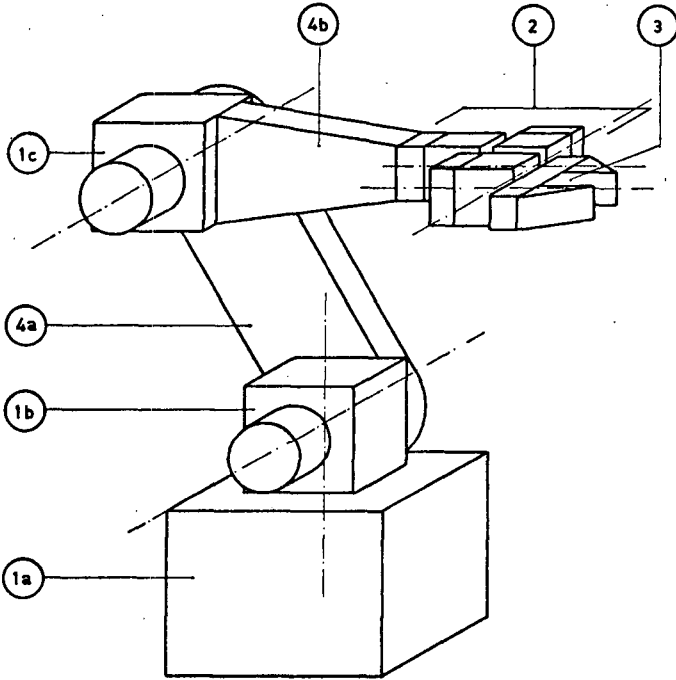


Fig. 1-2 Bras de RI.

Le bras de RI est une suite d'éléments "articulations" mobiles reliés entre eux par des éléments "structures" statiques.

Le bras de RI doit pouvoir déplacer l'objet à manipuler d'un point à un autre de l'espace puis l'orienter. Pour ce faire, le bras de RI possède généralement :

- *trois coordonnées principales* qui permettent de fixer un point dans l'espace. (Par exemple: coordonnées cartésiennes, cylindriques, sphériques ou angulaires).

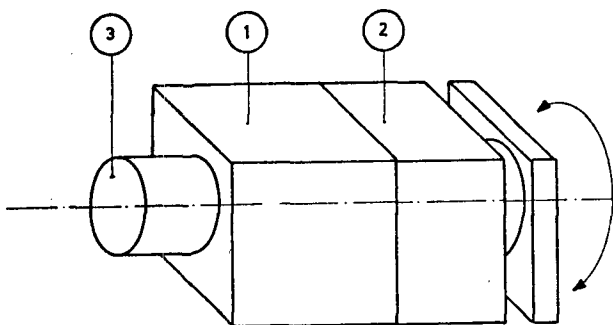
Elles sont souvent réparties de la manière suivante dans:

- la "base", indice 1a dans la fig. 1-2;
- l'"épaule", indice 1b dans la fig. 1-2;
- le "coude", indice 1c dans la fig. 1-2.

Les coordonnées principales correspondent à des éléments articulations;

- *un poignet*, indice 2 dans la fig. 1-2, qui regroupe de zéro à trois rotations. Ces rotations qui permettent d'orienter la pièce, correspondent aux angles d'Euler et sont réalisées avec des éléments articulations;
- *une structure* qui lie ces divers éléments et peut se décomposer en trois parties:
  - le "bâti";
  - le "bras", indice 4a dans la fig. 1-2;
  - l'"avant bras", indice 4b dans la fig. 1-2;
- *un outil de travail spécifique*: la "main", indice 3 dans la fig. 1-2, par exemple une pince à souder, un électroaimant;
- *des fils électriques* conduisant l'information, *des câbles électriques ou des conduites hydrauliques* amenant la puissance à travers chaque élément articulation et structure, jusqu'à l'outil de travail lient la commande au bras de RI.

### 1.3. DESCRIPTION D'UN ELEMENT ARTICULATION



*Fig. 1-3 Élément articulation correspondant au bras de RI précédent.*

Un élément articulation est un ensemble d'éléments mécaniques; il travaille en rotation ou en translation et se décompose en plusieurs parties:

- un *moteur*, indice 1 dans la fig. 1-3, par exemple un moteur électrique ou hydraulique, un vérin;
- des *paliers* angulaires ou linéaires, indice 2 dans la fig 1-3;
- un *réducteur*, éventuellement;
- un *capteur de position*, indice 3 dans la fig. 1-3, qui peut être analogique ou digital, absolu ou relatif;
- des *divers* tels que servo-valve, capteur de vitesse, circuits électroniques.

### 1.4. ELEMENTS STRUCTURES

Les éléments structures sont généralement réalisés à l'aide de profilés.

---

## 2. FACTEUR DE QUALITE Q

Dans son cours "Conception et calcul des machines-outils", F. Pruvot (P.1) met en évidence l'importance des fréquences propres d'une machine-outils par rapport à la qualité de ses usinages.

Les travaux que nous avons été amenés à effectuer dans le cadre des RI nous ont conduit vers la même constatation, c'est-à-dire l'importance de la fréquence basse  $f_b$  d'un bras de RI sur ses performances.

De cette constatation, l'idée est venue de créer un "Facteur de Qualité" pour juger de la qualité d'un bras de RI lié à cette fréquence propre basse  $f_b$ , comme il en existe par exemple un dans l'industrie horlogère pour juger de la qualité de marche d'un oscillateur.

Dans ce chapitre, nous étudierons les fréquences propre d'un bras de RI et, suite à l'application des lois de similitude dimensionnelle nous créerons le "Facteur de Qualité Q" pour les RI. (Publié la première fois en B.3)

### 2.1. ETUDE DES FREQUENCES PROPRES D'UN BRAS DE RI

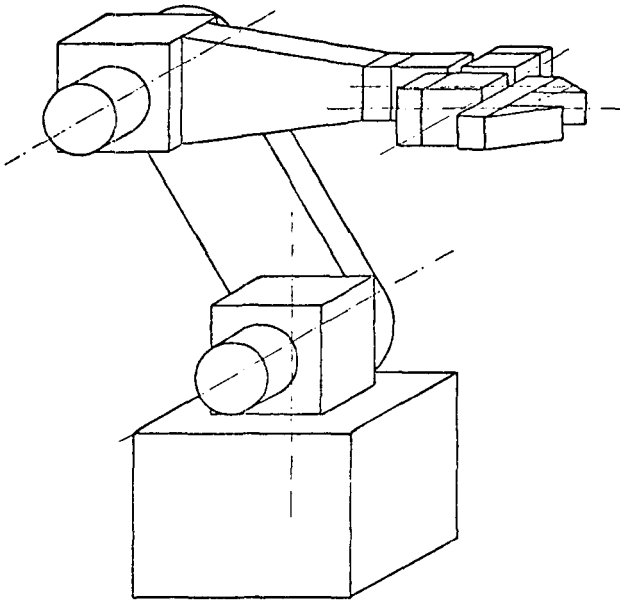
Un bras de RI est un ensemble de plusieurs éléments articulations reliés par des éléments structures, comme par exemple celui de la fig. 2-1 à la page suivante.

Chaque élément est caractérisé par:

- une raideur généralisée  $k$  (raideur linéaire  $K$  en  $N.m^{-1}$  ou raideur angulaire  $K_\alpha$  en  $N.m.rad^{-1}$ ) qui regroupe toutes les raideurs de l'élément, par exemple la raideur du moteur et de sa commande, la raideur des paliers;
- une masse généralisée  $m$  (masse  $M$  en kg ou moment d'inertie  $I$  en  $kg.m^2$ ) qui regroupe toutes les masses de l'élément.



Chaque élément constitue un oscillateur harmonique.



*Fig. 2-1* Bras de RI.

Le bras de RI soumis à une loi de mouvement vibre dans l'espace. Un point de la charge décrit un volume de vibration.

Nous pouvons considérer ce volume de vibration comme un parallélépipède rectangle dont les dimensions sont celles correspondant à l'amplitude maximale de vibration lorsque l'on considère le bras de RI vibrant dans trois plans perpendiculaires.

Ce volume de vibration peut varier en dimensions selon la position du bras de RI. Nous nous intéressons au cas le plus défavorable, c'est-à-dire quand la vibration a une amplitude maximale, ce qui correspond à la fréquence la plus basse du bras donc généralement à la plus grande extension du bras de RI. De spatiale, l'étude devient plane.

Dans ce qui suit, la théorie linéaire est utilisée, ce qui représente une approximation suffisante pour les petits déplacements.

La vibration du bras de RI est faiblement amortie, mais l'amplitude la plus défavorable est celle de la première oscillation. Dans ce cas, nous pouvons considérer l'oscillateur comme non amorti. Cette hypothèse est plus détaillée au chapitre 3.2.

Nous pouvons appliquer la théorie des vibrations pour des systèmes d'oscillateurs harmoniques à plusieurs degrés de liberté vibrant librement décrite dans "Basic Vibration Theory" par R.E. Blake (B.9:2.16-2.18) ou par M. Del Pédro dans son cours de "Mécanique appliquée" (D.4).

Un système de n degrés de liberté a n fréquences propres  $f_n$  dont l'une sera la plus basse.

Les n fréquences propres  $f_n$  sont calculées à partir de la matrice des fréquences N dont les n valeurs propres  $\omega_n^2$  sont les pulsations propres au carré correspondant aux n fréquences propres  $f_n$ :

$$N = \begin{vmatrix} \frac{k_{11}}{m_1} & -\frac{k_{12}}{\sqrt{m_1 \cdot m_2}} & \dots & \dots & \dots & -\frac{k_{1n}}{\sqrt{m_1 \cdot m_n}} \\ \frac{k_{21}}{\sqrt{m_2 \cdot m_1}} & \frac{k_{22}}{m_2} & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -\frac{k_{n1}}{\sqrt{m_n \cdot m_1}} & \dots & \dots & \dots & \dots & -\frac{k_{nn}}{m_n} \end{vmatrix} \quad (2.1)$$

La raideur  $k_{jk}$  est la variation de la force agissant selon le j<sup>ème</sup> degré de liberté quand on déplace lentement d'une unité le k<sup>ème</sup> degré de liberté dans une direction négative.

De plus  $k_{ij} = k_{ji}$   
 La masse  $m_n$  est celle du degré concerné.

La matrice  $N$  est réelle, symétrique et positive et toutes les valeurs propres  $\omega_n^2$  sont réelles et positives. (H.9:246)(G.5:99).

Nous trouvons les valeurs propres de la matrice  $N$  en résolvant le système suivant:

$$\det D = \omega^2 \cdot (I) - (N) = 0 \quad (2.2)$$

## 2.2. FREQUENCES PROPRES ET LOIS DE SIMILITUDE DIMENSIONNELLE

Un bras de RI est donc considéré comme un système de  $n$  oscillateurs harmoniques ayant chacun leur fréquence propre  $f_{(n)}$ .

### 2.2.1 Oscillateur harmonique à un degré de liberté

La fréquence propre d'un oscillateur harmonique est de la forme:

$$f_{(n)} = \frac{1}{2 \cdot \pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (\text{Hz}) \quad (2.3)$$

avec:  $k$  = raideur généralisée; ( $N \cdot m^{-1}$  ou  $N \cdot m \cdot \text{rad}^{-1}$ )  
 $m$  = masse généralisée; ( $\text{kg}$  ou  $\text{kg} \cdot \text{m}^2$ ).

Nous pouvons appliquer les lois de similitude dimensionnelle (annexes, chapitre E) sur tous les éléments mécaniques composant l'oscillateur.

#### 2.2.1.1. Cas de l'oscillateur harmonique linéaire

$$k = K = \text{raideur linéaire}; (N \cdot m^{-1}) \quad (2.4)$$

$$K^* = L$$

La raideur linéaire  $K$  varie selon le rapport de similitude dimensionnelle  $L$ .

$$\begin{aligned} m &= M = \text{masse; (kg)} & (2.5) \\ M^* &= L^3 \end{aligned}$$

La masse M varie selon le cube du rapport de similitude dimensionnelle L.

Ce qui nous permet d'écrire:

$$f_{(n)}^* = \sqrt{\frac{K^*}{M^*}} = \sqrt{\frac{L^3}{L^3}} = L^{-1} \quad (2.6)$$

La fréquence propre  $f_{(n)}$  d'un oscillateur harmonique linéaire varie selon l'inverse du rapport de similitude dimensionnelle L.

#### 2.2.1.2. Cas de l'oscillateur harmonique angulaire

$$\begin{aligned} k &= K_{\alpha} = \text{raideur angulaire; (N.m.rad}^{-1}\text{)} & (2.7) \\ K_{\alpha}^* &= L^3 \end{aligned}$$

La raideur angulaire  $K_{\alpha}$  varie selon le cube du rapport de similitude dimensionnelle L.

$$\begin{aligned} m &= I = \text{moment d'inertie; (kg.m}^2\text{)} & (2.8) \\ I^* &= L^5 \end{aligned}$$

Le moment d'inertie I varie selon la puissance cinquième du rapport de similitude dimensionnelle L.

Ce qui nous permet d'écrire:

$$f_{(n)}^* = \sqrt{\frac{K_{\alpha}^*}{I^*}} = \sqrt{\frac{L^3}{L^5}} = L^{-1} \quad (2.9)$$

La fréquence propre  $f_{(n)}$  d'un oscillateur harmonique angulaire varie selon l'inverse du rapport de similitude dimensionnelle L.

### 2.2.1.3. Cas de l'oscillateur harmonique

Les deux cas se résument de la façon suivante:

$$\boxed{f_{(n)}^* = L^{-1}} \quad (2.10)$$

La fréquence propre  $f_{(n)}$  d'un oscillateur harmonique varie selon l'inverse du rapport de similitude dimensionnelle  $L$ .

### 2.2.2. Système à n degrés de liberté

Un bras de RI de  $n$  degrés de liberté possède  $n$  fréquences propres  $f_{(n)}$ . Les pulsations propres au carré  $\omega_n^2$  (avec  $\omega_n^2 = (2\pi \cdot f_n)^2$ ) sont les valeurs propres de la matrice  $N$  (expression 2.2), c'est-à-dire:

$$\det D = \omega^2 \cdot (I) - N = 0 \quad (2.11)$$

Les lois de similitude dimensionnelle nous permettent d'écrire que tous les termes de la matrice  $N$  varient selon l'inverse du carré du rapport de similitude dimensionnelle  $L$ .

Les termes de la forme:

$$\left( \frac{k_{nn}}{m_b} \right)^* = \frac{k_{nn}^*}{m_n^*} = \frac{L}{L^3} \quad \text{ou} \quad \frac{L^3}{L^5} = L^{-2} \quad (2.12)$$

Les termes de la forme:

$$\left( \frac{k_{jk}}{\sqrt{m_j \cdot m_k}} \right)^* = \frac{k_{jk}^*}{\sqrt{m_j^* \cdot m_k^*}} = \frac{L}{\sqrt{L^3 \cdot L^3}} \quad \text{ou} \quad \frac{L^3}{\sqrt{L^5 \cdot L^5}} = L^{-2} \quad (2.13)$$

Nous voulons démontrer que les fréquences propres  $f_n$  du bras de RI obéissent aux mêmes lois de similitude dimensionnelle que les fréquences propres  $f_{(n)}$  de chaque oscillateur harmonique, c'est-à-dire que:

$L^{-2} \cdot \omega_n^2$  sont les valeurs propres de  $l^{-2} \cdot N$

avec:

$$l^{-2} = \begin{vmatrix} L^{-2} & . & . & . & 0 \\ 0 & L^{-2} & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & L^{-2} \end{vmatrix} \quad (2.14)$$

Nous avons:

$$D = \omega^2 \cdot I - N \quad (2.15)$$

Multiplions chaque terme de l'équation par la matrice  $l^{-2}$ :

$$l^{-2} \cdot D = l^{-2} \cdot \omega^2 \cdot I - l^{-2} \cdot N \quad (2.16)$$

Soit:

$$l^{-2} \cdot D = (L^{-2} \cdot \omega^2) \cdot I - l^{-2} \cdot N \quad (2.17)$$

Cherchons les valeurs propres, on pose:

$$\det (l^{-2} \cdot D) = 0 \quad (2.18)$$

ou:

$$\det ((L^{-2} \cdot \omega^2) \cdot I - l^{-2} \cdot N) = 0 \quad (2.19)$$

C'est-à-dire que  $L^{-2} \cdot \omega_n^2$  sont les valeurs propres de la matrice  $l^{-2} \cdot N$ .

Nous pouvons écrire que les fréquences propres  $f_n$  de bras de RI varient comme les fréquences propres  $f_{(n)}$  des éléments qui le composent, c'est-à-dire selon l'inverse du rapport de similitude dimensionnelle  $L$ :

$$\boxed{f_{(n)}^* = f_n^* = L^{-1}} \quad (2.20)$$

### 2.3. DEFINITION DU FACTEUR DE QUALITE Q

Ces résultats vont nous permettre de justifier le choix du facteur de qualité Q. Ce facteur doit être indépendant de la grandeur du bras de RI.

Nous définissons le facteur de qualité Q comme le produit de la fréquence propre basse  $f_b$  du bras de RI et de sa portée maximale l:

$$Q = f_b \cdot l \quad (\text{m.s}^{-1}) \quad (2.21)$$

car:

$$Q^* = f_b^* \cdot l^* = L^{-1} \cdot L = 1 \quad (2.22)$$

Ce facteur de qualité Q est bien invariant par rapport au rapport de similitude dimensionnelle.

Le facteur de qualité Q nous permet:

- de constater que deux bras de RI semblables ont la même valeur du facteur de qualité Q, indépendamment de leur grandeur;
- de comparer deux bras de RI de même portée: celui dont la valeur du facteur de qualité Q est la plus élevée a la meilleure "qualité", car sa fréquence propre  $f_b$  est plus élevée, ce qui a une incidence directe sur la précision de travail;
- de prévoir le niveau de difficulté que l'on rencontrera dans une nouvelle construction; de ce fait, on appelle aussi le facteur de qualité facteur de difficulté.

Remarque: Le dernier point soulevé, prévoir le niveau de difficulté, est essentiel pour la conception d'un nouveau bras de RI et c'est le thème de la suite du travail.

---

### 3 FREQUENCE PROPRE MINIMALE D'UN BRAS DE RI

Prévoir le niveau de difficulté que l'on rencontrera, c'est pouvoir calculer *à priori* la valeur du facteur de qualité  $Q$  d'un bras de RI à venir et de la comparer à des valeurs du facteur de qualité  $Q$  de bras de RI existant afin d'orienter la nouvelle construction vers une technologie correspondant aux performances désirées.

Le facteur de qualité  $Q$ , défini au chapitre 2, est égal au produit de la portée maximale  $l$  et de la fréquence propre basse  $f_b$  du bras de RI:

- la portée maximale  $l$  est généralement définie par le cahier des charges,
- la fréquence propre basse  $f_b$  ne peut être calculée que lorsqu'on connaît tous les éléments composant le bras de RI. Pouvons-nous, par contre, calculer une fréquence propre minimale  $f_{\min}$  du bras de RI telle que:

$$f_{\min} \geq f_b \quad (\text{Hz}) \quad (3.1)$$

Cette valeur de  $f_{\min}$  dépendrait d'éléments connus comme la précision absolue " $\Delta$ ", la "douceur  $n$ " de la commande et du "niveau  $\delta^{(n)}$ " de celle-ci.

Tels sont les propos de ce chapitre.



### 3.1. PROBLEME

Une construction mécanique non infiniment rigide vibre lorsqu'elle est excitée, par une variation d'accélération par exemple.

Cette vibration est caractérisée par une ou plusieurs fréquences propres, selon le nombre de degrés de liberté du système. L'amplitude de la vibration est fonction des lois de mouvement qui régissent le système.

Exemple: Soit le système à un degré de liberté suivant:

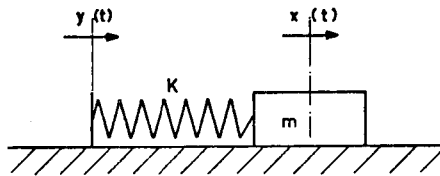


Fig. 3-1 Système à un degré de liberté.

Le déplacement de la masse  $m$  de 0 à  $A$  par l'intermédiaire du ressort  $K$  est caractérisé par la loi de mouvement  $F_y(t)$  imposée au système par l'ensemble "moteur-commande" et sa réponse  $F_x(t)$ .

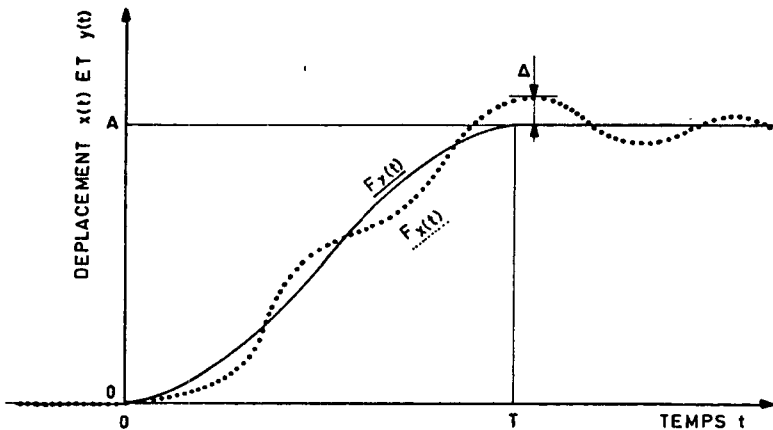


Fig. 3-2 Loi de mouvement imposée et réponse du système.

Selon la loi de mouvement  $F_y(t)$  la masse  $m$  oscillera plus ou moins autour de la position désirée.

On appelle " $\Delta$ " le dépassement (ou overshoot en anglais) de la masse  $m$ , l'écart maximal entre la position réelle et la position commandée après un temps  $T$  correspondant au temps de parcours commandé.

Le but de ce chapitre est l'étude du comportement d'un oscillateur harmonique en fonction de différentes lois de mouvement et ainsi de pouvoir déterminer la fréquence basse minimale  $f_{\min}$  d'un bras de RI à partir de son cahier des charges.

Dans les développements suivants, nous considèrerons des systèmes généralisés où il y a concordance entre translation ( $x$ ) et rotation ( $\alpha$ ), masse ( $M$ ) et inertie ( $I$ ), force ( $F$ ) et couple ( $C$ ), raideur linéaire ( $K$ ) et raideur angulaire ( $K_\alpha$ ),...

### 3.2. COMMANDE D'UN OSCILLATEUR HARMONIQUE

Nous pouvons considérer un bras de RI de  $n$  degrés de liberté comme un système de  $n$  oscillateurs harmoniques faiblement amortis commandé par une force excitatrice imposée. Le système qui essayera de suivre la force sera en plus excité à l'une de ses fréquences propres  $f_n$ . Ce chapitre montre comment l'ordre de l'équation différentielle de la commande appelée "douceur  $n$ " et le "niveau  $\delta^{(n)}$ " de celle-ci interviennent. Par exemple une commande dont l'équation est du second ordre est caractérisée par une "douceur 2" et le "niveau" de celle-ci est une vitesse.

Pour simplifier les aspects mathématiques, nous supposons que le bras de RI peut être décrit par un seul oscillateur harmonique.

Nous pouvons aussi faire les hypothèses que les frottements sont faibles car:

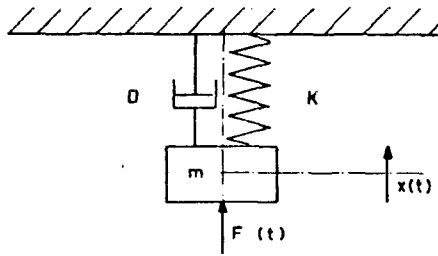
- le frottement sec doit être combattu pour limiter les effets du stick-slip (annexes, chapitre C),
- les frottements visqueux et de ventilations interviennent dans le système "moteur-commande" (annexes, chapitre D),
- dans notre étude, les frottements interviennent au niveau interne de la matière.

De ces faits, l'amortissement est faible, ce qui est défavorable pour le dépassement  $\Delta$ .

### 3.3. SOLUTION DE L'EQUATION DIFFERENTIELLE D'UN OSCILLATEUR HARMONIQUE

(A.3:dès 224)(D.4)(B.9)

Nous considérons l'équation d'un oscillateur harmonique amorti subissant une force excitatrice  $F(t)$ :



*Fig. 3-3 Oscillateur harmonique amorti.*

L'équation s'écrit:

$$m \cdot \ddot{x}(t) + D \cdot \dot{x}(t) + k \cdot x(t) = F(t) \quad (3.2)$$

avec: conditions initiales :  $x(0) = 0$  et  $\dot{x}(0) = 0$

$m$  = masse de l'oscillateur; ( $\text{kg}$  ou  $\text{kg.m}^2$ ),

$D$  = amortissement de l'oscillateur; ( $\text{kg.s.m}^{-1}$ ),

$k$  = raideur du ressort; ( $\text{N.m}^{-1}$  ou  $\text{N.m.rad}^{-1}$ ).

Pour trouver la solution générale, nous appliquons la transformée de Laplace  $L$ .

Pour les conditions initiales données, l'équation (3.2) s'écrit:

$$m.s^2.x(s) + D.s.x(s) + k.x(s) = f(s) \quad (3.3)$$

Ce qui implique comme solution:

$$x(s) = \frac{f(s)}{m \left( \left( s + \frac{D^2}{2.m} \right)^2 + \omega_1^2 \right)} \quad (3.4)$$

$$\text{avec: } \omega_1^2 = \frac{k}{m} - \frac{D^2}{4.m^2}$$

Nous appliquons la transformée de Laplace inverse  $L^{-1}$  et le théorème de convolution pour l'équation (3.4):

$$L^{-1}\{f_1(s).f_2(s)\} = \int_0^t F_1[t-z].F_2(z).dz \quad (3.5)$$

Alors nous pouvons écrire:

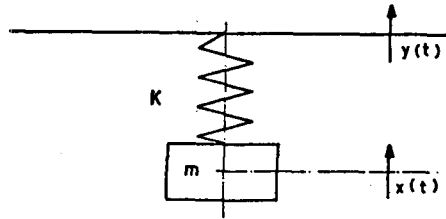
$$x(t) = \frac{1}{m.\omega_1} \int_0^t F(t-z).e^{\frac{D^2.z}{2.m}}.\sin\omega_1 z.dz \quad (3.6)$$

Dans le cas de l'application à un bras de RI, l'amortissement est faible nous pouvons poser  $D=0$ , alors nous pouvons écrire:

$$x(t) = \frac{1}{m.\omega} \int_0^t F(t-z).\sin\omega z.dz \quad (3.7)$$

avec:  $\omega^2 = \frac{k}{m}$ ;  $\omega$  est la pulsation propre du système.

Supposons que notre oscillateur harmonique non amorti est commandé en position. La position réelle va suivre la position commandée et en même temps la fréquence propre de l'oscillateur sera excitée.



*Fig. 3-4 Oscillateur harmonique non amorti commandé.*

Il faut trouver une commande telle que cette oscillation soit inférieure à un maximum.

Nous reprenons l'équation de départ, équation (3.2), sous la forme suivante:

$$\ddot{x} = \omega^2 \cdot (y-x) \quad (3.8)$$

avec:  $y$  = position de commande; (m),

$\omega$  = pulsation propre de l'oscillateur; ( $s^{-1}$ ),

$$\omega^2 = \frac{k}{m}.$$

Le déplacement commence en  $x = 0$ , pour un parcours de longueur  $OA$  d'une durée  $T$ .

En fonction du temps, la commande peut avoir la forme suivante:

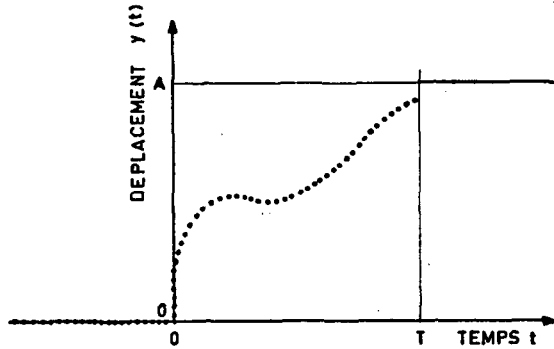


Fig. 3-5 Commande de l'oscillateur harmonique.

Le dépassement est défini par l'équation:

$$\text{Dépassement} = \max_{t \geq T} |x(t) - A| \quad (3.9)$$

L'équation (3.7) peut alors s'écrire:

$$x(t) = \omega \int_0^T y(t-z) \cdot \sin \omega z \cdot dz + \omega \int_T^t y(t-z) \cdot \sin \omega z \cdot dz \quad (3.10)$$

Faisons le changement de variable suivant:

$$\begin{aligned} r &= t - z \\ y(r) &= A \text{ pour tout } r \geq T \end{aligned} \quad (3.11)$$

L'équation (3.10) devient:

$$x(t) = \omega \int_0^T y(r) \cdot \sin \omega(t-r) \cdot dr + A(1 - \cos \omega(t-T)) \quad (3.12)$$

Si  $y$  est une fonction absolument continue, nous pouvons intégrer par parties l'équation (3.12):

$$x(t) = A - \int_0^T y^{(k)}(r) \cdot \cos \omega(t-r) \cdot dr \quad (3.13)$$

Le dépassement est défini de la manière suivante:

$$\text{Dépassement} = \max_{t \geq T} \left| \int_0^T y^{(k)}(r) \cdot \cos \omega(t-r) \cdot dr \right| \quad (3.14)$$

#### 3.4. RECHERCHE D'UNE EXPRESSION SIMPLIFIEE POUR LE DEPASSEMENT

Maintenant que nous avons trouvé une formule générale pour le dépassement, nous allons chercher une estimation de la valeur de ce dépassement dans le cas le plus défavorable et pour un type de commande particulier.

Nous supposons que la commande satisfait aux conditions suivantes:

- $y^{(k)}$  est absolument continue sur  $(0, T)$ ;
- $y = 0$  si  $t \leq 0$  et  $y = A$  si  $t \geq T$ ;
- $y^{(k)} = 0$  si  $t \leq 0$  et  $y^{(k)} = 0$  si  $t \geq T$ ,  
pour tout  $1 \leq k \leq n-1$ . ( $y^{(k)}$  est la  $k$ -ème dérivée de  $y$ );
- Il y a une partition de  $(0, T)$  en intervalle  $(T_i, T_{i+1})$   
avec  $0 \leq i \leq m-1$ .  
 $T_m = T$  et  $T_0 = 0$   
Sur chaque partition  $i$ ,  $y^{(n)}$  est une constante  $y_i^{(n)}$ .

Remarque: Ce type de commande convient particulièrement à un traitement digital de la commande dont l'information est de la forme  $+1, 0, -1$ .

Si  $y$  satisfait les trois premières conditions, nous voyons que pour  $k$  impair:

$$0_t = \int_0^T y^{(k)} \cdot (r) \cdot \cos\omega(t-r) \cdot dr \quad (3.15)$$

$$0_t = \frac{(-1)^{\frac{k-1}{2}}}{\omega^{k-1}} \int_0^T y^{(k)} \cdot \cos\omega(t-s) \cdot ds \quad (3.16)$$

Pour  $k$  impair:

$$0_t = \int_0^T y^{(k)} \cdot (r) \cdot \cos\omega(t-r) \cdot dr \quad (3.17)$$

$$0_t = \frac{(-1)^k}{\omega^{k-1}} \int_0^T y^{(k)} \cdot \sin\omega(t-s) \cdot ds \quad (3.18)$$

Prenons le cas où  $k$  est impair et  $k = n$ .

Le cas où  $k$  est pair donnerait le même résultat.

Nous posons:

$$\alpha = \frac{k-1}{2} \quad (3.19)$$

Réolvons l'équation (3.16)

$$0_t = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(-1)^{\alpha}}{\omega^{\alpha-1}} \cdot y_i^{(n)} \cdot \int_{T_i}^{T_{i+1}} \cos\omega(t-s) \cdot ds \quad (3.20)$$

$$0_t = \sum_{i=0}^{-1} (-1)^{\alpha+1} \cdot y_i^{(n)} \cdot (\sin\omega(t-T_{i+1}) - \sin\omega(t-T_i)) \quad (3.21)$$



Nous pouvons changer l'ordre de sommation:

$$0_t = \frac{(-1)^{\alpha+1}}{\omega^n} \left( -y_0^{(n)} \cdot \sin\omega(t-T_0) + y_{m-1}^{(n)} \cdot \sin\omega(t-T_M) + \sum_{i=1}^{m-1} (y_{i-1}^{(n)} - y_i^{(n)}) \cdot \sin\omega(t-T_i) \right) \quad (3.22)$$

Alors:

$$|0_t| \leq \frac{1}{\omega^n} \left( \sum_{i=1}^{m-1} |y_{i-1}^{(n)} - y_i^{(n)}| + |y_0^{(n)}| + |y_{m-1}^{(n)}| \right) \quad (3.23)$$

Si nous posons:

$$\begin{aligned} \delta_0 &= |y_0^{(n)}| \\ \delta_i &= |y_{i-1}^{(n)} - y_i^{(n)}| \\ \delta_m &= |y_{m-1}^{(n)}| \end{aligned} \quad (3.24)$$

Le dépassement s'écrit:

$$\text{Dépassement} \leq \frac{1}{\omega^n} \sum_{i=1}^m \delta_i^{(n)} \quad (3.25)$$

C'est la somme de toutes les discontinuités de la fonction  $y^{(n)}$ .

Cette expression nous donne une formule pratique pour une estimation du dépassement.

Nous appellerons le dépassement " $\Delta$ " ou précision absolue:

$$\Delta \leq \frac{1}{\omega^n} \sum_{i=1}^m \delta_i^{(n)} \quad (m) \quad (3.26)$$

Le dépassement  $\Delta$  en écriture simplifiée:

$$\Delta \leq \frac{1}{\omega^n} \Sigma \delta^{(n)} \quad (m) \quad (3.27)$$

D'où la fréquence minimale  $f_{\min}$  d'un bras de RI pour garantir l'amplitude de vibration:

$$f_{\min} \geq \frac{1}{2 \cdot \pi} \left( \frac{1}{\Delta} \Sigma \delta^{(n)} \right)^{\frac{1}{n}} \quad (\text{Hz}) \quad (3.28)$$

avec:  $\Sigma \delta^{(n)}$  = somme des *niveaux de la commande*; (  $m \cdot s^{-1}$ ,  $m \cdot s^{-2}$ ,  $m \cdot s^{-3}$ , ... ),

$n$  = *douceur de la commande*; (.),

$\omega$  = pulsation de l'oscillateur correspondant à la fréquence minimale  $f_{\min}$  d'un bras de RI; ( $s^{-1}$ ),

$f_{\min}$  = fréquence minimale d'un bras de RI; (Hz).

### 3.5. TROIS EXEMPLES DE COMMANDE

Nous considèrerons trois cas de commande où le niveau  $y^{(n)}$  est constant sur l'intervalle  $(0, T)$ , pour une douceur  $n = 1, 2, 3$ .

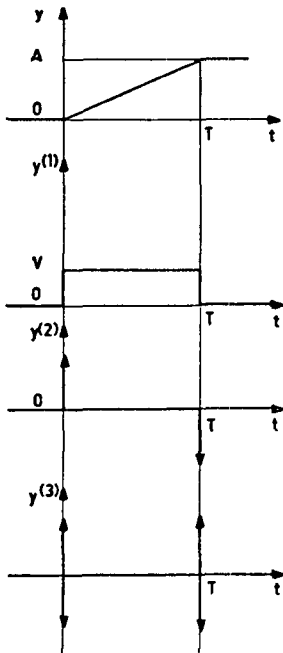
#### 3.5.1. Vitesse constante

Vitesse constante:  $n = 1$  et  $\delta^{(n)}$  est une vitesse.

$y^{(1)} = 0$  si  $-\infty < t < 0$  et  $T < t < \infty$ ,

$y^{(1)} = v$  si  $0 \leq t \leq T$ .

Il se produit un mouvement avec choc.



La vitesse est déterminée par  $T$  et  $A$ :

$$v = \frac{A}{T} \quad (\text{m} \cdot \text{s}^{-1}) \quad (3.29)$$

Valeur du dépassement  $\Delta$ :

$$\Delta = \frac{1}{\omega} \cdot 2 \cdot v = \frac{2 \cdot A}{\omega \cdot T} \quad (\text{m}) \quad (3.30)$$

correspondant à l'expression de la fréquence propre minimale  $f_{\min}$ :

$$f_{\min} = \frac{v}{\pi \cdot \Delta} = \frac{A}{\pi \cdot \Delta \cdot T} \quad (\text{Hz}) \quad (3.31)$$

*Fig. 3-6 Loi de mouvement avec vitesse constante.*

### 3.5.2. Accélération constante

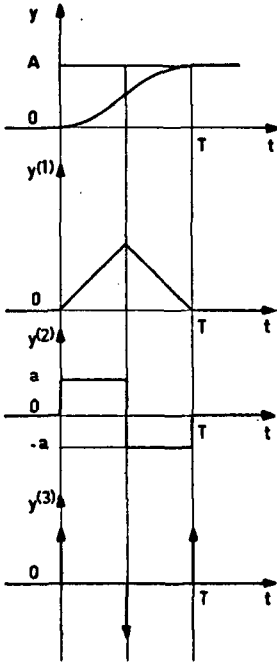
Accélération constante:  $n = 2$  et  $\delta^{(n)}$  est une accélération.

$$y^{(2)} = 0 \text{ si } -\infty < t < 0 \text{ et } T < t < \infty ,$$

$$y^{(2)} = a \text{ si } 0 \leq t \leq \frac{T}{2} ,$$

$$y^{(2)} = -a \text{ si } \frac{T}{2} \leq t \leq T .$$

Il se produit un mouvement avec saccade.



L'accélération est déterminée par  $T$  et  $A$ :

$$a = \frac{4 \cdot A}{T^2} \quad (\text{m.s}^{-2}) \quad (3.32)$$

Valeur du dépassement  $\Delta$ :

$$\Delta = \frac{1}{\omega^2} \cdot 4 \cdot a = \frac{16 \cdot A}{T^2 \cdot \omega^2} \quad (\text{m}) \quad (3.33)$$

correspondant à l'expression de la fréquence propre minimale  $f_{\min}$ :

$$f_{\min} = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{a}{\Delta}} = \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{A}{T^2 \cdot \Delta}} \quad (\text{Hz}) \quad (3.34)$$

*Fig. 3-7 Loi de mouvement avec accélération constante.*

### 3.5.3. Jerk constant

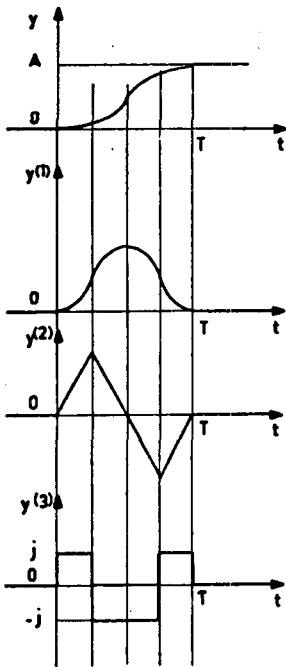
Jerk constant:  $n = 3$  et  $\delta^{(n)}$  est la dérivée de l'accélération (jerk).

$$y^{(3)} = 0 \text{ si } -\infty < t < 0 \text{ et } T < t < \infty ,$$

$$y^{(3)} = j \text{ si } 0 \leq t \leq \frac{T}{4} \text{ et } \frac{3 \cdot T}{4} \leq t \leq T ,$$

$$y^{(3)} = -j \text{ si } \frac{T}{4} \leq t \leq \frac{3 \cdot T}{4} .$$

Il se produit un mouvement sans choc ni saccade.



Le jerk est déterminé par  $T$  et  $A$ :

$$j = \frac{32 \cdot A}{T^3} \quad (\text{m} \cdot \text{s}^{-3}) \quad (3.35)$$

Valeur du dépassement  $\Delta$ :

$$\Delta = \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot j = \frac{192 \cdot A}{T^3 \cdot \omega^3} \quad (\text{m}) \quad (3.36)$$

correspondant à l'expression de la fréquence propre minimale  $f_{\min}$ :

$$f_{\min} = \frac{1}{2 \cdot \pi} \sqrt[3]{\frac{6 \cdot j}{\Delta}} \quad (\text{Hz}) \quad (3.37)$$

$$f_{\min} = \frac{2}{\pi} \sqrt[3]{\frac{3 \cdot A}{T^3 \cdot \Delta}} \quad (\text{Hz}) \quad (3.38)$$

*Fig. 3-8 Loi de mouvement avec jerk constant.*

En résumé nous pouvons écrire:

n	$\Sigma$	$\delta^{(n)}$	Unité	nom
1	2	$\frac{A}{T}$	$m.s^{-1}$	vitesse
2	4	$\frac{4.A}{T^2}$	$m.s^{-2}$	accélération
3	6	$\frac{32.A}{T^3}$	$m.s^{-3}$	jerk

#### 3.5.4. Exemple numérique

Nous choisissons de faire un déplacement de 1 m en 1 s avec un bras de RI ayant une fréquence propre de 20 Hz.

Commande à vitesse constante:

$$v = 1 \text{ m.s}^{-1}$$

$$\Delta = 16 \text{ mm}$$

Commande à accélération constante:

$$a = 4 \text{ m.s}^{-2}$$

$$\Delta = 1 \text{ mm}$$

Commande à jerk constant:

$$j = 32 \text{ m.s}^{-3}$$

$$\Delta = 0,1 \text{ mm}$$

Nous pouvons remarquer que plus la douceur n de la commande est élevée, plus la précision est améliorée.

Pour une commande donnée (n), la précision absolue  $\Delta$  augmente rapidement avec la fréquence propre du bras de RI.

Le temps de déplacement augmente avec (n), n caractérisant la douceur de la commande.

Pour  $m > n$  il y a un temps critique  $T(n,m)$  pour lequel il est vrai que:

$t > T(n,m) \rightarrow$  commande (m) meilleure que la commande (n);

$t < T(n,m) \rightarrow$  commande (n) meilleure que la commande (m).

Pour notre exemple:

$$T(1,2) = \frac{6}{\omega}$$

$$T(2,3) = \frac{12}{\omega}$$

$$T(1,3) = \frac{4 \cdot \sqrt{6}}{\omega}$$

### 3.6. REMARQUES

#### 3.6.1. Sur le dépassement

Le dépassement  $\Delta$  donné par l'expression (3.27) est un maximum.

Il correspond au cas où l'erreur maximale dans la phase 0 à  $\frac{T}{2}$  s'ajoute à l'erreur maximale dans la phase  $\frac{T}{2}$  à  $T$ , par exemple:

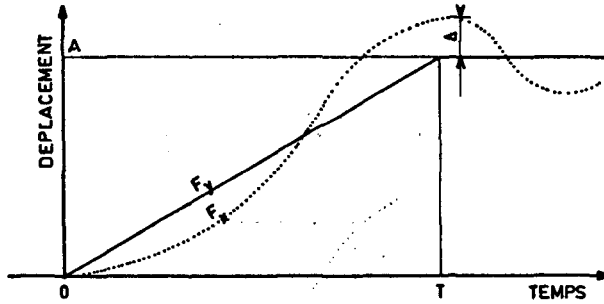


Fig. 3-9 Dépassement maximal.

Les erreurs dans les deux phases peuvent aussi se compenser.

Le dépassement  $\Delta$  sera nul, par exemple:

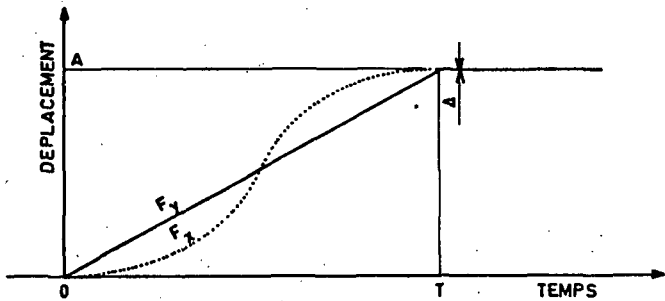


Fig. 3-10 Dépassement nul.

Nous pouvons remarquer que le dépassement  $\Delta$  dépend du temps du parcours  $OT$  par rapport à la période  $\frac{1}{f}$  de l'oscillateur.



### 3.6.2. Sur les lois de mouvement

#### 3.6.2.1 Loi de mouvement à profil "triangulaire"

Le bras de RI pour se déplacer d'une position 0 à une position A possède rarement une loi de mouvement variable sur tout le parcours, dite loi de mouvement à profil "triangulaire" telle que le représente la figure 3-11:

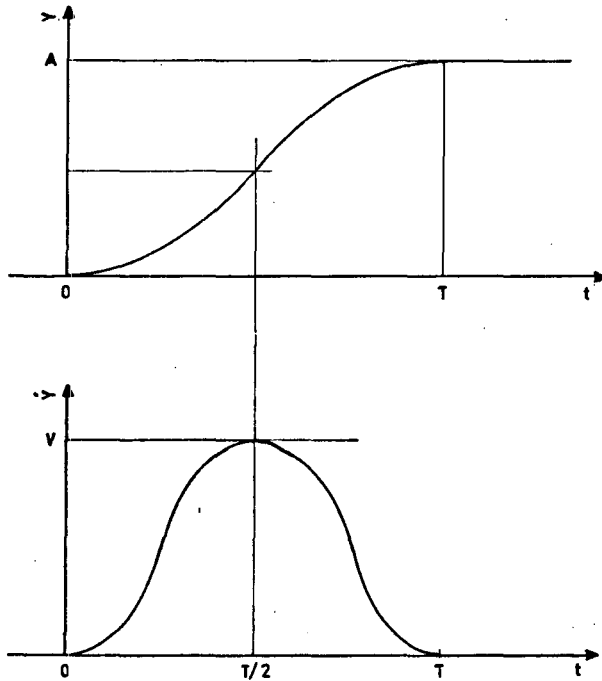


Fig. 3-11 Loi de mouvement à profil "triangulaire".

### 3.6.2.2. Loi de mouvement à profil "trapézoïdal"

Généralement le parcours a trois phases:

- I phase de mise en mouvement;
- II phase de parcours à vitesse plus ou moins constante;
- III phase d'arrêt.

Cette loi de mouvement est dite à profil "trapézoïdal":

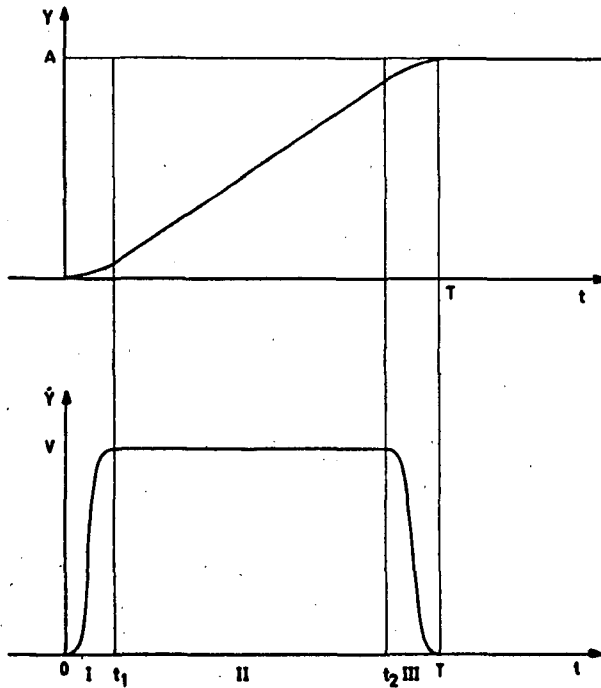


Fig. 3-12 Loi de mouvement à profil "trapézoïdal".

avec:  $t_1, t_2 \gg 0t_1$  ou  $t_2, T$ .

L'oscillation provoquée en phase I s'amortira en phase II, comme le montre la figure suivante:

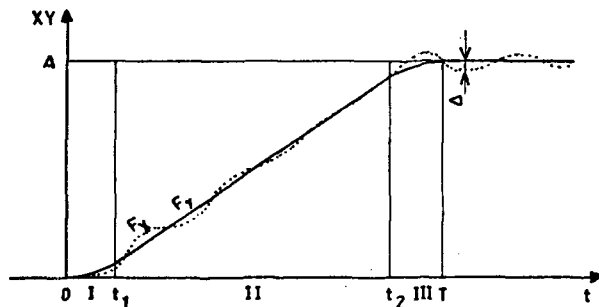
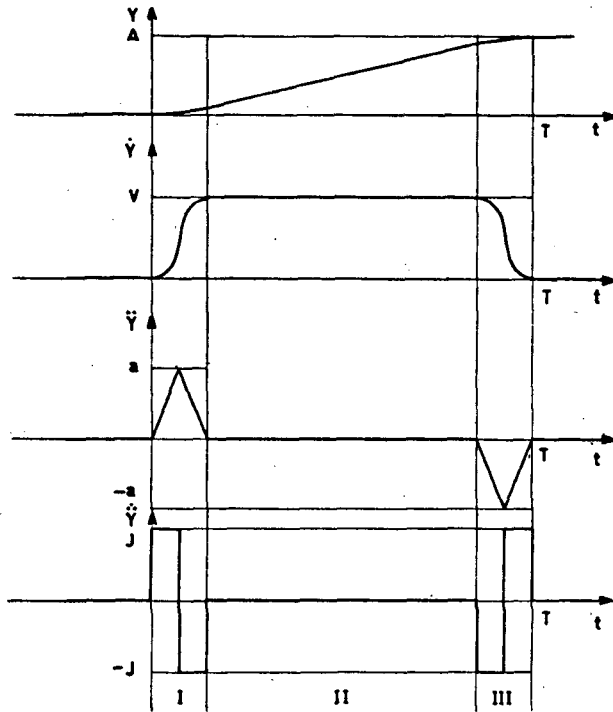


Fig. 3-13 Amortissement de la vibration dans la phase II.

Le dépassement  $\Delta$  aura une amplitude d'environ la moitié de celle calculée avec une loi de mouvement "triangulaire".

Ceci est montré par l'exemple de la page suivante:

Exemple: Loi de mouvement à profil "trapézoïdal" avec jerk constant:



*Fig. 3-14* Loi de mouvement à profil "trapézoïdal"  
avec jerk constant.

Le dépassement  $\Delta$  sera calculé dans la phase III par l'application de la formule (3.27):

$$\Delta = \frac{1}{3} \cdot \frac{4 \cdot j}{\omega} \quad (m) \quad (3.39)$$

### 3.6.2.3. Loi de mouvement avec phase de freinage

Nous pouvons diminuer l'amplitude du dépassement en prévoyant une phase de freinage.

Le parcours comprendra alors quatre phases:

- I phase de mise en mouvement;
- II phase de parcours à vitesse plus ou moins constante;
- III phase de freinage;
- IV phase d'arrêt.

Cette loi de mouvement est dite avec "phase de freinage":

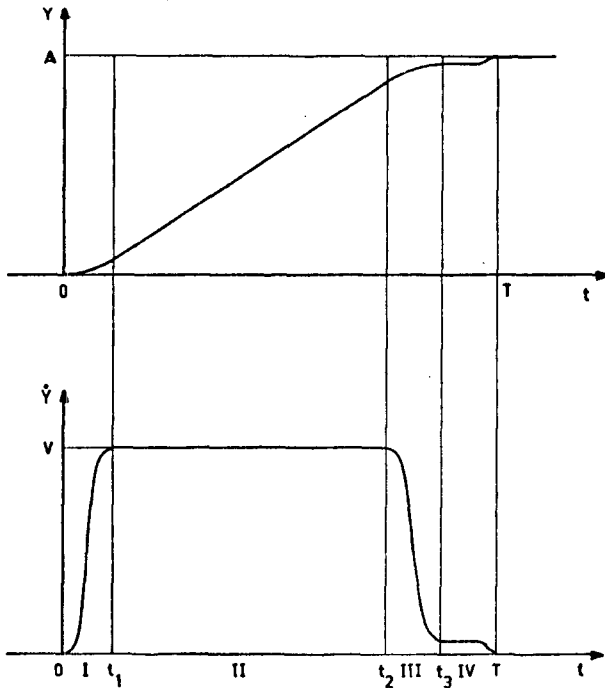


Fig. 3-15 Loi de mouvement avec phase de freinage.

L'oscillation provoquée en phase I est amortie en phase II.

L'oscillation provoquée en phase III est amortie en phase IV.

Par exemple:

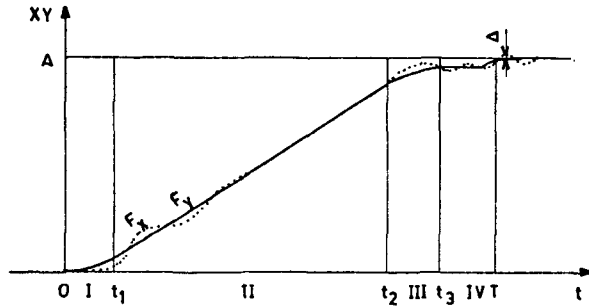


Fig. 3-15 Amortissement de la vibration en phase II et phase IV.

Le dépassement  $\Delta$  a une amplitude plus faible que dans le cas d'une loi de mouvement à profil "trapézoïdal" puisque le niveau de la commande  $\delta^{(n)}$  en phase finale peut être bas sans trop nuire au temps de parcours.

Ceci est montré par l'exemple de la page suivante:

Exemple: Loi de mouvement à profil "trapézoïdal" avec phase de freinage et jerk constant.

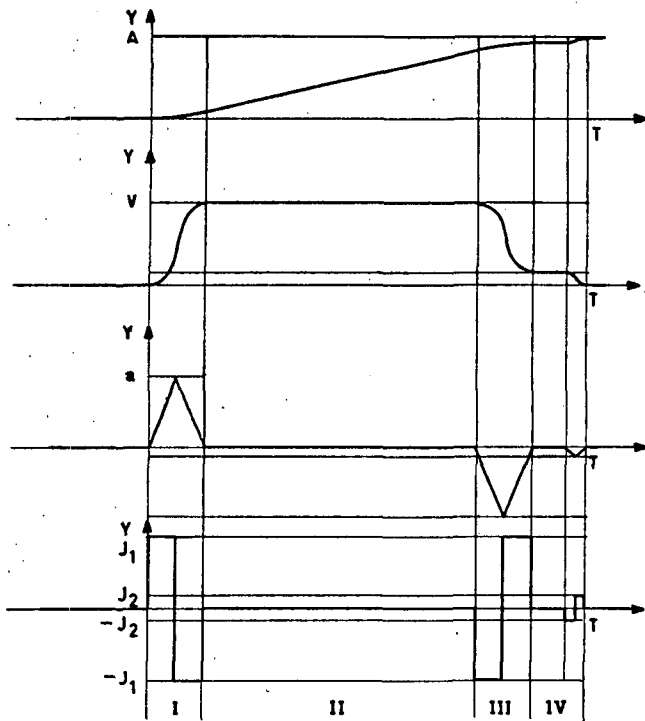


Fig. 3-16 Loi de mouvement à profil "trapézoïdal" avec phase de freinage et jerk constant.

Le dépassement  $\Delta$  sera calculé dans la phase IV par l'application de la formule (3.27):

$$\Delta = \frac{1}{3} \cdot \omega \cdot J_2 \quad (m) \quad (3.40)$$

## 4. VALEUR MINIMALE DU FACTEUR DE QUALITE Q

### 4.1. FACTEUR DE QUALITE Q CALCULE A PRIORI

Nous pouvons appliquer les résultats précédents à la recherche à priori du facteur de qualité Q.

L'équation (3.28) nous donne l'expression de la fréquence minimale  $f_{\min}$  d'un bras de RI:

$$f_{\min} \geq \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{1}{\Delta} \sum \delta^{(n)} \right]^{\frac{1}{n}} \quad (\text{Hz}) \quad (4.1)$$

En introduisant cette expression dans les équations (2.21) et (3.1), nous obtenons la valeur minimale du facteur de qualité Q à priori:

$$Q = f_b \cdot l \geq f_{\min} \cdot l \quad (\text{m} \cdot \text{s}^{-1}) \quad (4.2)$$

$$Q \geq \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{1}{\Delta} \sum \delta^{(n)} \right]^{\frac{1}{n}} \quad (\text{m} \cdot \text{s}^{-1}) \quad (4.3)$$

avec:  $f_b$  = fréquence basse du bras de RI; (Hz),

$l$  = plus grande portée; (m),

$f_{\min}$  = fréquence minimale du bras de RI; (Hz),

$\Delta$  = dépassement maximal désiré; (m),

$\sum \delta^{(n)}$  = somme des niveaux (discontinuités) de la commande dans la phase désirée (voir remarque 3.6.2.); ( $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ ,  $\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$ , ...),

$n$  = douceur de la commande; (.).



En fonction des exigences formulées par le cahier des charges d'un nouveau bras de RI, nous pouvons maintenant spécifier sa fréquence minimale  $f_{\min}$ , à priori, ainsi que le facteur de qualité  $Q$  et certaines caractéristiques de la commande telles que sa douceur  $n$  et son niveau  $\delta^{(n)}$ .

#### 4.2. ABAQUE

L'abaque de la figure (4-1) permet de déterminer rapidement la valeur du facteur de qualité  $Q$  connaissant le dépassement  $\Delta$ , la douceur  $n$  et le niveau  $\delta^{(n)}$  de la commande.

Cet abaque a été calculé avec une loi de mouvement triangulaire pour une commande à accélération constante ( $\ddot{x}$ ) et à jerk constant ( $\dddot{x}$ ), qui sont les plus courantes.

Pour une loi de mouvement trapézoïdale et/ou avec phase de freinage, nous choisissons pour la valeur de dépassement  $\Delta$  avec les conditions citées à la remarque (3.6.2.) :

- pour une commande à accélération constante:

$$\Delta_{(\text{trapézoïdale})} \approx \frac{1}{2} \cdot \Delta_{(\text{triangulaire})} \quad (\text{m}) \quad (4.4)$$

- pour une commande à jerk constant:

$$\Delta_{(\text{trapézoïdale})} \approx \frac{2}{3} \cdot \Delta_{(\text{triangulaire})} \quad (\text{m}) \quad (4.5)$$

Remarque: Au chapitre 8 nous donnerons des valeurs au facteur de qualité  $Q$  en fonction des éléments "articulations" pouvant entrer en considération lors de la conception d'un bras de RI.

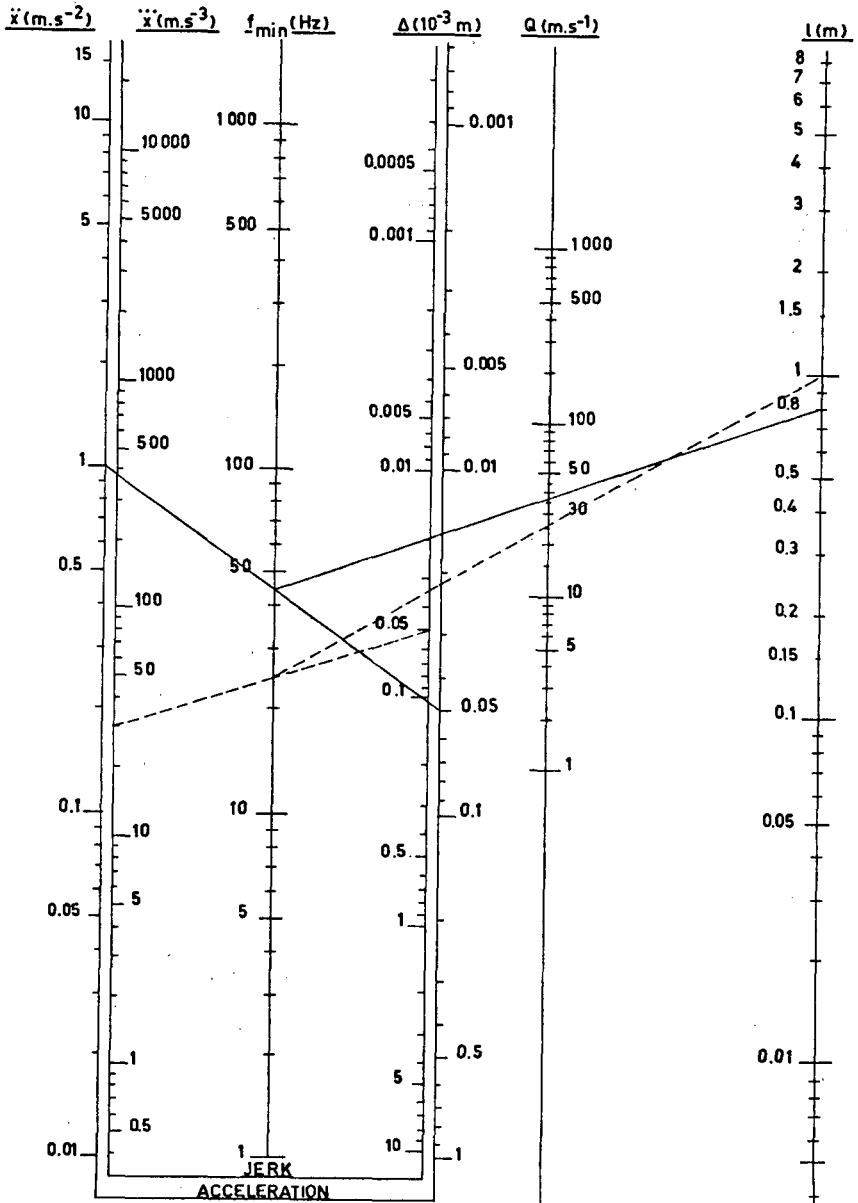


Fig. 4-1 Abaque pour trouver le facteur de qualité d'un RI.

Exemple:RI avec loi de mouvement avec accélération constante:

- a) - données: - accélération  $\ddot{x} = 1 \text{ m.s}^{-2}$  ;  
                   - précision  $\Delta = 5.10^{-5} \text{ m}$  ;  
 - résultat: - fréquence propre minimale du RI:  $f_{\min} = 45 \text{ Hz}$  ;
- b) - données: - fréquence propre minimale du RI:  $f_{\min} = 45 \text{ Hz}$  ;  
                   - portée maximale:  $l = 0,8 \text{ m}$  ;  
 - résultat: - facteur de qualité :  $Q \geq 36 \text{ m.s}^{-1}$  .

RI avec loi de mouvement avec jerk constant:

- a) - données: - jerk  $\dot{\ddot{x}} = 30 \text{ m.s}^{-3}$  ;  
                   - précision  $\Delta = 5.10^{-5} \text{ m}$  ;  
 - résultat: - fréquence propre minimale du RI:  $f_{\min} = 25 \text{ Hz}$  ;
- b) - données: - fréquence propre minimale du RI :  $f_{\min} = 25 \text{ Hz}$  ;  
                   - portée maximale :  $l = 1 \text{ m}$  ;  
 - résultat: - facteur de qualité:  $Q \geq 25 \text{ m.s}^{-1}$  .

4.3. REMARQUES

Dans une première étape, aux chapitres 2, 3 et 4, nous avons défini des caractéristiques générales d'une nouvelle construction, telles que le facteur de qualité  $Q$  et la fréquence minimale  $f_{\min}$  de la structure mécanique.

Nous allons définir maintenant les caractéristiques des éléments entrant dans la construction d'un bras de RI.

---

## 5 FACTEUR DE RAIDEUR MASSIQUE $\alpha$

Les valeurs propres de la matrice  $N$ , expression (2.1), nous permettent de calculer les fréquences propres  $f_n$  du bras de RI quand nous connaissons tous les éléments le constituant.

Nous allons introduire un nouveau facteur, le *facteur de raideur massique*  $\alpha$ . Il caractérise une qualité des éléments constituant le bras de RI alors que le facteur de qualité  $Q$  caractérise l'ensemble de la construction.

Le facteur de raideur massique  $\alpha$  nous permettra par une simplification des équations de calculer les fréquences propres minimales à priori de chaque articulation du bras de RI.

### 5.1. INTRODUCTION

Un bras de RI est constitué d'éléments dont les raideurs sont disparates. Des éléments ont une raideur élevée car il est aisé de les concevoir avec une telle raideur, par exemple: les paliers, la structure, les engrenages. D'autres, par contre, les moteurs avec leur régulateur, ont généralement une raideur faible. (annexes, chapitre D) . Ce sont eux qui sont les points faibles du RI, donc qui constituent les éléments ressorts dans les plans de vibration considérés.

Par exemple, pour un élément articulation angulaire comme celui de la figure (5-1):

$$K_{\alpha 1} \ll K_{\alpha 2} \text{ ou } K_{\alpha 3} \quad (N.m.rad^{-1}) \quad (5.1)$$

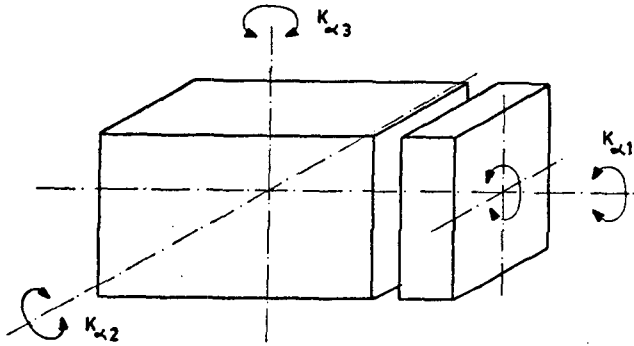


Fig. 5-1 Élément articulation angulaire.

## 5.2. DEFINITION DU FACTEUR DE RAIDEUR MASSIQUE a

Une tendance actuelle est de réaliser un mouvement de translation ou de rotation à partir d'un moteur rotatif ce qui nous permet la définition suivante pour le facteur de raideur massique a.

Le facteur de raideur massique a est égal au rapport de la raideur angulaire  $K_{\alpha}$  relative au mouvement de l'élément et de la masse M de cet élément:

$$a = \frac{K_{\alpha}}{M} \quad (N.m.rad^{-1}.kg^{-1}) \quad (5.2)$$

$$a^* = \frac{K_{\alpha}^*}{M^*} = \frac{L^3}{L^3} = 1 \quad (5.3)$$

Pour plus de précisions:

$K_{\alpha}$  = raideur angulaire relative au mouvement en tenant compte de tous les éléments constituant l'articulation: moteur régulateur, paliers, engrenages,...

La raideur du moteur-régulateur est généralement dominante; ( $N.m.rad^{-1}$ ),

M = masse de l'élément articulation complet, y compris une participation des éléments structures reliant les articulations; (kg).

Un RI a une certaine homogénéité quant au choix des moteurs et de leur régulateur; par exemple l'ensemble des moteurs des articulations seront de la même famille avec les mêmes régulateurs. (comme contre exemple, les trois degrés principaux avec des moteurs hydrauliques et le poignet avec des moteurs électriques). Ce ci est confirmé par les RI existant sur le marché.

La valeur de facteur de raideur massique a peut donc être considérée constante pour une construction homogène.

---



## 6. MODELE SIMPLIFIE D'UN BRAS DE RI

Comme nous l'avons vu au chapitre 2, le bras de RI peut être considéré comme un ensemble de plusieurs masses ou inerties, reliées entre elles par des ressorts et se comportant comme un système de plusieurs oscillateurs harmoniques.

L'étude de ce système qui vibre dans l'espace sous certaines conditions peut se simplifier par l'étude successive des vibrations du bras de RI dans ses plans principaux. Celle-ci nous permet de définir la précision de travail par l'obtention du volume de vibration du bras de RI.

Le bras de RI est un système de  $n$  degrés de liberté, la valeur de  $n$  pouvant être supérieure à 6.

Diverses considérations comme, par exemple que le poignet est généralement concentré en bout de bras, vont nous permettre de réduire ce système de  $n$  degrés de liberté vibrant dans l'espace en un système de  $j$  degrés de liberté vibrant dans le plan, avec  $j \leq 3$ .

Soit le modèle de la figure (6-1) représentant un bras de RI dont nous allons étudier différentes possibilités de réduction du nombre de degrés de liberté.



Nous représentons un modèle du bras de RI dont les éléments sont caractérisés par une raideur généralisée et une masse généralisée:

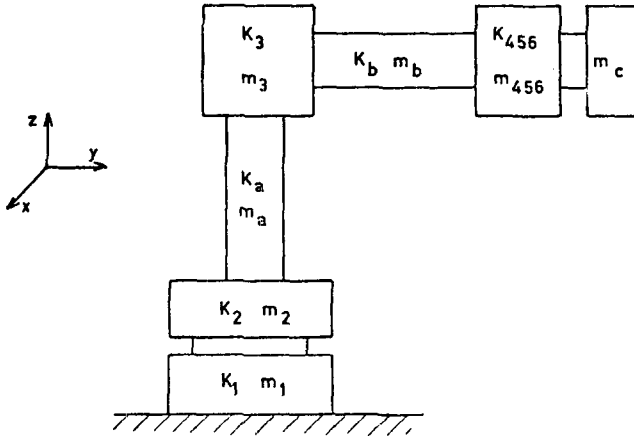


Fig. 6-1 Modèle d'un bras de RI.

Dans cette figure:

k = raideur généralisée; ( $N.m^{-1}$  ou  $N.m.rad^{-1}$ ),

m = masse généralisée; (kg ou  $kg.m^2$ ),

L'indice 1 correspond à la base, degré de liberté n° 1 ;

L'indice 2 correspond à l'épaule, degré de liberté n° 2 ;

L'indice 3 correspond au coude, degré de liberté n° 3 ;

L'indice 456 correspond au poignet, degrés de liberté n° 4, 5 et 6 ;

L'indice a correspond au bras, liaison entre les degrés n° 2 et 3 ;

L'indice b correspond à l'avant bras, liaison entre les degrés n° 4 et 456 ;

L'indice c correspond à la charge.

### 6.1. BRAS DE RI REDUIT A UN SYSTEME A TROIS DEGRES DE LIBERTE

Le modèle de la figure (6-1) peut être un bras de RI à coordonnées angulaires.

Ce bras de RI peut être représenté dans le plan y-z par le système de 7 inerties et 7 ressorts suivant:

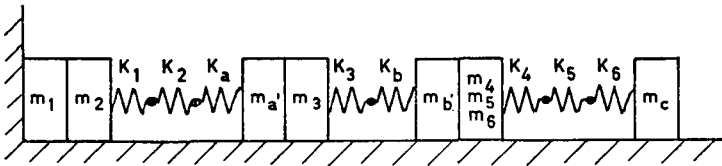


Fig.6-2 Système représentant un bras de RI dans le plan y-z.

$k$  représente une raideur angulaire, soit  $K_{\alpha}$  ;

$m$  représente une inertie, soit  $I$ .

Dans ce système, nous pouvons faire les remarques suivantes:

- les raideurs angulaires  $K_{\alpha 2}$ ,  $K_{\alpha 3}$  et  $K_{\alpha 5}$  correspondent à des raideurs moteurs-régulateurs;
- les raideurs angulaires  $K_{\alpha 1}$ ,  $K_{\alpha 4}$  et  $K_{\alpha 6}$  correspondent à des raideurs paliers, réducteurs, ...;
- les raideurs angulaires  $K_{\alpha a}$  et  $K_{\alpha b}$  correspondent à des raideurs de structures;
- on peut donc écrire:

$$K_{\alpha 2}, K_{\alpha 3}, K_{\alpha 5} \ll K_{\alpha 1}, K_{\alpha 4}, K_{\alpha 6}, K_{\alpha a}, K_{\alpha b} \quad (6.1)$$

Le système à 7 inerties et 7 ressorts se réduit au système à 3 degrés de liberté suivant:

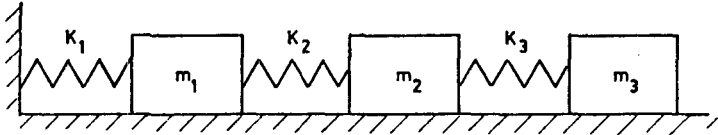


Fig. 6-3 Système à trois degrés de liberté.

Dans lequel:

$$\begin{aligned}
 k_1 &= \left[ K_{\alpha 1}^{-1} + K_{\alpha 2}^{-1} + K_{\alpha a}^{-1} \right]^{-1} & m_1 &= I_a + I_3 \\
 k_2 &= \left[ K_{\alpha 3}^{-1} + K_{\alpha b}^{-1} \right]^{-1} & m_2 &= I_b + I_4 + I_5 + I_6 \\
 k_3 &= \left[ K_{\alpha 4}^{-1} + K_{\alpha 5}^{-1} + K_{\alpha 6}^{-1} \right]^{-1} & m_3 &= I_c
 \end{aligned}$$

L'équation des fréquences est donnée par le déterminant de la matrice D, expression (2.2):

$$\text{Det } D = \begin{vmatrix} \omega^2 - \left( \frac{k_1 + k_2}{m_1} \right) & \frac{k_2}{\sqrt{m_1 \cdot m_2}} & 0 \\ \frac{k_2}{\sqrt{m_1 \cdot m_2}} & \omega^2 - \left( \frac{k_2 + k_3}{m_2} \right) & \frac{k_3}{\sqrt{m_2 \cdot m_3}} \\ 0 & \frac{k_3}{\sqrt{m_2 \cdot m_3}} & \omega^2 - \frac{k_3}{m_3} \end{vmatrix} = 0 \quad (6.2)$$

En développant nous obtenons l'équation suivante:

$$\begin{aligned}
 & \left( m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 \right) \omega^6 - \\
 & \left( m_1 \cdot m_3 (k_2 + k_3) + m_2 \cdot m_3 (k_1 + k_2) + m_1 \cdot m_2 \cdot k_3 \right) \omega^4 + \\
 & \left( m_3 (k_1 + k_2) (k_2 + k_3) + m_1 \cdot k_3 (k_2 + k_3) + \right. \\
 & \quad \left. m_2 \cdot k_3 (k_1 + k_2) - m_3 \cdot k_2^2 - m_1 \cdot k_3^2 \right) \omega^2 - \\
 & \left( k_1 \cdot k_2 \cdot k_3 \right) = 0
 \end{aligned} \tag{6.3}$$

dont les trois racines sont les pulsations propres au carré  $\omega_n^2$  du RI.

## 6.2. BRAS DE RI RÉDUIT À UN SYSTÈME À DEUX DEGRÉS DE LIBERTÉ

La charge à manipuler peut être faible par rapport à la masse des éléments du bras de RI.

Le bras de RI étudié se réduit alors au système à deux degrés de liberté suivant:

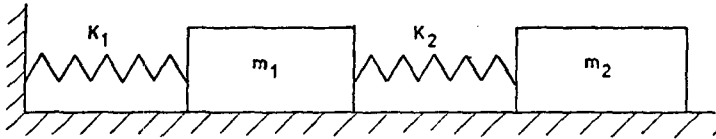


Fig. 6-4 Système à deux degrés de liberté

Dans lequel:

$$k_1 = \left( K_{\alpha 1}^{-1} + K_{\alpha 2}^{-1} + K_{\alpha a}^{-1} \right)^{-1} \quad m_1 = I_a + I_3$$

$$k_2 = \left( K_{\alpha 3}^{-1} + K_{\alpha b}^{-1} \right)^{-1} \quad m_2 = I_b + I_4 + I_5 + I_6 + I_c$$

L'équation des fréquences est donnée par le déterminant de la matrice D, expression (2.2):

$$\text{Det } D = \begin{vmatrix} \omega^2 - \left( \frac{k_1 + k_2}{m_1} \right) & \frac{k_2}{\sqrt{m_1 \cdot m_2}} \\ \frac{k_2}{\sqrt{m_1 \cdot m_2}} & \omega^2 - \frac{k_2}{m_2} \end{vmatrix} = 0 \quad (6.4)$$

En développant nous obtenons l'équation suivante dont les deux racines sont les pulsations propres au carré  $\omega_n^2$  du RI.

$$\left( m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 \right) \omega^4 - \left( m_1 \cdot k_2 + m_2 (k_1 + k_2) \right) \omega^2 + \left( k_1 \cdot k_2 \right) = 0 \quad (6.5)$$

### 6.3. BRAS DE RI REDUIT A UN SYSTEME A UN DEGRE DE LIBERTE

Ce cas peut se présenter lorsque les considérations permettant la réduction du nombre de degrés de liberté d'un bras de RI permet d'avoir par exemple:

- toutes des translations d'axes perpendiculaires;
- toutes des rotations d'axes perpendiculaires;
- une rotation et une translation d'axes parallèles.

### 6.4. REMARQUE

Dans un bras de RI à six degrés de liberté, au maximum trois axes de mouvement sont parallèles, donc au maximum trois moteurs-régulateurs participent à la vibration dans le plan considéré.

Un bras de RI de  $n$  degrés de liberté se réduit donc à un système de  $j$  degrés de liberté avec:

$$j \leq 3$$

(.)

(6.6)

---



## 7. EQUATIONS SIMPLIFIEES ET FREQUENCES PROPRES MINIMALES A PRIORI DES ELEMENTS ARTICULATIONS

Pour résoudre les équations (6.3) et (6.5) il faut connaître les caractéristiques réelles des éléments composant le bras de RI.

Nous connaissons maintenant la fréquence propre minimale à priori  $f_{\min}$  du bras de RI et nous cherchons à calculer la fréquence propre minimale à priori  $f_{\min(n)}$  de chaque articulation, supposant que la raideur des éléments articulations est prédominante.

Nous faisons les hypothèses suivantes:

- la fréquence propre minimale de chaque articulation  $f_{\min(n)}$  est identique pour toutes les articulations d'un bras de RI:

$$f_{\min(1)} = f_{\min(2)} = f_{\min(n)} \quad (\text{Hz}) \quad (7.1)$$

- donc pour les pulsations propres correspondantes:

$$\Omega_{\min(1)} = \Omega_{\min(2)} = \Omega_{\min(n)} = \Omega_{\min} \quad (\text{s}^{-1}) \quad (7.2)$$

- une même technologie est employée pour tout le bras de RI:

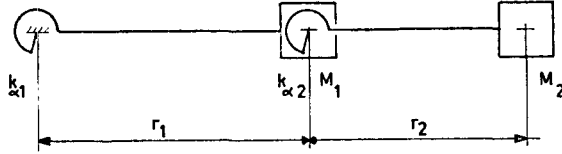
$$a = \text{constant} \quad (\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}) \quad (7.3)$$

(a = facteur de raideur massique)



### 7.1. BRAS DE RI RÉDUIT À UN SYSTÈME À DEUX DEGRÉS DE LIBERTÉ

Soit le bras de RI réduit au système suivant :



*Fig. 7-1 Bras de RI réduit à un système à deux degrés de liberté.*

dont l'équation des fréquences est donnée par l'expression (6.5) du chapitre précédent.

Les hypothèses citées précédemment nous permettent de faire le changement de variables suivant :

$$\begin{aligned}
 m_2 &= I_2 = M_2 \cdot r_2^2 && (\text{kg} \cdot \text{m}^2) \\
 k_2 &= K_{\alpha 2} = M_2 \cdot r_2^2 \cdot \Omega^2 && (\text{N} \cdot \text{m} \cdot \text{rad}^{-1}) \\
 m_1 &= I_1 = \frac{1}{a} \cdot M_2 \cdot r_1^2 \cdot r_2^2 \cdot \Omega^2 && (\text{kg} \cdot \text{m}^2) \\
 k_1 &= K_{\alpha 2} = \frac{1}{a} \cdot M_2 \cdot r_1^2 \cdot r_2^2 \cdot \Omega^4 && (\text{N} \cdot \text{m} \cdot \text{rad}^{-1})
 \end{aligned} \tag{7.4}$$

En introduisant le changement de variables (7.4) dans l'équation (6.5), nous obtenons l'équation des fréquences simplifiée suivante :

$$\omega^4 - \left[ 2 \cdot \Omega^2 + \frac{a}{r_1^2} \right] \omega^2 + \Omega^4 = 0 \tag{7.5}$$

En résolvant en fonction de la pulsation propre au carré de chaque articulation  $\Omega^2$ , l'équation (7.5) s'écrit:

$$\Omega^4 - 2.\omega^2.\Omega^2 + \left( \omega^4 - \frac{a.\omega^2}{r_1^2} \right) = 0 \quad (7.6)$$

L'équation (7.6) a deux solutions:

$$\Omega^2 = \omega \left( \omega \pm \frac{\sqrt{a}}{r_1} \right) \quad (s^{-2}) \quad (7.7)$$

En remplaçant la pulsation propre  $\omega$  du bras de RI par sa valeur minimale calculée à priori  $\omega_{\min}$  (expression (3.28)) et en constatant que le signe - correspond à la fréquence propre haute de bras de RI, nous pouvons trouver la pulsation propre minimale  $\Omega_{\min}$  de chaque articulation à priori, pour un bras de RI réduit à un système à deux degrés de liberté:

$$\boxed{\Omega_{\min}^2 \geq \omega_{\min} \left( \omega_{\min} + \frac{\sqrt{a}}{r_1} \right)} \quad (s^{-2}) \quad (7.8)$$

avec:  $\omega_{\min}$  = pulsation minimale du bras de RI à priori; ( $s^{-1}$ ),

$a$  = raideur angulaire massique, (chapitre 5); ( $N.m.rad^{-1}.kg^{-1}$ ),

$r_1$  = rayon correspondant à l'inertie du degré de liberté n° 1; (m).

## 7.2. BRAS DE RI RÉDUIT À UN SYSTÈME À TROIS DEGRÉS DE LIBERTÉ

Soit le bras de RI réduit au système suivant :

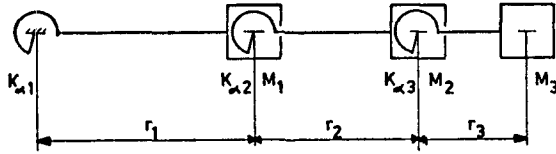


Fig. 7-2 Bras de RI réduit à un système à trois degrés de liberté.

dont l'équation des fréquences est donnée par l'expression (6.5) du chapitre précédent.

Les hypothèses citées précédemment nous permettent de faire le changement de variables suivant :

$$\begin{aligned}
 m_3 &= I_3 = M_3 \cdot r_3^2 && (\text{kg} \cdot \text{m}^2) \\
 k_3 &= K_{\alpha 3} = M_3 \cdot r_3^2 \cdot \Omega^2 && (\text{N} \cdot \text{m} \cdot \text{rad}^{-1}) \\
 m_2 &= I_2 = \frac{1}{a} \cdot M_3 \cdot r_2^2 \cdot r_3^2 \cdot \Omega^2 && (\text{kg} \cdot \text{m}^2) \\
 k_2 &= K_{\alpha 2} = \frac{1}{a} \cdot M_3 \cdot r_2^2 \cdot r_3^2 \cdot \Omega^4 && (\text{N} \cdot \text{m} \cdot \text{rad}^{-1}) \\
 m_1 &= I_1 = \frac{1}{a^2} \cdot M_3 \cdot r_1^2 \cdot r_2^2 \cdot r_3^2 \cdot \Omega^4 && (\text{kg} \cdot \text{m}^2) \\
 k_1 &= K_{\alpha 1} = \frac{1}{a^2} \cdot M_3 \cdot r_1^2 \cdot r_2^2 \cdot r_3^2 \cdot \Omega^6 && (\text{N} \cdot \text{m} \cdot \text{rad}^{-1})
 \end{aligned}
 \tag{7.9}$$

En introduisant le changement de variable (7.10) dans l'équation (6.3), nous obtenons l'équation des fréquences simplifiée suivante:

$$\omega^6 - \left( 3.\Omega^2 + \frac{a}{r_1^2} + \frac{a}{r_2^2} \right) \omega^4 + \left( 3.\Omega^4 + \frac{a.\Omega^2}{r_1^2} + \frac{a.\Omega^2}{r_2^2} + \frac{a^2}{r_1^2.r_2^2} \right) \omega^2 - \Omega^6 = 0 \quad (7.10)$$

En résolvant en fonction de la pulsation propre au carré de chaque articulation  $\Omega^2$ , l'équation (7.10) s'écrit:

$$\Omega^6 - \left( 3.\omega^2 \right) \Omega^4 - \left( \frac{a.\omega^2}{r_1^2} + \frac{a.\omega^2}{r_2^2} - 3.\omega^4 \right) \Omega^2 - \left( \frac{a^2.\omega^2}{r_1^2.r_2^2} - \frac{a.\omega^4}{r_1^2} - \frac{a.\omega^4}{r_2^2} + \omega^6 \right) = 0 \quad (7.11)$$

L'équation (7.11) a trois solutions. Celle dont la valeur est la plus élevée correspond à la fréquence basse du bras de RI, donc la valeur désirée.

En remplaçant la pulsation propre  $\omega$  du bras de RI par sa valeur minimale calculée à priori  $\omega_{\min}$  (expression (3.28)), nous obtenons la pulsation propre minimale  $\Omega_{\min}$  de chaque articulation. Nous pouvons écrire:

$$\Omega_{\min} \geq \Omega_n \quad (s^{-1}) \quad (7.12)$$

Remarque: La résolution algébrique de l'équation (7.11) ne permet pas de trouver une expression littérale simple, par contre la résolution numérique ne pose pas de difficultés.

### 7.3. EXEMPLES

#### 7.3.1 Bras de RI réduit à un système à deux degrés de liberté

Soit le bras de RI réduit suivant:

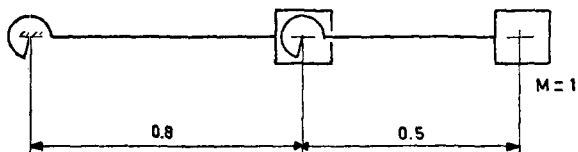


Fig. 7-3 Bras de RI réduit à un système à deux degrés de liberté.

Données:

- fréquence propre minimale du bras de RI :  $f_{\min} \geq 50 \text{ Hz}$  ;
- facteur de raideur massique  $a$  :  $a = 5\,000 \text{ N.m.rad}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$ .

Résultat: Fréquence minimale de chaque articulation:

$$f_{\min(2)} \geq 56,6 \text{ Hz}$$

Vérifications: Fréquences propres du bras de RI:

$$f_1 = 50 \text{ Hz}$$

$$f_2 = 64 \text{ Hz}$$

### 7.3.2. Bras de RI réduit à un système à trois degrés de liberté

Soit le bras de RI réduit suivant:

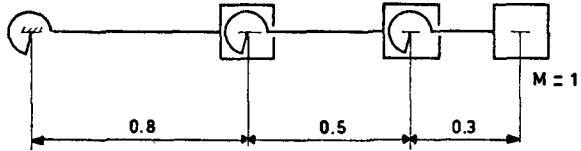


Fig. 7-4 Bras de RI réduit à un système à trois degrés de liberté.

Données:

- fréquence propre minimale du bras de RI :  $f_{\min} = 20$  Hz;
- facteur de raideur massique  $a$  :  $a = 1500 \text{ N.m.rad}^{-1}$ .

Résultat: Fréquence minimale de chaque articulation:

$$f_{\min(3)} = 26,65 \text{ Hz}$$

Vérifications: Fréquences propres du bras de RI:

$$f_1 = 20 \text{ Hz}$$

$$f_2 = 27,4 \text{ Hz}$$

$$f_3 = 34,5 \text{ Hz}$$



## 8. REFLEXIONS ECONOMIQUES ET TECHNOLOGIQUES

### FACTEUR D'ELANCEMENT b

L'étude a porté jusqu'à maintenant sur des considérations essentiellement techniques: quelle que soit la valeur du facteur de raideur massique a nous pouvons théoriquement construire le bras de RI désiré, mais quel en sera le prix ?

Dans l'introduction nous avons défini le bras de RI comme étant une machine "élançée".

L'élançement peut être défini comme suit:

- *Le rapport entre la portée et la "section" du bras de RI.*  
Le bras de RI doit généralement pouvoir déplacer sa charge dans un grand volume de travail avec une structure mécanique aussi peu limitative que possible;
- *Le rapport entre la charge et la masse du bras de RI.*  
A l'exemple du bras humain qui peut porter plus que son poids, un bras de RI est appelé à manipuler une charge ou un outil important par rapport à son poids propre.

Pour illustrer ces définitions, nous pouvons écrire qu'un bras de RI ressemblerait plus à une grue de chantier qu'à un centre d'usinage.

Le bras de RI doit être une machine *légère et performante*, et l'une de ces qualités se fait généralement au détriment de l'autre.

En fait, le bras de RI demande le développement d'une technologie qui lui soit propre.



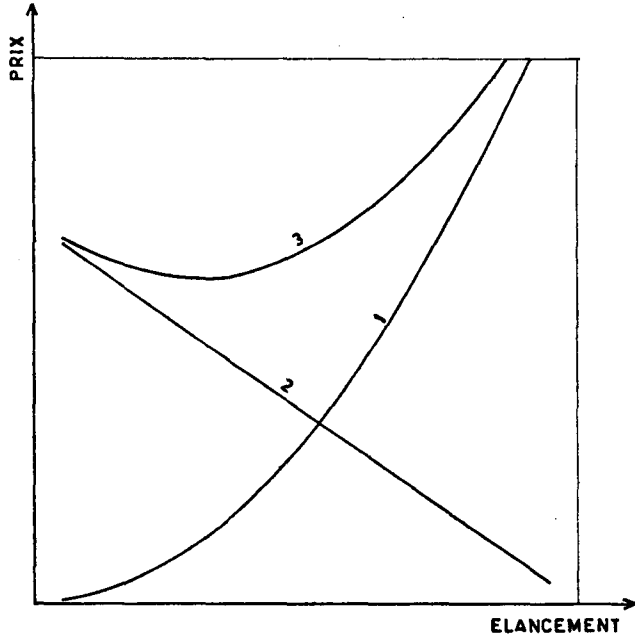
Quelle est l'influence du facteur de raideur massique  $a$  sur la structure mécanique et le prix du bras de RI ?

Deux extrêmes peuvent se présenter:

- Si le facteur de raideur massique  $a$  a une petite valeur, pour obtenir la raideur angulaire minimale calculée, l'articulation sera lourde et volumineuse. La masse et le volume de la charge deviennent insignifiants vis-à-vis de la masse et du volume de l'ensemble du bras de RI: le bras de RI est trapu. L'articulation étant de grande dimension sera d'un prix de fabrication élevé. De plus la consommation énergétique sera hors de proportion avec le travail demandé;
- D'un autre côté, si le facteur de raideur massique  $a$  a une valeur élevée, pour obtenir une raideur angulaire suffisante, l'articulation sera petite et légère. La masse et le volume de la charge deviennent importants par rapport à la structure mécanique. L'apparence du bras de RI devient très élancée. Par contre le niveau technologique permettant une valeur élevée du facteur de raideur massique  $a$  est une technologie de pointe, donc d'un coût de fabrication très élevé. Ce bras de RI risque d'être d'un prix hors de proportion avec le travail demandé.

Il doit exister un optimum situé entre ces deux extrêmes.

Ceci peut être résumé par le graphique suivant:



*Fig. 8-1 Evolution du prix d'un bras de RI.*

En abscisse nous avons l'élancement du bras de RI .

En ordonnée nous avons le prix du bras de RI.

La courbe n°1 est relative au coût "technologique".

La courbe n°2 est relative au coût "matière".

La somme de ces deux courbes nous donne la courbe n°3 qui représente le prix du bras de RI tenant compte de la "technologie" et de la matière en fonction de son élancement. Ce prix a un minimum que nous allons essayer de cerner.

A gauche du graphique se trouve le domaine où domine le coût matière, c'est-à-dire où la valeur du facteur de raideur massique  $a$  est faible.

A droite du graphique se trouve le domaine où domine le coût technologique, c'est-à-dire où la valeur du facteur de raideur massique  $a$  est élevée.

### 8.1. FACTEUR D'ELANCEMENT b

Nous allons définir un nouveau facteur, indépendant de la grandeur du bras de RI et caractérisant l'élanement de celui-ci, que nous nommerons le *Facteur d'élanement b*.

Nous essayerons, en suite, de donner un ordre de grandeur de la valeur de ce facteur d'élanement b, du point de vue esthétique et du point de vue économique, pour un bras de RI "normal".

#### 8.1.1. Facteur d'élanement b faisant intervenir le côté esthétique

##### 8.1.1.1. Cas d'un bras de RI à un degré de liberté

Soit le bras de RI à un degré de liberté suivant:

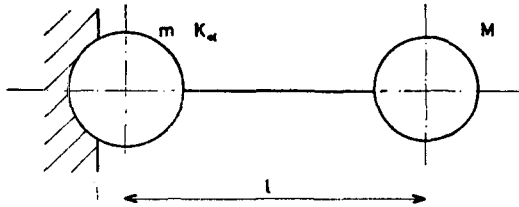


Fig. 8-2 Bras de RI à un degré de liberté.

Ce bras de RI est caractérisé par une articulation de masse  $m$ , de raideur angulaire  $K_\alpha$ , une charge  $M$  et une longueur  $l$ .

La fréquence propre a l'expression suivante:

$$f = \frac{1}{2 \cdot \pi} \sqrt{\frac{K_\alpha}{M \cdot l^2}} \quad (\text{Hz}) \quad (8.1)$$

Soit en introduisant le facteur de raideur massique  $a$  (Chapitre 5):

$$a = \frac{K_\alpha}{m} \quad (\text{N.m.rad}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}) \quad (8.2)$$

d'où:

$$f = \frac{1}{2 \cdot \pi} \sqrt{\frac{a \cdot m}{M \cdot l^2}} \quad (\text{Hz}) \quad (8.3)$$

et:

$$f = \frac{\sqrt{a}}{2 \cdot \pi \cdot l} \sqrt{\frac{m}{M}} \quad (\text{Hz}) \quad (8.4)$$

Nous définissons le terme:

$$b = \sqrt{\frac{M}{m}} \quad (.) \quad (8.5)$$

comme étant le facteur d'élanement b, ce qui permet d'écrire:

$$f = \frac{\sqrt{a}}{2 \cdot \pi \cdot l \cdot b} \quad (\text{H.z}) \quad (8.6)$$

d'où:

$$f \cdot l = \frac{\sqrt{a}}{2 \cdot \pi \cdot b} \quad (m \cdot s^{-1}) \quad (8.7)$$

En introduisant le facteur de qualité Q = f.l (Chapitre 2):

$$Q = \frac{\sqrt{a}}{2 \cdot \pi \cdot b} \quad (m \cdot s^{-1}) \quad (8.8)$$

D'où les expressions du facteur d'élanement b suivantes:

$$b = \frac{\sqrt{a}}{2 \cdot \pi \cdot Q} = \sqrt{\frac{M}{m}} \quad (.) \quad (8.9)$$

et:

$$b^* = 1$$

Dans la pratique, la charge est de 6 à 25 fois plus petite que l'ensemble du bras de RI, ce qui permet d'écrire:

$$0,2 < b < 0,4 \quad (.) \quad (8.10)$$

### 8.1.1.2. Cas d'un bras de RI à j degrés de liberté

Des expressions (8.9), nous pouvons trouver une expression du facteur de raideur massique a:

$$a = (Q \cdot 2 \cdot \pi \cdot b)^2 \quad (\text{N.m.rad}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}) \quad (8.11)$$

Nous introduisons cette expression dans les équations du chapitre 7 dans le but de vérifier si l'on peut écrire pour un bras de RI à j degrés de liberté:

$$b = \frac{\sqrt{a}}{2 \cdot \pi \cdot Q} = \sqrt{\frac{M}{\Sigma m}} \quad (.) \quad (8.12)$$

où  $\Sigma m$  est la somme des masses des articulations, c'est-à-dire la masse du bras de RI.

Nous avons choisi pour cette vérification des valeurs numériques correspondant à celles de bras de RI habituels (par exemple,  $r_1 > r_2 > r_3$ ), et des bras de RI réduits à des systèmes de deux ou trois degrés de liberté.

- a) Bras de RI réduit à un système à deux degrés de liberté

Nous allons étudier la variation du rapport  $\frac{\Sigma m}{M}$  en fonction du facteur d'élanement  $b$  pour des bras de RI réduits à des systèmes à deux degrés de liberté dont les dimensions et la valeur du facteur de qualité sont définies.

Le graphique suivant résume les résultats:

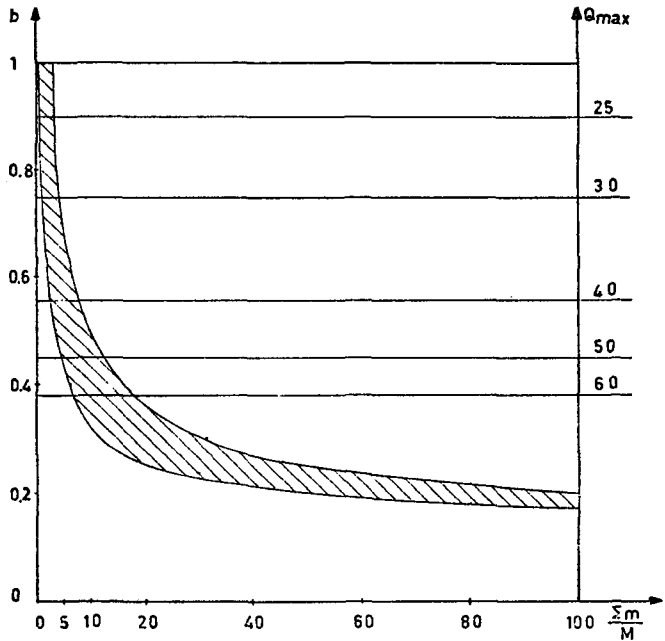


Fig. 8-3 Variation de  $\frac{\Sigma m}{M}$  en fonction du facteur d'élanement  $b$ , pour des bras de RI réduits à des systèmes à deux degrés de liberté.

L'échelle de droite donne la valeur maximale du facteur de qualité  $Q$  que l'on peut atteindre par le choix de la valeur du facteur d'élanement  $b$  sachant que la valeur du facteur de raideur massique  $a$  est limitée. ( $a_{max} = 20\,000 \text{ N.m.rad}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$  au paragraphe 8.2.).

- b) Bras de RI réduit à un système à trois degrés de liberté

Nous allons étudier la variation du rapport  $\frac{\Sigma m}{M}$  en fonction du facteur d'élanement  $b$  pour des bras de RI réduits à des systèmes à trois degrés de liberté dont les dimensions et la valeur du facteur de qualité sont définies.

Le graphique suivant résume les résultats:

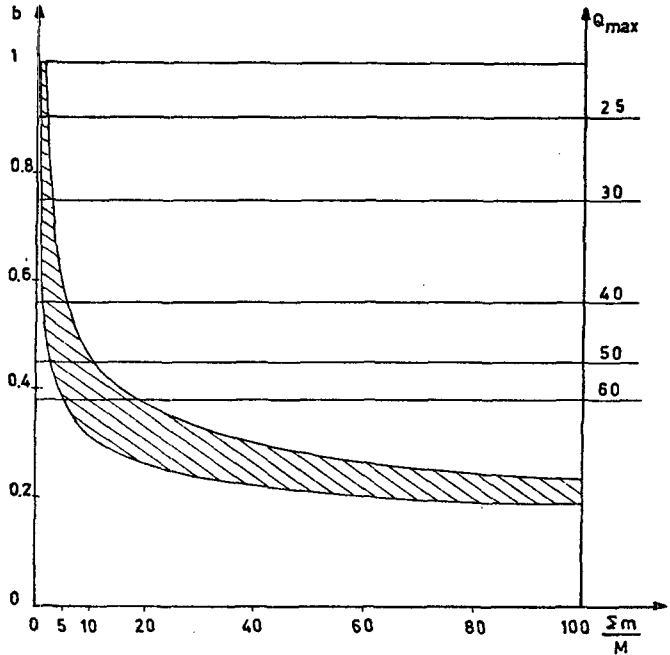


Fig. 8-4 Variation de  $\frac{\Sigma m}{M}$  en fonction du facteur d'élanement  $b$ , pour des bras de RI réduits à des systèmes à trois degrés de liberté.

L'échelle de droite donne la valeur maximale du facteur de qualité  $Q$  que l'on peut atteindre par le choix de la valeur du facteur d'élanement  $b$  sachant que la valeur du facteur de raideur massique  $a$  est limitée. ( $a_{\max} \approx 20\,000 \text{ N.m.red}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$  au paragraphe 8.2.).

Dans ces deux graphiques (figures (8-3) et (8-4)), et autour de la valeur du facteur d'élanement  $b = 0,3$ , nous pouvons vérifier que:

$$b = \frac{\sqrt{a}}{2 \cdot \pi \cdot Q} = \sqrt{\frac{M}{\Sigma m}} \quad (.) \quad (8.13)$$

et donc de donner au facteur d'élanement  $b$  les mêmes valeurs que précédemment, soit:

$$0,2 < b < 0,4 \quad (.) \quad (8.14)$$

#### 8.1.2. Facteur d'élanement $b$ faisant intervenir le côté économique

Donner une valeur au facteur d'élanement  $b$  en faisant intervenir le coté économique est une opération assez subjective faisant intervenir, par exemple, différentes technologies, différents moyens de fabrication et dont le coût change dans le temps et dans des lieux différents.

Pour illustrer ce coté économique, nous choisissons l'exemple de deux articulations actionnées directement par deux moteurs de technologie très différente, délivrant un couple de 10 N.m, la charge inertielle est représentée par une masse de 1 kg à 0,32 m:

- un moteur électrique du type à rotor imprimé (Axem), d'un poids de 25 kg, d'un prix de 3000.- frs et le facteur d'élanement de ce bras de RI vaut:  $b = 0,2$  (expression (8.13));
- un vérin rotatif hydraulique sans joint, d'un poids de 1 kg, d'un prix de 6000.- frs et le facteur d'élanement de ce bras de RI vaut :  $b = 1$  (expression (8.13))



Comme le montre la figure 8-1, le coût d'un bras de RI est fonction de la matière et de la technologie employées.

#### 8.1.2.1 Coût "matière"

Le coût "matière" peut être considéré comme inversement proportionnel au facteur d'élanement  $b$  et pratiquement nul quand  $b = 1$  (voir les figures 8-3 et 8-4):

$$C_m = -y \cdot b + z \quad (8.15)$$

Si  $b = 1$ :

$$0 = -y + z \quad (8.16)$$

d'où:

$$y = z \quad (8.17)$$

et:

$$C_m = y(1 - b) \quad (8.18)$$

#### 8.1.2.2. Coût "technologique"

Le coût "technologique" augmente très rapidement par rapport au facteur d'élanement  $b$  et est nul pour  $b = 0$ ; nous proposons l'équation suivante:

$$C_t = b^2 \cdot x \quad (8.19)$$

#### 8.1.2.3. Coût total

Le coût total est la somme des deux précédents:

$$C = b^2 x + y(1 - b) \quad (8.20)$$

Soit pour le moteur électrique:

$$3000 = 0,04.x + 0,8.y \quad (8.21)$$

Soit pour le vérin hydraulique:

$$6000 = x \quad (8.22)$$

De ce système de deux équations, nous pouvons trouver les valeurs de  $x$  et  $y$ , puis l'équation de la courbe des coûts suivante:

$$C = 6000.b^2 + 3450 (1-b) \quad (8.23)$$

Nous obtenons la valeur minimale du facteur d'élanement  $b$  lorsque la dérivée de l'équation (8.23) est nulle:

$$C' = 0 \quad (8.24)$$

$$C' = 12000.b - 3450 = 0 \quad (8.25)$$

D'où la valeur minimale du facteur d'élanement  $b$ :

$$b = 0,2875 \quad (8.26)$$

Cette valeur est équivalente à celle trouvée dans le cas "esthétique".

### 8.1.3. Valeur du facteur d'élanement b

En résumé nous pouvons écrire:

$$\boxed{b \approx \frac{M}{\Sigma m}} \quad (.) \quad (8.27)$$

avec: M = charge du bras de RI, (kg);

$\Sigma m$  = masse du bras de RI, (kg).

$$\boxed{b = \frac{\sqrt{a}}{2 \cdot \pi \cdot Q_{\min}}} \quad (.) \quad (8.28)$$

et:

$$\boxed{a = [Q_{\min} \cdot 2 \cdot b]^2} \quad (\text{N.m.rad}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}) (8.29)$$

avec: a = facteur de raideur massique, chapitre 5, ( $\text{N.m.rad}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$ );

b = facteur d'élanement, (.);

$Q_{\min}$ : ces valeurs étant choisies à priori, le facteur de qualité est celui calculé à priori défini au chapitre 4, ( $\text{m.s}^{-1}$ ).

La valeur du facteur d'élanement b tant dans le cas "esthétique" que dans le cas "économique" est optimale si:

$$\boxed{0,2 < b < 0,4} \quad (.) \quad (8.30)$$

## 8.2. CHOIX TECHNOLOGIQUES

Les trois facteurs, le facteur de qualité  $Q$ , le facteur de raideur massique  $a$  et le facteur d'élanement  $b$ , qui sont liés entre eux (expressions (8.5) à (8.7)) sont réunis dans le tableau  $Qab$  suivant:

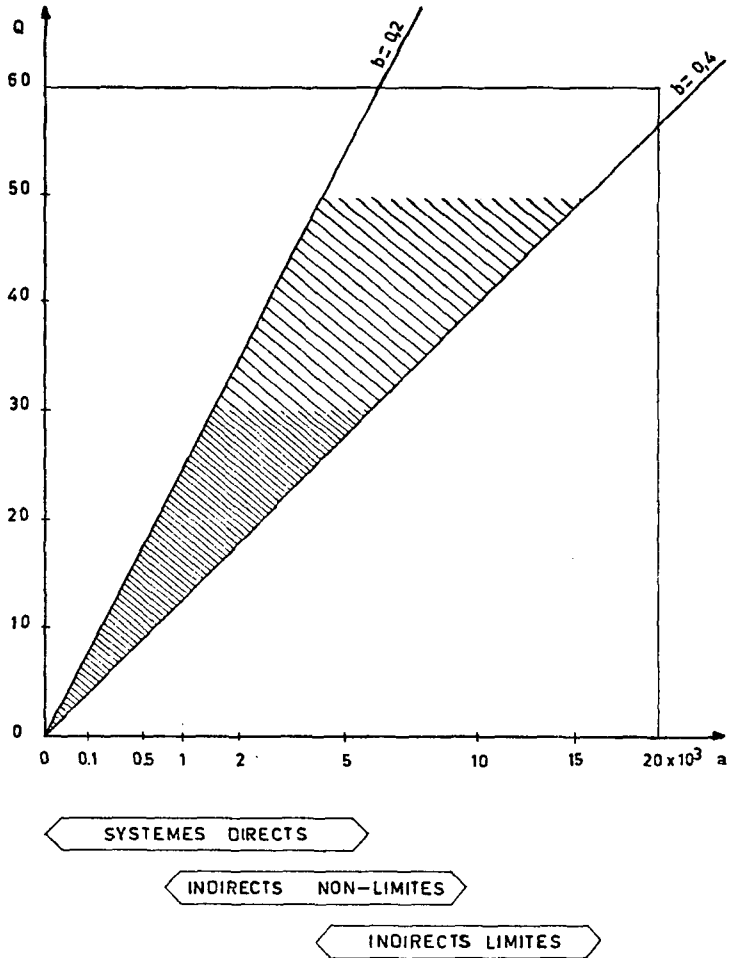


Fig. 8-4 Tableau  $Qab$  réunissant les facteurs  $Q$ ,  $a$  et  $b$ .

Dans le tableau Qab, nous pouvons délimiter trois zones d'influence correspondant aux trois familles d'éléments articulations, chacune d'elle étant subdivisée selon sa technologie énergétique: à gauche le domaine électrique et à droite le domaine hydraulique.

Ces trois familles d'éléments articulations sont:

- *les systèmes directs*: le moteur actionne directement l'articulation, sans intermédiaire. Par exemple: un vérin rotatif;
- *les systèmes indirects non limités en rotation*: le moteur actionne l'articulation par l'intermédiaire d'un réducteur. Par exemple: un moteur électrique avec un réducteur "Harmonic-Drive" (M.1:185-216)(M.2)(H.11)(D.3);
- *les systèmes indirects limités en rotation*: le moteur actionne l'articulation par l'intermédiaire d'un système à levier. Par exemple: un système à levier actionné au moyen d'un moteur électrique et d'une vis à bille.

Ces trois zones se recoupent et ne correspondent pas à des domaines bien délimités. Elles permettent de donner des indications pour faciliter un choix.

Ces zones ont tendance à s'élargir vers la droite, c'est-à-dire à avoir une augmentation du facteur de raideur massique a grâce aux progrès techniques et au développement d'une technologie bien adaptée aux bras de RI.

La limite actuelle du facteur de qualité  $Q$  est située vers une valeur de  $50 \text{ m.s}^{-1}$ .

Au-dessus de la valeur de  $30 \text{ m.s}^{-1}$  une nouvelle construction rencontrera un niveau élevé de difficulté.

On peut écrire pour le facteur de qualité  $Q$ :

$Q > 50$	construction impossible	(8.31)
$30 < Q < 50$	construction difficile	
$Q < 30$	construction possible	

Les limitations du facteur de qualité  $Q$  jointes aux limitations essentiellement économiques et technologiques dûes au facteur d'élanement  $b$  déterminent dans le tableau  $Q_{ab}$ :

- un *grand triangle* limité par  $b = 0,2$  et  $b = 0,4$  et  $Q = 50$  à l'intérieur duquel s'opèrent les choix garantissant un bras de RI optimal au coût minimal;
- un *petit triangle* limité par  $b = 0,2$  et  $b = 0,4$  et  $Q = 30$  plus limitatif que le précédent et à l'intérieur duquel une construction ne devrait pas offrir de difficultés majeures.

### 8.3. FREQUENCE PROPRE A PRIORI DES ARTICULATIONS : EXPRESSION SIMPLIFIEE

Si le facteur de raideur massique  $a$  a pour valeur l'expression (8.29)

$$a = (Q_{\min} \cdot 2 \cdot \pi \cdot b)^2 \quad (\text{N.m.rad}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}) \quad (8.32)$$

avec la valeur du facteur d'élanement  $b$  choisie telle que:

$$b = 0,4 \quad (.) \quad (8.33)$$

le facteur de raideur massique devient:

$$a = 6,32 \cdot Q_{\min}^2 \quad (\text{N.m.rad}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}) \quad (8.34)$$

Si de plus:

$$r_1 = r_2 = r_3 = r_n \quad (\text{m}) \quad (8.35)$$

nous pouvons écrire pour la fréquence propre à priori des articulations  $f_{\min(n)}$  d'après le chapitre 7:

- pour un bras de RI réduit à un système à deux degrés de liberté:

$$f_{\min(2)} = 1,342 \cdot f_{\min} \approx \sqrt{2} \cdot f_{\min} \quad (\text{Hz}) \quad (8.36)$$

- pour un bras de RI réduit à un système à trois degrés de liberté:

$$f_{\min(3)} = 1,722 \cdot f_{\min} \approx \sqrt{3} \cdot f_{\min} \quad (\text{Hz}) \quad (8.37)$$

- pour un bras de RI réduit à un système à  $j$  degrés de liberté:

$$f_{\min(j)} \approx \sqrt{j} \cdot f_{\min} \quad (\text{Hz}) \quad (8.38)$$

avec:  $f_{\min}$  = fréquence minimale du bras de RI, expression (3.28); (Hz),

$j$  = nombre de degrés de liberté réduit d'un bras de RI, chapitre 6,  $j \leq 3$ ; (.).

---





## 9. CONCLUSION

### 9.1. ORGANIGRAMME POUR LA CONCEPTION D'UN BRAS DE RI

La procédure à mettre en oeuvre pour la conception d'un bras de RI peut être résumée par l'organigramme suivant :

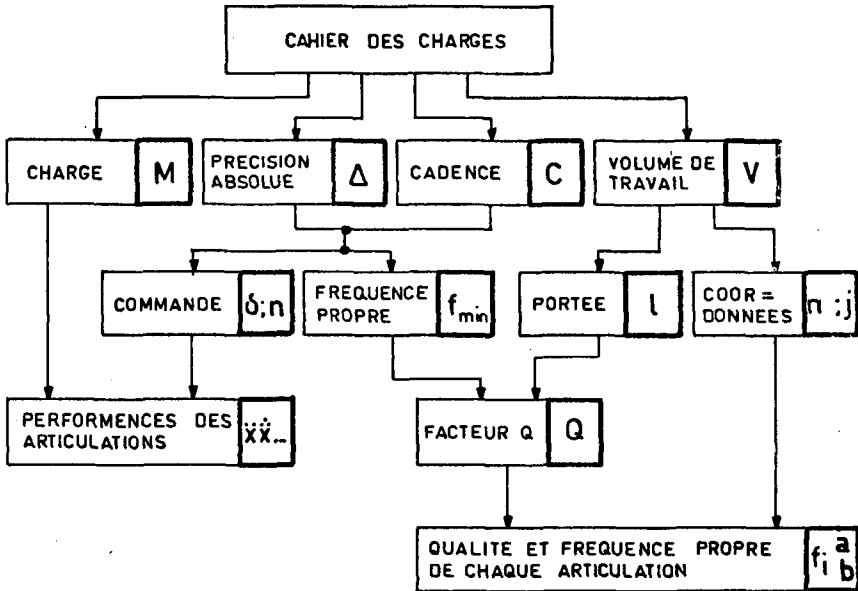


Fig. 9-1 Organigramme pour la conception d'un bras de RI.

## 9.2. CAHIER DES CHARGES

La famille de travaux à laquelle est destinée un bras de RI détermine le *cahier des charges* général résumant les performances souhaitées et permettant au constructeur d'établir ses objectifs.

Le cahier des charges fixe les exigences principales suivantes:

- *la charge à manipuler M* qui comprend:
  - soit *une pièce et l'organe de préhension adéquat*,  
par exemple: pince multidoigts, électroaimant, ventouse avec vide;
  - soit *un outil de travail spécifique*,  
par exemple: pistolet à peinture, pince à souder point par point, chalumeau oxy-acétylénique;

La charge peut être comprise entre le milligramme et quelques dizaines de kilogrammes;

- *la précision absolue  $\Delta$*  est restreinte à l'amplitude maximale de vibration du bras de RI.

Il faut aussi tenir compte de la *répétabilité* qui garantit une stabilité des positions de travail au cours du temps (la répétabilité dépend de la stabilité de tout le bras de RI: structure, capteurs par exemple) et de la *résolution* qui est le déplacement minimal possible (voir annexes chapitre C sur le stick-slip) et de la *précision de travail*.

La précision absolue, la répétabilité et la résolution sont du même ordre de grandeur et de quatre à dix fois inférieures à la précision de travail attendue. (F.2:5) (N.1:42-43).

précision absolue $\Delta$ répétabilité résolution	$\approx \frac{1}{4} \text{ à } \frac{1}{10} \text{ de la précision de travail}$	(9.1)
--	--	-------

La précision de travail est de l'ordre de quelques centièmes de millimètre pour les travaux de montage en microtechnique à plusieurs millimètres pour les travaux de peinture;

- *La cadence C* de travail du RI correspond à celle du système dans lequel il est inclus.

La cadence donne des informations sur un cycle élémentaire par la longueur d'un parcours moyen dans un temps donné. Pour un RI de montage ou pour une place de travail robotisée (par exemple pour le soudage des carrosseries d'automobiles) les temps de déplacement sont de l'ordre de 30 à 50 % du cycle total de travail (S.1), le temps restant étant employé pour la saisie de pièces ou d'outils, ou en attente. Un cycle de travail peut durer de une seconde à plusieurs minutes (par exemple 30 mn);

- *Le volume de travail V.* La famille de travaux qu'exécutera le bras de RI a une influence sur le choix des coordonnées principales et sur le nombre de degrés de liberté. Par exemple, l'exécution de droites sur un plan pour la recharge par soudure sera préférée, pour une simplification de la commande, des translations à des rotations. Nous avons à disposition quatre groupes de systèmes de coordonnées principales:

1: 3 translations: les coordonnées cartésiennes;

2: 2 translations et 1 rotation: par exemple les coordonnées cylindriques;

3: 1 translation et 2 rotations: par exemple les coordonnées sphériques;

4: 3 rotations: les coordonnées angulaires.

La mobilité du poignet sera réalisée par 1 à 3 rotations d'axes concourants ou non concourants.

Le volume de travail  $V$  est l'ensemble des points que peut atteindre l'extrémité du bras de RI.

Le volume de travail peut avoir de quelques centimètres cubes pour des travaux de microtechnique à plusieurs mètres cubes pour la manipulation.

Un bras de RI peut avoir jusqu'à  $n = 6$  ou plus degrés de liberté. Le chapitre 6 nous montre comment l'étude d'un bras de RI de  $n$  degrés de liberté vibrant dans l'espace peut être réduite à l'étude d'un système oscillant dans un plan de  $j$  degrés de liberté,  $j \leq 3$ ;

- *La portée  $l$ .* Quelles que soient les coordonnées et la géométrie choisies, le bras de RI a une position "la plus défavorable" pour son comportement statique et dynamique. Cette position correspond généralement à des positions extrêmes de chaque degré de liberté. Nous la définissons comme la portée  $l$ . Cette portée  $l$  peut avoir de quelques centimètres à plusieurs mètres ( $\approx 2$  à  $3$  m).

Les bases du cahier des charges étant définies, nous pouvons calculer la valeur des facteurs de qualité  $Q$ , de raideur massique  $a$  et d'élanement  $b$ .

Le facteur de qualité  $Q$  qui caractérise l'ensemble du RI nous permet de juger la "faisabilité" d'une nouvelle construction.

Le facteur de raideur massique  $a$  et le facteur d'élanement  $b$  permettent un choix optimal des actuateurs en fonction des exigences du cahier des charges.

Le choix des actuateurs étant fait pour le mode "mouvements fins", nous devons vérifier leurs caractéristiques dynamiques (par exemple: le couple, la vitesse maximale) pour le mode "grands mouvements". (voir introduction, chapitre 1).

### 9.3. FACTEUR DE QUALITE Q

La fréquence propre minimale  $f_{\min}$  que devra avoir le bras de RI est donnée par l'expression (3.28):

$$f_{\min} \geq \frac{1}{2 \cdot \pi} \left( \frac{1}{\Delta} \Sigma \delta^{(n)} \right)^{\frac{1}{n}} \quad (\text{Hz}) \quad (9.2)$$

avec:  $\Sigma \delta^{(n)}$  = somme des *niveaux de la commande* ( $\text{m.s}^{-1}$ ,  $\text{m.s}^{-2}$ , ...),  
(voir chapitre 3);

$n$  = *douceur de la commande* (.), (voir chapitre 3);

$\Delta$  = *précision absolue* (m), (voir paragraphe 9.2.).

Cette formule définit des paramètres de la commande ( $\delta^{(n)}$  et  $n$ ) et donne des exigences pour les acteurs du bras de RI (vitesse, couple, accélération).

La valeur minimale du facteur de qualité  $Q_{\min}$  s'écrit (expression (4.2)):

$$Q_{\min} \geq f_{\min} \cdot l \quad (\text{m.s}^{-1}) \quad (9.3)$$

avec:  $f_{\min}$  = fréquence propre minimale du bras de RI; (Hz),

$l$  = portée maximale du bras de RI; (m).

La valeur du facteur de qualité  $Q$  peut rapidement être trouvée au moyen de l'abaque de la figure 4-1.

La limite actuelle du facteur de qualité  $Q$  est de l'ordre de  $50 \text{ m.s}^{-1}$ . Au-dessus de la valeur de  $30 \text{ m.s}^{-1}$ , une construction devient difficile.

Si la valeur du facteur de qualité  $Q_{\min}$  calculé a priori est trop élevée il faut modifier les exigences de la commande, par exemple, passer d'une commande à accélération constante à une commande à jerk constant, ou diminuer les exigences du RI (précision, cadence par exemple).

Le facteur de qualité  $Q$  appliqué à des RI réels permet de les comparer entre eux. Dans ce cas, il est défini comme le produit de la fréquence propre basse  $f_b$  et la portée maximale  $l$  du bras de RI (expression (2.21)):

$$Q = f_b \cdot l \quad (\text{m} \cdot \text{s}^{-1}) \quad (9.4)$$

avec:  $f_b$  = fréquence propre basse du bras de RI; (Hz),

$l$  = portée maximale du bras de RI; (m).

Le RI auquel est attribué la valeur la plus élevée du facteur de qualité  $Q$  est le meilleur.

#### 9.4. FACTEURS DE RAIDEUR MASSIQUE a ET D'ELANCEMENT b

Le *facteur de raideur massique a* caractérise la qualité d'une articulation. Les rotations comme les translations sont généralement réalisées à partir d'actuateurs rotatifs.

Le facteur de raideur massique a est défini comme le rapport entre la raideur angulaire  $K_\alpha$  et la masse de l'élément articulation, (voir chapitre 5):

$$a = \frac{K_\alpha}{m} \quad (\text{N.m.rad}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}) \quad (9.5)$$

avec:  $K_\alpha$  = raideur angulaire de l'articulation; ( $\text{N.m.rad}^{-1}$ ),  
 $m$  = masse de l'articulation; (kg).

Le *facteur d'élanement b* caractérise l'élanement du bras de RI. c'est-à-dire un rapport entre la charge et la masse de la structure. Le facteur d'élanement b est défini de la manière suivante, (expression (8.27/28)):

$$b = \frac{\sqrt{a}}{2 \cdot \pi \cdot Q_{\min}} \approx \sqrt{\frac{M}{\Sigma m}} \quad (.) \quad (9.6)$$

avec: a = facteur de raideur massique; ( $\text{N.m.rad}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$ ),  
 $Q_{\min}$  = valeur minimale du facteur de qualité, expression (9.3);  
 ( $\text{m.s}^{-1}$ ),  
 $M$  = charge du bras de RI; (kg),  
 $\Sigma m$  = masse de bras de RI; (kg).

Plus la valeur du facteur d'élanement b est élevée, plus le bras de RI est élané. Une valeur "normale" du facteur d'élanement b est:

$$b = 0,3 \quad (.) \quad (9.7)$$

Nous trouvons une nouvelle définition du facteur de raideur massique a:

$$a = (Q_{\min} \cdot 2 \cdot \pi \cdot b)^2 \quad (\text{N.n.rad}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}) \quad (8.8)$$



Ces trois facteurs sont réunis dans le tableau Qab suivant :

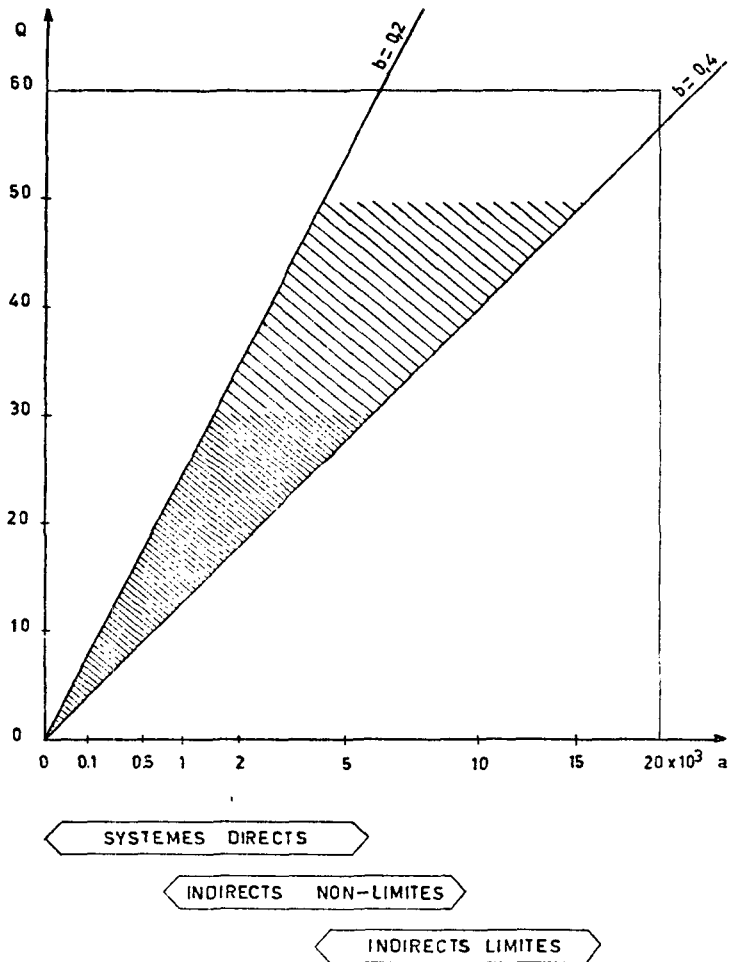


Fig. 9-2 Tableau Qab.

De tableau Qab, décrit au chapitre 8 en détails, permet de donner des valeurs optimales à chacun de ces facteurs, et d'orienter le choix technologique. Le domaine hachuré correspond aux choix optimaux.

### 9.5. FREQUENCE PROPRE DE CHAQUE ARTICULATION

Le calcul des fréquences propres d'un bras de RI nous conduit à l'étude d'un système de  $n$  oscillateurs harmoniques vibrant librement dans l'espace. Cette étude peut se ramener à l'étude d'un système de  $j$  oscillateurs harmoniques vibrant librement dans un plan, avec  $j \leq 3$ . (voir chapitres 1, 6 et 7).

Si la valeur des facteurs de qualité  $Q$ , de raideur massique  $a$  et d'élanement  $b$  est choisie de manière optimale (voir chapitre 8), nous avons montré que la fréquence propre minimale  $f_{\min(j)}$  de chaque degré de liberté pris séparément à la valeur suivante:

$$f_{\min(j)} = \sqrt{j} \cdot f_{\min} \quad (\text{Hz}) \quad (9.9)$$

avec:  $f_{\min(j)}$  = fréquence propre minimale de chaque degré de liberté pris séparément; (Hz),

$f_{\min}$  = fréquence propre à priori du RI, (expression (9.2)); (Hz),

et comme hypothèse :  $r_1 = r_2 = r_3 = r_j$

Le cas général est développé au chapitre 7.

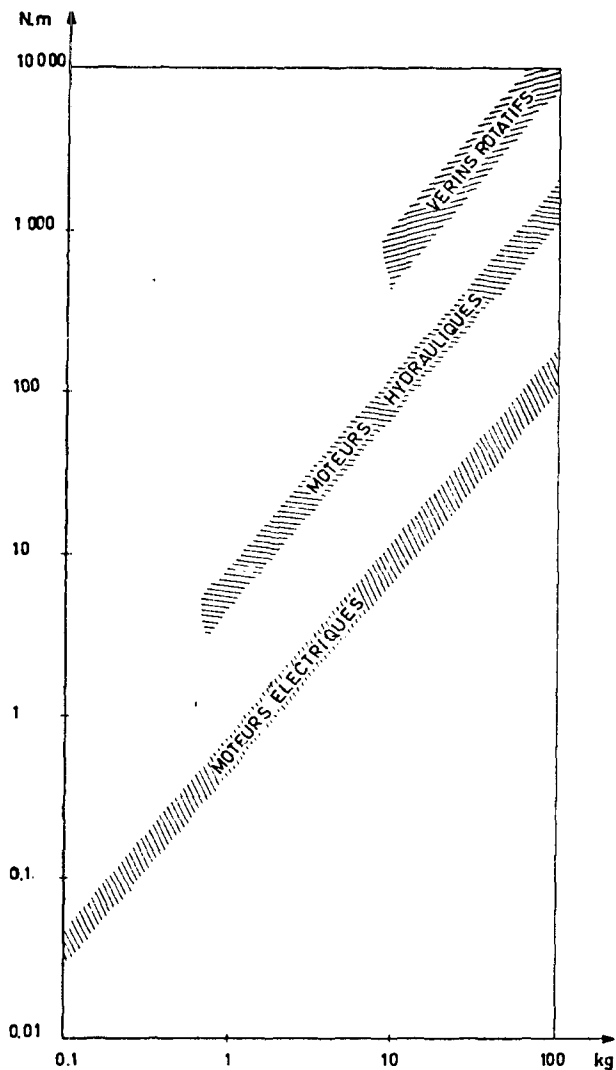
Le calcul des fréquences propres d'un RI est développé aux chapitres 1, 6 et 7.

### 9.6. PERFORMANCES DES ARTICULATIONS.

Il reste à vérifier si les actionneurs choisis permettent l'exécution des ordres de la commande, c'est à dire qu'il faut contrôler la vitesse, l'accélération et le couple fournis par eux.

Selon les caractéristiques des asservissements, le couple du moteur devra être très supérieur au couple utile.

Le tableau suivant, inspiré d'un rapport du C.S. Draper Lab. (N.1:41) facilite le choix des moteurs. Il nous donne une information sur le couple par kilogramme que peut délivrer un moteur muni d'un capteur de mesure et éventuellement d'un réducteur.



*Fig. 9-3 Couple par kilogramme pour des moteurs électriques et hydrauliques.*

Nous pouvons noter la supériorité des actionneurs hydrauliques sur les moteurs électriques et parmi les actionneurs hydrauliques, celle des vérins rotatifs (pour un actionneur hydraulique le couple est proportionnel à la cylindrée par radian).

### 9.7. EXEMPLE DE CALCUL D'UN BRAS DE RI

Soit le cahier des charges suivant définissant un nouveau RI:

- *charge*: 1 kg;
- *cadence*: 0,5 m en 1 seconde;
- *volume de travail*: les coordonnées angulaires sont choisies pour leurs avantages technologiques au niveau des paliers, des joints, du volume de travail par exemple.
  - Portée :  $l = 0,6 \text{ m}$  ;
  - base-coude :  $r_1 = 0,24 \text{ m}$  ;
  - coude-poignet :  $r_2 = 0,24 \text{ m}$  ;
  - poignet-charge:  $r_3 = 0,12 \text{ m}$  ;
  - *précision absolue*:  $\Delta = 10^{-5} \text{ m}$ .

La première étape est le calcul de la valeur du facteur de qualité  $Q$  et de son incidence sur les caractéristiques de la commande.

Nous choisissons une loi de mouvement à profil triangulaire et appliquons les expressions (3.28) et (4.3). Les résultats sont rassemblés dans le tableau suivant:

$n: (.)$	$\delta^{(n)}: (m.s^{-n})$	$f_{\min} : (Hz)$	$Q : (m.s^{-1})$
1	0,5	$16.10^3$	$95.10^2$
2	2	142	85
3	16	37	22



La commande doit avoir une douceur au minimum égale à:  $n = 3$ , pour avoir un facteur de qualité  $Q$  inférieur à 50, donc permettant la réalisation d'un tel RI.

Connaissant la valeur du facteur de qualité  $Q$  et choisissant la valeur 0,4 pour le facteur d'élanement  $b$ , nous pouvons calculer la valeur optimale du facteur de raideur massique  $a$  à l'aide de l'expression (8.7) et choisir la technologie adéquate.

Nous trouvons pour la valeur du facteur de raideur massique  $a$ :

$$a = 3\,200 \text{ N.m.rad}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$$

Nous choisissons comme élément articulation, après consultation du tableau  $Q_{ab}$  (figure 8-4 ou 9-3), un vérin rotatif hydraulique.

Ce bras de RI peut être réduit à un système à trois degrés de liberté. La résolution de l'équation (7.11) nous permet de trouver la fréquence propre minimale  $f_{\min(3)}$  à priori de chaque articulation:

$$f_{\min(3)} \geq 60 \text{ Hz}$$

Vérification: pour vérification, calculons les trois fréquences propres  $f_n$  du RI. Nous trouvons:

$$f_1 = 37 \text{ Hz}$$

$$f_2 = 66 \text{ Hz}$$

$$f_3 = 89 \text{ Hz}$$

ce qui correspond aux besoins.

Vérification des couples: la vérification se limite aux vérins de la base, les plus sollicités du point de vue couple.

Dans la position la plus défavorable, nous trouvons pour le couple nécessaire  $C_n$  :

$$C_n = 25 \text{ N.m}$$

Sachant que le couple par kilogramme vaut environ  $20 \text{ N.m.kg}^{-1}$  pour le type de vérin employé, nous trouvons pour le couple réel  $C_r$  des vérins de base:

$$C_r = 85 \text{ N.m}$$

Le couple réel  $C_r$  est nettement supérieur au couple nécessaire  $C_n$  ce qui facilitera les problèmes d'asservissement.

### 9.8. CONCLUSION

La méthode de conception d'un bras de RI proposée dans ce travail permet une évaluation rapide de la "faisabilité" d'une nouvelle construction avec l'aide du facteur de qualité  $Q$  et de diriger le choix vers la solution optimale tant du point de vue technique qu'économique grâce aux facteurs de raideur massique  $a$  et d'élanement  $b$ .

De plus, le facteur de qualité  $Q$  permet de comparer la "qualité" de différents RI.

Le facteur de qualité  $Q$  pourrait, à l'avenir, faire partie de la fiche technique d'un RI.

---

---





10. ANNEXES



## A. TABLE DES MATIERES DES ANNEXES

A. <u>TABLE DES MATIERES DES ANNEXES</u>	I
B. <u>DESIGNATIONS, SYMBOLES, UNITES</u>	II
C. <u>STICK-SLIP</u>	IV
C.1. Définition du problème	IV
C.2. Explication du phénomène	V
C.3. Equations simplifiées du stick-slip	V
C.4. Remarques	VI
C.5. Lutte contre le stick-slip	VIII
D. <u>COMMANDE</u>	X
D.1. Partie informatique	X
D.2. Partie puissance	X
D.2.1. Asservissement des moteurs	X
D.2.2. Remarques	XII
D.2.3. Consigne de position	XIII
D.3. Amélioration des caractéristiques d'un RI	XIV
D.4. Remarque	XV
D.5. Exemple	XVI
E. <u>LOIS DE SIMILITUDE</u>	XIX
F. <u>CATALOGUE</u>	XXIII
G. <u>BIBLIOGRAPHIE</u>	XXIV
H. <u>CURRICULUM VITAE</u>	XXXIII

---



## B. DESIGNATIONS, SYMBOLES, UNITES

DESIGNATIONS	SYMBOLES	UNITES
Accélération:	$a, \ddot{x}, \dots$	$m.s^{-2}$
Accélération angulaire:	$\dot{\omega}, \ddot{\alpha}, \ddot{\beta}, \dots$	$rad.s^{-2}$
Angle:	$\alpha, \beta, \dots$	rad
Couple:	C	N.m
Dépassement:	$\Delta$	m
Douceur de la commande:	n	(.)
Facteur de raideur massique:	a	$N.m.rad^{-1}.kg^{-1}$
Facteur d'élanement:	b	(.)
Facteur de qualité:	Q	$m.s^{-1}$
Force:	F, G	N
Fréquence:	f	Hz
Fréquence minimale d'un bras de RI:	$f_{min}$	Hz
Fréquence minimale d'une articulation:	$f_{min(n)}$	Hz
Fréquence propre basse d'un bras de RI:	$f_b$	Hz
Fréquence propre d'un bras de RI:	$f_n$	Hz
Fréquence propre d'une articulation:	$f_{(n)}$	Hz
Jerk:	$j, \dot{\ddot{x}}, \dots$	$m.s^{-3}$
Longueur:	l, x	m

DESIGNATIONS	SYMBOLES	UNITES
Masse:	M	kg
Masse généralisée:	m	kg ou $\text{kg.m}^2$
Moment d'inertie:	I	$\text{kg.m}^2$
Nombre de degrés de liberté d'un RI:	n	(.)
Nombre de degrés de liberté réduit:	j	(.)
Niveau de la commande:	$\delta^{(n)}$	$\text{m.s}^{-n}$
Portée maximale du bras de RI:	l	m
Précision absolue:	$\Delta$	m
Pulsation propre:	$\omega$	$\text{s}^{-1}$
Pulsation minimale d'un bras de RI:	$\omega_{\min}$	$\text{s}^{-1}$
Pulsation minimale d'une articulation:	$\Omega_{\min(n)} = \Omega$	$\text{s}^{-1}$
Pulsation propre besse d'un bras de RI:	$\omega_b$	$\text{s}^{-1}$
Pulsation propre d'un bras de RI:	$\omega_n$	$\text{s}^{-1}$
Pulsation propre d'une articulation:	$\Omega_n$	$\text{s}^{-1}$
Raideur linéaire:	K	$\text{N.m}^{-1}$
Raideur angulaire:	$K_\alpha$	$\text{N.m.rad}^{-1}$
Raideur généralisée:	k	$\text{N.m}^{-1}$ ou $\text{N.m.rad}^{-1}$
Rapport de similitude dimensionnelle:	L	(.)
Rayons du bras de RI:	$r_n$	m
Temps:	T, t	s
Vitesse:	v, $\dot{x}$ , ...	$\text{m.s}^{-1}$
Vitesse angulaire:	$\omega$ , $\dot{\alpha}$ , $\dot{\beta}$ , ...	$\text{rad}^{-1}$

## C. STICK - SLIP

Le stick-slip (P.1: glissière 18)(N.1:45) est un phénomène différent de ceux que nous avons étudié dans ce travail, mais il n'en est pas moins important.

Le stick-slip est relatif au "plus petit déplacement" ou au "plus petit bond" qu'un élément articulation peut faire.

Le stick-slip fait intervenir le frottement sec, mais aussi la raideur de l'élément articulation (moteur-régulateur).

Le stick-slip ne doit pas être négligé dans la construction d'un bras de RI: il est difficile de le calculer avec précision mais il peut être estimé. Quelques règles simples permettent de diminuer ses effets.

### C.1. DEFINITION DU PROBLEME

Soit une masse  $m$  tirée par l'intermédiaire d'un ressort de raideur  $K$ , représentant en fait la raideur de l'élément moteur-commande (Annexes, chapitre D) sur une surface plane,  $\mu(\dot{x})$  le coefficient de glissement dynamique et  $\mu_0$  le coefficient de glissement statique.

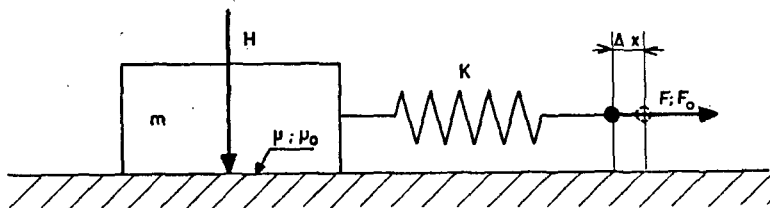


Fig. C-1 Stick-slip.



Soit:  $F = \mu(\dot{x}) \cdot H$  : force de frottement dynamique; (N),

$F_0 = \mu_0 \cdot H$  : force de frottement statique; (N),

$\mu_0 > \mu(\dot{x})$  : à vitesse lente;

$$\Delta F = F_0 - F$$

A vitesse lente, la masse  $m$  avancera par à-coup. Ce sont ces sauts qui détermineront le plus petit déplacement possible.

### C.2. EXPLICATION DU PHENOMENE

Tant que la force  $K \cdot \Delta x$  est plus petite que la force  $F_0$  due au coefficient de glissement statique, la masse  $m$  ne se déplacera pas. Dès que  $\Delta x$  devient tel que:  $K \cdot \Delta x > F_0$ , la masse  $m$  se déplace. Son coefficient de glissement passe brusquement de  $\mu_0$  à  $\mu(\dot{x})$ . La masse  $m$  se déplace de la distance  $e$  nécessaire pour que la vitesse soit nulle. Et le phénomène recommence. (voir figure C-3).

### C.3. EQUATIONS SIMPLIFIEES DU STICK-SLIP

Le stick-slip apparait à vitesse lente. On peut poser:

$$\mu(\dot{x}) = \text{constante} = \mu \quad (.) \quad (C.1)$$

Equation du système:

$$m \cdot \ddot{x} + K \cdot x = \Delta F \quad (C.2)$$

dont la solution qui nous intéresse est:

$$x = \frac{\Delta F}{K} \cdot (1 - \cos \omega t) \quad (C.3)$$

La longueur du saut est définie pour:

$$\dot{x} = 0 \quad (C.4)$$

D'où:

$$t = \frac{n \cdot \pi}{\omega} \quad (C.5)$$

La longueur du saut e devient:

$$e = x \quad \text{quand} \quad \dot{x} = 0 \quad (C.6)$$

$$e = \frac{2 \cdot \Delta F}{K} \quad (m) \quad (C.7)$$

Et avec l'hypothèse (C.1):

$$e = \frac{2 \cdot H}{K} \cdot (\mu_0 - \mu) \quad (m) \quad (C.8)$$

avec: H = force perpendiculaire à la surface de glissement; (N),

K = raideur du moteur-régulateur; (N.m<sup>-1</sup>),

$\mu$  = coefficient de glissement dynamique; (.),

$\mu_0$  = coefficient de glissement statique; (.).

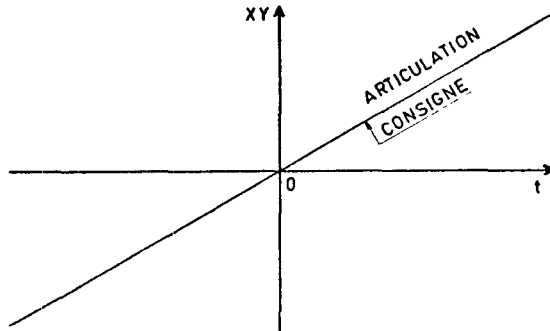
#### C.4. REMARQUES

Le stick-slip est inhérent à tout système en mouvement.

Le stick-slip pose des problèmes pour les RI, particulièrement pour ceux qui travaillent avec une contre-réaction avec capteurs d'environnement.

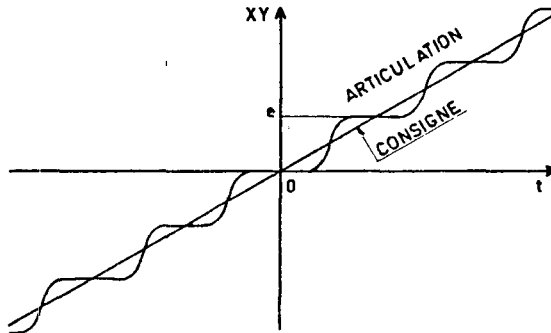
Dans ces cas nous avons besoin de travailler autour d'une vitesse nulle pour l'approche finale.

Dans une situation idéale, nous aimerions avoir une variation linéaire de la vitesse de l'articulation autour d'une vitesse nulle, c'est-à-dire une vitesse aussi fidèle que possible à la consigne de vitesse, même autour de la vitesse zéro, comme le montre la figure suivante:



*Fig. C-2 Cas idéal: L'articulation suit fidèlement la consigne.*

En réalité, à cause des frottements, la relation consigne-articulation est beaucoup plus complexe, par exemple si la vitesse de consigne est faible, il se produit du stick-slip:



*Fig. C-3 Cas réel: le stick-slip; le plus petit déplacement est égal à e.*

Si la vitesse de consigne est élevée, il se produit un retard au démarrage, comme le montre la figure suivante:

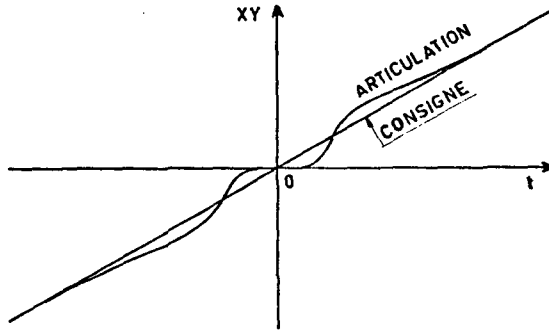


Fig. C-4 Cas réel: retard au démarrage.

Dans les deux cas, il se produit un bond au démarrage qui perturbe le comportement du bras de RI autour d'une vitesse nulle.

#### C.5. LUTTE CONTRE LE STICK-SLIP

Le stick-slip est donc fonction de la différence entre le coefficient de glissement statique  $\mu_0$  et dynamique  $\mu$  et de l'inverse de la raideur du moteur-régulateur.

Pour lutter contre le stick-slip, il y a deux possibilités:

- augmenter la raideur de l'élément moteur-régulateur (voir annexes chapitre D);
- éviter toutes sources de frottement par l'emploi de solutions adéquates, par exemple:
  - emploi de paliers à corps roulants, de paliers hydrostatiques;

- éviter les intermédiaires entre le moteur et la charge, tels que les réducteurs et les accouplements;
  - éviter les joints, et dans les cas indispensables les choisir avec beaucoup de soins;
  - en hydraulique, employer les joints toujours déchargés;
  - bannir les hyperstatismes.
-

## D. COMMANDE

La commande est le cerveau du RI, elle gouverne la mécanique.

La commande se compose de deux parties:

- une partie *Informatique*: élaboration des ordres;
- une partie *Puissance*: les asservissements.

### D.1. PARTIE INFORMATIQUE

La partie informatique permet de communiquer avec le bras de RI: l'opérateur, au moyen d'un pupitre de commande et d'un langage machine peut fabriquer, tester et conserver des programmes de travail.

### D.2. PARTIE PUISSANCE

Les caractéristiques de la partie puissance ont une influence directe sur les performances du bras de RI.

#### D.2.1 Asservissement des moteurs

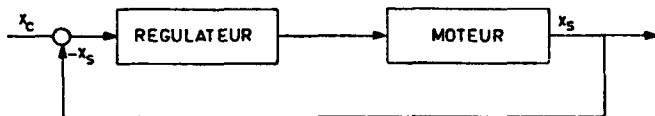


Fig. D-1 Schéma bloc simplifié de l'asservissement des moteurs.

Le but de l'asservissement est de faire correspondre la position de sortie  $x_s$  avec la position de consigne  $x_c$  au moyen d'une contre-réaction.

Le régulateur doit diminuer l'écart  $\Delta x_1 = x_c - x_s$  au moyen d'une correction. Cette correction dépend d'un écart  $\Delta x$  de l'erreur et du couple  $C$  que peut fournir le moteur. Cette correction détermine la raideur de l'ensemble moteur-régulateur.

Comme exemple, deux types d'asservissements sont représentés par les figures suivantes, un asservissement analogique et un asservissement digital.

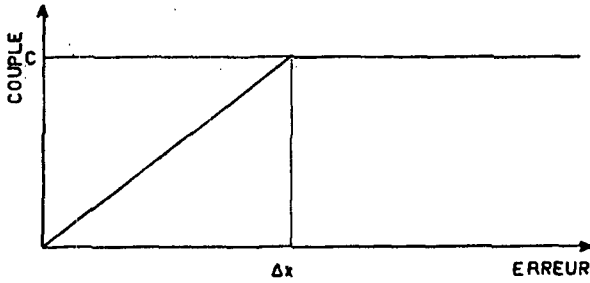


Fig. D-2 Asservissement analogique.

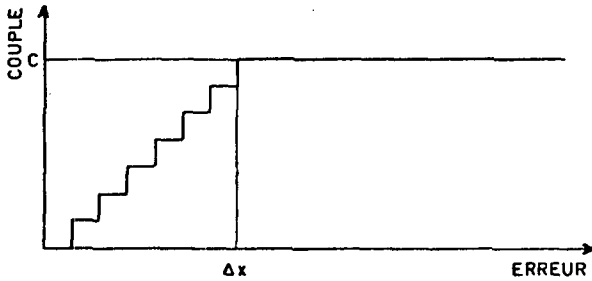


Fig. D-3 Asservissement digital.

Nous pouvons calculer la raideur de l'ensemble moteur-régulateur:

$$\boxed{K_{\alpha} = \frac{dC}{dx} = \frac{C}{\Delta x}} \quad (\text{N.m.rad}^{-1}) \quad (\text{D.1})$$

avec:  $dC$  = dérivée du couple moteur en fonction de:

$dx$  = dérivée de la position;

$C$  = couple maximal du moteur; (N.m),

$\Delta x$  = écart de correction; (rad)

#### D.2.2. Remarques:

- la raideur de l'ensemble moteur-régulateur dépend du gain de la régulation et de la sensibilité du capteur de contre-réaction;
- dans le cadre des RI, le régulateur ne doit pas permettre un dépassement de la position d'arrivée plus grand que la précision de travail;
- le choix du couple du moteur dépend aussi de l'asservissement: d'une façon générale, une articulation n'est pas symétrique. Pour résoudre ce problème, on essaiera de "symétriser" l'articulation en choisissant un couple nominal du moteur beaucoup plus élevé que le couple utile ( $\approx 10$  fois);
- pour une construction donnée, la sensibilité des capteurs de position est du même ordre de grandeur pour toutes les articulations. Nous pouvons écrire que le couple massique varie en même temps que la raideur massique, c'est-à-dire que le facteur de raideur massique a;
- on démontre facilement que les articulations les plus sollicitées au niveau du couple sont celles de la base, et que la variation du couple augmente plus vite du degré de liberté extrême à la base que les exigences de raideur.



### D.2.3. Consigne de position

La consigne de position est donnée par le gouverneur:



*Fig. D-4 Position du gouverneur dans la chaîne de commande.*

Le gouverneur rend le programme exécutable par l'ensemble des moteurs-régulateurs et conforme aux limitations exigées par le bras de RI pour satisfaire au cahier des charges.

Ces limitations sont:

- la douceur  $r$ , et le niveau  $\delta^{(n)}$  de la commande décrit au chapitre 3;
- les caractéristiques dynamiques de l'ensemble moteur-régulateur. Par exemple: vitesse maximale, accélération maximale.

### D.3. AMELIORATION DES CARACTERISTIQUES D'UN RI

Un degré de liberté peut être représenté par le schéma suivant:

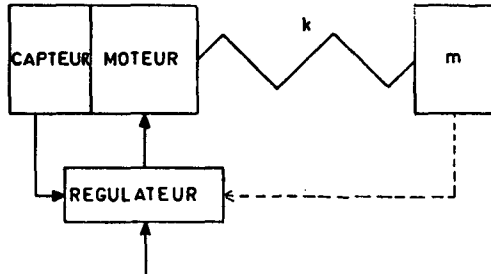


Fig. D.4 Schéma d'un degré de liberté.

La partie précédente concernait l'ensemble moteur régulateur.

Un degré de liberté comprend en plus une charge reliée au moteur par un ressort de raideur  $k$ . Est-il possible d'améliorer le comportement de la charge  $m$  et du ressort  $k$  au moyen d'une commande sur le moteur?

Le système doit alors avoir une contre-réaction au niveau de la charge. Nous devons donc pouvoir mesurer le comportement de celle-ci.

Nous obtenons le schéma bloc suivant:

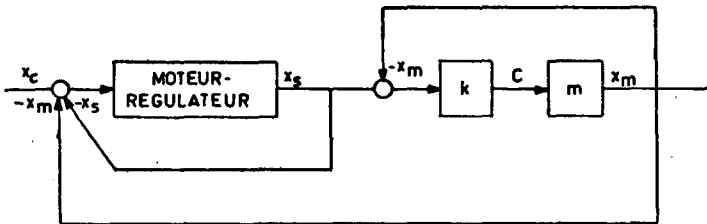


Fig. D-5 Schéma bloc avec contre-réaction sur la charge.

Il faut un capteur sur la charge  $m$  (par exemple un capteur de position, un accéléromètre) pour mesurer le déphasage  $\Delta x_2 = x_s - x_m$  entre la sortie du moteur  $x_s$  et la position  $x_m$  de la charge.

Pour pouvoir diminuer  $\Delta x_2$ , il faut que le moteur-régulateur-commande réagisse plus vite que la perturbation, c'est-à-dire que la bande passante du moteur-régulateur-commande doit être beaucoup plus élevée que la fréquence propre de la charge  $m$  et du ressort  $k$ .

Pour un RI, la raideur est surtout donnée par les moteurs-régulateurs, la raideur  $k$  due au reste de la construction étant beaucoup plus élevée. Il paraît donc difficile d'employer un tel moyen pour améliorer le RI.

Par contre, pour un système dans lequel la fréquence propre de la charge  $m$  et du ressort  $k$  est basse, une grue par exemple, l'amplitude de vibration peut être diminuée mais en aucun cas sa fréquence augmentée.

#### D.4. REMARQUE

Le régulateur fait la liaison entre la commande et la structure du RI. C'est un élément fondamental du RI qui doit être étudié avec soin, car de lui dépend la fréquence propre basse du bras de RI donc sa qualité.

D.5. EXEMPLE

Soit l'élément articulation suivant:

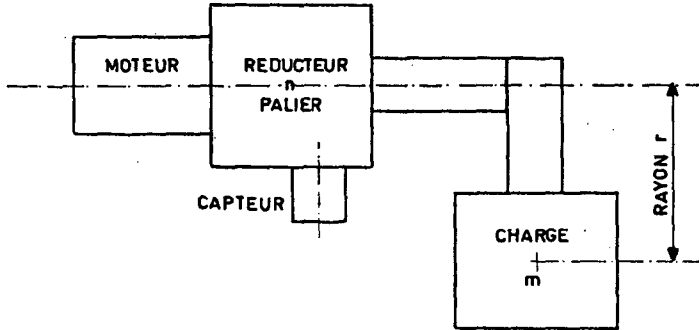


Fig. D.6 Élément articulation angulaire.

Cet élément articulation angulaire correspond au degré de liberté n°5 du RI "Manta" de l'Institut de microtechnique de l'EPPF-L.

La charge inertielle est équivalente à celle de la somme de l'élément articulation angulaire n°6 et de l'organe de préhension.

Cet élément articulation angulaire est composé de:

- un moteur électrique à courant continu à rotor sans fer du type Portescap 34 L 11 234 dont le couple nominal maximal au démarrage  $C = 0,113 \text{ N.m}$ ;
- un réducteur "harmonic-drive" HDUC 14-88, caractérisé par un rapport de réduction  $n = 88$ , une raideur angulaire autour du couple zéro  $K_{\text{ahd}} = 1\,100 \text{ N.m.rad}^{-1}$  (1/3 de la raideur angulaire maximale)(H.11), un rendement  $\eta = 70\%$ ;

- un potentiomètre à conducteur plastique permettant une mesure de  $\mu = 10$  bit (1024 positions) par tour à la sortie de l'articulation;
- une charge inertielle  $I_c = 13,5 \cdot 10^{-3} \text{ kg.m}^2$  au niveau de la sortie et due aux éléments suivants.

Le régulateur donne un couple correctif correspondant au couple nominal du moteur pour une erreur maximale  $\Delta = 3$  incréments.

Nous pouvons calculer la raideur du moteur-régulateur, au niveau du moteur:

$$K_\alpha = \frac{C \cdot \eta \cdot \mu}{\Delta \cdot n \cdot 2 \cdot \pi}$$

$$K_\alpha = 48,83 \cdot 10^{-3} \text{ N.m.rad}^{-1}$$

Par rapport à la raideur angulaire du moteur-régulateur  $K_\alpha$ , la raideur angulaire du réducteur  $K_{\alpha hd}$  peut être considérée comme infinie car  $K_{\alpha hd} = 22\,500 \cdot K_\alpha$ .

Nous pouvons calculer l'inertie vue du moteur:

$$I = \frac{I_{\text{charge}}}{n^2} + I_{\text{moteur}} + I_{\text{réducteur}}$$

$$I = 10,5 \cdot 10^{-6} \text{ kg.m}^2$$

La raideur angulaire  $K_\alpha$  et l'inertie  $I$  étant calculées, nous pouvons calculer maintenant la fréquence propre de l'articulation  $n^0_5$ .

$$f = \frac{1}{2 \cdot \pi} \sqrt{\frac{K_\alpha}{I}}$$

$$f = 10,8 \text{ Hz}$$

Des mesures nous donnent une fréquence de 10 Hz.

Le calcul correspond aux mesures, l'erreur pouvant être imputée au calcul très complexe de l'inertie I.

Ce résultat prouve l'importance de la raideur des moteurs-régulateurs dans le calcul des fréquences propres d'un système et confirme l'hypothèse précédente affirmant que la raideur du moteur-régulateur était dominante, et de plus justifie le choix des systèmes réduits pour l'étude des fréquences propres des RI.

---



## E. LOIS DE SIMILITUDE

Dans la construction des RI, les lois de similitude (B.1)(B.3)(B.6) (P.1)(F.1)(F.2) permettent d'étudier des variations de caractéristiques tels que forces, couples, raideurs en fonction d'une variation d'échelle, et ceci, de chaque élément le constituant.

Exemple: prenons un exemple trivial pour illustrer ces lois de similitude. Soit deux sphères de diamètres  $D$  et  $D'$  suspendues par un fil de diamètre  $d$  et  $d'$ .

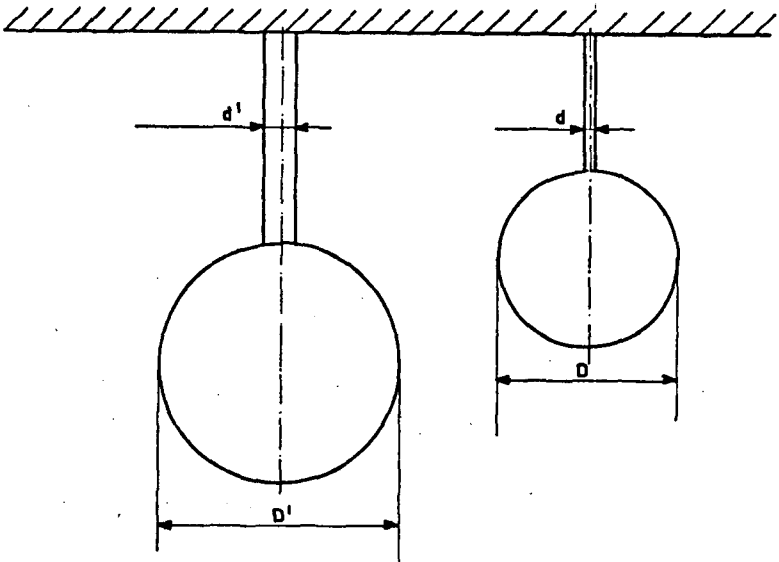


Fig. E-1 Exemple d'application des lois de similitude.

Les forces  $G$  et  $G'$  dues à la masse de chaque sphère exercent des tractions  $T$  et  $T'$  sur leur fil. La résistance de ce dernier est telle qu'il ne se rompe pas, c'est-à-dire que la contrainte à la traction  $\tau$  dans le fil ne dépasse pas un  $\tau_0$  admissible.



Désignons par \* le rapport entre deux mêmes grandeurs de chaque exécution . Ce rapport est appelé "échelle de similitude" ou "rapport de similitude". On peut écrire:

$$D^* = \frac{D'}{D} , G^* = \frac{G'}{G} , T^* = \frac{T'}{T} , d^* = \frac{d'}{d} \quad (E.1)$$

Regardons comment varient  $D^*$ ,  $G^*$ ,  $T^*$ ,  $d^*$  dans le cas d'un changement d'échelle.

#### Variation de $D^*$

Le diamètre d'une sphère varie selon le rapport de similitude dimensionnel appelé L:

$$D^* = L \quad (E.2)$$

#### Variation de $G^*$

La force exercée par une shère est proportionnelle à son volume, sa densité  $\rho$  et à son accélération  $g$ :

$$G = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot \frac{D^3}{8} \cdot \rho \cdot g \quad (E.3)$$

$$G' = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot \frac{D'^3}{8} \cdot \rho' \cdot g \quad (E.4)$$

Le rapport entre ces deux forces s'écrit:

$$G^* = \frac{G'}{G} = \frac{D'^3}{D^3} = D^{*3} = L^3 \quad (E.5)$$

$$G^* = L^3 \quad (E.6)$$

Variation de T\*

La force de traction maximale dans un fil est proportionnelle à sa section et à  $\tau_0$  admissible.

$$T = \pi \cdot \frac{d^2}{4} \cdot \tau_0 \quad (\text{E.7})$$

$$T = \pi \cdot \frac{d'^2}{4} \cdot \tau_0 \quad (\text{E.8})$$

Le rapport entre les deux tractions s'écrit:

$$T^* = \frac{T'}{T} = \frac{d'^2}{d^2} = d^{*2} = L^2 \quad (\text{E.9})$$

La traction que peut supporter le fil est proportionnelle au carré du rapport de similitude  $L$ , c'est-à-dire  $L^2$ .

Variation de d\*

La contrainte  $\tau_0$  dans le fil ne peut pas être dépassée, donc  $T^*$  et  $G^*$  doivent varier ensemble.

$$T^* = G^* \quad (\text{E.10})$$

de l'équation (E.6), on peut écrire:

$$T^* = L^3 \quad (\text{E.11})$$

et à l'aide de l'expression (E.9) pour cet exemple:

$$d^{*2} = L^3 \quad (\text{E.12})$$

$$d^* = L^{\frac{3}{2}} \quad (\text{E.13})$$

En résumé, le diamètre de la sphère et le diamètre du fil ne varient pas ensemble:  $D^* = L$  et  $d^* = L^{3/2}$ . Si l'on double le diamètre de la sphère, le diamètre du fil est multiplié par  $2^{3/2} = 2,8$ , le diamètre du fil augmente plus vite que le diamètre de la sphère. Par contre, si l'on divise par 2 le diamètre de la sphère, le diamètre du fil est divisé par 2,8, le diamètre du fil diminue plus vite que le diamètre de la sphère.

#### Application aux RI

Pour chaque élément entrant dans la construction d'un bras de RI nous pouvons écrire:

- *Raideur linéaire:*

$$K^* = L \quad (E.14)$$

- *Raideur angulaire:*

$$K_{\alpha}^* = L^3 \quad (E.15)$$

- *Fréquence:*

$$f = L^{-1} \quad (E.16)$$


---

## F. CATALOGUE

Le cahier des charges et la détermination des facteurs de qualité Q, de raideur massique a et d'élançement b conduisent à la réalisation d'un bras de RI dans les meilleures conditions. Il reste à trouver, à calculer, à créer la nouvelle structure. Pour cela, nous pouvons conseiller les livres ou publications suivants, notés en regard des problèmes possibles:\*\*

PROBLEMES	REPERTS BIBLIOGRAPHIQUES
Capteurs:	(B.12)(F.4)(H.3)(N.1)(D.1)
Choix des coordonnées:	(S.3)(S.4)
Moteurs à courant continu:	(H.6)(E.1)
Moteurs hydrauliques:	(N.1:91)(T.1)(F.3:112)(B.6:P4)
Moteurs pas à pas:	(K.1)(W.1)(P.2)
Paliers:	(P.1)(T.2)
Réducteurs:	(D.3)(H.4)(P.1)(H.1:185-216)(M.2)(H.11) (D.3)
Servo-valves:	(G.1:tome1:153,tome2:159)(F.3:272)(B.4:235) (S.2:121)
Sources d'énergie:	(J.1)
Structure:	(G.2)(P.2)(D.3)(H.2)
Vérins linéaires:	(F.3:106)(D.3)(B.6:P4)(G.1:tome2:13)
Vérins rotatifs:	(F.3:110)(D.3)(B.6:P4)(G.1:tome2:13)(N.1:91)

\*\* Voir aussi annexes complémentaires



## G. BIBLIOGRAPHIE

- A.1 Asea  
*Publications n<sup>o</sup>: YB 110-101, 102, 301, 302, 303*  
Asea, Dép. RI, 1976.
- A.2 Abraham R.G., Yaroshuk N.  
*Robots industriels: bientôt des applications protiques*  
Machines modernes n<sup>o</sup> 803, mars 1976.
- A.3 Arfken Geoge  
*Mathematical methods for physicists*  
Academic Press, New-York & London, 1968.
- B.1 Burckhardt C.W.  
*Les lois de similitude en microtechnique*  
Journées de microtechnique à l'EPF-L, 1972.
- B.2 Burckhardt C.W., Demaurex M.-O.  
*Développement d'un robot pour la microtechnique*  
Journées de microtechnique à l'EPF-L, 1974.
- B.3 Burckhardt C.W., Helms D.  
*Some general rules for building robots*  
6<sup>th</sup> International symposium on IR, University of Nottingham, 1976.
- B.4 Blackburn John F., Reethof Gerhard, Shearer J. Lowen  
*Fluid power control*  
The MIT Press, 1960.

- B.5 Burckhardt C.W.  
*Où en sont les Robots aujourd'hui ?*  
Journées de microtechnique à l'EPF-L, 1974.
- B.6 Bonny D.  
*Organes de commandes*  
EPF-L, 1972.
- B.7 Burckhardt C.W.  
*Cours de microtechnique*  
EPF-L, 1972.
- B.8 BP  
*Fluides et systèmes hydrauliques*  
Société française des pétroles BP.
- B.9 Blacke Raiph E.  
*Basic vibration theory, Shock and vibration hand book*  
McGraw-Hill; 1961.
- B.10 Bolle L.  
*Cours de statique et de résistance des matériaux*  
EPF-L, 1970.
- B.11 Benoit H.  
*Organes de machines*  
EPF-L, 1967.
- B.12 Burckhardt C.W.  
*Les capteurs*  
Polyrema n° 34, mai 1977.

## B.13 Bayol Pierre

*Manipulateurs et robots industriels*

Le dossier technique, Industries et techniques, n<sup>o</sup> 352, 30/9/1977.

## D.1 Demaurex M.-O., J. Jacot, J.-L. Monnier

*Capteur incrémental optique*

Journées d'électronique et de microtechnique à l'EPF-L, 1976.

## D.2 Defaux M.

*Dans deux ans, chez vous, des robots "cols bleus"*

Machines modernes n<sup>o</sup> 800, décembre 1975.

## D.3 Del Pédro M.

*Résistance des matériaux*

EPF-L, 1970.

## D.4 Del Pédro M.

*Dynamique appliquée*

EPF-L, 1971.

## D.5 Dunne Maurice J. Chief Engineer, Unimation Inc

*An assembly experiment using programmable robot arms*

7<sup>th</sup> International symposium on IR, Tokio, Octobre 1977.

## D.6 Demaurex M.-O., Gerelle E.G.R.

*Conception d'un robot industriel*

Journées de microtechnique à l'EPF-L, 1978.

## D.7 Demaurex M.-O., Gerelle E.G.R.

*Can I build this Robot ?*

9<sup>th</sup> International symposium on IR, Washington, Mars 1979.



- E.1 Electro-Craft  
*DC motors, speed controls, servo-systems*  
3<sup>rd</sup> Edition, Electro-Craft Corp., 1975.
- E.2 Engelberger J.F., President of Unimation Inc,  
*Pas de descendant pour la seconde génération*  
*Machines modernes* n<sup>o</sup> 779, Février 1977.
- E.3 Ebel Karl-H.  
*Coping with employment consequences of automation of production processes*  
10<sup>th</sup> Session of Metal Trades Committee of ILO, Geneva April 77.
- F.1 Flatau Carl R.  
*Design outline for mini-arms based on manipulator technology*  
Memo n<sup>o</sup> 300, MIT A.I. Laboratory, May 1973.
- F.2 Flatau Carl R.  
*The synthesis and scaling of advanced manipulator systems*  
1<sup>th</sup> CISM-IFTOMM Symposium, September 1973.
- F.3 Faisandier J.  
*Mécanismes hydrauliques et électrohydrauliques*  
Dunod, 1970.
- F.4 Farcinade M.  
*La métrologie sans contact*  
*Journée d'électronique et de microtechnique à l'EPF-L*, 1976.
- F.5 Frost & Sullivan Inc  
*The US Industrial Robot Market*  
Frost & Sullivan Inc, New-York, June 1974.

- F.6 Ferranti  
*Optical shaft encoders*  
Catalogue n° BR612, Janvier 1978.
- G.1 Guillon Marcel  
*L'asservissement hydraulique et electrohydraulique*  
Dunod, 1972.
- G.2 Gieck Kurt  
*Formulaire technique*  
Gieck-Verlag, D 71 Heilbronn, 1974.
- G.3 Guittet J., Directeur du projet "Spartacus" de l'IRIA (Institut de Recherche en Informatique et Automatique en France)  
Cité dans B.13.
- G.4 Graversen Gert, Dep. of Industrial Psychology, Technical Institute  
*Job characteristics and job design in advanced production technology*  
Economic Commission for Europ Working, Party on automation,  
Seminar on IR and programmable logical Controllers, Copenhagen, 1977.
- G.5 Gentmacher F.R.  
*Th orie des matrices*  
tome n° 2, Dunod, 1966.
- H.1 Hixson Elmer L.  
*Mechanical impedance and mobility, Shock and vibration Handbook*  
McGraw-Hill, 1961.
- H.2 Harris Cyril M., Crede Charles E.  
*Introduction to: Shock and vibration Handbook*  
McGraw-Hill, 1961.

- H.3 Helms Dirk  
*Les capteurs*  
Journées d'électronique et de microtechnique à l'EPF-L, 1976
- H.4 Henriot G.  
*Traité théorique et pratique des engrenages*  
Dunod, 1949.
- H.5 Hauri H.  
*Robots à l'oeuvre dans les opérations de fabrication*  
Technique suisse n<sup>o</sup> 1, 1973.
- H.6 Heyraud Marc  
*Critères pour le choix d'un servomoteur à courant continu*  
Portescap, La Chaud-de-Fond, 1975.
- H.7 Hohn Richard E., Manager R & D, Cincinnati-Milacron Inc,  
*Application flexibility of a computer-controlled industrial robot*  
SME Technical paper n<sup>o</sup> MR76-603, Dearborn Mi 48 128, 1976.
- H.8 Hagemann-Petersen S.  
*Socio-economic aspects as result of the 1977 E.C.E seminar on industrial robots and programmable logical controllers*  
7<sup>th</sup> International symposium on IR, Tokio, October 1977.
- H.9 Hoffman K., Kunze R.  
*Linear algebra*  
Prentice Hall, 1961.
- H.10 Hewitt and Stromberg  
*Real and abstract analysis*  
Springer Verlag, 1969.

- H.11 Harmonic-drive GmbH  
*Harmonic-Drive*  
Documentation DBP et autres, 1976, 1977.
- H.12 Horn Berthold K.  
*What is delaying the manipulator revolution*  
MIT A.I. Laboratory, paper n<sup>o</sup> 161, February 1978.
- J.1 Jacot J.  
*Energie pour robot industriel en microtechnique*  
Journées d'électronique et de microtechnique à l'EPF-L, 1976.
- K.1 Kuo Benjamin C.  
*Theory and application of step motor*  
University of illinois, 1974.
- M.1 Miloix Gheorghe, Duditâ Florin  
*Transmissii mecanice moderne*  
Editura tehnică, bucaresti, 1971.
- M.2 Musser Clarence Walton  
*Harmonic-Drive*  
Brevets USA n<sup>o</sup> 2.906.143 (29/9/1959), Suisse n<sup>o</sup> 362.285 (20/3/1956)
- N.1 Nevins J.L., Whitney D.E., Woodin A.E., Drake S., Lynch M., ...  
*A scientific approach to the design of computer controlled manipulator*  
C.S. Draper Laboratories, paper n<sup>o</sup> R-837, 1974.
- N.2 Nevins J.L., Whitney D.E., ...  
*Exploratory research in industrial modular assembly*  
C.S. Draper Laboratories, paper n<sup>o</sup> R-800, R-850, P-101, 1974.

- N.3 Nicolet G., Trottet E.  
*Eléments de machines*  
Spes, Lausanne, 1971.
- N.4 Normzahnräder + Ketten  
*Engrenages et roues dentées*  
Catalogue 1974.
- N.5 Nevins J.L., Whitney D.E., ...  
*Exploratory reseach in industrial modular assembly*  
C.S. Draper Laboratories, paper n<sup>o</sup> R-1111, 1977.
- P.1 Pruvot F.  
*Conception et calcul des machines outils*  
EPF-L, 1977.
- P.2 Philips  
*Electric motors and accessories*  
Philips Components and materials, Part 6, 1975.
- R.1 Rosenblatt A.  
*Robots handling more jobs on industrial assembly lines*  
Electronic International n<sup>o</sup> 15, vol. n<sup>o</sup> 146, july 1973.
- R.2 Revue Polytechnique  
*Robots industriels: un marché de cinq milliard de dollars ?*  
Revue Polytechnique n<sup>o</sup> 1344, 1975.
- S.1 Salmon Mario  
*Robot technology at Olivetti: the sigma system*  
Ing. C. Olivetti & C; Spa, 1976.

- S.2 Sperry-Vickers  
*Manuel d'hydraulique*  
Edition Termon-Technique, 1977.
- S.3 Schaft R.D., Schmids U.  
*A computer aided method for the selection of an industrial robot for the automation of working place*  
6<sup>th</sup> International symposium on IR, University of Nottingham, 1976.
- S.4 Seger Bengt  
*Quand l'imagination crée l'usage*  
Machines modernes n<sup>o</sup> 779, 1974.
- S.5 Spiegel Murray R.  
*Mathematical Handbook of Formulas and Tables*  
Schaum's outline series, McGraw-Hill, 1968.
- T.1 Thoma Jean  
*Transmission hydrostatique*  
Dunod, 1970.
- T.2 Timken  
*Manuel technique et raideur des roulements*  
Timken company, 1972.
- W.1 Warner Electric,  
*Step motors*  
Warner Electric Brake & clutch Company, Beloit, Wis 53 511, 1971.
-



## H. CURRICULUM VITAE

*Nom et prénom:* Demaurex, Marc-Olivier Gérard  
*Date et lieu de naissance:* 21 septembre 1948 à Lausanne, VD, Suisse  
*Lieu d'origine:* Gilly et Vinzel, VD  
*Parents:* Demaurex Gérard Henri et  
Monique Ruth Héliène, née Briéger

### FORMATION

1954 - 1964 Ecoles primaires et secondaires de la  
Mission Universitaire et Culturelle  
Française au Maroc, Casablanca

1964 - 1967 Lycée Technique de la  
Mission Universitaire et culturelle  
Française au Maroc, Casablanca

1967 Diplôme de fin d'étude secondaire

1967 - 1974 Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne

1974 Diplôme d'ingénieur mécanicien  
option microtechnique et mécanique  
générale

dès 1974 Assistant à l'Institut de microtechnique de  
l'Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne

dès 1977 Charge de cours de "construction microtechnique"  
à l'Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne

---





ANNEXES COMPLEMENTAIRES



TABLE DES MATIERES DES ANNEXES COMPLEMENTAIRES

A. <u>DESIGNATIONS, SYMBOLES ET UNITES</u>	AC 5
B. <u>LES SOURCES D'ENERGIE</u>	AC 6
B.1 Introduction	AC 7
B.2 Les sources d'énergie	AC 7
B.3 Caractéristiques comparées	AC 10
B.4 Possibilités de construction d'un bras de RI	AC 15
B.5 Conclusion	AC 15
C. <u>LES COORDONNEES</u>	AC 17
C.1 Introduction	AC 18
C.2 Rappels de géométrie	AC 18
C.3 Volume de travail	AC 18
C.4 Coordonnées cartésiennes	AC 19
C.5 Coordonnées cylindriques	AC 20
C.6 Coordonnées sphériques	AC 21
C.7 Coordonnées angulaires	AC 22
C.8 Remarques	AC 23
C.9 Conclusion	AC 23
D. <u>RAPPELS GENERAUX</u>	AC 24
D.1 La raideur en mécanique	AC 25
D.2 Caractéristiques des différents matériaux	AC 29
D.3 Module d'élasticité "B" des liquides hydrauliques	AC 30
D.4 Lois de similitude	AC 32
D.5 Moments d'inerties	AC 36

<u>E. LES MOTEURS</u>	AC 41
E.1 Vérins linéaires	AC 42
E.2 Vérins rotatifs	AC 47
E.3 Moteurs hydrauliques	AC 53
E.4 Servo-valves	AC 57
E.5 Comparaisons entre différents types de moteurs électriques	AC 61
E.6 Moteurs à courant continu(CC)	AC 63
E.7 Moteurs pas à pas (PP)	AC 67
E.8 Détermination du rapport de réduction optimal d'un réducteur associé à un moteur hydraulique ou électrique	AC 72
 <u>F. LES PALIERS</u>	 AC 77
F.1 Raideur des corps roulants	AC 78
F.2 Raideur des paliers à corps roulants	AC 82
F.3 Roulements à billes à contact oblique	AC 85
F.4 Roulements à galets côniques	AC 89
F.5 Roulements à galets cylindriques	AC 92
F.6 Paliers hydrostatiques	AC 96
F.7 Les paliers	AC 99
F.8 Guidages linéaires	AC 106
 <u>G. LES REDUCTEURS</u>	 AC 111
G.1 Raideur d'une denture d'engrenage	AC 112
G.2 Engrenage cylindrique	AC 116
G.3 Roues côniques	AC 117
G.4 Roue et vis tangente	AC 119
G.5 Réducteur "Harmonic-Drive"	AC 121
G.6 Vis-écrou	AC 126
G.7 Pignon-crémaillère	AC 130
G.8 Comparaison: Vis-écrou, pignon-crémaillère, vérin	AC 131

H. <u>LA STRUCTURE</u>	AC 134
H.1 Poutre en traction ou en compression	AC 135
H.2 Poutre en torsion	AC 136
H.3 Poutre en flexion	AC 137
I. <u>LES CAPTEURS DE POSITION</u>	AC 139
I.1 Inventaire des différents capteurs de position	AC 140
I.2 Les potentiomètres	AC 141
I.3 Les synchros-résolveurs	AC 142
I.4 Les Inductosyn <sup>r</sup>	AC 143
I.5 Les capteurs optiques	AC 144
I.6 Tableau comparatif	AC 145
J. <u>BIBLIOGRAPHIE</u>	AC 146

---



A DESIGNATIONS, SYMBOLES ET UNITES

Voir annexes, pages II et III, chapitre B.





B LES SOURCES D'ENERGIE



## B LES SOURCES D'ÉNERGIE

### B.1 Introduction (J.1)

Le RI est à la fois léger et rigide, rapide et précis, compact et bon marché.

Le choix de la source d'énergie est essentiel: il se fait en fonction des performances attendues.

On dispose de quatre source d'énergie:

- a) L'énergie mécanique,
- b) L'énergie hydraulique,
- c) L'énergie pneumatique,
- d) L'énergie électrique.

### B.2 Les sources d'énergie

#### a) L'énergie mécanique

Le moteur ou "prise de force" est extérieur au RI. L'énergie est amenée par un organe de transmission aux différents degrés de liberté et transformé en mouvement par l'intermédiaire d'embrayages, de variateurs, de freins, de cames etc...

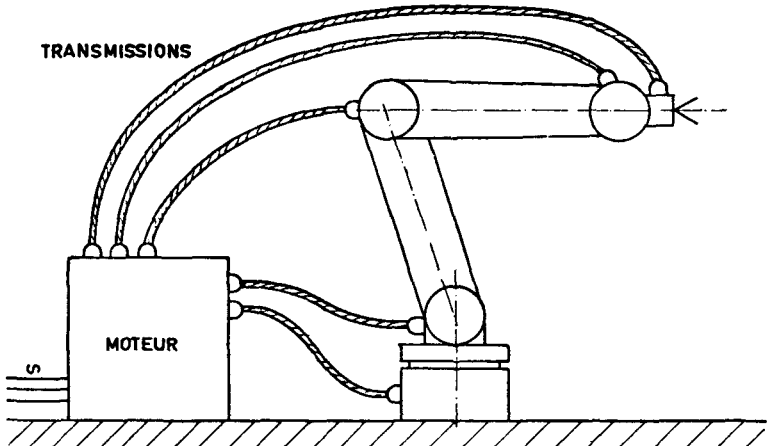


Fig. B-1 RI à énergie mécanique.

b) L'énergie hydraulique

Le groupe hydraulique fournissant l'énergie au bras du RI est extérieur à celui-ci. Le fluide sous pression transporte l'énergie jusqu'aux actionneurs de chaque degré de liberté.

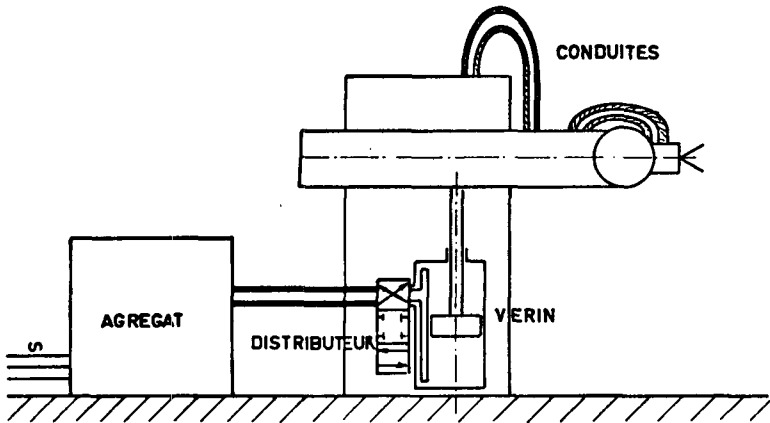


Fig. B-2 RI à énergie hydraulique.

c) L'énergie pneumatique

Un réseau de distribution d'air comprimé est souvent déjà installé. L'air comprimé transporte l'énergie jusqu'aux actionneurs de chaque degré de liberté, mais ne nécessite pas de conduite de retour.

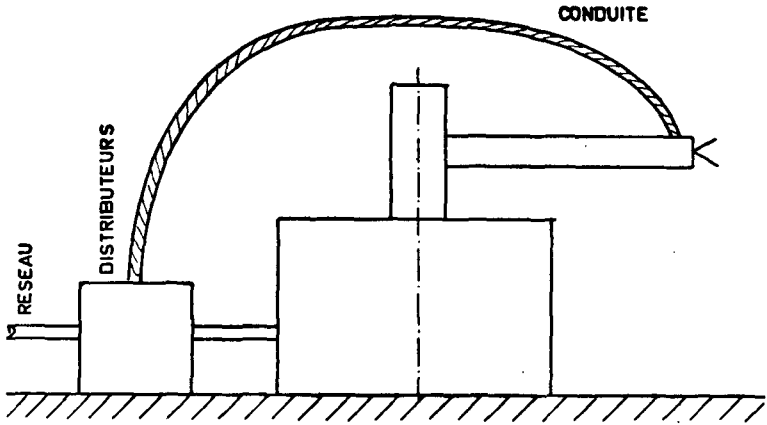


Fig. B-3 RI à énergie pneumatique.

d) L'énergie électrique

L'énergie du réseau est transformée dans des amplificateurs de puissance, puis conduite jusqu'aux actuateurs de chaque degré de liberté.

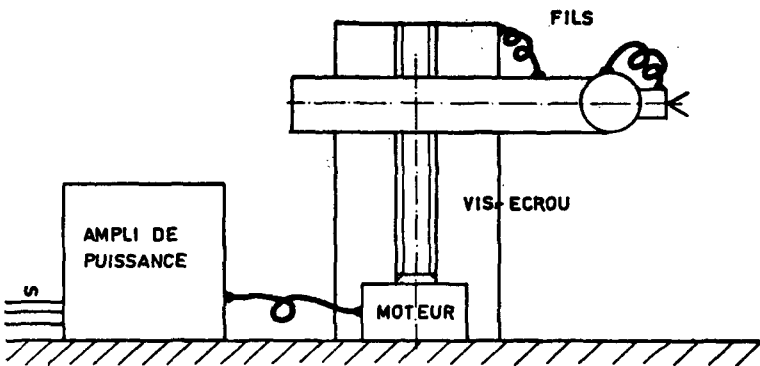


Fig. B-4 RI à énergie électrique.

### B.3 Caractéristiques comparées

#### 1) Densité d'énergie

Le RI est une machine dynamique.

Les actuateurs sont souvent en mouvement avec le bras. La densité d'énergie permet une comparaison entre les divers types d'énergie et les divers types de moteurs.

La densité d'énergie exprimée en  $J/m^3$  ou  $N.m/m^3$  peut être comparée à une pression en  $N/m^2$ .

##### a) Energie mécanique

L'échauffement dû au frottement des coupleurs, embrayage, frein, etc... limite les possibilités à une valeur d'environ 1 bar. (Les surfaces de frottement et d'échange de chaleur doivent être suffisamment dimensionnées pour maintenir une température inférieure à  $120^{\circ}$  au niveau des surfaces frottantes.)

##### b) Energie hydraulique

La limite est donnée par raisons de commodité.

Il n'y a pas d'intérêt à monter au-dessus de 70 bar, le gain en dimension des actuateurs étant compensé par l'encombrement des raccords et des conduites.

##### c) Energie pneumatique

Bien que des installations fonctionnent à 200 bar, la pression maximale utilisable pratiquement en atelier se situe à 15 bar.

##### d) Energie électrique

Dans les moteurs électromagnétiques, le facteur limitant la densité d'énergie reste la saturation du circuit magnétique, ce qui correspond à une densité d'énergie de 6 à 10 bar. (F.3:337)(B.6:P4).

## 2) Pouvoir d'accélération

Pour un bras de RI donné, les accélérations maximales possibles sont déterminées par le pouvoir d'accélération  $\phi$  du moteur (B.6:p3):

$$\phi = \frac{C}{N \cdot \sqrt{J}} \quad (B8.1)$$

avec: - C = couple du moteur, (Nm),

- N = rapport de réduction entre le moteur et la charge, (.),

- J = moment d'inertie du moteur et de l'arbre d'entrée du réducteur, (Kg.m<sup>2</sup>).

On constate que les petits moteurs tournant vite ne parviendront pas à donner une très forte accélération au bras de RI à cause du grand rapport de réduction nécessaire.

### a) Energie mécanique

Le rapport de réduction est faible, mais l'inertie de la transmission, son jeu et sa raideur provoquent souvent des chocs.

### b) Energie hydraulique

Dans le cas d'un vérin, rotatif ou linéaire, le rapport de réduction peut descendre jusqu'à 1 et moins. Le pouvoir d'accélération est limité ici par la commande.

### c) Energie pneumatique

En utilisant un système en boucle ouverte, c'est à dire sur butées, le pouvoir d'accélération d'un système pneumatique est élevé.

En asservissement, l'élasticité de l'air, 100 fois plus élastique que les fluides hydrauliques, et le collage des joints imposent l'utilisation d'un réducteur pour obtenir des performances acceptables dans des applications simples.



d) Energie électrique

Les moteurs pas à pas ont toujours un mauvais pouvoir d'accélération, leur couple étant faible et leur inertie relativement grande.

Les moteurs à courant continu fonctionnent en général à des vitesses telles qu'un réducteur de grand rapport est nécessaire. Leur pouvoir d'accélération est donc beaucoup moins intéressant que la constante de temps mécanique pouvait le laisser prévoir.

3) Transmission de l'énergie

Plus la construction est petite, plus les voies de transport d'énergie prennent de la place par rapport à la construction.

a) Energie mécanique

Le problème se complique beaucoup plus rapidement que le nombre de degrés de liberté augmente. Pour des systèmes à arbres tournants, si le nombre de degrés de liberté dépasse trois, le problème devient quasiment insoluble.

b) Energie hydraulique

Les tuyaux et les raccords sont encombrants, surtout si la pression est élevée.

c) Energie pneumatique

Les problèmes semblables à ceux de l'hydraulique trouvent plus facilement une solution, d'abord parce que le tuyau de retour est inutile et ensuite parce que les pressions sont plus faibles et les fuites moins gênantes.

d) Energie électrique

L'énergie électrique est indiscutablement la plus facile à transporter. Les appareils très complexes y trouverons parfois un avantage décisif.

4) Problèmes spécifiques, pannes

La fiabilité d'un RI est un problème primordial puisque que l'on cherche à avoir un temps entre pannes aussi élevé que possible (MTBF supérieur à 800 heures (E.2)).

a) Energie mécanique

La complexité mécanique élevée, l'usure des pièces soumises à des frottements ou à des chocs, limitent la durée de vie.

b) Energie hydraulique

Le prix de base est grevé par l'achat de l'agrégat. L'usinage et le montage des pièces hydrauliques doivent être particulièrement soignés. Le fluide est sensible à la pollution. Les fuites sont en général intolérables.

c) Energie pneumatique

En travail sur butées, seul le bruit peut constituer un problème. En asservissement, l'élasticité de l'air impose l'utilisation d'un amortisseur ou d'un frein pour parvenir aux caractéristiques nécessaires.

d) Energie électrique

Pour les moteurs pas à pas, le poids et l'échauffement sont des inconvénients majeurs. Les moteurs à courant continu souffrent de la faiblesse des balais et du collecteur, surtout dans les petites dimensions. La transmission à grand rapport de réduction amène des jeux, ce qui diminue encore la fiabilité.

### 5) Niveau technologique

Le développement technologique n'est pas au même niveau dans les techniques traitées ici. Les développements possibles sont par conséquent très différents également. On ne doit pas se contenter de ce qui existe sur le marché, mais prévoir les développements futurs et les nouveaux éléments à créer.

#### a) Energie mécanique

Il n'existe pas sur le marché d'organes de solidarisation suffisamment petits et offrant les performances désirées, surtout en ce qui concerne les jeux et les saccades.

La complexité de construction des systèmes à plusieurs degrés de libertés restreint considérablement l'avenir de ce type d'énergie.

#### b) Energie hydraulique

Il n'existe pas de distributeur proportionnel ni de servo-valve de petites dimensions et de prix raisonnable. Les moteurs d'asservissement de petites dimensions sont également à développer.

#### c) Energie pneumatique

L'élasticité du fluide ne permet pas la réalisation d'asservissement performant. En commande tout ou rien, de nombreux fournisseurs offrent le matériel qu'on peut souhaiter.

#### d) Energie électrique

Le moteur idéal, lent, couple élevé et faible inertie n'est pas aisément réalisable. La saturation des matériaux ferro-magnétiques limite la densité d'énergie à une valeur trop basse comme nous l'avons vu précédemment.

6) Tableau résumé des caractéristiques comparées

	<u>Méca.</u>	<u>Hydr.</u>	<u>Pneu.</u>	<u>Elec.</u>
- Densité d'énergie:	D	A	A	B
- Pouvoir d'accélération:	B	A	A	B
- Transmission d'énergie:	C	B	A	A
- Problèmes spécifiques, pannes:	C	B	B	B
- Niveau technologique actuel:	D	B	A	B

Légende: A: Très favorable, B: favorable,

C: défavorable, D: très défavorable.

B.4 Possibilités de construction d'un bras de RI

	<u>Méca.</u>	<u>Hydr.</u>	<u>Pneu.</u>	<u>Elec.</u>
- Facteur de Qualité Q élevé*:	C	A	D/A*	B
- Rapidité (acc.= $\frac{1}{2}g$ , vit.= $0,5 \text{ m.s}^{-1}$ ):	B	A	C/A*	B
- Degré de liberté (4 à 6):	C	B	B	B
- petite portée: 200mm:	B	B	C/A*	B
- grande portée: plus de 1 m:	C	A	B/A*	B
- Charge utile: 500 g:	B	A	A	B
- Charge utile: 30 Kg:	C	A	B	B
- Précision $\pm 0,02 \text{ mm}$ :	D	B	D/A*	B

Légende: A: Très favorable, B: favorable,

C: défavorable, D: très défavorable.

\*: arrêt sur butée.

B.5 Conclusion

Le RI, pour qu'il soit performant, ne doit pas travailler sur butées, les exigences quant aux positions distinctes étant trop élevées. De plus, l'énergie mécanique et particulièrement l'énergie pneumatique se prêtent mal au système en boucle fermée avec capteur de position, de forces ou autres. Par conséquent, seules les énergies hydrauliques et électromagnétiques

\* Voir chapitre 2 page 21.

nous intéressent pour des Bras de RI complexes. La pneumatique gardera certainement la première place pour les manipulateurs simples, jusqu'à trois degrés de liberté travaillant sur butées.

L'hydraulique est une technique pleine d'avenir mais il faut développer actuateurs et distributeurs pour les RI. Actuellement le matériel employé provient surtout de l'aviation et de ce fait est très coûteux.

En électromagnétique, le moteur pas à pas n'offre qu'un pouvoir d'accélération et un rapport poids/puissance médiocre. Il lui est par contre possible de travailler en boucle ouverte, c'est à dire sans capteurs. Cette solution est certainement valable pour une machine lente et très fiable. Le moteur à courant continu est actuellement la solution électrique la plus facile à utiliser. Dans les petites dimensions, on se heurte toutefois aux difficultés dues aux réducteurs qui doivent être quasi sans jeu et aux collecteurs qui n'offrent pas toujours la fiabilité suffisante. Les moteurs à courant continu sans collecteur en sont à leur balbutiement.

Du point de vue asservissement, les techniques hydrauliques et à moteur à courant continu nécessitent toutes deux un capteur de position. Les régulateurs sont très semblables, ce n'est que par leur importance relative que les paramètres diffèrent.

---

C LES COORDONNEES



## C CHOIX DES COORDONNÉES ET DU NOMBRE DE DEGRÉS DE LIBERTÉ

### C.1 Introduction

Le choix des coordonnées et du nombre de degrés de liberté découle du cahier des charges (Volume de travail, genre de tâche...) mais aussi d'autres paramètres tels que la raideur la précision, le type d'énergie, les guidages, les moteurs...

### C.2 Rappels de géométrie

La position d'un point de l'espace est définie par 3 coordonnées, que l'on appelle coordonnées principales. Nous avons à disposition 4 groupes de systèmes de coordonnées principales:

- 1) 3 translations: les coordonnées cartésiennes,
- 2) 2 translations et 1 rotation: par exemple les coordonnées cylindriques,
- 3) 1 translation et 2 rotations: par exemple les coordonnées sphériques,
- 4) 3 rotations: les coordonnées angulaires.

La position d'un solide dans l'espace sera définie par 3 coordonnées supplémentaires, 3 rotations qui correspondent aux angles d'Euler, donc au total 6 coordonnées qui correspondent à 6 degrés de liberté.

### C.3 Volume de travail (S.3)(S.4)

Le volume de travail est le domaine où peut évoluer le bras de RI. Il est défini par les courses maximales de toutes les coordonnées et particulièrement des coordonnées principales.

Remarques: Le volume de travail de l'homme correspond, suivant sa position à:  $0,01 \text{ m}^3$  s'il s'appuie,  $0,1 \text{ m}^3$  s'il est assis et  $10 \text{ m}^3$  s'il est debout.



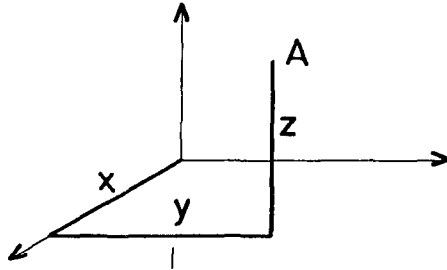
C.4 Coordonnées Cartésiennes

Fig. C-1 Coordonnées Cartésiennes.

Le point A est défini par 3 translations  $x$ ,  $y$  et  $z$ .

Exemple: Robot à coordonnées cartésiennes:

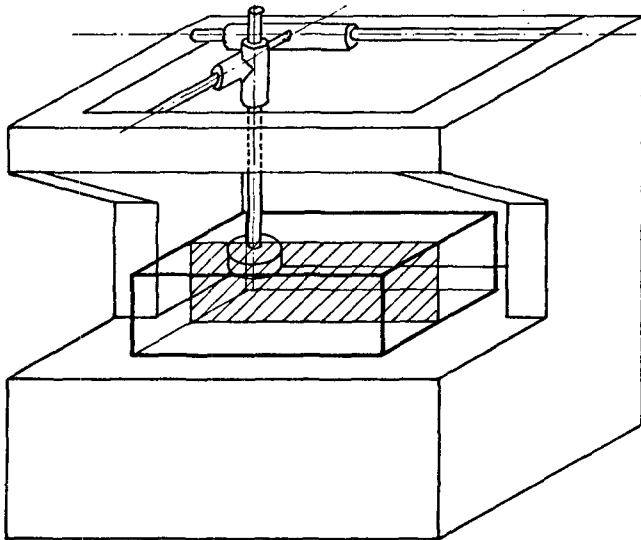


Fig. C-2 Robot Olivetti Sigma. (S.1)

Robot à coordonnées cartésiennes. La partie en traits gras correspond au volume de travail, la zone hachurée à une section de celui-ci.

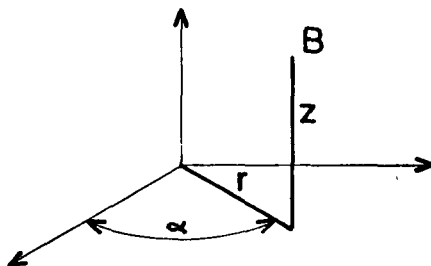
C.5 Coordonnées cylindriques

Fig. C-3 Coordonnées cylindriques.

Le point B est défini par 2 translations  $r$  et  $z$ , et une rotation  $\alpha$ .

Exemple: Robot à coordonnées cylindriques.

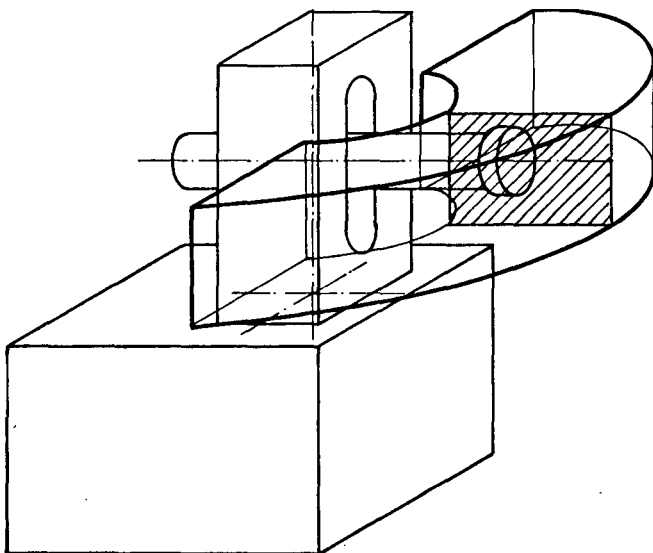


Fig. C-4 Robot Simpltran 500.

Robot à coordonnées cylindriques. La partie en traits gras correspond au volume de travail, la zone hachurée à une section de celui-ci.

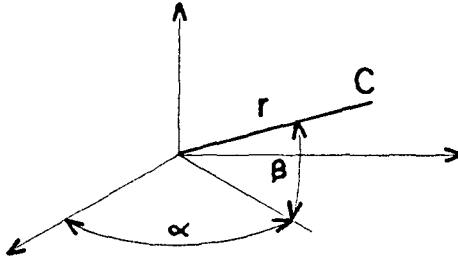
C.6 Coordonnées sphériques

Fig. C-5 Coordonnées sphériques.

Le point C est défini par 1 translation  $r$  et 2 rotations  $\alpha$  et  $\beta$ .

Exemple: Robot à coordonnées sphériques:

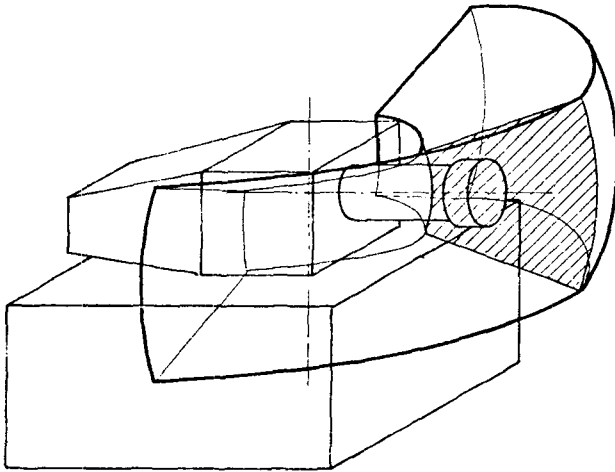


Fig. C-6 Robot Unimate 200B.

Robot à coordonnées sphériques. La partie en traits gras correspond au volume de travail, la zone hachurée à une section de celui-ci.

C.7 Coordonnées angulaires

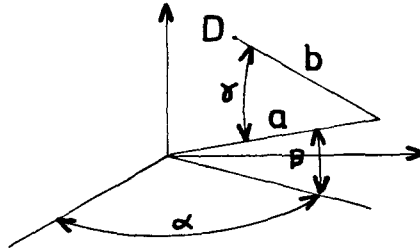


Fig. C-7 Coordonnées angulaires.

Le point D est défini par 3 rotations  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$ , et 2 segments de longueur fixe a et b.

Exemple: Robot à coordonnées angulaires:

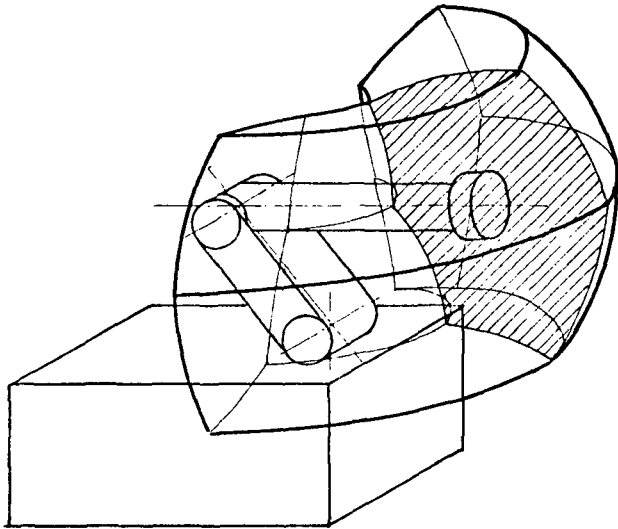


Fig. C-8 Robot de peinture Trallfa.

Robot à coordonnées angulaires. La partie en traits gras correspond au volume de travail, la zone hachurée à une section de celui-ci.

C.8 Remarques

1) Pour chacun des exemples cités, on peut imaginer d'autres arrangements des coordonnées principales.

2) Le rapport "volume de travail"/"volume du bras du RI" augmente avec le nombre de rotation comme coordonnées principales: par exemple, à grandeur égale, un RI à coordonnées angulaires a un volume de travail beaucoup plus grand qu'un RI à coordonnées cartésiennes.

3) Pour beaucoup de travaux une translation d'axe parallèle à un axe donné est indispensable. Le choix de coordonnées cartésienne ou cylindriques facilite l'exécution de cette translation.

4) Un bras de RI a toujours 3 coordonnées principales. Un choix judicieux en fonction de la tâche à exécuter, peut permettre de réduire le nombre de degrés de liberté du poignet.

C.9 Conclusion

Le choix des coordonnées est l'un des plus important: il influencera sur la complexité de la commande et tout les choix futures: énergie, actuateurs...

---

D

RAPPELS GENERAUX



## D.1 LA RAIDEUR EN MÉCANIQUE

### D1.1 Introduction

La raideur en mécanique, ou rigidité, caractérise les éléments mécaniques utilisés dans une construction.

Ce travail a montré l'importance de la fréquence propre du bras de RI sur son comportement dynamique. Cette fréquence est fonction de la raideur.

### D1.2 Raideur linéaire K

Soit le système mécanique suivant:

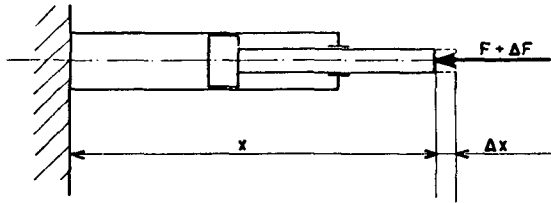


Fig. D1-1 Raideur linéaire.

On définit la raideur linéaire  $K$ , appelée raideur  $K$  comme la limite du rapport de la variation de la force  $\Delta F$  sur la variation de la longueur  $\Delta x$  quand  $\Delta x \rightarrow 0$ .

$$K = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta x}$$

$$K = \frac{dF}{dx} \quad (\text{N.m}^{-1}) \quad (\text{D1-1})$$



D1.3 Raideur angulaire  $K_\alpha$ 

Soit le système mécanique suivant:

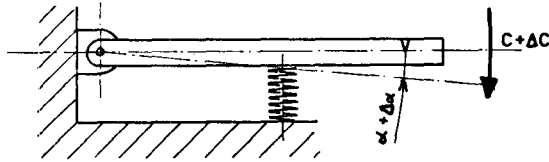


Fig. D1-2 Raideur angulaire.

On définit la raideur angulaire  $K_\alpha$  comme la limite du rapport de la variation du couple  $\Delta C$  sur la variation de l'angle  $\Delta \alpha$  quand  $\Delta \rightarrow 0$ .

$$K_\alpha = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{\Delta C}{\Delta \alpha}$$

$$K_\alpha = \frac{dC}{d\alpha} \quad (\text{N.m. rad}^{-1}) \quad (\text{D1-2})$$

D1-4 Relation entre  $K$  et  $K_\alpha$ 

Soit le système mécanique suivant:

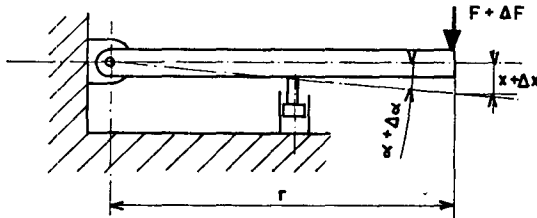
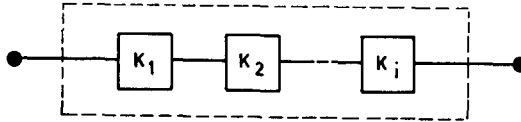


Fig. D1-3 Relation entre  $K$  et  $K_\alpha$ .

On peut écrire:

$$K_\alpha = \frac{dC}{d\alpha} = dC \cdot \frac{1}{d\alpha} = dF \cdot r \cdot \frac{r}{dx} = \frac{dF}{dx} \cdot r^2 = K \cdot r^2$$

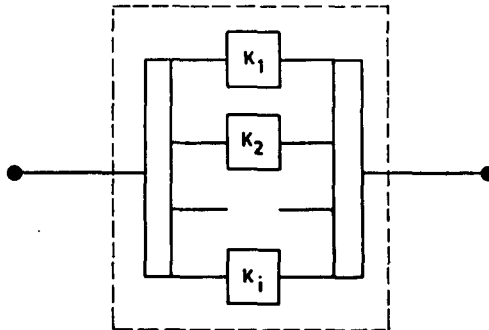
$$K_\alpha = K \cdot r^2 \quad (\text{D1-3})$$

D1.5 Addition de plusieurs raideursa) Éléments en sérieFig. D1-4 Addition d'éléments en séries.

$$\frac{1}{K} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{K_i} \quad (D1-4)$$

Il est souvent intéressant d'avoir les  $K_i$  aussi petits que possible pour un  $K$  donné. On peut montrer que:

$$K_i \text{ mini} = n \cdot K \quad (D1-5)$$

b) Éléments en parallèleFig. D1-5 Addition d'éléments en parallèles.

$$K = \sum_{i=1}^n K_i \quad (D1-6)$$

D1.6 Conclusion

La raideur est essentielle pour le dimensionnement d'un bras de RI.

La valeur de la raideur est rarement donnée dans les catalogues d'éléments de construction. C'est pour cette raison que les annexes complémentaires donnent les moyens de l'évaluer.

---

## D.2 CARACTÉRISTIQUES DE DIFFÉRENTS MATÉRIAUX

Des différents matériaux pouvant entrer dans la construction d'un bras de RI, nous allons comparer les caractéristiques suivantes:

- E : module d'élasticité,
- G : module de glissement,
- $\rho$  : densité,
- $E/\rho$  : rapport module d'élasticité sur densité.

Tableau des caractéristiques des différents matériaux

(N.1:100)(D.3:115)(G.2:214).

MATIERE	E . $10^{11}$ Pa	G . $10^{11}$ Pa	$\rho$ . $10^3$ Kg/m <sup>3</sup>	E/ $\rho$ . $10^7$ Pa.m <sup>3</sup> /Kg
Acier	2,1	0,8	7,9	2,66
Avional (alliage Alu)	0,73	0,28	2,7	2,7
Magnésium	0,45	0,17	1,8	2,5
Titane	1,12	0,41	4,5	2,49
Cuivre dur (VSM)	1,25	-	8,85	1,4
Béryllium	2,94	0,28	1,9	15,5
Graphite + époxy 45 x45 layup	0,98	-	1,4	7,0

A part le béryllium qui n'est pratiquement pas employable pour la construction d'un RI, on peut remarquer que le coefficient  $E/\rho$ , qui, si l'on peut dire caractérise l'efficacité d'un matériau, est à peu près constant, que l'on choisisse de l'aluminium, de l'acier, du magnésium ou du titane. On a donc intérêt à choisir l'acier qui est le moins cher de tous.



### D.3 MODULE D'ÉLASTICITÉ "B" DES LIQUIDES HYDRAULIQUES

Les liquides employés en hydraulique ne sont pas incompressibles bien qu'ils soient 100 fois moins élastiques que l'air. (B.8)(G.1:tome 1:3 à 7). Cette élasticité est à l'origine du "Stick-Slip" et de la fréquence propre d'un système.

La compressibilité d'un liquide, à température donnée, est caractérisée par la variation de sa masse volumique en fonction de la pression. Les mesures qu'on peut effectuer donnent des courbes qui ont l'allure de celle de la fig. D3-1:

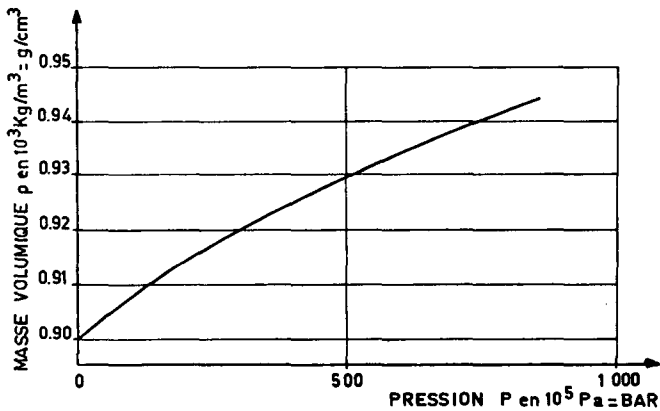


Fig. D3-1 Variation de la masse volumique d'un fluide hydraulique en fonction de la pression.

On définit le module délasticité B d'un liquide au voisinage d'une certaine pression en écrivant:

$$-\frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta \rho}{\rho} = \frac{\Delta P}{B} \quad (D3-1)$$

- Avec: - V = volume hydraulique, (m<sup>3</sup>),  
 - ρ = masse volumique, (kg/m<sup>3</sup>),  
 - P = pression, (Pa),  
 - B = module d'élasticité, (Pa).

Remarques: - Le coefficient B est à température ordinaire voisin, pour les fluides hydrauliques courants, de:

$$1,5 \cdot 10^9 \text{ Pascal} \quad (03-2)$$

- Le coefficient B diminue assez rapidement quand la température augmente: environ 1% par  $2^\circ\text{C}$  autour de  $100^\circ\text{C}$  pour les fluides courants,

- Le coefficient B augmente légèrement avec la pression: de l'ordre de 1% par  $20 \cdot 10^5 \text{ Pa}$  autour de  $200 \cdot 10^5 \text{ Pa}$  pour les fluides courants,

- Le coefficient B est notablement plus faible pour les fluides hydrauliques spéciaux pour hautes températures,

- Le coefficient B diminue très rapidement lorsqu'on mélange de l'air à l'huile: de l'ordre de 10% pour 1/1000 en volume d'air, de 50% pour 1% d'air, à une pression de  $150 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ ,

- A des pressions d'utilisation de l'ordre de  $150 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ , les liquides employés en hydraulique sont environ 100 fois moins compressibles que les gaz,

- La déformation des matériaux constituant les enveloppes et les tubes diminuent le module apparent. C'est pour cela que l'emploi de tuyauteries souples ainsi que des tuyauteries longues entre le distributeur et l'actuateur est à éviter et même à proscrire pour les systèmes hydrauliques asservis de performances.

Valeur à choisir pour le module d'élasticité B:

Tenant compte des remarques précédentes, on choisit pour la valeur du module d'élasticité du fluide hydraulique dans la suite des calculs la valeur suivante:

$$B = 1,3 \cdot 10^9 \text{ Pascal} \quad (03-3)$$

$$B = 1,3 \cdot 10^4 \text{ Bar}$$

## D.4 LOIS DE SIMILITUDE

(B.1)(B.3)(B.6)(P.1)(F.1)(F.2)

Dans la construction des RI, les lois de similitude permettent d'étudier des variations de caractéristiques telque forces, couples, raideurs en fonction d'une variation d'échelle, et ceci, de chaque éléments le constituants.

### Exemple:

Prenons un exemple trivial pour illustrer ces lois de similitudes.

Soit deux sphères de diamètres  $D$  et  $D'$  suspendues par un fil de diamètre  $d$  et  $d'$ .

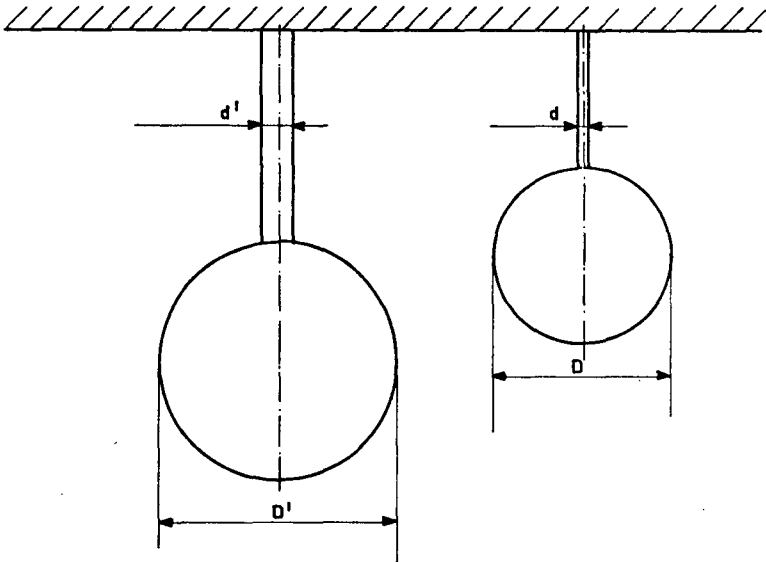


Fig. D4-1 Exemple d'application des lois de similitude.

La force  $G$  et  $G'$  due à la masse de chaque sphère exerce une traction  $T$  et  $T'$  sur leur fil. La résistance de ce dernier est telle qu'il ne se rompe pas, c'est à dire que la contrainte à la traction  $\tau$  dans le fil ne dépasse pas un  $\tau_0$  admissible.



Désignons par \* le rapport entre deux mêmes grandeurs de chaque exécution. Ce rapport est appelé "échelle de similitude" ou "rapport de similitude". On peut écrire:

$$D^* = \frac{D'}{D}, \quad G^* = \frac{G'}{G}, \quad T^* = \frac{T'}{T}, \quad d^* = \frac{d'}{d} \quad (D4-1)$$

Regardons comment varient  $D^*$ ,  $G^*$ ,  $T^*$  et  $d^*$  dans le cas d'un changement d'échelle.

#### Variation de $D^*$

Le diamètre d'une sphère varie selon le rapport de similitude dimensionnel appelé  $L$ :

On peut écrire:

$$D^* = L \quad (D4-2)$$

#### Variation de $G^*$

La force exercée par une sphère est proportionnelle à son volume, sa densité et à son accélération :

$$G = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot \frac{D^3}{8} \cdot \rho \cdot g$$

$$G' = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot \frac{D'^3}{8} \cdot \rho \cdot g$$

Le rapport entre ces deux forces s'écrit:

$$G^* = \frac{G'}{G} = \frac{D'^3}{D^3} = D^{*3} = L^3 \quad (D4-3)$$

#### Variation de $T^*$

La force de traction maximum dans un fil est proportionnelle à sa section et au  $\tau_0$  admissible.

$$T = \pi \cdot \frac{d^2}{4} \cdot \tau_0$$

$$T' = \pi \cdot \frac{d'^2}{4} \cdot \tau_0$$

Le rapport entre les deux tractions s'écrit:

$$T^* = \frac{T'}{T} = \frac{d'^2}{d^2} = d^{*2} = L^2 \quad (D4-4)$$

La traction que peut supporter le fil est proportionnelle au carré du rapport de similitude  $L$ , c'est à dire  $L^2$ .

#### Variation de $d^*$

La contrainte  $\tau_0$  dans le fil ne peut pas être dépassée, donc  $T^*$  et  $G^*$  doivent varier ensemble.

On peut écrire:

$$T^* = G^*$$

de l'équation (D5.3) on peut écrire:

$$T^* = L^3$$

à l'aide de l'équation (D5.4), et dans le cadre de cet exemple, on peut écrire:

$$d^{*2} = L^3$$

$$d^* = L^{\frac{3}{2}} \quad (D4-5)$$

En résumé, le diamètre de la sphère et le diamètre du fil un varie pas ensemble:  $D^*=L$  et  $d^*=L^{3/2}$ . Si l'on double le diamètre de la sphère, le diamètre du fil est multiplié par  $2^{3/2} = 2,8$ , le diamètre du fil augmente plus vite que le diamètre de la sphère. Par contre, si l'on divise par 2 le diamètre de la phère, le diamètre du fil est divisé par 2,8, le diamètre du fil diminue plus vite que le diamètre de la sphère.

Application aux RI.

Pour chaque élément étudié aux chapitres suivants, on étudiera la variation des caractéristiques telles forces, couples, raideurs, etc... en fonction du rapport de similitude dimensionnel  $L$ .

Ces chapitres peuvent être résumés de la manière suivante:

- Raideur linéaire:

$$K^* = L \quad (D4-6)$$

- Raideur angulaire:

$$K_{\alpha}^* = L^3 \quad (D4-7)$$

- Fréquence propre:

$$f^* = L^{-1} \quad (D4-8)$$

---

## D.5 MOMENTS D'INEPTIE

### D5.1 Moments d'inertie d'une aire plane (B.10:87-96)(H.2:1-13)

Les moments d'inertie d'une aire plane S ont pour dimension des  $m^4$ .

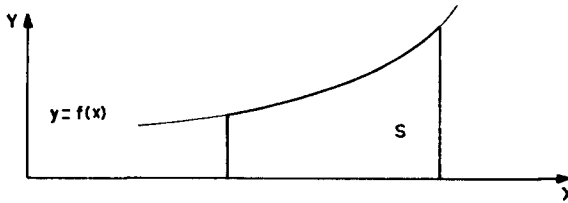


Fig. D5-1 Moments d'inertie d'une aire plane.

Moment d'inertie selon x:

$$I_x = \iint_S y^2 \cdot dx \cdot dy \quad (D5-1)$$

Moment d'inertie selon y:

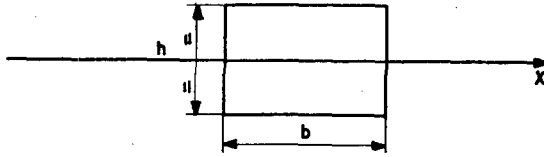
$$I_y = \iint_S x^2 \cdot dx \cdot dy \quad (D5-2)$$

Moment d'inertie polaire:

$$I_p = I_x + I_y \quad (D5-3)$$

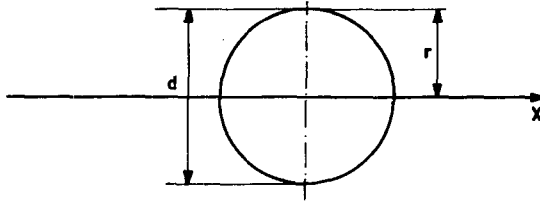
Quelques valeurs courantes pour les moments d'inertie:

- a) Section rectangulaire,
- b) Section ronde,
- c) Tube à paroi mince,
- d) Section elliptique.

a) Section rectangulaireFig. D5-2 Moments d'inertie d'une aire rectangulaire.

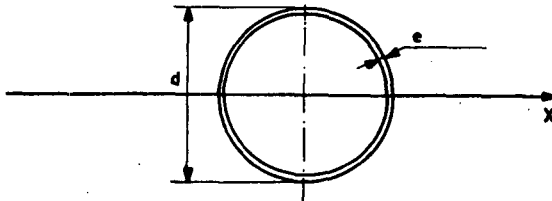
$$I_x = \frac{b \cdot h^3}{12} \quad (\text{m}^4) \quad (\text{D5-4})$$

$$I_p = \frac{b \cdot h \cdot (b^2 + h^2)}{12} \quad (\text{m}^4) \quad (\text{D5-5})$$

b) Section rondeFig. D5-3 Moments d'inertie d'une aire ronde.

$$I_x = \frac{\pi \cdot d^4}{64} = \frac{\pi \cdot r^4}{4} \quad (\text{m}^4) \quad (\text{D5-6})$$

$$I_p = \frac{\pi \cdot d^4}{32} = \frac{\pi \cdot r^4}{2} \quad (\text{m}^4) \quad (\text{D5-7})$$

c) Tube à paroi minceFig. D5-4 Moments d'inertie d'une aire circulaire.

$$I_x = \frac{\pi \cdot d^3 \cdot e}{8} \quad (m^4) \quad (D5-8)$$

$$I_p = \frac{\pi \cdot d^3 \cdot e}{4} \quad (m^4) \quad (D5-9)$$

d) Section elliptique

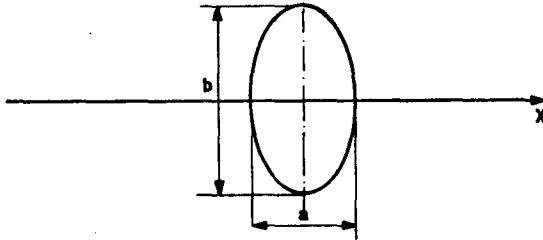


Fig. D5-5 Moments d'inertie d'une aire elliptique.

$$I_x = \frac{\pi \cdot a \cdot b^3}{64} \quad (m^4) \quad (D5-10)$$

$$I_p = \frac{\pi \cdot a \cdot b \cdot (a^2 + b^2)}{64} \quad (m^4) \quad (D5-11)$$

D5.2 Moments d'inertie d'un corps solide (B.10:87-96)(S.5:540)

Les moments d'inertie d'un corps solide M ont pour dimension des  $kg \cdot m^2$ .

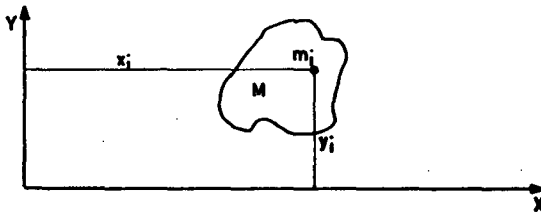


Fig. D5-6 Moments d'inertie d'un corps solide.

Moment d'inertie selon x:

$$J_x = \sum m_i \cdot y_i^2 \quad (D5-12)$$

Moment d'inertie selon y:

$$J_y = \sum m_i \cdot x_i^2 \quad (D5-13)$$

Quelques valeurs courantes pour les moments d'inertie:

- a) Barre de section ronde, de masse M,
- b) Barre de section rectangulaire, de masse M,
- c) Cylindre, de masse M,
- d) Anneau circulaire, de masse M.

a) Barre de section ronde, de masse M.

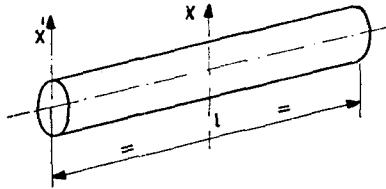


Fig. D5-7 Moments d'inertie d'une barre de section ronde.

$$J_x = \frac{1}{12} \cdot M \cdot l^2 \quad (\text{kg} \cdot \text{m}^2) \quad (\text{D5-14})$$

$$J_{x'} = \frac{1}{3} \cdot M \cdot l^2 \quad (\text{kg} \cdot \text{m}^2) \quad (\text{D5-15})$$

b) Barre de section rectangulaire, de masse M,

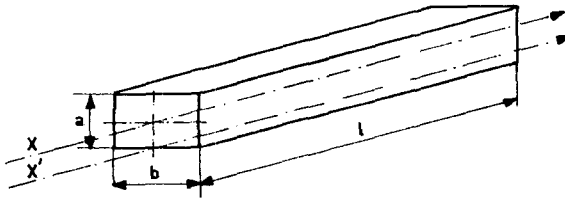


Fig. D5-8 Moments d'inertie d'une barre de section rectangulaire.

$$J_x = \frac{1}{12} \cdot M \cdot (a^2 + b^2) \quad (\text{kg} \cdot \text{m}^2) \quad (\text{D5-16})$$

$$J_{x'} = \frac{1}{12} \cdot M \cdot (4 \cdot a^2 + b^2) \quad (\text{kg} \cdot \text{m}^2) \quad (\text{D5-17})$$

c) Cylindre de masse M

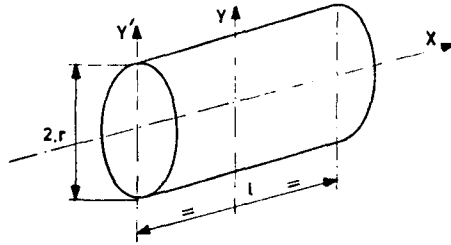


Fig. D5-9 Moments d'inertie d'un cylindre.

$$J_x = \frac{1}{2} \cdot M \cdot r^2 \quad (\text{kg} \cdot \text{m}^2) \quad (\text{D5-18})$$

$$J_y = \frac{1}{12} \cdot M \cdot (l^2 + 3 \cdot r^2) \quad (\text{kg} \cdot \text{m}^2) \quad (\text{D5-19})$$

$$J_{y'} = \frac{1}{12} \cdot M \cdot (4 \cdot l^2 + 3 \cdot r^2) \quad (\text{kg} \cdot \text{m}^2) \quad (\text{D5-20})$$

d) Anneau circulaire de masse M

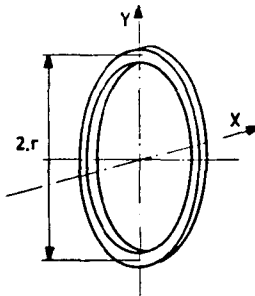


Fig. D5-10 Moments d'inertie d'un anneau circulaire.

$$J_x = M \cdot r^2 \quad (\text{kg} \cdot \text{m}^2) \quad (\text{D5-21})$$

$$J_y = \frac{1}{2} \cdot M \cdot r^2 \quad (\text{kg} \cdot \text{m}^2) \quad (\text{D5-22})$$





E

LES MOTEURS



## E 1 VÉRINS LINÉAIRES

(F.3:106)(D.3)(B.6:P4)(G.1:tome 2:13).

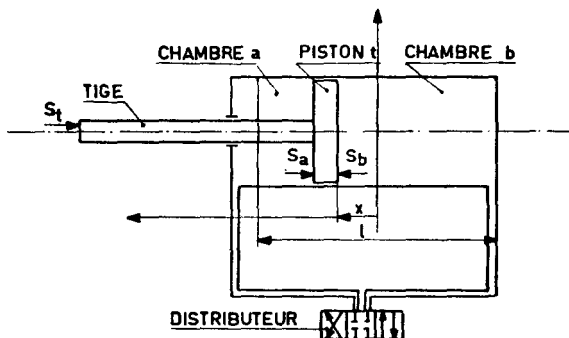


Fig.E1.1 Vérin linéaire.

L'indice "a" correspond à la chambre a,

L'indice "b" correspond à la chambre b,

L'indice "t" correspond à la tige,

P: pression en (Pa),

S: section en ( $m^2$ ),

V: volume en ( $m^3$ ),

l: course du piston en (m),

x: déplacement du piston en (m),  $x = 0$  quand  $V_a = V_b$

$V_t$ : volume total du vérin jusqu'au distributeur quand  $x = 0$  en ( $m^3$ )

$V_a = \frac{1}{2} \cdot V_t + S_a \cdot x$  en ( $m^3$ )

$V_b = \frac{1}{2} \cdot V_t - S_b \cdot x$  en ( $m^3$ )

### E1.1 Force d'un vérin linéaire:

La force d'un vérin linéaire est égale à:

$$F = S_a \cdot P_a - S_b \cdot P_b \quad (N) \quad (E1.1)$$

$$F^* = L^2 \quad (E1.2)$$

### E1.2 Définition de la raideur d'un vérin linéaire

On appelle raideur  $K$  d'un vérin linéaire, l'inverse de la somme des inverses de la raideur hydraulique  $K_h$ , de la raideur de la tige  $K_t$  et de la raideur des attaches du vérin  $K_a$ .

$$\frac{1}{K} = \frac{1}{K_h} + \frac{1}{K_t} + \frac{1}{K_a} \quad (E1.3)$$

### E1.3 Raideur hydraulique $K_h$ d'un vérin linéaire

On appelle raideur hydraulique d'un vérin linéaire, la raideur qu'il présente lorsqu'on l'a rempli d'huile et fermé hermétiquement par son distributeur.

Une variation  $dx$  du piston entraîne des variations de volume:

$$dV_a = - dx \cdot S_a$$

$$dV_b = dx \cdot S_b$$

Donc des variations de pression:

$$dP_a = + B \cdot \frac{dV_a}{V_a} = + \frac{B \cdot S_a}{V_a} \cdot dx$$

$$dP_b = - B \cdot \frac{dV_b}{V_b} = - \frac{B \cdot S_b}{V_b} \cdot dx$$

Et une variation de force:

$$dF = dP_a \cdot S_a - dP_b \cdot S_b$$

$$dF = B \cdot \left( \frac{S_a^2}{V_a} + \frac{S_b^2}{V_b} \right) \cdot dx$$

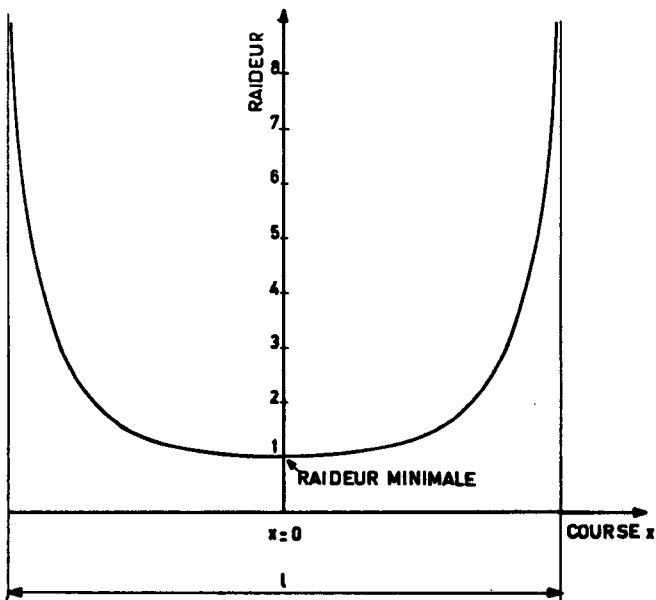
D'où la raideur  $K_h$  du vérin linéaire:

$$K_h = \frac{dF}{dx} = B \cdot \left( \frac{S_a^2}{V_a} + \frac{S_b^2}{V_b} \right) \quad (\text{N.m}^{-1}) \quad (\text{E1.4})$$

$$K_h^* = L \quad (\text{E1.5})$$

ou B est le module d'élasticité de l'huile (Chap.D4)

Remarque: La raideur d'un vérin linéaire est proportionnelle à sa section et inversement proportionnelle au volume d'huile.



*Fig.E1.2 Variation de la raideur hydraulique d'un vérin linéaire sans volume mort en fonction de la course.*

Raideur minimale d'un vérin linéaire:

La raideur est minimale pour  $dK_h/dx=0$ , c'est à dire pour  $x=0$ .

$$K_{h\text{mini}} = \frac{2 \cdot B}{V_t} \cdot (S_a^2 + S_b^2) \quad (\text{N.m}^{-1}) \quad (\text{E1.6})$$

$$K_{h\text{mini}}^* = L \quad (\text{E1.7})$$

Raideur minimale d'un vérin linéaire symétrique

Si  $S_a = S_b = S$ , on peut alors écrire:

$$K_{\text{hsym-mini}} = \frac{4 \cdot E \cdot S^2}{V_t} \quad (\text{N} \cdot \text{m}^{-1}) \quad (\text{E1.8})$$

$$K_{\text{hsym-mini}}^* = L \quad (\text{E1.9})$$

Raideur minimale d'une famille de vérins symétriques linéaires

On choisit une famille de vérin dont:

- $l = 10 \cdot D$  ou  $D$  est le diamètre du piston
- $E = 1,3 \cdot 10^9 \text{ Pa}$
- le volume mort est petit vis à vis de la cylindrée.

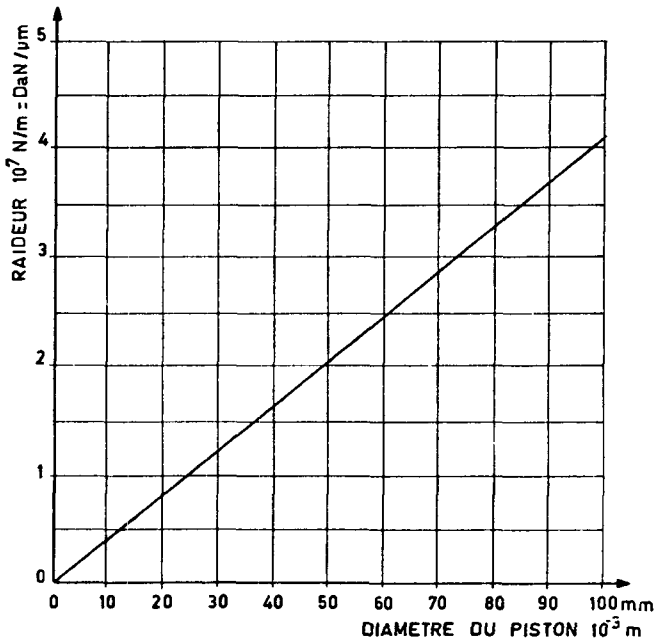


Fig.E1.3 Raideur hydraulique minimale d'une famille de vérins linéaires.

E1.4 Raideur  $K_t$  de la tige d'un vérin linéaire

La raideur  $K_t$  de la tige d'un vérin linéaire se calcule comme une poutre encastrée en compression ou en traction. (Chap.H1). A cause des risque de flambage, sa raideur est très supérieure à la raideur hydraulique  $K_h$ .

E1.5 Raideur  $K_a$  des attaches du vérin linéaire

a) Si les attaches sont mobile, la raideur  $K_a$  se calcule comme un palier (Chap.F ). La raideur  $K_a$  est très supérieure à la raideur hydraulique  $K_h$ .

b) Si l'attache est rigide, et suivant les cas, la raideur  $K_a$  peut être considérée comme infinie.

E1.6 Remarque: La raideur d'un vérin linéaire est surtout déterminée par la raideur hydraulique qui est la plus faible.

---





## E 2 VÉRINS ROTATIFS

(F.3:110)(D.3)(B.6:P4)(G.1:tome 2:13)(N.1:91)

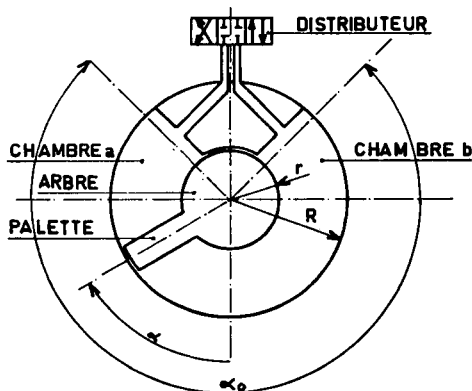


Fig.E2.1 Vérin rotatif.

L'indice "a" correspond à la chambre a,

L'indice "b" correspond à la chambre b,

P: pression en (Pa),

V: volume en ( $m^3$ ),

R: rayon extérieur de la palette mobile en (m),

r: rayon intérieur de la palette mobile en (m),

l: largeur de la palette mobile en (m),

$\alpha_0$ : angle de course de la palette mobile en (rad),

$\alpha$ : rotation de la palette en (rad),  $\alpha = 0$  quand  $V_a = V_b$ ,

$V_t$ : volume total du vérin rotatif jusqu'au distributeur en ( $m^3$ ),

CYR: cylindrée par radian en ( $m^3 \cdot rad^{-1}$ ) =  $\frac{1}{2} \cdot l \cdot (R^2 - r^2)$

### E2.1 Couple d'un vérin rotatif

Le couple d'un vérin rotatif est égale à:

$$C = \int_r^R (P_a - P_b) \cdot l \cdot r \cdot dr$$

$$C = \frac{1}{2} \cdot l \cdot (R^2 - r^2) (P_a - P_b) \quad (N.m) \quad (E2.1)$$

$$C = CYR \cdot (P_a - P_b) \quad (N.m) \quad (E2.2)$$

$$C^* = L^3 \quad (E2.3)$$

### E2.2 Définition de la raideur angulaire d'un vérin rotatif

On appelle raideur angulaire  $K_{\alpha}$  d'un vérin rotatif l'inverse de la somme des inverses de la raideur angulaire hydraulique  $K_{\alpha h}$ , et de la raideur angulaire de l'arbre  $K_{\alpha a}$  :

$$\frac{1}{K_{\alpha}} = \frac{1}{K_{\alpha h}} + \frac{1}{K_{\alpha a}} \quad (E2.4)$$

### E2.3 Raideur angulaire hydraulique $K_{\alpha h}$ d'un vérin rotatif

On appelle raideur angulaire hydraulique d'un vérin rotatif, la raideur angulaire qu'il présente lorsqu'on l'a rempli d'huile et fermé hermétiquement par son distributeur.

Une variation de  $d\alpha$  de la palette du vérin entraîne des variations de volume :

$$dV_a = CYR \cdot d\alpha$$

$$dV_b = - CYR \cdot d\alpha$$

Donc des variations de pression :

$$dP_a = - B \cdot \frac{dV_a}{V_a} = - \frac{B}{V_a} \cdot CYR \cdot d\alpha$$

$$dP_b = + B \cdot \frac{dV_b}{V_b} = + \frac{B}{V_b} \cdot CYR \cdot d\alpha$$

Et une variation de couple :

$$dC = CYR \cdot (dP_a - dP_b)$$

$$dC = B \cdot CYR^2 \cdot \left( \frac{1}{V_a} + \frac{1}{V_b} \right) \cdot d\alpha$$

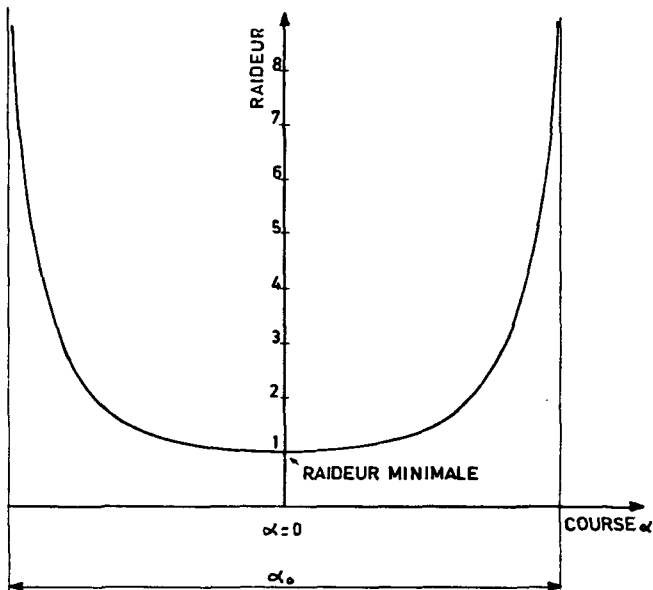
D'ou la raideur angulaire  $K_{\alpha h}$  du vérin rotatif:

$$K_{\alpha h} = \frac{dC}{d\alpha} = B \cdot CYR^2 \cdot \left( \frac{1}{V_a} + \frac{1}{V_b} \right) \quad (\text{N.m.rad}^{-1}) \quad (\text{E2.5})$$

$$K_{\alpha h}^* = L^3 \quad (\text{E2.6})$$

ou B est le module d'élasticité de l'huile (Chap.D4).

Remarque: La raideur angulaire d'un vérin rotatif est proportionnelle au carré des rayons et proportionnelle à la largeur de la palette.



*Fif.E2.2* Variation de la raideur angulaire hydraulique d'un vérin rotatif sans volume mort en fonction de sa course.

Si le volume des conduites entre le distributeur et les chambres a et b est petit vis à vis la cylindrée totale  $V_t$ , on peut écrire:

$$V_t = \text{CYR} \cdot \alpha_0$$

$$V_a = \text{CYR} \cdot (\frac{1}{2} \cdot \alpha_0 - \alpha)$$

$$V_b = \text{CYR} \cdot (\frac{1}{2} \cdot \alpha_0 + \alpha)$$

D'où la raideur angulaire hydraulique simplifiée d'un vérin rotatif:

$$K_{ahs} = B \cdot \text{CYR} \cdot \frac{4 \cdot \alpha_0}{\alpha_0^2 - 4 \cdot \alpha^2} \quad (\text{N.m.rad}^{-1}) \quad (\text{E2.7})$$

$$K_{ahs}^* = L^3 \quad (\text{E2.8})$$

#### Raideur minimale d'un vérin rotatif

La raideur angulaire hydraulique est minimale pour  $dK_{ah}/d\alpha = 0$  c'est à dire pour  $\alpha=0$ . De l'expression (E2.5) nous pouvons écrire:

$$K_{ahmini} = \frac{4 \cdot B \cdot \text{CYR}^2}{V_t} \quad (\text{N.m.rad}^{-1}) \quad (\text{E2.9})$$

$$K_{ahmini}^* = L^3 \quad (\text{E2.10})$$

Si le volume des conduite entre le distributeur et les chambres a et b est petit vis à vis la cylindrée totale  $V_t$ , on peut écrire:

$$K_{ahsmini} = \frac{4 \cdot B \cdot \text{CYR}}{\alpha_0} \quad (\text{N.m.rad}^{-1}) \quad (\text{E2.11})$$

$$K_{ahsmini}^* = L^3 \quad (\text{E2.12})$$

Raideur angulaire hydraulique minimale d'une famille de vérins rotatifs

On choisit une famille de vérins rotatifs à une palette dont:

$$R = 2.r$$

$$l = r$$

$$\alpha_0 = \frac{3}{2} \cdot \pi = 270^\circ$$

$$B = 1,3 \cdot 10^9 \text{ Pa}$$

le volume mort est petit vis à vis de la cylindrée.

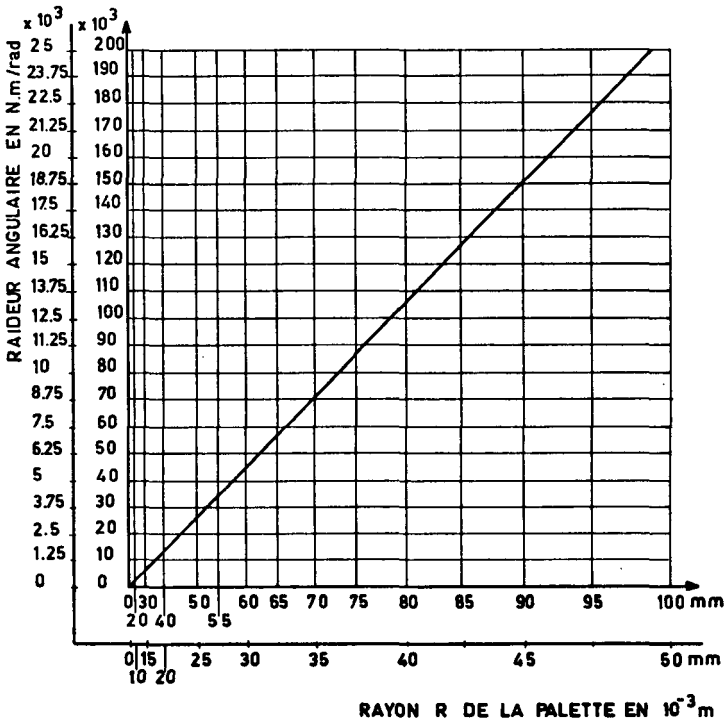


Fig.E2.3

Raideur angulaire hydraulique minimale d'une famille de vérins rotatifs.

Vérins rotatif à plusieurs palettes

Pour les vérins rotatifs à  $n$  palettes on peut écrire:

$$C_n = C \quad (\text{N.m}) \quad (\text{E2.13})$$

$$C_n^* = L^3 \quad (\text{E2.14})$$

b) pour la raideur hydraulique:

$$K_{ahn} = K_{ah} \quad (\text{N.m.rad}^{-1}) \quad (\text{E2.15})$$

$$K_{ahn}^* = L^3 \quad (\text{E2.16})$$

c) pour la cylindrée par radian:

$$\text{CYR}_n = n \cdot \text{CYR} \quad (\text{m}^3 \cdot \text{rad}^{-1}) \quad (\text{E2.17})$$

E2.4 Raideur angulaire  $K_{\alpha a}$  de l'arbre du vérin rotatif

La raideur angulaire  $K_{\alpha a}$  de l'arbre du vérin se calcule comme un arbre en torsion (Chap.H2).

E2.5 Remarque: La raideur angulaire d'un vérin rotatif est surtout déterminée par la raideur angulaire hydraulique qui est la plus faible.

---

### E 3 MOTEURS HYDRAULIQUES

(N.1:91)(T.1)(F.3:112)(B.6:P4)

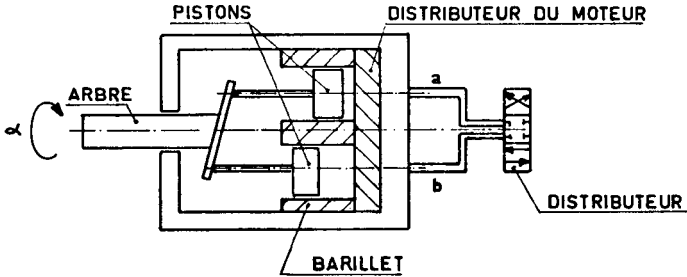


Fig.E3.1 Moteur hydraulique.

L'indice "a" correspond à la chambre alimentée par a,

L'indice "b" correspond à la chambre alimentée par b,

P: pression en (Pa),

$V_t$ : volume total de l'huile jusqu'au distributeur en ( $m^3$ ),

CYR: cylindrée par radian en ( $m^3$ /rad),

$V_a = V_b = \mathbb{1} \cdot \text{CYR}$  en ( $m^3$ )

$\alpha$ : angle de rotation de l'arbre du moteur en (rad).

#### E3.1 Couple d'un moteur hydraulique

Si le rendement d'un moteur hydraulique est égale à 1, ce qui est proche de la réalité, on peut appliquer le principe de la conservation de l'énergie:

$$V \cdot (P_a - P_b) = C \cdot \alpha$$

D'ou:

$$C = (P_a - P_b) \cdot V \cdot \frac{1}{\alpha}$$

Pour un tour on a :  $V = \text{CYR} \cdot 2 \cdot \mathbb{1}$  et  $\alpha = 2 \cdot \mathbb{1}$

Le couple d'un moteur hydraulique peut s'écrire:

$$C = \text{CYR} \cdot (P_a - P_b) \quad (\text{N.m}) \quad (\text{E3.1})$$

$$C^* = L^3 \quad (\text{E3.2})$$



### E3.2 Définition de la raideur d'un moteur hydraulique

On appelle raideur angulaire  $K_\alpha$  d'un moteur hydraulique, l'inverse de la somme des inverses de la raideur angulaire hydraulique  $K_{ah}$  et de la raideur angulaire de l'arbre  $K_{aa}$ .

$$\frac{1}{K_\alpha} = \frac{1}{K_{ah}} + \frac{1}{K_{aa}} \quad (E3.3)$$

### E3.3 Raideur angulaire hydraulique $K_{ah}$ d'un moteur rotatif

On appelle raideur angulaire hydraulique d'un moteur hydraulique, la raideur angulaire qu'il présente lorsqu'on l'a rempli d'huile et fermé hermétiquement par son distributeur.

Une variation de  $d_\alpha$  de l'arbre du moteur entraîne des variations de volume:

$$dV_a = - CYR \cdot d\alpha$$

$$dV_b = + CYR \cdot d\alpha$$

Donc des variations de pression:

$$dP_a = -2 \cdot B \cdot \frac{dV_a}{V_t} = + 2 \cdot B \cdot CYR \cdot \frac{d\alpha}{V_t}$$

$$dP_b = +2 \cdot B \cdot \frac{dV_b}{V_t} = - 2 \cdot B \cdot CYR \cdot \frac{d\alpha}{V_t}$$

Et une variation de couple:

$$dC = CYR \cdot (dP_a - dP_b)$$

$$dC = \frac{4 \cdot B \cdot CYR^2}{V_t} \cdot d\alpha$$

D'où la raideur angulaire hydraulique  $K_{ah}$  du moteur hydraulique:

$$K_{ah} = \frac{4.B.CYR^2}{V_t} \quad (\text{N.m.rad}^{-1}) \quad (\text{E3.4})$$

$$K_{ah}^* = L^3 \quad (\text{E3.5})$$

ou B est le module d'élasticité de l'huile (Chap.D4).

Remarques: Pour le moteur hydraulique et le vérin rotatif, on trouve la même expression pour le couple (E2.2 et E3.1) et pour la raideur angulaire hydraulique (E2.9 et E3.4).

#### Raideur angulaire hydraulique d'une famille de moteurs hydrauliques

On choisit une famille de moteurs hydrauliques dont le volume mort est égale à la cylindrée par tour, et  $B = 1,3 \cdot 10^9$  Pa.

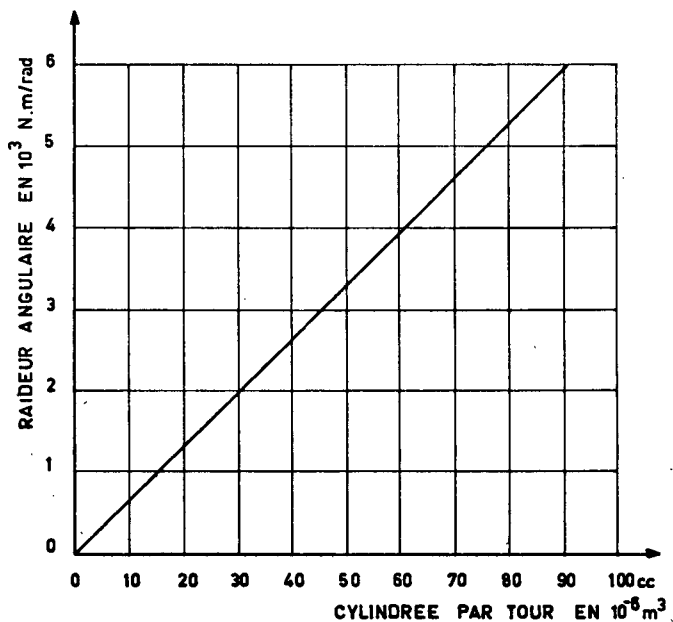


Fig.E3.2 Raideur angulaire hydraulique d'une famille de moteurs hydrauliques.

E3.4 Raideur angulaire  $K_a$  de l'arbre du moteur hydraulique

La raideur angulaire  $K_a$  de l'arbre du moteur hydraulique se calcule comme un arbre en torsion (Chap.H2).

E3.5 Remarques: La raideur angulaire d'un moteur hydraulique est surtout déterminée par la raideur angulaire hydraulique qui est la plus faible.

A débit constant, on peut remarquer pour le moteur hydraulique une variation de vitesse  $\dot{\alpha}$  suivant la position angulaire  $\alpha$  en fonction du nombre  $n$  de pistons: 4% pour  $n=5$ , 2% pour  $n=7$ , 1,2% pour  $n=9$ .

---

## E 4 SERVO-VALVES

(G.1:tome 1:153, tome 2:159)(F.3:272)(B.4:235)(S.2:121)

La servo-valve est un moyen hydroélectrique permettant de régler à distance avec grande précision la loi de mouvement (position, vitesse, accélération...) d'un récepteur hydraulique. La servo-valve transforme un courant électrique d'alimentation en un courant hydraulique modulé en débit et/ou pression. La servo-valve fait la liaison entre la commande (électrique) et les actuateurs hydrauliques (vérins, moteurs hydrauliques...). La servo-valve est un élément du circuit d'asservissement.

La servo-valve est un élément très complexe et de grande précision développé pour l'aviation. Elle se compose généralement de 4 parties:

1) Un moteur-couple: Il transforme un signal électrique en déplacement,

2) Un amplificateur hydraulique: (1<sup>er</sup> étage hydraulique). Il amplifie la force et/ou le déplacement du moteur couple pour déplacer le distributeur hydraulique,

3) Un distributeur hydraulique: (2<sup>ème</sup> étage hydraulique). Il dirige le liquide hydraulique dans les chambres de l'actuateur hydraulique,

4) Un asservissement interne: Cet asservissement hydraulique ou électrique en boucle ouverte ou fermée maintient une relation entre l'entrée électrique et la sortie hydraulique.

### E4.1 Raideur d'une servo-valve

La raideur d'une servo-valve dépend du dernier étage hydraulique, c'est à dire du distributeur.

Il y a 2 types d'étage hydraulique:

1) Etage en "pression": Ce type est rarement employé pour le distributeur, mais il l'est couramment pour l'amplificateur hydraulique. Exemple: le potentiomètre hydraulique.

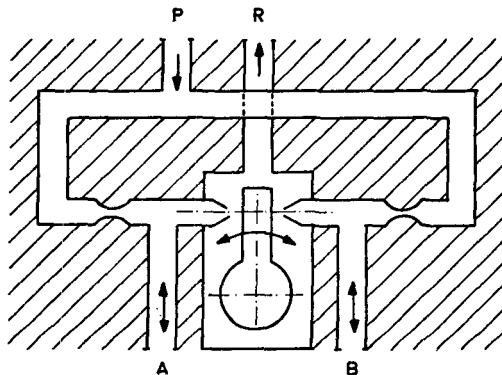


Fig.E4.1 Etage en pression: le potentiomètre hydraulique.

2) Etage en "débit": Son frottement élevé nécessite l'emploi d'un gros moteur couple. Il est souvent employé comme distributeur hydraulique. Exemple: le distributeur à tiroir.

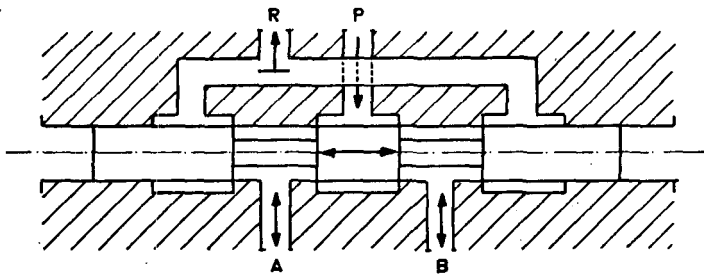
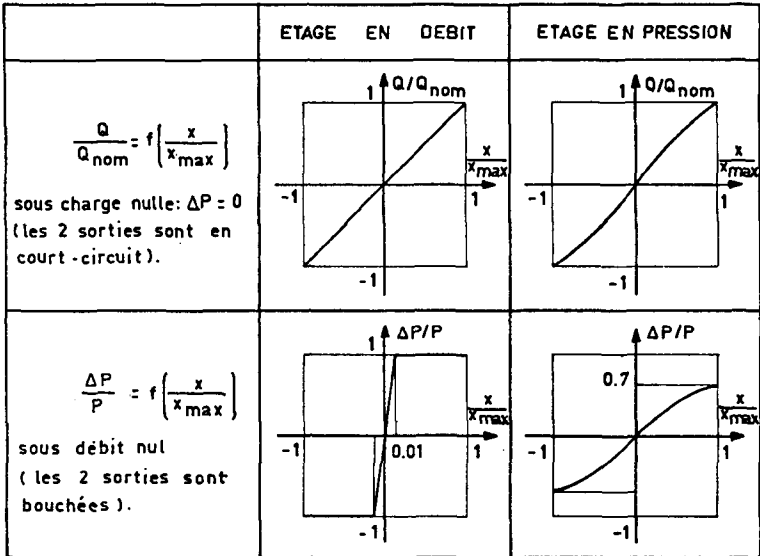


Fig.E4.2 Etage en débit: le distributeur à tiroir.

Comparaison des caractéristiques des étages en pression et en débit.



*Fig.E4.3 Comparaison des caractéristiques des étages en pression et en débit.*

Comme le montre la première ligne du tableau (Fig.E4.3) la variation du débit  $Q$  en fonction de l'ouverture  $x$  est semblable pour les deux types d'étages. On peut remarquer que l'étage en débit est plus linéaire.

La deuxième ligne du tableau (Fig.E4.3) montre la variation de la pression  $\Delta P$  en fonction de l'ouverture  $x$ . On remarque une pente extrêmement plus importante pour un étage en débit. Ceci se traduit par une meilleure raideur d'un étage en débit, donc du comportement de l'asservissement.

#### E4.2 Raideur d'un ensemble "actuateur-servo-valve"

Comme nous l'avons vu (Chap.E1, E2 et E3), la raideur d'un ensemble "actuateur-servo-valve" dépend du volume de liquide hydraulique compris dans l'actuateur (vérins, moteur hydraulique...) et le volume mort entre l'actuateur et la servo-valve. Les volumes mort ayant un effet défavorable sur la raideur, ils doivent être réduits à un minimum, ce qui conduit dans de nombreux cas à disposer la servo-valve directement sur son actuateur.

E4.3 Remarques: La servo-valve, qui est un élément très complexe et de grande précision doit être choisit et employé avec grand soin. Les catalogues des fabricants\*\* donnent les critères de choix (par exemple le débit nominal). Le prix d'une servo-valve peut être supérieur à l'actuateur, ce qui est un handicap pour l'énergie hydraulique.

Les distributeurs proportionnels disponibles sur le marché ont un emploi de régulateur de débit "plus statique" que dynamique et de ce fait ne conviennent pas pour les RI.

---

\*\* Moog (USA), TSS (Japon), Abex-Denisson (USA), Sperry-Vickers (USA), Bosch (D), Sopélem (F),...

## E 5 COMPARAISON ENTRE LES DIFFÉRENTS TYPES DE MOTEURS ÉLECTRIQUES

(E.1)(H.6)(K.1)

Dans la construction des bras de RI, on cherche à avoir un pouvoir d'accélération (voir pAC11) élevé et une masse du moteur aussi faible que possible. Ces conditions conduisent au choix des moteurs à courant continu (CC) à aimant permanent asservis en boucle fermée par l'intermédiaire d'un capteur.

Pour des applications où les facteurs dynamiques (accélération, vitesse,...) sont secondaires, le moteur pas à pas (PP) peut offrir des avantages: grande fiabilité, directement compatible avec une commande digitale. Mais le moteur PP a de faibles performances mécaniques (constante de temps longue par exemple) et un poids élevé: à puissance égale, le moteur PP est 10 fois plus lourd qu'un moteur CC, 200 fois plus qu'un moteur hydraulique.

Le tableau de la page suivante (Fig.E5.1) compare différents types de moteurs électriques pouvant entrer en considération lors du choix de ceux-ci. Dans les moteurs CC, les moteurs à rotor imprimé et à rotor sans fer bobiné sont les plus couramment employés. Ils seront étudiés au chapitre E6. Le chapitre E7 sera consacré aux moteurs PP.



Tableau comparatif entre les différents types de moteurs électriques

	MOTEURS A COURANT CONTINU (CC)						PAS A PAS (PP)	
	Moteur Couple	Rotor en fer bobiné	Rotor bobiné en surface	Rotor Imprimé	Rotor sans fer Bobiné	Aimant permanent	Réductance variable	
Inertie du rotor	élevée	moyenne	petite	petite	très petite	élevée	moyenne	
Constante de temps mécanique	longue	moyenne	petite	très petite	très petite	longue	moyenne	
Vitesse rapide	mauvaise	bonne	très bonne	moyenne	bonne	mauvaise	mauvaise	
Vitesse lente	très bonne	moyenne	bonne	très bonne	bonne	saccadée	saccadée	
Constante de temps thermique	longue	longue	moyenne	courte	très courte	longue	longue	
Couple / Inertie	bas	moyen	élevé	élevé	très élevé	bas	moyen	
Puissance/Poids	moyen	moyen	moyen	bon	bon	mauvais	mauvais	
Fiabilité	moyenne	moyenne	moyenne	moyenne	moyenne	très bonne	très bonne	
Prix relatif	moyen	bas	élevé	moyen	élevé	moyen	moyen	

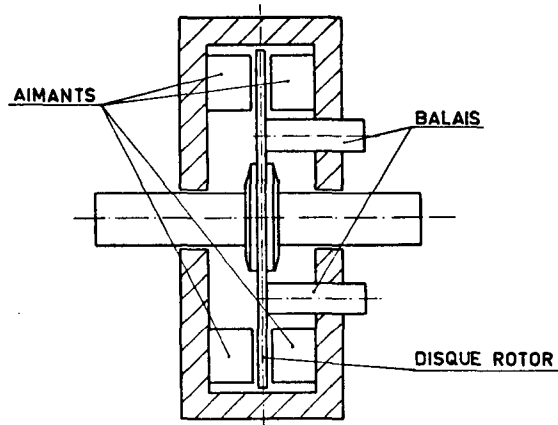
*Fig. E5.1 Tableau comparatif entre les différents types de moteurs électriques.*

## E 6 MOTEURS À COURANT CONTINU (CC)

(H.6)(E.1)

### E6.1 Description des moteurs à rotor imprimé et à rotor bobiné sans fer

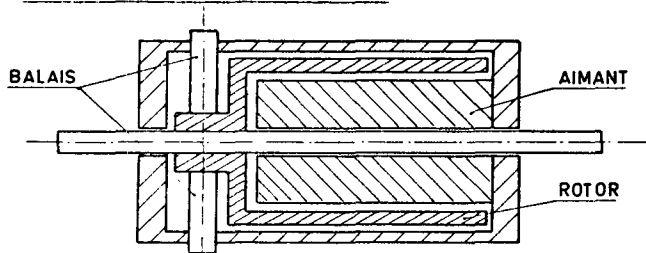
a) Moteur à rotor imprimé\*:



*Fig.E6.1 Moteur à rotor imprimé.*

Le moteur à rotor imprimé est un moteur à courant continu, à entrefer plan et bobinage lamellaire. Il comprend deux flasques munies d'aimants permanents entre lesquels tourne le rotor plan. Le rotor est constitué par une superposition de plusieurs couches de conducteurs lamellaires en cuivre, isolées entre elles par des feuilles de verre époxy. Tous les conducteurs sont interconnectés à leurs extrémités et forment ainsi un bobinage ondulé série. Les balais, généralement au nombre de quatre frottent directement sur les conducteurs du rotor dans la partie voisine de son axe.

\* Axem (BBC)(F), Mavilor (E), Electro-Craft (USA),...

b) Moteur à rotor bobiné sans fer\*:Fig.E6.2 Moteur à rotor bobiné sans fer.

Le rotor est un induit intégralement en cuivre constitué par un bobinage cylindrique autoportant. Tenu sur l'axe par un disque, il tourne dans l'entrefer entre le boîtier et un aimant permanent bipolaire. Il est soumis sur pratiquement toute sa longueur à l'action du champs magnétique.

E6.2 Considérations pour le choix d'un moteur CC

Il faut considérer pour ce choix les éléments suivants:

- Les frottements: sec, visqueux, par ventilation,...
- La charge et l'inertie dans le cas le plus défavorable,
- La vitesse maximum,
- L'accélération maximum,
- La durée de vie,
- L'environnement: température, poussières, vibrations...,
- La position de montage du moteur,
- les charges sur l'arbre du moteur,
- La fréquence de travail,
- ...,

\* Portescap (CH), Faulhaber (D), Electro-Craft (USA), Maxon (CH),...

La limite d'utilisation des moteurs à courant continu à rotor imprimé ou à rotor bobiné sans fer, en vitesse variable, en moteur couple ou en régime permanent est uniquement fonction de la température maximum admissible du rotor et de la durée de vie des balais.(fiabilité).

### E6.3 Raideur angulaire d'un moteur CC

Le choix de moteurs CC nécessite dans le cas des RI l'emploi de capteurs de position (entre autre pour l'asservissement) et de réducteurs.

Deux cas se présentent pour le calcul de la raideur angulaire de l'ensemble "moteur-réducteur-capteur" :

1) Le réducteur est irréversible: Dans ce cas la raideur angulaire est donnée par le réducteur (Chap.G),

2) Le réducteur est réversible: La raideur angulaire dépend de la résolution du capteur de position (du nombre n de positions définies par tour de moteur appelé pas par tour)(Chap.I) et de l'asservissement du moteur CC.

En considérant l'asservissement optimal, c'est à dire fournissant une correction maximale pour une erreur de un pas, on peut écrire pour la raideur angulaire d'un moteur CC:

$$K_{\alpha} = \frac{dC}{d\alpha} = \frac{C.n}{2.\pi} \quad (\text{N.m.rad}^{-1}) \quad (\text{E6.1})$$

avec: n = nombre de pas par tour de moteur, (.)

C = couple maximal du moteur, (N.m)

E6.4 Remarques: Pour une famille donnée de moteurs CC on peut écrire:

a) pour la puissance:

$$P^* = L^3 \quad (\text{E6.2})$$

et  $P = 1 \text{ à } 3.10^{-4} \text{ W.mm}^{-3} \quad (\text{E6.3})$

b) pour la constante de temps mécanique:

$$\tau^* = L^{-1} \quad (\text{E6.4})$$

$$\tau = \frac{J}{C} \cdot \omega \quad (\text{s}) \quad (\text{E6.5})$$

avec:  $J$  = inertie du moteur, ( $\text{Kg.m}^2$ ),

$C$  = couple maximal du moteur, ( $\text{N.m}$ ),

$\omega$  = vitesse angulaire maximale du moteur, ( $\text{rad.s}^{-1}$ ).

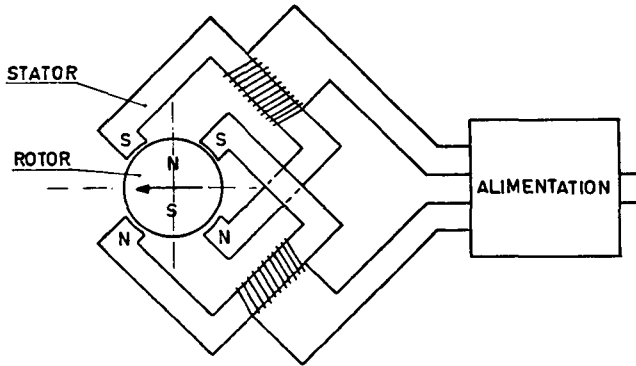
---

## E 7 MOTEURS PAS À PAS (PP)

(K.1)(W.1)(P.2)

### E7.1 Description des moteurs PP à aimant permanent et à réluctance variable

a) Moteur PP à aimant permanent\*:



*Fig.E7.1 Moteur pas à pas à aimant permanent.*

La fig.E7.1 représente un moteur pas à pas à aimant permanent à 4 pas par tour.

La position d'un pas moteur dépend de la relation entre le nombre de pôles électromagnétiques du stator et le nombre de pôles magnétiques du rotor. Ce dernier est constitué d'un aimant permanent.

Une alimentation adéquate permet une rotation pas à pas du rotor.

\* Philips (NL), Sigma (USA), Responsyn (USA), MAE (I),...

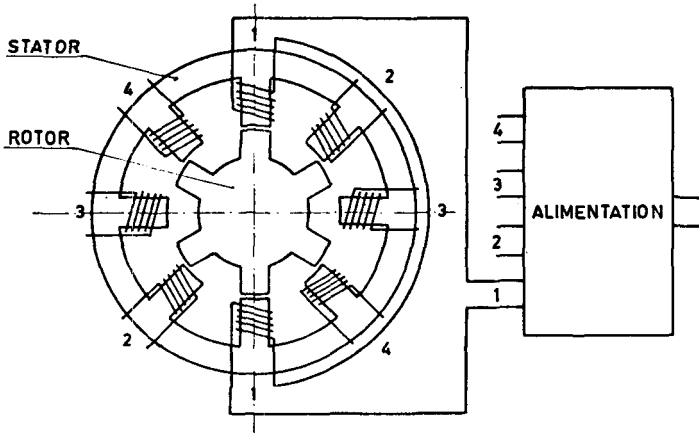
b) Moteur PP à réluctance variable\*

Fig. E7.2 Moteur pas à pas à réluctance variable.

La fig.E7.2 représente un moteur pas à pas à réluctance variable à 8 pas par tour.

Le rotor en acier anti-magnétique comporte une paire de pôles en moins que le stator ne comporte de pôles électromagnétiques. Deux pôles électromagnétiques sont alimentés ensemble, le rotor se mettra dans une position d'équilibre de manière à fermer le flux magnétique.

Une alimentation adéquate permet une rotation pas à pas du rotor.

### E7.2 Considérations pour le choix d'un moteur PP

Un moteur pas à pas est caractérisé par plusieurs grandeurs:

- Un nombre de pas  $n$  par tour: de 4 à 2000,
- Une fréquence "start-stop": c'est la fréquence de démarrage maximale admise par le moteur sous certaines conditions: couple, inertie, type d'alimentation...

\* Warner electric (USA), Binder magnet (D),...

- Une fréquence maximale, sous les mêmes conditions que précédemment,
- Un couple de travail, sous les mêmes conditions que précédemment,
- Un couple de maintien: c'est le couple à fréquence nulle. Il peut être supérieur au couple de travail. Mêmes conditions que précédemment,
- Une erreur de pas non cumulative,
- Une zone de résonance, à la fréquence propre du moteur, ou il est difficile de travailler. L'emploi d'un amortisseur de Lancaster monté sur l'arbre du moteur aide le passage de cette zone mais nuit aux performances dynamiques.

Le choix du moteur pas à pas sera particulièrement justifié si:

- Les performances dynamiques ne sont pas primordiales,
- L'incrément de travail est grand: par exemple pour le montage d'éléments électroniques, un incrément de 1/100 de pouce soit 0,254 mm est possible.
- On veut travailler en boucle ouverte, c'est à dire sans capteurs de position, sauf pour une position de référence,
- On veut travailler directement en digital,
- On veut une grande fiabilité, dans le domaine de l'énergie électrique,
- L'incrément de travail est grand ou la vitesse faible.

### E7.3 Raideur angulaire d'un moteur pas à pas

Le choix de moteurs PP nécessite dans le cas des RI l'emploi de réducteurs.

Deux cas se présentent pour le calcul de la raideur angulaire de l'ensemble "moteur-réducteur" :



1) Le réducteur est irréversible: Dans ce cas la raideur angulaire est donnée par le réducteur (Chap.G).

2) Le réducteur est réversible: La raideur angulaire d'un moteur PP en boucle ouverte est donnée par le diagramme de la variation du couple en fonction de la variation de la position angulaire. Ce diagramme est propre à chaque moteur, par exemple:

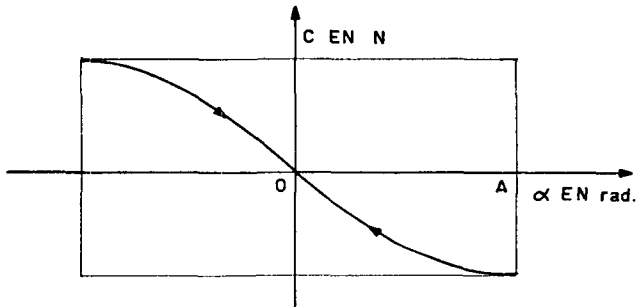


Fig.E7.3 Variation du couple C en fonction de la variation de la position angulaire alpha d'un moteur pas à pas.

L'angle OA correspond à un ou deux pas, par exemple:

- 4 phases unipolaires ou 2 phases bipolaires: 1 pas.
- 8 phases unipolaires ou 8 phases bipolaires: 2 pas.

On peut écrire pour la raideur angulaire d'un moteur PP:

$$K_{\alpha} = \frac{dC}{d\alpha} = \frac{C \cdot n}{a \cdot 2 \cdot \pi} \quad (\text{N.m.rad}^{-1}) \quad (\text{E7.1})$$

avec: C = couple maximum du moteur, (N.m),

n = nombre de pas par tour du moteur, (.),

a = 1 ou 2 suivant que l'angle OA vaut 1 ou 2 pas, (.).

Le moteur PP peut être asservi. Il possède alors un capteur de position. La raideur sera donnée comme dans le cas du moteur CC par la résolution du capteur et l'asservissement.

E7.4 Remarques: Pour une famille donnée de moteurs PP on peut écrire pour la puissance:

$$P^* = L^3 \quad (E7.2)$$

et  $P = 2 \text{ à } 8 \cdot 10^{-5} \text{ W} \cdot \text{mm}^{-3} \quad (E7.3)$

---



## E 8 DÉTERMINATION DU RAPPORT DE RÉDUCTION OPTIMAL D'UN RÉDUCTEUR ASSOCIÉ À UN MOTEUR HYDRAULIQUE OU ÉLECTRIQUE

Un moteur hydraulique ou électrique est généralement associé avec un réducteur. Le rapport de réduction  $N$  doit être choisi de manière à ce qu'avec un moteur donné la bras de RI aille le plus rapidement d'un point à un autre. On choisira une longueur de parcours moyen.

Soit la loi de mouvement suivante:

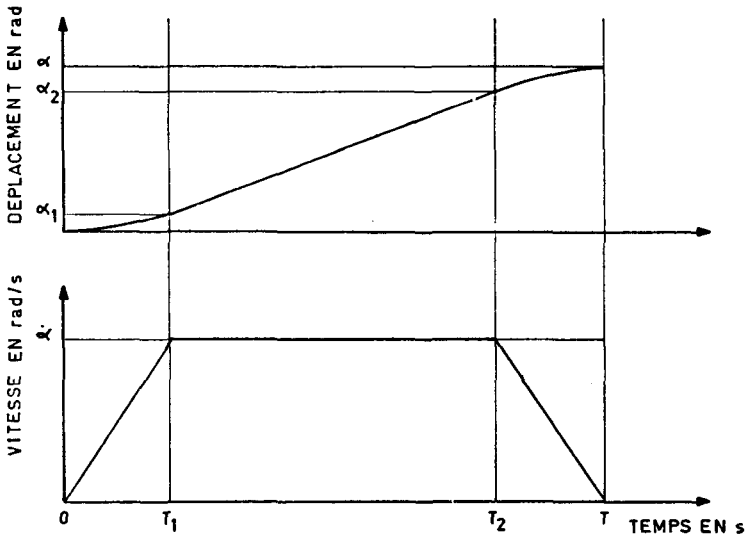


Fig.E8.1 Diagramme du profil du déplacement et de la vitesse.

- Soit:  $\alpha$  = déplacement de la charge, (rad),  
 $\dot{\alpha}$  = vitesse de la charge, (rad.s<sup>-1</sup>),  
 $\ddot{\alpha}$  = accélération de la charge, (rad.s<sup>-2</sup>),  
 $\omega$  = vitesse du moteur, (rad.s<sup>-1</sup>),  
 $\dot{\omega}$  = accélération du moteur, (rad.s<sup>-2</sup>),  
 $N$  = rapport de réduction, (.)  
 $T$  = durée du parcours, (s).

Hypothèse: L'accélération est constante,

L'accélération est égale à la décélération.

On peut écrire:

$$T = T_1 + (T_2 - T_1) + (T - T_2) \quad (\text{E8.1})$$

avec: a)  $T_1 = T - T_2 = \frac{\dot{\alpha}}{\ddot{\alpha}}$  (E8.2)

b)  $T_2 - T_1 = \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\ddot{\alpha}}$  (E8.3)

mais:  $\alpha_2 - \alpha_1 = \alpha - 2 \cdot \alpha_1$  (E8.4)

et:  $\alpha_1 = \frac{\dot{\alpha}^2}{2 \cdot \ddot{\alpha}}$  (E8.5)

d'ou en introduisant (E8.4) et (E8.5) dans (E8.3) on obtient:

$$T_2 - T_1 = \frac{\alpha}{\ddot{\alpha}} - \frac{\dot{\alpha}}{\ddot{\alpha}} \quad (\text{E8.6})$$

Avec l'introduction de (E8.2) et (E8.6) l'équation (E8.1) devient:

$$T = 2 \cdot \frac{\dot{\alpha}}{\ddot{\alpha}} + \frac{\alpha}{\ddot{\alpha}} - \frac{\dot{\alpha}}{\ddot{\alpha}} \quad (\text{E8.7})$$

Si:  $T_2 \geq T_1$  l'équation (E8.7) devient:

$$T = \frac{\dot{\alpha}}{\ddot{\alpha}} + \frac{\alpha}{\ddot{\alpha}} \quad (\text{E8.8})$$

Mais:  $\dot{\alpha} = \frac{\omega}{N}$  (E8.9)

$$\ddot{\alpha} = \frac{\dot{\omega}}{N} \quad (\text{E8.10})$$

$$\dot{\omega} = \frac{C}{J_M + \frac{J_C}{N^2}} \quad (\text{E8.11})$$

avec: C = couple maximal du moteur, (N.m),

$J_M$  = inertie du moteur, (Kg.m<sup>2</sup>),

$J_C$  = inertie de la charge, (Kg.m<sup>2</sup>).

En introduisant (B8.9)(B8.10) et (B8.11) dans (E8.8) on obtient pour le temps de parcours:

$$T = \frac{\omega \cdot J_M}{C} + \frac{\omega \cdot J_C}{N^2 \cdot C} + \frac{N \cdot \alpha}{\omega} \quad (\text{s}) \quad (\text{B8.12})$$

On trouve la durée minimale pour :  $\frac{dT}{dN} = 0$

$$\frac{dT}{dN} = \frac{-2 \cdot \omega \cdot J_C}{N^3 \cdot C} + \frac{\alpha}{\omega} = 0 \quad (\text{B8.13})$$

De l'équation (B8.13) on trouve le rapport de réduction optimale:

$$N = \sqrt[3]{\frac{2 \cdot \omega^2 \cdot J_C}{C \cdot \alpha}} \quad (.) \quad (\text{B8.14})$$

avec:  $\omega$  = vitesse du moteur, ( $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$ ),  
 $J_C$  = inertie de la charge, ( $\text{Kg} \cdot \text{m}^2$ ),  
 $C$  = couple du moteur, ( $\text{N} \cdot \text{m}$ ),  
 $\alpha$  = déplacement de la charge, ( $\text{rad}$ ).

Exemple:

Soit:  $J_M = 30 \cdot 10^{-7} \text{ Kg} \cdot \text{m}^2$   
 $J_C = 64 \cdot 10^{-5} \text{ Kg} \cdot \text{m}^2$   
 $C = 3,5 \cdot 10^{-2} \text{ N} \cdot \text{m}$   
 $\omega = 330 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$

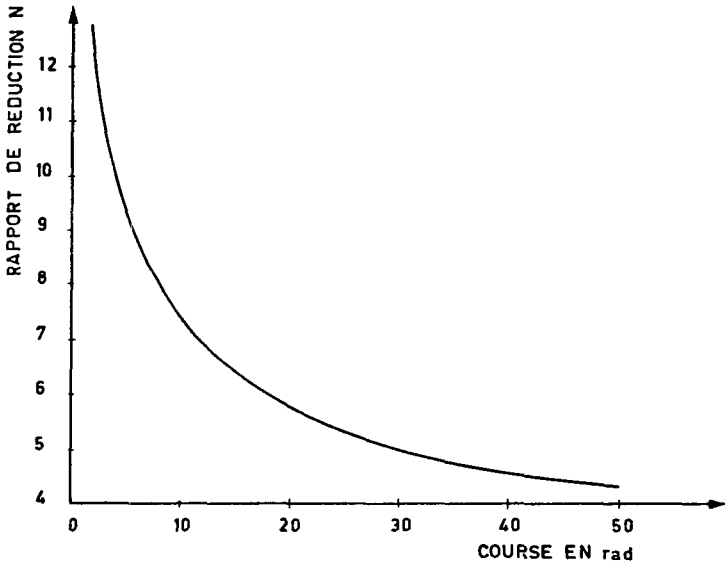
Avec cet exemple, nous allons étudier:

a) La variation du rapport de réduction  $N$  en fonction du déplacement  $\alpha$ ,

b) La variation du temps de déplacement  $T$  en fonction du rapport de réduction  $N$ .

a) Variation du rapport de réduction N en fonction du déplacement  $\alpha$ :

$$N = \sqrt[3]{\frac{3982}{\alpha}} \quad (.)$$



*Fig.E8.2* Variation du rapport de réduction N en fonction du déplacement  $\alpha$ .

Remarques: Le rapport de réduction N' pour obtenir une accélération maximale de la charge a pour valeur:

$$N' = \sqrt{\frac{J_C}{J_M}}$$

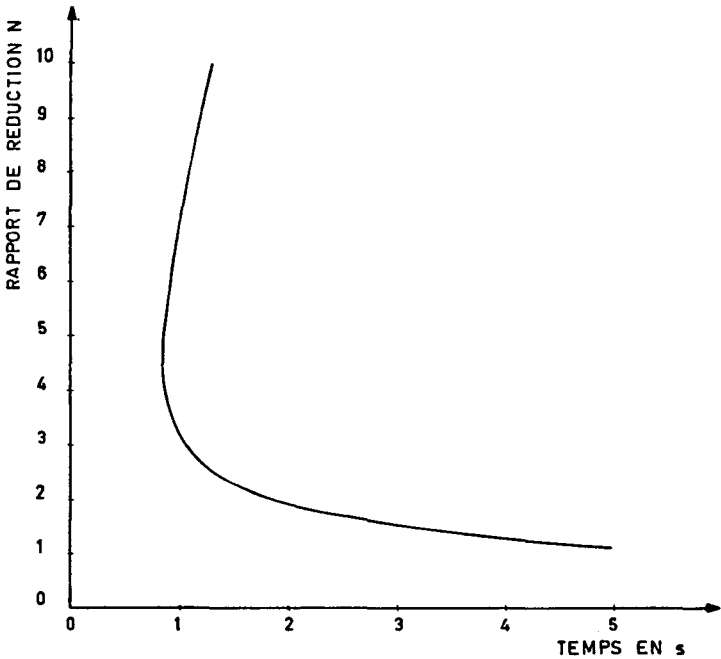
Pour l'exemple,  $N' = 14,6$ .

Cette valeur peut être très différente de celle obtenue avec la formule (B8.14)

b) Variation du temps de déplacement T en fonction du rapport de réduction N

Choisissons une course étalon de 40 rad.

$$T = 2,8 \cdot 10^{-2} + \frac{6}{N^2} + 1,2 \cdot 10^{-1} \cdot N \quad (\text{s})$$



*Fig.E8.3* Variation du temps de déplacement T en fonction du rapport de réduction N.

Remarques: On a avantage à choisir N plus grand que l'optimum que le contraire.





F

LES PALIERS



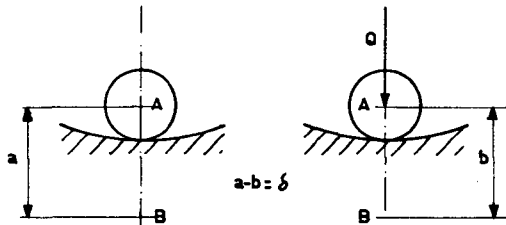
## F 1 RAIDEUR DES CORPS ROULANTS

(P.1:16-18)

Quand deux corps de surface courbe sont pressés l'un contre l'autre, il se forme entre eux une surface de contact dont la forme dépend des courbures des surfaces au point de contact. La déformation au point ou à la ligne de contact dépend de la contrainte dans les matériaux. C'est la théorie de Hertz qui permet de calculer contraintes et déformations. Dans les paliers à corps roulants, la matière de surface est toujours de l'acier.

La raideur de contact n'est pratiquement pas influencée par la présence de lubrifiant.

### F1.1 Contact ponctuel



*Fig.F1.1 Contact ponctuel : rapprochement de 2 points se trouvant dans chacun des 2 corps.*

On peut montrer que le rapprochement de deux points A et B (A et B sont très éloignés du point de contact) pour des corps en acier est donné par l'expression:

$$\delta = 2,13 \cdot 10^{-8} \cdot (Q^2 \cdot \Sigma \rho)^{1/3} \quad (\text{m}) \quad (\text{F1.1})$$

avec: Q = force normale appliquant les 2 corps l'un sur l'autre, (N),

$\Sigma \rho$  = somme des inverses des rayons de courbure (en comptant positive les courbures convexes et négatives les courbures concaves) ( $\text{m}^{-1}$ ).

En dérivant l'expression (F1.1) par rapport à  $\delta$ , on peut calculer la raideur normale:

$$K = \frac{dQ}{d\delta} = 7,042 \cdot 10^7 \cdot \left( \frac{Q}{\Sigma\rho} \right)^{1/3} \quad (\text{N.m}^{-1}) \quad (\text{F1.2})$$

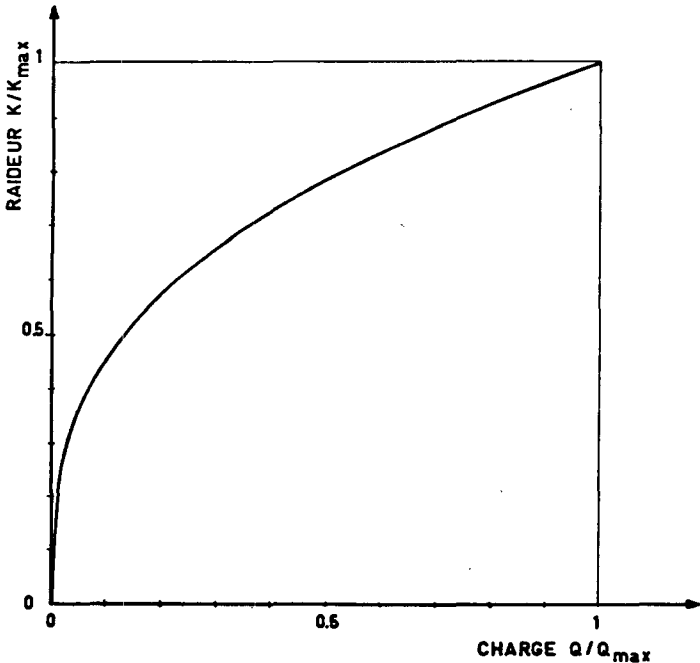
Si  $Q$  est choisie de façon à ce que les contraintes hertziennes au point de contact soient constantes,  $Q$  devra être proportionnelle à la section du corps: on peut alors écrire:

$$K^* = \left( L^2 \cdot \frac{1}{L-T} \right) = L \quad (\text{F1.3})$$

Remarques: La raideur  $K$  est inversement proportionnelle au rayon de courbure donc proportionnelle au rayon au point de contact.

La raideur augmente avec la charge  $Q$  comme:

$$\frac{K}{K_{\max}} = \left( \frac{Q}{Q_{\max}} \right)^{1/3}$$



*Fig.F1.2 Contact ponctuel: variation de la raideur en fonction de la charge.*

F1.2

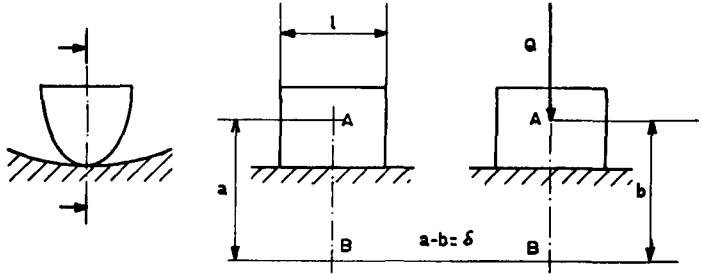
Contact linéaire

Fig.F1.3 Contact linéaire: rapprochement de 2 points se trouvant dans chacun des 2 corps.

On peut montrer que le rapprochement des deux points A et B (A et B sont très éloignés de la ligne de contact) pour des corps en acier est donné par l'expression:

$$\delta = 1,53 \cdot 10^{-10} \cdot \frac{Q^{0,9}}{l^{0,8}} \quad (\text{m}) \quad (\text{F1.4})$$

avec:  $Q$  = force normale appliquant les 2 corps l'un sur l'autre, (N),

$l$  = longueur de la ligne de contact, (m).

Cette expression (F1.4) est valable pour des contacts plan/cylindre, cylindre/cylindre ( le rayon d'un des cylindres étant beaucoup plus grand que l'autre) , plan/cône (de faible cônécité)...

En dérivant l'expression (F1.4) par rapport à  $\delta$ , on peut calculer la raideur normale:

$$K = \frac{dQ}{d\delta} = 726 \cdot 10^7 \cdot Q^{0,1} \cdot l^{0,8} \quad (\text{N} \cdot \text{m}^{-1}) \quad (\text{F1.5})$$

Si  $Q$  est choisie de façon à ce que les contraintes hertziennes à la ligne de contact soient constantes,  $Q$  devra être proportionnelle à la section:

On peut alors écrire:

$$K^* = (L^{0,2}, L^{0,8}) = L \quad (\text{F1.6})$$

Remarques: La raideur  $K$  est proportionnelle à la longueur de la ligne de contact, mais indépendante de la courbure à la ligne de contact.

La raideur  $K$  augmente avec la charge  $Q$  comme:

$$\frac{K}{K_{\max}} = \left( \frac{Q}{Q_{\max}} \right)^{0,1}$$

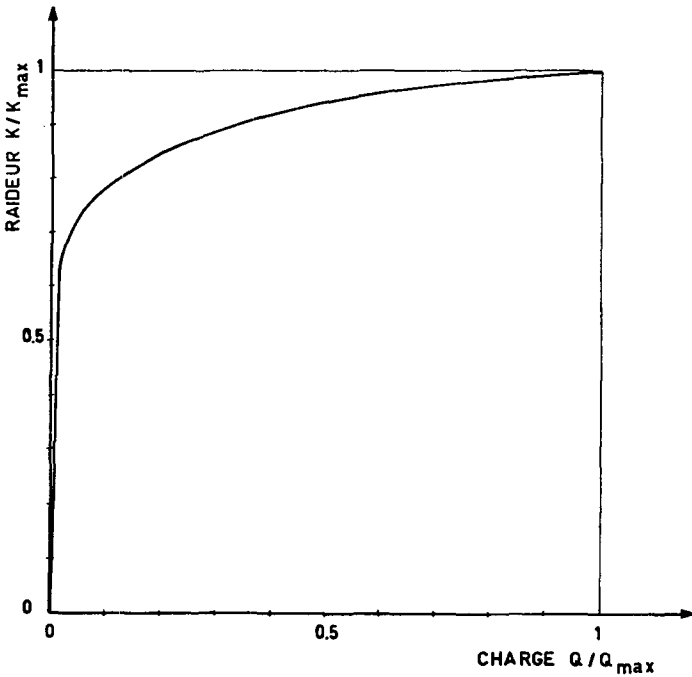


Fig.F1.4 Contact linéaire: variation de la raideur en fonction de la charge.

## F 2 RAIDEURS DES PALIERS À CORPS ROULANTS

(P.1:23-25,28-29,31-34)

### F2.1 Raideur axiale des paliers à corps roulants:

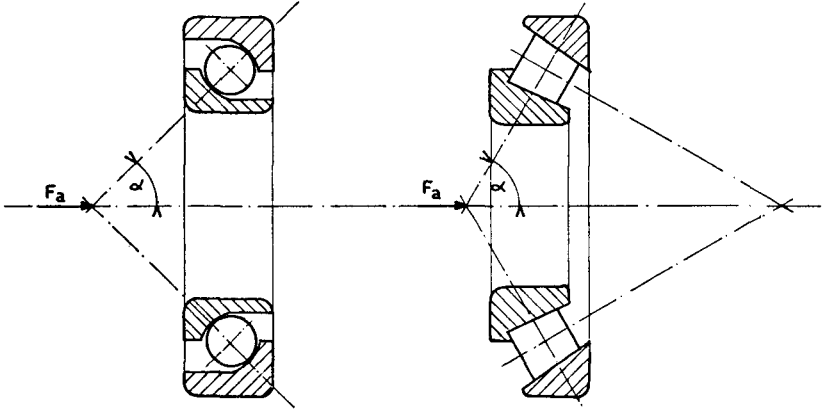


Fig.F2.1 Roulement à billes à contact oblique et roulement à galets côniques soumis à une charge axiale.

La raideur axiale à pour expression:

$$K_a = n \cdot k \cdot \cos^2 \alpha \quad (\text{N} \cdot \text{m}^{-1}) \quad (\text{F2.1})$$

avec:  $n$  = nombre de corps roulants, (.),

$k$  = raideur du corps roulant entre 2 surfaces:  $K_b$  ou  $K_g$ ,  
( $\text{N} \cdot \text{m}^{-1}$ )

$\alpha$  = angle de contact (rad ou  $^\circ$ )

$$K_a^* = L \quad (\text{F2.2})$$



F2.2 Raideurs radiales des paliers à corps roulants

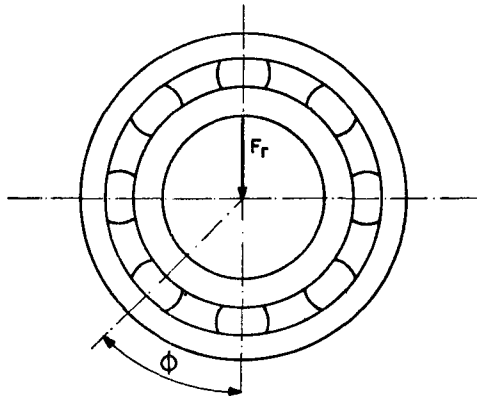


Fig.F2.2 Roulement à billes ou à galets soumis à une charge radiale.

a) Raideur radiale d'un palier à corps roulant sans précontrainte

Pour un roulement non précontraint, seule la moitié des corps roulants compris dans l'angle  $-90^{\circ} < \phi < 90^{\circ}$  participent à la raideur radiale. On peut écrire:

$$K_r = k \cdot \sin^2 \alpha \cdot \sum_{i=0}^{i=\frac{1}{2}n} \cos^2 i\phi$$

$$K_r = \frac{1}{4} \cdot n \cdot k \cdot \sin^2 \alpha \quad (\text{N} \cdot \text{m}^{-1}) \quad (\text{F2.3})$$

avec:  $n$  = nombre de corps roulants, (.),

$k$  = raideur du corps roulant entre 2 surfaces:  $K_b$  ou  $K_g$ ,  
( $\text{N} \cdot \text{m}^{-1}$ ),

$\alpha$  = angle de contact, (rad ou  $^{\circ}$ ).

$$K_r^* = L \quad (\text{F2.4})$$

b) Raideur radiale d'un palier à corps roulants avec précontrainte

Si le roulement est précontraint, tous les corps roulants participent à la raideur radiale. On peut écrire:

$$K_r = k \cdot \sin^2 \alpha \cdot \sum_{i=0}^{i=n} \cos^2 i\phi$$

$$K_r = \frac{1}{2} \cdot n \cdot k \cdot \sin^2 \alpha \quad (\text{N.m}^{-1}) \quad (\text{F2.5})$$

avec: n = nombre de corps roulants, (.).

k = raideur du corps roulant entre 2 surfaces:  $K_b$  ou  $K_g$ ,  
( $\text{N.m}^{-1}$ ),

$\alpha$  = angle de contact, (rad ou  $^\circ$ ).

$$K_r^* = L \quad (\text{F2.6})$$

Remarques: La valeur de la raideur radiale est deux fois plus élevée si le roulement est précontraint.

---



### F 3 ROULEMENT À BILLES À CONTACT OBLIQUE\*

(P. 1:18-25,38-39,41-42)

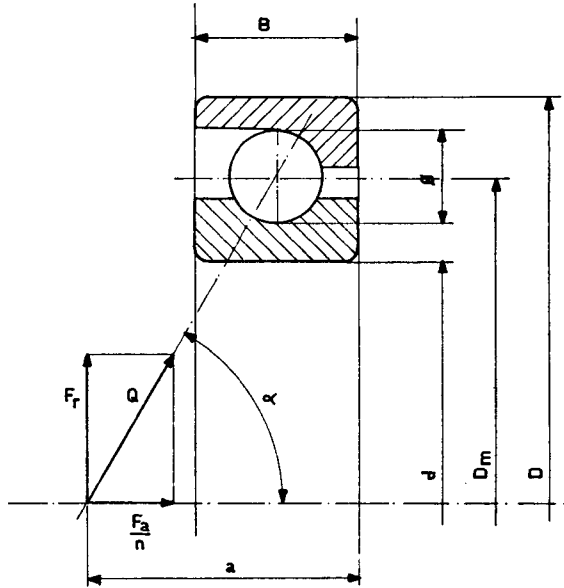


Fig.F3.1 Roulement à billes à contact oblique.

Soit:  $D$  = diamètre extérieur, (m),

$d$  = diamètre intérieur, (m),

$B$  = largeur du roulement, (m),

$a$  = cote caractérisant l'angle de contact, (m),

On trouvera la valeur des autres paramètres en écrivant:

$D_m$  = diamètre moyen:

$$D_m = \frac{D+d}{2} \quad (m) \quad (F3.1)$$

\* SKF (S), SRO (CH), FAG (D), SNR (F), SNFA (F), RMB (CH)...

$\alpha$  = angle de contact:

$$\alpha = \text{Arc tg } \frac{D + d}{4.a - 2.B} \quad (^\circ) \quad (\text{F3.2})$$

$\emptyset$  = diamètre des billes: la plus petite valeur étant retenue:

$$\emptyset = 0,65 \cdot \frac{D-d}{2} \quad \text{ou} \quad \emptyset = 0,7.B \quad (\text{m}) \quad (\text{F3.3})$$

$n$  = nombre de billes: arrondi à l'entier supérieur:

$$n = 1,7 \cdot \frac{D+d}{B} \quad (.) \quad (\text{F3.4})$$

$Q$  = force passant par les points de contact:

$$Q = \frac{F_r}{\sin \alpha} = \frac{F_a}{n \cdot \cos \alpha} \quad (\text{N}) \quad (\text{F3.5})$$

La raideur d'une bille entre 2 surfaces à pour expression:

$$K_b = 2,73 \cdot 10^7 \cdot (Q \cdot \emptyset)^{1/3} \quad (\text{N} \cdot \text{m}^{-1}) \quad (\text{F3.6})$$

Raideur axiale d'un roulement à billes à contact oblique:

De l'expression (F2.1) on peut écrire:

$$K_a = n \cdot K_b \cdot \cos^2 \alpha \quad (\text{N} \cdot \text{m}^{-1}) \quad (\text{F3.7})$$

$$K_a^* = L \quad (\text{F3.8})$$

Raideur radiale d'un roulement à billes à contact oblique avec précontrainte:

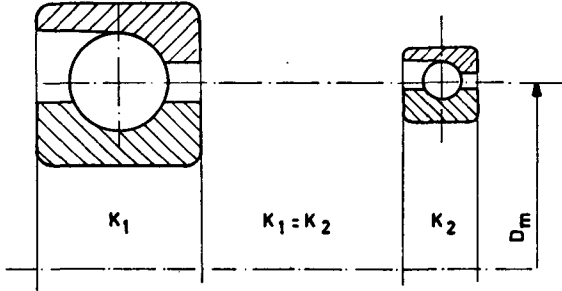
De l'expression (F2.5) on peut écrire:

$$K_r = \frac{1}{2} \cdot n \cdot K_b \cdot \sin^2 \alpha \quad (\text{N} \cdot \text{m}^{-1}) \quad (\text{F3.9})$$

$$K_r^* = L \quad (\text{F3.10})$$

Remarques: La raideur d'une bille varie avec  $L$ . Pour un diamètre moyen  $D_m$ , on pourra avoir, à rigidité constante  $m$  fois plus de billes que le diamètre  $\emptyset$  est  $m$  fois plus petit.

Deux roulements à billes de même diamètre moyen  $D_m$ , ont une même raideur.



*Fig.F3.2* Deux roulements à billes de même diamètre moyen  $D_m$  ont même raideur.

Raideurs d'une famille de roulements à billes à contact oblique

On choisit la famille: FAG série A 70 C ou B 70 C.

Ce sont des roulements pour broches.

Pour les calculs on choisit:

$$F_a = \frac{C_0}{10}$$

Les calculs nous donnent le graphe (Fig.F3.3) suivant:

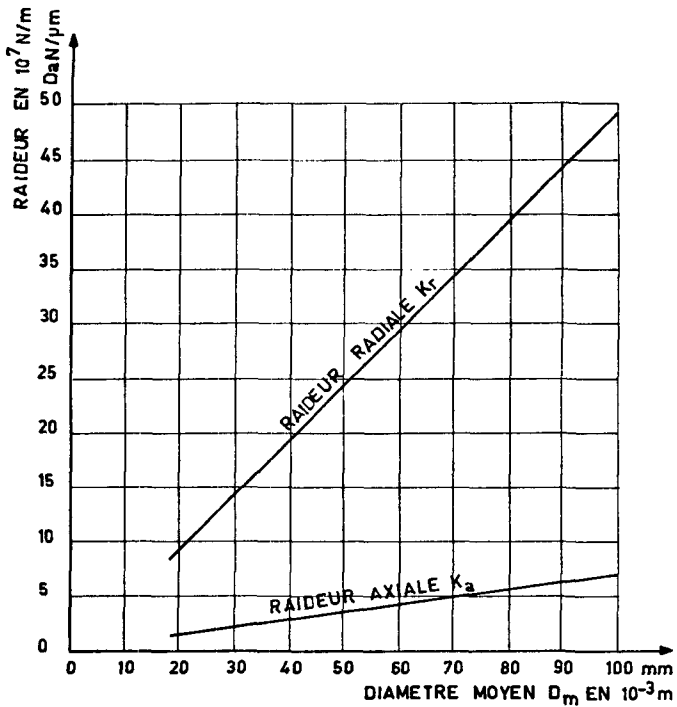


Fig.F3.3 Raideurs de la famille de roulements à billes à contact oblique FAG série A 70 C ou B 70 C. précontraints.

## F 4 ROULEMENT À GALETS CÔNIQUES\*

(P.1:25-29,39) (T.2)

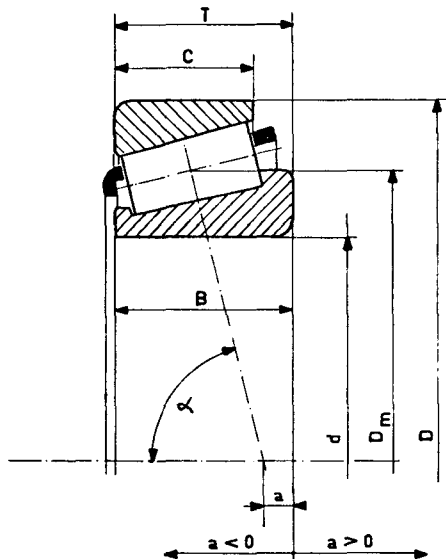


Fig.F4.1 Roulement à galets côniques.

Soit: D : diamètre extérieur, (m),

d : diamètre intérieur, (m),

C : largeur de la cuvette, (m),

T : distance de la face de la cuvette à l'épaulement du cône, (m),

B : largeur du cône, (m),

a : cote qui caractérise l'angle du cône des axes des galets, (m),

On trouvera la valeur des autres paramètres en écrivant:

$D_m$  : diamètre moyen:

$$D_m = \frac{D+d}{2} \quad (\text{m}) \quad (\text{F4.1})$$

\* Timken (USA), SKF (S), SRO (CH), FAG (D), SNR (F), ...



$\alpha$  : angle de contact: ( $^{\circ}$ )

$$\alpha = \text{Arc tg} \frac{\frac{5 \cdot D + d}{6} + 2\sqrt{C^2 - 2 \cdot T \cdot C - 2 \cdot C \cdot a + \left(\frac{5 \cdot D + d}{12}\right)^2}}{4 \cdot T - 2 \cdot C + 4 \cdot a} \quad (\text{F4.2})$$

$\emptyset$  : diamètre des corps roulants: (m)

$$\emptyset = \frac{2\sqrt{C^2 - 2 \cdot T \cdot C - 2 \cdot C \cdot a + \left(\frac{5 \cdot D + d}{12}\right)^2} - \frac{5 \cdot d + D}{6}}{2 \cdot \sin \alpha} \quad (\text{F4.3})$$

$l$  : longueur du corps roulant:

$$l = \frac{0,9 \cdot C}{\sin \alpha} \quad (\text{m}) \quad (\text{F4.4})$$

$n$  : nombre de corps roulants: arrondi à l'entier supérieur:

$$n = 0,85 \cdot \frac{(d+D)}{2 \cdot \emptyset} \quad (.) \quad (\text{F4.5})$$

$Q$  : force passant par les points de contact:

$$Q = \frac{F_a}{n \cdot \cos \alpha} \quad (\text{N}) \quad (\text{F4.6})$$

La raideur d'un galet entre 2 surfaces à pour expression:

$$K_g = 3,63 \cdot 10^9 \cdot Q^{0,1} \cdot l^{0,8} \quad (\text{N} \cdot \text{m}^{-1}) \quad (\text{F4.7})$$

Raideur axiale d'un roulement à galets côniques:

De l'expression (F2.1) on peut écrire:

$$K_a = n \cdot K_g \cdot \cos^2 \alpha \quad (\text{N} \cdot \text{m}^{-1}) \quad (\text{F4.8})$$

$$K_a^* = l \quad (\text{F4.9})$$

Raideur radiale d'un roulement à galets côniques précontraint:

De l'expression (F2.5) on peut écrire:

$$K_r = \frac{1}{2} \cdot n \cdot K_g \cdot \sin^2 \alpha \quad (\text{N.m}^{-1}) \quad (\text{F4.10})$$

$$K_r^* = L \quad (\text{F4.11})$$

Remarques: Un roulement à galets côniques est beaucoup plus raide qu'un roulement à billes à contact oblique de même encombrement (environ 10 fois)

Raideurs d'une famille de roulements à galet côniques.

On choisit la famille: FAG série 320X Din 720, avec  $F_a = \frac{C_0}{10}$

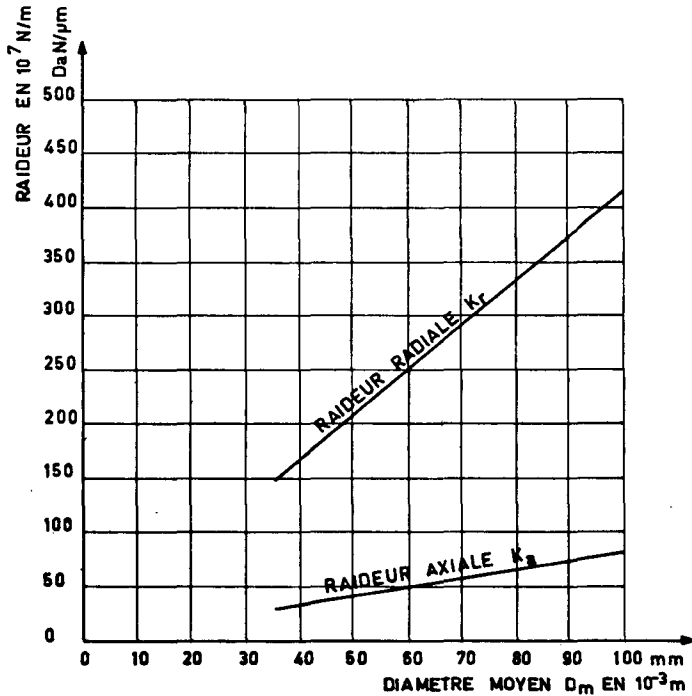


Fig.F4.2 Raideurs de la famille de roulements à galets côniques FAG série 320X din 720 précontraints.



## F 5 ROULEMENTS À GALETS CYLINDRIQUES\*

(P. 1:30-34,39-40,42-43)

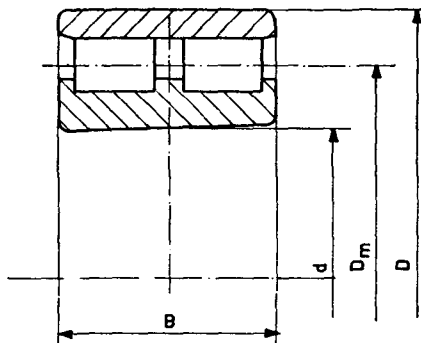


Fig.F5.1 Roulement à galets cylindriques.

Soit: D : diamètre extérieur, (m),

d : diamètre intérieur, (m),

B : largeur, (m),

On trouvera la valeur des autres paramètres en écrivant:

$D_m$  : diamètre moyen:

$$D_m = \frac{D+d}{2} \quad (m) \quad (F5.1)$$

$\emptyset$  : diamètre des corps roulants:

$$\emptyset = 0,48 \cdot \frac{D-d}{2} \quad (m) \quad (F5.2)$$

l : largeur totale des 2 galets:

$$l = 0,62 \cdot B \quad (m) \quad (F5.3)$$

\* SKF (S), SRO (CH), FAG (F), SNR (F), SNFA (F), RMB (CH)...

$n$  : nombre de paires de corps roulants, arrondi à l'entier le plus proche:

$$n = 0,82 \cdot \frac{f \cdot (D+d)}{2 \cdot \theta} \quad (.) \quad (F5.4)$$

$Q$  : force passant par les lignes de contact:

$$Q = \frac{F \cdot f}{n} \quad (N) \quad (F5.5)$$

avec:  $F$  = charge du roulement.

La raideur d'un galet entre 2 surfaces à pour expression:

$$K_g = 3,63 \cdot 10^9 \cdot Q^{0,1} \cdot l^{0,8} \quad (N \cdot m^{-1}) \quad (F5.6)$$

Raideur radiale d'un roulement à galets cylindriques non précontraint

De l'expression (F2.3) on peut écrire:

$$K_r = \frac{1}{4} \cdot n \cdot K_g \quad (N \cdot m^{-1}) \quad (F5.7)$$

$$K_r^* = L \quad (F5.8)$$

Remarques: La raideur axiale d'un roulement à galets cylindriques n'a pas de sens.

Nous avons montré précédemment que la raideur d'un galet est indépendante de son diamètre. D'autre part, si les galets ont un diamètre  $m$  fois plus petit, leur longueur restant constante, on pourra en utiliser  $m$  fois plus dans un roulement de même diamètre moyen. Pour que la contrainte qu'ils subissent soit constante, il faudra diviser la charge de chacun des galets par  $m$ .

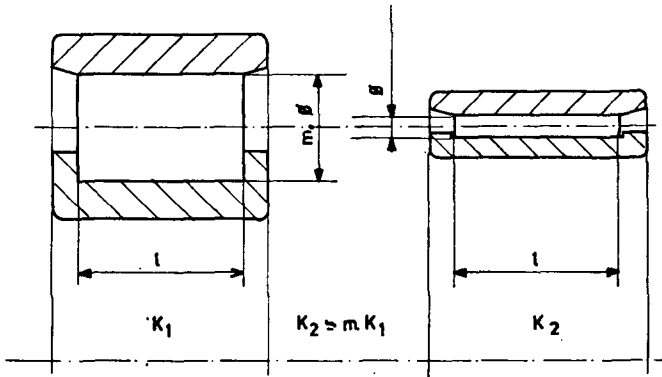
La raideur de chaque galet sera alors dans le rapport :

$$\left(\frac{1}{m}\right)^{0,1}$$

Comme d'autre part la raideur du roulement est proportionnelle au nombre de galets, elle sera au total proportionnelle à :

$$\left(\frac{1}{m}\right)^{0,1} \cdot m = m^{0,9} \quad (.) \quad (F5.9)$$

Plus la section d'un roulement à galets est faible, plus sa raideur sera élevée. (galets cylindriques et côniques)



*Fig.F5.2 Un roulement à galets dont le diamètre des galets est m fois plus gros que le diamètre des galets d'un autre roulement à galets est m fois moins raide que celui-ci.*

Raideur d'une famille de roulements à galets cylindriques

On choisit la famille: FAG NN 30 K Din 5412, avec  $F = \frac{C_0}{10}$

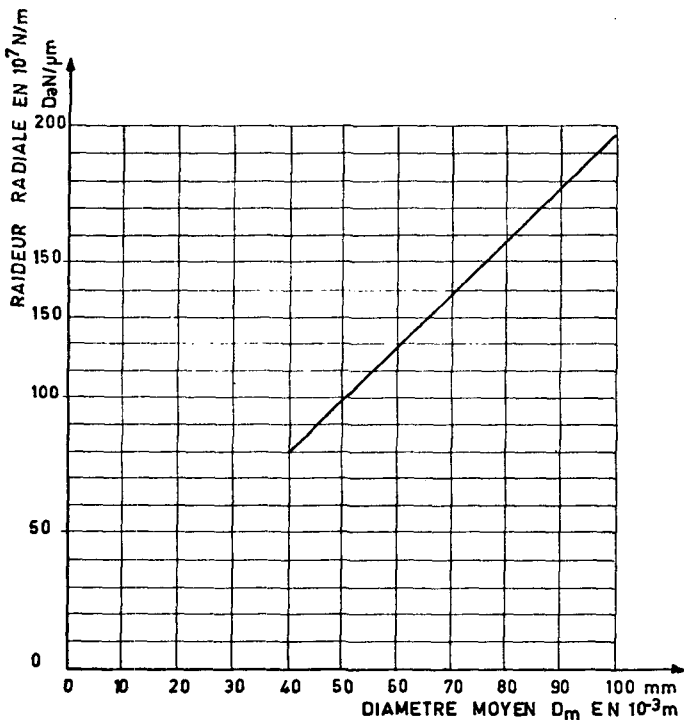


Fig.F5.3 Raideur radiale de la famille de roulements à galets cylindriques FAG NN 30 K Din 5412 sans précontrainte.

## F 6 PALERS HYDROSTATIQUES

(P.1:34-37,43)

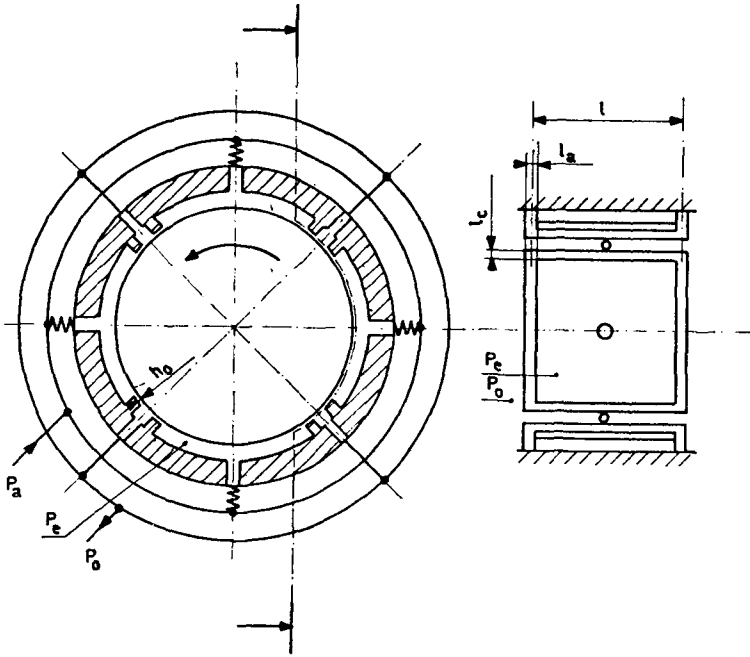


Fig.F6.1 Palier hydrostatique.

Soit:  $n$  : nombre de poches du palier (.),

$S_e$  : surface effective d'une poche = surface projetée sur la corde, ( $m^2$ ),

$P_e$  : pression dans les poches à charge nulle, (Pa),

$P_a$  : pression d'alimentation du palier, (Pa),

$P_o$  : pression de retour, (Pa),

$h_o$  : jeu radial, arbre centré, (m),

$R$  : rayon de l'arbre, (m),

$D$  : diamètre de l'arbre, (m),

$l_a$  : largeur des lèvres d'étanchéité axiales, (m),

$l_c$  : largeur des lèvres d'étanchéité circumférentielles, (m),

$l$  : longueur de la poche du palier, (m).



On peut démontrer que la raideur d'un palier hydrostatique à vitesse de rotation nulle est donnée par:

a) quand les restrictions d'alimentation sont de type capillaire:

$$K_c = \frac{3.n.S_e.P_e.(P_a-P_e)}{2.h_o.P_a} \left( \frac{2.R.\sin\frac{\eta}{n} + \frac{1a}{1c}.1.\cos\frac{\eta}{n}}{2.\frac{\eta.R}{n} + \frac{1a}{1c}.1} \right) \quad (F6.1)$$

b) quand les restrictions sont à mince paroi:

$$K_m = \frac{3.n.S_e.P_e.(P_a-P_e)}{h_o.(2.P_a-P_e)} \left( \frac{2.R.\sin\frac{\eta}{n} + \frac{1a}{1c}.1.\cos\frac{\eta}{n}}{2.\frac{\eta.R}{n} + \frac{1a}{1c}.1} \right) \quad (F6.2)$$

Nous avons trouvé en (F6.1)(F6.2) que la raideur d'un palier hydrostatique est de la forme:

$$K = \frac{S_e \cdot P_a}{h_o}$$

à pression  $P_a$  constante on peut écrire:

$$K_c^* = K_m^* = \frac{L^2}{L} = L \quad (F6.2)$$

Remarques: La raideur est inversement proportionnelle au jeu  $h_o$ .

Avec les restrictions capillaires la formule (F6.1) montre qu'on a la raideur maximale pour:  $P_e = \frac{1}{2}.P_a$

Avec les restrictions à mince paroi la formule (F6.2) montre qu'on a la raideur maximale pour:  $P_e = P_a.(2-\sqrt{2})$

La raideur augmente fortement avec  $n$  quand  $n$  est inférieur à 4 et ne varie plus que très peu pour  $n > 6$ . En pratique on choisit:  $4 \leq n \leq 7$ .

Les restrictions à mince paroi donnent une raideur supérieure d'environ 40%.

La raideur d'un palier hydrostatique varie avec la vitesse, celle-ci a une faible influence à vitesse lente.

Raideur d'une famille de paliers hydrostatiques.

On choisit:  $n = 4$

$$S_e = 2.R^2$$

$$P_a = 30.10^5 \text{ Pa}$$

$$h_o = 10^{-4}.R$$

$$l_a = l_c$$

$$l = 2.R$$

On trouve:

$$K_m = 3,5.10^9 .D \quad \text{et} \quad K_c = 2,4.10^9 .D \quad (\text{N.m}^{-1})$$

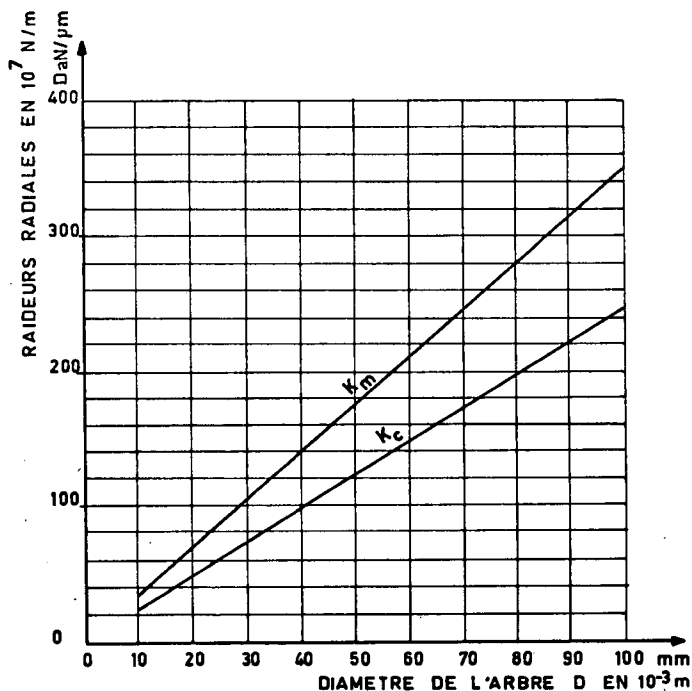


Fig. F6.2 Raideurs radiales d'une famille de paliers hydrostatiques selon les paramètres choisis.



## F 7 LES PALIERS

(P.1:10-15)(D.3)

Dans la construction des bras de RI, les paliers se divisent en deux types de montage:

- montage symétrique (ou à fourche) dont la rotation est généralement limitée (environ  $270^{\circ}$ ),
- montage en porte-à-faux(ou broche),

### F7.1 Palier: montage symétrique

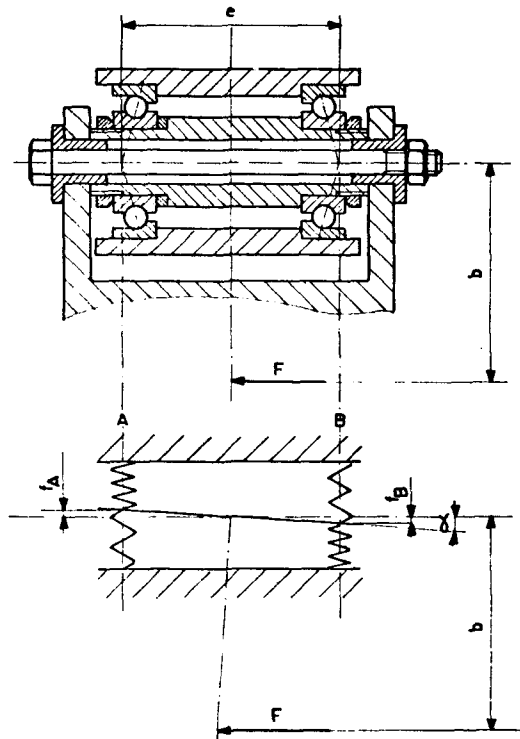


Fig.F7.1 Palier: montage symétrique.  
Schéma fonctionnel.

Soit:  $K_A$  : raideur du palier A, ( $N.m^{-1}$ ),  
 $K_B$  : raideur du palier B, ( $N.m^{-1}$ ),  
 $R_A$  : réaction au palier A, (N),  
 $R_B$  : réaction au palier B, (N),  
 $F$  : une charge extérieure, (N),  
 $f_A$  : flèche en A, (m),  
 $f_B$  : flèche en B, (m),  
 $\alpha$  : rotation du palier, (rad),  
 $e$  : distance entre paliers, (m),  
 $b$  : distance de l'application de la force  $F$ , (m),  
 $e \ll b$  généralement.

Hypothèses: - les roulements sont assimilés à des appuis simples élastiques,  
 - les déformations dues au cisaillement sont négligeables.

Calcul de la raideur angulaire d'un palier, montage symétrique  
 (dans le plan défini par A, B et F)

Nous pouvons écrire:

$$R_A = R_B = R$$

et: 
$$R = \frac{F \cdot b}{e}$$

d'où: 
$$f_A = \frac{R}{K_A} = \frac{F \cdot b}{e \cdot K_A} \quad (F7.1)$$

et: 
$$f_B = -\frac{R}{K_B} = -\frac{F \cdot b}{e \cdot K_B} \quad (F7.2)$$

De (F7.1) et (F7.2) nous pouvons tirer la valeur de  $\alpha$ :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{f_A - f_B}{e} = \alpha \quad \text{car } \alpha \text{ est petit} \quad (F7.3)$$

$$\alpha = \frac{F \cdot b \cdot K_B + F \cdot b \cdot K_A}{e^2 \cdot K_A \cdot K_B} \quad (F7.4)$$

En dérivant (F7.4) par rapport à  $\alpha$ , nous obtenons la raideur angulaire  $K_\alpha$ :

$$K_\alpha = \frac{d(F.b)}{d\alpha} = \frac{e^2 \cdot K_A \cdot K_B}{K_A + K_B} \quad (\text{N.m.rad}^{-1}) \quad (\text{F7.5})$$

$$K_\alpha^* = L^3 \quad (\text{F7.6})$$

Généralement les paliers A et B ont même raideur ou presque:

$$K_A = K_B = K \quad (\text{F7.7})$$

En introduisant (F7.7) dans (F7.5) on obtient une expression simplifiée pour la raideur angulaire  $K_\alpha$  appelée  $K_{\alpha i}$ :

$$K_{\alpha i} = \frac{e^2 \cdot K}{2} \quad (\text{N.m.rad}^{-1}) \quad (\text{F7.8})$$

$$K_{\alpha i}^* = L^3 \quad (\text{F7.9})$$

#### F7.2 Palier: montage en porte-à-faux

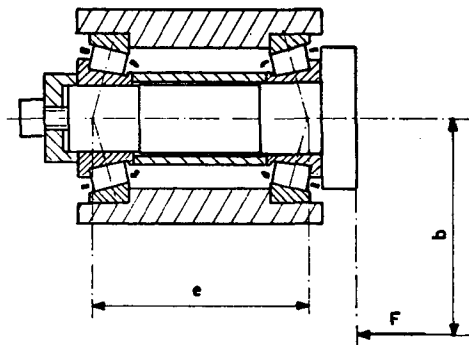


Fig.F7.2 Palier: montage en porte-à-faux.

Soit:  $K_A$  = raideur du palier A, ( $\text{N.m}^{-1}$ ),  
 $K_B$  = raideur du palier B, ( $\text{N.m}^{-1}$ ),  
 $R_A$  = réaction au palier A, (N),  
 $R_B$  = réaction au palier B, (N),  
 $F$  = une charge extérieure, (N),  
 $f_A$  = flèche en A, (m),  
 $f_B$  = flèche en B, (m),  
 $\alpha$  = rotation du palier en B, (rad),  
 $e$  = distance entre palier, (m),  
 $b$  = distance de l'application de la force F, (m),  
 $e \ll b$  généralement.

Hypothèses:

- Les roulements sont assimilés à des appuis simples élastiques,
- les déformations dues au cisaillement sont négligeables,
- L'arbre est cylindrique et de diamètre constant entre les paliers et infiniment rigide en deça des paliers.
- Le principe de la superposition linéaire des flèches et rotations est valide.

Calcul de la raideur angulaire d'un palier, montage en porte-à-faux  
 (dans le plan défini par A,B et F).

Cette raideur angulaire se divise en deux:

- 1) raideur angulaire due aux roulements,  $K_{ar}$ ,
- 2) raideur angulaire due à la flèche de l'arbre,  $K_{af}$ .

En vertu du principe de superposition linéaire, nous pouvons écrire:

$$\frac{1}{K_\alpha} = \frac{1}{K_{ar}} + \frac{1}{K_{af}} \quad (\text{F7.10})$$

1) Raideur angulaire due aux roulements

Les expressions (F7.5) et (F7.8) sont applicables, nous pouvons écrire:

$$K_{\text{ar}} = \frac{e^2 \cdot K_A \cdot K_B}{K_A + K_B} \quad (\text{N.m.rad}^{-1}) \quad (\text{F7.11})$$

Si  $K_A = K_B = K$ ,

$$K_{\text{ari}} = \frac{e^2 \cdot K}{2} \quad (\text{N.m.rad}^{-1}) \quad (\text{F7.12})$$

2) Raideur angulaire due à la flèche:

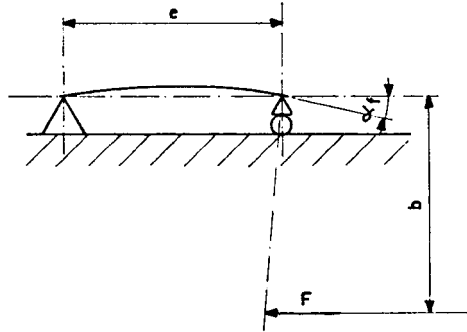


Fig.F7.3 Schéma fonctionnel.

L'arbre est considéré comme une poutre sur deux appuis A et B, de longueur  $e$ , chargée par le moment  $F \cdot b$ ;  $\alpha_f$  est la rotation de la poutre au point B.

Nous pouvons écrire:

$$\alpha_f = \frac{F \cdot b \cdot e}{3 \cdot E \cdot I} \quad (\text{F7.13})$$

avec:  $E$  = module d'élasticité du matériau, (Pa) (Chap.D3),

$I$  = moment d'inertie de la section, ( $\text{m}^4$ ) (Chap.D6).



En dérivant (F7.13) par rapport à  $\alpha_f$ , nous obtenons la raideur angulaire  $K_{\alpha f}$ :

$$K_{\alpha f} = \frac{d(F.b)}{d\alpha_f} = \frac{3.E.I}{e} \quad (\text{N.m.rad}^{-1}) \quad (\text{F7.14})$$

$$K_{\alpha f}^* = L^3 \quad (\text{F7.15})$$

Si l'arbre est de section circulaire constante et en acier, on obtient une expression simplifiée pour la raideur angulaire  $K_{\alpha f}$  appelée  $K_{\alpha fi}$ :

$$K_{\alpha fi} = 3,1.10^{10} \cdot \frac{D^4}{e} \quad (\text{N.m.rad}^{-1}) \quad (\text{F7.16})$$

$$K_{\alpha fi}^* = L^3 \quad (\text{F7.17})$$

### 3) Raideur angulaire totale d'un palier, montage en porte-à-faux

Des expressions (F7.10), (F7.11) et (F7.14), nous pouvons écrire:

$$K_{\alpha} = \left( \frac{K_A + K_B}{e^2 \cdot K_A \cdot K_B} + \frac{e}{3.E.I} \right)^{-1} \quad (\text{N.m.rad}^{-1}) \quad (\text{F7.18})$$

$$K_{\alpha}^* = L^3 \quad (\text{F7.19})$$

Des expressions (F7.10), (F7.12) et (F7.16) nous pouvons écrire l'expression simplifiée suivante:

$$K_{\alpha i} = \left( \frac{2}{e^2 \cdot K} + \frac{e}{3,1.10^{10} \cdot D^4} \right)^{-1} \quad (\text{N.m.rad}^{-1}) \quad (\text{F7.20})$$

$$K_{\alpha i}^* = L^3 \quad (\text{F7.21})$$

Avec: D = diamètre de l'arbre.

4) Recherche d'un optimum entre l'écartement e et le diamètre de l'arbre D.

Nous aurons un optimum pour: (Chap.B1)

$$K_{ar} = K_{af}$$

Soit pour le cas simplifié:

$$K_{ari} = K_{afi}$$

Soit dans ce cas:

$$\frac{e^2 \cdot K}{2} = 3,1 \cdot 10^{10} \cdot \frac{D^4}{e}$$

Nous trouvons un optimum pour:

$$e = \left( 6,2 \cdot 10^{10} \cdot \frac{D^4}{K} \right)^{1/3} \quad (m) \quad (F7.22)$$

Exemples:

- 1) Pour la famille de roulements à billes à contact obliques  
FAG série A 70 C ou B 70 C, (Chap.F3), nous trouvons:

$$e = 2,1 \cdot D \quad (m) \quad (F7.23)$$

- 2) Pour la famille de roulements à galets coniques  
FAG série 320X Din 720, (Chap.F4), nous trouvons:

$$e = 1,1 \cdot D \quad (m) \quad (F7.24)$$

Dans tous les cas:

$$e^* = L \quad (F7.25)$$



## F 8 GUIDAGES LINÉAIRES

(P.1)

Il existe deux types de guidages linéaires à corps roulants:

### 1) Guidages avec galets\*:

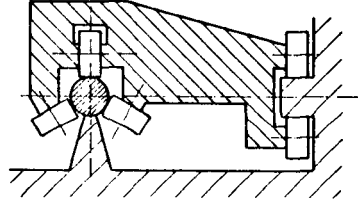


Fig.F8.1 Guidage linéaire avec galets.

### 2) Guidages avec roulements linéaires\*\*à billes:

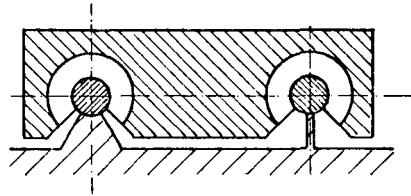


Fig.F8.2 Guidage avec roulements linéaires.

### 1 A.1 Raideur d'un galet roulant sur un arbre

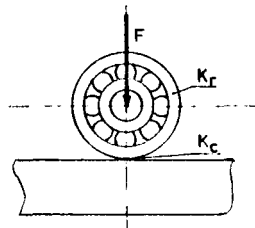


Fig.F8.3 Galet roulant sur un arbre.

\* SKF (S), Nadella (CH), Bürkerp (D), Hirt (CH),...

\*\* SKF (S), Sférox (CH), Thompson (USA), Ischudin & Heid (CH),...

Cette raideur se divise en deux parts:

1) Raideur du roulement à corps roulants  $K_r$ :

Voir Chap. F3, F4 et F5.

2) Raideur du contact galet-arbre  $K_c$ :

Du chap. F1 nous pouvons écrire:

a) Contact galet-arbre rond:

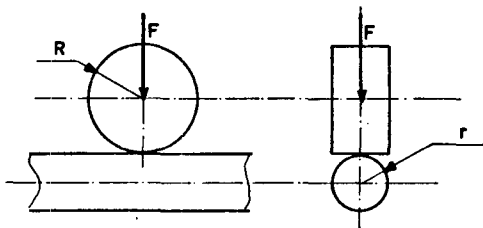


Fig.F8.4 Galet roulant sur un arbre rond.

La raideur  $K_c$  est déduite de la formule (F1.2):

$$K_c = 7,042 \cdot 10^7 \cdot \left( \frac{F}{\Sigma \rho} \right)^{1/3} \quad (\text{N.m}^{-1}) \quad (\text{F8.1})$$

$$K_c^* = L \quad (\text{F8.2})$$

Avec:  $\Sigma \rho = \frac{1}{R} + \frac{1}{r}$ , ( $\text{m}^{-1}$ )

$R$  = rayon du galet, (m),

$r$  = rayon de l'arbre, (m),

$F$  = charge radiale du galet, (N).

b) Contact galet-arbre plat:

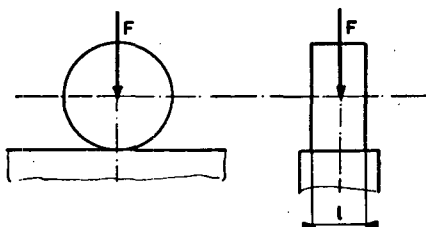


Fig.F8.5 Galet roulant sur un arbre plat.

La raideur  $K_c$  est déduite de la formule (F1.5):

$$K_c = 7,26 \cdot 10^9 \cdot F^{0,1} \cdot l^{0,8} \quad (\text{N.m}) \quad (\text{F8.3})$$

$$K_c^* = L \quad (\text{F8.4})$$

Avec:  $F$  = charge radiale du galet, (N),

$l$  = largeur du galet, ou de la ligne de contact, (m).

En vertu du principe de superposition linéaire, nous pouvons écrire pour la raideur d'un galet roulant sur un arbre:

$$\frac{1}{K} = \frac{1}{K_r} + \frac{1}{K_c} \quad (\text{N.m}^{-1}) \quad (\text{F8.5})$$

$$K^* = L \quad (\text{F8.6})$$

Comparaison entre l'ordre de grandeur des raideurs  $K_r$  et  $K_c$

Le tableau (Fig.F8.6) représente l'ordre de grandeur du rapport des raideurs  $\frac{K_c}{K_r}$  d'un galet non précontraint de rayon  $2 \cdot r$  roulant sur un arbre de dimension  $r$ :

	ARBRE ROND	ARBRE PLAT
GALET A BILLES	1,5 A 0,8	5 A 3
GALET A GALETS	0,3 A 0,1	1 A 0,3

*Fig.F8.6* Ordre de grandeur du rapport  $\frac{K_c}{K_r}$  en fonction du type de galet et type de l'arbre sur lequel il roule.

F8.2 Raideur d'un roulement linéaire à billes

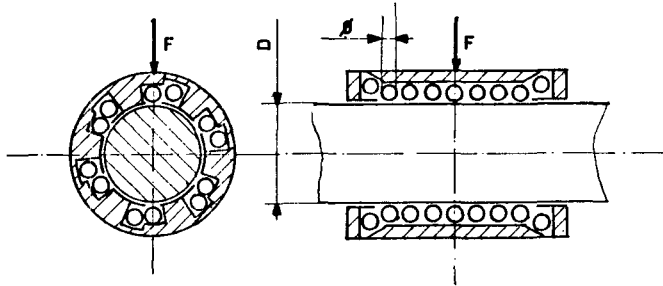


Fig.F8.7 Roulement linéaire à billes.

La raideur K d'un roulement linéaire à billes est déduite de la formule (F2.3):

$$K = \frac{1}{4} \cdot n \cdot K_b \quad (\text{N} \cdot \text{m}^{-1}) \quad (\text{F8.7})$$

$$K^* = L \quad (\text{F8.8})$$

Avec: n = nombre de bille en contact avec l'arbre, (.)

$K_b$  = raideur d'une bille entre deux surfaces, ( $\text{N} \cdot \text{m}^{-1}$ )

Calcul de la raideur d'une bille entre deux surfaces  $K_b$

La raideur  $K_b$  est déduite de la formule (F1.2):

$$K_b = 2,21 \cdot 10^7 \cdot (Q \cdot \varnothing)^{1/3} \quad (\text{N} \cdot \text{m}^{-1}) \quad (\text{F8.9})$$

$$K_b^* = L \quad (\text{F8.10})$$

Avec:  $Q = \frac{F \cdot \eta}{n}$  = charge d'une bille, (N)

n = nombre de billes en contact avec l'arbre, (.),

F = charge du roulement, (N),

$\varnothing$  = diamètre d'une bille, (m).

Raideur d'une famille de roulements linéaires à billes

On choisit la famille Sférax série fermée à six rangées de billes sans précontrainte, avec  $F = \frac{C_0}{10}$  :

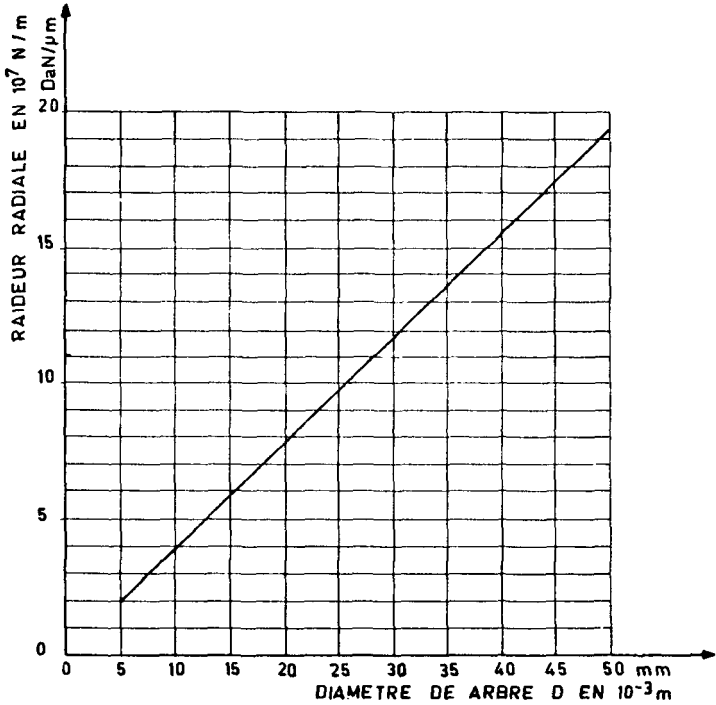


Fig. F8.8 Raideur de la famille de roulements linéaires à billes Sférax, fermés, sans précontrainte.

Remarques: Attention aux hyperstatiques dans les guidages linéaires:





G

LES REDUCTEURS



## G 1 RAIDEUR D'UNE DENTURE D'ENGRENAGE

(D.3)(H.4)(P.1)

La raideur  $K$  d'une denture se décompose en deux raideurs:

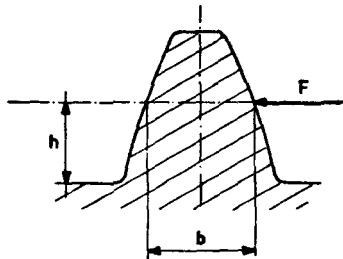
- la raideur  $K_f$  due à la flèche de la dent,
- la raideur  $K_c$  due à la déformation à la ligne de contact.

Nous pouvons écrire:

$$\frac{1}{K} = \frac{1}{K_f} + \frac{1}{K_c} \quad (G1.1)$$

- Hypothèses:
- une seule paire de dents en prise,
  - la flèche est la même pour chaque dent,
  - la déformation à la ligne de contact est la même que celle considérée au chapitre F1.2,
  - la force est appliquée sur l'axe primitif de la denture.

Raideur  $K_f$  due à la flèche:



*Fig. G1.1* Dent d'engrenage.

Avec:  $h = 1,2.m$ , (m)

$b = \frac{1}{2}.l.m$ , (m)

$m$  = module, (m)

$l$  = largeur de la denture, (m).

$F$  = force appliquée sur la denture, (m).

Nous considérons la dent comme une poutre encastrée:

Soit  $f$  la flèche de la dent au niveau de l'axe primitif, nous pouvons écrire:

$$f = \frac{F \cdot h^3}{3 \cdot E \cdot I} = 1,78 \cdot \frac{F}{E \cdot l} \quad (\text{m}) \quad (\text{G1.2})$$

Avec:  $I = \frac{1 \cdot b^3}{12} \quad (\text{m}^4)$

En considérant une paire de dent, nous pouvons écrire:

$$f_t = 2 \cdot f = 3,56 \cdot \frac{F}{E \cdot l} \quad (\text{m}) \quad (\text{G1.3})$$

D'où la raideur  $K_f$  due à la flèche:

$$K_f = \frac{dF}{df_t} = 0,28 \cdot E \cdot l \quad (\text{N} \cdot \text{m}^{-1}) \quad (\text{G1.4})$$

Avec:  $E$  = module d'élasticité, (Pa),

$l$  = largeur de la denture, (m),

Remarque: La raideur  $K_f$  est indépendante du module.

$$K_f^* = L \quad (\text{G1.5})$$

Si la denture est réalisée en acier, la raideur peut s'écrire:

$$K_{fA} = 58,8 \cdot 10^9 \cdot l \quad (\text{N} \cdot \text{m}^{-1}) \quad (\text{G1.6})$$

$$K_{fA}^* = L \quad (\text{G1.7})$$

Raideur  $K_c$  due à la déformation à la ligne de contact

C'est un contact linéaire dont la raideur  $K_c$  est donnée par l'expression (F1.5) pour une denture en acier:

$$K_c = 726 \cdot 10^7 \cdot F^{0,1} \cdot l^{0,8} \quad (\text{N} \cdot \text{m}^{-1}) \quad (\text{G1.8})$$

$$K_c^* = L \quad (\text{G1.9})$$

Raideur K de la denture

Des expressions (G1.1)(G1.6)(G1.8), nous pouvons écrire pour une denture en acier:

$$\frac{1}{K} = \frac{1}{58,8 \cdot 10^9 \cdot l} + \frac{1}{726 \cdot 10^7 \cdot F^{0,1} \cdot l^{0,8}} \quad (G1.9b)$$

$$K^* = L \quad (G1.9c)$$

Rapport entre les deux raideurs  $K_f$  et  $K_c$

Nous posons:

$$k = \frac{K_f}{K_c} = \frac{58,8 \cdot 10^9 \cdot l}{726 \cdot 10^7 \cdot F^{0,1} \cdot l^{0,8}} \quad (G1.10)$$

$$k = 8, F^{-0,1} \cdot l^{0,2} \quad (G1.11)$$

Avec: F = force sur la denture. Elle varie de l'ordre de 1 à  $10^4$  N d'ou  $F^{-0,1}$  varie de 1 à 0,4

l = largeur de la denture. Elle varie de 1 à  $50 \cdot 10^{-3}$  m d'ou  $l^{0,2}$  varie de 0,25 à 0,55.

Nous pouvons en déduire que:

$$2 < k < 1,76 \quad (G1.12)$$

k est donc pratiquement constant et nous pouvons écrire:

$$K_f \approx 2 \cdot K_c \quad (G1.13)$$

La raideur  $K_i$  est l'expression simplifiée de la raideur de la denture K. Nous pouvons écrire pour une denture en acier:

$$K_i = \frac{1}{3} \cdot K_{fa} = \frac{2}{3} \cdot K_c \quad (G1.14)$$

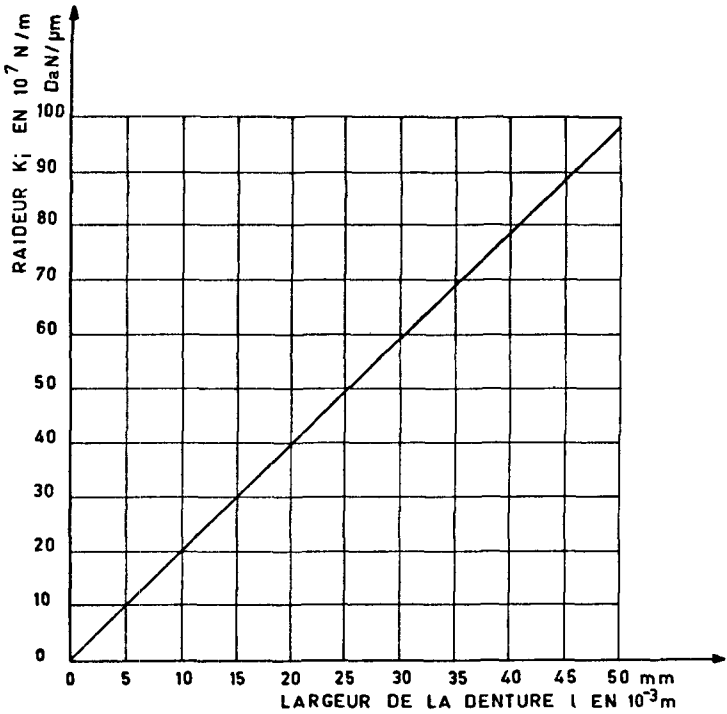
D'ou:

$$K_i = 19,6 \cdot 10^9 \cdot l \quad (N \cdot m^{-1}) \quad (G1.15)$$

$$K_i^* = L \quad (G1.16)$$

Variation de la raideur  $K_i$  en fonction de la largeur de la denture  $l$

$$K_i = 19,6 \cdot 10^9 \cdot l \quad (\text{N} \cdot \text{m}^{-1})$$



Fig,G1.2 Variation de la raideur  $K_i$  en fonction de la largeur de la denture  $l$ .

## G 2 ENGRENAGES CYLINDRIQUES

(D.3)(H.4)(P.1)

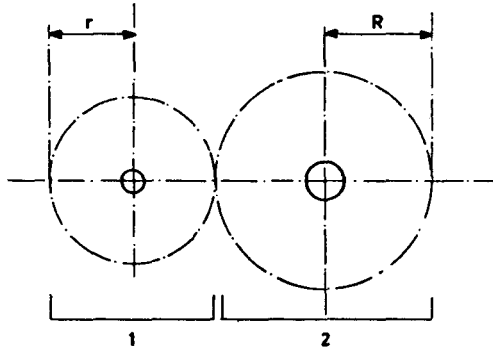


Fig.G2.1 Engrenages cylindriques.

Raideur angulaire  $K_{\alpha 1}$  d'un engrenage cylindrique, la roue 2 étant bloquée

Nous pouvons écrire:

$$\frac{1}{K_{\alpha 1}} = \frac{1}{K_d \cdot r^2} + \frac{1}{K_{p1} \cdot r^2} + \frac{1}{K_{p2} \cdot R^2 \cdot n} \quad (G2.1)$$

Avec:  $K_d$  = raideur de la denture, (Chap.G1)( $N \cdot m^{-1}$ ),

$r$  = rayon primitif de la roue 1, (m),

$K_{p1}$  = raideur radiale du palier 1, ( $N \cdot m^{-1}$ ),

$K_{p2}$  = raideur radiale du palier 2, ( $N \cdot m^{-1}$ ),

$R$  = rayon primitif de la roue 2, (m),

$n$  = rapport de réduction,  $n = \frac{R}{r}$ , (.).

Raideur angulaire  $K_{\alpha 2}$  d'un engrenage cylindrique, la roue 1 étant bloquée

$$K_{\alpha 2} = n^2 \cdot K_{\alpha 1} \quad (N \cdot m \cdot rad^{-1}) \quad (G2.2)$$

Dans les 2 cas:

$$K_{\alpha 1}^* = K_{\alpha 2}^* = L^3 \quad (G2.3)$$





### G 3 ROUES CÔNIQUES

(D.3)(H.4)(P.1)

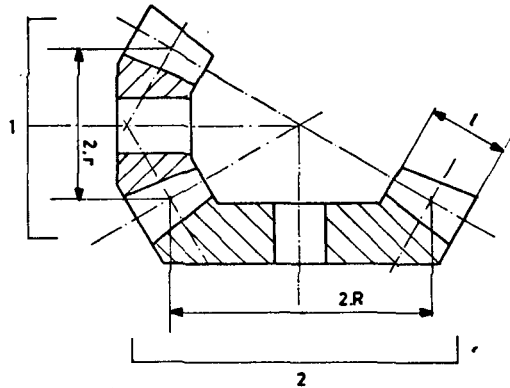


Fig.G3.1 Roues côniques.

Raideur angulaire  $K_{\alpha 1}$  d'un engrenage à roues côniques, la roue 2 étant bloquée

Nous pouvons écrire avec une bonne approximation quant aux rayons des roues:

$$\frac{1}{K_{\alpha 1}} = \frac{1}{K_d \cdot r^2} + \frac{1}{K_{p1} \cdot r^2} + \frac{1}{K_{p2} \cdot R^2 \cdot n} \quad (G3.1)$$

Avec:  $K_d$  = raideur de la denture, (Chap.G1)( $N \cdot m^{-1}$ )

$r$  = rayon primitif moyen de la roue 1, (m),

$K_{p1}$  = raideur radiale du palier 1, ( $N \cdot m^{-1}$ ),

$K_{p2}$  = raideur radiale du palier 2, ( $N \cdot m^{-1}$ ),

$R$  = rayon primitif moyen de la roue 2, (m),

$n$  = rapport de réduction,

$n = \frac{R}{r}$ , (.).

Raideur angulaire  $K_{\alpha 2}$  d'un engrenage à roues cônica, la roue 1 étant bloquée

$$K_{\alpha 2} = n^2 \cdot K_{\alpha 1} \quad (\text{N.m.rad}^{-1}) \quad (\text{G3.2})$$

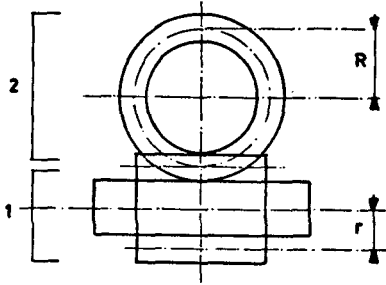
Dans les deux cas:

$$K_{\alpha 1}^* = K_{\alpha 2}^* = L^3 \quad (\text{G3.3})$$

---

## G 4 ROUE ET VIS TANGENTE

(d.3)(H.4)(P.1)



*Fig.G4.1 Roue et vis tangente.*

Raideur angulaire  $K_{\alpha 1}$  d'une roue et vis tangente, la vis étant bloquée

$$\frac{1}{K_{\alpha 1}} = \frac{1}{K_d \cdot R^2} + \frac{1}{K_{p2} \cdot R^2} + \frac{1}{K_{p1a} \cdot R^2} + \frac{1}{K_f \cdot R^2} + \frac{1}{K_{p1r} \cdot R^2 \cdot \text{tg} \beta} \quad (\text{G4.1})$$

Avec:  $K_d$  = raideur de la denture, (Chap.G1)( $\text{N} \cdot \text{m}^{-1}$ ),

$R$  = rayon de la roue, (m),

$K_{p2}$  = raideur axiale du palier de la roue, ( $\text{N} \cdot \text{m}^{-1}$ ),

$K_{p1a}$  = raideur axiale du palier de la vis, ( $\text{N} \cdot \text{m}^{-1}$ ),

$K_f$  = raideur due à la flexion de la vis, ( $\text{N} \cdot \text{m}^{-1}$ ),

$K_{p1r}$  = raideur radiale du palier de la roue, ( $\text{N} \cdot \text{m}^{-1}$ ),

$\beta$  = angle de contact de la denture, ( $^\circ$  ou rad)

Raideur angulaire  $K_{\alpha 2}$  d'une roue et vis tangente, la roue étant bloquée

$$K_{\alpha 2} = \frac{1}{n^2} \cdot K_{\alpha 1} \quad (\text{N.m.rad}^{-1}) \quad (\text{G4.2})$$

avec:  $n$  = rapport de réduction

Dans les deux cas:

$$K_{\alpha 1}^* = K_{\alpha 2}^* = L^3 \quad (\text{G4.3})$$

---

## G 5 RÉDUCTEUR " HARMONIC - DRIVE " ( H D ).

(M.1:185-216)(M.2)(H.11)(D.3)

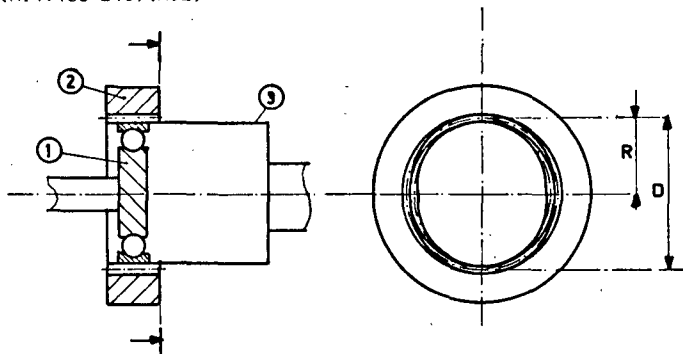


Fig.G5.1 Harmonic-drive (HD)

C'est un réducteur non conventionnel permettant une réduction élevée, de 60 à 600, sans jeu, avec un bon rendement et dont l'entrée est coaxiale avec la sortie.

Le Harmonic-drive est composé de trois pièces:

- (1) l'arbre d'entrée avec un roulement à billes elliptique appelé "waves generator",
- (2) une couronne massive avec 2.m dents intérieures,
- (3) une cloche fixée à l'arbre de sortie avec 2.(m - 1) dents extérieures.

Le "waves generator"(1) fait rouler la cloche (3) sur la couronne (2) Le périmètre de la couronne (2) étant plus grand que celui de la cloche (3), la couronne (2) et la cloche (3) auront une vitesse relative différente.

### G5.1 Rapport de réduction quand la couronne est fixe:

$$n = - m \quad (.) \quad (G5.1)$$

### Rapport de réduction quand la cloche est fixe:

$$n' = m - 1 \quad (.) \quad (G5.2)$$

G5.2 Raideur angulaire  $K_{\alpha 1}$  d'un "harmonic-drive", l'arbre d'entrée (1) étant bloqué

$$\frac{1}{K_{\alpha 1}} = \frac{1}{K_d \cdot R^2} + \frac{1}{K_{ac}} + \frac{1}{K_{aw}} \quad (G5.3)$$

Avec:  $K_d$  = raideur de la denture, (Chap.G1)(N.m<sup>-1</sup>),

$K_{ac}$  = raideur angulaire de la cloche, (N.m.rad<sup>-1</sup>),

$K_{aw}$  = raideur angulaire de "waves generator", (N.m.rad<sup>-1</sup>),

R = rayon primitif de la couronne, (m).

Raideur angulaire  $K_{\alpha 2}$  d'un "harmonic-drive", la cloche ou la couronne étant bloquée

$$K_{\alpha 2} = \frac{1}{n^2} \cdot K_{\alpha 1} \quad (\text{N.m.rad}^{-1}) \quad (G5.4)$$

Dans les deux cas:

$$K^*_{\alpha 1} = K^*_{\alpha 2} = L^3 \quad (G5.5)$$

G5.3 Raideur angulaire  $K_{ac}$  de la cloche (Chap.H2)

$$K_{ac} = \frac{G \cdot I_p}{l} \quad (\text{N.m.rad}^{-1}) \quad (G5.6)$$

Avec: G = module de glissement, (Chap.D3)(Pa),

$I_p$  = moment d'inertie polaire de la surface, (Chap.D6),(m<sup>4</sup>)

l = longueur de la cloche, (m)

G5.4 Raideur angulaire  $K_{aw}$  due au "waves generator"

Le couple exerce une force radiale sur le roulement du "waves generator" par l'intermédiaire d'une denture à 60°. Cette charge est répartie localement sur une zone d'environ le  $\frac{1}{4}$  du diamètre projeté.

Ce qui permet d'écrire:

$$K_{aw} = \frac{K_r \cdot R^2}{4 \cdot \text{tg}30^\circ} = 0,43 \cdot K_r \cdot R^2 \quad (\text{N.m.rad}^{-1}) \quad (\text{G5.6})$$

Avec:  $K_r$  = raideur radiale du roulement du "waves generator", ( $\text{N.m}^{-1}$ )

$R$  = rayon du cercle primitif de la couronne, (m).

### G5.5 Exemple

Choisissons le "Harmonic-drive" HDUC 20. Par le calcul nous trouvons pour les raideurs angulaires:

Raideur angulaire due à la denture:  $K_{ad} = 613 \cdot 10^3 \text{ N.m.rad}^{-1}$

Raideur angulaire de la cloche:  $K_{ac} = 124 \cdot 10^3 \text{ N.m.rad}^{-1}$

Raideur angulaire due au "waves generator":  $K_{aw} = 32 \cdot 10^3 \text{ N.m.rad}^{-1}$

Raideur angulaire totale:  $K_{\alpha 1} = 24 \cdot 10^3 \text{ N.m.rad}^{-1}$

Cette valeur correspond à celle donnée par le catalogue.

Remarque: La raideur angulaire d'un "harmonic-drive" est déterminée principalement par la raideur due au roulement du "waves generator".

### G5.6 Raideur angulaire d'une famille de réducteur "harmonic-drive"

Nous choisissons la famille HDUC.

La cloche est en acier.

Le roulement du "waves generator" est à billes.

Nous pouvons établir la formule suivante:

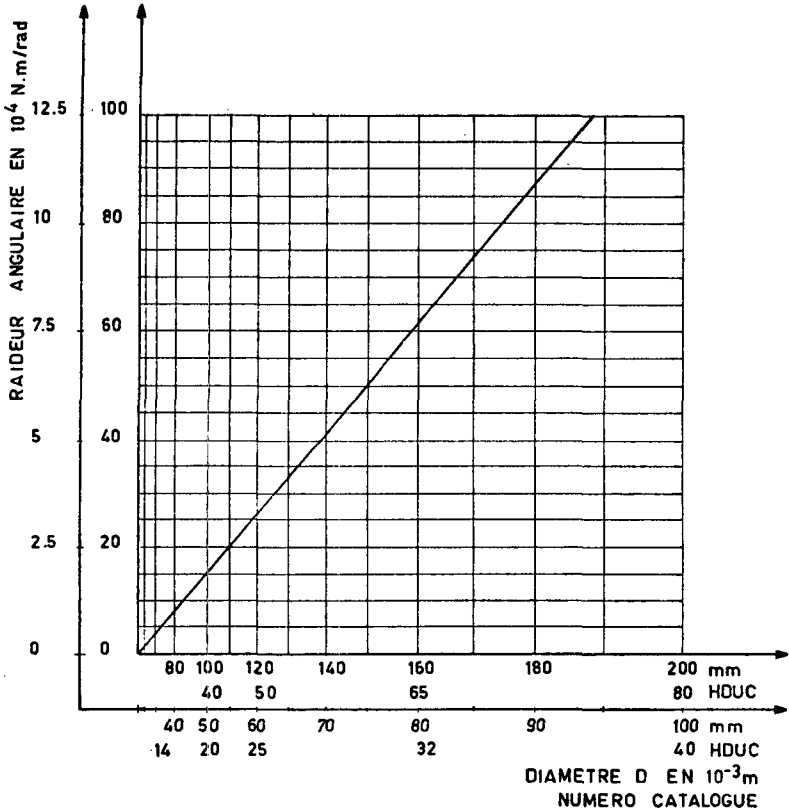
$$K_{\alpha 1i} = 150 \cdot 10^6 \cdot D^3 \quad (\text{N.m.rad}^{-1}) \quad (\text{G5.7})$$

$$K_{\alpha 1i}^* = L^3 \quad (\text{G5.8})$$

Les valeurs obtenues correspondent à celle données par le catalogue.



Raideur d'une famille de réducteurs "Harmonic-drive"



*Fig.G5.2 Raideur de la famille de réducteurs  
"Harmonic-drive" HDUC.*

G5.7 Remarques sur la raideur angulaire

La raideur d'un réducteur "Harmonic-drive" n'est pas constante en fonction du couple, par exemple pour le HDUC 20:

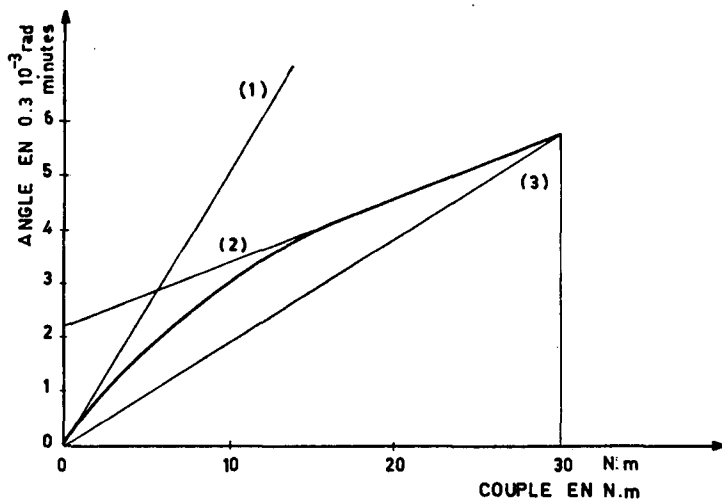


Fig.G5.3 Variation de la raideur angulaire d'un HD en fonction du couple.

$$(2) = \text{raideur maximale: } 28\,647 \text{ N.m.rad}^{-1}$$

$$(1) = \text{raideur sans couple: } 5\,729 \text{ N.m.rad}^{-1}$$

$$(3) = \text{raideur moyenne : } 17\,780 \text{ N.m.rad}^{-1}$$

Remarques: La raideur angulaire sans couple est égale à  $\frac{1}{4}$  à  $\frac{1}{5}$  de la raideur angulaire maximale.

La raideur est maximale à partir de la moitié du couple.

Explication: Cette variation de raideur angulaire est la conséquence des jeux de l'entraînement (waves generator): jeu des billes, jeu entre la cloche et la bague extérieure du roulement...

Ce jeu se rattrape par un déphasage entre la cloche et l'arbre d'entrée lorsqu'un couple est exercé sur l'arbre de sortie.



## G 6 Vis - ÉCROU

(B.6)(P.1)(D.3)

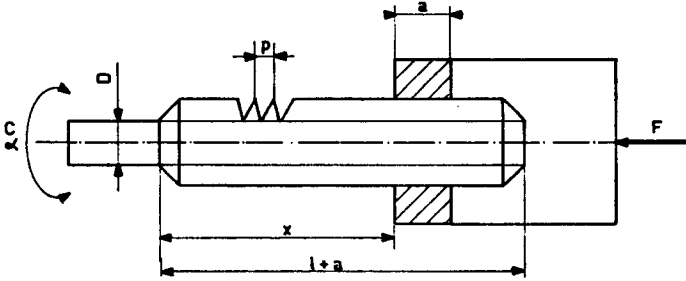


Fig.G6.1 Vis-écrou.

Nous avons les relations suivantes:

$$x = \frac{\alpha \cdot p}{2 \cdot \pi} \quad [\text{m}] \quad (\text{G6.1})$$

$$C = \frac{F \cdot p}{2 \cdot \pi} \quad [\text{N.m}] \quad (\text{G6.2})$$

Avec: x = déplacement linéaire, (m),

α = déplacement angulaire, (rad),

p = pas de la vis, (m),

C = couple, (N.m),

F = force, (N).

### G6.1 Raideur d'une vis-écrou

La raideur K d'une vis-écrou est définie lorsque la vis est bloquée et qu'une force est exercée sur l'écrou.

$$\frac{1}{K} = \frac{1}{K_t} + \frac{1}{K_r} + \frac{1}{K_e} \quad (\text{G6.3})$$

Avec:  $K_t$  = raideur due à la traction dans la vis, ( $\text{N.m}^{-1}$ ),

$K_r$  = raideur due à la réversibilité de la vis, ( $\text{N.m}^{-1}$ ),

$K_e$  = raideur due à l'écrou, ( $\text{N.m}^{-1}$ ).

G6.2 Raideur  $K_t$  due à la traction

La loi de Hook permet d'écrire:

$$K_t = \frac{dF}{dx} = \frac{E \cdot S}{x} \quad (\text{N} \cdot \text{m}^{-1}) \quad (\text{G6.4})$$

$$K_t^* = L \quad (\text{G6.5})$$

Avec: E = module d'élasticité, (Pa),

S = section du noyau de la vis, ( $\text{m}^2$ ),

x = longueur de la vis soumise à la traction, (m).

Cette raideur est minimale pour:  $x = l$ , d'ou:

$$K_{t\min} = \frac{E \cdot S}{l} \quad (\text{N} \cdot \text{m}^{-1}) \quad (\text{G6.6})$$

G6.3 Raideur  $K_r$  due à la réversibilité de la vis

Si la vis est réversible, il faut tenir compte de la raideur angulaire  $K_{ar}$  de la vis.

Nous pouvons écrire:

$$K_r = K_{ar} \cdot \left( \frac{2 \cdot \pi}{p} \right)^2 \quad (\text{N} \cdot \text{m}^{-1}) \quad (\text{G6.7})$$

Du Chap.H2 nous pouvons écrire:

$$K_{ar} = \frac{G \cdot \pi \cdot D^4}{32 \cdot x} \quad (\text{N} \cdot \text{m} \cdot \text{rad}^{-1}) \quad (\text{G6.8})$$

Avec: G = module de glissement, (Pa),

D = diamètre du noyau de la vis, (m),

x = longueur de la vis soumise à la torsion, (m).

D'ou la raideur  $K_r$ :

$$K_r = \frac{G \cdot \pi^3 \cdot D^4}{8 \cdot x \cdot p^2} \quad (\text{N} \cdot \text{m}^{-1}) \quad (\text{G6.9})$$

$$K_r^* = L \quad (\text{G6.10})$$

La raideur  $K_r$  est minimale pour:  $x = 1$ , d'où:

$$K_{r\min} = \frac{G \cdot \pi^3 \cdot D^4}{8 \cdot l \cdot p^2} \quad (\text{N} \cdot \text{m}^{-1}) \quad (\text{G6.11})$$

#### G6.4 Raideur $K_g$ due à l'écrou

Pour la construction de bras de RI, on emploie généralement des vis-écrous avec circulation de billes.

Ces écrous à billes ont  $n$  tours de billes jointives ( $n=4$  à  $6$ )

Le chapitre F1 nous permet d'écrire:

$$K_g \approx 10 \cdot 10^9 \cdot D \cdot n \quad (\text{N} \cdot \text{m}^{-1}) \quad (\text{G6.12})$$

$$K_g^* = L \quad (\text{G6.13})$$

Avec:  $D$  = diamètre du noyau de la vis, (m),

$n$  = nombre de tours de billes, (.).

#### G6.5 Exemple:

Vis à billes SKF STFZ 25:  $D = 20 \cdot 10^{-3}$  m,

$l = 200 \cdot 10^{-3}$  m,

$p = 5 \cdot 10^{-3}$  m,

$n = 4$ .

Après calculs, nous trouvons:

$$K_t = 330 \cdot 10^6 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$$

$$K_r = 10 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$$

$$K_g = 800 \cdot 10^6 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$$

$$K = 230 \cdot 10^6 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$$

La raideur due à la traction est dominante.

G6.6 Raideur d'une famille de vis à billes

Nous choisissons la famille de vis à billes SKF STFZ avec:

$$D = d_0 \quad n = 4$$

$$l = 10,0$$

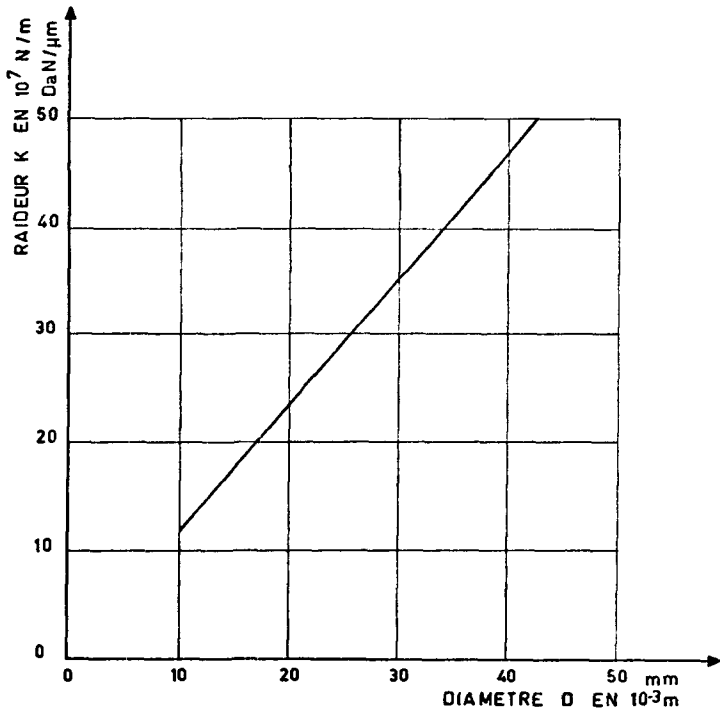


Fig.G6.2 Raideur d'une famille de vis à billes:  
SKF STFZ.

## G 7 PIGNON - CRÉMAILLÈRE

(P.1)(H.4)

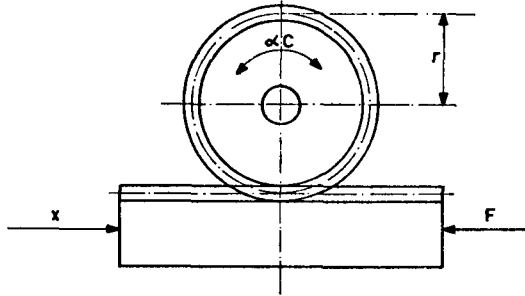


Fig.G7.1 Pignon-crémaillère.

Raideur K d'un pignon crémaillère, le pignon étant bloqué

$$\frac{1}{K} = \frac{1}{K_d} + \frac{1}{K_p} + \frac{1}{K_t} \quad (G7.1)$$

Avec:  $K_d$  = raideur de la denture, (Chap.G1)(N.m<sup>-1</sup>),

$K_p$  = raideur des paliers. (Chap.F)(N.m<sup>-1</sup>).

$K_t$  = raideur due à la traction, (voir Chap.G6.2)(N.m<sup>-1</sup>)

Raideur  $K_\alpha$  d'un pignon crémaillère, la crémaillère étant bloquée

$$K_\alpha = K \cdot r^2 \quad (\text{N.m.rad}^{-1}) \quad (G7.2)$$

Dans les deux cas:

$$K^* = L \quad (G7.3)$$

$$K_\alpha^* = L^3 \quad (G7.4)$$





## G 8 COMPARAISON: VIS - ÉCROU, PIGNON - CRÉMAILLÈRE, VÉRIN

### G8.1 La raideur

Nous choisissons des éléments de section identique S et de même course l.

#### Vérin:

Avec la formule E1.8 nous pouvons écrire:

$$K_v = 5,2 \cdot 10^9 \cdot \frac{S}{l} \quad (\text{N.m}^{-1}) \quad (\text{G8.1})$$

#### Vis-écrou:

Du chapitre G6 nous pouvons écrire:

$$K_{vi} = 115 \cdot 10^9 \cdot \frac{S}{l} \quad (\text{N.m}^{-1}) \quad (\text{G8.2})$$

#### Pignon-crémaillère:

Du chapitre G7 nous pouvons déduire une valeur approximative de la raideur:

$$K_p = 90 \cdot 10^9 \cdot \frac{S}{l} \quad (\text{N.m}^{-1}) \quad (\text{G8.3})$$

Remarques: Le vérin hydraulique est de l'ordre de 20 fois moins raide que la vis-écrou ou pignon-crémaillère.

### G8.2 L'inertie

Nous cherchons l'inertie vue du moteur.

#### Vis-écrou plus charge:

Le moteur entraîne généralement la vis.

$$I_v = \frac{1}{2} \cdot m \cdot r^2 + \frac{M \cdot p^2}{4 \cdot \pi^2} \quad (\text{Kg} \cdot \text{m}^2) \quad (\text{G8.4})$$

Avec: m = masse de la vis, (Kg),  
 r = rayon moyen de la vis, (m),  
 M = masse de la charge, (Kg),  
 p = pas de la vis, (m).

Pignon-crémaillère plus charge:

$$I_p = \frac{1}{2} \cdot m \cdot r^2 + (M + m) \cdot r^2 \quad (\text{Kg} \cdot \text{m}^2) \quad (\text{G8.5})$$

Avec: m = masse du pignon, (Kg),  
 r = rayon du pignon, (m),  
 M = masse de la charge, (Kg).

Remarques: Dans le cas de la vis-écrou c'est l'inertie de la vis qui est dominante.

Dans le cas du pignon-crémaillère, c'est l'inertie due à la charge qui est dominante.

G8.3 L'accélération

L'accélération  $\ddot{x}$  de la masse M doit être la même. Cherchons l'accélération angulaire " correspondante " dans chacun des cas:

Vis écrou:

$$\ddot{\alpha}_v = \ddot{x} \cdot \frac{2 \cdot \pi}{p} \quad (\text{rad} \cdot \text{s}^{-2}) \quad (\text{G8.6})$$

Pignon-crémaillère:

$$\ddot{\alpha}_p = \frac{\ddot{x} \cdot 2 \cdot \pi}{z \cdot p} \quad (\text{rad} \cdot \text{s}^{-2}) \quad (\text{G8.7})$$

Avec: p = pas de la vis et de la crémaillère, (m)  
 z = nombre de dent du pignon, (.)

Faisons le rapport des expressions (G8.6) et (G8.7), en admettant que les deux systèmes ont le même pas:

$$\frac{\ddot{\alpha}_v}{\ddot{\alpha}_p} = \frac{\ddot{x}_v \cdot 2 \cdot \pi \cdot z \cdot p}{p \cdot \ddot{x}_p \cdot 2 \cdot \pi} = z \quad (\text{G8.8})$$

Remarques: Le nombre de dents  $z$  du pignon ayant un minimum à 20 il faut une accélération au moins 20 fois plus grande du moteur pour accélérer un système vis-écrou que pour un système pignon-crémaillère.

---

H

LA STRUCTURE

# H 1 POUTRE EN TRACTION OU EN COMPRESSION

(G.2)(P.2)(D.3:22)

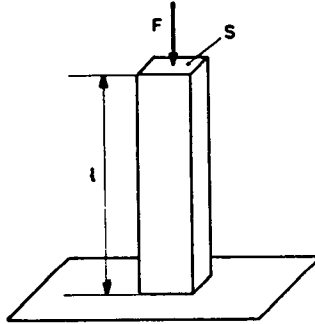


Fig.H1.1 Poutre en compression.

La loi de Hooke nous donne:

$$\frac{dF}{S} = E \cdot \frac{dl}{l} \quad (\text{H1.1})$$

Avec: F = force de traction ou de compression, (N),

S = section de la poutre, (m<sup>2</sup>),

E = module d'élasticité, (Pa),

l = longueur de la poutre, (m)

De l'expression (H1.1) nous pouvons trouver la raideur:

$$K = \frac{dF}{dl} = \frac{E \cdot S}{l} \quad (\text{N} \cdot \text{m}^{-1}) \quad (\text{H1.2})$$

$$K^* = L \quad (\text{H1.3})$$


---

## H 2 POUTRE EN TORSION

(H.2:1-13)(D.3:60)

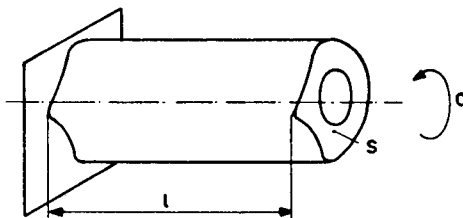


Fig.H2.1 Poutre en torsion.

La raideur  $K_\alpha$  s'écrit :

$$K_\alpha = \frac{G \cdot S^4}{4 \cdot \pi \cdot l \cdot I_p} \quad (\text{N.m.rad}^{-1}) \quad (\text{H2.1})$$

$$K_\alpha^* = L^3 \quad (\text{H2.2})$$

Avec :  $G$  = module de glissement, (Pa),

$S$  = section de la poutre, ( $\text{m}^2$ ),

$l$  = longueur de la poutre, (m),

$I_p$  = moment d'inertie polaire, ( $\text{m}^4$ )

Si la section est circulaire, la raideur angulaire s'écrit :

$$K_{\alpha c} = \frac{\pi \cdot G \cdot (D^4 - d^4)}{32 \cdot l} \quad (\text{N.m.rad}^{-1}) \quad (\text{H2.3})$$

Avec :  $D$  = diamètre extérieur du tube, (m),

$d$  = diamètre intérieur du tube, (m).

### H 3 POUTRE EN FLEXION

(H.2:1-13)(D.3:69,118)

#### H3.1 Poutre encastrée

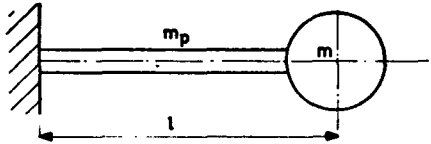


Fig.H3.1 Poutre encastrée.

Raideur d'une poutre encastrée:

$$K = \frac{3.E.I}{l^3} \quad (\text{N.m}^{-1}) \quad (\text{H3.1})$$

$$K^* = L \quad (\text{H3.2})$$

Pulsation propre d'une poutre encastrée:

$$\omega^2 = \frac{3.E.I}{l^3.(m + 0,23.m_p)} \quad (\text{s}^{-2}) \quad (\text{H3.3})$$

$$\omega^* = L^{-1} \quad (\text{H3.4})$$

Avec: E = module d'élasticité, (Pa),

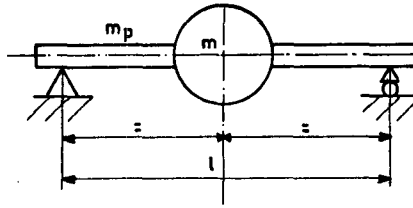
I = moment d'inertie de la poutre, ( $\text{m}^4$ ),

l = longueur de la poutre, (m).

m = masse concentrée, (Kg),

$m_p$  = masse de la poutre, (Kg).



H3.2 Poutre sur deux appuis:Fig.H3.2 Poutre sur deux appuis.Raideur d'une poutre sur deux appuis

$$K = \frac{48.E.I}{l^3} \quad (\text{N.m}^{-1}) \quad (\text{H3.5})$$

$$K^* = L \quad (\text{H3.6})$$

Pulsation propre d'une poutre sur deux appuis

$$\omega^2 = \frac{48.E.I}{l^3.(m + 0,5.m_p)} \quad (\text{s}^{-2}) \quad (\text{H3.7})$$

$$\omega^* = L^{-1} \quad (\text{H3.8})$$

Avec:  $E$  = module d'élasticité, (Pa),

$I$  = moment d'inertie de la poutre, ( $\text{m}^4$ ),

$l$  = longueur de la poutre, (m),

$m$  = masse concentrée, (Kg),

$m_p$  = masse de la poutre, (Kg).

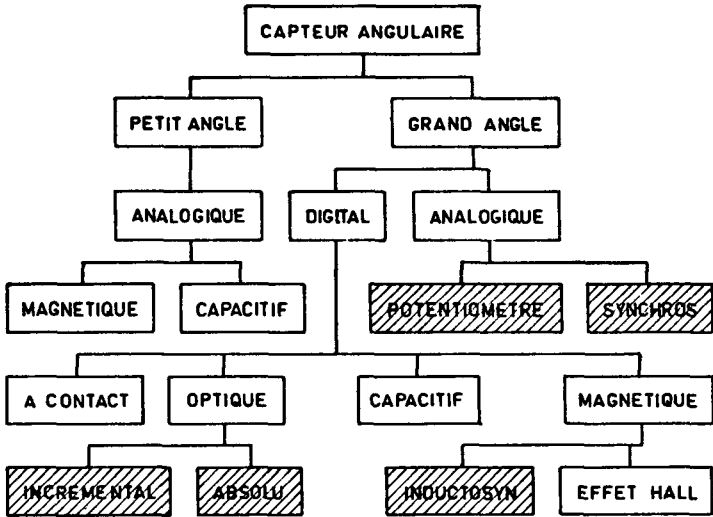
I LES CAPTEURS DE POSITION

# I 1 INVENTAIRE DES DIFFÉRENTS CAPTEURS DE POSITION

(B.12)(F.4)(H.3)(F.6)(N.1)

Pour des raisons d'environnement, (Par exemple: projection d'huile), les bras de RI sont généralement munis de capteurs de position rotatifs, et le cas échéant, la translation est transformée en rotation par l'intermédiaire d'un pignon et d'une crémaillère de mesure.

Certains capteurs cité dans le tableau ci-dessous existent aussi dans une version linéaire.



**▨** employé pour les robots.

Fig.I1.1 Inventaire des différents capteurs de position.

Les cases hachurées correspondent aux capteurs employés pour les RI et étudiés dans les chapitres suivants.

## I 2 LES POTENTIOMÈTRES\*

(B.12)(H.3)(catalogues sous-mentionnés)

Les potentiomètres sont des capteurs analogiques absolus. Ils existent sous deux formes:

- 1) Rotatifs: de 1 à 10 tours,
- 2) Linéaires: jusqu'à environ 0,5 m.

et en deux types de fabrications:

- 1) Bobinés,
- 2) à film plastique continu .

La durée de vie d'un potentiomètre d'asservissement varie de 1 à  $50 \cdot 10^6$  cycles.

La résolution d'un potentiomètre est théoriquement infinie.

Le signal est proportionnel à l'angle de rotation: il y a une erreur de linéarité de l'ordre de 1 à 0.05 % et une erreur due à la variation de la température de l'ordre de  $2$  à  $5 \cdot 10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$ . On peut donc compter dans le meilleur des cas sur une erreur de la mesure de l'ordre de 0,1 % soit 1000 positions par course ou 10 bit.

Un potentiomètre doit être monté étanche pour éviter un encrassement des frotteurs.

Le potentiomètre est un capteur de mesure économique de faible résolution.

---

\* Bourns (USA), Ohmag (CH), Sfernice (F), Ferranti (GB),...

### I 3 LES SYNCHROS - RÉSOLVERS \*

(N.1)(catalogues sous-mentionnés)

Les résolveurs sont des capteurs de position analogiques absolus. Pour les versions industrielles, les résolveurs se présentent sous deux formes:

- 1) résoudre "pan-cake", a une ou multivitesse,
- 2) résoudre à balais, a un ou multitours.

La résolution ainsi que la durée de vie d'un résoudre est théoriquement infinie.

Le signal de mesure est fonction de l'angle de rotation: il y a une erreur de linéarité, après traitement de ce signal de l'ordre de 0,02 à 0,04 %.

Une électronique d'un prix élevé permet de convertir ce signal analogique en un signal digital de 13 bit par tour (4096 positions) pour des résolveurs de un tour et jusqu'à 17 bit pour des résolveurs multitours ou multivitesse.

Le résoudre "pan-cake" est insensible à l'encrassement, mais il doit être monté avec beaucoup de soins (Alignement).

Le résoudre est un capteur de position absolu de grande précision mais de mise en oeuvre de prix élevé.

---

\* Litton (USA), Thomson-CSF (F), Moor-Reed (GB),...

## I 4 LES INDUCTOSYN<sup>®</sup>\*

(B.12)(N.1)(catalogues sous-mentionnés)

L'inductosyn est un capteur absolu.

L'inductosyn se présentent sous deux formes:

- 1) linéaire, qui est sa présentation habituelle,
- 2) rotative.

La durée de vie de l'inductosyn est théoriquement infinie.

L'inductosyn permet une grande précision de mesure: de l'ordre de  $\pm 10^{-6}$  m pour la version linéaire et de  $\pm 5 \cdot 10^{-6}$  rad ( $\pm 1$ s) pour la version rotative.

Le système de traitement du signal de mesure est d'un prix très élevé.

L'inductosyn doit être protégée des salissures.

L'inductosyn est un capteur de mesure de position absolu de très grande précision, d'un grand encombrement et d'un prix très élevé.

---

\* Inductosyn<sup>®</sup> (USA), Heidenhain (D),...

## I 5 LES CAPTEURS OPTIQUES\*

(D.1)(B.12)(N.1)(H.3)(catalogues sous-mentionnés)

Les capteurs optiques sont des capteurs digitaux.  
Ils se présentent sous deux formes:

- 1) Incrémentals:- jusqu'à 20 bit par tour,
  - avec par tour:
    - 1 signal,
    - ou 2 signaux déphasés de  $90^{\circ}$ ,
    - avec ou sans zéro,
    - signal carré ou sinusoïdal,
- 2) Absolus:- jusqu'a 16 bit par tour,
  - code: binaire naturel, gray, BCD...

Dans le cas des capteurs optiques incrémentaux avec deux signaux déphasés de  $90^{\circ}$  et un zéro, un traitement électronique adéquat permet d'obtenir:

- un signal de fréquence identique, ou un multiple à celui reçu, compatible avec la commande,
- un signal de sens de rotation,
- un signal de zéro.

La durée de vie d'un capteur optique est de l'ordre de  $10^5$  heures.

Le traitement des signaux est d'un prix bas.

Le capteur optique doit être monté étanche pour le protéger des salissures.

Le capteur optique incrémental est spécialement bien adapté au bras de RI: faible poids et encombrement réduit, grande résolution et grande fiabilité, et d'un prix moyen.

---

\* Heidenhain (D), Rotaswitch (USA), Litton (USA), Ferranti (GB),...

I 6 TABLEAU COMPARATIF.

CAPTEURS DE POSITION	CARACTERISTIQUES COMPAREES								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	ABSOLU OU RELATIF	ANALOGIQUE OU DIGITAL	PRIX DU CAPTEUR	PRIX DE LA SORTIE DIGITALE	RESOLUTION DU CAPTEUR (BIT/TOUR)	NOMBRE DE BIT/TOUR APRES TRAITEMENT	NOMBRE DE BIT MAXIMAL PAR COURSE	DUREE DE VIE	VOLUME DU CAPTEUR
POTENTIOMETRE	A	A	↗	↗	8	10	10	↗	○
CAPTEUR OPTIQUE INCREMENTAL	R	D	↘	↘	10 20	10 20	8	↘	○
CAPTEUR OPTIQUE ABSOLU	A	D	↘	↘	10 16	10 16	10 16	↘	○
RESOLVER "PANCAKE"	A	A	↘	↘	8	13	13	↘	○
RESOLVER "PANCAKE" MULTIVITESSE	A	A+D	↘	↘	8	19	19	↘	○
RESOLVER A BALAIS	A	A	↘	↘	8	13	13	↘	○
RESOLVER A BALAIS MULTITOURS	A	A	↘	↘	8	13	19	↘	○
INDUCTOSYN	A	A	↘	↘	8	20	20	↘	○

Fig. I6.1 Tableau comparatif des différents types de capteurs de position pouvant entrer dans la construction d'un bras de RI.



J BIBLIOGRAPHIE

Voir annexe chapitre G page XXIV.