HOMOLOGIE
DES ALGÈBRES SYMÉTRIQUES

THÈSE N° 278 (1977)

PRÉSENTÉE AU DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

POUR L'OBTENTION DU GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES

PAR

MARC-ANDRÉ NICOLLERAT

Licencié ès sciences mathématiques Université de Lausanne
M.A. University of British Columbia Vancouver
Originaire de Bex (Vaud)

acceptée sur proposition du jury :

Prof. M. André, rapporteur
Prof. J. de Siebenthal, corapporteur
Prof. F. Sigrist, corapporteur

REMERCIEMENTS.

L'auteur tient à remercier chaleureusement M. le Professeur M. André, son directeur de thèse : ses encouragements, ses conseils et sa constante disponibilité ont grandement contribué à la bonne marche de ce travail.

M. le Professeur F. Sigrist ayant bien voulu accepter de fonctionner comme corapporteur externe, l'auteur lui est fort reconnaissant d'avoir lu avec grande attention ce manuscrit.

Enfin, les remerciements de l'auteur vont également au Professeur J. de Siebenthal, corapporteur interne.

TABLE DES MATIERES.

§ 0. INTRODUCTION.

Ce travail a pour but principal de donner une démonstration directe du théorème suivant (appelé par la suite théorème principal) dont la version topologique est due à A. Dold et R. Thom (cf. [8], théorème 6.10): si K est un corps et M un module simplicial sur K, alors l'homologie de l'algèbre symétrique de M ne dépend que de $H[M]$ et c'est la cogèbre enveloppante d'un certain espace vectoriel. Nous donnerons une description explicite de cette algèbre de Hopf. La méthode utilisée s'inspire des travaux de H. Cartan ([7]) et de M. André ([2]); c'est pourquoi nous démontrons d'abord quelques propriétés relatives aux puissances divisées (§ 2). Aux paragraphes 1 et 4 nous donnons les résultats de théorie simpliciale indispensables à la démonstration du théorème. Le théorème principal sera démontré lorsque K est un corps de caractéristique $p > 2$ (§§ 3 et 5), puis nous donnerons les modifications à apporter aux démonstrations pour que le résultat soit encore valable en caractéristique 0 ou 2 (§§ 6 et 7). Au paragraphe 8 nous démontrerons quelques résultats concernant $H_m[SM]$ lorsque $m < 2p + 2$.

Dans tout ce travail, K désigne un corps de caractéristique p et, pour un K-module M, $S_K(M)$ (ou plus simplement $S(M)$, ou même SM) désigne l'algèbre symétrique de M au sens de [6].

§ 1. RAPPEL DE QUELQUES RESULTATS DE THEORIE SIMPLICIALE.

Un *K-module simplicial* M est un ensemble de K-modules M_n ($n \in \mathbb{N}$) et un ensemble d'homomorphismes de K-modules

$$\varepsilon^i_{n+1} : M_{n+1} \to M_n \quad (i=0,1,..,n+1) \qquad \sigma^j_n : M_n \to M_{n+1} \quad (j=0,1,..,n)$$

vérifiant les cinq axiomes

1. $\varepsilon^i_{n-1}\varepsilon^j_n = \varepsilon^{j-1}_{n-1}\varepsilon^i_n$ si $0 \leqslant i < j \leqslant n$
2. $\sigma^i_{n+1}\sigma^j_n = \sigma^{j+1}_{n+1}\sigma^i_n$ si $0 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$
3. $\varepsilon^i_{n+1}\sigma^j_n = \sigma^{j-1}_{n-1}\varepsilon^i_n$ si $0 \leqslant i < j \leqslant n$
4. $\varepsilon^i_{n+1}\sigma^j_n = \mathrm{Id}$ si $i=j$ ou si $i = j+1$
5. $\varepsilon^i_{n+1}\sigma^j_n = \sigma^j_{n-1}\varepsilon^{i-1}_n$ si $0 \leqslant j < i-1 \leqslant n$

Un *homomorphisme simplicial* $g : M \to M'$ d'un module simplicial M vers un module simplicial M' est un ensemble d'homomorphismes de K-modules $g_n : M_n \to M'_n$ commutant aux ε^i_n et aux σ^j_n.

Si $f,g : M \to M'$ sont deux applications simpliciales, une *homotopie simpliciale* h de f vers g est un ensemble d'applications K-linéaires $h^i_n : M_n \to M'_{n+1}$ $(0 \leqslant i \leqslant n)$ vérifiant les six axiomes

1. $\varepsilon^o_{n+1}h^o_n = f_n \;,\quad \varepsilon^{n+1}_{n+1}h^n_n = g_n$
2. $\varepsilon^i_{n+1}h^j_n = h^{j-1}_{n-1}\varepsilon^i_n$ si $0 \leqslant i < j \leqslant n$
3. $\varepsilon^{j+1}_{n+1}h^{j+1}_n = \varepsilon^{j+1}_{n+1}h^j_n$ si $0 \leqslant j \leqslant n$
4. $\varepsilon^i_{n+1}h^j_n = h^j_{n-1}\varepsilon^{i-1}_n$ si $0 \leqslant j < i-1 \leqslant n$
5. $\sigma^i_{n+1}h^j_n = h^{j+1}_{n+1}\sigma^i_n$ si $0 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$
6. $\sigma^i_{n+1}h^j_n = h^j_{n+1}\sigma^{i-1}_n$ si $0 \leqslant j < i \leqslant n+1$

Soit C(M) le complexe de chaînes associé au module simplicial M : $C_n(M) = M_n$ et $\partial_n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \varepsilon^i_n$. Si h est une homotopie simpliciale de f vers g, $s_n = \sum_{i=o}^{n} (-1)^i h^i_n$ fournit une homotopie de chaînes de C(f) vers C(g). On en déduit que s'il existe une homotopie simpliciale de f vers g, alors $H[f] = H[g]$.

Par la suite, si aucune confusion n'est à craindre, on désignera encore par M le complexe de chaînes C(M).

A un module simplicial M on sait associer un autre complexe de chaînes : le *complexe de Moore* N(M) de M ; il est défini par

$$N_n(M) = \{x \in M_n \mid \varepsilon_n^i(x)=0 \quad \text{si} \quad 0 \leqslant i < n\} \quad \text{et} \quad \partial_n = (-1)^n \varepsilon_n^n : M_n \to M_{n-1}$$

On a alors le résultat suivant (cf par exemple [4], lemme VIII.15) :

$$H[M] \cong H[N(M)]$$

Soit $\underline{M}_K$ la catégorie des K-modules simpliciaux et $\underline{C}_K$ la catégorie des complexes de chaînes. N peut alors être considéré comme un foncteur $N : \underline{M}_K \to \underline{C}_K$.

Définissons un foncteur $\Gamma : \underline{C}_K \to \underline{M}_K$ de la manière suivante : si (X,∂) est un complexe de chaînes, nous posons

$$\Gamma_n(X) = \sum_{r=0}^{n} \coprod_{\alpha \in \{n,r\}} (X_r)_\alpha$$

où $\{n,r\}$ représente l'ensemble des applications non décroissantes surjectives de $[n] = (0,1,..,n)$ sur $[r]$, et où $(X_r)_\alpha$ est le K-module dont les éléments sont les symboles x_α avec $x \in X_r$, la structure de module étant donnée par $x_\alpha + y_\alpha = (x+y)_\alpha$, $\lambda x_\alpha = (\lambda x)_\alpha$.

Les $\varepsilon_n^i : \Gamma_n(X) \to \Gamma_{n-1}(X)$ sont définis ainsi : soit $x_\alpha \in (X_r)_\alpha$;

$$\begin{array}{ll} \varepsilon_n^i(x_\alpha) = x_{\alpha e_n^i} & \text{si } \alpha e_n^i \text{ est surjective} \\ \varepsilon_n^i(x_\alpha) = (\partial x)_\beta & \text{si } \alpha e_n^i = e_r^r \beta \\ \varepsilon_n^i(x_\alpha) = 0 & \text{si } \alpha e_n^i = e_r^j \beta,\ j < r. \end{array}$$

$e_n^i : [n-1] \to [n]$ désigne la i^e injection : $e_n^i(x) = x$ si $x < i$ et $e_n^i(x) = x+1$ si $x \geqslant i$.

Enfin les $\sigma_n^j : \Gamma_n(X) \to \Gamma_{n+1}(X)$ sont définis par l'égalité

$$\sigma_n^j(x_\alpha) = x_{\alpha s_n^i}$$

où $s^i_n : [n+1] \to [n]$ est telle que $s^i_n(x) = x$ si $x \leqslant i$ et $s^i_n(x) = x-1$ si $x > i$.

Les foncteurs N et Γ réalisent des isomorphismes entre les catégories $\underline{M}_K$ et $\underline{C}_K$. Plus précisément on a le résultat suivant ([11], théorème 22.4) :

Théorème 1.1.

Les foncteurs N et Γ sont inverses l'un de l'autre. De plus si h est une homotopie simpliciale de f vers g, il existe une homotopie de chaînes de N(f) vers N(g) et si s est une homotopie de chaînes de u vers v, il existe une homotopie simpliciale de Γ(u) vers Γ(v).

Citons encore les résultats suivants :

Proposition 1.2. (cf. [11], Corollaire 24.6)

Soit X un complexe de chaînes sur un corps K tel que $H_i[X] = 0$ pour $i \neq n$ $(n>0)$. Alors X est homotope au complexe de chaînes C défini par $C_n = H_n[X]$ et $C_i = 0$ si $i \neq n$.

Proposition 1.3. (cf. [11], Corollaire 22.3)

Soit M un module simplicial, C(M) le complexe de chaînes associé à M et D(M) le sous-complexe de chaînes engendré par les éléments dégénérés de M. Alors la projection canonique $C(M) \to C(M)/D(M)$ est une équivalence de chaînes.

(Rappelons qu'un élément x est dégénéré s'il est de la forme $x = \sigma^j(y)$).

Pour terminer ce paragraphe nous rappelons quelques définitions et propriétés concernant les modèles acycliques. Nous désignons par Δ_n l'*ensemble simplicial modèle de dimension n* : $(\Delta_n)_m$ est l'ensemble de toutes les applications non décroissantes de $[m]$ dans $[n]$. Les opérateurs ε^i_m, σ^j_m sont définis, pour $f \in (\Delta_n)_m$, par

$$\varepsilon^i_m(f) = fe^i_m \qquad \sigma^j_m(f) = fs^j_m$$

La *cellule fondamentale* χ_n de Δ_n est l'identité $\chi_n = \mathrm{Id} : [n] \to [n]$. Ainsi $\chi_n \in (\Delta_n)_n$.

Si F est le foncteur associant à tout ensemble X le K-module libre sur les éléments de X nous désignerons par $\bar{\Delta}_n$ le module simplicial $F(\Delta_n)$.

Proposition 1.4. (cf. [10], Proposition VIII.7.1)

$\bar{\Delta}_n$ est acyclique pour tout $n \geqslant 0$:

$H_m[\bar{\Delta}_n] = 0$ si $m \neq 0$ et $H_o[\bar{\Delta}_n] \cong K$.

Proposition 1.5. (cf. [10], Proposition VIII.7.2)

Pour tout ensemble simplicial S et tout $x \in S_n$, il existe une application simpliciale unique $\alpha : \Delta_n \to S$ telle que $\alpha(\chi_n) = x$.

Remarques.

1. Soit S un ensemble simplicial quelconque. A toute application non décroissante $\beta : [m] \to [n]$ (c'est-à-dire à tout élément de $(\Delta_n)_m$) nous pouvons associer une application $f_\beta : S_n \to S_m$ de la manière suivante : soit $x \in S_n$ et soit $\alpha : \Delta_n \to S$ l'unique application simpliciale telle que $\alpha(\chi_n) = x$. Nous posons $f_\beta(x) = \alpha(\beta)$. L'élément $f_\beta(x)$ se notera souvent x_β.

2. Par la Proposition 1.5, il existe une bijection de $(\Delta_n)_m$ sur l'ensemble des applications simpliciales de Δ_m dans Δ_n : à tout $\phi \in (\Delta_n)_m$ on fait correspondre l'application simpliciale $\alpha : \Delta_m \to \Delta_n$ telle que $\alpha(\chi_m) = \phi$. Par la remarque 1, on voit donc qu'à tout ensemble simplicial S et à toute application simpliciale $\alpha : \Delta_m \to \Delta_n$ correspond une application $S_n \to S_m$, que l'on désigne encore par α.

§ 2. PUISSANCES DIVISEES.

Dans ce paragraphe, nous supposerons que le corps K est de caractéristique $p > 2$.

Rappelons d'abord quelques définitions : une *DGA-algèbre* (ou une *algèbre différentielle graduée et augmentée*) sur un corps K est une algèbre graduée associative unitaire A munie d'une différentielle ∂ et d'une augmentation $\varepsilon : A \to K$ vérifiant les axiomes

1. $\partial^2 = 0$
2. $\partial(A_k) \subset A_{k-1}$
3. $\partial(xy) = (\partial x)y + (-1)^{\deg x} x \cdot \partial y$
4. $\varepsilon(1) = 1$ et $\varepsilon(x) = 0$ pour tout x de degré supérieur ou égal à 1
5. $\varepsilon\partial = 0$
6. $\varepsilon(xy) = (\varepsilon x)\cdot(\varepsilon y)$

Etant donné une DGA-algèbre A sur K on appelle *DGA-module sur A* un A-module à gauche M muni

1. de la donnée de sous-K-modules M_k dont M est la somme directe, avec les conditions $M_k = 0$ pour $k<0$ et $A_k M_h \subset M_{k+h}$
2. d'une application K-linéaire $\partial : M \to M$ de degré -1 vérifiant $\partial^2 = 0$ et $\partial(am) = (\partial a)m + (-1)^{\deg a} a\cdot\partial m$
3. d'une augmentation $\eta : M \to K$ telle que $\eta(m) = 0$ pour tout m de degré strictement positif, vérifiant $\eta\partial = 0$ et $\eta(am) = \varepsilon(a)\eta(m)$.

Une Γ-*algèbre*, ou une *algèbre à puissances divisées* est une algèbre graduée associative, commutative et unitaire A sur un corps K de caractéristique $p>2$ avec la donnée d'applications $\gamma^k : A_n \to A_{kn}$ pour tout entier $k \geq 0$ et tout n pair strictement positif. Les γ^k doivent vérifier les six axiomes suivants :

1. $\gamma^o(a) = 1$ et $\gamma^1(a) = a$
2. $\gamma^h(a)\gamma^k(a) = (h,k)\gamma^{h+k}(a)$ ((h,k) désigne l'entier $\dfrac{(h+k)!}{h!k!}$)
3. $\gamma^k(a+b) = \sum\limits_{r+s=k} \gamma^r(a)\gamma^s(b)$
4. $\gamma^k(ab) = 0$ si $k \geq 2$ et si a,b sont de degrés impairs

5. $\gamma^k(ab) = a^k\gamma^k(b)$ si a est de degré pair et b de degré pair > 0
6. $\gamma^k(\gamma^p(x)) = \gamma^{kp}(x)$.

Un *homomorphisme de Γ-algèbres* $f : A \to A'$ est un morphisme d'algèbres graduées commutant aux puissances divisées : $f\gamma^k(a) = \gamma^k f(a)$ pour tout a de degré pair strictement positif.

Etant donné deux Γ-algèbres A et B leur produit tensoriel $A \otimes B$ a une structure naturelle de Γ-algèbre qui prolonge celles de A et de B (cf. [7]) : la structure d'algèbre est donnée par

$$(a \otimes b)\cdot(a' \otimes b') = (-1)^{\deg b \cdot \deg a'}(aa' \otimes bb')$$

et les puissances divisées $\gamma^k_{\boxtimes}$ sont définies dans $A \otimes B$ en utilisant les relations $\gamma^k_{\boxtimes}(a \otimes 1) = \gamma^k(a) \otimes 1$, $\gamma^k_{\boxtimes}(1 \otimes b) = 1 \otimes \gamma^k(b)$, $a \otimes b = (a \otimes 1)\cdot(1 \otimes b)$ ainsi que les axiomes 3,4,5 des puissances divisées.

Une *Γ-algèbre de Hopf* est une Γ-algèbre munie de deux homomorphismes de Γ-algèbres $\Delta : A \to A \otimes A$ (appelée *comultiplication*) et $\varepsilon : A \to K$ tels que Δ est coassociatif et ε est une coünité pour Δ.

<u>Proposition 2.1.</u>

Si M est un K-module simplicial, $S_K(M)$ a une structure naturelle de DGA-algèbre. De plus, pour tout élément $a \in S_K(M)$ de degré strictement positif, $a^p = 0$.

<u>Démonstration.</u>

La graduation de S(M) est donnée par $(S(M))_n = S(M_n)$. Désignons par $S(M) \otimes S(M)$ le module gradué défini par

$$(S(M) \otimes S(M))_n = \sum_{i+j=n} S(M)_i \otimes S(M)_j$$

et par $S(M) \times S(M)$ le module gradué défini par

$$(S(M) \times S(M))_n = S(M)_n \otimes S(M)_n .$$

Soit encore $\nabla : S(M) \otimes S(M) \to S(M) \times S(M)$ l'homomorphisme d'Eilenberg-Mac-Lane ([4], définition XIV.34) et soit $\pi_n : S(M_n) \otimes S(M_n) \to S(M_n)$ le produit habituel de $S(M_n)$. Le produit $\mu : S(M) \otimes S(M) \to S(M)$ se définit comme étant le composé $\mu = \pi\nabla$.

On a $\nabla(b \otimes a) = (-1)^{\deg a \cdot \deg b}\nabla(a \otimes b)$ ([4], lemme XIV.36) et

$\pi(a \otimes b) = \pi(b \otimes a)$, donc $ba = (-1)^{\deg a \cdot \deg b} ab$; μ est donc un produit commutatif.

L'unité $\eta : K \to S(M)$ est induite par l'inclusion $0 \to M$, l'augmentation $\varepsilon : S(M) \to K$ est induite par la projection $M \to 0$ et la différentielle ∂ est induite par les $\varepsilon_n^i : M_n \to M_{n-1}$:

$$\partial_n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^n S(\varepsilon_n^i) : S(M)_n \to S(M)_{n-1}.$$

Comme ∇ est un morphisme de chaînes et comme la multiplication μ est naturelle, on a $\partial(xy) = (\partial x)y + (-1)^{\deg x} x(\partial y)$. Ainsi $S(M)$ a une structure naturelle de DGA-algèbre. Montrons que si $\deg a > 0$, $a^p = 0$.

Si a est de degré impair, on a $a^2 = -a^2$ puisque $S(M)$ est une algèbre commutative. La caractéristique de K étant supérieure à 2, on en déduit $a^2 = 0$, donc $a^p = 0$.

Soit alors x un élément de degré pair strictement positif i. Nous avons $x^k = \sum_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_k) \in S(i|k)} x_{\alpha_1} x_{\alpha_2} \ldots x_{\alpha_k}$, où $S(i|k)$ désigne l'ensemble des k-uples $(\alpha_1,\ldots,\alpha_k)$ d'applications non décroissantes $\alpha_j : [ik] \to [i]$ telles que $\sum_{j=1}^{k} \alpha_j(x) = x$ pour tout $x \in [ik]$, et où x_{α_i} est l'élément défini à la Remarque 1, p.5.

Le groupe des permutations S_k opère dans $S(i|k)$: si $\sigma \in S_k$,

$$\sigma \cdot (\alpha_1,\ldots,\alpha_k) = (\alpha_{\sigma(1)},\ldots,\alpha_{\sigma(k)})$$

et $\sigma \cdot (\alpha_1,\ldots,\alpha_k) \neq (\alpha_1,\ldots,\alpha_k)$ si σ n'est pas l'identité; ainsi l'orbite de $(\alpha_1,\ldots,\alpha_k)$ comprend $k!$ éléments. Notons $S[i|k]$ l'ensemble des orbites. L'algèbre $S(M)$ étant commutative, on a

$$x^k = k! \cdot \sum_{S[i|k]} x_{\alpha_1} \ldots x_{\alpha_k}.$$

En posant encore

$$\gamma^k(x) = \sum_{S[i|k]} x_{\alpha_1} \ldots x_{\alpha_k}$$

on obtient $x^k = k!\gamma^k(x)$, donc $x^p = 0$.

Proposition 2.2.

Si M est un module simplicial sur un corps K de caractéristique $p > 2$, S(M) et H[S(M)] ont une structure naturelle de Γ-algèbre de Hopf commutative et cocommutative.

Démonstration.

Dans la preuve de la proposition précédente nous avons établi l'égalité $x^k = k!\gamma^k(x)$. Montrons que les $\gamma^k : S(M)_{2n} \to S(M)_{2kn}$ définissent des puissances divisées dans S(M).

Par [3], lemme 8, il suffit de le démontrer lorsque $K = \mathbb{Q}$. Or, dans ce cas, le résultat est immédiat puisque $\gamma^k(x) = \frac{x^k}{k!}$. S(M) est donc une Γ-algèbre. Pour que ce soit une Γ-algèbre de Hopf il faut définir une comultiplication $\Delta : S(M) \to S(M) \otimes S(M)$ qui soit un morphisme de Γ-algèbres.

Considérons l'application diagonale $\delta : M \to M \oplus M$ telle que $\delta(x) = (x,x)$ et soit $\phi : S(M \oplus M) \to S(M) \otimes S(M)$ l'isomorphisme naturel d'algèbres défini pour $(x,y) \in M \oplus M$ par $\phi(x,y) = x \otimes 1 + 1 \otimes y$. La comultiplication sera l'application composée $\Delta = \phi S(\delta)$. En particulier, si $x \in M$, $\Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x$.

ϕ et $S(\delta)$ sont des morphismes d'algèbres, donc Δ en est un. On vérifie également que Δ est un morphisme de cogèbres. Ainsi SM, avec la multiplication μ et la comultiplication Δ est une algèbre de Hopf commutative et cocommutative. Montrons que Δ commute aux γ^k, donc que le diagramme suivant est commutatif pour tout n strictement positif :

$$\begin{tikzcd}
(SM)_{2n} \arrow[r, "S\delta"] \arrow[d, "\gamma^k_M"] & S(M \oplus M)_{2n} \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\gamma^k_{M \oplus M}"] & (SM \otimes SM)_{2n} \arrow[d, "\gamma^k_{\otimes}"] \\
(SM)_{2kn} \arrow[r, "S\delta"] & S(M \oplus M)_{2kn} \arrow[r, "\phi"] & (SM \otimes SM)_{2kn}
\end{tikzcd}$$

Comme les γ^k sont naturelles, le carré de gauche commute. Pour montrer que le carré de droite commute, désignons par $\psi : SM \otimes SM \to S(M \oplus M)$ la bijection réciproque de ϕ. Par [6], p. A III. 73, ψ est défini par $\psi(x \otimes y) = v_1(x) \cdot v_2(y)$ où $v_i : SM \to S(M \oplus M)$ est induit par la i^e injection $M \to M \oplus M$. Comme les γ^k sont naturelles, les v_i commutent aux γ^k.

Soit alors x,y deux éléments de degrés pairs avec, par exemple, $\deg y > 0$. Alors $\psi\gamma^k_{\boxtimes}(x\otimes y) = \psi(x^k \otimes \gamma^k(y)) = v_1(x^k)\cdot v_2(\gamma^k(y)) =$
$= v_1(x)^k\cdot\gamma^k(v_2(y)) = \gamma^k(v_1(x)\cdot v_2(y)) = \gamma^k\psi(x\otimes y)$.

Si x et y sont de degrés impairs et si $k\geqslant 2$, $\psi\gamma^k_{\boxtimes}(x\otimes y) = 0$ et $\gamma^k\psi(x\otimes y) = \gamma^k(v_1(x)\cdot v_2(y)) = 0$ par l'axiome 4 des puissances divisées.

Envisageons maintenant le cas général : soit $\sum_{i=1}^n x_i\otimes y_i \in SM\otimes SM$ un élément homogène de degré pair. Alors $\psi\gamma^k_{\boxtimes}\left(\sum_{i=1}^n x_i\otimes y_i\right) =$

$$= \psi\left(\sum_{k_1+\dots+k_n=k}\ \prod_{i=1}^n \gamma^{k_i}_{\boxtimes}(x_i\otimes y_i)\right) = \sum_{k_1+\dots+k_n=k}\ \prod_{i=1}^n \psi\gamma^{k_i}_{\boxtimes}(x_i\otimes y_i) =$$

$$= \sum_{k_1+\dots+k_n=k}\ \prod_{i=1}^n \gamma^{k_i}\psi(x_i\otimes y_i) = \gamma^k\left(\sum_{i=1}^n \psi(x_i\otimes y_i)\right) = \gamma^k\psi\left(\sum_{i=1}^n x_i\otimes y_i\right).$$

Ainsi $\psi\gamma^k_{\boxtimes} = \gamma^k\psi$, d'où $\gamma^k_{\boxtimes}\phi = \phi\gamma^k$, ce qui prouve que SM a une structure naturelle de Γ-algèbre de Hopf.

Montrons que $H[SM]$ est une Γ-algèbre de Hopf. La multiplication et la comultiplication de $H[SM]$ sont définies respectivement comme les composées

$$H[SM]\otimes H[SM] \xrightarrow{\simeq} H[SM\otimes SM] \xrightarrow{H[\mu]} H[SM]$$

$$H[SM] \xrightarrow{H[\Delta]} H[SM\otimes SM] \xrightarrow{\simeq} H[SM]\otimes H[SM]$$

(Ces isomorphismes étant les isomorphismes de Künneth).

Il suffit donc de montrer que les puissances divisées définies dans SM passent à l'homologie, c'est-à-dire que

1. $\partial(\gamma^k(a)) = 0$ si $\partial a = 0$
2. $\gamma^k(a+\partial b) = \gamma^k(a) + \partial b'_k$ si $\partial a = 0$.

Pour démontrer 1 il suffit d'établir que $\partial\gamma^k(x) = \gamma^{k-1}(x)\partial x$.

Par [3], lemme 8, on peut se contenter de vérifier cette relation lorsque $K = \mathbb{Q}$. On a alors $\gamma^k(x) = \frac{x^k}{k!}$ et l'égalité à prouver résulte de la formule $\partial(x^k) = k\cdot x^{k-1}\partial x$.

Pour démontrer 2, il suffit de prouver que $\gamma^k(\partial b) = \partial b'_k$: en effet, si cette dernière égalité est vraie, $\gamma^k(a+\partial b) = \gamma^k(a) + \sum_{\substack{r+s=k\\ s\geqslant 1}} \gamma^r(a)\gamma^s(\partial b) =$

$$= \gamma^k(a) + \sum_{\substack{r+s=k\\ s\geqslant 1}} \partial(\gamma^r(a)b'_s).$$

Par [4], lemme VIII.14 il existe une suite exacte de modules simpliciaux $0 \to F \to E \overset{\pi}{\to} M \to 0$ avec $H_i[E] = 0$ pour $i \neq 0$. On en déduit une suite exacte $0 \to F' \to SE \xrightarrow{S\pi} SM \to 0$. Par [4], Proposition VIII.24, $H_i[SE] = 0$ si $i \neq 0$.

Soit alors $x \in SM_i$ un bord avec i pair, strictement positif : $x = \partial y$. Choisissons $z \in SE_i$ tel que $(S\pi)(z) = y$. Par 1, $\gamma^k(\partial z)$ est un cycle, donc un bord puisque $i > 0$. Ainsi :
$\gamma^k(x) = \gamma^k(\partial y) = \gamma^k(\partial(S\pi)(z)) = \gamma^k(S\pi)(\partial z) = (S\pi)\gamma^k(\partial z)$,
ce qui montre que $\gamma^k(x)$ est un bord.

§ 3. DEMONSTRATION DU THEOREME POUR n = 1.

Il s'agit de démontrer le résultat suivant :

Proposition 3.1.

Soit M un K-module simplicial tel que $H_1[M] = K$ et $H_i[M] = 0$ si $i \neq 1$. Alors $H[SM]$ ne dépend que de $H[M]$ et l'on a

$$H_0[SM] = H_1[SM] = K \quad \text{et} \quad H_i[SM] = 0 \quad \text{si} \quad i \geqslant 2.$$

Démonstration.

Le complexe de Moore $N(M)$ de M vérifie $H_1[N(M)] = K$ et $H_i[N(M)] = 0$ si $i \neq 1$. Par la Proposition 1.2, $N(M)$ est homotope au complexe de chaînes C tel que $C_1 = K$ et $C_i = 0$ pour $i \neq 1$.

Le théorème 1.1 montre alors que le module simplicial M est homotope au module simplicial $\Gamma(C)$, donc $S(M)$ est homotope à $S(\Gamma(C))$ puisque tout foncteur $\underline{M}_K \to \underline{M}_K$ conserve les homotopies simpliciales. Cela montre que $H[SM]$ ne dépend que de $H[M]$, et nous pourrons prendre $M = \Gamma(C)$ pour la suite de la démonstration.

Déterminons d'abord les modules $\Gamma_n(C) = \sum_{r=0}^{n} \sum_{\alpha \in \{n,r\}} (C_r)_\alpha =$

$= \sum_{\alpha_j \in \{n,1\}} K_{\alpha_j}$. Si $n = 0$, il n'y a aucune surjection $[0] \to [1]$, donc $\Gamma_0(C) = 0$. Pour $n \geqslant 1$, il existe exactement n applications surjectives non décroissantes $\alpha_j : [n] \to [1]$, définies par

$$\alpha_j(x) = 0 \text{ si } 0 \leqslant x < j \leqslant n \quad \text{et} \quad \alpha_j(x) = 1 \text{ si } 0 \leqslant j \leqslant x \leqslant n.$$

On a donc, pour tout $n \geqslant 0$, $\Gamma_n(C) = K^n$.

Soit t_j l'élément 1_{α_j} de K_{α_j}. Alors $\Gamma_n(C)$ a pour base $\{t_1, t_2, .., t_n\}$ et l'on voit que les ε_n^i et les σ_n^j sont donnés par

$$\varepsilon_n^i(t_j) = t_{j-1} \quad \text{si} \quad i < j \neq 1$$

$$\varepsilon_n^i(t_j) = t_j \quad \text{si} \quad i \geqslant j \neq n$$

$$\varepsilon_n^i(t_j) = 0 \quad \text{si} \quad 0 = i = j-1 \quad \text{ou si } i = j = n$$

$$\sigma_n^i(t_j) = t_{j+1} \quad \text{si} \quad i < j$$
$$\sigma_n^i(t_j) = t_j \quad \text{si} \quad i \geqslant j.$$

On sait d'autre part ([6], p. A III.75) qu'il existe un isomorphisme canonique $\phi : S(K^n) \to K[T_1,\dots,T_n]$ donné par $\phi(t_i) = T_i$. Le K-module simplicial $S(\Gamma(C))$ est donc défini ainsi :

$$S(\Gamma(C))_n = K[T_1,\dots,T_n] \quad \text{si} \quad n \geqslant 1$$
$$S(\Gamma(C))_0 = K$$

$$\varepsilon_n^i(T_j) = T_{j-1} \quad \text{si} \quad i < j \neq 1$$
$$\varepsilon_n^i(T_j) = T_j \quad \text{si} \quad i \geqslant j \neq n$$
$$\varepsilon_n^0(T_1) = \varepsilon_n^n(T_n) = 0$$

$$\sigma_n^i(T_j) = T_{j+1} \quad \text{si} \quad i < j$$
$$\sigma_n^i(T_j) = T_j \quad \text{si} \quad i \geqslant j$$

$H[S(\Gamma(C))]$ est donc l'homologie du complexe

$$\dots \to K[T_1,\dots,T_n] \xrightarrow{\partial_n} K[T_1,\dots,T_{n-1}] \to \dots \to K[T_1,T_2] \xrightarrow{\partial_2} K[T_1] \xrightarrow{\partial_1} K$$

où $\partial_n = \sum\limits_{i=0}^{n} (-1)^i \varepsilon_n^i$.

Pour $m \geqslant 1$, $\partial_1(T_1^m) = \varepsilon_1^0(T_1^m) - \varepsilon_1^1(T_1^m) = (\varepsilon_1^0(T_1))^m - (\varepsilon_1^1(T_1))^m = 0$

et $\partial_1(1) = \varepsilon_1^0(1) - \varepsilon_1^1(1) = 1 - 1 = 0$. Donc ∂_1 est l'application nulle,

d'où :
$$H_0[SM] \cong H_0[S(\Gamma(C))] \cong K.$$

(Notons que ce résultat est un cas particulier de la Proposition 4.1).

En dimension 2, et pour $k \neq 0$, nous avons $\varepsilon_2^0(T_1^k) = 0$, $\varepsilon_2^1(T_1^k) = T_1^k$ et $\varepsilon_2^2(T_1^k) = T_1^k$, donc $\partial_2(T_1^k) = 0$. De même, $\partial_2(T_2^k) = 0$ si $k \neq 0$, $\partial_2(T_1^{k_1}T_2^{k_2}) = -T_1^{k_1+k_2}$ si $k_1k_2 \neq 0$ et $\partial_2(1) = 1$.

L'image de ∂_2 est donc engendrée par tous les monômes de $K[T_1]$ de degré différent de 1. Ainsi :

$$H_1[SM] \cong H_1[S(\Gamma(C))] \cong K[T_1]/\mathrm{Im}\,\partial_2 \cong K$$

Il reste à prouver que $H_n[S(\Gamma(C))] = 0$ si $n \geqslant 2$. Pour ce faire nous utiliserons la Proposition 1.3 : puisque $\sigma_n^i(T_1^{k_1}\dots T_n^{k_n}) = T_1^{k_1}\dots T_i^{k_i}T_{i+2}^{k_{i+1}}\dots T_{n+1}^{k_n}$ nous voyons que $D(K[T_1,\dots,T_n])$ est engendré par les monômes du type $T_1^{k_1}\dots T_n^{k_n}$ avec au moins un k_i nul. Si l'on pose

$\tilde{K}_n = K[T_1,\dots,T_n]/D(K[T_1,\dots,T_n])$ il en résulte que $\tilde{K}_n$ est engendré par les monômes de la forme $T_1^{k_1}\dots T_n^{k_n}$ avec tous les k_i non nuls. La différentielle de $\tilde{K}$ est donnée par

$$\partial_1 = 0$$

$$\partial_n(T_1^{k_1}\dots T_n^{k_n}) = \sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i T_1^{k_1}\dots T_{i-1}^{k_{i-1}} T_i^{k_i+k_{i+1}} T_{i+1}^{k_{i+2}}\dots T_{n-1}^{k_n} \qquad \text{si } n > 1.$$

Nous pouvons décomposer $\tilde{K}_n$ en $C_{n-1} \oplus D_n$, où :

C_{n-1} est engendré par tous les monômes $T_1^{k_1}\dots T_{n-1}^{k_{n-1}}T_n$ si $n-1 \geqslant 0$ et $C_{-1}=0$

D_n est engendré par les monômes $T_1^{k_1}\dots T_{n-1}^{k_{n-1}}T_n^{k_n}$ avec $k_n \geqslant 2$ si $n \geqslant 1$ et $D_o = K$.

Nous définissons encore trois applications

$$d^1_{n-1} : C_{n-1} \to C_{n-2},\quad d^2_n : D_n \to D_{n-1} \quad \text{et} \quad \phi_{n-1} : C_{n-1} \to D_{n-1}$$

par les égalités suivantes :

$$d^1_1 = 0$$

$$d^1_{n-1}(T_1^{k_1}\dots T_{n-1}^{k_{n-1}}T_n) = \sum_{i=1}^{n-2}(-1)^i T_1^{k_1}\dots T_{i-1}^{k_{i-1}} T_i^{k_i+k_{i+1}} T_{i+1}^{k_{i+2}}\dots T_{n-2}^{k_{n-1}} T_{n-1} \qquad (n \geqslant 2)$$

$$d^2_n = \partial_n|_{D_n}$$

$$\phi_o = 0$$

$$\phi_{n-1}(T_1^{k_1}\dots T_{n-1}^{k_{n-1}}T_n) = T_1^{k_1}\dots T_{n-2}^{k_{n-2}} T_{n-1}^{k_{n-1}+1} \qquad \text{si } n \geqslant 2.$$

On constate alors que la différentielle $\partial_n : C_{n-1} \oplus D_n \to C_{n-2} \oplus D_{n-1}$ se décompose en

$$\partial_n = \begin{pmatrix} d^1_{n-1} & 0 \\ (-1)^{n-1}\phi_{n-1} & d^2_n \end{pmatrix}$$

La condition $\partial_n \partial_{n+1} = 0$ implique

$$\begin{pmatrix} d^1_{n-1} & 0 \\ (-1)^{n-1}\phi_{n-1} & d^2_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d^1_n & 0 \\ (-1)^n\phi_n & d^2_{n+1} \end{pmatrix} = (\ 0\ )$$

ou encore :

$d^1_{n-1} d^1_n = 0$: $(C; d^1)$ est un complexe de chaînes

$d^2_n d^2_{n+1} = 0$: $(D; d^2)$ est un complexe de chaînes

$\phi_{n-1} d^1_n = d^2_n \phi_n$: $\phi : C \to D$ est un morphisme de chaînes.

En d'autres termes, $\tilde{K}$ est le "mapping cone" de $\phi : C \to D$. On en déduit une suite exacte

$$\dots \to H_n[C] \xrightarrow{H_n[\phi]} H_n[D] \to H_n[\tilde{K}] \to H_{n-1}[C] \xrightarrow{H_{n-1}[\phi]} H_{n-1}[D] \to \dots$$

Comme ϕ_n est un isomorphisme pour $n \geqslant 1$, on a $H_n[\tilde{K}] = 0$ pour $n \geqslant 2$ donc, par la Proposition 1.3,

$$H_n[SM] \cong H_n[S(\Gamma(C))] \cong H_n[\tilde{K}] = 0 \text{ si } n \geqslant 2.$$

§ 4. THEORIE SIMPLICIALE.

Pour démontrer le théorème principal il est essentiel de pouvoir associer à une suite exacte $0 \to F \to E \xrightarrow{\phi} B \to 0$ de K-modules simpliciaux une construction naturelle (ce terme sera défini plus loin) faisant appel à un module bisimplicial $|\phi|$. L'homologie de $|\phi|$ est la même que celle de SE et son homologie pour la première différentielle se décompose en $H'[|\phi|] = H[SF] \otimes \overline{SB}$, où $\overline{SB}$ est tel que $H[\overline{SB}] \cong H[SB]$.

Pour établir ce dernier isomorphisme nous utiliserons un module bisimplicial $|SB|$.

Ce paragraphe (très technique et quelque peu rébarbatif) sera consacré principalement à l'étude de ces différents modules et de leurs propriétés. Nous allons tout d'abord calculer $H_0[SM]$.

Proposition 4.1.

Pour tout module simplicial M, il existe un isomorphisme naturel d'algèbres $H_0[SM] = S(H_0[M])$.

Démonstration.

$H_0[SM]$ et $H_0[M]$ sont définis par les suites exactes

$$M_1 \xrightarrow{\varepsilon_1^0 - \varepsilon_1^1} M_0 \xrightarrow{\pi} H_0[M] \to 0$$

$$SM_1 \xrightarrow{S\varepsilon_1^0 - S\varepsilon_1^1} SM_0 \xrightarrow{p} H_0[SM] \to 0$$

Comme $\varepsilon_1^0 - \varepsilon_1^1$ et $S\varepsilon_1^0 - S\varepsilon_1^1$ coïncident sur M_1, on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
M_1 \arrow[r, "\varepsilon_1^0 - \varepsilon_1^1"] \arrow[d, "i'"] & M_0 \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "i"] & H_0[M] \arrow[r] \arrow[d, "\bar{\phi}"] & 0 \\
SM_1 \arrow[r, "S\varepsilon_1^0 - S\varepsilon_1^1"] & SM_0 \arrow[r, "p"] & H_0[SM] \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

La propriété universelle du foncteur S permet de former un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} H_o[M] \arrow[r, "\bar{\phi}"] \arrow[d, "j"'] & H_o[SM] \\ S(H_o[M]) \arrow[ur, "\phi"'] & \end{tikzcd}$$

La relation $\pi\varepsilon_1^o = \pi\varepsilon_1^1$ implique $(S\pi)o(S\varepsilon_1^o - S\varepsilon_1^1) = 0$, donc p se factorise à travers $S(H_o[M])$: il existe un unique homomorphisme d'algèbres ψ rendant commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd} SM_1 \arrow[r, "S\varepsilon_1^o - S\varepsilon_1^1"] & SM_o \arrow[r, "p"] \arrow[dr, "S\pi"'] & H_o[SM] \arrow[r] \arrow[d, "\psi"] & 0 \\ & & S(H_o[M]) & \end{tikzcd}$$

Mais $(S\pi)oi = jo\pi$ (cf. par exemple [6], Proposition A III. 6.3) donc $\phi\psi pi = \phi(S\pi)i = \phi j\pi = \bar{\phi}\pi = pi$, ce qui montre que les homomorphismes d'algèbres $\phi\psi p$ et p coïncident sur M_o. Comme M_o engendre SM_o en tant qu'algèbre, on a $\phi\psi p = p$, d'où $\phi\psi = Id$ puisque p est surjective.

De même $\psi\phi j\pi = \psi\bar{\phi}\pi = \psi pi = (S\pi)i = j\pi$, donc $\psi\phi j = j$ puisque π est surjective, et $\psi\phi = Id$ puisque l'algèbre $S(H_o[M])$ est engendrée par $H_o[M]$. Cela établit le résultat.

Le module simplicial $\bar{E}$.

Soit E un module simplicial. A tout entier $n \geq 0$ nous associons un module $\bar{E}_n$ de la manière suivante :

$$\bar{E}_o = \sum_{i_o \in \mathbb{N}} E_{i_o} \qquad \text{et} \qquad \bar{E}_n = \sum_{\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}} E_{i_o} \quad \text{si } n > 0$$

où la somme est prise sur tous les ensembles $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}$ d'applications simpliciales

$$\Delta_{i_n} \xrightarrow{\alpha_n} \Delta_{i_{n-1}} \xrightarrow{\alpha_{n-1}} \cdots \; \Delta_{i_1} \xrightarrow{\alpha_1} \Delta_{i_o}$$

Nous allons définir sur $\bar{E}$ une structure simpliciale. Pour cela, donnons une autre interprétation de $\bar{E}_n$: un élément $e \in E_{i_o}$ situé dans la composante $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}$ (ou dans la composante i_o si $n = 0$) de la somme directe peut être considéré comme un ensemble $\{\alpha_o,\alpha_1,\dots,\alpha_n\}$ d'applications simpliciales où $\alpha_o : \Delta_{i_o} \to E$ est l'unique application simpliciale telle que $\alpha_o(\chi_{i_o})=e$ (Proposition 1.5). Réciproquement, à tout ensemble $\{\alpha_o,\alpha_1,\dots,\alpha_n\}$ d'applications simpliciales $\Delta_{i_n} \xrightarrow{\alpha_n} \Delta_{i_{n-1}} \to \dots \to \Delta_{i_o} \xrightarrow{\alpha_o} E$ correspond l'élément $\alpha_o(\chi_{i_o}) \in E_{i_o}$ situé dans la composante $\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}$ (ou dans la composante i_o si $n = 0$) de la somme directe. Nous définissons

$$\varepsilon_n^j\{\alpha_o,\alpha_1,\dots,\alpha_n\} = \{\alpha_o,\dots,\alpha_j\alpha_{j+1},\dots,\alpha_n\} \text{ si } 0 \leqslant j < n$$

$$\varepsilon_n^n\{\alpha_o,\alpha_1,\dots,\alpha_n\} = \{\alpha_o,\alpha_1,\dots,\alpha_{n-1}\}.$$

Vérifions que, pour $\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}$ fixé, ε_n^j est K-linéaire : si $j > 0$, c'est immédiat puisqu'alors un élément $e = \alpha_o(\chi_{i_o})$ de la composante $\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}$ a pour image le même élément d'une autre composante. Si $j = 0$, l'égalité $\{\alpha_o,\alpha_1,\dots,\alpha_n\} + \{\alpha'_o,\alpha_1,\dots,\alpha_n\} = \{\alpha_o+\alpha'_o,\alpha_1,\dots,\alpha_n\}$ montre que

$$\varepsilon_n^o(\{\alpha_o,\alpha_1,\dots,\alpha_n\} + \{\alpha'_o,\alpha_1,\dots,\alpha_n\}) = \varepsilon_n^o\{\alpha_o,\alpha_1,\dots,\alpha_n\} + \varepsilon_n^o\{\alpha'_o,\alpha_1,\dots,\alpha_n\}.$$

L'égalité $\varepsilon_n^o(\lambda x) = \lambda\varepsilon_n^o(x)$ se vérifie de manière semblable.

Définissons encore

$$\sigma_n^j\{\alpha_o,\dots,\alpha_n\} = \{\alpha_o,\dots,\alpha_j,\mathrm{Id},\alpha_{j+1},\dots,\alpha_n\} \quad \text{pour } 0 \leqslant j \leqslant n.$$

Des calculs standards (semblables à ceux de la "bar resolution" pour les groupes, cf. par exemple [10], Chap. IV, § 5) montrent que ces définitions font de $\bar{E}$ un module simplicial.

Lemme 4.2.

Soit E un module simplicial. Il existe un isomorphisme naturel

$$H[\bar{E}] \cong H[E].$$

Démonstration.

Pour démontrer ce résultat nous ferons appel à un module bisimplicial $|E|$ qui vérifie

$$H'_{m,n}[|E|] = 0 \text{ si } m \neq 0 \qquad H''_{m,n}[|E|] = 0 \text{ si } n \neq 0$$

$$H'_{o,n}[|E|] \cong \bar{E}_n \qquad H''_{m,o}[|E|] \cong E_m$$

ces isomorphismes étant compatibles avec les différentielles de $H'_{o,*}[|E|]$ et $\bar{E}$ d'une part, et les différentielles de $H''_{*,o}[|E|]$ et E d'autre part. Si l'on définit

$$\hat{H}'_{p,q}[|E|] = H_q[H'_{p,*}[|E|]] \text{ et } \hat{H}''_{p,q}[|E|] = H_p[H''_{*,q}[|E|]]$$

on obtient

$$\hat{H}'_{p,q}[|E|] = 0 \quad \text{si} \quad p \neq 0$$

$$\hat{H}'_{o,q}[|E|] \cong H_q[\bar{E}]$$

$$\hat{H}''_{p,q}[|E|] = 0 \quad \text{si} \quad q \neq 0$$

$$\hat{H}''_{p,o}[|E|] \cong H_p[E].$$

On conclut en appliquant par exemple [4], Corollaire II.37 et Lemme II.38.

Il reste donc à définir $|E|$ et à établir les isomorphismes annoncés.

<u>Le module bisimplicial $|E|$.</u>

Le module $|E|_{m,n}$ est défini ainsi :

$$|E|_{m,n} = \sum_{\{\alpha_1,\ldots,\alpha_{n+1}\}} E_{i_o}$$

où la somme est prise sur tous les ensembles $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_{n+1}\}$ d'applications simpliciales $\Delta_m \xrightarrow{\alpha_{n+1}} \Delta_{i_n} \xrightarrow{\alpha_n} \Delta_{i_{n-1}} \rightarrow \cdots \xrightarrow{\alpha_1} \Delta_{i_o}$

Si, comme précédemment, nous assimilons un élément $e \in E_{i_o}$ de la composante $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_{n+1}\}$ au $(n+2)$-uple $\{\alpha_o,\alpha_1,\ldots,\alpha_{n+1}\}$ avec $\alpha_o : \Delta_{i_o} \rightarrow E$ tel que $\alpha_o(\chi_{i_o}) = e$, nous pouvons définir les faces et les dégénérescences de la manière suivante :

$$\varepsilon'^{i}_{m}\{\alpha_o,\ldots,\alpha_n,\alpha_{n+1}\} = \{\alpha_o,\ldots,\alpha_n,\alpha_{n+1}e^{i}_{m}\} \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant i \leqslant m$$

$$\varepsilon''^{j}_{n}\{\alpha_o,\ldots,\alpha_n,\alpha_{n+1}\} = \{\alpha_o,\ldots,\alpha_j\alpha_{j+1},\ldots,\alpha_{n+1}\} \quad \text{pour } 0 \leqslant j \leqslant n$$

$$\sigma'^{i}_{m}\{\alpha_0,\ldots,\alpha_n,\alpha_{n+1}\} = \{\alpha_0,\ldots,\alpha_n,\alpha_{n+1}s^i_m\} \quad \text{pour } 0 \leqslant i \leqslant m$$

$$\sigma''^{j}_{n}\{\alpha_0,\ldots,\alpha_n,\alpha_{n+1}\} = \{\alpha_0,\ldots,\alpha_j,\mathrm{Id},\alpha_{j+1},\ldots,\alpha_{n+1}\} \quad \text{pour } 0 \leqslant j \leqslant n$$

où les applications e^i_m, s^i_m sont définies au paragraphe 1.

Lemme 4.3.

$$H'_{m,n}[|E|] = 0 \quad \text{si} \quad m \neq 0$$

$$H'_{o,n}[|E|] \simeq \bar{E}_n$$

De plus le second isomorphisme est compatible avec les opérateurs bords de $H'_{0,*}[|E|]$ et de $\bar{E}$.

Démonstration.

Etablissons d'abord l'isomorphisme

$$|E|_{m,n} = \sum_{i_o,\ldots,i_n} (\bar{\Delta}_{i_n})_m \otimes (\bar{\Delta}_{i_{n-1}})_{i_n} \otimes \ldots \otimes (\bar{\Delta}_{i_o})_{i_1} \otimes E_{i_o} .$$

Comme $(\Delta_j)_r = \mathrm{Hom}(\Delta_r,\Delta_j)$, nous avons $(\bar{\Delta}_j)_r = \sum_{\Delta_r \to \Delta_j} K$, donc

$$\sum_{i_o,\ldots,i_n} (\bar{\Delta}_{i_n})_m \otimes \ldots \otimes (\bar{\Delta}_{i_o})_{i_1} \otimes E_{i_o} \cong$$

$$\sum_{i_o,\ldots,i_n} \Big[\Big(\sum_{\Delta_m \to \Delta_{i_n}} K\Big) \otimes \ldots \otimes \Big(\sum_{\Delta_{i_1} \to \Delta_{i_o}} K\Big) \otimes E_{i_o}\Big] \cong$$

$$\sum_{i_o,\ldots,i_n} \Big[\Big(\sum_{\Delta_m \to \Delta_{i_n} \to \ldots \to \Delta_{i_o}} K\Big) \otimes E_{i_o} \cong \sum_{\Delta_m \to \ldots \to \Delta_{i_o}} E_{i_o} = |E|_{m,n}$$

Ainsi $H'_{m,n}[|E|] \cong \sum_{i_o,\ldots,i_n} H_m[\bar{\Delta}_{i_n}] \otimes (\bar{\Delta}_{i_{n-1}})_{i_n} \otimes \ldots \otimes (\bar{\Delta}_{i_o})_{i_1} \otimes E_{i_o}$

d'où, par la Proposition 1.4 : $H'_{m,n}[|E|] = 0$ si $m \neq 0$ et

$$H'_{o,n}[|E|] = \sum_{i_o,\ldots,i_n} (\Delta_{i_{n-1}})_{i_n} \otimes \ldots \otimes (\bar{\Delta}_{i_o})_{i_1} \otimes E_{i_o} = \bar{E}_n$$

Montrons que l'isomorphisme est compatible avec les opérateurs bords : il est facile de vérifier que l'application $\psi_n : |E|_{o,n} \to \bar{E}_n$ définie par $\psi_n\{\alpha_o,\dots,\alpha_n,\alpha_{n+1}\} = \{\alpha_o,\dots,\alpha_n\}$ rend commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd} |E|_{o,n} \arrow[r, "\psi_n"] \arrow[d, "\varepsilon''^j_n"'] & \bar{E}_n \arrow[d, "\varepsilon^j_n"'] \\ |E|_{o,n-1} \arrow[r, "\psi_{n-1}"] & \bar{E}_{n-1} \end{tikzcd}$$

De plus, $\psi_n \varepsilon'^o_1 = \psi_n \varepsilon'^1_1$ donc, si ∂' représente la première différentielle de $|E|$, $\psi\partial' = 0$, et ψ_n se factorise à travers $H'_{o,n}[|E|]$: on obtient un nouveau diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} H'_{o,n}[|E|] \arrow[r, "\tilde{\psi}_n"] \arrow[d, "{H'[\varepsilon''^j_n]}"'] & \bar{E}_n \arrow[d, "\varepsilon^j_n"] \\ H'_{o,n-1}[|E|] \arrow[r, "\tilde{\psi}_{n-1}"] & \bar{E}_{n-1} \end{tikzcd}$$

ce qui établit le lemme, puisque $\tilde{\psi}$ est l'isomorphisme du lemme.

Lemme 4.4.

$H''_{m,n}[|E|] = 0$ si $n \neq 0$

$H''_{m,o}[|E|] \cong E_m$.

De plus, le second isomorphisme est compatible avec les opérateurs bords de $H''_{*,o}[|E|]$ et de E.

Démonstration.

Pour établir l'isomorphisme, nous définirons une augmentation $\partial''_o : |E|_{m,o} \to E_m = |E|_{m,-1}$ et une homotopie de l'identité de $|E|_{m,*}$ vers l'application nulle de $|E|_{m,*}$.

Nous posons $\partial''_o\{\alpha_o,\alpha_1\} = \alpha_o\alpha_1(\chi_m)$.

∂''_o est K-linéaire et $\partial''_o\varepsilon''^o_1 = \partial''_o\varepsilon''^1_1$, donc ∂''_o définit bien une augmentation.

Pour $n \geqslant -1$ nous définissons $t''_n : |E|_{m,n} \longrightarrow |E|_{m,n+1}$ par

$t''_n\{\alpha_o,\ldots,\alpha_{n+1}\} = (-1)^{n+1}\{\alpha_o,\ldots,\alpha_{n+1},\mathrm{Id}\}$ (pour $n = -1$ nous avons identifié $e \in E_m$ à l'application simpliciale $\alpha_o : \Delta_m \to E$ telle que $\alpha_o(\chi_m) = e$).

Des calculs simples montrent que

$$\varepsilon''^{j}_{n+1}t''_n\{\alpha_o,\ldots,\alpha_{n+1}\} = (-1)^{n+1}\{\alpha_o,\ldots,\alpha_j\alpha_{j+1},\ldots,\alpha_{n+1},\mathrm{Id}\} \quad \text{si } j \leqslant n$$

$$\varepsilon''^{n+1}_{n+1}t''_n\{\alpha_o,\ldots,\alpha_{n+1}\} = (-1)^{n+1}\{\alpha_o,\ldots,\alpha_{n+1}\}$$

$$t''_{n-1}\varepsilon''^{j}_{n}\{\alpha_o,\ldots,\alpha_{n+1}\} = (-1)^{n}\{\alpha_o,\ldots,\alpha_j\alpha_{j+1},\ldots,\alpha_{n+1},\mathrm{Id}\} \quad \text{si } j \leqslant n$$

Ainsi :
$$\varepsilon''^{j}_{n+1}t''_n + t''_{n-1}\varepsilon''^{j}_{n} = 0 \quad \text{si } j \leqslant n$$

$$(-1)^{n+1}\varepsilon''^{n+1}_{n+1}t''_n = \mathrm{Id}.$$

Il en résulte
$$\sum_{j=0}^{n+1}(-1)^j\varepsilon''^{j}_{n+1}t''_n + \sum_{j=0}^{n}(-1)^j t''_{n-1}\varepsilon''^{j}_{n} = (-1)^{n+1}\varepsilon''^{n+1}_{n+1}t''_n$$

ou encore : $\partial''_{n+1}t''_n + t''_{n-1}\partial''_n = \mathrm{Id}$ si $n \geqslant 0$.

De plus $\partial''_o t''_{-1}\{\alpha_o\} = \partial''_o\{\alpha_o,\mathrm{Id}\} = \alpha_o$, donc $\partial''_o t''_{-1} = \mathrm{Id}$,

ce qui établit l'isomorphisme.

Montrons que l'isomorphisme $\eta : H''_{*,o}[|E|] \to E$ est compatible avec les opérateurs bords. Pour cela nous considérons le diagramme

$$\begin{tikzcd}
|E|_{m,o} \arrow[rr, "\partial''_o"] \arrow[dr] \arrow[ddd, "\varepsilon'^{i}_{m}"'] & & E_m \arrow[ddd, "\varepsilon^{i}_{m}"] \\
 & H''_{m,o}[|E|] \arrow[ur, "\eta"'] \arrow[d, "{H''[\varepsilon'^{i}_{m}]}"] \arrow[u, phantom, "(1)"] & \\
 & H''_{m-1,o}[|E|] \arrow[dr, "\eta"] \arrow[d, phantom, "(2)"] \arrow[l, phantom, "(3)"] \arrow[r, phantom, "(4)"] & \\
|E|_{m-1,o} \arrow[rr, "\partial''_o"'] \arrow[ur] & & E_{m-1}
\end{tikzcd}$$

Les triangles (1) et (2) commutent par construction même de η, le carré (3) commute car $|E|$ est un module bisimplicial et le carré extérieur commute car $\varepsilon^{i}_{m}\partial''_{o}\{\alpha_o,\alpha_1\} = \alpha_o\alpha_1 e^{i}_{m}(\chi_m) = \partial''_{o}\varepsilon'^{i}_{m}\{\alpha_o,\alpha_1\}$. Ainsi le carré (4) commute, ce qui établit notre assertion.

Le module bisimplicial $|\phi|$.

Nous considérons dès maintenant une suite exacte de modules simpliciaux

$$0 \to F \to E \xrightarrow{\phi} B \to 0$$

Le module $|\phi|_{m,n}$ est défini ainsi :

$$|\phi|_{m,n} = \sum_{\{\alpha_1,\dots,\alpha_{n+1}\}} S(E_m \times_{B_m} B_{i_o})$$

où la somme est prise sur tous les ensembles $\{\alpha_1,\dots,\alpha_{n+1}\}$ d'applications simpliciales $\Delta_m \xrightarrow{\alpha_{n+1}} \Delta_{i_n} \to \dots \xrightarrow{\alpha_1} \Delta_{i_o}$ et où le produit fibré $E_m \times_{B_m} B_{i_o}$ situé dans la composante $\{\alpha_1,\dots,\alpha_{n+1}\}$ est défini par le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
E_m \times_{B_m} B_{i_o} \arrow[rrr] \arrow[d] & & & E_m \arrow[d, "\phi_m"] \\
B_{i_o} \arrow[r, "\alpha_1"] & B_{i_1} \arrow[r] & \dots \arrow[r] B_{i_n} \arrow[r, "\alpha_{n+1}"] & B_m
\end{tikzcd}$$

(Nous utilisons la remarque 2 du paragraphe 1 qui nous permet de désigner par la même lettre une application simpliciale $\Delta_r \to \Delta_m$ et une application $B_m \to B_r$).

Notons que si $e \in E_m$ est représenté par l'application simpliciale $\beta : \Delta_m \to E$ et $b \in B_{i_o}$ par $\alpha_o : \Delta_{i_o} \to B$, l'élément (e,b) de la composante $\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}$ appartient au produit fibré si

$$\phi\beta = \alpha_o\alpha_1\cdots\alpha_n\alpha_{n+1}$$

Nous allons définir les faces et les dégénérescences dans $|\phi|$ de la manière suivante : nous définissons ces applications sur les éléments de

$E_m \times_{B_m} B_{i_o}$ situés dans une composante fixée $\{\alpha_1,\dots,\alpha_{n+1}\}$ de la somme directe, nous les prolongeons en des morphismes $S(E_m \times_{B_m} B_{i_o}) \to |\phi|$ en utilisant la propriété universelle de S puis, en utilisant la propriété universelle des sommes directes, nous les prolongeons encore en des morphismes de modules $|\phi| \to |\phi|$. De l'unicité de ces prolongements successifs il résulte que seul le premier pas devra être traité explicitement.

Plaçons-nous une fois pour toutes dans la composante $\{\alpha_1,\dots,\alpha_{n+1}\}$ de la somme directe. Nous définissons $\varepsilon'^{\,i}_{m,n}(e,b) = (\varepsilon^i_m(e),b)$, cet élément se trouvant dans la composante $\{\alpha_1,\dots,\alpha_n,\alpha_{n+1}e^i_m\}$ de la somme directe. Pour définir $\varepsilon''^{\,j}_{m,n}$ nous envisageons deux cas : si $j > 0$, le facteur $E_m \times_{B_m} B_{i_o}$ est envoyé par l'identité sur le facteur $E_m \times_{B_m} B_{i_o}$ situé dans la composante $\{\alpha_1,\dots,\alpha_j\alpha_{j+1},\dots,\alpha_{n+1}\}$. Si $j=0$, l'application

$\varepsilon''^{\,o}_{m,n} : E_m \times_{B_m} B_{i_o} \to E_m \times_{B_m} B_{i_1}$ est définie par $\varepsilon''^{\,o}_{m,n}(e,b) = (e,\alpha_1(b))$, cet élément étant dans la composante $\{\alpha_2,\dots,\alpha_{n+1}\}$. L'application

$\sigma'^{\,i}_{m,n} : E_m \times_{B_m} B_{i_o} \to E_{m+1} \times_{B_{m+1}} B_{i_o}$ est définie par $\sigma'^{\,i}_{m,n}(e,b) = (\sigma^i_m(e),b)$, l'image étant située dans la composante $\{\alpha_1,\dots,\alpha_n,\alpha_{n+1}s^i_m\}$. Enfin, l'application $\sigma''^{\,j}_{m,n}$ envoie $E_m \times_{B_m} B_{i_o}$ par l'identité sur le facteur $E_m \times_{B_m} B_{i_o}$ situé dans la composante $\{\alpha_1,\dots,\alpha_j,\mathrm{Id},\alpha_{j+1},\dots,\alpha_{n+1}\}$.

Remarques.

1. Soit α_o un sommet fixé de $(\Delta_i)_o$. Il est facile de vérifier que $\varepsilon^i_n\sigma^{n-1}_{n-1}\dots\sigma^o_o(\alpha_o) = \sigma^{n-2}_{n-2}\dots\sigma^o_o(\alpha_o)$ et $\sigma^j_n\sigma^{n-1}_{n-1}\dots\sigma^o_o = \sigma^n_n\sigma^{n-1}_{n-1}\dots\sigma^o_o(\alpha_o)$. Ainsi, α_o engendre un sous-complexe simplicial de Δ_i qui a exactement un simplexe $\sigma^{n-1}_{n-1}\dots\sigma^o_o(\alpha_o)$ en chaque dimension. Par abus de notation, α_o désignera indifféremment ce sous-complexe ou l'un quelconque de ses simplexes.

2. Soit M, N deux modules simpliciaux. Nous désignerons par $M \times N$ le module simplicial suivant : $(M \times N)_i = M_i \otimes N_i$, $\varepsilon^j_i(x \otimes y) = \varepsilon^j_i(x) \otimes \varepsilon^j_i(y)$ et

$\sigma_i^j(x\otimes y) = \sigma_i^j(x)\otimes\sigma_i^j(y)$. Nous avons alors le résultat suivant :

Lemme 4.5.

Soit M un module simplicial et α_o un sommet de $(\Delta_i)_o$. Alors les applications linéaires $f_n : M_n \to (\bar{\Delta}_i)_n \otimes M_n$ telles que $f_n(x) = \alpha_o \otimes x$ définissent une application simpliciale $f : M \to \bar{\Delta}_i \times M$ qui induit un isomorphisme

$$H[f] : H[M] \to H[\bar{\Delta}_i \otimes M] \cong H[\textstyle\sum_{\Delta\to\Delta_i} M].$$

Démonstration.

Il est clair que f est une application simpliciale. Désignons par $g : \bar{\Delta}_i \times M \to \bar{\Delta}_i \otimes M$ l'application d'Alexander-Whitney (cf. [10], théorème VIII.8.5). On a $g(\alpha_o \otimes x) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_o \otimes \varepsilon^o_{n-i+1} \cdots \varepsilon^o_n(x)$ pour $\alpha_o \otimes x \in (\bar{\Delta}_i)_n \otimes M_n$.

Alors l'application composée

$$M \xrightarrow{f} \bar{\Delta}_i \times M \xrightarrow{g} \bar{\Delta}_i \otimes M \xrightarrow{\pi} M$$

est l'identité. De plus, g et π induisent des isomorphismes en homologie puisque $\bar{\Delta}_i$ est acyclique. Ainsi $H[f]$ est un isomorphisme.

Lemme 4.6.

Soit $\alpha : \Delta_m \to \Delta_{i_o}$ une application simpliciale à laquelle nous associons le produit fibré $E_m \times_{B_m} B_{i_o}$, et soit $s_{i_o} : B_{i_o} \to E_{i_o}$ un relèvement de ϕ_{i_o}. Alors l'application $\gamma_{\alpha,s_{i_o}} : F_m \oplus B_{i_o} \to E_m \times_{B_m} B_{i_o}$ définie par $\gamma_{\alpha,s_{i_o}}(f,b) = (f+\alpha s_{i_o}(b),b)$ est un isomorphisme de modules. De plus,

$$(\varepsilon_m^i \times Id) \circ \gamma_{\alpha,s_{i_o}} = \gamma_{\varepsilon^i\alpha,s_{i_o}} \circ (\varepsilon_m^i \oplus Id) \qquad \text{et}$$

$$(\sigma_m^j \times Id) \circ \gamma_{\alpha,s_{i_o}} = \gamma_{\sigma^j\alpha,s_{i_o}} \circ (\sigma_m^j \oplus Id).$$

Démonstration.

Il est clair que $\gamma_{\alpha,s_{i_o}}$ est K-linéaire et qu'elle admet pour inverse l'application $\gamma^{-1}_{\alpha,s_{i_o}}$ définie par $\gamma^{-1}_{\alpha,s_{i_o}}(e,b) = (e - \alpha s_{i_o}(b), b)$. De plus :

$(\varepsilon^i_m \times Id)(\gamma_{\alpha,s_{i_o}}(f,b)) = (\varepsilon^i_m \times Id)(f + \alpha s_{i_o}(b),b) = (\varepsilon^i_m(f) + (\varepsilon^i_m\alpha)s_{i_o}(b), b) =$

$= \gamma_{\varepsilon^i_m\alpha,s_{i_o}}((\varepsilon^i_m \oplus Id)(f,b))$. L'autre égalité se démontre semblablement.

Remarque.

Puisque l'application γ commute aux ε', le lemme 4.6 fournit un isomorphisme

$$\tilde{\gamma}_{m,s_{i_o}} : H'_{m,n}\left[\sum_{\Delta\to\Delta_{i_n}\to\ldots\to\Delta_{i_o}} S(F\oplus B_{i_o})\right] \longrightarrow H'_{m,n}[|\phi|]$$

Nous allons prouver que $\tilde{\gamma}$ est naturelle, en montrant d'abord que $\tilde{\gamma}_{m,s_{i_o}}$ ne dépend pas du relèvement choisi pour ϕ_{i_o}. Pour cela nous allégerons un peu les notations : soit $\tau : \Delta_i \to \Delta_j$ une application simpliciale fixée. Il s'agit de prouver le résultat suivant :

Lemme 4.7.

L'isomorphisme $\tilde{\gamma}_{m,r} : H'_m[\sum_{\Delta\to\Delta_i} S(F\oplus B_j)] \to H'_m[\sum_{\Delta\to\Delta_i} S(E \times_B B_j)]$ défini par $\tilde{\gamma}_{m,r}([(f,b)_\alpha]) = [(f + \alpha\tau rb,b)_\alpha]$ est indépendant du relèvement r de ϕ_j si $H_o[B] = H_o[E] = H_1[B] = 0$.

Démonstration.

Soit $\gamma_{m,r}$ l'application définie par $\gamma_{m,r}((f,b)_\alpha) = (f+\alpha\tau rb,b)$, et soit r, s deux relèvements de ϕ_j. Si l'on pose $\eta = \gamma^{-1}_{m,s}\circ\gamma_{m,r}$, il s'agit de démontrer que $H'_m[\eta] = Id$.

Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} S(F\oplus B_j) \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "f"] & S(F\oplus B_j) \arrow[d, "f"] \\ \sum_{\Delta\to\Delta_i} S(F\oplus B_j) \arrow[r, "\eta"] & \sum_{\Delta\to\Delta_i} S(F\oplus B_j) \end{tikzcd}$$

où f est l'application simpliciale du lemme 4.5, liée à un sommet fixé α_o de $(\Delta_i)_o$, et où μ est l'unique prolongement multiplicatif de $\mu' : F \oplus B_j \to F \oplus B_j$ définie par $\mu'(f,b) = (f+\alpha_o \tau(r-s)(b),b)$. Comme les applications verticales induisent des isomorphismes en homologie, il suffira de prouver que $H[\mu] = \mathrm{Id}$. Montrons d'abord que la restriction de η :

$$\eta' : \sum_{\Delta\to\Delta_i} F \oplus B_j \to \sum_{\Delta\to\Delta_i} F \oplus B_j$$

induit l'identité en homologie. Nous avons une décomposition

$$\begin{tikzcd}
\sum_{\Delta_m\to\Delta_i} F_m \oplus B_j \arrow[rrr, "\eta'-\mathrm{Id}"] \arrow[d, "\pi"] & & & \sum_{\Delta_m\to\Delta_i} F_m \oplus B_j \\
\sum_{\Delta_m\to\Delta_i} B_j \arrow[r, "\delta"] & \sum_{\Delta_m\to\Delta_i} F_i \arrow[rr, "\lambda"] & & \sum_{\Delta_m\to\Delta_i} F_m \arrow[u, "\nu"']
\end{tikzcd}$$

où $\pi((f,b)_\alpha) = b_\alpha$, $\delta(b_\alpha) = (\tau(r-s)(b))_\alpha$, $\lambda(f_\alpha) = (\alpha(f))_\alpha$, $\nu(f_\alpha) = (f,0)_\alpha$.

Comme $\sum_{\Delta\to\Delta_i} F_i \cong \bar{\Delta}_i \otimes F_i$, l'acyclicité de $\bar{\Delta}_i$ montre que $H_m\left[\sum_{\Delta\to\Delta_i} F_i\right] =$
$= H_m[\bar{\Delta}_i] \otimes F_i = 0$ si $m \neq 0$, donc que $H_m[\lambda] = 0$ si $m \neq 0$.

Par le lemme 4.5, $H_o\left[\sum_{\Delta\to\Delta_i} F\right] \cong H_o[F]$. Mais $H_o[E] = H_1[B] = 0$, donc $H_o[F] = 0$. Ainsi, pour tout $m \geq 0$, $H_m[\lambda] = 0$, d'où $H_m[\eta'-\mathrm{Id}] = 0$.

Considérons maintenant le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\sum_{\Delta\to\Delta_i} F \oplus B_j \arrow[r, "\eta'-\mathrm{Id}"] & \sum_{\Delta\to\Delta_i} F \oplus B_j \\
F \oplus B_j \arrow[r, "\mu'-\mathrm{Id}"] \arrow[u, "f \oplus B_j"'] & F \oplus B_j \arrow[u, "f \oplus B_j"']
\end{tikzcd}$$

Par le lemme 4.5, $H[\mu'-\mathrm{Id}] = 0$.

Une propriété connue d'algèbre homologique montre que $\mu'-\mathrm{Id}$ est homotope à l'application nulle, donc que μ' est homotope à l'identité. Par le théorème 1.1, il existe une homotopie simpliciale de μ' vers l'identité.

Mais le foncteur S préserve les homotopies simpliciales, donc on a bien $H[\mu] = \mathrm{Id}$, ce qui achève la déménstration du lemme.

Ainsi, dès maintenant nous pouvons omettre l'indice r dans la notation $\tilde{\gamma}_{m,r}$. Prouvons que $\tilde{\gamma}_m$ est naturelle :

<u>Lemme 4.8.</u>

Soit $0 \to F \to E \xrightarrow{\phi} B \to 0$ une suite exacte de modules simpliciaux telle que $H_0[B] = H_1[B] = H_0[E] = 0$ et soit $\Delta_i \xrightarrow{\tau} \Delta_j \xrightarrow{\nu} \Delta_k$ deux applications simpliciales fixées. Alors le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd} H'_m[\sum_{\Delta\to\Delta_i} S(F\oplus B_k)] \arrow[r, "\tilde{\gamma}_m"] \arrow[d, "\tilde{\nu}"] & H'_m[\sum_{\Delta\to\Delta_i} S(E\times_B B_k)] \arrow[d, "\tilde{\nu}"] \\ H'_m[\sum_{\Delta\to\Delta_i} S(F\oplus B_j)] \arrow[r, "\tilde{\gamma}_m"] & H'_m[\sum_{\Delta\to\Delta_i} S(E\times_B B_j)] \end{tikzcd}$$

<u>Démonstration.</u>

Puisque les isomorphismes $\tilde{\gamma}_m$ sont indépendants des relèvements choisis, il suffit de prouver que l'on peut choisir des relèvements r, s de ϕ_k, ϕ_j respectivement tels que

$$\begin{tikzcd} B_k \arrow[r, "r"] \arrow[d, "\nu"] & E_k \arrow[d, "\nu"] \\ B_j \arrow[r, "s"] & E_j \end{tikzcd}$$

commute. Or ν admet une décomposition $\nu = \sigma^{j_1}\dots\sigma^{j_u}\varepsilon^{i_1}\dots\varepsilon^{i_v}$. Il suffit donc de construire r ou s lorsque ν est une face ou une dégénérescence. Considérons le diagramme

$$\begin{tikzcd} B_n \arrow[r, "r"] \arrow[d, shift left, "\varepsilon^i"] & E_n \arrow[r, "\phi_n"] \arrow[d, shift left, "\varepsilon^i"] & B_n \arrow[d, shift left, "\varepsilon^i"] \\ B_{n-1} \arrow[r, "s"] \arrow[u, shift left, "\sigma^j"] & E_{n-1} \arrow[r, "\phi_{n-1}"] \arrow[u, shift left, "\sigma^j"] & B_{n-1} \arrow[u, shift left, "\sigma^j"] \end{tikzcd}$$

avec i=j ou i=j+1

Supposons que s soit un relèvement de ϕ_{n-1} et construisons un relèvement r de ϕ_n tel que $\varepsilon^i r = s\varepsilon^i$. Comme σ^j relève ε^i nous pouvons écrire $B_n = \operatorname{Ker} \varepsilon^i \oplus \operatorname{Im} \sigma^j$, $E_n = \operatorname{Ker} \varepsilon^i \oplus \operatorname{Im} \sigma^j$. Nous définissons r comme une somme directe $r_1 \oplus r_2$, où $r_1 : \operatorname{Im} \sigma^j_B \to \operatorname{Im} \sigma^j_E$ et $r_2 : \operatorname{Ker} \varepsilon^i_B \to \operatorname{Ker} \varepsilon^i_E$ sont donnés par $r_1(x) = \sigma^j_E s \varepsilon^i_E(x)$ et $r_2(x) = \psi_n(x) - \sigma^j_E \varepsilon^i \psi_n(x)$, ψ_n étant un relèvement arbitraire de ϕ_n. Des calculs de routine montrent que $r_1(\operatorname{Im} \sigma^j_B) \subset \operatorname{Im} \sigma^j_E$, $r_2(\operatorname{Ker} \varepsilon^i_B) \subset \operatorname{Ker} \varepsilon^i_E$, $\varepsilon^i_E r_1 = s\varepsilon^i_B$, $\varepsilon^i_E r_2 = s\varepsilon^i_B$ et $\phi r_1 = \mathrm{Id} = \phi r_2$. Ainsi r est bien un relèvement de ϕ_n tel que $\varepsilon^i_E r = s\varepsilon^i_B$. On voit de même que si $r : B_n \to E_n$ est donné, on peut construire un relèvement s de ϕ_{n-1} tel que $\sigma^j_E s = r\sigma^j_B$. Cela achève la démonstration du lemme.

Proposition 4.9.

Soit $0 \to F \to E \xrightarrow{\phi} B \to 0$ une suite exacte de modules simpliciaux telle que $H_0[E] = H_0[B] = H_1[B] = 0$. Alors

1. $H[|\phi|] \cong H[SE]$
2. $H'[|\phi|] \cong H[SF] \otimes \overline{SB}$
3. Le second isomorphisme est simplicial, la structure simpliciale du premier membre étant donnée par $H'[\varepsilon''^j]$ et celle du second membre par $\mathrm{Id} \otimes \varepsilon''^j$.

Démonstration.

1. L'isomorphisme $H[|\phi|] \cong H[SE]$.

Pour prouver cet isomorphisme nous montrerons que $H''_{m,n}[|\phi|] = 0$ si $n \neq 0$ et $H''_{m,0}[|\phi|] = SE_m$. La conclusion découlera alors de [4], lemme II.38.

Comme nous l'avons vu, un élément de $E_m \times_{B_m} B_{i_0}$ situé dans la composante $\{\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}\}$ de la somme directe peut être assimilé à un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\Delta_m \arrow[rrrr, "\beta"] \arrow[d, "\alpha_{n+1}"'] & & & & E \arrow[d, "\phi"] \\
\Delta_{i_n} \arrow[r, "\alpha_n"] & \Delta_{i_{n-1}} \arrow[r] & \cdots \arrow[r, "\alpha_1"] & \Delta_{i_0} \arrow[r, "\alpha_0"] & B
\end{tikzcd}$$

diagramme que nous noterons simplement $\{\alpha_o,\dots,\alpha_{n+1},\beta\}$.

Cette interprétation nous permet de définir ε''^j de la manière suivante :

$$\varepsilon''^j_{m,n}\{\alpha_o,\dots,\alpha_{n+1},\beta\} = \{\alpha_o,\dots,\alpha_j\alpha_{j+1},\dots,\alpha_{n+1},\beta\} \quad (0 \leqslant j \leqslant n)$$

Notre assertion sera prouvée si nous pouvons définir une augmentation $\partial''_o : |\phi|_{m,o} \to |\phi|_{m,-1} = SE_m$ et une homotopie $t''_n : |\phi|_{m,n} \to |\phi|_{m,n+1}$ $(n \geqslant -1)$. Pour $\{\alpha_o,\alpha_1,\beta\} \in E_m \times_{B_m} B_{i_o}$, nous définissons $\partial''_o\{\alpha_o,\alpha_1,\beta\} = \beta$ (en d'autres termes, ∂''_o est la première projection $E_m \times_{B_m} B_{i_o} \to E_m$). Il est clair que ∂''_o est K-linéaire et que $\partial''_o\varepsilon''^o_{m,1} = \partial''_o\varepsilon''^1_{m,1}$. Nous pouvons alors prolonger ∂''_o à $|\phi|_{m,o}$ tout entier en utilisant les propriétés universelles de S et de la somme directe. De même il suffira de définir t''_n dans $E_m \times_{B_m} B_{i_o}$ si $n \geqslant 0$, et dans E_m si $n = -1$. Nous posons

$$t''_{-1}(\beta) = \{\phi\beta,\mathrm{Id},\beta\}$$

(un élément de E_m étant identifié à l'application simpliciale $\beta : \Delta_m \to E$)

et
$$t''_n\{\alpha_o,\dots,\alpha_{n+1},\beta\} = (-1)^{n+1}\{\alpha_o,\dots,\alpha_{n+1},\mathrm{Id},\beta\} \quad \text{si } n \geqslant 0$$

Des calculs tout-à-fait semblables à ceux de la démonstration du lemme 4.4 montrent que, pour $n \geqslant 0$, $\partial''_{n+1}t''_n + t''_{n-1}\partial''_n = \mathrm{Id}$, ce qui établit le premier isomorphisme.

2. L'isomorphisme $H'[|\phi|] = H[SF] \otimes \overline{SB}$.

Il résulte de la remarque suivant le lemme 4.6, du lemme 4.3 et de l'isomorphisme de Künneth. Plus précisément :

$$H'_{m,n}[|\phi|] \cong H'_{m.n}[SF \otimes |SB|_{*,n}] = \textstyle\sum_{i+j=m} H_i[SF] \otimes H'_{j,n}[|SB|_{*,n}] = H_m[SF] \otimes \overline{SB}_n .$$

3. L'isomorphisme précédent est simplicial.

L'assertion sera prouvée si nous montrons que l'isomorphisme est naturel, ce qui est le cas puisque $\tilde{\gamma}_m$ est naturelle (lemme 4.8) et puisque l'isomorphisme se décompose en

$$H'_{m,n}[|\phi|] \xrightarrow{\tilde{\gamma}_m^{-1}} H'_{m,n}[\textstyle\sum S(F \oplus B_{i_0})] \xrightarrow{\tilde{=}} H'_{m,n}[\textstyle\sum (SF \otimes SB_{i_0})] \xrightarrow{\tilde{=}}$$

$$\xrightarrow{\tilde{=}} H'_{m,n}[SF \otimes |SB|_{*,n}] \xrightarrow{\tilde{=}} H_m[SF] \otimes \overline{SB}_n .$$

§ 5. DEMONSTRATION DU THEOREME PRINCIPAL.

Dans ce paragraphe, le corps K est supposé de caractéristique $p > 2$. La démonstration utilise le théorème 14 de [2]. Or, ce théorème fait appel aux notions de cogèbre enveloppante d'une cogèbre de Lie, de construction, et utilise un foncteur R_p de la catégorie des espaces vectoriels dans elle-même. Nous allons d'abord définir ces notions.

La cogèbre enveloppante d'un espace vectoriel.

Dans le cas commutatif (c'est-à-dire lorsque l'algèbre de Lie est un espace vectoriel V sur un corps K de caractéristique p), il existe une description explicite de la cogèbre enveloppante U(V) de V. Nous prendrons cette description comme définition de U(V). Envisageons d'abord deux cas particuliers :

Si V est un espace vectoriel de dimension 1 avec un générateur x en degré impair $2q-1$, la Γ-algèbre de Hopf U(V) est isomorphe à $E_p(x,2q-1)$, où l'algèbre $E_p(x,2q-1)$ est l'algèbre extérieure de V et où la comultiplication Δ est définie par $\Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x$ (il n'y a pas à définir de puissances divisées puisque x est de degré impair).

Si V est un espace vectoriel de dimension 1 avec un générateur y de degré 2q, la Γ-algèbre de Hopf U(V) est isomorphe à $P_p(y,2q)$, où l'espace vectoriel $P_p(y,2q)$ est égal à $\sum_{k\geq o} Ky_k$, avec $\deg(y_k) = 2kq$, la multiplication est définie par $y_i \cdot y_j = (i,j)y_{i+j}$, la comultiplication Δ par $\Delta(y_k) = \sum_{i+j=k} y_i \otimes y_j$, et la k-ième puissance divisée de y_m est

$$\gamma^k(y_m) = (m,m-1)\cdot(2m,m-1)\cdot\ldots\cdot((k-1)m,m-1)y_{mk}.$$

Nous avons la caractérisation suivante de U(V) (cf [2], Proposition 5) :

Proposition 5.1.

Soit V un espace vectoriel gradué (à graduation positive) admettant les générateurs x_i en degré $2q_i-1$ ($i \in I$) et les générateurs y_j en degré $2q_j$ ($j \in J$). Alors il existe un isomorphisme naturel de Γ-algèbres de Hopf

$$U(V) = \Big[\bigotimes_{i \in I} E_p(x_i, 2q_i - 1)\Big] \otimes \Big[\bigotimes_{j \in J} P_p(y_j, 2q_j)\Big]$$

Remarque.

Si l'on ne s'intéresse qu'à la structure d'espace vectoriel de U(V), U(V) est entièrement déterminé par sa série de Poincaré $\sum \beta_k x^k$, où $\beta_k = \dim U_k(V)$. La proposition précédente permet alors d'écrire

$$\sum \beta_k x^k = \frac{(1+x)^{e_1}(1+x^3)^{e_3}(1+x^5)^{e_5}\cdots}{(1-x^2)^{e_2}(1-x^4)^{e_4}(1-x^6)^{e_6}\cdots}$$

où $e_i = \dim V_i$.

Le foncteur R_p $(p > 2)$.

Soit $\underline{V}$ la catégorie des espaces vectoriels à graduation positive sur un corps K de caractéristique $p > 2$. Alors $R_p : \underline{V} \to \underline{V}$ est l'unique foncteur vérifiant les propriétés suivantes :

1. R_p commute aux sommes directes
2. Si V a un générateur en degré 2q-1, alors $R_p V$ a un générateur en degré 2q
3. Si V a un générateur en degré 2q, alors $R_p V$ a un générateur en chacun des degrés $2q+1$, $2p^k q+1$, $2p^k q+2$ $(k \geq 1)$.

Constructions.

Nous utilisons le terme "construction" tel qu'il est présenté dans [2] : une *construction* est un couple (A,T) où A est une DGA-algèbre et T un DGA-module sur A sur lequel est définie une bigraduation telle que $T_n = \sum_{i+j=n} T_{i,j}$, ces objets étant soumis aux conditions suivantes :

1. si $a \in A$ est un élément de degré non nul, $a^p = 0$.
2. $H_o[A] \cong K$
3. T est acyclique : $H_o[T] \cong K$ et $H_n[T] = 0$ si $n > 0$.
4. $A_i T_{j,k} \subset T_{i+j,k}$
5. La différentielle d de T a la forme $d = \sum_{i \geq o} d_i$, avec $d_i(T_{j,k}) \subset T_{i+j-1,k-i}$.
6. Soit $\tilde{H}[T]$ l'homologie de T pour la différentielle $\tilde{d} = d_o$. Alors il existe un isomorphisme de $H[A]$-modules $\tilde{H}[T] \cong H[A] \otimes N$ envoyant $\tilde{H}_{i,j}[T]$

sur $H_i[A] \otimes N_j$.

A s'appelle *algèbre initiale* de la construction, T est son *complexe total* et N son *complexe final*. N est déterminé par l'isomorphisme $N_m \cong \tilde{H}_{o,m}[T]$.

Un *homomorphisme de constructions* est un couple (α,τ) où $\alpha : A \to A'$ est un homomorphisme de DGA-algèbres et $\tau : T \to T'$ un homomorphisme de DGA-modules tel que $(T_{i,j}) \subset \sum_{k\geq o} T'_{i+k,j-k}$.

(α,τ) induit un homomorphisme $\nu : N \to N'$ sur les complexes finals. α est appelé *homomorphisme initial* et ν *homomorphisme final* de (α,τ). Quand nous devrons citer explicitement le complexe final N d'une construction, nous noterons (A,T,N) cette construction. De même, un homomorphisme de constructions se notera parfois $(\alpha,\tau,\nu) : (A,T,N) \to (A',T',N')$. Le résultat suivant est prouvé dans [2], théorème 14 :

Théorème 5.2.

Soit A et N l'algèbre initiale et le complexe final d'une construction. Si l'algèbre graduée $H[A]$ est une Γ-algèbre de Hopf cocommutative alors, à un isomorphisme près, il existe un espace vectoriel gradué unique V tel que l'on ait un isomorphisme $U(V) \cong H[A]$ de Γ-algèbres de Hopf. De plus il existe un isomorphisme d'espaces vectoriels gradués $U(R_pV) \cong H[N]$.

Produit tensoriel de constructions.

Soit $(A_i,T_i)_{i\in I}$ une famille de constructions. Le *produit tensoriel* de cette famille est défini ainsi : si I est fini, $\otimes_I(A_i,T_i) = (\otimes_I A_i, \otimes_I T_i)$ et si I est infini, soit $\{I_\alpha\}$ l'ensemble (filtrant pour la relation d'inclusion) des sous-ensembles finis de I. Alors :

$$\otimes_I(A_i,T_i) = (\varinjlim_\alpha \otimes_{I_\alpha} A_{i_\alpha}, \varinjlim_\alpha \otimes_{I_\alpha} T_{i_\alpha}).$$

On vérifie alors facilement la propriété suivante :

Lemme 5.3.

L'algèbre initiale (resp. le complexe final) du produit tensoriel d'une famille de constructions est le produit tensoriel des algèbres initiales (resp. des complexes finals) de la famille.

La notion de construction est liée à notre problème par la proposition suivante :

Proposition 5.4.

Soit $0 \to F \to E \xrightarrow{\phi} B \to 0$ une suite exacte de K-modules simpliciaux telle que SE est acyclique et avec $H_0[B] = H_1[B] = 0$. Alors il existe une construction naturelle telle que $H[SF]$ est l'homologie de l'algèbre initiale et $H[SB]$ l'homologie du complexe final de la construction.

Démonstration.

Il suffira de prouver que $(SF,|\phi|)$ est une construction naturelle. En effet, comme $d = d_o + d_1$ avec $d_o = \partial'$ et $(d_1)_n = (-1)^n \partial''_n$, le complexe final de cette construction est donné par $N_i = \tilde{H}_{o,i}[|\phi|] = H'_{o,i}[|\phi|] = H_o[SF] \otimes \overline{SB}_i$ (cf. Prop. 4.9). Puisque cet isomorphisme est simplicial et puisque $H_o[SF] \cong K$ (propriété 2 des constructions), il en résultera que $H[N] \cong H_o[SF] \otimes H[\overline{SB}] \cong K \otimes H[SB] \cong H[SB]$ (cf. lemme 4.2).

Nous démontrerons à l'aide de trois lemmes que $(SF,|\phi|)$ est une construction naturelle.

Lemme 5.5.

SF est une DGA-algèbre et $|\phi|$ est un SF-module.

Démonstration.

SF est une DGA-algèbre par la proposition 2.1. Définissons la structure de module de $|\phi|$: l'application

$$\psi : F_m \oplus (E_m \times_{B_m} B_{i_o}) \longrightarrow E_m \times_{B_m} B_{i_o}$$

définie par $\psi(f,(e,b)) = (f+e,b)$ induit une application

$$S\psi : SF_m \otimes S(E_m \times_{B_m} B_{i_o}) \longrightarrow S(E_m \times_{B_m} B_{i_o}).$$

Nous définissons $\pi_{i,j,n} : SF_i \otimes |\phi|_{j,n} \to |\phi|_{i+j,n}$ comme étant la composée

$$SF_i \otimes |\phi|_{j,n} \xrightarrow{\nabla_{i,j}} SF_{i+j} \otimes |\phi|_{i+j,n} \cong \sum_{\Delta_{i+j} \to \Delta_{i_n} \to \dots \to \Delta_{i_o}} SF_{i+j} \otimes S(E_{i+j} \times_{B_{i+j}} B_{i_o})$$

$$\xrightarrow{\Sigma S\psi} S(E_{i+j} \times_{B_{i+j}} B_{i_o}) = |\phi|_{i+j}.$$

$\pi_{i,j,n}$ induit une application K-linéaire

$$\pi_r = \sum_{i+j+n=r} \pi_{i,j,n} \;:\; (SF \otimes |\phi|)_r \to |\phi|_r .$$

Si $f \in SF$, $x \in |\phi|$, nous noterons fx l'image $\pi(f \otimes x)$.

Montrons que $1x = x$ et $f_1(f_2x)) = (f_1f_2)x$ pour tout $f_1, f_2 \in SF$ et tout $x \in |\phi|$.

Désignons par $i : 0 \to F$ l'application nulle et par $\tilde{K}$ le module gradué concentré en dimension 0 : $\tilde{K}_n = 0$ si $n > 0$ et $\tilde{K}_o = K$. Le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\tilde{K} \otimes |\phi| \arrow[rr, "Si \otimes Id"] & & SF \otimes |\phi| \arrow[dl, "\pi"] \\
& |\phi| \arrow[ul, "\cong"] &
\end{tikzcd}$$

est commutatif, donc on a bien $1x = x$.

Pour montrer que $f_1(f_2x) = (f_1f_2)x$, il faut prouver que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
SF_i \otimes SF_j \otimes |\phi|_{k,r} \arrow[rr, "1 \otimes \pi"] \arrow[d, "\nabla \otimes Id"] & & SF_i \otimes |\phi|_{j+k,r} \arrow[dd, "\pi"] \\
SF_{i+j} \otimes SF_{i+j} \otimes |\phi|_{k,r} \arrow[d, "\mu \otimes Id"] & & \\
SF_{i+j} \otimes |\phi|_{k,r} \arrow[rr, "\pi"] & & SF_{i+j+k,r}
\end{tikzcd}$$

Pour le prouver, écrivons les choses plus en détail :

$$
\begin{tikzcd}
SF_i \otimes SF_j \otimes |\phi|_{k,r} \arrow[r, "1 \otimes \nabla"] \arrow[d, "\nabla \otimes 1"'] \arrow[dr, phantom, "(1)"] & SF_i \otimes SF_{j+k} \otimes |\phi|_{j+k,r} \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "\nabla"] \arrow[dr, phantom, "(2)"] & \sum SF_i \otimes SF_{j+k} \otimes S(E_{j+k} \times_{B_{j+k}} B_{i_o}) \arrow[r, "\Sigma 1 \otimes S\psi"] \arrow[d, "\nabla"] \arrow[dr, phantom, "(3)"] & SF_i \otimes \sum S(E_{j+k} \times_{B_{j+k}} B_{i_o}) = SF_i \otimes |\phi|_{j+k,r} \arrow[d, "\nabla"] \\
SF_{i+j} \otimes SF_{i+j} \otimes |\phi|_{k,r} \arrow[r, "\nabla"] \arrow[dd, "\mu \otimes 1"'] \arrow[ddr, phantom, "(4)"] & SF_{i+j+k} \otimes SF_{i+j+k} \otimes |\phi|_{i+j+k,r} \arrow[r, "\cong"] \arrow[dd, "\mu \otimes 1"] \arrow[ddr, phantom, "(5)"] & \sum SF_{i+j+k} \otimes SF_{i+j+k} \otimes S(E_{i+j+k} \times_{B_{i+j+k}} B_{i_o}) \arrow[r, "\Sigma 1 \otimes S\psi"] \arrow[dd, "\Sigma\mu \otimes 1"] \arrow[ddr, phantom, "(6)"] & SF_{i+j+k} \otimes |\phi|_{i+j+k,r} \arrow[d, "\cong"] \\
 & & & \sum SF_{i+j+k} \otimes S(E_{i+j+k} \times_{B_{i+j+k}} B_{i_o}) \arrow[d, "\Sigma S\psi"] \\
SF_{i+j} \otimes |\phi|_{k,r} \arrow[r, "\nabla"] & SF_{i+j+k} \otimes |\phi|_{i+j+k,r} \arrow[r, "\cong"] & \sum SF_{i+j+k} \otimes S(E_{i+j+k} \times_{B_{i+j+k}} B_{i_o}) \arrow[r, "\Sigma S\psi"] & \sum S(E_{i+j+k} \times_{B_{i+j+k}} B_{i_o}) = |\phi|_{i+j+k,r}
\end{tikzcd}
$$

Le carré (1) commute car ∇ est associative (cf. par ex. [4], lemme XIV.37). Les carrés (2), (3) et (4) commutent, par naturalité de ∇. Le carré (5) commute par naturalité de μ. On vérifie à la main (et composante par composante) que (6) commute. Ainsi $|\phi|$ est bien un SF-module.

Lemme 5.6.

$|\phi|$ est un DGA-module sur SF.

Démonstration.

Pour montrer que $|\phi|$ est un module différentiel nous allons établir les égalités suivantes, pour $a \in SF_i$ et $t \in |\phi|_{j,k}$:

(1) $\partial'(at) = (\partial a)t + (-1)^i a\partial' t$

(2) $\partial''(at) = a\partial'' t$.

Il en résultera :

$$\partial(at) = \partial'(at) + (-1)^{i+j}\partial''(at) = (\partial a)t + (-1)^i a\partial' t + (-1)^{i+j} a\partial'' t =$$

$$= (\partial a)t + (-1)^i a(\partial' t + (-1)^j \partial'' t) = (\partial a)t + (-1)^i a\partial t.$$

Pour prouver (1), il suffit d'établir la commutativité du diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
SF_i \otimes S(E_j \times_{B_j} B_{i_o}) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\nabla_{i,j}"] & (SF_{i-1} \otimes S(E_j \times_{B_j} B_{i_o})) \oplus (SF_i \otimes S(E_{j-1} \times_{B_{j-1}} B_{i_o})) \arrow[d, "(\nabla_{i-1,j}, \nabla_{i,j-1})"] \\
SF_{i+j} \otimes S(E_{i+j} \times_{B_{i+j}} B_{i_o}) \arrow[r, "\Sigma(-1)^r \varepsilon^r \otimes \varepsilon'^r"] \arrow[d, "S\psi_{i+j}"] & SF_{i+j-1} \otimes S(E_{i+j-1} \times_{B_{i+j-1}} B_{i_o}) \arrow[d, "S\psi_{i+j-1}"] \\
S(E_{i+j} \times_{B_{i+j}} B_{i_o}) \arrow[r, "\partial'"] & S(E_{i+j-1} \times_{B_{i+j-1}} B_{i_o})
\end{tikzcd}$$

où $f = \partial_{SF} \otimes 1 + (-1)^i 1 \otimes \partial_{|\phi|}$

Or le carré supérieur commute car ∇ est un morphisme de chaînes. Pour montrer que le carré inférieur commute il suffit de montrer que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc}
F_{i+j} \oplus (E_{i+j} \times_{B_{i+j}} B_{i_o}) & \xrightarrow{\varepsilon^r \times \varepsilon'^r} & F_{i+j-1} \oplus (E_{i+j-1} \times_{B_{i+j-1}} B_{i_o}) \\
\downarrow{\scriptstyle \psi_{i+j}} & & \downarrow{\scriptstyle \psi_{i+j-1}} \\
E_{i+j} \times_{B_{i+j}} B_{i_o} & \xrightarrow{\varepsilon'^r} & E_{i+j-1} \times_{B_{i+j-1}} B_{i_o}
\end{array}$$

ce qui est clair car $\psi(\varepsilon^r \times \varepsilon'^r)(f,(e,b)) = \psi(\varepsilon^r f,(\varepsilon^r e,b)) = (\varepsilon^r(f+e),b) =$
$= \varepsilon'^r(f+e,b) = \varepsilon'^r\psi(f,(e,b))$.

Pour établir (2) il suffit de prouver la commutativité d'un nouveau diagramme :

$$\begin{array}{ccc}
SF_i \otimes \sum_{\{\alpha_1,\dots,\alpha_{n+1}\}} S(E_m \times_{B_m} B_{i_o}) & \xrightarrow{1\otimes\varepsilon''^j} & SF_i \otimes \sum_{\{\beta_1,\beta_2,\dots\dots,\beta_n\}} S(E_m \times_{B_m} B_{i_o}) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\sum SF_i \otimes S(E_m \times_{B_m} B_{i_o}) & & \sum SF_i \otimes S(E_m \times_{B_m} B_{i_o}) \\
\downarrow{\scriptstyle \Sigma\nabla} & & \downarrow{\scriptstyle \Sigma\nabla} \\
\sum SF_{i+m} \otimes S(E_{i+m} \times_{B_{i+m}} B_{i_o}) & & \sum SF_{i+m} \otimes S(E_{i+m} \times_{B_{i+m}} B_{i_o}) \\
\downarrow{\scriptstyle \Sigma S\psi} & & \downarrow{\scriptstyle \Sigma S\psi} \\
\sum S(E_{i+m} \times_{B_{i+m}} B_{i_o}) & \xrightarrow{\varepsilon''^j} & \sum S(E_{i+m} \times_{B_{i+m}} B_{i_o})
\end{array}$$

Supposons d'abord $j > 0$: un élément de la composante $\{\alpha_1,\dots,\alpha_{n+1}\}$ est envoyé, par l'un ou l'autre des composés, sur un élément de la composante $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_j\alpha_{j+1},\ldots,\alpha_{n+1}\}$. De plus, sur chaque composante, les applications $1\otimes\varepsilon''^j$ et ε''^j sont égales à l'identité et les applications verticales sont égales, donc le diagramme commute.

Si $j = 0$, on vérifie d'abord qu'un élément de la composante $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_{n+1}\}$ est envoyé par l'un ou l'autre des composés sur un élément de la composante $\{\alpha_2,\ldots,\alpha_{n+1}\}$. On peut donc oublier les sommes et vérifier la commutativité du diagramme

$$\begin{tikzcd}
SF_i \otimes S(E_m \times_{B_m} B_{i_0}) \arrow[r, "1\otimes S(1\times\alpha_1)"] \arrow[d, "\nabla"] & SF_i \otimes S(E_m \times_{B_m} B_{i_1}) \arrow[d, "\nabla"] \\
SF_{i+m} \otimes S(E_{i+m} \times_{B_{i+m}} B_{i_0}) \arrow[r, "1\otimes S(1\times\alpha_1)"] \arrow[d, "S\psi"] & SF_{i+m} \otimes S(E_{i+m} \times_{B_{i+m}} B_{i_1}) \arrow[d, "S\psi"] \\
S(E_{i+m} \times_{B_{i+m}} B_{i_0}) \arrow[r, "S(1\times\alpha_1)"] & S(E_{i+m} \times_{B_{i+m}} B_{i_1})
\end{tikzcd}$$

Le carré supérieur commute par naturalité de ∇, et la commutativité du carré inférieur, qu'il suffit de vérifier sur les éléments de $F_{i+m} \oplus (E_{i+m} \times_{B_{i+m}} B_{i_0})$ est immédiate. Cela achève la démonstration du lemme.

Lemme 5.7.

$(SF, |\phi|)$ est une construction naturelle.

Démonstration.

Vérifions d'abord les six axiomes d'une construction.

1) résulte de la Proposition 2.1.

2) Par la proposition 4.1, $H_0[SE] \cong S(H_0[E])$. Par hypothèse, $H_0[SE] \cong K = S(0)$, donc $H_0[E] = 0$. De plus, $H_1[B] = 0$, donc $H_0[F] = 0$, d'où $H_0[SF] \cong S(H_0[F]) \cong K$.

3) est une conséquence de l'acyclicité de $H[SE]$ et de la Proposition 4.9.

4) est vrai par la définition même de la structure de SF-module de $|\phi|$.

5) Nous avons $d = d_0 + d_1$, avec $d_0 = \partial'$ et $(d_1)_n = (-1)^n\partial''$.

6) Ici $\tilde{H}[|\phi|] = H'[|\phi|] \cong H[SF] \otimes \overline{SB}$ par la proposition 4.9. Il suffit donc de prendre $N = \overline{SB}$.

Montrons pour terminer que $(SF,|\phi|)$ est une construction naturelle. Nous considérons un diagramme commutatif à lignes exactes :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & F \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"'] & E \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\beta"'] & B \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & F' \arrow[r] & E' \arrow[r, "\phi'"] & B' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

α induit un morphisme de DGA-algèbres $SF \to SF'$ et β,γ permettent de définir une application $\tilde{\tau} : E_m \times_{B_m} B_{i_0} \to E'_m \times_{B'_m} B_{i_0}$ en posant $\tilde{\tau}(e,b) = (\beta(e),\gamma(b))$. $\tilde{\tau}$ induit une application simpliciale $\tau : |\phi| \to |\phi'|$. Prouver la naturalité de la construction revient donc à montrer que τ est un morphisme de DGA-modules. Or β et γ sont K-linéaires, donc τ est K-linéaire. Montrons maintenant que τ est un morphisme de SF-modules, donc que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
SF_i \otimes |\phi|_{j,k} \arrow[r, "S\alpha_i \otimes \tau_{j,k}"] \arrow[d, "\nabla"] & SF'_i \otimes |\phi'|_{j,k} \arrow[d, "\nabla"] \\
SF_{i+j} \otimes |\phi|_{i+j,k} \arrow[r, "S\alpha_{i+j} \otimes \tau_{i+j,k}"] \arrow[d, "\cong"] & SF'_{i+j} \otimes |\phi'|_{i+j,k} \arrow[d, "\cong"] \\
\sum SF_{i+j} \otimes S(E_{i+j} \times_{B_{i+j}} B_{i_0}) \arrow[r, "\sum S\alpha_{i+j} \otimes S(\beta\times\gamma)"] \arrow[d, "\Sigma S\psi"] & \sum SF'_{i+j} \otimes S(E'_{i+j} \times_{B'_{i+j}} B'_{i_0}) \arrow[d, "\Sigma S\psi"] \\
|\phi|_{i+j,k} = \sum S(E_{i+j} \times_{B_{i+j}} B_{i_0}) \arrow[r, "\tau_{i+j,k}"] & |\phi'|_{i+j+k} = \sum S(E'_{i+j} \times_{B'_{i+j}} B'_{i_0})
\end{tikzcd}$$

Les deux carrés supérieurs commutent par naturalité de ∇ et de l'isomorphisme vertical. De même le carré inférieur commute comme on le voit sur les éléments de $F_{i+j} \oplus (E_{i+j} \times_{B_{i+j}} B_{i_0})$.

Le dernier point consiste à prouver que τ commute aux ε' et aux ε''.

Nous avons $\tau_{m-1,n} \circ \varepsilon'^{\,i}_{m,n} = \varepsilon'^{\,i}_{m,n} \circ \tau_{m,n}$ car le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
E_m \times_{B_m} B_{i_0} \arrow[r, "\varepsilon^i \times Id"] \arrow[d, "(\beta,\gamma)"] & E_{m-1} \times_{B_{m-1}} B_{i_0} \arrow[d, "(\beta,\gamma)"] \\
E'_m \times_{B'_m} B'_{i_0} \arrow[r, "\varepsilon^i \times Id"] & E'_{m-1} \times_{B'_{m-1}} B'_{i_0}
\end{tikzcd}$$

De même, $\tau_{m,n-1} \circ \varepsilon''^{\,j}_{m,n} = \varepsilon''^{\,j}_{m,n} \circ \tau_{m,n}$ car, pour $j > 0$, il s'agit de vérifier que $(\beta,\gamma)\circ Id = Id\circ(\beta,\gamma)$, et pour $j = 0$, nous avons $(\alpha,\beta)\circ(Id,\alpha_1) = (Id,\alpha_1)\circ(\beta,\gamma)$, où $\alpha_1 : \Delta_{i_1} \to \Delta_{i_0}$.

Théorème 5.8.

Soit $0 \to F \to E \to B \to 0$ une suite exacte de modules simpliciaux telle que SE est acyclique, et avec $H_0[B] = H_1[B] = 0$. Alors $H[SF]$ est une Γ-algèbre de Hopf et à un isomorphisme près il existe un espace vectoriel gradué unique V tel qu'on ait un isomorphisme de Γ-algèbres de Hopf $U(V) \cong H[SF]$. De plus on a un isomorphisme d'espaces vectoriels gradués $U(R_pV) \cong H[SB]$.

Démonstration.

Par la Proposition 2.2 nous savons déjà que $H[SF]$ est une Γ-algèbre de Hopf cocommutative. Il suffit donc d'appliquer la proposition 5.4 et le théorème 5.2.

Voici maintenant le théorème principal :

Théorème 5.9.

Soit M un module simplicial tel que $H_n[M] = K$ ($n \geq 1$) et $H_i[M] = 0$ si $i \neq n$. Alors il existe un isomorphisme de Γ-algèbres

$$H[SM] \cong UR_p^{n-1}L$$

où L est l'espace vectoriel gradué de dimension 1 avec un générateur en degré 1.

Démonstration.

Supposons $n = 1$. Comme L a un seul générateur en degré 1, sa cogèbre enveloppante $U(L)$ est de dimension 2 avec un générateur en degré 0 et un générateur en degré 1. La conclusion résulte alors de la proposition 3.1.

Supposons maintenant $n \geq 2$ et soit M un module simplicial tel que $H_n[M] = K$ et $H_i[M] = 0$ si $i \neq n$. Par [4], lemme VIII.17, il existe une suite exacte $0 \to M' \to \Gamma \to M \to 0$ avec $H_i[\Gamma] = 0$ pour tout $i \geq 0$. Puisque $H_i[M'] \cong H_{i+1}[M]$ nous avons $H_{n-1}[M'] = K$ et $H_i[M'] = 0$ si $i \neq n-1$.

Par induction nous en déduisons $H[SM'] \cong UR_p^{n-2}L$. La proposition 4.1 et le lemme VIII.24 de [4] montrent que $H_0[S\Gamma] = K$ et $H_i[S\Gamma] = 0$ si $i \neq 0$. Par le théorème 5.8, il existe un espace vectoriel V tel que $U(V) \cong H[SM']$ et $U(R_pV) \cong H[SM]$. Or, $H[SM'] \cong U(V) \cong UR_p^{n-2}L$, donc $V \cong R_p^{n-2}L$, d'où $H[SM] \cong UR_p^{n-1}L$, cet isomorphisme étant un isomorphisme d'espaces vectoriels. Cependant, par le théorème de structure ([1], théorème 17) cet isomorphisme peut être remplacé par un isomorphisme de Γ-algèbres de Hopf.

§ 6. CARACTERISTIQUE NULLE.

De légères modifications permettent d'utiliser les résultats précédents. Tout d'abord, les paragraphes 1, 3 et 4 ne sont pas modifiés. La proposition 2.1 et sa démonstration restent valables si l'on oublie la condition $a^p = 0$. La proposition 2.2 et sa démonstration restent valables également : on oublie les puissances divisées, qui n'apportent rien de nouveau. Quelques modifications apparaissent au paragraphe 5 : l'espace vectoriel $P_o(y,2q)$ est égal à $\sum_{k\geq o} Ky^k$, avec $\deg y^k = 2kq$, la multiplication est définie par $y^i \cdot y^j = y^{i+j}$ et la comultiplication Δ par $\Delta(y^k) = \sum_{i+j=k}(i,j)y^i \otimes y^j$. Avec cette nouvelle définition, la proposition 5.1 reste valable si l'on oublie les puissances divisées. Le foncteur $R_o : \underline{V} \to \underline{V}$ commute aux sommes directes et si V a un générateur en degré $q \geq 0$, R_oV a un générateur en degré $q+1$. Dans la définition d'une construction on oublie la condition $a^p = 0$ pour a de degré strictement positif.

Avec ces nouvelles définitions, tous les résultats du paragraphe 5 sont encore vrais en oubliant les puissances divisées. Pour un module simplicial connexe M quelconque, le théorème 5.9 prend la forme suivante :

Théorème 6.1.

Soit M un module simplicial sur un corps de caractéristique nulle. Si $H_o[M] = 0$, il existe un isomorphisme d'algèbres de Hopf

$$H[SM] \cong UH[M].$$

Démonstration.

Si l'espace vectoriel $H[M]$ est de dimension 1 avec un générateur en degré m, le résultat est une conséquence directe du théorème 5.9, puisque $H[M] \cong R_o^{m-1}L$.

Supposons $H[M]$ quelconque. On peut écrire $H[M] \cong \oplus H[M_i] \cong H[\oplus M_i]$, où $H[M_i]$ est de dimension 1. Par le théorème d'Eilenberg-Zilber, $H[SM] \cong$ $\cong H[\otimes SM_i] \cong \otimes H[SM_i] \cong \otimes UH[M_i] \cong U(\oplus H[M_i]) \cong UH[M]$.

Remarques.

1. Le théorème 6.1 et la proposition 5.1 montrent que la série de Poincaré de $H[SM]$ est donnée par

$$\sum \beta_k x^k = \frac{(1 + x)^{e_1}(1 + x^3)^{e_3}\dots}{(1 - x^2)^{e_2}(1 - x^4)^{e_4}\dots}$$

où $e_i = \dim H_i[M]$.

2. Puisque $H[SM]$ est une algèbre de Hopf commutative et cocommutative, il existe un isomorphisme naturel de l'ensemble des éléments primitifs sur l'ensemble des éléments indécomposables de $H[SM]$ ([12], corollaire 4.18). Soit $J_n(A)$ le sous-espace vectoriel de A_n engendré par tous les produits non triviaux de degré n. Les éléments indécomposables sont par définition les éléments de $Q(A) = A/J(A)$. Alors $H[SM] \cong UQH[SM]$ ([12], théorème 5.18) donc $H[M] = QH[SM]$, ou encore

$$H[SM]/JH[SM] \cong H[M]$$

pour tout module simplicial connexe M.

3. On déduit de l'isomorphisme précédent que, pour tout module simplicial connexe M,

$$H_1[SM] = H_1[M].$$

§ 7. CARACTERISTIQUE 2.

Tous les résultats des paragraphes 1, 3 et 4 sont valables sans modification. La définition des puissances divisées est quelque peu différente; nous utiliserons celle qui est donnée dans [3] : en caractéristique 2, une Γ-algèbre est une algèbre graduée avec la donnée d'applications $\gamma^k : A_n \to A_{kn}$ pour tout entier $k \geq 0$ et pour tout entier $n \geq 2$. Les γ^k doivent vérifier les axiomes suivants :

1. $\gamma^o(x) = 1$, $\gamma^1(x) = x$
2. $\gamma^h(x)\gamma^k(x) = (h,k)\gamma^{h+k}(x)$
3. $\gamma^k(x+y) = \sum_{r+s=k}\gamma^r(x)\gamma^s(y)$
4. $\gamma^k(xy) = 0$ si $k \geq 2$ et si x et y sont de degré ≥ 1
5. $\gamma^k(xy) = x^k\gamma^k(y)$ si deg $x = 0$ et deg $y \geq 2$
6. $\gamma^k(\gamma^2(y)) = \gamma^{2k}(y)$.

Nous définissons les Γ-algèbres de Hopf $E_2(x,n)$ et $P_2(y,n)$ pour tout $n > 0$ comme en caractéristique $p > 2$. Le foncteur $R_2 : \underline{V} \to \underline{V}$ commute aux sommes directes et, si V a un générateur en degré n, R_2V a un générateur en chacun des degrés 2^kn+1 $(k \geq 0)$.

Avec ces modifications, les résultats du paragraphe 2 restent valables mais il faut un peu modifier les démonstrations : dans la proposition 2.1, la démonstration de l'égalité $x^2 = 0$ résulte du lemme 9 de [3] : pour toute algèbre simpliciale A, tout $k \geq 0$ et tout $n \geq 1$ il existe une application naturelle $g^k : A_n \to A_{kn}$ telle que $a^k = k!g^k(a)$. La proposition 2.2 est une conséquence des propositions 10 et 12 de [3].

Avant d'étudier les modifications à apporter au paragraphe 5, nous donnons quelques précisions sur la structure de $P_2(y,n) = \sum_{k \geq o} Ky_k$.

Lemme 7.1.

Pour tout $m \geq 0$ et tout $k < 2^i$, l'entier $(m\cdot 2^i, k)$ est impair.

Démonstration : Immédiat.

Lemme 7.2.

Si $k = \sum_{i=0}^{n} k_i 2^i$ $(k_i \in \{0,1\})$, alors $y_k = \prod_{i=0}^{n} y_{k_i 2^i}$.

Démonstration.

Elle se fait par induction sur le nombre de termes non nuls de la décomposition binaire de k : posons $k = k' + 2^r$, avec $k' < 2^r$. Par définition du produit dans $P_2(y,n)$, $y_{k'} \cdot y_{2^r} = (k', 2^r) y_k = y_k$.

Corollaire 7.3.

Soit A une algèbre commutative graduée et $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une famille d'éléments de A avec $\deg a_i = 2^i \cdot n$. Alors il existe un unique homomorphisme d'algèbres graduées $\alpha : P_2(y,n) \to A$ tel que $\alpha(y_{2^i}) = a_i$.

Démonstration.

L'existence résulte de ce que y_{2^i} est indécomposable, et l'unicité du lemme 7.2.

Lemme 7.4.

Pour $k \geq 2$, $\gamma^k(y_{2^i}) = y_{k\cdot 2^i}$ et $\gamma^k(y_m) = 0$ si m n'est pas une puissance de 2.

Démonstration.

a) Nous avons $\gamma^k(y_{2^i}) = (2^i, 2^i - 1)\cdot(2\cdot 2^i, 2^i - 1)\cdot \ldots \cdot((k-1)\cdot 2^i, 2^i - 1) y_{k\cdot 2^i}$ et, par le lemme 7.1, $(m\cdot 2^i, 2^i - 1) \equiv 1 \pmod 2$.

b) Si m n'est pas une puissance de 2, le lemme 7.2 montre que y_m se décompose en un produit $y_i \cdot y_j$, où y_i et y_j sont de degré ≥ 1. Par l'axiome 4 des puissances divisées, $\gamma^k(y_m) = \gamma^k(y_i y_j) = 0$.

Lemme 7.5.

Il existe un isomorphisme naturel d'algèbres graduées

$$\psi : P_2(y,n) \to \bigotimes_{k>0} E_2(z_k, 2^k n)$$

tel que $z_k = \psi(\gamma^{2^k}(y))$.

Démonstration.

Cf. [2], lemme 6, p.24.

Voyons maintenant les modifications à apporter au paragraphe 5. Le début du paragraphe reste inchangé jusqu'au lemme 5.7 y compris, mais la suite va subir passablement de modifications pour la raison suivante : le théorème 5.8 se démontre à l'aide du théorème 14 de [2] (Théorème 5.2 ici). Or, la définition des puissances divisées n'est pas exactement la même dans [2] et dans [3] : dans [2] on impose qu'elles soient définies même en degré 1 et les résultats sont soumis à cette condition. Dans l'équivalent du théorème 5.8 en caractéristique 2 nous sommes donc amenés à imposer la condition supplémentaire $H_1[SF] = 0$ ou toute autre condition qui l'implique. Nous montrons, dans le théorème suivant, qu'il suffit d'ajouter l'hypothèse $H_2[B] = 0$.

Théorème 7.6.

Soit $0 \to F \to E \to B \to 0$ une suite exacte de modules simpliciaux telle que :

1. $H_n[SE] = 0$ si $n > 0$ et $H_0[SE] = K$
2. $H_0[B] = H_1[B] = H_2[B] = 0$.

Alors $H[SF]$ est une Γ-algèbre de Hopf cocommutative et, à un isomorphisme près, il existe un espace vectoriel gradué unique V tel que l'on ait un isomorphisme de Γ-algèbres de Hopf $U(V) \cong H[SF]$. De plus il existe un isomomorphisme d'espaces vectoriels gradués $U(R_2V) \cong H[SB]$.

Démonstration.

Il s'agit de prouver que les hypothèses impliquent $H_1[SF] = 0$.

Comme $SE = \sum_{m\geq 0} S^m E$, nous avons $H[SM] = \sum_{m\geq 0} H[S^m E]$.

Or, pour $n > 0$, $H_n[SE] = 0$, donc $H_n[S^1E] = H_n[E] = 0$. La condition $H_2[B] = 0$ implique donc $H_1[F] = 0$. Mais $H_0[SE] = SH_0[E] = K$, donc $H_0[E] = 0$, d'où $H_0[F] = 0$.

Le complexe de Moore $N(F)$ de F vérifie donc $H_0[NF] = H_1[NF] = 0$. Par [11], corollaire 24.6, $N(F)$ est homotope à un complexe C tel que $C_2 = H_2[F]$, $C_1 = C_0 = 0$. Ainsi le module simplicial F est homotope au module simplicial $\Gamma(C)$ tel que $\Gamma_2(C) = H_2[F]$, $\Gamma_1(C) = \Gamma_0(C) = 0$, donc SF est homotope au module simplicial $S\Gamma(C)$. Regardons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
\cdots \to S\Gamma(C)_2 & \xrightarrow{\partial_2} & S\Gamma(C)_1 & \xrightarrow{\partial_1} & S\Gamma(C)_0 \\
\| & & \| & & \| \\
\cdots \to SH_2[F] & \longrightarrow & K & \longrightarrow & K
\end{array}$$

Comme $\varepsilon_2^0 = \varepsilon_2^1 = \varepsilon_2^2$ et $\varepsilon_1^0 = \varepsilon_1^1$, on en déduit que ∂_2 est surjective et que ∂_1 est nulle. Ainsi $H_1[SF] = \operatorname{Ker} \partial_1/\operatorname{Im} \partial_2 = 0$.

Enonçons maintenant le résultat principal :

<u>Théorème 7.7.</u>

Soit M un module simplicial tel que $H_n[M] = K$ $(n \geqslant 2)$ et $H_i[M] = 0$ si $i \neq n$. Alors il existe un isomorphisme de Γ-algèbres

$$H[SM] \triangleq UR_2^{n-2}M_2$$

où M_2 est l'espace vectoriel gradué de dimension 1 ayant un générateur en degré 2.

<u>Démonstration.</u>

Elle se fait par induction, le passage de $n-1$ à n étant la même qu'en caractéristique $p > 2$. La différence essentielle est que nous devons commencer l'induction avec $n = 2$. En fait nous pourrons tout de même utiliser le cas $n = 1$ (paragraphe 3) si nous généralisons le théorème 7.6 de la manière suivante :

Théorème 7.8.

Soit $0 \to F \to E \to B \to 0$ une suite exacte de modules simpliciaux telle que :

1. $H_n[SE] = 0$ si $n \neq 0$ et $H_0[SE] = K$
2. $H_0[B] = H_1[B] = 0$
3. Il existe un espace vectoriel V tel que $H[SF] = \Lambda(V)$ (où Λ désigne l'algèbre extérieure de V)

Alors l'espace vectoriel gradué W tel que $W_{i+1} = V_i$ donne lieu à un isomorphisme $U(W) \cong H[SB]$.

Montrons d'abord que le théorème 7.8 permet d'établir le théorème 7.7, c'est-à-dire que le théorème 7.7 est vrai pour $n = 2$:

Soit M un module simplicial tel que $H_i[M] = 0$ si $i \neq 2$ et $H_2[M] = K$. Par [4], lemme VIII.17, il existe une suite exacte de modules simpliciaux $0 \to M' \to \Gamma \to M \to 0$ telle que $H_i[\Gamma] = 0$ pour tout $i \geqslant 0$. Comme $H_i[M'] \cong H_{i+1}[M]$, on a $H_1[M'] \cong K$ et $H_i[M'] = 0$ si $i \neq 1$. Comme les résultats du paragraphe 3 sont vrais en toute caractéristique, nous avons $H[SM'] = \Lambda(V)$, où V a un générateur en degré 1. Le théorème 7.8 montre alors que $H[SM] \cong U(W)$, où W a un générateur en degré 2, donc que $H[SM] \cong UM_2$, ce qui établit le théorème 7.7.

Il nous reste donc à établir le théorème 7.8. Cela se fera à l'aide de plusieurs résultats intermédiaires.

Lemme 7.9.

Il existe une construction dont l'algèbre initiale est $E_2(x,n)$ (différentielle nulle), dont le complexe final est $P_2(y,n+1)$ (différentielle nulle) et avec $d_0 = d_1 = 0$

Pour une démonstration de ce résultat, cf. [2]. Notons simplement que le complexe total de la construction est égal à $T = E_2(x,n) \otimes P_2(y,n+1)$, la différentielle de T étant définie par $\partial(x \otimes y_k) = 0$ et $\partial(y_k) = x \otimes y_{k-1}$.

En utilisant le produit tensoriel de constructions et le lemme 5.3, on obtient le résultat suivant :

Proposition 7.10.

A tout espace vectoriel V à graduation positive on peut associer une construction naturelle $C_2(V)$ dont l'algèbre initiale est $\Lambda(V)$ (différentielle nulle) et dont le complexe final est $U(W)$ (différentielle nulle), où W est l'espace vectoriel gradué tel que $W_{i+1} = V_i$.

Illustrons cette proposition par un exemple qui nous sera utile plus tard :

Cas particulier.

Soit V un espace vectoriel de dimension 1 avec un générateur y en degré 2. Par la proposition 5.1, $A = U(V) = P_2(y,2)$ et, par le lemme 7.5, nous avons un isomorphisme $\psi : P_2(y,2) \to \bigotimes_{k\geq o} E_2(z_k, 2^{k+1}) = \Lambda(\bar{V})$, où $\bar{V}$ est l'espace vectoriel gradué admettant un générateur en chacun des degrés 2^{k+1} $(k \geq 0)$ et où $z_k = \psi(\gamma^{2^k}(y))$. Soit alors

$T = \bigotimes_{k\geq o} (E_2(z_k, 2^{k+1}) \otimes P_2(y_{(k)}, 2^{k+1}+1))$ et $N = \bigotimes_{k\geq o} P_2(y_{(k)}, 2^{k+1}+1)$.

La proposition 5.1 montre qu'on a bien $N = U(W)$, où $W_{i+1} = \bar{V}_i$ (notons que par définition de R_2, $N = UR_2V$), donc $C_2(\bar{V}) = (A,T,N)$.

Proposition 7.11.

Soit (A,T) une construction et soit $\phi : \Lambda(V) \to H[A]$ un homomorphisme d'algèbres graduées. Alors il existe un homomorphisme de constructions $(\alpha,\tau) : C_2(V) \to (A,T)$ tel que $H[\alpha] = \phi$.

Ce résultat est analogue à la proposition 13 de [2] et sa démonstration semblable. Nous ne donnerons pas la démonstration, mais nous nous contenterons d'indiquer la manière de construire α et τ : si V a les générateurs x_i en degré n_i, $\Lambda(V) = \bigotimes E_2(x_i, n_i)$. Si $\phi(x_i) = \bar{a}_i \in H_i[A]$, nous définissons $\alpha(x_i) = a_i$. L'homomorphisme d'algèbres

$\tau : E_2(x,n) \otimes P_2(y,n+1) \to T$ est entièrement déterminé par $\tau(x)$ et $\tau(y_k)$. Comme $H_o[T] = K$, il existe $\eta \in T_o$ tel que $\bar{\eta} = 1 \in H_o[T]$. On pose alors

$\tau(x) = \alpha(x)\eta$. $\tau(y_k)$ est défini par récurrence ainsi : $\tau(y) = \tau(y_1) = b_1$, où b_1 est tel que $\partial b_1 = \alpha(x)\eta$, et $\tau(y_k) = b_k$ où b_k est tel que $\partial b_k = \alpha(x) b_{k-1}$.

Exemple.

Considérons la suite exacte $0 \to M' \to \Gamma \overset{\phi}{\to} M \to 0$ telle que $H_2[M'] = K$, $H_n[M'] = 0$ si $n \neq 2$ et $H_n[\Gamma] = 0$ pour tout $n \geq 0$. Alors $(SM', |\phi|)$ est une construction. Par le théorème 7.7 (qu'il reste à démontrer!), $H[SM'] \cong U(M_2) = P_2(y,2)$. De plus $P_2(y,2)$ est l'algèbre initiale d'une construction $C_2(\bar{V})$ (cf. cas particulier p. 51). Ainsi (Proposition 7.11) il existe un homomorphisme de constructions $(\alpha,\tau) : C_2(\bar{V}) \to (SM', |\phi|)$ tel que $H[\alpha] : P_2(y,2) \to H[SM']$ est un isomorphisme. Pour des raisons qui apparaîtrons dans l'Appendice, montrons que α peut être choisi de telle manière qu'il soit un homomorphisme de DGA-algèbres à puissances divisées.

Nous identifions dès maintenant $H[SM']$ et $P_2(y,2)$. Soit $a \in SM'$ un cycle tel que $[a] = y \in H[SM'] = P_2(y,2)$. Nous définissons $\alpha(y_{2^i}) = \gamma^{2^i}(a)$ $(i \geq 0)$. En nous référant au corollaire 7.3, nous voyons que

α se prolonge en un homomorphisme d'algèbres $P_2(y,2) \to SM'$. Soit $k = \sum k_i 2^i$ $(k_i \in \{0,1\})$. Le lemme 7.2 et le lemme 1 de [3] montrent que, pour tout $k \geq 0$, $\alpha(y_k) = \alpha(\prod y_{k_i 2^i}) = \prod \gamma^{2^i k_i}(a) = \gamma^k(a)$.

Montrons que α est un homomorphisme de DGA-algèbres : comme a est un cycle, $\gamma^k(a)$ en est un, donc $\partial\alpha(y_k) = \partial\gamma^k(a) = 0$. De même, $\alpha\partial(y_k)$ est nul puisque la différentielle de $P_2(y,2)$ est nulle (lemme 7.9). Montrons que α commute aux γ^k $(k \geq 2)$:

1. $\alpha\gamma^k(y_{2^i}) = \alpha(y_{k\cdot 2^i}) = \gamma^{k\cdot 2^i}(a) = \gamma^k\gamma^{2^i}(a) = \gamma^k\alpha(y_{2^i})$ par le lemme 7.4 et l'axiome 6 des puissances divisées.

2. Si m n'est pas une puissance de 2, $\gamma^k(y_m) = 0$ (lemme 7.4), et $y_m = y_i y_j$ avec $i,j \geq 1$ (lemme 7.2). Par l'axiome 4 des puissances divisées, $\gamma^k\alpha(y_m) = \gamma^k(\alpha(y_i)\alpha(y_j)) = 0 = \alpha\gamma^k(y_m)$.

3. Si $\lambda \in K$, $\alpha\gamma^k(\lambda y_m) = \alpha(\lambda^k\gamma^k(y_m)) = \alpha(\lambda)^k\alpha\gamma^k(y_m) = \alpha(\lambda)^k\gamma^k\alpha(y_m) = \gamma^k(\alpha(\lambda)\alpha(y_m)) = \gamma^k\alpha(\lambda y_m)$.

4. $\alpha\gamma^k(\sum_{1\leq i\leq n}\lambda_i y_i) = \sum_{r_1+\dots+r_n=k}\alpha\gamma^{r_1}(\lambda_1 y_1)\dots\alpha\gamma^{r_n}(\lambda_n y_n) =$

$= \sum_{r_1+\dots+r_n=k}\gamma^{r_1}\alpha(\lambda_1 y_1)\dots\gamma^{r_n}\alpha(\lambda_n y_n) = \gamma^k\alpha(\sum_{1\leq i\leq n}\lambda_i y_i)$.

Ainsi, α est bien un homomorphisme de DGA-algèbres à puissances divisées.

Revenons à la démonstration du théorème 7.8; nous avons à établir encore un résultat intermédiaire :

Proposition 7.12.

Si A est l'algèbre initiale et N le complexe final d'une construction et si $H[A] \cong \Lambda(V)$, il existe un isomorphisme $H[N] \cong U(W)$ où W est l'espace vectoriel gradué tel que $W_{i+1} = V_i$.

Démonstration.

Il suffit d'utiliser la proposition 7.10, la proposition 7.11 ainsi que la proposition 12 de [2], qui affirme que si (α,τ,ν) est un homomorphisme de constructions tel que $H[\alpha]$ est un isomorphisme, alors $H[\nu]$ est un isomorphisme.

Démonstration du théorème 7.8.

Par la proposition 5.4, il existe une construction (A,T,N) telle que $H[A] \cong H[SF]$ et $H[N] \cong H[SB]$. Par hypothèse, $H[SF] \cong \Lambda(V)$; la proposition 7.12 montre alors que $H[SB] \cong U(W)$.

§ 8. QUELQUES RESULTATS.

Lemme 8.1.

$H_n[SM]$ ne dépend que des $H_i[M]$ tels que $i \leqslant n$.

Démonstration.

Pour $n = 0$, le résultat est clair puisque $H_0[SM] \cong S(H_0[M])$ (proposition 4.1). Soit alors $n \geqslant 1$. Il suffit d'établir le résultat suivant :

Si $H.[M]$ est de dimension 1 avec un générateur en degré m, alors $H_i[SM] = 0$ pour $0 < i < m$.

Nous envisagerons deux cas suivant la caractéristique p de K.

i) Supposons $p \neq 2$. Alors $H[SM] \cong UR_p^{m-1}L$. Les générateurs de $U(X)$ sont de degré supérieur ou égal à ceux de X (sauf en ce qui concerne $U_0(X)$) et les générateurs de R_pV sont de degré strictement supérieur à ceux de V. Ainsi les générateurs de $H[SM]$ sont de degré au moins égal à m, donc $H_i[SM] = 0$ si $0 < i < m$.

ii) Supposons $p = 2$. Alors $H[SM] \cong UR_p^{m-2}M_2$. Comme M_2 a un générateur en degré 2, on voit, comme ci-dessus, que les générateurs de $H[SM]$ sont de degré au moins égal à m, donc que $H_i[SM] = 0$ si $0 < i < m$.

Proposition 8.2.

Soit K un corps de caractéristique $p > 0$ et M un module simplicial tel que $H_0[M] = 0$. Alors $H_n[SM]$ se calcule comme en caractéristique nulle pour $n \leqslant 2p$:

$$n \leqslant 2p \Longrightarrow H_n[SM] \cong U_nH[M].$$

Démonstration.

Il s'agit de prouver les deux résultats suivants :

i) si $p \neq 2$ et si $n \leqslant 2p$, $U_nR_p^mL = U_nR_0^mL$ pour tout $m \geqslant 0$

ii) si $p = 2$ et si $n \leqslant 4$, $U_nR_2^mM_2 = U_nR_0^{m+1}L$ pour tout $m \geqslant 0$.

Nous ne traiterons que le cas $p \neq 2$, la démonstration en caractéristique 2 étant du même type.

Par définition, R_pL a un générateur en degré 2, R_p^2L a un générateur en degré 3 et un générateur en chacun des degrés $2p^k+1$, $2p^k+2$ $(k \geq 1)$. Pour $m > 2$, R_p^mL a un générateur en degré $m+1$ et des générateurs en degrés supérieurs à $2p+1$.

D'autre part, R_o^mL a un générateur en degré $m+1$ donc, pour $n \leq 2p$ et $m \geq 0$, $(R_p^mL)_n = (R_o^mL)_n$, ou encore $U_nR_p^mL = U_nR_o^mL$.

Remarque.

De la remarque 3 du paragraphe 6 et de la proposition ci-dessus, il résulte en particulier qu'en toute caractéristique $H_1[SM] \cong H_1[M]$.

Les calculs faits dans la démonstration de la proposition 8.2 montrent encore que l'on a

Corollaire 8.3.

Si M est un module simplicial sur un corps K de caractéristique p tel que $H_0[M] = 0$, alors

$$\dim(H_{2p+1}[SM]) = \dim(U_{2p+1}H[M]) + \dim(H_3[M]).$$

Proposition 8.4.

Soit N une algèbre simpliciale. Alors pour tout entier $k \geq 1$ il existe une application naturelle additive non nulle en général

$$h_N : H_{2k+1}[N] \to H_{2kp+1}[N].$$

Démonstration.

Par [4], lemme VIII.14, nous pouvons associer à N une surjection $p : T \to N$ où T est une algèbre simpliciale telle que $H_n[T] = 0$ pour $n > 0$, et T (comme toute algèbre simpliciale) est munie de manière canonique de puissances divisées. Soit alors $u \in H_{2k+1}[N]$. $h(u)$ est défini de la manière suivante :

i) on choisit un représentant $y \in N_{2k+1}$ de u : $[y] = u$

ii) on choisit $x \in T_{2k+1}$ tel que $p(x) = y$

iii) Comme $\gamma^p\partial x \in T_{2kp}$ est un cycle (cf. démonstration de la proposition 2.2) et comme $H_n[T] = 0$ pour $n > 0$, $\gamma^p \partial x$ est un bord : il existe $t \in T_{2kp+1}$ tel que $\partial t = \gamma^p \partial x$.

iv) On définit $h(u) = [p(t)] \in H_{2kp+1}[N]$: $p(t)$ est bien un cycle, par naturalité des puissances divisées.

Pour prouver que h est naturelle, il suffira d'établir que $h(u)$ ne dépend pas des choix de T, y, x et t. Notons pour l'instant $h_{T,y,x,t}(u)$ cette image.

1. $\underline{h_{T,y,x,t}(u) \text{ ne dépend pas du choix de } t.}$

Soit $t_1, t_2 \in T_{2kp+1}$ deux éléments tels que $\partial t_1 = \partial t_2 = \gamma^p \partial x$. Alors $(t_1 - t_2)$ est un cycle, donc un bord et il existe $v \in T_{2kp+2}$ tel que $\partial v = t_2 - t_1$. Ainsi :

$$h_{T,y,x,t_2}(u) - h_{T,x,y,t_1}(u) = [p(t_2) - p(t_1)] = [\partial p(v)] = 0$$

et l'on a bien $h_{T,y,x,t_2}(u) = h_{T,y,x,t_1}(u) = h_{T,y,x}(u)$.

2. $\underline{h_{T,y,x}(u) \text{ ne dépend pas du choix de } x.}$

Soit x' tel que $p(x') = y$ et posons $x' = x + \lambda$, avec $\lambda \in \operatorname{Ker} p$. Alors

$$\gamma^p \partial x' = \gamma^p(\partial x + \partial\lambda) = \gamma^p \partial x + \sum_{\substack{r+s=p \\ s \geqslant 2}} \gamma^r(\partial x)\gamma^s(\partial\lambda) + (\gamma^{p-1}(\partial x))\partial\lambda.$$

Choisissons t, t_r, $t'_s \in T$ tels que $\gamma^p \partial x = \partial t$, $\gamma^r \partial x = \partial t_r$, $\gamma^s \partial\lambda = \partial t'_s$. On obtient $\gamma^p \partial x' = \partial(t + \partial t_{p-1} \cdot \lambda + \sum \partial t_r \cdot t'_s)$. Or $p(\partial t_{p-1} \cdot \lambda) = 0$. Il suffit donc de montrer que pour $s \geqslant 2$, on peut choisir t'_s de telle manière que $pt'_s = 0$.

Désignons par F le noyau de p : F est un idéal de T. Par [4], lemme VIII.14, il existe un module simplicial E et une surjection $\pi : E \to F$ avec $H_n[E] = 0$ pour $n > 0$. Choisissons $\mu \in E$ tel que $\pi(\mu) = \lambda$.

T étant une algèbre, la propriété universelle du foncteur S fournit un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\pi"] \arrow[d] & F \arrow[r, "i"] \arrow[d] & T \arrow[d, equal] \\ SE \arrow[r, dash, "S\pi"] & SF \arrow[r, "j"] & T \end{tikzcd}$$

Or, $\gamma^s \partial\mu = \sum(\partial\mu)_{\alpha_1} \ldots (\partial\mu_{\alpha_s}) \in S^s E$.

Comme $H_n[E] = 0$ pour $n > 0$, nous avons aussi $H_n[S^s E] = 0$ pour $n > 0$: il existe donc $w_s \in SE$ avec $\partial w_s = \gamma^s \partial\mu$. Posons $w'_s = (S\pi)(w_s)$. Alors w'_s appartient à l'idéal de SF engendré par F. D'autre part, $\partial(j(w'_s)) = j\gamma^s\partial\lambda = \gamma^s\partial\lambda$. Nous pouvons donc choisir $t'_s = j(w'_s)$, et t'_s appartient à l'idéal de T engendré par F, c'est-à-dire à F, d'où $p(t'_s) = 0$. On a donc bien $h_{T,y,x'}(u) = h_{T,y,x}(u) = h_{T,y}(u)$.

3. <u>$h_{T,y}(u)$ ne dépend pas du choix de y.</u>

Le résultat est clair : soit $y' = y + \partial\mu$, et choisissons x et σ tels que $p(x) = y$ et $p(\sigma) = \mu$. Alors $y' = p(x + \partial\sigma)$ et $\partial(x + \partial\sigma) = \partial x$. Ainsi $h_{T,y'}(u) = h_{T,y}(u) = h_T(u)$.

4. <u>$h_T(u)$ ne dépend pas du choix de T.</u>

Soit T' une autre algèbre simpliciale (munie de manière canonique de puissances divisées) telle que $H_n[T'] = 0$ pour $n > 0$, et soit $p: T' \to N$ une surjection. Alors $T \otimes T'$ est encore une algèbre telle que $H_n[T \otimes T'] = 0$ pour $n > 0$ et elle est munie canoniquement de puissances divisées prolongeant celles de T et de T'. On a donc un diagramme commutatif de Γ-algèbres

$$\begin{tikzcd} T \arrow[rr] \arrow[dr, "p"'] & & T \otimes T' \arrow[dl, "p_1"] \\ & N & \end{tikzcd}$$

et un diagramme semblable en remplaçant T par T'. Il suffira donc de montrer que $h_T(u) = h_{T\otimes T'}(u) = h_{T'}(u)$ ou, plus généralement que $h_T(u) = h_{T'}(u)$ lorsqu'on a un diagramme commutatif de Γ-algèbres

$$\begin{tikzcd} T \arrow[rr, "\tau"] \arrow[dr, "p"'] & & T' \arrow[dl, "p'"] \\ & N & \end{tikzcd}$$

Soit alors $u \in H_{2k+1}[N]$, $[y] = u$, $p(x) = y$ et $\partial t = \gamma^p \partial x$: $h_T(u) = [p(t)]$. Puisque $p'(\tau(x)) = y$ et $\partial(\tau(t)) = \gamma^p \partial(\tau(x))$, on a bien $h_{T'}(u) = [p'\tau(t)] = [p(t)] = h_T(u)$.

5. h est additive.

Soit $u_1, u_2 \in H_{2k+1}[N]$ et choisissons x_i, y_i $(i=1,2)$ tels que $[y_i] = u_i$ et $p(x_i) = y_i$. Alors $\gamma^p(\partial x_1 + \partial x_2) = \gamma^p \partial x_1 + \gamma^p \partial x_2 + \sum_{\substack{r+s=p \\ r,s\geq 1}} \gamma^r(\partial x_1)\gamma^s(\partial x_2)$.

En remarquant que $\gamma^r \partial x_1 = \frac{1}{r!}(\partial x_1)^r = \frac{1}{r!}\partial(x_1(\partial x_1)^{r-1})$, on constate que

$\gamma^p(\partial x_1 + \partial x_2) = \gamma^p \partial x_1 + \gamma^p \partial x_2 + \partial\left(\sum \frac{1}{r!s!} x_1(\partial x_1)^{r-1}(\partial x_2)^s\right)$.

Or, y_2 est un cycle, donc $p\partial x_2 = 0$, ce qui montre que $h(u_1+u_2) = h(u_1)+h(u_2)$.

6. Il existe une algèbre simpliciale N telle que $h_N \neq 0$.

Nous démontrerons ce résultat (en caractéristique 2) en appendice. On pourrait aussi utiliser des résultats de [6], faisant appel à l'opérateur de Bockstein, ou un résultat de [5]).

Remarque.

h n'est pas linéaire car $h(ku) = k^p h(u)$. On peut toutefois la remplacer par une application linéaire

$$\tilde{h} : K \otimes_{\tilde{K}} H_{2k+1}[N] \to H_{2kp+1}[N]$$

telle que $\tilde{h}(1 \otimes u) = h(u)$, où $\tilde{K}$ est une autre copie de K opérant sur $H_{2k+1}[N]$ via l'homomorphisme identité et sur K via l'homomorphisme de Froebenius $a \mapsto a^p$.

Soit M un module simplicial tel que $H_0[M] = 0$. Notons J_n le sous-module de $H[SM]$ engendré par les produits non triviaux de degré n et par toutes les puissances divisées de degré n. Posons encore

$$Q(H[SM]) = H[SM]/J.$$

Par [1], théorème 17, on sait que $H[SM] \cong UQH[SM]$. Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} H[M] \arrow[d, "\iota"'] \arrow[dr, "f"] & \\ H[SM] \arrow[r] & QH[SM] \end{tikzcd}$$

Contrairement à ce qui se passe en caractéristique nulle, f n'est pas un isomorphisme, mais seulement une injection : si, par exemple $H[M]$ est de dimension 1 avec un générateur en degré 3, $H_{2p+1}[M] = 0$. Mais (en supposant par exemple $p > 2$), $UQH[SM] \cong H[SM] \cong UR_p^2L$, donc $QH[SM] \cong R_p^2L$, ce qui montre que $QH[SM]$ admet un générateur en degré $2p+1$.

On peut donc affirmer que $QH[SM] \cong H[M] \otimes V$.

En degré $2p+1$, il est possible de donner une caractérisation explicite de cet isomorphisme; nous définissons d'abord deux homomorphismes:

$$\pi : K \otimes_{\bar{K}} H_3[M] \to Q_{2p+1}H[SM]$$

est l'homomorphisme composé

$$K \otimes_{\bar{K}} H_3[M] \xrightarrow{\iota} K \otimes_{\bar{K}} H_3[SM] \xrightarrow{\tilde{h}} H_{2p+1}[SM] \to Q_{2p+1}(H[SM])$$

et l'homomorphisme

$$\eta : QH[SM] \to H[M]$$

est induit par la surjection canonique $SM \to M$.

Remarquons que η est bien défini car un produit non trivial de $H[SM]$ provient de l'image de l'homomorphisme $H[SM] \otimes H[SM] \to H[SM]$ qui se factorise à travers $H[S^2M]$.

<u>Théorème 8.5.</u>

Pour tout module simplicial M tel que $H_0[M] = 0$, on a une suite exacte naturelle

$$K \otimes_{\bar{K}} H_3[M] \xrightarrow{\pi} Q_{2p+1}H[SM] \xrightarrow{\eta} H_{2p+1}[M].$$

Démonstration.

π et η sont naturelles et les foncteurs Q, H et S commutent aux limites inductives. Il suffit donc de se restreindre au cas où $H[M]$ est de dimension finie. De plus, on voit facilement (en utilisant le théorème d'Eilenberg-Zilber) que

$$Q_{2p+1}H[S(M\oplus M')] = Q_{2p+1}H[SM] \oplus Q_{2p+1}H[SM'].$$

On peut donc supposer $H[M]$ de dimension 1 avec un générateur de degré $n > 0$.

Si $n \neq 3$, le corollaire 8.3 montre que $H_{2p+1}[SM] \cong U_{2p+1}H[M]$, donc que $Q_{2p+1}H[SM] \cong H_{2p+1}[M]$. Comme η n'est pas nulle lorsque $Q_{2p+1}H[SM]$ est non nul, η est un isomorphisme et la suite est exacte.

Si $n = 3$, les modules $K \otimes_{\bar{K}} H_3[M]$ et $Q_{2p+1}H[SM] = H_{2p+1}[SM]$ sont de dimension 1. Il suffit donc de prouver que π n'est pas l'application nulle.

Supposons par l'absurde que π est l'application nulle. Alors le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
K \otimes_{\bar{K}} H_3[M_i] \arrow[r, "h'_i"] \arrow[d] & H_{2p+1}[SM_i] \arrow[d] \\
K \otimes_{\bar{K}} H_3[\bigoplus_i M_i] \arrow[r, "h'"] & H_{2p+1}[S(\bigoplus_i M_i)]
\end{tikzcd}$$

montre que h' est nul pour tout module simplicial M, où $h' = h \circ \iota$.

Considérons encore le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
K \otimes_{\bar{K}} H_3[A] \arrow[dr, "\iota"] \arrow[drr, "h'"] \arrow[ddr, equal] & & \\
& K \otimes_{\bar{K}} H_3[SA] \arrow[r, "\tilde{h}"'] \arrow[d] & H_{2p+1}[SA] \arrow[d] \\
& K \otimes_{\bar{K}} H_3[A] \arrow[r, "\tilde{h}"] & H_{2p+1}[A]
\end{tikzcd}$$

Alors $\tilde{h}$ serait nulle pour toute algèbre simpliciale A telle que $H_0[A] = 0$, contrairement à la proposition 8.4.

APPENDICE.

Nous allons prouver en utilisant les résultats des paragraphes précédents qu'il existe un module simplicial connexe N tel que l'application h_N de la proposition 8.4 est non nulle. Nous ne considérerons que le cas $k = 1$ (seul utilisé par la suite) et, pour simplifier, nous ferons la démonstration dans le cas de la caractéristique 2. Introduisons d'abord quelques définitions :

Soit A une DGA-algèbre à puissances divisées et M un DGA-module sur A. Nous appellerons *M-famille complète* un quintuple (x,y,u,v,η) tel que $x \in M_r$ (r impair supérieur ou égal à 3), $y \in M_{2r-1}$, $u \in A_{r-1}$, $v \in A_{2r-2}$, $\eta \in M_o$, $\gamma^2(u) = v$, $\partial x = u \cdot \eta$ et $\partial y = v \cdot \eta$.

Soit $\pi : M \to N$ un homomorphisme de DGA-modules, et supposons que $A_m \cdot N = 0$ pour $m > 0$.

Si (x,y,u,v,η) est une M-famille complète, $\pi(x)$ et $\pi(y)$ sont des cycles. On définit $\hat{x} = [\pi(x)] \in H_r[N]$, $\hat{y} = [\pi(y)] \in H_{2r-1}[N]$. Le couple $(\hat{x},\hat{y})$ s'appelle la *π-sortie de la famille complète.*

Exemple.

Considérons la construction $C_2(\bar{V}) = (A,T,N)$ de la proposition 7.10. nous avons $A = P_2(y,2) \overset{\psi}{\cong} \otimes_{k\geq o} E_2(z_k, 2^{k+1})$ (lemme 7.5),

$T = \otimes_{k\geq o}(E_2(z_k, 2^{k+1}) \otimes P_2(y_{(k)}, 2^{k+1}+1))$

$N = \otimes_{k\geq o} P_2(y_{(k)}, 2^{k+1}+1)$.

T est un DGA-module sur A, et A est une Γ-algèbre. La structure de A-module de T est définie via ψ : pour $\lambda \in P_2(y,2)$, $t \in T$, $\lambda \cdot t = \psi(\lambda) \cdot t$.

On vérifie alors que $(y_{(o)}, y_{(1)}, y, \gamma^2(y), 1)$ est une T-famille complète, que la surjection $\pi : T \to N$ est un homomorphisme de A-modules tel que $A_m \cdot N = 0$ si $m > 0$, et que la π-sortie de la famille complète est $(y_{(o)}, y_{(1)})$.

Si A et A' sont deux DGA-algèbres à puissances divisées, M (resp. M') un DGA-module sur A (resp. sur A'), un Γ-*homomorphisme* $(\alpha,\tau) : (A,M) \to (A',M')$ consistera en un homomorphisme $\alpha : A \to A'$ de DGA-algèbres à puissances divisées et en un homomorphisme $\tau : M \to M'$ de DGA-modules.

Si $(\alpha,\tau) : (A,M) \to (A',M')$ est un Γ-homomorphisme et si (x,y,u,v,η) est une M-famille complète, alors $(\tau(x),\tau(y),\alpha(u),\alpha(v),\tau(\eta))$ est une M'-famille complète.

De plus, si $\pi : M \to N$ et $\pi' : M' \to N'$ sont des homomorphismes de DGA-modules (avec $A_m \cdot N = 0$ pour $m > 0$), si $\nu : N \to N'$ est un morphisme de DGA-modules tel que $\nu\pi = \pi'\nu$ et si $(\hat{x},\hat{y})$ est la π-sortie de la M-famille, alors $([\nu](\hat{x}),[\nu](\hat{y}))$ est la π'-sortie de la M'-famille.

Description de la méthode de démonstration.

Nous supposerons pour simplifier que le corps de base K est de caractéristique 2, mais le résultat est vrai en toute caractéristique.

Soit M un module simplicial tel que $H_n[M] = 0$ si $n \neq 3$, et $H_3[M] = K$. Nous allons montrer que

$$h_{SM} : H_3[SM] \to H_5[SM]$$

n'est pas nulle.

Nous associons à M une suite exacte $0 \to M' \to \Gamma \xrightarrow{\phi} M \to 0$ où $H_n[\Gamma] = 0$ pour tout $n \geq 0$. A cette suite nous pouvons faire correspondre un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[d] & SM' \arrow[r, equal] \arrow[d] & SM' \arrow[r, equal] \arrow[d] & SM' \arrow[d] \\
T \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, "\pi"'] & {|\phi|} \arrow[r, equal] \arrow[d, "\pi'"'] & {|\phi|} \arrow[r, "\tau''"] \arrow[d, "\pi''"'] & S\Gamma \arrow[d, "S\phi"'] \\
N \arrow[r, "\nu"] & \overline{SM} & {|SM|} \arrow[l, "\nu'"'] \arrow[r, "\nu''"] & SM
\end{tikzcd}$$

où (A,T,N) est la construction $C_2(\tilde{V})$ et $(SM',|\phi|,\overline{SM})$ la construction de la proposition 5.4.

Nous savons que ν, ν', ν'' induisent des isomomorphismes en homologie. Nous allons prouver que la T-famille complète $\mathcal{F} = (y_{(o)}, y_{(1)}, y, \gamma^2(y), 1)$ se transforme en une SΓ-famille complète $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{u}, \tilde{v}, 1)$ dont la Sϕ-sortie $([(S\phi)(\tilde{x})], [(S\phi)(\tilde{y})])$ est l'image par l'isomorphisme $[\nu''] \circ [\nu']^{-1} \circ [\nu]$ de la π-sortie de $\mathcal{F}$ et que $h([(S\phi)(\tilde{x})]) = [(S\phi)(\tilde{y})]$, donc que h est non nul, puisque $y_{(1)}$ n'est pas nul. Une partie des détails techniques de la démonstration est laissée aux soins du lecteur.

Démonstration.

Nous considérons donc une suite exacte $0 \to M' \to \Gamma \xrightarrow{\phi} M \to 0$ telle que $H_n[M] = 0$ si $n \neq 3$, $H_3[M] = K$ et $H_i[\Gamma] = 0$ pour tout $i \geqslant 0$. Par la proposition 5.4, il existe une construction $(SM', |\phi|, \overline{SM})$ avec

$|\phi|_{m,n} = \sum_{\Delta_m \to \Delta_{i_n} \to \cdots \to \Delta_{i_o}} S(\Gamma_m \times_{M_m} M_{i_o})$ et $\overline{SM}_n = \sum_{\Delta_{i_n} \to \cdots \to \Delta_{i_o}} (SM)_{i_o}$

Par l'exemple de la page 52, il existe un homomorphisme de constructions $(\alpha, \tau, \nu) : (A, T, N) \to (SM', |\phi|, \overline{SM})$ tel que $\alpha : A \to SM'$ est un homomorphisme de DGA-algèbres à puissances divisées. Posons $\alpha(y) = a$ (donc $[a] = y$). Alors $\mathcal{F} = (y_{(o)}, y_{(1)}, y, \gamma^2(y), 1)$ est une T-famille complète dont la π-sortie est $(y_{(o)}, y_{(1)})$, et $\mathcal{F}' = (\tau(y_{(o)}), \tau(y_{(1)}), a, \gamma^2(a), \tau(1))$ est une $|\phi|$-famille complète.

Nous poserons $\eta = \tau(1)$, donc $[\eta] = 1 \in H_o[T]$. La projection canonique $\pi' : |\phi| \to \overline{SM}$ est un homomorphisme de DGA-modules (par naturalité) et $\nu : N \to \overline{SM}$ en est également un. Il en résulte que $([\nu(y_{(o)})], [\nu(y_{(1)})])$ est la π'-sortie de $\mathcal{F}'$.

Comme $\overline{SM}_n = H_{o,n}[|SM|]$, π' se décompose en

$$|\phi| \xrightarrow{\pi''} |SM| \xrightarrow{\nu'} \overline{SM}$$

et π'', ν' sont des homomorphismes de DGA-modules. De plus, $H[\nu'] = [\nu']$ est un isomorphisme, donc la π''-sortie de $\mathcal{F}'$ est

$([\pi''\tau(y_{(o)})], [\pi''\tau(y_{(1)})]) = ([\nu']^{-1}[\nu(y_{(o)})], [\nu']^{-1}[\nu(y_{(1)})])$.

Nous définissons maintenant les applications τ'' et ν'' :

Le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\Gamma_r \times_{M_r} M_{i_0} \arrow[r] \arrow[d] & \Gamma_r \arrow[d, "\phi_r"] \\
M_{i_0} \arrow[r] & M_r
\end{tikzcd}$$

induit un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\sum_{\Delta_r \to \Delta_{i_0}} S(\Gamma_r \times_{M_r} M_{i_0}) = |\phi|_{r,0} \arrow[r] \arrow[d] & \sum_{\Delta_r \to \Delta_{i_0}} S\Gamma_r \arrow[r] \arrow[d] & S\Gamma_r \arrow[d, "S\phi_r"] \\
\sum_{\Delta_r \to \Delta_{i_0}} SM_{i_0} = |SM|_{r,0} \arrow[r] & \sum_{\Delta_r \to \Delta_{i_0}} SM_r \arrow[r] & SM_r
\end{tikzcd}$$

donc un nouveau diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
{|\phi|_r = \sum_{m+n=r} |\phi|_{m,n}} \arrow[dr] \arrow[drr, "\tau''"] \arrow[ddd, "\pi''_r"'] & & \\
 & {|\phi|_{r,0}} \arrow[r] \arrow[d] & S\Gamma_r \arrow[d, "S\phi_r"] \\
 & {|SM|_{r,0}} \arrow[r] & SM_r \\
{|SM|_r = \sum_{m+n=r} |SM|_{m,n}} \arrow[ur] \arrow[urr, "\nu''_r"'] & &
\end{tikzcd}$$

Remarquons que la structure de SM'-module de $S\Gamma$ est donnée par la composition

$$SM'_i \otimes S\Gamma_r \xrightarrow{\nabla} SM'_{i+r} \otimes S\Gamma_{i+r} \xrightarrow{\cong} S(M'_{i+r} \oplus \Gamma_{i+r}) \xrightarrow{S\sigma} S\Gamma_{i+r}$$

où $\sigma(m',g) = m' + g$.

Des arguments de naturalité montrent alors que τ'' est un morphisme de SM'-modules, donc que $(Id,\tau'') : (SM',|\phi|) \to (SM',S\Gamma)$ est un Γ-homomorphisme. Ainsi $\mathcal{F}'' = (\tau''\tau(y_{(0)}),\tau''\tau(y_{(1)}),a,\gamma^2(a),\tau''(\eta))$ est une $S\Gamma$-famille complète.

Or, $\tau''(\eta) = 1$: en effet, $|\phi|_0 = |SM|_{0,0}$ et $(S\Gamma)_0 = K = SM_0$, et $\tau''_0 : |SM|_{0.0} \to SM_0$ est l'augmentation définie à la page 21.

Si nous posons $\tau''\tau(y_{(0)}) = \tilde{x}$ et $\tau''\tau(y_{(1)}) = \tilde{y}$ nous voyons que $\mathcal{F}'' = (\tilde{x},\tilde{y},a,\gamma^2(a),1)$ est une $S\Gamma$-famille complète dont la $(S\phi)$-sortie est $((S\phi)(\tilde{x}),(S\phi)(\tilde{y})) = ([\nu'']\circ[\nu']^{-1}\circ[\nu](y_{(0)}),[\nu'']\circ[\nu']^{-1}\circ[\nu](y_{(1)})$.

Ainsi, $\gamma^2\partial\tilde{x} = \gamma^2(\tau''\tau(y\cdot 1)) = \gamma^2(a)\cdot 1 = \partial\tilde{y}$, d'où

$$h([(S\phi)(\tilde{x})]) = [(S\phi)(\tilde{y})],$$

ce qui montre que h n'est pas l'application nulle.

BIBLIOGRAPHIE.

1. André, M.: Hopf algebras with divided powers. J. Algebra 18, 19-50 (1971)
2. André, M.: Hopf and Eilenberg-MacLane algebras. In : Reports of the Midwest Category Seminar V, pp. 1-28. Berlin-Heidelberg-New York : Springer Lecture Notes 195, 1971
3. André, M.: Puissances divisées des algèbres simpliciales en caractéristique 2 et séries de Poincaré de certains anneaux locaux. Manuscripta Math. 18, 83-108 (1976)
4. André, M.: Homologie des algèbres commutatives. Berlin-Heidelberg-New York : Springer 1974
5. André, M.: La (2p+1)-ième déviation d'un anneau local (à paraître)
6. Bourbaki, N.: Eléments de mathématique, Algèbre I. Paris : Hermann 1970
7. Cartan, H.: Séminaire ENS 1954-1955. New York : Benjamin 1967
8. Dold, A., Thom, R.: Quasifaserüngen und unendliche symmetrische Produkte. Ann. of Math. 67, 239-281 (1958)
9. Eilenberg, S., MacLane, S.: On the groups H(Π,n) I. Ann. of Math. 58, 55-106 (1953)
10. MacLane, S.: Homology. New York : Springer 1967
11. May, P.: Simplicial objects in algebraic topology. Princeton : Van Nostrand 1967
12. Milnor, J., Moore, J.: On the structure of Hopf algebras. Ann. of Math. 81, 211-264 (1965)

CURRICULUM VITAE

Nom : NICOLLERAT-GILLARD

Prénoms : Marc-André

Date de naissance : 15 juin 1942

Etat-Civil : Marié

Lieu d'origine : Bex, Vaud

1963	Obtention d'une licence ès sciences mathématiques à l'Université de Lausanne (Certificats de Géométrie et Algèbre, d'Analyse et de Mécanique)
1963-1971	Enseignement au Gymnase du Belvédère, à Lausanne
1966	Obtention du certificat vaudois d'aptitude à l'enseignement
1971-1973	Etudes de troisième cycle à l'Université de Colombie Britanique, Vancouver (Canada)
1973	Obtention du titre de Master of Arts, UBC, Vancouver
1973-1977	Enseignement à mi-temps au Gymnase du Belvédère, à Lausanne, participation à divers cours des troisièmes cycles romand et de l'EPFL, rédaction d'une thèse sous la direction du Professeur Michel André.