

THÉORIE ET SOLUTION DES ÉQUATIONS  
EN MÉCANIQUE DES FLUIDES PARFAITS À ÉCOULEMENT  
PSEUDO-TRIDIMENSIONNEL

THÈSE N° 223 (1975)

présentée au département de Mathématiques  
Ecole polytechnique fédérale de Lausanne

pour l'obtention du grade de Docteur ès sciences  
par

Hubert FROIDEVAUX  
Ingénieur physicien EPFL  
originaire de Le Noirmont  
(Jura)

acceptée sur proposition des :

Prof. J. Descloux, rapporteur  
Prof. L. Borel, corapporteur  
Prof. G. Duvaut, corapporteur

À

MARITHE

ANTOINE, PIERRE-URSANNE

et "PHOTON"

6

## AVANT-PROPOS

Ce travail, suggéré par le Professeur L. BOREL et les Ateliers Mécaniques de Vevey via un article de C.-H. Wu (NACA, Technical Note 2604 (1952)), poursuit trois objectifs :

1. Etablir un modèle pour certains écoulements fluides. Ce modèle conduit en particulier à une équation aux dérivées partielles, non linéaires, pour une fonction de courant.
2. Poser correctement, pour l'équation, des problèmes relatifs aux écoulements (problème de Dirichlet, obstacles dans un canal, machines tournantes). Démontrer par une méthode constructive l'existence d'une solution.
3. Utiliser cette méthode et la méthode des éléments finis pour élaborer des programmes, assez généraux, de résolution numérique.

Je remercie tout ceux qui m'ont aidé à réaliser ce travail :

Le Professeur Jean DESCLOUX pour ses critiques constructives et l'aide constante qu'il m'a apportée afin que je reste rigoureux et précis.

Le Professeur H. MATZINGER pour ses encouragements et le temps qu'il m'a laissé pour mon travail personnel.

Messieurs les professeurs L. BOREL et G. DUVAUT pour avoir accepté d'être membres du jury.

Messieurs M. MEIER et P.-A. THOMI de l'Institut de Thermodynamique appliquée pour leurs conseils et leur aide lors de la programmation et pour avoir préparé les données de l'exemple relatif aux machines tournantes.

Madame C. HUSER qui a tapé le texte.

TABLE DES MATIERES

CHAPITRE 0

LIMINAIRE 3

CHAPITRE I

FLUIDE PARFAIT DANS UN REFERENTIEL NON GALILEEN

1. Description du fluide 5  
2. Equations de mouvement 5  
3. Equation de Beltrami 6  
4. Equations des fluides parfaits en coordonnées curvilignes 9

CHAPITRE II

ECOULEMENT PSEUDO-TRIDIMENSIONNEL

1. Hypothèses 13  
2. Existence d'une fonction de courant 14  
3. Un invariant de l'écoulement 17  
4. Equation de Bernoulli 18  
5. Equation de la fonction de courant 19  
6. Equation de la fonction de courant dans des cas particuliers 24  
7. Signification de la fonction de courant 29  
8. Un problème aux limites 31  
9. L'équation de Bernoulli 34

CHAPITRE III

EXISTENCE ET UNICITE DE PROBLEME D'ECOULEMENTS PSEUDO-TRIDIMENSIONNELS

1. Introduction 41  
2. Equations et inéquations variationnelles dans un espace de Hilbert 43  
3. Espaces 49  
4. Problème de Dirichlet pour les fluides compressibles 51  
5. Obstacles dans un canal 72  
6. La machine tournante 77

CHAPITRE IV

APPROXIMATION PAR GALERKIN DES PROBLEMES DU CHAPITRE III

1. Généralités 86  
2. Problème exacte et problème approché 87

CHAPITRE V

APPLICATIONS NUMERIQUES

1. Problème de Dirichlet 89  
2. Une machine tournante 101

CHAPITRE 0

LIMINAIRE

Considérons une turbomachine quelconque (fig. 1), si nous voulons étudier l'écoulement d'un fluide parfait compressible à travers ce système, il paraît naturel

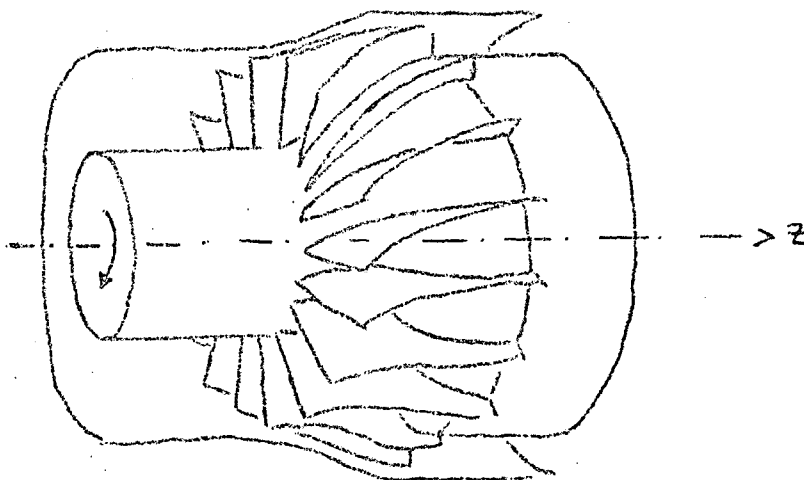


Fig. 1

de le faire dans un référentiel  $T$  lié à la partie tournante de la machine. Si on pose le problème de façon générale, les équations du mouvement du fluide ont la forme 2.1, 2.2, 2.3, 2.4, plus des conditions aux limites et des conditions initiales. Ce problème (en particulier sa résolution numérique) est trop compliqué, raison pour laquelle nous introduisons des hypothèses simplificatrices. Notre

but est de ramener le problème tridimensionnel à un problème bidimensionnel. En supposant que la vitesse de rotation  $\vec{\Omega}$  est constante, on peut faire l'hypothèse raisonnable que l'écoulement est stationnaire. Si toutes les données sont à symétrie de révolution, l'écoulement est à symétrie de révolution et les lignes de courant se trouvent sur des surfaces de révolution, alors on fait l'hypothèse que ces surfaces (de courant) sont connues et on étudie l'écoulement sur chaque surface séparément (ceci grâce à l'absence de viscosité).

Dans le cas général on supposera connue une famille de surfaces de courant sur lesquelles s'écoule le fluide. Avec ces hypothèses il est alors possible d'obtenir une relation (II.3.3) généralisant le théorème de Helmholtz, disant que pour un fluide compressible, barotrope, plan,  $\frac{\omega}{\rho} = \text{constante}$  le long des lignes de courant, où  $\omega$  est le rotationnel de la vitesse et  $\rho$  est la densité de masse. A l'aide de cette relation on obtient (Serrin[1]) l'équation bien connue de la mécanique des fluides compressibles plans. Nous procédons de la même manière avec la généralisation du théorème de Helmholtz et obtenons l'équation (II.5.3) puis (II.5.12). Cette équation (II.5.3) avec des conditions aux limites appropriées permet alors d'étudier, de calculer l'écoulement sur une surface de courant donnée (chapitres III, IV et V).

Pour des considérations sur les turbomachines on peut consulter L. Borel et J. Chappuis [1] et P. Suter [1], Th. Bovet [1].

Dans  $T$  les équations de mouvement d'un fluide parfait sont : (J. Serrin [1] ou L. Landau et E. Lifchitz [1]).

L'équation de continuité :

$$2.1. \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{w}) = 0$$

L'équation d'Euler :

$$2.2. \quad \frac{d\vec{w}}{dt} = \vec{f} - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + 2\vec{w} \wedge \vec{\Omega} + \vec{\Omega} \wedge (\vec{x} \wedge \vec{\Omega})$$

Les deux derniers termes sont dues au fait que  $T$  n'est pas galiléen.

L'équation de continuité de l'entropie :

$$2.3. \quad \frac{ds}{dt} = 0$$

L'équation d'état :

$$2.4. \quad p(\vec{x}, t) = p(\rho(\vec{x}, t), s(\vec{x}, t))$$

### 3. Equation de Beltrami

#### Hypothèses

3.1.  $s(\vec{x}, t)$  est constante dans tout le fluide au temps  $t=0$  et par conséquent pour tout  $t>0$ .

3.2.  $\vec{f} = -\operatorname{grad} U$  ;  $\vec{f}$  dérive d'un potentiel et est indépendant du temps.

De 3.1. on déduit que la pression dépend uniquement de la masse spécifique et l'équation d'état 2.4. se réduit à :

$$3.3. \quad p(\vec{x}, t) = h(\rho(\vec{x}, t))$$

Un fluide dans lequel l'équation 3.3. est satisfaite est dit barotrope.

La relation 3.3. permet d'affirmer l'existence d'une fonction  $F(\vec{x}, t)$  telle que

$$3.4. \quad \left(\frac{1}{\rho} \text{grad } p\right)(\vec{x}, t) = (\text{grad } F)(\vec{x}, t)$$

Par un calcul élémentaire on obtient :

$$3.5. \quad \vec{\Omega} \wedge (\vec{x} \wedge \vec{\Omega}) = \text{grad } \frac{\Omega^2 r^2}{2}$$

$r$  étant la distance du point  $P$  ( $OP = \vec{x}$ ) à l'axe de rotation de  $T$ .

#### Définitions

$$3.6. \quad V(\vec{x}, t) = U(\vec{x}, t) + F(\vec{x}, t) - \frac{\Omega^2 r^2}{2}$$

$$3.7. \quad \vec{\omega}(\vec{x}, t) = \text{rot } \vec{w}(\vec{x}, t)$$

$$3.8. \quad H(\vec{x}, t) = V(\vec{x}, t) + \frac{1}{2} |\vec{w}|^2(\vec{x}, t)$$



Avec 3.2., 3.4. et 3.6. l'équation d'Euler 2.2. s'écrit :

$$3.9. \quad \frac{d\vec{w}}{dt} = -\text{grad } V - 2\vec{\Omega}\Lambda\vec{w}$$

Or on sait qu'avec 3.7. et une identité vectorielle connue l'accélération s'écrit :

$$3.10. \quad \frac{d\vec{w}}{dt} = \frac{\partial\vec{w}}{\partial t} + (\vec{w}.\text{grad})\vec{w} = \vec{\omega}\Lambda\vec{w} + \frac{1}{2}\text{grad}|\vec{w}|^2 + \frac{\partial\vec{w}}{\partial t}$$

Et avec 3.8., 3.9. devient :

$$3.11. \quad \frac{\partial\vec{w}}{\partial t} + (\vec{\omega}+2\vec{\Omega})\Lambda\vec{w} + \text{grad } H = 0$$

En prenant le rotationnel de 3.11. et utilisant l'identité vectorielle

$$\text{rot}(\vec{a}\Lambda\vec{b}) = \vec{a} \text{ div } \vec{b} - \vec{b} \text{ div } \vec{a} + (\vec{b}.\text{grad})\vec{a} - (\vec{a}.\text{grad})\vec{b}$$

et l'équation de continuité 2.1. on obtient l'équation de Beltrami :

$$3.12. \quad \frac{d}{dt} \left[ \frac{\vec{\omega}+2\vec{\Omega}}{\rho} \right] = \left[ \frac{\vec{\omega}+2\vec{\Omega}}{\rho} \cdot \text{grad} \right] \vec{w}$$

Remarque (Théorème de Bernoulli)

Si on suppose que le mouvement du fluide est stationnaire et tel que  $(\vec{\omega}+2\vec{\Omega})\Lambda\vec{w} = 0$  dans une région du fluide, alors 3.11. montre que dans cette région  $H(\vec{x})$  est constant.

4. Equations des fluides parfaits en coordonnées curvilignes

Pour les notions relatives aux coordonnées curvilignes on se reportera au livre de Lichnerowicz, Eléments de calcul tensoriel, pages 78 et suivantes.

Soit  $(x^1, x^2, x^3)$  les coordonnées d'un point  $M$  dans  $T$  et  $y^1, y^2, y^3$  les coordonnées curvilignes de  $M$ ,

$$4.1. \quad x^i = x^i(y^1, y^2, y^3) \quad i = 1, 2, 3$$

$$4.2. \quad \vec{e}_i = \frac{\partial \vec{x}}{\partial y^i} \quad i = 1, 2, 3$$

le repère naturel en  $M$ ,

$$4.3. \quad g_{ij} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j \quad i, j = 1, 2, 3$$

le tenseur métrique,

$$4.4. \quad \Gamma_{k i}^j \quad i, j, k = 1, 2, 3$$

les symboles de Christoffel possédant la propriété importante de symétrie

$$4.5. \quad \Gamma_{k i}^j = \Gamma_{i k}^j .$$

Soit un champ de vecteur  $\vec{v}(M)$ . Avec la convention d'Einstein on peut écrire

$$4.6. \quad \vec{v}(M) = v^i(M) \vec{e}_i(M) .$$

$v^i(M)$ ,  $i = 1, 2, 3$  sont les composantes contravariantes de  $\vec{v}$  en  $M$ . La notion généralisant celle de dérivée de champ vectoriel en coordonnées rectilignes est la dérivée covariante, définie par :

$$4.7. \quad \frac{Dv^i}{Dy^k} = v^i{}_{,k} = \frac{\partial v^i}{\partial y^k} + \Gamma_{kh}^i v^h$$

si la dérivée covariante d'un champ vectoriel est identiquement nulle, le champ est uniforme, c'est-à-dire qu'il forme une seule classe d'équivalence pour la relation d'équipollence.

Dans un système de coordonnées curvilignes, la divergence du champ  $\vec{v}$  s'écrit :

$$4.8. \quad \text{div } \vec{v} = v^i{}_{,i} = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial y^i} \{ \sqrt{|g|} v^i \}$$

avec  $g = \det(g_{ij})$

Alors l'équation de continuité 2.1. s'écrit :

$$4.9. \quad \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial y^i} \{ \sqrt{|g|} \rho w^i \} \right) (y^1, y^2, y^3, t) = 0$$

Soit  $\varphi(y^1, y^2, y^3)$  un champ scalaire, le vecteur de composante covariante  $\frac{\partial \varphi}{\partial y^k} = \partial_k \varphi$  est le gradient de  $\varphi$ .

$$4.10. \quad (\text{grad } \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial y^k} g^{ki} \vec{e}_i)(y^1, y^2, y^3)$$

$$\text{avec } g^{ki} g_{ie} = \delta^k_e .$$

Avec ces définitions l'équation de continuité de l'entropie 2.3. devient :

$$4.11. \quad \left( \frac{\partial}{\partial t} s + w^k \frac{\partial}{\partial y^k} s \right)(y^1, y^2, y^3, t) = 0 .$$

La forme de l'équation d'Euler en coordonnées curvilignes ne nous sera d'aucune utilité. Exprimons l'équation de Beltrami 3.12. Le premier membre n'est pas autre chose que la dérivée totale absolue par rapport au temps du champ  $\frac{\vec{\omega} + 2\vec{\Omega}}{\rho}$ . En posant

$$4.12. \quad (\vec{a} = \frac{\vec{\omega} + 2\vec{\Omega}}{\rho})(y^1, y^2, y^3, t) \text{ on obtient :}$$

$$4.13. \quad \left( \frac{d\vec{a}}{dt} \right)^i = \frac{\partial a^i}{\partial t} + w^k \frac{\partial a^i}{\partial y^k} + \Gamma_{kl}^i w^k a^l \quad i = 1, 2, 3$$

Et le deuxième membre devient :

$$4.14. \quad ((\vec{a} \text{ grad } \vec{w})^i = a^k \left[ \frac{\partial w^i}{\partial y^k} + \Gamma_{kl}^i w^l \right]$$

Alors en égalant 4.13. et 4.14. on obtient :

$$4.15. \quad \frac{\partial a^i}{\partial t} + w^k \frac{\partial a^i}{\partial y^k} + \Gamma_{kl}^i w^k a^\ell = a^k \left[ \frac{\partial w^i}{\partial y^k} + \Gamma_{kl}^i w^\ell \right]$$

et après simplification :

$$4.16. \quad \frac{\partial a^i}{\partial t} + w^k \frac{\partial a^i}{\partial y^k} - a^k \frac{\partial w^i}{\partial y^k} = 0 \quad i = 1, 2, 3$$

$$\vec{a} = \frac{\vec{\omega} + 2\vec{\Omega}}{\rho}$$

## CHAPITRE II

### ÉCOULEMENT PSEUDO-TRIDIMENSIONNEL

#### 1. Hypothèses

Définition 1.1. Une surface de courant  $\Sigma$  est une surface telle qu'en tout point  $P \in \Sigma$  le vecteur vitesse du fluide en  $P$ ,  $\vec{w}(P)$ , soit contenu dans le plan tangent en  $P$  à  $\Sigma$ .

#### Hypothèses

1.2. Le mouvement du fluide dans  $T$  est stationnaire, c'est-à-dire que  $\frac{\partial}{\partial t} \equiv 0$ .

1.3. Il existe une famille à un paramètre  $\Sigma(y^3)$  de surfaces de courant telle que :

a) Tout point de la portion fluide considérée appartient à une surface de la famille  $\Sigma(y^3)$ .

b) Si  $x^i = x^i_{y^3}(y^1, y^2)$   $i = 1, 2, 3$

sont les équations paramétriques de la surface de courant  $\Sigma(y^3)$  alors  $y^1, y^2, y^3$  constituent un système de coordonnées curvilignes

$$x^i = x^i(y^1, y^2, y^3) \quad i = 1, 2, 3,$$

avec  $y^3 = \text{cste}$  est l'équation de  $\Sigma(y^3)$ .

On appellera  $E$  le système de coordonnées curvilignes précédent et  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  son repère naturel associé.

Dans  $E$  à cause du fait que  $y^3 = \text{cste}$  est une surface de courant la troisième composante contravariante de la vitesse du fluide est nulle et

$$1.4. \quad (\vec{w} = w^1 \vec{e}_1 + w^2 \vec{e}_2)(y^1, y^2, y^3) .$$

#### Définition 1.2.

On dira qu'un fluide est à écoulement pseudo-tridimensionnel si :

Il est stationnaire.

Il admet une famille de surfaces de courant satisfaisant les hypothèses précédentes.

## 2. Existence d'une fonction de courant

Soit un fluide à écoulement pseudo-tridimensionnel.

L'équation de continuité est simplement  $\text{div}(\rho \vec{w}) = 0$  et dans  $E$  elle s'écrit à cause de I.4.8 et 1.4.

$$2.1. \quad \frac{\partial}{\partial y^1} (\sqrt{|g|} \rho w^1) + \frac{\partial}{\partial y^2} (\sqrt{|g|} \rho w^2) = 0 .$$

Considérons une surface de courant  $\Sigma(\mu)$  d'équation

$$2.2. \quad \begin{cases} x^i = x_{\mu}^i(y^1, y^2) & i = 1, 2, 3 \\ (y^1, y^2) \in D \subset \mathbb{R}^2 \end{cases},$$

$D$  n'est pas nécessairement simplement connexe. Soit  $\mathcal{C} \subset D$  une courbe fermée, simple, rectifiable d'équation paramétrique :

$$2.3. \quad \begin{aligned} y^i &= \varphi^i(s) & 0 \leq s \leq s_0, & \quad i = 1, 2 \\ \varphi^i &\in C^1 \end{aligned}$$

telle que :

$$2.4. \quad x^i = x_{\mu}^i(\varphi^1(s), \varphi^2(s)) \quad i = 1, 2, 3 \quad 0 \leq s \leq s_0$$

sont les équations paramétriques d'une courbe  $\bar{\mathcal{C}}$  le long de laquelle la vitesse du fluide est tangente. ( $\bar{\mathcal{C}}$  est l'intersection d'un obstacle et de la surface de courant  $\Sigma(\mu)$ ). En un point  $P \in \bar{\mathcal{C}}$  soient :

$$2.5. \quad \vec{N} = \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 : \text{normale en } P \text{ à } \Sigma(\mu).$$

$$2.6. \quad \vec{T} = \frac{dy^1}{ds} \vec{e}_1 + \frac{dy^2}{ds} \vec{e}_2 : \text{tangente en } P \text{ à } \bar{\mathcal{C}}.$$

$$2.7. \quad \vec{n} = \vec{T} \wedge \vec{N} : \text{normale à } \bar{\mathcal{C}} \text{ en } P \text{ et tangente à } \Sigma(\mu).$$

En posant  $\delta = g_{11}g_{22} - g_{12}^2$  on a :

$$2.8. \quad \Phi(\bar{\mathcal{C}}) = \oint_{\bar{\mathcal{C}}} \frac{\sqrt{|g|}}{\delta} \rho \vec{w} \cdot \vec{n} \, ds = 0$$



Explicitons le calcul de  $\Phi(\bar{\mathcal{C}})$  :

$$\begin{aligned} \vec{n} &= \left( \frac{dy^1}{ds} \vec{e}_1 + \frac{dy^2}{ds} \vec{e}_2 \right) \wedge (\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2) = \\ &= \frac{dy^1}{ds} (g_{12} \vec{e}_1 - g_{11} \vec{e}_2) + \frac{dy^2}{ds} (g_{22} \vec{e}_1 - g_{12} \vec{e}_2) \end{aligned}$$

et avec 1.4.

$$\vec{w} \cdot \vec{n} = \delta \left[ w^1 \frac{dy^2}{ds} - w^2 \frac{dy^1}{ds} \right]$$

d'où

$$2.9. \quad \Phi(\bar{\mathcal{C}}) = \oint_{\bar{\mathcal{C}}} \sqrt{|g|} \rho \left[ w^1 dy^2 - w^2 dy^1 \right] = 0$$

2.1. et 2.9. montrent qu'il existe une fonction de courant  $\psi = \psi(y^1, y^2, y^3)$  telle que :

$$2.10. \quad \boxed{\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial y^1} &= - \sqrt{|g|} \rho w^2 \\ \frac{\partial \psi}{\partial y^2} &= \sqrt{|g|} \rho w^1 \end{aligned}}$$

Remarque 2.1.

La courbe

$$2.11. \quad \begin{cases} y^3 = \mu \\ \psi(y^1, y^2, y^3) = \text{cste.} \end{cases}$$

est une ligne de courant, ou un ensemble de lignes de courant.

### 3. Un invariant de l'écoulement

Considérons un fluide à écoulement pseudo-tridimensionnel et exprimons dans  $E$  l'équation I.4.16.

$$3.1. \quad w^k \frac{\partial a^i}{\partial y^k} - a^k \frac{\partial w^i}{\partial y^k} = 0 \quad i = 1, 2, 3$$

avec  $w^3 = 0$  dans  $E$ , on obtient pour  $i = 3$

$$3.2. \quad w^1 \frac{\partial a^3}{\partial y^1} + w^2 \frac{\partial a^3}{\partial y^2} = 0$$

Equation montrant que  $a^3$  est constante le long des lignes de courant, d'où

#### Théorème 3.1.

Dans un fluide parfait, barotrope, à écoulement pseudo-tridimensionnel, dont les forces extérieures dérivent d'un potentiel, on a :

$$3.3. \quad \frac{\omega^3 + 2\Omega^3}{\rho} = \underline{\text{constante le long des lignes de courant}}$$

Une ligne de courant étant décrite par 2.11., on peut écrire 3.3. sous la forme :

$$3.4. \quad \frac{\omega^3 + 2\Omega^3}{\rho} = G(\psi, y)$$

avec  $y = (y^1, y^2, y^3)$ .

Remarque 3.1.

Pour un fluide plan, (i.e. les surfaces de courant sont des plans parallèles), avec  $\vec{\Omega} = 0$ , 3.3. devient  $\frac{\omega}{\rho} = \text{cste}$  le long des lignes de courant.

Ce résultat est classique. (Voir J. Serrin [1] p. 152)

4. Equation de Bernoulli

Pour un fluide à écoulement stationnaire, l'équation 1.3.11. s'écrit :

$$4.1. \quad (\vec{\omega} + 2\vec{\Omega}) \wedge \vec{w} = - \text{grad } H$$

Calculons alors la dérivée substantielle de  $H$  :

$$4.2. \quad \frac{dH}{dt} = \text{grad } H \cdot \vec{w} = -((\vec{\omega} + 2\vec{\Omega}) \wedge \vec{w}) \cdot \vec{w} = 0$$

donc  $H$  est constante le long des lignes de courant.

Théorème 4.1.

Dans un fluide parfait, barotrope, à écoulement permanent, dont les forces extérieures dérivent d'un potentiel, la fonction :

$$4.3. \quad H = \frac{1}{2} |\vec{w}|^2 - \frac{\Omega^2 r^2}{2} + U + F$$

est constante le long des lignes de courant.

$U$  est le potentiel des forces extérieures et  $\frac{1}{\rho} \text{grad } p = \text{grad } F$ .

5. Equation de la fonction de courant

Donnons une expression de  $\omega^3$  à l'aide de la fonction de courant.

$$\vec{\omega} = \text{rot } \vec{w} \quad \text{d'où}$$

$$5.1. \quad \omega^3 = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \left[ \frac{\partial}{\partial y^1} w_2 - \frac{\partial}{\partial y^2} w_1 \right],$$

$$\text{d'autre part : } w_j = g_{ji} w^i \quad j = 1, 2$$

et avec 2.10. on obtient :

$$5.2. \quad \omega^3 \sqrt{|g|} = \frac{\partial}{\partial y^1} \left[ \frac{1}{\rho \sqrt{|g|}} \left( g_{21} \frac{\partial \psi}{\partial y^2} - g_{22} \frac{\partial \psi}{\partial y^1} \right) \right] -$$

$$- \frac{\partial}{\partial y^2} \left[ \frac{1}{\rho \sqrt{|g|}} \left( g_{11} \frac{\partial \psi}{\partial y^2} - g_{12} \frac{\partial \psi}{\partial y^1} \right) \right]$$

Posons

$$h_{11} = g_{22} ; h_{22} = g_{11} ; h_{12} = -g_{21}$$

Alors l'équation 5.2., après avoir éliminé  $\omega^3$  avec 3.4., s'écrit :

$$5.3. \quad - \sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial}{\partial y^j} \left\{ \frac{h_{ij} \psi_{,i}}{\rho \sqrt{|g|}} \right\} = \sqrt{|g|} \{ \rho G(\psi, y) - 2\Omega^3 \}$$

C'est l'équation de la fonction de courant pour un fluide parfait à écoulement pseudo-tridimensionnel. Toutes les fonctions apparaissant dans l'équation 5.3. dépendent des trois variables  $y^1, y^2, y^3$ .

Pour la suite de ce paragraphe on suppose que les coordonnées curvilignes  $y^1, y^2, y^3$  sont telles que

$$g_{12} = g_{21} = 0 \quad \text{alors en posant}$$

$$h_{11} = h_1 \quad \text{et} \quad h_{22} = h_2, \quad 5.3. \text{ devient :}$$

$$5.4. \quad - \sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial y^i} \left\{ \frac{h_i \psi_{,i}}{\rho \sqrt{|g|}} \right\} = \sqrt{|g|} \{ \rho G(\psi, y) - 2\Omega^3 \}$$

Il est aisé de se rendre compte que tous les résultats de la suite de ce paragraphe sont encore valables pour 5.3.

Avec 2.10., 5.4. s'écrit :

$$5.5. \quad - \sum_{i=1}^2 \partial_i \left\{ \frac{h_i \psi_{,i}}{\sqrt{|g|}} \right\} - \rho_{,1} w_2 + \rho_{,2} w_1 = \rho \sqrt{|g|} \{ \rho G(\psi, y) - 2\Omega^3 \}$$

On veut éliminer  $\rho_{,1}$  et  $\rho_{,2}$  de l'équation 5.5.

On effectue ce calcul en utilisant une méthode semblable à celle de J. Serrin [1] pages 191-192.

On part de l'équation de Bernoulli (4.1).

$$5.6. \quad (\vec{\omega} + 2\vec{\Omega}) \wedge \vec{w} = - \text{grad } H$$

$$H = \frac{1}{2} |\vec{w}|^2 - \frac{\Omega^2 r^2}{2} + U + F$$

$$\frac{1}{\rho} \text{grad } p = \text{grad } F$$

On définit :

$$c^2 = \frac{\partial p}{\partial \rho} : \text{vitesse locale du son.}$$

Alors avec  $U - \frac{\Omega^2 r^2}{2} = u$ , 5.6. s'écrit :

$$5.7. \quad (\vec{\omega} + 2\vec{\Omega}) \wedge \vec{w} = - \frac{c^2}{\rho} \text{grad } \rho - \text{grad } u - \text{grad } \frac{1}{2} |\vec{w}|^2$$

Une identité vectorielle donne :

$$\begin{aligned} |g| \rho^2 \text{grad } \frac{|\vec{w}|^2}{2} &= \text{grad } \frac{|g| \rho^2 |\vec{w}|^2}{2} - |g| \rho |\vec{w}|^2 \text{grad } \rho - \\ &\quad - \rho^2 \frac{|\vec{w}|^2}{2} \text{grad } |g| \end{aligned}$$

Avec 2.10. on obtient :

$$|g| \rho^2 |\vec{w}|^2 = |g| \rho^2 \left\{ \sum_{i=1}^2 g_{ii} (w^i)^2 \right\} = \sum_{i=1}^2 h_i (\psi_{,i})^2$$

Alors 5.7. devient :

$$5.8. \quad (\vec{\omega} + 2\vec{\Omega}) \Lambda \vec{w} = \frac{1}{\rho} (|\vec{w}|^2 - c^2) \text{grad } \rho - \text{grad } u \\ - \frac{1}{\rho^2 |g|} \text{grad } \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 h_i(\psi, \psi_i)^2 + \left| \frac{\vec{w}}{2} \right| \text{grad } \ln |g|$$

d'où

$$5.9. \quad \frac{\text{grad } \rho}{\rho} = (|\vec{w}|^2 - c^2)^{-1} \{ (\vec{\omega} + 2\vec{\Omega}) \Lambda \vec{w} + \text{grad } u \\ + \frac{1}{\rho^2 |g|} \text{grad } \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 h_i(\psi, \psi_i)^2 - \left| \frac{\vec{w}}{2} \right|^2 \text{grad } \ln |g| \}$$

Cette relation permet le calcul de  $\rho_{,1}$  et  $\rho_{,2}$  à condition que l'on ait calculé les deux premières composantes de  $(\vec{\omega} + 2\vec{\Omega}) \Lambda \vec{w}$ .

Soient deux champs vectoriels  $\vec{a}$  et  $\vec{b}$  alors :

$$(\vec{a} \Lambda \vec{b})_i = \frac{1}{2} \sqrt{|g|} \epsilon_{ijk} (a^j b^k - a^k b^j)$$

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{si } (i,j,k) \text{ est une permutation paire de } (1,2,3) \\ 0 & \text{si deux indices sont égaux} \\ -1 & \text{si } (i,j,k) \text{ est une permutation impaire de } (1,2,3) \end{cases}$$

avec cette règle :

$$((\vec{\omega} + 2\vec{\Omega}) \Lambda \vec{w})_1 = - \sqrt{|g|} (\omega^3 + 2\Omega^3) w^2$$

$$((\vec{\omega} + 2\vec{\Omega}) \Lambda \vec{w})_2 = \sqrt{|g|} (\omega^3 + 2\Omega^3) w^1.$$

Avec ces résultats, l'équation 5.5. s'écrit :

$$5.10. (|\vec{w}| - c^2) \{ \sqrt{|g|} (\rho G(\psi, y^3) - 2\Omega^3) + \frac{1}{\rho} \sum_{i=1}^2 \partial_i \left\{ \frac{h_i \psi_{,i}}{\sqrt{|g|}} \right\} \} =$$

$$\sqrt{|g|} (\omega^3 + 2\Omega^3) (w^1 w_1 + w^2 w_2) + \frac{1}{2\rho^2 |g|} (-w_2 \partial_1 \sum_{i=1}^2 h_i (\psi_{,i})^2 + w_1 \partial_2 \sum_{i=1}^2 h_i (\psi_{,i})^2)$$

$$- \frac{|\vec{w}}{2}|^2 (-w_2 \partial_1 \ln |g| + w_1 \partial_2 \ln |g|) + (-w_2 \partial_1 u + w_1 \partial_2 u)$$

$$\partial_j \sum_{i=1}^2 h_i (\psi_{,i})^2 = \sum_{i=1}^2 2 h_i \psi_{,i} \psi_{,ij} + \sum_{i=1}^2 (\psi_{,i})^2 h_{i,j}$$

Groupons dans 5.10. tous les termes en  $\psi_{,ij}$ .

$$5.11. \frac{1}{\rho} (|\vec{w}|^2 - c^2) \left\{ \sum_{i=1}^2 \frac{h_i}{\sqrt{|g|}} \psi_{,i1} \right\} - \frac{1}{\rho^2 |g|} \left\{ -w_2 \sum_{i=1}^2 h_i \psi_{,i} \psi_{,i1} + w_1 \sum_{i=1}^2 h_i \psi_{,i} \psi_{,i2} \right\} =$$

$$(c^2 - |\vec{w}|^2) \{ \sqrt{|g|} (\rho G(\psi, y^3) - 2\Omega^3) \} + |\vec{w}|^2 \sqrt{|g|} (\omega^3 + 2\Omega^3) +$$

$$\frac{|\vec{w}}{2}|^2 (w_2 \partial_1 \ln |g| - w_1 \partial_2 \ln |g|) - (w_2 \partial_1 u - w_1 \partial_2 u)$$

$$+ (c^2 - |\vec{w}|^2) \left( \frac{1}{\rho} \sum_{i=1}^2 \psi_{,i} \partial_i \frac{h_i}{\sqrt{|g|}} \right) + \frac{1}{2\rho^2 |g|} (-w_2 \sum_{i=1}^2 (\psi_{,i})^2 \partial_i h_i + w_1 \sum_{i=1}^2 (\psi_{,i})^2 \partial_2 h_i)$$

Calculons par exemple le coefficient de  $\psi_{,11}$

$$\psi_{,11} \left( \frac{1}{\rho} (|\vec{w}|^2 - c^2) \frac{h_1}{\sqrt{|g|}} + w_2 \frac{h_1 \psi_{,1}}{\rho^2 |g|} \right) \text{ et avec 2.10.}$$

$$\psi_{,11} \frac{h_1}{\rho \sqrt{|g|}} (w^1 w_1 - c^2)$$

et l'équation 5.11. s'écrit finalement :



$$5.12. \quad h_1(c^2 - w_1^2) \psi_{,11} - 2w_1 w_2 \psi_{,12} + h_2(c^2 - w_2^2) \psi_{,22} = f(\rho, \psi, \psi_{,1}, \psi_{,2}, \Omega)$$

C'est une équation quasi-linéaire d'ordre deux. Examinons son type en calculant le discriminant de la forme quadratique du premier membre de 5.12.

$$h_1(c^2 - w_1^2) h_2(c^2 - w_2^2) - (w_1 w_2)^2 = c^2 h_1 h_2 (c^2 - |\vec{w}|^2)$$

Comme  $h_1$ ,  $h_2$  et  $c^2$  sont des fonctions positives on obtient un résultat classique :

l'équation 5.12 a le type

elliptique si  $|\vec{w}|^2 < c^2$

hyperbolique si  $|\vec{w}|^2 > c^2$

## 6. Equation de la fonction de courant dans des cas particuliers

### 6.1. Surfaces de courant planes

#### Hypothèses

Les plans  $x^3 = \mu$  sont des surfaces de courant.

$$\Omega = 0$$

$u = 0$  : pas de pesanteur

$$\text{Alors } g_{11} = g_{22} = g_{33} = \sqrt{|g|} = 1, \quad g_{ij} = 0 \quad i \neq j$$

Sous ces conditions 5.12. s'écrit :

$$\begin{aligned} & (c^2 - w_1^2)\psi_{,11} - 2w_1w_2\psi_{,12} + (c^2 - w_2^2)\psi_{,22} = \\ & = -\rho(c^2 - |\vec{w}|^2)\rho G(\psi) - \rho|w|^2\omega \end{aligned}$$

car  $\omega^1 = \omega^2 = 0$ ,  $\omega^3 = \omega$

De plus on sait que  $G(\psi, y) = \frac{\omega}{\rho}$  d'où

$$6.1. \quad (c^2 - w_1^2)\psi_{,11} - 2w_1w_2\psi_{,12} + (c^2 - w_2^2)\psi_{,22} = -\rho c^2\omega$$

Cette équation est elle aussi classique en mécanique des fluides compressibles.

(J. Serrin [1], p. 191)

## 6.2. Surfaces de courant de révolution

### Hypothèses

a)  $U = 0$  pas de forces extérieures, alors  $u = -\frac{\Omega^2 r^2}{2}$

b) Les surfaces de courant  $\Sigma(\mu)$  sont de révolution d'axe  $\vec{\Omega}$ .

On choisit l'axe rectiligne  $Ox^3$  parallèle à  $\vec{\Omega}$ .

Les équations de la surface de courant  $\Sigma(\mu)$  sont :

$$6.2. \quad \begin{cases} x^1 = r \cos \varphi \\ x^2 = r \sin \varphi \\ x^3 = f(r, \mu) \end{cases}$$

$y^1 = r$ ,  $y^2 = \varphi$ ,  $y^3 = \mu$  constituent le système de coordonnées curvilignes dont le jacobien est :

$$6.3. \quad J = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & r \cos \varphi & 0 \\ \frac{1}{\lambda} & 0 & b \end{vmatrix} = b \neq 0$$

en posant :

$$6.4. \quad \frac{\partial x^3}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial r} = \frac{1}{\lambda} ; \quad \frac{\partial x^3}{\partial \mu} = \frac{\partial f}{\partial \mu} = b ; \quad 1 + \frac{1}{\lambda^2} = \Lambda .$$

Calculons les  $g_{ij}$

$$6.5. \quad \begin{aligned} g_{11} &= \Lambda ; & g_{12} &= g_{21} = 0 \\ g_{22} &= r^2 ; & g_{23} &= g_{32} = 0 \\ g_{33} &= b^2 ; & g_{31} &= g_{13} = \frac{b}{\lambda} . \end{aligned}$$

$$6.6. \quad g = \begin{vmatrix} \Lambda & 0 & \frac{b}{\lambda} \\ 0 & r^2 & 0 \\ \frac{b}{\lambda} & 0 & b^2 \end{vmatrix} = r^2 b^2 .$$

Calculons  $\Omega^3$  connaissant  $\vec{\Omega} (0,0,\Omega)$  :

$$\Omega_1 = \vec{\Omega} \cdot \vec{e}_1 = \frac{\Omega}{\lambda} ; \quad \Omega_2 = 0 ; \quad \Omega_3 = \vec{\Omega} \cdot \vec{e}_3 = \Omega b$$

d'où

$$6.7. \quad \Omega^3 = g^{31} \Omega_1 + g^{33} \Omega_3 = -\frac{1}{b\lambda} \cdot \frac{\Omega}{\lambda} + \frac{\Lambda}{b^2} \Omega \cdot b = \frac{\Omega}{b} .$$

Avec ces relations l'équation 5.12. s'écrit :

$$6.8. \quad \left\{ \begin{aligned} & r^2 (c^2 - w_r^2) \psi_{,rr} + \Lambda (c^2 - w_\varphi^2) \psi_{,\varphi\varphi} - 2w_r w_\varphi \psi_{,r\varphi} = \\ & \left\{ \frac{1}{r} (2|\vec{w}|^2 - c^2) + c^2 \partial_r \ln b - \Omega^2 r \right\} \psi_{,r} - \\ & - \left\{ \psi_{,\varphi}^2 \partial_r \Lambda + 2r \psi_{,\varphi}^2 \frac{\psi_{,r}}{2\rho r^2 b^2} \right. + \\ & \left. + 2\Omega \rho r^2 b^2 (c^2 - |\vec{w}|^2) - \rho^2 r^2 b^2 c^2 G(\psi, y) \right\} \end{aligned} \right.$$

et l'équation 5.4. s'écrit :

$$6.9. \quad \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{r \psi, r}{\rho b} \right\} + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left\{ \frac{\Lambda \psi, \varphi}{\rho r b} \right\} = - \rho r b G(\psi, \gamma) + 2 \Omega r .$$

Considérons le cas où les surfaces de courant  $\Sigma(\mu)$  ont des équations de la forme :

$$6.10. \quad \begin{cases} x^1 = h(x^3, \mu) \cos \varphi \\ x^2 = h(x^3, \mu) \sin \varphi \\ x^3 = x^3 \end{cases}$$

$$y^1 = \varphi, \quad y^2 = x^3, \quad y^3 = \mu$$

Pour  $\mu = \text{cste}$ ,  $\Sigma(\mu)$  est une surface de révolution d'axe  $ox^3$ .

Posons :

$$6.11. \quad \frac{\partial h}{\partial x^3} = \frac{1}{\gamma} ; \quad \frac{\partial h}{\partial \mu} = d ; \quad 1 + \frac{1}{\gamma^2} = \Gamma$$

Avec ces notations le jacobien de 6.10. est :

$$J = dh \neq 0$$

et les  $g_{ij}$  :

$$6.12. \quad \begin{aligned} g_{11} &= h^2 & ; & \quad g_{12} = g_{21} = 0 ; \\ g_{22} &= \Gamma & ; & \quad g_{23} = g_{32} = \frac{d}{\gamma} ; \\ g_{33} &= d^2 & ; & \quad g_{13} = g_{31} = 0 ; \\ g &= h^2 d^2 . \end{aligned}$$

Calculons  $\Omega^3$  connaissant  $\vec{\Omega}(0,0,\Omega)$

$$\Omega_1 = \vec{e}_1 \cdot \vec{\Omega} = 0 ; \quad \Omega_2 = \vec{e}_2 \cdot \vec{\Omega} = \Omega ; \quad \Omega_3 = \vec{e}_3 \cdot \vec{\Omega} = 0$$

d'où

$$6.13. \quad \Omega^3 = g^{32} \Omega_2 = \frac{\Omega}{\gamma d}$$

$$\text{De plus } u = - \frac{\Omega^2 h^2}{2}$$

Avec ces relations 5.12. s'écrit :

$$6.14. \quad \left\{ \begin{aligned} & \Gamma(c^2 - w^{\phi} w_{\phi}) \psi_{,\phi\phi} + h^2 (c^2 - w^{x^3} w_{x^3}) \psi_{,x^3 x^3} - \\ & 2w_{\phi} w_{x^3} \psi_{,\phi x^3} + \left\{ \frac{1}{\gamma d} (c^2 - 2|\vec{w}|^2) - \frac{c^2}{d^2} - \frac{\Omega^2 h^2}{\gamma} \right\} \psi_{,x^3} \\ & + \frac{\psi_{,x^3}}{2\rho h^2 d^2} \left\{ \psi_{,x^3} \frac{2h}{\gamma} + \psi_{,\phi}^2 \cdot \frac{\partial \Gamma}{\partial x^3} \right\} + \\ & + \rho^2 h^2 d^2 c^2 G(\psi, y) - 2\Omega \rho h^2 \frac{d}{\gamma} (c^2 - |\vec{w}|^2) = 0 \end{aligned} \right.$$

et 5.4. s'écrit :

$$6.15. \quad \frac{\partial}{\partial \phi} \left\{ \frac{\Gamma \psi_{,\phi}}{\rho h d} \right\} + \frac{\partial}{\partial x^3} \left\{ \frac{h^2 \psi_{,x^3}}{\rho h d} \right\} = - \rho h d G(\psi, y) + 2\Omega \frac{h}{\gamma}$$

### 6.3. Un cas particulier pour la famille $\Sigma(\mu)$

Dans les calculs pratiques on considère que le fluide s'écoule entre deux surfaces de courant  $\Sigma(0)$  et  $\Sigma(1)$ . On prendra alors comme surface de courant  $\Sigma(\mu)$  la surface donnée par :

$$6.16. \quad \Sigma(\mu) = \mu \Sigma(1) + (1-\mu) \Sigma(0) \quad \mu \in [0,1]$$

Sous cette hypothèse cherchons l'équation de la fonction de courant dans le cas 6.2. :

$$x^1 = r \cos \varphi$$

$$x^2 = r \sin \varphi$$

$$x^3 = \mu f(r) + (1-\mu)k(r)$$

$$f(r) = f(r,1) \quad k(r) = f(r,0) ;$$

on a :

$$\frac{1}{\lambda} = \mu f'(r) + (1-\mu)k'(r)$$

$$b = f(r) - k(r) .$$

### 7. Signification de la fonction de courant

Considérons un morceau de surface  $\Sigma$  limité par deux surfaces de courant  $\Sigma(\mu_1)$  et  $\Sigma(\mu_2)$ . Les équations paramétriques de  $\Sigma$  sont :

$$7.1. \quad x^i = x^i(y^1(t), y^2(t), \mu) \quad 0 \leq t \leq 1, \quad \mu_1 \leq \mu \leq \mu_2$$

Calculons le flux de  $\rho \vec{w}$  à travers  $\Sigma$ ,

$$7.2. \quad \phi(\Sigma) = \int_{\Sigma} \rho \vec{w} \cdot d\vec{\sigma} .$$

Calcul de  $d\vec{\sigma}$

$$\vec{E}_1 = \begin{pmatrix} \partial_t x^1 \\ \partial_t x^2 \\ \partial_t x^3 \end{pmatrix} = \partial_t y^1 \vec{e}_1 + \partial_t y^2 \vec{e}_2 ; \quad \vec{E}_2 = \begin{pmatrix} \partial_{\mu} x^1 \\ \partial_{\mu} x^2 \\ \partial_{\mu} x^3 \end{pmatrix} = \vec{e}_3$$

$$7.3. \quad d\vec{\sigma} = \vec{E}_1 \wedge \vec{E}_2 dt d\mu = (\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_3 \partial_t y^1 + \vec{e}_2 \wedge \vec{e}_3 \partial_t y^2) dt d\mu$$

$$7.4. \quad \vec{w} d\vec{\sigma} = (w^1 \vec{e}_1 + w^2 \vec{e}_2) \cdot d\vec{\sigma} =$$

$$= (w^1 \partial_t y^2 - w^2 \partial_t y^1) [\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3] d\mu dt$$

$$[\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3] = \vec{e}_1 \cdot (\vec{e}_2 \wedge \vec{e}_3)$$

En utilisant les relations 2.10 on obtient :

$$7.5. \quad \phi(\Sigma) = \int_{\mu_1}^{\mu_2} d\mu \int_0^1 \left( \frac{\partial \psi}{\partial y^1} \frac{\partial y^1}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial y^2} \frac{\partial y^2}{\partial t} \right) \frac{[\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3]}{\sqrt{|g|}} dt$$

$$\text{Or } [\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3] = \sqrt{|g|}$$

$$\text{d'où } \phi(\Sigma) = \int_{\mu_1}^{\mu_2} d\mu \int_0^1 \frac{d\psi}{dt} dt$$

et on obtient la formule :

$$7.6. \quad \phi(\Sigma) = \int_{\mu_1}^{\mu_2} \{ \psi(y^1(1), y^2(1), \mu) - \psi(y^1(0), y^2(0), \mu) \} d\mu$$

Cette formule permet, sous des conditions à préciser, de déterminer les conditions aux limites pour la fonction de courant.

8. Un problème aux limites

On particularise le fluide parfait en choisissant pour l'équation d'état I.3.3. ; l'équation des gaz parfaits

$$8.1. \quad p(\vec{x}, t) = ap^\gamma(\vec{x}, t)$$

a et  $\gamma$  étant des constantes telle que

$$8.2. \quad 1 < \gamma < 2 .$$

Dans  $T$  on considère un gaz parfait à écoulement pseudo-tridimensionnel. Soit  $\Sigma(\mu)$  une surface de courant de la famille définie en II.1. Les équations paramétriques de cette surface sont :

$$8.3. \quad x^i = x^i(y^1, y^2, \mu) \quad i = 1, 2, 3 ; (y^1, y^2) \in D \subset \mathbb{R}^2 ;$$

$D$  étant le domaine de définition des fonctions  $x^i$ . On suppose que les fonctions  $x^i$  sont très régulières i.e. :

$$8.4. \quad x^i \in C^\ell(\bar{D}) \quad i = 1, 2, 3 ; \quad \ell \geq 2 .$$

Sur  $D$  les fonctions suivantes sont aussi définies (4.3.)

$$8.5. \quad g_{ij} = g_{ij}(y^1, y^2, \mu) \quad i, j = 1, 2, 3 ,$$

$$8.6. \quad g = \det(g_{ij}) ,$$

$$g \in C^{\ell-1}(\bar{D}) \quad ; \quad g_{ij} \in C^{\ell-1}(\bar{D}) .$$



On suppose que le fluide est absolument irrotationnel sur  $\Sigma(\mu)$ , c'est-à-dire que

$$8.7. \quad \frac{\omega^3 + 2\Omega^3}{\rho} = 0, \quad (y^1, y^2) \in \bar{D}, \quad y^3 = \mu$$

Cette relation exprime que la troisième composante contravariante du rotationnel de la vitesse absolue (dans  $\tilde{T}$ ) est nulle.

On sait (2.2.) que sur  $\Sigma(\mu)$  le mouvement du fluide est décrit par une fonction de courant

$$8.8. \quad \bar{D} \ni (y^1, y^2) \longmapsto \psi(y^1, y^2) \in \mathbb{R}$$

Et sur  $\Sigma(\mu)$  l'équation de la fonction de courant 5.4. devient avec 8.8.

$$i \sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial y^i} \left[ \frac{h_i \psi_{,i}}{\rho \sqrt{|g|}} \right] = 2\sqrt{|g|} \Omega^3, \quad (y^1, y^2) \in \bar{D}$$

Si  $g_{12} \neq 0$  5.3. devient :

$$8.9. \quad \sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial}{\partial y^j} \left\{ \frac{h_{ij} \psi_{,i}}{\rho \sqrt{|g|}} \right\} = 2\sqrt{|g|} \Omega^3, \quad (y^1, y^2) \in \bar{D}$$

Le théorème 4.1. devient, avec l'équation d'état 8.1. et en supposant que  $U = 0$  (pas de pesanteur) :

$$8.10. \quad H = \frac{1}{2} |\vec{w}|^2 - \frac{\Omega^2 r^2}{2} + \frac{a\gamma}{\gamma-1} \rho^{\gamma-1}$$

est constante le long des lignes de courant. Alors on fait l'hypothèse que

$$8.11. \quad H \text{ est constante positive sur } \Sigma(\mu) .$$

Transformons 8.10. en utilisant la fonction de courant définie en 2.10., on obtient :

$$8.12. \quad |\vec{w}|^2 = \sum_{i=1}^2 w^i w_i = \sum_{i,j=1}^2 g_{ij} w^j w^i = \frac{1}{\rho^2 |g|} \sum_{i,j=1}^2 h_{ij} \psi_{,i} \psi_{,j}$$

et

$$8.13. \quad H = \frac{1}{2\rho^2 |g|} \sum_{i,j=1}^2 h_{ij} \psi_{,i} \psi_{,j} - \frac{\Omega^2 r^2}{2} + \frac{a\gamma}{\gamma-1} \rho^{\gamma-1}$$

$\rho$  dans 8.9. est, comme on le verra plus bas, une fonction de  $q_\psi^2 = \sum_{i,j=1}^2 h_{ij} \psi_{,i} \psi_{,j}$ , donnée explicitement par 8.13. et on note  $\rho(q_\psi^2)$  la valeur de cette fonction. Au paragraphe 2.5. on a vu que l'équation 8.9. est elliptique si  $|\vec{w}|^2 < c^2$ , condition qui s'écrit aussi :

$$8.14. \quad \sum_{i,j=1}^2 h_{ij} \psi_{,i} \psi_{,j} < a\gamma |g| \rho^{\gamma+1}(q_\psi^2)$$

Alors on pose le

#### Problème 8.1.

Etant donné  $\varphi : \partial D \rightarrow \mathbb{R}$ , existe-t-il une fonction

$\psi : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}$  satisfaisant 8.9., 8.13., 8.14. et  $\psi|_{\partial D} = \varphi$  ?

9. L'équation de Bernoulli

Etant données les constantes  $a > 0$ ,  $1 < \gamma < 2$ ,  $H > 0$  et  $\Omega$ , ainsi que les fonctions  $g, h_{ij} \in C^{\ell-1}(D)$ ,  $\ell \geq 2$ , l'équation de Bernoulli pour un gaz parfait est la relation

$$9.1. \quad \frac{q^2(x)}{2\rho^2(x)|g(x)|} - \frac{\Omega^2 r^2}{2} + \frac{a\gamma}{\gamma-1} \rho(x)^{\gamma-1} - H = 0, \quad x = (y^1, y^2) \in \bar{D}$$

liant les deux fonctions

$$\begin{aligned} q^2 &: \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}^+ \\ \rho &: \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}^+ \end{aligned}$$

9.1. montre que  $q^2$  est une fonction de  $x$  et de  $\rho$  :

$$9.2. \quad q^2(x) = \text{fonction}(x, \rho(x)) = q^2(x, \rho(x)) \quad x \in \bar{D}.$$

On définit la fonction

$$9.3. \quad \rho_0 : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}^+ \\ x \mapsto \rho_0(x) = \left[ \frac{\gamma-1}{a\gamma} \left( \frac{\Omega^2 r^2}{2} + H \right) \right]^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

et 9.1. s'écrit :

$$9.4. \quad \frac{q^2(x)}{2\rho^2(x)|g(x)|} + \frac{a\gamma}{\gamma-1} \left[ \rho(x)^{\gamma-1} - \rho_0(x)^{\gamma-1} \right] = 0$$

Considérons un point  $x_0 \in D$ , 9.4. définit une fonction  $q^2: I = ]\rho_S(x_0), \rho_0(x_0)[ \rightarrow \mathbb{R}^+$

par

$$9.5. \quad q^2(\rho) = 2\rho^2 |g(x_0)| \frac{a\gamma}{\gamma-1} [\rho_0(x_0)^{\gamma-1} - \rho^{\gamma-1}] \quad \rho \in I$$

$$\text{avec } \rho_s(x) = \left( \frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \rho_0(x) ;$$

on vérifie que pour  $\rho = \rho_s$  on a  $|\vec{w}| = c^2$ .

Proposition 9.1.

La fonction  $q^2 : I \rightarrow \mathbb{R}^+$  définie par 9.5. est décroissante et concave dans  $I$ .

En effet

$$9.6. \quad \frac{d}{d\rho} q^2(\rho) = \frac{2\rho |g(x_0)| a\gamma}{\gamma-1} \left[ 2\rho_0(x_0)^{\gamma-1} - (\gamma+1)\rho^{\gamma-1} \right]$$

est négative dans  $I$

et

$$9.7. \quad \frac{d}{d\rho} \left( \frac{d}{d\rho} q^2(\rho) \right) = 2 |g(x_0)| \frac{a\gamma}{\gamma-1} \left[ 2\rho_0(x_0)^{\gamma-1} - \gamma(\gamma+1)\rho^{\gamma-1} \right]$$

est négative dans  $I$ .

Proposition 9.2.

La proposition 9.1. montre que l'application 9.5. possède une application réciproque :

$$q^2 \longmapsto \rho(q^2)$$

$$9.9. \quad \rho : I = \left[ 0, q^2(\rho_s(x_0)) \right] \left[ \longrightarrow \right] \rho_s(x_0), \rho_0(x_0)$$

décroissante et concave.

Proposition 9.3.

Soit  $q^2 : I \rightarrow \mathbb{R}^+$  l'application 9.5., alors :

$$9.11. \quad \frac{q^2(\rho)}{\rho^2 |g(x_0)|} < a \gamma \rho^{\gamma-1}$$

Réciproquement si  $\rho > 0$  donné et

$$q^2 = 2\rho^2 |g(x_0)| \frac{a\gamma}{\gamma-1} \left[ \rho_0^{\gamma-1} (x_0) - \rho^{\gamma-1} \right] \text{ satisfait 9.11.}$$

alors  $\rho \in I$ .

Démonstration :

$\frac{d}{d\rho} q^2(\rho)$  s'écrit aussi :

$$\frac{d}{d\rho} q^2(\rho) = \frac{2}{\rho} (q^2(\rho) - \rho^2 |g(x_0)| a \gamma \rho^{\gamma-1})$$

Cette fonction doit être négative dans  $I$ , d'où 9.11.

La réciproque est évidente si on remarque que le graphe de  $q^2(\rho)$  est de la forme :

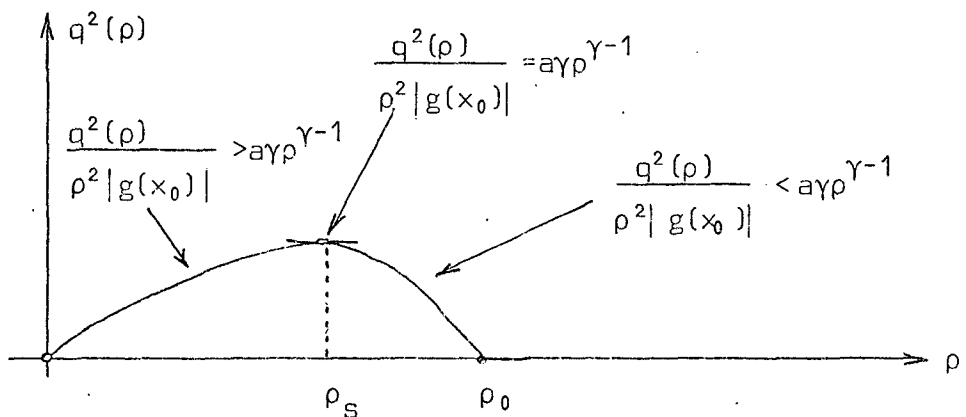


Fig. 9.1.

Les propositions 9.1., 9.2. et 9.3. sont valables quelque soit  $x_0 \in \bar{D}$  et ces résultats sont donc justes pour les fonctions  $\rho$  et  $q^2$  définies en 9.1. et 9.2. à condition que :

$$\rho : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}^+ \text{ satisfasse}$$

$$9.12. \quad \rho(x) \in ]\rho_s(x) ; \rho_0(x)] \quad \forall x \in \bar{D}$$

Définition 9.1.

Si 9.12. est satisfaite, on dit que  $\rho$  (ou  $|\vec{w}|$ ) est subsonique dans  $\bar{D}$ .

En résumé, si la fonction  $\rho : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}^+$  est subsonique dans  $\bar{D}$  alors :

$$9.14. \quad q^2(x, \rho(x)) \in [0, q^2(x, \rho_s(x))] \quad \forall x \in \bar{D}$$

et de plus

$$9.15 \quad \frac{q^2(x, \rho(x))}{\rho^2(x) |g(x)|} < \gamma^{-1} \quad \forall x \in \bar{D}$$

De plus si  $s$  est une fonction  $s : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}^+$  telle que  $s(x) \in [0, q^2(x, \rho_s(x))] \quad \forall x \in \bar{D}$  alors il existe une fonction unique  $\rho : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}^+$  subsonique dans  $\bar{D}$  telle que  $s(x) = q^2(x, \rho(x))$ .

Calculons la dérivée par rapport à  $\xi = q^2$  de la fonction  $\frac{1}{\rho}$  avec  $\rho$  définie en 9.9.. En utilisant l'équation de Bernoulli 9.4. on obtient :

$$9.16. \quad \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ \frac{1}{\rho(\xi)} \right] = \frac{1}{2|g|\rho^3} \cdot \frac{1}{a\gamma\rho^{\gamma-1} - \frac{\xi}{|g|\rho^2}} ; \rho \in ]\rho_s(x)\rho_0(x)] .$$

Il est immédiat que si  $\rho \rightarrow \rho_s$ , alors  $\frac{\partial}{\partial \xi} \left[ \frac{1}{\rho(\xi)} \right] \rightarrow \infty$ . Ce fait et les résultats du chapitre III justifient la définition suivante :

Définition 9.2.

Soit  $\lambda \in [0,1[$ ,

$$\rho_{s\lambda}(x) = \left[ \frac{2}{(\gamma-1)\lambda+2} \right]^{\frac{1}{\gamma-1}} \rho_0(x) \quad \forall x \in \bar{D}$$


---

$$A(\lambda) = \{ \rho \mid \rho(x) \in [\rho_{s\lambda}(x), \rho_0(x)] , \forall x \in \bar{D} \}$$


---

Alors la dérivée  $\frac{\partial}{\partial \xi} \left[ \frac{1}{\rho(\xi)} \right]$ ,  $\rho \in [\rho_{s\lambda}(x), \rho_0(x)]$  est bornée et on a :

$$9.17. \quad \left| \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ \frac{1}{\rho(\xi)} \right] \right| \leq \frac{(\gamma-1)\lambda+2}{2(1-\lambda)} \cdot \frac{1}{2|g|\rho_{s\lambda}^3} \cdot \frac{1}{\rho_0^{\gamma-1}} \cdot \frac{1}{a\gamma}$$

$\rho \in [\rho_{s\lambda}, \rho_0]$

L'estimation se fait en remplaçant dans 9.16.  $\frac{\xi}{|g|\rho^2}$  par

sa valeur donnée par l'équation de Bernoulli, on obtient :

$$9.18. \quad \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{1}{\rho(\xi)} \right) = \frac{1}{2|g|\rho^3} \cdot \frac{(\gamma-1)}{a\gamma} \frac{1}{(\gamma+1)\rho^{\gamma-1} - 2\rho_0^{\gamma-1}}$$

$\frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{1}{\rho(\xi)} \right)$  est une fonction décroissante de  $\rho$  qui sur

$[\rho_{s\lambda}, \rho_0]$  prend son maximum pour  $\rho = \rho_{s\lambda}$ .

Définition 9.3.

$\rho : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}^+$  est  $\lambda$ -subsonique,  $\lambda \in [0, 1[$ , si  $\rho \in A(\lambda)$ .

$q^2 : \bar{D} \rightarrow [0, q^2(x, \rho_{s\lambda}(x))] \quad \forall x \in \bar{D}$  est  $\lambda$ -subsonique.

Une fonction  $\psi : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}$  est  $\lambda$ -subsonique si

$q^2(x) = \sum_{i,j=1}^2 h_{ij}(x) \psi_i(x) \psi_j(x)$  est  $\lambda$ -subsonique.

Posons :

$$9.20. \quad \left\{ \begin{array}{l} Q(x) = 2\rho_{s\lambda}^2(x) |g(x)| \frac{a\gamma}{\gamma-1} [\rho_0^{\gamma-1}(x) - \rho_{s\lambda}^{\gamma-1}(x)] \\ Q : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R} \end{array} \right.$$

Définition 9.4.

On définit des ensembles de fonctions  $\lambda$ -subsoniques

$$V_{\ell, \lambda}(\bar{D}) = \{ \psi \in C^\ell(\bar{D}) : 0 \leq \sum_{i,j=1}^2 h_{ij} \psi_i \psi_j \leq Q \}$$

$$V_{\ell, \lambda, \phi}(\bar{D}) = \{ \psi \in C^\ell(\bar{D}) : \psi|_{\partial D} = 0, \phi \in V_{\ell, \lambda}(\bar{D}), \psi + \phi \in V_{\ell, \lambda}(\bar{D}) \}$$



Proposition 9.4.

Les ensembles  $V_{\ell, \lambda}(\bar{D})$  et  $V_{\ell, \lambda, \phi}(\bar{D})$  sont convexes.

Démonstration :

Introduisons les notations suivantes :

Soit  $y \in \bar{D}$ ,  $\eta, \psi$  deux fonctions réelles.

$$9.21. \quad ((\eta, \psi))(y) = \sum_{i, j=1}^2 h_{ij}(y) \eta_i(y) \psi_j(y) .$$

A cause des propriétés de  $h_{ij}(y)$ ,  $((\cdot, \cdot))$  est un produit scalaire de  $\mathbb{R}^2$  et  $\|\cdot\|(y) = ((\cdot, \cdot))(y)$  définit la norme associée.

Avec cette notation la définition de  $V_{\ell, \lambda}(\bar{D})$  devient :

$V_{\ell, \lambda}(\bar{D}) = \{\psi \in C^{\ell}(D) : 0 \leq \|\psi\|(g) \leq \sqrt{Q(y)}\}$  et cet ensemble est convexe, car si  $\psi, \eta \in V_{\ell, \lambda}(\bar{D})$ ,

$$\|t\psi + (1-t)\eta\|(y) \leq t\|\psi\|(y) + (1-t)\|\eta\|(y) \leq \sqrt{Q(y)}, \text{ donc}$$

$$t\psi + (1-t)\eta \in V_{\ell, \lambda}(\bar{D}) .$$

CHAPITRE IIIEXISTENCE ET UNICITE DE PROBLEMES D'ECOULEMENTS  
PSEUDO-TRIMENSIONNELS1. Introduction

Le but de ce chapitre est de poser convenablement quelques problèmes relatifs à la mécanique des fluides compressibles subsoniques, bidimensionnels et pseudo-tridimensionnels. Une des difficultés provient du fait que l'équation de la fonction de courant (sur une surface de courant donnée II.8) n'est pas toujours de type elliptique. Par contre si on remarque que l'équation est de type quasi-linéaire, sous forme divergente et "monotone" dans la partie subsonique, on simplifie considérablement les problèmes. On pourra par conséquent poser les problèmes sous forme variationnelle de deux manières différentes. Soit sous forme d'inéquations variationnelles dans le convexe des fonctions subsoniques, soit modifier l'équation en la rendant partout elliptique et alors on aura des équations variationnelles. Au §2 on expose les théorèmes constructifs relatifs aux équations et inéquations variationnelles. Il semble que ce soit Zarantonello [1] qui le premier ait utilisé ces méthodes. Browder, F.E. [1] signale l'existence de méthodes constructives pour l'obtention de solutions d'équations pour des opérateurs fortement monotones et lipchitziens. Petryshyn [1] a aussi utilisé des méthodes analogues pour résoudre certains problèmes linéaires et non-linéaires, ainsi que Brézis et Sibony [1] et Sibony [1]. Pour une théorie générale des problèmes non-linéaires on peut consulter Lions [1] et pour des applica-

tions à la physique et à la technique des inéquations variationnelles on peut consulter Duvaut-Lions [1] et Baiocchi et autres [1]. Au §4 on expose le problème de Dirichlet, au §5 le problème de l'écoulement d'un fluide autour d'obstacles et au §6 quelques problèmes typiques relatifs aux turbomachines.

2. Equations et inéquations variationnelles dans un espace de Hilbert

Soit  $H$  un espace de Hilbert réel de produit scalaire  $(\cdot, \cdot)$  et de norme  $\|\cdot\|$  et  $C$  un convexe fermé de  $H$ . Soit  $T$  une application (non nécessairement linéaire) définie sur  $C$  à valeur dans  $C$ .

2.1.  $T : C \rightarrow C$ .

$T$  est lipchitzien dans  $C$  si il existe une constante  $\mu$  tel que :

$$2.2. \quad \|T(\psi_2) - T(\psi_1)\| \leq \mu \|\psi_2 - \psi_1\| \quad \forall \psi_2, \psi_1 \in C.$$

$T$  est strictement contractant dans  $C$  si  $\mu < 1$ . Dans ce cas on sait que  $T$  a un point fixe unique dans  $C$ .

$T$  est fortement monotone dans  $C$  si il existé une constante  $\nu > 0$  tel que :

$$2.3. \quad (T(\psi_2) - T(\psi_1), \psi_2 - \psi_1) \geq \nu \|\psi_2 - \psi_1\|^2 \quad \forall \psi_2, \psi_1 \in C.$$

On désigne par  $P_C$  le projecteur de  $H$  sur  $C$ .

Soit  $\psi \in H$ , la projection  $P_C \psi \in C$  est caractérisée par :  
(Stampachia [1] p. 104-105)

$$2.4. \quad (P_C \psi - \psi, \eta - P_C \psi) \geq 0 \quad \forall \eta \in C.$$

De plus  $P_C$  est contractant dans  $H$ , c'est-à-dire que :

$$2.5. \quad \|P_C \psi_1 - P_C \psi_2\| \leq \|\psi_1 - \psi_2\| \quad \forall \psi_1, \psi_2 \in H.$$

Théorème 2.1.

Soit  $T : C \rightarrow C$  une application lipchitzienne et fortement monotone dans  $C$ . Quelque soit  $k \in ]0, \frac{2\nu}{\mu^2}]$  et  $f \in H$ , l'application

$$2.6. \quad \underline{R : C \rightarrow C}$$

$$\underline{\psi \rightarrow R(\psi) = P_C [\psi - k(T(\psi) - f)]}$$

est strictement contractante dans  $C$ , c'est-à-dire que  $R$  vérifie :

$$2.7. \quad \underline{\|R(\psi_2) - R(\psi_1)\| \leq \kappa \|\psi_2 - \psi_1\| ; \quad 0 < \kappa < 1 ; \quad \forall \psi_2, \psi_1 \in C}$$

avec

$$2.8. \quad \underline{\kappa^2 = k^2 \mu^2 - 2k\nu + 1.}$$

Démonstration (Auslender [1])

Calculons  $\|R(\psi_2) - R(\psi_1)\|^2$  en utilisant la propriété 2.5. du projecteur  $P_C$  de  $H$  sur  $C$ .

$$\|R(\psi_2) - R(\psi_1)\|^2 = \|P_C [\psi_2 - k(T(\psi_2) - f)] - P_C [\psi_1 - k(T(\psi_1) - f)]\|^2 \leq$$

$$\leq \|\psi_2 - k T(\psi_2) - (\psi_1 - k T(\psi_1))\|^2 =$$

$$= \|\psi_2 - \psi_1\|^2 + k^2 \|T(\psi_2) - T(\psi_1)\|^2 - 2k(T(\psi_2) - T(\psi_1), \psi_2 - \psi_1)$$

Avec les hypothèses 2.2. et 2.3. on obtient :

$$\|R(\psi_2) - R(\psi_1)\|^2 \leq (1 + k^2 \mu^2 - 2k\nu) \|\psi_2 - \psi_1\|^2$$

et la conclusion est immédiate.

Théorème 2.2.

Si  $T$  est fortement monotone dans  $C$  et si l'inéquation variationnelle

2.9.  $\psi \in C$ ,  $(T(\psi), \eta - \psi) \geq (f, \eta - \psi) \quad \forall \eta \in C$   
a une solution, alors elle est unique.

Démonstration

Soit  $\psi_2$  et  $\psi_1$  deux solutions de 2.9., on a :

$$(T(\psi_1), \psi_2 - \psi_1) \geq (f, \psi_2 - \psi_1)$$

$$-(T(\psi_2), \psi_2 - \psi_1) \geq -(f, \psi_2 - \psi_1)$$

d'où avec 2.3.

$$0 \geq (T(\psi_2) - T(\psi_1), \psi_2 - \psi_1) \geq \nu \|\psi_2 - \psi_1\|^2$$

d'où  $\psi_2 = \psi_1$

Corollaire 2.1. (des théorèmes 2.1. et 2.2.)

Sous les hypothèses du théorème 2.1., l'inéquation variationnelle 2.9. a une solution unique donnée par le point fixe de  $R$ .

Démonstration

L'unicité résulte du théorème 2.1. Pour l'existence il suffit de montrer que le point fixe de  $R$  est solution de 2.9.. Ceci résulte en particulier de la propriété 2.4. du projecteur de  $H$  sur  $C$ . Soit  $\psi$  le point fixe de  $R$  on a :

$$2.10. \quad \psi = P_C [\psi - k(T(\psi) - f)]$$

en utilisant 2.4. on obtient :

$$(\psi - [\psi - k(T(\psi) - f)], \eta - \psi) \geq 0 \quad \forall \eta \in C$$

d'où

$$(k(T(\psi) - f), \eta - \psi) \geq 0 \quad \forall \eta \in C$$

et la conclusion est immédiate, car  $k > 0$ .

Corollaire 2.2.

Sous les hypothèses du théorème 2.1., avec  $C = H$ , le point fixe de  $R$  est solution unique de l'équation

$$2.11. \quad T(\psi) = f.$$

Démonstration

Il suffit de remarquer que

$$(T(\psi) - f, \eta - \psi) \geq 0 \quad \forall \eta \in H \iff T(\psi) = f$$

Considérons le cas où  $C = V$  est une variété linéaire affine fermée,  $V$  est de la forme

$$2.12. \quad V = \psi^0 + V^0, \quad \psi^0 \in V$$

$V^0$  étant un sous-espace linéaire fermé. Alors l'inéquation variationnelle 2.9. est équivalente à l'équation

$$2.13. \quad \psi \in V, \quad (T(\psi), \eta - \psi) = (f, \eta - \psi) \quad \forall \eta \in V^0$$

qui elle-même est équivalente à

$$2.14. \quad \tilde{\psi} \in V^0, \quad (T(\tilde{\psi} + \psi^0), \tilde{\eta}) = (f, \tilde{\eta}) \quad \forall \tilde{\eta} \in V$$

A l'opérateur  $T : V \rightarrow H$  on peut associer l'opérateur  $\tilde{T} : V^0 \rightarrow H$  défini par :

$$2.15. \quad \tilde{T}(\tilde{\psi}) = T(\tilde{\psi} + \psi^0), \quad \psi^0 \in V \text{ fixé}, \quad \forall \tilde{\psi} \in V^0$$

et les propriétés 2.2. et 2.3. pour  $T$  deviennent pour  $\tilde{T}$  :

$$2.16. \quad \|\tilde{T}(\tilde{\psi}_2) - \tilde{T}(\tilde{\psi}_1)\| \leq \mu \|\tilde{\psi}_2 - \tilde{\psi}_1\| \quad \forall \tilde{\psi}_1, \tilde{\psi}_2 \in V^0$$

$$2.17. \quad (\tilde{T}(\tilde{\psi}_2) - \tilde{T}(\tilde{\psi}_1), \tilde{\psi}_2 - \tilde{\psi}_1) \geq \nu \|\tilde{\psi}_2 - \tilde{\psi}_1\|^2 \quad \forall \tilde{\psi}_1, \tilde{\psi}_2 \in V^0.$$

Corollaire 2.3

Sous les hypothèses du théorème 2.1., avec  $C = V$  et  $\psi^0 \in V$  fixé, la solution unique de l'équation 2.13. est donnée par  $\tilde{\psi} + \psi^0$ , où  $\tilde{\psi}$  est le point fixe de

$$2.18. \quad \begin{cases} \tilde{R} : V^0 \longrightarrow V^0 \\ \tilde{\psi} \longrightarrow \tilde{R}(\tilde{\psi}) = P_{V^0}[\tilde{\psi} - k(\tilde{T}(\tilde{\psi}) - f)] \end{cases}$$

où  $P_{V^0}$  est la projection orthogonale de  $H$  sur  $V^0$ .

Démonstration :

2.16., 2.17. et le corollaire 2.1. montrent que le point fixe  $\tilde{\psi}$  de  $\tilde{R} : V^0 \rightarrow V^0$  est solution unique de l'équation

$$2.19. \quad \tilde{\psi} \in V^0, \quad (\tilde{T}(\tilde{\psi}) - f, \tilde{\eta}) = 0 \quad \forall \tilde{\eta} \in V^0$$

donc de 2.14. et  $\tilde{\psi} + \psi^0$  est solution unique de 2.13.

Remarques

2.1. La solution des équations et inéquations variationnelles est donnée par la limite de la suite

$$2.19. \quad \psi_{n+1} = R(\psi_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad \psi_0 \in C$$

qui pour  $k$  convenablement choisi converge fortement dans  $H$ .



2.2. Le carré de la constante de contraction de  $R$  donnée par la démonstration du théorème 2.1. est 2.8. et  $\kappa$  prend son minimum pour  $k = \frac{v}{\mu^2}$  et vaut :

$$2.20. \quad \kappa = \left(1 - \frac{v^2}{\mu^2}\right)^{\frac{1}{2}} .$$

2.3. On a les estimations classiques :

$$2.21. \quad \|\psi - \psi_0\| \leq \frac{1}{1-\kappa} \|\psi_0 - R(\psi_0)\| ,$$

$$2.22. \quad \|\psi_n - \psi\| \leq \frac{\kappa^n}{1-\kappa} \|\psi_0 - R(\psi_0)\| ,$$

$$2.23. \quad \|\psi_n - \psi\| < \delta \text{ si } n > \frac{1}{\ln \kappa} \cdot \ln \frac{\delta(1-\kappa)}{\|\psi_0 - R(\psi_0)\|} .$$

3. Espaces Nečas [1], Fichera [1]

Soit  $D$  un domaine borné de  $\mathbb{R}^N$ , de frontière  $\partial D$   $C^1$  par morceau.

$H^1(D)$  est l'espace de Hilbert obtenu par complétion de  $C^1(\bar{D})$  pour la topologie définie par la norme :

$$3.1 \quad \|\psi\|_{H^1} = \left( \|\psi\|_{L^2}^2 + \sum_{i=1}^N \|\psi_{,i}\|_{L^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{ou} \quad \|\psi\|_{L^2} = \left( \int_D |\psi(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Le produit scalaire de  $H^1(D)$  est :

$$3.2 \quad (\varphi, \psi)_{H^1} = (\varphi, \psi)_{L^2} + \sum_{i=1}^N (\varphi_{,i}, \psi_{,i})_{L^2}$$

$$\text{ou} \quad (\varphi, \psi)_{L^2} = \int_D \varphi(x)\psi(x) dx.$$

On désigne par  $H_0^1(D)$  la fermeture de  $\{\psi \in C^1(\bar{D}); \psi|_{\partial D} = 0\}$  dans  $H^1(D)$ .

$$3.3 \quad \|\psi\|_{H_0^1} = \left( \sum_{i=1}^N \|\psi_{,i}\|_{L^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \text{ est une norme dans } H_0^1(D)$$

équivalente à  $\|\cdot\|_{H^1}$ . (Inégalité de Poincaré)

Soit  $\Gamma \subset \partial D$  tel que  $\text{mes}(\Gamma) \neq 0$

pour  $\psi \in H^1(D)$  on peut définir la trace de  $\psi$  sur  $\Gamma$ , (notée  $\psi|_{\Gamma}$ ) et on sait que  $\psi|_{\Gamma} \in L^2(\Gamma)$ . Alors il existe une constante ne dépendant que de  $D$  telle que

$$3.4 \quad \|\psi\|_{H^1} \leq \text{constante} \left( \int_{\Gamma} |\psi(x)|^2 ds + \sum_{i=1}^N \|\psi_{,i}\|_{L^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

et par conséquent

$$3.5. \quad \|\psi\| = \left( \int_{\Gamma} |\psi(x)|^2 ds + \sum_{i=1}^N \|\psi, i\|_{L^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

définit une norme sur  $H^1(D)$ , équivalente à la norme  $\|\cdot\|_{H^1}$ .

On désigne par

$$3.6. \quad H^1(\Gamma, D) = \{ \psi \in H^1(D) ; \psi|_{\Gamma} = 0 \}$$

$H^1(\Gamma, D)$  est un sous-espace fermé de  $H^1(D)$  et par conséquent un espace de Hilbert de norme équivalente à 3.1. ou 3.3. (à cause de 3.5.) et de produit scalaire :

$$3.7. \quad (\varphi, \psi) = \sum_{i=1}^N (\varphi, i, \psi, i)_{L^2} .$$

On a de plus :

$$3.8. \quad H_0^1(D) \subset H^1(\Gamma, D) \subset H^1(D) \quad \text{et} \quad H_0^1(D) = H^1(\partial D, D),$$

et si  $\text{mes}(\Gamma) = 0$  alors  $H^1(D) = H^1(\Gamma, D)$ .

#### 4. Problème de Dirichlet pour les fluides compressibles

Considérons le problème II.8.1. et énonçons-le d'une manière un peu différente.

Tout d'abord nous effectuons le changement de notation suivant :

$$4.1. \quad r(\psi) = q^2(\psi) = \sum_{i,j=1}^2 h_{ij} \psi_{,i} \psi_{,j}$$

##### Problème 4.1.

Etant donnée  $\varphi \in V_{2,\lambda}(\bar{D})$  (définition II.9.4.), existe-t-il  $\theta \in V_{2,\lambda,\varphi}(\bar{D})$  satisfaisant :

$$4.2. \quad - \sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial}{\partial y^j} \left[ \frac{h_{ij}(\theta_{,i} + \varphi_{,i})}{\sqrt{|g|} \rho(r(\theta + \varphi))} \right] = f \quad \text{dans } D$$


---

##### Remarques

- 4.1. La fonction de courant cherchée est :  $\psi = \theta + \varphi \in V_{2,\lambda}(\bar{D})$
- 4.2. L'information sur les conditions aux limites est contenue dans  $\varphi$ .
- 4.3. Dans le problème II.8.1. on exigeait que  $\psi$  soit subsonique. Dans le problème 4.1. on exige que  $\psi$  soit  $\lambda$ -subsonique. Les raisons de ce choix apparaîtront ultérieurement.
- 4.4. Énoncé sous cette forme, le problème 4.1. n'a en général pas de solution.
- 4.5. En particulier on peut avoir  $f = -2\sqrt{|g|} \Omega^3$ .

Proposition 4.1.

Si  $\theta$  est solution du problème 4.1., alors elle vérifie

$$4.3. \quad \int_D \frac{h_{ij} \theta_{,i+\varphi,i}}{\sqrt{|g|} \rho(r(\theta+\varphi))} \eta_{,j} dy = \int_D f dy \quad \forall \eta \in C^1(\bar{D}) \cap H_0^1(D)$$

Démonstration

Par hypothèse,  $h_{ij} \in C^1(\bar{D})$ ,  $g^{-1} \in C^1(\bar{D})$ ,

$\rho^{-1}(r(\theta+\varphi)) \in C^1(\bar{D}) \quad \forall \theta \in V_{2,\lambda,\varphi}(\bar{D})$

Ainsi  $\frac{h_{ij} \theta_{,i+\varphi,i}}{\sqrt{|g|} \rho(r(\theta+\varphi))} \in C^1(\bar{D})$  et les opérations suivantes

ont un sens :

Multiplions les deux membres de 4.2 par  $\eta \in C^1(\bar{D}) \cap H_0^1(D)$  et intégrons. En intégrant par partie on obtient le résultat cherché, car les intégrales de surfaces sont nulles.

Au lieu de chercher la solution du problème 4.1., on cherchera la solution des problèmes du type 4.3.

Étendons la définition II.9.4.

Définition 4.1.

Soit  $D$  un domaine à frontière  $C^1$  par morceaux et  $\Gamma \subset \partial D$  avec  $\text{mes}(\Gamma) \neq 0$ . Soit  $Q(x)$  la fonction définie en II.9.20.

Alors on définit :

$$K_{1,\lambda}(D) = \{\psi \in H^1(\Gamma, D) : 0 \leq r(\psi) \leq Q, \text{ p.p. dans } D\},$$

$$K_{1,\lambda,\varphi}(D) = \{\psi \in H_0^1(D) : \psi + \varphi \in K_{1,\lambda}(D), \varphi \in K_{1,\lambda}(D) \text{ donnée}\}.$$

Proposition 4.2.

Les ensembles  $K_{1,\lambda}(D)$  et  $K_{1,\lambda,\varphi}(D)$  sont convexes et fermés dans  $H^1(\Gamma, D)$ .

Démonstration

Pour la convexité, la démonstration est semblable à celle de la proposition II.9.4. Montrons que  $K_{1,\lambda}(D)$  est fermé dans  $H^1(\Gamma, D)$ . Les hypothèses faites sur  $h_{ij}$  montrent que

$$r : \psi \longrightarrow r(\psi) = \sum_{i,j=1}^2 h_{ij} \psi_{,i} \psi_{,j}$$

est une application continue de  $H^1(\Gamma, D)$  dans  $L^2(D)$ . Soit

$\{\psi_n\}_{n=1}^\infty \subset K_{1,\lambda}(D)$  une suite convergente vers  $\psi \in H^1(\Gamma, D)$ .

Montrons que  $\psi \in K_{1,\lambda}(D)$ . La suite  $r(\psi_n)$  converge vers  $r(\psi)$  dans  $L^2(D)$ , donc il existe une sous-suite de

$\{r(\psi_n)\}$ ,  $\{r(\psi_m)\}$  qui converge presque partout vers  $r(\psi)$ . Mais

$0 \leq r(\psi_m) \leq Q$  p.p. donc  $0 \leq r(\psi) \leq Q$  p.p. et  $\psi \in K_{1,\lambda}(D)$ .

Définition 4.2.

Considérons la forme linéaire en  $\eta$  :

$$4.4. \quad \left\{ \begin{array}{l} F(\eta) = \sum_{i,j=1}^2 \int_D \frac{h_{ij}}{\sqrt{|g|}} \frac{\theta_{,i+\varphi,i}}{\rho(r(\theta+\varphi))} \eta_{,j} dy \quad , \quad \theta \in K_{1,\lambda,\varphi}(D) \quad , \\ F : H_0^1(D) \longrightarrow \mathbb{R} \quad . \end{array} \right.$$

$F$  est définie et continue sur  $H_0^1(D)$  pour tout  $\theta \in K_{1,\lambda,\varphi}(D)$ .  
Donc le théorème de Riesz permet d'affirmer qu'il existe une application

$$4.5. \quad T : K_{1,\lambda,\varphi} \longrightarrow H_0^1(D)$$

tel que :

$$4.6. \quad (T(\theta), \eta)_{H_0^1} = F(\eta) \quad \forall \eta \in H_0^1(D) \quad .$$

Propriétés de  $T$

Proposition 4.3.

$T$  est fortement monotone dans  $K_{1,\lambda,\varphi}(D)$ , c'est-à-dire

$$(T(\theta_2) - T(\theta_1), \theta_2 - \theta_1)_{H_0^1} \geq v \|\theta_2 - \theta_1\|_{H_0^1}^2 \quad \forall \theta_2, \theta_1 \in K_{1,\lambda,\varphi}(D)$$

avec 
$$v = \min_{y \in D} \left[ \frac{\underline{\Lambda}}{\sqrt{|g|}} \cdot \frac{1}{\rho_0} \right] ;$$

$\underline{\Lambda}(y)$  = plus petite valeur propre de  $(h_{ij}(y))$ .

Proposition 4.4.

$T$  est lipchitzien dans  $K_{1,\lambda,\varphi}(D)$ , c'est-à-dire

$$\|T(\theta_2) - T(\theta_1)\|_{H_0^1} \leq \mu \|\theta_2 - \theta_1\|_{H_0^1} \quad \forall \theta_2, \theta_1 \in K_{1,\lambda,\varphi}(D)$$

$$\mu = \sup_{y \in D} \left[ \frac{\bar{\Lambda}}{\sqrt{|g|}} \cdot \frac{1}{\rho_{s\lambda}} \right] \cdot \frac{1}{1-\lambda}$$

$\bar{\Lambda}(y)$  = plus grande valeur propre de  $(h_{ij}(y))$ .

Ces deux propositions sont démontrées à la page 57 et suivantes.

Elles montrent que l'opérateur  $T$  satisfait les propriétés 2.2. et 2.3. dans  $K_{1,\lambda,\varphi}(D)$  convexe, fermé et  $f \in H_0^1$ . On a alors le

Théorème 4.1.

Soit  $T$  de la définition 4.2. Alors l'inéquation variation-  
nelle

$$4.7. \quad \theta \in K_{1,\lambda,\varphi}, (T(\theta), \eta - \theta)_{H_0^1} \geq (f, \eta - \theta)_{H_0^1} \quad \forall \eta \in K_{1,\lambda,\varphi}(D)$$

a une solution unique.

Donc en vertu du théorème 2.1., pour  $k$  convenablement choisi la suite définie par

$$4.8. \quad \left\{ \begin{array}{l} \theta_0 \in K_{1,\lambda,\varphi}(D) \\ \theta_{n+1} = P_{K_{1,\lambda,\varphi}} [\theta_n - k(T(\theta_n) - f)] \end{array} \right.$$

converge en norme  $H_0^1(D)$  vers la solution de 4.7.

Donnons une interprétation formelle de 4.7.

Lions [1].

On décompose  $D$  en deux régions  $D_-$  et  $D_+$  "définies" par :

$$D_- = \{x \in D : 0 \leq r(\theta + \varphi)(x) \leq Q(x)\}$$

$$D_+ = \{x \in D : r(\theta + \varphi)(x) = Q(x)\}$$

Alors la solution  $\theta$  est caractérisée par :



$$4.9. \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i,j=1}^2 \int_D \frac{h_{ij}}{\sqrt{|g|}} \frac{\theta_{,i} + \varphi_{,i}}{\rho(r(\theta+\varphi))} \eta_{,j} dy - \int_D \tilde{f} \eta dy = 0 \quad \forall \eta \in H_0^1(D_-) \text{ dans } D_- \\ r(\theta+\varphi) = 0 \quad \text{dans } D_1 \\ \theta_{,i}, \varphi_{,i} \quad i=1,2 \quad \text{"continues"} \quad \text{\AA l'interface entre } D_- \text{ et } D_1 \end{array} \right.$$

avec  $\int_D \tilde{f} \eta dy = (f, \eta)_{H_0^1} \quad \forall \eta \in H_0^1$ .

Remarques

4.6. Si  $\tilde{f}, \varphi|_{\partial D}, \lambda$  sont "quelconques", alors on n'aura pas en général  $\text{mes}(D_1) = 0$ , c'est-à-dire que la solution  $\theta+\varphi$  ne correspondra pas à un écoulement  $\lambda$ -subsonique.

4.7. Si  $\tilde{f}, \varphi|_{\partial D}, \lambda$  ont une signification physique, alors  $\text{mes}(D_1) = 0$  et la limite de la suite 5.21 donnent la solution  $\theta+\varphi$  correspondant à un écoulement  $\lambda$ -subsonique.

4.8. Problème

Si  $\text{mes}(D_1) > 0$ , y a-t-il une relation entre  $D_1$  et le domaine dans lequel l'écoulement est supersonique ?

4.9. Si  $\theta$  et  $\varphi$  sont suffisamment régulières, la relation intégrale de 4.9. est équivalente à

$$-\sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial}{\partial y^j} \left[ \frac{h_{ij}}{\sqrt{|g|}} \frac{\theta_{,i} + \varphi_{,i}}{\rho(r(\theta+\varphi))} \right] = \tilde{f} \quad \text{dans } D_- .$$

Démonstration de la proposition 4.3.

Pour simplifier on pose  $r_1 = r(\theta_1 + \varphi)$  et  $r_2 = r(\theta_2 + \varphi)$ .

En utilisant la relation

$$(a_1 b_1 - a_2 b_2) = \frac{1}{2}(a_1 - a_2)(b_1 + b_2) + \frac{1}{2}(a_1 + a_2)(b_1 - b_2), \text{ calculons :}$$

$$(T(\theta_2) - T(\theta_1), \theta_2 - \theta_1) =$$

$$= \sum_{i,j=1}^2 \int_D \frac{h_{ij}}{\sqrt{|g|}} \left[ \frac{\theta_{2,i+\varphi,i}}{\rho(r_2)} - \frac{\theta_{1,i+\varphi,i}}{\rho(r_1)} \right] [\theta_{2,j} - \theta_{1,j}] dy =$$

$$\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 \int_D \frac{h_{ij}}{\sqrt{|g|}} \left[ \frac{1}{\rho(r_2)} - \frac{1}{\rho(r_1)} \right] [\theta_{2,i+\varphi,i} + \theta_{1,i+\varphi,i}] [\theta_{2,j} - \theta_{1,j}] dy +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 \int_D \frac{h_{ij}}{\sqrt{|g|}} \left[ \frac{1}{\rho(r_2)} + \frac{1}{\rho(r_1)} \right] [\theta_{2,i} - \theta_{1,i}] [\theta_{2,j} - \theta_{1,j}] dy$$

Considérons alors l'intégrand de la première intégrale du second membre :

$$4.10. \quad \sum_{i,j=1}^2 \frac{h_{ij}}{\sqrt{|g|}} \left[ \frac{1}{\rho(r_2)} - \frac{1}{\rho(r_1)} \right] [\theta_{2,i+\varphi,i} + \theta_{1,i+\varphi,i}] [\theta_{2,j} + \varphi, j - (\theta_{1,j} + \varphi, j)] =$$

$$= \text{en développant et en utilisant la symétrie des } h_{ij} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{|g|}} \left[ \frac{1}{\rho(r_2)} - \frac{1}{\rho(r_1)} \right] [r_2 - r_1] \geq 0$$

$$\text{car } r \rightarrow \frac{1}{\rho(r)} \text{ est une fonction croissante (proposition II.9.2.)}$$

Considérons l'intégrand de la deuxième intégrale.  $(h_{ij})$  étant une matrice symétrique définie positive pour tout  $y \in \bar{D}$  on note par  $\underline{\Lambda}$  sa plus petite valeur propre. Mais comme  $\frac{1}{\rho(r)} \geq \frac{1}{\rho_0}$  on obtient :

$$4.11. \quad \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 \int_D \frac{h_{ij}}{\sqrt{|g|}} \left[ \frac{1}{\rho(r_2)} + \frac{1}{\rho(r_1)} \right] [\theta_{2,i} - \theta_{1,i}] [\theta_{2,j} - \theta_{1,j}] dy \geq$$

$$\geq v \sum_{i=1}^2 \int_D [\theta_{2,i} - \theta_{1,i}]^2 dy \quad \text{avec}$$

$$v = \min_{y \in \bar{D}} \left[ \frac{\Lambda}{\sqrt{|g|}} \cdot \frac{1}{\rho_0} \right]$$

Alors avec 4.10. et 4.11. la proposition est démontrée.

Pour démontrer la proposition 4.4. nous utiliserons le

Lemme 4.1.

L'application (pour  $y_0 \in \bar{D}$  donnée)

$$f : [0, Q(y_0)] \times [0, Q(y_0)] \longrightarrow \mathbb{R}^+$$

définie par :

$$f(r, r') = \frac{r+r'}{r-r'} \left[ \frac{1}{\rho(r)} - \frac{1}{\rho(r')} \right] \quad \text{est telle que}$$

$$f(r, r') \leq \frac{\lambda}{(1-\lambda)} \frac{1}{\rho_{s\lambda}}$$

Démonstration :

On peut supposer  $r \geq r'$  sans perte de généralité. Avec le théorème des accroissements finis on a

$$\frac{1}{\rho(r)} - \frac{1}{\rho(r')} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{1}{\rho(\xi)} \right) (t) (r-r') \quad , \quad t \in [r', r]$$

d'où

$$f(r, r') = (r+r') \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{1}{\rho(\xi)} \right) (t) \quad .$$

Avec II.9.17. on obtient :

$$f(r,r') \leq 2Q(y_0) \frac{(\gamma-1)\lambda+2}{2(1-\lambda)} \cdot \frac{1}{a\gamma} \cdot \frac{1}{2|g|\rho_{s\lambda}^3} \cdot \frac{1}{\rho_0^{\gamma-1}},$$

et avec II.9.20 on obtient :

$$f(r,r') \leq \frac{(\gamma-1)+2}{1-\lambda} \frac{1}{\rho_{s\lambda}} \cdot \frac{1}{\gamma-1} [\rho_0^{\gamma-1} - \rho_{s\lambda}^{\gamma-1}] \cdot \frac{1}{\rho_0^{\gamma-1}}.$$

Avec la définition II.9.2. de  $\rho_{s\lambda}$  on obtient le résultat.

#### Démonstration de la proposition 4.4.

Calculons :

$$4.13. \quad (T(\theta_2) - T(\theta_1), \eta) =$$

$$= \sum_{i,j=1}^2 \int_D \frac{h_{ij}}{\sqrt{|g|}} \left[ \frac{\theta_{2,i+\varphi,i}}{\rho(r_2)} - \frac{\theta_{1,i+\varphi,i}}{\rho(r_1)} \right] \eta_j dy = I_1 + I_2.$$

Avec :

$$I_1 = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 \int_D \frac{h_{ij}}{\sqrt{|g|}} \left[ \frac{1}{\rho(r_2)} - \frac{1}{\rho(r_1)} \right] [\theta_{2,i+\varphi,i} + \theta_{1,i+\varphi,i}] \eta_j dy$$

$$I_2 = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 \int_D \frac{h_{ij}}{\sqrt{|g|}} \left[ \frac{1}{\rho(r_2)} + \frac{1}{\rho(r_1)} \right] [\theta_{2,i} - \theta_{1,j}] \eta_j dy$$

Pour faciliter la suite des calculs, on introduit les notations suivantes :

Soit  $y \in \bar{D}$ ,  $\eta, \psi$  deux fonctions réelles.  $(h_{ij}(y))$  étant définie positive,

$$4.14. \quad ((\eta, \psi)) = \sum_{i,j=1}^2 h_{ij}(y) \eta_i(y) \psi_j(y)$$

définit un produit scalaire dans  $\mathbb{R}^2$  et  $\|\eta\|^2 = ((\eta, \eta))$  définit la norme associée. On peut remarquer que  $\|\eta\|^2 = r(\eta)$ , (voir 4.1.).

Posons :

$$4.15. \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{\Lambda}(y) \text{ est la plus grande valeur propre de } (h_{ij}(y)) . \\ \underline{\Lambda}(y) \text{ est la plus petite valeur propre de } (h_{ij}(y)) . \end{array} \right.$$

$$4.16. \quad \left\{ \begin{array}{l} a = \theta_2 + \varphi + \theta_1 + \varphi ; \\ c = \theta_1 + \varphi ; \quad d = \theta_2 + \varphi . \end{array} \right.$$

Estimons  $I_2$  en remarquant que  $\frac{1}{\rho} \leq \frac{1}{\rho_{s\lambda}}$ .

$$4.17. \quad I_2 \leq \int_D \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{1}{\rho_{s\lambda}} |((\theta_2 - \theta_1, \eta))| dy \leq \\ \leq \int_D \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{1}{\rho_{s\lambda}} \|\theta_2 - \theta_1\| \|\eta\| dy .$$

Pour estimer  $I_1$ , multiplions son intégrant par

$$1 = \frac{r_2 - r_1}{r_2 - r_1} = \frac{\|d\|^2 - \|c\|^2}{\|d\|^2 - \|c\|^2} = \frac{\|d\|^2 - \|c\|^2}{r_2 - r_1}$$

Avec 4.14. et 4.16. on obtient :

$$I_1 = \frac{1}{2} \int_D \left( \frac{1}{\rho(r_2)} - \frac{1}{\rho(r_1)} \right) \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{[d]^2 - [c]^2}{r_2 - r_1} ((a, \eta)) dy .$$

En utilisant le fait que  $\frac{1}{\rho}$  est une fonction croissante de  $r$  on a :

$$I_1 \leq \frac{1}{2} \int_D \frac{1}{\sqrt{|g|}} \left( \frac{1}{\rho(r_2)} - \frac{1}{\rho(r_1)} \right) \frac{1}{r_2 - r_1} | [d]^2 - [c]^2 | |((a, \eta))| dy .$$

Considérons alors l'expression  $| [d]^2 - [c]^2 | |((a, \eta))|$  et transformons-la.

$$\begin{aligned} | [d]^2 - [c]^2 | |((a, \eta))| &= ([d] + [c]) | [d] - [c] | |((a, \eta))| \leq \\ &\leq ([d] + [c]) [a] [d - c] [\eta] \leq ([d] + [c])^2 [d - c] [\eta] \leq \\ &\leq 2([d]^2 + [c]^2) [d - c] [\eta] = 2(r_2 + r_1) [\theta_2 - \theta_1] [\eta] . \end{aligned}$$

Alors  $I_1$  devient :

$$4.18. \quad I_1 \leq \int_D \frac{1}{\sqrt{|g|}} f(r_1, r_2) [\theta_2 - \theta_1] [\eta] dy ,$$

et avec le lemme 4.1. on obtient :

$$4.19. \quad I_1 \leq \int_D \frac{1}{\sqrt{|g|}} \cdot \frac{\lambda}{1-\lambda} \cdot \frac{1}{\rho_{s\lambda}} [\theta_2 - \theta_1] [\eta] dy .$$

4.17. et 4.19. donnent pour 4.13. l'estimation

$$4.20. \quad (T(\theta_2) - T(\theta_1), \eta) \leq \frac{1}{1-\lambda} \int_D \frac{1}{\sqrt{|g|} \rho_{s\lambda}} \|\theta_2 - \theta_1\| \|\eta\| dy$$

qui, avec la définition de  $\|\cdot\|$  devient :

$$4.21. \quad (T(\theta_2) - T(\theta_1), \eta) \leq \frac{1}{1-\lambda} \int_D \frac{1}{\sqrt{|g|} \rho_{s\lambda}} \left( \bar{\Lambda} \sum_{i=1}^2 |\theta_{2,i} - \theta_{1,i}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \bar{\Lambda} \sum_{i=1}^2 |\eta_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} dy .$$

En posant

$$4.22. \quad A = \sup_{y \in \bar{D}} \frac{\bar{\Lambda}}{\sqrt{|g|} \rho_{s\lambda}} ,$$

et avec l'inégalité de Schwartz on a :

$$4.23. \quad (T(\theta_2) - T(\theta_1), \eta) \leq \frac{A}{1-\lambda} \|\theta_2 - \theta_1\| \|\eta\| .$$

En choisissant en particulier  $\eta = T(\theta_2) - T(\theta_1)$  on obtient la conclusion de la proposition 4.4.

Remarque

4.10. L'intervention de la projection  $P_{K_{1,\lambda,\varphi}}$  dans le procédé itératif 4.8. est essentielle. En effet, si

l'on supprime  $P_K$  et si l'on suppose que

$\theta_n \in K_{1,\lambda,\varphi}$  on ne peut affirmer que

$\theta_{n+1} \in K_{1,\lambda,\varphi}$  et alors  $T(\theta_{n+1})$  n'a plus

nécessairement les bonnes propriétés assurant la convergence de la suite.

Pour nous libérer de  $P_{K_{1,\lambda,\varphi}}$  modifions la relation liant

$\rho$  et  $r$  de telle sorte qu'elle soit inchangée dans le domaine  $\lambda$ -subsonique.

Définition 4.3. :

Soit  $\rho_I \in ]0, \rho_s]$

$r : ]\rho_I, \rho_0] \longrightarrow \mathbb{R}^+$  est définie par :

$$\underline{r(\rho) = 2\rho^2 |g| \frac{a\gamma}{\gamma-1} [\rho_0^{\gamma-1} - \rho^{\gamma-1}] \text{ si } \rho \in [\rho_\lambda, \rho_0]}$$

$$\underline{r(\rho) = -b \ln(\rho - \rho_I) + c \text{ si } \rho \in [\rho_I, \rho_{s\lambda}]}$$

avec

$$\underline{b = -2\rho_{s\lambda} |g| \frac{a\gamma}{\gamma-1} (\rho_{s\lambda} - \rho_I) [2\rho_0^{\gamma-1} - (\gamma+1)\rho_{s\lambda}^{\gamma-1}] > 0}$$

$$\underline{c = b \ln(\rho_{s\lambda} - \rho_I) + 2\rho_{s\lambda}^2 |g| \frac{a\gamma}{\gamma-1} [\rho_0^{\gamma-1} - \rho_{s\lambda}^{\gamma-1}]}$$



Proposition 4.5.

$b(x)$  et  $c(x)$  sont tels que  $r \in C^1([\rho_I, \rho_0])$  et  $\frac{dr}{d\rho} < 0$ .

La figure 4.1. illustre le choix de  $r$  (cf. fig. II.9.1).

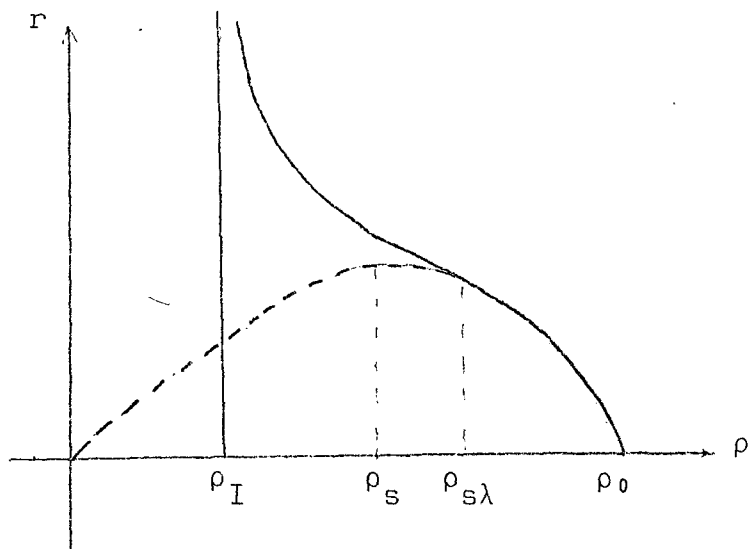


fig. 4.1.

L'application  $r : [\rho_I, \rho_0] \rightarrow \mathbb{R}^+$  a évidemment une inverse que l'on notera  $\sigma$ .

$$4.24. \left\{ \begin{array}{l} \sigma : \mathbb{R}^+ \rightarrow ]\rho_I, \rho_0[ \text{ , } \sigma \in C^1(\mathbb{R}^+) \\ \sigma \text{ est strictement décroissante et} \\ - \frac{1}{2|g|a\gamma\rho_0^\gamma} \leq \frac{d\sigma}{dr} \leq 0 \text{ .} \end{array} \right.$$

Remarques

4.11. Il est possible de choisir  $\rho_I = \rho_s$ .

4.12. C'est Shiffman [1] qui le premier a modifié la relation liant  $\rho$  et  $r$ . Sa modification est utilisée dans un contexte différent du nôtre et est différente.

Définition 4.4.

$\varphi \in H^1(D)$  étant donnée, considérons la forme linéaire en  $\eta$  :

$$4.25. \quad \left\{ \begin{array}{l} F(\eta) = \sum_{i,j=1}^2 \int_D \frac{h_{ij}}{\sqrt{|g|}} \frac{\theta_{,i} + \varphi_{,i}}{\sigma(r(\theta + \varphi))} \eta_{,j} \, dy \quad \theta \in H_0^1(D) \\ F : H_0^1(D) \longrightarrow \mathbb{R} \end{array} \right.$$

$F$  est définie et continue sur  $H_0^1(D)$  pour tout  $\theta \in H_0^1(D)$ .  
Donc le théorème de Riesz permet d'affirmer qu'il existe une application

$$4.26. \quad S : H_0^1(D) \longrightarrow H_0^1(D)$$

tel que

$$4.27. \quad (S(\theta), \eta) = F(\eta) \quad \forall \eta \in H_0^1(D) .$$

Pour montrer que  $S$  satisfait les "bonnes propriétés" 2.2. et 2.3. on a besoin des deux lemmes suivants :

Lemme 4.2.

Si  $\frac{2-\lambda}{2} \rho_{s\lambda} \leq \rho_I$ , alors la fonction

$$V : r \longmapsto r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{\sigma} \right) ; \quad V : [0, \infty[ \longrightarrow \mathbb{R}^+$$

est bornée par  $\frac{1}{2} \frac{\lambda}{1-\lambda} \cdot \frac{1}{\rho_{s\lambda}}$ .

Démonstration :

On montre simplement que  $V$  est une fonction croissante de  $r$  dans  $[0, Q(y)]$  (ou bien  $\rho \in [\rho_{s\lambda}, \rho_0]$ ) et qu'elle est décroissante dans  $[Q(y), \infty[$ .

1°  $V$  est croissante dans  $[0, Q(y)]$ .

Avec la définition 4.3., avec II.9.18. et II.9.4. on obtient par un calcul simple :

$$4.20. \quad r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{\sigma} \right) = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\rho_0 \gamma^{-1} - \rho \gamma^{-1}}{(\gamma+1)\rho \gamma^{-1} - 2\rho_0 \gamma^{-1}} .$$

Or  $r \mapsto \frac{1}{\rho}$  et  $r \mapsto \frac{\rho_0 \gamma^{-1} - \rho \gamma^{-1}}{(\gamma+1)\rho \gamma^{-1} - 2\rho_0 \gamma^{-1}}$  sont deux fonctions positives croissantes dans  $[0, Q(y)]$ , donc  $V$  est croissante dans  $[0, Q(y)]$ .

2°  $V$  est décroissante dans  $[Q(y), \infty[$ , si  $(2-\lambda)\rho_{s\lambda} \leq 2\rho_I$ .

Dans  $[Q(y), \infty[$ , avec la définition 4.3. on a:  $\sigma = \rho_I \exp \left[ \frac{c-r}{b} \right]$ ,

d'où  $V(r) = \frac{r}{b\sigma^2} \exp \left[ \frac{c-r}{b} \right]$  et

$$4.29. \quad \frac{\partial V}{\partial r} = V'(r) = \left[ \frac{1}{r} + \frac{1}{b} \left( \frac{\sigma^{-2\rho_I}}{\sigma} \right) \right] V .$$

$r \mapsto \frac{1}{r} + \frac{1}{b} \left( \frac{\sigma^{-2\rho_I}}{\sigma} \right)$  est une fonction décroissante de  $r$ , calculons-la pour  $r = r(\rho_{s\lambda}(y)) = r_{s\lambda} = Q(y)$ . On obtient :

$$\ell(r_{s\lambda}) = \left( \frac{b\rho_{s\lambda}}{r_{s\lambda}} + \rho_{s\lambda} - 2\rho_I \right) \frac{1}{b\rho_{s\lambda}} .$$

Avec  $\rho_{s\lambda}^{\gamma-1} = \frac{2}{(\gamma-1)\lambda+2} \rho_0^{\gamma-1}$  et la définition 4.3.

on obtient :

$$b = 2\rho_{s\lambda} |g| a\gamma (\rho_{s\lambda} - \rho_I) \frac{2(1-\lambda)}{(\gamma-1)\lambda+2} \rho_0^{\gamma-1} \quad \text{et}$$

$$r_{s\lambda} = 2\rho_{s\lambda}^2 |g| a\gamma \frac{\lambda}{(\gamma-1)\lambda+2} \rho_0^{\gamma-1} , \quad \text{d'où}$$

$$\ell(r_{s\lambda}) = \frac{1}{\lambda} [ (2-\lambda)\rho_{s\lambda} - 2\rho_I ] \frac{1}{b\rho_{s\lambda}}$$

Or avec l'hypothèse faite  $\ell(r_{s\lambda}) \leq 0$  et  $V'(r) \leq 0$ .

Ainsi la fonction  $V$  prend son maximum pour  $r = Q(y) = r_{s\lambda}$  ou  $\rho = \rho_{s\lambda}$  et  $V(r_{s\lambda})$  donne la borne annoncée.

Lemme 4.3.

Si  $\frac{2-\lambda}{2} \rho_{s\lambda} \leq \rho_I$ , l'application

$f : [0, \infty[ \times [0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}^+$ , définie par

$$f(r_1, r_2) = \frac{r_2 + r_1}{r_2 - r_1} \left[ \frac{1}{\sigma(r_2)} - \frac{1}{\sigma(r_1)} \right] \quad \text{est telle que :}$$

$$f(r_1, r_2) \leq \frac{1}{\rho_I} - \frac{1}{\rho_0} + \frac{\lambda}{1-\lambda} \frac{1}{\rho_{s\lambda}} .$$

Démonstration :

On peut supposer sans perte de généralité que  $r_2 \geq r_1$  .  
Le théorème des accroissements finis permet d'écrire :

$$4.30. \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\sigma(r_2)} - \frac{1}{\sigma(r_1)} = A(t)(r_2 - r_1) \quad t \in [r_1, r_2] \\ A(t) = \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{1}{\sigma(\xi)} \right) (t) \end{array} \right.$$

d'où  $f(r_1, r_2) = A(t) (r_2 + r_1)$  .

$A(t) \geq 0 \Rightarrow f(r_1, r_2) \leq tA(t) + r_2A(t)$  .

De 4.30. et de  $r_1A(t) \leq tA(t)$  on a :

$$r_2A(t) \leq tA(t) + \frac{1}{\sigma(r_2)} - \frac{1}{\sigma(r_1)} \quad \text{d'où}$$

$$f(r_1, r_2) \leq 2tA(t) + \frac{1}{\sigma(r_2)} - \frac{1}{\sigma(r_1)} .$$

Le lemme 4.2. donne la borne indiquée.

Proposition 4.6.

S (de la définition 4.4.) est fortement monotone dans  $H_0^1(D)$   
avec  $v$  de la proposition 4.3.

S est lipchitzien dans  $H_0^1(D)$  avec

$$\mu = \sup_{y \in D} \left[ \frac{\bar{\lambda}}{\sqrt{|g|}} \left( \frac{1}{(1-\lambda)} \frac{1}{\rho_{s\lambda}} + \frac{1}{\rho_I} - \frac{1}{\rho_0} \right) \right] .$$


---

Démonstration :

La démonstration que  $S$  est fortement monotone dans  $H_0^1(D)$  est identique à celle de la proposition 4.3. en utilisant, au lieu de la proposition II.9.2., la proposition 4.5.. La démonstration que  $S$  est lipchitzien est identique à celle de la proposition 4.4. en utilisant dans 4.10. le lemme 4.3. au lieu du lemme 4.1..

Théorème 4.2.

Soit  $S$  de la définition 4.4. alors l'équation variationnelle

$$4.32. \quad \theta \in H_0^1; (S(\theta), \eta)_{H_0^1} = (f, \eta)_{H_0^1} \quad \forall \eta \in H_0^1$$

a une solution unique donnée par la limite dans  $H$  de la suite des solutions de l'équation (pour  $k$  convenablement choisi).

$$4.33. \quad \begin{cases} \theta_0 \in H_0^1 \text{ donnée} \\ (\theta_{n+1}, \eta)_{H_0^1} = (\theta_n - k(S(\theta_n) - f), \eta)_{H_0^1} \quad \forall \eta \in H \\ n = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

Démonstration :

Résulte immédiatement du corollaire 2.2..

Remarque 4.13.

Supposons que les fonctions  $h_{ij}(y)$ ,  $a(y,r)$  avec  $r = \sum_{i,j=1}^2 h_{ij} \psi_i \psi_j$ ;  $\psi \in H_0^1(D)$ , soient telles que la forme linéaire en  $\eta \in H_0^1(D)$

$$4.34. \quad \begin{cases} F(\eta) = \sum_{i,j=1}^2 \int_D \frac{h_{ij} \psi_i}{a(y,r)} \eta_j dy & \eta \in H_0^1(D) \\ \psi = \theta + \varphi, \quad \theta \in H_0^1(D), \quad \varphi \in H_0^1(D) \text{ donnée.} \\ F: H_0^1 \rightarrow \mathbb{R} \quad \forall \theta \in H_0^1(D) \end{cases}$$

soit continue sur  $H_0^1(D)$ ,  $\forall \theta \in H_0^1(D)$ . Alors il existe

$$4.35. \quad S: H_0^1(D) \longrightarrow H_0^1(D)$$

tel que

$$4.36. \quad (S(\theta), \eta) = F(\eta) \quad \forall \eta \in H_0^1(D) .$$

On se demande quelles propriétés doit avoir la fonction

$$4.37. \quad \begin{array}{l} \xi \longrightarrow \frac{1}{a(y, \xi)} ; y \text{ fixé } \in \bar{D} \\ \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+ \end{array}$$

pour que  $S$  soit fortement monotone et lipchitzien.

En examinant la démonstration des propositions 4.3., 4.4. et 4.6. et les lemmes 4.1. et 4.3. on voit assez aisément que les hypothèses nécessaires sont :

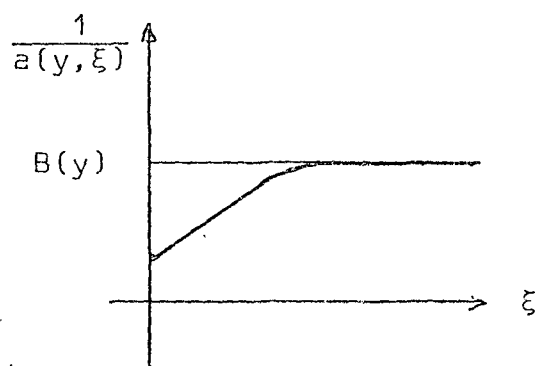
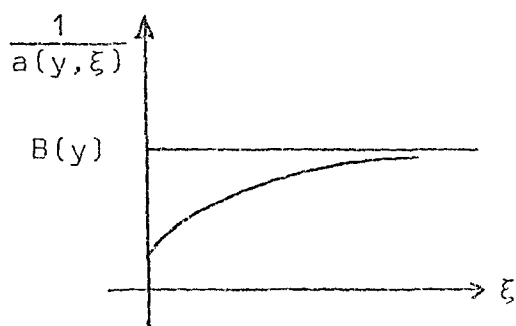
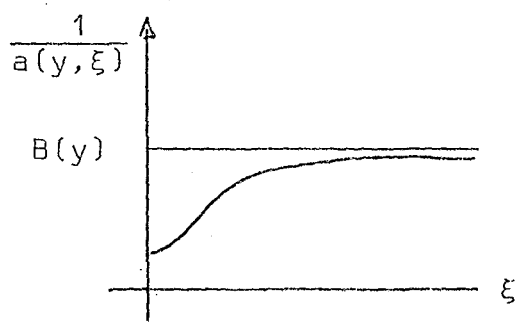
$$4.38. \quad \alpha(y) \sum_{i=1}^2 \xi_i^2 \leq \sum_{i,j=1}^2 h_{ij}(y) \xi_i \xi_j \leq \alpha(y) \sum_{i=1}^2 \xi_i^2$$

$$\forall \xi_i \in \mathbb{R} ; \forall y \in \bar{D}$$

4.39. La fonction 4.37. est croissante, continue  $\forall y \in \bar{D}$  et bornée par  $B(y)$ , de plus on la suppose dérivable (on peut se passer de cette hypothèse).

4.40. La fonction  $\xi \mapsto \xi \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{1}{a(y, \xi)}$  est bornée par  $A(y)$ ,  $\forall y \in \bar{D}$ .

Les fonctions vérifiant 4.39. et 4.40. sont de types suivants (par exemple) :



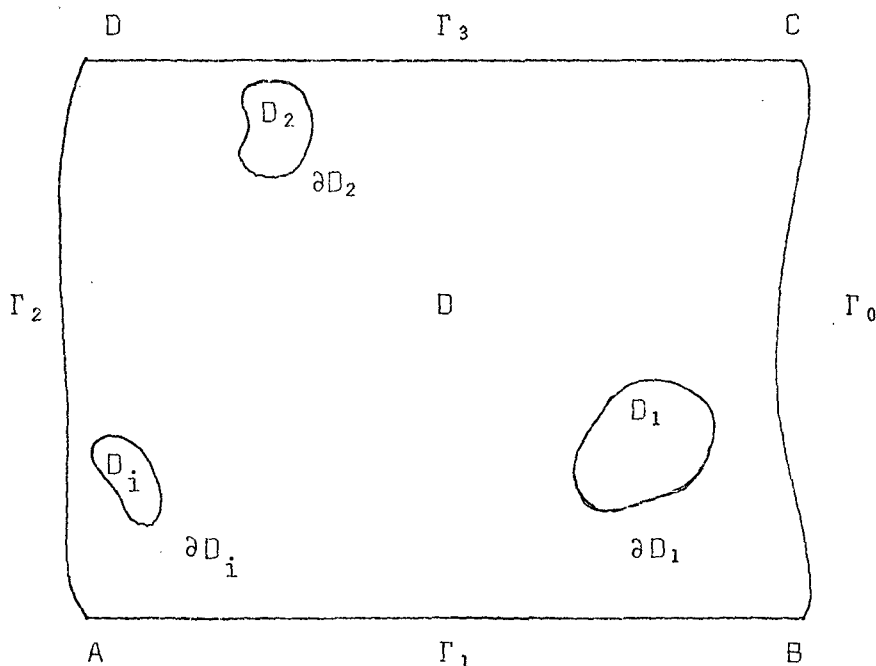
Ces courbes ne doivent pas avoir de tangentes verticales.



5. Obstacles dans un canal

Soit  $D$  un domaine non simplement connexe à frontière  $C^1$  par morceaux (fig. 5.1.) . .

fig. 5.1.



$$\partial D = \text{frontière de } D = \bigcup_{i=1}^M \partial D_i \cup \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$$

$\Gamma_0$  et  $\Gamma_2$  sont les "bords du canal" .

$D_1, D_2, D_3, \dots, D_M$  sont les obstacles, avec :  $\bar{D}_i \cap \bar{D}_j = \emptyset \forall i, j$

$\Gamma_0, \Gamma_2, \partial D_1, \dots, \partial D_M$  sont des lignes de courant sur lesquelles  $\psi = \text{const.}$

$\psi$  est connue sur  $\Gamma_0, \Gamma_2, \Gamma_1, \Gamma_3$  et inconnue sur

$\partial D_i, i = 1, 2, \dots, M$  .

On peut prendre arbitrairement  $\psi|_{\Gamma_0} = 0$  .

Alors  $\psi|_{\Gamma_2} = F$  mesure le flux de liquide à travers le canal. On pose  $\psi|_{\Gamma_1} = \varphi_1$  et  $\psi|_{\Gamma_3} = \varphi_3$ .

De plus on se donne  $C_i, i = 1, 2, \dots, M$ ,  $M$  nombres réels.

Soit

$$5.1. \quad W = \{ \psi \in H^1(D) : \psi|_{\Gamma_0} = 0, \psi|_{\Gamma_1} = \varphi_1, \psi|_{\Gamma_2} = F, \psi|_{\Gamma_3} = \varphi_3 \\ \text{et } \psi|_{\partial D_i} = c \quad \forall c \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, M \} .$$

$W$  est un sous-espace affine fermé de  $H^1(\Gamma_0, D)$ .

Pour tout  $\psi \in W$  on considère la forme linéaire

$$5.2. \quad \begin{cases} \eta \longrightarrow G(\eta) = \sum_{i,j=1}^2 \int_D \frac{h_{ij} \psi_{,i}}{\sqrt{|g|} \sigma(r(\psi))} \eta_{,j} dy \\ H^1(\Gamma_0, D) \longrightarrow \mathbb{R} . \end{cases}$$

Elle est continue sur  $H^1(\Gamma_0, D)$ , il existe donc une application définie par :

$$5.3. \quad \begin{cases} (S(\psi), \eta)_{H^1(\Gamma_0, D)} = G(\eta) \quad \forall \eta \in H^1(\Gamma_0, D) \quad \forall \psi \in W , \\ S : W \longrightarrow H^1(\Gamma_0, D) \end{cases}$$

$$\text{avec } (\varphi, \eta)_{H^1(\Gamma_0, D)} = \sum_{i=1}^2 \int_D \varphi_{,i} \eta_{,i} dy = (\varphi, \eta) ; \varphi, \eta \in H^1(\Gamma_0, D) .$$

Proposition 5.1.

$S$  définie en 5.3. est fortement monotone dans  $W$  avec  $\nu$  de la proposition 4.3.

$S$  est lipchitzien dans  $W$  avec  $\mu$  de la proposition 4.4.

Démonstration

La démonstration est formellement identique à la démonstration de la proposition 4.4. et 4.3. avec  $\varphi \equiv 0$  et  $\theta_2 = \psi_2$ ,  $\theta_1 = \psi_1$ .

Considérons la forme linéaire

$$5.4. \quad \begin{cases} \eta \longrightarrow F(\eta) = \int_D f \eta dy + \sum_{k=1}^M C_k \oint_{\partial D_k} \eta ds & f \in L^2(D) \\ H^1(\Gamma_0, D) \longrightarrow \mathbb{R} \end{cases}$$

Elle est continue sur  $H^1(\Gamma_0, D)$ , il existe donc une fonction  $g \in H^1(\Gamma_0, D)$  telle que

$$5.5. \quad (g, \eta)_{H^1(\Gamma_0, D)} = F(\eta) \quad \forall \eta \in H^1(\Gamma, D).$$

Considérons alors l'équation variationnelle

$$5.6. \quad \psi \in W; \quad (S(\psi) - g, \eta - \psi)_{H^1(\Gamma_0, D)} = 0 \quad \forall \eta \in W.$$

En vertu de la proposition 5.1. et des résultats du §2 l'équation 5.6. a une solution unique.

Donnons une interprétation formelle de la solution. (Formelle parce qu'elle est uniquement valable si  $\psi \in C^2(\bar{\Omega})$ ).

Posons  $\eta = \pm\varphi + \psi$ ,  $\varphi \in \mathcal{D}(D)$  dans 5.6., on obtient :

$$5.7. \quad (S(\psi), \varphi)_{H^1(\Gamma_0, D)} = (g, \varphi)_{H^1(\Gamma_0, D)} \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(D),$$

ce qui entraîne

$$5.8. \quad - \sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial}{\partial y^j} \left[ \frac{h_{ij} \psi_{,i}}{\sqrt{|g|} \sigma(r(\psi))} \right] = f \quad \text{dans } D.$$

En multipliant 5.8. par  $n-\psi$  ( $n, \psi \in W$ ) en intégrant et utilisant la formule de Green on obtient :

$$5.9. \quad \sum_{i,j=1}^2 \int_D \frac{h_{ij} \psi_{,i}}{\sqrt{|g|} \sigma(r(\psi))} (n-\psi)_{,j} dy = - \sum_{i,j=1}^2 \int_D \frac{\partial}{\partial y^j} \left[ \frac{h_{ij} \psi_{,i}}{\sqrt{|g|} \sigma(r(\psi))} \right] (n-\psi) dy$$

$$+ \sum_{i,j=1}^2 \oint_{\partial D} \frac{h_{ij} \psi_{,i}}{\sqrt{|g|} \sigma(r(\psi))} (n-\psi) n_{y^j} ds$$

$n_{y^1}, n_{y^2}$  composantes de la normale à  $\partial D$  extérieure à  $D$ .

En comparant avec 5.6. (via 5.3.) on obtient:

$$5.10. \quad \sum_{i,j=1}^2 \oint_{\partial D} \frac{h_{ij} \psi_{,i}}{\sqrt{|g|} \sigma(r(\psi))} (n-\psi) n_{y^j} ds - \sum_{k=1}^M c_k \oint_{\partial D_k} (n-\psi) ds = 0 \quad \forall n \in W$$

$$n, \psi \in W \quad \implies$$

$$\sum_{k=1}^M \left[ \oint_{\partial D_k} \left[ \sum_{i,j=1}^2 \frac{h_{ij} \psi_{,i}}{\sqrt{|g|} \sigma(r(\psi))} n_{y^j} - c_k \right] ds \right] \alpha_k = 0 \quad \forall \alpha_k \in \mathbb{R},$$

d'où en posant  $L_k = \oint_{\partial D_k} ds = \text{"longueur" de } \partial D_k$

$$5.11. \quad C_k L_k = \oint_{\partial D_k} \sum_{i,j=1}^2 \frac{h_{ij} \psi_{,i}}{\sqrt{|g|} \sigma(r(\psi))} n_{y^j} ds \quad k=1,2,\dots,M$$

Alors avec II.2.10 et sachant que par définition

$$5.12. \quad h_{11} = g_{22} \quad ; \quad h_{12} = -g_{21} \quad ; \quad h_{22} = g_{11}$$

on obtient :

$$5.13. \quad \boxed{C_k L_k = \oint_{\partial D_k} (w_1 n_{y^2} - w_2 n_{y^1}) ds}$$

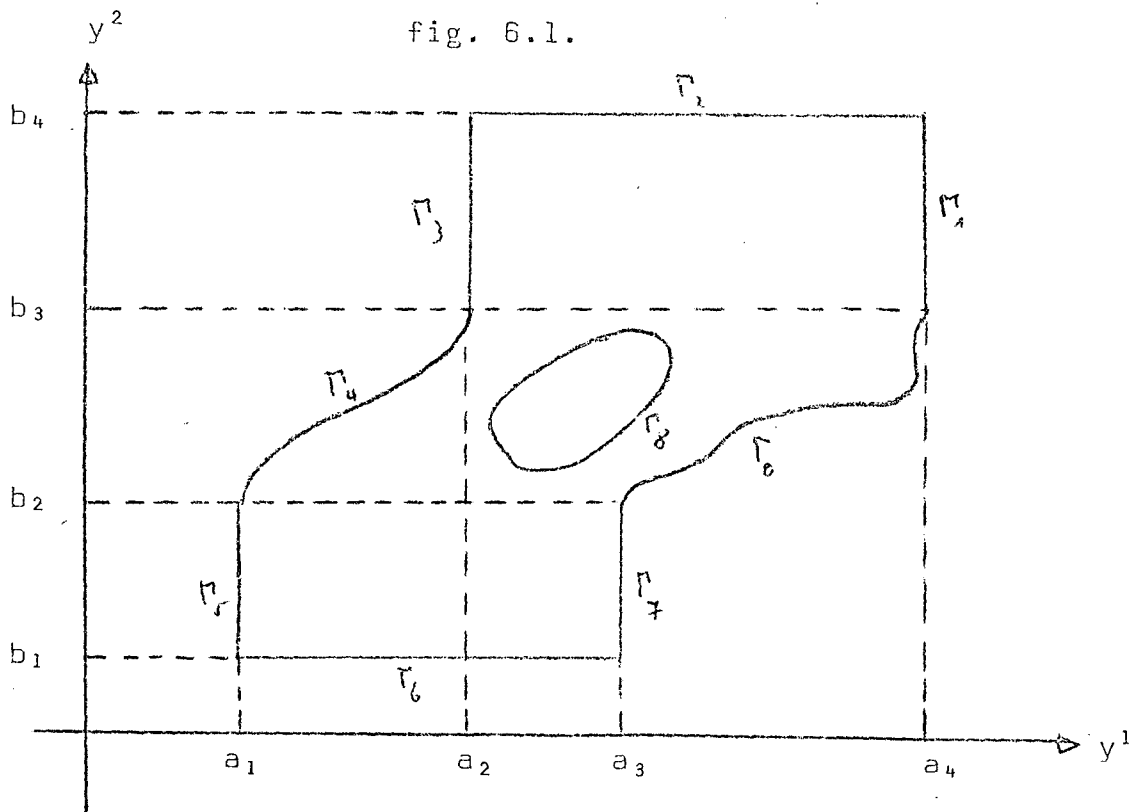
Conclusion : L'équation variationnelle 5.6. avec  $W$  donné par 5.1. résoud le problème de l'écoulement d'un fluide compressible subsonique autour d'obstacles.

### Remarques

- 5.1.  $n_{y^1}, n_{y^2}$  sont les composantes de la normale à  $\partial D_k$  extérieure à  $D$ , espace des paramètres, alors que  $w^1$  et  $w^2$  sont les composantes de la vitesse dans le repère naturel tangent de la surface de courant  $\Sigma(\mu)$ .
- 5.2. Dans le cas d'un écoulement plan,  $-C_k L_k$  est la circulation de la vitesse autour de  $\partial D_k$ .

6. La machine tournante

Considérons le domaine  $D$  de la figure suivante :



On se donne une constante  $F$  et on cherche un écoulement satisfaisant :

$$6.1. \quad \begin{cases} \psi|_{\Gamma_0} = 0 ; & \psi|_{\Gamma_8} = F ; & \psi|_{\Gamma_4} = 2F ; \\ \psi|_{\Gamma_2} = \varphi_2 ; & \psi|_{\Gamma_6} = \varphi_6 . \end{cases}$$

$$6.2. \quad \begin{cases} \psi(a_2, y^2) - \psi(a_4, y^2) = 2F & b_3 < y^2 < b_4 ; \\ \psi(a_1, y^2) - \psi(a_3, y^2) = 2F & b_1 < y^2 < b_2 . \end{cases}$$

De plus on suppose que :

$$6.3. \quad \left. \begin{array}{l} h_{ij}(a_2, y^2) = h_{ij}(a_4, y^2) \\ g(a_2, y^2) = g(a_4, y^2) \end{array} \right\} b_3 < y^2 < b_4$$

$$\left. \begin{array}{l} h_{ij}(a_1, y^2) = h_{ij}(a_3, y^2) \\ g(a_1, y^2) = g(a_3, y^2) \end{array} \right\} b_1 < y^2 < b_2 .$$

On considère l'ensemble

$$W = \{ \psi \in H^1(D) : \psi \text{ satisfait 6.1. et 6.2. } \}$$

On a évidemment  $W \subset H^1(\Gamma_0, D)$

et  $W$  est un sous-ensemble convexe fermé de  $H^1(\Gamma_0, D)$ ,  
c'est même un sous-espace linéaire affine fermé.

On considère la forme linéaire 5.2. qui définit comme en 5.3.  
un opérateur

$$6.4. \quad S : W \rightarrow H^1(\Gamma_0, D)$$

Proposition 6.1.

$S$  est fortement monotone dans  $W$  avec  $\nu$  de la proposition 4.3.

$S$  est lipchitzien dans  $W$  avec  $\mu$  de la proposition 4.4.

Démonstration

La démonstration est formellement identique à la démonstration  
de la proposition 4.4. et 4.3. avec  $\varphi \equiv 0$  et  $\theta_2 = \psi_2$ ,  $\theta_1 = \psi_1$ .

Considérons alors l'équation variationnelle

$$6.5. \quad \psi \in W ; (S(\psi) - f, \eta - \psi)_{H^1(\Gamma_0, D)} = 0 \quad \forall \eta \in W$$

En vertu de la proposition 6.1. et des résultats du §2,

l'équation 6.5. a une solution unique. Donnons une interprétation  
formelle de cette solution.

On a comme en 5.8.

$$6.7. \quad - \sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial}{\partial y^i} \left[ \frac{h_{ij} \psi_{,i}}{\sqrt{|g|} \sigma(r(\psi))} \right] = f \quad \text{dans } D$$

avec les conditions 6.1. et 6.2.

Avec la formule de Green 5.9. on obtient :

$$6.8. \quad \sum_{i,j=1}^2 \oint_{\partial D} \frac{h_{ij} \psi_{,i}}{\sqrt{|g|} \sigma(r(\psi))} (n-\psi)_{y^j} ds = 0 .$$

Comme  $\eta, \psi \in W$  et satisfont 6.1., on obtient :

$$6.9. \quad \sum_{i,j=1}^2 \int_{\Gamma_1 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_5 \cup \Gamma_7} \frac{h_{ij} \psi_{,i}}{\sqrt{|g|} \sigma(r(\psi))} (n-\psi)_{y^j} ds = 0 \quad \forall n \in W .$$

On a donc

$$6.10. \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i,j=1}^2 \int_{\Gamma_1 \cup \Gamma_3} \frac{h_{ij} \psi_{,i}}{\sqrt{|g|} \sigma(r(\psi))} (n-\psi)_{y^j} ds = 0 \quad \forall n \in W \\ \text{et} \\ \sum_{i,j=1}^2 \int_{\Gamma_5 \cup \Gamma_7} \frac{h_{ij} \psi_{,i}}{\sqrt{|g|} \sigma(r(\psi))} (n-\psi)_{y^j} ds = 0 \quad \forall n \in W . \end{array} \right.$$

Considérons par exemple la première intégrale, elle s'écrit : ( $n_{y^2} = 0$  ;  $ds = dy^2$ )



$$6.11. \quad \sum_{i=1}^2 \int_{b_3}^{b_4} \left[ \left( \frac{h_{i1} \psi, i}{\sqrt{|g|} \sigma(r(\psi))} (\eta - \psi) (a_4, y^2) \right) - \left( \frac{h_{i1} \psi, i}{\sqrt{|g|} \sigma(r(\psi))} (\eta - \psi) (a_2, y^2) \right) \right] dy^2 = 0$$

Avec la condition 6.2, on obtient

$$(\eta - \psi) (a_4, y^2) = (\eta - \psi) (a_2, y^2) \quad , \quad b_3 < y^2 < b_4$$

et 6.11 devient :

$$6.12. \quad \sum_{i=1}^2 \int_{b_3}^{b_4} \left[ \left( \frac{h_{i1} \psi, i}{\sqrt{|g|} \sigma(r(\psi))} (a_4, y^2) \right) - \left( \frac{h_{i1} \psi, i}{\sqrt{|g|} \sigma(r(\psi))} (a_2, y^2) \right) \right] (\eta - \psi) (a_2, y^2) dy = 0, \forall \eta \in W$$

d'où

$$6.13. \quad \sum_{i=1}^2 \frac{h_{i1} \psi, i}{\sqrt{|g|} \sigma(r(\psi))} (a_4, y) = \sum_{i=1}^2 \frac{h_{i1} \psi, i}{\sqrt{|g|} \sigma(r(\psi))} (a_2, y^2), \quad b_3 < y^2 < b_4$$

et avec II.2.10. avec la définition des  $h_{ij}$  (page 19) et 6.3. on obtient la condition naturelle :

$$6.14. \quad \begin{aligned} w_2(a_4, y^2) &= w_2(a_2, y^2) & b_3 < y^2 < b_4 \\ w_2(a_1, y^2) &= w_2(a_3, y^2) & b_1 < y^2 < b_2 \end{aligned}$$

( $w^i$  = ième composante contravariante de la vitesse).

D'autre part 6.2. entraîne :

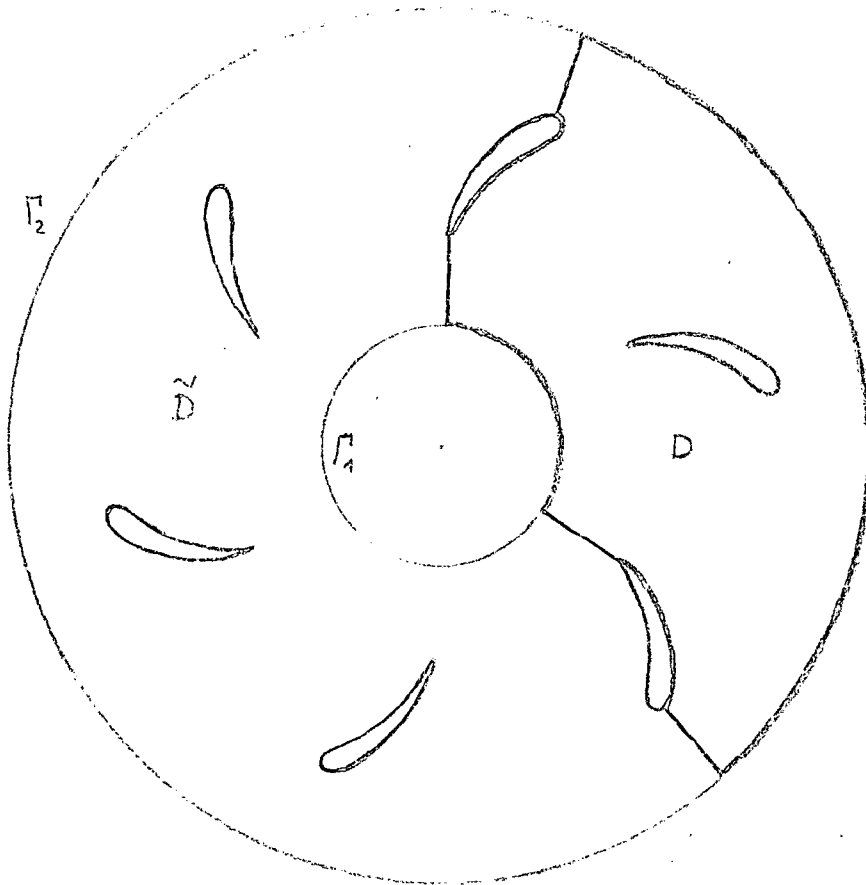
$$6.15. \quad \begin{aligned} w^1(a_4, y^2) &= w^1(a_2, y^2) & b_3 < y^2 < b_4 \\ w^1(a_1, y^2) &= w^1(a_3, y^2) & b_1 < y^2 < b_2 \end{aligned}$$

On peut remarquer que  $w_2$  et  $w^1$  permettent de calculer  $w_1$  et  $w^2$ .

Pour appliquer les résultats précédents considérons un cas pratique. Le domaine  $\tilde{D}$  lié à une turbine à la forme de

la figure 6.2. Il s'agit d'une turbine à  $N$  aubes. Le domaine  $\tilde{D}$  est invariant sous les rotations de centre  $O$  et d'angle  $\alpha = \frac{2\pi}{N} + 2k\pi : (R(O,\alpha))$ . Si on suppose que les données sur  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  sont invariantes sous les  $R(O,\alpha)$ ,

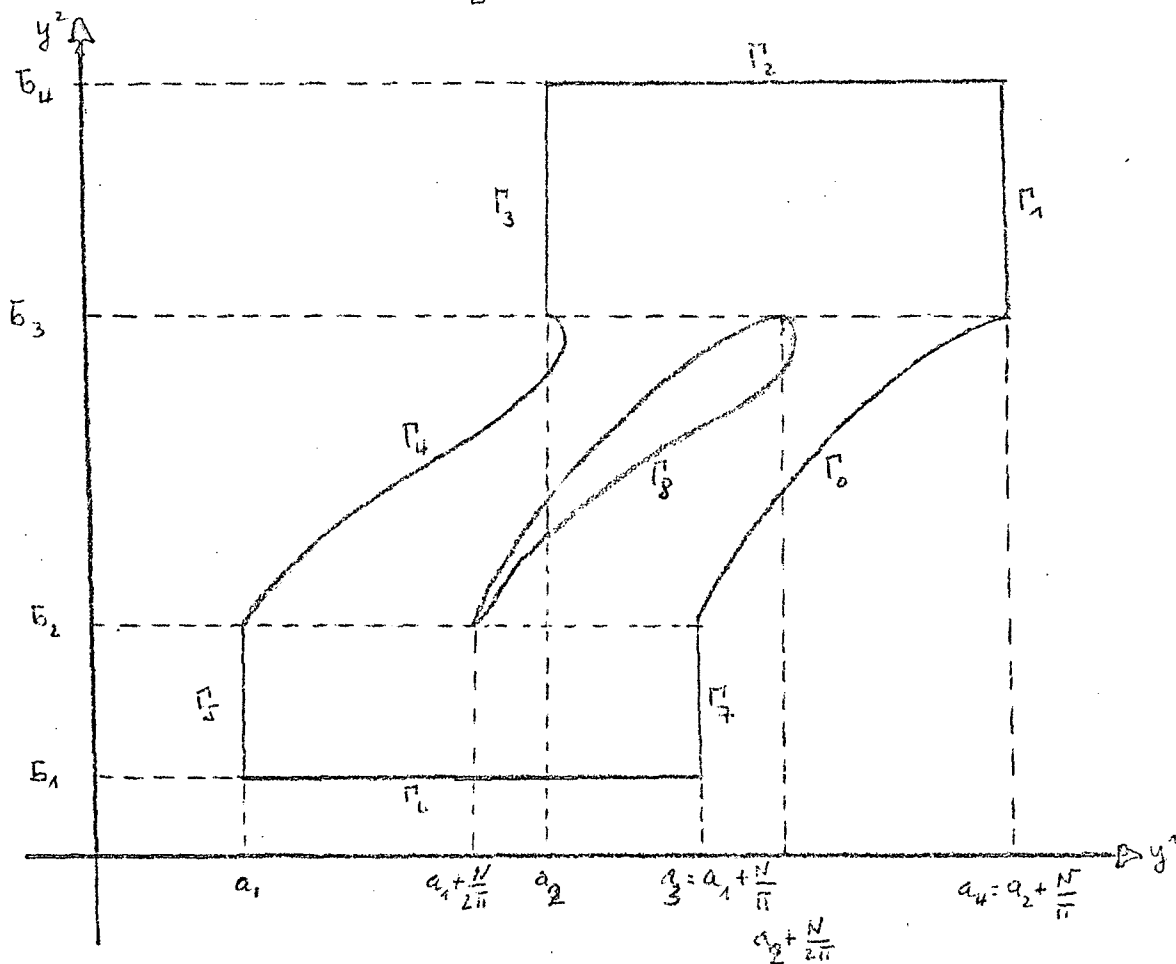
fig. 6.2.



on peut conclure que l'écoulement sera aussi invariant sous  $R(O,\alpha)$  et, au lieu de considérer l'écoulement dans  $\tilde{D}$ , on pourra le considérer dans le domaine  $D$  (fig. 6.2). Il est possible de considérer un domaine plus petit que  $D$ , mais comme on s'intéresse essentiellement à l'écoulement autour

des aubes, il paraît judicieux de choisir  $D$ , qui dans un diagramme  $((y^1, y^2) = (\theta, r))$  en coordonnées polaires est représenté à la figure 6.3.

fig. 6.3.



En outre on fait l'hypothèse raisonnable que sur  $\Gamma_2$  et  $\Gamma_6$  la densité de flux est uniforme, c'est-à-dire que :

$$6.16. \begin{cases} \psi|_{\Gamma_2} = \varphi_2(\theta) = \frac{NF}{2\pi} \theta + h_2 \\ \psi|_{\Gamma_6} = \varphi_6(\theta) = \frac{NF}{2\pi} \theta + h_6 \end{cases}$$

$h_2$  et  $h_6$  sont deux constantes qui doivent être données

ou choisies de telle sorte que l'écoulement obtenu par résolution du problème 6.5. ait un sens physique. D'autre part cette solution satisfait la condition 6.2. de conservation du flux et les conditions 6.13. et 6.14. qui expriment l'invariance sous  $R(0, \alpha)$ .

Dans certains cas on a des renseignements supplémentaires sur  $AB(\Gamma_0)$  (fig. 6.3). Souvent on connaît en plus de  $w^2$ ,  $w^1 \approx$  constante.

Considérons l'ensemble

$$6.17. \quad W = \{ \psi \in H^1(D) : \psi|_{\Gamma_0} = 0, \psi|_{\Gamma_8} = F ; \psi|_{\Gamma_4} = 2F ; \\ \psi|_{\Gamma_2} = \frac{NF}{2\pi}\theta + h_2 ; \psi|_{\Gamma_6} = \frac{NF}{2\pi}\theta + h \quad \forall h \in \mathbb{R} ; \\ \text{et } \psi \text{ satisfait 6.2.} \} ;$$

$h_2$  et  $F$  sont des constantes données ;

$W$  est un sous-espace linéaire fermé de  $H^1(\Gamma_0, D)$ .

La forme linéaire  $\eta \rightarrow \int_D f \eta \, dy + c_6 \int_{\Gamma_6} \eta \, ds$ ,  $c_6 \in \mathbb{R}$  est continue sur  $H^1(D)$  et définit  $g$  par :

$$6.18. \quad (g, \eta)_{H^1(\Gamma_0, D)} = \int_D f \eta \, dy + c_6 \int_{\Gamma_6} \eta \, ds .$$

Alors l'équation variationnelle

$$6.19. \quad \psi \in W \quad (S(\psi), \eta - \psi)_{H^1(\Gamma_0, D)} = (g, \eta - \psi)_{H^1(\Gamma_0, D)} \quad \forall \eta \in W$$

avec  $S$  défini en 6.4. a une solution unique; donnons-en une interprétation formelle :

On a comme en 6.7.

$$6.20. \quad - \sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial}{\partial y^j} \left[ \frac{h_{ij} \psi_{,i}}{\sqrt{|g|} \sigma(r(\psi))} \right] = f \quad \text{dans } D$$

et les conditions 6.14. sont aussi satisfaites.

Avec la formule de Green on obtient sur  $\Gamma_6$

$$6.21. \quad \left( \int_{\Gamma_6} \sum_{i,j=1}^2 \frac{h_{ij} \psi_{,i}}{\sqrt{|g|} \sigma(r(\psi))} n_{y^j}^{c_6} ds \right) h = 0 \quad \forall h \in \mathbb{R}$$

$$\implies 6.22. \quad c_6 L = \int_{\Gamma_6} \sum_{i,j=1}^2 \frac{h_{ij} \psi_{,i}}{\sqrt{|g|} \sigma(r(\psi))} n_{y^j} ds ,$$

ou  $L$  = "longueur" de  $AB$  .

Avec 5.11. et 5.13. on obtient

$$6.22. \quad c_6 L = \int_{\Gamma_6} w_1 dy^1$$

donc  $c_6$  est la moyenne de  $w_1$  sur  $\Gamma_6$  .

Dans d'autres cas on connaît sur  $AB(\Gamma_6)$  uniquement  $w_1$ .  
Alors on considère l'ensemble

$$6.23. \quad W = \{ \psi \in H^1(D) : \psi|_{\Gamma_0} = 0, \psi|_{\Gamma_8} = F, \psi|_{\Gamma_4} = 2F,$$

$$\psi|_{\Gamma_2} = \frac{NF}{2\pi} \theta + h_2 \text{ et } \psi \text{ satisfait 6.2.} \},$$

et  $g$  est définie par la forme linéaire continue sur  $H^1(D)$ .

$$6.24. \quad (g, \eta)_{H^1(\Gamma_0, D)} = \int_D f \eta \, dy + \int_{\Gamma_6} \eta u \, dy^1$$

avec  $u \in L^2(\Gamma_6)$

Alors l'équation variationnelle

$$6.25. \quad \psi \in W; \quad (S(\psi), \eta - \psi) = (g, \eta - \psi) \quad \forall \eta \in W$$

a une solution unique dont l'interprétation se fait comme précédemment. Sur  $\Gamma_6$  on obtient que  $w_1 = u$ .

## CHAPITRE IV

### APPROXIMATION PAR GALERKIN DES PROBLEMES DU CHAPITRE III

#### 1. Généralités

Soit  $H$  un espace de Hilbert muni du produit scalaire  $(\cdot, \cdot)$  et  $\|\cdot\|^2 = (\cdot, \cdot)$ .

Soit  $\{H_n\}_{n=1}^{\infty}$  une suite de sous-espaces de  $H$ , de dimension finie telle que :

$U = \bigcup_{n=1}^{\infty} H_n$  soit dense dans  $H$

1.1.  $H = \bar{U}$

1.2.  $\forall \psi \in H$ , il existe une suite  $\psi_m \in H_m$  telle que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|\psi_m - \psi\| = 0 .$$

Proposition 1.1.

Soit  $\{H_n\}_{n=1}^{\infty}$  une suite de sous-espaces de  $H$  de dimension finie, satisfaisant 1.1. et 1.2. et  $P_n$  le projecteur orthogonal (selon le produit scalaire de  $H$ ) de  $H$  sur  $H_n$ . Alors :

$$\forall \psi \in H, \lim_{n \rightarrow \infty} \|P_n \psi - \psi\| = 0.$$

Soit  $\{H_n\}_{n=1}^{\infty}$  satisfaisant 1.2. et  $P_n$  le projecteur orthogonal de  $H$  sur  $H_n$ .



Alors l'application

$$2.3. \quad R_n = P_n \circ R : H_n \rightarrow H_n$$

est contractante dans  $H_n$  avec la même constante de contraction que celle de  $R$  et on peut considérer le

Problème approché :

$$2.4. \quad \text{Chercher } \bar{\psi}_n \in H_n \text{ tel que } \bar{\psi}_n = R_n(\bar{\psi}_n) .$$

Théorème 2.1.

Soit  $\{H_n\}_{n=1}^\infty$  satisfaisant 1.2. ... Soit  $\bar{\psi}$  la solution du problème exacte et  $\bar{\psi}_n$  celle du problème approché, alors :

$$2.5. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|\bar{\psi}_n - \bar{\psi}\| = 0 .$$

Démonstration :

Calculons :

$$\begin{aligned} \|\bar{\psi}_n - \bar{\psi}\| &= \|R_n(\bar{\psi}_n) - R(\bar{\psi})\| = \\ &= \|P_n \circ R(\bar{\psi}_n) - P_n \circ R(\bar{\psi}) + P_n \circ R(\bar{\psi}) - R(\bar{\psi})\| \leq \\ &\leq \kappa \|\bar{\psi}_n - \bar{\psi}\| + \|P_n \bar{\psi} - \bar{\psi}\| \end{aligned}$$

d'où

$$\|\bar{\psi}_n - \bar{\psi}\| \leq \frac{1}{1-\kappa} \|P_n \bar{\psi} - \bar{\psi}\|$$

et la proposition 1.1. permet de conclure.

CHAPITRE V

APPLICATIONS NUMERIQUES

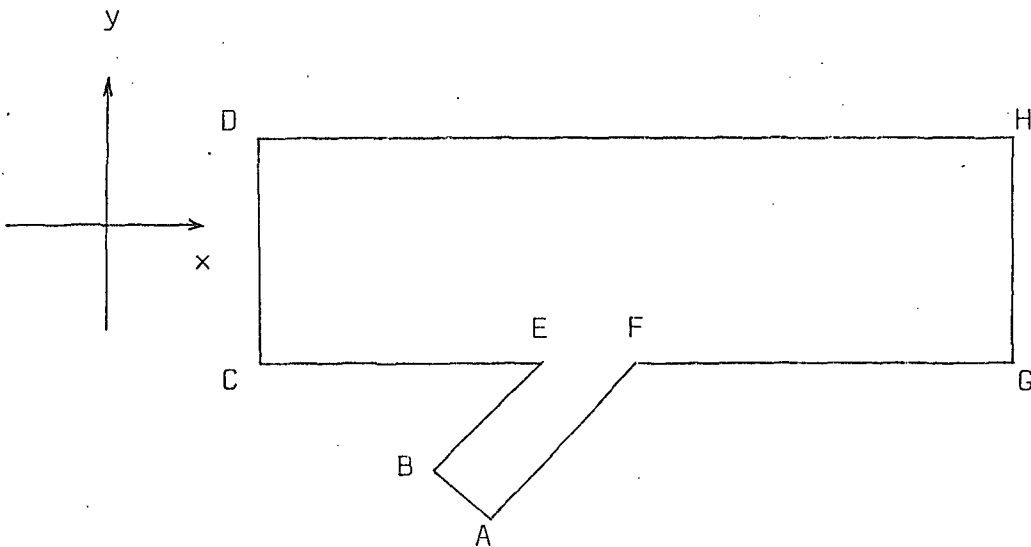
Nous appliquons à quelques exemples les méthodes exposées aux chapitres III et IV.

1. Problème de Dirichlet

Position du problème

Considérons le domaine de la figure 1.1.

fig. 1.1.



Nous voulons calculer l'écoulement d'un fluide compressible subsonique dans D , c'est-à-dire résoudre le problème 1.1. :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\psi, x}{\rho} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\psi, y}{\rho} \right) = 0$$

$$\frac{1}{2} \frac{\psi_x^2 + \psi_y^2}{\rho^2} + \frac{a\gamma}{\gamma-1} \left[ \rho^{\gamma-1} - \rho_0^{\gamma-1} \right] = 0$$

1.1.

$\psi = 0$  sur AFG ;  $\psi = \phi_1$  sur CEB ;

$\psi = \phi_2$  sur DH

$\psi$  linéaire sur BA, CD, GH ;

$\phi_1, \phi_2, \rho_0$  sont des constantes.

$\psi$  est la fonction de courant,

$\phi_1$  est le flux total traversant BA et FE ,

$\phi_2$  est le flux total traversant GH ,

$\phi_2 - \phi_1$  est le flux total traversant CD ,

$\rho$  est le poids spécifique du fluide,

$\rho_0$  est le poids spécifique du fluide lorsque sa vitesse est nulle.

Les relations II.2.10. donnent les composantes  $w_x$  et  $w_y$  de la vitesse du fluide, nous les rappelons ici :

$$1.2. \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = - \rho w_y \quad ; \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = \rho w_x .$$

Ces relations montrent que se donner  $\psi$  sur une frontière, revient à se donner la composante normale à la frontière de la densité de flux massique  $\rho \vec{w}$ . Ainsi  $\psi$  linéaire sur une partie  $A_1A_2$  de la frontière, signifie que  $\psi$  est de la forme :

$$1.3. \quad \psi(s) = \psi(s_1) + \frac{\psi(s_2) - \psi(s_1)}{s_2 - s_1} (s - s_1)$$

et

$$1.4. \quad \rho w_n = \frac{\psi(s_2) - \psi(s_1)}{s_2 - s_1}$$

où  $s$  est l'abscisse curviligne sur la partie  $A_1A_2$  de la frontière et  $\vec{n}$  la normale extérieure.

Formulation variationnelle

Soit  $\phi$  une fonction suffisamment régulière satisfaisant les conditions aux limites. Cette fonction est aisée à trouver, car les conditions aux limites sont linéaires par morceaux.

Remplaçons la fonction  $\rho$  par la fonction  $\sigma$  de la définition 4.3.. Alors le problème 1.1. devient :

$$1.5. \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{chercher } \theta \in H_0^1(D) \text{ tel que :} \\ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\theta, x + \phi, x}{\sigma} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\theta, y + \phi, y}{\sigma} \right) = 0 \end{array} \right. .$$

Ou sous forme faible :

$$1.6. \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{chercher } \theta \in H_0^1(D) \text{ tel que :} \\ \int_D \left[ \frac{\theta, x + \phi, x}{\sigma} \eta, x + \frac{\theta, y + \phi, y}{\sigma} \eta, y \right] dx dy = 0, \forall \eta \in H_0^1(D) ; \end{array} \right.$$

Alors  $\psi = \theta + \phi$  est la fonction de courant cherchée et l'opérateur  $S$  de la définition III.4.4. est défini par :

$$1.7. \quad \left\{ \begin{array}{l} (S(\theta), \eta)_{H_0^1} = \int_D \left[ \frac{\theta, x + \phi, x}{\sigma} \eta, x + \frac{\theta, y + \phi, y}{\sigma} \eta, y \right] dx dy \\ S : H_0^1(D) \longrightarrow H_0^1(D) . \end{array} \right.$$

Chercher la solution unique  $\theta$  de 1.5. revient à chercher le point fixe unique de :

$$1.8. \quad \left\{ \begin{array}{l} R : \theta \mapsto R(\theta) = \theta - kS(\theta) \\ R : H_0^1(D) \longrightarrow H_0^1(D) . \end{array} \right.$$

Avec  $k = \frac{\nu}{\mu^2}$  ,  $\nu$  et  $\mu$  de la proposition III.4.6.

Approximation

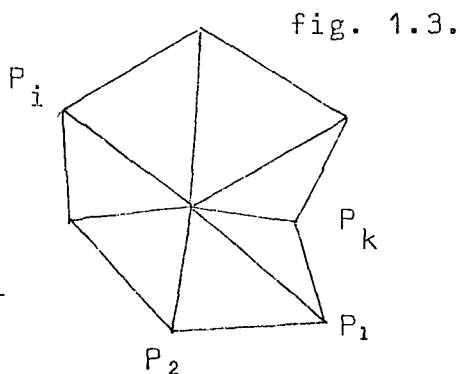
Nous voulons chercher une approximation du point fixe de  $R$ . Nous utilisons pour cela la méthode du chapitre IV. Considérons une triangulation du domaine  $D$ , (voir fig 1.2.) satisfaisant les règles décrites dans H. Froidevaux [1], [2].

L'espace dans lequel on cherche la solution approchée est défini de la manière suivante :

Soit  $M$  un sommet de plusieurs triangles (fig. 1.3.) et  $K$  le nombre de ces sommets.

On définit une fonction  $\varphi_M$  par :

1.9. 
$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_M(M) = 1, \\ \varphi_M(P_i) = 0, \quad i=1,2,\dots,k, \\ \varphi_M \text{ est affine sur chaque} \\ \text{triangle de sommet } M. \\ \varphi_M = 0 \text{ sur le complément du poly-} \\ \text{gone } P_1, P_2, \dots, P_K \\ M = 1, 2, \dots, K \end{array} \right.$$



Comme  $\varphi_M \in H_0^1(D)$ ,  $H_K$  est l'espace engendré par les  $\varphi_M$ .

Ainsi toute fonction  $\eta \in H_K$  s'exprime comme combinaison linéaire des  $\varphi_M$ .

1.10. 
$$\eta(x,y) = \sum_{M=1}^K a_M \varphi_M(x,y), \quad a_M \in \mathbb{R}.$$

$P_K$  désigne la projection orthogonale de  $H_0^1(D)$  sur  $H_K$  (proposition IV.1.1.). L'approximation du point fixe de  $R$  sera le point fixe de  $R_K = P_K \circ S$ .

# TRIANGULATION DU DOMAINE

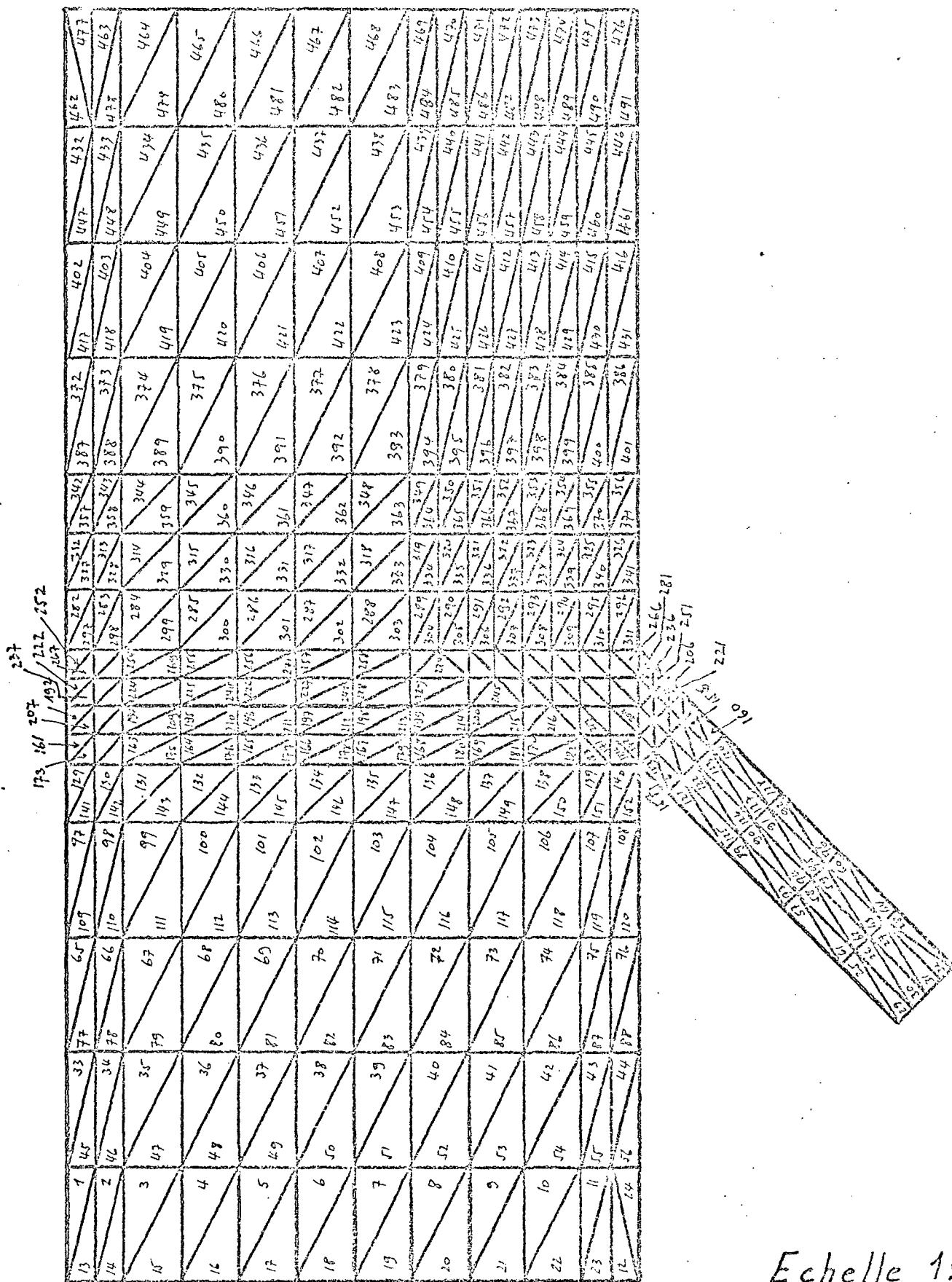


Fig. 1.2.

Echelle 1:1

Soit  $\theta_K^0 \in H_K$  une fonction donnée, alors la suite définie par :

$$1.11. \quad \theta_K^1 = R_K(\theta_K^0) , \theta_K^2 = R_K(\theta_K^1), \dots, \theta_K^i = R_K(\theta_K^{i-1}), \dots$$

converge dans  $H_K$  vers une approximation du point fixe de  $R$ .

En considérant la définition de  $R_K$  et de  $R$ , 1.11. s'écrit :

$$1.12. \quad \theta_K^i = P_K[R(\theta_K^{i-1})] = P_K[\theta_K^{i-1} - kS(\theta_K^{i-1})] = \theta_K^{i-1} - kP_K[S(\theta_K^{i-1})] .$$

Pour calculer  $P_K[S(\theta_K^{i-1})]$ , il suffit de remarquer que par définition de la projection  $P_K$ , on peut écrire :

$$1.13. \quad \left\{ \begin{array}{l} (\xi^i, \eta)_{H_0^1} = (S(\theta_K^i), \eta)_{H_0^1}, \forall \eta \in H_K \\ \xi^i = P_K[S(\theta_K^{i-1})] . \end{array} \right.$$

Avec 1.7. on obtient :

$$1.14. \quad (\xi^i, \eta)_{H_0^1} = \int_D \frac{(\theta_K^{i-1} + \varphi),_x}{\sigma} \eta, _x \frac{(\theta_K^{i-1} + \varphi),_y}{\sigma} \eta, _y \, dx dy \quad \forall \eta \in H_K$$

et il s'ensuit que la suite

$$1.15. \quad \theta_K^i = \theta_K^{i-1} - k\xi^i , \theta_K^0 \text{ donnée,}$$

converge.  $\xi^i$  s'obtient comme solution d'un système linéaire. En effet exprimons 1.13. en utilisant la forme 1.10. des fonctions  $H_K$ .

$$1.16. \quad \xi^i = \sum_{M=1}^K a_M^i \varphi_M$$

$$\eta = \sum_{M=1}^K a_M \varphi_M$$

$$1.17. \quad \sum_{M=1}^K a_M^i a_N (\varphi_M, \varphi_M)_{H_0^1} = \sum_{N=1}^K a_N (S(\theta_K^{i-1}), \varphi_N)_{H_0^1}$$

$$\forall (a_1, a_2, \dots, a_K) \in \mathbb{R}^K$$

d'où

$$1.18. \quad \sum_{M=1}^K (\varphi_M, \varphi_N)_{H_0^1} a_M^i = (S(\theta_K^{i-1}), \varphi_N)_{H_0^1}, \quad N=1, 2, \dots, K$$

et les inconnues  $a_M^i$  sont solutions du système linéaire 1.18.

La matrice

$$1.19. \quad ((\varphi_M, \varphi_N)_{H_0^1})_{\substack{M=1, K \\ N=1, K}}$$

est symétrique définie positive et 1.18. a toujours une solution unique.

### Résultats numériques

Le programme H. Froidevaux [1] calcule des solutions approchées de problèmes du type 1.13. et le programme H. Froidevaux [2] résout des problèmes non linéaires 1.15.. La figure 1.4. et le tableau 1.4. donnent les lignes de courant et les poids spécifiques pour un écoulement d'air. Pratiquement on effectue des itérations jusqu'à ce que

$$1.20. \quad \epsilon_i = \max_{\text{éléments}} \{ |\rho_i - \rho_{i-1}| \},$$

$\rho_i$  = valeur de  $\rho$  calculée à l'itération  $i$ , soit plus petit qu'une valeur choisie.



Une valeur de  $k$  (1.15.) théorique est donnée par (proposition III.4.6.) :

$$k = \frac{\nu}{\mu^2} \quad , \quad \nu = \frac{1}{\rho_0} \quad , \quad \mu = \frac{1}{1-\lambda} \frac{1}{\rho_s} + \frac{1}{\rho_I} - \frac{1}{\rho_0} \quad .$$

Nous avons, avec les conditions aux limites données, évalué  $\lambda = 0.8$  et choisi  $\rho_I = \rho_s$ . Alors on obtient

$$k = 0.22 \cdot 10^{-4} \text{ (C.G.S.)}.$$

Le calcul montre que pour cette valeur la convergence est très lente. La figure 1.5. montre le nombre d'itérations qu'il faut effectuer, en fonction de  $k$ , pour obtenir  $\varepsilon_i \leq 10^{-10}$ . Pour la valeur optimale de  $k = 10,98 \cdot 10^{-4}$  (C.G.S.) la figure 1.6. montre l'erreur en fonction du nombre d'itérations. Nous avons effectué 45 itérations avec l'ordinateur CDC7040 de l'EPFL et le temps de calcul était de 400 sec. environ.

### Remarques :

1.1. Le problème 1.13. est la formulation approchée d'un problème du type :

chercher  $u \in H_0^1(D)$  tel que  $\Delta u = f$ .

1.2. La fonction  $\varphi$  devant satisfaire les conditions aux limites est obtenue en résolvant le problème de Dirichlet linéaire :

$$1.21. \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\varphi_x}{\rho_0} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\varphi_y}{\rho_0} \right) = 0 \quad \text{dans } D \\ \varphi|_{\partial D} \text{ donnée (en 1.1.)} \end{array} \right.$$

$\varphi|_{\partial D}$  étant linéaire par morceau,  $\varphi$  satisfait exactement les conditions aux limites (si les noeuds sont choisis correctement) et

# ÉCOULEMENT DE L'AIR

ÉCHELLE 1:1

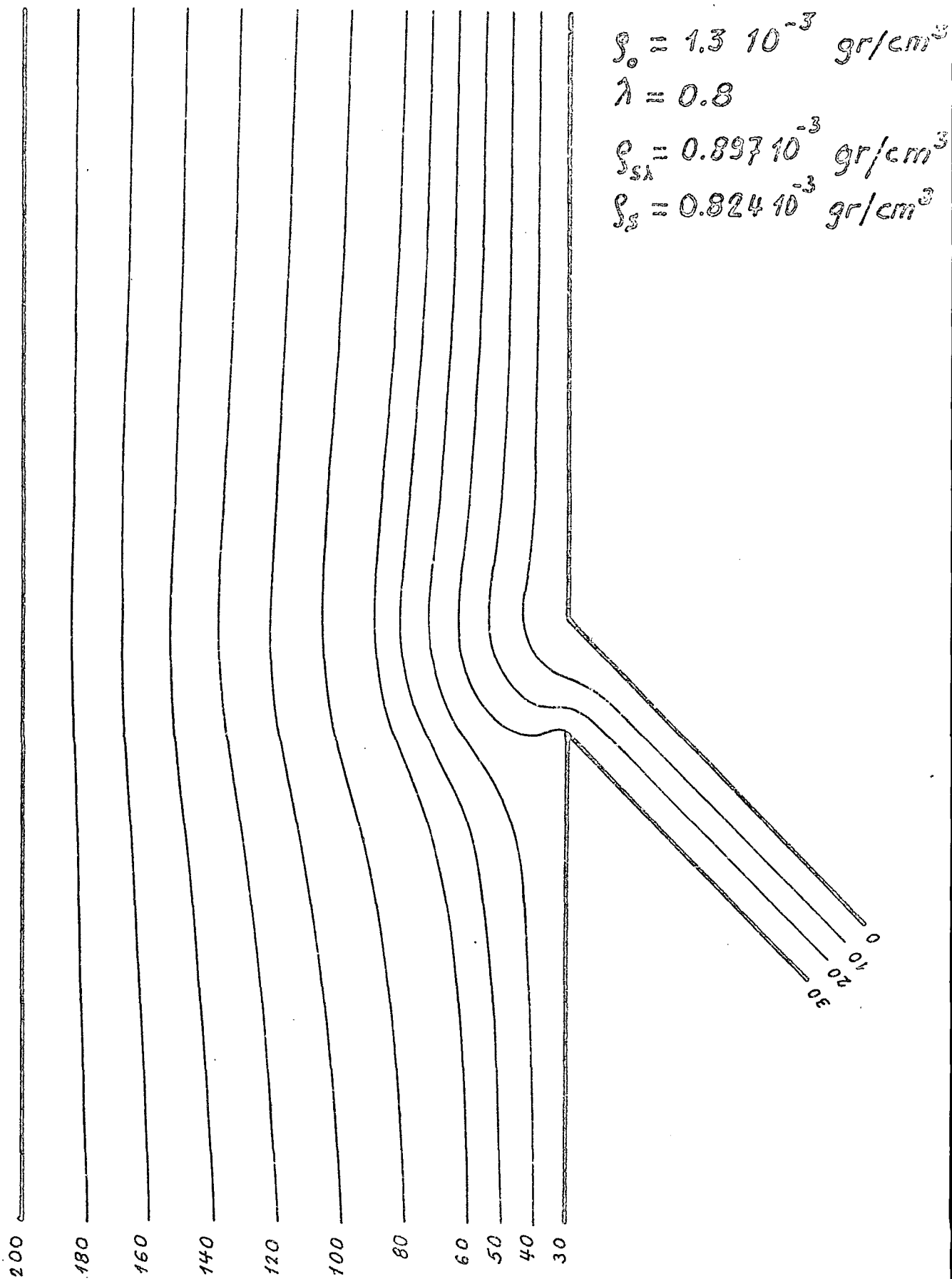


Fig. 1.4.



NOMBRE D'ITERATIONS POUR OBTENIR  $\epsilon_n \leq 10^{-10}$  EN FONCTION DE  $k$ .

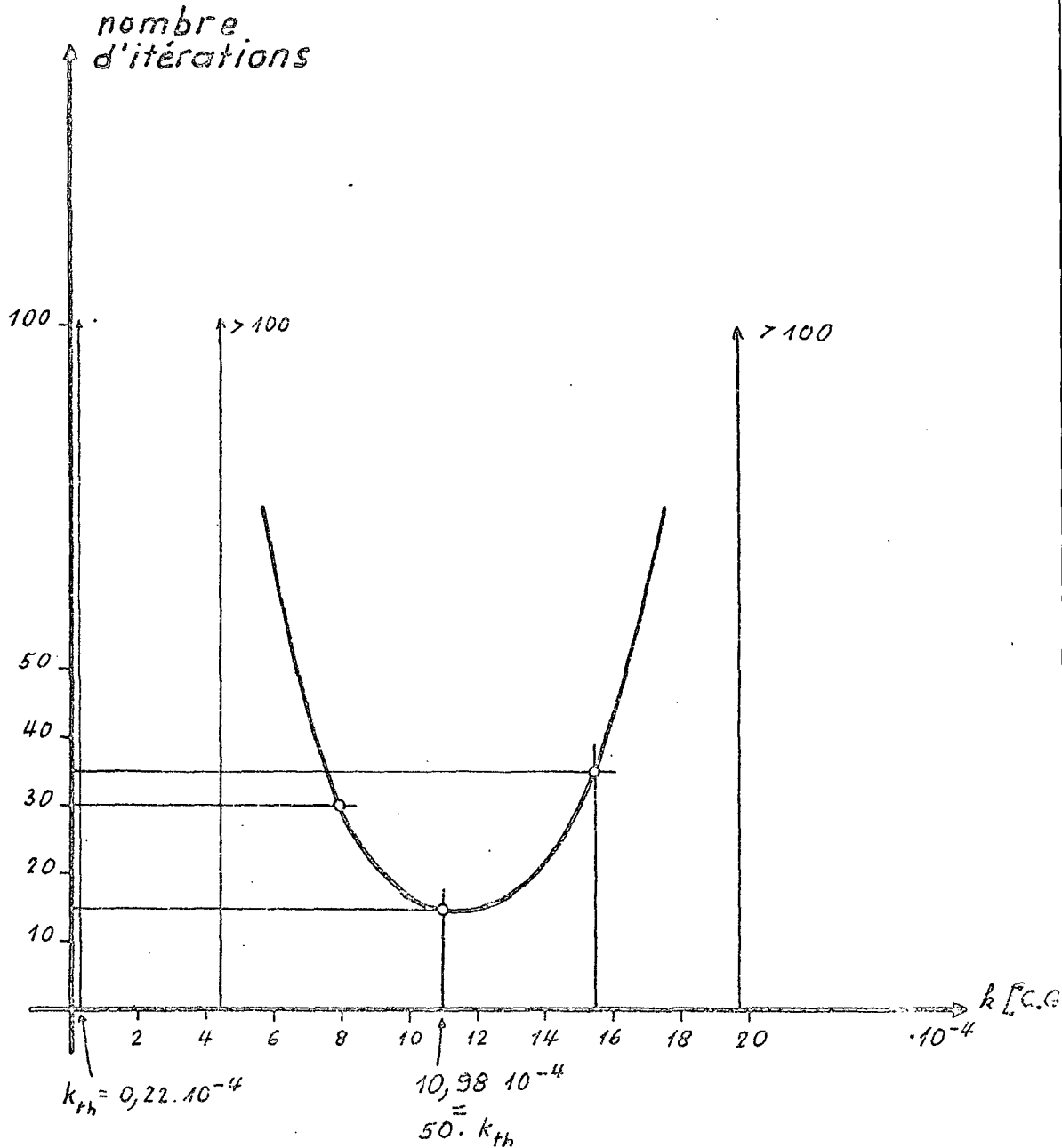


Fig. 1.5.

# ERREUR EN FONCTION DU NOMBRE D'ITERATIONS

$$k = 10,98 \cdot 10^{-4}$$

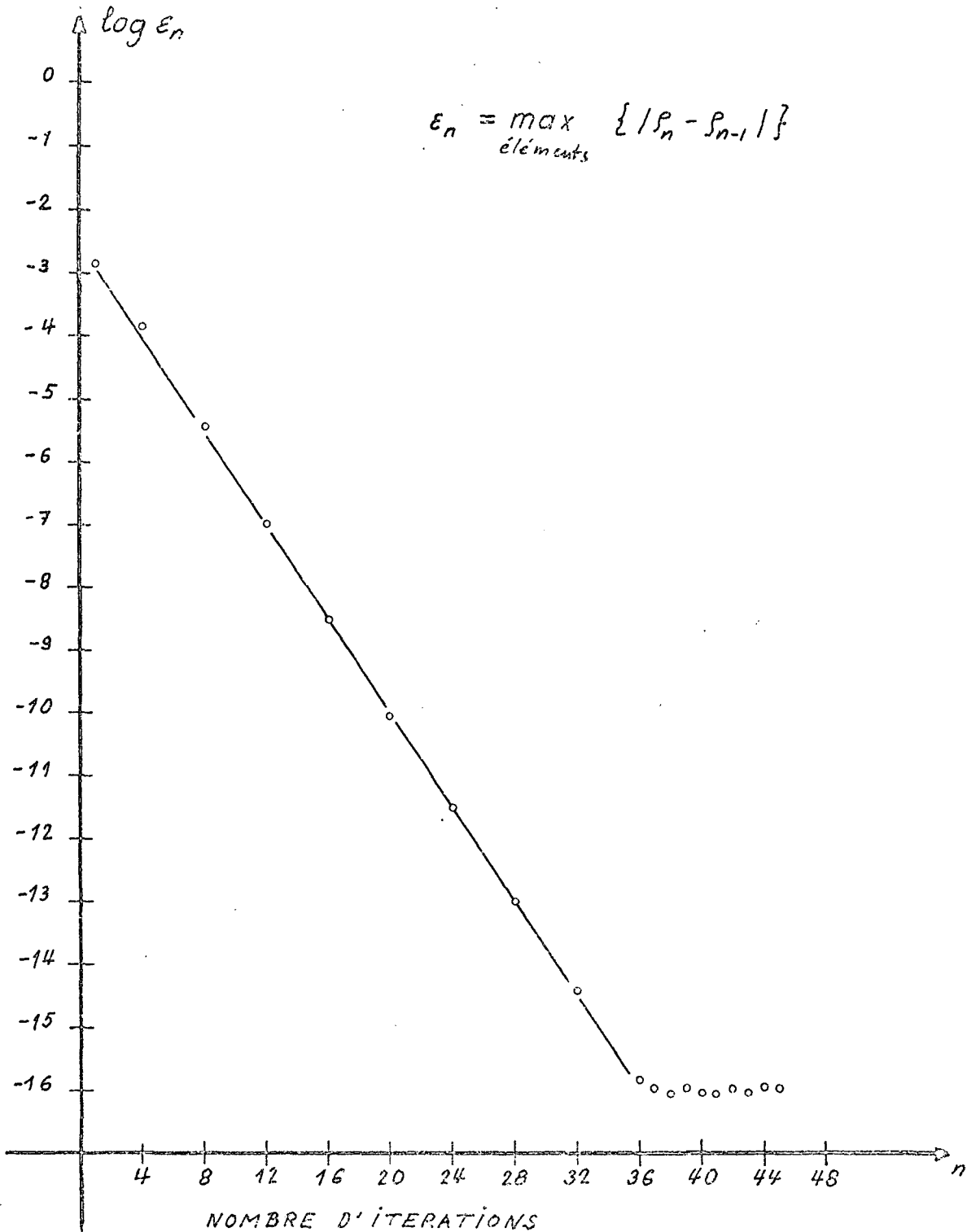


Fig. 1.6.

de plus elle a déjà un sens physique, puisqu'elle est la fonction de courant d'un fluide incompressible. Les fonctions  $\theta^0 = 0, \theta^1, \theta^2, \dots$  sont les "perturbations" du fluide incompressible.

## 2. Une machine tournante

Considérons comme au paragraphe III.6. une machine tournante de type radial. Les figures 2.1. et 2.2. la représentent dans les plans  $(r, \varphi)$  et  $(r, z)$ . On suppose les aubes cylindriques de génératrices parallèles à  $Oz$ . Comme exemple on calculera les écoulements sur deux surfaces de courant différentes.

### Equations paramétriques de la famille des surfaces de courant (§§ II.1., II.6.2., II.6.3.)

Désignons par  $f(r)$  la fonction (fig. 2.2.)

$$2.1. \quad f(r) = \begin{cases} 1.5 & 0 < r \leq 16.5 \\ 0.06(r-16.5)^3 + 1.5 & r \geq 16.5 \end{cases}$$

Alors la famille  $\Sigma(\mu)$  des surfaces de courant est définie par (II.6.3.) :

$$2.2. \quad \begin{cases} x^1 = r \cos \varphi \\ x^2 = r \sin \varphi \\ x^3 = (2\mu - 1)f(r) \end{cases} \quad \begin{array}{l} (r, \varphi) \in D \\ 0 \leq \mu \leq 1 \end{array}$$

D étant le domaine (fig. 2.1.) ACEGHFDB duquel on a enlevé l'aube centrale. Avec 2.2. on obtient facilement les différentes fonctions permettant d'écrire

l'équation de la fonction de courant

Comme en II.6.4. on obtient :

$$2.3. \quad \frac{1}{\lambda} = (1-2\mu)f'(r), \quad b = 2f(r) \quad , \quad \Lambda = 1 + \frac{1}{\lambda^2}$$

$$2.4. \quad h_{11} = r^2 \quad , \quad h_{22} = \Lambda \quad , \quad h_{12} = 0$$

$$2.5. \quad g = r^2 b^2 \quad .$$

En faisant l'hypothèse que l'écoulement est absolument irrotationnel sur  $\Sigma(\mu)$  , l'équation de la fonction de courant s'écrit:

$$2.6. \quad \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{r\psi, r}{\rho b} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{\Lambda\psi, \varphi}{\rho r b} \right) = 2\Omega r$$

où  $\Omega$  est la vitesse de rotation autour de Oz de la machine ( $\Omega > 0$  si la machine tourne dans le sens trigonométrique).

L'équation de Bernoulli devient :

$$2.7. \quad \frac{1}{2} \frac{r^2(\psi, r)^2 + \Lambda(\psi, \varphi)^2}{\rho^2 r^2 b^2} + \frac{a\gamma}{\gamma-1} [\rho^{\gamma-1} - \rho_0^{\gamma-1}] = 0$$

Avec  $\rho_0$  masse spécifique pour la vitesse nulle.

Conditions aux limites (fig. 2.1.)

$$2.8. \quad \left\{ \begin{array}{l} \psi|_{\Gamma_0} = 0 \quad , \quad \psi|_{\Gamma_8} = F \quad , \quad \psi|_{\Gamma_4} = 2F \\ \psi|_{\Gamma_6} = a\varphi + h_6 \quad , \quad \psi|_{\Gamma_2} = a\varphi + h_2 \end{array} \right.$$

$h_2$  et  $h_6$  sont des paramètres donnés.

$a$  est tel que  $\psi(G) - \psi(H) = 2F$  ce qui est équivalent à  $\psi(B) - \psi(A) = 2F$ .

Soient  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$  les angles et  $r_1, r_2, r_3, r_4$  les rayons indiqués sur la figure 2.1.

$$2.9. \quad \left\{ \begin{array}{l} \psi(r, \varphi_2) - \psi(r, \varphi_1) = 2F \quad r_1 \leq r \leq r_2 \\ \psi(r, \varphi_4) - \psi(r, \varphi_3) = 2F \quad r_3 \leq r \leq r_4 \end{array} \right.$$

On veut chercher sur les surfaces de courant  $\mu = \frac{1}{2}$  et  $\mu = \frac{3}{4}$  une solution approchée, subsonique de 2.6., 2.7. avec 2.8. et 2.9.. Le paramètre  $F$  étant donné on modifiera les valeurs de  $h_2$  et  $h_6$  pour obtenir des solutions physiques.  $h_6$  permettant d'obtenir "l'angle d'attaque donné de l'aube et  $h_2$  permet de satisfaire la condition de Kutta-Joukowski ou une condition équivalente.

Formulation variationnelle

Supposons que l'écoulement soit  $\lambda$ -subsonique et remplaçons  $\rho$  par  $\sigma$  de la définition 4.3. soit  $W$  l'ensemble des fonctions de  $H^1(D)$  satisfaisant 2.8. et 2.9.



MACHINE TOURNANTE  
Echelle 1:1

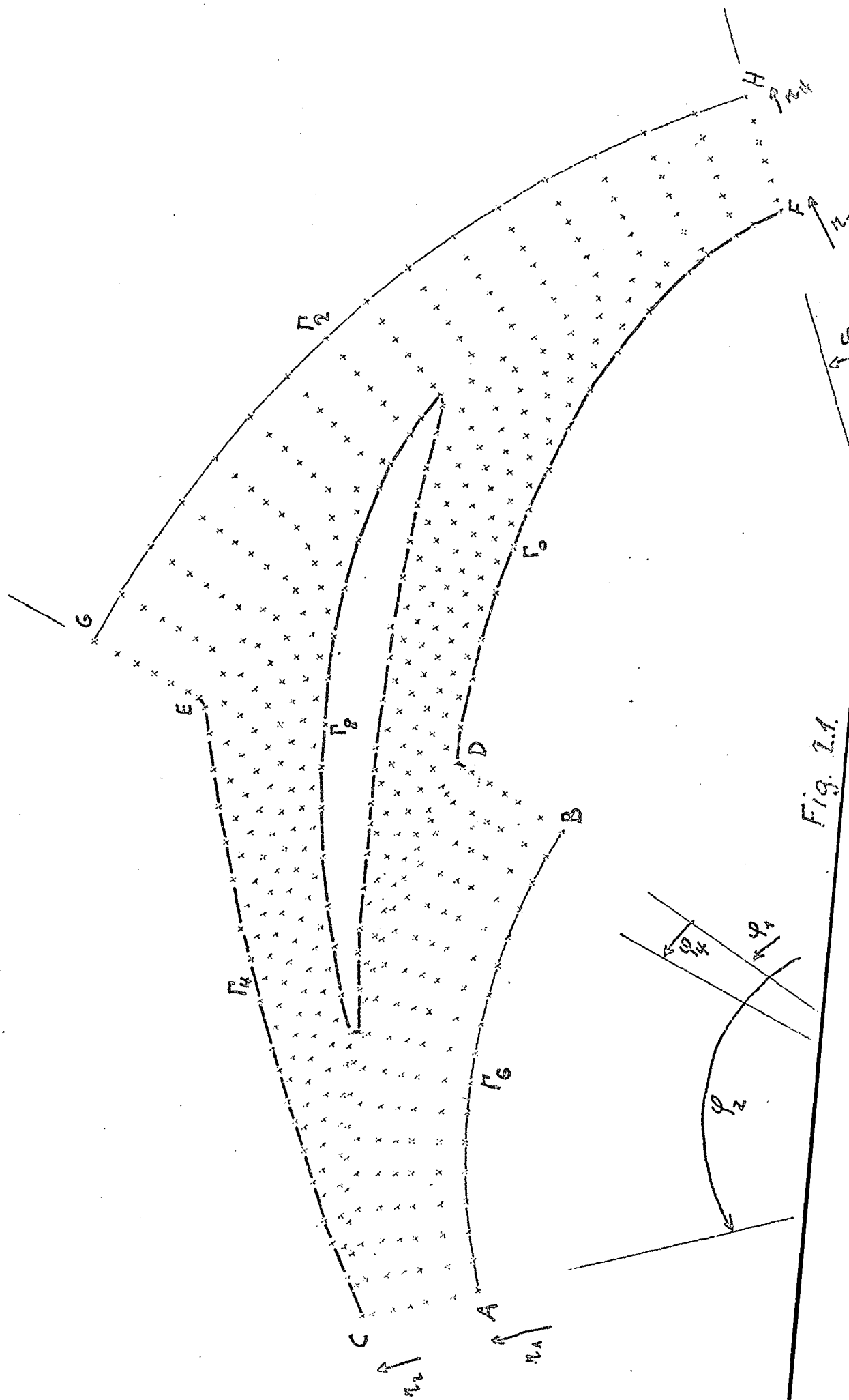
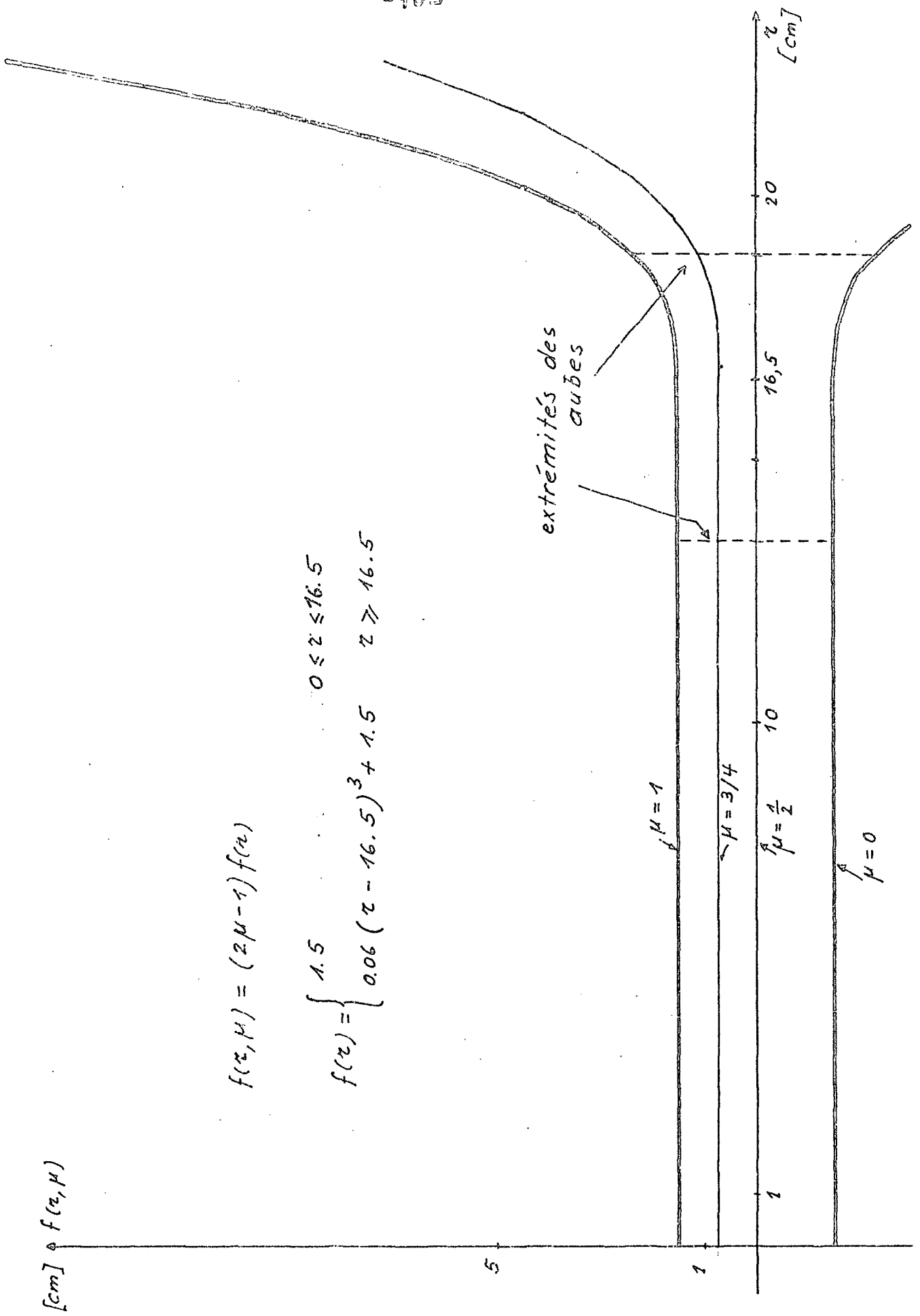


Fig. 2.1.



$$f(z, \mu) = (2\mu - 1) f(z)$$

$$f(z) = \begin{cases} 1.5 & 0 \leq z \leq 16.5 \\ 0.06 (z - 16.5)^3 + 1.5 & z \geq 16.5 \end{cases}$$

Fig. 2.2.

L'équation variationnelle

$$2.10 \quad \psi \in W, \quad (S(\psi) - f, \eta - \psi)_{H^1(\Gamma_0, D)} = 0, \quad \forall \eta \in W$$

avec

$$(S(\psi), \eta)_{H^1(\Gamma_0, D)} = \int_D \left[ \frac{r}{\sigma b} \psi,_{,r} \eta,_{,r} + \frac{\Lambda}{r \sigma b} \psi,_{,\varphi} \eta,_{,\varphi} \right] dr d\varphi$$

$$(f, \eta)_{H^1(\Gamma_0, D)} = - \int_D 2 \Omega r \eta dr d\varphi,$$

a une solution unique.

Soit  $\psi_0 \in W$ , (cette fonction satisfait 2.8. et 2.9.) comme en III.2.12. à III.2.15. on peut transformer le problème 2.10. en problème :

$$2.11. \quad \theta \in W_0, \quad (S(\theta + \psi_0) - f, \eta - \theta) = 0, \quad \forall \eta \in W_0;$$

avec  $W = \psi_0 + W_0$ ,  $\psi = \theta + \psi_0$  et

$$W_0 = \{ \theta \in H^1(\Gamma_0 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_4 \cup \Gamma_6 \cup \Gamma_8, D), \theta \text{ satisfait 2.9. avec } F = 0 \}.$$

$W_0$  est un sous-espace vectoriel de  $H^1(\Gamma_0, D) \subset H^1(D)$ .

Soit  $P_0$  la projection orthogonale de  $H^1(\Gamma_0, D)$  sur  $W_0$ .

Alors en vertu du corollaire III.2.3., la solution de 2.11. est le point fixe de

$$2.12. \quad \left| \begin{array}{l} R : W_0 \longrightarrow W \\ \theta \longmapsto R(\theta) = P_0(\theta - k(S(\theta + \psi_0) - f)), \end{array} \right.$$

avec  $k = \frac{\nu}{\mu^2}$ ,  $\nu$  et  $\mu$  de la proposition III.4.6.

Approximation

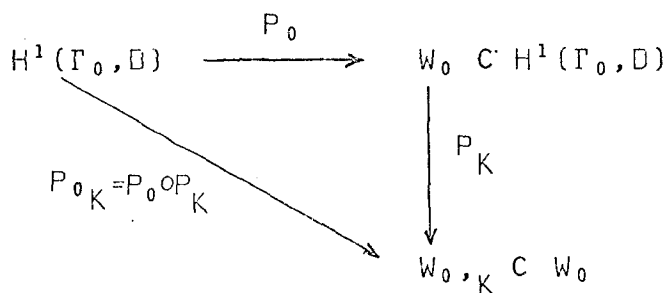
Nous voulons chercher une approximation du point fixe de  $R$ . Nous utilisons pour cela la méthode du chapitre IV. Considérons une triangulation de  $D$  satisfaisant les règles décrites dans H. Froidevaux [3], (fig. 2.3.). L'espace  $W_{0,K} \subset W_0$  est l'ensemble des fonctions continues sur  $D$ , nulles sur  $\Gamma_0 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_4 \cup \Gamma_6 \cup \Gamma_8$ , satisfaisant 2.9. avec  $F = 0$  et linéaires affines sur chaque triangle. Cet espace est évidemment de dimension finie,  $K$ . Soit  $P_K$  la projection orthogonale de  $W_0$  sur  $W_{0,K}$ . L'approximation du point fixe de  $R$  est le point fixe de  $R_K = P_K \circ R$ . Soit  $\theta_K^0 \in W_{0,K}$  une fonction donnée, alors la suite définie par :

$$2.13. \quad \theta_K^0, \quad \theta_K^1 = R_K(\theta_K^0), \quad \dots, \quad \theta_K^i = R_K(\theta_K^{i-1}), \dots$$

converge dans  $W_{0,K}$  vers une approximation du point fixe de  $R$ . En considérant la définition de  $R_K$  et de  $R$ , 2.13. s'écrit :

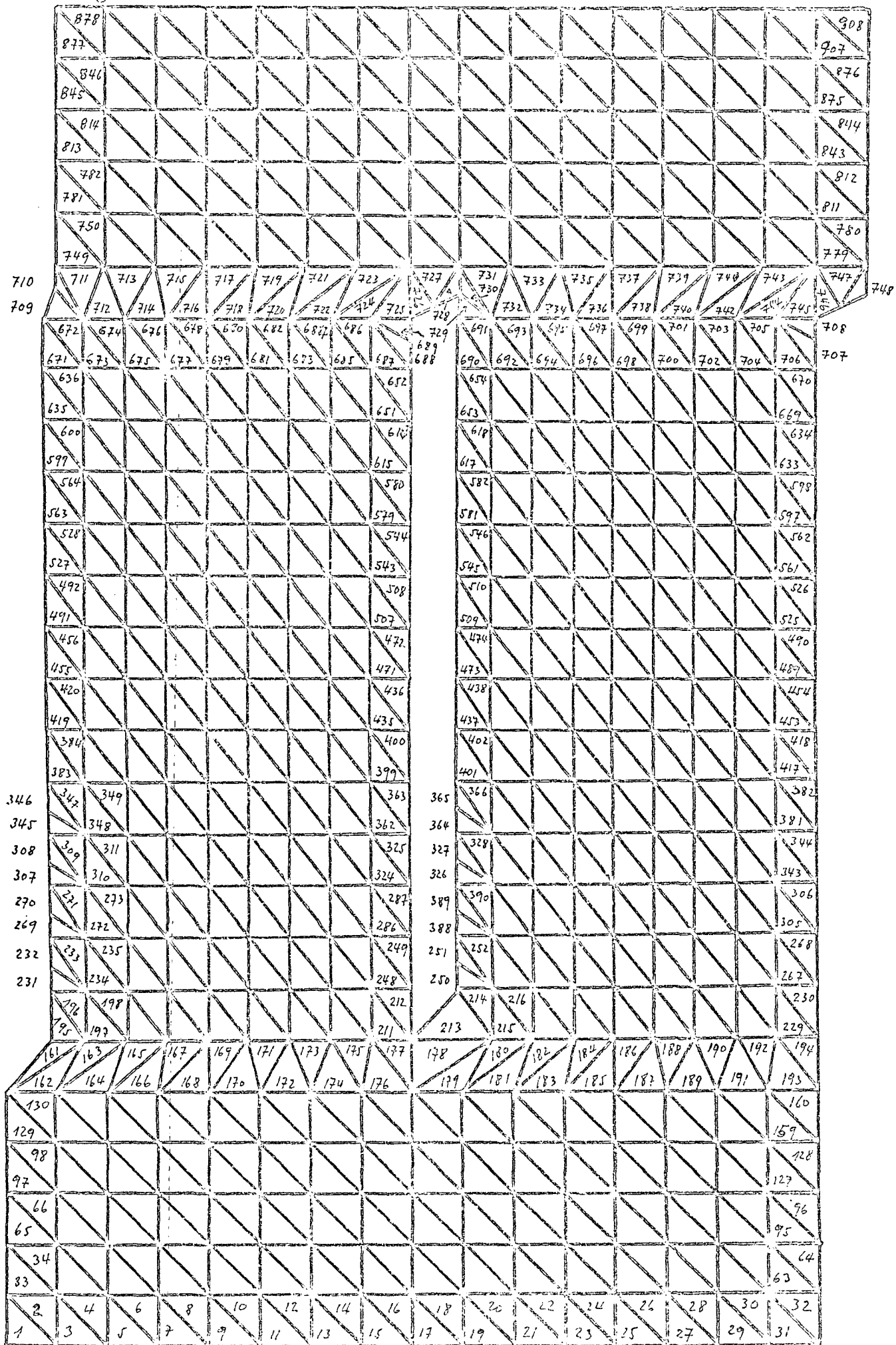
$$2.14. \quad \theta_K^i = P_K(R(\theta_K^{i-1})) = P_K \circ P(\theta_K^{i-1} - k(S(\theta_K^{i-1} + \psi_0) - f))$$

Par définition de  $P_0$  et  $P_K$  on a :



# MACHINE TOURNANTE. TRIANGULATION.

Fig. 2.3.



$P_{0K}$  est la projection orthogonale de  $H^1(\Gamma_0, D)$  sur  $W_{0,K}$ ,  
et 2.14. devient :

$$2.15. \quad \theta_K^i = \theta_K^{i-1} - k P_{0K} [S(\theta_K^{i-1} + \psi_0) - f]$$

Pour calculer  $P_{0K} [S(\theta_K^{i-1} + \psi_0) - f]$ , il suffit de remarquer  
que par définition de la projection orthogonale  $P_{0K}$ , on peut  
écrire :

$$2.16. \quad \left\{ \begin{array}{l} (\xi^i, \eta)_{H^1(\Gamma_0, D)} = (S(\theta_K^{i-1} + \psi_0) - f, \eta)_{H^1(\Gamma_0, D)}, \quad \forall \eta \in W_{0,K} \\ \xi^i = P_{0K} [S(\theta_K^{i-1} + \psi_0) - f] \end{array} \right.$$

Avec 2.10. on obtient :

$$2.17. \quad (\xi^i, \eta)_{H^1(\Gamma_0, D)} = \int_D \left[ \frac{r}{\sigma b} (\theta + \psi_0)_{,r} \eta_{,r} + \frac{\Lambda}{\rho r b} (\theta + \psi_0)_{,\varphi} \eta_{,\varphi} + 2\Omega r \eta \right] r dr d\varphi, \quad \forall \eta \in W_{0,K}$$

et il s'ensuit que la suite

$$2.18. \quad \theta_K^i = \theta_K^{i-1} - k \xi^i, \quad \theta_K^0 \text{ donnée, converge.}$$

Pour calculer  $\xi^i$  de 2.17., il faut introduire une base dans  
 $W_{0,K}$ . Comme cela est malaisé on introduit un nouvel espace  
 $W_L \supset W_{0,K}$  de dimension finie  $L$ , de la manière suivante :

- a) A chaque noeud intérieur de  $D$  (fig. 2.1.) on associe une fonction  $\varphi_M$  définie comme en 1.9.. On désigne par  $I$  l'ensemble des points intérieurs.
- b) A chaque noeud  $E$  intérieur des segments  $AC, BD, EG, FH$  (fig. 2.1.) on associe une fonction  $\varphi_E$  définie comme en 1.9..
- c) L'ensemble des  $\varphi_M$  et des  $\varphi_E$  constitue une base de  $W_L$  et évidemment  $W_{0,K} \subset W_L$ .

Pour décrire le sous-espace  $W_{0,K}$  de  $W_L$  introduisons les notations suivantes :

A chaque noeud  $A_1, A_2, \dots, A_\ell$  de l'intérieur de  $AC$  (respectivement  $E_1, E_2, \dots, E_m$  de l'intérieur de  $EG$ ) on fait correspondre un noeud  $B_1, B_2, \dots, B_\ell$  (respectivement  $F_1, F_2, \dots, F_m$ ) de telle sorte que :

$$A_i(r_i, \varphi_2) \longleftrightarrow B_i(r_i, \varphi_1) \quad i = 1, 2, \dots, \ell$$

$$E_j(r_j, \varphi_4) \longleftrightarrow F_j(r_j, \varphi_3) \quad j = 1, 2, \dots, m$$

alors

$$2.18. \quad \left\{ \begin{array}{l} \eta \in W_{0,K} \iff \\ \eta = \sum_{M \in I} a_M \varphi_M + \sum_{i=1}^{\ell} [a_i \varphi_{A_i} + b_i \varphi_{B_i}] + \sum_{j=1}^m [c_j \varphi_{E_j} + d_j \varphi_{F_j}] \\ \text{avec } a_i = b_i \quad i = 1, 2, \dots, \ell ; \quad c_j = d_j \quad j = 1, 2, \dots, m \end{array} \right.$$

$$a_M, a_i, b_i, c_j, d_j \in \mathbb{R}$$

d'où

$$2.19. \quad \left\{ \begin{array}{l} \eta \in W_{0,K} \iff \\ \eta = \sum_{M \in I} a_M \varphi_M + \sum_{i=1}^{\ell} a_i [\varphi_{A_i} + \varphi_{B_i}] + \sum_{j=1}^m c_j [\varphi_{E_j} + \varphi_{F_j}] \end{array} \right.$$

Notons

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_M &= \varphi_M, \quad M \in I; \quad \tilde{\varphi}_{A_i} = \varphi_{A_i} + \varphi_{B_i} \quad i = 1, 2, \dots, \ell \\ \tilde{\varphi}_{E_j} &= \varphi_{E_j} + \varphi_{F_j} \quad j = 1, 2, \dots, m; \quad \tilde{I} = I \cup \{A_i\} \cup \{E_j\} \end{aligned}$$

L'ensemble des fonctions  $\tilde{\varphi}_M, \tilde{\varphi}_{A_i}, \tilde{\varphi}_{E_j}$  constitue une base de  $W_{0,K}$ .

La suite du calcul est semblable à celle de la fin du paragraphe précédent.

Soit :

$$2.20. \quad \left\{ \begin{array}{l} \xi^i = \sum_{M \in \tilde{I}} a_M^i \tilde{\varphi}_M \\ \eta = \sum_{M \in \tilde{I}} a_M \tilde{\varphi}_M \end{array} \right. ,$$

2.16. devient :

$$2.21. \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{\substack{M \in \tilde{I} \\ N \in \tilde{I}}} a_M^i a_N (\tilde{\varphi}_M, \tilde{\varphi}_N)_{H^1(\Gamma_0, D)} = \sum_{N=1} a_N (S(\theta_K^{i-1} + \psi_0) - f, \tilde{\varphi}_N)_{H^1(\Gamma_0, D)} \\ \forall N \in \tilde{I}, \quad \forall a_N \in \mathbb{R} \end{array} \right.$$



d'où

$$2.22. \quad \sum_{M \in I} (\tilde{\varphi}_M, \tilde{\varphi}_N)_{H^1(\Gamma_0, D)} a_M^i = (S(\theta_K^{i-1} + \psi_0) - f, \tilde{\varphi}_N)_{H^1(\Gamma_0, D)}, \quad N \in \tilde{I},$$

et les inconnues  $a_M^i$  sont solutions du système linéaire 2.22.

Résultats numériques

Pratiquement tout le calcul concernant l'approximation peut être fait pour  $H^1(\Gamma_0, D)$  muni du produit scalaire

$$2.23. \quad ((\eta, \psi)) = \sum_{i=1}^2 \int_D \frac{h_{ij}}{\sqrt{|g|}} \eta_{,i} \psi_{,i} dx.$$

La norme associée  $\| \eta \|^2 = ((\eta, \eta))$  est équivalente à la norme habituelle de  $H^1(\Gamma_0, D)$ . Pour cette norme, le problème à résoudre est alors :

$$2.24. \quad \theta_K^i = \theta_K^{i-1} - k \xi^i \quad \theta_K^0 \text{ donnée}$$

$$2.25. \quad ((\xi^i, \eta)) = ((S(\theta_K^{i-1} + \psi_0) - f, \eta)) \quad \forall \eta \in W_0, K$$

et sous forme approchée

$$2.26. \quad \sum_{M \in I} ((\tilde{\varphi}_M, \tilde{\varphi}_N)) a_M^i = ((S(\theta_K^{i-1} + \psi_0) - f, \tilde{\varphi}_M)), \quad N \in \tilde{I}$$

Le programme H. Froidevaux [3] calcule des solutions appro-  
chées de problèmes de ce type. Le facteur  $k$  est alors donné

$$\text{par } k = v/\mu^2, \quad v = 1/\rho_0, \quad \mu = \frac{1}{1-\lambda} \frac{1}{\rho_{s\lambda}} + \frac{1}{\rho_I} - \frac{1}{\rho_0}.$$

On évalue  $\lambda = 0,8$  et on choisit  $\rho_I = \rho_s$ , alors on obtient  
 $k = k_{th} = 0.22 \cdot 10^{-4}$  (C.G.S.). Après quelques essais nous obte-  
nons la convergence qui nous paraît être la plus rapide pour  
 $k = 2.2 \cdot 10^{-4}$  (C.G.S.). On effectue les calculs pour les deux  
surfaces de courant  $\mu = \frac{1}{2}$  et  $\mu = \frac{3}{4}$ . Les figures 2.5. et  
2.6. et les tableaux 2.5. et 2.6. donnent les résultats obtenus.  
La figure 2.7. donne l'erreur 1.20. en fonction du nombre d'ité-  
rations pour  $\mu = 3/4$ . 44 itérations ont été effectuées dans un  
temps de 490 sec. environ.

### Remarques

1.1. Le problème 2.25. est la formulation approchée d'un  
problème du type :

$$\text{Chercher } u \in W \quad \text{tel que} \quad \sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial x^i} \left[ \frac{h_{ii}}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial u}{\partial x^i} \right] = f$$

1.2. La fonction  $\psi_0$  devant satisfaire les conditions aux  
limites 2.8. et 2.9. est obtenue en résolvant de manière  
approchée le problème linéaire :

$$\left| \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{r\psi_0}{\rho_0 b} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{\Lambda}{\rho_0 r b} \psi_0 \right) = 2\Omega r \\ \psi_0 \text{ satisfaisant 2.8. et 2.9..} \end{array} \right.$$

# MACHINE TOURNANTE

## Ecoulement d'air

Echelle 1:1

Vit. de rot. 30 t/sec

$\mu = 3/4$

$\lambda = 0.8$

$\rho_0 = 1.3 \text{ E-}3 \text{ gr/cm}^3$

$\rho_{s\lambda} = 0.897 \text{ E-}3 \text{ gr/cm}^3$

$\rho_s = 0.824 \text{ E-}3 \text{ gr/cm}^3$

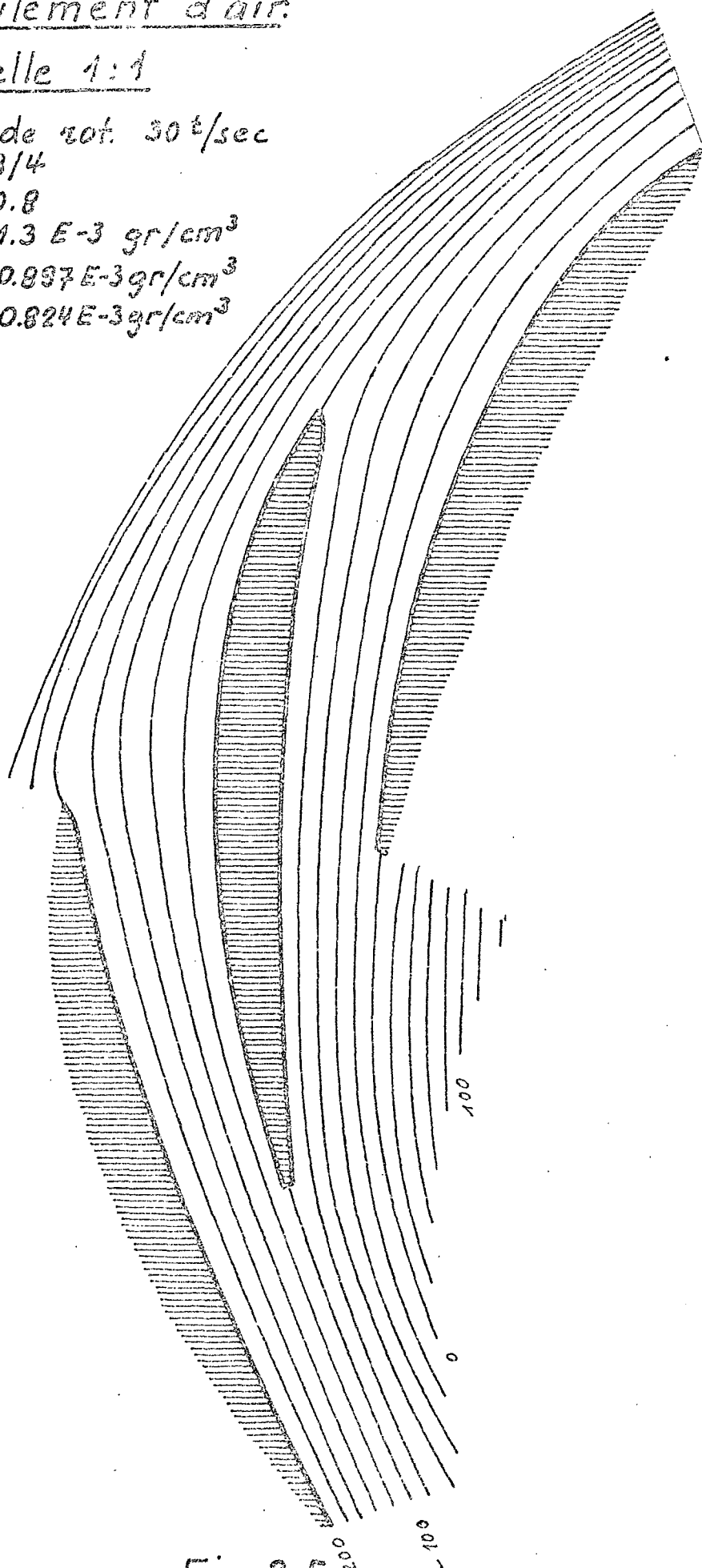


Fig. 2.5.

POIDS SPECIFIQUES SUR LES ELEMENTS

TABLEAU 2.5

N° de l'élément  
← poids spécifique

1	1.1591-03	2	1.0855-03	3	1.0565-03	4	1.0385-03	5	1.0215-03	6	1.0045-03	7	0.9875-04	8	0.9705-04	9	0.9535-04	10	0.9365-04	11	0.9195-04	12	0.9025-04	13	0.8855-04	14	0.8685-04	15	0.8515-04	16	0.8345-04	17	0.8175-04	18	0.8005-04	19	0.7835-04	20	0.7665-04	21	0.7495-04	22	0.7325-04	23	0.7155-04	24	0.6985-04	25	0.6815-04	26	0.6645-04	27	0.6475-04	28	0.6305-04	29	0.6135-04	30	0.5965-04	31	0.5795-04	32	0.5625-04	33	0.5455-04	34	0.5285-04	35	0.5115-04	36	0.4945-04	37	0.4775-04	38	0.4605-04	39	0.4435-04	40	0.4265-04	41	0.4095-04	42	0.3925-04	43	0.3755-04	44	0.3585-04	45	0.3415-04	46	0.3245-04	47	0.3075-04	48	0.2905-04	49	0.2735-04	50	0.2565-04	51	0.2395-04	52	0.2225-04	53	0.2055-04	54	0.1885-04	55	0.1715-04	56	0.1545-04	57	0.1375-04	58	0.1205-04	59	0.1035-04	60	0.0865-04	61	0.0695-04	62	0.0525-04	63	0.0355-04	64	0.0185-04	65	0.0015-04	66	0.0000-04	67	0.0000-04	68	0.0000-04	69	0.0000-04	70	0.0000-04	71	0.0000-04	72	0.0000-04	73	0.0000-04	74	0.0000-04	75	0.0000-04	76	0.0000-04	77	0.0000-04	78	0.0000-04	79	0.0000-04	80	0.0000-04	81	0.0000-04	82	0.0000-04	83	0.0000-04	84	0.0000-04	85	0.0000-04	86	0.0000-04	87	0.0000-04	88	0.0000-04	89	0.0000-04	90	0.0000-04	91	0.0000-04	92	0.0000-04	93	0.0000-04	94	0.0000-04	95	0.0000-04	96	0.0000-04	97	0.0000-04	98	0.0000-04	99	0.0000-04	100	0.0000-04
---	-----------	---	-----------	---	-----------	---	-----------	---	-----------	---	-----------	---	-----------	---	-----------	---	-----------	----	-----------	----	-----------	----	-----------	----	-----------	----	-----------	----	-----------	----	-----------	----	-----------	----	-----------	----	-----------	----	-----------	----	-----------	----	-----------	----	-----------	----	-----------	----	-----------	----	-----------	----	-----------	----	-----------	----	-----------	----	-----------	----	-----------	----	-----------	----	-----------	----	-----------	----	-----------	----	-----------	----	-----------	----	-----------	----	-----------	----	-----------	----	-----------	----	-----------	----	-----------	----	-----------	----	-----------	----	-----------	----	-----------	----	-----------	----	-----------	----	-----------	----	-----------	----	-----------	----	-----------	----	-----------	----	-----------	----	-----------	----	-----------	----	-----------	----	-----------	----	-----------	----	-----------	----	-----------	----	-----------	----	-----------	----	-----------	----	-----------	----	-----------	----	-----------	----	-----------	----	-----------	----	-----------	----	-----------	----	-----------	----	-----------	----	-----------	----	-----------	----	-----------	----	-----------	----	-----------	----	-----------	----	-----------	----	-----------	----	-----------	----	-----------	----	-----------	----	-----------	----	-----------	----	-----------	----	-----------	----	-----------	----	-----------	----	-----------	----	-----------	----	-----------	----	-----------	----	-----------	----	-----------	----	-----------	----	-----------	-----	-----------



- 115 -

# MACHINE TOURNANTE

## Ecoulement d'air

Echelle 1:1

Vit. de rot. 30<sup>t</sup>/sec.

$$\mu = 1/2$$

$$\lambda = 0.8$$

$$\rho_0 = 1.3 \text{ E-3 gr/cm}^3$$

$$\rho_{s\lambda} = 0.897 \text{ E-3 gr/cm}^3$$

$$\rho_s = 0.824 \text{ E-3 gr/cm}^3$$

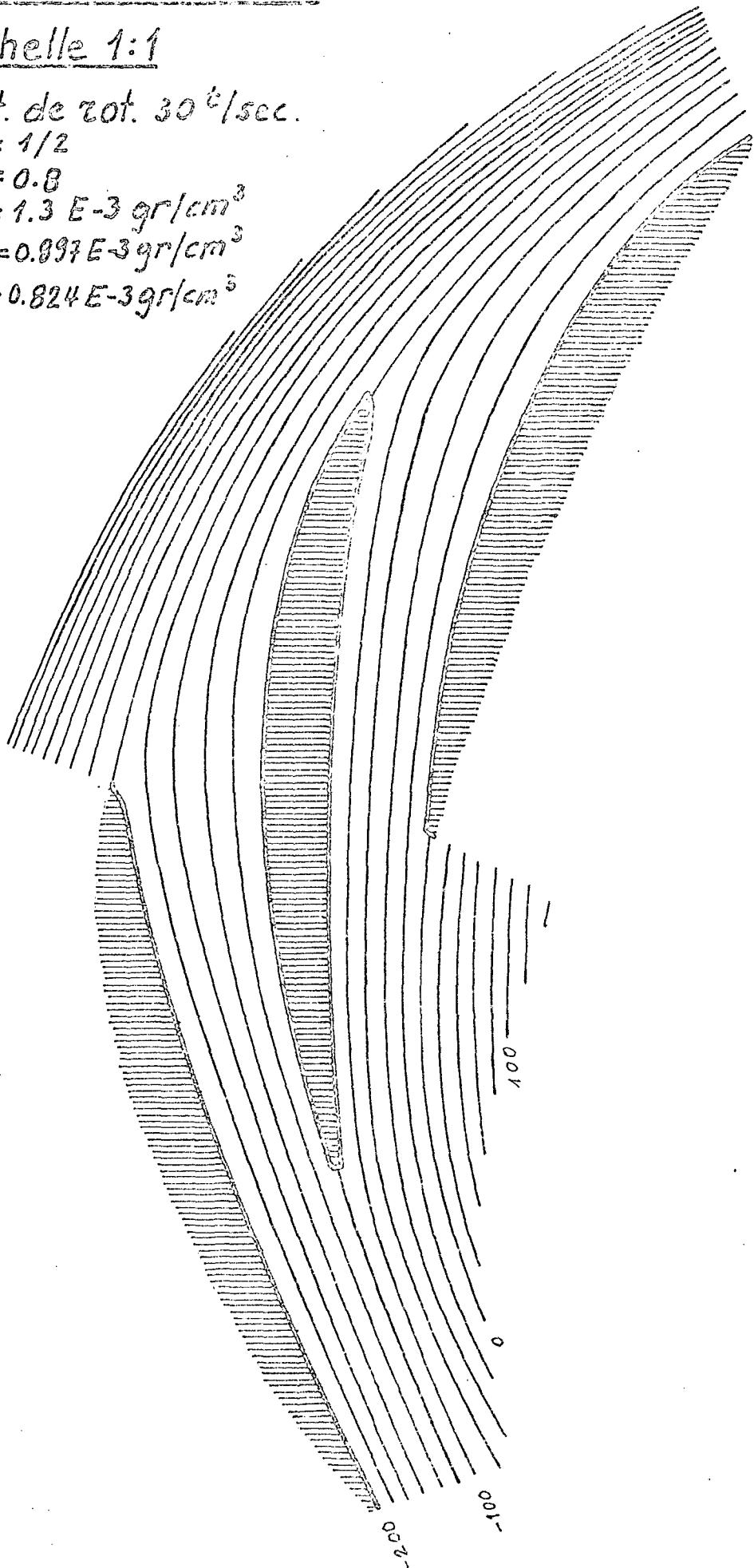


Fig. 2.6.







# ERREUR EN FONCTION DU NOMBRE D'ITERATIONS

$$k = 2,2 \cdot 10^{-4}$$

surface de courant  $\mu = 3/4$ .

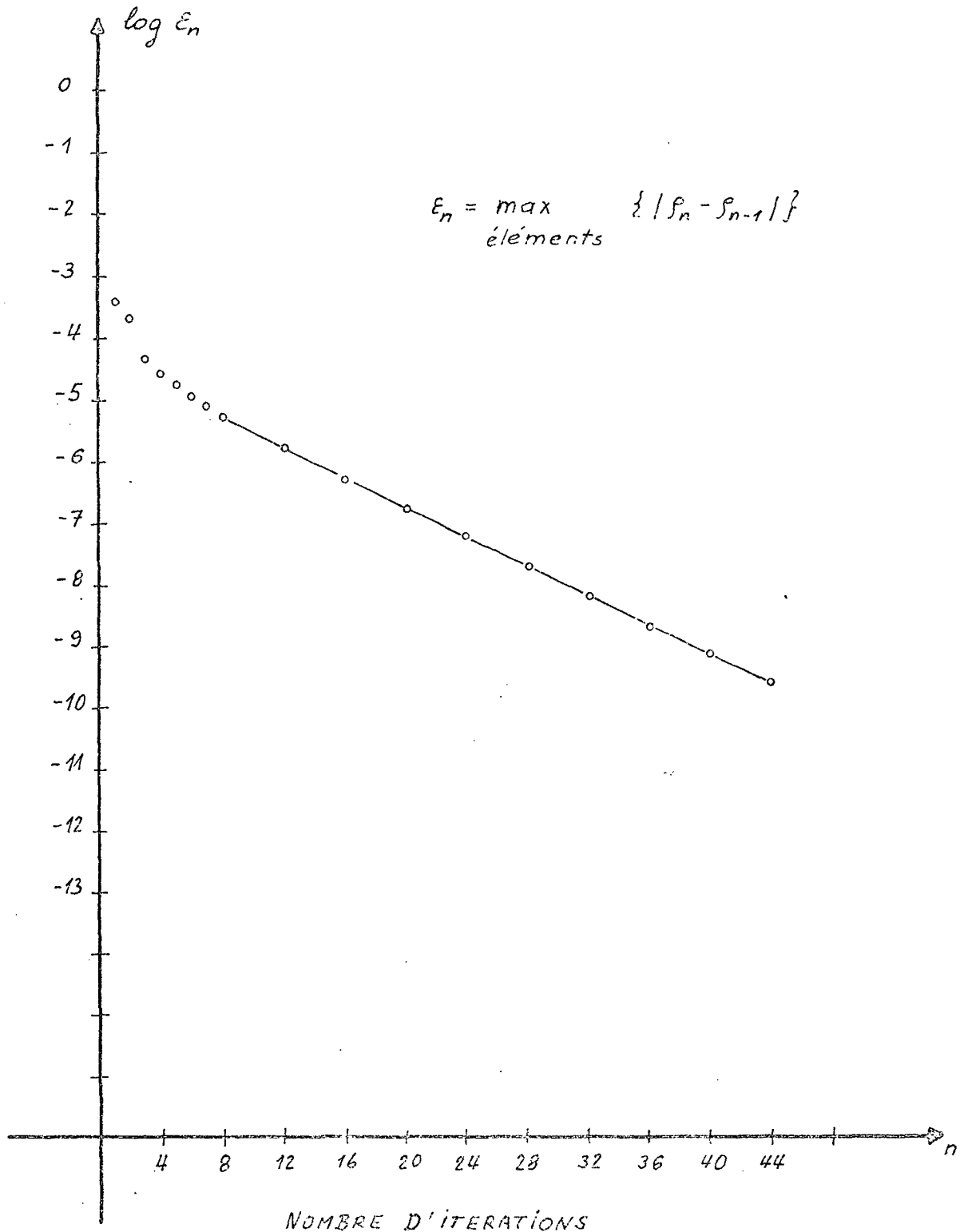


Fig. 2.7.

Références bibliographiques

---

- A. AUSLENDER [1], Problèmes de minimax via l'analyse convexe et les inégalités variationnelles : Théorie et Algorithme. Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems 77. Springer-Verlag 1972.
- C. BAIOCCHI, V. COMINCIOLI, E. MAGENES et G.A. POZZI [1], Free boundary problems in the theory of fluid flow through porous media : Existence and uniqueness theorems.  
[2] - : A numerical approach.  
Laboratorio di analisi numerica del Consiglio nazionale delle ricerche. Pubblicazioni N. 28-N. 29. Pavia 1973.
- L. BOREL et J. CHAPPUIS [1], Méthode d'étude pseudo-tridimensionnelle du diffuseur-distributeur d'une pompe-turbine. Bulletin technique Vevey (1970).
- Th. BOVET [1], Contribution à l'étude du tracé d'aubage d'une turbine à réaction du type Francis. Publ. EPUL (1962).
- H. BREZIS et M. SIBONY [1], Méthodes d'approximation et d'itération pour les opérateurs monotones. Archive Rat. Mech. Analysis, 28 (1968), 59-82.
- F.E. BROWDER [1], Problèmes non linéaires. Presses de l'Univ. de Montréal 1966.
- G. DUVAUT et J.L. LIONS [1], Les inéquations en mécanique et en physique. Dunod 1972.
- G. FICHERA [1], Linear elliptic differential systems and eigenvalue problems. Lecture Notes in Mathematics 8. Springer-Verlag 1965.

- H. FROIDEVAUX [1], Mode d'emploi et description d'un programme de résolution de problèmes de Dirichlet linéaire. EPF-Lausanne (1974).
- [2] Mode d'emploi et description d'un programme de résolution de problèmes de Dirichlet non-linéaires. EPF-Lausanne (1975).
- [3] Mode d'emploi et description d'un programme de résolution de problèmes relatifs aux machines tournantes. Cas linéaires et non-linéaires. EPF-Lausanne (1975).
- L. LANDAU et E. LIFCHITZ [1], Mécanique des fluides MIR 1971.
- A. LICHNEROWICZ [1], Eléments de calcul tensoriel. Armand Colin 1958.
- J.L. LIONS [1], Quelques méthodes de résolutions des problèmes aux limites non-linéaires. Dunod et Gauthier-Villars 1969.
- J. NEČAS [1], Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques. Academia 1967.
- W.V. PETRYSHYIN [1], Direct and iterative methods for the solution of linear operator equations in Hilbert space. Trans.Amer.Math.Soc. 105 (1962) 136-175.
- J. SERRIN [1], Mathematical principles of classical fluid mechanics. Handbuch der Physik, Band VIII/1.
- M. SHIFFMAN [1], On the existence of subsonic flows of a compressible fluid. Proc.Nat.Acad.Sci. 38, 434-438 (1952).
- [2], On the existence of subsonic flows of a compressible fluid. J.Rat.Mech. and Analysis 1, 605-652 (1952).
- M. SIBONY [1], Une méthode itérative pour les inéquations variationnelles non-linéaires. Publications IRIA (1968).
- P. SUTER [1] Cours EPF-Lausanne.
- E.H. ZARANTONELLO [1], Solving functional equations by contracting averaging. Tech. Report 160, U.S. Army Research Center, Madison, Wisconsin (1960).

## CURRICULUM VITAE

FROIDEVAUX Hubert Henri Marcel

Né à Buix (Jura) en 1939

Originaire de Le Noirmont (Jura)

Ecole primaire et secondaire à Buix et Porrentruy 1946-1956

Apprentissage et diplôme de dessinateur-géomètre 1957-1961

C.M.S. et examen d'entrée à l'EPFL 1961-1962

Etudes d'ingénieur physicien à l'EPFL et obtention du  
diplôme 1962-1967

Stage chez Philips à Eindhoven été 1965

De 1961 à 1967, participation à des travaux de  
mensurations, de remaniements parcellaires et de cons-  
tructions de chemins

Service de calcul optique chez Paillard S.A. 1967

Assistant au laboratoire de Physique Nucléaire de  
l'Université de Lausanne 1968

Assistant, puis premier assistant au département de  
Mathématiques de l'EPFL dès 1969

Au département de Mathématiques, participation à  
l'enseignement,

l'organisation de séminaires (Plan-sur-Bex 1971,  
Saas-Fee 1972, 1973)

plusieurs travaux de semestre et de diplôme avec des  
étudiants du département d'architecture.