ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

ALGÈBRES DE LIE COMPLÈTES

THÈSE

présentée au Département de Mathématiques de
l'Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne

pour l'obtention du grade de Docteur ès sciences techniques
par

Michel FAVRE
Licencié ès mathématiques
originaire des Ormonts-Dessus
(Vaud)

acceptée sur proposition des
Prof. J. de Siebenthal, rapporteur
Prof. M. André, corapporteur
Prof. M. Kervaire, corapporteur

Thèse N° 154

Lausanne EPFL 1974

ECOLE POLYTECHNIQUE FEDERALE DE LAUSANNE

Lausanne, le 20 mars 1974

Vu le rapport présenté par le jury d'examen, composé de Messieurs les Professeurs H. MATZINGER (EPFL), J. de SIEBENTHAL (EPFL), M. ANDRE (EPFL), et M. KERVAIRE (Université de Genève), l'Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne autorise l'impression partielle de la thèse no 154 de

Monsieur Michel FAVRE
intitulée

"Algèbres de Lie complètes"

Au nom de
l'Ecole Polytechnique
Fédérale de Lausanne

Le Président

INTRODUCTION

Plusieurs auteurs se sont intéressés à la structure de l'algèbre des dérivations d'une algèbre de Lie. Schenkman et Jacobson [13] ont montré que toute algèbre de Lie nilpotente non triviale admet une dérivation qui n'est pas intérieure. Sato [21] démontre que toute algèbre de Lie nilpotente non triviale possède une dérivation extérieure située dans le radical de l'algèbre des dérivations. Dans le même ordre d'idées, Jacqueline Dozias [9] prouve que pour toute algèbre de Lie nilpotente $\underline{n}$ avec $\dim \underline{n} > 1$ on a $\dim \mathrm{Der}(\underline{n}) \geqslant \dim \underline{n} + 1$. D'un autre côté, Leger [15], étudiant les algèbres de Lie qui ont seulement des dérivations intérieures prouve que si une telle algèbre admet un centre non trivial alors elle n'est pas résoluble, son radical étant de plus nilpotent et non gradué. Ces résultats ont été généralisés et précisés par Togo [28] de la manière suivante : considérons la classe des algèbres de Lie $\underline{g}$ non parfaites (i.e. $\underline{g} \neq C^2 g$) et dont le centre est non trivial; si $\underline{g}$ n'est pas la somme directe d'un idéal à une dimension et d'un idéal parfait de centre nul, $\underline{g}$ possède une dérivation extérieure nilpotente D avec $D^2 = 0$; dans le cas contraire $\underline{g}$ possède une dérivation extérieure semi-simple.

En résumé si une algèbre de Lie n'admet que des dérivations intérieures ou bien elle est parfaite ou bien son centre est trivial. Dans des papiers récents Sato [22] et Luks [17] ont montré l'existence d'algèbres de Lie satisfaisant aux conditions de la première alternative (i.e. dérivations intérieures, parfaites et centre non trivial). Les algèbres de Lie satisfaisant aux conditions de la deuxième alternative (i.e. dérivations intérieures et centre trivial) sont appelées complètes (Jacobson [14]). Je me propose, dans ce travail, d'étudier systématiquement cette classe d'algèbres de Lie en me fondant sur la notion de décomposition normale de l'algèbre des dérivations d'une algèbre de Lie nilpotente (chapitre 0).

Une algèbre de Lie complète $\underline{g}$ est toujours décomposable, c'est-à-dire qu'elle possède une décomposition normale $\underline{g} = \underline{s} \oplus \underline{a} \oplus \underline{n}$ où $\underline{s}$ est un facteur de Lévi, $\underline{a}$ une sous-algèbre abélienne formée d'éléments semi-simples, $\underline{n}$ le plus grand idéal nilpotent (chapitre 3, §1). Si $Der(\underline{n}) = S \oplus A \oplus N$ est une décomposition normale de $Der(\underline{n})$ et si $\underline{g}$ est faiblement irréductible alors $\underline{g}$ se réalise comme une sous-algèbre particulière de l'algèbre décomposable universelle $S \oplus A \oplus \underline{n}$ associée à $\underline{n}$ (chapitre 3, §3). S'il existe une algèbre de Lie complète dont le plus grand idéal nilpotent est isomorphe à $\underline{n}$ alors l'algèbre décomposable universelle associée à $\underline{n}$ est également complète si bien que le problème de classification peut se décomposer en deux temps : trouver les algèbres de Lie nilpotentes $\underline{n}$ telles que l'algèbre décomposable universelle associée soit complète puis trouver les sous-algèbres complètes d'une certaine forme de l'algèbre universelle. L'étude des algèbres de Lie complètes est donc entièrement ramenée à celle du plus grand idéal nilpotent et de ses dérivations.

Soit donc $\underline{n}$ une algèbre de Lie nilpotente, $Der(\underline{n}) = S \oplus A \oplus N$ une décomposition normale de $Der(\underline{n})$, H une sous-algèbre de Cartan de S et $T = H \oplus A$ un tore maximal de $\underline{n}$. Un premier problème est de de déterminer toutes les algèbres de Lie résolubles complètes dont le plus grand idéal nilpotent est isomorphe à $\underline{n}$: s'il existe une telle algèbre de Lie elle est unique à isomorphisme près et isomorphe au produit semi-direct $T \oplus \underline{n}$; de plus une telle algèbre de Lie existe si et seulement si le centre de $T \oplus \underline{n}$ est réduit à zéro et si les sous-algèbres de Cartan de $T \oplus \underline{n}$ ont même dimension que les sous-algèbres de Cartan de $Der(\underline{n})$ (Chapitre 4, §4, théorème 7).

La détermination de toutes les algèbres de Lie complètes dont le plus grand idéal nilpotent est isomorphe à une algèbre de Lie nilpotente donnée $\underline{n}$ est plus difficile vu la pluralité des solutions : soit $\underline{g} = \underline{s} \oplus \underline{a} \oplus \underline{n}$ une algèbre de Lie complète, $Der(\underline{n}) = S \oplus A \oplus N$ une décomposition normale de $Der(\underline{n})$. Si $\underline{g}$ est faiblement irréductible il existe des sous-algèbres S_1, B_1 de S telles que S_1

soit semi-simple, B_1 abélienne formée de dérivations semi-simples, $[S_1, B_1] = 0$ et $\underline{g}$ soit isomorphe à $S_1 \oplus B_1 \oplus A \oplus \underline{n}$ (Chapitre 4, § 3, théorème 5). La réalisation de $\underline{g}$ sous la forme précédente permet d'énoncer des conditions commodes : $\underline{g}$ est complète si et seulement si $\underline{g}$ est à centre nul et si $Z(S_1 \oplus B_1 \oplus A) \subset B_1 \oplus A \oplus ad(\underline{n})$ où $Z(.)$ désigne le commutant de $(.)$ dans $Der(\underline{n})$ (Chapitre 4, § 5, théorème 9). On peut évidemment donner des conditions semblables pour l'algèbre décomposable universelle associée à $\underline{n}$. Quant à la classification des sous-algèbres de Lie complètes de l'algèbre universelle elle peut s'organiser autour du groupe des automorphismes de $\underline{n}$ qui permutent entre eux les sous - $S \oplus A$ - modules irréductibles de $\underline{n}$ (Chapitre 4, § 5, Remarque).

Les algèbres de Lie complètes possèdent encore une propriété qui rappelle la situation des algèbres de Lie semi-simples : une algèbre de Lie complète possède toujours un nombre fini d'idéaux complets irréductibles dont elle est le produit direct (Chapitre 4, § 6, théorème 10).

Enfin le dernier chapitre est consacré d'une part à l'étude de certaines algèbres de Lie qui possèdent une algèbre de dérivations complète et d'autre part à la description des algèbres de Lie complètes dont le plus grand idéal nilpotent appartient à certaines familles bien connues d'algèbres de Lie nilpotentes.

TABLE DES MATIERES

Chapitre 0 : Préliminaires et notations.

Chapitre 1 : Décomposition normale de l'algèbre des dérivations.

§ 1) Décomposition normale et suite de Jordan-Hölder.

§ 2) Conjugaison des décompositions normales, tores maximaux.

§ 3) Commutant des dérivations intérieures, décomposition normale associée.

§ 4) Rang d'une algèbre de Lie et d'un produit direct d'algèbres de Lie.

Chapitre 2 : Modèles nilpotents, systèmes de racines.

§ 1) Algèbres de Lie nilpotentes modèles.

§ 2) Représentation des algèbres de Lie nilpotentes. Systèmes de racines.

Chapitre 3 : Algèbres de Lie décomposables.

§ 1) Décomposition normale.

§ 2) Sous-algèbres de Cartan des algèbres de Lie décomposables et conjugaison des décompositions normales.

§ 3) Algèbres de Lie fortement décomposables ou faiblement irréductibles.

§ 4) Isomorphismes d'algèbres de Lie fortement décomposables et faiblement irréductibles.

Chapitre 4 : Algèbres de Lie complètes.

§ 1) Propriétés simples, exemples.

§ 2) Un théorème d'Hochschild.

§ 3) Décomposition normale des algèbres de Lie complètes.

§ 4) Décomposition normale de l'algèbre des dérivations d'une algèbre de Lie résoluble décomposable.

§ 5) Critère général, classification.

§ 6) Décomposition en produit d'idéaux complets.

Chapitre 5 : Certaines classes d'algèbres de Lie complètes.

§ 1) Algèbres de Lie complètes de petite dimension.

§ 2) Algèbres de Lie complètes dont le plus grand idéal nilpotent est isomorphe à une algèbre d'Heisenberg.

§ 3) Construction d'algèbres de Lie complètes comme algèbres de dérivations.

§ 4) Algèbres de Lie complètes dont le plus grand idéal nilpotent est isomorphe à une sous-algèbre maximale formée d'éléments nilpotents d'une algèbre de Lie semi-simple.

CHAPITRE 0

PRELIMINAIRES ET NOTATIONS

Les algèbres de Lie considérées ici sont définies sur un corps $\mathbb{K}$ algébriquement clos de caractéristique zéro. Elles sont toutes de dimension finie sur $\mathbb{K}$. Pour une algèbre de Lie $\underline{g}$ on définit par récurrence la série centrale descendante $(C^i\,\underline{g})$ en posant

$$C^1\,\underline{g} = \underline{g} \qquad\qquad C^{i+1}\,\underline{g} = [\underline{g},\, C^i\,\underline{g}]$$

et la série dérivée $(D^i\,\underline{g})$ en posant

$$D^1\,\underline{g} = \underline{g} \qquad\qquad D^{i+1}\,\underline{g} = [D^i\,\underline{g},\, D^i\,\underline{g}]$$

On dit que $\underline{g}$ est résoluble s'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $D^{p+1}\,\underline{g} = 0$, nilpotente s'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $C^{p+1}\,\underline{g} = 0$. On voit aisément par récurrence que $D^i\,\underline{g} \subset C^i\underline{g}$; par suite toute algèbre de Lie nilpotente est résoluble. Un théorème de Lie affirme que $\underline{g}$ est résoluble si et seulement si $C^2\,\underline{g}$ est nilpotente (Bourbaki [5] , §5, no 3, th. 1, corollaire 5).

On appelle dérivation de $\underline{g}$ toute application $\mathbb{K}$-linéaire D qui vérifie les relations

$$D[X,Y] = [DX,Y] + [X,DY] \qquad X,Y \in \underline{g}$$

Les dérivations de la forme $\mathrm{ad}X : Y \mapsto [X,Y]$ s'appellent dérivations intérieures. Les dérivations de $\underline{g}$ forment une sous-algèbre de Lie de l'algèbre de Lie de tous les endomorphismes $\mathbb{K}$-linéaires de $\underline{g}$. On notera $\mathrm{Der}(\underline{g})$ l'algèbre des dérivations de $\underline{g}$ et $\mathrm{ad}(\underline{g})$ l'idéal des dérivations intérieures. L'application

$$\begin{array}{l} \underline{g} \longrightarrow \mathrm{Der}(\underline{g}) \\ X \longrightarrow \mathrm{ad}\, X \end{array}$$ s'appelle représentation adjointe de $\underline{g}$.

Si $\underline{a}$ est une sous-algèbre de $\underline{g}$ on notera

$$\mathrm{ad}_{\underline{g}}(\underline{a}) = \{\mathrm{ad}x \in \mathrm{Der}(\underline{g}) \mid x \in \underline{a}\}.$$

Ce travail est consacré aux algèbres de Lie complètes, c'est-à-dire aux algèbres de Lie $\underline{g}$ dont le centre $\underline{z}(\underline{g})$ est réduit à zéro et telles que $\mathrm{Der}(\underline{g}) = \mathrm{ad}(\underline{g})$. Il est facile de vérifier que ces deux propriétés sont invariantes par changement du corps de base. Autrement dit, il est indifférent de supposer dans la suite le corps de base $\mathbb{K}$ algébriquement clos.

Le théorème suivant, dû à Chevalley ([7], chap. V, §4, no 2, proposition 5) précise la structure de $\mathrm{Der}(\underline{g})$:

Théorème 1 :

Soit $\underline{g}$ une algèbre de Lie. $\mathrm{Der}(\underline{g})$ est une algèbre de Lie algébrique qui possède une décomposition $\mathrm{Der}(\underline{g}) = S \oplus A \oplus N$ avec les propriétés suivantes :

(i) S est une sous-algèbre de Lévi de $\mathrm{Der}(\underline{g})$;

(ii) A est une sous-algèbre abélienne formée de dérivations semi-simples et $[S, A] = 0$;

(iii) N est le plus grand idéal de $\mathrm{Der}(\underline{g})$ formé de dérivations nilpotentes;

(iv) $A \oplus N$ est le radical de $\mathrm{Der}(\underline{g})$.

Remarques :

On vérifie sans peine que A est une sous-algèbre abélienne formée de dérivations semi-simples et maximale pour ces propriétés dans le radical de $\mathrm{Der}(\underline{g})$. La décomposition qui figure dans le théorème 1 s'appellera une décomposition normale de $\mathrm{Der}(\underline{g})$. Je reviendrai, au chapitre suivant, sur l'unicité, à conjugaison près, d'une telle décomposition.

Il sera utile, aussi, de savoir calculer l'algèbre des dérivations d'un produit direct d'algèbres de Lie. La proposition suivante répond à cette question (Togo [25]).

Proposition 1 :

Soit $\underline{g}_1$, $\underline{g}_2$ deux algèbres de Lie de centre $\underline{z}_1$, $\underline{z}_2$ respectivement. Introduisons les conventions suivantes :

$$B_{12} = \{\phi \in End(\underline{g}_1 \times \underline{g}_2) \,|\, \phi(\underline{g}_1) \subset \underline{z}_2 \quad \phi(C^2\underline{g}_1) = 0 \quad \phi(\underline{g}_2) = 0\}$$

$$B_{21} = \{\psi \in End(\underline{g}_1 \times \underline{g}_2) \,|\, \psi(\underline{g}_2) \subset \underline{z}_1 \quad \psi(C^2\underline{g}_2) = 0 \quad \psi(\underline{g}_1) = 0\}$$

$$Der(\underline{g}_1) = \{\Delta_1 \in End(\underline{g}_1 \times \underline{g}_2) \,|\, \Delta_1(\underline{g}_1) \subset \underline{g}_1 \quad \Delta_1|\underline{g}_1 \in Der(\underline{g}_1) \quad \Delta_1(\underline{g}_2) = 0\}$$

$$Der(\underline{g}_2) = \{\Delta_2 \in End(\underline{g}_1 \times \underline{g}_2) \,|\, \Delta_2(\underline{g}_2) \subset \underline{g}_2 \quad \Delta_2|\underline{g}_2 \in Der(\underline{g}_2) \quad \Delta_2(\underline{g}_1) = 0\}$$

Alors $Der(\underline{g}_1 \times \underline{g}_2) = Der(\underline{g}_1) \oplus Der(\underline{g}_2) \oplus B_{12} \oplus B_{21}$.

De plus B_{12} et B_{21} sont des sous-algèbres abéliennes.

Proposition 2 :

Soit $\underline{g}$ une algèbre de Lie, D une dérivation.

(i) La composante semi-simple D_s et la composante nilpotente D_n de D sont des dérivations de $\underline{g}$;

(ii) $ad\, D_s$ et $ad\, D_n$ sont les composantes semi-simple et nilpotente de $ad\, D$ dans $Der(Der(\underline{g}))$;

(iii) Si $ad\, D$ est un endomorphisme semi-simple (resp. nilpotent) de $Der(\underline{g})$ alors D peut s'écrire $D = D_1 + D_2$ où D_1 est une dérivation semi-simple (resp. nilpotente) et où D_2 appartient au centre de $Der(\underline{g})$.

Démonstration :

Rappelons d'abord un lemme, sans démonstration.

Lemme :

Soit $\underline{g}$ une algèbre de Lie, $D \in Der(\underline{g})$, $X, Y, \in \underline{g}$ $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. On a la formule

$$(D-\alpha I-\beta I)^n\ [X,Y] = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}\ [(D-\alpha I)^i X,\ (D-\beta I)^{n-i}\ Y]$$

Soit maintenant $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ les valeurs propres de D. Notons F_{λ_i} le sous-espace primaire $\bigcup_{r=0}^{\infty} \mathrm{Ker}(D-\lambda_i I)^r$ associé à la valeur propre λ_i. Puisque $\mathbb{K}$ est algébriquement clos, on a $\underline{g} = \bigoplus_{i=1}^{n} F_{\lambda_i}$. Du lemme on déduit que $[F_{\lambda_i}, F_{\lambda_j}] \subset F_{\lambda_i+\lambda_j}$ où $F_{\lambda_i+\lambda_j} = 0$ si $\lambda_i+\lambda_j$ n'est pas valeur propre de D. D_s est définie par $D_s(X) = \lambda_i X$ pour $X \in F_{\lambda_i}$ et $D_n = D - D_s$. On vérifie facilement que D_s est une dérivation et par conséquent D_n aussi. Le point (ii) résulte immédiatement de (Bourbaki [5], §5, no 4). Pour le point (iii) écrivons $D = D_s + D_n$; comme $D_s, D_n \in \mathrm{Der}(\underline{g})$ on a $\mathrm{ad}\, D = \mathrm{ad}\, D_s + \mathrm{ad}\, D_n$. Si $\mathrm{ad}\, D$ est semi-simple, alors il vient $\mathrm{ad}\, D_n = 0$ et D_n se trouve dans le centre de $\mathrm{Der}(\underline{g})$. De même si $\mathrm{ad}\, D$ est nilpotent.

CHAPITRE 1

DECOMPOSITION NORMALE DE L'ALGEBRE DES DERIVATIONS

Dans ce chapitre on commence par étudier les propriétés d'une décomposition normale de $Der(\underline{g})$ relativement à une suite de Jordan-Hölder pour la représentation canonique de $Der(\underline{g})$ dans $\underline{g}$. Ensuite la notion de tore maximal d'une algèbre de Lie est introduite; la conjugaison des tores maximaux et des décompositions normales est examinée également. Dans $Der(\underline{g})$ une décomposition normale est associée au commutant des dérivations intérieures ce qui permet, à l'aide de la proposition 1, de déterminer le tore maximal d'un produit direct d'algèbres de Lie.

§ 1) Décomposition normale et suite de Jordan - Hölder

Proposition 3 :

Soit $\underline{g}$ *une algèbre de Lie,* $Der(\underline{g}) = S \oplus A \oplus N$ *une décomposition normale,* $\underline{g} \supset \underline{a}_1 \supset \dots \supset \underline{a}_p \supset \underline{a}_{p+1} = 0$ *une suite décroissante d'idéaux caractéristiques de* $\underline{g}$*. On peut trouver des sous-espaces* $g_1, \dots, g_n$ *de* $\underline{g}$ *tels que :*

(i) $\underline{g} = g_1 \oplus \dots \oplus g_n$ *et les* g_i *sont stables par* $S \oplus A$*;*

(ii) La suite $\underline{g} \supset \bigoplus_{i=2}^{n} g_i \supset \dots \supset \bigoplus_{i=n-1}^{n} g_i \supset g_n \supset g_{n+1} = 0$ *est une suite décroissante d'idéaux caractéristiques de* $\underline{g}$*, plus fine que la suite* $(\underline{a}_i)$*;*

(iii) Les g_i *sont des S-modules simples;*

(iv) $S \oplus A$ *est formé des dérivations* D *de* $\underline{g}$ *telles que* $D(g_i) \subset g_i$ $(i = 1, \dots n)$*;*

(v) A *est formé des dérivations de* $\underline{g}$ *qui sont des homothéties sur les* g_i*;*

(vi) N *est formé des dérivations* D *de* $\underline{g}$ *telles que* $D(g_k \oplus \dots \oplus g_n) \subset g_{k+1} \oplus \dots \oplus g_n$ $(k = 1, \dots, n)$.

<u>Démonstration</u> :

Considérons la représentation canonique de $\mathrm{Der}(\underline{g})$ dans $\underline{g}$ et prenons une suite de Jordan-Hölder pour cette représentation, qui soit plus fine que la suite $(\underline{a}_i)$. Appellons $\underline{g} = g^0 \supset g^1 \supset \ldots \supset g^{n-1} \supset g^n = 0$ cette suite. Les représentations $\lambda^k : \mathrm{Der}(\underline{g}) \longrightarrow \mathrm{Der}(g^k/g^{k+1})$ sont donc simples. La représentation canonique de $S \oplus A$ dans $\underline{g}$ est semi-simple (Bourbaki [5] , § 6, no 5, théorème 4). Ainsi on peut toujours écrire $g^k = g_{k+1_k} \oplus g^{k+1}$ où g_{k+1} est un supplémentaire de g^{k+1} dans g^k, invariant par $S \oplus A$. Alors $\underline{g}$ s'écrit $\underline{g} = g_1 \oplus g_2 \oplus \ldots \oplus g_n$.(i), (ii) sont évidents par construction de la suite (g_i). (vi) résulte immédiatement de (Bourbaki [5], § 4, no 3, proposition 4) : N est le plus grand idéal de nilpotence pour la représentation canonique de $\mathrm{Der}(\underline{g})$ dans $\underline{g}$, c'est donc l'ensemble des dérivations D de $\underline{g}$ telles que $D(g^k) \subset g^{k+1}$ pour tout k. Montrons (iii) : si $V \subset g_{k+1}$ est invariant par $S \oplus A$ alors $(V \oplus g^{k+1})/g^{k+1}$ est invariant par $\mathrm{Der}(\underline{g})$ puisque $N(g^k) \subset g^{k+1}$. Donc $V \oplus g^{k+1} = g^k$ et $V = g_{k+1}$. Les g_{k+1} sont donc des $(S \oplus A)$ - modules simples. A cause du lemme de Schur, les dérivations qui sont dans A sont scalaires sur les g_{k+1}. Prenons maintenant $V \subset g_{k+1}$ un sous-espace invariant par S; alors V est aussi invariant par $S \oplus A$, donc $V = g_{k+1}$. Les g_{k+1} sont bien des S-modules simples. Pour montrer le point (v) il suffit maintenant de montrer que toute dérivation D de $\underline{g}$, scalaire sur les g_{k+1}, se trouve dans A : D est semi-simple et elle permute avec $S \oplus A$, donc D est nécessairement dans le radical de $\mathrm{Der}(\underline{g})$. Par maximalité de A, on a $D \in A$. Il reste (iv) à démontrer : soit D une dérivation de $\underline{g}$ avec $D(g_{k+1}) \subset g_{k+1}$ $\forall k$. Ecrivons $D = D_1 + D_2$ avec $D_1 \in S \oplus A$ et $D_2 \in N$. Comme $D_1(g_{k+1}) \subset g_{k+1}$ $\forall k$, on a aussi $D_2(g_{k+1}) \subset g_{k+1}$ $\forall k$. Mais à cause de la propriété (vi) on a $D_2 = 0$ et $D \in S \oplus A$.

Remarque :

Une décomposition en modules simples de la représentation $S \longrightarrow Der(\underline{g})$ fournit des S-modules simples qui, en général, ne sont pas invariants par les dérivations de A. On donnera un contre exemple au chapitre 2 §5.

§ 2) Conjugaison des décompositions normales, tores maximaux

Proposition 4 :

Soit $\underline{g}$ une algèbre de Lie, $\tilde{\underline{g}} = Der(\underline{g}) \oplus \underline{g}$, l'holomorphe de $\underline{g}$ et θ un automorphisme de $\underline{g}$. Alors θ se prolonge de manière unique en automorphisme $\tilde{\theta}$ de $\tilde{\underline{g}}$ tel que $\tilde{\theta}(Der(\underline{g})) = Der(\underline{g})$. De plus si $D \in Der(\underline{g})$ on a $\tilde{\theta}(D) = \theta o D o \theta^{-1}$.

Démonstration :

Si $D \in Der(\underline{g})$ alors $\theta o D o \theta^{-1}$ est encore une dérivation de $\underline{g}$. On peut alors définir une application linéaire bijective

$$\tilde{\theta} : \begin{array}{ccc} \tilde{\underline{g}} & \longrightarrow & \tilde{\underline{g}} \\ D+X & \longmapsto & \theta D \theta^{-1} + \theta(X) \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} D \in Der(\underline{g}) \\ X \in \underline{g} \end{array} \right.$$

et on vérifie aisément que c'est un automorphisme d'algèbres de Lie qui prolonge θ à $\tilde{\underline{g}}$. Il reste à montrer que ce prolongement est unique : supposons donc que $\tilde{\theta}$ prolonge θ et que $\tilde{\theta}(Der(\underline{g})) = Der(\underline{g})$. Calculons $\tilde{\theta}(D)(\theta(X)) = [\tilde{\theta}(D), \theta(X)] = [\tilde{\theta}(D), \tilde{\theta}(X)] = \tilde{\theta}[D,X] = \tilde{\theta}(D(X)) = \theta(D(X))$. Posons $Y = \theta(X)$, il vient $\tilde{\theta}(D)(Y) = \theta D \theta^{-1}(Y)$ et par conséquent $\tilde{\theta}(D) = \theta D \theta^{-1}$.

Corollaire :

Soit $D_1, \ldots, D_n$ des dérivations nilpotentes de $\underline{g}$ et $\Phi = e^{ad\, D_1} o \ldots o\, e^{ad\, D_n}$ un automorphisme de $Der(\underline{g})$. Soit φ l'automorphisme de $\underline{g}$ défini par $\varphi = e^{D_1} o \ldots o\, e^{D_n}$.

Alors pour tout $D \in Der(\underline{g})$ *on a* $\phi(D) = \varphi o D o \varphi^{-1}$.

<u>Démonstration</u> :

On peut considérer ϕ comme un automorphisme intérieur de l'holomorphe $\tilde{\underline{g}}$. ϕ induit dans $\underline{g}$ l'automorphisme φ car $e^{ad\, D_i}(X) = X + [D_i, X] + (\ldots) = X + D_i(X) + (\ldots) = e^{D_i}(X)$. A cause de la proposition on a bien $\phi(D) = \varphi D \varphi^{-1}$.

<u>Définition 1</u> :

Soit $\underline{g}$ *une algèbre de Lie. On dira que* T *est un tore maximal de* $\underline{g}$ *si* T *est une sous-algèbre abélienne de* $Der(\underline{g})$ *formée de dérivations semi-simples et maximale pour ces propriétés.*

On est en mesure maintenant d'énoncer un théorème général sur les conjugaisons des décompositions normales et des tores maximaux. La démonstration repose sur des résultats dûs à Mostow [20].

<u>Théorème 2</u> :

Soit $\underline{g}$ *une algèbre de Lie,* $Der(\underline{g}) = S \oplus A \oplus N = S' \oplus A' \oplus N$ *deux décompositions normales des dérivations,* $H \subset S$, $H' \subset S'$ *des sous-algèbres de Cartan. Posons* $T = H \oplus A$ *et* $T' = H' \oplus A'$. *On a les propriétés suivantes :*

(i) T *et* T' *sont des tores maximaux de* $\underline{g}$;

(ii) pour tout automorphisme ψ *de* $Der(\underline{g})$ *avec* $\psi(T) = T'$ *on a* $\psi(H) = H'$ *et* $\psi(A) = A'$;

(iii) il existe un automorphisme θ *de* $\underline{g}$ *tel que* $\theta S \theta^{-1} = S'$ $\theta H \theta^{-1} = H'$ $\theta A \theta^{-1} = A'$ $\theta N \theta^{-1} = N$;

(iv) si T *et* T' *sont des tores maximaux quelconques de* $\underline{g}$ *il existe un automorphisme* φ *de* $\underline{g}$ *tel que* $\varphi T \varphi^{-1} = T'$.

<u>Démonstration</u> :

Montrons que T est un tore maximal de $\underline{g}$. Soit D

une dérivation semi-simple de $\underline{g}$ avec $[T, D] = 0$. On peut écrire $D = D_1 + D_2 + D_3$ où $D_1 \in S$ $D_2 \in A$ $D_3 \in N$. Soit encore $\Delta_1 \in H$ et $\Delta_2 \in A$. $[\Delta_1 + \Delta_2, D_1 + D_2 + D_3]$ $= [\Delta_1, D_1] + [\Delta_1, D_3] + [\Delta_2, D_3] = 0$. Donc $[A_1, D_1] = 0$ pour tout $\Delta_1 \in H$ ce qui implique $D_1 \in H$ et d'autre part $[T, D_3] = 0$. Finalement $D = (D_1 + D_2) + (D_3)$ est une décomposition de D en partie semi-simple et nilpotente ce qui implique $D_3 = 0$ et $D \in T$. Montrons (ii) : comme $\psi(A)$ est encore dans le radical de $\mathrm{Der}(\underline{g})$ il est clair que $\psi(A) = A'$. $\psi(H)$ est contenu dans le facteur de Lévi $\psi(S)$. On peut trouver un automorphisme spécial $\Omega = e^{\mathrm{ad}\, D}$ de $\mathrm{Der}(\underline{g})$ avec $\Omega(\psi(S)) = S'$. Il est facile de vérifier que si $\Delta \in \psi(H)$ on a $\Omega(\Delta) = \Delta + Q$ avec $Q \in N^*$ ($N^* \subset N$ est le radical nilpotent de $\mathrm{Der}(\underline{g})$). Comme $\psi(H) \subset T'$ et $\Omega\psi(H) \subset S'$ il vient $\psi(H) \subset H'$ et par conséquent $\psi(H) = H'$.

Passons à la démonstration de (iii) : la représentation canonique de $S \oplus A$ dans $\underline{g}$ est semi-simple et de plus $S \oplus A$ est maximale pour cette propriété : en effet si B est une sous-algèbre de $\mathrm{Der}(\underline{g})$ dont la représentation canonique dans $\underline{g}$ est semi-simple et telle que $S \oplus A \subset B$ alors $B \cap N$ est un idéal de B formé de dérivations nilpotentes ce qui implique $B \cap N = (0)$ donc $S \oplus A = B$. On peut appliquer les résultats de Mostow [20] : il existe un automorphisme intérieur $Ⓗ' = e^{\mathrm{ad}\, D_1} \circ \ldots \circ e^{\mathrm{ad}\, D_n}$ de $\mathrm{Der}(\underline{g})$ où $D_1, \ldots, D_n \in N^*$ tel que $Ⓗ'(S) = S'$ et $Ⓗ'(A) = A'$. $Ⓗ'(H)$ et H' sont conjugués dans S', par un automorphisme intérieur $Ⓗ'' = e^{\mathrm{ad}\, \Delta_1} \circ \ldots \circ e^{\mathrm{ad}\, \Delta_m}$ où $\Delta_1, \ldots, \Delta_m \in S'$ sont des dérivations nilpotentes. $Ⓗ''$ laisse A' stable et pour $Ⓗ = Ⓗ'' \circ Ⓗ'$ on a $Ⓗ(S) = S'$, $Ⓗ(H) = H'$, $Ⓗ(A) = A'$, $Ⓗ(N) = N$. On conclut en utilisant le corollaire de la proposition 4.

La démonstration de (iv) découle encore d'un résultat de Mostow : si T et T' sont des tores maximaux de $\underline{g}$ alors il existe des décompositions normales $\mathrm{Der}(\underline{g}) =$ $S \oplus A \oplus N = S' \oplus A' \oplus N$ et des sous-algèbres de Cartan

$H \subset S$, $H' \subset S'$ telles que $T = H \oplus A$ et $T' = H' \oplus A'$.
On peut alors utiliser (iii).

§ 3) Commutant des dérivations intérieures, décomposition normale associée

Proposition 5

Soit $\underline{g}$ une algèbre de Lie de centre $\underline{z}$. Le commutant de $ad(\underline{g})$ dans $Der(\underline{g})$ peut s'écrire $Z(ad(\underline{g})) = S_1 \oplus A_1 \oplus N'_2 \oplus B_{12} \oplus B_{21}$ où S_1 est isomorphe à $\underline{sl}(n, \mathbb{K})$ pour un certain entier n, A_1 est de dimension 0 ou 1 suivant que $n = 0$ ou $n \neq 0$, formée de dérivations semi-simples, N'_2 est un idéal abélien de $Der(\underline{g})$, B_{12} et B_{21} sont des sous-algèbres abéliennes de $Der(\underline{g})$. De plus on a les relations :

$[S_1, A_1]$	$= 0$		$[N'_2, B_{12} \oplus B_{21}]$	$= 0$
$[S_1 \oplus A_1, N'_2]$	$= 0$		$[A_1, Der(\underline{g})]$	$= B_{12} \oplus B_{21}$
$[A_1, B_{12}]$	$= B_{12}$	$(S_1 \neq 0)$	$[S_1, Der(\underline{g})]$	$= S_1 \oplus B_{12} \oplus B_{21}$
$[A_1, B_{21}]$	$= B_{21}$		$[B_{12}, B_{21}]$	$\subset N'_2$
$[S_1, B_{12}]$	$= B_{12}$ $(S_1 \neq 0)$		$[B_{12}, Der(\underline{g})]$	$\subset N'_2 \oplus B_{12}$
$[S_1, B_{21}]$	$= B_{21}$ $(S_1 \neq 0)$		$[B_{21}, Der(\underline{g})]$	$\subset N'_2 \oplus B_{21}$

Démonstration :

Commençons par deux lemmes.

Lemme 1 :

Soit $\underline{g}$ une algèbre de Lie de centre $\underline{z}$. Le commutant de $ad(\underline{g})$ dans $Der(\underline{g})$ est égal à la sous-algèbre de $\underline{gl}(\underline{g})$ formée des applications linéaires $D : \underline{g} \to \underline{g}$ telles que $D(\underline{g}) \subset \underline{z}$ et $D/C^2\underline{g} = 0$.

Si $D \in Z(ad(\underline{g}))$ on a $[D, adX] = ad\, D(X) = 0$ $\forall X \in \underline{g}$ ce qui entraîne $D(X) \in \underline{z}$ $\forall X \in \underline{g}$. De plus si $X, Y \in \underline{g}$

$D[X,Y] = [D(X), Y] + [X, D(Y)] = 0$ puisque $D(\underline{g}) \subset \underline{z}$.
Donc $D|C^2\underline{g} = 0$. La réciproque est immédiate.

Lemme 2 :

Si $\underline{g}$ est une algèbre de Lie on peut toujours écrire $\underline{g} = \underline{z}_1 \times \underline{g}_2$ (produit direct) où $\underline{z}_1$ est abélienne et où le centre $\underline{z}_2$ de $\underline{g}_2$ est contenu dans $C^2\underline{g}_2$.

Si $\underline{z}$ est le centre de $\underline{g}$ on écrit $\underline{z} = \underline{z}_1 \oplus (\underline{z} \cap C^2\underline{g})$ où $\underline{z}_1$ est un supplémentaire de $\underline{z} \cap C^2\underline{g}$ dans $\underline{z}$. On peut alors trouver dans $\underline{g}$ un supplémentaire $\underline{g}_2$ de $\underline{z}_1$ qui contienne $C^2\underline{g}$. $\underline{g}_2$ est donc un idéal de $\underline{g}$, d'où $\underline{g} = \underline{z}_1 \times \underline{g}_2$. Maintenant on a $\underline{z}_1 \times \underline{z}_2 = \underline{z} = \underline{z}_1 \times (\underline{z} \cap C^2\underline{g}) = \underline{z}_1 \times (\underline{z} \cap C^2 \underline{g}_2)$. Comme $\underline{z} \cap C^2\underline{g}_2 \subset \underline{z}_2$ on conclut que $\underline{z}_2 = \underline{z} \cap C^2\underline{g}_2$.

Passons à la démonstration de la proposition : on écrit $\underline{g} = \underline{z}_1 \times \underline{g}_2$ comme dans le lemme 2 et $\underline{g}_2 = W_2 \oplus C^2\underline{g}_2$ où W_2 est un supplémentaire de $C^2\underline{g}_2$ dans $\underline{g}_2$. Donc $\underline{g} = \underline{z}_1 \oplus W_2 \oplus C^2\underline{g}_2$ et en vertu du lemme 1 il vient $Z(ad(\underline{g})) = Vect(z_1 \oplus W_2, \underline{z}_1 \oplus \underline{z}_2) = Vect(\underline{z}_1, \underline{z}_1) \oplus Vect(W_2, z_2) \oplus Vect(\underline{z}_1, \underline{z}_2) \oplus Vect(\underline{W}_2, \underline{z}_1)$. Posons maintenant

$S_1 \oplus A_1 = Vect(\underline{z}_1, \underline{z}_1)$ est formé des matrices $\tilde{\Delta} + \Delta$ où

$$\tilde{\Delta} = \left(\begin{array}{c|c|c} A & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad A \in \underline{sl}(\underline{z}_1) \qquad \Delta = \left(\begin{array}{c|c|c} \lambda I & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \lambda \in \mathbb{K}$$

$N'_2 = Vect(W_2, \underline{z}_2)$ est formé des matrices $\Delta'_2 = \left(\begin{array}{c|c|c} 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & B & 0 \end{array}\right)$

Où $\mathrm{Im}\ B \subset \underline{z}_2$

$B_{12} = Vect(\underline{z}_1, \underline{z}_2)$ est formé des matrices $\Delta_{12} = \left(\begin{array}{c|c|c} 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline C & 0 & 0 \end{array}\right)$

où $\mathrm{Im}\ C \subset \underline{z}_2$

$B_{21} = \mathrm{Vect}(W_2, \underline{z}_1)$ est formé des matrices $\Delta_{21} = \begin{pmatrix} 0 & D & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

où D est quelconque

Soit encore $X = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & 0 \\ 0 & X_{22} & 0 \\ X_{31} & X_{32} & X_{33} \end{pmatrix}$ une dérivation quelconque

de $\underline{g}$. On a évidemment $\mathrm{Im}\, X_{31} \subset \underline{z}_2$

$$[\Delta'_2, X] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & BX_{22} - X_{33}B & 0 \end{pmatrix} \in N'_2 \text{ car } \mathrm{Im}(BX_{22} - X_{33}B) \subset \underline{z}_2.$$

N'_2 est donc un idéal de $\mathrm{Der}(\underline{g})$ et on vérifie facilement qu'il est abélien. De même B_{12} et B_{21} sont des sous-algèbres abéliennes. Les relations $[S_1, A_1] = 0$ et $[S_1 \oplus A_1, N'_2] = 0$ sont aussi trivialement vérifiées.

$$[\Delta, \Delta_{12}] = -\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \lambda C & 0 & 0 \end{pmatrix} \in B_{12}. \quad \text{Donc } [A_1, B_{12}] = B_{12}$$

si $A_1 \neq 0$. Si $A_1 = 0$ alors $\underline{z}_1 = 0$ et dans ce cas $B_{12} = 0$. La relation est encore vérifiée. De même $[A_1, B_{21}] = B_{21}$.

$$[\chi, \Delta_{12}] = -\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ CA & 0 & 0 \end{pmatrix} \in B_{12} \quad \text{car} \quad \mathrm{Im}(CA) \subset \underline{z}_2.$$

Si $S_1 = \underline{s\ell}(\underline{z}_1) \neq 0$ on peut choisir A inversible et CA est n'importe quelle matrice dont l'image est contenue dans $\underline{z}_2$. Donc $[S_1, B_{12}] = B_{12}$. Si $S_1 \neq 0$, on aura de même

$[S_1, B_{21}] = B_{21}$. Il est clair que $[N'_2, B_{12} \oplus B_{21}] = 0$.

$$[\Delta, X] = \begin{pmatrix} \lambda X_{11} & \lambda X_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda X_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \lambda X_{31} & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \lambda X_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\lambda X_{31} & 0 & 0 \end{pmatrix} \in B_{12} \oplus B_{21}.$$ Donc $[A_1, Der(\underline{g})] = B_{12} \oplus B_{21}$

$$[\tilde{\Delta}, X] = \begin{pmatrix} AX_{11} & AX_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} X_{11}A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ X_{31}A & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [A, X_{11}] & AX_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -X_{31}A & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\in S_1 \oplus B_{12} \oplus B_{21}$ car $[A, X_{11}] \in \underline{s\ell}(\underline{z}_1)$. X_{12} est une matrice quelconque, ce qui permet de conclure facilement que $[S_1, Der(\underline{g})] = S_1 \oplus B_{12} \oplus B_{21}$. Les trois dernières inclusions se vérifient facilement.

Corollaire 1 :

$N'_2 \oplus B_{12} \oplus B_{21}$ est un idéal de $Der(\underline{g})$ formé de dérivations nilpotentes. $A_1 \oplus N'_2 \oplus B_{12} \oplus B_{21}$ est le radical de $Z(ad(\underline{g}))$; il est contenu dans le radical de $Der(\underline{g})$.

Démonstration :

Montrons que $N'_2 \oplus B_{12} \oplus B_{21}$ est formé de dérivations nilpotentes : soit $P = \Delta'_2 + \Delta_{12} + \Delta_{21}$ une dérivation dans cet idéal, $P^2 = \Delta'^2_2 + \Delta'_2 \Delta_{12} + \Delta'_2 \Delta_{21} + \Delta_{12} \Delta'_2 + \Delta_{12} \Delta_{21} + \Delta_{21} \Delta'_2 + \Delta_{21} \Delta_{12} + \Delta^2_{21} = \Delta_{12} \Delta_{21}$.
$P^3 = \Delta_{12} \Delta_{21}(\Delta'_2 + \Delta_{12} + \Delta_{21}) = \Delta_{12} \Delta_{21} \Delta'_2 + \Delta_{12} \Delta_{21} \Delta_{12} + \Delta_{12} \Delta_{21}^2 = 0$.

$A_1 \oplus N'_2 \oplus B_{12} \oplus B_{21}$ est donc un idéal résoluble de $Der(\underline{g})$; c'est le radical de $Z(ad(\underline{g}))$ et il est contenu dans le radical de $Der(\underline{g})$.

Corollaire 2 :

$Z(ad(\underline{g}))$ est formé de dérivations nilpotentes si et seulement si $\underline{z} \subset C^2\,\underline{g}$.

Rappelons qu'une algèbre de Lie $\underline{g}$ est dite parfaite si $\underline{g} = C^2\underline{g}$.

Définition 2 :

On dira qu'une algèbre de Lie $\underline{g}$ est admissible si elle n'est pas produit direct d'une algèbre de Lie abélienne non triviale par une algèbre de Lie parfaite dont le centre est nul.

On peut remarquer que les algèbres de Lie résolubles admissibles sont toutes les algèbres de Lie résolubles non commutatives.

Proposition 6 :

Soit $\underline{g}$ une algèbre de Lie. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $\underline{g}$ est admissible;

(ii) $N'_2 \oplus B_{12} \oplus B_{21}$ est le plus grand idéal nilpotent de $Z(ad(\underline{g}))$;

(iii) N'_2 est le centre de $Z(ad(\underline{g}))$;

(iv) le centre de $Der(\underline{g})$ est formé de dérivations nilpotentes;

(v) le plus grand idéal nilpotent de $Der(\underline{g})$ est formé de dérivations nilpotentes.

Démonstrations :

(i) <==> (ii) Par l'absurde si $N'_2 \oplus B_{12} \oplus B_{21}$ n'est pas le plus grand idéal nilpotent de $Z(ad(\underline{g}))$ alors A_1 est certainement distinct de (0) et $A_1 \oplus N'_2 \oplus B_{12} \oplus B_{21}$ est le plus grand idéal nilpotent de $Z(ad(\underline{g}))$. Comme $[A_1, B_{12}] = B_{12}$ et $[A_1, B_{21}] = B_{21}$ on doit avoir $B_{12} = B_{21} = 0$, donc $\underline{z}_2 = 0$ et $W_2 = 0$ ce qui entraîne

$\underline{g} = \underline{z}_1 \times \underline{g}_2$ où $\underline{z}_1 \neq 0$, $\underline{z}_2 = 0$ et $\underline{g}_2 = C^2 \underline{g}_2$. $\underline{g}$ n'est pas admissible. Réciproquement si $\underline{g}$ n'est pas admissible, $\underline{g}$ peut s'écrire de la manière précédente et alors $Z(ad(\underline{g})) = S_1 \oplus A_1$. Comme $N'_2 \oplus B_{12} \oplus B_{21} = 0$, ce n'est pas le plus grand idéal nilpotent de $Z(ad(\underline{g}))$.

(i) <==> (iii) Supposons que N'_2 ne soit pas le centre de $Z(ad(\underline{g}))$. Si $A_1 = 0$ alors $\underline{z}_1 = 0$ et $B_{12} = B_{21} = 0$ ce qui entraîne $Z(ad(\underline{g})) = N'_2$ et N'_2 est le centre de $Z(ad(\underline{g}))$. Par suite on a $A_1 \neq 0$. Le centre de $Z(ad(\underline{g}))$ contient N'_2 et il est contenu dans $A_1 \oplus N'_2 \oplus B_{12} \oplus B_{21}$. Comme $[A_1, B_{12}] = B_{12}$ et $[A_1, B_{21}] = B_{21}$ le centre contient nécessairement A_1 puisqu'il est distinct de N'_2. Donc $B_{12} = B_{21} = 0$ et $\underline{g}$ n'est pas admissible. Réciproquement, si $\underline{g}$ n'est pas admissible, on a $Z(ad(\underline{g})) = S_1 \oplus A_1$ et N'_2 n'est pas le centre de $Z(ad(\underline{g}))$.

(iii) <==> (iv) Si N'_2 est le centre de $Z(ad(\underline{g}))$ alors le centre de $Der(\underline{g})$ est contenu dans N'_2 donc il est formé de dérivations nilpotentes. Réciproquement supposons que N'_2 ne soit pas le centre de $Z(ad(\underline{g}))$; alors $\underline{g}$ n'est pas admissible et on peut écrire $\underline{g} = \underline{z}_1 \times \underline{g}_2$ avec les propriétés voulues. En vertu de la proposition 1 du chapitre 0 $Der(\underline{g}) = Der(\underline{g}_1) \oplus Der(\underline{g}_2) = S_1 \oplus A_1 \oplus Der(\underline{g}_2)$. A_1 est donc dans le centre de $Der(\underline{g})$ et A_1 est formé de dérivations semi-simples.

(iv) <==> (v) Supposons le centre de $Der(\underline{g})$ formé de dérivations nilpotentes. Si D est une dérivation dans le plus grand idéal nilpotent de $Der(\underline{g})$ alors $ad\, D$ est nilpotent et on peut écrire $D = D_1 + D_2$ où D_1 est une dérivation nilpotente et où D_2 appartient au centre de $Der(\underline{g})$ (Chapitre 0, proposition 2). D_2 est nilpotente par hypothèse et comme $[D_1, D_2] = 0$, D est nilpotente. La réciproque est immédiate, étant donné que le centre de $Der(\underline{g})$ est contenu dans le plus grand idéal nilpotent de $Der(\underline{g})$.

Corollaire :

Soit $\underline{g}$ une algèbre de Lie, $Der(\underline{g}) = S \oplus A \oplus N$ une décomposition normale. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $\underline{g}$ est admissible;

(ii) N est le plus grand idéal nilpotent de $Der(\underline{g})$.

Proposition 7 :

Soit $\underline{g}$ une algèbre de Lie, $\underline{g} = \underline{z}_1 \times \underline{g}_2$ une décomposition comme dans le lemme 2 de la proposition 5. Soit $Der(\underline{z}_1) = S_1 \oplus A_1$ et $Der(\underline{g}_2) = S_2 \oplus A_2 \oplus N_2$ des décompositions normales. Alors

$Der(\underline{g}) = (S_1 \oplus S_2) \oplus (A_1 \oplus A_2) \oplus (N_2 \oplus B_{12} \oplus B_{21})$

est une décomposition normale de $Der(\underline{g})$.

Démonstration :

En reprenant les notations de la proposition 5 du chapitre 1 et en utilisant la proposition 1 du chapitre 0 on a $Der(\underline{g}) = Der(\underline{z}_1) \oplus Der(\underline{z}_2) \oplus B_{12} \oplus B_{21} = (S_1 \oplus S_2) \oplus (A_1 \oplus A_2) \oplus N_2 \oplus B_{12} \oplus B_{21}$. Evidemment $N'_2 \subset N_2$ puisque N'_2 est un idéal de $Der(\underline{g}_2)$ formé de dérivations nilpotentes. $N_2 \oplus B_{12} \oplus B_{21}$ est un idéal de $Der(\underline{g})$ à cause des relations

$$[Der(\underline{g}), B_{12}] \subset N'_2 \oplus B_{12} \subset N_2 \oplus B_{12}$$
$$[Der(\underline{g}), B_{21}] \subset N'_2 \oplus B_{21} \subset N_2 \oplus B_{21}$$
$$[S_1 \oplus S_2 \oplus A_1 \oplus A_2, N_2] \subset N_2$$

$A_1 \oplus A_2 \oplus N_2 \oplus B_{12} \oplus B_{21}$ est un idéal de $Der(\underline{g})$ car $[S_1 \oplus S_2 \oplus A_1 \oplus A_2, A_1 \oplus A_2] = 0$. Maintenant on a $N_2 \oplus B_{12} \oplus B_{21} = N_2 + (N'_2 \oplus B_{12} \oplus B_{21})$; $N'_2 \oplus B_{12} + B_{21}$ est un idéal résoluble, N_2 est une sous-algèbre résoluble, donc $N_2 \oplus B_{12} \oplus B_{21}$ est un idéal résoluble de $Der(\underline{g})$. Pour les mêmes raisons $A_1 \oplus A_2 \oplus N_2 \oplus B_{12} \oplus B_{21}$ est un idéal résoluble de $Der(\underline{g})$. Comme $S_1 \oplus S_2$ est semi-simple, c'est le radical de $Der(\underline{g})$.

Il en résulte que $N_2 \oplus B_{12} \oplus B_{21}$ est le plus grand idéal de $\mathrm{Der}(\underline{g})$ formé de dérivations nilpotentes (Bourbaki [5], § 5, no 3, théorème 1, corollaire 6). On a donc bien une décomposition normale de $\mathrm{Der}(\underline{g})$.

§ 4) Rang d'une algèbre de Lie et d'un produit direct d'algèbres de Lie

Définition 3 :

On appelle rang d'une algèbre de Lie $\underline{g}$ la dimension d'un tore maximal de $\underline{g}$.

Cette définition a bien un sens en vertu du théorème de conjugaison des tores maximaux. On notera $r(\underline{g})$ le rang de l'algèbre de Lie $\underline{g}$. Si $\underline{g}$ est semi-simple alors $\underline{g}$ est isomorphe à $\mathrm{Der}(\underline{g})$ et la notion de rang introduite plus haut coïncide avec la notion habituelle de rang comme dimension d'une sous-algèbre de Cartan de $\underline{g}$. On trouvera des résultats et des conjectures concernant $r(\underline{g})$ chez Leger [15], [16]. Cet auteur établit entre autres la proposition suivante : si $\underline{g}_1$ et $\underline{g}_2$ sont des algèbres de Lie nilpotentes alors $r(\underline{g}_1 \times \underline{g}_2) = r(\underline{g}_1) + r(\underline{g}_2)$. Le résultat est vrai de manière tout-à-fait générale :

Théorème 3 :

Si $\underline{g}_1$ et $\underline{g}_2$ sont deux algèbres de Lie, on a $r(\underline{g}_1 \times \underline{g}_2) = r(\underline{g}_1) + r(\underline{g}_2)$.

Démonstration :

Soit $\underline{z}_1$ le centre de $\underline{g}_1$, $\underline{z}_2$ le centre de $\underline{g}_2$. Supposons d'abord $\underline{z}_1 \subset C^2\underline{g}_1$ et $\underline{z}_2 \subset C^2\underline{g}_2$. On peut écrire $\mathrm{Der}(\underline{g}_1 \times \underline{g}_2) = \mathrm{Der}(\underline{g}_1) \oplus \mathrm{Der}(\underline{g}_2) \oplus B_{12} \oplus B_{21}$ (Chapitre 0, Proposition 1). Soit encore $\mathrm{Der}(\underline{g}_1) = S_1 \oplus A_1 \oplus N_1$ et $\mathrm{Der}(\underline{g}_2) = S_2 \oplus A_2 \oplus N_2$ des décompositions normales. Finalement il vient la décomposition

$\mathrm{Der}(\underline{g}_1 \times \underline{g}_2) = (S_1 \oplus S_2) \oplus (A_1 \oplus A_2) \oplus (N_1 \oplus N_2 \oplus B_{12} \oplus B_{21})$.

Montrons que B_{12} et B_{21} sont des idéaux de $\mathrm{Der}(\underline{g}_1 \times \underline{g}_2)$: soit $\Delta_1 \in \mathrm{Der}(\underline{g}_1)$ $\Delta_2 \in \mathrm{Der}(\underline{g}_2)$ $\Delta_{12} \in B_{12}$ $\Delta_{21} \in B_{21}$; on a $[\Delta_1, \Delta_{12}] \in B_{12}$ car $[\Delta_1, \Delta_{12}](\underline{g}_1) \subset \underline{z}_2$ et $[\Delta_1, \Delta_{12}]|\underline{g}_2 = 0$. De même $[\Delta_2, \Delta_{12}] \in B_{12}$ car $[\Delta_2, \Delta_{12}](\underline{g}_1) \subset \underline{z}_2$ et $[\Delta_2, \Delta_{12}]|\underline{g}_2 = 0$. Il est clair que $[B_{12}, B_{12}] = 0$ et enfin on a $[\Delta_{12}, \Delta_{21}] = 0$ car $[\Delta_{12}, \Delta_{21}]|\underline{g}_1 = 0$ puisque $\underline{z}_2 \subset C^2\underline{g}_2$ et $[\Delta_{12}, \Delta_{21}]|\underline{g}_2 = 0$ puisque $\underline{z}_1 \subset C^2\underline{g}_1$. On a montré que B_{12} est un idéal. De même pour B_{21}. $N_1 \oplus N_2 \oplus B_{12} \oplus B_{21}$ est un idéal résoluble, puisque $N_1 \oplus N_2$ est une sous-algèbre résoluble et $B_{12} \oplus B_{21}$ un idéal résoluble. De même $A_1 \oplus A_2 \oplus N_1 \oplus N_2 \oplus B_{12} \oplus B_{21}$ est un idéal résoluble. Comme $S_1 \oplus S_2$ est semi-simple, c'est le radical de $\mathrm{Der}(\underline{g}_1 \times \underline{g}_2)$. Par conséquent $N_1 \oplus N_2 \oplus B_{12} \oplus B_{21}$ est le plus grand idéal de $\mathrm{Der}(\underline{g}_1 \times \underline{g}_2)$ formé de dérivations nilpotentes (Bourbaki [5], § 5, no 3, théorème 1, corollaire 6). On a donc bien une décomposition normale de $\mathrm{Der}(\underline{g}_1 \times \underline{g}_2)$, ce qui prouve $r(\underline{g}_1 \times \underline{g}_2) = r(\underline{g}_1) + r(\underline{g}_2)$.

Passons au cas général : écrivons $\underline{g}_1 = \underline{z}_{11} \times \underline{g}_{12}$ et $\underline{g}_2 = \underline{z}_{21} \times \underline{g}_{22}$ comme dans le lemme 2 de la proposition 6 du chapitre 1. Alors $\underline{g}_1 \times \underline{g}_2 = (\underline{z}_{11} \times \underline{z}_{21}) \times (\underline{g}_{12} \times \underline{g}_{22})$ et $r(\underline{g}_1 \times \underline{g}_2) = r(\underline{z}_{11} \times \underline{z}_{21}) + r(\underline{g}_{12} \times \underline{g}_{22})$ (Chapitre 1, proposition 7). De plus $r(\underline{z}_{11} \times \underline{z}_{21}) = r(\underline{z}_{11}) + r(\underline{z}_{21})$ et $r(\underline{g}_{12} \times \underline{g}_{22}) = r(\underline{g}_{12}) + r(\underline{g}_{22})$ d'après la première partie de la démonstration. Finalement $r(\underline{g}_1 \times \underline{g}_2) = r(\underline{z}_{11}) + r(\underline{z}_{21}) + r(\underline{g}_{12}) + r(\underline{g}_{22}) = r(\underline{z}_{11}) + r(\underline{g}_{12}) + r(\underline{z}_{21}) + r(\underline{g}_{22}) = r(\underline{g}_1) + r(\underline{g}_2)$.

CHAPITRE 2

MODELES NILPOTENTS, SYSTEMES DE RACINES

Dans ce chapitre on rappelle des résultats connus sur les algèbres de Lie nilpotentes, les modèles nilpotents, les représentations des algèbres de Lie nilpotentes et les systèmes de racines relatifs à un tore maximal T. Pour plus de détails on pourra consulter Amiguet [1] Favre [11] Sato [22] Schenkman [23].

§ 1) Algèbres de Lie nilpotentes modèles

On appelle algèbre de Lie nilpotente modèle de type s et de classe p l'algèbre de Lie quotient de l'algèbre de Lie libre Lie (W) d'un espace vectoriel W de dimension s par l'idéal $C^{p+1}(\text{Lie}(W))$. (Lie(W) est la plus petite sous-algèbre de Lie de Tens (W) qui contient W). On note $\underline{m}(s,p)$ l'algèbre de Lie nilpotente modèle de type s et de classe p. Si on écrit $\underline{m}(s,p) = W \oplus C^2\,\underline{m}(s,p)$ on voit facilement que $\underline{m}(s,p) = W \oplus W^2 \oplus \ldots \oplus W^p$ où W^i est défini par $W^i = [W, \underline{W}^{i-1}]$. Ce qui signifie que $\underline{m}(s,p)$ est une algèbre de Lie graduée (ou quasi-cyclique). On a une décomposition normale $\text{Der}(\underline{m}) = S \oplus A \oplus N$ où S est isomorphe à $\underline{s\ell}(W)$, A est de dimension 1, N est formé des dérivations Δ telles que $\Delta(W) \subset C^2\underline{m}$. Toute algèbre de Lie nilpotente $\underline{n}$ de type s et de classe p peut se réaliser comme quotient du modèle $\underline{m}(s,p)$ par un idéal $\underline{a} \subset C^2\underline{m}$ tel que $\underline{a} \not\supset C^q\underline{m}$ pour $0 \leqslant q \leqslant p$. De plus l'algèbre des dérivations de $\underline{n}$ se réalise comme quotient de l'algèbre des dérivations du modèle $\underline{m}$ de la manière suivante : soit D_1 la sous-algèbre de $\text{Der}(\underline{m})$ formée des dérivations de $\underline{m}$

qui conservent $\underline{a}$ et D_2 l'idéal de D_1 formé des dérivations de $\underline{m}$ dont l'image est contenue dans $\underline{a}$. L'application de passage au quotient $\varphi : D_1 \to Der(\underline{m}/\underline{a})$ est un homomorphisme surjectif dont le noyau est D_2. On conclut que $Der(\underline{n}) \simeq Der(\underline{m}/\underline{a}) \simeq D_1/D_2$.

§ 2) Représentations des algèbres de Lie nilpotentes. Systèmes de racines

Soit $\underline{h}$ une algèbre de Lie, V un $\underline{h}$ - module de dimension finie. Pour toute forme linéaire $\alpha : \underline{h} \to \mathbb{K}$ on notera $V^{\alpha(H)} = \{v \in V \mid \exists p \in \mathbb{N} \text{ avec } (H-\alpha(H))^p \cdot v = 0\}$ le nilespace de l'endomorphisme $H-\alpha(H)$ et

$$V^{\alpha} = \bigcap_{H \in \underline{h}} V^{\alpha(H)}$$

On dira qu'une forme linéaire $\alpha \in \underline{h}^*$ est un poids de V s'il existe $v \in V^{\alpha} - \{0\}$ tel que $H(v) = \alpha(H)v \ \forall H \in \underline{h}$.

Si on suppose $\underline{h}$ nilpotente, on a les propriétés suivantes :

(i) les V^{α} sont des sous - $\underline{h}$ - modules ;

(ii) si $V^{\alpha} \neq 0$ α est l'unique poids du $\underline{h}$ - module V^{α} ;

(iii) V est somme directe des V^{α} non nuls.

Soit maintenant $\underline{g}$ une algèbre de Lie, $\underline{h}$ une sous-algèbre nilpotente de $\underline{g}$ et $\underline{g} = \underline{g}^0 \oplus (\bigoplus_{\alpha \neq 0} \underline{g}^{\alpha})$ la décomposition de $\underline{g}$ considérée comme $\underline{h}$ - module par restriction à $\underline{h}$ de la représentation adjointe de $\underline{g}$. Pour que $\underline{h}$ soit une sous-algèbre de Cartan de $\underline{g}$ il faut et il suffit que $\underline{h} = \underline{g}^0$.

Examinons encore la situation suivante : T est un tore maximal de $\underline{g}$. Alors $\underline{g}$ est un T - module et puisque T opère de manière semi-simple on a $\underline{g} = \underline{g}^0 \oplus (\bigoplus_{\alpha \in R} \underline{g}^{\alpha})$ où

$\underline{g}^{\alpha} = \{x \in \underline{g} \mid (t-\alpha(t))x = 0 \ \forall t \in T\}$ et

$\underline{g}^0 = \{x \in \underline{g} \mid t(x) = 0 \ \forall t \in T\}$; R est un ensemble fini de formes linéaires non nulles sur T . On appelle système de racines de $\underline{g}$ associé au tore maximal T soit l'ensemble $R\cup\{0\}$ si $\underline{g}^0 \neq 0$ soit l'ensemble R si $\underline{g}^0 = 0$. On dira que g^α est le sous-espace de poids α . Il est facile de voir que $[g^\alpha, g^\beta] \subset g^{\alpha+\beta}$ où $g^{\alpha+\beta}$ est nul si $\alpha+\beta$ n'est pas une racine. Il en résulte immédiatement que $\underline{g}^0$ est une sous-algèbre de $\underline{g}$. Les systèmes de racines associés aux tores maximaux de $\underline{g}$ sont tous équivalents ; on peut donc parler du système de racines associé à $\underline{g}$.

Passons au cas d'une algèbre de Lie nilpotente $n(s,p)$ de type s et de classe p . La représentation canonique d'un tore maximal T dans $\underline{n}$ est semi-simple. On peut donc trouver un sous-espace W de n tel que $\underline{n} = W \oplus C^2\underline{n}$ et $T(W) \subset W$. Décomposons encore la représentation canonique de T dans $\underline{n}$: $\underline{n} = \underline{n}^0 \oplus (\bigoplus_{\alpha\in R} n^\alpha)$. Puisque W est invariant par T on a

$$W = (W\cap \underline{n}^0) \oplus (\bigoplus_{\alpha\in R} W\cap n^\alpha)$$

relation qu'on écrira

$$W = W^0 \oplus (\bigoplus_{\alpha\in R} W^\alpha) \qquad \begin{cases} W^0 = W \cap \underline{n}^0 \\ W^\alpha = W \cap n^\alpha \end{cases}$$

Choisissons une base de W^0 et une base de W^α pour chaque $\alpha \in R$. On forme ainsi une base de W qu'on notera $(e_1, \ldots, e_s)$. Chaque e_i est donc un vecteur de poids et on notera α_i le poids correspondant. Donc

$$t(e_i) = \alpha_i(t)e_i \quad \forall t \in T \ (i = 1, \ldots, s)$$

En général les W^α ne sont pas de dimension 1 si bien que plusieurs des poids α_i peuvent être identiques. Puisque $\underline{n}$ est nilpotente les vecteurs $e_I = [\ldots[[e_{i_1}, e_{i_2}], \ldots, e_{i_k}]$ engendrent $\underline{n}$ comme espace vectoriel. Pour $t \in T$ on a

$t(e_I) = (\alpha_{i_1}(t) + \ldots + \alpha_{i_k}(t))e_I$ et si l'on note $\alpha_I = \alpha_{i_1} + \ldots + \alpha_{i_k}$ il vient la formule

$$t(e_I) = \alpha_I(t)e_I \qquad I = (i_1, \ldots, i_k)$$

Les racines α_i qu'on vient de définir ne dépendent pas du supplémentaire W choisi, ce qui légitime la définition suivante : les racines α_i sont appelées les racines simples de l'algèbre de Lie nilpotente $\underline{n}$, relativement au tore maximal T .

<u>*Proposition 8 :*</u>

Soit $\underline{n}$ une algèbre de Lie nilpotente, $(\alpha_1, \ldots, \alpha_s)$ un système de racines simples relativement au tore maximal T . Toute racine relative à T est combinaison linéaire à coefficients entiers positifs ou nuls des racines simples $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$. De plus $\dim T = \text{rang } (\alpha_1, \ldots, \alpha_s)$.

Si $\dim T = s$ alors $(\alpha_1, \ldots, \alpha_s)$ est une base du système de racines et $n^{\alpha_i} = W^{\alpha_i}$ est de dimension 1 pour tout i . ([11])

<u>*Proposition 9 :*</u>

Soit $\underline{m}(s,p)$ un modèle nilpotent, $(\alpha_1, \ldots, \alpha_s)$ un système de racines simples relativement au tore maximal T . Les $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ sont linéairement indépendantes et les sous-espaces de poids α_i, soit m^{α_i}, sont de dimension 1 . Si $\mu_1, \ldots, \mu_s$ sont des entiers ≥ 0 avec $\mu_1 + \ldots + \mu_s \leq p$ et $\mu_i \leq 1$ si tous les $\mu_j (j \neq i)$ sont nuls, alors $\mu_1\alpha_1 + \ldots + \mu_s\alpha_s$ est une racine de $\underline{m}$ et toutes les racines de $\underline{m}$ s'obtiennent de cette manière. ([11])

<u>**Remarque**</u> :

On est en mesure maintenant de donner le contre-exemple annoncé au § 1 du chapitre 1 . Considérons le modèle nilpotent $\underline{m}(2,3) = W \oplus W^2 \oplus W^3$ où $W = \mathbb{K}e_1 \oplus \mathbb{K}e_2$

$W^2 = \mathbb{K}[e_2, e_1]$ $W^3 = \mathbb{K}[[e_2, e_1], e_1] \oplus \mathbb{K}[[e_2, e_1], e_2]$.
Il existe une décomposition normale $Der(\underline{m}) = S \oplus A \oplus N$ telle que W soit invariant par $S \oplus A$. Alors S est isomorphe à $\underline{s\ell}(W)$ et les éléments de A induisent des homothéties sur W. Soit $H \subset S$ une sous-algèbre de Cartan de S telle que e_1 et e_2 soient de poids α_1 et α_2 respectivement par rapport au tore maximal $H \oplus A$. Alors e_1 est un vecteur primitif du S - module W, de poids $\alpha_1 \mid H$. De même $[[e_2, e_1], e_1]$ est un vecteur primitif du S - module W^3, de poids $(2\alpha_1 + \alpha_2)\mid H = \alpha_1 \mid H$. Donc W et W^3 sont des S - modules isomorphes.
$e_1 + [[e_2, e_1], e_1]$ est encore un vecteur primitif de poids $\alpha_1 \mid H$; il engendre donc un S - module irréductible isomorphe à W et à W^3. Ce module irréductible n'est pas invariant par A car si $\Delta \in A$ $\Delta(e_1 + [[e_2, e_1], e_1]) = $
$= e_1 + 3\,[[e_2, e_1], e_1]$ et Δ n'est pas une homothétie sur le module en question.

Pour terminer ce paragraphe examinons encore une classe particulière d'algèbres de Lie nilpotentes. Jacobson [J3] a montré que toute algèbre de Lie qui possède une dérivation bijective est nécessairement nilpotente. L'existence de dérivations bijectives est liée à la structure du système de racines de la manière suivante :

Proposition 10 :

Soit $\underline{g}$ une algèbre de Lie. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) Le poids 0 ne figure pas dans le système de racines de $\underline{g}$.

(ii) Chaque tore maximal de $\underline{g}$ contient une dérivation bijective de $\underline{g}$.

(iii) Il existe une dérivation bijective de $\underline{g}$.

Démonstration :

(i) $\Rightarrow$ (ii) Si le poids 0 ne figure pas dans le système de racines de $\underline{g}$ alors pour n'importe quel tore maximal T de $\underline{g}$ la décomposition de la représentation canonique de T dans $\underline{g}$ s'écrit $\underline{g} = \bigoplus_{\alpha \neq 0} g^{\alpha}$ et on peut trouver $t \in T$ avec $\alpha(t) \neq 0 \ \forall \alpha$. t est donc une dérivation bijective contenue dans T .

(ii) $\Rightarrow$ (iii) est évident.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Soit D une dérivation bijective de $\underline{g}$. On peut écrire $D = D_s + D_n$ la décomposition en partie semi-simple et nilpotente de D . Il est clair que D_s est une dérivation semi-simple bijective. Soit T un tore maximal de $\underline{g}$ qui contient D_s . La décomposition de la représentation canonique de T dans g s'écrit alors

$\underline{g} = \bigoplus_{\alpha \neq 0} g^{\alpha}$ et le poids 0 ne figure pas parmi les racines de $\underline{g}$.

CHAPITRE 3

ALGEBRES DE LIE DECOMPOSABLES

On dit qu'une algèbre de Lie $\underline{g}$ est décomposable si pour tout élément $x \in \underline{g}$ il existe des éléments x_s semi-simple et x_n nilpotent dans $\underline{g}$ tels que $x = x_s + x_n$ et $[x_s, x_n] = 0$ (Malcev [18]). C'est équivalent à dire que l'algèbre de Lie $ad(\underline{g})$ est presque algébrique. Les algèbres décomposables possèdent une décomposition normale qui est unique à conjugaison près. On détermine ensuite les sous-algèbres de Cartan des algèbres de Lie décomposables puis on introduit la notion d'algèbre de Lie fortement décomposable ou faiblement irréductible. Il est possible de donner des conditions d'isomorphisme de telles algèbres de Lie.

§ 1) Décomposition normale des algèbres décomposables

Proposition 11 :

Une algèbre de Lie $\underline{g}$ *est décomposable si et seulement si on peut écrire* $\underline{g} = \underline{s} \oplus \underline{a} \oplus \underline{n}$ *avec les propriétés suivantes :*

(i) $\underline{s}$ *est un facteur de Lévi de* $\underline{g}$, $\underline{a}$ *est une sous-algèbre abélienne formée d'éléments semi-simples,* $\underline{n}$ *est le plus grand idéal nilpotent de* $\underline{g}$;

(ii) $[\underline{s}, \underline{a}] = 0$;

(iii) $\underline{a} \oplus \underline{n}$ *est le radical de* $\underline{g}$.

On peut démontrer cette proposition en s'appuyant sur l'article de Malcev [18]. La décomposition $\underline{g} = \underline{s} \oplus \underline{a} \oplus \underline{n}$ sera appelée décomposition normale de $\underline{g}$.

§ 2) Sous-algèbres de Cartan des algèbres de Lie décomposables et conjugaison des décompositions normales

Proposition 12 :

Soit $\underline{g} = \underline{s} \oplus \underline{a} \oplus \underline{n}$ *une algèbre de Lie décomposable,* $\underline{h} \subset \underline{s}$ *une sous-algèbre de Cartan de* $\underline{s}$ *. Désignons par* $\underline{n}^o$ *la sous-algèbre de* $\underline{n}$ *formée des éléments qui permutent avec* $\underline{h} \oplus \underline{a}$ *et par* $\underline{z}(\underline{h} \oplus \underline{a})$ *le commutant de* $\underline{h} \oplus \underline{a}$ *dans* $\underline{g}$ *. Alors* $\underline{z}(\underline{h} \oplus \underline{a}) = \underline{h} \oplus \underline{a} \oplus \underline{n}^o$ *est une sous-algèbre de Cartan de* $\underline{g}$ *. Toute sous-algèbre de Cartan de* $\underline{g}$ *s'obtient de cette manière.*

Démonstration :

$\underline{h} \oplus \underline{a} \oplus \underline{n}^0$ est nilpotente puisque $\underline{n}^0$ est nilpotente. Soit donc $x \in \underline{g}$ un élément qui normalise $\underline{h} \oplus \underline{a} \oplus \underline{n}^0$; écrivons $x = x_1 + x_2 + x_3$ ($x_1 \in \underline{s}$, $x_2 \in \underline{a}$, $x_3 \in \underline{n}$) et prenons $y_1 \in \underline{h}$, $y_2 \in \underline{a}$, $y_3 \in \underline{n}^0$. Il vient $[x_1 + x_2 + x_3 , y_1 + y_2 + y_3] = [x_1, y_1] + [x_1, y_3] + [x_3, y_1] + [x_3, y_2] + [x_3, y_3] \in \underline{h} \oplus \underline{a} \oplus \underline{n}^0$. Donc $[x_1, y_1] \in \underline{h}$ $\forall y_1 \in \underline{h}$ et $[x_1, y_3] + [x_3, y_1 + y_2 + y_3] \in \underline{n}^0$ $\forall y_1, y_2, y_3$. On en tire $x_1 \in \underline{h}$ et par suite $[x_3, y_1 + y_2 + y_3] \in \underline{n}^0$ $\forall y_1, y_2, y_3$. Donc $[\underline{h} \oplus \underline{a}, x_3] \subset \underline{n}^0$ et comme la représentation adjointe de $\underline{h} \oplus \underline{a}$ dans $\underline{n}$ est semi-simple on conclut que $x_3 \in \underline{n}^0$. $\underline{h} \oplus \underline{a} \oplus \underline{n}^0$ est bien une sous-algèbre de Cartan de $\underline{g}$. Puisque les sous-algèbres de Cartan de $\underline{g}$ sont conjuguées par automorphisme intérieur, elles s'obtiennent toutes de la manière précédente.

Proposition 13 :

Soit $\underline{g}$ *une algèbre de Lie décomposable et* $\underline{g} = \underline{s}_1 \oplus \underline{a}_1 \oplus \underline{n} = \underline{s}_2 \oplus \underline{a}_2 \oplus \underline{n}$ *deux décompositions normales. Alors il existe un automorphisme* φ *de* $\underline{g}$ *tel que* $\varphi(\underline{s}_1) = \underline{s}_2$ $\varphi(\underline{a}_1) = \underline{a}_2$ $\varphi(\underline{n}) = \underline{n}$ *.*

Démonstration :

Soit $\underline{z}$ le centre de $\underline{g}$. $\underline{s}_1 \oplus \underline{a}_1 \oplus \underline{z}$ est une sous-algèbre réductive dans $\underline{g}$ et maximale pour cette propriété : en effet si $\underline{b} \supset \underline{s}_1 \oplus \underline{a}_1 \oplus \underline{z}$ est réductive dans $\underline{g}$ alors $\underline{b} \cap \underline{n}$ est un idéal de $\underline{b}$ formé d'éléments nilpotents et $\underline{b} \cap \underline{n} = \underline{z}$ (Bourbaki [5] , § 6 , n° 5 , théorème 4). Donc $\underline{b} = \underline{s}_1 \oplus \underline{a}_1 \oplus \underline{z}$. A cause des résultats de Mostow [20] il existe un automorphisme intérieur α de $\underline{g}$ avec $\alpha(\underline{s}_1) = \underline{s}_2$ et $\alpha(\underline{a}_1 \oplus \underline{z}) = \underline{a}_2 \oplus \underline{z}$.

Notons $\beta : \underline{a}_2 \oplus \underline{z} \to \underline{a}_2$ la projection sur $\underline{a}_2$. On peut alors définir une application linéaire $\varphi : \underline{g} \to \underline{g}$ en posant

$$\begin{cases} \varphi(x) = \alpha(x) & \text{si } x \in \underline{s}_1 \\ \varphi(x) = \beta \circ \alpha(x) & \text{si } x \in \underline{a}_1 \\ \varphi(x) = \alpha(x) & \text{si } x \in \underline{n} \end{cases}$$

On a $\varphi(\underline{s}_1) = \underline{s}_2$ $\varphi(\underline{a}_1) = \underline{a}_2$ car $\alpha(\underline{z}) = \underline{z}$ et $\varphi(\underline{n}) = \underline{n}$, si bien que φ est bijective. Vérifions que φ est un automorphisme d'algèbres de Lie : soit $x = x_1 + x_2 + x_3$ et $y = y_1 + y_2 + y_3$ ($x_1, y_1 \in \underline{s}_1$, $x_2, y_2 \in \underline{a}_1$, $x_3, y_3 \in \underline{n}$) et posons $\varphi(x_2) = \alpha(x_2) + z_1$ $\varphi(y_2) = \alpha(y_2) + z_2$ où $z_1, z_2 \in \underline{z}$. Il est clair que $[x, y] \in \underline{s}_1 \oplus \underline{n}$, donc $\varphi[x, y] = \alpha[x, y] = [\alpha(x), \alpha(y)]$. Maintenant $[\varphi(x), \varphi(y)] = [\alpha(x_1) + \alpha(x_2) + z_1 + \alpha(x_3), \alpha(y_1) + \alpha(y_2) + z_2 + \alpha(y_3)] = [\alpha(x), \alpha(y)]$. D'où la proposition.

§ 3) Algèbres de Lie fortement décomposables ou faiblement irréductibles

Définition 4 :

Soit $\underline{g} = \underline{s} \oplus \underline{a} \oplus \underline{n}$ une algèbre de Lie décomposable et $\nu : \underline{g} \to Der(\underline{n})$ l'homomorphisme $x \mapsto ad\, x \mid \underline{n}$. On dira que $\underline{g}$ est fortement décomposable s'il existe une décomposition normale $Der(\underline{n}) = S \oplus A \oplus N$ telle que $\nu(\underline{a}) = (\nu(\underline{a}) \cap S) \oplus (\nu(\underline{a}) \cap A)$.

Proposition 14 :

Soit $\underline{g} = \underline{s} \oplus \underline{a} \oplus \underline{n}$ une algèbre de Lie fortement décomposable et $Der(\underline{n}) = S' \oplus A' \oplus N$ une décomposition normale telle que $\nu(\underline{a}) \subset S' \oplus A'$. Alors $\nu(\underline{a}) = (\nu(\underline{a}) \cap S') \oplus (\nu(\underline{a}) \cap A')$.

Démonstration :

Par hypothèse on peut trouver une décomposition normale $Der(\underline{n}) = S \oplus A \oplus N$ avec $\nu(\underline{a}) = (\nu(\underline{a}) \cap S) \oplus (\nu(\underline{a}) \cap A)$. En vertu du théorème 2 du chapitre 1 il existe un automorphisme intérieur $\Omega = e^{adD_1} \circ \ldots \circ e^{adD_n}$ de $Der(\underline{n})$ avec $D_i \in N^*$ (radical nilpotent de $Der(\underline{n})$) tel que $\Omega(S) = S'$ $\Omega(A) = A'$ $\Omega(N) = N$. Il est clair que pour tout $D \in Der(\underline{n})$ on a $\Omega(D) \equiv D (\mathrm{mod}\ N^*)$. Donc si $D \in \nu(\underline{a})$ $\Omega(D) = D$ puisque $\nu(\underline{a}) \subset S' \oplus A'$. On peut donc écrire $\nu(\underline{a}) = \Omega(\nu(\underline{a}) \cap S) \oplus \Omega(\nu(\underline{a}) \cap A) = (\nu(\underline{a}) \cap S') \oplus (\nu(\underline{a}) \cap A')$.

Définition 5 :

On dira qu'une algèbre de Lie est faiblement irréductible si elle ne contient aucun idéal semi-simple autre que 0. On dira qu'elle est irréductible si elle n'est pas produit direct de deux algèbres de Lie non triviales.

Proposition 15 :

Une algèbre de Lie non triviale est faiblement irréductible si et seulement si elle peut s'écrire comme un produit direct d'algèbres de Lie irréductibles non triviales et non semi-simples.

Démonstration :

Soit $\underline{g}$ une algèbre de Lie non triviale et faiblement irréductible. On peut toujours la décomposer en un produit direct $\underline{g} = \underline{g}_1 \times \ldots \times \underline{g}_p$ d'algèbres de Lie irréductibles non triviales. Comme $\underline{g}$ ne contient aucun idéal semi-simple autre que 0, les $\underline{g}_i$ sont tous non semi-simples.

Réciproquement soit $\underline{g} = \underline{g}_1 \times \ldots \times \underline{g}_p$ un produit direct d'algèbres de Lie irréductibles non triviales et non semi-simples. Soit $\underline{s}$ un idéal semi-simple de $\underline{g}$; on peut écrire $\underline{g} = \underline{s} \times \underline{z}(\underline{s})$ où $\underline{z}(\underline{s})$ est le commutant de $\underline{s}$ dans $\underline{g}$ (Chapitre 4, § 1, proposition 19) . Si on désigne par $\underline{g}_i{}^*$ la projection de $\underline{g}_i$ sur $\underline{s}$, $\underline{g}_i{}^*$ est un idéal de $\underline{s}$ et par conséquent $\underline{g}_i{}^* = C^2\underline{g}_i{}^*$, ce qui implique $\underline{g}_i{}^* \subset \underline{g}_i$. On conclut que $\underline{g}_i = (\underline{g}_i \cap \underline{s}) \times$ $\times (\underline{g}_i \cap \underline{z}(\underline{s}))$. Comme $\underline{g}_i$ est irréductible non semi-simple on a $\underline{g}_i \cap \underline{s} = 0$ et $\underline{g}_i \subset \underline{z}(\underline{s})$. Par conséquent $\underline{g} = \underline{z}(\underline{s})$ et $\underline{s} = 0$ ce qui prouve l'irréductibilité faible de $\underline{g}$.

Proposition 16 :

Soit $\underline{g} = \underline{s} \oplus \underline{a} \oplus \underline{n}$ une algèbre de Lie fortement décomposable et faiblement irréductible, $Der(\underline{n}) = S \oplus A \oplus N$ une décomposition normale. Alors il existe des sous-algèbres S_1, $B_1 \subset S$, $A_1 \subset A$ telles que :

(i) S_1 est semi-simple, B_1 et A_1 sont abéliennes formées de dérivations semi-simples ;

(ii) $[S_1, B_1] = 0$;

(iii) $\underline{g}$ est isomorphe à $S_1 \oplus B_1 \oplus A_1 \oplus \underline{n}$;

S_1 est un facteur de Lévi, $\underline{n}$ est le plus grand idéal nilpotent, $B_1 \oplus A_1 \oplus \underline{n}$ est le radical de $\underline{g}$. Réciproquement toute algèbre de Lie $\underline{g}$ qui satisfait les conditions (i) - (iii) est fortement décomposable et faiblement irréductible.

Démonstration :

$\nu : \underline{g} \to Der(\underline{n})$ réalise un isomorphisme de $\underline{s} \oplus \underline{a}$ sur $\nu(\underline{s} \oplus \underline{a})$: pour cela il suffit de montrer que $Ker\ \nu \subset \underline{n}$; mais $Ker\ \nu$ est un idéal de $\underline{g}$, on peut donc écrire $Ker\ \nu = (Ker\ \nu \cap \underline{s}) \oplus (Ker\ \nu \cap (\underline{a} \oplus \underline{n}))$. $\underline{s}$ étant semi-simple, se décompose en un produit direct $(Ker\ \nu \cap \underline{s}) \times \underline{s}_1$ de deux idéaux semi-simples et par suite

$\underline{g} = (\mathrm{Ker}\ \nu \cap \underline{s}) \times (\underline{s}_1 \oplus \underline{a} \oplus \underline{n})$. Puisque $\underline{g}$ est faiblement irréductible, $\mathrm{Ker}\ \nu \cap \underline{s} = 0$ et $\mathrm{Ker}\ \nu \subset \underline{a} \oplus \underline{n}$. Soit $x \in \mathrm{Ker}\ \nu$ et $x = x_2 + x_3$ avec $x_2 \in \underline{a}$ $x_3 \in \underline{n}$. On a $[x, \underline{n}] = 0$ ce qui implique $\mathrm{ad}x_2 \mid \underline{n} = - \mathrm{ad}x_3 \mid \underline{n}$, donc $\mathrm{ad}x_2 \mid \underline{n} = 0$. Par conséquent $\mathbb{K}x_2 \oplus \underline{n}$ est un idéal nilpotent de $\underline{g}$ et par suite $x_2 \in \underline{n}$ d'où $x_2 = 0$ et $x = x_3 \in \underline{n}$. On a montré que $\mathrm{Ker}\ \nu \subset \underline{n}$, ce qui permet d'identifier $\underline{s}$ et $\nu(\underline{s})$ ainsi que $\underline{a}$ et $\nu(\underline{a})$. Considérons la sous-algèbre $\nu(\underline{s}) \oplus \nu(\underline{a})$ de $\mathrm{Der}(\underline{n})$. Sa représentation canonique dans $\underline{n}$ est semi-simple. On peut plonger $\nu(\underline{s}) \oplus \nu(\underline{a})$ dans une sous-algèbre de $\mathrm{Der}(\underline{n})$, dont la représentation canonique est semi-simple, et maximale pour cette propriété. Il existe donc une décomposition normale $\mathrm{Der}(\underline{n}) = S \oplus A \oplus N$ avec $\nu(\underline{s}) \oplus \nu(\underline{a}) \subset S \oplus A$ (Chapitre 1, § 2, théorème 2). Comme S est le seul facteur de Lévi de $S \oplus A$ il est clair que $\nu(\underline{s}) \subset S$. D'autre part la proposition 14 permet d'écrire $\nu(\underline{a}) = (\nu(\underline{a}) \cap S) \oplus$ $\oplus\ (\nu(\underline{a}) \cap A)$. Posons $S_1 = \nu(\underline{s})$ $B_1 = \nu(\underline{a}) \cap S$ et $A_1 = \nu(\underline{a}) \cap A$; il vient $\nu(\underline{s}) \oplus \nu(\underline{a}) \oplus \underline{n} = S_1 \oplus B_1 \oplus A \oplus \underline{n}$. On termine la démonstration en utilisant le théorème 2 et l'homomorphisme injectif $\nu \oplus \mathrm{id} : \underline{s} \oplus \underline{a} \oplus \underline{n} \to S \oplus A \oplus \underline{n}$.

Réciproquement soit $\underline{g}$ une algèbre de Lie qui vérifie les propriétés (i) - (iii) ; il est immédiat que $\underline{g}$ est fortement décomposable. D'autre part s'il existe un idéal semi-simple dans $\underline{g}$ alors il existe aussi un idéal semi-simple S' contenu dans S_1 . Mais la relation $[S', \underline{n}] = 0$ implique soit $S' = 0$, soit $\underline{n} = 0$ auquel cas $\underline{g} = 0$. Donc on a toujours $S' = 0$ et $\underline{g}$ est faiblement irréductible.

<u>*Définition 6* :</u>

On appellera algèbre décomposable universelle associée à une algèbre de Lie nilpotente $\underline{n}$ l'algèbre $S \oplus A \oplus \underline{n}$ où $\mathrm{Der}(\underline{n}) = S \oplus A \oplus N$ est une décomposition normale de $\mathrm{Der}(\underline{n})$.

Toute algèbre de Lie décomposable, faiblement irréductible, se réalise comme sous-algèbre de l'algèbre décomposable universelle.

§ 4) Isomorphismes d'algèbres fortement décomposables et faiblement irréductibles

Proposition 17 :

Soit $\underline{n}$ *une algèbre de Lie nilpotente,* $Der(\underline{n}) = S \oplus A \oplus N = S' \oplus A' \oplus N$ *deux décompositions normales,* S_1, $B_1 \subset S$, S'_1, $B'_1 \subset S'$, $A_1 \subset A$, $A'_1 \subset A'$ *des sous-algèbres telles que :*

(i) S_1, S'_1 *sont semi-simples,* A_1, A'_1, B_1, B'_1 *sont abéliennes formées de dérivations semi-simples ;*

(ii) $[S_1, B_1] = 0$, $[S'_1, B'_1] = 0$;

(iii) $\underline{g} = S_1 \oplus B_1 \oplus A_1 \oplus \underline{n}$ *est isomorphe à* $\underline{g}' = S'_1 \oplus B'_1 \oplus A'_1 \oplus \underline{n}$.

Alors il existe un automorphisme θ *de* $\underline{n}$ *tel que*

$\theta S\theta^{-1} = S'$ $\quad \theta A\theta^{-1} = A'$ $\quad \theta N\theta^{-1} = N$

$\theta S_1\theta^{-1} = S'_1$ $\quad \theta A_1\theta^{-1} = A'_1$ $\quad \theta B_1\theta^{-1} = B'_1$.

Démonstration :

A cause de la proposition 13 on peut trouver un isomorphisme $\phi : \underline{g} \to \underline{g}'$ tel que $\phi(S_1) = S'_1$ $\phi(B_1 \oplus A_1) = B'_1 \oplus A'_1$ $\phi(\underline{n}) = \underline{n}$. ϕ induit par restriction un automorphisme φ de $\underline{n}$ qui vérifie $\varphi S_1\varphi^{-1} = S'_1$ et $\varphi(B_1 \oplus A_1)\varphi^{-1} = B'_1 \oplus A'_1$; en effet si $D \in S_1 \oplus B_1 \oplus A_1$ et $x \in \underline{n}$ alors $\phi(D)\,(\varphi(x)) = \phi(D)\,(\phi(x)) = [\phi(D), \phi(x)] = \phi[D, x] = \phi(D(x)) = \varphi(D(x)) = \varphi D\varphi^{-1}(\varphi(x))$. Puisque φ est un automorphisme de $\underline{n}$ on a $\phi(D) = \varphi D\varphi^{-1}$ et l'assertion est démontrée.

Comme A_1 est dans le radical de $Der(\underline{n})$, $\varphi A_1\varphi^{-1}$ y est aussi et par suite $\varphi A_1\varphi^{-1} = A'_1$. Maintenant on a les relations $\varphi B_1\varphi^{-1} \subset \varphi S\varphi^{-1}$ et $\varphi B_1\varphi^{-1} \subset B'_1 \oplus A'_1 \subset S' \oplus A'$.

On peut trouver un automorphisme spécial Ω de $\mathrm{Der}(\underline{n})$ tel que $\Omega(\varphi S\varphi^{-1}) = S'$: si $\Delta \in \varphi S\varphi^{-1}$ alors $\Omega(\Delta) = \Delta + Q$ où $Q \in N^*$ (radical nilpotent de $\mathrm{Der}(\underline{n})$). On conclut que si $\Delta \in (\varphi S\varphi^{-1}) \cap (S' \oplus A')$ alors $\Omega(\Delta) = \Delta$. En particulier si $\Delta \in \varphi B_1\varphi^{-1}$ on a $\Omega(\Delta) = \Delta$ ce qui implique, à cause de la relation $\Omega(\varphi S\varphi^{-1}) = S'$, $\varphi B_1\varphi^{-1} \subset S'$ et par conséquent $\varphi B_1\varphi^{-1} = B_1'$. Ainsi l'automorphisme φ de $\underline{n}$ vérifie les trois relations

$$\varphi S_1\varphi^{-1} = S_1' \qquad \varphi B_1\varphi^{-1} = B_1' \qquad \varphi A_1\varphi^{-1} = A_1' .$$

On veut construire maintenant un automorphisme μ de $\underline{n}$ tel que

si $\Delta \in S_1' \oplus B_1' \oplus A_1'$ alors $\mu\Delta\mu^{-1} = \Delta$ et $\mu\varphi S\varphi^{-1}\mu^{-1} = S'$

considérons pour cela le commutant $Z(A_1')$ de A_1' dans $\mathrm{Der}(\underline{n})$, on peut écrire $Z(A_1') = S' \oplus A' \oplus \tilde{N}$ où $\tilde{N}$ est la sous-algèbre de N formée des dérivations de $\underline{n}$ qui permutent avec A_1' . S' et $\varphi S\varphi^{-1}$ sont des facteurs de Lévi de $Z(A_1')$. On peut donc trouver un automorphisme spécial $U = e^{\mathrm{ad}\Delta_1}$ $(\Delta_1 \in \tilde{N})$ de $Z(A_1')$ tel que $U(\varphi S\varphi^{-1}) = S'$. Il est clair que si $\Delta \in A_1'$ on a $U(\Delta) = \Delta$. De même si $\Delta \in S_1' \oplus B_1'$ on a $U(\Delta) = \Delta$ puisque $S_1' \oplus B_1' \subset \varphi S\varphi^{-1} \cap S'$ (même raisonnement que plus haut). On peut poser maintenant $\mu = e^{\Delta_1}$ (car Δ_1 est une dérivation nilpotente) et utiliser le corollaire de la proposition 4 (Chapitre I, § 2). En résumé on a donc les relations :

$$\mu\varphi S_1\varphi^{-1}\mu^{-1} = S_1' \quad \mu\varphi B_1\varphi^{-1}\mu^{-1} = B_1' \quad \mu\varphi A_1\varphi^{-1}\mu^{-1} = A_1'$$

$$\mu\varphi S\varphi^{-1}\mu^{-1} = S' \qquad \mu\varphi A\varphi^{-1}\mu^{-1} \supset A_1'$$

Enfin construisons un automorphisme ρ de $\underline{n}$ tel que si $\Delta \in S' \oplus A_1'$ alors $\rho\,\Delta\,\rho^{-1} = \Delta$ et $\rho\,\mu\,\varphi A\varphi^{-1}\mu^{-1}\rho^{-1} = A'$. Considérons encore $Z(S')$ le commutant de S' dans $\mathrm{Der}(\underline{n})$: $Z(S')$ est résoluble et contient A' et $\mu\varphi A\varphi^{-1}\mu^{-1}$. On peut trouver des sous-algèbres de Cartan K et K' de $Z(S')$ telles que $\mu\varphi A\varphi^{-1}\mu^{-1} \subset K$ et $A' \subset K'$ (Chevalley [7], Chapitre 6, § 4, n° 5, proposition 18). Il existe un automorphisme intérieur $P = e^{\mathrm{ad}D}(D \in C^\infty Z(S'))$ de $Z(S')$ avec

$P(K) = K'$ (Borel, Mostow [3]). $\mu\varphi A\varphi^{-1}\mu^{-1}$ est dans le centre de K et A' est dans le centre de K' ; par maximalité de $\mu\varphi A\varphi^{-1}\mu^{-1}$ et de A' il vient $P(\mu\varphi A\varphi^{-1}\mu^{-1}) = A'$. Remarquons encore que $D \in N$, ce qui permet de poser $\rho = e^{D}$. Alors si $\Delta \in S'$ on a $\rho\Delta\rho^{-1} = \Delta$ et $\rho\mu\varphi A\varphi^{-1}\mu^{-1}\rho^{-1} = A'$. Il reste donc à montrer que si $\Delta \in A_1'$ alors $\rho\Delta\rho^{-1} = \Delta$ ce qui résulte de la relation $\rho A_1'\rho^{-1} = \rho\mu\varphi A_1\varphi^{-1}\mu^{-1}\rho^{-1} \subset A'$ et du lemme suivant :

Lemme :

Soit $\underline{g}$ une algèbre de Lie de plus grand idéal nilpotent $\underline{n}$, x un élément semi-simple dans $\underline{g}$ et y un élément dans $\underline{n}$. Soit α l'automorphisme $e^{\mathrm{ad}\,y}$. Si $[\alpha(x), x] = 0$ alors $\alpha(x) = x$ et $[x, y] = 0$.

Démonstration :

Décomposons $\underline{n}$ en sous-espaces propres relativement à $\mathrm{ad}\, x$: $\underline{n} = \underline{n}^{0} \oplus n^{\lambda_1} \oplus \dots \oplus n^{\lambda_p}$ $\lambda_i \neq 0$ $(i = 1,\dots,p)$. Il est clair que $\alpha(x) - x \in \underline{n}$; on peut donc écrire $\alpha(x) - x = q_0 + q_1 + \dots + q_p$ $(q_0 \in \underline{n}^{0}$, $q_i \in n^{\lambda_i})$. La condition $[\alpha(x), x] = 0$ implique $q_1 = \dots = q_p = 0$ et $\alpha(x) - x = q_0$. $\alpha(x) - x$ est semi-simple et q_0 est nilpotent, par conséquent q_0 appartient au centre de $\underline{g}$ et $\alpha(q_0) = q_0$. Donc $\alpha(\alpha(x) - x) = \alpha(x) - x$ c'est-à-dire $(\alpha - I)^2(x) = 0$. Or on a $\alpha - I = \mathrm{ad}\,y + \frac{1}{2!}(\mathrm{ad}\,y)^2 + (\dots)$ et par conséquent $(\alpha - I)^2 = (\mathrm{ad}\,y)^2 + \sum_{p+q>2} \frac{1}{p!}\frac{1}{q!}(\mathrm{ad}\,y)^{p+q}$. Donc $(\mathrm{ad}\,y)^2(x) = - \sum_{p+q>2} \frac{1}{p!}\frac{1}{q!}(\mathrm{ad}\,y)^{p+q}(x)$. Comme $\mathrm{ad}\,y$ est nilpotent on en tire $(\mathrm{ad}\,y)^2(x) = 0$ et par suite $(\alpha - I)(x) = \mathrm{ad}\,y\,(x)$ d'où $\alpha(x) = x + [y, x]$. D'autre part $\alpha(x) = x + q_0$. Puisque $[y, x] \in g^{\lambda_1} \oplus \dots \oplus g^{\lambda_p}$ il vient $q_0 = 0$ et $[y, x] = 0$.

Soit G le groupe des automorphismes θ de $\underline{n}$ tels que dans $\mathrm{Der}(\underline{n})$ on ait $\theta S\theta^{-1} = S$, $\theta A\theta^{-1} = A$, $\theta N\theta^{-1} = N$. On peut caractériser les éléments de G de la manière suivante :

Proposition 18 :

Soit $\underline{n}$ une algèbre de Lie nilpotente, $Der(\underline{n}) = S \oplus A \oplus N$ une décomposition normale. On considère $\underline{n}$ comme un $(S \oplus A)$ - module pour la représentation canonique de $S \oplus A$ dans $\underline{n}$. Alors G est formé des automorphismes θ de $\underline{n}$ qui possèdent la propriété suivante : pour tout sous - $(S \oplus A)$ - module irréductible V de $\underline{n}$, $\theta(V)$ est un sous - $(S \oplus A)$ - module irréductible de $\underline{n}$.

Démonstration :

Soit $\theta \in G$ et V un sous - $(S \oplus A)$ - module irréductible de $\underline{n}$. Montrons d'abord que $\theta(V)$ est un sous - $(S \oplus A)$ - module de $\underline{n}$: prenons $\Delta \in S \oplus A$ et $x \in V$; par hypothèse $\theta^{-1}\Delta\,\theta \in S \oplus A$, donc $\Delta\,\theta(x) = \theta\theta^{-1}\Delta\,\theta(x) = \theta(\theta^{-1}\Delta\theta(x)) \in \theta(V)$. A cause de l'irréductibilité de V, $\theta(V)$ est également irréductible.

Récipproquement soit $\theta \in Aut(\underline{n})$ qui vérifie la propriété énoncée. A cause de la proposition 3 on peut trouver des sous-espaces $n_1,\dots,n_q$ de $\underline{n}$ tels que :

(i) $\underline{n} = n_1 \oplus \dots \oplus n_q$

(ii) les n_i sont des sous- $(S \oplus A)$ - modules irréductibles de $\underline{n}$.

(iii) $S \oplus A$ est formé des dérivations D de $\underline{g}$ telles que $D(n_i) \subset n_i \quad (i = 1,\dots, q)$

Par hypothèse les $\theta(n_i)$ sont des sous - $(S \oplus A)$ - modules irréductibles. Il en résulte immédiatement que les n_i sont stables par $\theta^{-1}(S \oplus A)\theta$ ce qui implique $\theta^{-1}(S \oplus A)\theta = S \oplus A$, donc aussi $\theta(S \oplus A)\theta^{-1} = S \oplus A$. Comme S est le seul facteur de Lévi de $S \oplus A$ et que A en est le radical, on a bien $\theta S\theta^{-1} = S$ et $\theta A\theta^{-1} = A$. Donc $\theta \in G$.

CHAPITRE 4

ALGEBRES DE LIE COMPLETES

Un résultat de Leger [15] (Proposition 11) montre que les algèbres de Lie $\underline{g}$ avec seulement des dérivations intérieures possèdent une décomposition normale. Donnons une démonstration rapide : soit $\underline{g}$ avec $\mathrm{Der}(\underline{g}) = \mathrm{ad}(\underline{g})$, $x \in \underline{g}$, et $\mathrm{ad}\, x = \mathrm{ad}\, x_s + \mathrm{ad}\, x_n$ une décomposition en partie semi-simple et nilpotente de $\mathrm{ad}\, x$. Donc $x = x_s + x_n + q$ où $q \in \underline{z}$ (centre de $\underline{g}$). D'autre part, $[x_s, x_n] \in \underline{z}$ puisque $[\mathrm{ad}\, x_s, \mathrm{ad}\, x_n] = \mathrm{ad}\,[x_s, x_n] = 0$. Comme x_s est semi-simple, on conclut que $[x_s, x_n] = 0$ et $x = x_s + (x_n + q)$ avec $[x_s, x_n + q] = 0$. On a montré que $\underline{g}$ est décomposable et il suffit maintenant d'utiliser la proposition 11 du chapitre 3.

Ce résultat de Leger peut être précisé de la manière suivante : une algèbre de Lie $\underline{g}$ faiblement irréductible avec $\mathrm{Der}(\underline{g}) = \mathrm{ad}(\underline{g})$ est fortement décomposable; de plus, si $\underline{g} = \underline{s} \oplus \underline{a} \oplus \underline{n}$ et $\mathrm{Der}(\underline{n}) = S \oplus A \oplus N$ sont des décompositions normales, il existe des sous-algèbres S_1, $B_1 \subset S$ avec S_1 semi-simple, B_1 abélienne formée de dérivations semi-simples, $[S_1, B_1] = 0$ et $\underline{g}$ isomorphe à $S_1 \oplus B_1 \oplus A \oplus \underline{n}$. On peut pousser plus loin dans cette direction : les algèbres de Lie de la forme $S_1 \oplus B_1 \oplus A \oplus \underline{n}$ sont complètes si et seulement si le centre est trivial et si $Z(S_1 \oplus B_1 \oplus A) \subset B_1 \oplus A \oplus \mathrm{ad}(\underline{n})$ où $Z(S_1 \oplus B_1 \oplus A)$ désigne le commutant de $S_1 \oplus B_1 \oplus A$ dans $\mathrm{Der}(\underline{n})$. Ce théorème s'obtient en décomposant l'algèbre des dérivations d'une algèbre décomposable quelconque et en calculant une décomposition normale de l'algèbre des dérivations d'une algèbre résoluble décomposable. L'étude des algèbres de Lie complètes est ainsi entièrement ramenée à celle du plus grand idéal nilpotent et de ses dérivations. On peut alors tenter une classification générale des algèbres de Lie complètes et montrer en particulier qu'une algèbre de Lie résoluble complète est déterminée de manière unique par son plus grand idéal nilpotent.

Enfin, une algèbre de Lie complète possède une propriété intéressante, qui reflète la situation des algèbres de Lie semi-simples, à savoir qu'elle est toujours produit direct de ses idéaux complets irréductibles.

§ 1) Propriétés élémentaires, exemples

Les algèbres de Lie complètes se laissent caractériser de la manière suivante (Jacobson [14], chapitre 1, no 3, proposition 3) :

Proposition 19 :

Soit $\underline{g}$ *une algèbre de Lie. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) $\underline{g}$ *est complète;*

(ii) pour toute algèbre de Lie $\underline{g}'$ *telle que* $\underline{g}$ *soit un idéal de* $\underline{g}'$ *on a* $\underline{g}' = \underline{g} \oplus \underline{z}(\underline{g})$ *où* $\underline{z}(\underline{g})$ *est le commutant de* $\underline{g}$ *dans* $\underline{g}'$ *.*

Démonstration :

(i) $\Rightarrow$ (ii) soit $x \in \underline{g}'$ et considérons $\mathrm{ad}x|\underline{g}$. Par hypothèse, il existe $y \in \underline{g}$ avec $\mathrm{ad}x|\underline{g} = \mathrm{ad}y|\underline{g}$; donc $x-y \in \underline{z}(\underline{g})$. On a montré ainsi que $\underline{g}' = \underline{g} + \underline{z}(\underline{g})$. De plus $\underline{g} \cap \underline{z}(\underline{g}) = 0$ puisque le centre de $\underline{g}$ est trivial. Donc $\underline{g}' = \underline{g} \oplus \underline{z}(\underline{g})$. (ii) $\Rightarrow$ (i) soit $\underline{g}$ une algèbre de Lie vérifiant (ii) . Considérons l'holomorphe $\underline{g}' = \mathrm{Der}(\underline{g}) \oplus \underline{g}$.

Je dis que $\underline{z}(\underline{g}) = \{y - \mathrm{ad}y \mid y \in g\}$: en effet, on a $y - \mathrm{ad}y \in \underline{z}(\underline{g})$ car $[y - \mathrm{ad}y, x] = [y, x] - [y, x] = 0$ pour tout $x \in g$ et réciproquement si $x + y \in \underline{z}(\underline{g})$ avec $x \in \mathrm{Der}(\underline{g})$ et $y \in \underline{g}$ alors $[x + y, y'] = x(y') + [y, y'] = 0$ pour tout $y' \in \underline{g}$ d'où $x = -\mathrm{ad}y$. L'hypothèse $\underline{g}' = \underline{g} \oplus \underline{z}(\underline{g})$ implique immédiatement que le centre de $\underline{g}$ est trivial et que toute dérivation de $\underline{g}$ est intérieure. Donc $\underline{g}$ est complète.

Corollaire :

Soit $\underline{g}$ une algèbre de Lie de centre $\underline{z}$. Si $\underline{g}/\underline{z}$ est complète, alors ou $\underline{g}$ est une algèbre de Lie réductive, ou le radical de $\underline{g}$ n'est pas gradué.

Démonstration :

Si $\underline{g}/\underline{z}$ est complète alors $\mathrm{ad}(\underline{g})$ est un idéal complet contenu dans $\mathrm{Der}(\underline{g})$. On conclut que $\mathrm{Der}(\underline{g}) = \mathrm{ad}(\underline{g}) \oplus Z(\mathrm{ad}(\underline{g}))$ où $Z(\mathrm{ad}(\underline{g}))$ est le commutant de $\mathrm{ad}(\underline{g})$ dans $\mathrm{Der}(\underline{g})$. Le corollaire découle alors d'un résultat de Togo [26](théorème 5).

Il n'est pas facile de calculer les dérivations du quotient d'une algèbre de Lie $\underline{g}$ par un idéal $\underline{a}$. La condition du corollaire précédent, nécessaire pour que $\underline{g}/\underline{z}$ soit complète, est loin d'être suffisante. On sait en effet qu'il existe des algèbres de Lie $\underline{g}$ avec $\mathrm{Der}(\underline{g}) = \mathrm{ad}(\underline{g})$ et $\underline{z} \neq 0$ ($\underline{z}$ centre de $\underline{g}$). Pour les exemples connus de telles algèbres (Sato [22], Luks [17]) le quotient $\underline{g}/\underline{z}$ n'est pas une algèbre de Lie complète bien que $\underline{g}/\underline{z}$ soit à centre nul. Cependant, pour les deux exemples cités, le radical de $\underline{g}$ est nilpotent non gradué.

Proposition 20 :

Soit $\underline{g}_1$ et $\underline{g}_2$ des algèbres de Lie. Le produit direct $\underline{g}_1 \times \underline{g}_2$ est une algèbre de Lie complète si et *seulement si* $\underline{g}_1$ *et* $\underline{g}_2$ *sont des algèbres de Lie complètes.*

Démonstration :

Si $\underline{g}_1$ et $\underline{g}_2$ sont complètes, alors les centres $\underline{z}(\underline{g}_1)$ et $\underline{z}(\underline{g}_2)$ sont triviaux. En vertu de la proposition 1 du chapitre 0, on a $\mathrm{Der}(\underline{g}) = \mathrm{Der}(\underline{g}_1) \times \mathrm{Der}(\underline{g}_2)$ et $\underline{g}_1 \times \underline{g}_2$ n'a que des dérivations intérieures. Comme $\underline{z}(\underline{g}_1 \times \underline{g}_2) = \underline{z}(\underline{g}_1) \times \underline{z}(\underline{g}_2) = 0$, $\underline{g}_1 \times \underline{g}_2$ est complète.

Réciproquement, supposons $\underline{g}_1 \times \underline{g}_2$ complète . Alors $\underline{z}(\underline{g}_1) = \underline{z}(\underline{g}_2) = 0$. Soit Δ_1 une dérivation de $\underline{g}_1$. On peut construire une dérivation Δ de $\underline{g}_1 \times \underline{g}_2$ en posant $\Delta|\underline{g}_1 = \Delta_1$ et $\Delta|\underline{g}_2 = 0$. Par hypothèse, il existe $X = X_1 + X_2 \in \underline{g}_1 \times \underline{g}_2$ avec $\Delta = \mathrm{ad}(X_1 + X_2)$. Donc $\Delta_1 = \Delta|\underline{g}_1 = \mathrm{ad}(X_1 + X_2)|\underline{g}_1 = \mathrm{ad}\, X_1|\underline{g}_1$ ce qui prouve que $\underline{g}_1$ n'a que des dérivations intérieures. De même pour $\underline{g}_2$. $\underline{g}_1$ et $\underline{g}_2$ sont complètes.

Pour terminer ce paragraphe, passons en revue quelques exemples d'algèbres de Lie complètes :

1) L'algèbre de Lie résoluble $\underline{r}$ à deux dimensions, de base (x_1, x_2) dont les crochets sont donnés par $[x_1, x_2] = x_2$. Le centre de $\underline{r}$ est trivial et l'algèbre de dérivations est $\mathrm{Der}(\underline{r}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ d_{21} & d_{22} \end{pmatrix}$. On a $\dim \mathrm{Der}(\underline{r}) = \dim \mathrm{ad}(\underline{r}) = 2$ ce qui implique $\mathrm{Der}(\underline{r}) = \mathrm{ad}(\underline{r})$.

2) Les algèbres de Lie semi-simples sont complètes.

3) Les produits directs $\underline{s} \times \underline{r}$ où $\underline{s}$ est semi-simple et $\underline{r}$ résoluble complète.

§ 2) Un théorème de Hochschild

Théorème 4 :

Soit $\underline{g}$ *une algèbre de Lie ,* $\underline{s} \subset \underline{g}$ *un facteur de Lévi,* $\hat{S}$ *la sous-algèbre de* $Der(\underline{g})$ *formée des dérivations qui s'annulent sur* $\underline{s}$ *. Alors* $Der(g) = ad(\underline{g}) + \hat{S}$ *.*

(Hochschild [12]).

Proposition 21 :

Soit $\underline{g} = \underline{s} \oplus \underline{r}$ *une décomposition de Lévi de* $\underline{g}$ *,* $\underline{z}$ *le centre de* $\underline{g}$ *,* $\underline{g}' = \underline{g}/\underline{z}$ *,* $\pi : \underline{g} \longrightarrow \underline{g}'$ *la projection canonique et* $\rho : \underline{s} \longrightarrow Der(\underline{r})$ *la représentation adjointe de* $\underline{s}$ *dans* $\underline{r}$ *. Notons encore* $\underline{z}(\underline{s})$ *le commutant de* $\underline{s}$ *dans* $\underline{g}$ *,* $\hat{S}$ *la sous-algèbre de* $Der(\underline{g})$ *formée des dérivations qui s'annulent sur* $\underline{s}$ *,* $\hat{S}'$ *la sous-algèbre de* $Der(\underline{g}')$ *formée des dérivations qui s'annulent sur* $\pi(\underline{s})$ *. Alors*

(i) $\hat{S}$ *est le commutant de* $ad_{\underline{g}}(\underline{s})$ *dans* $Der(\underline{g})$ *.*

(ii) $\hat{S}$ *est isomorphe au commutant de* $\rho(\underline{s})$ *dans* $Der(\underline{r})$ *.*

(iii) $\dim Der(\underline{g}) = \dim \underline{g} - \dim \underline{z}(\underline{s}) + \dim \hat{S}$ *.*

(iv) $\dim Der(\underline{g}') = \dim \underline{g} - \dim \underline{z}(\underline{s}) + \dim \hat{S}'$ *.*

Démonstration :

(i) Il est clair que $[ad_{\underline{g}}(\underline{s}), \hat{S}] = 0$. Réciproquement supposons $[\Delta, ad\, x] = 0$ où $\Delta \in Der(\underline{g})$ et $x \in \underline{s}$. Alors $ad\, \Delta(x) = 0$ et $\Delta(x) \in \underline{z}$. Comme $\underline{s}$ est semi-simple, on a $\Delta(\underline{s}) = \Delta([\underline{s}, \underline{s}]) = 0$ et $\Delta \in \hat{S}$.

(ii) Considérons l'application $\phi : \hat{S} \longrightarrow Der(\underline{r})$ définie par $\phi(\Delta) = \Delta|\underline{r}$. ϕ est un homomorphisme injectif; il suffit donc de montrer que $\phi(\hat{S})$ est le commutant de $\rho(\underline{s})$ dans $Der(\underline{r})$: si $\Delta \in \hat{S}$, $x \in \underline{s}$, $y \in \underline{r}$, on a
$[\phi(\Delta), \rho(x)]\, (y) = \Delta|\underline{r}(\rho(x)(y)) - \rho(x)(\Delta(y)) = \Delta[x, y] -$

$[x, \Delta(y)] = [x, \Delta(y)] - [x, \Delta(y)] = 0$. Donc $\phi(\hat{S})$ est dans le commutant de $\rho(\underline{s})$. Réciproquement, soit $\Delta \in \mathrm{Der}(\underline{r})$ qui commute avec $\rho(\underline{s})$. On construit une dérivation $D \in \hat{S}$ de la manière suivante : $D|\underline{r} = \Delta$, $D|\underline{s} = 0$; en effet $D[x, y] = \Delta[x, y] = \Delta(\rho(x)(y)) = \rho(x)\ (\Delta(y)) = [x, \Delta(y)] = [x, D(y)] = [D(x), y] + [x,D(y)]$ puisque $D(x) = 0$. Donc $\Delta = \phi(D)$ et le commutant de $\rho(\underline{s})$ est contenu dans $\phi(\hat{S})$.

(iii) π est un homomorphisme surjectif et comme $\underline{z} \subset \underline{r}$ on a $\underline{g}' = \pi(\underline{s}) \oplus \pi(\underline{r})$ qui est une décomposition de Lévi de $\underline{g}'$. A cause du théorème 4, on a $\mathrm{Der}(\underline{g}) = \mathrm{ad}(\underline{g}) + \hat{S}$. Il faut donc calculer la dimension de $\mathrm{ad}(\underline{g}) \cap \hat{S}$. Pour cela, considérons l'application

$$\begin{aligned} \underline{z}(\underline{s}) &\longrightarrow \mathrm{ad}(\underline{g}) \cap \hat{S} \\ x &\longmapsto \mathrm{ad}\ x \ . \end{aligned}$$

Cette application est surjective et son noyau est $\underline{z}$: donc $\dim(\mathrm{ad}(\underline{g}) \cap \hat{S}) = \dim \underline{z}(\underline{s}) - \dim \underline{z}$. Alors $\dim \mathrm{Der}(\underline{g}) = \dim \mathrm{ad}(\underline{g}) + \dim \hat{S} - \dim(\mathrm{ad}(\underline{g}) \cap \hat{S}) = \dim \underline{g} - \dim \underline{z} + \dim \hat{S} - \dim \underline{z}(\underline{s}) + \dim \underline{z} = \dim \underline{g} - \dim \underline{z}(\underline{s}) + \dim \hat{S}$.

(iv) Notons $\underline{z}(\pi(\underline{s}))$ le commutant de $\pi(\underline{s})$ dans $\underline{g}'$ et introduisons l'application $\tilde{\pi} : \underline{z}(\underline{s}) \longrightarrow \underline{z}(\pi(\underline{s}))$ induite par la projection π . Il est clair que $\underline{z} = \mathrm{Ker}\ \tilde{\pi}$ puisque $\underline{z} \subset \underline{z}(\underline{s})$. Montrons que $\tilde{\pi}$ est surjective : soit $y \in \underline{z}(\pi(\underline{s}))$, alors il existe $x \in \underline{g}$ avec $\pi(x) = y$. Si $x' \in \underline{s}$ on a $\pi[x, x'] = [\pi(x), \pi(x')] = [y, \pi(x')] = 0$, donc $[x,x'] \in \underline{z}$. Il en résulte que $[x, \underline{s}] = [x,[\underline{s},\underline{s}]] = 0$ et $x \in \underline{z}(\underline{s})$. Par suite $\tilde{\pi}(x) = y$ et $\tilde{\pi}$ est surjective. Donc $\dim \underline{z}(\underline{s}) = \dim \underline{z} + \dim \underline{z}(\pi(\underline{s}))$ et $\dim \mathrm{Der}(\underline{g}') = \dim \underline{g}' - \dim \underline{z}(\pi(\underline{s})) + \dim \hat{S}' = \dim \underline{g} - \dim \underline{z} - \dim \underline{z}(\underline{s}) + \dim \underline{z} + \dim \hat{S}' = \dim \underline{g} - \dim \underline{z}(\underline{s}) + \dim \hat{S}'$. La proposition est démontrée.

Proposition 22 :

Soit $\underline{g}$ une algèbre de Lie de radical $\underline{r}$. Si une dérivation D de $\underline{g}$ coïncide sur $\underline{r}$ avec une dérivation intérieure de $\underline{g}$, alors D est intérieure.

(Bourbaki [5], §6, exercice 12).

Corollaire :

Si $\underline{b}$ est une sous-algèbre complète de $\underline{g}$ telle que $\underline{r} \subset \underline{b}$ alors $\underline{g}$ est complète.

Démonstration :

Le centre de $\underline{g}$ est contenu dans le centre de $\underline{b}$, donc il est trivial. En vertu du théorème 4, il suffit de montrer que toute dérivation $\Delta \in \hat{S}$ est intérieure. Puisque $\mathrm{Im}\ \Delta \subset \underline{r}$, Δ laisse $\underline{b}$ stable. Par hypothèse, il existe $x \in \underline{b}$ avec $\Delta|\underline{b} = \mathrm{ad}\ x|\underline{b}$; en particulier $\Delta|\underline{r} = \mathrm{ad}\ x|\underline{r}$ et Δ est intérieure.

Exemple :

Considérons une algèbre de Lie résoluble décomposable $\underline{r} = \mathbb{K}x_1 \oplus (\mathbb{K}x_2 \oplus \mathbb{K}x_3)$ de base (x_1, x_2, x_3) avec les crochets $[x_1, x_2] = x_2$ $[x_1, x_3] = x_3$ $[x_2, x_3] = 0$. Le centre de $\underline{r}$ est trivial et on vérifie facilement que l'algèbre des dérivations de $\underline{r}$ est

$$\mathrm{Der}(\underline{r}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{pmatrix}$$

On obtient une décomposition normale de $\mathrm{Der}(\underline{r})$ en écrivant

$$\mathrm{Der}(\underline{r}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_{22} & d_{23} \\ 0 & d_{32} & -d_{22} \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_{33} & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ d_{21} & 0 & 0 \\ d_{31} & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$= S \oplus A \oplus N$.

$A \oplus N = ad(\underline{r})$ et $ad(\underline{r})$ est isomorphe à $\underline{r}$. $Der(\underline{r})$ est isomorphe au produit semi-direct $S \oplus \underline{r}$ par l'isomorphisme $\psi : S \oplus \underline{r} \to Der(\underline{r})$ $\begin{cases} \psi(\Delta) = \Delta & \text{si } \Delta \in S \\ \psi(x) = ad\ x & \text{si } x \in \underline{r} \end{cases}$.

On est en mesure maintenant de montrer que $Der(\underline{r})$ est une algèbre de Lie complète : le centre de $S \oplus \underline{r}$ est trivial puisque le centre de $\underline{r}$ est trivial. Si D est une dérivation de $S \oplus \underline{r}$ nulle sur S , alors $D|\underline{r}$ permute avec S (Proposition 21) donc $D|\underline{r} \in A \oplus N$ et il existe $x \in \underline{r}$ avec $D|\underline{r} = ad\ x|\underline{r}$. On conclut que D est intérieure par la proposition 22. Ainsi toute dérivation de $S \oplus \underline{r}$ est intérieure (Théorème 4) ce qui entraîne $Der(\underline{r})$ complète.

Considérons maintenant le modèle nilpotent $\underline{m}(2, 2)$, de base $(e_1, e_2, [e_1, e_2])$. Je veux montrer que $Der(\underline{r})$ et $Der(\underline{m}(2, 2))$ sont isomorphes. On a une décomposition normale

$$Der(\underline{m}(2,2)) = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & 0 \\ d_{21} & -d_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} d_{22} & 0 & 0 \\ 0 & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 2d_{22} \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ d_{31} & d_{32} & 0 \end{pmatrix}$$

$= S \oplus A \oplus N$.

On vérifie sans peine que $A \oplus N$ est isomorphe à $\underline{r}$, d'où un homomorphisme injectif

$$\phi : \begin{array}{ccc} Der(\underline{m}(2,2)) & \longrightarrow & Der(A \oplus N) \\ \Delta & \longrightarrow & ad\ \Delta|A \oplus N \end{array}$$

A cause de l'égalité des dimensions, ϕ est un isomorphisme. Togo [25] donne d'autres exemples d'algèbres de Lie distinctes qui ont des algèbres de dérivations isomorphes.

§ 3) Décomposition normale des algèbres de Lie complètes

Soit $\underline{g}$ une algèbre de Lie de radical $\underline{r}$. Considérons dans $\underline{g}$ un idéal semi-simple maximal $\underline{s}$. On peut plonger $\underline{s}$ dans un facteur de Lévi $\underline{s}'$ de $\underline{g}$, ce qui implique la décomposition en produit direct $\underline{s}' = \underline{s} \times \underline{s}_1$ et $\underline{g} = \underline{s} \times (\underline{s}_1 \oplus \underline{r}) = \underline{s} \times \underline{g}'$ où $\underline{g}' = \underline{s}_1 \oplus \underline{r}$. A cause de la maximalité de $\underline{s}$, $\underline{g}'$ ne contient pas d'idéal semi-simple autre que 0, donc $\underline{g}'$ est faiblement irréductible. En utilisant la proposition 20, on voit bien que $\underline{g}$ est complète si et seulement si $\underline{g}'$ est complète. Dans la suite, on peut donc se limiter aux algèbres de Lie faiblement irréductibles.

Théorème 5 :

Soit $\underline{g}$ une algèbre de Lie faiblement irréductible telle que $Der(\underline{g}) = ad(\underline{g})$ et de plus grand idéal nilpotent $\underline{n}$. Soit encore $Der(\underline{n}) = S \oplus A \oplus N$ une décomposition normale. Alors, il existe des sous-algèbres S_1, $B_1 \subset S$ telles que :

(i) S_1 est semi-simple, B_1 est abélienne formée de dérivations semi-simples;

(ii) $[S_1, B_1] = 0$;

(iii) dans S, $S_1 \oplus B_1$ est égale à son normalisateur;

(iv) $\underline{g}$ est isomorphe à $S_1 \oplus B_1 \oplus A \oplus \underline{n}$.

Démonstration :

$\underline{g}$ étant décomposable, il existe une décomposition normale $\underline{g} = \underline{s} \oplus \underline{a} \oplus \underline{n}$. Considérons l'homomorphisme $\nu : \underline{g} \longrightarrow Der(\underline{n})$ défini par $\nu(x) = ad\, x|\underline{n}$. Puisque $\underline{g}$ est faiblement irréductible, ν réalise un isomorphisme de $\underline{s} \oplus \underline{a}$ sur $\nu(\underline{s} \oplus \underline{a})$ et il existe une décomposition normale $Der(\underline{n}) = S \oplus A \oplus N$ telle que $\nu(\underline{s}) \subset S$ et $\nu(\underline{a}) \subset S \oplus A$ (Proposition 16, démonstration).

Montrons que $A \subset \nu(\underline{a})$: si $\Delta \in A$ on peut construire une dérivation $\tilde{\Delta}$ de $\underline{g}$ en posant $\tilde{\Delta}|\underline{s} \oplus \underline{a} = 0$ et $\tilde{\Delta}|\underline{n} = \Delta$; en effet, si $x \in \underline{s} \oplus \underline{a}$ et $y \in \underline{n}$ on a $\tilde{\Delta}[x,y] = \Delta[x,y] = \Delta o ad\, x|_{\underline{n}}(y) = \Delta o \nu(x)(y) = \nu(x) o \Delta(y) = [x, \Delta(y)] = [x, \tilde{\Delta}(y)] = [\tilde{\Delta}(x), y] + [x, \tilde{\Delta}(y)]$ puisque $\tilde{\Delta}(x) = 0$. Par hypothèse, il existe $z \in \underline{g}$ avec $\tilde{\Delta} = ad\, z$. Il en résulte que $[z, \underline{s} \oplus \underline{a}] = 0$, donc $z \in \underline{a} \oplus \underline{n}$ et on peut écrire $z = z_1 + z_2$ avec $z_1 \in \underline{a}$, $z_2 \in \underline{n}$. Comme $[z_1 , \underline{s} \oplus \underline{a}] = 0$ on a également $[z_2, \underline{s} \oplus \underline{a}] = 0$ d'où en particulier $[z_1, z_2] = 0$. Alors $\Delta = \tilde{\Delta}|\underline{n} = ad\, z_1|\underline{n} + ad\, z_2|\underline{n}$ est une décomposition de Δ en partie semi-simple et nilpotente. Puisque Δ est semi-simple, $\Delta = ad\, z_1|\underline{n}$ ce qui prouve $\Delta \in \nu(\underline{a})$.

Maintenant on a donc $\nu(\underline{a}) = \nu(\underline{a}) \cap S \oplus \nu(\underline{a}) \cap A$ puisque $\nu(\underline{a}) \supset A$, c'est-à-dire que $\underline{g}$ est fortement décomposable d'où on conclut que $\underline{g}$ est isomorphe à une algèbre de la forme $S_1 \oplus B_1 \oplus A \oplus \underline{n}$ avec les propriétés (i) (ii) (iv) (Proposition 16).

Il reste (iii) à vérifier. Pour cela considérons l'algèbre de Lie $\underline{g}' = N(S_1 \oplus B_1) \oplus A \oplus \underline{n}$ où $N(S_1 \oplus B_1)$ désigne le normalisateur de $S_1 \oplus B_1$ dans S . $\underline{g} = S_1 \oplus B_1 \oplus A \oplus \underline{n}$ est alors un idéal de $\underline{g}'$. Puisque $Der(\underline{g}) = ad(\underline{g})$ on conclut que $\underline{g}' = \underline{g} + \underline{z}(\underline{g})$ où $\underline{z}(\underline{g})$ est le commutant de $\underline{g}$ dans $\underline{g}'$ (Proposition 19, démonstration). Mais il est clair que $\underline{z}(\underline{g}) \subset \underline{n}$ car $(S \oplus A) \cap ad(\underline{n}) = (0)$, donc $\underline{g}' = \underline{g}$ et $N(S_1 \oplus B_1) = S_1 \oplus B_1$. Le théorème est démontré.

§ 4) Décomposition normale de l'algèbre des dérivations d'une algèbre de Lie résoluble décomposable.

Soit $\underline{r} = \underline{a} \oplus \underline{n}$ une algèbre de Lie résoluble décomposable, ϕ : $Der(\underline{r}) \to Der(\underline{n})$ l'homomorphisme défini par $\phi(\Delta) = \Delta|\underline{n}$ $(\Delta \in Der(\underline{r}))$. Posons $T' = \phi(ad_{\underline{r}}(\underline{a}))$ et désignons par $Z(T')$ le commutant de T' dans $Der(\underline{n})$.

Soit encore ψ : $Z(T') \to Der(\underline{r})$ l'homomorphisme défini par $\psi(\Delta)|\underline{a} = 0$ et $\psi(\Delta)|\underline{n} = \Delta$ ($\Delta \in Z(T')$). Ker ϕ est un idéal abélien de $Der(\underline{r})$ et dim $\underline{a}$ = dim T'.

Théorème 6 :

Avec les notations précédentes on a les propriétés :

(i) *L'extension* $0 \to Ker\ \phi \overset{i}{\to} \phi^{-1}(Z(T')) \overset{\phi}{\to} Z(T') \to 0$ *est inessentielle, c'est-à-dire que* $\phi \circ \psi = id$. *De plus* $Der(\underline{r}) = \phi^{-1}(Z(T')) + ad(\underline{r})$;

(ii) *Soit* $Der(\underline{n}) = S \oplus A \oplus N$ *une décomposition normale et* H *une sous-algèbre de Cartan de* S *telles que* $T' \subset T = H \oplus A$. *Posons* $N_o = Z(T') \cap N$. *Alors il existe des sous-algèbres* S_o, B_o *de* S, *une sous-algèbre de Cartan* H_o *de* S_o *avec* S_o *semi-simple,* B_o *abélienne formée de dérivations semi-simples,* $[S_o, B_o] = 0$, *telles que* $H = H_o \oplus B_o$ *et* $Z(T') = S_o \oplus (B_o \oplus A \oplus N_o)$ *soit une décomposition de Lévi de* $Z(T')$;

(iii) $Der(\underline{r}) = \psi(S_o) \oplus (\psi(B_o) \oplus \psi(A)) \oplus (Ker\ \phi + ad_{\underline{r}}(n) + \psi(N_o))$ *est une décomposition normale de* $Der(\underline{r})$.

Démonstration :

On vérifie sans difficulté que $\phi \circ \psi = id$ ce qui montre, premièrement que la suite $0 \to Ker\ \phi \overset{i}{\to} \phi^{-1}(Z(T')) \overset{\phi}{\to} Z(T') \to 0$ est exacte, et deuxièmement que l'extension correspondante est inessentielle. Par conséquent on a $\phi^{-1}(Z(T')) = \psi(Z(T')) \oplus Ker\ \phi$ et il est clair que $\psi(Z(T'))$ est formée des dérivations de $\underline{r}$ qui s'annulent sur $\underline{a}$. Montrons que $Der(\underline{r}) = \phi^{-1}(Z(T')) + ad(\underline{r})$: soit $\underline{z}$ le centre de $\underline{r}$ et $\underline{n} = \underline{n}^0 \oplus (\bigoplus_{\alpha \neq 0} n^{\alpha})$ la décomposition de la représentation adjointe de $\underline{a}$ dans $\underline{n}$ (ce qui revient aussi à décomposer la représentation canonique de T' dans $\underline{n}$). Si D est une dérivation de $\underline{r}$ on a $D(\underline{r}) \subset \underline{n}$ (Bourbaki [5], § 5, no 5, proposition 6). Pour $x \in \underline{r}$ on peut donc écrire $D(x) = D(x)_0 + \sum_{\alpha \neq 0} D(x)_{\alpha}$ où $D(x)_0 \in \underline{n}^0$ et $D(x)_{\alpha} \in n^{\alpha}$. Prenons t, t' $\in$ a,

$x_0 \in \underline{n}^0$ et $x_\beta \in n^\beta$ $(\beta \neq 0)$. On a $0 = D\,[t, x_0] = [D(t), x_0] + [t, D(x_0)] = [D(t)_0 + \sum_{\alpha\neq 0} D(t)_\alpha, x_0] + [t, D(x_0)_0 + \sum_{\alpha\neq 0} D(x_0)_\alpha] = [D(t)_0, x_0] + \sum_{\alpha\neq 0} [D(t)_\alpha, x_0] + \sum_{\alpha\neq 0} \alpha(t)\, D(x_0)_\alpha$. On tire de là que $[D(t)_0, x_0] = 0$ donc $[D(t)_0, \underline{n}^0] = 0 \;\; \forall t \in \underline{a}$.

Calculons maintenant $D[t, x_\beta] = D(\beta(t)\, x_\beta) = \beta(t)\, D(x_\beta) = \beta(t)\, D(x_\beta)_0 + \sum_{\alpha\neq 0} \beta(t)\, D(x_\beta)_\alpha$; d'autre part $D[t, x_\beta] = [D(t), x_\beta] + [t, D(x_\beta)] = [D(t)_0 + \sum_{\alpha\neq 0} D(t)_\alpha, x_\beta] + [t, D(x_\beta)_0 + \sum_{\alpha\neq 0} D(x_\beta)_\alpha] = [D(t)_0, x_\beta] + \sum_{\alpha\neq 0} [D(t)_\alpha, x_\beta] + \sum_{\alpha\neq 0} \alpha(t)\, D(x_\beta)_\alpha$. On tire de là que $\beta(t)\, D(x_\beta)_0 + \sum_{\alpha\neq 0} (\beta-\alpha)(t)\, D(x_\beta)_\alpha - [D(t)_0, x_\beta] - \sum_{\alpha\neq 0} [D(t)_\alpha, x_\beta] = 0$.
Dans cette somme le seul terme qui soit dans n^β est $[D(t)_0, x_\beta]$; par conséquent $[D(t)_0, x_\beta] = 0$ d'où on conclut $[D(t)_0, n^\beta] = 0 \;\; \forall t \in \underline{a} \;\; \forall \beta \neq 0$. Si on tient compte du fait que $[D(t)_0, \underline{a}] = 0 \;\; \forall t \in \underline{a}$ on a

$$D(t)_0 \in \underline{z} \quad \forall t \in \underline{a}$$

Calculons encore $0 = D[t, t'] = [D(t), t'] + [t, D(t')] = [D(t)_0 + \sum_{\alpha\neq 0} D(t)_\alpha, t'] + [t, D(t')_0 + \sum_{\alpha\neq 0} D(t')_\alpha] = -\sum_{\alpha\neq 0} \alpha(t')\, D(t)_\alpha + \sum_{\alpha\neq 0} \alpha(t)\, D(t')_\alpha = \sum_{\alpha\neq 0} (\alpha(t)\, D(t')_\alpha - \alpha(t')\, D(t)_\alpha)$. Donc $\alpha(t)\, D(t')_\alpha = \alpha(t')\, D(t)_\alpha \;\; \forall t, t' \in \underline{a} \;\; \forall \alpha \neq 0$. Pour tout $\alpha \neq 0$ choisissons $t'_\alpha \in \underline{a}$ tel que $\alpha(t'_\alpha) = 1$; il vient $D(t)_\alpha = \alpha(t)\, D(t'_\alpha)_\alpha$ et $D(t) = D(t)_0 + \sum_{\alpha\neq 0} \alpha(t)\, D(t'_\alpha)_\alpha = D(t)_0 - \operatorname{ad}(\sum_{\alpha\neq 0} D(t'_\alpha)_\alpha)\,(t)$. Si on pose $x = -\sum_{\alpha\neq 0} D(t'_\alpha)_\alpha$ $(x \in \bigoplus_{\alpha\neq 0} n^\alpha)$ il vient $(D - \operatorname{ad} x)\,(\underline{a}) \subset \underline{z}$.

Maintenant on vérifie facilement que $\phi(D - \mathrm{ad}\, x) \in Z(T')$ et $D = (D - \mathrm{ad}\, x) + \mathrm{ad}\, x$. On a donc bien la décomposition $\mathrm{Der}(\underline{r}) = \phi^{-1}(Z(T')) + \mathrm{ad}(\underline{r})$.

Cherchons une décomposition de Lévi de $Z(T')$: il est clair que $Z(T') = (Z(T') \cap (S \oplus A)) \oplus (Z(T') \cap N) = (Z(T') \cap (S \oplus A)) \oplus N_0$. $S \oplus A$ est réductive et T' est réductive dans $S \oplus A$ (Bourbaki [5], § 6, no 5 et 6); alors on peut écrire $Z(T') \cap (S \oplus A) = S_0 \oplus B$ où S_0 est semi-simple, B abélienne formée de dérivations semi-simples et $[S_0, B] = 0$ (Chevalley [6], chapitre 5, § 2, proposition 9). On a $S_0 \subset S$ puisque S est le seul facteur de Lévi de $S \oplus A$. D'autre part $T \subset S_0 \oplus B$ et $B \subset T \subset S_0 \oplus B$ par maximalité de T. Puisque A permute avec $S_0 \oplus B$ on a en plus $A \subset B$. On peut écrire $T = (T \cap S_0) \oplus B$ car $B \subset T$. Par maximalité de T on voit facilement que $H_0 = T \cap S_0$ est une sous-algèbre de Cartan de S_0. Posons $B_0 = B \cap H$, alors comme $A \subset B \subset H \oplus A$ on a $B = (B \cap H) \oplus A = B_0 \oplus A$ et $Z(T') = S_0 \oplus B_0 \oplus A \oplus N_0$ avec $[S_0, B_0] = 0$. Maintenant $H_0 = T \cap S_0 \subset H$ et $H \oplus A = T = H_0 \oplus B = H_0 \oplus B_0 \oplus A$ d'où on conclut que $H = H_0 \oplus B_0$.

Passons à la démonstration du point (iii) : il est clair que $\psi(Z(T')) + \mathrm{ad}(\underline{r}) = \psi(Z(T')) + \mathrm{ad}_{\underline{r}}(\underline{n})$ et par conséquent $\mathrm{Der}(\underline{r}) = \psi(Z(T')) + \mathrm{ad}_{\underline{r}}(\underline{n}) + \mathrm{Ker}\, \phi = (\psi(S_0) \oplus \psi(B_0) \oplus \psi(A) \oplus \psi(N_0)) + \mathrm{ad}_{\underline{r}}(\underline{n}) + \mathrm{Ker}\, \phi$. Alors $\mathrm{Der}(\underline{r}) = \psi(s_0) \oplus (\psi(B_0) \oplus \psi(A)) \oplus (\overline{\psi}(N_0) + \mathrm{ad}_{\underline{r}}(\underline{n}) + \mathrm{Ker}\, \phi)$: en effet si $\Delta \in \psi(S_0 \oplus B_0 \oplus A) \cap (\psi(N_0) + \mathrm{ad}_{\underline{r}}(\underline{n}) + \mathrm{Ker}\, \phi)$ alors $\Delta|\underline{a} = 0$ et $\Delta|\underline{n} \in (S_0 \oplus B_0 \oplus A) \cap (N_0 + \mathrm{ad}(\underline{n})) = 0$, donc $\Delta = 0$. $\mathrm{ad}_{\underline{r}}(\underline{n})$ est un idéal nilpotent de $\mathrm{Der}(\underline{r})$, $\mathrm{Ker}\, \phi$ est un idéal abélien de $\mathrm{Der}(\underline{r})$; comme $[\psi(S_0 \oplus B_0 \oplus A), \psi(N_0)] \subset \psi(N_0)$ on conclut que $(\psi(N_0) + \mathrm{ad}_{\underline{r}}(\underline{n}) + \mathrm{Ker}\, \phi)$ est un idéal résoluble de $\mathrm{Der}(\underline{r})$. Par conséquent $(\psi(B_0) \oplus \psi(A)) \oplus (\psi(N_0) + \mathrm{ad}_{\underline{r}}(\underline{n}) + \mathrm{Ker}\, \phi)$ est le radical de $\mathrm{Der}(\underline{r})$ et $(\psi(N_0) + \mathrm{ad}_{\underline{r}}(\underline{n}) + \mathrm{Ker}\, \phi)$ est le plus grand idéal de $\mathrm{Der}(\underline{r})$ formé de dérivations nilpotentes (Bourbaki [5], § 5, no 3, théorème 1, corollaire 6). D'où la décomposition normale annoncée.

Corollaire 1 :

S_o est une sous-algèbre régulière de S (i.e. $[H, S_o] \subset S_o$).

En effet puisque $H = H_0 \oplus B_0$ on a $[H, S_0] \subset S_0$.

Remarque :

Pour une classification des sous-algèbres semi-simples régulières d'une algèbre de Lie semi-simple S, on pourra consulter Dynkin [10]. Par exemple si S est de type $A\ell$, alors S_0 est également de type $A\ell$.

Corollaire 2 :

Si $\dim \underline{a} = \text{rang } \underline{n}$ alors $Der(\underline{r})$ est résoluble.

En effet, on a $\dim T' = \dim \underline{a} = \dim T$ ce qui implique $T' = T$. Alors $S_0 \oplus B_0 \oplus A$ est le commutant de T dans $S \oplus A$, ce qui implique immédiatement $S_0 = 0$ donc $Der(\underline{r})$ résoluble.

Corollaire 3 :

Soit $A(\underline{z}) = \{\Delta \in Ker\ \phi \mid \Delta(\underline{a}) \subset \underline{z}\}$. Alors $Der(\underline{r}) = \psi(Z(T')) + (A(\underline{z}) \oplus ad_{\underline{r}}(\underline{n})) = \psi(S_o) \oplus (\psi(B_o) \oplus \psi(A)) \oplus ((A(\underline{z}) \oplus ad_{\underline{r}}(\underline{n})) + \psi(N_o))$.

Montrons que $Ker\ \phi + ad_{\underline{r}}(\underline{n}) = A(\underline{z}) \oplus ad_{\underline{r}}(\underline{n})$: soit $D \in Ker\ \phi$, on a vu qu'il existe $x = -\sum_{\alpha \neq 0} D(t'_\alpha)_\alpha \in \bigoplus_{\alpha \neq 0} n^\alpha$ tel que $(D - ad\ x)(\underline{a}) \subset \underline{z}$. D'autre part, puisque $D(\underline{n}) = 0$, il vient $[D(\underline{a}), \underline{n}] \subset D[\underline{a}, \underline{n}] + [\underline{a}, D(\underline{n})] = 0$, donc $D(\underline{a}) \subset \underline{z}(\underline{n})$ où $\underline{z}(\underline{n})$ désigne le centre de $\underline{n}$. Mais il est clair que $\underline{z}(\underline{n}) = (\underline{z}(\underline{n}) \cap n^0) \oplus (\bigoplus_{\alpha \neq 0} \underline{z}(\underline{n}) \cap n^\alpha)$ si bien que $D(t'_\alpha)_\alpha \in \underline{z}(\underline{n})\ \forall \alpha \neq 0$ et par suite $x \in \underline{z}(\underline{n})$. De là on tire $D - ad\ x \in A(\underline{z})$ et $D = (D - ad\ x) + ad\ x$.

Il reste à montrer que $A(\underline{z}) \cap ad_{\underline{r}}(\underline{n}) = 0$: supposons $ad\ y \in A(\underline{z})$ $(y \in \underline{n})$, alors $[\underline{a}, y] \subset \underline{z}$ et comme $\underline{z} \subset \underline{n}^0$ on a $y \in \underline{n}^0$. De plus $y \in \underline{z}(\underline{n})$ ce qui entraîne $y \in \underline{z}$ et $ad\ y = 0$.

Corollaire 4 :

$\psi(N_o) \cap \mathrm{Ker}\ \phi = 0$, $\psi(N_o) \cap (A(\underline{z}) \oplus ad_{\underline{r}}(\underline{n})) = \psi(N_o) \cap ad_{\underline{r}}(\underline{n}) = ad_{\underline{r}}(\underline{n}^o)$.

Il est évident que $\psi(N_0) \cap \mathrm{Ker}\ \phi = 0$ et $\psi(N_0) \cap ad_{\underline{r}}(\underline{n}) = ad_{\underline{r}}(\underline{n}^0)$. Soit donc maintenant $\Delta \in \psi(N_0) \cap (A(\underline{z}) \oplus ad_{\underline{r}}(\underline{n}))$, écrivons $\Delta = \Delta_1 + ad\ y$ où $\Delta_1 \in A(\underline{z})$ et $y \in \underline{n}$. Si $t \in \underline{a}$ alors $\Delta_1(t) + ad\ y\ (t) = 0$ donc $\Delta_1(t) + [y, t] = 0$; comme $\Delta_1(t) \in \underline{z}$, $[y,t] \in \underline{z}$ ce qui implique $y \in \underline{n}^0$ puisque $\underline{z} \subset \underline{n}^0$. D'où $[y, t] = 0$ et $\Delta_1(t) = 0$. Par suite $\Delta_1 = 0$ et $\Delta = ad\ y \in ad_{\underline{r}}(\underline{n}^0)$.

Corollaire 5 :

$(A(\underline{z}) \oplus \psi(N_o)) \cap ad(\underline{r}) = ad_{\underline{r}}(\underline{n}^o)$.

Soit $\Delta_1 \in A(\underline{z})$, $\Delta_2 \in \psi(N_0)$ et $\Delta_1 + \Delta_2 = ad\ x$ $(x \in \underline{r})$. Ecrivons $x = t + x_0 + \sum_{\alpha \neq 0} x_\alpha$ $(t \in \underline{a}, x_0 \in \underline{n}^0, x_\alpha \in n^\alpha)$. Si $t' \in \underline{a}$ alors $\Delta_1(t') = (adx - \Delta_2)(t') = [t + x_0 + \sum_{\alpha \neq 0} x_\alpha, t'] = -\sum_{\alpha \neq 0} \alpha(t')x_\alpha \in \underline{z}$. Comme $\underline{z} \subset \underline{n}^0$ on a $\Delta_1(t') = 0$ donc $\Delta_1 = 0$. Par suite $\Delta_2 = ad\ x$ ce qui implique $x = t + x_0$ et $\Delta_2 = ad\ t + ad\ x_0$. Comme $\Delta_2|\underline{n} \in N_0$ on a nécessairement $t = 0$ et $\Delta_2 = ad\ x_0 \in ad_{\underline{r}}(\underline{n}^0)$.

Théorème 7 :

Soit $\underline{n}$ une algèbre de Lie nilpotente de centre $\underline{z}$, T un tore maximal de $\underline{n}$ et $\underline{n} = \underline{n}^o \oplus (\oplus_{\alpha \neq 0} n^\alpha)$ la décomposition de la représentation canonique de T dans $\underline{n}$. Si $\underline{r}$ est une algèbre de Lie résoluble complète de plus grand idéal nilpotent $\underline{n}$ alors $\underline{r}$ est isomorphe à $T \oplus \underline{n}$. De plus on a les conditions équivalentes :

(i) $T \oplus \underline{n}$ est complète ;

(ii) $\underline{n}^o \cap \underline{z} = 0$ et $Z(T) = T \oplus ad_{\underline{n}}(\underline{n}^o)$ où $Z(T)$ désigne le commutant de T dans $\mathrm{Der}(\underline{n})$;

(iii) $\underline{n}^o \cap \underline{z} = 0$ *et les sous-algèbres de Cartan de* $T \oplus \underline{n}$ *ont même dimension que les sous-algèbres de Cartan de* $Der(\underline{n})$.

<u>Démonstration</u> :

Commençons par la première partie du théorème : $\underline{r}$ est faiblement irréductible et on peut utiliser le théorème 5 : si $Der(\underline{n}) = S \oplus A \oplus N$ est une décomposition normale de $Der(\underline{n})$, il existe une sous-algèbre B_1 de S, abélienne formée de dérivations semi-simples, telle que $\underline{r}$ soit isomorphe à $B_1 \oplus A \oplus \underline{n}$; de plus, dans S, B_1 est égale à son normalisateur, autrement dit B_1 est une sous-algèbre de Cartan de S et $B_1 \oplus A$ est un tore maximal de $\underline{n}$. A cause du théorème 2, $B_1 \oplus A \oplus \underline{n}$ est isomorphe à $T \oplus \underline{n}$, donc $\underline{r}$ est isomorphe à $T \oplus \underline{n}$.

Passons à la deuxième partie du théorème :

(i) => (ii). Si $T \oplus \underline{n}$ est complète alors son centre est nul, donc $\underline{n}^o \cap \underline{z} = 0$. Puisque $T \oplus \underline{n}$ est isomorphe à l'algèbre de ses dérivations, $\underline{n}$ est isomorphe à $(ad_{\underline{r}}(\underline{n}) + \psi(N_o))$ (Théorème 6, corollaire 3 et proposition 6, corollaire). Mais $\underline{n}$ et $ad_{\underline{r}}(\underline{n})$ sont déjà isomorphes puisque le centre de $T \oplus \underline{n}$ est nul. Donc $\psi(N_o) \subset ad_{\underline{r}}(\underline{n})$ et $\psi(N_o) = ad_{\underline{r}}(\underline{n}^o)$ ce qui prouve que $Z(T) = T \oplus ad_{\underline{n}}(\underline{n}^o)$.

(ii) => (iii). $T \oplus \underline{n}^o$ est une sous-algèbre de Cartan de $T \oplus \underline{n}$ et $Z(T)$ est une sous-algèbre de Cartan de $Der(\underline{n})$(Proposition 12). Puisque $\underline{n}^o \cap \underline{z} = 0$ on a $\dim \underline{n}^o = \dim(ad_{\underline{n}}(\underline{n}^o))$ et comme $Z(T) = T \oplus ad_{\underline{n}}(\underline{n}^o)$ les sous-algèbres de Cartan de $T \oplus \underline{n}$ ont même dimension que les sous-algèbres de Cartan de $Der(\underline{n})$.

(iii) => (i). $T \oplus \underline{n}^o$ et $T \oplus ad_{\underline{n}}(\underline{n}^o)$ ont même dimension puisque $\underline{n}^o \cap \underline{z} = 0$. Comme $T \oplus ad_{\underline{n}}(\underline{n}^o) \subset Z(T) = T \oplus N_o$ on a $Z(T) = T \oplus ad_{\underline{n}}(\underline{n}^o)$ à cause de l'hypothèse sur la dimension des sous-algèbres de Cartan. Puisque $ad_{\underline{n}}(\underline{n}^o) \subset N_o$ il vient $ad_{\underline{n}}(\underline{n}^o) = N_o$ et $Der(T \oplus \underline{n}) = \psi(T) \oplus ad_{T\oplus\underline{n}}(\underline{n})$ (théorème 6, corollaire 3). Donc $T \oplus \underline{n}$ n'a que des dérivations intérieures; comme son centre est trivial elle est complète.

Corollaire 1 :

Soit $\underline{n}$ une algèbre de Lie nilpotente qui possède une dérivation bijective et T un tore maximal de $\underline{n}$. Alors $T \oplus \underline{n}$ est complète si et seulement si T est une sous-algèbre de Cartan de $Der(\underline{n})$.

Démonstration :

Si $\underline{n}$ possède une dérivation bijective alors $\underline{n}^0 = 0$ (Proposition 10) et $T \oplus \underline{n}$ est à centre nul. De plus T est une sous-algèbre de Cartan de $T \oplus \underline{n}$ (Proposition 12). Alors $T \oplus \underline{n}$ est complète si et seulement si T est une sous-algèbre de Cartan de $Der(\underline{n})$.

Remarque :

Le corollaire 1 précise un résultat de Leger ([15] Proposition 10).

Corollaire 2 :

Soit $\underline{n}$ une algèbre de Lie nilpotente de type s et T un tore maximal de $\underline{n}$. Si $\dim T = s$ alors $T \oplus \underline{n}$ est complète.

Démonstration :

Soit $(\alpha_1, \ldots, \alpha_s)$ les racines simples de $\underline{n}$. On sait que $(\alpha_1, \ldots, \alpha_s)$ est une base du système de racines associé à $\underline{n}$ et que $n^{\alpha_i} = w^{\alpha_i}$ est de dimension 1. Le poids 0 ne figure pas parmi les racines de $\underline{n}$ si bien que $T \oplus \underline{n}$ est à centre nul. De plus si une dérivation D de $\underline{n}$ permute avec T elle laisse stable n^{α_i} $(i = 1, \ldots, s)$ donc elle est semi-simple et par suite elle appartient à T. T est donc une sous-algèbre de Cartan de $Der(\underline{n})$ (Proposition 12) et $T \oplus \underline{n}$ est complète.

Corollaire 3 :

Les sous-algèbres de Borel d'une algèbre de Lie semi-simple sont des algèbres de Lie résolubles complètes.

Démonstration :

Soit $\underline{s}$ une algèbre de Lie semi-simple, $\underline{h}$ une sous-algèbre de Cartan de $\underline{s}$, $\underline{s} = \underline{h} \oplus (\bigoplus_{\alpha \in R} s^{\alpha})$ la décomposition de la représentation adjointe de $\underline{h}$ dans $\underline{s}$. Posons $\underline{n}^{+} = \bigoplus_{\alpha>0} s^{\alpha}$ $\underline{n}^{-} = \bigoplus_{\alpha<0} s^{\alpha}$; on a $\underline{s} = \underline{h} \oplus \underline{n}^{+} \oplus \underline{n}^{-}$. Si $\underline{h}$ est de dimension ℓ notons $\alpha_1, \ldots, \alpha_{\ell}$ les racines simples de R relatives à $\underline{h}$. L'algèbre nilpotente $\underline{n}^{+}$ est de type ℓ (engendrée par les s^{α_i}) et $\underline{h}$ peut être identifiée, par la représentation adjointe, à un tore maximal de $\underline{n}^{+}$, de dimension ℓ. Par conséquent $\underline{h} \oplus \underline{n}^{+}$ est complète.

Corollaire 4 :

Dans une algèbre de Lie semi-simple une sous-algèbre parabolique (i.e. qui contient une sous-algèbre de Borel) est complète.

Démonstration :

Soit $\underline{s}$ une algèbre de Lie semi-simple, $\underline{b}$ une sous-algèbre de Borel et $\underline{p}$ une sous-algèbre parabolique; par définition $\underline{b} \subset \underline{p}$. Si $\underline{r}$ est le radical de $\underline{p}$, $\underline{r} + \underline{b}$ est une algèbre de Lie résoluble qui contient $\underline{b}$. Comme $\underline{b}$ est résoluble maximale dans $\underline{s}$ on conclut que $\underline{r} \subset \underline{b}$. Donc $\underline{p}$ est complète à cause du corollaire de la proposition 22.

Théorème 8 :

Une algèbre de Lie résoluble de dimension >1 est complète si et seulement si elle est isomorphe à l'algèbre de Lie de ses dérivations.

Démonstration :

Une algèbre de Lie complète est isomorphe à l'algèbre de Lie de ses dérivations par la représentation adjointe. Réciproquement soir $\underline{r}$ une algèbre de Lie résoluble de dimension >1 isomorphe à $\mathrm{Der}(\underline{r})$. Puisque $\mathrm{Der}(\underline{r})$ est décomposable, $\underline{r}$ l'est également si bien qu'on peut appliquer le corollaire 3 du théorème 6 : $\underline{r} = \underline{a} \oplus \underline{n}$ et $\mathrm{Der}(\underline{r}) = \psi(S_0) \oplus (\psi(B_0) \oplus \psi(A)) \oplus ((A(\underline{z}) \oplus \mathrm{ad}_{\underline{r}}(\underline{n})) + \psi(N_0))$ est une décomposition normale. Donc $\psi(S_0) = \overline{0}$ puisque $\underline{r}$ est résoluble. Comme $\underline{r}$ n'est pas abélienne, $\underline{r}$ est admissible, ce qui implique $\dim(\psi(B_0) \oplus \psi(A)) = \dim \underline{a}$ et $\dim ((A(\underline{z}) \oplus \mathrm{ad}_{\underline{r}}(\underline{n})) + \psi(N_0)) = \dim \underline{n}$ (Proposition 6, corollaire). Comme $H_0 = 0$ on a $H = B_0$ et $T = B_0 \oplus A$, donc $\dim T = \dim(B_0 \oplus A) = \dim \psi(B_0 \oplus A) = \dim \underline{a}$. Considérons l'homomorphisme $\begin{array}{l} \underline{n} \to \mathrm{ad}_{\underline{r}}(\underline{n}) \\ x \to \mathrm{ad}\,x \end{array}$: il est surjectif et son noyau est le centre $\underline{z}$ de $\underline{r}$. Donc $\dim(\mathrm{ad}_{\underline{r}}(\underline{n})) = \dim \underline{n} - \dim \underline{z}$. Maintenant $\dim A(\underline{z}) = (\dim \underline{a}).(\dim \underline{z}) = (\dim T).(\dim \underline{z})$. Désignons par N^*_0 un supplémentaire de $\mathrm{ad}_{\underline{r}}(\underline{n}^0)$ dans $\psi(N_0)$. On a $(A(\underline{z}) \oplus \mathrm{ad}_{\underline{r}}(\underline{n})) + \psi(N_0) = A(\underline{z}) \oplus \mathrm{ad}_{\underline{r}}(\underline{n}) \oplus N^*_0$ (théorème 6, corollaire 4). Alors il vient l'égalité $(\dim T).(\dim \underline{z}) + (\dim \underline{n} - \dim \underline{z}) + \dim N^*_0 = \dim \underline{n}$, d'où $\dim N^*_0 = (1 - \dim T).(\dim \underline{z})$. Distinguons trois cas :

1) $\dim T > 1$: alors $\dim \underline{z} = 0$ et $\underline{z} = 0$. Donc $\dim \mathrm{Der}(\underline{r}) = \dim \underline{r} = \dim(\mathrm{ad}(\underline{r}))$ ce qui implique $\mathrm{Der}(\underline{r}) = \mathrm{ad}(\underline{r})$, c'est-à-dire $\underline{r}$ complète.

2) $\dim T = 1$: alors $\dim N^*_0 = 0$ et $\mathrm{Der}(\underline{r}) = \mathrm{ad}_{\underline{r}}(a) \oplus (A(\underline{z}) \oplus \mathrm{ad}_{\underline{r}}(\underline{n}))$. Donc $\mathrm{rang}(\underline{r}) = \dim \mathrm{ad}_{\underline{r}}(\underline{a}) = \dim \underline{a} = \dim T = 1$. On peut aussi écrire $\mathrm{Der}(\underline{r}) = (\mathrm{ad}_{\underline{r}}(\underline{a}) \oplus \mathrm{ad}_{\underline{r}}(\underline{n})) \oplus A(\underline{z}) = \mathrm{ad}(\underline{r}) \oplus A(\underline{z}) = \mathrm{ad}(\underline{r}) \times A(\underline{z})$. Il en résulte que $\mathrm{rang}(\underline{r}) = \mathrm{rang}\,(\mathrm{Der}(\underline{r})) = \mathrm{rang}(\mathrm{ad}(\underline{r})) + \mathrm{rang}(A(\underline{z})) \geq 1 + \dim \underline{z}$ (Théorème 3). Donc $\dim \underline{z} = 0$ et $\underline{r}$ est complète.

3) $\dim T = 0$: alors $\underline{r} = \underline{n}$ est caractéristiquement nilpotente. Or pour une algèbre de Lie nilpotente $\underline{n}$ de dimension $\geqslant 2$ on a toujours $\dim \mathrm{Der}(\underline{n}) \geqslant \dim \underline{n} + 1$ (Dozias [9]). Il ne saurait donc y avoir d'isomorphisme entre $\underline{n}$ et $\mathrm{Der}(\underline{n})$, contradiction. Ce dernier cas est exclu.

Remarque :

Il existe des algèbres de Lie non résolubles isomorphes à l'algèbre de leurs dérivations et qui possèdent un centre non trivial. En effet si $\underline{s}$ est une algèbre de Lie semi-simple et $\mathbb{K}$ le corps de base alors $\underline{s} \times \mathbb{K}$ est isomorphe à l'algèbre de Lie de ses dérivations et le centre est de dimension 1.

§ 5) Critère général, classification

Démontrons d'abord un résultat analogue au théorème 4 concernant les algèbres de Lie décomposables.

Proposition 26 :

Soit $\underline{g} = \underline{s} \oplus \underline{a} \oplus \underline{n}$ une algèbre de Lie décomposable de centre $\underline{z}(\underline{g})$. Notons $\hat{R}$ la sous-algèbre de $\mathrm{Der}(\underline{g})$ formée des dérivations qui s'annulent sur $\underline{s} \oplus \underline{a}$ et $\hat{Z}$ l'idéal abélien de $\mathrm{Der}(\underline{g})$ formé des dérivations qui s'annulent sur $\underline{s} \oplus \underline{n}$ et qui envoient $\underline{a}$ dans $\underline{z}(\underline{g})$. Alors $\mathrm{Der}(\underline{g}) = \mathrm{ad}(\underline{g}) + \hat{R} + \hat{Z}$.

Démonstration :

Soit $\hat{S}$ la sous-algèbre de $\mathrm{Der}(\underline{g})$ formée des dérivations qui s'annulent sur $\underline{s}$. D'après le théorème 4, $\mathrm{Der}(\underline{g}) = \mathrm{ad}(\underline{g}) + \hat{S}$. Montrons que $\hat{Z}$ est un idéal abélien de $\mathrm{Der}(\underline{g})$: puisque $[\hat{Z}, \mathrm{ad}(\underline{g})] = 0$ il suffit de montrer que $[\hat{Z}, \hat{S}] \subset \hat{Z}$. Si $\Delta_1 \in \hat{Z}$ et $\Delta_2 \in \hat{S}$ on a $[\Delta_1, \Delta_2](\underline{s}) = 0$, $[\Delta_1, \Delta_2](\underline{a}) \subset \underline{z}(\underline{g})$ puisque

$\Delta_2(\underline{z}(\underline{g})) \subset \underline{z}(\underline{g})$ et $[\Delta_1, \Delta_2](\underline{n}) = 0$ puisque $\Delta_2(\underline{n}) \subset \underline{n}$. Enfin $\hat{Z}$ est abélien car $\underline{z}(\underline{g}) \subset \underline{n}$.

Introduisons l'homomorphisme $\mu : \underline{g} \to \mathrm{Der}(\underline{n})$ défini par $\mu(x) = \mathrm{ad}\,x|\underline{n}$ $(x \in \underline{g})$. Notons $\underline{z}(\underline{s})$ le commutant de $\underline{s}$ dans $\underline{g}$, $\underline{z}(\underline{a})$ le commutant de $\underline{a}$ dans $\underline{g}$ et $Z(\mu(\underline{s}))$ le commutant de $\mu(\underline{s})$ dans $\mathrm{Der}(\underline{n})$. Si $D \in \hat{S}$ D induit dans le radical $\underline{r} = \underline{a} \oplus \underline{n}$ de $\underline{g}$ une dérivation D' qui vérifie les propriétés suivantes :

(i) $D'(\underline{a}) \subset \underline{z}(\underline{s}) \cap \underline{n}$

(ii) $D'|\underline{n} \in Z(\mu(\underline{s}))$

En effet prenons $x_1 \in \underline{s}$, $x_2 \in \underline{a}$ et $x_3 \in \underline{n}$. Alors $[x_1, D(x_2)] = [x_1, D(x_2)] + [D(x_1), x_2] = D[x_1, x_2] = 0$, donc $D'(x_2) \in \underline{z}(\underline{s})$. Comme $D'(x_2) \in \underline{n}$ on a bien $D'(\underline{a}) \subset \underline{z}(\underline{s}) \cap \underline{n}$. Maintenant $[D'|\underline{n}, \mu(x_1)]\,(x_3) = D'|\underline{n}\,[x_1, x_3] - [x_1, D'|\underline{n}(x_3)] = D[x_1, x_3] - [x_1, D(x_3)] = [D(x_1), x_3] = 0$ puisque $D(x_1) = 0$. Donc $D'|\underline{n} \in Z(\mu(\underline{s}))$.

Dans l'algèbre résoluble $\underline{r} = \underline{a} \oplus \underline{n}$ on peut appliquer le corollaire 3 du théorème 6 : $D' = \Delta_1 + \Delta_2 + \mathrm{ad}\,x_3$ avec $\Delta_1 \in \psi(Z(T'))$, $\Delta_2 \in A(\underline{z}(\underline{r}))$, $x_3 \in \underline{n}$ ($\underline{z}(\underline{r})$ est le centre de $\underline{r}$). Décomposons la représentation adjointe de $\underline{a}$ dans $\underline{n}$: $\underline{n} = \underline{n}^0 \oplus (\bigoplus_{\alpha \neq 0} n^\alpha)$. Il est clair que $\underline{z}(\underline{r}) \subset \underline{n}^0$ et $\underline{z}(\underline{s}) \cap \underline{n}$ est invariant par cette représentation puisque $[\underline{s}, \underline{a}] = 0$. On peut donc écrire $\underline{z}(\underline{s}) \cap \underline{n} = (\underline{z}(\underline{s}) \cap \underline{n} \cap \underline{n}^0) \oplus (\bigoplus_{\alpha \neq 0} \underline{z}(\underline{s}) \cap \underline{n} \cap n^\alpha)$. Décomposons encore x_3 : $x_3 = x_0 + \sum_{\alpha \neq 0} x_\alpha$ où $x_0 \in \underline{n}^0$ et $x_\alpha \in n^\alpha$. Utilisons maintenant la condition (i) : si $y_2 \in \underline{a}$ on a $D'(y_2) = (\Delta_2 + \mathrm{ad}\,x_3)(y_2) = \Delta_2(y_2) - \sum_{\alpha \neq 0} \alpha(y_2) x_\alpha \in \underline{z}(\underline{s}) \cap \underline{n}$. Comme $\Delta_2(y_2) \in \underline{z}(\underline{r}) \subset \underline{n}^0$ on doit avoir $\Delta_2(y_2) \in \underline{z}(\underline{s}) \cap \underline{n} \cap \underline{n}^0$ et $x_\alpha \in \underline{z}(\underline{s}) \cap \underline{n} \cap n^\alpha$. Donc finalement $\Delta_2(y_2) \in \underline{z}(\underline{g})$ et $x_3 \in \underline{n}^0 + (\underline{z}(\underline{s}) \cap \underline{n})$. Ecrivons $x_3 = x_4 + x_5$ avec $x_4 \in \underline{n}^0$, $x_5 \in \underline{z}(\underline{s}) \cap \underline{n}$. La condition (ii) implique $D'|\underline{n} = \Delta_1|\underline{n} + \mathrm{ad}\,x_4|\underline{n} + \mathrm{ad}\,x_5|\underline{n} \in Z(\mu(\underline{s}))$. Comme $\mathrm{ad}\,x_5|\underline{n} \in Z(\mu(\underline{s}))$ on a $(\Delta_1 + \mathrm{ad}\,x_4)|\underline{n} \in Z(\mu(\underline{s}))$; de plus $\Delta_1 + \mathrm{ad}\,x_4$ s'annule sur $\underline{a}$ si bien qu'on peut construire une dérivation D_1 de $\underline{g}$ en posant $D_1(\underline{s} \oplus \underline{a}) = 0$ et $D_1|\underline{a} \oplus \underline{n} = \Delta_1 + \mathrm{ad}\,x_4$.

De même on peut construire une dérivation D_2 de $\underline{g}$ en posant $D_2|\underline{s} \oplus \underline{n} = 0$ et $D_2|\underline{a} \oplus \underline{n} = \Delta_2$ car $\Delta_2(\underline{a}) \subset \underline{z}(\underline{g})$ et $\Delta_2(\underline{n}) = 0$. Vérifions maintenant que dans $\underline{g}$ on a bien $D = \text{ad}\, x_5 + D_1 + D_2$:

$\text{ad}\, x_5 + D_1 + D_2 \mid \underline{s} = 0$ et $D \mid \underline{s} = 0$

$\text{ad}\, x_5 + D_1 + D_2 \mid \underline{a} \oplus \underline{n} = \text{ad}\, x_5 + \text{ad}\, x_4 + \Delta_1 + \Delta_2 \mid \underline{a} \oplus \underline{n} =$
$= \text{ad}\, x_3 + \Delta_1 + \Delta_2 \mid \underline{a} \oplus \underline{n} = D'$ et $D \mid \underline{a} \oplus \underline{n} = D'$. On peut remarquer maintenant que $D_1 \in \hat{R}$ et $D_2 \in \hat{Z}$. Donc finalement $\text{Der}(\underline{g}) = \text{ad}(\underline{g}) + \hat{S} = \text{ad}(\underline{g}) + \hat{R} + \hat{Z}$.

Théorème 9 :

Soit $\underline{n}$ une algèbre de Lie nilpotente, $\text{Der}(\underline{n}) = S \oplus A \oplus N$ une décomposition normale, $S_1, B_1 \subset S$ des sous-algèbres telles que S_1 soit semi-simple, B_1 abélienne formée de dérivations semi-simples et $[S_1, B_1] = 0$. Alors l'algèbre $\underline{g} = S_1 \oplus B_1 \oplus A \oplus \underline{n}$ est complète si et seulement si

(i) $\underline{g}$ est à centre nul;

(ii) $Z(S_1 \oplus B_1 \oplus A) \subset B_1 \oplus A \oplus \text{ad}(\underline{n})$ où $Z(S_1 \oplus B_1 \oplus A)$ désigne le commutant de $S_1 \oplus B_1 \oplus A$ dans $\text{Der}(\underline{n})$.

Démonstration :

Supposons (i) et (ii) vérifiés. Alors le centre de $\underline{g}$ est nul et à cause de la proposition 26 on a $\text{Der}(\underline{g}) = \text{ad}(\underline{g}) + \hat{R}$ où $\hat{R}$ est la sous-algèbre de $\text{Der}(\underline{g})$ formée des dérivations qui s'annulent sur $S_1 \oplus B_1 \oplus A$. Si $\Delta \in \hat{R}$ alors $\Delta|\underline{n} \in Z(S_1 \oplus B_1 \oplus A) \subset B_1 \oplus A \oplus \text{ad}(\underline{n})$ et il existe $\Delta_1 \in B_1$, $\Delta_2 \in A$, $x \in \underline{n}$ avec $\Delta|\underline{n} = \Delta_1 + \Delta_2 + \text{ad}\, x$. Comme $\Delta_1 + \Delta_2 \in Z(S_1 \oplus B_1 \oplus A)$ on conclut que $\text{ad}x \in Z(S_1 \oplus B_1 \oplus A)$ ce qui signifie $[x, S_1 \oplus B_1 \oplus A] = 0$ dans $\underline{g}$. Dans $\underline{g}$ on a donc $\Delta|S_1 \oplus B_1 \oplus A = 0$ et $\Delta|\underline{n} = \Delta_1 + \Delta_2 + \text{ad}\, x$. D'autre part $\text{ad}(\Delta_1 + \Delta_2 + x)|S_1 \oplus B_1 \oplus A = 0$ et $\text{ad}(\Delta_1 + \Delta_2 + x)|\underline{n} = \Delta_1 + \Delta_2 + \text{ad}\, x$ ce qui implique $\Delta = \text{ad}(\Delta_1 + \Delta_2 + x)$. Donc $\underline{g}$ est complète.

Réciproquement supposons $\underline{g}$ complète. Alors (i) est trivialement vérifié. Prenons $\Delta \in Z(S_1 \oplus B_1 \oplus A)$; on peut fabriquer une dérivation Δ' de $\underline{g}$ en posant $\Delta'|S_1 \oplus B_1 \oplus A = 0$ et $\Delta'|\underline{n} = \Delta$. Par hypothèse $\Delta' = \mathrm{ad}\, X + \mathrm{ad}\, x$ où $X \in S_1 \oplus B_1 \oplus A$ et $x \in \underline{n}$. Donc $[X, S_1 \oplus B_1 \oplus A] = 0$ et $[S_1 \oplus B_1 \oplus A, x] = 0$ ce qui implique $X \in B_1 \oplus A$ et $\Delta = \Delta'|\,\underline{n} \in B_1 \oplus A \oplus \mathrm{ad}(\underline{n})$. Le théorème est démontré.

Corollaire 1 :

Soit $\underline{g}$ une algèbre de Lie de plus grand idéal nilpotent $\underline{n}$, $Der(\underline{n}) = S \oplus A \oplus N$ une décomposition normale. Si $\underline{g}$ est complète alors l'algèbre de Lie décomposable universelle $S \oplus A \oplus \underline{n}$ associée à $\underline{n}$ est complète.

En effet il existe une algèbre de Lie complète $\underline{g}_1$ faiblement irréductible et de plus grand idéal nilpotent $\underline{n}$. A cause du théorème 5, $\underline{g}_1$ est isomorphe à une algèbre de Lie de la forme $S_1 \oplus B_1 \oplus A \oplus \underline{n}$ où $S_1, B_1 \subset S$ avec S_1 semi-simple, B_1 abélienne formée de dérivations semi-simples et $[S_1, B_1] = 0$. Puisque $\underline{g}_1$ est complète on a $Z(S_1 \oplus B_1 \oplus A) \subset B_1 \oplus A \oplus \mathrm{ad}(\underline{n})$ ce qui implique $Z(S \oplus A) \subset A \oplus \mathrm{ad}(\underline{n})$ donc $S \oplus A \oplus \underline{n}$ complète.

Corollaire 2 :

Soit $\underline{n}$ une algèbre de Lie nilpotente, $Der(\underline{n}) = S \oplus A \oplus N$ une décomposition normale. Supposons que $N = ad(\underline{n})$. Soit $S_1, B_1 \subset S$ des sous-algèbres telles que S_1 soit semi-simple, B_1 abélienne formée de dérivations semi-simples, $[S_1, B_1] = 0$. Alors l'algèbre de Lie $\underline{g} = S_1 \oplus B_1 \oplus A \oplus \underline{n}$ est complète si et seulement si :

(i) $\underline{g}$ est à centre nul;

(ii) $Z(S_1 \oplus B_1) = B_1$ où $Z(S_1 \oplus B_1)$ désigne le commutant de $S_1 \oplus B_1$ dans S.

C'est une conséquence immédiate du théorème 9.

Remarque :

Le corollaire 2 est applicable en particulier aux algèbres de Lie abéliennes et aux algèbres d'Heisenberg (Chapitre 5, § 2).

On peut décrire maintenant les algèbres de Lie complètes en procédant comme suit : tout d'abord il suffit de considérer les algèbres de Lie complètes faiblement irréductibles et celles-ci se réalisent toutes comme des sous-algèbres particulières de l'algèbre décomposable universelle associée à une algèbre de Lie nilpotente. Donnons-nous donc une algèbre de Lie nilpotente $\underline{n}$ et une décomposition normale $Der(\underline{n}) = S \oplus A \oplus N$. Un premier point est de savoir si l'algèbre décomposable universelle $S \oplus A \oplus \underline{n}$ associée à $\underline{n}$ est complète ce qui revient à dire que le centre de $S \oplus A \oplus \underline{n}$ est nul et que $Z(S \oplus A) \subset A \oplus ad(\underline{n})$ (Théorème 9); si ce n'est pas le cas il n'existe aucune algèbre de Lie complète dont le plus grand idéal nilpotent est isomorphe à $\underline{n}$. Si par contre l'algèbre décomposable universelle est complète alors toute algèbre de Lie complète, faiblement irréductible, dont le plus grand idéal nilpotent est isomorphe à $\underline{n}$, est isomorphe à une algèbre de Lie de la forme $\underline{g}_1 =$ $= S_1 \oplus B_1 \oplus A \oplus \underline{n}$ où S_1, B_1 sont des sous-algèbres de S avec S_1 semi-simple, B_1 abélienne formée de dérivations semi-simples et $[S_1, B_1] = 0$: de plus $Z(S_1 \oplus B_1 \oplus A) \subset B_1 \oplus A \oplus ad(\underline{n})$ (Théorème 9). Les conditions précédentes permettent de fabriquer des algèbres de Lie complètes admettant $\underline{n}$ comme plus grand idéal nilpotent. Cette construction peut fournir des algèbres de Lie complètes isomorphes même avec des choix différents des sous-algèbres de Lie S_1, B_1 de S. Pour étudier ce phénomène, introduisons le groupe G des automorphismes θ de $\underline{n}$ tels que dans $Der(\underline{n})$ on ait $\theta S\theta^{-1} = S$, $\theta A\theta^{-1} = A$, $\theta N\theta^{-1} = N$. Ce groupe induit un groupe G^* d'automorphismes de S qui contient évidemment les automorphismes intérieurs de S. G est aussi formé des automorphismes θ de $\underline{n}$ qui permutent entre eux les sous-$(S \oplus A)$-modules irréductibles de $\underline{n}$ (Proposition 18).

Soit S_2, B_2 des sous-algèbres de S avec S_2 semi-simple, B_2 abélienne formée de dérivations semi-simples, $[S_2, B_2] = 0$; alors les algèbres de Lie $\underline{g}_1 = S_1 \oplus B_1 \oplus A \oplus \underline{n}$ et $\underline{g}_2 = S_2 \oplus B_2 \oplus A \oplus \underline{n}$ sont isomorphes si et seulement si il existe $\Omega \in G^*$ avec $\Omega(S_1) = S_2$ et $\Omega(B_1) = B_2$ (proposition 17).

§ 6) Décomposition en produit d'idéaux complets

Définition 7 :

Soit $\underline{g}$ une algèbre de Lie, $\underline{a}$ un idéal de $\underline{g}$. On dira que $\underline{a}$ est un composant de $\underline{g}$ si l'extension $\underline{a} \to \underline{g} \to \underline{g}/\underline{a}$ est triviale.

Proposition 27 :

Soit $\underline{g}$ une algèbre de Lie de centre $\underline{z}$, $\underline{a}_1,\ldots,\underline{a}_p$, $\underline{b}_1,\ldots,\underline{b}_q$ des composants irréductibles de $\underline{g}$ tels que $\underline{g} = \underline{a}_1 \oplus\ldots\oplus \underline{a}_p = \underline{b}_1 \oplus\ldots\oplus \underline{b}_q$. Alors $p = q$ et il existe un automorphisme α de $\underline{g}$ et une permutation σ de l'ensemble $\{1,\ldots,p\}$ tels que :

(i) $\alpha(\underline{a}_i) = \underline{b}_{\sigma(i)}$ $(i = 1,\ldots,p)$

(ii) $\alpha(\underline{a}_i + \underline{z}) = \underline{a}_i + \underline{z}$ $(i = 1,\ldots,p)$.

Démonstration :

Nous commençons par démontrer deux lemmes.

Lemme 1 :

Soit $\underline{g}$ une algèbre de Lie, $\underline{a}_1$, $\underline{a}_2$, $\underline{z}_1$, $\underline{z}_2$ des idéaux tels que $\underline{g} = \underline{a}_1 \oplus \underline{z}_1 = \underline{a}_2 \oplus \underline{z}_2$, $\underline{z}_1$ et $\underline{z}_2$ soient abéliens et le centre $\underline{z}(\underline{a}_i)$ de $\underline{a}_i$ soit contenu dans $C^2\underline{a}_i$ $(i = 1, 2)$. Alors il existe un automorphisme α de $\underline{g}$ tel que $\alpha(\underline{a}_1) = \underline{a}_2$ et $\alpha(\underline{z}_1) = \underline{z}_2$.

Si $\underline{z}$ est le centre de $\underline{g}$ on a $\underline{z} = \underline{z}(\underline{a}_1) \times \underline{z}_1 = \underline{z}(\underline{a}_2) \times \underline{z}_2$. Comme $C^2\underline{g} = C^2\underline{a}_1 = C^2\underline{a}_2$ il vient $\underline{z}(\underline{a}_1) = \underline{z}(\underline{a}_2) = \underline{z} \cap C^2\,\underline{g}$. Donc $\dim \underline{z}_1 = \dim \underline{z}_2$ ce qui entraîne dim $\underline{a}_1$ = dim $\underline{a}_2$. Considérons la projection canonique $\pi : \underline{g} \to \underline{g}/\underline{z}_2$; on a $\underline{a}_1 \cap \underline{z}_2 = (0)$ car $\underline{a}_1 \cap \underline{z}_2 \subset \underline{a}_1 \cap \underline{z} = \underline{z}(\underline{a}_1)$ et $\underline{z}(\underline{a}_1) \subset C^2\underline{a}_1 = C^2\underline{a}_2 \subset \underline{a}_2$. Ainsi $\pi|\underline{a}_1$ est injectif, ce qui permet de construire un isomorphisme $\alpha_1 : \underline{a}_1 \to \underline{a}_2$. Soit encore $\alpha_2 : \underline{z}_1 \to \underline{z}_2$ un isomorphisme linéaire quelconque. Alors $\alpha = \alpha_1 \times \alpha_2 : \underline{a}_1 \times \underline{z}_1 \to \underline{a}_2 \times \underline{z}_2$ est un automorphisme de $\underline{g}$ qui possède les propriétés voulues.

Lemme 2 :

Soit $\underline{g}$ une algèbre de Lie de centre $\underline{z}$, $\underline{a}_1,\dots,\underline{a}_p$, $\underline{b}_1,\dots,\underline{b}_q$ des composants de $\underline{g}$ tels que $\underline{g} = \underline{a}_1 \oplus \dots \oplus \underline{a}_p = \underline{b}_1 \oplus \dots \oplus \underline{b}_q$; $\underline{z}(\underline{a}_i)$ le centre de $\underline{a}_i$ $(i = 1,\dots,p)$ et $\underline{v}_i = \underline{a}_i \oplus (\bigoplus_{k \neq i} \underline{z}(\underline{a}_k))$. Alors on a

$$\underline{v}_i = \bigoplus_{j=1}^{q} (\underline{v}_i \cap \underline{b}_j).$$

Soit $\underline{z}(\underline{b}_j)$ le centre de $\underline{b}_j$ $(j = 1,\dots,q)$. On a $\underline{z} = \underline{z}(\underline{a}_1) \oplus \dots \oplus \underline{z}(\underline{a}_p) = \underline{z}(\underline{b}_1) \oplus \dots \oplus \underline{z}(\underline{b}_q) \subset \underline{v}_i$. Soit $x \in \underline{v}_i$, écrivons $x = x_i + y$ avec $x_i \in \underline{a}_i$, $y \in \underline{z}$, $x_i = x_i^1 + \dots + x_i^q$ avec $x_i^j \in \underline{b}_j$ et $y = y^1 + \dots + y^q$ avec $y^j \in \underline{z}(\underline{b}_j)$. On a donc $x = (x_i^1 + y^1) + \dots + (x_i^q + y^q)$ et il suffit de montrer que les x_i^j appartiennent à $\underline{v}_i$ $(j = 1,\dots,q)$. Considérons la projection canonique $\pi_i : \underline{g} \to \underline{g}/\underline{a}_i$. On a $\underline{g}/\underline{a}_i = \pi_i(\underline{b}_1) + \dots + \pi_i(\underline{b}_q)$ et les $\pi_i(\underline{b}_j)$ sont des idéaux de $\underline{g}/\underline{a}_i$ qui permutent entre eux. De plus on a $\pi_i(x_i^1) + \dots + \pi_i(x_i^q) = \pi_i(x_i) = 0$. De là on tire facilement que $\pi_i(x_i^j)$ appartient au centre $\underline{z}(\underline{g}/\underline{a}_i)$ de $\underline{g}/\underline{a}_i$ $(j = 1,\dots,q)$. Comme $\underline{v}_i = \pi_i^{-1}(\underline{z}(\underline{g}/\underline{a}_i))$, il vient $x_i^j \in v_i$. Le lemme est démontré.

Passons à la démonstration de la proposition : soit $\{1,\dots,p\} = P \cup P'$ et $\{1,\dots,q\} = Q \cup Q'$ où $P' = \{i \in \{1,\dots,p\} | \underline{a}_i \text{ abélien}\}$, $Q' = \{j \in \{1,\dots,q\} | b_j \text{ abélien}\}$. Alors $\underline{g} = (\prod_{i \in P} a_i) \times (\prod_{i \in P'} \underline{a}_i) = (\prod_{j \in Q} \underline{b}_j) \times (\prod_{j \in Q'} b_j)$.

A cause du lemme 1 il existe un automorphisme γ de $\underline{g}$

avec $\gamma(\prod_{i\in P} \underline{a}_i) = \prod_{j\in Q} \underline{b}_j$ et $\gamma(\prod_{i\in P'} \underline{a}_i) = \prod_{j\in Q'} \underline{b}_j$. De plus on a $\gamma(\underline{a}_i + \underline{z}) = \underline{a}_i + \underline{z}$ car $\gamma|\prod_{i\in P} \underline{a}_i$ est la projection canonique sur $\prod_{j\in Q} \underline{b}_j$ ce qui montre que pour $x \in \underline{a}_i$ $\gamma(x) - x \in \underline{z}$. Dans la suite on peut donc supposer $P' = Q' = \emptyset$.

Soit $\underline{v}_i = \underline{a}_i \oplus (\bigoplus_{k\neq i} \underline{z}(\underline{a}_k))$ et $\underline{w}_j = \underline{b}_j \oplus (\bigoplus_{k\neq j} \underline{z}(\underline{b}_k))$.

Notons $\underline{v}_{ij} = \underline{v}_i \cap \underline{b}_j$. On peut toujours écrire $\underline{v}_{ij} = \underline{v}'_{ij} \times \underline{v}''_{ij}$ où $\underline{v}''_{ij}$ est abélien et le centre de $\underline{v}_{ij}'$ contenu dans $C^2\,\underline{v}'_{ij}$ (Proposition 5, lemme 2). Alors $\underline{v}_i = \underline{a}_i \oplus$ $(\bigoplus_{k\neq i} \underline{z}(\underline{a}_k)) = (\underline{v}'_{i1} \oplus\ldots\oplus \underline{v}'_{iq}) \oplus (\underline{v}''_{i1} \oplus\ldots\oplus \underline{v}''_{iq})$ (Lemme 2).

A cause du lemme 1 il existe un automorphisme β de $\underline{v}_i$ avec $\beta(\underline{a}_i) = \underline{v}'_{i1} \oplus\ldots\oplus \underline{v}'_{iq}$ et $\beta(\bigoplus_{k\neq i} \underline{z}(\underline{a}_k)) =$ $\underline{v}''_{i1} \oplus\ldots\oplus \underline{v}''_{iq}$. Comme $\underline{a}_i$ est irréductible, $\beta(\underline{a}_i)$ l'est également et par conséquent il existe une application $\sigma : \{1,\ldots,p\} \to \{1,\ldots,q\}$ avec $\beta(\underline{a}_i) = v'_{i\sigma(i)}$.

Donc $\underline{v}_i = \beta(\underline{v}_i) = \beta(\underline{a}_i) \oplus \beta(\bigoplus_{k\neq i} \underline{z}(\underline{a}_k)) \subset \underline{b}_{\sigma(i)} + \underline{z} = \underline{w}_{\sigma(i)}$.

Par raison de symétrie il existe aussi une application $\tau : \{1,\ldots, q\} \to \{1,\ldots,p\}$ avec $\underline{w}_j \subset \underline{v}_{\tau(j)}$. Il en résulte que $\underline{v}_i \subset \underline{w}_{\sigma(i)} \subset \underline{v}_{\tau\sigma(i)}$. Comme $\underline{a}_i$ n'est pas abélien, cette inclusion ne peut avoir lieu que si $\tau\sigma(i) = i$. Par conséquent on a $\underline{v}_i = \underline{w}_{\sigma(i)}$, ce qui implique $\underline{b}_{\sigma(i)} \subset \underline{v}_i$ et par suite $\underline{v}_{i\sigma(i)} = \underline{v}_i \cap \underline{b}_{\sigma(i)} = \underline{b}_{\sigma(i)} = \underline{v}'_{i\sigma(i)}$ puisque $\underline{b}_{\sigma(i)}$ est irréductible. Donc β induit un isomorphisme α_i de $\underline{a}_i$ sur $\underline{b}_{\sigma(i)}$. La relation $\tau\sigma(i) = i$ pour tout i implique σ et τ bijectives; par conséquent $p = q$ et $\alpha =$ $\alpha_1 \times\ldots\times \alpha_p$ est un automorphisme de $\underline{g}$ qui vérifie les propriétés annoncées.

<u>*Corollaire* :</u>

Soit $\underline{g}$ une algèbre de Lie à centre nul.

(i) $\underline{g}$ possède un nombre fini de composants irréductibles $\underline{a}_1,\ldots,\underline{a}_p$ et $\underline{g} = \underline{a}_1 \times\ldots\times \underline{a}_p$.

(ii) Tout composant de $\underline{g}$ est produit direct de certains des $\underline{a}_i$.

Démonstration :

Puisque $\underline{g}$ est de dimension finie on peut toujours trouver un nombre fini de composants irréductibles $\underline{a}_1,\dots,\underline{a}_p$ de $\underline{g}$ tels que $\underline{g} = \underline{a}_1 \times\dots\times \underline{a}_p$. Il suffit alors d'appliquer la proposition 27.

Théorème 10 :

Soit $\underline{g}$ une algèbre de Lie complète.

(i) $\underline{g}$ possède un nombre fini de composants irréductibles $\underline{a}_1,\dots, \underline{a}_p$ qui sont des idéaux complets et $\underline{g} = \underline{a}_1 \times\dots\times \underline{a}_p$

(ii) Tout idéal complet de $\underline{g}$ est produit direct de certains des $\underline{a}_i$.

Démonstration :

Puisque $\underline{g}$ est à centre nul, $\underline{g}$ possède un nombre fini de composants irréductibles $\underline{a}_1,\dots, \underline{a}_p$ et l'on a $\underline{g} = \underline{a}_1 \times\dots\times \underline{a}_p$. Alors les $\underline{a}_i$ sont complets à cause de la proposition 20. Maintenant tout idéal complet de $\underline{g}$ est un composant de $\underline{g}$ (Proposition 19) donc est produit direct de certains des $\underline{a}_i$ (Proposition 27, corollaire).

Théorème 11 :

Soit $\underline{r}$ une algèbre de Lie résoluble complète de plus grand idéal nilpotent $\underline{n}$. Alors $\underline{r}$ est irréductible si et seulement si $\underline{n}$ est irréductible.

Démonstration :

Supposons $\underline{n} = \underline{n}_1 \times \underline{n}_2$ avec $\underline{n}_1 \neq 0$ et $\underline{n}_2 \neq 0$. Soient T_1 et T_2 des tores maximaux de $\underline{n}_1$ et $\underline{n}_2$ respectivement. Alors $T_1 \times T_2$ est un tore maximal de $\underline{n}$ et $\underline{r}$ est isomorphe à $(T_1 \times T_2) \oplus \underline{n} \simeq (T_1 \oplus \underline{n}_1) \times$

$(T_2 \oplus \underline{n}_2)$ (Théorème 3 et théorème 7). Donc $\underline{r}$ est un produit direct de deux facteurs non triviaux.

Réciproquement supposons $\underline{r} = \underline{r}_1 \times \underline{r}_2$ avec $\underline{r}_1 \neq 0$ et $\underline{r}_2 \neq 0$. Soit $\underline{n}_1$ le plus grand idéal nilpotent de $\underline{r}_1$ et $\underline{n}_2$ le plus grand idéal nilpotent de $\underline{r}_2$. Alors $\underline{n}_1 \times \underline{n}_2$ est le plus grand idéal nilpotent de $\underline{r}$, donc $\underline{n} = \underline{n}_1 \times \underline{n}_2$. De plus $\underline{n}_1 \neq 0$ et $\underline{n}_2 \neq 0$ puisque $\underline{r}_1$ est résoluble $\neq 0$ et $\underline{r}_2$ résoluble $\neq 0$.

Remarque :

Le théorème 11 n'est plus valable pour les algèbres de Lie complètes non résolubles. Soit $\underline{m}(2,2)$ le modèle nilpotent de base (x_1, x_2, x_3) avec les relations $[x_1, x_2] = x_3$, $[x_1, x_3] = [x_2, x_3] = 0$. Choisissons une décomposition normale $\mathrm{Der}(\underline{m}(2,2)) = S \oplus A \oplus N$ relativement à la base (x_1, x_2, x_3) (Chapitre 4, § 2, exemple). Soit encore $\underline{m}'(2,2)$ un deuxième exemplaire du modèle nilpotent, de base (x'_1, x'_2, x'_3), avec les mêmes crochets et $\mathrm{Der}(\underline{m}'(2,2)) = S' \oplus A' \oplus N'$ une décomposition normale relative à la base (x'_1, x'_2, x'_3). Alors $\mathrm{Der}(\underline{m}(2,2) \times \underline{m}'(2,2)) = (S \oplus S') \oplus (A \oplus A') \oplus (N \oplus N' \oplus B_{12} \oplus B_{21})$ est une décomposition normale (Théorème 3). Soit (H, X, Y) une base de S, (H', X', Y') une base de S' avec les relations suivantes :

$[H, X] = 2X$	$[H, Y] = 2Y$	$[X, Y] = H$
$[H, X'] = 2x'$	$[H, Y'] = 2Y'$	$[X', Y'] = H'$

Notons S_1 la sous-algèbre de $S \oplus S'$, de base $(H + H', X + X', Y + Y')$; S_1 est isomorphe à $\underline{s\ell}(2, \mathbb{K})$. Alors l'algèbre $\underline{g} = S_1 \oplus (A \oplus A') \oplus (\underline{m}(2,2) \times \underline{m}'(2,2))$ est une algèbre de Lie complète irréductible de plus grand idéal nilpotent $\underline{m}(2,2) \times \underline{m}'(2,2)$: il est clair que $\underline{g}$ est à centre nul puisque le radical de $\underline{g}$ est déjà à centre nul. En remarquant que le radical de $\underline{g}$ est produit direct des algèbres de Lie irréductibles $A \oplus \underline{m}(2,2)$ et $A' \oplus \underline{m}'(2,2)$ et en utilisant le corollaire de la proposition 27 on voit facilement que $\underline{g}$ est irréductible.

Maintenant il est clair que toute dérivation dans $N \otimes N' \otimes B_{12} \otimes B_{21}$ qui permute avec $A \otimes A'$ est nulle ; de plus le commutant de S_1 dans $S \otimes S'$ est également nul. Par conséquent le commutant de $S_1 \otimes A \otimes A'$ dans $\mathrm{Der}(\underline{m}(2,2) \times \underline{m}'(2,2))$ est égal à $A \otimes A'$, ce qui entraîne $\underline{g}$ complète (Théorème 9).

CHAPITRE 5

CERTAINES CLASSES D'ALGEBRES DE LIE COMPLETES

§ 1) Algèbres de Lie complètes de petite dimension

Proposition 28 :

Soit $\underline{n}_1,\dots,\underline{n}_p$ *des algèbres de Lie nilpotentes non abéliennes irréductibles de dimension* ≤ 6 *et soit* $\underline{n} = \underline{n}_1 \times \dots \times \underline{n}_p$. *On a les propriétés suivantes :*

(i) Si $Der(\underline{n}) = S \oplus A \oplus N$ *est une décomposition normale, alors* A *est une sous-algèbre de Cartan du radical de* $Der(\underline{n})$ *et* A *contient une dérivation bijective de* $\underline{n}$. *En particulier les tores maximaux de* $\underline{n}$ *sont des sous-algèbres de Cartan de* $Der(\underline{n})$;

(ii) Les facteurs de Lévi de $Der(\underline{n}_i)$ $i = 1,\dots, p$ *sont du type* 0, $\underline{s\ell}(2, \mathbb{K})$, $\underline{s\ell}(2, \mathbb{K}) \times \underline{s\ell}(2, \mathbb{K})$, $\underline{s\ell}(3, \mathbb{K})$ *ou* $\underline{sp}(4, \mathbb{K})$ *et les facteurs de Lévi de* $Der(\underline{n})$ *sont des produits directs d'algèbres de Lie du type précédent.*

Démonstration :

Les tables de multiplication des algèbres de Lie nilpotentes irréductibles de dimension ≤ 6 ont été dressées par Dixmier [8] et Morosov [19]. A partir de là on peut calculer les algèbres de dérivations de ces algèbres nilpotentes irréductibles, ce qui permet d'établir la proposition pour les $\underline{n}_i$.

Montrons (i) pour l'algèbre de Lie $\underline{n}$: puisque $\underline{n}_i$ est irréductible non abélienne le centre de $\underline{n}_i$ est contenu dans $C^2\underline{n}_i$. Si $Der(\underline{n}_i) = S_i \oplus A_i \oplus N_i$ est une décomposition normale, alors $Der(\underline{n}) = (S_1 \oplus\dots\oplus S_p) \oplus (A_1 \oplus\dots\oplus A_p) \oplus (N_1 \oplus\dots\oplus N_p) \oplus (\bigoplus_{\substack{i,j=1 \\ i\neq j}}^{p} B_{ij})$ est une décomposition normale de $\mathrm{Der}(\underline{n})$ (Théorème 3, démonstration). Puisque chaque A_i contient une dérivation semi-simple bijective de $\underline{n}_i$ il est clair que le commutant de $A_1 \oplus \ldots \oplus A_p$ dans le radical de $\mathrm{Der}(\underline{n})$ est formé de dérivations de $\underline{n}$ qui conservent les $\underline{n}_i$; ce commutant est donc contenu dans $N_1 \oplus \ldots \oplus N_p$ et par conséquent il est nul puisque le commutant de A_i dans le radical de $\mathrm{Der}(\underline{n}_i)$ est déjà nul. Donc $A_1 \oplus \ldots \oplus A_p$ est une sous-algèbre de Cartan du radical de $\mathrm{Der}(\underline{n})$ et il est clair que $A_1 \oplus \ldots \oplus A_p$ contient une dérivation bijective de $\underline{n}$.

La deuxième partie de l'assertion (ii) résulte immédiatement de la décomposition normale

$$\mathrm{Der}(\underline{n}) = (S_1 \oplus \ldots \oplus S_p) \oplus (A_1 \oplus \ldots \oplus A_p) \oplus (N_1 \oplus \ldots \oplus N_p) \oplus \Big(\bigoplus_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{p} B_{ij} \Big).$$

<u>*Corollaire*</u> :

Soit $\mathrm{Der}(\underline{n}) = S \oplus A \oplus N$ *une décomposition normale de* $\mathrm{Der}(\underline{n})$, S_1, B_1 *des sous-algèbres de* S *telles que* S_1 *soit semi-simple,* B_1 *abélienne formée de dérivations semi-simples,* $[S_1\ B_1] = 0$ *et* $Z(S_1 \oplus B_1) = B_1$ *où* $Z(S_1 \oplus B_1)$ *désigne le commutant de* $S_1 \oplus B_1$ *dans* S*. Alors* $S_1 \oplus B_1 \oplus A \oplus \underline{n}$ *est une algèbre de Lie complète et toute algèbre de Lie complète faiblement irréductible, dont le plus grand idéal nilpotent est isomorphe à* $\underline{n}$, *est isomorphe à une algèbre de Lie du type précédent.*

Ce corollaire résulte du théorème 9 et de la partie (i) de la proposition 28.

§ 2) Algèbres de Lie complètes dont le plus grand idéal nilpotent est isomorphe à une algèbre d'Heisenberg

Soit r un entier positif et W un espace vectoriel de base $(e_1, \ldots, e_r, e_{r+1}, \ldots, e_{2r})$. On considère l'algèbre de Lie nilpotente $\underline{n}(\beta)(2r, 2) = W \oplus \mathbb{K} z$ où les crochets sont définis par

$$\begin{cases} [e_i, e_j] = \beta(e_i \wedge e_j)\, z \\ [e_i, z] = 0 \end{cases}$$

β étant une forme linéaire sur $\Lambda^2(W)$. Un résultat de James Bond [2] affirme que la classe d'isomorphisme de $\underline{n}(\beta)$ est déterminée par la dimension de $\underline{n}(\beta)$ et par le rang de β. On peut donc réduire la forme alternée β à la forme canonique

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & I_s & \\ & & 0 \\ -I_s & 0 & \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{0} & 0 \end{array}\right)$$

où la forme α de matrice $\begin{pmatrix} 0 & I_s \\ -I_s & 0 \end{pmatrix}$ est non dégénérée.

L'algèbre $\underline{n}(\beta)$ se décompose alors en un produit direct $\underline{n}(\alpha) \times \underline{a}$ avec $\underline{a}$ abélienne. Les algèbres du type $\underline{n}(\alpha)$ sont appelées algèbres d'Heisenberg; la forme alternée α qui définit le crochet peut donc s'écrire

$$\begin{cases} \alpha(e_j \wedge e_{j+s}) = 1 & 1 \leqslant j \leqslant s \\ \alpha(e_i \wedge e_j) = 0 & \text{dans les autres cas.} \end{cases}$$

Comme $\mathbb{K} z$ est le centre de $\underline{n}(\alpha)$, l'algèbre des dérivations se décompose en $\mathrm{Der}(\underline{n}(\alpha)) = D_1 \oplus D_2$ où D_1 est l'algèbre formée des dérivations qui conservent W et D_2 est l'idéal formé des dérivations dont l'image est contenue dans $\mathbb{K}z$. D_2 est un idéal abélien de dimension 2s et comme $\mathrm{ad}(\underline{n}(\alpha))$ est aussi un idéal abélien de dimension 2s contenu dans D_2, on a $D_2 = \mathrm{ad}(\underline{n}(\alpha))$. Donc $\mathrm{Der}(\underline{n}(\alpha)) = D_1 \oplus \mathrm{ad}(\underline{n}(\alpha))$. Soit μ la forme linéaire sur D_1 définie par $\Delta(z) = \mu(\Delta)z \ \forall \Delta \in D_1$. Si A est l'algèbre de Lie formée des matrices $\left(\begin{array}{c|c} \lambda I_{2s} & \begin{matrix}0\\ \vdots\\ 0\end{matrix} \\ \hline 0\ldots0 & 2\lambda \end{array}\right)$ $(\lambda \in \mathbb{K})$, A est contenue dans D_1 et on a $D_1 = \mathrm{Ker}\,\mu \oplus A$. Maintenant $\mathrm{Ker}\,\mu = \{\Delta \in D_1 \mid \mu(\Delta) = 0\} = \{\Delta \in D_1 \mid \Delta(z) = 0\} = \{\Delta \in D_1 \mid \beta(\Delta(x)\wedge x')z + \beta(x\wedge\Delta(x'))z = [\Delta(x), x'] + [x, \Delta(x')] = \Delta[x,x'] = 0 \ \forall x, x' \in W\} = \{\Delta \in D_1 \mid \beta(\Delta(x)\wedge x') + \beta(x\wedge\Delta(x')) = 0 \ \forall x, x' \in W\}$.

Donc $\mathrm{Ker}\,\mu$ est l'algèbre de Lie des matrices $\left(\begin{array}{cc|c} B & C & \begin{matrix}0\\ \vdots\end{matrix} \\ D & -{}^tB & 0 \\ \hline 0\ldots & 0 & 0 \end{array}\right)$

avec B quelconque, C, D symétriques (Bourbaki [5], § 6, no 7). Ainsi $\mathrm{Ker}\,\mu$ est isomorphe à l'algèbre de Lie simple $\underline{sp}(s, \mathbb{K})$. Si on note $S = \mathrm{Ker}\,\mu$, on a la décomposition normale

$$\mathrm{Der}(\underline{n}(\alpha)) = S \oplus A \oplus \mathrm{ad}(\underline{n}(\alpha))$$

On obtient une sous-algèbre de Cartan de S en considérant les matrices

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} a_{11} & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & 0 & & \vdots \\ & & a_{ss} & & & & \vdots \\ & & & -a_{11} & & & \vdots \\ & 0 & & & \ddots & & \vdots \\ & & & & & -a_{ss} & 0 \\ \hline 0 & & \ldots & & & 0 & 0 \end{array}\right) \quad (a_{ii} \in \mathbb{K})$$

d'où un tore maximal T de $\underline{n}(\alpha)$ donné par

$$T = \left(\begin{array}{cccc|c} \lambda+a_{11} & & & & 0 \\ & \ddots & & 0 & \vdots \\ & & \lambda+a_{ss} & & \vdots \\ & & & \lambda-a_{11} & \vdots \\ & 0 & & \ddots & \vdots \\ & & & \lambda-a_{ss} & 0 \\ \hline 0 & \ldots & & 0 & 2\lambda \end{array}\right)$$

Les racines simples de $\underline{n}(\alpha)$ sont donc $\beta + \alpha_1, \ldots, \beta + \alpha_s$, $\beta - \alpha_1, \ldots, \beta - \alpha_s$ où $(\beta, \alpha_1, \ldots, \alpha_s)$ sont des formes linéaires sur T, linéairement indépendantes. Les racines de $\underline{n}(\alpha)$ sont évidemment $\beta + \alpha_1, \ldots, \beta + \alpha_s$, $\beta - \alpha_1, \ldots, \beta - \alpha_s$, 2β.

Soit maintenant $S_1, B_1 \subset S$ des sous-algèbres telles que S_1 soit semi-simple, B_1 abélienne formée de dérivations semi-simples, $[S_1, B_1] = 0$ et $Z(S_1 \oplus B_1) = B_1$ où $Z(S_1 \oplus B_1)$ désigne le commutant de $S_1 \oplus B_1$ dans S. Alors toute algèbre de Lie complète, faiblement irréductible, de plus grand idéal nilpotent isomorphe à $\underline{n}(\alpha)$ est isomorphe à une algèbre de Lie de la forme $S_1 \oplus B_1 \oplus A \oplus \underline{n}(\alpha)$ (Théorème 9, Corollaire 2).

Pour terminer montrons encore que $\mathrm{Der}(\underline{n}(\alpha))$ est une algèbre de Lie complète de plus grand idéal nilpotent $\mathrm{ad}(\underline{n}(\alpha))$ (abélien) : le centre de $\mathrm{Der}(\underline{n}(\alpha))$ est trivial puisque T est une sous-algèbre de Cartan de $\mathrm{Der}(\underline{n}(\alpha))$. On peut considérer W et $\mathrm{ad}(\underline{n}(\alpha))$ comme des S-modules pour la représentation canonique de S dans W et pour la représentation adjointe de S dans $\mathrm{ad}(\underline{n}(\alpha))$ respectivement. On vérifie facilement que l'application $\phi : W \to \mathrm{ad}(\underline{n}(\alpha))$ définie par $\phi(x) = \mathrm{ad}\, x$ si $x \in W$ est un isomorphisme de S-modules. Par conséquent $\mathrm{ad}(\underline{n}(\alpha))$ est un S-module irréductible. Comme $\mathrm{ad}(\underline{n}(\alpha))$ est abélien, on conclut que $\mathrm{Der}(\underline{n}(\alpha)) = S \oplus A \oplus \mathrm{ad}(\underline{n}(\alpha))$ est complète (Théorème 9, Corollaire 2).

§ 3) Construction d'algèbres de Lie complètes comme algèbres de dérivations

Il existe un procédé de construction d'algèbres de Lie complètes, dû à Schenkman : si $\underline{g}$ est une algèbre de Lie à centre nul, D_1 l'algèbre de ses dérivations, D_2 l'algèbre des dérivations de D_1, etc. alors les algèbres de Lie D_i sont toutes à centre nul et pour i assez grand D_i est complète (Bourbaki [5], § 4, exercice 15). En donnant certaines conditions sur $\underline{g}$ on peut faire en sorte que $D_1 = \mathrm{Der}(\underline{g})$ soit complète même si le centre de $\underline{g}$ n'est pas réduit à zéro.

Proposition 29 :

Soit $\underline{g}$ une algèbre de Lie parfaite de centre $\underline{z}$. Si $\underline{g}$ et $\underline{g}/\underline{z}$ ont des algèbres de dérivations de même dimension alors $\mathrm{Der}(\underline{g})$ est complète.

Démonstration :

L'hypothèse $\underline{g} = C^2\,\underline{g}$ entraîne que le commutant $Z(\mathrm{ad}(\underline{g}))$ de $\mathrm{ad}(\underline{g})$ dans $\mathrm{Der}(\underline{g})$ est réduit à zéro. Donc $\underline{g}/\underline{z}$ et $\mathrm{Der}(\underline{g})$ sont à centre nul. Considérons l'homomorphisme $\phi : \mathrm{Der}(\underline{g}) \to \mathrm{Der}(\underline{g}/\underline{z})$ obtenu par passage au quotient. Cet homomorphisme est injectif puisque $\mathrm{Ker}\,\phi = Z(\mathrm{ad}(\underline{g})) = 0$. L'hypothèse sur les dimensions implique donc que ϕ est un isomorphisme. Maintenant l'exercice 15 du § 4 de Bourbaki (cité plus haut) permet de conclure que $\mathrm{Der}\,(\underline{g}/\underline{z})$ est complète, donc aussi $\mathrm{Der}(\underline{g})$.

Proposition 30 :

Soit $\underline{n}$ une algèbre de Lie nilpotente, $S \subset \mathrm{Der}\,(\underline{n})$ une sous-algèbre semi-simple, $\underline{g} = S \oplus \underline{n}$ et $\underline{z}$ le centre de $\underline{g}$. Soit encore Ω la sous-algèbre de $\mathrm{Der}(\underline{n})$ formée des dérivations qui conservent $\underline{z}$, $\phi : \Omega \to \mathrm{Der}(\underline{n}/\underline{z})$ l'homomorphisme de passage au quotient et $Z(\phi(S))$ le commutant de $\phi(S)$ dans $\mathrm{Der}(\underline{n}/\underline{z})$. Si $\underline{g}$ est parfaite et si $Z(\phi(S)) \subset \phi(\Omega)$ alors $\mathrm{Der}(\underline{g})$ est complète.

Démonstration :

Démontrons que $\underline{g}$ et $\underline{g}/\underline{z}$ ont des algèbres de dérivations de même dimension, ce qui permettra de conclure au moyen de la prop. 29. Notons $\pi : \underline{g} \to \underline{g}/\underline{z}$ la projection canonique, $\hat{S}$ la sous-algèbre de $\mathrm{Der}(\underline{g})$ formée des dérivations qui s'annulent sur S, $\hat{S}'$ la sous-algèbre de $\mathrm{Der}(\underline{g}/\underline{z})$ formée desdérivations qui s'annulent sur $\pi(S)$. $\hat{S}$ est isomorphe à $Z(S)$ le commutant de S dans $\mathrm{Der}(\underline{n})$ (Proposition 21) et de même $\hat{S}'$ est isomorphe à $Z(\phi(S))$ le commutant de $\phi(S)$ dans $\mathrm{Der}(\underline{n}/\underline{z})$ car $\underline{g}/\underline{z} = \pi(S) \oplus \pi(\underline{n}) \simeq S \oplus \underline{n}/\underline{z}$.

On peut remarquer maintenant que $S \oplus Z(S) \subset \Omega$: en effet il est clair que $S \subset \Omega$; si $\Delta \in Z(S)$ alors Δ peut se prolonger en une dérivation $\tilde{\Delta}$ de $\underline{g}$ et on a $\Delta(\underline{z}) = \tilde{\Delta}(\underline{z}) \subset \underline{z}$ puisque $\underline{z} \subset \underline{n}$. ϕ induit donc un homomorphisme $\tilde{\phi} : Z(S) \to Z(\phi(S))$. Montrons que $\tilde{\phi}$ est injectif : si $\tilde{\phi}(\Delta) = 0$ avec $\Delta \in Z(S)$ alors $\phi(\Delta) = 0$ ce qui implique $\Delta(\underline{n}) \subset \underline{z}$. Comme $\Delta \in Z(S)$ on peut définir une dérivation $\tilde{\Delta}$ de $\underline{g}$ en posant $\tilde{\Delta}|S = 0$ et $\tilde{\Delta}|\underline{n} = \Delta$. On a donc $\tilde{\Delta}(\underline{g}) \subset \underline{z}$ ce qui implique $\tilde{\Delta} = 0$ puisque $\underline{g} = C^2\underline{g}$. Il en résulte que $\Delta = 0$ et $\tilde{\phi}$ est injectif. Montrons que $\tilde{\phi}$ est surjectif : soit $\Delta' \in Z(\phi(S))$ avec $\Delta' \neq 0$; par hypothèse il existe $\Delta \in \Omega$ avec $\phi(\Delta) = \Delta'$. Si $D \in S$ on a $\phi[D, \Delta] = [\phi(D), \phi(\Delta)] = 0$ puisque $\phi(\Delta) \in Z(\phi(S))$, donc $[D, \Delta] \in \mathrm{Ker}\,\phi$ ce qui implique $[S, \Delta] \subset \mathrm{Ker}\,\phi$. Maintenant comme $\Delta' \neq 0$ on a $\Delta \notin \mathrm{Ker}\,\phi$ et on peut considérer le sous-espace $V = \mathbb{K}\,\Delta \oplus \mathrm{Ker}\,\phi$. Ce sous-espace est invariant par la représentation adjointe de S dans $\mathrm{Der}(\underline{n})$, de même que $\mathrm{Ker}\,\phi$. Puisque cette représentation est semi-simple, il existe $\Delta_1 \in V$ avec $V = \mathbb{K}\Delta_1 \oplus \mathrm{Ker}\,\phi$ et $[S, \Delta_1] = 0$. Donc $\Delta_1 \in Z(S)$ et de plus si on écrit $\Delta = \lambda\Delta_1 + \Delta_2$ avec $\Delta_2 \in \mathrm{Ker}\,\phi$ on a $\Delta' = \phi(\Delta) = \phi(\lambda\Delta_1) = \tilde{\phi}(\lambda\Delta_1)$.

En conclusion $\tilde{\phi}$ est un isomorphisme ce qui montre que $\hat{S}$ et $\hat{S}'$ ont la même dimension; par suite $\mathrm{Der}(\underline{g})$ et $\mathrm{Der}(\underline{g}/\underline{z})$ ont la même dimension (Proposition 21). La proposition est démontrée.

Corollaire :

Soit $\underline{g}$ une algèbre de Lie parfaite dont le radical est un modèle nilpotent. Alors $Der(\underline{g})$ est complète.

Démonstration :

On écrit $\underline{g} = \underline{s}' \times \underline{g}'$ où $\underline{s}'$ est semi-simple et $\underline{g}'$ faiblement irréductible. Il est clair que $\underline{g}'$ est parfaite et que son radical est un modèle nilpotent $\underline{m}$. On a donc $\underline{g}' = S \oplus \underline{m}$ où $S \subset Der(\underline{m})$ est une sous-algèbre semi-simple. L'homomorphisme ϕ de la prop. 30 est alors surjectif d'où on conclut que $Der(\underline{g}')$ est complète. Par suite $Der(\underline{g}) = Der(\underline{s}') \times Der(\underline{g}')$ est complète.

Soit maintenant $\underline{m}(s, p)$ le modèle nilpotent de type s et de classe p, $Der(\underline{m}) = S \oplus A \oplus N$ une décomposition normale, H une sous-algèbre de Cartan de S. S est isomorphe à $\underline{s\ell}(s, \mathbb{K})$. Considérons l'algèbre de Lie parfaite $\underline{g} = S \oplus \underline{m}$. D'après le corollaire de la prop. 30 $Der(\underline{g})$ est une algèbre de Lie complète.

Remarque :

Si $\underline{g}$ possède un centre non trivial alors s divise p.

En effet soit $T = H \oplus A$ un tore maximal de $\underline{m}$, $\underline{m} = \bigoplus_{\alpha \in R} m^{\alpha}$ la décomposition de la représentation canonique de T dans $\underline{m}$, $\underline{z}$ le centre de $\underline{g}$. Le centre de $\underline{m}$ est égal à $C^p\underline{m}$, ce qui implique $\underline{z} \subset C^p\underline{m}$. Il est alors facile de voir que $\underline{z}$ est invariant par T, donc $\underline{z} = \bigoplus_{\alpha \in R} (\underline{z} \cap m^{\alpha})$.

Soit encore $(\alpha_1, \dots, \alpha_s)$ les racines simples de $\underline{m}$ relatives à T. La famille des formes linéaires $(\alpha_1|H, \dots, \alpha_s|H)$ est de rang égal à $\dim H = s-1$. Puisque $S \simeq \underline{s\ell}(s, \mathbb{K})$ on a la seule relation $\alpha_1|H + \dots + \alpha_s|H = 0$. Prenons $x \in \underline{z} \cap m^{\alpha}$ $(x \neq 0)$. Puisque $t(x) = 0 \ \forall t \in H$ il vient $\alpha|H = 0$. Or on peut toujours écrire $\alpha = \mu_1 \alpha_1 + \dots + \mu_s \alpha_s$. La relation $\mu_1 \alpha_1|H + \dots + \mu_s \alpha_s|H = 0$

étant équivalente à la relation $\alpha_1|H + \ldots + \alpha_s|H = 0$ on a nécessairement $\mu_1 = \ldots = \mu_s = k$ et $\alpha = k\,(\alpha_1 + \ldots + \alpha_s)$. ($k$ entier). Comme $\underline{z} \subset C^p\,\underline{m}$ il vient $k.s = p$. Remarquons encore que $\underline{z} \subset m^{k(\alpha_1 + \ldots + \alpha_s)}$.

Voici maintenant un exemple où le centre $\underline{z}$ de $\underline{g}$ n'est pas réduit à zéro : soit $\underline{m}(2,6) = W \oplus C^2\,\underline{m}$, $\mathrm{Der}(\underline{m}) = \underline{s\ell}\,(2, \mathbb{K}) \oplus A \oplus N$, W invariant par $T = H \oplus A$. On a donc $W = m^{\alpha_1} \oplus m^{\alpha_2}$ où α_1 et α_2 sont les racines simples de $\underline{m}$ relatives à T. Choisissons encore $e_1 \in m^{\alpha_1}$ $(e_1 \neq 0)$ et $e_2 \in m^{\alpha_2}$ $(e_2 \neq 0)$. Alors le centre $\underline{z}$ de $\underline{g}$ contient l'élément $[[[e_2, e_1], e_1], [[e_2, e_1], e_2]]$ car les dérivations Δ_{12} et Δ_{21} de $\underline{m}$ s'annulent sur cet élément comme on le vérifie facilement.

§ 4) Algèbres de Lie complètes dont le plus grand idéal nilpotent est isomorphe à $\underline{n}^+$ où $\underline{n}^+$ est une sous-algèbre maximale formée d'éléments nilpotents d'une algèbre de Lie semi-simple

Proposition 31 :

Soit $\underline{n}$ une algèbre de Lie nilpotente, $\mathrm{Der}(\underline{n}) = S \oplus A \oplus N$ une décomposition normale, H une sous-algèbre de Cartan de S, W un supplémentaire de $C^2\underline{n}$ dans $\underline{n}$ invariant par $S \oplus A$, $W = \bigoplus_{i=1}^{p} W_i$ une décomposition du $(S \oplus A)$ - module W en modules irréductibles. Notons $\mu_i : S \oplus A \to \underline{g\ell}\,(W_i)$ et $\nu_i : S \to \underline{g\ell}(W_i)$ les homomorphismes de restriction. On a les propriétés suivantes :

(i) soit $T = H \oplus A$ un tore maximal de $\underline{n}$ et $\dim \mu_i(T) = k_i$. Alors rang $\mu_i(S) = k_i - \dim \mu_i(A)$ et $\dim \mu_i(A) \leq 1$;

(ii) les composants simples de S sont les mêmes que les composants simples de $\prod_{i=1}^{p} \mu_i(S)$ et S est isomorphe à un idéal de $\prod_{i=1}^{p} \mu_i(S)$.

Démonstration :

Les W_i sont des S-modules irréductibles et si $\Delta \in A$

alors $\mu_i(\Delta)$ est une homothétie de W_i (Prop. 3.). De plus $\mu_i(S) \subset \underline{s\ell}(W_i)$ car $\mu_i(S)$ est semi-simple et $\underline{s\ell}(W_i)$ est le seul facteur de Lévi de $\underline{g\ell}(W_i)$. Maintenant $\mu_i(T) = \mu_i(H \oplus A) = \mu_i(H) \oplus \mu_i(A)$ car $\mu_i(H) \subset \underline{s\ell}(W_i)$ et $\mu_i(A)$ est contenu dans l'espace vectoriel des homothéties de W_i. Donc $\dim \mu_i(H) = k_i - \dim \mu_i(A)$ et $\dim \mu_i(A) \leq 1$. Or $\mu_i(H)$ estune sous-algèbre de Cartan de $\mu_i(S)$ (Chevalley [7], chapitre 6, § 4, no 5, proposition 17) ce qui implique rang $\mu_i(S) = k_i - \dim \mu_i(A)$. (i) est démontré.

Soit S' un composant simple de S; il existe un indice i tel que $\mu_i(S') \neq 0$ sinon $S' = 0$ puisque $\underline{n}$ est nilpotente. On peut toujours écrire $S = S_i \times \operatorname{Ker} \nu_i$ (produit d'idéaux semi-simples) : puisque $S' \not\subset \operatorname{Ker} \nu_i$ on a $S' \subset S_i$ et de plus S_i est isomorphe à $\nu_i(S)$. Réciproquement si S' est un composant simple de $\prod_{i=1}^{p} \mu_i(S)$ alors c'est un composant simple de l'un des $\mu_i(S) = \nu_i(S)$ donc de l'un des S_i et par conséquent de S.

Pour montrer que S est isomorphe à un idéal de $\prod_{i=1}^{p} \mu_i(S)$ il suffit de montrer que si S' et S'' sont deux composants simples de S, distincts, alors pour tous les indices i et j tels que $\mu_i(S')$ et $\mu_j(S'')$ soient distincts de zéro on a $\mu_i(S') \neq \mu_j(S'')$: si $i \neq j$ il est clair que $\mu_i(S') \neq \mu_j(S'')$; si $i = j$ écrivons $S = S_i \times \operatorname{Ker} \nu_i$, on a $S', S'' \subset S_i$ ce qui implique $\mu_i(S') \cap \mu_j(S'') = 0$.

Corollaire 1 :

Soit $S_j = \bigcap_{i \neq j} \operatorname{Ker} \nu_i$ $(j = 1, \ldots, p)$. *Si* $\dim T = k_1 + \ldots + k_p$ *alors* $S = S_1 \times \ldots \times S_p$ *et* ν_j *réalise un isomorphisme de* S_j *sur* $\nu_j(S_j) = \nu_j(S)$.

Considérons la représentation canonique $\mu : S \oplus A \to \underline{g\ell}(W)$ de $S \oplus A$ dans W. μ est injective puisque $\underline{n}$ est nilpotente, donc $\dim T = \dim \mu(T)$. Introduisons encore les espaces vectoriels

$T_i = \{\alpha \in \underline{g\ell}(W) | \alpha(W_i) \subset W_i,\ \ \alpha|W_i \in \mu_i(T),\ \ \alpha(W_j) = 0 \text{ si } j \neq i\}$

$H_i = \{\beta \in \underline{g\ell}(W) | \beta(W_i) \subset W_i,\ \ \beta|W_i \in \mu_i(H),\ \ \beta(W_j) = 0 \text{ si } j \neq i\}$

On a $\mu(T) \subset \bigoplus_{i=1}^{p} T_i$ et $\dim(\bigoplus_{i=1}^{p} T_i) = \sum_{i=1}^{p} \dim T_i =$ $\sum_{i=1}^{p} \dim \mu_i(T) = k_1 + \ldots + k_p = \dim\ (T) = \dim \mu(T)$. Donc

$$\mu(T) = \bigoplus_{i=1}^{p} T_i$$

Montrons maintenant que $\mu(H) = \bigoplus_{i=1}^{p} H_i$: il est clair que $\mu(H) \subset \bigoplus_{i=1}^{p} H_i$ et $\dim(\bigoplus_{i=1}^{p} H_i) = \sum_{i=1}^{p} \dim H_i =$ $\sum_{i=1}^{p} \dim\ \mu_i(H) = \sum_{i=1}^{p} (\dim\ \mu_i(T) - \dim \mu_i(A)) =$ $(k_1 + \ldots + k_p) - \sum_{i=1}^{p} \dim \mu_i(A) = \dim T - \sum_{i=1}^{p} \dim \mu_i(A) \leqslant$ $\dim T - \dim A = \dim H = \dim \mu(H)$. Donc $\mu(H) = \bigoplus_{i=1}^{p} H_i$ ce qui implique $H = \bigoplus_{i=1}^{p} \mu^{-1}(H_i)$.

Pour tout indice i on peut écrire, d'une manière unique $S = S_i \times \operatorname{Ker} \nu_i$ et ν_i réalise un isomorphisme de S_i sur $\nu_i(S) = \nu_i(S_i)$. On a évidemment $\bigoplus_{j \neq i} \mu^{-1}(H_j) \subset$ $\operatorname{Ker} \nu_i$ et comme $[\mu^{-1}(H_i), \operatorname{Ker} \nu_i] = 0$ on a encore $\mu^{-1}(H_i) \subset S_i$. Il en résulte immédiatement que $\mu^{-1}(H_i)$ est une sous-algèbre de Cartan de S_i.

Montrons que $S_i = \bigcap_{j \neq i} \operatorname{Ker} \nu_j$: si $j \neq i$ on a $S_i \subset \operatorname{Ker} \nu_j$ car $\nu_j(S_i)$ est une sous-algèbre semi-simple de $\underline{g\ell}(W_j)$ dont $\nu_j(\mu^{-1}(H_i))$ est une sous-algèbre de Cartan; comme $\nu_j(\mu^{-1}(H_i)) = 0$ on a $\nu_j(S_i) = 0$. Donc $S_i \subset \bigcap_{j \neq i} \operatorname{Ker} \nu_j$. Mais il est clair que $(\bigcap_{j \neq i} \operatorname{Ker} \nu_j) \cap$ $\operatorname{Ker} \nu_i = 0$, d'où $S_i = \bigcap_{j \neq i} \operatorname{Ker} \nu_j$.

$S_1, \ldots, S_p$ sont donc des idéaux disjoints de S et comme $S_1 \times \ldots \times S_p$ est un idéal de même rang que S on a $S = S_1 \times \ldots \times S_p$.

Corollaire 2 :

Soit $S_j = \bigcap_{i \neq j} \mathrm{Ker}\, \nu_i$ $(j = 1, \ldots, p)$. *Si* $\dim T = \dim W$ *alors* $S = S_1 \times \ldots \times S_p$ *et* ν_j *réalise un isomorphisme de* S_j *sur* $\underline{s\ell}(W_j)$.

On a $\sum_{i=1}^{p} \dim W_i = \dim W = \dim T = \dim \mu(T) \leq \sum_{i=1}^{p} \dim \mu_i(T)$. Comme $\dim \mu_i(T) \leq \dim W_i$ pour tout i il vient $\dim \mu_i(T) = \dim W_i$ et $\dim T = \sum_{i=1}^{p} \dim \mu_i(T) = k_1 + \ldots + k_p$. Par conséquent on a $S = S_1 \times \ldots \times S_p$ (Corollaire 1). De plus $\dim \mu_i(T) - 1 \leq \mathrm{rang}\ \mu_i(S)$ à cause de la prop. 31. Puisque $\dim W_i = \dim \mu_i(T)$ il vient $\mathrm{rang}\ \mu_i(S) = \dim W_i - 1 = \mathrm{rang}\ \underline{s\ell}(W_i)$. Donc $\mu_i(S) = \underline{s\ell}(W_i)$ [4] [10].

Soit maintenant $\underline{s}$ une algèbre de Lie semi-simple de rang ℓ, $\underline{h}$ une sous-algèbre de Cartan, R le système de racines associé et $\underline{s} = \underline{h} \oplus (\bigoplus_{\alpha \in R} s^\alpha)$ la décomposition de la représentation adjointe de $\underline{h}$ dans $\underline{s}$. Soit encore $(\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell)$ une base formée de racines simples, $\underline{n}^+ = \bigoplus_{\alpha>0} s^\alpha$, $\underline{n}^- = \bigoplus_{\alpha<0} s^\alpha$, $\underline{b} = \underline{h} \oplus \underline{n}^+$ une sous-algèbre de Borel. Dans la suite $\underline{n}^+$ désignera toujours une sous-algèbre d'une algèbre de Lie semi-simple $\underline{s}$, maximale formée d'éléments nilpotents et R^+ désignera l'ensemble des racines positives du système R relativement à la base choisie. La proposition suivante a été démontrée par G. Favre [11] pour $\underline{s} = \underline{s\ell}(n, \mathbb{K})$.

Proposition 32 :

Soit $\underline{s}$ *une algèbre de Lie simple,* $\underline{n}^+$ *une sous-algèbre de Lie maximale formée d'éléments nilpotents. Alors* $\mathrm{Der}(\underline{n}^+)$ *est résoluble sauf si* $\underline{s}$ *est isomorphe à* $\underline{s\ell}(3, \mathbb{K})$ *auquel cas* $\underline{n}^+$ *est isomorphe au modèle nilpotent* $\underline{m}(2, 2)$ *et* $\mathrm{Der}(\underline{n}^+)$ *possède un facteur de Lévi isomorphe à* $\underline{s\ell}(2, \mathbb{K})$.

Démonstration :

$\underline{n}^+$ est une algèbre de Lie nilpotente de type ℓ, $W = s^{\alpha_1} \oplus \ldots \oplus s^{\alpha_\ell}$ étant un supplémentaire de $C^2\,\underline{n}^+$. L'image de $\underline{h}$ par la représentation adjointe $\underline{h} \longrightarrow \mathrm{Der}(\underline{n}^+)$ est un tore maximal T de dimension ℓ. La décomposition de la représentation canonique de T dans $\underline{n}^+$ est donc $\underline{n}^+ = \bigoplus_{\alpha>0} s^\alpha$ les s^α étant tous de dimension 1. Il existe une décomposition normale $\mathrm{Der}(\underline{n}^+) = S \oplus A \oplus N$ et H une sous-algèbre de Cartan de S avec $T = H \oplus A$. Le corollaire 2 de la proposition 31 est alors applicable à $\underline{n}^+$: si $S_j = \bigcap_{i \neq j} \mathrm{Ker}\, \nu_i$ on a $S = S_1 \times \ldots \times S_p$ et ν_j réalise un isomorphisme de S_j sur $\underline{s\ell}(W_j)$ (Notations de la proposition 31).

L'existence d'une partie semi-simple dans $\mathrm{Der}(\underline{n}^+)$ impose une structure géométrique au système de racines R^+ qui est incompatible avec la structure géométrique de R^+ provenant de l'algèbre de Lie semi-simple $\underline{s}$, sauf dans le cas où $\underline{s}$ est isomorphe à $\underline{s\ell}(3, \mathbb{K})$. Démontrons d'abord trois lemmes :

Lemme 1 :

Soit $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_p$ *une partition de la base* $(\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell)$ *telle que* $W_i = \bigoplus_{\alpha \in \Lambda_i} s^\alpha$ $(i = 1, \ldots, p)$. *S'il existe deux racines* $\alpha \in \Lambda_i$ *et* $\beta \in \Lambda_j$ *avec* $\alpha + \beta \in R^+$ *alors quelles que soient* $\alpha \in \Lambda_i$, $\beta \in \Lambda_j$ *avec* $\alpha \neq \beta$, *on a* $\alpha + \beta \in R^+$.

Il suffit de montrer que s'il existe deux racines $\alpha \in \Lambda_i$ et $\beta \in \Lambda_j$ telles que $\alpha \neq \beta$ et $\alpha + \beta \notin R^+$ alors pour toutes racines $\alpha \in \Lambda_i$, $\beta \in \Lambda_j$ on a $\alpha + \beta \notin R^+$. Choisissons $x_\alpha \in s^\alpha$ $(x_\alpha \neq 0)$ pour toute racine $\alpha \in R^+$. Par hypothèse on a $[x_\alpha, x_\beta] = 0$. Prenons $\gamma \in \Lambda_i$ $\delta \in \Lambda_j$ et montrons que $[x_\gamma, x_\delta] = 0$. Si $\gamma = \alpha$ et $\delta = \beta$ l'assertion est démontrée. On peut donc supposer, par exemple, $\gamma \neq \alpha$: désignons par $\Delta_{\gamma,\alpha}$ la dérivation de $\underline{n}^+$ définie par

$$\begin{cases} \Delta_{\gamma,\alpha}\ (x_\alpha) = x_\gamma \\ \Delta_{\gamma,\alpha}\ (x_\nu) = 0 \quad \text{si } \nu \text{ racine simple} \neq \alpha \end{cases}$$

Le corollaire 2 de la proposition 31 assure l'existence de cette dérivation. Il vient donc $0 = \Delta_{\gamma,\alpha}\ [x_\alpha, x_\beta] = [x_\gamma, x_\beta]$. Si $\beta = \delta$ l'assertion est démontrée. On peut donc supposer $\beta \neq \delta$. Distinguons deux cas :

1^0) $\gamma = \beta$. On doit donc montrer que $[x_\beta, x_\delta] = 0$; or on a $i = j$, $\Lambda_i = \Lambda_j$ et on peut supposer $\delta \neq \alpha$. Alors $\alpha, \delta \in \Lambda_i = \Lambda_j$ et $0 = \Delta_{\delta,\alpha}\ [x_\beta, x_\alpha] = [x_\beta, x_\delta]$.

2^0) $\gamma \neq \beta$. Comme $\beta \neq \delta$ on a $0 = \Delta_{\delta,\beta}\ [x_\gamma, x_\beta] = [x_\gamma, x_\delta]$.

Le lemme est entièrement démontré.

Lemme 2 :

Soit $\mu_1\alpha_1 + \ldots + \mu_\ell\alpha_\ell = \tilde{\alpha}$ *la plus grande racine du système* R. *Alors si* $\alpha_p, \alpha_q \in \Lambda_i$ *on a* $\mu_p = \mu_q$.

Si $k = \mu_1 + \ldots + \mu_\ell$ on a $s^{\tilde{\alpha}} = C^k\, \underline{n}^+$ ce qui prouve que $s^{\tilde{\alpha}}$ est invariant par les éléments de S; donc $s^{\tilde{\alpha}}$ est un S-module trivial. Puisque $S = S_1 \times \ldots \times S_p$ on peut écrire $H = H_1 \times \ldots \times H_p$ où H_i est une sous-algèbre de Cartan de S_i. A cause de la relation $S_i = \bigcap_{j \neq i} \operatorname{Ker} \nu_j$ $(i = 1, \ldots, p)$ on a, pour tout $\Delta_i \in H_i$,

$$\sum_{\alpha_k \in \Lambda_i} \mu_k\, \alpha_k\, (\Delta_i) = \mu_1\, \alpha_1\, (\Delta_i) + \ldots + \mu_\ell\, \alpha_\ell\, (\Delta_i) = \tilde{\alpha}(\Delta_i) = 0$$

Comme S_i est isomorphe à $\underline{s\ell}(W_i)$. on a la relation $\sum_{\alpha_k \in \Lambda_i} \alpha_k | H_i = 0$. Mais la famille des formes linéaires $(\alpha_k | H_i)_{\alpha_k \in \Lambda_i}$ est de rang égal à $\dim H_i = \dim W_i - 1 =$ $= \operatorname{Card}(\Lambda_i) - 1$. Par conséquent la relation $\sum_{\alpha_k \in \Lambda_i} \mu_k\, \alpha_k | H_i = 0$ est équivalente à la relation

$\sum_{\alpha_k \in \Lambda_i} \alpha_k \big| H_i = 0$, ce qui entraîne μ_k constant pour $\alpha_k \in \Lambda_i$.

<u>*Lemme 3*</u> :

Soit $\alpha, \beta, \gamma \in R^+$ *trois racines distinctes. On suppose qu'il existe un indice* i *avec* $\alpha, \gamma \in \Lambda_i$ *et que* $\alpha + \beta \in R^+$, $2\alpha + \beta \notin R^+$, $\alpha + \gamma \notin R^+$. *Alors* $\alpha + \beta + \gamma \notin R^+$.

On a $[x_\alpha, [x_\alpha, x_\beta]] = 0$ et par conséquent $\Delta_{\gamma,\alpha} [x_\alpha,[x_\alpha, x_\beta]] = [x_\gamma[x_\alpha, x_\beta] + [x_\alpha,[x_\gamma, x_\beta]] = [x_\gamma,[x_\alpha, x_\beta]] + [[x_\alpha, x_\gamma], x_\beta] + [x_\gamma,[x_\alpha, x_\beta]] = 2[x_\gamma,[x_\alpha, x_\beta]] = 0$. Donc $[[x_\alpha, x_\beta], x_\gamma] = 0$ ce qui implique $\alpha + \beta + \gamma \notin R^+$ puisque $[x_\alpha, x_\beta] \neq 0$.

Passons à la démonstration de la proposition en examinant chaque système de racines séparément : pour A_1, $A_\ell (\ell \geq 4)$, $B_\ell (\ell \geq 2)$, $C_\ell (\ell \geq 2)$, E_6, E_7, E_8, F_4, G_2, l'examen du graphe de Dynkin et l'utilisation des lemmes 1 et 2 permettent de conclure que les ensembles $\Lambda_1, \dots, \Lambda_p$ contiennent chacun une seule racine, ce qui implique $S = 0$ et $\mathrm{Der}(\underline{n}^+)$ résoluble.

Il reste donc à examiner les cas A_2, A_3 et $D_\ell (\ell \geq 3)$:

- Pour A_2 on a $\underline{n}^+ \simeq \underline{m}(2,2)$ et $\mathrm{Der}(\underline{n}^+)$ contient $\underline{s\ell}(2, \mathbb{K})$ comme facteur de Lévi (voir chapitre 4, §2, exemple).
- Pour A_3 on a $R^+ = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3\}$. Après utilisation du lemme 1 il reste la possibilité $\Lambda_1 = \{\alpha_2\}$ $\Lambda_2 = \{\alpha_1, \alpha_3\}$ qui est exclue à cause du lemme 3.
- Pour D_4 on a $\tilde{\alpha} = \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$. Après utilisation des lemmes 1 et 2 il reste les possibilités $\Lambda_1 = \{\alpha_1\}$ $\Lambda_2 = \{\alpha_3, \alpha_4\}$ $\Lambda_3 = \{\alpha_2\}$ et $\Lambda_1 = \{\alpha_2\}$ $\Lambda_2 = \{\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4\}$ qui sont exclues à cause du lemme 3.
- Pour $D_\ell (\ell \geq 5)$ on a $\tilde{\alpha} = \alpha_1 + 2\alpha_2 + \dots + 2\alpha_{\ell-2} + \alpha_{\ell-1} + \alpha_\ell$. Après utilisation des lemmes 1 et 2 il reste les

possibilités $\Lambda_1 = \{\alpha_1\}$ $\Lambda_2 = \{\alpha_{\ell-1}, \alpha_\ell\}$ $\Lambda_3 = (.)\ldots$ qui sont exclues à cause du lemme 3.

Corollaire :

Soit $\underline{g}$ une algèbre de Lie complète faiblement irréductible dont le plus grand idéal nilpotent est isomorphe à une sous-algèbre $\underline{n}^+$ d'une algèbre de Lie simple $\underline{s}$. On a les propriétés suivantes :

(i) Si $\underline{s}$ est isomorphe à $\underline{s\ell}(3, \mathbb{K})$ alors ou bien $\underline{g}$ est isomorphe à l'algèbre décomposable universelle $\underline{s\ell}(2, \mathbb{K}) \oplus A \oplus \underline{n}^+$ associée à $\underline{n}^+$ ou bien $\underline{g}$ est isomorphe à une sous-algèbre de Borel de $\underline{s\ell}(3, \mathbb{K})$;

(ii) Si $\underline{s}$ n'est pas isomorphe à $\underline{s\ell}(3, \mathbb{K})$ alors $\underline{g}$ est isomorphe à une sous-algèbre de Borel de $\underline{s}$.

Généralisons le corollaire précédent au cas d'une algèbre de Lie semi-simple $\underline{s}$: soit $\underline{s}_1,\ldots,\underline{s}_p$ des algèbres de Lie simples isomorphes à $\underline{s\ell}(3, \mathbb{K})$, $\underline{s}_{p+1},\ldots,\underline{s}_{p+q}$ des algèbres de Lie simples non isomorphes à $\underline{s\ell}(3, \mathbb{K})$ et $\underline{s\ell}(2, \mathbb{K})$, $\underline{s} = \underline{s}_1 \times\ldots\times \underline{s}_{p+q}$. Pour tout i désignons par $\underline{n}_i^+$ une sous-algèbre de $\underline{s}_i$, maximale formée d'éléments nilpotents et posons $\underline{n}^+ = \underline{n}_1^+ \times\ldots\times \underline{n}^+_{p+q}$. Introduisons encore les décompositions normales :

$$\mathrm{Der}(\underline{n}_i^+) = S_i \oplus A_i \oplus N_i \qquad (1 \leq i \leq p) \qquad \text{avec}$$
$$S_i \simeq \underline{s\ell}(2, \mathbb{K}), \quad \dim A_i = 1, \quad N_i = \mathrm{ad}(\underline{n}_i^+)$$

$$\mathrm{Der}(\underline{n}^+_{p+j}) = A_{p+j} \oplus N_{p+j} \qquad (1\leq j\leq q)$$

$$\mathrm{Der}(\underline{n}^+) = (S_1 \oplus\ldots\oplus S_p) \oplus (A_1 \oplus\ldots\oplus A_{p+q}) \oplus (N_1 \oplus\ldots\oplus N_{p+q}) \oplus$$
$$\oplus\Big(\bigoplus_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{p+q} B_{ij}\Big) \text{ (voir proposition 8).}$$

Pour tout $i \in \{1,\ldots, p\}$ soit $\{H_i, X_i, Y_i\}$ une base de S_i avec les relations de crochets

$$[H_i, X_i] = 2 X_i \qquad [H_i, Y_i] = -2 Y_i \qquad [X_i, Y_i] = H_i$$

et pour toute partie $\Lambda \subset \{1,\ldots, p\}$ désignons par $S(\Lambda)$

l'algèbre de Lie, isomorphe à $\underline{s\ell}(2, \mathbb{K})$, de base $(\sum_{j\in\Lambda} H_j, \sum_{j\in\Lambda} X_j, \sum_{j\in\Lambda} Y_j)$.

Pour tout $k \in \{1,\dots, p\}$ considérons l'ensemble P_k des partitions $(\Lambda_1,\dots, \Lambda_d)$, avec $\Lambda_i \neq \emptyset$, de l'ensemble $\{1,\dots, k\}$ et pour tout élément $\lambda_k = (\Lambda_1,\dots, \Lambda_d)$ de P_k fabriquons l'algèbre de Lie

$$S(\lambda_k) = S(\Lambda_1)\oplus\dots\oplus S(\Lambda_d) \oplus (\mathbb{K} H_{k+1} \oplus\dots\oplus \mathbb{K} H_p)$$

Si $p = 0$ on posera par convention $P_k = \emptyset$ et $S(\lambda_k) = 0$.

On peut énoncer un théorème général :

Théorème 12 :

Pour tout $k \in \{1,\dots, p\}$ et pour tout $\lambda_k \in P_k$ l'algèbre de Lie $S(\lambda_k) \oplus (A_1 \oplus\dots\oplus A_{p+q}) \oplus \underline{n}^+$ est une algèbre de Lie complète faiblement irréductible de plus grand idéal nilpotent $\underline{n}^+$.

Réciproquement toute algèbre de Lie complète faiblement irréductible dont le plus grand idéal nilpotent est isomorphe à $\underline{n}^+$ est isomorphe à une algèbre de Lie du type précédent.

L'ensemble constitué des classes d'isomorphisme d'algèbres de Lie complètes faiblement irréductibles dont le plus grand idéal nilpotent est isomorphe à $\underline{n}^+$ contient exactement 2^p éléments.

Démonstration :

Il est facile de vérifier que dans le radical de $\mathrm{Der}(\underline{n}^+)$ le commutant de $(A_1 \oplus\dots\oplus A_{p+q})$ est égal à $A_1 \oplus\dots\oplus A_{p+q}$. De plus dans $S_1 \oplus\dots\oplus S_p$ l'algèbre de Lie $S(\lambda_k)$ est égale à son commutant. Par conséquent l'algèbre de Lie $S(\lambda_k) \oplus (A_1 \oplus\dots\oplus A_{p+q}) \oplus \underline{n}^+$ est complète (théorème 9).

Réciproquement soit $\underline{g}$ une algèbre de Lie complète faiblement irréductible dont le plus grand idéal nilpotent est isomorphe à $\underline{n}^+$. Alors il existe des sous-algèbres

S, $B \subset S_1 \oplus \ldots \oplus S_p$ avec S semi-simple, B abélienne formée de dérivations semi-simples, $[S, B] = 0$, telles que $\underline{g}$ soit isomorphe à $S \oplus B \oplus (A_1 \oplus \ldots \oplus A_{p+q}) \oplus \underline{n}^+$ (Théorème 5). De plus on a $Z(S \oplus B \oplus A_1 \oplus \ldots \oplus A_{p+q}) =$
$= B \oplus A_1 \oplus \ldots \oplus A_{p+q}$ où $Z(.)$ désigne le commutant de $(.)$ dans $\mathrm{Der}(\underline{n}^+)$ (théorème 9). Par conséquent dans $S_1 \oplus \ldots \oplus S_p$ on a $Z(S \oplus B) = B$ où $Z(S \oplus B)$ désigne le commutant de $S \oplus B$ dans $S_1 \oplus \ldots \oplus S_p$. Il suffit maintenant de montrer que $S \oplus B \oplus (A_1 \oplus \ldots \oplus A_{p+q}) \oplus \underline{n}^+$ est isomorphe à une algèbre de Lie de la forme $S(\lambda_k) \oplus (A_1 \oplus \ldots \oplus A_{p+q}) \oplus \underline{n}^+$.
Pour cela exhibons un automorphisme θ de $\underline{n}^+$ tel que
$\theta S \theta^{-1} = S(\Lambda_1) \oplus \ldots \oplus S(\Lambda_d)$ $\theta B \theta^{-1} = \mathbb{K} H_{k+1} \oplus \ldots \oplus \mathbb{K} H_p$
$\theta(S_1 \oplus \ldots \oplus S_p)\theta^{-1} = S_1 \oplus \ldots \oplus S_p$ $\theta(A_1 \oplus \ldots \oplus A_{p+q})\theta^{-1} =$
$= A_1 \oplus \ldots \oplus A_{p+q}$.

Considérons les projections canoniques $\pi_i : S \longrightarrow S_i$ $(i=1,\ldots, p)$. Comme S est semi-simple, $\pi_i(S)$ est aussi semi-simple et il en résulte que ou bien $\pi_i(S) = S_i$, ou bien $\pi_i(S) = 0$. Soit alors

$$\Lambda = \{i \in \{1,\ldots, p\} | \pi_i(S) = S_i\}$$

On a évidemment $S \subset \prod_{i \in \Lambda} S_i$. Si $i \in \Lambda$, on peut écrire de manière unique

$$S = \mathrm{Ker}\ \pi_i \times \overline{S_i}$$

où $\overline{S}_i$ et S_i sont tous deux isomorphes à $\underline{s\ell}(2, \mathbb{K})$.
Introduisons dans Λ la relation d'équivalence suivante :

$$i \sim j \Longleftrightarrow \mathrm{Ker}\ \pi_i = \mathrm{Ker}\ \pi_j$$

et soit $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_d$ les éléments de l'ensemble quotient $\Lambda/\sim$. $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_d$ sont des sous-ensembles disjoints de Λ tels que $\Lambda = \Lambda_1 \cup \ldots \cup \Lambda_d$. Soit encore $s : \Lambda/\sim \longrightarrow \Lambda$ une section de la projection canonique $p : \Lambda \longrightarrow \Lambda/\sim$. Montrons que

$$S = \overline{S}_{s(\Lambda_1)} \times \ldots \times \overline{S}_{s(\Lambda_d)}$$

Il est clair que les idéaux $\overline{S}_{s(\Lambda_1)}, \ldots, \overline{S}_{s(\Lambda_d)}$ sont disjoints car si $\overline{S}_{s(\Lambda_i)} \cap \overline{S}_{s(\Lambda_j)} \neq 0$ on a nécessairement $\overline{S}_{s(\Lambda_i)} = \overline{S}_{s(\Lambda_j)}$ ce qui implique $\operatorname{Ker} \pi_{s(\Lambda_i)} = \operatorname{Ker} \pi_{s(\Lambda_j)}$ donc $s(\Lambda_i) = s(\Lambda_j)$ et $\Lambda_i = \Lambda_j$. Il suffit maintenant de montrer que $\dim S \leqslant \dim \overline{S}_{s(\Lambda_1)} + \ldots + \dim \overline{S}_{s(\Lambda_d)}$: considérons l'homomorphisme $\pi : S \longrightarrow S_{s(\Lambda_1)} \times \ldots \times S_{s(\Lambda_d)}$ défini par $\pi(\Delta) = \pi_{s(\Lambda_1)}(\Delta) + \ldots + \pi_{s(\Lambda_d)}(\Delta)$ pour $\Delta \in S$; cet homomorphisme est injectif car si $\pi(\Delta) = 0$ on a $\pi_{s(\Lambda_1)}(\Delta) = \ldots = \pi_{s(\Lambda_d)}(\Delta) = 0$ donc aussi $\pi_i(\Delta) = 0$ pour $i \in \Lambda$ ce qui implique $\Delta = 0$. L'assertion est démontrée.

En utilisant maintenant un automorphisme bien choisi de $\underline{n}^+$ on peut se ramener à la situation suivante : $\Lambda = \{1, \ldots, k\}$ où $k = \operatorname{Card}(\Lambda)$. Alors $(\Lambda_1, \ldots, \Lambda_d)$ est un élément λ_k de P_k.

On a vu plus haut que $S = \overline{S}_{s(\Lambda_1)} \times \ldots \times \overline{S}_{s(\Lambda_d)}$ et $S = \operatorname{Ker} \pi_{s(\Lambda_1)} \times \overline{S}_{s(\Lambda_1)} = \ldots = \operatorname{Ker} \pi_{s(\Lambda_d)} \times \overline{S}_{s(\Lambda_d)}$.
Il en résulte que $\overline{S}_{s(\Lambda_i)} = \bigcap\limits_{j \neq i} \operatorname{Ker} \pi_{s(\Lambda_j)}$ $i, j \in \{1, \ldots, d\}$ et par conséquent $\overline{S}_{s(\Lambda_i)} \subset \prod\limits_{j \in \Lambda_i} S_j$. Soit $\{H^i, X^i, Y^i\}$ une base de $\overline{S}_{s(\Lambda_i)}$ avec les relations de crochets

$$[H^i, X^i] = 2X^i \quad [H^i, Y^i] = -2Y^i \quad [X^i, Y^i] = H^i$$

Alors pour tout $j \in \Lambda_i$, $\{\pi_j(H^i), \pi_j(X^i), \pi_j(Y^i)\}$ est une base de S_j avec les relations habituelles. Puisque $\overline{S}_{s(\Lambda_i)} \subset \prod\limits_{j \in \Lambda_i} S_j$, il est clair que

$$\begin{cases} H^i = \sum\limits_{j \in \Lambda_i} \pi_j(H^i) \\ X^i = \sum\limits_{j \in \Lambda_i} \pi_j(X^i) \\ Y^i = \sum\limits_{j \in \Lambda_i} \pi_j(Y^i) \end{cases}$$

Considérons l'automorphisme Ω de $S_1 \oplus \ldots \oplus S_k$

défini par
$$\begin{cases} \Omega(\pi_j\,(H^i)) = H_j & i \in \{1,\ldots,d\} \\ \Omega(\pi_j\,(X^i)) = X_j & j \in \Lambda_i \\ \Omega(\pi_j\,(Y^i)) = Y_j & \end{cases}$$

Ω est un automorphisme intérieur de $S_1 \oplus \ldots \oplus S_k$ (Jacobson [14] Chap.9 théorème 5). Ω induit alors un automorphisme ω de $\underline{n}^+$ tel que :

$\omega\, \overline{S}_{s(\Lambda_i)}\, \omega^{-1} = S(\Lambda_i) \quad i \in \{1,\ldots, d\}$

$\omega\, S_j\, \omega^{-1} = S_j \quad j \in \{1,\ldots, p\}$

$\omega\, A_j\, \omega^{-1} = A_j \quad j \in \{1,\ldots, p+q\}$

On peut donc supposer maintenant que $S = S(\Lambda_1)\oplus\ldots\oplus S(\Lambda_d)$. Considérons la condition $Z(S \oplus B) = B$: on a évidemment $B \subset Z(S)$ et comme $\pi_i(S) = S_i$ pour tout $i \in \Lambda$ il vient $B \subset S_{k+1}\times\ldots\times S_p$; alors B est une sous-algèbre de Cartan de $S_{k+1}\times\ldots\times S_p$. En utilisant un automorphisme intérieur de $S_{k+1}\times\ldots\times S_p$ on peut conjuguer B et l'algèbre $\mathbb{K}H_{k+1} \oplus\ldots\oplus \mathbb{K}H_p$ ce qui permet de supposer $B = \mathbb{K}H_{k+1} \oplus\ldots\oplus \mathbb{K}H_p$. On a montré ainsi que $S \oplus B \oplus (A_1 \oplus\ldots\oplus A_{p+q}) \oplus \underline{n}^+$ est isomorphe à $S(\lambda_k) \oplus (A_1 \oplus\ldots\oplus A_{p+q}) \oplus \underline{n}^+$.

Passons à la troisième partie du théorème : soit $\lambda_k = (\Lambda_1,\ldots, \Lambda_d) \in P_k$ et $\mu_\ell = (M_1,\ldots, M_f) \in P_\ell$. Les algèbres de Lie $S(\lambda_k) \oplus (A_1 \oplus\ldots\oplus A_{p+q}) \oplus \underline{n}^+$ et $S(\mu_\ell) \oplus (A_1 \oplus\ldots\oplus A_{p+q}) \oplus \underline{n}^+$ sont isomorphes si et seulement si il existe un automorphisme θ de $\underline{n}^+$ tel que :

$$\theta(S_1 \oplus\ldots\oplus S_p)\theta^{-1} = S_1 \oplus\ldots\oplus S_p$$

$$\theta(A_1 \oplus\ldots\oplus A_{p+q})\theta^{-1} = A_1 \oplus\ldots\oplus A_{p+q}$$

$$\theta(S(\Lambda_1) \oplus\ldots\oplus S(\Lambda_d))\theta^{-1} = S(M_1) \oplus\ldots\oplus S(M_f)$$

$$\theta(\mathbb{K}H_{k+1} \oplus\ldots\oplus \mathbb{K}H_p)\theta^{-1} = \mathbb{K}H_{\ell+1} \oplus\ldots\oplus \mathbb{K}H_p$$

(Proposition 17). La dernière relation entraîne $k = \ell$, la troisième relation implique $d = f$ et l'existence d'une permutation τ de l'ensemble $\{1,\ldots, d\}$ telle que $\theta S(\Lambda_i)\theta^{-1} = S(M_{\tau(i)})$ $i \in \{1,\ldots, d\}$. A cause de la première relation il existe aussi une permutation σ de l'ensemble $\{1,\ldots, k\}$ telle que $\theta S_i\theta^{-1} = S_{\sigma(i)}$ $i \in \{1,\ldots, k\}$. Montrons maintenant que

$$\sigma(\Lambda_i) = M_{\tau(i)} \qquad i \in \{1,\ldots, d\}$$

on a une base $\{\sum_{j\in\Lambda_i} H_j, \sum_{j\in\Lambda_i} X_j, \sum_{j\in\Lambda_i} Y_j\}$ de $S(\Lambda_i)$ et par suite $\{\sum_{j\in\Lambda_i} \theta H_j\theta^{-1}, \sum_{j\in\Lambda_i} \theta X_j\theta^{-1}, \sum_{j\in\Lambda_i} \theta Y_j\theta^{-1}\}$ est une base de $\theta S(\Lambda_i)\theta^{-1} = S(M_{\tau(i)})$. Comme $\{\theta H_j\theta^{-1}, \theta X_j\theta^{-1}, \theta Y_j\theta^{-1}\}$ est une base de $S_{\sigma(j)}$, il est clair que $\sigma(\Lambda_i) = M_{\tau(i)}$. En résumé, dans P_k, deux partitions $(\Lambda_1,\ldots,\Lambda_d)$ et $(M_1,\ldots, M_d)$ engendrent des algèbres de Lie complètes isomorphes si et seulement si il existe une permutation σ de l'ensemble $\{1,\ldots, k\}$ et une permutation τ de l'ensemble $\{1,\ldots, d\}$ telles que $\sigma(\Lambda_i) = M_{\tau(i)}$ $i \in \{1,\ldots, d\}$. Il est maintenant facile de calculer le nombre de classes d'isomorphisme d'algèbres de Lie complètes faiblement irréductibles dont le plus grand idéal nilpotent est isomorphe à $\underline{n}^+$: on trouve 2^p éléments.

BIBLIOGRAPHIE

[1] D. AMIGUET, Extensions inessentielles d'algèbres de Lie à noyau nilpotent, Thèse, Lausanne, 1971.

[2] J. BOND, Lie algebras of genus one and genus two, Pacific J. Math., 37, 3, 1971, p. 591-616.

[3] A. BOREŁ et G.D. MOSTOW, On semi-simple automorphisms of Lie algebras, Annals of Math., 61, 3, 1955, p. 389-405.

[4] A. BOREL et J. DE SIEBENTHAL, Les sous-groupes fermés de rang maximum des groupes de Lie clos, Commentarri Math. Helvetici, 23, 3, 1949, p. 200-221.

[5] N. BOURBAKI, Groupes et algèbres de Lie, Chapitre 1, Paris, 1960.

[6] N. BOURBAKI, Groupes et algèbres de Lie, Chapitre 4, 5, 6, Paris, 1968.

[7] C. CHEVALLEY, Théorie des groupes de Lie, Paris, 1968.

[8] J. DIXMIER, Sur les représentations unitaires des groupes de Lie nilpotents III, Canad. J. Math., 10, 1958, p. 321-348.

[9] J. DOZIAS, Sur les dérivations des algèbres de Lie, Comptes Rendus, Paris, 259, 1964, p. 2748-2750.

[10] E.B. DYNKIN, Semi-simple subalgebras of semi-simple Lie algebras, Amer. Math. Soc. Transl., Ser 2, 6, p. 111-244.

[11] G. FAVRE, Système de poids sur une algèbre de Lie nilpotente, Thèse, Lausanne, 1972.

[12] G. HOCHSCHILD, Semi-simple algebras and generalized derivations, Amer. J. Math., 64, 1942, p. 677-694.

[13] N. JACOBSON, A note on automorphisms and derivations of Lie algebras, Proc. Amer. Math. Soc., 6, 1955, p. 281 - 283.

[14] N. JACOBSON, Lie algebras, Interscience, 1966.

[15] G. LEGER, Derivations of Lie algebras III, Duke Math. J., 30, 1963, p. 637-645.

[16] G. LEGER et S. TOGO, Characteristically nilpotent Lie algebras, Duke Math. J., 26, 1959, p. 623-628.

[17] E. LUKS, Lie algebra with only inner derivations need not be complete, J. of Algebra, 15, 1970, p. 280-282.

[18] A.I. MALCEV, Solvable Lie algebras, Amer. Math. Soc. Transl., 9, p.229-261.

[19] V.V. MOROSOV, Classification of nilpotent Lie algebras of sixth order, Isv. Vyss Ucebn Zaved Mathematika, A, 190, 1958, p. 161-171.

[20] G.D. MOSTOW, Fully reducible subgroups of algebraic groups, Amer. J. Math., 78, 1956, p. 200-221.

[21] T. SATO, On derivations of nilpotent Lie algebras, Tôhoku Math. J., 17, 1965, p. 244-249.

[22] T. SATO, The derivations of the Lie algebras, Tôhoku Math. J., 23, 1971, p. 21-36.

[23] E. SCHENKMAN, On the derivation algebra and the holomorph of a nilpotent algebra, Mem. Amer. Math. Soc., 14, 1955, p. 15-22.

[24] S. TOGO, On splittable Linear Lie algebras, J. Sci. Hiroshima Univ., A, 18, 1955, p. 289-306.

[25] S. TOGO, On the derivation algebras of Lie algebras, Canad. J. Math., 13, 1961, p. 201-216.

[26] S. TOGO, Derivations of Lie algebras, J. Sci. Hiroshima Univ., A-I, 28, 1964, p. 133-158.

[27] S. TOGO, Lie algebras which have few derivations, J. Sci. Hiroshima Univ., A-I, 29, 1965, p. 29-41.

[28] S. TOGO, Outer derivations of Lie algebras, Transl. Amer. Math. Soc., 128, 1967, p. 264-276.

[29] S. TOGO, Note on outer derivations of Lie algebras, J. Sci. Hiroshima Univ., A-I, 33, 1969, p. 29-40.

CURRICULUM VITAE

FAVRE
Michel
Originaire des Ormonts-Dessus
Né le 3o septembre 1944
à Lausanne
Célibataire

Ecoles fréquentées

1951 - 1956:	Ecole primaire à Lausanne et au Sépey
1956 - 1960:	Ecole primaire supérieure au Sépey puis à Lausanne
1960 - 1961:	Collège scientifique cantonal à Lausanne
1961 - 1963:	Gymnase scientifique cantonal à Lausanne
1963 - 1967:	Faculté des Sciences à Lausanne, section Mathématiques

Diplômes obtenus

1963:	Baccalauréat ès sciences
1968:	Licence ès sciences mathématiques
1972:	Doctorat ès sciences techniques de l'EPFL

Emplois exercés

1965 - 1968:	Assistant du professeur de Siebenthal à la chaire de géométrie de l'EPUL
1967 - 1968:	Assistant du professeur Vincent à la chaire d'algèbre de la Faculté des Sciences à Lausanne
1968 - 1972:	Assistant diplômé du professeur de Siebenthal au département de mathématiques de l'EPFL
1972 - 1973:	Chargé de cours au département de mathématiques de l'EPFL
1973 - 1974:	Chargé de cours à l'EPFL et chef de travaux au séminaire de géométrie de l'Université de Neuchâtel