

CONTRIBUTION À L'ÉTUDE DU COMPORTEMENT STATIQUE DES PONTS À DEUX POUTRES-CAISSONS

THÈSE N° 130 (1971)

PRÉSENTÉE AU DÉPARTEMENT DE GÉNIE CIVIL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

POUR L'OBTENTION DU GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES TECHNIQUES

PAR

GÉRALD RAYMOND COENDOZ

Ingénieur civil EPFL
originaire de Mollens

acceptée sur proposition du jury :

Prof. F. Panchaud, rapporteur
Prof. M. H. Derron, corapporteur
Prof. H. Bachmann, corapporteur
G. Roubakine, corapporteur

PRINCIPALES NOTATIONS

b	largeur d'un caisson
C	moment d'inertie de torsion d'un caisson
c	demi-largeur de la dalle entre caissons
D	coefficient de raideur d'une plaque
d	épaisseur d'une paroi
E	module d'élasticité (module d'Young)
E_t	module d'élasticité transversal
e	excentricité de la charge par rapport à l'axe d'un caisson
F_i	effort intérieur dans le système de plaques-membranes
G	module d'élasticité tangentiel (module de cisaillement)
h	hauteur d'une paroi
h_c	distance du centre de torsion d'un caisson au feuillet moyen de la dalle supérieure
I_d	moment d'inertie de la dalle : $I_d = d^3/12 (1-\mu^2)$
I_t	moment d'inertie de torsion d'une paroi
I_y	moment d'inertie relatif à la flexion dans le plan XOY
I_z	moment d'inertie relatif à la flexion dans le plan XOZ
k_{s1}, k_{s2}	facteurs de raideurs relatives
k_{a1}, k_{a2}	
L	longueur ou portée
l	longueur d'un tronçon longitudinal
M_y, M_z	moments de flexion dans les poutres, produisant des déplacements dans les plans XOY et XOZ
M_t	moment de torsion dans une poutre
m	moment de flexion transversal
m_e	moment d'encastrement de la dalle dans un caisson
m_x, m_y	moments de flexion dans une plaque

II

m_t	moment de torsion dans une paroi
m_i, m_s	moments de flexion transversaux aux bords d'une paroi
N	effort normal longitudinal dans une paroi
n	effort normal transversal à l'axe du pont
n_x, n_y	efforts normaux dans une membrane
P	charge concentrée
P_i	force ou moment extérieur chargeant la structure
p	charge linéaire, charge par unité de longueur
Q	effort tranchant dans une poutre
q	effort tranchant transversal à l'axe du pont
q_x, q_y	efforts tranchants dans une plaque
q_i, q_s	efforts tranchants aux bords d'une paroi
R	réaction d'appui
S	facteur géométrique de rigidité transversale d'un caisson
t	effort tangentiel dans une membrane
t_i, t_s	efforts rasants aux bords d'une paroi
u, v, w	déplacements dans le système des axes Ox, Oy et Oz
u_i, u_s	translations longitudinales des bords d'une paroi
v_i, v_s	translations transversales des bords d'une paroi
W_d	flèche de la demi-dalle entre caissons
X, Y, Z	coordonnées générales
X_i	translations et rotations du système de plaques-membranes
x, y, z	coordonnées locales liées à chaque paroi
α	rotation transversale due à la déformation du caisson
α_i, α_s	rotations transversales des bords d'une paroi

III

γ	déformation angulaire due aux contraintes tangentielles
δ	rotation transversale de flexion de la demi-dalle entre caissons
ϵ_x, ϵ_y	allongements spécifiques
μ	coefficient de Poisson
ξ	abscisse relative
ρ_p, ρ_P	coefficients de répartition transversale
σ_x, σ_y	contraintes normales
τ	contrainte tangentielle
Φ_i	translations et rotations des parois du système de plaques-membranes
ϕ	rotation d'une section autour d'un axe longitudinal
Ω	aire de section

1. INTRODUCTION

1.1 BUT DE L'ETUDE

L'objet de notre étude est le comportement statique, à l'état de service, des ponts dont le tablier est supporté par deux poutres-caissons. Il s'agit en principe de ponts en béton, dont le profil est composé d'éléments relativement épais. Ces éléments sont la dalle-tablier, les parois latérales des caissons (âmes) et leur paroi inférieure, ou dalles inférieures.

L'étude du profil formé de deux caissons reliés par une dalle présente un intérêt pratique, du fait que ce type de profil est assez courant. En outre, de par son caractère mixte, en partie fermé, en partie ouvert, associé à une raideur transversale conférée uniquement par la rigidité de flexion des parois, cette forme de section se prête particulièrement bien à l'analyse de phénomènes que l'on retrouve dans tous les tabliers de pont non raidis par des entretoises, ce qui donne un intérêt plus général à notre sujet.

Avant d'entreprendre la présente étude, nous avons analysé sur des modèles réduits la distribution des efforts dans deux ponts à profil ouvert non entretoisés, l'un à deux poutres, l'autre à quatre poutres. Les résultats obtenus qui ne sont pas présentés ici, ont mis en évidence la parenté que nous évoquons.

Le but recherché est d'élaborer des méthodes de calcul bien adaptées au type de construction qui nous occupe. Il s'agit d'une part de "méthodes d'avant-projet", permettant d'obtenir très rapidement les valeurs approximatives des efforts principaux, d'autre part, de méthodes plus raffinées, fournissant les meilleurs résultats possible avec un volume de travail raisonnable.

Les méthodes d'avant-projet doivent permettre d'évaluer l'intensité des efforts transversaux maximums et les répercussions des déformations du profil sur la répartition des efforts longitudinaux, afin d'orienter le choix des dimensions des divers éléments du profil vers une solution équilibrée et économique et de juger de l'opportunité de raidir la section. On cherche donc un modèle de calcul faisant apparaître les paramètres influençant ces efforts principaux.

Dans un calcul plus exact, on désire déterminer les contraintes de manière détaillée, en ne tenant compte, cependant, que des efforts et déformations qui jouent un rôle sensible. Mais on ne peut choisir a priori le modèle de calcul adéquat, en désignant d'emblée les grandeurs qui peuvent être négligées. Nous avons donc estimé nécessaire une justification par des essais sur maquette, ainsi que par des analyses théoriques adaptées aux proportions géométriques des éléments que l'on peut rencontrer dans les projets.

1.2 PLAN DE L'ETUDE

Notre étude commence par un bref exposé des méthodes de calcul des ponts sous charges asymétriques ainsi que des diverses théories des structures plissées, qui sont susceptibles d'être appliquées au calcul des ponts. On est amené à conclure qu'aucune des méthodes citées n'est particulièrement adaptée à l'étude des ponts à deux poutres-caissons; leur utilisation conduit à des résultats insuffisamment précis ou nécessite de longs calculs. Il est donc utile de rechercher pour le calcul un modèle schématisant le plus fidèlement possible les efforts et les déformations réels, afin d'obtenir de bons résultats sans augmenter inutilement le nombre d'inconnues.

L'étude proprement dite commence par la définition de l'importance relative des efforts à considérer. Deux modèles sont alors proposés; dans le premier, on ne prend en compte

que les efforts principaux, tandis que dans le second, on tient compte de tous les efforts et déformations ayant une certaine importance.

Pour le premier modèle, qui sert de base à une méthode de calcul très simple, l'examen des déplacements transversaux, notamment dans la maquette, permet de distinguer immédiatement les principales déformations de la structure: sous l'action d'une charge excentrée, les caissons subissent une flexion et une torsion et le champ de la dalle situé entre les caissons est fortement fléchi transversalement. En première approximation, les déformations transversales des caissons sont en revanche négligeables. On peut donc adopter ici le schéma classique de deux poutres reliées par une dalle, en l'adaptant toutefois à la forme particulière du profil, c'est-à-dire en tenant compte du fait que la largeur des poutres n'est pas négligeable par rapport à leur entr'axes et que la dalle est excentrée par rapport au centre de torsion des poutres.

Dans le second modèle de calcul, destiné à l'analyse des efforts plus approfondie, il est nécessaire de tenir compte des déformations des sections aussi bien hors de leur plan, c'est le gauchissement, que dans leur plan, ce que nous appellerons distorsion. Ces déformations découlent des efforts de membrane et de plaque sollicitant les parois constituant le profil. Nous avons donc choisi un modèle physique constitué par un assemblage de plaques reliées rigidement entre elles aux arêtes. Il s'agit par conséquent d'une adaptation de la théorie des structures plissées à un problème particulier. Le modèle physique ainsi défini est utilisé dans deux méthodes de calcul: la "méthode des parois" et la "méthode des tronçons longitudinaux".

Au premier modèle correspond la "méthode de la coupure médiane", exposée dans le chapitre 4. Elle consiste à déterminer les efforts dans une coupure longitudinale dans l'axe du pont, qui rend le système statiquement déterminé. Au lieu de la distribution exacte le long de cette coupure, on admet pour

ces efforts une distribution simplifiée et on néglige certains d'entre eux. On obtient alors des formules simples, donnant les principaux efforts, où apparaissent les paramètres géométriques essentiels.

Le chapitre 5 concerne la "méthode des parois" suivant laquelle les contraintes dans les plaques-membranes constituant la structure sont déterminées à partir des charges (appliquées aux arêtes du profil) et des efforts intérieurs agissant le long des arêtes. La distribution longitudinale de ces charges et de ces efforts est exprimée par des séries trigonométriques.

La seconde méthode basée sur le même modèle physique des parois ("méthode des segments longitudinaux"), n'est pas développée entièrement dans le présent travail. Au chapitre 6, on donne les éléments essentiels du calcul, qui consiste à déterminer les contraintes dans une succession de segments longitudinaux de la structure. Dans chaque segment, la distribution des efforts intérieurs le long des arêtes est supposée linéaire.

Le chapitre 7 contient la description du modèle réduit en plexiglas et des mesures effectuées. L'auscultation du modèle, pratiquée principalement au moyen de jauges tensoélectriques, est complétée par la mesure des courbures de la dalle et des déplacements verticaux et horizontaux, ainsi que des réactions d'appui.

Les résultats des essais font l'objet du chapitre 8.

Les méthodes proposées sont ensuite appliquées au cas étudié expérimentalement sur modèle et les résultats des calculs sont confrontés avec ceux de l'essai.

Les conclusions, réunies dans le chapitre 11, concernent l'influence des rapports entre les dimensions des différents éléments de la structure sur la distribution des efforts, la précision des résultats obtenus par les méthodes de calcul proposées ainsi que les possibilités d'adaptations de ces méthodes à des types de ponts analogues.

2. EXPOSE SUCCINT DE QUELQUES THEORIES ET METHODES DE CALCUL EXISTANTES

Le problème du calcul des efforts dans un tablier de pont à deux poutres-caissons peut être abordé de différentes manières. Si l'on admet qu'un tel tablier est formé de deux poutres supportant une dalle, il s'agit d'une question de répartition transversale des charges. Si, en revanche, on veut analyser le mode de sollicitation de l'ensemble du profil, il faut faire appel à la théorie de la "torsion fléchie". Si l'on considère que la structure est constituée d'un assemblage d'éléments plans relativement minces, on peut la traiter comme une structure plissée. Dans ce chapitre, les diverses théories correspondantes seront brièvement décrites et commentées, puis on exposera quelques études consacrées aux problèmes particuliers des poutres-caissons.

2.1 METHODES DE CALCUL DE LA REPARTITION DES CHARGES ENTRE POUTRES SOLIDAIRES

La question de la répartition transversale des charges entre les éléments porteurs longitudinaux des ponts a déjà donné lieu à de très nombreuses études, en particulier lorsqu'il s'agit de profils transversaux ouverts raidis par des entretoises. Ces structures sont alors traitées soit comme des grilles, soit comme des dalles orthotropes; le résultat du calcul est alors d'autant plus proche de la réalité que le nombre de poutres est grand.

La méthode de Guyon-Massonnet, et des méthodes analogues, sont aujourd'hui couramment utilisées. L'exposé complet et détaillé de la méthode, de ses récents développements et de ses

diverses applications est l'objet d'un ouvrage de R. Bares et Ch. Massonnet, paru en 1966 {2}*.

Le principe essentiel de la méthode, dû à Guyon {15}, consiste à remplacer le grillage formé par les poutres maîtresses et les entretoises, ou la dalle considérée comme telle, par une plaque anisotrope de même portée et de même largeur. Les efforts dans la plaque équivalente étant connus, on revient au système en grillage de poutres.

Dans le schéma de la structure en grille, les éléments transversaux, entretoises ou dalle sont supposés avoir une inertie constante d'un axe de poutre à l'autre. Dans le type de pont qui nous occupe, l'inertie de la dalle est variable, tant pour la flexion que pour la torsion; en effet, on doit considérer dans le calcul que la dalle s'étend d'un axe de caisson à l'autre, alors que seule la partie médiane, située entre les caissons, est flexible. Une seconde cause d'imprécision réside dans le fait que le centre de torsion des caissons se trouve considérablement en-dessous du feuillet moyen de la dalle. Les rotations des poutres correspondent donc à des translations transversales non négligeables au niveau de la dalle. Comme celle-ci est très rigide dans son plan, ce sont les centres des caissons qui se déplacent; il y a ainsi une flexion horizontale des poutres.

L'application de la méthode de Guyon-Massonnet au calcul des ponts à deux poutres-caissons ne peut donc conduire à des résultats convenables.

* Les numéros entre accolades se rapportent à la bibliographie donnée à la fin de l'étude.

Proposée en 1959, la méthode de Trost a été mise à la disposition des praticiens dans un ouvrage contenant également des tables numériques facilitant son emploi {35}.

Dans le grillage formé par les poutres et les entretoises, Trost considère la flexion et la torsion des poutres, la flexion des entretoises, mais pas leur torsion. En revanche, il tient compte de la flexion transversale de la dalle. Afin de pouvoir combiner dans le calcul l'effet répartiteur de la dalle avec celui des entretoises, on remplace ces dernières par une dalle fictive; les poutres sont ainsi solidarisiées par deux liaisons continues, qui sont fournies par la dalle réelle et la dalle fictive. Les efforts dans la structure de remplacement ainsi constituée sont déterminés à partir du développement des charges en séries trigonométriques.

Les limites d'application de la méthode de Trost dans le cas des poutres-caissons sont les mêmes que celles qui ont été énoncées pour la méthode de Guyon-Massonnet, pour les mêmes raisons.

Bieger {4} a traité le problème du pont à deux poutres en tenant compte du fait que seule la partie de la dalle comprise entre les poutres subit des déformations transversales. En revanche, une excentricité de la dalle par rapport au centre de torsion des poutres n'est pas prise en considération. Le calcul s'effectue par développement des charges, des efforts et des déformations en séries de Fourier.

Pour l'étude du projet d'un pont à deux poutres-caissons, Mathivat {25} a utilisé un modèle physique analogue à celui de Bieger. Il a notamment adopté une méthode approchée, consistant à admettre, le long du pont, une distribution parabolique des efforts transversaux dans la dalle.

Les calculs de Bieger et de Mathivat donnent certainement des résultats acceptables, contrairement aux méthodes citées plus haut, la flexion de la dalle entre les caissons étant ici représentée correctement.

Dans les chapitres 3 et 4 ci-après, on perfectionnera encore le modèle de calcul et l'on établira des solutions exactes ainsi que des solutions approchées appropriées.

2.2 THEORIE DE LA TORSION FLECHIE

La théorie de la torsion fléchie s'applique aux profils ouverts ou fermés à parois minces. Elle est due à Vlassov, qui l'a publiée sous une forme théorique {36}, et elle a été reprise par divers auteurs en vue des applications (voir par exemple Kollbrunner et Basler {18}).

Deux conditions fondamentales servent de base au développement de la théorie:

- La section est parfaitement indéformable transversalement
- l'épaisseur des parois est très petite par rapport aux autres dimensions du profil.

En outre, on admet une hypothèse qui simplifie considérablement le problème: la déformation angulaire due à la contrainte tangentielle est supposée nulle. Les côtés d'un élément rectangulaire restent donc orthogonaux après déformation.

Les expressions des contraintes en fonction des efforts ont la même forme que celles qui se rapportent à la flexion. Toutefois, il faut introduire le bimoment M_{ω} , effort résultant des contraintes normales dues au gauchissement de la section. Les caractéristiques géométriques des sections intervenant alors sont les moments statiques sectoriels et les moment d'inertie sectoriels.

Dans le problème qui nous occupe, la théorie de la torsion fléchie n'est guère applicable, car en fait, la section subit toujours des déformations dans son plan; mais elle peut être négligées si elles sont assez petites en regard des autres déformations. C'est en général le cas dans les ponts métalliques, des entretoises, des raidissements et des contreventements conférant au profil une forte rigidité transversale. Konishi, Komatsu et Fukumoto {20}, par exemple, ont étudié l'application du calcul en torsion fléchie aux profils à deux caissons en acier. Dans les ponts en béton cependant, les déformations transversales ne seraient négligeables que dans les cas, très rares, où le tablier serait raidi par des entretoises suffisamment rapprochées.

Kollbrunner et Hajdin {19} ont étendu la théorie de la torsion fléchie au cas où les déformations élastiques des sections dans leur plan ne sont plus négligeables, en se limitant cependant à l'étude des profils formés d'éléments plans. Cette théorie concerne donc les structures plissées et sera examinée ci-après.

2.3 THEORIES DES STRUCTURES PLISSEES

La structure plissée est une construction de l'espace qui, formée d'éléments plans minces (parois), doit sa résistance et sa rigidité à la forme polygonale de sa section transversale. Un modèle physique très simple, dans lequel on suppose que les parois sont articulées entre elles aux arêtes, suffit à faire apparaître les efforts essentiels propres à ce type de structure.

Dans la réalité cependant, les parois sont liées rigidement les unes aux autres, et les déformations du profil dans son plan ne se font pas librement. Des flexions transversales prennent donc naissance et il faut assurer une résistance de

plaque, à moins de raidir le profil par des diaphragmes. Dans ce dernier cas, la section est considérée comme parfaitement indéformable et le calcul peut s'effectuer à l'aide de la théorie de la torsion fléchie.

Pour le calcul tenant compte de la flexion transversale, on dispose de différentes méthodes, dans lesquelles les parois sont traitées suivant la théorie des poutres, en admettant une distribution des contraintes normales linéaire et en négligeant les déformations d'effort tranchant. Parmi les efforts de plaque, seuls les moments fléchissants transversaux sont pris en compte, la paroi étant ainsi considérée transversalement comme une suite de poutres. Ces méthodes classiques sont exposées dans les ouvrages de Girkmann {13}, Born {5}, Kollbrunner et Basler {18}, etc. De nombreuses études sur maquette ont également été effectuées (voir, par exemple, {26}).

Les applications de cette théorie classique, avec différents modes de résolution, sont nombreuses (voir, par exemple, {3} et {28}). Elles concernent également les voûtes autoportantes {1} et les tabliers de ponts {1}, {34}.

En fait, aucun effort ni déformation ne peut être négligé a priori, et la distribution des contraintes dans chaque paroi découle de la théorie des membranes, d'une part, et de la théorie des plaques d'autre part. Une résolution des équations aux dérivées partielles des membranes et des plaques, compte tenu des conditions aux arêtes et aux appuis de chaque paroi, a été donnée par Goldberg et Leve {24}. Les distributions des charges, des efforts et des déformations sont exprimées en long par des séries de Fourier et transversalement par des sommes de fonctions hyperboliques. Les calculs correspondants sont longs, car pour chaque terme des séries de Fourier les contraintes sont définies par un grand nombre de paramètres.

On a donc cherché des modèles physiques simplifiés, mais plus exacts que le modèle classique décrit plus haut. Chu et Pinjarkar {10}, par exemple, ont ajouté l'effet des déformations dues aux états de cisaillement pur créés dans la parois par les efforts rasants aux arêtes; pour la résolution, toutes les grandeurs sont développées en séries de Fourier le long de la structure. Lo et Scordelis {24}, en revanche, ne tiennent pas compte du cisaillement pur, mais introduisent les déformations d'effort tranchant des parois, toujours considérées longitudinalement comme des poutres, ainsi que les déformations dues à l'effort normal transversal. Pour le calcul, la structure est subdivisée en segments longitudinaux, dans lesquels les efforts et les déformations sont représentés par des polynômes simples. Dans le modèle proposé par Kollbrunner et Hajdin {19}, c'est la torsion des parois qui est prise en compte, celles-ci étant considérées comme des poutres rectangulaires, mais vu que ce modèle est conçu à partir de la théorie de la torsion fléchie, les déformations relatives aux contraintes tangentielles ainsi qu'à l'effort normal transversal y sont négligées. Comme dans la théorie de la torsion fléchie, le calcul consiste à intégrer le système d'équations différentielles régissant la répartition longitudinale des efforts.

La variation des efforts dans le sens longitudinal et transversal peut être étudiée par division des parois en "éléments finis". Cette technique d'analyse fait évidemment intervenir un très grand nombre d'inconnues et nécessite par conséquent un gros volume de calcul. Pour diminuer le nombre d'éléments, Cheung et Ghali {8},{9} ont adopté une subdivision en largeur seulement, créant des "bandes finies". Cependant, pour obtenir une image suffisamment exacte des contraintes, il faut choisir dans chaque paroi un nombre de bandes conduisant à un calcul tout de même important. Pour terminer, il faut mentionner un autre type de discrétisation: celui qui consiste à remplacer les parois par un système de barres entrecroisées, comme l'ont proposé, entre autres, Karim et Schnobrich {17}. Dans

un tel modèle de calcul, le nombre d'inconnues est du même ordre de grandeur que s'il s'agit d'éléments finis.

En considérant les résultats de notre essai sur modèle (voir chap. 7 et 8), on conclut qu'aucune des méthodes de calcul des structures plissées n'est parfaitement appropriée au cas des ponts à deux poutres-caissons. On proposera, aux chapitres 5 et 6, deux méthodes basées sur un modèle physique particulier (voir chap.3).

2.4 CALCUL DES POUTRES-CAISSONS

La construction de ponts en béton à profil en caisson a nécessité un perfectionnement des méthodes de calcul. En effet, si pour un caisson métallique la minceur des parois et l'indéformabilité transversale de la section (assurée par des entretoises, raidisseurs, contreventements, etc.) permet en pratique l'application de la théorie de la torsion uniforme des profils creux à parois minces (cf. formule de Bredt {18}), il n'en est pas de même pour un caisson en béton. Dans ce cas, en effet, les épaisseurs ne sont plus négligeables et la section n'est, en général pas raidie, puisqu'elle a d'elle-même une certaine rigidité transversale. Dans {22}, Kristek a passé en revue différents problèmes relatifs aux poutres-caissons en béton.

L'influence de la déformation transversale du profil a été étudiée, entre autres, par Muller {27}, qui a appliqué la théorie des structures plissées classique. Selon ce calcul, la distribution des contraintes normales le long du caisson est régie par une équation différentielle du quatrième ordre. Wright, Abdel-Samad et Robinson {41} ont mis en évidence l'analogie existant entre cette équation et celle des poutres sur sol élastique. Dabrowski {11} a fait ressortir le fait que dans un profil fermé sollicité en torsion, la déformation transversale de la section est la principale cause de l'apparition de contraintes normales (torsion fléchie). Partant des mêmes considé-

rations et utilisant l'analogie de la poutre sur sol élastique, Campbell-Allen et Wedgwood {7} ont discuté la nécessité de disposer des diaphragmes pour rigidifier le profil. Pour traiter le cas des caissons à hauteur variable, Kristek {21} a développé une méthode de calcul en deux étapes; dans la première, on suppose la section indéformable et dans la seconde, on détermine l'effet de la déformation transversale. Les systèmes différentiels correspondants étant d'ordre élevé, le calcul s'effectue par approximation à l'aide de polynômes.

3. MODELES MATHEMATIQUES PROPOSES

Deux modèles mathématiques différents servent de base aux méthodes de calcul proposées ici.

Dans le premier, les déformations et les efforts dans les caissons sont considérés de manière globale; il en résulte une méthode de calcul relativement simple ("méthode de la coupure médiane").

Dans le second, on introduit les déformations et efforts locaux dans les caissons et dans la dalle. La "méthode des parois" et la "méthode des tronçons longitudinaux" correspondent à ce modèle plus complet.

3.1 DEFINITION DES EFFORTS INTERIEURS ET DES DEFORMATIONS

3.1.1 EFFORTS DANS UNE SECTION

Les efforts appliqués à une section de caisson complète sont désignés de la manière suivante:

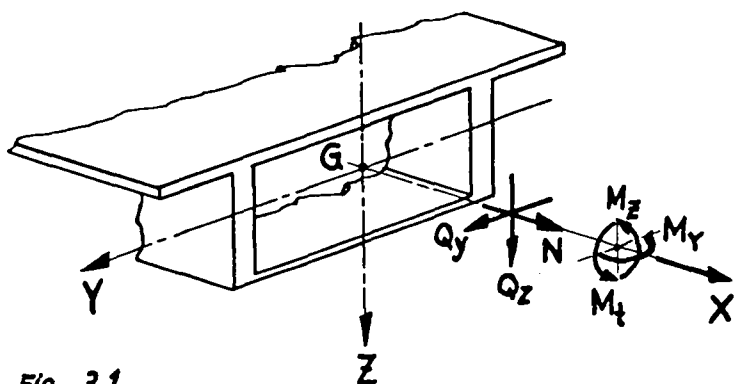


Fig. 3.1

M_y	moment de flexion
M_z	moment de flexion.
M_t	moment de torsion
N	effort normal
Q_y	effort tranchant
Q_z	effort tranchant

Ces efforts sont rapportés aux axes X, Y et Z passant par le centre de gravité de la section, comme le montre la figure 3.1 dans laquelle ils sont représentés avec le sens positif.

3.1.2 EFFORTS SUR UN ELEMENT DE PAROI OU DE DALLE

Les efforts locaux, tant longitudinaux que transversaux, sont d'une part des efforts de membrane, d'autre part des efforts de plaque. Ils sont définis dans le système des coordonnées locales x, y et z . L'axe Ox est parallèle à l'axe des X des coordonnées globales. L'axe transversal Oy est contenu dans le plan moyen de la paroi, tandis que Oz est normal à celui-ci. L'angle α compris entre les directions positives de Y et de y est compté positivement de OY vers OZ.

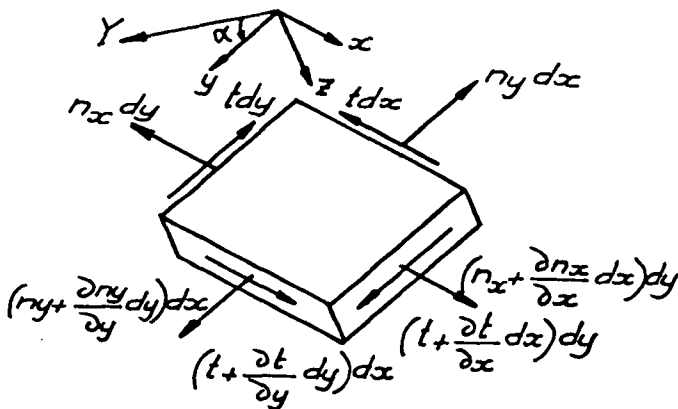


Fig.3.2

Les efforts de membrane sont représentés dans la figure ci-contre:

- n_x effort normal
- n_y effort normal
- t effort tangentiel

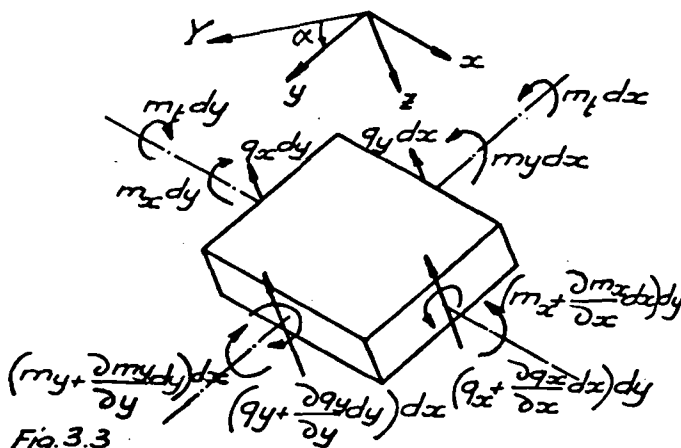


Fig.3.3

La figure 3.3. donne les efforts de plaque:

- m_x moment de flexion
- m_y moment de flexion
- m_t moment de torsion
- q_x effort tranchant
- q_y effort tranchant

3.1.3 DEFORMATIONS DANS UNE SECTION

Dans chaque section, on distingue trois catégories de déformations différentes:

- a) Les déformations d'ensemble, conservant la planéité et la forme de la section, qui sont les trois translations parallèles aux axes X, Y et Z et les trois rotations autour de ces mêmes axes.
- b) Le gauchissement de la section, c'est-à-dire un déplacement relatif des points de la section, parallèlement à l'axe longitudinal X (voir fig. 3.4 a).
- c) Les déformations de la section dans son plan, y compris les déplacements relatifs des noeuds du cadre formé par le profil. Dans la suite, nous appellerons ces déformations les distorsions du profil (voir fig. 3.4 b).

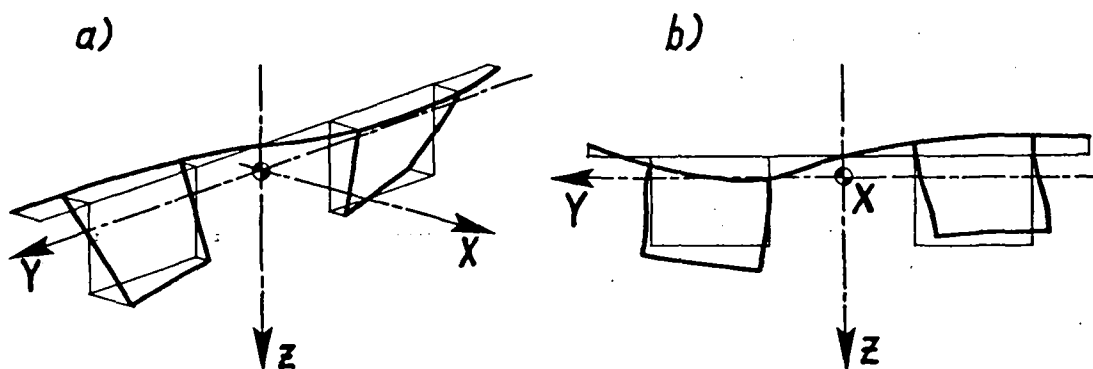


Fig. 3.4.

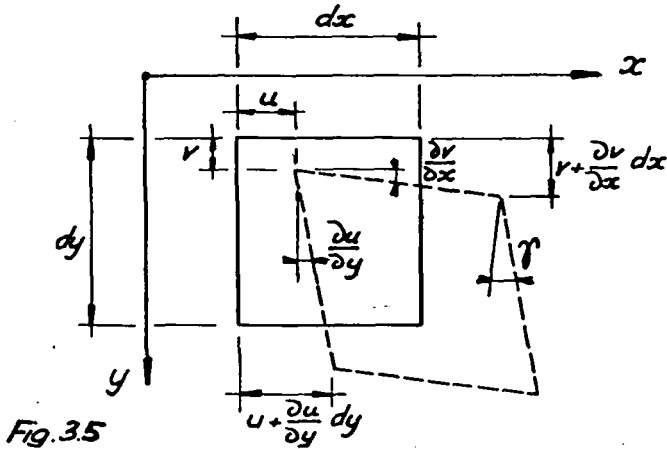
3.1.4 DEFORMATIONS D'UN ELEMENT DE PAROI OU DE DALLE

Chaque élément subit des déformations de membrane et des déformations de plaque.

Si, pour un point quelconque du feuillet moyen d'un élément, on désigne par u le déplacement longitudinal suivant l'axe x et par v et w les déplacements dans le plan de la

section, suivant les axes y et z , on a les grandeurs suivantes:

a) déformations de membrane (voir fig.3.5):



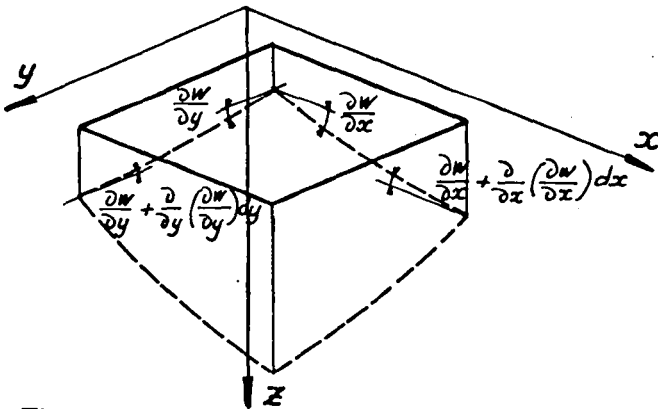
allongement
suivant x : $\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$

allongement
suivant y : $\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}$

déformation de
cisaillement : $\gamma = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$

Fig. 3.5

b) déformations de plaque (voir fig.3.6):



courbure suivant x : $-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$

courbure suivant y : $-\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$

torsion : $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$

Fig. 3.6

3.2 RAPPEL DE LA THEORIE DES POUTRES, DES MEMBRANES ET DES PLAQUES

Nous récapitulons ici les relations entre les efforts et les déformations, telles qu'elles sont établies dans la théorie de l'élasticité à deux dimensions, la théorie des plaques et la théorie classique des poutres.

3.2.1 RELATIONS ENTRE LES EFFORTS GLOBAUX ET LES DEFORMATIONS

Soient U , V et W les translations des sections parallèlement aux axes X , Y et Z , et ϕ la rotation autour de l'axe longitudinal. La théorie de la flexion des poutres et la théorie de la torsion selon Saint-Venant fournissent les relations suivantes:

$$(3.1) \quad \begin{aligned} M_y &= -EI_y \cdot \frac{d^2V}{dX^2} & N &= E\Omega \cdot \frac{dU}{dX} \\ M_z &= -EI_z \cdot \frac{d^2W}{dX^2} & M_t &= GC \cdot \frac{d\phi}{dX} \end{aligned}$$

Rappelons que ces théories ne conduisent à des résultats suffisamment exacts que dans les conditions suivantes:

- a) Les dimensions de la section sont petites par rapport à la longueur de la pièce
- b) La section transversale conserve sa forme, c'est-à-dire que les déformations qu'il a été convenu d'appeler distorsions sont nulles.
- c) Le moment de torsion est constant sur la longueur de la pièce.

Nous verrons plus loin (cf.7.1.) que dans les ponts qui font l'objet de notre étude, ces conditions ne sont remplies qu'approximativement.

3.2.2 RELATIONS ENTRE LES EFFORTS ET LES DEFORMATIONS DE MEMBRANE

Les relations entre les efforts et les déformations de membrane sont celles de l'élasticité plane. Les dilatations dans la direction normale à la membrane sont libres. Les efforts n_x , n_y et t (voir fig.3.2) correspondent aux déplacements

u et v, selon les relations différentielles suivantes:

$$\begin{aligned}
 n_x &= \frac{Ed}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) \\
 n_y &= \frac{Ed}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) \\
 t &= Gd \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{Ed}{2(1+\mu)} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)
 \end{aligned}
 \tag{3.2.}$$

d = épaisseur de la membrane

Les deux conditions d'équilibre, en l'absence de forces de masse, sont:

$$\frac{\partial n_x}{\partial x} + \frac{\partial t}{\partial y} = 0 \qquad \frac{\partial n_y}{\partial y} + \frac{\partial t}{\partial x} = 0
 \tag{3.3}$$

Rappelons également que la continuité des déformations s'exprime par une équation de compatibilité, que l'on peut écrire en termes d'efforts:

$$\frac{\partial^2 n_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 n_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 n_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 n_y}{\partial y^2} = 0
 \tag{3.4.}$$

3.2.3 RELATIONS ENTRE LES EFFORTS ET LES DEFORMATIONS DE PLAQUE

Les efforts m_x , m_y et m_t (voir fig. 3.3) provoquent un déplacement w normal à la plaque tel que:

$$\begin{aligned}
 m_x &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\
 m_y &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\
 m_t &= D (1-\mu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}
 \end{aligned}
 \tag{3.5}$$

Si p est la charge par unité de surface, les conditions d'équilibre s'expriment par les équations suivantes:

$$\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + p = 0$$

$$(3.7) \quad \frac{\partial m_x}{\partial x} - \frac{\partial m_t}{\partial y} - q_x = 0$$

$$\frac{\partial m_y}{\partial y} - \frac{\partial m_t}{\partial x} - q_y = 0$$

La distribution des efforts doit être telle que la surface déformée $w = w(x, y)$ soit une solution de l'équation aux dérivées partielles usuelle :

$$(3.8) \quad \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p}{D}$$

3.3. MODELE CONSTITUE PAR DEUX POUTRES RELIEES PAR UNE DALLE

3.3.1 EFFORTS ET DEFORMATIONS PRINCIPAUX

Les résultats de nos essais sur modèle et d'essais antérieurs d'une part, de calculs sommaires d'autre part montrent que la déformation transversale du profil est importante. Elle consiste en général essentiellement en une flexion de la dalle située entre les caissons, tandis que les autres déformations du profil sont d'un ordre de grandeur inférieur. Cependant, dans les ouvrages de grande portée, les parois des caissons sont relativement minces et leurs déformations transversales peuvent diminuer dans une certaine mesure. le degré d'encastrement de la dalle et par conséquent l'efficacité de la liaison mutuelle des caissons.

Longitudinalement, on observe essentiellement une flexion des caissons dans le plan vertical et une torsion. Le centre de rotation des sections des caissons n'est pas au centre de torsion du caisson isolé, car la liaison constituée par la dalle s'oppose à la libre rotation des poutres-caissons. Il convient donc de tenir compte d'une certaine flexion dans le plan horizontal.

La liaison des caissons impose également la compatibilité des déformations longitudinales au niveau du plan moyen de la dalle. L'effet de cette liaison sur les efforts globaux dans les caissons est peu sensible et sera négligé.

Nous retenons donc les cinq efforts et déformations principaux suivants:

- flexion verticale des caissons
- flexion horizontale des caissons
- torsion des caissons
- flexion transversale de la dalle entre caissons
- flexion transversale des caissons.

3.3.2 EFFORTS ET DEFORMATIONS DANS LES POUTRES

Les forces extérieures et les efforts intérieurs sollicitant les poutres sont représentés dans la figure 3.7 a). La section de chaque poutre est constituée par la demi-section du pont, c'est-à-dire par un caisson et deux ailes (voir fig.3.7b).

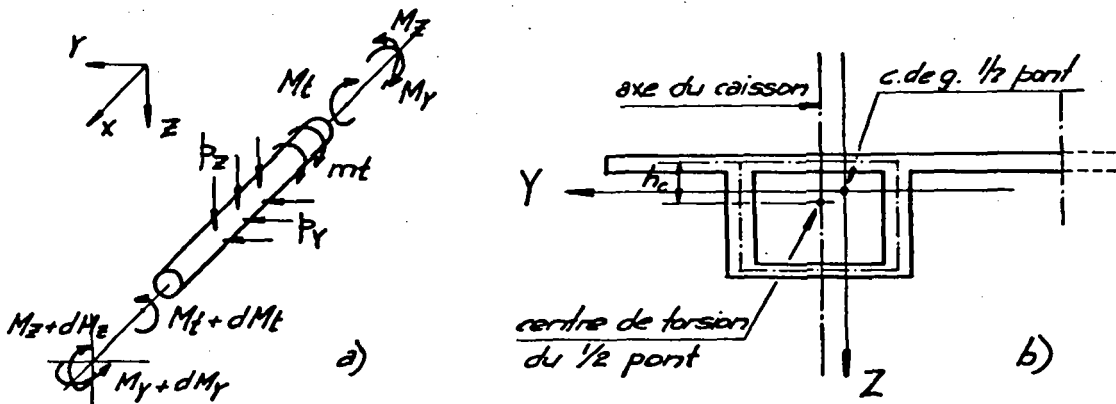


Fig.3.7

Les inerties de flexion I_y et I_z seront déterminées par rapport aux axes principaux d'inertie de la demi-section:

$$(3.11) \quad I_y = \int Y^2 d\Omega \qquad I_z = \int Z^2 d\Omega$$

L'inclinaison des axes par rapport à la verticale et à l'horizontale est en général faible et elle sera négligée ici. On peut l'introduire sans difficulté, au prix d'une complication d'écriture.

Pour la rigidité de torsion, on ne considérera que le caisson, sans les ailes, et on admettra que les contraintes sont distribuées de la même manière que si le moment de torsion était constant le long de la poutre. On supposera également que l'épaisseur des parois est faible en regard des côtés du profil. L'inertie de torsion a alors pour expression:

$$(3.12) \quad C = \frac{4\Omega_0^2}{\oint \frac{dy}{d}}$$

où F_0 = surface comprise à l'intérieur de la ligne moyenne
 y = abscisse le long de la ligne moyenne des parois
 d = épaisseur de paroi

Pour la position du centre de torsion (ou centre de cisaillement), il faut en revanche tenir compte des ailes.

Si l'on rapporte les forces sollicitant les poutres à l'axe de torsion, les relations entre les efforts et les déformations sont définies par les équations (3.1).

La flexion transversale des caissons fait intervenir les efforts et déformations de plaque et de membrane. Considérant que les courbures longitudinales des parois sont négligeables par rapport aux courbures transversales, on fait $\partial^2 w / \partial x^2 = 0$ dans les équations (3.6) et l'on a:

$$(3.13) \quad m_y = -D \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \qquad m_x = -D \cdot \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \mu \cdot m_y$$

On peut donc remplacer le caisson par une infinité de cadres transversaux. On a alors pour chaque paroi, d'épaisseur d:

$$(3.14) \quad m_y = -EI_d \frac{d^2 w_d}{dy^2} \quad \text{avec} \quad I_d = \frac{d^3}{12(1-\mu^2)}$$

La déformation transversale d'effort normal est négligeable.

On suppose de plus que la flexion transversale n'engendre aucun déplacement relatif des arêtes des caissons.

Sous l'effet du moment d'encastrement de la dalle m_e , l'arête du caisson subit donc une rotation transversale α que l'on peut exprimer par:

$$\alpha = \frac{1}{ES} \cdot m_e$$

Le coefficient de flexibilité $1/ES$ est la rotation du cadre transversal au point d'attache de la dalle sous l'effet d'un moment extérieur unitaire.

Dans le modèle mathématique, aucune restriction n'a été introduite en ce qui concerne la forme des caissons; le cas de caissons trapézoïdaux ou triangulaires ou celui de poutres pleines ne présente aucune particularité. En revanche, la méthode de calcul proposée n'est applicable que si la section du pont est symétrique par rapport à son axe vertical.

3.3.3. EFFORTS ET DEFORMATIONS DANS LA DALLE

La dalle considérée ici est la bande comprise entre les deux caissons.

La remarque ci-dessus concernant la grandeur relative des courbures longitudinales et transversales étant également valable pour la dalle, on peut remplacer celle-ci par une infinité de poutres transversales et appliquer la relation (3.14). La flexion transversale, qui est la sollicitation principale de la dalle, est ainsi définie. Le moment m_y varie linéairement d'un caisson à l'autre.

La dalle joue également le rôle de tirant ou de buton reliant les caissons au niveau de leur face supérieure, imposant la compatibilité des déplacements transversaux dus aux torsions et aux flexions horizontales des poutres. La déformation d'effort normal correspondante est cependant négligeable par rapport aux déplacements des caissons.

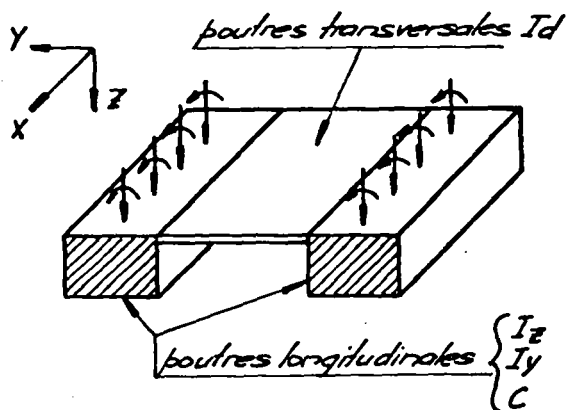


Fig. 3.8

La figure 3.8 ci-contre donne le schéma du modèle simplifié proposé. Une méthode de calcul basée sur ce modèle est exposée dans le chapitre 4.

3.4 MODELE CONSTITUE PAR UN ASSEMBLAGE DE PLAQUES-MEMBRANES

3.4.1 SOLLICITATIONS INTERIEURES ET EXTERIEURES DANS UNE PAROI

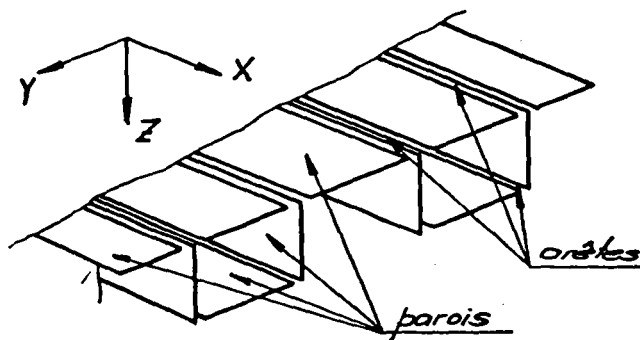


Fig. 3.9

Le second modèle proposé ici est constitué par un ensemble de parois jointives le long des arêtes des caissons (voir fig. 3.9).

Ces parois sont soumises aux efforts de membrane et de plaque définis antérieurement.

D'une manière générale, on constate grâce aux essais que dans le sens longitudinal, ce sont les efforts de membrane qui dominent, tandis que dans le sens transversal, les efforts de plaque sont prépondérants.

Ainsi, les moments de flexion longitudinaux m_x sont à négliger; en effet, la somme des inerties propres des éléments du profil ne représente qu'une très faible partie (moins de 1% en général) de l'inertie totale.

Le moment transversal m_y dans la partie de dalle située entre les caissons est, comme il a été dit dans 3.3.1., un effort principal. Dans les autres éléments, il ne peut être laissé de côté qu'en première approximation; il en sera donc tenu compte ici.

Le moment de torsion m_t , en revanche, joue un rôle assez faible et sera négligé dans le sens transversal. On prendra toutefois en compte la torsion longitudinale des plaques, qui peut prendre une certaine importance dans les parois latérales des caissons en particulier, en raison de leur épaisseur relativement forte.

Parmi les déformations produites par les efforts de membrane n_x , n_y et t , celles qui proviennent de l'effort normal transversal peuvent être négligées. En effet, étant donné la forme du cadre transversal, les allongements des éléments qui le composent ne jouent pratiquement pas de rôle; il n'en serait pas de même dans le cas de caissons de section triangulaire.

Les efforts n_x et t , en revanche, sont importants, puisqu'ils correspondent à la flexion et à la torsion globale des caissons.

Dans le calcul, il faut donc introduire les efforts suivants, avec les déformations qui en dépendent:

- | | | |
|---|---|----------------|
| - | l'effort normal longitudinal | n_x |
| - | l'effort tangentiel | t |
| - | le moment de flexion transversal
et l'effort tranchant | m_y
q_y |
| - | le moment de torsion sur les sections transversales | m_t |

Considérons un élément de paroi de longueur dx , la largeur de la paroi étant h et son épaisseur d . L'ensemble des efforts agissant sur la section transversale se réduit à M , M_t , N et Q (voir fig.3.10).

$$(3.15) \quad \int_{-h/2}^{h/2} y \cdot n_x \cdot d \cdot dy = M \quad \int_{-h/2}^{h/2} m_t \cdot d \cdot dy = M_t$$

$$\int_{-h/2}^{h/2} n_x \cdot d \cdot dy = N \quad \int_{-h/2}^{h/2} t \cdot d \cdot dy = Q$$

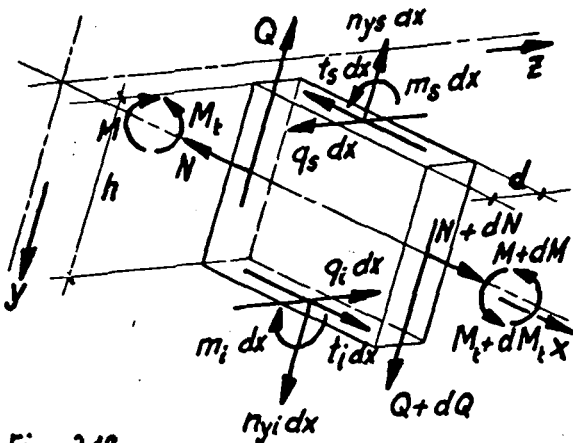


Fig. 3.10

Les efforts agissant le long des bords sont m_s , n_{ys} , q_s , t_s , m_i , n_{yi} , q_i et t_i .

L'indice i désigne le bord $y = h/2$, l'indice s le bord $y = -h/2$ dans le système des coordonnées locales. Les efforts intérieurs de la paroi dépendent des forces et moments agissant sur ses bords et des conditions aux extrémités.

3.4.2 EFFORTS ET DEFORMATIONS DE MEMBRANE

Les efforts de membrane sont dus aux charges d'arête n_{ys} , n_{yi} , t_s et t_i . Comme les effets des contraintes σ_y sont négligés, n_{ys} et n_{yi} peuvent être remplacés par une charge p . Les efforts rasants t_s et t_i , de leur côté, peuvent être décomposés symétriquement et antisymétriquement par rapport à l'axe longi-

tudinal de la paroi. Nous avons ainsi à considérer trois modes de charge:

- une charge transversale $p_1 = n_{yi} - n_{ys}$
- deux efforts rasants antimétriques $t_2 = \frac{1}{2} \cdot (t_s + t_i)$
- deux efforts rasants symétriques $t_3 = \frac{1}{2} \cdot (t_s - t_i)$

Le premier cas correspond à la théorie de la flexion des poutres (voir fig. 3.11 a). Les équations d'équilibre sont:

$$(3.16) \quad \frac{dQ_1}{dx} = -p_1 = -n_{yi} + n_{ys} \quad \frac{dM_1}{dx} = Q_1$$

On choisit une solution approchée de l'équation (3.5), permettant de tenir compte des déformations d'effort tranchant, (cf. {3L}). Cette solution est basée sur deux hypothèses:

- la courbure est la même en tout point d'une même section
- les contraintes tangentielles sont réparties paraboliquement dans chaque section.

La courbure en termes de contraintes s'écrit:

$$(3.17) \quad \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} = -\frac{1}{E} \cdot \frac{\partial \sigma_1}{\partial y} + \frac{1}{G} \cdot \frac{\partial \tau_1}{\partial x}$$

En exprimant la condition que la courbure est indépendante de l'ordonnée y on obtient:

$$(3.18) \quad \frac{\partial^2 \sigma_1}{\partial y^2} = \frac{E}{G} \cdot \frac{\partial^2 \tau_1}{\partial x \partial y}$$

En remplaçant τ_1 par l'expression (3.21), il vient:

$$(3.19) \quad \frac{\partial^2 \sigma_1}{\partial y^2} = \frac{1}{I_y} \cdot y \cdot p_1(x)$$

On sait que les forces élémentaires $\sigma d\Omega$ s'annulent pour $y = 0$ et qu'elles font équilibre au moment de flexion; en intégrant (3.19) et en respectant ces conditions, on détermi-

ne la distribution des contraintes normales. L'état de contrainte est alors représenté par les deux fonctions suivantes:

$$(3.20) \quad \sigma_1(x, y) = \left[\frac{M_1(x)}{I_y} - \frac{E}{G} \cdot \frac{3}{10\Omega} \cdot p_1(x) \right] \cdot y + \frac{E}{G} \cdot \frac{2p_1(x)}{\Omega h^2} \cdot y^3$$

$$(3.21) \quad \tau_1(x, y) = \frac{3}{2\Omega} \cdot \left[1 - \frac{y^2}{(h/2)^2} \right] \cdot Q_1(x)$$

Si l'on remplace σ_1 et τ_1 par leurs expressions dans (3.17), on a pour la courbure l'équation différentielle bien connue:

$$(3.22) \quad \frac{d^2 v_1}{dx^2} = -\frac{1}{EI_y} \cdot M_1(x) - \frac{6}{5G\Omega} \cdot p_1(x)$$

Les dérivées des déplacements longitudinaux des bords sont proportionnelles aux contraintes normales extrêmes:

$$(3.23) \quad \frac{du_{i1}}{dx} = -\frac{du_{s1}}{dx} = \frac{h}{2EI_y} \cdot M_1(x) + \frac{1}{G} \cdot \frac{h}{10\Omega} \cdot p_1(x)$$

Examinons maintenant le cas de la paroi soumise à des efforts rasants antisymétriques t_2 , selon le schéma de la figure 3.11b

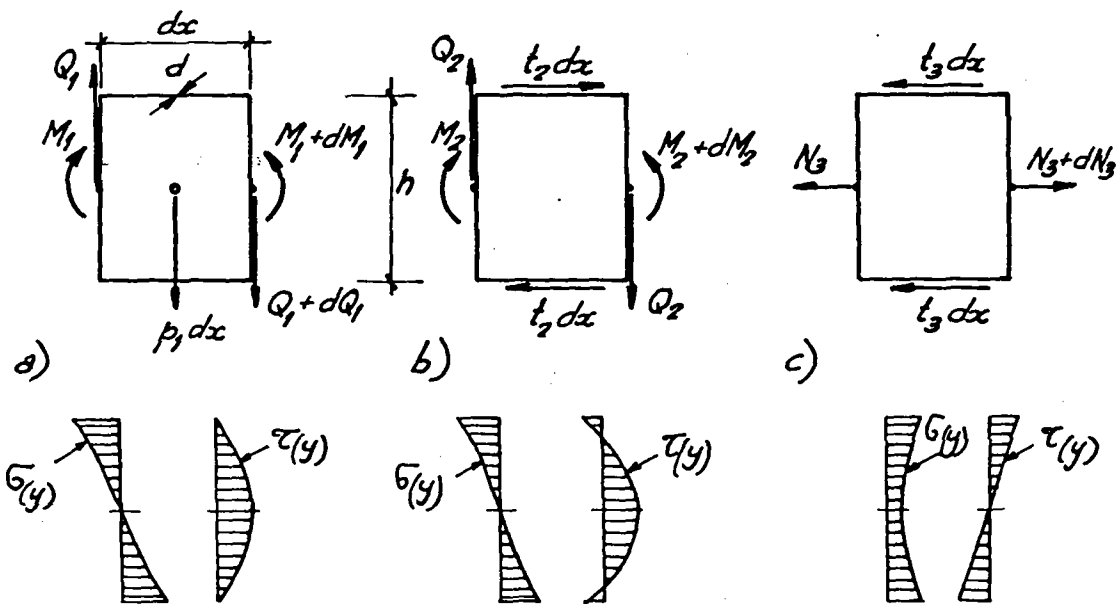


Fig. 3.11

L'effort tranchant est constant et l'équilibre s'exprime par la seule relation:

$$(3.24) \quad \frac{dM_2}{dx} = h \cdot t_2 + Q_2$$

La distribution des contraintes dépend de celle de t_2 et des conditions aux extrémités. Il suffit de considérer deux cas particuliers, celui où l'effort tranchant est nul et celui où le moment de flexion est nul.

Dans le premier cas, en reprenant les deux hypothèses concernant les contraintes tangentielles et les déformations, on obtient pour les contraintes:

$$(3.25) \quad \sigma_2(x, y) = \left[\frac{M_2(x)}{I_y} + \frac{E}{G} \cdot \frac{3h}{10\Omega} \cdot \frac{dt_2}{dx} \right] \cdot y - \frac{E}{G} \cdot \frac{2}{\Omega h} \cdot \frac{dt_2}{dx} \cdot y^3$$

$$\tau_2(x, y) = \frac{-1}{2d} \cdot \left[3 \frac{y^2}{(h/2)^2} - 1 \right] \cdot t_2(x)$$

Dans chaque section, les contraintes tangentielles sont égales à t_2/d aux bords et leur résultante est nulle.

L'équation différentielle de la courbure (3.17) devient, après substitution des contraintes par leur expression ci-dessus:

$$(3.26) \quad \frac{d^2 v_2}{dx^2} = - \frac{M_2}{EI_y} + \frac{h}{5G\Omega} \cdot \frac{dt_2}{dx}$$

Pour les déplacements longitudinaux, on a, d'après l'expression des contraintes normales aux bords:

$$(3.27) \quad \frac{du_{i2}}{dx} = - \frac{du_{s2}}{dx} = \frac{h}{2EI_y} \cdot M_2(x) - \frac{1}{G} \cdot \frac{h^2}{10\Omega} \cdot \frac{dt_2}{dx}$$

Si les efforts rasants et les conditions aux extrémités sont tels que le moment de flexion est nul en toute section, l'équation d'équilibre s'écrit:

$$(3.28) \quad h \cdot t_2 + Q_2 = 0$$

Dans ce cas, les efforts rasants t_2 sont donc constants suivant x . La contrainte tangentielle est uniformément distribuée sur le profil et les contraintes normales sont nulles:

$$(3.29) \quad \sigma_2(x, y) \equiv 0$$

$$\tau(x, y) = \frac{Q_2}{\Omega} = -\frac{h}{\Omega} \cdot t_2$$

Les déplacements transversaux v sont alors régis par l'équation différentielle suivante:

$$(3.30) \quad \frac{dv_2}{dx} = -\frac{h}{G\Omega} \cdot t_2$$

Les déplacements longitudinaux u_i et u_s sont nuls.

Dans le troisième mode de sollicitation, la paroi est soumise à des efforts rasants symétriques t_3 . L'équilibre d'un segment de longueur dx donne la relation:

$$(3.31) \quad \frac{dN_3}{dx} = 2 \cdot t_3$$

L'observation sur modèle réduit montre que les déformations dues aux contraintes tangentielles ne sont pas négligeables et que l'hypothèse de la planéité des sections et de l'uniformité des contraintes normales n'est pas vérifiée. Nous tenons compte de ce glissement de cisaillement en introduisant une solution approchée proposée par Reissner [29]. Nous supposons que ces contraintes sont distribuées paraboliquement sur chaque section, selon l'équation (3.32), dans laquelle σ_u est la valeur de σ_x aux bords, tandis que σ_γ représente la différence de contrainte entre les bords et l'axe de la paroi. (cf. fig.3.11 c).

$$(3.32) \quad \sigma_3(x, y) = \sigma_u(x) - \sigma_\gamma(x) \left[1 - \frac{y^2}{(h/2)^2} \right]$$

Si l'on néglige les déformations et contraintes transversales ϵ_y et σ_y , les déplacements longitudinaux sont de la même forme que les contraintes:

$$(3.33) \quad u_3(x, y) = u_u(x) - u_\gamma(x) \left[1 - \frac{y^2}{(h/2)^2} \right]$$

En dérivant u par rapport à x puis par rapport à y , on obtient, si les déplacements transversaux sont négligeables:

$$(3.34) \quad \epsilon_{x3}(x, y) = \frac{du_u}{dx} - \frac{du_\gamma}{dx} \left[1 - \frac{y^2}{(h/2)^2} \right]$$

$$\gamma_{xy3}(x, y) = \frac{8}{h^2} \cdot u_\gamma(x) \cdot y$$

En multipliant la première de ces équations par E et en l'intégrant par rapport à y sur la surface de la section, on obtient l'expression de l'effort normal en fonction des dérivées des déplacements. En dérivant par rapport à x et en remplaçant dans l'équation d'équilibre (3.31) il vient:

$$(3.35) \quad \frac{d^2 u_u}{dx^2} - \frac{2}{3} \cdot \frac{d^2 u_\gamma}{dx^2} = \frac{2}{E\Omega} \cdot t_3(x)$$

Il existe une infinité d'états de contrainte et de déformation satisfaisant à cette équation différentielle et à des conditions aux extrémités quelconques. L'expression du minimum de l'énergie permet de trouver une deuxième équation différentielle; l'état de contrainte sera ainsi défini, aux constantes d'intégration près.

L'énergie potentielle du système est:

$$(3.36) \quad \mathcal{E} = 2 \int u_u t_3 dx + \frac{E\Omega}{2} \int (u_u'^2 - \frac{4}{3} u_u' u_\gamma' + \frac{8}{15} u_\gamma'^2 + \frac{G}{E} \cdot \frac{16}{3h^2} u_\gamma^2) dx$$

Les indices supérieurs désignent la dérivation par rapport à x .

La variation d'énergie pour des déplacements virtuels δu_u

et δu_γ entre deux sections d'abscisses x_1 et x_2 est donc :

$$(3.37) \quad \delta \mathcal{E} = \int \left[\left(\frac{4t_3}{E\Omega} - 2u''_u + \frac{4}{3} u''_\gamma \right) \delta u_u + \left(\frac{32}{3h^2} \cdot \frac{G}{E} \cdot u_\gamma + \frac{4}{3} u''_u - \frac{16}{15} u''_\gamma \right) \delta u_\gamma \right] dx \\ + \left[\left(2u'_u - \frac{4}{3} u'_\gamma \right) \delta u_u + \left(-\frac{4}{3} u'_u + \frac{16}{15} u'_\gamma \right) \delta u_\gamma \right] \Big|_{x_1}^{x_2}$$

La variation $\delta \mathcal{E}$ étant nulle pour toute valeur de δu_u et δu_γ , les expressions entre crochets doivent être nulles. La première correspond à l'équation (3.35) et la seconde donne :

$$(3.38) \quad \frac{d^2 u_u}{dx^2} - \frac{4}{5} \cdot \frac{d^2 u_\gamma}{dx^2} + \frac{G}{E} \cdot \frac{8}{h^2} \cdot u_\gamma = 0$$

Par dérivations et substitutions, on peut éliminer u_γ et ses dérivées et l'on obtient une équation différentielle de 4e ordre :

$$(3.39) \quad \frac{d^4 u_u}{dx^4} - \frac{G}{E} \cdot \frac{60}{h^2} \cdot \frac{d^2 u_u}{dx^2} = -\frac{60}{E\Omega} \left(\frac{G}{E} \cdot \frac{2}{h^2} t_3(x) - \frac{1}{5} \cdot \frac{d^2 t_3}{dx^2} \right)$$

Les conditions aux limites doivent être choisies de manière à annuler le deuxième terme du second membre de l'équation (3.37). En intégrant (3.39), on peut trouver les déplacements $u(x,y)$; les déformations provoquées par des efforts d'arête t_3 donnés sont ainsi déterminées, après que l'on a fixé les conditions aux extrémités.

3.4.3 EFFORTS ET DEFORMATIONS DE PLAQUE

Les efforts de plaque sont provoqués par les forces et moments aux arêtes q_s , q_i , m_s et m_i (voir fig.3.9), qui peuvent être distribués longitudinalement d'une façon continue quelconque.

Pour justifier les simplifications proposées, considérons le cas d'une paroi isolée fixée transversalement à ses deux extrémités et soumise à des efforts répartis le long des arêtes

suyvant une loi sinusoidale:

$$\begin{aligned}
 q_s(x) &= \bar{q}_s \cdot \sin \pi x/L & m_s(x) &= \bar{m}_s \cdot \sin \pi x/L \\
 (3.40) \\
 q_i(x) &= \bar{q}_i \cdot \sin \pi x/L & m_i(x) &= \bar{m}_i \cdot \sin \pi x/L
 \end{aligned}$$

Examinons quatre cas particuliers de combinaisons de ces efforts et de certaines conditions de deformation le long des arêtes longitudinales (voir fig.3.11):

- 1) moments symétriques, arêtes appuyées : $\bar{m}_s = \bar{m}_i = \bar{m}_1$
 $\bar{q}_s = \bar{q}_i = \bar{q}_1$
- 2) moments antimétriques, arêtes appuyées : $\bar{m}_s = \bar{m}_i = -\bar{m}_2$
 $\bar{q}_s = \bar{q}_i = \bar{q}_2$
- 3) efforts tranchants antimétriques, arêtes libres : $\bar{m}_i = \bar{m}_s = 0$
 $\bar{q}_s = \bar{q}_i = \bar{q}_3$
- 4) efforts tranchants symétriques, arêtes libres : $\bar{m}_i = \bar{m}_s = 0$
 $\bar{q}_s = -\bar{q}_i = -\bar{q}_4$

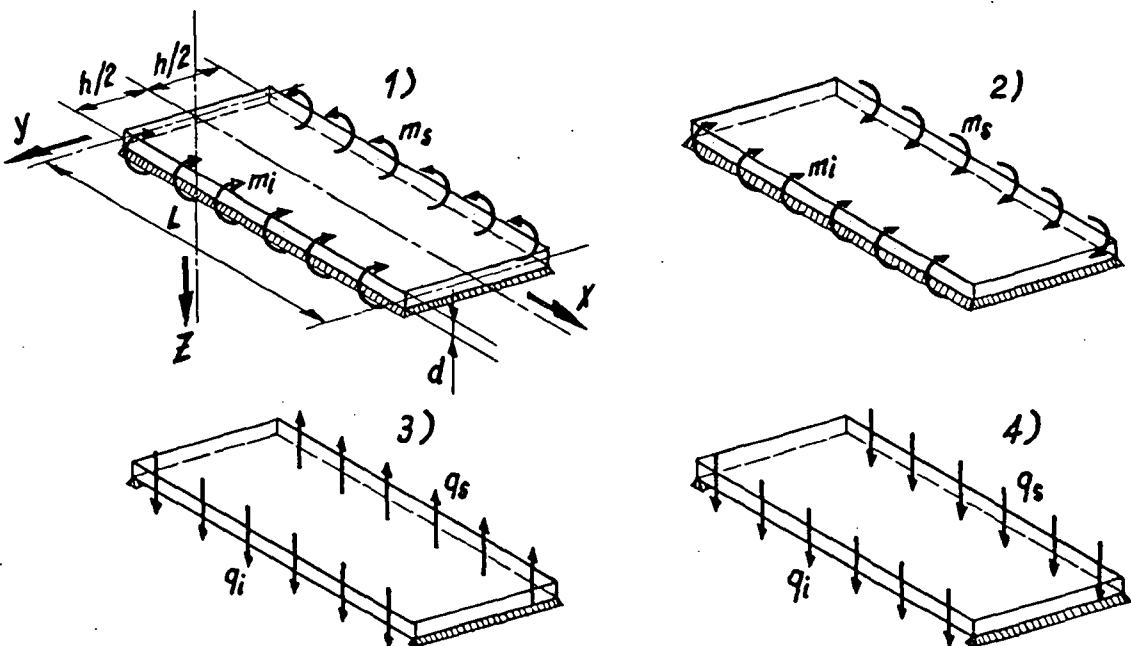


Fig. 3.12

Tout cas de charge est une combinaison linéaire des quatre cas envisagés:

D'après Lévy, [13], [32], la surface déformée peut être représentée par une fonction de la forme suivante:

$$(3.41) \quad w(x,y) = Y(y) \cdot \sin \frac{\pi x}{L}$$

Pour que cette fonction soit solution de l'équation différentielle des plaques (3.8), il faut que $Y(y)$ soit de la forme:

$$(3.42) \quad Y(y) = \bar{A} \operatorname{sh} \frac{\pi y}{L} + \bar{B} \operatorname{ch} \frac{\pi y}{L} + \bar{C} \frac{\pi y}{L} \operatorname{sh} \frac{\pi y}{L} + \bar{D} \frac{\pi y}{L} \operatorname{ch} \frac{\pi y}{L}$$

Dans le cas de la plaque appuyée sur les quatre côtés soumise à des moments de bord transversaux symétriques (cas 1), la surface déformée est donnée par:

$$(3.43) \quad w_1(x,y) = \frac{m_1 h^2}{8D} \cdot \frac{1}{\beta^2 \operatorname{ch} \beta} \left(\frac{\pi y}{L} \operatorname{sh} \frac{\pi y}{L} - \beta \operatorname{th} \beta \operatorname{ch} \frac{\pi y}{L} \right) \cdot \sin \frac{\pi x}{L}$$

$$\text{où} \quad \beta = \frac{\pi h}{2L}$$

On en déduit la pente le long des bords:

$$(3.44) \quad \alpha_{i1} = \left(\frac{\partial w_1}{\partial y} \right)_{y=\frac{h}{2}} = \frac{\bar{m}_1 h}{4D} \cdot \frac{1}{\beta \operatorname{ch} \beta} \left[\operatorname{sh} \beta + \beta \left(\operatorname{sh} \beta - \operatorname{sh} \beta \operatorname{th} \beta \right) \right] \sin \frac{\pi x}{L}$$

$$\alpha_{s1} = - \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_{y=-\frac{h}{2}} = \alpha_{i1}$$

Dans le deuxième cas, où les moments de bord agissent antisymétriquement, l'expression de la déformée est:

$$(3.45) \quad w_2(x,y) = \frac{\bar{m}_2 h^2}{8D} \cdot \frac{1}{\beta^2 \operatorname{sh} \beta} \cdot \left(\frac{\pi y}{L} \operatorname{ch} \frac{\pi y}{L} - \beta \operatorname{coth} \beta \operatorname{sh} \frac{\pi y}{L} \right) \cdot \sin \frac{\pi x}{L}$$

Les rotations des arêtes sont alors :

$$\alpha_{i2} = \frac{\bar{m}_2 h}{4D} \cdot \frac{1}{\beta \operatorname{sh} \beta} \left[\operatorname{ch} \beta + \beta \left(\operatorname{sh} \beta - \operatorname{coth} \beta \operatorname{ch} \beta \right) \right] \cdot \sin \frac{\pi x}{L}$$

(3.46)

$$\alpha_{s2} = -\alpha_{i2}$$

Lorsque la longueur devient infinie, l'argument β tend vers zéro et les expressions des flèches et des rotations sont celles de la flexion cylindrique. Si L est grand par rapport à h , mais non infini, on peut assimiler la plaque allongée à une bande infiniment longue; on obtient alors pour les déformations des valeurs approchées par excès. Le tableau 3.13 donne l'importance de l'erreur commise pour quelques valeurs du rapport h/L .

Tableau 3.13

Erreurs sur les valeurs des rotations des bords
commises en admettant une plaque infiniment longue

Rapport longueur/longueur = h/L	0,2	0,1	0,05
Moments de bords symétriques	6,6 %	1,5 %	0,5 %
Moments de bords antisymétriques	1,3 %	0,3 %	~0 %

Examinons maintenant la plaque appuyée aux deux extrémités seulement, soumise à des efforts tranchants antisymétriques le long des bords longitudinaux.

La solution générale (3.41) prend ici la forme suivante :

$$(3.47) \quad w_3(x, y) = \left(\bar{C}_1 \operatorname{sh} \frac{\pi y}{L} + \bar{C}_2 \frac{\pi y}{L} \operatorname{ch} \frac{\pi y}{L} \right) \cdot \sin \frac{\pi x}{L}$$

avec $\bar{C}_1 = \frac{2 \operatorname{sh} \beta + (1-\mu) \beta \operatorname{ch} \beta}{(1-\mu) [(3+\mu) \operatorname{sh} \beta \operatorname{ch} \beta + (1-\mu) \beta]} \cdot \frac{L^3}{\pi^3} \cdot \frac{\bar{q}_3}{D}$

et $\bar{C}_2 = \frac{-\operatorname{sh} \beta}{(3+\mu) \operatorname{sh} \beta \operatorname{ch} \beta + (1-\mu) \beta} \cdot \frac{L^3}{\pi^3} \cdot \frac{\bar{q}_3}{D}$

Les déplacements w_i et w_s ainsi que les rotations α_i et α_s des bords longitudinaux sont donc :

$$(3.48) \quad w_{i3} = w_{s3} = \frac{\bar{q}_3 \cdot h}{4D(1-\mu)} \cdot \frac{L^2}{\pi^2} \cdot \frac{4 \frac{\text{sh}\beta}{\beta}}{(3+\mu) \text{ch}\beta + (1-\mu) \frac{\beta}{\text{sh}\beta}} \cdot \sin \frac{\pi x}{L}$$

$$(3.49) \quad \alpha_{i3} = -\alpha_{s3} = -\frac{\bar{q}_3}{2D(1-\mu)} \cdot \frac{L^2}{\pi^2} \cdot \frac{2 \left[(1+\mu) \text{ch}\beta + (1-\mu) \frac{\text{sh}\beta}{\beta} \right]}{(3+\mu) \text{ch}\beta + (1-\mu) \frac{\beta}{\text{sh}\beta}} \cdot \sin \frac{\pi x}{L}$$

Si les efforts tranchants de bord q_i et q_s agissent symétriquement, la surface déformée est donnée par l'expression suivante :

$$(3.50) \quad w_4(x, y) = \left(\bar{C}_3 \text{ch} \frac{\pi y}{L} + \bar{C}_4 \frac{\pi y}{L} \text{sh} \frac{\pi y}{L} \right) \cdot \sin \frac{\pi x}{L}$$

$$\text{avec} \quad \bar{C}_3 = \frac{2 \text{ch}\beta + (1-\mu) \beta \text{sh}\beta}{(1-\mu) \left[(3+\mu) \text{sh}\beta \text{ch}\beta - (1-\mu) \beta \right]} \cdot \frac{L^3}{\pi^3} \cdot \frac{\bar{q}_4}{D}$$

$$\text{et} \quad \bar{C}_4 = -\frac{\text{ch}\beta}{(3+\mu) \text{sh}\beta \text{ch}\beta - (1-\mu) \beta} \cdot \frac{L^3}{\pi^3} \cdot \frac{\bar{q}_4}{D}$$

Les déplacements et rotations transversales le long des bords sont alors :

$$w_{i4} = w_{s4} = \frac{2\bar{q}_4}{Dh(1-\mu^2)} \cdot \frac{L^4}{\pi^4} \cdot \frac{2(1+\mu) \text{ch}^2\beta}{(3+\mu) \frac{\text{sh}\beta}{\beta} \text{ch}\beta - (1-\mu)} \cdot \sin \frac{\pi x}{L}$$

$$(3.51) \quad \alpha_{i4} = \alpha_{s4} = -\frac{2\bar{q}_4\mu}{D(1-\mu^2)} \cdot \frac{L^2}{\pi^2} \cdot \frac{(1+\mu)^2 \text{ch}\beta - (1-\mu^2) \frac{\beta}{\text{sh}\beta}}{2\mu \left[(3+\mu) \text{ch}\beta - (1-\mu) \frac{\beta}{\text{sh}\beta} \right]} \cdot \sin \frac{\pi x}{L}$$

Lorsqu'on fait tendre β vers zéro dans ces expressions, c'est-à-dire lorsque la largeur de la plaque devient nulle, on retrouve les relations reliant les déformations et les charges d'une poutre à profil rectangulaire tordue et fléchie. Si la

largeur est faible en regard de la portée, on peut substituer à la plaque une poutre de section identique. Le tableau suivant (3.14) donne les valeurs de l'écart entre les déformations de la dalle et celles de la poutre suivant le rapport de la largeur à la longueur, pour $\mu = 0,2$.

Tableau 3.14

Erreurs sur les valeurs des déplacements et des rotations des bords si la plaque est assimilée à une poutre

Rapport largeur/longueur = b/L		0,2	0,1	0,05
Forces antisymétriques (torsion)	déplacement	2,0 %	0,5 %	0,1 %
	rotation	1,3 %	0,3 %	0,1 %
Forces symétriques (flexion)	déplacement	1,1 %	0,3 %	0,1 %
	rotation	10,3 %	2,7 %	0,7 %

Dans les cas de la pratique (voir les exemples rassemblés dans le tableau 7.1), les rapports des côtés des plaques constituant la structure des ponts à poutres-caissons sont tels que les valeurs maximums des erreurs données dans les tableaux ci-dessus ne sont pratiquement jamais dépassées, ou même atteintes.

On peut donc admettre les simplifications suivantes:

- Dans les deux premiers cas de charge envisagés, la plaque se comporte comme une infinité de poutres transversales ayant la même inertie.
- Dans les deux derniers cas, les déformations transversales sont négligeables et la plaque est assimilable à une poutre.

Remarquons que dans un ouvrage réel, les forces et moments sollicitant les bords des plaques constituant le profil sont distribués de manière quelconque. Cette distribution ne s'écarte cependant pas considérablement de la loi sinusoïdale qui a été admise pour la commodité du raisonnement, car les efforts trans-

versaux sont commandés par les flexions longitudinales du pont.

Il convient d'examiner l'influence de l'épaisseur des parois sur les déformations, car on a souvent affaire ici à des plaques relativement épaisses.

Considérons la poutre transversale simplement appuyée en A et B, qui a été substituée à la plaque, soumise à un moment de flexion m à l'extrémité A.

Si l'on tient compte de la déformation d'effort tranchant, les rotations d'extrémité sont:

$$(3.52) \quad \alpha_A = \frac{mh}{3D} + \frac{6m}{5G\Omega h} \quad \alpha_B = \frac{mh}{6D} - \frac{6m}{5G\Omega h}$$

Le rapport entre la rotation due à l'effort tranchant et celle due à la flexion est donné dans le tableau 3.15, pour différentes proportions entre les côtés du profil.

Considérons également la poutre longitudinale à laquelle nous avons assimilé la plaque à deux bords libres. Sous l'effet d'un effort tranchant de bord distribué suivant une sinusoïde, cette poutre sera tordue et fléchie et le déplacement du bord chargé sera:

$$(3.53) \quad w_b = \left(\frac{L^4}{\pi^4 EI} \cdot \bar{q} + \frac{L^2}{\pi^2 GI_t} \cdot \frac{h}{2} \cdot \frac{\bar{q}h}{2} \right) \cdot \sin \frac{\pi x}{L}$$

Le premier terme dans la parenthèse représente la déformation de flexion tandis que le second correspond à la rotation de torsion. Le rôle de cette dernière est très faible, c'est-à-dire que la poutre est beaucoup moins rigide à la flexion qu'à la torsion, comme le montre la deuxième partie du tableau ci-après.

Le premier terme de la parenthèse de l'équation (3.53) peut donc être supprimé; dans le second, l'inertie de torsion I_t est déterminée à l'aide de l'analogie de membrane {33}.

En définissant la déformation de torsion par l'angle de rotation ϕ au lieu du déplacement de bords w_b , on a finalement:

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = \frac{1}{GI_t} \cdot h \cdot q$$

(3.54)

où
$$I_t = \frac{1}{3} d^3 h \left(1 - \frac{192}{\pi^5} \cdot \frac{d}{h} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^5} \cdot \text{th} \frac{n\pi h}{2d} \right)$$

Tableau 3.15

Poutre transversale sous moment d'extrémité: rapports entre les rotations d'effort tranchant et de flexion

Rapport largeur/épais. = $\frac{h}{d}$	10	5	3	2
rapports des rotations en A	0,008	0,030	0,083	0,188
rapports des rotations en B	0,015	0,060	0,167	0,375

Poutre longitudinale sous charge de bord: rapports entre les déplacements par torsion et par flexion.

pour $h/L = 0,2$	0,063	0,068	0,075	0,086
pour $h/L = 0,1$	0,016	0,017	0,019	0,022
pour $h/L = 0,05$	0,004	0,004	0,005	0,006

Pour les efforts de plaque, chaque paroi est donc définie simultanément

- comme une infinité de poutres transversales fléchies
- comme une poutre longitudinale en torsion selon Saint-Venant.

Dans le premier mode de déformation, le profil subit des courbures transversales, les translations des bords sont nulles et les rotations des bords longitudinaux sont exprimées par les

équations (3.52). Dans le second, on a une rotation de torsion de l'ensemble du profil, suivant la relation (3.54).

3.4.4 CONDITIONS AUX ARETES

Aux arêtes, les forces et moments constituant les charges extérieures sont, en tout point, égaux aux sommes des efforts sollicitant les bords des parois adjacentes.

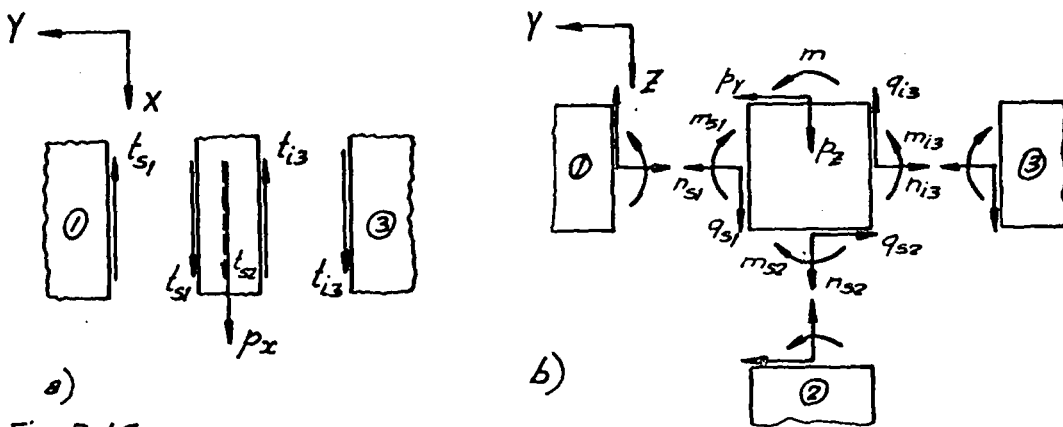


Fig. 3.16

Les efforts tangentiels de membrane se projettent sur l'axe longitudinal (voir fig.3.16a), tandis que les autres efforts agissent dans un plan transversal (fig.3.16). Le long d'une arête à laquelle aboutissent les parois No 1, 2 et 3, par exemple, les conditions d'équilibre s'écrivent:

$$P_x(X) = -t_{s1}(X) - t_{s2}(X) + t_{i3}(X)$$

$$P_y(X) = -n_{s1}(X) + q_{s2}(X) + n_{i3}(X)$$

$$P_z(X) = -q_{s1}(X) - n_{s2}(X) + q_{i3}(X)$$

$$m(X) = m_{s1}(X) + m_{s2}(X) - m_{s3}(X)$$

(3.55)

D'autre part, les conditions de compatibilité des déformations sont remplies lorsque les translations et rotations des bords de chaque paroi sont égales en tout point à celles des arêtes correspondantes.

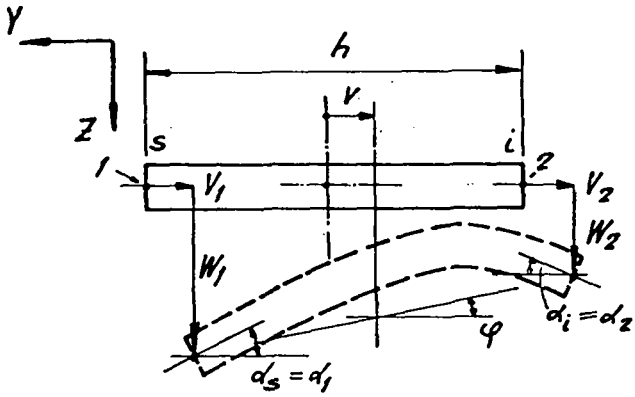


Fig. 3.17

Considérons, par exemple, une paroi parallèle au plan XOY dont le bord défini comme supérieur correspond à l'arête 1 et le bord inférieur à l'arête 2 (voir fig. 3.17). Les égalités des déplacements et rotations s'expriment par:

$$\begin{aligned}
 (3.56) \quad v(X) &= -V_1(X) = -V_2(X) & \alpha_i(X) &= \alpha_2(X) \\
 u_i(X) &= U_2(X) & \alpha_s(X) &= \alpha_1(X) \\
 u_s(X) &= U_1(X) & \phi(X) &= \frac{1}{h} [W_1(X) - W_2(X)]
 \end{aligned}$$

La rotation de torsion est mesurée par la différence des déplacements des arêtes normalement au plan de la paroi.

4. METHODE DE LA COUPURE MEDIANE

4.1 EQUATIONS FONDAMENTALES

4.1.1. INTRODUCTION

Sur la base du modèle constitué par deux poutres reliées par une dalle, proposé sous 3.3., on peut établir une méthode de calcul permettant de déterminer les efforts principaux dans les poutres-caissons et dans la dalle.

La dalle n'est considérée que comme élément de liaison entre les poutres, ces dernières étant seules soumises à l'action des charges extérieures. Lorsque les forces extérieures n'agissent pas directement sur les caissons, il faut les réduire à un système de forces et de couples rapporté aux axes des caissons. On considère alors la dalle comme parfaitement encastrée dans les poutres.

On a montré (voir 3.3.) que tous les efforts peuvent être déduits de ceux qui règnent dans la section médiane de la dalle, qui sont les trois efforts hyperstatiques m , q et n (voir fig. 4.1.) . Ces efforts variant le long du pont sont donc fonctions de X .

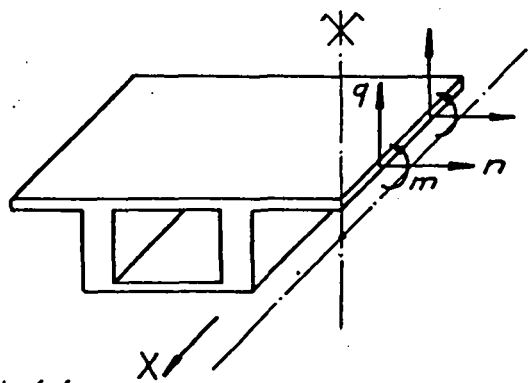


Fig. 4.1

moment de flexion	m
effort tranchant	q
effort normal	n

Pour établir les équations fondamentales représentant la distribution des efforts intérieurs, il faut écrire les relations entre les efforts et les déformations des caissons et de la dalle, puis exprimer la compatibilité des déformations dans la coupe médiane.

En décomposant les charges quelconques en charges symétriques et antisymétriques, on annule certaines hyperstatiques. Ce procédé permet d'abaisser l'ordre des équations différentielles régissant le problème.

4.1.2 RELATIONS ENTRE LES EFFORTS ET LES DEFORMATIONS

Considérons l'un des caissons (voir fig.4.2 et 4.3). Ses déformations s'expriment par les équations suivantes:

$$\text{- Flexion verticale} \quad (4.1) \quad \frac{d^2 w}{dX^2} = - \frac{1}{EI_z} \cdot M_z$$

$$\text{- Flexion horizontale} \quad (4.2) \quad \frac{d^2 v}{dX^2} = - \frac{1}{EI_y} \cdot M_y$$

$$\text{- Torsion} \quad (4.3) \quad \frac{d\phi}{dX} = \frac{1}{GC} \cdot M_t$$

$$\text{- Flexion transversale} \quad (4.4) \quad \alpha = \frac{1}{ES} \cdot m_e$$

où I_y, I_z = moments d'inertie de la section du caisson

C = moment d'inertie de torsion du caisson

S = facteur de rigidité transversale du caisson

m_e = moment d'encastrement de la dalle dans le caisson

Les déformations de la dalle à l'axe du pont, par rapport à sa section d'encastrement, sont données par:

$$(4.5) \quad w_d = \frac{1}{EI_d} \left(\frac{c^2}{2} \cdot m + \frac{c^3}{3} \cdot q \right)$$

$$(4.6) \quad \delta = \frac{1}{EI_d} \left(c \cdot m + \frac{c^2}{2} \cdot q \right)$$

Les équations (4.1) à (4.6) représentent complètement le comportement statique des caissons et de la dalle défini dans 3.3.

4.1.3. EXPRESSION DIFFERENTIELLE DES EFFORTS POUR DES CHARGES SYMETRIQUES

Pour des charges symétriques par rapport à l'axe longitudinal du pont, l'effort tranchant q est nul et les seuls efforts à déterminer sont $m(X)$ et $n(X)$. (voir fig.4.2)

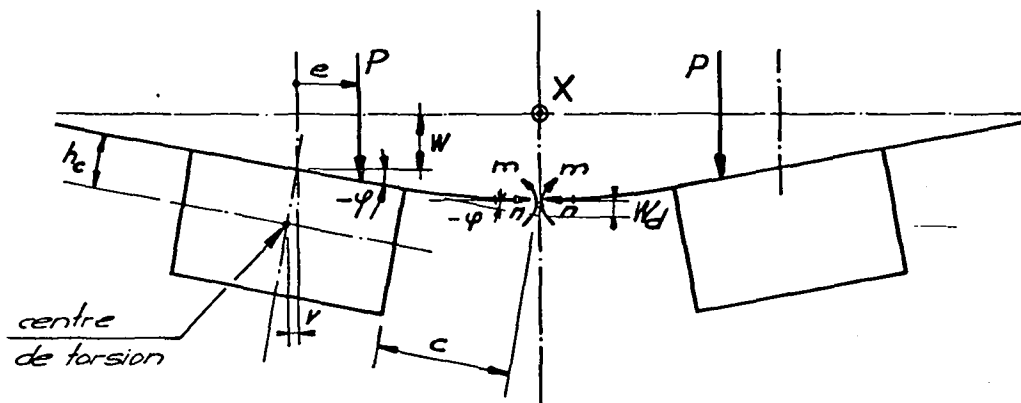


Fig.4.2

On a alors, pour les efforts intérieurs, les expressions suivantes:

$$(4.7) \quad \begin{aligned} \frac{d^2 M_y}{dX^2} &= n \\ \frac{dM_t}{dX} &= -m + h_c \cdot n + e \cdot p \\ m_e &= m \end{aligned}$$

En dérivant (4.2) deux fois et (4.3) une fois et en remplaçant les dérivées des efforts par les expressions (4.7) ci-dessus, on obtient pour les déformations du caissons:

$$(4.8) \quad \begin{aligned} \text{a)} \quad \frac{d^4 v}{dX^4} &= -\frac{l}{EI_y} \cdot n \\ \text{b)} \quad \frac{d^2 \phi}{dX^2} &= -\frac{l}{GC} \cdot m + \frac{h_c}{GC} \cdot n + \frac{l}{GC} \cdot e \cdot p \\ \text{c)} \quad \alpha &= \frac{l}{ES} \cdot m \end{aligned}$$

Pour la dalle on a simplement:

$$(4.9) \quad \delta = \frac{c}{EI_d} \cdot m$$

La symétrie des déformations impose les deux conditions:

$$(4.10) \quad \phi + \alpha + \delta = 0$$

$$v + h_c \cdot \phi = 0$$

A l'aide de (4.8) et (4.10), on peut remplacer par des termes en m les termes en v et ϕ dans les équations différentielles (4.8a) et (4.8b), qui deviennent:

$$h_c \cdot \left(\frac{1}{ES} + \frac{c}{EI_d} \right) \cdot \frac{d^4 m}{dX^4} = - \frac{1}{EI_y} \cdot n$$

(4.11)

$$- \left(\frac{1}{ES} + \frac{c}{EI_d} \right) \cdot \frac{d^2 m}{dX^2} = - \frac{1}{GC} \cdot m + \frac{h_c}{GC} \cdot n + \frac{1}{GC} \cdot e \cdot p$$

L'effort normal n peut alors être éliminé, et l'on obtient une équation différentielle du quatrième ordre en m , que l'on peut écrire:

$$(4.12) \quad \frac{d^4 m}{d\xi^4} - k_{s1} \cdot \frac{d^2 m}{d\xi^2} + k_{s2} \cdot m = k_{s2} \cdot e \cdot p$$

où $\xi = \frac{X}{L} =$ abscisse relative

Les coefficients sont :

$$k_{s1} = \frac{GCL^2}{h^2 EI_y c} \quad (4.13)$$

$$k_{s2} = \frac{L^4}{h^2 I_y \left(\frac{1}{S} + \frac{c}{I_d} \right)}$$

L'équation (4.12) commande la distribution du moment transversal le long de la coupure, dont toutes les autres grandeurs dépendent; elle constitue l'expression différentielle des efforts pour des charges symétriques.

4.1.4 EXPRESSION DIFFERENTIELLE DES EFFORTS POUR DES CHARGES ANTIMETRIQUES

Pour le cas de charges antimétriques, on procède de manière analogue au cas précédent. L'effort inconnu dans la coupure est ici $q(X)$, m et n étant nuls (voir fig.4.3).

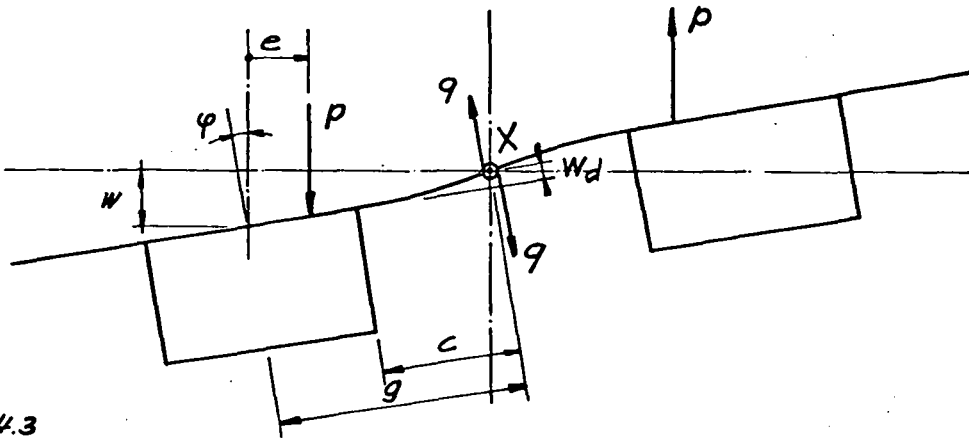


Fig. 4.3

Dans ce cas, les efforts intérieurs sont donnés par:

$$(4.14) \quad \begin{aligned} \frac{d^2 M_z}{dX^2} &= -p + q \\ \frac{dM_t}{dX} &= -g \cdot q + e \cdot p \\ m_e &= c \cdot q \end{aligned}$$

En portant ces expressions dans les équations (4.1) à (4.5) convenablement dérivées, on obtient, sous forme différentielle pour certaines d'entre elles, toutes les déformations du système en fonction des efforts dans la coupure et des charges, soit:

$$(4.15) \quad \begin{aligned} a) \quad \frac{d^4 w}{dX^4} &= \frac{1}{EI_z} \cdot p - \frac{1}{EI_z} \cdot q \\ b) \quad \frac{d^2 \phi}{dX^2} &= -\frac{g}{GC} \cdot q + \frac{1}{GC} \cdot e \cdot p \\ c) \quad \alpha &= \frac{c}{ES} \cdot q \\ d) \quad w_d &= \frac{c^3}{3EI_d} \cdot q \end{aligned}$$

La compatibilité des déformations au droit de la coupure requiert, vu l'antimétrie, que les déplacements verticaux y soient nuls, donc:

$$(4.16) \quad w - g \cdot \phi - w_d - c \cdot \alpha = 0$$

Les deux groupes d'équations (4.15) et (4.16) définissent complètement le problème étudié et, en faisant les substitutions et dérivations nécessaires, se réduisent à un système différentiel ne contenant comme fonctions inconnues que l'effort q .

En portant dans (4.16) les expressions (4.15c) et (4.15d) on obtient une relation entre w et ϕ . En dérivant celle-ci deux fois et en y remplaçant $d^2\phi/dX^2$ par l'expression (4.15), il vient:

$$(4.17) \quad \frac{d^4 w}{dX^4} = \left(\frac{c^3}{3EI_d} + \frac{c^2}{ES} \right) \cdot \frac{d^4 q}{dX^4} - \frac{g^2}{GC} \cdot \frac{d^2 q}{dX^4} + \frac{g}{GC} \cdot e \cdot \frac{d^2 p}{dX^2}$$

On peut alors éliminer w en égalant les expressions (4.15a) et (4.17) et l'on obtient une équation différentielle du quatrième ordre ne contenant que la seule inconnue q :

$$(4.18) \quad \frac{d^4 q}{d\xi^4} - k_{a1} \cdot \frac{d^2 q}{d\xi^2} + k_{a2} \cdot q = k_{a2} \cdot p - k_{a1} \cdot \varepsilon \cdot \frac{d^2 p}{d\xi^2}$$

dans laquelle $\xi = \frac{X}{L}$, $\varepsilon = \frac{e}{g}$ (excentricité relative)

et

$$k_{a1} = \frac{3g^2 EI_d L^2}{GC \cdot c^3} \cdot \frac{1}{1 + \frac{3 \cdot I_d}{c \cdot S}}$$

(4.19)

$$k_{a2} = \frac{3I_d L^4}{c^3 I_z} \cdot \frac{1}{1 + \frac{3 \cdot I_d}{c \cdot S}}$$

L'équation (4.18) commande la distribution de l'effort tranchant $q(X)$ à l'axe de la dalle; toutes les autres grandeurs sont fonctions de q et de ses dérivées. L'équation (4.18) est donc l'expression différentielle des efforts pour des charges antimétriques.

4.2 FACTEURS DE RIGIDITES RELATIVES

Dans n'importe quel cas de charge (de composantes symétrique et antisymétrique), la distribution des efforts est commandée par les équations différentielles (4.12) et (4.18) établies plus haut, qui ne contiennent comme paramètres que les facteurs sans dimension k_{s1} , k_{s2} , k_{a1} , et k_{a2} . Nous allons examiner la signification de ces facteurs et discuter les valeurs qu'ils peuvent prendre. Dans ce but, nous nous référons notamment à une série d'ouvrages existants, dont les caractéristiques sont données dans le tableau 7.1 (voir chap. 7).

Considérons d'abord les paramètres intervenant dans le cas de charges symétriques, qui sont:

$$k_{s1} = \frac{GC}{EI_y} \cdot \frac{L^2}{h^2} \quad \text{et} \quad k_{s2} = \frac{I_d L^4}{ch^2 I_y} \cdot \beta_1'$$

en posant

$$\frac{1}{1 + \frac{I_d}{cS}} = \beta_1'$$

Le facteur k_{s1} est une caractéristique des caissons; c'est le rapport de la rigidité de torsion à la rigidité de flexion horizontale. La raideur de la dalle, comparée à celle des caissons, est exprimée par k_{s2} . La déformabilité transversale des caissons diminue la raideur apparente de la dalle, proportionnellement à β_1' . Si le profil des caissons est indéformable, $S = \infty$ et $\beta_1' = 1$. Si la dalle elle-même est également indéformable, on est ramené au cas élémentaire de la flexion appliquée à l'ensemble du profil.

Les deux paramètres relatifs aux sollicitations antisymétriques peuvent s'écrire:

$$k_{a1} = \frac{EI_d}{GC} \cdot \frac{3g^2 L^2}{c^3} \cdot \beta_1 \quad \text{et} \quad k_{a2} = \frac{3I_d L^4}{c^3 I_z} \cdot \beta_1$$

où

$$\beta_1 = \frac{1}{1 + \frac{3 I_d}{c S}}$$

Ces deux paramètres sont une mesure de la rigidité de la dalle par rapport à celle des caissons, en torsion et en flexion verticale respectivement. L'influence de la déformation transversale des caissons est représentée par le facteur β_1 , qui est égal à 1 pour des caissons parfaitement rigides.

Si l'ensemble du profil est parfaitement rigide, on a $S = \infty$ et $I_d = \infty$; l'équation régissant la distribution de q (4.18) n'est plus alors que du deuxième ordre et équivaut, pour un profil symétrique, à l'équation différentielle des rotations en torsion fléchie.

Bien que les caractéristiques géométriques des ouvrages puissent varier dans une large mesure, les critères de résistance et d'économie ainsi que les nécessités constructives imposent certaines limites, comme par exemple celle du rapport de la portée à la hauteur du profil. D'autre part, les moments d'inertie d'une section sont interpendants. Dans le type de pont qui nous intéresse, ces restrictions affectent les coefficients de rigidités relatives k_{s1} , k_{s2} , k_{a1} et k_{a2} ; le tableau 4.4 donne leurs valeurs calculées pour huit ouvrages existants.

Tableau 4.4

Facteurs de rigidités relatives calculés pour huit ouvrages existants (voir chapitre 7)

Ouvrages	k_{s1}	k_{s2}	k_{s2}/k_{s1}^2	k_{a1}	k_{a2}	k_{a2}/k_{a1}^2	β_1
1) Stuttgart	306	133	0,00142	5,31	260	9,22	1,007
2) Caprivi	207	158	0,00369	5,61	192	6,10	1,000
3) Baden-Baden	386	503	0,00338	16,30	1263	4,75	1,001
4) Werdohl	608	284	0,00768	59,60	7900	2,22	1,000
5) Rain	400	1256	0,00785	37,80	3740	2,62	1,003
6) Worblen	378	266	0,00186	8,31	143	10,80	1,000
7) Frauenaarach	713	1794	0,00353	34,10	4160	3,58	1,002
8) Spree	196	93	0,00242	5,07	438	17,10	1,010

Dans ce tableau, on a également fait figurer les valeurs des rapports k_{s2} / k_{s1}^2 et k_{a2} / k_{a1}^2 , dont les expressions sont:

$$\frac{k_{s2}}{k_{s1}^2} = \left(\frac{E}{G}\right)^2 \cdot \frac{I_y h_c^2 I_d}{G^2 c} \cdot \beta_1' \quad \text{et} \quad \frac{k_{a2}}{k_{a1}^2} = \left(\frac{G}{E}\right)^2 \cdot \frac{C^2 c^3}{3 I_d I_z g^4} \cdot \frac{1}{\beta_1}$$

L'intérêt de ces paramètres est qu'ils ne contiennent pas la portée L ; leur valeur ne dépend donc que des caractéristiques de la section transversale. Comme on le verra dans les conclusions, l'élanement, soit le rapport de la portée à l'une des dimensions du profil, est un facteur déterminant en ce qui concerne l'efficacité de la répartition transversale des charges par la dalle. Il est donc utile de distinguer, en introduisant des paramètres appropriés, les effets des caractéristiques de la section de ceux de l'élanement.

On remarque que malgré la variété des ouvrages considérés, les coefficients sans dimension qui caractérisent leur comportement statique se situent dans des domaines relativement restreints; ce fait nous permettra d'établir une méthode de calcul simplifiée applicable dans la majorité des cas de la pratique (voir 4.5).

On remarque également que β_1 est pratiquement égal à 1 dans tous les cas considérés, ce qui signifie que la déformation transversale des caissons est très faible en regard des autres déformations. Cette remarque concerne également β_1' .

4.3 SOLUTION EXACTE DE LA METHODE DE LA COUPURE MEDIANE

Nous ne traiterons que deux modes de charge simples:

- a) charge concentrée
- b) charge uniformément répartie longitudinalement

La résolution de cas plus compliqués conduit à un développement considérable des calculs, ici sans intérêt.

4.3.1 CAS D'UNE CHARGE SYMETRIQUE PAR RAPPORT A L'AXE LONGITUDINAL

La résolution du problème consiste à intégrer l'équation différentielle du moment transversal dans la coupure, établie plus haut:

$$(4.12) \quad m^{IV} - k_{s1} \cdot m^{II} + k_{s2} \cdot m = k_{s2} \cdot e \cdot p$$

Posons:

$$(4.21) \quad r_1 = \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \sqrt{k_{s1} + \sqrt{k_{s1}^2 - 4k_{s2}}}, \quad r_2 = \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \sqrt{k_{s1} - \sqrt{k_{s1}^2 - 4k_{s2}}}$$

On a en général $k_{s2} \ll k_{s1}^2$ et r_1 et r_2 sont réels; le cas de r_1 et r_2 complexes se traite comme celui de la charge antisymétrique (voir 4.3.2.).

Si la charge linéaire $p(X)$ est uniforme, la solution de l'équation (4.12) est:

$$m(\xi') = (A_1 \operatorname{ch} 2r_1 \xi' + A_2 \operatorname{ch} 2r_2 \xi' + A_3 \operatorname{sh} 2r_1 \xi' + A_4 \operatorname{sh} 2r_2 \xi' + 1) \cdot e \cdot p$$

Considérons une travée isolée d'extrémités $\xi' = -\frac{1}{2}$ et $\xi' = \frac{1}{2}$

Les conditions aux limites sont alors:

$$(4.22) \quad \begin{array}{ll} \text{a) } \xi' = \pm \frac{1}{2}, & m = 0 \\ \text{b) } \xi' = \pm \frac{1}{2}, & m'' = 0 \\ \text{c) } \xi' = 0, & m' = 0 \\ \text{d) } \xi' = 0, & m''' = 0 \end{array}$$

Aux appuis en effet, la rotation ϕ des caissons est nulle, donc m aussi; de plus, les moments de flexion M_y sont nuls également, donc v'' , ϕ et m'' aussi, d'où les deux premières conditions. Les deux autres découlent de la symétrie des déformations et des efforts par rapport à la section médiane.

Les conditions c) et d) entraînent la suppression des termes en sinus hyperbolique. Les deux autres permettent de trouver les constantes A_1 et A_2 :

$$(4.23) \quad A_1 = \frac{r_2^2}{(r_1^2 - r_2^2) \cdot \text{chr}_1} \quad A_2 = \frac{-r_1^2}{(r_1^2 - r_2^2) \cdot \text{chr}_2}$$

Lorsqu'il s'agit de charges concentrées, le second membre de (4.12) est nul et la solution générale est de la forme:

$$m(\xi) = (B_1 \text{sh} 2r_1 \xi + B_2 \text{sh} 2r_2 \xi + B_3 \text{ch} 2r_1 \xi + B_4 \text{ch} 2r_2 \xi) \cdot \frac{eP}{L}$$

La valeur des constantes est déterminée par les conditions d'équilibre et de déformation aux appuis et de part et d'autre de la section d'application de la charge. Dans le cas de la charge à mi-portée, on a, en fixant l'origine de l'abscisse relative ξ à une extrémité, les conditions suivantes:

$$(4.24) \quad \begin{array}{ll} \text{a) } \xi = 0, m = 0 & \text{c) } \xi = \frac{1}{2}, m' = 0 \\ \text{b) } \xi = 0, m'' = 0 & \text{d) } \xi = \frac{1}{2}, m''' = -\frac{k s^2}{2} \cdot \frac{eP}{L} \end{array}$$

Aux extrémités ($\xi = 0$), les conditions sont les mêmes que dans le cas précédent. Au milieu de la portée, la symétrie et la continuité des déformations entraînent celles de m ($v' = \phi' = 0$, $\rightarrow m' = 0$). Cette condition implique la nullité des moments de torsion dans la section médiane. Ainsi, il faut que le moment extérieur $P \cdot e$ soit équilibré par le couple créé par les efforts tranchants horizontaux Q_y et les forces transversales dans la dalle, d'où la condition d).

Pour satisfaire aux deux premières conditions, les constantes B_3 et B_4 doivent être nulles. On trouve d'autre part:

$$(4.25) \quad B_1 = -\frac{k_{s2}}{16} \cdot \frac{1}{r_1(r_1^2 - r_2^2)\text{chr}_1}, B_2 = \frac{k_{s2}}{16} \cdot \frac{1}{r_2(r_1^2 - r_2^2)\text{chr}_2}$$

Le moment de flexion dans la coupure sous l'effet de charges symétriques à donc pour expressions:

- pour une charge linéaire uniforme p , d'excentricité e :

$$(4.26) \quad m(\xi') = (A_1 \text{ch} 2r_1 \xi' + A_2 \text{ch} 2r_2 \xi' + 1) \cdot e \cdot p$$

- pour une charge concentrée P à mi-portée, d'excentricité e :

$$(4.27) \quad m(\xi) = (B_1 \text{sh} 2r_1 \xi + B_2 \text{sh} 2r_2 \xi) \cdot \frac{eP}{L}$$

Les deux expressions ci-dessus constituent les solutions du problème, puisque tous les autres efforts peuvent être déduits du moment transversal m . Les valeurs maximums des principaux efforts dans les caissons sont données dans 4.3.3.

4.3.2 CAS D'UNE CHARGE ANTIMETRIQUE PAR RAPPORT

A L'AXE LONGITUDINAL

Dans le cas d'un système de charges antimétrique, on détermine l'effort hyperstatique $q(x)$ en intégrant l'équation (4.19) si les charges sont réparties, ou la même équation, mais sans second membre, si elles sont ponctuelles.

Considérons le cas où la charge est uniforme suivant x . On a alors une équation de la même forme que dans le cas d'une charge symétrique (cf. éq. 4.12):

$$(4.18) \quad q - k_{a1} \cdot q'' + k_{a2} \cdot q = k_{a2} \cdot p$$

Cependant, dans la plupart des cas, on a $k_{a1}^2 < k_{a2}$ et les racines de l'équation caractéristique sont complexes (voir les expressions 4.21).

Posons:

$$(4.28) \quad r_3 = \frac{1}{4} \cdot \sqrt{\sqrt{4k_{a2} - k_{a1}}}, \quad r_4 = \frac{1}{4} \cdot \sqrt{\sqrt{4k_{a2} + k_{a1}}}$$

L'intégrale est alors de la forme:

$$q(\xi') = (C_1 \sin 2r_3 \xi' \operatorname{sh} 2r_4 \xi' + C_2 \cos 2r_3 \xi' \operatorname{ch} 2r_4 \xi' + C_3 \sin 2r_3 \xi' \operatorname{ch} 2r_4 \xi' + C_4 \cos 2r_3 \xi' \operatorname{sh} 2r_4 \xi' + 1) \cdot p$$

Aux extrémités, les rotations et déplacements transversaux sont nuls, par conséquent q l'est aussi. D'autre part, les moments de flexion des caissons sont également nuls, donc $w'' = 0$. En dérivant deux fois l'équation (4.16b) et en y remplaçant par sa valeur w'' , w_d et α par zéro, on trouve une deuxième condition aux appuis. La symétrie des déformations par rapport au milieu de la portée permet d'écrire que les dérivées impaires de q s'y annulent.

Les conditions aux limites sont donc, pour une origine de ξ' à mi-portée:

$$a) \xi' = \frac{1}{2}, \quad q = 0 \qquad c) \xi' = 0, \quad q' = 0$$

(4.29)

$$b) \xi' = \frac{1}{2}, \quad q'' = -k_{a1} \varepsilon p \qquad d) \xi' = 0, \quad q''' = 0$$

Les conditions de symétrie c) et d) entraînent la suppression des deux derniers termes de facteurs C_3 et C_4 . D'après a) et b), les constantes qui subsistent sont:

$$C_1 = \frac{\lambda_1 - \cos r_3 \operatorname{ch} r_4 \frac{k_{a_1} \epsilon / 4}{a_1}}{\lambda_2 \cos r_3 \operatorname{ch} r_4 - \lambda_1 \sin r_3 \operatorname{sh} r_4}$$

(4.30)

$$C_2 = - \frac{\lambda_2 - \sin r_3 \operatorname{sh} r_4 \frac{k_{a_1} \epsilon / 4}{a_1}}{\lambda_2 \cos r_3 \operatorname{ch} r_4 - \lambda_1 \sin r_3 \operatorname{sh} r_4}$$

$$\text{où } \lambda_1 = (r_4^2 - r_3^2) \cos r_3 \operatorname{ch} r_4 - 2r_3 r_4 \sin r_3 \operatorname{sh} r_4$$

$$\lambda_2 = (r_4^2 - r_3^2) \sin r_3 \operatorname{sh} r_4 + 2r_3 r_4 \cos r_3 \operatorname{ch} r_4$$

Lorsqu'il s'agit de charges concentrées, le second membre de (4.19) est nul et l'hyperstatique q est alors de la forme:

$$q(\xi) = (D_1 \sin 2r_3 \xi \operatorname{ch} 2r_4 \xi + D_2 \cos 2r_3 \xi \operatorname{sh} 2r_4 \xi + \\ + D_3 \sin 2r_3 \xi \operatorname{sh} 2r_4 \xi + D_4 \cos 2r_3 \xi \operatorname{ch} 2r_4 \xi) \cdot \frac{P}{L}$$

Les déplacements et les rotations transversales s'annulent aux appuis, ainsi que leur dérivée seconde; q y est donc nul et q'' aussi. De part et d'autre de la section médiane, le moment de torsion dans chaque caisson vaut $- P \cdot e / 2$; en exprimant cette condition d'équilibre et en sachant que w' est nul dans cette même section, on trouve la condition c) ci-dessous. Une dernière condition s'obtient en exprimant que l'effort tranchant à mi-portée est égal à $P/2$.

En fixant l'origine de l'abscisse relative ξ à une extrémité, on a les conditions suivantes:

$$(4.31) \quad \begin{array}{ll} \text{a) } \xi = 0, & q = 0 \\ \text{b) } \xi = 0, & q'' = 0 \\ \text{c) } \xi = \frac{1}{2}, & q' = \frac{k_{a1}}{2} \cdot \frac{Pe}{L} \\ \text{d) } \xi = \frac{1}{2}, & q''' = \left(\frac{k_{a1}^2 \epsilon}{2} - \frac{k_{a2}}{2} \right) \cdot \frac{P}{L} \end{array}$$

Les conditions a) et b) donnent $D_3 = D_4 = 0$. Les deux autres fournissent les expressions de D_1 et D_2 .

$$(4.32) \quad D_1 = \frac{-\frac{k_{a2}}{4} \cdot \lambda_4 + \left(\frac{k_{a1}}{4} \cdot \lambda_4 - \lambda_6 \right) k_{a1} \epsilon}{8r_3 r_4 (r_4^2 + r_3^2) (\operatorname{ch}^2 r_4 - \sin^2 r_3)}$$

$$D_2 = \frac{\frac{k_{a2}}{4} \cdot \lambda_3 - \left(\frac{k_{a1}}{4} \lambda_3 - \lambda_5 \right) k_{a1} \epsilon}{8r_3 r_4 (r_4^2 + r_3^2) (\operatorname{ch}^2 r_4 - \sin^2 r_3)}$$

$$\text{où} \quad \lambda_3 = r_3 \cos r_3 \operatorname{ch} r_4 + r_4 \sin r_3 \operatorname{sh} r_4$$

$$\lambda_4 = r_4 \cos r_3 \operatorname{ch} r_4 - r_3 \sin r_3 \operatorname{sh} r_4$$

$$\lambda_5 = (r_4^2 - 3r_3^2) r_4 \sin r_3 \operatorname{sh} r_4 + (3r_4^2 - r_3^2) r_3 \cos r_3 \operatorname{ch} r_4$$

$$\lambda_6 = -(3r_4^2 - r_3^2) r_3 \sin r_3 \operatorname{sh} r_4 + (r_4^2 - 3r_3^2) r_4 \cos r_4 \operatorname{ch} r_4$$

L'effort tranchant dans la coupure est donc distribué selon les lois suivantes:

- pour des charges linéaires uniformes p antimétriques d'excentricité relative ϵ :

$$(4.33) \quad q(\xi') = (C_1 \sin 2r_3 \xi' \operatorname{sh} 2r_4 \xi' + C_2 \cos 2r_3 \xi' \operatorname{ch} 2r_4 \xi' + 1) \cdot p$$

- pour des charges concentrées P à mi-portée, antimétriques, d'excentricité relative ϵ :

$$(4.34) \quad q(\xi) = (D_1 \sin 2r_3 \xi \operatorname{ch} 2r_4 \xi + D_2 \cos 2r_3 \xi \operatorname{sh} 2r_4 \xi) \cdot \frac{P}{L}$$

Tous les efforts peuvent être déduits de ces expressions.

4.3.3 EFFORTS MAXIMUMS

Lorsque la charge est uniformément répartie sur la longueur, les efforts transversaux dans la dalle et les moments de flexion dans les caissons sont maximums à mi-portée, tandis que les moments de torsion sont les plus grands aux appuis. Pour une charge concentrée à mi-portée, les efforts transversaux et les moments de flexion longitudinaux sont également maximums à mi-portée, alors que les moments de torsion peuvent atteindre leur maximum soit dans cette même section, soit aux extrémités de la travée, selon la position en travers de la charge.

Les expressions ci-après permettent de calculer les valeurs maximums des efforts m et q dans la coupure et du moment de flexion dans le caisson directement chargé M_I , ainsi que les moments de torsion aux extrémités de ce même caisson.

Dans le cas de charges symétriques réparties, on a :

$$m_{\max} = (1 + A_1 + A_2) \cdot e \cdot p \quad (\text{au milieu})$$

(4.35)

$$M_{\text{tapp.}} = \left[A_1 \operatorname{sh} r_1 \left(\frac{1}{r_1} + \frac{16r_1^3}{k_{s2}} \right) + A_2 \operatorname{sh} r_2 \left(\frac{1}{r_2} + \frac{16r_1^3}{k_{s2}} \right) \right] \cdot \frac{eLp}{2} \quad (\text{aux appuis})$$

Pour les charges symétriques concentrées à mi-portée:

$$(4.36) \quad m_{\max} = (B_1 \operatorname{shr}_1 + B_2 \operatorname{shr}_2) \cdot \frac{eP}{L}$$

$$M_{\text{tapp.}} = - \frac{4k_{s1}}{k_{s2}} (B_1 r_1 + B_2 r_2) \cdot \frac{e \cdot P}{2}$$

Pour des charges antimétriques réparties:

$$q_{\max} = (1 + C_2) \cdot p$$

$$(4.37) \quad M_{\text{Imax}} = \left\{ \frac{k_{a1}}{k_{a2}} (1 + C_2 - \varepsilon) - \frac{4}{k_{a2}} \left[2C_1 r_3 r_4 + C_2 (r_4^2 - r_3^2) \right] \right\} \cdot pL^2$$

$$M_{\text{tapp}} = \left\{ 1 - \varepsilon + \left[C_1 (r_4 \sin r_3 \operatorname{chr}_4 - r_3 \cos r_3 \operatorname{shr}_4) + \right. \right. \\ \left. \left. + C_2 (r_4 \cos r_3 \operatorname{shr}_4 + r_3 \sin r_3 \operatorname{chr}_4) \right] \frac{1}{r_3^2 + r_4^2} \right\} \frac{pLg}{2}$$

Pour les charges antimétriques concentrées à mi-portée:

$$q_{\max} = (D_1 \sin r_3 \operatorname{chr}_4 + D_2 \cos r_3 \operatorname{shr}_4) \cdot \frac{P}{L}$$

$$M_{\text{Imax}} = \left[\frac{D_1}{k_{a2}} (k_{a1} \sin r_3 \operatorname{chr}_4 - 4\lambda_7) + \frac{D_2}{k_{a2}} (\cos r_3 \operatorname{shr}_4 - 4\lambda_8) \right] \cdot PL$$

$$(4.38) \quad \text{où } \lambda_7 = (r_4^2 - r_3^2) \sin r_3 \operatorname{chr}_4 + 2r_3 r_4 \cos r_3 \operatorname{shr}_4$$

$$\lambda_8 = (r_4^2 - r_3^2) \cos r_3 \operatorname{shr}_4 - 2r_3 r_4 \sin r_3 \operatorname{chr}_4$$

$$M_{\text{tapp}} = \left\{ - \frac{\varepsilon}{2} + \left[D_1 (1 + \sin r_3 \operatorname{shr}_4 - \cos r_3 \operatorname{chr}_4) + \right. \right. \\ \left. \left. + D_2 (-1 + \sin r_3 \operatorname{shr}_4 + \cos r_3 \operatorname{chr}_4) \right] \frac{1}{4r_4} \right\} \cdot P \cdot g$$

4.3.4 EFFET DE LA CONTINUITÉ DES POUTRES

Le cas d'un pont continu peut être traité sans difficulté, car les équations différentielles (4.12) et (4.18), régissant la distribution longitudinale des efforts dans la coupure médiane, sont valables quelles que soient les conditions aux appuis. Cependant, le développement complet des calculs est assez long et nous nous bornerons à n'en donner ici que le principe.

Comme précédemment, nous considérons les efforts et les déformations comme la somme de deux composantes, la première due aux charges symétriques, la seconde aux charges antisymétriques.

Les déplacements verticaux w et horizontaux v et les rotations de torsion ϕ étant supposés nuls à chaque appui, les seuls déplacements à considérer sont les rotations $\psi = dv/dX$ et $\theta = dw/dX$. Les grandeurs intervenant dans la continuité sont donc les rotations ψ et θ et les efforts correspondants M_y et M_z , exprimés chacun par leurs composantes:

$$(4.39) \quad \begin{aligned} \psi &= \bar{\psi} + \tilde{\psi} & M_y &= \bar{M}_y + \tilde{M}_y \\ \theta &= \bar{\theta} + \tilde{\theta} & M_z &= \bar{M}_z + \tilde{M}_z \end{aligned}$$

Les efforts de continuité sont représentés schématiquement dans la figure 4.5a.

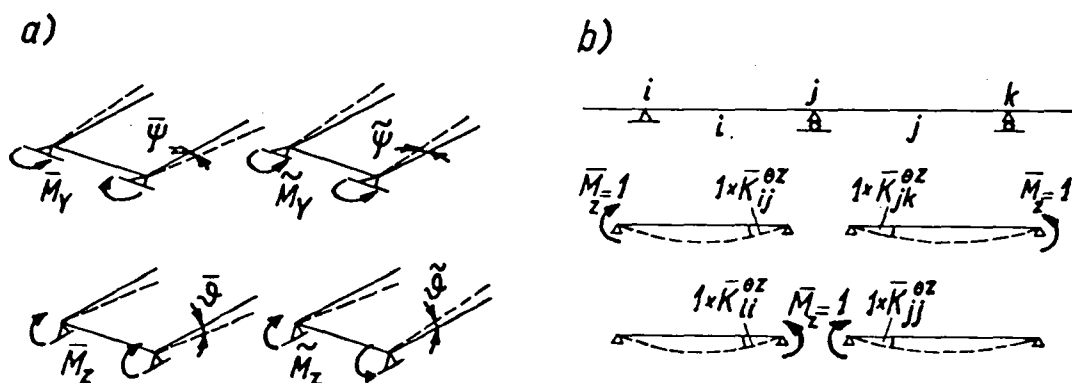


Fig. 4.5

La compatibilité des déformations aux appuis s'exprime par un système d'équations linéaires, dont les seconds membres sont, au signe près, les rotations dues aux charges dans les travées supposées isolées. Pour le j -ième appui, par exemple (voir fig.4.5b), on a, dans le cas de charges symétriques les deux équations suivantes:

$$\begin{aligned} & \bar{K}_{ij}^{\psi z} \bar{M}_{zi} + (\bar{K}_{ii}^{\psi z} + \bar{K}_{jj}^{\psi z}) \bar{M}_{zj} + \bar{K}_{jk}^{\psi z} \bar{M}_{zk} + \\ & + \bar{K}_{ij}^{\psi y} \bar{M}_{yi} + (\bar{K}_{ii}^{\psi y} + \bar{K}_{jj}^{\psi y}) \bar{M}_{yj} + \bar{K}_{jk}^{\psi y} \bar{M}_{yk} = - (\bar{\psi}_{oi} + \bar{\psi}_{oj}) \end{aligned} \quad (4.40)$$

$$\begin{aligned} & \bar{K}_{ij}^{\theta z} \bar{M}_{zi} + (\bar{K}_{ii}^{\theta z} + \bar{K}_{jj}^{\theta z}) \bar{M}_{zj} + \bar{K}_{jk}^{\theta z} \bar{M}_{zk} + \\ & + \bar{K}_{ij}^{\theta y} \bar{M}_{yi} + (\bar{K}_{ii}^{\theta y} + \bar{K}_{jj}^{\theta y}) \bar{M}_{yj} + \bar{K}_{jk}^{\theta y} \bar{M}_{yk} = - (\bar{\theta}_{oi} + \bar{\theta}_{oj}) \end{aligned}$$

Dans le cas de charges antisymétriques, on a un système analogue.

Les coefficients K (facteurs de flexibilité) correspondent aux déformations $\bar{\psi}, \tilde{\psi}, \bar{\theta}, \tilde{\theta}$ provoquées par des efforts unitaires $\bar{M}_y, \tilde{M}_y, \bar{M}_z$ et \tilde{M}_z appliqués aux extrémités de chaque travée. Dans chaque cas, il faut tout d'abord connaître la répartition longitudinale des efforts dans la coupure, $m(\xi)$ et $q(\xi)$, que l'on obtient en intégrant les équations (4.12) et (4.18) sans second membre. On a alors:

$$\begin{aligned} m(\xi) &= A_1 \text{ch} 2r_1 \xi + A_2 \text{ch} 2r_2 \xi + A_3 \text{sh} 2r_1 \xi + A_4 \text{sh} 2r_2 \xi \\ (4.41) \quad q(\xi) &= B_1 \sin 2r_3 \xi \text{sh} 2r_4 \xi + B_2 \cos 2r_3 \xi \text{ch} 2r_4 \xi + \\ &+ B_3 \sin 2r_3 \xi \text{ch} 2r_4 \xi + B_4 \cos 2r_3 \xi \text{sh} 2r_4 \xi \end{aligned}$$

Les constantes sont déterminées à l'aide des conditions aux limites appropriées. Dans le cas du moment antimétrique \tilde{M}_z , par exemple, on a

$$a) \quad \xi = 0, \quad q = 0$$

$$c) \quad \xi = 1, \quad q = 0$$

$$b) \quad \xi = 0, \quad q'' = -\frac{k_{a2}}{L^2} \cdot \tilde{M}_z$$

$$d) \quad \xi = 1, \quad q'' = 0$$

En effet, à chaque extrémité ($\xi = 0$ et $\xi = 1$), q est nul car toutes les déformations transversales y sont nulles. D'autre part, en remplaçant dans (4.1) d^2w/dx^2 par une expression tirée de (4.15c), (4.15d) et (4.16) dérivées deux fois, on montre qu'aux appuis, la deuxième dérivée de q est proportionnelle à M_z , qui est ici \tilde{M}_z .

Les expressions des constantes satisfaisant à ces conditions sont les suivantes:

$$B_1 = -\frac{\cos^2 2r_3 \operatorname{sh}^2 2r_4 + \sin^2 2r_3 \operatorname{ch}^2 2r_4}{\lambda_9} \cdot \frac{k_{a2}}{L^2} \cdot \tilde{M}_z$$

$$B_2 = 0$$

(4.42)

$$B_3 = \frac{\operatorname{sh} 2r_4 \operatorname{ch} 2r_4}{\lambda_9} \cdot \frac{k_{a2}}{L^2} \cdot \tilde{M}_z$$

$$B_4 = -\frac{\sin 2r_3 \cos 2r_3}{\lambda_9} \cdot \frac{k_{a2}}{L^2} \cdot \tilde{M}_z$$

$$\text{où } \lambda_9 = (r_4^2 - r_3^2) \sin 2r_3 \cos 2r_3 +$$

$$+ 2r_3 r_4 (\cos^2 2r_3 \operatorname{sh}^2 2r_4 - \sin^2 2r_3 \operatorname{ch}^2 2r_4)$$

L'effort hyperstatique étant ainsi connu, on peut calculer les rotations aux appuis $\tilde{\psi}$ et $\tilde{\theta}$ provoqués par le moment antimétrique \tilde{M}_z appliqué à une extrémité.

On voit que le calcul des facteurs de flexibilité K intervenant dans les équations (4.40) conduit à des expressions relativement compliquées.

Les seconds membres de ces mêmes équations dépendent des modes de charge. Pour des charges uniformément réparties longitudinalement ou concentrée à mi-portée, on les obtient à partir des solutions établies précédemment (éq. 4.26, 4.27, 4,33 et 4,34).

4.4 DISCUSSION DES SOLUTIONS EXACTES

Ayant obtenu les solutions générales du problème, c'est-à-dire la répartition longitudinale des efforts m et q dans la coupure médiane, tant pour des charges symétriques que pour des charges antimétriques, nous en avons tiré les expressions particulières correspondant à des charges réparties longitudinalement ou concentrées à mi-portée. Nous allons examiner ces fonctions $m(x)$ et $q(x)$, dont l'allure dépend des coefficients de rigidités relatives, dans les limites des valeurs que peuvent prendre ces coefficients en pratique.

4.4.1 CAS D'UNE CHARGE SYMETRIQUE

Pour une charge symétrique, les efforts sont commandés par l'équation différentielle (4.12). Pour que les racines r_1 et r_2 de l'équation caractéristique soient réelles, il faut

$$\frac{k_{s2}}{k_{s1}^2} \leq \frac{1}{4}$$

Les facteurs de raideurs relatives des ponts existants cités plus haut, (tableau 4.4.), montrent que cette condition est en général largement satisfaite. A la limite, on aurait $r_1 = r_2$; il faudrait pour cela que les poutres aient une inertie de torsion très faible par rapport à l'inertie de flexion horizontale et à la raideur de la dalle. Cette condition se rencontrerait dans le cas de poutres pleines; la solution de (4.12) serait alors de la même forme que celle de (4.18) (cas de charge anti-métrique).

Examinons les solutions obtenues pour une charge linéaire uniforme et pour une charge concentrée à mi-portée. Dans le premier cas, on a pour le moment dans la coupure:

$$(4.26) \quad m(\xi') = (A_1 \operatorname{ch} 2r_1 \xi' + A_2 \operatorname{ch} 2r_2 \xi' + 1) \cdot e \cdot p$$

Les expressions (4.21) pour r_1 et r_2 montrent que ces deux facteurs sont toujours positifs et que $r_1 > r_2$. On en déduit que A_1 est toujours positif et A_2 toujours négatif et que $A_2 > A_1$ (cf. 4.23). Il est facile de voir qu'il n'existe qu'un seul point d'inflexion de part et d'autre de l'origine; vu la condition (4.22b), ces points se trouvent aux extrémités des poutres. Considérant également les autres conditions aux limites, on montre que $m(\xi')$ est convexe et décroît monotoni- quement pour s'annuler aux appuis, selon l'illustration de la figure 4.6.

On observe également que la pente de $m(\xi')$ à l'appui est environ égale au double du quotient de $m(\xi')$ maximum par la demi-longueur $L/2$. En effet, comme le montre le tableau, on a en général $k_{s2}/k_{s1}^2 < 10^{-2}$, d'où $r_1/r_2 > 10$, soit $r_2^2 \ll r_1^2$; en outre, $r_2 \ll 1$, ce qui permet l'approximation $\operatorname{sh} r_2 \approx \operatorname{th} r_2 \approx r_2$. On a donc:

$$\frac{\left(\frac{dm}{dX}\right)_{X=L/2}}{\frac{m(0)}{L/2}} = \frac{r_1 r_2 (r_2 \operatorname{sh} r_1 \operatorname{ch} r_2 - r_1 \operatorname{sh} r_2 \operatorname{ch} r_1)}{r_1^2 \operatorname{ch} r_1 (\operatorname{ch} r_2 - 1) + r_2^2 \operatorname{ch} r_2 (1 - \operatorname{ch} r_1)} \approx -\frac{r_2 \operatorname{sh} r_2}{\operatorname{ch} r_2 - 1} \approx -2$$

Distribution longitudinale du moment de flexion m à l'axe de la dalle.

a) Pour une charge symétrique linéaire

b) Pour une charge symétrique concentrée

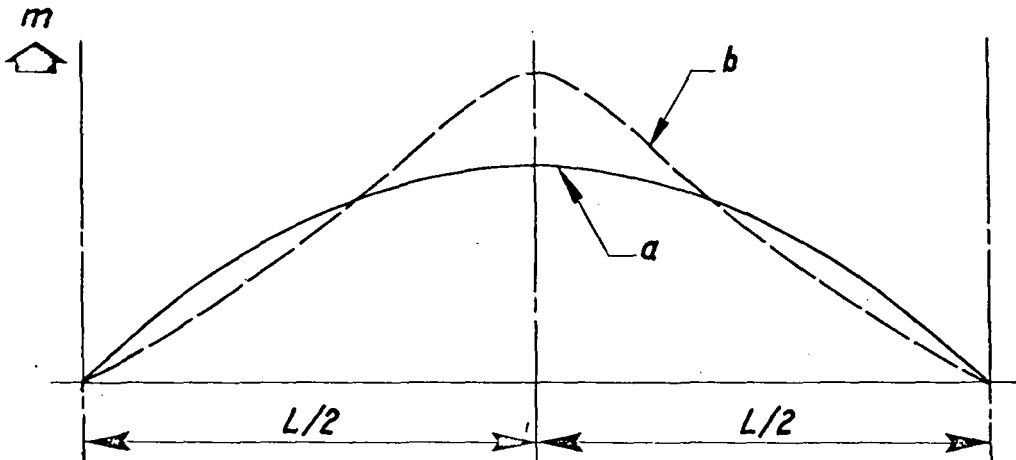


Fig. 4.6

Pour une charge symétrique concentrée à mi-portée, le moment dans la coupure est donné par:

$$(4.27) \quad m(\xi) = (B_1 \operatorname{sh} 2r_1 \xi + B_2 \operatorname{sh} 2r_2 \xi) \cdot \frac{eP}{L}$$

Comme $r_1 > r_2 > 0$, B_1 est négatif et B_2 positif; en outre, $|B_2| > |B_1|$. On peut alors montrer que $m(\xi)$ croît monotoniquement de l'appui ($\xi = 0$) à la section médiane ($\xi = \frac{1}{2}$) et que la courbure est négative à l'origine, puis positive. La courbe ainsi définie représente la distribution du moment transversal dans la première moitié de la travée; dans la seconde moitié, on a une courbe symétrique de la première (voir fig.4.6).

La pente de $m(\xi)$ à l'appui est sensiblement égale à celle d'une droite passant par l'origine et le sommet de la courbe. Dans les limites définies plus haut, $\operatorname{chr}_2 \ll \operatorname{chr}_1$ et $r_2 \cdot \operatorname{shr}_1 \ll r_1 \cdot \operatorname{chr}_1 \cdot \operatorname{shr}_2$; on a donc:

$$\frac{\left(\frac{dm}{dX}\right)_{X=0}}{\frac{m(L/2)}{L/2}} = \frac{r_1 r_2 (\operatorname{chr}_1 - \operatorname{chr}_2)}{r_1 \operatorname{shr}_2 \operatorname{chr}_1 - r_2 \operatorname{shr}_1 \operatorname{chr}_2} \cong \frac{r_1 r_2 \operatorname{chr}_1}{r_1 \operatorname{shr}_2 \operatorname{chr}_1} \cong 1$$

4.4.2 CAS D'UNE CHARGE ANTIMETRIQUE

Pour une charge antimétrique, c'est l'équation différentielle (4.18) qui régit la distribution des efforts. Les racines de l'équation caractéristique (cf. expression 4.21) sont complexes lorsque:

$$\frac{k_{a1}}{k_{a1}^2} > \frac{1}{4}$$

Cette condition est généralement largement satisfaite dans les cas pratiques, comme le montre le tableau 4.4. Elle peut ne pas l'être si la rigidité de la dalle est relativement grande par rapport à celle des poutres en torsion. On a déjà montré que ces mêmes circonstances modifient la forme de la solution dans le cas des charges symétriques.

Pour des charges linéaires uniformes, l'effort tranchant dans la coupure est:

$$(4.33) \quad q(\xi') = \left(C_1 \sin 2r_3 \xi' \operatorname{sh} 2r_4 \xi' + C_2 \cos 2r_3 \xi' \operatorname{ch} 2r_4 \xi' + 1 \right) \cdot p$$

D'après les expressions de r_3 et r_4 (4.28), on voit que puisque $k_{a1}^2 < 4 k_{a2}$, ces deux facteurs sont toujours positifs et que $r_4 > r_3$. Outre ces deux paramètres, les constantes C_1 et C_2 (voir 4.30) contiennent l'excentricité relative ε . Cette dernière influence donc non seulement la valeur maximum de l'effort q dans la coupure, mais aussi l'allure de sa distribution.

Lorsque ε est nul, $q = f(\xi')$ a un point d'inflexion à chaque extrémité de la travée (condition 4.29b) et l'on peut vérifier que, pour $0 \leq \xi' \leq \frac{1}{2}$, il n'y en a pas d'autre, pour autant que $0 \leq r_3 \leq \pi$. Cette condition est généralement satisfaite dans les cas de la pratique. Lorsque $\varepsilon > 0$, les points d'inflexion se trouvent au-delà du segment $0 \leq \xi' \leq \frac{1}{2}$. En revanche, si $\varepsilon < 0$, on a un point d'inflexion pour $0 \leq \xi' \leq \frac{1}{2}$.

Une autre indication concernant la distribution de l'effort q est fournie par le rapport entre ses valeurs au quart et au milieu de la travée. On a :

$$\frac{q_{\xi'} = \frac{1}{4}}{q_{\xi'} = \frac{1}{2}} = \frac{C_1 \sin r_3/2 \cdot \operatorname{sh} r_4/2 + C_2 \cos r_3/2 \cdot \operatorname{ch} r_4/2 + 1}{C_2 + 1}$$

Ce rapport est généralement supérieur à 60% dans les cas de la pratique.

On peut donc conclure que pour des charges linéaires uniformes antisymétriques, l'effort tranchant transversal q (ξ'), maximum à mi-portée, décroît monotoniquement vers les appuis, suivant une courbe convexe, si $\varepsilon \geq 0$, ou en cloche, si $\varepsilon < 0$. Au quart de la portée, l'effort q atteint au moins les 60% de sa valeur maximum (voir fig. 4.7).

Distribution longitudinale de l'effort tranchant q à l'axe de la dalle.

a) Pour une charge antisymétrique linéaire

b) Pour une charge antisymétrique concentrée

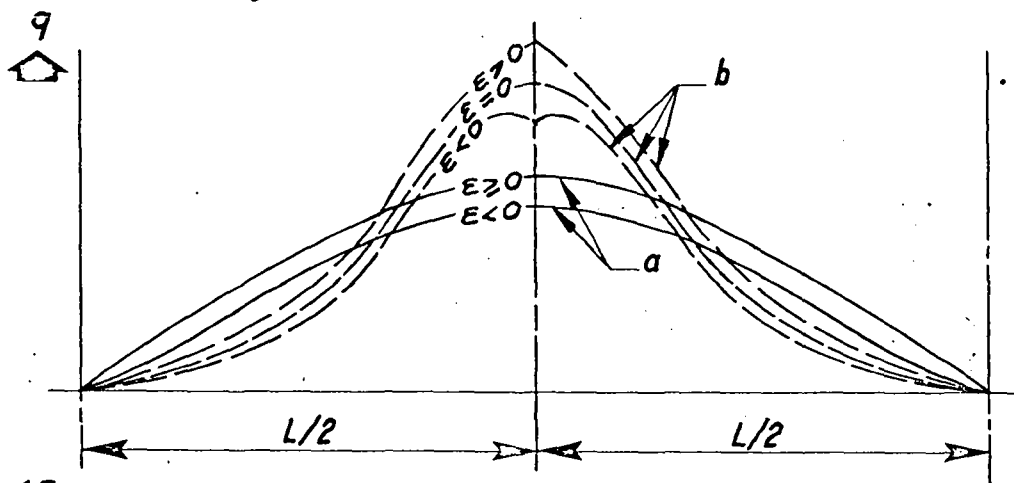


Fig. 4.7

Pour des charges antimétriques concentrées à mi-portée, on a :

$$(4.34) \quad q(\xi) = \left(D_1 \sin 2r_3 \xi \operatorname{ch} 2r_4 \xi + D_2 \cos 2r_3 \xi \operatorname{sh} 2r_4 \xi \right) \cdot \frac{P}{L}$$

Cette expression est valable entre $\xi = 0$ (appui) et $\xi = \frac{1}{2}$ (mi-portée); dans la seconde moitié de la longueur, on a une courbe symétrique de la première.

Les coefficients D_1 et D_2 dépendent également de l'excentricité relative ε , qui influence donc ici aussi l'allure de la distribution de q .

Si ε est nul, $q(\xi)$ a une pente nulle et une courbure convexe à mi-portée, sa pente est positive à l'origine. Dans l'intervalle $0 < \xi \leq \frac{1}{2}$, il y a un point d'inflexion au plus. tant que $r_3 \leq \pi$, ce qui est, comme on l'a déjà dit, le cas en pratique. On a alors pour q une courbe convexe ou en cloche (voir fig 4.7).

Lorsque $\varepsilon > 0$, la pente de $q(\xi)$ à mi-portée est positive, selon la condition 4.31c, et l'on a ainsi une pointe à cet endroit. Il n'y a qu'un point d'inflexion au maximum entre $\xi = 0$ et $\xi = \frac{1}{2}$.

Dans le cas où $\varepsilon < 0$, on a également $q'(\xi) < 0$ à mi-portée. Il n'y a qu'un seul point d'inflexion dans l'intervalle qui nous intéresse. L'effort q n'atteint plus son maximum au milieu de la travée, comme le montre le diagramme correspondant de la figure 4.7.

4.5 SOLUTION APPROCHÉE DE LA MÉTHODE DE LA COUPURE MÉDIANE

Pour abrégé les calculs, on peut renoncer à l'intégration des équations différentielles des efforts (éq.4.12 et 4.18) et admettre que l'hyperstatique est répartie suivant une fonction simple. D'autre part, comme on a vu (dans 4.2) que

la déformation transversale des caissons n'influence que peu la rigidité transversale, on la négligera. On pourra ainsi évaluer très rapidement les maxima des efforts principaux et chiffrer l'influence des coefficients de rigidités relatives k_{s1} , k_{s2} , k_{a1} et k_{a2} .

4.5.1 CAS D'UNE CHARGE LINEAIRE UNIFORME SUR LA LONGUEUR DU PONT

Pour une charge linéaire uniforme symétrique, les caractéristiques de la distribution du moment transversal $m(X)$ établies plus haut (cf.4.4.1) montrent que cette distribution peut être convenablement représentée par une sinusoïde. Pour l'effort normal transversal, on admet également une distribution sinusoïdale. La fonction sinusoïdale, que nous choisissons pour représenter les hyperstatiques, n'étant qu'une approximation de la répartition longitudinale exacte, la condition de déformation ne peut être satisfaite qu'en une seule section, soit à mi-portée. On a donc:

$$(4.43) \quad m(X) = \bar{m} \cdot \sin \pi X/L \quad L = \text{portée du pont}$$

$$n(X) = \bar{n} \cdot \sin \pi X/L \quad \bar{m} \text{ et } \bar{n}: \text{valeurs max. de } m \text{ et } n$$

La rotation de flexion de la dalle à mi-portée est alors:

$$(4.44) \quad - \bar{\phi} = \frac{c}{EI_d} \cdot \bar{m}$$

Tandis que la rotation du caisson au même point sous l'effet de p , de n et de m devient, cette rotation étant nulle aux appuis:

$$(4.45) \quad \bar{\phi} = - \frac{1}{GC} \cdot \frac{L^2}{8} \cdot p \cdot e + \frac{1}{GC} \cdot \frac{L^2}{\pi^2} \cdot \bar{m} - \frac{1}{GC} \cdot \frac{L^2}{\pi^2} \cdot h_c \cdot \bar{n}$$

Le déplacement v résultant de la flexion horizontale du caisson est donné par:

$$(4.46) \quad \bar{v} = - \frac{L^4}{\pi^4} \cdot \frac{1}{EI_y} \cdot \bar{n}$$

En exprimant que le déplacement horizontal au niveau de la dalle est nul, on peut éliminer \bar{n} ; en égalant ensuite les deux expressions de $\bar{\phi}$, on obtient \bar{m} , qu'il est commode d'écrire en valeur relative au moyen du quotient α_1 :

$$(4.47) \quad \alpha_1 = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\bar{m}}{pe} = \frac{1}{4\pi \left(\frac{1}{\pi^2} + \frac{\pi^2 + k_{s1}}{k_{s2}} \right)}$$

α_1 est le rapport entre le moment total dans la coupure et le couple total exercé par la charge sur chaque caisson.

Les paramètres k_{s1} et k_{s2} , comme on l'a vu dans 4.2, expriment le rapport de la rigidité de torsion à la rigidité de flexion horizontale d'un caisson et celui de la rigidité de flexion transversale de la dalle à la rigidité de torsion d'un caisson.

Dans le cas d'une charge linéaire uniforme antisymétrique, les considérations faites dans 4.4.2 permettent d'admettre également pour $q(X)$ l'approximation par une sinusoïde, soit:

$$(4.48) \quad q(X) = \bar{q} \sin \pi X/L$$

La flèche de la dalle à mi-portée du pont est alors:

$$(4.49) \quad \bar{w}_d = \frac{c^3}{3EI_d} \cdot \bar{q}$$

La flèche du caisson sous l'effet de la charge linéaire p et de l'effort hyperstatique q est, pour la poutre simplement appuyée:

$$(4.50) \quad \bar{w} = \frac{5}{384} \cdot \frac{pL^4}{EI_z} - \frac{L^4}{\pi^4} \cdot \frac{\bar{q}}{EI_z}$$

Ces mêmes forces provoquent une rotation du caisson nulle aux appuis et égale à mi-portée à :

$$(4.51) \quad \bar{\phi} = - \frac{L^2}{8GC} \cdot p \cdot e + \frac{L^2}{\pi^2 GC} \cdot g \cdot \bar{q}$$

La condition de déformation (cf. éq. 4.16), n'est satisfaite, ici également, qu'à mi-portée; elle s'écrit donc :

$$(4.52) \quad \bar{w}_d = \bar{w} - g \bar{\phi}$$

En y remplaçant les déformations par leur expression en fonction de p et de q , on trouve la valeur de q , que l'on peut rapporter à p sous la forme du quotient α_3 :

$$(4.53) \quad \alpha_3 = \frac{2\bar{q}}{\pi p} = \frac{\pi^3 (5k_{a2} + 48 k_{a1} \cdot \epsilon)}{192 (\pi^4 + \pi^2 k_{a1} + k_{a2})}$$

α_3 est le rapport de la somme des efforts tranchants dans la coupure à la charge totale sur chaque caisson. k_{a1} et k_{a2} sont les facteurs de rigidité relative de la dalle par rapport à celle des caissons en torsion et en flexion verticale.

Les efforts dans la coupure étant maintenant définis, par les expressions de α_1 et α_3 , pour des charges linéaires symétriques et antisymétriques, on établit, par superposition des effets de ces charges, les expressions des efforts maximums pour une charge linéaire uniforme asymétrique, d'excentricité relative ϵ :

(4.54) Moment de flexion maximum (à mi-portée) :

$$M_{\max} = \frac{pL^2}{8} \left(1 - \frac{2\alpha_3}{\pi} \right)$$

(4.55) Moment de torsion maximum (sur appui) :

$$M_{\text{tapp.}} = - \frac{pLg}{2} \left\{ \epsilon \left[1 - \frac{\alpha_1}{2} \left(1 - \frac{\pi^4}{ks_2} \right) \right] - \frac{\alpha_3}{2} \right\}$$

Il est commode d'introduire un coefficient de répartition ρ exprimant la part du moment total supportée par le caisson qui n'est pas directement chargé. On trouve qu'il est directement proportionnel à α_3 :

$$(4.56) \quad \text{Coefficient de répartition:} \quad \rho_p = \frac{2\alpha_3}{\pi}$$

Ainsi, ρ est fonction des rigidités relatives k_{s1} et k_{s2} , mais aussi de l'excentricité $e = \varepsilon \cdot g$ de la charge. Dans la section transversale d'un pont déterminé, la courbe $\rho = \rho(e)$ représente la répartition de la charge entre les deux caissons suivant sa position en travers.

4.5.2 CAS D'UNE CHARGE CONCENTREE A MI-PORTEE

Pour une charge concentrée symétrique, les caractéristiques de la fonction $m(X)$ relevées dans 4.4.1 conduisent à adopter une droite comme fonction approchée. On choisit la même distribution pour l'effort normal $n(X)$. On a donc:

$$(4.57) \quad m = \bar{m} \frac{X}{L/2} \quad n = \bar{n} \frac{X}{L/2}$$

Pour trouver les expressions des efforts, on procède de la même manière que dans le cas d'une charge linéaire, c'est-à-dire qu'on exprime la compatibilité des déformations dans la coupure à mi-portée.

La valeur relative du moment transversal maximum \bar{m} dans la coupure est alors:

$$(4.58) \quad \alpha_2 = \frac{\bar{m} L}{P e} = \frac{1}{4 \left(\frac{1}{12} + \frac{k_{s1} + 10}{k_{s2}} \right)}$$

Lorsqu'il s'agit d'une charge concentrée antisymétrique, l'effort hyperstatique $q(X)$ a une distribution variant sensiblement suivant l'excentricité relative ε . En schématisant les différentes courbes possibles (cf. fig. 4.7) par une droite, on a une approximation assez bonne pour $\varepsilon = 0$ et $\varepsilon > 0$, et acceptable pour $\varepsilon < 0$. On écrit donc :

$$(4.59) \quad q = \bar{q} \frac{X}{L/2}$$

Par des développements analogues à ceux des cas précédents, on obtient le facteur α_4 , définissant la valeur de l'effort tranchant q :

$$(4.60) \quad \alpha_4 = \frac{\bar{q} L}{p} = \frac{5k_{a2} + 60k_{a1} \varepsilon}{240 + 2k_{a2} + 20k_{a1}}$$

Comme dans le cas de la charge linéaire, on peut trouver les valeurs extrêmes résultant d'une charge concentrée à mi-portée P , d'excentricité e , à partir des facteurs α :

(4.61) Moment de flexion maximum (à mi-portée):

$$M_{\max} = \frac{PL}{4} \left(1 - \frac{\alpha_4}{6} \right)$$

(4.62) Moment de torsion sur appui:

$$M_{\text{tapp.}} = \frac{Pg}{2} \left\{ \varepsilon \left[1 - \frac{\alpha_2}{4} \left(1 + \frac{120}{k_{s2}} \right) - \frac{\alpha_4}{4} \right] \right\}$$

On peut également écrire la valeur du coefficient de répartition, exprimant la part du moment total reprise par le caisson non chargé, qui est proportionnelle à α_4 :

$$(4.63) \quad \rho_p = \frac{\alpha_4}{6}$$

4.5.3 UTILISATION DES SOLUTIONS APPROCHEES

Pour évaluer rapidement les efforts relatifs à la répartition transversale d'une charge répartie uniformément ou concentrée à mi-portée, on commencera par déterminer les paramètres k_{s1} , k_{s2} , k_{a1} , et k_{a2} selon les expressions établies précédemment (cf. 4.2.). On calculera ensuite les facteurs α_1 , α_2 , α_3 , et α_4 au moyen de (4.47), (4.58), (4.53) et (4.60); on connaît ainsi les valeurs maximums des efforts transversaux m et q dans la dalle; l'effort n se déduit facilement de m . Pour connaître les efforts maximums dans le caisson le plus chargé, on utilisera les relations (4.54), (4.55), (4.61) et (4.62). Les expressions (4.56) et (4.63), donnant les coefficients de répartition, permettent de comparer différents ponts entre eux.

5. LA METHODE DES PAROIS

5.1. PRINCIPES DU CALCUL PROPOSE

La méthode de calcul proposée ici permet de déterminer les efforts dans un pont à deux poutres caissons sous l'action de forces ou de moments appliqués le long des arêtes du profil.

Pour le cas de charges disposées de manière quelconque, il est donc nécessaire, par un calcul préalable, de ramener les charges aux arêtes en supposant que ces dernières ne peuvent subir aucun mouvement. Cela consiste à déterminer les efforts dans des plaques allongées encastrees sur leur pourtour. Les réactions et les moments d'encastrement de ces plaques constituent les charges de la deuxième phase du calcul, qui seule nous intéresse ici.

Le calcul est basé sur le modèle décrit dans 3.4, formé d'un assemblage de plaques-membranes; il s'effectue suivant la méthode des déformations. On établit donc:

- les conditions d'équilibre des arêtes
- les conditions de compatibilité des déformations aux arêtes
- les expressions des déformations des parois en fonction des efforts.

On obtient ainsi un système d'équations donnant les charges produisant des déformations unitaires. L'inversion de ce système permet de connaître les déformations produites par les charges données, et de là les efforts intérieurs.

Toutes les grandeurs sont écrites sous la forme de séries trigonométriques satisfaisant aux conditions fixées dans les sections d'extrémités soit: indéformabilité complète du profil dans son plan et absence de contraintes normales. En outre,

les diverses relations différentielles existant entre certaines déformations et certains efforts permettent de choisir de façon appropriée pour chaque grandeur une série de sinus ou de cosinus. Les charges extérieures doivent également être introduites sous la forme de telles séries.

Le calcul automatique permet de choisir un nombre de termes suffisant pour atteindre une précision parfaitement satisfaisante.

5.2 CONDITIONS D'EQUILIBRE ET CONDITIONS DE DEFORMATION

5.2.1 DEFINITION DES EFFORTS ET DES DEFORMATIONS

Les forces et moments extérieurs appliqués aux arêtes s'écrivent sous la forme de séries trigonométriques:

$$p(x) = \sum \bar{p}^{(n)} \cdot \sin n\pi x/L \quad \text{forces transversales}$$

$$(5.1) \quad t(x) = \sum \bar{t}^{(n)} \cdot \cos n\pi x/L \quad \text{forces longitudinales}$$

$$m(x) = \sum \bar{m}^{(n)} \cdot \sin n\pi x/L \quad \text{moments transversaux}$$

$$n = 1, 3, 5, \dots$$

Nous désignerons ces charges ou actions extérieures par P_i , l'indice correspondant au numéro indiqué dans la figure 5.1.

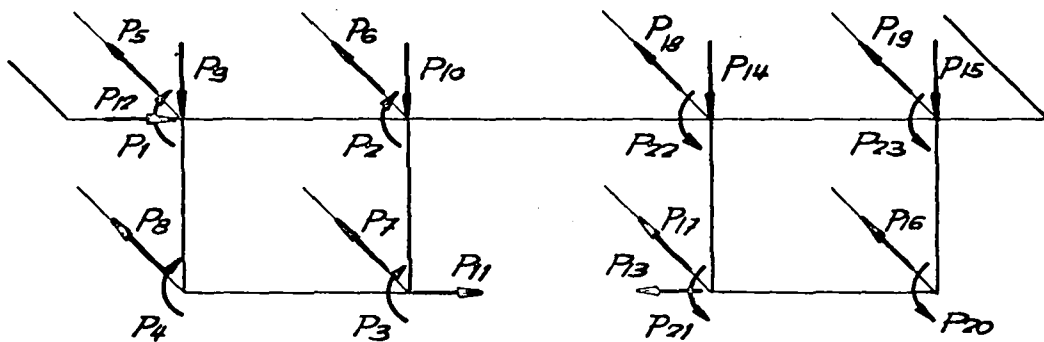


Fig. 5.1.

Les déformations du système sont entièrement déterminées si l'on connaît:

- les 4 déplacements verticaux des parois latérales des caissons
- les 3 déplacements transversaux horizontaux de la dalle et des parois inférieures
- les 8 déplacements longitudinaux des arêtes des caissons
- les 8 rotations transversales des arêtes des caissons.

Ces 23 translations et rotations indépendantes sont de la forme:

$$\begin{aligned}
 v(x) &= \sum \bar{v}^{(n)} \cdot \sin n\pi x/L && \text{déplacements transversaux} \\
 (5.2) \quad u(x) &= \sum \bar{u}^{(n)} \cdot \cos n\pi x/L && \text{déplacements longitudinaux} \\
 \alpha(x) &= \sum \bar{\alpha}^{(n)} \cdot \sin n\pi x/L && \text{rotations transversales} \\
 n &= 1, 3, 5, \dots
 \end{aligned}$$

Ces déformations correspondent aux forces et moments extérieurs P_i et seront affectées des mêmes indices; elles seront désignées par X_i .

Considérons maintenant les efforts intérieurs agissant le long des bords d'une paroi isolée (cf. 3.4.1. et 3.4.2.) qui sont également exprimés par des séries trigonométriques. On a :

$$\begin{aligned}
 p(x) &= \sum \bar{p}^{(n)} \cdot \sin n\pi x/L && \text{charge sur la paroi} \\
 t_s(x) &= \sum \bar{t}_s^{(n)} \cdot \cos n\pi x/L && \text{effort rasant supérieur} \\
 t_i(x) &= \sum \bar{t}_i^{(n)} \cdot \cos n\pi x/L && \text{effort rasant inférieur} \\
 m_t(x) &= \sum \bar{m}_t^{(n)} \cdot \sin n\pi x/L && \text{moment de torsion extérieur} \\
 m_i(x) &= \sum \bar{m}_i^{(n)} \cdot \sin n\pi x/L && \text{moment de flexion inférieur} \\
 m_s(x) &= \sum \bar{m}_s^{(n)} \cdot \sin n\pi x/L && \text{moment de flexion supérieur} \\
 n &= 1, 3, 5, \dots
 \end{aligned}
 \tag{5.3}$$

Ces efforts intérieurs seront désignés par F_i , l'indice étant défini dans le schéma de la figure 5.2 pour une partie du profil.

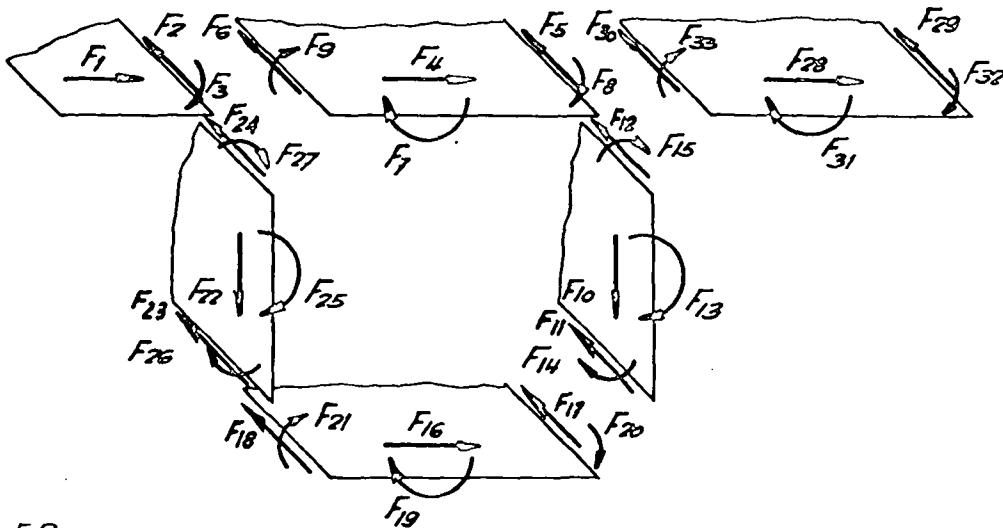


Fig. 5.2

Les contraintes dans chaque paroi sont donc déterminées par six efforts intérieurs agissant aux arêtes et par les conditions aux extrémités.

Les déformations à considérer sont les trois translations de chaque bord ainsi que leur rotation dans le plan transversal.

Dans le plan de la paroi, les translations transversales de chaque bord sont égales et il ne reste que six mouvements indépendants. Ces translations et rotations peuvent être écrites sous la forme des sommes suivantes:

$$v(x) = \sum \bar{v}^{(n)} \cdot \sin n\pi x/L \quad \begin{array}{l} \text{translation transversale} \\ \text{dans le plan de la paroi} \end{array}$$

$$u_i(x) = \sum \bar{u}_i^{(n)} \cdot \cos n\pi x/L \quad \begin{array}{l} \text{translation longitudinale} \\ \text{de l'arête inférieure} \end{array}$$

$$u_s(x) = \sum \bar{u}_s^{(n)} \cdot \cos n\pi x/L \quad \begin{array}{l} \text{translation longitudinale} \\ \text{de l'arête supérieure} \end{array}$$

(5.4)

$$\phi(x) = \sum \bar{\phi}^{(n)} \cdot \sin n\pi x/L \quad \begin{array}{l} \text{rotation de torsion de} \\ \text{l'ensemble de la section} \end{array}$$

$$\alpha_i(x) = \sum \bar{\alpha}_i^{(n)} \cdot \sin n\pi x/L \quad \begin{array}{l} \text{rotation de l'arête inférieure} \\ \text{par flexion transversale et torsion} \end{array}$$

$$\alpha_s(x) = \sum \bar{\alpha}_s^{(n)} \cdot \sin n\pi x/L \quad \begin{array}{l} \text{rotation de l'arête supérieure} \\ \text{par flexion transversale et torsion} \end{array}$$

$$n = 1, 3, 5, \dots$$

Dans le calcul, ces déformations seront désignées par Φ_i avec la même numérotation que les F_i .

5.2.2 EQUATIONS D'EQUILIBRE

On commence par établir les équations d'équilibre des parois et des arêtes.

Pour toute charge extérieure, force ou moment, d'ordre n , les efforts rasants t_s et t_i sont distribués selon une cosinusoïde d'ordre n , tandis que les autres efforts m_i , m_s , m_t et p suivent une loi sinusoidale du même ordre.

En exprimant qu'à chaque arête les efforts rasants des parois adjacentes font équilibre à la force longitudinale extérieure, on obtient 8 relations entre les $\bar{t}^{(n)}$ d'une part et les $\bar{t}_i^{(n)}$ et $\bar{t}_s^{(n)}$ d'autre part. Ces relations sont valables quel que soit n . On peut donc écrire, avec les notations P_i et F_i :

$$(5.5) \quad \begin{aligned} P_5 &= F_2 + F_6 + F_{24} \\ P_6 &= F_5 + F_{12} + F_{30} \\ &\dots \end{aligned}$$

L'équilibre de rotation des arêtes ne fait intervenir que des termes sinusoidaux. On obtient ainsi huit autres relations:

$$(5.6a) \quad \begin{aligned} P_1 &= F_3 + F_9 + F_{27} \\ P_2 &= F_8 + F_{15} + F_{33} \\ &\dots \end{aligned}$$

Les projections, dans un plan transversal, des forces agissant sur les parois et sur les arêtes fournissent le reste des équations d'équilibre, que l'on peut mettre sous la forme suivante:

$$(5.6b) \quad \begin{aligned} P_9 &= -\frac{1}{b} F_7 - \frac{1}{b} F_{19} + F_{22} \\ P_{10} &= \frac{1}{b} F_7 + \frac{1}{b} F_{19} - \frac{1}{c} F_{31} + F_{10} \\ &\dots \end{aligned}$$

b = largeur des caissons

c = espace entre les caissons

Pour obtenir ces équations, on a exprimé les efforts tranchants q et les efforts normaux n_y en termes de couples de torsion m_t et de charges de paroi p .

On a ainsi 23 équations donnant les forces et moments extérieurs P_i en fonction des 60 efforts intérieurs F_i . Sous forme matricielle, on écrit:

$$(5.7) \quad \{P_i\} = (S_{ij}) \cdot \{F_j\}$$

$\{P_i\}$ est le vecteur des charges, tandis que $\{F_j\}$ est le vecteur des efforts intérieurs. La matrice (S_{ij}) est la matrice statique.

5.2.3 EQUATIONS DE COMPATIBILITE

Il s'agit d'établir les relations exprimant la compatibilité des déformations des parois à chaque arête.

Les déplacements longitudinaux $u(x)$ le long d'une arête sont égaux en tout point à ceux des bords des parois adjacentes. En exprimant ces égalités, on obtient 20 conditions de déformations du type suivant:

$$(5.8) \quad \begin{array}{lll} \Phi_2 = X_5 & \Phi_6 = X_5 & \Phi_{24} = X_5 \\ \dots & & \\ \Phi_{11} = X_7 & \Phi_{17} = X_7 & \\ \dots & & \end{array}$$

Les Φ_i désignent les déformations des parois, avec les mêmes indices que les F_i (voir fig.5.2), tandis que le symbole X_i correspond aux déplacements et rotations v , u et α , numérotés comme les P_i (voir fig.5.1).

Les déplacements transversaux dans le plan des parois sont égaux à ceux des arêtes, puisque les variations de longueur en travers sont négligées. Ces 11 déplacements sont donc :

$$\Phi_1 = X_{12} \quad \Phi_4 = X_{12} \quad \Phi_{28} = X_{12}$$

(5.9)

$$\Phi_{10} = X_{10} \quad \Phi_{22} = X_9$$

...

Les rotations de torsion s'expriment au moyen des déplacements transversaux des bords des parois :

$$\Phi_7 = \frac{1}{b} (X_{10} - X_9) \quad \Phi_{31} = \frac{1}{c} (X_{14} - X_{10})$$

(5.10)

$$\Phi_{13} = \frac{1}{h} (X_{12} - X_{11}) \quad \Phi_{19} = \frac{1}{b} (X_{10} - X_9)$$

...

...

Il reste à exprimer la compatibilité des rotations autour de chaque arête pour les parois qui s'y joignent. La rotation de chaque bord de paroi est composée de la rotation d'ensemble (torsion) et de la rotation par rapport au plan moyen défini par les arêtes (flexion transversale). Pour la première paroi verticale, par exemple, Φ_{26} et Φ_{27} désignent les rotations des bords résultant de la torsion et de la flexion transversale, tandis que Φ_{25} est la rotation de torsion seule, c'est-à-dire le quotient de la différence des déplacements transversaux normaux à la paroi par la largeur de celle-ci.

La compatibilité des rotations transversales aux arêtes s'exprime donc par les 20 équations suivantes, donnant les rotations des bords des parois en fonction de celles des arêtes:

$$(5.11) \quad \begin{array}{ll} \Phi_3 = X_1 & \Phi_{20} = X_1 \\ \Phi_8 = X_2 & \Phi_{21} = X_4 \\ \Phi_9 = X_1 & \Phi_{26} = X_4 \\ \Phi_{14} = X_3 & \Phi_{27} = X_1 \\ \Phi_{15} = X_2 & \dots \end{array}$$

On a ainsi établi 60 équations de compatibilité des déformations qui permettent de trouver les 60 déformations des parois Φ_i à partir des 23 X_i , translations et rotations définissant l'état de déformation. On écrit donc:

$$(5.12) \quad \{\Phi_i\} = (D_{ij}) \cdot \{X_j\}$$

On appellera (D_{ij}) matrice des déformations, $\{\Phi_i\}$ vecteur des déformations intérieures et $\{X_j\}$ vecteur des déformations générales. On peut vérifier que la matrice des déformations est la matrice transposée de la matrice statique.

5.3 RELATIONS ENTRE LES EFFORTS ET LES DEFORMATIONS

5.3.1 EFFORTS ET DEFORMATIONS DE MEMBRANE

On considère successivement les trois modes de sollicitation fondamentaux définis dans le modèle de calcul (cf.3.4.2). Soit tout d'abord une paroi de longueur L chargée transversalement dans son plan par des forces réparties suivant une loi sinusoïdale, les extrémités étant libres de contraintes normales et assujetties à des liaisons empêchant tout déplacement

transversal. Les charges et efforts sont alors, pour le terme d'ordre n :

$$\begin{aligned}
 p_1^{(n)}(x) &= \bar{p}_1^{(n)} \cdot \sin n\pi x/L \\
 (5.14) \quad Q_1^{(n)}(x) &= \bar{Q}_1^{(n)} \cdot \cos n\pi x/L & \bar{Q}_1^{(n)} &= \frac{L}{n\pi} \cdot \bar{p}_1^{(n)} \\
 M_1^{(n)}(x) &= \bar{M}_1^{(n)} \cdot \sin n\pi x/L & \bar{M}_1^{(n)} &= \frac{L^2}{n^2\pi^2} \cdot \bar{p}_1^{(n)}
 \end{aligned}$$

En reprenant les hypothèses du chapitre 3 (cf. éq. 3.20 et 3.21), on a les expressions suivantes pour les contraintes tangentielles et normales:

$$\begin{aligned}
 (5.15) \quad \tau_1^{(n)}(x, y) &= \frac{3}{2\Omega} \left[1 - \frac{y^2}{(h/2)^2} \right] \cdot \frac{L}{n\pi} \cdot \bar{p}_1^{(n)} \cdot \cos n\pi x/L \\
 \sigma_1^{(n)}(x, y) &= \left[\frac{L^2}{n^2\pi^2} \cdot \frac{1}{I_y} \cdot y + \frac{E}{G} \left(\frac{1}{6I_y} y^3 - \frac{3}{10\Omega} y \right) \right] \cdot \bar{p}_1^{(n)} \cdot \sin n\pi x/L
 \end{aligned}$$

On en déduit la courbure:

$$(5.16) \quad \frac{d^2 v_1^{(n)}}{dx^2} = - \left(\frac{L^2}{n^2\pi^2} \cdot \frac{1}{EI_y} + \frac{1}{G\Omega} \cdot \frac{6}{5} \right) \cdot \bar{p}_1^{(n)} \cdot \sin n\pi x/L$$

En respectant la condition $v = 0$ aux extrémités, il vient en intégrant deux fois:

$$(5.17) \quad v_1^{(n)}(x) = \left(\frac{L^4}{n^4\pi^4} \cdot \frac{1}{EI_y} + \frac{L^2}{n^2\pi^2} \cdot \frac{1}{G \frac{5\Omega}{6}} \right) \cdot \bar{p}_1^{(n)} \cdot \sin n x/L$$

Les déplacements longitudinaux des bords, u_i et u_s , s'obtiennent par intégration de $\sigma = \sigma(x)$ aux bords:

$$\begin{aligned}
 (5.18) \quad u_{i1}^{(n)}(x) &= - \left(\frac{L^3}{n^3\pi^3} \cdot \frac{h}{2EI} + \frac{L}{n\pi} \cdot \frac{1}{G} \cdot \frac{h}{10\Omega} \right) \cdot \bar{p}_1^{(n)} \cdot \cos n\pi x/L \\
 u_{s1}^{(n)}(x) &= - u_{i1}^{(n)}(x)
 \end{aligned}$$

Examinons maintenant l'effet d'efforts rasants antimétriques répartis le long des bords suivant une cosinusoïde, avec les mêmes conditions aux limites que ci-dessus. Le terme de charge d'ordre n est:

$$(5.19) \quad t_2^{(n)}(x) = \bar{t}_2^{(n)} \cdot \cos n\pi x/L$$

Les efforts intérieurs sont donc:

$$Q_2^{(n)} = \text{cte} = -\frac{h}{L} \int_0^L t_2^{(n)}(x) dx = 0$$

(5.20)

$$M_2^{(n)}(x) = \bar{M}_2^{(n)} \sin n\pi x/L \quad \bar{M}_2^{(n)} = \frac{L}{n\pi} \cdot h \cdot \bar{t}_2^{(n)}$$

Les expressions des contraintes tangentiellles et normales établies dans 3.4.2 prennent ici la forme suivante:

$$(5.21) \quad \tau_2^{(n)}(x, y) = \frac{1}{2d} \left[-3 \frac{y^2}{(h/2)^2} + 1 \right] \cdot \bar{t}_2^{(n)} \cdot \cos n\pi x/L$$

$$\sigma_2^{(n)}(x, y) = \left[\frac{L}{n\pi} \cdot \frac{h}{I_y} \cdot y + \frac{n\pi}{L} \cdot \frac{E}{G} \cdot \frac{2}{\Omega h} \left(y^3 - \frac{3h^2}{20} y \right) \right] \cdot \bar{t}_2^{(n)} \cdot \sin n\pi x/L$$

La courbure et le déplacement transversal sont alors:

$$(5.22) \quad \frac{d^2 v_2^{(n)}}{dx^2} = - \left(\frac{L}{n\pi} \cdot \frac{h}{EI_y} + \frac{n\pi}{L} \cdot \frac{h}{5G\Omega} \right) \cdot \bar{t}_2^{(n)} \sin n\pi x/L$$

$$(5.23) \quad v_2^{(n)}(x) = \left(\frac{L^3}{n^3 \pi^3} \cdot \frac{h}{EI_y} + \frac{L}{n\pi} \cdot \frac{h}{5G\Omega} \right) \cdot \bar{t}_2^{(n)} \cdot \sin n\pi x/L$$

Les expressions des déplacements longitudinaux des bords se déduisent de celles des contraintes σ par intégration:

$$u_{i2}^{(n)}(x) = - \left(\frac{L^2}{n^2 \pi^2} \cdot \frac{h^2}{2EI_y} + \frac{h^2}{10G\Omega} \right) \cdot \bar{t}_2^{(n)} \cdot \cos n\pi x/L$$

(5.24)

$$u_{s2}^{(n)}(x) = - u_{i2}^{(n)}(x)$$

Le troisième cas de charge à considérer est celui des efforts rasants symétriques, qui ne produisent qu'un effort normal, soit d'après les conditions d'équilibre:

$$t_3^{(n)}(x) = \bar{t}_3^{(n)} \cdot \cos n\pi x/L$$

(5.25)

$$N_3^{(n)}(x) = \bar{N}_3^{(n)} \cdot \sin n\pi x/L \quad \bar{N}_3^{(n)} = \frac{L}{n\pi} \cdot 2 \cdot \bar{t}_3^{(n)}$$

L'hypothèse de la distribution parabolique des contraintes normales donne, sous la condition $\sigma = 0$ aux extrémités:

$$\sigma_3^{(n)}(x, y) = \frac{L}{n\pi} \cdot \frac{1}{1 - \frac{2}{3}k_\gamma^{(n)}} \cdot \frac{2}{\Omega} \left\{ 1 - k_\gamma^{(n)} \left[1 - \frac{y^2}{(h/2)^2} \right] \right\} \bar{t}_3^{(n)} \cdot \sin n\pi x/L$$

(5.26)

On détermine $k_\gamma^{(n)}$ en exprimant que l'énergie de déformation est minimum.

Les déplacements longitudinaux sont, par intégration de l'équation (5.26):

$$u_3^{(n)}(x, y) = - \bar{u}_{u3}^{(n)} \cdot \left\{ 1 - k_\gamma^{(n)} \left[1 - \frac{y^2}{(h/2)^2} \right] \right\} \cdot \cos n\pi x/L$$

(5.27)

On en déduit les déformations spécifiques:

$$\varepsilon_3^{(n)}(x, y) = \frac{n\pi}{L} \cdot \bar{u}_{u_3}^{(n)} \left\{ 1 - k_\gamma^{(n)} \left[1 - \frac{y^2}{(h/2)^2} \right] \right\} \cdot \sin n\pi x/L$$

(5.28)

$$\gamma_3^{(n)}(x, y) = \bar{u}_{u_3}^{(n)} \cdot \frac{2k_\gamma^{(n)}}{(h/2)^2} \cdot y \cdot \cos n\pi x/L$$

L'énergie correspondant à ces déformations est:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \cdot d \cdot \iint (E\varepsilon^2 + G\gamma^2) dx dy$$

$$\mathcal{E}^{(n)} = n^2 \pi^2 \frac{E\Omega}{4L} \bar{u}_u^{(n)2} \left[1 - \frac{4}{3} k_\gamma^{(n)} + \left(\frac{8}{15} + \frac{G}{E} \cdot \frac{L^2}{n^2 \pi^2} \cdot \frac{16}{3h^2} \right) \cdot k_\gamma^{(n)2} \right]$$

(5.29)

En annulant la dérivée de l'énergie par rapport au facteur k_γ , il vient:

$$k_\gamma^{(n)} = \frac{1}{8 \left(\frac{1}{10} + \frac{G}{E} \cdot \frac{L^2}{n^2 \pi^2 h^2} \right)}$$

(5.30)

On vérifie que, si le module de glissement G devient infini, les déformations de cisaillement sont nulles et le facteur k_γ aussi. Les contraintes normales sont alors uniformément réparties sur la section.

Par intégration suivant y de la première équation (5.28) et multiplication par E , on trouve une relation entre les déplacements et l'effort normal, d'où, grâce à (5.25) et (5.27), les déplacements en fonction de l'effort rasant:

$$u_{i_3}^{(n)}(x) = u_{s_3}^{(n)}(x) = - \frac{L^2}{n^2 \pi^2} \cdot \frac{2}{E\Omega} \cdot \frac{1}{1 - \frac{2}{3} k_\gamma^{(n)}} \cdot \bar{t}_3^{(n)} \cdot \cos n\pi x/L$$

(5.31)

Les déformations de membrane provoquées par la charge transversale p et les efforts rasants t sont ainsi entièrement connues.

5.3.2 EFFORTS ET DEFORMATIONS DE PLAQUE

Considérons la plaque de longueur L , de largeur h et d'épaisseur d dont les quatre côtés sont astreints à ne pas se déplacer normalement au plan moyen, soumise à des moments transversaux symétriques distribués le long des côtés longitudinaux suivant une loi sinusoïdale d'ordre n :

$$(5.32) \quad m_1^{(n)} = \bar{m}_1^{(n)} \cdot \sin n\pi x/L$$

En reprenant l'hypothèse du chapitre 3 suivant laquelle la flexion longitudinale et la torsion sont négligeables, on est ramené au cas de la poutre fléchie sans dilatations transversales. La relation entre la courbure et le moment de flexion, qui est constant en y , est donc :

$$(5.33) \quad \left(\frac{d^2 w_1}{dy^2} \right)_x = - \frac{1}{D} \cdot m_1(x) \quad \text{où} \quad D = \frac{Ed^3}{12(1-\mu^2)}$$

Les rotations des bords sont alors :

$$(5.34) \quad \alpha_{i1}^{(n)}(x) = \frac{h}{2D} \cdot \bar{m}_1^{(n)} \cdot \sin n\pi x/L$$

$$\alpha_{s1}^{(n)}(x) = \alpha_{i1}^{(n)}(x)$$

Dans le cas où la plaque est attaquée sur ses bords par des moments antisymétriques, on néglige également la flexion longitudinale et la torsion, et les sollicitations des bords sont :

$$m_2^{(n)}(x) = \bar{m}_2^{(n)} \cdot \sin n\pi x/L$$

$$q_2^{(n)}(x) = \bar{q}_2^{(n)} \sin n\pi x/L \quad \text{avec} \quad \bar{q}_2^{(n)} = \frac{2}{h} \cdot \bar{m}_2^{(n)}$$

Le moment de flexion transversal est linéaire en y et l'effort tranchant est constant. Si l'on tient compte des déformations d'effort tranchant, les rotations des bords ont pour expressions:

$$\alpha_{i2}^{(n)}(x) = \frac{h}{6D} \left(1 + \frac{6}{5} \cdot \frac{E}{G(1-\mu^2)} \cdot \frac{d^2}{h^2} \right) \cdot \bar{m}_2^{(n)} \cdot \sin n\pi x/L$$

(5.36)

$$\alpha_{s2}^{(n)}(x) = -\alpha_{i2}^{(n)}(x)$$

Le troisième cas de charge envisagé est celui dans lequel les bords longitudinaux sont soumis à des efforts tranchants antimétriques $q_3(x)$ représentés par l'expression:

$$q_3^{(n)}(x) = \bar{q}_3^{(n)} \cdot \sin n\pi x/L$$

(5.37)

Il a été admis que ces forces ne provoquent qu'une déformation de torsion de l'ensemble du profil. La variation du moment de torsion le long de la paroi est proportionnelle à $q_3(x)$; on a donc:

$$M_{t3}^{(n)}(x) = \bar{M}_{t3}^{(n)} \cdot \cos n\pi x/L \quad \text{avec} \quad \bar{M}_{t3}^{(n)} = \frac{L}{n\pi} \cdot h \cdot \bar{q}_3^{(n)}$$

(5.38)

$$\text{ou encore} \quad \bar{M}_{t3}^{(n)} = \frac{L}{n\pi} \cdot \bar{m}_{t3}^{(n)}$$

Etant admis que la rotation spécifique est proportionnelle au moment de torsion et que les extrémités de la paroi sont fixes, la rotation autour de l'axe longitudinal est donnée par:

$$\phi_3^{(n)}(x) = \bar{\phi}_3^{(n)} \cdot \sin n\pi x/L$$

(5.39)

$$\text{où} \quad \phi_3^{(n)} = \frac{L}{n\pi} \cdot \frac{\bar{M}_{t3}^{(n)}}{GI_t} = \frac{L^2}{n^2\pi^2} \cdot \frac{h}{GI_t} \cdot \bar{q}_3^{(n)}$$

Les rotations des bords sont égales à la rotation à l'axe:

$$(5.40) \quad \bar{\alpha}_{i3}^{(n)} = \bar{\alpha}_{s3}^{(n)} = \bar{\phi}_3^{(n)}$$

5.3.3 FACTEURS DE FLEXIBILITE ET DE RIGIDITE

Les actions intérieures du système, soit les forces et les moments sollicitant chaque paroi le long de ses bords longitudinaux et les translations et rotations en découlant sont, pour le terme d'ordre n :

$$\begin{aligned} \bar{p}^{(n)}(x) &= \bar{p}^{(n)} \sin n\pi x/L & \bar{v}^{(n)}(x) &= \bar{v}^{(n)} \sin n\pi x/L \\ \bar{t}_i^{(n)}(x) &= \bar{t}_i^{(n)} \cos n\pi x/L & \bar{u}_i^{(n)}(x) &= \bar{u}_i^{(n)} \cos m\pi x/L \\ \bar{t}_s^{(n)}(x) &= \bar{t}_s^{(n)} \cos n\pi x/L & \bar{u}_s^{(n)}(x) &= \bar{u}_s^{(n)} \cos n\pi x/L \\ \bar{m}_i^{(n)}(x) &= \bar{m}_i^{(n)} \sin n\pi x/L & \bar{\alpha}_i^{(n)}(x) &= \bar{\alpha}_i^{(n)} \sin n\pi x/L \\ \bar{m}_s^{(n)}(x) &= \bar{m}_s^{(n)} \sin n\pi x/L & \bar{\alpha}_s^{(n)}(x) &= \bar{\alpha}_s^{(n)} \sin n\pi x/L \\ \bar{m}_t^{(n)}(x) &= \bar{m}_t^{(n)} \sin n\pi x/L & \bar{\phi}^{(n)}(x) &= \bar{\phi}^{(n)} \sin n\pi x/L \end{aligned}$$

Les déformations totales sont obtenues par superposition des cas de charge particuliers étudiés plus haut:

$$(5.41) \quad \begin{aligned} \bar{v}^{(n)} &= \bar{v}_1^{(n)} + \bar{v}_2^{(n)} + \bar{v}_3^{(n)} & \bar{\alpha}_i^{(n)} &= \bar{\alpha}_{i1}^{(n)} + \bar{\alpha}_{i2}^{(n)} + \bar{\alpha}_{i3}^{(n)} \\ \bar{u}_i^{(n)} &= \bar{u}_{i1}^{(n)} + \bar{u}_{i2}^{(n)} + \bar{u}_{i3}^{(n)} & \bar{\alpha}_s^{(n)} &= \bar{\alpha}_{s1}^{(n)} + \bar{\alpha}_{s2}^{(n)} + \bar{\alpha}_{s3}^{(n)} \\ \bar{u}_s^{(n)} &= \bar{u}_{s1}^{(n)} + \bar{u}_{s2}^{(n)} + \bar{u}_{s3}^{(n)} & \bar{\phi}^{(n)} &= \bar{\phi}_1^{(n)} + \bar{\phi}_2^{(n)} + \bar{\phi}_3^{(n)} \end{aligned}$$

Les règles de superposition permettent de définir les

combinaisons de charges particulières équivalentes aux charges effectives:

$$\begin{aligned}
 \bar{p}_1^{(n)} &= \bar{p}^{(n)} & \bar{m}_1^{(n)} &= \frac{1}{2} \left(\bar{m}_i^{(n)} + \bar{m}_s^{(n)} \right) \\
 (5.42) \quad \bar{t}_2^{(n)} &= \frac{1}{2} \left(\bar{t}_i^{(n)} + \bar{t}_s^{(n)} \right) & \bar{m}_2^{(n)} &= \frac{1}{2} \left(\bar{m}_i^{(n)} - \bar{m}_s^{(n)} \right) \\
 \bar{t}_3^{(n)} &= \frac{1}{2} \left(-\bar{t}_i^{(n)} + \bar{t}_s^{(n)} \right) & \bar{m}_t^{(n)} &= h \cdot q_3^{(n)} = h \cdot q \cdot \bar{m}_i^{(n)} + \bar{m}_s^{(n)}
 \end{aligned}$$

En substituant aux termes des seconds membres des équations (5.41) les expressions établies précédemment, dans lesquelles les charges sont données par les relations (5.42), on obtient les facteurs de flexibilité de membrane et de plaque réunis dans le tableau (5.3). Ces facteurs définissent complètement les déformations d'une paroi en fonction des forces et des moments agissant sur ses bords. En résolvant le système des équations de flexibilité par rapport aux charges, on obtient les équations de rigidité. Sous forme matricielle, on écrit:

$$(5.43) \quad \{\Phi_i\} = (F_{ij}) \times \{F_j\}$$

$$(5.44) \quad \{F_i\} = (R_{ij}) \times \{\Phi_i\} \quad (R_{ij}) = (F_{ij})^{-1}$$

Les termes de (F_{ij}) sont les facteurs du tableau (5.3) pour chaque paroi.

5.4 RESOLUTION

5.4.1 CALCUL DES DEFORMATIONS ET DES EFFORTS INTERIEURS

En remplaçant dans les équations de rigidité (5.44) les déformations des parois Φ par leur expression en fonction des déformations extérieures X (5.12), on a :

$$(5.45) \quad \{F_i\} = (B_{ij}) \times \{X_i\} \text{ avec } (B_{ij}) = (R_{ij}) \times (D_{ij})$$

Tableau 5.3

Facteurs de flexibilité de membrane

	$\bar{p}^{(n)}$	$\bar{t}_i^{(n)}$	$\bar{t}_s^{(n)}$
$\bar{v}^{(n)}$	$\frac{1}{E} \left(\frac{L^4}{h^4} \cdot \frac{1}{I_y} + \frac{L^2}{h^2} \cdot \frac{6}{5\nu\Omega} \right)$	$\frac{1}{E} \left(-\frac{L^3}{h^3} \cdot \frac{2I_y}{\pi} - \frac{L}{\pi} \cdot \frac{\nu\Omega}{4} \cdot \frac{10\nu\Omega}{4} \right)$	$\frac{1}{E} \left(-\frac{L^3}{h^3} \cdot \frac{2I_y}{\pi} - \frac{L}{\pi} \cdot \frac{\nu\Omega}{4} \cdot \frac{10\nu\Omega}{4} \right)$
$\bar{u}_i^{(n)}$	$\frac{1}{E} \left(-\frac{L^3}{h^3} \cdot \frac{2I_y}{\pi} - \frac{L}{\pi} \cdot \frac{\nu\Omega}{4} \cdot \frac{10\nu\Omega}{4} \right)$	$\frac{1}{E} \left\{ \frac{L^2}{\pi^2} \left[\frac{h^2}{4I_y} + \frac{1}{(1-\frac{2\nu}{3})\Omega} \right] + \frac{2\nu\Omega}{4} \right\}$	$\frac{1}{E} \left\{ \frac{L^2}{\pi^2} \left[\frac{h^2}{4I_y} - \frac{1}{(1-\frac{2\nu}{3})\Omega} \right] + \frac{2\nu\Omega}{4} \right\}$
$\bar{u}_s^{(n)}$	$\frac{1}{E} \left(\frac{L^3}{h^3} \cdot \frac{2I_y}{\pi} + \frac{L}{\pi} \cdot \frac{\nu\Omega}{4} \cdot \frac{10\nu\Omega}{4} \right)$	$\frac{1}{E} \left\{ \frac{L^2}{\pi^2} \left[-\frac{h^2}{4I_y} + \frac{1}{(1-\frac{2\nu}{3})\Omega} \right] - \frac{2\nu\Omega}{4} \right\}$	$\frac{1}{E} \left\{ \frac{L^2}{\pi^2} \left[-\frac{h^2}{4I_y} - \frac{1}{(1-\frac{2\nu}{3})\Omega} \right] - \frac{2\nu\Omega}{4} \right\}$

Facteurs de flexibilité de poutre

	$\bar{m}_i^{(n)}$	$\bar{m}_s^{(n)}$	$\bar{m}_t^{(n)} = h \cdot \bar{q}^{(n)}$
$\bar{\alpha}_i^{(n)}$	$\frac{h}{D} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{d^2}{h^2} \cdot \frac{1}{1-\nu} \right) + \frac{L^2}{h^2} \cdot \frac{1}{\pi^2} \cdot \frac{GI_t}{I_t}$	$\frac{h}{D} \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{5} \cdot \frac{d^2}{h^2} \cdot \frac{1}{1-\nu} \right) - \frac{L^2}{h^2} \cdot \frac{1}{\pi^2} \cdot \frac{GI_t}{I_t}$	$\frac{1}{L^2} - \frac{1}{h^2} \cdot \frac{24\nu}{\pi^2} \cdot \frac{GI_t}{I_t}$
$\bar{\alpha}_s^{(n)}$	$\frac{h}{D} \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{5} \cdot \frac{d^2}{h^2} \cdot \frac{1}{1-\nu} \right) - \frac{L^2}{h^2} \cdot \frac{1}{\pi^2} \cdot \frac{GI_t}{I_t}$	$\frac{h}{D} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{d^2}{h^2} \cdot \frac{1}{1-\nu} \right) + \frac{L^2}{h^2} \cdot \frac{1}{\pi^2} \cdot \frac{GI_t}{I_t}$	$\frac{1}{L^2} + \frac{1}{h^2} \cdot \frac{24\nu}{\pi^2} \cdot \frac{GI_t}{I_t}$
$\bar{\varphi}^{(n)}$	$- \frac{1}{h^2} \cdot \frac{24\nu}{\pi^2} \cdot \frac{GI_t}{I_t}$	$\frac{1}{L^2} + \frac{1}{h^2} \cdot \frac{24\nu}{\pi^2} \cdot \frac{GI_t}{I_t}$	$\frac{1}{L^2} \cdot \frac{24\nu}{\pi^2} \cdot \frac{GI_t}{I_t} + \frac{1}{h^2} \cdot \frac{24\nu}{\pi^2} \cdot \frac{GI_t}{I_t}$

On peut alors introduire ces relations dans les équations d'équilibre (5.7) et il vient:

$$(5.46) \quad \{P_i\} = (T_{ij}) \times \{X_{ij}\} \quad \text{avec} \quad (T_{ij}) = (S_{ij}) \times (B_{ij})$$

Par inversion, on obtient les déformations générales X_i en fonction des charges extérieures P_j :

$$(5.47) \quad \{X_i\} = (U_{ij}) \times \{P_j\}$$

Il reste à déduire les efforts intérieurs des déformations au moyen des équations (5.45).

L'ensemble du calcul, y compris la détermination des rigidités, doit être répété pour chaque terme des séries représentant les charges extérieures. On obtient ainsi successivement diverses valeurs des F_i , qui sont les coefficients des termes des séries représentant les efforts. Pour les moments d'encastrement de la dalle entre caissons, par exemple, on a:

$$F_{32} = F_{32}^{(1)} \sin \frac{\pi x}{L} + F_{32}^{(2)} \sin \frac{2\pi x}{L} + F_{32}^{(3)} \sin \frac{3\pi x}{L} + \dots$$

(5.48)

$$F_{33} = F_{33}^{(1)} \sin \frac{\pi x}{L} + F_{33}^{(2)} \sin \frac{2\pi x}{L} + F_{33}^{(3)} \sin \frac{3\pi x}{L} + \dots$$

L'indice supérieur désigne l'ordre des termes.

Le programme "P2CS" que nous avons établi pour les applications numériques à l'aide d'une calculatrice électronique permet d'effectuer la somme des termes pour différentes valeurs de l'abscisse x .

5.4.2 CALCUL DES CONTRAINTES LONGITUDINALES

Les contraintes normales longitudinales se déduisent des déplacements longitudinaux par dérivation. On a alors pour le

terme d'ordre n :

$$(5.49) \quad \sigma^{(n)}(x) = - E \cdot \frac{n\pi}{L} : \bar{u}_u^{(n)} \sin n\pi x/L$$

Les déplacements dans les feuilletés moyens des divers éléments du profil sont calculés à partir des termes correspondants du vecteur des déformations $\{X\}$, exprimant les déplacements aux arêtes.

L'expression de la contrainte longitudinale le long de l'arête supérieure extérieure du premier caisson, par exemple, est :

$$(5.50) \quad \sigma_1(x) = - E \left(\frac{\pi}{L} X_5^{(1)} \sin \frac{\pi x}{L} + \frac{2\pi}{L} X_5^{(2)} \sin \frac{2\pi x}{L} + \dots \right)$$

Les contraintes normales longitudinales dans chaque section atteignent leur extremum à la face supérieure de la dalle et à la face inférieure des caissons. Ces valeurs découlent de la combinaison des efforts de plaque et des efforts de membrane. Dans le modèle mathématique admis (voir 3.4.1) les contraintes et les déformations transversales de membrane ainsi que les déformations longitudinales de plaque sont considérées comme négligeables. On a alors :

$$\sigma_{xm} = E \cdot \epsilon_{xm} \quad \text{pour la membrane}$$

$$\sigma_{xp} = \mu \sigma_{yp} \quad \text{pour la plaque}$$

$$\sigma_x = E \cdot \epsilon_{xm} + \mu \cdot \sigma_{yp}$$

Dans les parois latérales des caissons, le glissement de cisaillement est très petit, car les efforts rasants qui les sollicitent sont essentiellement antisymétriques et le rapport de leur largeur à leur longueur est faible; on peut admettre ici que les sections de ces parois restent planes. Les allongements spécifiques ϵ_{xm} des fibres peuvent alors être déduits

des allongements au niveau des intersections des plans moyens des éléments du profil par extrapolation linéaire.

Les contraintes transversales sont proportionnelles aux moments de flexion transversaux. Aux arêtes inférieures des caissons, on peut tirer directement leur valeur de celle des moments. Aux arêtes supérieures, les contraintes normales transversales prennent théoriquement des valeurs différentes de part et d'autre des axes des parois latérales, en raison des discontinuités dans la distribution des moments. En l'absence d'une connaissance précise, d'ailleurs peu utile, de la répartition des contraintes au voisinage immédiat et dans la zone limitée par les faces des éléments, il est toutefois facile de chiffrer approximativement l'influence des moments transversaux sur les contraintes longitudinales dans la face supérieure du profil en attribuant au moment transversal à l'arête une valeur égale à la moyenne arithmétique des moments à gauche et à droite de la paroi verticale considérée.

La contrainte normale longitudinale dans la fibre extrême supérieure d'une paroi latérale est alors donnée par l'expression suivante:

$$(5.52) \quad \sigma_{ss} = \sigma_s + \frac{\sigma_s - \sigma_i}{h} \cdot \frac{d}{2} - \mu \frac{E d}{2(1-\mu^2 D)} \cdot \frac{m_g + m_d}{2}$$

- σ_i et σ_s : contraintes de membrane aux arêtes inférieures et supérieures des parois latérales
- h : hauteur du profil en membrane
- d : épaisseur de la dalle supérieure
- m_g et m_d : moments transversaux dans la dalle de part et d'autre de l'axe de la paroi verticale.

6. LA METHODE DES TRONÇONS LONGITUDINAUX

La méthode décrite ci-après est basée sur le même modèle de calcul que la "méthode des parois", exposée dans le chapitre précédent. Toutefois, au lieu d'exprimer les lois de répartition longitudinale des efforts aux arêtes par des séries trigonométriques (cf. éq.5.3), on subdivise maintenant la longueur de la structure en segments, à l'intérieur desquels ces efforts varient linéairement le long du pont.

Un tel mode de calcul présente l'avantage de s'appliquer directement aux ponts continus à travées quelconques et de pouvoir être étendu, moyennant quelques adaptations, aux cas où les éléments du profil ont une hauteur ou une épaisseur variable.

Dans les limites du présent travail, la méthode n'a pas été développée entièrement; seul l'essentiel du calcul est donné.

6.1 PRINCIPE DU CALCUL PROPOSE

Dans le modèle formé d'un assemblage de plaques-membranes (cf.3.4), les contraintes sont entièrement définies en tout point lorsqu'on connaît la distribution des efforts régnant le long des arêtes. On choisit, comme approximation de la distribution exacte, des segments de courbes aussi simples que possible. Il est important que pour la flexion longitudinale générale, qui demeure le phénomène principal, l'hypothèse sur la distribution des efforts d'arête soit très proche de la distribution réelle.

Considérons le cas où les charges sont disposées transversalement de manière à ne provoquer aucune déformation du profil et où leur distribution longitudinale est uniforme par segments. Les charges sur les parois sont alors également uniformes par segments, ainsi que les moments de flexion trans-

versaux, puisque l'effet de dalle en long est négligé. (cf. 3.4.3)
 Les efforts rasants t_s et t_i pour chaque paroi sont répartis linéairement suivant x .

Lorsque les charges sont telles que les déformations transversales (distorsions) du profil ne sont plus nulles, on peut également supposer que les efforts de plaque transversaux sont répartis uniformément par segments; la distribution réelle continue est donc remplacée dans le calcul par une fonction en escalier. Les efforts rasants, en revanche, sont répartis de manière continue le long de la structure, suivant un diagramme polygonal.

Ainsi, la continuité des déformations et contraintes de membrane est respectée, tandis que le comportement en plaque n'est représenté qu'approximativement. Ce choix se justifie par le fait qu'un changement de la distribution des moments transversaux le long du pont n'influence pas notablement la valeur des efforts longitudinaux, comme le montrent notamment les résultats comparés des calculs présentés plus loin (voir tableau 9.2).

6.2 CONDITIONS D'EQUILIBRE ET CONDITIONS DE DEFORMATION

Considérons la structure divisée en m segments longitudinaux égaux de longueur l .

Comme le montre la figure 6.1, les efforts agissant sur la paroi j sont:

- les m charges transversales $p_{j,k} = n_{yi}(j,k) - n_{ys}(j,k)$
- les $m+1$ efforts rasants $t_i(j,k)$
- les $m+1$ efforts rasants $t_s(j,k)$
- les m efforts tranchants $q_i(j,k) = q_s(j,k)$
- les m moments transversaux $m_i(j,k)$
- les m moments transversaux $m_s(j,k)$

Comme dans le cas de la résolution par séries trigonométriques (cf. chap. 5), les charges extérieures sont d'abord réduites à un système de forces transversales et longitudinales et de moments transversaux agissant aux arêtes du profil. Ces actions extérieures sont évidemment mises sous la même forme que les efforts intérieurs aux arêtes, c'est-à-dire qu'ils sont constants par segments, sauf les forces longitudinales, qui varient linéairement par segments.

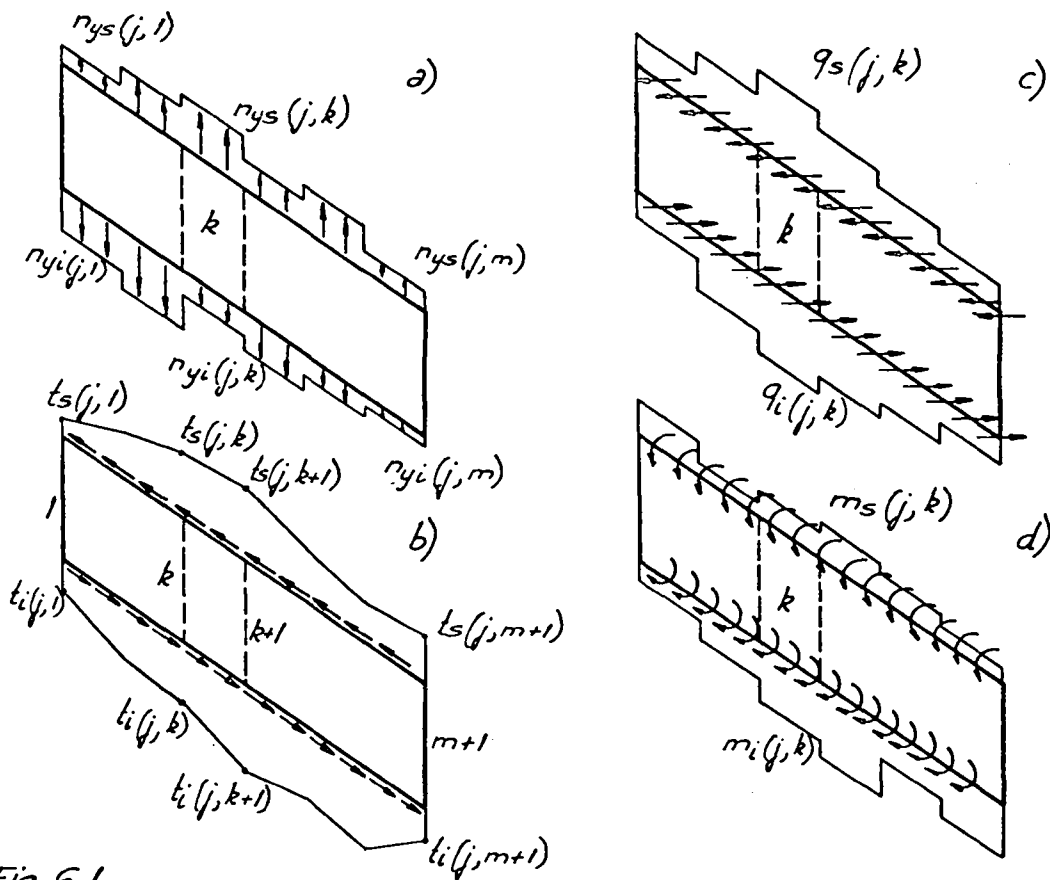


Fig. 6.1

L'équilibre des arêtes s'exprime par des équations analogues à (5.5), (5.6) et (5.7). En reprenant les mêmes notations que précédemment, on a pour le k ième segment:

$$\begin{aligned}
 P_{5,k} &= F_{2,k} + F_{6,k} + F_{24,k} \\
 \dots & \\
 P_{1,k} &= F_{3,k} + F_{9,k} + F_{27,k} \\
 \dots & \\
 P_{9,k} &= -\frac{1}{b} \cdot F_{7,k} - \frac{1}{b} \cdot F_{19,k} + F_{22,k} \\
 \dots &
 \end{aligned}
 \tag{6.1}$$

En écrivant ces relations pour chaque segment longitudinal, on obtient l'ensemble des équations d'équilibre que l'on peut noter sous la forme:

$$\{P\} = (S) \times \{F\}
 \tag{6.2}$$

Il faut maintenant exprimer la compatibilité des déformations des parois à chaque arête. Comme on le verra plus loin, étant donné le mode de répartition longitudinal des efforts admis, les translations et rotations aux arêtes sont, pour chaque segment de chaque paroi, de la forme suivante:

- translation transversale
dans le plan de la paroi : $v(x) = a_1 x^4 + b_1 x^3 + c_1 x^2 + d_1 x + e_1$
- translation longitudinale
de l'arête inférieure : $u_i(x) = a_2 x^3 + b_2 x^2 + c_2 x + d_2$
- translation longitudinale
de l'arête supérieure : $u_s(x) = a_3 x^3 + b_3 x^2 + c_3 x + d_3$
- rotation de l'ensemble de
la section : $\phi(x) = \frac{2}{h} w(x) = a_4 x^2 + b_4 x + c_4$
- rotation de l'arête inférieure: $\alpha_i(x) = a_5 x^2 + b_5 x + c_5$
- rotation de l'arête supérieure: $\alpha_s(x) = a_6 x^2 + b_6 x + c_6$

Les déplacements longitudinaux de l'un des bords d'une paroi composée de m segments sont définis par $4 \times m$ constantes dont $3(m-1)$ sont déterminées par les conditions de continuité des déplacements et des contraintes d'un segment à l'autre, et deux par les conditions de contraintes aux extrémités. Pour chaque bord de paroi, il reste donc $m+1$ constantes à déterminer au moyen des conditions de compatibilité.

Dans le k ième plan transversal limitant les tronçons longitudinaux, on aura donc, en reprenant les notations du chap. 5, 20 équations du type:

$$(5.8) \quad \begin{array}{lll} \phi_{2,k} = X_{5,k} & \phi_{6,k} = X_{5,k} & \phi_{24,k} = X_{5,k} \\ \dots & \dots & \dots \end{array}$$

Les expressions des translations transversales v des m segments d'une paroi comprennent $5 \times m$ constantes, parmi lesquelles $4 \times (m-1)$ sont déterminées par les conditions imposées dans les joints des segments; les conditions d'extrémités fournissent encore 4 relations. Seules les m constantes restantes dépendent des conditions de compatibilité aux arêtes.

Les translations w normales au plan de la paroi, exprimées sous la forme de rotations d'ensemble de la section (ϕ), suivent une loi du deuxième degré en x . La continuité de ϕ et de sa dérivée définit $2(m-1)$ constantes, les conditions aux extrémités en définissent 2, il faut m équations de compatibilité aux arêtes pour déterminer les $3 \times m$ constantes nécessaires.

Pour exprimer la compatibilité des déplacements transversaux dans chaque tronçon longitudinal, on introduit leur valeur moyenne dans le tronçon considéré. Par exemple, pour le déplacement vertical du k ième élément de la paroi extérieure du premier caisson, on écrit:

$$(5.9) \quad \phi_{22,k} = \frac{1}{\ell} \cdot \int_{(k-1) \cdot \ell}^{k \cdot \ell} v_1(x) dx$$

Dans chaque tronçon, les équations de compatibilité sont alors semblables aux relations (5.9) et (5.10) du chapitre précédent:

$$(5.10) \quad \begin{aligned} \phi_{1,k} &= X_{12,k} & \phi_{4,k} &= X_{12,k} & \phi_{28,k} &= X_{12,k} \dots \end{aligned}$$

$$\phi_{7,k} = \frac{1}{b} \left(X_{10,k} - X_{9,k} \right) \quad \phi_{13,k} = \frac{1}{h} \left(X_{12,k} - X_{11,k} \right)$$

Pour définir les rotations transversales d'arête des m tronçons d'une paroi, il faut connaître $3 \times m$ constantes, dont $2(m-1)$ sont déterminées par les conditions à respecter dans les joints entre segments et 2 à l'aide des conditions aux extrémités. Il reste m constantes dépendant des conditions aux arêtes. Là également, on introduit les valeurs moyennes des rotations dans chaque segment. On a dans le k ième tronçon:

$$(5.11) \quad \begin{aligned} \phi_{3,k} &= X_{1,k} & \phi_{8,k} &= X_{2,k} & \phi_{9,k} &= X_{1,k} \dots \end{aligned}$$

On obtient ainsi pour chaque tronçon longitudinal de la structure un système de 60 équations, que l'on peut écrire:

$$(5.12) \quad \{\Phi\} = (D) \times \{X\}$$

6.3 RELATIONS ENTRE LES EFFORTS ET LES DEFORMATIONS

Considérons la paroi j , divisée en m tronçons, soumise au système de charges d'arêtes représenté dans la fig.6.1.

Il faut déterminer:

- les m déplacements transversaux moyens $v_{j,k}$
- les $m+1$ déplacements longitudinaux $u_i(j,k)$
- les $m+1$ déplacements longitudinaux $u_s(j,k)$
- les m rotations d'ensemble moyennes $\phi_{i,j}$
- les m rotations d'arête moyennes $\alpha_i(i,j)$
- les m rotations d'arête moyennes $\alpha_s(i,j)$

Il faut tout d'abord rechercher les facteurs de flexibilité d'un segment isolé; ensuite, les conditions d'équilibre et de continuité des déformations dans les joints permettent de trouver les valeurs des facteurs de flexibilité de l'ensemble de la paroi.

Nous nous bornerons ici à exposer la méthode de détermination des facteurs de flexibilité d'un tronçon de paroi, sans donner leur expression.

Pour le comportement en membrane, reprenons les trois modes de sollicitation considérés dans 3.4.2. Lorsque la paroi est soumise à une charge transversale constante, l'intégration des équations (3.22) et (3.23) donne pour les déplacements v une fonction du 4^e degré et pour les déplacements u_i et u_s des fonctions du 3^e degré. Dans l'expression des efforts dans le panneau, il faut non seulement introduire la charge p , mais également les moments dans les joints.

Dans le deuxième mode, il faut intégrer (3.26) et (3.27) en tenant compte de l'effort t_2 réparti linéairement et des moments dans les joints. Les déplacements sont du 4^e degré pour v et du 3^e degré pour u_i et u_s .

Dans le cas d'efforts rasants symétriques, les déplacements transversaux sont nuls, et les déplacements longitudinaux s'obtiennent en intégrant l'équation différentielle du quatrième ordre (3.39), dont l'intégrale générale contient des fonctions hyperboliques. Si les tronçons sont assez courts, on remplacera ces fonctions par les deux premiers termes de leur développement en série de Taylor; sinon, on adoptera pour u_u une fonction du 3^e degré, dont on cherchera les coefficients en exprimant le minimum de l'énergie de déformation, comme cela a été fait dans le cas d'une fonction sinusoïdale (cf. chap. 5).

Pour les déformations de plaque, on reprend les relations (3.52) et (3.54). En intégrant cette dernière, on obtient une fonction du 2^e degré pour les rotations.

Les facteurs de flexibilité sont les termes de la matrice (F) avec:

$$(5.13) \quad \{\Phi\} = (F) \times \{F\}$$

6.4 RESOLUTION

Le calcul des déformations et des efforts s'effectue de la manière indiquée dans 5.4.1. La réalisation des calculs à l'aide de la calculatrice électronique demande une étude particulière, en raison de la taille des matrices à traiter. Cette étude sort du cadre du présent travail.

7. CONSTRUCTION DU MODELE, ESSAIS ET MESURES

Pour vérifier les méthodes de calcul proposées, nous avons recouru à des essais sur modèle réduit. Une maquette d'un pont à deux poutres-caissons rectangulaires à une seule travée a été construite au Laboratoire de statique des constructions de l'Ecole polytechnique fédérale de Lausanne.

Les essais systématiques pour six cas de charge caractéristiques ont été effectués sous la direction de Monsieur le Professeur F. PANCHAUD.

7.1. CHOIX DES DIMENSIONS ET CONSTRUCTION DU MODELE

7.1.1 DEFINITION DU PONT-TYPE

Pour donner à l'étude une portée aussi générale que possible, il convenait d'éviter un choix trop particulier des proportions des divers éléments du modèle. Plutôt que d'examiner un pont précis, on a donc rassemblé un certain nombre d'exemples réels pour en tirer un ouvrage idéal dans lequel on puisse observer tous les phénomènes essentiels.

Pour une série de huit ouvrages existants, on a calculé les rapports entre les différentes dimensions caractéristiques des profils, ainsi que les facteurs d'élancement L/B . Les moyennes de ces rapports ont permis de définir un pont-type, comme le montre le tableau 7.1. {16}, {23}, {30}, {38}, {39}, {40}.

Le premier ouvrage ne comporte qu'une seule travée, le pont de Caprivi est un pont-cadre, tandis que tous les autres sont à poutres continues.

On remarque que b/B et $2c/B$ varient peu d'un cas à l'autre, la largeur des caissons étant en général égale au quart

environ de celle du pont et l'espace qui les sépare un peu inférieur à leur largeur. Ces conditions, combinées à l'augmentation de hauteur de la section avec les portées, ont pour conséquence que le profil des caissons est d'autant plus aplati que le pont est court, pour autant que L/B ne varie pas trop. La position des poutres dans le profil transversal est choisie de manière à obtenir un bon équilibre entre les moments maximaux dans la dalle; une diminution de $2c$ produit une diminution des efforts dus à l'action locale des charges, mais un accroissement des efforts dus au rôle d'entretoise joué par la dalle.

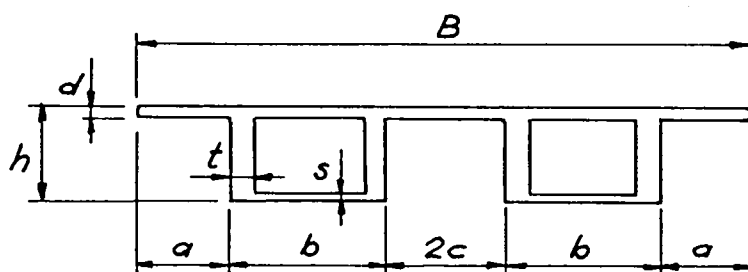


Tableau 7.1

Ouvrages	L m.	B m.	$\frac{b}{B}$	$\frac{2c}{B}$	$\frac{h}{b}$	$\frac{h}{t}$	$\frac{b}{d}$	$\frac{b}{s}$	$\frac{2c}{d}$	$\frac{L}{B}$	$\frac{L}{h}$
Stuttgart	35,55	16,80	0,29	0,24	0,45	5,45	18,5	40,0	15,4	2,1	16,3
Caprivi	42,00	24,06	0,21	0,31	0,33	3,30	16,7	33,3	25,0	1,75	25,4
Baden-Baden	23,50	10,0	0,26	0,18	0,48	3,60	13,0	21,7	9,0	2,35	18,8
Werdohl	33,60	11,60	0,27	0,19	0,29	2,25	14,3	26,3	10,0	2,9	37,4
Rain	30,00	11,60	0,25	0,19	0,49	3,95	10,2	19,0	7,7	2,6	21,8
Worblen	60,00	21,30	0,22	0,23	0,53	4,50	18,8	31,3	19,2	2,8	24,0
Frauenaurach	66,00	14,64	0,27	0,21	0,35	4,66	16,0	33,3	12,0	4,5	47,2
Spree	81,75	28,00	0,22	0,22	0,58	11,60	20,0	12,0	20,6	2,9	23,4
"Pont-type"	-	-	0,25	0,22	0,44	4,91	15,9	27,1	14,9	3,0	23,6

L'épaisseur relative de la dalle-tablier, caractérisée par les rapports b/d et $2c/d$, peut varier du simple au double, car l'effet des charges concentrées impose une épaisseur minimale

relativement indépendante des portées transversales. La raideur de la liaison entre caissons varie beaucoup, puisque l'épaisseur de la dalle égale en moyenne à $1/15^e$ de la portée $2c$, atteint $1/8^e$ dans un pont court et s'abaisse à $1/25^e$ dans un pont long.

L'épaisseur de la dalle inférieure des caissons est généralement de 12 à 15 cm, mais dans les ponts continus, elle augmente dans la région des appuis. On a en moyenne une valeur de $1/27^e$ pour s/b .

Les parois latérales des caissons, dans lesquelles des câbles de précontrainte doivent trouver à se loger, sont relativement épaisses, surtout dans les ponts de faible portée, où leur épaisseur peut atteindre près de la moitié de leur hauteur. Le cadre transversal formé par le profil a donc des montants très rigides, excepté dans les ponts longs.

L'élançement L/B ne dépasse pas 4,5 dans les exemples ci-dessus; il s'abaisse jusqu'à 1,75 ou même moins si l'on considère les travées de rive dont les portées plus faibles ne figurent pas dans le tableau. Dans ces cas extrêmes, les déformations transversales sont du même ordre de grandeur que les longitudinales.

Pour calculer l'élançement des poutres L/h figurant dans la dernière colonne du tableau, on a considéré la plus grande travée de chaque pont et la hauteur à mi-portée, lorsqu'elle est variable; c'est pourquoi L/h ne varie pas régulièrement avec la portée.

En conclusion, jugeant qu'il n'était pas nécessaire de s'en tenir, pour le modèle, à des dimensions correspondant exactement aux proportions moyennes du "pont-type", on a choisi des épaisseurs compatibles avec celles des plaques de plexiglas disponibles. Les rapports caractéristiques sont alors:

Tableau 7.2

	L	B	b/B	$2c/B$	h/b	h/l	b/d	b/s	$2c/d$	L/B	L/h
"Pont-type"	-	-	0,247	0,219	0,437	4,91	15,9	27,1	14,9	2,74	26,8
Modèle	64,00	21,46	0,257	0,210	0,504	6,18	19,3	33,8	16,1	2,98	23,6

7.1.2 DESCRIPTION GENERALE DU MODELE

Le modèle est un pont à une travée unique de 64,00 m. à l'échelle 1:40, soit d'une portée de 1600 mm. Ses caractéristiques géométriques sont les suivantes:

	<u>"Réalité"</u>	<u>Modèle</u>
Largeur totale	21,46 m.	536 ⁵ mm.
Hauteur totale	2,72	68
Largeur extérieure des caissons	5,40	135
Vide entre caissons	4,50	112 ⁵
Porte-à-faux de la dalle	3,08	77
Epaisseur de la dalle-tablier	0,28	7
Epaisseur des poutres	0,44	11
Epaisseur des dalles inférieures	0,16	4
Facteurs de raideurs relatives k_{s1}	428,0	428,0
k_{s2}	396,0	396,0
k_{a1}	11,2	11,2
k_{a2}	1212,0	1212,0

Chaque caisson est raidi à ses deux extrémités par une paroi transversale de même épaisseur que celle des poutres. Les deux caissons ne sont par contre reliés eux que par la dalle.

Les appareils d'appui, au nombre de huit, fournissent les réactions verticales et assurent la fixation du modèle dans le plan horizontal. Il n'y a qu'un seul appui fixe, un appui à guidage latéral et six appuis mobiles en tout sens.

Les dispositions géométriques du modèle sont données dans la figure 7.3.

Le matériau utilisé est un verre organique (plexiglas) dont les caractéristiques ont été mesurées par flexion sous moment constant de trois éprouvettes prismatiques découpées chacune dans l'une des trois plaques servant à la construction du modèle. Leurs dimensions étaient de 57 x 11, 40 x 7 et 39 x 4mm² pour les sections, avec des portées respectives de 300, 280

et 280 mm. Les mesures des flèches, des courbures et des allongements spécifiques longitudinaux et transversaux ont permis de déterminer pour les trois éprouvettes les valeurs moyennes suivantes:

Module d'élasticité (module Young)	$E = 34.400 \text{ kg/cm}^2$
Coefficient de Poisson	$\mu = 0,359$
Module d'élasticité au glissement	$G = 12.660 \text{ kg/cm}^2$

Ces valeurs ont été établies pour une durée de charge de 30 secondes.

7.1.3 CONSTRUCTION DU MODELE

Les plaques de plexiglas ont tout d'abord été poncées, afin de supprimer les inégalités de fabrication et d'obtenir les épaisseurs désirées.

Les différents éléments une fois découpés ont été assemblés à l'aide d'une colle, excepté les entretoises, qui ont été vissées pour faciliter un démontage éventuel.

Les appareils d'appui à bille d'acier ont été montés et réglés, puis le modèle a été lesté pour éviter des soulèvements éventuels. Lors des mesures dans les différents cas de charge, on a pu vérifier que les appuis ne sont jamais complètement déchargés; en revanche, les tassements ne peuvent être évités, mais ils sont négligeables en regard des déformations de flexion du modèle.

Pour faire agir des charges concentrées, on a utilisé un système à levier, permettant d'obtenir facilement la force désirée, soit 40 kg. Suivant les cas de charge, cette force a été divisée en deux ou quatre forces égales au moyen de barrettes à deux appuis. Afin de limiter la pression de contact, les charges ont été appliquées par l'intermédiaire de rondelles en caoutchouc de 10 mm de diamètre.

Les charges réparties linéaires étaient constituées par des poids de 2,5 kg. suspendus au modèle, équivalant à une charge continue de 0,5 kg/cm. Le dispositif de suspension assurait le centrage des forces sur les axes des parois latérales des caissons.

7.2 INSTRUMENTS DE MESURE

7.2.1 APPAREILLAGE DE MESURE

Les déformations générales du modèle ont été examinées en mesurant les flèches à l'aide de comparateurs gradués en centièmes de millimètres.

Pour mesurer les allongements spécifiques, on a utilisé des jauges à fil résistant de 120Ω , types PL 10, PC 5 et PR 5, comportant respectivement une grille de 10 mm, 2 grilles orthogonales de 5 mm et trois grilles de 5 mm à 45° l'une de l'autre; le facteur de jauge K était compris entre 2,01 et 2,08. Le pont de mesure était du type à lecture directe (Philips PT 1200); sa définition la plus sensible est de $\epsilon = 2 \cdot 10^{-6}$ pour une division du cadran. On s'est également servi d'un pont à lecture indirecte (Kyowa SM-AT), dont la définition est $\epsilon = 10 \cdot 10^{-6}$.

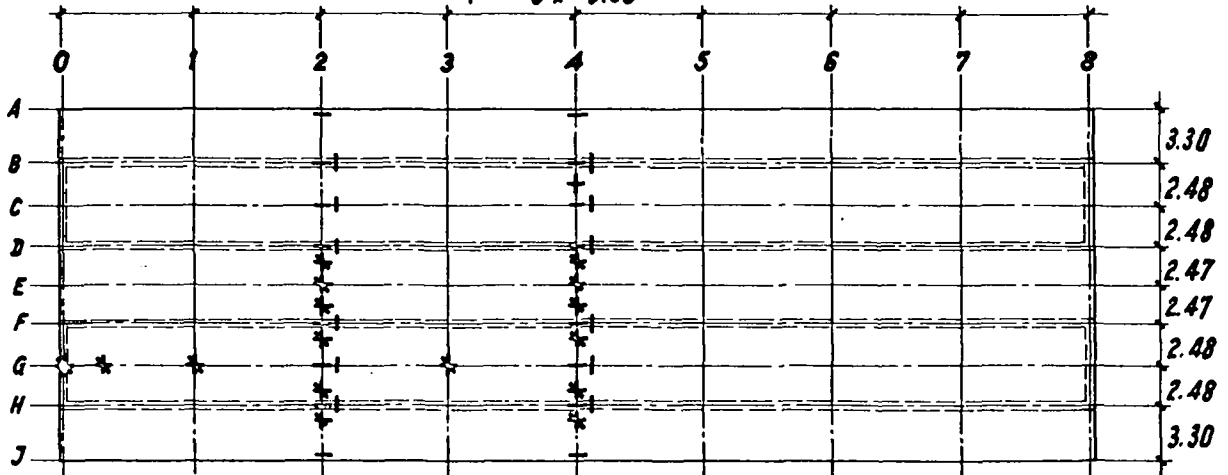
En certains points particuliers de la dalle, des mesures de courbure ont été effectuées au moyen d'un capteur inductif (Philips, type PR 9310/01) monté sur un support à trois pieds posé sur la dalle, raccordé au pont de mesure PT 1200. Ce dispositif, conçu et réalisé au Laboratoire de statique des constructions de l'EPFL, a permis de connaître la courbure moyenne de la dalle sur une longueur $\Delta x = 10$ mm avec une excellente précision, puisqu'en utilisant l'échelle du pont la plus sensible, une division correspondait à une courbure de $1/r = 2 \cdot 10^{-7} \text{ mm}^{-1}$.

Pour compléter l'ensemble de ces mesures, on a déterminé la valeur des réactions d'appui en remplaçant successivement chaque appareil d'appui par un dispositif formé de deux leviers en ciseaux et d'un dynamomètre; une vis permettait de compenser

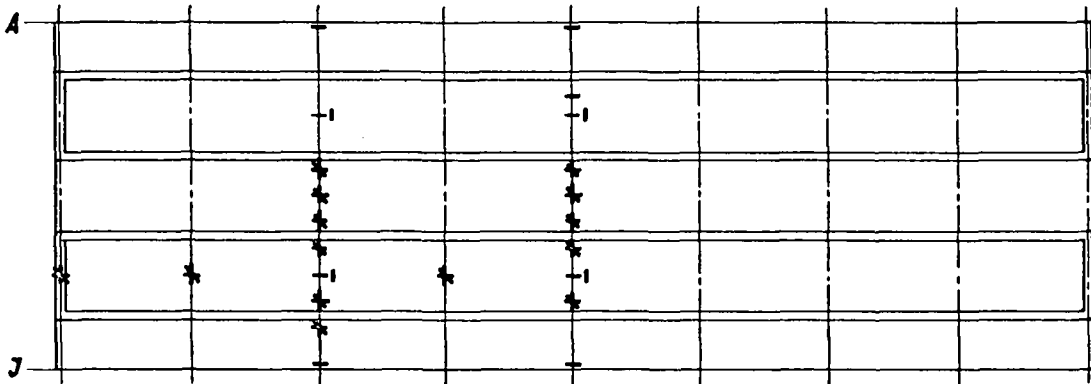
Fig. 7.4 *Situation des points de mesure et des jauges*
cotes en m. (réalité)

Quadrillage de mesure et jauges de la face sup. de la dalle

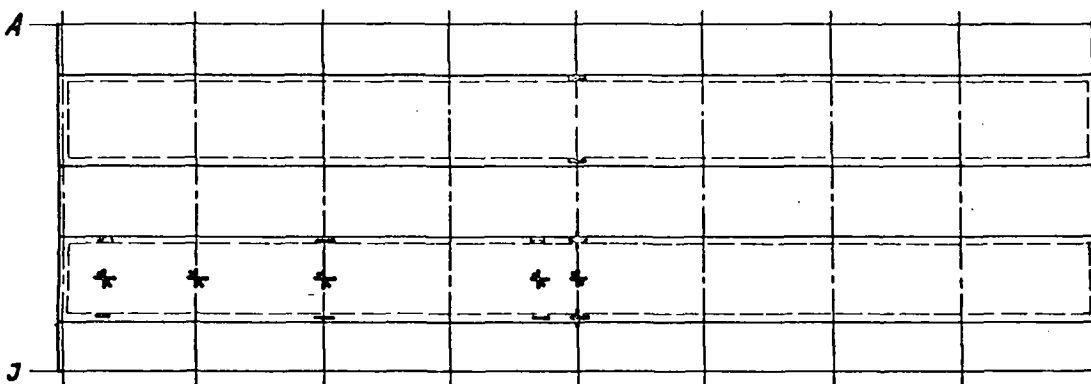
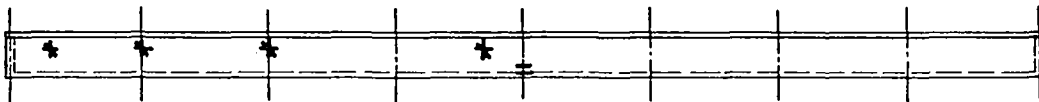
8 x 8.00



Jauges de la face inférieure de la dalle



Jauges des faces latérales et inférieure des caissons



le déplacement vertical dû à la charge.

La position des points de mesure des flèches et des courbures est définie par les lignes de coordonnées dans la figure 7.4. qui donne également la situation des jauges.

Toutes les mesures ont été faites 30 secondes après la mise en charge du modèle, temps pour lequel les caractéristiques élastiques du matériau avaient été déterminées.

7.2.2 ELABORATION DES RESULTATS

Les valeurs adoptées comme résultats des mesures sont les moyennes arithmétiques obtenues sur trois cycles de charge successifs.

Les grandeurs observées sur le modèle ont été converties en grandeurs réelles en respectant les lois de similitude, pour une échelle de 1:40 et des charges réelles arbitraires.

Les contraintes dans la construction réelle (indice r) ont été tirées des mesures d'allongements spécifiques du modèle (indice m) au moyen des formules usuelles suivantes:

a) état de contrainte monoaxial

$$(7.1) \quad \sigma_r = E_m \cdot \varepsilon_m \cdot \beta_\sigma$$

b) état de contrainte biaxial

$$(7.2) \quad \sigma_{xr} = \frac{E_m}{1-\mu^2} (\varepsilon_{xm} + \mu \varepsilon_{ym}) \cdot \beta_\sigma$$

On a obtenu de manière analogue les moments de flexion dans la dalle réelle à partir des courbures mesurées sur le modèle:

$$(7.3) \quad m_{xr} = \frac{E_m d_m^3}{12(1-\mu^2)} \left(\frac{1}{\rho_{xm}} + \mu \frac{1}{\rho_{ym}} \right) \cdot \beta_f$$

Les facteurs β_σ et β_f sont les coefficients de similitude.

Les valeurs ainsi obtenues correspondent à une construction réelle qui aurait le même coefficient de Poisson que le modèle.

7.3 CHARGES APPLIQUEES ET MESURES

7.3.1 DISPOSITION DES CHARGES

Les essais ont été effectués dans 6 cas de charge différents, représentés dans le tableau 7.5 ci-dessous. Dans les cas 1 et 3 à 6, les charges ont été disposées au droit des parois des caissons, afin d'éliminer toute flexion locale due à la transmission des charges aux poutres.

Disposition des charges sur le modèle

Tableau 7.5

Cas de charge n°	Position des charges en travers	Position des charges en long
1		
2		
3		
4		
5		
6		

Dans l'un des cas, (cas No 2), les charges ont été placées à mi-distance entre les parois de chaque caisson; comme la disposition des charges est symétrique, les flexions correspondant à l'effet d'entretoise sont très faibles, ce qui permet d'observer la distribution des efforts locaux dus aux forces concentrées.

Le premier cas de charge est également symétrique. Il a permis avant tout de vérifier la symétrie du modèle, mais aussi de faire apparaître, indépendamment des déformations que provoquent des charges asymétriques, les effets de la contraction transversale (effet de Poisson) et des déformations dues aux contraintes tangentielles sur la distribution des contraintes.

Dans les cas de charge No 3 et 4, on a étudié la répartition transversale d'une charge concentrée à mi-portée placée successivement au droit de la paroi intérieure, puis de la paroi extérieure d'un caisson. On a fait ainsi apparaître clairement l'efficacité de la dalle en tant qu'entretoise et on a pu déterminer de manière précise les efforts transversaux correspondants.

Les deux derniers cas de charge (No 5 et 6) sont semblables aux deux précédents, mais il s'agit de charges uniformément réparties le long du pont au lieu de charges concentrées. En fait, comme il aurait été difficile de réaliser sur le modèle une distribution continue des forces, on a choisi des charges concentrées suffisamment rapprochées; leur espacement est en effet inférieur à la hauteur des poutres.

7.3.2 MESURES EFFECTUEES

Pour chaque cas de charge, on a mesuré les flèches le long de l'axe du pont et des axes des parois latérales des caissons, dans 7 sections espacées de $1/8^e$ de la portée. On a également mesuré les tassements des appuis, car ils ne sont pas absolument nuls. Ces mesures avaient comme but essentiel de vérifier le comportement général du modèle.

En ce qui concerne les jauges extensométriques, on a procédé en deux étapes. Tout d'abord, on a mesuré systématiquement tous les allongements dans les 6 cas de charge successifs. Ensuite, dans une deuxième série de mesures, on a remplacé les jauges bi- et tridirectionnelles (types PC-5 et PR-5) de la section située à mi-portée par des jauges unidirectionnelles (type PL-10). On avait en effet constaté sur des éprouvettes de plexiglas que les jauges à plusieurs grilles (ou rosettes) donnaient des résultats systématiquement inférieurs à ceux que l'on obtenait avec les jauges simples.

Les courbures de la dalle n'ont été mesurées qu'en quelques points, afin de vérifier la valeur des moments de flexion transversaux et des moments de torsion obtenus à l'aide des jauges.

Les réactions d'appui n'ont été déterminées que dans les cas de charge No 3 à 6.

Comme on l'a dit plus haut, chaque mesure a été répétée 3 fois.

8. RESULTATS ET COMMENTAIRES DES ESSAIS

8.1 RESULTATS DES ESSAIS

Dans les figures 8.1 et 8.2, on donne les valeurs des déplacements verticaux mesurés et la représentation graphique des déformées longitudinales au droit des parois latérales des caissons et à l'axe du pont. Les résultats des mesures ont été transformés en valeurs "réelles" en observant les lois de similitude. La précision des mesures, de $\pm 0,01$ mm sur le modèle, correspond alors à $\pm 0,1$ mm pour les cas de charge No 1 à 4 et à $\pm 0,3$ mm pour les cas de charge 5 et 6. Les déformées transversales observées, qui sont en excellente coïncidence avec les déformées calculées, sont données dans les figures 10.1 à 10.8. L'examen des flèches montre en outre que la maquette se comporte symétriquement et que les tassements des appuis sont négligeables.

Les allongements spécifiques ϵ_x et ϵ_y mesurés dans les sections 2 et 4 sont donnés dans les tableaux 8.3 à 8.6, pour les cas de charges asymétriques; il s'agit de valeurs "brutes" observées sur la maquette en plexiglas.

Les points de mesure sont assez rapprochés pour permettre de connaître de manière suffisamment détaillée la distribution des déformations longitudinales dans les sections étudiées, comme le montrent les diagrammes des figures 8.7 à 8.14.

Les courbures de la dalle, mesurées en quatre points, ont permis de déterminer les moments de flexion figurant dans le tableau 8.15. En regard de chaque valeur, on a fait figurer celle que l'on obtient à partir des allongements spécifiques.

On constate que cette dernière est systématiquement inférieure à la première, l'écart variant cependant notablement. Les valeurs déduites des allongements sont d'une manière générale un peu faibles par le fait que les jauges raidissent la dalle localement; les mesures de courbures ont été effectuées en des points immédiatement voisins des jauges, mais non directe-

ment à l'emplacement de celles-ci. D'autre part, les efforts de flexion se déduisent des différences des contraintes sur les deux faces; leur valeur est donc moins précise que celle des contraintes elles-mêmes. Dans la détermination des moments par les courbures, en revanche, on mesure celles-ci dans quatre directions différentes et la mesure surabondante permet une correction. Ces conditions permettent d'expliquer les écarts observés.

8.2. COMMENTAIRES DES RESULTATS

L'examen des déformées confirme la prépondérance de certains efforts:

- la flexion des caissons
- la torsion des caissons
- la flexion transversale de la dalle entre les caissons.

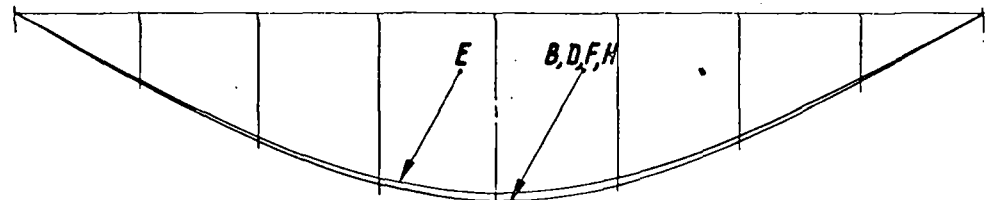
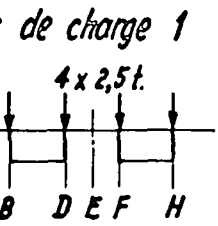
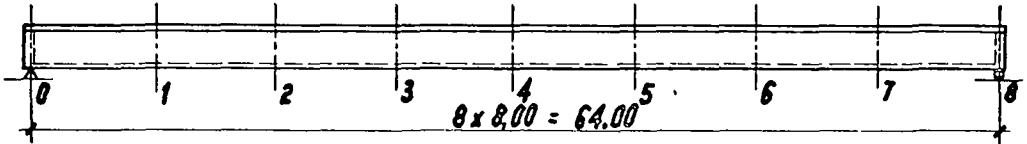
On remarque que les lignes élastiques le long des différents axes B, D, etc. ne sont pas homothétiques, de sorte que la déformation transversale n'est pas semblable à elle-même lorsqu'on se déplace le long du pont. L'hypothèse de Guyon n'est donc pas vérifiée ici.

La distribution des allongements spécifiques longitudinaux révèle l'importance des déformations dues aux contraintes tangentielles. On observe, en effet, d'une part que les points représentant les allongements ϵ_x de la face supérieure de la dalle au droit des parois des caissons ne sont pas alignés, d'autre part que les allongements au milieu des panneaux sont plus faibles qu'aux arêtes, en particulier à la face inférieure des caissons.

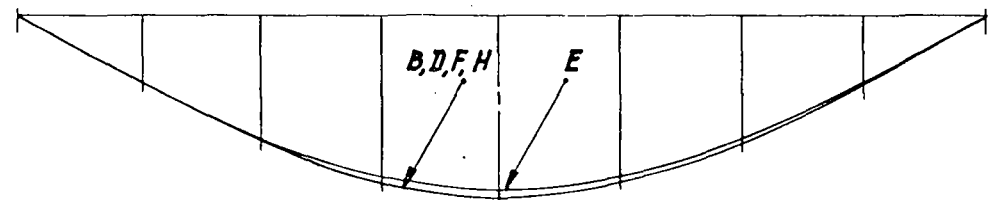
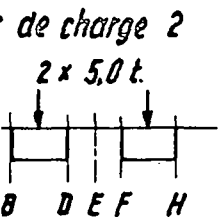
Transversalement, les mesures des ϵ_y montrent que les moments de flexion transversaux dans la dalle sont du même ordre de grandeur dans les champs constituant les parois supérieures des caissons que dans celui qui se trouve entre les caissons. L'effet de cadre transversal est ainsi mis en relief.

8.1 Déformées longitudinales du modèle

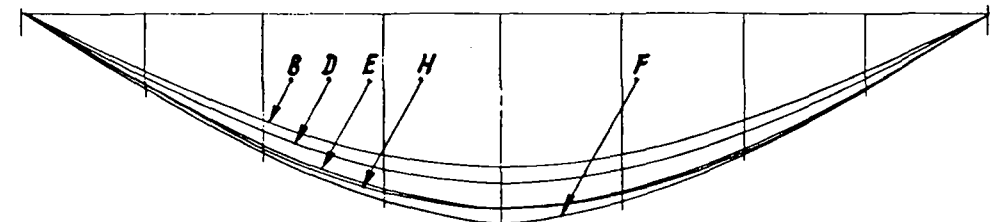
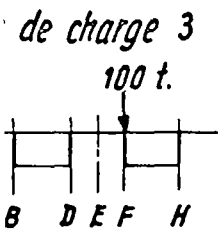
Flèches réelles en mm. ($E = 200'000 \text{ kg/cm}^2$)



B	0,32	9,1	16,6	22,4	24,4	22,4	16,8	9,1	0,32
D	0,32	9,0	16,6	22,2	24,4	22,2	16,7	9,0	0,32
E	0,36	8,8	16,2	21,5	23,4	21,4	16,1	8,8	0,29
F	0,32	9,0	16,6	22,2	24,3	22,1	16,7	9,0	0,32
H	0,32	8,8	16,4	21,8	23,9	21,9	16,6	9,0	0,32



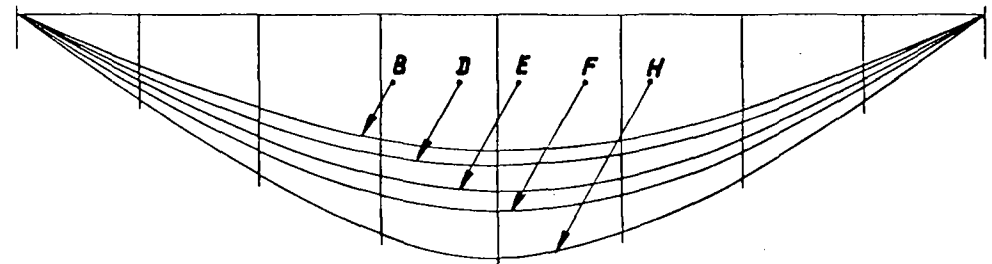
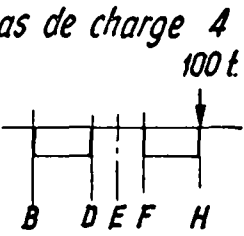
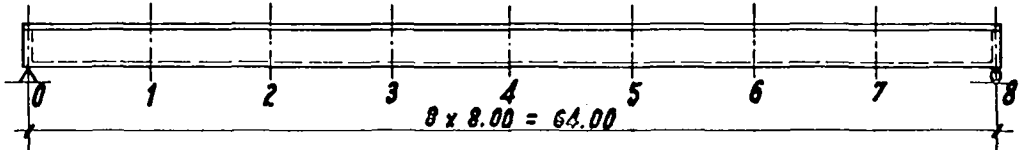
B	0,32	8,9	16,5	21,9	24,1	21,9	16,6	8,9	0,22
D	0,36	9,0	16,6	21,9	24,0	21,9	16,4	8,9	0,22
E	0,32	8,8	16,2	21,5	23,0	21,2	15,9	8,7	0,32
F	0,32	8,8	16,4	21,8	23,9	21,8	16,3	8,8	0,22
H	0,11	8,8	16,5	21,8	23,8	21,8	16,4	8,8	0,22



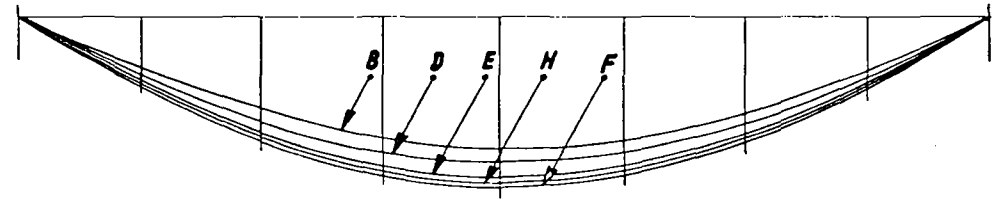
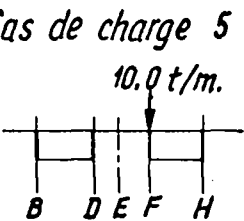
B	0,09	7,6	14,1	18,5	20,2	18,4	14,0	7,5	0,11
D	0,32	8,5	15,7	20,5	22,4	20,5	15,6	8,4	0,11
E	0,54	9,5	17,3	23,2	25,6	23,2	17,3	9,4	0,40
F	0,22	9,6	18,1	24,6	27,7	24,7	18,0	9,7	0,22
H	0,05	9,4	17,6	23,6	25,7	23,6	17,7	9,5	0,16

Fig. 8.2 Déformées longitudinales du modèle

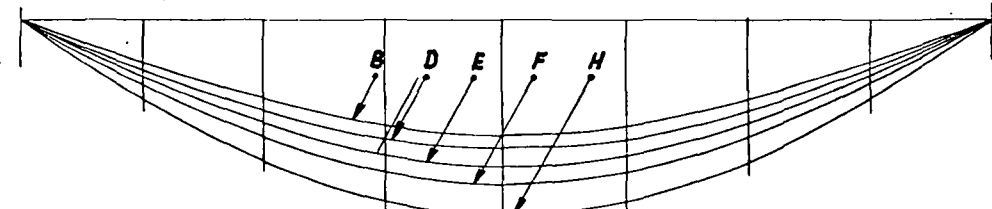
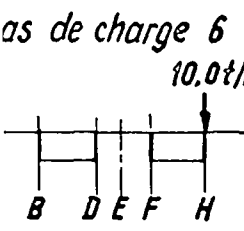
Flèches réelles en mm. ($E = 200\,000 \text{ kg/cm}^2$)



B	0,12	6,7	12,4	16,4	17,7	16,2	12,5	6,8	0,00
D	0,32	7,7	14,0	18,3	19,7	18,2	14,0	7,5	0,22
E	0,12	8,5	15,9	21,0	23,2	21,4	16,1	8,5	0,00
F	0,08	9,4	17,9	23,8	25,7	23,7	17,9	9,5	-0,12
H	0,22	11,2	21,0	28,6	31,8	28,5	21,4	11,6	0,54



B	0,45	32,8	60,5	78,6	84,5	77,7	59,5	32,7	0,34
D	1,48	37,8	68,2	88,1	93,9	86,4	67,0	37,2	1,38
E	2,06	41,5	74,3	96,3	104,2	95,8	74,5	41,8	2,06
F	1,48	45,8	81,3	104,8	111,2	102,7	80,6	45,1	1,72
H	1,03	42,8	77,8	100,9	107,7	99,3	76,8	42,4	1,03



B	0,40	28,7	52,3	68,8	74,8	68,0	51,8	28,6	0,70
D	1,40	32,3	59,4	77,0	83,4	76,5	58,7	32,2	1,00
E	0,30	36,7	67,1	87,5	95,0	87,0	67,4	36,2	0,30
F	0,00	41,3	75,3	98,6	107,0	98,1	75,9	40,6	0,30
H	1,60	51,0	90,8	117,8	126,9	117,4	92,5	51,6	1,70

Allongements spécifiques mesurés ϵ_x et ϵ_y , en 10^{-6}

Cas de charge n° 3

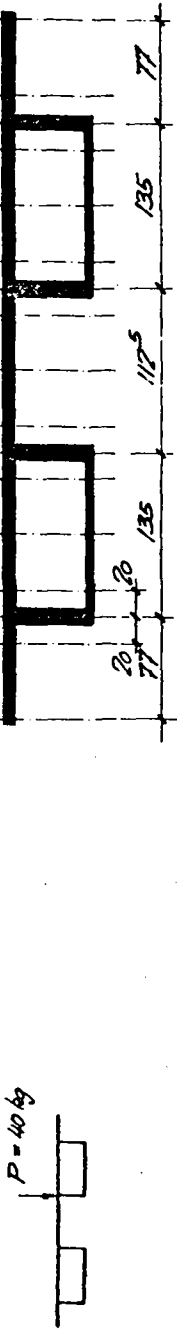


Tableau 8.3

		A	B'	B	B''	C	D'	D	D''	E	F'	F	F''	G	H'	H	H''	J
face sup.	ϵ_x	-90,3		-103,7		-110,3		-1150	-1177	-1014	-921	-1043	-959	-1120	-1134	-1177	-1268	-1170
	ϵ_y			+470		+50,7		+1298	+1283	+25	-120,7	-59,7	-87	+31,3	+68,3	+62,7	+46,9	
face inf.	ϵ_x	-48,5				-730			-80,3	-760	-782		-744	-757	-766		-85,3	
	ϵ_y					+220		-50,9	+55,1	+182,4			+62,5	+37,7	+40		+25,9	
face inf. caissons	ϵ_x			+2240		+196,2		+2190				+186,7	+196,3	+2237	+2370	+2443		
	ϵ_y					-89,4							-59,7	-85,3	-980			

		A	B'	B	B''	C	D'	D	D''	E	F'	F	F''	G	H'	H	H''	J
face sup.	ϵ_x	-121,3		-150,7		-182,7		-289,7	-260,7	-261,3	-389,3	-442,7	-400,7	-268,3	-239,3	-227,7	-207,7	-204,3
	ϵ_y			+640		+920		+2350	+3590	+31,3	-284,3	-1190	-161,3	+67,3	+3130	+1758	+108,7	
face inf.	ϵ_x	-80,0				-110			-120,3	-144,3	-89,3		-108,3	-151,7	-129,7		-146,7	-130,7
	ϵ_y					+29,3			-239,3	+105,7	+327,3		+230,0	+650	-126,7		+45,3	
face inf. caissons	ϵ_x			+3280		+3280		+3270				+251,7	+637,0	+487,0	+437,0	+411,3		
	ϵ_y					-1230							-56,3	-1590	-283,3			

Allongements spécifiques mesurés ϵ_x et ϵ_y en 10^{-6}

Cas de charge n° 4

$P = 40 \text{ kg}$

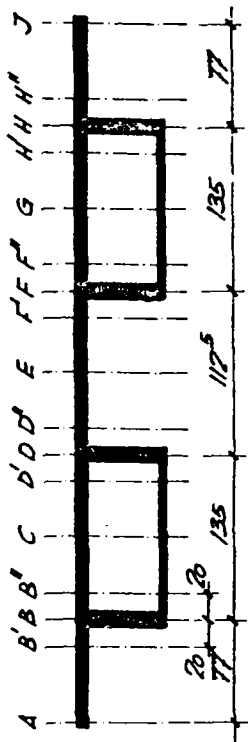


Tableau 8.4

		A	B'	B	B''	C	D'	D	D''	E	E'	F	F'	G	H'	H	H''	J
face sup. dalle	ϵ_x	-750		-883		-977		-1113	-1174	-1098	-1028	-1143	-1159	-1113	-1185	-1183	-1202	-1153
	ϵ_y			+427		+530		+1390	+1255	+607	-570	±0	+603	+360	+240	+340	+428	
face inf. dalle	ϵ_x	-457				-720			-785	-771	-810		-766	-813	-832		-810	-830
	ϵ_y					+223		-992	-992	+128	+1319		+131	+377	+854		+283	
face inf. coissons	ϵ_x			+1867		+1654		+1820				+2390	+2387	+2367	+2467	+2197		
	ϵ_y					-719							-1213	-917	-523			

		A	B'	B	B''	C	D'	D	D''	E	E'	F	F'	G	H'	H	H''	J
face sup. dalle	ϵ_x	-1047		-1347	-1427	-1550	-1783	-1890	-1990	-2013	-2090	-2213	-2377	-2383	-4360	-5225	-4088	-3073
	ϵ_y			+520	+663	+728	+877	+2117	+3343	+783	-1640	+487	+2810	+710	-1133	+1023	+1403	
face inf. dalle	ϵ_x	-710			-987	-1067			-1153	-1423	-1257		-1277	-1547	-167		-1220	-1360
	ϵ_y					+257		-1813	-1813	+393	+2267		-1177	+760	+2270		+317	
face inf. coissons	ϵ_x			+2927		+2867		+2893				+4340	+4570	+5177	+6823	+7987		
	ϵ_y					-1057							-3373	-1717	-267			

Allongements spécifiques mesurés E_x et E_y en 10^{-6}

Cas de charge n°5

$P = 9.5 \text{ kg/cm}$

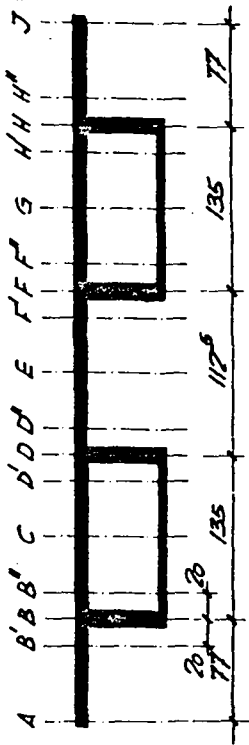


Tableau 8.5

		A	B'	B	B''	C	D'	D	D''	E	E'	F	F'	G	H'	H	H''	J
face sup. dalle	E_x	-1290		-1450		-1633		-1833	-1875	-1817	-1719	-2020	-1842	-1957	-1952	-1890	-1990	-1787
	E_y			+653		+750		+1943	+2478	+174	+2172	-1297	-861	+547	+1959	+1427	+701	
face inf. dalle	E_x	-790				-1170		-1289	-1272	-1439				-1436	-1350	-1311	-1289	-1257
	E_y					+353		-1290	+1617	+3452				+970	+620	-734	+425	
face inf. voissins	E_x			+3010		+2696		+2893				+4023	+3887	+3773	+3780	+3717		
	E_y					-1713								-583	-1490	-2040		

		A	B'	B	B''	C	D'	D	D''	E	E'	F	F'	G	H'	H	H''	J
face sup. dalle	E_x	-1743		-1977	-2070	-2250	-2353	-2440	-2590	-2467	-2490	-2533	-2490	-2570	-2563	-2620	-2430	-2493
	E_y			+870	+1093	+1020	+1047	+2320	+3390	+163	-2223	-1630	-790	+690	+2217	+1553	+990	
face inf. dalle	E_x	-1230				-1597			-1523	-1717	-1553			-1623	-1743	-1487	-1690	-1667
	E_y					+467			-1393	+1407	+3507			+1817	+787	-497	+497	
face inf. voissins	E_x			+4263		+4127		+4693				+4837	+4357	+4810	+4947	+4970		
	E_y					-1520								-1033	-1763	-2420		

Allongements spécifiques mesurés ϵ_x et ϵ_y en 10^{-6}

Cas de charge n° 6

$p = 25 \text{ kg/cm}$

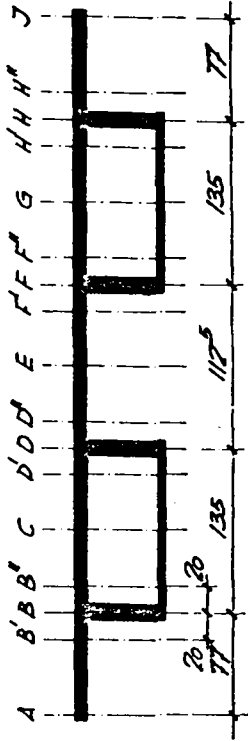


Tableau 8.6

		A	B'	B	B''	C	D'	D	D''	E	F'	F	F''	G	H'	H	H''	J
face sup. dalle	ϵ_x	-100,3		-124,0		-142,0		-161,3	-170,0	-166,4	-166,8	-184,7	-188,2	-210,0	-219,4	-225,3	-229,1	-218,7
	ϵ_y			+53,0		+67,7		+194,3	+24,1	+81,4	-98,1	+25,0	+177,3	+60,7	-32,4	+22,7	+85,0	
face inf. dalle	ϵ_x	-62,3				-100,3		-116,6	-131,7	-127,9			-123,9	-142,7	-153,7		-153,7	-144,7
	ϵ_y					+29,7		-154,8	+27,3	+223,8			-50,9	+65,7	+186,1		+55,3	
face inf. caissons	ϵ_x			+251,7		+221,3		+246,0				+381,3	+390,7	+400,0	+434,7	+431,0		
	ϵ_y					-96,2							-244,7	-149,7	-56,7			

		A	B'	B	B''	C	D'	D	D''	E	F'	F	F''	G	H'	H	H''	J
face sup. dalle	ϵ_x	-151,7		-177,3	-184,0	-207,7	-220,0	-227,3	-231,7	-233,3	-235,7	-249,0	-243,3	-272,7	-278,3	-292,7	-270,0	-286,3
	ϵ_y			+69,7	+81,7	+96,0	+113,7	+286,0	+401,0	+109,0	-171,7	+2,7	+196,3	+73,3	-35,0	+58,0	+112,7	
face inf. dalle	ϵ_x	-106,7				-135,7	-141,3		-144,0	-166,0	-141,0		-146,0	-183,0	-179,0		-188,0	-185,7
	ϵ_y					+39,3			-208,3	+42,3	+262,3		-30,0	+85,7	+176,0		+56,7	
face inf. caissons	ϵ_x			+389,0		+362,0		+360,0				+517,7	+522,0	+515,3	+520,0	+535,0		
	ϵ_y					-135,3							-305,7	-187,0	-66,0			

ALLONGEMENTS SPÉCIFIQUES LONGITUDINAUX AU 1/10 DE LA PORTÉE CHARGE CONCENTRÉE EN F A MI-PORTÉE (Cas 3)

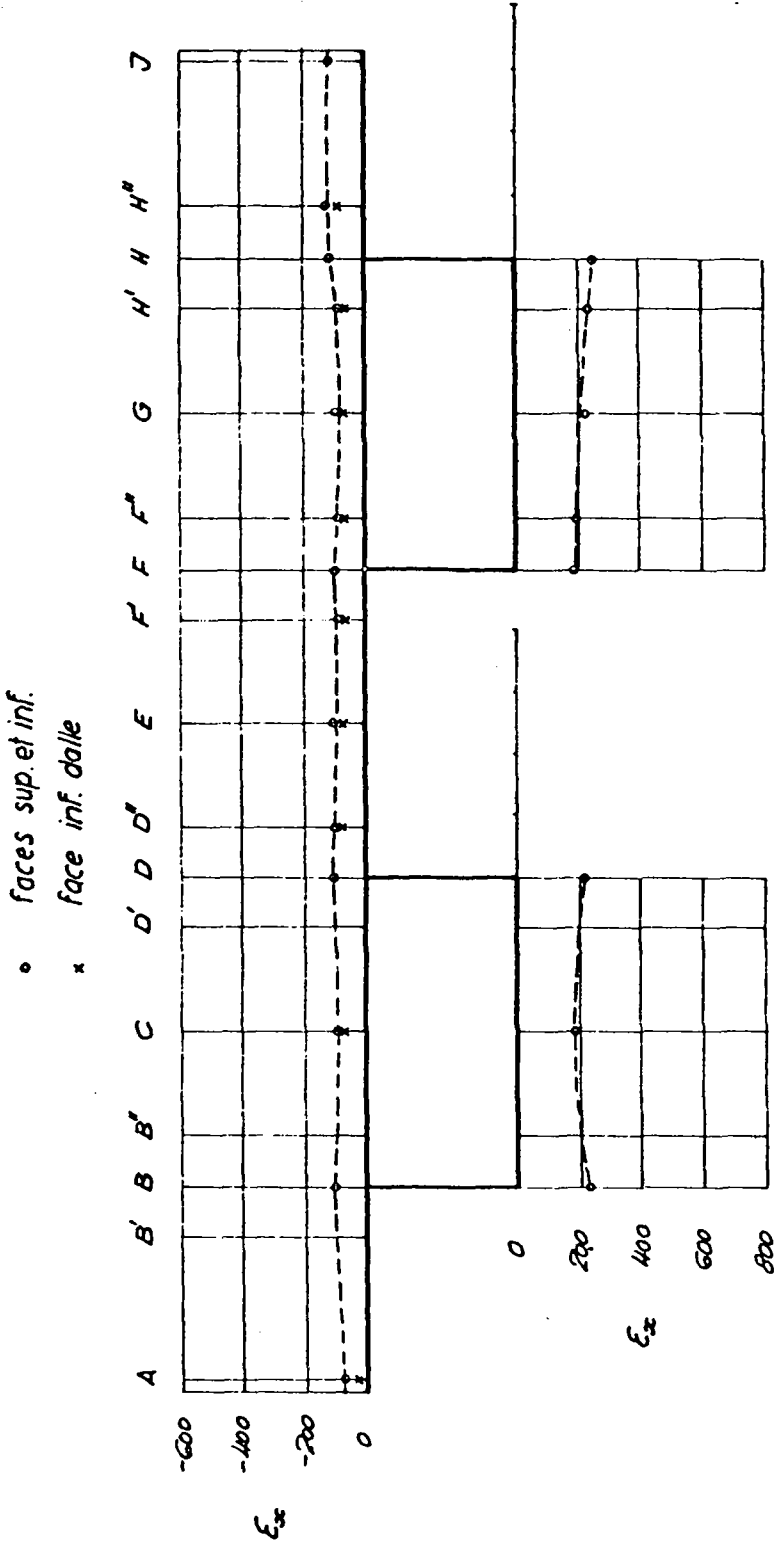


Fig. 8.7

ALLONGEMENTS SPÉCIFIQUES LONGITUDINAUX A MI-PORTÉE CHARGE CONCENTRÉE EN F A MI-PORTÉE (Cas 3)

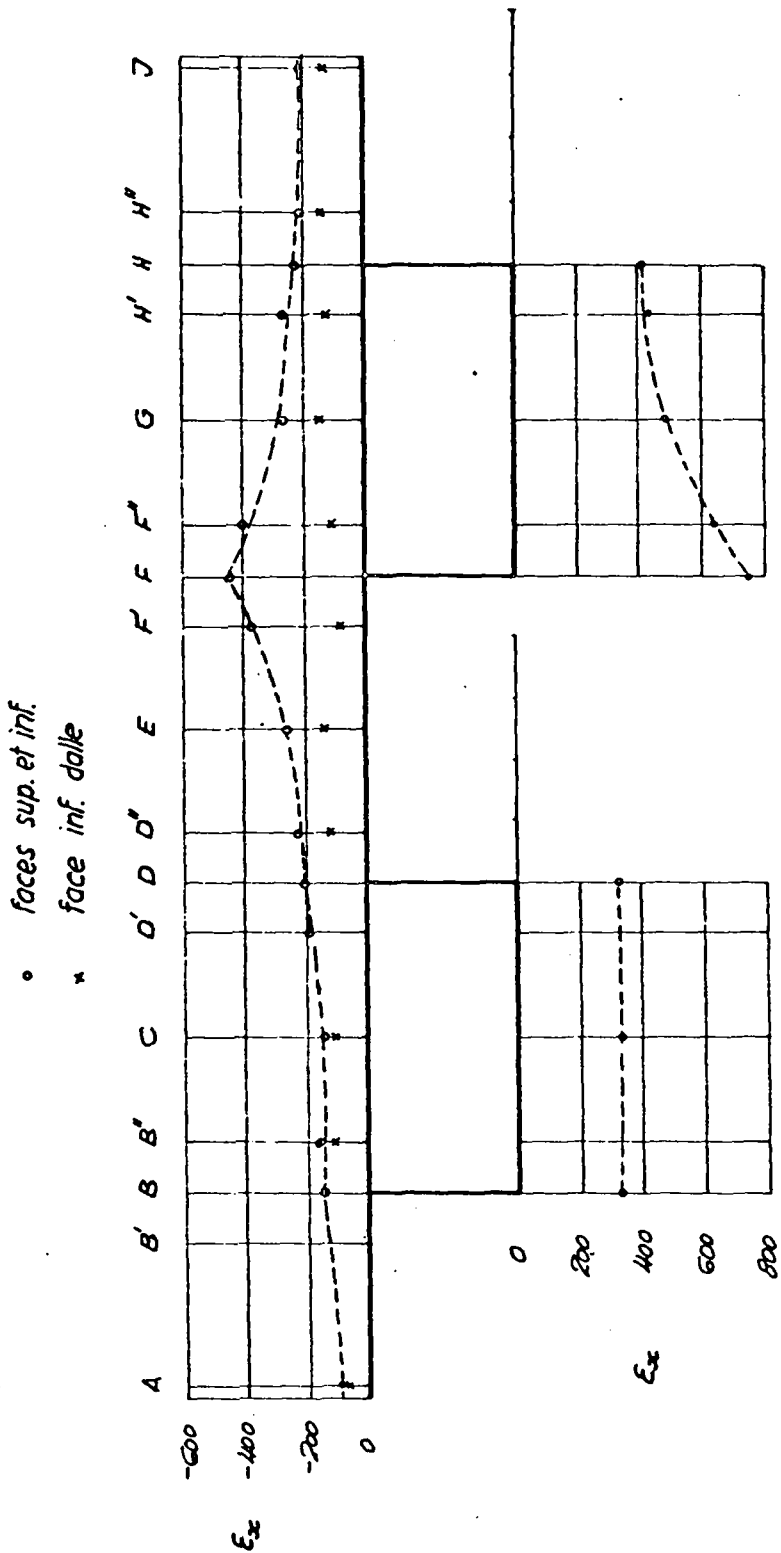


Fig. 8.8

ALLONGEMENTS SPÉCIFIQUES LONGITUDINAUX AU 1/6 DE LA PORTÉE CHARGE CONCENTRÉE EN H A MI-PORTÉE (Cas 1.)

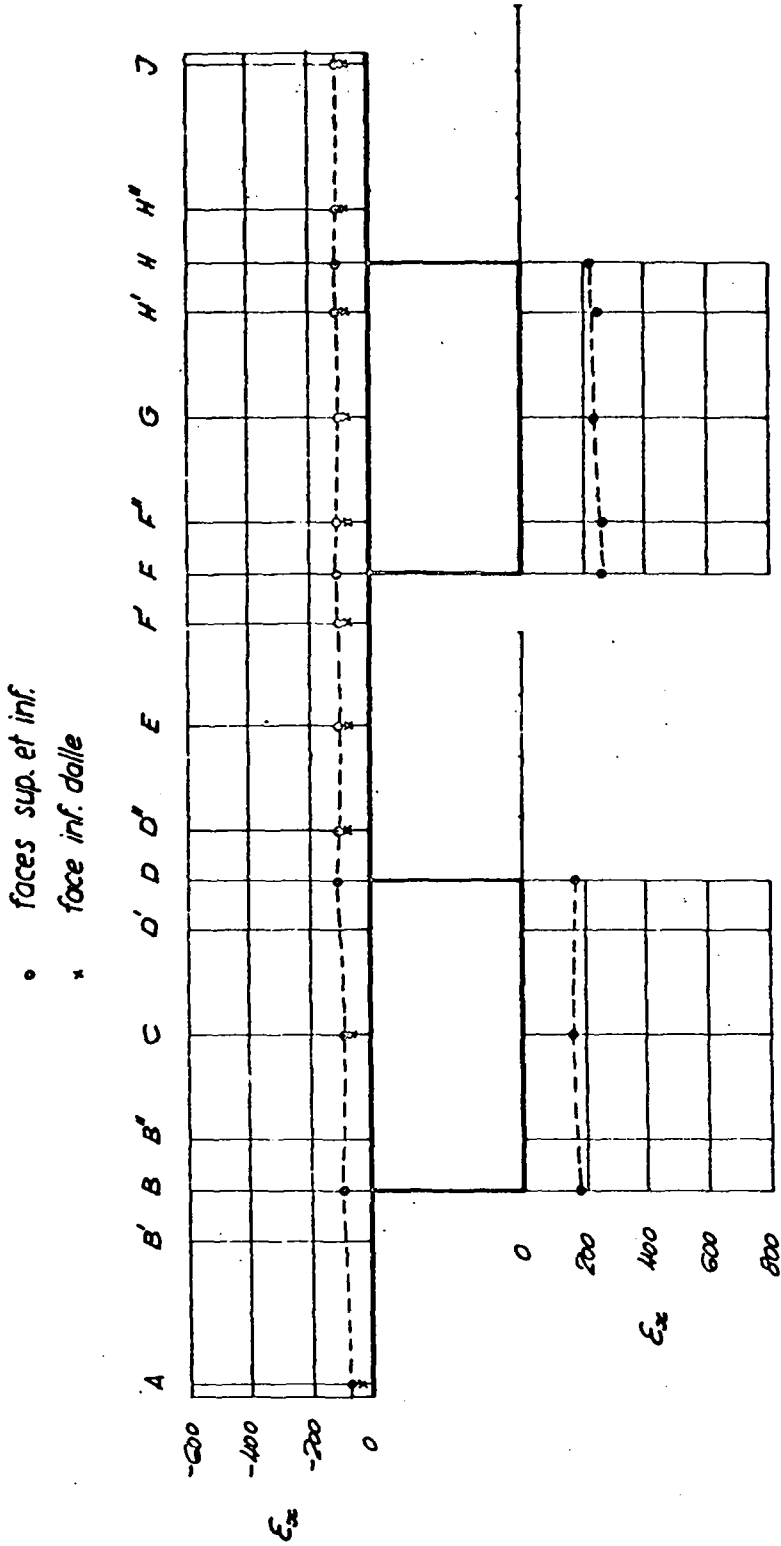


Fig. 89

ALLONGEMENTS SPÉCIFIQUES LONGITUDINAUX A MI-PORTÉE CHARGE CONCENTRÉE EN H A MI-PORTÉE (Cas 4)

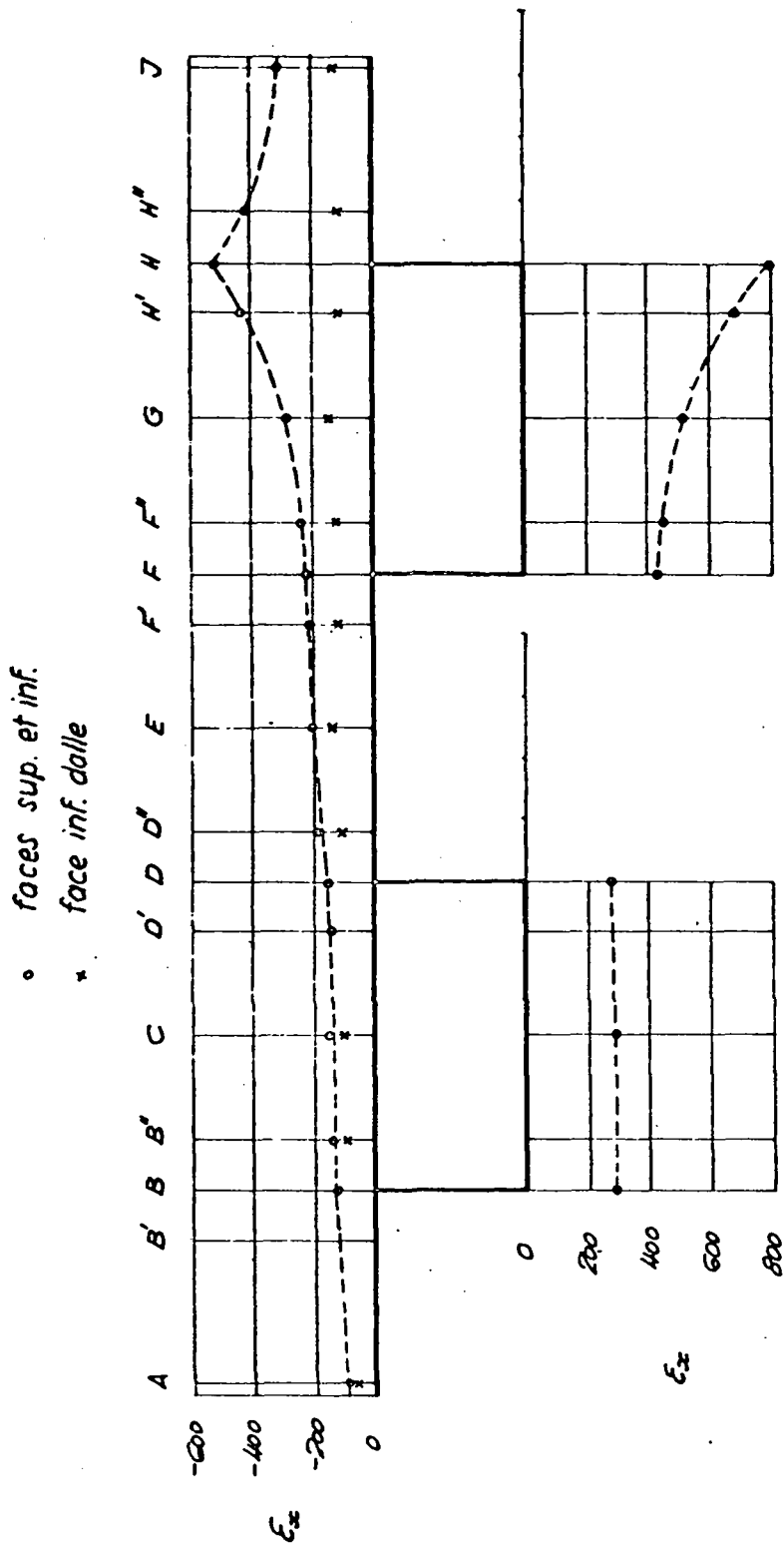


Fig. 8.10

ALLONGEMENTS SPÉCIFIQUES LONGITUDINAUX AU 1/4 DE LA PORTÉE

CHARGE LINÉAIRE UNIFORME EN F (Cas 5)

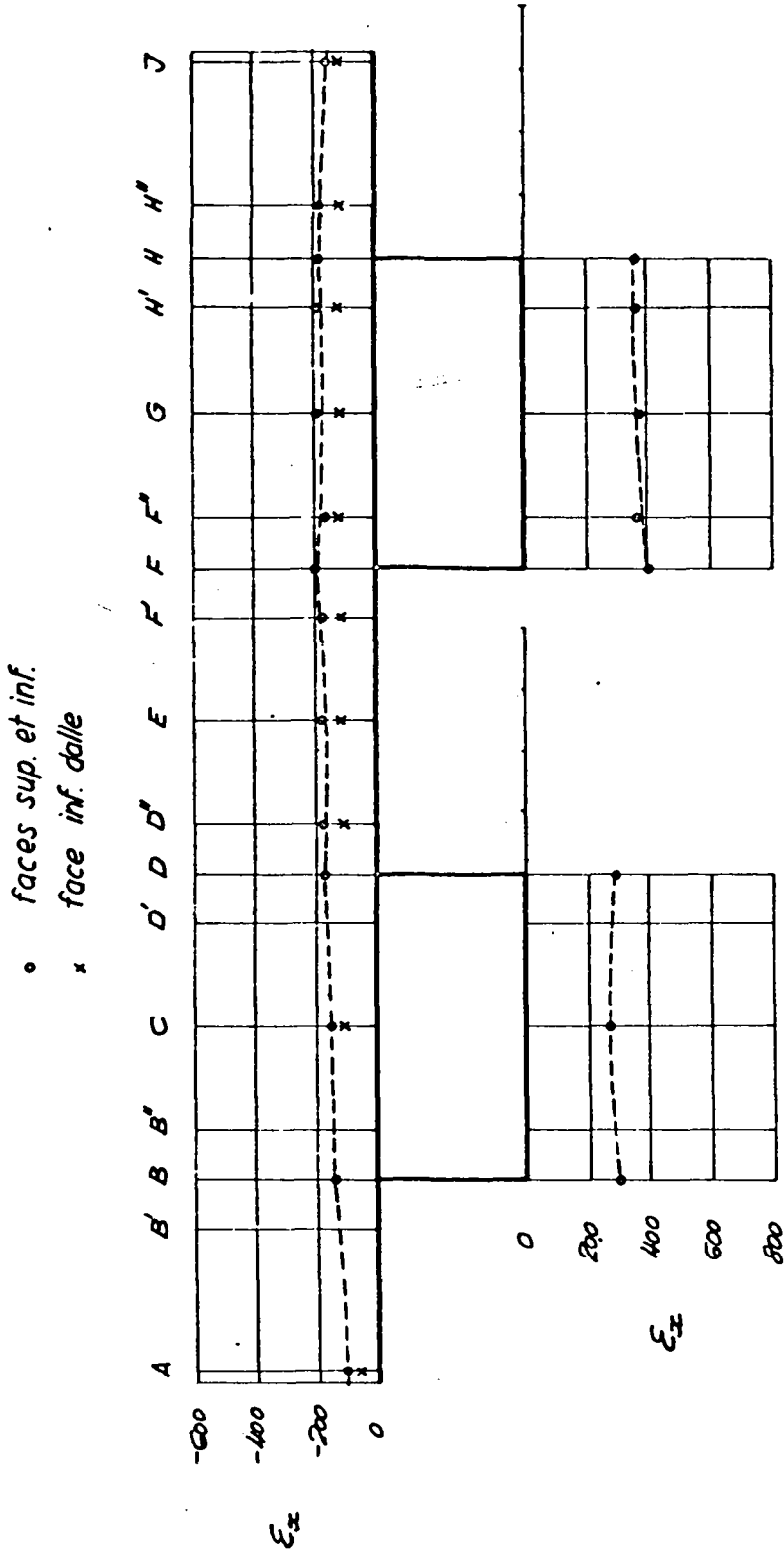


Fig. 8.11

ALLONGEMENTS SPÉCIFIQUES LONGITUDINAUX A MI-PORTÉE

CHARGE LINÉAIRE UNIFORME EN F (Cas 5)

o faces sup. et inf.
x face inf. dalle

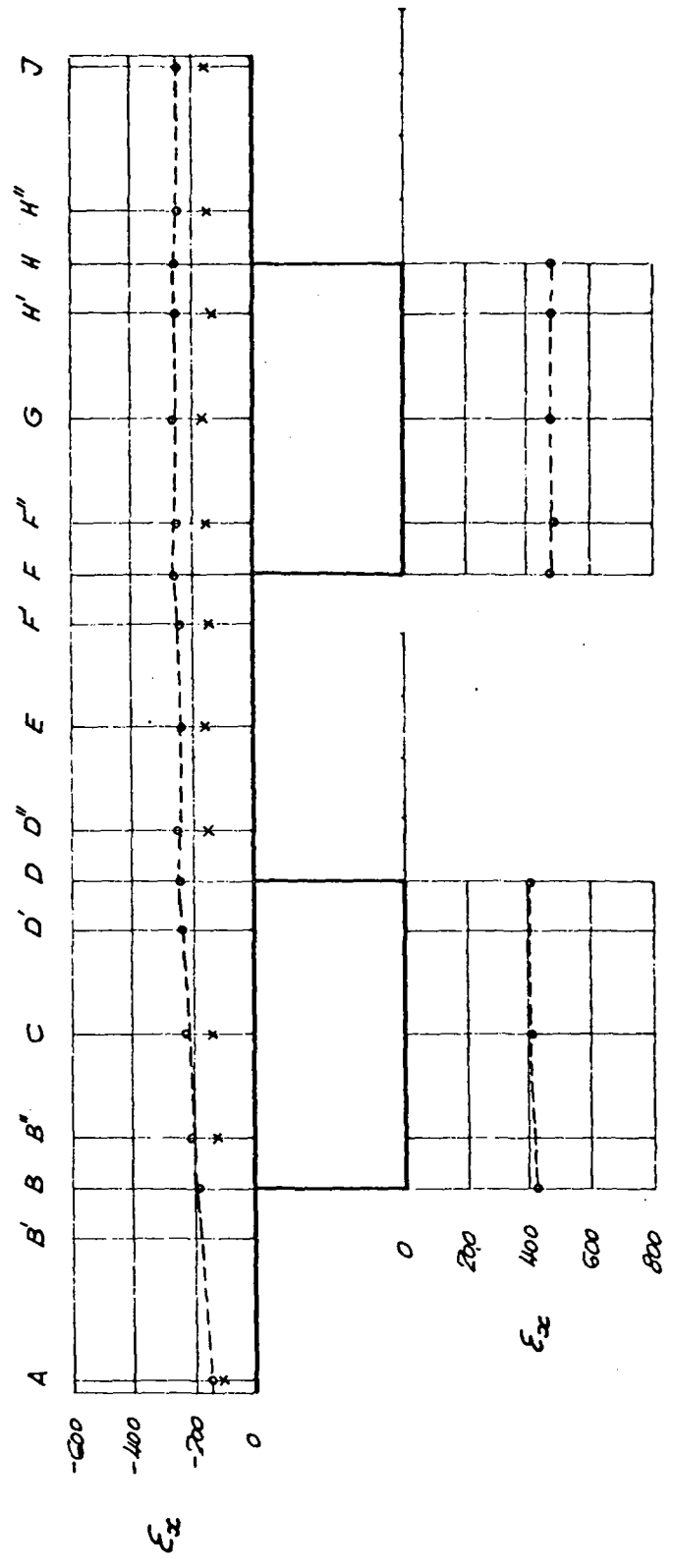


Fig. 8.12

ALLONGEMENTS SPÉCIFIQUES LONGITUDINAUX AU 1/4 DE LA PORTÉE CHARGE LINÉAIRE UNIFORME EN 4 (Cas 6)

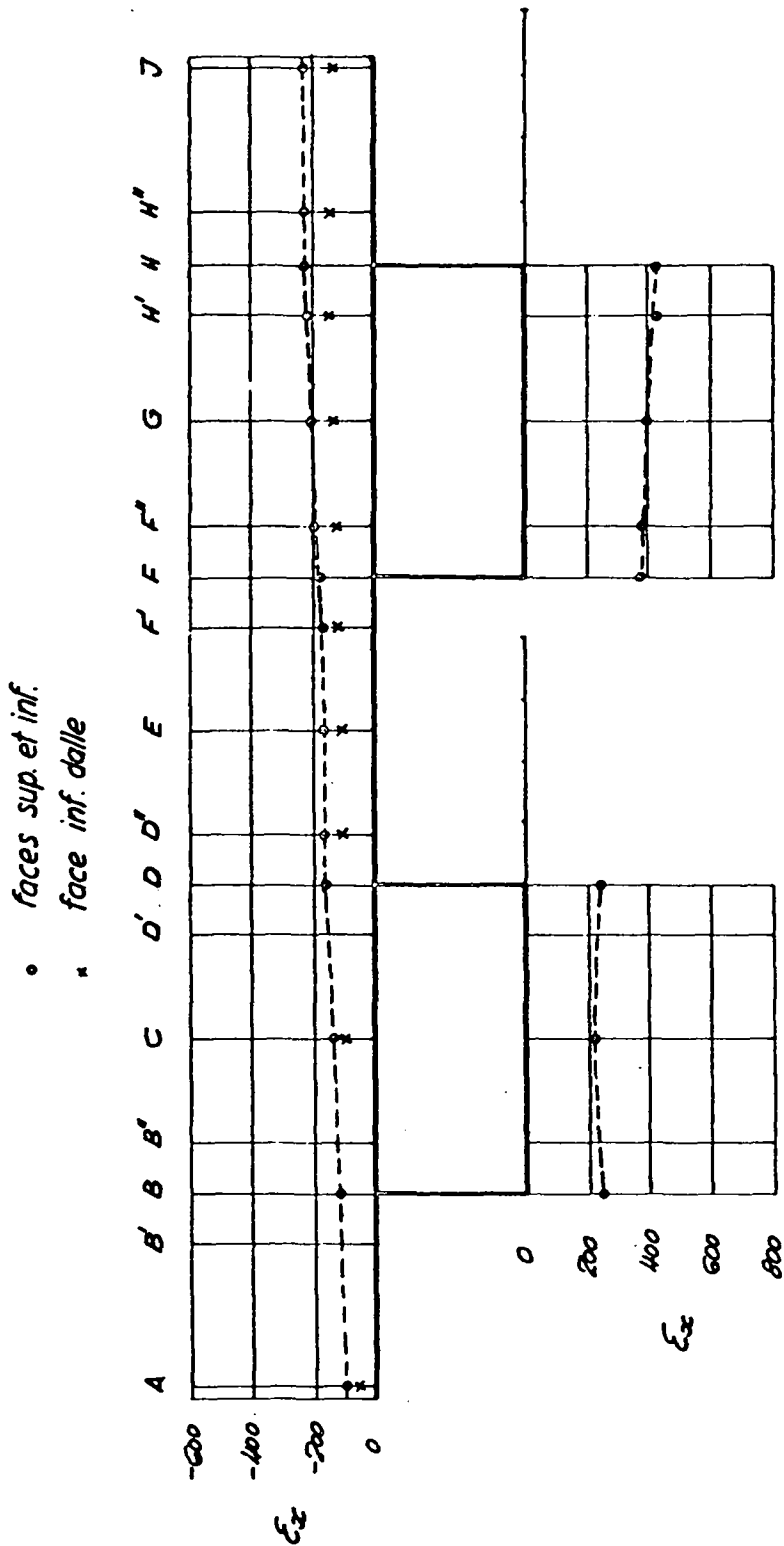


Fig. 8.13

ALLONGEMENTS SPÉCIFIQUES LONGITUDINAUX A MI-PORTÉE

CHARGE LINÉAIRE UNIFORME EN H (Cas 6)

○ faces sup. et inf.
 × face inf. dalle

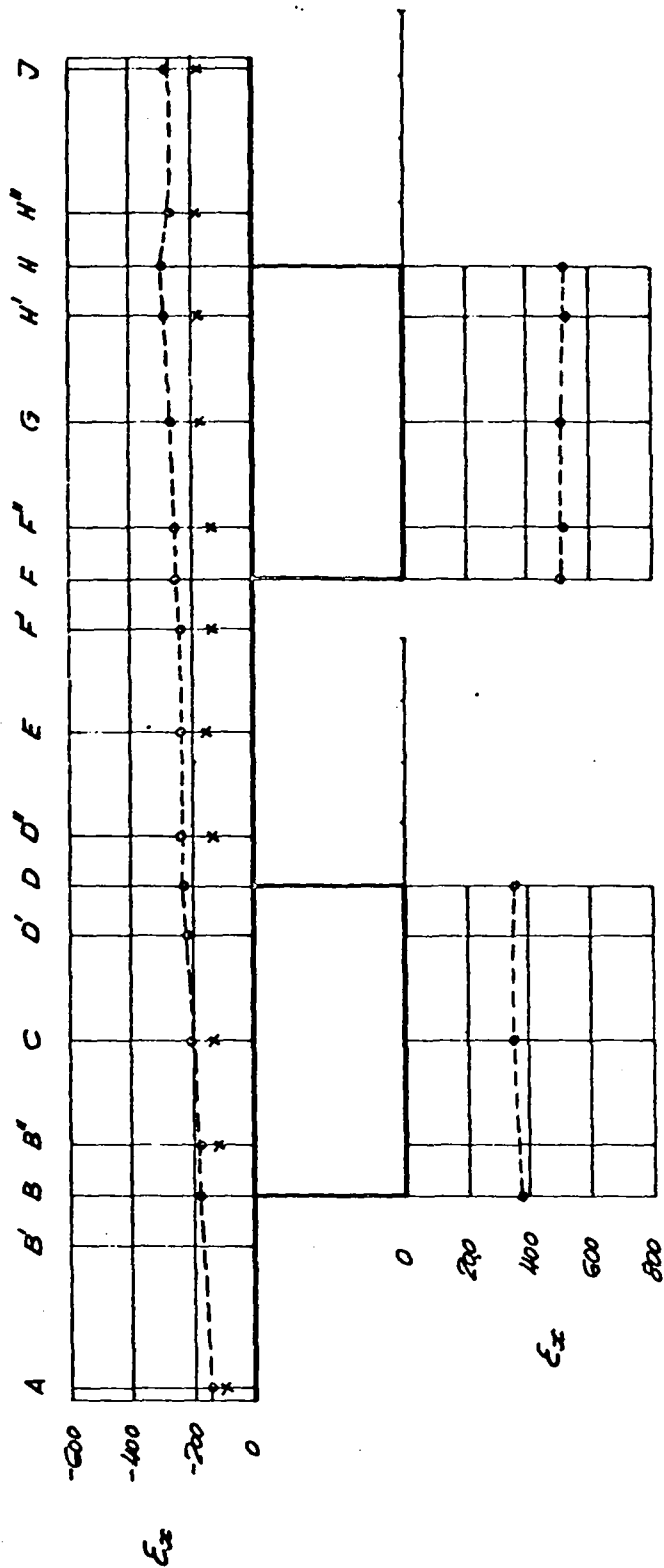


Fig. 8.14

Tableau 8.15

Moments mesurés en quatre points de la dalle

a) selon mesures des courbures

b) selon mesures des allongements spécifiques (jougues)

Cas de charge selon tableau 7.5

Sections et axes selon fig. 7.4

Cas	Sections		2		4	
	Axes		D''	F'	D''	F'
3	m_x	a)	-0,14	+0,64	-0,58	+1,35
		b)	-0,11	+0,49	-0,54	+1,87
	m_y	a)	-0,82	+1,51	-2,28	+3,27
		b)	-0,67	+1,24	-2,34	+2,84
	m_t	b)	-0,03	-0,03	+0,02	+0,06
	4	m_x	a)	-0,29	+0,51	-0,53
b)			-0,24	+0,36	-0,49	+0,75
m_y		a)	-1,26	+1,04	-2,07	+2,03
		b)	-1,05	+0,79	-2,04	+1,68
m_t		b)	-0,04	-0,04	-0,01	+0,02
5		m_x	a)	-0,98	+3,90	-1,21
	b)		-0,94	+2,97	-1,00	+3,49
	m_y	a)	-4,90	+7,89	-6,08	+9,60
		b)	-4,54	+7,39	-5,76	+8,70
	m_t	b)	-0,06	-0,08	-0,06	+0,14
	6	m_x	a)	-1,42	+2,53	-2,10
b)			-1,25	+1,99	-1,72	+2,77
m_y		a)	-5,89	+5,03	-8,55	+7,08
		b)	-5,16	+4,34	-7,66	+6,13
m_t		b)	-0,09	-0,18	-0,05	+0,05

9. APPLICATION NUMERIQUE DES METHODES PROPOSEES

Dans ce chapitre, les deux méthodes de calcul qui ont été proposées seront successivement appliquées au pont représenté par le modèle réduit, pour les mêmes cas de charge, soit pour une charge linéaire répartie uniformément et une charge concentrée à mi-portée, agissant au droit de l'une ou l'autre des parois latérales de l'un des caissons.

9.1 CALCUL PAR LA METHODE DE LA COUPURE MEDIANE

Les dimensions du profil sont données dans la figure 9.1

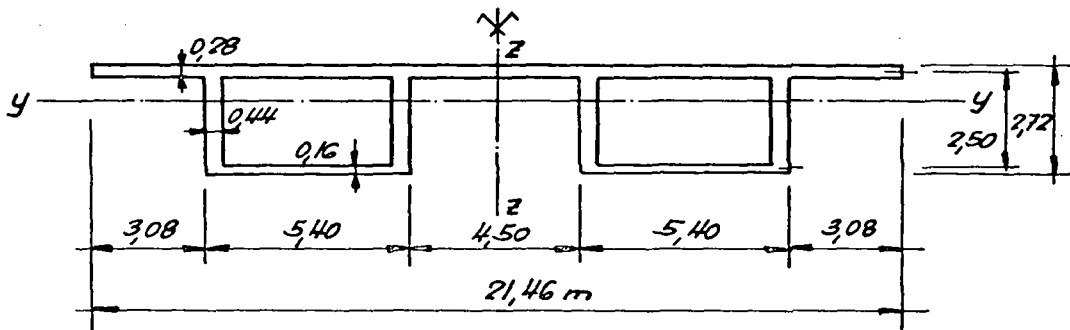


Fig. 9.1.

$$\text{Inertie de flexion totale} \quad I_y = \int y^2 d\Omega = 11,578 \text{ m}^4$$

$$\text{Inertie de flexion totale} \quad I_z = \int z^2 d\Omega = 400,18 \text{ m}^4$$

$$\text{Inertie de torsion d'un caisson} \quad I_{B1} = \frac{4\Omega_0^2}{\oint \frac{ds}{t}} = 10,237 \text{ m}^4$$

(selon Bredt)

$$\text{Inertie de torsion d'un caisson} \quad I_{S1} = \sum \psi b^3 h = 0,17 \text{ m}^4$$

(selon Saint-Venant)

$$\text{Inertie de flexion de la dalle} \quad I_d = \frac{d^3}{12(1-\mu^2)} = 0,00210 \text{ m}^4/\text{m}$$

Les caractéristiques élastiques permettant de déterminer les facteurs de raideur relative ont les valeurs suivantes:

$$\begin{array}{lll}
 I_z = 5,789 \text{ m}^4 & L = 64,00 \text{ m} & \\
 I_y = 43,55 \text{ m}^4 & c = 2,47 \text{ m} & E = 2,0 \cdot 10^6 \text{ t/m}^2 \\
 C = 10,237 \text{ m}^4 & g = 4,95 \text{ m} & G = 0,736 \cdot 10^6 \text{ t/m}^2 \\
 I_d = 0,0021 \text{ m}^4/\text{m} & h_c = 0,91 \text{ m} &
 \end{array}$$

Les facteurs de raideurs relatives sont alors:

$$\begin{array}{lll}
 k_{s1} = 427,9 & k_{s2} = 395,5 & k_{s1}/k_{s2} = 1,08 \\
 k_{a1} = 11,15 & k_{a2} = 1211,6 & k_{a1}/k_{a2} = 0,00920
 \end{array}$$

On commence par déterminer les valeurs des efforts au moyen des formules approchées (cf.4.5). Les nombres représentant l'intensité relative des efforts transversaux sont:

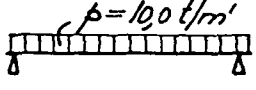
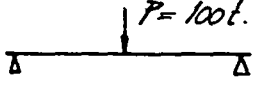
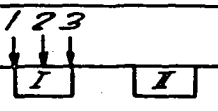
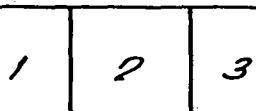
$$\begin{array}{ll}
 \alpha_1 = 0,0659 & \alpha_2 = 0,2100 \\
 \alpha_3 = 0,689 + 0,0609 \cdot \varepsilon & \alpha_4 = 2,099 + 0,232 \cdot \varepsilon
 \end{array}$$

Les charges placées au droit des parois latérales des caissons ont une excentricité relative $\varepsilon = \pm 0,501$. On peut alors calculer les efforts principaux à l'aide des formules établies dans 4.2. Les résultats de ces calculs sont donnés dans le tableau 9.2.

Si l'on utilise la résolution exacte, on recherche tout d'abord les constantes des expressions des efforts dans la coupure et l'on obtient:

$$\begin{array}{llll}
 A_1 \approx 0 & A_2 = -0,8929 & B_1 \approx 0 & B_2 = 0,4211 \\
 \text{Pour} & \varepsilon = -0,501 & \varepsilon = 0 & \varepsilon = +0,501 \\
 & C_1 = -0,224 & C_1 = -0,212 & C_1 = -0,200 \\
 & C_2 = 0,0074 & C_2 = 0,040 & C_2 = 0,0726 \\
 & D_1 = 0,516 & D_1 = 0,552 & D_1 = 0,588 \\
 & D_2 = 0,412 & D_2 = 0,316 & D_2 = 0,220
 \end{array}$$

Les valeurs des efforts obtenus par la résolution exacte diffèrent peu de celles que donnent les formules approchées, comme le montre le tableau ci-après :

Tableau 9.2									
Résultats des calculs par la méthode de la coupure									
a) solution exacte									
b) solution approchée									
Distribution de la charge en long									
Position de la charge									
Moment de flexion maximum m_{max} à l'axe de la dalle		t/m/m		1	2	3	1	2	3
a)		-1,33	± 0	1,33	-0,42	± 0	0,42		
b)		-1,28	± 0	1,28	-0,41	± 0	0,41		
Effort tranchant maximum q_{max} à l'axe de la dalle		t/m		5,04	5,20	5,36	1,32	1,57	1,81
a)		5,04	5,20	5,36	1,32	1,57	1,81		
b)		5,17	5,41	5,66	1,55	1,64	1,73		
Moment de flexion maximum M_I dans le caisson chargé		tm		2974	2875	2777	1067	1037	1008
a)		2974	2875	2777	1067	1037	1008		
b)		2975	2874	2773	1071	1040	1009		
Moment de flexion maximum M_{II} dans le caisson non chargé		tm		2146	2245	2343	533	563	592
a)		2146	2245	2343	533	563	592		
b)		2145	2246	2347	529	560	591		
Coefficients de répartition ρ		-		0,42	0,44	0,46	0,33	0,35	0,37
a)		0,42	0,44	0,46	0,33	0,35	0,37		
b)		0,42	0,44	0,46	0,33	0,35	0,37		
Moment de torsion à l'extrémité du caisson chargé M_{tI}		tm		1299	578	-140	242	123	4
a)		1299	578	-140	242	123	4		
b)		1281	546	-190	238	130	22		
Moment de torsion à l'extrémité du caisson non chargé M_{tII}		tm		559	578	600	124	123	122
a)		559	578	600	124	123	122		
b)		554	546	538	131	130	129		

9.2 CALCUL PAR LA METHODE DES PAROIS

Le calcul par la méthode des parois a été effectué à l'aide de la calculatrice électronique IBM 7040 du Centre de calcul de l'Ecole polytechnique fédérale de Lausanne, au moyen du programme P2CS élaboré dans ce but. L'organigramme général de ce programme est donné dans la figure 9.3.

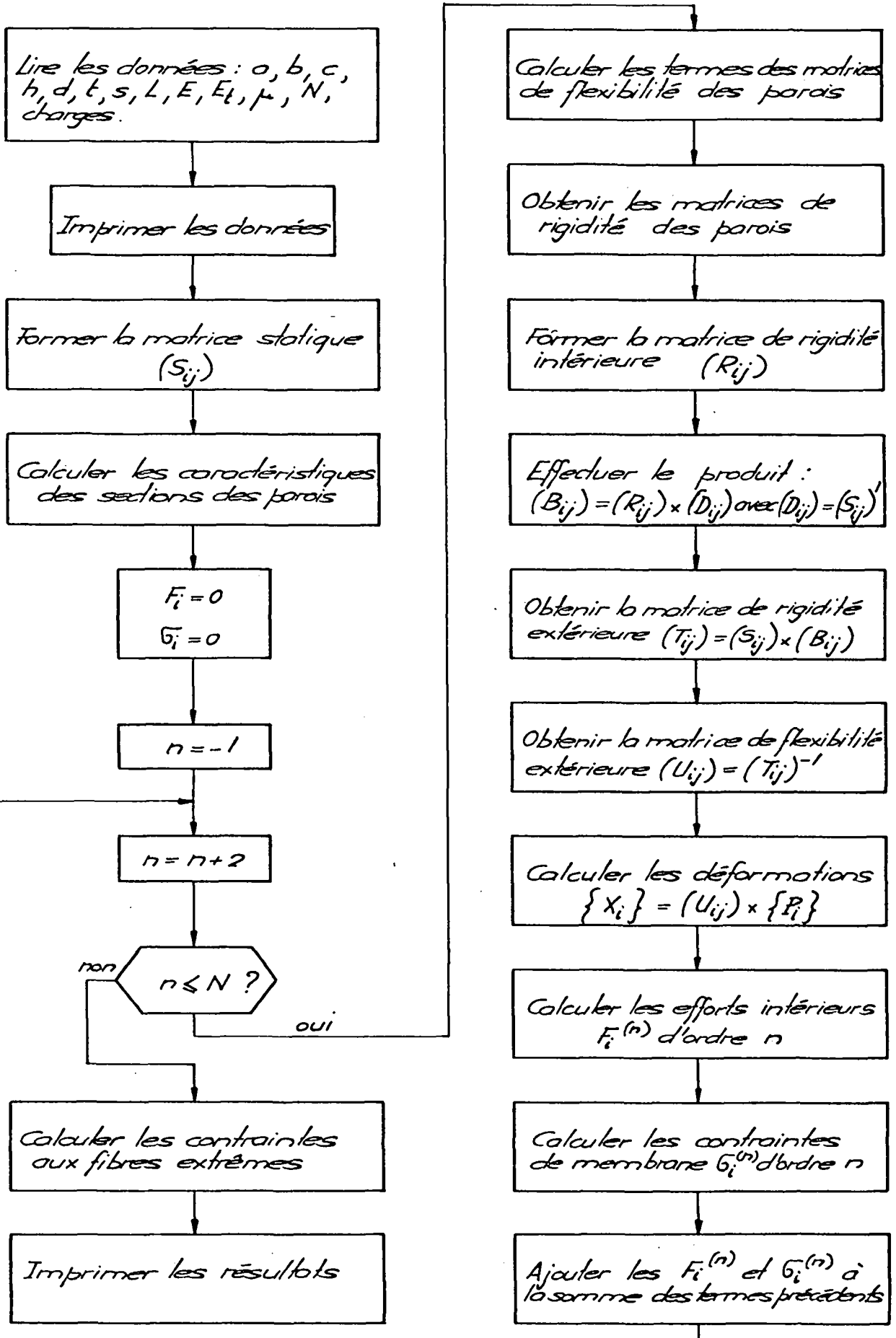
Les données introduites sont:

- dimensions géométriques du profil selon figure 9.1
- portée $L = 64,00$ m
- module d'élasticité longitudinal $E = 2 \cdot 10^6 \text{ t/m}^2$
- module d'élasticité transversal $E_t = 2 \cdot 10^6 \text{ t/m}^2$
- coefficient de Poisson $\mu = 0,359$
- charges extérieures, sous la forme des 15 premiers termes impairs du développement en série de sinus.

Les résultats des calculs pour les 5 cas de charge étudiés sont donnés en fin de chapitre dans le tableau 9.4 pour les déformations et dans les tableaux 9.5 à 9.9 pour les contraintes longitudinales et les efforts transversaux. Les réactions d'appui figurent dans le tableau 9.10.

Les contraintes σ_x aux points No 1 à 15 sont les contraintes de membrane. Les contraintes extrêmes (points No 16 à 27), que l'on a obtenues en tenant compte de l'effet des moments de flexion transversaux (cf. expression 5.52), diffèrent notablement des contraintes de membrane en certains points. Aux points 2, 4, 6 et 8, on a donné les valeurs moyennes découlant des moments de part et d'autre des parois verticales; les valeurs distinctes à gauche et à droite sont représentées dans les diagrammes du chapitre 10.

(charges de la forme $p = \sum_{n=1,3,\dots}^N \bar{p}^{(n)} \sin n\pi x/L$)



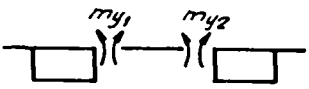
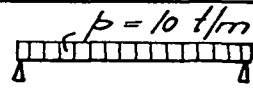
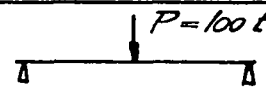
On observe un certain écart entre la somme des réactions et la somme des charges; il n'excède toutefois pas 2%. On sait que lorsqu'on traite un problème de flexion, par exemple, en développant la charge en série trigonométrique, la convergence est rapide pour les déformations (flèches) et de moins en moins rapide pour les moments de flexion, les efforts tranchants et les réactions, qui sont des intégrales d'ordre de moins en moins élevé de la charge. On peut donc s'attendre ici à ce que l'erreur sur les grandeurs autres que les réactions soit nettement inférieure à 2%.

9.3. COMPARAISON DES RESULTATS OBTENUS PAR LES DEUX METHODES

Tableau 9.11

Comparaison des résultats des calculs par deux méthodes

a) méthode des poutres, résolution par séries
 b) méthode de la coupe, résolution exacte

Position de la charge			1	2	3	1	2	3
Contrainte σ_x max à la fibre supérieure	t/m^2	a)	-515	-483	-450	-248	-189	-209
		b)	-485	-469	-453	-174	-169	-165
Contrainte σ_x max. à la fibre inférieure	t/m^2	a)	949	913	881	468	348	446
		b)	912	882	851	327	318	309
Moment transversal maximum m_{y_1}	tm/m	a)	10,95	12,33	13,71	3,08	3,78	4,47
		b)	11,12	12,84	14,57	2,84	3,88	4,89
Moment transversal maximum m_{y_2}	tm/m	a)	-12,63	-12,24	-11,84	-3,42	-3,75	-4,09
		b)	-13,78	-12,84	-11,91	-3,68	-3,88	-4,05

Dans le tableau 9.11, on a réuni les valeurs des contraintes longitudinales et des moments transversaux maximums obtenus par les deux méthodes appliquées. Pour la méthode des parois, les σ_x donnés ici ont été déterminés sans tenir compte de l'effet des moments transversaux afin d'obtenir des grandeurs comparables aux résultats obtenus par la méthode de la coupure.

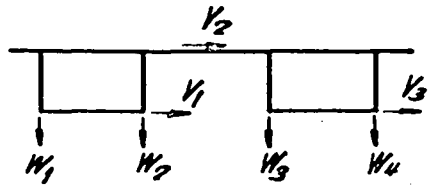
On constate que, lorsque les charges sont uniformément réparties en longueur, les résultats des deux calculs sont voisins, puisque les plus grands écarts sont de 6% pour les contraintes et de 9% pour les moments de flexion transversaux. Si l'on considère l'effet de charges ponctuelles, en revanche, les différences sont importantes, atteignant 44% pour σ_x et 9% pour les moments transversaux. Ce fait s'explique, pour m_y , par l'influence plus sensible de la déformation transversale du profil des caissons; pour σ_x par les effets conjugués de cette déformation, de la torsion sans gauchissement et des glissements de cisaillement.

Le cas particulier étudié ici est celui d'un pont relativement long à caissons relativement rigides. Dans le cas d'un pont plus court ou de caissons à parois latérales plus minces, il faut s'attendre à des écarts sensibles entre les résultats des deux calculs, même pour des charges réparties.

Comme la méthode des parois est basée sur un modèle de calcul plus proche de la réalité que celui adopté dans la méthode de la coupure médiane, c'est cette dernière qui fournit les résultats les moins exacts, dans tous les cas.

Tableau 9.4.

Déplacements verticaux et
horizontaux calculés [en mm]



Cas de charge		1	3	4	5	6
Schéma de charge		$P=25t.$ 	$P=100t.$ 	$P=100t.$ 	$p=10t/m'$ 	$p=10t/m'$
A mi-portée	W_1	24,0	26,0	32,0	106,0	124,0
	W_2	24,0	28,0	26,0	109,0	106,0
	W_3	24,0	22,0	20,0	90,0	82,0
	W_4	24,0	20,0	18,0	82,0	75,0
	V_1	-0,019	0,71	1,07	1,53	5,58
	V_2	± 0	0,18	0,11	0,64	0,36
V_3	0,019	0,97	0,89	3,85	3,58	
Au 1/4 de la portée	W_1	17,0	18,0	21,0	75,0	89,0
	W_2	17,0	18,0	18,0	79,0	75,0
	W_3	17,0	16,0	14,0	64,0	58,0
	W_4	17,0	14,0	13,0	58,0	53,0
	V_1	-0,013	0,15	1,08	1,37	3,70
	V_2	± 0	0,10	0,05	0,48	0,28
V_3	0,013	0,66	0,62	2,75	2,54	

Tableau 9.5

Résultats du calcul pour le cas de charge n°1



Contraintes longitudinales σ_x en t/m^2

Points n°	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Section 1	-27	-27	-27	-27	-27	-27	-27	-27	-27	59	59	59	59	59	59
Section 2	-54	-54	-54	-54	-54	-54	-54	-54	-54	118	118	117	117	118	118
Section 3	-81	-81	-82	-82	-82	-82	-82	-81	-81	176	177	176	176	177	176
Section 4	-97	-117	-102	-119	-103	-119	-102	-117	-97	248	216	247	247	218	248

Points n°	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
Section 1	-32	-32	-32	-32	-32	-32	61	62	61	61	62	61
Section 2	-64	-64	-64	-64	-64	-64	123	123	123	123	123	123
Section 3	-95	-95	-96	-96	-96	-95	185	185	184	184	185	185
Section 4	-137	-120	-139	-139	-120	-137	259	228	259	259	228	259



Moments de flexion transversaux m_y en tm/m

Moments n°	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Section 1	±0	-0,001	±0	±0	0,004	0,004	0,004	0,004	±0	±0	-0,001	±0	±0	±0	±0	±0
Section 2	±0	±0	±0	0,001	0,007	0,008	0,008	0,007	0,001	±0	±0	±0	±0	±0	±0	±0
Section 3	±0	0,004	-0,004	0,005	0,006	0,012	0,012	0,006	0,005	-0,004	0,004	±0	-0,001	0,001	0,001	-0,001
Section 4	±0	0,007	-0,008	0,009	0,004	0,013	0,013	0,004	0,009	-0,008	0,007	±0	-0,002	0,001	0,001	-0,002

Tableau 9.6

Résultats du calcul pour le cas de charge r.° 3



Contraintes longitudinales σ_x en t/m²

Points n°	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Section 1	-28	-28	-27	-24	-27	-29	-28	-27	-27	66	58	48	60	60	61
Section 2	-59	-59	-55	-48	-54	-58	-54	-51	-50	138	122	101	115	114	116
Section 3	-93	-94	-88	-78	-84	-85	-76	-69	-64	204	200	187	186	154	158
Section 4	-110	-111	-119	-185	-114	-101	-86	-76	-68	216	220	426	175	170	173

Points n°	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
Section 1	-33	-32	-42	-24	-32	-32	70	60	48	65	63	62
Section 2	-65	-67	-92	-44	-61	-59	140	127	108	125	120	118
Section 3	-96	-108	-163	-57	-85	-80	189	208	218	173	162	157
Section 4	-96	-145	-326	-57	-88	-88	175	277	485	196	179	172



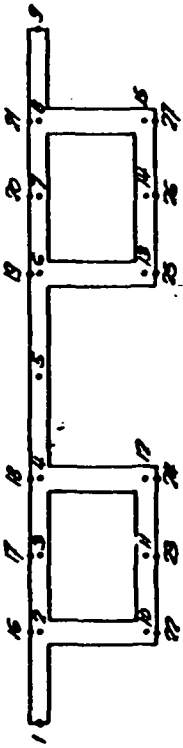
Moments de flexion transversaux m_y en tm/m

Moments n°	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Section 1	-0,002	-0,003	0,001	0,073	0,839	0,912	-0,716	-0,678	-0,038	-0,021	0,017	-0,004	0,019	-0,025	0,024	-0,019
Section 2	-0,007	0,342	-0,349	0,513	1,504	2,018	-1,666	-1,592	-0,023	-0,063	0,054	-0,009	-0,043	0,029	0,060	-0,049
Section 3	-0,002	1,483	-1,485	1,759	1,605	3,364	-2,953	-2,835	-0,118	-0,123	0,111	-0,012	-0,292	0,269	0,110	-0,080
Section 4	0,021	2,944	-2,923	3,289	1,183	4,423	-4,085	-3,887	-0,198	-0,267	0,125	-0,012	-0,620	0,589	0,144	-0,116

Tableau 9.7

Resultats du calcul pour le cas de charge n° 4

P = 100t.



Contraintes longitudinales σ_x en t/m²

Points n°	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Section 1	-20	-27	-27	-26	-27	-29	-27	-26	-26	52	62	70	56	56	57
Section 2	-60	-57	-57	-54	-55	-57	-52	-49	-47	110	132	148	106	104	106
Section 3	-105	-96	-93	-85	-80	-79	-70	-64	-60	203	215	220	141	138	141
Section 4	-149	-211	-126	-101	-92	-88	-77	-69	-63	447	285	235	154	151	154

Points n°	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
Section 1	-32	-33	-43	-19	-31	-31	56	65	71	61	59	58
Section 2	-72	-70	-86	-35	-58	-57	127	157	142	116	110	108
Section 3	-136	-114	-119	-47	-78	-75	259	224	190	156	146	142
Section 4	-291	-152	-123	-57	-86	-81	537	287	175	171	159	154

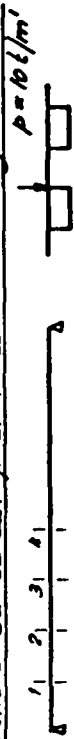


Moments de flexion transversaux m_{xy} en tm/m

Moments n°	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Section 1	0,011	-0,006	0,017	0,052	0,787	0,839	-1,019	-0,930	-0,088	0,005	-0,106	-0,027	0,021	-0,027	0,026	-0,019
Section 2	0,025	-0,302	0,417	-0,272	2,025	1,753	-2,072	-1,908	-0,163	-0,006	-0,003	-0,009	0,196	-0,148	0,058	-0,043
Section 3	0,025	-1,604	1,629	-1,411	4,055	2,644	-3,008	-2,759	-0,209	-0,037	0,026	-0,012	0,449	-0,467	0,091	-0,070
Section 4	0,001	-3,088	3,088	-2,837	5,918	3,081	-3,418	-3,197	-0,220	-0,059	0,048	-0,012	0,813	-0,834	0,107	-0,084

Tableau 9.8

Résultats du calcul pour le cas de charge n°5



Contraintes longitudinales G_x en t/m^2

Points n°	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Section 1	-166	-170	-171	-188	-163	-153	-131	-118	-106	347	384	457	269	263	269
Section 2	-289	-292	-284	-290	-273	-267	-236	-215	-198	624	639	683	488	479	491
Section 3	-359	-360	-349	-349	-337	-337	-302	-278	-260	785	792	803	630	620	634
Section 4	-380	-382	-376	-369	-359	-360	-324	-300	-282	837	828	812	678	668	683

Points n°	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
Section 1	-148	-209	-309	-94	-147	-136	300	400	538	301	277	267
Section 2	-274	-348	-572	-125	-205	-249	569	666	793	542	505	490
Section 3	-353	-427	-679	-229	-341	-323	738	814	917	685	652	635
Section 4	-379	-453	-713	-248	-366	-348	793	862	956	748	703	685



Moments de flexion transversaux m_y en tm/m

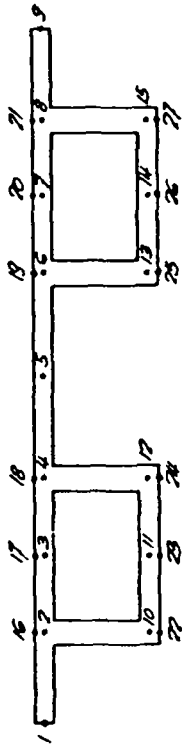
Moments n°	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Section 1	0,018	3,687	-3,668	4,192	2,209	6,461	-5,763	-5,510	-0,253	-0,219	0,199	-0,020	-0,761	0,717	0,210	-0,170
Section 2	0,007	5,023	-5,015	5,888	4,789	10,687	-9,423	-9,019	-0,403	-0,368	0,331	-0,037	-1,000	0,927	0,345	-0,280
Section 3	±0	5,219	-5,220	6,280	6,718	12,988	-11,285	-10,792	-0,483	-0,431	0,383	-0,048	-1,002	0,913	0,411	-0,333
Section 4	-0,002	5,198	-5,199	6,318	7,396	13,714	-11,842	-11,318	-0,123	-0,147	0,385	-0,052	-0,983	0,889	0,430	-0,348

Tableau 9.9

Résultats du calcul pour le cas de charge n°6



Contraintes longitudinales σ_x en t/m^2



Points n°	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Section 1	-211	-225	-181	-154	-140	-136	-119	-108	-100	488	412	375	239	234	239
Section 2	-341	-348	-300	-265	-250	-245	-218	-199	-187	734	687	672	439	431	440
Section 3	-410	-417	-367	-328	-316	-314	-282	-260	-246	864	841	844	571	560	571
Section 4	-432	-439	-388	-349	-338	-338	-304	-281	-267	906	890	900	616	605	617

Points n°	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
Section 1	-319	-270	-199	-80	-133	-126	539	430	301	265	247	240
Section 2	-485	-365	-365	-146	-243	-233	894	716	572	485	454	442
Section 3	-569	-446	-460	-190	-315	-304	1039	876	742	678	590	576
Section 4	-594	-472	-503	-205	-340	-329	1084	928	798	678	637	622



Moments de flexion transversaux m_y en tm/m

Moments n°	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Section 1	0,018	-3,916	3,929	-3,545	8,230	4,685	-5,244	-4,897	-0,347	-0,082	0,063	-0,019	1,049	-1,081	0,162	-0,126
Section 2	0,062	-5,383	5,445	-4,789	12,994	8,225	-9,346	-8,636	-0,650	-9,115	0,079	-0,036	1,488	-1,545	0,282	-0,217
Section 3	0,092	-5,621	5,712	-4,866	15,155	10,289	-11,817	-10,363	-0,854	-0,113	0,066	-0,048	1,593	-1,665	0,348	-0,267
Section 4	0,100	-5,604	5,704	-4,802	15,756	10,953	-12,627	-11,702	-0,926	-0,108	0,057	-0,052	1,605	-1,681	0,369	-0,282

Tableau 9.10

Réactions d'appui
calculées [en t.]



Cas de charge	1	3	4	5	6
Schéma de charge	$P = 25t.$ 	$P = 100t.$ 	$P = 100t.$ 	$p = 10t/m'$ 	$p = 10t/m'$
R_1	13	14	62	61	363
R_2	13	11	-35	140	-149
R_3	13	38	37	169	156
R_4	13	-12	-13	-53	-54

10. COMPARAISON DES RESULTATS DES ESSAIS AVEC CEUX DES CALCULS

10.1 EFFORTS ET CONTRAINTES LONGITUDINAUX

Dans les figures 10.1 à 10.8, on a représenté graphiquement les contraintes normales longitudinales σ_x et les déformées transversales au milieu et au quart de la portée, pour les quatre cas de charge asymétriques étudiés.

Les contraintes sur la face supérieure de la dalle et sur la face inférieure des caissons, calculées par la méthode des parois (cf.9.2), sont figurées par des traits pleins, tandis que les lignes pointillées représentent les contraintes au niveau des feuilletts moyens de la dalle et des parois inférieures des caissons. Les déformées transversales obtenues par le calcul sont également données.

Sur les mêmes diagrammes, on a reporté les valeurs mesurées sur modèle réduit par des points.

On observe une bonne concordance entre le calcul et l'essai en ce qui concerne les déplacements verticaux w .

Pour les contraintes σ_x , les écarts sont plus grands, en particulier aux points ou sur les lignes d'application des charges; on peut attribuer ces différences à l'effet des déformations transversales de membrane (ϵ_y), qui sont négligées dans le calcul.

Toutefois, il faut relever que les déformations générales de la structure ainsi que l'influence des déformations transversales du profil et des déformations de cisaillement sur la distribution des contraintes, observées sur le modèle réduit, sont distinctement reproduites par le calcul.

10.2 EFFORTS ET CONTRAINTES TRANSVERSAUX

Les diagrammes des moments de flexion transversaux au quart et au milieu de la portée déterminés par le calcul sont donnés dans les figures 10.9 à 10.12; dans les éléments où ces efforts sont très petits, ils ne sont pas représentés. Les valeurs déterminées expérimentalement sont figurées par des points pour les mesures par jauges et par des croix pour les mesures de courbures.

Les écarts entre les résultats des calculs et ceux des essais sont d'une manière générale assez sensibles, puisqu'ils sont de l'ordre de 10%. Comme on l'a relevé précédemment (chap.8), ces moments de flexion sont relativement faibles, et seuls les plus grands ont pu être déterminés avec une certaine précision, par les mesures de courbures. Les diagrammes montrent que ces dernières donnent des valeurs plus proches des valeurs calculées que les mesures par jauges et que d'une manière générale les différences entre les valeurs déterminées à l'aide de deux méthodes de mesure différentes sont du même ordre de grandeur que les écarts entre mesures et calculs. On peut donc conclure que la concordance entre les résultats des calculs et ceux des mesures est satisfaisante.

CONTRAINTES NORMALES ET FLÈCHES AU 1/4 DE LA PORTÉE

CHARGE CONCENTRÉE EN F A MI-PORTÉE (Cas 3)

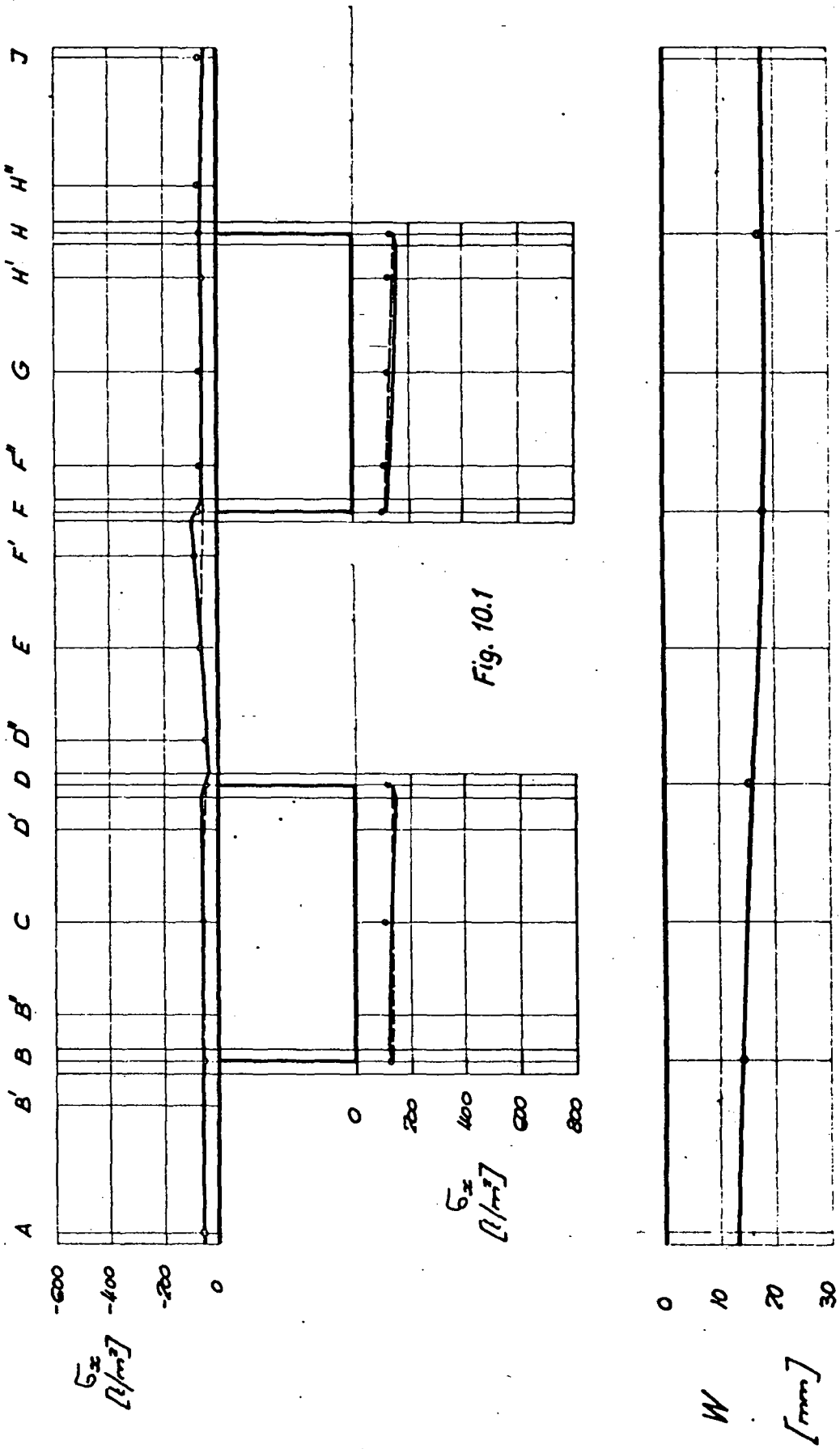


Fig. 10.1

CONTRAINTES NORMALES ET FLÈCHES A MI-PORTÉE

CHARGE CONCENTRÉE EN F A MI-PORTÉE (Cas 3)

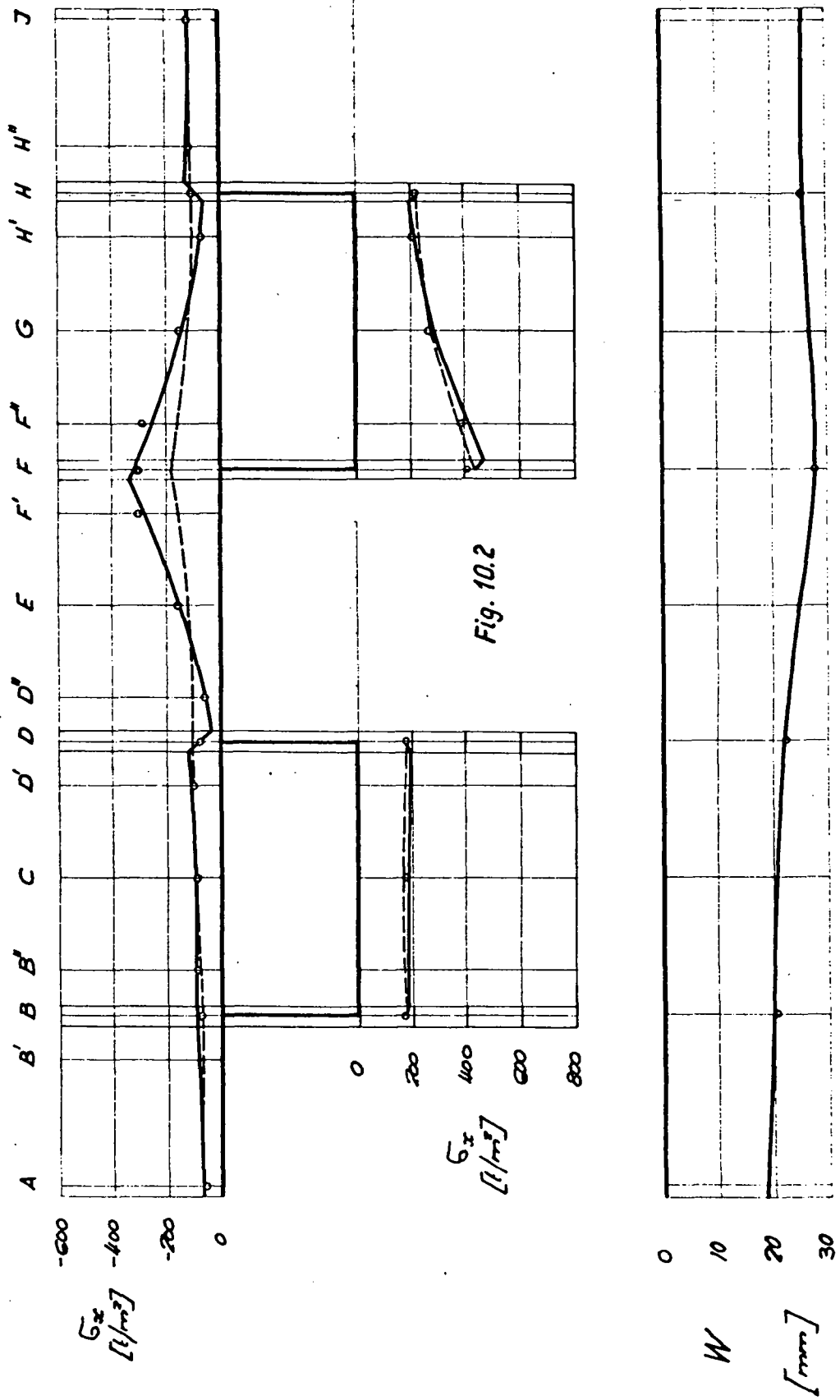


Fig. 10.2

CONTRAINTES NORMALES ET FLÈCHES AU 1/4 DE LA PORTÉE CHARGE CONCENTRÉE EN H A MI-PORTÉE (Cas 4)

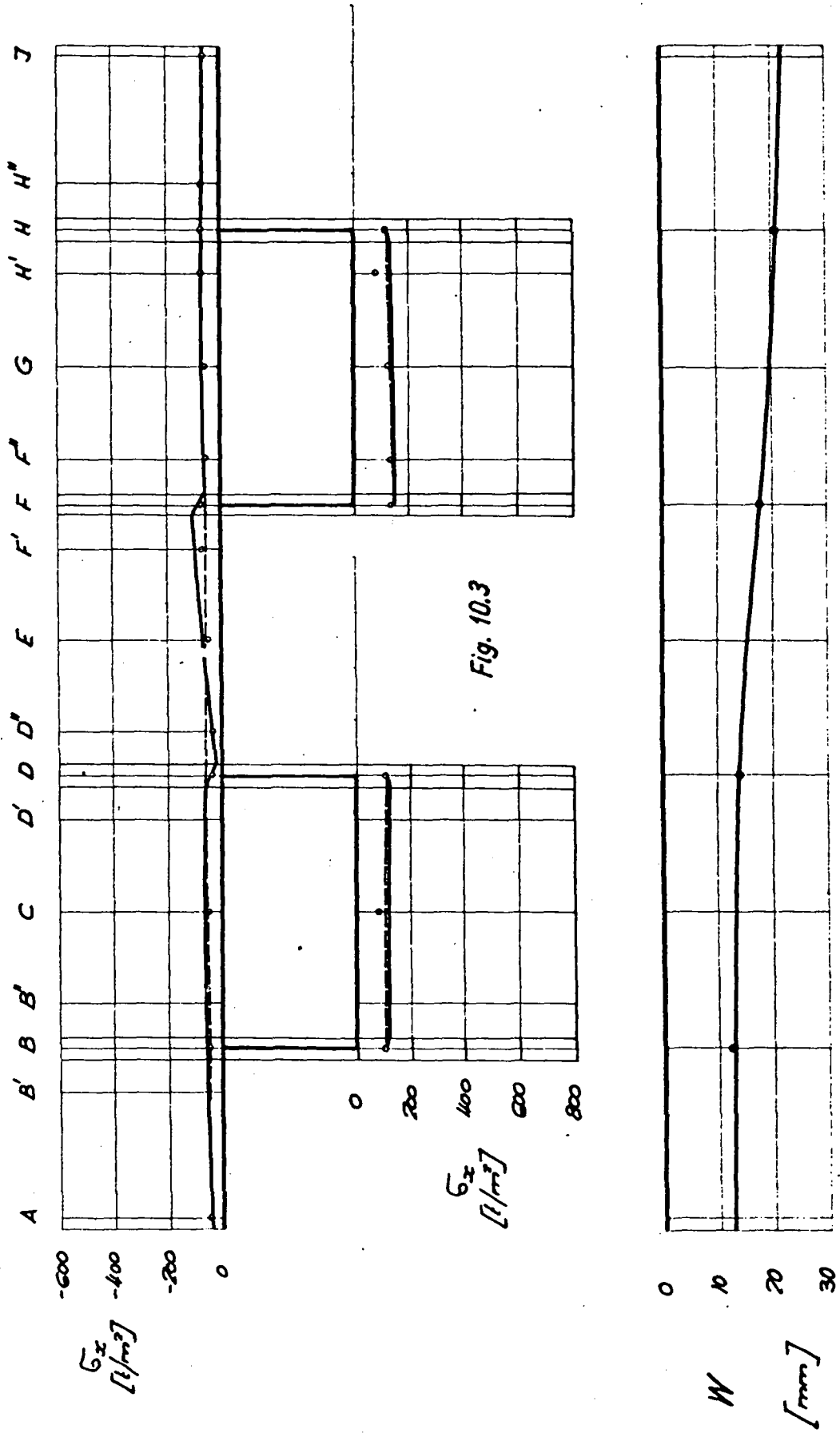


Fig. 10.3

CONTRAINTES NORMALES ET FLÈCHES A MI-PORTÉE CHARGE CONCENTRÉE EN H A MI-PORTÉE (Cas 4)

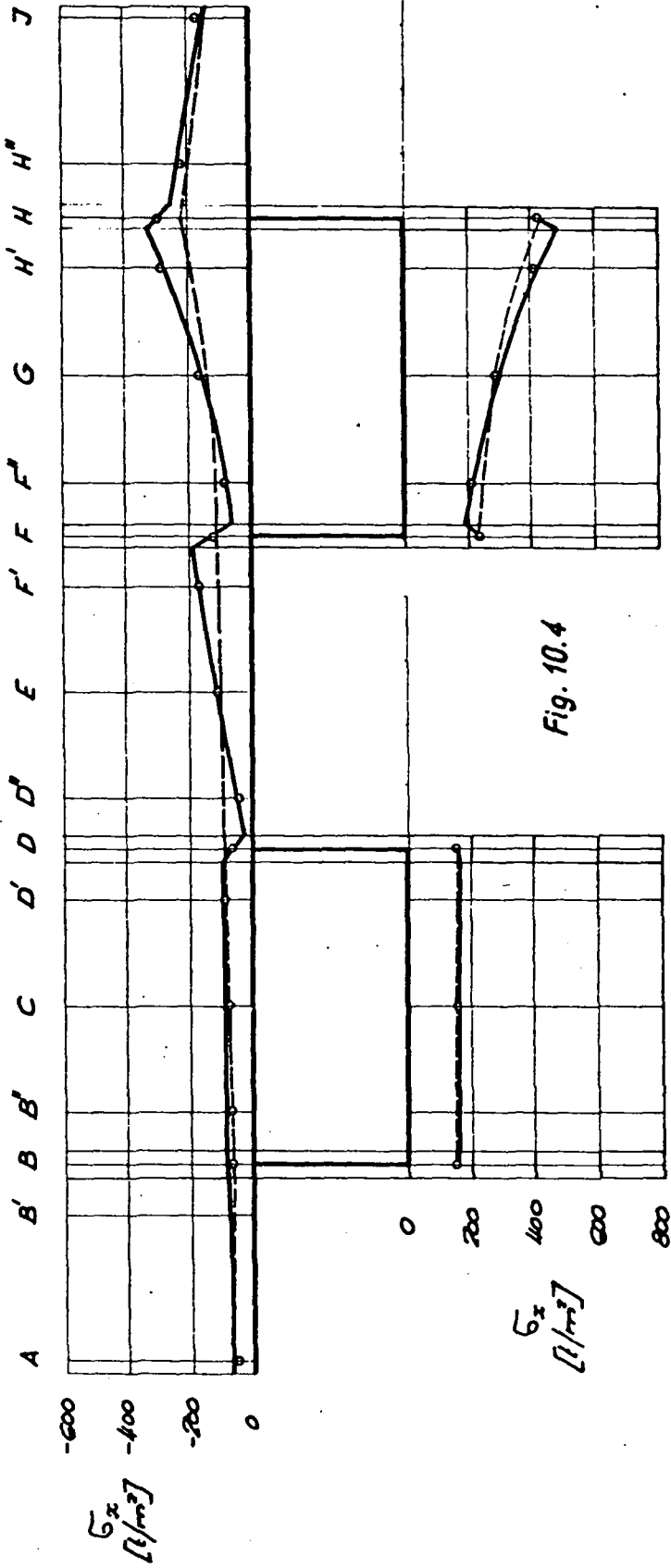
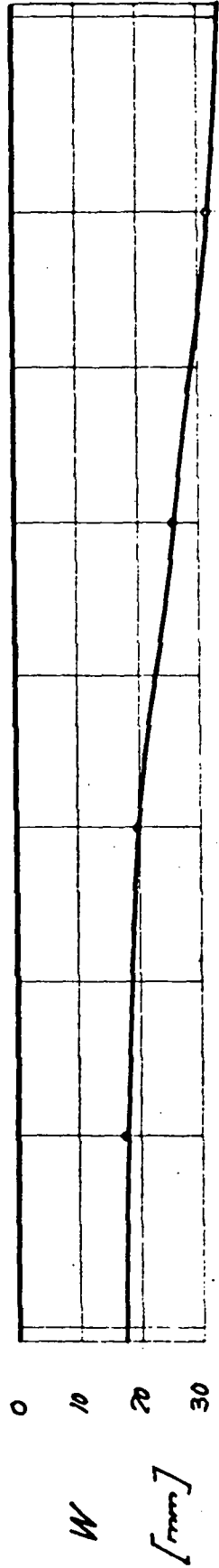


Fig. 10.4



CONTRAINTES NORMALES ET FLÈCHES AU 1/4 DE LA PORTÉE

CHARGE LINÉAIRE UNIFORME EN F (Cas 5)

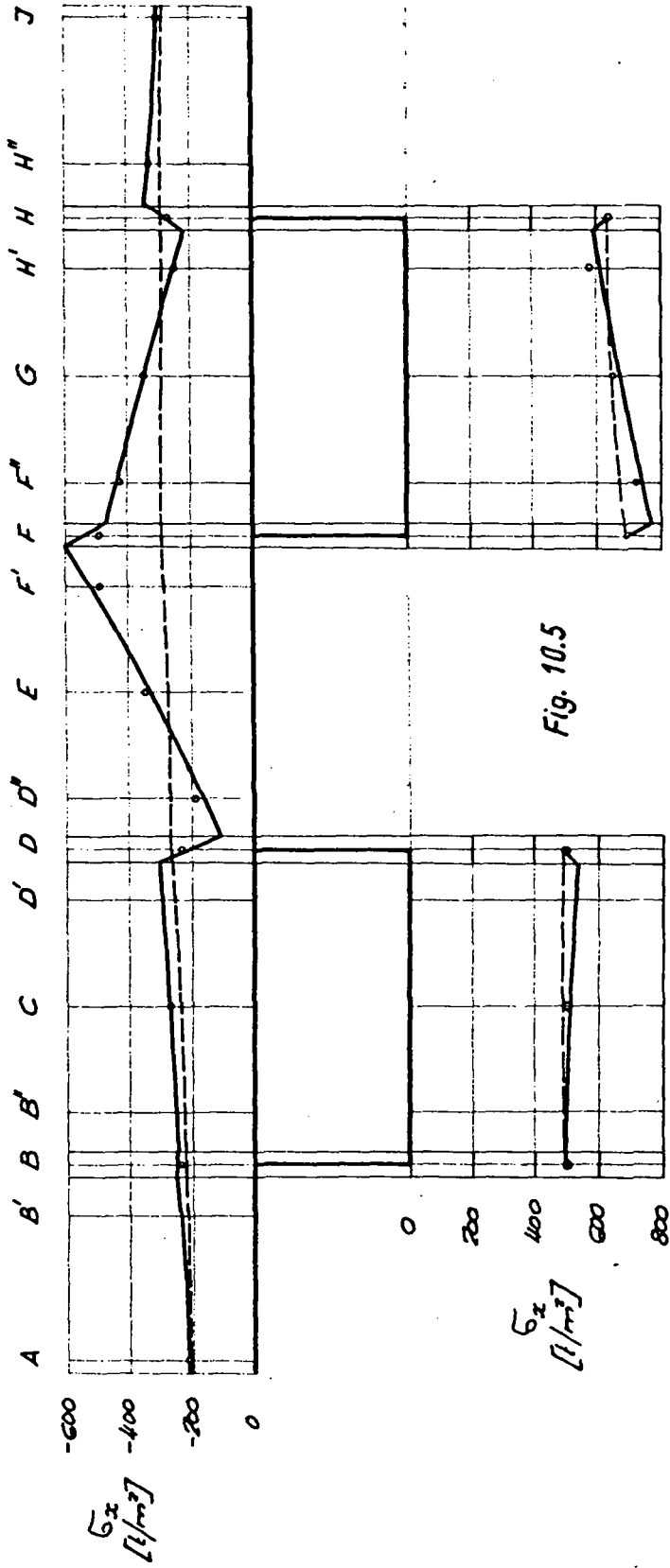
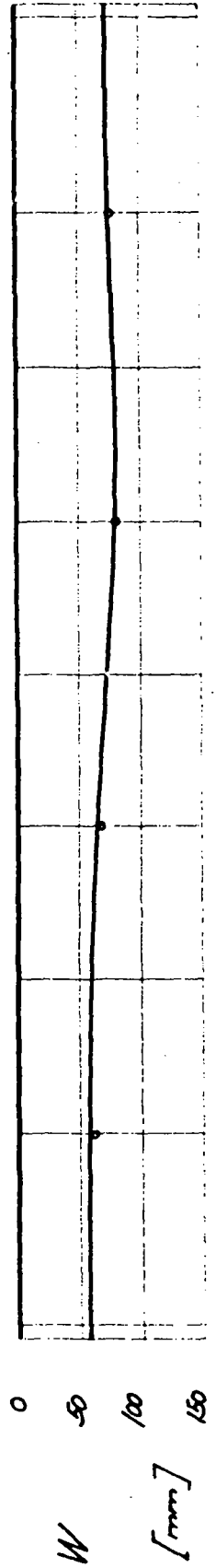


Fig. 10.5



CONTRAINTES NORMALES ET FLÈCHES A MI-PORTÉE CHARGE LINÉAIRE UNIFORME EN F (cas 5)

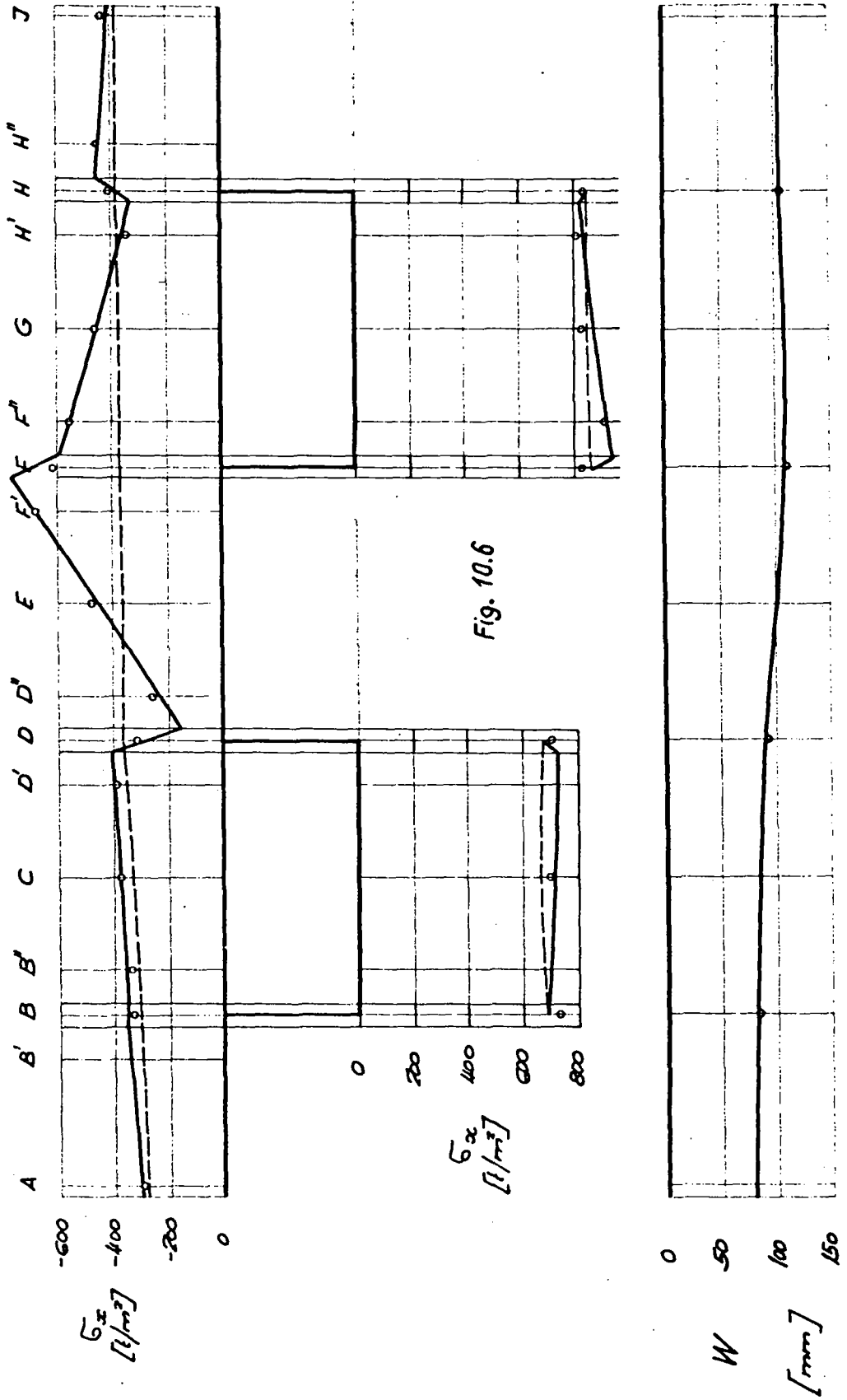


Fig. 10.6

CONTRAINTES NORMALES ET FLÈCHES A MI-PORTÉE

CHARGE LINÉAIRE UNIFORME EN H (cas 6)

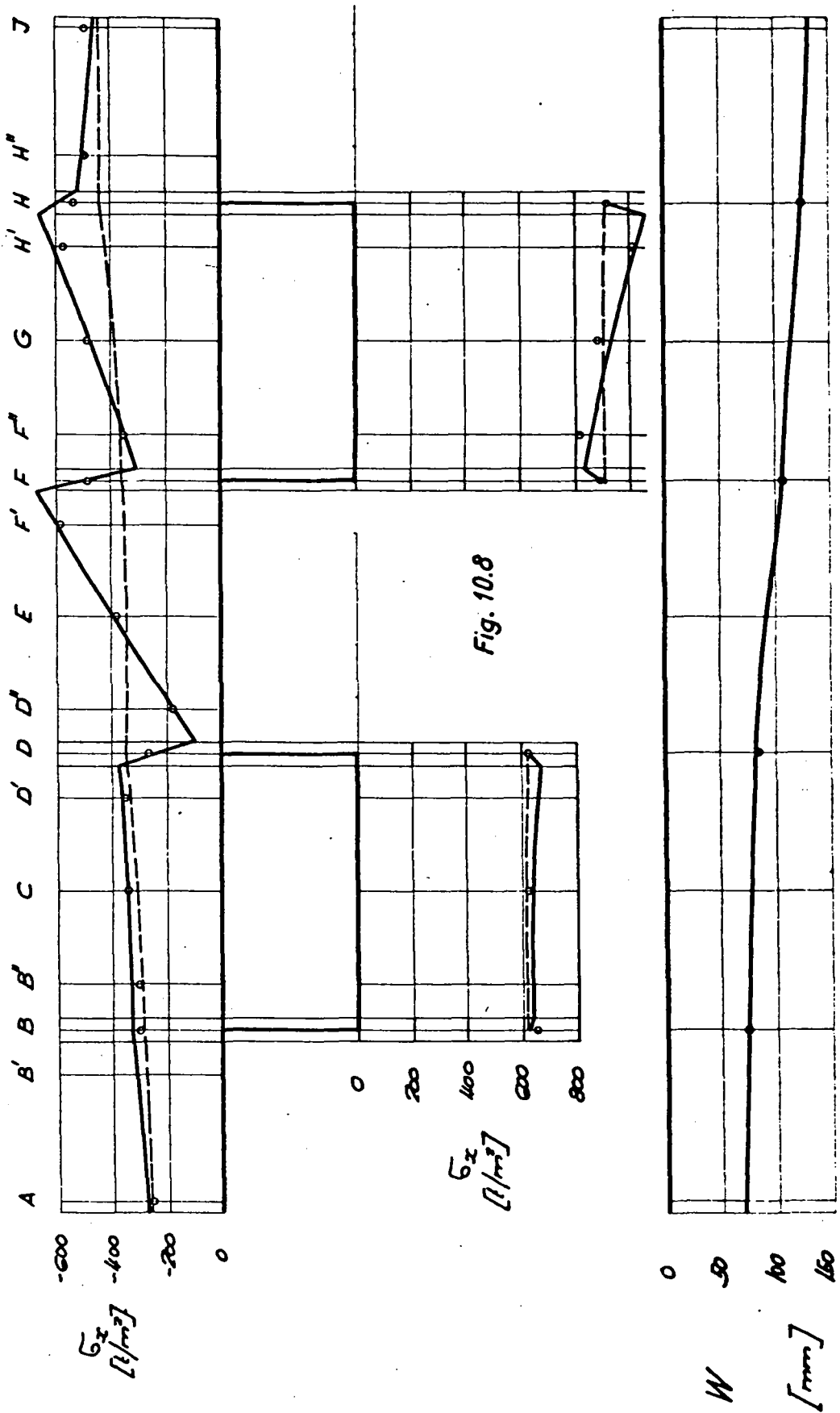


Fig. 10.8

Fig. 10.9

Moments de flexion transversaux au milieu et au quart de la portée

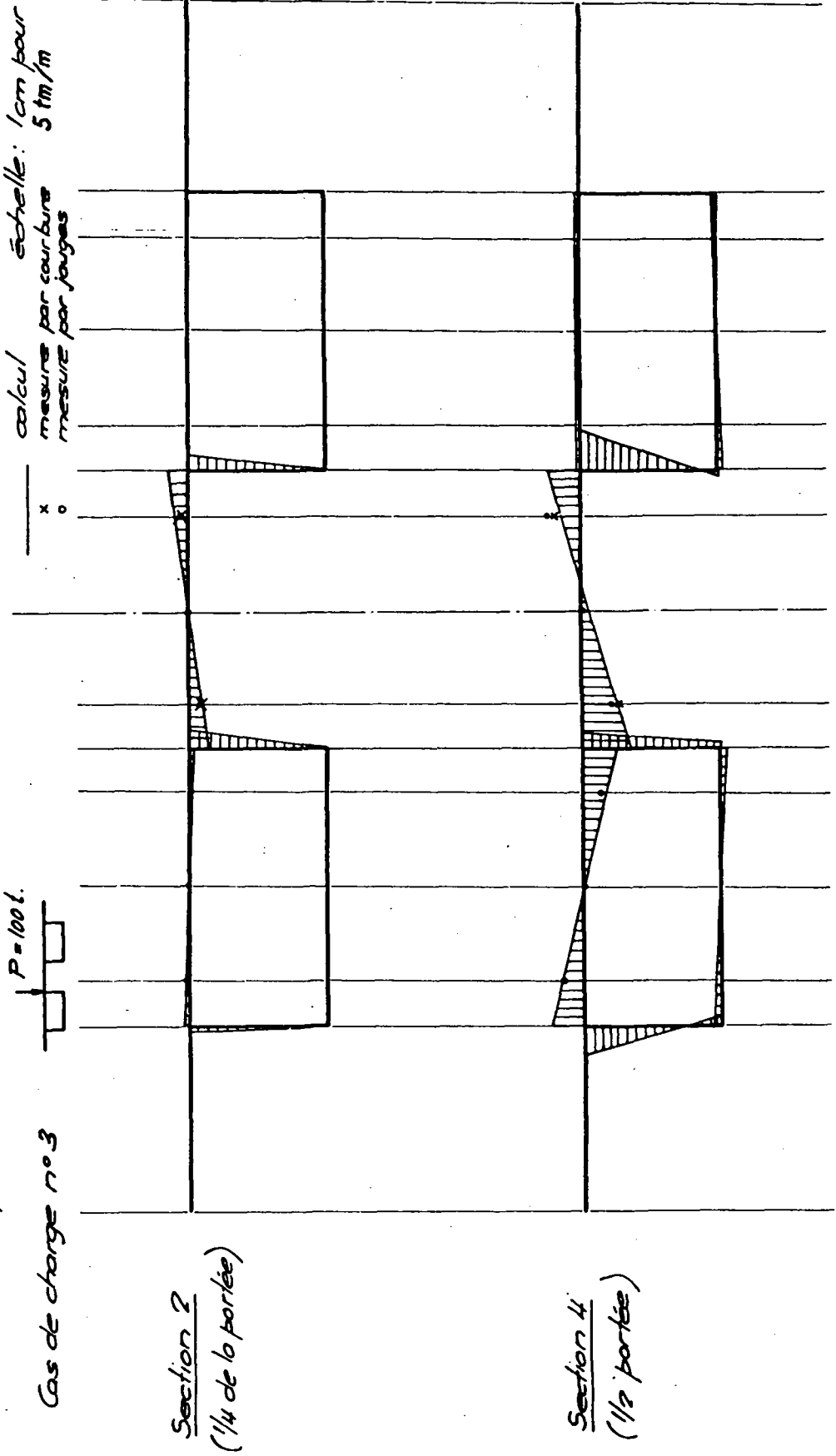


Fig. 10.10

Moments de flexion transversaux au milieu et au quart de la portée

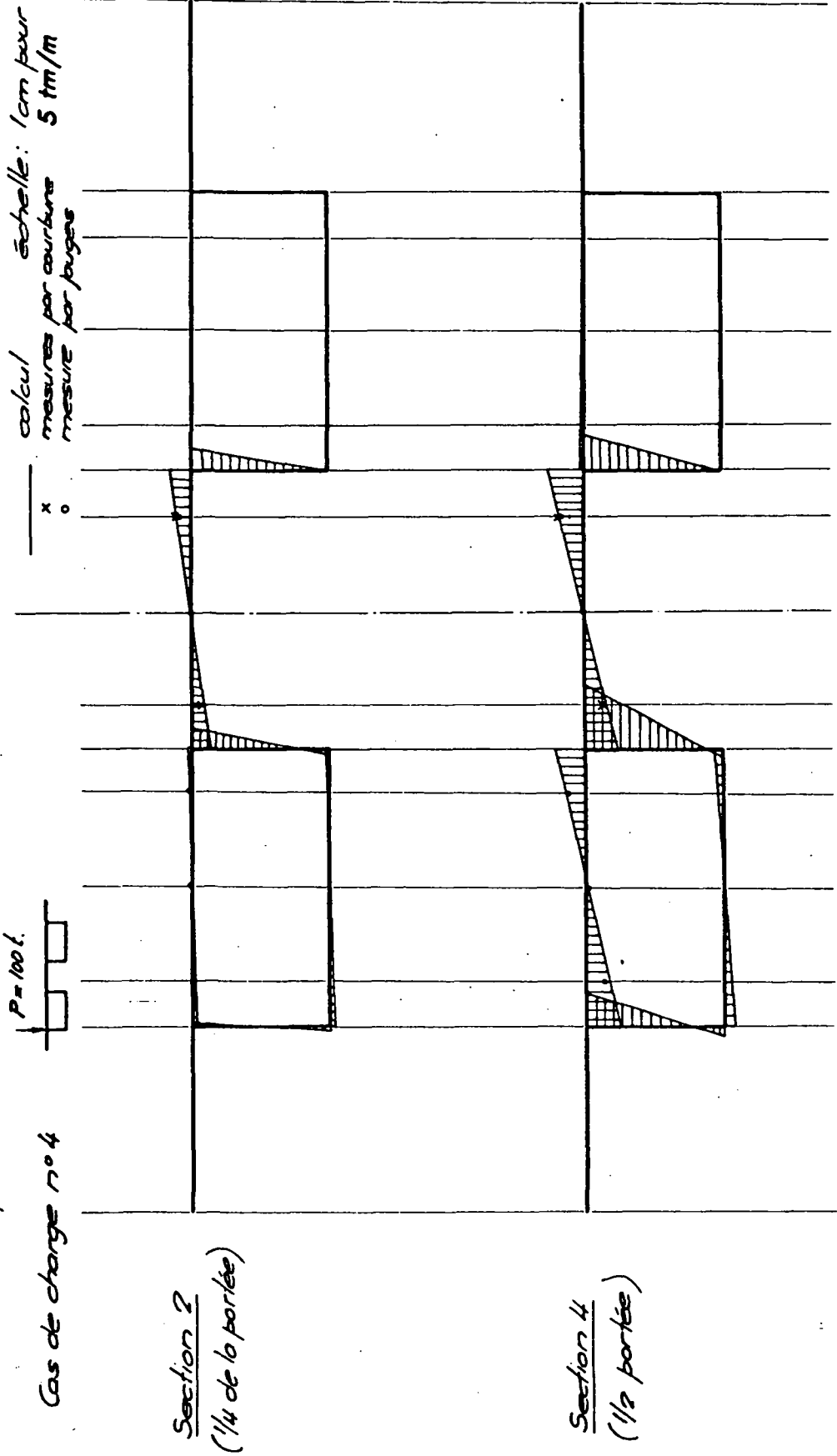


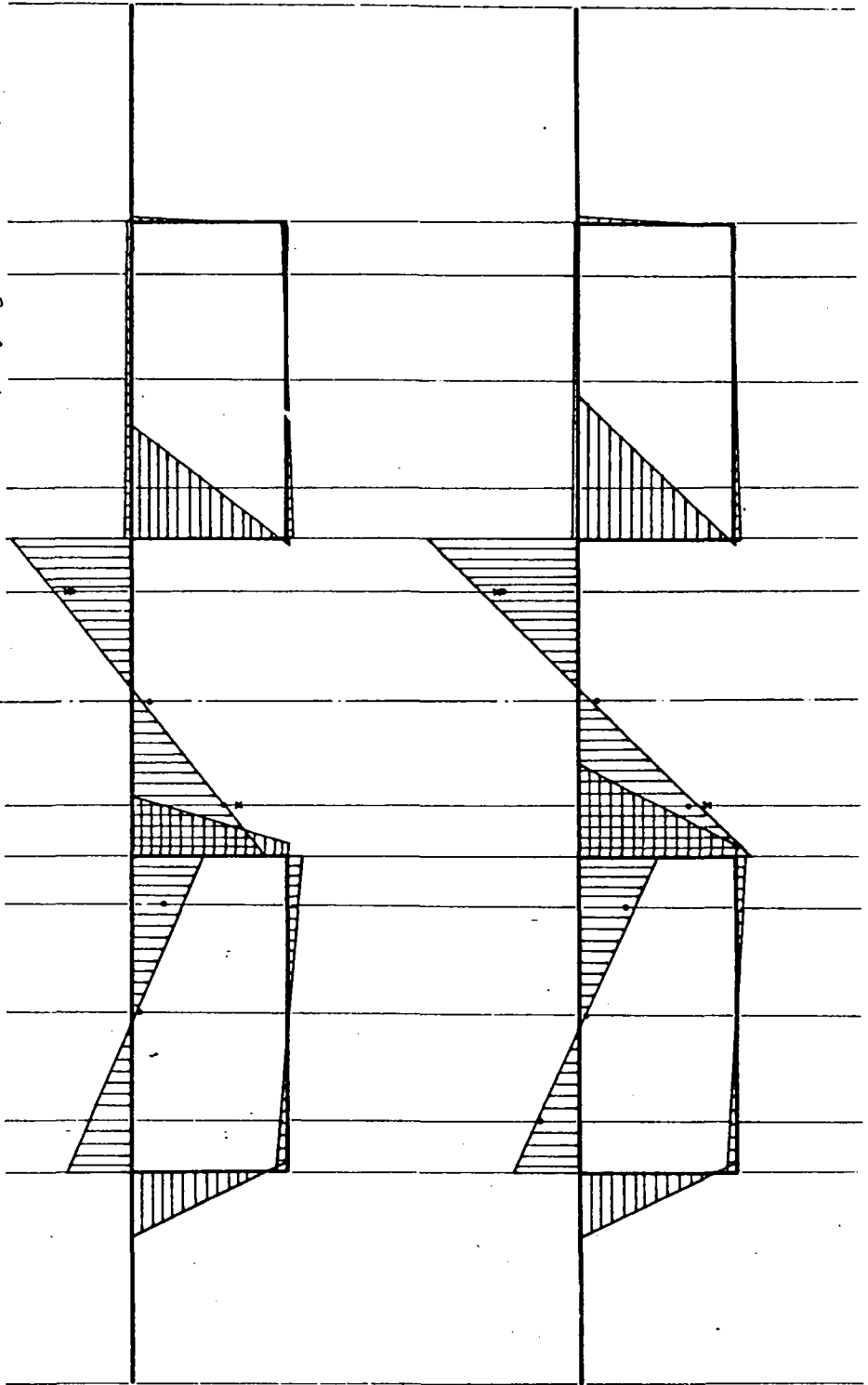
Fig. 10.11

Moments de flexion transversaux au milieu et au quart de la portée

— calcul
 x mesure par courbure
 o mesure par jauges
 échelle: 1cm pour 5 tm/m

$p = 10 \text{ t/m}^2$

Cas de charge n° 5

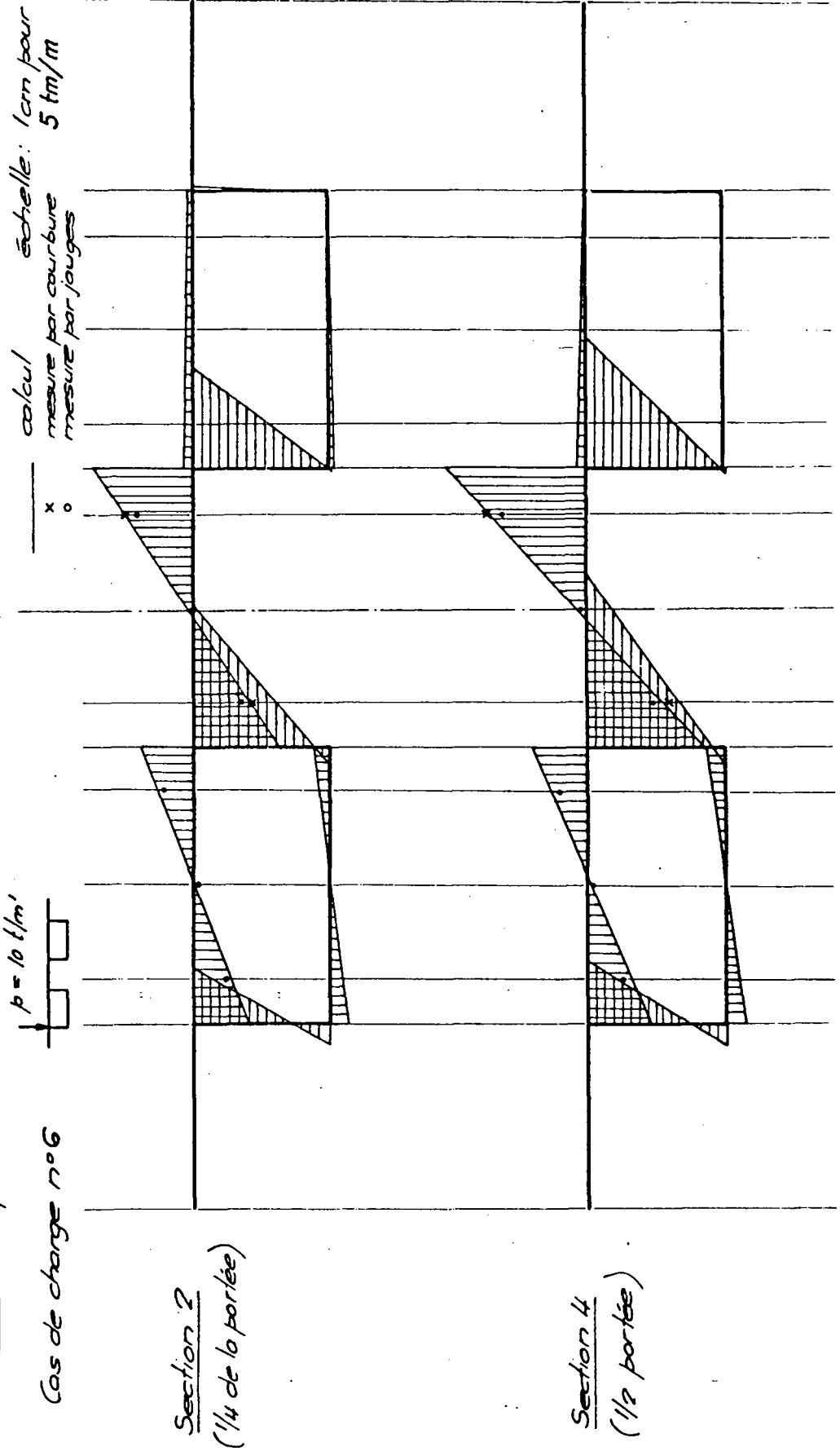


Section 2
 (1/4 de la portée)

Section 4
 (1/2 portée)

Fig. 10.12

Moments de flexion transversaux au milieu et au quart de la portée



11. CONCLUSIONS

11.1 INFLUENCE DE LA GEOMETRIE DU PONT SUR LA DISTRIBUTION DES EFFORTS

11.1.1 REPARTITION DES EFFORTS ENTRE LES DEUX CAISSONS

La solution approchée de la méthode de la coupure médiane donne les expressions de la part M_{II} du moment de flexion total M reprise par le caisson non chargé, pour une charge linéaire et une charge concentrée à mi-portée:

$$\rho_p = \frac{\pi^2}{96} \cdot \frac{5k_{a2} + 48k_{a1}\epsilon}{\pi^4 + \pi^2 k_{a1} + k_{a2}} = \frac{M_{IIp}}{M_p}$$

$$\rho_p = \frac{5}{12} \cdot \frac{k_{a2} + 12k_{a1}\epsilon}{120 + k_{a2} + 10k_{a1}} = \frac{M_{IIp}}{M_p}$$

La répartition dépend linéairement de l'excentricité relative (ϵ) de la charge. Compte tenu des proportions usuelles des sections, une charge placée au bord du tablier aura une excentricité relative $\epsilon = -1$ et, par conséquent, les coefficients ρ_p et ρ_p seront toujours positifs.

La répartition dépend également des proportions des éléments de la section entre eux ainsi que de l'élanement du pont, que l'on peut définir comme le rapport de la largeur totale B à la longueur L . L'influence de ces caractéristiques géométriques est représentée par les facteurs k_{a1} et k_{a2} . Pour faire apparaître séparément les grandeurs concernant les caissons et celles concernant la dalle, on considère les deux nombres suivants:

$$\frac{k_{a1}}{k_{a2}} = \frac{EI_z}{GC} \cdot \left(\frac{g}{L}\right)^2 \quad k_{a2} = \frac{3I_d}{c^3 I_z} \cdot L^4$$

Les figures 11.1 et 11.2 montrent comment varient les coefficients ρ_p et ρ_p en fonction de ces deux facteurs, k_{a2} étant porté sur une échelle logarithmique. L'étendue des diagrammes est limitée aux valeurs extrêmes que l'on pourra rencontrer dans la pratique.

Coefficient de répartition ρ_p en fonction des facteurs de rigidité k_{a1} et k_{a2}

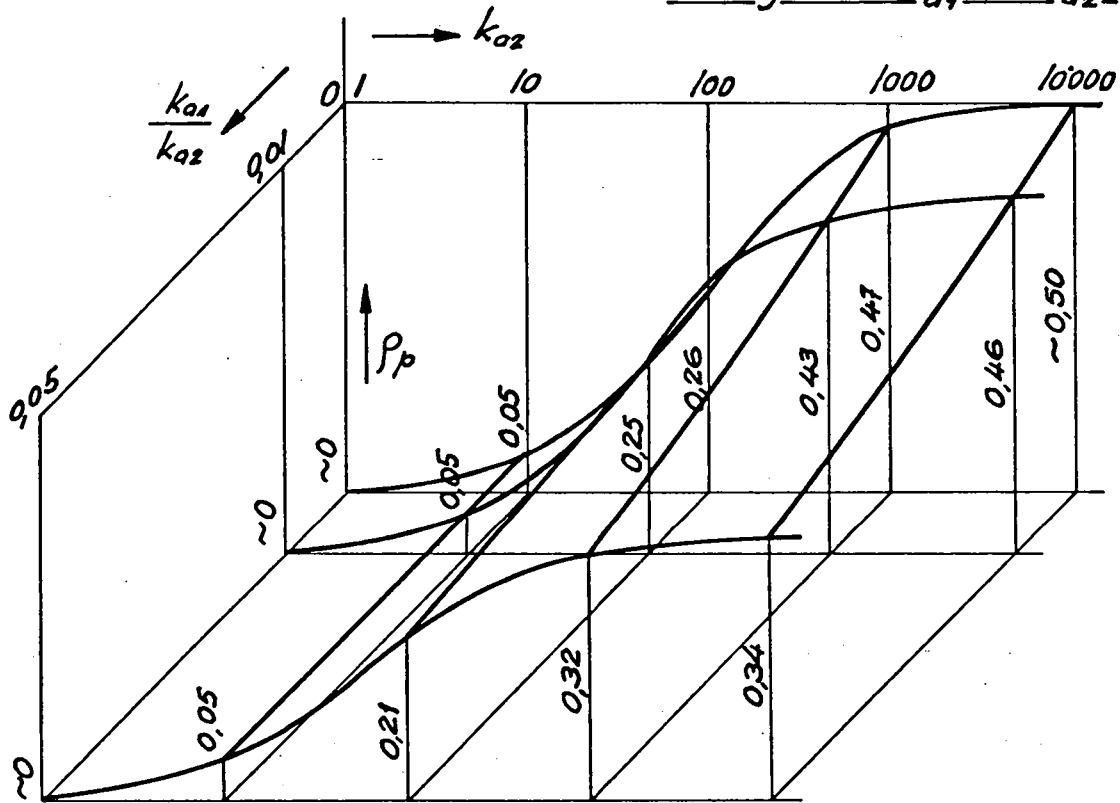


Fig. 11.1

Pour juger de l'influence des diverses caractéristiques du profil sur la répartition transversale, considérons d'abord le rapport k_{a1}/k_{a2} . Pour un pont de portée et de largeur données, ce rapport ne pourra en général passer que du simple au double suivant le choix des proportions du profil. Le diagramme de la figure 11.1 montre que l'effet de répartition ne sera alors que peu affecté, sauf si k_{a2} est élevé, c'est-à-dire si la portée est relativement grande.

Le facteur k_{a2} caractérise la raideur relative de la dalle. Pour une largeur de tablier donnée, elle ne pourra guère varier que du simple au double. Une telle variation n'a qu'une conséquence sur le coefficient de répartition.

Coefficient de répartition ρ_p en fonction des facteurs de rigidité k_{a1} et k_{a2}

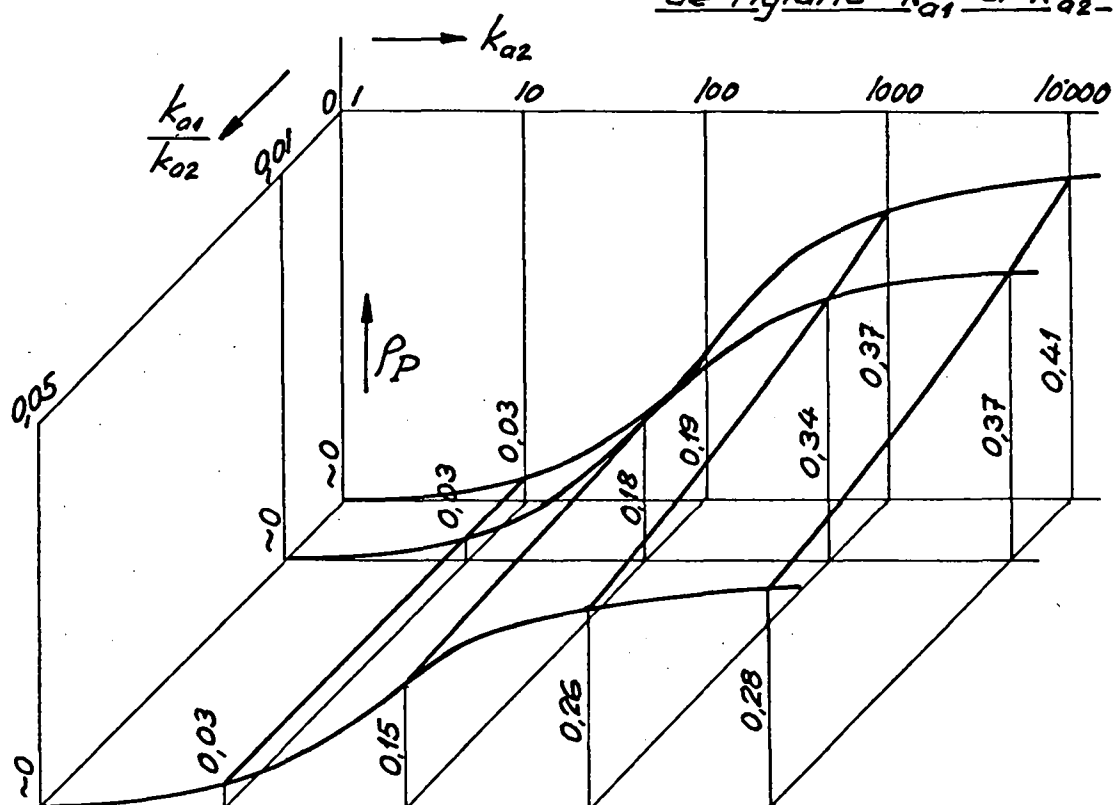


Fig. 11.2

En comparant les diagrammes des figures 11.1 et 11.2, on observe que pour n'importe quel pont, $\rho_p \cong 0,8 \rho_p$. L'efficacité de la répartition pour une charge concentrée à mi-portée est donc inférieure d'environ 20% à celle qu'on obtient pour une charge uniforme en long.

Les diagrammes font également apparaître l'influence prépondérante de l'élanement. Prenons, par exemple, un pont pour lequel k_{a1} / k_{a2} serait égal à 0,01 et k_{a2} à 1000; le coefficient de répartition pour une charge linéaire placée à l'axe de l'un des caissons serait alors égal à 0,43. En conservant le même profil transversal, faisons varier la longueur de L à L' ; on a alors:

pour	$L' = 1,0 \times L$	$\rho_p = 0,43$
pour	$L' = 0,75 \times L$	$\rho_p = 0,34$
pour	$L' = 0,50 \times L$	$\rho_p = 0,17$
pour	$L' = 0,25 \times L$	$\rho_p = 0,02$

On constate que l'efficacité de la dalle en tant qu'élément répartiteur décroît très rapidement lorsque la portée diminue. L'élanement apparaît ainsi comme la caractéristique géométrique essentielle. Pour les ponts dont les sections ont des proportions moyennes, on peut estimer que le coefficient de répartition pour une charge linéaire agissant à l'axe d'un caisson ($\epsilon = 0$) aura, selon l'élanement, les valeurs suivantes:

$\rho_p \approx$	0,40	pour	$L/B \approx 3$	(grand élanement)
$\rho_p \approx$	0,30	pour	$L/B \approx 2$	(élanement moyen)
$\rho_p \approx$	0,10	pour	$L/B \approx 1$	(petit élanement)

En conclusion, la liaison des deux caissons par la dalle assure en général une répartition considérable des moments longitudinaux, même pour des charges fortement excentrées. Quelle que soit la géométrie du pont, la répartition pour des charges uniformes en longueur est de 20% supérieure à celle correspondant à des charges concentrées. Le facteur géométrique ayant la plus grande influence sur le degré de répartition est le rapport longueur/largeur; c'est dans les ponts élanés que l'égalisation des moments est la plus prononcée. Les proportions de la section transversale jouent également un rôle, mais moins grand.

11.1.2 INFLUENCE DES DEFORMATIONS TRANSVERSALES

Dans un pont à deux poutres-caissons, les déformations transversales de la section sont plus importantes que dans un caisson unique, la dalle entre caissons constituant dans le profil une partie particulièrement flexible.

Les répercussions des déformations transversales sur les contraintes longitudinales sont diverses. Tout d'abord, les déplacements et rotations d'un caisson par rapport à l'autre diminuent la répartition transversale des charges; cet effet a été commenté plus haut. En outre, les déformations des sections des caissons dans leur plan provoquent des gauchissements de ces sections. Ces phénomènes sont bien visibles sur les diagrammes des figures 8.7 et 8.14.

La déformabilité transversale du profil peut être diminuée soit par des diaphragmes disposés à l'intérieur des caissons, soit par des entretoises raidissant l'ensemble de la section. Seule cette dernière disposition peut exercer une influence importante sur la distribution des efforts, les caissons étant eux-mêmes relativement rigides transversalement.

Le raidissement du profil aura pour double conséquence:

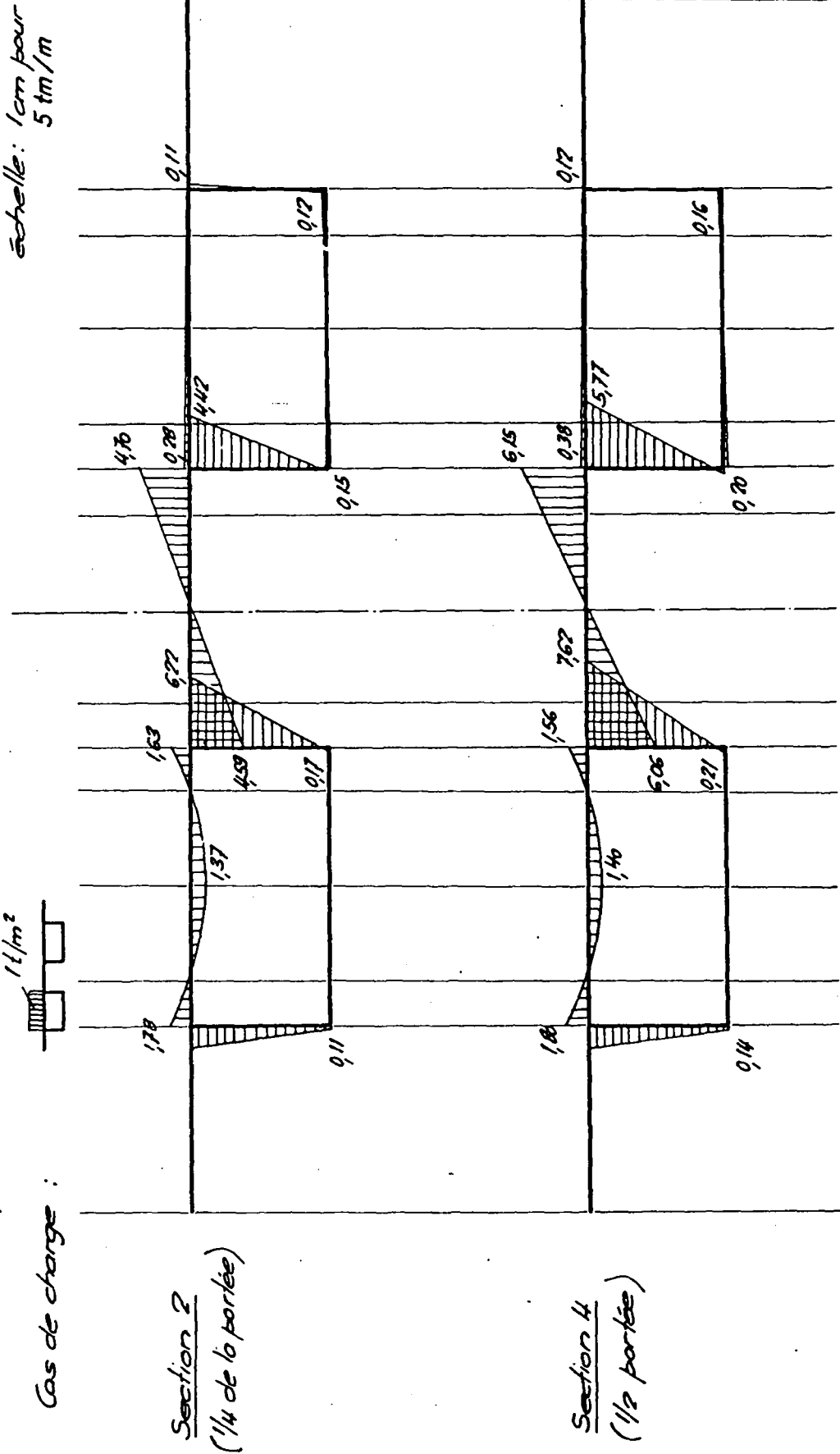
- a) de mieux répartir les efforts longitudinaux
- b) d'annuler presque complètement les moments de flexion transversaux dus aux mouvements relatifs des caissons.

Pour les ouvrages courants dont l'élanement L/B est d'environ 2 ou plus, l'entretoisement par la dalle est en général suffisant pour que les cas de charges asymétriques ne soient pas déterminants pour les efforts longitudinaux.

D'autre part, la dalle peut supporter à elle seule les efforts dus à la transmission des charges d'un caisson à l'autre,

Fig. 11.3

Moments de flexion transversaux au milieu et au quart de la portée



au prix d'un certain renforcement dans la zone médiane des travées.

A titre d'exemple, on a représenté dans la figure 11.3 les moments de flexion transversaux pour une charge uniformément répartie sur l'un des caissons du pont-type étudié. Vu son rôle d'entretoise, la dalle doit supporter des moments 2,5 fois plus grands que ceux qui sont directement créés par les charges.

Efforts transversaux dans un pont à deux travées
à profil non raidi sur l'appui intermédiaire

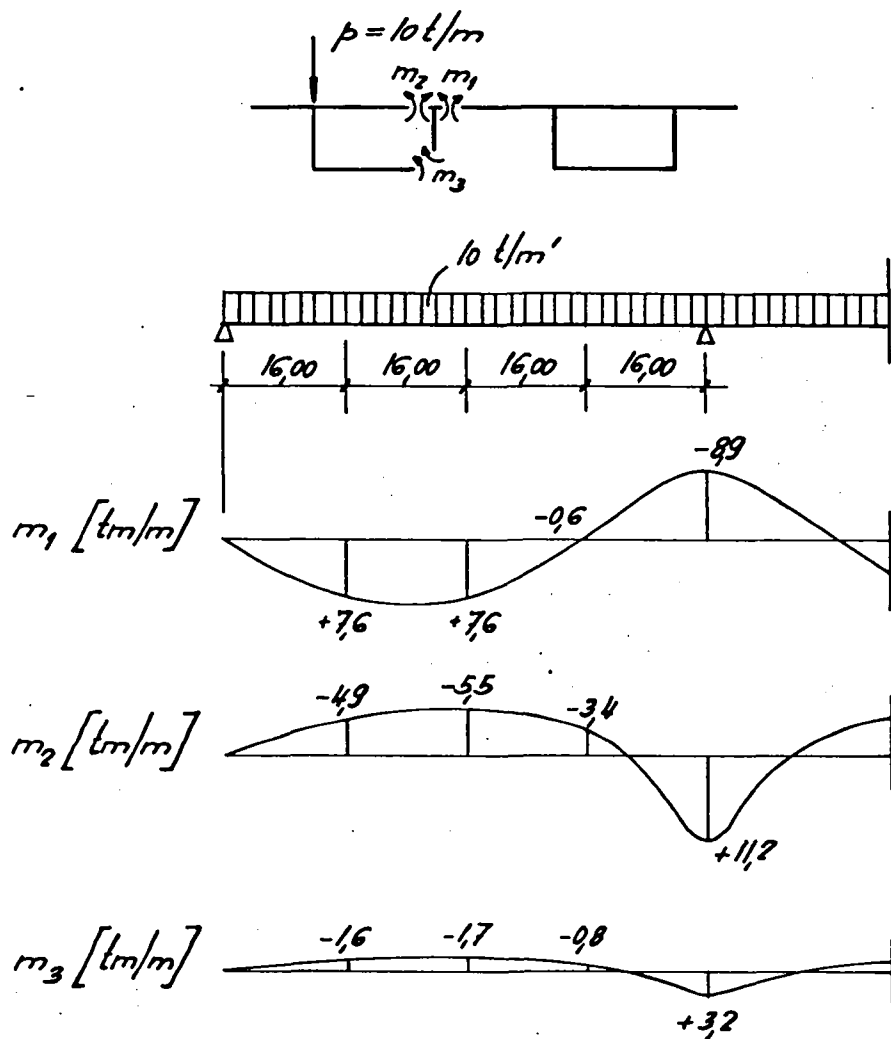


Fig. 11.4

Il est donc possible de renoncer à raidir le profil par des diaphragmes sans renforcer exagérément la dalle. Cette solution est préférable du point de vue de l'exécution, en raison de sa simplicité.

Cependant, il est indispensable de renforcer la section sur les appuis, où les réactions, qui sont des forces concentrées importantes, produisent, sous l'effet de charges asymétriques, des flexions transversales intenses.

Pour illustrer ce fait, on a calculé les moments transversaux provoqués par une charge excentrée agissant sur un pont à deux travées de même section et de même portée que le pont-type étudié. Le profil est raidi par des tympans aux deux extrémités, tandis que sur l'appui intermédiaire, les déformations transversales sont libres. La distribution longitudinale des m_y , représentée dans la figure 11.4, accuse une concentration considérable dans la zone de l'appui médian. D'autre part, en travée, les moments transversaux ont à peu près la même intensité que dans le pont à deux appuis simples sous la même charge (cf. fig.10.12), alors que la continuité devrait apporter une diminution de ces efforts. L'absence de diaphragme à l'appui a donc également pour conséquence d'augmenter les efforts transversaux en travée.

En conclusion, les déformations transversales du profil ont une influence sensible sur la distribution des contraintes longitudinales, en particulier pour des charges concentrées. Toutefois, ni cette influence défavorable, ni l'intensité des flexions transversales ne conduisent nécessairement à disposer des diaphragmes, excepté au droit des appuis.

11.2 CONCLUSIONS CONCERNANT LES METHODES DE CALCUL

Notre étude a porté sur deux modèles physiques différents. Le premier, formé de deux poutres fléchies et tordues reliées par une infinité d'entretoises jointives, permet la détermination des efforts principaux; le second consiste en un assemblage de plaques-membranes rigidement solidaires le long des arêtes communes.

11.2.1 CALCUL SIMPLIFIE

Dans le modèle proposé pour le calcul simplifié, on a tenu compte de l'excentricité de la dalle reliant les caissons par rapport au centre de torsion de ceux-ci, ce qui fait intervenir l'effort normal transversal. Avec ce modèle affiné, l'évaluation des moments de torsion est plus précise.

Grâce à des hypothèses simplificatrices concernant la distribution longitudinale des efforts hyperstatiques, il a été possible de donner, pour la charge linéaire uniforme (charge "en couteau") et la charge concentrée agissant au milieu de la portée, des expressions simples pour les maximums des efforts dans les caissons et dans la dalle.

Les distributions approximatives des efforts admises pour l'établissement des formules simplifiées ont été choisies sur la base des distributions exactes, obtenues par intégration des équations différentielles régissant ces distributions. Les approximations adoptées sont valables dans de larges limites (voir 4.4), englobant tous les cas courants de la pratique. Comme les valeurs des efforts dans les caissons sont moins sensibles à une erreur sur la distribution des efforts transversaux dans la dalle que les maxima de ces efforts transversaux eux-mêmes, les résultats du calcul simplifié sont plus précis pour les caissons que pour la dalle. L'exemple traité au chapitre 9

illustre clairement ce fait.

La résolution exacte a montré que l'excentricité de la charge influence non seulement l'intensité des efforts dans la dalle, mais également leur répartition le long du pont. La solution approximative proposée dans cette étude pourrait donc être améliorée en utilisant, pour représenter cette répartition, une somme de deux fonctions au lieu d'une seule fonction simple. Une expression de la forme $a \sin x + b \sin 3x$, par exemple, serait adéquate.

En résumé, la méthode de calcul simplifiée proposée fournit rapidement les maximums des efforts principaux. Sa précision est satisfaisante, en particulier en ce qui concerne la flexion et la torsion des caissons, dans les limites des cas usuels.

11.2.2 CALCUL DETAILLE

Le modèle proposé pour le calcul détaillé fait intervenir les déformations transversales des caissons. Celles-ci jouent évidemment un rôle d'autant moins négligeable que les parois des caissons sont plus minces. Dans les constructions récentes, la tendance est précisément orientée vers une diminution des épaisseurs.

Pour définir le modèle de calcul, on s'est basé principalement sur l'analyse des déformations d'une maquette en plexiglas (cf. chap. 7 et 8). L'essai a fait ressortir l'influence des déformations transversales sur les contraintes longitudinales, notamment lorsque les charges sont concentrées. Il est apparu clairement que la torsion provoquait des gauchissements des sections des caissons (torsion fléchie); on a également observé que les contraintes normales longitudinales n'étaient plus réparties linéairement dans chacune des parois composant la structure.

Le modèle de calcul devait donc être assez complet en ce qui concerne le comportement en membrane. La solution choisie (cf. chap.3) inclut les déformations dues aux contraintes tangentielles, en particulier le "glissement de cisaillement", responsable de la non-linéarité des contraintes normales. Le comportement en plaque, en revanche, pouvait être schématisé. On a tenu compte de la flexion transversale et de la torsion autour de l'axe longitudinal. Les simplifications ainsi apportées ont été justifiées par une étude théorique, en tenant compte des proportions possibles en pratique pour les éléments formant la structure.

Le modèle de calcul ainsi établi est particulièrement adéquat. Il conduit à des résultats très satisfaisants, comme le montre la comparaison avec les valeurs obtenues expérimentalement (voir chap.10). D'autre part, il n'exige pas de longs calculs, le nombre d'inconnues étant limité à un minimum.

Deux méthodes de calcul basées sur ce modèle ont été proposées. La première, dans laquelle on procède par développement en séries de Fourier de tous les efforts et déformations, a été appliquée au moyen d'un programme de calcul automatique et a fourni les résultats jugés ci-dessus comme très satisfaisants. La seconde, suivant laquelle la solution est approchée par des polynômes, segment par segment, n'a pas été appliquée. On peut en attendre, avec un nombre de segments modéré, des résultats à peu près équivalents à ceux de la première méthode.

En conclusion, le modèle de calcul proposé conduit à des résultats très satisfaisants, car il rend compte de tous les phénomènes importants dans les ponts à poutres-caissons, tout en maintenant le volume de calcul à un minimum.

11.3 CONSIDERATIONS FINALES

Les méthodes de calcul présentées dans cette étude, nécessairement limitée, sont susceptibles d'être développées pour être appliquées à des cas plus compliqués que ceux considérés ici.

La méthode de la coupure médiane peut servir au calcul des ponts continus, suivant les principes exposés brièvement en 4.3.4. En modifiant les conditions aux limites, il est aussi possible de traiter le cas où les caissons prennent appui sur des piles centrales et où il n'y a ainsi pas d'encastrement de torsion. On pourrait également envisager l'adaptation de la méthode aux caissons à inertie variable et aux ponts courbes. Dans tous ces cas, les distributions approchées des efforts dans la coupure devraient être choisies en fonction des distributions exactes.

Lorsqu'il y a trois ou quatre caissons et non plus simplement deux, le problème peut être abordé de la même manière. Afin d'éviter l'intégration d'un système différentiel dont l'ordre croît avec le nombre de caissons, il serait commode d'adopter, pour les efforts transversaux, les mêmes expressions simplifiées que celles que nous avons choisies dans le cas de deux caissons.

Pour le calcul plus approfondi, c'est la méthode des tronçons longitudinaux, plutôt que la solution par séries trigonométriques (méthode des parois), qui offre le plus de possibilités d'extension.

Cette méthode s'applique sans autre aux ponts continus. En principe, les appuis peuvent être disposés de manière quelconque et se trouver, par exemple, à l'axe des caissons. Toutefois, dans le cas d'appuis biaisés, le résultat du calcul se

ra moins exact, car l'effet de la torsion de la dalle et des parois inférieures des caissons, qui est négligé, peut devenir sensible. D'autre part, dans le calcul, la structure est limitée à ses extrémités par des sections droites. La méthode s'applique également sans difficulté à des profils à plusieurs caissons, ou même à des profils ouverts.

Pour traiter le cas de caissons à hauteur variable, il faudra faire intervenir des segments de paroi trapézoïdaux et non plus rectangulaires. Pour définir la distribution des contraintes dans de tels segments, on pourra admettre les mêmes hypothèses et les mêmes fonctions polynomiales que pour les segments rectangulaires.

En résumé, l'application de la méthode de la coupure médiane et de la méthode des tronçons longitudinaux, proposées dans cette étude, peut être étendue notamment aux cas de ponts continus et de poutres à hauteur variable, avec diverses conditions d'appui.

12. BIBLIOGRAPHIE

1. Aichinger H.
Über einige Erweiterungen der Theorie des steifknotigen
Faltwerkes mit prismatischen, schmalen Einzelscheiben.
Der Bauingenieur, Band 30 (1955), Heft 11; Band 31 (1956),
Heft 6.
2. Bares R. et Massonnet Ch.
Le calcul des grillages de poutres et dalles orthotropes
selon la méthode de Guyon-Massonnet-Bares.
Maison d'éditions techniques SNTL, Prague, 1966.
3. Beaufait F.W.
Analysis of continuous folded plate surface.
Proceedings of the ASCE, Vol. 91, No ST 6, Décembre 1965.
4. Bieger K.W.
Vorbereitung zweistegiger Plattenbalken.
Beton- und Stahlbetonbau, août 1962.
5. Born L.
Faltwerke, ihre Theorie und Berechnung
Conrad Wittwer, Stuttgart, 1954.
6. Bretthauer G. und Kappei H.
Zur Querverteilung bei unsymmetrisch geraden und gekrümmten
zweistegigen Plattenbalkenbrücken.
Beton- und Stahlbetonbau, décembre 1963.
7. Campbell-Allen D. and Wedgwood R.J.L.
Need for diaphragms in concrete box girders.
Proceedings of the ASCE, Vol 97, No ST 3, Mars 1971
8. Cheung M.S., Cheung Y.K. and Ghali A.
Analysis of slab and girder bridges by the finite strip
method.
Building Science, vol 5, 1970.
9. Cheung Y.K.
Folded plate structures by finite strip method.
Proceedings of the ASCE, Vol. 95, No ST. 12, Décembre 1969.
10. Chu K.H. and Pinjarkar S.G.
Multiple folded plate structures.
Proceedings of the ASCE, Vol. 92, No ST 2. Avril 1966.
11. Dabrowski R.
Der Schubverformungseinfluss auf die Wölbkrafttorsion der
Kastenträger mit verformbarem biegesteifem Profil.
Der Bauingenieur, Band 40 (1965), Heft 11.
12. Giencke E.
Die Berechnung von Hohlrippenplatten.
Der Stahlbau, janvier 1960.
13. Girkmann K.
Flächentragwerke.
Springer, Wien, 1963.

14. Goldberg J.E. and Leve H.L.
Theory of prismatic folded plate structures.
Mémoires AIPC, 1957.
15. Guyon Y.
Calcul des ponts-dalles.
Annales des Ponts et Chaussées, septembre-octobre 1949.
16. Heussel H.
Neubau der Carpivibrücke in Berlin.
Beton- und Stahlbetonbau, mars 1956.
17. Karim A.C. and Schnobrich W.C.
Discrete analysis of continuous folded plates.
Civil engineering studies, structural research series,
No 321, University of Illinois, 1967.
18. Kollbrunner C.F., und Basler K.
Torsion,
Springer, Berlin 1966.
19. Kollbrunner C.F. et Hajdin N.
Die Verschiebungsmethode in der Theorie der dünnwandigen
Stäbe und ein neues Berechnungsmodell des Stabes mit in
seinen Ebenen deformierbaren Querschnitten.
Mémoires AIPC, 1968.
20. Konishi I., Komatsu S. and Fukumoto Y.
Theoretical and experimental researches on continuous box
girder bridges. Mémoires AIPC, 1959.
21. Kristek V.
Tapered box girders of deformable cross section.
Proceedings of the ASCE, Vol. 96, No ST 8, août 1970.
22. Kristek V.
Theory and research on thin-walled prestressed concrete
beams.
6ème Congrès de la FIP, Prague, 1970.
23. Lämmlein A.
Wettbewerb für den Entwurf einer Talbrücke als Hochstrasse.
Beton- und Stahlbetonbau, mars 1958.
24. Lo K.S. and Scordelis A.C.
Finite segment analysis of folded plates
Proceedings of the ASCE, Vol. 95, No ST 5, mai 1969.
25. Mathivat J.
Reconstruction du pont de Choisy-le-Roi.
Travaux, janvier 1966.
26. Muhlbauer K.C. and Beaufait F.W.
Behavior of unsymmetrical-continuous folded plates.
Proceedings of the ASCE, Vol 95, No ST. 12, Décembre 1969.
27. P. Muller
Torsion von Kastenträgern mit elastisch verformbarem
symmetrischen Querschnitt.
Schweizerische Bauzeitung, novembre 1953

28. Pultar M., Billington D.P. and Riera J.D.
Folded plates continuous over flexible supports.
Proceedings of the ASCE Vol 93, No ST 5, mai 1967.
29. Reissner E.
Analysis of shear lag in box beams by the principle of
minimum potential energy.
Quarterly Applied Mathematics, octobre 1946.
30. Stiller H. und Jeske G.
Wettbewerb für die Brücke im Zuge des Nordwestbogens des
Berliner Schnellstrassenringes.
Beton- und Stahlbetonbau, mai 1958.
31. Stussi F.
Statique appliquée et résistance des matériaux, traduit
de l'allemand.
Dunod Paris, 1964.
32. Timoshenko S. and Woinowsky-Krieger S.
Theory of plates and shells.
Mc. Graw-Hill, New-York, 1959.
33. Timoshenko S.
Theory of elasticity.
Mc Graw-Hill, New-York, 1951.
34. Ti - Ta L. and Vos G.
Multiple folded plates with various end conditions.
Proceedings of the ASCE, Vol. 94, No ST 7, Juillet 1968.
35. Trost H.
Lastverteilung bei Plattenbalkenbrücken.
Werner-Verlag, Düsseldorf, 1961.
36. Vlassov B.Z.
Pièces longues en voiles minces, traduit du russe.
Eyrolles, Paris, 1962.
37. R. Walther
Ergebnisse und Lehren aus Torsion- und Schubversuchen
an vorgespannten Hohlkastenträgern.
Schweizerische Bauzeitung, janvier 1965.
38. Wittfoht H.
Neuere Entwicklungen und Anwendung des Spannbetons mit
Ausführungsbeispielen.
Beton- und Stahlbetonbau, avril 1958.
39. Wittfoht H.
Das Einleiten der Vorspannkraft bei langen Spanngliedern
am Beispiel der Strassenbrücke über den Lech bei Rain.
Beton- und Stahlbetonbau, novembre 1958.
40. Wittfoht H.
Betrachtungen zur Querschnittsausbildung von Spannbeton-
brücken an Bauausführungen 1960.
Beton- und Stahlbetonbau, juin 1962.

41. Wright R.N., Abdel-Samad S.R. and Robinson A.R.
BEF analogy for analysis of box girders.
Proceedings of the ASCE. Vol 94, No ST 7, juillet 1968.

TABLE DES MATIERES

CHAPITRE 1	INTRODUCTION	1
1.1	But de l'étude	1
1.2	Plan de l'étude	2
CHAPITRE 2	EXPOSE SUCCINT DE QUELQUES THEORIES ET METHODES DE CALCUL EXISTANTES	5
2.1	Méthodes de calcul de la répartition des charges entre poutres solidaires	5
2.2	Théorie de la torsion fléchie	8
2.3	Théories des structures plissées	9
2.4	Calcul des poutres-caissons	12
CHAPITRE 3	MODELES MATHEMATIQUES PROPOSES	14
3.1	Définition des efforts intérieurs et des déformations	14
3.1.1	Efforts dans une section	14
3.1.2	Efforts sur un élément de paroi ou de dalle	15
3.1.3	Déformation dans une section	16
3.1.4	Déformation d'un élément de paroi ou de dalle	16
3.2	Rappel de la théorie des poutres, des membranes et des plaques	17
3.2.1	Relations entre les efforts globaux et les déformations	18
3.2.2	Relations entre les efforts et les déformations de membrane	18
3.2.3	Relations entre les efforts et les déformations de plaque	19
3.3	Modèle constitué par deux poutres reliées par une dalle	20
3.3.1	Efforts et déformations principaux	20
3.3.2	Efforts et déformations dans les poutres	21
3.3.3	Efforts et déformations dans la dalle	23
3.4	Modèle constitué par un assemblage de plaques-membranes	24
3.4.1	Sollicitations intérieures et extérieures dans une paroi	24

3.4.2	Efforts et déformations de membrane	26
3.4.3	Efforts et déformations de plaque	32
3.4.4	Conditions aux arêtes	40
CHAPITRE 4	METHODE DE LA COUPURE MEDIANE	42
4.1	Equations fondamentales	42
4.1.1	Introduction	42
4.1.2	Relations entre les efforts et les déformations	43
4.1.3	Expression différentielle des efforts pour des charges symétriques	45
4.1.4	Expression différentielle des efforts pour des charges antisymétriques	47
4.2	Facteurs de rigidités relatives	50
4.3	Solution exacte de la méthode de la coupure médiane	52
4.3.1	Cas d'une charge symétrique	53
4.3.2	Cas d'une charge antisymétrique	55
4.3.3	Efforts maximums	59
4.3.4	Effet de la continuité des poutres	61
4.4	Discussion des solutions exactes	64
4.4.1	Cas d'une charge symétrique	64
4.4.2	Cas d'une charge antisymétrique	67
4.5	Solution approchée de la méthode de la coupure médiane	69
4.5.1	Cas d'une charge linéaire uniforme sur la longueur du pont	70
4.5.2	Cas d'une charge concentrée à mi-portée	73
4.5.3	Utilisation des solutions approchées	75
CHAPITRE 5	LA METHODE DES PAROIS	76
5.1	Principes du calcul proposé	76
5.2	Conditions d'équilibre et conditions de déformation	77
5.2.1	Définition des efforts et des déformations	77
5.2.2	Equations d'équilibre	81
5.2.3	Equations de compatibilité	82
5.3	Relations entre les efforts et les déformations	84

5.3.1	Efforts et déformations de membrane	84
5.3.2	Efforts et déformations de plaque	89
5.3.3	Facteurs de flexibilité et de rigidité	91
5.4	Résolution	92
5.4.1	Calcul des déformations et des efforts intérieurs	92
5.4.2	Calcul des contraintes longitudinales	94
CHAPITRE 6	LA METHODE DES TRONÇONS LONGITUDINAUX	97
6.1	Principe du calcul proposé	97
6.2	Conditions d'équilibre et conditions de déformation	98
6.3	Relations entre les efforts et les déformations	102
6.4	Résolution	104
CHAPITRE 7	CONSTRUCTION DU MODELE, ESSAIS ET MESURES	105
7.1	Choix des dimensions et construction du modèle	105
7.1.1	Définition du pont-type	105
7.1.2	Description générale du modèle	108
7.1.3	Construction du modèle	110
7.2	Instruments de mesure	111
7.2.1	Appareillage de mesure	111
7.2.2	Elaboration des résultats	113
7.3	Charges appliquées et mesures	114
7.3.1	Disposition des charges	114
7.3.2	Mesures effectuées	115
CHAPITRE 8	RESULTATS ET COMMENTAIRES DES ESSAIS	117
8.1	Résultats des essais	117
8.2	Commentaires des résultats	118
CHAPITRE 9	APPLICATION NUMERIQUE DES METHODES PROPOSEES	134
9.1	Calcul par la méthode de la coupure médiane	134

9.2	Calcul par la méthode des parois	137
CHAPITRE 10	COMPARAISON DES RESULTATS DES ESSAIS AVEC CEUX DES CALCULS	148
10.1	Efforts et contraintes longitudinaux	148
10.2	Efforts et contraintes transversaux	149
CHAPITRE 11	CONCLUSIONS	162
11.1	Influence de la géométrie du pont	162
11.1.1	Répartition des efforts entre les deux caissons	162
11.1.2	Influence des déformations transversales	166
11.2	Conclusions concernant les méthodes de calcul	170
11.2.1	Calcul simplifié	170
11.2.2	Calcul détaillé	171
11.3	Considérations finales	173
CHAPITRE 12	BIBLIOGRAPHIE	175

CURRICULUM VITAE

Gérald Raymond Coendoz

Né le 4 octobre 1937 à Genève.

Etudes primaires et secondaires à Genève, certificat de maturité type A en 1956.

Etudes d'ingénieur civil à l'Ecole Polytechnique de l'Université de Lausanne, diplôme en janvier 1961.

Ingénieur au Bureau F. Matter puis au Bureau M.G. Landry, élaboration de projets de constructions industrielles et de bâtiments divers, jusqu'en 1962.

Ingénieur à l'Institut de Statique des Constructions de l'EPUL, études sur modèles réduits de ponts, dalles et voiles, contrôles d'ouvrages d'art et de bâtiments.

De 1966 à 1968, ingénieur chez Messieurs M.H. Derron, J.P. Stucky et F. Panchaud, ingénieurs-conseils, étude et réalisation de bâtiments et de ponts.

Dès 1969, assistant à la Chaire de Béton Armé et de Béton Précontraint de l'EPFL.