

71



ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE L'UNIVERSITÉ DE LAUSANNE

Démarrage asynchrone  
des machines synchrones  
à pôles saillants massifs

THÈSE

présentée à l'Ecole Polytechnique de l'Université de Lausanne

par

MARCEL JUFER

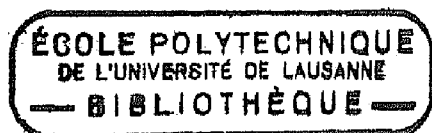
Ingénieur électricien diplômé EPUL

GENÈVE

1968

Imprimé à Sécheron

19. 4. 68



ÉCOLE POLYTECHNIQUE  
DE L'UNIVERSITÉ DE LAUSANNE

*Vu le rapport présenté par le jury d'examen, composé de Messieurs les Professeurs J. Chatelain, E. Juillard et de M. Schleich, Ingénieur, l'Ecole Polytechnique de l'Université de Lausanne autorise l'impression de la thèse No 71 de*

Monsieur Marcel JUFER

*intitulée*

Démarrage asynchrone  
des machines synchrones  
à pôles saillants massifs

Au nom  
de l'Ecole Polytechnique  
de l'Université de Lausanne

Le Directeur :  
*M. Cosandey*

Lausanne, le 12 septembre 1967



A MES PARENTS

Nous tenons à exprimer notre vive reconnaissance à M. le professeur J. Chatelain, qui a suggéré ce travail et qui en a suivi l'élaboration.

Nos remerciements vont également à MM. Juillard et Schleich, membres du jury d'examen, ainsi qu'à M. Laible qui a bien voulu commenter cette étude.

Nous exprimons enfin notre gratitude à la direction de la S.A. des Ateliers de Sécheron, en particulier à MM. Kronauer, directeur général, et Rossier, directeur technique, pour avoir permis d'accéder aux résultats d'essais relatifs au sujet de ce travail.

## INTRODUCTION

La machine synchrone est avant tout un générateur alternatif. Cependant, de plus en plus fréquemment, elle trouve des débouchés comme moteur de grande puissance. En particulier, on peut dégager deux principales possibilités d'utilisation: les groupes de pompage (ou turbinage-pompage) et les auxiliaires de centrales thermiques de grande puissance.

Les groupes hydrauliques de pompage, éventuellement réversibles, sont appelés à jouer un rôle de régulateur dans le contexte des installations thermiques ou thermo-nucléaires de grande puissance. En effet, par conversion de l'excédent d'énergie électrique de nuit en énergie potentielle par pompage, il est possible de la restituer aux heures de pointes, de façon à permettre un fonctionnement des centrales de base à charge pratiquement constante, au voisinage du rendement optimal. Il est donc possible d'effectuer un stockage d'énergie dont on améliore ainsi la "qualité". Par ailleurs, pour des pays à fortes ressources énergétiques hydrauliques, les groupes réversibles peuvent également remplir cette fonction de réglage sur le plan saisonnier.

Parallèlement à l'augmentation importante de la puissance unitaire des groupes thermiques ou thermo-nucléaires, les moteurs auxiliaires entraînant les pompes d'alimentation ou de circulation et les ventilateurs de tirage ou soufflage suivent une évolution analogue, que le moteur asynchrone ne peut pas toujours satisfaire. Le moteur synchrone, par contre, ne présente pas les mêmes limites de réalisation en ce qui concerne les unités rapides de grande puissance.

La difficulté essentielle qui freine l'utilisation de telles machines est le problème du démarrage, incompatible avec le caractère synchrone. Le démarrage par moteur asynchrone de lancement est peu intéressant, car coûteux et encombrant. Le démarrage "dos-à-dos", consistant en une alimentation à fréquence variable par un groupe auxiliaire est rarement réalisable. Le démarrage asynchrone par utilisation de l'amortisseur comme enroulement rotorique reste le moyen le plus intéressant pour réaliser la mise en vitesse. Ce problème, connu dans le cas de la machine synchrone à pôles feuilletés et amortisseur à cage, n'a jamais été traité de façon complète dans le cas du moteur à pôles massifs. Cependant,

c'est cette dernière solution qui est appelée au plus grand développement pour sa sécurité, sa capacité thermique et sa résistance mécanique, en particulier dans le cas de machines à vitesse périphérique élevée.

La présente étude analyse ce problème sous deux aspects essentiels:

- l'aspect physique par une décomposition des divers phénomènes dont la machine est le siège au cours de la période transitoire du démarrage;
- l'aspect "exploitation" par la prédétermination des caractéristiques générales (courant d'appel, couple) d'un démarrage asynchrone en vue du choix de certains paramètres de construction et des installations annexes.

Deux difficultés importantes rendent l'étude précise de ce régime transitoire particulièrement délicate:

- la réductance variable de l'entrefer due à la présence de pôles saillants;
- l'effet de saturation et d'hystérèse du fer massif constituant l'amortisseur rotorique.

L'étude qui suit est divisée en cinq étapes principales:

- la première analyse la distribution du champ magnétique dans l'entrefer, permettant ainsi le passage de la f.m.m. statorique au champ à la surface du rotor;
- la deuxième traite de la pénétration d'un champ alternatif dans un milieu magnétique massif. La méthode développée permet le calcul numérique relatif à la caractéristique magnétique réelle;
- la troisième aborde deux phénomènes liés à la distribution du courant dans la semelle polaire; d'une part l'effet d'extrémité imputable à la longueur limitée de la machine; d'autre part la superposition des courants dans les cornes polaires par suite de la concentration du champ à cet endroit;
- la quatrième partie réalise la synthèse par l'intermédiaire d'un schéma équivalent et de la théorie à deux axes;
- la dernière apporte deux illustrations de la méthode ainsi que la comparaison des calculs et des mesures pour deux machines exécutées.

# Chapitre I – RÉPARTITION DU CHAMP MAGNÉTIQUE DANS L'ENTREFER

## I.1 - GENERALITES

### I.11 - Introduction

Dans une machine électrique tournante, deux forces magnéto-motrices (f.m.m.) sont en présence :

- la composante statorique  $\vec{\theta}_s$ ,
- la composante rotorique  $\vec{\theta}_r$ .

Lors d'un fonctionnement en régime asynchrone, le terme statorique est la somme d'une composante magnétisante  $\vec{\theta}_m$  et d'une composante égale et opposée à celle du rotor, d'où la relation:

$$\vec{\theta}_s + \vec{\theta}_r = \vec{\theta}_m \quad (\text{fig.1.1a})$$

Dans le cas de la machine en régime synchrone, le terme rotorique est imposé par l'enroulement d'excitation ( $\vec{\theta}_p$ ). Il est égal à la somme de la composante magnétisante et d'une composante égale et opposée à celle du stator, d'où la relation :

$$\vec{\theta}_s + \vec{\theta}_p = \vec{\theta}_m \quad (\text{fig.1.1b})$$

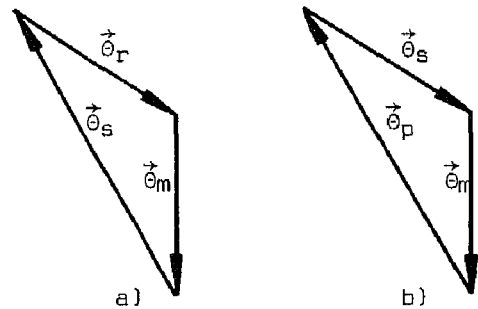


Fig. 1.1

Chacune des composantes de la f.m.m. crée un champ magnétique dans l'entrefer, dont la distribution à la surface du stator et du rotor dépend à la fois de la géométrie de l'entrefer, du régime de fonctionnement et de l'état de saturation de la machine.

En fait l'étude complète du champ dans l'entrefer implique l'analyse simultanée du champ en tout point de la machine et ceci pour chaque position relative du rotor et de la f.m.m. statorique. Cependant, par suite de la linéarité des équations dans l'entrefer, le principe de superposition est valable, sous réserve de quelques hypothèses relatives à l'état de saturation du rotor et du stator. Cette analyse sera effectuée

pour deux cas limites, dont l'analogie des résultats sera mise en évidence:

- le régime asynchrone limite caractérisé par un glissement infini,
- le régime synchrone, caractérisé par un glissement nul.

La distribution du champ dans l'entrefer sera tout d'abord étudiée dans le cas d'une machine à rotor lisse, ce qui permettra de préciser les hypothèses, puis dans le cas général. La méthode approchée exposée dans ce dernier cas consiste en une analyse de la détermination d'un potentiel à Laplacien scalaire nul à l'intérieur d'un contour fermé, avec conditions aux limites fixées. La connaissance du champ à la surface du rotor conduira ainsi à l'étape suivante, l'analyse de la pénétration de ce champ magnétique à l'intérieur du fer massif.

Par ailleurs, cette même étude de champ effectuée à la surface du stator permet de déterminer les caractéristiques de réaction d'induit et de fuites dans l'entrefer.

La plupart des méthodes exposées par la suite s'appuient sur les relations de Maxwell.

### I.12-Equations générales

Les équations liant les grandeurs électriques et magnétiques en régime quasi-stationnaire peuvent s'écrire comme suit:

$$\begin{cases} \text{rot } \vec{H} = \vec{J} & (1.1) \\ \text{rot } \vec{E} = - \partial \vec{B} / \partial t & (1.2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{div } \vec{B} = 0 & (1.3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{div } \vec{D} = 0 & (1.4) \end{cases}$$

$$\text{avec : } \begin{cases} \vec{J} = \vec{E} / \rho & (1.5) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{B} = \mu \cdot \vec{H} & \mu = \mu_0 \cdot \mu_r & (1.6) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{D} = \epsilon \cdot \vec{E} & \epsilon = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r & (1.7) \end{cases}$$

Sachant que l'expression vectorielle  $\text{div rot} = 0$ , la relation (1.3) suggère l'introduction d'un potentiel vecteur  $\vec{V}$  tel que:

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{V} \quad \text{avec: } \text{div } \vec{V} = 0 \quad (1.8)$$

Des relations (1.2) et (1.8), il résulte:

$$\vec{E} = - \partial \vec{V} / \partial t \quad (1.9)$$

Par ailleurs, dans un milieu privé de sources de courant ( $J=0$ ), il est



possible de définir un potentiel magnétique scalaire  $\Theta$ . En effet :

$$\text{rot grad} = 0$$

d'où :

$$\vec{H} = - \text{grad } \Theta \quad (1.10)$$

En particulier, si le milieu magnétique est caractérisé par une perméabilité constante :

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{V} = \mu \cdot \vec{H} = - \mu \cdot \text{grad } \Theta$$

$$\text{rot } \vec{V} = - \mu \cdot \text{grad } \Theta$$

### I.13-Référentiel en mouvement

Les équations formulées au paragraphe précédent seront appliquées en particulier au rotor, donc à un système en rotation. On peut repérer indifféremment les diverses grandeurs électro-magnétiques par un système de coordonnées fixe ou tournant. Il faut cependant pouvoir passer d'un repère à l'autre. Nous définirons les deux systèmes de coordonnées ci-après avec (fig.1.2) :

$x, y, z$  système lié au stator (fixe)

$x', y', z'$  système lié au rotor (vitesse  $v$ )

Les diverses composantes sont liées par les relations suivantes :

$$x' = x \quad z' = z$$

$$y' = y - v \cdot t \quad t' = t$$

Par continuité du potentiel vecteur,

dirigé selon  $x$ , on peut écrire :

$$V'_{x'}(y') = V_x(y) \text{ et en dérivant par rapport au temps :}$$

$$E'_x = \partial V_x / \partial t + \partial V_x / \partial y \cdot \partial y / \partial t$$

$$E'_x = E_x + B_z \cdot v$$

De façon plus générale :

$$\vec{E}' = \vec{E} + \vec{B} \wedge \vec{v} \quad (1.11)$$

$$\vec{B}' = \vec{B} \quad (1.12)$$

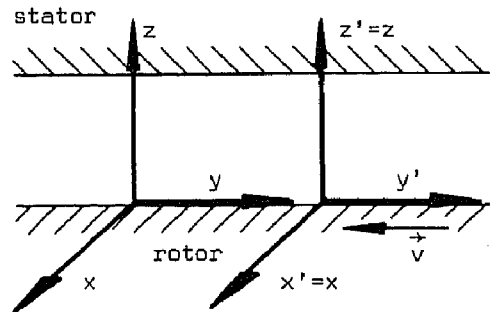


Fig. 1.2

## I.2-MACHINE A ROTOR LISSE

### I.21Hypothèses

Nous analyserons tout d'abord la distribution du champ magnétique dans une machine à rotor lisse et qui satisfait aux hypothèses suivantes :

- l'entrefer est constant,
- la perméabilité du stator est infinie,
- la résistivité du stator est infinie (circuit magnétique feuilleté à tôles isolées),
- la f.m.m. statorique présente une distribution sinusoïdale tournante,
- la perméabilité du rotor est constante :  $\mu$
- la longueur axiale de la machine est infinie,
- l'effet de la courbure est négligeable. Ce dernier point est vérifié par l'étude de la référence (3.4), page 80.

### I.22-Distribution du champ magnétique

Dans un milieu à perméabilité constante, les relations de Maxwell peuvent se simplifier. En partant des relations (1.1) et (1.2) :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \left( \frac{\vec{B}}{\mu} \right) = - \left( \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} \right) / \rho$$

$$\overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{V} = - (\mu/\rho) \cdot \frac{\partial \vec{V}}{\partial t}$$

$$\overrightarrow{\text{grad}} \text{div} \vec{V} - \overrightarrow{\nabla} \nabla = - (\mu/\rho) \cdot \frac{\partial \vec{V}}{\partial t}$$

Par (1.8) :

$$\overrightarrow{\nabla} \nabla = (\mu/\rho) \cdot \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} \quad (1.13)$$

Au stator par hypothèse  $\rho = \infty$ .

$$\overrightarrow{\nabla} \nabla_s = 0 \quad (1.14)$$

Eu égard à la distribution du courant statorique, il ne peut exister de composante selon z du potentiel vecteur :

$$V_{sz} = 0 \quad \text{et par (1.8) :}$$

$$\text{div} \vec{V}_s = \partial V_{sx} / \partial x + \partial V_{sy} / \partial y = 0$$

La machine étant infiniment longue,  $V_{sx}$  n'est pas fonction de x, d'où :

$$\partial V_{sx} / \partial x = 0 \quad \text{et} \quad V_{sy} = 0$$

On peut effectuer une séparation des variables conformément aux hypothèses :

$$V_{sx} = V_{sx})_z \cdot e^{j(\pi y/\tau - \omega_0 t)} = V_{sx})_z \cdot \Omega \quad , \text{ en posant } \Omega = e^{j(\pi y/\tau - \omega_0 t)}$$

$$\text{Par (1.14) : } \frac{\partial^2 V_{sx})_z}{\partial z^2} \cdot \Omega - \pi^2/\tau^2 \cdot V_{sx})_z \cdot \Omega = 0$$

$$V_{sx})_z = S_1 \cdot e^{-\pi z/\tau} + S_2 \cdot e^{\pi z/\tau} \text{ avec } S_1 \text{ et } S_2 \text{ constantes d'intégration.}$$

Les conditions aux limites imposent, pour  $z = \infty$ ,  $V_{sx})_z = 0$ , d'où :

$$S_2 = 0 \text{ et en posant } S_1 = S :$$

$$V_{sx} = S \cdot e^{-\pi z/\tau} \cdot \Omega \quad (1.15)$$

Dans l'entrefer, on a également  $\rho = \infty$ . La solution de l'équation (1.13) devient similaire à celle trouvée au stator, soit :

$$V_{\delta x} = (D_1 \cdot e^{-\pi z/\tau} + D_2 \cdot e^{\pi z/\tau}) \cdot \Omega \quad (1.16)$$

Au rotor, en admettant une fréquence  $s \cdot \omega_0$ , l'expression (1.13) devient :

$$\frac{\partial^2 V'_{rx})_z}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 V'_{rx})_z}{\partial y^2} = -j s \omega_0 \mu / \rho \cdot V'_{rx})_z$$

$$\text{Mais : } V'_{rx})_z \cdot e^{j(\pi y/\tau - s \omega_0 t)} = V'_{rx})_z \cdot \Omega' = V'_{rx})_z$$

$$\frac{\partial^2 V'_{rx})_z}{\partial z^2} - (\pi^2/\tau^2 - j s \omega_0 \mu / \rho) \cdot V'_{rx})_z = 0$$

$$\frac{\partial^2 V'_{rx})_z}{\partial z^2} - \xi^2 \cdot V'_{rx})_z = 0 \quad \text{avec } \xi^2 = \pi^2/\tau^2 - j s \omega_0 \mu / \rho$$

$$V'_{rx})_z = R_1 \cdot e^{-\xi z} + R_2 \cdot e^{\xi z}$$

Pour  $z = -\infty$ ,  $V'_{rx})_z = 0$ , d'où :

$$R_1 = 0 \text{ et en posant } R_2 = R :$$

$$V'_{rx})_z = R \cdot e^{\xi z} \cdot \Omega' \quad (1.17)$$

On peut définir les conditions de liaison des trois domaines définis précédemment en exprimant :

- la continuité du potentiel vecteur,
- la continuité de la composante tangentielle du champ.

La première de ces conditions devient :

- pour  $z = \delta$  :

$$V_{\delta x})_z = V_{sx})_z$$

$$D_1 \cdot e^{-\pi \delta/\tau} + D_2 \cdot e^{\pi \delta/\tau} = S \cdot e^{-\pi \delta/\tau} \quad (1.18)$$

- pour  $z = 0$  :

$$V_{\delta x})_z = V'_{rx})_z$$

$$D_1 + D_2 = R \quad (1.19)$$

La seconde condition peut s'écrire :

$$\vec{B} = \overrightarrow{\text{rot}} \vec{V} \quad \text{et pour } \vec{V} = \vec{V}_x$$

$$B_y = \partial V_x / \partial z = \mu \cdot H_y$$

- pour  $z = 0$  :

$$\begin{aligned} H_{ry} &= H_{\delta y} \\ \xi R/\mu &= \pi/\tau \cdot (-D_1 + D_2)/\mu_0 \end{aligned} \quad (1.20)$$

- pour  $z = \delta$ , en admettant une distribution sinusoïdale de la f.m.m.,

d'amplitude  $\hat{\theta}_s$ , au stator, il vient :

$$\begin{aligned} \hat{H}_{sy} &= \pi \hat{\theta}_s / \tau = \hat{H}_{\delta y} \\ \pi \hat{\theta}_s / \tau &= (-D_1 \cdot e^{-\pi\delta/\tau} + D_2 \cdot e^{\pi\delta/\tau}) \cdot \pi / (\mu_0 \tau) \end{aligned} \quad (1.21)$$

La résolution des relations (1.18) à (1.20) permet de déterminer les constantes d'intégration  $D_1$  et  $D_2$  :

$$D_1 = \frac{\mu_0 \cdot \hat{\theta}_s}{e^{\pi\delta/\tau} \frac{\pi/(\tau\mu_0) + \xi/\mu}{\pi/(\tau\mu_0) - \xi/\mu} - e^{-\pi\delta/\tau}} ; D_2 = \frac{\mu_0 \cdot \hat{\theta}_s}{e^{\pi\delta/\tau} - e^{-\pi\delta/\tau} \frac{\pi/(\tau\mu_0) - \xi/\mu}{\pi/(\tau\mu_0) + \xi/\mu}} \quad (1.22)$$

### I.23-Régimes synchrone et asynchrone

Le régime synchrone est caractérisé par un glissement nul. Le rotor est peu saturé, ce qui correspond à une perméabilité du fer importante par rapport à celle de l'air (de 200 à 500 fois) :

$$\mu \gg \mu_0$$

De plus  $s = 0$ , d'où :

$$\xi = \pi/\tau \text{ et } \pi/(\tau\mu_0) - \xi/\mu \approx \pi/(\tau\mu_0)$$

La composante magnétisante asynchrone peut se rattacher à ce cas, la résistivité équivalente au rotor étant infinie.

Les relations (1.22) deviennent :

$$D_1 = D_2 = \frac{\mu_0 \cdot \hat{\theta}_s}{2 \cdot \text{sh} \pi\delta/\tau}$$

$$V_{\delta x} = \mu_0 \cdot \hat{\theta}_s \frac{\text{ch} \pi z/\tau}{\text{sh} \pi\delta/\tau} \cdot \Omega \quad (1.23)$$

$$H_{\delta y} = (\partial V_{\delta x} / \partial z) / \mu_0 = \frac{\pi \hat{\theta}_s}{\tau} \cdot \frac{\text{sh} \pi z/\tau}{\text{sh} \pi\delta/\tau} \cdot \Omega \quad (1.24a)$$

$$H_{\delta z} = -(\partial V_{\delta x} / \partial y) / \mu_0 = -j \frac{\pi \hat{\theta}_s}{\tau} \cdot \frac{\text{ch} \pi z/\tau}{\text{sh} \pi\delta/\tau} \cdot \Omega \quad (1.24b)$$

Les champs tangentiel et radial sont déphasés de  $\pi/2$ . La composante tangentielle, nulle à la surface du rotor, est beaucoup plus faible que la composante radiale. On peut alors simplifier les relations comme suit:

$$\pi\delta \ll \tau \quad ; \quad \pi z \ll \tau$$

$$H_{\delta y} = \frac{\pi \hat{\theta}_s}{\tau} \cdot \frac{z}{\delta} \cdot \Omega \quad ; \quad H_{\delta z} \approx -j \frac{\hat{\theta}_s}{\delta} \cdot \Omega$$

Pour le régime asynchrone limite, caractérisé par un glissement infini, on peut simplifier les relations comme suit :

$$\xi/\mu = \sqrt{-j \frac{s \cdot \omega_p}{\mu p}} \gg \Pi / (\tau \cdot \mu_0)$$

Les relations (1.22) deviennent alors :

$$D_2 = -D_1 \approx \frac{\mu_0 \cdot \hat{\theta}_s}{2 \operatorname{ch} \pi \delta / \tau}$$

$$V_{\delta x} = \mu_0 \cdot \hat{\theta}_s \frac{\operatorname{sh} \pi z / \tau}{\operatorname{ch} \pi \delta / \tau} \cdot \Omega \quad (1.25)$$

$$H_{\delta y} = \frac{\hat{\theta}_s \pi}{\tau} \cdot \frac{\operatorname{ch} \pi z / \tau}{\operatorname{ch} \pi \delta / \tau} \cdot \Omega \approx \frac{\hat{\theta}_s \pi}{\tau} \cdot \Omega \quad (1.26a)$$

$$H_{\delta z} = -j \frac{\hat{\theta}_s \pi}{\tau} \cdot \frac{\operatorname{sh} \pi z / \tau}{\operatorname{ch} \pi \delta / \tau} \cdot \Omega \approx -j \frac{\hat{\theta}_s \pi^2}{\tau^2} \cdot z \cdot \Omega \quad (1.26b)$$

Dans ce cas, c'est la composante radiale qui est nulle à la surface du rotor et beaucoup plus faible que la composante tangentielle.

En reprenant le cas de la marche synchrone, le rapport des composantes y et z à l'abscisse z vaut :

$$\frac{H_{\delta y}}{H_{\delta z}} = j \frac{\operatorname{sh} \pi z / \tau}{\operatorname{ch} \pi z / \tau} \approx j \pi z / \tau$$

Par contre, en régime asynchrone, l'inverse de ce rapport devient :

$$\frac{H_{\delta z}}{H_{\delta y}} = -j \frac{\operatorname{sh} \pi z / \tau}{\operatorname{ch} \pi z / \tau} \approx -j \pi z / \tau$$

On constate donc qu'il y a permutation des importances relatives des composantes radiale et tangentielle entre la marche à vide (ou synchrone) et le régime asynchrone.

Par la suite, nous introduirons le potentiel magnétique scalaire  $\theta$ . Dans l'entrefer, la densité de courant J est nulle, d'où par (1.3) et (1.10) :

$$\operatorname{div} \vec{H} = -\operatorname{div} (\overrightarrow{\operatorname{grad}} \theta) = \nabla \theta = 0$$

Dans le cas d'une machine infiniment longue, il vient :

$$\partial^2 \theta / \partial y^2 + \partial^2 \theta / \partial z^2 = 0 \quad (\text{Equation de Laplace}) \quad (1.27)$$

Le problème consiste à déterminer la distribution de ce potentiel compte tenu de la géométrie du contour et des valeurs aux limites.

#### I.24-Extension des hypothèses

L'analogie entre les régimes à glissements nul et infini a donc été

mise en évidence dans le cas d'un rotor lisse à perméabilité constante. L'identité de forme de ces deux cas extrêmes est due au fait que les conditions aux limites du potentiel scalaire pour un glissement nul et du potentiel vecteur pour un glissement infini deviennent uniformément nulles à la surface du rotor. Afin de généraliser au cas réel, il faut encore établir que cette analogie reste valable pour une géométrie et un milieu magnétique quelconques. Pour cela, il suffira de démontrer que les conditions aux limites uniformément nulles à la surface du rotor sont toujours remplies. Pour le régime synchrone, ces conditions résultent de la définition.

Pour un glissement infini, le potentiel vecteur devient nul, par continuité, dès que la profondeur de pénétration est également nulle, et ceci indépendamment de l'intensité du champ magnétique en surface. L'expression (2.23) et la résolution des équations (2.31) montrent que cette profondeur est toujours nulle pour un glissement infini. Donc la substitution de l'étude du régime synchrone à celle du régime asynchrone limite est valable dans n'importe quel cas.

Il s'agit encore de préciser le domaine de validité en régime asynchrone. Pour cela, nous resterons au cas du rotor lisse. Pour un champ magnétique important (environ 400 kA/m), on a les ordres de grandeur suivants des caractéristiques électro-magnétiques de l'acier coulé :  $\rho = 2 \text{ à } 3 \cdot 10^{-7} \text{ } \Omega\text{m}$  ;  $\mu = 3\mu_0$ . Pour un pas polaire de 1 m, on obtient l'égalité des termes  $\xi/\mu$  et  $\Pi/(\tau\mu_0)$  lorsque le glissement est de 1,5 à 2% relativement à une fréquence de 50 Hz. Ce sera donc au voisinage de ces valeurs que la distribution du champ à la surface du rotor subira des modifications. Dans tous les cas, une étude détaillée pourra seule permettre de chiffrer l'erreur commise à faibles glissements en admettant invariable cette distribution du champ.

### I.3-RESOLUTION NUMERIQUE

#### I.31-Méthode approchée

La résolution approchée du problème décrit à la fin du paragraphe précédent est connue sous le nom de problème de "Dirichlet" (1.1), que nous

généraliserons par la suite. Il est possible d'associer à l'équation différentielle (1.27) une fonctionnelle présentant la même solution, soit :

$$I = \frac{1}{2} \iint_D \{(\partial\theta/\partial z)^2 + (\partial\theta/\partial y)^2\} dz dy \quad \text{minimum} \quad (1.28)$$

Par ailleurs, il est possible d'associer à cette équation un quadrillage de l'espace étudié conformément à la fig. 1.3.

En passant aux accroissements finis, on peut écrire :

$$\partial\theta/\partial y \approx \Delta\theta/\Delta y = \{\theta(Q_1) - \theta(P)\}/\Delta y$$

$$\partial\theta/\partial z \approx \Delta\theta/\Delta z = \{\theta(Q_2) - \theta(P)\}/\Delta z$$

La contribution du carré ABCD à l'intégrale (1.28) vaut :

$$I_1 = \frac{1}{2} \iint_{ABCD} (\partial\theta/\partial y)^2 dy dz \quad \text{et, avec } \Delta y = \Delta z = h$$

$$\iint_{ABCD} (\partial\theta/\partial y)^2 dy dz = \left\{ \frac{\theta(Q_1) - \theta(P)}{h} \right\}^2 h^2 = \{\theta(Q_1) - \theta(P)\}^2$$

On peut effectuer le même calcul pour les autres points et l'intégrale I devient :

$$I = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 \{\theta(Q_i) - \theta(P)\}^2$$

Cette fonction I doit être minimale, donc sa dérivée par rapport à  $\theta$  nulle :

$$dI/d\theta = \sum_{i=1}^4 \{\theta(Q_i) - \theta(P)\} = 0$$

$$4\theta(P) - \sum_{i=1}^4 \theta(Q_i) = 0 \quad (1.29)$$

Il est possible d'écrire de proche en proche la même équation pour tous les points P intérieurs au domaine quadrillé. Pour un point Q situé sur le contour, on introduira la valeur numérique correspondante du potentiel. On obtient ainsi un système linéaire dont le nombre d'équations est égal au nombre de points P. Les solutions fournissent la valeur du potentiel en chaque point.

### I.32-Coordonnées polaires

L'emploi de coordonnées cartésiennes se prête mal à la géométrie des machines tournantes à pôles saillants. Les coordonnées polaires et la

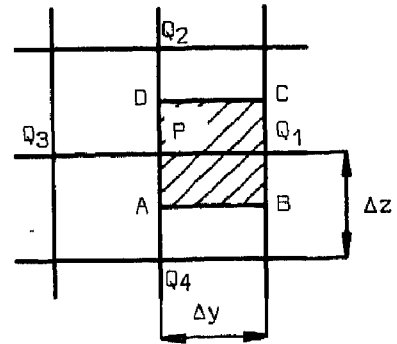


Fig. 1.3

division en rectangles curvilignes sont plus pratiques.

Dans ces conditions, la fonctionnelle à rendre minimum prend la forme suivante :

$$I = \frac{1}{2} \iint_D \left\{ \left( \frac{\partial \theta}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{\partial \theta}{\partial (r \cdot \alpha)} \right)^2 \right\} r \cdot dr \cdot d\alpha \quad (1.30)$$

En passant aux accroissements finis en relation avec la fig. 1.4, il vient :

$$r \cdot \Delta \alpha = \gamma h$$

$$r_2 \cdot \Delta \alpha = \gamma_2 \cdot h \quad ; \quad r_4 \cdot \Delta \alpha = \gamma_4 \cdot h$$

Comme précédemment, on peut

écrire :

$$\frac{\partial \theta}{\partial (r \alpha)} = \frac{\Delta \theta}{\Delta (r \alpha)} = \frac{\theta(Q_1) - \theta(P)}{\gamma \cdot h}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial r} = \frac{\Delta \theta}{\Delta r} = \frac{\theta(Q_2) - \theta(P)}{h}$$

La contribution de la paire de points P et Q<sub>1</sub> peut s'écrire :

$$I_1 = 1/\gamma \cdot \{\theta(Q_1) - \theta(P)\}^2$$

Pour PQ<sub>3</sub> :

$$I_3 = 1/\gamma \cdot \{\theta(Q_3) - \theta(P)\}^2$$

Pour PQ<sub>2</sub>:

$$I_2 = \gamma_2 \{\theta(Q_2) - \theta(P)\}^2$$

Pour PQ<sub>4</sub> :

$$I_4 = \gamma_4 \{\theta(Q_4) - \theta(P)\}^2$$

En déterminant la dérivée de la fonction I et en groupant les termes,

l'équation liant les divers points prend la forme suivante :

$$(2/\gamma + \gamma_2 + \gamma_4) \cdot \theta(P) - \{1/\gamma \{\theta(Q_1) + \theta(Q_3)\} + \gamma_2 \cdot \theta(Q_2) + \gamma_4 \cdot \theta(Q_4)\} = 0 \quad (1.31)$$

Au cas où le contour coupe le quadrillage

de façon quelconque, on peut transformer

la relation (1.31) comme suit (fig.1.5) :

$$PK_1 = v_1 \cdot \gamma \cdot h$$

PK<sub>2</sub> = v<sub>2</sub> · h ; la surface hachurée représente

une fraction ζ<sub>1</sub> de l'aire ABCD :

$$S_1 = \zeta_1 \cdot \gamma \cdot h^2$$

La contribution de la paire de points

P et K<sub>1</sub> peut s'écrire :

$$I_1 = \frac{\zeta_1}{v_1^2 \cdot \gamma} \{\theta(K_1) - \theta(P)\}^2$$

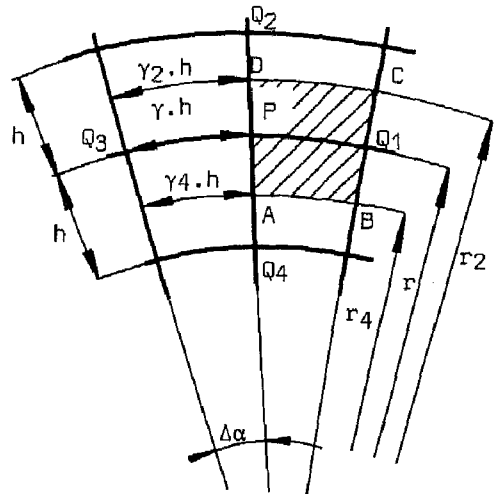


Fig. 1.4

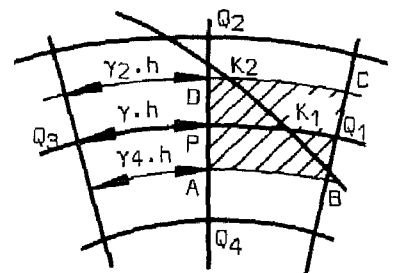


Fig. 1.5



$$I_2 = \frac{\gamma_2 \zeta_2}{v_2^2} \{\theta(K_2) - \theta(P)\}^2 \text{ pour } P \text{ et } K_2$$

$$I_3 = \frac{\zeta_3}{v_3^2 \cdot \gamma} \{\theta(K_3) - \theta(P)\}^2 \text{ pour } P \text{ et } K_3 \text{ (cas échéant)}$$

$$I_4 = \frac{\gamma_4 \zeta_4}{v_4^2} \{\theta(K_4) - \theta(P)\}^2 \text{ pour } P \text{ et } K_4 \text{ (cas échéant)}$$

En dérivant à nouveau la fonctionnelle I, l'équation de liaison devient:

$$\left\{ \frac{\zeta_1}{v_1^2 \gamma} + \frac{\zeta_2 \gamma_2}{v_2^2} + \frac{\zeta_3}{v_3^2 \gamma} + \frac{\zeta_4 \gamma_4}{v_4^2} \right\} \theta(P) - \quad (1.32)$$

$$- \left\{ \frac{\zeta_1}{v_1^2 \gamma} \theta(K_1) + \frac{\zeta_2 \gamma_2}{v_2^2} \theta(K_2) + \frac{\zeta_3}{v_3^2 \gamma} \theta(K_3) + \frac{\zeta_4 \gamma_4}{v_4^2} \theta(K_4) \right\} = 0$$

Les conditions aux limites peuvent se transformer en conditions de symétrie. Deux cas sont à considérer:

- deux points symétriques ont un potentiel égal :

$$\theta(Q_1) = \theta(Q_3)$$

L'équation (1.31) devient :

$$(2/\gamma + \gamma_2 + \gamma_4) \cdot \theta(P) - \{2/\gamma \cdot \theta(Q_1) + \gamma_2 \cdot \theta(Q_2) + \gamma_4 \cdot \theta(Q_4)\} = 0 \quad (1.33)$$

- deux points symétriques ont un potentiel opposé :

$$\theta(Q_1) = -\theta(Q_3)$$

L'équation (1.31) devient :

$$(2/\gamma + \gamma_2 + \gamma_4) \cdot \theta(P) - \{\gamma_2 \cdot \theta(Q_2) + \gamma_4 \cdot \theta(Q_4)\} = 0 \quad (1.34)$$

### I.33-Détermination du champ

La résolution du système linéaire lié aux divers points du schéma quadrillé permet de tracer les lignes équipotentielles dans l'entrefer. La relation (1.10) définit le champ comme le vecteur gradient du potentiel. Ce vecteur est tangentiel aux lignes de plus grande pente, qui sont orthogonales aux équipotentielles. Connaissant la distribution du potentiel le long d'une telle ligne de force, le champ en un point est alors la dérivée, par rapport à l'abscisse curviligne, du potentiel :

$$H = d\theta/dl = \Delta\theta/\Delta l \quad (\text{fig. 1.6})$$

Il est ainsi possible de déterminer la distribution du champ à la surface du rotor et du stator. Trois conditions aux limites particulières intéressent notre étude :

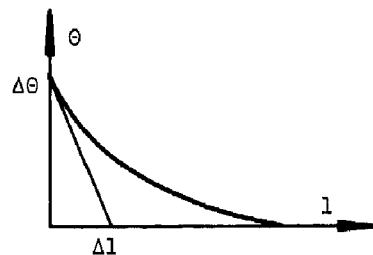


Fig. 1.6

- La f.m.m. présente une distribution sinusoïdale au stator, avec un maximum dans l'axe direct (axe polaire), et nulle au rotor (fig. 1.7a).
- La f.m.m. présente une distribution sinusoïdale au stator avec un maximum dans l'axe transverse (axe inter-polaire), et nulle au rotor (fig. 1.7b). Ces deux premiers cas permettent l'étude du démarrage asynchrone et de la réaction d'induit statorique synchrone.
- La f.m.m. présente une distribution constante sur la semelle polaire et décroît linéairement le long du corps polaire (fig.1.7c). Ce cas est plus particulièrement intéressant pour l'étude de la réaction d'induit synchrone (I.4) et la détermination de l'impédance équivalente de l'enroulement rotorique (IV.13).

En reprenant l'analyse du régime asynchrone avec un glissement important, on peut ainsi déterminer la distribution de la composante tangentielle du champ à la surface du rotor. Pour caractériser cette répartition, on introduit un coefficient de concentration du champ :

$$k_H = H_{ry}/H_{sy} \quad \text{en surface} \quad (1.35)$$

Celui-ci peut également être défini à partir de la distribution des lignes de force. Soient AD et BC deux telles lignes voisines (fig.1.8). La relation (1.1) peut s'écrire sous forme intégrale :

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \iint \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

Dans l'entrefer  $J = 0$

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = 0$$

Pour un régime asynchrone, nous avons vu que la composante radiale du champ correspondant à la f.m.m. rotorique est négligeable (1.26b) :

$$H_{sy} \cdot AB - H_{ry} \cdot CD = 0$$

$$k_H = H_{ry}/H_{sy} = AB/CD$$

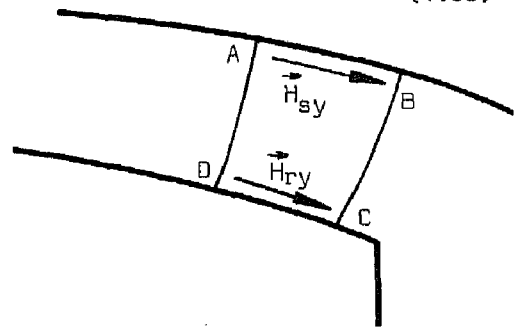


Fig. 1.8

#### I.4 - REACTION D'INDUIT - FLUX DE FUITE

L'analyse de la distribution du champ qui vient d'être exposée peut également s'appliquer à l'étude des caractéristiques de réaction d'induit

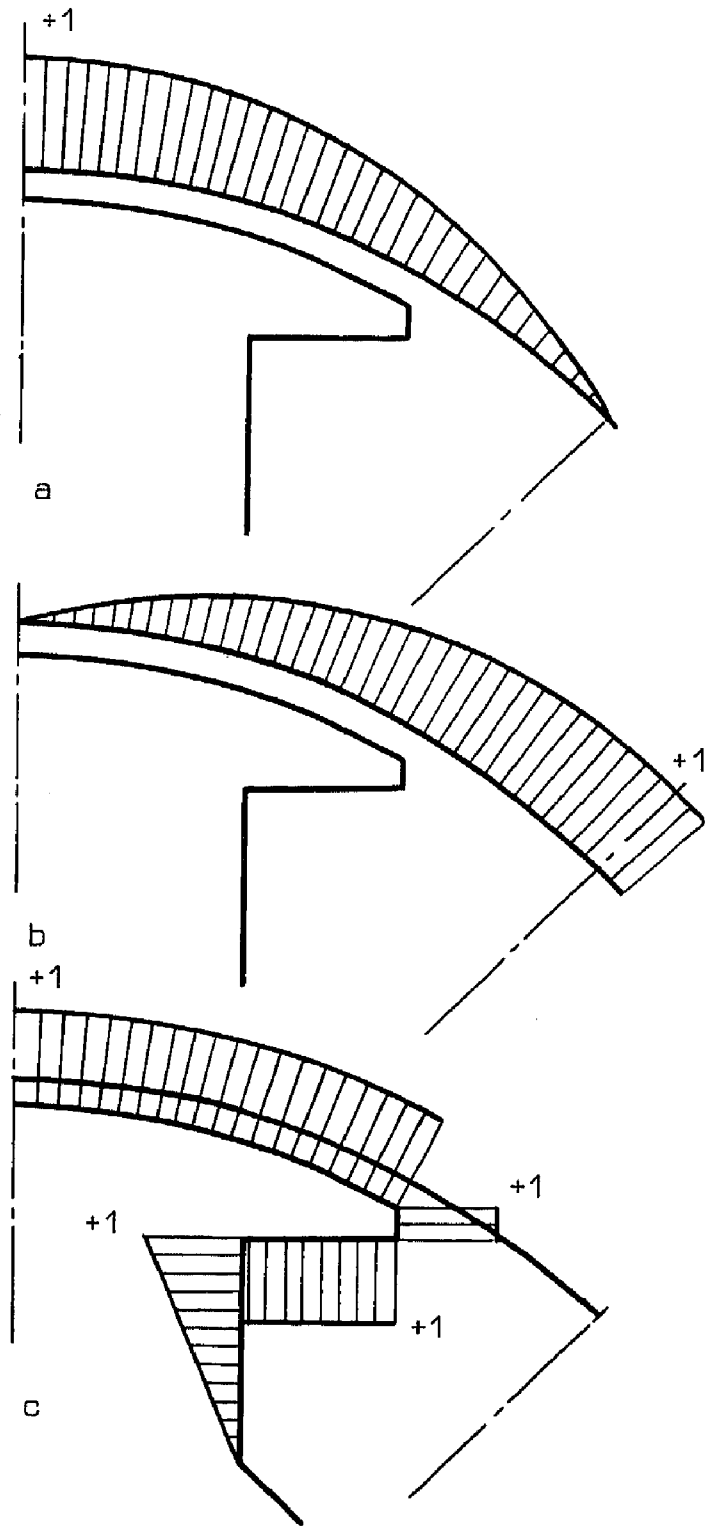


Fig. 1.7 - CONDITIONS AUX LIMITES

et de certains flux de fuite de la machine synchrone. Une partie de ces éléments étant utile pour la suite de notre étude, nous décrirons brièvement le moyen de les obtenir sur la base de l'analyse du potentiel dans l'entrefer.

#### I.41 - Réaction d'induit

En régime synchrone, la f.m.m. de l'inducteur est égale et opposée aux f.m.m. de réaction d'induit statorique et magnétisante. Nous analyserons au cours de ce paragraphe la compensation de la réaction d'induit par l'excitation. Il se produit plus précisément un équilibre des composantes radiales fondamentales des champs magnétiques respectifs.

On peut décomposer la réaction d'induit statorique en un terme direct et un terme transverse :

$$\hat{\theta}_s = 0,45 m \cdot N_1 / p \cdot k_b \cdot I \quad (1.36)$$

$$\hat{\theta}_{sd} = \hat{\theta}_s \sin \psi$$

$$\hat{\theta}_{sq} = \hat{\theta}_s \cos \psi$$

$\psi$  = angle de déphasage entre le courant et la tension induite.

Soit  $\hat{\theta}_p$  la f.m.m. de l'inducteur, s'opposant à la réaction d'induit.

$$\hat{\theta}_p = N_p \cdot I_p \quad (1.37)$$

Il est possible de définir trois valeurs de référence du champ magnétique, relatives à une machine à rotor lisse idéale ayant un entrefer  $\delta$  égal à la valeur minimum :

$$\begin{cases} \hat{A}_{sd} = \hat{\theta}_{sd} / \delta \\ \hat{A}_{sq} = \hat{\theta}_{sq} / \delta \\ \hat{H}_p = \hat{\theta}_p / \delta \end{cases}$$

A la surface du rotor, le fondamental de la composante de charge du champ rotorique doit compenser le fondamental du champ radial de réaction d'induit :

$$\begin{cases} 1\hat{H}_{sd} = 1\hat{H}_p & \text{dans l'axe direct} \\ 1\hat{H}_{sq} = 1\hat{H}_p & \text{dans l'axe transverse} \end{cases} \quad (1.38)$$

On peut poser :

$$\begin{cases} 1\hat{H}_{sd} = k_d \cdot \hat{H}_{sd} \\ 1\hat{H}_{sq} = k_q \cdot \hat{H}_{sq} \\ 1\hat{H}_p = k_p \cdot \hat{H}_p \end{cases} \quad (1.39)$$

D'où par (1.38) :

$$\begin{cases} k_d \cdot \hat{H}_{sd} = k_p \cdot \hat{H}_p \\ k_q \cdot \hat{H}_{sq} = k_p \cdot \hat{H}_p \\ k_d \cdot \hat{\theta}_{sd} = k_p \cdot \hat{\theta}_p \\ k_q \cdot \hat{\theta}_{sq} = k_p \cdot \hat{\theta}_p \end{cases} \quad \text{ou de même :} \quad (1.40)$$

Les coefficients de réaction d'induit  $C_d$  et  $C_q$  peuvent être définis :

$$\begin{cases} C_d = \hat{\theta}_p / \hat{\theta}_{sd} = k_d / k_p \\ C_q = \hat{\theta}_p / \hat{\theta}_{sq} = k_q / k_p \end{cases}$$

L'étude de la distribution du potentiel dans l'entrefer permet de déterminer avec précision la répartition des composantes normales du champ au stator et, par une décomposition en série de Fourier, d'en tirer le fondamental et les divers harmoniques. Il est donc aisément possible d'en déduire les facteurs  $k_d$ ,  $k_q$  et  $k_p$  ainsi que les coefficients de réaction d'induit  $C_d$  et  $C_q$ .

#### I.42 - Flux de fuite

Pour les trois cas étudiés au paragraphe précédent, l'application (paragraphe I.5) met en évidence un certain nombre de lignes de force qui ne sont pas couplées avec la surface opposée présentant un potentiel nul.

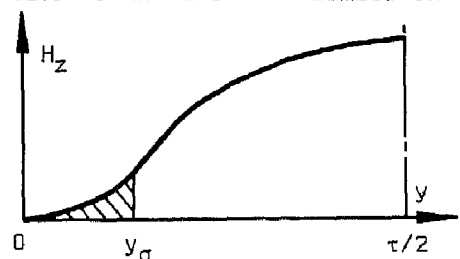
En marche à vide, certaines lignes se referment sur la culasse rotorique ou le pôle adjacent au lieu d'être couplées avec le stator. En effectuant le bilan des perméances respectives des portions de flux totales ( $\text{tot}$ ) et non couplées ( $\sigma$ ), il est possible d'exprimer le flux de fuite rotorique en valeur relative :

$$\Phi_{\sigma p} / \Phi_{\text{tot}} = \Lambda_{\sigma} / \Lambda_{\text{tot}} \quad (\text{p.u.}) \quad (1.42)$$

Dans le cas de la réaction d'induit, aussi bien directe que transverse, on retrouve des lignes de fuite qui se referment sur le stator. Il leur correspond une réactance de fuite, généralement appelée "réactance d'alésage". Sur la courbe représentative de la composante radiale du champ à la surface du stator, il est possible de définir une abscisse limite entre le flux de fuite et le flux "utile". Ce dernier devient en valeur relative (fig.1.9) :

$$\frac{\Phi_{\sigma B}}{\Phi_{\text{TOT}}} = \frac{\mu_0 l \int_0^{y_{\sigma}} H_z \cdot dy}{\int_0^{\tau/2} H_z \cdot dy \cdot \mu_0 l} =$$

Fig. 1.9



$$= \frac{\int_0^y \sigma_{Hz} \cdot dy}{\int_0^{\tau/2} \sigma_{Hz} \cdot dy} = k_{\sigma B} \quad (1.43)$$

La réactance de fuite correspondante est liée à la réactance de champ principal ( $X_d$ ,  $X_q$ ). En effet, cette dernière est homologue du flux total et la réactance d'alésage peut s'écrire :

$$\begin{cases} X_{\sigma Bd} = k_{\sigma Bd} \cdot X_d \\ X_{\sigma Bq} = k_{\sigma Bq} \cdot X_q \end{cases} \quad (1.44)$$

## I.5 - APPLICATION

Nous appliquerons l'ensemble des méthodes de calcul du potentiel magnétique et du champ au moteur synchrone dont les principales caractéristiques sont données par l'annexe 1.

On peut remarquer que ces diverses méthodes ne font intervenir qu'un nombre limité de paramètres, soit principalement les rapports  $b_p/\tau$ ,  $\delta/\tau$  et la forme de l'entrefer (constant, semi-sinusoïdal, etc). Une analyse systématique faisant varier ces paramètres dans les limites de réalisation permet de déterminer les fonctions caractéristiques des divers coefficients et de les déduire pour tous les cas usuels.

### I.51 - CALCUL DU POTENTIEL MAGNETIQUE

La fig.1.10 représente l'entrefer et la zone inter-polaire de la machine étudiée, ainsi que le quadrillage curviligne adopté. L'entrefer géométrique a été majoré par le coefficient de Carter afin de tenir compte de l'effet des ouvertures d'encoches.

Le réseau adopté se compose de 110 points internes au contour et conduit ainsi à 110 équations linéaires. Les conditions aux limites relatives à la fig.1.7 ont été introduites. Nous avons représenté la répartition du potentiel selon les coupes périphériques définies par le réseau curviligne (fig.1.10) pour les trois cas direct, transverse et à vide (fig.1.11 à 1.19). Ces graphiques, ainsi que des graphiques homologues pour des coupes radiales, permettent de tracer le réseau des équipotentielles dans

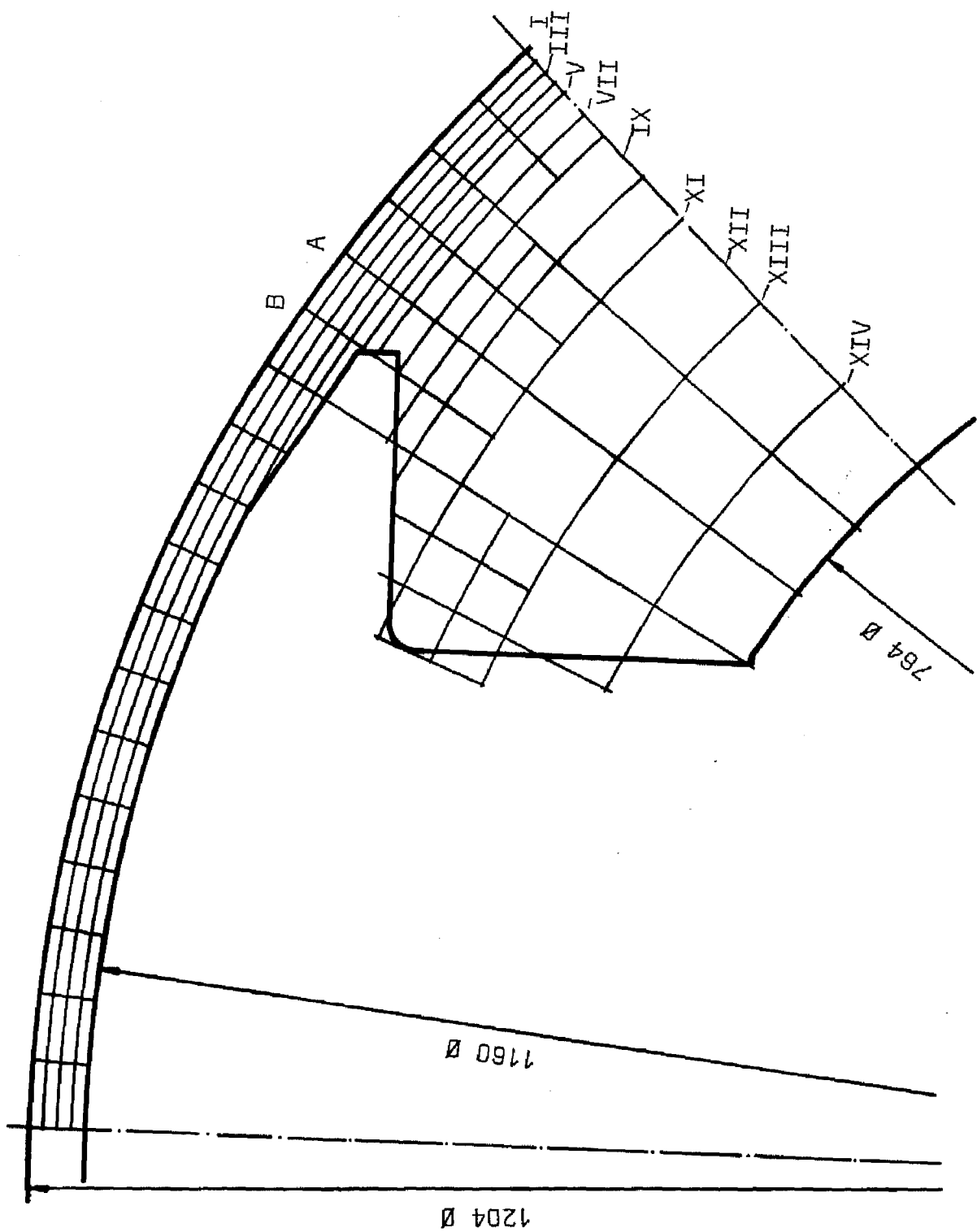


Fig. 1.10 - QUADRILLAGE DE L'ENTREFER

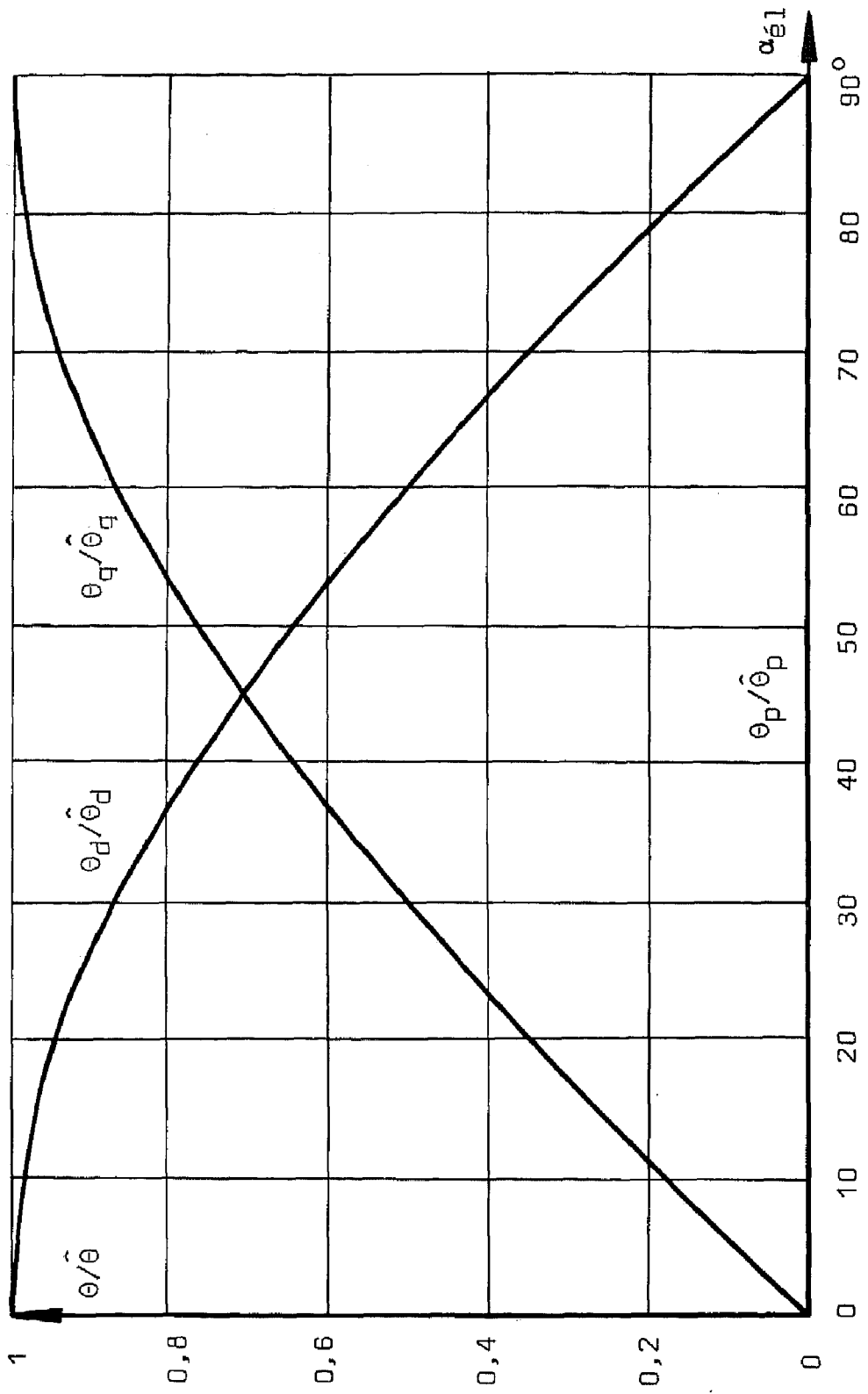


Fig. 1.11 - REPARTITION DU POTENTIEL MAGNETIQUE (I)



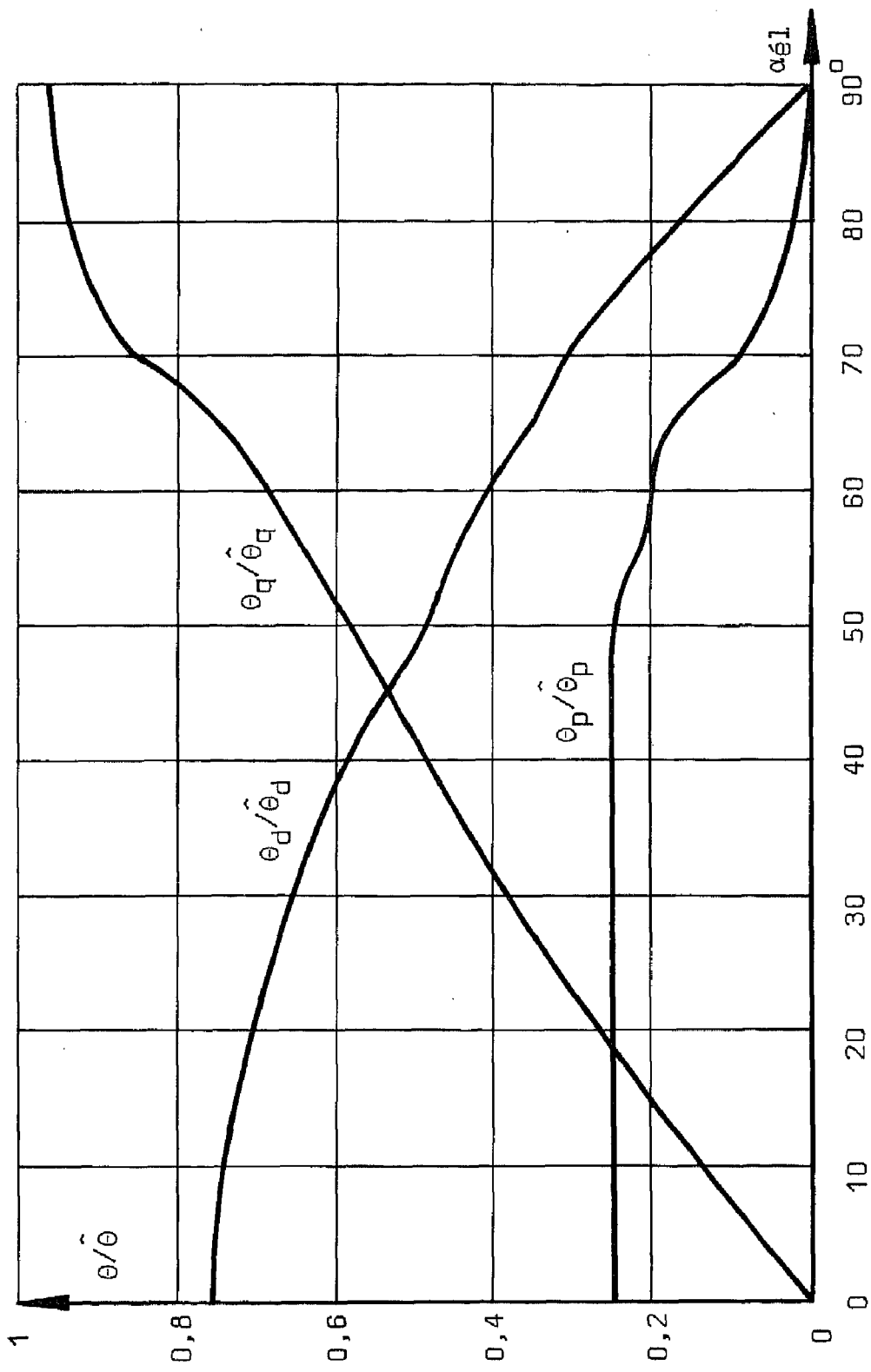


Fig. 1.12 - REPARTITION DU POTENTIEL MAGNETIQUE (coupe II)

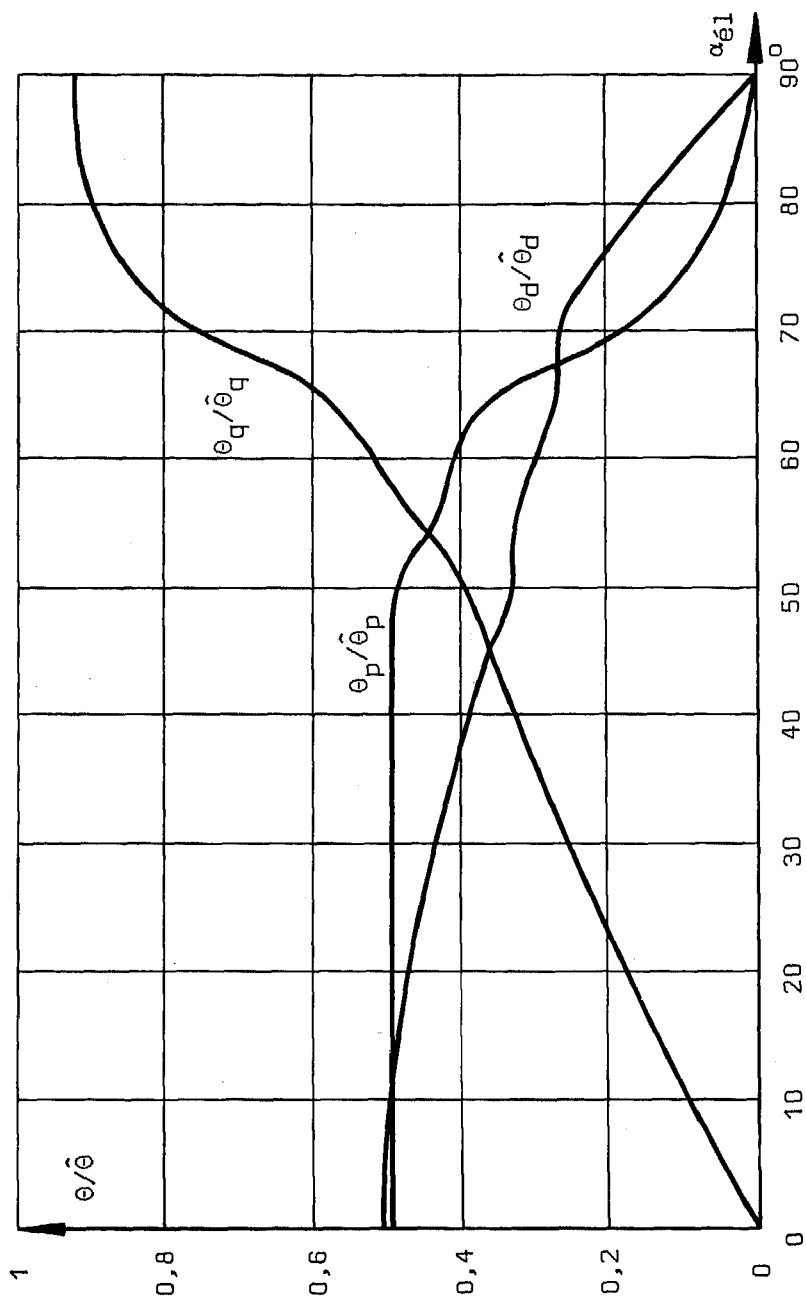


Fig. 1.13 - REPARTITION DU POTENTIEL MAGNETIQUE (coupe III)

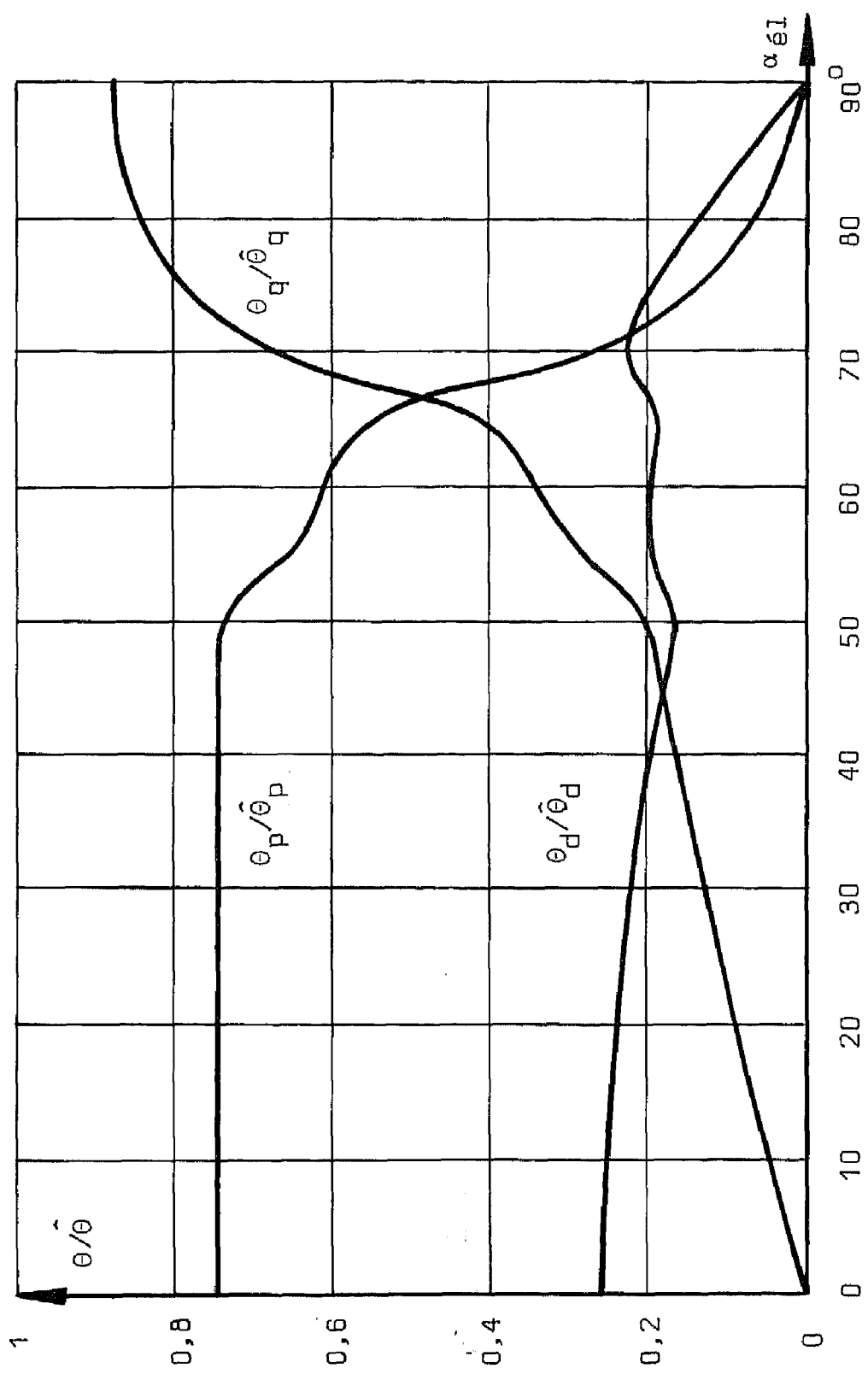


Fig. 1.14 - REPARTITION DU POTENTIEL MAGNETIQUE (coupe IV)

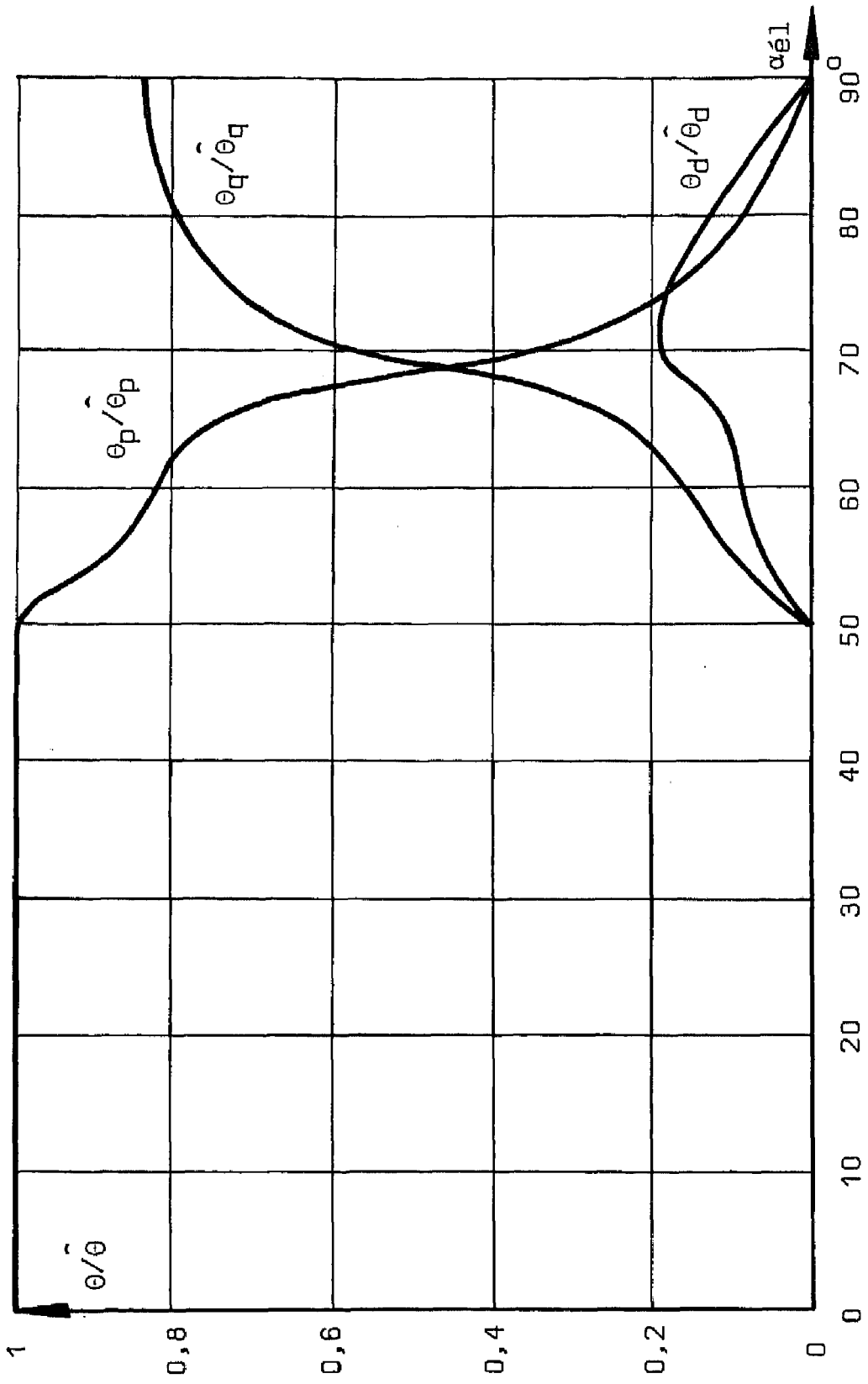


Fig. 1.15 - REPARTITION DU POTENTIEL MAGNETIQUE (coupe V)

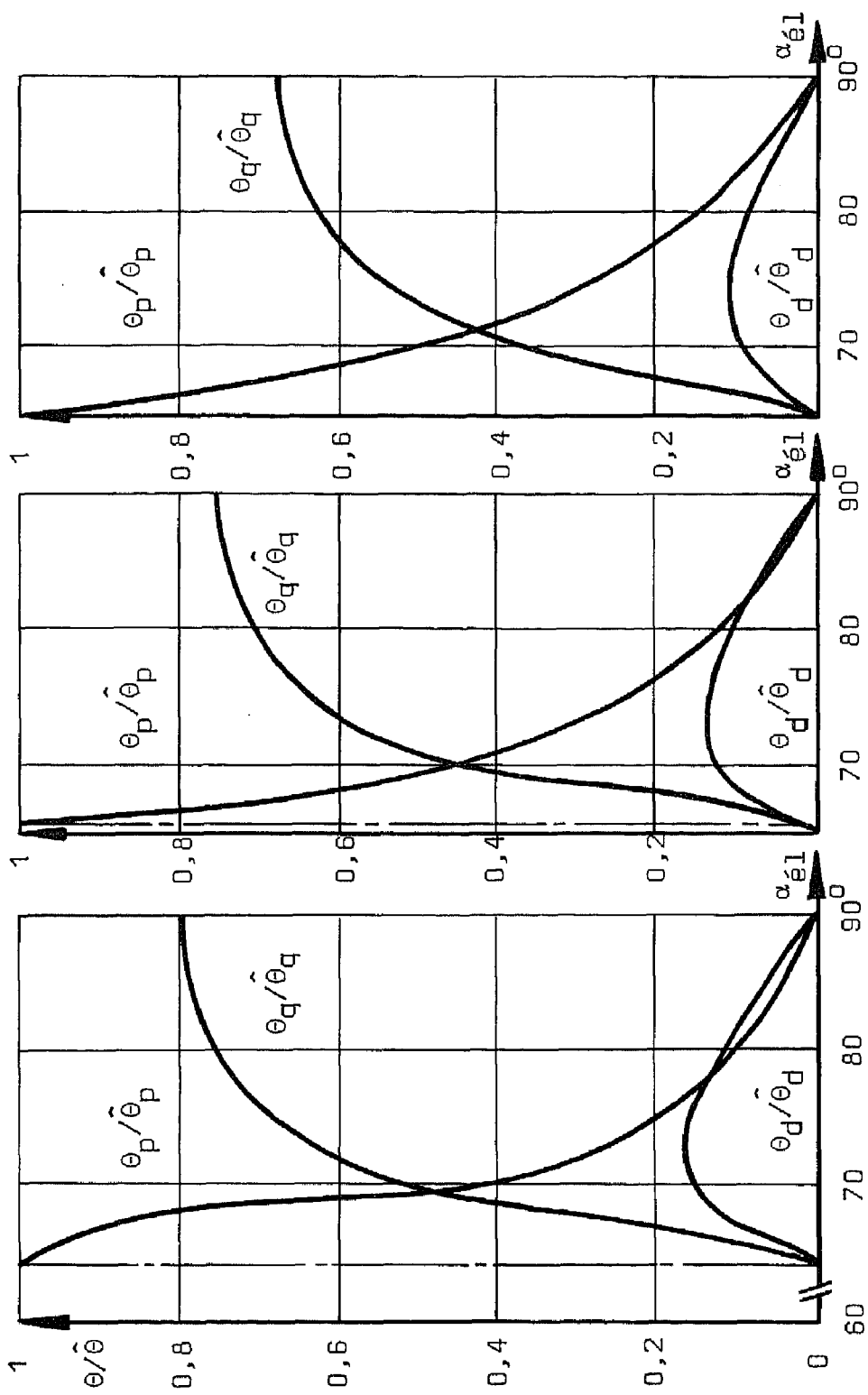


Fig. 1.16 - REPARTITION DU POTENTIEL MAGNETIQUE (coupes VI à VIII)

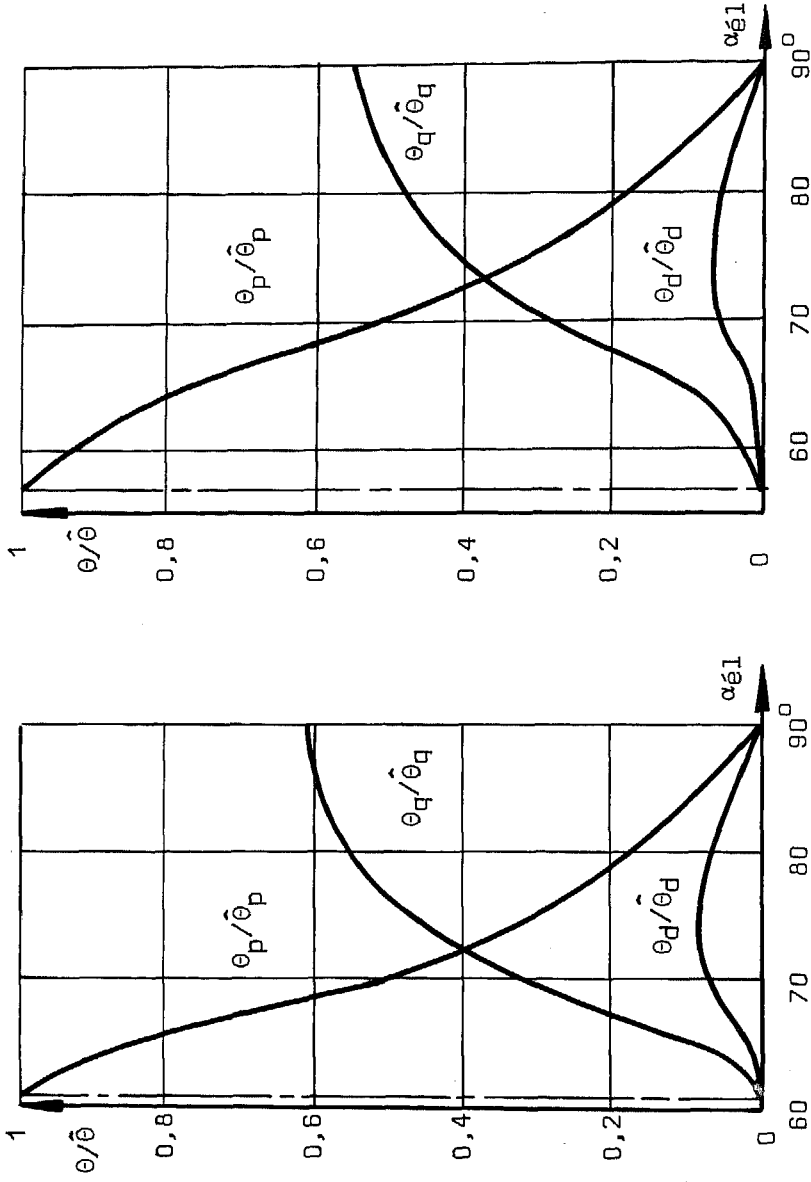


Fig. 1.17 - REPARTITION DU POTENTIEL MAGNETIQUE (coupes IX et X)

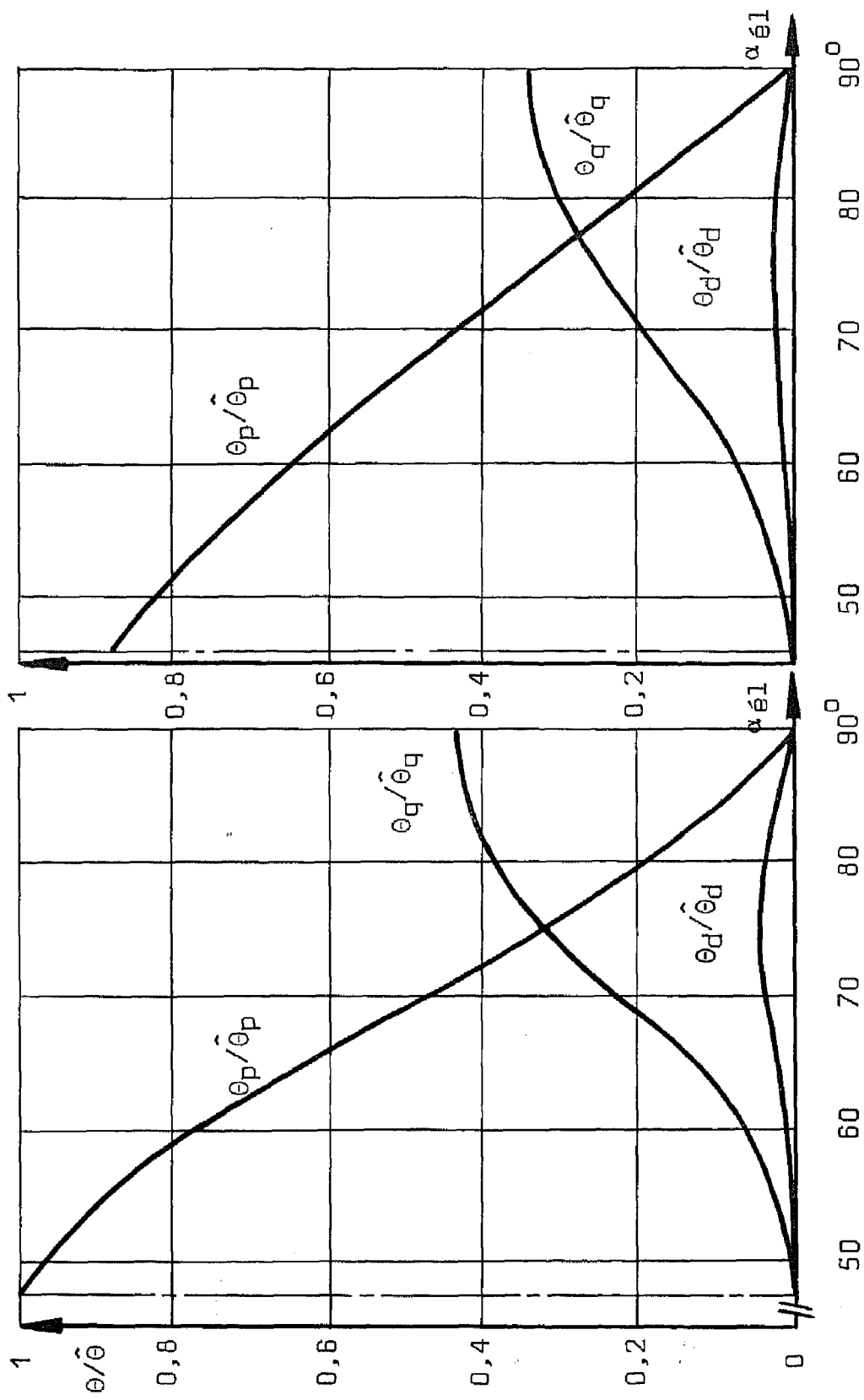


Fig. 1.18 - REPARTITION DU POTENTIEL MAGNETIQUE (coupes XI et XII)

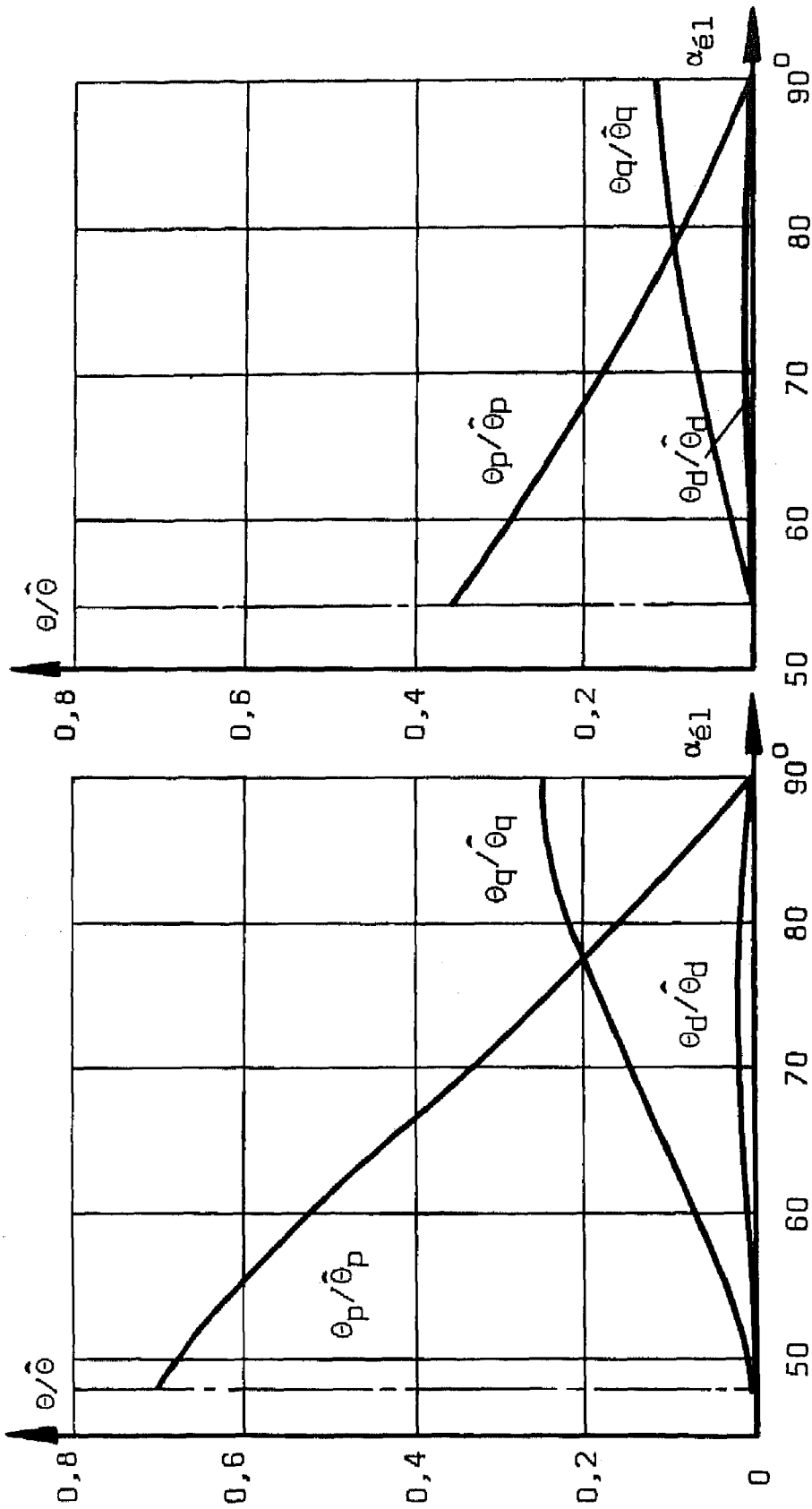


Fig. 1.19 - REPARTITION DU POTENTIEL MAGNETIQUE (coupes XII et XIV)



l'entrefer, soit les fig. :

- 1.20 pour la réaction d'induit directe,
- 1.21 pour la réaction d'induit transverse,
- 1.22 pour la marche à vide.

Les équipotentielles, données en valeur rapportée à la valeur de crête pour chaque dixième apparaissent comme des courbes de niveau. Il est ensuite possible de tracer le réseau des lignes de force orthogonales aux équipotentielles. Celui-ci a été réalisé de façon à ce qu'il présente des tubes de perméance  $1/5$  relativement à la perméance d'un tube carré de côté égal à  $\delta$  soumis au potentiel unitaire. En traçant ensuite la distribution du potentiel le long d'une telle ligne de force, il est possible (conformément à la fig. 1.6) de déterminer le champ au stator ainsi qu'au rotor. A titre d'exemple, les courbes de la fig. 1.23 donnent la distribution du potentiel le long des lignes de force issues des points A et B (fig. 1.10) pour les trois régimes considérés.

Les composantes normales du champ au stator résultant de cette étude sont données par les fig. 1.24 (réaction directe), 1.25 (réaction transverse) et 1.26 (marche à vide). La distribution de ces mêmes composantes à la surface du rotor permet de déterminer le coefficient de concentration  $k_H$  représenté pour les deux axes à la fig. 1.27.

#### 1.52 - Réaction d'induit - Flux de fuite

La décomposition en série de Fourier des composantes normales du champ à la surface du stator donne le fondamental pour chacune d'elles (fig. 1.24 à 1.26) ainsi que les divers harmoniques.

On déduit de l'amplitude du fondamental et des relations (1.39) :

$$k_D = \hat{H}_{sd} / \hat{H}_{sd} = 0,966$$

$$k_Q = \hat{H}_{sq} / \hat{H}_{sq} = 0,561$$

$$k_P = \hat{H}_p / \hat{H}_p = 1,162$$

Par la relation (1.41), il est possible de déterminer les coefficients de réaction d'induit :

$$C_D = k_D / k_P = 0,831$$

$$C_Q = k_Q / k_P = 0,483$$

On peut remarquer que la zone interpolaire fait apparaître un champ d'amplitude relative 0,169, soit un entrefer équivalent d'environ  $6\delta$

(fig. 1.25), valeur conforme à celle citée dans la référence (1.2). Sur les fig. 1.24 et 1.25, on trouve également les angles limites  $\alpha_{\sigma}$  caractéristiques du flux de fuite d'alésage  $X_{\sigma B}$ .

On relève en particulier selon (1.43) :

$$k_{\sigma B d} = 0,018$$

$$k_{\sigma B q} = 0,004$$

Compte tenu de la relation (1.44) et des valeurs des réactances synchrones données en annexe 1, on obtient en p.u. :

$$x_{\sigma B d} = k_{\sigma B d} \cdot x_d = 0,018 \cdot 1,78 = 0,032 \quad (\text{p.u.})$$

$$x_{\sigma B q} = k_{\sigma B q} \cdot x_q = 0,004 \cdot 1,02 = 0,0041 \quad (\text{p.u.})$$

De plus, en se référant à la fig. 1.22, il est possible de déterminer le flux de fuite rotorique en effectuant le bilan des perméances respectives. On obtient ainsi :

$$\Phi_{\sigma p} / \Phi_p \text{ tot} = 0,0701 = 7,01 \%$$

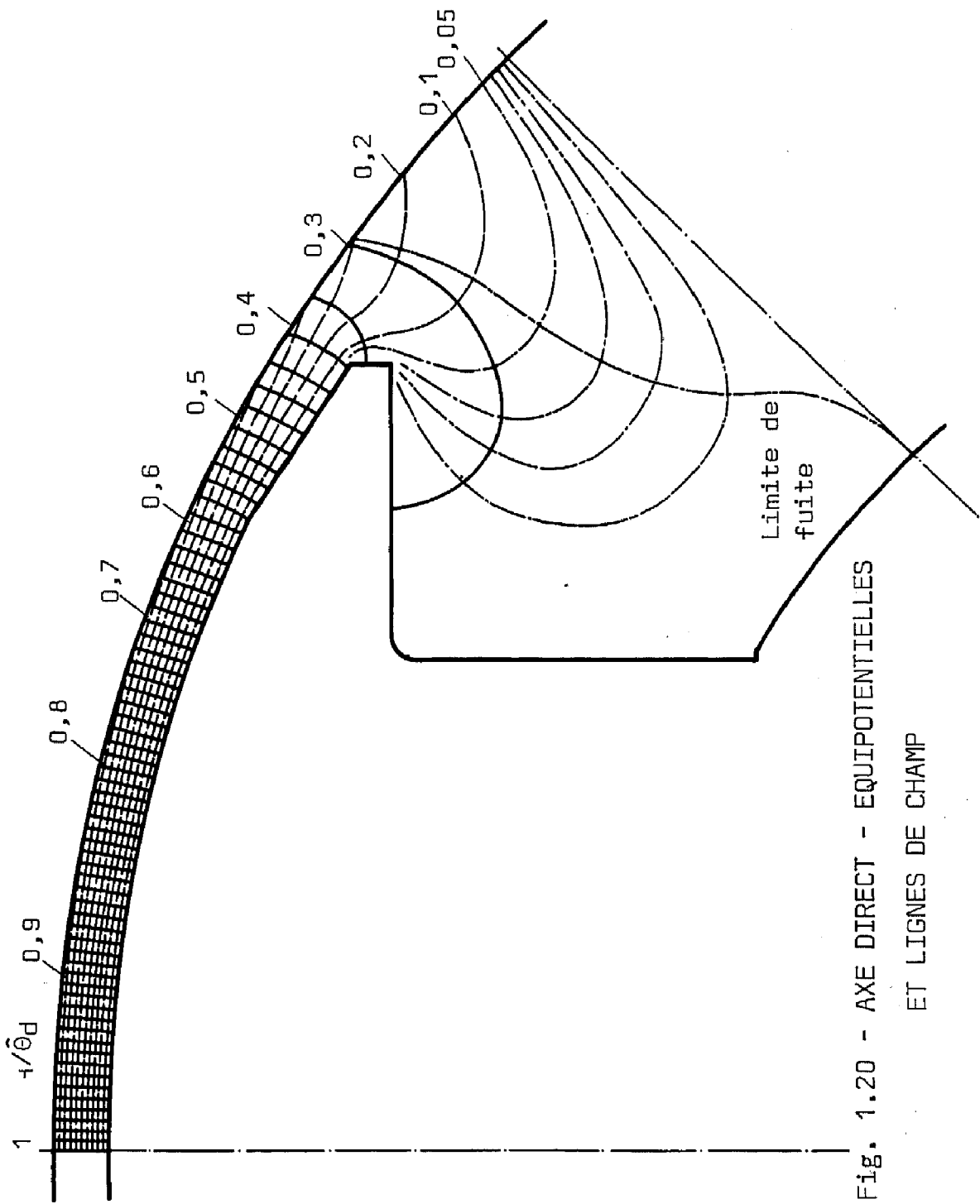


Fig. 1.20 - AXE DIRECT - EQUIPOTENTIELLES  
ET LIGNES DE CHAMP

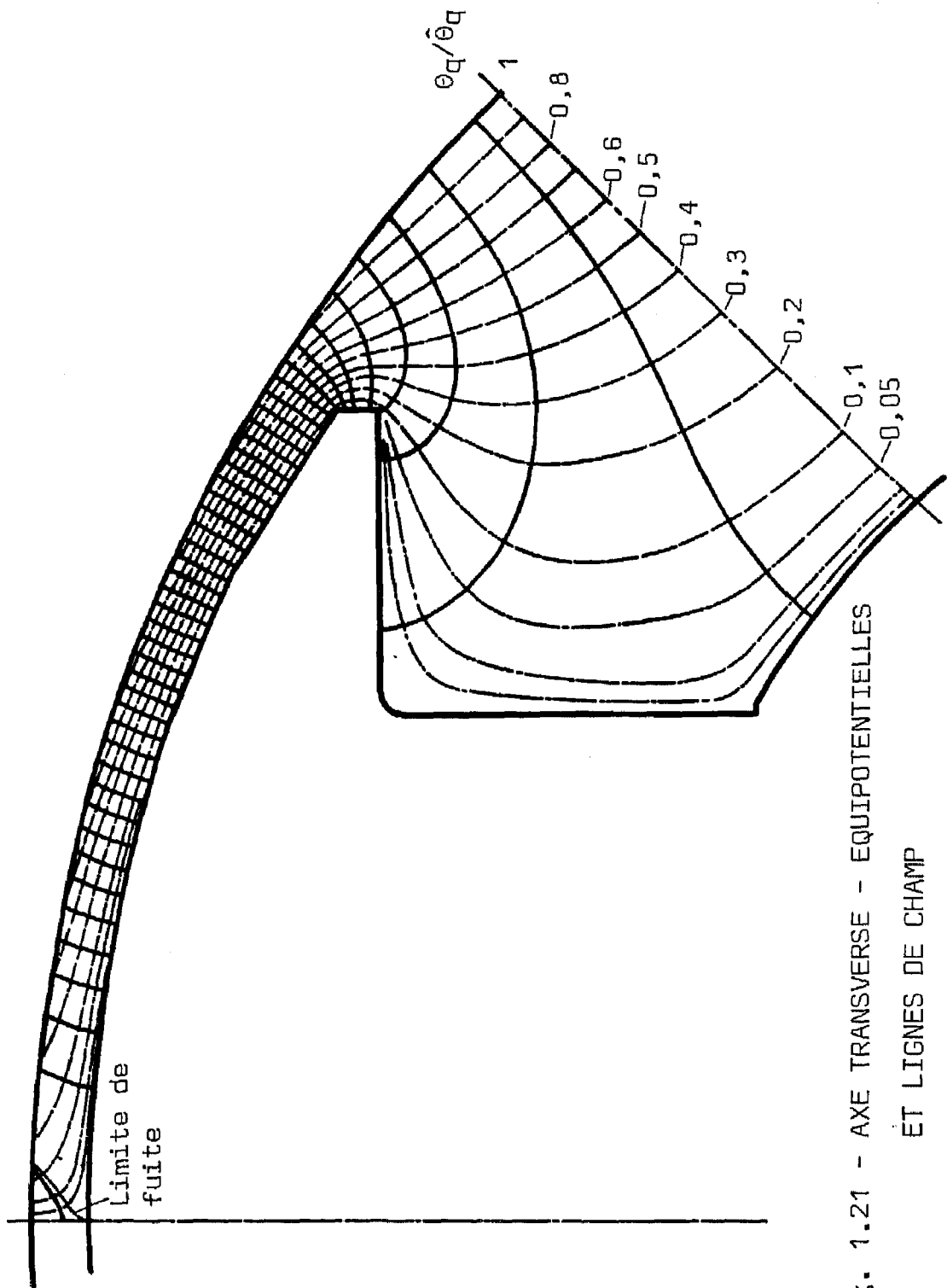


Fig. 1.21 - AXE TRANSVERSE - EQUIPOTENTIELLES  
ET LIGNES DE CHAMP

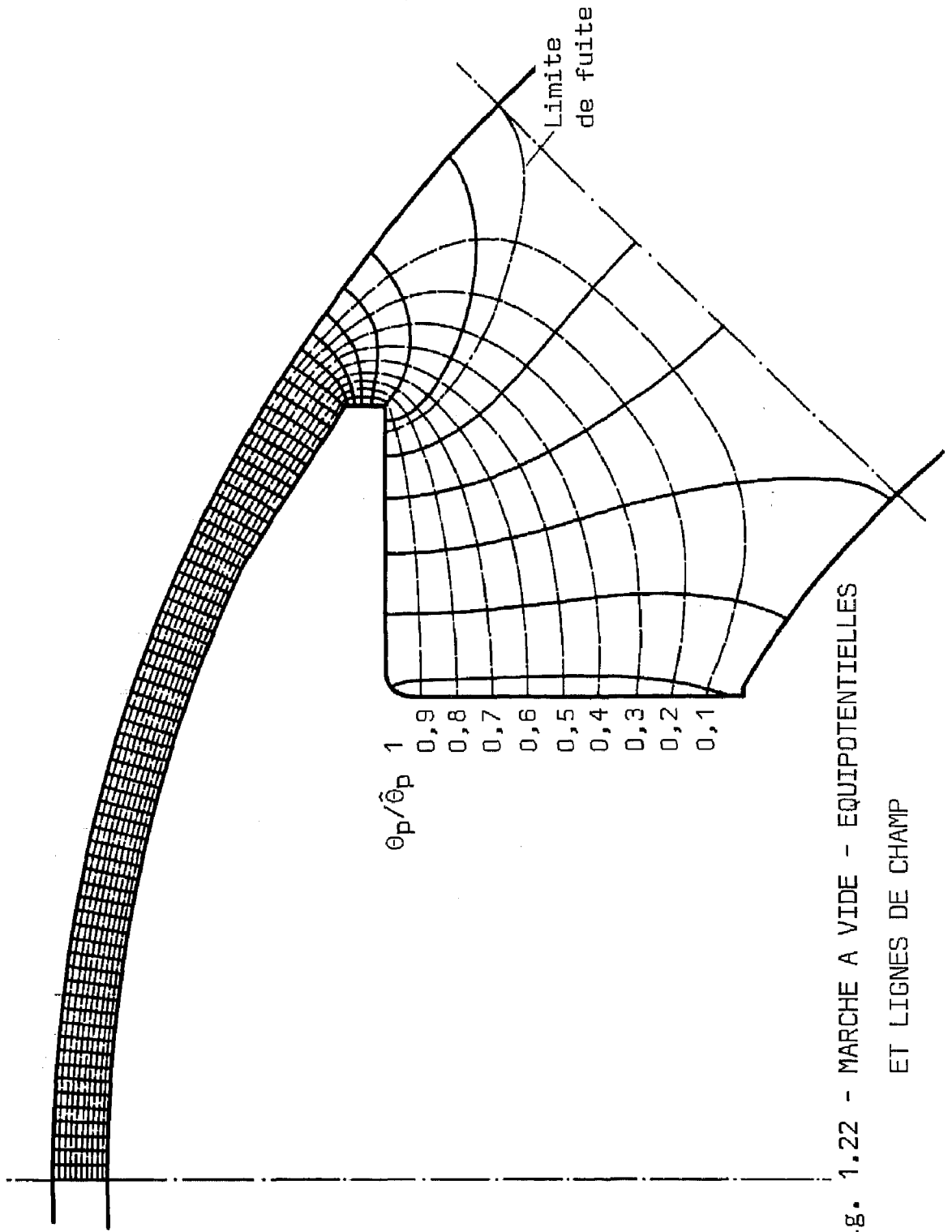


Fig. 1.22 - MARCHÉ A VIDE - EQUIPOTENTIELLES  
ET LIGNES DE CHAMP

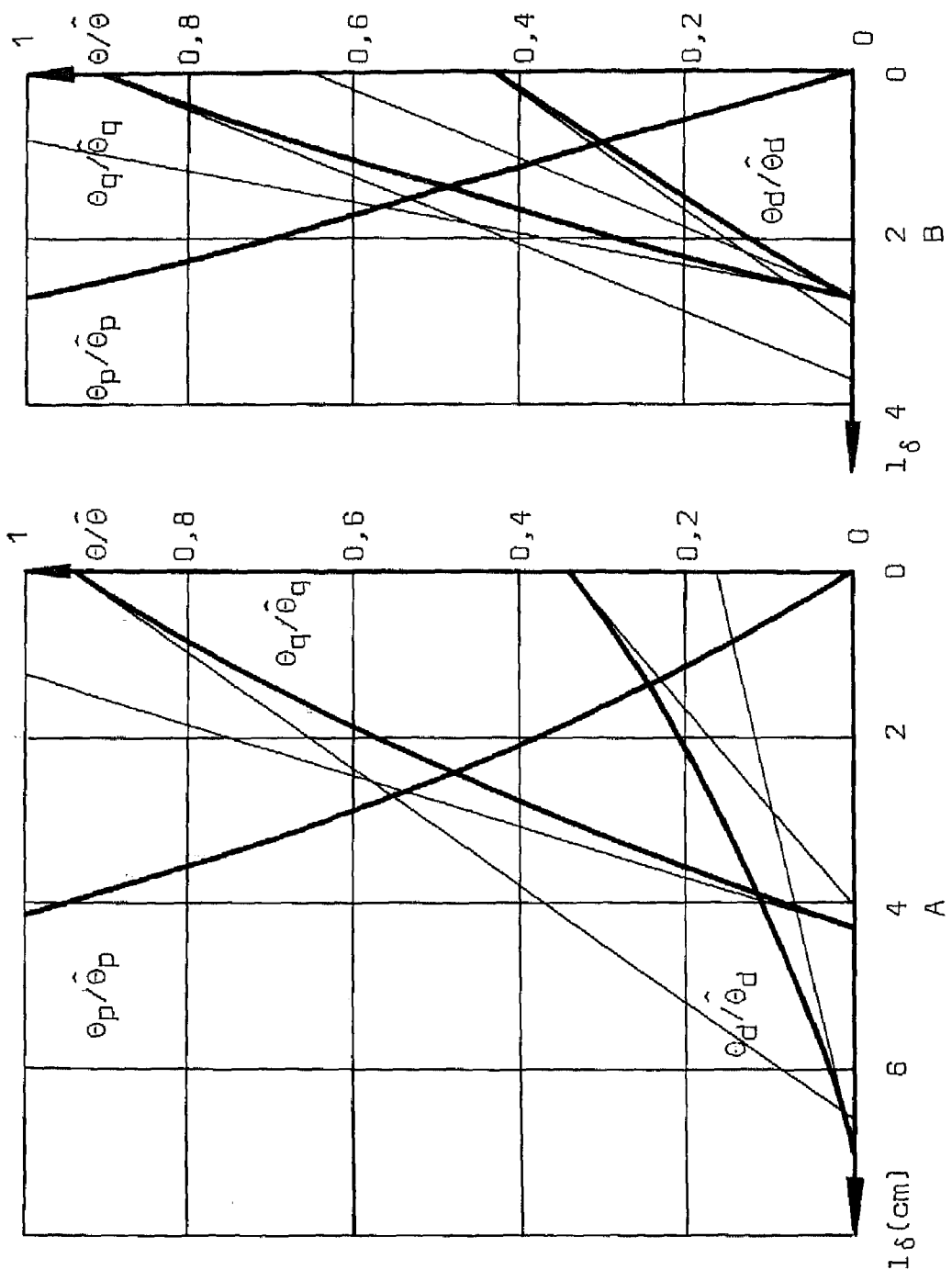


Fig. 1.23 - REPARTITION DU POTENTIEL MAGNETIQUE (lignes de champ A et B)

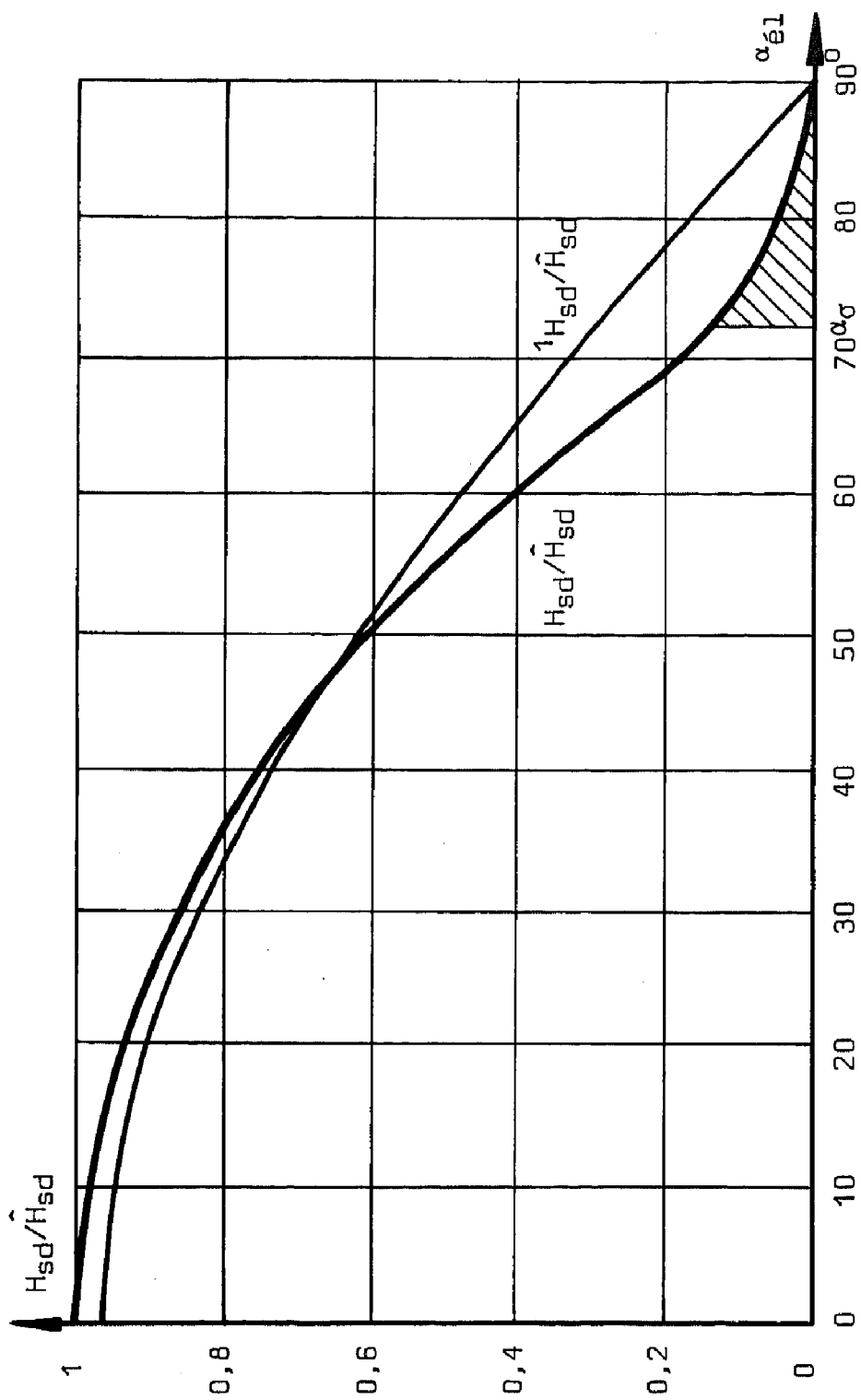


Fig. 1.24 - COMPOSANTE NORMALE DU CHAMP A LA SURFACE DU STATOR - AXE DIRECT

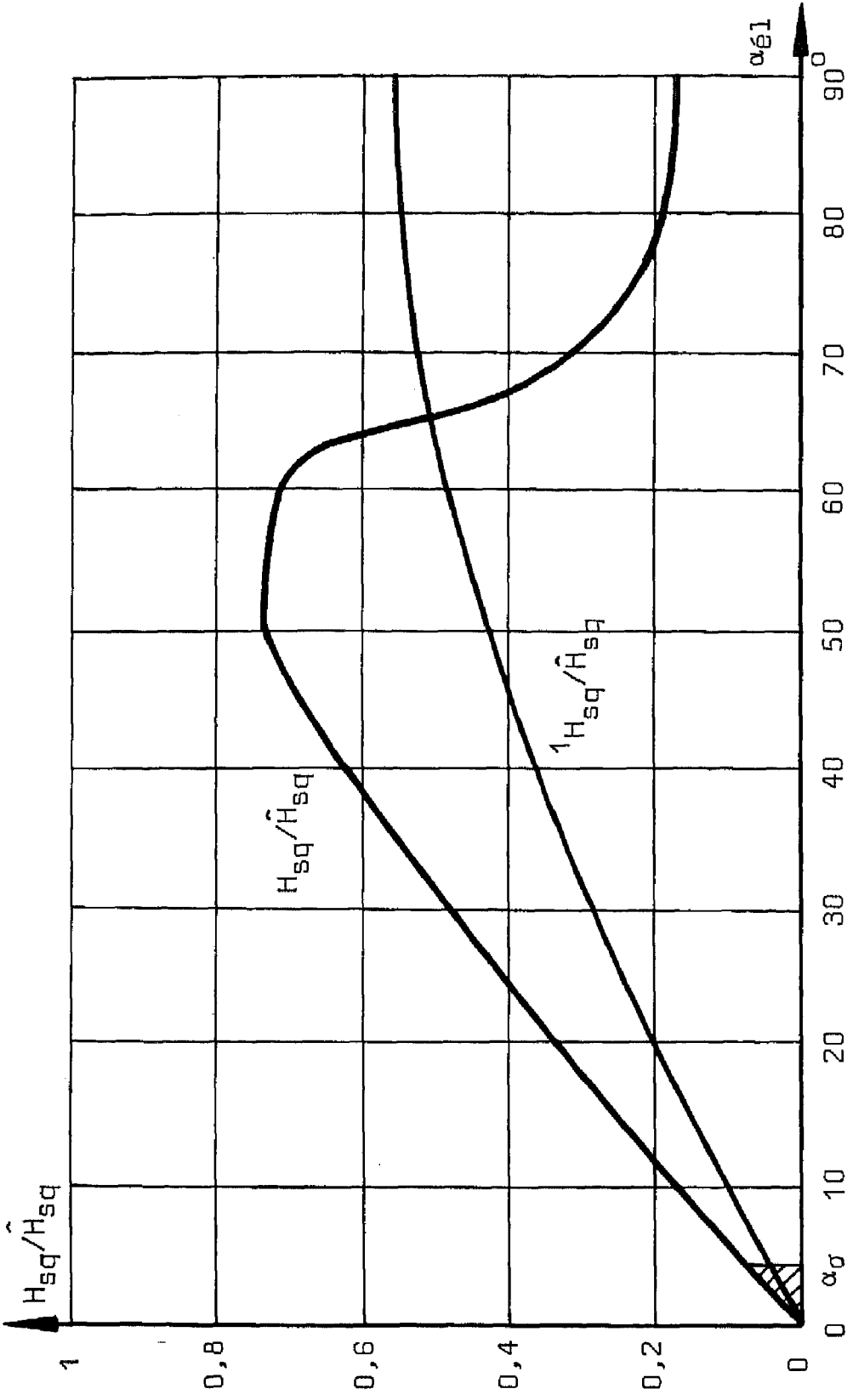


Fig. 1.25 - COMPOSANTE NORMALE DU CHAMP A LA SURFACE DU STATOR - AXE TRANSVERSE



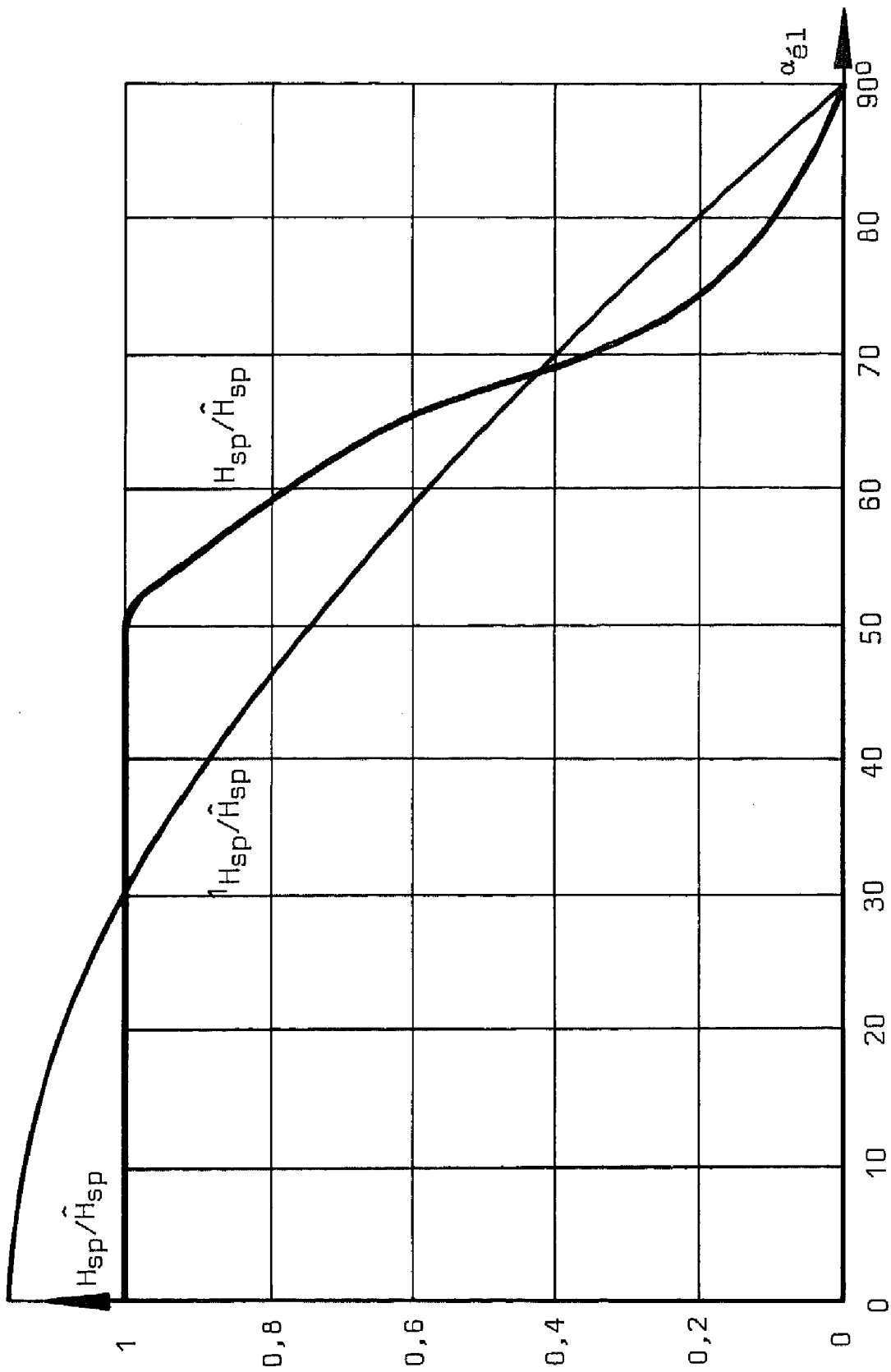


Fig. 1.26 - COMPOSANTE NORMALE DU CHAMP A LA SURFACE DU STATOR - MARCHÉ A VIDE

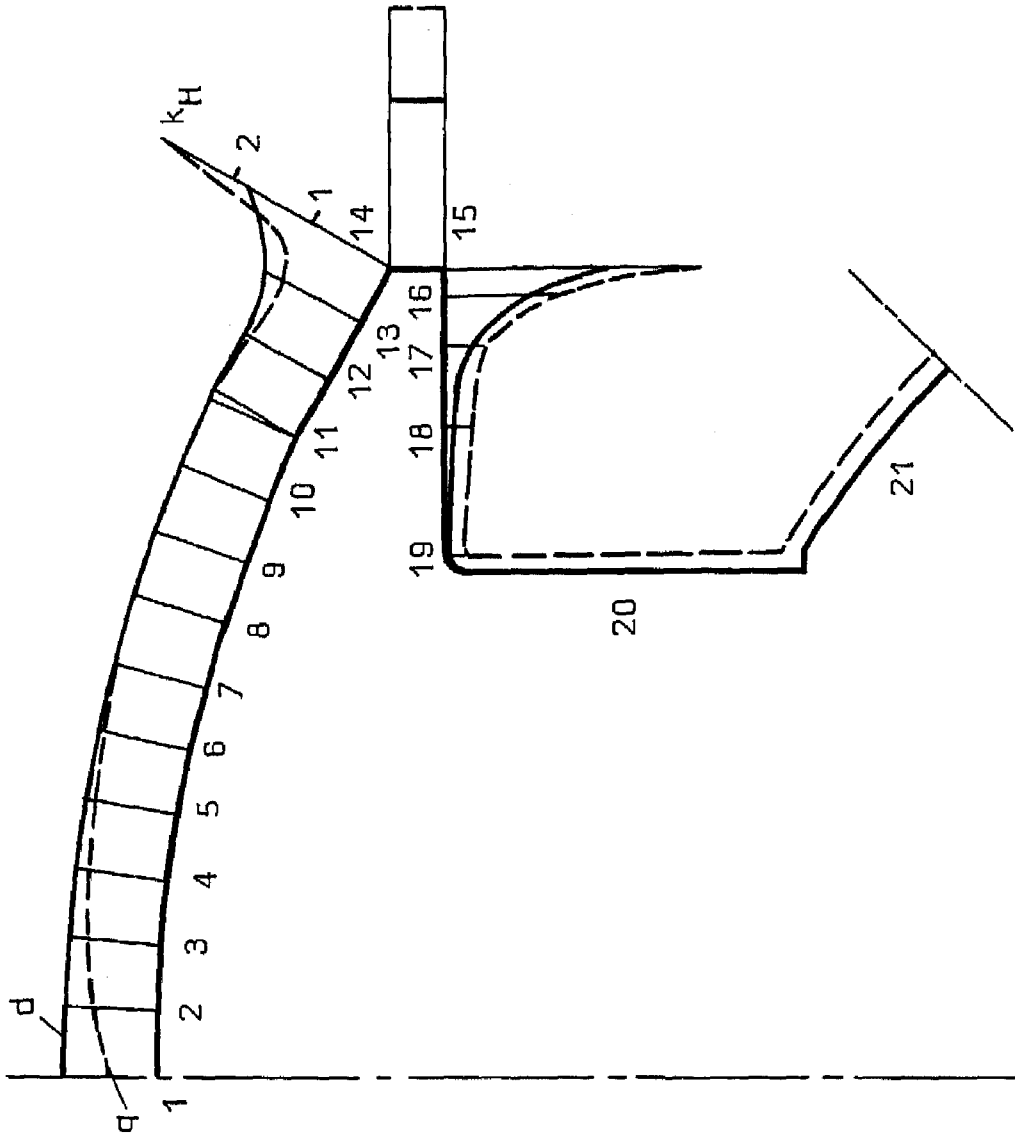


Fig. 1.27 - DISTRIBUTION DU FACTEUR DE CONCENTRATION  $k_H$   
 A LA SURFACE DU ROTOR

# Chapitre II - PÉNÉTRATION DANS UN MILIEU MAGNÉTIQUE MASSIF

## II.1 - INTRODUCTION

L'étude décrite au chapitre précédent a permis de déterminer la distribution du champ magnétique à la surface du rotor. Au cours du démarrage, sous l'action de ce champ, les pôles se comportent comme les conducteurs d'une cage d'écurie d'un moteur asynchrone où les barres sont remplacées par une nappe conductrice. Celle-ci est le siège de courants de Foucault induits par l'enroulement statorique.

L'analyse de ce phénomène peut se réduire, dans un premier stade, à l'étude d'un champ pulsant appliqué à un demi-espace magnétique infini. Ceci fera l'objet du présent chapitre. Le chapitre suivant liera la distribution locale du champ à la surface du rotor avec les phénomènes de pénétration, compte tenu de la géométrie des pôles.

Le comportement du fer massif dépendra en premier lieu de la courbe de saturation magnétique considérée.

Nous analyserons trois cas particuliers :

- la caractéristique magnétique à perméabilité constante,
- la caractéristique magnétique à induction constante,
- la caractéristique magnétique réelle du fer.

Dans un second stade, le phénomène d'hystérèse sera introduit dans les diverses méthodes.

Les résultats obtenus seront comparés, en conclusion, à certaines solutions présentées dans la littérature.

## II.2 - PENETRATION D'UN CHAMP ALTERNATIF DANS UN DEMI-ESPACE INFINI SATURABLE

### II.21 - Hypothèses - Définitions

L'étude de la pénétration du champ dans un milieu magnétique massif s'appuiera sur les hypothèses et les conditions aux limites suivantes :

- la résistivité  $\rho$  du matériau est constante,
  - la caractéristique magnétique est connue et la même à tous les niveaux,
  - le système de coordonnées de la fig. 2.1 est lié au milieu considéré,
  - un champ magnétique tangentiel uniforme est appliqué à la surface selon la direction  $y$ . Il est alternatif et caractérisé par une pulsation constante  $\omega$  et une amplitude  $\hat{H}_0$  :
- $$H|_{z=0} = \hat{H}_0 \sin \omega t \approx \hat{H}_0 \cdot e^{j\omega t}$$
- provisoirement, l'effet de l'hystérèse est négligé.

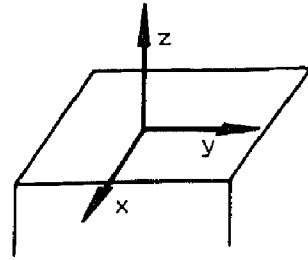


Fig. 2.1

Compte-tenu des hypothèses, les relations de Maxwell peuvent se simplifier. En particulier, partant des relations (1.1), (1.2) et (1.5), il est possible d'éliminer le champ électrique entre elles, d'où l'expression :

$$\vec{\nabla} \vec{H} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (2.1)$$

$$\frac{d^2 H_y}{dz^2} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial B_y}{\partial t} \quad (2.2)$$

Connaissant le champ magnétique et sa distribution, on peut en déduire les autres caractéristiques. Par (1.1) :

$$\vec{J} = \text{rot } \vec{H} \quad \text{d'où :} \quad (2.3)$$

$$J_x = - (\partial H_y / \partial z) \quad (2.3)$$

$$\vec{E} = - (d\phi' / dt) = \rho \cdot \vec{J} \quad (2.4)$$

avec  $\phi'$  = flux par unité de longueur au-dessous du niveau considéré.

On peut exprimer les pertes par unité de surface  $P'$  par le vecteur de Pointing :

$$\vec{P}' = \vec{E} \wedge \vec{H} \quad (\text{W/m}^2)$$

Les vecteurs  $\vec{E}$  et  $\vec{H}$  sont orthogonaux d'où :

$$P' = E_x \cdot H_y$$

$$H_y = \hat{H} \sin \omega t$$

$$E_x = \hat{E} \sin(\omega t + \phi_F)$$

$$P' = \frac{1}{2} \hat{E} \cdot \hat{H} \{ \cos \phi_F - \cos (2\omega t + \phi_F) \} \quad (2.5)$$

La valeur moyenne vaut alors :

$$P'_m = \frac{1}{2} \hat{E} \cdot \hat{H} \cdot \cos \phi_F \quad (2.6)$$

## II.22 - Milieu à perméabilité constante

La caractéristique d'un milieu ferro-magnétique présente généralement deux tronçons linéaires :

- le premier pour un champ faible (pas de saturation),
  - le second pour un champ très important, qui présente une pente  $\mu_0$ .
- Ces deux tronçons sont raccordés par le coude de saturation.

Cette partie de l'étude s'appliquera donc à ces deux cas limites. Dans ces conditions, l'équation (2.2) se transforme comme suit, étant sous-entendu que le champ est dirigé selon y :

$$\frac{d^2 H}{dz^2} = \frac{\mu}{\rho} \frac{dH}{dt}$$

Il est possible de décomposer le champ en deux fonctions séparées de z et t :

$$H = H)_z \cdot e^{j\omega t}$$

$$\frac{d^2 H}{dz^2} = j \frac{\omega \mu}{\rho} H \quad (2.7)$$

$$\frac{d^2 H)_z}{dz^2} = j \frac{\omega \mu}{\rho} H)_z = \alpha^2 \cdot H)_z$$

$$H)_z = A_1 \cdot e^{\alpha z} + A_2 \cdot e^{-\alpha z}$$

$$\text{Pour } z = -\infty, \quad H)_z = 0, \quad \text{d'où } A_2 = 0$$

$$\text{Pour } z = 0, \quad H)_z = \hat{H}_0, \quad \text{d'où } A_1 = \hat{H}_0$$

$$H = \hat{H}_0 \cdot e^{\alpha z} + j\omega t$$

$$\text{Mais } \alpha = \sqrt{j \frac{\omega \mu}{\rho}} = (1 + j) \sqrt{\frac{\omega \mu}{2\rho}} = (1 + j) \beta \quad (2.8)$$

$$H = \hat{H}_0 \cdot e^{\beta z} \cdot e^{j(\omega t + \beta z)} \quad (2.9)$$

L'amplitude du champ décroît exponentiellement avec la profondeur. On définit une profondeur de pénétration  $\xi$  correspondant à un amortissement e du champ, d'où :

$$- \xi \beta = -1$$

$$\xi = \frac{1}{\beta} = \sqrt{\frac{2\rho}{\omega \mu}} \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} \text{Par (2.3) : } J_x &= - (1 + j) \cdot \beta \cdot \hat{H}_0 \cdot e^{j(\omega t + \beta z)} \cdot e^{\beta z} \\ &= - \sqrt{2} \cdot \beta \cdot \hat{H}_0 \cdot e^{j(\omega t + \beta z + \pi/4)} \cdot e^{\beta z} \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$E_x = - \sqrt{2} \cdot \beta \cdot \rho \cdot \hat{H}_0 \cdot e^{j(\omega t + \beta z + \pi/4)} \cdot e^{\beta z} \quad (2.12)$$

$$\phi_F = \pi/4 \quad (2.13)$$

$$\text{Par (2.4) : } \Phi' = \int_0^t -E_x \cdot dt = \sqrt{2} \frac{\beta \rho}{\omega} \hat{H}_0 \cdot e^{j(\omega t + \beta z - \pi/4)} \cdot e^{\beta z}$$

$$\begin{aligned} \text{Par (2.6) : } P'_m &= \frac{1}{2} \sqrt{2} \cdot \beta \cdot \rho \cdot \hat{H}_0^2 \cdot \cos(\pi/4) \\ &= \frac{1}{2} \beta \cdot \rho \cdot \hat{H}_0^2 = \frac{1}{2\sqrt{2}} \hat{H}_0 \sqrt{\hat{H}_0 \cdot \hat{B}_0 \cdot \omega \cdot \rho} \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$\text{avec : } \hat{B}_0 = \mu \cdot \hat{H}_0$$

## II.23 - Etude graphique

Pour des raisons pratiques, nous définirons une nouvelle origine de l'axe z qui sera précisée ultérieurement.

Soit  $B_1 = {}^1B(H)$  le fondamental de la fonction  $B(H)$  pour une variation sinusoïdale de H.

Dans ces conditions, les relations de Maxwell peuvent s'écrire :

$$\begin{cases} \vec{\Phi}' = \int_z \vec{B}_1 \cdot dz \\ \vec{E} = -j\omega \vec{\Phi}' \\ d\vec{H}/dz = -\vec{E}/\rho \end{cases}$$

En passant aux accroissements finis et en éliminant E, il vient :

$$\begin{cases} \Delta \vec{\Phi}' = \vec{B}_1 \cdot \Delta z \\ \Delta \vec{H} = j \frac{\omega}{\rho} \vec{\Phi}' \cdot \Delta z \end{cases} \quad (2.15)$$

On constate que l'accroissement  $\Delta \vec{\Phi}'$  de  $\vec{\Phi}'$  en passant du niveau z au niveau z + Δz est en phase avec l'induction  $\vec{B}_1$ , donc avec  $\vec{H}$ . L'accroissement  $\Delta \vec{H}$  de  $\vec{H}$ , dans les mêmes conditions, est en avance de  $\pi/2$  sur le vecteur  $\vec{\Phi}'$ .

En définissant l'angle  $\psi = \pi/2 - \phi_F$ , caractérisant le déphasage entre les grandeurs  $\vec{H}$  et  $\vec{\Phi}'$ , on peut tracer le diagramme représentatif de l'expression (2.15) (fig. 2.2).

La caractéristique ferro-magnétique présente un premier tronçon linéaire. On peut donc connaître, par la méthode du paragraphe précédent, la répartition du champ au-dessous de l'ordon-

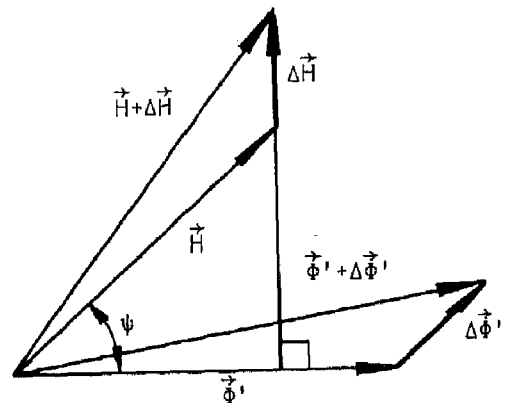


Fig. 2.2

nées correspondant à la limite de linéarité. En choisissant l'origine de l'axe z en ce point, on peut déterminer pas à pas les diverses caractéristiques à chaque niveau, ainsi que leur angle de phase, par accroissements successifs. La cote  $z = \xi$  telle que  $\hat{H} = \hat{H}_0$  fixe la profondeur de l'origine. Nous définirons cette grandeur comme étant la profondeur limite, caractéristique d'un milieu fortement saturé.

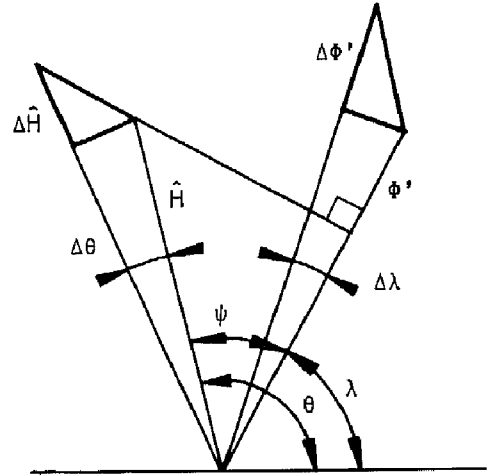
Cette méthode graphique (2.1) permet de donner une nouvelle expression analytique du phénomène.

Les triangles d'accroissement de la fig. 2.3 permettant d'écrire les relations suivantes :

$$\begin{cases} \Delta \hat{H} = \frac{\omega}{\rho} \hat{\phi}' \sin \psi \cdot \Delta z \\ \hat{H} \cdot \Delta \theta = \frac{\omega}{\rho} \hat{\phi}' \cos \psi \cdot \Delta z \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta \hat{\phi}' = B_1 \cos \psi \cdot \Delta z \\ \hat{\phi}' \cdot \Delta \lambda = B_1 \sin \psi \cdot \Delta z \\ \lambda = \theta - \psi \end{cases}$$

Fig. 2.3



En passant aux infiniment petits :

$$\begin{cases} \frac{d\hat{H}}{dz} = \frac{\omega}{\rho} \hat{\phi}' \sin \psi \\ \hat{H} \frac{d\theta}{dz} = \frac{\omega}{\rho} \hat{\phi}' \cos \psi \end{cases} \quad (2.16)$$

$$\begin{cases} d\hat{\phi}'/dz = B_1 \cos \psi \\ \hat{\phi}' (d\lambda/dz) = B_1 \sin \psi \end{cases} \quad (2.17)$$

En dérivant les relations (2.16) et en éliminant  $\hat{\phi}'$ ,  $\lambda$  et  $\psi$  par les expressions (2.17), on obtient :

$$\begin{cases} \frac{d^2 \hat{H}}{dz^2} = \hat{H} \left( \frac{d\theta}{dz} \right)^2 \\ \frac{1}{\hat{H}} \frac{d}{dz} \left( \hat{H}^2 \frac{d\theta}{dz} \right) = \frac{\omega}{\rho} B_1 \end{cases} \quad (2.18)$$

Il est à remarquer que, dans les expressions qui précèdent, les grandeurs  $\hat{H}$  et  $\hat{\phi}'$  représentent des modules alors que  $\theta$  et  $\lambda$  caractérisent les angles de phase relatifs aux vecteurs à l'abscisse  $z = 0$ .

Une fois déterminé le module du champ  $H$  en fonction de  $z$ , il est possible d'en déduire les autres caractéristiques. Par (2.16) :

$$\hat{\phi}' = \frac{\rho}{\omega} \left( \hat{H} \cdot \frac{d^2 \hat{H}}{dz^2} + \left( \frac{d\hat{H}}{dz} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.19)$$

$$\sin \psi = \frac{d\hat{H}}{dz} / \left( \hat{H} \frac{d^2 \hat{H}}{dz^2} + \left( \frac{d\hat{H}}{dz} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.20)$$

Dans le cas particulier de la perméabilité constante, on peut vérifier que, pour  $B_1 = \mu H$ , la solution du système (2.18) conduit aux résultats du paragraphe II.22.

## II.24 - Milieu à induction constante

En négligeant la pente égale à la perméabilité du vide, un milieu ferromagnétique fortement saturé peut être caractérisé par une induction constante (fig. 2.4). On a donc  $B_1(H) = B_1$ .

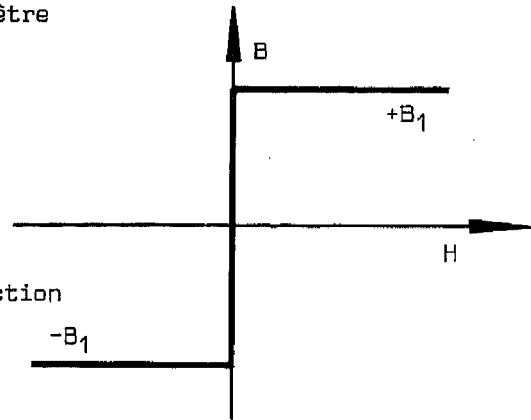


Fig. 2.4

Il est possible de résoudre le système (2.18) dans ce cas. L'allure du diagramme résultant de la construction graphique suggère une solution particulière de la forme suivante :

$$\hat{H} = a.e^{\sqrt{2}.\theta} \quad (2.21)$$

$$\ln \hat{H} = \sqrt{2}\theta + \ln a$$

$$\theta = 1/\sqrt{2} (\ln \hat{H} - \ln a)$$

$$\frac{d\theta}{dz} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{d\hat{H}}{dz} \frac{1}{\hat{H}}$$

Le système (2.18) devient :

$$\begin{cases} \frac{d^2\hat{H}}{dz^2} - \frac{1}{2\hat{H}} \left(\frac{d\hat{H}}{dz}\right)^2 = 0 \\ \frac{1}{\hat{H}} \left(\frac{d\hat{H}}{dz}\right)^2 + \frac{d^2\hat{H}}{dz^2} = \sqrt{2} \frac{\omega}{\rho} B_1 \end{cases} \quad (2.22)$$

En adoptant pour  $\hat{H}$  une solution de la forme  $\hat{H} = b.(z+c)^2$ , la première équation de (2.22) est vérifiée. La seconde équation permet de déterminer la valeur de b :

$$b = \frac{\omega}{\rho} B_1 \sqrt{2}/6$$

Nous admettrons l'origine de l'axe z au niveau où le champ s'annule, d'où :

$$c = 0 \quad \text{et} \quad \hat{H} = \frac{\omega\sqrt{2}}{\rho} B_1.z^2$$

Par (2.21) :

$$\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln (\hat{H}/a) = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln (z^2/a') = \sqrt{2} \ln (z/a')$$



$$H = \hat{H}_0 e^{j(\omega t + \theta)} = \frac{\sqrt{2}}{6} \frac{\omega}{\rho} B_1 \cdot z^2 \cdot e^{j(\omega t + \sqrt{2} \ln z/a')}$$

Si le module du champ en surface vaut  $\hat{H}_0$ , la profondeur limite  $\xi$ , correspondant à un champ nul, est donnée par l'expression suivante :

$$\hat{H}_0 = \frac{\sqrt{2}}{6} \frac{\omega}{\rho} B_1 \cdot \xi^2$$

$$\xi = \sqrt{\frac{\hat{H}_0 \cdot \rho}{\sqrt{2} \omega \cdot B_1}} \quad (2.23)$$

De plus il est possible de choisir comme phase de référence celle du champ en surface, d'où :

$$a' = \xi$$

$$H = \hat{H}_0 \frac{z^2}{\xi^2} e^{j(\omega t + \sqrt{2} \ln z/\xi)} \quad (2.24)$$

La relation (2.19) donne :

$$\hat{\Phi}' = B_1 \cdot z / \sqrt{3}$$

Et par (2.20) :

$$\sin \psi = \cos \phi_F = \sqrt{2/3} = 0,8165 \quad (2.25)$$

Cet angle est constant. On a donc :

$$\Phi' = \frac{B_1}{\sqrt{3}} z \cdot e^{j(\omega t + \sqrt{2} \cdot \ln z/\xi - \psi)} \quad (2.26)$$

Par (2.3) et (2.4) :

$$J = - \frac{dH}{dz} = - \frac{\hat{H}_0}{\xi^2} \sqrt{6} z \cdot e^{j(\omega t + \sqrt{2} \ln z/\xi + \phi_F)} \quad (2.27)$$

$$E = \frac{-\rho \hat{H}_0}{\xi^2} \sqrt{6} z \cdot e^{j(\omega t + \sqrt{2} \ln z/\xi + \phi_F)} \quad (2.28)$$

On remarque que l'amortissement du champ magnétique est parabolique, alors que celui du flux, du champ électrique et de la densité de courant est linéaire.

Par (2.6), au niveau  $z$  :

$$P'_m = \frac{1}{2} \hat{E} \cdot \hat{H} \cos \phi_F = \frac{\rho \cdot \hat{H}_0^2 \cdot z^3}{\xi^4} \quad (2.29)$$

Et en surface :

$$P'_m = \frac{\rho \cdot \hat{H}_0^2}{\xi} = \hat{H}_0 \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{6} \rho \cdot \omega \cdot B_1 \cdot \hat{H}_0} \quad (2.30)$$

## II.25 - Milieu à caractéristique magnétique quelconque

La méthode que nous proposons pour analyser un milieu réel consiste à traduire par une méthode numérique précise la détermination graphique des

diverses grandeurs électro-magnétiques décrite au paragraphe II.23.

Nous projeterons tout d'abord le vecteur  $\vec{H}$  sur un système de coordonnées  $Y, Z$  et le vecteur  $\vec{\Phi}'$  sur le même support repéré par les coordonnées  $U$  et  $V$  (fig. 2.5).

Par (2.15), on peut écrire :

$$dY = -\frac{\omega}{\rho} \vec{\Phi}' \cdot dz \cdot \sin \lambda$$

$$\sin \lambda = V/\hat{H}$$

$$dU = B_1 \cdot dz \cdot \cos \theta$$

$$\cos \theta = Y/\hat{H} = Y/\sqrt{Y^2 + Z^2}$$

d'où le système différentiel linéaire :

$$\left\{ \begin{array}{l} dY = -\frac{\omega}{\rho} V \cdot dz \\ dZ = \frac{\omega}{\rho} U \cdot dz \\ dU = \frac{Y}{\sqrt{Y^2 + Z^2}} B_1 \cdot dz \\ dV = \frac{Z}{\sqrt{Y^2 + Z^2}} B_1 \cdot dz \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dY}{dz} = -\frac{\omega}{\rho} V \\ \frac{dZ}{dz} = \frac{\omega}{\rho} U \\ \frac{dU}{dz} = B_1 \frac{Y}{\sqrt{Y^2 + Z^2}} \\ \frac{dV}{dz} = B_1 \frac{Z}{\sqrt{Y^2 + Z^2}} \end{array} \right. \quad (2.31)$$

Par ailleurs :

$$\psi = \theta - \lambda = \text{Arctg} [Z/Y] - \text{Arctg} [V/U] \quad (2.32)$$

En définissant un accroissement  $\Delta z$  et des conditions initiales pour  $z = 0$ , il est possible de calculer pas à pas les diverses caractéristiques électromagnétiques en remontant vers la surface. Une méthode particulièrement adaptée au calcul numérique et qui permet d'augmenter la précision est l'intégration par la méthode de Runge-Kutta.

Soit :  $\|dF(x)/dx\| = \|A\| \cdot \|F(x)\| + \|B(x)\|$  l'expression matricielle d'un système différentiel du premier ordre. La méthode consiste à définir quatre matrices d'accroissements :

$$\begin{aligned} \|K_1\| &= \Delta x \cdot (\|A\| \cdot \|F(x)\| + \|B(x)\|) \\ \|K_2\| &= \Delta x \cdot (\|A\| \cdot \{\|F(x)\| + \|K_1/2\|\} + \|B(x+\Delta x/2)\|) \\ \|K_3\| &= \Delta x \cdot (\|A\| \cdot \{\|F(x)\| + \|K_2/2\|\} + \|B(x+\Delta x/2)\|) \\ \|K_4\| &= \Delta x \cdot (\|A\| \cdot \{\|F(x)\| + \|K_3\|\} + \|B(x+\Delta x)\|) \end{aligned}$$

L'accroissement moyen à introduire devient alors :

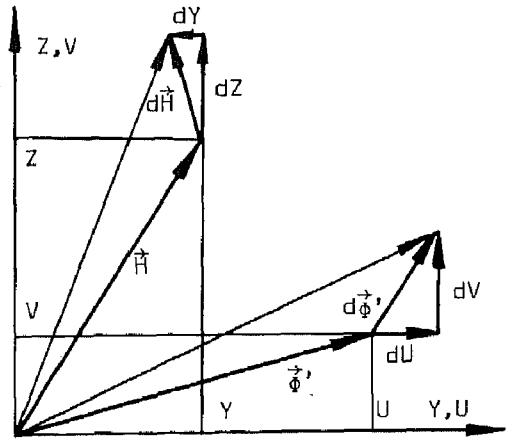


Fig. 2.5

$$\begin{aligned}
 ||K|| &= (||K_1|| + 2(||K_2|| + ||K_3||) + ||K_4||) / 6 \text{ et} \\
 ||F(x+\Delta x)|| &= ||F(x)|| + ||K||
 \end{aligned}
 \tag{2.33}$$

A chaque pas, on peut définir les modules des principales grandeurs comme suit :

$$\begin{cases}
 \hat{H} = \sqrt{V^2 + Z^2} \\
 \hat{\phi}' = \sqrt{U^2 + V^2} \\
 \hat{E} = \omega \cdot \hat{\phi}' \\
 \hat{J} = \hat{E} / \rho \\
 P'_m = \frac{1}{2} \hat{E} \cdot \hat{H} \cdot \sin \psi
 \end{cases}
 \tag{2.34}$$

Les conditions initiales pour  $z = 0$  sont données par les expressions (2.11) à (2.14) pour la valeur du champ  $\hat{H}_1$  à la limite de la partie rectiligne de la caractéristique magnétique, soit :

$$\begin{cases}
 \psi_1 = \pi/4 \\
 Y_1 = Z_1 = \hat{H}_1 / \sqrt{2} \\
 U_1 = \hat{\phi}'_1 = \sqrt{2} \frac{\beta_0}{\omega} \hat{H}_1 \\
 V_1 = 0
 \end{cases}
 \tag{2.35}$$

## II.3 - EFFET DE L'HYSTERESE

### II.31 - Angle d'hystérèse

L'hystérèse introduit un déphasage entre le champ magnétique et l'induction. Il s'en suit une modification de la distribution des diverses grandeurs dans un milieu saturable.

Cet effet est particulièrement marqué lorsque le champ est faible (domaine linéaire de la caractéristique magnétique). Il peut généralement être négligé pour une saturation importante.

Si l'on soumet un milieu présentant une hystérèse à un champ magnétique pulsant, on peut écrire :

$$\begin{aligned}
 H &= \hat{H}_0 \cdot e^{j\omega t} \\
 B &= 1_B \cdot e^{j(\omega t - \sigma)} + 3_B \cdot e^{j(3\omega t - \sigma)} + \dots
 \end{aligned}$$

L'angle  $\sigma$  caractérise l'effet de l'hystérèse. En négligeant les harmoniques, on peut écrire pour un milieu à perméabilité constante :

$$\underline{\mu} = \underline{B} / \underline{H} = \mu \cdot e^{-j\sigma}
 \tag{2.36}$$

Dans ces conditions, la caractéristique magnétique devient elliptique.

En effet :

$$H = \hat{H}_0 \cdot \sin \omega t$$

$$B = {}^1B \cdot \sin(\omega t - \sigma) = {}^1B \cdot (\sin \omega t \cos \sigma - \cos \omega t \sin \sigma)$$

$$= {}^1B \cdot \left( \frac{H}{\hat{H}_0} \cos \sigma - \left\{ 1 - \left( \frac{H}{\hat{H}_0} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \sin \sigma \right)$$

Mais  ${}^1B/\hat{H}_0 = \mu$  d'où :

$$\mu^2 H^2 + B^2 - 2\mu H B \cos \sigma = {}^1B^2 \sin^2 \sigma$$

(Fig. 2.6). Il s'agit bien de l'équation caractéristique d'une ellipse en coordonnées cartésiennes. L'angle  $\sigma$  n'est pas constant; il est fonction de l'amplitude maximale du champ. Il diminue fortement dès qu'on dépasse le coude de saturation.

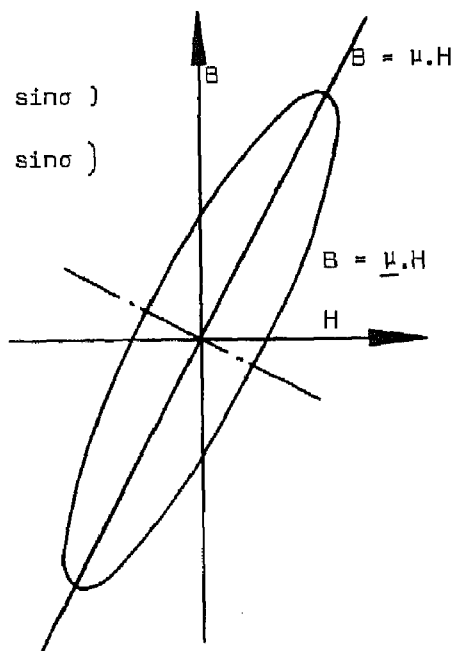


Fig. 2.6

### II.32 - Milieu à perméabilité constante

Dans ce cas, compte tenu de la relation (2.36), l'équation différentielle (2.2) devient :

$$\frac{d^2 H}{dz^2} = j \frac{\omega \mu}{\rho} e^{-j\sigma} H = \alpha'^2 \cdot H$$

Ceci conduit à la solution :

$$H = \hat{H}_0 \cdot e^{\alpha' z + j\omega t} \quad (2.37)$$

$$\alpha' = (1 + j) \sqrt{\frac{\mu \omega}{2\rho}} e^{-j\sigma/2} = (1 + j) \cdot \beta \cdot e^{-j\sigma/2}$$

D'après (2.3) :

$$J = - \frac{\partial H}{\partial z} = - (1 + j) \cdot \beta \cdot e^{-j\sigma/2} \hat{H}_0 \cdot e^{\alpha' z + j\omega t}$$

$$= - \sqrt{2} \cdot \beta \cdot \hat{H}_0 \cdot e^{\alpha' z + j(\omega t + \pi/4 - \sigma/2)}$$

$$E = \rho \cdot J = - \sqrt{2} \cdot \beta \cdot \rho \cdot \hat{H}_0 \cdot e^{\alpha' z + j(\omega t + \pi/4 - \sigma/2)}$$

$$\phi' = \sqrt{2} \frac{\beta \rho}{\omega} \hat{H}_0 \cdot e^{\alpha' z + j(\omega t - \pi/4 - \sigma/2)}$$

L'expression (2.6) permet de déterminer les pertes moyennes en surface :

$$P'_m = \frac{1}{2} \hat{E} \cdot \hat{H} \cdot \cos \phi_F = \frac{\sqrt{2}}{2} \beta \cdot \rho \cdot \hat{H}_0^2 \cos(\pi/4 - \sigma/2) \quad (2.38)$$

$$\cos \phi_F = \cos(\pi/4 - \sigma/2)$$

Ainsi, l'hystérèse entraîne une majoration des pertes par courant de Fou-

cault seules dans le rapport :

$$\frac{P'_{mF+H}}{P'_{mF}} = \frac{\cos(\pi/4 - \sigma/2)}{\cos(\pi/4)} = \cos\sigma/2 + \sin\sigma/2 \quad (2.39)$$

### II.33-Méthode graphique généralisée

Nous avons vu que l'angle d'hystérèse varie dans de grandes proportions avec l'amplitude du champ dès qu'on atteint le domaine de saturation. Pour pouvoir introduire ce phénomène, il faut donc connaître la fonction  $\sigma(B)$  ou  $\sigma(H)$ .

L'hystérèse entraîne un retard de l'induction par rapport au champ magnétique, donc un retard égal de l'accroissement de flux. Ainsi la fig. 2.5 sera modifiée conformément à la fig. 2.7. De ce fait, le système (2.31) se transformera comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dY}{dz} = -\frac{\omega}{p} V \\ \frac{dZ}{dz} = \frac{\omega}{p} U \\ \frac{dU}{dz} = B_1 \cdot \cos\left[ \text{Arccos} \frac{Y}{\sqrt{Y^2 + Z^2}} - \sigma(H) \right] \\ \frac{dV}{dz} = B_1 \cdot \cos\left[ \text{Arccos} \frac{Z}{\sqrt{Y^2 + Z^2}} + \sigma(H) \right] \end{array} \right. \quad (2.40)$$

Avec :  $\psi = \text{Arctg } Z/Y - \text{Arctg } V/U$

Les nouvelles conditions initiales s'écriront :

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi_1 = \pi/4 + \sigma_1/2 \\ Y_1 = \hat{H}_1 \cdot \cos\psi_1 \\ Z_1 = \hat{H}_1 \cdot \sin\psi_1 \\ U_1 = \hat{\Phi}'_1 \\ V_1 = 0 \end{array} \right. \quad (2.41)$$

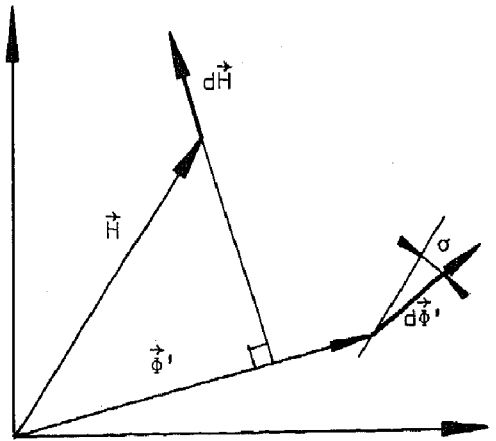


Fig. 2.7

## II.4 - APPLICATION

### II.41-Méthode graphique généralisée

Nous appliquerons la méthode générale décrite aux paragraphes II.25 et

II.33 à un acier coulé du type utilisé pour la réalisation des pôles massifs.

La caractéristique magnétique du matériau considéré ainsi que le fondamental  $B_1(H)$  de celle-ci sont donnés par la fig. 2.8. Une bonne approximation de cette dernière courbe, au-delà de la partie rectiligne, peut être donnée par la relation suivante :

$$B_1 = \frac{\mu_0 \hat{H}^2 + a \hat{H} + c}{\hat{H} + d} \quad \text{avec dans le cas particulier :}$$

$$a = 2,55 \quad ; \quad c = - 2 \cdot 10^2 \quad ; \quad d = 2,21 \cdot 10^3$$

La fonction caractéristique de l'hystérèse pour ce même matériau,  $\sigma(B_1)$  est donnée par la fig. 2.9. On peut l'approcher avec une précision suffisante par les fonctions suivantes :

$$\sigma = 0,503 \cdot \frac{-2,29 B_1 + 4,49}{B_1^2 - 2,29 B_1 + 4,49} \quad (\text{rad}) \quad \text{pour } B_1 \leq 1,75 \quad (\text{T})$$

$$\sigma = \frac{0,0514}{B_1 - 1} \quad (\text{rad}) \quad \text{pour } B_1 > 1,75 \quad (\text{T})$$

Le point limite de proportionnalité de la caractéristique magnétique correspond aux valeurs suivantes :

$$\hat{H}_1 = 2,1 \cdot 10^3 \quad (\text{A/m}) \quad B_1 = 1,2 \quad (\text{T})$$

Les relations (2.41) et (2.10) à (2.13) permettent de déterminer les conditions initiales d'intégration, compte tenu d'une résistivité moyenne de  $0,32 \cdot 10^{-6} \Omega\text{m}$  (celle-ci représente la valeur correspondant à un échauffement moyen du fer) :

$$\begin{cases} Y_1 = 1,263 \cdot 10^3 \\ Z_1 = 1,68 \cdot 10^3 \\ U_1 = 1,8 \cdot 10^{-3} / \sqrt{s} \\ V_1 = 0 \end{cases}$$

$$\sin \psi_1 = \cos \phi_{F1} = 0,799$$

Les fig. 2.10, 2.11, 2.12 et 2.13 représentent respectivement les grandeurs  $\xi$ ,  $J$ ,  $P'_m$  et  $\cos \phi_f (H)$  pour des valeurs de glissement de 1-0,1 et 0,01 relativement à une fréquence de 50 Hz. L'intégration, effectuée par une calculatrice numérique avec un pas de 2 mm, conduit à un résultat suffisamment précis. En effet, l'écart maximum relevé par rapport à une intégration effectuée avec un pas dix fois plus faible n'excède pas  $10^{-4}$  en valeur relative.

Le facteur de puissance, dont la valeur initiale de 0,799 passe par un

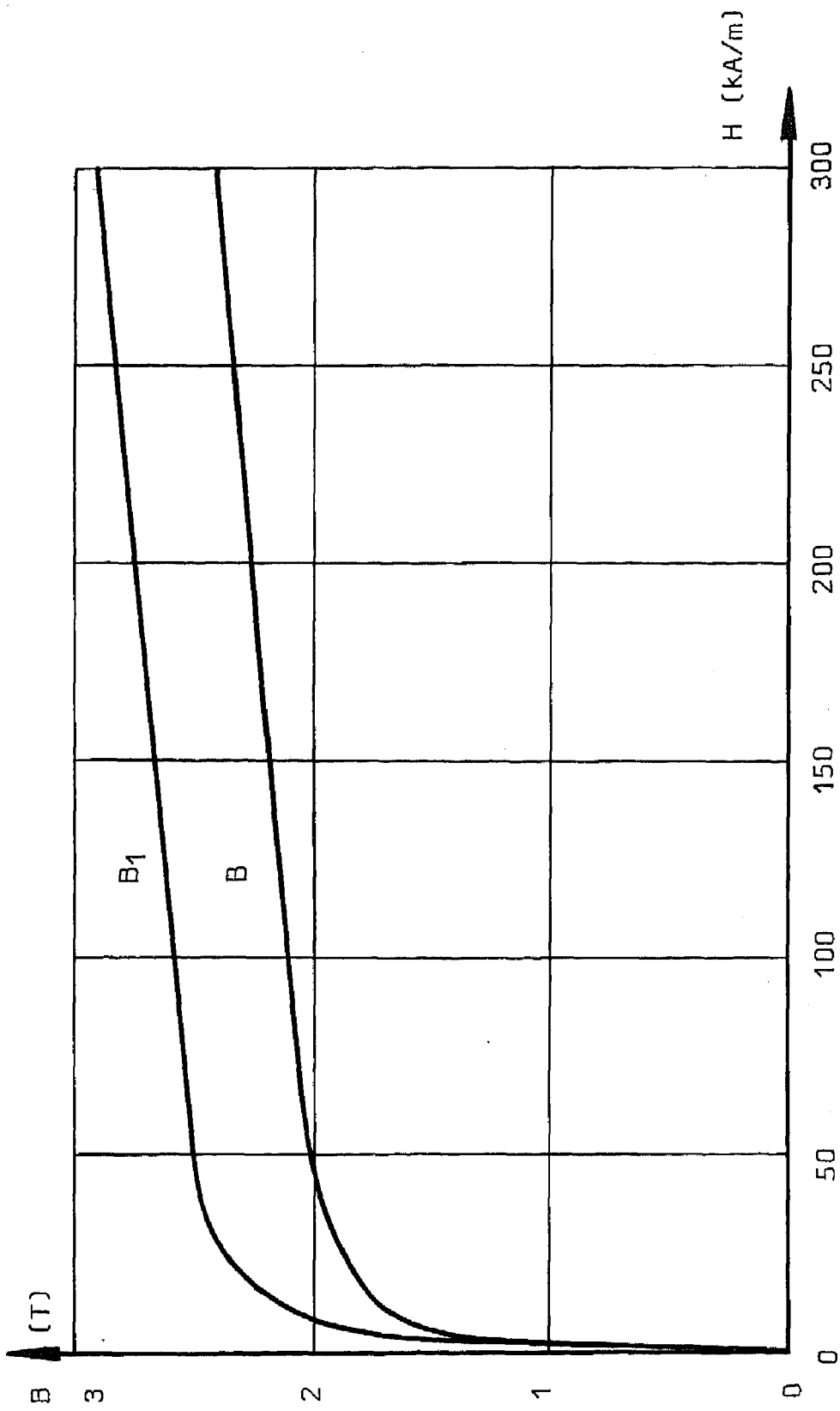


Fig. 2.8 - CARACTERISTIQUE MAGNETIQUE

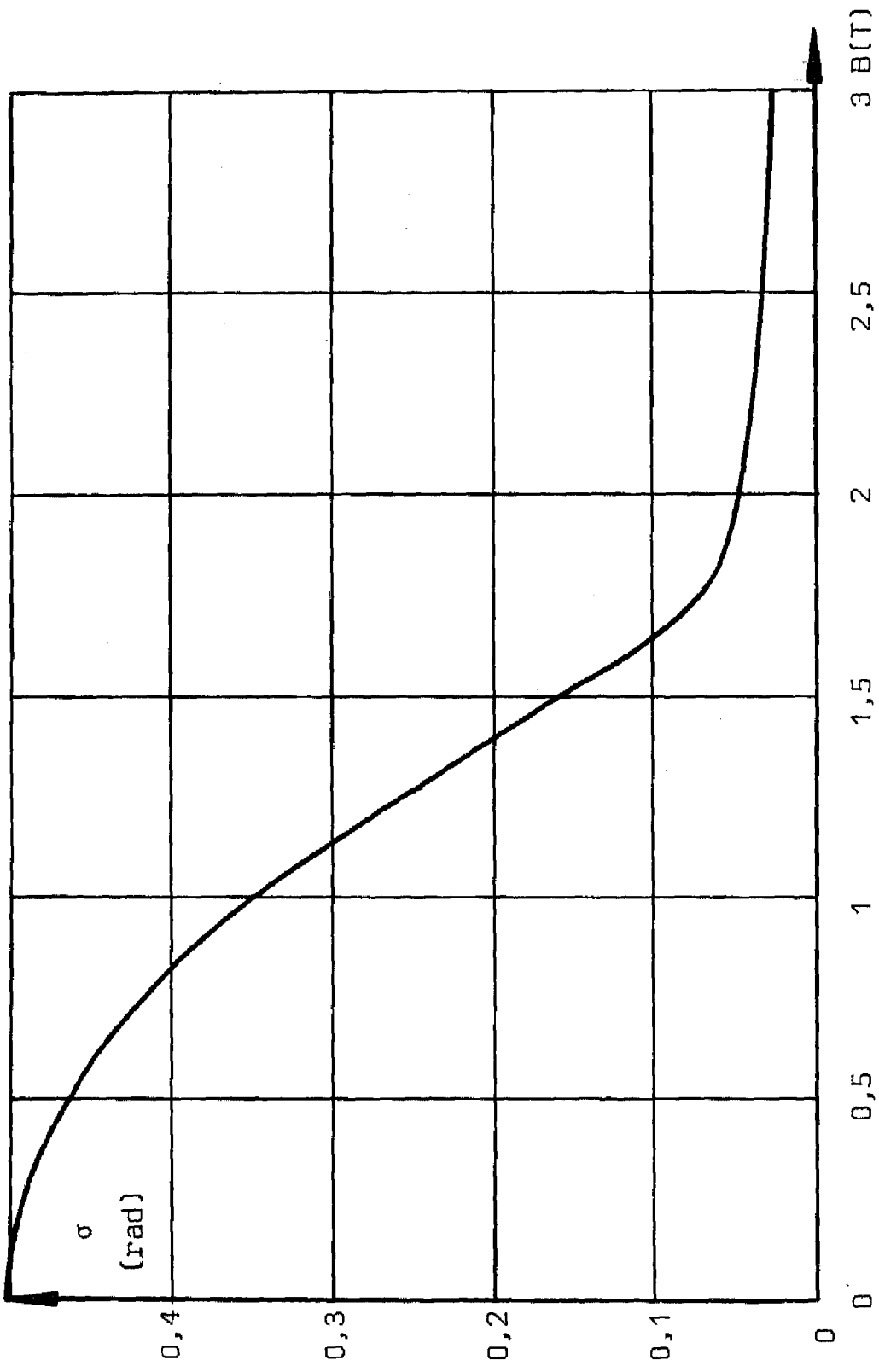


Fig. 2.9 - ANGLE D'HYSTERESE



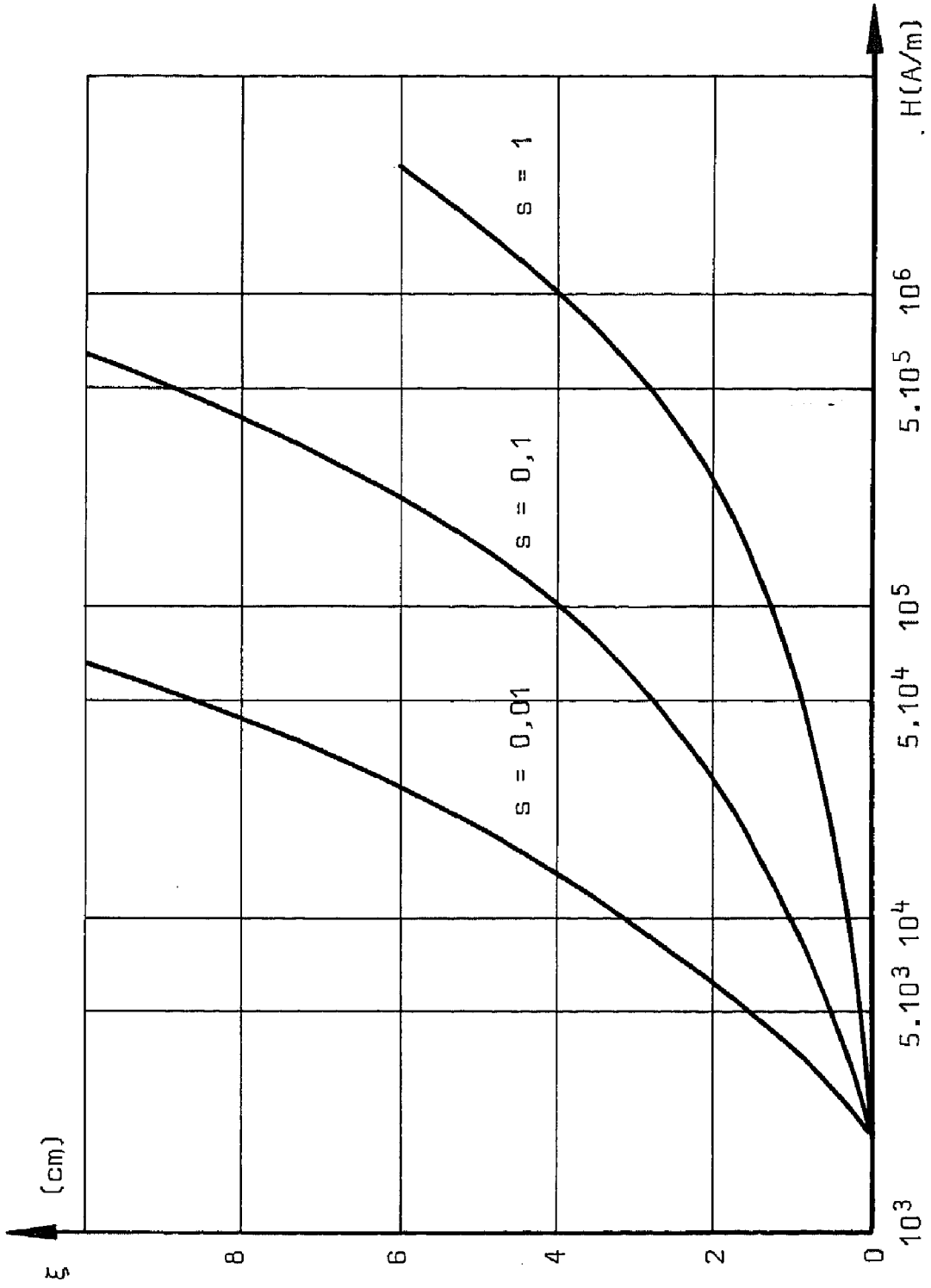


Fig. 2.10 - PROFONDEUR LIMITE

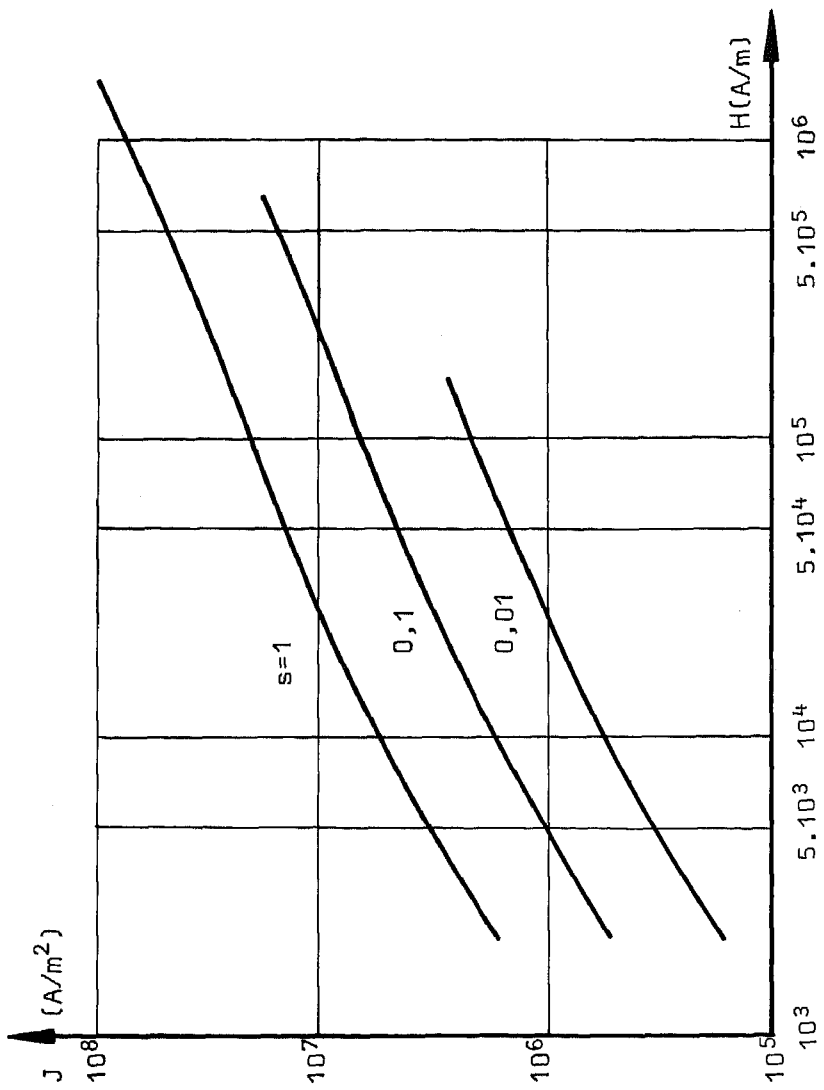


Fig. 2.11 - DENSITE DE COURANT EN SURFACE

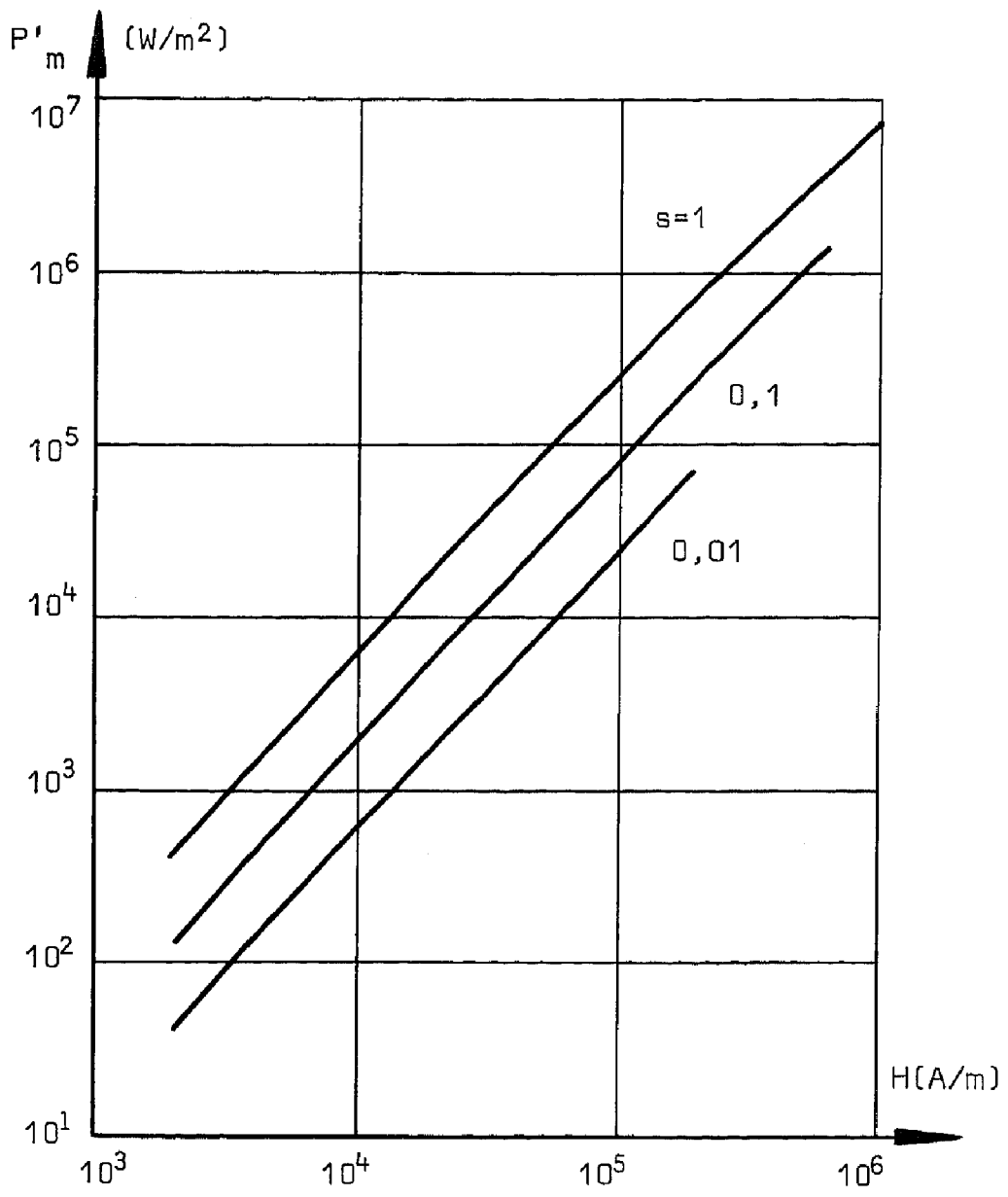


Fig. 2.12 - PERTES SPECIFIQUES

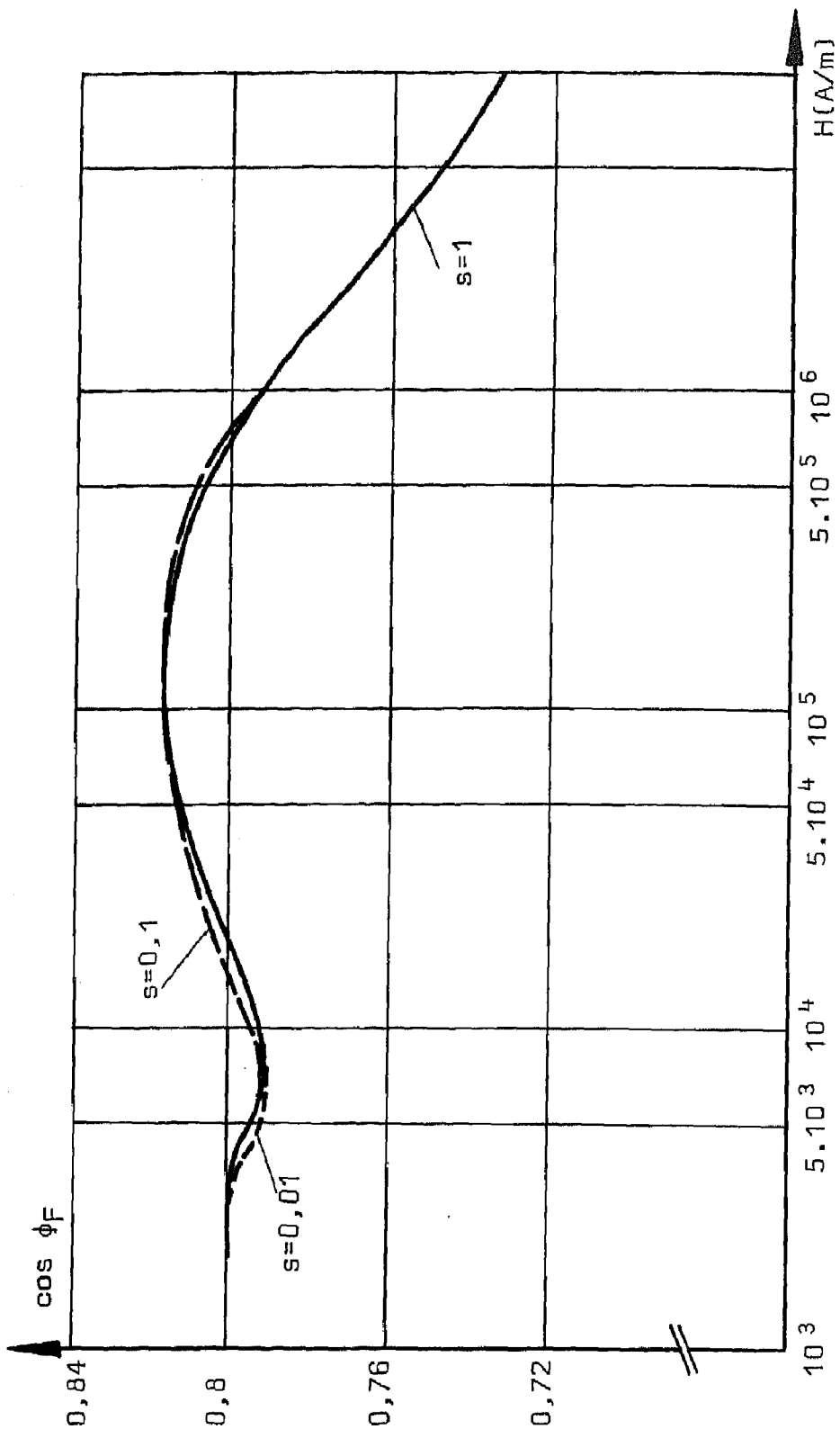


Fig. 2.13 - FACTEUR DE PUISSANCE

minimum de 0,790, puis par un maximum de 0,817 tend ensuite asymptotiquement vers la valeur de  $\sqrt{2}/2$ . Cependant, dans le domaine usuel d'utilisation au cours du démarrage, cette valeur se maintient entre 0,8 et 0,817. En conséquence, nous adopterons généralement une valeur moyenne de 0,81 par la suite.

#### II.42 - Commentaires

Il nous a paru intéressant de comparer entre eux les résultats des trois méthodes exposées (perméabilité constante, induction constante et méthode numérique d'intégration) et d'une quatrième fréquemment citée et décrite, en particulier dans les références (2.2) et (2.3). Cette dernière, qui repose sur l'hypothèse d'un milieu à induction constante, néglige cependant le déphasage lié à la pénétration (régime transitoire).

Nous comparerons les diverses caractéristiques électro-magnétiques en valeur relative, en utilisant les grandeurs suivantes comme références:

- pour la profondeur de pénétration et la profondeur limite:  $\xi' = \xi \cdot \beta$
- pour la densité de courant en surface:  $\hat{J}' = \hat{J} / \hat{J}_0$  avec  $\hat{J}_0 = \hat{H}_0 \cdot \beta$
- pour les pertes spécifiques:  $p'_m = P'_m / P'_0$  avec  $P'_0 = \hat{H}_0 \sqrt{\hat{H}_0 B_0 \omega \rho}$
- pour le champ électrique en surface:  $\hat{E}' = \hat{E} / \hat{E}_0$  avec  $\hat{E}_0 = \hat{H}_0 \cdot \rho \cdot \beta$
- pour le flux spécifique:  $\hat{\Phi}'_r = \hat{\Phi}' / \hat{\Phi}'_0$ ;  $\hat{H}_0 \cdot \rho \cdot \beta / \omega = \hat{\Phi}'_0$

Pour la méthode numérique d'intégration, ces valeurs relatives ne sont pas constantes. Nous les avons données pour trois saturations différentes: 2; 2,5 et 3 (T). On obtient ainsi le tableau suivant :

Méthode	$\mu = \text{cste}$	$B = \text{cste}$	Réf(2.3)	Caract. réelle		
				2(T)	2,5(T)	3(T)
Caractéristique						
$\xi'$	1	1,29	1	1,23	1,44	1,56
$P'_m$	0,354	0,548	0,6	0,550	0,534	0,506
$\cos \phi_F$	0,707	0,817	0,894	0,811	0,811	0,801
$\hat{J}', \hat{E}', \hat{\Phi}'_r$	1,414	1,895	1,90	1,915	1,86	1,79

Ce tableau montre clairement l'ordre de grandeur de l'erreur commise en adoptant telle ou telle méthode simplifiée par rapport à la méthode proposée qui introduit la caractéristique magnétique réelle. Cet écart pourra être particulièrement important sur les pertes.

# Chapitre III - EFFETS D'EXTRÉMITÉ ET DE SUPERPOSITION

## III.1 - INTRODUCTION

Ce chapitre exposera plus particulièrement deux phénomènes liés à la géométrie du rotor. Au chapitre précédent, nous avons étudié la pénétration du champ magnétique dans le fer massif, sous réserve d'une distribution uniforme et d'une surface infinie. La présence de pôles saillants entraîne deux corrections importantes.

En premier lieu, la longueur axiale limitée de la machine crée une perturbation au voisinage des extrémités. En effet, les courants induits axialement à la surface doivent se refermer. Il apparaîtra ainsi dans les parties frontales des courants transversaux de circulation. Nous analyserons en premier lieu ce phénomène dans le cas d'une machine à rotor lisse et à perméabilité constante. Cette première étude nous permettra de définir une méthode approchée applicable à une machine à pôles saillants pour les cas limites d'une distribution de courants à axes direct et transverse. En dernier stade, nous examinerons les incidences de ce phénomène, en particulier dans l'axe transverse, et les possibilités de diminuer leur effet.

Le second point abordé dans ce chapitre est l'étude de la superposition dans les cornes polaires. En effet, par suite de la distorsion des lignes de force dans la zone interpolaire, le champ rotorique apparaît concentré sur les trois faces latérales de la corne polaire. En conséquence, il y aura superposition de trois nappes de courants. L'analyse de ce phénomène et des pertes qui en résultent sera entreprise dans le cas d'un milieu à perméabilité constante, puis à induction constante.

## III.2 - EFFET D'EXTRÉMITÉ

Ce phénomène est lié à l'apparition de courants de circulation trans-

versaux aux extrémités de la machine. Il entraîne une majoration de l'impédance apparente des pôles massifs. Cet accroissement sera d'autant plus marqué que le rapport du pas polaire à la longueur de la machine sera important. Dans une première étape, nous analyserons cette distribution de courants dans le cas de la machine à rotor lisse et à perméabilité constante.

### III.21 - Machine à rotor lisse - Distribution du champ

Nous reprendrons les conventions et hypothèses du paragraphe I.21, mais en introduisant une longueur axiale de la machine limitée à la valeur 1.

Au stator où  $\rho = \infty$ , on a la relation (1.13) :

$$\vec{\nabla}_s^2 = 0 \quad \text{avec} \quad \text{div} \vec{V}_s = 0, \quad \text{d'où} :$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 V_{sx}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_{sx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_{sx}}{\partial z^2} = 0 \\ \frac{\partial^2 V_{sy}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_{sy}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_{sy}}{\partial z^2} = 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial V_{sx}}{\partial x} + \frac{\partial V_{sy}}{\partial y} = 0 \quad (3.2)$$

Il est possible de substituer à la machine de longueur 1 une machine de longueur infinie soumise à une distribution axiale du potentiel statorique en créneaux de période égale à

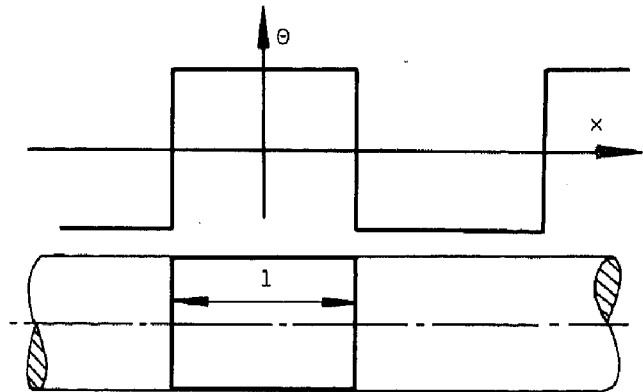


Fig. 3.1

2.1 (fig. 3.1). Le rotor considéré sera une portion de cette machine infiniment longue.

Le potentiel vecteur statorique peut se décomposer comme suit en série de Fourier :

$$V_{sx} = \sum_{n=0}^{\infty} V_{sx} \Big|_z \cdot \frac{(-1)^n}{2 \cdot n + 1} \cos\{(2n+1)\pi x / 1\} \cdot \Omega = \sum_{n=0}^{\infty} V_{sx} \Big|_n$$

Par (3.1) et en posant  $\sum_{n=0}^{\infty} = \Sigma$

$$-\Sigma (2n+1)^2 \cdot \pi^2 / 1^2 \cdot V_{sx} \Big|_n - \pi^2 / \tau^2 \Sigma V_{sx} \Big|_n + \partial^2 V_{sx} / \partial z^2 = 0$$

$$\partial^2 V_{sx} \Big|_z / \partial z^2 = \{(2n+1)^2 \cdot \pi^2 / 1^2 + \pi^2 / \tau^2\} \cdot V_{sx} \Big|_z$$

En posant :  $\lambda_n^2 = (2n+1)^2 \cdot \pi^2 / l^2 + \pi^2 / \tau^2$ , la solution devient :

$$V_{sx} \}_z = S_1 \cdot e^{-\lambda_n \cdot z} + S_2 \cdot e^{\lambda_n \cdot z}$$

Compte tenu des conditions aux limites,  $V_{sx} = 0$  pour  $z = \infty$ , d'où  $S_2 = 0$

et en posant  $S_n = S_1$  :

$$V_{sx} \}_z = S_n \cdot e^{-\lambda_n \cdot z}$$

$$V_{sx} = \sum S_n \cdot e^{-\lambda_n \cdot z} \cdot \frac{(-1)^n}{2n+1} \cos\{(2n+1)\pi x/l\} \cdot \Omega \quad (3.3)$$

Par (3.2) :

$$-\sum S_n \cdot e^{-\lambda_n \cdot z} (-1)^n \pi / l \cdot \sin\{(2n+1)\pi x/l\} \cdot \Omega + j\pi / \tau \cdot V_{sy} = 0$$

$$V_{sy} = -j\tau / l \sum S_n \cdot e^{-\lambda_n \cdot z} (-1)^n \cdot \sin\{(2n+1)\pi x/l\} \cdot \Omega \quad (3.4)$$

Pour l'entrefer, on est conduit au même système différentiel qu'au stator, (3.1) et (3.2), d'où pour  $V_{\delta x} \}_z$  :

$$V_{\delta x} \}_z = D_{1n} \cdot e^{-\lambda_n z} + D_{2n} \cdot e^{\lambda_n z}$$

$$V_{\delta x} = \sum (D_{1n} \cdot e^{-\lambda_n z} + D_{2n} \cdot e^{\lambda_n z}) \frac{(-1)^n}{2n+1} \cos\{(2n+1)\pi x/l\} \cdot \Omega \quad (3.5)$$

$$V_{\delta y} = -j\tau / l \sum (D_{1n} \cdot e^{-\lambda_n z} + D_{2n} \cdot e^{\lambda_n z}) \cdot (-1)^n \sin\{(2n+1)\pi x/l\} \cdot \Omega \quad (3.6)$$

Au rotor, l'équation (1.13) peut s'écrire :

$$\vec{\nabla}'_r \cdot \vec{V}'_r = -j\omega_0 \mu / \rho \cdot \vec{V}'_r \quad (3.7)$$

Pour la composante x :

$$V'_{rx} = \sum V'_{rx} \}_z \frac{(-1)^n}{2n+1} \cos\{(2n+1)\pi x/l\} \cdot \Omega'$$

Et par (3.7) :

$$\frac{\partial^2 V'_{rx} \}_z}{\partial z^2} = \{(2n+1)^2 \pi^2 / l^2 + \pi^2 / \tau^2 - j\omega_0 \mu / \rho\} \cdot V'_{rx} \}_z$$

En posant  $\eta_n^2 = (2n+1)^2 \pi^2 / l^2 + \pi^2 / \tau^2 - j\omega_0 \mu / \rho = \lambda_n^2 - \alpha^2$ , la solution devient, compte tenu des conditions aux limites pour  $z = -\infty$  :

$$V'_{rx} \}_z = R_n \cdot e^{\eta_n z}$$

$$V'_{rx} = \sum R_n \cdot e^{\eta_n z} \frac{(-1)^n}{2n+1} \cos\{(2n+1)\pi x/l\} \cdot \Omega' \quad (3.8)$$

Et par (3.2) au rotor :

$$V'_{ry} = -j\tau / l \sum R_n \cdot e^{\eta_n z} \cdot (-1)^n \sin\{(2n+1)\pi x/l\} \cdot \Omega' \quad (3.9)$$

Les conditions de liaison des trois milieux sont les mêmes que celles définies au paragraphe I.22 :

$$-V'_{rx} \}_z=0 = V_{\delta x} \}_z=0$$



$$\Sigma R_n \frac{(-1)^n}{2n+1} \cos\{(2n+1)\pi x/l\} \cdot \Omega = \Sigma (D_{1n} + D_{2n}) \frac{(-1)^n}{2n+1} \cos\{(2n+1)\pi x/l\} \cdot \Omega$$

$$D_{1n} + D_{2n} = R_n \quad (3.10)$$

$$-V_{sx}|_{z=\delta} = V_{sx}|_{z=\delta}$$

$$S_n \cdot e^{-\lambda_n \delta} = D_{1n} \cdot e^{-\lambda_n \delta} + D_{2n} \cdot e^{\lambda_n \delta} \quad (3.11)$$

Les trois composantes du champ peuvent s'exprimer comme suit de façon générale :

$$\begin{cases} H_x = -\frac{1}{\mu} \cdot \frac{\partial V_y}{\partial z} \\ H_y = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{\partial V_x}{\partial z} \\ H_z = \frac{1}{\mu} \cdot \left( \frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) \end{cases} \quad (3.12)$$

La continuité des composantes tangentielles au rotor permet d'écrire :

$$H_{\delta y}|_{z=0} = H_{ry}|_{z=0}$$

$$\frac{1}{\mu_0} \Sigma \lambda_n (D_{2n} - D_{1n}) \frac{(-1)^n}{2n+1} \cos\{(2n+1)\pi x/l\} \cdot \Omega =$$

$$\frac{1}{\mu} \Sigma \eta_n \cdot R_n \frac{(-1)^n}{2n+1} \cos\{(2n+1)\pi x/l\} \cdot \Omega$$

$$\lambda_n / \mu_0 \cdot (D_{2n} - D_{1n}) = \eta_n / \mu \cdot R_n \quad (3.13)$$

De même au stator :  $\pi \hat{\theta}_s / \tau \cdot \Omega = H_{sy}|_{z=\delta} = H_{\delta y}|_{z=\delta}$  , d'où :

$$\pi \hat{\theta}_s / \tau \Sigma \frac{4}{\pi} \frac{(-1)^n}{(2n+1)} \cdot \frac{\pi x}{l} \cdot \Omega = \frac{1}{\mu_0} \Sigma \lambda_n (D_{2n} e^{\lambda_n \delta} - D_{1n} e^{-\lambda_n \delta}) \frac{(-1)^n}{2n+1} \cos\{(2n+1)\pi x/l\} \cdot \Omega$$

$$4 \hat{\theta}_s / \tau = \lambda_n / \mu_0 \cdot (D_{2n} \cdot e^{\lambda_n \delta} - D_{1n} \cdot e^{-\lambda_n \delta}) \quad (3.14)$$

Des relations (3.10), (3.13) et (3.14), il est possible de déterminer les constantes d'intégration, soit :

$$D_{1n} = \frac{4 \mu_0 \hat{\theta}_s}{\lambda_n \tau} \frac{1}{1 + \frac{\eta_n \cdot \mu_0}{\lambda_n \cdot \mu} \frac{e^{\lambda_n \cdot \delta} - e^{-\lambda_n \cdot \delta}}{1 - \frac{\eta_n \cdot \mu_0}{\lambda_n \cdot \mu}}}$$

$$(3.15)$$

$$D_{2n} = D_{1n} \frac{1 + \frac{\eta_n \cdot \mu_0}{\lambda_n \cdot \mu}}{1 - \frac{\eta_n \cdot \mu_0}{\lambda_n \cdot \mu}} ; \quad R_n = D_{1n} + D_{2n}$$

### III.22 - Distribution du courant rotorique

Pour des raisons pratiques d'écriture, nous procéderons à un changement de notations. De plus nous négligerons l'indice caractérisant le réf-

rentiel rotorique.

Pour  $z = 0$ , nous poserons :

$$H_{rz} = \hat{H}_0 \cdot \Omega$$

Par (3.12) :

$$\begin{aligned} H_{rz} &= 1/\mu (-j\pi\tau/1^2 \Sigma R_n \cdot (-1)^n (2n+1) \cos\{(2n+1)\pi x/1\}) \cdot \Omega \\ &\quad - j\pi/\tau \Sigma R_n \frac{(-1)^n}{2n+1} \cos\{(2n+1)\pi x/1\}) \cdot \Omega \\ &= -j\tau/(\pi\mu) \Sigma (R_n \frac{(-1)^n}{2n+1} \cos\{(2n+1)\pi x/1\}) \cdot \{\pi^2/1^2 \cdot (2n+1)^2 + \pi^2/\tau^2\} \cdot \Omega \\ &= \hat{H}_0 \cdot \Omega = 4/\pi \cdot \hat{H}_0 \Sigma \frac{(-1)^n}{2n+1} \cos\{(2n+1)\pi x/1\}) \cdot \Omega \end{aligned}$$

On peut alors en tirer  $R_n$  :

$$R_n = j \frac{4\mu}{\tau} \frac{\hat{H}_0}{\pi^2/1^2 \cdot (2n+1)^2 + \pi^2/\tau^2}$$

$$\text{Posons } Q_n = \pi^2/1^2 (2n+1)^2 + \pi^2/\tau^2$$

Dans ces conditions :

$$\begin{cases} H_{rxz} = -4\hat{H}_0/1 \Sigma \eta_n / Q_n \cdot e^{\eta_n z} (-1)^n \sin\{(2n+1)\pi x/1\}) \cdot \Omega \\ H_{ryz} = j4\hat{H}_0/\tau \Sigma \eta_n / Q_n \cdot e^{\eta_n z} \frac{(-1)^n}{2n+1} \cos\{(2n+1)\pi x/1\}) \cdot \Omega \\ H_{rzz} = 4\hat{H}_0/\pi \Sigma e^{\eta_n z} \frac{(-1)^n}{2n+1} \cos\{(2n+1)\pi x/1\}) \cdot \Omega \end{cases} \quad (3.16)$$

On peut déterminer la distribution des densités de courant à partir des relations (3.16) et (1.1), soit :

$$\begin{cases} J_{rxz} = \frac{\partial H_{rz}}{\partial y} - \frac{\partial H_{ry}}{\partial z} = -4/\tau \Sigma \omega_0 \mu / \rho \cdot \hat{H}_0 \Sigma e^{\eta_n z} \frac{(-1)^n}{(2n+1)Q_n} \cos\{(2n+1)\pi x/1\}) \cdot \Omega \\ J_{ryz} = \frac{\partial H_{rx}}{\partial z} - \frac{\partial H_{rz}}{\partial x} = j4/1 \cdot \Sigma \omega_0 \mu / \rho \cdot \hat{H}_0 \Sigma e^{\eta_n z} \frac{(-1)^n}{Q_n} \sin\{(2n+1)\pi x/1\}) \cdot \Omega \\ J_{rzz} = \frac{\partial H_{ry}}{\partial x} - \frac{\partial H_{rx}}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad (3.17)$$

Les relations (3.16) et (3.17) donnent la distribution complète des champs et courants au rotor.

Dans le cas d'un rotor de longueur infinie, les mêmes grandeurs s'écrivent :

$$\begin{cases} H_{rx} = 0 \\ H_{ry} = -j\tau \xi / \pi \hat{H}_0 \cdot e^{\xi z} \cdot \Omega \\ H_{rz} = \hat{H}_0 \cdot e^{\xi z} \cdot \Omega \\ J_{rx} = -\tau / \pi \Sigma \omega_0 \mu / \rho \cdot \hat{H}_0 \cdot e^{\xi z} \cdot \Omega \\ J_{ry} = J_{rz} = 0 \end{cases} \quad (3.18)$$

### III.23 - Pertes et impédance équivalente

Il est intéressant de pouvoir caractériser l'effet d'extrémité par un coefficient global permettant la comparaison directe entre le rotor à longueur limitée et la machine infiniment longue. Dans ce but, nous calculerons les coefficients de majoration de l'impédance apparente  $k_z$  et de diminution des pertes spécifiques  $k_p$ .

Nous déterminerons en premier lieu les pertes spécifiques moyennes pour un pôle par deux méthodes différentes. La première consiste à calculer la valeur moyenne du vecteur de Pointing (2.6). Deux composantes du champ magnétique et du champ électrique apparaissent à la surface du rotor, d'où :

$$P'_{me} = \frac{1}{l} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{1}{2} (\hat{E}_{xoe} \cdot \hat{H}_{yoe} \cdot \cos\phi_{F1} - \hat{E}_{yoe} \cdot \hat{H}_{xoe} \cdot \cos\phi_{F2}) \cdot dx$$

où :  $\phi_{F1}$  représente le déphasage entre  $E_{xoe}$  et  $H_{yoe}$  et  $\phi_{F2}$  le déphasage entre  $E_{yoe}$  et  $H_{xoe}$ .

Compte tenu de la distribution sinusoïdale selon  $x$  des harmoniques de chaque composante, on obtient :

$$P'_{me} = \frac{1}{4} (\hat{E}_{xoe} \cdot \hat{H}_{yoe} \cdot \cos\phi_{F1} - \hat{E}_{yoe} \cdot \hat{H}_{xoe} \cdot \cos\phi_{F2})$$

Par les relations (1.5), (3.16) et (3.17), il vient :

$$P'_{me} = 4/\pi^2 \cdot \omega \mu \hat{H}_0^2 \sum \frac{\nu_n}{(2n+1)^2 Q_n} \quad (3.19)$$

$$\text{avec } \eta_n = \mu_n - j\nu_n \quad (3.20)$$

Par ailleurs, il est également possible de se référer à un enroulement statorique inducteur. Au niveau de ce dernier, on peut définir une tension induite par unité de longueur  $E_i$  et une densité linéaire de courant tangentielle  $H_i$ .

$E_i$  peut être déterminé comme suit :

$$E_i = \frac{-d\phi'}{dt} = -\tau/\pi \cdot \omega B_0 = -\tau/\pi \cdot \omega \mu H_0$$

$$\hat{E}_i = -\tau/\pi \cdot \omega \mu \hat{H}_0$$

$H_i$  est égal à la valeur moyenne de la composante tangentielle du champ :

$$H_i = \frac{1}{l} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} H_{yoe} \cdot dx \quad \text{et par (3.16) :}$$

$$\hat{H}_i = -j \frac{8}{\pi \tau} \hat{H}_0 \sum \frac{\eta_n}{(2n+1)^2 Q_n} = -\frac{8}{\pi \tau} \hat{H}_0 \sum \left( \frac{j\mu_n}{(2n+1)^2 Q_n} + \frac{\nu_n}{(2n+1)^2 Q_n} \right)$$

Le déphasage  $\phi_{Fe}$  entre les champs  $\hat{E}_i$  et  $\hat{H}_i$  permet de déterminer le facteur

de puissance :

$$\cos \phi_{Fe} = \frac{\sum \frac{v_n}{(2n+1)^2 \cdot Q_n}}{\left| \sum \frac{\eta_n}{(2n+1)^2 \cdot Q_n} \right|} \quad (3.21)$$

Les pertes deviennent alors :

$$P'_{me} = \frac{1}{2} \hat{E}_1 \cdot \hat{H}_1 \cdot \cos \phi_{Fe}$$

On retrouve ainsi l'expression (3.19).

En appliquant les mêmes relations à la machine infiniment longue, on obtient par (3.18) :

$$P'_m = \frac{1}{2} \omega \mu (\tau/\pi)^2 v \hat{H}_0^2$$

$$\text{avec } \underline{\xi} = \mu - jv \quad \text{et} \quad \cos \phi_F = v / \sqrt{\mu^2 + v^2}$$

Il est alors possible de définir le coefficient  $k_p$  caractéristique de la diminution des pertes :

$$k_p = \frac{P'_{me}}{P'_m} = \frac{B}{\tau^2 v} \sum \frac{v_n}{(2n+1)^2 Q_n} \leq 1 \quad (3.22)$$

En second lieu, on peut caractériser l'effet d'extrémité par un facteur de majoration de l'impédance apparente  $k_z$ .

L'impédance équivalente est définie comme suit :

$$\underline{Z}_e = \underline{E}_1^* / \underline{H}_1^* \quad \text{ou} \quad \underline{Y}_e = \underline{H}_1^* / \underline{E}_1^* \\ \underline{Y}_e = -j \frac{B}{\tau^2} \cdot \frac{1}{\omega \mu} \sum \frac{\eta_n^*}{(2n+1)^2 Q_n} \quad (3.23)$$

De même, on obtient pour le rotor infiniment long, par (3.18) :

$$\underline{Y} = -j \frac{\xi^*}{\omega \mu}$$

Dans ces conditions, le facteur  $k_z$  peut s'écrire :

$$k_z = \left| \underline{Z}_e / \underline{Z} \right| = \left| \underline{Y} / \underline{Y}_e \right| = \tau^2 / B |\xi| \frac{1}{\left| \sum \frac{\eta_n}{(2n+1)^2 Q_n} \right|} \geq 1 \quad (3.24)$$

On peut remarquer que le produit des coefficients  $k_z$  et  $k_p$  devient par (3.22) et (3.24) :

$$k_p \cdot k_z = \cos \phi_{Fe} / \cos \phi_F \quad \text{d'où :} \\ \cos \phi_{Fe} = k_p \cdot k_z \cdot \cos \phi_F \quad (3.25)$$

### III.24 - Application

Les relations (3.19), (3.21) et (3.24) sont exprimées sous forme de séries convergentes. Pour calculer leur valeur numérique dans un cas

déterminé, il suffit de considérer la suite des termes jusqu'à la précision voulue; ainsi la série :

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_n \text{ devient :}$$

$$\sum_{n=0}^N F_n \quad \text{avec } F_N < \delta \cdot F_0$$

$\delta$  représente la précision escomptée ( 1% par exemple). Pour illustrer cette méthode, le cas suivant a été traité avec  $\delta = 10^{-4}$  :

$$\mu = \mu_0 \cdot 500 \qquad \rho = 0,3 \cdot 10^{-6} \text{ m}$$

$$f = 50 \text{ Hz} \qquad \tau = 0,5 \text{ m}$$

Nous avons fait varier la longueur  $l$  entre 0,5 m et  $\infty$ . En reportant le facteur  $k_z$  en fonction du facteur  $k_1 = (1+\tau)/l$ , on obtient le graphique 3.2. Dans ce même domaine, le facteur de puissance  $\cos\phi_{Fe}$  varie entre 0,70709 ( $l=\infty$ ) et 0,70706 ( $l=0,5$ ). Il est donc pratiquement constant et on peut écrire :

$$k_p = 1/k_z$$

Par ailleurs, pour  $k_1 = 1,5$  ( $l=1$  m), en faisant varier le glissement  $s$  entre 1 et  $10^{-4}$ , on obtient les valeurs des facteurs  $k_z$ ,  $k_p$  et  $\cos\phi_{Fe}$  du graphique 3.3. L'influence du glissement ne se fait sentir qu'à partir de  $s = 5 \cdot 10^{-3}$ .

Les relations (3.16) et (3.18) permettent d'analyser la distribution des lignes de courants à la surface polaire. On peut exprimer la densité de courant avec effet d'extrémité en valeur relative, rapportée au courant  $J_{rx}$  pour un rotor infiniment long :

$$j_{xe} = \frac{J_{rxe}}{J_{rx}} = \frac{4\pi}{\tau^2} \sum (-1)^n \frac{\cos\{(2n+1)\pi x/l\}}{(2n+1) \cdot Q_n} \qquad (3.26)$$

$$j_{ye} = \frac{J_{rye}}{J_{rx}} = -j \frac{4\pi}{\tau l} \sum (-1)^n \frac{\sin\{(2n+1)\pi x/l\}}{Q_n}$$

Partant de ces relations, il est possible de déterminer la valeur du module de la densité de courant selon les composantes  $x$  et  $y$  en fonction de l'abscisse  $x$ . Cette étude, effectuée pour un pôle de pas polaire 0,5m et une longueur de 1 m, conduit, en faisant varier  $x$  de 0 à 1/2 à partir du milieu du pôle, au tableau 3.4.

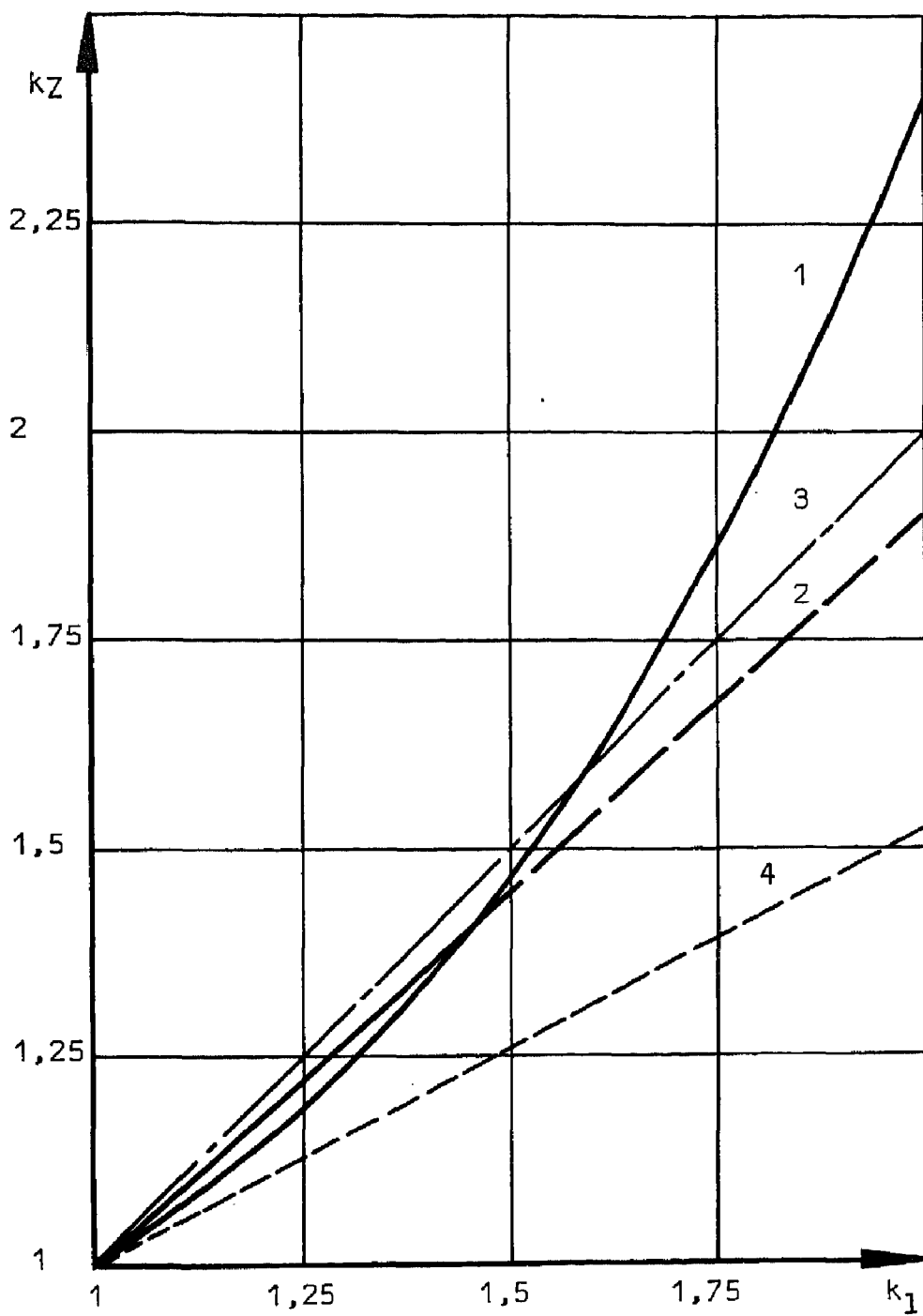


Fig. 3.2 - EFFET D'EXTREMITE - 1-relation (3.24);  
 2-relation (3.27);3-réf (3.1);4-réf(2.1)

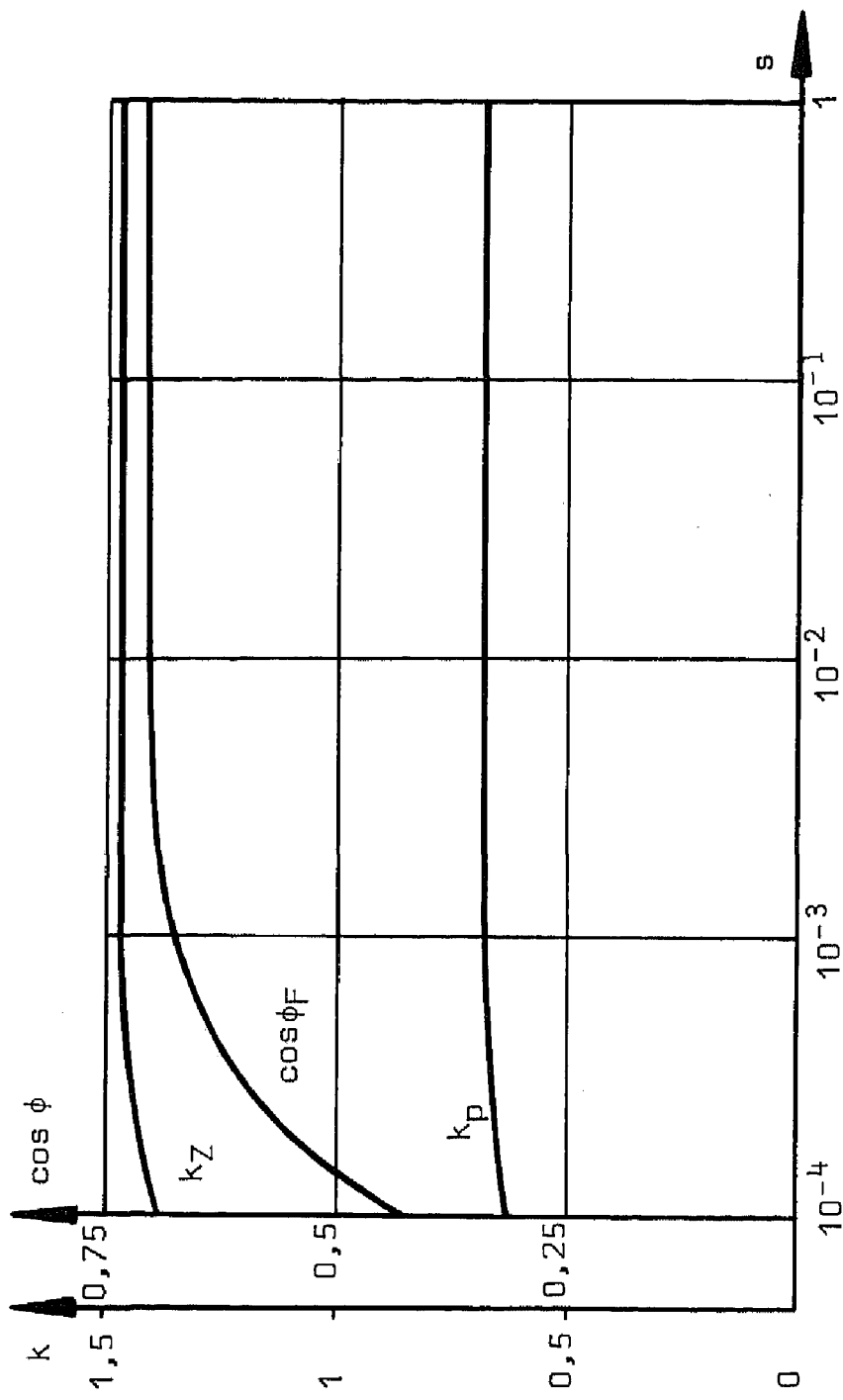


Fig. 3.3 - EFFET D'EXTREMITE - INFLUENCE DE LA FREQUENCE

Tableau 3.4 - Distribution de la densité de courant

x(m)	$j_{xe}$ (p.u.)	$j_{ye}$ (p.u.)
0	0,913	0
0,05	0,909	0,028
0,1	0,896	0,058
0,15	0,872	0,094
0,2	0,836	0,139
0,25	0,783	0,198
0,3	0,709	0,278
0,35	0,606	0,384
0,4	0,464	0,528
0,45	0,268	0,725
0,5	0	0,978

Partant de ce tableau et de la distribution sinusoïdale du champ, donc de la densité de courant, selon y, il est possible de tracer un réseau des lignes équi-courant. C'est ce qui a été fait sur la fig. 3.5. On remarque sur le réseau des lignes de courant que le lieu des points présentant une tangente formant un angle de  $45^{\circ}$  avec la direction axiale est pratiquement une droite, à  $45^{\circ}$  également, issue de l'angle de la surface polaire. Nous utiliserons ce fait dans l'établissement d'une méthode simplifiée.

### III.25 - Rotor lisse - Méthode simplifiée

Comme dit précédemment, nous nous inspirerons de l'allure de la distribution des lignes de courant pour une perméabilité constante afin d'établir une méthode simplifiée. Celle-ci ne sera applicable qu'à des machines telles que la forme du pôle conduise à un rapport  $k_1$  inférieur à 1,7. En effet, comme le montre la fig. 3.2, il se produit une modification sensible de la distribution des lignes de courant au-delà de cette valeur.

D'autre part, nous admettons connue la distribution tangentielle du courant et des pertes pour un rotor infiniment long. Nous schématiserons les lignes de courant à l'extrémité du pôle conformément à la fig. 3.6. La partie transversale des courants est déterminée par deux droites à  $45^{\circ}$ . On délimite ainsi deux zones :

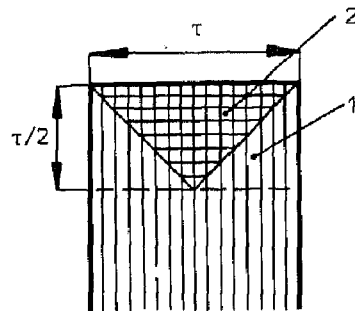


Fig. 3.6



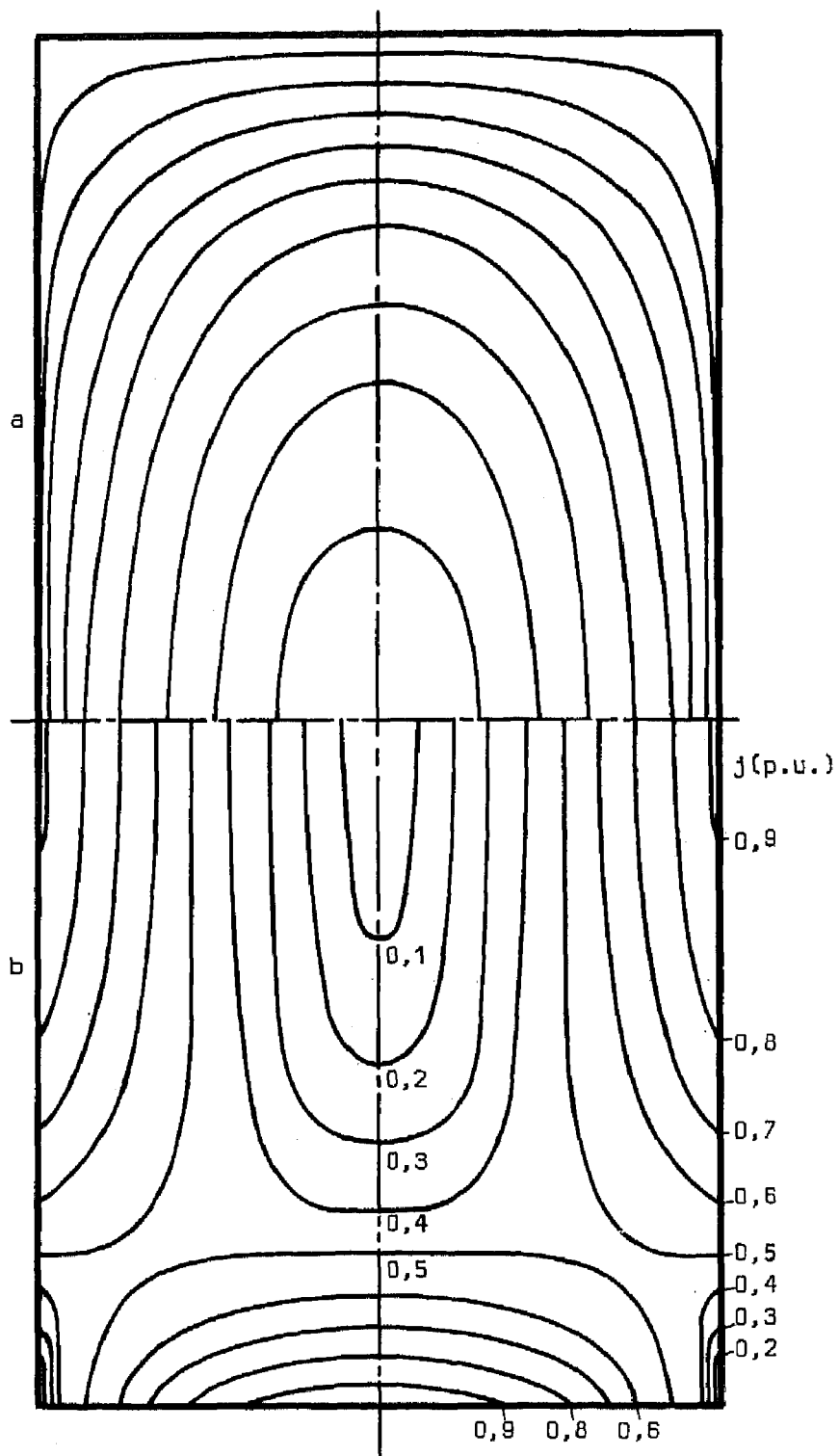


Fig. 3.5 - LIGNES DE COURANT (a) ET EQUI-COURANT (b)

la première (1) parcourue par des courants axiaux seulement; la seconde (2) est le siège de courants axiaux et transversaux simultanément.

A titre de comparaison, nous appliquerons tout d'abord ce procédé au cas d'une distribution tangentielle sinusoïdale du champ, du courant et des pertes.

Par symétrie, il suffit de considérer un carré de côté  $\tau/2$  à l'extrémité (fig. 3.7).

Pour un rotor infiniment long, la distribution des pertes peut s'écrire :

$$p = \hat{p}_0 \cdot \cos^2 \pi y / \tau \quad \text{et pour le carré total :}$$

$$P = \hat{p}_0 \int_0^{\frac{1}{2}\tau} dx \int_0^{\frac{1}{2}\tau} \cos^2 \pi y / \tau \cdot dy = \hat{p}_0 \cdot \tau^2 / 8$$

Compte tenu de l'effet d'extrémité, les pertes dans la zone 1 valent :

$$\begin{aligned} P_1 &= \hat{p}_0 \int_0^{\frac{1}{2}\tau} dx \int_0^{\frac{1}{2}\tau} (1 - 2y/\tau) \cdot \cos^2 \pi y / \tau \cdot dy \\ &= \hat{p}_0 \left( \frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi} \right) \frac{\tau^2}{4\pi} \end{aligned}$$

La distribution des pertes transversales seules est de la forme :

$$P_y = \hat{p}_0 \cdot \cos^2 \pi x / \tau$$

Et pour les pertes totales :

$$2P_2 = \hat{p}_0 \int_0^{\frac{1}{2}\tau} dx \int_0^{\frac{1}{2}\tau} (\cos^2 \pi x / \tau + \cos^2 \pi y / \tau) \cdot dy = 2 \cdot P$$

$$P_2 = \hat{p}_0 \cdot \tau^2 / 8$$

Les pertes totales valent ainsi :

$$P_t = P_1 + P_2 = \hat{p}_0 \cdot \tau^2 \cdot \left( 1/8 + \frac{\pi/4 + 2/\pi}{4\pi} \right)$$

Ces pertes ont été calculées à courant constant. Dans ces conditions :

$$k_Z = \frac{P_t + P_\Gamma}{P + P_\Gamma} \quad \text{où } P_\Gamma \text{ représente les pertes dans la partie rectiligne de longueur } (1-\tau)/2.$$

$$P_\Gamma = \hat{p}_0 \frac{\tau^2/8}{\tau/2} \cdot \frac{1-\tau}{2} = \hat{p}_0 \tau/8 \cdot (1-\tau)$$

Ainsi :

$$k_Z = \frac{\tau^2 \left[ 1/8 + \frac{\pi/4 + 2/\pi}{4\pi} \right] + \frac{\tau}{8} (1-\tau)}{\frac{\tau}{8}} = 1 + \frac{2}{\pi} \cdot (k_1 - 1) \cdot (\pi/4 + 2/\pi) \quad (3.27)$$

La droite  $k_Z(k_1)$  a été reportée sur la fig. 3.2. On a une bonne concor-

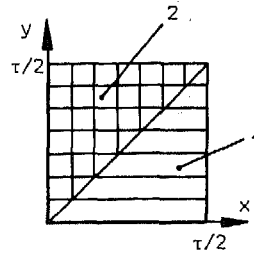


Fig. 3.7

dance avec la courbe calculée rigoureusement pour  $k_1 < 1,6$ . Dès lors, nous étendrons cette méthode à une distribution tangentielle quelconque des pertes, cas dans lequel le problème ne peut pratiquement pas être résolu sous forme algébrique.

Soit  $p = \hat{\rho}_0 \cdot f(y)$  la nouvelle distribution tangentielle des pertes spécifiques. Les pertes dans la zone 1 valent alors :

$$P_1 = \hat{\rho}_0 \int_0^{\frac{1}{2}\tau} dx \int_0^{\frac{1}{2}\tau} (1-2y/\tau) \cdot f(y) \cdot dy$$

et pour la zone 2 :

$$\begin{aligned} 2P_2 &= \hat{\rho}_0 \int_0^{\frac{1}{2}\tau} dx \int_0^{\frac{1}{2}\tau} \{f(x) + f(y)\} \cdot dy \\ &= \hat{\rho}_0 \tau \int_0^{\frac{1}{2}\tau} f(y) \cdot dy \end{aligned}$$

$$P_2 = \hat{\rho}_0 \cdot \frac{1}{2}\tau \int_0^{\frac{1}{2}\tau} f(y) \cdot dy$$

Sans effet d'extrémité, les pertes pour une longueur  $\tau/2$  valent également :

$$P = \hat{\rho}_0 \cdot \frac{1}{2}\tau \int_0^{\frac{1}{2}\tau} f(y) \cdot dy = P(\tau/2)$$

D'où :

$$k_Z = \frac{P_1 + P_2 + P(1/2-\tau/2)}{P(1/2)} = \frac{P_1 + P(1/2)}{P(1/2)} \quad (3.28)$$

### III.26 - Pôles saillants

Dans le cas de pôles saillants, nous étudierons deux cas limites :

- le cas où les pertes sont nulles sur l'axe polaire, que nous appellerons distribution à axe direct;
- Le cas où les pertes sont maximales sur l'axe polaire, que nous appellerons distribution à axe transverse.

Le premier cas se réduit sans autre à celui de la machine à pôles lisses en remplaçant  $\tau$  par  $b_p$  (fig.3.8) et en introduisant la distribution  $f(y)$  correspondante.

Par contre, dans l'axe transverse, deux pôles consécutifs sont parcourus dans leur ensemble par des courants de signes opposés. Ceci implique une différence de potentiel entre

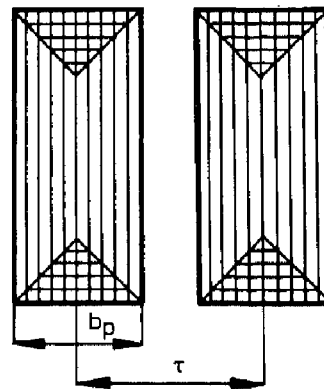


Fig. 3.8

ceux-ci, donc un courant de circulation. Ce courant se fermera par la culasse en empruntant un trajet à pertes minimales, tout en conservant les propriétés liées à l'effet pelliculaire.

Compte tenu de la difficulté matérielle d'effectuer une analyse rigoureuse de la distribution des lignes de courant par le calcul, nous admettrons à priori la répartition représentée par la fig. 3.9. Cette dernière est supposée conservatrice des tubes de courants. Cette hypothèse, vérifiée dans le cas de pôles lisses, s'approche intuitivement de la réalité physique.

En désignant par  $l_{t_i}$  la longueur d'un tube de courant caractérisé par des pertes spécifiques dans l'axe transverse  $p'_i$ , le coefficient  $k_z$  s'écrit :

$$k_z = \frac{\sum_i l_{t_i} \cdot p'_i}{l \sum_i p'_i} \quad (3.29)$$

### III.27 - Connexions frontales

Dans l'axe transverse, les courants induits se referment d'un pôle à l'autre par la culasse. Dans le cas de pôles rapportés, les lignes de courants doivent emprunter l'élément de liaison (queue d'aronde ou tige cylindrique), tout en conservant les caractéristiques liées à l'effet pelliculaire. Le contact avec la culasse est mal défini au début du démarrage, ce qui produit un échauffement local considérable et même de l'étincelage sous l'action d'un courant pouvant atteindre 200 000 A par pôle. On court ainsi le risque de détruire peu à peu l'élément de liaison par électro-érosion. Pour remédier à cet inconvénient, il est nécessaire d'introduire des anneaux liant les pôles entre-eux de la même manière que des couronnes de court-circuit d'un rotor asynchrone à cage. Ils permettent le passage direct du courant transversal d'un pôle à l'autre. Par ailleurs ces anneaux limitent la variation d'impédance et de couple entre les deux axes et diminuent le caractère pulsant du courant d'appel.

Le calcul du coefficient d'extrémité pour le fer s'inspirera de l'allure des lignes de courants représentées sur la fig. 3.10 et de la relation (3.29). On trouvera également, en série avec l'impédance du pôle, celle des connexions frontales. La résistance peut être calculée de la même façon que pour la surface polaire, en tenant compte de la distribution

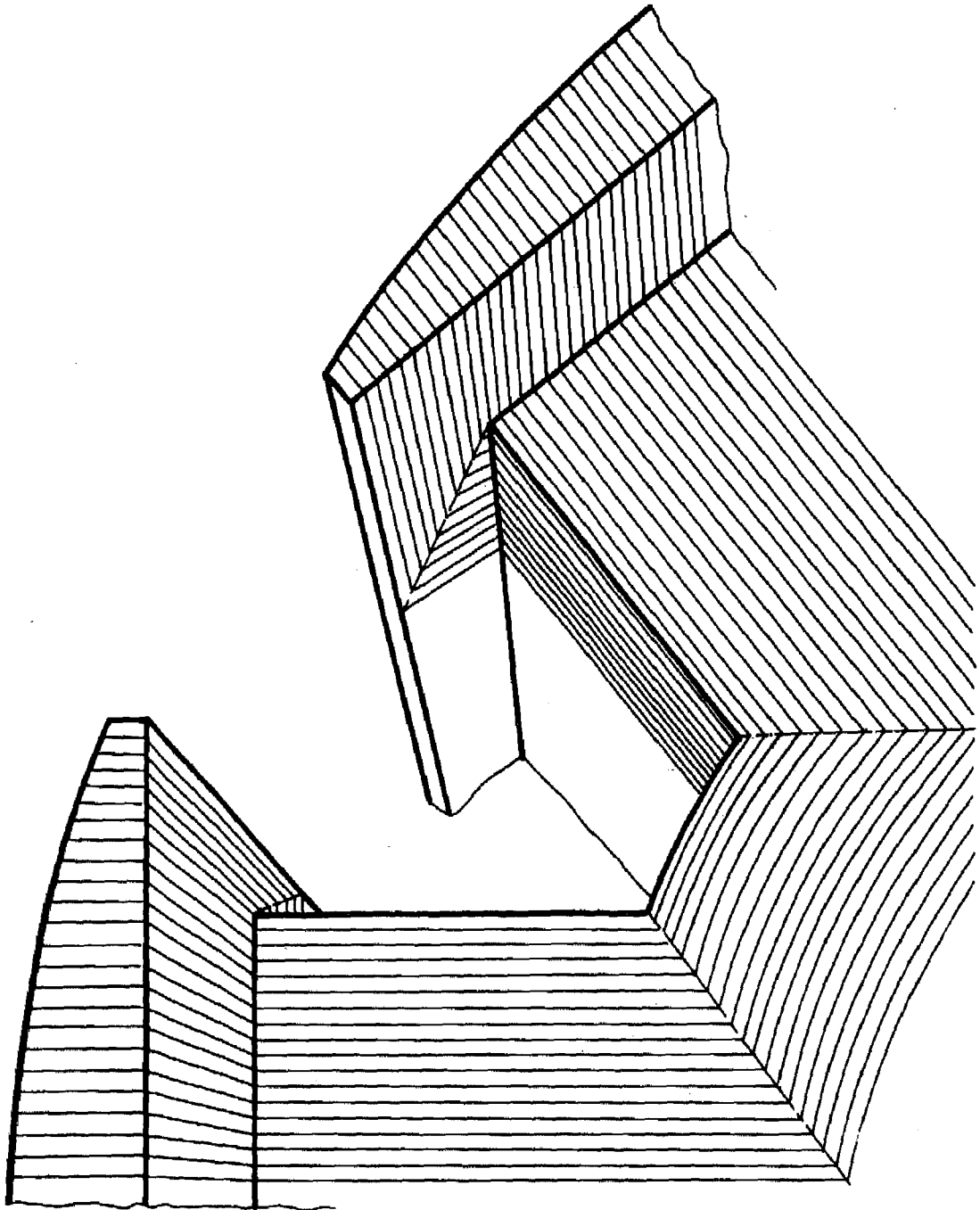


Fig. 3.9 - EFFET D'EXTREMITÉ - LIGNES DE COURANT DANS L'AXE TRANSVERSE

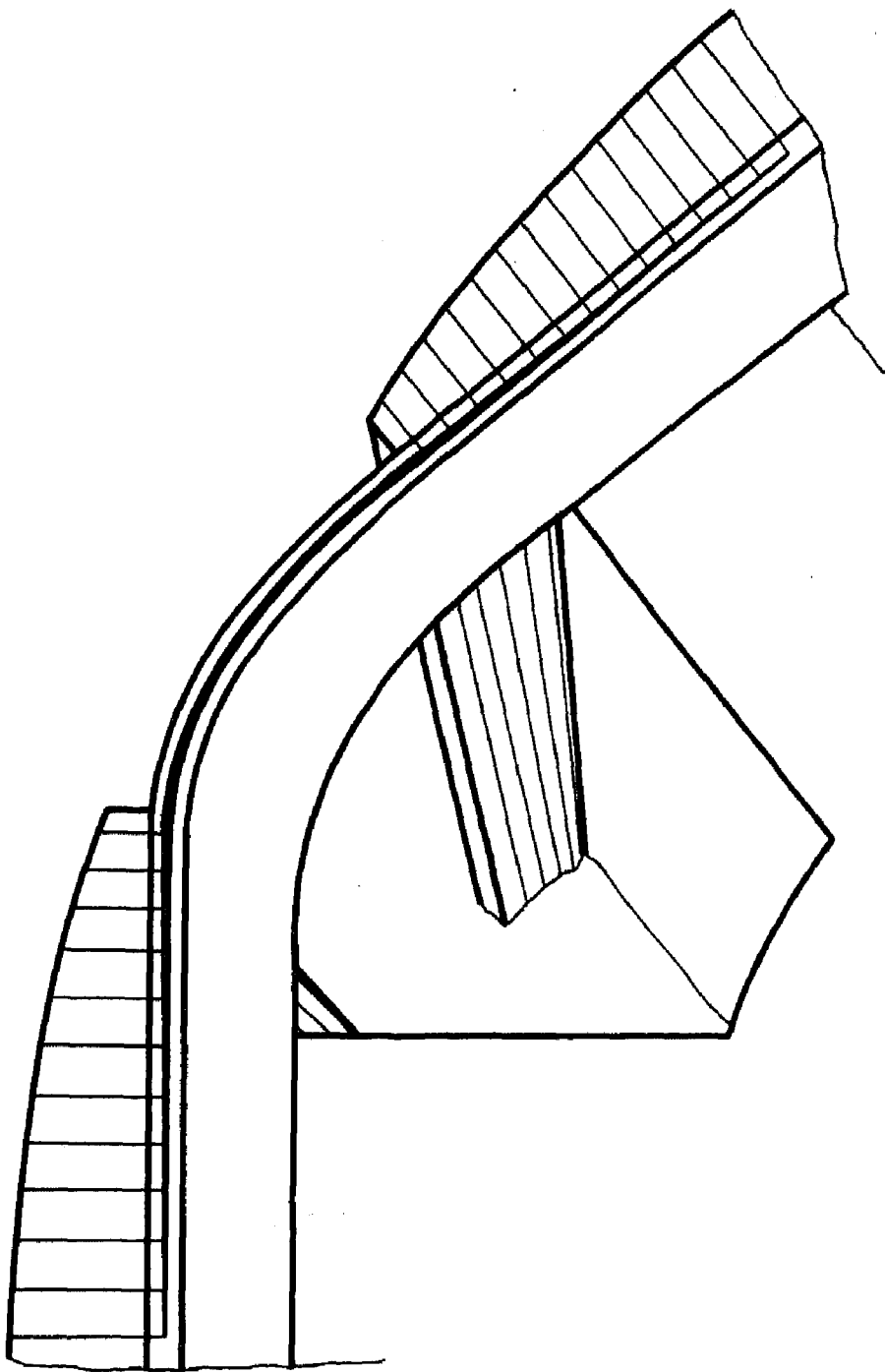


Fig. 3.10 - EFFET D'EXTREMITE - CONNEXION FRONTALE

des lignes de courant. Cependant, par suite de la résistivité faible de l'anneau, elle peut être négligée.

La réactance de la connexion peut difficilement être calculée de façon précise. Nous proposerons une méthode qui s'inspire du calcul des lignes et donne des résultats proches de ceux auxquels conduit la référence (3.5)

La self de fuite par unité de longueur d'une ligne monophasée est donnée par la relation :

$$L' = \frac{1}{2} \mu_0 / \pi \cdot (\frac{1}{2} + \ln d/r) \text{ avec :}$$

$d$  = distance entre les deux conducteurs.

$r$  = rayon du conducteur  $= \sqrt{S_{an}/\pi}$

Pour la partie de l'anneau accolée à la semelle polaire, de longueur  $\tau_b$ , (fig.3.11), on peut admettre, compte tenu de l'effet "image" du fer, que le retour du courant se fait à une distance

$$d = 2r \quad \text{d'où :}$$

$$L'_1 = \frac{1}{2} \mu_0 / \pi \cdot (\frac{1}{2} + \ln 2) = \frac{1}{2} \mu_0 / \pi \cdot 0,943$$

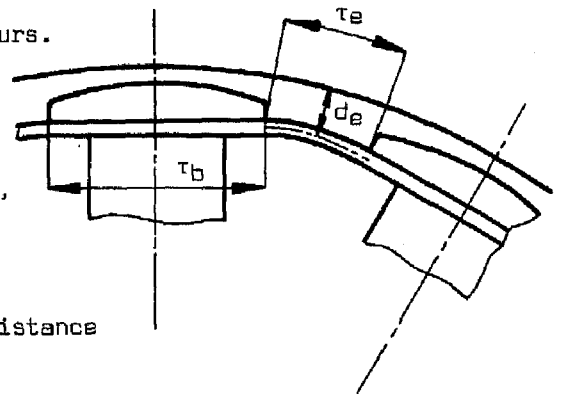


Fig. 3.11

Cependant, la distribution du courant dans cette partie de la connexion n'est que progressive et entraîne un facteur de réduction que l'on peut estimer égal à 0,5 :

$$L'_1 \approx \frac{1}{2} \mu_0 / \pi \cdot 0,4715$$

Pour la partie de l'anneau qui se trouve entre les deux pôles, de longueur  $\tau_e$  (fig.3.11), c'est la surface de fer la plus proche qui définit la distance  $d$  par effet "image". Il s'agit généralement du stator. Dans ces conditions, la self-induction spécifique de cette partie devient :

$$L'_2 = \frac{1}{2} \mu_0 / \pi \cdot (\frac{1}{2} + \ln 2d_e/r)$$

La réactance totale par pôle des connexions s'écrira :

$$X_{an} = 2 (L'_1 \cdot \tau_b + L'_2 \cdot \tau_e) 2\pi f \\ = 2\mu_0 \cdot f \cdot (0,4715 \cdot \tau_b + \{\frac{1}{2} + \ln (2d_e/r)\} \tau_e)$$

Il est possible de rapporter cette réactance au stator. Le rapport de transformation vaut alors :

$$\dot{U}_{an} \frac{m_1}{m_2} \cdot \left( \frac{N_1 \cdot k_{b1}}{N_2 \cdot k_{b2}} \right)^2 \cdot \left( \frac{I_{an}}{I_{po}} \right)^2$$

$$\text{avec :} \quad m_2 = 2p \quad N_2 \cdot k_{b2} = \frac{1}{2}$$

$$I_{an} = \text{courant dans l'anneau}$$

$$I_{po} = \text{courant par pôle} = 2I_{an}$$

$$\dot{U}_{an} = \frac{4m_1}{2p} (N_1 \cdot k_{b1})^2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{m_1}{2p} (N_1 \cdot k_{b1})^2$$

$$X'_{an} = X_{an} \cdot \dot{U}_{an} = \mu_0 \frac{f \cdot m_1}{p} (N_1 \cdot k_{b1})^2 (0,4715\tau_D + \{\frac{1}{4} + \ln(2d_e/r)\}\tau_e) \quad (3.30)$$

On peut donner une approximation suffisante en effectuant la simplification suivante :

$$\frac{1}{4} + \ln(2d_e/r) = 2,4 \quad \text{d'où :}$$

$$X'_{an} \approx \mu_0 \cdot f \cdot m_1 / p \cdot (N_1 \cdot k_{b1})^2 (0,47\tau_D + 2,4\tau_e) \quad (3.31)$$

### III.3 - SUPERPOSITION DES COURANTS DANS LES CORNES POLAIRES

#### III.31 - Généralités

L'analyse de la distribution du potentiel magnétique dans l'entrefer a mis en évidence un champ magnétique important (fig.1.27) sur les trois faces latérales des cornes polaires. Ces trois champs pénètrent dans la matière et conduisent à une superposition des courants et à des pertes totales différentes de la somme des pertes créées par chacun des champs appliqué séparément.

Nous nous proposons au cours de ce paragraphe, sous réserve de certaines hypothèses imposées par la difficulté de résolution complète du problème, d'analyser l'effet global de cette superposition dans deux cas particuliers. Tout d'abord, pour un milieu à perméabilité constante, nous déterminerons le comportement d'un champ à amplitude constante appliqué sur les deux surfaces d'une plaque.

En second lieu, nous étudierons un parallélépipède rectangle, caractérisé par un comportement magnétique à induction constante (fig.2.4), soumis à un champ à distribution d'amplitude parabolique sur trois faces. Le premier cas permettra de mieux saisir le processus de superposition. Le second offrira une méthode de calcul des valeurs caractéristiques de ce phénomène dans les machines à pôles saillants massifs.

#### III.32 - Milieu à perméabilité constante

Nous appliquerons tout d'abord un champ tangentiel pulsant à une surface conductrice illimitée, mais d'épaisseur réduite. La relation (2.7) res-



te valable, de même que sa solution :

$$H)_z = A_1 \cdot e^{\alpha z} + A_2 \cdot e^{-\alpha z}$$

Les conditions aux limites sont modifiées :

$$\text{Pour } z = 0 \quad H)_z = \hat{H}_0 = A_1 + A_2$$

$$\text{Pour } z = -d \quad H)_z = 0 = A_1 \cdot e^{-\alpha d} + A_2 \cdot e^{\alpha d}$$

$$\text{D'où : } H)_z = \hat{H}_0 \cdot \{e^{\alpha z} - e^{-\alpha(z+2d)}\} / (1 - e^{-2\alpha d})$$

Par (2.3), la densité de courant vaut :

$$J)_z = - \frac{dH)_z}{dz} = -\hat{H}_0 \cdot \alpha \cdot \{e^{\alpha z} + e^{-\alpha(z+2d)}\} / (1 - e^{-2\alpha d})$$

En surface :

$$J)_0 = -\hat{H}_0 \cdot \alpha \cdot \text{ch}\alpha d / \text{sh}\alpha d$$

Le produit  $\underline{\hat{E}} \cdot \underline{\hat{H}}$ , caractéristique des pertes, peut s'écrire :

$$\begin{aligned} \underline{\hat{E}} \cdot \underline{\hat{H}} &= \rho \alpha \hat{H}_0^2 \cdot \text{ch}\alpha d / \text{sh}\alpha d \quad \text{avec } \alpha = (1+j)\beta : \\ &= \beta \left\{ \frac{\text{sh}2\beta d + \sin 2\beta d}{\text{ch}2\beta d - \cos 2\beta d} + j \frac{\text{sh}2\beta d - \sin 2\beta d}{\text{ch}2\beta d - \cos 2\beta d} \right\} \rho \cdot \hat{H}_0^2 \\ &= \beta \rho \hat{H}_0^2 \Gamma_1 \cdot e^{j\gamma_1} \end{aligned}$$

D'où les pertes spécifiques :

$$P'_{m1} = \frac{1}{2} \beta \rho \hat{H}_0^2 \Gamma_1 \cdot \cos \gamma_1$$

Pour  $d = \infty$ , par (2.14) :

$$P'_m = \frac{1}{2} \beta \rho \hat{H}_0^2$$

On peut définir un facteur  $k_{sp}$  égal au rapport des pertes spécifiques pour une épaisseur limitée et des pertes pour une épaisseur infinie :

$$k_{sp1} = \Gamma_1 \cdot \cos \gamma_1$$

Dans un second stade, nous appliquerons un champ  $\vec{H}_0$  d'amplitude constante sur deux faces d'une plaque

de surface infinie, d'épaisseur  $d$  et de perméabilité constante (fig.3.12)

Par (2.7) :

$$H)_z = A_1 \cdot e^{\alpha z} + A_2 \cdot e^{-\alpha z}$$

Les conditions aux limites s'écrivent:

$$H)_z = \hat{H}_0 \text{ pour } z = d/2$$

$$H)_z = -\hat{H}_0 \text{ pour } z = -d/2$$

$$A_1 \cdot e^{\alpha d/2} + A_2 \cdot e^{-\alpha d/2} = \hat{H}_0$$

$$A_1 \cdot e^{-\alpha d/2} + A_2 \cdot e^{\alpha d/2} = -\hat{H}_0$$

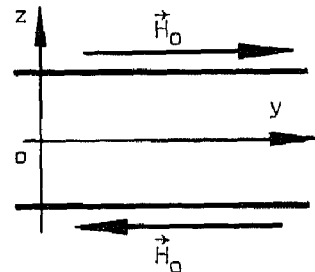


Fig. 3.12

D'où :  $H_z = \hat{H}_0 \cdot \text{sh} \alpha z / (\text{sh} \alpha d / 2)$  (3.32)

$E_z = -\rho \alpha \hat{H}_0 \cdot \text{ch} \alpha z / (\text{sh} \alpha d / 2) = \rho \cdot J_z$

En surface, le produit  $\underline{\hat{E}} \cdot \underline{\hat{H}}$  s'écrit :

$$\underline{\hat{E}} \cdot \underline{\hat{H}} = \rho \alpha \hat{H}_0^2 \frac{\text{ch} \alpha d / 2}{\text{sh} \alpha d / 2} = \beta \left\{ \frac{\text{sh} \beta d + \sin \beta d}{\text{ch} \beta d - \cos \beta d} + j \frac{\text{sh} \beta d - \sin \beta d}{\text{ch} \beta d - \cos \beta d} \right\} \rho \hat{H}_0^2$$

$$= \rho \beta \hat{H}_0^2 \Gamma_2 \cdot e^{j\gamma_2} \quad \text{d'où :}$$

$P'_{m2} = 2 \cdot \frac{1}{2} \underline{\hat{E}} \cdot \underline{\hat{H}} \cdot \cos \gamma_2 = \beta \rho \hat{H}_0^2 \Gamma_2 \cdot \cos \gamma_2$

Dans ce cas, le facteur  $k_{sp}$  vaut :

$k_{sp2} = 2 \Gamma_2 \cdot \cos \gamma_2$

On remarque que  $k_{sp2} \neq 2 \cdot k_{sp1}$ . On peut aisément montrer que la densité de courant dans le second cas est la superposition des densités partielles de deux cas identiques au premier.

On a en effet, en plaçant l'origine au centre de la plaque :

Pour la face supérieure :  $J_{1+} = \hat{H}_0 \alpha \text{ch} \alpha (d/2+z) / \text{sh} \alpha d$

Pour la face inférieure :  $J_{1-} = \hat{H}_0 \alpha \text{ch} \alpha (d/2-z) / \text{sh} \alpha d$

$J_2 = J_{1+} + J_{1-} = \hat{H}_0 \alpha \frac{\text{ch} \alpha (d/2+z) + \text{ch} \alpha (d/2-z)}{\text{sh} \alpha d} = \hat{H}_0 \alpha \text{ch} \alpha z / \text{sh} \alpha d / 2$

On retrouve bien l'expression (3.32).

Il est possible de tirer deux conclusions de cette étude préliminaire en ce qui concerne la superposition sur une corne polaire :

- les courants se superposent localement sous forme vectorielle;
- la distribution des densités de courants est modifiée par limitation de la pénétration.

### III.33 - Milieu à induction constante - Limitation de la pénétration

Nous introduirons dans ce paragraphe l'effet de la limitation de la pénétration par une plaque d'épaisseur  $d$  inférieure à la profondeur limite  $\xi$  définie par la relation (2.23).

L'expression (2.27) permet d'écrire, en conservant le même amortissement, mais en introduisant un facteur de correction de la densité de courant  $k_{sJ}$  :

$J)_z = -k_{sJ} \sqrt{6z/\xi^2} \cdot \hat{H}_0 \cdot e^{j(\sqrt{2} \ln z/\xi + \phi_F)}$

$H)_z = -\int_{\xi-d}^z J \cdot dz = k_{sJ} \left( (z/\xi)^2 e^{j\sqrt{2} \ln z/\xi} - \left(\frac{\xi-d}{\xi}\right)^2 e^{j\sqrt{2} \ln(\xi-d)/\xi} \right) \hat{H}_0$

En particulier, à la surface, pour  $z = \xi$  :

$$H)_0 = k_{sJ} \{1 - (\xi-d)^2/\xi^2 \cdot e^{j\sqrt{2} \ln(\xi-d)/\xi}\} \cdot \hat{H}_0$$

et en posant :  $k_{sJ} = k_{sJ} \cdot e^{j\chi}$

$$H)_0 = k_{sJ} \{e^{j\chi} - (\xi-d)^2/\xi^2 \cdot e^{j(\sqrt{2} \ln(\xi-d)/\xi + \chi)}\} \cdot \hat{H}_0 = \hat{H}_0$$

Par identification des parties réelles et imaginaires et en posant :  $\sqrt{2} \ln(\xi-d)/\xi = \theta_0$ , il vient :

$$k_{sJ} = \frac{1}{\sqrt{\{1 - (\xi-d)^2/\xi^2 \cdot \cos\theta_0\}^2 + (\xi-d)^4/\xi^4 \cdot \sin^2\theta_0}} \quad (3.33)$$

$$\chi = \text{Arctg} \frac{(\xi-d)^2/\xi^2 \cdot \sin\theta_0}{1 - (\xi-d)^2/\xi^2 \cdot \cos\theta_0}$$

On a alors pour la densité de courant en surface :

$$J)_0 = -\sqrt{6} k_{sJ} \cdot \hat{H}_0 / \xi \cdot e^{j(\phi_F + \chi)}$$

Ainsi le facteur de puissance vaut :

$$\cos\phi_{Fd} = \cos(\phi_F + \chi) \quad \text{avec } \cos\phi_F = \sqrt{2/3} \quad (3.34)$$

On obtient alors pour les pertes :

$P'_{md} = \frac{1}{2} \hat{E} \cdot \hat{H} \cos\phi_{Fd}$ , ce qui permet de déterminer le facteur  $k_{sp}$  :

$$k_{sp} = k_{sJ} \cdot \cos(\phi_F + \chi) / \cos\phi_F \quad (3.35)$$

La fig. 3.13 représente les grandeurs  $k_{sJ}$ ,  $k_{sp}$  et  $\cos\phi_{Fd}$  données par les relations (3.33), (3.34) et (3.35) en fonction du rapport  $(\xi-d)/\xi$ .

### III.34 - Milieu à induction constante - Superposition

Nous admettrons les hypothèses suivantes :

- l'amortissement des diverses grandeurs à l'intérieur du milieu magnétique présente la même forme que pour la caractéristique à induction constante (fig.2.4). Cependant, les pertes spécifiques et la profondeur limite correspondant à la caractéristique réelle seront introduites.
- le milieu auquel le phénomène s'applique est limité par trois faces d'un parallélépipède rectangle.
- la distribution du champ en surface est parabolique sur les deux faces opposées et constante sur la troisième (fig.3.13). Cette hypothèse s'inspire de la fig. 1.27.

Nous décomposerons ce phénomène de superposition en trois étapes :

- l'action de la partie latérale sur les faces parallèles,
- l'action des faces parallèles sur la partie latérale,
- l'action réciproque des faces parallèles.

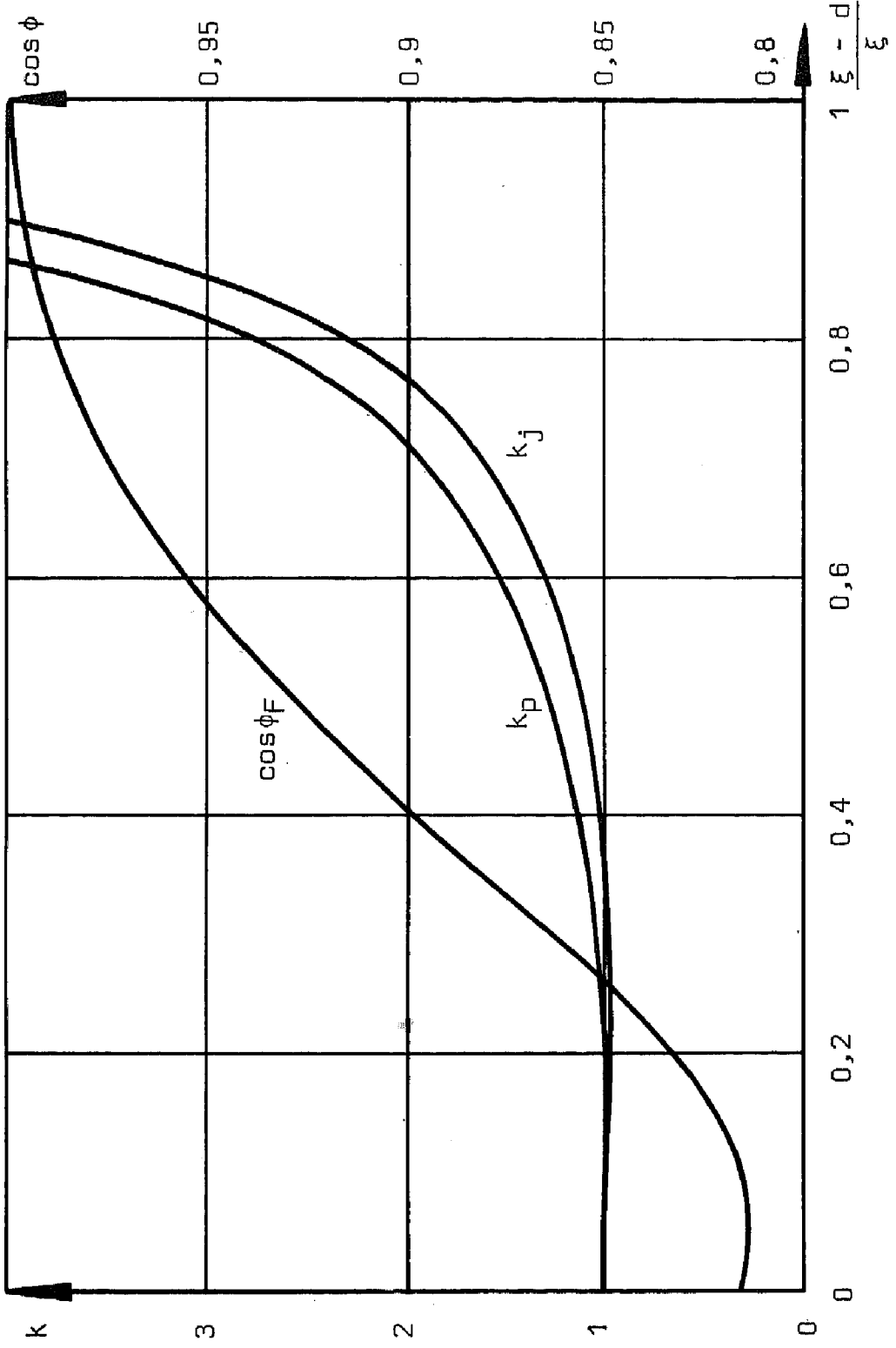


Fig. 3.13 - LIMITATION DE LA PENETRATION - FACTEURS CARACTERISTIQUES

La superposition ne modifie pas la distribution du champ magnétique en surface, qui est imposée par le stator, mais au contraire celle du champ électrique, donc de la densité de courant superficielle.

Nous nous référerons aux champs  $\hat{H}_0$  et  $\hat{E}_0$  de la partie latérale, ainsi qu'à la profondeur de pénétration correspondante  $\xi$ . La fig. 3.14 définit les relations adoptées.

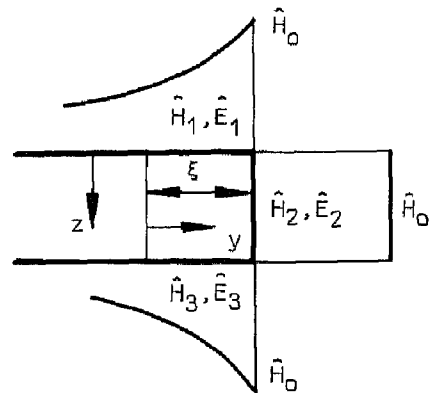


Fig. 3.14

Pour déterminer l'action de la partie latérale sur les faces parallèles, on peut écrire en surface :

$$\hat{H}_1 = \hat{H}_0 \cdot (a_1 - \xi + y)^2 / a_1^2$$

$$\hat{E}_1 = k_{sJ} \cdot \hat{E}_0 \cdot (a_1 - \xi + y) / a_1 \cdot e^{j\phi_1}$$

$\phi_1$  est déterminé par (3.34).

$$\hat{E}_2 = \hat{E}_0 \cdot y / \xi \cdot e^{j\sqrt{2} \ln y / \xi} \cdot e^{j\phi_2}$$

$\phi_2$  est déterminé par le paragraphe II.23 ou II.25.

$$\hat{E}_{s1} = \hat{E}_1 + \hat{E}_2 = \hat{E}_0 \{ k_{sJ} \cdot (a_1 - \xi + y) / a_1 \cdot e^{j\phi_1} + y / \xi \cdot e^{j(\sqrt{2} \ln y / \xi + \phi_2)} \}$$

Le produit  $\hat{E}_{s1} \hat{H}_1$  s'écrit alors :

$$\hat{E}_{s1} \cdot \hat{H}_1 = \hat{E}_0 \cdot \hat{H}_0 \{ k_{sJ} (a_1 - \xi + y)^3 / a_1^3 \cdot e^{j\phi_1} + y / \xi (a_1 - \xi + y)^2 / a_1^2 \cdot e^{j(\sqrt{2} \ln y / \xi + \phi_2)} \}$$

En intégrant sur la largeur  $\xi$ , on obtient pour une longueur unité :

$$\int_0^\xi \hat{E}_{s1} \cdot \hat{H}_1 = \hat{E}_0 \cdot \hat{H}_0 \{ k_{sJ} \cdot a_1 / 4 \{ 1 - (a_1 - \xi)^4 / a_1^4 \} e^{j\phi_1} + 1 / a_1^2 \{ (a_1 - \xi)^2 \xi (1 - j\sqrt{2}/2) / 3 + 6/11 (a_1 - \xi) \xi^2 (1 - j\sqrt{2}/3) + 2/8 \xi^3 (1 - j\sqrt{2}/4) \} e^{j\phi_2} \}$$

$$= P_{12} \cdot e^{j\phi_{12}}$$

Les pertes spécifiques qui en résultent sur la surface 1 deviennent :

$$P'_{m12} = \frac{1}{2} P_{12} / \xi \cdot \cos \phi_{12} \quad (3.36)$$

On peut calculer de la même manière l'effet de la partie 2 sur la partie 3 en permutant les indices 1 et 3.

L'action des faces parallèles sur la partie latérale est caractérisée par les champs électriques le long de la partie latérale :

$$\hat{E}_1 = k_{sJ} \cdot \hat{E}_0 (\xi - z) / \xi \cdot e^{j\{\phi_1 + \sqrt{2} \ln(\xi - z) / \xi\}}$$

$$\hat{E}_2 = \hat{E}_0 \cdot e^{j\phi_2}$$

$$\hat{E}_3 = k_{sJ} \cdot (z + \xi - d) / \xi \cdot e^{j\{\phi_1 + \sqrt{2} \ln(z + \xi - d) / \xi\}} \cdot \hat{E}_0$$

Par superposition :

$$\hat{E}_{s2} = \hat{E}_0 \cdot \{ e^{j\phi_2} + k_{sJ} \left[ \frac{(\xi-z)}{\xi} \cdot e^{j\{\phi_1 + \sqrt{2} \ln(\xi-z)/\xi\}} + \frac{(\xi-d+z)}{\xi} \cdot e^{j\{\phi_1 + \sqrt{2} \ln(\xi-d+z)/\xi\}} \right] \}$$

$$\hat{H}_2 = \hat{H}_0$$

En intégrant le produit  $\hat{E}_{s2} \cdot \hat{H}_2$  sur la hauteur d, il vient :

$$\int_0^d \hat{E}_{s2} \cdot \hat{H}_2 \cdot dz = \hat{E}_0 \cdot \hat{H}_0 \cdot \left( d \cdot e^{j\phi_2} + k_{sJ} \left\{ \frac{(\xi - (\xi-d)^2)}{\xi} \cdot e^{j\sqrt{2} \ln(\xi-d)/\xi} \cdot \frac{2}{3} \right\} \cdot (1 - j\sqrt{2}/2) e^{j\phi_1} \right)$$

$$= P_{21} \cdot e^{j\phi_{21}} \quad \text{d'où les pertes spécifiques :}$$

$$P'_{m21} = \frac{1}{2} P_{21} / d \cdot \cos\phi_{21} \quad (3.37)$$

L'action réciproque des faces parallèles introduit une composante supplémentaire des pertes. Le courant induit par le champ  $\hat{H}_3$  n'est pas annulé sur la face 1. On peut écrire :

$$\hat{E}_{3d} = -k_{sJ} \cdot \hat{E}_0 \cdot \frac{(\xi-d)}{\xi} \cdot e^{j\{\phi_1 + \sqrt{2} \ln(\xi-d)/\xi\}} \cdot (a_3 - \xi + y) / a_3$$

$$\hat{H}_1 = (a_1 - \xi + y)^2 / a_1^2 \cdot \hat{H}_0$$

$$\int_0^\xi \hat{E}_{3d} \cdot \hat{H}_1 \cdot dy = \hat{E}_0 \cdot \hat{H}_0 \cdot k_{sJ} \cdot \frac{(\xi-d)}{\xi} \cdot e^{j\{\phi_1 + \sqrt{2} \ln(\xi-d)/\xi\}} \cdot \frac{1}{a_1^2 \cdot a_3} \int_0^\xi (a_1 - \xi + y)^2 \cdot (a_3 - \xi + y) \cdot dx$$

En posant  $a_1' = a_1 - \xi$  et  $a_3' = a_3 - \xi$ , il vient :

$$\int_0^\xi \hat{E}_{3d} \cdot \hat{H}_1 \cdot dy = k_{sJ} \cdot \hat{E}_0 \cdot \hat{H}_0 \cdot \frac{(\xi-d)}{\xi} \cdot e^{j\{\phi_1 + \sqrt{2} \ln(\xi-d)/\xi\}} \cdot \frac{a_1'^2 \cdot a_3' \cdot \xi + (a_1'^2 + 2a_1' a_3') \xi^2 / 2 + (a_3'^2 + 2a_1') \xi^3 / 3 + \xi^4 / 4}{a_1^2 \cdot a_3}$$

$$= P_{13} \cdot e^{j\phi_{13}} \quad \text{d'où les pertes spécifiques :}$$

$$P'_{m13} = \frac{1}{2} P_{13} / \xi \cdot \cos\phi_{13} \quad (3.38)$$

On peut obtenir de la même manière l'action de la face 1 sur les pertes à la surface 3.

Les pertes totales par unité de longueur valent :

$$P_s = (P'_{m12} + P'_{m32} + P'_{m13} + P'_{m31}) \cdot \xi + P'_{m21} \cdot d$$

On peut rapporter ces pertes à celles créées par un champ uniforme  $\hat{H}_0$  appliqué uniformément à une surface dont la largeur est égale au périmètre intéressé de la corne polaire :

$$P_0 = \frac{1}{2} \hat{E}_0 \cdot \hat{H}_0 \cdot \cos\phi_2 \cdot (2\xi + d)$$

d'où le coefficient caractéristique de la superposition :

$$k_{sP} = P_s / P_0 = k_{sP}(a_1, a_3, d, \xi)$$

Les paramètres  $a_1$  et  $a_3$  rapportés aux dimensions du pôle varient dans la même mesure que les coefficients caractéristiques de la réaction d'induit. Ils ne dépendront donc que de la forme de l'entrefer et du rapport de la largeur du pôle et du pas polaire, qui sont tous des paramètres de construction variant peu.

### III.35 - Application

Nous avons appliqué la méthode de calcul décrite au paragraphe précédent au moteur synchrone décrit en annexe 1. Les courbes de distribution des champs rotoriques direct et transverse de la fig. 1.27 permettent de définir les coefficients  $a_1$  et  $a_3$ , soit :

$$\begin{aligned} a_{1d} &= 0,1005 \text{ (m)} & a_{3d} &= 0,036 \text{ (m)} & d &= 0,02 \text{ (m)} \\ a_{1q} &= 0,0442 \text{ (m)} & a_{3q} &= 0,036 \text{ (m)} \end{aligned}$$

Pour  $\xi = 1,4 \cdot d$ , on obtient dans l'axe direct :

$$\begin{aligned} k_{sp} &= 0,772 & \text{avec :} & & P'_{m12} \cdot \xi &= 0,317 \cdot P_s \\ \cos\phi &= 0,872 & & & P'_{m32} \cdot \xi &= 0,17 \cdot P_s \\ & & & & P'_{m21} \cdot d &= 0,539 \cdot P_s \\ & & & & P'_{m13} \cdot \xi &= -0,014 \cdot P_s \\ & & & & P'_{m31} \cdot \xi &= -0,012 \cdot P_s \end{aligned}$$

Dans l'axe transverse :

$$\begin{aligned} k_{sp} &= 0,701 & \text{avec :} & & P'_{m12} \cdot \xi &= 0,233 \cdot P_s \\ \cos\phi &= 0,873 & & & P'_{m32} \cdot \xi &= 0,189 \cdot P_s \\ & & & & P'_{m21} \cdot d &= 0,601 \cdot P_s \\ & & & & P'_{m13} \cdot \xi &= -0,012 \cdot P_s \\ & & & & P'_{m31} \cdot \xi &= -0,011 \cdot P_s \end{aligned}$$

On obtient ainsi les coefficients  $k_{sp}$  dans les deux axes et le facteur de puissance, pratiquement égal pour les deux axes, représentés par la fig. 3.15 en fonction du rapport  $\xi/d$ . Il est possible d'étendre sans autre ce résultat à une machine dont la géométrie de l'entrefer et des cornes polaires est semblable.

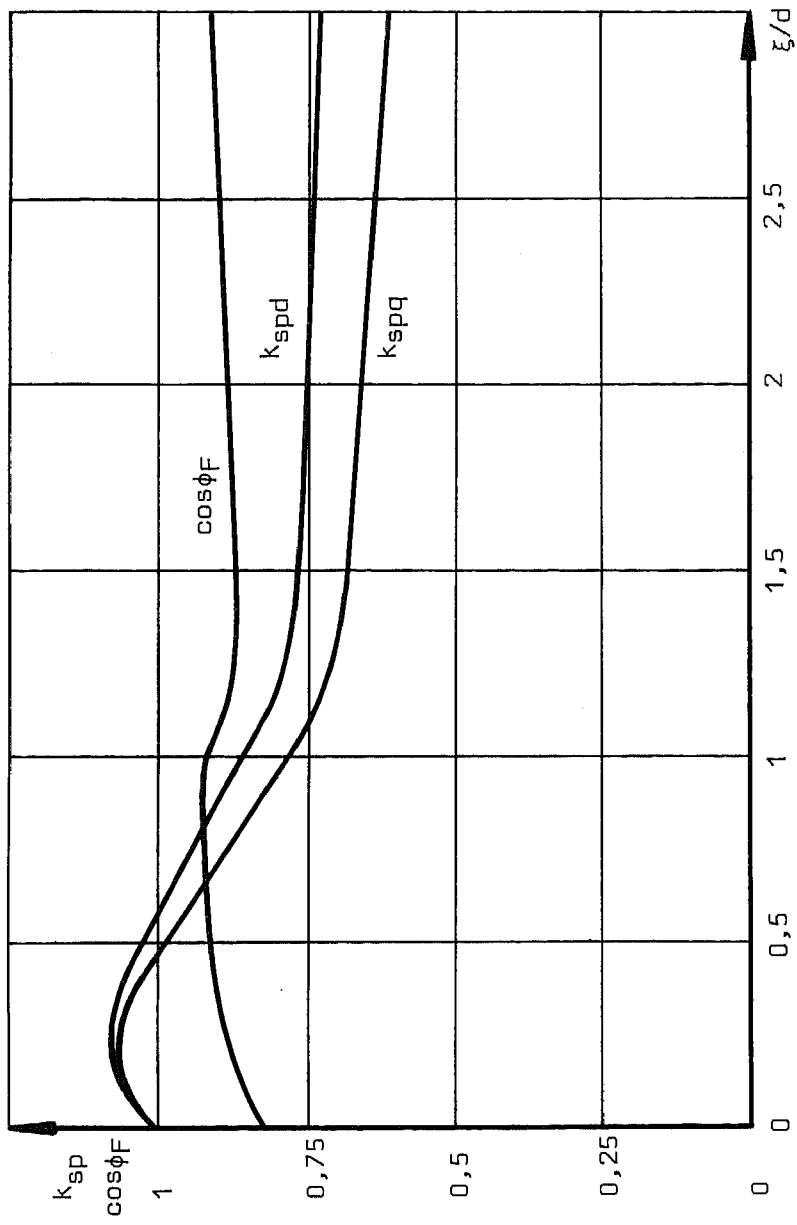


Fig. 3.15 - PHENOMENE DE SUPERPOSITION - FACTEURS CARACTERISTIQUES



## IV.1 - SCHEMA EQUIVALENT

### IV.11 - Axe transverse

Dans l'axe transverse, deux "enroulements" sont en présence, que l'on peut représenter par la fig. 4.1 :

- l'enroulement statorique
- la branche fer rotorique

Les équations suivantes permettent de lier les diverses grandeurs :

- Au stator :

$$\begin{cases} e_s = u_s - R_s \cdot i_s = -N_s \frac{d}{dt} \phi_s = -N_s \frac{d}{dt} (-\phi_h - \phi_{\sigma s}) \\ \phi_h = -\Lambda_h \cdot (N_s \cdot i_s - N_r \cdot i_r) \\ \phi_{\sigma s} = \Lambda_{\sigma s} \cdot N_s \cdot i_s \end{cases} \quad (4.1)$$

$$d'où : \quad N_s \frac{d}{dt} \phi_h = u_s - R_s \cdot i_s - N_s^2 \cdot \Lambda_{\sigma s} \frac{di_s}{dt}$$

En passant aux grandeurs complexes dans le cas d'une alimentation sinusoïdale, on obtient :

$$j\omega_0 \cdot \underline{\phi}_h = \underline{u}_s / N_s - R_s / N_s \cdot \underline{i}_s - j\omega_0 \cdot L_s / N_s \cdot \underline{i}_s \quad (4.2)$$

- Au rotor :

$$\begin{cases} e_r = u_r + R_r \cdot i_r = -N_r \frac{d}{dt} \phi_r = -N_r \frac{d}{dt} (-\phi_h + \phi_{\sigma r}) \\ \phi_{\sigma r} = \Lambda_{\sigma r} \cdot N_r \cdot i_r \end{cases}$$

$$js\omega_0 \cdot \underline{\phi}_h = \underline{u}_r / N_r + R_r / N_r \cdot \underline{i}_r + js\omega_0 \cdot L_r / N_r \cdot \underline{i}_r$$

En réduisant les diverses grandeurs au stator, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \underline{u}'_r &= \underline{u}_r \cdot N_s / N_r \quad ; \quad R'_r = R_r \cdot (N_s / N_r)^2 \quad ; \quad \underline{i}'_r = \underline{i}_r \cdot N_r / N_s \quad d'où : \\ \underline{u}_s - R_s \cdot \underline{i}_s - jX_s \cdot \underline{i}_s &= \underline{u}'_r / s + R'_r / s \cdot \underline{i}'_r + jX'_r \cdot \underline{i}'_r \end{aligned} \quad (4.3)$$

Par ailleurs :

$$u_h = -N_s \frac{d}{dt} (-\phi_h) = N_s^2 \frac{d}{dt} (i_s - N_r / N_s \cdot i_r)$$

$$\underline{u}_h = j\omega_0 \cdot L_h \cdot (\underline{i}_s - \underline{i}'_r) = \underline{u}_s - (R_s + jX_s) \cdot \underline{i}_s$$

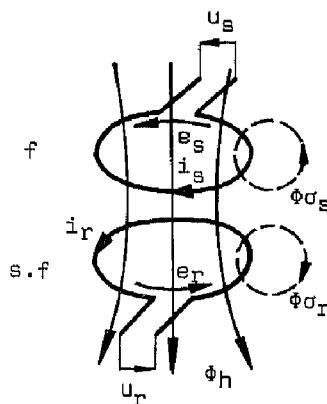


Fig. 4.1

On obtient ainsi le schéma équivalent connu du moteur asynchrone. L'analyse de la distribution du champ et des phénomènes de circulation de courant permet de déterminer l'impédance équivalente du rotor (fig. 4.2).

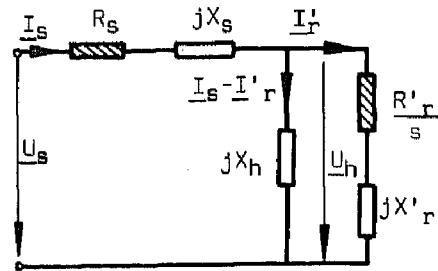


Fig. 4.2

#### IV.12 - Axe direct

Outre l'enroulement statorique et la branche fer, on trouve l'enroulement d'excitation dans l'axe direct. On peut à nouveau établir le bilan des flux conformément à la fig. 4.3.

On retrouve l'expression (4.2) pour le stator :

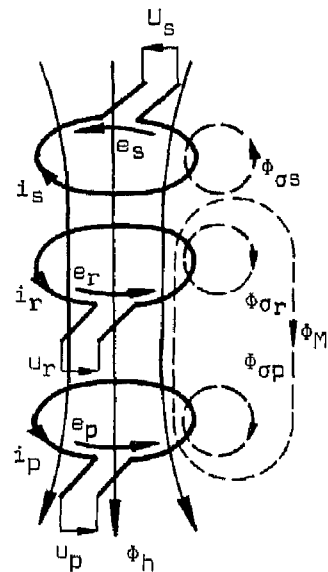
$$j\omega_0 \Phi_h = \frac{U_s}{N_s} - R_s \frac{I_s}{N_s} - j\omega_0 \cdot L_s \frac{I_s}{N_s} \text{ avec :}$$

$$\Phi_h = \Lambda_h \cdot (N_s \cdot I_s - N_r \cdot I_r - N_p \cdot I_p)$$

Pour la branche fer rotorique :

$$\begin{cases} e_r = u_r + R_r \cdot i_r = -N_r \frac{d}{dt} \Phi_r \\ = -N_r \frac{d}{dt} (-\Phi_h + \Phi_{\sigma r} + \Phi_M) \\ \Phi_{\sigma r} = \Lambda_{\sigma r} \cdot N_r \cdot i_r \\ \Phi_M = \Lambda_M \cdot N_p \cdot i_p \end{cases}$$

Fig. 4.3



En passant aux grandeurs complexes :

$$j s \omega_0 \cdot N_r \cdot \Phi_h - j s \omega_0 \cdot N_r^2 \cdot \Lambda_{\sigma r} \cdot I_r - j s \omega_0 \cdot N_r \cdot N_p \cdot I_p = \underline{U}_r + R_r \cdot I_r$$

$$j \omega_0 \Phi_h = j \omega_0 \frac{L_r}{N_r} \cdot I_r + j \omega_0 \frac{M}{N_r} \cdot I_p + \frac{U_r}{s N_r} + \frac{R_r}{s N_r} \cdot I_r \quad (4.4)$$

De même pour l'enroulement d'excitation :

$$j \omega_0 \cdot \Phi_h = j \omega_0 \cdot L_p / N_p \cdot I_p + j \omega_0 \cdot M / N_p \cdot I_r + \frac{U_p}{s N_p} + \frac{R_p}{s N_p} \cdot I_p \quad (4.5)$$

En conservant les mêmes définitions des rapports de transformation avec,

$M' = M \cdot N_s^2 / (N_r \cdot N_p)$ , on peut écrire en posant  $u_r = u_p = 0$  :

$$\begin{aligned} \underline{U}_s - (R_s + jX_s) \cdot \underline{I}_s &= (R'_r/s + jX'_r) \cdot \underline{I}'_r + jX'_M \cdot \underline{I}'_p \\ &= (R'_p/s + jX'_p) \cdot \underline{I}'_p + jX'_M \cdot \underline{I}'_r \end{aligned} \quad (4.6)$$

De plus, on a :

$$-\Phi_h = -\Lambda_h \cdot N_s \cdot (I_s - N_r/N_s \cdot I_r - N_p/N_s \cdot I_p)$$

$$\underline{U}_h = N_s \cdot j \cdot \omega_0 \Phi_h = jX_h \cdot (I_s - I'_r - I'_p)$$

Ces diverses relations conduisent au schéma équivalent de la fig. 4.4.

D'une façon générale, pour un alternateur à pôles saillants, l'expérience montre que la réactance mutuelle  $X'_M$  est négligeable.

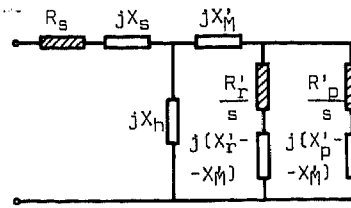


Fig. 4.4

#### IV.13 - Enroulement d'excitation

Nous nous proposons, au cours de ce paragraphe, de déterminer l'impédance équivalente de l'enroulement d'excitation. Au cours du démarrage, ce dernier est généralement fermé afin de limiter la tension induite. On insère généralement une résistance dans le circuit rotorique, choisie de façon à limiter également le courant induit tout en créant un couple favorable à faible glissement.

Nous déterminerons tout d'abord le rapport de transformation permettant de réduire l'enroulement rotorique au stator. La F.M.M. polaire est caractérisée par une valeur de crête  $\hat{\theta}_p$  :

$$\hat{\theta}_p = N_p \cdot I_p$$

Sa distribution n'est généralement pas sinusoïdale. On peut en déterminer le fondamental (fig. 4.5), compte tenu de la relation (1.39):

$$1\hat{\theta}_p = k_p \cdot \hat{\theta}_p = k_p \cdot N_p \cdot I_p$$

Dans l'axe direct, ce fondamental s'opposera à celui de la F.M.M. de réaction d'induit dans cet axe.

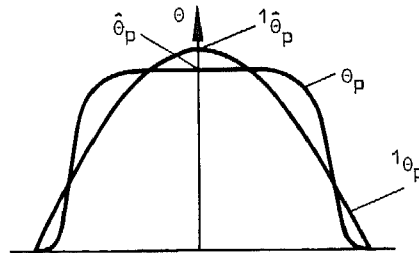


Fig. 4.5

Soit :  $1\theta_a$  le fondamental de la réaction d'induit

$\theta_{ad}$  la F.M.M. de réaction d'induit directe

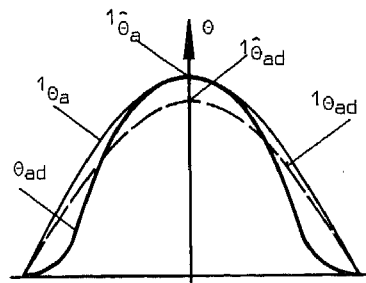
$1\theta_{ad}$  le fondamental de cette dernière (fig.4.6)

$I_1$  la valeur efficace du courant statorique. On a :

$$1\hat{\theta}_a = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \cdot I_1 \cdot \frac{m}{2} \cdot 2N_1 \cdot \frac{k_h}{2p} = \hat{\theta}_{ad}$$

par (1.39) :  $1\hat{\theta}_{ad} = k_d \cdot \hat{\theta}_{ad}$

Fig. 4.6



En exprimant l'égalité des fondamentaux rotorique et statorique, il vient :

$$1\hat{\theta}_p = 1\hat{\theta}_{ad} \quad (4.7)$$

$$k_p \cdot N_p \cdot I_p = k_d \cdot 2\sqrt{2} / \pi \cdot m \cdot N_1 \cdot k_b \cdot I_1 / (2p)$$

Le rapport de transformation des tensions s'écrit :

$$\dot{U}_I = \frac{2}{m} \frac{I_p}{\sqrt{2} I_1} = \frac{2}{\pi} \frac{N_1 \cdot k_b \cdot k_d}{N_p \cdot k_p \cdot p} \quad (4.8)$$

Pour les impédances :

$$\dot{U}_Z = \frac{2}{m} \cdot \dot{U}_I^2 = \frac{2m}{\pi^2} \left( \frac{N_1 \cdot k_b \cdot k_d}{N_p \cdot k_p \cdot p} \right)^2 \quad (4.9)$$

L'impédance de fuite de l'enroulement d'excitation est liée aux flux de fuite polaire qui a été déterminé par l'étude de la marche à vide au chapitre I.

Soit  $\phi_{\sigma p}$  le flux de fuite polaire et  $\phi_h$  le flux principal.

$$\phi_p = \phi_h + \phi_{\sigma p}$$

La self de fuite vaut ainsi :

$$L_{\sigma p} = 2p \cdot N_p \cdot \phi_{\sigma p} / I_p \delta$$

avec  $I_p \delta$  = courant d'excitation créant la tension nominale à vide pour l'entrefer seul.

Ainsi, la réactance de fuite rotorique rapportée au stator vaut :

$$X'_p = 2p \cdot N_p \cdot \omega_0 \cdot \phi_{\sigma p} / I_p \delta \cdot \dot{U}_Z \quad (4.10)$$

La résistance équivalente de l'enroulement d'excitation a la valeur  $R'_{po}$  en courant continu. A celle-ci s'ajoute la résistance  $R'_{pD}$  insérée dans l'enroulement :

$$R'_p = (R_{po} + R_{pD}) \cdot \dot{U}_Z$$

Cependant, l'enroulement de résistance  $R_{po}$  placé au voisinage du fer sera soumis à un certain effet pelliculaire.

Il est possible d'assimiler la corne polaire et la culasse aux côtés d'une encoche (fig. 4.7). En désignant par  $c$  le nombre de couches de l'enroulement d'excitation, on peut exprimer la majoration de la résistance par effet pelliculaire comme suit :

$$\xi = \sqrt{\frac{S \omega_0 \cdot H_0}{2\rho} \cdot \frac{N_p \cdot b_{cu}}{c \cdot h_{cp}}} \cdot h_{cu}$$

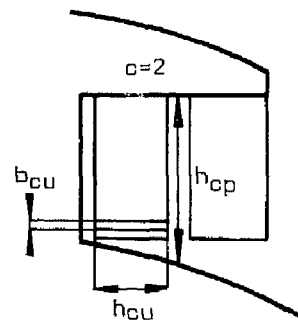


Fig. 4.7

$$\phi(\xi) = \xi \frac{\text{sh } 2\xi + \sin 2\xi}{\text{ch } 2\xi - \cos 2\xi}$$

$$\psi(\xi) = 2 \frac{\text{sh } \xi - \sin \xi}{\text{ch } \xi + \cos \xi} \cdot \xi$$

Le facteur de majoration de la résistance devient :

$$k_R = \phi(\xi) + (c^2 - 1)/3 \cdot \psi(\xi) \quad (4.11)$$

On peut définir un tel coefficient  $k_{Rax}$  pour la partie axiale du pôle de longueur  $l_{pax}$  et un coefficient  $k_{Rtr}$  pour la partie transversale de largeur  $l_{ptr}$ . Le coefficient résultant vaut alors :

$$k_{Rp} = \frac{k_{Rax} \cdot l_{pax} + k_{Rtr} \cdot l_{ptr}}{l_{pax} + l_{ptr}}$$

$$\text{et } R'_p = (k_{Rp} \cdot R_{p0} + R_{pD}) \cdot \dot{U}_Z \quad (4.12)$$

#### IV.2 - THEORIE A DEUX AXES

Nous avons défini une impédance équivalente dans les axes direct et transverse. Le comportement instantané d'un moteur asynchrone à pôles massifs sera une combinaison de ces deux états. Le présent paragraphe vise l'étude du comportement asynchrone et synchrone d'un moteur à pôles saillants caractérisé par un glissement.

##### IV.21 - Définition

Nous introduirons systématiquement pour cette étude les grandeurs relatives rapportées aux valeurs nominales du régime synchrone, soit :

$$u = U/U_N \quad \text{avec } U_N = U_{ph} \text{ nominal}$$

$$i = I/I_N \quad I_N = I_{ph} \text{ nominal}$$

$$z = Z/Z_N \quad Z_N = U_N/I_N$$

$$p = P/P_N \quad P_N = 3 \cdot U_{ph} \cdot I_{ph}$$

$$m = M/M_N \quad M_N = P_N / (2\pi \cdot n_N)$$

$$\psi = \Phi/\Phi_N \quad \Phi_N = U_N/\omega_0$$

$$i_p = I_p/I_{pN} \quad I_{pN} = \text{courant d'excitation créant la tension nominale à vide.}$$

Nous adopterons les sens positifs conformément aux conventions moteur. Dans ces conditions, en repérant la position angulaire de la roue polai-

re par l'angle  $\theta$ , on peut écrire conformément à la fig.4.8.

$$\begin{cases} u_a = u \cdot \sin \omega_0 t \\ u_b = u \cdot \sin(\omega_0 t - 2\pi/3) \\ u_c = u \cdot \sin(\omega_0 t + 2\pi/3) \\ \theta = \theta_0 + (1-s)\omega_0 t \end{cases} \quad (4.13)$$

$$u_a = r \cdot i_a - \frac{d\psi_a}{d(\omega_0 t)} \quad (4.14)$$

Dans ces conditions, en admettant un système équilibré :

$$\begin{cases} u_d = 2/3 \{ u_a \cdot \cos \theta + u_b \cdot \cos(\theta - 2\pi/3) + u_c \cdot \cos(\theta + 2\pi/3) \} \\ u_q = 2/3 \{ u_a \cdot \sin \theta + u_b \cdot \sin(\theta - 2\pi/3) + u_c \cdot \sin(\theta + 2\pi/3) \} \end{cases} \quad (4.15)$$

Réciproquement :

$$u_a = u_d \cdot \cos \theta - u_q \cdot \sin \theta \quad (4.16)$$

On peut écrire les mêmes relations pour les courants et les flux.

En introduisant (4.16) dans (4.14) :

$$\begin{cases} u_d = r \cdot i_d - \frac{d\psi_d}{d(\omega_0 t)} + \psi_q \cdot (1-s) \\ u_q = r \cdot i_q - \frac{d\psi_q}{d(\omega_0 t)} - \psi_d \cdot (1-s) \end{cases}$$

En régime quasi-stationnaire (évolution lente des phénomènes), il vient en passant aux grandeurs complexes :

$$\begin{cases} \underline{u}_d = r \cdot \underline{i}_d - j s \underline{\psi}_d + \underline{\psi}_q \cdot (1-s) \\ \underline{u}_q = r \cdot \underline{i}_q - j s \underline{\psi}_q - \underline{\psi}_d \cdot (1-s) \end{cases} \quad (4.17)$$

La puissance active est la somme des termes respectifs dans les deux axes :

$$p = \text{Re} \{ \underline{u}_d \cdot \underline{i}_d + \underline{u}_q \cdot \underline{i}_q \} = r(i_d^2 + i_q^2) + \psi_q(1-s) \cdot i_d - \psi_d \cdot (1-s) \cdot i_q$$

La puissance dans l'entrefer s'obtient en négligeant les pertes statoriques. Le couple est le quotient de cette dernière et de la vitesse, d'où :

$$m = \frac{p}{1-s} = \psi_q \cdot i_d - \psi_d \cdot i_q \quad (4.18)$$

Nous appliquerons le système ainsi défini au régime asynchrone des groupes synchrones à pôles saillants.

#### IV.22 - Régime asynchrone

Les relations (4.13) et (4.15) permettent d'écrire pour  $u_d$  et  $u_q$  :

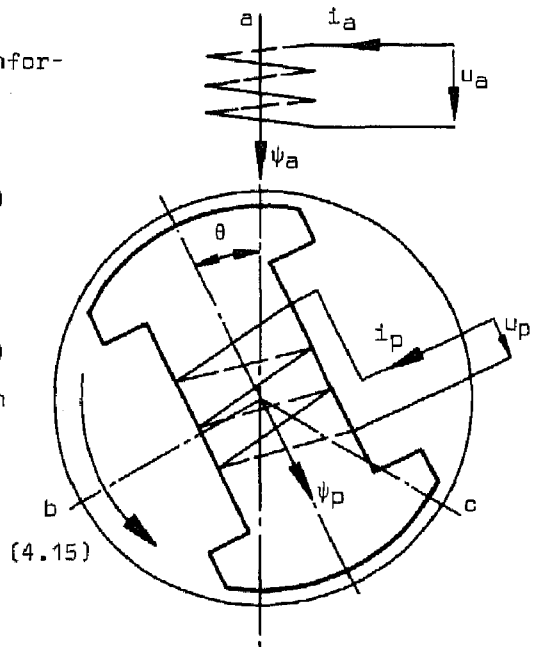


Fig. 4.8

$$u_d = u \cdot \sin(s\omega_0 t - \theta_0) = \text{Im}\{u \cdot e^{j(s\omega_0 t - \theta_0)}\} \hat{=} \underline{u}_d$$

$$u_q = -u \cdot \cos(s\omega_0 t - \theta_0) = \text{Im}\{-ju \cdot e^{j(s\omega_0 t - \theta_0)}\} \hat{=} \underline{u}_q$$

Compte tenu des impédances dans les axes direct et transverse,  $\underline{z}_d$  et  $\underline{z}_q$ , on obtient pour les courants :

$$\underline{i}_d = \underline{u}_d / \underline{z}_d \hat{=} u \{ \text{Re}(1/\underline{z}_d) \cdot \sin(s\omega_0 t - \theta_0) + \text{Im}(1/\underline{z}_d) \cdot \cos(s\omega_0 t - \theta_0) \} \quad (4.19)$$

$$\underline{i}_q = \underline{u}_q / \underline{z}_q \hat{=} u \{ -\text{Re}(1/\underline{z}_q) \cdot \cos(s\omega_0 t - \theta_0) + \text{Im}(1/\underline{z}_q) \cdot \sin(s\omega_0 t - \theta_0) \}$$

Sous forme complexe, les flux sont exprimés par les relations ci-après :

$$\underline{\psi}_d = j\underline{z}_d \cdot \underline{i}_d = j\underline{u} \quad \underline{\psi}_q = j\underline{z}_q \cdot \underline{i}_q = \underline{u} \quad \text{d'où :}$$

$$\begin{cases} \underline{\psi}_d = u \cdot \cos(s\omega_0 t - \theta_0) \\ \underline{\psi}_q = u \cdot \sin(s\omega_0 t - \theta_0) \end{cases} \quad (4.20)$$

Les relations (4.15), exprimées pour les courants, et (4.19) permettent de déterminer le courant dans la phase a :

$$\begin{aligned} i_a &= u \{ \{ \text{Re}(1/\underline{z}_d) \cdot \sin(s\omega_0 t - \theta_0) + \text{Im}(1/\underline{z}_d) \cdot \cos(s\omega_0 t - \theta_0) \} \cdot \cos\{(1-s)\omega_0 t + \theta_0\} \\ &\quad + \{ \text{Re}(1/\underline{z}_q) \cdot \cos(s\omega_0 t - \theta_0) - \text{Im}(1/\underline{z}_q) \cdot \sin(s\omega_0 t - \theta_0) \} \cdot \sin\{(1-s)\omega_0 t + \theta_0\} \} \\ &= u \{ \frac{1}{2} |1/\underline{z}_d + 1/\underline{z}_q| \cdot \sin(\omega_0 t + \phi) - \frac{1}{2} |1/\underline{z}_d - 1/\underline{z}_q| \cdot \sin\{(1-2s)\omega_0 t + 2\theta_0 - \chi\} \} \end{aligned}$$

$$\text{On peut poser : } \frac{1}{2} (1/\underline{z}_d + 1/\underline{z}_q) = \frac{1}{2} |1/\underline{z}_d + 1/\underline{z}_q| \cdot e^{j\phi} = y_\Sigma \cdot e^{j\phi}$$

$$\frac{1}{2} (1/\underline{z}_q - 1/\underline{z}_d) = \frac{1}{2} |1/\underline{z}_d - 1/\underline{z}_q| \cdot e^{j\chi} = y_\Delta \cdot e^{j\chi}$$

Il apparaît deux composantes du courant :

$$- i_{am} = u \cdot y_\Sigma \cdot \sin(\omega_0 t + \phi) \quad (4.21)$$

= valeur moyenne de la composante asynchrone du courant définie par l'admittance moyenne des deux axes.

$$- i_{ap} = u \cdot y_\Delta \cdot \sin\{(1-2s)\omega_0 t + 2\theta_0 - \chi\} \quad (4.22)$$

= composante asynchrone pulsante due à la réluctance variable des pôles saillants. Pour  $s = 0,5$ , cette composante perd son caractère pulsant. Ce phénomène est connu sous le nom d'effet de Görgees.

Par (4.18) et (4.20), le couple asynchrone devient :

$$\begin{aligned} m_a &= u^2 \{ \sin(s\omega_0 t - \theta_0) \cdot \{ \text{Re}(1/\underline{z}_d) \cdot \sin(s\omega_0 t - \theta_0) + \text{Im}(1/\underline{z}_d) \cdot \cos(s\omega_0 t - \theta_0) \} \\ &\quad - \cos(s\omega_0 t - \theta_0) \cdot \{ -\text{Re}(1/\underline{z}_q) \cdot \cos(s\omega_0 t - \theta_0) + \text{Im}(1/\underline{z}_q) \cdot \sin(s\omega_0 t - \theta_0) \} \} \\ &= u^2 \{ y_\Sigma \cdot \cos\phi - y_\Delta \cdot \cos[2s\omega_0 t - 2\theta_0 + \chi] \} \end{aligned}$$

On retrouve deux termes homologues des courants :

$$- m_{am} = u^2 \cdot y_\Sigma \cdot \cos\phi \quad (4.23)$$

= valeur moyenne du couple asynchrone  

$$- m_{ap} = u^2 \cdot y_{\Delta} \cdot \cos(2s\omega_0 t - 2\theta_0 + \chi) \quad (4.24)$$
 = couple asynchrone pulsant au double de la fréquence de glissement ou couple "réductant". On remarque qu'il tend vers une valeur différente de zéro lorsque le glissement s'annule. En effet, on a dans ce cas :

$$y_{\Delta 0} = 1/x_d - 1/x_q$$

#### IV.23 - Régime synchrone

En considérant le régime synchrone seul, compte tenu d'un réseau de puissance infinie, la relation (4.17) permet d'écrire en se référant à la pulsation  $(1-s)\omega_0$  et en affectant de l'indice e les grandeurs relatives au courant continu d'excitation :

$$u_d = 0 = r \cdot i_{de} + (1-s)\psi_{qe}$$

$$u_q = 0 = r \cdot i_{qe} - (1-s)\psi_{de}$$

Par ailleurs, conformément aux conventions :

$$\psi_{qe} = - i_{qe} \cdot x_q$$

$$\psi_{de} = - (u_e + i_{de} \cdot x_d) \quad \text{avec } u_e = i_e = \text{f.e.m. à vide créée par } i_e$$

En résolvant le système ainsi défini, il est possible de déterminer les courants et les flux synchrones :

$$i_{de} = - \frac{(1-s)^2 \cdot x_q \cdot u_e}{r^2 + (1-s)^2 \cdot x_d \cdot x_q} \quad i_{qe} = - \frac{(1-s) \cdot r \cdot u_e}{r^2 + (1-s)^2 \cdot x_d \cdot x_q} \quad (4.25)$$

$$\psi_{de} = - \frac{r^2 \cdot u_e}{r^2 + (1-s)^2 \cdot x_d \cdot x_q} \quad \psi_{qe} = \frac{(1-s) \cdot r \cdot u_e \cdot x_q}{r^2 + (1-s)^2 \cdot x_d \cdot x_q}$$

Par (4.16), la composante synchrone du courant peut s'écrire pour la phase a :

$$i_e = i_{de} \cdot \cos\theta - i_{qe} \cdot \sin\theta = - \sqrt{i_{de}^2 + i_{qe}^2} \cdot \sin(\theta - \beta)$$

On peut poser :

$$\lambda_e = \frac{u_e \cdot (1-s) \cdot \sqrt{r^2 + (1-s)^2 \cdot x_q^2}}{r^2 + (1-s)^2 \cdot x_d \cdot x_q} = \sqrt{i_{de}^2 + i_{qe}^2}$$

$$\text{tg}\beta = i_{de}/i_{qe} = (1-s) \cdot x_q/r \quad \text{d'où :}$$

$$i_e = -\lambda_e \cdot \sin[(1-s)\omega_0 t + \theta_0 - \beta] \quad (4.26)$$

La composante synchrone du couple s'écrit, compte tenu de (4.18) :

$$m_e = \psi_{qe} \cdot i_{de} - \psi_{de} \cdot i_{qe} = - \lambda_e^2 \cdot r/(1-s)$$

Selon les conventions moteur, ce couple est résistant.



#### IV.24 - Régime mixte

Le caractère linéaire des équations caractéristiques permet d'appliquer le principe de superposition. On peut alors exprimer deux composantes mixtes du couple en combinant les composantes asynchrones et synchrones des courants et des flux.

L'action du flux asynchrone et du courant synchrone permet de déterminer le couple synchrone pulsant.

Par (4.20) et (4.25) :

$$m_{ep} = \psi_q \cdot i_{de} - \psi_d \cdot i_{qe} = -u \cdot \sin(s\omega_0 t - \theta_0) \frac{(1-s)^2 \cdot x_q \cdot u_e}{r^2 + (1-s)^2 \cdot x_d \cdot x_q} + u \cdot \cos(s\omega_0 t - \theta_0) \frac{r \cdot (1-s) \cdot u_e}{r^2 + (1-s)^2 \cdot x_d \cdot x_q}$$

$$m_{ep} = u \cdot \lambda_e \cdot \cos(s\omega_0 t - \theta_0 + \beta) \quad (4.27)$$

Le couple synchrone pulsant oscille à la fréquence de glissement.

En second lieu, l'action du flux synchrone et du courant asynchrone crée le couple mixte pulsant. Par (4.21) et (4.19) :

$$m_{aep} = \psi_{qe} \cdot i_d - \psi_{de} \cdot i_q$$

$$= \frac{u_e \cdot (1-s) \cdot r \cdot x_q}{r^2 + (1-s)^2 \cdot x_d \cdot x_q} \cdot u \{ \operatorname{Re}(1/z_d) \cdot \sin(s\omega_0 t - \theta_0) + \operatorname{Im}(1/z_d) \cdot \cos(s\omega_0 t - \theta_0) \}$$

$$+ \frac{u_e \cdot r^2}{r^2 + (1-s)^2 \cdot x_d \cdot x_q} \cdot u \{ -\operatorname{Re}(1/z_q) \cdot \cos(s\omega_0 t - \theta_0) + \operatorname{Im}(1/z_q) \cdot \sin(s\omega_0 t - \theta_0) \}$$

$$m_{aep} = u \cdot \lambda_e \{ -y_\Sigma \cdot \cos(s\omega_0 t - \theta_0 + \phi + \beta) + y_\Delta \cdot \cos(s\omega_0 t - \theta_0 + \chi - \beta) \} \cdot r \quad (4.28)$$

Le couple mixte pulsant se compose de deux termes, homologues des courants asynchrones moyen et pulsant, qui tous deux oscillent à la fréquence de glissement.

Lorsque la machine est le siège des phénomènes précédemment décrits, toutes les composantes de courants et de couples devront être introduites. La synchronisation est un cas particulier de ce type de fonctionnement. Dans ce cas, on peut poser :

$$x_d, x_q \gg r \quad \text{d'où :}$$

$$i_{am}, i_{ap}, \text{ inchangés}$$

$$i_\theta = -u_e/x_d \cdot \cos\{(1-s)\omega_0 t + \theta_0\}$$

$$m_a \text{ inchangé}$$

$$m_e, m_{aep} \approx 0$$

$$m_{ep} = -u \cdot u_e/x_d \cdot \sin(s\omega_0 t - \theta_0)$$

### IV.3 - DISCUSSION

#### IV.31 - Axes direct et transverse

Dans le cas d'un rotor lisse, on peut écrire les principales grandeurs résultant du champ tournant :

$$H = \hat{H}_0 \cdot \sin(\omega_0 t - \pi y / \tau)$$

$$E = - \hat{E}_0 \cdot \sin(\omega_0 t - \pi y / \tau + \phi_F)$$

$$P' = E \cdot H = \frac{1}{2} \hat{E}_0 \cdot \hat{H}_0 \cdot \{\cos \phi_F - \cos(2\omega_0 t - 2\pi y / \tau + \phi_F)\}$$

Il apparaît clairement que l'angle de phase respectif de ces diverses fonctions dépend de l'angle  $\phi_F$  caractéristique du milieu magnétique. Cependant, au cours des précédents chapitres, nous avons donné diverses définitions de la notion d'axe direct, soit :

- pour le champ magnétique, valeur maximum dans l'axe polaire,
- pour le champ électrique, valeur nulle dans l'axe polaire,
- pour les pertes, valeur minimum dans l'axe polaire.

Toutes ces conditions ne peuvent être satisfaites simultanément pour un angle  $\phi_F$  quelconque.

De plus, les composantes de la f.m.m. statorique correspondant respectivement aux f.m.m. des branches fer, enroulement d'excitation et magnétisante ne sont pas en phase. On ne peut donc avoir la simultanéité de ces trois termes dans le même axe.

En conclusion, la notion d'axe direct ou transverse n'a de sens physique que relativement à une composante (ou une somme de composantes), mais ne peut en avoir par rapport à un ensemble. En effet, les conventions adoptées sont relatives à des réactances pures, ce qui n'est pas le cas en réalité.

#### IV.32 - Hypothèses

Pour tenir compte des remarques formulées au paragraphe précédent, une étude pas à pas des phénomènes instantanés dans tout l'espace de la machine est nécessaire. Une telle méthode est irrationnelle car hors de proportion avec le but visé.

La théorie à deux axes décompose la machine réelle en deux machines é-

lémentaires idéales, directe et transverse, et définit le régime asynchrone par une combinaison des impédances partielles. Chacune de celles-ci résultera du calcul d'un régime "permanent" dans l'axe considéré. De façon plus précise, ces deux machines théoriques satisfont aux hypothèses suivantes, compatibles avec les chapitres précédents :

- la simultanéité de l'apparition des diverses composantes dans un axe est réalisée pour le calcul des impédances caractéristiques directe et transverse,
- le calcul des coefficients caractéristiques des effets d'extrémité et de superposition pour chaque axe résulte de l'hypothèse qui précède,
- l'enroulement d'excitation n'apparaît que dans l'axe direct.

Dans ces conditions, les deux impédances directe et transverse sont parfaitement définies pour le calcul. En introduisant ces deux machines limites, on réalise une combinaison qui ne fait cependant pas apparaître ces deux impédances théoriques. Elle permet par contre de déterminer une valeur moyenne et un écart de crête des couples et courants.

Cette hypothèse, sur laquelle repose l'ensemble de l'étude reçoit une confirmation par les bons résultats obtenus (chapitre V) en régime asynchrone (valeur moyenne des impédances) et au voisinage du synchronisme (différence des impédances).

#### IV.4 - MARCHE A SUIVRE

##### IV.41 - Détermination des pertes

Pour un enroulement réparti, le fondamental de la f.m.m. statorique, par pôle est donné par la relation :

$$1\hat{\theta} = 0,9 \cdot \frac{m}{2} \cdot \frac{N}{p} \cdot k_D \cdot I_1$$

On peut lier le champ à la f.m.m. :

$$H_{smoy} = 2/\pi \cdot \hat{H}_s$$

$$2\hat{\theta} = \tau \cdot H_{smoy} \quad \text{d'où :}$$

$$\hat{H}_s = 0,9 \cdot \pi / \tau \cdot m / 2 \cdot N / p \cdot k_D \cdot I_1 = 1,35 \cdot \pi / \tau \cdot N / p \cdot k_D \cdot I_1 \quad (4.29)$$

De la même manière que pour la f.m.m., il est possible de décomposer les champs et les courants en des termes correspondant aux diverses bran-

ches rotoriques.

Nous examinerons l'axe direct, la méthode étant identique pour l'axe transverse.

Soit  $I_{Fd}$  la valeur efficace du courant supposé dans la branche fer. La relation (4.29) donne la valeur correspondante du champ  $\hat{H}_{SF}$  à la surface du stator. Connaissant la distribution du facteur de concentration  $k_H$ , on en déduit directement la répartition du champ au rotor. En subdivisant la surface polaire en tronçons pour lesquels il est possible d'admettre le facteur  $k_H$  constant, on peut déterminer la valeur moyenne des pertes pour chacun d'eux conformément à l'étude du chapitre II. Pour la corne polaire, le calcul des pertes s'effectue en introduisant la superposition conformément au paragraphe III.3. On obtient ainsi la distribution des pertes à la surface du pôle. Celle-ci permet d'obtenir directement le facteur  $k_z$  d'extrémité par la méthode simplifiée du paragraphe III.26, compte tenu de la géométrie des pôles. Les pertes sans effet d'extrémité seront majorées par le facteur  $k_z$ , et multipliées par le nombre de pôles pour obtenir les pertes totales  $P_F$ .

#### IV.42 - Détermination des impédances équivalentes

La puissance au niveau de l'entrefer sera ainsi :

$P_{tot} = P_F/s$  et la résistance qui en résulte :

$$R_F = P_{tot}/(3I_{Fd}^2)$$

Par l'intermédiaire du facteur de puissance  $\cos\phi_F$  :

$$Z_F = R_F/\cos\phi_F \quad \text{et} \quad X_F = Z_F.\sin\phi_F$$

La mise en parallèle de cette impédance et de la réactance magnétisante ainsi que, pour l'axe direct, de l'impédance équivalente de l'enroulement d'excitation pour le glissement  $s$  définit l'impédance équivalente du rotor  $Z_r$ .

Le courant statorique total vaut :

$$I_s = I_F.Z_F/Z_r$$

L'impédance résultante sera la somme des impédances rotoriques et statorique :

$$Z_s = Z_r + R_s + jX_{\sigma s}$$

La tension statorique résultant du calcul vaut ainsi :

$$U_s = Z_s.I_s$$

Si cette dernière ne correspond pas à la valeur imposée aux bornes de la machine, il faudra procéder à une itération de la valeur du courant dans la branche fer  $I_f$ .

Divers exemples, exposés au chapitre V, illustrent la méthode décrite et permettent la comparaison avec deux machines testées.

#### IV.43 - Echauffement

Au cours du démarrage, les pertes rotoriques superficielles provoquent un échauffement de la semelle polaire fonction, entre autre, des conditions extérieures telles que moment d'inertie et couple résistant. Il s'en suit une variation de la résistivité, donc de tous les phénomènes relatifs à la pénétration et à la distribution des courants et des pertes. En particulier, le tableau de la page 32 montre qu'en première approximation la profondeur de pénétration est inversement proportionnelle à la résistivité, alors que les pertes varient proportionnellement à cette valeur.

En itérant également sur la valeur de la résistivité, il serait possible d'introduire de façon précise l'effet de l'échauffement sur les caractéristiques de démarrage. Cependant la température est variable à la fois en fonction de la position sur la surface des pôles et de la profondeur. Elle est également liée à l'ambiance et aux conditions initiales. Il est donc très difficile de dresser une carte des échauffements valable à chaque instant et en chaque point. Par contre, l'introduction d'une fonction approchée de la température moyenne pour l'ensemble des semelles polaires et de la valeur de la résistivité correspondante permettra d'atteindre une précision bien suffisante.

Cependant, dans la plupart des cas où l'échauffement des pôles au cours d'un démarrage n'excède pas  $100^{\circ}\text{C}$ , l'introduction d'une résistivité constante correspondant à la température moyenne au cours de la mise en vitesse sera assez précise pour un premier calcul. C'est l'hypothèse qui a été admise dans les applications, bien que l'introduction d'une résistivité variable ne présente pas de difficultés particulières.

# Chapitre V - APPLICATIONS

## V.1 - INTRODUCTION

Ce chapitre se présentera simultanément sous forme d'un résumé et d'une analyse de ce qui précède au travers de deux exemples. Il s'agit de deux moteurs synchrones à pôles massifs présentant des caractéristiques différentes en ce qui concerne les connexions inter-polaires. Ces deux machines, en exploitation, sont décrites dans les annexes 1 et 2.

La méthode de calcul numérique présentée permet d'obtenir rapidement les caractéristiques relatives à un démarrage asynchrone, avec une précision compatible avec les exigences du choix des dimensions et des garanties. De plus, une telle méthode doit être facilement traitée par le calcul électronique. Les résultats donnés dans les pages qui suivent ont effectivement été obtenus par ce moyen. De nombreuses expressions numériques établies dans le cas d'une machine particulière peuvent être étendues à la plupart des moteurs présentant une construction de conception semblable.

Ce chapitre sera avant tout axé sur l'efficacité et pourra faire l'objet de simplifications et d'améliorations dictées par l'expérience.

## V.2 - FONCTIONS CARACTERISTIQUES

Dans le cadre d'une application numérique, de nombreuses caractéristiques partielles résultant d'une analyse pas à pas peuvent être exprimées sous forme de fonctions paramétriques spécifiques d'une géométrie ou d'un matériau donné. Dans notre cas, cette simplification est rendue souvent possible grâce au fait que la distribution du champ à la surface du rotor varie peu en fonction des rapports  $b_p/\tau$  et  $\delta/\tau$  dans le domaine usuel fixé par les contingences électriques et mécaniques.

Nous reprendrons le même ordre que pour les précédents chapitres pour

l'expression littérale de ces fonctions caractéristiques.

Le champ sur la partie latérale de la corne polaire est liée à la valeur de crête du champ à la surface du rotor ( $\hat{H}_{rd,q}$ ); on peut écrire:

$$H_{rd \max} = a_{Hd} \cdot \hat{H}_{rd}$$

$$H_{rq \max} = a_{Hq} \cdot \hat{H}_{rq}$$

Compte tenu des résultats des paragraphes II.33 et II.41, la profondeur limite  $\xi$  et les pertes spécifiques  $P'_m$ , pour un matériau donné, sont fonction du champ  $\hat{H}_0$  en surface et de la fréquence de pulsation (ou du glissement  $s$ ). On peut écrire :

$$\xi = a_\xi + \sqrt{b_\xi \cdot \hat{H}_0 + c_\xi} \quad \text{avec :}$$

$$a_\xi = a_{\xi 1} + a_{\xi 2}/s + a_{\xi 3}/s^2$$

$$b_\xi = b_{\xi 1} + b_{\xi 2}/s + b_{\xi 3}/s^2$$

$$c_\xi = c_{\xi 1} + c_{\xi 2}/s + c_{\xi 3}/s^2 \quad \text{et :}$$

$$P'_m = a_p + b_p \cdot \sqrt{\hat{H}_0^3 + c_p} \quad \text{avec :}$$

$$a_p = a_{p1} + a_{p2} \cdot s + a_{p3} \cdot s^2$$

$$b_p = b_{p1} + b_{p2} \cdot \sqrt{s + b_{p3}}$$

$$c_p = c_{p1} + c_{p2} \cdot s + c_{p3} \cdot s^2$$

En posant  $\xi/d = \xi'$ , les trois grandeurs caractéristiques de la superposition dans les cornes polaires,  $k_{spd}$ ,  $k_{spq}$  et  $\cos\phi_s$  prennent la forme suivante :

pour  $\xi' \leq 1$

$$k_{spd,q} = k_{sp1} + k_{sp2} \cdot \xi' + k_{sp3} \cdot \xi'^2$$

$$\cos\phi_{Fs} = a_{sp1} + a_{sp2} \cdot \xi' + a_{sp3} \cdot \xi'^2$$

pour  $\xi' \geq 1$

$$k_{spd,q} = k_{sp4} + k_{sp5} \cdot \xi' + k_{sp6}/\xi'$$

$$\cos\phi_{Fs} = a_{sp4} + a_{sp5} \cdot \xi' + a_{sp6}/\xi'$$

Pour les expressions de  $k_{sp}$ , il est bien entendu que les coefficients  $k_{sp1}$  varient suivant l'axe.

Les pertes totales sur un pôle peuvent s'exprimer au moyen des relations qui précèdent comme suit :

$$P_{d,q} = a_{Pd,q} \cdot P'_m(\hat{H}_r, s) \cdot \{b_p - 2\xi(H_r \max, s)\} \\ + 2k_{spd,q} \cdot P'_m(H_r \max, s) \cdot \{d + 2\xi(H_r \max, s)\} = P_1 + P_2$$

Le facteur de puissance correspondant devient :

$$\cos\phi_F = \{P_1 \cdot \cos\phi_{F1} + P_2 \cdot \cos\phi_{sF}(\xi')\} / (P_1 + P_2)$$

Le facteur de majoration de l'impédance apparente du fer par effet d'ex-trémité ( $k_z$ ) différera dans sa forme suivant qu'il y a connexions inter-polaires ou pas. Cependant, dans tous les cas, il sera possible de l'ex-primer d'une façon suffisamment précise en fonction des paramètres géo-métriques des pôles uniquement.

### V.3 - DEMARRAGE ASYNCHRONE DE MOTEURS SYNCHRONES

#### V.31 - Moteur synchrone de 16,2 MW - 1500 t/min

Les principales caractéristiques de ce moteur sont données en annexe 1. Toutes les applications partielles illustrant les chapitres I à III se rapportent à cette machine. Les résultats qui en découlent seront consi-dérés comme acquis.

Tout d'abord, nous examinerons le détail de la marche à suivre pour un glissement égal à 1 (relativement à une fréquence de 50 Hz) et une ten-sion relative de 40 %. En suivant pas à pas la logique du calcul, on ob-tient les valeurs qui suivent.

#### Grandeurs constantes

$x'_{an}$	= impédance de la connexion frontale	(3.31) = 0,0178 p.u.
$\dot{U}_I$	= rapport de transformation du courant d'excitation	(4. 8) = 0,1105
$\dot{U}_z$	= rapport de transformation de l'impé- dance d'excitation	(4. 9) = 0,0183
$r'_p$	= résistance rotorique totale	= 0,00645 p.u.
$x'_p$	= réactance de fuite rotorique	(4.10) = 0,135 p.u.

#### Grandeurs fonctions du glissement

$k_R$	= facteur de majoration de la résistance de l'enroulement d'excitation	(4.11) = 9,97
$r'_p$	= résistance rotorique totale à $s = 1$	(4.12) = 0,0161 p.u.

#### Grandeurs fonctions du courant



Axe :    direct    transverse

$i_F$	= courant supposé dans la branche "fer", (début de l'itération)	2,01	2,36	p.u.
$\hat{H}_{rF}$	= valeur de crête du champ rotorique (4.29)	$1,71 \cdot 10^5$	$2,01 \cdot 10^5$	A/m
$\hat{H}_{rmax}$	= valeur maximum du champ rotorique	$3,08 \cdot 10^5$	$5,63 \cdot 10^5$	A/m
$\xi$	= profondeur limite maximale (fig.2.10)	0,0219	0,0296	m
$\xi/d$	= rapport caractéristique	1,22	1,65	
$k_{sp}$	= facteur de majoration des pertes par superposition (fig. 3.14)	0,820	0,698	
$\cos\phi_S$	= facteur de puissance relatif à la superposition (fig. 3.14)	0,914	0,905	
$P'_m(\hat{H}_{rF})$	= pertes spécifiques moyennes (fig. 2.12)	$5,77 \cdot 10^5$	$7,38 \cdot 10^5$	W/m <sup>2</sup>
$P'_{mmax}$	= pertes spécifiques maximales (fig. 2.12)	$1,42 \cdot 10^6$	$3,53 \cdot 10^6$	W/m <sup>2</sup>
$PF_1$	= pertes sur la partie centrale d'un pôle	$3,86 \cdot 10^5$	$4,56 \cdot 10^5$	W
$PF_2$	= pertes par superposition pour un pôle	$1,41 \cdot 10^5$	$3,84 \cdot 10^5$	W
$k_Z$	= facteur de majoration de l'impédan.(3.29)	1,065	1,053	
$P_F$	= pertes fer totales	$3,84 \cdot 10^6$	$5,49 \cdot 10^6$	W
$r_F$	= résistance équivalente du fer	0,0494	0,0568	p.u.
$\cos\phi_F$	= facteur de puissance du fer	0,843	0,856	
$x_F$	= réactance totale du fer	0,0316	0,0521	p.u.
$Z_F$	= impédance totale du fer	0,0587	0,0770	p.u.

On obtient ainsi les deux schémas équivalents de la fig. 5.1.

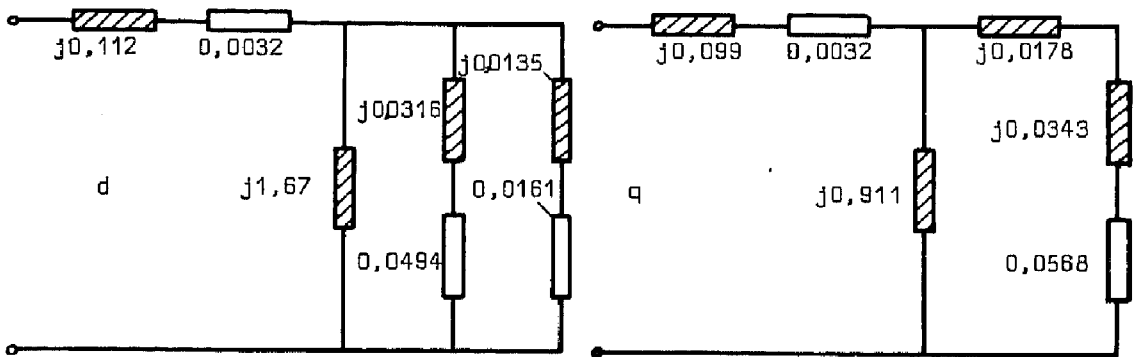


Fig. 5.1

Les grandeurs résultantes deviennent :	axe:	direct	transverse	
$Z_r$	= impédance équivalente du rotor	0,0437	0,0728	p.u.
$r_s$	= résistance équivalente totale	0,0323	0,0539	p.u.
$x_s$	= réactance équivalente totale	0,144	0,151	p.u.
$Z_s$	= impédance équivalente	0,148	0,160	p.u.
$\cos \phi$	= facteur de puissance	0,218	0,337	
$i_s$	= courant statorique = $i_f \cdot z_f / z_r$	2,70	2,50	p.u.
$u_s$	= tension statorique (vérification)	0,4	0,4	p.u.
$i'_p$	= courant équivalent de la branche excitation	0,871	---	p.u.
$P_p$	= pertes dans la branche excitation	$2,12 \cdot 10^5$	---	W
$m_p$	= couple asynchrone d'excitation = $P_p / P_N$	0,013	---	p.u.
$m_a$	= couple asynchrone résultant = $P_f / P_N + m_p$	0,228	0,339	p.u.
$m_{am}$	= couple asynchrone moyen (4.23)	0,283		p.u.
$m_{ap}$	= couple asynchrone pulsant (4.24)	0,081		p.u.
$i_{am}$	= courant asynchrone moyen (4.21)	2,80		p.u.
$i_{ap}$	= courant asynchrone pulsant (4.22)	0,202		p.u.

On obtient ainsi toutes les caractéristiques relatives à ce point de fonctionnement.

En effectuant le même calcul point par point pour les valeurs correspondantes de la tension et du glissement, il est possible de reconstituer ou de prédéterminer les caractéristiques complètes d'un démarrage. Dans le cas particulier de ce moteur, la tension, le courant, la vitesse et l'accélération ont été enregistrés. En effectuant également une mesure de l'accélération lors du ralentissement après déclenchement, il a été possible de reconstituer les couples résistant et accélérateur.

La fig. 5.2 représente les courants calculés et mesurés ainsi que la tension mesurée en fonction de la vitesse. L'écart maximum entre courants calculé et mesuré n'excède pas 7%, valeur qui peut facilement être expliquée par l'imprécision de certaines caractéristiques ou par l'effet thermique sur la résistivité. La fig. 5.3 donne les caractéristiques de couple calculées et mesurées. L'écart est très faible, inférieur à 5%. La fig. 5.4 donne les courbes de tension (mesure), courant (calcul et mesure) en fonction du temps. La fig. 5.5 représente, en fonction de la tension statorique et pour un glissement égal à l'unité, les valeurs des

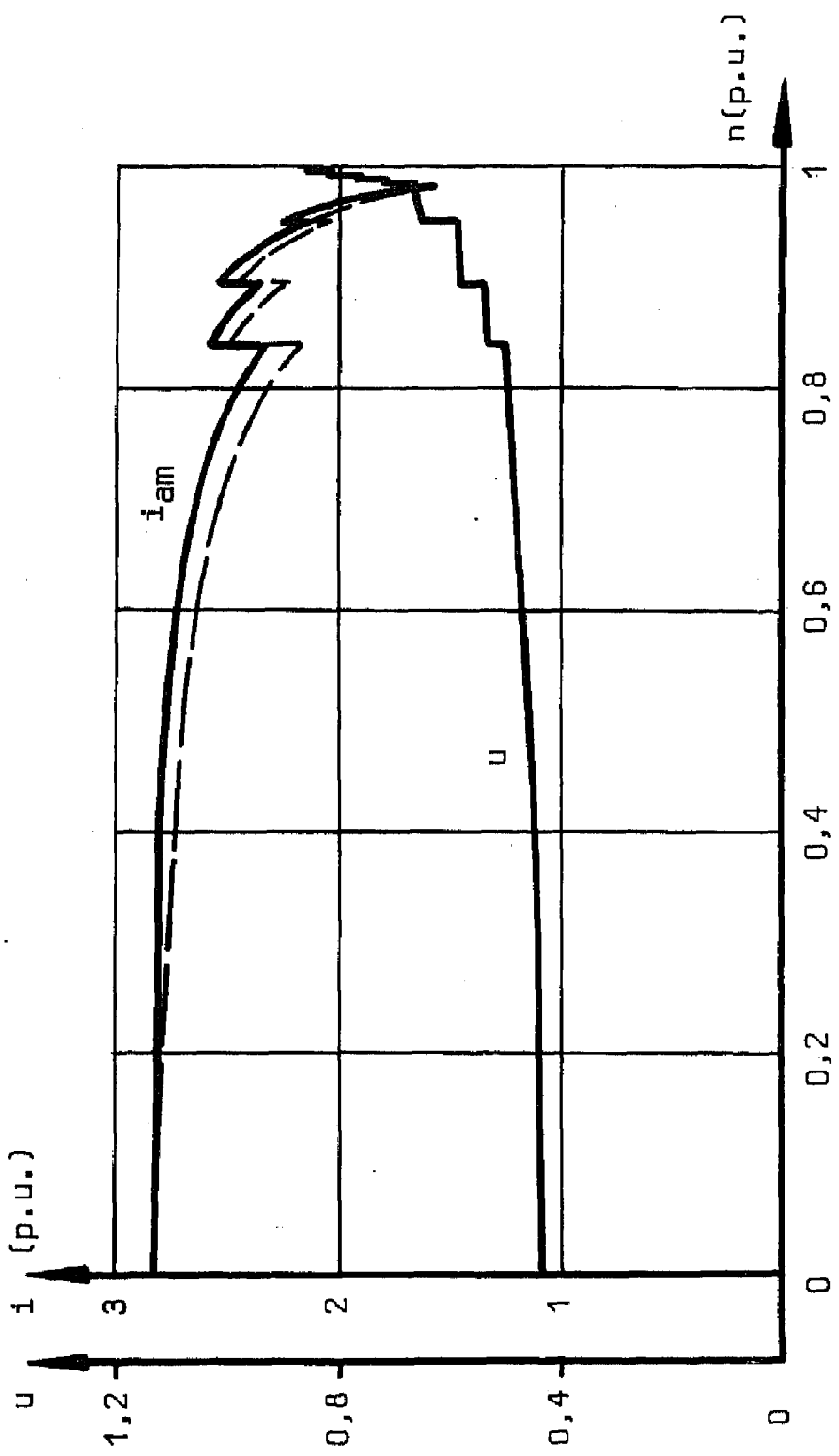


Fig. 5.2 - MOTEUR 16,2 MW - TENSION ET COURANT — mesuré ---- calculé

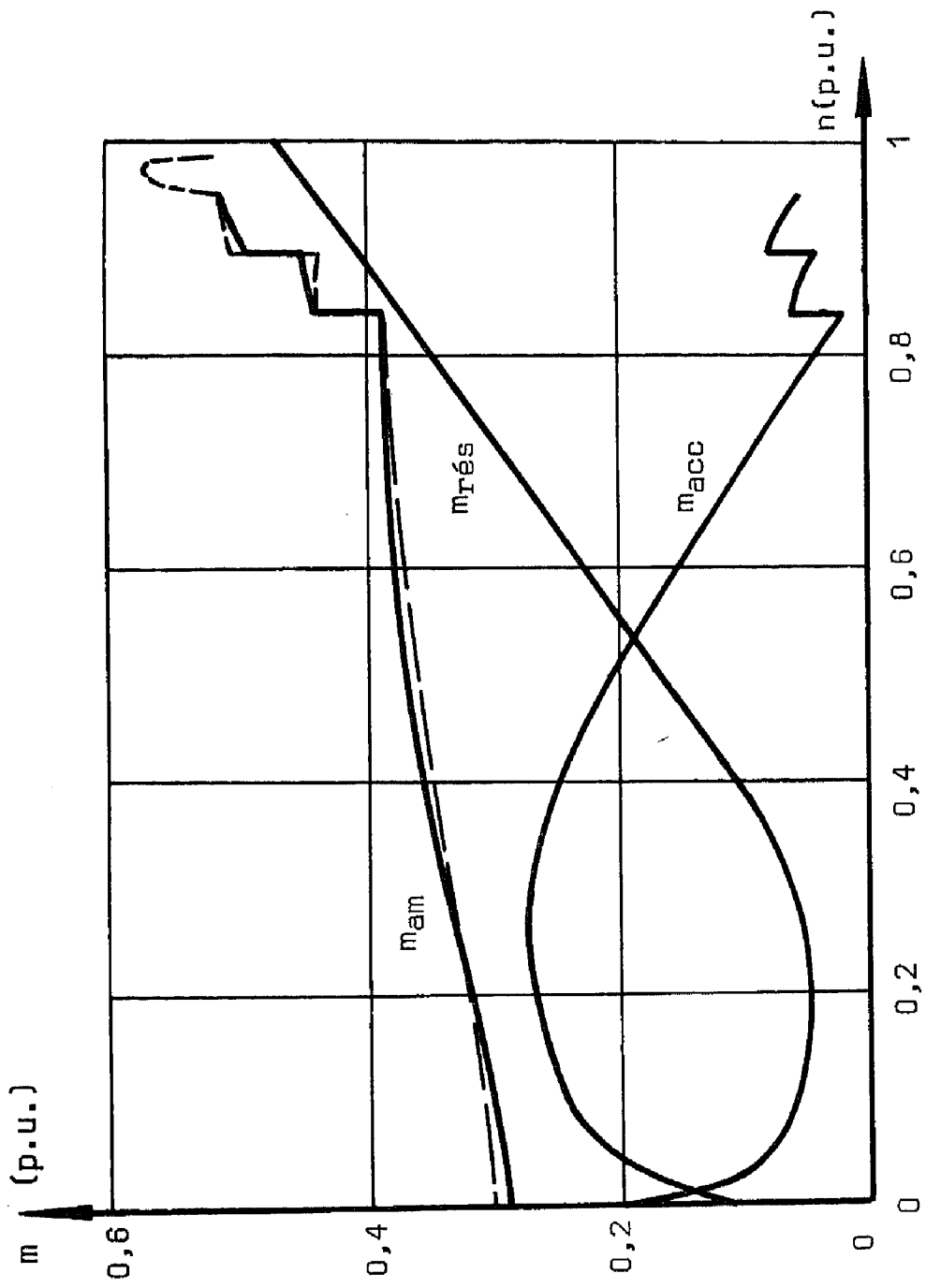


Fig. 5.3 - MOTEUR 16,2 MW - COUPLES — mesuré ---- calculé

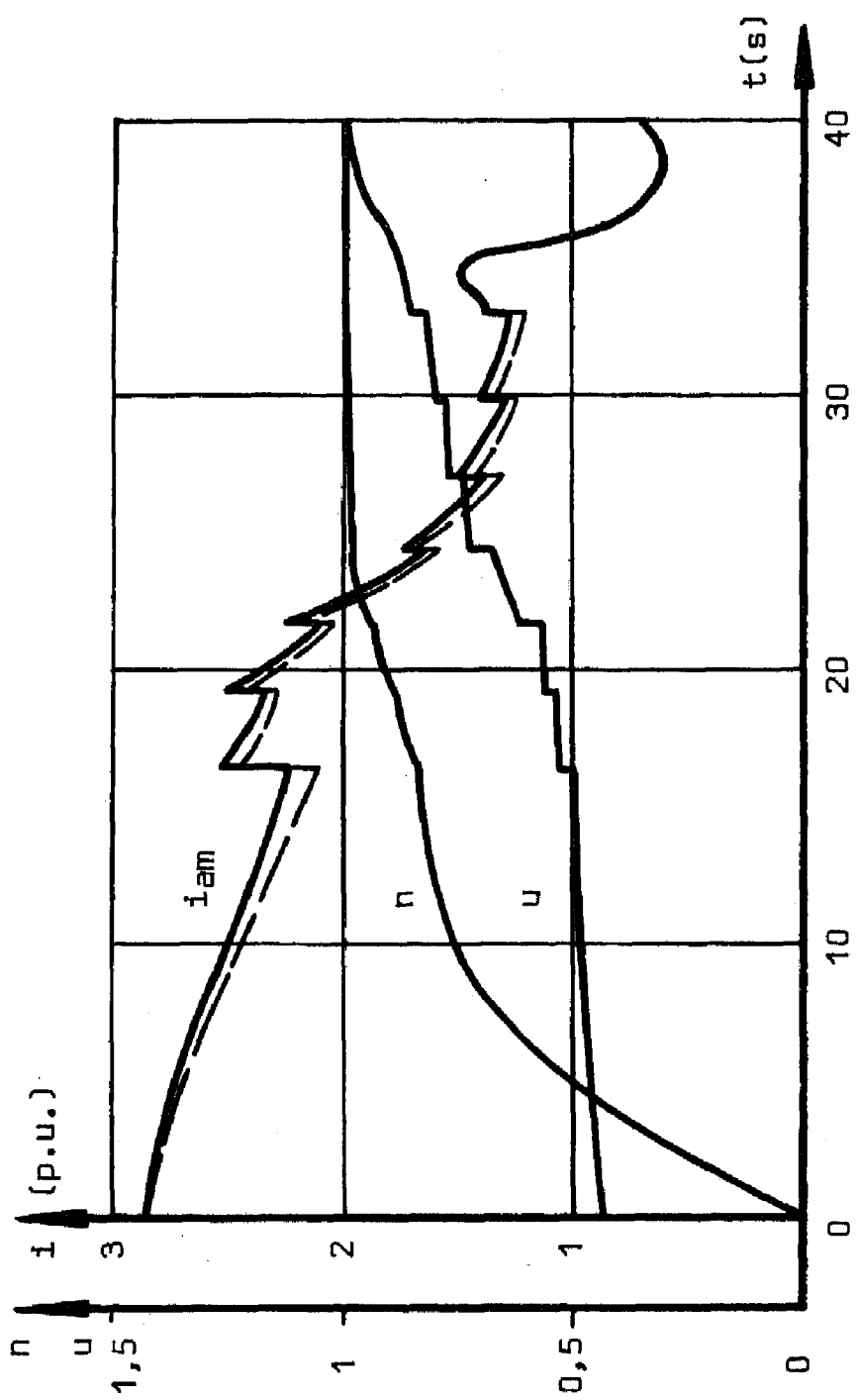


Fig. 5.4-MOTEUR 16,2 MW-CARACTERISTIQUES DE DEMARRAGE —Mesuré --- calculé

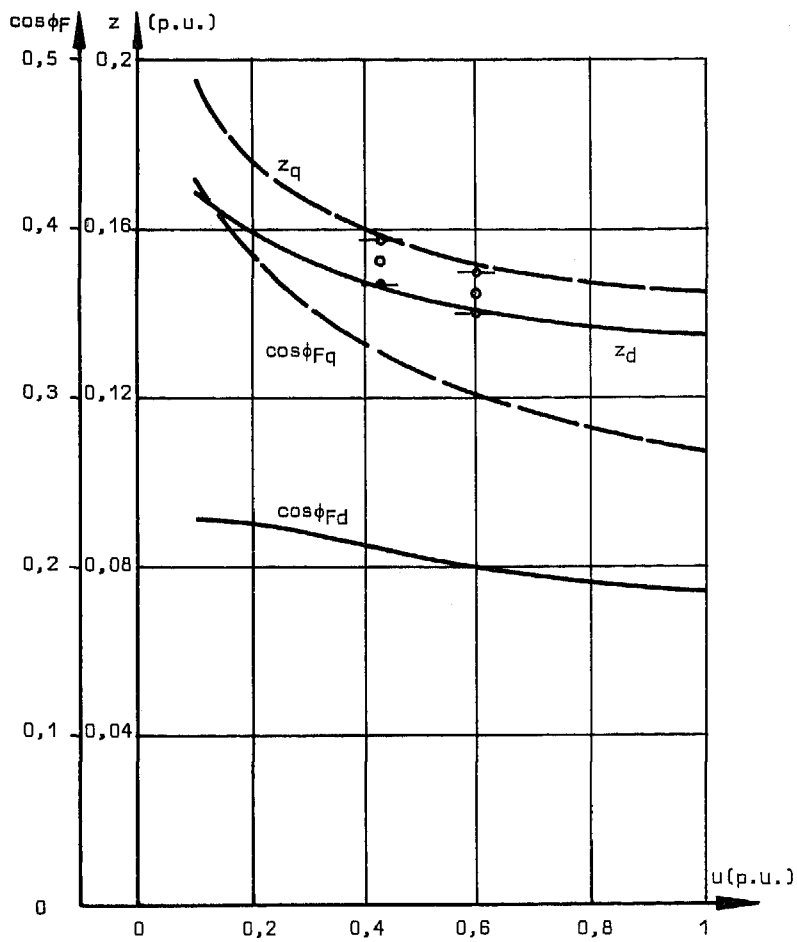


Fig. 5.5 - IMPEDANCES A ROTOR BLOQUE

impédances résultantes calculées dans les axes direct et transverse ainsi que les facteurs de puissance correspondants. Pour deux valeurs de la tension, les valeurs extrêmes mesurées pour l'impédance apparente ont été reportées. On constate que pour de telles machines, la notion de réactance subtransitoire est fortement liée à l'état de saturation de la machine. Avec la vitesse, l'écart entre ces deux axes va en s'accroissant pour présenter un maximum pour un glissement de 3 à 4 %. Il est encore plus marqué pour un moteur sans connexions inter-polaires.

Connaissant les impédances apparentes et les facteurs de puissance correspondants à faible glissement, il est possible d'intégrer numériquement les équations différentielles du mouvement au moyen des équations (4.21) à (4.24). Dans le cas particulier, les fonctions correspondant aux impédances et aux facteurs de puissance ont été approchées par des paraboles. Celles-ci sont définies par trois points pour les valeurs du glissement de 0,01-0,005 et 0, soit :

s	$Z_d$	$\cos\phi_d$	$Z_q$	$\cos\phi_q$
0,01	0,686	0,682	0,528	0,425
0,005	1,02	0,574	0,676	0,327
0	1,78	0	1,02	0

On obtient ainsi, en régime asynchrone stabilisé, les courbes de courant, de glissement et de couple accélérateur en fonction du temps de la fig. 5.6. Sur la même figure, les courbes correspondantes mesurées ont été reportées. On trouve des écarts instantanés relativement importants. Ils sont probablement liés à des phénomènes locaux créés par les cornes polaires. Cependant, dans l'ensemble, la concordance peut être qualifiée de bonne car le régime pulsant calculé est très représentatif du régime réel. Les hypothèses relatives aux notions d'axes direct et transverse sont donc valables, compte tenu du but assigné, aussi bien dans le domaine des valeurs moyennes que dans celui des écarts. En introduisant les valeurs synchrones liées au courant d'excitation, il est possible d'étudier de la même façon le régime transitoire de la synchronisation.

#### V.32 - Moteur-alternateur de 13,8 MW - 18,9 MVA - 1500 t/min

Les principales caractéristiques de cette machine sont données en anne-

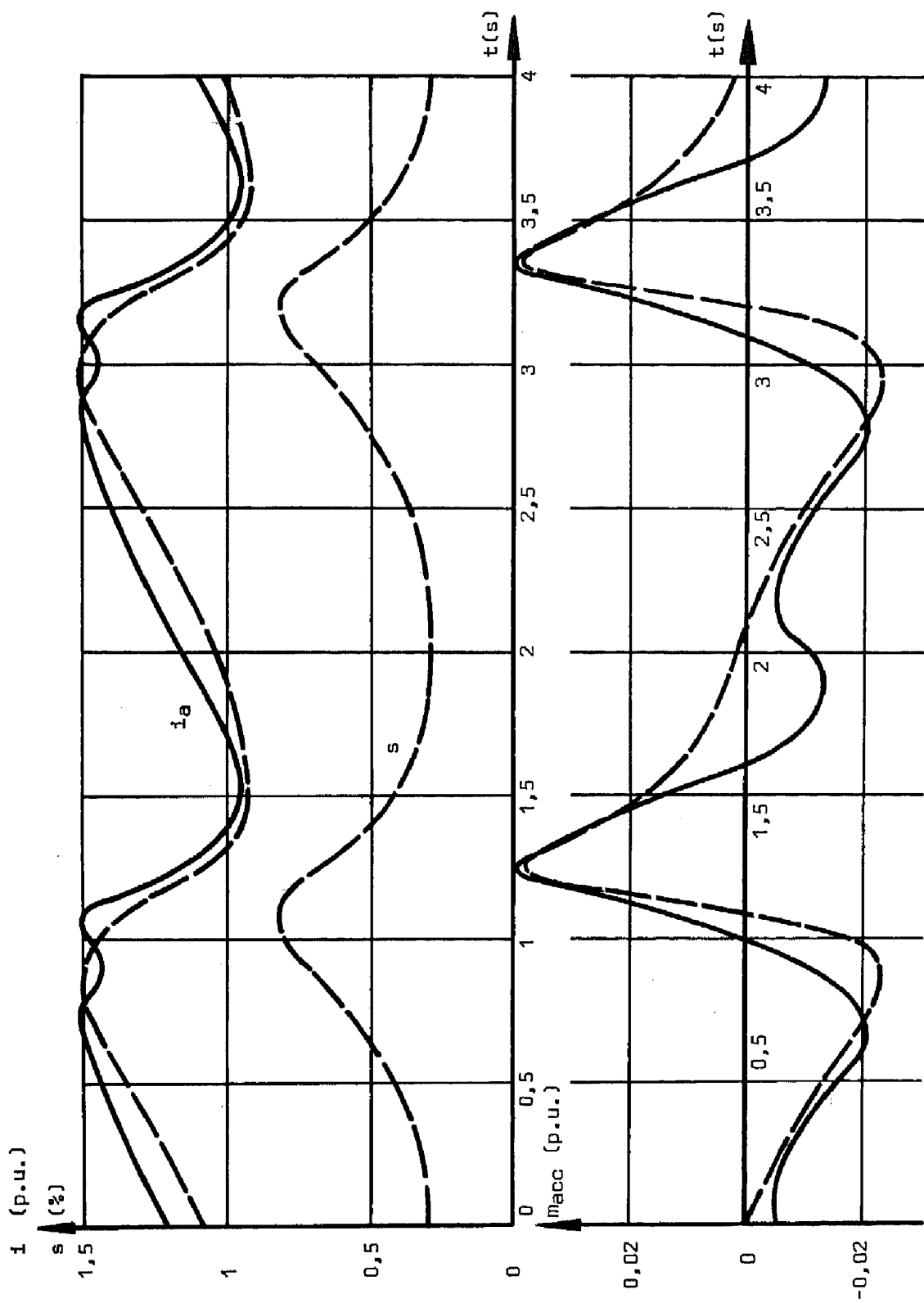


Fig., 5.6 - REGIME ASYNCHROME PERMANENT — mesuré - - - - calculé



xe 2. Vu la géométrie très proche de ce moteur et du précédent, on peut admettre que toutes les fonctions caractéristiques décrites au paragraphe V.2 restent valables. Ce groupe, contrairement au précédent, ne possède pas de connexions inter-polaires, mais une roue polaire massive.

Pour le glissement unité et une tension relative de 34 %, le calcul donne les caractéristiques ci-après :

	Axe direct	Axe transverse
$Z'_p$ = impédance de l'enroulement d'excitation	0,00823+j0,093	----- p.u.
$k_z$ = facteur d'extrémité	1,29	1,90
$Z'_F$ = impédance de la branche fer	0,0401+j0,0251	0,0761+j0,0454p.u.

d'où le schéma équivalent de la fig. 5.7.

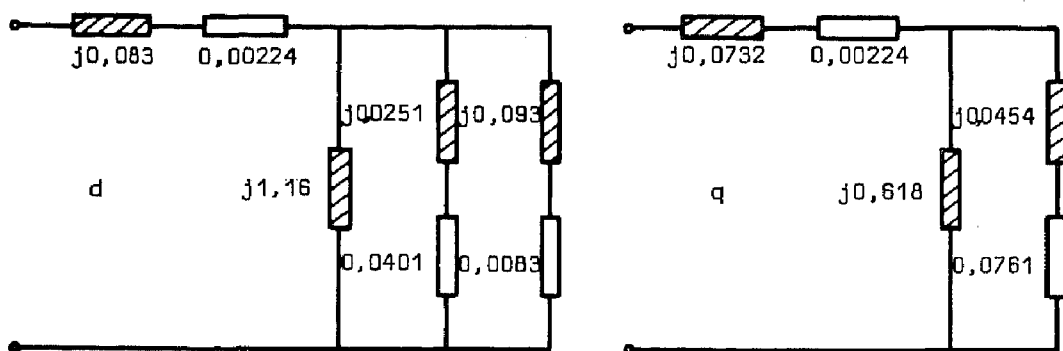


Fig. 5.7

$Z_s$ = impédance résultante	0,0238+j0,109	0,066+j0,123	p.u.
$ Z_s $ = module de $Z_s$	0,112	0,140	p.u.
$\cos\phi$ = facteur de puissance	0,214	0,481	
$i_s$ = courant statorique	3,05	2,42	p.u.
$m_a$ = couple asynchrone	0,210	0,402	p.u.
$m_{am}$ = couple asynchrone moyen		0,306	p.u.
$m_{ap}$ = couple asynchrone pulsant		0,177	p.u.
$i_{am}$ = courant statorique moyen		2,73	p.u.
$i_{ap}$ = courant statorique pulsant		0,520	p.u.

De la même façon que pour le moteur synchrone décrit au paragraphe précédent, la fig.5.8 donne les caractéristiques de démarrage à tension réduite par auto-transformateur à gradins. On trouve en particulier la tension (mesure), le courant (calcul et mesure) et la vitesse (calcul et mesure) en fonction du temps. La concordance calcul-mesure pour les courants présente un écart maximum du même ordre de grandeur que pour la machine

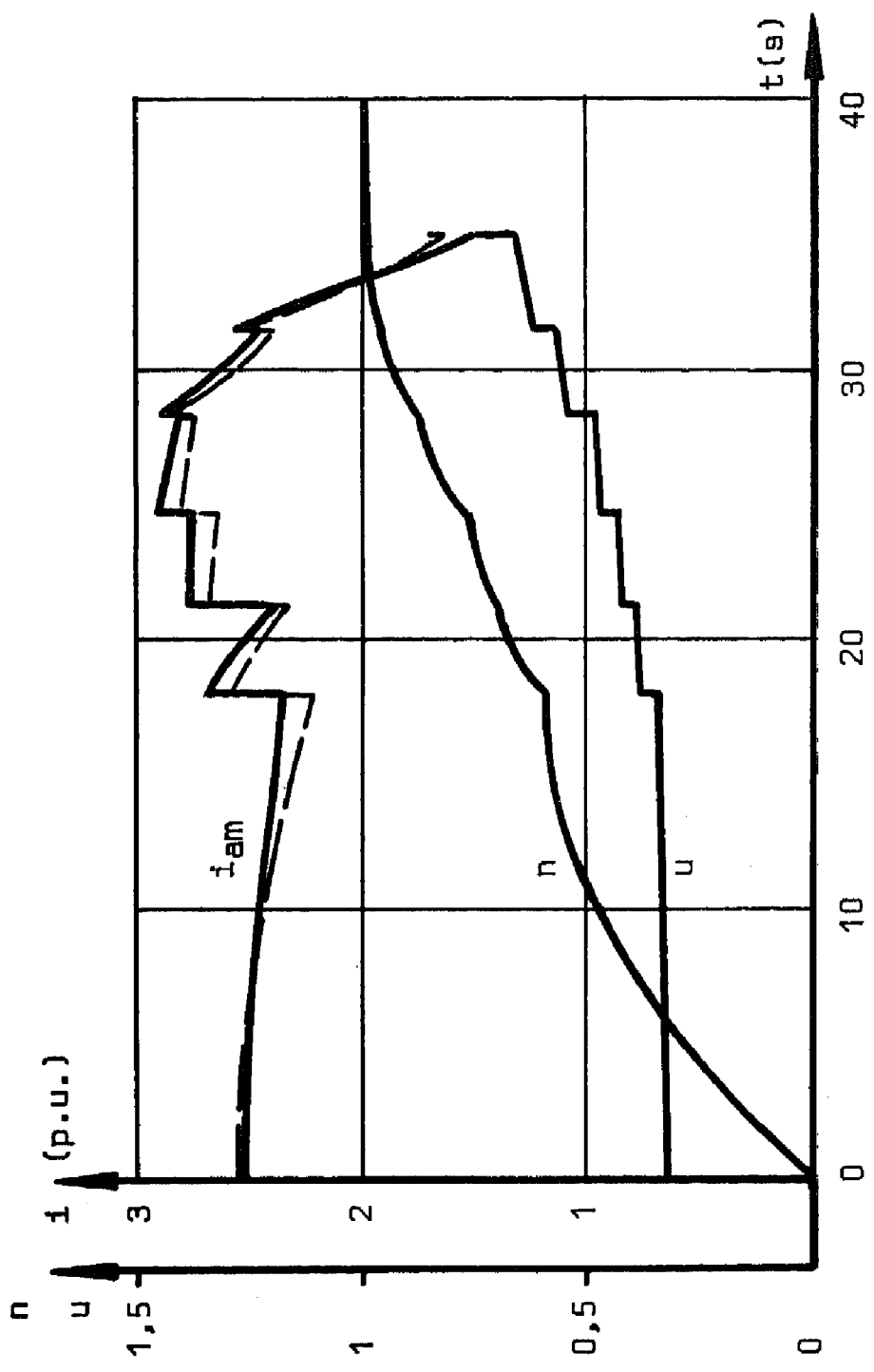


Fig. 5.8-MOTEUR 13,8MW-CARACTERISTIQUES DE DEMARRAGE ---mesuré ---calculé

précédente. L'excellente concordance des caractéristiques vitesse-temps confirme la validité du calcul proposé pour les couples asynchrones.

Les deux exemples traités dans ce chapitre permettent de conclure de façon positive quant au but assigné, c'est-à-dire que la méthode présentée satisfait aux exigences d'une utilisation industrielle.

## CONCLUSIONS

Les quatre premiers chapitres peuvent être séparés en deux parties distinctes. La première comprend une analyse mathématique permettant de mieux saisir le phénomène physique et d'étayer les hypothèses. Grâce à celles-ci, dans un second stade, on établit une méthode simplifiée dont le but est une prédétermination pratique, à l'échelle industrielle, des caractéristiques de démarrage asynchrone d'un moteur synchrone à pôles saillants massifs.

Cette manière de décomposer pas à pas l'étude des caractéristiques électriques à chaque niveau présente le grand avantage de mieux mettre en évidence les phénomènes électriques ou thermiques et de concevoir le matériel en conséquence. Cette technique peut être améliorée en fonction des moyens de calcul numérique mis à disposition et du but recherché. En outre, il sera nécessaire d'introduire des caractéristiques magnétiques et électriques spécifiques des divers matériaux utilisés.

Le cinquième chapitre réalise une synthèse des méthodes pratiques développées dans les chapitres précédents. L'application à deux machines en service constitue une vérification de la méthode proposée.

## ANNEXES

Les annexes 1 et 2 donnent les caractéristiques nécessaires au calcul d'un démarrage asynchrone pour deux machines synchrones réalisées par la S.A. des Ateliers de Sécheron, Genève.

Pour des raisons pratiques, les divers paramètres de ces deux moteurs seront donnés simultanément.

<u>Caractéristiques</u>		<u>Annexe 1</u>	<u>Annexe 2</u>
Installation		Centrale de pompage d'Arolla - Grande-Dixence S.A.	Centrale de turbinage pompage de Z'Mutt. Grande Dixence S.A.
Puissance	$P_N$	18,2 MW	18,9 MVA - 13,8 MW
Tension	$U_N$	7 kV	10 kV
Courant nominal (moteur)	$I_N$	1430 A	836 A
Impédance nominale	$Z_N$	2,82 $\Omega$	6,90 $\Omega$
Vitesse nominale	$n_N$	1500 t/min	1500 t/min
Résistance statorique	$r$	0,00319 p.u.	0,00224 p.u.
Réactance de fuite stator	$x_{\sigma s}$	0,105 p.u.	0,078 p.u.
Réactance synchrone directe	$x_d$	1,78 p.u.	1,24 p.u.
Réactance synchrone transverse	$x_q$	1,02 p.u.	0,695 p.u.
Résistance rotorique	$R_p$	0,166 $\Omega$	0,178 $\Omega$
Résistance de démarrage	$R_{pD}$	5. $R_p$	3,5. $R_p$
Réactance rotorique	$x'_p$	0,135 p.u.	0,093 p.u.
Flux par pôle	$\phi_p$	0,754 Wb	0,77 Wb
Coefficient de fuite polaire	$k_\sigma$	0,076	0,08
Courant magnétisant pour l'entrefer	$I_{p\delta}$	211 A	203 A
Nombre de spires d'excitation	$N_p$	61	67
Nombre de couches d'excitation	$c$	2	2

CaractéristiquesAnnexe 1Annexe 2

Nombre de spires en série par phase

$N_1$  26

36

Facteur de bobinage

$k_b$  0,915

0,915

Diamètre d'alésage

$d$  1,2 m

1,3 m

Longueur d'empilage

$l$  1,55 m

1,45 m

Largeur du pôle

$b_p$  0,63 m

0,68 m

Epaisseur de la corne

polaire

$d$  0,018 m

0,021 m

Entrefer

$\delta$  0,02 m

0,02 m

Hauteur du corps polaire

$h_{cp}$  0,17 m

0,25 m

Epaisseur du cuivre rotor

$h_{cu}$  0,0027 m

0,0025 m

Largeur du cuivre rotor

$b_{cu}$  0,045 m

0,05 m

Type d'acier des pôles

ACC-VSM-60-61

AC forgé normalisé

Résistivité à 20°C

$\rho$  0,3  $\mu\Omega\text{m}$

0,3  $\mu\Omega\text{m}$

Coefficient de résistivité

té

$\alpha$  0,002  $^{\circ}\text{C}^{-1}$

0,002  $^{\circ}\text{C}^{-1}$

Effet d'extrémité

Connexions inter-polaires

Pas de connexions

Roue polaire massive

Démarrage

Asynchrone à tension réduite par transformateur à gradins

Asynchrone à tension réduite par auto-transformateur à gradins

## REFERENCES

- (1.1) - C.Blanc- Les Equations Differentielles de la Technique. Edition du Griffon. Neuchâtel 1947.
- (1.2) - ——— - AIEE Standard Test Code for Synchronous Machines N<sup>o</sup> 503. Juin 1945
- (1.3) - E.C.GUILFORD - Theory of the Induction Machine with Conducting Sleeve Rotor. AIEE Transactions, pt III, vol 8 1962, pp 1129-1136
- (2.1) - R.POHL - Electromagnetic and Mechanical Effects in Solid Iron due to an Alternating or Rotating Magnetic Field. Journal of IEE, pt II, vol 91 1944, pp 239-248.
- (2.2) - G. et F. HABERLAND - Das Wechselfeld im gesättigten, massiven Eisen. Archiv für Elektrotechnik, vol 30 1936, pp 126-133.
- (2.3) - P.-D.AGARWAL. Eddy-Current Losses in Solid and Laminated Iron. AIEE Transactions, pt I, vol 78 1959, pp 169-181.
- (2.4) - N.KESAVAMURTHY et P.K.RAJAGOPALAN. An Analytical Method taking Account of Saturation and Hysteresis for Evaluating the Iron Loss in Solid-Iron Cores subjected to an Alternating Field. Proceeding Iee, Monograph N<sup>o</sup> 485 U, 1961, pp 237-243.
- (2.5) - N.KESAVAMURTHY et P.K.RAJAGOPALAN- Eddy-Currents in Solid Iron due to Alternating Magnetic Flux. Proceedings IEE, Monograph N<sup>o</sup> 339 U, 1959, pp 207-213.
- (2.6) - N.KESAVAMURTHY et P.K.RAJAGOPALAN- The Polyphase Induction Machines with Solid Iron Rotor. AIEE Transactions, pt III, vol 78 1959 pp 1092-1098.
- (2.7) - H.M.McCONNEL et E.F.SVERDRUP - The Induction Machine with Solid Iron Rotor. AIEE Transactions, pt III, vol 74 1955, pp 343-349.
- (3.1) - W.J.GIBBS- Induction and Synchronous Motors with Unlaminated Rotor. Proceedings IEE, pt II, vol 95 1948, p 411.
- (3.2) - G.ANGST- Polyphase Induction Motor with Solid Rotor - Effects of Saturation and Finite Length. AIEE Transactions, pt III, vol 8 1962, pp 902-910.
- (3.3) - A.J.WOOD et C.CONCORDIA - An Analysis of Solid Rotor Machines - Finite Length Effects, AIEE Transactions, pt III, vol 79 1962, pp 635-642.

- (3.4) - A.J.WOOD - An Analysis of Solid Rotor Machines. Thèse de l'Université d'Ann Arbor, Michigan, 1959.
- (3.5) - P.D.Agarwal - Equivalent Circuit and Performance Calculations of Canned Motors. AIEE Transactions, pt III, vol 79 1960, pp 635-642
- (4.1) - K.BONFERT - Betriebsverhalten der Synchronmaschine. Heidelberg 1962, pp 197-220.
- (4.2) - T.LAIBLE - Die Theorie der Synchronmaschine im Nichtstationären Betrieb. Heidelberg 1952.
- (4.3) - C.CONCORDIA - Synchronous Machines - Theory and Performances. J.Wiley & Sons. New-York 1951.

Démarrage Asynchrone des Machines Synchrones à Pôles Saillants Massifs. Diplôme EPUL 1964. (P.Arnaud, R.Baud, J.L.Baeriswyl, M. Jufer).



## LISTE DES SYMBOLES

### Symboles principaux

A, a	constantes
B	induction magnétique
B <sub>1</sub>	fondamental de la caractéristique magnétique
b <sub>p</sub>	largeur du pôle rotorique
C <sub>d, q</sub>	coefficient de réaction d'induit
c	nombre de couches
D	déplacement électrique
d	épaisseur, distance, diamètre
E	champ électrique
E, e	tension induite
F	fonction
f	fréquence
H	champ magnétique
h	hauteur
I, i	courant
J, j	densité de courant
j	$\sqrt{-1}$
k	facteur, rapport
k <sub>B</sub>	facteur de bobinage
k <sub>C</sub>	facteur de Carter
k <sub>d, q, p</sub>	rapport du fondamental à la valeur de crête
k <sub>1</sub>	$(1 + \tau)/1$
k <sub>H</sub>	facteur de concentration du champ
k <sub>R</sub>	facteur de majoration de la résistance (effet pelliculaire)
k <sub>p</sub>	facteur de majoration des pertes par effet d'extrémité
k <sub>Z</sub>	facteur de majoration de l'impédance fer par effet d'extrémité
k <sub>sp</sub>	facteur de majoration des pertes par superposition
k <sub>sJ</sub>	facteur de majoration de la densité de courant par superposition
k <sub>σ</sub>	facteur de fuite
L	inductance
l	longueur
M	inductance mutuelle

M,m	couple
m	nombre de phases
N	nombre de spires
N <sub>1</sub>	nombre de spires en série par phase
n	vitesse relative
P	pertes, puissance
P	point d'un réseau
p	nombre de paires de pôles
Q <sub>i</sub>	point d'un réseau
Q <sub>n</sub>	$\pi^2(2n + 1)^2/l^2 + \pi^2/\tau^2$
R,r	résistance
r	rayon
S	section
s	glissement
t	temps
ü	rapport de transformation
U,V	coordonnées du vecteur $\vec{\Phi}'$ (chapitre II)
U,u	tension
V	potentiel vecteur magnétique
v	vitesse
X,x	réactance
x,y,z	coordonnées cartésiennes
Y,y	admittances
y <sub>Σ</sub>	$\frac{1}{2}  1/z_d + 1/z_q $
y <sub>Δ</sub>	$\frac{1}{2}  1/z_d - 1/z_q $
Y,Z	coordonnées du vecteur $\vec{H}$ (chapitre II)
Z,z	impédance
α	angle
α	$\sqrt{j\omega\mu/\rho} = (1+j)\beta$
α	coefficient de résistivité
α'	$\sqrt{j\omega\mu/\rho} \cdot e^{-j\sigma}$
β	$\sqrt{\frac{1}{2}\omega\mu/\rho}$
β	Arctg (1-s)x <sub>q</sub> /r (chapitre IV)
γ	rapport, angle
Γ	constante
δ	entrefer

$\epsilon, \epsilon_r$	permittivité, permittivité relative
$\zeta$	rapport
$\eta_n$	$\sqrt{(2n+1)^2 \pi^2 / l^2 + \pi^2 / \tau^2 - j s \omega_0 \mu / \rho} = \sqrt{\lambda_n^2 - \alpha^2} = \mu_n - j \nu_n$
$\theta$	force magnéto-motrice (f.m.m.)
$\theta$	angle de phase du vecteur champ magnétique (chapitre II)
$\theta$	angle de référence de la roue polaire (chapitre IV)
$\theta_0$	$\sqrt{2} \ln(\xi-d)/\xi$
$\Lambda$	perméance
$\lambda$	angle (chapitre II)
$\lambda_E$	$u_E (1-s) \sqrt{r^2 + (1-s)^2 x_q} / \{r^2 + (1-s)^2 x_d \cdot x_q\}$
$\lambda_n$	$\sqrt{Q_n}$
$\mu, \mu_r$	perméabilité, perméabilité relative
$\mu_n, \nu_n$	$\eta_n = \mu_n - j \nu_n$
$\nu$	rapport (chapitre I)
$\xi$	profondeur limite, profondeur de pénétration
$\xi$	$\sqrt{\pi^2 / \tau^2 - \alpha^2}$
$\rho$	résistivité
$\sigma$	angle d'hystérèse
$\tau$	pas polaire
$\tau_E$	pas de la partie libre de la connexion inter-polaire
$\phi$	angle de phase
$\Phi, \psi$	flux
$\chi$	angle
$\psi$	déphasage entre le courant et la tension à vide
$\omega$	pulsation
$\Omega$	$e^{j(\pi y / \tau - \omega_0 t)}$

### Indices

a	asynchrone
a, b, c	relatif aux trois phases statoriques
acc	accélérateur
an	anneau
B	d'alésage
cu	relatif au cuivre
d	direct (axe)
él	électrique

e	relatif à l'effet d'extrémité (chapitre III)
e	relatif au courant d'excitation
F	relatif au fer massif
H	relatif au champ magnétique
I	relatif au courant
i	induit
J	relatif à la densité de courant
l	relatif à la longueur
l	relatif à la profondeur limite
m	magnétisant
m	moyen
M	mutuel
N	nominal
n	indice entier
P	relatif aux pertes
p	polaire
q	transverse (axe)
r	rotorique
rés	résistant
s	statorique
s	synchrone (chapitre IV)
x,y,z	selon l'axe x,y,z
Z	relatif à l'impédance
o	relatif à l'origine
1	primaire
2	secondaire
'	valeur relative, spécifique (référentiel en mouvement)
1	fondamental
$\sigma$	de fuite

#### Opérateurs

$\overrightarrow{\text{grad}}$	gradient
div	divergence
$\overrightarrow{\text{rot}}$	rotationnel
$\nabla, \vec{\nabla}$	laplacien
d	dérivée totale

$\partial$	dérivée partielle
$\Lambda$	produit vectoriel
$\longrightarrow$	vecteur
Re	partie réelle
Im	partie imaginaire
$   $	valeur absolue
*	conjugué complexe
$\sum_{i=0}^n$	somme sur i de 0 à n

### Conventions

U	valeur efficace (de la tension)
$\hat{U}$	valeur de crête
$\underline{U}$	valeur complexe
u	valeur instantanée
u	valeur réduite (p.u.) (chapitre IV)
$\underline{u}$	valeur complexe (chapitre IV)
$U_{x,y,z}$	composante selon x,y,z
$U)_{x,y,z}$	grandeur fonction de x,y,z

## TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION	Page 1
Chapitre I - REPARTITION DU CHAMP MAGNETIQUE DANS L'ENTREFER	3
I.1-GENERALITES	3
I.11-Introduction	3
I.12-Equations générales	4
I.13-Référentiel en mouvement	5
I.2-MACHINE A ROTOR LISSE	6
I.21-Hypothèses	6
I.22-Distribution du champ magnétique	6
I.23-Régimes synchrone et asynchrone	8
I.24-Extension des hypothèses	9
I.3-RESOLUTION NUMERIQUE	10
I.31-Méthode approchée	10
I.32-Coordonnées polaires	11
I.33-Détermination du champ	13
I.4-REACTION D'INDUIT - FLUX DE FUITE	14
I.41-Réaction d'induit	15
I.42-Flux de fuite	16
I.5-APPLICATION	17
I.51-Calcul du potentiel magnétique	17
I.52-Réaction d'induit-Flux de fuite	18
Chapitre II - PENETRATION DANS UN MILIEU MAGNETIQUE MASSIF	20
II.1-INTRODUCTION	20
II.2-PENETRATION D'UN CHAMP ALTERNATIF DANS UN DEMI- ESPACE INFINI SATURABLE	20
II.21-Hypothèses-Définitions	20
II.22-Milieu à perméabilité constante	22
II.23-Etude graphique	23
II.24-Milieu à induction constante	25
II.25-Milieu à caractéristique magnétique quelconque	26

II.3-EFFET DE L'HYSTERESE	Page 28
II.31-Angle d'hystérèse	28
II.32-Milieu à perméabilité constante	29
II.33-Méthode graphique généralisée	30
II.4-APPLICATION	30
II.41-Méthode graphique généralisée	30
II.42-Commentaires	32
 Chapitre III - EFFETS D'EXTREMITÉ ET DE SUPERPOSITION	 33
III.1-INTRODUCTION	33
III.2-EFFET D'EXTREMITÉ	33
III.21-Machines à rotor lisse-Distribution du champ	34
III.22-Distribution du courant rotorique	36
III.23-Pertes et impédance équivalente	38
III.24-Application	39
III.25-Rotor lisse-Méthode simplifiée	41
III.26-Pôles saillants	43
III.27-Connexions frontales	44
III.3-SUPERPOSITION DES COURANTS DANS LES CORNES POLAIRES	46
III.31-Généralités	46
III.32-Milieu à perméabilité constante	46
III.33-Milieu à induction constante-Limitation de la pénétration	48
III.34-Milieu à induction constante-Superposition	49
III.35-Application	52
 Chapitre IV - SCHEMA EQUIVALENT - MARCHE A SUIVRE	 53
IV.1-SCHEMA EQUIVALENT	53
IV.11-Axe transverse	53
IV.12-Axe direct	54
IV.13-Enroulement d'excitation	55
IV.2-THEORIE A DEUX AXES	57
IV.21-Définitions	57
IV.22-Régime asynchrone	58
IV.23-Régime synchrone	60

IV.24-Régime mixte	Page 61
IV.3-DISCUSSION	62
IV.31-Axes direct et transverse	62
IV.32-Hypothèses	62
IV.4-MARCHE A SUIVRE	63
IV.41-Détermination des pertes	63
IV.42-Détermination des impédances équivalentes	64
IV.43-Echauffement	65
Chapitre V - APPLICATIONS	66
V.1-INTRODUCTION	66
V.2-FONCTIONS CARACTERISTIQUES	66
V.3-DEMARRAGE ASYNCHRONE DE MOTEURS SYNCHRONES	68
V.31-Moteur synchrone de 16,2 MW - 1500 t/min	68
V.32-Moteur alternateur de 13,8 MW-18,9 MVA-1500 t/min	71
CONCLUSIONS	74
ANNEXES	75
REFERENCES	77
LISTE DES SYMBOLES	79
TABLE DES MATIERES	84