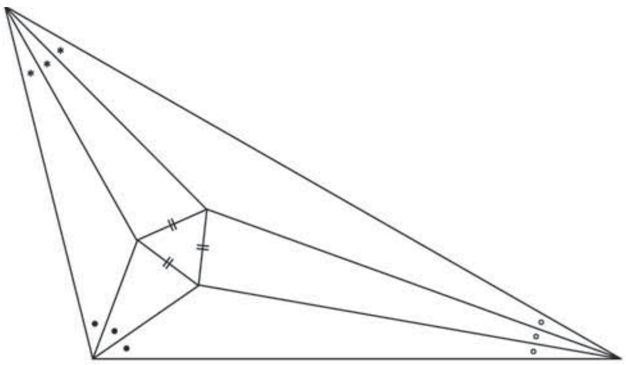
Mathématiques et horlogerie

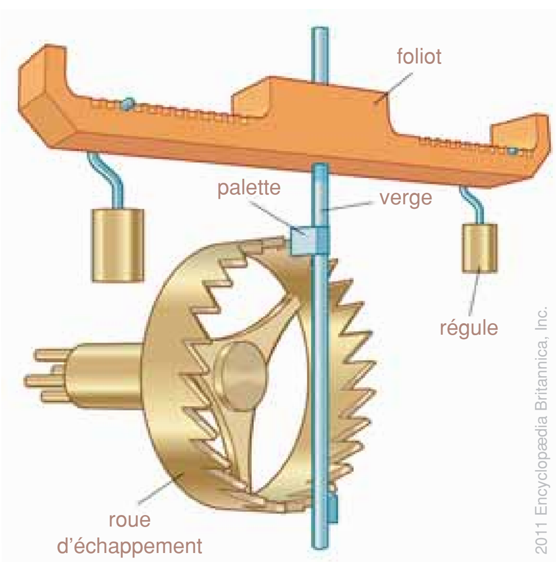


Le théorème de Morley (1898) dit que pour n'importe quel triangle, si l'on trisecte tous les angles et on prolonge les lignes trisectrices jusqu'à ce qu'elles se touchent, alors le petit triangle au milieu est toujours équilatère.

Ilan Vardi [1]

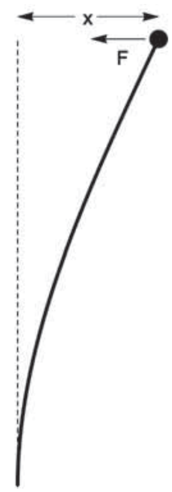
On me demande souvent d'expliquer ce que sont les mathématiques, est-ce que ce sont les chiffres, les équations? La meilleure réponse que j'ai trouvée est que les mathématiques utilisent les chiffres et les équations comme langage, mais ce qui les différencie vraiment d'autres domaines de réflexion telle que la philosophie est le fait que dans les maths on recherche une compréhension la plus complète possible, le plus souvent en trouvant de l'ordre dans les choses. Ceci explique pourquoi l'on n'a pas de véritables mathématiques sans preuves formelles et pourquoi les mathématiciens étudient des objets très simples pour y trouver des résultats très profonds. Un bon exemple est le triangle, la forme géométrique la plus simple étudiée depuis l'antiquité. Il a quand même fallu attendre 2000 ans pour découvrir le théorème de Morley, un des rares résultats mathématiques qui peut s'énoncer simplement avec une figure.

L'horlogerie est donc un sujet d'intérêt pour le mathématicien puisqu'il est possible de comprendre en totalité le fonctionnement de la montre. Sa raison d'être est de mettre de l'ordre dans les choses, comme le chef d'orchestre et l'horloge d'un ordinateur régulent la musique et le calcul. La compréhension de la montre est à comparer avec le violon où la science ne fait que confirmer le choix des luthiers. Un autre exemple est la bicyclette qui résiste à l'analyse mathématique depuis plus d'un siècle, les roues de vélo roulent sans glisser (rouler n'est pas glisser, contrairement à sa classification standard, le roller n'est pas un sport de glisse) et



Horloge à foliot.

[1] *Senior Scientist, EPFL IMT Instant-Lab Patek Philippe Chair in Micromechanical and Horological Design.*



cette différence mène à un modèle mathématique qui n'a pas de solution évidente[2]. L'horloger doit aussi avoir une compréhension complète pour faire fonctionner sa montre, donc mathématiciens et horlogers peuvent toujours dialoguer.

Depuis leur invention à la fin du Moyen-Age, les horloges puis les montres mécaniques fonctionnent grâce à une source d'énergie, un ressort (ou poids), dont le déroulement est freiné par un régulateur. Le régulateur d'origine est le foliot, un balancier qui, par le biais du train d'engrenage, est accéléré de manière alternée par la force du ressort ou poids. L'inertie du foliot ralentit le rouage et avec un réglage expérimental, une précision d'un quart d'heure par jour était possible. Mais on ne pouvait pas faire beaucoup mieux, car l'effet freinage du foliot est directement liée au couple du ressort : si le ressort est plus tendu, le foliot va plus vite et la montre avance et s'il est moins tendu, la montre retarde. Ces garde-temps sont essentiellement un affichage des variations de la force du ressort moteur.

De l'artisanat à la science. Jusqu'au XVIIe siècle, les horloges et les montres étaient conçues et construites par des artisans qui, par réglage de la mécanique, ont réussi à améliorer la précision à plusieurs minutes par jour.

La grande avancée horlogère fut l'introduction de l'oscillateur, un régulateur ayant une force de rappel particulière. Pour un oscillateur, la période d'oscillation est indépendante de l'énergie qu'on lui fournit, donc la mesure du temps est libérée de sa

L'isochronisme de l'oscillateur est facile à démontrer une fois que l'on connaît les lois de la physique établies par Isaac Newton en 1687. Un oscillateur tel qu'une lame-ressort obéit à la Loi de Hooke : la force de rappel *F* est proportionnelle au déplacement *x,* et d'après les lois de Newton, ceci s'écrit comme une équation différentielle

$$m\,\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

où *m* est la masse et *k* est une constante, la rigidité du ressort, *t* est le temps et d^2x/dt^2 est l'accélération. En faisant appel au calcul différentiel, aussi dû à Isaac Newton, on obtient une solution explicite pour la position de la lame

$$x(t) = A\ \sin(2\pi f t + \varphi)$$

où *A* est l'amplitude, *f* est la fréquence et ϕ est une phase qui décrit la position initiale de l'oscillateur. On obtient aussi la formule pour la fréquence

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

Cette formule démontre que la fréquence ne dépend que de la masse et de la rigidité, elle est donc indépendante de l'amplitude *A,* exactement l'isochronisme tant recherché.

[2] History of bicycle steer and dynamics equations, *bicycle.tudelft.nl/schwab/Bicycle/BicycleHistoryReview/*

Christian Huygens par Caspar Netscher, 1671, Musée Boerhaave, Leiden.

La force de rappel du pendule est due à la gravité et n'obéit pas la Loi de Hooke, le pendule n'est donc pas un parfait oscillateur. L'équation de rappel est plutôt

$$L\,\frac{d^2\theta}{dt^2} = -g\sin\theta$$

où θ est l'angle du pendule, L est la longueur du pendule, g l'accélération de la gravité, t est le temps et $d^2\theta/dt^2$ est l'accélération angulaire. On sait que sin θ est près de θ quand θ est petit et on peut faire abstraction de la différence pour écrire

$$L\,\frac{d^2\theta}{dt^2} = -g\theta$$

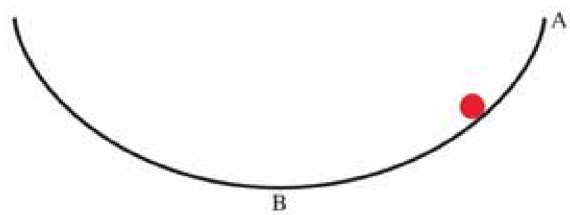
Ceci est l'équation d'un véritable oscillateur avec fréquence

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{L}}$$

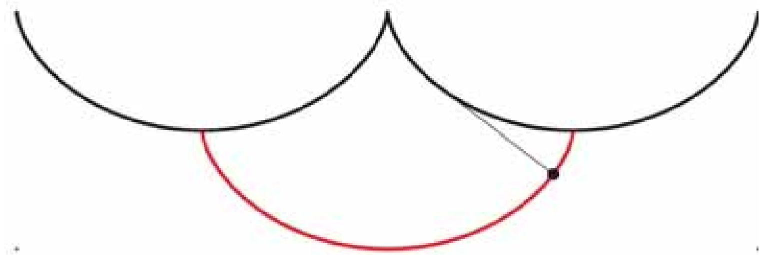
Mais cette approximation est insuffisante pour les besoins d'une véritable horloge de précision. Pour un pendule standard augmenter l'amplitude de 2 degrés à 2,5 degrés donne un retard de 3,7 secondes par jour.

source d'énergie, c'est ce que l'on appelle l'isochronisme ; on peut dire que l'oscillateur à son propre temps. L'isochronisme est le principe de base de la chronométrie et il est dû à Galilée qui l'a énoncé en 1602 après avoir observé le mouvement d'un chandelier dans une église en comparant les périodes d'oscillations avec ses pulsations cardiaques. Il a conclu que la période était indépendante de l'amplitude, définition de l'isochronisme.
En remplaçant le foliot par le pendule, la précision a été améliorée à 15 secondes par jour, donc presque 100 fois mieux qu'auparavant. On peut parler de conquête du temps, puisque les garde-temps sont devenus plus précis que le Soleil qui a une erreur diurne qui atteint les 30 secondes par jour. L'horloge précise a entraîné une révolution culturelle puisque la mesure du temps n'était plus basée sur des phénomènes naturels mais sur une construction complètement artificielle et technologique.
Les bases de cette révolution sont les lois de la physique pour formuler un problème formel et les mathématiques pour le résoudre. C'est ainsi que l'horlogerie est devenue une science.

Le mathématicien horloger. Le mathématicien horloger par excellence est Christian Huygens (1629-1695). Le physicien Galilée avait découvert le principe de l'isochronisme en observant le pendule, mais le mathématicien Huygens est allé beaucoup plus loin et en profondeur. Le 25 décembre 1656, il a découvert comment réguler une horloge avec un pendule pour sensiblement améliorer



Une bille roulant sur une cycloïde.



La courbe développante d'une cycloïde est une cycloïde.

la chronométrie. Ses calculs théoriques ont tout de suite démontré que Galilée avait tort et que le pendule n'est pas isochrone.

Cette situation n'était pas du tout satisfaisante pour le mathématicien Huygens qui a trouvé une solution complète en inventant le pendule isochrone. Sa solution en trois étapes :

1. Le tautochrone. Huygens pose la question de trouver la courbe pour laquelle une bille roule au fond (B dans le schéma ci-dessus) dans le même temps, indépendamment du point d'où elle est lâchée sur la courbe. Il démontre que la courbe doit être une cycloïde. Il s'ensuit que les oscillations d'une bille sur une cycloïde sont isochrones.
2. La théorie des développantes. Huygens invente la théorie des courbes développantes où l'on imagine le tracé d'un point à l'extrémité d'un fil se déroulant d'une courbe de base.
3. La courbe développante d'une cycloïde est une cycloïde.

La vérification de ces résultats est simple avec les connaissances de 2015, mais il est important de dire que Huygens y est arrivé en 1657, donc 30 ans avant le développement des lois de la physique et le calcul différentiel d'Isaac Newton en 1687. Les méthodes d'Huygens sont très bien expliquées dans l'excellent livre de Léopold Defossez[3].

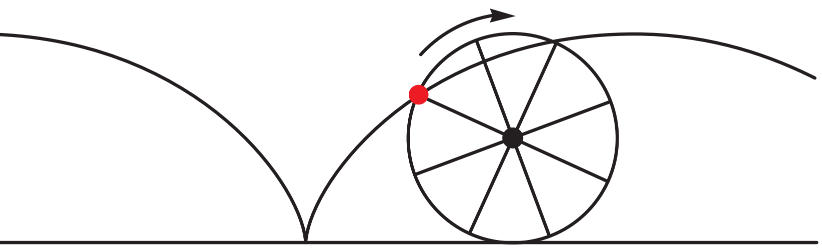
[3] *Léopold Defossez,* Les savants du XVIIe siècle et la mesure du temps, *Edition du Journal Suisse d'Horlogerie, Lausanne 1946.*

Le résultat est qu'un pendule avec un fil souple qui se déroule sur des formes cycloïdales (voir ci-dessus), est isochrone. Le concept de Huygens a été réalisé par l'horloger Salomon Coster en 1657 avec l'amélioration immédiate de la précision chronométrique.

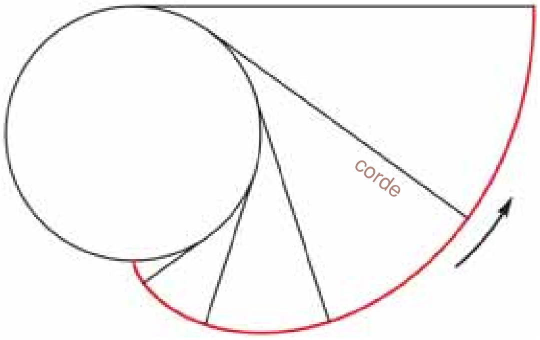
Cette histoire n'est pas bien connue en mathématiques et démontre comment des concepts abstraits sont inventés pour résoudre des problèmes très concrets et que par la suite, leurs origines sont souvent oubliées une fois que la théorie est établie. La solution de Huygens est typique du travail du mathématicien : théoriquement complète et élégante, mais pas très utile en pratique. En effet, le pendule cycloïdal donne des résultats décevants et il a été abandonné en faveur du pendule à tige rigide et amplitude faible. Mais Huygens ne s'est pas arrêté avec le pendule. En 1675 il a introduit le balancier-spiral, qui lui est théoriquement isochrone parce qu'il obéit à la Loi de Hooke (Robert Hooke devrait toujours être cité comme co-inventeur). Le balancier-spiral continue à réguler les montres-bracelets actuelles.

D'autres éminents mathématiciens se sont intéressés à l'horlogerie, George Biddle Airy (1801-1892) a écrit le cahier des charges de l'horloge de Big Ben et William Thomson connu sous le nom de Lord Kelvin (1824-1907), celui des degrés de température Kelvin, a construit une horloge astronomique avec un système de maintien tout à fait unique.

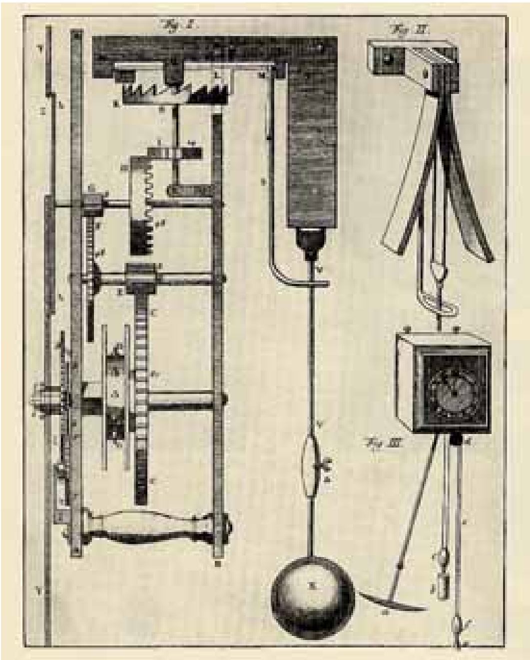
Se comparer à Huygens n'est pas raisonnable, mais il est encore possible d'innover en horlogerie mécanique. L'année dernière, notre laboratoire a



La cycloïde est la courbe tracée par un point sur la jante (point rouge) d'une roue qui roule sans glisser sur une ligne droite.



La développante d'une courbe est la figure tracée en déroulant un fil sur la courbe d'origine. Les dents d'engrenage ont souvent la forme de la développante du cercle de la Figure.



Horloge conçue par Huygens avec flancs cycloïdaux [4].

[4] *Christian Huygens,* Horologium Oscillatorium, *Latin et traduction anglaise par Ian Bruce, www.17centurymaths.com/contents/huygenscontents.html*

[5] *S. Henein, I. Vardi, L. Rubbert, R. Bitterli, N. Ferrier, S. Fifanski, D. Lengacher,* IsoSpring : vers la montre sans échappement, *actes de la Journée d'Etude de la SSC 2014, 49-58.*

proposé pour la première fois de l'histoire un oscillateur mécanique pour réguler un garde-temps sans échappement [5].

La théorie d'horlogerie. Les mathématiques continuent à jouer un rôle dans l'industrie horlogère. La théorie de l'horlogerie est basée sur la physique dont le langage et la technique sont les mathématiques. L'enseignement et l'utilisation de la théorie de l'horlogerie en Suisse remonte à Jules Grossmann (1829-1907), directeur de l'Ecole d'horlogerie du Locle. Il s'est rendu compte qu'enseigner le réglage était problématique parce qu'il utilisait des méthodes artisanales difficiles à transmettre. Il a donc appris la théorie d'horlogerie qui permettait d'éviter des heures de bricolage. C'était l'équivalent de la technique moderne de la CAO (conception assistée par ordinateur) qui permet aux horlogers de tester des concepts sans devoir construire de nombreux prototypes.
Avec son fils Hermann, il a écrit le premier livre suisse décrivant les bases théoriques de l'horlogerie. Ceci a été suivi par son successeur à l'Ecole du Locle, Léopold Defossez qui a écrit l'ouvrage définitif sur le sujet, « Théorie Générale d'Horlogerie », publié en 1950 et utilisé depuis par toute l'industrie horlogère suisse. Aujourd'hui, les écoles techniques utilisent les livres « Théorie d'Horlogerie » de l'Ecole technique de la Vallée de Joux et le « Traité de construction horlogère » écrit par les professeurs de l'HE-ARC. ●