

Janvier 1984

INT 114/84

RESUME DE LA THEORIE DES RESONATEURS QUASI-OPTIQUES OUVERTS

André PERRENOUD

Centre de Recherches en Physique des Plasmas
Association Euratom - Confédération Suisse
Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne

RESUME DE LA THEORIE DES RESONATEURS QUASI-OPTIQUES OUVERTS

Ce résumé a été fait en vue de l'application au gyrotron (gyroklystron quasi-optique) où 2 résonateurs seront utilisés : la cavité de "pre-bunching" et la cavité principale d'où sera extrait un puissant faisceau de micro-ondes (~200 kW).

La fréquence sera de 120 GHz ($\lambda=2.5$ mm) dans un premier temps, puis elle sera portée à 150 GHz ($\lambda=2.0$ mm). Le problème consiste à calculer le champ électromagnétique à l'intérieur de la cavité et à déterminer le couplage optimal avec le guide d'onde. Il existe une littérature abondante sur le sujet dans le cadre des lasers. En ce qui concerne les résonateurs fonctionnant dans le domaine des micro-ondes, les mêmes méthodes (principe de Huygens) sont applicables, mais il faut prendre garde aux approximations qui supposent la longueur d'onde beaucoup plus petite que les dimensions du résonateur.

N.B. dans ce résumé, les mots suivants sont synonymes :

miroir - réflecteur

cavité - résonateur

TABLE DES MATIERES

1. Introduction
 - 1.1 Définition des grandeurs géométriques
 - 1.2 Principe de Huygens-Fresnel
 - 1.3 Equations intégrales du résonateur

1. Résonateur confocal symétrique à miroirs carrés
 - 2.1 Solution de l'équation intégrale
 - 2.2 Le champ à l'intérieur du résonateur
 - 2.2.1 Formulation du problème
 - 2.2.2 Le mode TEM_{00}
 - 2.2.3 Modes TEM_{nm}
 - 2.2.4 Onde stationnaire à l'intérieur du résonateur
 - 2.3 Energie stockée dans le résonateur
 - 2.4 Facteur de qualité de la cavité
 - 2.5 Pertes ohmiques sur les réflecteurs
 - 2.6 Ordres de grandeur
 - 2.7 Pertes par diffraction dans le cas des miroirs finis

3. Le résonateur confocal symétrique à miroirs circulaires
 - 3.1 Equation intégrale
 - 3.2 Champ à l'intérieur du résonateur
 - 3.3 Energie stockée dans un résonateur cylindrique confocal

4. Le résonateur non confocal
 - 4.1 Le résonateur symétrique non confocal
 - 4.2 Le résonateur non confocal avec courbure différente des miroirs
 - 4.2.1 Rayon de courbure du résonateur confocal équivalent
 - 4.2.2 Taches sur les miroirs
 - 4.2.3 Champ à l'intérieur du résonateur non confocal à miroirs carrés. Condition de résonance.
 - 4.2.4 Miroirs circulaires non confocaux

5. Le résonateur confocal avec trou de couplage

5.1 Mise en oeuvre numérique

5.2 Résultat des calculs

5.3 Efficacité du trou de couplage

5.4 Autre définition de l'efficacité

5.5 Calcul du champ à l'intérieur du résonateur confocal avec trou de couplage

Appendice du chap.5

REFERENCES

- [1] Boyd and Kogelnik. Generalized Confocal Resonator Theory. The Bell Syst. Tech. Journal 1962, pp 1346-1369.

- [2] Kogelnik. Chap. 5 de "LASERS" édité par A.K. Lévine.

- [3] McCumber. Eigenmodes of a Symmetric Cylindrical Laser Resonator and Their Perturbation by Output-Coupling Apertures. The Bell Syst. Tech. Journal 1965, pp 333-363.

- [4] McCumber. Eigenmodes of an Asymmetric Cylindrical Confocal Laser Resonator with a Single Output-Coupling Aperture. The Bell Tech. Journal 1969, pp 1919-1936.

- [5] Analysis of the Cylindrical Confocal Laser Resonator Having a Single Circular Coupling Aperture. McNice and Derr. IEEE Journal of Quantum Electronics 1969, pp 569-575.

- [6] Foundations for microwave engineering. Robert E. Collin, McGraw-Hill Physical and Quantum Electronics Series, 1966.

1. INTRODUCTION

1.1 Définition des grandeurs géométriques

La cavité résonante est constituée de 2 réflecteurs (ou miroirs) séparés par une distance d .

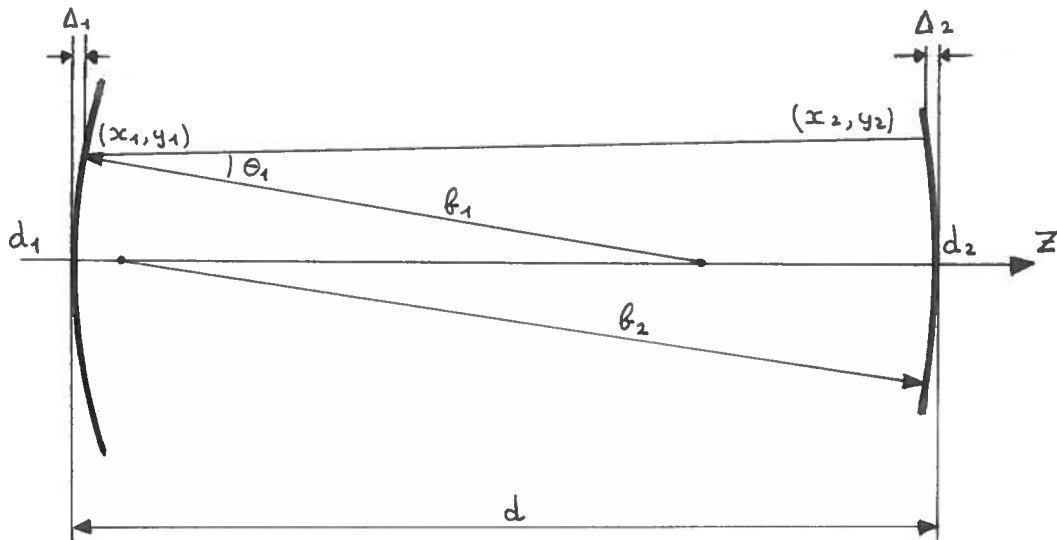


Figure 1

Les miroirs ont en général un rayon de courbure que nous dénoterons par b_1 et b_2 respectivement. Soit z l'axe du résonateur; d_1, d_2 les positions des miroirs et (x_1, y_1, z_1) (x_2, y_2, z_2) les coordonnées repérant les points sur la surface des miroirs 1 et 2. Soit S_1 et S_2 la surface des miroirs.

1.2 Principe de Huygens-Fresnel

Dans le cas des cavités fermées, on résout l'équation de Helmholtz $(\nabla^2 + k^2)E = 0$ avec des conditions aux limites données. Cette méthode n'est pas la meilleure pour les résonateurs ouverts, on fait appel au principe de Huygens-Fresnel. Le champ en un point s'obtient par la superposition d'ondelettes issues de la source. C'est la théorie scalaire de la diffraction, où l'on n'examine que l'amplitude de la perturbation. Dans notre cas, la perturbation peut être n'importe laquelle des composantes du champ \underline{E} ou \underline{H} . Appelons $u^{(1)}(x_1, y_1)$ l'amplitude du champ de l'onde progressive issue du miroir 1. Sur le miroir 2 cette onde produira un champ $u^{(2)}(x_2, y_2)$.

Le principe de Huygens-Fresnel s'énonce

$$u^{(2)}(x_2, y_2) = \iint_{S_1} \frac{ik}{4\pi r} e^{-ikr} (1 + \cos \Theta) u^{(1)}(x_1, y_1) dS_1 \quad (1-1)$$

$$\text{avec } r = \sqrt{(d - \Delta_1 - \Delta_2)^2 + (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

et $\cos \Theta$ l'angle entre la normale au miroir et la direction de l'onde
(voir Fig.1)

L'équation (1-1) n'est valable que si la distance r est grande vis-à-vis de la longueur d'onde λ . Si ce n'est pas le cas, nous devons écrire :

$$u^{(2)}(x_2, y_2) = \iint_{S_1} \frac{ik}{4\pi r} e^{-ikr} \left(1 + \cos \Theta + \frac{\cos \Theta}{ikr}\right) u^{(1)}(x_1, y_1) dS_1 \quad (1-2)$$

(voir par exemple R.S. Longhurst, Geometrical and Physical Optics pp 194-203 pour une démonstration de (1) et (2))

Dans le cas des lasers λ/r est de l'ordre de 10^{-4} à 10^{-5} ce qui rend légitime la formulation (1-1).

Pour une cavité de 50 cm et une longueur d'onde de 2.5 mm $\lambda/r = 5 \cdot 10^{-3}$. L'approximation (1-1) est vraisemblablement toujours valable, mais il faudra le vérifier.

1.3 Equations intégrales du résonateur

Pour obtenir des équations décrivant un régime stationnaire (ou quasi-stationnaire si l'on tient compte de l'atténuation), il faut que la distribution du champ de l'onde sur chacun des miroirs soit reproduite à un facteur (réel) près lors d'un aller-retour de l'onde.

$$\left\{ \begin{aligned} u^{(2)'}(x_2, y_2) &= \iint_{S_1} \frac{ik}{4\pi r} e^{-ikr} \left(1 + \cos \theta_1 + \frac{\cos \theta_1}{ikr} \right) u^{(1)'}(x_1, y_1) dS_1 \end{aligned} \right. \quad (1-3a)$$

$$\left\{ \begin{aligned} u^{(1)'}(x_1, y_1) &= \iint_{S_2} \frac{ik}{4\pi r} e^{-ikr} \left(1 + \cos \theta_2 + \frac{\cos \theta_2}{ikr} \right) u^{(2)'}(x_2, y_2) dS_2 \end{aligned} \right. \quad (1-3b)$$

avec $u^{(1)'}(x_1, y_1) = \lambda u^{(1)}(x_1, y_1)$; λ réel positif. (1-3c)

Nous imposons aux solutions d'être normées pour la condition

$$\iint_{S_1} \|u^{(1)'}(x_1, y_1)\|^2 dS_1 = \iint_{S_2} \|u^{(2)'}(x_2, y_2)\|^2 dS_2 = 1 \quad (1-4)$$

$u^{(2)}'$ est proportionnel à $u^{(2)}$:

$$u^{(2)'}(x_2, y_2) \equiv \gamma^{(2)} u^{(2)}(x_2, y_2)$$

et $u^{(1)}'$ est proportionnel à $u^{(1)}$:

$$u^{(1)'}(x_1, y_1) \equiv \gamma^{(1)} \gamma^{(2)} u^{(1)}(x_1, y_1)$$

Récrivons (1-3) avec ces notations :

$$\left\{ \begin{aligned} \gamma^{(2)} u^{(2)}(x_2, y_2) &= \iint_{S_1} \frac{ik}{4\pi r} e^{-ikr} \left(1 + \cos \theta_1 + \frac{\cos \theta_1}{ikr} \right) u^{(1)}(x_1, y_1) dS_1 \end{aligned} \right. \quad (1-5)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \gamma^{(1)} u^{(1)}(x_1, y_1) &= \iint_{S_2} \frac{ik}{4\pi r} e^{-ikr} \left(1 + \cos \theta_2 + \frac{\cos \theta_2}{ikr} \right) u^{(2)}(x_2, y_2) dS_2 \end{aligned} \right. \quad (1-5b)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \text{Arg}(\gamma^{(1)} \gamma^{(2)}) &= 2\pi q \quad \text{avec } q \text{ entier} \end{aligned} \right. \quad (1-5c)$$

(1-5c) est la condition de résonance.

La perte d'énergie de l'onde (carré de l'amplitude) due aux pertes par diffraction pendant un aller et retour est donnée par

$$T = 1 - (\gamma^{(1)} \cdot \gamma^{(2)})^2 \quad (1-6)$$

Dans la littérature, il est aussi d'usage de parler de la perte moyenne lors d'un trajet simple

$$\alpha = 1 - \gamma^{(1)} \cdot \gamma^{(2)} \quad (1-7)$$

Certains auteurs écrivent $\alpha = 1 - \|\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}\|$, suggérant par là que $\gamma^{(1)}$ et $\gamma^{(2)}$ peuvent être complexes, ce qui est le cas si la condition de résonance (1-5c) n'est pas satisfaite.

Lorsque $\lambda/d \ll 1$ et que les dimensions des miroirs sont petites vis-à-vis de d , les équations (1-5) se simplifient.

$$r = \sqrt{(d - \Delta_1 - \Delta_2)^2 + (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \cong d - \Delta_1 - \Delta_2 + \frac{(x_2 - x_1)^2}{2d} + \frac{(y_2 - y_1)^2}{2d}$$

au dénominateur seulement : $r \cong d$

$$\cos \theta_1 \cong \cos \theta_2 \cong 1$$

On aboutit alors à :

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma^{(2)} u^{(2)}(x_2, y_2) = \frac{ik e^{-ikd}}{2\pi d} \iint_{S_1} e^{-ik \left[\frac{(x_2 - x_1)^2}{2d} + \frac{(y_2 - y_1)^2}{2d} - \Delta_1 - \Delta_2 \right]} u^{(1)}(x_1, y_1) dS_1 \quad (1-8a) \\ \gamma^{(1)} u^{(1)}(x_1, y_1) = \frac{ik e^{-ikd}}{2\pi d} \iint_{S_2} e^{-ik \left[\frac{(x_2 - x_1)^2}{2d} + \frac{(y_2 - y_1)^2}{2d} - \Delta_1 - \Delta_2 \right]} u^{(2)}(x_2, y_2) dS_2 \quad (1-8b) \end{array} \right.$$

Pour aller plus avant, il faut connaître la géométrie du problème. Un cas très important est le résonateur confocal ($d=b_1=b_2$). Le noyau de l'équation intégrale est alors symétrique et l'on peut trouver des solutions analytiques approchées. Au § 4, on examinera sous quelles conditions on peut ramener l'étude de toute une famille de résonateur à symétrie cylindrique (autour de l'axe z) au cas confocal.

Une fois connues les solutions $u^{(1)}$ et $u^{(2)}$, on trouve le champ de l'onde stationnaire en un point quelconque par une nouvelle application du principe de Huygens-Fresnel.

$$E(x, y, z) = \iint_{S_1} \frac{ik}{4\pi r_1} e^{-ikr_1} \left(1 + \cos \theta_1 + \frac{\cos \theta_1}{i k r_1} \right) u^{(1)}(x_1, y_1) dS_1 + \iint_{S_2} \frac{ik}{4\pi r_2} e^{-ikr_2} \left(1 + \cos \theta_2 + \frac{\cos \theta_2}{i k r_2} \right) u^{(2)}(x_2, y_2) dS_2 \quad (1-9)$$

$$\text{où : } r_i = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2} \quad i = 1, 2$$

2. LE RESONATEUR CONFOCAL SYMETRIQUE A MIROIRS CARRES

2.1 Solution de l'équation intégrale.

La symétrie entraîne $u(1) = \pm u(2)$ et $\gamma(1) = \gamma(2)$ dans (1-5). Il ne subsiste donc qu'une seule équation. Le rayon de courbure des miroirs valant d , la distance focale vaut $d/2$ d'où le terme de confocal.

Comme on peut le voir sur la figure 2, les distances Δ_1 et Δ_2 s'écrivent

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= d - \sqrt{d^2 - x_1^2 - y_1^2} \approx \frac{x_1^2 + y_1^2}{2d} \\ \Delta_2 &= d - \sqrt{d^2 - x_2^2 - y_2^2} \approx \frac{x_2^2 + y_2^2}{2d} \end{aligned} \quad (2-1)$$

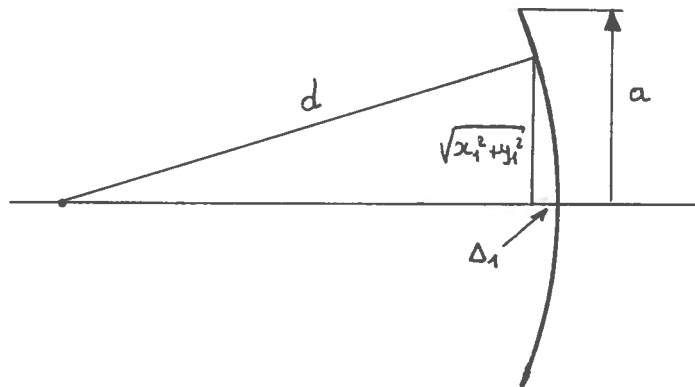


Figure 2

On a le signe = dans (2-1) pour des miroirs paraboliques. L'équation intégrale s'énonce, avec $\gamma = \gamma(1) = \gamma(2)$ réel.

$$\gamma u^{(1)}(x_2, y_2) = \pm \frac{ik e^{-ikd}}{2\pi d} \iint_{S_1} e^{\frac{ik}{d}(x_1 x_2 + y_1 y_2)} u^{(1)}(x_1, y_1) dx_1 dy_1 \quad (2-2)$$

On voit que l'on peut séparer les variables en posant

$$u^{(1)}(x, y) = f(x) \cdot g(y) \quad (2-3)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \gamma_x f(x_2) &= \int_{-a}^a e^{\frac{ikx_1x_2}{d}} f(x_1) dx_1 & (2-4a) \\ \gamma_y g(y_2) &= \int_{-a}^a e^{\frac{iky_1y_2}{d}} g(y_1) dy_1 & (2-4b) \end{aligned} \right.$$

avec $\gamma = \pm \frac{ik}{2\pi d} e^{-ikd} \gamma_x \cdot \gamma_y$ (2-5)

Bien que symétrique, le noyau des intégrales (2-4) n'est pas hermitien, donc les valeurs propres peuvent être complexes.

Lorsque α tend vers l'infini, les solutions propres tendent vers des fonctions qui sont identiques à un facteur près à leur transformée de Fourier. Ce sont les fonctions de Gauss-Hermite

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ixy} e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x) dx = \sqrt{2\pi} i^n e^{-\frac{y^2}{2}} H_n(y) \quad (2-6)$$

(c.f. Gradshsteyn and Ryzhik p. 838, N° 7.376)

Dans le cas où α est fini, il faut utiliser les fonctions sphériques [1]. Néanmoins, vu la décroissance rapide de la fonction de Gauss, l'approximation $\alpha \rightarrow \infty$ est légitime et permet de connaître l'allure des solutions.

Les 4 premiers polynômes d'Hermite sont

$$\begin{aligned} H_0(x) &= 1 & H_2(x) &= 4x^2 - 2 & (2-7) \\ H_1(x) &= 2x & H_3(x) &= 8x^3 - 12x \end{aligned}$$

La solution pour $f(x_1)$ s'écrit

$$f(x_1) = \alpha_n H_n \left(\sqrt{\frac{k}{d}} x_1 \right) e^{-\frac{kx_1^2}{2d}} \quad (2-8)$$

où α_n est un coefficient complexe dont le module est donné par la condition de normalisation (1-4).

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} \|f(x_1)\|^2 dx_1 = \|\alpha_n\|^2 \int_{-\infty}^{\infty} H_n^2 \left(\sqrt{\frac{k}{d}} x_1 \right) e^{-\frac{kx_1^2}{d}} dx_1 \quad (2-9)$$

En posant $X = \sqrt{\frac{k}{d}} x_1$ on se ramène au N° 7.374 du Gradshsteyn et Ryzhik

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-X^2} H_n(X) H_m(X) dX = 2^n n! \sqrt{\pi} \delta_{nm} \quad (2-10)$$

Donc $\sqrt{\frac{d}{k}} \|\alpha_n\|^2 2^n n! \sqrt{\pi} = 1 \Rightarrow \alpha_n = \frac{\sqrt[4]{\frac{k}{\pi d}}}{\sqrt{2^n n!}} e^{i\Psi} \quad (2-11)$

La solution complète normée s'écrit alors

$$u_{nm}(x,y) = \frac{\sqrt{\frac{k}{\pi d}} e^{i\Psi}}{2^{n+m} n! m!} H_n\left(\sqrt{\frac{k}{d}} x\right) H_m\left(\sqrt{\frac{k}{d}} y\right) e^{-\frac{k}{2d}(x^2+y^2)} \quad (2-12)$$

La phase Ψ sera donnée par les conditions aux limites de l'onde stationnaire sur les miroirs ($\underline{n} \times \underline{E} = 0, \underline{n} \cdot \underline{H} = 0$).

Nous déduisons de (2-5) et (2-6) la condition de résonance des modes propres :

$$\gamma = \pm \frac{ik}{2\pi d} e^{-ikd} \sqrt{2\pi} i^n \sqrt{\frac{d}{k}} \sqrt{2\pi} i^m \sqrt{\frac{d}{k}}$$

$$\gamma e^{ikd} = \pm i^{n+m+1}$$

D'après (1-5c) $\text{Arg}(\gamma) = \pi q$ avec q entier

D'où : $\frac{2kd}{\pi} = \frac{4d}{\lambda} = 2q + n + m + 1 \quad (2-13)$

Le résonateur infini n'a pas de perte par diffraction : $|\gamma| = 1$

Pour une cavité de 50 cm et $\lambda = 2.5$ mm q est de l'ordre de 400.

Il est d'usage de désigner l'onde décrite par (2-12) par TEM_{nmq} ou TEM_{nm} en omettant l'indice q . Nous verrons au prochain § que ce dernier s'interprète comme étant le nombre de maxima de l'intensité du champ électrique entre les miroirs.

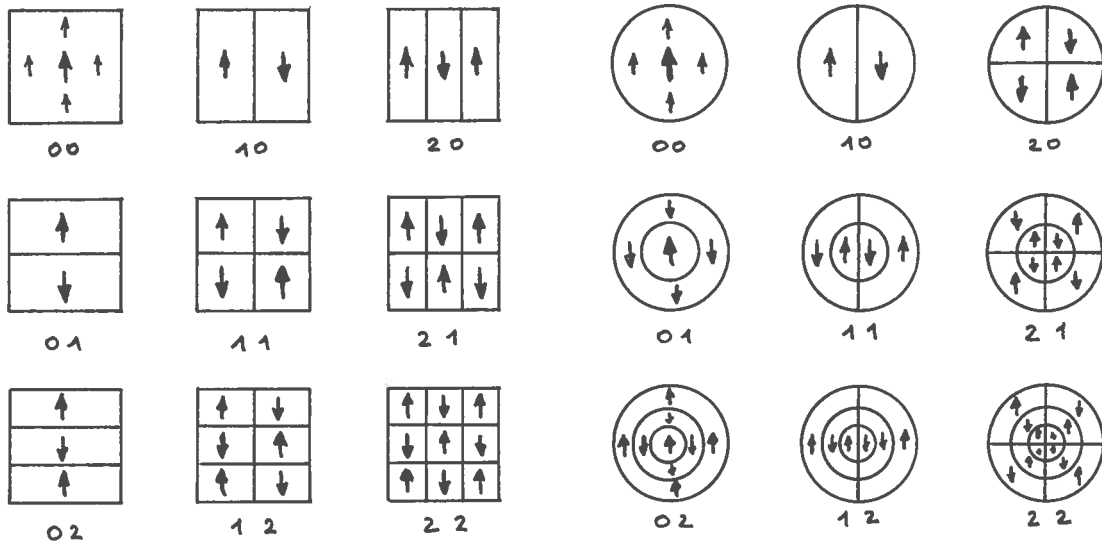


Figure 3. Modes propres TEM_{nm}

Tache sur le miroir (Spot size)

Le rayon de la tache est défini comme étant le rayon du cercle où l'amplitude du mode TEM_{00} vaut 1/e de celle au centre du miroir.

D'après (2-12) on a :

$$w_m = \sqrt{\frac{2d}{k}} = \sqrt{\frac{d\lambda}{\pi}} \quad (2-14)$$

2.2 Le champ à l'intérieur du résonateur

2.2.1 Formulation du problème

Pour trouver le champ à l'intérieur du résonateur, il faut partir de l'amplitude (2-12) et appliquer à nouveau le principe de Huygens-Fresnel comme on l'a mentionné en (1-9). Le miroir 1 est positionné en $d_1 = -d/2$ et le miroir 2 en $d_2 = d/2$. On peut simplifier le calcul de la distance qui intervient dans (1-9) et passer à la limite des miroirs infinis pour conserver des solutions analytiques. On simplifie le calcul si l'on considère l'amplitude de l'onde dans le plan tangent au miroir. Il faut donc multiplier u_1 par $e^{ik\Delta_1}$ où Δ_1 est donné par (2-1).

$$u_1(x, y, z) = \iint_{S_1} \frac{ik e^{-ikr}}{2\pi r} v_1(x_1, y_1) dx_1 dy_1 \quad (2-15)$$

$$\text{où } U_1(x_1, y_1) = U_0 H_n\left(\sqrt{\frac{k}{d}} x_1\right) H_m\left(\sqrt{\frac{k}{d}} y_1\right) e^{-\frac{k}{2d}(x_1^2 + y_1^2)} e^{\frac{ik}{2d}(x_1^2 + y_1^2)}$$

$$r = \sqrt{\left(\frac{d}{2} + z\right)^2 + (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2}$$

$$\text{On a posé } U_0 = \sqrt{\frac{k}{\pi d}} \frac{e^{i\psi}}{2^{n+m} n! m!} \quad (2-16)$$

Nous supposons que $d/2 + z$ est grand vis-à-vis des dimensions des miroirs et de la longueur d'onde λ . Nous obtenons une expression simplifiée pour r :

$$r \approx \left(\frac{d}{2} + z\right) \left(1 + \frac{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2}{2\left(\frac{d}{2} + z\right)^2}\right)$$

$$\text{Introduisons } \xi = \frac{2z}{d} \quad \text{de sorte que } \frac{d}{2} + z = \frac{d}{2}(1 + \xi) \quad (2-17)$$

$$r \approx \frac{d}{2}(1 + \xi) + \frac{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2}{2(1 + \xi)} \quad (2-18)$$

Au dénominateur de (2-15) $2r \approx d(1 + \xi)$

$$\text{Alors : } U_1(x, y, z) = \frac{ik U_0}{\pi d(1 + \xi)} e^{-i\frac{kd}{2}(1 + \xi)} U'_n(x) U'_m(y) \quad (2-19)$$

$$\text{où } U'_n(x) = \int_{-a}^a H_n\left(\sqrt{\frac{k}{d}} x_1\right) e^{-\frac{k}{2d}(1-i)x_1^2} e^{-\frac{ik}{d}\frac{(x-x_1)^2}{1+\xi}} dx_1 \quad (2-20)$$

Expression analogue pour $U'_m(y)$

Comme pour les équations (2-4), on peut trouver une solution analytique si $a \rightarrow \infty$. Voyons d'abord le cas $n=m=0$.

2.2.2 Le mode TEM_{00}

En combinant les intégrales N° 3.922 3 et 4 du Gradshsteyn et Ryzhik :

$$\begin{aligned} I_0 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta x^2} e^{-iax^2} \cos bx \, dx = \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a^2 + \beta^2}} \exp\left[\frac{-\beta\beta^2}{4(a^2 + \beta^2)} - \frac{i}{2} \arctg \frac{a}{\beta} + \frac{ia\beta^2}{4(a^2 + \beta^2)}\right] \\ &\quad (\beta > 0) \end{aligned} \quad (2-21)$$

d'autre part $\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\beta x^2} e^{-iax^2} \sin bx = 0$ car $\sin bx$ est impaire

donc $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta x^2} e^{-iax^2} e^{ibx} dx = I_0$ (2-22)

de (2-19), il vient pour $U'_0(x)$

$$U'_0(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{k}{2d(1+\xi)} \left[(1+\xi)(1-i)x_1^2 + 2i(x-x_1)^2 \right] \right\} dx_1$$

$$\begin{aligned} [\dots] &= (1+\xi)x_1^2 - i(1+\xi)x_1^2 + 2ix^2 - 4ixx_1 + 2ix_1^2 \\ &= (1+\xi)x_1^2 + i(1-\xi)x_1^2 - 4ix_1x + 2ix^2 \end{aligned}$$

$$U'_0(x) = e^{-\frac{ikx^2}{d(1+\xi)}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{kx_1^2}{2d} - \frac{ikx_1^2(1-\xi)}{2d(1+\xi)} + \frac{2ikx_1x}{d(1+\xi)} \right\} dx_1$$

Identifions avec (2-21) et (2-22) :

$$\beta = \frac{k}{2d} \quad ; \quad a = \frac{k(1-\xi)}{2d(1+\xi)} \quad ; \quad b = \frac{2kx}{d(1+\xi)}$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = \frac{k^2}{4d^2} \left(1 + \frac{(1-\xi)^2}{(1+\xi)^2} \right) = \frac{k^2(2+2\xi^2)}{4d^2(1+\xi)^2} = \frac{k^2(1+\xi^2)}{2d^2(1+\xi)^2}$$

$$\frac{\beta b^2}{4(\alpha^2 + \beta^2)} = \frac{1}{4} \cdot \frac{k}{2d} \cdot \frac{4k^2x^2}{d^2(1+\xi)^2} \cdot \frac{2d^2}{k^2} \cdot \frac{(1+\xi)^2}{(1+\xi^2)} = \frac{kx^2}{d(1+\xi^2)}$$

$$\frac{a}{\beta} = \frac{1-\xi}{1+\xi} \quad ; \quad \frac{a b^2}{4(\alpha^2 + \beta^2)} = \frac{kx^2}{d(1+\xi^2)} \cdot \frac{1-\xi}{1+\xi}$$

Finalement :

$$U'_0(x) = e^{-\frac{ikx^2}{d(1+\xi)}} \sqrt{\frac{\pi d(1+\xi)}{k}} \sqrt[4]{\frac{2}{1+\xi^2}} \exp \left[\frac{-kx^2}{d(1+\xi^2)} - \frac{i}{2} \operatorname{arctg} \frac{1-\xi}{1+\xi} + \frac{1-\xi}{1+\xi} \cdot \frac{ikx^2}{d(1+\xi^2)} \right]$$

$$U_0(x) = \sqrt{\frac{\pi d(1+\xi)}{k}} \sqrt[4]{\frac{2}{1+\xi^2}} \exp \left[-\frac{kx^2}{d(1+\xi^2)} - \frac{ikx^2}{d} \cdot \frac{\xi}{1+\xi^2} - \frac{i}{2} \operatorname{arctg} \frac{1-\xi}{1+\xi} \right]$$

On obtient une expression analogue pour $U'_0(y)$.

En substituant $U'_0(x)$ et $U'_0(y)$ dans (2-19), on obtient :

$$U_1(x, y, z) = U_0 \sqrt{\frac{2}{1+\xi^2}} e^{-\frac{k(x^2+y^2)}{d(1+\xi^2)}} e^{-\frac{ikd}{2}(1+\xi)} e^{-\frac{ik(x^2+y^2)}{d} \frac{\xi}{1+\xi^2}} e^{i\left(\frac{\pi}{2} - \arctg \frac{1-\xi}{1+\xi}\right)} \quad (2-23)$$

Analysons les facteurs de (2-23)

$$\sqrt{\frac{2}{1+\xi^2}} = \begin{cases} 1 & \text{sur les miroirs } (\xi^2=1) \\ \sqrt{2} & \text{au centre du résonateur } (\xi=0) \end{cases} \quad \left(\xi = \frac{2z}{d}\right)$$

$e^{-\frac{k(x^2+y^2)}{d(1+\xi^2)}}$ la "tache focale" a un rayon $\sqrt{2}$ fois plus petit que la "tache" sur le miroir (voir Fig. 4).

$$e^{-\frac{ikd}{2}(1+\xi)} = e^{-\frac{ikd}{2}} e^{-ikz} \quad \text{onde progressive selon } z.$$

$e^{-\frac{ik(x^2+y^2)}{d} \frac{\xi}{1+\xi^2}}$ représente le déphasage dû à la courbure du front d'onde, i.e. ce facteur est constant sur un front d'onde.

$$\frac{2d\xi}{1+\xi^2} \quad \text{représente le rayon de courbure}$$

Au centre du résonateur, on a pratiquement une onde plane.

$$e^{i\left(\frac{\pi}{2} - \arctg \frac{1-\xi}{1+\xi}\right)} \text{ peut s'écrire } e^{i\left(\frac{\pi}{4} + \arctg \xi\right)} \quad \begin{cases} +1 & \text{sur le miroir 1} \\ i & \text{sur le miroir 2} \end{cases}$$

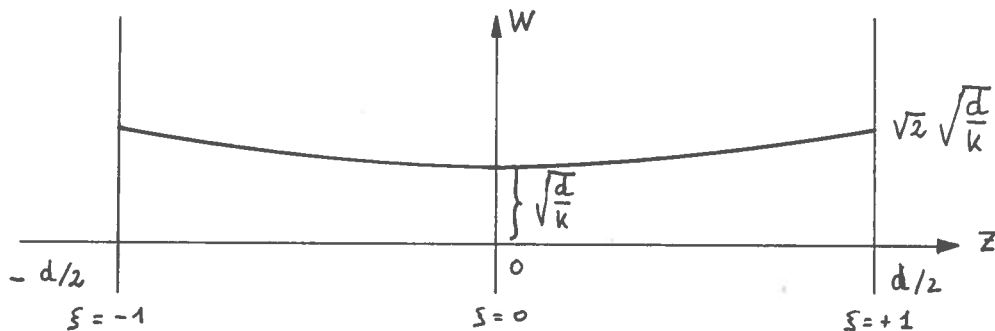


Fig. 4 Evolution de la "tache" (spot size) en fonction de z.

2.2.3 Modes TEM_{nm}

Pour trouver le champ de l'onde issue du miroir 1 dans le cas général $m, n \neq 0$, il faut partir de

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_n(\sqrt{2\beta} x) e^{-\beta x^2} e^{-iax^2} e^{i\beta x} dx = \quad (2-24)$$

$$= \frac{\sqrt{\pi} i^n}{\sqrt{a^2 + \beta^2}} H_n\left(\beta \sqrt{\frac{\beta}{2(a^2 + \beta^2)}}\right) \exp\left[\frac{-\beta^2}{4(a^2 + \beta^2)} - i(n + \frac{1}{2}) \arctan \frac{a}{\beta} + \frac{ia\beta^2}{4(a^2 + \beta^2)}\right]$$

($\beta > 0$)

On aboutit alors à

$$U_1(x, y, z) = U_0 \sqrt{\frac{2}{1 + \xi^2}} e^{-\frac{k(x^2 + y^2)}{d(1 + \xi^2)}} H_n\left(\sqrt{\frac{k}{d}} x \sqrt{\frac{2}{1 + \xi^2}}\right) H_m\left(\sqrt{\frac{k}{d}} y \sqrt{\frac{2}{1 + \xi^2}}\right) \cdot$$

$$\cdot \exp\left[-\frac{ikd}{2}(1 + \xi) - \frac{ik(x^2 + y^2) \cdot \xi}{d(1 + \xi^2)} + i(1 + n + m)\left(\frac{\pi}{2} - \arctan \frac{1 - \xi}{1 + \xi}\right)\right]$$

avec pour mémoire $\xi = \frac{2z}{d}$; $U_0 = \frac{\sqrt{\frac{k}{\pi d}} e^{i\psi}}{2^{n+m} n! m!}$

On vérifie que lorsque $z = -\frac{d}{2}$ (resp. $z = \frac{d}{2}$), on retrouve bien $v_1(x, y)$ (resp. $v_2(x, y)$).

$$v_1(x, y) = U_1(x, y, -\frac{d}{2}) = U_0 e^{-\frac{k(x^2 + y^2)}{2d}} H_n\left(\sqrt{\frac{k}{d}} x\right) H_m\left(\sqrt{\frac{k}{d}} y\right) e^{-\frac{ik(x^2 + y^2)}{2d}}$$

$$v_2(x, y) = U_1(x, y, \frac{d}{2}) = \pm U_0 e^{-\frac{k(x^2 + y^2)}{2d}} H_n\left(\sqrt{\frac{k}{d}} x\right) H_m\left(\sqrt{\frac{k}{d}} y\right) e^{-\frac{ik(x^2 + y^2)}{2d}}$$

Le signe \pm provient de la phase $\exp[-ikd + i(1 + n + m)\frac{\pi}{2}] = e^{-iq\pi} = \pm 1$ où l'on a utilisé la condition de résonance (2-13).

2.2.4 Onde stationnaire à l'intérieur du résonateur

On a donc $U_2(x, y) = (-1)^q U_1(x, y)$ en vertu de ce qui précède. Le champ $U_2(x, y, z)$ se déduit donc de U_1 .

$$U_2(x, y, z) = (-1)^q U_1(x, y, -z) \quad (2-26)$$

Posons $U_1(x, y, z) \equiv A e^{-i\alpha}$ et simplifions l'argument de l'exponentielle dans (2-25) au moyen de la condition de résonance (2-13).

$$\alpha = \frac{kd}{2} + kz + k \frac{x^2+y^2}{d} \cdot \frac{\xi}{1+\xi^2} - (1+n+m) \left(\frac{\pi}{4} + \operatorname{arctg} \xi \right)$$

de (2-13) : $\frac{kd}{2} - (1+n+m) \frac{\pi}{4} = q \frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow \alpha = kz + k \frac{x^2+y^2}{d} \cdot \frac{\xi}{1+\xi^2} - (1+n+m) \operatorname{arctg} \xi + q \frac{\pi}{2} \equiv \beta + q \frac{\pi}{2}$$

Dans l'expression ci-dessus β a le signe de z .

Pour obtenir l'onde stationnaire, il faut superposer U_1 et U_2 et tenir compte des conditions aux limites qui ne sont pas les mêmes pour \underline{E} et pour \underline{H} .

Champ E

Le champ E transverse s'annule sur le miroir

$$\left(\begin{array}{ccc} e_1 & \xrightarrow{E_1} & e_2 \\ -e_1 & \xleftarrow{-E_2} & -e_2 \end{array} \right)$$

Remplaçons U par E dans (2-26) et superposons E_1 et E_2

$$\begin{aligned} E(x,y,z) &= E_1(x,y,z) - E_2(x,y,z) = E_1(x,y,z) - (-1)^q E_1(x,y,-z) = \\ &= A e^{-i(\beta + q \frac{\pi}{2})} - (-1)^q A e^{-i(-\beta + q \frac{\pi}{2})} = A \left(e^{-i(\beta + q \frac{\pi}{2})} - e^{-i(\beta + q \frac{\pi}{2})} \right) = \frac{2A}{i} \sin(\beta + q \frac{\pi}{2}) \end{aligned}$$

Donc finalement en remplaçant dans (2-27)

$$\begin{aligned} E(x,y,z) &= 2 E_0 \sqrt{\frac{2}{1+\xi^2}} e^{-\frac{k(x^2+y^2)}{d(1+\xi^2)}} H_n(Cx) H_m(Cy) \\ &\quad \cdot \sin \left(kz + k \frac{x^2+y^2}{d} \cdot \frac{\xi}{1+\xi^2} - (1+n+m) \operatorname{arctg} \xi + q \frac{\pi}{2} \right) \end{aligned} \quad (2-27)$$

$$\text{avec } E_0 = \sqrt{\frac{k}{\pi d}} \frac{2^{-n-m}}{n!m!} \quad C = \sqrt{\frac{k}{d}} \sqrt{\frac{2}{1+\xi^2}}$$

La phase Ψ apparaissant dans (2-12) et (2-15) vaut $\frac{\pi}{2}$ dans le cas du champ E.

Lorsque z varie de $-\frac{d}{2}$ à $+\frac{d}{2}$, l'argument du sinus dans (2-27) varie de 0 à $q\pi$. Le carré du champ E présente donc q maxima à l'intérieur du résonateur.

Champ H

La valeur de H est double sur le miroir

$$\left(\begin{array}{c} h_1 \longrightarrow h_2 \\ h_1 \longleftarrow h_2 \end{array} \right)$$

Remplaçons U par H dans (2-26) et superposons H₁ et H₂

$$H(x,y,z) = H_1(x,y,z) + H_2(x,y,z) = H_1(x,y,z) + (-1)^q H_1(x,y,-z)$$

On obtient dans ce cas une expression analogue à (2-27) mais en cosinus. La phase ψ vaut 0 dans le cas du champ H.

La figure 5 montre l'allure du champ H(0,0,z)

Dégénérescence

D'après (2-13), les modes suivants ont la même fréquence

$$\nu_1 : \text{TEM}_{00q}, \text{TEM}_{20q-1}, \text{TEM}_{02q-1}, \text{TEM}_{11q-1}, \text{TEM}_{13q-2}, \text{etc...}$$

$$\nu_2 : \text{TEM}_{01q}, \text{TEM}_{01q-1}, \text{TEM}_{21q-1}, \text{TEM}_{12q-1}, \text{etc...}$$

$$\nu_1 - \nu_2 = \frac{c}{4d} = 0.15 \text{ GHz pour } d = 50 \text{ cm}$$

Remarque : les champs E et H ne satisfont pas exactement les équations de Maxwell.

Pour TEM₀₀ dans le plan z = 0

$$\begin{cases} E_x(x,y,z,t) = 2\sqrt{2} E_0 e^{-\frac{k(x^2+y^2)}{d}} \sin kz \cos \omega t \\ H_y(x,y,z,t) = 2\sqrt{2} H_0 e^{-\frac{k(x^2+y^2)}{d}} \cos kz \sin \omega t \end{cases}, \quad H_0 = \frac{E_0}{\mu_0 c}$$

$$\nabla \cdot \underline{E} = \partial_x E_x = -\frac{2kx}{d} E_x \neq 0 \quad \text{idem pour } \nabla \cdot \underline{H} \neq 0$$

$$\nabla \times \underline{E} = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} E_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \partial_z E_x \\ -\partial_y E_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ (k/\omega)(E_0/H_0) \dot{H}_y \\ (-2ky/d) H_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mu_0 \dot{H}_y \\ \neq 0 \end{pmatrix}$$

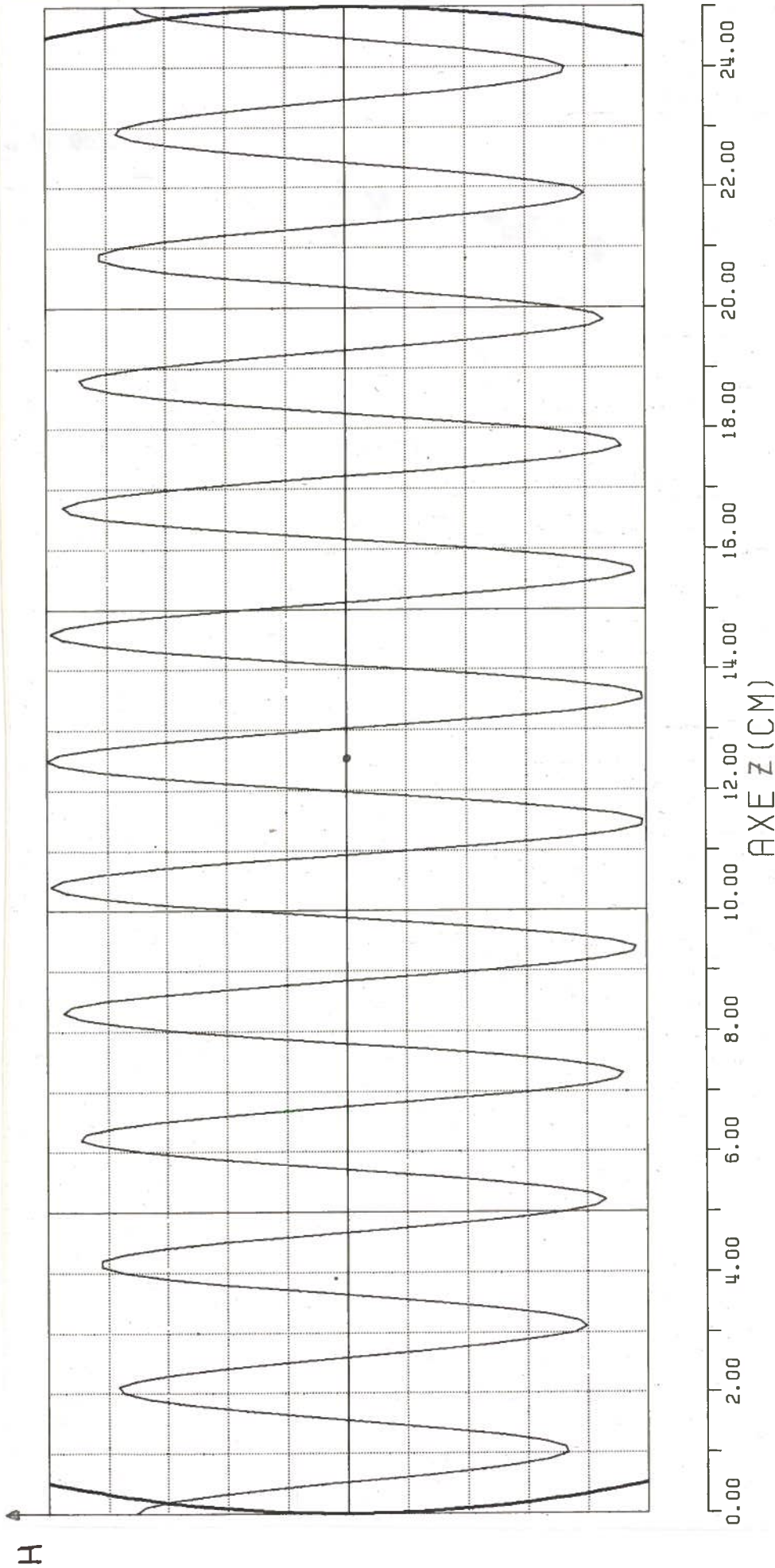


Figure 5. Allure du champ $H(0,0,z)$. $d = b = 25$ cm, $q = 24$, $\gamma = 14.7$ GHz
Le champ E est nul sur les réflecteurs et il est maximum lorsque H est nul.

2.3 Energie stockée dans le résonateur

Dans une cavité résonante, on a : (ref. [6] p. 28)

$$W = \frac{1}{2} \iiint_V \left(\epsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{\mu_0} \right) d^3r = \frac{1}{4} \iiint_V \left(\epsilon_0 E E^* + \frac{B B^*}{\mu_0} \right) d^3r = \frac{1}{2} \iiint_V \epsilon_0 E E^* d^3r \quad (2-28)$$

réels
complexes

Nous devons prendre pour E l'onde stationnaire à l'intérieur de la cavité (2-27). Cependant, pour simplifier l'intégration, nous prendrons W comme étant égal à 2 fois l'énergie de l'onde progressive

$$E_1(x, y, z) = E_0 \sqrt{\frac{2}{1+\xi^2}} e^{-\frac{k}{d} \frac{x^2+y^2}{1+\xi^2}} H_n(X) H_m(Y) e^{i[\dots]}$$

$$\text{avec } X = \sqrt{\frac{k}{d}} \sqrt{\frac{2}{1+\xi^2}} x \quad ; \quad Y = \sqrt{\frac{k}{d}} \sqrt{\frac{2}{1+\xi^2}} y \quad ; \quad \xi = \frac{2z}{d}$$

$$W = 2 \frac{\epsilon_0}{2} \iiint_V \|E_0\|^2 \frac{2}{1+\xi^2} H_n^2(X) H_m^2(Y) dx dy dz$$

$$dx dy = \frac{d}{k} \cdot \frac{1+\xi^2}{2} dX dY$$

$$W = \frac{\epsilon_0 d}{k} \|E_0\|^2 \int_{-d/2}^{d/2} dz \int_{-\infty}^{\infty} e^{-X^2} H_n^2(X) dX \int_{-\infty}^{\infty} e^{-Y^2} H_m^2(Y) dY$$

(2-29)

$$W = \frac{\epsilon_0 d^2}{k} \|E_0\|^2 \pi 2^{n+m} n! m!$$

Récrivons W en fonction de l'amplitude du champ de l'onde stationnaire au centre $E_c = 2\sqrt{2} E_0$ (2-27 et 2-16).

$$W = \frac{\epsilon_0 d^2}{8k} \|E_c\|^2 \pi 2^{n+m} n! m! = \frac{\epsilon_0 d^2 \lambda}{16} \|E_c\|^2 2^{n+m} n! m! \quad (2-30)$$

* Remarque : au centre du résonateur en $(0,0,0)$, le champ électrique physique est nul pour certains modes (par exemple TEM_{00q} si q est impair). Par contre, le module du champ électrique complexe vaut E_C .

2.4 Facteur de qualité de la cavité

D'une façon générale, le facteur de qualité d'un système résonnant est défini par

$$Q = \frac{\omega W}{P} \quad (2-31)$$

où $\frac{\omega}{2\pi} = \nu$ = fréquence de l'oscillation

W = énergie stockée dans le système

P = puissance perdue (atténuation, pertes)

Plus les pertes sont faibles, plus le facteur de qualité est grand. Pour des oscillations forcées, la largeur $\Delta\nu$ entre les points où l'amplitude de la réponse décroît d'un facteur $\sqrt{2}$ par rapport au maximum est reliée au facteur de qualité par

$$\frac{\Delta\nu}{\nu_0} = \frac{1}{Q} \quad (2-32)$$

Considérons une cavité formée d'un réflecteur sans perte et d'un réflecteur ayant un coefficient de transmission T non nul. L'énergie quittant la cavité pendant un temps Δt vaut

$$P \cdot \Delta t = \frac{1}{2} w_E \cdot S \cdot c \cdot T \cdot \Delta t \quad (2-33)$$

où w_E est la densité d'énergie moyenne dans la cavité et S la surface de sortie. Le facteur $1/2$ provient du fait que seule la moitié de l'énergie se propage en direction de la sortie, l'autre moitié étant réfléchi. La vitesse de la lumière est désignée par c .

$$D'autre part $W = w_E \cdot S \cdot d \quad (2-34)$$$

$$\text{et en combinant avec (2-32) : } P = \frac{W \cdot T \cdot c}{2d} \quad (2-35)$$

Lorsque la densité d'énergie dans la cavité n'est pas uniforme, il faut en toute rigueur remplacer (2-34) par une intégrale. Dans le cas du résonateur confocal le produit $w_E \cdot S$ intégré sur une longueur d'onde est constant selon l'axe z (voir (2-29)).

2.5 Pertes ohmiques sur les réflecteurs

Une onde électromagnétique incidente sur un métal donne naissance à une onde réfléchie qui a pour effet d'annuler presque totalement le champ électrique résultant à la surface du métal. La partie du champ pénétrant dans le métal décroît exponentiellement. L'épaisseur de peau et la résistivité superficielle sont données par :

$$\delta = (\pi \nu \mu_0 \sigma)^{-\frac{1}{2}} \quad (2-36)$$

$$R_s = (\sigma \delta)^{-1} \quad (2-37)$$

avec

	σ (mhos/m)	μ_0	δ [m]	R_s	
Argent	$6.17 \cdot 10^7$	$4\pi \cdot 10^{-7}$	$0.0642 \nu^{-1/2}$	$2.52 \cdot 10^{-7} \nu^{-1/2}$	(2-38)
Cuivre	$5.80 \cdot 10^7$	$4\pi \cdot 10^{-7}$	$0.0660 \nu^{-1/2}$	$2.61 \cdot 10^{-7} \nu^{-1/2}$	
Aluminium	$3.54 \cdot 10^7$				

La puissance moyenne dissipée par unité de surface conductrice vaut

$$P_L = \frac{1}{2} \operatorname{Re} (\underline{E} \times \underline{H}^*) \quad (2-39)$$

où \underline{E} et \underline{H} sont les composantes du champ entrant dans le conducteur. En fonction du champ électrique E_0 de l'onde incidente, nous avons (voir ref. [6] § 2.9 pour une justification)

$$P_L = \frac{2 Y_0^2}{\sigma \delta} E_0 E_0^* = \frac{2}{\sigma \delta} \left\| \frac{E_0}{\mu_0 c} \right\|^2 = 2 \sqrt{\frac{\omega \mu_0}{2 \sigma}} \left\| \frac{E_0}{\mu_0 c} \right\|^2 \quad (2-40)$$

Remarque : à la surface du miroir, le champ électrique s'annule si le conducteur est parfait et le champ magnétique est le double de celui de l'onde incidente.

Dans le cas d'une cavité confocale, on peut exprimer P_L en fonction du champ au centre de la cavité E_c qui est $2\sqrt{2}$ fois plus grand que celui de l'onde qui arrive sur le miroir.

$$P_L = \frac{1}{4\sigma} \left\| \frac{E_c}{\mu_0 c} \right\|^2 = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\omega \mu_0}{2\sigma}} \left\| \frac{E_c}{377} \right\|^2 \quad (2-41)$$

2.6 Ordres de grandeur

Soit $d = 50$ cm, $\lambda = 2.5$ mm, $\nu = 120$ GHz

Coefficient de perte $T = 2$ %

Puissance rayonnée 200 kW

a) Energie stockée dans la cavité (d'après (2-35))

$$W = \frac{2Pd}{Tc} = \frac{2 \cdot 200 \cdot 10^3 \cdot (0.5)}{(0.02) \cdot 3 \cdot 10^8} = 3.33 \cdot 10^{-2} \text{ joules}$$

b) Champ électrique au centre de la cavité (d'après (2-30))

On suppose un mode pur TEM_{00}

$$\|E_c\| = \sqrt{\frac{16W}{\epsilon_0 d^2 \lambda}} = \sqrt{\frac{32 \mu_0 P \nu}{d T}} = \sqrt{\frac{32 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 200 \cdot 10^3 \cdot 120 \cdot 10^9}{(0.5)(0.02)}} = 9.82 \text{ MV}$$

c) Charge thermique sur le réflecteur (d'après (2-42))

$$P_L = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\omega \mu_0}{2\sigma}} \left\| \frac{E_c}{377} \right\|^2 = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{2\pi \cdot 120 \cdot 10^9 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}}{2 \cdot (5.8) \cdot 10^7}} \cdot \left(\frac{9.82 \cdot 10^6}{377} \right)^2 = 15.32 \text{ MW/m}^2 = 1532 \text{ W/cm}^2$$

d) Puissance totale dissipée sur le réflecteur

$$\text{De (2-40) : } P_T = 2 \sqrt{\frac{\omega \mu_0}{2\sigma}} \frac{1}{\mu_0 c^2} \int_S \|E\|^2 dS$$

$$\text{avec } \|E\|^2 = \|E_0\|^2 e^{-\frac{k(x^2+y^2)}{d}} H_n^2\left(\sqrt{\frac{k}{d}}x\right) H_m^2\left(\sqrt{\frac{k}{d}}y\right) \quad (\text{de 2-12})$$

$$P_T = 2 \sqrt{\frac{\omega \mu_0}{2\sigma}} \left\| \frac{E_0}{\mu_0 c} \right\|^2 \frac{d}{k} \pi \cdot 2^{n+m} n! m! \quad (2-42)$$

Pour TEM_{00} $P_T = P_L \cdot \frac{d\pi}{k} = P_L \frac{d\lambda}{2}$ (2-43)

$$P_T = 1532 \cdot \frac{50 \cdot (0.25)}{2} = 9.6 \text{ kW}$$

2.7 Pertes par diffraction dans le cas de miroirs finis

On introduit le nombre de Fresnel

$$N = \frac{a^2}{\lambda d} \quad (2-44)$$

Des formules analytiques, faisant appel aux fonctions sphériques, existent dans le cas des miroirs carrés. Lorsque $N > 0.5$ [2] donne la formule

$$\alpha = 35.34 \sqrt{N} e^{-4\pi N} \quad (2-45)$$

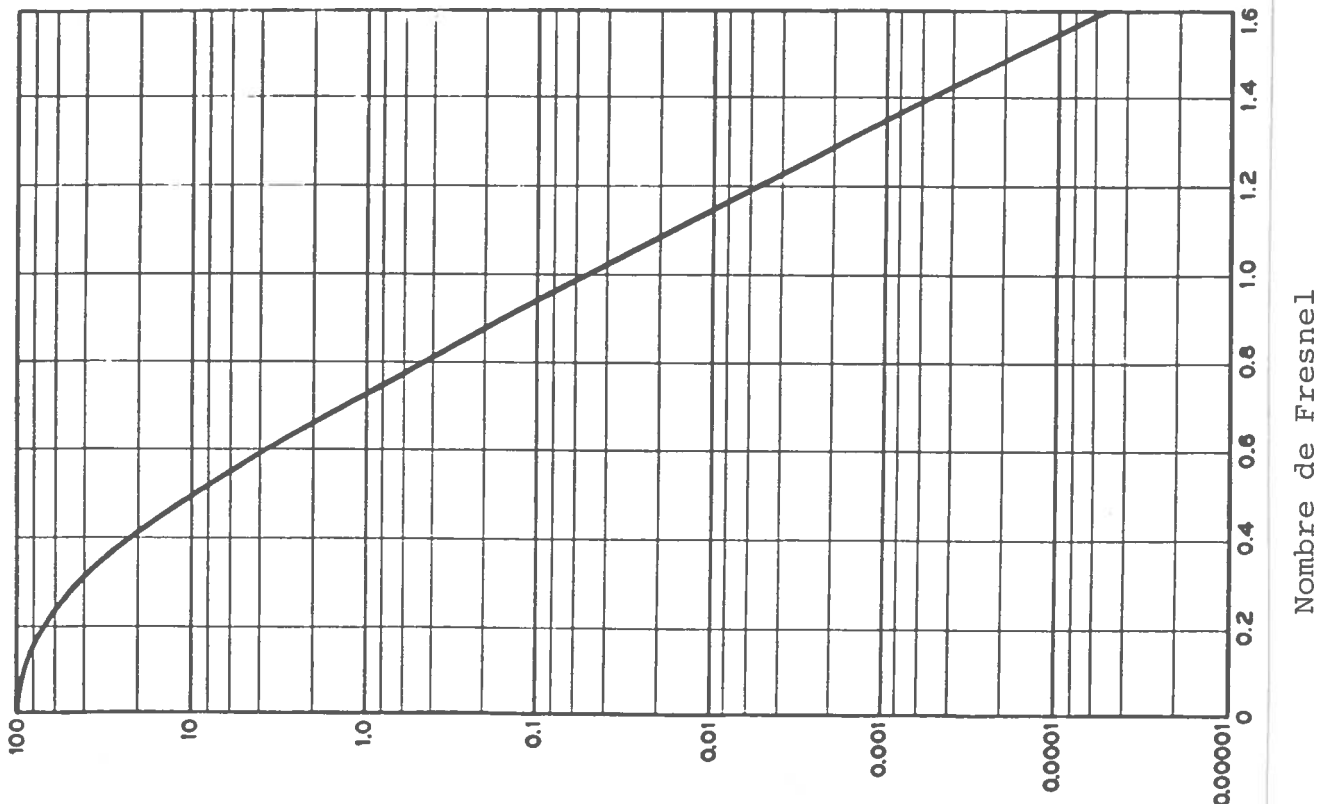


Figure 6. Pertes par diffraction en % lors d'un transit simple pour le mode TEM_{00} . Le résonateur est confocal ave miroirs circulaires. (tiré de réf.2)

Pour une tabulation de x pour les ordres n,m plus élevés, voir par exemple [3]

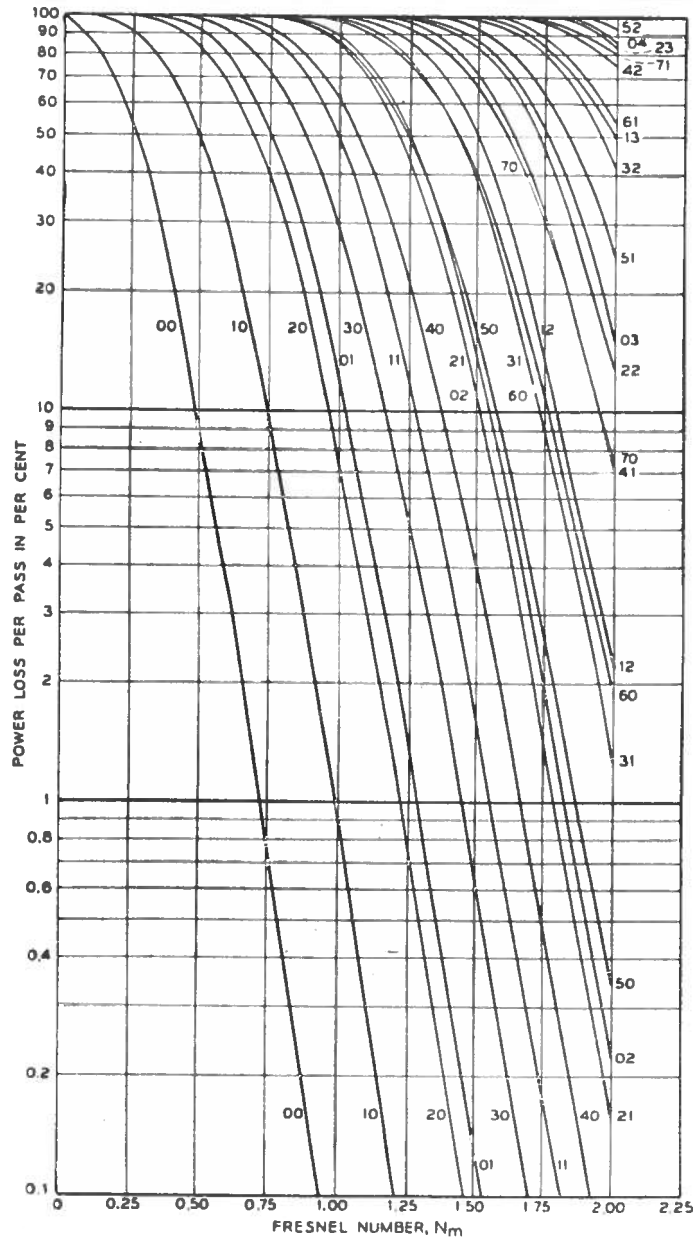


Fig. 7 Pertes par transit en fonction du nombre de Fresnel (miroirs sans trous). (Tiré de réf. 3)

3. LE RESONATEUR CONFOCAL SYMETRIQUE A MIROIRS CIRCULAIRES

3.1 Equation intégrale

En coordonnées cylindriques (z, r, φ) , l'équation (2-2) prend la forme

$$\gamma u^{(2)}(r_2, \varphi_2) = \pm \frac{ik e^{-ikd}}{2\pi d} \iint_{S_1} e^{\frac{ik}{d} r_1 r_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)} u^{(1)}(r_1, \varphi_1) r_1 dr_1 \quad (3-1)$$

Pour séparer les variables, posons : $u(r, \varphi) = R(r) \cdot A(\varphi)$

$$\gamma R(r_2) A(\varphi_2) = \pm \frac{ik e^{-kd}}{2\pi d} \int_0^a R(r_1) r_1 dr_1 \int_0^{2\pi} A(\varphi_1) e^{ik \frac{r_1 r_2}{d} \cos(\varphi_1 - \varphi_2)} d\varphi_1$$

L'intégrale sur φ rappelle une définition possible des fonctions de Bessel

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ix \cos \varphi} e^{in\varphi} = i^n J_n(x) \quad (3-2)$$

Posons donc $A(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{in\varphi}$ avec n entier (3-3)

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ix \cos(\varphi_1 - \varphi_2)} e^{in(\varphi_1 - \varphi_2)} d\varphi_1 = i^n J_n(x)$$

Substituant dans (3-1), on obtient pour $R_n(r)$

$$\gamma R_n(r_2) = \pm \frac{ik e^{-ikd}}{d} i^n \int_0^a R_n(r_1) J_n\left(\frac{kr_1 r_2}{d}\right) r_1 dr_1 \quad (3-4)$$

Sous cette forme, le noyau n'est pas symétrique, cependant on peut écrire

$$\gamma R_n(r_2) \sqrt{r_2} = \pm i^{n+1} \frac{k}{d} e^{-ikd} \int_0^a R_n(r_1) \sqrt{r_1} J_n\left(\frac{kr_1 r_2}{d}\right) \sqrt{r_1 r_2} dr_1 \quad (3-5)$$

La théorie des équations intégrales à noyaux réels symétriques nous apprend que les fonctions propres sont orthogonales et forment un ensemble complet. Pour résoudre (3-4), nous faisons appel à l'intégrale 7.421.4 du Gradshsteyn et Ryzhik dans le cas où $a \rightarrow \infty$

$$\int_0^{\infty} x^{\nu+1} e^{-\frac{x^2}{2}} L_{\rho}^{\nu}(x^2) J_{\nu}(xy) dx = (-1)^{\rho} y^{\nu} e^{-\frac{y^2}{2}} L_{\rho}^{\nu}(y^2) \quad (3-6)$$

où L_p^y est un polynôme de Laguerre généralisé.

D'où une famille de solutions à 2 indices n, l

$$R_{ne}(r) = \alpha_{ne} r^n L_e^n \left(\frac{k}{d} r^2 \right) e^{-\frac{kr^2}{2d}} \quad (3-7)$$

Le facteur de normalisation $\alpha_{n,l}$ est donné par (1-4)

$$\begin{aligned} 1 &= \int_0^{2\pi} \int_0^\infty R_{ne}(r) \frac{e^{in\varphi}}{\sqrt{2\pi}} R_{n'e'}(r) \frac{e^{-in'\varphi}}{\sqrt{2\pi}} r dr d\varphi = \delta_{nn'} \int_0^\infty R_{ne}(r) R_{n'e'}(r) r dr = \\ &= \delta_{nn'} \|\alpha_{ne}\|^2 \int_0^\infty r^{2n} L_e^n \left(\frac{k}{d} r^2 \right) L_{e'}^n \left(\frac{k}{d} r^2 \right) e^{-\frac{k}{d} r^2} r dr = \\ &= \delta_{nn'} \|\alpha_{ne}\|^2 \left(\frac{d}{k} \right)^{n+1} \frac{1}{2} \int_0^\infty x^n L_e^n(x) L_{e'}^n(x) e^{-x} dx = \\ &= \delta_{nn'} \|\alpha_{ne}\|^2 \left(\frac{d}{k} \right)^{n+1} \frac{1}{2} \frac{(l+n)!}{n!} \delta_{ee'} \\ &\Rightarrow \alpha_{ne} = \left(\frac{k}{d} \right)^{\frac{n+1}{2}} \sqrt{\frac{2 \cdot n!}{(n+l)!}} e^{i\psi} \end{aligned}$$

La solution complète s'écrit (mode TEM_{nl})

$$u^{(1)}(r, \varphi) = e^{i\psi} \sqrt{\frac{k}{\pi d}} \sqrt{\frac{n!}{(n+l)!}} \left(\sqrt{\frac{k}{d}} r \right)^n L_e^n \left(\frac{k}{d} r^2 \right) e^{-\frac{kr^2}{2d}} e^{-in\varphi} \quad (3-8)$$

Premiers polynômes de Laguerre

$$\begin{aligned} L_0^n(x) &= 1 \\ L_1^n(x) &= n + 1 - x \\ L_2^n(x) &= 1/2 \cdot [(n+2) \cdot (n+1) - 2x(n+2) + x^2] \end{aligned} \quad (3-9)$$

Condition de résonance du mode TEM_{nlq}

$$\begin{aligned} \text{De (3-5) et (3-6)} \quad & \pm \frac{ik e^{-ikd}}{\gamma d} i^n = (-1)^l \frac{k}{d} \\ & e^{iq\pi} e^{i\frac{\pi}{2}} e^{-ikd} e^{in\frac{\pi}{2}} = \gamma e^{-il\pi} \\ & kd = \pi \left(q + l + \frac{n}{2} + \frac{1}{2} \right) \end{aligned}$$

Le résonateur infini est sans perte : $\gamma = 1$, d'où :

$$\frac{4d}{\lambda} = 2q + 2\ell + n + 1 \quad (3-10)$$

Pour TEM₀₀ (2-12) et (3-8) donnent la même fonction :

$$u_{00}^{(1)}(x, y) = e^{i\psi} \sqrt{\frac{k}{\pi d}} e^{-\frac{k}{2d}(x^2+y^2)} = e^{i\psi} \sqrt{\frac{k}{\pi d}} e^{-\frac{kr^2}{2d}}$$

3.2 Champ à l'intérieur du résonateur

Les équations analogues à (2-15), (2-16) sont :

$$u_1(r, \varphi, z) = \iint_{S_1} \frac{ik e^{-ik\rho}}{2\pi\rho} v_1(r_1, \varphi_1) r_1 dr_1 d\varphi_1 \quad (3-11)$$

$$\text{où } v_1(r_1, \varphi_1) = U_0 \left(\sqrt{\frac{k}{d}} r_1 \right)^n L_n^n \left(\frac{kr_1^2}{d} \right) e^{-\frac{kr_1^2}{2d}} e^{i\frac{kr_1^2}{2d}} e^{in\varphi_1} \quad (3-12)$$

$$\rho = \sqrt{(d/2 + z)^2 + (r\cos\varphi - r_1\cos\varphi_1)^2 + (r\sin\varphi - r_1\sin\varphi_1)^2} \quad (3-13)$$

$$U_0 = e^{i\psi} \sqrt{\frac{k}{\pi d}} \sqrt{\frac{n!}{(n+\ell)!}}$$

En introduisant $\xi = 2z/d$ et en suivant la même démarche qu'au § 2.2, il vient

$$\rho = \frac{d}{2} (1 + \xi) + \frac{r^2 + r_1^2 - 2r_1r \cos(\varphi_1 - \varphi)}{d(1 + \xi)}$$

$$u_1(r, \varphi, z) = \frac{2ikU_0 \left(\frac{k}{d}\right)^{\frac{n}{2}}}{d(1+\xi)} e^{-\frac{ikd}{2}(1+\xi)} \int_0^\infty r_1^n L_n^n \left(\frac{k}{d} r_1^2 \right) \exp\left(-\frac{kr_1^2}{2d}(1-i) - \frac{ik(r^2+r_1^2)}{d(1+\xi)}\right) \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp\left(-\frac{2ikr_1r \cos(\varphi_1 - \varphi)}{d(1+\xi)}\right) e^{in\varphi_1} r_1 dr_1 d\varphi_1$$

L'intégrale sur φ_1 donne $i^n J_n \left(\frac{2kr_1r}{d(1+\xi)} \right) e^{in\varphi}$

$$u_1(r, \varphi, z) = \frac{2ikU_0 \left(\frac{k}{d}\right)^{\frac{n}{2}}}{d(1+\xi)} e^{-\frac{ikd}{2}(1+\xi)} i^n e^{in\varphi} e^{-\frac{ikr^2}{d(1+\xi)}} \cdot$$

$$\int_0^\infty r_1^n L_n^n \left(\frac{k}{d} r_1^2 \right) \exp\left\{-\frac{k}{2d(1+\xi)} [r_1^2(1+\xi) + ir_1^2(1-\xi)]\right\} J_n \left(\frac{2kr_1r}{d(1+\xi)} \right) r_1 dr_1$$

Cette intégrale se ramène au N° 7.421.4 du Gradshteyn et Ryzhik.

$$\int_0^{\infty} x^{\nu+1} e^{-\beta x^2} L_n^{\nu}(\alpha x^2) J_{\nu}(xy) dx = \frac{(\beta-\alpha)^n y^{\nu} e^{-\frac{y^2}{4\beta}}}{2^{\nu+1} \beta^{\nu+n+1}} L_n^{\nu}\left(\frac{\alpha y^2}{4\beta(\alpha-\beta)}\right) \quad (3-14)$$

Identifions :

$$\beta = \frac{k}{2d} \left(1 + i \frac{1-\xi}{1+\xi}\right) \quad ; \quad \alpha = \frac{k}{d}$$

$$y = \frac{2kr}{d(1+\xi)} \quad ; \quad \nu \leftrightarrow n \quad ; \quad n \leftrightarrow \ell$$

$$4\beta(\alpha-\beta) = 4 \frac{k}{2d} \left(1 + i \frac{1-\xi}{1+\xi}\right) \frac{k}{2d} \left(1 - i \frac{1-\xi}{1+\xi}\right) = \frac{k^2}{d^2} \left(1 + \frac{(1-\xi)^2}{(1+\xi)^2}\right) = \frac{2k^2}{d^2} \cdot \frac{1+\xi^2}{(1+\xi)^2}$$

$$\frac{\alpha y^2}{4\beta(\alpha-\beta)} = \frac{k}{d} \cdot \frac{4k^2 r^2}{d^2(1+\xi)^2} \cdot \frac{d^2}{2k^2} \cdot \frac{(1+\xi)^2}{1+\xi^2} = \frac{2kr^2}{d(1+\xi^2)}$$

$$\frac{1}{\beta} = \frac{2d}{k} \cdot \frac{1}{1 + i \frac{1-\xi}{1+\xi}} = \frac{2d}{k} \cdot \frac{1 - i \frac{1-\xi}{1+\xi}}{1 + \frac{(1-\xi)^2}{(1+\xi)^2}} = \frac{d}{k} \cdot \frac{(1+\xi)^2}{1+\xi^2} \left(1 - i \frac{1-\xi}{1+\xi}\right)$$

$$\frac{y^2}{4\beta} = \frac{k^2 r^2}{d^2(1+\xi)^2} \cdot \frac{d}{k} \cdot \frac{(1+\xi)^2}{1+\xi^2} \left(1 - i \frac{1-\xi}{1+\xi}\right) = \frac{kr^2}{d(1+\xi^2)} \left(1 - i \frac{1-\xi}{1+\xi}\right)$$

Posons $\beta \equiv |\beta| e^{i\theta}$ où $|\beta| = \frac{k}{2d} \sqrt{1 + \frac{(1-\xi)^2}{(1+\xi)^2}} = \frac{k}{d(1+\xi)} \sqrt{\frac{1+\xi^2}{2}}$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{1-\xi}{1+\xi}$$

$$\beta - \alpha = \frac{k}{2d} \left(-1 + i \frac{1-\xi}{1+\xi}\right) = -|\beta| e^{-i\theta}$$

$$\begin{aligned} \frac{(\beta-\alpha)^{\ell} y^n}{2^{n+1} \beta^{\ell+n+1}} &= \frac{\left(\frac{-1}{2}\right)^{\ell} |\beta|^{\ell} e^{-i\ell\theta} \left(\frac{y}{2}\right)^n}{|\beta|^{\ell+n+1} e^{i(\ell+n+1)\theta}} = \frac{(-1)^{\ell}}{2} \left(\frac{kr}{d(1+\xi)}\right)^n \left(\frac{d(1+\xi)}{k} \sqrt{\frac{2}{1+\xi^2}}\right)^{n+1} e^{-i(2\ell+n+1)\theta} \\ &= \frac{(-1)^{\ell}}{2} \cdot \frac{d(1+\xi)}{k} \cdot \sqrt{\frac{2}{1+\xi^2}} \left(r \sqrt{\frac{2}{1+\xi^2}}\right)^n e^{-i(2\ell+n+1)\theta} \end{aligned}$$

Finalement :

$$U_1(r, \varphi, z) = U_0 \sqrt{\frac{2}{1+s^2}} \left(r \sqrt{\frac{k}{d}} \sqrt{\frac{2}{1+s^2}} \right)^n e^{-\frac{kr^2}{d(1+s^2)}} L_n^{\ell} \left(\frac{kr^2}{d(1+s^2)} \right) \cdot e^{-ikz} e^{in\varphi} e^{-\frac{ikd}{2}} e^{-\frac{ikr^2}{d} \cdot \frac{s}{1+s^2}} e^{i(2\ell+n+1)\left(\frac{\pi}{2} - \arctg \frac{1-s}{1+s}\right)} \quad (3-15)$$

Cette expression est similaire à celle obtenue en coordonnées cartésiennes. Onde stationnaire du champ électrique TEM_{nlq}

$$E(r, \varphi, z) = 2E_0 \sqrt{\frac{2}{1+s^2}} \left(r \sqrt{\frac{k}{d}} \sqrt{\frac{2}{1+s^2}} \right)^n e^{-\frac{kr^2}{d(1+s^2)}} L_n^{\ell} \left(\frac{kr^2}{d(1+s^2)} \right) \cos n\varphi \cdot \sin \left\{ kz + \frac{kr^2}{d} \cdot \frac{s}{1+s^2} - (2\ell+n+1) \arctg s + q \frac{\pi}{2} \right\} \quad (3-16)$$

3.3 Energie stockée dans un résonateur cylindrique confocal

Même démarche qu'au § 2.3

$$E_1 = E_0 \sqrt{\frac{2}{1+s^2}} \left(r \sqrt{\frac{k}{d}} \sqrt{\frac{2}{1+s^2}} \right)^n e^{-\frac{kr^2}{d(1+s^2)}} L_n^{\ell} \left(\frac{kr^2}{d(1+s^2)} \right) e^{i[\dots]}$$

$$W = 2 \cdot \frac{\epsilon_0}{2} \iiint \|E_0\|^2 \frac{2}{1+s^2} \left[R^n e^{-\frac{R^2}{2}} L_n^{\ell}(R^2) \right]^2 dV$$

$$\text{avec } R = \sqrt{\frac{k}{d}} \sqrt{\frac{2}{1+s^2}} r \quad ; \quad dR = \sqrt{\frac{k}{d}} \sqrt{\frac{2}{1+s^2}} dr$$

$$dV = r dr d\varphi dz = \frac{d}{k} \frac{1+s^2}{2} R dR d\varphi dz$$

$$W = \epsilon_0 \int_{-d/2}^{d/2} dz \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} \|E_0\|^2 \frac{d}{k} R^{2n} e^{-R^2} (L_n^{\ell}(R^2))^2 R dR =$$

$$= \epsilon_0 \|E_0\|^2 \frac{d^2}{k} 2\pi \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\infty} x^n e^{-x} (L_n^{\ell}(x))^2 dx =$$

$$= \epsilon_0 \|E_0\|^2 \frac{d^2}{k} \pi \cdot \frac{(\ell+n)!}{n!} = \epsilon_0 \|E_0\|^2 \frac{d^2 \lambda}{2\pi} \cdot \pi \cdot \frac{(\ell+n)!}{n!}$$

Finalement W s'écrit en fonction du champ au centre $E_C = 2\sqrt{2} E_0$

$$W = \frac{\epsilon_0 \|E_C\|^2 d^2 \lambda}{16} \frac{(\ell+n)!}{n!} \quad (3-17)$$

4. LE RÉSONATEUR NON CONFOCAL

Considérons les surfaces équiphasés à l'intérieur d'un résonateur confocal. D'après (2-23), le rayon de courbure varie comme

$$\frac{2d\xi}{1+\xi^2}, \quad \text{avec} \quad \xi = \frac{2z}{d} \quad (4-1)$$

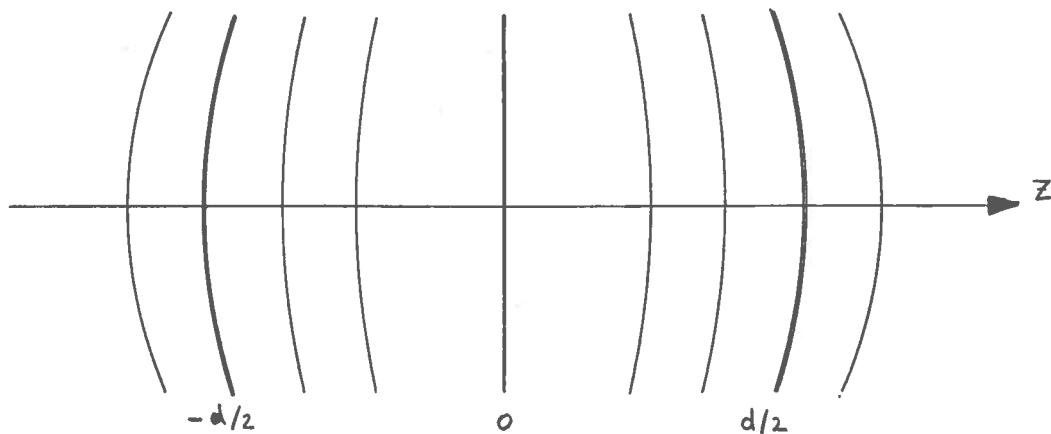


Fig. 8 Surfaces équiphasés

On ne modifie pas le champ à l'intérieur de la cavité si l'on remplace une équiphasé par une surface réfléchissante de même courbure. Par ce raisonnement, on peut construire toute une classe de résonateurs équivalents ayant des miroirs de courbure différente.

De (2-23), on tire également la dépendance de la tache (spot size) en fonction de z .

$$w(z) = \sqrt{\frac{d}{k} (1+\xi^2)} = \sqrt{\frac{d\lambda}{2\pi} (1+\xi^2)} = \sqrt{\frac{\lambda(d^2+4z^2)}{2\pi d}} \quad (4-2)$$

4.1 Le résonateur symétrique non confocal

Espacement des miroirs : d

Rayon de courbure : b'

Cherchons le rayon de courbure b du résonateur confocal équivalent; d'après (4-1) :

$$b' = \frac{2\xi}{1+\xi^2} b \quad \text{où} \quad \xi = \frac{2 \cdot \frac{d}{2}}{b} = \frac{d}{b} \quad ; \Rightarrow \quad b' \left(1 + \frac{d^2}{b^2}\right) = 2d$$

$$\theta^2 = 2d\theta' - d^2 \quad (4-3)$$

On constate que b n'est réel que si $b' > d/2$. On ne peut donc pas étudier avec cette méthode des résonateurs ayant un rayon de courbure plus petit que $d/2$.

Le "spot size" est toujours donné par (4-2), avec $\xi = \frac{2z}{\sqrt{2d\theta' - d^2}}$

Tache sur les réflecteurs

$$W_m = \sqrt{\frac{\theta\lambda}{2\pi} \left(1 + \frac{d^2}{2d\theta' - d^2}\right)} = \sqrt{\frac{\theta\lambda}{2\pi} \cdot \frac{2d\theta'}{2d\theta' - d^2}} = \sqrt{\frac{d\lambda}{\pi} \cdot \frac{\theta\theta'}{2d\theta' - d^2}}$$

$$W_m = \sqrt{\frac{d\lambda}{\pi}} \sqrt{\frac{\theta'}{\sqrt{2d\theta' - d^2}}} = \sqrt{\frac{d\lambda}{\pi}} \left(2\frac{d}{\theta'} - \left(\frac{d}{\theta'}\right)^2\right)^{-\frac{1}{4}} \quad (4-4)$$

Tache focale

$$W_o = \sqrt{\frac{\theta\lambda}{2\pi}} = \sqrt{\frac{d\lambda}{2\pi}} \left(\frac{2\theta'}{d} - 1\right)^{-\frac{1}{4}} \quad (4-5)$$

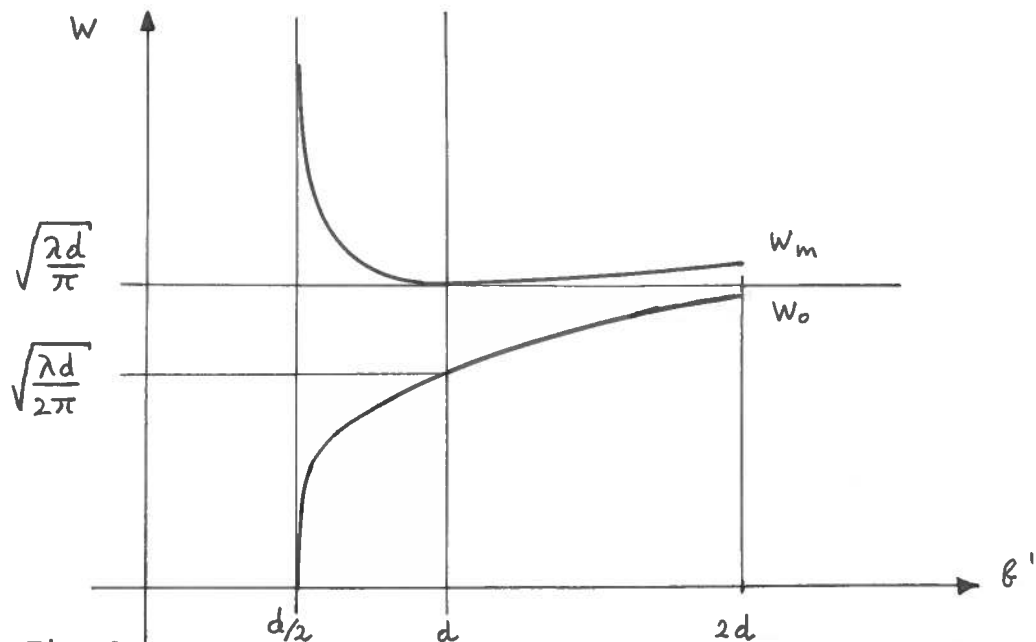


Fig. 9

En diminuant le rayon de courbure par rapport au système confocal, on augmente la tache sur les miroirs et on diminue la tache focale.

Energie stockée dans le résonateur non confocal

L'énergie est donnée par une intégrale analogue à (2-29). Il faut cependant se souvenir que maintenant $\xi = 2z/b$ où b est donné par (4-3). Nous aboutissons à :

$$W = \frac{\epsilon_0 \theta \lambda d}{16} \|E_c\|^2 \cdot 2^{n+m} n! m! \quad (4-6)$$

Puissance perdue, d'après (2-35) et (4-6)

$$P = \frac{W.T.c}{2d} = \frac{\epsilon_0 \theta \lambda T_c}{32} \|E_c\|^2 2^{n+m} n! m! \quad (4-7)$$

Puissance dissipée sur un miroir, d'après (2-40)

$$P_L = 2 \sqrt{\frac{\omega \mu_0}{2\sigma}} \left\| \frac{E_m}{\mu_0 c} \right\|^2 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\omega \mu_0}{2\sigma}} \left\| \frac{E_c}{377} \right\|^2 \frac{1}{1 + \left(\frac{d}{f}\right)^2} \quad (4-8)$$

où E_m est le champ de l'onde incidente au centre du miroir et E_c le champ de l'onde stationnaire au centre du résonateur. D'après (2-27) et (2-16) $|E_c| = 2\sqrt{2}|E_0|$ et d'après (2-25) $|E_m| = |E_0| \sqrt{\frac{2}{1+\xi^2}}$

Relation entre P_L et P pour TEM_{00}

De (4-7) et (4-8), avec $\omega = 2\pi\nu = 2\pi \frac{c}{\lambda}$ et $\mu_0 c = 377$

$$P_L = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi c \mu_0}{\lambda \sigma}} \frac{1}{\mu_0^2 c^2} \cdot \frac{32}{\epsilon_0 \theta \lambda T_c} \cdot \frac{P}{1 + \left(\frac{d}{f}\right)^2}$$

Comme $\epsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$

de (4-3) :

$$P_L = \frac{16}{T} \sqrt{\frac{\pi}{\sigma \mu_0 c \lambda^3}} \cdot \frac{P}{\theta \left(1 + \left(\frac{d}{f}\right)^2\right)}$$

$$\theta \left(1 + \left(\frac{d}{f}\right)^2\right) = \sqrt{2d\theta' - d^2} \left(1 + \frac{d^2}{2d\theta' - d^2}\right) = \frac{2d\theta'}{\sqrt{2d\theta' - d^2}}$$

$$P_L = \frac{8}{T} \sqrt{\frac{\pi}{\sigma \mu_0 c \lambda^3}} \frac{1}{d} \sqrt{2\left(\frac{d}{f'}\right) - \left(\frac{d}{f}\right)^2} P \quad (4-9)$$

Expression en fonction de la tache sur le miroir w_m donnée par (4-4)

$$P_L = \frac{8}{T} (\pi \sigma \mu_0 c \lambda)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{P}{W_m^2} \quad (4-10)$$

La puissance dissipée par unité de surface au centre du miroir est maximale pour le miroir confocal (Fig. 10).

Puissance totale dissipée dans le réflecteur

$$\text{De (2-40) : } P_T = 2 \sqrt{\frac{\omega \mu_0}{2\sigma}} \cdot \frac{1}{\mu_0^2 c^2} \int_S \|E_m\|^2 dS$$

$$\text{avec } \|E_m\|^2 = \|E_0\|^2 \frac{2}{1+\xi^2} \exp[-C^2(x^2+y^2)] H_n^2(Cx) H_m^2(Cy)$$

$$\text{(c.f. équation (2-25)) avec } d = b \text{ et } \xi = d/b, \quad C = \sqrt{\frac{k}{\ell}} \sqrt{\frac{2}{1+\xi^2}}$$

$$\text{Posons } X = Cx \quad ; \quad Y = Cy \quad ; \quad dx dy = \frac{\ell}{k} \frac{1+\xi^2}{2} dX dY$$

$$P_T = 2 \sqrt{\frac{\omega \mu_0}{2\sigma}} \cdot \frac{1}{\mu_0^2 c^2} \cdot \frac{\ell}{k} \|E_0\|^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-X^2-Y^2} H_n^2(X) H_m^2(Y) dX dY$$

$$\text{Finalement } P_T = 2 \sqrt{\frac{\omega \mu_0}{2\sigma}} \left\| \frac{E_0}{\mu_0 c} \right\|^2 \cdot \frac{\ell}{k} \pi 2^{n+m} n! m! \quad (4-11)$$

Avec $E_C = 2\sqrt{2} E_0$, nous avons pour le mode TEM_{00}

$$P_T = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\omega \mu_0}{2\sigma}} \left\| \frac{E_C}{\mu_0 c} \right\|^2 \frac{\ell}{k} \pi$$

$$\text{et } P_T = P_L \cdot \frac{1}{2} \left(1 + \left(\frac{d}{\ell} \right)^2 \right) \frac{\ell}{k} \pi = P_L \cdot \frac{1}{2} \left(1 + \left(\frac{d}{\ell} \right)^2 \right) \cdot \frac{\ell \lambda}{2} \quad (4-12)$$

Relation entre P_T et P

$$P_T = \frac{16}{T} \sqrt{\frac{\pi}{\sigma \mu_0 c \lambda^3}} \cdot \frac{P}{\ell \left(1 + \left(\frac{d}{\ell} \right)^2 \right)} \cdot \frac{\left(1 + \left(\frac{d}{\ell} \right)^2 \right) \ell \lambda}{4} = \frac{4P}{T} \sqrt{\frac{\pi}{\sigma \mu_0 c \lambda}} \quad (4-13)$$

Sous cette forme, on voit que la puissance totale dissipée dans le miroir ne dépend ni du rayon de courbure ni de l'espacement des miroirs.

Numériquement $P_T = (4.8 \%) \cdot P$ à 120 GHz.

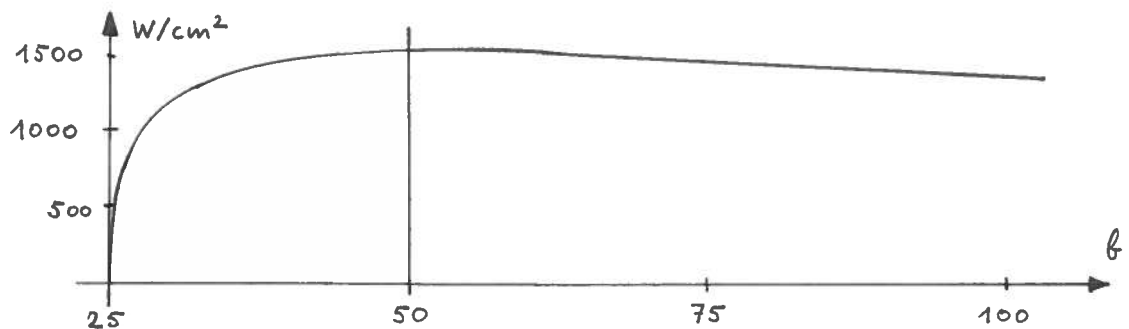


Fig. 10 Puissance dissipée en fonction du rayon de courbure ($d = 50 \text{ cm}$) du résonnateur confocal équivalent.

4.2 Résonateur non confocal avec courbure différente des miroirs

D'après Boyd and Kogelnik ref. [1].

Les grandeurs géométriques sont définies sur la figure 1.

4.2.1 Rayon de courbure du résonateur confocal équivalent

D'après (4-1), on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta_1 = -\frac{1+\xi_1^2}{2\xi_1} b \quad \text{avec } \xi_1 = \frac{2d_1}{b} < 0 \quad (4-14) \\ \theta_2 = \frac{1+\xi_2^2}{2\xi_2} b \quad \text{avec } \xi_2 = \frac{2d_2}{b} > 0 \quad (4-15) \\ d = d_2 - d_1 = \frac{b}{2} (\xi_2 - \xi_1) \quad (4-16) \end{array} \right.$$

Éliminons ξ_1 et ξ_2

$$(4-14) \rightarrow \xi_1^2 b + 2\theta_1 \xi_1 + b = 0 \Rightarrow b\xi_1 = -\theta_1 \pm \sqrt{\theta_1^2 - b^2}$$

$$(4-15) \rightarrow \xi_2^2 b - 2\theta_2 \xi_2 + b = 0 \Rightarrow b\xi_2 = \theta_2 \pm \sqrt{\theta_2^2 - b^2}$$

$$(4-16) \rightarrow 2d = \theta_2 \pm \sqrt{\theta_2^2 - b^2} + \theta_1 \pm \sqrt{\theta_1^2 - b^2}$$

$$\underbrace{(2d - \theta_1 - \theta_2)^2}_{A^2} = (\sqrt{\theta_1^2 - b^2} \pm \sqrt{\theta_2^2 - b^2})^2$$

$$= \theta_1^2 - b^2 + \theta_2^2 - b^2 \pm 2\sqrt{\theta_1^2 - b^2} \sqrt{\theta_2^2 - b^2}$$

$$\{A^2 - [\theta_1^2 - b^2 + \theta_2^2 - b^2]\}^2 = 4(\theta_1^2 - b^2)(\theta_2^2 - b^2)$$

$$A^4 - 2A^2[(\theta_1^2 - b^2) + (\theta_2^2 - b^2)] + [(\theta_1^2 - b^2) - (\theta_2^2 - b^2)]^2 = 0$$

$$A^4 + (\theta_1^2 - \theta_2^2)^2 = 2A^2(\theta_1^2 + \theta_2^2 - 2b^2)$$

$$4A^2 b^2 = 2A^2(\theta_1^2 + \theta_2^2) - A^4 - (\theta_1^2 - \theta_2^2)^2 = 0 \quad (4-17)$$

Pour simplifier le membre de droite, posons :

$$A^2 = [(\theta_1 - d) + (\theta_2 - d)]^2 = (x_1 + x_2)^2$$

$$\theta_1^2 + \theta_2^2 = (x_1 + d)^2 + (x_2 + d)^2 = x_1^2 + x_2^2 + 2d(x_1 + x_2) + 2d^2$$

$$\theta_1^2 - \theta_2^2 = (x_1 + d)^2 - (x_2 + d)^2 = x_1^2 - x_2^2 + 2d(x_1 - x_2)$$

Récrivons (4-17)

$$4A^2b^2 = 2(x_1+x_2)^2 [x_1^2+x_2^2+2d(x_1+x_2)+2d^2] - (x_1+x_2)^4 - [x_1^2-x_2^2+2d(x_1-x_2)]^2$$

$$4A^2b^2 = 2(x_1+x_2)^2(x_1^2+x_2^2) - (x_1+x_2)^4 - (x_1^2-x_2^2)^2 + d[4(x_1+x_2)^3 - 4(x_1^2-x_2^2)(x_1-x_2)] + d^2[4(x_1+x_2)^2 - 4(x_1-x_2)^2]$$

$$4A^2b^2 = (x_1+x_2)^2 [2x_1^2+2x_2^2-x_1^2-2x_1x_2-x_2^2] - (x_1^2-x_2^2)^2 + 4d(x_1+x_2)[(x_1+x_2)^2 - (x_1-x_2)^2] + 4d^2 \cdot 4x_1x_2$$

$$4A^2b^2 = (x_1+x_2)^2(x_1-x_2)^2 - (x_1^2-x_2^2)^2 + 4d(x_1+x_2)4x_1x_2 + 16d^2x_1x_2 =$$

En remplaçant x_1 et x_2 = 16d x_1 x_2 (x_1+x_2+d)

$$A^2b^2 = 4d(b_1-d)(b_2-d)(b_1+b_2-d)$$

D'où finalement, après ces laborieux calculs :

$$b^2 = \frac{4d(b_1-d)(b_2-d)(b_1+b_2-d)}{(b_1+b_2-2d)^2} \quad (4-18)$$

4.2.2 Taches sur les miroirs

D'après (4-2), on a :

Sur le miroir 1 : $w_1 = w(\xi_1) = \sqrt{\frac{b\lambda}{2\pi} (1+\xi_1^2)}$ (4-19)

Sur le miroir 2 : $w_2 = w(\xi_2) = \sqrt{\frac{b\lambda}{2\pi} (1+\xi_2^2)}$ (4-20)

Au "centre" : $w_0 = w(0) = \sqrt{\frac{b\lambda}{2\pi}}$ (4-21)

(à une distance $-\frac{\xi_1 b}{2}$ du miroir 1)

En divisant (4-19) par (4-20) et en utilisant (4-14) et (4-15) :

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{1+\xi_1^2}{1+\xi_2^2} = \frac{-\xi_1 b_1}{\xi_2 b_2} \quad (4-22)$$

D'autre part en combinant (4-14), (4-15) et (4-16) :

$$\begin{cases} -2 \xi_1 \theta_1 + 2 \xi_1 d = (1 + \xi_1^2) \theta + \xi_1 (\theta \xi_2 - \theta \xi_1) \\ 2 \xi_2 \theta_2 - 2 \xi_2 d = (1 + \xi_2^2) \theta - \xi_2 (\theta \xi_2 - \theta \xi_1) \end{cases}$$

En divisant l'une par l'autre ces équations :

$$\frac{-2 \xi_1 (\theta_1 - d)}{2 \xi_2 (\theta_2 - d)} = \frac{(1 + \xi_1 \xi_2) \theta}{(1 + \xi_1 \xi_2) \theta} = 1$$

d'où $\frac{-\xi_1}{\xi_2} = \frac{\theta_2 - d}{\theta_1 - d}$ et, avec (4-22)

$$\left(\frac{w_1}{w_2} \right)^2 = \frac{\theta_1 (\theta_2 - d)}{\theta_2 (\theta_1 - d)} \quad (4-23)$$

En multipliant (4-19) par (4-20), nous obtenons :

$$(w_1 w_2)^2 = \left(\frac{\theta \lambda}{2\pi} \right)^2 (1 + \xi_1^2)(1 + \xi_2^2)$$

Avec (4-14) et (4-15) : $(w_1 w_2)^2 = \left(\frac{\theta \lambda}{2\pi} \right)^2 \left(-\frac{2\theta_1 \xi_1}{\theta} \right) \left(\frac{2\theta_2 \xi_2}{\theta} \right) = \left(\frac{\lambda}{\pi} \right)^2 \theta_1 \theta_2 (-\xi_1 \xi_2)$

Calculons $(-\xi_1 \cdot \xi_2)$ à partir de (4-14), (4-15) et (4-16) :

$$2\theta_1 \xi_1 = -(1 + \xi_1^2) \theta \quad \cdot \xi_2$$

$$2\theta_2 \xi_2 = (1 + \xi_2^2) \theta \quad \cdot \xi_1$$

$$2d = (\xi_2 - \xi_1) \theta \quad \cdot (-\xi_1 \xi_2)$$

$$2 \xi_1 \xi_2 (\theta_1 + \theta_2 - d) = \theta (-\xi_2 - \xi_2 \xi_1^2 + \xi_1 + \xi_2^2 \xi_1 - \xi_1 \xi_2^2 + \xi_1^2 \xi_2)$$

$$2 \xi_1 \xi_2 (\theta_1 + \theta_2 - d) = \theta (-\xi_2 + \xi_1) = -2d$$

$$-\xi_1 \xi_2 = \frac{d}{\theta_1 + \theta_2 - d}$$

d'où $(w_1 w_2)^2 = \left(\frac{\lambda}{\pi} \right)^2 \frac{\theta_1 \theta_2 d}{\theta_1 + \theta_2 - d}$ (4-24)

En combinant (4-23) et (4-24) :

$$w_1^4 = \left(\frac{w_1}{w_2} \right)^2 \cdot (w_1 w_2)^2 = \left(\frac{\lambda}{\pi} \right)^2 \cdot \frac{\theta_1^2 d (\theta_2 - d)}{(\theta_1 - d)(\theta_1 + \theta_2 - d)} \quad (4-25)$$

$$w_2^4 = \left(\frac{w_2}{w_1} \right)^2 \cdot (w_1 w_2)^2 = \left(\frac{\lambda}{\pi} \right)^2 \cdot \frac{\theta_2^2 d (\theta_1 - d)}{(\theta_2 - d)(\theta_1 + \theta_2 - d)} \quad (4-26)$$

La tache focale est à une distance $d_1 = \frac{S_1 b}{2}$ du miroir 1
De (4-19) et (4-14)

$$W_1^2 = \frac{b\lambda}{2\pi} (1+S_1^2) = \frac{\lambda}{2\pi} (-2S_1 b_1) = -\frac{2\lambda}{\pi} \cdot d_1 \cdot \frac{b_1}{b}$$

$$d'où d_1 = -\frac{\pi b}{2\lambda b_1} W_1^2$$

Avec (4-18) et (4-25)

$$d_1 = -\frac{\pi}{2\lambda b_1} \cdot \frac{2\sqrt{d(b_1-d)(b_2-d)(b_1+b_2-d)}}{b_1+b_2-2d} \cdot \frac{\lambda}{\pi} \cdot \frac{b_1\sqrt{d(b_2-d)}}{\sqrt{(b_1-d)(b_1+b_2-d)}}$$

$$d_1 = \frac{-d(b_2-d)}{b_1+b_2-2d} \quad ; \quad d_2 = \frac{d(b_1-d)}{b_1+b_2-2d} \quad (4-27)$$

4.2.3 Champ à l'intérieur du résonateur non confocal à miroirs carrés - condition de résonance

Données d, b_1, b_2 (voir Fig. 1)

De (4-18), on tire b et de (4-27), on tire $\xi_1 = \frac{2d_1}{b}, \xi_2 = \frac{2d_2}{b}$.

Champ sur le miroir $i = 1, 2$ (2-25), avec $C_i = \sqrt{\frac{k}{b}} \sqrt{\frac{2}{1+S_i^2}}$

$$U_i(x, y, z_i) = U_0 \sqrt{\frac{2}{1+S_i^2}} \exp\left[-\frac{C_i^2}{2}(x^2+y^2)\right] H_n(C_i x) H_m(C_i y) \cdot e^{i\delta} \cdot \exp\left\{-i\frac{kb}{2}(1+S_i) - ik\frac{x^2+y^2}{b} \frac{S_i}{1+S_i^2} + i(1+n+m)\left(\frac{\pi}{4} + \arctan S_i\right)\right\} \quad (4-28)$$

où l'on a introduit le facteur de phase $e^{i\delta}$. Soit α_i la phase totale sur le miroir i . On peut choisir arbitrairement $\alpha_1 = 0$ et $(\alpha_1 - \alpha_2) = q\pi$.

$$\alpha_i = -\frac{kb}{2}(1+S_i) + (1+n+m)\left(\frac{\pi}{4} + \arctan S_i\right) + \delta \quad (4-29)$$

$\alpha_1 - \alpha_2 = q\pi$ est en fait la condition de résonance.

Exprimons-la en fonction de b_1 , b_2 et d

$$\alpha_2 - \alpha_1 = -\frac{kb}{2} (\xi_2 - \xi_1) + (1+n+m) (\text{arctg } \xi_2 - \text{arctg } \xi_1) = -\pi q$$

$$-\frac{kb}{2} \left(\frac{2d_2}{\beta} - \frac{2d_1}{\beta} \right) + (1+n+m) \left[\text{arctg } \frac{\xi_2 - \xi_1}{1 + \xi_1 \xi_2} + \pi^* \right] = -\pi q$$

où $\pi^* = 0$ si $\xi_1 \xi_2 > -1$; $\pi^* = \pi$ si $\xi_1 \xi_2 < -1$

$$kd = \pi q + (1+n+m) \left[\text{arctg } \frac{\frac{2d_2}{\beta} - \frac{2d_1}{\beta}}{1 + 4 \frac{d_1 d_2}{\beta^2}} + \pi^* \right]$$

$$\frac{2d}{\lambda} = q + \frac{1}{\pi} (1+n+m) \left[\text{arctg } \frac{4\beta d}{\beta^2 + 4d_1 d_2} + \pi^* \right]$$

avec

$$\beta^2 + 4d_1 d_2 = \frac{4d(\beta_1 - d)(\beta_2 - d)(\beta_1 + \beta_2 - d) - 4d^2(\beta_1 - d)(\beta_2 - d)}{(\beta_1 + \beta_2 - 2d)^2} =$$

$$= \frac{4d(\beta_1 - d)(\beta_2 - d)(\beta_1 + \beta_2 - d - d)}{(\beta_1 + \beta_2 - 2d)^2} = \frac{4d(\beta_1 - d)(\beta_2 - d)}{\beta_1 + \beta_2 - 2d}$$

où l'on a utilisé (4-18) et (4-27)

$$\frac{2\beta d}{\beta^2 + 4d_1 d_2} = \frac{\beta d(\beta_1 + \beta_2 - 2d)}{2d(\beta_1 - d)(\beta_2 - d)} = \frac{\sqrt{d(\beta_1 - d)(\beta_2 - d)(\beta_1 + \beta_2 - d)} (\beta_1 + \beta_2 - 2d)}{2(\beta_1 - d)(\beta_2 - d)(\beta_1 + \beta_2 - 2d)}$$

$$\text{arctg } \frac{2\beta d}{\beta^2 + 4d_1 d_2} = \text{arctg } \sqrt{\frac{d(\beta_1 + \beta_2 - d)}{(\beta_1 - d)(\beta_2 - d)}}$$

$$\text{arctg } \varphi = \arccos \frac{1}{\sqrt{1 + \varphi^2}}$$

$$1 + \varphi^2 = \frac{d(\beta_1 + \beta_2 - d) + (\beta_1 - d)(\beta_2 - d)}{(\beta_1 - d)(\beta_2 - d)} = \frac{\beta_1 \beta_2}{(\beta_1 - d)(\beta_2 - d)}$$

Finalement la condition de résonance s'écrit

$$\frac{2d}{\lambda} = q + \frac{1}{\pi} (1+n+m) \left[\arccos \sqrt{\left(1 - \frac{d}{\beta_1}\right) \left(1 - \frac{d}{\beta_2}\right)} + \pi^* \right] \quad (4-30)$$

Comme on a posé $\alpha_1 = 0$:

$$\delta = \frac{kb}{2} (1 + \xi_1) - (1+n+m) \left(\frac{\pi}{4} + \text{arctg } \xi_1 \right)$$

La phase en $\xi_1 = -1$ vaut $e^{i\delta}$, donc le champ de l'onde stationnaire est donné par (2-27) multiplié par $e^{i\delta}$ (remplacer d par b).

$$U(x, y, z) = 2U_0 \sqrt{\frac{2}{1+\xi^2}} \exp\left[-\frac{C^2}{2}(x^2+y^2)\right] H_n(Cx) H_m(Cy) \cdot \exp\left\{-i\left[k\left(z+\frac{b}{2}\right) - (1+n+m)\left(\frac{\pi}{4} + \arctg \xi\right) + k \frac{x^2+y^2}{f} \frac{\xi}{1+\xi^2}\right]\right\} e^{i\delta}$$

La phase s'écrit : $-[k(z-d_1) - (1+n+m)(\arctg \xi - \arctg \xi_1) + k \frac{x^2+y^2}{f} \frac{\xi}{1+\xi^2}]$

$$\Rightarrow U(x, y, z) = 2U_0 \sqrt{\frac{2}{1+\xi^2}} \exp\left[-\frac{C^2}{2}(x^2+y^2)\right] H_n(Cx) H_m(Cy) \cdot \exp\left\{-i\left[k(z-d_1) - (1+n+m)(\arctg \xi - \arctg \xi_1) + k \frac{x^2+y^2}{f} \frac{\xi}{1+\xi^2}\right]\right\}$$

Avec $\xi = \frac{2z}{f}$; $C = \sqrt{\frac{k}{b}} \sqrt{\frac{2}{1+\xi^2}}$ (4-31)

4.2.4 Miroirs circulaires non confocaux

Tout-à-fait analogue au cas des miroirs carrés.

La condition de résonance s'écrit

$$\frac{2d}{\lambda} = q + \frac{1}{\pi} (2\ell + n + 1) \left[\arccos \sqrt{\left(1 - \frac{d}{\ell_1}\right) \left(1 - \frac{d}{\ell_2}\right)} + \pi^* \right] \quad (4-32)$$

et l'onde stationnaire du champ E

$$\begin{aligned} \text{ou } \pi^* &= 0 & \text{si } \xi_1 \xi_2 > -1 \\ &= \pi & \text{si } \xi_1 \xi_2 < -1 \end{aligned}$$

$$E(r, z, \varphi) = 2E_0 \sqrt{\frac{2}{1+\xi^2}} \left(r \sqrt{\frac{2}{1+\xi^2}}\right)^n e^{-\frac{C^2 r^2}{2}} L_e^n(C^2 r^2) \cos n\varphi \cdot \sin\left[k(z-d_1) - (2\ell + n + 1)(\arctg \xi - \arctg \xi_1) + k \frac{kr^2}{f} \frac{\xi}{1+\xi^2}\right] \quad (4-33)$$

5. LE RESONATEUR CONFOCAL AVEC TROU DE COUPLAGE

5.1 Mise en oeuvre numérique (Ref [4], Mc Cumber)

(Nous respectons l'ordre des miroirs défini par [4])

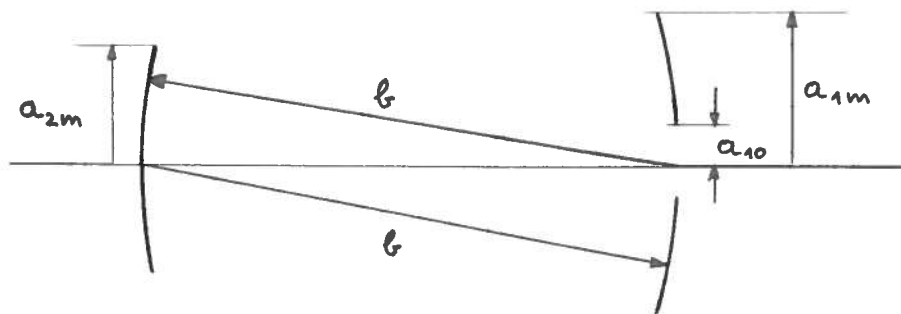


Fig. 11

Amplitude sur les réflecteurs $j = 1, 2$: $F_{ep}^{(j)}(\rho, \varphi) = f_{ep}^{(j)}(\rho) e^{i l \varphi}$ (5-1)

Dans le cas des miroirs infinis, on a, d'après (3-8) substituant $n \rightarrow 1$, $l \rightarrow p$, $d \rightarrow b$, $r \rightarrow \rho$ pour le mode TEM_{1p}

$$F_{ep}^{(j)}(\rho, \varphi) = \sqrt{\frac{k}{\pi b}} \sqrt{\frac{l!}{(l+p)!}} \left(\sqrt{\frac{k}{b}} \rho\right)^l L_p^l\left(\frac{k}{b} \rho^2\right) e^{\frac{k \rho^2}{2b}} e^{i l \varphi} \quad (5-2)$$

De (1-5) et (3-5), on déduit les équations intégrales radiales :

$$\begin{cases} K_{ep}^{(2)} f_{ep}^{(2)}(\rho_2) = \frac{2\pi}{b\lambda} \int_{a_{10}}^{a_{1m}} J_e\left(\frac{2\pi \rho_1 \rho_2}{b\lambda}\right) f_{ep}^{(1)}(\rho_1) \rho_1 d\rho_1 & (5-3a) \end{cases}$$

$$\begin{cases} K_{ep}^{(1)} f_{ep}^{(1)}(\rho_1) = \frac{2\pi}{b\lambda} \int_0^{a_{2m}} J_e\left(\frac{2\pi \rho_1 \rho_2}{b\lambda}\right) f_{ep}^{(2)}(\rho_2) \rho_2 d\rho_2 & (5-3b) \end{cases}$$

où l'on a posé

$$K_{ep}^{(j)} = i^{-l-1} e^{i k b} \gamma_{ep}^{(j)} \quad (5-4)$$

Facteur de perte :

$$\alpha_{ep} = 1 - \|K_{ep}^{(1)} \cdot K_{ep}^{(2)}\| \quad (5-5)$$

La condition de résonance est donnée par la reproductibilité du champ après un aller et retour de l'onde (1-5c) :

$$\text{Arg}(\gamma_{1p}^{(1)} \cdot \gamma_{1p}^{(2)}) = 2 \pi q \quad \text{avec } q \text{ entier}$$

ou, en tenant compte de (5-4)

$$\text{Arg} (K_{eP}^{(1)} \cdot K_{eP}^{(2)}) - 2kb + \pi(\ell+1) = 2\pi q$$

$$\frac{4\pi b}{\lambda} = \pi(\ell+1) - 2\pi q + \text{Arg} (K_{eP}^{(1)} \cdot K_{eP}^{(2)})$$

$$\frac{4b}{\lambda} = (\ell+1 - 2q) + \frac{1}{\pi} \text{Arg} (K_{eP}^{(1)} K_{eP}^{(2)}) \quad (5-6)$$

Cette équation est analogue à (3-10) $\frac{4b}{\lambda} = 2q + 2p + \ell + 1$

$$\Rightarrow \text{Arg} (K_{eP}^{(1)} K_{eP}^{(2)}) = 2\pi p$$

Pour simplifier les équations (5-3), introduisons les nombres de Fresnel

$$N_m^{(1)} = \frac{a_{1m}^2}{\lambda b} \quad ; \quad N_m^{(2)} = \frac{a_{2m}^2}{\lambda b} \quad (5-7)$$

et $N_m \equiv r_m^2 = \sqrt{N_m^{(1)} N_m^{(2)}} = (a_{1m} a_{2m}) / (\lambda b)$ (5-8)

ainsi que les nouvelles variables r_1, r_2

$$r_1 = \frac{r_m \rho_1}{a_{1m}} \quad ; \quad r_2 = \frac{r_m \rho_2}{a_{2m}} \quad (5-9)$$

Nouvelles fonctions : $g_{eP}^{(j)}(r_j) = f_{eP}^{(j)}(\rho_j) \cdot \frac{a_{jm}}{r_m}$ (5-10)

(Dans [4] le facteur $\frac{a_{jm}}{r_m}$ a été oublié)

Nombre de Fresnel de l'ouverture : $N_0 \equiv r_0^2 \equiv \frac{a_{10}^2}{\lambda b} \cdot \frac{a_{2m}}{a_{1m}}$ (5-11)

Les équations (5-3) deviennent :

$$\left\{ \begin{aligned} K_{eP}^{(2)} g_{eP}^{(2)}(r_2) &= 2\pi \int_{r_0}^{r_m} J_0(2\pi r_1 r_2) g_{eP}^{(1)}(r_1) r_1 dr_1 \end{aligned} \right. \quad (5-12a)$$

$$\left\{ \begin{aligned} K_{eP}^{(1)} g_{eP}^{(1)}(r_1) &= 2\pi \int_0^{r_m} J_0(2\pi r_1 r_2) g_{eP}^{(2)}(r_2) r_2 dr_2 \end{aligned} \right. \quad (5-12b)$$

Les conditions de normalisation

$$\iint F_{eP}^{(j)}(\rho, \varphi) F_{e'Q}^{(j)*}(\rho, \varphi) \rho d\rho d\varphi = \delta_{ee'} \delta_{pq} =$$

$$= 2\pi \delta_{ee'} \int f_{eP}^{(j)}(\rho) f_{e'Q}^{(j)*}(\rho) \rho d\rho = 2\pi \delta_{ee'} \int g_{eP}^{(j)}(r) g_{e'Q}^{(j)*}(r) \left(\frac{r_m}{a_{jm}}\right)^2 \rho d\rho$$

donnent :

$$\begin{cases} \delta_{pq} = 2\pi \int_{r_0}^{r_m} g_{ep}^{(1)}(r_1) g_{eq}^{(1)}(r_1) r_1 dr_1 & (5-13a) \\ \delta_{pq} = 2\pi \int_0^{r_m} g_{ep}^{(2)}(r_2) g_{eq}^{(2)}(r_2) r_2 dr_2 & (5-13b) \end{cases}$$

Comme les équations (5-12 a et b) sont à noyau symétrique, on peut choisir $K_{1p} = K^{(1)}_{1p} = K^{(2)}_{1p}$ (5-14) sans limiter la généralité du problème (voir appendice).

Pour résoudre le système (5-12) numériquement, Mc Cumber développe le noyau en série.

$$J_\ell(2\pi r_1 r_2) = (\pi r_1 r_2)^\ell \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1} (\pi r_1 r_2)^{2m-2}}{(m+\ell-1)! (m-1)!} \quad (5-15)$$

En tronquant après M termes et en substituant dans (5-12a), on obtient :

$$\begin{aligned} K_{ep} g_{ep}^{(2)}(r_2) &= 2\pi \int_{r_0}^{r_m} dr_1 r_1 \sum_{m=1}^M \frac{(-1)^{m-1} (\pi r_1 r_2)^{\ell+2m-2}}{(m+\ell-1)! (m-1)!} g_{ep}^{(1)}(r_1) \\ &= \left[\frac{(\pi r_2^2)^\ell}{\ell!} \right]^{1/2} \sum_{m=1}^M \frac{(-1)^{m-1} (\pi r_2^2)^{m-1}}{[(m+\ell-1)! (m-1)! / \ell!]^{1/2}} G_m^{(1)}(\ell, p) \end{aligned} \quad (5-16)$$

où $G_m^{(1)}(\ell, p) = \frac{2\pi}{[(m+\ell-1)! (m-1)!]^{1/2}} \int_{r_0}^{r_m} dr_1 r_1 (\pi r_1^2)^{\ell/2+m-1} g_{ep}^{(1)}(r_1) \quad (5-17)$

De même

$$K_{ep} g_{ep}^{(1)}(r_1) = \left[\frac{(\pi r_1^2)^\ell}{\ell!} \right]^{1/2} \sum_{k=1}^M \frac{(-1)^{k-1} (\pi r_1^2)^{k-1} G_k^{(2)}(\ell, p)}{[(k+\ell-1)! (k-1)! / \ell!]^{1/2}} \quad (5-18)$$

où $G_k^{(2)}(\ell, p) = \frac{2\pi}{[(k+\ell-1)! (k-1)!]^{1/2}} \int_0^{r_m} dr_2 r_2 (\pi r_2^2)^{\ell/2+k-1} g_{ep}^{(2)}(r_2) \quad (5-19)$

Substituant (5-18) dans (5-17) et en intégrant sur r_1 , on obtient

$$\begin{aligned} K_{ep} G_m^{(1)}(\ell, p) &= \\ &= \sum_{k=1}^M \frac{(-1)^{k-1} [(\pi N_m)^{\ell+m+k-1} - (\pi N_0)^{\ell+m+k-1}]}{[(m-1)! (m+\ell-1)! (k-1)! (k+\ell-1)!]^{1/2} (\ell+m+k-1)} G_m^{(2)}(\ell, p) \end{aligned} \quad (5-20)$$

De même, en substituant (5-16) dans (5-19)

$$\begin{aligned}
 K_{\ell p} G_k^{(2)}(\ell, p) &= \\
 &= \sum_{m=1}^M \frac{(-1)^{m-1} [\pi N_m]^{\ell+m+k-1}}{[(m-1)!(m+\ell-1)!(k-1)!(k+\ell-1)!]^{1/2} (\ell+m+k-1)} G_k^{(1)}(\ell, p) \quad (5-21)
 \end{aligned}$$

(5-20) et (5-21) sont en fait 2 équations matricielles.

$$\left\{ \begin{aligned} K_{\ell p} G_m^{(1)}(\ell, p) &= \sum_{k=1}^M (-1)^{k-1} S_{mk}^{(2)}(\ell) G_k^{(2)}(\ell, p) \end{aligned} \right. \quad (5-22a)$$

$$\left\{ \begin{aligned} K_{\ell p} G_k^{(2)}(\ell, p) &= \sum_{m=1}^M (-1)^{m-1} S_{mk}^{(1)}(\ell) G_m^{(1)}(\ell, p) \end{aligned} \right. \quad (5-22b)$$

Les matrices $S^{(1)}(\ell)$ et $S^{(2)}(\ell)$ sont symétriques.

Avec une matrice B diagonale dont les éléments valent

$$B_{mm} = (-1)^{m-1}, \text{ on a explicitement}$$

$$\left\{ \begin{aligned} K_{\ell p} G^{(1)}(\ell, p) &= S^{(2)}(\ell) \cdot B \cdot G^{(2)}(\ell, p) \end{aligned} \right. \quad (5-23a)$$

$$\left\{ \begin{aligned} K_{\ell p} G^{(2)}(\ell, p) &= S^{(1)}(\ell) \cdot B \cdot G^{(1)}(\ell, p) \end{aligned} \right. \quad (5-23b)$$

On trouve donc $G^{(1)}(\ell, p)$ en résolvant

$$K_{\ell p}^2 G^{(1)}(\ell, p) = S^{(2)}(\ell) \cdot B \cdot S^{(1)}(\ell) \cdot B \cdot G^{(1)}(\ell, p) \quad (5-24)$$

On obtient alors $G^{(2)}(\ell, p)$ en substituant dans (5-22b).

Pour normaliser, on substitue (5-16) et (5-18) dans (5-13).

$$\begin{aligned}
 \delta_{pq} &= 2\pi \int_{r_0}^{r_m} dr_2 r_2 g_{\ell p}^{(2)}(r_2) g_{\ell q}^{(2)}(r_2) = \\
 &= 2\pi \int_{r_0}^{r_m} dr_2 r_2 \frac{1}{K_{\ell p}} \left[\frac{(\pi r_2^2)^\ell}{\ell!} \right]^{1/2} \sum_{m=1}^M \frac{(-1)^{m-1} (\pi r_2^2)^{m-1} G_m^{(1)}(\ell, p)}{[(m-1)!(m+\ell-1)!/\ell!]^{1/2}} g_{\ell q}^{(2)}(r_2) \\
 &= 2\pi \sum_{m=1}^M \frac{(-1)^{m-1} G_m^{(1)}(\ell, p)}{[(m-1)!(m+\ell-1)!/\ell!]^{1/2}} \frac{1}{K_{\ell p}} \int_0^{r_m} dr_2 r_2 (\pi r_2^2)^{m-1+\ell/2} g_{\ell q}^{(2)}(r_2)
 \end{aligned}$$

$$\delta_{pq} = \sum_{m=1}^M \frac{(-1)^{m-1}}{K_{\ell p}} G_m^{(1)}(\ell, p) G_m^{(2)}(\ell, p) \quad (5-25)$$

La condition de normalisation de $g^{(1)}_{1p}(r)$ donne la même relation. Le nombre de termes à prendre dans (5-15) dépend de N_m .

$$\text{Il faut que } S_m = \frac{(N_m)^{\ell+2m+2}}{(m+\ell+1)!(m-1)!} < \varepsilon$$

Si $N_m = 2$ et $\varepsilon = 10^{-4}$ on trouve $M > 21$

5.2 Résultats des calculs

Bien que le produit des matrices (5-24) donne en général une matrice non symétrique, on trouve numériquement que les premières valeurs propres sont réelles et proches de 1. Les valeurs propres K_{1p} correspondent aux modes TEM_{1p} (voir Fig. 12 et 13).

La Fig. 13 correspond à un "trou" annulaire. Dans ce cas

$$S_{mk}^{(2)}(\ell) = \frac{(\pi N_m)^{\ell+m+k-1} - (\pi N_0)^{\ell+m+k+1} + (\pi N_{11})^{\ell+m+k+1}}{[(m-1)!(m+\ell-1)!(k-1)!(k+\ell-1)!]^{1/2} (m+\ell+k+1)} \quad (5-26)$$

avec a_{10} = rayon extérieur

a_{11} = rayon intérieur

$$N_0 = \frac{a_{10}^2}{\lambda b} \cdot \frac{a_{2m}}{a_{1m}}$$

$$N_{11} = \frac{a_{11}^2}{\lambda b} \cdot \frac{a_{2m}}{a_{1m}}$$

Pour $a_{10} = 0$ on retrouve bien la courbe Fig. 6 et les fonctions d'ondes tendent bien vers (5-2) lorsque a_{1m} et a_{2m} sont grands.

Pour TEM_{00} dans le cas $a_{1m} = a_{2m}$

$$F_{00}(\rho, \varphi) = f_{00}(\rho) = \frac{r_m}{a_{1m}} g_{00}(r) = \frac{1}{\sqrt{\lambda b}} g_{00}(r)$$

$$\text{d'après (5-2) : } F_{00}(\rho, \varphi) = \sqrt{2} \sqrt{\frac{k}{b}} \exp\left(-\frac{k\rho^2}{2b}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{\sqrt{\lambda b}} \sqrt{2} e^{-\frac{k\rho^2}{2b}}$$

$g_{00}(r)$ tend bien vers $\sqrt{2} e^{-\frac{k\rho^2}{2b}}$

Les pertes par diffraction atteignent vite 100 % pour les ordres élevés.

FIELD WAVE FUNCTIONS ON CONFOCAL REFLECTORS

GYROTRON PROJECT

	REFLECTOR 1	2	APERTURE	
			FROM	TO
RADIUS (CM)	3.500	3.500	0.000	.150
FRESNEL NUMBER	.9800	.9800	0.0000	.0018
DISTANCE BETWEEN REFLECTORS: 50.00 CM				
WAVELENGTH: 2.5 MM				

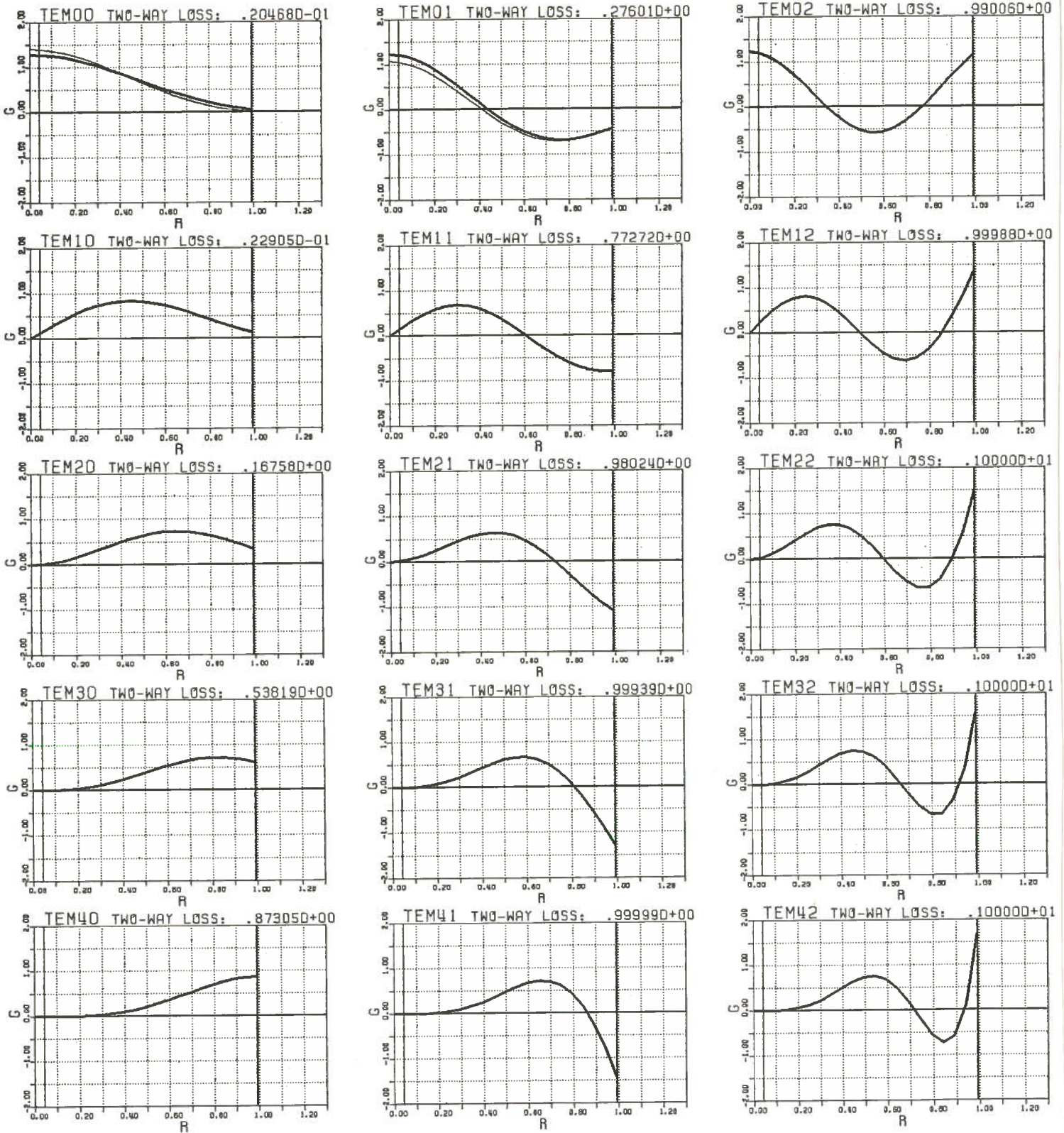


Figure 12

Trait gras: 1er miroir (avec trou)
 Trait fin : 2eme miroir

PARAMETERS OF THE CONFOCAL RESONATOR

MIRROR 1 MIRROR 2 APERTURE TO FROM
 RADIUS [MJ] 03500 03500 0.00000 0.0150
 FRESNEL NUMBER 98000 98000 0.00000 0.0180

DISTANCE BETWEEN CONFOCAL MIRRORS [MJ] : 50
 WAVELENGTH [MJ] 0025

MAXIMUM ORDER OF BESSEL FUNCTION: 5, TRUNCATED AFTER 20 TERMS
 BOUNDS OF THE INTEGRAL: 0.0000 0.0000 0.424 9899

EIGENVALUES K(L,P)**2 -- ATTENUATION FACTORS

	TEM00	TEM01	TEM02	TEM03
TEM00	989713273E+00	850874018E+00	996745320E-01	615568948E-03
TEM10	988481270E+00	476733819E+00	111800785E-01	301324312E-04
TEM20	912370354E+00	140572040E+00	924436603E-03	131937074E-05
TEM30	679567305E+00	247948439E-01	647807539E-04	527206498E-07
TEM40	356301434E+00	319130099E-02	397855166E-05	192507597E-08

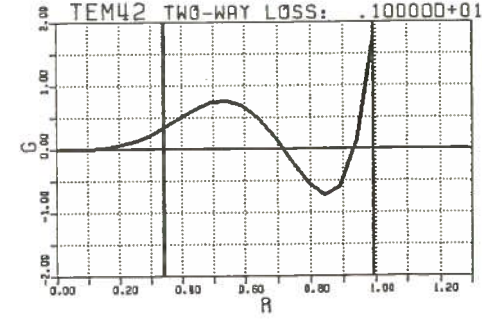
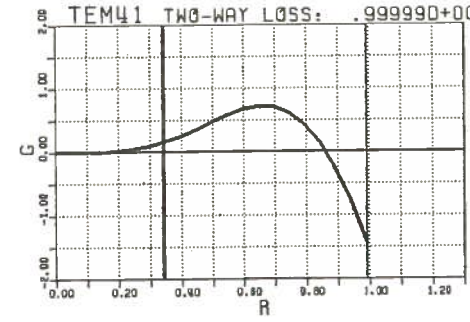
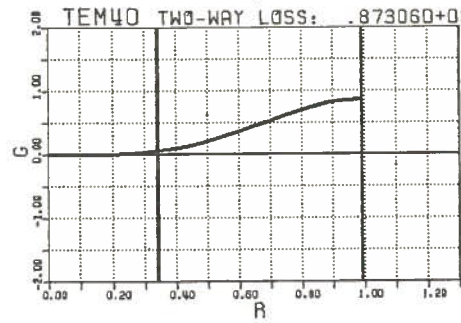
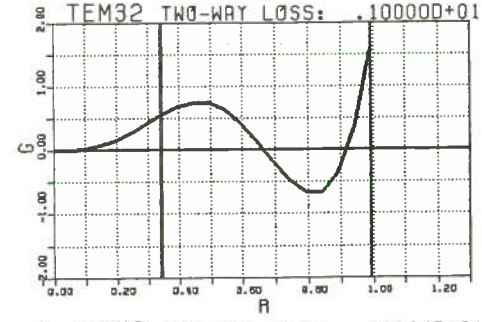
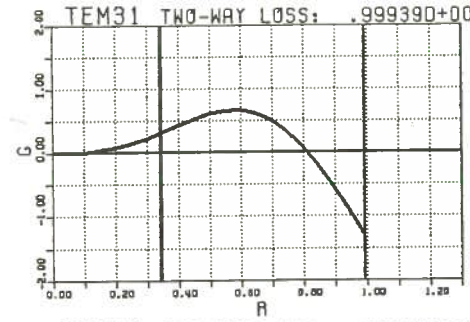
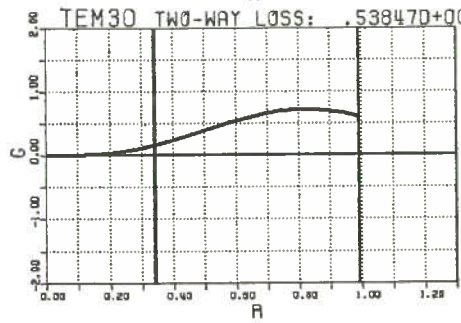
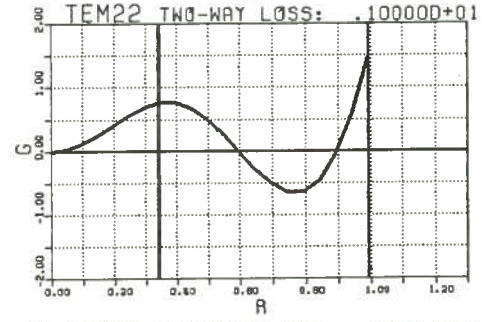
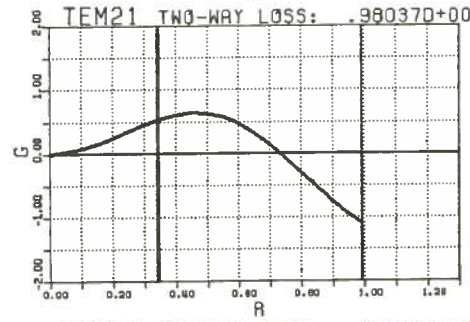
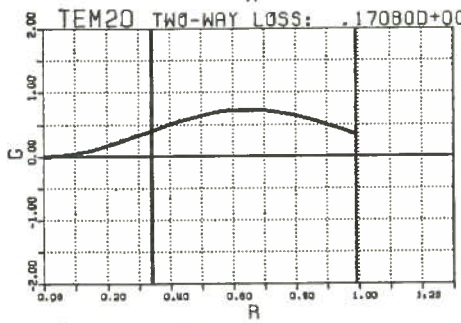
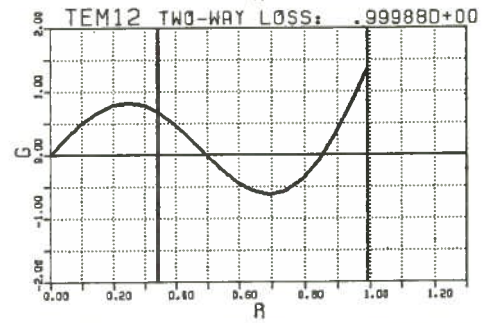
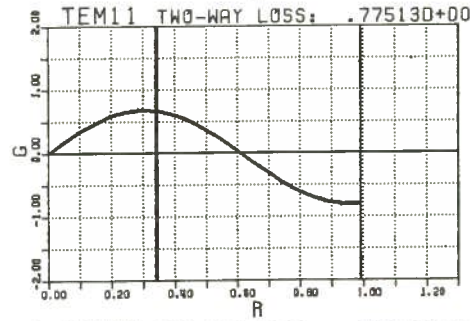
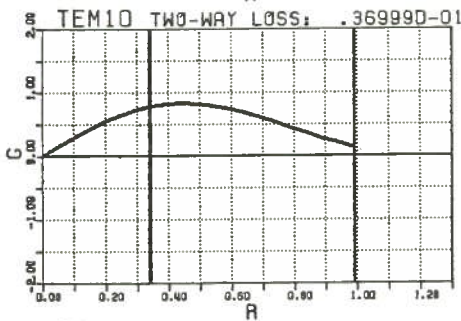
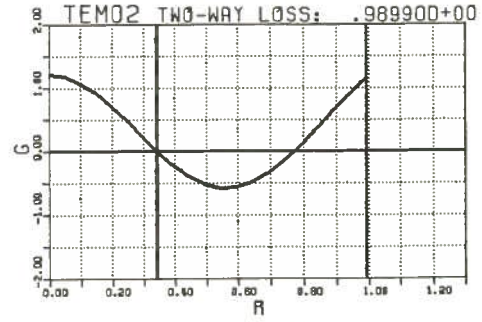
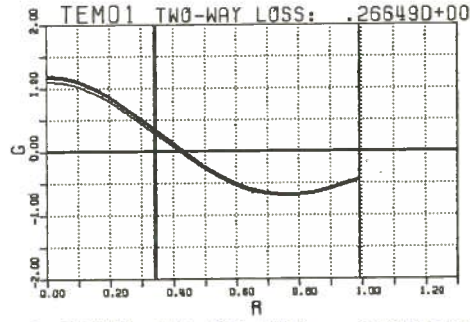
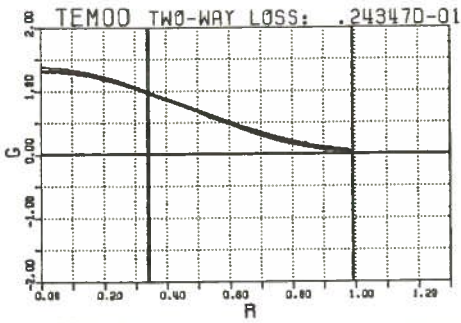
OUTPUT-COUPLING EFFICIENCY

	DIFFRACTION LOSS	THROUGH APERTURE	EFFICIENCY
TEM00	2.047 %	912 %	44.539 %
TEM01	27.601 %	612 %	2.218 %
TEM02	99.006 %	008 %	009 %
TEM10	2.290 %	004 %	194 %
TEM11	77.272 %	001 %	002 %
TEM12	99.988 %	000 %	000 %
TEM20	16.758 %	000 %	000 %
TEM21	98.024 %	000 %	000 %
TEM22	100.000 %	000 %	000 %

FIELD WAVE FUNCTIONS ON CONFOCAL REFLECTORS

GYROTRON PROJECT

	REFLECTOR 1	2	APERTURE	
			FROM	TO
RADIUS [CM]	3.500	3.500	1.200	1.220
FRESNEL NUMBER	.9800	.9800	.1152	.1191
DISTANCE BETWEEN REFLECTORS: 50.00 CM				
WAVELENGTH: 2.5 MM				



PARAMETERS OF THE CONFOCAL RESONATOR

MIRROR 1 MIRROR 2 APERTURE TO
 FROM
 RADIUS [M] .03500 .03500 .01200 .01220
 FRESNEL NUMBER .98000 .98000 .11520 .11907

DISTANCE BETWEEN CONFOCAL MIRRORS [M]50
 WAVELENGTH [M]0025

MAXIMUM ORDER OF BESSEL FUNCTION: 5, TRUNCATED AFTER 20 TERMS9899
 BOUNDS OF THE INTEGRAL: 0.000033943451

EIGENVALUES K(L,P)**2 -- ATTENUATION FACTORS

	TEM00	TEM01	TEM02	TEM03
TEM00	.987751449E+00	.856452487E+00	.100502987E+00	.622347262E-03
TEM10	.981325956E+00	.474205430E+00	.111209212E-01	.300694424E-04
TEM20	.910602282E+00	.140097154E+00	.918081750E-03	.130849246E-05
TEM30	.679357792E+00	.247657224E-01	.645384064E-04	.523269129E-07
TEM40	.356287737E+00	.319037142E-02	.397310673E-05	.191736114E-08

OUTPUT-COUPLING EFFICIENCY

	DIFFRACTION LOSS	THROUGH APERTURE	EFFICIENCY
TEM00	2.435 %	1.141 %	46.853 %
TEM01	26.649 %	.108 %	404 %
TEM02	98.990 %	.000 %	.000 %
TEM10	3.700 %	.703 %	18.999 %
TEM11	77.513 %	.123 %	.159 %
TEM12	99.988 %	.000 %	.000 %
TEM20	17.080 %	.161 %	.942 %
TEM21	98.037 %	.007 %	.007 %
TEM22	100.000 %	.000 %	.000 %

5.3 Efficacité du trou de couplage circulaire

Si nous adoptons la définition de ref. [5], nous avons :

$$\eta = \frac{R \cdot \Delta t}{T \cdot \Delta t} = \frac{\text{Energie passant par l'ouverture pendant } \Delta t}{\text{Total de l'énergie diffractée pendant } \Delta t} \quad (5-27)$$

Le temps d'un aller et retour de l'onde vaut $\Delta t = \frac{2\ell}{c}$

$$R = \|\gamma_1 \gamma_2\|^2 \iint_{\text{ouverture}} \|F_{ep}^{(1)}(\rho, \varphi)\|^2 \rho d\rho d\varphi \quad (5-28)$$

$$T = (1 - \|\gamma_1 \gamma_2\|^2) \iint_{\text{miroir 1}} \|F_{ep}^{(1)}(\rho, \varphi)\|^2 \rho d\rho d\varphi \quad (5-29)$$

Avec le changement de variables introduit au § 5.1 (5-7)-(5-11) :

$$R = \|K_{ep}^2\|^2 2\pi \int_0^{r_0} (g_{ep}^{(1)}(r_1))^2 r_1 dr_1 \quad (5-30)$$

$$T = (1 - \|K_{ep}^2\|^2) 2\pi \int_0^{r_m} (g_{ep}^{(1)}(r_1))^2 r_1 dr_1 \quad (5-31)$$

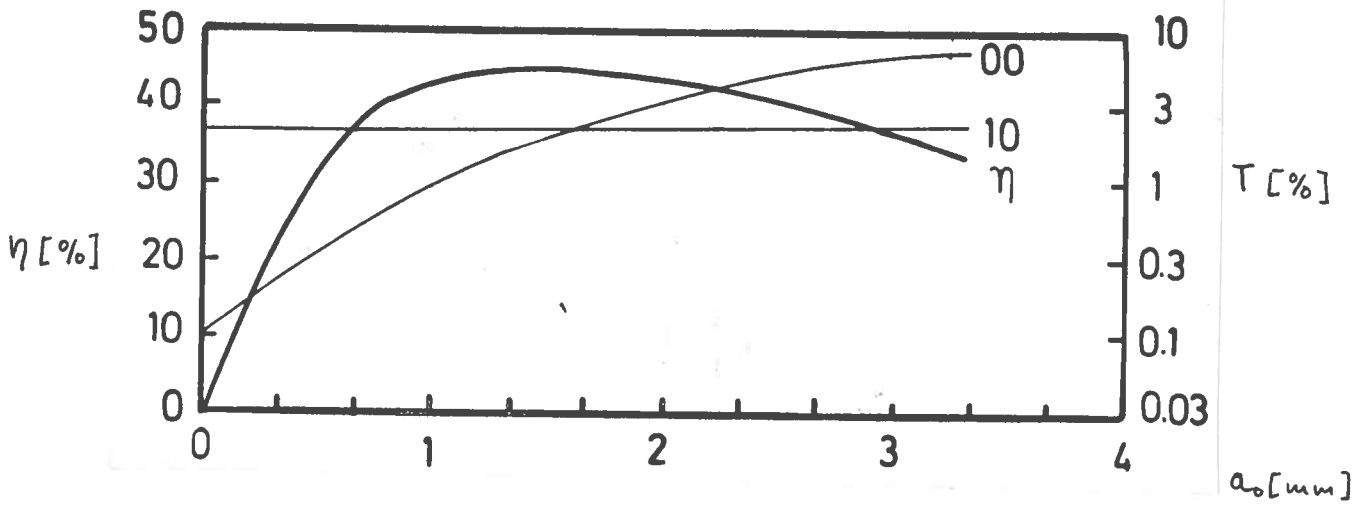
Comme

$$2\pi \int_0^{r_m} (g_{ep}^{(1)}(r_1))^2 r_1 dr_1 = 1$$

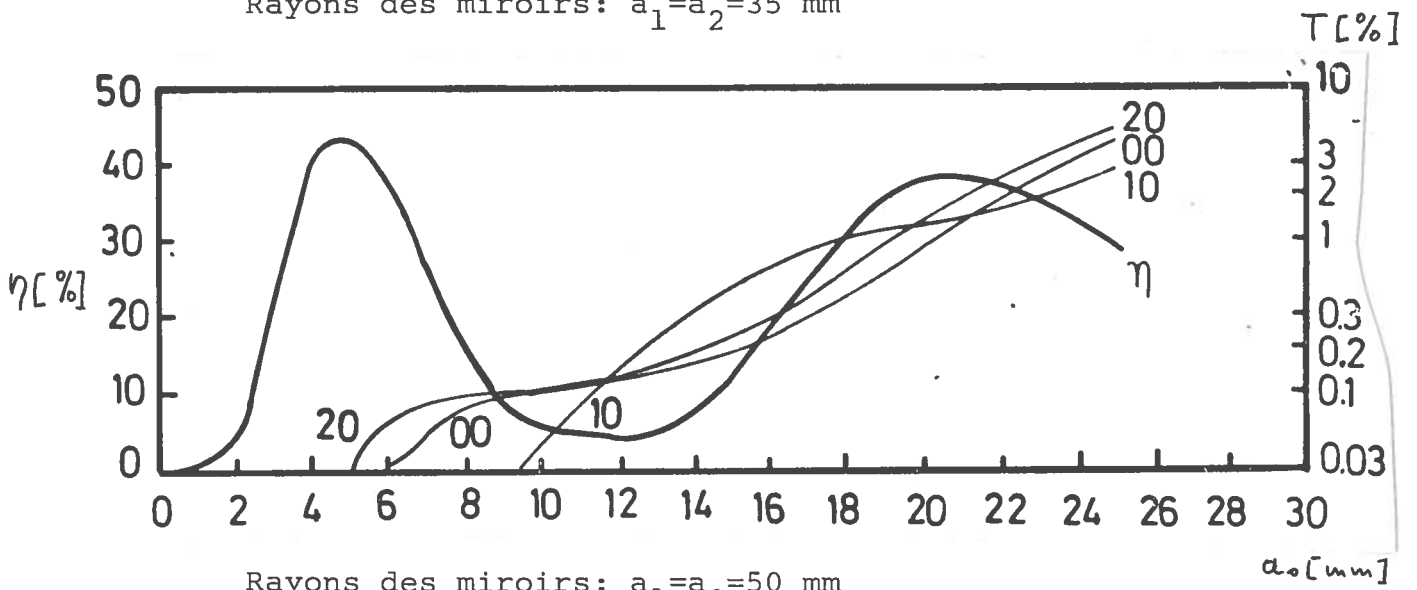
$$\eta = \frac{\|K_{ep}^2\|^2}{1 - \|K_{ep}^2\|^2} 2\pi \int_0^{r_0} (g_{ep}^{(1)}(r_1))^2 r_1 dr_1 \quad (5-32)$$

La Fig. 14 montre l'évolution de η en fonction de l'ouverture. On remarque que η ne dépasse guère 45 % (!).

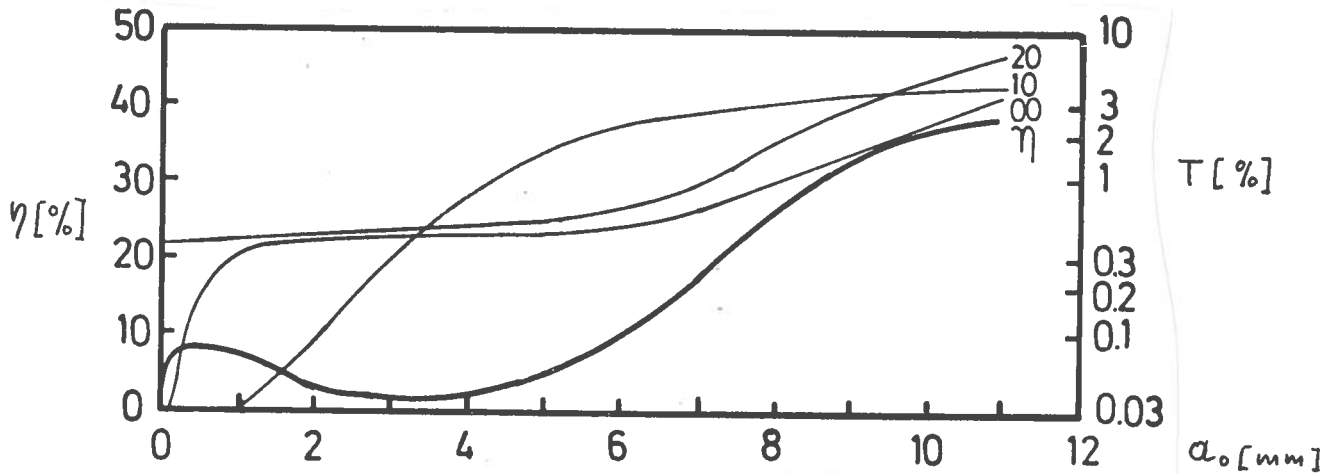
La Fig. 15 montre η en fonction du rayon du miroir.



Rayons des miroirs: $a_1=a_2=35$ mm



Rayons des miroirs: $a_1=a_2=50$ mm



Rayons des miroirs: $a_1=35$ mm, $a_2=50$ mm

Figure 14 Pertes par transit double (TEM_{00} , TEM_{10} , TEM_{20}) et efficacité du couplage () en fonction du rayon du trou (a_0)

Rayon de l'ouverture : 1.5 mm $d = 50$ cm

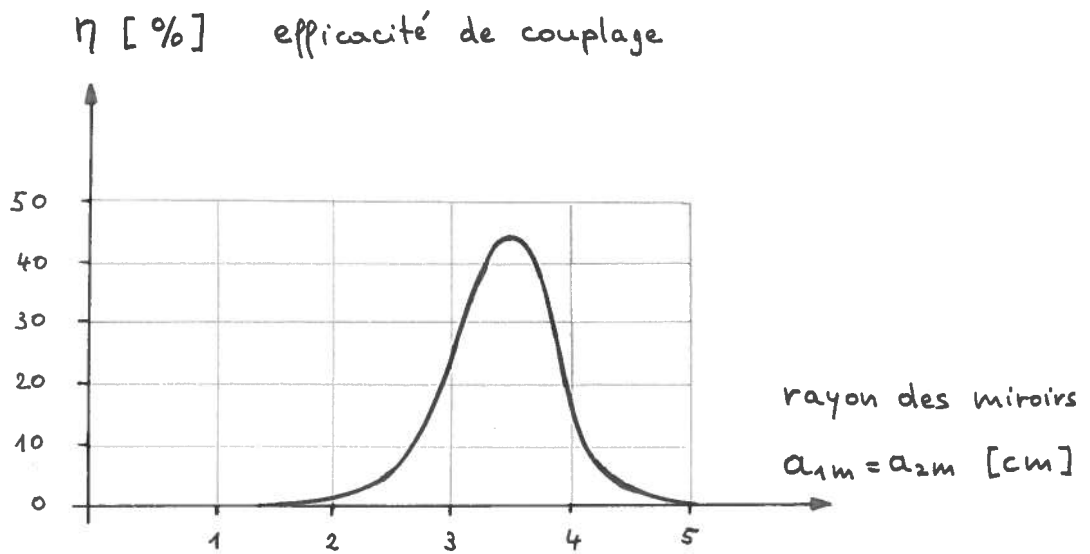


Fig 15

Si la perte totale par diffraction est fixée à 2 %, l'efficacité maximum est obtenue pour $a_{10} = 1.5$ mm et $a_{1m} = a_{2m} = 3.5$ cm
 $\eta_{\max} = 44.5$ %

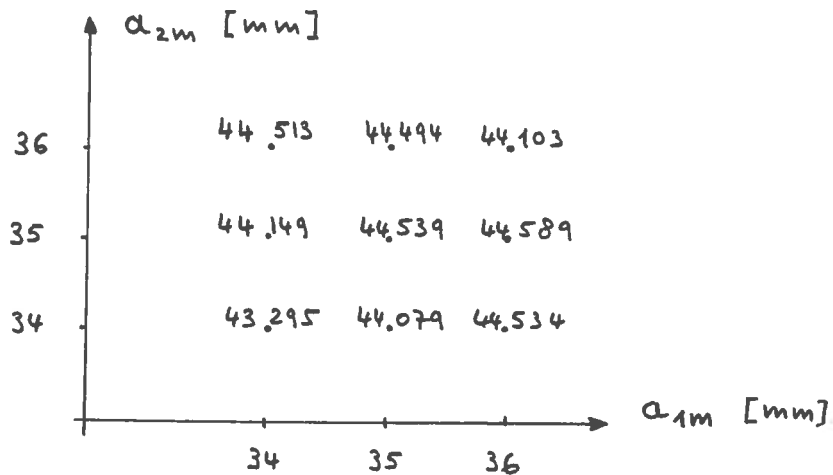


Fig. 16 η en fonction des rayons des miroirs.

5.4 Autre définition de l'efficacité

La définition de η dans la ref. [5] n'est pas très rigoureuse.

Définissons $\eta = \frac{A}{A+B+C}$

$$\begin{aligned} \text{avec } A &= \int_0^{r_0} \|F_{ep}^{(1)}(\rho, \varphi)\|^2 \rho d\rho d\varphi \\ B &= \int_{r_m}^{\infty} \|F_{ep}^{(1)}(\rho, \varphi)\|^2 \rho d\rho d\varphi \\ C &= \int_{r_m}^{\infty} \|F_{ep}^{(2)}(\rho, \varphi)\|^2 \rho d\rho d\varphi \end{aligned} \quad (5-33)$$

D'après la définition de $K_{1p}^{(1)}$, $K_{1p}^{(2)}$

De (5-14) $K_{ep}^{(1)} = K_{ep}^{(2)} = K_{ep}$

$$\begin{cases} A+B = 1 - \|K_{ep}^{(1)}\|^2 \\ C = 1 - \|K_{ep}^{(2)}\|^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \eta = A / (2 - 2\|K_{ep}\|^2) \quad \text{avec } A = 2\pi \int_0^{r_0} (g_{ep}^{(1)}(r))^2 r dr \quad (5-34)$$

Pour $b = 50$ cm, $\lambda = 2.5$ mm, $a_{1m} = a_{2m} = 3.5$ cm, $a_{10} = 1.5$ mm

$$\left. \begin{array}{l} A = 0.9311 \% \\ A+B = 1.03 \% \\ C = 1.03 \% \end{array} \right\} \begin{array}{l} |K_{1p}|^2 = 0.989713 \\ \eta = 45.26 \% \end{array}$$

La différence avec (106), (107) n'est pas très grande car $|K_{1p}|$ est proche de 1.

Remarque :

D'après (5-14) on voit que la perte est identique à chaque extrémité du résonateur. On ne change rien à cette situation en agrandissant le trou ou en prenant des miroirs asymétriques. Ce résultat est paradoxal et demande à être confirmé par une autre méthode. Un programme itératif qui calcule la distribution du champ sur un miroir à partir de celle sur l'autre miroir en calculant l'intégrale de Huygens-Fresnel (1-5) converge toujours pour le mode TEM_{00} vers des distributions où les portes par diffraction sont identiques pour les deux miroirs. Ceci n'est plus vrai si la courbure des miroirs est différente.

5.5 Calcul du champ à l'intérieur du résonateur confocal avec trou de couplage

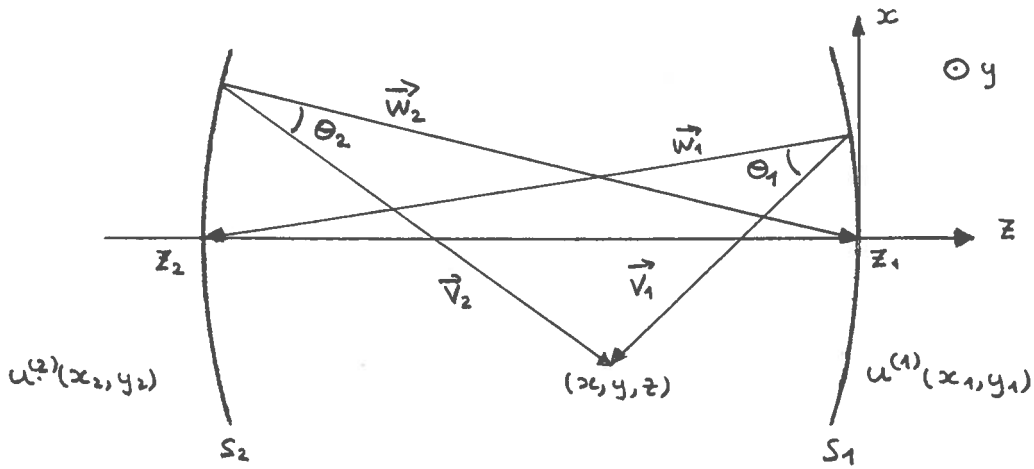


Fig. 17

$$E(x, y, z) = \iint_{S_1} \frac{ik}{4\pi v_1} e^{-ikv_1} (1 + \cos \theta_1) u^{(1)}(x_1, y_1, z_1) dS_1 + \iint_{S_2} \frac{ik}{4\pi v_2} e^{-ikv_2} (1 + \cos \theta_2) u^{(2)}(x_2, y_2, z_2) dS_2 \quad (5-35)$$

En coordonnées cylindriques (ρ, z, φ) , pour le mode TEM_{1pq} :

$$\begin{cases} u^{(1)}(\rho_1, \varphi_1) = f e_p(\rho_1) e^{-il\varphi_1} \\ u^{(2)}(\rho_2, \varphi_2) = (-1)^q f e_p(\rho_2) e^{-il\varphi_2} \end{cases} \quad (5-36)$$

$$\vec{V}_1 = \begin{pmatrix} x - x_1 \\ y - y_1 \\ z - z_1 \end{pmatrix} ; \vec{V}_2 = \begin{pmatrix} x - x_2 \\ y - y_2 \\ z - z_2 \end{pmatrix} ; \vec{W}_1 = \begin{pmatrix} 0 - x_1 \\ 0 - y_1 \\ -\frac{\rho_1}{2} - z_1 \end{pmatrix} ; \vec{W}_2 = \begin{pmatrix} 0 - x_2 \\ 0 - y_2 \\ \frac{\rho_2}{2} - z_2 \end{pmatrix}$$

$$\cos \theta_1 = \frac{\vec{V}_1 \cdot \vec{W}_1}{V_1 \cdot W_1} ; \cos \theta_2 = \frac{\vec{V}_2 \cdot \vec{W}_2}{V_2 \cdot W_2} \quad (5-37)$$

Elément de surface :

$$dS = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy$$

$$\text{avec } z_i = \pm \left(\frac{\rho}{2} - \frac{x_i^2 + y_i^2}{2\rho} \right) ; dS_i = \sqrt{1 + \frac{x_i^2 + y_i^2}{\rho^2}} dx_i dy_i$$

$$dS_i = \sqrt{1 + \frac{\rho_i^2}{\rho^2}} \rho_i d\rho_i d\varphi_i \quad (5-38)$$

$$\begin{cases} x_i = \rho_i \cos \varphi_i \\ y_i = \rho_i \sin \varphi_i \\ z_i = \frac{\rho}{2} - \frac{\rho_i^2}{2\theta} \end{cases} ; z_2 = -\frac{\rho}{2} + \frac{\rho_i^2}{2\theta} \quad \begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \end{cases}$$

$$E(x, y, z) = \frac{ik}{4\pi} \int_{a_{10}}^{a_{1m}} f_{ep}^{(1)}(\rho_1) \rho_1 \sqrt{1 + \frac{\rho_1^2}{\theta^2}} \left[\int_0^{2\pi} \frac{e^{-ikv_1}}{v_1} (1 + \cos \theta_1) e^{-i\ell\varphi_1} d\varphi_1 \right] d\rho_1$$

$$+ \frac{ik}{4\pi} \int_0^{a_{2m}} f_{ep}^{(2)}(\rho_2) \rho_2 \sqrt{1 + \frac{\rho_2^2}{\theta^2}} \left[\int_0^{2\pi} \frac{e^{-ikv_2}}{v_2} (1 + \cos \theta_2) e^{-i\ell\varphi_2} d\varphi_2 \right] d\rho_2$$

avec $f_{ep}^{(j)}(\rho_j) = \frac{r_m}{a_{jm}} \cdot g_{ep}^{(j)}\left(\frac{r_m \cdot \rho_j}{a_{jm}}\right)$ (5-39)

$g^{(j)}_{lp}$ est calculé par la méthode du § 5.1

Pour comparaison, récrivons $E(x, y, z)$ dans le cas des miroirs infinis sans perte. (3-16) avec E_0 défini dans (3-12) et (3-8).

$$E(x, y, z) = 2\sqrt{\frac{z}{\pi}} \sqrt{x} \sqrt{\frac{\ell!}{(\ell+p)!}} (\sqrt{2x}\rho)^\ell e^{-\rho^2 x} L_p^\ell(2x\rho^2) \cos \ell\varphi.$$

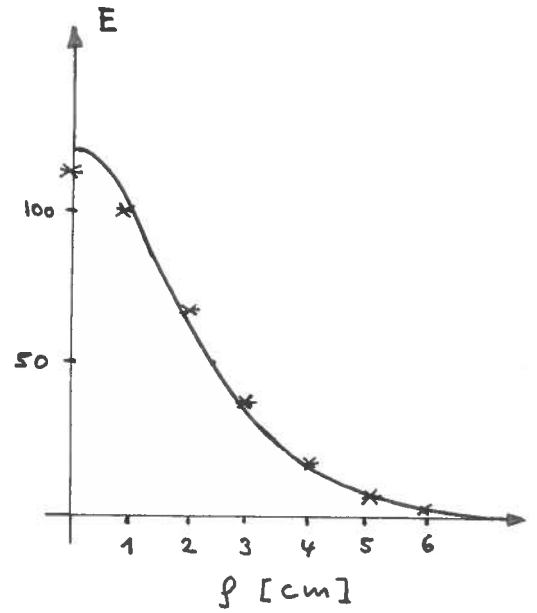
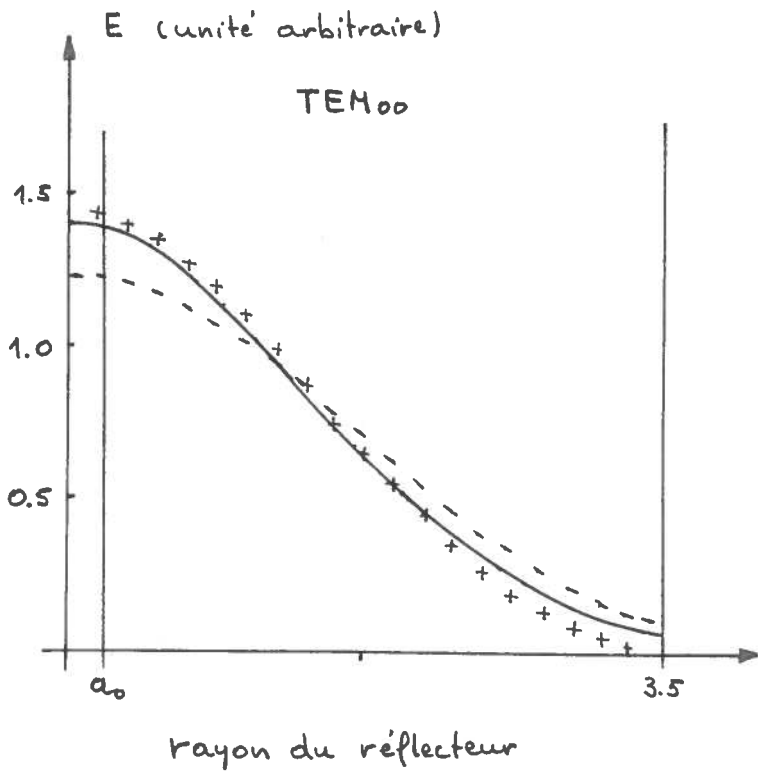
En posant

$$X = \frac{k}{d(1+\xi^2)} \quad (\theta = d) \quad ; \quad \xi = \frac{2z}{\theta} \cdot \cos(kz + X\rho^2\xi - (2p + \ell + 1) \operatorname{arctg} \xi + q \frac{\pi}{2})$$

(5-40)

Condition de résonance $\frac{4d}{\lambda} = 2q + 2p + \ell + 1$

Sur la Fig. 18, on peut comparer (5-39) et (5-40) pour le TEM_{00} .



Distribution du champ sur les réflecteurs
 $d = b = 50 \text{ cm}$ $a_1 = a_2 = 3.5 \text{ cm}$
 $a_0 = 2 \text{ mm}$

Champ au centre du résonnateur

- réflecteur 1 (avec trou)
- +++ réflecteur 2 (sans trou)
- formule analytique (sans trou)
(3-8)

- *** formule analytique (5-40)
- calculé avec miroirs finis.

Fig. 18

Appendice (du chap. 5)

Mettons les équations (5-12a et b) sous la forme

$$\begin{cases} K_{ep}^{(2)} g_{ep}^{(2)}(r_2) \sqrt{r_2} = 2\pi \int_{r_0}^{r_m} J_e(2\pi r_1 r_2) \sqrt{r_1 r_2} g_{ep}^{(1)}(r_1) \sqrt{r_1} dr_1 \\ K_{ep}^{(1)} g_{ep}^{(1)}(r_1) \sqrt{r_1} = 2\pi \int_0^{r_m} J_e(2\pi r_1 r_2) \sqrt{r_1 r_2} g_{ep}^{(2)}(r_2) \sqrt{r_2} dr_2 \end{cases}$$

Sous cette forme, on voit que le noyau des intégrales est symétrique.

Etablissons 3 propriétés concernant le système

$$\begin{cases} 1) \int_a^b du A(u,s) \phi(u) = \alpha \psi(s) \\ 2) \int_c^d ds A(s,t) \psi(s) = \beta \phi(t) \end{cases}$$

avec $A(s,t) = A(t,s)$ bornée lorsque $s, t \in [a,b] \cup [c,d]$ ψ, ϕ sont les fonctions cherchées, α et β les valeurs propres.

Propriété 1 : le produit $\alpha\beta$ est réel.

Substituons (1) dans (2) :

$$\begin{aligned} \int_c^d ds A(s,t) \int_a^b du A(u,s) \phi(u) &= \alpha\beta\phi(t) \\ \int_a^b du \int_c^d ds A(s,t) A(u,s) \phi(u) &= \alpha\beta\phi(t) \end{aligned}$$

$$\text{Posons } C(u,t) = \int_c^d ds A(s,t) A(u,s)$$

La symétrie de $A(s,t)$ entraîne celle de $C(u,t)$:

$$C(u,t) = \int_c^d A(s,t) A(u,s) ds = \int_c^d A(u,s) A(s,t) ds = \int_c^d A(s,u) A(t,s) ds = C(t,u)$$

Donc les fonctions $\phi(t)$ sont solutions d'une équation intégrale à noyau symétrique

$$\int_a^b C(u,t) \phi(u) du = \alpha\beta\phi(t)$$

(Pour une discussion sur l'existence de solutions et le spectre des valeurs propres voir par ex. Smirnov tome IV chap. 1).

S'il existe 2 solutions ϕ_1 et ϕ_2 associées à des valeurs propres distinctes λ_1 et λ_2 alors ϕ_1 et ϕ_2 sont orthogonales sur $[a, b]$ c-à-d

$$\int_a^b \phi_1(s) \phi_2(s) ds = 0$$

Pour le voir, formons l'expression : $J = \left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} \right) \int_a^b \phi_1(s) \phi_2(s) ds$

$$\begin{aligned} J &= \int_a^b \left\{ \int_a^b C(s, t) \phi_1(t) dt \right\} \phi_2(s) ds - \int_a^b \phi_1(s) \left\{ \int_a^b C(s, t) \phi_2(t) dt \right\} ds \\ &\quad - \int_a^b \phi_2(t) \left\{ \int_a^b C(s, t) \phi_1(s) ds \right\} dt \\ &\quad - \int_a^b \phi_2(s) \left\{ \int_a^b C(t, s) \phi_1(t) ds \right\} ds = 0 \end{aligned}$$

Les 2 termes de l'expression se compensent.

Montrons par l'absurde que les valeurs propres sont réelles.

Soit λ_0 une valeur propre complexe

$$\int_a^b C(s, t) \phi(t) dt = \lambda_0 \phi(t)$$

$$\int_a^b C(s, t) \phi^*(t) dt = \lambda_0^* \phi^*(t) \quad \text{complexe conjugué}$$

λ_0 étant différent λ_0^* $\phi(t)$ est orthogonale à $\phi^*(t)$

$$\int_a^b \phi(t) \phi^*(t) dt = 0 \quad \Rightarrow \quad \phi(t) = 0 \quad \text{sur } [a, b]$$

Donc pour les fonctions non nulles, les valeurs propres λ_n sont réelles ce qui, en identifiant λ_n à $\alpha\beta$, établit la propriété 1.

Une fois trouvées les solutions $\phi_n(t)$, on peut les normer et construire les fonctions $\psi_n(t)$:

$$\psi_n(t) = c_n \int_a^b A(s, t) \phi_n(s) ds \quad c_n \in \mathbb{R} - \{0\}$$

Propriété 2 : l'orthonormalité des ϕ_n entraîne l'orthogonalité des ψ_n .

Montrons que les $\psi_n(t)$ satisfont la 2ème équation :

$$\int_c^d ds A(s,t) \psi_n(s) = \int_c^d A(s,t) \cdot c_n \int_a^b A(u,s) \phi_n(u) du =$$

$$= c_n \int_a^b du \int_c^d A(s,t) A(u,s) ds \phi_n(u) = c_n \int_a^b C(u,t) \phi_n(u) du = \lambda_n c_n \phi_n(t)$$

$$\int_c^d \psi_n(s) \psi_m(s) ds = \int_c^d ds c_n \int_a^b A(u,s) \phi_n(u) du c_m \int_a^b A(v,s) \phi_m(v) dv =$$

$$c_n c_m \int_a^b du \phi_n(u) \int_a^b dv \phi_m(v) \underbrace{\int_c^d A(u,s) A(v,s) ds}_{C(u,v)} = c_n c_m \lambda_m \int_a^b \phi_n(u) \phi_m(u) du$$

$$\underbrace{\lambda_m \phi_m(u)}_{\lambda_m \phi_m(u)} = c_n c_m \lambda_m \delta_{nm} = c_n^2 \lambda_n \delta_{nm}$$

c'est-à-dire l'orthogonalité des ψ_n .

Propriété 3 : le produit $\alpha\beta = \lambda_n$ est positif si $[a,b] = [c,d]$

soit $\chi(s)$ une solution de $\int_a^b A(s,t) \chi(s) ds = \mu \chi(t)$

Comme A est symétrique $\mu \in \mathbb{R}$

Remplaçons $\chi(s)$ par $\frac{1}{\mu} \int_a^b A(s,u) \chi(u) du$

$$\int_a^b A(s,t) \frac{1}{\mu} \int_a^b A(s,u) \chi(u) du ds = \mu \chi(t)$$

$$\int_a^b du \chi(u) \underbrace{\int_a^b ds A(s,t) A(s,u)}_{C(u,t)} = \mu^2 \chi(t)$$

$$\Rightarrow \lambda = \mu^2 > 0$$

Conséquence pour α et β

Si $\lambda_n > 0$ on a $\alpha = \beta = \sqrt{\lambda_n}$ si l'on veut des solutions ϕ_n et ψ_n orthonormées.