

AVRIL 1981

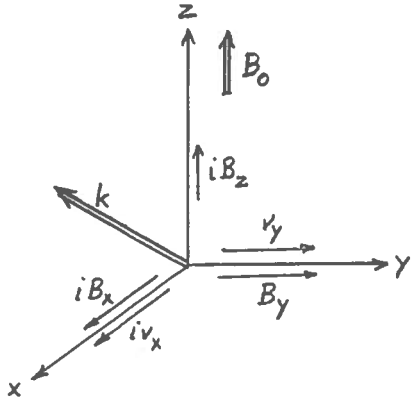
INT 104/1981

Effet ω_{ci} fini sur l'absorption d'Alfvèn
géométrie plane

R. Keller

Centre de Recherches en Physique des Plasmas
Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne

Les équations linéarisées de la MHD idéal, avec le terme de Hall inclus, sont



$$\mu_0 \rho \frac{d\vec{v}}{dt} = (\text{rot } \vec{B}) \times \vec{B}_0 \quad (1)$$

$$\frac{d\vec{B}}{dt} = \text{rot}(\vec{v} \times \vec{B}_0) - \frac{1}{e} \text{rot} \frac{\vec{j} \times \vec{B}_0}{n} \quad (2)$$

Fixons les variables comme suit

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}_1 \quad (3)$$

$$\vec{B}_0 = (0, 0, B_0) \quad (4)$$

$$\vec{B}_1 = (B_x, B_y, B_z) e^{i(k_y y + k_z z - \omega t)} \quad (5)$$

B_x, B_y et B_z sont fonction de x uniquement.

On a

$$\text{rot} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, ik_y, ik_z \right) \times \quad \text{et} \quad \frac{d}{dt} = -i\omega \quad (6)$$

La lère équation, écrite en composantes, devient

$$\frac{\omega \mu_0 \rho}{B_0^2} [v_x, v_y, v_z] = [(-k_z b_x - i b'_z), (k_y b_z - k_z b_y), 0] \quad (7)$$

$$b_x = \frac{B_x}{B_0} \quad \text{etc.}$$

Nous voyons déjà que la composante de la vitesse dans le sens du champ principal est nulle.

$$\underline{v_z = 0} \quad (8)$$

L'équation (2) devient

$$-\omega [b_x, b_y, b_z] = k_z (v_x - i\Omega v_y), k_z (v_y + i\Omega v_x), -k_y (v_y + i\Omega v_x) + i v'_x + \Omega v'_y \quad (9)$$

$$\text{avec} \quad \Omega = \frac{\omega}{\omega_{ci}} \quad \omega_{ci} = \frac{e B_0}{m_i} \quad (10)$$

Pour éliminer j nous avons utilisé l'équation

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{j} \times \vec{B}_0 \quad (11)$$

$$\text{donc} \quad -\frac{1}{e} \text{rot} \frac{\vec{j} \times \vec{B}_0}{n} = -\frac{1}{e} \text{rot} \left[\frac{\rho}{n} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} \right] = \frac{i m_i}{e} \omega \text{rot} \vec{v} ; \quad \rho = n m_i \quad (12)$$

La vitesse globale du plasma dans le sens perpendiculaire à la surface est connue au bord (vitesse du kink). Elle est calculable à partir de la force agissant sur le plasma. Nous cherchons donc les équations pour les composantes des vitesses.

Il s'agit d'éliminer les composantes b_x , b_y et b_z .

Les équations (7) s'écrivent ainsi

$$N v_x = -k_z \omega b_x - i \omega b_z' \quad (13)$$

$$N v_y = k_y \omega b_z - k_z \omega b_y$$

et les équations (9) s'écrivent

$$\omega b_x = -k_z v_x + i \Omega k_z v_y \quad (14)$$

$$\omega b_y = -k_z v_y - i \Omega k_z v_x$$

$$\omega b_z = k_y v_y + i \Omega k_y v_x - i v_x' - \Omega v_y'$$

L'abréviation N contient la fréquence et la densité

$$N = \frac{\mu_0 \rho \omega^2}{B_0^2} \quad N = N' x \quad (15)$$

Nous introduisons un gradient de densité constant, $N' = \text{const}$, et une densité nulle au bord $x = 0$. Les équations (13) et (14) se réduisent aux deux équations suivantes :

$$(N - k_z^2) v_x = -i \Omega k_z^2 v_y - i k_y v_y' + \Omega k_y v_x' - v_x'' + i \Omega v_y'' \quad (16)$$

$$(N - k_y^2 - k_z^2) v_y = i \Omega k_y^2 v_x + i \Omega k_z^2 v_x - i k_y v_x' - \Omega k_y v_y' \quad (17)$$

Elimination de v_y'' : on fait (17)' - $i k_y$ (16)

$$(N - k_z^2) v_y' + \Omega k_y k_z^2 v_y + N' v_y - i \Omega k_z^2 v_x' - i k_y (N - k_z^2) v_x = 0 \quad (18)$$

Puis on élimine v_x' en réutilisant (17) :

$$k_y [N - (1 - \Omega^2) k_z^2] v_y' + [k_y N' + \Omega k_z^2 (N - k_z^2)] v_y - i [k_y^2 \{N - (1 - \Omega^2) k_z^2\} + \Omega^2 k_z^4] v_x = 0 \quad (19)$$

Cette équation est intégrable parce que l'on connaît assez bien v_x .

Examinons l'équation (16) dans le cas $\Omega \rightarrow 0$:

$$(N - k_z^2) v_x \cong -i k_y v_y' - v_x'' \quad \text{or } \text{div } v = v_x' + i k_y v_y$$

Donc près de la surface singulière $N=k_z^2$, où a lieu la résonance d'Alfvén, la divergence de v est nulle. Au voisinage de la surface singulière on a donc

$$v'_z \approx -ik_y v_y$$

Dans cette région on sait que v_x varie fortement. Si nous écrivons $\frac{\partial v}{\partial x} = ik_x v$ il vient

$$v_x = -\frac{k_x}{k_y} v_y + v_0 \quad \text{et} \quad k_x \gg k_y$$

v_y peut devenir beaucoup plus grand que v_x , et en même temps contribuer très peu dans la combinaison $(k_y/k_x)v_y$. Ainsi

$$v_x \approx v_0 \quad (20)$$

où v_0 est une constante dans l'espace, c'est le mouvement global, le kink en géométrie cylindrique.

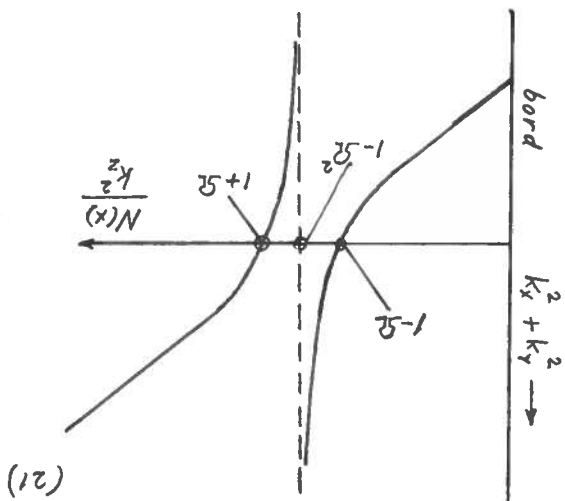
Relation de dispersion

Lorsque la longueur d'onde est petite par rapport aux dimensions du plasma, et si en outre elle varie lentement (plasma quasi-homogène), toutes les grandeurs varient comme $e^{i(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t)}$

$\frac{\partial}{\partial x}$ devient ik_x ou k_x désigne la composante du vecteur d'onde perpendiculaire au plasma. Le problème possède une solution si le déterminant du système d'équations (16) et (17) s'annule. Cette condition conduit à la relation de dispersion suivante :

$$k_x^2 + k_y^2 = - \frac{\left(k_z^2 - \frac{1+\Omega}{N}\right) \left(k_z^2 - \frac{1-\Omega}{N}\right)}{k_z^2 - \frac{1-\Omega}{N}}$$

L'onde subit une coupure aux points $1-\Omega$ et $1+\Omega$. Elle subit une résonance au point $1-\Omega^2$, c'est la résonance d'Alfvén.



(21)

L'onde qui pénètre dans le plasma depuis le bord est d'abord évanescence. ($k_x^2 + k_y^2$ négatif). ~~Si la longueur d'onde n'est pas très courte l'onde~~ parvient très atténuée à la surface $1-\Omega$ et y est réfléchi partiellement. Une partie traverse et se propage jusqu'à la surface résonnante $1-\Omega^2$. Puis elle parvient à la surface $1+\Omega$ par effet tunnel. Une partie est encore réfléchi, et le reste se propage à l'intérieur du plasma vers les hautes densités.

Soit $v_A = \frac{B_0}{\sqrt{\mu_0 \rho}}$ la vitesse d'Alfvén et $N = \frac{\omega^2}{v_A^2}$ d'après (15).

La vitesse de phase de l'onde d'Alfvén s'écrit alors

$$\frac{\omega^2}{k_z^2} = v_A^2 (1 - \Omega^2) \quad (22)$$

La vitesse de phase se trouve donc diminuée par l'effet de la fréquence cyclotronique ionique.

Dans le cas d'un Tokamak $k_z = \frac{n}{R}$ et $k_y = \frac{m}{a}$, ce qui revient à dire que la longueur d'onde est plus grande que le plasma. Le "ray tracing" perd son sens. L'onde est très peu évanescence. Elle traverse tout le plasma sans être notablement réfléchi. v_A est quasi indépendante de x et peut être égalée à une constante v_0 : le mouvement du kink.

Grâce à cette circonstance le dernier terme de l'équation (19) peut être placé au membre de droite, il devient un terme de source. La nouvelle équation devient facilement intégrable par les méthodes analytiques.

Intégration de l'équation (19)

Comme v_A est sensiblement égal à une constante v_0 nous sommes amenés à une équation du 1er ordre

$$c_1 v_y' + c_2 v_y = c_3 \quad (23)$$

$$c_1 = k_y [N - (1 - \Omega^2) k_z^2] \quad c_2 = k_y N' + \Omega k_z^2 (N - k_z^2) \quad c_3 = i v_0 [k_y^2 \{N - (1 - \Omega^2) k_z^2\} + \Omega^2 k_z^4]$$

L'intégration donne, en se souvenant que $N = N'x$

$$\begin{aligned} \frac{v_y}{i v_0} [N - (1 - \Omega^2) k_z^2] &= \frac{k_y N' k_y^2}{\Omega^2 k_z^4} \left[\frac{\Omega k_z^2 x}{k_y} - 1 + e^{-\left(\frac{\Omega k_z^2 x}{k_y}\right)} \right] + \\ &+ \frac{1}{\Omega} [-(1 - \Omega^2) k_y^2 + \Omega^2 k_z^2] \cdot \left[1 - e^{-\left(\frac{\Omega k_z^2 x}{k_y}\right)} \right] \end{aligned} \quad (24)$$

Jusqu'ici nous avons seulement négligé un terme en Ω^3 .

Comme Ω est supposé petit nous développerons jusqu'au 1er ordre en Ω , soit

$$\frac{v_y}{i v_0} \left[N - (1 - \Omega^2) k_z^2 \right] \cong k_y x \left[\frac{N}{2} - k_z^2 \right] - \frac{\Omega k_z^2 x^2}{2} \left[\frac{N}{3} - k_z^2 \right] \quad (25)$$

Ceci est notre résultat cherché. La contribution de l'énergie provient des régions proches de la surface de résonance $N = (1 - \Omega^2) k_z^2 \cong k_z^2$, où la vitesse v_y est grande. Soit $x_A = \rho(x_A) / \rho'(x_A)$ la position de la surface résonnante. Le facteur d'atténuation de la vitesse sera défini par le quotient de v_y avec et sans Ω :

$$\frac{v_y}{v_y(\Omega=0)} = 1 - \frac{2 \Omega k_z^2 x_A}{3 k_y} \quad (26)$$

Si Ω est petit le facteur d'atténuation de la puissance devient

$$\gamma = 1 - \frac{4 \Omega k_z^2 x_A}{3 k_y} \quad (27)$$

Le résultat peut être transposé à la géométrie cylindrique ou toroïdale à condition que la surface résonnante soit peu profonde.

Exemple TCA

$$\omega = 2\pi \cdot 3 \cdot 10^6 \quad (3 \text{ MHz}) \quad B_0 = 0,8$$

$$\omega_{ci} = 0,96 \cdot 10^8 B_0 = 77 \cdot 10^6 \quad \Omega = 0,245$$

$$x_A = 0,3a \quad a = 0,18 \quad k_z = \frac{n}{R} = \frac{2}{R} \quad R = 0,61$$

$$k_y = \frac{m}{a - x_A} = \frac{1}{a - x_A}$$

$$\frac{4 \Omega k_z^2 x_A}{3 k_y} = 1,31 \frac{x_A (a - x_A)}{R^2} = 2,4 \% \quad (28)$$

L'atténuation due à l'effet ω_{ci} fini est négligeable.

Calcul de l'absorption d'Alfvén pour le cas $\Omega = 0$

Près de la surface de résonance on a $v_y \gg v_x$. Seul v_y contribue à l'énergie. Cherchons v_y à l'aide de la transformation de Laplace.

Ecrivons la transformée de Laplace de (25)

$$i \tilde{v}_y = - \frac{x k_y \left(k_z^2 - \frac{\tilde{N}}{2} \right) \tilde{v}_0}{k_z^2 - \tilde{N}} \quad (29)$$

Soit un mouvement global $v_0 = v_k \sin \omega_A t$
d'où

$$\tilde{v}_0 = \frac{v_k \omega_A}{s^2 + \omega_A^2} \quad (30)$$

En outre

$$N = k_z^2 \frac{x}{x_A} \cdot \frac{\omega^2}{\omega_A^2}$$

La transformée de N s'obtient en remplaçant $\omega = is$ où $s = d/dt$ est l'opérateur de Laplace. Donc

$$\tilde{N} = -k_z^2 \frac{x}{x_A} \cdot \frac{s^2}{\omega_A^2} \quad (31)$$

La vitesse devient

$$i\tilde{v}_y = \frac{-x_A k_y v_k \omega_A \left[\omega_A^2 + \frac{s^2}{2} \right]}{(s^2 + \omega_A^2) \left[s^2 + \omega_A^2 \left(1 - \frac{\varepsilon}{x_A} \right) \right]} \quad (32)$$

Nous venons de développer x en écrivant $x = x_A + \varepsilon$.

L'expression ci-dessus est une convolution de $\sin \omega_A t$ avec $\sin (\omega_A - \Delta\omega)t$ où $\Delta\omega$ est donné par

$$\Delta\omega = \frac{\omega_A \varepsilon}{2 x_A} \quad (33)$$

Le résultat représente un battement

$$i v_y(t) = - \frac{x_A^2 k_y v_k}{2 \varepsilon} \left[\sin \omega_A t (1 - \cos \Delta\omega t) + \cos \omega_A t \sin \Delta\omega t \right] \quad (34)$$

La valeur de crête de cette expression devient

$$|v_y| = \frac{x_A^2 k_y v_k}{\varepsilon} \sin \frac{\Delta\omega t}{2} \quad (35)$$

L'intégrale de la densité d'énergie $\frac{\rho}{2} |v_y|^2$ selon x devient

$$E = \frac{\pi}{8} \rho k_y^2 v_k^2 x_A^3 \omega_A t \quad (36)$$

Ainsi la puissance par unité de surface est

$$W = \frac{\pi}{8} \rho k_y^2 v_k^2 x_A^4 \omega_A \quad (37)$$

Il reste maintenant à déterminer la vitesse du kink v_k occasionnée par une force produite par des antennes de même structure que l'onde imprimée, c'est-à-dire des antennes perpendiculaires au vecteur (k_y, k_z) et placées parallèlement à la surface.

Le calcul montre que le facteur de surtension Q des antennes est de l'ordre de $(k_y x_A)^{-2}$. Plus l'antenne est oblique, plus le couplage est grand. Au contraire pour $k_y \rightarrow 0$, lorsque l'antenne est parallèle au champ constant, le couplage disparaît.

Remarque : Dans l'article de Karney, Perkins et Sun; Phys. Rev. Letters 42, 1621 (1979), on résout le problème avec la méthode WKB. Le facteur de réflexion sur la surface de coupure est obtenu en étudiant la fonction d'Airy dex, donc en admettant des petites longueurs d'ondes. Le calcul n'est pas valable dans le cas du TCA; en particulier les zones à réflexion totale n'existent pas.