

IsoSpring : vers la montre sans échappement

Simon Henein, Ilan Vardi, Lennart Rubbert, Roland Bitterli, Nicolas Ferrier, Sebastian Fifanski, David Lengacher
Laboratoire de conception micromécanique et horlogère, EPFL STI IMT INSTANT-LAB,
Rue de la Maladière 71B, CH-2000 Neuchâtel

Résumé

Depuis son introduction en 1675, le balancier-spiral est la base de temps exclusive de la montre mécanique. Or cet oscillateur présente deux difficultés limitatives qui n'ont jusqu'à présent pas été contournées : un facteur de qualité limité (en particulier par des phénomènes tribologiques), ainsi que la nécessité d'un échappement, mécanisme complexe au rendement limité. Cet article présente un nouvel oscillateur appelé IsoSpring, qui améliore le facteur de qualité grâce au recours aux guidages flexibles et élimine complètement l'échappement. Le concept de ce nouvel oscillateur qui est doté de deux degrés de liberté remonte à Issac Newton. Il est replacé dans le contexte historique des principales avancées conceptuelles en horlogerie mécanique. La résolution des équations du mouvement démontre que l'inertie des organes tournants perturbe l'isochronisme. Pour pallier cette limitation, des architectures de mécanismes à guidages flexibles supprimant l'essentiel de l'inertie des organes tournants sont proposées. Le mouvement bidimensionnel de cet oscillateur n'est plus alterné, mais unidirectionnel. Ainsi, un mécanisme de maintien continu constitué d'une manivelle transmet le couple à l'oscillateur et l'échappement disparaît.

Le développement conceptuel de l'horlogerie mécanique

Le temps discrétisé. La mesure du temps a ses sources dans l'observation du ciel et nos unités de temps, le jour, l'année, reflètent cette origine. Les garde-temps ont été conçus pour constituer une référence autonome. L'exemple le plus ancien est la clepsydre¹ dont l'apothéose est la grande horloge conçue en Chine par Su Song (1020-1101). La grande avancée suivante est l'horloge mécanique basée sur l'échappement, où l'énergie est libérée de manière intermittente par le biais d'un régulateur, son appellation venant du fait que les dents d'engrenage « s'échappent » une à une. Cette invention a discrétisé le temps et introduit le tic-tac dans la mesure du temps. Du point de vue conceptuel, les garde-temps mécaniques suivent le schéma énergétique suivant :

ENERGIE ⇒ Transmission ⇒ Echappement ⇒ Oscillateur

La décharge énergétique d'un ressort armé ou d'un poids moteur est rythmée par un régulateur qui constitue la *base de temps*. L'échappement sert d'interface entre la transmission mécanique de la montre et sa base de temps.

Jusqu'au 17^e siècle, le régulateur était un *foliot*, où le couple fourni par la source d'énergie accélère angulairement le foliot, un levier supportant deux masses, de manière alternée en utilisant un *échappement à roue de rencontre*. Etant donné que la durée nécessaire pour faire parcourir un angle donné à un volant d'inertie accéléré par un couple dépend directement de la valeur de ce couple, la vitesse de ces horloges et montres dépend directement du couple du ressort ou poids moteur. Lorsqu'il varie, le couple moteur affecte significativement la précision chronométrique (voir l'analyse de Defossez [8, Tome II, p. 136-138]), elle dépassait à l'époque du foliot difficilement le 1% (15 minutes par jour)².

¹ La source de ce mot, signifiant « vœur d'eau » en Grec Ancien, est littéralement le nom de la source de l'horloge à eau de la Tour des Vents d'Athènes [19].

² Les horlogers actuels pourraient ressusciter le foliot en le faisant fonctionner avec des mécanismes produisant un couple constant [32].

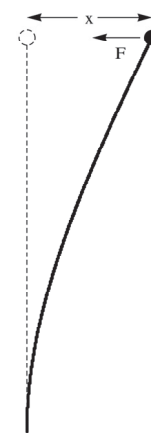


Fig. 1 : Lame ressort.

L'oscillateur fournit un temps propre. La grande avancée faite au 17^e siècle fut l'introduction d'un régulateur ayant son propre temps. Mathématiquement, un oscillateur est caractérisé par l'équation

$$(O) \quad \ddot{x}(t) = -Cx,$$

qui exprime le fait que la force de rappel est proportionnelle au déplacement x . Les principaux exemples sont le pendule et le ressort, où les forces de rappel sont respectivement la gravité et l'élasticité³.

Par les méthodes standards du calcul infinitésimal, on obtient la solution de l'équation (O)

$$x(t) = A \sin(2\pi f_0 t + \varphi),$$

³ La lame ressort de la figure 1 peut être couplée avec une copie symétrique pour produire un diapason. Il s'agit de l'oscillateur régulant toutes les montres dites électroniques, qui ont donc bel et bien une base de temps mécanique. Ce sont les fonctions d'entretien et de comptage qui sont réalisées de manière électronique.

où $f_0 = \sqrt{C}/(2\pi)$ est la *fréquence propre*, A est l'amplitude et φ est une condition initiale. Il est remarquable que la fréquence soit entièrement indépendante de l'amplitude. Cette propriété, nommée *isochronisme*, rend la mesure du temps indépendante des fluctuations de la source d'énergie qui l'alimente. Ceci explique notre affirmation qu'un oscillateur possède son temps propre.

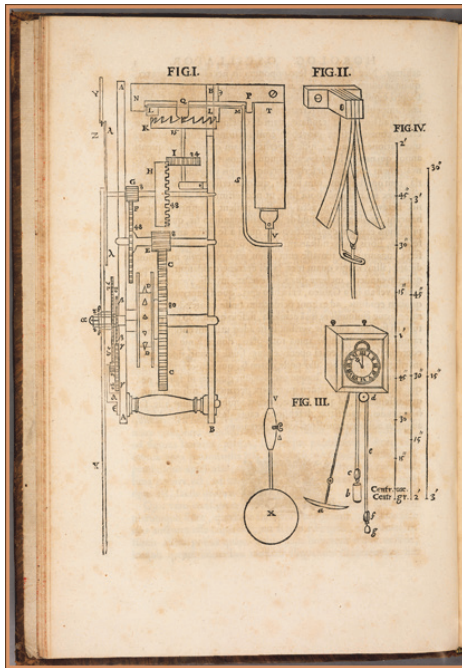


Fig. 2 : Dessin de Christiaan Huygens de son horloge à pendule avec flancs cycloïdaux.

Le principe d'isochronisme a été découvert par Galilée et mis en œuvre par Christiaan Huygens, d'abord avec le pendule en 1656 pour les horloges et ensuite avec le balancier-spiral en 1675⁴ pour les montres. Ces oscillateurs suivent en effet tous deux la loi de l'oscillateur (O)⁵.

L'utilisation d'un réel oscillateur a tout de suite amélioré la précision chronométrique de deux ordres de grandeur, l'amenant à 15 secondes par jour. On peut ainsi parler de la conquête du temps puisque les garde-temps sont devenus plus précis que le Soleil qui peut avoir une avance ou un

⁴ Les polémiques concernant la priorité de ses inventions ont causé beaucoup de tort à Huygens [15]. La revendication de Robert Hooke pour le balancier-spiral est la seule qui n'a pas été réfutée et certains considèrent qu'il l'a inventé indépendamment [5].

⁵ Le pendule circulaire tel qu'utilisé dans les horloges depuis 300 ans est théoriquement non-isochrone, malgré l'assertion du contraire par Galilée [7]. Huygens était quant à lui conscient de ce défaut d'isochronisme. Ce défaut a par la suite été minimisé en faisant fonctionner le pendule sur de très petites amplitudes. Cette solution ne convenait toutefois pas à Huygens qui voulait construire une horloge de marine, donc à amplitude très variable, pour une utilisation en mer. Il a donc conçu le *pendule cycloïdal*, voir la figure 2, qui est théoriquement isochrone. Ainsi, son horloge de marine à pendule a quand même atteint de bons résultats, un siècle avant John Harrison [16][23]. De manière similaire, il a modifié le pendule conique dont le défaut d'isochronisme est 4 fois celui du pendule isochrone, pour le rendre isochrone, cette fois avec une forme parabolique [7, Chapitre XI]. Nous sommes de l'avis que Huygens s'était fixé le but d'avoir de véritables oscillateurs isochrones pour horloges et que le pendule en mer a été abandonné définitivement plutôt en raison de sa sensibilité à la gravité [29] qu'en raison de son défaut d'isochronisme.

retard diurne de l'ordre de 30 secondes par jour par rapport au temps civil (l'équation du temps [26]). Le résultat fut une révolution sociale, puisque le temps n'était plus dépendant des phénomènes naturels, mais basé sur une référence artificielle : l'horloge.

Il est notoire que l'établissement d'une théorie du temps – l'équation de l'oscillateur, ainsi que les mathématiques requises pour en trouver la solution – a été *nécessaire* à cette avancée. C'est ainsi que l'horlogerie est devenue une science. Les apprentis horlogers suisses se sont par voie de conséquence trouvés obligés d'étudier la théorie d'horlogerie [21].

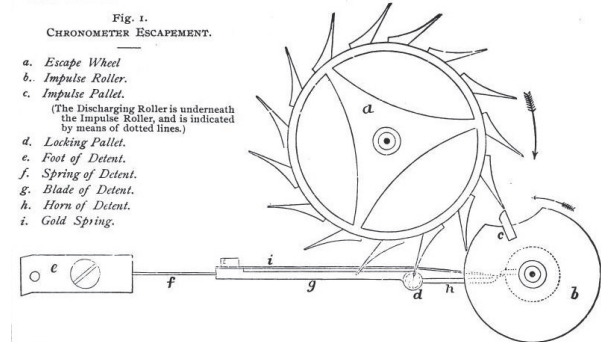


Fig. 3 : Echappement à détente d'Earnshaw [4].

L'invention de l'échappement libre. L'oscillateur doit être entretenu et ses oscillations doivent être comptées. Ces deux tâches sont accomplies par l'échappement qui fait office d'interface avec la montre. Si le 17^e siècle fut à l'origine des oscillateurs, le 18^e siècle fut quant à lui celui de l'invention des échappements les plus utilisés par la suite.

La recherche la plus intense a porté sur les chronomètres de marine, la quête de la longitude étant l'un des plus grands problèmes scientifiques et pratiques de cette époque. L'échappement à détente inventé et perfectionné par Leroy, Arnold et Earnshaw [9], a démontré sa supériorité⁶. Cet échappement est un exemple d'*échappement libre*, où l'oscillateur ne subit que très peu de perturbations par l'échappement, l'avantage étant que l'équation de l'oscillateur (O) est plus fidèlement respectée, donc que la régularité de la base de temps est améliorée. Ce résultat est quantifié par la formule d'Airy [1][26]⁷.

En ce qui concerne les montres bracelet, l'échappement à détente n'est pas utilisable tel quel en raison de sa sensibilité aux chocs, et l'échappement ayant le plus fait ses preuves est l'*échappement à ancre* inventé par Thomas

⁶ Si John Harrison a réussi à construire le premier chronomètre de marine précis, il utilisait encore un échappement à rencontre avec une méthode de fabrication encore partiellement inconnue et difficile à reproduire. La grande percée conceptuelle de Harrison fut de remplacer une grosse horloge par une montre ayant un petit oscillateur plus énergétique [3].

⁷ Pour les horloges, c'est le cas contraire : les meilleurs échappements sont à contact permanent. L'explication est que le défaut d'isochronisme du pendule circulaire nécessite l'utilisation d'un échappement à force constante. On peut citer l'échappement de Big Ben inventé par Edmund Beckett Denison [11], devenu le standard pour les horloges de tour, ainsi que les échappements de Leroy, Riefler et Strasser, tous ces échappements étant basés sur l'échappement à gravité, également dû à Thomas Mudge [20][22]. Un exemple intéressant d'un échappement libre pour horloge est celui de William Thomson, Lord Kelvin, où l'action de l'échappement ne dure que 1/400^e de seconde pour un pendule battant la seconde [22] [25] [33].

Mudge en 1769, surtout par l'introduction du tirage au début du 19^e siècle par Richard Pendleton (1780-1808) et perfectionné vers 1830 par George Leschot (1800-1884) [23], ce qui le rendit beaucoup moins sensible aux chocs. La version aboutie est l'échappement à ancre suisse utilisé pour pratiquement toutes les montres bracelet mécaniques.

Avancées incrémentales. Dans son traité définitif sur le chronomètre de marine, Rupert Gould a fait la remarque que l'instrument de 1920 ne diffère conceptuellement pas de celui de 1800, malgré des performances beaucoup plus élevées, et il écrit [10, p. 13] : « That the difference is not more apparent at first sight is due to the fact that it resides chiefly in small and apparently not very important details ». En effet, la performance chronométrique de l'ordre de 0,001% requise en horlogerie est telle que les phénomènes de deuxième ordre doivent être pris en compte. Arriver à cette précision nécessite une attention particulière aux détails techniques. C'est dans ces derniers et non dans des avancées conceptuelles qu'a résidé l'amélioration des performances horlogères réalisée depuis 1800. Ainsi la chronométrie est une science du détail et sa progression est surtout incrémentale.

La remarque de Gould s'applique aussi à la montre de 2014 qui est conceptuellement similaire à celle de 1800, bien que grandement améliorée sur tous les plans techniques. Citons par exemple les avancées des matériaux tels que l'Invar de Charles-Edouard Guillaume pour la stabilité thermique et le silicium pour la précision de fabrication et l'élimination de la lubrification [18], ainsi que de nouveaux échappements très intéressants tels que l'échappement coaxial d'Omega [6] et l'échappement Constant de Girard-Perregaux [9].

Malgré ces importantes avancées technologiques, force est de constater aujourd'hui un ralentissement des progrès de la montre mécanique en termes de performances horlogères. Ce ralentissement est selon nous imputable notamment à la problématique des deux facteurs limitatifs fondamentaux pour la performance que sont le facteur de qualité de l'oscillateur et le rendement de l'échappement : le premier ne dépasse pas 300⁸ pour les balanciers-spiraux actuels et le second ne dépasse pas les 40%, une valeur faible comparée à la plupart des transmissions mécaniques classiques⁹.

Ainsi, il semble aujourd'hui que seule une avancée conceptuelle puisse permettre de dépasser significativement les limites actuelles de la montre mécanique.

Dans ce contexte, le présent article décrit une nouvelle base de temps mécanique à haut facteur de qualité pouvant être entretenue sans échappement. Les sources d'inspiration de cette invention nous viennent du 17^e siècle.

IsoSpring : une nouvelle base de temps basée sur un système solaire isochrone

Le système solaire isochrone de Newton. L'une des plus grandes révolutions scientifiques fut la publication par Isaac Newton en 1687 de *Principia Mathematica* où il a démontré que quelques principes très simples pouvaient expliquer la mécanique céleste [17]. L'un de ses résultats les plus importants est la preuve des lois de Kepler du mouvement planétaire : la première loi exprimant que les planètes suivent une orbite elliptique ayant le Soleil à l'un des foyers et la troisième loi exprimant que le carré de la période de

révolution T est proportionnel au cube de son demi-grand axe a , voir la figure 4,

$$T \sim a^{\frac{3}{2}}$$

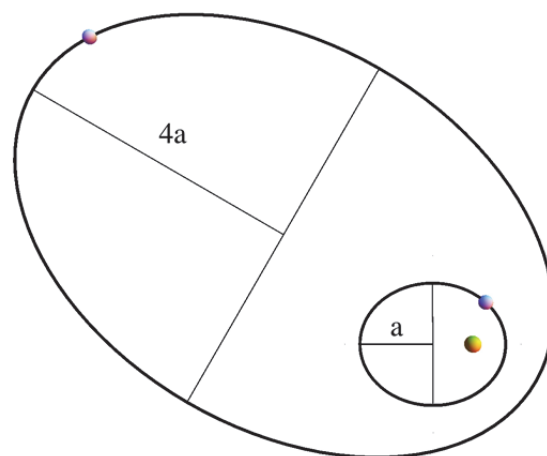


Fig. 4 : Lois de Kepler : le Soleil est au foyer des ellipses. La période de la planète extérieure est $4^{3/2} = 8$ fois supérieure à l'intérieure.

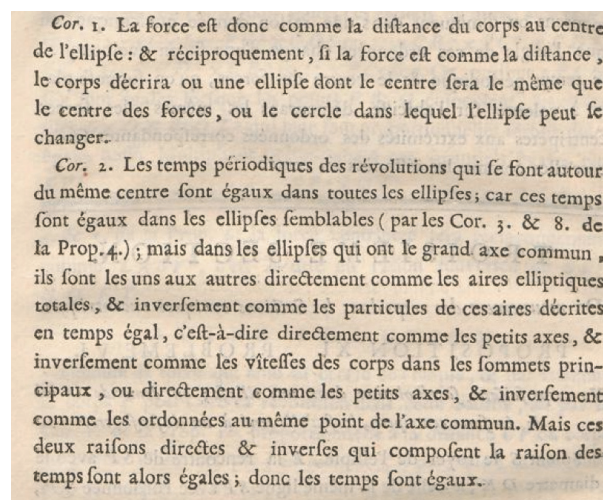


Fig. 5 : Corollaires à la Proposition X d'Isaac Newton.

Dans le même ouvrage [17, Livre I, Corollaires à la Proposition X], Newton a démontré que si la loi de gravitation universelle est remplacée par une force d'attraction centrale linéaire, alors les orbites restent des ellipses, mais avec le Soleil au centre de l'ellipse et la période identique pour toute orbite¹⁰.

⁸ Le facteur de qualité étant directement lié à la puissance dissipée par l'oscillateur (donc finalement à la réserve de marche de la montre) et reconnu comme étant un indicateur clé du potentiel fondamental de la précision chronométrique d'un garde-temps [27].

⁹ Le rendement de l'échappement affectant directement la puissance dissipée par le mouvement (donc finalement à la réserve de marche de la montre), de grands efforts ont été investis pour le maximiser.

¹⁰ La motivation de Newton était de trouver toutes les lois d'attraction possibles donnant les orbites elliptiques prédites par Kepler. Le fait que des ellipses sont présentes pour les deux lois est maintenant bien expliqué par une équivalence mathématique [12]. Il est aussi bien connu que ces deux cas sont les seules forces centrales qui donnent des orbites fermées [2].

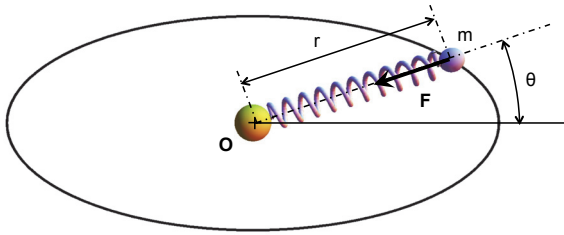


Fig. 6 : Loi de Hooke matérialisée par un ressort fronde et orbite planétaire correspondante.

Ce résultat, moins célèbre que celui portant sur les lois de Kepler, est à la source de notre invention : en effet, une force linéaire centrale correspond à la loi de Hooke d'un ressort. Nous pouvons donc matérialiser la force d'attraction entre la planète et son soleil par un simple ressort tournant, voir la figure 6. Le mécanisme ainsi constitué s'apparente à une fronde dont les lanières seraient élastiques. Nous l'avons nommé *ressort fronde*.

Le résultat de Newton pour la loi de Hooke est facilement vérifié. On considère une masse ponctuelle soumise à une force centrale

$$F(r) = -kr$$

centrée à l'origine, où r est la position de la masse. Si l'objet a une masse m , on trouve la solution, en faisant appel à la deuxième loi de Newton $F = ma$ (énoncée dans le même ouvrage !)

$$r = (A_1 \sin(2\pi f_0 t + \varphi_1), A_2 \sin(2\pi f_0 t + \varphi_2)),$$

pour des constantes $A_1, A_2, \varphi_1, \varphi_2$ qui dépendent des conditions initiales et la fréquence propre

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Ceci démontre que les orbites sont elliptiques et que la période ne dépend que de la masse m et de la rigidité k de la force centrale. Ceci confirme l'isochronisme de ce système solaire : la période

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

est indépendante de la position et du mouvement de la masse ponctuelle (cette loi est l'analogie de la troisième loi de Kepler prouvée par Newton).

Cette propriété d'isochronisme permet d'envisager conceptuellement une base de temps pour garde-temps d'une nouvelle nature. Il semble pourtant que personne n'ait à ce jour franchi le pas et imaginé un objet mécanique profitant de la remarquable propriété physique d'isochronisme de cet oscillateur¹¹ [28] identifiée et prouvée par Newton.

Nous nommons *IsoSpring* tout mécanisme composé de masses, de ressorts et de guidages permettant de reproduire mécaniquement le système solaire isochrone de Newton avec une fidélité suffisante pour une utilisation comme base de temps.

¹¹ Cet oscillateur est aussi connu dans la littérature sous le nom d'oscillateur harmonique isotrope, où le terme *isotrope* veut dire « le même dans toutes les directions ».

Les mécanismes IsoSpring sont différents des bases de temps traditionnelles par leur mouvement bi-dimensionnel. La seconde dimension permet de réaliser des oscillations en rotation uni-directionnelle¹².

Conception d'IsoSpring

Les conditions que doit respecter un mécanisme élastique pour exhiber fidèlement la propriété d'isochronisme du modèle de Newton sont les suivantes :

1. Produire une force de rappel élastique linéaire $F = -kr$ avec $k = \text{constante}$.
2. Posséder un centre de force indépendant de θ : $F(0) = 0$.
3. Présenter une force de rappel élastique isotrope : pour r donné, F est indépendante de θ .
4. Avoir une masse ponctuelle (moment d'inertie nul) : $I = 0$.
5. Contraindre cinématiquement la masse mobile à se mouvoir dans un plan¹³.
6. Avoir une masse constante : m indépendante de r et θ .
7. Être insensible à la gravitation terrestre.

La fonction d'oscillateur harmonique isotrope peut être décomposée en trois sous-fonctions.

- A. Fonction ressort : produire une force de rappel élastique satisfaisant les conditions ci-dessus.
- B. Fonction guidage : contraindre les degrés de liberté indésirables du mécanisme et compenser le poids des masses en présence de la gravitation terrestre.
- C. Fonction masse¹⁴ : présenter une masse réduite indépendante de la position et de la direction du mouvement.

En principe, ces fonctions peuvent mécaniquement être remplies par des organes distincts ou confondus¹⁵. Les deux grandes familles de mécanismes IsoSpring décrits dans le présent article sont les *ressorts fronde* et les *ressorts centraux*. Une demande de brevet a été déposée pour ces mécanismes.

¹² Plus abstraitement, le concept IsoSpring exploite des oscillateurs à deux dimensions produisant des oscillations unidirectionnelles. Les deux translations planaires présentées ici peuvent être généralisées à d'autres paires de degrés de liberté, comme deux rotations ou une rotation et une translation.

¹³ Il est bien connu depuis Newton que l'orbite d'une planète soumise à une force centrale reste dans un plan. Le recours à un guidage plan horizontal permet donc de modéliser correctement le système solaire isochrone de Newton tout en s'affranchissant des effets de la gravitation terrestre.

¹⁴ La masse d'un mécanisme réel étant nécessairement distribuée sur l'ensemble de ses segments, ce mécanisme diffère du modèle de Newton par la présence de plusieurs masses mobiles au lieu d'une seule et par la présence de masses non-ponctuelles au moment d'inertie non-nul.

¹⁵ Les mécanismes basés sur les guidages flexibles permettent de fusionner ces fonctions en un seul organe, voire en une seule pièce mécanique [13].

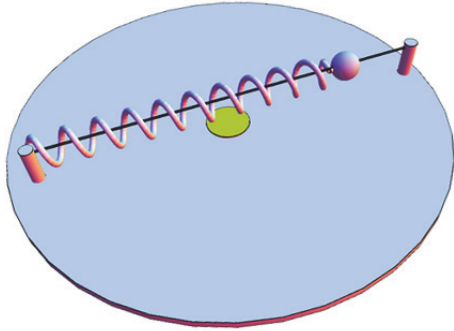


Fig. 7 : Ressort fronde avec guidage linéaire sur plateau tournant.

Dans un premier temps nous décrivons une architecture simple de mécanisme de type fronde permettant de s'approcher du modèle décrit par Newton, représentée sur la figure 7. Une masse est attachée à un plateau tournant autour d'un axe vertical au moyen d'une glissière radiale horizontale (un degré de liberté en translation, supposé sans frottement) et d'un ressort de caractéristique linéaire, de telle sorte que le point neutre du ressort coïncide avec l'axe de rotation du plateau. Ce mécanisme satisfait les conditions 1, 2, 3, 5, 6 et 7 ci-dessus. Seule la condition 4 n'est pas respectée : le moment d'inertie des parties mobiles est non-nul : notons I_s l'inertie du plateau et I_m celle de la masse (l'inertie du ressort est négligée dans le développement ci-dessous). L'effet de cette différence avec le modèle idéal décrit par Newton sur le comportement de l'oscillateur est étudié ci-dessous.

L'oscillateur harmonique isotrope avec moment d'inertie

Selon le théorème des axes parallèles, le moment d'inertie d'une planète de masse m et moment d'inertie I_m tournant à distance r du centre de rotation a un moment d'inertie total $I_m + mr^2$. Si l'on prend également le moment d'inertie du plateau tournant en compte, on obtient $I = I_m + I_s$ et le moment d'inertie total du système est $I + mr^2$. On verra par la suite que I est un élément perturbateur. Pour analyser son effet, on introduit le coefficient $\rho = I/(mr^2)$ qui caractérise l'écart entre le mécanisme physique et le modèle idéal de Newton où $\rho = 0$. Par exemple, pour la Terre tournant autour du Soleil, on a $\rho = 7.23203 \times 10^{-8}$.

L'analyse avec $\rho \neq 0$ se fait en écrivant les équations de mouvements en coordonnées polaires r, θ pour la position du centre de masse de la planète, et leurs dérivées par rapport au temps $\dot{r}, \dot{\theta}$. Le moment cinétique total est

$$L = (I + mr^2)\dot{\theta}$$

qui est constant puisque l'on fait l'hypothèse que le système est conservateur (il n'y a ni couple extérieur, ni friction interne). La vitesse angulaire peut donc s'écrire

$$\dot{\theta} = L/(I + mr^2).$$

De plus, la deuxième loi de Newton $F = ma$ pour le paramètre r donne

$$\ddot{r} + (\omega_0^2 - \dot{\theta}^2)r = 0,$$

où $\omega_0 = \sqrt{k/m} = f_0/(2\pi)$ est la pulsation propre. La substitution de l'équation précédente donne

$$\ddot{r} + \left(\omega_0^2 - \frac{L^2}{(I + mr^2)^2} \right) r = 0.$$

Cette équation peut être directement intégrée après multiplication par $m\dot{r}$ et l'on obtient la formule de conservation d'énergie

$$(E) \quad \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m\omega_0^2r^2 + \frac{L^2}{2(I + mr^2)} = E.$$

On peut résoudre cette équation différentielle de manière analytique et explicite en termes de fonctions elliptiques de Jacobi [28]. La solution en termes de fonctions elliptiques est typique pour ce type de problème¹⁶.

Périodicité et isochronisme du modèle avec inertie

Les fonctions elliptiques de Jacobi sont périodiques, donc le modèle avec moment d'inertie produit des solutions périodiques, où la période peut être exprimée de manière explicite en termes d'intégrales elliptiques [28]. Par exemple, la figure 8 donne l'orbite pour une masse $m = 1g$ et une fréquence propre nominale $f_0 = 2Hz$ avec les conditions initiales $\theta_0 = 0, \dot{\theta}_0 = 8 \text{ radian/s}, r_0 = 0, \dot{r}_0 = 0, \rho_0 = 0.1$. Cette orbite est périodique en r par rapport à θ avec période $3.42693 = 0.545413 \times 2\pi$. La figure 8 représente une orbite de 10 révolutions ($\theta = 0$ à $\theta = 10 \times 2\pi$). Après 6 tours complets, l'orbite semble se refermer sur elle-même, mais si l'on laisse augmenter le nombre de tours, figure 9, on observe que la trajectoire n'est pas fermée : elle subit une lente précession¹⁷.

Bien que l'orbite ne soit pas fermée, il résulte de la périodicité des fonctions de Jacobi une fréquence de rotation stable. Dans cet exemple, la fréquence stable est $\Phi = 2.01765Hz$ alors que la fréquence nominale (pour un moment d'inertie de la masse nul) est $f_0 = 2Hz$. Le calcul de la fréquence stable Φ est possible grâce aux formules explicites démontrées dans [28].

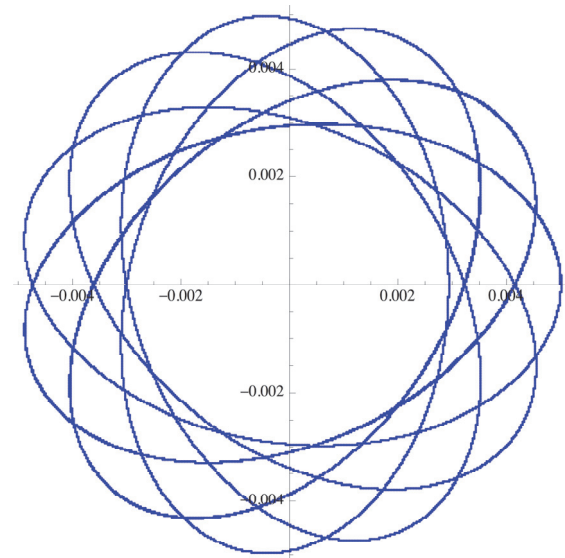


Fig. 8 : Orbite avec moment d'inertie ($\rho_0 = 0.1$) sur 10 révolutions.

¹⁶ Les fonctions elliptiques apparaissent aussi dans la solution analytique du pendule circulaire et les lois de gravité centrales de la forme r^n , $n = 5, 3, 0, -4, -5, -7$ [30, p.~83], voir [31] pour une introduction aux fonctions elliptiques.

¹⁷ Ce phénomène est quantifié par le fait que $6/11 - 0.545413 = 0.00004$, donc 11 périodes de l'orbite font presque exactement 6 tours complets de l'angle θ . Ce graphe a donc une précession de 0.16 degrés pour chaque 6 tours complets de θ et il faut environ 13'128 tours complets pour que la précession du graphe dépasse un tour complet.

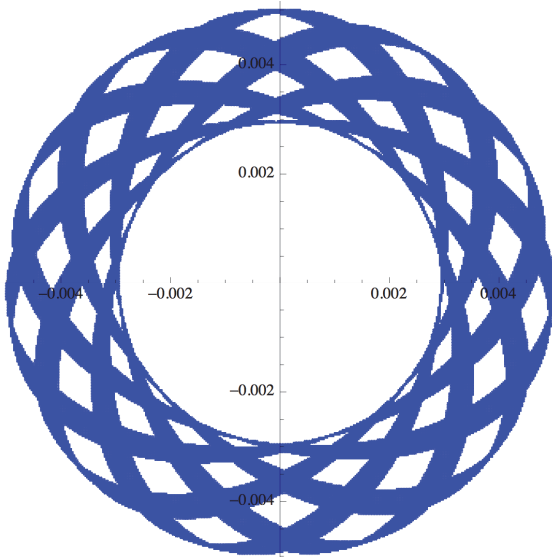


Fig. 9 : Orbite avec moment d'inertie ($\rho_0 = 0.1$) sur 500 révolutions.

Pour avoir une base de temps, il faut que le modèle ait un bon isochronisme, c'est-à-dire que la fréquence soit insensible aux changements d'amplitude. Dans notre cas, il n'est pas évident de quantifier l'amplitude. Une caractéristique équivalente est l'énergie totale de l'oscillateur, celle-ci étant essentiellement l'amplitude dans le cas de l'oscillateur linéaire de la section ci-dessus en raison de la formule $E = 2m\pi^2 f^2 A^2$ en une dimension, voir [27].

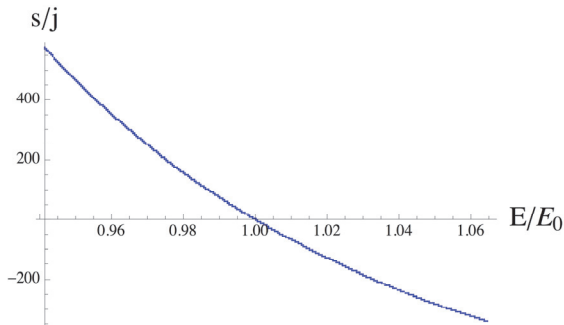


Fig. 10 : Marche diurne par rapport à l'énergie de l'oscillateur avec $\rho_0 = 0.1$.

Une façon de faire varier l'énergie de l'oscillateur est de changer la condition initiale $\dot{\theta}_0$ (la vitesse de lancement de la masse) et de garder les autres termes inchangés. Avec l'hypothèse que $\dot{r}_0 = 0$, l'énergie est

$$E = E(\dot{\theta}_0) = 2m\pi^2 f_0^2 r_0^2 + \frac{1}{2}(I + mr_0^2)\dot{\theta}_0^2,$$

et si l'on écrit E_0 quand $\dot{\theta}_0 = 8$ radian/s, la figure 10 donne la marche diurne en fonction du changement relatif de l'énergie E/E_0 , en variant $\dot{\theta}_0$. Il est évident que ce système n'est pas du tout isochrone puisque la fréquence change sensiblement avec l'énergie du système. En particulier, un changement de $\pm 5\%$ de l'énergie, ce qui correspond à une variation de 2.5% de l'amplitude d'un oscillateur classique, donne une erreur de plusieurs minutes par jour, ce qui n'est pas acceptable pour une application horlogère.

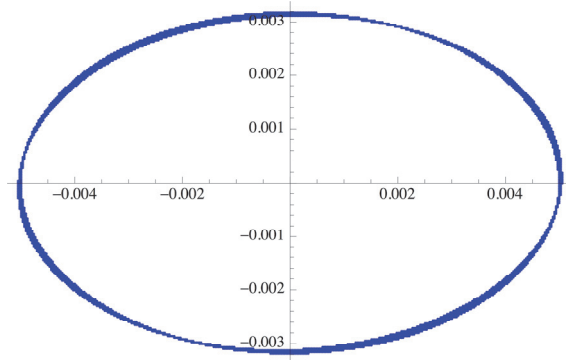


Fig. 11 : Orbite avec faible moment d'inertie $\rho_0 = 0.001$ sur 10 révolutions.

On peut réduire le défaut d'isochronisme en réduisant la valeur de ρ_0 , par exemple, par deux ordres de magnitude à $\rho_0 = 0.001$. La figure 11 démontre que l'orbite sur 10 tours ressemble beaucoup plus à une ellipse stable et les données de la figure 12 sont pratiquement acceptables.

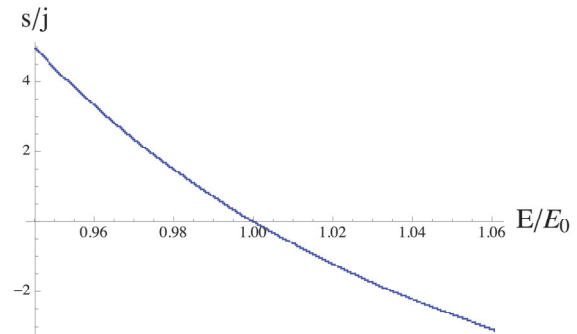


Fig. 12 : Marche diurne par rapport à l'énergie de l'oscillateur avec $\rho_0 = 0.001$.

On peut aussi réduire le défaut d'isochronisme en augmentant la fréquence nominale, par exemple, $f_0 = 10$ Hz et $\rho_0 = 0.01$ donnent un défaut d'isochronisme comparable à l'exemple précédent.

Conception mécanique de l'oscillateur

La section précédente démontre que pour atteindre un haut degré d'isochronisme, le moment d'inertie I des organes tournants (masse et plateau) doit être minimisé. Pour ce qui est de la masse, la forme géométrique qui minimise I_m est un cylindre très allongé. Un cylindre de rayon r_m a un moment d'inertie $I = m r_m^2/2$, donc $\rho = (r_m/r_0)^2/2$. Il s'en suit qu'un ρ acceptable de l'ordre de 0.01 nécessite $r_m \approx r_0/7$, ce qui veut dire, si l'on néglige le moment d'inertie du plateau I_s , que le rayon de la masse cylindrique doit être un ordre de grandeur plus petit que le rayon de l'orbite.

Ressorts fronde (orbites en rotation). Une réalisation pratique du ressort fronde (ressort linéaire simple à un degré de liberté sur plateau tournant) est illustrée sur la figure 13.

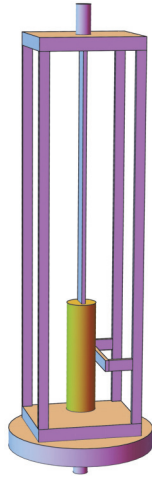


Fig. 13 : Ressort fronde à lame-ressort axiale.

Il est constitué d'une lame flexible en porte-à-faux équipée d'une masse en extrémité montée sur un support rotatif, de telle manière que l'axe de la lame soit confondu avec l'axe vertical de rotation (figure 13). Une butée radiale est requise pour éviter que la masse ne puisse passer par le point neutre central (singularité cinématique du mécanisme). Le mécanisme est entraîné par un couple moteur mettant le plateau rotation.

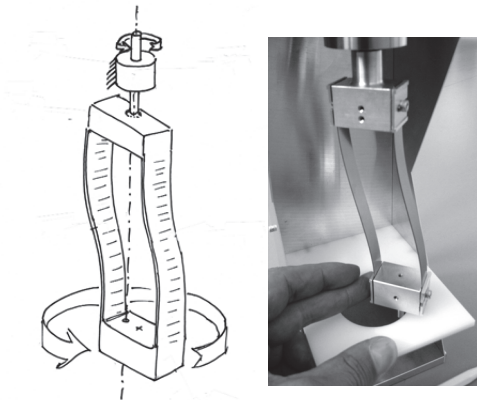


Fig. 14 : Ressort fronde à guidage à deux lames parallèles. Concept et démonstrateur construit par l'Instant-Lab.

Une construction améliorée consiste à guider la masse en translation radiale au moyen d'un guidage flexible à deux lames parallèles. Ce guidage confère à la masse un unique degré de liberté en translation radiale ainsi qu'une caractéristique de force de rappel élastique linéaire (figure 14).

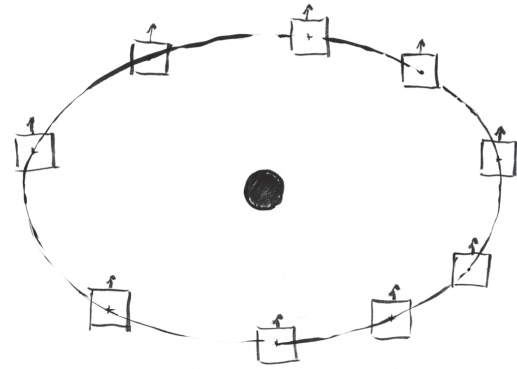


Fig. 15 : Planète orbitant en translation, avec orientation constante.

Ressorts centraux (orbites en translation). Les constructions mécaniques présentées dans les sections précédentes possèdent toutes plusieurs pièces tournantes. Ainsi, même si leur géométrie et leurs matériaux sont optimisés, le potentiel de réduction du moment d'inertie I reste borné. De manière à minimiser radicalement ρ et garantir un excellent isochronisme, il est impératif de réduire le nombre de pièces tournantes. Ceci peut être réalisé en utilisant une masse voyageant sur son orbite sans changer d'orientation, telle une planète sur laquelle les durées du jour et de l'année seraient identiques (figure 15). Le guidage flexible présenté sur la couverture du livre [13] est une implémentation physique étonnamment antérieure d'une quinzaine d'années au concept d'oscillateur isotrope à moment d'inertie nul qu'elle matérialise (figure 16).

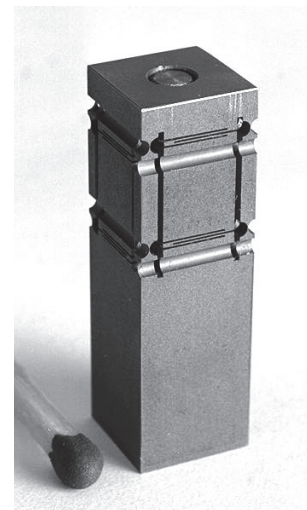


Fig. 16 : Ressort central monolithique à guidages flexibles doté de deux degrés de liberté en translation (hauteur totale 30 mm).

Ce guidage contraint la masse mobile à se translater selon deux degrés de liberté, sur une surface sphérique. La masse étant en translation, son moment d'inertie n'intervient pas dans l'équation de mouvement : du point de vue du mécanisme, elle se comporte comme une masse ponctuelle¹⁸ avec $I_m = 0$.

Ainsi, à la place de se baser sur la rotation d'un ressort doté d'un degré de liberté pour produire la loi de Hooke isotrope (ressorts fronde) nous considérons ici des ressorts dotés de deux degrés de liberté¹⁹ en translation plane présentant une force de rappel élastique centrale linéaire et isotrope²⁰. Ces ressorts seront appelés *ressorts centraux* puisqu'ils réalisent le concept de force centrale en mécanique classique où la force ne dépend que de la distance au centre (gravitation, force électrostatique). Les ressorts centraux permettent une réalisation directe de mécanismes IsoSpring.

La figure 17 illustre le concept de base avec deux ressorts identiques de même rigidité k , montés à 90° . Par la loi de Hooke, un petit déplacement dx du ressort horizontal ne produit qu'une force de rappel horizontale $dF_x = -kdx$, et de même, un petit déplacement dy du ressort vertical ne produit qu'une force de rappel verticale $dF_y = -kdy$. Donc, pour un petit déplacement, où la planète est au point $dP = dx + dy$, la force de rappel est

$$dF = -k(dx + dy) = -kdP,$$

et la loi de Hooke isotrope reste valable : la force est indépendante de la direction et le ressort est isotrope. Cet argument démontre qu'un tel ressort est isotrope au premier ordre, puisque ceci est la signification formelle des différentiels dx , dy , etc.

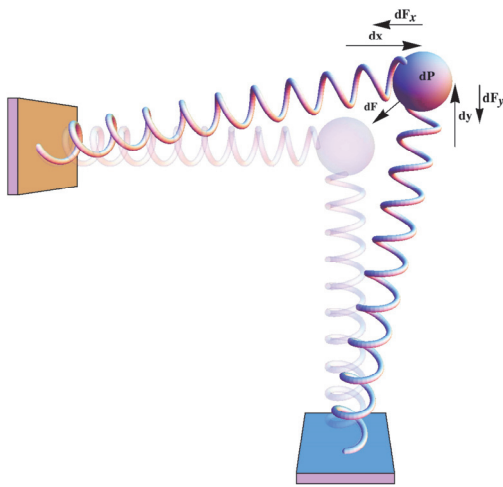


Fig. 17 : Force de rappel isotrope k : $dF = -kdP$.

Pour une réalisation pratique, en particulier en présence de la gravité terrestre, il est nécessaire d'adjoindre un guidage planaire à la masse en plus des deux ressorts conceptuellement représentés sur la figure 17. Certaines architectures

¹⁸ Notons que l'annulation de l'inertie propre de la masse implique que sa trajectoire ne passe jamais par le centre de force, ceci en raison de la conservation du moment cinétique. Les ressorts centraux rendent ainsi les butées mécaniques centrales (telles que celle de la figure 13) optionnelles.

¹⁹ Notons que les ressorts centraux dotés de trois degrés de liberté en translation permettent eux aussi, en principe, en l'absence de gravitation terrestre, de reproduire le modèle de Newton.

²⁰ Ce concept est une idéalisation, en pratique, nos réalisations auront des défauts de linéarité, isotropie et planarité que nous essayerons de quantifier, et pourraient aussi avoir plus que deux degrés de liberté.

de guidages flexibles permettent de produire à la fois les fonctions de guidage à deux degrés de liberté et de ressort isotrope, au sein d'une seule et même pièce mécanique.

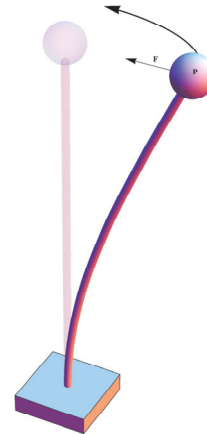


Fig. 18 : Tige ressort de section cylindrique à caractéristique élastique isotrope avec masse P orbitant en gardant son orientation autour de l'axe de la tige fixe.

La figure 18 présente un premier exemple de réalisation simple d'un tel ressort central basé sur une tige flexible de section circulaire en porte-à-faux, munie d'une masse en extrémité. La tige peut avoir une section constante ou variable le long de son axe : tant qu'elle est un corps de révolution, de sa symétrie résulte un comportement élastique isotrope. Notons qu'avec ce guidage la trajectoire de la masse a le défaut de ne pas être planaire. Notons également que le guidage constitué par la tige est doté de 5 degrés de liberté [13], donc de 5 modes propres fondamentaux et que seuls les deux premiers modes propres sont exploités pour la fonction d'oscillateur.

La figure 19 présente un second exemple de ressort central basé cette fois sur une architecture sérielle composée de deux guidages flexibles à deux lames parallèles montés à 90° . Un tel guidage contraint la masse mobile P à se translater dans un plan selon deux degrés de liberté en translation.

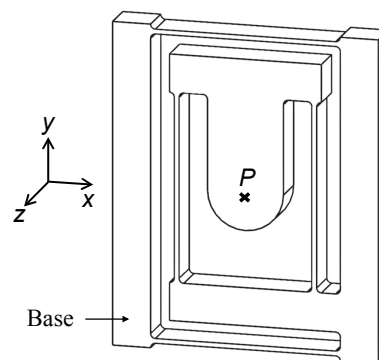


Fig. 19 : Ressort central composé de deux guidages flexibles à lames parallèles.

Des phénomènes de second ordre affectent l'isotropie de ce mécanisme. Il constitue toutefois une approximation quantifiable du ressort isotrope théorique. L'effet du défaut résiduel d'isotropie sur la chronométrie n'a pas encore été quantifié à ce jour. Il est le sujet de nos recherches en cours.

Les ressorts centraux à deux degrés de liberté étant dénués de plateau tournant, les oscillations doivent être entretenues par une transmission agissant directement sur la masse.

Entretien de l'oscillateur harmonique isotrope à ressort central

Une propriété remarquable de l'oscillateur harmonique isotrope est que son mouvement est continu (pas d'arrêt) et que son sens de révolution est donc toujours le même (pas d'inversion de sens). Ceci permet d'envisager un entretien continu sans échappement. La figure 20 montre, à titre d'exemple, une simple manivelle télescopique, 3 de la figure, attachée au mobile moteur, 2 de la figure, sur lequel agit le couple moteur M . La manivelle est équipée d'une fente oblongue dans laquelle coulisse une goupille, 4 de la figure, attachée à la masse, 5 de la figure, suspendue sur le guidage flexible, 6 représenté symboliquement sur cette figure. L'axe de rotation de la manivelle est confondu avec l'axe neutre du guidage flexible. Le couple moteur τ résulte en une force tangentielle F_t qui restitue à l'oscillateur son énergie dissipée. Plus τ est grand, plus le rayon des orbites est grand, néanmoins, la période de révolution reste la même, au défaut résiduel d'isochronisme près. Dans cette construction, l'unique organe massif en rotation est la manivelle et il est aisé de rendre son inertie plusieurs ordres de grandeur plus faible que celle de la masse autour du centre de force de la suspension et d'atteindre ainsi théoriquement un excellent isochronisme.

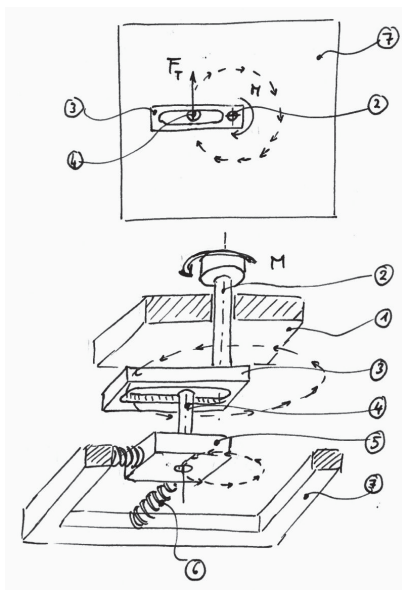


Fig. 20 : Manivelle télescopique pour l'entretien continu de l'oscillateur de type ressort central.

Conclusion

Un oscillateur mécanique inspiré directement du système solaire isochrone imaginé par Issac Newton est décrit. Une architecture cinématique supprimant l'essentiel des masses tournantes permet théoriquement d'atteindre un isochronisme compatible avec un garde-temps horloger. Cet oscillateur étant bi-dimensionnel, il est doté de modes

d'oscillation en rotation uni-directionnelle. Ceci permet un entraînement continu : le maintien est réalisé par une transmission mécanique simple, comme une manivelle télescopique. L'échappement disparaît ainsi du mouvement des montres mécaniques et le schéma énergétique devient :

ENERGIE \Rightarrow Transmission \Rightarrow Oscillateur

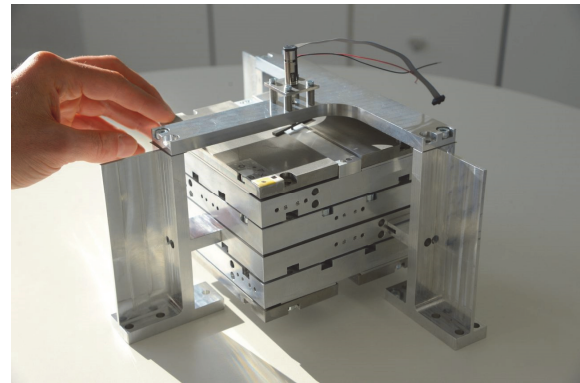


Fig. 21 : Démonstrateur IsoSpring fonctionnel construit par l'Instant-Lab.

La simplification mécanique résultante, ainsi que la réduction des pertes (absence des pertes de l'échappement et augmentation du facteur de qualité grâce aux guidages flexibles) laissent envisager des garde-temps aux performances inégalées en termes de réserve de marche et de précision chronométrique. Le temps, quant à lui, redevient silencieux et continu, à l'instar du mouvement des corps célestes, sa référence originelle.

Références

- [1] GEORGE BIDDELL AIRY, On the Disturbances of Pendulums and Balances, and on the Theory of Escapements, *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, vol. 3, Part I (1830), p. 105–128. www.loria.fr/~roegel/articles/airy1827annotated.pdf Version 24 décembre 2013.
- [2] JOSEPH BERTRAND, Théorème relatif au mouvement d'un point attiré vers un centre fixe, *C. R. Acad. Sci.* 77 (1873), p. 849–853.
- [3] JONATHAN BETTS, *Harrison*, National Maritime Museum, London, 2007.
- [4] F. J. BRITTEN, *Britten's Clock and Watchmaker's Handbook*, 11th Edition, Antique Collectors' Club, 1996.
- [5] CECIL CLUTTON and GEORGE DANIELS, *Watches*, Viking Press, 1965.
- [6] GEORGE DANIELS, *All in Good Time : Reflections of a Watchmaker*, Revised edition, Philip Wilson Publishers, 2012.
- [7] LEOPOLD DEFOSSEZ, Les savants du XVII^e siècle et la mesure du temps, Edition du *Journal Suisse d'Horlogerie*, Lausanne, 1946.

- [8] LEOPOLD DEFOSSEZ, *Théorie Générale de l'Horlogerie, deux tomes*, La Chambre suisse d'horlogerie, La Chaux-de-Fonds, 1950.
- [9] NICOLAS DÉHON, *Escapement mechanism*, EP 2105806 B1, 2013-11-13.
- [10] RUPERT T. GOULD, *The Marine Chronometer, Second Edition*, The Antique Collector's Club, Woodbridge, England, 2013.
- [11] EDMUND BECKETT, BARON GRIMPETHORPE, *A rudimentary Treatise on Clocks, Watches & Bells, 8th Edition*, Crosby Lockwood and Son, D. Van Nostrand Company, London 1903. www.gutenberg.org/files/17576/17576-pdf.pdf, version 24 décembre 2013.
- [12] K. JOSIC and R. W. HALL, Planetary Motion and the Duality of Force Laws, *SIAM Review* 42 (2000), p. 114-125.
- [13] SIMON HENEIN, *Conception des guidages flexibles*, Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, Lausanne, 2004.
- [14] CHRISTIAAN HUYGENS, *Horologium Oscillatorium*, Latin et traduction anglaise par Ian Bruce, www.17centurymaths.com/contents/huygenscontents.html, version 9 juin 2014.
- [15] *Oeuvres complètes de Christiaan Huygens, Tome 18, l'horloge à pendule ou à balancier de 1666 à 1695*, Société hollandaise des sciences 1888-1950, Martinus Nijhoff, La Haye 1934. En ligne gallica.bnf.fr (Bibliothèque nationale de France).
- [16] J. H. LEOPOLD, *The Longitude Timekeepers of Christiaan Huygens*, in "The Quest for Longitude," edited by William H. Andrewes, Proceedings of the Longitude Symposium, Harvard University 1993, Second Edition, Harvard University 1998, p. 101-114.
- [17] ISAAC NEWTON, *Principes mathématiques de la philosophie naturelle*, traduction et commentaires d'Emilie du Châtelet, Desaint & Saillant, Paris 1756. En ligne www.e-rara.ch/doi/10.3931/e-rara-1743 Version 6 juin 2014.
- [18] J.-P. MUSY, F. MAIER, A. KRÜTTLI, Echappement et spiral réalisés en Silinvar®, *Actes de la Journée d'étude SSC*, 2008.
- [19] JOSEPH V. NOBLE and DEREK J. DE SOLLA PRICE, The Water Clock in the Tower of the Winds, *American Journal of Archaeology* 72 (1968), p. 345-355 www.jstor.org/stable/503828 URL stable.
- [20] A. L. RAWLINGS, *The Science of Clocks and Watches*, Third Edition, British Horological Institute, Upton UK, 1993.
- [21] C.-A. REYMONDIN, G. MONNIER, D. JEANNERET, U. PELARATTI, *Théorie d'horlogerie*, FET, Suisse, 1998.
- [22] DEREK ROBERTS, *Precision Pendulum Clocks*, Schiffer Publishing Ltd., Atglen, PA, 2003.
- [23] DAVA SOBEL, *Longitude : The True Story of a Lone Genius Who Solved the Greatest Scientific Problem of His Time*, Walker & Company, 2007.
- [24] TARDY (HENRI-GUSTAVE LENGELLE), *La Montre, les échappements à recul, le spiral, la compensation*, Paris, Chez l'auteur, 1968.
- [25] WILLIAM THOMSON, LORD KELVIN, *On a new astronomical clock, and a pendulum governor for uniform motion*, Proceedings of the Royal Society 17 (1869), p. 468-470.
- [26] ILAN VARDI, La Marche du Soleil, un affichage naturel de l'équation du temps, *Bulletin SSC* 62, 2009, p. 37-44.
- [27] ILAN VARDI, Le facteur de qualité en horlogerie mécanique, *Bulletin SSC* 75, 2014, p. 57-65.
- [28] ILAN VARDI, SIMON HENEIN, LENNART RUBBERT, *The isotropic harmonic oscillator and its application to the measure of time*, in preparation 2014.
- [29] H. WALLMAN, Do variations in gravity mean that Harrison approached the limit of pendulum accuracy ?, *Horological Journal* 135, 1992, p. 24-25.
- [30] E. T. WHITTAKER, *A Treatise on the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies, 4th Edition*, Cambridge University Press, 1988.
- [31] E. T. WHITTAKER AND G. N. WATSON, *A Course of Modern Analysis, Fourth edition (1927)*, Cambridge University Press, 2006.
- [32] P. WINKLER, Mécanismes de régulation du couple d'un barillet, *Actes de la Journée d'Etude SSC* 2011, p. 35-43.
- [33] PHILIP WOODWARD, *My Own Right Time*, Oxford University Press, 1995.