IMT – INSTITUT DE MICROTECHNIQUE
LABORATOIRE DE PRODUCTION MICROTECHNIQUE (LPM)
Thomas Maeder
CH-1015 LAUSANNE, Switzerland
☎: + 41 21 693 58 23
Fax : + 41 21 693 38 91
thomas.maeder@epfl.ch
http://ipr.epfl.ch

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

T0001-FR fréquence mN EPFL - 2014-07-14.docx

T0001 – Capteur de force MilliNewton

Bande passante en fréquence

Ce document donne un calcul approximatif de la bande passante de fréquence (mécanique et électrique) de MilliNewton – et sert de base pour le calcul d'autres capteurs de type cantilever.
Les fréquences de résonance mécanique des capteurs MilliNewton sont élevées, en raison de la très petite taille de la poutre. La fréquence de travail est limitée par le circuit électrique à env. 1 kHz (MilliNewton-A) ou 200 Hz (MilliNewton-B).

Thomas Maeder, 14.7.2014[1]

Table des matières

[1] Remplace la version 2004-04-19.

1. Résonance mécanique

1.1. Cantilever simple – solution analytique

D'après Whitney[1] et Strässler[2], les fréquences de résonance d'un cantilever de section constante sont données par :

(1) $$f_i = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{E^* \cdot I}{\rho \cdot S}} \cdot \left(\frac{z_i}{L}\right)^2$$

f_i	fréquence du mode i
E^*	module élastique effectif
I	moment d'inertie (en flexion) de la section
ρ	masse volumique de la poutre
S	section
z_i	constante du mode i
L	longueur libre de la poutre

Les valeurs approximatives de z_i sont données au tableau 1 ci-dessous.

i	z_i	***i***	z_i
1	1.8751	4	10.9955
2	4.6941	5	14.1372
3	7.8546	6	17.2786

Tableau 1. Constantes z_i des modes de résonance d'un cantilever.

Pour une poutre de section rectangulaire b x h, avec $b >> h$, on a :

(2) $$E^* = \frac{E}{1-\nu^2}$$

(3) $$I = \frac{b \cdot h^3}{12}$$

(4) $$S = b \cdot h$$

E	module de Young
ν	coefficient de Poisson
b	largeur de la poutre
h	épaisseur de la poutre

En combinant (1)–(4), on obtient finalement :

(5) $$f_i = \frac{1}{4 \cdot \sqrt{3} \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{E}{\left(1-\nu^2\right) \cdot \rho}} \cdot h \cdot \left(\frac{z_i}{L}\right)^2$$

En général, on s'intéresse au 1er mode, qui limite en pratique la fréquence de travail du capteur. Dans ce cas :

(6) $$f_1 \cong 0.16154 \cdot \sqrt{\frac{E}{\left(1-\nu^2\right) \cdot \rho}} \cdot \frac{h}{L^2}$$

1.2. Cantilever simple - solution masse - ressort

On cherche à exprimer la solution ci-dessus en termes d'un système masse-ressort, afin de pouvoir ultérieurement approximer l'effet de l'adjonction d'une masse supplémentaire (la bille de centrage). Pour une masse m suspendue à un ressort sans masse de rigidité k, la fréquence de résonance f s'écrit :

(7) $$f = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{k}{m^*}}$$

f	fréquence de résonance
k	constante de rigidité du ressort
m^*	masse "effective" (voir ci-dessous)

Or, pour un cantilever, où la force est appliquée au point $x \leq L$:

(8) $$m_c = \rho \cdot S \cdot L$$

(9) $$k = 3\frac{E^* \cdot I}{x^3}$$

m_c	masse du cantilever
x	point d'application de la force

Pour un cantilever de section rectangulaire b x h avec $b >> h$ – voir (2)-(4) :

(10) $$m_c = \rho \cdot b \cdot h \cdot L$$

(11) $$k = \frac{E \cdot b \cdot h^3}{4x^3}$$

(12) $$m^* = u \cdot m_c$$

u	coefficient masse réelle - équivalente

Si on écrit la fréquence d'après (6) :

(13) $$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{E}{\left(1-\nu^2\right)\cdot\rho}} \cdot \frac{h}{\sqrt{u \cdot x^3 \cdot L}} \cong 0.16154 \cdot \sqrt{\frac{E}{\left(1-\nu^2\right)\cdot\rho}} \cdot \frac{h}{L^2}$$

(14) $$u \cong 0.24267 \cdot \frac{L^3}{x^3}$$

1.3. Cantilever - adjonction d'une masse sur la poutre

Si on ajoute une masse m' au point x de la poutre, on obtient :

$$(15) \qquad f' \cong \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{k}{u \cdot m_c + m'}}$$

$$(16) \qquad f' \cong 0.16154 \cdot \sqrt{\frac{E}{\left(1-\nu^2\right) \cdot \rho}} \cdot \frac{h}{L^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{m' \cdot x^3}{0.24267 \cdot \rho \cdot b \cdot h \cdot L^4}}}$$

1.4. Application à MilliNewton

Les paramètres de MilliNewton sont donnés au tableau 2 ci-dessous.

Symbole	Description	400 mN	1'000 mN	2'000 mN	unité
b	largeur	3.0	3.0	3.0	mm
h	épaisseur	0.25	0.40	0.635	mm
x	pos. bille	8.0	8.0	8.0	mm
L	longueur libre	9.3	9.3	9.3	mm
ρ	densité Al_2O_3	3.9	3.9	3.9	mg/mm^3
m'	masse (bille)	4.1	4.1	4.1	mg
k	rigidité	7.6	30.9	124	N/mm
f	résonance (sans bille)	4.30	6.87	10.91	kHz
f'	résonance (avec bille)	3.64	6.16	10.16	kHz

Table 2. Fréquences de résonance mécanique calculées.

En réalité, l'encastrement de MilliNewton est imparfait. Les fréquences mécaniques de résonance réelles seront donc un peu plus faibles.

2. Bande passante électrique

2.1. Pont de mesure

La bande passante électrique du pont de mesure est limitée par :

(17) $$f_j \cong \frac{1}{2\pi \cdot k_j \cdot R_j \cdot C_j}$$

f_j	limite supérieure de fréquence du pont de mesure
k_j	facteur de capacité, 1 (sorties) or ½ (masse)
R_j	résistance de jauge de mesure
C_j	capacité de filtrage du pont de mesure

Pour le MilliNewton-A, nous avons: $C_j = 10$ nF, $k_j = 1$ (un condensateur entre les sorties du pont) et $R_j \cong 8$ kΩ (quelque peu variable), donc $f_j \cong 2$ kHz.
Pour le MilliNewton-B, on admet grosso modo les mêmes valeurs, hormis $k_j = 1/2$ (deux condensateurs, un entre chaque sortie et la masse), ce qui donne $f_j \cong 5$ kHz. Cependant, il y a un condensateur de filtrage additionnel C_f en parallèle avec une résistance de gain effective R_f (en fait un réseau de résistances), donnant une limite nettement plus basse:

(18) $$f_f \cong \frac{1}{2\pi \cdot R_f \cdot C_f}$$

où $R_f \cong \frac{1}{2} R_j \cdot z$

f_f	limite supérieure de fréquence de l'amplificateur
R_f	résistance effective de gain en boucle fermée
C_f	condensateur de filtrage de l'amplificateur
z	gain de l'amplificateur

Avec $C_f = 220$ pF et $z \cong 300$ (valeur conservatrice, en fait plus faible), on obtient une fréquence limite plus faible, $f_f \cong 700$ Hz, qui domine la réponse électrique du MilliNewton-B.

2.2. Amplificateur – gain × fréquence

La bande passante d'amplification est limitée par :

(19) $$f_A \cong \frac{f_1}{z}$$

f_A	fréquence limite d'amplification
f_1	fréquence limite de gain unitaire
z	amplification (gain)

Pour MilliNewton-A, nous avons : $f_1 \cong 1$ MHz[3] et $z \cong 300$, donc $f_A \cong 3.3$ kHz.
For MilliNewton-B, nous avons : $f_1 \cong 0.8$ MHz[4] et $z \cong 300$, donc $f_A \cong 2.7$ kHz.

2.3. Amplificateur – variation de sortie

Pour de grandes variations de sortie, la fréquence peut aussi être limitée par le taux maximal de variation de sortie de l'amplificateur. Pour ce cas :

(20) $$f_S \cong \frac{U'_{\max}}{\pi \cdot U_S \cdot S}$$

f_S	fréquence limite de sortie (grandes variations)
U'_{max}	taux maximal de variation de sortie
U_S	tension d'alimentation
S	pleine échelle (ratiométrique) de sortie

Pour MilliNewton-A[3], la valeur de U'_{max} est de 0.1 V/μs. Pour les valeurs nominales $U_S = 5$ V et $S = 0.6$, on obtient $f_S \cong 10$ kHz. Pour MilliNewton-B[4], le taux de variation plus grand de l'amplificateur (U'_{max} = 1 V/μs) donne une fréquence limite nettement plus élevée, $f_S \cong 100$ kHz.

3. Conclusion

Pour MilliNewton-A, la fréquence de travail est essentiellement limitée par deux caractéristiques électriques : le réseau RC formé par le pont de mesure et son condensateur de filtrage, et le produit gain × bande passante de l'amplificateur utilisé (LM 358). Ces deux fréquences se situent autour de quelques kHz. On s'attend donc à une altération notable du signal de sortie au-delà de ~1 kHz.

Pour MilliNewton-B, la fréquence limite est plus basse (~700 Hz), et découle presque exclusivement de la boucle fermée du circuit d'amplification. Cette valeur est plus en accord avec le temps de réponse spécifié, < 10 ms ; on escompte une altération du signal au-delà de ~200 Hz.

Les fréquences de résonance mécanique dépendent de l'épaisseur de la poutre cantilever, et se situent en général au dessus des limites électriques, débutant par > 3 kHz pour la gamme de force la plus faible.

---

1. Whitney-S, "Vibrations of cantilever beams: deflection, frequency and research uses", University of Nebraska - Lincoln (UNL), 1999.
2. Strässler-S Ryser-P, "Project VIVIGLUS (mechanical)", EPFL-LPM, 2003.
3. National Semiconductor, "LM158/LM258/LM358/LM2904 Low Power Dual Operational Amplifiers – datasheet", 1999.
4. Maxim, "MAX4400-MAX4403 Single/dual/quad, low-cost, single-supply, rail-to-rail Op amps with shutdown", datasheet 19-1599, rev. 3, 2001.