

---

# PURETÉ DES FIBRES DE SPRINGER AFFINES POUR $GL_4$

PAR ZONGBIN CHEN

---

RÉSUMÉ. —

Pour  $GL_4$  et  $\gamma \in \mathfrak{gl}_4(F)$  un élément semi-simple régulier non-ramifié entier, la fibre de Springer affine  $\mathcal{X}_\gamma$  admet un pavage en espaces affines, donc sa cohomologie est “pure”.

ABSTRACT (*Purity of affine Springer fibers for  $GL_4$* ). — The affine Springer fiber corresponding to  $GL_4$  and regular semi-simple integral split element admits an affine paving, so its cohomology is “pure”.

## 1. Introduction

Soit  $k$  un corps algébriquement clos. On note  $F = k((\epsilon))$  le corps de séries de Laurent sur  $k$ ,  $\mathcal{O} = k[[\epsilon]]$  son anneau d’entier,  $\mathfrak{p} = \epsilon k[[\epsilon]]$  son idéal maximal. On fixe une clôture algébrique  $\overline{F}$  de  $F$ , et  $\text{val} : \overline{F} \rightarrow \mathbf{Q}$  la valuation discrète normalisée par  $\text{val}(\epsilon) = 1$ . Soient  $G = GL_d$ ,  $T$  le tore maximal des matrices diagonales,  $B$  le sous-groupe de Borel des matrices triangulaires supérieures de  $G$ . On notera leur algèbre de Lie par la lettre gothique correspondante. Soient  $K = G(\mathcal{O})$ ,  $I$  le sous-groupe d’Iwahori standard de  $G(F)$ , i.e. il est l’image inverse de  $B$  sous la réduction  $G(\mathcal{O}) \rightarrow G(k)$ . Les groupes  $G(F)$ ,  $K$ ,  $I$  sont munis des structures de ind- $k$ -schéma en groupe. On note  $\mathcal{X} = G(F)/K$  la grassmannienne affine, c’est un ind- $k$ -schéma qui classe les réseaux dans  $F^d$  :

$$\mathcal{X} = \{L \subset F^d \mid L \text{ est un } \mathcal{O}\text{-module de type fini tel que } L \otimes F = F^d\}.$$

Soit  $\gamma \in \mathfrak{g}(F)$  un élément semi-simple régulier. La fibre de Springer affine

$$\mathcal{X}_\gamma = \{g \in G(F)/K \mid \text{Ad}(g^{-1})\gamma \in \mathfrak{g}(\mathcal{O})\}$$

a été introduite par Kazhdan et Lusztig dans [KL]. C’est un sous-schéma fermé localement de type fini et de dimension finie de  $\mathcal{X}$ , qui est non-vide si et seulement si  $\gamma$  est *entier* (i.e. ses valeurs propres sont entières dans  $\overline{F}$ ). Elle est utilisée par Goresky, Kottwitz et Macpherson dans [GKM2] pour montrer le lemme fondamental de Langlands-Shelstad, sous l’hypothèse suivante :

---

0. 18 juillet 2012

0. ZONGBIN CHEN, Département de mathématiques, Bât. 425, Université Paris-sud 11, 91405 Orsay-Cedex, France  
E-mail : zongbin.chen@gmail.com

CONJECTURE 1.1 (Goresky-Kottwitz-Macpherson). — Soit  $\gamma \in \mathfrak{g}(F)$  un élément semi-simple régulier entier, la cohomologie de la fibre de Springer affine  $\mathcal{X}_\gamma$  est pure au sens de Grothendieck-Deligne.

Dans [GKM1], Goresky, Kottwitz et Macpherson ont montré cette conjecture pour  $\gamma$  équivalué. L'élément  $\gamma$  est dit *équivalué* si  $\text{val}(\alpha(\gamma))$  ne dépend pas de la racine  $\alpha$  de  $G$  sur  $\overline{F}$  par rapport à  $Z_\gamma(G)$ . Pour cela, ils ont construit un pavage en espaces affines de  $\mathcal{X}_\gamma$ . Pour une variété  $X$  sur  $k$ , un *pavage en espaces affines* de  $X$  est une filtration croissante exhaustive  $X_0 \subset X_1 \subset \dots$  de  $X$  telle que  $X_i$  est fermé et  $X_i \setminus X_{i-1}$  est isomorphe à un espace affine standard,  $\forall i$ . Dans le cas où  $\gamma \in \mathfrak{t}(\mathcal{O})$  est équivalué, un tel pavage est obtenu en intersectant  $\mathcal{X}_\gamma$  avec le pavage de Bruhat-Tits.

Mais pour  $\gamma \in \mathfrak{t}(\mathcal{O})$  non-équivalué, les intersections  $\mathcal{X}_\gamma \cap IvK/K$  sont en général singulières. Un exemple typique est le suivant.

EXEMPLE 1.1. — Soit  $G = \text{GL}_3$ ,  $\gamma = \begin{pmatrix} \epsilon^2 & & \\ & \epsilon^4 & \\ & & -\epsilon^4 \end{pmatrix}$ . Pour  $v \in \mathbf{Z}^3$ , on note  $\epsilon^v = \begin{pmatrix} \epsilon^{v_1} & & \\ & \epsilon^{v_2} & \\ & & \epsilon^{v_3} \end{pmatrix}$  et  $C(v) = I\epsilon^v K/K$ . On a

$$C(0, 2, -2) = \begin{bmatrix} 1 & \mathcal{O}/\mathfrak{p}^2 \\ \mathfrak{p}/\mathfrak{p}^2 & 1 \\ & \mathcal{O}/\mathfrak{p}^4 \\ & & 1 \end{bmatrix} \epsilon^v K/K.$$

En utilisant la coordonnée

$$\begin{bmatrix} 1 & a_0 + a_1\epsilon \\ b_1\epsilon & 1 \\ & \sum_{i=0}^3 c_i\epsilon^i \\ & & 1 \end{bmatrix} \in \begin{bmatrix} 1 & \mathcal{O}/\mathfrak{p}^2 \\ \mathfrak{p}/\mathfrak{p}^2 & 1 \\ & \mathcal{O}/\mathfrak{p}^4 \\ & & 1 \end{bmatrix},$$

on trouve que l'intersection  $\mathcal{X}_\gamma \cap IvK/K$  est la sous-variété de  $\mathbf{A}^7$  définie par l'équation

$$a_0 b_1 = 0.$$

Lucarelli a construit dans [Lu] un pavage en espaces affines de  $\mathcal{X}_\gamma$  pour  $\text{PGL}_3$ . Il part d'un pavage en espaces affines de  $\mathcal{X}$  qui est différent de celui de Bruhat-Tits. Dans notre exemple pour  $\text{GL}_3$ , Lucarelli rassemble le pavé singulier  $C(0, 2, -2) \cap \mathcal{X}_\gamma$  et le pavé lisse  $C(1, 1, -2) \cap \mathcal{X}_\gamma$ , et redécoupe la réunion de ces deux pavés en utilisant la décomposition de Bruhat-Tits pour l'Iwahori

$$I' = \text{Ad}(\text{diag}(1, \epsilon^2, \epsilon^2))I.$$

Le pavé singulier  $C(0, 2, -2) \cap \mathcal{X}_\gamma$  sera coupé en 2 parties. D'une part on a la branche  $b_1 = 0$ , qui est isomorphe à  $\mathbf{A}^6$ , d'autre part, on a la branche  $b_1 \neq 0$ ,  $a_0 = 0$ , qui est isomorphe à  $\mathbb{G}_m \times \mathbf{A}^5$ . Cette dernière sera réunie avec la cellule  $C(1, 1, -2) \cap \mathcal{X}_\gamma$  pour former l'espace affine  $\mathbf{A}^6$ , ce que on peut voir dans le calcul suivant :

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 1 & a_1\epsilon \\ b_1\epsilon & 1 \\ & \sum_{i=0}^3 c_i\epsilon^i \\ & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \epsilon^2 & & \\ & & \epsilon^{-2} & \\ & & & 1 \end{bmatrix} K/K \\ &= \begin{bmatrix} 1 & b_1^{-1}\epsilon^{-1} & a_1\epsilon - b_1^{-1}c_3\epsilon^2 \\ & 1 & \sum_{i=0}^2 c_i\epsilon^i \\ & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon & & & \\ & \epsilon & & \\ & & \epsilon^{-2} & \\ & & & 1 \end{bmatrix} K/K, \end{aligned}$$

et

$$C(1, 1, -2) \cap \mathcal{X}_\gamma = \begin{bmatrix} 1 & \mathfrak{p}/\mathfrak{p}^3 \\ & 1 \\ & \mathcal{O}/\mathfrak{p}^3 \\ & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon & & & \\ & \epsilon & & \\ & & \epsilon^{-2} & \\ & & & 1 \end{bmatrix} K/K.$$

Donc la branche  $b_1 \neq 0$ ,  $a_0 = 0$  et la cellule  $C(1, 1, -2) \cap \mathcal{X}_\gamma$  se rassemblent en l'espace affine

$$\begin{bmatrix} 1 & \mathfrak{p}^{-1}/\mathcal{O} & \mathfrak{p}/\mathfrak{p}^3 \\ & 1 & \mathcal{O}/\mathfrak{p}^3 \\ & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon \\ \epsilon \\ \epsilon^{-2} \end{bmatrix} K/K \cong \mathbf{A}^6.$$

Remarquons que dans l'exemple 1.1, on peut aussi déplacer la branche  $a_0 \neq 0$ ,  $b_1 = 0$  vers le pavé lisse  $C(-2, 2, 0) \cap \mathcal{X}_\gamma$ , ce que ne fait pas Lucarelli. Nous utilisons en fait les deux possibilités pour obtenir une famille de pavages de  $GL_3$  qui sont différents de celui de Lucarelli, mais qui nous permet de paver la fibre de Springer affine pour  $GL_4$ .

Soit  $\{e_i\}_{i=1}^d$  la base standard de  $F^d$ . Pour  $m \in \mathbf{Z}$ , on note

$$\mathcal{X}_{\geq -m} = \{L \in \mathcal{X} \mid L \subset \epsilon^{-m}\mathcal{O}^d\}.$$

C'est un sous schéma fermé  $T$ -invariant de  $\mathcal{X}$ , et  $\mathcal{X} = \lim_{m \rightarrow +\infty} \mathcal{X}_{\geq -m}$ . Notre résultat principal est

**THÉORÈME 1.1.** — *Pour  $G = GL_4$  et  $\gamma \in \mathfrak{g}(F)$  semi-simple régulier non-ramifié entier,  $\mathcal{X}_{\geq -m} \cap \mathcal{X}_\gamma$  admet un pavage en espaces affines, en particulier,  $\mathcal{X}_\gamma$  est pur.*

L'idée est de couper  $\mathcal{X}_{\geq -m} \cap \mathcal{X}_\gamma$  en parties localement fermées telles que chaque partie est une fibration en espaces affines sur une sous-variété localement fermée de  $\mathcal{X}_\gamma^{GL_3}$ , et donc le pavage est ramené aux pavages pour  $GL_3$ .

**Notations.** On note  $\Phi(G, T) = \{\alpha_{i,j}\}$  le système de racines de  $G$  par rapport à  $T$  et on simplifie  $\alpha_i = \alpha_{i,i+1}$ , on note  $\{\varpi_i\}_{i=1}^{d-1}$  les poids fondamentaux correspondants. À toute racine  $\alpha \in \Phi(G, T)$ , on associe de la manière usuelle une co-racine  $\alpha^\vee \in X_*(T)$ . On note  $X_*^+(T)$  le semi-groupe des co-caractères dominants. On note  $W = \mathfrak{S}_d$  le groupe de Weyl de  $G$ , on note  $s_{i,j} \in W$  la réflexion associée à la racine  $\alpha_{i,j}$  et on simplifie  $s_i = s_{i,i+1}$ . Pour tout sous-groupe fermé  $H$  de  $G$  stable par  $T$  sous l'action adjointe, on note  $\Phi(H, T)$  l'ensemble des racines de  $T$  dans  $\text{Lie}(H)$ . On note  $\mathcal{F}(T)$  l'ensemble des sous-groupes paraboliques de  $G$  contenant  $T$ , et  $\mathcal{L}(T)$  l'ensemble des sous-groupes de Levi contenant  $T$ .

Pour  $M \in \mathcal{L}(T)$ , on utilise un exposant  $M$  pour désigner l'objet correspondant pour  $M$ . On identifie la grassmannienne affine  $\mathcal{X}^M$  à un sous-ind- $k$ -schéma fermé de  $\mathcal{X}$  par l'injection naturel  $mM(\mathcal{O}) \rightarrow mK, \forall m \in M(F)$ .

Pour  $x \in \mathbf{R}$ , on note  $[x]$  le plus grand entier qui est inférieure ou égale à  $x$ , et  $\lceil x \rceil$  le plus petit entier qui est supérieur ou égale à  $x$ .

**Remerciements.** C'est un grand plaisir pour moi de remercier G. Laumon pour m'avoir proposé ce sujet de recherche et ses encouragements constants. Je le remercie aussi pour les nombreuses améliorations qu'il a apporté à ce travail. Je remercie U. Görtz et T. Haines pour avoir signalé quelques imprécisions sur la longueur et l'ordre de Bruhat-Tits sur le groupe de Weyl affine. Je remercie enfin le rapporteur anonyme de cet article pour sa relecture attentive.

## 2. Pavages non standard de la grassmannienne affine

**2.1. Filtration de Moy-Prasad.** — Le tore "pivotant"  $\mathbb{G}_m$  agit sur le corps  $F = k((\epsilon))$  par  $t * \epsilon^n = t^n \epsilon^n, \forall t \in k^\times, n \in \mathbf{Z}$ . Ainsi il agit sur  $G(F)$  et son algèbre de Lie  $\mathfrak{g}_F$ . Soit  $\tilde{T} = \mathbb{G}_m \times T$ , le

premier facteur étant le tore pivotant. On note  $\nu_0 \in X^*(\mathbb{G}_m)$  le caractère défini par  $\nu_0(t) = t$ . On note  $(n, \alpha_{i,j})$  le caractère  $(\nu_0^n, \alpha_{i,j})$  de  $\tilde{T}$ .

L'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}_F$  se décompose en espaces propres sous l'action de  $\tilde{T}$  :

$$\mathfrak{g}_F = \bigoplus_{m \in \mathbf{Z}} \epsilon^m \mathfrak{t} \oplus \bigoplus_{(n, \alpha) \in \mathbf{Z} \times \Phi(G, T)} \mathfrak{g}_\alpha \epsilon^n + \mathfrak{g} \epsilon^N, \quad N \gg 0,$$

où  $\epsilon^m \mathfrak{t}$  est de poids  $(m, 0)$  et  $\mathfrak{g}_\alpha \epsilon^n$  est de poids  $(n, \alpha)$ .

Pour  $x \in \mathfrak{t}$  fixé,  $t \in \mathbf{R}$ , on définit une filtration sur  $\mathfrak{g}_F$  :

$$\mathfrak{g}_{x,t} = \bigoplus_{\substack{(n, \alpha) \in \mathbf{Z} \times \Phi(G, T) \\ \alpha(x) + n \geq t}} \mathfrak{g}_\alpha \epsilon^n + \mathfrak{g} \epsilon^N, \quad N \gg 0.$$

C'est la filtration de Moy-Prasad sur  $\mathfrak{g}_F$  introduite dans [MP]. Pour  $t \geq 0$ , on note  $\mathbf{G}_{x,t}$  le sous-groupe de  $G(F)$  contenant  $T$  dont l'algèbre de Lie est  $\mathfrak{g}_{x,t}$ . Alors,  $\mathbf{G}_x := \mathbf{G}_{x,0}$  est un sous-groupe parahorique de  $G(F)$  contenant  $T$ , et  $\mathbf{G}_{x,t}$  est un sous-groupe distingué de  $\mathbf{G}_x$ .

EXEMPLE 2.1. — 1. Pour  $0 \in \mathfrak{t}$ , on a  $\mathbf{G}_0 = K$ .

2. Pour  $x_0 = (\frac{d}{d}, \frac{d-1}{d}, \dots, \frac{1}{d}) \in \mathfrak{t}$ , on a  $\mathbf{G}_{x_0} = I$ .

3. Pour  $\mathbf{a} \in \mathbf{Z}^d$ , on note  $x_{\mathbf{a}} = (\frac{d}{d} - a_1, \frac{d-1}{d} - a_2, \dots, \frac{1}{d} - a_d) \in \mathfrak{t}$ , on a

$$\mathbf{G}_{x_{\mathbf{a}}} = I_{\mathbf{a}} := \text{Ad}(\epsilon^{\mathbf{a}})I.$$

**2.2. La décomposition de Bruhat-Tits.** — La grassmannienne affine admet un pavage standard en espaces affines. Pour le décrire, on définit d'abord un ordre de Bruhat-Tits "modifiée"  $\prec_{I_{\mathbf{a}}}$  sur  $X_*(T)$ , on commence par  $\prec_I$ . Soit  $v, v' \in X_*^+(T)$ , alors  $v \prec_I v'$  si et seulement si

$$\begin{aligned} v_1 &\leq v'_1; \\ v_1 + v_2 &\leq v'_1 + v'_2; \\ &\vdots \\ v_1 + \dots + v_d &= v'_1 + \dots + v'_d. \end{aligned}$$

Puis on pose  $Wv \prec_I Wv'$ . Pour tout  $g, g' \in W/W_v$ , où  $W_v$  est le stabilisateur de  $v$ , on pose  $gv \prec_I g'v$  si et seulement si  $g' \prec_B g$ , où  $\prec_B$  est l'ordre sur  $W/W_v$  induite de celle de Bruhat-Tits sur  $W$  par rapport à  $B$ . Puis, pour  $v, v' \in X_*(T)$ , on pose

$$v \prec_{I_{\mathbf{a}}} v' \iff \epsilon^{-\mathbf{a}}v \prec_I \epsilon^{-\mathbf{a}}v'.$$

On identifie  $X_*(T)$  avec  $\mathcal{X}^T = T(F)/T(\mathcal{O})$  par l'application  $v \rightarrow \epsilon^v$ .

THÉORÈME 2.1 (Bruhat-Tits). — Pour  $\mathbf{a} \in \mathbf{Z}^d$ , on a un pavage en espaces affines

$$\mathcal{X} = \bigsqcup_{v \in X_*(T)} I_{\mathbf{a}}vK/K,$$

De plus,  $I_{\mathbf{a}}v'K/K \subset \overline{I_{\mathbf{a}}vK/K}$  si et seulement si  $v' \prec_{I_{\mathbf{a}}} v$ .

On peut consulter [IM] pour la démonstration. On va réécrire le théorème ci-dessus sous la forme d'une décomposition de Bialynicki-Birula. Le tore  $\tilde{T}$  agit sur  $\mathcal{X}$ . On note  $\tilde{\lambda}_{\mathbf{a}} \in X_*(\tilde{T})$  le co-caractère défini par

$$(1) \quad \tilde{\lambda}_{\mathbf{a}}(t) = (t^d, \text{diag}(t^{d-a_1d}, t^{d-1-a_2d}, \dots, t^{1-a_d d})).$$

Considérons l'action de  $\mathbb{G}_m$  sur  $\mathcal{X}$  induite par le co-caractère  $\tilde{\lambda}_{\mathbf{a}} \in X_*(\tilde{T})$ . L'ensemble des points fixes  $\mathcal{X}^{\mathbb{G}_m}$  est discret et égal à  $\{vK, v \in X_*(T)\}$ . De plus, on a

$$I_{\mathbf{a}}vK/K = \{L \in \mathcal{X} \mid \lim_{t \rightarrow 0} \tilde{\lambda}_{\mathbf{a}}(t)L = vK\}.$$

Ici, la limite porte le sens suivant : Soit  $N \in \mathbf{N}$  assez grand tel que  $L \in \mathcal{X}_{\geq -N}$ , alors le morphisme  $\lambda_L : \mathbb{G}_m \rightarrow \mathcal{X}$  défini par  $\lambda_L(t) = \tilde{\lambda}_{\mathbf{a}}(t)L, \forall t \in k^\times$  se factorise par  $\mathcal{X}_{\geq -N}$  puisque  $\mathcal{X}_{\geq -N}$  est stable sous l'action de  $\tilde{T}$ . Et il se prolonge à un morphisme unique  $\bar{\lambda}_L : \mathbf{A}^1 \rightarrow \mathcal{X}_{\geq -N}$  puisque  $\mathcal{X}_{\geq -N}$  est propre, la limite en question est définie comme

$$\lim_{t \rightarrow 0} \tilde{\lambda}_{\mathbf{a}}(t)L = \bar{\lambda}_L(0),$$

qui ne dépend que de  $\tilde{\lambda}_{\mathbf{a}}$  et de  $L$ .

### 2.3. Pavages non standard de la grassmannienne affine tronquée. —

*2.3.1. Pavage triangulaire.* — On va paver la variété  $\mathcal{X}_{\geq m}$  d'une manière différente de celle de Bruhat-Tits.

PROPOSITION 2.2. — Soit  $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_d) \in \mathbf{Z}^d$  et  $w \in X_*(T)$ .

1. L'intersection  $\mathcal{X}_{> m} \cap I_{\mathbf{a}}wK/K$  est non-vide seulement si  $w \in \mathcal{X}_{> m}$ .
2. Pour  $w \in \mathcal{X}_{\geq m}$ , l'intersection  $\mathcal{X}_{\geq m} \cap I_{\mathbf{a}}wK/K$  est isomorphe à un espace affine standard. Plus précisément,  $\mathcal{X}_{\geq m} \cap I_{\mathbf{a}}wK/K = J_{\mathbf{a}, m, w}K/K$ , où  $J_{\mathbf{a}, m, w}$  est la sous- $k$ -variété ouverte et fermée de  $I_{\mathbf{a}}$  formée des matrices  $(x_{i,j})$  telles que  $x_{i,i} = 1$  et que

$$\text{val}(x_{i,j}) \geq m_{i,j}, \quad \forall i \neq j,$$

$$\text{où } m_{i,j} = \max(a_i - a_j + \frac{i-j}{d}, m - w_j).$$

3. Par conséquent, on a un pavage en espaces affines

$$\mathcal{X}_{\geq m} = \bigsqcup_{w \in \mathcal{X}_{\geq m}^T} \mathcal{X}_{\geq m} \cap I_{\mathbf{a}}wK/K.$$

L'inclusion  $(\mathcal{X}_{\geq m} \cap I_{\mathbf{a}}vK/K) \subset \overline{(\mathcal{X}_{\geq m} \cap I_{\mathbf{a}}wK/K)}$  implique que  $v \prec_{I_{\mathbf{a}}} w$ .

*Démonstration.* — 1. Prenons  $y \in \mathcal{X}_{\geq m} \cap I_{\mathbf{a}}wK/K$ . Puisque  $\mathcal{X}_{\geq m}$  est fermé et invariant sous l'action de  $\tilde{T}$ , on a

$$w = \lim_{t \rightarrow 0} \tilde{\lambda}_{\mathbf{a}}(t)y \in \mathcal{X}_{\geq m}.$$

2. Pour  $w \in \mathcal{X}_{\geq m}$ ,  $gK \in I_{\mathbf{a}}wK/K$ , le réseau  $L = g \cdot \mathcal{O}^d$  admet une base unique  $\{b_i\}_{i=1}^d$  sur  $\mathcal{O}$  de la forme

$$b_i = \epsilon^{w_i} \left( e_i + \sum_{j=1, j \neq i}^d a_{j,i} e_j \right), \quad a_{j,i} \in F$$

tel que

$$a_j - a_i + \frac{j-i}{d} \leq \text{val}(a_{j,i}) < \alpha_{j,i}(w), \quad \text{or } a_{j,i} = 0.$$

On a  $L \in \mathcal{X}_{\geq m}$  si et seulement si

$$\text{val}(a_{j,i}) + w_i \geq m,$$

d'où la description précise de l'intersection  $\mathcal{X}_{\geq m} \cap I_{\mathbf{a}}wK/K$  dans la proposition. □

Passant aux composantes connexes de la grassmannienne affine. Pour  $v \in X_*(T)$ , on note  $\text{Sch}(v) = \overline{IvK/K}$  la variété de Schubert affine.

**COROLLAIRE 2.3.** — Soit  $v \in X_*^+(T)$  tel que  $v_1 \geq v_2 = \dots = v_d$ , soit  $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_d) \in \mathbf{Z}^d$ . Alors on a un pavage en espaces affines

$$\text{Sch}(v) = \bigsqcup_{w \in \text{Sch}(v)^T} \text{Sch}(v) \cap I_{\mathbf{a}}wK/K.$$

L'intersection  $\text{Sch}(v) \cap I_{\mathbf{a}}wK/K = J_{\mathbf{a},v,w}wK/K$ , où  $J_{\mathbf{a},v,w}$  est la sous- $k$ -variété ouverte et fermée de  $I_{\mathbf{a}}$  formée des matrices  $(x_{i,j})$  telles que

$$\text{val}(x_{i,j}) \geq m_{i,j}, \quad \forall i \neq j,$$

où  $m_{i,j} = \max(a_i - a_j + \frac{i-j}{d}, v_d - w_j)$ . De plus, l'inclusion

$$\text{Sch}(v) \cap I_{\mathbf{a}}wK/K \subset \overline{\text{Sch}(v) \cap I_{\mathbf{a}}w'K/K}$$

implique que  $w \prec_{I_{\mathbf{a}}} w'$ .

*Démonstration.* — C'est parce que la variété  $\text{Sch}(v)$  est l'une des composantes connexes de  $\mathcal{X}_{\geq v_d}$ .  $\square$

**2.3.2. Passage au dual.** — On définit un accouplement  $\text{Tr} : F^d \times F^d \rightarrow F$  par

$$\text{Tr}((x_i), (y_i)) = \sum_{i=1}^d x_i y_i.$$

Pour  $L \in \mathcal{X}$ , on note  $L^\vee = \{y \in F^d \mid \text{Tr}(x, y) \in \mathcal{O}, \forall x \in L\}$ . Alors  $L^\vee$  est un réseau et  $(L^\vee)^\vee = L$ . On a donc une involution  $\vee : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ . Pour  $m \in \mathbf{Z}$ , on note  $\mathcal{X}_{\leq m}^\vee$  l'image de  $\mathcal{X}_{\geq -m}$  sous cette involution, alors

$$\mathcal{X}_{\leq m}^\vee = \{L \in \mathcal{X} \mid L \supset \epsilon^m \mathcal{O}^d\}.$$

**LEMME 2.4.** — Pour  $g \in G(F)$ ,  $L \in \mathcal{X}$ , on a  $(gL)^\vee = (g^t)^{-1}L^\vee$ .

Utilisant ce lemme, on trouve une version duale du corollaire 2.3.

**COROLLAIRE 2.5.** — Soit  $v \in X_*^+(T)$  tel que  $v_1 = \dots = v_{d-1} \geq v_d$ , soit  $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_d) \in \mathbf{Z}^d$ . Alors on a un pavage en espaces affines

$$\text{Sch}(v) = \bigsqcup_{w \in \text{Sch}(v)^T} \text{Sch}(v) \cap I_{\mathbf{a}}wK/K.$$

L'intersection  $\text{Sch}(v) \cap I_{\mathbf{a}}wK/K$  est égale à  $\hat{J}_{\mathbf{a},v,w}^{-1}wK/K$ , où  $\hat{J}_{\mathbf{a},v,w}$  est la sous- $k$ -variété ouverte et fermée de  $I_{\mathbf{a}}$  formée des matrices  $(x_{i,j})$  telles que

$$\text{val}(x_{i,j}) \geq \hat{m}_{i,j}, \quad \forall i \neq j,$$

où  $\hat{m}_{i,j} = \max(a_i - a_j + \frac{i-j}{d}, -v_1 + w_i)$ . De plus, l'inclusion

$$\text{Sch}(v) \cap I_{\mathbf{a}}wK/K \subset \overline{\text{Sch}(v) \cap I_{\mathbf{a}}w'K/K}$$

implique que  $w \prec_{I_{\mathbf{a}}} w'$ .

**2.4. Pavages en tranches de la grassmannienne affine tronquée.** — On fixe  $v \in X_*^+(T)$  tel que  $v_1 \geq v_2 = \dots = v_{d-1} \geq v_d$ . Le but de cette section est de construire une famille de pavage non standard de la variété de Schubert affine  $\text{Sch}(v)$ .

2.4.1. *Partition en tranches.* — On va couper  $Sch(v)$  en parties localement fermées. On note

$$R(v) = \bigcup_{i=1}^{d-1} W \cdot \{v' \in X_*(T) \mid v' \prec v; \varpi_i(v') = \varpi_i(v)\}.$$

On note  $S(v) = \bigcup_{v' \in R(v)} Iv'K/K$ , c'est une sous-variété ouverte de  $Sch(v)$ . L'idée est de couper  $S(v)$  en parties localement fermées et d'utiliser le lemme suivant pour procéder par récurrence.

LEMME 2.6. — *Soit  $v \in X_*^+(T)$  tel que  $v_1 \geq v_2 = \dots = v_{d-1} \geq v_d$ . Si  $Sch(v)^T \supsetneq R(v)$ , alors il existe  $\bar{v} \in X_*^+(T)$  tel que*

$$Sch(v)^T = Sch(\bar{v})^T \cup R(v),$$

et que  $\bar{v}_1 \geq \bar{v}_2 = \dots = \bar{v}_{d-1} \geq \bar{v}_d$ .

*Démonstration.* — Dans le cas où  $v_1 > v_2 = \dots = v_d$ , on a  $v_1 \geq v_2 + d$ , et  $\bar{v} = (v_1 - d + 1, v_2 + 1, \dots, v_d + 1)$ .

Dans le cas où  $v_1 = \dots = v_{d-1} > v_d$ , on a  $v_1 \geq v_d + d$ , et  $\bar{v} = (v_1 - 1, \dots, v_{d-1} - 1, v_d + d - 1)$ .

Dans le cas où  $v_1 > v_2 = \dots = v_{d-1} > v_d$ , on a  $\bar{v} = (v_1 - 1, v_2, \dots, v_{d-1}, v_d + 1)$ .  $\square$

On va ensuite couper  $R(v)$  selon les sous-groupes paraboliques maximaux semi-standards. Soient  $P \in \mathcal{F}(T)$  maximal,  $P = MN$  sa factorisation de Levi. On note  $\varpi_P$  le poids tel que

$$\varpi_P(\alpha^\vee) = 0, \forall \alpha \in \Phi(M, T); \quad \varpi_P(\alpha^\vee) = 1, \forall \alpha \in \Phi(N, T).$$

On note  $J_P \subset \{1, \dots, d\}$  le sous-ensemble propre tel que

$$i \in J_P \iff \varpi_P(\alpha_{i,j}^\vee) \geq 0, \forall j \neq i.$$

On note  $\bar{J}_P$  le complémentaire de  $J_P$ . Les  $P$ ,  $\varpi_P$  et  $J_P$  se correspondent bijectivement, on les identifie en tant que sous-indice.

On prend  $c \in \mathbf{R}$  tel que

$$(2) \quad \begin{cases} v_2 < c < v_2 + 1, & \text{si } v_1 > v_2 = \dots = v_{d-1} \geq v_d, \\ v_{d-1} - 1 < c < v_{d-1}, & \text{si } v_1 \geq v_2 = \dots = v_{d-1} > v_d. \end{cases}$$

On note

$$R_P^c(v) = \{v' \in R(v) \mid \varpi_P(v') = \varpi_i(v); v'_j > c, \forall j \in J_P; v'_{j'} < c, \forall j' \notin J_P\},$$

où  $\varpi_i$  est l'unique poids fondamental dans l'orbite  $W\varpi_P$ . Il est clair que  $R_P^c(v)$  ne dépend que de l'intervalle dans l'équation (2). On note  $S_P^c(v) = \bigcup_{v' \in R_P^c(v)} Iv'K/K$ . Alors on a la partition disjointe

$$R(v) = \bigsqcup_{P \text{ maximal}} R_P^c(v).$$

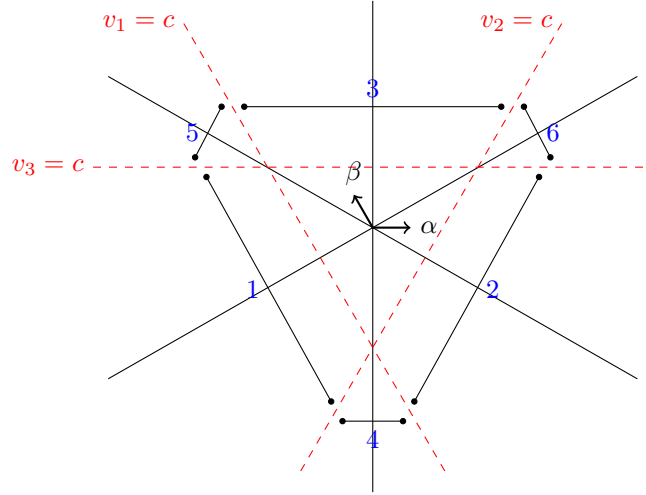
On va ensuite ordonner les  $S_P^c(v)$ . Pour  $1 \leq r \leq d-1$  fixé, l'union  $S_r(v) = \bigcup_{g \in W} R_{g\varpi_r}^c(v)$  peut être ordonné par l'inverse de l'ordre de Bruhat-Tits de  $g \in W$ . Donc il reste à ordonner les  $S_r(v)$ , on distingue entre deux cas.

(1)  $v_1 > v_2 = \dots = v_{d-1} \geq v_d$  et  $v_2 < c < v_2 + 1$ .

Pour  $1 \leq r \leq d-1$  tel que  $v_1 - v_r \geq r$ , on note

$$v^{(r)} = (v_1 - r + 1, v_2 + 1, \dots, v_r + 1, v_r, \dots, v_d).$$

LEMME 2.7. — 1. *Pour  $1 \leq r \leq d-1$  tel que  $v_1 - v_r \leq r-1$ ,  $R_{\varpi_r}^c(v)$  est vide.*

FIGURE 1. L'ordre de pavage pour  $GL_3$ -premier cas.

2. Pour  $1 \leq r \leq d-1$  tel que  $v_1 - v_r \geq r$ , on a

$$R_{\varpi_r}^c(v) = \{v' \in X_*(T) \mid v' \prec v^{(r)}; \varpi_r(v') = \varpi_r(v^{(r)})\}.$$

*Démonstration.* — 1. On raisonne par l'absurde. Supposons  $w \in R_{\varpi_r}^c(v)$ , alors  $w_i > c > v_i$  et donc  $w_i \geq v_i + 1$  pour  $i = 2, \dots, r$ . Parce que  $v_1 \leq v_r + r - 1 < c + r - 1$ , on a

$$\sum_{i=1}^r w_i > c + \sum_{i=2}^r (v_i + 1) \geq c + r - 1 + \sum_{i=2}^r v_i \geq \sum_{i=1}^r v_i,$$

ce qui est une contradiction à l'hypothèse que  $w \prec v$ .

2. C'est parce que  $v^{(r)}$  est le plus long élément dans  $R_{\varpi_r}^c(v)$ . □

Donc, on a l'égalité

$$\text{Sch}(\bar{v}) \cup \bigcup_{i=r}^{d-1} S_i(v) = \text{Sch}(v^{(r)}),$$

ce qui donne l'ordre entre les  $S_i(v)$  : on a  $S_{d-1}(v) \prec S_{d-2}(v) \prec \dots \prec S_1(v)$ . La figure 1 donne un exemple de l'ordre de pavage pour  $GL_3$  dans ce cas.

(2)  $v_1 \geq v_2 = \dots = v_{d-1} > v_d$  et  $v_{d-1} - 1 < c < v_{d-1}$ .

Pour  $1 \leq r \leq d-1$  tel que  $v_{r+1} - v_d \geq d-r$ , on note

$$v_{(r)} = (v_1, \dots, v_r, v_{r+1} - 1, \dots, v_{d-1} - 1, v_d + d - r - 1).$$

Alors parallèlement on a

LEMME 2.8. — 1. Pour  $1 \leq r \leq d-1$  tel que  $v_{r+1} - v_d < d-r$ ,  $R_{\varpi_r}^c(v)$  est vide.

2. Pour  $1 \leq r \leq d-1$  tel que  $v_{r+1} - v_d \geq d-r$ , on a

$$R_{\varpi_r}^c(v) = \{v' \in X_*(T) \mid v' \prec v_{(r)}; \varpi_r(v') = \varpi_r(v_{(r)})\}.$$



Donc, on a l'égalité

$$\text{Sch}(\bar{v}) \cup \bigcup_{i=1}^r S_i(v) = \text{Sch}(v_{(r)}),$$

ce qui donne l'ordre entre les  $S_i(v)$  : on a  $S_1(v) \prec S_2(v) \prec \cdots \prec S_{d-1}(v)$ . La figure 2 donne un exemple de l'ordre de pavage pour  $GL_3$  dans ce cas.

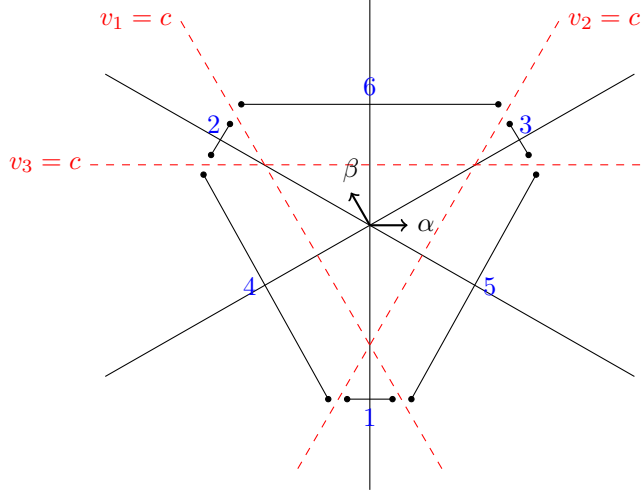


FIGURE 2. L'ordre de pavage pour  $GL_3$ -deuxième cas.

2.4.2. *Pavage non standard en tranches.* — On va repaver les  $S_P^c(v)$  en espaces affines. Pour cela, on montre qu'ils sont des fibrations en espaces affines sur certaines variétés de Schubert affines de  $\mathcal{X}^M$ , et on se ramène à repaver ces variétés de Schubert affines.

LEMME-DÉFINITION 2.9. — *Soit  $Z$  un sous- $k$ -schéma réduit de  $\mathcal{X}$  de type fini. Soit  $V$  un sous- $\mathcal{O}$ -module de type fini de  $\mathfrak{g}_F$ . On suppose que  $\dim_k(V/V \cap \text{Ad}(g)\mathfrak{g}(\mathcal{O}))$  est indépendant de  $g$  pour  $gK \in Z$ , alors les  $V/V \cap \text{Ad}(g)\mathfrak{g}(\mathcal{O})$  s'organisent en un fibré vectoriel que on notera  $\tilde{V}/\tilde{V} \cap \mathcal{K}$  sur  $Z$ .*

*Démonstration.* — Choisissons  $N \in \mathbf{N}$  assez grand tel que

$$\epsilon^N \mathfrak{g}(\mathcal{O}) \subset \text{Ad}(g)\mathfrak{g}(\mathcal{O}) \subset \epsilon^{-N} \mathfrak{g}(\mathcal{O}), \quad \forall gK \in Z.$$

On note  $L_N$  le fibré vectoriel constant sur  $Z$  avec fibre  $\epsilon^{-N} \mathfrak{g}(\mathcal{O})/\epsilon^N \mathfrak{g}(\mathcal{O})$ . On note  $\mathcal{K}'$  le sous-fibré vectoriel de  $L_N$  tel que sa fibre sur  $gK$  est  $\text{Ad}(g)\mathfrak{g}(\mathcal{O})/\epsilon^N \mathfrak{g}(\mathcal{O})$ . On note  $\mathcal{V}'$  le sous-fibré vectoriel de  $L_N$  tel que sa fibre sur  $gK$  est  $(V + \epsilon^N \mathfrak{g}(\mathcal{O}))/\epsilon^N \mathfrak{g}(\mathcal{O})$ . L'hypothèse implique que l'intersection  $\mathcal{V}' \cap \mathcal{K}'$  est équi-dimensionnel sur  $Z$ , et donc il est un fibré vectoriel sur  $Z$ . Le quotient  $\mathcal{V}'/\mathcal{V}' \cap \mathcal{K}'$  est donc le fibré vectoriel que l'on cherche.  $\square$

Pour  $x = gK \in \mathcal{X}$ , soit  $g = nmk$ ,  $n \in N(F)$ ,  $m \in M(F)$ ,  $k \in K$  la décomposition d'Iwasawa de  $g$ , on note  $x_P$  le point  $mK^M \in \mathcal{X}^M$ , qui ne dépend que de  $x$  et de  $P$ .

DÉFINITION 2.1. — On note  $f_P : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}^M$  la rétraction  $f_P(x) = x_P$ ,  $\forall x \in \mathcal{X}$ .

LEMME 2.10. — *La rétraction*

$$f_P : S_P^c(v) \rightarrow S_P^c(v) \cap \mathcal{X}^M$$

est une fibration en espaces affines, en particulier sa restriction à  $IwK/K$  l'est aussi pour tout  $w \in R_P^c(v)$ .

*Démonstration.* — Par définition, on a

$$S_P^c(v) \cap \mathcal{X}^M = \bigcup_{w \in R_P^c(v)} I^M wK/K.$$

On note  $N_I = N(F) \cap I$ . Pour  $mwK \in S_P^c(v) \cap \mathcal{X}^M$ ,  $m \in I^M$ , on a

$$\frac{\mathfrak{n}_I}{\mathfrak{n}_I \cap \text{Ad}(mw)\mathfrak{g}(\mathcal{O})} \cong \frac{\mathfrak{n}_I}{\mathfrak{n}_I \cap \text{Ad}(w)\mathfrak{g}(\mathcal{O})},$$

car  $I^M$  normalise  $\mathfrak{n}_I$ . Parce que  $w \in R_P^c(v)$ , la dimension de la dernier terme est

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha \in \Phi(N,T)} (\alpha(w) + \lfloor \alpha(x_0) \rfloor) &= d\varpi_P(w) + \sum_{\alpha \in \Phi(N,T)} (\lfloor \alpha(x_0) \rfloor) \\ &= d\varpi_i(v) + \sum_{\alpha \in \Phi(N,T)} (\lfloor \alpha(x_0) \rfloor) \end{aligned}$$

où  $x_0 = (1, (d-1)/d, \dots, 2/d, 1/d) \in \mathfrak{t}$  et  $\varpi_i$  est l'unique poids fondamental dans l'orbite  $W\varpi_P$ , donc la dimension est constante pour  $v \in R_P^c(v)$ . Donc les dimensions de  $\mathfrak{n}_I/\mathfrak{n}_I \cap \text{Ad}(g)\mathfrak{g}(\mathcal{O})$  sont constantes pour  $gK \in S_P^c(v) \cap \mathcal{X}^M$ . D'après le lemme 2.9, ils s'organisent en un fibré vectoriel  $\tilde{\mathfrak{n}}_I/\tilde{\mathfrak{n}}_I \cap \mathcal{K}$ .

Par l'isomorphisme canonique

$$f_P^{-1}(mwK) \cong \frac{\mathfrak{n}_I}{\mathfrak{n}_I \cap \text{Ad}(mw)\mathfrak{g}(\mathcal{O})},$$

on obtient que  $S_P^c(v)$  est un  $\tilde{\mathfrak{n}}_I/\tilde{\mathfrak{n}}_I \cap \mathcal{K}$ -torseur sur  $S_P^c(v) \cap \mathcal{X}^M$ , d'où la proposition.  $\square$

Pour  $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_d) \in \mathbf{Z}^d$ , on dit que  $\mathbf{a}$  est *positif* par rapport à  $P$  si

$$a_i - a_j > 0, \quad \forall i \in J_P, j \in \bar{J}_P.$$

On dit qu'il est *néгатif* par rapport à  $P$  si  $-\mathbf{a}$  est positif par rapport à  $P$ .

PROPOSITION 2.11. — *Soit  $v \in X_*^+(T)$  tel que  $v_1 \geq v_2 = \dots = v_{d-1} \geq v_d$ . On prend un nombre  $c \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$  comme dans l'équation (2). Soient  $P \in \mathcal{F}(T)$  maximal,  $P = MN$  sa factorisation de Levi. Soit  $\mathbf{a} \in \mathbf{Z}^d$  tel que  $\mathbf{a}$  est négatif par rapport à  $P$ . Alors on a le pavage en espaces affines*

$$S_P^c(v) = \bigsqcup_{w \in R_P^c(v)} S_P^c(v) \cap I_{\mathbf{a}} wK/K,$$

l'inclusion  $S_P^c(v) \cap I_{\mathbf{a}} wK/K \subset \overline{S_P^c(v) \cap I_{\mathbf{a}} w'K/K}$  implique que  $w \prec_{I_{\mathbf{a}}} w'$ . De plus, on a l'intersection

$$S_P^c(v) \cap I_{\mathbf{a}} wK/K = (N(F) \cap I)HwK/K,$$

où  $H = H_1 \times H_2^{-1}$  avec

1.  $H_1$  est la sous- $k$ -variété ouverte et fermée de  $GL_{J_P}(F)$  formée des matrices  $(x_{i,j})$  telles que  $x_{i,i} \in \mathcal{O}$  et que

$$\text{val}(x_{i,j}) \geq m_{i,j}, \quad \forall i, j \in J_P; i \neq j,$$

$$\text{où } m_{i,j} = \max(a_i - a_j + \frac{i-j}{d}, \lceil c \rceil - w_j).$$

2.  $H_2$  est la sous- $k$ -variété ouverte et fermée de  $GL_{\bar{J}_P}(F)$  formée des matrices  $(x_{i,j})$  telles que  $x_{i,i} \in \mathcal{O}$  et que

$$\text{val}(x_{i,j}) \geq \hat{m}_{i,j}, \quad \forall i, j \in \bar{J}_P; i \neq j,$$

$$\text{où } \hat{m}_{i,j} = \max(a_i - a_j + \frac{i-j}{d}, -\lceil c \rceil + w_i).$$

*Démonstration.* — Soit  $\tilde{\lambda}_{\mathbf{a}} \in X_*(\tilde{T})$  le co-caractère défini par l'équation (1). Pour  $w \in X_*(T)$ , on a

$$I_{\mathbf{a}}wK/K = \{x \in \mathcal{X} \mid \lim_{t \rightarrow 0} \tilde{\lambda}_{\mathbf{a}}(t)x = wK\}.$$

Donc

$$S_P^c(v) \cap I_{\mathbf{a}}wK/K = \{x \in S_P^c(v) \mid \lim_{t \rightarrow 0} \tilde{\lambda}_{\mathbf{a}}(t)x = wK\}.$$

Pour  $u \in N(F) \cap I$ ,  $x \in S_P^c(v)$ , on a

$$\lim_{t \rightarrow 0} \tilde{\lambda}_{\mathbf{a}}(t)ux = \lim_{t \rightarrow 0} [\text{Ad}(\tilde{\lambda}_{\mathbf{a}}(t))u] \tilde{\lambda}_{\mathbf{a}}(t)x = \lim_{t \rightarrow 0} \tilde{\lambda}_{\mathbf{a}}(t)x,$$

car  $\mathbf{a}$  est négatif par rapport à  $P$ , d'où l'égalité

$$(3) \quad \lim_{t \rightarrow 0} \tilde{\lambda}_{\mathbf{a}}(t)x = \lim_{t \rightarrow 0} \tilde{\lambda}_{\mathbf{a}}(t)[f_P(x)].$$

Cette égalité implique que le pavage non standard se factorise par la fibration  $f_P : S_P^c(v) \rightarrow S_P^c(v) \cap \mathcal{X}^M$ . Plus précisément,

$$(4) \quad S_P^c(v) \cap I_{\mathbf{a}}wK/K = (N(F) \cap I) \cdot [(S_P^c(v) \cap \mathcal{X}^M) \cap I_{\mathbf{a}}^M wK/K].$$

Remarquons que

$$\begin{aligned} S_P^c(v) \cap \mathcal{X}^M &= \bigcup_{w \in R_P^c(v)} I^M wK^M / K^M \\ &= \mathcal{X}_{\geq \lceil c \rceil}^{\text{GL}_{J_P}, (n_1)} \times \mathcal{X}_{\leq \lceil c \rceil}^{\text{GL}_{\bar{J}_P}, (n_2)}, \end{aligned}$$

pour certaines indices  $n_1, n_2 \in \mathbf{Z}$ .

Donc la proposition se ramène aux corollaires 2.3 et 2.5, pour  $\mathcal{X}_{\geq \lceil c \rceil}^{\text{GL}_{J_P}, (n_1)}$  et  $\mathcal{X}_{\leq \lceil c \rceil}^{\text{GL}_{\bar{J}_P}, (n_2)}$  respectivement.  $\square$

**COROLLAIRE 2.12.** — *Même hypothèse que la proposition précédente. La rétraction*

$$f_P : S_P^c(v) \cap I_{\mathbf{a}}wK/K \rightarrow S_P^c(v) \cap I_{\mathbf{a}}^M wK^M / K^M$$

*est une fibration en espaces affines.*

*Démonstration.* — C'est parce que le pavage non standard factorise par la fibration  $f_P : S_P^c(v) \rightarrow S_P^c(v) \cap \mathcal{X}^M$ , qui est une fibration en espaces affines par le lemme 2.10.  $\square$

En conclusion, soient  $v \in X_*^+(T)$  tel que  $v_1 \geq v_2 = \dots = v_{d-1} \geq v_d$ ,  $c \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$  un nombre comme dans l'équation (2). Étant donné  $\mathbf{a}_P \in \mathbf{Z}^d$  pour tout  $P \in \mathcal{F}(T)$  maximal tel que  $\mathbf{a}_P$  est négatif par rapport à  $P$ , on peut paver  $S_P^c(v)$  en espaces affines avec l'Iwahori  $I_{\mathbf{a}_P}$  d'après la proposition 2.11. De cette manière, on construit un pavage non standard de  $S(v)$ . Comme on a remarqué, cette processus peut être continué sur  $\text{Sch}(\bar{v})$  avec autre paramètre  $c \in \mathbf{R}$ . Par récurrence, on construit un pavage non standard de  $\text{Sch}(v)$ , on l'appelle *le pavage en tranches* de  $\text{Sch}(v)$ .

### 3. Application aux pavages de la fibre de Springer affine

Soit  $\gamma \in \mathfrak{g}(F)$  un élément semi-simple régulier entier, on va utiliser les pavages non standard pour paver la fibre de Springer affine  $\mathcal{X}_\gamma$ . La fibre de Springer affine n'est pas réduite comme un schéma, mais on va travailler avec sa structure réduite puisque on s'intéresse qu'à sa cohomologie étale.

**3.1. Une proposition technique.** — Prenons un sous-groupe parabolique maximal  $P = MN \in \mathcal{F}(T)$ . Soit  $\gamma \in \mathfrak{m}(F) \subset \mathfrak{g}(F)$  un élément semi-simple régulier entier. Soient  $H \subset M(F)$ ,  $U \subset N(F)$  des sous-groupes ouverts et fermés.

LEMME 3.1. — *Considérons la rétraction*

$$f_P : U \mathcal{X}_\gamma^M \cap \mathcal{X}_\gamma \rightarrow \mathcal{X}_\gamma^M.$$

Soit  $gK^M \in \mathcal{X}_\gamma^M$ , alors  $f_P^{-1}(gK^M)$  est isomorphe canoniquement à

$$\ker \left\{ \text{ad}(\gamma) : \frac{\mathfrak{u}}{\mathfrak{u} \cap \text{Ad}(g)\mathfrak{g}(\mathcal{O})} \rightarrow \frac{\text{ad}(\gamma)\mathfrak{u}}{\text{ad}(\gamma)\mathfrak{u} \cap \text{Ad}(g)\mathfrak{g}(\mathcal{O})} \right\},$$

*Démonstration.* — Pour  $gK^M \in \mathcal{X}_\gamma^M$ , soit  $u \in \mathfrak{u}$ , alors

$$\begin{aligned} (1+u)gK &\in \mathcal{X}_\gamma \iff \text{Ad}(1+u)^{-1}\gamma \in \text{Ad}(g)\mathfrak{g}(\mathcal{O}) \\ &\iff \gamma - [u, \gamma] \in \text{Ad}(g)\mathfrak{g}(\mathcal{O}) \\ &\iff [u, \gamma] \in \text{Ad}(g)\mathfrak{g}(\mathcal{O}), \end{aligned}$$

d'où le lemme (dans la deuxième ligne on utilise le fait que  $P$  est maximal). □

PROPOSITION 3.2. — *Soit  $X$  une sous-variété de  $\mathcal{X}_\gamma^M$ . On suppose que les dimensions*

$$\dim_k \left( \frac{\mathfrak{u}}{\mathfrak{u} \cap \text{Ad}(g)\mathfrak{g}(\mathcal{O})} \right), \quad \dim_k \left( \frac{\text{ad}(\gamma)\mathfrak{u}}{\text{ad}(\gamma)\mathfrak{u} \cap \text{Ad}(g)\mathfrak{g}(\mathcal{O})} \right),$$

*sont indépendantes de  $g$  pour tout  $gK \in X$ . Alors la rétraction*

$$f_P : UX \cap \mathcal{X}_\gamma \rightarrow X$$

*est une fibration en espaces affines.*

*Démonstration.* — D'après le lemme 2.9, les  $\mathfrak{u}/\mathfrak{u} \cap \text{Ad}(g)\mathfrak{g}(\mathcal{O})$ ,  $gK \in X$ , s'organisent en un fibré vectoriel  $\tilde{\mathfrak{u}}/\tilde{\mathfrak{u}} \cap \mathcal{K}$ . Il en est de même pour  $\mathfrak{u}' := \text{ad}(\gamma)\mathfrak{u}$ . Donc le noyau

$$\mathcal{K}_{\mathfrak{u}, \gamma} := \ker \left\{ \text{ad}(\gamma) : \frac{\tilde{\mathfrak{u}}}{\tilde{\mathfrak{u}} \cap \mathcal{K}} \rightarrow \frac{\tilde{\mathfrak{u}}'}{\tilde{\mathfrak{u}}' \cap \mathcal{K}} \right\}$$

est un fibré vectoriel sur  $X$  car le morphisme est surjectif. D'après le lemme 3.1, la fibration en question est un  $\mathcal{K}_{\mathfrak{u}, \gamma}$ -torseur, donc elle est une fibration en espaces affines. □

REMARQUE 3.1. — La condition que la dimension de  $\mathfrak{u}/\mathfrak{u} \cap \text{Ad}(g)\mathfrak{g}(\mathcal{O})$  est indépendante de  $g$  pour tout  $gK \in X$  est équivalent à la condition que la rétraction

$$f_P : UX \rightarrow X$$

est une fibration en espaces affines. Dans la suite, on utilise aussi cette condition alternative.

LEMME 3.3. — *Supposons que  $H$  normalise  $U$ . Soit  $X$  une  $H$ -orbite dans  $\mathcal{X}^M$ , alors la dimension  $\mathfrak{u}/\mathfrak{u} \cap \text{Ad}(g)\mathfrak{g}(\mathcal{O})$  est indépendante de  $g$  pour  $gK \in X$ .*

*Démonstration.* — Fixe  $gK^M \in X$ , pour tout  $h \in H$ , on a

$$\frac{\mathfrak{u}}{\mathfrak{u} \cap \text{Ad}(hg)\mathfrak{g}(\mathcal{O})} \cong \frac{\mathfrak{u}}{\mathfrak{u} \cap \text{Ad}(g)\mathfrak{g}(\mathcal{O})},$$

car  $H$  normalise  $U$ , d'où le lemme.  $\square$

COROLLAIRE 3.4. — *Supposons que  $H$  normalise les algèbres de Lie  $\mathfrak{u}$  et  $\text{ad}(\gamma)\mathfrak{u}$ . Soit  $X$  une  $H$ -orbite dans  $\mathcal{X}^M$ . Alors la rétraction*

$$f_P : UX \cap \mathcal{X}_\gamma \rightarrow X \cap \mathcal{X}_\gamma^M$$

*est une fibration en espaces affines.*

**3.2. Pavage pour  $GL_3$ .** — Dans cette section uniquement, on suppose que  $\text{char}(k) > 3$ . Alors le tore maximal  $Z_G(\gamma)$  est isomorphe soit à  $F^\times \times F^\times \times F^\times$ , soit à  $F^\times \times F((\epsilon^{1/2}))^\times$ , soit à  $F((\epsilon^{1/3}))^\times$ . On appelle  $\gamma$  dans ces cas *non-ramifié*, *mélangé*, *elliptique* respectivement.

Le pavage de  $\mathcal{X}_\gamma$  est connue dans les cas suivants :

THÉORÈME 3.5 (Lucarelli). — *Pour  $\gamma$  non-ramifié,  $\mathcal{X}_\gamma$  admet un pavage en espaces affines.*

Pour  $\gamma$  elliptique, le pavage de  $\mathcal{X}_\gamma$  est donné par Goresky, Kottwitz et Macpherson dans [GKM1] car  $\gamma$  est forcément équivalué.

PROPOSITION 3.6. — *Pour  $\gamma$  mélangé, la cohomologie de  $\mathcal{X}_\gamma$  est pure.*

*Démonstration.* — Pour  $\gamma$  équivalué, c'est déjà montré par Goresky, Kottwitz et Macpherson. Pour  $\gamma$  non-équivalué, à conjugaison près, on peut supposer que

$$\gamma = \begin{bmatrix} a\epsilon^{n_1} & & \\ & \epsilon^{n_2} & \\ & b\epsilon^{n_2+1} & \end{bmatrix}, \quad n_1 \leq n_2, \quad a, b \in \mathcal{O}^\times.$$

On va paver  $\mathcal{X}_{\geq -m} \cap \mathcal{X}_\gamma$  en espaces affines. D'abord, on pave  $\mathcal{X}_{\geq -m}$  avec l'Iwahori  $I' = \text{Ad}(\text{diag}(\epsilon^{3m}, 1, 1))I$ . Pour  $w \in \mathcal{X}_{\geq -m}^T$ , on note  $C(w) = \mathcal{X}_{\geq -m} \cap I'wK/K$ . Par la proposition 2.2, on a un pavage en espaces affines  $\mathcal{X}_{\geq -m} = \bigsqcup_{w \in \mathcal{X}_{\geq -m}^T} C(w)$  et

$$C(w) = \begin{bmatrix} \mathcal{O} \\ \mathfrak{p}^{m_w} \mathcal{O} \mathcal{O} \\ \mathfrak{p}^{m_w} \mathfrak{p} \mathcal{O} \end{bmatrix} wK/K, \quad m_w = -m - w_1.$$

On note

$$P = \begin{bmatrix} * \\ * * * \\ * * * \end{bmatrix}.$$

Soit  $P = MN$  sa factorisation de Levi standard. D'après le corollaire 3.4, la rétraction

$$f_P : C(w) \cap \mathcal{X}_\gamma \rightarrow I^M wK^M / K^M \cap \mathcal{X}_\gamma^M$$

est une fibration en espaces affines. En effet, on prend

$$U = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ \mathfrak{p}^{m_w} & 1 & & \\ & & \ddots & \\ \mathfrak{p}^{m_w} & & & 1 \end{bmatrix},$$

alors  $C(w) = UI^M wK/K$ . Il est évident que  $I^M$  normalise  $\mathfrak{u} = \text{Lie}(U)$  et  $\text{ad}(\gamma)\mathfrak{u}$ .

De plus, l'intersection  $I^M wK^M / K^M \cap \mathcal{X}_\gamma^M$  est isomorphe à un espace affine car  $M = \text{GL}_1 \times \text{GL}_2$ , donc  $C(w) \cap \mathcal{X}_\gamma$  l'est aussi. □

Avec le même pavage, on peut montrer :

**PROPOSITION 3.7.** — *Soit  $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2) \in (\mathfrak{gl}_1 \times \mathfrak{gl}_{d-1})(F) \subset \mathfrak{gl}_d(F)$  tel que  $\alpha_{1,i}(\gamma) = n_1$ ,  $i = 2, \dots, d$  et  $\gamma_2 \in \mathfrak{gl}_{d-1}(F)$  est équivalué de valuation  $n_2 + r$ ,  $r \in \mathbf{Q}$ ,  $0 \leq r < 1$ ,  $n_1 \leq n_2$ ,  $n_1, n_2 \in \mathbf{N}$ . Alors  $\mathcal{X}_\gamma$  est pur.*

En conclusion, on a

**THÉORÈME 3.8.** — *Pour tout  $\gamma \in \mathfrak{gl}_3(F)$  semi-simple régulier entier, la cohomologie de  $\mathcal{X}_\gamma$  est pure.*

Dans la suite, on va utiliser les pavages non standard en tranches de la grassmannienne affine tronquée que l'on a construit dans §2.4, pour paver les fibres de Springer affines  $\mathcal{X}_\gamma$ ,  $\gamma$  non-ramifié. Ce pavage est plus "flexible" que celui de Lucarelli, et il est indisponible pour paver la fibre de Springer affine pour  $\text{GL}_4$  dans le cas non-ramifié.

**THÉORÈME 3.9.** — *Soient  $\gamma \in \mathfrak{t}(\mathcal{O})$  un élément régulier,  $v \in X_*^+(T)$ ,  $c \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$  un nombre comme dans l'équation (2). Alors pour tout  $P \in \mathcal{F}(T)$  maximal, l'intersection  $S_P^c(v) \cap \mathcal{X}_\gamma$  admet un pavage en espaces affines.*

*Démonstration.* — Après conjuguer par le groupe de Weyl, on peut supposer que

$$\text{val}(\alpha_{1,2}(\gamma)) = \text{val}(\alpha_{1,3}(\gamma)) = n_1, \quad \text{val}(\alpha_{2,3}(\gamma)) = n_2, \quad n_1 \leq n_2.$$

On note  $\mathbf{a} = (n_1, n_2, n_2)$ . Soit  $P = MN$  la factorisation de Levi standard de  $P$ . On note  $U = N(F) \cap I$ , alors on a  $IwK/K = UI^M wK/K$ .

1. Pour  $\varpi_P = \varpi_1$  ou  $-\varpi_1$ , on va montrer que l'intersection  $IwK/K \cap \mathcal{X}_\gamma$  est isomorphe à un espace affine standard. On traite que  $\varpi_P = \varpi_1$ , l'autre cas étant pareil.

Parce que  $I^M$  normalise  $\mathfrak{u} = \text{Lie}(U)$  et  $\text{ad}(\gamma)\mathfrak{u}$ , d'après le corollaire 3.4, la rétraction

$$f_P : IwK/K \cap \mathcal{X}_\gamma \rightarrow I^M wK^M / K^M \cap \mathcal{X}_\gamma^M$$

est une fibration en espaces affines. De plus, l'intersection  $I^M wK^M / K^M \cap \mathcal{X}_\gamma^M$  est isomorphe à un espace affine car  $M = \text{GL}_1 \times \text{GL}_2$ . L'intersection  $IwK/K \cap \mathcal{X}_\gamma$  est donc isomorphe à un espace affine.

2. Pour  $\varpi_P = \varpi_2$  ou  $s_{23}\varpi_2$ . On ne traite que  $\varpi_P = \varpi_2$ , l'autre cas étant pareil.

Soit  $m_w = \lceil c \rceil - w_2$ , et

$$H = I_{\mathbf{a}}^M \cap \text{Ad}(\text{diag}(\epsilon^{m_w}, 1, 1))K^M,$$

qui est un groupe de Lie. D'après la proposition 2.11, on a un pavage en espaces affines

$$S_P^c(v) = \bigsqcup_{w \in R_P^c(v)} S_P^c(v) \cap I_{\mathbf{a}}wK/K,$$

et

$$S_P^c(v) \cap I_{\mathbf{a}}wK/K = UHwK/K.$$

On va montrer que l'intersection  $S_P^c(v) \cap I_{\mathbf{a}}wK/K \cap \mathcal{X}_\gamma$  est isomorphe à un espace affine standard. Ainsi on obtiendra un pavage en espaces affines

$$S_P^c(v) \cap \mathcal{X}_\gamma = \bigsqcup_{w \in R_P^c(v)} S_P^c(v) \cap I_{\mathbf{a}}wK/K \cap \mathcal{X}_\gamma.$$

Par le corollaire 2.12, la rétraction

$$f_P : UHwK/K \rightarrow HwK^M/K^M$$

est une fibration en espaces affines. Puisque  $H \subset I_{\mathbf{a}}^M$ , il normalise  $\text{ad}(\gamma)u$ , le lemme 3.3 et la proposition 3.2 impliquent que la rétraction

$$f_P : UHwK/K \cap \mathcal{X}_\gamma \rightarrow HwK^M/K^M \cap \mathcal{X}_\gamma^M$$

est une fibration en espaces affines. Puisque  $M = GL_2 \times GL_1$ , l'intersection  $HwK^M/K^M \cap \mathcal{X}_\gamma^M$  est isomorphe à un espace affine. Par conséquent,  $S_P^c(v) \cap I_{\mathbf{a}}wK/K \cap \mathcal{X}_\gamma$  est isomorphe à un espace affine.

3. Pour  $\varpi_P = -\varpi_2$  ou  $-s_{23}\varpi_2$ . On va montrer que l'intersection  $S_P^c(v) \cap I_{-\mathbf{a}}wK/K \cap \mathcal{X}_\gamma$  est isomorphe à un espace affine standard, ainsi on obtiendra un pavage en espaces affines de  $S_P^c(v) \cap \mathcal{X}_\gamma$  similaire au cas précédent. On ne traite que le cas  $\varpi_P = -\varpi_2$ , l'autre cas étant pareil.

Soit  $m_w = -\lfloor c \rfloor + w_2$ , on note

$$H = I_{-\mathbf{a}}^M \cap \text{Ad}(\text{diag}(1, \epsilon^{m_w}, \epsilon^{m_w}))K^M.$$

qui est un groupe de Lie. D'après la proposition 2.11, on a

$$S_P^c(v) \cap I_{-\mathbf{a}}wK/K = UHwK/K.$$

Par le corollaire 2.12, la rétraction

$$f_P : UHwK/K \rightarrow HwK^M/K^M$$

est une fibration en espaces affines. Puisque  $H \subset I_{-\mathbf{a}}^M$ , il normalise  $\text{ad}(\gamma)u$ . Le lemme 3.3 et la proposition 3.2 impliquent que la rétraction

$$f_P : UHwK/K \cap \mathcal{X}_\gamma \rightarrow HwK^M/K^M \cap \mathcal{X}_\gamma^M$$

est une fibration en espaces affines. Puisque  $M = GL_2 \times GL_1$ , l'intersection  $HwK^M/K^M \cap \mathcal{X}_\gamma^M$  est isomorphe à un espace affine et donc  $S_P^c(v) \cap I_{-\mathbf{a}}wK/K \cap \mathcal{X}_\gamma$  est isomorphe à un espace affine.

□

En utilisant le pavage en tranches de  $\text{Sch}(v)$  que l'on a construit dans §2.4, on obtient

COROLLAIRE 3.10. — *Pour tout  $v \in X_*^+(T)$ , la sous-variété fermée  $\text{Sch}(v) \cap \mathcal{X}_\gamma$  de  $\mathcal{X}_\gamma$  admet un pavage en espaces affines. En particulier, elle est pure.*

**3.3. Pavage pour  $\text{GL}_4$  dans le cas nonramifié.** — Soit  $\gamma \in \mathfrak{t}(\mathcal{O})$  un élément régulier entier, le but de cette section est de démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME 3.11. — *Pour tout  $m \in \mathbf{N}$ , l'intersection  $\mathcal{X}_{\geq -m} \cap \mathcal{X}_\gamma$  admet un pavage en espaces affines. Par conséquent, la cohomologie de  $\mathcal{X}_\gamma$  est pure.*

Le reste de la section est consacré à la démonstration du théorème. Quitte à conjuguer par le groupe de Weyl, on peut supposer que  $\gamma \in \mathfrak{t}(\mathcal{O})$  est en forme minimale (voir l'appendice), alors sa valuation radicielle est l'un des deux types suivants :

1.  $(n_1, n_2, n_3)$ ,  $n_1 \leq n_2 \leq n_3$ ,
2.  $(n_1, n, n_2)$ ,  $n \leq n_1 \leq n_2$ .

Pour les deux types, il suffit de paver l'intersection de  $\mathcal{X}_\gamma$  avec le composant neutre  $\mathcal{X}_{\geq -m}^{(0)}$ . Pour simplifier les notations, on le note encore  $\mathcal{X}_{\geq -m}$ . On commence par paver  $\mathcal{X}_{\geq -m}$  en utilisant le sous-groupe d'Iwahori

$$I' = \text{Ad}(\text{diag}(\epsilon^{4m}, 1, 1, 1))I.$$

On note  $C(w) = \mathcal{X}_{\geq -m} \cap I'wK/K$ . D'après la proposition 2.2, on a un pavage en espaces affines

$$\mathcal{X}_{\geq -m} = \bigsqcup_{w \in \mathcal{X}_{\geq -m}^T} C(w)$$

et

$$C(w) = \begin{bmatrix} \mathcal{O} \\ \mathfrak{p}^{m_w} & \mathcal{O} & \cdots & \mathcal{O} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathfrak{p}^{m_w} & \mathfrak{p} & \cdots & \mathcal{O} \end{bmatrix} wK/K, \quad m_w = -m - w_1.$$

Pour  $-m \leq b \leq 3m$ ,  $b \in \mathbf{Z}$ , on note

$$R_b = \{w \in \mathcal{X}_{\geq -m}^T \mid w_1 = b\}, \quad V_b = \bigsqcup_{w \in R_b} C(w).$$

Alors  $\mathcal{X}_{\geq -m} = \bigcup_{b=-m}^{3m} V_b$ , et pour tout  $b$ , on a  $\overline{V}_b = \bigcup_{i=b}^{3m} V_i$ , ce qui donne l'ordre de pavage entre les  $V_b$ . Voir la figure 3 pour ce découpage. Pour démontrer le théorème 3.11, il suffit donc de paver chaque  $V_b \cap \mathcal{X}_\gamma$ .

On note

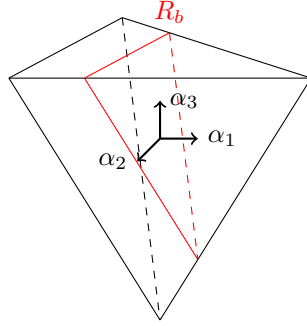
$$P = \begin{bmatrix} * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{bmatrix}.$$

Soit  $P = MN$  sa factorisation de Levi. On note

$$U = \begin{bmatrix} 1 \\ \mathfrak{p}^{-m-b} & 1 \\ \mathfrak{p}^{-m-b} & & 1 \\ \mathfrak{p}^{-m-b} & & & 1 \end{bmatrix},$$

alors  $C(w) = UI^M wK/K$ .




 FIGURE 3. Découpage de  $X_*(T)$  en  $R_b$ .

LEMME 3.12. — *La rétraction  $f_P : V_b \rightarrow V_b \cap \mathcal{X}^M$  est une fibration en espaces affines.*

*Démonstration.* — On montre d'abord que la dimension de  $\mathfrak{u}/\mathfrak{u} \cap \text{Ad}(g)\mathfrak{g}(\mathcal{O})$  est indépendante de  $g$  pour  $gK \in V_b \cap \mathcal{X}^M$ . Pour  $g \in I^M$ ,  $w \in R_b$ , on a

$$\frac{\mathfrak{u}}{\mathfrak{u} \cap \text{Ad}(gw)\mathfrak{g}(\mathcal{O})} \cong \frac{\mathfrak{u}}{\mathfrak{u} \cap \text{Ad}(w)\mathfrak{g}(\mathcal{O})},$$

car  $I^M$  normalise  $\mathfrak{u}$ . Et la dimension de la dernière terme est

$$\sum_{i=2}^4 [(w_i - w_1) - (-m - w_1)] = 3m - w_1 = 3m - b.$$

Donc les  $\mathfrak{u}/\mathfrak{u} \cap \text{Ad}(g)\mathfrak{g}(\mathcal{O})$  s'organisent en un fibré vectoriel  $\tilde{\mathfrak{u}}/\tilde{\mathfrak{u}} \cap \mathcal{K}$  sur  $V_b \cap \mathcal{X}^M$ . La rétraction en question est un torseur sous ce fibré vectoriel, d'où le lemme.  $\square$

De plus, puisque  $M = GL_1 \times GL_3$ , la projection vers le deuxième facteur donne un isomorphisme

$$V_b \cap \mathcal{X}^M \cong \mathcal{X}_{\geq -m}^{\text{GL}_3, (-b)}.$$

Dans la suite, on distingue entre les deux types.

3.3.1. *Premier type.* — On va couper  $V_b$  en parties localement fermées telles que la restriction de la fibration

$$f_P : \mathcal{X}_\gamma \cap V_b \rightarrow \mathcal{X}_\gamma^M \cap V_b$$

sur chaque partie est une fibration en espaces affines.

On fixe  $c \in \mathbf{R}$  tel que

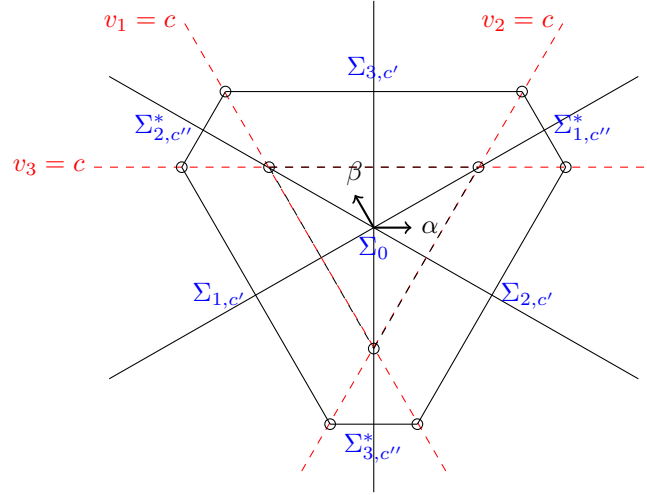
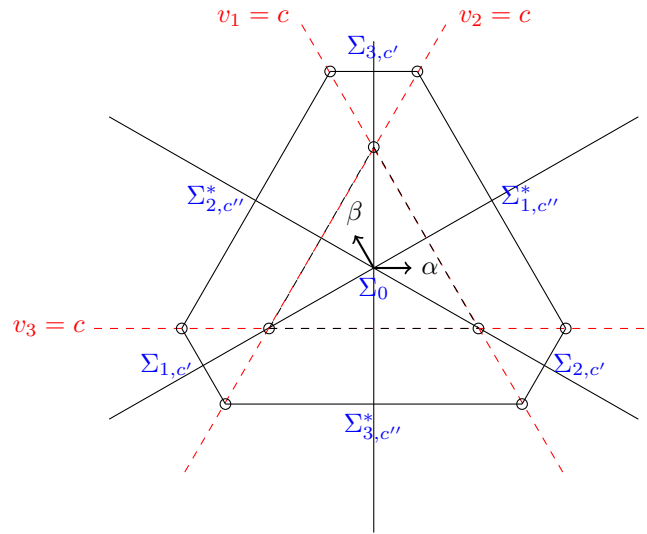
$$-m + n_1 - 1 < c < -m + n_1.$$

Pour  $i = 2, 3, 4$ , on note

$$\begin{aligned} \Sigma_i &= \{w \in R_b \mid w_i < c, w_j > c, \forall j \neq i, j \neq 1\}, \\ \Sigma_i^* &= \{w \in R_b \mid w_i > c, w_j < c, \forall j \neq i, j \neq 1\}, \end{aligned}$$

et on note

$$\Sigma_0 = \begin{cases} \{w \in R_b \mid w_j > c, \forall j \neq 1\}, & \text{si } c < \left[\frac{-b}{3}\right], \\ \{w \in R_b \mid w_j < c, \forall j \neq 1\}, & \text{si } c > \left[\frac{-b}{3}\right]. \end{cases}$$

FIGURE 4. Découpage de  $R_b$  pour  $c < \lceil \frac{-b}{3} \rceil$ .FIGURE 5. Découpage de  $R_b$  pour  $c > \lceil \frac{-b}{3} \rceil$ .

Alors  $R_b = \Sigma_0 \cup \bigcup_{i=2}^4 (\Sigma_i \cup \Sigma_i^*)$ . Pour tout  $c', c'' \in \mathbf{Z}$ , on note

$$\Sigma_{i,c'} = \{w \in \Sigma_i \mid w_i = c'\}, \quad \Sigma_{i,c''}^* = \{w \in \Sigma_i^* \mid w_i = c''\}.$$

Les figures 4 et 5 donnent les découpages dans les deux cas.

LEMME 3.13. — *La rétraction*

$$f_P : \mathcal{X}_\gamma \cap V_b \rightarrow \mathcal{X}_\gamma^M \cap V_b$$

induite une fibration en espaces affines

$$f_P : \mathcal{X}_\gamma \cap \bigcup_{w \in \Sigma_0} C(w) \rightarrow \mathcal{X}_\gamma^M \cap \bigcup_{w \in \Sigma_0} C(w),$$

et du même quand on remplace  $\Sigma_0$  par  $\Sigma_{i,c'}$ ,  $\Sigma_{i,c''}^*$ .

*Démonstration.* — Puisque on a déjà le lemme 3.12, d'après la proposition 3.2, il suffit de montrer que la dimension de

$$\frac{\text{ad}(\gamma)\mathfrak{u}}{\text{ad}(\gamma)\mathfrak{u} \cap \text{Ad}(g)\mathfrak{g}(\mathcal{O})}$$

est indépendante de  $g$  pour  $gK$  dans  $\mathcal{X}_\gamma^M \cap \bigcup_{w \in \Sigma_0} C(w)$ . Même argument si on remplace  $\Sigma_0$  par  $\Sigma_{i,c'}$ ,  $\Sigma_{i,c''}^*$ .

Pour  $w \in R_b$ , on a  $C(w) \cap \mathcal{X}^M = I^M wK/K$ . Pour  $g \in I^M$ , on a

$$\frac{\text{ad}(\gamma)\mathfrak{u}}{\text{ad}(\gamma)\mathfrak{u} \cap \text{Ad}(gw)\mathfrak{g}(\mathcal{O})} \cong \frac{\text{ad}(\gamma)\mathfrak{u}}{\text{ad}(\gamma)\mathfrak{u} \cap \text{Ad}(w)\mathfrak{g}(\mathcal{O})},$$

car  $I^M$  normalise  $\text{ad}(\gamma)\mathfrak{u}$ . La dimension du dernier terme est

$$\sum_{i=2}^4 \max\{w_i + m - n_1, 0\}.$$

1. Pour  $c > \lfloor \frac{-b}{3} \rfloor$ ,  $w \in \Sigma_0$ , la dimension est 0.
2. Pour  $c < \lfloor \frac{-b}{3} \rfloor$ ,  $w \in \Sigma_0$ , la dimension est

$$\sum_{j=2}^4 (w_j + m - n_1) = 3(m - n_1) - b,$$

constante sur  $\Sigma_0$ .

3. Pour  $w \in \Sigma_{i,c'}$ , la dimension est

$$\sum_{j=2, j \neq i}^4 (w_j + m - n_1) = 2(m - n_1) - b - c',$$

constante sur  $\Sigma_{i,c'}$ .

4. Pour  $w \in \Sigma_{i,c''}^*$ , la dimension est

$$w_i + m - n_1 = c'' + m - n_1,$$

constante sur  $\Sigma_{i,c''}^*$ .

□

Puisque  $M = GL_1 \times GL_3$ , d'après le théorème 3.9 et le corollaire 3.10, les intersections

$$\mathcal{X}_\gamma^M \cap \bigcup_{w \in \Sigma_0} C(w), \quad \mathcal{X}_\gamma^M \cap \bigcup_{w \in \Sigma_{i,c'}} C(w), \quad \mathcal{X}_\gamma^M \cap \bigcup_{w \in \Sigma_{i,c''}^*} C(w).$$

admettent des pavages en espaces affines, et on a vu comment les ordonner pour en déduire un pavage en espaces affines de  $\mathcal{X}_\gamma^M \cap V_b$ . D'après le lemme précédent, les intersections

$$\mathcal{X}_\gamma \cap \bigcup_{w \in \Sigma_0} C(w), \quad \mathcal{X}_\gamma \cap \bigcup_{w \in \Sigma_{i,c'}} C(w), \quad \mathcal{X}_\gamma \cap \bigcup_{w \in \Sigma_{i,c''}^*} C(w).$$

admettent aussi des pavages en espaces affines, et en utilisant le même ordre que leurs analogues ci-dessus, on en déduit un pavage en espaces affines de  $\mathcal{X}_\gamma \cap V_b$ . Le théorème est donc démontré pour ce type.

3.3.2. *Deuxième type.* — On pave  $V_b$  avec l'Iwahori  $I'_\mathbf{a} := \text{Ad}(\epsilon^\mathbf{a})I'$ , où

$$\mathbf{a} = (n_1 - n, n_1 - n, 0, 0) \in \mathbf{N}^4.$$

On note  $C_\mathbf{a}(w) = V_b \cap I'_\mathbf{a} w K / K$ . Soit

$$H = I'_\mathbf{a}^M \cap \text{Ad}(\text{diag}(1, 1, \epsilon^{m_w}, \epsilon^{m_w})) K^M,$$

où  $m_w = -m - w_2$ . Alors les mêmes arguments que ceux dans la démonstration de la proposition 2.11 et du lemme 2.12 montrent que

LEMME 3.14. — *On a un pavage en espaces affines*

$$V_b = \bigsqcup_{w \in R_b} C_\mathbf{a}(w),$$

où  $C_\mathbf{a}(w) = UHwK/K$ , et la rétraction

$$f_P : UHwK/K \rightarrow HwK^M/K^M$$

est une fibration en espaces affines.

LEMME 3.15. — *La rétraction*

$$f_P : \mathcal{X}_\gamma \cap C_\mathbf{a}(w) \rightarrow \mathcal{X}_\gamma^M \cap HwK^M/K^M$$

est une fibration en espaces affines.

*Démonstration.* — D'après la proposition 3.2 et le lemme 3.14, il suffit de montrer que la dimension  $\text{ad}(\gamma)\mathfrak{u}/\text{ad}(\gamma)\mathfrak{u} \cap \text{Ad}(g)\mathfrak{g}(\mathcal{O})$  est indépendante de  $g$  pour  $gK \in HwK^M/K^M$ . Puisque  $H \subset I'_\mathbf{a}^M$ , il normalise  $\text{ad}(\gamma)\mathfrak{u}$ . Donc l'énoncé se déroule du lemme 3.3.  $\square$

On note

$$R_{b_1} = \{w \in R_b \mid w_2 \geq -m + n_1 - n\}, \quad V_{b_1} = \bigsqcup_{w \in R_{b_1}} C_\mathbf{a}(w).$$

C'est une sous-variété fermée de  $V_b$ . Voir le figure 6 pour avoir une idée de  $R_{b_1}$ . Dans les lemmes 3.16, 3.17, on va paver  $(V_b \setminus V_{b_1}) \cap \mathcal{X}_\gamma$  et  $V_{b_1} \cap \mathcal{X}_\gamma$  en espaces affines. La réunion de ces deux pavages nous donnera un pavage en espaces affines de  $V_b \cap \mathcal{X}_\gamma$ , ce qui terminera la démonstration pour le deuxième type.

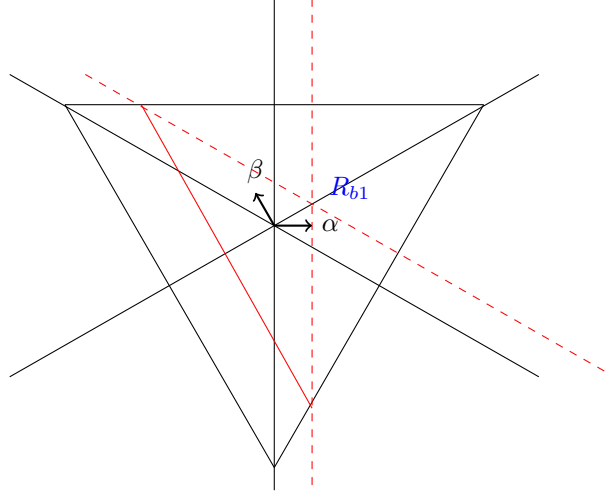
LEMME 3.16. — *La sous-variété ouverte  $(V_b \setminus V_{b_1}) \cap \mathcal{X}_\gamma$  de  $V_b \cap \mathcal{X}_\gamma$  admet un pavage en espaces affines. Plus précisément, pour  $w \in R_b \setminus R_{b_1}$ , l'intersection  $C_\mathbf{a}(w) \cap \mathcal{X}_\gamma$  est isomorphe à un espace affine.*

*Démonstration.* — D'après le lemme 3.15, il suffit de montrer que  $HwK^M/K^M \cap \mathcal{X}_\gamma^M$  est isomorphe à un espace affine. Puisque

$$w_2 - w_j \leq w_2 - (-m) < n_1 - n, \quad j = 3, 4,$$

on a

$$HwK^M/K^M = \begin{bmatrix} \mathcal{O} & & & & \\ & \mathcal{O} & & & \\ & \mathfrak{p}^{m_w} & \mathcal{O} & \mathcal{O} & \\ & \mathfrak{p}^{m_w} & \mathfrak{p} & \mathcal{O} & \\ & & & & \end{bmatrix} wK^M/K^M.$$


 FIGURE 6.  $R_{b1}$  dans  $R_b$ .

On note

$$H' = \begin{bmatrix} \mathcal{O} & & & \\ & \mathcal{O} & & \\ & & \mathcal{O} & \mathcal{O} \\ & \mathfrak{p} & & \mathcal{O} \end{bmatrix}, \quad U' = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & \mathfrak{p}^{m_w} & 1 & \\ & \mathfrak{p}^{m_w} & & 1 \end{bmatrix}.$$

Ce sont des groupes de Lie et on a  $HwK^M/K^M = U'H'wK^M/K^M$ ,  $\forall w \in R_b \setminus R_{b1}$ . On note

$$P' = \begin{bmatrix} * & & & \\ & * & & \\ & * & * & * \\ & * & * & * \end{bmatrix},$$

et  $P' = M'N'$  sa factorisation de Levi. Parce que  $H'$  normalise  $\mathfrak{u}'$  et  $\text{ad}(\gamma)\mathfrak{u}'$ , le corollaire 3.4 implique que la rétraction

$$f_{P'} : U'H'wK^M/K^M \cap \mathcal{X}_\gamma^M \rightarrow H'wK^{M'}/K^{M'} \cap \mathcal{X}_\gamma^{M'}$$

est une fibration en espaces affines. De plus, l'intersection  $H'wK^{M'}/K^{M'} \cap \mathcal{X}_\gamma^{M'}$  est isomorphe à un espace affine car  $M' = GL_1 \times GL_1 \times GL_2$ , d'où le lemme.  $\square$

LEMME 3.17. — *L'intersection  $V_{b1} \cap \mathcal{X}_\gamma$  admet un pavage en espaces affines.*

*Démonstration.* — En utilisant le lemme 3.15, on va déduire un pavage de  $V_{b1} \cap \mathcal{X}_\gamma$  d'un pavage de  $V_{b1} \cap \mathcal{X}_\gamma^M$ .

Pour  $w \in R_{b1}$ , on a

$$HwK^M/K^M = I_{\mathfrak{a}}^M wK^M/K^M.$$

La composition de la translation sur  $\mathcal{X}^M$  par  $\epsilon^{-\mathfrak{a}}$  et la projection à la facteur  $GL_3$  de  $M = GL_1 \times GL_3$  donne un isomorphisme

$$(5) \quad V_{b1} \cap \mathcal{X}^M \cong \mathcal{X}_{\geq -m}^{GL_3, (-b+n-n_1)}.$$

Avec cet isomorphisme, on peut translater le pavage pour  $\mathrm{GL}_3$  à un pavage pour  $V_{b_1} \cap \mathcal{X}_\gamma^M$ . On fixe  $c \in \mathbf{R}$  tel que

$$n - m - 1 < c < n - m.$$

On note  $w'_2 = w_2 - (n_1 - n)$  et  $w'_j = w_j$ ,  $j = 3, 4$ . Pour  $i = 2, 3, 4$ , on note

$$\begin{aligned}\Sigma_i &= \{w \in R_{b_1} \mid w'_i < c, w'_j > c, \forall j \neq 1, i\}, \\ \Sigma_i^* &= \{w \in R_{b_1} \mid w'_i > c, w'_j < c, \forall j \neq 1, i\},\end{aligned}$$

et on note

$$\Sigma_0 = \begin{cases} \{w \in R_{b_1} \mid w'_j > c, \forall j \neq 1\}, & \text{si } c < \left[\frac{-b+n-n_1}{3}\right], \\ \{w \in R_{b_1} \mid w'_j < c, \forall j \neq 1\}, & \text{si } c > \left[\frac{-b+n-n_1}{3}\right]. \end{cases}$$

Alors  $R_{b_1} = \Sigma_0 \cup \bigcup_{i=2}^4 (\Sigma_i \cup \Sigma_i^*)$ . Pour tout  $c', c'' \in \mathbf{Z}$ , on note

$$\Sigma_{i,c'} = \{w \in \Sigma_i \mid w'_i = c'\}, \quad \Sigma_{i,c''}^* = \{w \in \Sigma_i^* \mid w'_i = c''\}.$$

Ce découpage est analogue de celui indiqué dans les figures 4 et 5.

LEMME 3.18. — *La rétraction*

$$f_P : \mathcal{X}_\gamma \cap V_{b_1} \rightarrow \mathcal{X}_\gamma^M \cap V_{b_1}$$

induite une fibration en espaces affines

$$f_P : \mathcal{X}_\gamma \cap \bigsqcup_{w \in \Sigma_0} C_{\mathbf{a}}(w) \rightarrow \mathcal{X}_\gamma^M \cap \bigsqcup_{w \in \Sigma_0} C_{\mathbf{a}}(w),$$

et du même si on remplace  $\Sigma_0$  par  $\Sigma_{i,c'}, \Sigma_{i,c''}^*$ .

*Démonstration.* — Puisque on a déjà le lemme 3.12, d'après la proposition 3.2, il suffit de montrer que la dimension de

$$\frac{\mathrm{ad}(\gamma)\mathfrak{u}}{\mathrm{ad}(\gamma)\mathfrak{u} \cap \mathrm{Ad}(g)\mathfrak{g}(\mathcal{O})}$$

est indépendante de  $g$  pour  $gK$  dans  $\mathcal{X}_\gamma^M \cap \bigsqcup_{w \in \Sigma_0} C_{\mathbf{a}}(w)$ . Même argument si on remplace  $\Sigma_0$  par  $\Sigma_{i,c'}, \Sigma_{i,c''}^*$ .

Pour  $w \in R_{b_1}$ , on a  $C_{\mathbf{a}}(w) \cap \mathcal{X}^M = I_{\mathbf{a}}^M wK/K$ . Pour  $g \in I_{\mathbf{a}}^M$ , on a

$$\frac{\mathrm{ad}(\gamma)\mathfrak{u}}{\mathrm{ad}(\gamma)\mathfrak{u} \cap \mathrm{Ad}(gw)\mathfrak{g}(\mathcal{O})} \cong \frac{\mathrm{ad}(\gamma)\mathfrak{u}}{\mathrm{ad}(\gamma)\mathfrak{u} \cap \mathrm{Ad}(w)\mathfrak{g}(\mathcal{O})},$$

car  $I_{\mathbf{a}}^M$  normalise  $\mathrm{ad}(\gamma)\mathfrak{u}$ . La dimension du dernier terme est

$$\max\{w_2 + m - n_1, 0\} + \sum_{i=3}^4 \max\{w_i + m - n, 0\}.$$

1. Pour  $c < \left[\frac{-b+n-n_1}{3}\right]$ , soit  $w \in \Sigma_0$ , la dimension est

$$\begin{aligned}(w_2 + m - n_1) + \sum_{j=3}^4 (w_j + m - n) \\ = 3m - b - n_1 - 2n,\end{aligned}$$

donc constante sur  $\Sigma_0$ .

2. Pour  $c > \left[\frac{-b+n-n_1}{3}\right]$ , soit  $w \in \Sigma_0$ , la dimension est 0.

3. Pour  $w \in \Sigma_{i,c'}$ , la dimension est

$$\begin{cases} 2(m-n) - b - c', & \text{si } i = 2; \\ 2m - n_1 - n - b - c', & \text{si } i = 3, 4; \end{cases}$$

donc constante sur  $\Sigma_{i,c'}$ .

4. Pour  $w \in \Sigma_{i,c''}^*$ , la dimension est

$$\begin{cases} c'' + m - n_1, & \text{si } i = 2; \\ c'' + m - n, & \text{si } i = 3, 4; \end{cases}$$

donc constante sur  $\Sigma_{i,c''}^*$ .

□

Par l'isomorphisme (5), les intersections

$$\mathcal{X}_\gamma^M \cap \bigsqcup_{w \in \Sigma_0} C_{\mathbf{a}}(w), \quad \mathcal{X}_\gamma^M \cap \bigsqcup_{w \in \Sigma_{i,c'}} C_{\mathbf{a}}(w), \quad \mathcal{X}_\gamma^M \cap \bigsqcup_{w \in \Sigma_{i,c''}^*} C_{\mathbf{a}}(w).$$

admettent des pavages en espaces affines d'après le théorème 3.9 et le corollaire 3.10. Comme expliqué dans la construction de §2.4, on peut les ordonner pour en déduire un pavage en espaces affines de  $\mathcal{X}_\gamma^M \cap V_{b_1}$ . D'après le lemme précédent, les intersections

$$\mathcal{X}_\gamma \cap \bigsqcup_{w \in \Sigma_0} C_{\mathbf{a}}(w), \quad \mathcal{X}_\gamma \cap \bigsqcup_{w \in \Sigma_{i,c'}} C_{\mathbf{a}}(w), \quad \mathcal{X}_\gamma \cap \bigsqcup_{w \in \Sigma_{i,c''}^*} C_{\mathbf{a}}(w).$$

admettent aussi des pavages en espaces affines. En utilisant le même ordre que leurs analogues ci-dessus, on en déduit un pavage de  $\mathcal{X}_\gamma \cap V_{b_1}$  en espaces affines. □

REMARQUE 3.2. — 1. La méthode que l'on a développé pour paver les fibres de Springer affines pour  $GL_4$  peut être généralisée aux groupes classiques de rang 2 et 3 sans grandes difficultés.

2. La difficulté principale pour généraliser cette méthode à  $GL_d$ ,  $d \geq 5$  est due au fait que les intersections  $\mathcal{X}_\gamma \cap S_{\varpi}^c(v)$  ne sont pas pure si  $\varpi$  n'est pas conjugué à  $\varpi_1$  ou  $\varpi_{d-1}$  sous l'action de  $W$ .

### Appendice : Forme minimale d'un élément semi-simple régulier non-ramifié

Soit  $G = GL_d$ ,  $T$  le tore maximal des matrices diagonales.

DÉFINITION 3.1. — L'élément régulier  $\gamma \in \mathfrak{t}(F)$  est dit *en forme minimale* s'il satisfait à la condition

$$\text{val}(\alpha_{i,j}(\gamma)) = \min_{i \leq l \leq j-1} \{\text{val}(\alpha_l(\gamma))\}, \quad \forall i, j = 1, \dots, d, i < j.$$

Dans ce cas, on dit que sa valuation radicielle est le  $(d-1)$ -uplet  $(\text{val}(\alpha_i(\gamma))_{i=1}^{d-1})$ .

PROPOSITION 3.19. — *Tout élément  $\gamma \in \mathfrak{t}(F)$  est conjugué sous l'action du groupe de Weyl à au moins un élément en forme minimale.*

*Démonstration.* — On va montrer la proposition par récurrence. Pour  $G = \mathrm{GL}_2$ , le résultat est évident. On suppose que pour  $G = \mathrm{GL}_{d'}$ ,  $d' < d$ , la proposition est démontrée.

Soit  $\gamma = \mathrm{diag}(\gamma_1, \dots, \gamma_d)$ , soit  $n = \max\{\mathrm{val}(\alpha_{i,j}(\gamma)) \mid i \neq j\}$ . Soit  $\gamma'_1 = \mathrm{diag}(\gamma_{\tau(1)}, \dots, \gamma_{\tau(a)})$  l'une des sous-matrices équivaluées de valuation  $n$  de  $\gamma$  qui est de taille maximale. On note  $\gamma'_2 = \mathrm{diag}(\gamma_{\tau(a+1)}, \dots, \gamma_{\tau(d)})$ , et  $\gamma' = \mathrm{diag}(\gamma'_1, \gamma'_2)$ .

LEMME 3.20. — *Pour  $a + 1 \leq i \leq d$  fixé et  $1 \leq j \leq a$ , les valuations  $\mathrm{val}(\alpha_{i,j}(\gamma')) = \mathrm{val}(\alpha_{j,i}(\gamma'))$  sont toutes les mêmes et strictement plus petites que  $n$ .*

*Démonstration.* — S'il existe  $a + 1 \leq i_0 \leq d$ ,  $1 \leq j_0 \leq a$  tel que  $\mathrm{val}(\alpha_{i_0,j_0}(\gamma')) = n$ , alors pour tout  $1 \leq j \leq a$ , les inégalités

$$n \geq \mathrm{val}(\alpha_{i_0,j}(\gamma')) \geq \min\{\mathrm{val}(\alpha_{i_0,j_0}(\gamma')), \mathrm{val}(\alpha_{j_0,j}(\gamma'))\} = n$$

entraînent que  $\mathrm{val}(\alpha_{i_0,j}(\gamma')) = n$ , i.e. que la matrice  $\mathrm{diag}(\gamma_{\tau(1)}, \dots, \gamma_{\tau(a)}, \gamma'_{i_0,i_0})$  est équivaluée de valuation  $n$ , contradiction à l'hypothèse que  $\gamma'_1$  est de taille maximale. Donc  $\mathrm{val}(\alpha_{i,j}(\gamma')) < n$ , pour tout  $a + 1 \leq i \leq d$ ,  $1 \leq j \leq a$ .

Par conséquent, pour tout  $1 \leq k, l \leq a$ , on a

$$\mathrm{val}(\alpha_{i,k}(\gamma')) = \min\{\mathrm{val}(\alpha_{i,l}(\gamma')), \mathrm{val}(\alpha_{l,k}(\gamma')) = n\} = \mathrm{val}(\alpha_{i,l}(\gamma')).$$

□

Donc on peut “contracter”  $\gamma'_1$  en un élément  $\delta_1 \in F$  tel que  $\mathrm{val}(\delta_1) = n$  et les valuations radicielles ne changent pas à l'extérieur de  $\gamma'_1$ . On note  $\delta = (\delta_1, \gamma'_2)$ . On observe que la matrice  $\gamma'_1$  est toujours de taille strictement plus grande que 1, donc  $\delta$  est de taille strictement plus petite que  $d - 1$ . Par l'hypothèse de récurrence,  $\delta$  admet une forme minimale  $\tau'(\delta)$ . En remplaçant l'élément  $\delta_1$  dans  $\tau'(\delta)$  par  $\gamma'_1$ , on trouve une conjugaison de  $\gamma$  en forme minimale. □

REMARQUE 3.3. — En général, un élément  $\gamma$  peut être conjugué à plusieurs éléments en forme minimale.

## BIBLIOGRAPHIE

- [GKM1] M. Goresky, R. Kottwitz, R. Macpherson, *Purity of equivaled affine Springer fibers*, Representation Theory 10 (2006), 130-146.
- [GKM2] M. Goresky, R. Kottwitz, R. Macpherson, *Homology of affine Springer fibers in the unramified case*, Duke Math. J. 121 (2004), no. 3, 509-561.
- [GKM3] M. Goresky, R. Kottwitz, R. Macpherson, *Codimensions of root valuation strata*, Pure. Appl. Math. Q. 5 (2009), no. 4, 1253-1310.
- [IM] N. Iwahori, H. Matsumoto, *On some Bruhat decomposition and the structure of the Hecke rings of  $p$ -adic Chevalley groups*, Publ. Math. IHES, 25 (1965), 5-48.
- [KL] D. Kazhdan, G. Lusztig, *Fixed point varieties on affine flag manifolds*, Israel. J. Math. 62(1988), 129-168.
- [Lu] V. Lucarelli, *Affine pavings for affine Springer fibers for split elements in  $\mathrm{PGL}_3$* , <http://arxiv.org/abs/math/0309132>
- [MP] A. Moy, G. Prasad, *Unrefined minimal  $K$ -types for  $p$ -adic groups*, Invent. Math. 116 (1994), 393-408.