

Title:	La teoría de la fisura crítica como base teórica para el diseño de losas frente a punzonamiento en el nuevo Código Modelo 2010 (The Critical Shear Crack Theory as a physical model for punching shear design and its implementation into new Model Code 2010)
Authors:	Fernández Ruiz M., Sagasetta J., Muttoni A.
Published in:	Hormigón y Acero
Volume: Pages:	n° 263 pp. 49-63
Country:	Spain
Year of publication:	2012
Type of publication:	Peer reviewed journal article

Please quote as:	Fernández Ruiz M., Sagasetta J., Muttoni A., <i>La teoría de la fisura crítica como base teórica para el diseño de losas frente a punzonamiento en el nuevo Código Modelo 2010 (The Critical Shear Crack Theory as a physical model for punching shear design and its implementation into new Model Code 2010)</i> , Hormigón y Acero, n° 263, Spain, 2012, pp. 49-63.
------------------	--

# La teoría de la fisura crítica como base teórica para el diseño de losas frente a punzonamiento en el nuevo Código Modelo 2010

*The Critical Shear Crack Theory as a physical model for punching shear design and its implementation into new Model Code 2010*

Miguel Fernández Ruiz<sup>(1)</sup>, Juan Sagaseta Albajar<sup>(2)</sup> y Aurelio Muttoni<sup>(1)</sup>

Recibido | Received: 28-01-2011  
Aceptado | Accepted: 20-04-2011

## Resumen

En abril de 2010, se publicó el primer borrador del nuevo Código Modelo 2010. Dicho borrador presenta diferencias importantes en el tratamiento de ciertos fenómenos, entre ellos el esfuerzo cortante y el punzonamiento. A diferencia del Código Modelo 90 (o de ciertas normativas nacionales e internacionales como ACI 318-08, EC-2 o EHE-08), el Código Modelo 2010 basa sus métodos de diseño en modelos físicos en vez de en fórmulas empíricas. En este artículo se analiza y explica la metodología propuesta para el punzonamiento, basada en la teoría de la fisura crítica. Para ello se describen y justifican los fundamentos teóricos de dicha teoría, explicando posteriormente su aplicación en el diseño y verificación de estructuras así como su aplicación mediante diferentes niveles de aproximación.

**Palabras clave:** punzonamiento, teoría de la fisura crítica, Código Modelo 2010, losas, transferencia de momento.

## Abstract\*

On April 2010, the first complete draft of new Model Code 2010 was published. It introduced a number of innovative design approaches, some of them with respect to shear and punching shear. Contrary to Model Code 90 (or some national and international codes such as ACI 318-08, EC-2 or EHE-08), the new Model Code 2010 grounds such design approaches on physical models rather than on empirical formulas. This paper gives an overview of the methodology proposed for punching shear, which is based on the critical shear crack theory. The fundamentals of this theory are explained and justified as well as the application of the theory to the design and assessment of flat slabs. The paper also introduces the design of structures following a levels-of-approximation approach and how can this be applied to punching shear design.

**Keywords:** punching shear, critical shear crack theory, Model Code 2010, flat slabs, moment transfer.

\* An extensive English language summary of the present article is provided on page 108 of this issue both for the convenience of non-Spanish-speaking readers and inclusion in databases.

(1) École Polytechnique Fédérale de Lausanne, ENAC (Lausana, Suiza).

(2) University of Surrey, Division of Civil, Chem. and Env. Engineering (Guildford, Reino Unido).

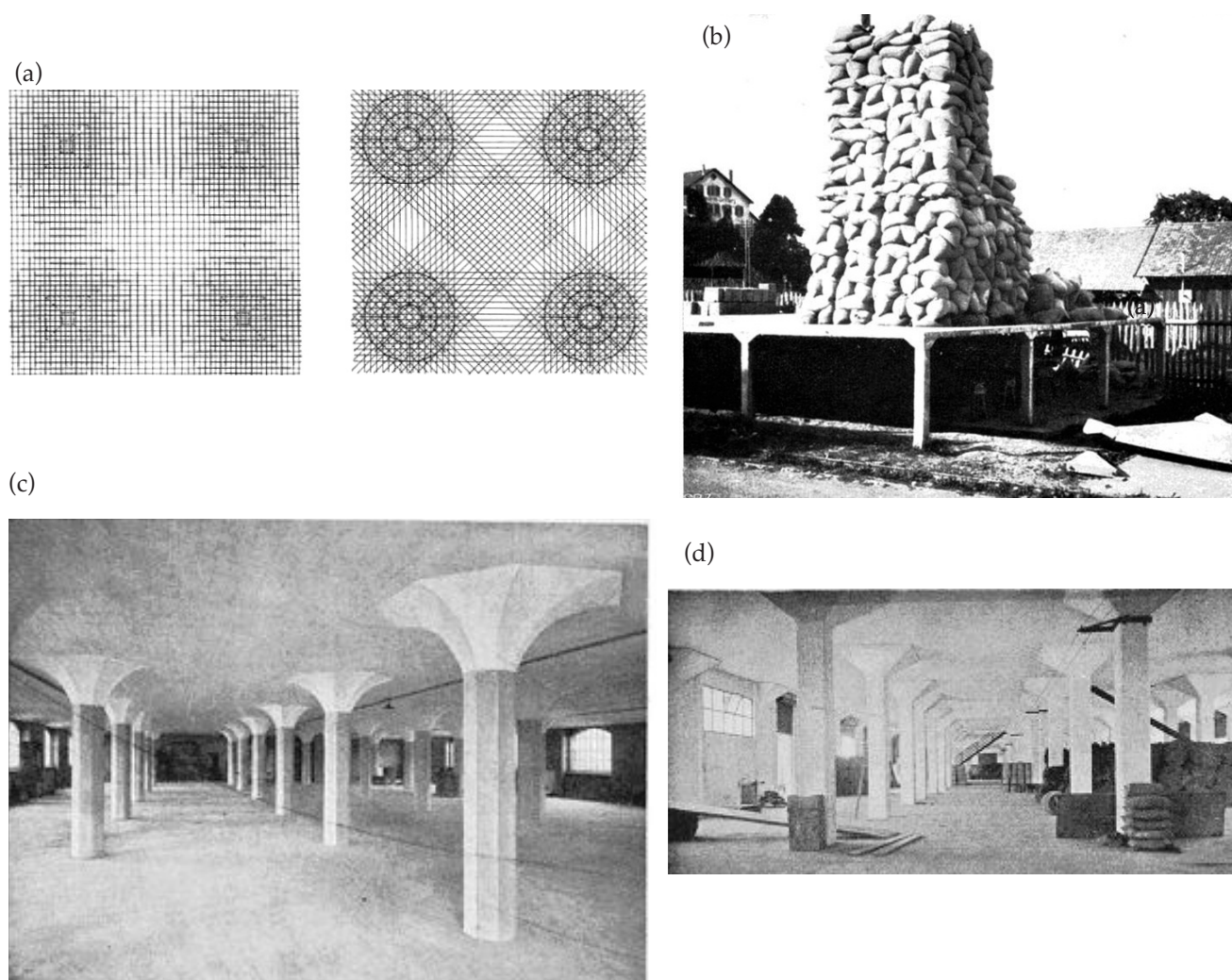
Persona de contacto / Corresponding author: miguel.fernandezruiz@epfl.ch

## 1. INTRODUCCIÓN

La construcción mediante losas de hormigón no nervadas y apoyadas sobre pilares comenzó de manera prácticamente simultánea en Europa y América en la primera década del siglo XX de la mano de Maillart y Turner con respectivas patentes [1, 2] (ver figura 1a). Las ventajas de dicho sistema de construcción eran evidentes, contando una gran sencillez y economía en la construcción al mismo tiempo que ofrecían techos planos, cuyas ventajas desde el punto de vista de la arquitectura ya habían sido reconocidas y exploradas (aunque infructuosamente) mediante la técnica de la piedra armada en el siglo XVIII por J-G Soufflot [3]. El desarrollo y validación de dicho sistema (figura 1b) permitió la construcción de edificios y depósitos (figura 1c, ver [4, 5]) extendiéndose su uso por América del norte y Europa (fundamentalmente Suiza, Francia, España, los países bálticos y Rusia [1]). En España, dicho sistema fue utilizado en numerosas ocasiones, como lo demuestran los ejemplos posteriores a 1932 descritos por Carlos Fernández Casado [6] (figura 1d).

Respecto al comportamiento resistente de las losas planas, sus estados límite determinantes para la elección del canto de la losa son normalmente las flechas (condiciones de servicio) así como la resistencia frente al punzonamiento en las zonas de apoyo de las losas sobre pilares [7]. El modo de rotura por punzonamiento es particularmente delicado puesto que tiene un carácter potencialmente frágil, pudiendo además ser propagable a otras columnas (salvo que se dispongan medidas específicas como armaduras transversales, armaduras de integridad o cuantías bajas de flexión [8]).

Hasta 1960, hubo relativamente pocas investigaciones sobre la resistencia a punzonamiento de losas de hormigón (un resumen detallado puede consultarse en [9]). Posteriormente, una serie de investigaciones comenzaron a desarrollarse en estados Unidos [10, 11] y en Suecia [12]. Las investigaciones efectuadas en Norteamérica dieron lugar a formulaciones de diseño empíricas, sobre las cuales se basaron posteriormente las normas americanas ACI. En Suecia, en cambio, el modelo propuesto por Kinnunen y Ny-



**Figura 1.** Primeras aplicaciones y desarrollos de losas planas sobre columnas con capiteles: (a) disposición de armaduras de flexión según el sistema de Maillart (izquierda) y de Turner (derecha) [4]; (b) ensayo de losa plana efectuado en 1908 por R. Maillart [4]; (c) depósito de Zürich-Giesshübel (ing. R. Maillart, 1910) [4,5]; y (d) depósito de mercancías del puerto de pasajes (Guipúzcoa, 1936, ing. C. Fernández Casado) [6]

lander [12] con una base física sólida, no tuvo una gran repercusión como modelo de dimensionamiento debido a la gran complejidad en su aplicación [8]. Como consecuencia, los modelos empíricos (basados en los trabajos de Moe [11] y posteriormente de Zsutty [13] para el esfuerzo cortante) fueron mayoritariamente adoptados por las diferentes normativas y recomendaciones. Dichas formulas empíricas fueron desarrolladas a partir de los ensayos disponibles mediante la aplicación de análisis dimensional y de regresión lineal. Su aplicación sin embargo ha distado de ser satisfactoria, puesto que la influencia de algunos parámetros relevantes (como el efecto de escala por ejemplo) no fue identificada e introducida hasta cierto tiempo después o bien las fórmulas en ciertos casos (fuera de sus límites de calibración normalmente desconocidos por los proyectistas) podían producir resultados con errores importantes. Como consecuencia de esta situación, se produjeron diferentes colapsos y fallos en elementos sometidos a esfuerzo cortante o punzonamiento [14, 8]. Esta situación, claramente insatisfactoria, ha continuado hasta nuestros días con diferentes normativas nacionales e internacionales (MC-90 [15], ACI 318-08 [16], EC-2 [17]) basadas todavía en fórmulas empíricas.

Como reacción a dichas formulaciones empíricas, se llevaron a cabo diversos estudios con el objetivo de investigar los mecanismos que permiten la transmisión del esfuerzo cortante en elementos de hormigón armado [18, 19, 20, 21]. Gracias a dichas investigaciones, una serie de teorías con una base física sólida (como la teoría del campo de compresiones modificada [21]) pudieron ser desarrolladas, permitiendo una comprensión clara e intuitiva de los mecanismos resistentes frente a esfuerzo cortante así como de los parámetros geométricos y mecánicos relevantes. La implementación de dichas teorías en normas y recomendaciones de diseño se ha mostrado también muy eficaz, dando lugar a formulaciones compactas y de fácil uso en la práctica (SIA 2003 [22], CSA 2004 [23]). Además, los modelos con base física permiten (siempre que los límites de validez de la teoría sigan siendo aplicables o se adapten) el análisis y dimensionamiento de sistemas complejos e incluso la invención de sistemas innovadores así como la predicción de comportamientos todavía no investigados donde el uso de formulaciones empíricas no es posible.

El primer borrador disponible del nuevo Código Modelo 2010 [24, 25] presenta una apuesta decidida en la integración de modelos de cálculo con bases físicas sólidas. En este sentido, para el diseño frente al estado límite último de punzonamiento, propone el uso de un método de cálculo basado en la teoría de la fisura crítica. Dicha teoría fue desarrollada por A. Muttoni en 1985 en el politécnico de Zürich [26] para su aplicación en el cálculo de la resistencia a punzonamiento de losas sin armadura transversal en el borrador de la norma suiza SIA 162 [27]. Sus hipótesis principales fueron validadas en una primera fase

mediante campañas experimentales [28]. Posteriormente, una serie de trabajos teóricos y validaciones sistemáticas de los ensayos de la literatura científica [29,30] permitieron establecer los modelos de cálculo para el punzonamiento en la norma suiza SIA 162 en 1993. Una serie de trabajos posteriores [31] permitieron la mejora del modelo de cálculo para el punzonamiento y cortante en vigas y losas sin armadura transversal (norma suiza SIA 262 de 2003 [22]). Asimismo, una serie de investigaciones complementarias han permitido extender su aplicación a otros casos como losas con armaduras de punzonamiento [32, 33] o el punzonamiento en casos no simétricos [34]. Sus resultados han sido validados mediante ensayos disponibles en la literatura técnica así como gracias a 146 ensayos específicos realizados en la École Polytechnique Fédérale de Lausana con losas de dimensiones típicas de  $3,0 \times 3,0 \times 0,25$  m (pero llegando hasta losas de hasta 50 cm de canto [35]).

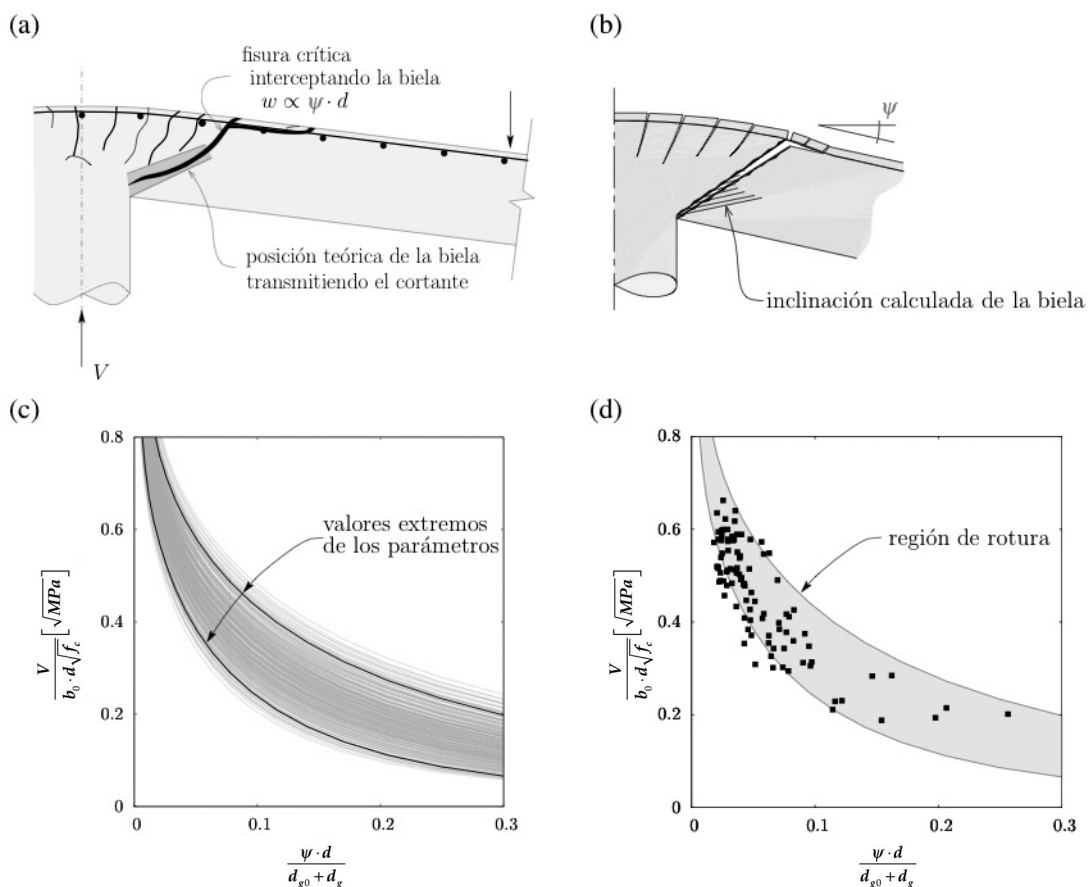
La implementación de la teoría de la fisura crítica en un método de diseño frente a punzonamiento se ha revelado eficaz y conduce a expresiones de diseño compactas [34], donde sus términos tienen un significado físico claro y comprensible [7]. Actualmente, además del Código Modelo 2010, la norma suiza SIA 262 se encuentra completamente basada en ella, permitiendo el dimensionamiento y la verificación de la seguridad estructural de losas según sus principios.

En este artículo, las bases teóricas de la teoría de la fisura crítica son descritas con rigor así como los métodos de dimensionamiento basados en ella e incluidos en el borrador del nuevo Código Modelo 2010 (una versión actualizada de dicho texto puede consultarse en [36]). El artículo se completa con una explicación sobre su aplicación utilizando diferentes niveles de aproximación en el cálculo.

## 2. BASES TEÓRICAS DE LA TEORÍA DE LA FISURA CRÍTICA

La teoría de la fisura crítica está basada en la hipótesis que la resistencia a cortante en elementos de hormigón sin armadura transversal depende de la abertura y rugosidad de una fisura (crítica) que se desarrolla a través de la biela comprimida transmitiendo el esfuerzo cortante [37, 7]. La posición de dicha fisura se presenta por ejemplo en la figura 2a para el caso del punzonamiento en la región de apoyo de una losa.

Una confirmación de la validez de esta hipótesis puede ser obtenida mediante el estudio de un modelo físico donde se considera la capacidad de transmisión de esfuerzo cortante gracias a los mecanismos de engranamiento de áridos y contribución del hormigón en tracción (considerando su fisuración). Según se muestra en [7], admitiendo como grado de liber-



**Figura 2.** Aplicación de la teoría de la fisura crítica para el punzonamiento de losas: (a) posición de la fisura crítica interceptando la biela comprimida; (b) modelo físico para el análisis de la resistencia a punzonamiento [38]; (c) envolventes de rotura calculadas según el modelo físico de la figura (b) (canto entre 100 y 500 mm ( $d = 95\text{-}450$  mm), cuantía de armadura entre 0,4% y 1,6%, resistencia a la compresión entre 15 y 60 MPa, tamaño del árido entre 8 y 32 mm, diámetro de la columna entre 100 y 200 mm); y (d) comparación de la región de rotura con los resultados de 99 ensayos obtenidos de la literatura científica (datos según Muttoni [7])

tad la rotación de la losa cerca de la zona de la columna (ver figura 2b), la resistencia a esfuerzo cortante se reduce con el aumento de la rotación, ver figura 2c. En dicha figura, los ejes han sido normalizados para tener en cuenta el tamaño de la columna o región de apoyo de la losa, la resistencia a la compresión del hormigón y del tamaño de la losa y del árido (esta normalización se justifica posteriormente).

Un análisis detallado de las contribuciones del engranamiento y del hormigón en tracción [38] sobre la base de los resultados del modelo físico de la figura 2b revela que la contribución del hormigón en tracción es determinante para pequeñas rotaciones (cantos reducidos, cuantías elevadas de armadura flexional) mientras que el engranamiento de áridos domina la resistencia para rotaciones moderadas o elevadas. Una comparación de la región de rotura (obtenida a partir de valores relativamente extremos de las envolventes de rotura, ver figura 2c) con una amplia base de ensayos de la literatura científica (recopilada en [7]) confirma la validez de dicho modelo físico y muestra una excelente correlación, ver figura 2d.

A efectos de diseño de losas frente a punzonamiento, y teniendo en cuenta el ancho relativamente reducido de la región de rotura, el cálculo mediante el mo-

delo físico precedente no es normalmente necesario. Una simplificación basada en un criterio simplificado de rotura es suficiente ([7, 31]). Dicha expresión supone que la resistencia a cortante, tradicionalmente correlacionada con la raíz cuadrada de la resistencia a la compresión (posteriormente a los trabajos de Moody et al. [39]) depende de la abertura y de la rugosidad de la fisura crítica:

$$\frac{V_R}{b_0 \cdot d_v} = \sqrt{f_c} \cdot f(w, d_g) \quad (1)$$

Donde  $V_R$  se refiere a la resistencia a punzonamiento,  $b_0$  a un perímetro de control (establecido a  $d_v/2$  del borde de la superficie de apoyo, lo que reproduce correctamente las flexiones y cortantes en la zona crítica [38]),  $d_v$  es la altura estática resistente a cortante (distancia entre el centro de gravedad de la armadura de flexión y la superficie de apoyo de la losa, la cual no coincide siempre con el canto útil como se explicará posteriormente),  $f_c$  es la resistencia a la compresión del hormigón (medida en cilindro, expresión validada hasta hormigones de 100 MPa de resistencia [7]),  $w$  se refiere a la abertura de la fisura crítica y  $d_g$  al tamaño máximo del árido. Según Muttoni [7, 31],

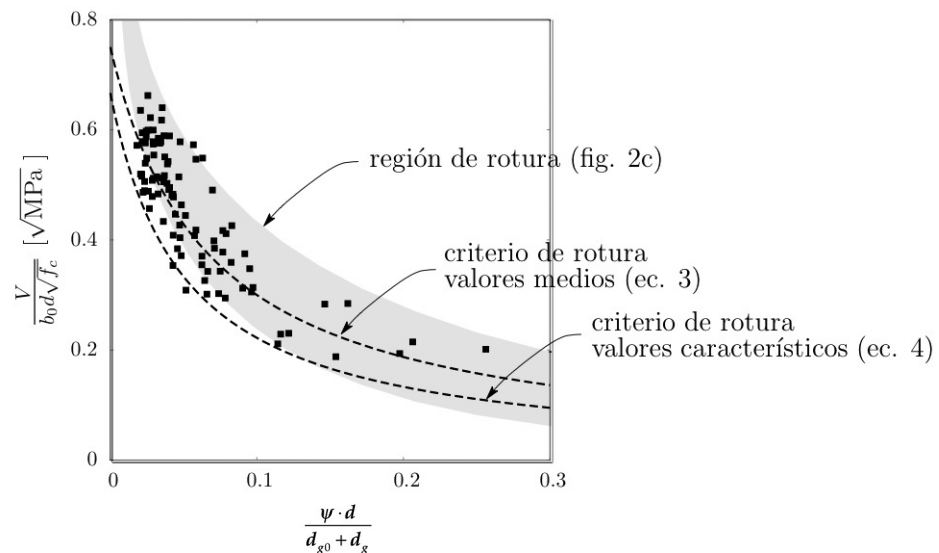


Figura 3. Comparación de la banda de rotura (figura 2c) con los criterios de rotura (valores medios y característicos ( $\gamma_c = 1$ )) de la teoría de la fisura crítica

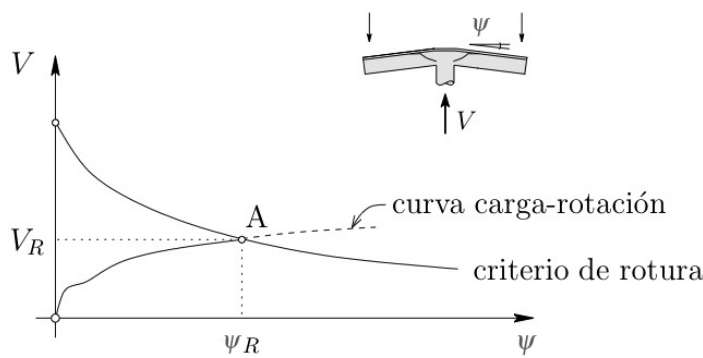


Figura 4. Cálculo de la resistencia a punzonamiento de una losa y de su capacidad de deformación según la teoría de la fisura crítica

el cálculo de la abertura de la fisura crítica ( $w$ ) puede suponerse proporcional al producto de la rotación de la losa por el canto útil de la losa  $d$  (ver figura 2a):

$$w \propto \psi \cdot d \tag{2}$$

De donde el siguiente criterio de rotura (valores medios) fue propuesto por Muttoni [7, 31] (ver figura 3):

$$\frac{V_R}{b_0 \cdot d_v} = \sqrt{f_c} \cdot \frac{3/4}{1 + 15 \frac{\psi \cdot d}{d_g + d_{g0}}} \tag{3}$$

Donde  $d_{g0}$  se refiere a un tamaño de referencia del árido (igual a 16 mm). Para el dimensionamiento, dicho criterio de rotura puede ser reformulado introduciendo el formato de seguridad ( $\gamma_c$ ), adoptando valores característicos de la resistencia a la compresión del hormigón ( $f_{ck}$ ) y ajustando los parámetros de la expresión para garantizar un percentil característico 5% (Muttoni [7,31]).

$$\frac{V_{Rd}}{b_0 \cdot d_v} = \frac{\sqrt{f_{ck}}}{\gamma_c} \cdot \frac{2/3}{1 + 20 \frac{\psi \cdot d}{d_g + d_{g0}}} \tag{4}$$

Dicha expresión, comparada en la figura 3 al criterio medio y los resultados de ensayos es la que se encuentra finalmente recogida en el borrador del Código Modelo 2010.

### 3. RESISTENCIA Y CAPACIDAD DE DEFORMACIÓN DE LOSAS SIN ARMADURA TRANSVERSAL

El comportamiento de losas sin armadura transversal puede ser estimado gracias al criterio de rotura. Para ello es necesario caracterizar el comportamiento de una losa mediante su curva carga-rotación en la región de la columna (ver figura 4). La intersección de dichas curvas (punto A de la figura 4) permite calcular la carga de rotura ( $V_R$ ). Además de la carga de rotura, la rotación de rotura ( $\psi_R$ ) puede también obtenerse por este método, lo que permite determinar la capacidad de deformación y carácter (dúctil o frágil) del elemento.

El cálculo de la curva carga-rotación puede ser efectuado de diferentes maneras:

- Fórmulas analíticas para casos sencillos (axi-simétricos) [7]

- Fórmulas simplificadas basadas en las ecuaciones analíticas [7, 40]
- Métodos numéricos basados en diferencias finitas [9] o elementos finitos [41]

La precisión en la respuesta obtenida con los diferentes métodos varía así como el tiempo necesario para la determinación de la curva carga rotación. Para dimensionamiento de estructuras normales, el uso de una ecuación simplificada es normalmente suficiente [7,32]. En el nuevo Código Modelo 2010 privilegia esta metodología proponiendo la expresión siguiente [7] para losas armadas:

$$\psi = 1.5 \frac{r_s}{d} \frac{f_{yd}}{E_s} \left( \frac{m_{sd}}{m_{Rd}} \right)^{3/2} \quad (5)$$

Donde  $r_s$  se refiere a la distancia desde el eje de la columna (o superficie de apoyo) hasta la zona de momento de flexión nulo (para losas con luces regulares  $r_s \approx 0.22 \ell$ , siendo  $\ell$  la luz entre columnas),  $f_{yd}$  es el valor de cálculo del límite elástico de las armaduras de flexión,  $E_s$  es el valor de su módulo de elasticidad,  $m_{sd}$  es el momento medio (por unidad de longitud) en la banda de apoyo de la columna y  $m_{Rd}$  es el momento resistente medio de cálculo (por unidad de longitud) en la banda de apoyo.

El uso de metodologías más precisas (por ejemplo numéricas) para la determinación de la curva carga-rotación es posible aunque normalmente sólo está justificado para el análisis de estructuras relativamente complejas o para la evaluación de la capacidad resistente de estructuras existentes. Basándose en esta posibilidad, el código modelo propone el cálculo mediante niveles de aproximación, que serán tratados con detalle posteriormente.

#### 4 . LOSAS CON ARMADURA DE PUNZONAMIENTO

La aplicación de la teoría de la fisura crítica es también posible para losas con armadura transversal. Esto está justificado debido a que la rotura en dichos casos se produce nuevamente por localización de las deformaciones [42]. Debe notarse que esta consideración deriva del fuerte gradiente de esfuerzos en la zona de apoyo de la losa, y no es sin embargo aplicable a vigas con armadura transversal (donde la localización de deformaciones en una fisura puede ser evitada mediante la disposición de una armadura transversal [42]). Para sistemas respetando una serie de reglas constructivas mínimas (descritas por ejemplo en el nuevo código modelo), los modos de rotura determinantes en losas con armadura transversal son (ver figura 5):

- Aplastamiento de las bielas comprimidas en una banda de cortante (figura 5a)

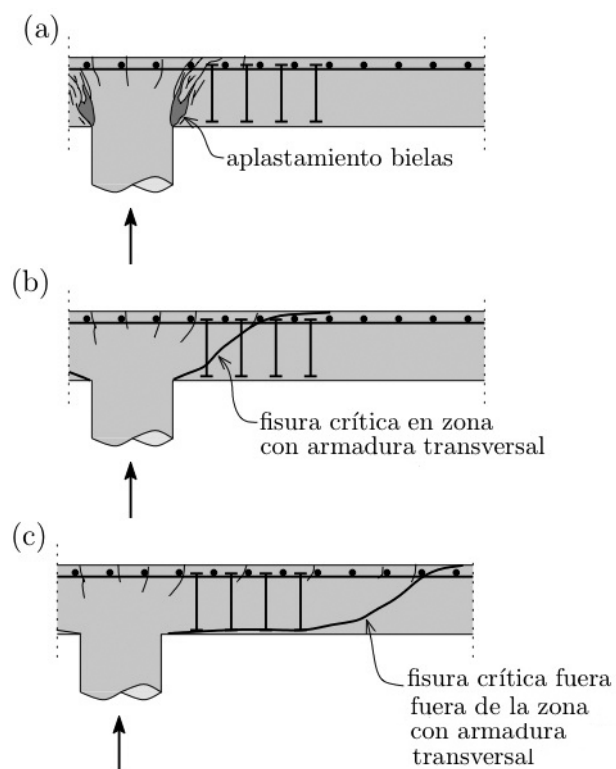


Figura 5. Modos de rotura en losas con armadura transversal: (a) aplastamiento de bielas; (b) punzonamiento con localización de deformaciones en la zona con armadura transversal; y (c) punzonamiento fuera de la zona con armadura transversal

- Punzonamiento con activación de las armaduras transversales (en el interior de la zona armada transversalmente, figura 5b)
- Punzonamiento al exterior de la zona armada transversalmente (figura 5c)

Debe notarse que, además, la rotura por flexión de la losa puede también desarrollarse en losas con cuantías bajas de armadura de flexión y suficiente armadura transversal [32].

##### 4.1. Punzonamiento fuera de la zona reforzada con armadura transversal

El modo de rotura por punzonamiento fuera de la zona con armadura transversal puede ser directamente estudiado mediante la adopción del criterio de rotura de las losas sin armadura transversal. Debe no obstante considerarse la reducción en la altura estática eficaz ( $d_v$ ) puesto que el apoyo de las bielas comprimidas se efectúa en el plano del anclaje de la armadura transversal y no en el intradós de la losa (ver ejemplos en la figura 6).

##### 4.2 Punzonamiento en el interior de la zona reforzada con armadura transversal

La rotura en el interior de la zona reforzada con armadura transversal puede también ser estudiada

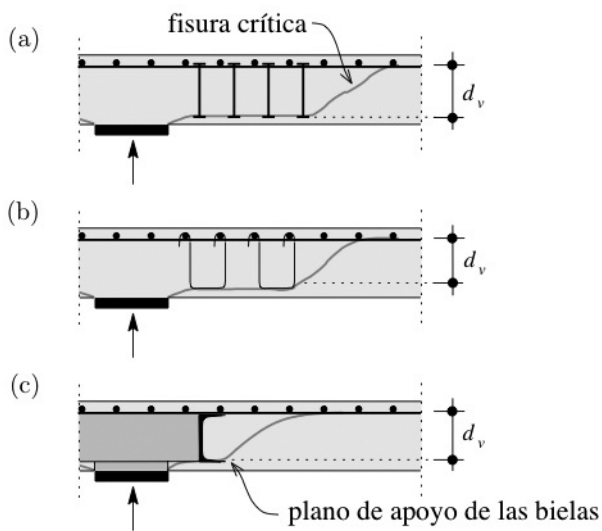


Figura 6. Punzonamiento al exterior de la zona con armadura transversal: (a) pernos; (b) cercos; y (c) cabezal metálico embebido

mediante la teoría de la fisura crítica debido a la localización de las deformaciones en una sola fisura [42] (ver Figura 5b). En este caso (ver figura 7), la resistencia a punzonamiento debe considerar tanto la contribución del hormigón como de las armaduras transversales:

$$V_R = V_{Rc} + V_{Rs} \tag{6}$$

La contribución del hormigón ( $V_{Rc}$ ) puede ser directamente estimada mediante el criterio de rotura de la teoría de la fisura crítica, lo que implica una disminución de dicha contribución con el aumento de la deformación (rotación) de la losa. Respecto a la contribución de la armadura transversal ( $V_{Rs}$ ), su activación es progresiva con la rotación, con deformaciones y tensiones que aumentan en la armadura conforme aumenta también la abertura de la fisura crítica (figura 7c). Este hecho [32] implica un aumento en el esfuerzo cortante transmitido por las armaduras con la rotación hasta que llegan a su plastificación, momento a partir del cual su contribución se mantiene constante.

Es interesante observar que la contribución en rotura del hormigón ( $V_{Rc}$ ) es inferior a la resistencia de la losa sin armadura transversal ( $V_{Rc0}$ ) (ver figura 7c). Este hecho se encuentra recogido por diversos modelos empíricos. Por ejemplo, ACI 318-08 propone una reducción constante del 50% y el EC-2 propone una reducción constante del 25%. Según el modelo presentado por la teoría de la fisura crítica, dicha reducción no es constante, sino que depende de las características mecánicas y geométricas de la losa, pudiendo evaluarse de manera precisa para cada caso (pequeñas reducciones para contribuciones bajas o moderadas de  $V_{Rs}$  y reducciones significativas para contribuciones importantes de  $V_{Rs}$ ). Este método ha demostrado ser mucho más potente, general y preciso que las formulaciones empíricas [32].

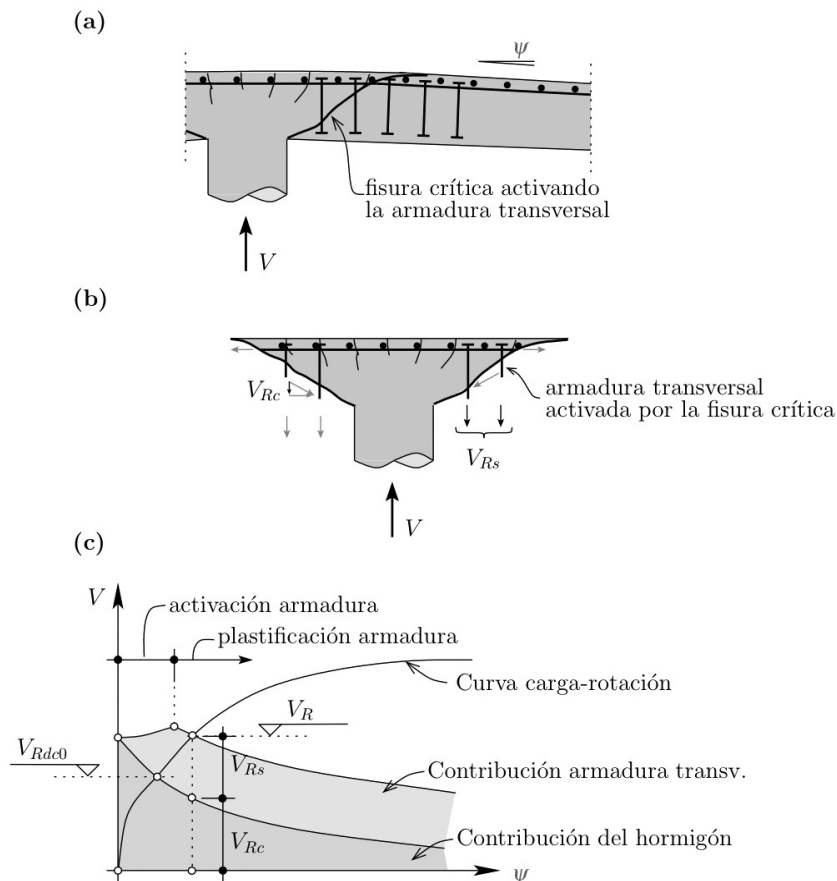


Figura 7. Comportamiento de losas con armadura transversal: (a) desarrollo de la fisura crítica y activación de la armadura; y (b,c) contribución del hormigón y del acero



El Código Modelo 2010 tiene en cuenta la activación de las armaduras transversales mediante la expresión siguiente (valores de cálculo):

$$V_{Rd,s} = \sum A_{sw} k_e \sigma_{swd} \sin \alpha \quad (7)$$

Donde  $A_{sw}$  es la armadura activada (en un cono de rotura a  $45^\circ$ ),  $k_e$  es un coeficiente que considera las concentraciones de esfuerzos (y que será explicado posteriormente),  $\alpha$  hace referencia a la inclinación de las armaduras transversales ( $90^\circ$  para armaduras verticales) y la tensión en la armadura ( $\sigma_{swd}$ ) es obtenida mediante la ecuación:

$$\sigma_{swd} = \frac{E_s \psi}{6} (\sin \alpha + \cos \alpha) \cdot \left[ \sin \alpha + \frac{f_{bd}}{f_{ywd}} \cdot \frac{d}{\phi_w} \right] \leq f_{ywd} \quad (8)$$

Dicha expresión ha sido derivada por Fernández Ruiz y Muttoni [32] admitiendo la cinemática propuesta en la figura 2a y considerando la adherencia de la armadura transversal. Otras expresiones más refinadas o aplicables a tipos especiales de armadura transversal (adherente, pretensada, pegada con resina) pueden consultarse en [32, 33].

### 4.3. Aplastamiento de las bielas comprimidas

El aplastamiento de las bielas puede desarrollarse para losas con elevadas cuantías de armadura a la flexión y de armadura transversal. Este modo de rotura se caracteriza por el desarrollo de una banda (fig. 5a) localizando las deformaciones de cortante en proximidad de la zona de apoyo. La resistencia de dicha banda se encuentra fuertemente influenciada por su estado de deformaciones transversales (fisuración) [21], el cual puede ser estimado, según se explicó anteriormente, por las rotaciones de la losa cerca de la zona de apoyo. Por analogía [32] se acepta entonces que el criterio de rotura frente a aplastamiento de bielas es proporcional al criterio de rotura de la resistencia de losas sin armadura transversal, resultando:

$$\frac{V_R}{b_0 \cdot d_v \cdot \sqrt{f_c}} = \lambda \frac{3/4}{1 + 15 \frac{\psi \cdot d}{d_{g0} + d_g}} \quad \text{(criterio valores medios)} \quad (9a)$$

$$\frac{V_{Rd}}{b_0 \cdot d_v \cdot (\sqrt{f_{ck}} / \gamma_c)} = \lambda \frac{2/3}{1 + 20 \frac{\psi \cdot d}{d_{g0} + d_g}} \quad \text{(criterio valores característicos)} \quad (9b)$$

Donde  $d_g$  (tamaño máximo del árido) permite considerar el ancho de la banda de cortante y  $\lambda$  es un parámetro que mide la eficiencia del sistema de punzonamiento. Para dimensionamiento de sistemas respetando reglas constructivas convencionales, el valor de  $\lambda$  puede ser adoptado igual a 2.0. Para sistemas más eficientes

(con capacidades de anclaje mejoradas o reglas constructivas más estrictas) dicho valor puede aumentarse sensiblemente [38].

### 4.4. Validación del modelo de la teoría de la fisura crítica

La figura 8 muestra una comparación de los resultados de ensayos recopilados en [32] con el modelo propuesto por la teoría de la fisura crítica para sus formulaciones tanto medias como característica. Los resultados muestran una excelente correlación, con dispersiones sensiblemente inferiores a las obtenidas mediante otros modelos de cálculo (como el EC-2 o ACI 318-08).

## 5. APLICACIONES PRÁCTICAS, NIVELES DE APROXIMACIÓN

Una de las ventajas significativas ofrecidas por una teoría basada en un modelo físico es que la precisión con la que se evalúan sus diferentes parámetros, y por consiguiente la precisión en el cálculo obtenida con el modelo físico, puede ser refinada en diferentes etapas de cálculo. El código modelo aprovecha esta posibilidad permitiendo el dimensionamiento o verificación frente a punzonamiento de losas según diferentes "niveles de aproximación". La filosofía de los niveles de aproximación [43, 44] sigue en realidad la lógica tradicional en la realización de proyectos. En sus primeras fases (estudios preliminares, anteproyecto), cuando la definición de una estructura todavía es relativamente poco elaborada, sólo se tiene normalmente la necesidad de verificar los espesores o dimensiones de las losas, lo cual debe efectuarse con cálculos sencillos (normalmente efectuados a mano). En fases posteriores del proyecto, para el dimensionamiento definitivo, el nivel de precisión necesario en la estimación de la respuesta estructural aumenta, teniendo que definirse exactamente los espesores y las armaduras de flexión y punzonamiento necesarias. Por consiguiente, los cálculos simplificados evocados para el anteproyecto no son suficientes y se requiere una mejor estimación de los diferentes parámetros de cálculo requeridos por el modelo (momentos actuantes en la zona sobre la columna, excentricidades de la carga,...). En este nivel de proyecto, el proyecto se apoya normalmente en análisis efectuados sobre modelos elásticos de la losa. Eventualmente, para algunas estructuras especiales o para determinar la capacidad resistente de estructuras existentes, puede ser aconsejable utilizar evaluaciones más precisas de los parámetros de cálculo (por ejemplo con el fin de evitar refuerzos innecesarios). En este caso, el desarrollo de análisis no lineales del comportamiento de la losa son normalmente necesarios.

El diseño según esta filosofía permite mejorar la precisión en la estimación de la respuesta resistente de un elemento según sea necesario, requiriéndose para

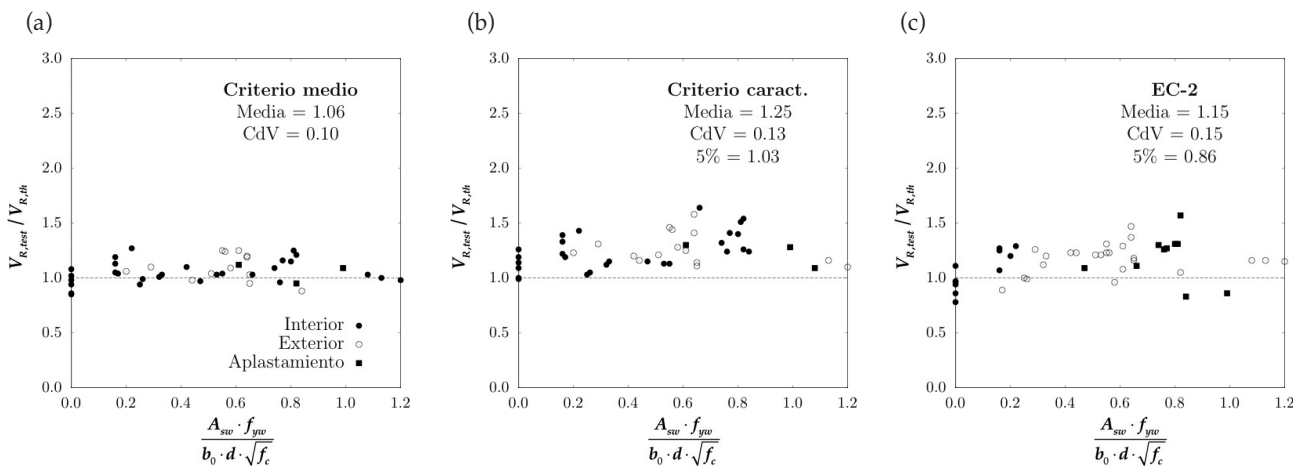


Figura 8. Comparación de la teoría de la fisura crítica con los resultados de ensayos recopilados en [32] (cociente entre la resistencia medida y la resistencia calculada, valores superiores a la unidad indicando estimaciones prudentes, CdV = Coeficiente de Variación): (a) criterio de rotura medio (activación de la armadura considerando tensiones de adherencia cuando sea aplicable); (b) criterio de rotura característico (criterio de rotura y activación de armaduras según MC-2010); y (c) comparación al EC-2

ello no obstante un mayor tiempo de análisis (ver figura 9). Puede observarse que la aplicación coherente de esta metodología de diseño requiere que el modelo de cálculo esté basado en un modelo físico, consistente y único, para todos los niveles de aproximación, de manera que la mejora en la estimación resistente provenga únicamente de la mayor precisión en la estimación de los parámetros de cálculo (en este caso, principalmente en las rotaciones y concentraciones de esfuerzos cortantes).

En el caso del punzonamiento según el Código Modelo 2010, el cálculo según niveles de aproximación permite refinar progresivamente la estimación de la rotación determinante.

### 5.1. Nivel de aproximación I

El primer nivel de aproximación efectúa una hipótesis prudente sobre la abertura de las fisuras en la región crítica a punzonamiento admitiendo que las armaduras de flexión llegan a la plastificación ( $m_{sd} = m_{Rd}$ ). Introduciendo esta hipótesis en la ecuación (5) resulta:

$$\psi = 1.5 \frac{r_s \cdot f_{yd}}{d \cdot E_s} \tag{10}$$

Valor que depende únicamente de valores geométricos (luz de la losa, canto útil) y de las características mecánicas del acero usado como armadura (límite

elástico (valor de cálculo) y módulo de elasticidad de la armadura). Una losa que respete este criterio estará dimensionada de forma prudente (valor mínimo de resistencia) y posee una capacidad de deformación grande (roturas dúctiles). Debe notarse que un dimensionamiento según este nivel de aproximación no requiere la determinación de la cuantía de armadura sobre columna, parámetro necesario sin embargo para el cálculo según EHE-08 [45] o el EC-2.

### 5.2. Nivel de aproximación II

Una mejor estimación de la rotación determinante puede ser obtenida mediante la evaluación completa de la ecuación (5). Para ello debe conocerse el momento resistente ( $m_{Rd}$ ) y por lo tanto la cuantía de armadura. La evaluación del momento en banda ( $m_{sd}$ ) se establece a partir de fórmulas calibradas para diferentes casos: columnas de borde, de ángulo e interiores [38]. Algunas aplicaciones de las formulas propuestas en el borrador del Código Modelo 2010 serán discutidas más adelante.

En estos casos ( $m_{sd} < m_{Rd}$ ) la capacidad de deformación de la estructura no está garantizada (roturas potencialmente frágiles para cuantías elevadas y/o pequeños cantos) y debe disponerse una armadura de integridad o de punzonamiento.

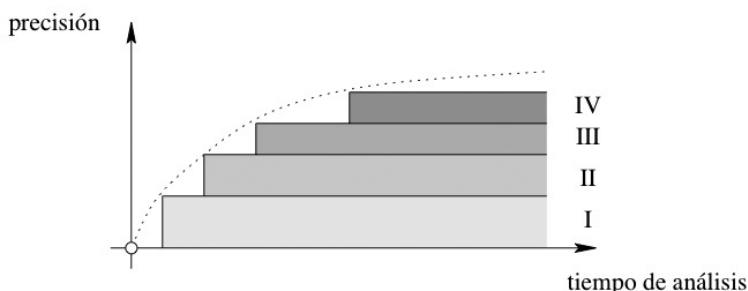


Figura 9. Diseño mediante niveles de aproximación

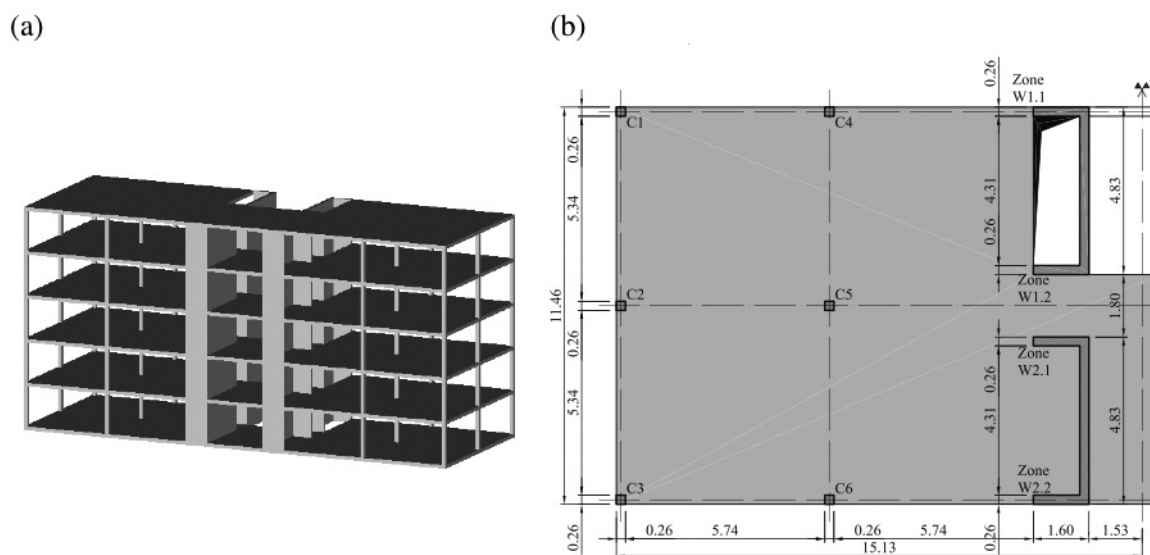


Figura 10. Ejemplo de aplicación práctica [47]: (a) estructura analizada; y (b) vista en planta y dimensiones de la losa analizada (losa de 25 cm de canto)

### 5.3. Nivel de aproximación III

El valor del momento de banda en la ecuación (5) puede ser estimado de manera más precisa para cada caso particular (teniendo en cuenta las peculiaridades de cada estructura) si su determinación se hace integrando directamente una ley de momentos elástica en el ancho de la banda de apoyo. Dicha integración puede efectuarse a partir, por ejemplo, de los resultados de un cálculo elástico obtenido según el método de los elementos finitos. Gracias a esta evaluación más precisa, el coeficiente 1,5 de la ecuación (5) puede ser remplazado por 1,2 [25]. Debe notarse que el momento de la banda se compara con el momento resistente de las armaduras y, por consiguiente, dicho momento de comparación debe considerar tanto los momentos de flexión como los de torsión (a fin de obtener momento de dimensionamiento de la armadura).

### 5.4. Nivel de aproximación IV

La estimación de la rotación mediante la ecuación (5) puede también ser sustituida por los resultados (curva carga-rotación de la losa alrededor de una columna) obtenidos mediante un análisis no lineal de la curva carga-rotación de la estructura. Dicho análisis debe tener en cuenta la influencia de la fisuración, la plastificación de armaduras, la pérdida de rigidez relativa a torsión frente a flexión [46] y del fenómeno de sobre-rigidez de las armaduras traccionadas ("tension-stiffening").

Dicha metodología goza de una generalidad absoluta y permite además la obtención de resultados precisos [40, 41]. Sin embargo, es recomendable restringir su empleo a casos especiales, como la evaluación de la resistencia de estructuras existentes, debido al significativo tiempo de análisis requerido (prepara-

ción de datos y elaboración de resultados) así como de necesitar un cierto nivel de experiencia en el uso de estas herramientas.

### 5.5. Ejemplo de aplicación

Un ejemplo de aplicación de la metodología de cálculo basada en niveles de aproximación y recogida en el borrador del nuevo Código Modelo 2010 puede consultarse en la referencia [47] (ver figura 10). Dicho trabajo permite comprender la simplicidad y potencia del método propuesto al aplicarlo a una estructura de geometría y características similar a una real.

## 6. INFLUENCIA DE LOS MOMENTOS DE EMPOTRAMIENTO Y CONCENTRACIONES DE ESFUERZOS CORTANTES

En las secciones precedentes, se ha estudiado la resistencia a punzonamiento de una losa asumiendo un comportamiento axi-simétrico. Sin embargo, en la práctica, las distribuciones de tensiones cortantes y de momentos no son normalmente uniformes y axi-simétricas [48, 34]. Este es por ejemplo el caso de losas con luces irregulares (con momento transferido a la columna) o con luces diferentes en dos direcciones así como de columnas de borde y de esquina.

La influencia de la transferencia de un momento entre una losa y una columna puede observarse en la figura 11. Dicha figura muestra una serie de ensayos efectuada por Krüger [49] donde la carga concentrada se aplica con una excentricidad constante durante el ensayo (figura 11a). Un análisis mediante campos de esfuerzos cortantes [46] muestra que conforme la excentricidad de la carga aumenta, los esfuerzos cortantes se concentran en la zona comprimida de la superficie de apoyo.

Además de este efecto de concentración de esfuerzos cortantes, la sección de la figura 11e muestra otro efecto significativo de elementos con transferencia de momento entre columna y losa. Como puede observarse en la figura, las fisuras de flexión se concentran en la zona sometida a momentos mayores, lo que conlleva a aberturas de fisura mayores y consecuentemente reduce la resistencia al esfuerzo cortante en dicha zona [34].

Ambos efectos, aumento local de los esfuerzos cortantes y reducción de la resistencia (mayores aberturas de fisura) deben considerarse para la estimación de la resistencia del elemento. En la formulación de la teoría de la fisura crítica presentada en el borrador del Código Modelo 2010, la concentración de esfuerzos puede considerarse mediante el empleo de formulas simplificadas (a través de un coeficiente denominado  $k_e$ ) o bien mediante interpretación directa de

un campo de cortantes. Ambas técnicas fueron presentadas y discutidas anteriormente por los autores en [46]. Respecto a la concentración en las fisuras de flexión, este efecto (aumento de los momentos de flexión en un lado de la columna) se encuentra recogido directamente mediante un cálculo usando los niveles III y IV de aproximación y ha sido también incluido en las fórmulas analíticas de diseño de nivel II [38]. Por ejemplo, para columnas interiores, la expresión analítica (nivel de aproximación II) propuesta para el cálculo de los momentos en la banda en el Código Modelo 2010 es:

$$m_{sd} = \frac{V_d}{8} + \left| \frac{M_d - V_d \Delta e}{2b_s} \right| \tag{11}$$

Donde el momento en la banda ( $m_{sd}$ ) es igual a un momento de referencia ( $V_d/8$ , aproximadamente igual

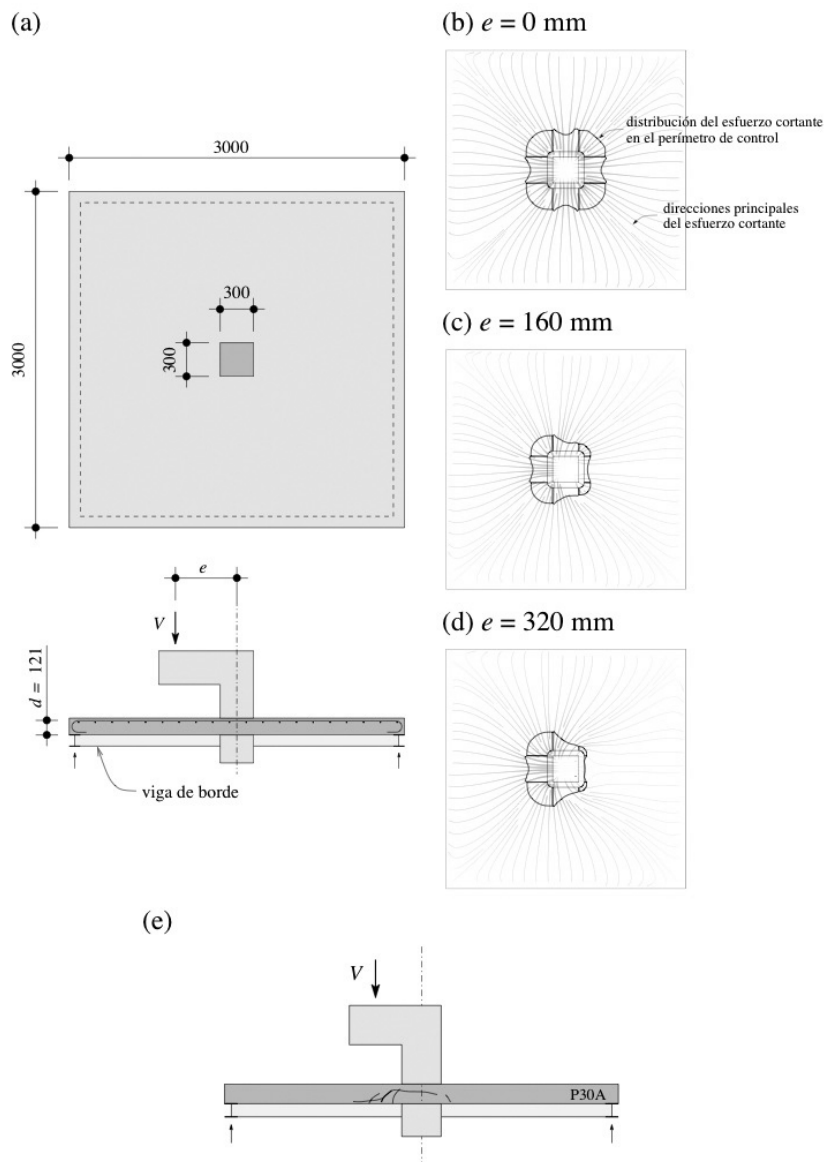


Figura 11. Transferencia de momento entre losa y columna: (a) geometría y cargas de los ensayos de Krüger [49] (cotas en [mm]); (b-d) campos de cortante para diferentes excentricidades de la carga (0, 160 mm and 320 mm respectivamente); y (e) sección del elemento P30A (excentricidad igual a 320 mm) tras la ruptura de punzonamiento

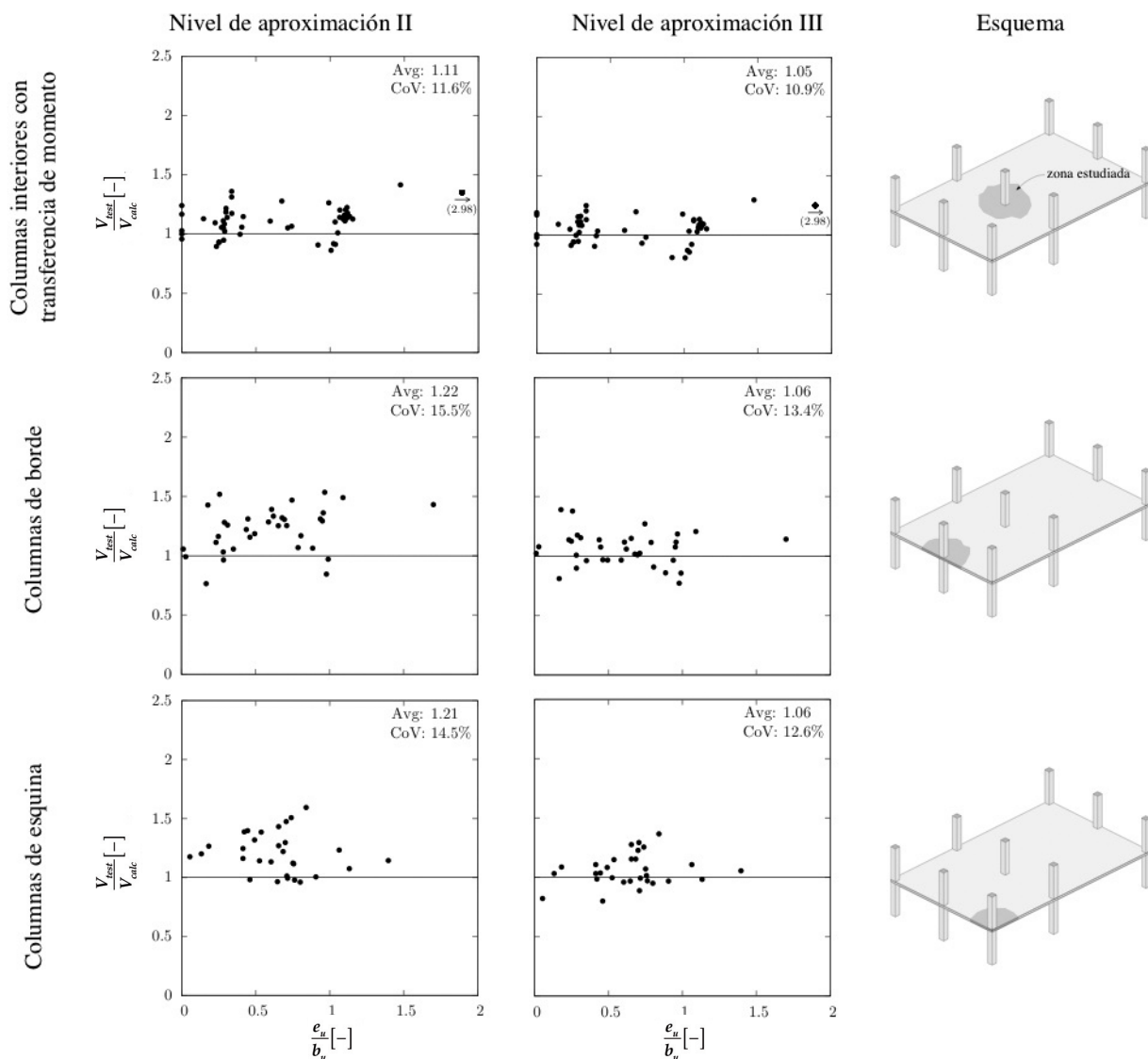


Figura 12. Comparación de la teoría de la fisura crítica con ensayos sobre columnas interiores, de borde y de esquina (series experimentales según [38])

al momento de banda de una losa axi-simétrica) al que se le añade un término que considera el momento transferido entre la columna y la losa ( $M_d$ ) así como la excentricidad ( $\Delta e$ ) del eje de la columna (eje de referencia para el cálculo de esfuerzos) respecto al centro de gravedad del perímetro de control. Respecto al denominador de dicho término ( $2b_s$ ), considera que el momento total a transferir se reparte en el ancho de la banda a partes iguales en las dos caras paralelas al momento.

Es interesante observar que el nivel de aproximación I (ecuación 9) no considera este fenómeno (concentración de fisuras de flexión) ya que de manera prudente considera plastificadas todas las armaduras próximas a la columna (apertura máxima de fisura).

La figura 12 presenta una comparativa de la precisión obtenida usando las fórmulas analíticas del Código Modelo 2010 para el nivel de aproximación II y III. Los resultados se muestran satisfactorios y consistentes para todos los casos analizados (columnas

de borde, esquina y centrales), siendo la precisión mejor para el nivel de aproximación III debido a la estimación más precisa de los momentos en la banda. Una comparación con el EC-2 (figura 13) muestra que dicho modelo, con base empírica, no captura correctamente la influencia de la excentricidad y puede proporcionar resultados potencialmente del lado de la inseguridad para grandes excentricidades.

Investigaciones recientes [34] presentan cómo efectuar estudios más refinados de este fenómeno, considerando redistribuciones de esfuerzo cortante entre las zonas sometidas a diferentes niveles de sollicitación esfuerzos cortantes y momentos de flexión.

## 7. CONCLUSIONES

En este artículo se han presentado los fundamentos teóricos de la teoría de la fisura crítica así como su implementación en el borrador del nuevo Código Modelo 2010. Sus conclusiones más importantes son:

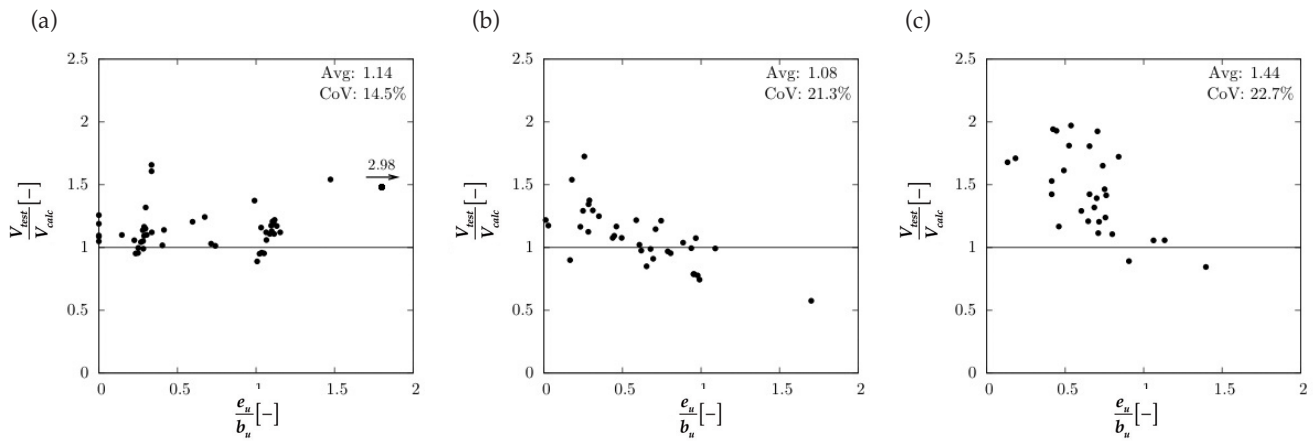


Figura 13. Comparación del EC-2 con ensayos sobre columnas: (a) interiores; (b) de borde y (c) de esquina (series experimentales según [38])

1. La teoría de la fisura crítica está basada en un modelo físico consistente, teniendo en cuenta los diferentes mecanismos resistentes que permiten la transmisión del esfuerzo cortante.
2. La resistencia frente a punzonamiento en losas sin armadura transversal se reduce a medida que las deformaciones (apertura de fisuras) aumentan. Un parámetro eficaz para cuantificar las deformaciones en la región crítica a punzonamiento es su rotación en torno a la zona de apoyo.
3. Si la resistencia se expresa en función de la capacidad de deformación (rotación) de las losas, las roturas se desarrollan en una región bien definida. El ancho de dicha región es relativamente estrecho y puede ser aproximada a efectos prácticos por un criterio de rotura.
4. El cálculo de la carga de rotura necesita, además del criterio de rotura, de la definición de la curva carga-rotación (comportamiento flexional) de la losa.
5. Dicha curva puede ser estimada con mayor o menor precisión, permitiendo establecer diferentes niveles de aproximación para la aplicación de la teoría.
6. Utilizando las hipótesis de la teoría de la fisura crítica, la contribución de armaduras transversales a la transmisión del esfuerzo cortante puede también ser estimada. De esta manera, pueden obtenerse nuevamente expresiones de diseño compactas y con un fundamento físico.
7. La teoría de la fisura crítica puede ser utilizada de manera consistente para el estudio de casos donde haya transferencia de momentos y concentraciones de esfuerzos cortantes.

- $M_d$  = valor de cálculo del momento flector
- $V_d$  = valor de cálculo del esfuerzo cortante
- $V_R$  = resistencia a punzonamiento
- $V_{Rd}$  = valor de cálculo de la resistencia a punzonamiento
- $V_{Rc}$  = contribución del hormigón en la resistencia a punzonamiento
- $V_{Rs}$  = contribución de la armadura transversal en la resistencia a punzonamiento
- $V_{Rd,s}$  = valor de cálculo de la contribución de la armadura transversal en la resistencia a punzonamiento
- $b_0$  = perímetro de control
- $b_s$  = ancho de la banda de apoyo a proximidad de la columna o zona de introducción de cargas
- $d$  = canto útil
- $d_v$  = altura estática resistente a cortante
- $d_g$  = tamaño máximo del árido
- $d_{g0}$  = tamaño de árido de referencia (16 mm)
- $e_u$  = excentricidad de la carga respecto del centro de gravedad del perímetro de control
- $f_{bd}$  = resistencia de cálculo de adherencia (puede adoptarse 3 MPa para barras corrugadas y hormigones convencionales)
- $f_c$  = resistencia del hormigón a la compresión (medida en cilindro)
- $f_{ck}$  = resistencia característica del hormigón a la compresión (medida en cilindro)
- $f_{yd}$  = valor de cálculo del límite elástico de la armadura de flexión
- $f_{ywd}$  = valor de cálculo del límite elástico de la armadura transversal

**NOTACIÓN**

- $A_{st}$  = área de la armadura transversal
- $E_s$  = módulo de elasticidad de la armadura

$k_e$	=	coeficiente de excentricidad
$\ell$	=	luz entre columnas
$m_{Rd}$	=	momento resistente medio de cálculo (por unidad de longitud) en la banda de apoyo
$m_{sd}$	=	momento medio (por unidad de longitud) en la banda de apoyo
$r_s$	=	distancia desde el eje de la columna (o superficie de apoyo) hasta la zona de momento de flexión nulo
$w$	=	abertura de la fisura crítica
$\alpha$	=	inclinación de las armaduras transversales (90° para armaduras verticales)
$\gamma_c$	=	factor parcial de seguridad del hormigón
$\Delta e$	=	excentricidad del eje de la columna (eje de referencia para el cálculo de esfuerzos) respecto al centro de gravedad del perímetro de control
$\phi_w$	=	diámetro de la armadura transversal
$\lambda$	=	coeficiente midiendo la eficiencia de un sistema de armadura contra el punzonamiento
$\psi$	=	rotación de la losa en la zona de apoyo de la losa
$\psi_R$	=	rotación de la losa en rotura
$\sigma_{wd}$	=	valor de cálculo de la tensión en la armadura transversal

## BIBLIOGRAFÍA

- [1] FÜRST, A.; MARTI, P. "Robert Maillart's Design Approach for Flat Slabs". ASCE, *Journal of Structural Engineering*. 1997, vol. 123, n° 8, p. 1102-1110.
- [2] GASPARINI, D.A. "Contributions of C.A.P. Turner to Development of Reinforced Concrete Flat Slabs 1905-1909". ASCE, *Journal of Structural Engineering*. 2002, vol. 128, n° 10, p. 1243-1252.
- [3] ARENAS DE PABLO, J.J. *Caminos en el aire: los puentes*. Madrid: Colegio de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos, 2002. 1031 p. ISBN: 84-380-0224-2.
- [4] MAILLART, R. "Zur Entwicklung der unterzugslosen Decke in der Schweiz und in Amerika". *Schweizerische Bauzeitung*. 1926, vol. 87, n° 21, 1926, p. 263-265.
- [5] MAILLART, R. "Discussion". *IABSE Congress report*, 1932, vol. 1, p. 197-208.
- [6] FERNÁNDEZ CASADO, C. "Dalles champignons". *IABSE Congress report*, 1948, vol. 3, p. 547-552.
- [7] MUTTONI, A. "Punching shear strength of reinforced concrete slabs without transverse reinforcement". *ACI Structural Journal*. 2008, vol. 105, n° 4, p. 440-450.
- [8] MUTTONI, A. [Ed.], FERNÁNDEZ RUIZ, M.; FÜRST, A.; GUANDALINI, S.; HUNKELER, F.; MOSER, K.; SEILER, H. *Sécurité structurale des parkings couverts*. Doc. D 0226 SIA, Société Suisse des ingénieurs et des architectes, Zürich, 2008, 105 p.
- [9] GUANDALINI, S. *Poinçonnement symétrique des dalles en béton armé*. Lausanne: École Polytechnique Fédérale de Lausanne, Thèse de doctorat n° 3380, 2005, 178 p.
- [10] ELSTNER, R.C.; HOGNESTAD, E. "Shearing Strength of Reinforced Concrete Slabs". *ACI Journal*, 1956, vol. 53, n° 2, p. 29-58.
- [11] MOE, J. *Shearing Strength of Reinforced Concrete Slabs and Footings under Concentrated Loads*. Illinois, USA: Development Department Bulletin D47, Portland Cement Association, 1961, 135 p.
- [12] KINNUNEN, S.; NYLANDER, H. *Punching of Concrete Slabs Without Shear Reinforcement*. Stockholm, Sweden: Transactions of the Royal Institute of Technology, 1960, n°158, 112 p.
- [13] ZSUTTY, T.C. "Beam shear strength prediction by analysis of existing data". *ACI Journal*, 1968, vol. 65, n° 11, p. 943-951.
- [14] COLLINS, M.P.; KUCHMA, D. "How Safe Are Our Large, Lightly Reinforced Concrete Beams, Slabs, and Footings?". *ACI Structural Journal*, 1999, vol. 96, n° 4, p. 482-490.
- [15] COMITE EURO-INTERNATIONAL DU BETON CEB-FIP, *Model code for concrete structures*. Telford, London: CEB-FIP, 1993, 437 p.
- [16] ACI. *Building Code Requirements for Structural Concrete (ACI 318-08) and Commentary (ACI 318R-08)*. Farmington Hills, Mich.: American Concrete Institute, 2008, 473 p.
- [17] EN 1992-1-1: 2004. *EUROCODE 2. Design of concrete structures - Part 1-1: General rules and rules for buildings*. Brussels: CEN, 2004, 225 p.
- [18] KANI, G.N.J. "The Riddle of Shear Failure and its Solution". *ACI Journal Proceedings*, 1964, vol. 61, n° 4, p. 441-468.
- [19] FENWICK, R.C.; PAULAY, T. "Mechanisms of shear resistance of concrete beams". *Proceedings of the ASCE*, 1968, vol. 94, n° ST10, p. 2325-2350.
- [20] WALRAVEN, J.C. "Fundamental Analysis of Aggregate Interlock". *Journal of the Structural Division*. 1981, vol. 107, n° 11, p. 2245 - 2270.
- [21] VECCHIO, F.J.; COLLINS, M.P. "The modified compression field theory for reinforced concrete elements subjected to shear". *ACI Journal*, 1986, vol. 83, March-April, p. 219-231.

- [22] SIA. *Code 262 for Concrete Structures*. Zürich: Swiss Society of Engineers and Architects, 2003, 94 p.
- [23] CSA COMMITTEE A23.3. *CSA A23.3-0, Design of Concrete Structures*. Mississauga: Canadian Standards Association, 2004, 214 p.
- [24] FEDERATION INTERNATIONALE DU BÉTON (FIB). *Model Code 2010, First complete draft*. Vol.1. Lausanne: FIB, Bulletin 55, 2010, 318 p. ISBN 978-2-88394-095-6.
- [25] FEDERATION INTERNATIONALE DU BÉTON (FIB). *Model Code 2010 - First complete draft*. Vol. 2. Lausanne: FIB, Bulletin 56, 2010, 312 p. ISBN 978-2-88394-096-3.
- [26] MUTTONI, A. *Punching shear – Draft code proposal*, SIA 162, Working Group 5. Zürich: Swiss Society of Engineers and Architects, 1985, 15 p.
- [27] SIA. *Code 162 for Concrete Structures*. Zürich: Swiss Society of Engineers and Architects, 1993, 86 p.
- [28] MUTTONI, A.; THÜRLIMANN, B. *Schubversuche an Balken und Flachdecken ohne Schubbewehrung*. Zürich: ETH; Institut für Baustatik und Konstruktion, 1986, 12 p.
- [29] MUTTONI, A. *Die Anwendbarkeit der Plastizitätstheorie in der Bemessung von Stahlbeton*. Zürich: ETH; Institut für Baustatik und Konstruktion, Report Nr. 176, 1989, 159 p.
- [30] MUTTONI, A.; SCHWARTZ, J. "Behavior of Beams and Punching in Slabs without Shear Reinforcement". *IABSE Colloquium*, Stuttgart, 1991, vol. 62, p. 703-708.
- [31] MUTTONI, A. "Schubfestigkeit und Durchstanzen von Platten ohne Querkraftbewehrung". *Beton- und Stahlbetonbau*, 2003, vol. 98, p. 74-84.
- [32] FERNÁNDEZ RUIZ, M.; MUTTONI, A. "Applications of the critical shear crack theory to punching of R/C slabs with transverse reinforcement". *ACI Structural Journal*, 2009, vol. 106, n° 4, p. 485-494.
- [33] FERNÁNDEZ RUIZ, M.; MUTTONI, A.; KUNZ, J. "Strengthening of flat slabs against punching shear using post-installed shear reinforcement". *ACI Structural Journal*, 2010, vol. 107, n° 4, p. 434-442.
- [34] SAGASETA, J.; MUTTONI, A.; FERNÁNDEZ RUIZ, M.; TASSINARI, L. "Non axis-symmetrical punching shear around internal columns of RC slabs without transverse reinforcement". *Magazine of Concrete Research*, Thomas Telford Publishing Ltd., London. [en imprenta]
- [35] GUANDALINI, S.; BURDET, O.; MUTTONI, A. "Punching tests of slabs with low reinforcement ratios". *ACI Structural Journal*, 2009, vol. 106, n° 1, p. 87-95.
- [36] FÉDÉRATION INTERNATIONALE DU BÉTON (FIB). *Clause 7.3.5 (punching) of New Model Code 2011*. 11 p. (consultado: [http://ibeton.epfl.ch/MC2010\\_Punching/NMC\\_7-3.5\\_24.12.2010.pdf](http://ibeton.epfl.ch/MC2010_Punching/NMC_7-3.5_24.12.2010.pdf))
- [37] MUTTONI, A.; FERNÁNDEZ RUIZ, M. "Shear strength of members without transverse reinforcement as a function of the critical shear crack width". *ACI Structural Journal*, 2008, vol. 105, n° 2, p. 163-172.
- [38] MUTTONI, A.; FERNÁNDEZ RUIZ, M. "MC2010: The Critical Shear Crack Theory as a mechanical model for punching shear design and its application to code provisions". Lausanne: *Fédération Internationale du Béton*, Bulletin 57, 2010, p. 31-60.
- [39] MOODY, K.G.; VIEST, M.; ELSTNER, R.C.; HOGNESTAD, E. "Shear Strength of Reinforced Concrete Beams – Part 1: Tests of Simple Beams". *ACI Journal Proceedings*, 1954, vol. 51, n° 12, p. 317-332.
- [40] MUTTONI, A.; FERNÁNDEZ RUIZ, M.; GUANDALINI, S. "Poinçonnement des ponts-dalles". 4. *FBH/ASTRA - Studientagung "Neues aus der Brückenforschung"*. Dokumentation D0223. Société suisse des ingénieurs et architectes (SIA), 2007, p. 85-94.
- [41] VAZ RODRIGUES, R. *Shear Strength of Reinforced Concrete Bridge Deck Slabs*. Lausanne: École Polytechnique Fédérale de Lausanne, Thèse de doctorat n° 3739, 2007, 289 p.
- [42] MUTTONI, A.; FERNÁNDEZ RUIZ, M. "Shear in slabs and beams: should they be treated in the same way?". Lausanne: *Fédération Internationale du Béton*, Bulletin 57, 2010, p. 105-128.
- [43] SCHERTENLEIB, P.; MUTTONI, A.; SCHWARTZ, J. *Pièces comprimées*. Documentation SIA, D 0182 Introduction à la norme SIA 262, Zürich, 2003, p. 67-77.
- [44] MUTTONI, A.; FERNÁNDEZ RUIZ, M. "Design through an incremental approach: the Swiss experience". *2010 Joint IABSE - fib Conference*, Dubrovnik, Croacia, 2010, 8 p.
- [45] MINISTERIO DE FOMENTO. Comisión Permanente del Hormigón. *EHE-08: Instrucción de Hormigón Estructural*. Madrid: Ministerio de Fomento, Centro de Publicaciones, 2009, 702 p.
- [46] FERNÁNDEZ RUIZ, M.; MUTTONI, A. "Aplicaciones de los campos de esfuerzos cortantes en el análisis y dimensionamiento de losas de hormigón armado". *Hormigón y acero*, 2009, vol. 60, n° 252, p. 73-88.
- [47] LIPS, S.; MUTTONI, A.; FERNÁNDEZ RUIZ, M. *NMC2010- Punching shear of flat slabs: Design example*. Lausanne, Switzerland: École Polytechnique Fédérale de Lausanne, 2010. (consultado: <http://ibeton.epfl.ch/MC2010Punching>)
- [48] SAGASETA, J.; FERNÁNDEZ RUIZ, M.; MUTTONI, A. "Non-symmetrical punching of flat slabs and slab bridges without transverse reinforcement". *Fib Symposium*, London, 2009, 8 p.
- [49] KRÜGER, G. *Résistance au poinçonnement excentré des planchers-dalles*. Lausanne: École Polytechnique Fédérale de Lausanne, Thèse de doctorat, 1999, 174 p.