Inventiones math. 56, 97–99 (1980)

Inventiones mathematicae

S-equivalence et congruence de matrices de Seifert: Une conjecture de Trotter

Eva Bayer

Section de mathematiques, Université de Genève, 2-4, rue du Lièvre, Case postale 124, CH-1211 Genève 24, Suisse

1. Introduction

Une matrice carrée entière A est appelée *matrice de Seifert* si $A+\varepsilon A^t$ est unimodulaire, où $\varepsilon=+1$ où -1. La relation de *S-équivalence* entre matrices de Seifert est définie comme suit [L1]:

On dit que B est une extension de ligne de A (et A une réduction de ligne de B) si B est obtenue en ajoutant 2 lignes et 2 colonnes à A:

$$B=\begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & v & A \end{matrix}$$

où v est un vecteur colonne.

On définit de façon analogue l'extension et la réduction de colonne. La S-équivalence est par définition la relation d'équivalence engendrée par la congruence, la réduction et l'extension.

Deux matrices de Seifert non-singulières S-équivalentes ont le même rang, le même déterminant et sont congruentes sur les rationnels (voir par exemple [L1], 25.): on déduit de ce dernier fait que le polynôme minimal ϕ de $A(A+\varepsilon A^t)^{-1}$ ne dépend pas du choix de A (non-singulière) dans sa classe de S-équivalence.

On peut donc se poser la question suivante: combien y *a-t*-il de classes de congruence de matrices de Seifert non-singulières dans une classe de S-équivalence donnée?

Dans le reste de l'article A sera une matrice de Seifert non-singulière donnée, et ϕ le polynôme associé à A comme cidessus.

Trotter ([T], théorème 4.14) a montré que *si ϕ a un facteur carré de terme constant strictement supérieur à* 1, *alors la classe de S-équivalence de A contient une infinité de classes de congruence de matrices de Seifert non-singulières.*

Dans le même article il a conjecturé que la réciproque est aussi vraie.

Le but du présent travail est de prouver cette conjecture, autrement dit, nous allons montrer:

0020-9910/80/0056/0097/$01.00

Théorème 1. *Si ϕ n'a aucun facteur carré de terme constant strictement supérieur à* 1, *alors la classe de S-équivalence de A ne contient qu'un nombre fini de classes de congruence de matrices de Seifert non-singulières.*

Levine [L2] a démontré que la conclusion du théorème 1 est vraie si ϕ est semi-simple (c'est-à-dire n'a aucun facteur carré) et si $\varepsilon = -1$.

Le cas ϕ semi-simple est aussi démontré dans [B-M], pour $\varepsilon = +1$ ou -1 (par des techniques différentes de celles de Levine): en fait, il y est démontré qu'il n'y a qu'un nombre fini de classes de congruence de matrices de Seifert non-singulières de rang, de déterminant et de polynôme ϕ semi-simple donnés.

2. Le résultat cité ci-dessus de Trotter et le théorème 1 ont l'application topologique suivante:

Théorème 2. *Un* $(2q-1)$*-noeud simple* $\Sigma^{2q-1} \subset S^{2q+1}$, $q > 2$, *a une infinité de surfaces de Seifert minimales non isotopes si et seulement si ϕ a un facteur carré de terme constant strictement supérieur à* 1, *où ϕ est le polynôme associé à une matrice de Seifert non-singulière du noeud.*

La condition est encore nécessaire pour $q = 2$. (voir [L1] pour les définitions.)

En effet, Levine [L1] a montré que si $q > 2$, les classes d'isotopie des surfaces de Seifert minimales de Σ^{2q-1} sont en bijection avec les classes de congruence entière des matrices de Seifert non-singulières qui sont dans la classe de S-équivalence d'une matrice de Seifert de Σ^{2q-1}.

Si $q = 2$, les classes d'isotopie correspondent à un sous-ensemble des classes de congruence.

3. Pour démontrer le théorème 1 nous allons utiliser une caractérisation due à Trotter de la S-équivalence. Les résultats ci-dessous sont démontrés dans [T]:

$A + \varepsilon A^t$ est une matrice ε-symétrique, unimodulaire, de rang fini n. Faisons-lui correspondre l'espace vectoriel rationnel X de dimension n muni de la forme bilinéaire ε-symétrique notée $[\ ,\ ]$. On notera z l'automorphisme de X donné par la matrice $A(A + \varepsilon A^t)^{-1}$. On vérifie que $[za, b] = [a, (1-z)b]$ pour tout a et b dans X.

Les classes de congruence des matrices de Seifert entières non-singulières qui sont dans la classe de congruence rationnelle de A sont en bijection avec les classes d'isométrie des réseaux K de X satisfaisant $z(K) \subset K$ et tels que la restriction de $[\ ,\ ]$ à K soit entière et unimodulaire. De tels réseaux seront appelés *admissibles*. (Deux réseaux K et L sont isométriques s'il existe un automorphisme f de X tel que $f(K) = L$, $[fa, fb] = [a, b]$ pour tout a et b dans X, et $z \circ f = f \circ z$.)

Soit K un réseau admissible associé à A.

Une matrice de Seifert entière non-singulière est S-équivalente à A si et seulement si un réseau admissible L qui lui est associé vérifie:

il existe une chaîne finie de réseaux admissibles

$$K = K_0, K_1, \ldots, K_m = L$$

telle que $K_i/(K_i \cap K_{i+1})$ est cyclique

$$\text{et} \quad z(K_i) \subset K_{i+1} \tag{1}$$

pour tout $i = 0, \ldots, m-1$
(cf. [T], Propositions 2.17 et 4.13).

4. Preuve du théorème 1

L'hypothèse sur ϕ implique que $\phi = \phi_1 \cdot \phi_2$ avec $\phi_1(0) = 1$ et ϕ_2 semi-simple (c'est-à-dire n'a aucun facteur carré dans sa décomposition en produit de polynômes irréductibles).

Posons

$$M_i = \phi_2(z)(K_i) \oplus \phi_1(z)(K_i) \subset K_i.$$

L'exposant de M_i dans K_i est au plus égal à la résultante c de ϕ_1 et de ϕ_2 (c est le plus petit entier positif tel qu'il existe des polynômes entiers f et g avec $f \cdot \phi_1 + g \cdot \phi_2 = c$). Le déterminant de la restriction de [,] à M_i est donc borné par c^{2n}, où $n = \mathrm{rang}_Z(K)$.

Le polynôme minimal de la restriction de z à $\phi_2(z)(K_i)$ est ϕ_1. Comme $\phi_1(0) = 1$, $z|\phi_2(z)(K_i)$ est un isomorphisme. On a:

$$\phi_2(z)(K_i) = z\phi_2(z)(K_i) = \phi_2(z)(zK_i) \subset \phi_2(z)(K_{i+1}) \qquad \text{par (1)}.$$

On a donc:

$$\phi_2(z)(K) \subset \phi_2(z)(L).$$

Comme le déterminant de la restriction de [,] à $\phi_2(z)(K)$ est au plus c^{2n}, l'indice de $\phi_2(z)(K)$ dans $\phi_2(z)(L)$ est borné par c^n.

On n'a donc qu'un nombre fini de réseaux de $\phi_2(z)(X)$ possibles pour $\phi_2(z)(L)$, disons $P_1, \ldots, P_r$.

La restriction de [,] à $\phi_1(z)(L)$ est entière et de déterminant au plus c^{2n}. Le polynôme minimal de $z|\phi_1(z)(L)$ est ϕ_2, qui est semi-simple. Par [B-M], proposition 4, il n'y a qu'un nombre fini de classes d'isotopie de tels réseaux. Choisissonsen des représentants: $Q_1, \ldots, Q_s$.

Alors L est isométrique à un réseau de X dans lequel $P_i \oplus Q_j$ est d'exposant c, pour un choix de $i \in \{1, \ldots, r\}$, $j \in \{1, \ldots, s\}$. Or il n'y a qu'un nombre fini de tels réseaux. *C.q.f.d.*

Bibliographie

[B-M] Bayer, E., Michel, F.: Finitude du nombre des classes d'isomorphisme des structures isométriques entières. Comment. Math. Helv, à paraître (1979)

[L1] Levine, J.: An algebraic classification of some knots of codimension two. Comment. Math. Helv. **45**, 185–198 (1970)

[L2] Levine, J.: Finiteness of symplectic class number and an application to knot theory, preprint

[T] Trotter, H.F.: On S-equivalence of Seifert matrices. Inventiones Math. **20**, 173–207 (1973)

Reçu le 5 mars 1979