

# Algorithmes d'adaptation de maillages anisotropes et application à l'aérodynamique

THÈSE N° 5304 (2012)

PRÉSENTÉE LE 9 MARS 2012

À LA FACULTÉ DES SCIENCES DE BASE  
CHAIRE D'ANALYSE ET DE SIMULATION NUMÉRIQUE  
PROGRAMME DOCTORAL EN MATHÉMATIQUES

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

POUR L'OBTENTION DU GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES

PAR

**Wissam HASSAN**

acceptée sur proposition du jury:

Prof. J. Krieger, président du jury  
Prof. M. Picasso, directeur de thèse  
Dr F. Alauzet, rapporteur  
Dr N. Flandrin, rapporteur  
Prof. D. Kressner, rapporteur



ÉCOLE POLYTECHNIQUE  
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Suisse  
2012

---

# Abstract

The goal of this thesis is to study an anisotropic adaptive algorithm for transonic compressible viscous flow around an airwing. A convection-diffusion model problem is considered, an anisotropic *a posteriori* error estimator for the  $H^1$  semi-norm of the error is derived. The equivalence between the error and the estimator is proved, which provides the efficiency and the reliability of this estimator. A goal oriented anisotropic *a posteriori* error estimator is introduced. The equivalence with the error is not proved but lower and upper bounds are obtained.

Based on this error estimator, an anisotropic mesh algorithm is proposed and applied to the transonic compressible flow around an airwing. The mesh is structured close to the boundary layer and is kept as is, while the mesh outside the boundary layer is adapted according to the anisotropic error estimator. This anisotropic adaptive algorithm allows shocks to be captured accurately, while keeping the number of vertices as low as possible.

**Keywords :** anisotropic *a posteriori* error estimator, mesh adaptation, compressible flow, finite element, aerodynamics



# Résumé

L'objectif de cette thèse est d'étudier un algorithme d'adaptation de maillage anisotrope pour un écoulement compressible transsonique autour d'une aile d'avion. Un problème modèle de convection-diffusion est considéré et un estimateur d'erreur *a posteriori* anisotrope pour la semi-norme  $H^1$  de l'erreur en est déduit. L'équivalence entre l'erreur et l'estimateur est démontrée, assurant l'efficacité et la fiabilité de cet estimateur. Un estimateur d'erreur *a posteriori* anisotrope de type *goal oriented* est introduit. L'équivalence avec l'erreur n'est pas prouvée mais des bornes supérieure et inférieure sont néanmoins démontrées.

Basé sur cet estimateur d'erreur, un algorithme d'adaptation de maillage anisotrope est proposé et appliqué à un écoulement compressible transsonique autour d'une aile d'avion. Le maillage structuré de la couche limite est conservé tel quel, alors que le maillage du reste du domaine est adapté en fonction de l'estimateur d'erreur anisotrope. L'utilisation d'un algorithme adaptatif anisotrope permet de capturer avec précision les chocs tout en conservant le nombre de sommets aussi bas que possible.

**Mots clés :** estimateur d'erreur *a posteriori* anisotrope, adaptation de maillage, écoulement compressible, éléments finis, aérodynamique



# Remerciements

Ce travail de thèse est le résultat d'une collaboration entre l'EPFL, Dassault Aviation et l'INRIA. Il a été financé en grande partie par Dassault Aviation.

Je tiens d'abord à remercier Marco Picasso pour m'avoir guidé tout au long de la thèse et Jacques Rappaz pour m'avoir accueilli dans la chaire ASN de l'EPFL.

Je remercie Bruno Stoufflet, Jean-Marc Lombard et Didier Alleau d'avoir accepté que Dassault Aviation finance cette thèse à l'EPFL.

Je remercie les membres du jury d'avoir accepté de lire cette thèse.

Je remercie également Nicolas Flandrin, Jean-Pierre Figeac et Alain Naïm du service OCA de Dassault Aviation pour m'avoir guidé pendant toutes ces années, pour l'aide qu'ils m'ont apporté au niveau maillage et pour m'avoir fourni un générateur de maillage volumique et un mailleur frontal qui m'ont permis de mener à bien mes travaux de recherche.

J'aimerais remercier Gilbert Rogé, Frédéric Chalot, Vincent Levasseur, Laurent Daumas du service AERAV de Dassault Aviation et Jonathan Chetboun du service OCA pour le support qu'ils m'ont fourni dans la compréhension du solveur AETHER et de son code adjoint.

Je remercie Frédéric Alauzet et Adrien Loseille de l'INRIA pour m'avoir fourni le solveur WOLF et pour leur assistance dans le développement d'une chaîne d'adaptation de maillage.

Je remercie aussi Pascal Frey et Cécile Dobrzynski pour leur aide dans l'utilisation de leur remaillage anisotrope MMG3D.

Je voudrais remercier Jean-Pierre Tribot du fort intérêt qu'il a porté à mes travaux depuis mon stage de fin d'étude.

Je remercie tous les membres et les anciens membres de la chaire ASN de l'EPFL, en particulier Thomas Hofer, Virabouth Prachittham, Laurent Michel et Michel Flück, pour l'aide qu'ils m'ont fourni autant pour la recherche que pour l'enseignement et pour la bonne ambiance qui régnait dans les bureaux.

Je remercie toutes les personnes de Dassault Aviation et de l'EPFL que j'ai pu côtoyer pour avoir facilité mon intégration au sein des différents groupes dans lesquels j'ai eu des contacts.

Enfin, je remercie le groupe MPE 2007 de Paris 6 et le groupe GMU de l'EPFL, en particulier Armand, Jawed, Charles, Yann et Seif, et toute ma famille pour leur soutien durant toutes ces années.





# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Estimateur d'erreur <i>a posteriori</i> pour un problème modèle de convection-diffusion</b>	<b>5</b>
1.1 Description et discrétisation du problème de convection-diffusion stationnaire . . . . .	5
1.2 Estimation de l'erreur <i>a posteriori</i> en semi-norme $H^1$ . . . . .	8
1.2.1 Estimateur d'erreur <i>a posteriori</i> anisotrope de type Zienkiewicz-Zhu . . . . .	8
1.2.2 Minoration de la semi-norme $H^1$ de l'erreur . . . . .	13
1.3 Estimations d'erreur de type <i>goal oriented</i> . . . . .	17
1.3.1 Estimation d'une fonctionnelle linéaire de l'erreur . . . . .	17
1.3.2 Minoration de la fonctionnelle linéaire de l'erreur . . . . .	19
1.4 Extension à des problèmes non linéaires. . . . .	22
1.5 Conclusion . . . . .	24
<b>2 Résultats numériques sur maillages fixes pour le problème modèle</b>	<b>25</b>
2.1 Extensions en trois dimensions . . . . .	25
2.2 Cas-test pour les essais numériques . . . . .	28
2.3 Résultats pour l'estimation de la semi-norme $H^1$ de l'erreur . . . . .	29
2.3.1 Calcul effectif de l'estimateur d'erreur . . . . .	29
2.3.2 Mesure de l'efficacité de l'estimateur d'erreur . . . . .	30
2.3.3 Evolution de l'estimateur en fonction du raffinement du maillage . . . . .	30
2.3.3.1 Indépendance par rapport à la taille du maillage, la forme des éléments et les données du problème . . . . .	31
2.3.3.2 Maillage de la couche limite . . . . .	35
2.3.3.3 Raffinement de la couche limite dans une direction privilégiée et notion de maillage limite . . . . .	36
2.3.3.4 Influence de la taille du sous-domaine contenant la couche limite	40
2.4 Définition d'un problème dual associé à une fonctionnelle . . . . .	41
2.5 Résultats pour l'estimateur <i>goal oriented</i> . . . . .	47
2.5.1 Calcul effectif de l'estimateur d'erreur . . . . .	47
2.5.2 Mesure de l'efficacité de l'estimateur d'erreur . . . . .	48
2.5.3 Evolution de l'estimateur en fonction du raffinement pour différentes fonctionnelles . . . . .	49
2.5.3.1 Premier cas . . . . .	49
2.5.3.2 Deuxième cas . . . . .	58
2.5.3.3 Troisième cas . . . . .	58
2.6 Conclusion . . . . .	62
<b>3 Adaptation de maillages anisotropes pour des écoulements compressibles autour d'une aile</b>	<b>63</b>

3.1	Algorithme général d'adaptation de maillages . . . . .	63
3.2	Algorithme d'adaptation de maillages avec décomposition en deux sous-domaines	65
3.3	Algorithme d'adaptation de maillages avec contrôle d'une fonctionnelle . . . . .	67
3.4	Résultats numériques . . . . .	69
3.4.1	Validation de l'algorithme d'adaptation de maillages sur le problème de convection-diffusion . . . . .	69
3.4.1.1	Résultats pour la semi-norme $H^1$ . . . . .	69
3.4.1.2	Résultats pour l'adaptation <i>goal oriented</i> . . . . .	74
3.4.2	Cas-test : aile ONERA M6 en régime transsonique . . . . .	76
3.4.3	Ecoulement compressible de fluide parfait . . . . .	79
3.4.4	Ecoulement compressible de fluide visqueux . . . . .	92
3.4.4.1	Résultats obtenus avec une décomposition de domaine . . . . .	97
3.4.4.2	Etude paramétrique . . . . .	100
3.4.5	Ecoulement de fluide visqueux avec contrôle d'une fonctionnelle . . . . .	111
3.4.5.1	Equations adjointes aux équations de Navier-Stokes . . . . .	111
3.4.5.2	Résultats . . . . .	112
3.5	Conclusion . . . . .	115
<b>Conclusion et perspectives</b>		<b>117</b>
<b>A Résolution des équations d'Euler compressibles</b>		<b>119</b>
A.1	Ecriture du système sous forme matricielle . . . . .	119
A.2	Résolution par une méthode de volumes finis . . . . .	119
<b>B Résolution des équations de Navier-Stokes compressibles</b>		<b>121</b>
B.1	Ecriture du système sous forme matricielle . . . . .	121
B.2	Symétrisation des équations . . . . .	121
B.3	Résolution par la méthode de Galerkin moindres carrés . . . . .	122
B.4	Modélisation de la turbulence . . . . .	123
<b>C Autres applications</b>		<b>125</b>
C.1	Ecoulement non visqueux autour du SuperSonic Business Jet en régime supersonique	125
C.2	Ecoulement visqueux autour d'un véhicule générique de rentrée en régime hyper-sonique . . . . .	129
C.2.1	Géométrie de type <i>blunt body</i> . . . . .	129
C.2.2	Véhicule générique de rentrée . . . . .	132
C.3	Ecoulement visqueux dans un tube de dégivrage en régime subsonique . . . . .	138
<b>Bibliographie</b>		<b>145</b>

# Introduction

Dans le contexte de la simulation numérique, les algorithmes de maillage adaptatif ont pour but de produire un maillage qui soit adapté à la solution du problème sous-jacent. Le principe d'un algorithme d'adaptation est donné sur la figure 1 et est le suivant : étant donné un maillage, on calcule la solution approchée, puis un estimateur d'erreur qui ne dépend que de la solution approchée et des données du problème. Cet estimateur d'erreur est à la base des critères de raffinement/déraffinement qui permettront de construire un nouveau maillage, et ainsi de suite, jusqu'à ce que la précision du calcul soit suffisante.

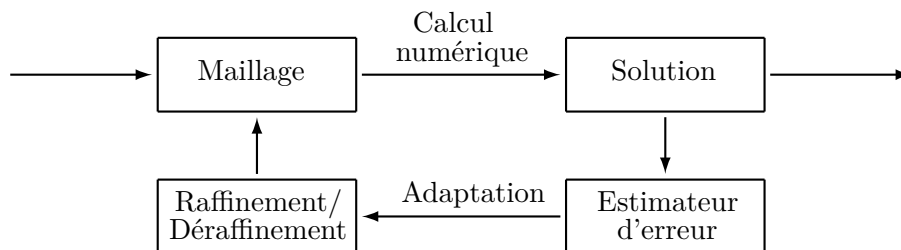


FIGURE 1 – Schéma d'une boucle d'adaptation de maillage.

Les premiers travaux réalisés sur des estimateurs d'erreur *a posteriori* sont dus à Babuška et Rheinboldt [12, 13]. Depuis, de nombreux travaux ont été effectués sur les estimateurs d'erreur *a posteriori*, dont des descriptions sont données dans [2, 15, 52, 91]. Par la suite, des estimateurs d'erreur anisotropes ont été développés [37, 38, 56, 57, 77, 78, 80] et des algorithmes d'adaptation de maillages anisotropes basés sur ces estimateurs ont été utilisés, par exemple pour des problèmes liés à la mécanique des fluides [40, 69, 81, 85] ou la solidification [24, 74]. L'objectif est de pouvoir utiliser des éléments avec un grand rapport d'aspect pour augmenter la précision du calcul tout en réduisant le nombre de sommets du maillage, et ainsi le temps CPU. Le plus souvent, les estimateurs d'erreur anisotropes sont basés sur une approximation de la matrice Hessienne de la solution [6, 10, 37, 38, 45]. Dans [80], un estimateur d'erreur anisotrope ne faisant intervenir que des dérivées premières a été introduit. Cet estimateur s'appuie sur les travaux de Formaggia et Perotto [37, 38] basés sur des estimations d'interpolation anisotropes. Dans [78], des bornes inférieures et supérieures indépendantes du rapport d'aspect ont été démontrées pour le problème de Laplace. Cet estimateur a été étendu à des problèmes elliptiques et paraboliques dans [77] et à des problèmes paraboliques non-linéaires dans [24]. Par ailleurs, des estimations d'erreur de type goal oriented qui permettent de contrôler des fonctionnelles de l'erreur ont été introduites pour divers problèmes dans [16, 83] dans le cas isotrope et dans [39, 33, 65] dans le cas anisotrope.

Le but de ce travail est d'étudier des algorithmes d'adaptation de maillages pour des écoulements compressibles visqueux autour d'un obstacle. Dans un premier temps, nous présentons des estimations *a posteriori* pour un problème de convection-diffusion stationnaire résolu

par une méthode d'éléments finis. Le but est d'obtenir un estimateur d'erreur pour la semi-norme  $H^1$  de l'erreur réelle entre la solution exacte et la solution approchée. L'estimateur proposé ne fait intervenir que des dérivées premières et s'appuie principalement sur les travaux de Picasso [77, 78]. Soient  $u$  la solution exacte d'un problème donné sur un domaine  $\Omega$  et  $u_h$  une solution approchée. On cherche donc un estimateur  $\eta$  tel que

$$|u - u_h|_{H^1(\Omega)} \leq C\eta$$

où  $C$  est une constante indépendante du rapport d'aspect des éléments du maillage. Par la suite, nous proposons aussi des estimateurs permettant de contrôler différentes fonctionnelles linéaires de l'erreur.

Par extrapolation et sans justification théorique, nous appliquons ces estimateurs aux équations de Navier-Stokes compressibles. L'existence de solutions faibles à ces équations a été prouvée dans [62] pour des fluides barotropes et dans [21] avec conduction de chaleur. Les principaux résultats d'existence globale de solutions faibles sont décrits dans [22].

Le cas de calcul principal que nous considérons est l'écoulement transsonique autour d'un profil d'aile avec une incidence non nulle dans le cas de fluides visqueux et non visqueux. Dans les deux cas, des chocs apparaissent le long de l'objet (voir figure 2). L'objectif est donc de capturer avec précision ces chocs à l'aide d'un algorithme de remaillage basé sur un estimateur d'erreur.

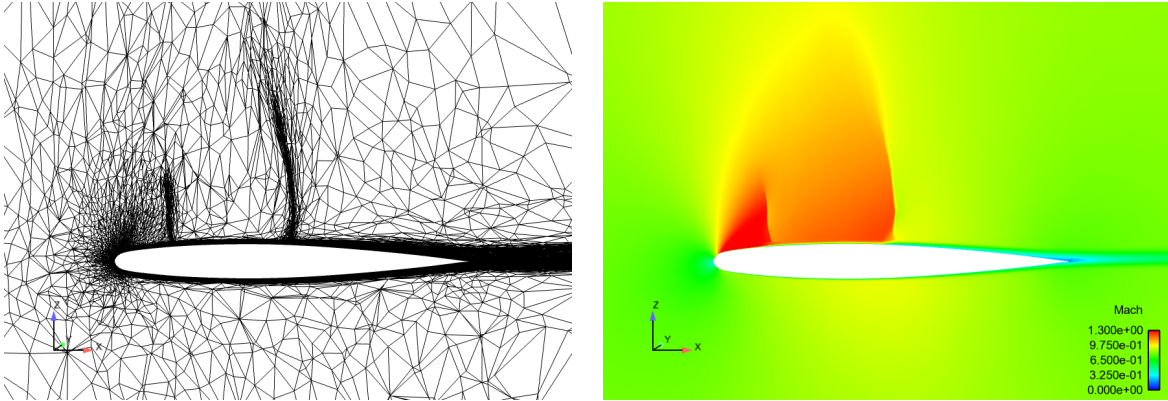


FIGURE 2 – *Écoulement visqueux autour d'une aile 3D. A gauche : coupe en  $y = 0.7m$  du maillage volumique du domaine adapté 18 fois. A droite : coupe en  $y = 0.7m$  du Mach local associé.*

Dans le cas d'un écoulement visqueux, il faut prendre en compte la couche limite qui se forme en proche paroi tout autour de l'objet. Cela nécessite la construction d'un maillage particulier dans la couche limite. La technique la plus courante est de générer un maillage structuré en utilisant une méthode frontale [76, 64]. Nous choisissons donc de séparer le domaine en deux. Nous utilisons le mailleur frontal de Dassault Aviation dans la couche limite et un remaillage de type Delaunay anisotrope (MMG3D) dans le reste du domaine. Un travail similaire peut être trouvé dans [75].

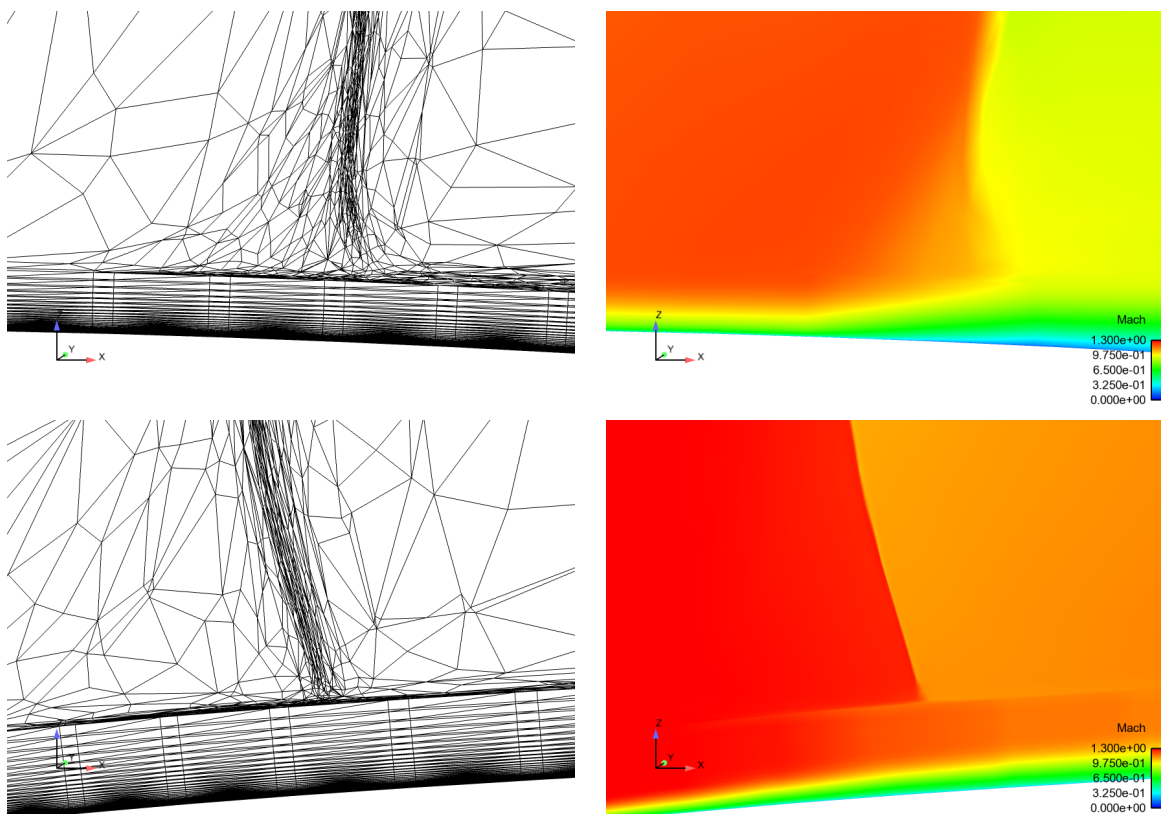


FIGURE 3 – Zoom au niveau de l'intersection du choc et de la couche limite d'un écoulement visqueux autour d'une aile 3D. A gauche : coupe en  $y = 0.7\text{m}$  du maillage volumique du domaine adapté 18 fois. A droite : coupe en  $y = 0.7\text{m}$  du Mach local associé. En haut : zoom au niveau du choc principal. En bas : zoom au niveau du choc faible se trouvant proche du bord d'attaque.

La thèse comporte trois chapitres développant les différents aspects du problème cités précédemment.

Dans le chapitre 1, nous considérons un problème modèle de convection-diffusion. Nous détaillons des estimateurs d'erreur pour la semi-norme  $H^1$  de l'erreur et pour des fonctionnelles linéaires de l'erreur. Des bornes inférieures et supérieures sont démontrées pour justifier la fiabilité de ces estimateurs.

Le chapitre 2 donne une description des essais numériques réalisés en trois dimensions pour le problème modèle. A partir des estimateurs d'erreur démontrés dans le chapitre 1, nous vérifions la qualité des estimateurs en fonction du raffinement du maillage et nous définissons des maillages admissibles pour le calcul de couches limites.

Le chapitre 3 décrit les différents algorithmes d'adaptation de maillages utilisés dans cette thèse pour des calculs d'écoulements visqueux et non visqueux. Ces algorithmes sont testés sur un écoulement transsonique autour d'une aile d'avion.

En annexe, on peut trouver des résultats d'adaptation de maillages sur d'autres cas industriels.



# Chapitre 1

## Estimateur d'erreur *a posteriori* pour un problème modèle de convection-diffusion

### 1.1 Description et discrétisation du problème de convection-diffusion stationnaire

Le problème modèle que l'on considère est l'équation de convection-diffusion stationnaire avec conditions mixte Dirichlet-Neumann homogènes. Soient  $\Omega$  un domaine polygonal de  $\mathbb{R}^2$  de bord  $\partial\Omega$ ,  $\epsilon > 0$  le coefficient de diffusion,  $\mathbf{a} = (a_1, a_2)^T \in \mathbb{R}^2$  la vitesse de convection et  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  le terme source. On cherche à trouver la fonction  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  telle que :

$$\begin{cases} -\epsilon \Delta u + \mathbf{a} \cdot \nabla u = f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_1, \\ \nabla u \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{sur } \Gamma_2, \end{cases} \quad (1.1)$$

où on a  $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$  avec  $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$ ,  $\Gamma_1 \neq \emptyset$ ,  $\Gamma_1$  est de mesure non nulle et  $\mathbf{n}$  est le vecteur unitaire normal à  $\Gamma_2$ . De plus, on impose la condition supplémentaire suivante

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_2. \quad (1.2)$$

Pour résoudre numériquement le problème (1.1), on utilise la méthode des éléments finis. On fait l'hypothèse que  $f \in L^2(\Omega)$  et on définit l'espace  $V$  par

$$V = \left\{ v \in H^1(\Omega), v = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \right\}. \quad (1.3)$$

La formulation variationnelle correspondant au problème aux limites (1.1) est : trouver  $u \in V$  telle que

$$\int_{\Omega} \epsilon \nabla u \cdot \nabla v + \int_{\Omega} (\mathbf{a} \cdot \nabla u) v = \int_{\Omega} f v, \quad \forall v \in V. \quad (1.4)$$

Grâce à la condition (1.2), on a pour toute fonction  $v \in V$

$$\int_{\Omega} (\mathbf{a} \cdot \nabla v) v = - \int_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbf{a}) \frac{v^2}{2} + \int_{\partial\Omega} \frac{v^2}{2} \mathbf{a} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (1.5)$$

puisque  $v = 0$  sur  $\Gamma_1$ ,  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{n} = 0$  sur  $\Gamma_2$  et  $\operatorname{div}(\mathbf{a}) = 0$  dans  $\Omega$  car  $\mathbf{a}$  est constant. Finalement le théorème de Lax-Milgram assure l'existence et l'unicité de la solution (voir par exemple [67]).

Pour tout  $h \in ]0, 1[$ , soit  $\mathcal{T}_h$  une triangulation conforme du domaine  $\bar{\Omega}$  en triangles  $K$  dont les diamètres  $h_K$  sont plus petits que  $h$ . On utilise des éléments finis anisotropes, c'est-à-dire que chaque élément du maillage peut être étiré selon une direction privilégiée qui dépend de la position. Comme dans [78], pour décrire l'anisotropie du maillage, on utilise les notations de [37, 38]. Pour chaque triangle  $K$  du maillage, on définit la transformation affine  $T_K : \hat{K} \rightarrow K$  qui associe le triangle de référence  $\hat{K}$  au triangle  $K$ . Soit  $M_K \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  la matrice jacobienne de  $T_K$ . Pour tout vecteur  $\hat{\mathbf{x}} \in \hat{K}$ , on définit le vecteur associé  $\mathbf{x} \in K$  par

$$\mathbf{x} = T_K(\hat{\mathbf{x}}) = M_K \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{t}_K, \quad (1.6)$$

où  $\mathbf{t}_K$  est un vecteur de  $\mathbb{R}^2$ . Puisque la matrice  $M_K$  est inversible, elle admet une décomposition en valeurs singulières

$$M_K = R_K^T \Lambda_K P_K, \quad (1.7)$$

où  $R_K$  et  $P_K$  sont orthogonales et  $\Lambda_K$  est diagonale avec des coefficients strictement positifs. On écrit les matrices  $R_K$  et  $\Lambda_K$  de la manière suivante

$$\Lambda_K = \begin{pmatrix} \lambda_{1,K} & 0 \\ 0 & \lambda_{2,K} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad R_K = \begin{pmatrix} \mathbf{r}_{1,K}^T \\ \mathbf{r}_{2,K}^T \end{pmatrix}, \quad (1.8)$$

où on a choisi  $\lambda_{1,K} \geq \lambda_{2,K}$ . Les vecteurs  $\mathbf{r}_{1,K}$  et  $\mathbf{r}_{2,K}$  correspondent aux directions d'étirement du triangle  $K$  et les scalaires  $\lambda_{1,K}$  et  $\lambda_{2,K}$  sont les tailles d'étirement associées. Par exemple, posons  $x_1 = H\hat{x}_1$ ,  $x_2 = h\hat{x}_2$ , avec  $H \leq h$ . Dans ce cas, on a

$$M_K = \begin{pmatrix} H & 0 \\ 0 & h \end{pmatrix}, \quad \lambda_{1,K} = H, \quad \lambda_{2,K} = h, \quad \mathbf{r}_{1,K} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_{2,K} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (1.9)$$

voir figure 1.1. Pour interpréter géométriquement la décomposition  $M_K = R_K^T \Lambda_K P_K$ , considérons maintenant le cas où le triangle de référence  $\hat{K}$  est le triangle équilatéral unité et considérons l'ensemble des points situés sur le cercle unité, c'est-à-dire les points  $\hat{\mathbf{x}}$  satisfaisant  $\hat{\mathbf{x}}^T \hat{\mathbf{x}} = 1$ . Puisque  $\hat{\mathbf{x}} = M_K^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{t}_K)$  d'après l'équation (1.6), on peut écrire

$$\begin{aligned} 1 &= (\mathbf{x} - \mathbf{t}_K)^T M_K^{-T} M_K^{-1} (\mathbf{x} - \mathbf{t}_K) \\ &= (\mathbf{x} - \mathbf{t}_K)^T R_K^{-1} \Lambda_K^{-T} P_K^{-T} P_K^{-1} \Lambda_K^{-1} R_K^{-T} (\mathbf{x} - \mathbf{t}_K) \\ &= (\mathbf{x} - \mathbf{t}_K)^T R_K^T \Lambda_K^{-2} R_K (\mathbf{x} - \mathbf{t}_K) \end{aligned} \quad (1.10)$$

en utilisant l'orthogonalité des matrices  $P_K$  et  $R_K$ . Comme la matrice  $R_K^T \Lambda_K^{-2} R_K$  est symétrique et définie positive, alors l'équation (1.10) est l'équation d'une ellipse dont les directions des axes sont données par les vecteurs  $\mathbf{r}_{1,K}$  et  $\mathbf{r}_{2,K}$  et leurs longueurs respectives par  $\lambda_{1,K}$  et  $\lambda_{2,K}$ . Donc, par la transformation  $T_K$ , le cercle unité devient une ellipse permettant de définir l'étirement du triangle  $K$ , voir figure 1.2.

Dans le cas de maillages anisotropes, la condition classique de minoration des angles des éléments n'est pas nécessaire. Mais il faut, pour chaque sommet du maillage, que le nombre de sommets voisins soit majoré. Soit  $K$  un élément du maillage et  $\Delta_K$  son patch, c'est-à-dire l'ensemble des éléments ayant un sommet en commun avec  $K$ . On suppose également que le patch de l'élément de référence  $\Delta_{\hat{K}} = T_K^{-1}(\Delta_K)$  est d'ordre 1, voir [69, 78] pour plus de détails.

On va approcher la solution du problème (1.1) par une fonction continue polynomiale de degré 1 sur chaque triangle  $K$ . Soit  $V_h = \{v_h \in C^0(\bar{\Omega}), v_{h|_K} \in P^1 \text{ pour tout triangle } K, v_h = 0 \text{ sur } \Gamma_1\}$ . On considère la formulation stabilisée de [42] qui correspond à la formulation variationnelle (1.4) écrite sous forme discrète auquel on a ajouté un terme de stabilisation avec une modification du paramètre de stabilisation requis par l'utilisation de maillages anisotropes.



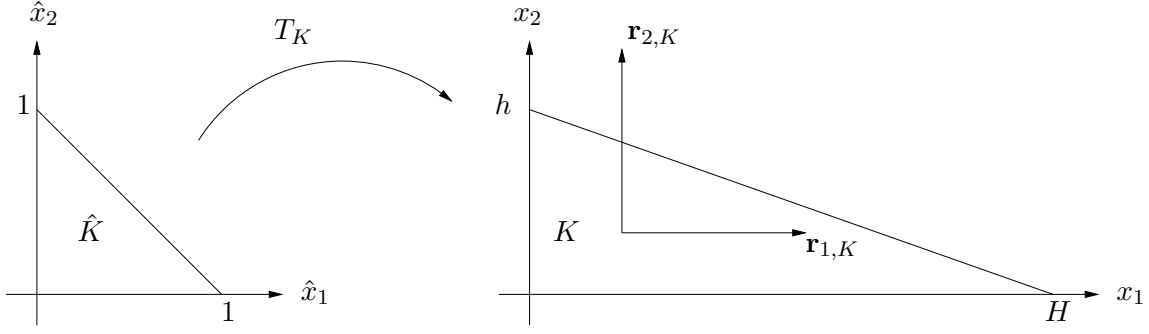


FIGURE 1.1 – Un exemple simple de transformation  $T_K$  de l'élément  $\hat{K}$  vers l'élément  $K$ . Ici  $\hat{K}$  est le triangle de référence usuel.

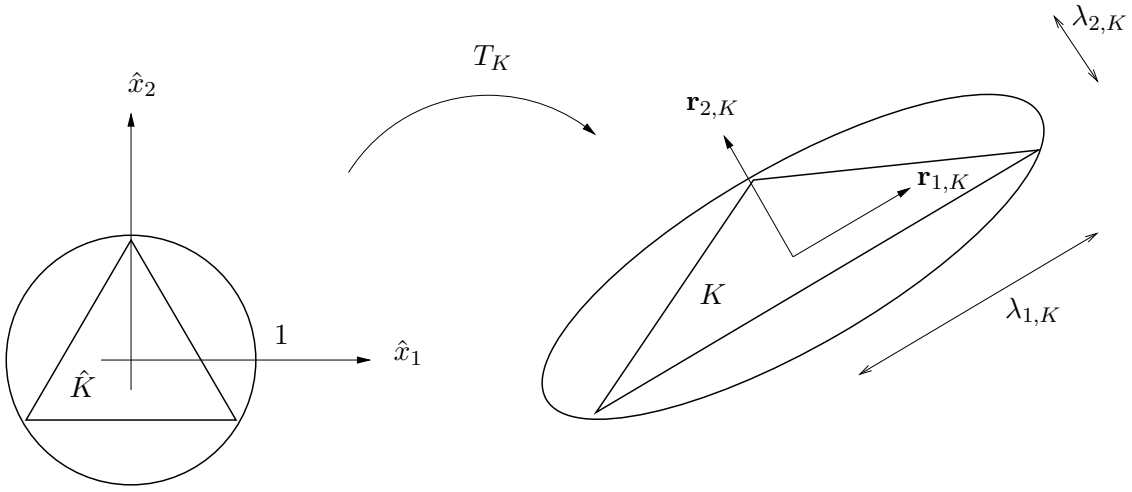


FIGURE 1.2 – La transformation  $T_K$  quand  $\hat{K}$  est le triangle équilatéral de référence et  $K$  est isocèle. Le cercle unité devient une ellipse avec des directions  $\mathbf{r}_{1,K}$  et  $\mathbf{r}_{2,K}$ , les amplitudes d'étirement étant  $\lambda_{1,K}$  et  $\lambda_{2,K}$ .

Un argument théorique expliquant cette modification est proposé dans [69]. Le nouveau problème que l'on cherche à résoudre est le suivant : trouver  $u_h \in V_h$  telle que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \epsilon \nabla u_h \cdot \nabla v_h + \int_{\Omega} \mathbf{a} \cdot \nabla u_h v_h + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_K \int_K (\mathbf{a} \cdot \nabla u_h)(\mathbf{a} \cdot \nabla v_h) \\ = \int_{\Omega} f v_h + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_K \int_K f(\mathbf{a} \cdot \nabla v_h), \quad \forall v_h \in V_h, \end{aligned} \quad (1.11)$$

où  $\tau_K$  est le paramètre de stabilisation défini par :

$$\tau_K = \frac{\lambda_{2,K}}{2|\mathbf{a}|_{\infty}} \xi(Pe_K) \quad (1.12)$$

avec  $|\mathbf{a}|_{\infty} = \max(|a_1|, |a_2|)$ ,  $Pe_K$  le nombre de Péclet défini par :

$$Pe_K = \frac{|\mathbf{a}|_{\infty} \lambda_{2,K}}{6\epsilon} \quad (1.13)$$

et  $\xi$  la fonction définie par :

$$\begin{aligned} \xi : \mathbb{R}^+ &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ x &\longmapsto \min(x, 1). \end{aligned} \quad (1.14)$$

Ici encore, le théorème de Lax-Milgram permet d'affirmer que le problème admet une solution unique.

**Remarque 1.** *On peut généraliser le problème (1.1) en prenant un champ de vitesse incompressible non nécessairement constant. Plus précisément, on peut prendre n'importe quelle fonction  $\mathbf{a} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$  tel que  $\mathbf{a} \in (C^1(\bar{\Omega}))^2$  avec  $\operatorname{div}(\mathbf{a}) = 0$ . Dans ce cas, on pose  $|\mathbf{a}|_\infty = \|\mathbf{a}\|_{L^\infty(K)}$  (voir [69]).*

## 1.2 Estimation de l'erreur a posteriori en semi-norme $H^1$

### 1.2.1 Estimateur d'erreur a posteriori anisotrope de type Zienkiewicz-Zhu

Dans cette partie, on cherche à définir un estimateur d'erreur a posteriori anisotrope  $\eta_K^2$  pour chaque élément  $K$  du maillage qui est tel que :

$$\text{Il existe une constante } C \in \mathbb{R} \text{ telle que } \|\nabla(u - u_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \eta_K^2, \quad (1.15)$$

où  $u$  est la solution exacte du problème (1.1) et  $u_h$  son approximation par éléments finis. La constante  $C$  qui intervient ne doit pas dépendre de  $u$ , de la taille du maillage et du rapport d'aspect afin qu'il soit possible d'utiliser des éléments finis anisotropes.

On introduit d'abord l'opérateur d'interpolation de Clément que l'on note  $I_h$  (voir [29]). Pour cela, on définit l'opérateur  $\Pi_0$  qui à toute fonction  $v \in L^2(\Omega)$  associe son projeté orthogonal sur l'espace des fonctions constantes par élément pour chaque  $S_i \subset \mathcal{T}_h$ ,  $1 \leq i \leq n$ , où  $n$  est le nombre de points du maillage  $\mathcal{T}_h$  et  $S_i$  le support de la fonction de base  $\varphi_i$  associée au point  $P_i$  du maillage. Autrement dit, pour tout  $1 \leq i \leq n$ , pour tout  $S_i \subset \mathcal{T}_h$ ,

$$(\Pi_0 v)|_{S_i} \text{ est constant et } \int_{S_i} (\Pi_0 v - v) = 0. \quad (1.16)$$

Finalement, l'opérateur d'interpolation de Clément  $I_h : L^2(\Omega) \rightarrow V_h$  est défini par

$$I_h v = \sum_{i=1}^n \Pi_0 v(P_i) \varphi_i. \quad (1.17)$$

On rappelle quelques inégalités basées sur l'opérateur d'interpolation de Clément qui ont été démontrées dans [29] et adaptées au cas anisotrope dans [37], [38] et [69].

**Proposition 1.** *Il existe une constante  $C = C(\hat{K}) \in \mathbb{R}$  indépendante de la taille et du rapport d'aspect de  $K$  telle que, pour tout  $v \in H^1(\Omega)$ , pour tout  $K \in \mathcal{T}_h$ , pour toute arête  $\ell_i$  de  $K$ ,  $i = 1, 2, 3$ , nous avons*

$$\begin{aligned} \|v - I_h(v)\|_{L^2(K)} &\leq C \omega_K(v), \\ \|v - I_h(v)\|_{L^2(\ell_i)} &\leq C \left( \frac{|\ell_i|}{\lambda_{1,K} \lambda_{2,K}} \right)^{1/2} \omega_K(v), \\ \|\nabla(v - I_h(v))\|_{L^2(K)} &\leq C \frac{\omega_K(v)}{\lambda_{2,K}}, \end{aligned} \quad (1.18)$$

où  $|\ell_i|$  désigne la longueur de l'arête  $\ell_i$  et  $\omega_K(v)$  est défini par

$$\omega_K^2(v) = \lambda_{1,K}^2 \left( \mathbf{r}_{1,K}^T G_K(v) \mathbf{r}_{1,K} \right) + \lambda_{2,K}^2 \left( \mathbf{r}_{2,K}^T G_K(v) \mathbf{r}_{2,K} \right), \quad (1.19)$$

avec  $G_K(v)$  désigne la matrice de taille  $2 \times 2$  définie par

$$G_K(v) = \begin{pmatrix} \int_{\Delta_K} \left( \frac{\partial v}{\partial x_1} \right)^2 dx & \int_{\Delta_K} \frac{\partial v}{\partial x_1} \frac{\partial v}{\partial x_2} dx \\ \int_{\Delta_K} \frac{\partial v}{\partial x_1} \frac{\partial v}{\partial x_2} dx & \int_{\Delta_K} \left( \frac{\partial v}{\partial x_2} \right)^2 dx \end{pmatrix}, \quad (1.20)$$

où  $\Delta_K$  est le patch de l'élément  $K$ , c'est-à-dire l'ensemble des éléments ayant un sommet en commun avec  $K$ . Les vecteurs  $\mathbf{r}_{1,K}$ ,  $\mathbf{r}_{2,K}$  et les valeurs associées  $\lambda_{1,K}$ ,  $\lambda_{2,K}$  sont donnés par (1.8).

Pour tout  $K \in \mathcal{T}_h$ , on définit la projection  $L^2(K)$  de  $f$  sur les constantes par

$$\Pi_K f = \frac{1}{|K|} \int_K f, \quad (1.21)$$

où  $|K|$  désigne l'aire de  $K$ . On a le résultat suivant.

**Théorème 1.** Soient  $u$  la solution du problème (1.4) et  $u_h$  la solution du problème approché (1.11). Il existe une constante  $C = C(\hat{K}) \in \mathbb{R}$  indépendante des données  $f$ ,  $\epsilon$ ,  $\mathbf{a}$ , de la taille du maillage et du rapport d'aspect telle que

$$\|\nabla(u - u_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \left( \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \eta_K^2 + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \frac{1}{\epsilon} \|f - \Pi_K f\|_{L^2(K)} \omega_K(u - u_h) \right) \quad (1.22)$$

où  $\eta_K^2$  est défini par

$$\eta_K^2 = \left( \frac{1}{\epsilon} \|\Pi_K f - \mathbf{a} \cdot \nabla u_h\|_{L^2(K)} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \left( \frac{|\ell_i|}{\lambda_{1,K} \lambda_{2,K}} \right)^{1/2} \|[\nabla u_h \cdot \mathbf{n}]\|_{L^2(\ell_i)} \right) \omega_K(u - u_h), \quad (1.23)$$

où  $\mathbf{n}$  est le vecteur unitaire normal à l'arête  $\ell_i$ .

Ce théorème est une amélioration du résultat donné dans [77].

**Remarque 2.** L'estimateur d'erreur définie par (1.22) et (1.23) ne fait intervenir que des dérivées premières de la solution approchée  $u_h$ , ce qui évite d'avoir à évaluer la matrice Hessienne, comme dans [3] par exemple.

Avant de démontrer le théorème 1, on donne le résultat suivant.

**Proposition 2.** Pour tout  $v \in H^1(\Omega)$ , pour tout  $K \in \mathcal{T}_h$ , nous avons l'estimation suivante

$$\lambda_{2,K} \|\nabla v\|_{L^2(K)} \leq \omega_K(v). \quad (1.24)$$

*Démonstration.* On a

$$\nabla v = (\nabla v \cdot \mathbf{r}_{1,K}) \mathbf{r}_{1,K} + (\nabla v \cdot \mathbf{r}_{2,K}) \mathbf{r}_{2,K}. \quad (1.25)$$

On peut écrire

$$\begin{aligned} \|\nabla v\|_{L^2(\Delta_K)}^2 &= \int_{\Delta_K} \nabla v \cdot \nabla v \\ &= \int_{\Delta_K} \left( (\nabla v \cdot \mathbf{r}_{1,K}) \mathbf{r}_{1,K} + (\nabla v \cdot \mathbf{r}_{2,K}) \mathbf{r}_{2,K} \right) \cdot \left( (\nabla v \cdot \mathbf{r}_{1,K}) \mathbf{r}_{1,K} + (\nabla v \cdot \mathbf{r}_{2,K}) \mathbf{r}_{2,K} \right) \\ &= \int_{\Delta_K} (\nabla v \cdot \mathbf{r}_{1,K})^2 \|\mathbf{r}_{1,K}\|_2^2 + 2 \int_{\Delta_K} (\nabla v \cdot \mathbf{r}_{1,K}) (\nabla v \cdot \mathbf{r}_{2,K}) \mathbf{r}_{1,K} \cdot \mathbf{r}_{2,K} \\ &\quad + \int_{\Delta_K} (\nabla v \cdot \mathbf{r}_{2,K})^2 \|\mathbf{r}_{2,K}\|_2^2 \end{aligned} \quad (1.26)$$

Puisque  $\|\mathbf{r}_{1,K}\|_2 = \|\mathbf{r}_{2,K}\|_2 = 1$  et  $\mathbf{r}_{1,K} \cdot \mathbf{r}_{2,K} = 0$ , on obtient

$$\|\nabla v\|_{L^2(\Delta_K)}^2 = \|\nabla v \cdot \mathbf{r}_{1,K}\|_{L^2(\Delta_K)}^2 + \|\nabla v \cdot \mathbf{r}_{2,K}\|_{L^2(\Delta_K)}^2. \quad (1.27)$$

Par ailleurs, pour tout vecteur  $\mathbf{r}_i = (r_{i1}, r_{i2})^T \in \mathbb{R}^2$ , on a

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_i^T G_K(v) \mathbf{r}_i &= r_{i1} \left( r_{i1} \int_{\Delta_K} \left( \frac{\partial v}{\partial x_1} \right)^2 + r_{i2} \int_{\Delta_K} \left( \frac{\partial v}{\partial x_1} \frac{\partial v}{\partial x_2} \right) \right) \\ &\quad + r_{i2} \left( r_{i1} \int_{\Delta_K} \left( \frac{\partial v}{\partial x_1} \frac{\partial v}{\partial x_2} \right) + r_{i2} \int_{\Delta_K} \left( \frac{\partial v}{\partial x_2} \right)^2 \right) \\ &= \int_{\Delta_K} \left( r_{i1} \frac{\partial v}{\partial x_1} + r_{i2} \frac{\partial v}{\partial x_2} \right)^2 = \int_{\Delta_K} (\mathbf{r}_i \cdot \nabla v)^2 = \|\mathbf{r}_i \cdot \nabla v\|_{L^2(\Delta_K)}^2. \end{aligned} \quad (1.28)$$

Donc, en utilisant les égalités (1.27) et (1.28), on peut écrire

$$\|\nabla v\|_{L^2(\Delta_K)}^2 = \mathbf{r}_{1,K}^T G_K(v) \mathbf{r}_{1,K} + \mathbf{r}_{2,K}^T G_K(v) \mathbf{r}_{2,K}. \quad (1.29)$$

En multipliant l'équation (1.29) par  $\lambda_{2,K}^2$  et en utilisant le fait que  $0 < \lambda_{2,K} \leq \lambda_{1,K}$ , on obtient

$$\lambda_{2,K}^2 \|\nabla v\|_{L^2(\Delta_K)}^2 \leq \lambda_{1,K}^2 \mathbf{r}_{1,K}^T G_K(v) \mathbf{r}_{1,K} + \lambda_{2,K}^2 \mathbf{r}_{2,K}^T G_K(v) \mathbf{r}_{2,K} = \omega_K^2(v). \quad (1.30)$$

Finalement, comme  $K \subset \Delta_K$ , on obtient le résultat voulu

$$\lambda_{2,K} \|\nabla v\|_{L^2(K)} \leq \lambda_{2,K} \|\nabla v\|_{L^2(\Delta_K)} \leq \omega_K(v). \quad (1.31)$$

□

On peut maintenant démontrer le théorème 1.

*Démonstration du théorème 1.* En prenant  $v_h = I_h(u - u_h)$  dans (1.11), on peut écrire

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} \epsilon \nabla u_h \cdot \nabla I_h(u - u_h) + \int_{\Omega} \mathbf{a} \cdot \nabla u_h I_h(u - u_h) + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_K \int_K (\mathbf{a} \cdot \nabla u_h) (\mathbf{a} \cdot \nabla I_h(u - u_h)) \\ &= \int_{\Omega} f I_h(u - u_h) + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_K \int_K f (\mathbf{a} \cdot \nabla I_h(u - u_h)) \end{aligned} \quad (1.32)$$

soit

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} \frac{1}{\epsilon} (f - \mathbf{a} \cdot \nabla u_h) I_h(u - u_h) - \int_{\Omega} \nabla u_h \cdot \nabla I_h(u - u_h) \\ &\quad + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \frac{\tau_K}{\epsilon} \int_K (f - \mathbf{a} \cdot \nabla u_h) \mathbf{a} \cdot \nabla I_h(u - u_h) = 0. \end{aligned} \quad (1.33)$$

Par ailleurs, on peut écrire

$$\begin{aligned} \|\nabla(u - u_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \int_{\Omega} \nabla(u - u_h) \cdot \nabla(u - u_h) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla(u - u_h) - \int_{\Omega} \nabla u_h \cdot \nabla(u - u_h) \\ &= \int_{\Omega} \frac{1}{\epsilon} (f - \mathbf{a} \cdot \nabla u) (u - u_h) - \int_{\Omega} \nabla u_h \cdot \nabla(u - u_h) \\ &= \int_{\Omega} \frac{1}{\epsilon} (f - \mathbf{a} \cdot \nabla u_h) (u - u_h) - \int_{\Omega} \nabla u_h \cdot \nabla(u - u_h) \end{aligned} \quad (1.34)$$

car, d'après (1.5),

$$\int_{\Omega} \mathbf{a} \cdot \nabla(u - u_h) (u - u_h) = 0. \quad (1.35)$$

En soustrayant l'équation (1.33) à l'équation (1.34), on obtient

$$\begin{aligned}
 \|\nabla(u - u_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \frac{1}{\epsilon} (\Pi_K f - \mathbf{a} \cdot \nabla u_h) (u - u_h - I_h(u - u_h)) \\
 &\quad - \int_{\Omega} \nabla u_h \cdot \nabla (u - u_h - I_h(u - u_h)) \\
 &\quad - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \frac{\tau_K}{\epsilon} \int_K (\Pi_K f - \mathbf{a} \cdot \nabla u_h) \mathbf{a} \cdot \nabla I_h(u - u_h) \\
 &\quad + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \frac{1}{\epsilon} (f - \Pi_K f) (u - u_h - I_h(u - u_h)) \\
 &\quad - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \frac{\tau_K}{\epsilon} \int_K (f - \Pi_K f) \mathbf{a} \cdot \nabla I_h(u - u_h) \\
 &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \frac{1}{\epsilon} \left( \Pi_K f - \mathbf{a} \cdot \nabla u_h \right) \left( u - u_h - I_h(u - u_h) \right) \\
 &\quad + \frac{1}{2} \int_{\partial K} [\nabla u_h \cdot \mathbf{n}] (u - u_h - I_h(u - u_h)) \\
 &\quad - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_K \int_K \frac{1}{\epsilon} (\Pi_K f - \mathbf{a} \cdot \nabla u_h) \mathbf{a} \cdot \nabla I_h(u - u_h) \\
 &\quad + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \frac{1}{\epsilon} (f - \Pi_K f) (u - u_h - I_h(u - u_h)) \\
 &\quad - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \frac{\tau_K}{\epsilon} \int_K (f - \Pi_K f) \mathbf{a} \cdot \nabla I_h(u - u_h)
 \end{aligned} \tag{1.36}$$

où  $\partial K$  est le bord du triangle  $K$ ,  $\mathbf{n}$  est le vecteur normal à  $\partial K$  et  $[\cdot]$  indique le saut de la quantité entre crochets à travers  $\ell_j$ . En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient

$$\begin{aligned}
 \|\nabla(u - u_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq \sum_{k \in \mathcal{T}_h} \frac{1}{\epsilon} \|\Pi_K f - \mathbf{a} \cdot \nabla u_h\|_{L^2(K)} \|u - u_h - I_h(u - u_h)\|_{L^2(K)} \\
 &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \|[\nabla u_h \cdot \mathbf{n}]\|_{L^2(\ell_i)} \|u - u_h - I_h(u - u_h)\|_{L^2(\ell_i)} \\
 &\quad + \frac{\tau_K}{\epsilon} \|\Pi_K f - \mathbf{a} \cdot \nabla u_h\|_{L^2(K)} |\mathbf{a}|_{\infty} \|\nabla I_h(u - u_h)\|_{L^2(K)} \\
 &\quad + \frac{1}{\epsilon} \|f - \Pi_K f\|_{L^2(K)} \|u - u_h - I_h(u - u_h)\|_{L^2(K)} \\
 &\quad + \frac{\tau_K}{\epsilon} \|f - \Pi_K f\|_{L^2(K)} |\mathbf{a}|_{\infty} \|\nabla I_h(u - u_h)\|_{L^2(K)}.
 \end{aligned} \tag{1.37}$$

où les  $\ell_i$  désignent les arêtes du triangle  $K$  tels que  $\partial K = \bigcup_{i=1}^3 \ell_i$ . En utilisant la proposition 1 et le fait que l'inégalité triangulaire nous donne

$$\|\nabla I_h(u - u_h)\|_{L^2(K)} \leq \|\nabla(u - u_h - I_h(u - u_h))\|_{L^2(K)} + \|\nabla(u - u_h)\|_{L^2(K)}, \tag{1.38}$$

on peut écrire qu'il existe une constante  $C_1$  indépendante de  $f$ ,  $\mathbf{a}$ , de la taille et du rapport

d'aspect du maillage telle que

$$\begin{aligned}
\|\nabla(u - u_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq C_1 \left( \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left( \left(1 + \frac{\tau_K |\mathbf{a}|_\infty}{\lambda_{2,K}}\right) \frac{1}{\epsilon} \|\Pi_K f - \mathbf{a} \cdot \nabla u_h\|_{L^2(K)} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \left(\frac{|\ell_i|}{\lambda_{1,K} \lambda_{2,K}}\right)^{1/2} \|\nabla u_h \cdot \mathbf{n}\|_{L^2(\ell_i)} \right) \omega_K(u - u_h) \right. \\
&\quad + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \frac{\tau_K |\mathbf{a}|_\infty}{\epsilon} \|\Pi_K f - \mathbf{a} \cdot \nabla u_h\|_{L^2(K)} \|\nabla(u - u_h)\|_{L^2(K)} \\
&\quad + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \frac{1}{\epsilon} \left(1 + \frac{\tau_K |\mathbf{a}|_\infty}{\lambda_{2,K}}\right) \|f - \Pi_K f\|_{L^2(K)} \omega_K(u - u_h) \\
&\quad \left. + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \frac{\tau_K |\mathbf{a}|_\infty}{\epsilon} \|f - \Pi_K f\|_{L^2(K)} \|\nabla(u - u_h)\|_{L^2(K)} \right). \tag{1.39}
\end{aligned}$$

En utilisant la proposition 2 et en remarquant que, d'après la définition du paramètre  $\tau_K$ ,

$$\frac{\tau_K |\mathbf{a}|_\infty}{\lambda_{2,K}} = \frac{\xi(Pe_K)}{2} \leq \frac{1}{2}, \tag{1.40}$$

on obtient le résultat du théorème 1.  $\square$

**Remarque 3.** L'estimateur d'erreur définie par l'inégalité (1.22) est une amélioration de celui qui est donné dans [77] puisqu'il n'est plus nécessaire de supposer qu'il existe une constante  $C^* > 0$  et  $s \in ]0, 1]$  indépendant de la taille du maillage et du rapport d'aspect tels que

$$\|\nabla(u - u_h)\|_{L^2(\Omega)} \geq C^* \left( \max_{K \in \mathcal{T}_h} \lambda_{2,K} \right)^s \tag{1.41}$$

et que  $\max_{K \in \mathcal{T}_h} \lambda_{2,K}$  soit suffisamment petit pour obtenir le même résultat.

**Remarque 4.** Le lemme 2.2 de [37] nous dit que, pour toute fonction  $v \in H^1(K)$ , on a

$$\left(\frac{\lambda_{2,K}}{\lambda_{1,K}}\right)^{1/2} \|\nabla \hat{v}\|_{L^2(\hat{K})} \leq \|\nabla v\|_{L^2(K)} \leq \left(\frac{\lambda_{1,K}}{\lambda_{2,K}}\right)^{1/2} \|\nabla \hat{v}\|_{L^2(\hat{K})}, \tag{1.42}$$

où  $\hat{v} \in H^1(\hat{K})$  est la fonction correspondant à  $v$  définie sur le triangle de référence  $\hat{K}$ . Alors, comme dans [78], on peut remarquer que si  $f \in H^1(K)$  pour tout  $K \in \mathcal{T}_h$ , en utilisant les propriétés de  $\Pi_K$  et le lemme 2.2 de [37], on a

$$\begin{aligned}
\int_K (f - \Pi_K f)^2 &= \lambda_{1,K} \lambda_{2,K} \int_{\hat{K}} (\hat{f} - \hat{\Pi}_K \hat{f})^2 \\
&\leq \hat{C} \lambda_{1,K} \lambda_{2,K} \int_{\hat{K}} |\hat{\nabla} \hat{f}|^2 \\
&\leq \hat{C} \lambda_{1,K}^2 \int_K |\nabla f|^2,
\end{aligned} \tag{1.43}$$

où  $\hat{C}$  dépend seulement du triangle de référence  $\hat{K}$ . Donc, dans ce cas, le dernier terme de l'inégalité (1.22) est d'ordre  $h^3$ , c'est-à-dire d'ordre supérieur à  $\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \eta_K^2$  qui est d'ordre  $h^2$ .

L'estimateur qui a été démontré dans le théorème 1 dépend toujours de l'erreur  $u - u_h$ , en particulier de la solution exacte  $u$  qui est inconnue. L'idée utilisée dans [77, 78] est d'évaluer

les dérivées de l'erreur  $u - u_h$  grâce à l'estimateur de Zienkiewicz-Zhu ([93, 1]) qui consiste à remplacer

$$\frac{\partial(u - u_h)}{\partial x_j} \quad \text{par} \quad \eta_j^{zz}(u_h) = I_h \frac{\partial u_h}{\partial x_j} - \frac{\partial u_h}{\partial x_j}, \quad j = 1, 2, \quad (1.44)$$

où  $I_h$  est la projection  $L^2$  approchée sur  $V_h$  définie par la relation (1.17). En pratique, pour calculer la valeur de  $I_h(\frac{\partial u_h}{\partial x_j})$  en un point  $P$  du maillage  $\mathcal{T}_h$ , on utilise le fait que  $u_h$  est linéaire sur chaque élément, ce qui signifie que ses dérivées  $\frac{\partial u_h}{\partial x_j}$ ,  $j = 1, 2$ , sont constantes sur chaque élément et discontinues. En utilisant la définition donnée par (1.17), l'approximation de  $\frac{\partial u_h}{\partial x_j}$  au point  $P$  est définie par

$$I_h \frac{\partial u_h}{\partial x_j}(P) = \Pi_0 \frac{\partial u_h}{\partial x_j}(P) = \frac{1}{\sum_{K \in S} |K|} \sum_{K \in S} |K| \left( \frac{\partial u_h}{\partial x_j} \right)_{|K}, \quad j = 1, 2, \quad (1.45)$$

ce qui correspond à effectuer une moyenne des dérivées  $\frac{\partial u_h}{\partial x_j}$  calculées aux éléments voisins d'un noeud  $P$  du maillage pondérée par l'aire des éléments. Pour justifier l'utilisation de cet estimateur, on peut remarquer que, pour tout élément  $K$ , on a

$$\left\| \frac{\partial(u - u_h)}{\partial x_j} \right\|_{L^2(K)} \leq \left\| \frac{\partial u}{\partial x_j} - I_h \frac{\partial u_h}{\partial x_j} \right\|_{L^2(K)} + \left\| I_h \frac{\partial u_h}{\partial x_j} - \frac{\partial u_h}{\partial x_j} \right\|_{L^2(K)}. \quad (1.46)$$

Des trois normes qui apparaissent dans l'inégalité (1.46), seule  $\left\| I_h \frac{\partial u_h}{\partial x_j} - \frac{\partial u_h}{\partial x_j} \right\|_{L^2(K)}$  est calculable puisqu'elle ne fait pas intervenir la solution inconnue  $u$ . Lorsque  $I_h \frac{\partial u_h}{\partial x_j}$  converge plus rapidement vers  $\frac{\partial u}{\partial x_j}$  que  $\frac{\partial u_h}{\partial x_j}$ , alors on a superconvergence et on a

$$\left\| I_h \frac{\partial u_h}{\partial x_j} - \frac{\partial u_h}{\partial x_j} \right\|_{L^2(K)} \xrightarrow{h \rightarrow 0} \left\| \frac{\partial(u - u_h)}{\partial x_j} \right\|_{L^2(K)}. \quad (1.47)$$

Finalement, pour calculer numériquement l'estimateur d'erreur  $\eta_K^2$  défini dans le théorème 1, on remplace la matrice  $G_K(u - u_h)$  qui intervient dans le terme  $\omega_K(u - u_h)$  par la matrice  $\tilde{G}_K(u_h)$  définie de la manière suivante

$$\tilde{G}_K(u_h) = \begin{pmatrix} \int_{\Delta_K} (\eta_1^{zz}(u_h))^2 dx & \int_{\Delta_K} \eta_1^{zz}(u_h) \eta_2^{zz}(u_h) dx \\ \int_{\Delta_K} \eta_1^{zz}(u_h) \eta_2^{zz}(u_h) dx & \int_{\Delta_K} (\eta_2^{zz}(u_h))^2 dx \end{pmatrix}. \quad (1.48)$$

### 1.2.2 Minoration de la semi-norme $H^1$ de l'erreur

Pour justifier la fiabilité de l'estimateur d'erreur donné par le théorème 1, on veut montrer qu'il existe une constante  $C$  telle que

$$\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \eta_K^2 \leq C \|\nabla(u - u_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 + h.o.t, \quad (1.49)$$

où  $h.o.t$  désigne un terme d'ordre supérieur.

On a le théorème suivant.

**Théorème 2.** Soient  $u$  la solution du problème (1.4),  $u_h$  la solution du problème approché (1.11) et  $\eta_K^2$  l'estimateur d'erreur sur l'élément  $K$  défini dans le théorème 1. Alors il existe

une constante  $C \in \mathbb{R}$  indépendante des données  $f$ ,  $\epsilon$ ,  $\mathbf{a}$ , de la taille du maillage et du rapport d'aspect telle que

$$\begin{aligned} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \eta_K^2 \leq C & \left( \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|\nabla(u - u_h)\|_{L^2(K)} \left( \frac{|\mathbf{a}|_\infty \lambda_{2,K}}{\epsilon} + 1 \right) \frac{\omega_K(u - u_h)}{\lambda_{2,K}} \right. \\ & \left. + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \frac{1}{\epsilon} \|f - \Pi_K f\|_{L^2(K)} \omega_K(u - u_h) \right). \end{aligned} \quad (1.50)$$

Pour démontrer le théorème 2, nous avons besoin des résultats suivants qui ont été démontrés dans [78] et qui sont des extensions au cas anisotrope des idées développées dans [11] et [91].

**Proposition 3.** *Il existe une fonction  $\varphi \in H_0^1(\Omega)$  et une constante  $C$  dépendant seulement du triangle de référence  $\hat{K}$  telles que, pour tout  $K \in \mathcal{T}_h$ , nous avons*

$$\int_{\ell_i} [\nabla u_h \cdot \mathbf{n}] \varphi = \left( \frac{|\ell_i|}{\lambda_{1,K} \lambda_{2,K}} \right)^{1/2} \left( \int_{\ell_i} [\nabla u_h \cdot \mathbf{n}]^2 \right)^{1/2} \omega_K(u - u_h), \quad i = 1, 2, 3, \quad (1.51)$$

$$\int_K (\Pi_K f - \mathbf{a} \cdot \nabla u_h) \varphi = \left( \int_K (\Pi_K f - \mathbf{a} \cdot \nabla u_h)^2 \right)^{1/2} \omega_K(u - u_h), \quad (1.52)$$

$$\int_K |\nabla \varphi|^2 \leq C \frac{\omega_K^2(u - u_h)}{\lambda_{2,K}^2}, \quad (1.53)$$

$$\int_K |\varphi|^2 \leq C \omega_K^2(u - u_h). \quad (1.54)$$

*Démonstration.* Comme dans [11, 91], on subodore que la fonction  $\varphi$  peut s'écrire sous la forme

$$\varphi = C_K \psi_K + \sum_{i=1}^3 C_{\ell_i} \psi_{\ell_i}, \quad (1.55)$$

où  $C_K$  et  $C_{\ell_i}$ ,  $i = 1, 2, 3$ , sont des constantes et les fonctions  $\psi_K$  et  $\psi_{\ell_i}$ ,  $i = 1, 2, 3$ , sont les fonctions bulles usuelles de l'élément  $K$  et des arêtes  $\ell_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , respectivement. Comme il a été fait dans [78], en utilisant l'équation (1.51), on peut déterminer les constantes  $C_{\ell_i}$ ,  $i = 1, 2, 3$ . On a donc

$$C_{\ell_i} = \frac{\omega_K(u - u_h)}{\int_{\ell_i} \psi_{\ell_i}} \left( \frac{|\ell_i|^2}{\lambda_{1,K} \lambda_{2,K}} \right)^{1/2}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (1.56)$$

De même, à partir de l'équation (1.52), on obtient

$$C_K = \frac{\omega_K(u - u_h)}{\int_K \psi_K} \left( (\lambda_{1,K} \lambda_{2,K})^{1/2} - \sum_{i=1}^3 \frac{\int_K \psi_{\ell_i}}{\int_{\ell_i} \psi_{\ell_i}} \left( \frac{|\ell_i|^2}{\lambda_{1,K} \lambda_{2,K}} \right)^{1/2} \right). \quad (1.57)$$

L'inégalité (1.53) a été démontrée dans [78]. De la même manière, on montre l'inégalité (1.54). Pour tout  $a_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, 4$ , on a l'inégalité suivante

$$\left( \sum_{i=1}^4 a_i \right)^2 \leq 4 \sum_{i=1}^4 a_i^2. \quad (1.58)$$



En utilisant (1.55) et l'inégalité (1.58), on peut écrire

$$\begin{aligned}
 \int_K |\varphi|^2 &\leq 4 \left( C_K^2 \int_K |\psi_K|^2 + \sum_{i=1}^3 C_{\ell_i}^2 \int_K |\psi_{\ell_i}|^2 \right) \\
 &\leq 4 \omega_K^2 (u - u_h) \left( 4 \frac{\int_K |\psi_K|^2}{\left( \int_K \psi_K \right)^2} \left( \lambda_{1,K} \lambda_{2,K} + \sum_{i=1}^3 \frac{\left( \int_K \psi_{\ell_i} \right)^2}{\left( \int_{\ell_i} \psi_{\ell_i} \right)^2} \frac{|\ell_i|^2}{\lambda_{1,K} \lambda_{2,K}} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{i=1}^3 \frac{\int_K |\psi_{\ell_i}|^2}{\left( \int_{\ell_i} \psi_{\ell_i} \right)^2} \frac{|\ell_i|^2}{\lambda_{1,K} \lambda_{2,K}} \right). \tag{1.59}
 \end{aligned}$$

Par ailleurs, nous avons

$$\int_K \psi_K = \lambda_{1,K} \lambda_{2,K} \int_{\hat{K}} \hat{\psi}_{\hat{K}} = \hat{C} \lambda_{1,K} \lambda_{2,K}, \tag{1.60}$$

$$\int_K \psi_{\ell_i} = \lambda_{1,K} \lambda_{2,K} \int_{\hat{K}} \hat{\psi}_{\hat{\ell}_i} = \hat{C}_i \lambda_{1,K} \lambda_{2,K}, \quad i = 1, 2, 3, \tag{1.61}$$

$$\int_{\ell_i} \psi_{\ell_i} = |\ell_i| \int_{\hat{\ell}_i} \hat{\psi}_{\hat{\ell}_i} = \hat{D}_i |\ell_i|, \quad i = 1, 2, 3, \tag{1.62}$$

où  $\hat{C}$ ,  $\hat{C}_i$ ,  $\hat{D}_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , sont des constantes dépendant seulement du triangle de référence  $\hat{K}$ . Finalement, en appliquant les égalités (1.60), (1.61) et (1.62) à l'inégalité (1.59), on obtient

$$\int_K |\varphi|^2 \leq C \omega_K^2 (u - u_h), \tag{1.63}$$

où la constante  $C$  dépend seulement du triangle de référence  $\hat{K}$ .  $\square$

On démontre maintenant le théorème 2.

*Démonstration du théorème 2.* Dans le théorème 1, on a vu que l'estimateur  $\eta_K^2$  est défini par

$$\begin{aligned}
 \eta_K^2 &= \frac{1}{\epsilon} \|\Pi_K f - \mathbf{a} \cdot \nabla u_h\|_{L^2(K)} \omega_K (u - u_h) \\
 &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \left( \frac{|\ell_i|}{\lambda_{1,K} \lambda_{2,K}} \right)^{1/2} \|[\nabla u_h \cdot \mathbf{n}]\|_{L^2(\ell_i)} \omega_K (u - u_h). \tag{1.64}
 \end{aligned}$$

En utilisant les égalités (1.51) et (1.52) de la proposition 3, on peut écrire qu'il existe une fonction  $\varphi$  telle que

$$\begin{aligned}
 \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \eta_K^2 &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \frac{1}{\epsilon} \int_K (\Pi_K f - \mathbf{a} \cdot \nabla u_h) \varphi + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \int_{\ell_i} [\nabla u_h \cdot \mathbf{n}] \varphi \\
 &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \left( \frac{1}{\epsilon} (f - \mathbf{a} \cdot \nabla u_h) \varphi - \nabla u_h \cdot \nabla \varphi - \frac{1}{\epsilon} (f - \Pi_K f) \varphi \right). \tag{1.65}
 \end{aligned}$$

De plus, en utilisant (1.4), on a

$$\begin{aligned}
 \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \eta_K^2 &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \nabla(u - u_h) \cdot \nabla \varphi + \frac{\mathbf{a}}{\epsilon} \cdot \nabla(u - u_h) \varphi - \frac{1}{\epsilon} (f - \Pi_K f) \varphi \\
 &\leq \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|\nabla(u - u_h)\|_{L^2(K)} \|\nabla \varphi\|_{L^2(K)} + \frac{|\mathbf{a}|_\infty}{\epsilon} \|\nabla(u - u_h)\|_{L^2(K)} \|\varphi\|_{L^2(K)} \\
 &\quad + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \frac{1}{\epsilon} \|f - \Pi_K f\|_{L^2(K)} \|\varphi\|_{L^2(K)} \tag{1.66}
 \end{aligned}$$

Maintenant, en utilisant les inégalités (1.53) et (1.54) de la proposition 3, on obtient (1.50).  $\square$

A partir des théorèmes 1 et 2, on peut en déduire le résultat d'équivalence suivant entre l'erreur en semi-norme  $H^1(\Omega)$  et l'estimateur  $\sqrt{\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \eta_K^2}$ .

**Théorème 3.** Soient  $u$  la solution du problème (1.4),  $u_h$  la solution du problème approché (1.11) et  $\eta_K^2$  l'estimateur d'erreur sur l'élément  $K$  défini dans le théorème 1. Alors il existe une constante  $C_1 \in \mathbb{R}$  indépendante des données  $f$ ,  $\epsilon$ ,  $\mathbf{a}$ , de la taille du maillage et du rapport d'aspect telle que

$$\|\nabla(u - u_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C_1 \left( \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \eta_K^2 + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \frac{\lambda_{1,K}^2}{\epsilon^2} \|f - \Pi_K f\|_{L^2(K)}^2 \right). \quad (1.67)$$

De plus, s'il existe une constante  $C_2 \in \mathbb{R}$  indépendante de la taille du maillage et du rapport d'aspect telle que

$$\frac{\omega_K^2(u - u_h)}{\lambda_{2,K}^2} \leq C_2 \|\nabla(u - u_h)\|_{L^2(\Delta_K)}^2, \quad \forall K \in \mathcal{T}_h, \quad (1.68)$$

alors il existe une constante  $C_3 \in \mathbb{R}$  indépendante de la taille du maillage et du rapport d'aspect telle que

$$\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \eta_K^2 \leq C_3 \left( \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|\nabla(u - u_h)\|_{L^2(\Delta_K)}^2 \left( \frac{|\mathbf{a}|_\infty \lambda_{2,K}}{\epsilon} + 1 \right) + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \frac{\lambda_{2,K}^2}{\epsilon^2} \|f - \Pi_K f\|_{L^2(K)}^2 \right). \quad (1.69)$$

Avant la démonstration, introduisons d'abord la proposition suivante.

**Proposition 4.** Pour tout  $v \in H^1(\Omega)$ , pour tout  $K \in \mathcal{T}_h$ , nous avons l'estimation suivante

$$\omega_K(v) \leq \lambda_{1,K} \|\nabla v\|_{L^2(\Delta_K)}, \quad (1.70)$$

où  $\Delta_K$  est le patch de l'élément  $K$ , c'est-à-dire l'ensemble des éléments ayant un sommet en commun avec  $K$ .

*Démonstration.* En procédant comme dans la démonstration de la proposition 2, on obtient

$$\|\nabla v\|_{L^2(\Delta_K)}^2 = \mathbf{r}_{1,K}^T G_K(v) \mathbf{r}_{1,K} + \mathbf{r}_{2,K}^T G_K(v) \mathbf{r}_{2,K}. \quad (1.71)$$

En multipliant l'équation (1.71) par  $\lambda_{1,K}^2$  et en utilisant le fait que  $0 < \lambda_{2,K} \leq \lambda_{1,K}$ , on obtient

$$\lambda_{1,K}^2 \|\nabla v\|_{L^2(\Delta_K)}^2 \geq \lambda_{1,K}^2 \mathbf{r}_{1,K}^T G_K(v) \mathbf{r}_{1,K} + \lambda_{2,K}^2 \mathbf{r}_{2,K}^T G_K(v) \mathbf{r}_{2,K} = \omega_K^2(v). \quad (1.72)$$

$\square$

*Démonstration du théorème 3.* En utilisant le théorème 1 et en appliquant le résultat de la proposition 4 puis l'inégalité de Young, on obtient directement l'inégalité (1.67) en utilisant le fait qu'il existe une constante  $C > 0$  telle que

$$\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|\nabla(u - u_h)\|_{L^2(\Delta_K)}^2 \leq C \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|\nabla(u - u_h)\|_{L^2(K)}^2. \quad (1.73)$$

Ensuite, en utilisant le théorème 2, en appliquant deux fois l'inégalité (1.68) et une fois l'inégalité de Young, on obtient l'inégalité (1.69).  $\square$

**Remarque 5.** En prenant  $\mathbf{a} = (0, 0)^T$  et  $\epsilon = 1$ , le problème (1.1) devient le problème de Laplace et les résultats obtenus dans le théorème 3 correspondent à ceux obtenus dans [78].

**Remarque 6.** On remarque que l'inégalité (1.69) dépend du nombre de Péclet  $Pe_K = \frac{|\mathbf{a}|_\infty \lambda_{2,K}}{6\epsilon}$  alors que l'estimation (1.67) n'en dépend pas.

**Remarque 7.** La condition (1.68) est vérifiée s'il existe une constante  $C \in \mathbb{R}$  indépendante du rapport d'aspect du maillage telle que, pour tout  $K \in \mathcal{T}_h$ ,

$$\lambda_{1,K}^2 \left( \mathbf{r}_{1,K}^T G_K (u - u_h) \mathbf{r}_{1,K} \right) \leq C \lambda_{2,K}^2 \left( \mathbf{r}_{2,K}^T G_K (u - u_h) \mathbf{r}_{2,K} \right). \quad (1.74)$$

En pratique, les algorithmes d'adaptation de maillages satisfont cette condition, comme nous le verrons dans le chapitre 3.

### 1.3 Estimations d'erreur de type goal oriented

Soient  $u$  la solution du problème (1.4),  $u_h$  la solution du problème approché (1.11). Dans cette partie, on cherche à contrôler une fonctionnelle de l'erreur  $u - u_h$ . Sous le même principe que pour la semi-norme  $H^1(\Omega)$ , on propose un estimateur d'erreur *a posteriori* anisotrope ne faisant intervenir que des dérivées premières.

#### 1.3.1 Estimation d'une fonctionnelle linéaire de l'erreur

Soient une fonction  $\rho \in C^1(\overline{\Omega})$  et la fonctionnelle  $J$  définie pour toute fonction  $v \in H^1(\Omega)$  par

$$J(v) = \int_{\Omega} \rho v dx \quad \text{ou} \quad J(v) = \int_{\Omega} \rho \nabla v \cdot \mathbf{b} dx, \quad (1.75)$$

où  $\mathbf{b} = (b_1, b_2)^T$ . On veut contrôler l'erreur  $J(u - u_h)$ . Dans ce but, on définit le problème dual suivant : trouver la fonction  $z \in V$  telle que

$$\int_{\Omega} \epsilon \nabla z \cdot \nabla v - \int_{\Omega} \mathbf{a} \cdot \nabla z v = J(v) \quad \forall v \in V, \quad (1.76)$$

où  $\mathbf{a}$ ,  $\epsilon$  sont définis par le problème (1.1) et l'espace  $V$  est défini par (1.3). Dans le cas où  $J(v) = \int_{\Omega} \rho \nabla v \cdot \mathbf{b} dx$ , on impose la condition supplémentaire suivante

$$\rho \mathbf{n} \cdot \mathbf{b} = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_2. \quad (1.77)$$

A partir des problèmes (1.4) et (1.76), on va chercher à définir un nouvel estimateur de l'erreur  $J(u - u_h)$ . On a le résultat suivant.

**Théorème 4.** Soient  $u$  la solution du problème (1.4),  $u_h$  la solution du problème approché (1.11),  $z$  la solution du problème dual (1.76) et  $z_h$  une solution approchée de  $z$ . Il existe une constante  $C \in \mathbb{R}$  indépendante des données  $f$ ,  $\epsilon$ ,  $\mathbf{a}$ , de la taille du maillage et du rapport d'aspect telle que

$$J(u - u_h) \leq C \left( \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left( \eta_K^2 + \theta_K^2 \right) + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|f - \Pi_K f\|_{L^2(K)} \omega_K(z - z_h) \right), \quad (1.78)$$

où  $\eta_K^2$  et  $\theta_K^2$  sont définis par

$$\eta_K^2 = \left( \|\Pi_K f - \mathbf{a} \cdot \nabla u_h\|_{L^2(K)} + \frac{\epsilon}{2} \sum_{i=1}^3 \left( \frac{|\ell_i|}{\lambda_{1,K} \lambda_{2,K}} \right)^{1/2} \|\nabla u_h \cdot \mathbf{n}\|_{L^2(\ell_i)} \right) \omega_K(z - z_h) \quad (1.79)$$

et

$$\theta_K^2 = \tau_K |\mathbf{a}|_\infty \|f - \mathbf{a} \cdot \nabla u_h\|_{L^2(K)} \|\nabla z_h\|_{L^2(K)}. \quad (1.80)$$

*Démonstration.* Si on considère le problème dual (1.76) avec  $J(v) = \int_{\Omega} \rho v dx$ , on peut écrire

$$\begin{aligned} J(u - u_h) &= \int_{\Omega} \rho(u - u_h) \\ &= \int_{\Omega} \epsilon \nabla z \cdot \nabla(u - u_h) - \mathbf{a} \cdot \nabla z (u - u_h). \end{aligned} \quad (1.81)$$

Et si on considère le problème dual (1.76) avec  $J(v) = \int_{\Omega} \rho \nabla v \cdot \mathbf{b} dx$ , on obtient

$$\begin{aligned} J(u - u_h) &= \int_{\Omega} \rho \nabla(u - u_h) \cdot \mathbf{b} \\ &= \int_{\Omega} \epsilon \nabla z \cdot \nabla(u - u_h) - \mathbf{a} \cdot \nabla z (u - u_h). \end{aligned} \quad (1.82)$$

Donc, pour les deux fonctionnelles  $J$ , on obtient la même expression pour  $J(u - u_h)$ , et en utilisant l'équation (1.81) ou (1.82) et l'approximation (1.11), on obtient

$$\begin{aligned} J(u - u_h) &= \int_{\Omega} \left( \epsilon \nabla(z - v_h) \cdot \nabla(u - u_h) + \mathbf{a} \cdot \nabla(u - u_h)(z - v_h) \right) \\ &\quad - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_K \int_K (f - \mathbf{a} \cdot \nabla u_h)(\mathbf{a} \cdot \nabla v_h) \\ &= \int_{\Omega} \left( f(z - v_h) - \left( \epsilon \nabla(z - v_h) \cdot \nabla u_h + \mathbf{a} \cdot \nabla u_h(z - v_h) \right) \right) \\ &\quad - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_K \int_K (f - \mathbf{a} \cdot \nabla u_h)(\mathbf{a} \cdot \nabla v_h). \end{aligned} \quad (1.83)$$

Soit  $z_h$  une solution approchée de  $z$ . On prend  $v_h = z_h + I_h(z - z_h)$ , où  $I_h$  est l'opérateur d'interpolation de Clément défini par (1.17). On pose  $v = z - z_h$  pour alléger l'écriture des équations et on introduit  $\Pi_K f$ . On obtient

$$\begin{aligned} J(u - u_h) &= \int_{\Omega} \left( f(v - I_h(v)) - \left( \epsilon \nabla(v - I_h(v)) \cdot \nabla u_h + \mathbf{a} \cdot \nabla u_h(v - I_h(v)) \right) \right) \\ &\quad - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_K \int_K (f - \mathbf{a} \cdot \nabla u_h)(\mathbf{a} \cdot \nabla(z_h + I_h(v))) \\ &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K (\Pi_K f - \mathbf{a} \cdot \nabla u_h)(v - I_h(v)) + \frac{\epsilon}{2} \int_{\partial K} [\nabla u_h \cdot \mathbf{n}](v - I_h(v)) \\ &\quad - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_K \int_K (\Pi_K f - \mathbf{a} \cdot \nabla u_h) \mathbf{a} \cdot \nabla I_h(v) \\ &\quad + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K (f - \Pi_K f)(v - I_h(v) - \tau_K \mathbf{a} \cdot \nabla I_h(v)) \\ &\quad - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_K \int_K (f - \mathbf{a} \cdot \nabla u_h) \mathbf{a} \cdot \nabla z_h \end{aligned} \quad (1.84)$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$\begin{aligned}
 J(u - u_h) &\leq \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|\Pi_K f - \mathbf{a} \cdot \nabla u_h\|_{L^2(K)} \|v - I_h(v)\|_{L^2(K)} + \frac{\epsilon}{2} \|[\nabla u_h \cdot \mathbf{n}]\|_{L^2(\partial K)} \|v - I_h(v)\|_{L^2(\partial K)} \\
 &\quad + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_K \|\Pi_K f - \mathbf{a} \cdot \nabla u_h\|_{L^2(K)} |\mathbf{a}|_\infty \|\nabla I_h(v)\|_{L^2(K)} \\
 &\quad + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|f - \Pi_K f\|_{L^2(K)} \left( \|v - I_h(v)\|_{L^2(K)} + \tau_K \|\nabla I_h(v)\|_{L^2(K)} \right) \\
 &\quad + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_K \|f - \mathbf{a} \cdot \nabla u_h\|_{L^2(K)} |\mathbf{a}|_\infty \|\nabla z_h\|_{L^2(K)}
 \end{aligned} \tag{1.85}$$

En utilisant la proposition 1 et le fait que l'inégalité triangulaire nous donne

$$\|\nabla I_h(v)\|_{L^2(K)} \leq \|\nabla(v - I_h(v))\|_{L^2(K)} + \|\nabla v\|_{L^2(K)}, \tag{1.86}$$

on peut écrire qu'il existe une constante  $C$  indépendante du rapport d'aspect telle que

$$\begin{aligned}
 J(u - u_h) &\leq C \left( \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left( \left(1 + \frac{\tau_K |\mathbf{a}|_\infty}{\lambda_{2,K}}\right) \|\Pi_K f - \mathbf{a} \cdot \nabla u_h\|_{L^2(K)} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{\epsilon}{2} \sum_{i=1}^3 \left( \frac{|\ell_i|}{\lambda_{1,K} \lambda_{2,K}} \right)^{1/2} \|[\nabla u_h \cdot \mathbf{n}]\|_{L^2(\ell_i)} \right) \omega_K(v) \right. \\
 &\quad + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_K |\mathbf{a}|_\infty \|\Pi_K f - \mathbf{a} \cdot \nabla u_h\|_{L^2(K)} \|\nabla v\|_{L^2(K)} \\
 &\quad + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left(1 + \frac{\tau_K |\mathbf{a}|_\infty}{\lambda_{2,K}}\right) \|f - \Pi_K f\|_{L^2(K)} \omega_K(v) \\
 &\quad \left. + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_K |\mathbf{a}|_\infty \|f - \mathbf{a} \cdot \nabla u_h\|_{L^2(K)} \|\nabla z_h\|_{L^2(K)} \right)
 \end{aligned} \tag{1.87}$$

En utilisant la proposition 2 et en remarquant que, d'après la définition du paramètre  $\tau_K$ ,

$$\frac{\tau_K |\mathbf{a}|_\infty}{\lambda_{2,K}} = \frac{\xi(Pe_K)}{2} \leq \frac{1}{2}, \tag{1.88}$$

on obtient le résultat du théorème 4.  $\square$

**Remarque 8.** Pour la fonctionnelle  $J$  définie pour toute fonction  $v \in H^1(\Omega)$  par  $J(v) = \int_\Omega \rho v dx$ , on aurait pu prendre  $\rho \in C^0(\overline{\Omega})$ .

**Remarque 9.** Dans [33], un estimateur de type goal oriented similaire à (1.79) a été démontré. Un problème dual différent a été introduit et seule la borne supérieure a été montrée.

### 1.3.2 Minoration de la fonctionnelle linéaire de l'erreur

Comme pour la semi-norme  $H^1(\Omega)$  de l'erreur, on veut borner l'estimateur d'erreur. On cherche donc à majorer l'estimateur par un terme qui dépend de l'erreur  $u - u_h$  et éventuellement de l'erreur  $z - z_h$  du problème dual (1.76).

On a le résultat suivant.

**Théorème 5.** Soient  $u$  la solution du problème (1.4),  $u_h$  la solution du problème approché (1.11),  $z$  la solution du problème dual (1.76),  $z_h$  une solution approchée de  $z$ ,  $\eta_K^2$  l'estimateur

d'erreur sur l'élément  $K$  défini dans le théorème 4. Il existe une constante  $C \in \mathbb{R}$  indépendante des données  $f$ ,  $\epsilon$ ,  $\mathbf{a}$ , de la taille du maillage et du rapport d'aspect telle que

$$\begin{aligned} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \eta_K^2 \leq C \left( \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|\nabla(u - u_h)\|_{L^2(K)} \left( \frac{\epsilon}{\lambda_{2,K}} + |\mathbf{a}|_\infty \right) \omega_K(z - z_h) \right. \\ \left. + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|f - \Pi_K f\|_{L^2(K)} \omega_K(z - z_h) \right). \end{aligned} \quad (1.89)$$

Pour démontrer le théorème 5, on donne des résultats analogues à ceux de la proposition 3 faisant intervenir l'erreur pour le problème dual (voir [9]).

**Proposition 5.** *Il existe une fonction  $\varphi \in H_0^1(\Omega)$  et une constante  $C$  dépendant seulement du triangle de référence  $\hat{K}$  telles que, pour tout  $K \in \mathcal{T}_h$ , nous avons*

$$\int_{\ell_i} [\nabla u_h \cdot \mathbf{n}] \varphi = \left( \frac{|\ell_i|}{\lambda_{1,K} \lambda_{2,K}} \right)^{1/2} \left( \int_{\ell_i} [\nabla u_h \cdot \mathbf{n}]^2 \right)^{1/2} \omega_K(z - z_h), \quad i = 1, 2, 3, \quad (1.90)$$

$$\int_K (\Pi_K f - \mathbf{a} \cdot \nabla u_h) \varphi = \left( \int_K (\Pi_K f - \mathbf{a} \cdot \nabla u_h)^2 \right)^{1/2} \omega_K(z - z_h), \quad (1.91)$$

$$\int_K |\nabla \varphi|^2 \leq C \frac{\omega_K^2(z - z_h)}{\lambda_{2,K}^2}, \quad (1.92)$$

$$\int_K |\varphi|^2 \leq C \omega_K^2(z - z_h). \quad (1.93)$$

*Démonstration du théorème 5.* On pose  $v = z - z_h$  pour simplifier l'écriture. D'après le théorème 4, l'estimateur  $\eta_K^2$  est défini par

$$\begin{aligned} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \eta_K^2 &= \sum_{K \in \mathcal{T}_K} \|\Pi_K f - \mathbf{a} \cdot \nabla u_h\|_{L^2(K)} \omega_K(v) \\ &+ \frac{\epsilon}{2} \sum_{K \in \mathcal{T}_K} \sum_{i=1}^3 \left( \frac{|\ell_i|}{\lambda_{1,K} \lambda_{2,K}} \right)^{1/2} \|[\nabla u_h \cdot \mathbf{n}]\|_{L^2(\ell_i)} \omega_K(v) \end{aligned} \quad (1.94)$$

En utilisant les égalités (1.90) et (1.91) de la proposition 5, on peut écrire qu'il existe une fonction  $\varphi$  telle que

$$\begin{aligned} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \eta_K^2 &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K (\Pi_K f - \mathbf{a} \cdot \nabla u_h) \varphi + \frac{\epsilon}{2} \sum_{i=1}^3 \int_{\ell_i} [\nabla u_h \cdot \mathbf{n}] \varphi \\ &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K (f - \mathbf{a} \cdot \nabla u_h) \varphi - \epsilon \nabla u_h \cdot \nabla \varphi - (f - \Pi_K f) \varphi \end{aligned} \quad (1.95)$$

puisque  $\sum_{i=1}^3 \int_{\ell_i} [\nabla u_h \cdot \mathbf{n}] \varphi = \int_{\partial K} [\nabla u_h \cdot \mathbf{n}] \varphi$ . De plus, comme  $f = -\epsilon \Delta u + \mathbf{a} \cdot \nabla u$ , on a

$$\begin{aligned} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \eta_K^2 &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \epsilon \nabla u \cdot \nabla \varphi - \epsilon \nabla u_h \cdot \nabla \varphi + (\mathbf{a} \cdot \nabla u - \mathbf{a} \cdot \nabla u_h) \varphi - (f - \Pi_K f) \varphi \\ &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \epsilon \nabla(u - u_h) \cdot \nabla \varphi + \mathbf{a} \cdot \nabla(u - u_h) \varphi - (f - \Pi_K f) \varphi \\ &\leq \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \epsilon \|\nabla(u - u_h)\|_{L^2(K)} \|\nabla \varphi\|_{L^2(K)} + |\mathbf{a}|_\infty \|\nabla(u - u_h)\|_{L^2(K)} \|\varphi\|_{L^2(K)} \\ &\quad + \|f - \Pi_K f\|_{L^2(K)} \|\varphi\|_{L^2(K)}. \end{aligned} \quad (1.96)$$

En utilisant les inégalités (1.92) et (1.93) de la proposition 5, on peut conclure qu'il existe une constante  $C$  telle que

$$\begin{aligned} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \eta_K^2 \leq C \left( \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|\nabla(u - u_h)\|_{L^2(K)} \omega_K(v) \left( \frac{\epsilon}{\lambda_{2,K}} + |\mathbf{a}|_\infty \right) \right. \\ \left. + \|f - \Pi_K f\|_{L^2(K)} \omega_K(v) \right). \end{aligned} \quad (1.97)$$

□

A partir des théorèmes 4 et 5, on peut en déduire le théorème suivant.

**Théorème 6.** *Soient  $u$  la solution du problème (1.4),  $u_h$  la solution du problème approché (1.11),  $z$  la solution du problème dual (1.76),  $z_h$  une solution approchée de  $z$ ,  $\eta_K^2$  et  $\theta_K^2$  les estimateurs d'erreur sur l'élément  $K$  définis dans le théorème 4. Il existe une constante  $C_1 \in \mathbb{R}$  indépendante des données  $f$ ,  $\epsilon$ ,  $\mathbf{a}$ , de la taille du maillage et du rapport d'aspect telle que*

$$\begin{aligned} J(u - u_h) \leq C_1 \left( \sum_{K \in \mathcal{T}_h} (\eta_K^2 + \theta_K^2) + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \lambda_{1,K} \|f - \Pi_K f\|_{L^2(K)}^2 \right. \\ \left. + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \lambda_{1,K} \|\nabla(z - z_h)\|_{L^2(\Delta_K)}^2 \right). \end{aligned} \quad (1.98)$$

S'il existe une constante  $C_2 \in \mathbb{R}$  indépendante de la taille du maillage et du rapport d'aspect telle que

$$\frac{\omega_K^2(z - z_h)}{\lambda_{2,K}^2} \leq C_2 \|\nabla(z - z_h)\|_{L^2(\Delta_K)}^2, \quad \forall K \in \mathcal{T}_h, \quad (1.99)$$

alors il existe une constante  $C_3 \in \mathbb{R}$  indépendante de la taille du maillage et du rapport d'aspect telle que

$$\begin{aligned} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \eta_K^2 \leq C_3 \left( \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \epsilon \|\nabla(u - u_h)\|_{L^2(K)} \|\nabla(z - z_h)\|_{L^2(\Delta_K)} \left( 1 + \frac{|\mathbf{a}|_\infty \lambda_{2,K}}{\epsilon} \right) \right. \\ \left. + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \lambda_{2,K} \|f - \Pi_K f\|_{L^2(K)}^2 + \lambda_{2,K} \|\nabla(z - z_h)\|_{L^2(\Delta_K)}^2 \right). \end{aligned} \quad (1.100)$$

On démontre ce théorème de manière analogue au théorème 3.

*Démonstration.* En utilisant le théorème 4 et en appliquant le résultat de la proposition 4 puis l'inégalité de Young, on obtient directement l'inégalité (1.98).

Ensuite, en utilisant le théorème 5 et en appliquant deux fois l'inégalité (1.99) et une fois l'inégalité de Young, on obtient l'inégalité (1.100). □

**Remarque 10.** *Comme pour le théorème 3, on remarque que l'inégalité (1.100) dépend du nombre de Péclet  $Pe_K = \frac{|\mathbf{a}|_\infty \lambda_{2,K}}{6\epsilon}$  alors que l'estimation (1.98) n'en dépend pas.*

**Remarque 11.** *Pour ce problème, nous n'avons pas montré l'équivalence entre l'erreur et l'estimateur mais seulement que sous certaines conditions, il existe une constante  $C_1$  indépendante des données  $f$ ,  $\epsilon$ ,  $\mathbf{a}$ , de la taille du maillage et du rapport d'aspect et une constante  $C_2$  dépendantes du Péclet telles que*

$$\begin{aligned} J(u - u_h) \leq C_1 \sum_{K \in \mathcal{T}_h} (\eta_K^2 + \theta_K^2) + h.o.t \\ \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \eta_K^2 \leq C_2 \epsilon \|\nabla(u - u_h)\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla(z - z_h)\|_{L^2(\Omega)} + h.o.t. \end{aligned} \quad (1.101)$$

**Remarque 12.** La condition (1.99) est vérifiée s'il existe une constante  $C \in \mathbb{R}$  indépendante du rapport d'aspect du maillage telle que, pour tout  $K \in \mathcal{T}_h$ ,

$$\lambda_{1,K}^2 \left( \mathbf{r}_{1,K}^T G_K (z - z_h) \mathbf{r}_{1,K} \right) \leq C \lambda_{2,K}^2 \left( \mathbf{r}_{2,K}^T G_K (z - z_h) \mathbf{r}_{2,K} \right), \quad (1.102)$$

c'est-à-dire quand le gradient de l'erreur  $z - z_h$  dans la direction d'étirement minimum est au moins égal au gradient de l'erreur dans la direction d'étirement maximum.

## 1.4 Extension à des problèmes non linéaires.

On reprend ici les résultats de [25], voir aussi [23] et [91]. On considère un problème non linéaire sous forme abstraite

$$F(u) = 0, \quad (1.103)$$

où  $F : X \rightarrow Y'$ . Dans la suite, on suppose que  $F$  et  $u$  sont suffisamment régulières, de sorte que tout ce qui suit a un sens. Par exemple si

$$F(u) = -\epsilon \Delta u + \mathbf{a} \cdot \nabla u + u^3 - f, \quad (1.104)$$

avec conditions au limites de Dirichlet homogènes, alors on pose  $X = Y = H_0^1(\Omega)$ ,  $Y' = H^{-1}(\Omega)$  et on cherche  $u \in X$  tel que

$$\langle F(u), v \rangle = \int_{\Omega} \epsilon \nabla u \cdot \nabla v + \int_{\Omega} (\mathbf{a} \cdot \nabla u) v + \int_{\Omega} (u^3 - f) v \quad \forall v \in Y,$$

où  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  désigne le crochet de dualité entre  $Y'$  et  $Y$ . Soit  $X_h \subset X$ ,  $Y_h \subset Y$  des sous-espaces de dimension finie, de type éléments finis par exemple,  $h$  correspond par exemple à la taille de maille et est destiné à tendre vers zéro. On approche la solution de (1.103) en cherchant  $u_h \in X_h$  tel que

$$\langle F(u_h), v_h \rangle = 0 \quad \forall v_h \in Y_h. \quad (1.105)$$

Si  $u$  est suffisamment régulière, on a :

$$F(u) - F(u_h) = F'(u)(u - u_h) + O(\|u - u_h\|^2),$$

et donc, si l'opérateur  $F'(u)$  est un isomorphisme d'inverse borné, il existe  $\alpha$  indépendant de  $h$  (mais en principe dépendant de  $u$ ) tel que :

$$\alpha \|u - u_h\| \leq \|F'(u)(u - u_h)\| \leq \|F(u_h)\| + O(\|u - u_h\|^2).$$

Si  $u_h$  converge vers  $u$ , alors on peut affirmer, que pour  $h$  suffisamment petit :

$$\|u - u_h\| \leq \frac{2}{\alpha} \|F(u_h)\|, \quad (1.106)$$

l'erreur est donc majorée par le résidu  $\|F(u_h)\|$ , qui sera lui-même majoré par l'estimateur d'erreur, comme dans le cas linéaire. Par exemple, dans le cas où  $F$  est définie par (1.104), alors

$$\begin{aligned} F'(u)v &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{F(u + \alpha v) - F(u)}{\alpha} \quad \forall v \in Y \\ &= -\epsilon \Delta v + \mathbf{a} \cdot \nabla v + 3u^2 v \quad \forall v \in Y \end{aligned}$$

et on a

$$\epsilon \|\nabla(u - u_h)\|_{L^2(\Omega)} \leq 2 \|F(u_h)\|_{L^2(\Omega)} \leq C \left( \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \eta_K^2 \right)^{1/2},$$



où  $C$  est une constante indépendante de  $h, \epsilon, f, \mathbf{a}, u$  et du rapport d'aspect et où  $\eta_K^2$  est l'estimateur d'erreur sur l'élément  $K$ , défini par

$$\eta_K^2 = \left( \|F(u_h)\|_{L^2(K)} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \left( \frac{|\ell_i|}{\lambda_{1,K} \lambda_{2,K}} \right)^{1/2} \|\epsilon[\nabla u_h \cdot \mathbf{n}]\|_{L^2(\ell_i)} \right) \omega_K (u - u_h).$$

On cherche maintenant à contrôler l'erreur  $J(u) - J(u_h)$  où  $J : X \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonctionnelle régulière, par exemple, si  $u$  est solution de (1.104)

$$J(v) = \int_{\Omega_0} v \quad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

avec  $\Omega_0 \subset \Omega$ . Supposons qu'il existe  $z \in Y$  tel que

$$\langle F'(u)v, z \rangle = J'(u)v \quad \forall v \in X, \quad (1.107)$$

et une approximation  $z_h \in Y_h$  telle que

$$\langle F'(u)v_h, z_h \rangle = J'(u)v_h \quad \forall v_h \in X_h.$$

On a alors

$$\langle F'(u)(u - u_h), z \rangle = J'(u)(u - u_h),$$

et donc, en utilisant un développement de Taylor

$$J(u) - J(u_h) = \langle F(u) - F(u_h), z \rangle + O(\|u - u_h\|^2).$$

Il suffit d'utiliser (1.103) et (1.105) pour obtenir

$$J(u) - J(u_h) = - \langle F(u_h), z - v_h \rangle + O(\|u - u_h\|^2) \quad (1.108)$$

pour toute fonction  $v_h \in Y_h$ , ce qui permettra d'obtenir un estimateur d'erreur. Par exemple, dans le cas où  $F$  est définie par (1.104), alors on a, pour  $h$  suffisamment petit

$$J(u) - J(u_h) \leq C \left( \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \eta_K^2 \right)^{1/2},$$

où  $C$  est indépendante de  $h, \epsilon, f, \mathbf{a}, u$  et où  $\eta_K^2$  est l'estimateur d'erreur sur l'élément  $K$ , défini par

$$\eta_K^2 = \left( \|F(u_h)\|_{L^2(K)} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \left( \frac{|\ell_i|}{\lambda_{1,K} \lambda_{2,K}} \right)^{1/2} \|\epsilon[\nabla u_h \cdot \mathbf{n}]\|_{L^2(\ell_i)} \right) \omega_K (z - z_h).$$

Il est difficile d'obtenir l'estimation *a posteriori* (1.106) dans le cas des fluides compressibles. En effet, le modèle de fluides compressibles le plus simple a pour inconnues la vitesse  $v$  et la densité  $\rho$ ,  $u = (v, \rho)$ , de sorte que

$$F(u) = \begin{pmatrix} -\Delta v + \nabla \rho^\gamma - f \\ \nabla \cdot (\rho v) \end{pmatrix} = 0,$$

et nous ne savons pas montrer que  $F'(u)$  est un isomorphisme d'inverse borné. Pour un théorème d'existence, on se réfère à [36, 63]. Par contre, si le problème dual (1.107) admet une solution, on peut toujours obtenir (1.108) ainsi qu'un estimateur pour la fonctionnelle de l'erreur, le coefficient de traînée par exemple. Une telle approche est présentée, sans justification théorique, dans le chapitre 3 de cette thèse (voir également [46, 65]).

## 1.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons donné une estimation de l'erreur pour la semi-norme  $H^1$  pour un problème de convection-diffusion. L'estimateur d'erreur obtenu est valable pour des maillages fortement anisotropes et contenant un grand nombre de sommets et ne fait intervenir que des dérivées premières de la solution. L'équivalence entre l'erreur et l'estimateur a été montrée aux termes d'ordre supérieur près. La borne supérieure est une amélioration de ce qui a été fait dans [80] et la borne inférieure est nouvelle mais inspirée de celle qui a été obtenue dans [78] pour le problème de Laplace.

Pour contrôler une fonctionnelle linéaire de l'erreur, un estimateur d'erreur de type *goal oriented* a été démontré. Une borne supérieure et une borne inférieure ont été données mais l'équivalence entre l'erreur et l'estimateur n'a pas été démontrée. Un estimateur similaire a été obtenu dans [9] pour le problème de Laplace et dans [33] pour le problème d'advection-diffusion-réaction, néanmoins seule la borne supérieure a été montrée avec l'introduction d'un problème dual différent de celui qui est utilisé dans cette thèse.

Finalement, nous avons brièvement discuté de l'utilisation de ces estimateurs pour des problèmes non linéaires.

## Chapitre 2

# Résultats numériques sur maillages fixes pour le problème modèle

### 2.1 Extensions en trois dimensions

Considérons le cas où le domaine  $\Omega$  est un domaine polygonal de  $\mathbb{R}^3$ . Pour tout  $h \in ]0, 1[$ ,  $\mathcal{T}_h$  est une triangulation conforme du domaine  $\bar{\Omega}$  en tétraèdres  $K$  dont les diamètres  $h_K$  sont plus petits que  $h$ . Pour chacun de ces tétraèdres, on définit la transformation affine  $T_K : \hat{K} \rightarrow K$  qui associe le tétraèdre de référence  $\hat{K}$  au tétraèdre  $K$ . Soit  $M_K \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  la matrice jacobienne de  $T_K$ . Pour tout vecteur  $\hat{\mathbf{x}} \in \hat{K}$ , on définit le vecteur associé  $\mathbf{x} \in K$  par

$$\mathbf{x} = T_K(\hat{\mathbf{x}}) = M_K \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{t}_K, \quad (2.1)$$

où  $\mathbf{t}_K$  est un vecteur de  $\mathbb{R}^3$ . Comme en deux dimensions, la matrice  $M_K$  est inversible, donc elle admet une décomposition en valeurs singulières

$$M_K = R_K^T \Lambda_K P_K, \quad (2.2)$$

où  $R_K$  et  $P_K$  sont orthogonales et  $\Lambda_K$  est diagonale avec des coefficients strictement positifs. On écrit les matrices  $R_K$  et  $\Lambda_K$  de la manière suivante

$$\Lambda_K = \begin{pmatrix} \lambda_{1,K} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{2,K} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{3,K} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad R_K = \begin{pmatrix} \mathbf{r}_{1,K}^T \\ \mathbf{r}_{2,K}^T \\ \mathbf{r}_{3,K}^T \end{pmatrix}, \quad (2.3)$$

où on a choisi  $\lambda_{1,K} \geq \lambda_{2,K} \geq \lambda_{3,K}$ . Les vecteurs  $\mathbf{r}_{1,K}$ ,  $\mathbf{r}_{2,K}$  et  $\mathbf{r}_{3,K}$  correspondent aux directions d'étirement du tétraèdre  $K$  et les scalaires  $\lambda_{1,K}$ ,  $\lambda_{2,K}$  et  $\lambda_{3,K}$  sont les tailles d'étirement associées. Par exemple, posons  $x_1 = h_1 \hat{x}_1$ ,  $x_2 = h_2 \hat{x}_2$  et  $x_3 = h_3 \hat{x}_3$ , avec  $h_1 \leq h_2 \leq h_3$ . Dans ce cas, on a

$$M_K = \begin{pmatrix} h_1 & 0 & 0 \\ 0 & h_2 & 0 \\ 0 & 0 & h_3 \end{pmatrix}, \quad (2.4)$$

$$\lambda_{1,K} = h_1, \quad \lambda_{2,K} = h_2, \quad \lambda_{3,K} = h_3, \quad \mathbf{r}_{1,K} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_{2,K} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_{3,K} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (2.5)$$

voir figure 2.1. Donc  $\mathbf{r}_{1,K}$ ,  $\mathbf{r}_{2,K}$  et  $\mathbf{r}_{3,K}$  définissent les directions d'étirement du tétraèdre  $K$  et  $\lambda_{1,K}$ ,  $\lambda_{2,K}$  et  $\lambda_{3,K}$  sont les tailles d'étirement associées.

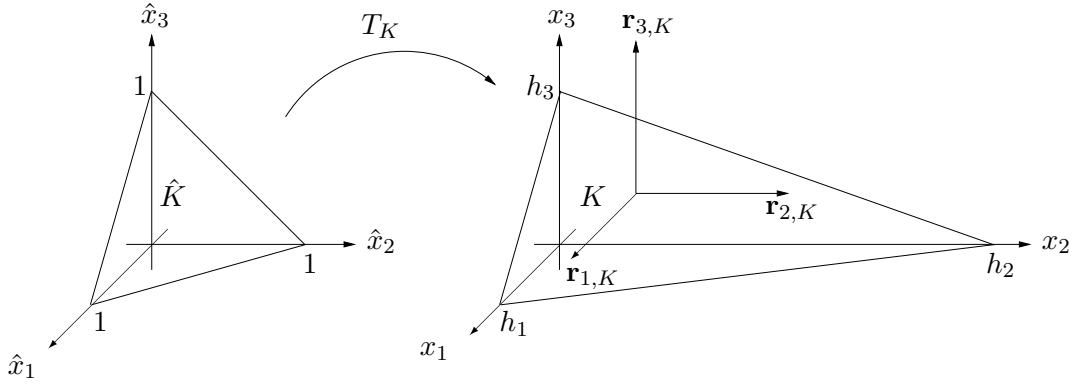


FIGURE 2.1 – Un exemple simple de transformation  $T_K$  de l'élément  $\hat{K}$  vers l'élément  $K$ . Ici  $\hat{K}$  est le tétraèdre de référence usuel.

On définit la fonction  $\omega_K(v)$  par

$$\omega_K^2(v) = \lambda_{1,K}^2 \left( \mathbf{r}_{1,K}^T G_K(v) \mathbf{r}_{1,K} \right) + \lambda_{2,K}^2 \left( \mathbf{r}_{2,K}^T G_K(v) \mathbf{r}_{2,K} \right) + \lambda_{3,K}^2 \left( \mathbf{r}_{3,K}^T G_K(v) \mathbf{r}_{3,K} \right), \quad (2.6)$$

où  $G_K(v)$  désigne la matrice de taille  $3 \times 3$  définie par

$$G_K(v) = \begin{pmatrix} \int_{\Delta_K} \left( \frac{\partial v}{\partial x_1} \right)^2 dx & \int_{\Delta_K} \frac{\partial v}{\partial x_1} \frac{\partial v}{\partial x_2} dx & \int_{\Delta_K} \frac{\partial v}{\partial x_1} \frac{\partial v}{\partial x_3} dx \\ \int_{\Delta_K} \frac{\partial v}{\partial x_1} \frac{\partial v}{\partial x_2} dx & \int_{\Delta_K} \left( \frac{\partial v}{\partial x_2} \right)^2 dx & \int_{\Delta_K} \frac{\partial v}{\partial x_2} \frac{\partial v}{\partial x_3} dx \\ \int_{\Delta_K} \frac{\partial v}{\partial x_1} \frac{\partial v}{\partial x_3} dx & \int_{\Delta_K} \frac{\partial v}{\partial x_2} \frac{\partial v}{\partial x_3} dx & \int_{\Delta_K} \left( \frac{\partial v}{\partial x_3} \right)^2 dx \end{pmatrix}, \quad (2.7)$$

où  $\Delta_K$  est le patch de l'élément  $K$ , c'est-à-dire l'ensemble des éléments ayant un sommet en commun avec  $K$ .

En trois dimensions, le problème (1.1) est défini avec  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  et  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)^T \in \mathbb{R}^3$ . Soit  $V_h = \{v_h \in C^0(\bar{\Omega}), v_{h|_K} \in P^1 \text{ pour tout tétraèdre } K, v_h = 0 \text{ sur } \Gamma_1\}$ . La formulation variationnelle du problème s'écrit : trouver  $u_h \in V_h$  telle que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \epsilon \nabla u_h \cdot \nabla v_h + \int_{\Omega} \mathbf{a} \cdot \nabla u_h v_h + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_K \int_K (\mathbf{a} \cdot \nabla u_h)(\mathbf{a} \cdot \nabla v_h) \\ = \int_{\Omega} f v_h + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_K \int_K f (\mathbf{a} \cdot \nabla v_h), \quad \forall v_h \in V_h, \end{aligned} \quad (2.8)$$

où  $\tau_K$  est le paramètre de stabilisation défini par :

$$\tau_K = \frac{\lambda_{3,K}}{2|\mathbf{a}|_{\infty}} \xi(Pe_K) \quad (2.9)$$

avec  $|\mathbf{a}|_{\infty} = \max(|a_1|, |a_2|, |a_3|)$ ,  $Pe_K$  le nombre de Péclet défini par :

$$Pe_K = \frac{|\mathbf{a}|_{\infty} \lambda_{3,K}}{6\epsilon} \quad (2.10)$$

et  $\xi$  la fonction définie par :

$$\begin{aligned} \xi : \quad \mathbb{R}^+ &\longrightarrow \quad \mathbb{R}^+ \\ x &\longmapsto \min(x, 1). \end{aligned} \quad (2.11)$$

De manière analogue au théorème 3, on peut démontrer que si  $u$  est la solution du problème (1.4) et  $u_h$  la solution du problème approché (2.8), alors il existe une constante  $C_1 \in \mathbb{R}$  indépendante des données  $f$ ,  $\epsilon$ ,  $\mathbf{a}$ , de la taille du maillage et du rapport d'aspect telle que

$$\|\nabla(u - u_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C_1 \left( \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \eta_K^2 + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \frac{\lambda_{1,K}^2}{\epsilon^2} \|f - \Pi_K f\|_{L^2(K)}^2 \right), \quad (2.12)$$

où l'estimateur  $\eta_K^2$  est défini par

$$\eta_K^2 = \left( \frac{1}{\epsilon} \|\Pi_K f - \mathbf{a} \cdot \nabla u_h\|_{L^2(K)} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 \left( \frac{|f_i|}{\lambda_{1,K} \lambda_{2,K} \lambda_{3,K}} \right)^{1/2} \|[\nabla u_h \cdot \mathbf{n}]\|_{L^2(f_i)} \right) \omega_K (u - u_h), \quad (2.13)$$

où  $|f_i|$  désigne l'aire de la face  $f_i$  du tétraèdre  $K$  et  $\mathbf{n}$  est le vecteur unitaire normal à la face  $f_i$ . De plus, s'il existe une constante  $C_2 \in \mathbb{R}$  indépendante de la taille du maillage et du rapport d'aspect telle que

$$\frac{\omega_K^2(u - u_h)}{\lambda_{3,K}^2} \leq C_2 \|\nabla(u - u_h)\|_{L^2(K)}^2, \quad \forall K \in \mathcal{T}_h, \quad (2.14)$$

alors il existe une constante  $C_3 \in \mathbb{R}$  indépendante de  $f$ ,  $\epsilon$ ,  $\mathbf{a}$ , de la taille du maillage et du rapport d'aspect telle que

$$\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \eta_K^2 \leq C_3 \left( \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|\nabla(u - u_h)\|_{L^2(K)}^2 \left( \frac{|\mathbf{a}|_\infty \lambda_{3,K}}{\epsilon} + 1 \right) + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \frac{\lambda_{3,K}^2}{\epsilon^2} \|f - \Pi_K f\|_{L^2(K)}^2 \right). \quad (2.15)$$

De même, on peut redéfinir le problème dual (1.76) en trois dimensions. Ainsi, en s'inspirant du théorème 6, si  $u$  est la solution du problème (1.4),  $u_h$  la solution du problème approché (2.8),  $z$  la solution du problème dual (1.76) et  $z_h$  une solution approchée de  $z$ , alors il existe une constante  $C_1 \in \mathbb{R}$  indépendante des données  $f$ ,  $\epsilon$ ,  $\mathbf{a}$ , de la taille du maillage et du rapport d'aspect telle que

$$\begin{aligned} J(u - u_h) \leq C_1 & \left( \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \eta_K^2 + \tau_K |\mathbf{a}|_\infty \|\Pi_K f - \mathbf{a} \cdot \nabla u_h\|_{L^2(K)} \|\nabla z_h\|_{L^2(K)} \right. \\ & + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \lambda_{1,K} \|f - \Pi_K f\|_{L^2(K)}^2 + |\mathbf{a}|_\infty \|f - \Pi_K f\|_{L^2(K)} \|\nabla z_h\|_{L^2(K)} \\ & \left. + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \lambda_{1,K} \|\nabla(z - z_h)\|_{L^2(\Delta_K)}^2 \right), \end{aligned} \quad (2.16)$$

où l'estimateur  $\eta_K^2$  est défini par

$$\eta_K^2 = \left( \|\Pi_K f - \mathbf{a} \cdot \nabla u_h\|_{L^2(K)} + \frac{\epsilon}{2} \sum_{i=1}^4 \left( \frac{|f_i|}{\lambda_{1,K} \lambda_{2,K} \lambda_{3,K}} \right)^{1/2} \|[\nabla u_h \cdot \mathbf{n}]\|_{L^2(f_i)} \right) \omega_K (z - z_h), \quad (2.17)$$

où  $|f_i|$  désigne l'aire de la face  $f_i$  du tétraèdre  $K$  et  $\mathbf{n}$  est le vecteur unitaire normal à la face  $f_i$ . De plus, s'il existe une constante  $C_2 \in \mathbb{R}$  indépendante de la taille du maillage et du rapport d'aspect telle que

$$\frac{\omega_K^2(z - z_h)}{\lambda_{3,K}^2} \leq C_2 \|\nabla(z - z_h)\|_{L^2(\Delta_K)}^2, \quad \forall K \in \mathcal{T}_h, \quad (2.18)$$

alors il existe une constante  $C_3 \in \mathbb{R}$  indépendante de  $f$ ,  $\epsilon$ ,  $\mathbf{a}$ , de la taille du maillage et du rapport d'aspect telle que

$$\begin{aligned} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \eta_K^2 \leq C_3 & \left( \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \epsilon \|\nabla(u - u_h)\|_{L^2(K)} \|\nabla(z - z_h)\|_{L^2(\Delta_K)} \left(1 + \frac{|\mathbf{a}|_\infty \lambda_{3,K}}{\epsilon}\right) \right. \\ & \left. + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \lambda_{3,K} \|f - \Pi_K f\|_{L^2(K)}^2 + \lambda_{3,K} \|\nabla(z - z_h)\|_{L^2(\Delta_K)}^2 \right). \end{aligned} \quad (2.19)$$

En pratique, on remplace la matrice  $G_K(u - u_h)$  par la matrice  $\tilde{G}_K(u_h)$  définie par

$$\tilde{G}_K(u_h) = \begin{pmatrix} \int_{\Delta_K} (\eta_1^{zz}(u_h))^2 dx & \int_{\Delta_K} \eta_1^{zz}(u_h) \eta_2^{zz}(u_h) dx & \int_{\Delta_K} \eta_1^{zz}(u_h) \eta_3^{zz}(u_h) dx \\ \int_{\Delta_K} \eta_1^{zz}(u_h) \eta_2^{zz}(u_h) dx & \int_{\Delta_K} (\eta_2^{zz}(u_h))^2 dx & \int_{\Delta_K} \eta_2^{zz}(u_h) \eta_3^{zz}(u_h) dx \\ \int_{\Delta_K} \eta_1^{zz}(u_h) \eta_3^{zz}(u_h) dx & \int_{\Delta_K} \eta_2^{zz}(u_h) \eta_3^{zz}(u_h) dx & \int_{\Delta_K} (\eta_3^{zz}(u_h))^2 dx \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

où l'estimateur  $\eta_i^{ZZ}$ ,  $i = 1, 2, 3$ , est défini par (1.44).

## 2.2 Cas-test pour les essais numériques

On considère le problème (1.1) avec  $\Omega = [0, 1]^3$ ,  $\mathbf{a} = (1, 0, 0)^T$ ,  $f = 0$  et on impose  $u(0, y, z) = 1$  et  $u(1, y, z) = 0$  pour tout  $(y, z) \in [0, 1]^2$  et  $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(x, y, z) = 0$  pour tout  $(x, y, z) \in \partial\Omega \setminus \{0, 1\} \times [0, 1]^2$  de sorte que le problème ne dépende que de la première variable d'espace  $x$  comme illustré sur la figure 2.2. Dans ces conditions, on peut définir une fonction  $\tilde{u} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $\tilde{u}(x) = u(x, y, z)$  pour tout  $(x, y, z) \in \Omega$ . Le problème à résoudre est donc le suivant : trouver  $\tilde{u} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  tel que

$$\begin{cases} -\epsilon \tilde{u}'' + \tilde{u}' = 0 & \text{dans } [0, 1], \\ \tilde{u}(0) = 1, \\ \tilde{u}(1) = 0. \end{cases} \quad (2.21)$$

La solution de ce problème est donnée par

$$\tilde{u}(x) = \frac{e^{x/\epsilon} - e^{1/\epsilon}}{1 - e^{1/\epsilon}}. \quad (2.22)$$

Comme on peut le voir sur la figure 2.3, une couche limite se forme sur la paroi en  $x = 1$  du fait de la diffusion. La couche limite qui se forme est d'autant plus épaisse que le coefficient de diffusion  $\epsilon$  est grand. Donc, en modifiant ce paramètre  $\epsilon$ , on peut contrôler la taille de la couche limite.

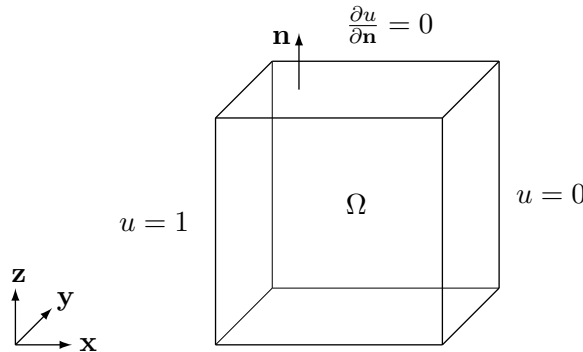


FIGURE 2.2 – Domaine de calcul  $\Omega$  et conditions aux limites du problème (2.21).

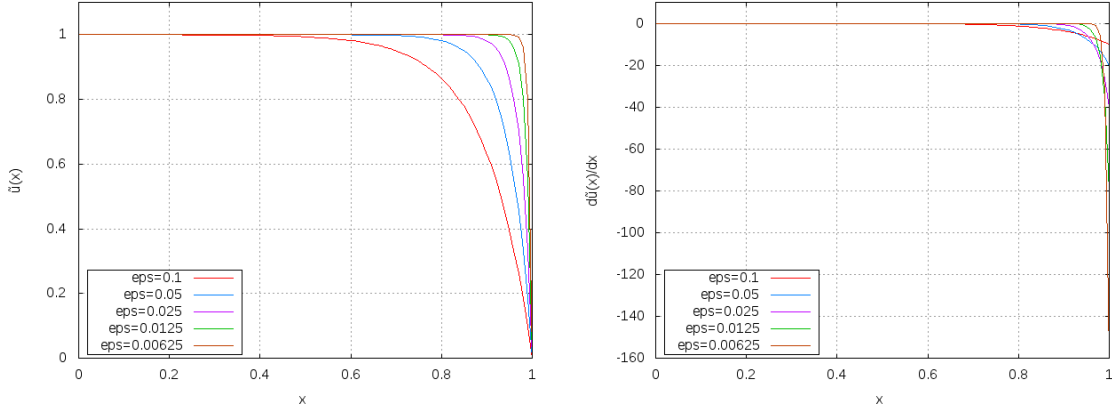


FIGURE 2.3 – Graphe de la solution exacte  $\tilde{u}$  à gauche et du gradient exact à droite pour différentes valeurs de  $\epsilon$ .

## 2.3 Résultats pour l'estimation de la semi-norme $H^1$ de l'erreur

### 2.3.1 Calcul effectif de l'estimateur d'erreur

On considère l'estimateur d'erreur  $\eta_K^2$  sur l'élément  $K$  donné par (2.13). On peut écrire

$$\eta_K^2 = \varphi_K(u_h) \omega_K(u - u_h)$$

où  $\omega_K(u - u_h)$  est donné par (2.6) et  $\varphi_K(u_h)$  est défini par

$$\varphi_K(u_h) = \left( \frac{1}{\epsilon} \|\Pi_K f - \mathbf{a} \cdot \nabla u_h\|_{L^2(K)} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 \left( \frac{|f_i|}{\lambda_{1,K} \lambda_{2,K} \lambda_{3,K}} \right)^{1/2} \|\nabla u_h \cdot \mathbf{n}\|_{L^2(f_i)} \right).$$

On définit  $\eta_{i,K}^2$  l'estimateur d'erreur dans la direction  $\mathbf{r}_{i,K}$ ,  $i = 1, 2, 3$ , par

$$\eta_{i,K}^2 = \varphi_K(u_h) \lambda_{i,K} \left( \mathbf{r}_{i,K}^T G_K (u - u_h) \mathbf{r}_{i,K} \right)^{1/2} \quad (2.23)$$

de sorte que l'on ait

$$\eta_K^2 = \left( \sum_{i=1}^3 \eta_{i,K}^4 \right)^{1/2}. \quad (2.24)$$

Le calcul de l'estimateur d'erreur  $\eta_K^2$  sur chaque élément  $K$  est donné par l'algorithme 1.

---

#### Algorithme 1 Calcul de l'estimateur d'erreur

---

$u_h$  donnée sur tous les éléments  $K$  du maillage  $\mathcal{T}_h$

**Pour** tous les éléments  $K$  du maillage  $\mathcal{T}_h$  :

    Calcul de  $\mathbf{r}_{1,K}$ ,  $\mathbf{r}_{2,K}$ ,  $\mathbf{r}_{3,K}$ ,  $\lambda_{1,K}$ ,  $\lambda_{2,K}$ ,  $\lambda_{3,K}$  à partir des relations (2.2) et (2.3)

    Calcul de la matrice  $\tilde{G}_K(u_h)$  définie par (2.20)

    Calcul des estimateurs  $\eta_{1,K}^2$ ,  $\eta_{2,K}^2$ ,  $\eta_{3,K}^2$  à partir de l'expression (2.23)

    Calcul de l'estimateur  $\eta_K^2$  à partir de la relation (2.24)

**Fin Pour**

---

### 2.3.2 Mesure de l'efficacité de l'estimateur d'erreur

Pour mesurer la fiabilité de l'estimateur d'erreur  $\eta_K^2$ , on définit son *effectivity index*  $ei$  par

$$ei = \frac{\left( \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \eta_K^2 \right)^{1/2}}{\|\nabla(u - u_h)\|_{L^2(\Omega)}}$$

qui permet de comparer l'estimateur d'erreur avec l'erreur exacte. D'après le théorème 3, si la condition (1.68) est vérifiée, l'estimateur d'erreur  $\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \eta_K^2$  approche la semi-norme  $H^1$  de l'erreur exacte  $u - u_h$  dans le sens suivant : il existe une constante  $C_1$  indépendante de  $f$ ,  $\epsilon$ ,  $\mathbf{a}$ , de la taille du maillage et du rapport d'aspect, et une constante  $C_2$  dépendante du Péclet donné par (2.10) telles que

$$C_1 \leq ei \leq C_2 + h.o.t, \quad (2.25)$$

où *h.o.t* désigne un terme d'ordre supérieur. Par ailleurs, dans le cas de notre problème (2.21), puisque  $f$  est nulle, donc  $\Pi_K f$  aussi, on a  $h.o.t = 0$ . On rappelle que si  $u \in H^2(\Omega)$  alors  $\|\nabla(u - u_h)\|_{L^2(\Omega)} = O(h)$  (voir par exemple [67]). Donc, d'après la relation (2.25), on a

$$\left( \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \eta_K^2 \right)^{1/2} = O(h). \quad (2.26)$$

De plus, pour vérifier le comportement de l'estimateur de Zienkiewicz-Zhu donné par (1.44), on introduit l'*effectivity index*  $ei^{ZZ}$  défini par

$$ei^{ZZ} = \frac{\left( \int_{\Omega} |\nabla u_h - I_h \nabla u_h|^2 \right)^{1/2}}{\|\nabla(u - u_h)\|_{L^2(\Omega)}}.$$

L'estimateur d'erreur de Zienkiewicz-Zhu est dit asymptotiquement exact si

$$ei^{ZZ} \rightarrow 1 \quad \text{quand } h \rightarrow 0.$$

### 2.3.3 Evolution de l'estimateur en fonction du raffinement du maillage

Pour vérifier l'ordre de convergence (2.26) de l'estimateur  $\eta_K^2$  défini par (2.13), on regarde le comportement de l'estimateur lorsqu'on modifie le maillage dans certaines directions de l'espace. Pour cela, on considère un maillage grossier  $\mathcal{T}_h$  du domaine  $\Omega$ . Soient  $N_x, N_y, N_z$  les nombres de subdivision de l'intervalle  $[0, 1]$  dans les directions de l'espace  $x, y, z$  respectivement et  $h_x = 1/N_x, h_y = 1/N_y, h_z = 1/N_z$  les pas d'espace dans ces trois directions. Les sommets du maillage sont définis par les points de coordonnées  $(ih_x, jh_y, kh_z)$  pour tout  $(i, j, k) \in [0, N_x] \times [0, N_y] \times [0, N_z]$ .

Tous les maillages de ce chapitre sont générés avec la bibliothèque d'éléments finis MODULEF [71] de la manière suivante. On construit d'abord un maillage en deux dimensions de la face du cube  $\Omega$  se trouvant dans le plan  $(Oxy)$  en définissant les points de discrétisation dans les directions  $x$  et  $y$  et en générant un maillage structuré composé de rectangles, c'est-à-dire un quadrillage à partir des points de discrétisation (voir figure 2.4). Ensuite, à partir de ce maillage, on réalise  $N_z$  translations successives dans la direction des  $z$  positifs et de longueur  $h_z$ . De cette manière, nous obtenons un maillage structuré en trois dimensions composé de prismes rectangulaires droits. Chacun de ces prismes est ensuite découpé en six tétraèdres et on obtient finalement un maillage structuré du domaine  $\Omega$  composé d'éléments tétraédriques dont on peut contrôler partiellement le nombre d'éléments et leurs tailles dans chaque direction de l'espace.



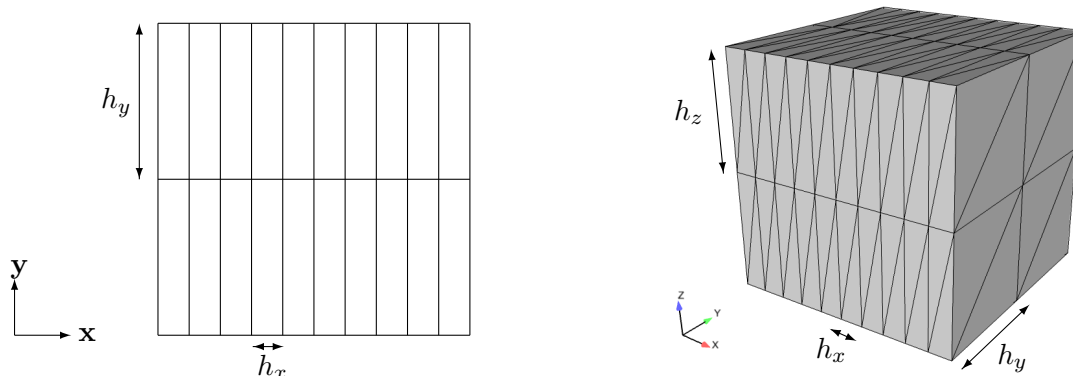


FIGURE 2.4 – A gauche : maillage structuré en rectangle de la face du cube  $\Omega$  qui se trouve en  $y = 0$ . A droite : maillage structuré final du domaine  $\Omega$  composé de tétraèdres.

A partir de ce maillage, on résout numériquement le problème (2.21) en utilisant une méthode d'éléments finis afin d'aboutir à un système linéaire que l'on résout avec la méthode GMRES en utilisant la factorisation ILU(0) comme préconditionneur (voir par exemple [82]).

### 2.3.3.1 Indépendance par rapport à la taille du maillage, la forme des éléments et les données du problème

Dans cette section, on cherche à vérifier la qualité de l'estimateur, c'est-à-dire que l'on veut déterminer les dépendances des constantes intervenant dans la relation (2.25).

On définit le rapport d'aspect maximal sur le maillage  $\mathcal{T}_h$  par

$$ar = \max_{K \in \mathcal{T}_h} \frac{\lambda_{1,K}}{\lambda_{3,K}}.$$

Puisque la solution ne dépend que de la première variable d'espace, on décide d'orienter les éléments du maillage de sorte que la direction  $x$  corresponde à la direction du plus petit étirement afin d'avoir plus de points dans cette direction. Dans un premier temps, on considère un maillage dont les éléments ont un rapport d'aspect assez faible. On pose  $\epsilon = 0.1$  et on construit un maillage dont le rapport d'aspect de ses éléments est 5 en prenant  $N_x = 10$ ,  $N_y = 2$  et  $N_z = 2$ . La figure 2.5 montre une coupe du maillage en  $y = 0$ . Le tableau 2.1 montre l'évolution de l'estimateur d'erreur et de l'erreur exacte lorsque l'on raffine le maillage dans toutes les directions de l'espace en découpant successivement tous les pas d'espace  $h_x$ ,  $h_y$ ,  $h_z$  en deux à chaque fois. On remarque que l'estimateur et l'erreur sont divisés par deux quand les pas d'espace  $h_x$ ,  $h_y$ ,  $h_z$  sont divisés par deux, c'est-à-dire que ces deux quantités sont de l'ordre de  $h_x$ ,  $h_y$ ,  $h_z$ , ce qui correspond bien à la vitesse de convergence donnée par la relation (2.26). On peut aussi remarquer que l'estimateur d'erreur de Zienkiewicz-Zhu est asymptotiquement exact et que l'*effectivity index* de l'estimateur  $ei$  semble tendre vers une constante. La figure 2.6 montre que la solution approchée  $u_h$  tend vers la solution exacte  $u$  quand on raffine le maillage.

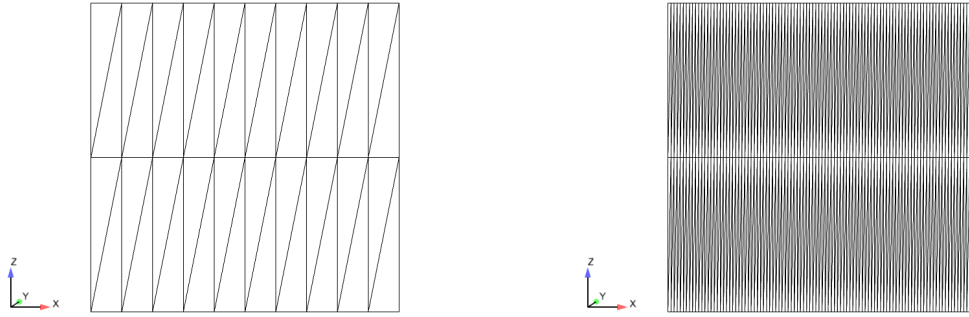


FIGURE 2.5 – *A gauche : coupe en  $y=0$  du maillage structuré dont les éléments ont un rapport d'aspect de 5. A droite : coupe en  $y=0$  du maillage structuré dont les éléments ont un rapport d'aspect de 50.*

$\epsilon = 0.1$					
$N_x \times N_y \times N_z$	$\left( \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \eta_K^2 \right)^{1/2}$	$\left( \int_{\Omega}  \nabla(u - u_h) ^2 \right)^{1/2}$	$e_i^{ZZ}$	ei	sommets
$10 \times 2 \times 2$	1.008	0.574	0.834	1.755	99
$20 \times 4 \times 4$	0.596	0.310	0.942	1.925	525
$40 \times 8 \times 8$	0.322	0.159	0.988	2.024	3321
$80 \times 16 \times 16$	0.168	0.080	1.002	2.089	23409
$160 \times 32 \times 32$	0.086	0.040	1.003	2.127	175329

TABLE 2.1 – *Evolution de l'estimateur d'erreur en fonction du raffinement du maillage pour  $\epsilon = 0.1$  et un rapport d'aspect de 5.*

On considère maintenant un maillage dont les éléments ont un rapport d'aspect de 50, c'est-à-dire un maillage dix fois plus fin dans la direction  $x$  que le maillage précédent. On prend  $N_x = 100$ ,  $N_y = 2$  et  $N_z = 2$ . La figure 2.5 montre une coupe du maillage en  $y = 0$ . Le tableau 2.2 montre les résultats obtenus après plusieurs raffinements successifs dans toutes les directions pour  $\epsilon = 0.1$  et  $\epsilon = 0.01$ . On remarque que les estimateurs sont divisés par deux chaque fois que les pas d'espace sont divisés par deux pour les deux valeurs de  $\epsilon$ . L'erreur exacte et l'estimateur sont plus grand pour  $\epsilon = 0.01$  que pour  $\epsilon = 0.1$ . La figure 2.6 montre que la solution approchée  $u_h$  est plus proche de la solution exacte  $u$  quand le rapport d'aspect est de 50 avec  $\epsilon = 0.1$  que quand il est de 5. Comme précédemment, l'estimateur d'erreur de Zienkiewicz-Zhu est asymptotiquement exact dans les deux cas.

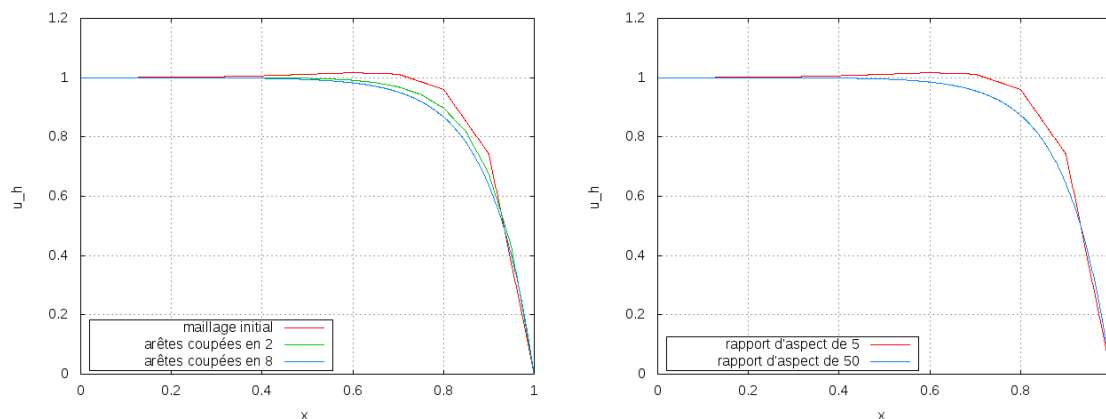


FIGURE 2.6 – Résultats pour  $\epsilon = 0.1$ . A gauche : graphe de la solution approchée  $u_h$  calculée sur le maillage dont les éléments ont un rapport d'aspect de 5 et sur les maillages résultants après un découpage des arêtes en 2 et 8 dans toutes les directions. A droite : comparaison de la solution approchée  $u_h$  calculée sur le maillage dont les éléments ont un rapport d'aspect de 5 et sur celui dont les éléments ont un rapport d'aspect de 50.

$\epsilon = 0.1$					
$N_x \times N_y \times N_z$	$\left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \eta_K^2\right)^{1/2}$	$\left(\int_{\Omega}  \nabla(u - u_h) ^2\right)^{1/2}$	$e_i^{ZZ}$	ei	sommets
$100 \times 2 \times 2$	0.148	0.0592	0.997	2.506	909
$200 \times 4 \times 4$	0.089	0.0312	1.013	2.844	5025
$400 \times 8 \times 8$	0.040	0.0160	1.013	2.488	32481
$800 \times 16 \times 16$	0.018	0.0080	1.010	2.255	231489

$\epsilon = 0.01$					
$N_x \times N_y \times N_z$	$\left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \eta_K^2\right)^{1/2}$	$\left(\int_{\Omega}  \nabla(u - u_h) ^2\right)^{1/2}$	$e_i^{ZZ}$	ei	sommets
$100 \times 2 \times 2$	3.051	1.780	0.834	2.139	909
$200 \times 4 \times 4$	1.884	0.961	0.939	2.437	5025
$400 \times 8 \times 8$	1.043	0.497	0.982	2.607	32481
$800 \times 16 \times 16$	0.544	0.252	0.996	2.681	231489

TABLE 2.2 – Evolution de l'estimateur d'erreur en fonction du raffinement du maillage pour différentes valeurs de  $\epsilon$  et un rapport d'aspect de 50.

On considère un maillage dont les éléments sont encore dix fois plus étirés dans la direction  $x$ , on prend  $N_x = 1000$ ,  $N_y = 2$  et  $N_z = 2$ . Donc les éléments ont un rapport d'aspect de 500. Le tableau 2.3 représente les résultats obtenus pour  $\epsilon = 0.1$ ,  $\epsilon = 0.01$  et  $\epsilon = 0.001$ . Pour des rapports d'aspect de 5 et 50 avec  $\epsilon = 0.1$  et  $\epsilon = 0.01$ , l'estimateur et l'erreur varient correctement en fonction du raffinement du maillage et les estimateurs de Zienkiewicz-Zhu sont asymptotiquement exacts. De même dans le cas où le rapport d'aspect est de 500 avec  $\epsilon = 0.001$ . Par contre, pour un rapport d'aspect de 500 avec  $\epsilon = 0.1$  et  $\epsilon = 0.01$ , l'*effectivity index* n'est pas correcte, l'hypothèse (2.18) n'est probablement pas satisfaite.

La figure 2.7 montre l'ordre de convergence de l'estimateur en fonction du raffinement du maillage pour différentes valeurs de  $\epsilon$  et différents rapports d'aspect. Dans tous les cas, à

$\epsilon = 0.1$					
$N_x \times N_y \times N_z$	$\left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \eta_K^2\right)^{1/2}$	$\left(\int_{\Omega}  \nabla(u - u_h) ^2\right)^{1/2}$	$ei^{ZZ}$	ei	sommets
$1000 \times 2 \times 2$	0.0336	0.0059	1.003	5.678	9009
$2000 \times 4 \times 4$	0.0238	0.0031	1.016	7.613	50025
$4000 \times 8 \times 8$	0.0093	0.0016	1.014	5.812	324081

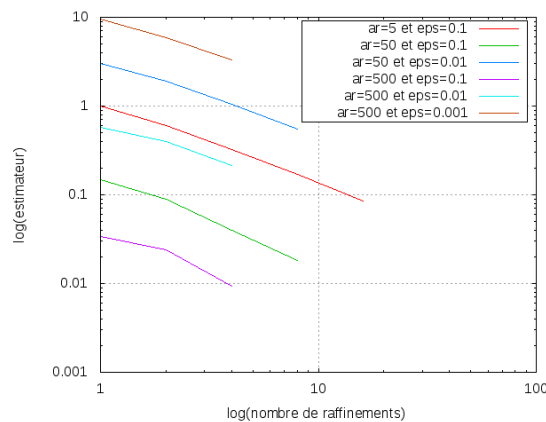
$\epsilon = 0.01$					
$N_x \times N_y \times N_z$	$\left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \eta_K^2\right)^{1/2}$	$\left(\int_{\Omega}  \nabla(u - u_h) ^2\right)^{1/2}$	$ei^{ZZ}$	ei	sommets
$1000 \times 2 \times 2$	0.576	0.184	0.988	3.782	9009
$2000 \times 4 \times 4$	0.395	0.097	1.003	4.746	50025
$4000 \times 8 \times 8$	0.215	0.050	1.004	5.009	324081

$\epsilon = 0.001$					
$N_x \times N_y \times N_z$	$\left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \eta_K^2\right)^{1/2}$	$\left(\int_{\Omega}  \nabla(u - u_h) ^2\right)^{1/2}$	$ei^{ZZ}$	ei	sommets
$1000 \times 2 \times 2$	9.608	5.627	0.834	2.131	9009
$2000 \times 4 \times 4$	5.955	3.035	0.939	2.436	50025
$4000 \times 8 \times 8$	3.345	1.569	0.982	2.640	324081

 TABLE 2.3 – Evolution de l'estimateur d'erreur en fonction du raffinement du maillage pour différentes valeurs de  $\epsilon$  et un rapport d'aspect de 500.

chaque fois que les pas d'espace sont divisés par un facteur donné, l'estimateur est divisé par ce même facteur. De plus, l'augmentation du rapport d'aspect implique une diminution non négligeable de la taille du maillage. En effet, à chaque fois que l'on multiplie le rapport d'aspect des éléments par dix, le nombre de sommets du maillage est à peu près multiplié par dix. Donc on peut en conclure que la convergence de l'estimateur de Zienkiewicz-Zhu est indépendante de la taille du maillage, du rapport d'aspect des éléments et de la valeur de  $\epsilon$ . Par contre, la convergence de l'estimateur d'erreur  $\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \eta_K^2$  est indépendante de la taille du maillage mais peut dépendre du rapport d'aspect en fonction de la valeur de  $\epsilon$ .


 FIGURE 2.7 – Evolution en échelle logarithmique de l'estimateur d'erreur en fonction du raffinement du maillage pour différents rapports d'aspect ( $ar$ ) et différentes valeurs de  $\epsilon$ .

### 2.3.3.2 Maillage de la couche limite

Puisque la solution varie peu en dehors de la couche limite, on décide de diviser le domaine selon la direction  $x$  en deux sous-domaines distincts (voir figure 2.8). Soient  $\Omega_d$  le sous-domaine de  $\Omega$  contenant la couche limite et  $\Omega_c$  son complémentaire dans  $\Omega$ . Soit  $\alpha \in [0, 1]$  la taille dans la direction  $x$  de  $\Omega_d$ . Le sous-domaine  $\Omega_d$  est donc donné par  $[1 - \alpha, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$ . Chaque sous-domaine a un pas d'espace différent dans la direction  $x$ . Soient  $h_x^d$  le pas d'espace dans la direction  $x$  dans  $\Omega_d$  et  $h_x^c$  le pas d'espace dans la direction  $x$  dans  $\Omega_c$  (voir figure 2.9). Soient  $N_x^d = \alpha/h_x^d$  et  $N_x^c = (1 - \alpha)/h_x^c$  le nombre de subdivisions dans la direction  $x$  dans chaque sous-domaine.

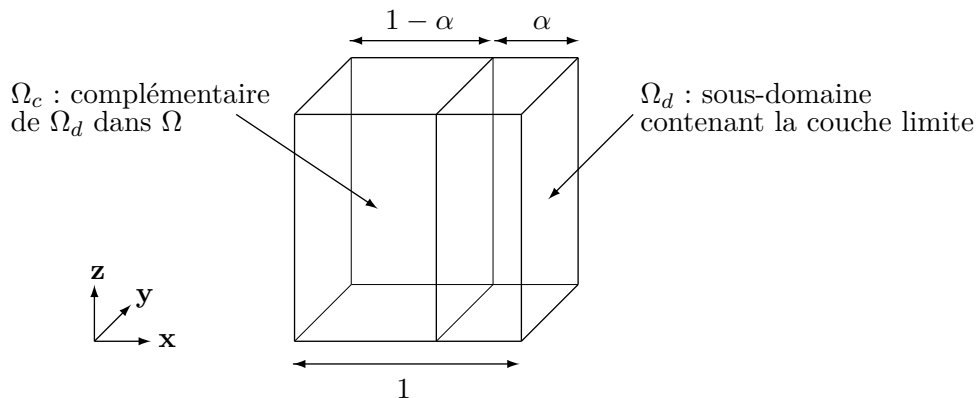


FIGURE 2.8 – Schéma de la division dans la direction  $x$  du domaine  $\Omega$  en deux sous-domaines  $\Omega_d$  (à droite) et  $\Omega_c$  (son complémentaire). Le sous-domaine  $\Omega_d$  est de taille  $\alpha$  dans la direction  $x$ .

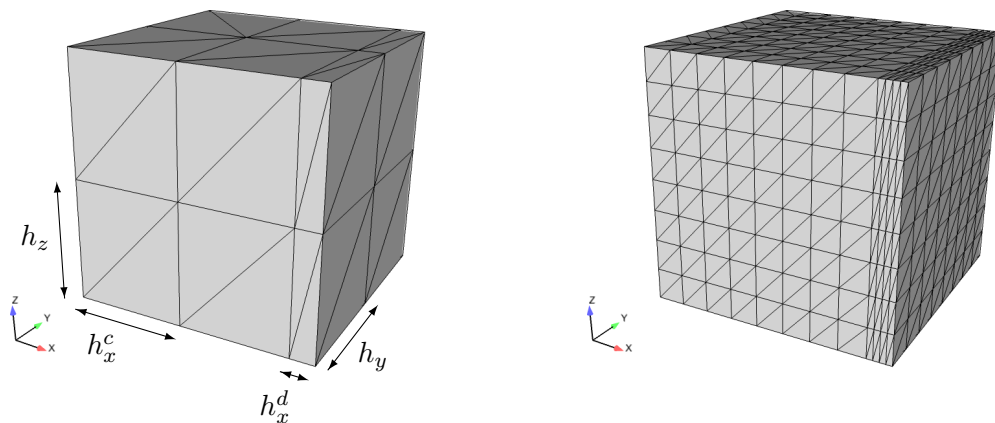


FIGURE 2.9 – A gauche : maillage dont le pas d'espace dans la direction  $x$  est plus petit dans un voisinage de la couche limite. A droite : maillage dont toutes les arêtes ont été découpées en quatre dans toutes les directions.

On construit un maillage  $\mathcal{T}_h$  du domaine  $\Omega$  tel que  $\alpha = 0.1$ ,  $h_x^d = 0.1$ ,  $h_x^c = 0.45$ ,  $h_y = 0.5$  et  $h_z = 0.5$ . Soient  $\mathcal{T}_h^d$  et  $\mathcal{T}_h^c$  les maillages des sous-domaines  $\Omega_d$  et  $\Omega_c$  respectivement. On peut remarquer que le rapport d'aspect des éléments de  $\mathcal{T}_h^d$  est plus grand que celui des éléments de  $\mathcal{T}_h^c$ . On raffine le maillage  $\mathcal{T}_h$  ainsi construit dans toutes les directions à plusieurs reprises et on résout le problème (2.21) sur chacun d'entre eux pour différentes valeurs de  $\epsilon$  :  $\epsilon = 0.1$ ,

$\epsilon = 0.05$ ,  $\epsilon = 0.025$  et  $\epsilon = 0.0125$ . Les résultats des calculs des estimateurs sont donnés dans le tableau 2.4. Dans tous les cas, l'estimateur d'erreur est divisé par deux chaque fois que les pas d'espace sont divisés par deux (voir figure 2.10), donc on retrouve le résultat de convergence montré dans la section précédente. De plus, on voit encore une fois que plus  $\epsilon$  est grand et plus l'estimateur et l'erreur exacte sont petits. L'estimateur d'erreur de Zienkiewicz-Zhu est asymptotiquement exact dans tous les cas et on remarque que l'*effectivity index*  $ei$  calculé pour chaque  $\epsilon$  converge vers une constante. Sur la figure 2.10, on observe que toutes ces constantes sont incluses dans un même intervalle de longueur au plus 0.2, ce qui justifie la relation (2.25) qui définit des bornes pour  $ei$ . La figure 2.10 semble indiquer que ces bornes sont indépendantes du paramètre  $\epsilon$  et donc du Péclet. En effet, nous avons montré dans le théorème 3 que la borne supérieure devient indépendante du Péclet quand  $h$  devient petit puisque  $Pe \rightarrow 0$  quand  $h \rightarrow 0$ .

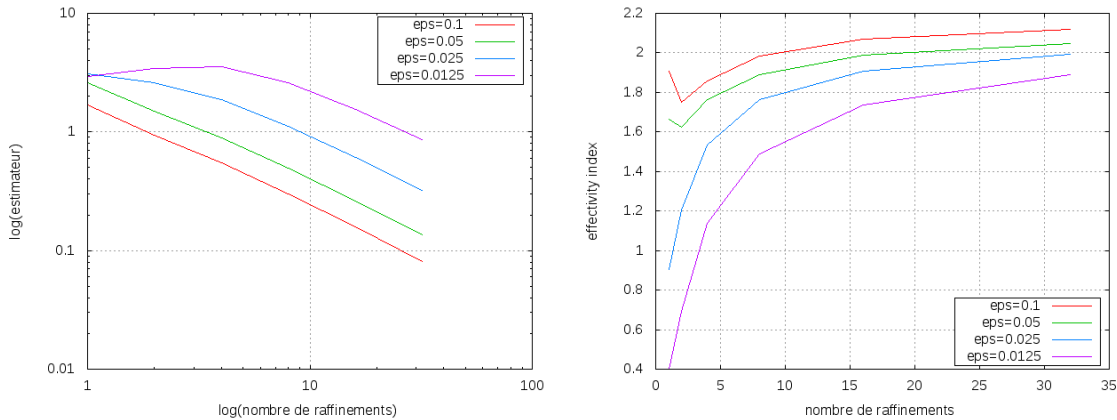


FIGURE 2.10 – A gauche : évolution en échelle logarithmique de l'estimateur d'erreur en fonction du raffinement du maillage pour différentes valeurs de  $\epsilon$ . A droite : évolution de l'*effectivity index* en fonction du raffinement du maillage.

### 2.3.3.3 Raffinement de la couche limite dans une direction privilégiée et notion de maillage limite

Puisque la solution varie principalement à proximité de la paroi en  $x = 1$  dans une zone du domaine dont la taille est définie par la valeur du coefficient de diffusion  $\epsilon$ , les gradients de solution sont plus forts au voisinage de cette zone dans laquelle se trouve la couche limite. On peut donc raffiner le maillage dans  $\Omega_d$  dont la taille  $\alpha$  reste encore à déterminer. De plus, comme la solution varie seulement selon la direction  $x$ , on peut penser qu'il suffit d'augmenter le nombre de sommets principalement dans cette direction. On va donc considérer à nouveau le maillage  $\mathcal{T}_h$  tel que  $\alpha = 0.1$  et les pas d'espace sont donnés par  $h_x^d = 0.1$ ,  $h_x^c = 0.45$ ,  $h_y = 0.5$ ,  $h_z = 0.5$  et on va le raffiner de trois façons différentes. Comme illustré sur la figure 2.11, le raffinement de type a) consiste à modifier le maillage  $\mathcal{T}_h$  en subdivisant les arêtes dans toutes les directions, c'est-à-dire en divisant tous les pas d'espace par deux à chaque fois comme il a été fait précédemment. Le raffinement de type b) consiste à subdiviser les arêtes dans toutes les directions mais seulement dans  $\mathcal{T}_h^d$ , c'est-à-dire diviser par deux les pas d'espace  $h_x^d$ ,  $h_y$ ,  $h_z$  sans modifier le pas  $h_x^c$ . Enfin, le raffinement de type c) consiste à diviser toutes les arêtes du maillage  $\mathcal{T}_h^d$  mais seulement dans la direction  $x$ , c'est-à-dire diviser par deux le pas d'espace  $h_x^d$  et laisser inchangés les autres.

$\epsilon = 0.1$				
$(N_x^c + N_x^d) \times N_y \times N_z$	$\left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \eta_K^2\right)^{1/2}$	$\left(\int_{\Omega}  \nabla(u - u_h) ^2\right)^{1/2}$	$ei^{ZZ}$	ei
$(2 + 1) \times 2 \times 2$	1.693	0.888	0.961	1.907
$(4 + 2) \times 4 \times 4$	0.943	0.539	0.851	1.748
$(8 + 4) \times 8 \times 8$	0.547	0.295	0.922	1.857
$(16 + 8) \times 16 \times 16$	0.301	0.152	0.971	1.984
$(32 + 16) \times 32 \times 32$	0.158	0.076	0.992	2.071
$(64 + 32) \times 64 \times 64$	0.081	0.038	0.999	2.119

$\epsilon = 0.05$				
$(N_x^c + N_x^d) \times N_y \times N_z$	$\left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \eta_K^2\right)^{1/2}$	$\left(\int_{\Omega}  \nabla(u - u_h) ^2\right)^{1/2}$	$ei^{ZZ}$	ei
$(2 + 1) \times 2 \times 2$	2.589	1.556	0.839	1.664
$(4 + 2) \times 4 \times 4$	1.487	0.917	0.809	1.622
$(8 + 4) \times 8 \times 8$	0.884	0.502	0.912	1.762
$(16 + 8) \times 16 \times 16$	0.493	0.261	0.962	1.892
$(32 + 16) \times 32 \times 32$	0.263	0.132	0.987	1.989
$(64 + 32) \times 64 \times 64$	0.136	0.066	0.997	2.048

$\epsilon = 0.025$				
$(N_x^c + N_x^d) \times N_y \times N_z$	$\left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \eta_K^2\right)^{1/2}$	$\left(\int_{\Omega}  \nabla(u - u_h) ^2\right)^{1/2}$	$ei^{ZZ}$	ei
$(2 + 1) \times 2 \times 2$	3.106	3.444	0.452	0.902
$(4 + 2) \times 4 \times 4$	2.620	2.177	0.635	1.204
$(8 + 4) \times 8 \times 8$	1.872	1.221	0.835	1.533
$(16 + 8) \times 16 \times 16$	1.120	0.636	0.939	1.762
$(32 + 16) \times 32 \times 32$	0.614	0.322	0.982	1.907
$(64 + 32) \times 64 \times 64$	0.322	0.162	0.996	1.991

$\epsilon = 0.0125$				
$(N_x^c + N_x^d) \times N_y \times N_z$	$\left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \eta_K^2\right)^{1/2}$	$\left(\int_{\Omega}  \nabla(u - u_h) ^2\right)^{1/2}$	$ei^{ZZ}$	ei
$(2 + 1) \times 2 \times 2$	2.935	7.320	0.202	0.401
$(4 + 2) \times 4 \times 4$	3.439	4.958	0.379	0.694
$(8 + 4) \times 8 \times 8$	3.565	3.132	0.644	1.138
$(16 + 8) \times 16 \times 16$	2.590	1.740	0.835	1.489
$(32 + 16) \times 32 \times 32$	1.562	0.900	0.939	1.735
$(64 + 32) \times 64 \times 64$	0.858	0.455	0.981	1.888

TABLE 2.4 – Evolution de l'estimateur d'erreur en fonction du raffinement du maillage pour différentes valeurs de  $\epsilon$  et pour  $\alpha = 0.1$ . Le maillage  $\mathcal{T}_h^d$  de  $\Omega_d$  est plus fin que le maillage  $\mathcal{T}_h^c$  de  $\Omega_c$  dans la direction  $x$ . Le maillage initial est celui qui est à gauche dans la figure 2.9 ( $\alpha = 0.1$ ,  $h_x^d = 0.1$ ,  $h_x^c = 0.45$ ,  $h_y = 0.5$  et  $h_z = 0.5$ ).

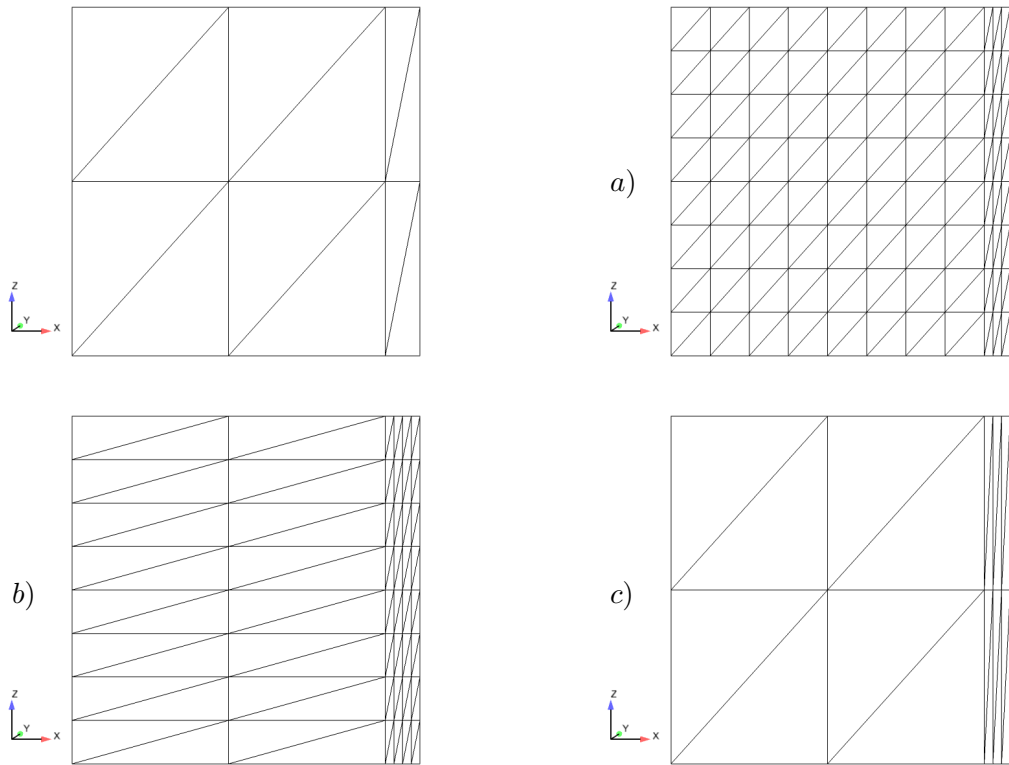


FIGURE 2.11 – En haut à gauche : coupe du maillage initial en  $y = 0$ . Les trois figures montrent trois types de raffinement du maillage. Le raffinement de type a) correspond à un découpage des arêtes dans tout le domaine  $\Omega$  et dans toutes les directions. Le raffinement de type b) correspond à un découpage des arêtes dans le sous-domaine  $\Omega_d$  et dans toutes les directions. Le raffinement de type c) correspond à un découpage des arêtes dans le sous-domaine  $\Omega_d$  et dans la direction  $x$  seulement.

Les résultats des calculs effectués sur tous ces maillages avec  $\epsilon = 0.025$  et  $\alpha = 0.1$  sont donnés dans le tableau 2.5, où on a noté par  $ar$  le rapport d'aspect maximal sur le maillage  $\mathcal{T}_h$  défini par

$$ar = \max_{K \in \mathcal{T}_h} \frac{\lambda_{1,K}}{\lambda_{3,K}}. \quad (2.27)$$

Dans le tableau 2.5, on peut voir que l'*effectivity index* de l'estimateur d'erreur de Zienkiewicz-Zhu est asymptotiquement exact dans le premier tableau, alors qu'il diminue après un certain nombre de raffinement dans les deux autres cas. Donc, si on ne raffine pas tout le maillage  $\mathcal{T}_h$  dans toutes les directions, il n'y a aucune garantie que la solution approchée obtenue et l'estimateur d'erreur soient corrects. Néanmoins, on remarque que les estimateurs d'erreur sont très proches dans les trois types de raffinement (voir figure 2.12). En effet, si on regarde par exemple les maillages obtenus après cinq raffinements successifs, on a une estimation de l'erreur égale à 0.322 si on raffine tout le maillage  $\mathcal{T}_h$  dans toutes les directions et 0.362 si on raffine seulement le maillage  $\mathcal{T}_h^d$  dans la direction  $x$ , soit une différence d'environ 12% pour 1300 fois moins de sommets et un rapport d'aspect maximal au moins trente fois plus élevé, ce qui n'est pas négligeable au niveau du rapport temps de calcul/précision. La différence du nombre de sommets entre chaque type de raffinement est nettement visible sur la figure 2.13. Par ailleurs, on peut voir sur la figure 2.12 que pour ce problème, les solutions approchées calculées sur les maillages raffinés cinq fois par les différentes méthodes sont très peu différentes.



Raffinement de type a)						
$(N_x^c + N_x^d) \times N_y \times N_z$	$\left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \eta_K^2\right)^{1/2}$	$\left(\int_{\Omega}  \nabla(u - u_h) ^2\right)^{1/2}$	$ei^{ZZ}$	ei	sommets	ar
$(2 + 1) \times 2 \times 2$	3.106	3.444	0.452	0.902	36	15.2
$(4 + 2) \times 4 \times 4$	2.620	2.177	0.635	1.204	175	15.2
$(8 + 4) \times 8 \times 8$	1.872	1.221	0.835	1.533	1053	15.2
$(16 + 8) \times 16 \times 16$	1.120	0.636	0.939	1.762	7225	15.2
$(32 + 16) \times 32 \times 32$	0.614	0.322	0.982	1.907	53361	15.2
$(64 + 32) \times 64 \times 64$	0.322	0.162	0.996	1.991	409825	15.2

Raffinement de type b)						
$(N_x^c + N_x^d) \times N_y \times N_z$	$\left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \eta_K^2\right)^{1/2}$	$\left(\int_{\Omega}  \nabla(u - u_h) ^2\right)^{1/2}$	$ei^{ZZ}$	ei	sommets	ar
$(2 + 1) \times 2 \times 2$	3.106	3.444	0.452	0.902	36	15.2
$(2 + 2) \times 4 \times 4$	2.631	2.183	0.634	1.205	125	15.2
$(2 + 4) \times 8 \times 8$	1.889	1.231	0.836	1.535	567	15.2
$(2 + 8) \times 16 \times 16$	1.135	0.655	0.924	1.734	3179	22.1
$(2 + 16) \times 32 \times 32$	0.629	0.360	0.897	1.750	20691	43.7
$(2 + 32) \times 64 \times 64$	0.343	0.228	0.736	1.505	147875	87.1

Raffinement de type c)						
$(N_x^c + N_x^d) \times N_y \times N_z$	$\left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \eta_K^2\right)^{1/2}$	$\left(\int_{\Omega}  \nabla(u - u_h) ^2\right)^{1/2}$	$ei^{ZZ}$	ei	sommets	ar
$(2 + 1) \times 2 \times 2$	3.106	3.444	0.452	0.902	36	15.2
$(2 + 2) \times 2 \times 2$	2.656	2.088	0.624	1.272	45	30.3
$(2 + 4) \times 2 \times 2$	1.914	1.137	0.831	1.682	63	60.4
$(2 + 8) \times 2 \times 2$	1.150	0.597	0.912	1.928	99	120.8
$(2 + 16) \times 2 \times 2$	0.645	0.327	0.878	1.974	171	241.6
$(2 + 32) \times 2 \times 2$	0.362	0.208	0.710	1.737	315	483.3
$(2 + 64) \times 2 \times 2$	0.206	0.165	0.465	1.246	603	966.7
$(2 + 128) \times 2 \times 2$	0.126	0.153	0.277	0.827	1179	1933.7
$(2 + 256) \times 2 \times 2$	0.122	0.149	0.176	0.819	2331	3868.3
$(2 + 512) \times 2 \times 2$	0.153	0.148	0.132	1.031	4635	7739.0
$(2 + 1024) \times 2 \times 2$	0.190	0.148	0.116	1.281	9243	15496.9

TABLE 2.5 – Evolution de l'estimateur d'erreur en fonction du raffinement du maillage  $\mathcal{T}_h^d$  pour  $\epsilon = 0.025$  et  $\alpha = 0.1$ .

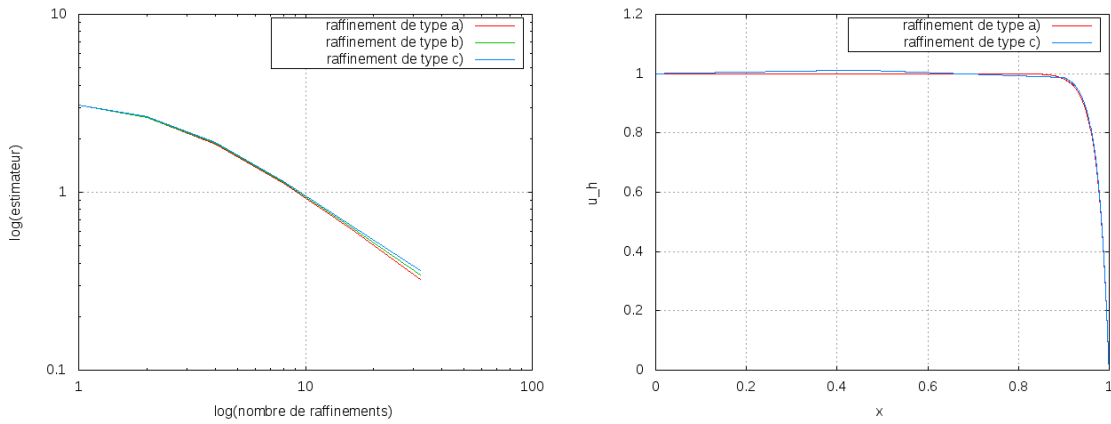


FIGURE 2.12 – A gauche : évolution en échelle logarithmique de l’estimateur en fonction du raffinement du maillage  $\mathcal{T}_h$  pour différents types de raffinement. A droite : solution approchée  $u_h$  calculée sur le maillage dont les arêtes ont été coupées en 32 dans  $\Omega$  et toutes les direction et dans  $\Omega_d$  dans la direction normale à la paroi seulement.

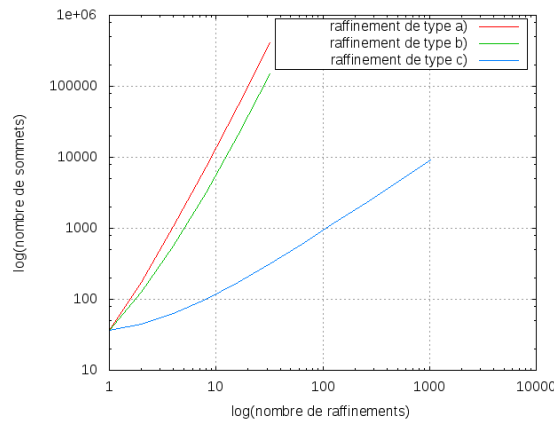


FIGURE 2.13 – Evolution en échelle logarithmique du nombre de sommets en fonction du raffinement du maillage  $\mathcal{T}_h$  pour différents types de raffinement.

De plus, lorsque l’on raffine dans une seule direction le maillage  $\mathcal{T}_h^d$  du sous-domaine  $\Omega_d$ , l’erreur stagne au bout d’un certain nombre de raffinements, ce qui indique que l’erreur dans  $\Omega_c$  est devenue plus grande et on a atteint un maillage limite, c’est-à-dire un maillage pour lequel la précision du calcul est maximale dans  $\Omega_d$  et il n’est plus nécessaire de découper les arêtes tant que le maillage  $\mathcal{T}_h^c$  du sous-domaine  $\Omega_c$  n’est pas modifié.

### 2.3.3.4 Influence de la taille du sous-domaine contenant la couche limite

Dans les sections précédentes, on a toujours pris une taille  $\alpha = 0.1$ . Maintenant, on fait varier cette taille, on effectue des raffinements de type c) et on regarde le comportement de l’estimateur au cours des raffinements. On prend  $\epsilon = 0.025$  et on considère différentes valeurs de  $\alpha$ . Les résultats sont donnés dans les tableaux 2.6 et 2.7. Pour  $\alpha = 0.2$ , pour  $h_x^d$  suffisamment fin, on voit que l’estimateur dans la direction  $x$  est divisé par deux chaque fois que le pas d’espace  $h_x^0$  est divisé par deux. Pour  $\alpha = 0.1$ , on peut faire les mêmes observations mis à part le fait que l’on atteint un maillage limite de la couche limite après une dizaine de raffinements. Si

on regarde les résultats obtenus avec  $\alpha = 0.025$ , on remarque qu'au bout de seulement deux raffinements, l'erreur dans la direction  $x$  ne diminue plus au bon ordre et se stabilise après cinq raffinements, ce qui signifie qu'une partie non négligeable de la couche limite se trouve en dehors de  $\Omega_d$ . Enfin, si on regarde les résultats pour  $\alpha = 0.00625$ , on voit clairement que la couche limite se trouve en grande partie en dehors de  $\Omega_d$  puisque l'erreur ne diminue presque pas dès le premier raffinement. La figure 2.14 représente l'ordre de convergence de l'estimateur dans la direction  $x$  pour les différentes valeurs de  $\alpha$ . Plus  $\alpha$  est petit, plus l'erreur se stabilise rapidement. Sur la même figure, on peut aussi voir la solution approchée  $u_h$  sur ces différents maillages de  $\Omega$  pour un pas d'espace  $h_x^d = 0.003125$ . On observe que plus la couche limite est mal capturée, plus la solution calculée sur  $\Omega_c$  est faussée.

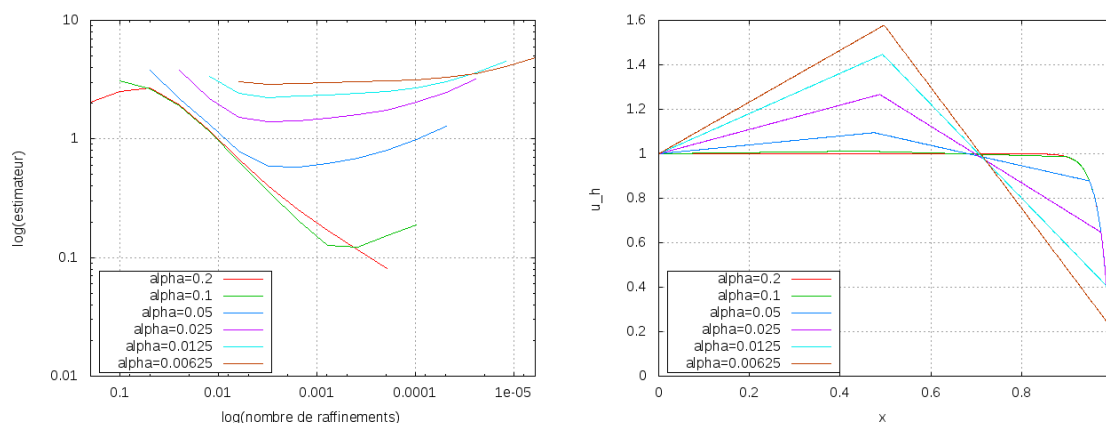


FIGURE 2.14 – A gauche : évolution en échelle logarithmique de l'estimateur en fonction du raffinement du maillage dans la direction normale à la paroi pour différentes valeurs de  $\alpha$ . A droite : solution approchée  $u_h$  calculée sur différents maillages à un pas d'espace  $h_x^d$  fixé.

Finalement, les tableaux 2.5, 2.6 et 2.7 montrent que l'estimateur  $\left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \eta_{K,3}^2\right)^{1/2}$  représente l'erreur dans la direction normale à la couche limite.

## 2.4 Définition d'un problème dual associé à une fonctionnelle

On considère le problème (2.21) et on définit un problème dual analogue au problème (1.76) mais avec une fonction  $z$  suffisamment régulière pour pouvoir écrire le problème sous la forme

$$\begin{cases} -\epsilon \Delta z - \mathbf{a} \cdot \nabla z = g & \text{dans } \Omega, \\ z = 0 & \text{sur } \Gamma_1, \\ \nabla z \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{sur } \Gamma_2, \end{cases} \quad (2.28)$$

où  $g$  est une fonction définie sur  $\Omega$ . Soit  $\Omega_0 \subset \Omega$  un domaine sur lequel on va chercher à minimiser une quantité dépendant de l'erreur  $u - u_h$ , où  $u_h$  est une solution approchée de  $u$ . On impose  $z(0, y, z) = 0$  et  $z(1, y, z) = 0$  pour tout  $(y, z) \in [0, 1]^2$ ,  $\frac{\partial z}{\partial \mathbf{n}}(x, y, z) = 0$  pour tout  $(x, y, z) \in \partial\Omega \setminus \{0, 1\} \times [0, 1]^2$  et  $g = g(x)$  une fonction ne dépendant que de la variable  $x$  de sorte que le problème ne dépende que de la première variable d'espace  $x$  comme illustré sur la figure 2.15. Dans ces conditions, on peut définir une fonction  $\tilde{z} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $\tilde{z}(x) = z(x, y, z)$  pour tout  $(x, y, z) \in \Omega$ . Le problème à résoudre est donc le suivant : trouver  $\tilde{z} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  tel

$\alpha = 0.2$					
$N_x^d$	$h_x^d$	$\left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \eta_K^2\right)^{1/2}$	$\left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \eta_{1,K}^2\right)^{1/2}$	$\left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \eta_{2,K}^2\right)^{1/2}$	$\left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \eta_{3,K}^2\right)^{1/2}$
1	0.2	2.056	1.911	1.114	1.219
2	0.1	2.501	2.219	1.180	1.871
4	0.05	2.675	2.369	1.220	2.007
8	0.025	1.928	1.701	0.907	1.443
16	0.0125	1.172	1.029	0.586	0.858
32	0.00625	0.675	0.594	0.369	0.463
64	0.003125	0.401	0.355	0.239	0.240
128	0.0015625	0.254	0.227	0.161	0.122
256	0.00078125	0.170	0.153	0.111	0.061
512	0.000390625	0.117	0.106	0.077	0.031
1024	0.000195313	0.081	0.073	0.054	0.015

$\alpha = 0.1$					
$N_x^d$	$h_x^d$	$\left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \eta_K^2\right)^{1/2}$	$\left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \eta_{1,K}^2\right)^{1/2}$	$\left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \eta_{2,K}^2\right)^{1/2}$	$\left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \eta_{3,K}^2\right)^{1/2}$
1	0.1	3.106	2.893	1.633	1.788
2	0.05	2.656	2.357	1.215	1.975
4	0.025	1.914	1.690	0.875	1.442
8	0.0125	1.150	1.011	0.551	0.861
16	0.00625	0.645	0.565	0.333	0.467
32	0.003125	0.362	0.318	0.203	0.244
64	0.0015625	0.206	0.182	0.124	0.127
128	0.00078125	0.126	0.113	0.078	0.070
256	0.000390625	0.122	0.113	0.076	0.044
512	0.000195313	0.153	0.143	0.095	0.034
1024	0.000097656	0.190	0.178	0.116	0.030

$\alpha = 0.05$					
$N_x^d$	$h_x^d$	$\left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \eta_K^2\right)^{1/2}$	$\left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \eta_{1,K}^2\right)^{1/2}$	$\left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \eta_{2,K}^2\right)^{1/2}$	$\left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \eta_{3,K}^2\right)^{1/2}$
1	0.05	3.812	3.552	1.948	2.180
2	0.025	2.182	1.976	1.050	1.477
4	0.0125	1.322	1.183	0.620	0.930
8	0.00625	0.794	0.701	0.394	0.546
16	0.003125	0.589	0.535	0.343	0.346
32	0.0015625	0.579	0.536	0.361	0.260
64	0.00078125	0.623	0.580	0.389	0.227
128	0.000390625	0.693	0.648	0.427	0.215
256	0.000195313	0.807	0.757	0.489	0.211
512	0.000097656	0.992	0.934	0.590	0.209
1024	0.000048828	1.282	1.211	0.752	0.208

TABLE 2.6 – Evolution de l'estimateur d'erreur en fonction du raffinement du maillage  $\mathcal{T}_h^d$  dans la direction  $x$  pour  $\epsilon = 0.025$  et pour des valeurs de  $\alpha$  plus grandes que 0.05. Pour chaque valeur de  $\alpha$ , le maillage de départ est tel que  $h_x^d = \alpha$ ,  $h_x^c = (1 - \alpha)/2$ ,  $h_y = 0.5$  et  $h_z = 0.5$ .

$\alpha = 0.025$					
$N_x^d$	$h_x^d$	$\left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \eta_K^2\right)^{1/2}$	$\left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \eta_{1,K}^2\right)^{1/2}$	$\left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \eta_{2,K}^2\right)^{1/2}$	$\left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \eta_{3,K}^2\right)^{1/2}$
1	0.025	3.795	3.513	1.908	2.155
2	0.0125	2.205	1.997	1.105	1.307
4	0.00625	1.533	1.372	0.873	0.893
8	0.003125	1.386	1.276	0.862	0.702
16	0.0015625	1.429	1.332	0.891	0.620
32	0.00078125	1.497	1.402	0.927	0.584
64	0.000390625	1.594	1.495	0.977	0.567
128	0.000195313	1.753	1.648	1.062	0.560
256	0.000097656	2.025	1.908	1.211	0.556
512	0.000048828	2.478	2.339	1.462	0.554
1024	0.000024414	3.198	3.024	1.868	0.553

$\alpha = 0.0125$					
$N_x^d$	$h_x^d$	$\left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \eta_K^2\right)^{1/2}$	$\left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \eta_{1,K}^2\right)^{1/2}$	$\left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \eta_{2,K}^2\right)^{1/2}$	$\left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \eta_{3,K}^2\right)^{1/2}$
1	0.0125	3.358	3.037	1.707	1.877
2	0.00625	2.406	2.165	1.410	1.331
4	0.003125	2.236	2.065	1.396	1.106
8	0.0015625	2.289	2.139	1.420	1.001
16	0.00078125	2.355	2.209	1.448	0.950
32	0.000390625	2.427	2.280	1.483	0.925
64	0.000195313	2.532	2.382	1.538	0.913
128	0.000097656	2.715	2.556	1.637	0.907
256	0.000048828	3.041	2.867	1.818	0.904
512	0.000024414	3.605	3.403	2.135	0.902
1024	0.000012207	4.528	4.278	2.658	0.901

$\alpha = 0.00625$					
$N_x^d$	$h_x^d$	$\left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \eta_K^2\right)^{1/2}$	$\left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \eta_{1,K}^2\right)^{1/2}$	$\left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \eta_{2,K}^2\right)^{1/2}$	$\left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \eta_{3,K}^2\right)^{1/2}$
1	0.00625	3.040	2.738	1.798	1.642
2	0.003125	2.860	2.643	1.788	1.402
4	0.0015625	2.918	2.728	1.807	1.275
8	0.00078125	2.980	2.798	1.827	1.212
16	0.000390625	3.029	2.848	1.845	1.181
32	0.000195313	3.081	2.900	1.870	1.165
64	0.000097656	3.161	2.976	1.912	1.158
128	0.000048828	3.306	3.114	1.993	1.154
256	0.000024414	3.573	3.367	2.143	1.152
512	0.000012207	4.052	3.822	2.414	1.151
1024	0.000006104	4.870	4.597	2.881	1.150

TABLE 2.7 – Evolution de l'estimateur d'erreur en fonction du raffinement du maillage  $\mathcal{T}_h^d$  dans la direction  $x$  pour  $\epsilon = 0.025$  et pour des valeurs de  $\alpha$  plus petites que 0.025. Pour chaque valeur de  $\alpha$ , le maillage de départ est tel que  $h_x^d = \alpha$ ,  $h_x^c = (1 - \alpha)/2$ ,  $h_y = 0.5$  et  $h_z = 0.5$ .

que

$$\begin{cases} -\epsilon \tilde{z}'' - \tilde{z}' = g & \text{dans } [0, 1], \\ \tilde{z}(0) = 0, \\ \tilde{z}(1) = 0. \end{cases} \quad (2.29)$$

où  $\tilde{u}$  est la solution du problème (2.21),  $u_h$  la solution du problème approché et  $g$  une fonction définie sur  $[0, 1]$  choisie de sorte que la formulation variationnelle associée au problème (2.29) fasse intervenir dans le second membre l'une ou l'autre des fonctionnelles définies par (1.75), c'est-à-dire

$$g(x) = \rho(x) \quad \text{ou} \quad g(x) = -\rho'(x), \quad (2.30)$$

où  $\rho$  est une fonction permettant de localiser le domaine  $\Omega_0$  sur lequel l'erreur sera contrôlée.

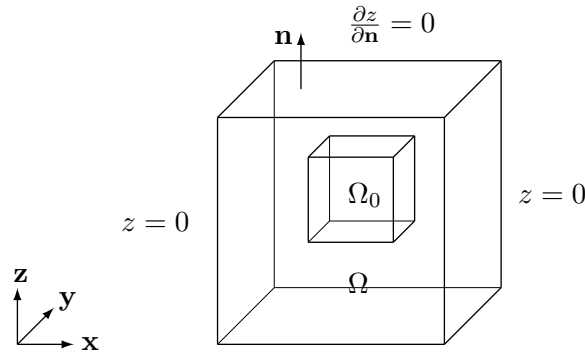


FIGURE 2.15 – Domaine de calcul  $\Omega$ , zone d'intérêt  $\Omega_0$  et conditions aux limites du problème (2.29).

Pour réaliser des essais numériques, nous allons considérer plusieurs cas.

Premier cas : on prend  $\Omega_0 = [0.9, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$  et  $\rho$  une fonction continue et linéaire par morceaux définie par

$$\rho(x) = \begin{cases} 0 & \text{dans } [0, 0.9], \\ (x - 0.9)/0.05 & \text{dans } [0.9, 0.95], \\ (1 - x)/0.05 & \text{dans } [0.95, 1]. \end{cases} \quad (2.31)$$

La figure 2.16 montre une représentation de la fonction  $\rho$ , de la solution exacte  $z$  du problème et de sa dérivée selon la variable  $x$ . La solution exacte  $z$  ainsi que sa dérivée ont été calculées avec le logiciel de calcul formel Maple. On peut voir que la solution  $z$  possède deux couches limites en  $x = 0$  et  $x = 1$  et son amplitude diminue quand  $\epsilon$  augmente. La dérivée de  $z$  varie principalement dans les zones de couche limite.

Deuxième cas : on prend  $\Omega_0 = [0.9, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$  et  $\rho$  la fonction caractéristique du domaine  $\Omega_0$  définie par

$$\rho(x) = \begin{cases} 0 & \text{dans } [0, 0.9], \\ 1 & \text{dans } [0.9, 1]. \end{cases} \quad (2.32)$$

La figure 2.17 montre une représentation de la fonction  $\rho$ , de la solution exacte  $z$  du problème et de sa dérivée selon la variable  $x$ . De même, la forme analytique de la solution exacte  $z$  ainsi que sa dérivée ont été calculées avec le logiciel de calcul formel Maple. Sur la figure, on remarque que la solution  $z$  est moins régulière que dans le premier cas.

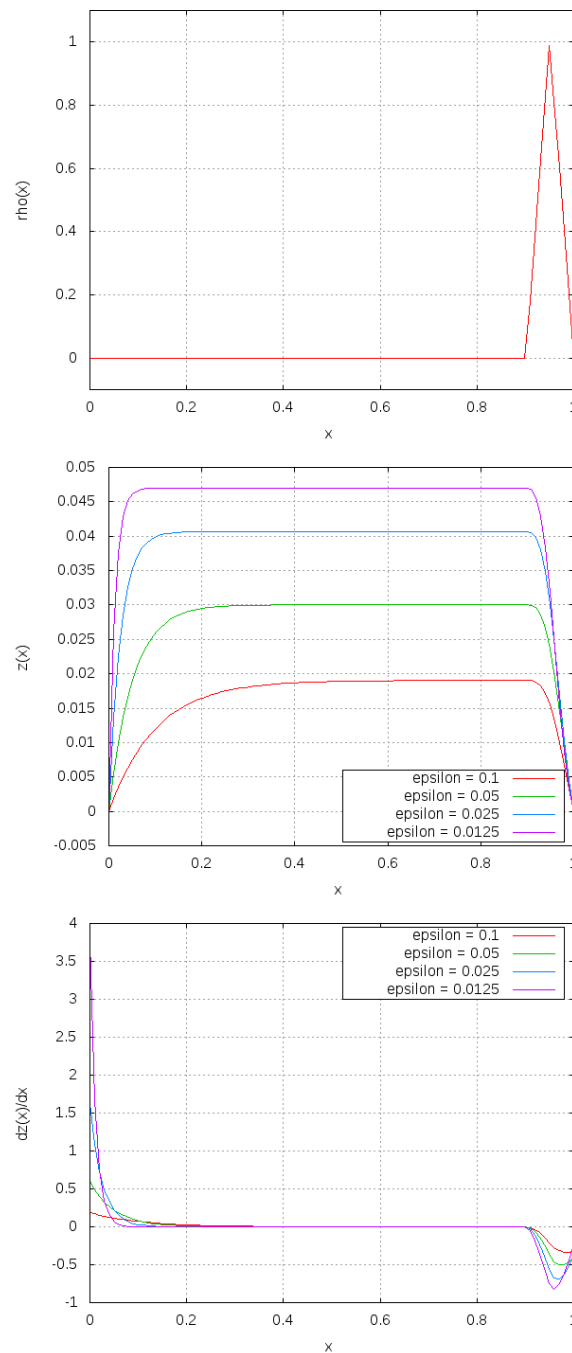


FIGURE 2.16 – De haut en bas : graphe de la fonction  $\rho$ , de la solution exacte  $\tilde{z}$  et du gradient exact de  $\tilde{z}$  pour différentes valeurs de  $\epsilon$ .

Troisième cas : on prend  $\Omega_0 = [0.5, 0.8] \times [0, 1] \times [0, 1]$  et  $\rho$  la fonction continue et linéaire par morceaux définie par

$$\rho(x) = \begin{cases} 0 & \text{dans } [0, 0.5], \\ (x - 0.5)/0.15 & \text{dans } [0.5, 0.65], \\ (0.8 - x)/0.15 & \text{dans } [0.65, 0.8], \\ 0 & \text{dans } [0.8, 1]. \end{cases} \quad (2.33)$$

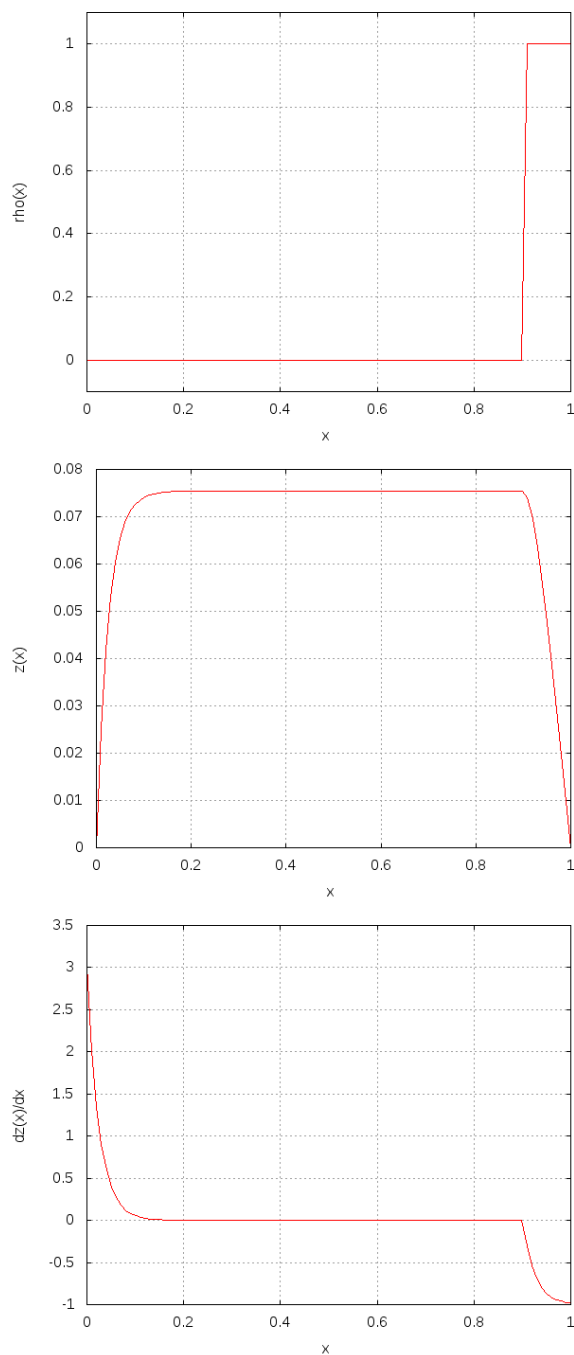


FIGURE 2.17 – De haut en bas : graphe de la fonction  $\rho$ , de la solution exacte  $\tilde{z}$  et du gradient exact de  $\tilde{z}$  pour  $\epsilon = 0.025$ .

La figure 2.18 montre une représentation de la fonction  $\rho$ , de la solution exacte  $z$  du problème et de sa dérivée selon la variable  $x$ . La solution exacte  $z$  ainsi que sa dérivée ont été calculées avec le logiciel de calcul formel Maple. Dans ce cas, la solution  $z$  ne possède qu'une seule couche limite en  $x = 0$ . Sa dérivée varie principalement de  $x = 0$  à  $x = 0.1$  et dans  $\Omega_0$ .



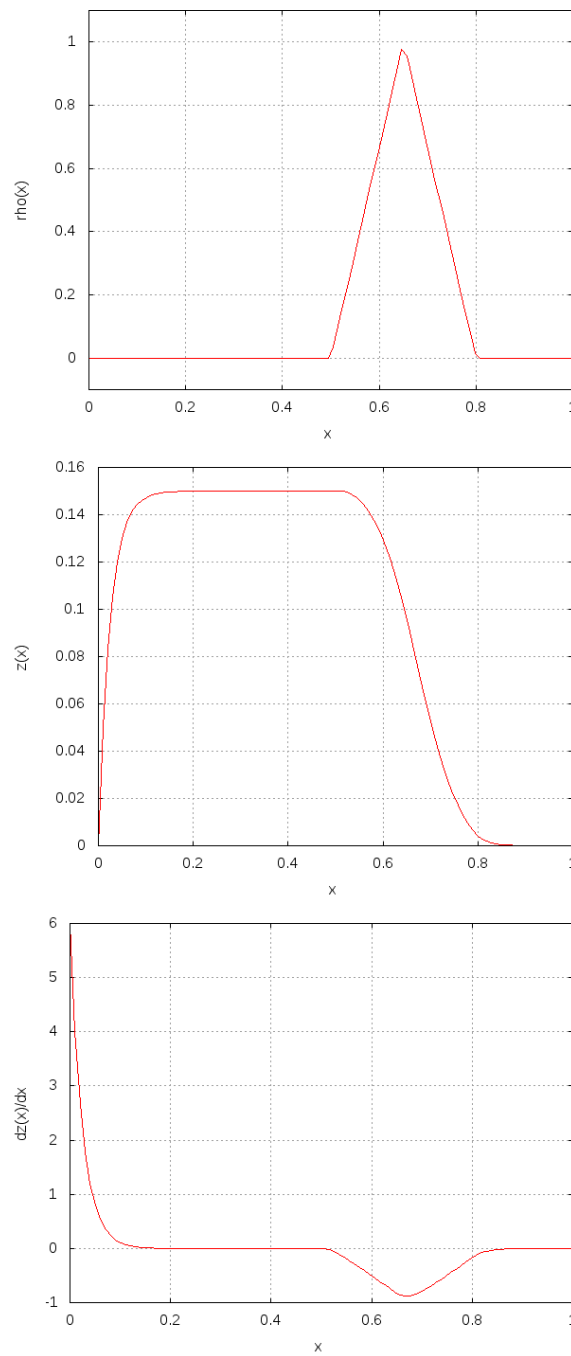


FIGURE 2.18 – De haut en bas : graphe de la fonction  $\rho$ , de la solution exacte  $\tilde{z}$  et du gradient exact de  $\tilde{z}$  pour  $\epsilon = 0.025$ .

## 2.5 Résultats pour l'estimateur *goal oriented*

### 2.5.1 Calcul effectif de l'estimateur d'erreur

On considère l'estimateur d'erreur  $\eta_K^2$  sur l'élément  $K$  donné par (2.17). On peut écrire

$$\eta_K^2 = \varphi_K(u_h)\omega_K(z - z_h)$$

où  $\omega_K(z - z_h)$  est donné par (2.6) et  $\varphi_K(u_h)$  est défini par

$$\varphi_K(u_h) = \left( \frac{1}{\epsilon} \|\Pi_K f - \mathbf{a} \cdot \nabla u_h\|_{L^2(K)} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 \left( \frac{|f_i|}{\lambda_{1,K} \lambda_{2,K} \lambda_{3,K}} \right)^{1/2} \|\nabla u_h \cdot \mathbf{n}\|_{L^2(f_i)} \right).$$

On définit  $\eta_{i,K}^2$  l'estimateur d'erreur dans la direction  $\mathbf{r}_{i,K}$ ,  $i = 1, 2, 3$ , par

$$\eta_{i,K}^2 = \varphi_K(u_h) \lambda_{i,K} \left( \mathbf{r}_{i,K}^T G_K(z - z_h) \mathbf{r}_{i,K} \right)^{1/2} \quad (2.34)$$

de sorte que l'on ait

$$\eta_K^2 = \left( \sum_{i=1}^3 \eta_{i,K}^2 \right)^{1/2}. \quad (2.35)$$

Le calcul de l'estimateur d'erreur  $\eta_K^2$  sur chaque élément  $K$  est donné par l'algorithme 2.

---

**Algorithme 2** Calcul de l'estimateur d'erreur *goal oriented*

---

$u_h$  donnée sur tous les éléments  $K$  du maillage  $\mathcal{T}_h$

$z_h$  donnée sur tous les éléments  $K$  du maillage  $\mathcal{T}_h$

**Pour** tous les éléments  $K$  du maillage  $\mathcal{T}_h$  :

Calcul de  $\mathbf{r}_{1,K}$ ,  $\mathbf{r}_{2,K}$ ,  $\mathbf{r}_{3,K}$ ,  $\lambda_{1,K}$ ,  $\lambda_{2,K}$ ,  $\lambda_{3,K}$  à partir des relations (2.2) et (2.3)

Calcul de la matrice  $\tilde{G}_K(z_h)$  définie par (2.20)

Calcul des estimateurs  $\eta_{1,K}^2$ ,  $\eta_{2,K}^2$ ,  $\eta_{3,K}^2$  à partir de l'expression (2.34)

Calcul de l'estimateur  $\eta_K^2$  à partir de la relation (2.35)

**Fin Pour**

---

## 2.5.2 Mesure de l'efficacité de l'estimateur d'erreur

Pour mesurer la fiabilité des estimateurs d'erreur  $\eta_K^2$  et  $\theta_K^2$ , on définit son *effectivity index*  $ei$  par

$$ei = \frac{\sum_{K \in \mathcal{T}_h} (\eta_K^2 + \theta_K^2)}{|J(u - u_h)|}$$

qui permet de comparer l'estimateur d'erreur avec la fonctionnelle de l'erreur. De plus, on pose

$$ei^{H^1} = \frac{\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \eta_K^2}{\epsilon \|\nabla(u - u_h)\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla(z - z_h)\|_{L^2(\Omega)}}. \quad (2.36)$$

D'après le théorème 6, si la condition (2.18) est vérifiée, nous avons le résultat suivant : il existe une constante  $C_1$  indépendante de  $f$ ,  $\epsilon$ ,  $\mathbf{a}$ , de la taille du maillage et du rapport d'aspect, et une constante  $C_2$  dépendante du Péclet donné par (2.10) telles que

$$C_1 \leq ei + h.o.t \quad \text{et} \quad ei^{H^1} \leq C_2 + h.o.t, \quad (2.37)$$

où  $h.o.t$  désigne un terme d'ordre supérieur. On rappelle que  $\|\nabla(u - u_h)\|_{L^2(\Omega)} = O(h)$  (voir par exemple [67]) et  $J(u - u_h) = O(h^2)$ . Donc, d'après les relations (2.37), on a

$$\left( \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \eta_K^2 \right) = O(h^2). \quad (2.38)$$

De plus, pour vérifier le comportement de l'estimateur de Zienkiewicz-Zhu donné par (1.44), on introduit l'*effectivity index*  $ei_u^{ZZ}$  pour la solution  $u$  défini par

$$ei_u^{ZZ} = \frac{\left( \int_{\Omega} |\nabla u_h - I_h \nabla u_h|^2 \right)^{1/2}}{\|\nabla(u - u_h)\|_{L^2(\Omega)}},$$

et l'*effectivity index*  $ei_z^{ZZ}$  pour la solution  $z$  défini par

$$ei_z^{ZZ} = \frac{\left( \int_{\Omega} |\nabla z_h - I_h \nabla z_h|^2 \right)^{1/2}}{\|\nabla(z - z_h)\|_{L^2(\Omega)}},$$

### 2.5.3 Evolution de l'estimateur en fonction du raffinement pour différentes fonctionnelles

#### 2.5.3.1 Premier cas

**Indépendance par rapport à la taille du maillage, la forme des éléments et les données des problèmes**

Comme pour l'estimation de l'erreur en semi-norme  $H^1$ , on veut vérifier la qualité de l'estimateur. On reprend les mêmes maillages que ceux qui ont été utilisés dans la section 2.3.3.1. Le tableau 2.8 montre l'évolution de l'estimateur d'erreur *goal oriented* avec  $\epsilon = 0.1$  lorsqu'on raffine un maillage dont les éléments ont un rapport d'aspect de 5 et dont le nombre de sommets est plus important dans la direction  $x$ . On remarque que l'estimateur ainsi que la fonctionnelle de l'erreur  $J(u - u_h)$  sont divisés par quatre chaque fois que les pas d'espace sont divisés par deux, comme l'annonçait la relation (2.38). De plus, les estimateurs de Zienkiewicz-Zhu pour les deux problèmes sont asymptotiquement exacts et l'*effectivity index* de l'estimateur *goal oriented* diminue à une vitesse qui diminue également. Ce rapport  $ei$  semble minoré par une constante et le rapport  $ei^{H^1}$  semble majoré comme l'indique la relation (2.37). Sur la figure 2.19, on peut voir la solution approchée du problème dual  $z_h$  calculée sur différents maillages dont les éléments ont le même rapport d'aspect. La solution approchée  $z_h$  tend bien vers la solution exacte  $z$  lorsqu'on raffine le maillage dans toutes les directions.

A présent, on considère le maillage dont les éléments ont un rapport d'aspect de 50. Le tableau 2.9 montre les résultats obtenus après plusieurs raffinements pour  $\epsilon = 0.1$  et  $\epsilon = 0.01$ . De nouveau, les estimateurs et les fonctionnelles des erreurs sont divisés par quatre lorsque les pas d'espace sont divisés par deux. De plus, les estimateurs de Zienkiewicz-Zhu sont asymptotiquement exacts et on voit sur la figure 2.19 que la solution est plus précise lorsque le rapport d'aspect des éléments est plus grand.

$\epsilon = 0.1$						
$N_x \times N_y \times N_z$	$\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \eta_K^2$	$\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \theta_K^2$	$J(u - u_h)$	$\ \nabla(u - u_h)\ _{L^2(\Omega)}$	$\ \nabla(z - z_h)\ _{L^2(\Omega)}$	sommets
$20 \times 4 \times 4$	0.00757	3.405e-07	0.000534	0.310	0.032	525
$40 \times 8 \times 8$	0.00128	7.961e-09	0.000135	0.159	0.012	3321
$80 \times 16 \times 16$	0.00027	2.312e-10	0.000034	0.080	0.005	23409
$160 \times 32 \times 32$	0.00007	7.095e-12	0.000008	0.040	0.003	175329

$\epsilon = 0.1$				
$N_x \times N_y \times N_z$	$ei_u^{ZZ}$	$ei_z^{ZZ}$	$ei^{H^1}$	ei
$20 \times 4 \times 4$	0.942	1.158	7.631	14.176
$40 \times 8 \times 8$	0.988	1.093	6.709	9.479
$80 \times 16 \times 16$	1.002	1.037	6.750	8.064
$160 \times 32 \times 32$	1.003	1.014	5.833	7.703

TABLE 2.8 – Evolution de l'estimateur d'erreur en fonction du raffinement du maillage pour  $\epsilon = 0.1$  et un rapport d'aspect de 5.

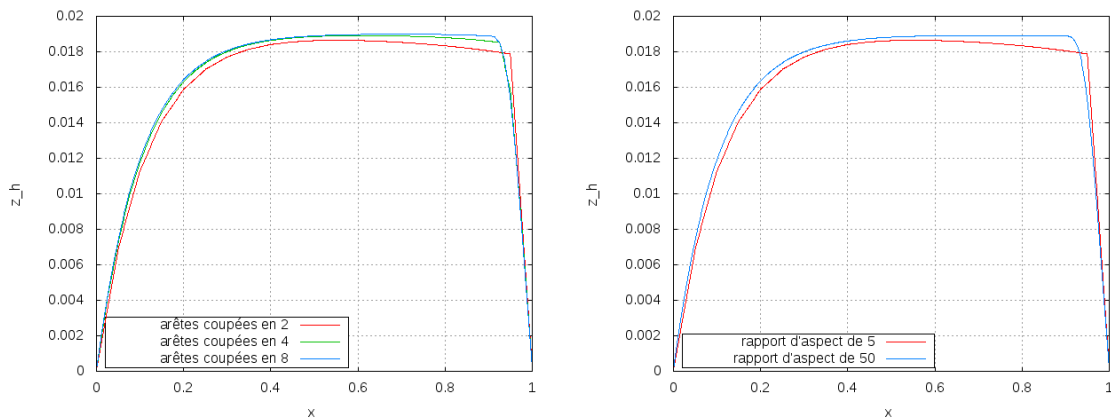


FIGURE 2.19 – A gauche : graphe de la solution approchée  $z_h$  calculée sur les maillages dont les éléments ont un rapport d'aspect de 5 résultants d'un découpage des arêtes en 2, 4 et 8 dans toutes les directions. A droite : comparaison de la solution approchée  $z_h$  calculée sur les maillages dont les éléments ont un rapport d'aspect de 5 et 50 et les arêtes coupées en deux dans toutes les directions.

Enfin, avec le tableau 2.10, on peut conclure que l'estimateur de Zienkiewicz-Zhu reste asymptotiquement exact pour différents rapports d'aspect des éléments et différentes valeurs de  $\epsilon$ . Par ailleurs, la figure 2.20 confirme que la vitesse de convergence de l'estimateur est indépendante du rapport d'aspect et du paramètre de diffusion  $\epsilon$ . De plus, on peut remarquer que l'*effectivity index*  $ei$  dépend du paramètre  $\epsilon$  et du rapport d'aspect du maillage, et donc du Péclet, comme l'indiquait la relation (2.37).

$\epsilon = 0.1$						
$N_x \times N_y \times N_z$	$\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \eta_K^2$	$\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \theta_K^2$	$J(u - u_h)$	$\ \nabla(u - u_h)\ _{L^2(\Omega)}$	$\ \nabla(z - z_h)\ _{L^2(\Omega)}$	sommets
$100 \times 2 \times 2$	0.000217	7.714e-09	1.993e-05	0.0592	0.00451	909
$200 \times 4 \times 4$	0.000069	2.384e-10	0.529e-05	0.0312	0.00214	5025
$400 \times 8 \times 8$	0.000015	7.431e-12	0.136e-05	0.0160	0.00104	32481
$800 \times 16 \times 16$	0.000003	2.321e-13	0.034e-05	0.0080	0.00052	231489

$\epsilon = 0.01$						
$N_x \times N_y \times N_z$	$\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \eta_K^2$	$\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \theta_K^2$	$J(u - u_h)$	$\ \nabla(u - u_h)\ _{L^2(\Omega)}$	$\ \nabla(z - z_h)\ _{L^2(\Omega)}$	sommets
$100 \times 2 \times 2$	0.00164	1.494e-06	8.221e-05	1.780	0.0810	909
$200 \times 4 \times 4$	0.00045	3.717e-08	1.726e-05	0.961	0.0448	5025
$400 \times 8 \times 8$	0.00011	1.100e-09	0.395e-05	0.497	0.0238	32481
$800 \times 16 \times 16$	0.00003	3.396e-11	0.094e-05	0.252	0.0122	231489

$\epsilon = 0.1$				
$N_x \times N_y \times N_z$	$ei_u^{ZZ}$	$ei_z^{ZZ}$	$ei^{H^1}$	ei
$100 \times 2 \times 2$	0.997	1.06	8.128	10.912
$200 \times 4 \times 4$	1.013	1.04	10.334	13.117
$400 \times 8 \times 8$	1.013	1.02	9.014	10.771
$800 \times 16 \times 16$	1.009	1.01	7.212	8.702

$\epsilon = 0.01$				
$N_x \times N_y \times N_z$	$ei_u^{ZZ}$	$ei_z^{ZZ}$	$ei^{H^1}$	ei
$100 \times 2 \times 2$	0.834	0.885	1.137	19.965
$200 \times 4 \times 4$	0.939	0.952	1.045	25.951
$400 \times 8 \times 8$	0.982	0.985	0.930	29.110
$800 \times 16 \times 16$	0.996	0.997	0.980	30.786

TABLE 2.9 – Evolution de l'estimateur d'erreur en fonction du raffinement du maillage pour différentes valeurs de  $\epsilon$  et un rapport d'aspect de 50.

$\epsilon = 0.1$						
$N_x \times N_y \times N_z$	$\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \eta_K^2$	$\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \theta_K^2$	$J(u - u_h)$	$\ \nabla(u - u_h)\ _{L^2(\Omega)}$	$\ \nabla(z - z_h)\ _{L^2(\Omega)}$	sommets
$1000 \times 2 \times 2$	7.649e-06	7.605e-12	1.989e-07	0.00593	0.000441	9009
$2000 \times 4 \times 4$	4.526e-06	2.376e-13	0.529e-07	0.00312	0.000213	50025
$4000 \times 8 \times 8$	0.809e-06	7.426e-15	0.136e-07	0.00160	0.000104	324081

$\epsilon = 0.01$						
$N_x \times N_y \times N_z$	$\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \eta_K^2$	$\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \theta_K^2$	$J(u - u_h)$	$\ \nabla(u - u_h)\ _{L^2(\Omega)}$	$\ \nabla(z - z_h)\ _{L^2(\Omega)}$	sommets
$1000 \times 2 \times 2$	3.813e-05	1.120e-09	7.790e-07	0.184	0.00877	9009
$2000 \times 4 \times 4$	1.887e-05	3.474e-11	1.710e-07	0.097	0.00469	50025
$4000 \times 8 \times 8$	0.547e-05	1.084e-12	0.452e-07	0.050	0.00242	324081

$\epsilon = 0.001$						
$N_x \times N_y \times N_z$	$\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \eta_K^2$	$\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \theta_K^2$	$J(u - u_h)$	$\ \nabla(u - u_h)\ _{L^2(\Omega)}$	$\ \nabla(z - z_h)\ _{L^2(\Omega)}$	sommets
$1000 \times 2 \times 2$	3.521e-05	1.660e-09	5.507e-07	5.627	0.257	9009
$2000 \times 4 \times 4$	0.947e-05	3.929e-11	1.382e-07	3.035	0.144	50025
$4000 \times 8 \times 8$	0.264e-05	1.151e-12	0.347e-07	1.569	0.077	324081

$\epsilon = 0.1$				
$N_x \times N_y \times N_z$	$ei_u^{ZZ}$	$ei_z^{ZZ}$	$ei^{H^1}$	ei
$1000 \times 2 \times 2$	1.003	1.056	29.2490	38.447
$2000 \times 4 \times 4$	1.016	1.036	68.1052	85.527
$4000 \times 8 \times 8$	1.014	1.021	48.618	59.690

$\epsilon = 0.01$				
$N_x \times N_y \times N_z$	$ei_u^{ZZ}$	$ei_z^{ZZ}$	$ei^{H^1}$	ei
$1000 \times 2 \times 2$	0.988	0.981	2.363	48.940
$2000 \times 4 \times 4$	1.003	0.999	4.148	110.321
$4000 \times 8 \times 8$	1.004	1.002	4.520	121.095

$\epsilon = 0.001$				
$N_x \times N_y \times N_z$	$ei_u^{ZZ}$	$ei_z^{ZZ}$	$ei^{H^1}$	ei
$1000 \times 2 \times 2$	0.834	0.884	0.02435	63.944
$2000 \times 4 \times 4$	0.939	0.953	0.02167	68.546
$4000 \times 8 \times 8$	0.982	0.985	0.02185	76.001

TABLE 2.10 – Evolution de l'estimateur d'erreur en fonction du raffinement du maillage pour différentes valeurs de  $\epsilon$  et un rapport d'aspect de 500.

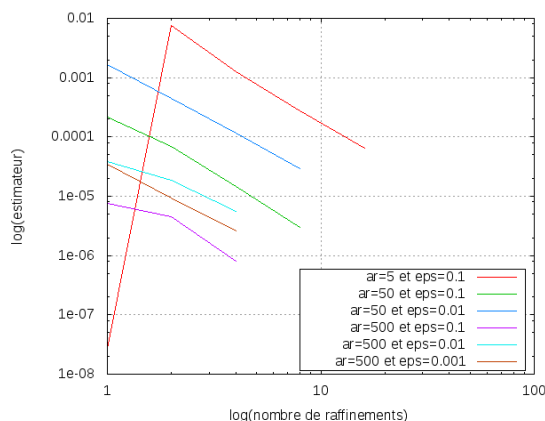


FIGURE 2.20 – Evolution en échelle logarithmique de l'estimateur d'erreur en fonction du raffinement du maillage pour différents rapports d'aspect et différentes valeurs de  $\epsilon$ .

### Maillage des couches limites

La solution du problème dual  $z$  possède deux couches limites et la solution du problème modèle  $u$  possède une seule couche limite. Puisque l'estimateur d'erreur dépend à la fois de la solution approchée  $z_h$  et de la solution approchée  $u_h$ , il semble logique qu'il faille construire un maillage prenant en compte les variations de ces deux fonctions, et en particulier leurs couches limites. Pour cela, on divise le domaine selon la direction  $x$  en trois sous-domaines distincts (voir figure 2.21). Soient  $\Omega_d$  et  $\Omega_g$  des sous-domaines de  $\Omega$  contenant des couches limites et  $\Omega_c$  le complémentaire de  $\Omega_g \cup \Omega_d$  dans  $\Omega$ . Soit  $\alpha \in [0, 1]$  la taille dans la direction  $x$  de  $\Omega_g$  et  $\Omega_d$ . Le sous-domaine  $\Omega_g$  est donné par  $[0, \alpha] \times [0, 1] \times [0, 1]$  et le sous-domaine  $\Omega_d$  est donné par  $[1 - \alpha, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$ . Soient  $h_x^d$  le pas d'espace dans la direction  $x$  dans  $\Omega_d$  et  $h_x^c$  le pas d'espace dans la direction  $x$  dans  $\Omega_c$ . On décide que les sous-domaines  $\Omega_g$  et  $\Omega_d$  sont discrétisés de la même manière, c'est-à-dire qu'ils ont le même pas d'espace  $h_x^d$  dans la direction  $x$  (voir figure 2.22). Soient  $N_x^d = \alpha/h_x^d$  et  $N_x^c = (1 - 2\alpha)/h_x^c$  les nombres de subdivisions dans la direction  $x$  dans chaque sous-domaine.

On construit un maillage  $\mathcal{T}_h$  du domaine  $\Omega$  tel que  $\alpha = 0.1$ ,  $h_x^d = 0.1$ ,  $h_x^c = 0.4$ ,  $h_y = 0.5$  et  $h_z = 0.5$ . Soient  $\mathcal{T}_h^d$ ,  $\mathcal{T}_h^g$  et  $\mathcal{T}_h^c$  les maillages des sous-domaines  $\Omega_d$ ,  $\Omega_g$  et  $\Omega_c$  respectivement. On raffine le maillage  $\mathcal{T}_h$  ainsi construit dans toutes les directions et à plusieurs reprises et on résout sur chacun d'entre eux les problèmes (2.21) et (2.29) avec la fonction  $\rho$  définie par (2.31) pour différentes valeurs de  $\epsilon$  :  $\epsilon = 0.1$ ,  $\epsilon = 0.05$ ,  $\epsilon = 0.025$  et  $\epsilon = 0.0125$ . Les résultats des calculs des estimateurs sont donnés dans les tableaux 2.11 et 2.12. On observe que l'estimateur d'erreur de Zienkiewicz-Zhu est asymptotiquement exact dans tous les cas et les estimateurs d'erreur goal oriented convergent au bon ordre, c'est-à-dire qu'ils sont divisés par quatre quand les pas d'espace sont divisés par deux, ce qui est confirmé sur la figure 2.23. Par ailleurs, sur la même figure, on peut voir que l'effectivity index de l'estimateur pour chaque valeur de  $\epsilon$  semble être minoré comme l'indique la relation (2.37) mais aucune borne supérieure n'a été montrée pour ce rapport  $ei$  et on voit sur la figure que pour une valeur de  $\epsilon$  suffisamment petite, l'effectivity index ne semble pas être majoré.

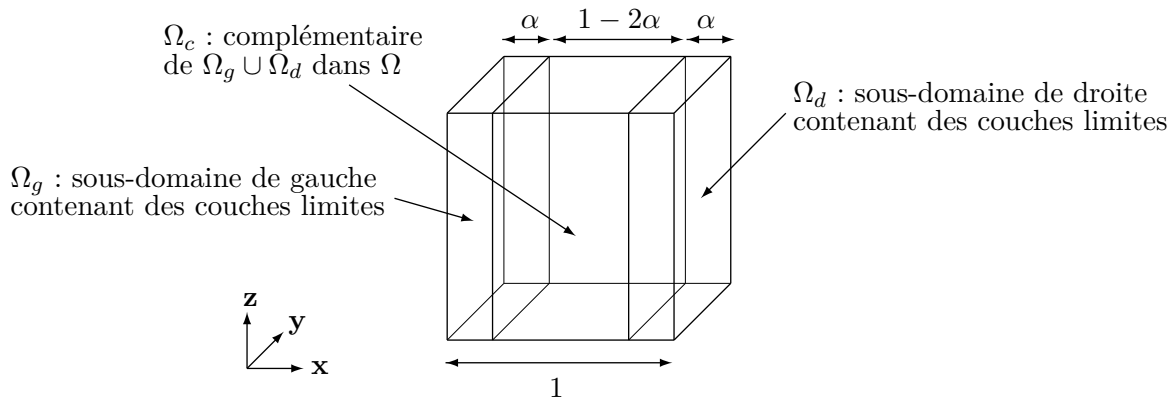


FIGURE 2.21 – Schéma de la division dans la direction  $x$  du domaine  $\Omega$  en trois sous-domaines  $\Omega_d$  (à droite),  $\Omega_g$  (à gauche) et  $\Omega_c$  (le complémentaire de  $\Omega_g \cup \Omega_d$ ). Les sous-domaines  $\Omega_d$  et  $\Omega_g$  sont de taille  $\alpha$  dans la direction  $x$ .

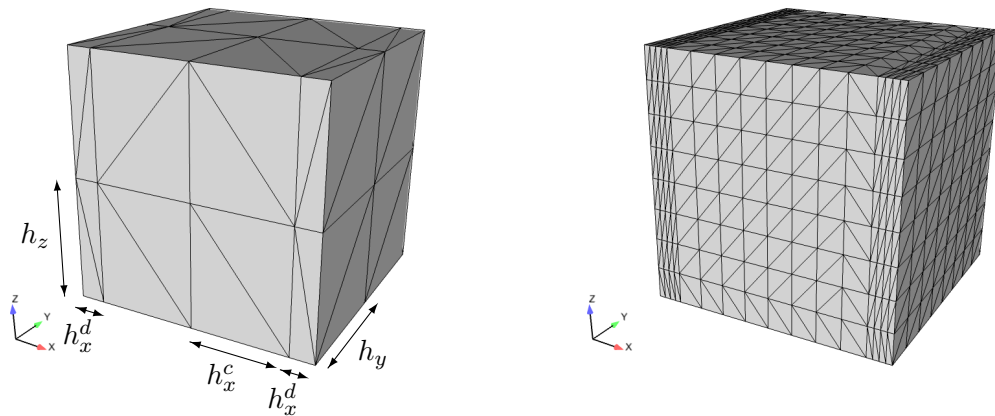


FIGURE 2.22 – A gauche : maillage dont le pas d'espace dans la direction  $x$  est plus petit dans un voisinage des couches limites. A droite : maillage dont toutes les arêtes ont été découpées en quatre dans toutes les directions.



$\epsilon = 0.1$					
$(N_x^d + N_x^c + N_x^d) \times N_y \times N_z$	$\sum_{K \in \mathcal{T}_h} (\eta_K^2 + \theta_K^2)$	$J(u - u_h)$	$\ \nabla(u - u_h)\ _{L^2(\Omega)}$	$\ \nabla(z - z_h)\ _{L^2(\Omega)}$	sommets
$(2 + 4 + 2) \times 4 \times 4$	0.00818	0.000509	0.490	0.0342	225
$(4 + 8 + 4) \times 8 \times 8$	0.00128	0.000133	0.267	0.0125	1377
$(8 + 16 + 8) \times 16 \times 16$	0.00027	0.000034	0.138	0.0058	9537
$(16 + 32 + 16) \times 32 \times 32$	0.00007	0.000008	0.070	0.0028	70785

$\epsilon = 0.05$					
$(N_x^d + N_x^c + N_x^d) \times N_y \times N_z$	$\sum_{K \in \mathcal{T}_h} (\eta_K^2 + \theta_K^2)$	$J(u - u_h)$	$\ \nabla(u - u_h)\ _{L^2(\Omega)}$	$\ \nabla(z - z_h)\ _{L^2(\Omega)}$	sommets
$(2 + 4 + 2) \times 4 \times 4$	0.0166	0.00126	0.877	0.0655	225
$(4 + 8 + 4) \times 8 \times 8$	0.0024	0.00031	0.485	0.0248	1377
$(8 + 16 + 8) \times 16 \times 16$	0.0006	0.00007	0.253	0.0115	9537
$(16 + 32 + 16) \times 32 \times 32$	0.00015	0.00002	0.128	0.0057	70785

$\epsilon = 0.025$					
$(N_x^d + N_x^c + N_x^d) \times N_y \times N_z$	$\sum_{K \in \mathcal{T}_h} (\eta_K^2 + \theta_K^2)$	$J(u - u_h)$	$\ \nabla(u - u_h)\ _{L^2(\Omega)}$	$\ \nabla(z - z_h)\ _{L^2(\Omega)}$	sommets
$(2 + 4 + 2) \times 4 \times 4$	0.0250	0.00246	2.128	0.132	225
$(4 + 8 + 4) \times 8 \times 8$	0.0043	0.00049	1.209	0.059	1377
$(8 + 16 + 8) \times 16 \times 16$	0.0012	0.00011	0.633	0.029	9537
$(16 + 32 + 16) \times 32 \times 32$	0.0003	0.00003	0.322	0.015	70785

$\epsilon = 0.0125$					
$(N_x^d + N_x^c + N_x^d) \times N_y \times N_z$	$\sum_{K \in \mathcal{T}_h} (\eta_K^2 + \theta_K^2)$	$J(u - u_h)$	$\ \nabla(u - u_h)\ _{L^2(\Omega)}$	$\ \nabla(z - z_h)\ _{L^2(\Omega)}$	sommets
$(2 + 4 + 2) \times 4 \times 4$	0.0288	0.00456	4.895	0.268	225
$(4 + 8 + 4) \times 8 \times 8$	0.0063	0.00059	3.101	0.154	1377
$(8 + 16 + 8) \times 16 \times 16$	0.0017	0.00010	1.732	0.084	9537
$(16 + 32 + 16) \times 32 \times 32$	0.0005	0.00002	0.899	0.043	70785

TABLE 2.11 – Evolution de l'estimateur d'erreur goal oriented en fonction du raffinement du maillage pour différentes valeurs de  $\epsilon$ . Le maillage initial est défini par  $\alpha = 0.1$ ,  $h_x^d = 0.1$ ,  $h_x^c = 0.4$ ,  $h_y = 0.5$  et  $h_z = 0.5$ .

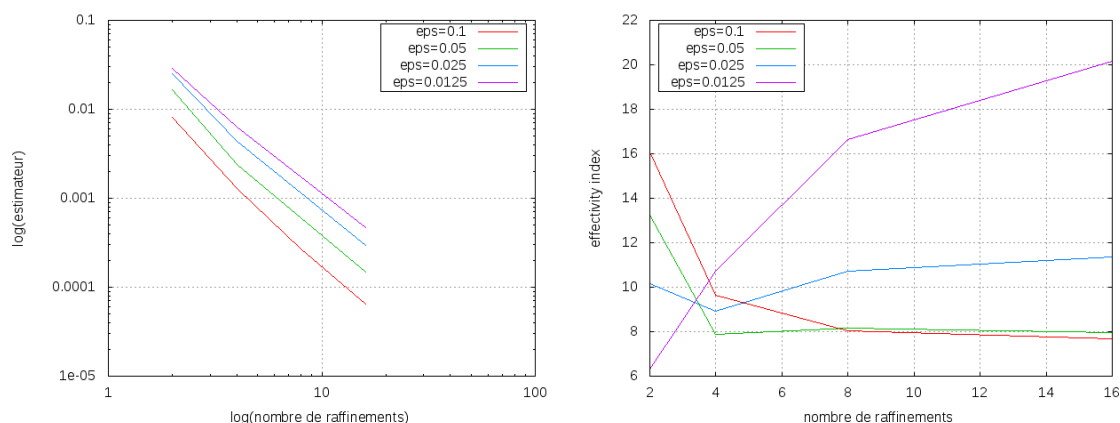


FIGURE 2.23 – A gauche : évolution en échelle logarithmique de l'estimateur d'erreur en fonction du raffinement du maillage pour différentes valeurs de  $\epsilon$ . A droite : évolution de l'effectivity index en fonction du raffinement du maillage.

$\epsilon = 0.1$			
$(N_x^d + N_x^c + N_x^d) \times N_y \times N_z$	$ei_u^{ZZ}$	$ei_z^{ZZ}$	$ei$
$(2 + 4 + 2) \times 4 \times 4$	0.850	1.066	16.086
$(4 + 8 + 4) \times 8 \times 8$	0.924	1.055	9.626
$(8 + 16 + 8) \times 16 \times 16$	0.974	1.028	8.043
$(16 + 32 + 16) \times 32 \times 32$	0.994	1.012	7.679

$\epsilon = 0.05$			
$(N_x^d + N_x^c + N_x^d) \times N_y \times N_z$	$ei_u^{ZZ}$	$ei_z^{ZZ}$	$ei$
$(2 + 4 + 2) \times 4 \times 4$	0.802	0.959	13.229
$(4 + 8 + 4) \times 8 \times 8$	0.910	1.009	7.892
$(8 + 16 + 8) \times 16 \times 16$	0.966	1.007	8.144
$(16 + 32 + 16) \times 32 \times 32$	0.991	1.004	7.965

$\epsilon = 0.025$			
$(N_x^d + N_x^c + N_x^d) \times N_y \times N_z$	$ei_u^{ZZ}$	$ei_z^{ZZ}$	$ei$
$(2 + 4 + 2) \times 4 \times 4$	0.637	0.780	10.156
$(4 + 8 + 4) \times 8 \times 8$	0.835	0.910	8.913
$(8 + 16 + 8) \times 16 \times 16$	0.939	0.963	10.729
$(16 + 32 + 16) \times 32 \times 32$	0.982	0.989	11.363

$\epsilon = 0.0125$			
$(N_x^d + N_x^c + N_x^d) \times N_y \times N_z$	$ei_u^{ZZ}$	$ei_z^{ZZ}$	$ei$
$(2 + 4 + 2) \times 4 \times 4$	0.385	0.510	6.316
$(4 + 8 + 4) \times 8 \times 8$	0.646	0.704	10.718
$(8 + 16 + 8) \times 16 \times 16$	0.836	0.851	16.652
$(16 + 32 + 16) \times 32 \times 32$	0.939	0.943	20.167

TABLE 2.12 – Evolution des effectivity index pour l'estimateur d'erreur goal oriented en fonction du raffinement du maillage pour différentes valeurs de  $\epsilon$ . Le maillage initial est défini par  $\alpha = 0.1$ ,  $h_x^d = 0.1$ ,  $h_x^c = 0.4$ ,  $h_y = 0.5$  et  $h_z = 0.5$ .

### Raffinement des couches limites dans une direction privilégiée

On va maintenant comparer différents raffinements du maillage comme indiqué sur la figure 2.24. On va d'abord raffiner le maillage dans toutes les directions, et ensuite raffiner seulement  $\Omega_g$  et  $\Omega_d$  dans toutes les directions et dans la direction  $x$  en particulier. Les résultats sont donnés dans les tableaux 2.13 et 2.14 pour  $\epsilon = 0.025$  et  $\alpha = 0.1$ . On remarque que lorsqu'on ne raffine que dans  $\Omega_g$  et  $\Omega_d$ , l'estimateur de Zienkiewicz-Zhu n'est plus asymptotiquement exact. Par ailleurs, quand on raffine le maillage dans  $\Omega_g$  et  $\Omega_d$  et dans la direction  $x$  seulement, les semi-normes  $H^1$  des erreurs des problèmes dual et modèle sont proches de celles obtenus sur des maillages complètement raffinés dans toutes les directions comme on l'a vu dans le tableau 2.5, alors que la différence entre les estimateurs d'erreur *goal oriented* est plus grande entre ces deux types de raffinement (voir figure 2.25). D'après la relation (2.37), nous n'avons pas équivalence entre la fonctionnelle de l'erreur et l'estimateur, donc bien que l'erreur soit la plus grande dans les couches limites et dans la direction  $x$ , on ne peut pas savoir si l'estimateur varie de la même manière, ce qui explique la différence que l'on observe dans le tableau 2.13 par rapport à ce que l'on a observé pour l'estimateur de la semi-norme  $H^1$  de l'erreur. On peut aussi remarquer que si le maillage n'est raffiné que dans  $\Omega_d$  la solution d'un des deux problèmes que l'on résout est fautive comme on peut le voir dans le tableau 2.13 ou sur la figure 2.25 qui affiche la solution calculée  $z_h$  pour les différents types de raffinement.

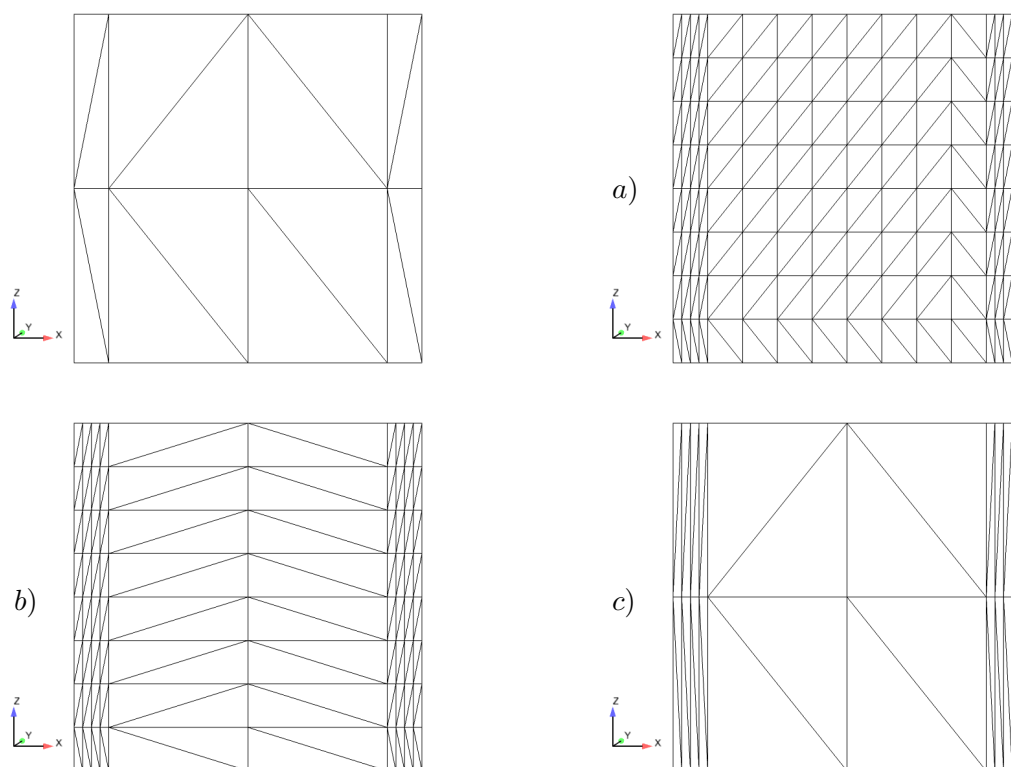


FIGURE 2.24 – En haut à gauche : coupe du maillage initial en  $y = 0$ . Les trois figures montrent trois types de raffinement du maillage. Le raffinement de type a) correspond à un découpage des arêtes dans tout le domaine  $\Omega$  et dans toutes les directions. Le raffinement de type b) correspond à un découpage des arêtes dans les sous-domaine  $\Omega_g$  et  $\Omega_d$  et dans toutes les directions. Le raffinement de type c) correspond à un découpage des arêtes dans les sous-domaines  $\Omega_g$  et  $\Omega_d$  et dans la direction  $x$  seulement.

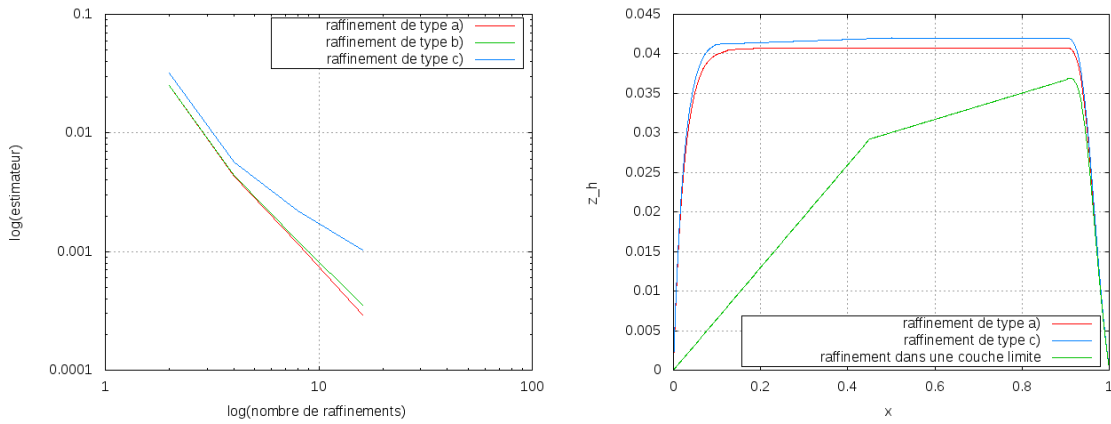


FIGURE 2.25 – A gauche : évolution en échelle logarithmique de l'estimateur en fonction du raffinement du maillage pour différents types de raffinement. A droite : solution approchée  $z_h$  calculée sur le maillage dont les arêtes ont été coupées en 16 avec un raffinement de type a), c) et un raffinement dans  $\Omega_d$  dans la direction  $x$  seulement.

### 2.5.3.2 Deuxième cas

On considère les mêmes maillages que précédemment. Pour ce cas, on a considéré une fonction  $\rho$  discontinue. Les tableaux 2.15 et 2.16 montrent que la fonctionnelle de l'erreur varie au bon ordre au cours des raffinements et que l'estimateur ne converge pas assez vite. Ceci peut s'expliquer par le fait que l'estimateur d'erreur de Zienkiewicz-Zhu pour le problème dual converge trop lentement. Néanmoins, on peut voir sur la figure 2.26 que l'ordre de convergence de cet estimateur est très proche de ce que l'on attend.

### 2.5.3.3 Troisième cas

On considère les mêmes maillages que précédemment. Dans ce cas, on considère une fonction  $\rho$  continue mais un domaine d'intérêt  $\Omega_0 = [0.5, 0.8]$ , c'est-à-dire en dehors de la couche limite de la solution  $u$ . Les tableaux 2.17 et 2.18 montrent que l'estimateur ne varie pas correctement, de même pour la fonctionnelle de l'erreur. En effet, on cherche à contrôler la solution  $u$  dans une partie du domaine  $\Omega$  où elle ne varie pas. On voit très clairement sur la figure 2.26 que l'ordre de convergence de l'estimateur n'est pas du tout correct.

Raffinement de type a)					
$(N_x^d + N_x^c + N_x^d) \times N_y \times N_z$	$\sum_{K \in \mathcal{T}_h} (\eta_K^2 + \theta_K^2)$	$J(u - u_h)$	$\ \nabla(u - u_h)\ _{L^2(\Omega)}$	$\ \nabla(z - z_h)\ _{L^2(\Omega)}$	sommets
$(2 + 4 + 2) \times 4 \times 4$	0.0250	0.00246	2.128	0.132	225
$(4 + 8 + 4) \times 8 \times 8$	0.0043	0.00049	1.209	0.059	1377
$(8 + 16 + 8) \times 16 \times 16$	0.0012	0.00011	0.633	0.029	9537
$(16 + 32 + 16) \times 32 \times 32$	0.0003	0.00003	0.322	0.015	70785

Raffinement de type b)					
$(N_x^d + N_x^c + N_x^d) \times N_y \times N_z$	$\sum_{K \in \mathcal{T}_h} (\eta_K^2 + \theta_K^2)$	$J(u - u_h)$	$\ \nabla(u - u_h)\ _{L^2(\Omega)}$	$\ \nabla(z - z_h)\ _{L^2(\Omega)}$	sommets
$(2 + 2 + 2) \times 4 \times 4$	0.0250	0.00246	2.134	0.132	175
$(4 + 2 + 4) \times 8 \times 8$	0.0044	0.00048	1.217	0.060	891
$(8 + 2 + 8) \times 16 \times 16$	0.0012	0.00010	0.650	0.030	5491
$(16 + 2 + 16) \times 32 \times 32$	0.0004	0.00002	0.355	0.016	38115
$(32 + 2 + 32) \times 64 \times 64$	0.0001	-0.000002	0.222	0.010	283075

Raffinement de type c)					
$(N_x^d + N_x^c + N_x^d) \times N_y \times N_z$	$\sum_{K \in \mathcal{T}_h} (\eta_K^2 + \theta_K^2)$	$J(u - u_h)$	$\ \nabla(u - u_h)\ _{L^2(\Omega)}$	$\ \nabla(z - z_h)\ _{L^2(\Omega)}$	sommets
$(2 + 2 + 2) \times 2 \times 2$	0.0320	0.00267	1.989	0.130	63
$(4 + 2 + 4) \times 2 \times 2$	0.0057	0.00062	1.075	0.057	99
$(8 + 2 + 8) \times 2 \times 2$	0.0022	0.00015	0.561	0.028	171
$(16 + 2 + 16) \times 2 \times 2$	0.0010	0.00004	0.306	0.015	315
$(32 + 2 + 32) \times 2 \times 2$	0.0005	0.00001	0.195	0.009	603
$(64 + 2 + 64) \times 2 \times 2$	0.0003	0.000002	0.155	0.007	1179
$(128 + 2 + 128) \times 2 \times 2$	0.0002	0.0000004	0.143	0.006	2331
$(256 + 2 + 256) \times 2 \times 2$	0.0001	-0.0000001	0.140	0.006	4635
$(512 + 2 + 512) \times 2 \times 2$	0.00008	-0.0000002	0.139	0.006	9243
$(1024 + 2 + 1024) \times 2 \times 2$	0.0001	-0.0000002	0.139	0.006	18459

Raffinement dans $\Omega_d$ seulement et dans la direction horizontale					
$(N_x^d + N_x^c + N_x^d) \times N_y \times N_z$	$\sum_{K \in \mathcal{T}_h} (\eta_K^2 + \theta_K^2)$	$J(u - u_h)$	$\ \nabla(u - u_h)\ _{L^2(\Omega)}$	$\ \nabla(z - z_h)\ _{L^2(\Omega)}$	sommets
$(1 + 2 + 2) \times 2 \times 2$	0.0272	0.00273	2.088	0.342	45
$(1 + 2 + 4) \times 2 \times 2$	0.0073	0.00057	1.137	0.331	63
$(1 + 2 + 8) \times 2 \times 2$	0.0045	0.00013	0.597	0.330	99
$(1 + 2 + 16) \times 2 \times 2$	0.0037	0.00003	0.327	0.330	171
$(1 + 2 + 32) \times 2 \times 2$	0.0035	0.00001	0.208	0.329	315
$(1 + 2 + 64) \times 2 \times 2$	0.0035	0.000004	0.165	0.329	603
$(1 + 2 + 128) \times 2 \times 2$	0.0035	0.000003	0.153	0.329	1179
$(1 + 2 + 256) \times 2 \times 2$	0.0037	0.000003	0.149	0.329	2331
$(1 + 2 + 512) \times 2 \times 2$	0.0041	0.000003	0.148	0.329	4635
$(1 + 2 + 1024) \times 2 \times 2$	0.0050	0.000003	0.148	0.329	9243

TABLE 2.13 – Evolution de l'estimateur d'erreur en fonction du raffinement du maillage dans  $\Omega_g$  et  $\Omega_d$  pour  $\epsilon = 0.025$  et pour  $\alpha = 0.1$ .

Raffinement de type a)		
$(N_x^d + N_x^c + N_x^d) \times N_y \times N_z$	$ei_u^{ZZ}$	$ei_z^{ZZ}$
$(2 + 4 + 2) \times 4 \times 4$	0.637	0.780
$(4 + 8 + 4) \times 8 \times 8$	0.835	0.910
$(8 + 16 + 8) \times 16 \times 16$	0.939	0.963
$(16 + 32 + 16) \times 32 \times 32$	0.982	0.989

Raffinement de type b)		
$(N_x^d + N_x^c + N_x^d) \times N_y \times N_z$	$ei_u^{ZZ}$	$ei_z^{ZZ}$
$(2 + 2 + 2) \times 4 \times 4$	0.635	0.780
$(4 + 2 + 4) \times 8 \times 8$	0.831	0.908
$(8 + 2 + 8) \times 16 \times 16$	0.919	0.947
$(16 + 2 + 16) \times 32 \times 32$	0.901	0.920
$(32 + 2 + 32) \times 64 \times 64$	0.754	0.785

Raffinement de type c)		
$(N_x^d + N_x^c + N_x^d) \times N_y \times N_z$	$ei_u^{ZZ}$	$ei_z^{ZZ}$
$(2 + 2 + 2) \times 2 \times 2$	0.639	0.799
$(4 + 2 + 4) \times 2 \times 2$	0.834	0.899
$(8 + 2 + 8) \times 2 \times 2$	0.908	0.931
$(16 + 2 + 16) \times 2 \times 2$	0.867	0.896
$(32 + 2 + 32) \times 2 \times 2$	0.694	0.759
$(64 + 2 + 64) \times 2 \times 2$	0.448	0.532
$(128 + 2 + 128) \times 2 \times 2$	0.261	0.330
$(256 + 2 + 256) \times 2 \times 2$	0.165	0.211
$(512 + 2 + 512) \times 2 \times 2$	0.126	0.156
$(1024 + 2 + 1024) \times 2 \times 2$	0.113	0.134

Raffinement dans $\Omega_d$ seulement et dans la direction horizontale		
$(N_x^d + N_x^c + N_x^d) \times N_y \times N_z$	$ei_u^{ZZ}$	$ei_z^{ZZ}$
$(1 + 2 + 2) \times 2 \times 2$	0.624	0.293
$(1 + 2 + 4) \times 2 \times 2$	0.831	0.168
$(1 + 2 + 8) \times 2 \times 2$	0.912	0.134
$(1 + 2 + 16) \times 2 \times 2$	0.878	0.127
$(1 + 2 + 32) \times 2 \times 2$	0.710	0.125
$(1 + 2 + 64) \times 2 \times 2$	0.465	0.125
$(1 + 2 + 128) \times 2 \times 2$	0.277	0.125
$(1 + 2 + 256) \times 2 \times 2$	0.176	0.125
$(1 + 2 + 512) \times 2 \times 2$	0.132	0.125
$(1 + 2 + 1024) \times 2 \times 2$	0.116	0.125

TABLE 2.14 – Evolution des effectivity index des estimateurs de Zienkiewicz-Zhu pour les deux problèmes en fonction du raffinement du maillage dans  $\Omega_g$  et  $\Omega_d$  pour  $\epsilon = 0.025$  et pour  $\alpha = 0.1$ .

Raffinement de type a)					
$(N_x^d + N_x^c + N_x^d) \times N_y \times N_z$	$\sum_{K \in \mathcal{T}_h} (\eta_K^2 + \theta_K^2)$	$J(u - u_h)$	$\ \nabla(u - u_h)\ _{L^2(\Omega)}$	$\ \nabla(z - z_h)\ _{L^2(\Omega)}$	sommets
$(2 + 4 + 2) \times 4 \times 4$	0.0250	0.00560	2.128	0.244	225
$(4 + 8 + 4) \times 8 \times 8$	0.0031	0.00139	1.209	0.128	1377
$(8 + 16 + 8) \times 16 \times 16$	0.0005	0.00035	0.633	0.065	9537
$(16 + 32 + 16) \times 32 \times 32$	0.0001	0.00009	0.322	0.032	70785

 TABLE 2.15 – Evolution de l'estimateur goal oriented pour une fonctionnelle  $J$  dépendant d'une fonction  $\rho$  discontinue avec  $\epsilon = 0.025$ .

Raffinement de type a)		
$(N_x^d + N_x^c + N_x^d) \times N_y \times N_z$	$ei_u^{ZZ}$	$ei_z^{ZZ}$
$(2 + 4 + 2) \times 4 \times 4$	0.637	0.422
$(4 + 8 + 4) \times 8 \times 8$	0.835	0.579
$(8 + 16 + 8) \times 16 \times 16$	0.939	0.695
$(16 + 32 + 16) \times 32 \times 32$	0.982	0.754

 TABLE 2.16 – Evolution des effectivity index des estimateurs de Zienkiewicz-Zhu pour chaque problème avec une fonction  $\rho$  discontinue et  $\epsilon = 0.025$ .

Raffinement de type a)					
$(N_x^d + N_x^c + N_x^d) \times N_y \times N_z$	$\sum_{K \in \mathcal{T}_h} (\eta_K^2 + \theta_K^2)$	$J(u - u_h)$	$\ \nabla(u - u_h)\ _{L^2(\Omega)}$	$\ \nabla(z - z_h)\ _{L^2(\Omega)}$	sommets
$(2 + 4 + 2) \times 4 \times 4$	0.0258	2.256e-05	2.128	0.504	225
$(4 + 8 + 4) \times 8 \times 8$	0.0016	-0.767e-05	1.209	0.235	1377
$(8 + 16 + 8) \times 16 \times 16$	0.00004	-0.105e-05	0.633	0.112	9537
$(16 + 32 + 16) \times 32 \times 32$	0.000006	-0.030e-05	0.322	0.054	70785

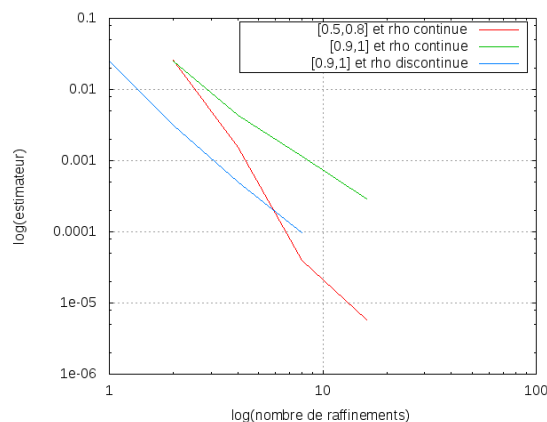
 TABLE 2.17 – Evolution de l'estimateur goal oriented pour une fonctionnelle  $J$  dépendant d'une fonction  $\rho$  continue définissant le domaine  $\Omega_0 = [0.5, 0.8]$  avec  $\epsilon = 0.025$ .


FIGURE 2.26 – Evolution en échelle logarithmique de l'estimateur d'erreur pour différentes fonctionnelles.

Raffinement de type a)		
$(N_x^d + N_x^c + N_x^d) \times N_y \times N_z$	$ei_u^{ZZ}$	$ei_z^{ZZ}$
$(2 + 4 + 2) \times 4 \times 4$	0.637	0.550
$(4 + 8 + 4) \times 8 \times 8$	0.835	0.829
$(8 + 16 + 8) \times 16 \times 16$	0.939	0.975
$(16 + 32 + 16) \times 32 \times 32$	0.982	0.993

TABLE 2.18 – Evolution des effectivity index des estimateurs de Zienkiewicz-Zhu pour chaque problème avec une fonction  $\rho$  continue définissant le domaine  $\Omega_0 = [0.5, 0.8]$  et  $\epsilon = 0.025$ .

## 2.6 Conclusion

Dans cette partie, nous avons vérifié l'ordre de convergence des estimateurs décrit dans le chapitre 1 pour différents types de raffinement. Nous avons mis en évidence l'indépendance de l'estimateur d'erreur pour la semi-norme  $H^1$  par rapport aux données du problème et aux caractéristiques du maillage, tels que le rapport d'aspect des éléments ou la taille du maillage. De plus, dans le cas d'un écoulement ne dépendant que d'une seule direction de l'espace, les essais numériques ont montré qu'il suffisait d'augmenter le nombre de points du maillage uniquement dans cette direction pour augmenter la précision de la solution. Evidemment, de cette manière, les éléments deviennent de plus en plus étirés et un estimateur d'erreur anisotrope devient donc nécessaire pour évaluer l'erreur. De plus, si la solution varie de manière localisée, comme dans le cas d'une couche limite, il n'est pas utile d'augmenter la densité du maillage en dehors de la zone où le gradient de la solution est le plus fort tant que l'erreur est plus grande dans cette zone par rapport au reste du domaine.

Nous avons également vérifié l'ordre de convergence de l'estimateur de type *goal oriented* pour le contrôle d'une fonctionnelle linéaire de l'erreur. Puisque nous n'avons pas l'équivalence entre l'erreur et l'estimateur, nous avons pu observer qu'il n'était pas toujours efficace pour contrôler correctement l'erreur. Différents tests ont été réalisés pour étudier son comportement en fonction du type de raffinement et de la fonctionnelle utilisée. Puisque l'estimateur dépend à la fois de la solution approchée du problème primal et de la solution approchée du problème dual, l'évolution de l'estimateur au cours d'un raffinement dépend de l'effet de ce raffinement sur la précision des deux solutions en même temps tandis que la fonctionnelle de l'erreur ne dépend pas de la précision de la solution approchée du problème dual, ce qui indique que la fonctionnelle de l'erreur peut diminuer au cours d'un raffinement sans pour autant que l'estimateur diminue également.



## Chapitre 3

# Adaptation de maillages anisotropes pour des écoulements compressibles autour d'une aile

### 3.1 Algorithme général d'adaptation de maillages

Le but de notre algorithme adaptatif est de construire un maillage anisotrope qui permettrait d'obtenir une solution à une précision donnée, c'est-à-dire tel que l'erreur estimée relative soit proche d'une tolérance  $TOL$  fixée

$$\frac{\left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \eta_K^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\|\nabla u_h\|_{L^2(\Omega)}} \approx TOL.$$

Ici  $\eta_K^2$  est l'estimation de l'erreur en semi-norme  $H^1$  sur l'élément  $K$  définie par (1.23). De [58], on sait que les résidus sur les faces sont dominants par rapport aux résidus sur les éléments avec la méthode des éléments finis pour des problèmes elliptiques. Ainsi, on se permet de négliger le résidu du problème  $\frac{1}{\epsilon} \|\Pi_K f - \mathbf{a} \cdot \nabla u_h\|_{L^2(K)}$  afin d'obtenir un estimateur qui ne dépend plus du problème que l'on résout. Cette hypothèse a été utilisée avec succès dans [74] pour un problème parabolique d'évolution dendritique et est valable pour le problème de Laplace. Finalement, on obtient l'estimateur  $\eta_K^2$  défini par

$$\eta_K^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 \left( \frac{|f_i|}{\lambda_{1,K} \lambda_{2,K} \lambda_{3,K}} \right)^{1/2} \|\nabla u_h \cdot \mathbf{n}\|_{L^2(f_i)} \omega_K(u - u_h), \quad (3.1)$$

où  $u$  est une variable du problème à résoudre,  $u_h$  son approximation par éléments finis,  $|f_i|$  désigne l'aire de la face  $f_i$  du tétraèdre  $K$ ,  $\mathbf{n}$  est le vecteur unitaire normal à la face  $f_i$  et  $\omega_K(u - u_h)$  est défini par

$$\omega_K^2(u - u_h) = \sum_{i=1}^3 \lambda_{i,K}^2 \left( \mathbf{r}_{i,K}^T G_K(u - u_h) \mathbf{r}_{i,K} \right).$$

Les vecteurs  $\mathbf{r}_{1,K}$ ,  $\mathbf{r}_{2,K}$ ,  $\mathbf{r}_{3,K}$  et les valeurs associées  $\lambda_{1,K}$ ,  $\lambda_{2,K}$ ,  $\lambda_{3,K}$  sont donnés par (2.3) et la matrice  $G_K(u - u_h)$  est remplacée par la matrice approchée  $\tilde{G}_K(u_h)$  définie par (2.20). Le terme faisant intervenir la dérivée normale de  $u_h$ ,  $\|\nabla u_h \cdot \mathbf{n}\|_{L^2(f_i)}$ , apparaît dans les estimateurs dérivant de problèmes elliptiques et paraboliques [77, 78] dès qu'un terme en laplacien entre en

jeu, comme dans l'estimateur d'erreur défini par (1.23) pour le problème de convection-diffusion. On définit le critère suivant

$$0.75 \text{ TOL} \leq \frac{\left( \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \eta_K^2 \right)^{\frac{1}{2}}}{\|\nabla u_h\|_{L^2(\Omega)}} \leq 1.25 \text{ TOL}. \quad (3.2)$$

On cherche donc à construire un maillage qui vérifie

$$0.75^2 \text{ TOL}^2 \|\nabla u_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \eta_K^2 \leq 1.25^2 \text{ TOL}^2 \|\nabla u_h\|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (3.3)$$

Une condition suffisante pour construire un tel maillage est de vérifier que, pour tous les tétraèdres  $K$  du maillage, nous avons

$$\frac{0.75^2 \text{ TOL}^2 \|\nabla u_h\|_{L^2(\Omega)}^2}{N_K} \leq \eta_K^2 \leq \frac{1.25^2 \text{ TOL}^2 \|\nabla u_h\|_{L^2(\Omega)}^2}{N_K}.$$

où  $N_K$  est le nombre total de tétraèdres  $K$  dans le maillage  $\mathcal{T}_h$ .

Pour modifier le maillage à partir de ce critère, nous utilisons le remaillieur MMG3D développé par Cécile Dobrzynski et Pascal Frey [35]. Le remaillieur MMG3D permet, étant donné un maillage et une métrique  $\mathcal{M}(P)$  en chaque sommet  $P$  de ce maillage, de construire un nouveau maillage ayant pour métrique la métrique  $\mathcal{M}$  donnée, sans modifier le maillage surfacique du bord du domaine. Dans la suite, nous présentons une méthode permettant de construire cette métrique  $\mathcal{M}$ . Dans un premier temps, nous définissons, en chaque sommet  $P$  du maillage  $\eta_P^4$  l'estimateur défini par

$$\eta_P^4 = \sum_{\substack{K \in \mathcal{T}_h \\ P \in K}} \eta_K^4.$$

Nous avons

$$\eta_K^4 = \eta_{K,1}^4 + \eta_{K,2}^4 + \eta_{K,3}^4$$

où  $\eta_{K,i}^4$ ,  $i = 1, 2, 3$ , est l'erreur estimée sur l'élément  $K$  dans la direction  $\mathbf{r}_{i,K}$  définie par

$$\eta_{K,i}^4 = \left( \frac{1}{2} \sum_{j=1}^4 \left( \frac{|f_j|}{\lambda_{1,K} \lambda_{2,K} \lambda_{3,K}} \right)^{\frac{1}{2}} \|\nabla u_h \cdot \mathbf{n}\|_{L^2(f_j)} \right)^2 \lambda_{i,K}^2 (\mathbf{r}_{i,K}^T G_K (u - u_h) \mathbf{r}_{i,K}). \quad (3.4)$$

Si on définit pour tout sommet  $P$

$$\eta_{P,i}^4 = \sum_{\substack{K \in \mathcal{T}_h \\ P \in K}} \eta_{K,i}^4 \quad \text{avec} \quad \eta_P^4 = \eta_{P,1}^4 + \eta_{P,2}^4 + \eta_{P,3}^4,$$

alors on a

$$\sum_{P \in \mathcal{T}_h} \eta_P^4 = 4 \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \eta_K^4.$$

Une condition suffisante pour obtenir (3.2) est de vérifier que, pour tous les sommets  $P$  du maillage, on ait

$$\frac{\sqrt{4}}{N_P} 0.75^2 \text{ TOL}^2 \|\nabla u_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \eta_P^2 \leq \frac{\sqrt{4}}{N_P} 1.25^2 \text{ TOL}^2 \|\nabla u_h\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

où  $N_P$  est le nombre de sommets dans le maillage  $\mathcal{T}_h$ . Les deux inégalités ci-dessus sont satisfaites si, pour  $i = 1, 2, 3$ ,

$$\frac{4}{3 N_P^2} 0.75^4 TOL^4 \|\nabla u_h\|_{L^2(\Omega)}^4 \leq \eta_{P,i}^4 \leq \frac{4}{3 N_P^2} 1.25^4 TOL^4 \|\nabla u_h\|_{L^2(\Omega)}^4. \quad (3.5)$$

L'algorithme pour construire la métrique  $\mathcal{M}(P)$  en chaque sommet  $P$  du maillage est le suivant. On calcule au sommet  $P$  la matrice  $G_P(u - u_h)$  comme étant la moyenne des matrices  $G_K(u - u_h)$  des éléments  $K$  voisins de  $P$ . En pratique, puisque la matrice  $G_K(u - u_h)$  est remplacée par la matrice approchée  $\tilde{G}_K(u_h)$  pour tous les éléments  $K$ , on fait de même au sommet  $P$  et on remplace  $G_P(u - u_h)$  par la matrice  $\tilde{G}_P(u_h)$  qui est correspond à la moyenne des matrices approchées  $\tilde{G}_K(u_h)$  des éléments  $K$  voisins de  $P$ . On définit par  $\lambda_{i,P}$ ,  $i = 1, 2, 3$ , la moyenne des tailles  $\lambda_{i,K}$  définies par (2.3) aux éléments  $K$  voisins de  $P$ . Pour  $i = 1, 2, 3$ , si le critère (3.5) n'est pas vérifié, on modifie la valeur de  $\lambda_{i,P}$ , c'est-à-dire que si l'estimateur  $\eta_{P,i}^2$  est trop grand, on pose  $h_{i,P} = \lambda_{i,P}/2$ , si l'estimateur  $\eta_{P,i}^2$  est trop petit, on pose  $h_{i,P} = \lambda_{i,P} \times 2$ , sinon on pose  $h_{i,P} = \lambda_{i,P}$ . Si on désigne par  $\mathbf{r}_{1,P}$ ,  $\mathbf{r}_{2,P}$ ,  $\mathbf{r}_{3,P}$  les vecteurs propres de  $\tilde{G}_P(u_h)$ , alors la métrique  $\mathcal{M}(P)$  en chaque sommet  $P$  du maillage est construite de la manière suivante

$$\mathcal{M}(P) = \begin{pmatrix} \mathbf{r}_{1,P}^T \\ \mathbf{r}_{2,P}^T \\ \mathbf{r}_{3,P}^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_{1,P} & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_{2,P} & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_{3,P} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{r}_{1,P} & \mathbf{r}_{2,P} & \mathbf{r}_{3,P} \end{pmatrix}, \quad (3.6)$$

où les  $\gamma_{i,P}$  sont définis pour  $i = 1, 2, 3$  par

$$\gamma_{i,P} = \frac{1}{\left(\max(h_{i,P}, h_{min})\right)^2}.$$

Les vecteurs  $\mathbf{r}_{1,P}$ ,  $\mathbf{r}_{2,P}$ ,  $\mathbf{r}_{3,P}$  devraient indiquer les directions d'étirement des éléments et les valeurs  $h_{1,P}$ ,  $h_{2,P}$ ,  $h_{3,P}$  leurs tailles d'étirement dans ces directions. La valeur  $h_{min}$  est une taille de maille minimale introduite pour éviter d'obtenir des éléments trop petits. L'algorithme d'un cycle d'adaptation de maillage est résumé dans l'algorithme 3.

### 3.2 Algorithme d'adaptation de maillages avec décomposition en deux sous-domaines

Dans la suite, nous verrons que le mailleur MMG3D ne permet pas de construire des maillages suffisamment fins dans la couche limite. Il convient donc de séparer le domaine de calcul  $\Omega$  en deux sous-domaines  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ , la couche limite et le complémentaire de celle-ci. Les méthodes de remaillage seront donc différentes dans les deux sous-domaines.

Soient  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  deux sous-domaines de  $\Omega$  tels que  $\Omega_1 \cup \Omega_2 = \Omega$  et  $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$ . Soient  $\mathcal{T}_{h,1}$  et  $\mathcal{T}_{h,2}$  des triangulations de  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  respectivement, telles que  $\mathcal{T}_{h,2} \cup \mathcal{T}_{h,1}$  définit une triangulation conforme  $\mathcal{T}_h$  de  $\Omega$ . On a

$$\|\nabla u_h\|_{L^2(\Omega)}^2 = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|\nabla u_h\|_{L^2(K)}^2 = \sum_{K \in \mathcal{T}_{h,1}} \|\nabla u_h\|_{L^2(K)}^2 + \sum_{K \in \mathcal{T}_{h,2}} \|\nabla u_h\|_{L^2(K)}^2$$

et

$$\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \eta_K^2 = \sum_{K \in \mathcal{T}_{h,1}} \eta_K^2 + \sum_{K \in \mathcal{T}_{h,2}} \eta_K^2.$$

---

**Algorithme 3** Cycle d'adaptation de maillage

---

Maillage  $\mathcal{T}_h$  du domaine donné

Taille d'arête minimale  $h_{min}$  donnée

Calcul de la solution approchée  $u_h$  sur tous les éléments  $K$  du maillage  $\mathcal{T}_h$

**Pour** tous les éléments  $K$  du maillage  $\mathcal{T}_h$  :

    Calcul de  $\mathbf{r}_{1,K}$ ,  $\mathbf{r}_{2,K}$ ,  $\mathbf{r}_{3,K}$ ,  $\lambda_{1,K}$ ,  $\lambda_{2,K}$ ,  $\lambda_{3,K}$  à partir des relations (2.2) et (2.3)

    Calcul de la matrice  $\tilde{G}_K(u_h)$  définie par (2.20)

    Calcul des estimateurs  $\eta_{1,K}^2$ ,  $\eta_{2,K}^2$ ,  $\eta_{3,K}^2$  à partir de l'expression (2.23)

    Calcul de l'estimateur  $\eta_K^2$  à partir de la relation (2.24)

**Fin Pour**

**Pour** tous les sommets  $P$  du maillage  $\mathcal{T}_h$  :

**Pour**  $i=1,2,3$  :

        Calcul de  $\lambda_{i,P}$  (moyenne des valeurs de  $\lambda_{i,K}$  aux éléments  $K$  voisins de  $P$ )

**Si** la condition (3.5) est satisfaite **Alors**

$$h_{i,P} = \lambda_{i,P}$$

**Sinon**

**Si**  $\eta_{i,P}$  est trop grand **Alors**

$$h_{i,P} = \frac{\lambda_{i,P}}{2}$$

**Sinon**

$$h_{i,P} = 2\lambda_{i,P}$$

**Fin Si**

**Fin Si**

$$h_{i,P} = \max(h_{i,P}, h_{min})$$

**Fin Pour**

    Calcul de  $\tilde{G}_P(u_h)$  (moyenne des matrices  $\tilde{G}_K(u_h)$  aux éléments  $K$  voisins de  $P$ )

    Calcul de  $\mathbf{r}_{1,P}$ ,  $\mathbf{r}_{2,P}$ ,  $\mathbf{r}_{3,P}$  (vecteurs propres de  $\tilde{G}_P(u_h)$ )

    Construction de la métrique  $\mathcal{M}(P)$  à partir de (3.6)

**Fin Pour**

Remaillage

---

Donc le critère (3.2) peut se réécrire de la façon suivante

$$0.75^2 TOL^2 \leq \frac{\sum_{K \in \mathcal{T}_{h,1}} \eta_K^2 + \sum_{K \in \mathcal{T}_{h,2}} \eta_K^2}{\sum_{K \in \mathcal{T}_{h,1}} \|\nabla u_h\|_{L^2(K)}^2 + \sum_{K \in \mathcal{T}_{h,2}} \|\nabla u_h\|_{L^2(K)}^2} \leq 1.25^2 TOL^2$$

Une condition suffisante pour satisfaire (3.2) est de vérifier que, sur chaque sous-maillage  $\mathcal{T}_{h,i}$ ,  $i = 1, 2$ , on ait

$$0.75^2 TOL^2 \leq \frac{\sum_{K \in \mathcal{T}_{h,i}} \eta_K^2}{\sum_{K \in \mathcal{T}_{h,i}} \|\nabla u_h\|_{L^2(K)}^2} \leq 1.25^2 TOL^2.$$

On se ramène donc au problème de la section précédente. On calcule la solution sur le maillage  $\mathcal{T}_h$  et on applique l'algorithme de remaillage sur le sous-domaine ne contenant pas la couche limite.

### 3.3 Algorithme d'adaptation de maillages avec contrôle d'une fonctionnelle

Dans cette partie, on cherche à construire un maillage anisotrope qui permet de contrôler une fonctionnelle  $J$  de l'erreur  $u - u_h$  à une précision donnée, c'est-à-dire tel que l'erreur estimée relative soit proche d'une tolérance  $TOL$  fixée

$$\frac{\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \eta_K^2}{|J(u_h)|} \approx TOL$$

où  $\eta_K^2$  est l'estimation de l'erreur sur l'élément  $K$  définie par

$$\eta_K^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 \left( \frac{|f_i|}{\lambda_{1,K} \lambda_{2,K} \lambda_{3,K}} \right)^{1/2} \|[\nabla u_h \cdot \mathbf{n}]\|_{L^2(f_i)} \omega_K(z - z_h). \quad (3.7)$$

où  $u_h$  est l'approximation par éléments finis de la solution du problème que l'on cherche à résoudre,  $z$  la solution exacte du problème dual,  $z_h$  une solution approchée de  $z$ ,  $|f_i|$  désigne l'aire de la face  $f_i$  du tétraèdre  $K$ ,  $\mathbf{n}$  est le vecteur unitaire normal à la face  $f_i$  et  $\omega_K(z - z_h)$  est défini par

$$\omega_K^2(z - z_h) = \sum_{i=1}^3 \lambda_{i,K}^2 \left( \mathbf{r}_{i,K}^T G_K(z - z_h) \mathbf{r}_{i,K} \right).$$

Les vecteurs  $\mathbf{r}_{1,K}$ ,  $\mathbf{r}_{2,K}$ ,  $\mathbf{r}_{3,K}$  et les valeurs associées  $\lambda_{1,K}$ ,  $\lambda_{2,K}$ ,  $\lambda_{3,K}$  sont donnés par (2.3) et la matrice  $G_K(z - z_h)$  est remplacée par la matrice approchée  $\tilde{G}_K(z_h)$  définie par (2.20). De manière analogue à ce qui a été fait précédemment, on définit le critère suivant

$$0.75 TOL \leq \frac{\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \eta_K^2}{|J(u_h)|} \leq 1.25 TOL.$$

Une condition suffisante pour vérifier ce critère est d'avoir, pour tous les tétraèdres  $K$  du maillage,

$$\frac{0.75 TOL |J(u_h)|}{N_K} \leq \eta_K^2 \leq \frac{1.25 TOL |J(u_h)|}{N_K}.$$

où  $N_K$  est le nombre total de tétraèdres  $K$  dans le maillage  $\mathcal{T}_h$ . Cette condition suffisante reportée aux sommets  $P$  du maillage peut s'écrire de la manière suivante

$$\frac{\sqrt{4}}{N_P} 0.75 \text{ TOL} |J(u_h)| \leq \eta_P^2 \leq \frac{\sqrt{4}}{N_P} 1.25 \text{ TOL} |J(u_h)|, \quad (3.8)$$

où  $N_P$  est le nombre de sommets dans le maillage  $\mathcal{T}_h$ . Cette condition est satisfaite si, pour  $i = 1, 2, 3$ , on a

$$\frac{4}{3 N_P^2} 0.75^2 \text{ TOL}^2 |J(u_h)|^2 \leq \eta_{P,i}^4 \leq \frac{4}{3 N_P^2} 1.25^2 \text{ TOL}^2 |J(u_h)|^2. \quad (3.9)$$

Nous appliquons le même algorithme que celui décrit dans la section 3.1 en remplaçant  $G_K(u - u_h)$  par  $G_K(z - z_h)$ . L'algorithme est résumé dans l'algorithme 4.

---

**Algorithme 4** Cycle d'adaptation de maillage *goal oriented*

---

Maillage  $\mathcal{T}_h$  du domaine donné

Taille d'arête minimale  $h_{min}$  donnée

Calcul de la solution approchée  $u_h$  sur tous les éléments  $K$  du maillage  $\mathcal{T}_h$

Calcul de la solution approchée  $z_h$  du problème dual sur tous les éléments  $K$  du maillage  $\mathcal{T}_h$

**Pour** tous les éléments  $K$  du maillage  $\mathcal{T}_h$  :

    Calcul de  $\mathbf{r}_{1,K}$ ,  $\mathbf{r}_{2,K}$ ,  $\mathbf{r}_{3,K}$ ,  $\lambda_{1,K}$ ,  $\lambda_{2,K}$ ,  $\lambda_{3,K}$  à partir des relations (2.2) et (2.3)

    Calcul de la matrice  $\tilde{G}_K(z_h)$  définie par (2.20)

    Calcul des estimateurs  $\eta_{1,K}^2$ ,  $\eta_{2,K}^2$ ,  $\eta_{3,K}^2$  à partir de l'expression (2.34)

    Calcul de l'estimateur  $\eta_K^2$  à partir de la relation (2.35)

**Fin Pour**

**Pour** tous les sommets  $P$  du maillage  $\mathcal{T}_h$  :

**Pour**  $i=1,2,3$  :

        Calcul de  $\lambda_{i,P}$  (moyenne des valeurs de  $\lambda_{i,K}$  aux éléments  $K$  voisins de  $P$ )

**Si** la condition (3.9) est satisfaite **Alors**

$$h_{i,P} = \lambda_{i,P}$$

**Sinon**

**Si**  $\eta_{i,P}$  est trop grand **Alors**

$$h_{i,P} = \frac{\lambda_{i,P}}{2}$$

**Sinon**

$$h_{i,P} = 2\lambda_{i,P}$$

**Fin Si**

**Fin Si**

$$h_{i,P} = \max(h_{i,P}, h_{min})$$

**Fin Pour**

    Calcul de  $\tilde{G}_P(z_h)$  (moyenne des matrices  $\tilde{G}_K(z_h)$  aux éléments  $K$  voisins de  $P$ )

    Calcul de  $\mathbf{r}_{1,P}$ ,  $\mathbf{r}_{2,P}$ ,  $\mathbf{r}_{3,P}$  (vecteurs propres de  $\tilde{G}_P(z_h)$ )

    Construction de la métrique  $\mathcal{M}(P)$  à partir de (3.6)

**Fin Pour**

Remaillage

---

## 3.4 Résultats numériques

### 3.4.1 Validation de l'algorithme d'adaptation de maillages sur le problème de convection-diffusion

#### 3.4.1.1 Résultats pour la semi-norme $H^1$

Nous avons appliqué l'algorithme d'adaptation 3 sur le cas-test défini dans la section 2.2 à partir d'un maillage structuré assez grossier. Nous avons pris  $\epsilon = 0.05$  et les paramètres d'adaptation sont les suivants :  $TOL = 0.125$  et 100 itérations d'adaptation. A chaque cycle d'adaptation, le problème est discrétisé par la méthode des éléments finis. Le système linéaire résultant est résolu par la méthode GMRES en utilisant la factorisation ILU(0) comme pré-conditionneur avec une tolérance de  $10^{-10}$  sans redémarrage de la méthode. Les maillages sont générés avec le logiciel MeshAdapt distribué par Distène [34] basé sur un générateur de maillage de l'équipe du projet GAMMA de l'INRIA [10] et permettant de modifier le maillage volumique du domaine ainsi que le maillage surfacique de son bord à partir d'un champ de métrique défini aux sommets du maillage. Plusieurs maillages adaptés sont donnés dans les figures 3.1 et 3.2. Un zoom de chacun d'entre eux est donné dans la figure 3.3. Après seulement 5 adaptations, la densité des sommets du maillage a augmenté dans la zone de couche limite mais le maillage est peu anisotrope. Après 10 adaptations, la répartition des sommets dans le domaine a peu changé mais les éléments sont plus étirés.

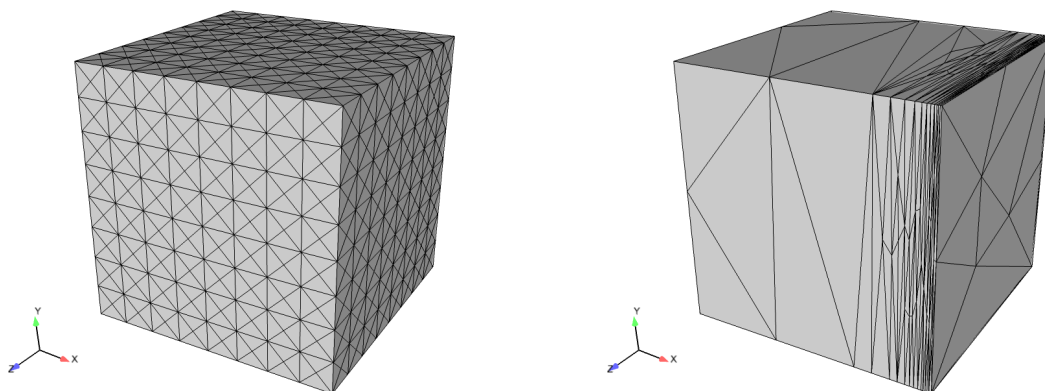


FIGURE 3.1 – Maillages construits lors de l'adaptation. A gauche : maillage initial utilisé pour l'adaptation (2292 sommets). A droite : maillage adapté après 100 cycles d'adaptation (277 sommets). Les paramètres d'adaptation sont les suivants :  $TOL = 0.125$  et 100 itérations d'adaptation avec  $\epsilon = 0.05$ .

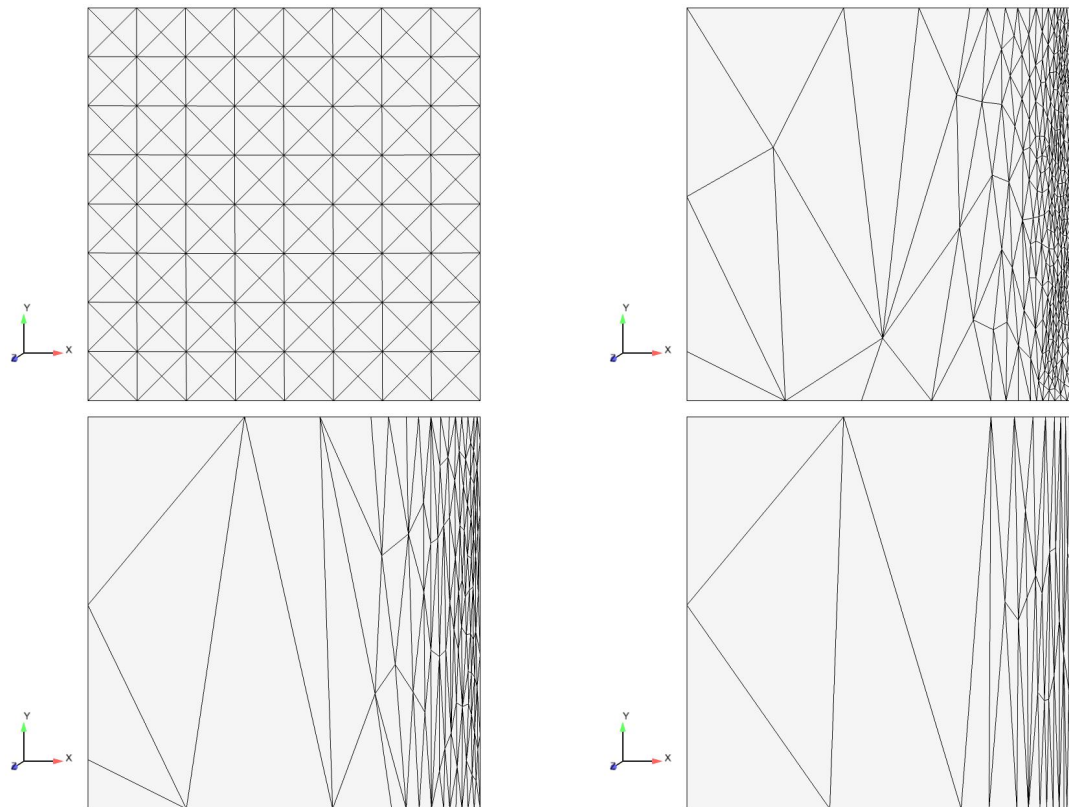


FIGURE 3.2 – Coupes en  $z = 0$  de quelques maillages construits lors de l'adaptation. En haut à gauche : maillage initial utilisé pour l'adaptation (2292 sommets). En haut à droite : maillage adapté après 5 cycles d'adaptation (15395 sommets). En bas à gauche : maillage adapté après 10 cycles d'adaptation (1866 sommets). En bas à droite : maillage adapté après 100 cycles d'adaptation (277 sommets). Les paramètres d'adaptation sont les suivants :  $TOL = 0.125$  et 100 itérations d'adaptation avec  $\epsilon = 0.05$ .



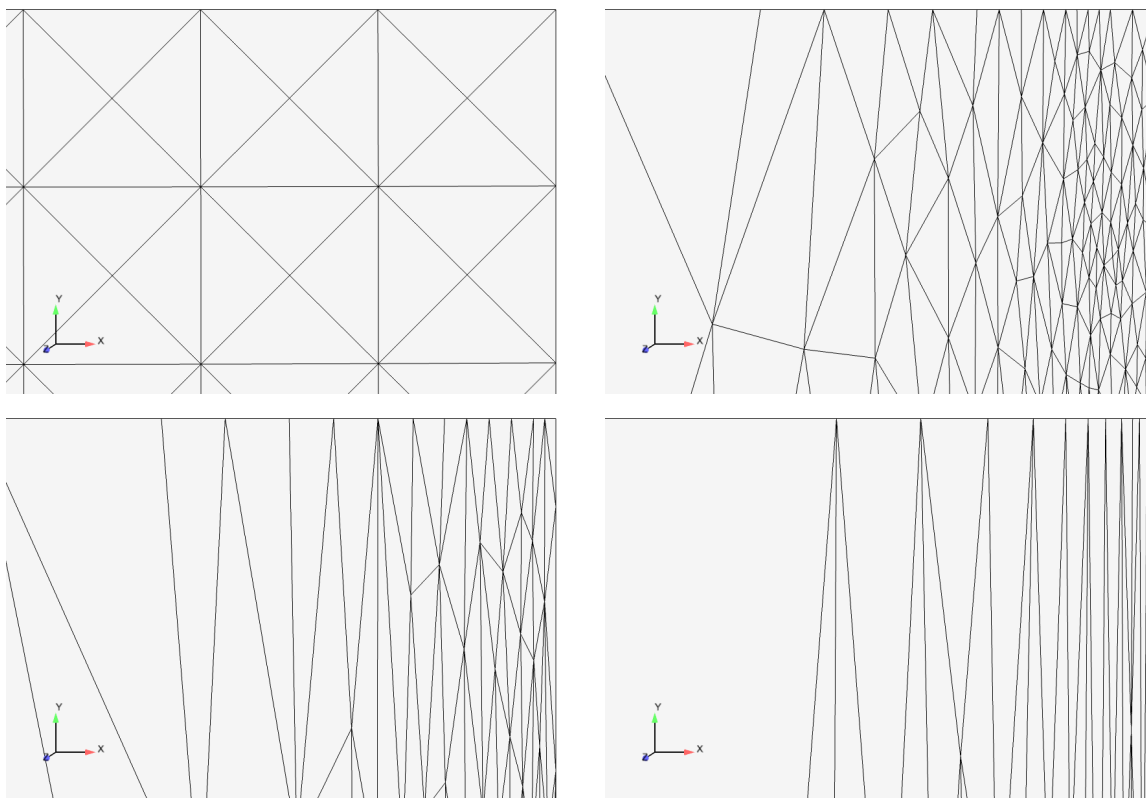


FIGURE 3.3 – Zoom des coupes en  $z = 0$  de quelques maillages construits lors de l'adaptation. En haut à gauche : maillage initial utilisé pour l'adaptation (2292 sommets). En haut à droite : maillage adapté après 5 cycles d'adaptation (15395 sommets). En bas à gauche : maillage adapté après 10 cycles d'adaptation (1866 sommets). En bas à droite : maillage adapté après 100 cycles d'adaptation (277 sommets). Les paramètres d'adaptation sont les suivants :  $TOL = 0.125$  et 100 itérations d'adaptation avec  $\epsilon = 0.05$ .

La figure 3.4 donne l'évolution du nombre de sommets ainsi que de la solution au cours des adaptations. Après 20 cycles, le nombre de sommets est pratiquement constant et la solution calculée reste la même après seulement 5 itérations. La figure 3.5 représente un zoom de la solution. Il y a une réelle différence entre la solution initiale et la solution calculée sur le maillage adapté 100 fois alors qu'il contient 8 fois moins de sommets. Sur le maillage de départ, on a  $\|\nabla(u - u_h)\|_{L^2(\Omega)} = 1.37826$  alors que sur le dernier maillage, on a  $\|\nabla(u - u_h)\|_{L^2(\Omega)} = 0.115909$ .

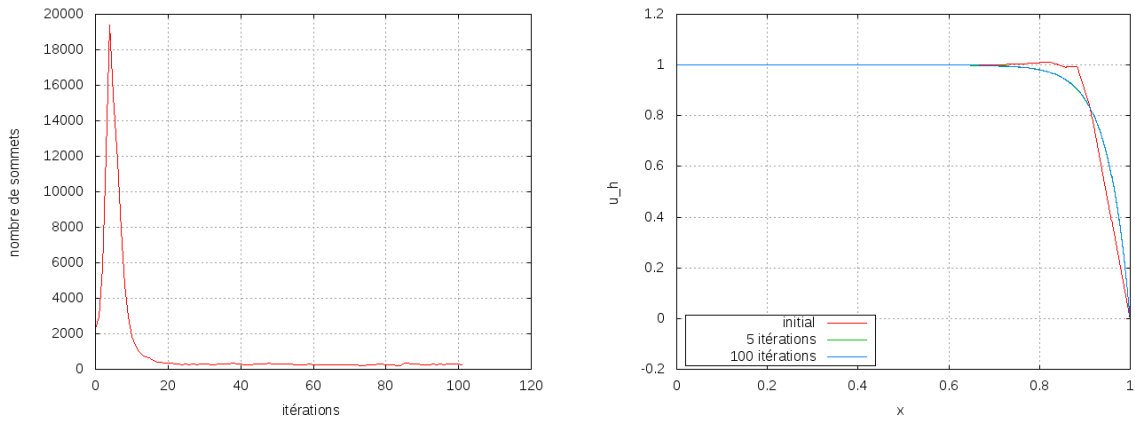


FIGURE 3.4 – A gauche : évolution du nombre de sommets au cours des itérations. A droite : graphe de la solution sur le maillage initial et sur les maillages adaptés 5 et 100 fois.

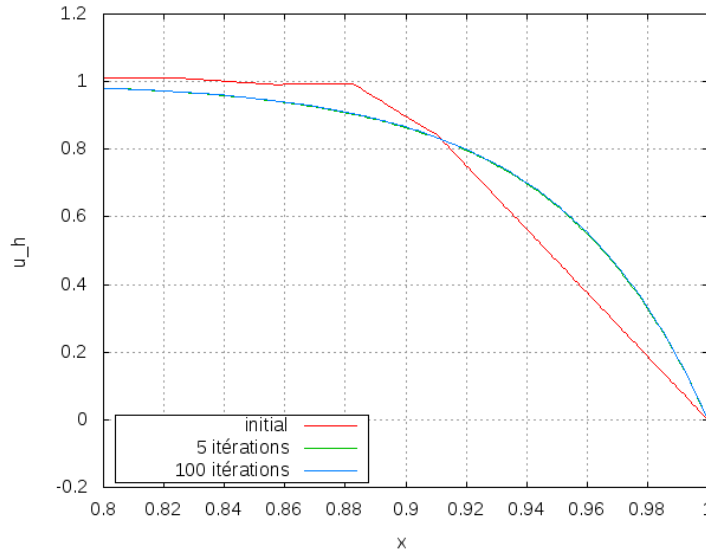


FIGURE 3.5 – Zoom de la solution sur le maillage initial et sur les maillages adaptés 5 et 100 fois.

On rappelle que le rapport d'aspect maximal sur le maillage  $\mathcal{T}_h$  est défini par

$$ar = \max_{K \in \mathcal{T}_h} \frac{\lambda_{1,K}}{\lambda_{3,K}}$$

et on définit le rapport d'aspect moyen par

$$ar_m = \frac{1}{N_K} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \frac{\lambda_{1,K}}{\lambda_{3,K}}$$

où  $N_K$  est le nombre d'éléments du maillage.

La figure 3.6 représente l'évolution du rapport d'aspect moyen et du rapport d'aspect maximal au cours des cycles d'adaptation. Après une vingtaine d'itérations, le rapport d'aspect

moyen reste proche de l'intervalle  $[60, 80]$  et le rapport d'aspect maximal est compris globalement entre 500 et 1000.

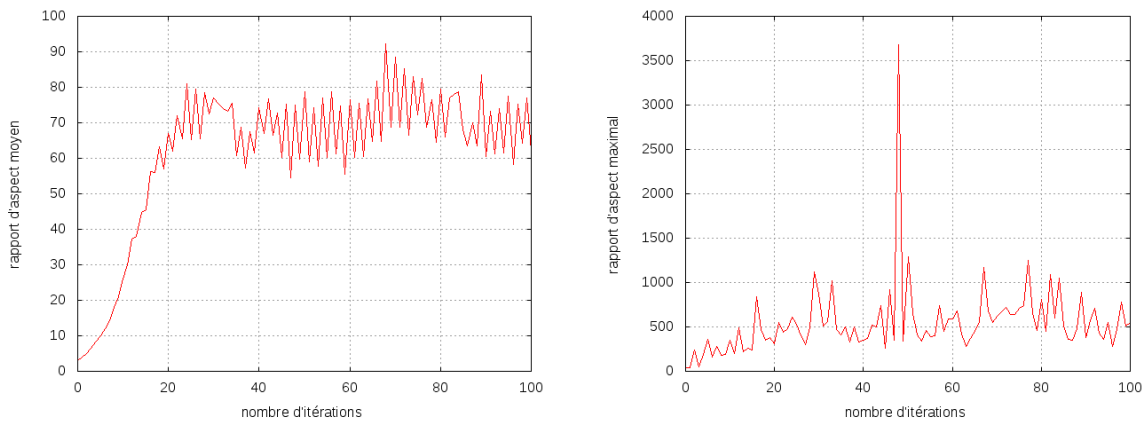


FIGURE 3.6 – *A gauche : évolution du rapport d'aspect moyen au cours des adaptations. A droite : évolution du rapport d'aspect maximal au cours des adaptations.*

La figure 3.7 montre le nombre d'itérations nécessaire à la méthode GMRES pour converger à chaque cycle d'adaptation. On remarque qu'après 40 cycles, la méthode converge en moins de 40 itérations.

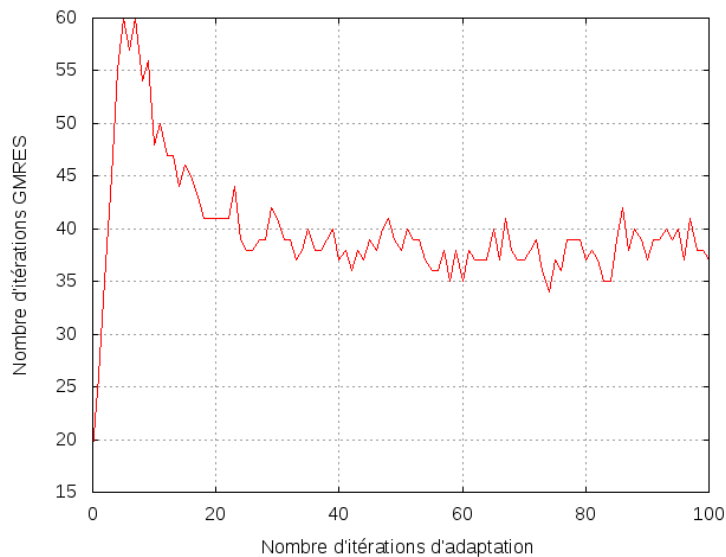


FIGURE 3.7 – *Graphe du nombre d'itérations de la méthode GMRES nécessaire à chaque adaptation avec une tolérance de  $10^{-10}$ .*

Malheureusement, nous n'avons pas été en mesure d'effectuer une étude paramétrique de l'algorithme adaptatif en fonction du paramètre  $TOL$ . En effet, pour des valeurs de  $TOL$  plus petite que 0.125, le remaillieur MeshAdapt ne parvient à construire le maillage ayant les tailles de mailles demandées. Pour cette raison, dans le cas de l'écoulement d'un fluide visqueux compressible autour d'une aile, nous allons conserver le maillage structuré dans la couche limite et remailler seulement à l'extérieur de la couche limite.

### 3.4.1.2 Résultats pour l'adaptation *goal oriented*

Nous avons appliqué l'algorithme d'adaptation 4 sur le cas-test défini dans la section 2.2 et le problème dual défini dans la section 2.4 avec  $\Omega_0 = [0.978, 0.994] \times [0.1, 0.5] \times [0.1, 0.5]$  et la fonction  $\rho$  continue et linéaire par morceaux définie par

$$\rho(x) = \begin{cases} 1 & \text{pour } x = (0.986, 0.3, 0.3), \\ 0 & \text{sur } \partial\Omega_0. \\ 0 & \text{dans } \Omega \setminus \Omega_0. \end{cases}$$

Nous avons pris  $\epsilon = 0.02$  et les paramètres d'adaptation sont les suivants :  $TOL = 0.25$  et 100 itérations d'adaptation. A chaque cycle d'adaptation, les problèmes sont discrétisés par la méthode des éléments finis. Les systèmes linéaires résultant sont résolus par la méthode GMRES avec une tolérance de  $10^{-10}$  sans redémarrage de la méthode. Les maillages sont générés avec le logiciel MeshAdapt distribué par Distène [34] basé sur un générateur de maillage de l'équipe du projet GAMMA de l'INRIA [10] et permettant de modifier le maillage volumique du domaine ainsi que le maillage surfacique de son bord à partir d'un champ de métrique défini aux sommets du maillage. Plusieurs maillages adaptés sont donnés dans les figures 3.8 et 3.9. Un zoom de chacun d'entre eux est donné dans la figure 3.10. Après 100 adaptations, la densité des sommets du maillage a augmenté dans la zone de couche limite au voisinage du domaine  $\Omega_0$ .

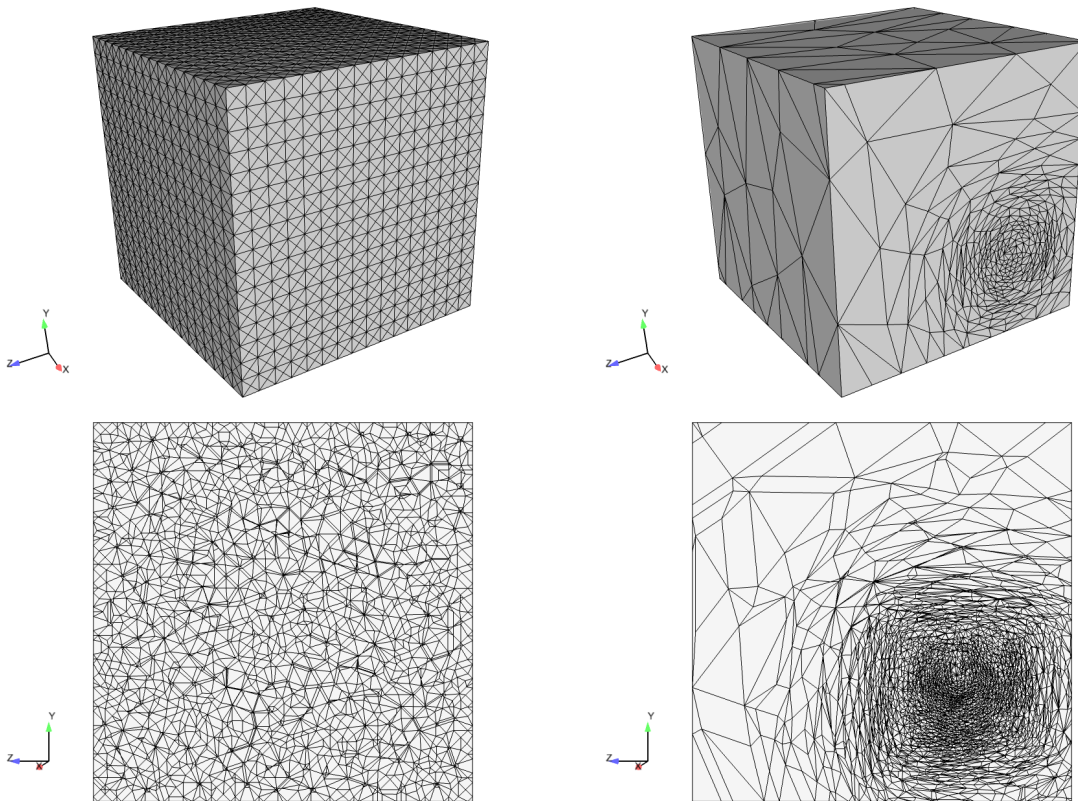


FIGURE 3.8 – En haut à gauche : maillage volumique initial du domaine. En haut à droite : maillage volumique du domaine adapté 100 fois. En bas à gauche : coupe en  $x = 0.95$  du maillage initial. En bas à droite : coupe en  $x = 0.95$  du maillage adapté 100 fois. Cette coupe traverse le domaine  $\Omega_0$ .

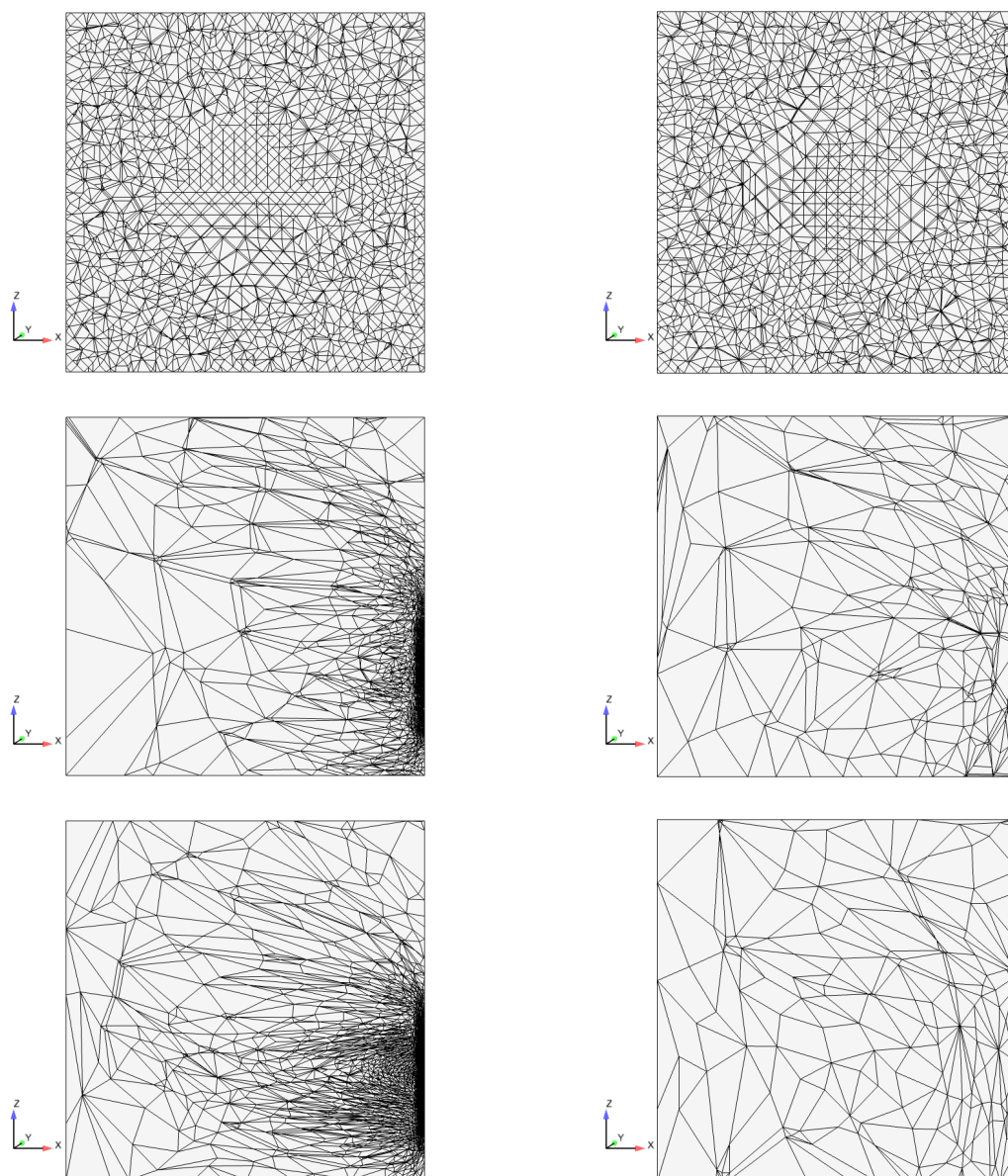


FIGURE 3.9 – *A gauche : coupe en  $y = 0.3$  du maillage volumique du domaine. Cette coupe traverse le domaine  $\Omega_0$ . A droite : coupe en  $y = 0.7$  du maillage volumique du domaine. Cette coupe ne traverse pas le domaine  $\Omega_0$ . En haut : coupe du maillage initial, au milieu : coupe du maillage adapté 10 fois et en bas : coupe du maillage adapté 100 fois.*

La figure 3.10 représente la solution approchée du problème de convection-diffusion calculée sur le maillage adapté 100 fois le long de deux lignes. La première ligne traverse le domaine  $\Omega_0$  et la solution est bien approchée dans la couche limite. La deuxième ligne ne traverse pas le domaine  $\Omega_0$  et la couche limite le long de cette ligne est mal capturée.

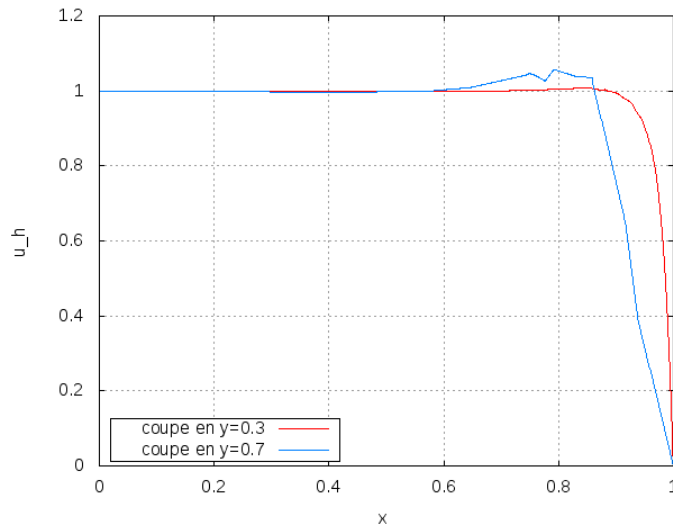


FIGURE 3.10 – Solution approchée du problème de convection-diffusion calculée sur un maillage adapté 100 fois. En rouge : graphe de la solution le long de la ligne  $(x, y, z) = (t, 0.3, 0.3)$  pour  $t \in [0, 1]$ . Cette ligne traverse le domaine  $\Omega_0$ . En bleu : graphe de la solution le long de la ligne  $(x, y, z) = (t, 0.7, 0.7)$  pour  $t \in [0, 1]$ . Cette ligne ne traverse pas le domaine  $\Omega_0$ .

La figure 3.11 montre le nombre d'itérations nécessaire à la méthode GMRES pour converger à chaque cycle d'adaptation pour chaque problème. On remarque que la méthode converge en moins de 70 itérations. A chaque cycle d'adaptation, la méthode GMRES converge pour chaque problème quasiment avec le même nombre d'itérations.

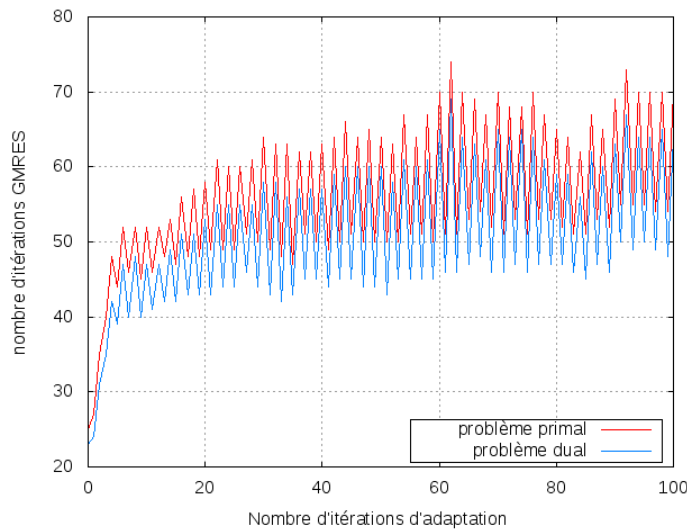


FIGURE 3.11 – Graphe du nombre d'itérations de la méthode GMRES nécessaire à chaque adaptation avec une tolérance de  $10^{-10}$  pour la résolution de chaque problème.

### 3.4.2 Cas-test : aile ONERA M6 en régime transsonique

Nous considérons le cas de l'aile ONERA M6 à Mach 0.84 avec un angle d'incidence de  $3.06^\circ$ . C'est un cas de calcul classique dont des essais en soufflerie ont été réalisés et consignés

dans le rapport de référence AGARD AR 138 [87]. Pour les calculs d'écoulement non visqueux, l'aile est placée à l'intérieur d'un parallélépipède (voir figure 3.12). Le maillage utilisé a été fourni par Frédéric Alauzet de l'INRIA. Il contient 29008 sommets et a été construit par une méthode de Delaunay sur tout le domaine. La figure 3.13 montre différentes coupes du maillage volumique.

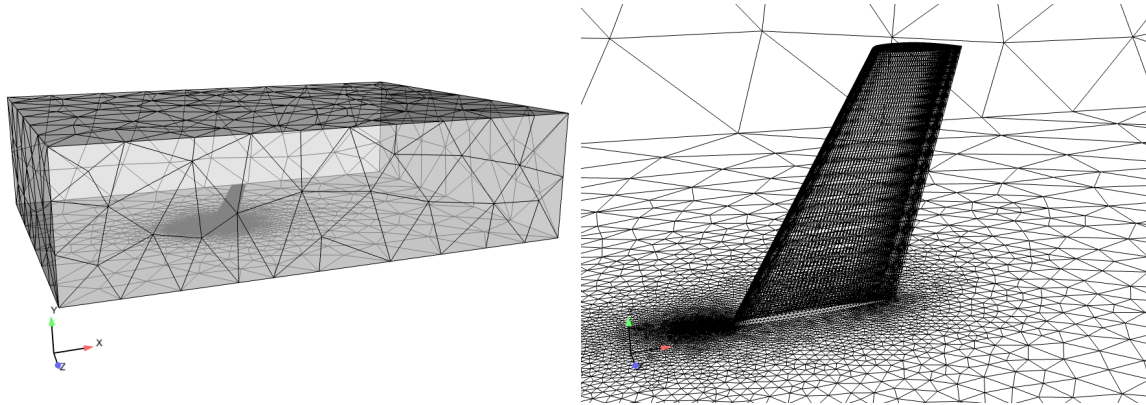


FIGURE 3.12 – *A gauche : domaine de calcul pour les calculs d'écoulements non visqueux. A droite : maillage surfacique de l'aile.*

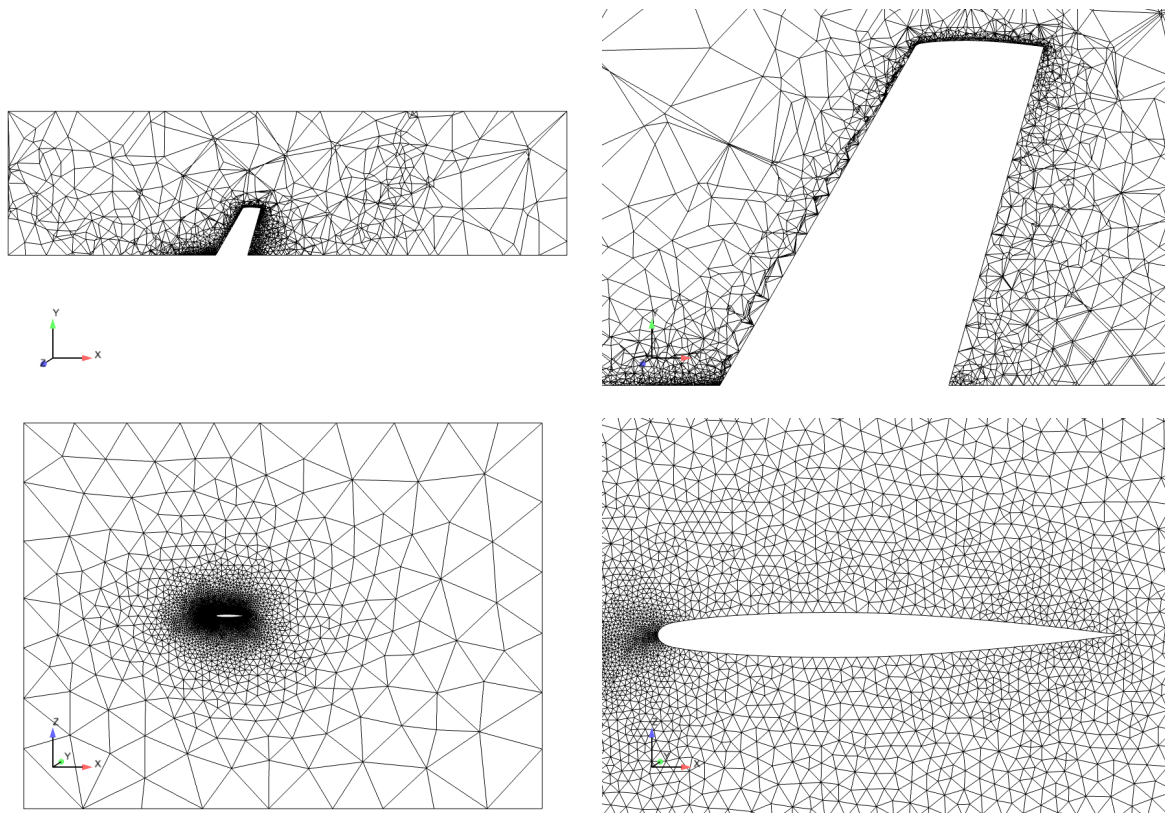


FIGURE 3.13 – *Coupes du maillage du domaine de calcul pour les calculs d'écoulements non visqueux. En haut : coupe en  $z = 0$  (à gauche) et zoom sur le maillage autour de l'aile (à droite). En bas : coupe en  $y = 0$  (à gauche) et zoom sur le maillage autour de l'aile (à droite).*

Pour les calculs d'écoulement visqueux, l'aile est placée à l'intérieur d'une demi-sphère (voir figure 3.14). Plusieurs maillages du domaine sont utilisés. Tous ces maillages sont générés avec un mailleur de Dassault Aviation et sont structurés dans la couche limite comme le montre la figure 3.15. Chacun d'entre eux est construit de la manière suivante. A partir du maillage surfacique de la peau de l'aile, une méthode frontale est utilisée pour générer le maillage structuré de la couche limite. La méthode consiste à construire successivement des couches de mailles tout autour de l'aile. La figure 3.16 représente une coupe de quelques couches de mailles structurées. Pour générer la première couche de mailles, tous les sommets de la surface sont translatés dans la direction normale à la surface pour définir de nouveaux sommets. Les sommets de la surface sont reliés aux nouveaux sommets afin de définir des prismes droits qui sont coupés en tétraèdres. L'ensemble de tous les nouveaux sommets générés forment une surface qui est utilisée pour construire une seconde couche de mailles. De manière itérative, on aboutit à un maillage structuré composé de couches d'éléments qui entoure la surface de l'aile. Lors de la génération d'une nouvelle couche, on choisit la taille du vecteur de translation. Pour limiter le nombre de sommets final, on choisit une hauteur pour la première couche de mailles et une raison. Ainsi, toutes les hauteurs de couches structurées sont données par les valeurs d'une suite géométrique. Après avoir construit un certain nombre de couches structurées, le reste du maillage est généré par une méthode de Delaunay. La figure 3.15 montre différentes coupes du maillage volumique, en particulier le maillage structuré autour de la surface de l'aile. Dans tout ce travail, les couches de mailles structurées sont générées avec une raison de 1.15.

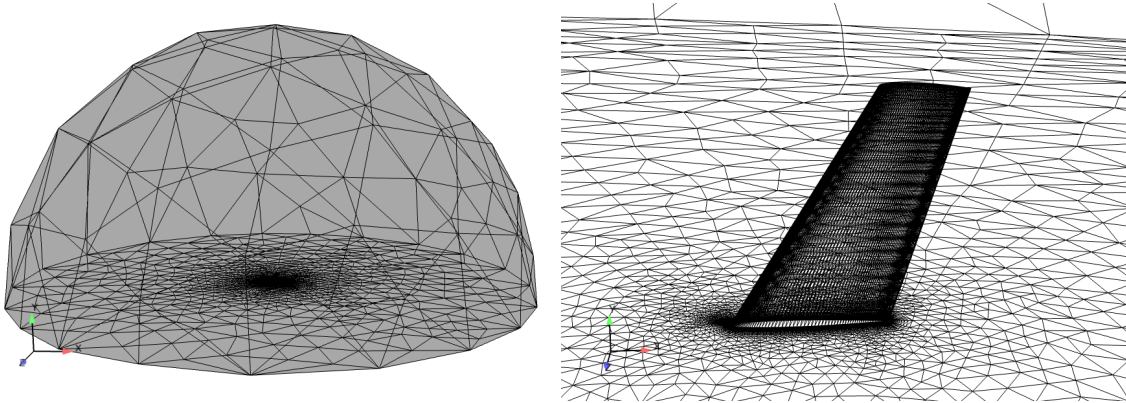


FIGURE 3.14 – A gauche : domaine de calcul pour les calculs d'écoulements visqueux. A droite : maillage surfacique de l'aile.



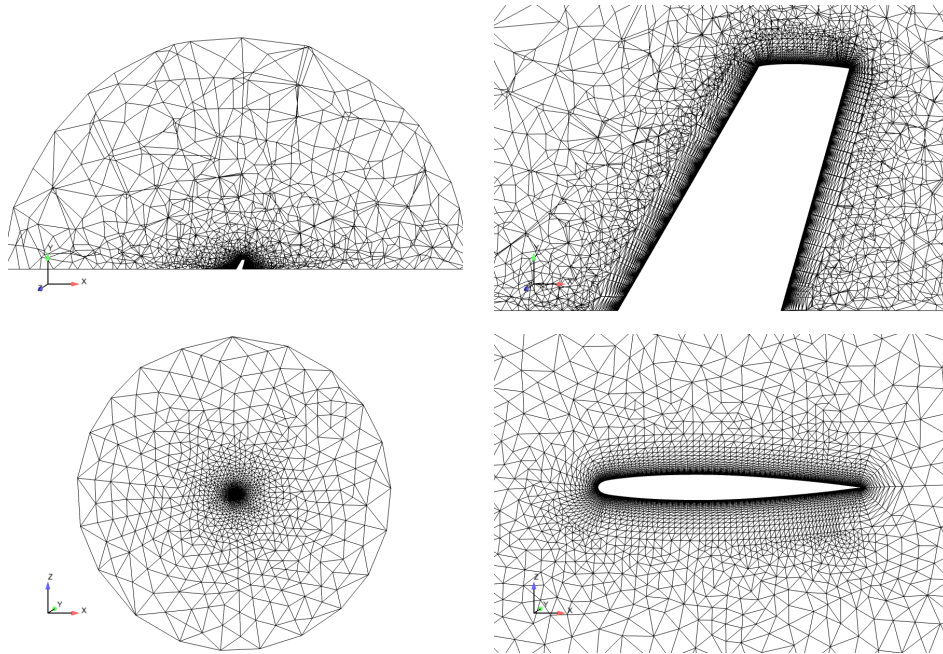


FIGURE 3.15 – Coupes du maillage du domaine de calcul pour les calculs d'écoulements visqueux. En haut : coupe en  $z = 0$  (à gauche) et zoom sur le maillage autour de l'aile (à droite). En bas : coupe en  $y = 0$  (à gauche) et zoom sur le maillage autour de l'aile (à droite).

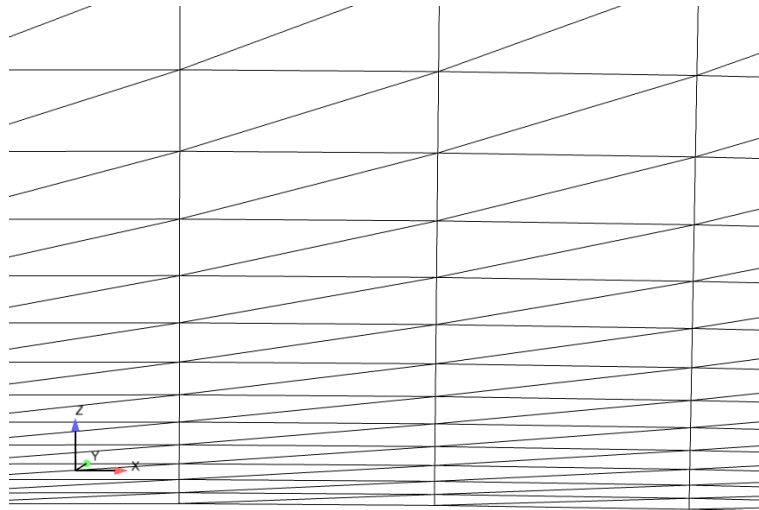


FIGURE 3.16 – Coupe du maillage en  $y = 0$  et zoom sur quelques couches de mailles structurées. La première maille est de 1 mm et les tailles des autres mailles sont définies par les termes d'une suite géométrique de raison 1.15 et de premier terme la taille de la première maille.

### 3.4.3 Écoulement compressible de fluide parfait

L'écoulement d'un fluide parfait, c'est-à-dire non visqueux et sans conductivité thermique, est modélisé par les équations d'Euler. Ces équations sont données par les lois de conservations

de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie, et s'écrivent

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \\ \frac{\partial(\rho \mathbf{u})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla p = 0, \\ \frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \nabla \cdot ((\rho E + p) \mathbf{u}) = 0, \end{cases} \quad (3.10)$$

où  $\rho$  est la densité,  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)^T$  le vecteur vitesse,  $E$  l'énergie totale définie par  $E = e + \frac{\|\mathbf{u}\|^2}{2}$  où  $e$  est l'énergie interne spécifique,  $p = (\gamma - 1)\rho e$  la pression où  $\gamma$  est le rapport entre les capacités calorifiques à pression et volume constants et  $T = \frac{\gamma-1}{R}e$  la température où  $R$  représente la constante des gaz parfaits divisée par la masse molaire du gaz. Dans la suite, on choisit  $\gamma = 1.4$ . Ce système d'équations est résolu avec une méthode de volumes finis par le solveur WOLF développé par Frédéric Alauzet (INRIA Paris-Rocquencourt). La méthode de résolution est décrite dans [7] et résumée dans l'annexe A. Bien que ce code soit utilisable en parallèle, nous avons effectué tous les calculs en séquentiel sur une machine tournant sous Linux avec 16 processeurs Intel Xeon à 2.40 GHz et 24 Go de mémoire.

Nous avons résolu numériquement les équations d'Euler avec le solveur WOLF dans le cas de notre écoulement transsonique autour de l'aile M6. Des résultats ont déjà été obtenus dans [20] pour un écoulement supersonique sur le maillage d'un SuperSonic Business Jet fourni par Dassault Aviation. Les principaux résultats ont été reportés dans l'annexe C.1. Ici, nous avons appliqué l'algorithme d'adaptation de la section 3.1 sur le maillage de l'aile M6 en considérant comme variable d'adaptation  $u_h$  dans l'algorithme 3 le nombre de Mach local qui peut être écrit en fonction des variables conservatives de la manière suivante

$$Ma = \frac{\|\mathbf{u}\|}{\sqrt{(\gamma - 1)\gamma\sqrt{e}}}.$$

Sur les figures 3.17 et 3.18, nous avons représenté une coupe en  $y = 0.7m$  du maillage initial et des maillages adaptés lorsqu'on applique l'algorithme d'adaptation 3 avec  $TOL = 1$  et  $h_{min} = 0.001m$ . Lors de l'adaptation, le maillage devient de plus en plus anisotrope au niveau du choc. Le nombre de sommets augmente et les éléments s'étirent. La figure 3.19 représente le temps CPU utilisé par le solveur WOLF à chaque cycle d'adaptation ainsi que le nombre d'itérations nécessaire pour converger. Les trois pics que l'on peut observer sur ces deux courbes sont dus à la génération d'un maillage adapté qui contient un élément de vraiment trop petite taille, ce qui réduit considérablement le pas de temps du solveur. La convergence du solveur dépendant fortement du maillage, la robustesse du remaillageur est primordiale. Les isovaleurs du Mach sont représentées dans les figures 3.20 (coupe en  $y = 0.7m$ ), 3.21 (sur l'aile) et 3.22 (coupe en  $z = 0.08m$ ). Un choc en lambda se forme sur la surface de l'aile, voir les figures 3.21 et 3.22. Ce choc n'est pas visible sur le maillage initial mais apparaît au cours de l'adaptation, voir figure 3.23.

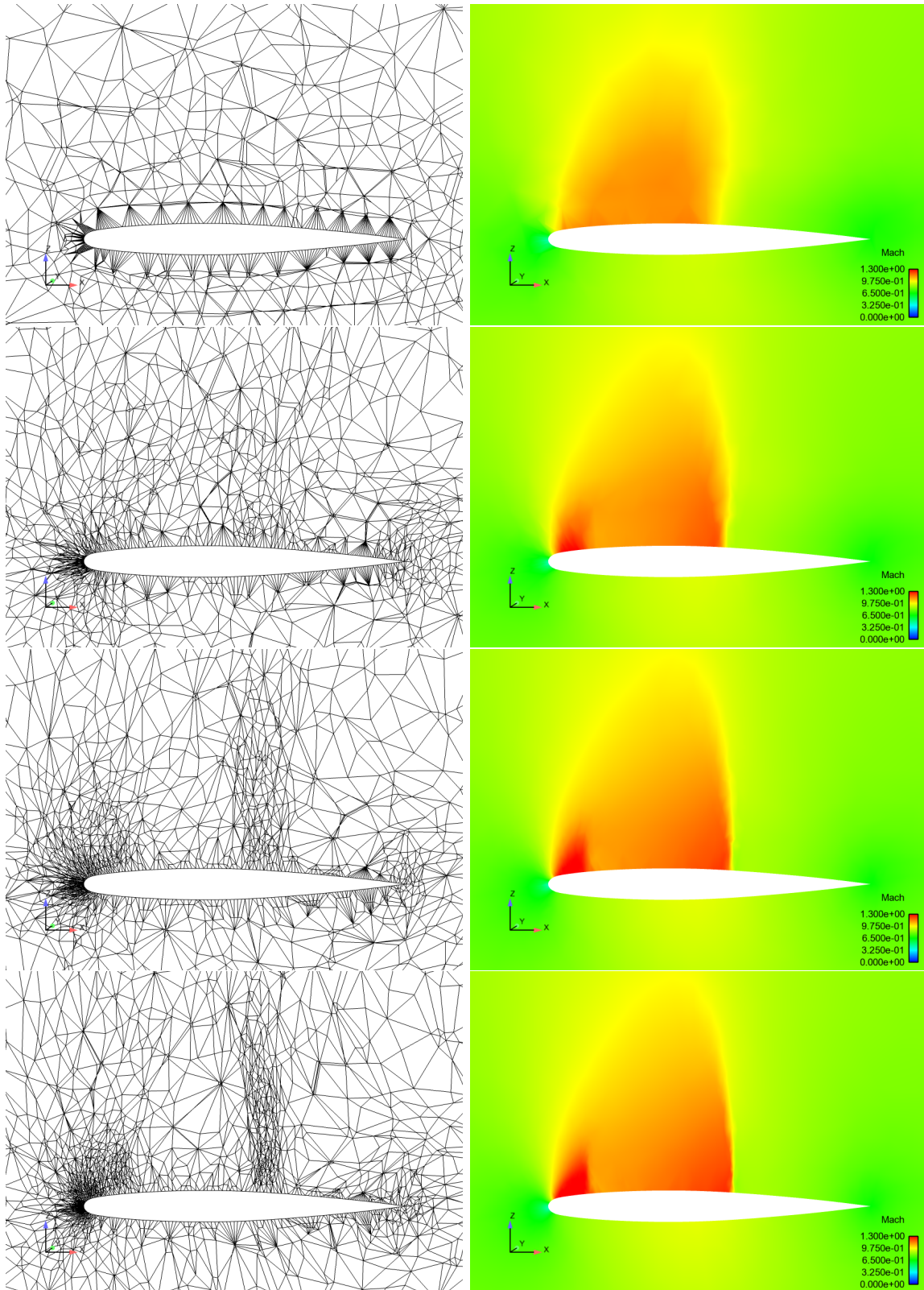


FIGURE 3.17 – Coupe en  $y = 0.7m$  de plusieurs maillages volumiques du domaine (à gauche) et leurs solutions associées (à droite) avec  $TOL=1$  et  $h_{min} = 0.001m$ . De haut en bas : maillage initial, maillages adaptés après 1, 2 et 3 cycles d'adaptation.

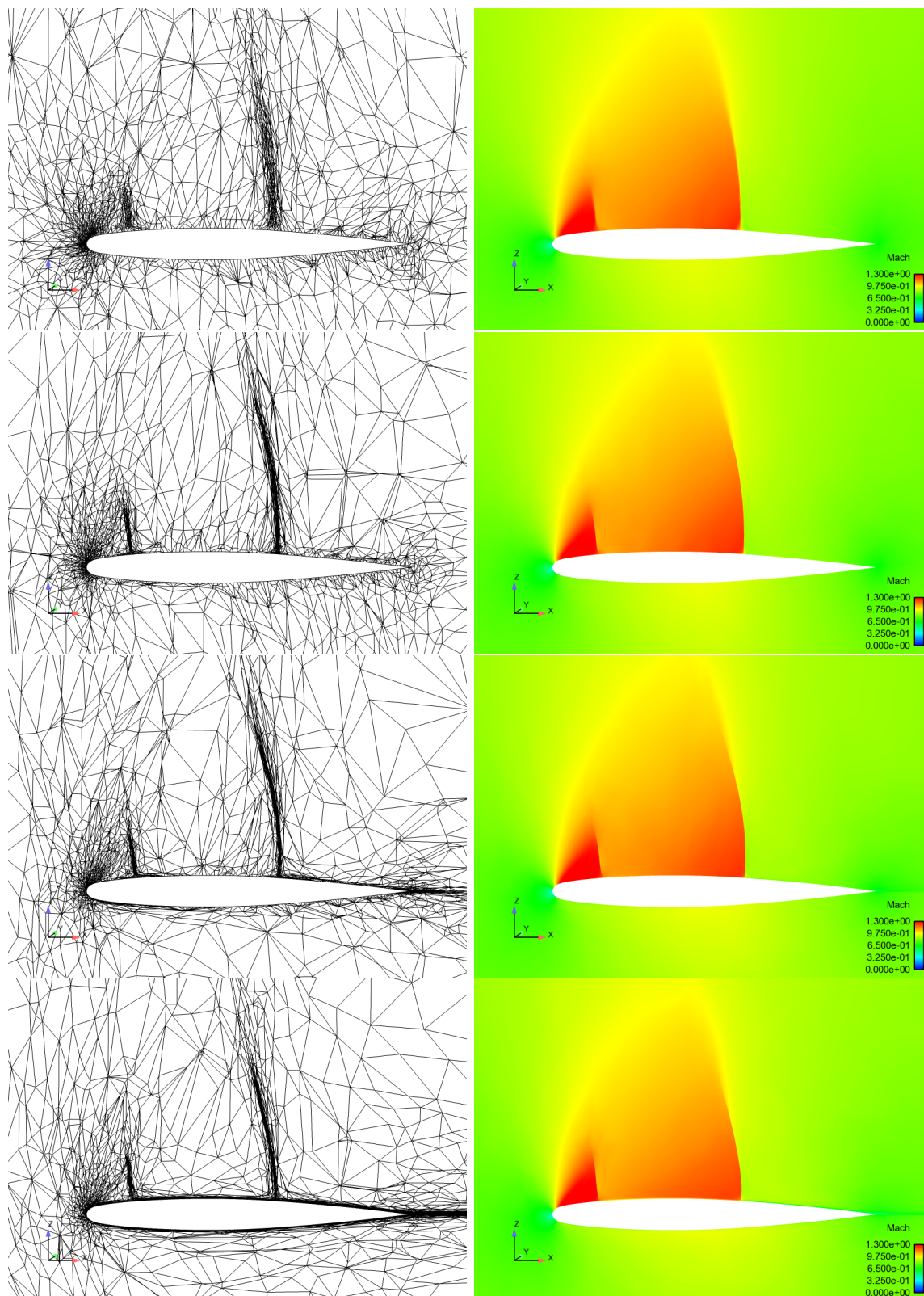


FIGURE 3.18 – Coupe en  $y = 0.7m$  de plusieurs maillages volumiques du domaine (à gauche) et leurs solutions associées (à droite) avec  $TOL=1$  et  $h_{min} = 0.001m$ . De haut en bas : maillages adaptés après 5, 10, 20 et 50 cycles d'adaptation.

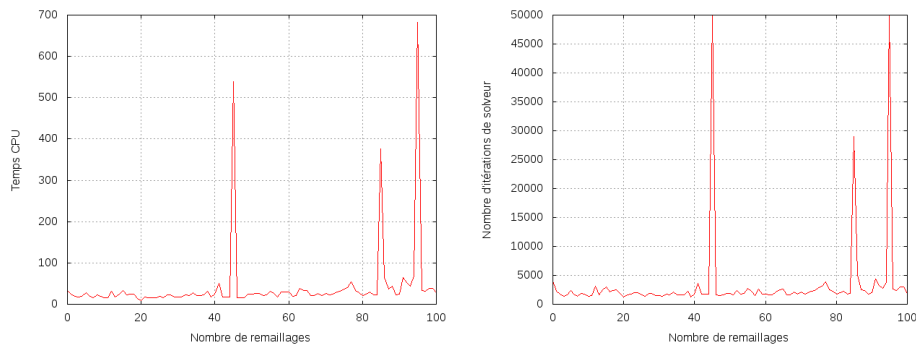


FIGURE 3.19 – A gauche : temps cpu utilisé par WOLF au cours des adaptations. A droite : nombre d'itérations du solveur nécessaire pour converger sur chaque maillage.

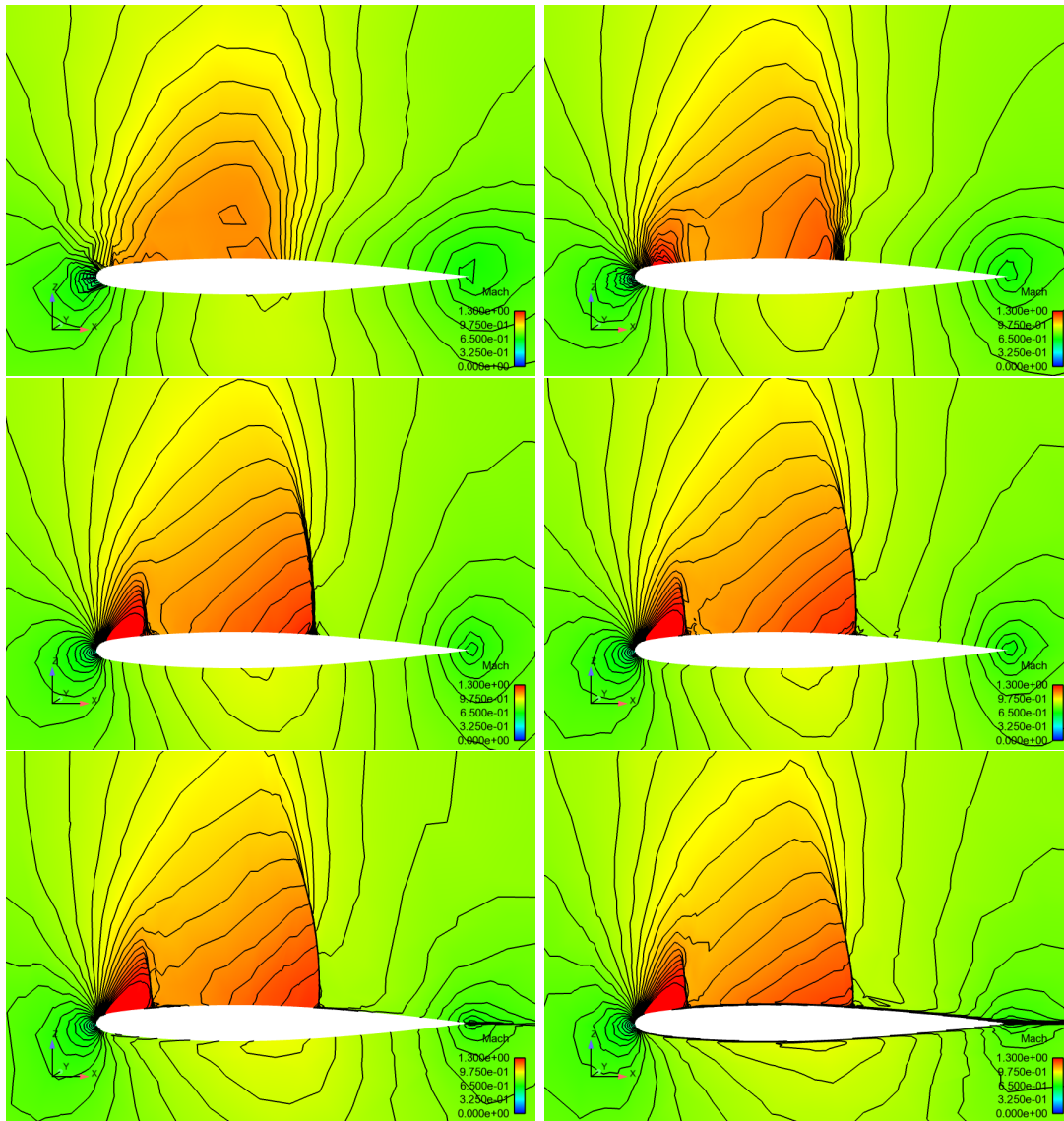


FIGURE 3.20 – Isovaleurs de Mach en  $y = 0.7m$  des solutions calculées sur le maillage initial et les maillages adaptés après 1, 5, 10, 20 et 50 cycles d'adaptation avec  $TOL=1$  et  $h_{min} = 0.001m$ .

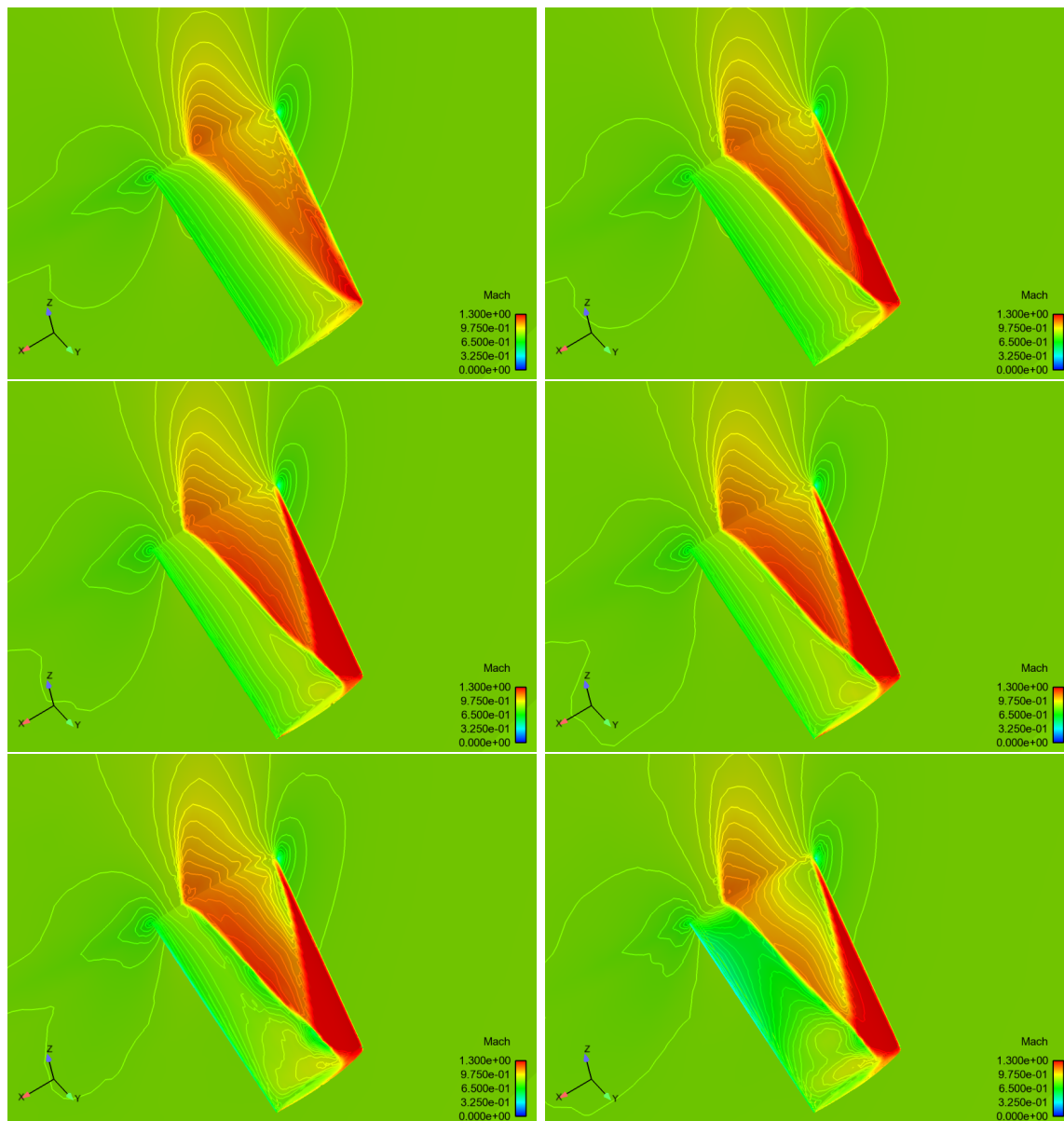


FIGURE 3.21 – Isovaleurs de Mach sur la peau de l'aile des solutions calculées sur le maillage initial et les maillages adaptés après 1, 5, 10, 20 et 50 cycles d'adaptation avec  $TOL=1$  et  $h_{min} = 0.001m$ .

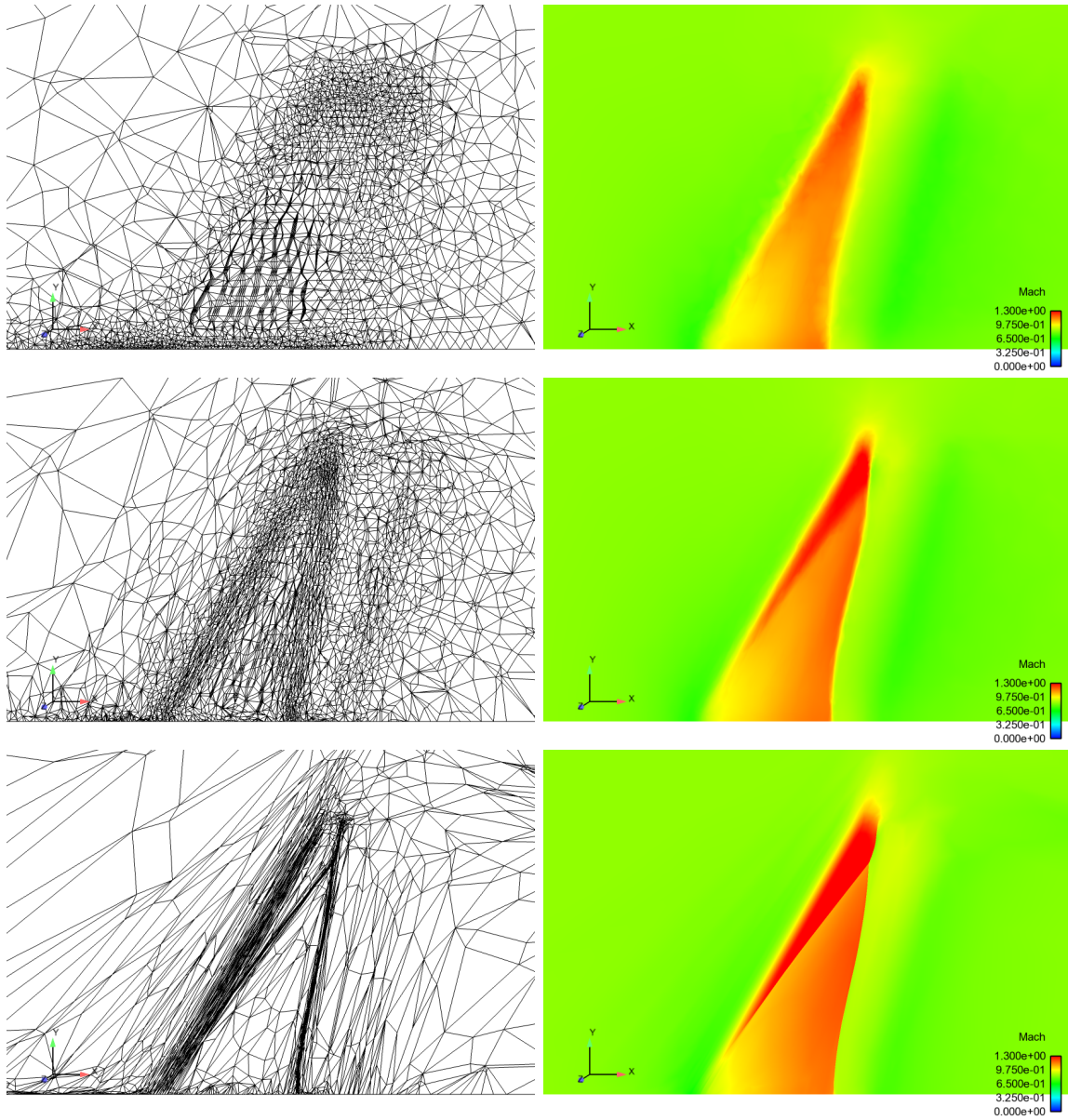


FIGURE 3.22 – Coupe en  $z = 0.08m$  de plusieurs maillages volumiques du domaine (à gauche) et leurs solutions associées (à droite) avec  $TOL=1$  et  $h_{min} = 0.001m$ . De haut en bas : maillages initial et adaptés après 1 et 50 cycles d'adaptation.

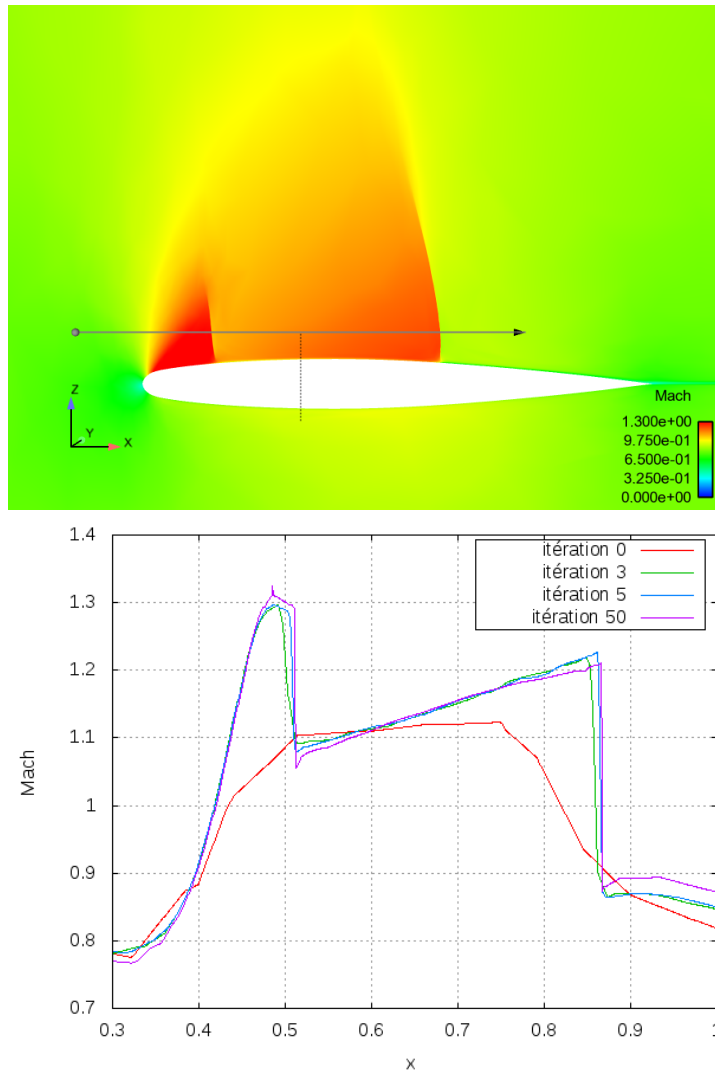


FIGURE 3.23 – Coupe du Mach le long de la ligne  $(x, y, z) = (t, 0.7, 0.08)$  pour  $t \in [0.3, 1]$ .

La figure 3.24 représente l'évolution du coefficient de traînée et du coefficient de portance au cours des itérations d'adaptation. Après une vingtaine de cycles d'adaptation, ces deux coefficients aérodynamiques se stabilisent, ce qui indique une convergence du calcul de l'écoulement.

Des essais numériques ont été effectués en considérant comme variable d'adaptation la première composante de la vitesse. Ces essais réalisés avec  $TOL = 1$  et  $h_{min} = 0.001m$  donnent des résultats similaires à ceux présentés précédemment (voir figure 3.25).



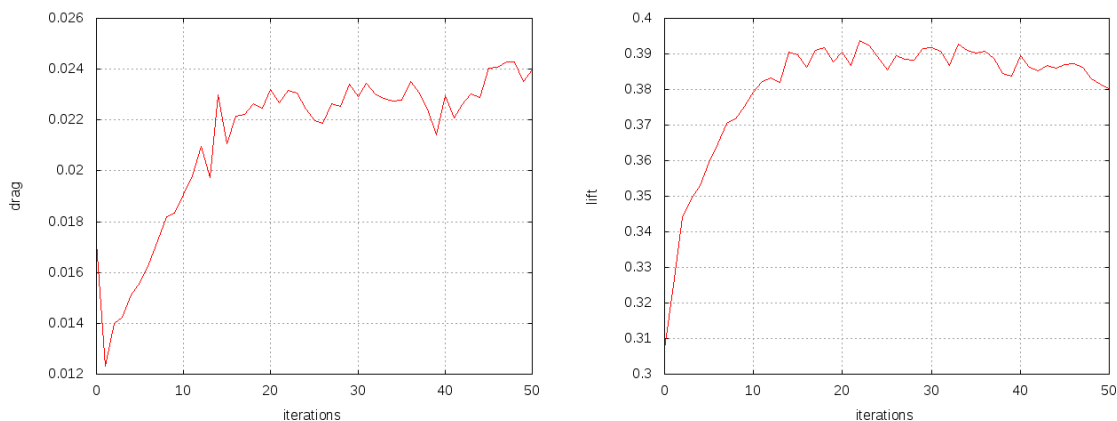


FIGURE 3.24 – Evolution des coefficients aérodynamiques au cours des itérations d'adaptation. À gauche : le coefficient de traînée (drag), à droite : le coefficient de portance (lift).

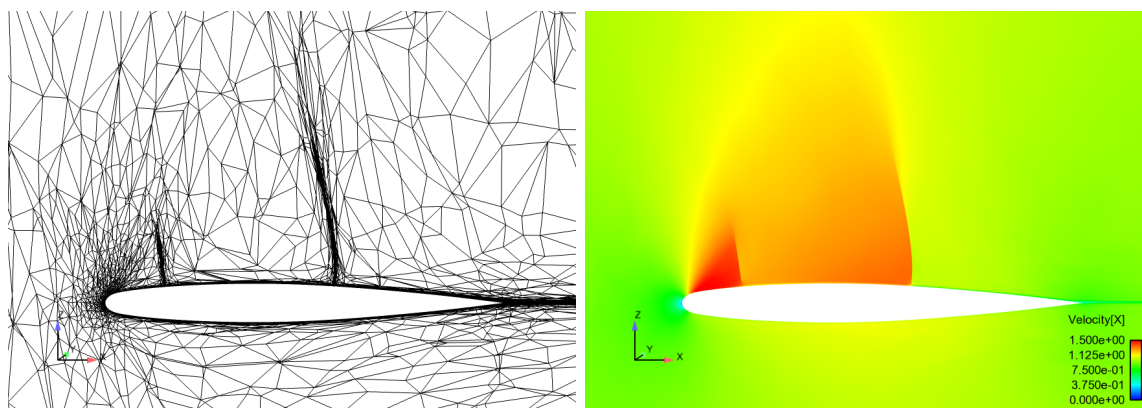


FIGURE 3.25 – Coupe en  $y = 0.7m$  du maillage volumique du domaine adapté 50 fois à partir de la première composante de la vitesse avec  $TOL=1$  et  $h_{min} = 0.001m$  (à gauche) et la première composante de la vitesse calculée sur ce maillage (à droite).

### Influence de la tolérance

Le paramètre  $TOL$  présent dans (3.2) permet de contrôler la densité des sommets du maillage. La figure 3.26 représente les maillages adaptés après 50 adaptations de maillage pour différentes valeurs du paramètre  $TOL$ . Plus la tolérance est petite et plus la capture des chocs est précise. L'évolution du nombre de sommets est donnée dans la figure 3.27 et les évolutions du rapport d'aspect maximal défini par  $\max_{K \in \mathcal{T}_h} \frac{\lambda_{1,K}}{\lambda_{3,K}}$  et du rapport d'aspect moyen défini par  $\frac{1}{N_K} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \frac{\lambda_{1,K}}{\lambda_{3,K}}$ , où  $N_K$  est le nombre d'éléments du maillage, sont reportées dans la figure 3.28 au cours de l'adaptation de maillage pour plusieurs valeurs de  $TOL$ . Le nombre de sommets se stabilise plus rapidement quand la tolérance est grande. En effet, on peut observer sur la figure 3.27 que pour  $TOL=1$ , le nombre de sommets commence à se stabiliser après 60 itérations d'adaptation tandis que pour  $TOL=4$ , le nombre de sommets reste pratiquement constant après seulement 5 itérations. Le rapport d'aspect maximal des éléments oscille autour de l'intervalle  $[3000; 4000]$  dans tous les cas après 60 cycles d'adaptation pour  $TOL = 4$ ,  $TOL = 2$  et après 80 cycles pour  $TOL = 1$ . Le rapport d'aspect moyen ne cesse d'augmenter mais augmente deux fois plus vite pour  $TOL = 1$  que pour  $TOL = 4$ . Néanmoins, pour  $TOL = 4$  et  $TOL = 2$ , ce

rapport tend à se stabiliser après 80 itérations.

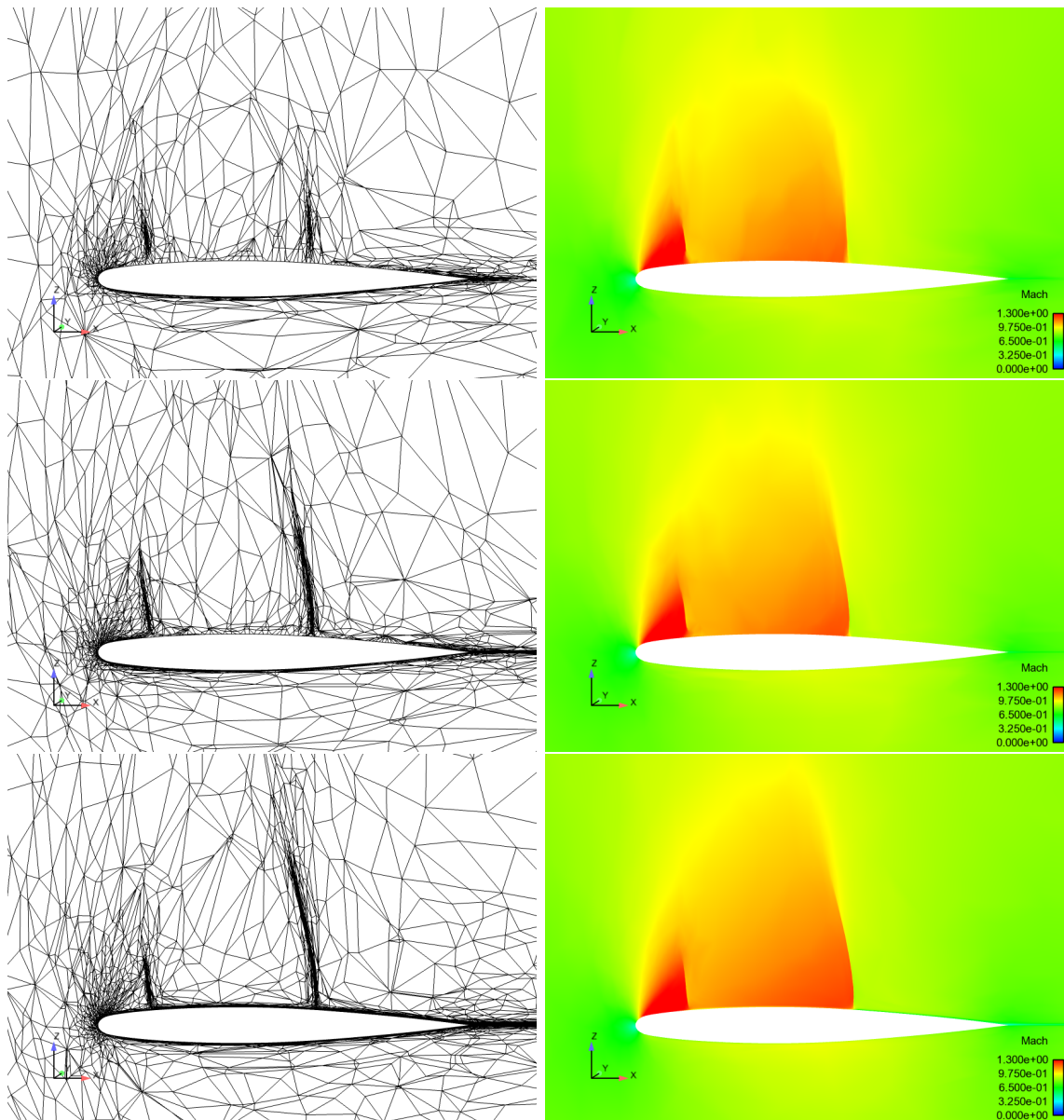


FIGURE 3.26 – Coupe en  $y = 0.7m$  de plusieurs maillages volumiques du domaine adaptés après 50 cycles d'adaptation avec  $h_{min} = 0.001m$  pour différentes valeurs du paramètre  $TOL$ . De haut en bas :  $TOL=4$ ,  $TOL=2$  et  $TOL=1$ .

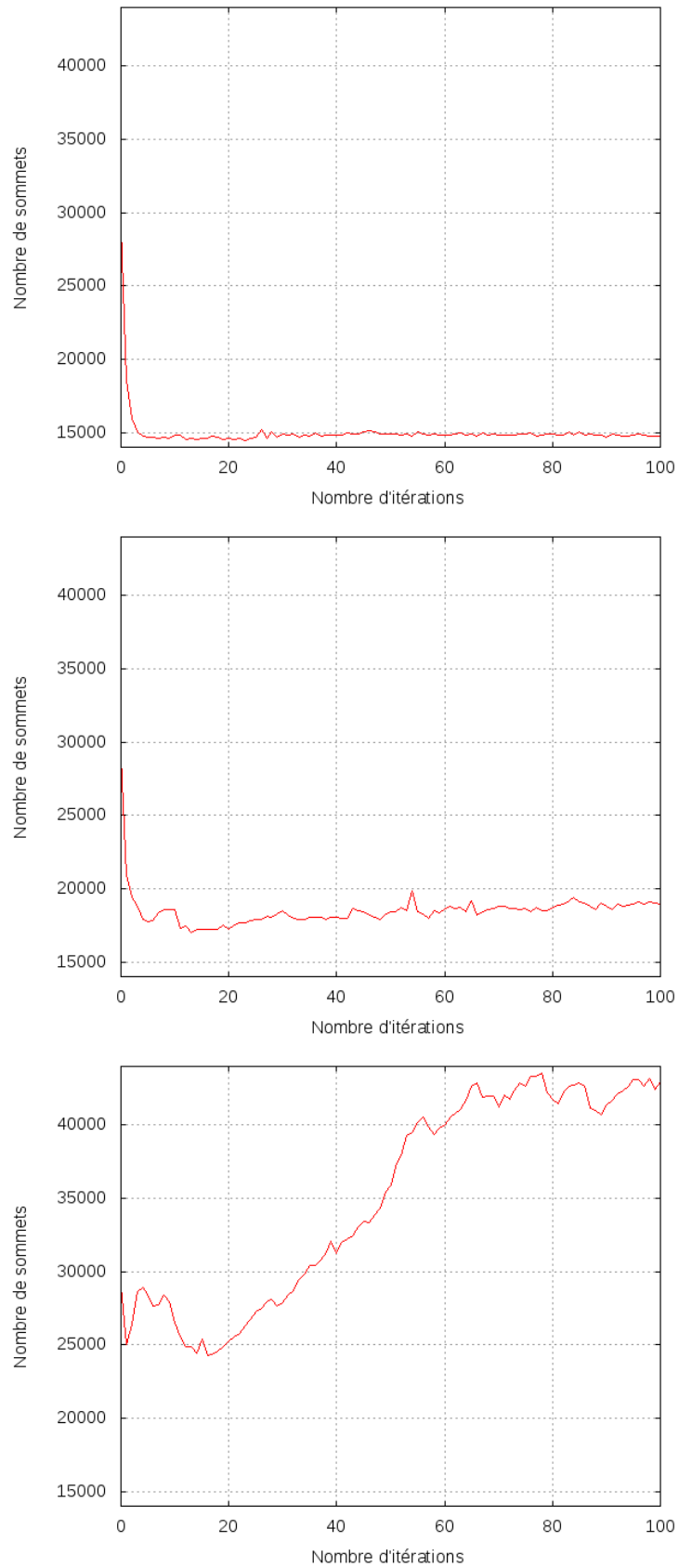


FIGURE 3.27 – Evolution du nombre de sommets du maillage en fonctions des cycles d'adaptation pour différentes valeurs du paramètre  $TOL$ . De haut en bas :  $TOL=4$ ,  $TOL=2$  et  $TOL=1$ .

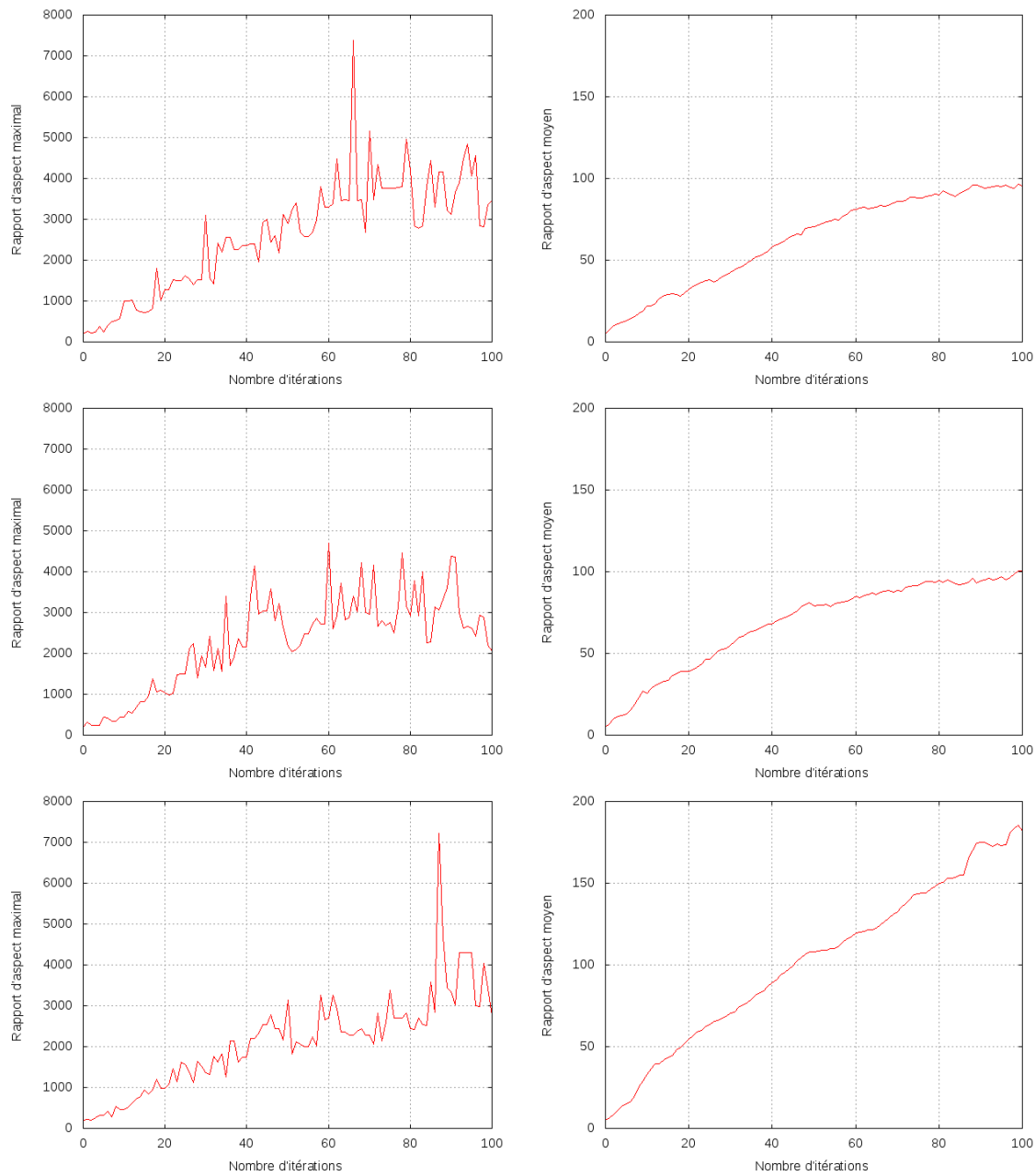


FIGURE 3.28 – Evolution du rapport d'aspect maximal des éléments (à gauche) et du rapport d'aspect moyen (à droite) en fonctions des cycles d'adaptation pour différentes valeurs du paramètre  $TOL$ . De haut en bas :  $TOL=4$ ,  $TOL=2$  et  $TOL=1$ .

La figure 3.29 représente les valeurs de Mach le long d'une ligne horizontale au-dessus de l'aile dans le plan  $y = 0.7m$ . On remarque que la solution est très différente pour  $TOL = 4$  et  $TOL = 1$ . En effet, la solution semble plus précise avec  $TOL = 1$  puisque le choc au milieu de l'aile n'est pas visible sur la courbe pour  $TOL = 4$ .

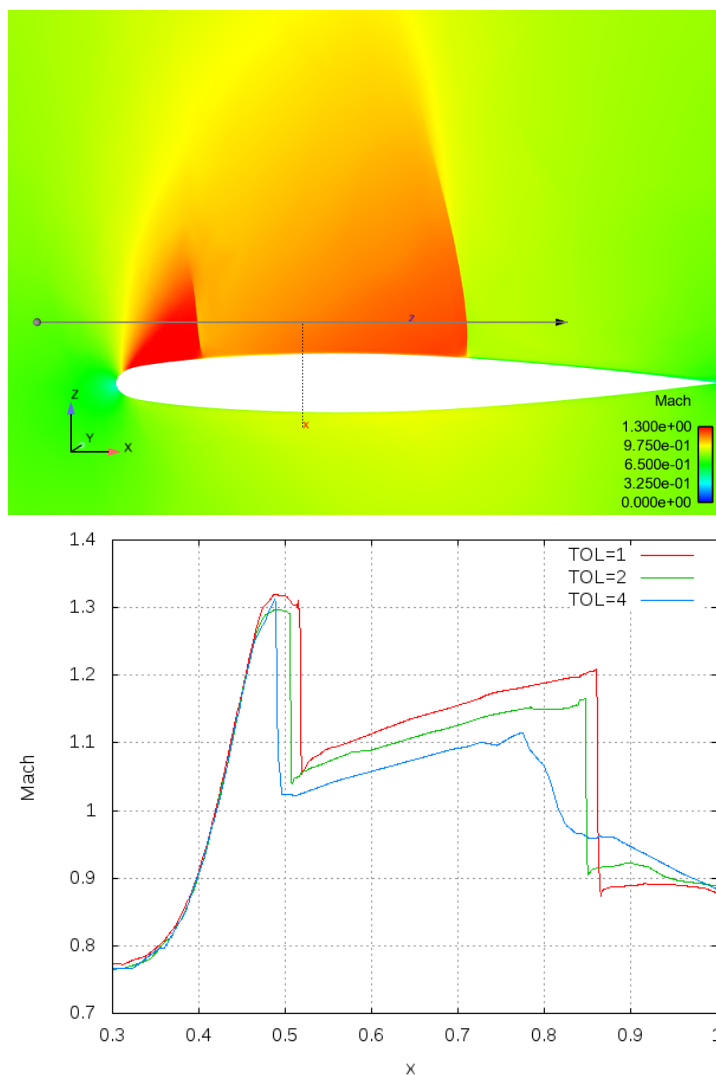


FIGURE 3.29 – Valeurs de Mach le long de la ligne  $(x, y, z) = (t, 0.7, 0.08)$  pour  $t \in [0.3, 1]$  après 100 itérations d'adaptation pour différentes valeurs de  $TOL$ .

### Influence de la taille d'arête minimale

Dans le cas de solution comportant des discontinuités, le gradient  $\nabla u_h$  tend vers l'infini quand  $h$  tend vers 0. De ce fait, le gradient de l'erreur  $\nabla(u - u_h)$  ne peut pas être bornée en norme  $L^2(\Omega)$  sur les surfaces définies par les discontinuités de la solution. Ainsi, pour éviter que le critère (3.2) n'explose, on limite les tailles d'étirement des éléments par une taille minimale  $h_{min}$ . La figure 3.30 met en évidence le fait que la taille d'arête minimale  $h_{min}$  ne doit pas être choisie trop grande au risque d'obtenir une solution pas assez précise au niveau des chocs mais elle est nécessaire puisqu'elle permet de limiter le nombre de sommets du maillage.

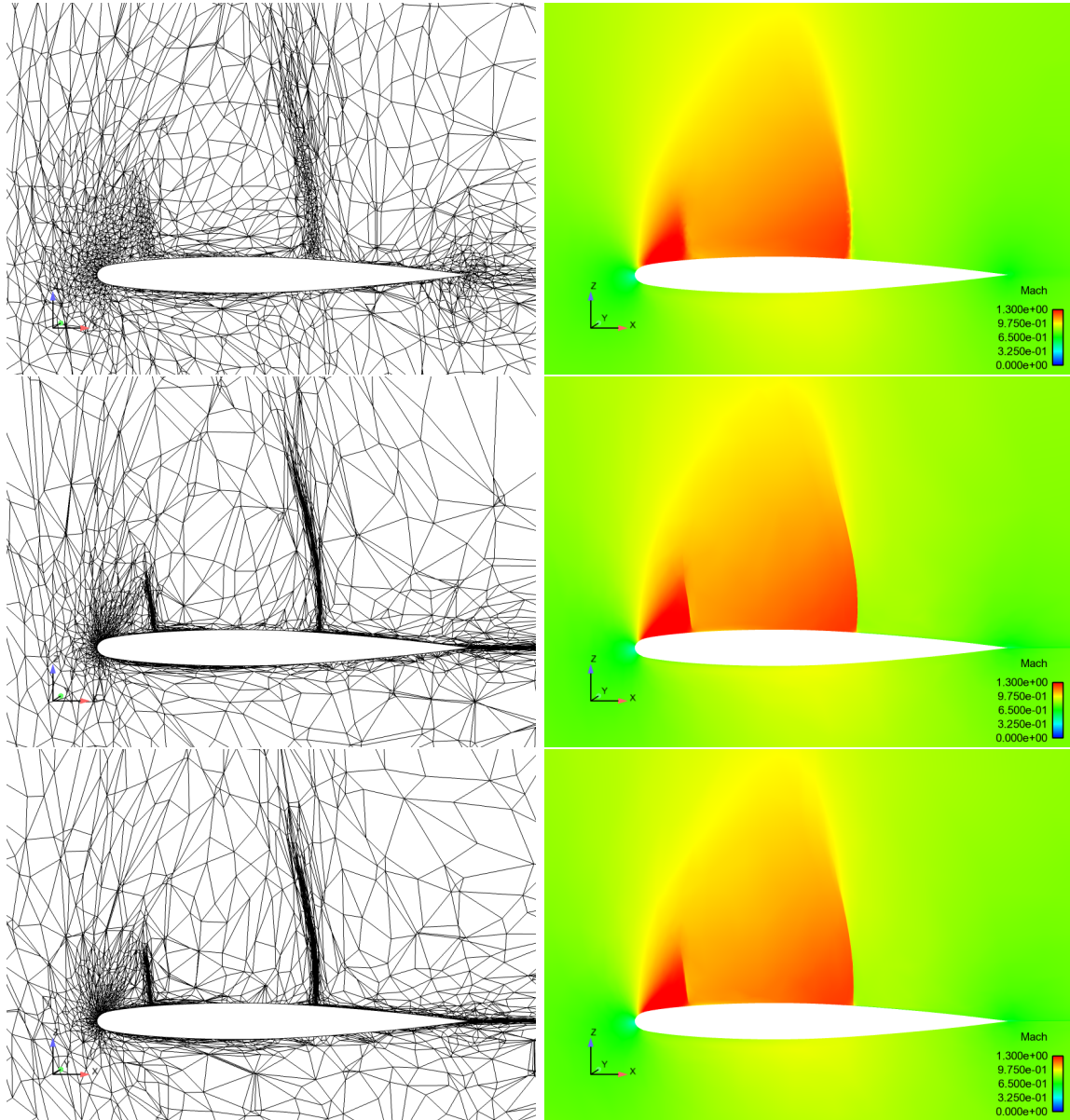


FIGURE 3.30 – Coupe en  $y = 0.7m$  de plusieurs maillages volumiques du domaine adaptés après 25 cycles d'adaptation avec  $TOL = 1$  pour différentes valeurs du paramètre  $h_{min}$ . De haut en bas :  $h_{min} = 0.01$ ,  $h_{min} = 0.001$  et  $h_{min} = 0.0005$ .

### 3.4.4 Écoulement compressible de fluide visqueux

L'écoulement compressible d'un fluide visqueux avec conductivité thermique et en l'absence de force de volume, est modélisé par les équations de Navier-Stokes. Ces équations sont données par les lois de conservations de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie, et s'écrivent

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \\ \frac{\partial (\rho \mathbf{u})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) = \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} - pI), \\ \frac{\partial (\rho E)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho E \mathbf{u}) = \nabla \cdot ((\boldsymbol{\tau} - pI) \mathbf{u} - \mathbf{q}), \end{cases} \quad (3.11)$$

avec  $\rho$ ,  $\mathbf{u}$ ,  $p$  et  $E$  définies comme dans les équations d'Euler et  $\tau$  le tenseur des contraintes visqueuses. Pour un fluide newtonien et en considérant l'hypothèse de Stokes,  $\tau$  est défini par

$$\tau_v = \mu \left( \nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \mathbf{u}) I \right),$$

$\mu$  désignant la viscosité moléculaire. De plus, le flux de chaleur  $\mathbf{q}$  vérifie la loi de Fourier et on a  $\mathbf{q} = -\kappa \nabla T$ ,  $\kappa$  étant le coefficient de conductibilité thermique et  $T$  la température absolue.

Ce système d'équations est résolu avec une méthode d'éléments finis par le solveur AETHER développé chez Dassault Aviation. Dans tout ce travail, la turbulence a été modélisée avec le même solveur en utilisant le modèle  $k - \epsilon$  bi-couche qui consiste à résoudre une équation de transport sur  $k$  en proche paroi, là où les effets visqueux sont dominants, et à utiliser le modèle  $k - \epsilon$  là où l'écoulement est pleinement turbulent. La méthode de résolution des équations de Navier-Stokes ainsi que la modélisation de la turbulence sont décrites dans [26]. L'annexe B donne les principales étapes de la résolution. Dans la suite, tous les calculs sont effectués sur des écoulements adiabatiques, c'est-à-dire sans transfert de chaleur ( $\mathbf{q} = \mathbf{0}$ ), et avec un nombre de Reynolds  $Re = 11.72e6$ . Les calculs ont tous été réalisés en parallèle (bibliothèque MPI) et sur diverses machines puisque ce code tourne sur de nombreuses architectures informatiques [26]. De plus, tous les calculs sont réalisés avec 5000 itérations de solveur.

Nous avons appliqué l'algorithme d'adaptation décrit dans la section 3.1 sur un maillage de l'aile M6 dans le cas d'un écoulement visqueux. Nous avons considéré trois maillages volumiques différents. Les tailles de première maille de ces maillages sont :  $1mm$ ,  $0.1mm$  et  $0.005mm$ . Nous avons pris une raison de 1.15 pour les trois maillages et construit 30 couches de mailles structurées pour le maillage de première maille  $1mm$ , 45 couches pour le maillage de première maille  $0.1mm$  et 70 couches pour le dernier ( $0.005mm$ ) afin d'obtenir dans tous les cas des maillages structurés de hauteur totale assez proche. Les résultats d'un calcul réalisé sans adaptation sur chacun de ces maillages sont donnés sur les figures 3.31 et 3.32. Nous nous intéressons principalement au Mach puisque c'est la variable qui a été choisie pour l'adaptation, ainsi qu'au coefficient de pression  $C_P$  donné par

$$C_P = \frac{P - P_\infty}{\frac{1}{2} \rho_\infty u_\infty^2},$$

où  $P_\infty$ ,  $\rho_\infty$  et  $u_\infty$  sont respectivement la pression, la densité et la norme de la vitesse de l'écoulement incident. Ce coefficient couramment utilisé en aérodynamique est intéressant puisqu'il permet de se rendre compte de l'impact du choc sur la surface de l'aile au travers de la couche limite. On peut déjà remarquer que le Mach et le  $C_p$  sur la peau semblent plus précis pour une taille de première maille de 5 microns.

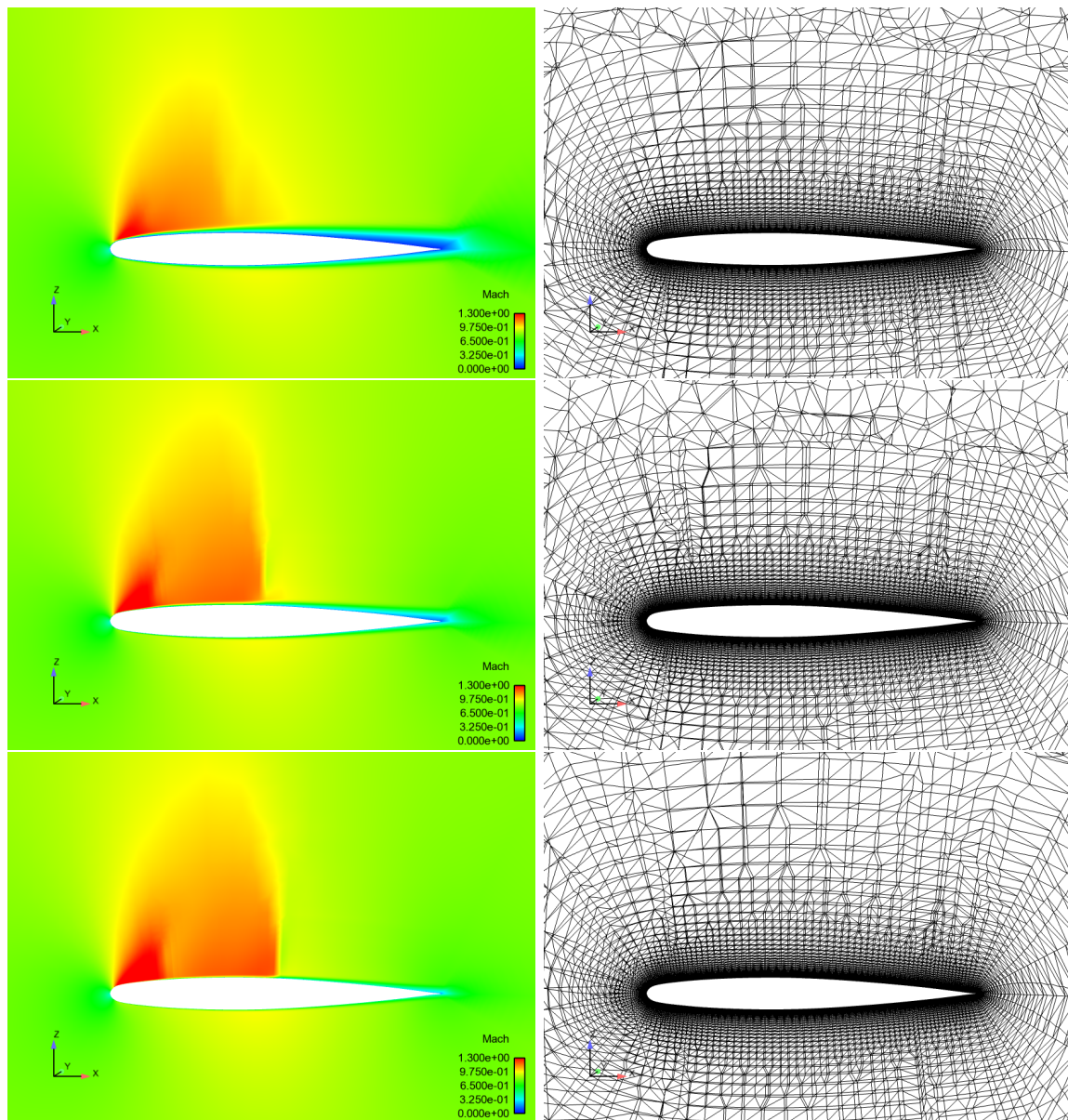


FIGURE 3.31 – Coupe en  $y = 0.7m$  des maillages et solutions initiaux pour différentes tailles de première maille. De haut en bas : 1 mm, 100 microns et 5 microns.



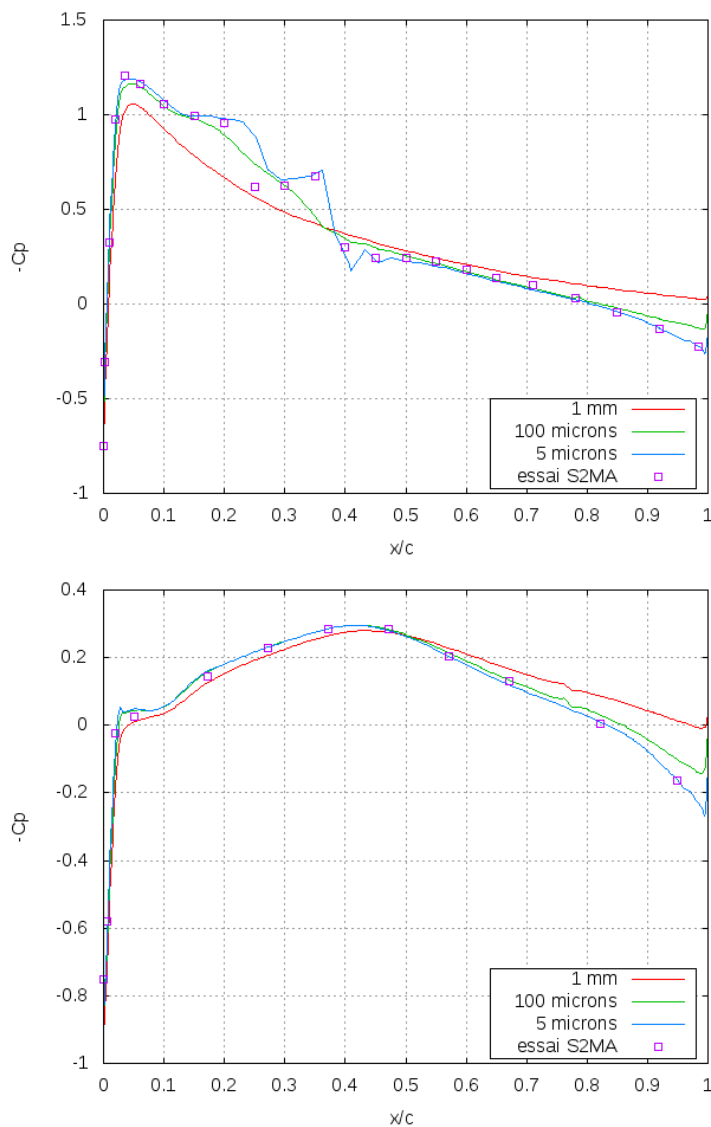


FIGURE 3.32 – Courbe de  $C_p$  sur la peau en  $y = 957.03$  (80% de l'aile) sur l'extrados (en haut) et l'intrados (en bas) pour différentes tailles de première maille sans adaptation. L'essai S2MA correspond à des résultats expérimentaux obtenus en soufflerie.

Nous avons donc appliqué l'algorithme d'adaptation décrit dans la section 3.1 sur le maillage dont la taille de la première maille est de 5 microns. La figure 3.33 nous montre les résultats obtenus sur les maillages adaptés après 1, 5, 10 et 15 cycles d'adaptation. Le maillage initial et le Mach local associé sont donnés sur la figure 3.31 (en bas). On remarque que l'algorithme n'effectue des raffinements que dans la couche limite dès le premier cycle d'adaptation. Les chocs qui étaient peu marqués sur le maillage initial disparaissent complètement après quelques cycles d'adaptation de maillage.

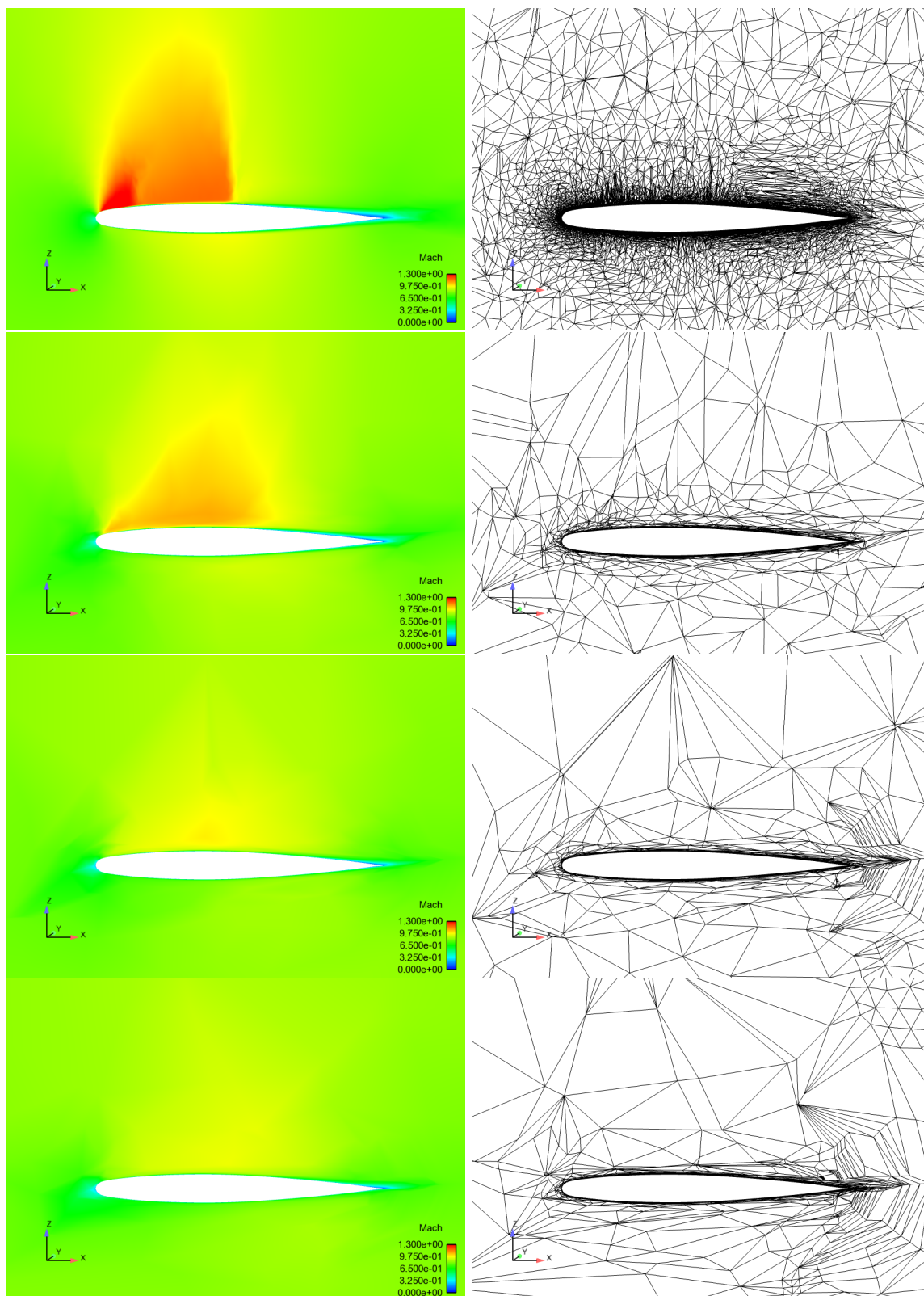


FIGURE 3.33 – Maillages adaptés (à droite) avec leurs solutions associées (à gauche) pour  $TOL=2$ . De haut en bas : maillages adaptés après 1, 5, 10 et 15 cycles d'adaptation.

Le calcul donne de meilleurs résultats lorsque le maillage est structuré dans la couche

limite. Ce phénomène est bien connu des praticiens de la CFD (Computational Fluid Dynamics) dans le cadre d'écoulements compressibles et est attribué à des phénomènes de superconvergence [44].

#### 3.4.4.1 Résultats obtenus avec une décomposition de domaine

Nous décidons de conserver un maillage structuré autour de l'aile incluant la couche limite. On utilise l'algorithme d'adaptation de maillage décrit dans la section 3.2 et on modifie le maillage seulement en dehors d'un certain nombre de couches de mailles structurées autour de la couche limite.

Considérons un maillage dont la première maille est de 5 microns, construit avec une raison de 1.15 et conservons 45 couches de mailles structurées. La figure 3.34 montre les résultats au cours des cycles d'adaptation pour  $TOL=2$ . On remarque que cette fois-ci le maillage est raffiné au niveau des chocs tout en ayant conservé la couche limite de la solution. La figure 3.35 représente le coefficient de pression sur la peau qui tend à se stabiliser au cours des itérations. On remarque que le maillage initial permet d'obtenir la solution la plus proche des résultats expérimentaux. Il faut peut-être envisager le recalage des paramètres physiques du modèle. La figure 3.36 montre que le nombre de sommets se stabilise assez rapidement ainsi que le rapport d'aspect moyen des éléments au cours des itérations.

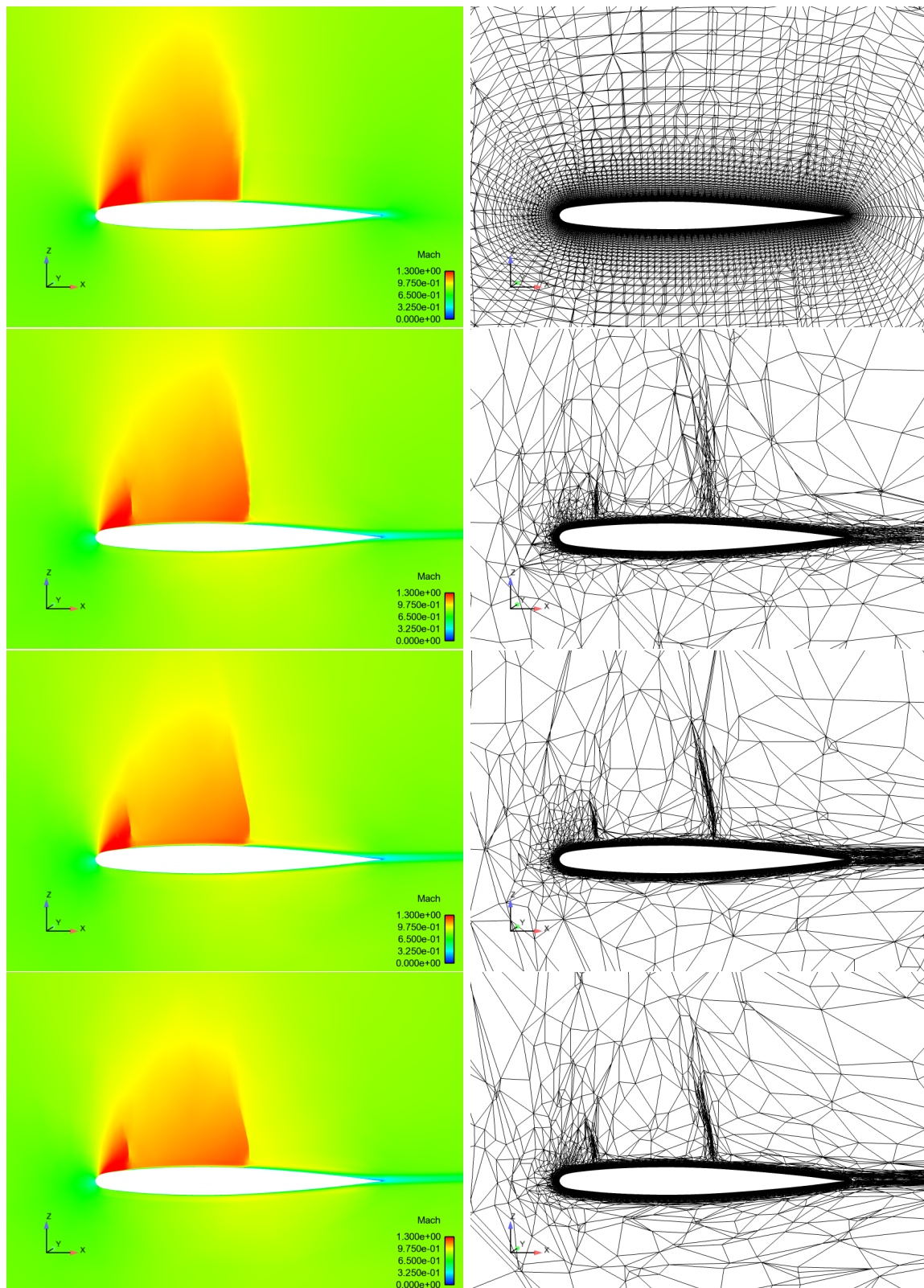


FIGURE 3.34 – Coupe en  $y = 0.7m$  du maillage de taille de première maille égale à 5 microns dont on a conservé 45 couches structurées. De haut en bas : maillage et solution initiaux, maillages adaptés et solutions obtenus après 5, 10 et 15 cycles avec  $TOL = 2$ .

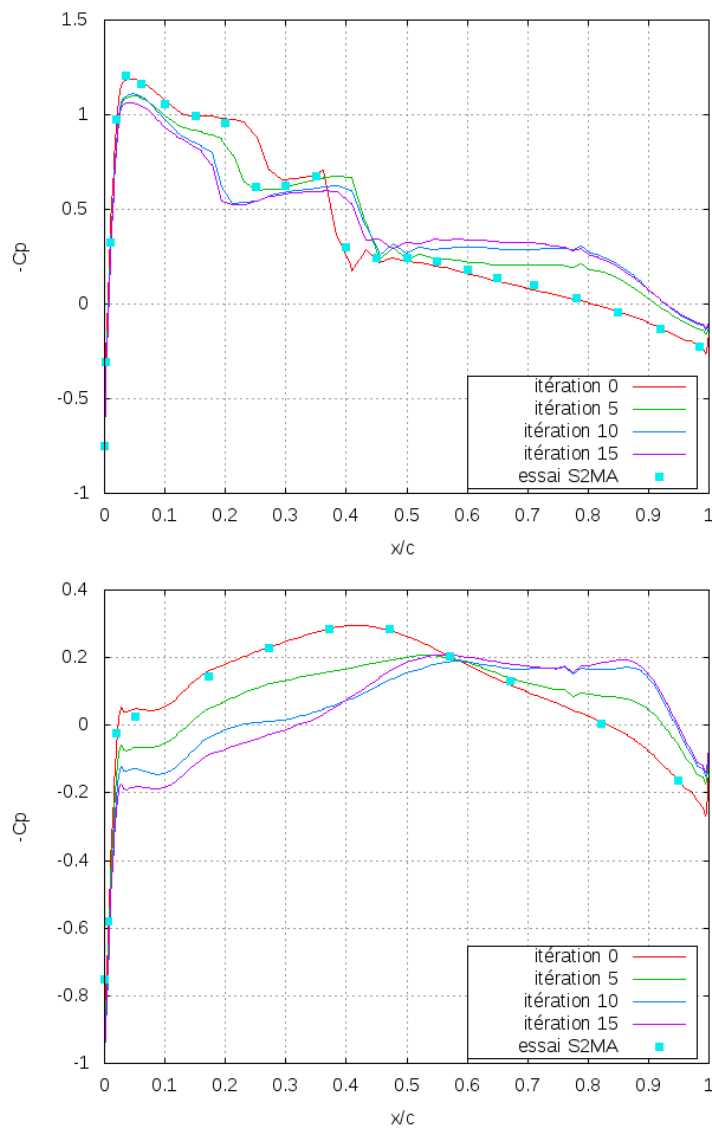


FIGURE 3.35 – Evolution de la courbe de  $C_p$  sur la peau en  $y = 957.03$  (80% de l'aile) sur l'extrados (en haut) et l'intrados (en bas) au cours des itérations d'adaptation sur le maillage de taille de première maille égale à 5 microns dont on a conservé 45 couches structurées avec  $TOL = 2$ . L'essai S2MA correspond à des résultats expérimentaux obtenus en soufflerie.

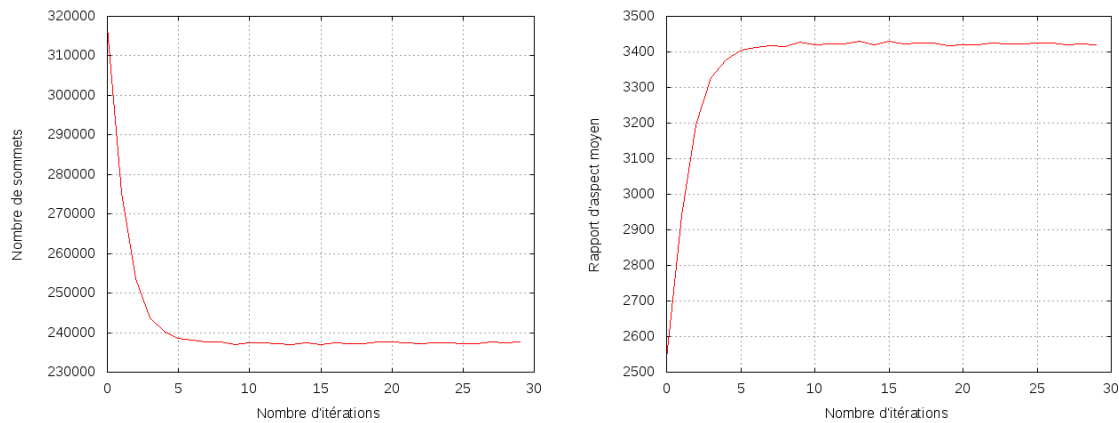


FIGURE 3.36 – Evolution du nombre de sommets et du taux d'anisotropie moyen du maillage au cours des itérations d'adaptation avec  $TOL = 2$  avec une taille de première maille égale à 5 microns et dont on a conservé 45 couches structurées.

#### 3.4.4.2 Etude paramétrique

Comme pour les calculs sur les équations d'Euler, on va étudier l'influence de chaque paramètre qui entre en jeu, à savoir la taille de la première maille, le nombre de couches structurées et le paramètre de tolérance  $TOL$ . La raison restera fixée à 1.15, ce qui permet de limiter le nombre de sommets dans la zone structurée tout en suivant l'épaissement de la couche limite.

##### Influence de la taille de la première maille

Considérons toujours le maillage dont la taille de la première maille est de 5 microns et dont on conserve 45 couches structurées, ainsi que les deux autres maillages utilisés précédemment dont les tailles de première maille sont de 100 microns et de 1 mm et dont on conserve 10 et 25 couches structurées respectivement. Dans ce cas, tous les maillages obtenus ont une zone structurée de hauteur totale assez proche pour toutes les tailles de première maille. Sur les figures 3.31 et 3.32, on peut déjà remarquer que sur les maillages initiaux, le Mach et le  $C_p$  sur la peau semblent plus précis pour une première taille de maille de 5 microns. Ensuite, après 15 cycles d'adaptation, les conclusions sont les mêmes si on regarde les résultats que nous montrent les figures 3.37 et 3.38.

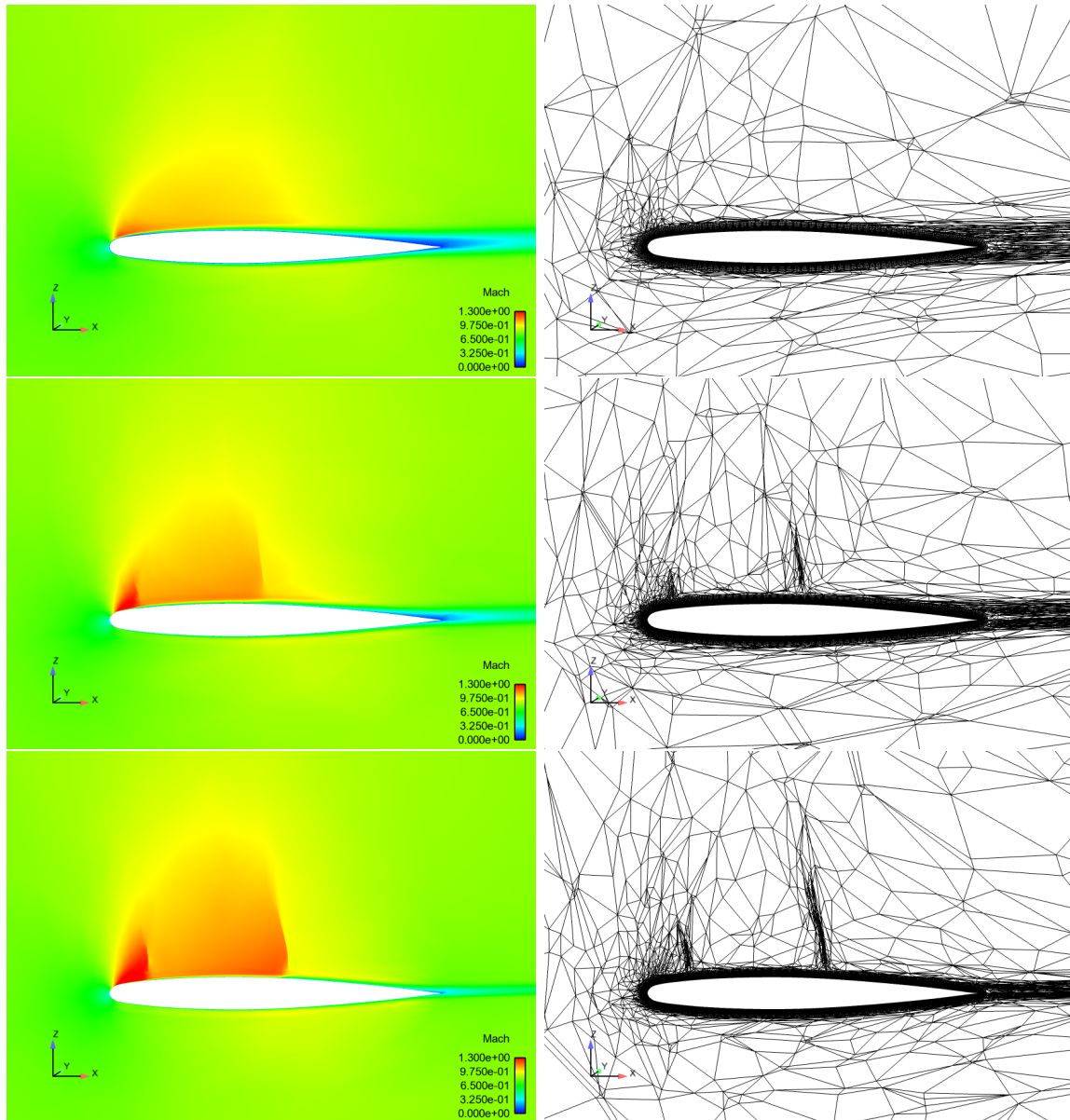


FIGURE 3.37 – Coupe en  $y = 0.7m$  des maillages et solutions après 15 cycles d'adaptation avec  $TOL = 2$  pour différentes tailles de première maille. De haut en bas : 1 mm, 100 microns et 5 microns.

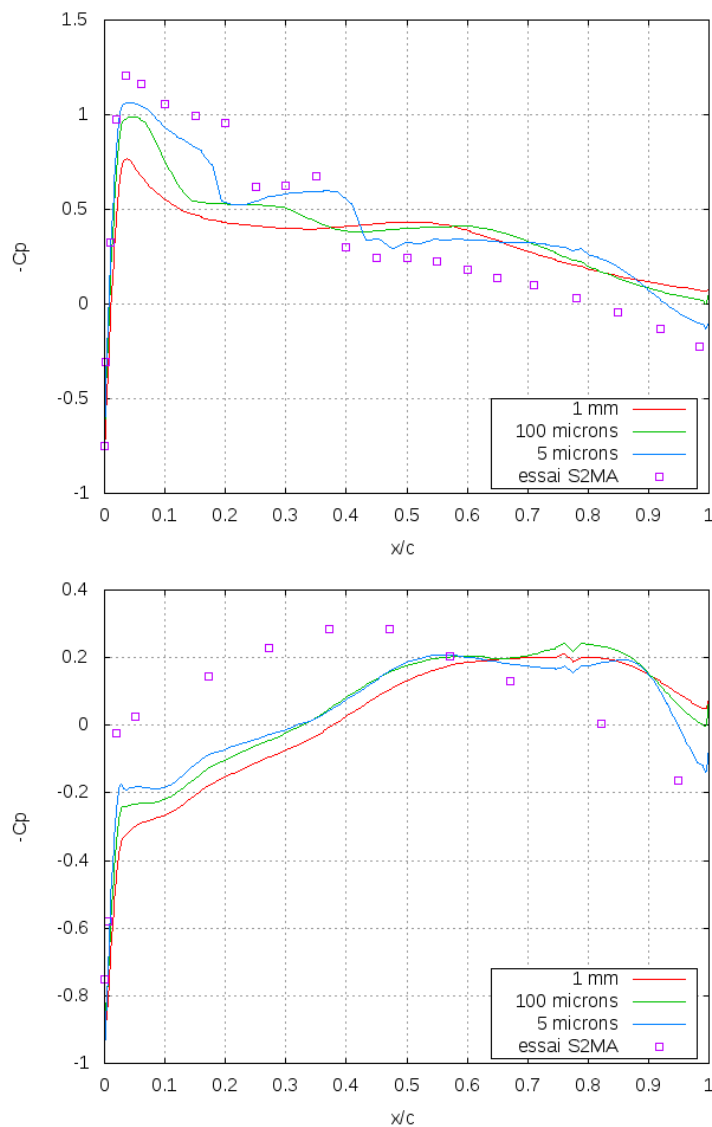


FIGURE 3.38 – Courbe de  $C_p$  sur la peau en  $y = 957.03$  (80% de l'aile) sur l'extrados (en haut) et l'intrados (en bas) pour différentes tailles de première maille après 15 cycles d'adaptation avec  $TOL = 2$ . L'essai S2MA correspond à des résultats expérimentaux obtenus en soufflerie.

### Influence du nombre de couches structurées

Maintenant, regardons l'impact de la conservation d'un certain nombre de couches structurées sur la solution calculée sur le maillage adapté. Sur les figures 3.39 et 3.40, on peut voir qu'il faut conserver au moins 40 couches de mailles structurées pour que le maillage soit modifié correctement pour capturer les chocs.



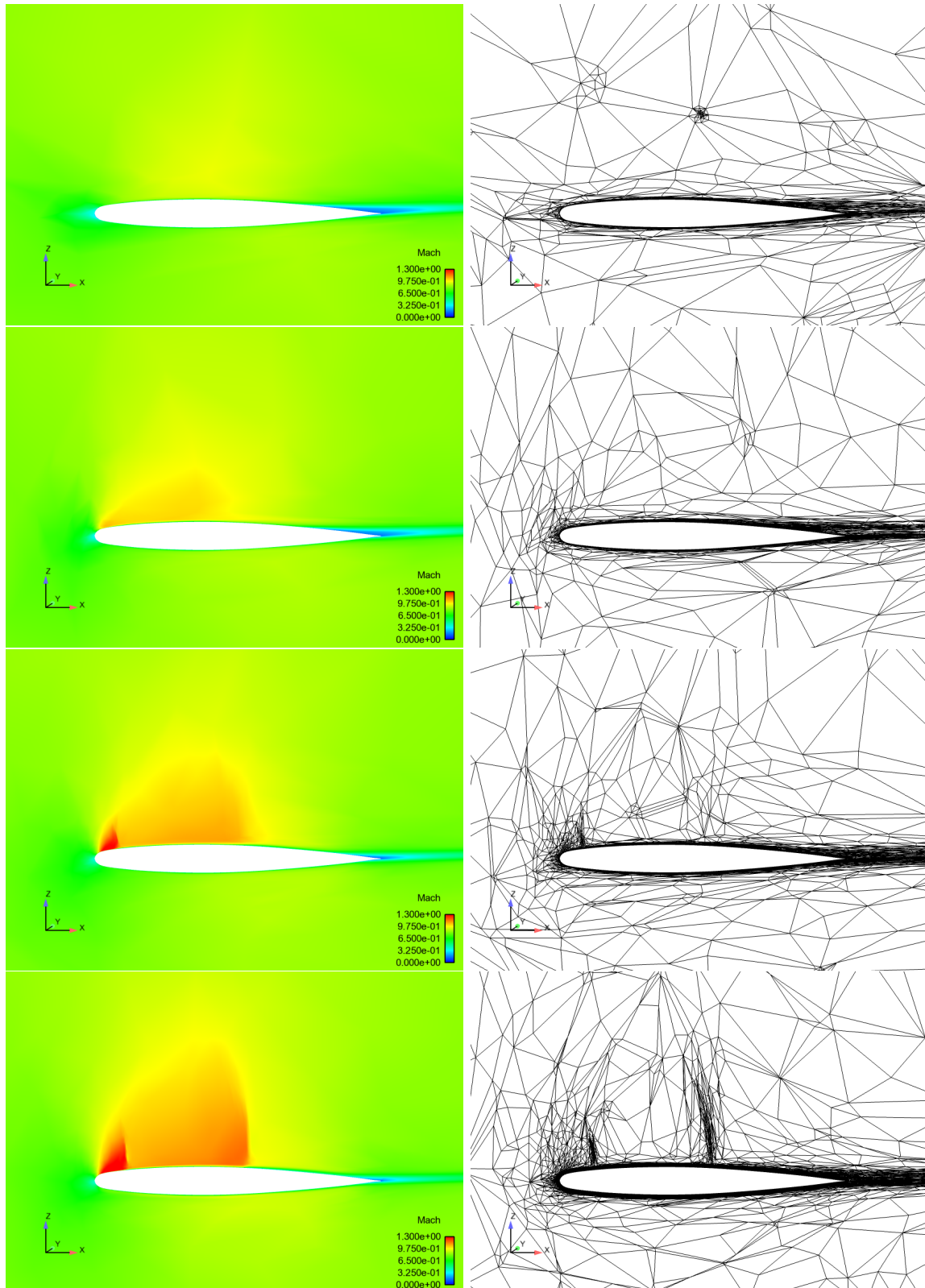


FIGURE 3.39 – Coupe en  $y = 0.7m$  des maillages et solutions après 15 cycles d'adaptation avec  $TOL = 2$  et une taille de première maille égale à 5 microns pour différents nombres de couches structurées dans la zone de couche limite. De haut en bas : 10 couches, 20 couches, 30 couches et 40 couches.

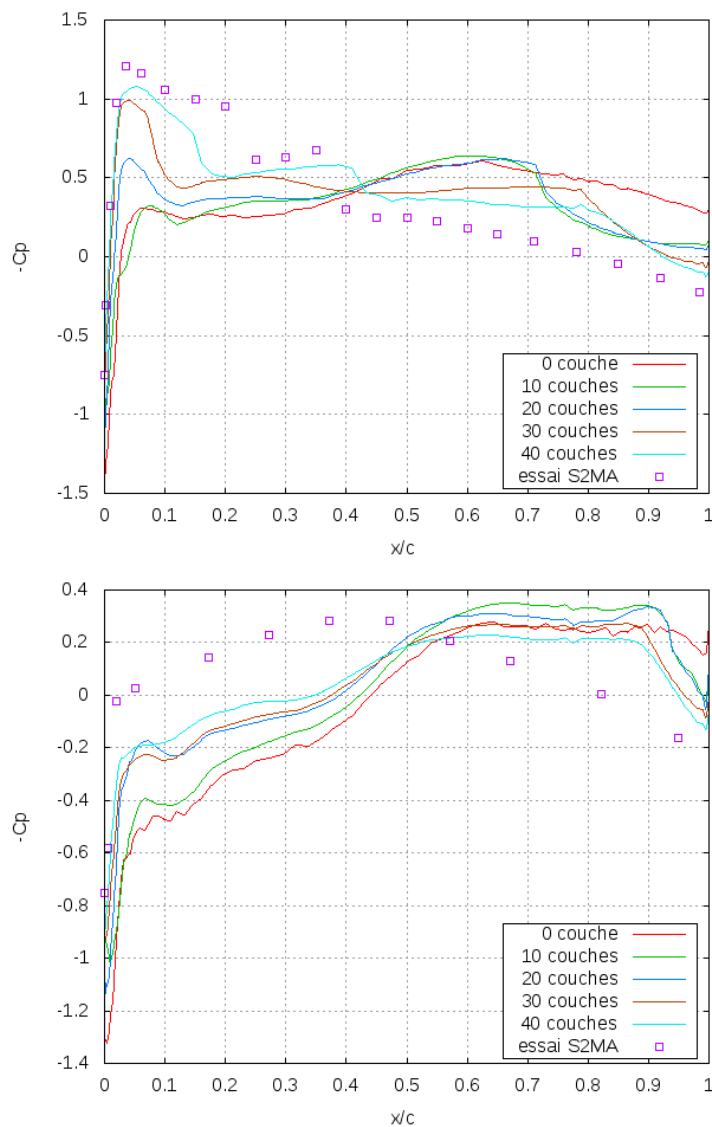


FIGURE 3.40 – Courbe de  $C_p$  sur la peau en  $y = 957.03$  (80% de l'aile) sur l'extrados (en haut) et l'intrados (en bas) pour différents nombres de couches structurées dans la zone de couche limite avec une taille de première maille égale à 5 microns après 15 cycles d'adaptation avec  $TOL = 2$ . L'essai S2MA correspond à des résultats expérimentaux obtenus en soufflerie.

### Influence du paramètre $TOL$

Comme il a été fait pour des calculs Euler, regardons ce qui se passe lorsque l'on fait varier le paramètre  $TOL$  pour un maillage dont la taille de la première maille est de 5 microns et en conservant 40 couches de mailles structurées. Sur les figures 3.41 et 3.42, on remarque que lorsque le paramètre de tolérance  $TOL$  diminue, le maillage est raffiné dans les zones de choc sur une plus grande amplitude et le coefficient de pression  $C_p$  sur la peau tend à se stabiliser. De plus, la figure 3.43 montre que le nombre de sommets ainsi que le rapport d'aspect moyen se stabilise plus rapidement pour une valeur de  $TOL$  plus grande. Par exemple, pour  $TOL = 0.5$  et après 18 cycles d'adaptation, ces deux valeurs varient toujours alors qu'avec  $TOL = 2$ , elles ne varient plus après seulement 4 cycles d'adaptation.

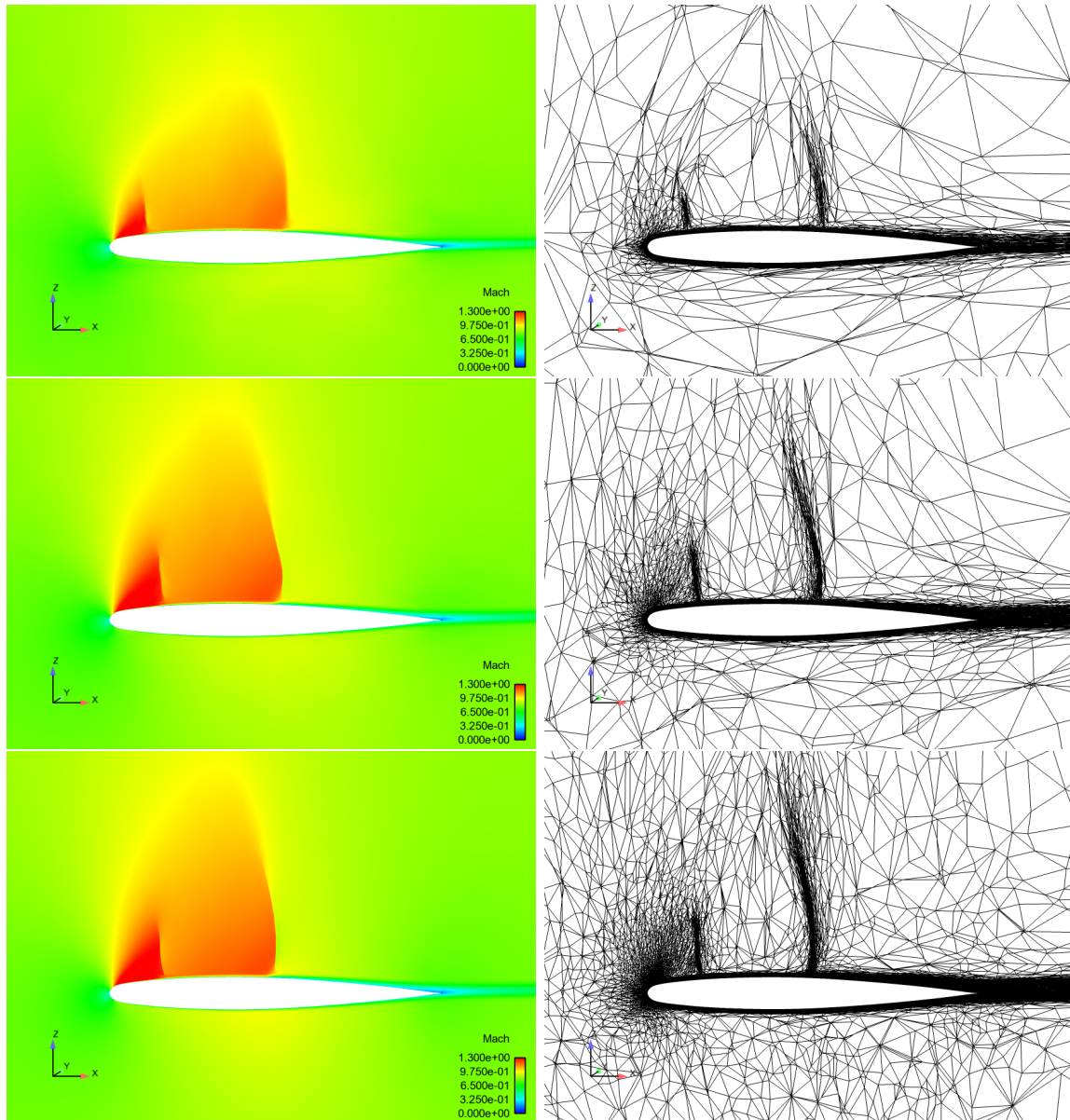


FIGURE 3.41 – Coupe en  $y = 0.7m$  des maillages et solutions après 15 cycles d'adaptation avec une taille de première maille égale à 5 microns et 40 couches structurées dans la zone de couche limite pour différentes valeurs de  $TOL$ . De haut en bas :  $TOL = 2$ ,  $TOL = 1$  et  $TOL = 0.5$ .

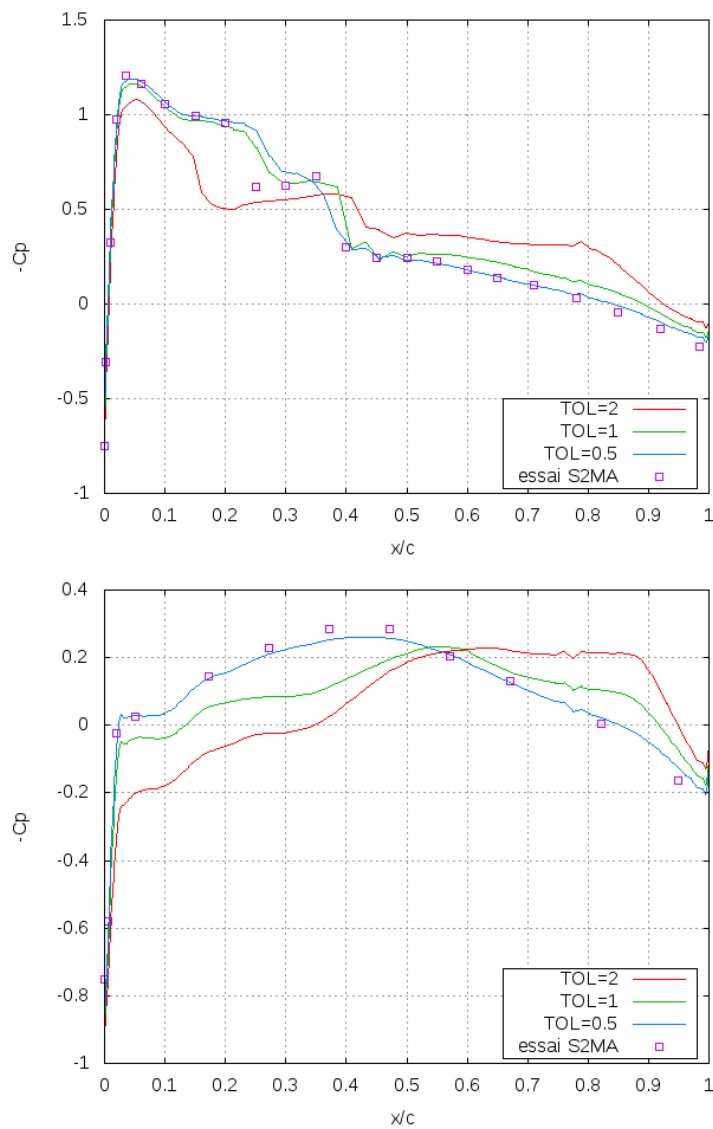


FIGURE 3.42 – Courbe de  $C_p$  sur la peau en  $y = 957.03$  (80% de l'aile) sur l'extrados (en haut) et l'intrados (en bas) pour différentes valeurs de  $TOL$  avec une taille de première maille égale à 5 microns et 40 couches structurées dans la zone de couche limite après 15 cycles d'adaptation. L'essai S2MA correspond à des résultats expérimentaux obtenus en soufflerie.

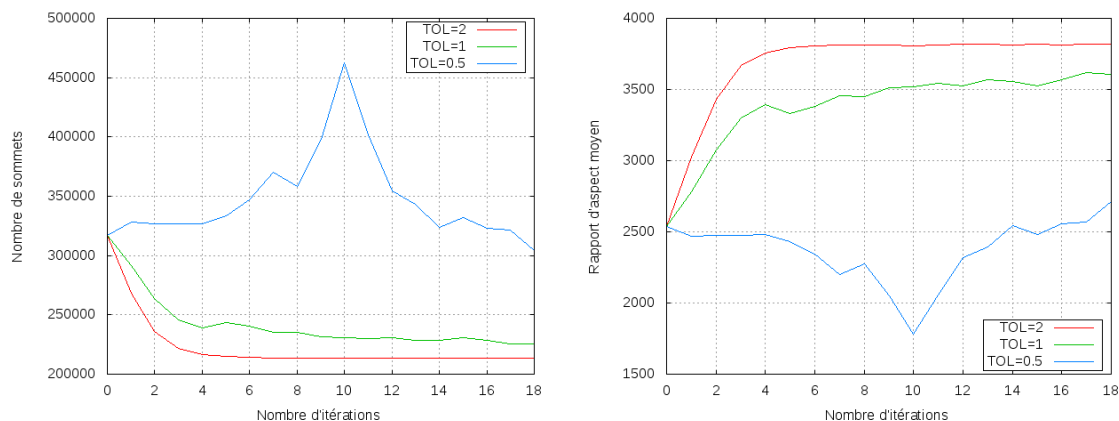


FIGURE 3.43 – Evolution du nombre de sommets et du taux d'anisotropie moyen du maillage au cours des itérations d'adaptation pour différentes valeurs de  $TOL$  avec une taille de première maille égale à 5 microns et dont on a conservé 40 couches structurées.

On considère le cas d'adaptation suivant :  $TOL = 0.5$ , taille de première maille 5 microns, raison de 1.15, conservation de 40 couches de mailles structurées et 15 itérations mailleur/solveur. La figure 3.44 montre que les isovaleurs de Mach sont plus lisses sur la solution calculée sur le maillage adapté (304539 sommets) que sur celle calculée sur le maillage initial (317005 sommets). La figure 3.45 représente une coupe au dessus de l'aile et de la couche limite montrant le choc en forme de lambda caractéristique de ce type d'écoulement. Bien que ce choc soit déjà visible sur la solution initiale, il est plus net sur la solution calculée sur le maillage adapté. De plus, le maillage adapté est plus fin au niveau avec des éléments étirés le long de cette discontinuité. La figure 3.46 montre une coupe en  $y = 0.7m$  des deux maillages avec les solutions associées. Le maillage est raffiné au niveau des deux chocs qui sont moins diffus sur la solution. Le zoom visible sur la figure 3.47 montre clairement la précision de la solution. On peut remarquer le travail effectué par le remaillieur MMG3D au niveau du raccord entre le maillage structuré et le maillage modifié du reste du domaine. En effet, les éléments étant étirés dans la direction de l'écoulement dans la zone structurée et dans la direction du choc qui est pratiquement normale à la couche limite dans la zone non structurée, MMG3D a généré des éléments assez petits et quasiment isotropes pour raccorder les deux maillages, ce qui entraîne une diffusion du choc dans la zone structurée. La figure 3.48 représentant un zoom au niveau du choc faible se trouvant proche du bord d'attaque montre que l'adaptation a permis de mettre en évidence un choc qui n'était pas du tout visible sur la solution initiale.

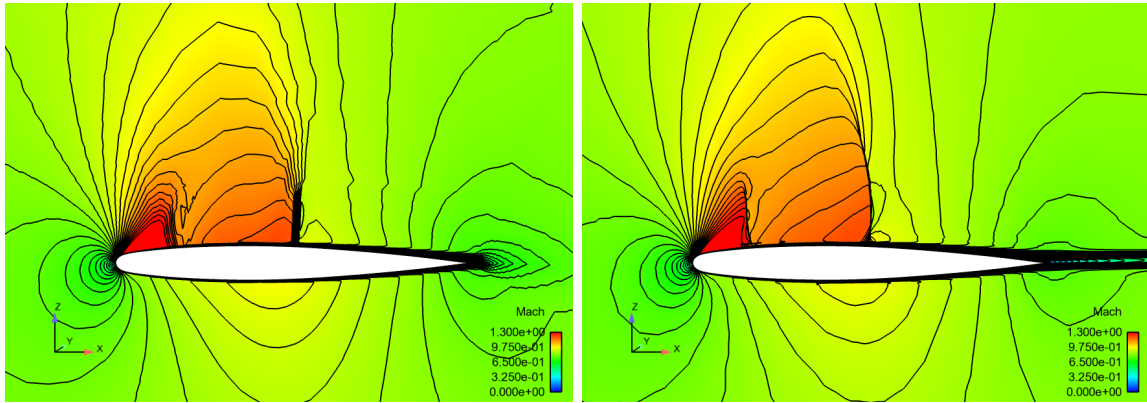


FIGURE 3.44 – Isovaleurs de Mach en  $y = 0.7m$  des solutions calculées sur le maillage initial et le maillages adapté après 15 cycles d'adaptation avec  $TOL=0.5$ .

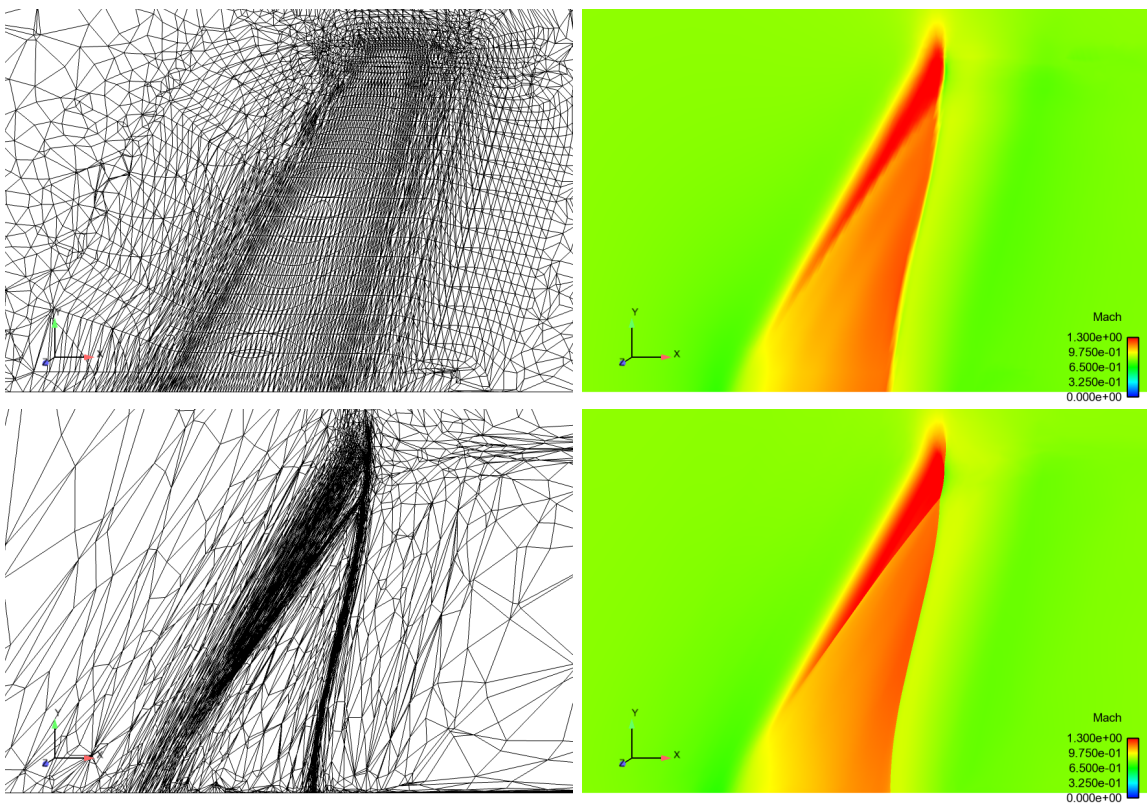


FIGURE 3.45 – En haut : coupe en  $z = 0.08m$  du maillages initial et du Mach associé. En bas : coupe en  $z = 0.08m$  du maillage adapté après 15 cycles d'adaptation et  $TOL = 0.5$ .

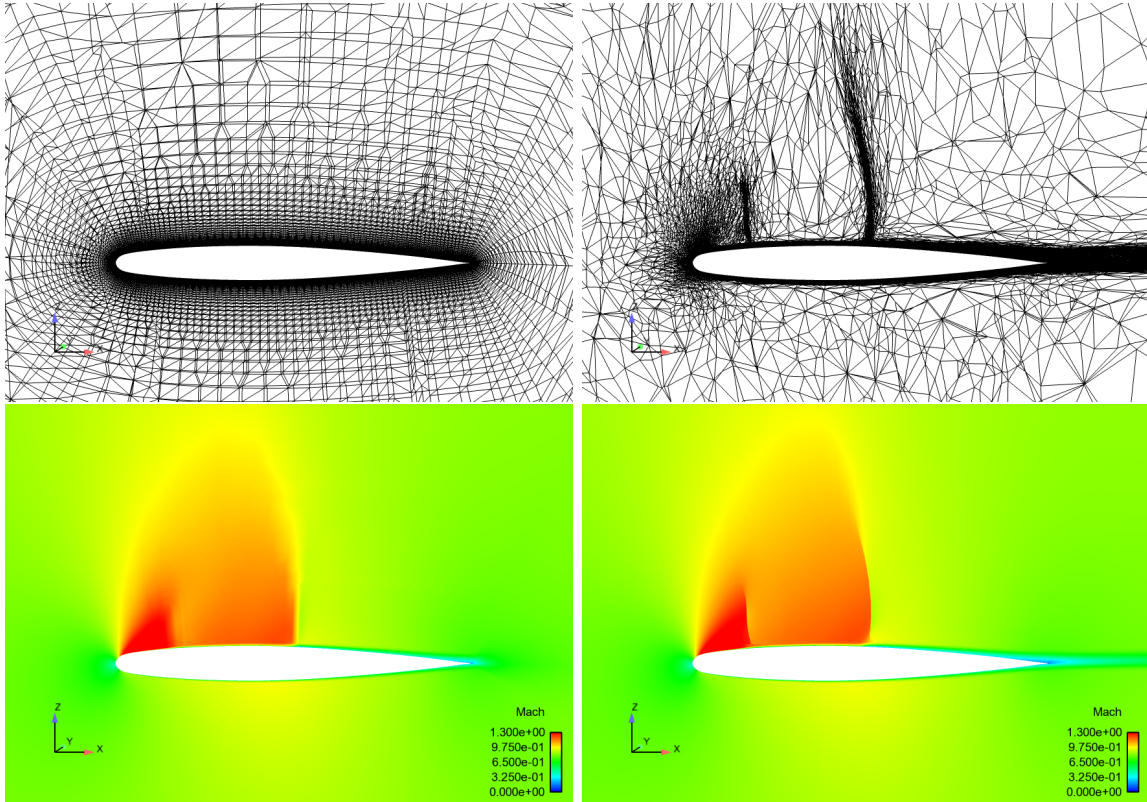


FIGURE 3.46 – A gauche : maillage initial et Mach en  $y = 0.7m$ . A droite : maillage adapté 15 fois avec  $TOL = 0.5$  et Mach associé.

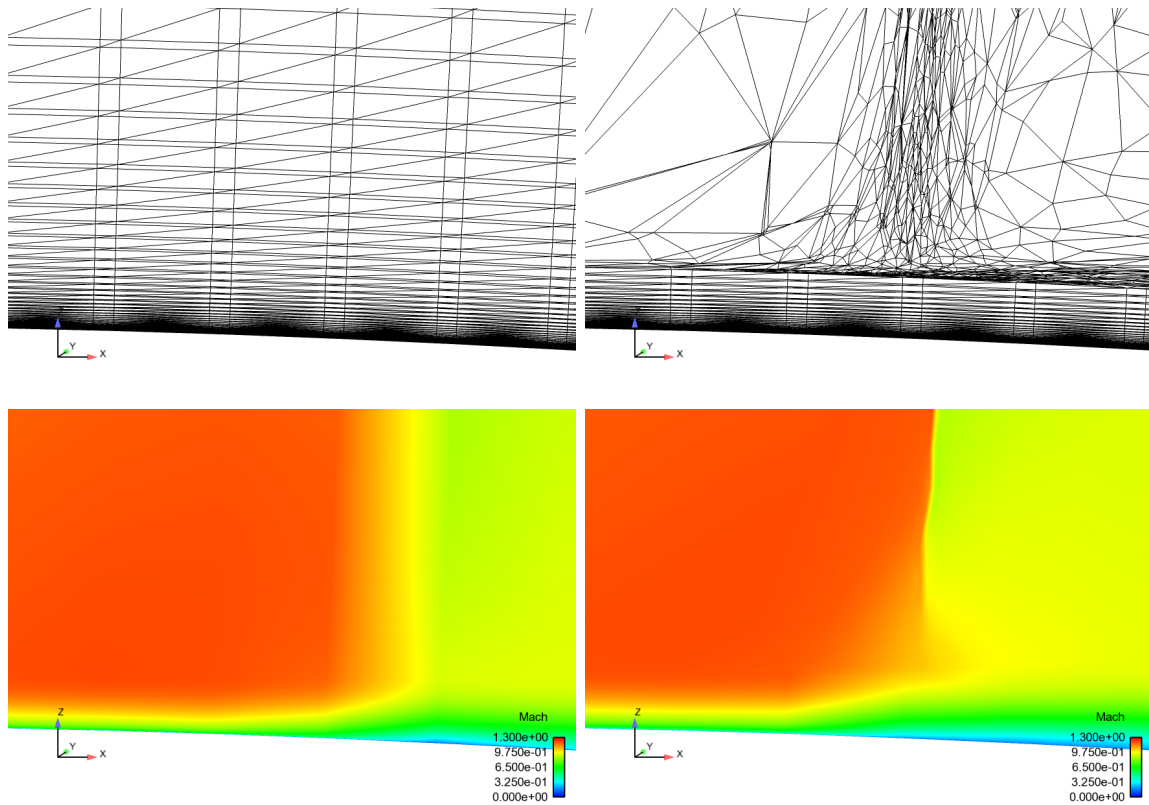


FIGURE 3.47 – Zoom au niveau du choc principal. A gauche : maillage initial et Mach en  $y = 0.7m$ . A droite : maillage adapté 15 fois avec  $TOL = 0.5$  et Mach associé.



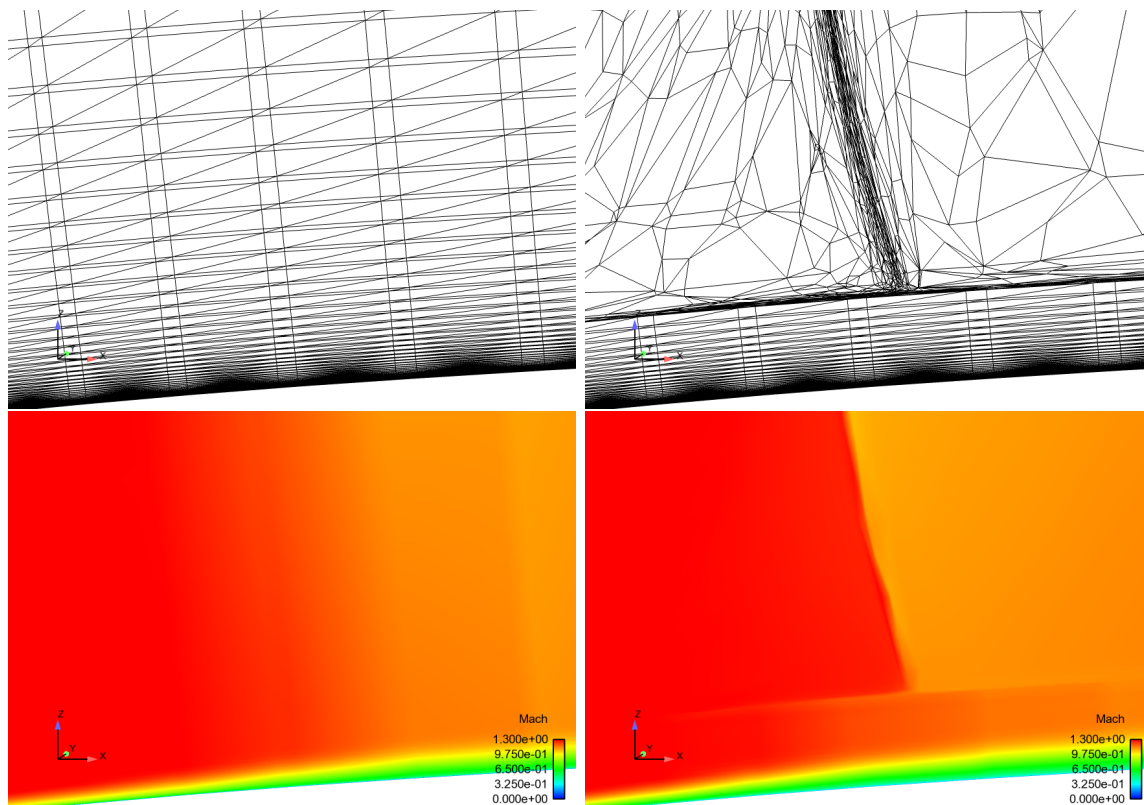


FIGURE 3.48 – Zoom au niveau du second choc près du bord d'attaque. A gauche : maillage initial et Mach en  $y = 0.7m$ . A droite : maillage adapté 15 fois avec  $TOL = 0.5$  et Mach associé.

### 3.4.5 Ecoulement de fluide visqueux avec contrôle d'une fonctionnelle

#### 3.4.5.1 Equations adjointes aux équations de Navier-Stokes

On note  $\mathbf{U} = \rho(1, \mathbf{u}, E)^T$  la solution des équations de Navier-Stokes (3.11). Si  $\mathbf{F}(\mathbf{U})$  désigne le résidu du problème, on a

$$\mathbf{F}(\mathbf{U}) = \mathbf{0}.$$

Soit  $\mathbf{J}(\mathbf{U})$  une fonction coût. On cherche à contrôler l'erreur de cette fonction coût  $\mathbf{J}(\mathbf{U}) - \mathbf{J}(\mathbf{U}_h)$ , où  $\mathbf{U}_h$  est une solution approchée de  $\mathbf{U}$ . Pour cela, on écrit le Lagrangien du problème de minimisation de  $\mathbf{J}(\mathbf{U})$  sous la contrainte que  $\mathbf{U}$  soit solution des équations de Navier-Stokes, c'est-à-dire

$$\mathbf{L}(\mathbf{U}, \mathbf{Z}) = \mathbf{J}(\mathbf{U}) - \mathbf{Z}^T \mathbf{F}(\mathbf{U}),$$

où  $\mathbf{Z}$  est un multiplicateur de Lagrange. On a

$$\nabla \mathbf{J}(\mathbf{U}, \mathbf{Z}) = \mathbf{0} \iff \begin{cases} \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \mathbf{U}}(\mathbf{U}, \mathbf{Z}) = \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial \mathbf{U}}(\mathbf{U}) - \mathbf{Z}^T \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{U}}(\mathbf{U}) = 0 \\ \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \mathbf{Z}}(\mathbf{U}, \mathbf{Z}) = -\mathbf{F}(\mathbf{U}) = 0 \end{cases}$$

On définit le problème adjoint par

$$\mathbf{Z}^T \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{U}}(\mathbf{U}) = \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial \mathbf{U}}(\mathbf{U}),$$

où  $\mathbf{Z}$  est l'état adjoint de la solution  $\mathbf{U}$ . Pour résoudre ce problème, il faut d'abord calculer la solution  $\mathbf{U}$  des équations de Navier-Stokes et évaluer les dérivées  $\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{U}}(\mathbf{U})$  et  $\frac{\partial \mathbf{J}}{\partial \mathbf{U}}(\mathbf{U})$ . Pour les calculer, on utilise le code TAPENADE développé à l'INRIA [49] qui effectue des différentiations automatiques. Le calcul de la solution adjointe  $\mathbf{Z}$  est également effectué par le code AETHER développé chez Dassault Aviation (voir [26, 27]).

### 3.4.5.2 Résultats

On considère l'estimateur d'erreur définie par (3.7). On choisit de prendre la première composante de la vitesse  $u_1$  pour la variable  $u_h$  et l'adjoint de  $\rho u_1$  pour la variable  $z_h$ . Des essais avec cet estimateur ont été effectués (voir figures 3.49 et 3.50). Soit  $S$  la surface de l'aile. La fonctionnelle à contrôler qui a été choisie est le coefficient de traînée  $C_x$  défini par

$$C_x = \frac{1}{S} \int_S C_P \mathbf{n}_x \cdot dS,$$

avec  $C_P$  le coefficient de pression donné par

$$C_P = \frac{P - P_\infty}{\frac{1}{2} \rho_\infty u_\infty^2},$$

$\mathbf{n}_x$  est la composante selon  $x$  du vecteur normal à la surface  $S$ . L'algorithme d'adaptation de maillage qui a été utilisé est l'algorithme 3. Les figures 3.49 et 3.50 montrent que le raffinement s'effectue principalement sur le bord d'attaque et un peu moins au niveau des chocs et sur le bord de fuite comparé à l'estimateur permettant de contrôler les gradients de Mach, ce qui est plutôt cohérent puisque c'est surtout l'écoulement qui arrive en entrée et la répartition de pression en proche paroi qui vont influencer sur la répartition de pression sur la peau, et donc le  $C_x$ . D'ailleurs, malgré le peu de cycles d'adaptation qui a été effectué, on peut remarquer sur la figure 3.51 que le coefficient de traînée  $C_x$  tend à se stabiliser rapidement au cours des adaptations. La figure 3.52 qui représente l'évolution du  $C_p$  sur une section de l'aile au cours des itérations d'adaptation montre que le  $C_p$  n'est pas dégradé au cours des adaptations par rapport à celui qui est calculé sur le maillage initial qui est déjà proche des valeurs expérimentales obtenues en soufflerie.

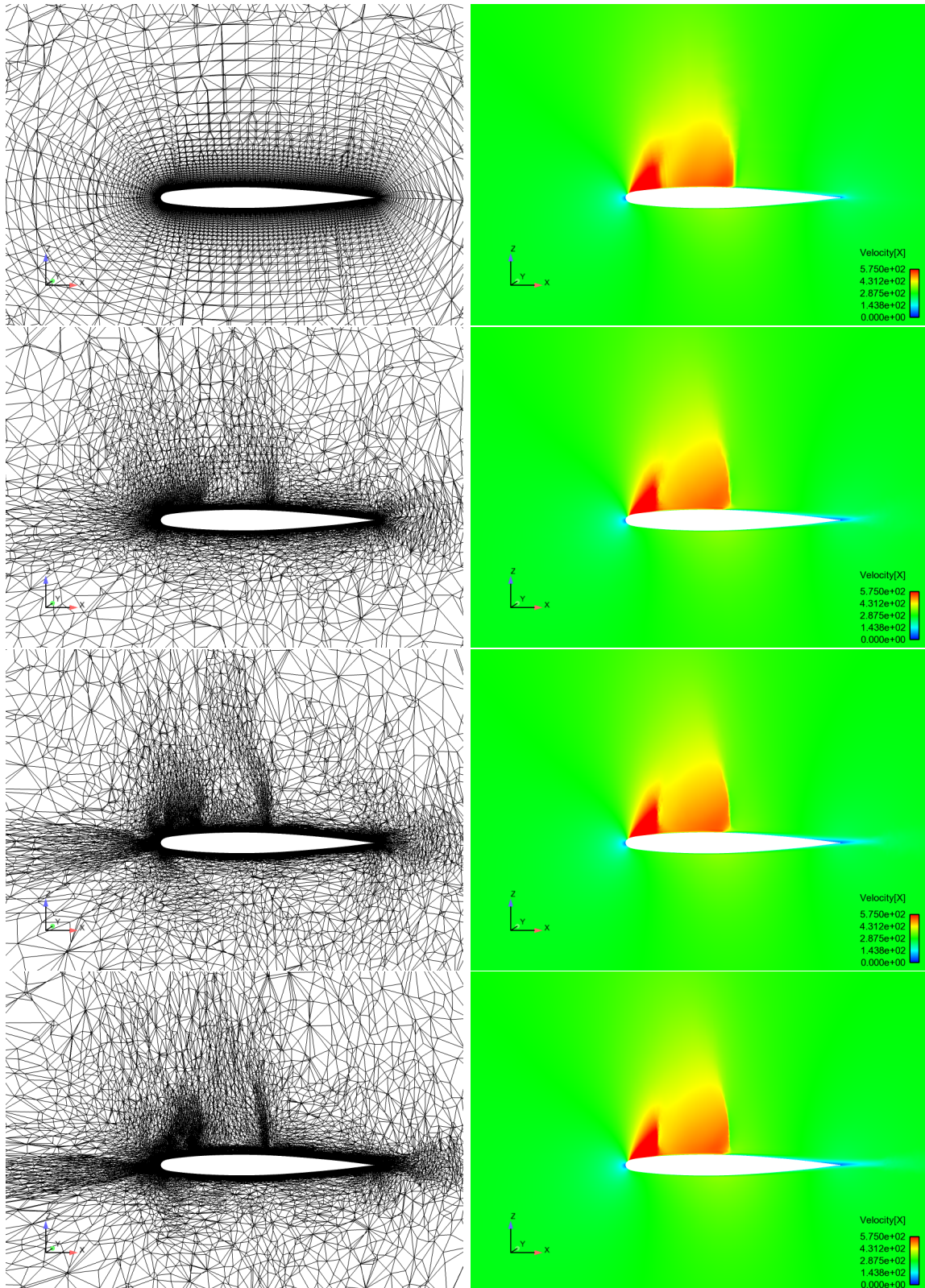


FIGURE 3.49 – Coupe en  $y = 0.7m$  des maillages adaptés (à gauche) et de la première composante de la vitesse (à droite) avec une taille de première maille égale à 5 microns et 40 couches structurées dans la zone de couche limite après plusieurs cycles d'adaptations avec  $TOL = 16$ . De haut en bas : maillage initial, maillages adaptés 1, 2 et 3 fois.

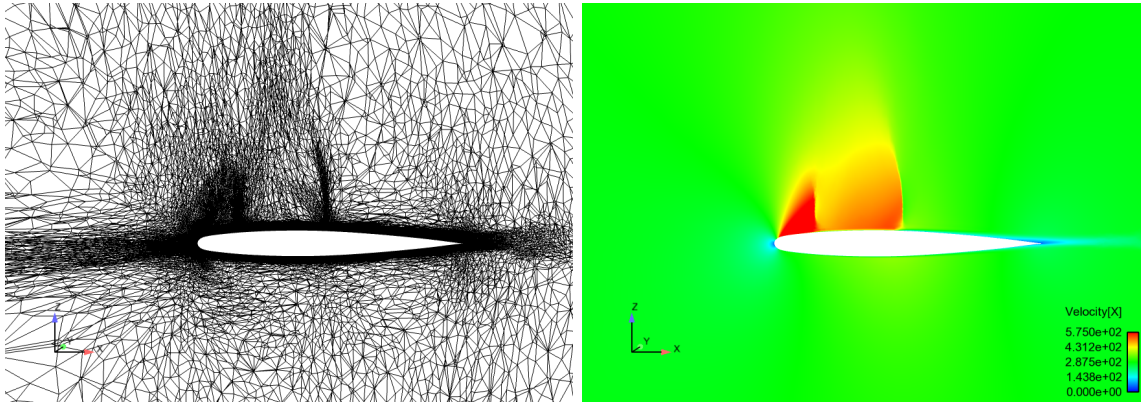


FIGURE 3.50 – Coupe en  $y = 0.7m$  du maillage adapté 4 fois avec  $TOL = 16$  (à gauche) et de la première composante de la vitesse (à droite) avec une taille de première maille égale à 5 microns et 40 couches structurées dans la zone de couche limite.

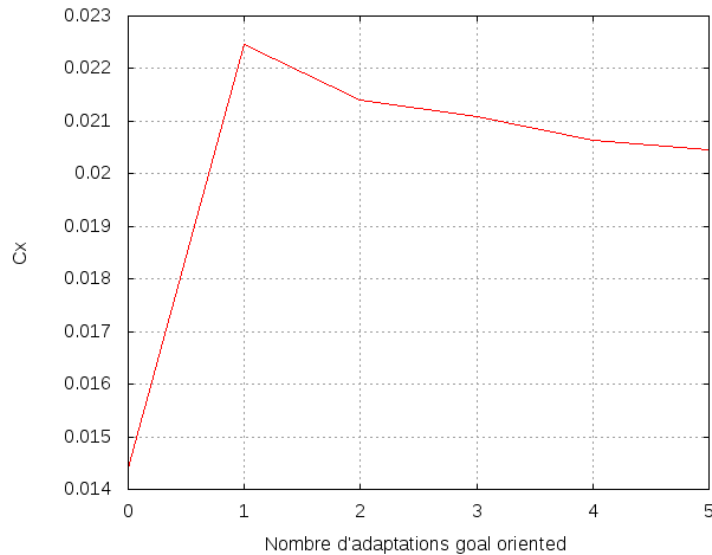


FIGURE 3.51 – Evolution du coefficient de traînée  $C_x$  au cours des itérations d'adaptation goal oriented sur le maillage de taille de première maille égale à 5 microns et dont on a conservé 40 couches structurées dans la zone de couche limite.

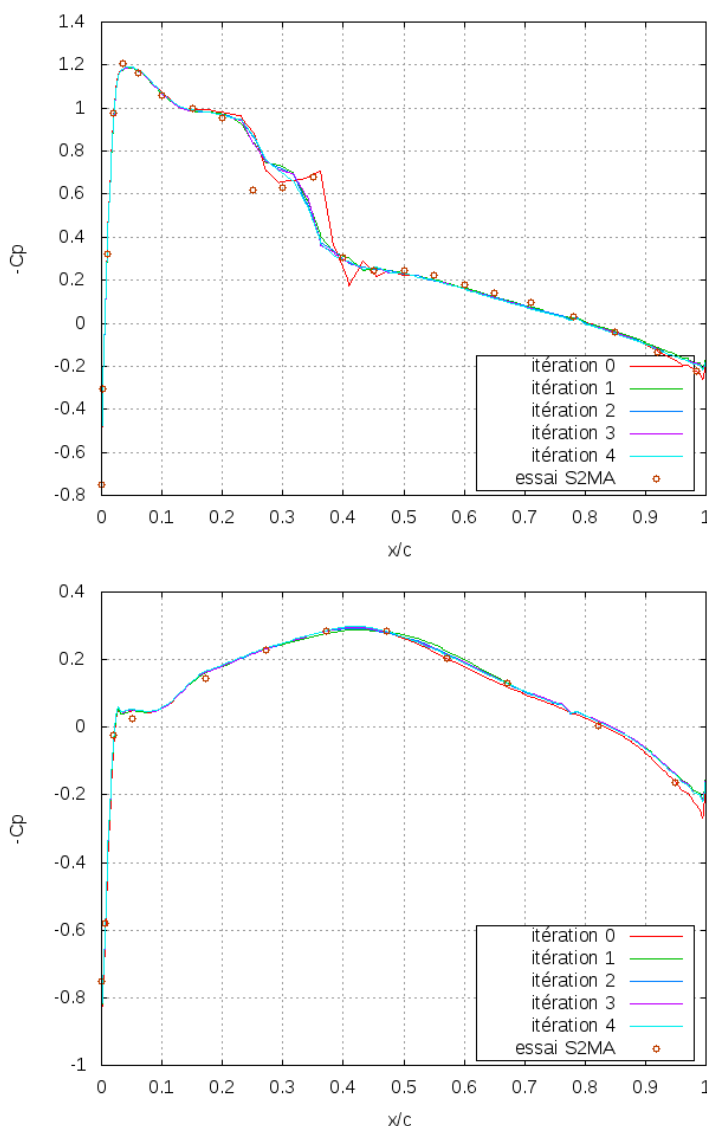


FIGURE 3.52 – Evolution de la courbe de  $C_p$  sur la peau en  $y = 957.03$  (80% de l'aile) sur l'extrados (en haut) et l'intrados (en bas) au cours des itérations d'adaptation goal oriented sur le maillage de taille de première maille égale à 5 microns et dont on a conservé 40 couches structurées dans la zone de couche limite. L'essai S2MA correspond à des résultats expérimentaux obtenus en soufflerie.

### 3.5 Conclusion

Un algorithme d'adaptation de maillage basé sur l'estimateur d'erreur pour la semi-norme  $H^1$  a été décrit et testé avec le problème modèle de convection-diffusion. Nous avons observé que le remaillieur utilisé ne permettait pas d'appliquer cet algorithme pour un coefficient de diffusion trop petit. Mais pour un coefficient suffisamment grand, l'algorithme permet de construire en moins de 5 itérations sur un cas simple un maillage dont la semi-norme  $H^1$  de l'erreur a atteint une précision donnée mais avec une forte augmentation du nombre de sommets du maillage. Si l'algorithme se poursuit, le maillage résultant devient de plus en plus anisotrope, réduisant ainsi la taille du maillage tout en conservant la semi-norme  $H^1$  de l'erreur à une certaine précision,

ce qui est l'intérêt principal de l'utilisation d'un estimateur d'erreur anisotrope.

Nous avons étendu l'utilisation de cet algorithme à des problèmes non linéaires. L'algorithme a été appliqué avec succès à un écoulement non visqueux transsonique autour d'une aile d'avion. Des résultats avaient déjà été obtenus pour un écoulement non visqueux supersonique autour d'un avion d'affaire de Dassault Aviation dans [20]. Des ondes de choc caractéristiques de ce type d'écoulement viennent frapper la structure et l'algorithme d'adaptation de maillage a permis de capturer avec précision tous ces chocs (voir annexe C.1). Par ailleurs, ces résultats ont permis de se rendre compte que la convergence des solveurs dépend fortement de la qualité des maillages.

Par la suite, cet algorithme a été appliqué à un écoulement visqueux transsonique qui a permis de montrer que l'adaptation se focalisait uniquement sur la couche limite, c'est-à-dire le phénomène le plus fort qui apparaissait dans l'écoulement. Cet effet multi-échelles a été dépassé en conservant un maillage structuré dans la couche limite et en adaptant le maillage seulement dans le reste du domaine. En effet, les maillages structurés dans la couche limite sont nécessaires à très haut Reynolds pour contrôler la dissipation numérique du solveur afin d'éviter que la dissipation numérique soit du même ordre que la dissipation physique, ce qui entraînerait la simulation du mauvais écoulement. Une étude sur le maillage structuré de la couche limite a montré qu'une bonne capture des chocs nécessite une bonne capture de la couche limite.

On a pu remarquer que le coefficient de pression  $C_P$  se dégradait au cours des adaptations par rapport à la solution calculée sur le maillage initial non adapté qui est assez proche des valeurs de référence obtenues en soufflerie. En diminuant la valeur du paramètre TOL, la densité du maillage augmente et permet d'améliorer un peu la répartition de pression sur la peau mais reste néanmoins moins bon que sur la solution initiale. Pour résoudre ce problème, on a décrit un algorithme d'adaptation de maillages basé sur l'estimateur de type *goal oriented* qui a été testé sur le problème modèle de convection-diffusion. On a considéré comme fonction coût le coefficient de traînée  $C_x$  qui dépend du coefficient de pression  $C_P$ . En appliquant l'algorithme d'adaptation pour contrôler le  $C_x$ , cela a permis d'obtenir un maillage plus fin au niveau des chocs tout en conservant un  $C_P$  proche de celui de la solution initiale et des valeurs obtenues en soufflerie.

# Conclusion et perspectives

Un estimateur d'erreur *a posteriori* anisotrope pour la semi-norme  $H^1$  de l'erreur a été décrit pour un problème de convection-diffusion et une borne inférieure a été démontrée. Les essais numériques effectués ont montré que cet estimateur est efficace et fiable. De plus, un nouvel estimateur d'erreur *a posteriori* de type *goal oriented* a été introduit et des bornes inférieure et supérieure ont été démontrées. Cet estimateur est fiable mais la borne supérieure ne permet pas de justifier son efficacité qui reste encore à prouver. Ces estimateurs sont valables pour des maillages anisotropes et ne font intervenir que des dérivées premières de la solution.

Un algorithme d'adaptation de maillages basé sur ces estimateurs a été décrit et testé. L'algorithme est fonctionnel et a été étendu à des problèmes d'écoulements compressibles à grande vitesse. Les résultats obtenus sur l'écoulement autour d'une aile sont satisfaisants en ce qui concerne la capture des chocs présents. Le raffinement est contrôlé par un paramètre de tolérance qui permet de gérer la densité des noeuds.

Des résultats ont été obtenus dans le cas d'écoulements visqueux présentant des chocs et une couche limite. Une décomposition du domaine en deux sous-domaines a permis un raffinement des chocs indépendamment de la couche limite pour laquelle on a conservé un maillage structuré. Une étude paramétrique a mis en évidence l'importance de la taille et du nombre de mailles structurées dans la couche limite pour une bonne capture des chocs et de la couche limite. Néanmoins, cette étude a été réalisée avec des paramètres arbitraires. Un algorithme permettant de générer automatiquement le maillage structuré de la couche limite à partir d'un estimateur d'erreur doit être défini. L'estimateur sur chaque tétraèdre  $K$  est construit à partir de trois contributions :

$$\eta_K^2 = \sqrt{\eta_{K,1}^4 + \eta_{K,2}^4 + \eta_{K,3}^4}.$$

Si  $\eta_{K,3}^2$  correspond à l'erreur dans la direction normale à la couche limite que l'on note  $CL$ , alors si l'erreur

$$\sum_{\substack{K \in \mathcal{T}_h \\ K \subset CL}} \eta_{K,3}^2$$

est trop grande, il faut augmenter le nombre de mailles dans la direction normale à la couche limite. L'adaptation sur la surface de l'objet dépendra de la quantité

$$\sum_{\substack{K \in \mathcal{T}_h \\ K \subset CL}} (\eta_{K,1}^2 + \eta_{K,2}^2).$$

Des essais d'adaptation de maillages anisotropes utilisant l'estimateur d'erreur de type *goal oriented* ont été réalisés avec comme fonction coût le coefficient de trainée  $C_x$ . Une étude plus approfondie avec plus de cycles d'adaptation de maillages permettrait de se rendre compte de l'apport réel d'un tel estimateur d'erreur.

Enfin, il faudrait pouvoir justifier théoriquement l'utilisation de ces estimateurs sur des problèmes non linéaires.





## Annexe A

# Résolution des équations d'Euler compressibles

### A.1 Ecriture du système sous forme matricielle

Le système d'équations (3.10) peut s'écrire sous la forme matricielle suivante

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial x_i} = 0, \quad (\text{A.1})$$

où les vecteurs  $\mathbf{U}$  et  $\mathbf{F}_i$  sont définis par

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u_1 \\ \rho u_2 \\ \rho u_3 \\ \rho E \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{F}_i = \begin{pmatrix} \rho u_i \\ \rho u_i u_1 + p \delta_{1i} \\ \rho u_i u_2 + p \delta_{2i} \\ \rho u_i u_3 + p \delta_{3i} \\ \rho u_i E + p u_i \end{pmatrix}.$$

Les composantes du vecteur  $\mathbf{U}$  représentent les variables conservatives et les vecteurs  $\mathbf{F}_i$  les flux de convection dans les directions  $x_i$ .

### A.2 Résolution par une méthode de volumes finis

Dans le code WOLF [7], le système (A.1) est résolu par une méthode de volumes finis sur des maillages tétraédriques non structurés. A chaque sommet  $P_i$  du maillage, on associe un volume de contrôle  $C_i$  construit par la règle des médianes (les médianes de chaque tétraèdre définissent les limites des volumes de contrôle). A chaque volume  $C_i$ , on applique le schéma suivant

$$|C_i| \frac{d\mathbf{W}_i}{dt} + \int_{\partial C_i} \mathbf{F}(\mathbf{W}_i) \cdot \mathbf{n}_i = 0,$$

où  $\mathbf{W}_i$  est la valeur de  $\mathbf{W}$  sur le volume  $C_i$  et  $\mathbf{n}_i$  est la normale à  $\partial C_i$  dirigée vers l'extérieur de  $C_i$ . Soit  $\partial C_{ij} = \partial C_i \cup \partial C_j$  le bord commun aux volumes  $C_i$  et  $C_j$ . On peut écrire

$$\int_{\partial C_i} \mathbf{F}(\mathbf{W}_i) \cdot \mathbf{n}_i = \sum_{P_j \in \mathcal{V}(P_i)} \mathbf{F}|_{\partial C_{ij}} \cdot \int_{\partial C_{ij}} \mathbf{n}_i$$

où  $\mathcal{V}(P_i)$  représente l'ensemble des sommets voisins de  $P_i$  et  $\mathbf{F}|_{\partial C_{ij}}$  la valeur de  $\mathbf{F}(\mathbf{W})$  sur  $\partial C_{ij}$ . Soit  $\Phi_{ij} = \Phi_{ij}(\mathbf{W}_i, \mathbf{W}_j, \mathbf{n}_{ij})$  le flux numérique à l'interface  $\partial C_{ij}$  où  $\mathbf{n}_{ij} = \int_{\partial C_{ij}} \mathbf{n}_i$ . On peut écrire

$$\Phi_{ij} = \mathbf{F}|_{\partial C_{ij}} \cdot \int_{\partial C_{ij}} \mathbf{n}_i.$$

Pour calculer le flux numérique  $\Phi_{ij}$ , on utilise le solveur de Riemann HLLC. Pour augmenter l'ordre de précision du schéma, une méthode de reconstruction de type MUSCL est utilisée. L'idée est de considérer des valeurs extrapolées de  $\mathbf{W}$  aux interfaces  $\partial C_{ij}$  pour évaluer le flux  $\Phi_{ij}$ , c'est-à-dire que l'on calcule

$$\Phi_{ij} = \Phi_{ij}(\mathbf{W}_{ij}, \mathbf{W}_{ji}, \mathbf{n}_{ij})$$

où  $\mathbf{W}_{ij} = \mathbf{W}_i + \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{W})_{ij} \cdot \overrightarrow{P_i P_j}$ . Finalement, pour s'assurer que la solution est TVD (Variation Totale Décroissante), un limiteur de pente est introduit. Dans ce travail, c'est une généralisation du limiteur Superbee introduit par Dervieux qui est utilisée (voir [30]).

## Annexe B

# Résolution des équations de Navier-Stokes compressibles

### B.1 Ecriture du système sous forme matricielle

Le système d'équations (3.11) peut s'écrire sous la forme matricielle suivante

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \mathbf{F}_i^d}{\partial x_i}, \quad (\text{B.1})$$

où les vecteurs  $\mathbf{U}$ ,  $\mathbf{F}_i$  et  $\mathbf{F}_i^d$  sont définis par

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u_1 \\ \rho u_2 \\ \rho u_3 \\ \rho E \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}_i = \begin{pmatrix} \rho u_i \\ \rho u_i u_1 + p \delta_{1i} \\ \rho u_i u_2 + p \delta_{2i} \\ \rho u_i u_3 + p \delta_{3i} \\ \rho u_i E + p u_i \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{F}_i^d = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{1i} \\ \tau_{2i} \\ \tau_{3i} \\ \sum_{j=1}^3 (\tau_{ij} u_j - q_j) \end{pmatrix}.$$

Les composantes du vecteur  $\mathbf{U}$  représentent les variables conservatives, les vecteurs  $\mathbf{F}_i$  et  $\mathbf{F}_i^d$  représentent respectivement les flux d'advection et les flux de diffusion dans les directions  $x_i$ . Le système (B.1) peut se réécrire sous la forme quasi-linéaire suivante

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 DF_i \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \sum_{j=1}^3 K_{ij} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_j} \right), \quad (\text{B.2})$$

où les matrices  $DF_i$  représentent les matrices jacobiennes des vecteurs  $\mathbf{F}_i$  par rapport aux variables conservatives et la matrice  $K$  est telle que  $\sum_{i=1}^3 K_{ij} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_j} = \mathbf{F}_i^d$ .

### B.2 Symétrisation des équations

On considère le changement de variables entropique proposé dans [51]. Soit  $\mathcal{H}$  la fonction définie par  $\mathcal{H}(\mathbf{U}) = -\rho s$ , où  $s = C_v \log(\frac{p}{\rho^\gamma})$  est l'entropie physique. La fonction  $\mathcal{H}$  étant une fonction strictement convexe de  $\mathbf{U}$  (voir [51]), le changement de variables est défini de la manière suivante

$$\mathbf{V} = \nabla \mathcal{H},$$

où les composantes du vecteur  $\mathbf{V}$  représentent les variables entropiques. Le système (B.2) peut se réécrire en fonction des variables entropiques de la manière suivante

$$\tilde{A}_0 \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \tilde{A}_i \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \sum_{j=1}^3 \tilde{K}_{ij} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x_j} \right) \quad (\text{B.3})$$

avec

$$\tilde{A}_0 = \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{V}}, \quad \tilde{A}_i = DF_i \tilde{A}_0 \quad \text{et} \quad \tilde{K}_{ij} = K_{ij} \tilde{A}_0.$$

Dans ce nouveau système, la matrice  $\tilde{A}_0$  est symétrique et définie positive, la matrice  $\tilde{K}$  dont les coefficients sont les  $\tilde{K}_{ij}$  est symétrique et semi-définie positive et les matrices  $\tilde{A}_i$  sont symétriques. Les expressions des matrices  $\tilde{A}_0$ ,  $\tilde{A}_i$ ,  $\tilde{K}_{ij}$  ainsi que du vecteur  $\mathbf{V}$  sont données dans [61].

### B.3 Résolution par la méthode de Galerkin moindres carrés

Dans le code AETHER [26, 61, 86], une méthode de type Galerkin moindres carrés est utilisée. On définit un opérateur  $\mathcal{L}$  par

$$\mathcal{L} = \tilde{A}_0 \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \tilde{A}_i \frac{\partial}{\partial x_i} - \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \sum_{j=1}^3 \tilde{K}_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \right).$$

Le système à résoudre est donc

$$\mathcal{L}\mathbf{V} = 0. \tag{B.4}$$

La méthode de Galerkin moindres carrés appliquée au système (B.4) est : trouver  $\mathbf{V}^h \in \mathcal{V}_h$  telle que, pour tout  $\mathbf{W}^h \in \mathcal{W}_h$ , on ait

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left( \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t}(\mathbf{V}^h) \cdot \mathbf{W}^h - \sum_{i=1}^3 \mathbf{F}_i(\mathbf{V}^h) \cdot \frac{\partial \mathbf{W}^h}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^3 \left( \sum_{j=1}^3 \tilde{K}_{ij} \frac{\partial \mathbf{V}^h}{\partial x_j} \right) \cdot \frac{\partial \mathbf{W}^h}{\partial x_i} \right) \\ & + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \tau \mathcal{L}\mathbf{V}^h \cdot \mathcal{L}\mathbf{W}^h \\ & + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \nu^h \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 g^{ij} \frac{\partial \mathbf{W}^h}{\partial x_i} \cdot \tilde{A}_0 \frac{\partial \mathbf{V}^h}{\partial x_j} \\ & = \int_{\Gamma} \sum_{i=1}^3 (\mathbf{F}_i^d(\mathbf{V}^h) - \mathbf{F}_i(\mathbf{V}^h)) \cdot \mathbf{W}^h n_i, \end{aligned} \tag{B.5}$$

où  $n_i$  est la  $i$ -ème composante du vecteur unitaire  $\mathbf{n}$  normal à  $\Gamma$ . L'espace  $\mathcal{V}_h$  est l'ensemble des fonctions test et l'espace  $\mathcal{W}_h$  est l'ensemble des fonctions de pondération. La première intégrale et l'intégrale du second membre correspondent à la méthode de Galerkin après intégration par parties. La deuxième intégrale correspond à la méthode des moindres carrés. La matrice  $\tau$  est symétrique semi-définie positive et des définitions de celle-ci peuvent être trouvées dans [86]. La troisième intégrale est le terme non-linéaire de capture de discontinuités. Le scalaire  $\nu^h$  est homogène à  $\mathcal{L}\mathbf{V}^h$  et sa définition peut être trouvée dans [86]. Le tenseur  $g^{ij}$  est défini sur l'élément  $K$  par

$$[g^{ij}] = \left[ \frac{\partial(T_K^{-1})}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial(T_K^{-1})}{\partial x_j} \right]^{-1}.$$

La dérivée en temps  $\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t}$  est approchée en utilisant un schéma de différences finies décentré d'ordre 2

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} = \frac{3}{2} \mathbf{U}(t_n) + 2\mathbf{U}(t_{n-1}) + \frac{1}{2} \mathbf{U}(t_{n-2}) + O(\Delta t^2).$$

où  $\Delta t = t_n - t_{n-1}$ . A chaque temps  $t_n$ , un système d'équations non-linéaires de la forme  $E(\mathbf{V}_n, \mathbf{V}_{n-1}, \mathbf{V}_{n-2}) = 0$  est résolu par une méthode de Newton. Le système linéaire résultant de cette méthode est finalement résolu par la méthode GMRES.

## B.4 Modélisation de la turbulence

Lorsque l'écoulement est turbulent, on a recours à une description statistique des équations de Navier-Stokes pour prendre en compte les fluctuations aléatoires caractéristiques de la turbulence. C'est l'approche RANS (Reynolds Averaged Navier-Stokes). Chaque grandeur  $z$  intervenant dans le problème est décomposée en une quantité moyenne  $\bar{z}$  et une fluctuation  $z'$ . De plus, on introduit la moyenne de Favre  $\tilde{z} = \frac{\bar{\rho}z}{\bar{\rho}}$  qui correspond à une moyenne pondérée par la densité. Les équations de Navier-Stokes moyennées s'écrivent

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\rho} \tilde{\mathbf{u}}) = 0, \\ \frac{\partial (\bar{\rho} \tilde{\mathbf{u}})}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\rho} \tilde{\mathbf{u}} \otimes \tilde{\mathbf{u}}) = \nabla \cdot (\overline{(\tau - pI - \rho \mathbf{u}' \otimes \mathbf{u}')}), \\ \frac{\partial (\bar{\rho} \tilde{E})}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\rho} \tilde{E} \tilde{\mathbf{u}}) = \nabla \cdot (\overline{((\tau - pI) \mathbf{u} - \mathbf{q} - \rho E' \mathbf{u}')}), \end{array} \right. \quad (\text{B.6})$$

Le terme  $-\overline{\rho \mathbf{u}' \otimes \mathbf{u}'}$  est modélisé par ([53])

$$-\overline{\rho \mathbf{u}' \otimes \mathbf{u}'} = \mu_t \left( \nabla \tilde{\mathbf{u}} + \nabla \tilde{\mathbf{u}}^T - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}}) I \right) - \frac{2}{3} \bar{\rho} k I,$$

où  $k$  est l'énergie cinétique turbulente et  $\mu_t$  la viscosité turbulente définie par

$$\mu_t = \bar{\rho} C_\mu \frac{k^2}{\epsilon},$$

$C_\mu$  étant une constante déterminée expérimentalement et  $\epsilon$  désigne le taux de dissipation. Le système (B.6) est sous-déterminé puisqu'il comporte plus d'inconnues que d'équations. Pour résoudre ce problème, on utilise des modèles de fermeture qui introduisent de nouvelles équations. Le modèle utilisé dans ce travail est le modèle  $k - \epsilon$  bi-couche. Dans la zone turbulente, on utilise le modèle  $k - \epsilon$  qui consiste à résoudre les deux équations sur  $k$  et  $\epsilon$  suivantes

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \bar{\rho} k}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\rho} \tilde{\mathbf{u}} k) - \nabla \cdot \left( \left( \bar{\mu} + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \nabla k \right) = P_k - \frac{2}{3} \bar{\rho} k \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}} - \bar{\rho} \epsilon \\ \frac{\partial \bar{\rho} \epsilon}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\rho} \tilde{\mathbf{u}} \epsilon) - \nabla \cdot \left( \left( \bar{\mu} + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \nabla \epsilon \right) = C_1 \frac{\epsilon}{k} P_k - \frac{2}{3} \bar{\rho} C_1 \epsilon \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}} - \bar{\rho} C_2 \frac{\epsilon^2}{k} \end{array} \right. \quad (\text{B.7})$$

où  $\sigma_k$ ,  $\sigma_\epsilon$ ,  $C_1$  et  $C_2$  sont des constantes déterminées expérimentalement et  $P_k$  est défini par

$$P_k = \mu_t \left( \nabla \tilde{\mathbf{u}} + \nabla \tilde{\mathbf{u}}^T - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}}) I \right) : \nabla \tilde{\mathbf{u}},$$

où le signe  $:$  désigne le produit contracté des deux matrices, c'est-à-dire que si on a deux matrices  $\nabla \mathbf{u}$  et  $\nabla \mathbf{v}$  alors

$$\nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} = \sum_{i=1}^3 \nabla u_i \cdot \nabla v_i.$$

Dans la zone où les effets visqueux sont dominants,  $k$  est déterminé par la même équation tandis que  $\epsilon$  est déterminé par une expression algébrique (voir [53]). Lors de la résolution, les systèmes (B.6) et (B.7) ne sont pas résolus simultanément.



## Annexe C

# Autres applications

### C.1 Écoulement non visqueux autour du SuperSonic Business Jet en régime supersonique

On considère un écoulement non visqueux autour de la géométrie d'un SuperSonic Business Jet (SSBJ) fournie par Dassault Aviation. Les résultats qui suivent sont donnés dans [20]. La figure C.1 représente le domaine de calcul sphérique et le maillage de surface de l'avion. Le cas de calcul est le suivant :  $Mach = 1.6$  et un angle d'attaque de  $3^\circ$ . Le maillage volumique du domaine entourant l'avion contient 392823 sommets. Le calcul est réalisé avec le solveur Wolf développé par Frédéric Alauzet à l'INRIA.

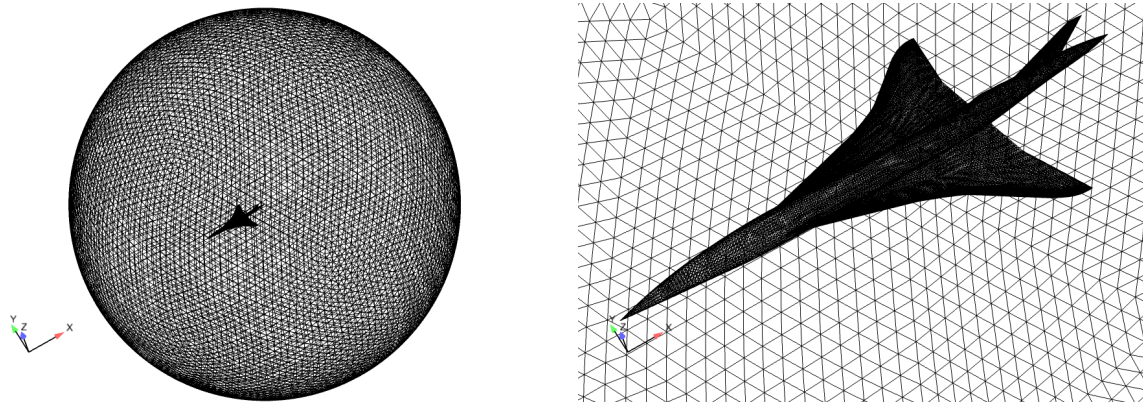


FIGURE C.1 – *Domaine de calcul et maillage surfacique du SuperSonic Business Jet de Dassault Aviation.*

A cette vitesse supersonique, de nombreuses ondes de choc sont générées par le contact entre la structure de l'avion et les ondes qui se propagent. La figure C.2 représente une coupe située juste derrière le SSBJ en  $x = 0$  du maillage initial et du maillage adapté 50 fois ainsi que le Mach local correspondant à chaque maillage. Le maillage adapté qui contient 422262 sommets laisse apparaître cette multitude d'ondes de choc qui sont clairement visibles sur la solution alors que le maillage initial ne permet pas de capturer aussi précisément ces chocs. On remarque que la densité de sommets a augmenté au niveau des chocs et les éléments sont étirés le long des chocs dans le plan parallèle au plan  $(Oyz)$ .

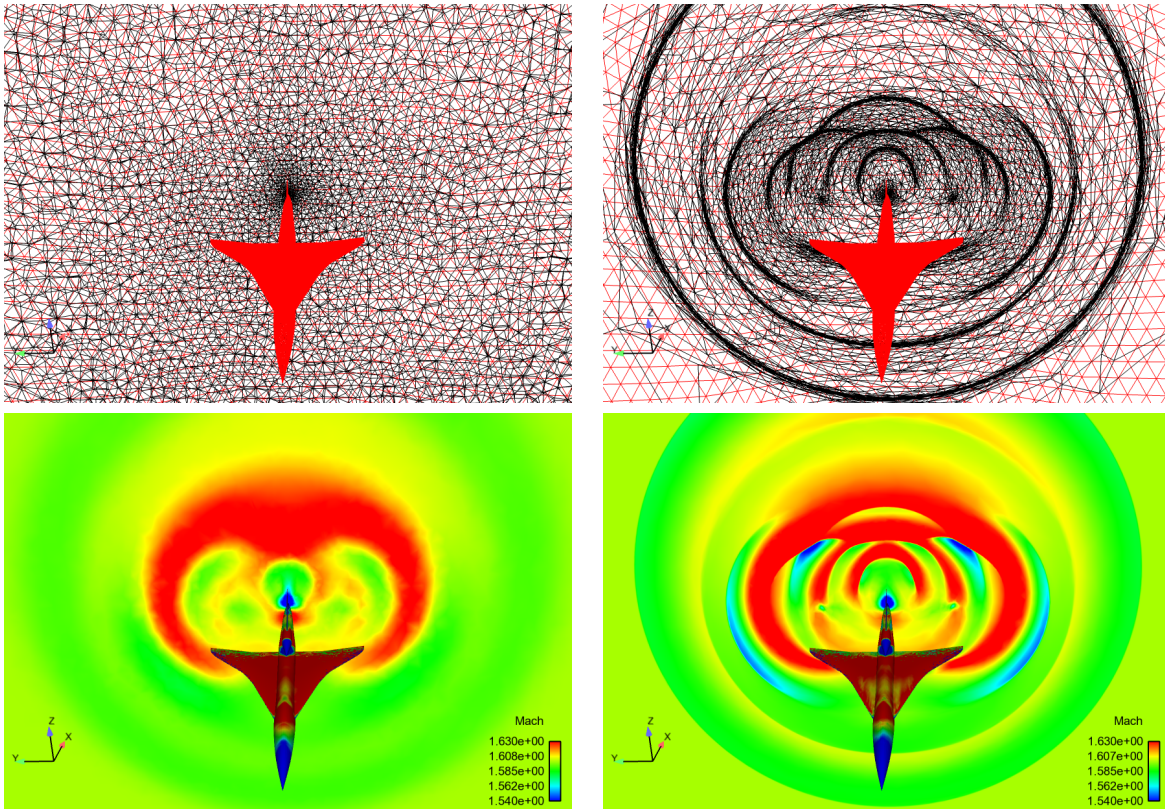


FIGURE C.2 – Coupe en  $x = 0$  du maillage et de la solution. Le maillage rouge représente le maillage du bord du domaine et le maillage noir correspond à la coupe du maillage volumique. A gauche : maillage initial et Mach local. A droite : maillage adapté après 50 cycles d'adaptation et Mach local sur ce nouveau maillage. Les paramètres d'adaptation sont les suivants :  $TOL = 1$ ,  $h_{min} = 0.1m$ .

La figure C.3 représente une coupe le long du SSBJ en  $y = 0$  du maillage initial et du maillage adapté 50 fois ainsi que le Mach local correspondant à chaque maillage. Les nombreux chocs se développant le long de la structure de l'avion apparaissent clairement sur la solution calculée sur le maillage adapté. Les éléments sont également étirés le long des chocs dans le plan parallèle au plan  $(Oxz)$ .



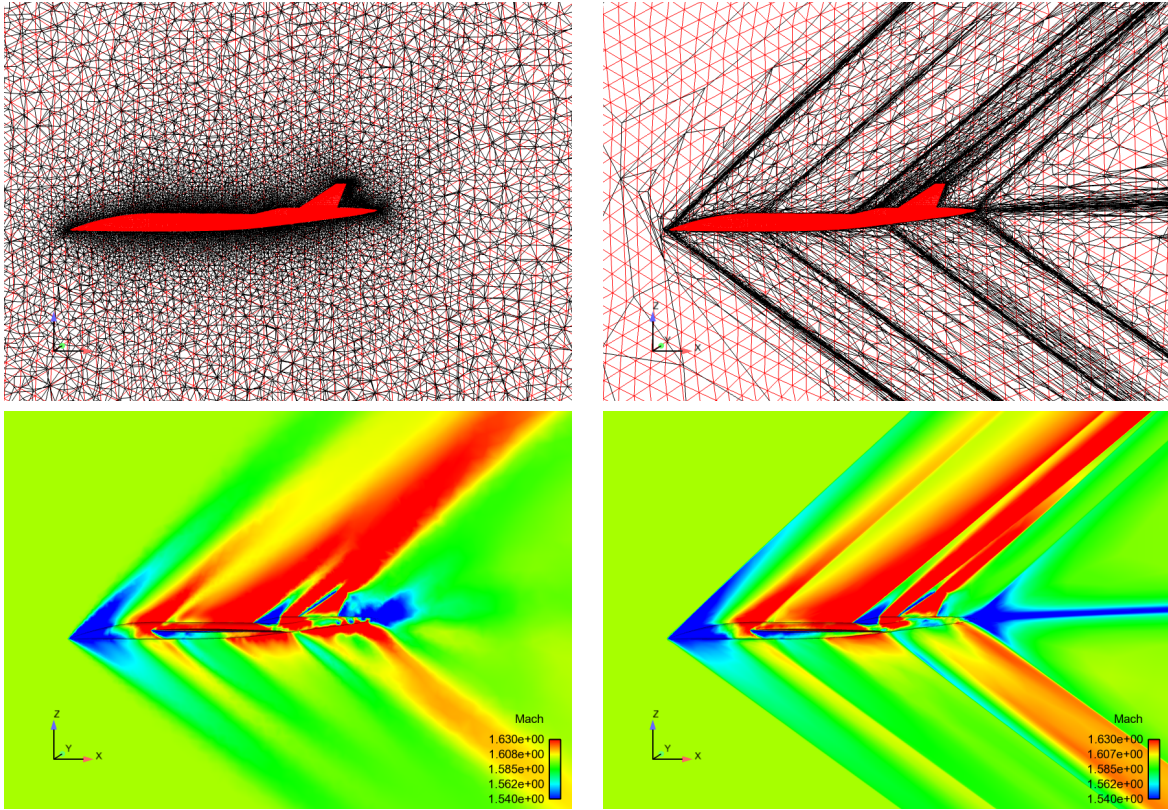


FIGURE C.3 – Coupe le long du SSBJ (en  $y = 0$ ) du maillage et de la solution. Le maillage rouge représente le maillage du bord du domaine et le maillage noir correspond à la coupe du maillage volumique. A gauche : maillage initial et Mach local. A droite : maillage adapté après 50 cycles d'adaptation et Mach local sur ce nouveau maillage. Les paramètres d'adaptation sont les suivants :  $TOL = 1$ ,  $h_{min} = 0.1m$ .

La figure C.4 représente différentes coupes du maillage volumique adapté après 50 cycles d'adaptation le long du SSBJ ainsi que le Mach local correspondant. Tous les plans de coupes sont parallèles au plan (Oyz). Le maillage est raffiné au niveau des nombreuses ondes de choc qui se sont formées tout le long de l'avion. Le cône de Mach formé par toutes ces ondes est d'ailleurs bien visible sur le maillage adapté.

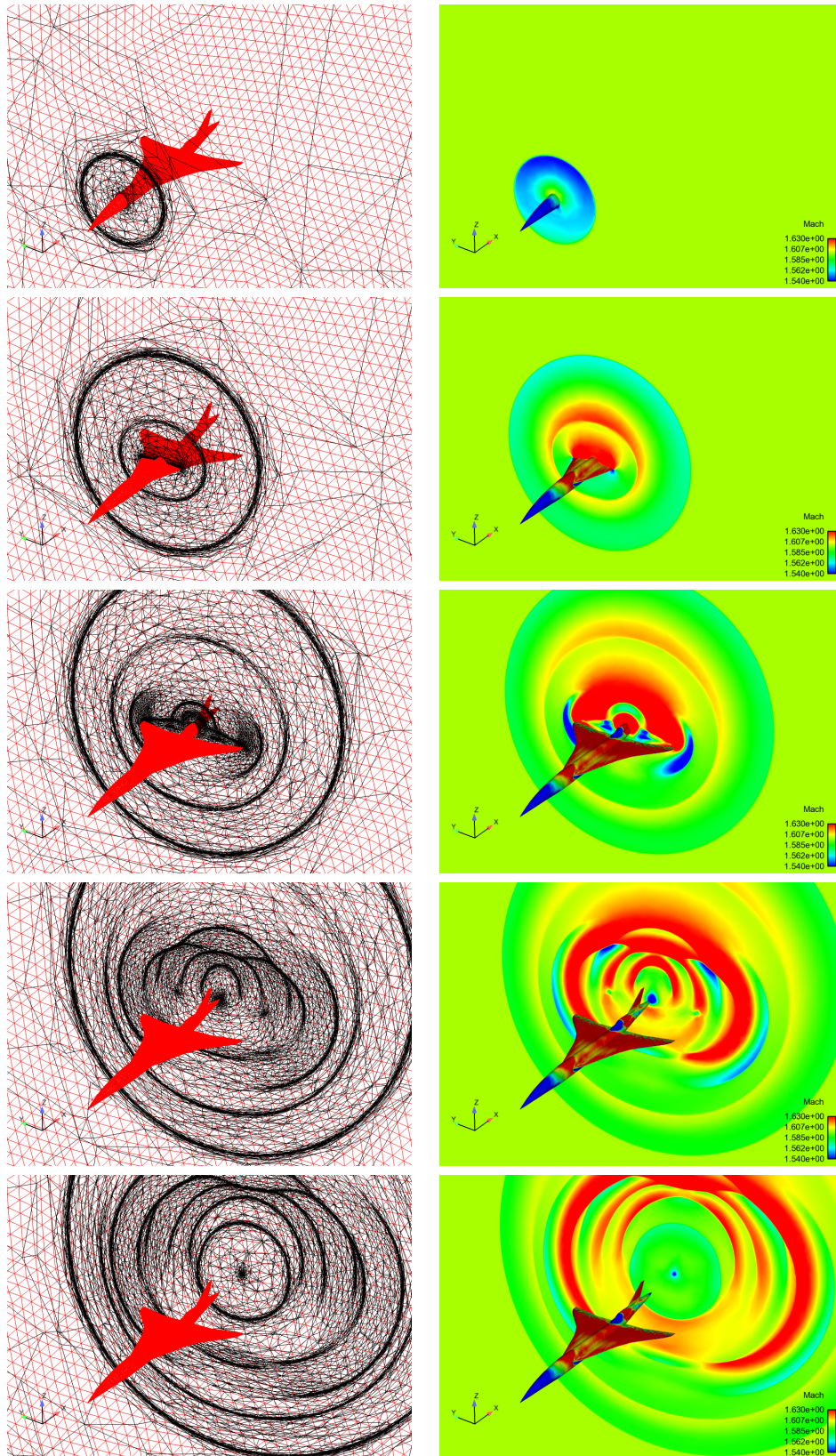


FIGURE C.4 – A gauche : coupe du maillage volumique adapté après 50 cycles d'adaptation. A droite : Mach local associé aux différentes coupes. De haut en bas : coupes en  $x = -30$ ,  $x = -20$ ,  $x = -10$ ,  $x = 0$  et  $x = 10$ . Le maillage rouge représente le maillage du bord du domaine et le maillage noir correspond à la coupe du maillage volumique. Les paramètres d'adaptation sont les suivants :  $TOL = 1$ ,  $h_{min} = 0.1m$ .

## C.2 Écoulement visqueux autour d'un véhicule générique de rentrée en régime hypersonique

### C.2.1 Géométrie de type *blunt body*

On considère un écoulement visqueux autour d'une géométrie cylindrique fermée par une demi-sphère. La figure C.5 représente la géométrie et son maillage surfacique. Comme l'objet est symétrique, seule une moitié du domaine est considéré. L'écoulement est supposé complètement turbulent.

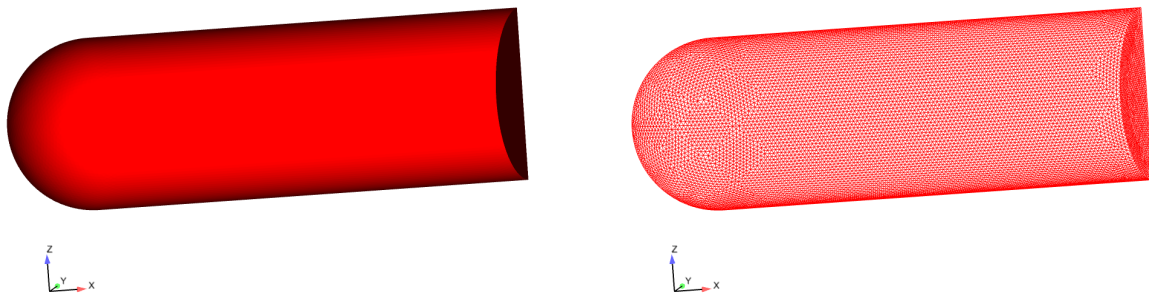


FIGURE C.5 – Géométrie et maillage surfacique de l'objet.

Le cas de calcul est le suivant :  $Mach = 10$  et angle d'incidence de  $45^\circ$ . Une coupe parallèle au plan de symétrie du maillage initial et du Mach local est donnée dans la figure C.6. Le maillage contient 996003 sommets. Le calcul aérodynamique est réalisé avec le code Aether de Dassault Aviation. La figure C.6 montre qu'un choc de tête détaché très fort, appelé Bow Shock, enveloppe l'objet. Dans ce cas hypersonique, l'objectif est de raffiner le maillage au niveau du choc afin de réduire son épaisseur visible sur la solution. Différents zooms du maillage et de la solution sont visibles dans la figure C.6.

Le maillage a été adapté une fois à partir du Mach local et un maillage structuré de la couche limite a été inséré autour de l'objet. Ce maillage structuré contient 50 couches d'éléments et la taille de la première maille est de 5 microns avec une raison définissant les tailles des autres mailles de 1.15. Le maillage adapté contient 569946 sommets, soit presque 2 fois moins que le maillage de départ. La figure C.7 montre que le maillage a été principalement raffiné au niveau du choc de tête. Les zooms présents dans la figure C.7 permettent de constater, en comparant avec les images de la figure C.6, que le Mach local laisse apparaître un choc plus lissé.

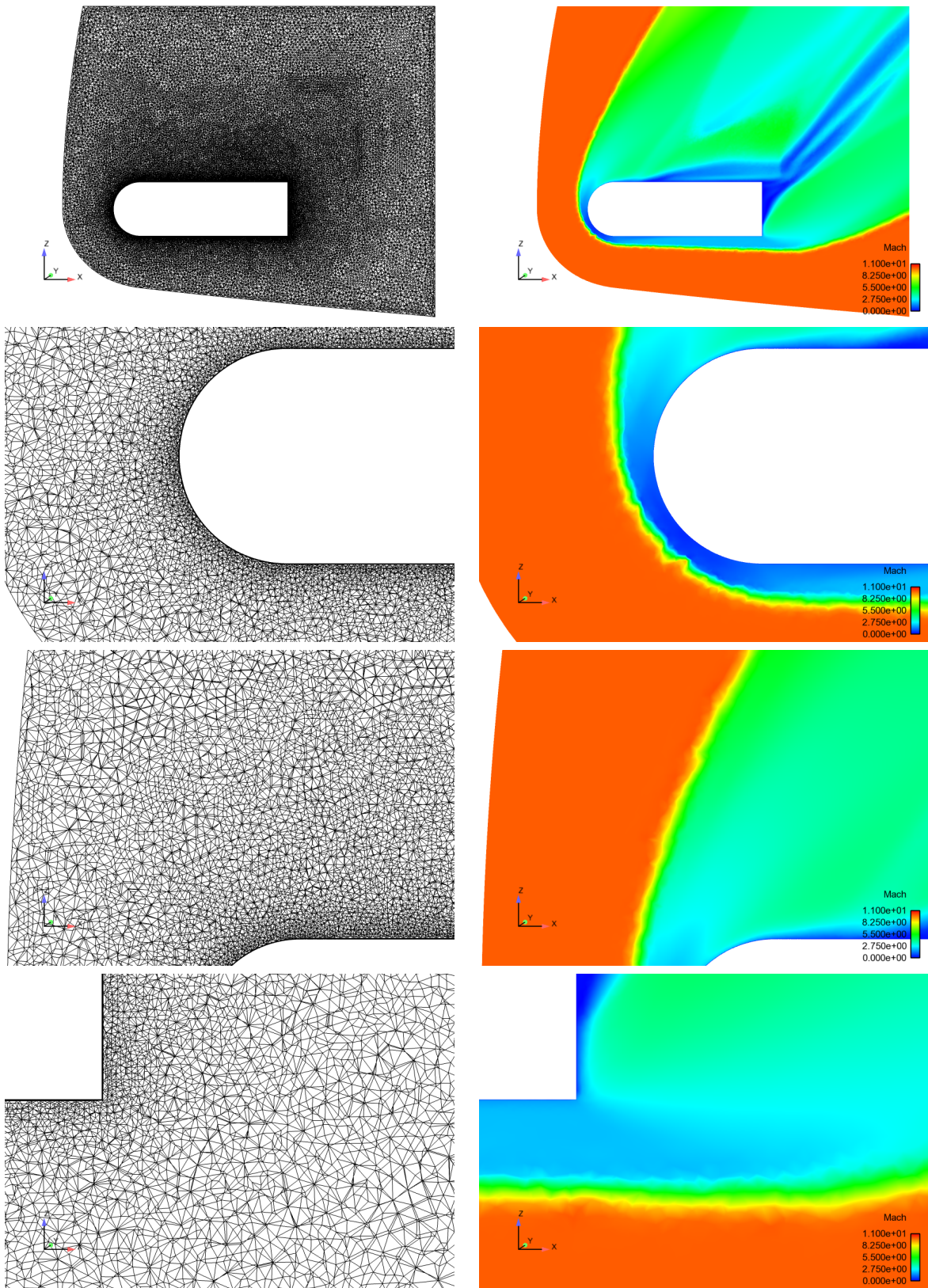


FIGURE C.6 – Coupe en  $y = 0.4m$  du maillage initial et du Mach local avec différents zooms.

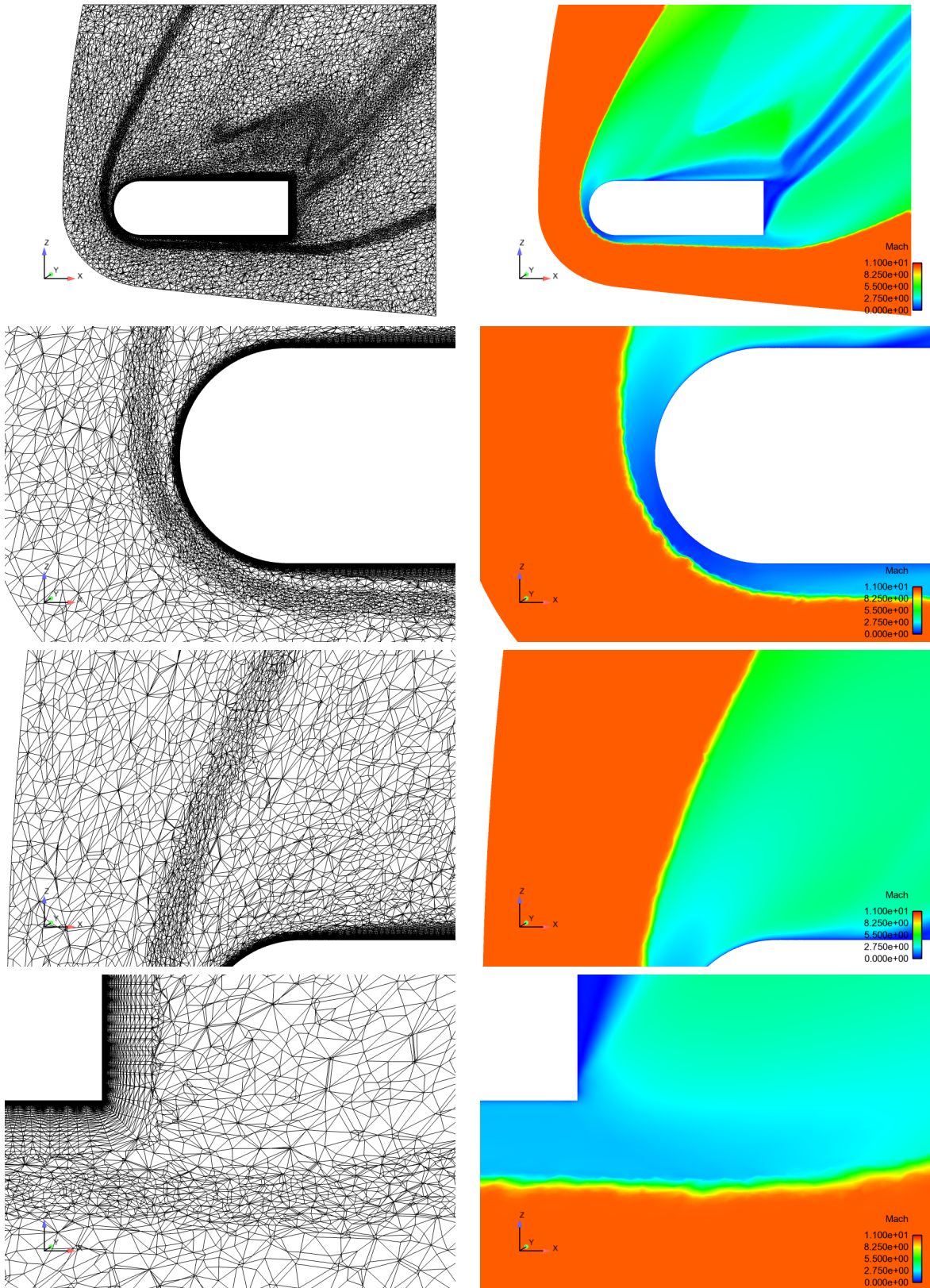


FIGURE C.7 – *Coupe en  $y = 0.4m$  du maillage adapté une fois et du Mach local calculé sur ce maillage avec différents zooms.*

La figure C.8 montrant le maillage adapté une deuxième fois sur le Mach local permet de se rendre compte du déraffinement qui s'effectue autour du choc. Ce maillage contient 788644 sommets.

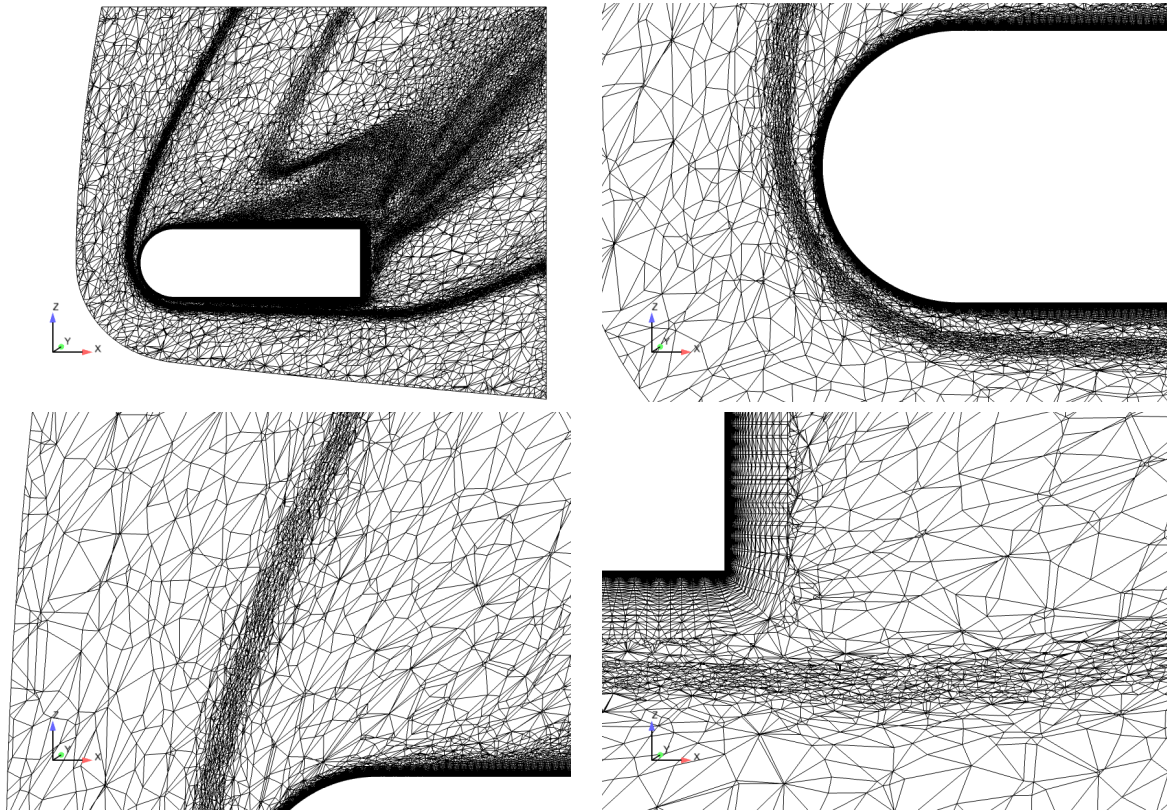


FIGURE C.8 – Coupe en  $y = 0.4m$  du maillage adapté deux fois à partir du Mach local.

### C.2.2 Véhicule générique de rentrée

A présent, on considère la géométrie d'un véhicule générique de rentrée atmosphérique. La figure C.9 représente la géométrie du véhicule et son maillage surfacique. De même que la géométrie utilisée dans la partie précédente, ce véhicule est symétrique et possède une forme aérodynamique assez simple mais deux surfaces de contrôle sont implantées à l'arrière afin d'assurer l'équilibre longitudinale et latérale du véhicule.

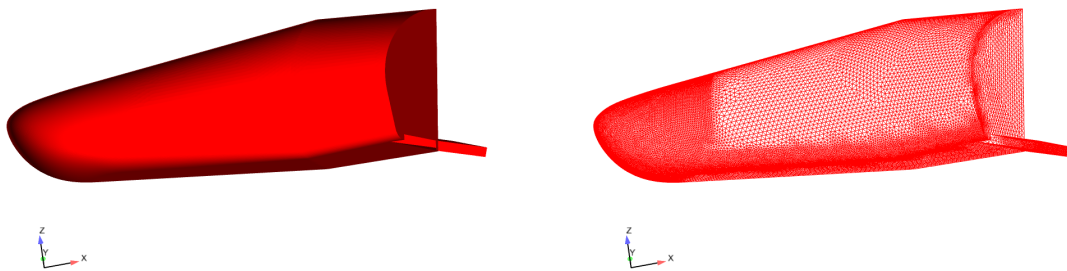


FIGURE C.9 – Géométrie et maillage surfacique du véhicule de rentrée.

Le cas de calcul est le même que précédemment, c'est-à-dire  $Mach = 10$  avec un angle d'incidence de  $45^\circ$ . De plus, les volets situés à l'arrière sont braqués à  $10^\circ$ , ce qui introduit de nouveaux chocs à leurs niveaux mais de moindre amplitude que le choc de tête (voir figure C.10). Différents zooms du maillage et de la solution sont visibles dans la figure C.10. Le maillage volumique initial contient 1490642 sommets.

Le maillage a été adapté une fois à partir du Mach local en conservant 50 couches de mailles structurées dans la couche limite avec une taille de première maille de 5 microns et une raison définissant les tailles des autres mailles de 1.15. Le nouveau maillage contient 1001536 sommets. La figure C.11 montre que le maillage a été raffiné au niveau du choc de tête comme avec la géométrie ne contenant pas de gouverne et les zooms des figures C.10 et C.11 montrent que le choc est plus fin sur la solution calculée sur le maillage adapté que sur la solution initiale. Mais le choc plus faible engendré par le braquage des volets n'a pratiquement pas été raffiné.

Un deuxième cycle d'adaptation de maillage permet d'augmenter la densité des sommets au niveau du choc fort mais toujours aucun raffinement n'est effectué sur le choc faible (voir figure C.13). Il semblerait qu'il y ait un effet multi-échelles qui oriente l'adaptation au niveau des phénomènes de plus fort gradient. Ce maillage contient 589115 sommets, soit 3 fois moins que le maillage initial. Par contre, la pression locale de la figure C.12 montre que le choc de gouverne est plus fort que pour le Mach local bien que le choc de tête soit très peu visible avec cette variable. Un cycle d'adaptation de maillage a été réalisé en prenant la pression locale comme variable d'intérêt. La figure C.13 représente les maillages adaptés après deux cycles d'adaptation sur le Mach local et après un cycle sur la pression locale. L'adaptation sur la pression locale permet d'obtenir un maillage plus fin au niveau du choc faible contrairement au Mach local.

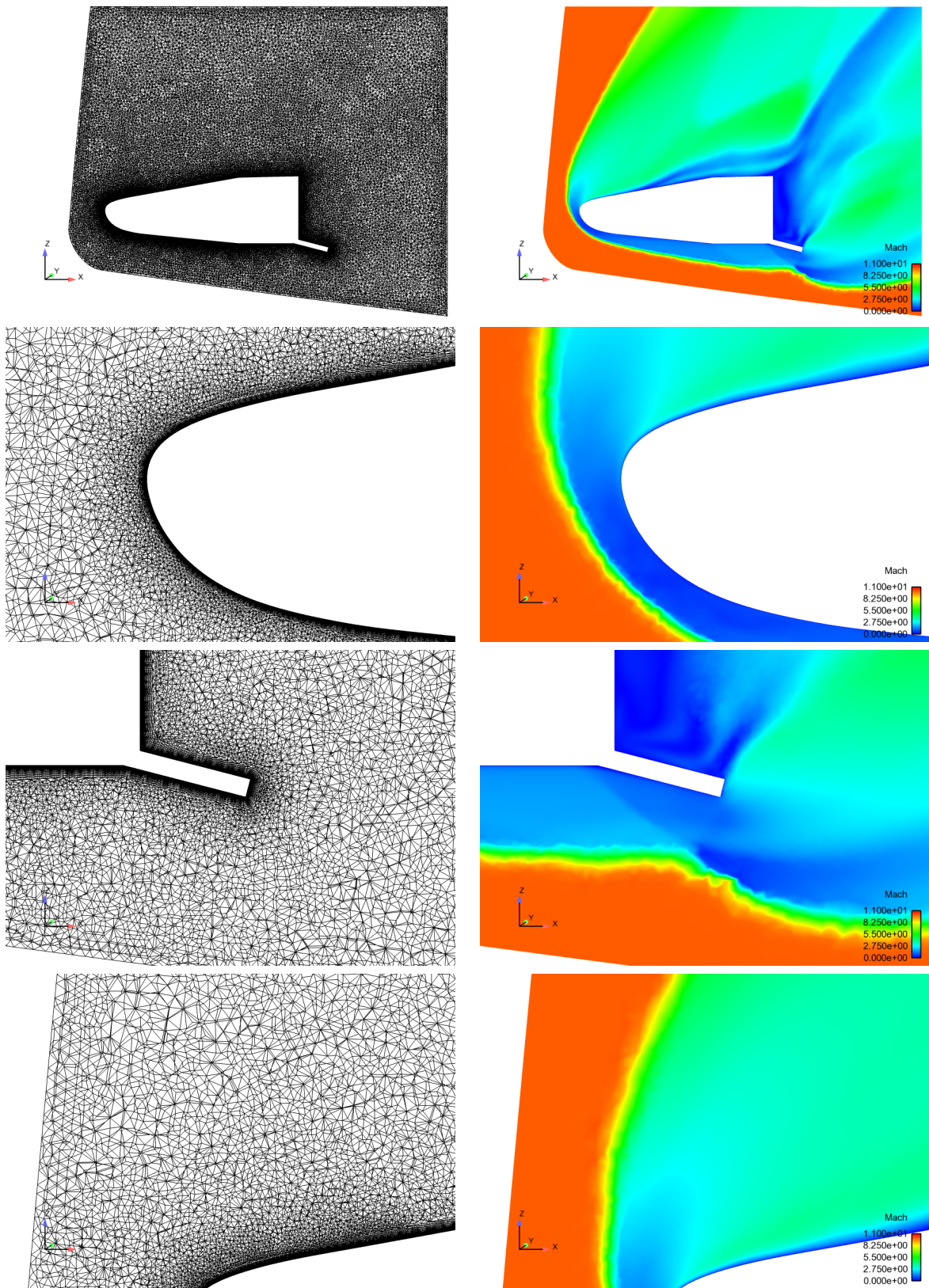


FIGURE C.10 – Coupe en  $y = 0.4m$  du maillage initial et du Mach local avec différents zooms.



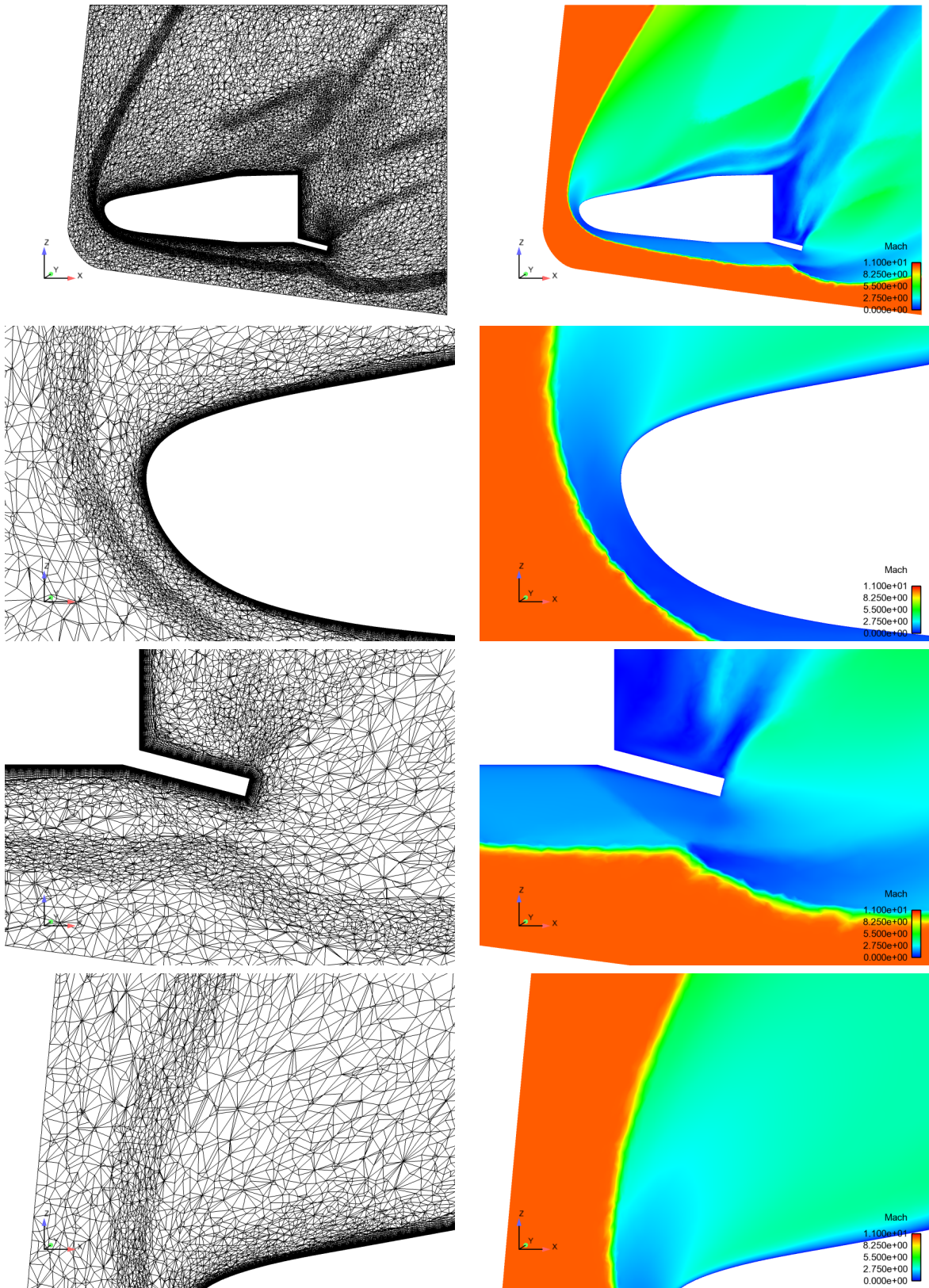


FIGURE C.11 – *Coupe en  $y = 0.4m$  du maillage adapté une fois et du Mach local calculé sur ce maillage avec différents zooms.*

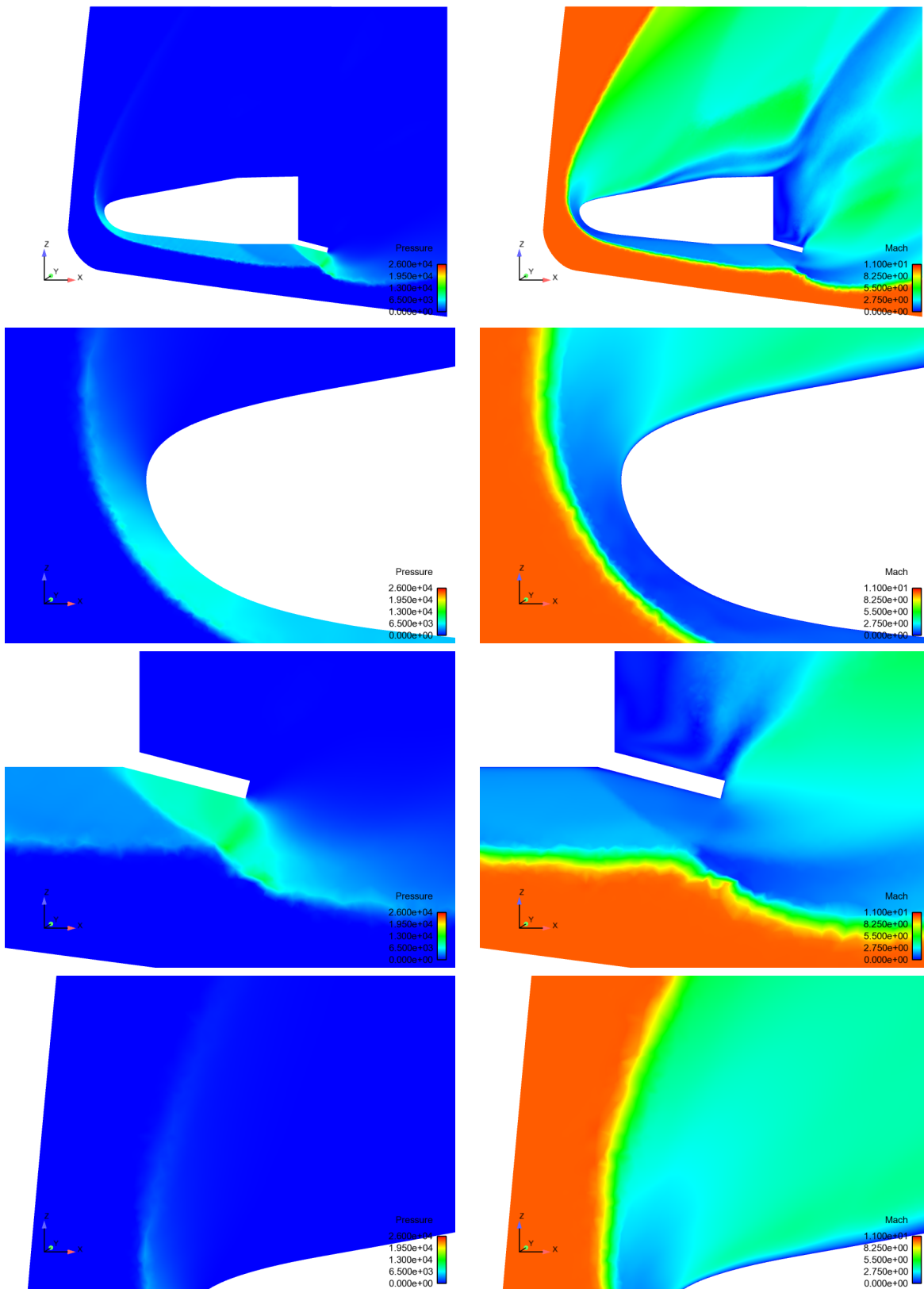


FIGURE C.12 – Zoom sur la coupe en  $y = 0.4m$  de la pression locale et du Mach local calculé sur le maillage initial.

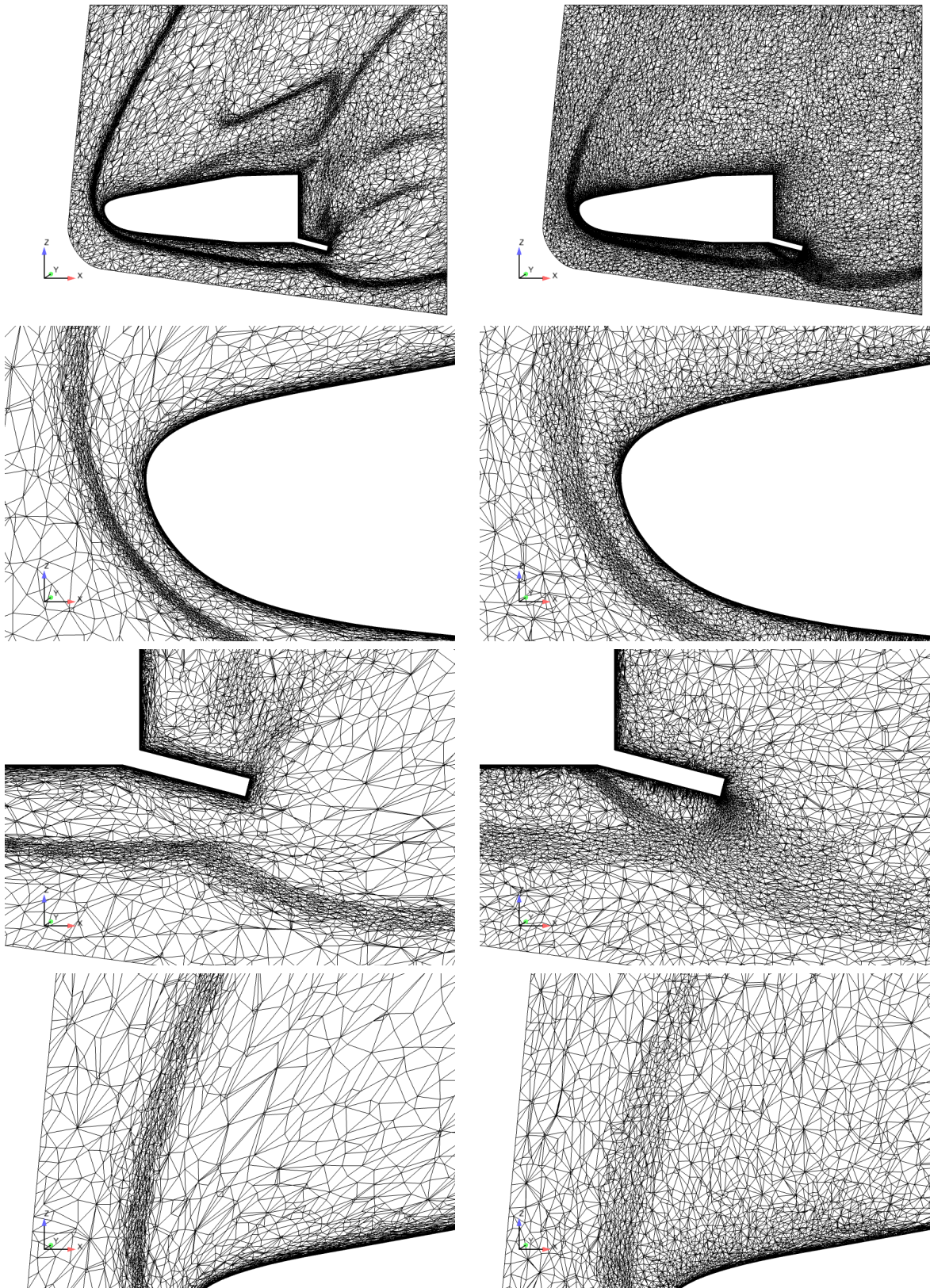


FIGURE C.13 – *A gauche : coupe en  $y = 0.4m$  du maillage adapté deux fois à partir du Mach local. A droite : coupe en  $y = 0.4m$  du maillage adapté une fois à partir de la pression locale.*

### C.3 Écoulement visqueux dans un tube de dégivrage en régime subsonique

On considère un écoulement visqueux dans un tube de dégivrage d'une aile d'avion. La géométrie du domaine est représentée par un cylindre composé de trous se trouvant à l'intérieur du bord d'attaque de l'aile (voir figure C.14). De l'air chaud circule dans le cylindre et des jets d'air chaud sortant des trous permettent de réchauffer le bord d'attaque de l'aile.

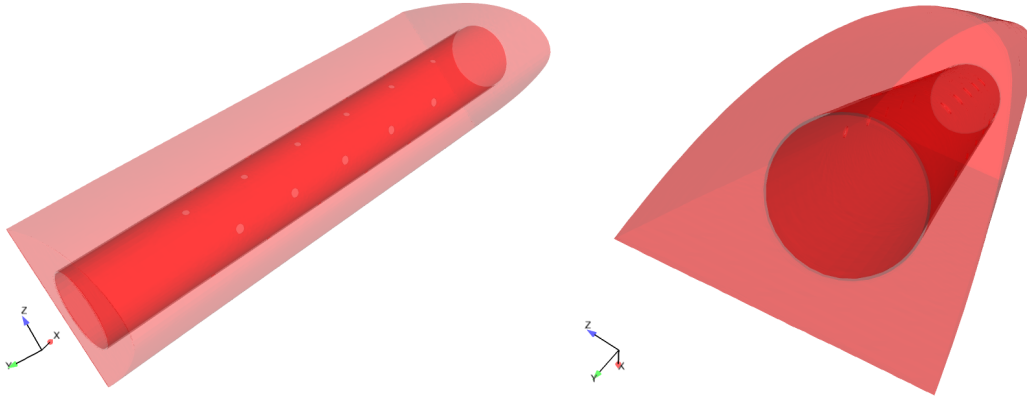


FIGURE C.14 – Géométrie du tube de dégivrage.

La figure C.15 montre la géométrie du tube et un plan de coupe du domaine le long du tube permettant de visualiser les jets. L'air s'écoule dans le cylindre à une vitesse de Mach 0.3804 et des conditions limites relativement complexes sur la température, la pression et la vitesse sont imposées. De plus, le modèle de turbulence utilisé est le modèle de Spalart-Allmaras. Le maillage a été adapté deux fois en conservant 11 couches de maillages structurés dans la couche limite avec une taille de première maille égale à 5 microns. Les paramètres d'adaptation sont les suivants :  $TOL = 1$  et  $h_{min} = 0.1m$ . Le maillage initial contient 1495356 sommets, le premier maillage adapté contient 1161668 sommets et le dernier maillage contient 1113998 sommets. La figure C.16 représente le maillage initial et le Mach local dans le plan de coupe défini par la figure C.15 et la figure C.17 montre des zooms sur ces différents maillages. Au cours des adaptations, le maillage est raffiné au niveau des jets et sur les zooms présents dans la figure C.17, on remarque que le jet est plus prononcé et semble se lisser.

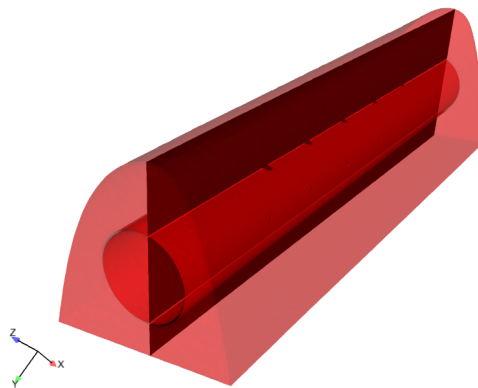


FIGURE C.15 – Géométrie du tube de dégivrage et coupe longitudinale passant par plusieurs trous du tube.

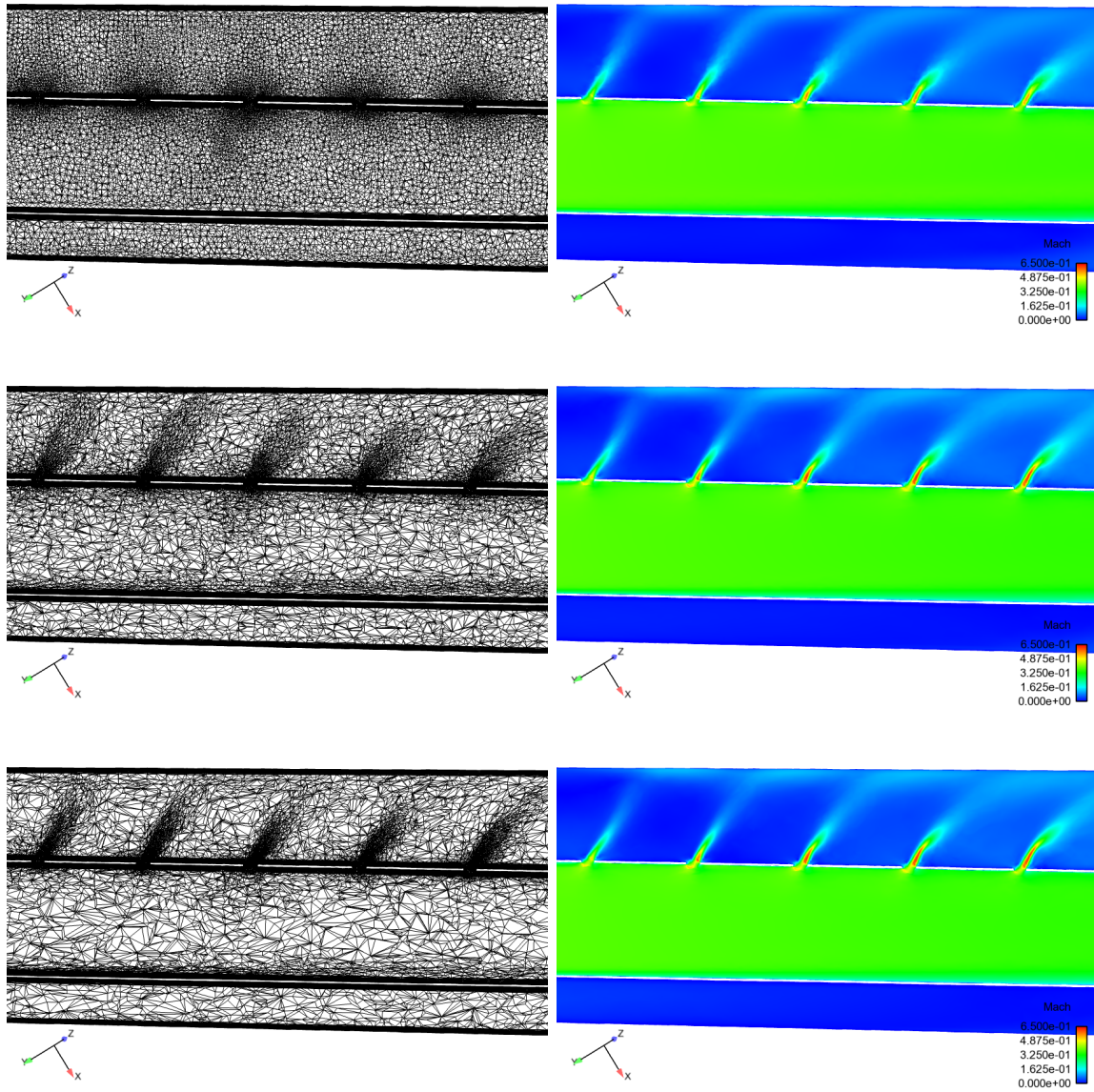


FIGURE C.16 – *Différents maillages du domaine avec les Mach locaux associés dans le plan de coupe défini par la figure C.15. De haut en bas : maillage initial du domaine, maillage adapté une fois par rapport au Mach local et maillage adapté deux fois.*

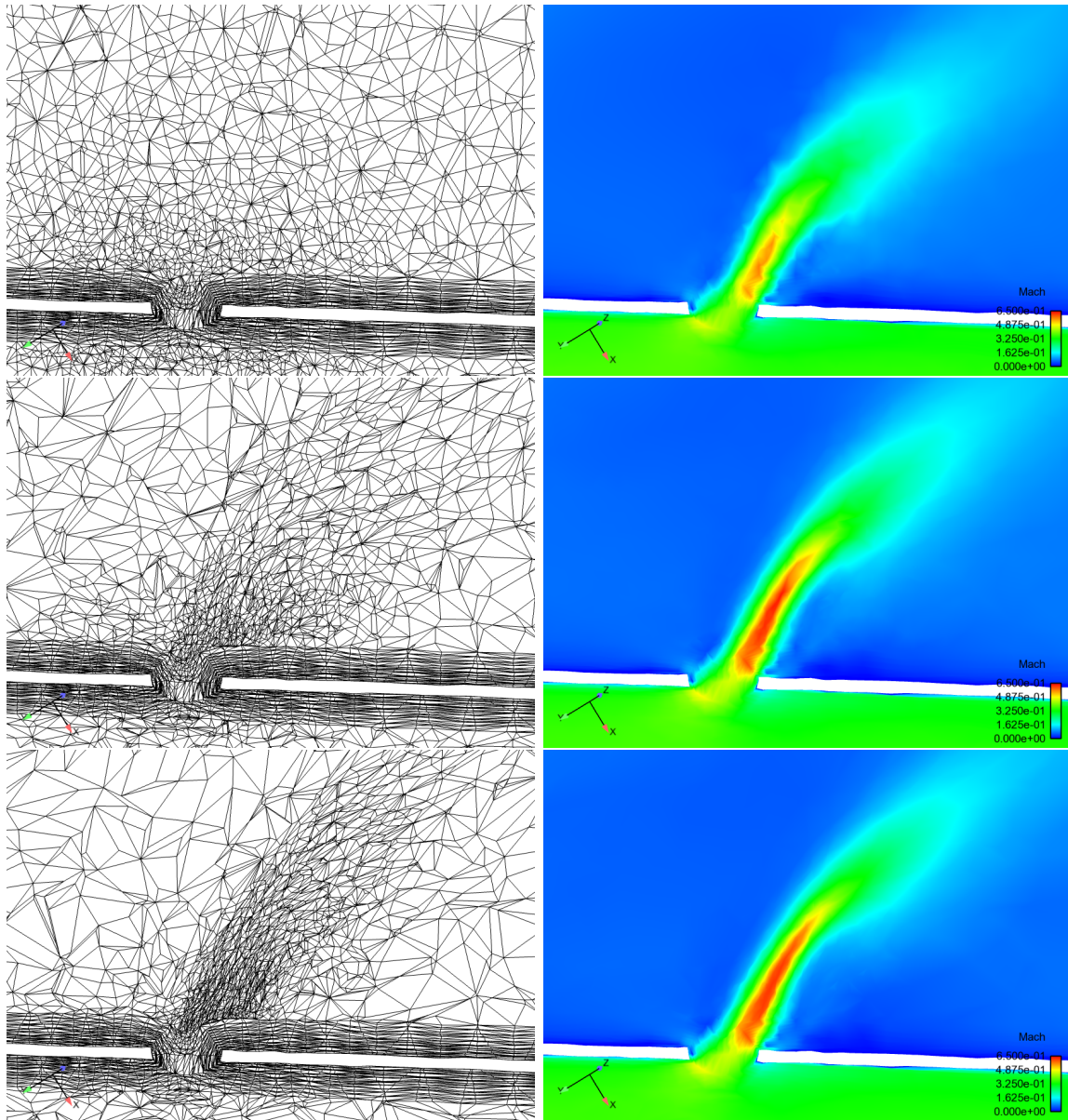


FIGURE C.17 – Zooms des différents maillages du domaine avec les Mach locaux associés dans le plan de coupe défini par la figure C.15. De haut en bas : maillage initial du domaine, maillage adapté une fois par rapport au Mach local et maillage adapté deux fois.

La figure C.18 montre la géométrie du tube et un plan de coupe transversal du domaine permettant de visualiser un jet d'un point de vue différent. On considère les mêmes maillages que précédemment. La figure C.19 représente le maillage initial et le Mach local dans le plan de coupe défini par la figure C.18 et la figure C.20 montre des zooms sur ces différents maillages. Au cours des adaptations, le maillage est raffiné au niveau du jet que l'on considère et sur les zooms présents dans la figure C.20, on remarque que la forme de la solution se précise et la valeur de Mach au centre du jet devient plus élevée.

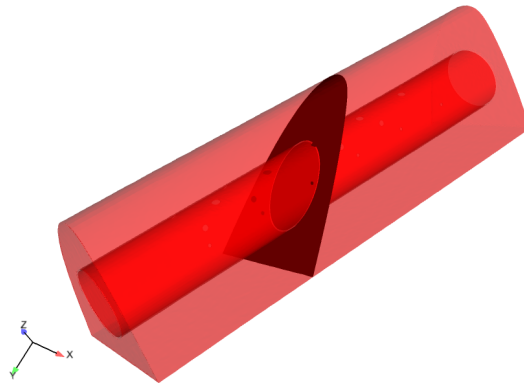


FIGURE C.18 – *Géométrie du tube de dégivrage et coupe transversale passant par un trou du tube.*

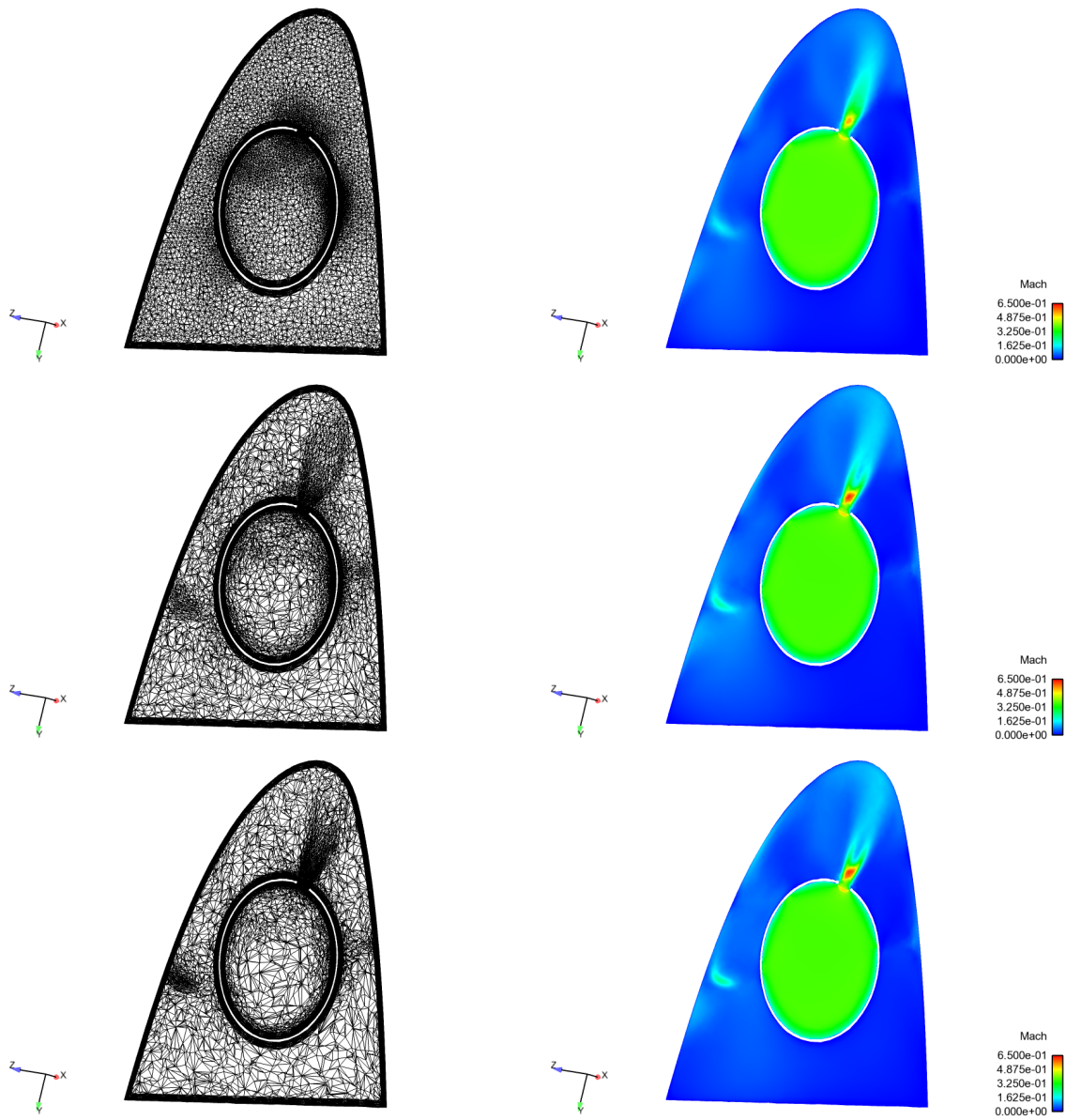


FIGURE C.19 – Différents maillages du domaine avec les Mach locaux associés dans le plan de coupe défini par la figure C.18. De haut en bas : maillage initial du domaine, maillage adapté une fois par rapport au Mach local et maillage adapté deux fois.



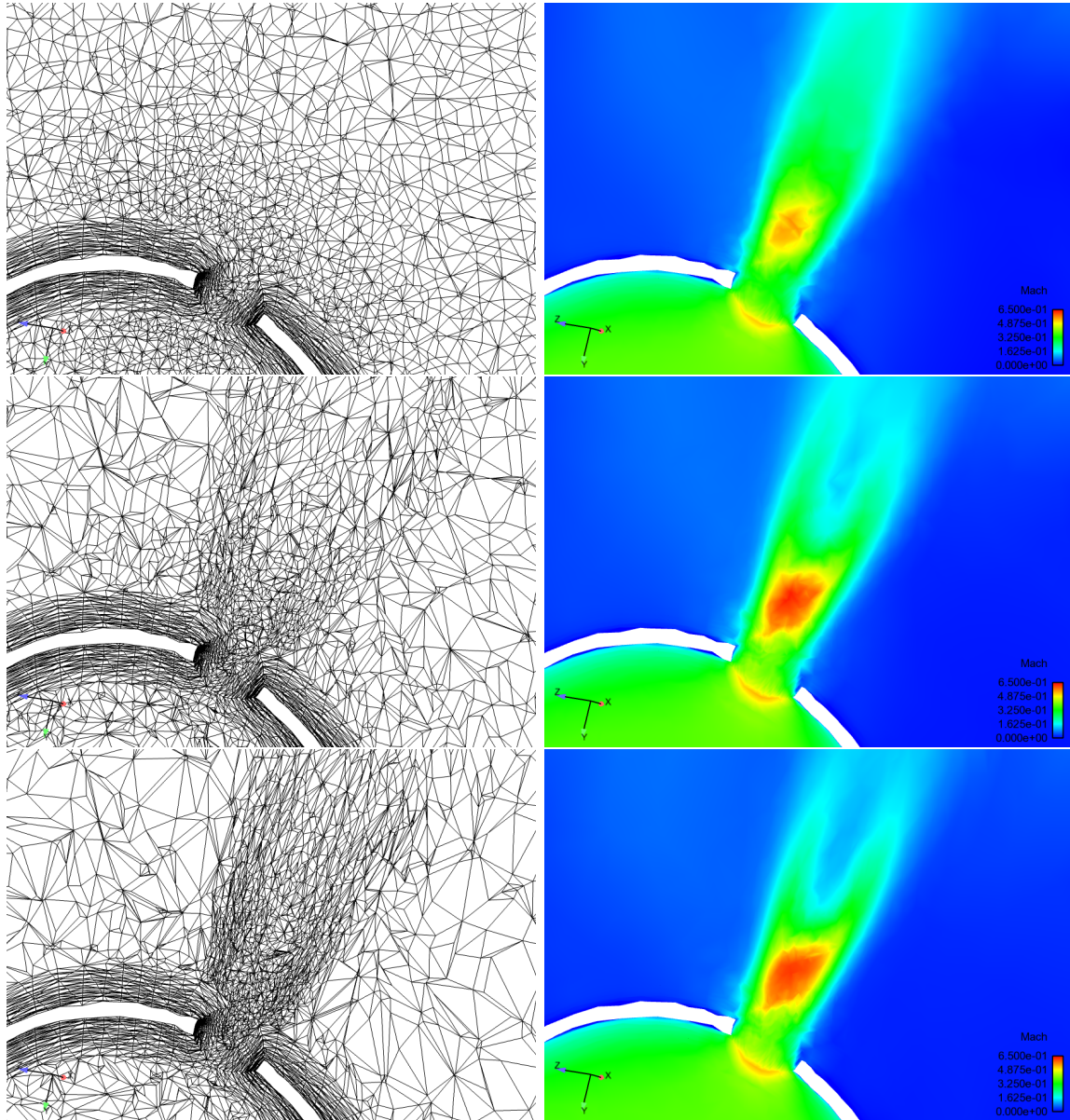


FIGURE C.20 – Zooms des différents maillages du domaine avec les Mach locaux associés dans le plan de coupe défini par la figure C.18. De haut en bas : maillage initial du domaine, maillage adapté une fois par rapport au Mach local et maillage adapté deux fois.



# Bibliographie

- [1] M. AINSWORTH, J.Z. ZHU, A.W. CRAIG ET O.C. ZIENKIEWICZ, *Analysis of the Zienkiewicz-Zhu a posteriori error estimator in the finite element method*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 28(9), 2161-2174, 1989.
- [2] M. AINSWORTH ET J.T. ODEN, *A posteriori error estimation in finite element analysis*, Pure and Applied Mathematics (New York). Wiley-Interscience [John Wiley & Sons], New York, 2000.
- [3] F. ALAUZET ET P.J. FREY, *Estimateur d'erreur géométrique et métriques anisotropes pour l'adaptation de maillage. Partie I : aspects théoriques*, Rapport de Recherche INRIA, 4759, mars 2003.
- [4] F. ALAUZET ET P.J. FREY, *Estimateur d'erreur géométrique et métriques anisotropes pour l'adaptation de maillage. Partie II : exemples d'applications*, Rapport de Recherche INRIA, 4789, mars 2003.
- [5] F. ALAUZET, *High-order methods and mesh adaptation for Euler equations*, International Journal for Numerical Methods in Fluids, Volume 56, Issue 8, 1069-1076, 20 mars 2008.
- [6] F. ALAUZET, *Adaptation de maillage anisotrope en trois dimensions. Application aux simulations instationnaires en mécanique des fluides*, Thèse de mathématiques appliquées, Université de Montpellier II, France, 2003.
- [7] F. ALAUZET ET A. LOSEILLE, *High order sonic boom modeling by adaptive methods*, Rapport de recherche INRIA, 6845, 2009.
- [8] F. ALAUZET ET B. MOHAMMADI, *Optimisation 3D du nez d'un SuperSonic Business Jet basée sur l'adaptation de maillages. Application à la réduction du bang sonique*, Rapport de recherche INRIA, 5053, 2003.
- [9] F. ALAUZET, W. HASSAN ET M. PICASSO, *Goal oriented, anisotropic, a posteriori error estimates for the Laplace equation*, Proceedings of Enumath 2009, Uppsala, Sweden, June 2009.
- [10] F. ALAUZET, P.-L. GEORGE, B. MOHAMMADI, P. FREY ET H. BOROUCAKI, *Transient fixed point-based unstructured mesh adaptation*, International Journal for Numerical Methods in Fluids, 43, 729-745, 2003.
- [11] I. BABUŠKA, R. DURÁN ET R. RODRÍGUEZ, *Analysis of the efficiency of an a posteriori error estimator for linear triangular finite elements*, SIAM Journal on Numerical Analysis, Volume 29, N° 4, 947-964, 1992.
- [12] I. BABUŠKA ET W.C. RHEINBOLDT, *Error estimates for adaptive finite element computations*, SIAM Journal on Numerical Analysis, Volume 15, 736-754, 1978.
- [13] I. BABUŠKA ET W.C. RHEINBOLDT, *A posteriori error estimators in the finite element method*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 12, 1597-1615, 1978.
- [14] T.J. BAKER, *Mesh adaptation strategies for problems in fluid dynamics*, Finite Elements in Analysis and Design, 25, 243-273, 1997.

- [15] W. BANGERTH ET R. RANNACHER, *Adaptive finite element methods for differential equations*, Lectures in Mathematics ETH Zürich, Birkhäuser Verlag, Basel, 2003.
- [16] R. BECKER ET R. RANNACHER, *An optimal control approach to a posteriori error estimation in finite element methods*, Acta Numerica, 10, 1-102, 2001.
- [17] A. BEN HADJ ALI ET A. SOULAIMANI, *An unstructured finite elements method for solving the compressible RANS equations and the Spalart-Allmaras turbulence model*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Volume 199, Issues 33-36, 2261-2272, 2010.
- [18] H. BOROUCHAKI ET P.-L. GEORGE, *Triangulation de Delaunay et maillage : applications aux éléments finis*, Hermès, Paris, 1997.
- [19] H. BOROUCHAKI, P.-L. GEORGE, F. HECHT, P. LAUG ET E. SALTEL, *Mailleur bidimensionnel de Delaunay gouverné par une carte de métriques. Partie I : Algorithmes*, Rapport de recherche INRIA, 2741, 1995.
- [20] Y. BOURGAULT, M. PICASSO, F. ALAUZET ET A. LOSEILLE, *On the use of anisotropic a posteriori error estimators for the adaptative solution of 3D inviscid compressible flows*, International Journal for Numerical Methods in Fluids, Volume 59(1), 47-74, 2009.
- [21] D. BRESCH ET B. DESJARDINS, *On the existence of global weak solutions to the Navier-Stokes equations for viscous compressible and heat conducting fluids.*, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, 87, 57-90, 2007.
- [22] D. BRESCH, *Solutions faibles et équations de Navier-Stokes. De Jean Leray à Pierre-Louis Lions.*, Bol. Soc Esp Mat Apl, 36, 63-86, 2006.
- [23] F. BREZZI, J. RAPPAZ ET P.A. RAVIART, *Finite dimensional approximation of nonlinear problems. Part I : Branches of nonsingular solutions*, Numerische Mathematik, 36, 1-25, 1980.
- [24] E. BURMAN ET M. PICASSO, *Anisotropic, adaptive finite elements for the computation of a solutal dendrite*, J. Interfaces and Free Boundaries, 5, 103-127, 2003.
- [25] G. CALOZ ET J. RAPPAZ, *Numerical analysis for nonlinear and bifurcation problems*, dans Handbook of Numerical analysis, J.-L. Lions et P.G. Ciarlet, editors, Volume V, Techniques of Scientific Computing (Part 2), p.487-637, Elsevier Science B.V., 1997.
- [26] J. CHETBOUN, *Conception de formes aérodynamiques en présence d'écoulements décollés : contrôle et optimisation*, Thèse de mathématiques appliquées, Ecole Polytechnique, France, 2010.
- [27] F. CHALOT, *Goal-oriented Mesh Adaptation in an Industrial Stabilized Finite Element Navier-Stokes Code*, ADIGMA — A European Initiative on the Development of Adaptive Higher-Order Variational Methods for Aerospace Applications. Results of a collaborative research project funded by the European Union, 2006–2009, N. Kroll, H. Bieler, H. Deconinck, V. Couallier, H. van der Ven, and K. Sørensen Editors, Notes on Numerical Fluid Mechanics and Multidisciplinary Design, Springer Verlag, 2010.
- [28] P.G. CIARLET, *Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation*, Masson, Paris, 1982.
- [29] PH. CLÉMENT, *Approximation by finite element functions using local regularization*, Revue française d'automatique, informatique, recherche opérationnelle, Analyse numérique, tome 9, N° 2, 77-84, 1975.
- [30] P.-H. COURNÈDE, B. KOOBUS ET A. DERVIEUX, *Positivity statements for a Mixed-Element-Volume scheme on fixed and moving grids.*, European Journal of Computational Mechanics, 15, 767-798, 2006.

- 
- [31] I. DANAILA, F. HECHT ET O. PIRONNEAU, *Simulation numérique en C++*, Dunod, 2003.
- [32] L. DEBIANE, *Applications de l'adaptation de maillage en mécanique des fluides, combustion et traitement de l'image*, Thèse de mathématiques appliquées, Université de Montpellier II, France, 2004.
- [33] L. DEDÈ, S. MICHELETTI ET S. PEROTTO, *Anisotropic error control for environmental applications*, Applied Numerical Mathematics, 58, 1320-1339, 2008.
- [34] DISTENE S.A.S, PÔLE TERATEC - DOMAINE DU GRAND RUÉ, 91680 BRUYÈRES-LE-CHATEL, FRANCE, *MeshAdapt : A mesh adaptation tool*, User's manual Version 3.0, 2003.
- [35] C. DOBRZYNSKI, *Adaptation de maillage anisotrope 3D et application à l'aéro-thermique des bâtiments*, Thèse de mathématiques appliquées, Université Pierre et Marie Curie, Paris VI, France, 2005.
- [36] R. EYMARD, T. GALLOUËT, R. HERBIN ET J.-C. LATCHÉ, *Convergence of the MAC scheme for the compressible Stokes equations*, SIAM Journal on Numerical Analysis, volume 48, n°6, 2218-2246, 2010.
- [37] L. FORMAGGIA ET S. PEROTTO, *New anisotropic a priori error estimates*, Numerische Mathematik, 89, 641-667, 2001.
- [38] L. FORMAGGIA ET S. PEROTTO, *Anisotropic error estimates for elliptic problems*, Computing and Visualization in Science, 4, 99-104, 2001.
- [39] L. FORMAGGIA, S. PEROTTO ET P. ZUNINO, *An anisotropic a posteriori error estimate for a convection-diffusion problem*, Numerische Mathematik, 94, 67-92, 2003.
- [40] L. FORMAGGIA, S. MICHELETTI ET S. PEROTTO, *Anisotropic mesh adaptation in computational fluid dynamics : application to the advection-diffusion-reaction and Stokes problems*, Applied Numerical Mathematics, 51, 511-533, 2004.
- [41] P.J. FREY ET P.-L. GEORGE, *Maillages : applications aux éléments finis*, Hermès Science, Paris, 1999.
- [42] L.P. FRANCA, S.L. FREY ET T.J.R. HUGUES, *Stabilized finite element methods : I. Application to the advective-diffusive model*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 95, 253-276, 1992.
- [43] P.-L. GEORGE, *Tet meshing : construction, optimization and adaptation*, Proceedings of 8th International Meshing Roundtable, South Lake Tao, CA, USA, 1999.
- [44] N. GOURVITCH, G. ROGÉ, I. ABALAKIN, A. DERVIEUX ET T. KOZUBSKAYA, *A tetrahedral-based superconvergence scheme for aeroacoustics*, Rapport de Recherche INRIA, 5212, mai 2004.
- [45] W.G. HABASHI, M. FORTIN, J. DOMPIERRE, M.G. VALLET ET Y. BOURGAULT, *Anisotropic mesh adaptation : a step towards a mesh-independent and user-independent CFD*, In Barriers and challenges in computational fluid dynamics (Hampton, VA, 1996), volume 6 of ICASE/LaRC Interdiscio. Ser. Sci. Eng., pages 99-117. Kluwer Acad. Pub., Dordrecht, 1998.
- [46] R. HARTMANN, *Adjoint consistency analysis of discontinuous Galerkin discretizations*, SIAM Journal on Numerical Analysis, Volume 45, N° 6, 2671-2696, 2007.
- [47] R. HARTMANN, *Error estimation and adjoint-based adaptation in aerodynamics*, European Conference on Computational Fluid Dynamics, ECCOMAS CFD 2006.
- [48] R. HARTMANN ET P. HOUSTON, *Symmetric interior penalty DG methods for the compressible Navier-Stokes equations II : goal-oriented a posteriori error estimation*, International Journal of Numerical Analysis and Modeling, Volume 3, N° 1, 141-162, 2006.
-

- [49] L. HASCOËT, *TAPENADE : a tool for automatic differentiation of programs*, In ECCOMAS 2004-906, 2004.
- [50] P. HOUSTON, R. RANNACHER ET E. SÜLI, *A posteriori error analysis for stabilised finite element approximations of transport problems*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 190, 1483-1508, 2000.
- [51] T.J.R. HUGUES, L.P. FRANCA ET M. MALLET, *A new finite element formulation for computational fluid dynamics : I. Symmetric forms of the compressible Euler and Navier-Stokes equations and the second law of thermodynamics*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 54, 223-234, 1986.
- [52] C. JOHNSON, *Adaptive finite element methods for conservation laws*, In Advanced numerical approximation of nonlinear hyperbolic equations (Cetraro, 1997), volume 1697 of Lecture Notes in Math., pages 269-323, Springer, Berlin, 1998.
- [53] C. KASBARIAN, *Etude numérique pour les problèmes d'advection-diffusion - Application à la modélisation d'écoulements turbulents compressibles*, Thèse de mécanique des fluides numériques, Université de Lyon I, France, 1995.
- [54] M. KRIZEK, P. NEITTAANMÄKI ET R. STENBERG, *Finite Element Methods : superconvergence, post-processing and a posteriori estimates*, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, 196, 1998.
- [55] O. KRÜGER, M. PICASSO ET J.-F. SCHEID, *A posteriori error estimates and adaptive finite elements for a nonlinear parabolic problem related to solidification*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 192, 535-558, 2003.
- [56] G. KUNERT, *An a posteriori residual error estimator for the finite element method on anisotropic tetrahedral meshes*, Numerische Mathematik, 86, 471-490, 2000.
- [57] G. KUNERT, *A posteriori  $L_2$  error estimation on anisotropic tetrahedral finite element meshes*, IMA Journal of Numerical Analysis, 22, 503-523, 2001.
- [58] G. KUNERT ET R. VERF URTH, *Edge residuals dominate a posteriori error estimates for linear finite element methods on anisotropic triangular and tetrahedral meshes*, Numerische Mathematik, 86, 283-303, 2000.
- [59] D. KUZMIN ET S. KOROTOV, *Goal oriented a posteriori error estimates for transport problems*, Mathematics and Computers in Simulation, volume 80, N° . 8, 1674-1683, 2010.
- [60] J.F. LAGÜE, *Optimisation de maillage basé sur une erreur locale d'interpolation*, Thèse de mathématiques appliquées, Université Pierre et Marie Curie, Paris VI, France, 2006.
- [61] V. LEVASSEUR, *Simulation des grandes échelles en éléments finis stabilisées : une approche variationnelle multi-échelles*, Thèse de mécanique, Université Pierre et Marie Curie, Paris VI, France, 2007.
- [62] P.-L. LIONS ET N. MASMOUDI, *Unicité des solutions faibles de Navier-Stokes dans  $L^N(\Omega)$* , Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Paris, Series I, Mathematics, Volume 327, Issue 5, 491-496, 1998.
- [63] P.-L. LIONS, *Mathematical topics in fluid mechanics. Volume 2. Compressible models*, Oxford Science Publications, Clarendon, Oxford, 1998.
- [64] R. LÖHNER, *Progress in grid generation via the advancing front technique*, Engineering with Computers, 12, 186-210, 1996.
- [65] A. LOSEILLE, *Adaptation de maillage anisotrope 3D multi-échelles et ciblée à une fonctionnelle pour la mécanique des fluides. Application à la prédiction haute-fidélité du bang sonique.*, Thèse de mathématiques appliquées, Université Pierre et Marie Curie, Paris VI, France, 2008.

- 
- [66] B. LUCQUIN ET O. PIRONNEAU, *Introduction au calcul scientifique*, Masson, Paris, 1996.
- [67] B. LUCQUIN, *Equations aux dérivées partielles et leurs approximations*, Ellipses, 2004.
- [68] L. MARTIN, *Conception aérodynamique robuste*, Thèse de mathématiques appliquées, Université Paul Sabatier, Institut de mathématiques de Toulouse, France, 2010.
- [69] S. MICHELETTI, S. PEROTTO ET M. PICASSO, *Stabilized finite elements on anisotropic meshes : a priori error estimates for the advection-diffusion and the Stokes problems*, SIAM Journal on Numerical Analysis, Volume 41, N° 3, 1131-1162, 2003.
- [70] S. MICHELETTI ET S. PEROTTO, *Anisotropic mesh adaptivity via a dual-based a posteriori error estimation for semiconductors*, Proceedings of SCEE 2004, Capo d'Orlando, Italie, September 2004.
- [71] M. BERNADOU, P.-L. GEORGE, A. HASSIM, P. JOLY, P. LAUG, A. PERRONNET, E. SALTEL, D. STEER, G. VANDERBORCK ET M. VIDRASCU, *MODULEF : A Modular Library of Finite Elements*, INRIA, 1988.
- [72] L. MOULARD, *Optimisation de maillages non structurés : applications à la génération, à la correction et à l'adaptation*, Thèse de mathématiques appliquées, Université Joseph Fourier, Grenoble 1, France, 1994.
- [73] J. NARSKI, *Adaptive finite element simulations of dendritic growth including fluid flow induced by shrinkage*, Thèse de mathématiques, N° 3867, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, Suisse, 2007.
- [74] J. NARSKI ET M. PICASSO, *Adaptive 3d finite element with high aspect ratio for dendritic growth of a binary alloy including flow induced by shrinkage*, Fluid Dynamics and Material Processing, 3, 49-64, 2007.
- [75] M. A. PARK ET J-R. CARLSON, *Turbulent output-based anisotropic adaptation*, AIAA-2010-0168, January 2010.
- [76] J. PERAIRE, J. PEIRO ET K. MORGAN, *Adaptive remeshing for three dimensional compressible flow computations*, Journal of Computational Physics, 103, 269-285, 1992.
- [77] M. PICASSO, *An anisotropic error indicator based on Zienkiewicz-Zhu error estimator : application to elliptic and parabolic problems*, SIAM Journal on Scientific Computing, Volume 24, N° 4, 1328-1355, 2003.
- [78] M. PICASSO, *Adaptive finite elements with large aspect ratio based on an anisotropic error estimator involving first order derivatives*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 196, 14-23, 2006.
- [79] M. PICASSO, *Simulation numérique des traitements de surface par laser*, Thèse de mathématiques, N° 1011, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, Suisse, 1992.
- [80] M. PICASSO, *Numerical study of the effectivity index for an anisotropic error indicator based on Zienkiewicz-Zhu error estimator*, Communications in numerical methods in engineering, 19, 13-23, 2003.
- [81] V. PRACHITTHAM, *Space-time adaptive algorithms for parabolic problems : a posteriori error estimates and application to microfluidics*, Thèse de mathématiques, N° 4338, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, Suisse, 2009.
- [82] A. QUARTERONI, R. SACCO ET F. SALERI, *Méthodes numériques : algorithmes, analyse et applications.*, Springer, 2007.
- [83] R. RANNACHER, *Adaptive Galerkin finite element methods for partial differential equations*, Journal of Computational and Applied Mathematics, 128, 205-233, 2001.
- [84] G. ROGÉ ET L. MARTIN, *Goal-oriented anisotropic grid adaptation*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Paris, Series I, Mathematics, Volume 346, 1109-1112, 2008.
-

- [85] K.G. SIEBERT, *An a posteriori error estimator for anisotropic refinement*, Numerische Mathematik, Volume 73, Issue 3, pages 373-398, Springer, 1996.
- [86] F. SHAKIB, T.J.R. HUGUES ET Z. JOHAN, *A new finite element formulation for computational fluid dynamics : X. The compressible Euler and Navier-Stokes equations*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 89, 141-219, 1991.
- [87] V. SCHMITT ET F. CHARPIN, *Pressure distribution on the ONERA M6 Wing at transonic Mach numbers*, Experimental Data Base for Computer Program Assessment, Report of the Fluid Dynamics Panel Working Group 04, AGARD AR 138, Mai 1979.
- [88] D.A. VENDITTI ET D.L. DARMOFAL, *Adjoint error estimation and grid adaptation for functional outputs : application to quasi-one-dimensional flow*, Journal of Computational Physics, 164, 204-227, 2000.
- [89] D.A. VENDITTI ET D.L. DARMOFAL, *Grid adaptation for functional outputs : application to two-dimensional inviscid flows*, Journal of Computational Physics, 176, 40-69, 2002.
- [90] D.A. VENDITTI ET D.L. DARMOFAL, *Anisotropic grid adaptation for functional outputs : application to two-dimensional viscous flows*, Journal of Computational Physics, 187, 22-46, 2003.
- [91] R. VERFÜRTH, *A review of a posteriori error estimation and adaptive mesh-refinement techniques*, Wiley-Teubner [John Wiley & Sons], New-York, 1996.
- [92] R. VERFÜRTH, *A posteriori error estimates for nonlinear problems.  $L^r$ -estimates for finite element discretizations of elliptic equations*, Mathematical Modelling and Numerical Analysis, volume 32, n°7, 817-842, 1998.
- [93] O.C. ZIENKIEWICZ ET J.Z. ZHU, *A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineering analysis*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 24, 337-357, 1987.



# Curriculum Vitæ

Né le 26 octobre 1984 à Paris en France, j'obtiens un Baccalauréat scientifique en 2002. De 2002 à 2007, j'entreprends des études de mathématiques à l'université Pierre et Marie Curie (Paris 6). En 2007, j'obtiens un Master Professionnel de mathématiques appliquées à la suite d'un stage long (9 mois) effectué chez Dassault Aviation. A partir de 2008, je suis assistant-doctorant au sein de la chaire d'Analyse et Simulation Numériques du Professeur Jacques Rappaz. J'effectue une thèse dirigée par le Professeur Marco Picasso, financée par Dassault Aviation et en collaboration avec l'INRIA-Paris Rocquencourt. Mes travaux de recherche concernent le développement d'algorithmes d'adaptation de maillage pour des écoulements autour d'avions.