De la détermination des jeux infinis

Kevin Fournier

Sous la direction du Professeur Jacques Duparc
Avec l'assistance de Raphaël Carroy
Expert : Professeur Erich Grädel (RWTH Aachen)

Section de Mathématiques / Projet de Master - Master Thesis

Automne 2009

Le binôme de Newton est aussi beau que la Vénus de Milo.
Le fait est qu'il y a bien peu de gens pour s'en aviser.
Ôôôô-ôôôôôô ôôô... ôôôôôôô ôôôôôôôô
(le vent là dehors)

Fernando Pessoa

Remerciements

Je tiens à remercier tout d'abord le Professeur Jacques Duparc de m'avoir proposé ce sujet et d'avoir régulièrement pris le temps de répondre à mes questions. Je remercie également Raphaël Carroy pour ses précieuses remarques et son aide lors de la rédaction du présent mémoire. Finalement, je tiens à remercier mon condisciple et ami Yann Pequignot ainsi que toutes les personnes m'ayant supporté durant les mois de travail dont ce mémoire est l'aboutissement.

Table des matières

Introduction

La théorie des jeux prend son essor après la publication en 1944 par von Neumann et Morgenstern de l'ouvrage *Theory of Games and Economic Behavior*, dans lequel est définie mathématiquement la notion de jeu à information parfaite. Ce concept correspond intuitivement à des jeux comme les échecs, où chacun des joueurs connaît à tout moment la position et les coups joués par ses adversaires. De tels jeux sont dits à somme nulle si tout ce qui est gagné par l'un est perdu par les autres, et l'un des résultats principaux démontré par von Neumann et Morgenstern assure que tout jeu fini à deux joueurs, à information parfaite et à somme nulle est déterminé ; c'est à dire que l'un des deux joueurs possède une stratégie gagnante qui lui permet d'être sûr de gagner quels que soient les coups joués par son adversaire.

Dans ce travail, nous nous intéressons à des jeux à deux joueurs, à information complète et à somme nulle, mais cette fois infinis. Les premiers à avoir travaillé sur ce genre de jeux sont Gale et Stewart, dont l'article [5] publié en 1953 marque le début du développement d'une théorie riche qui aura son importance à l'intérieur de la théorie descriptive des ensembles. Les jeux de Gale-Stewart consistent en un nombre dénombrable de choix successifs opérés à tour de rôle parmi les éléments d'un ensemble. La partie est remportée par le joueur qui a ouvert le jeu si la suite des coups appartient à un ensemble de gain donné, et par son adversaire si elle appartient au complémentaire de cet ensemble de gain. Le travail de Gale et Stewart met en évidence que la détermination de ces jeux dépend de l'ensemble de gain, et plus particulièrement que les ensembles de gain ouverts ou fermés par rapport à une certaine topologie donnent lieu à des jeux déterminés, ce qui les amène à conjecturer que ce résultat se généralise à tout ensemble borélien. Suivant cette idée, Wolfe prouve dans [17] en 1955 que les intersections dénombrables d'ouverts (G_δ) et les unions dénombrables de fermés (F_σ) sont déterminés ; tandisqu'en 1964, Davis démontre dans [2] que les intersections dénombrables d'ensembles de type F_σ et les unions dénombrables d'ensembles de type G_δ sont déterminés. Finalement, Martin prouve en 1975 dans [13] que la conjecture de Gale et Stewart est vraie.

Après un premier chapitre dévolu à l'introduction des notions d'arbres et d'ensembles boréliens, nous nous attacherons à prouver avec soin ce résultat très important mais difficile de Martin. Nous étudierons ensuite une conséquence de ce résultat, la hiérarchie de Wadge, une extension, la détermination des ensembles quasi-boréliens, et finirons par en voir une limite, la non prouvabilité de la détermination des ensembles projectifs dans le système d'axiome ZF.

Nous supposons que les bases de logique classique du premier ordre et de la théorie des ensembles sont familières au lecteur, et nous nous permettons de le renvoyer aux ouvrages généraux [10] et [9] si besoin.

Chapitre 1

Arbres et ensembles de Borel

Ce chapitre pésente les objets de base que nous allons être amenés à utiliser tout au long de ce mémoire. Ce développement classique, présent dans la plupart des livres traitant de la théorie descriptive des ensembles peut en particulier être retrouvé dans les ouvrages [16] et [8].

1.1 Arbres

1.1.1 Suites finies et infinies

Soit A un ensemble non vide, et n un entier. On note par A^n l'ensemble des *suites finies* $s = (s(0), s(1), \ldots, s(n-1)) = (s_0, s_1, \ldots, s_{n-1})$ de longueur n sur A. En particulier, $A^0 = \{\emptyset\}$, où $\emptyset$ désigne la suite vide. Une suite finie s est de longueur n si s appartient à A^n ; on note alors $long(s) = n$. Si s est de longueur n, alors pour tout entier m inférieur à n on peut définir la *restriction* de s de longueur m, désignée par $s|m$, comme étant la sous-suite $(s_0, \ldots, s_{m-1})$ de s. Si s et t sont deux suites finies sur A, on dit que s est un *segment initial* de t, ou que t est une *extension* de s, noté $s \subseteq t$, s'il existe un entier $n \leq long(t)$ tel que $t|n = s$. Deux suites finies sont dites compatibles si l'une est un segment initial de l'autre, et incompatibles sinon. On écrira $s \perp t$ si les suites s et t sont incompatibles. Soit S un ensembles de suites finies sur A, on dit que S est une *antichaîne* si les éléments de S sont tous deux à deux incompatibles. On note :

$$A^{<\omega} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A^n$$

l'ensemble de toutes les suites finies sur A. Soient $s \in A^n$ et $u \in A^m$, la concaténation de s et u est la suite

$$s\hat{\ }u = (s_0, \ldots, s_{n-1}, u_0, \ldots, u_{m-1})$$

de A^{n+m}. On notera $s\hat{\ }a$ au lieu de $s\hat{\ }(a)$ si $(a) \in A^1$. Soient $S_1, \ldots, S_k \subseteq A^{<\omega}$ des ensembles de suites finies, on définit alors l'ensemble des suites finies suivant :

$$S_1\hat{\ }\ldots\hat{\ }S_k = \{s_1 \ldots s_k \in A^{<\omega} \mid s_i \in S_i \text{ pour tout } i = 1 \ldots k\}.$$

De manière similaire à la concaténation, on écrira $s\hat{\ }U$ pour $\{s\}\hat{\ }U$, et $U\hat{\ }s$ pour $U\hat{\ }\{s\}$ si $s \in A^{<\omega}$.

L'ensemble des *suites infinies* d'éléments de A est noté A^ω. Un élément x de A^ω est noté $x = (x_0, x_1, \ldots)$. Si x appartient à A^ω et n est un entier, alors $x|n = (x_0, \ldots, x_{n-1})$ appartient à A^n. On dit qu'une suite finie s est un *segment initial* d'une suite infinie x si $x|long(s) = s$, on note alors $s \subseteq x$. On ne peut étendre l'opération de concaténation aux suites infinies, on peut néanmoins définir la concaténation entre une suite finie et une suite infinie de la manière suivante : soient $s \in A^n$ et $x \in A^\omega$, la concaténation de s et x est la suite infinie :

$$s\hat{\ }x = (s_0, \ldots, s_{n-1}, x_0, x_1, \ldots).$$

Dans le même esprit, pour $S \subseteq A^{<\omega}$ et $U \subseteq A^\omega$, on définit l'ensemble suivant :

$$S\hat{\ }U = \{s\hat{\ }u \mid s \in S \text{ et } u \in U\} \subseteq A^\omega.$$

On écrira $s\hat{\ }U$ pour $\{s\}\hat{\ }U$, et $S\hat{\ }u$ pour $S\hat{\ }\{u\}$.

1.1.2 Suites infinies et topologie

On munit désormais A de la topologie discrète, la topologie dans laquelle tout sous-ensemble de A est ouvert. L'ensemble A^ω, vu comme espace topologique produit, est métrisable avec la métrique compatible :

$$\begin{aligned} \delta_\omega : A^\omega \times A^\omega &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ (x, y) &\longmapsto \delta_\omega(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{si } x = y, \\ 2^{-1-\min\{n \in \mathbb{N} \mid x_n \neq y_n\}}, & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

L'ensemble A muni de la métrique discrète est complet. Par conséquent, A^ω est complètement métrisable en tant que produit d'espaces métriques complets.

Une base pour la topologie de A^ω est donnée par la collection :

$$N_s = \{x \in A^\omega \mid s \subseteq x\},$$

où $s \in A^{<\omega}$. On remarque immédiatement que $s \subseteq t$ si et seulement si $N_t \subseteq N_s$ et que $s \perp t$ si et seulement si $N_s \cap N_t = \emptyset$. Par ailleurs, tout ouvert U de A^ω peut être décrit comme une union d'ouverts de base ; il existe donc $S \subseteq A^{<\omega}$ tel que

$$U = \bigcup_{s \in S} s\hat{\ } A^\omega = S\hat{\ } A^\omega.$$

Soit $\tilde{S}$ l'antichaîne formée des éléments de S ne possédant pas de segments initiaux autre qu'eux-même dans S, on obtient :

$$U = \bigcup_{s \in S} s\hat{\ } A^\omega = \bigsqcup_{s \in \tilde{S}} s\hat{\ } A^\omega = \tilde{S}\hat{\ } A^\omega.$$

Ainsi tout ouvert U de A^ω peut s'écrire comme une union disjointe d'ouverts de base. Finalement, on constate également que les ouverts de bases sont aussi fermés. En effet, soit $s \in A^{<\omega}$, alors

$$A^\omega \backslash N_s = \bigcup_{p \perp s} N_p$$

qui est ouvert.

Proposition 1.1. *Si A est un ensemble non vide dénombrable, alors A^ω muni de la topologie produit est séparable.*

Démonstration. Si A est dénombrable, alors A^n est dénombrable pour chaque entier n. Par conséquent, en utilisant l'Axiome du Choix Dénombrable (AC_ω), $A^{<\omega} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A^n$ est également dénombrable comme union dénombrable d'ensembles dénombrables. Soit a dans A, pour toute suite finie $s \in A^{<\omega}$, on pose $s_a = s\hat{\ }(a, a, \ldots) \in A^\omega$. Alors l'ensemble :

$$D = \{s_a \mid s \in A^{<\omega}\} \subseteq A^\omega$$

est dense dans A^ω. En effet, soit U un ouvert non vide de A^ω, alors il existe $S \subseteq A^{<\omega}$, non vide, tel que $U = S\hat{\ } A^\omega$, Donc pour $s \in S$, $s_a \in S\hat{\ } A^\omega$. Ainsi, $D \cap U \neq \emptyset$; D est dense dans A^ω. De plus, puisque D a la même cardinalité que $A^{<\omega}$, D est un ensemble dense dénombrable de A^ω, et le résultat suit. $\square$

1.1.3 Arbres

Définition 1.2. Un *arbre* sur un ensemble A est un sous-ensemble T de $A^{<\omega}$ clos par sous-suites, c'est à dire tel que pour tous t et s dans $A^{<\omega}$, si t appartient à T et que s est un segment initial de t, alors s appartient aussi à T. Les éléments d'un arbre sont appelés ses *noeuds*. Une *branche infinie* d'un arbre T sur A est une suite infinie x de A^ω telle que pour tout naturel n, $x|n$ appartient à T. L'ensemble des branches infinies d'un arbre T est le *corps*, ou *tronc* de T, noté $[T]$; les éléments de T n'admettant pas d'extension propre dans T sont les *feuilles* de T. Un arbre *élagué*[1] T est un arbre sans feuille, c'est à dire tel que que pour tout s dans T, il existe t dans T de sorte que $s \subseteq t$ et $t \neq s$. Pour tout arbre T et pour tout entier n, on définit $T|n = \{s \in T \mid long(s) \leq n\}$, l'arbre formé par tous les éléments de T de longueur inférieure ou égale à n.

L'Axiome des Choix Dépendants assure que si un arbre T est élagué, $[T]$ est non vide. On considère le corps des arbres sur A comme des sous espaces topologiques de A^ω munis de la topologie induite : la collection des ensembles $V_t = N_t \cap [T]$ pour tout t dans un arbre T forme une base de $[T]$.

Proposition 1.3. *Soit A un ensemble non vide. L'application :*

$$\begin{aligned} \varphi : \{\textit{arbres élagués sur } A\} &\longrightarrow \{\textit{fermés de } A^\omega\} \\ T &\longmapsto [T] \end{aligned}$$

est une bijection et son inverse est donné par :

$$\begin{aligned} \varphi^{-1} : \{\textit{fermés de } A^\omega\} &\longrightarrow \{\textit{arbres élagués sur } A\} \\ F &\longmapsto T_F = \{x|n \mid x \in F \textit{et } n \in \omega\}\,. \end{aligned}$$

Démonstration. Montrons tout d'abord que l'application φ est bien définie. Pour ce faire, il nous suffit de remarquer que si T est un arbre sur A, alors $[T]$ est fermé dans A^ω. En effet, on a :

$$A^\omega \setminus [T] = (A^{<\omega} \setminus (T \cap A^{<\omega}))\,\hat{}\,A^\omega$$

qui est ouvert. Par ailleurs, on vérifie directement que T_F est bien un arbre élagué sur A et que les compositions $\varphi \circ \varphi^{-1}$ et $\varphi^{-1} \circ \varphi$ donnent les identités. □

[1]En anglais : *pruned*.

La Proposition 1.3 établit une correspondance exacte entre fermés de A^ω et arbres élagués sur A, et nous permet donc de voir les fermés de A^ω comme des arbres élagués sur A et vice-versa.

Définition 1.4. Soient S un arbre sur un ensemble A et T un arbre sur un ensemble B. Une application $\varphi : S \longrightarrow T$ est dite *monotone* si elle préserve l'inclusion, c'est à dire si pour tous s et t dans S, on a $s \subseteq t$ implique $\varphi(s) \subseteq \varphi(t)$. Si φ est monotone, on définit l'ensemble $D(\varphi)$ inclus dans $[S]$ de la manière suivante :

$$D(\varphi) = \left\{ x \in [S] \mid \lim_{n\to\infty} long(\varphi(x|n)) = \infty \right\}.$$

Ceci nous permet de définir l'application induite φ^* sur les corps des arbres :

$$\begin{array}{rcl} \varphi^* : D(\varphi) & \longrightarrow & [T] \\ x & \longmapsto & \displaystyle\bigcup_{n\in\omega} \varphi(x|n). \end{array}$$

L'application φ est dite *propre* si $D(\varphi) = [S]$.

Proposition 1.5. *Soient S un arbre sur un ensemble A, T un arbre sur un ensemble B et $\varphi : S \longrightarrow T$ une application monotone. Alors l'ensemble $D(\varphi)$ est une intersection dénombrable d'ouverts de $[S]$ et $\varphi^* : D(\varphi) \longrightarrow [T]$ est une application continue.*

Démonstration. On remarque tout d'abord que :

$$x \in D(\varphi) \Longleftrightarrow \forall n \exists m \left(long\left(\varphi(x|m)\right) \geq n \right).$$

Ceci implique directement que $D(\varphi) = \bigcap_{n\in\omega} U_n$, avec pour tout entier n, $U_n = \{x \in [S] \mid \exists m \varphi(x|m) \geq n\}$ ouvert dans $[S]$; ce qui prouve la première assertion.

Pour prouver que φ^* est continue, on rappelle que les ensembles

$$V_t = [T] \cap N_t$$

forment une base de $[T]$. Il nous suffit donc d'étudier les images inverses de ces ensembles :

$$\left(\varphi^*\right)^{-1}(V_t) = \bigcup \left\{ N_s \cap D(\varphi) \mid s \in S, t \subseteq \varphi(s) \right\},$$

lesquelles sont des ouverts de $D(\varphi)$, ce qui achève la preuve.

□

Ainsi, la Proposition 1.5 nous assure que les applications monotones sur les arbres induisent naturellement des applications continues sur les troncs de ceux-ci.

1.2 Ensembles de Borel

1.2.1 Algèbres et Sigma-Algèbres

Une *algèbre* sur un ensemble X est une collection $\mathcal{A}$ de sous-ensembles de X telle que :

(i) $X \in \mathcal{A}$;

(ii) si $A \in \mathcal{A}$, alors $X \backslash A \in \mathcal{A}$;

(iii) toute union finie d'éléments de $\mathcal{A}$ appartient à $\mathcal{A}$.

Pour toute algèbre $\mathcal{A}$, les deux premières conditions assurent que $\emptyset$ appartient à $\mathcal{A}$, tandis que les deux dernières nous assurent que toute intersection finie d'éléments de $\mathcal{A}$ appartient à $\mathcal{A}$.

Une algèbre $\mathcal{A}$ close par union dénombrable est appelée une *σ-algèbre*. Pour les mêmes raisons que précédement, toute σ-algèbre est aussi close par intersection dénombrable. On constate qu'une intersection de σ-algèbres sur X est une σ-algèbre.

Définition 1.6. Soit $\mathcal{G}$ une famille de sous-ensembles de X, et $\mathcal{S}$ l'ensemble des σ-algèbres de X contenant $\mathcal{G}$. L'ensemble $\mathcal{S}$ est non vide car la σ-algèbre $\mathscr{P}(X)$ contient $\mathcal{G}$. La *σ-algèbre engendrée par* $\mathcal{G}$ est l'intersection des éléments de $\mathcal{S}$. La σ-algèbre engendrée par $\mathcal{G}$ est le plus petit ensemble de parties de X contenant $\mathcal{G}$ qui soit clos par complémentation et par union ou intersection dénombrable.

Soit un espace topologique (X, T). La classe des *ensembles boréliens* (ou *ensembles de Borel*) de X, notée $\mathcal{B}_X$, est la σ-algèbre engendrée par T, les ouverts de X.

Ainsi, $\mathcal{B}_X$ est la plus petite collection de sous-ensembles de X contenant les ouverts et close par complémentation et intersection ou union dénombrable. Il est possible de hiérarchiser cette collection d'ensembles, c'est l'objet de la façon suivante.

1.2.2 La Hiérarchie des Boréliens

Soit $\mathcal{F}$ une famille de sous-ensembles d'un ensemble X. On pose :

$$\exists^\omega \mathcal{F} = \left\{ \bigcup_{n\in\omega} A_n \mid A_n \in \mathcal{F} \right\}$$

l'ensemble des unions dénombrables d'éléments de $\mathcal{F}$. De même, on pose :

$$\forall^\omega \mathcal{F} = \left\{ \bigcap_{n\in\omega} A_n \mid A_n \in \mathcal{F} \right\} \qquad \text{et} \qquad \neg\mathcal{F} = \{A \subseteq X \mid X \backslash A \in \mathcal{F}\}$$

respectivement l'ensemble des intersections dénombrables d'éléments de $\mathcal{F}$, et l'ensemble des compléments dans X des éléments de $\mathcal{F}$.

Soit maintenant un espace topologique métrisable (X, T). On définit par induction transfinie les classes de sous-ensembles de X suivantes :

$$\Sigma^0_1(X) = T \qquad \text{et} \qquad \Pi^0_1(X) = \neg\Sigma^0_1(X);$$

si $\alpha = \beta + 1$:

$$\Sigma^0_\alpha(X) = \forall^\omega \Pi^0_\beta(X) \qquad \text{et} \qquad \Pi^0_\alpha(X) = \neg\Sigma^0_\alpha(X);$$

si α est limite :

$$\Sigma^0_\alpha(X) = \forall^\omega \left(\bigcup_{\beta<\alpha} \Pi^0_\beta(X) \right) \qquad \text{et} \qquad \Pi^0_\alpha(X) = \neg\Sigma^0_\alpha(X).$$

On définit aussi pour tout ordinal $\alpha > 1$:

$$\Delta^0_\alpha(X) = \Sigma^0_\alpha \cap \Pi^0_\alpha.$$

S'il n'y a pas d'ambiguïté, on notera Σ^0_α, Π^0_α et Δ^0_α pour $\Sigma^0_\alpha(X)$, $\Pi^0_\alpha(X)$ et $\Delta^0_\alpha(X)$. Les familles Σ^0_α, Π^0_α et Δ^0_α sont appelées les *classes additives*, *multiplicatives* et *ambiguës* d'ordre α. Ces classes vérifient les propriétés élémentaires suivantes.

(i) Les classes additives sont closes par union dénombrable, les classes multiplicatives par intersection dénombrable.

(ii) Pour tout ordinal $\alpha \geq 1$, Δ^0_α est une algèbre.

(iii) Soit $f : X \longrightarrow X'$ une application continue entre deux espaces topologiques (X,T) et (X',T'). Si $E \in \Sigma^0_\alpha(X')$ (respectivement $\Pi^0_\alpha(X')$, $\Delta^0_\alpha(X')$), alors $f^{-1}(E) \in \Sigma^0_\alpha(X)$ (respectivement $\Pi^0_\alpha(X)$, $\Delta^0_\alpha(X)$). On dit que les classes de Borel sont *closes par substitution continue.*

Théorème 1.7. *Soit X un espace topologique métrisable. Soient α et β deux ordinaux tels que $\alpha < \beta$, alors on a :*

$$\Sigma^0_\alpha(X) \subseteq \Delta^0_\beta(X) \qquad et \qquad \Pi^0_\alpha(X) \subseteq \Delta^0_\beta(X).$$

Démonstration. Prouvons par récurrence transfinie que pour tout ordinal β tel que $1 < \beta$, si $1 \leq \alpha < \beta$ alors $\Sigma^0_\alpha \subseteq \Sigma^0_\beta$ et $\Pi^0_\alpha \subseteq \Pi^0_\beta$.

<u>Si $\beta = 2$:</u>

Puisque X est métrisable, il existe une métrique d compatible avec la topologie sur X. Soit $F \in \Pi^0_1$ un fermé, et posons pour tout entier naturel non nul n :

$$U_n = \left\{ y \in X \mid \exists x \in F, d(x,y) < \frac{1}{n} \right\}.$$

Clairement, $U_n = \bigcup_{x\in F} B(x, \frac{1}{n})$, où $B(x, \frac{1}{n})$ dénote la boule ouverte centrée en x et de rayon $\frac{1}{n}$; les U_n sont donc ouverts comme union d'ouverts. Mais pour tout entier non nul n, il est aussi évident que U_n contient F, et donc que $F \subseteq \bigcap_{n\in\omega^*} U_n$. Soit maintenant $x \in \bigcap_{n\in\omega^*} U_n$, alors pour chaque entier naturel non nul n il existe $x_n \in F$ tel que $d(x, x_n) < \frac{1}{n}$. Ainsi définie, la suite $(x_n)_{n\in\omega^*} \subseteq F$ converge vers x. Mais F est fermé, donc $x \in F$; ce qui prouve l'inclusion $\bigcap_{n\in\omega^*} U_n \subseteq F$. On a donc finalement $F = \bigcap_{n\in\omega^*} U_n$, F peut être vu comme une intersection dénombrable d'ouverts, d'où $F \in \Pi^0_2$. Ainsi $\Pi^0_1 \subseteq \Pi^0_2$. L'inclusion $\Sigma^0_1 \subseteq \Sigma^0_2$ s'obtient directement par passage au complémentaire, ce qui achève la preuve de la propriété au rang 2.

<u>Si $\beta = \alpha + 1$:</u>

Supposons que pour tout ordinal inférieur à β, la propriété est vraie. Pour prouver que la propriété est vraie pour β, il suffit de prouver que $\Sigma^0_\alpha \subseteq \Sigma^0_{\alpha+1}$ et $\Pi^0_\alpha \subseteq \Pi^0_{\alpha+1}$. Prouvons tout d'abord l'inclusion des classes additives. Soit $E \in \Sigma^0_\alpha$. Par définition de la classe Σ^0_α, $E = \bigcup_{n\in\omega} E_n$, avec pour tout entier naturel n, $E_n \in \Pi^0_{\gamma_n}$ et $\gamma_n < \alpha$. Par hypothèse de récurrence, chaque E_n appartient à Π^0_α ; E appartient donc $\Sigma^0_{\alpha+1}$ comme union dénombrable d'éléments de Π^0_α, ce qui prouve l'inclusion concernant les classes additives.

L'inclusion des classes multiplicatives peut se prouver de manière tout à fait similaire, ou plus simplement en remarquant que si $E \in \Pi^0_\alpha$, alors $X \backslash E \in \Sigma^0_\alpha$, et donc par l'inclusion des classes additives, $X \backslash E \in \Sigma^0_{\alpha+1}$, d'où finalement $E \in \Pi^0_{\alpha+1}$, ce qui prouve l'inclusion concernant les classes multiplicatives et démontre que la propriété pour les ordinaux successeurs est vraie.

<u>Si β est un ordinal limite :</u>

Soit $\alpha < \beta$, alors par définition $\Sigma^0_\alpha \subseteq \Pi^0_{\alpha+1}$ et $\Sigma^0_\beta = \forall^\omega \left(\bigcup_{\gamma<\alpha} \Pi^0_\gamma \right)$. Puisque β est limite et $\alpha < \beta$, $\alpha + 1 < \beta$, d'où $\Pi^0_{\alpha+1} \subseteq \forall^\omega \left(\bigcup_{\gamma<\alpha} \Pi^0_\gamma \right)$. Ainsi $\Sigma^0_\alpha \subseteq \Sigma^0_\beta$, et l'inclusion pour les classes additives est démontrée. L'inclusion pour les classes multiplicatives pouvant être prouvée de la même façon que pour les ordinaux successeurs, la propriété est vraie pour les ordinaux limites.

Nous avons ainsi prouvé par récurrence transfinie que pour tout ordinal $1 < \beta$, si $1 \leq \alpha < \beta$ alors $\Sigma^0_\alpha \subseteq \Sigma^0_\beta$ et $\Pi^0_\alpha \subseteq \Pi^0_\beta$. Ces inclusions impliquent directement que, $\Sigma^0_\alpha \subseteq \Pi^0_\beta$ et $\Pi^0_\alpha \subseteq \Sigma^0_\beta$. Or $\Delta^0_\beta = \Sigma^0_\beta \cap \Pi^0_\beta$, on a donc $\Sigma^0_\alpha(X) \subseteq \Delta^0_\beta(X)$ et $\Pi^0_\alpha \subseteq \Pi^0_\beta$, ce qui achève la preuve du Théorème.

$\square$

Le résultat du Théorème 1.7 peut être résumé dans le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & \Sigma^0_1 & & & & \Sigma^0_2 & & \\
 & \subseteq & & \subseteq & & \subseteq & & & \\
\Delta^0_1 & & & & \Delta^0_2 & & & & \cdots \\
 & \subseteq & & \subseteq & & \subseteq & & & \\
 & & \Pi^0_1 & & & & \Pi^0_2 & &
\end{array}$$

Nous avons prouvé que les classes additives, multiplicatives et ambigües forment une hiérarchie par rapport à l'inclusion. Il nous reste à vérifier que ces classes nous permettent bien d'atteindre tous les Boréliens.

Théorème 1.8. *Soient (X, T) un espace topologique métrisable et ω_1 le premier ordinal non dénombrable. Alors,*

$$\mathcal{B}_X = \bigcup_{\alpha<\omega_1} \Sigma^0_\alpha(X) = \bigcup_{\alpha<\omega_1} \Pi^0_\alpha(X) = \bigcup_{\alpha<\omega_1} \Delta^0_\alpha(X).$$

Démonstration. On montre que $\mathcal{B}_X = \bigcup_{\alpha<\omega_1} \Sigma^0_\alpha(X)$, les autres égalités s'établissent similairement[2].

Soit $B = \bigcup_{\alpha<\omega_1} \Sigma^0_\alpha(X)$. Par définition, $\Sigma^0_1(X) = T \subseteq \mathcal{B}_X$, donc, puisque $\mathcal{B}_X$ est clos par complémentation et union dénombrable, $\Sigma^0_\alpha(X) \subseteq \mathcal{B}_X$ pour tout $\alpha < \omega_1$. Ainsi $\bigcup_{\alpha<\omega_1} \Sigma^0_\alpha(X) \subseteq \mathcal{B}_X$.

Pour prouver l'inclusion inverse, on observe que B vérifie les propriétés suivantes :

(a) B contient les ouverts,

(b) B est clos par complémentation. En effet, si $A \in \Sigma^0_\alpha(X)$ avec $\alpha < \omega_1$, $X\backslash A \in \Pi^0_\alpha \subseteq \Sigma^0_{\alpha+1}(X)$, avec $\alpha + 1 < \omega_1$, puisque ω_1 est limite.

(c) B est clos par union dénombrable. En effet, soit $(A_n)_{n\in\omega} \subseteq B$. Pour chaque entier naturel n, il existe $\alpha_n < \omega_1$ tel que $A_n \in \Sigma^0_{\alpha_n}(X)$. Puisque ω_1 est régulier et non dénombrable, $\alpha = \sup_{n\in\omega} \alpha_n$ est strictement inférieur à ω_1, d'où :

$$\bigcup_{n\in\omega} A_n \subseteq \forall^\omega \left(\bigcup_{\beta<\alpha} \Sigma^0_\beta(X) \right) = \Pi^0_\alpha(X) \subseteq \Sigma^0_{\alpha+1}(X).$$

Or $\mathcal{B}(X)$ est par définition la plus petite collection de sous-ensembles de X contenant les ouverts, et close par union dénombrable et par complémentation. Donc $\mathcal{B}(X) \subseteq B$, ce qui achève la preuve.

□

Les classes additives, multiplicatives et ambigües hiérarchisent ainsi les ensembles de Borel en au plus ω_1 niveaux.

[2] Ou en utilisant le Théorème 1.7.

Chapitre 2

Détermination des ensembles de Borel

Dans ce chapitre, nous démontrons le résultat central de ce travail, la détermination des boréliens. Pour ce faire, nous définissons tout d'abord les jeux de Gales-Stewart, puis les notions de stratégies et de détermination. Ces définitions furent initialement posées par Gale et Stewart dans leur article séminal [5] datant de 1953.

2.1 Jeux infinis

2.1.1 Jeux de Gale-Stewart

Soit A un ensemble non vide et $X \subseteq A^\omega$. On associe à X un jeu infini à deux joueurs : le joueur I joue un élément a_0 de A, puis le joueur II joue un élément a_1 de A, et ainsi de suite, les joueurs jouant chacun leur tour un élément de A. Un déroulement du jeu, une *partie*, donne lieu à la création d'une suite infinie $a = (a_0, a_1, \ldots) \in A^\omega$. Le joueur I remporte la partie si et seulement si $a \in X$; tandis que II gagne si et seulement si I ne gagne pas, c'est à dire si et seulement si $a \notin X$. Le jeu ainsi défini est un jeu infini à deux joueurs, à information parfaite et à somme nulle appelé *jeu de Gale-Stewart* et désigné par $G(A, X)$, ou $G(X)$ s'il n'y a pas d'ambiguïté. L'ensemble X est appelé *ensemble de gain*. On représente généralement une partie par le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{I}: & a_0 \arrow[dr] & & a_2 \arrow[dr] & \cdots & a_{2n} \arrow[dr] & & a_{2n+2} & \cdots \\
\mathrm{II}: & & a_1 \arrow[ur] & & a_3 & & a_{2n-1} \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

2.1.2 Stratégies et détermination

On considère un jeu $G(A, X)$. Intuitivement, une stratégie pour un joueur est une marche à suivre lui indiquant quoi jouer, quelles que soient les décisions de son adversaire. On formalise cette notion de la manière suivante : une *stratégie* pour le joueur I est une application $\varphi : (A^2)^{<\omega} \longrightarrow A$, laquelle associe à toute suite de longueur paire un unique élément de A. Le début d'une partie dans laquelle I suit la stratégie φ est de la forme :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{I}: & \varphi(\emptyset) \arrow[dr] & & \varphi(\varphi(\emptyset), a_1) \arrow[dr] & \cdots \\
\mathrm{II}: & & a_1 \arrow[ur] & & a_3
\end{tikzcd}$$

Une stratégie pour le joueur II se définit mutatis mutandis comme une application associant à toute suite de longueur impaire un unique élément de A.

Les stratégies peuvent avantageusement être vues comme des arbres sur A. Une stratégie pour I est un arbre élagué et non vide $\sigma \subseteq A^{<\omega}$ tel que :

(i) σ ne contient qu'une seule suite de longueur un ;

(ii) si $s \in (A^2)^{<\omega}$ appartient à σ, alors pour tout $a \in A$, $s\hat{\ }a$ appartient à σ ;

(iii) si $t \in (A^2)^{<\omega}\hat{\ }A$ est une suite de longueur impaire appartenant à σ, alors il existe un unique $a \in A$ tel que $t\hat{\ }a$ appartient à σ.

Si I suit la stratégie σ, alors il commence avec l'unique $a_0 \in A$ tel que $(a_0) \in \sigma$; puis, si II joue a_1, la suite (a_0, a_1) est dans σ et I joue l'unique a_2 tel que (a_0, a_1, a_2) est dans σ, et ainsi de suite.

De manière similaire, une stratégie pour II est un arbre élagué et non vide $\tau \subseteq A^{<\omega}$ tel que :

(i) τ contient toutes les suites de longueur un ;

(ii) si $s \in (A^2)^{<\omega}$ appartient à τ, alors il existe un unique $a \in A$ tel que $s\hat{\ }a$ appartient à τ ;

(iii) si $t \in (A^2)^{<\omega} \hat{} A$ appartient à τ, alors pour tout $a \in A$, $t\hat{}a$ appartient à τ.

Si II suit la stratégie τ et I commence par jouer a_0, $a_0 \in \tau$ et II joue l'unique a_1 tel que (a_0, a_1) est dans τ ; puis si I joue a_2, la suite (a_0, a_1, a_2) est dans τ, et II joue alors l'unique a_3 tel que (a_0, a_1, a_2, a_3) est dans τ, et ainsi de suite.

Un joueur a suivi la stratégie σ dans la partie $a \in A^\omega$ si $a \in [\sigma]$. Une stratégie pour l'un des deux joueurs est dite *gagnante* si en la suivant, ce joueur gagne la partie. Si l'on voit les stratégies comme des arbres, alors la stratégie σ pour I est gagnante si et seulement si $[\sigma] \subseteq X$; et la stratégie τ pour II est gagnante si et seulement si $[\tau] \cap X = \emptyset$. Puisque le but des joueurs de gagner, on simplifiera souvent les formulations en disant qu'un joueur gagne $G(A, X)$ s'il possède une stratégie gagnante dans le jeu $G(A, X)$.

Si l'un des deux joueurs possède une stratégie gagnante dans $G(A, X)$, on dit alors que celui-ci est *déterminé*. Par extension, on dira qu'un sous-ensemble X de A^ω est *déterminé* si le jeu de Gale-Stewart $G(A, X)$ dont il est l'ensemble de gain est déterminé.

Finalement, on note que l'existence d'une stratégie gagnante pour I dans $G(A, X)$ est équivalente à la formule infinie Φ_I :

$$\Phi_I = \exists x_0 \forall x_1 \exists x_2 \forall x_3 \ldots (x_0, x_1, \ldots) \in X.$$

En effet, posséder une stratégie gagnante pour I, c'est exactement pouvoir jouer un x_0 dans A tel que pour tout x_1 joué par II, I puisse jouer un x_2 tel que pour tout x_3 joué par II, I puisse jouer un x_4, et ainsi de suite de sorte que la suite infinie ainsi contruite soit dans X. De même, l'existence d'une stratégie gagnante pour II dans $G(A, X)$ est équivalente à la formule infinie Φ_{II} :

$$\Phi_{II} = \forall x_0 \exists x_1 \forall x_2 \exists x_3 \ldots \neg \left((x_0, x_1, \ldots) \in X \right).$$

Ainsi, prouver la détermination du jeu $G(A, X)$ est équivalent à prouver l'un des deux énoncés suivant :

(i) $\Phi_I \vee \Phi_{II}$;

(ii) $\neg \Phi_I \rightarrow \Phi_{II}$ ou $\neg \Phi_{II} \rightarrow \Phi_I$.

En admettant l'Axiome des Choix Dépendants (DC), les joueurs I et II ne peuvent avoir tous les deux une stratégie gagnante pour un jeu de Gale-Stewart donné.

Proposition 2.1. *Soit $G(A, X)$ un jeu de Gale-Stewart, alors (DC) implique que les joueurs I et II ne peuvent avoir tous les deux une stratégie gagnante* *pour $G(A, X)$.*

Démonstration. Supposons par l'absurde que σ et τ sont des stratégies gagnantes pour I et II respectivement. Par définition d'une stratégie en tant qu'arbre, $\sigma \cap \tau$ est un arbre élagué non vide. Par (DC), $[\sigma \cap \tau]$ est donc non vide. D'autre part, on a $[\sigma \cap \tau] = [\sigma] \cap [\tau]$. Mais puisque σ et τ sont des stratégies gagnantes pour I et II, on a $[\sigma] \subseteq X$ et $[\tau] \cap X = \emptyset$, d'où $[\sigma] \cap [\tau] = \emptyset$, ce qui mène à une contradiction et achève la preuve.

□

Ainsi, (DC) nous permet de montrer que $\Phi_I \rightarrow \neg\Phi_{II}$ et $\Phi_{II} \rightarrow \neg\Phi_I$. Si le jeu est déterminé, les énoncés $\Phi_I \vee \neg\Phi_I$ et $\Phi_{II} \vee \neg\Phi_{II}$ sont donc satisfaits, ce qui correspond au tiers exclu dans cette extension du premier ordre. Par ailleurs, la détermination du jeu $G(A, X)$ peut s'exprimer par $\neg\Phi_I \leftrightarrow \Phi_{II}$, c'est à dire :

$$\neg\left(\exists x_0 \forall x_1 \exists x_2 \ldots (x_0, x_1, \ldots) \in X\right) \leftrightarrow \forall x_0 \exists x_1 \forall x_2 \ldots \neg\left((x_0, x_1, \ldots) \in X\right);$$

de sorte que la détermination peut être vue comme l'analogue d'un résultat de logique classique du premier ordre.

2.1.3 Jeux avec règles

Il est parfois utile de considérer des jeux construits sur le même modèle que les jeux de Gale-Stewart, mais dans lesquels les choix effectués par les joueurs sont restreints par certaines règles. Pour ce faire, on se donne un ensemble non vide A et un arbre élagué non vide $T \subseteq A^{<\omega}$ qui détermine les positions autorisées. Étant donné $X \subseteq [T]$, I et II jouent tour à tour $a_0, a_1, \ldots$ de sorte que pour tout entier naturel n, $(a_0, a_1, \ldots, a_n) \in T$. Le déroulement d'une partie donne cette fois lieu à une suite infinie $a = (a_n)_{n \in \omega} \in [T]$. Le fait que l'arbre T soit élagué nous assure que les joueurs peuvent toujours jouer quelque chose à chaque tour de la partie. Le joueur I gagne si et seulement si $a \in X$, et l'on désigne ce jeu par $G(T, X)$. On remarque directement que $G(A^{<\omega}, X) = G(A, X)$, le jeu de Gale-Stewart sur A dont l'ensemble de gain est X. Les notions de stratégie, de stratégie gagnante, et de détermination sont définies comme précédemment. Une stratégie pour I dans $G(T, X)$ est ainsi un sous-arbre élagué non vide $\sigma \subseteq T$ tel que :

(i) σ ne contient qu'une seule suite de longueur unitaire ;

(ii) si $s \in (A^2)^{<\omega}$ appartient à σ, alors pour tout $a \in A$ tel que $s\hat{\ }a \in T$, $s\hat{\ }a$ appartient à σ ;
(iii) si $t \in (A^2)^{<\omega}\hat{\ }A$ appartient à σ, alors il existe un unique $a \in A$ tel que $t\hat{\ }a$ appartient à σ.

On définit de manière tout à fait similaire les stratégies pour II. La stratégie σ pour I est gagnante si et seulement si $[\sigma] \subseteq X$; et la stratégie τ pour II est gagnante si et seulement si $[\tau] \cap X = \emptyset$. On dit que le jeu $G(T, X)$ est déterminé si l'un des deux joueurs possède une stratégie gagnante.

Deux jeux G et G' sont dits équivalents si : I (respectivement II) a une stratégie gagnante dans G si et seulement si I (respectivement II) a une stratégie gagnante dans G'. Tout jeu équivalent à un jeu déterminé est donc déterminé. On remarque par ailleurs que $G(T, X)$ est équivalent au jeu de Gale-Stewart $G(A, X')$, où :

$$X' = \{x \in A^\omega \mid (\exists n \in \omega\, ((x|(2n+1) \in T) \wedge (x|(2n+2) \notin T))) \vee \\ (x \in X \cap [T])\}.$$

En effet, ainsi défini, I gagne dans $G(A, X')$ si et seulement si, ou bien II joue hors de l'arbre T en premier, ou la suite résultante appartient à $X \cap [T]$. Les jeux avec règles que nous venons de définir ne sont donc pas réellement une extension des jeux de Gale-Stewart.

Soit $G(T, X)$ un jeu sur un ensemble non vide A et $p \in T$. On définit le *sous-jeu* de $G(T, X)$ en p, comme étant le jeu $G(T_p, X_p)$ où :

$$T_p = \{s \in A^{<\omega} \mid p\hat{\ }s \in T\} \qquad \text{et} \qquad X_p = \{x \in A^\omega \mid p\hat{\ }x \in X\}.$$

On dit que p est une *position non perdante* pour l'un des deux joueurs si l'autre joueur n'a pas de stratégie gagnante dans $G(T_p, X_p)$.

2.2 Détermination des ensembles de Borel

Soit A un ensemble non vide. On considère A^ω comme un espace topologique, ainsi que nous l'avons défini au chapitre précédent. Soit T un arbre sur A, on munit le fermé $[T]$ de A^ω de la topologie induite.

2.2.1 Détermination des ensembles fermés

L'Axiome du Choix nous permet de construire un ensemble qui n'est pas déterminé. Néanmoins, on est en droit de penser que les ensembles simples sont déterminés. Ce premier résultat obtenu par Gale et Stewart en 1953 confirme cette intuition.

Théorème 2.2. (Gale-Stewart, 1953).
Soit T un arbre élagué non vide sur A. Soit $X \subseteq [T]$ ouvert ou fermé dans $[T]$, alors $G(T, X)$ est déterminé.

Démonstration. Supposons tout d'abord que X est fermé et que II ne possède pas de stratégie gagnante dans $G(T, X)$, et prouvons que I possède une stratégie gagnante.

Puisque II ne possède pas de stratégie gagnante, $\emptyset$ est par définition une position non perdante pour I. Cela signifie qu'il existe a_0 avec $(a_0) \in T$ tel que pour tout a_1 avec $(a_0, a_1) \in T$, la position (a_0, a_1) n'est pas perdante pour I. En effet, si ce n'était pas le cas, pour tout a_0 joué par I, II aurait la possibilité de jouer un a_1 de sorte qu'il possède une stratégie gagnante dans $G(T_{(a_0,a_1)}, X_{(a_0,a_1)})$, et il y aurait alors une stratégie gagnante évidente pour II dans $G(T, X)$. Ainsi, de proche en proche, de position non perdante en position non perdante, on construit une stratégie pour I. Celui-ci commence à jouer a_0 avec $(a_0) \in T$ tel que pour tout a_1 avec $(a_0, a_1) \in T$, la position (a_0, a_1) n'est pas perdante. Ensuite, II joue a_1 avec $(a_0, a_1) \in T$. I joue alors un a_2 avec $(a_0, a_1, a_2) \in T$ de sorte que pour tout a_3 avec $(a_0, a_1, a_2, a_3) \in T$, la position (a_0, a_1, a_2, a_3) ne soit pas perdante pour lui, et ainsi de suite.

Montrons maintenant que la stratégie ainsi définie est gagnante pour I. Soit $a = (a_0, a_1, \ldots) \in [T]$ la suite résultant d'une partie de $G(T, X)$ durant laquelle I a suivi cette stratégie ; pour tout entier n, la position $a|(2n)$ est donc non perdante pour I. Supposons néanmoins que I perd cette partie, c'est à dire que a appartient à $[T]\backslash X$. Puisque $[T]\backslash X$ est ouvert dans $[T]$, il existe $k \in \omega$ tel que $(a|(2k+1))\hat{\ }A^\omega \cap [T] \subseteq [T]\backslash X$; mais cela signifie que la position $a|(2k+1)$ est perdante pour I, puisque jouer arbitrairement constitue une stratégie gagnante pour II dans $G(T_{a|(2k+1)}, X_{a|(2k+1)})$.

Si X est ouvert, la démonstration est essentiellement la même. On inverse les rôles de I et II, et l'on prouve par les mêmes arguments que si I ne possède pas de stratégie gagnante dans $G(T, X)$, alors II en possède une. La seule différence notable vient du fait que II joue en deuxième, mais cela n'a aucune incidence sur la preuve.

□

Il est intéressant de noter que cette démonstration utilise l'Axiome du Choix, et ceci à cause de l'unicité dans la condition (iii) de la définition de stratégie. Il est pertinent et utile de définir une forme plus faible de stratégies, les *quasistratégies* , en supprimant cette contrainte d'unicité.

Soit T un arbre élagué non vide sur A, et X un sous-ensemble de $[T]$. Une quasistratégie pour I dans $G(T, X)$ est un arbre élagué non vide $\Sigma_I \subseteq T$ tel que :

(i) Σ_I contient au moins une suite de longueur un ;
(ii) si $s \in (A^2)^{<\omega}$ appartient à Σ_I, alors pour tout $a \in A$ tel que $s\hat{\ }a \in T$, $s\hat{\ }a$ appartient à Σ_I ;
(iii) si $t \in (A^2)^{<\omega}\hat{\ }A$ appartient à Σ_I, alors il existe au moins un $a \in A$ tel que $t\hat{\ }a$ appartient à Σ_I.

Mutatis mutandis, une quasistratégie pour II dans $G(T, X)$ est un arbre élagué non vide $\Sigma_{II} \subseteq T$ tel que :

(i) Σ_{II} contient toutes les suites de longueur un ;
(ii) si $s \in (A^2)^{<\omega}$ appartient à Σ_{II}, alors il existe au moins un $a \in A$ tel que $s\hat{\ }a$ appartient à Σ_{II} ;
(iii) si $t \in (A^2)^{<\omega}\hat{\ }A$ appartient à Σ_{II}, alors pour tout $a \in A$, $t\hat{\ }a$ appartient à Σ_{II}.

La notion de quasistratégie étend donc celle de stratégie, la différence entre les deux tenant au fait que dans une stratégie, le joueur n'a pas le choix, sa stratégie lui dit exactement quoi jouer ; tandis que dans le cas d'une quasistratégie, il a potentiellement un choix à faire parmi plusieurs coups proposés par sa quasistratégie. On étend de manière naturelle les notions de stratégie gagnante et de détermination en *quasistratégie gagnante* et en *quasidétermination*. L'Axiome du Choix permet directement de prouver l'équivalence entre détermination et quasidétermination, et (DC) nous permet de prouver que les deux joueurs ne peuvent avoir tous les deux une quasistratégie gagnante dans le même jeu[1]. Pour en revenir au Théorème 2.2, on peut démontrer sans l'Axiome du Choix, mais avec (DC) que tout jeu ouvert ou fermé est quasidéterminé[2].

[1]La preuve est tout à fait similaire à celle de la Proposition 2.1.

[2]Dans le même esprit que la preuve énoncée plus haut, on prouve que si II n'a pas de quasistratégie gagnante, $\Sigma = \{p \in T \mid p$ n'est pas perdante pour I$\}$ est une quasistratégie gagnante pour I.

2.2.2 Détermination des Boréliens

La question naturelle qui se pose après avoir prouvé le Théorème 2.2 est la suivante : peut-on démontrer que d'autres classes d'ensembles plus compliquées que les fermés ou les ouverts sont déterminées ? De fait, nous avons prouvé que les ensembles contenus dans le premier niveau de la hiérarchie des boréliens définie au premier chapitre sont déterminés. Peut-on généraliser ce résultat à des niveaux supérieurs, voire à tous les boréliens ? Cette question a intéressé les mathématiciens dès la publication du résultat de Gale et Stewart, il faudra pourtant attendre le milieu des années 1970 pour que Martin lui donne une réponse définitive dans l'article [13] en prouvant que tous les ensembles de Borel sont déterminés. Dans ce chapitre, nous nous attachons à démontrer ce résultat en nous appuyant sur la simplification de la preuve originale donnée par Martin lui-même dans l'article [14] et reprise par Kechris dans son livre [8][3].

L'idée de cette démonstration est d'associer au jeu dont on veut prouver la détermination un jeu auxiliaire déterminé tel qu'à partir d'une stratégie gagnante pour un joueur dans ce dernier, on trouve une stratégie gagnante dans le jeu original pour le même joueur. Pour ce faire, nous introduisons la notion de recouvrement.

Définition 2.3. Soit T un arbre élagué non vide sur A. Un *recouvrement* de T est un triplet $(\tilde{T}, \pi, \varphi)$ où $\tilde{T}$ est un arbre élagué non vide sur un ensemble $\tilde{A}$, $\pi : \tilde{T} \longrightarrow T$ une application monotone (on note π^* l'application induite[4]) et φ une application des stratégies sur $\tilde{T}$ vers les stratégies sur T ; satisfaisant :

(i) l'application π conserve la longueur, c'est à dire que pour tout $s \in \tilde{T}$, $long(\pi(s)) = long(s)$;

(ii) l'image d'une stratégie pour I (respectivement II) sur $\tilde{T}$ par φ est une stratégie pour I (respectivement II) sur T ;

(iii) si $\tilde{\sigma}$ est une stratégie sur $\tilde{T}$, alors pour tous entiers n et m, $m \leq n$ implique $\varphi(\tilde{\sigma}|m) = \varphi(\tilde{\sigma}|n)|m$, et $\varphi(\tilde{\sigma}|n) = \varphi(\tilde{\sigma})|n$;

(iv) si $\tilde{\sigma}$ est une stratégie sur $\tilde{T}$, alors pour tout $x \in [\varphi(\tilde{\sigma})]$ il existe $\tilde{x} \in [\tilde{\sigma}]$ tel que $\pi^*(\tilde{x}) = x$.

Un recouvrement $(\tilde{T}, \pi, \varphi)$ de T est un *k-recouvrement* si $T|2k = \tilde{T}|2k$ et $\pi|\left(\tilde{T}|2k\right)$ est l'identité.

[3] pp. 140 – 146.

[4] Au sens de la Proposition 1.5, π induit une application continue $\pi^* : \left[\tilde{T}\right] \longrightarrow [T]$.

Cette définition peut paraître un peu obscure de prime abord ; explicitons la quelque peu. Notre but est de trouver une stratégie pour l'un des deux joueurs sur T en simulant une partie sur T par une partie sur $\tilde{T}$; pour ce faire, nous avons besoin d'un dictionnaire qui nous permette de traduire les coups joués sur $\tilde{T}$ en coups jouables sur T, c'est ce que représente l'application π ; mais puisque nous nous intéressons à des questions de détermination, il nous faut aussi un dictionnaire qui nous permette de traduire les stratégies sur $\tilde{T}$ en stratégies sur T, ce sera le rôle de φ. Une fois ces idées mises en places, il est plus facile d'interpréter et de comprendre ce que l'on impose sur π. Pour que le dictionnaire sur les coups soit cohérent, il faut en effet qu'il traduise un j-ème coup d'un joueur sur $\tilde{T}$ par un j-ème coup du même joueur sur T ; d'où la condition (i), stipulant que π doit conserver les longueurs. La condition (iii) est à peine plus compliquée ; elle traduit le fait que φ doit être définie de manière monotone sur les stratégies partielles. En effet, nous voulons pouvoir faire interagir le jeu sur T et sa simulation sur $\tilde{T}$; ainsi, nous construisons en quelque sorte pas à pas, coup après coup, la stratégie $\varphi(\tilde{\sigma})$ en fonction de $\tilde{\sigma}$. Finalement, la condition (iv) nous assure que nos deux dictionnaires sont cohérents à la limite, lorsque l'on regarde le résultat d'une partie : si l'un des deux joueurs a joué sur T selon une stratégie $\varphi(\tilde{\sigma})$ provenant de $\tilde{T}$, alors la partie doit être l'image par π^* d'une partie de $\tilde{T}$ jouée selon $\tilde{\sigma}$.

La notion de k-recouvrement est une généralisation du concept de recouvrement. Si $(\tilde{T}, \pi, \varphi)$ est un k-recouvrement de T, alors les k premiers coups de chaque joueur sont identiques dans le jeu et dans le jeu auxiliaire. On remarque par ailleurs que si $\tilde{\sigma}$ est une stratégie sur $\tilde{T}$, alors $\varphi(\tilde{\sigma})|2k = \tilde{\sigma}|2k$.

Lemme 2.4. *Soient k un entier, $(\tilde{T}, \pi, \varphi)$ un k-recouvrement de T et un ensemble $X \subseteq [T]$. Si le jeu $G\left(\tilde{T}, (\pi^*)^{-1}(X)\right)$ est déterminé, alors $G(T, X)$ l'est aussi.*

Démonstration. Posons $\tilde{X} = (\pi^*)^{-1}(X)$, et supposons que $G\left(\tilde{T}, \tilde{X}\right)$ est déterminé. Soit $\tilde{\sigma}$ une stratégie gagnante pour I dans $G\left(\tilde{T}, \tilde{X}\right)$, prouvons que $\varphi(\tilde{\sigma})$ est une stratégie gagnante pour I dans $G(T, X)$.

Par l'absurde supposons qu'il existe $x \in [\varphi(\tilde{\sigma})]$ tel que $x \notin X$. D'après la définition d'un recouvrement, il existe $\tilde{x} \in [\tilde{\sigma}]$ tel que $\pi^*(x) = x$. Mais puisque $\tilde{\sigma}$ est une stratégie gagnante pour I dans $G\left(\tilde{T}, \tilde{X}\right)$, $[\tilde{\sigma}] \subseteq \tilde{X}$, donc $\tilde{x} \in \tilde{X}$, d'où $x \in \pi(\tilde{X}) = X$, ce qui mène à une contradiction. On prouve par ailleurs de manière similaire que si $\tilde{\tau}$ est une stratégie gagnante pour I dans

$G\left(\tilde{T}, \tilde{X}\right)$, alors $\varphi(\tilde{\tau})$ est une stratégie gagnante pour II dans $G(T, X)$; ce qui achève la démonstration du lemme.

□

Définition 2.5. Un recouvrement $(\tilde{T}, \pi, \varphi)$ de T *dénoue* $X \subseteq [T]$ si l'ensemble $(\pi^*)^{-1}(X)$ est ouvert et fermé dans $\left[\tilde{T}\right]$.

Ainsi, d'après le Théorème 2.2 et le Lemme 2.4, tout jeu admettant un dénouement est déterminé. C'est cette idée essentielle qui nous guidera pour démontrer que tout ensemble borélien est déterminé. De fait, nous allons nous attacher à prouver la proposition suivante, dont le résultat recherché sera un simple corollaire.

Proposition 2.6. *Soit T un arbre élagué non vide sur A et $X \subseteq [T]$ un ensemble de Borel. Pour tout entier k, il existe un k-recouvrement de T qui dénoue X.*

Nous prouverons cette proposition par récurrence sur la complexité de X. Pour se faire, nous démontrons tout d'abord que l'on peut dénouer tout fermé.

Lemme 2.7. *Soit T un arbre élagué non vide et $X \subseteq [T]$ un fermé. Pour tout entier k, il existe un k-recouvrement de T qui dénoue X.*

Démonstration. On fixe k, T et X. On rappelle que T_X est l'arbre du fermé X au sens de la Proposition 1.3. Nous devons décrire un k-recouvrement $(\tilde{T}, \pi, \varphi)$ de T tel que $(\pi^*)^{-1}(X)$ est ouvert et fermé. Attachons-nous tout d'abord à décrire le déroulement du jeu auxiliaire sur $\tilde{T}$.

Puisque $(\tilde{T}, \pi, \varphi)$ doit être un k-recouvrement de T, les $2k$ premiers coups sur $\tilde{T}$ doivent être les mêmes que sur T. Ainsi, dans le jeu sur $\tilde{T}$ les joueurs commencent par jouer $x_0, x_1, \ldots, x_{2k-2}, x_{2k-1}$:

$$\begin{array}{llllll} \text{I :} & x_0 & & \cdots & x_{2k-2} & \\ \text{II :} & & x_1 & & & x_{2k-1} \end{array}$$

de sorte que pour tout entier $i \leq 2k-1$, $(x_0, \ldots, x_i) \in T$. Le prochain coup joué par I sera un peu plus compliqué. En effet, en plus de jouer un x_{2k} tel que $(x_0, \ldots, x_{2k}) \in T$, il joue une quasistratégie Σ_I pour lui sur $T_{(x_0,\ldots,x_{2k})}$.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{I} : & x_0 \arrow[dr] & & \cdots & x_{2k-2} \arrow[dr] & & (x_{2k}, \Sigma_I) \\
\mathrm{II} : & & x_1 & & & x_{2k-1} \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

En jouant cette quasistratégie, le joueur I annonce qu'il va restreindre ses prochains coups à Σ_I. Deux possibilités s'offrent alors au joueur II :

<u>Option 1</u> : II joue un couple (x_{2k+1}, u),

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{I} : & \cdots & x_{2k-2} \arrow[dr] & & (x_{2k}, \Sigma_I) \arrow[dr] & \\
\mathrm{II} : & & & x_{2k-1} \arrow[ur] & & (x_{2k+1}, u)
\end{tikzcd}$$

tel que $(x_0, \ldots, x_{2k+1}) \in T$ et $u \in (\Sigma_I)_{(x_{2k+1})} \backslash (T_X)_{(x_0,\ldots,x_{2k+1})}$ est une suite de longueur paire. Si II choisit cette option, alors les coups suivants devront être cohérents avec u, c'est à dire que les deux joueurs devront jouer une suite $(x_{2k+2}, x_{2k+3}, \ldots)$ de sorte que pour tout entier i, $(x_0, \ldots, x_i) \in T$ et que de plus

$$(x_{2k+2}, x_{2k+3}, \ldots)|(long(u)) = u.$$

En choisissant cette option, II exhibe avec la suite u un moyen de sortir de X tout en tenant compte de la restrition imposée sur les coups de I.

<u>Option 2</u> : II joue un couple (x_{2k+1}, Σ_{II}),

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{I} : & \cdots & x_{2k-2} \arrow[dr] & & (x_{2k}, \Sigma_I) \arrow[dr] & \\
\mathrm{II} : & & & x_{2k-1} \arrow[ur] & & (x_{2k+1}, \Sigma_{II})
\end{tikzcd}$$

tel que $(x_0, \ldots, x_{2k+1}) \in T$ et Σ_{II} est une quasistratégie pour II sur $(\Sigma_I)_{(x_{2k+1})}$ avec $\Sigma_{II} \subseteq (T_X)_{(x_0,\ldots,x_{2k+1})}$. Si II choisit cette option, alors les joueurs devront jouer une suite $(x_{2k+2}, x_{2k+3}, \ldots)$ de sorte que pour tout entier $l \geq 2k+2$, $(x_{2k+2}, \ldots, x_l) \in \Sigma_{II}$. En choisissant cette option, II restreint ses propres coups de sorte que la suite résultante ne peut être que dans X.

Nous pouvons désormais définir de manière plus formelle l'arbre $\tilde{T}$, celui-ci est ainsi composé des suites finies de la forme :

(1) $(x_0, \ldots, x_{2k-1}, (x_{2k}, \Sigma_I), (x_{2k+1}, (1, u)), x_{2k+2}, \ldots, x_l)$, ou
(2) $(x_0, \ldots, x_{2k-1}, (x_{2k}, \Sigma_I), (x_{2k+1}, (2, \Sigma_{II})), x_{2k+2}, \ldots, x_l)$;
de sorte que $(x_0, \ldots, x_l) \in T$; Σ_I est une quasistratégie pour I sur $T_{(x_0,\ldots,x_{2k})}$, et pour les suites de type (1), $u \in (\Sigma_I)_{(x_{2k+1})} \backslash (T_X)_{(x_0,\ldots,x_{2k+1})}$ est une suite de longueur paire et $(x_{2k+2}, x_{2k+3}, \ldots)|(long(u)) = u$; tandis que pour une suite de type (2), Σ_{II} est une quasistratégie pour II sur $(\Sigma_I)_{(x_{2k+1})}$ avec

$$\Sigma_{II} \subseteq (T_X)_{(x_0,\ldots,x_{2k+1})} \qquad \text{et} \qquad (x_{2k+2}, \ldots, x_l) \in \Sigma_{II}.$$

On peut interpréter le jeu sur $\tilde{T}$ comme suit : au tour $2k$, en plus de jouer élément de A, le joueur I pose en quelque sorte une question au joueur II : sachant que I restreint ses coups à Σ_I, II peut-il trouver un moyen de sortir de X ? Si oui, II jouera selon la première option en obligeant I un certain nombre de coups. Sinon, II jouera selon la deuxième option, jouant une quasistratégie assurant aux deux joueurs que la suite est dans X, et donc que I gagne la partie. Ainsi, le jeu infini sur $\tilde{T}$ ne l'est pas vraiment puisque l'on connaît le gagnant au bout d'un nombre fini de coups. En contrepartie, les joueurs sont amenés à jouer des quasistratégies, lesquelles sont des ensembles infinis de suites finies d'éléments de A, et de ce fait des objets bien plus complexes et de plus grande taille que de simples éléments de A.

On vérifie directement que si T est élagué non vide, $\tilde{T}$ l'est aussi, ce qui est équivalent au fait que les deux joueurs peuvent toujours jouer quelque chose. En effet, la seule difficulté pourrait advenir lors des tours $2k$ et $2k+1$. Mais si T est élagué, il existe toujours au moins une quasistratégie pour I sur $T_{(x_0,\ldots,x_{2k})}$, la quasistratégie triviale $T_{(x_0,\ldots,x_{2k})}$. De même pour II au tour suivant, en fonction de $(\Sigma_I)_{(x_{2k+1})}$ et $(T_X)_{(x_0,\ldots,x_{2k+1})}$ il a toujours la possibilité de choisir au moins une de deux options qui lui sont proposées.

On définit l'application π de manière naturelle :

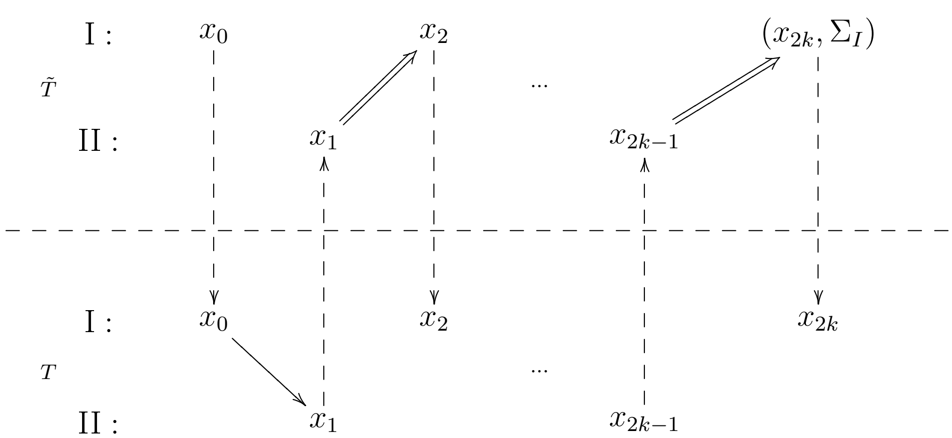
$$\pi\,(x_0, \ldots, x_{2k-1}, (x_{2k}, \bullet), (x_{2k+1}, \bullet), x_{2k+2}, \ldots, x_l) = (x_0, \ldots, x_l).$$

On remarque par ailleurs que $\tilde{x} \in (\pi^*)^{-1}(X)$ si et seulement si la suite résultante $(x_0, x_1, \ldots) \in X$, c'est à dire si et seulement si pour tout entier l, $(x_0, \ldots, x_l) \in T_X$. Or ceci correspond exactement aux parties dans lesquelles II choisit la deuxième option au tour $2k+1$. L'ensemble $(\pi^*)^{-1}(X)$ peut ainsi être vu comme une union d'ouverts de base de $[\tilde{T}]$, c'est donc un ouvert de $[\tilde{T}]$. De plus, c'est un fermé comme préimage d'un fermé par une application continue, $(\pi^*)^{-1}(X)$ est donc bien un ouvert fermé.

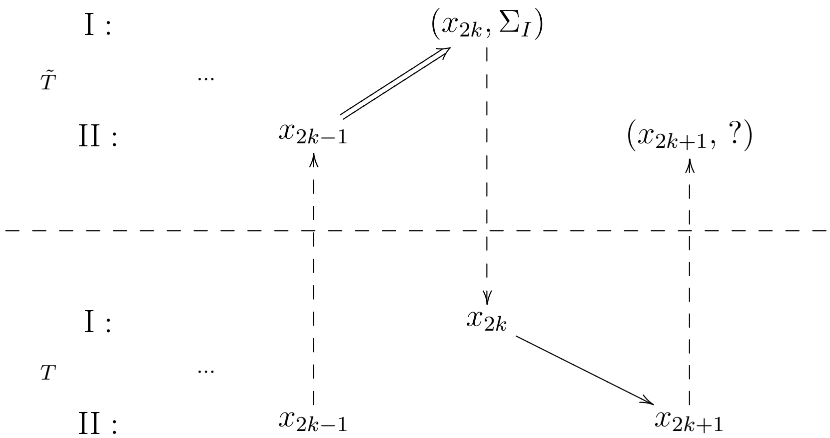
Il ne nous reste plus qu'à définir l'application φ sur les stratégies. Pour ce faire, nous allons décrire comment passer d'une stratégie $\tilde{\sigma}$ sur $\tilde{T}$ à une stratégie $\sigma = \varphi(\tilde{\sigma})$ sur T de sorte que pour toute partie x sur T issue de σ il existe une partie $\tilde{x}$ sur $\tilde{T}$ issue de $\tilde{\sigma}$ telle que $\pi(\tilde{x}) = x$. Nous traiterons tout d'abord le cas des stratégies pour I, puis celui des stratégies pour II. Gardons néanmoins à l'esprit que ce sont des questions de déterminations qui nous importent, donc les stratégies gagnantes ; ce sont ainsi les images des stratégies gagnantes sur $G\left(\tilde{T}, (\pi^*)^{-1}(X)\right)$ par φ qui motivent les définitions suivantes.

En premier lieu, traitons le cas où $\tilde{\sigma}$ est une stratégie pour I sur $\tilde{T}$. Pour construire la stratégie $\sigma = \varphi(\tilde{\sigma})$, on simule une partie sur T par une partie sur $\tilde{T}$ dans laquelle I joue selon $\tilde{\sigma}$. Pour ce faire, on reporte les coups joués par II dans $G(T, X)$ sur $\tilde{T}$, on leur applique la stratégie $\tilde{\sigma}$, puis on reporte les coups de I sur $\tilde{T}$ dans $G(T, X)$, ces derniers définissant ainsi la stratégie σ.

Puisque l'on veut un k-recouvrement, on doit avoir $\varphi(\tilde{\sigma})|2k = \tilde{\sigma}|2k$. Donc pour les $2k$ premiers coups, σ est identique à $\tilde{\sigma}$. Ensuite, $\tilde{\sigma}$ fait jouer (x_{2k}, Σ_I) à I sur $\tilde{T}$, on pose donc que σ fait jouer x_{2k} à I sur T. On résume les coups joués jusqu'à présent dans le diagramme suivant :



où les simples flèches symbolisent les coups joués par II dans le jeu sur T, les flèches pointillées (- - >) les coups reportés d'un jeu à l'autre et les doubles flèches (=>) les coups déterminés par $\tilde{\sigma}$. Ainsi, nous avons aisément construit de manière monotone et pour tout entier $m \leq 2k$ les stratégies partielles $\sigma|m$ à partir de $\tilde{\sigma}|m$. Si l'on poursuit ce raisonnement, II va jouer x_{2k+1} sur T ; la question qui se pose maintenant est la suivante : que reporter sur $\tilde{T}$ pour bien simuler la partie sur T ?



Pour répondre à cette question, on considère le jeu :

$$G_I = G\left((\Sigma_I)_{(x_{2k+1})}, \left[(\Sigma_I)_{(x_{2k+1})} \right] \setminus X_{(x_0,\ldots,x_{2k+1})} \right).$$

Ce jeu est ouvert, donc déterminé. De manière intuitive, I gagne ce jeu si, tout en restant cohérent avec Σ_I et le coup x_{2k+1} joué par II, la suite résultante n'appartient pas à X.

Supposons que I possède une stratégie gagnante dans G_I. Cela signifie que quels que soient les coups joués par II, I peut jouer de manière cohérente avec $(\Sigma_I)_{(x_{2k+1})}$ de sorte que la suite résultante ne soit pas dans $X_{(x_0,\ldots,x_{2k+1})}$. Puisque $X_{(x_0,\ldots,x_{2k+1})}$ est fermé dans $\left[(\Sigma_I)_{(x_{2k+1})} \right]$, il suffit d'un nombre fini de coups pour être assuré que la suite résultante sera dans son ouvert complémentaire. Revenons maintenant au jeu sur $\tilde{T}$, cela signifie que II a un moyen de sortir de X tout en étant cohérent avec Σ_I, et quels que soient les coups qu'il joue lui-même, en forçant I à jouer la suite finie donnée par sa stratégie gagnante sur G_I. Ainsi, σ fait jouer I sur T selon sa stratégie gagnante sur G_I. Il existe alors un entier $l > k$, tel que la suite finie des coups joués $u = (x_{2k+2}, \ldots, x_{2l-1})$ n'appartienne pas à $(T_X)_{(x_0,\ldots,x_{2k+1})}$. On a donc bien que la suite

$$(x_0, \ldots, x_{2k-1}, (x_{2k}, \Sigma_I), (x_{2k+1}, (1, u)), x_{2k+2}, \ldots, x_{2l-1})$$

est dans $\tilde{T}$ et cohérente avec $\tilde{\sigma}$. Pour le reste de la partie, σ suit $\tilde{\sigma}$.

Supposons maintenant que c'est II qui a une stratégie gagnante dans G_I. Soit Σ_{II} la quasistratégie suivante pour II dans G_I :

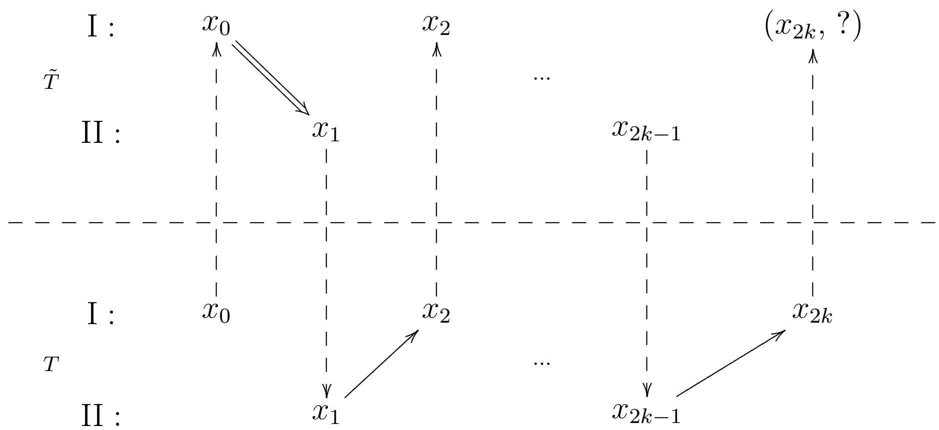
$$\Sigma_{II} = \left\{ p \in (\Sigma_I)_{(x_{2k+1})} \mid p \text{ n'est pas perdante pour II} \right\}.$$

Puisque $X_{(x_0,\dots,x_{2k+1})}$ est fermé dans $(\Sigma_I)_{(x_{2k+1})}$, Σ_{II} est une quasistratégie gagnante pour II dans G_I, on a donc l'inclusion $\Sigma_{II} \subseteq (T_X)_{(x_0,\dots,x_{2k+1})}$. De plus, $\Sigma_{II} \subseteq (\Sigma_I)_{(x_{2k+1})}$, on peut donc poser dans le jeu sur $\tilde{T}$ que II joue $(x_{2k+1}, (2, \Sigma_{II}))$, et continuer la simulation de sorte que σ suit $\tilde{\sigma}$. Le problème qui se pose maintenant est le suivant : dans le jeu sur $\tilde{T}$, le joueur II a restreint ses coups à Σ_{II}, la stratégie $\tilde{\sigma}$ ne prend donc en compte que ceux-ci. Mais dans le jeu sur T, II est libre de jouer ce qu'il veut, et rien ne l'empêche de jouer en dehors de Σ_{II}. Si II joue dans Σ_{II}, notre simulation fonctionne, et nous avons bien construit σ à partir de $\tilde{\sigma}$ en respectant les conditions sur φ. Voyons donc ce qui se passe si pour un entier $l > k+1$, II joue sur T un x_{2l-1} de sorte que la suite $v = (x_{2k+2}, \dots, x_{2l-1})$ n'appartient pas à Σ_{II}. Par définition de la quasistratégie Σ_{II}, cela signifie que I a une stratégie gagnante dans le jeu :

$$G'_I = G\left((\Sigma_I)_{(x_{2k+1},\dots,x_{2l-1})}, \left[(\Sigma_I)_{(x_{2k+1},\dots,x_{2l-1})} \right] \setminus X_{(x_0,\dots,x_{2l-1})} \right);$$

et nous sommes ramenés au cas précédent. En effet, cette stratégie gagnante pour I dans G'_I donne à II une suite finie w lui permettant de sortir de $X_{(x_0,\dots,x_{2l-1})}$; on revient alors en arrière dans notre simulation, et au lieu de faire jouer $(x_{2k+1}, (2, \Sigma_{II}))$ à II sur $\tilde{T}$, on lui fait jouer $(x_{2k+1}, (1, v\hat{\ }w))$. Ceci n'affecte pas les coups déjà joués sur T, et nous permet de continuer la construction de σ. Ainsi définie, on a bien que l'image d'une stratégie gagnante pour I sur $\tilde{T}$ par φ est une stratégie gagnante pour I sur T. Nous avons terminé de décrire φ sur les stratégies pour I. Intéressons-nous maintenant aux stratégies pour le joueur II.

Soit $\tilde{\tau}$ une stratégie quelconque pour II sur $\tilde{T}$. Puisque l'on veut un k-recouvrement, on doit avoir $\varphi(\tilde{\tau})|2k = \tilde{\tau}|2k$. Donc pour les $2k$ premiers coups, τ est identique à $\tilde{\tau}$. Ensuite I joue x_{2k} sur T ; la question qui se pose alors est : que reporter sur $\tilde{T}$? Quelle quasistratégie choisir pour I afin de bien simuler le jeu sur T ?



Posons $\mathcal{S}$ l'ensemble des quasistratégies pour I sur $T_{(x_0,\ldots,x_{2k})}$ et U l'ensemble des suites finies $x_{2k+1}\hat{\ }u$ telles que :

(i) la suite $x_{2k+1}\hat{\ }u$ appartient à $T_{(x_0,\ldots,x_{2k})}$;

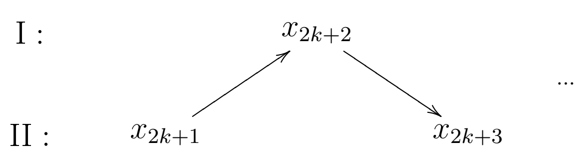
(ii) la suite u est de longueur paire ;

(iii) il existe $\Sigma_u \in \mathcal{S}$ de sorte que sur $\tilde{T}$, si I joue (x_{2k}, Σ_u), alors $\tilde{\tau}$ fait jouer $(x_{2k+1}, (1, u))$ à II.

On définit par ailleurs l'ensemble $\mathcal{U}$ des suites infinies telles que :

$$\mathcal{U} = (U\hat{\ }A^\omega) \cap \left[T_{(x_0,\ldots,x_{2k})}\right],$$

c'est à dire l'ensemble des suites infinies de $\left[T_{(x_0,\ldots,x_{2k})}\right]$ ayant un segment initial dans U. L'ensemble $\mathcal{U}$ représente ainsi l'ensemble des parties sur $\tilde{T}$ jouées selon $\tilde{\tau}$ telles que II choisit l'option 1 au tour $2k+1$. On remarque que $\mathcal{U}$ est un ouvert de $\left[T_{(x_0,\ldots,x_{2k})}\right]$ comme union d'ouverts de base. On s'intéresse maintenant au jeu G_{II} sur $T_{(x_0,\ldots,x_{2k})}$:



dans lequel II commence à jouer et gagne si et seulement si la suite résultante appartient à $\mathcal{U}$. Puisque ce dernier est ouvert dans $\left[T_{(x_0,\ldots,x_{2k})}\right]$, le jeu G_{II} est déterminé.

Supposons tout d'abord que II a une stratégie gagnante pour G_{II}, cela signifie que quels que soient les coups joués par I, la suite résultante sera dans $\mathcal{U}$. Autrement dit, quels que soient les coups de I sur $\tilde{T}$, $\tilde{\tau}$ fait choisir l'option 1 à II. Revenons à la partie sur T : après x_{2k}, on définit τ à partir de la stratégie gagnante pour II sur G_{II}. Par définition de ce jeu et de son ensemble de gain, si le joueur II joue selon sa stratégie gagnante, les joueurs construisent après un nombre fini de coups une suite dans U. Il existe donc un entier $l > k$ tel que la suite finie des coups $(x_{2k+1}, \ldots, x_{2l-1})$ appartient à U. En posant $u = (x_{2k+2}, \ldots, x_{2l-1})$ cela signifie que la position :

$$(x_0, \ldots, x_{2k-1}, (x_{2k}, \Sigma_u), (x_{2k+1}, (1, u)), x_{2k+2}, \ldots, x_{2l-1})$$

est dans $\tilde{T}$ et est cohérente avec $\tilde{\tau}$. Pour le reste de la partie, τ suit $\tilde{\tau}$.

Supposons maintenant que c'est I qui a une stratégie gagnante dans G_{II}. Soit Σ_I la quasistratégie pour I dans G_{II} suivante :

$$\Sigma_I = \left\{ p \in T_{(x_0, \ldots, x_{2k})} \mid p \text{ n'est pas perdante pour I} \right\}.$$

Puisque $\mathcal{U}$ est ouvert dans $T_{(x_0, \ldots, x_{2k})}$, Σ_I est une quasistratégie gagnante pour I. On remarque que si I joue (x_{2k}, Σ_I) au tour $2k$ sur $\tilde{T}$, alors par définition de $\mathcal{U}$, la stratégie $\tilde{\tau}$ oblige II a jouer selon la deuxième option au tour suivant. En effet, si $\tilde{\tau}$ demandait à II de jouer selon la première option un coup de la forme $(x_{2k+1}, (1, u))$, on aurait $x_{2k+1}\hat{\ }u \in U$ et $x_{2k+1}\hat{\ }u \in \Sigma_I$, ce qui contredirait le fait que Σ_I soit une quasistratégie gagnante pour I dans G_{II}. On peut donc poser dans le jeu sur $\tilde{T}$ que I joue (x_{2k}, Σ_1) au tour $2k$, et continuer notre simulation.

Le problème qui se pose maintenant est le suivant : dans le jeu sur $\tilde{T}$, le joueur I a restreint ses coups à Σ_I, la stratégie $\tilde{\tau}$ ne prend donc en compte que ceux-ci. Mais dans le jeu sur T, I est libre de jouer ce qu'il veut, et rien ne l'empêche de jouer en dehors de Σ_I. Si I ne joue que dans Σ_I, notre simulation fonctionne, et nous avons bien construit τ à partir de $\tilde{\tau}$ en respectant les conditions sur φ. Voyons donc ce qui se passe si pour un entier $l > k+1$, $(x_{2k+1}, \ldots, x_{2l}) \notin \Sigma_I$. Mais dans ce cas, par définition de la quasistratégie Σ_I, cela signifie que II a une stratégie gagnante dans le sous-jeu G'_{II} de G_{II} sur $T_{(x_0, \ldots, x_{2l})}$. Dans celui-ci, II commence à jouer et gagne si et seulement si la suite résultante appartient à $\mathcal{U}_{(x_{2k+1}, \ldots x_{2l})}$. Nous sommes donc ramenés au cas précédent. En effet, une stratégie gagnante pour II dans G'_{II} lui fournira une suite finie paire w de sorte que $(x_{2k+1}, \ldots, x_{2l})\hat{\ }w$ appartient à U. Posant $v = (x_{2k+2}, \ldots, x_{2l})$, on revient alors en arrière dans notre simulation, et au lieu de faire jouer (x_{2k}, Σ_I) à I sur $\tilde{T}$, on lui fait jouer $(x_{2k}, \Sigma_{v\hat{\ }w})$. Ceci n'affecte pas les coups déjà joués, et nous permet de continuer la construction de τ.

Nous avons ainsi défini φ sur les stratégies des deux joueurs, ce qui termine la définition du k-recouvrement et achève la preuve.

$\square$

Nous venons de prouver que pour tout entier k, tout fermé admet un k-recouvrement qui le dénoue. Ce résultat correspond à l'initialisation de notre récurrence dans la preuve de la Proposition 2.6. Nous nous attachons désormais à prouver un lemme qui nous sera utile pour prouver le cas limite.

Lemme 2.8. *Soit un entier naturel k. On considère une famille d'arbres élagués non vides $(T_i)_{i\in\omega}$ et des familles d'applications $(\pi_i)_{i\in\omega^*}$ et $(\varphi_i)_{i\in\omega^*}$ de sorte que pour tout entier naturel i, $(T_{i+1}, \pi_{i+1}, \varphi_{i+1})$ est un $(k+i)$-recouvrement de T_i. Alors il existe un arbre élagué T_∞ et des familles d'applications $(\pi_{\infty,i})_{i\in\omega^*}$ et $(\varphi_{\infty,i})_{i\in\omega^*}$ tels que pour tout entier i on a :*

(i) *$(T_\infty, \pi_{\infty,i}, \varphi_{\infty,i})$ est un $(k+i)$-recouvrement de T_i ;*

(ii) *$\pi_{i+1} \circ \pi_{\infty,i+1} = \pi_{\infty,i}$;*

(iii) *$\varphi_{i+1} \circ \varphi_{\infty,i+1} = \varphi_{\infty,i}$.*

Démonstration. Nous avons une suite de recouvrements comme l'illustre le diagramme suivant.

$$T_0 \xleftarrow{k\text{-recouvrement}} (T_1, \pi_1, \varphi_1) \xleftarrow{k+1\text{-recouvrement}} (T_2, \pi_2, \varphi_2) \xleftarrow{k+2\text{-recouvrement}} \dots$$

On a donc en particulier que pour tous entiers $i < j$,

$$T_i|(2(k+i)) = T_j|(2(k+i)).$$

On définit intuitivement l'arbre T_∞ comme une limite de cette suite d'arbres :

$$s \in T_\infty \iff s \in T_i \text{ pour tout arbre } T_i \text{ tel que } \mathit{long}(s) \leq 2(k+i).$$

L'arbre T_∞ vérifie que pour tout entier i, $T_\infty|(2(k+i)) = T_i|(2(k+i))$, donc T_∞ est bien élagué.

Fixons un entier i et définissons $\pi_{\infty,i}$. Puisque $(T_\infty, \pi_{\infty,i}, \varphi_{\infty,i})$ est un $(k+i)$-recouvrement de T_i, $\pi_{\infty,i}$ doit être l'identité sur toutes les suites de longueur plus petite que $2(k+i)$. Pour les suites plus longues, on pose :

$$\pi_{\infty,i}(s) = \pi_{i+1} \circ \pi_{i+2} \circ \dots \pi_j(s),$$

où j est tel que $\mathit{long}(s) < 2(k+j)$. Cette dernière définition ne dépend pas de j puisque pour tout entier l tel que $2(l+k) > \mathit{long}(s)$, $\pi_l(s) = s$. Ainsi définies, les applications $\pi_{\infty,i}$ conservent la longueur ; de plus, elles vérifient que $\pi_{i+1} \circ \pi_{\infty,i+1} = \pi_{\infty,i}$.

Intéressons-nous maintenant aux applications $\varphi_{\infty,i}$. Soit σ_∞ une stratégie sur T_∞. Puisque $(T_\infty, \pi_{\infty,i}, \varphi_{\infty,i})$ est un $(k+i)$-recouvrement de T_i, on pose $\varphi_{\infty,i}(\sigma_\infty)|(2(k+i)) = \sigma_\infty|(2(k+i))$. Pour $j > i$, on remarque que $\sigma_\infty|(2(k+j))$ est aussi une stratégie partielle sur T_j, et on pose :

$$\varphi_{\infty,i}(\sigma_\infty)|(2(k+j)) = \varphi_{i+1} \circ \varphi_{i+2} \circ \ldots \circ \varphi_j(\sigma_\infty|(2(k+j))).$$

Ainsi définies les applications satisfont bien les conditions (ii) et (iii) de la définition d'un recouvrement. De plus, elles vérifient que $\varphi_{i+1} \circ \varphi_{\infty,i+1} = \varphi_{\infty,i}$.

Finalement, il nous reste à vérifier la condition (iv) de la définition d'un recouvrement. Soit σ_∞ une stratégie sur T_∞, et soit $x_i \in [\varphi_{\infty,i}(\sigma_\infty)] \subseteq [T_i]$. Comme $\varphi_{i+1} \circ \varphi_{\infty,i+1}(\sigma_\infty) = \varphi_{\infty,i}(\sigma_\infty)$, on a $x_i \in [\varphi_{i+1}(\varphi_{\infty,i+1}(\sigma_\infty))]$. Mais $(T_{i+1}, \pi_{i+1}, \varphi_{i+1})$ est un $(k+i)$-recouvrement de T_i, il existe donc $x_{i+1} \in [\varphi_{\infty,i+1}(\sigma_\infty)]$ de sorte que $\pi^*_{i+1}(x_{i+1}) = x_i$. On peut utiliser ce même raisonnement pour trouver $x_{i+2} \in [\varphi_{\infty,i+2}(\sigma_\infty)]$ de sorte que $\pi^*_{i+2}(x_{i+2}) = x_{i+1}$, et ainsi de suite. On construit de cette manière pour tout entier $j \geq i$ une suite infinie $x_j \in [\varphi_{\infty,j}(\sigma_\infty)]$ de sorte que $\pi^*_{j+1}(x_{j+1}) = x_j$. Mais puisque les applications π_{l+1} sont l'identité sur les suites de longueur inférieure à $2(k+l)$, la suite $(x_i, x_{i+1}, \ldots)$ converge vers un élément $x_\infty \in [T_\infty]$, défini par :

$$x_\infty|(2(k+j)) = x_j|(2(k+j))$$

pour $j \geq i$. Puisque σ_∞ et $\varphi_{\infty,i}(\sigma_\infty)$ coïncident pour les suites de longueur inférieure à $2(k+j)$, le fait que $x_j \in [\varphi_{\infty,j}(\sigma_\infty)]$ pour tout $j > i$ implique que $x_\infty \in [\sigma_{infty}]$. On vérifie par ailleurs directement que $\pi^*_{\infty,i}(x_\infty) = x_i$, ce qui achève la preuve.

□

La preuve du lemme précédent nous montre le rôle crucial que joueront les k-recouvrements dans le processus de limite. Nous sommes maintenant prêts à démontrer la Proposition 2.6.

Démonstration. (De la Proposition 2.6)

Nous allons prouver par induction transfinie que pour tout ordinal non nul $\xi < \omega_1$, pour tout arbre élagué non vide T et tout entier k, si $X \subseteq [T]$ appartient à $\Sigma^0_\xi([T])$, alors il existe un k-recouvrement de T qui dénoue X.

Remarquons tout d'abord que si un k-recouvrement $(\tilde{T}, \pi, \varphi)$ de T dénoue X, il dénoue aussi son complémentaire $[T]\backslash X$. En effet, on a que

$(\pi^*)^{-1}([T]\backslash X) = [\tilde{T}]\backslash(\pi^*)^{-1}(X)$. Or $(\tilde{T}, \pi, \varphi)$ dénoue X, $(\pi^*)^{-1}(X)$ est donc ouvert fermé dans $[\tilde{T}]$, ce qui implique que son complémentaire $[\tilde{T}]\backslash(\pi^*)^{-1}(X)$ l'est aussi et ainsi $(\tilde{T}, \pi, \varphi)$ dénoue X. Le Lemme 2.7 nous assure donc que la proposition est vraie pour $\xi = 1$, ce qui fonde notre récurrence.

Supposons maintenant que la proposition est vraie pour tous les ordinaux $\eta < \xi$. Nous avons donc pour tout $\eta < \xi$, tout T, tout entier k et tout $Y \in \Pi^0_\eta([T])$, l'existence d'un k-recouvrement qui dénoue $[T]\backslash Y$, et donc Y. Soit $X \in \Sigma^0_\xi([T])$, fixons $k \in \omega$ et prouvons qu'il existe un k-recouvrement de T qui dénoue X. Puisque $X \in \Sigma^0_\xi([T])$, il existe une famille d'ensembles $(X_i)_{i\in\omega}$ telle que pour tout entier i, $X_i \in \Pi^0_{\xi_i}([T])$ avec $\xi_i < \xi$ et

$$X = \bigcup_{i\in\omega} X_i.$$

L'hypothèse de récurrence nous assure qu'il existe bien un k-recouvrement (T_1, π_1, φ_1) de T qui dénoue X_0. Mais π_1^* est continue, donc pour tout entier $i \geq 1$,

$$(\pi_1^*)^{-1}(X_i) \in \Pi^0_{\xi_i}([T_1]).$$

De manière similaire, il existe un $(k+1)$-recouvrement (T_2, π_2, φ_2) de T qui dénoue $(\pi_1^*)^{-1}(X_1)$. Mais π_2^* est continue, donc pour tout entier $i \geq 2$,

$$(\pi_2^*)^{-1}\left((\pi_1^*)^{-1}(X_i)\right) \in \Pi^0_{\xi_i}([T_2]).$$

Par récurrence, en posant $T_0 = T$, on définit ainsi, pour tout entier i, un $(k+i)$-recouvrement $(T_{i+1}, \pi_{i+1}, \varphi_{i+1})$ de T_i qui dénoue

$$(\pi_i^*)^{-1} \circ (\pi_{i-1}^*)^{-1} \circ \cdots \circ (\pi_1^*)^{-1}(X_i).$$

Nous pouvons ainsi appliquer le Lemme 2.8 aux recouvrements (T_i, π_i, φ_i), ce qui nous donne une famille de recouvrements $(T_\infty, \pi_{\infty,i}, \varphi_{\infty,i})$. En particulier, $(T_\infty, \pi_{\infty,0}, \varphi_{\infty,0})$ est k-recouvrement de T. Montrons que pour tout entier i, celui-ci dénoue X_i. On sait que $(T_{i+1}, \pi_{i+1}, \varphi_{i+1})$ dénoue

$$(\pi_i^*)^{-1} \circ (\pi_{i-1}^*)^{-1} \circ \cdots \circ (\pi_1^*)^{-1}(X_i).$$

Posons $(\pi_i^*)^{-1} \circ (\pi_{i-1}^*)^{-1} \circ \cdots \circ (\pi_1^*)^{-1}(X_i) = Y_i$; on a alors que l'ensemble $(\pi_{i+1}^*)^{-1}(Y_i)$ est ouvert et fermé dans $[T_{i+1}]$. Mais par définition de $\pi_{\infty,0}$, on a :

$$\begin{aligned}
(\pi_{\infty,0}^*)^{-1}(X_i) &= (\pi_{\infty,i+1}^*)^{-1} \circ (\pi_{i+1}^*)^{-1} \circ (\pi_i^*)^{-1} \circ \cdots \circ (\pi_1^*)^{-1}(X_i) \\
&= (\pi_{\infty,i+1}^*)^{-1} \circ (\pi_{i+1}^*)^{-1}(Y_i)
\end{aligned}$$

Or, par continuité de $\pi^*_{\infty,i+1}$, $(\pi^*_{\infty,i+1})^{-1} \circ (\pi^*_{i+1})^{-1}(Y_i)$ est ouvert fermé dans $[T_\infty]$, et donc $(T_\infty, \pi_{\infty,0}, \varphi_{\infty,0})$ dénoue X_i.

Il ne nous reste plus qu'une petite étape à effectuer pour trouver un dénouement de $X = \bigcup_{i\in\omega} X_i$. Puisque $(T_\infty, \pi_{\infty,0}, \varphi_{\infty,0})$ dénoue chaque X_i, nous avons que l'ensemble :

$$(\pi^*_{\infty,0})^{-1}(X) = \bigcup_{i\in\omega} (\pi^*_{\infty,0})^{-1}(X_i)$$

est ouvert dans $[T_\infty]$ comme union dénombrable d'ouverts. Malheureusement, il n'est pas forcément fermé, mais grâce au Lemme 2.7, nous savons qu'il existe un k-recouvrement $(\tilde{T}, \pi, \varphi)$ de T_∞ qui dénoue $(\pi^*_{\infty,0})^{-1}(X)$. Donc le k-recouvrement $(\tilde{T}, \pi_{\infty,0} \circ \pi, \varphi_{\infty,0} \circ \varphi)$ dénoue X, ce qui achève la preuve

□

La Proposition 2.6 implique directement le résultat cherché.

Théorème 2.9. (Martin, 1975).

Soit T un arbre élagué non vide sur A, et $X \subseteq [T]$ un ensemble de Borel. Alors le jeu $G(T, X)$ est déterminé.

Avant de passer aux conséquences de ce résultat, revenons quelques instants sur sa preuve. Celle-ci est difficile à deux niveaux : au niveau purement conceptuel, mais aussi aussi au niveau de la complexité des objets auxquels elle fait appel. Nous espérons en ayant pris le temps de détailler avec soin ses différentes parties avoir réussi à contourner quelque peu la première difficulté. Néanmoins, impossible de contourner la deuxième. Friedman montre dans [4] que la preuve du Théorème 2.9 ne peut s'établir dans Z, c'est à dire le système d'axiomes ZF moins celui de remplacement. Dans Z, on a ainsi l'opération des parties $\mathscr{P}$, mais pas l'existence de l'union de la famille $\{\omega, \mathscr{P}(\omega), \mathscr{P}(\mathscr{P}(\omega)), \ldots\}$. En regardant de plus près la preuve ci-dessus, on se rend compte que pour dénouer un jeu fermé sur $\{0, 1\}$, nous avons besoin de jouer un jeu dont les coups sont des quasistratégies et donc des parties de ω. Ainsi, le raisonnement par récurrence transfinie nécessite l'existence des parties de ω itérées ξ fois, pour tout $\xi < \omega_1$, ce qui n'est pas assuré par Z.

Chapitre 3

Autour de la détermination des Boréliens

3.1 Une conséquence : la hiérarchie de Wadge

Nous avons vu que la classe des ensembles de Borel pouvait être subdivisée en une hiérarchie par les classes additives et multiplicatives. Cette hiérarchie de hauteur ω_1 peut être raffinée grâce à la notion d'images inverses de fonctions continues.

Définition 3.1. Soient deux espaces topologiques X et Y, et soient $B \subseteq X$ et $C \subseteq Y$. Une *réduction continue* de B vers C est une application continue $f : X \longrightarrow Y$ telle que $B = f^{-1}(C)$. S'il existe une réduction continue de B vers C, on note $B \leq_W C$; s'il existe une réduction continue de B vers C mais pas de C vers B, on note $B <_W C$. Finalement, s'il existe des réductions continues de B vers C et de C vers B, on note $B \equiv_W C$

Intuitivement, $B \leq_W C$ signifie que B est topologiquement plus simple que C ; on dit parfois que C *réduit* B. Revenons maintenant à l'espace topologique des suites infinies sur un ensemble non vide A.

Lemme 3.2. *La relation $\leq_W$ sur les parties de A^ω est un préordre.*

Démonstration. Soit $X \subseteq A^\omega$. L'application identité sur A^ω est une application continue telle que l'image inverse de X soit lui-même, donc $X \leq_W X$, ce qui prouve la réflexivité de $\leq_W$.

Soient $X, Y, Z \subseteq A^\omega$ de sorte que $X \leq_W Y$ et $Y \leq_W Z$. Il existe donc deux applications continues f et g de A^ω dans lui même telles que $X = f^{-1}(Y)$ et $Y = g^{-1}(Z)$, d'où $X = f^{-1}(g^{-1}(Z)) = (g \circ f)^{-1}(Z)$. Comme $g \circ f$ est continue, on a $X \leq_W Z$, ce qui prouve la transitivité de $\leq_W$ et achève la preuve.

□

Nous nous intéressons désormais et jusqu'à la fin de cette partie uniquement aux ensembles boréliens de A^ω. La démonstration du théorème suivant, souvent appelé *Lemme de Wadge*, utilise fortement la détermination des boréliens.

Théorème 3.3. Lemme de Wadge.

Soient S et T deux arbres élagués non vides sur A, et soient $X \subseteq [S]$ et $Y \subseteq [T]$ des ensembles boréliens. Alors soit $X \leq_W Y$, soit $Y \leq_W [S] \backslash X$.

Démonstration. On considère le *jeu de Wadge* $WG(X, Y)$:

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{I} : & x_0 \arrow[dr] & & x_1 \arrow[dr] & \cdots \\
\mathrm{II} : & & y_0 \arrow[ur] & & y_1
\end{tikzcd}
$$

dans lequel les joueurs jouent des éléments de A, de sorte qu'ils construisent deux suites, une dans S pour le joueur I, l'autre dans T pour le joueur II. Ainsi une partie donne lieu à la création de la suite infinie $x = (x_0, \ldots) \in [T]$ par I et de $y = (y_0, \ldots)$ par II. Le joueur II gagne si et seulement si $(x \in X \Leftrightarrow y \in Y)$. En fait, le jeu de Wadge est un jeu de Gale-Stewart particulier. Pour montrer ce fait, on introduit les les projections sur les suites finies p_i et p_p ; lesquelles envoient une suite respectivement sur la suite de ses éléments en position paire et sur la suite de ses éléments en position impaire. Ces applications sont monotones, leurs applications induites sur les suites infinies :

$$
\begin{array}{rcl}
p_p^* : A^\omega & \longrightarrow & A^\omega \\
(a_0, a_1, a_2, \ldots) & \longmapsto & (a_0, a_2, \ldots)
\end{array}
$$

et

$$
\begin{array}{rcl}
p_i^* : A^\omega & \longrightarrow & A^\omega \\
(a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots) & \longmapsto & (a_1, a_3, \ldots)
\end{array}
$$

sont donc continues. Les positions licites du jeu $WG(X, Y)$ sont définies par l'arbre élagué non vide R sur A tel que :

$$R = p_p^{-1}(S) \cap p_i^{-1}(T).$$

Mais on a alors que II gagne le jeu $WG(X, Y)$ si et seulement si la suite résultante $(x_0, y_0, x_1, y_1, \ldots)$ appartient à l'ensemble Z défini par :

$$Z = \left\{ a \in [R] \mid (p_p^*(a) \in X \wedge p_i^*(a) \in Y) \vee (p_p^*(a) \notin X \wedge p_i^*(a) \notin Y) \right\}.$$

Le jeu $WG(X, Y)$ peut donc être vu comme le jeu $G(R, Z)$. Puisque les projections sont continues et que les ensembles X et Y sont boréliens, Z est borélien dans $[R]$. Le jeu $G(R, Z)$ est ainsi borélien, donc déterminé par le Théorème 2.9. Les jeux de Wadge sur des ensembles boréliens sont donc déterminés.

Supposons tout d'abord que c'est le joueur II qui possède une stratégie gagnante dans le jeu $WG(X, Y)$. On peut voir cette stratégie comme une application monotone $\varphi : S \longrightarrow T$ conservant la longueur. Cette application induit une application continue $\varphi^* : [S] \longrightarrow [T]$. Mais puisque la stratégie φ est gagnante, pour II, on a :

$$x \in X \Longleftrightarrow \varphi^*(x) \in Y,$$

d'où $X \leq_W Y$.

Pour le cas où c'est I qui possède une stratégie gagnante dans le jeu $WG(X, Y)$, on remarque simplement que I gagne celui-ci si et seulement si $(x \notin X \Leftrightarrow y \in Y)$. Donc par le même raisonnement que ci-dessus, si I possède une stratégie gagnante dans le jeu $WG(X, Y)$, alors $Y \leq_W [S] \backslash X$.

□

La preuve du Lemme de Wadge est basée sur la détermination des boréliens. Il est intéressant de noter qu'il existe une preuve du Lemme de Wadge due à Louveau et Saint-Raymond n'utilisant pas la détermination des ensembles de Borel ; mais d'après Martin celle-ci serait « [...] beaucoup plus longue et plus complexe que la combinaison des preuves de la détermination de boréliens et du Lemme de Wadge »[1].

[1] D.A. Martin, *Mathematical evidence*, in [1] p.226.

La relation $\equiv_W$ est une relation d'équivalence, dont les classes, notées $[X]_W$ sont appelées les *degrés de Wadge*. La relation $\leq_W$ induit une relation $\leq$ sur les degrés de Wadge :

$$[X]_W \leq [Y]_W \Longleftrightarrow X \leq_W Y.$$

Celle-ci est un ordre partiel. En effet, puisque d'après le Lemme 3.2 la relation $\leq_W$ est un préordre, $\leq$ en est un aussi. Ne reste plus qu'à vérifier l'antisymétrie, mais par définition si $[X]_W \leq [Y]_W$ et $[Y]_W \leq [X]_W$, cela signifie que $X \leq_W Y$ et $Y \leq_W X$. Ainsi $X =_W Y$, et donc $[X]_W = [Y]_W$.

Même si ce n'est pas tout à fait un ordre total, le Lemme de Wadge nous assure que l'on n'en est pas loin. De fait, un degré de Wadge donné $[X]_W$ est comparable à tous les autres à l'exception de $[A^\omega \backslash X]_W$ s'ils sont différents. En effet, soit un autre degrés de Wadge $[Y]_W$; le Lemme de Wadge nous assure que l'on a

$$X \leq_W Y \qquad \text{ou} \qquad A^\omega \backslash Y \leq_W X,$$

mais aussi

$$Y \leq_W X \qquad \text{ou} \qquad A^\omega \backslash X \leq_W Y.$$

Le seul cas où X et Y sont incomparable serait celui où

$$A^\omega \backslash X \leq_W Y \qquad \text{et} \qquad A^\omega \backslash Y \leq_W X.$$

Mais par définition de la réduction continue, $A^\omega \backslash Y \leq_W X$ est équivalent à $Y \leq_W A^\omega \backslash X$; on aurait ainsi $A^\omega \backslash X \leq_W Y$ et $Y \leq_W A^\omega \backslash X$, et donc $Y \equiv_W A^\omega \backslash X$, c'est à dire $[Y]_W = [A^\omega \backslash X]_W$.

Cette dernière remarque nous amène, afin d'avoir un ordre total, à considérer une relation d'équivalence un peu plus grossière :

$$X \equiv_W^* Y \Longleftrightarrow X \equiv_W Y \text{ ou } X \equiv_W A^\omega \backslash Y,$$

dont les classes seront notées $[X]_W^*$ et vérifient :

$$[X]_W^* = [X]_W \cup [A^\omega \backslash X]_W.$$

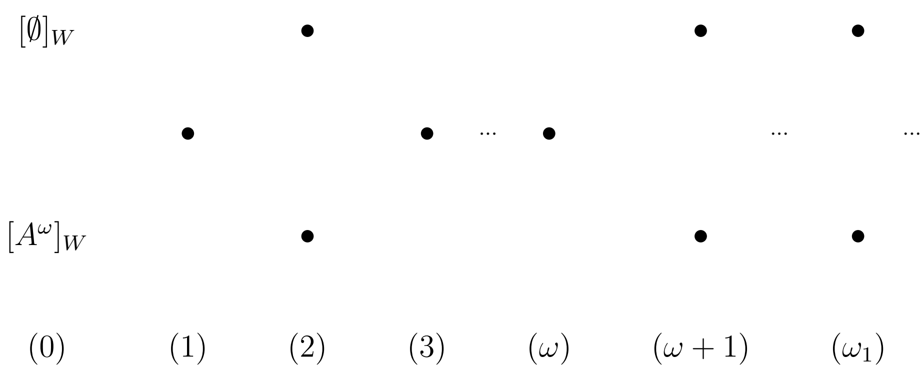
L'ensemble de ces classes sera noté W^*, et l'ordre induit sur celui-ci est défini par :

$$[X]_W^* \leq^* [Y]_W^* \Longleftrightarrow X \leq_W Y \text{ ou } X \leq_W A^\omega \backslash Y.$$

Cet ordre est finalement, d'après le Lemme de Wadge, un ordre total.

Théorème 3.4. (Wadge, Martin). *La relation d'ordre $\leq^*$ sur W^* est un bon ordre.*

La relation d'ordre $\leq^*$ nous permet donc de mettre une hiérarchie sur W^*. En revenant un peu en arrière, on a donc une hiérarchie presque linéaire des degrés de Wadge. Pour terminer cette partie, nous allons énoncer quelques propriétés intéressantes des degrés de Wadge. Un degré de Wadge $[X]_W$ est dit *self-dual* si $[X]_W = [A^\omega \backslash X]$. Si $[X]_W$ est self-dual et $[Y]^*_W$ le successeur de $[X]^*_W$ dans la hiérarchie sur W^*, alors $[Y]_W$ n'est pas self-dual, et vice-versa. De plus, le plus petit élément de la hiérarchie est $[\emptyset]^*_W = [\emptyset]_W \cup [A^\omega]_W$. A un étage correspondant à un ordinal limite λ dans la hiérarchie sur W^*, on trouve un degré self-dual si la cofinalité de λ est ω, et un degré non self-dual si celle-ci est strictement supérieure. Le diagramme suivant illustre ainsi l'ordre partiel sur les degrés de Wadge :



L'ordre sur les degrés de Wadge munit ainsi d'une sorte de hiérarchie les ensembles de Borel, appelée la *hiérarchie de Wadge*. Puisque les classes additives et multiplicatives sont closes par préimages de fonctions continues, elles forment des segments initiaux de la hiérarchie de Wadge ; néanmoins, la hiérarchie de Wadge est beaucoup plus détaillée que celle donnée par les classes Σ^0_ξ et Π^0_ξ, et est d'ailleurs beaucoup plus haute : si l'alphabet est de cardinalité dénombrable par exemple, les ensembles Σ^0_3-complets, c'est à dire les ensembles de Σ^0_3 qui ne sont pas dans Π^0_3, apparaîtront dans la hiérarchie de Wadge au niveau $\omega_1^{\omega_1}$. Par ailleurs, il est intéressant de noter qu'il est possible, dans une certaine mesure, de construire les degrés de Wadge à partir d'opérations booléennes sur les degrés inférieurs, cette approche due à Louveau est exposée dans l'article [11].

3.2 Une extension : les quasi-boréliens

Dans cette partie, nous allons nous intéresser à la détermination d'une classe d'ensembles étendant celle des boréliens : les *quasi-boréliens*. En fait, cette nouvelle classe correspond exactement aux boréliens, à la seule différence que l'on demande une propriété de clôture supplémentaire, celle selon l'union séparée. Les résultats qui suivent ont été prouvés par Martin en 1990 et sont exposés dans l'article [15].

Soit X un espace topologique, et $(B_j)_{j\in J}$ une collection de sous-ensembles de X. L'ensemble $D \subseteq X$ est l'*union séparée* des $(B_j)_{j\in J}$ si

(i) $D = \bigcup_{j\in J} B_j$;

(ii) il existe une collection d'ouverts de base disjoints $(O_j)_{j\in J}$ de X tels que pour tout j dans J, $B_j \subseteq O_j$.

Cette définition générale mérite d'être quelque peu explicitée dans notre cas. Nous nous intéressons au corps d'un arbre T, les ouverts de bases sont donc les ensembles $V_s = s\hat{}[T_s]$, avec s dans T. L'ensemble $X \subseteq [T]$ provient donc d'une union séparée si et seulement si il existe $S \subseteq T$ et une famille de sous-ensembles $(B_s)_{s\in S}$ de $[T]$ tels que :

(i) S est une antichaîne ;

(ii) pour tout $s \in S$, $B_s \subseteq V_s$;

(iii) $X = \bigcup_{s\in S} B_s$.

Nous pouvons maintenant définir la classe des quasi-boréliens.

Définition 3.5. Soit T un arbre élagué non vide sur un ensemble non vide A. La classe des ensembles *quasi-boréliens* de $[T]$, notée $\mathcal{QB}(T)$, est la plus petite classe de sous-ensembles de $[T]$ contenant les ouverts et vérifiant les propriétés de clôture suivantes :

(1) si $X \in \mathcal{QB}(T)$, alors $[T]\backslash X \in c\mathcal{QB}(T)$;

(2) si pour tout entier i , $X_i \in \mathcal{QB}(T)$, alors $\bigcup_{i\in\omega} X_i \in \mathcal{QB}(T)$;

(3) toute union séparée d'éléments de $\mathcal{QB}(T)$ est dans $\mathcal{QB}(T)$.

On se permettra d'omettre T et de noter $\mathcal{QB}$ par la suite s'il n'y a pas d'ambiguïté sur l'espace topologique auquel la classe se rapporte.

Cette définition par le haut nous assure que les quasi-boréliens généralisent bien les boréliens. En effet, $\mathcal{QB}(T)$ est en particulier une collection de sous-ensembles de $[T]$ contenant les ouverts, et close par union dénombrable et par complémentation, donc par minimalité de $\mathcal{B}(T)$, $\mathcal{B}(T) \subseteq \mathcal{QB}(T)$. En fait, celles-ci coïncident si T est de cardinalité dénombrable, et sont strictement incluses l'une dans l'autre sinon.

Proposition 3.6. *Soit T un arbre élagué non vide sur un ensemble non vide A. Si T est de cardinalité dénombrable, on a $\mathcal{B}(T) = \mathcal{QB}(T)$.*

Démonstration. On remarque que l'union séparée de sous-ensembles de $[T]$ est une union de taille forcément inférieure ou égale à la cardinalité de T, donc si T est dénombrable, toute union séparée de sous-ensembles de $[T]$ est en particulier une union dénombrable de sous-ensembles de $[T]$. D'où $\mathcal{B}(T) = \mathcal{QB}(T)$.

□

A l'image des ensembles de Borel, il est possible de stratifier la classe des quasiboréliens sur $[T]$ en une hiérarchie de la manière suivante :

(1) $X \in \Sigma_1^*(T)$ si et seulement si X est ouvert ;
(2) pour tout ordinal non nul α, X appartient à $\Pi_\alpha^*(T)$ si et seulement si son complémentaire $[T] \backslash X$ appartientà $\Sigma_\alpha^*(T)$;
(3) pour tout ordinal non nul α, $X \in \Xi_\alpha^*(T)$ si et seulement si X est l'union séparée d'ensembles dans $\Pi_\alpha^*(T)$;
(4) si $\alpha > 1$, alors $X \in \Sigma_\alpha^*(T)$ si et seulement si X est une union dénombrable d'ensembles dans $\bigcup_{\beta<\alpha} \Xi_\beta^*(T)$.

S'il n'y a pas d'ambiguïté, on notera Ξ_α^*, Π_α^* et Σ_α^* pour $\Xi_\alpha^*(T)$, $\Pi_\alpha^*(T)$ et $\Sigma_\alpha^*(T)$. On a $\mathcal{QB}(T) = \bigcup_{1\leq\alpha<|T|^+} \Sigma_\alpha^*(T)$.

Nous allons maintenant prouver que les quasi-boréliens sont déterminés : pour tout arbre élagué non-vide T sur A, et tout $X \in \mathcal{QB}(T)$, le jeu de Gale-Stewart $G(T, X)$ est déterminé. Pour ce faire, nous allons utiliser le même cheminement que pour la preuve du Théorème 2.9, et raisonner par récurrence sur la complexité de l'ensemble de gain. Néanmoins, il va nous falloir quelques outils supplémentaires pour traiter les classes Ξ_α^* et l'union séparée. En premier lieu, il nous faut définir un nouveau type de recouvrement.

Définition 3.7. Soit T un arbre élagué non vide sur A, et $s \in T$. Un s-recouvrement de T est un recouvrement $(\tilde{T}, \pi, \varphi)$ de T tel que T et $\tilde{T}$ coïncident sur tous les éléments qui ne sont pas des extensions propres de s, c'est à dire :

$$T \backslash T_s = \tilde{T} \backslash \tilde{T}_s.$$

De plus, π doit être l'identité sur $\tilde{T}\backslash\tilde{T}_s$, et pour toute stratégie $\tilde{\sigma}$ sur $\tilde{T}$ (vue comme une application), $\varphi(\tilde{\sigma})|(T\backslash T_s) = \tilde{\sigma}|(\tilde{T}\backslash\tilde{T}_s)$.

Cette définition, le Lemme 3.8 que nous allons prouver maintenant, qui se trouve être un analogue du Lemme 2.8 pour les s-recouvrements, et le Lemme 3.9 nous permettrons de traiter les union-séparées dans la preuve de la détermination des quasi-boréliens.

Lemme 3.8. *Soit T un arbre élagué non vide, $S \subseteq T$ une antichaîne, et k un entier. Supposons que pour tout $s \in S$, il existe (T^s, π_s, φ_s) qui est à la fois un k-recouvrement et un s-recouvrement de T. Alors il existe un k-recouvrement $(\tilde{T}, \pi, \varphi)$ de T et des familles d'applications $(\tilde{\pi}_s)_{s\in S}$ et $(\tilde{\varphi}_s)_{s\in S}$ telles que pour tout s dans S :*

(i) *$(\tilde{T}, \tilde{\pi}_s, \tilde{\varphi}_s)$ est un k-recouvrement de T^s ;*

(ii) *$\pi = \pi_s \circ \tilde{\pi}_s$ et $\varphi = \varphi_s \circ \tilde{\varphi}_s$.*

Démonstration. On définit $\tilde{T}$ comme l'union des arbres $s\hat{\ }T^s{}_s$ et $\bigcap_{s\in S} T\backslash T_s$:

$$\tilde{t} \in \tilde{T} \iff \begin{cases} \exists s \in S\left((s \subseteq \tilde{t}) \wedge (\tilde{t} \in T^s)\right), \text{ ou} \\ (\tilde{t} \in T) \wedge (\forall s \in S(s \perp t \vee t \subseteq s)). \end{cases}$$

Ceci étant fait, on définit π de manière naturelle suivant si l'on est sur un $s\hat{\ }T^s{}_s$ ou sur $\bigcap_{s\in S} T\backslash T_s$:

$$\pi(\tilde{t}) = \begin{cases} \pi_s(\tilde{t}) & \text{si } s \in S \text{ et } s \subseteq \tilde{t}; \\ \tilde{t} & \text{si } \forall s \in S(s \perp t \vee t \subseteq s). \end{cases}$$

De manière similaire, on définit φ. Soit $\tilde{\sigma}$ une stratégie sur $\tilde{T}$ vue comme une application, on a alors

$$(\varphi(\tilde{\sigma}))(t) = \begin{cases} (\varphi_s(\tilde{\sigma}))(t) & \text{si } s \in S \text{ et } s \subseteq \tilde{t}; \\ \tilde{\sigma}(t) & \text{si } \forall s \in S(s \perp t \vee t \subseteq s). \end{cases}$$

Pour $s \in S$, on définit :

$$\tilde{\pi}_s(\tilde{t}) = \begin{cases} \pi_{s'}(\tilde{t}) & \text{si } s' \in (S\backslash\{s\}) \text{ et } s' \subseteq \tilde{t}; \\ \tilde{t} & \text{si } \forall s' \in (S\backslash\{s\})(s' \perp t \vee t \subseteq s'). \end{cases}$$

Soit $\tilde{\sigma}$ une stratégie sur $\tilde{T}$ vue comme une application, et $s \in S$, on pose alors :

$$(\tilde{\varphi}_s(\tilde{\sigma}))(t) = \begin{cases} (\varphi_{s'}(\tilde{\sigma}))(t) & \text{si } s' \in (S \backslash \{s\}) \text{ et } s' \subseteq \tilde{t}; \\ \tilde{\sigma}(t) & \text{si } \forall s' \in (S \backslash \{s\})(s' \perp t \vee t \subseteq s'). \end{cases}$$

Vérifions maintenant que les objets définis ci-dessus vérifient bien les propriétés souhaitées.

Prouvons tout d'abord que pour tout $s \in S$ et tout $\tilde{t} \in \tilde{T}$, $\pi(\tilde{t}) = \pi_s \circ \tilde{\pi}_s(\tilde{t})$. Nous avons deux cas : soit il existe un $s' \in S$ différent de s tel que $\tilde{t}$ appartient à $s'\hat{~}T^{s'}{}_{s'}$, soit $\tilde{t}$ appartient à $s\hat{~}T^s \cup \bigcap_{s' \in S \backslash \{s\}} T \backslash T_{s'}$. Dans le premier cas, on aura $\tilde{\pi}_s(\tilde{t}) = \pi_{s'}(\tilde{t}) \in T \backslash T_s$, d'où $\pi_s \circ \tilde{\pi}_s(\tilde{t}) = \pi_{s'}(\tilde{t}) = \pi(\tilde{t})$.

Le deuxième cas se subdivise en deux : soit $\tilde{t}$ appartient à $s\hat{~}T^s$, soit $\tilde{t}$ appartient à $\bigcap_{s' \in S \backslash \{s\}} T \backslash T_{s'}$. Si $\tilde{t}$ appartient à $s\hat{~}T^s$, alors $\tilde{\pi}_s(\tilde{t}) = \tilde{t}$, et donc $\pi_s \circ \tilde{\pi}_s(\tilde{t}) = \pi_s(\tilde{t}) = \pi(\tilde{t})$. Si $\tilde{t}$ appartient à $\bigcap_{s' \in S \backslash \{s\}} T \backslash T_{s'}$, alors $\tilde{\pi}_s(\tilde{t}) = \tilde{t}$, et donc $\pi_s \circ \tilde{\pi}_s(\tilde{t}) = \pi_s(\tilde{t}) = \tilde{t} = \pi(\tilde{t})$. Nous avons ainsi prouvé que $\pi(\tilde{t}) = \pi_s \circ \tilde{\pi}_s(\tilde{t})$; la relation $\varphi = \varphi_s \circ \tilde{\varphi}_s$ se démontre de manière similaire.

Ainsi défini, $(\tilde{T}, \pi, \varphi)$ vérifie bien les conditions (i), (ii) et (iii) de la définition d'un recouvrement. Il nous reste donc à prouver que pour toute stratégie $\tilde{\sigma}$ sur $\tilde{T}$, si $x \in [T]$ est consistant avec $\varphi(\tilde{\sigma})$, alors il existe $\tilde{x} \in [\tilde{T}]$ consistant avec $\tilde{\sigma}$ tel que $\pi^*(\tilde{x}) = x$. Mais si pour tout $s \in S$, s n'est pas un préfixe de x, alors on peut poser de manière cohérente avec les définitions de π^* et φ que $\tilde{x} = x$. Supposons donc qu'il existe $s \in S$ tel que $s \subseteq x$. Puisque $\varphi(\tilde{\sigma}) = \varphi_s \circ \tilde{\varphi}_s(\tilde{\sigma})$, x est consistant avec $\varphi_s \circ \tilde{\varphi}_s(\tilde{\sigma})$. Mais (T^s, π_s, φ_s) est un recouvrement de T, il existe donc $\tilde{x} \in [T^s]$ de sorte que $\tilde{x}$ est consistant avec $\tilde{\varphi}_s(\tilde{\sigma})$ et $\pi^*_s(\tilde{x}) = x$. Or $\tilde{\varphi}_s(\tilde{\sigma}) = \tilde{\sigma}$ sur $s\hat{~}\tilde{T}_s = s\hat{~}T^s{}_s$, donc $\tilde{x}$ appartient à $[\tilde{T}]$ et est consistant avec $\tilde{\sigma}$. Comme de plus $\pi|(s\hat{~}\tilde{T}_s) = \pi_s|(s\hat{~}\tilde{T}_s)$, on a finalement $\pi^*(\tilde{x}) = \pi^*_s(\tilde{x}) = x$.

On démontre de manière similaire que pour tout $s \in S$, $(\tilde{T}, \tilde{\pi}_s, \tilde{\varphi}_s)$ est un k-recouvrement de T^s ; ce qui achève la preuve du lemme.

□

La preuve du Lemme 3.8 met en évidence le fait que les parties non triviales des recouvrements sont, en quelque sorte, séparées, et que nous pouvons donc les combiner sans qu'ils interfèrent entre eux. L'implication importante de ce lemme est que tout sous-ensemble de $[T]$ dénoué par l'un des recouvrements (T^s, π_s, φ_s) est aussi dénoué par $(\tilde{T}, \pi, \varphi)$. Il nous reste à prouver un dernier lemme qui, combiné avec le précédent, nous permettra de passer des ensembles Π^*_β aux ensembles Ξ^*_β dans la preuve par récurrence du théorème.

Lemme 3.9. *Supposons qu'il existe un ordinal non nul β tel que pour tout arbre élagué non vide T et tout ensemble $X \in \Pi^*_\beta(T)$, X est déterminé. Soient maintenant un arbre élagué non vide T, $s \in T$ et $Y \in \Pi^*_\beta(T)$ de sorte que $Y \subseteq [s\hat{\ }T_s]$, alors il existe un k-recouvrement de T qui est aussi un s-recouvrement de T et qui dénoue Y.*

Démonstration. Soient $T' = T_s$ et $Y' = Y_s \subseteq [T']$. On remarque que $Y' \in \Pi^*_\beta(T')$, il existe donc un k-recouvrement $(\tilde{T'}, \pi', \varphi')$ de T' qui dénoue Y'. Mais à partir de ce dernier, on peut définir un k-recouvrement $(\tilde{T}, \pi, \varphi)$ sur T en posant $\tilde{T} = s\hat{\ }\tilde{T}'$ et en définissant les applications π et φ de la manière suivante. Soit $\tilde{t}$ un élément de $\tilde{T}$, on pose alors :

$$\pi(\tilde{t}) = \begin{cases} s\hat{\ }\pi'(\tilde{t}') & \text{si } \tilde{t} = s\hat{\ }\tilde{t}'; \\ \tilde{t} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Si $\tilde{\sigma}$ est une stratégie sur $\tilde{T}$, on définit $\tilde{\sigma'}$ la stratégie sur $\tilde{T}'$ donnée par $\tilde{\sigma'}(\tilde{t}') = \tilde{\sigma}(s\hat{\ }\tilde{t}')$. Soient $\tilde{\sigma}$ une stratégie sur $\tilde{T}$ et t un élément de T, on pose alors :

$$(\varphi(\tilde{\sigma}))(t) = \begin{cases} (\varphi'(\tilde{\sigma'}))(t') & \text{si } t = s\hat{\ }t'; \\ \tilde{\sigma}(t) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ainsi défini, $(\tilde{T}, \pi, \varphi)$ est à la fois un k-recouvrement et un s-recouvrement de T qui dénoue Y.

□

A l'image de ce que nous avons fait pour les ensembles de Borel, nous prouvons la proposition suivante, dont la détermination des quasi-boréliens sera un corollaire.

Proposition 3.10. *Soient T un arbre élagué non vide sur un ensemble non vide A et X un sous-ensemble quasi-borélien de $[T]$. Alors pour tout entier k, il existe un k-recouvrement de $[T]$ qui dénoue X.*

Démonstration. Soit T un arbre élagué non vide sur un ensemble non vide A, et k un entier. Nous allons raisonner par récurrence transfinie sur la complexité des ensembles en prouvant que pour tout ordinal non nul $\alpha < |T|^+$, si $X \in \Sigma^*_\alpha$, alors il existe un k-recouvrement de $[T]$ qui dénoue X.

L'initialisation de la récurrence ne pose aucun problème, puisque $\Sigma_1^0 = \Sigma_1^*$ et $\Pi_1^0 = \Pi_1^*$, le Théorème 2.2 nous assure que pour tout $X \in \Sigma_1^*$, et pour tout $Y \in \Pi_1^*$, il existe un k-recouvrement de T qui dénoue X, et un autre qui dénoue Y.

Soit un ordinal $\alpha > 1$. Supposons que pour tout ordinal non nul $\beta < \alpha$, le théorème est vrai pour tout ensemble dans Σ_β^*. Alors le théorème est aussi vrai pour tout ensemble dans Π_β^* Pour prouver qu'il en est de même pour les ensembles Ξ_β^*, il va nous falloir travailler quelque peu. Soit $X \in \Xi_\beta^*$, par définition, cela signifie qu'il existe une antichaîne $S \subseteq T$ et une famille $(Y_s)_{s\in S} \subseteq \Xi_\beta^*$ telle que :

$$\forall s \in S\,(Y_s \subseteq [s\hat{}T_s]) \qquad \text{et} \qquad X = \bigcup_{s\in S} Y_s.$$

D'après le Lemme 3.9, il existe pour chaque $s \in S$ un triplet (T^s, π_s, φ_s) qui soit à la fois un k-recouvrement et un s-recouvrement de T dénouant Y_s. On utilise maintenant le Lemme 3.8 pour trouver un k-recouvrement $(\tilde{T}, \pi, \varphi)$ de T qui dénoue chaque Y_s. Ainsi, $(\pi^*)^{-1}(X) = \bigcup_{s\in S}(\pi^*)^{-1}(Y_s)$ est donc ouvert dans $[\tilde{T}]$ comme union d'ouverts fermés. Malheureusement, $(\pi^*)^{-1}(X)$ n'est pas forcément ouvert fermé, il nous faut donc effectuer une dernière étape pour trouver un k-recouvrement de T dénouant X. Puisque $(\pi^*)^{-1}(X)$ est ouvert, il existe d'après le Théorème 2.2 un k-recouvrement $(\tilde{T}', \pi', \varphi')$ de $\tilde{T}$ dénouant $(\pi^*)^{-1}(X)$. Mais alors le recouvrement composé $(\tilde{T}', \pi \circ \pi', \varphi \circ \varphi')$ est un k-recouvrement de T qui dénoue X.

Nous avons donc prouvé que pour tout ordinal non nul $\beta < \alpha$, il existe pour tout ensemble $X \subseteq [T]$ appartenant aux classes Σ_β^*, Π_β^* ou Ξ_β^* un k-recouvrement de T qui dénoue X. Prouvons maintenant que c'est aussi le cas pour les ensembles de la classe Σ_α^*. Soit $X \in \Sigma_\alpha^*$, par définition il existe une famille $(Y_i)_{i\in\omega}$ de sous-ensembles de $[T]$ tels que :

(i) pour tout entier i, $Y_i \in \Xi_{\beta_i}^*$, avec $\beta_i < \alpha$;

(ii) $X = \bigcup_{i\in\omega} Y_i$.

On utilise alors exactement le même argument que dans la démonstration de la Proposition 2.6 pour conclure à l'existence d'un k-recouvrement de T dénouant X, ce qui achève la preuve.

□

Théorème 3.11. (Martin, 1990). *Soit T un arbre élagué non vide sur A, et $X \subseteq [T]$ un ensemble quasi-borélien. Alors le jeu $G(T, X)$ est déterminé.*

3.3 Une limite : les ensembles projectifs

On l'a vu grâce aux Théorèmes 2.9 et 3.11, il est possible de prouver dans le sytème d'axiomes ZFC que les ensembles boréliens, et même quasi-boréliens sont déterminés. Il semble alors pertinent de se demander si l'on peut aller plus loin que les quasiboréliens, si l'on peut prouver dans ZFC la détermination d'autres classes d'ensembles, plus compliquées. Nous verrons qu'il n'en est rien, et que la détermination des ensembles analytiques est déjà équivalente à une hypothèse de grand cardinal. Pour plus de détails sur les hypothèses de grands cardinaux, nous nous permettons de renvoyer le lecteur intéressé au livre de Kanamori [7].

Définition 3.12. Soit T un arbre élagué non vide sur un ensemble non vide A. Soit $X \subseteq [T]$, on dit que X est *analytique* si et seulement si il existe $Y \subseteq [T] \times \omega^\omega = [T] \times [\omega^{<\omega}] = [T \times \omega^{<\omega}]$ tel que X est la projection naturelle de Y sur $[T]$, c'est à dire :

$$\forall x \in [T]\left((x \in X) \leftrightarrow (\exists w \in \omega^\omega((x,w) \in Y))\right).$$

Un ensemble $X \subseteq [T]$ est dit *coanalytique* si son complémentaire est analytique. La classe des sous-ensembles analytiques de $[T]$ est notée $\Sigma_1^1(T)$ et celle des coanalytiques $\Pi_1^1(T)$; on note par ailleurs $\Delta_1^1(T)$ leur intersection. Si il n'y a pas d'ambiguïté, on omettra le T dans les notations.

Le théorème suivant, dû à Martin[2], prouve que les classes des ensembles analytiques et coanalytiques généralisent celles des boréliens et des quasi-boréliens.

Théorème 3.13. *Soit T un arbre élagué non vide sur un ensemble non vide A. la classe des quasi-boréliens de T coïncide avec $\Delta_1^1(T)$:*

$$\mathcal{QB}(T) = \Delta_1^1(T).$$

Le Théorème 3.11 prouvé dans la section précédente a donc le corollaire suivant.

Corollaire 3.14. *Soit T un arbre élagué non vide sur A, et $X \in \Delta_1^1(T)$. Alors le jeu $G(T,X)$ est déterminé.*

[2] [15], pp. 281 - 282.

Ainsi, dans le cadre des axiomes de ZFC, on peut prouver la détermination des ensembles Δ^1_1. Par contre, nous allons voir qu'il faut ajouter quelque chose à notre système d'axiomes pour pouvoir prouver que les ensembles analytiques sont déterminés.

Définition 3.15. Soit S un ensemble non vide, on dira qu'un ensemble F de parties de S est un *filtre* sur S si et seulement si il vérifie les conditions suivantes :

(i) si A et B sont dans F, alors $A \cap B \in F$;
(ii) si A est dans F et B inclus dans S tel que $A \subseteq B$, alors $B \in F$;
(iii) $S \in F$;
(iv) $\emptyset \notin F$;
(v) pour tout $x \in S$, $\{x\} \notin F$.

On dira que F est un *ultrafiltre*, si de plus il vérifie l'une des trois conditions équivalentes suivantes :

(i) pour tout filtre F' sur S, $F \subseteq F'$ implique $F = F'$;
(ii) $A \cup B \in F$ implique $A \in F$ ou $B \in F$;
(iii) pour tout $A \subseteq S$, soit A soit $S \backslash A$ appartient à F.

De plus, pour un cardinal λ, on dira qu'un filtre F est λ-*complet* si et seulement si pour tout ordinal $\gamma < \lambda$ et toute famille $\{X_\alpha \mid \alpha < \gamma\}$ incluse dans F, on a $\bigcap_{\alpha<\gamma} X_\alpha \in F$.

Nous pouvons maintenant définir les cardinaux *mesurables*.

Définition 3.16. Un cardinal κ strictement plus grand que ω est dit *mesurable* si et seulement si il existe un ultrafiltre κ-complet sur κ.

Nous aurons besoin d'une propriété des cardinaux mesurables, dont la définition nécessite l'introduction de la notion d'ensemble homogène.

Définition 3.17. Soit A un ensemble et n un entier non nul. On pose :

$$[A]^n = \{X \subseteq A \mid |X| = n\},$$

l'ensemble des parties de A de cardinalité n. Par extension, $[A]^{<\omega}$ sera l'ensemble des parties de A de cardinalité finie. Soit maintenant $(X_i)_{i \in I}$ une partition de $[A]^n$; on dit que l'ensemble $H \subseteq A$ est *homogène* pour la partition s'il existe un $i \in I$ tel que $[H]^n \subseteq X_i$, c'est à dire que tous les éléments de H de taille n sont dans le même morceau de la partition. En généralisant, si $(X_i)_{i\in I}$ est une partition de $[A]^{<\omega}$, l'ensemble $H \subseteq A$ est dit homogène pour la partition s'il existe un $i \in I$ tel que $[H]^{<\omega} \subseteq X_i$.

Lemme 3.18. *Soit κ un cardinal mesurable, et soit $(X_i)_{i\in I}$ une partition de $[\kappa]^{<\omega}$ de sorte que $|I| < \kappa$. Alors il existe $H \subseteq \kappa$ de taille κ homogène pour cette partition.*

L'existence d'un cardinal mesurable n'est pas prouvable dans le système d'axiomes ZFC ; et le supposer renforce strictement celui-ci. Nous allons nous attacher à démontrer que l'existence d'un cardinal mesurable implique la détermination des ensembles analytiques.

Avant de prouver ce résultat, il nous reste une dernière observation à faire concernant les ensembles analytiques d'un arbre $[T]$ sur A. Nous avons vu que ceux-ci sont les projections sur $[T]$ des fermés de

$$[T \times \omega^{<\omega}] \subseteq [A^{<\omega} \times \omega^{<\omega}] = (A \times \omega)^{\omega} .$$

Mais d'après la Proposition 1.3, les fermés de $(A \times \omega)^{\omega}$ sont exactement les corps des arbres élagués sur $A \times \omega$. Les fermés de $[T \times \omega^{<\omega}]$ sont donc les corps des arbres élagués S sur $A \times \omega$ tels que si $(s_1, s_2) \in S$, alors $s_1 \in T$. Dénotons cette classe d'arbres par P_T. Soit $S \in P_T$, pour tout $x \in [T]$, posons $S(x) = \{s_2 \in \omega^{<\omega} | (x|(long(s_2)), s_2) \in S\}$; ainsi défini, $S(x)$ est un arbre sur ω. Soit maintenant $X \in \Sigma^1_1(T)$, et soit $S \in P_T$ tel que X soit la projection de S sur T ; on a alors :

$$x \in X \text{ si et seulement si } [S(x)] \neq \emptyset.$$

On munit l'ensemble des suites finies sur ω de l'ordre de Kleene-Brouwer $\preceq$ tel que :

$$s \preceq t \longleftrightarrow \begin{cases} t \subseteq s & \text{, ou} \\ s_n \leq t_n & \text{si } s \perp t \text{ et } n \text{ est le plus petit entier tel que } s_n \neq t_n. \end{cases}$$

On a alors que :

$$x \in X \text{ si et seulement si } S(x) \text{ n'est pas bien ordonné par } \preceq .$$

Nous pouvons désormais prouver le théorème suivant, prouvé pour $A = \omega$ par Martin en 1970. La preuve originale peut être lue dans l'article [12], la démonstration que nous exposons ici est quant à elle une adaptation de la preuve donnée par Jech dans [6][3].

[3]pp. 637 – 639.

Théorème 3.19. *Soit T un arbre élagué non vide sur un ensemble A non vide. S'il existe un cardinal mesurable κ tel que $|A| < \kappa$, alors les ensembles $\Sigma^1_1(T)$ sont déterminés.*

Démonstration. Soit κ un cardinal mesurable et $X \subseteq [T]$ un ensemble analytique. Pour prouver que le jeu $G(T,X)$ est déterminé, nous allons définir un jeu auxiliaire G^* dont on démontrera facilement qu'il est déterminé ; puis nous prouverons que la détermination de G^* implique celle de $G(T,X)$.

Pour pouvoir définir le jeu G^*, on introduit les objets suivants.
Tout d'abord, puisque X est analytique, il existe $S \in P_T$ tel que X soit la projection de S sur T. De plus, on a pour tout $x \in [T]$, l'équivalence $x \in X$ si et seulement si $S(x)$ n'est pas bien ordonné par $\preceq$. Pour toute suite finie t dans T, on pose

$$S(t) = \{s \in \omega^{<\omega} \mid \exists u \in T\,((u \subseteq t) \wedge ((u,s) \in S))\}\,,$$

de sorte que pour tout $x \in [T]$ et tout entier n, $S(x|n)$ est exactement $S(x)|n$. Puisque l'ensemble des suites finies sur ω est de cardinalité dénombrable, on peut en donner une énumération $(u_i)_{i\in\omega}$; on définit alors pour tout $t \in T$ de longueur paire, disons $2n$:

$$K_t = \{u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}\} \cap S(t) \qquad \text{et} \qquad k_t = |K_t|.$$

On remarque que pour tout $t \in T$ de longueur $2n$, $k_t \leq n$, et est donc fini. De plus, on a que pour deux suites s et t de T, si $s \subseteq t$, alors $S(s) \subseteq S(t)$ et $K_s \subseteq K_t$.

Nous somme maintenant prêts à définir le jeu auxiliaire G^*. Les joueurs jouent selon le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{I} : & x_0 \arrow[dr] & & x_1 \arrow[dr] & & \\
& & & & & \ldots \\
\mathrm{II} : & & (y_0, h_0) \arrow[uur] & & (y_1, h_1) &
\end{tikzcd}$$

où les suites $(x_i)_{i\in\omega}$ et $(y_i)_{i\in\omega}$ sont dans A^ω de sorte que la suite résultante $z = (x_0, y_0, x_1, y_1, \ldots)$ appartient à $[T]$. A chaque tour, le joueur II joue en plus une application strictement monotone, c'est à dire un morphisme entre deux bons ordres :

$$h_i : (K_{z_i}, \preceq) \longrightarrow (\kappa, \in),$$

avec $z_i = z|(2i) = (x_0, y_0, \ldots, x_i, y_i)$ et telle que ces applications soient cohérentes, c'est à dire si $i \leq j$,

$$h_i = h_j||(K_{z_i}).$$

Le joueur II gagne si et seulement s'il réussit à suivre ces règles tout le long du jeu. Mais si c'est le cas, alors II a construit, puisque les applications h_i sont cohérentes, une application strictement monotone $h = \lim_{i \to \infty} h_i$ de $(S(z), \preceq)$ dans κ, donc $\preceq$ ordonne bien $S(z)$, ce qui implique que la suite résultante z n'est pas dans X. On peut ainsi voir G^* comme une variante de $G(X,T)$ plus compliquée pour le joueur II : en plus de jouer des éléments de A de sorte que la suite résultante z ne soit pas dans X, il construit une injection de $(S(z), \preceq)$ dans κ. A partir d'une stratégie gagnante pour II dans G^*, on obtient donc directement une stratégie gagnante pour II dans $G(X,T)$.

Par ailleurs, le jeu G^* est déterminé. En effet, si I ne possède pas de stratégie gagnante, cela signifie qu'il ne peut pas empêcher II de jouer selon les règles, et donc, à l'image de la preuve du Théorème 2.2, II a une stratégie gagnante, celle consistant à choisir pour chaque coup une position non perdante. Mutatis mutandis, si II n'a pas de stratégie gagnante, c'est I qui en a une.

Puisque G^* est déterminé, et puisque nous avons vu que si II a une stratégie gagnante dans G^*, alors il en a une dans $G(X,T)$, il ne nous reste plus qu'à prouver que si I a une stratégie gagnante dans G^*, alors il en a une dans $G(X,T)$. Pour ce faire, supposons que σ^* est une stratégie gagnante pour I dans G^*, et construisons une stratégie σ pour I dans $G(X,T)$.

Après $2n+2$ coups, les joueurs ont construits une suite

$$z_n = (x_0, y_0, x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n)$$

et II a constuire une suite d'applications strictement monotones $(h_i)_{i=0}^n$. Remarquons que si l'on connaît l'image $E \subseteq \kappa$ de h_n, alors on connaît l'application elle même puisqu'il n'existe qu'un isomorphisme enre les deux bons ordres $(K_{z_n}, \preceq)$ et $(E, \in)$. Mais puisque pour tout $i < n$,

$$h_i = h_n|(K_{z_n}),$$

on connaît en fait toute la suite $(h_i)_{i=0}^n$. Tant que II joue correctement, la stratégie σ^* ne dépend donc que de la suite résultante et du dernier ensemble joué par II.

Ainsi, σ^* induit une application $F_{z_n} : [\kappa]^{k_{z_n}} \longrightarrow A$, qui à chaque ensemble E de taille finie k_{z_n} dans κ associe l'élément que fait jouer σ^* à I sur G^* si II a joué le couple (y_n, h_n) tel que $E = h_n(K_{z_n})$. Cette définition se généralise à tout entier i et toute suite z_i de longueur $2i$ dans T, et on a ainsi défini une famille de fonctions

$$F_{z_i} : [\kappa]^{k_{z_i}} \longrightarrow A.$$

Chacune de ses fonctions F_{z_i} induit une partition de $[\kappa]^{k_{z_i}}$ en au plus $|A|$ morceaux. Mais puisque κ est mesurable, il existe un ensemble H de taille κ homogène pour chacune de ces partitions. On pose alors $\sigma(z_i) = F_{z_i}(E)$, pour $E \in [H]^{k_{z_i}}$. Par homogénéité de H, la stratégie σ est ainsi bien définie.

Il ne nous reste plus qu'à prouver que σ est bien une stratégie gagnante pour I. Soit $z = (x_0, y_0, x_1, y_1, \ldots)$ une partie de $G(T, X)$ pendant laquelle I a suivi σ, et montrons que $z \in X$. Par l'absurde, supposons que ce n'est pas le cas, on aurait alors que $(S(z), \preceq)$ est un bon ordre. $S(z)$ est un arbre sur ω, il est donc de cardinalité dénombrable. Mais puisque H est de cardinalité κ, il est non dénombrable, il existerait donc une injection h de $(S(z), \preceq)$ dans H. Considérons maintenant la partie de G^* dans laquelle les joueurs construisent la suite z, et II joue une suite d'applications $h_i : K_{z_i} \longrightarrow \kappa$ telle que pour tout entier i :

$$h_i = h|(K_{z_i}).$$

La partie ainsi décrite est gagnée par II qui a réussi à suivre les règles du jeu jusqu'au bout. Mais dans cette partie, I a joué selon σ^*. En effet, on a pour tout entier i :$\sigma(z_i) = \sigma^*(z_i, h(K_{z_i}))$. Mais σ^* est une stratégie gagnante pour I, ce qui mène à une contradiction, démontre que σ est une stratégie gagnante pour I dans $G(X, T)$ et achève la preuve.

□

Nous avons prouvé que l'existence d'un cardinal mesurable implique la détermination des ensembles analytiques. En fait, on peut prouver que la détermination des ensembles analytiques est équivalente à une hypothèse de grand cardinal.

A la lumière des différents résultats énoncés jusqu'ici, on peut légitimement se demander s'il est possible que tous les ensembles soient déterminés, ou en tout cas, puisqu'il est impossible de le démontrer dans ZFC, si l'hypothèse qe tous les ensembles sont déterminés est cohérente avec le système d'axiomes ZFC. On montre dans les paragraphes suivants qu ce n'est pas le cas ; en effet, en supposant l'Axiome du Choix, on exhibe un jeu non déterminé.

Pour définir un jeu de Gale-Stewart non déterminé, nous avons besoin de l'énoncé suivant, strictement plus faible que (AC) mais indépendant des axiomes de ZF.

Lemme de l'Ultrafiltre. *Tout filtre peut être étendu en un ultrafiltre.*

Soit E un ensemble infini, le *filtre de Fréchet* sur E est la collection des sous-ensembles de E dont le complémentaire dans E est fini. Un *ultrafilre libre* est un ultrafiltre contenant le filtre de Fréchet. Le Lemme de l'Ultrafiltre nous assure que tout ensemble infini admet un ultrafiltre libre.

Théorème 3.20. *Soit A un ensemble contenant au moins deux éléments distincts. En supposant (AC), il existe un arbre élagué non vide T sur A et un ensemble $X \subseteq [T]$ tels que le jeu $G(T, X)$ n'est pas déterminé.*

Démonstration. On prouve ce résultat pour un ensemble A de cardinalité infinie. D'après le Théorème de Zermelo, il existe un bon ordre sur A, que l'on notera $\leq$. On définit T de la manière suivante :

$$T = \left\{ s \in A^{<\omega} \mid s_{i-1} < s_i \text{ pour tout } 1 \leq i \leq long(s) \right\}.$$

Pour jouer sur T, les joueurs doivent donc jouer tour à tour des éléments de A de plus en plus grands par rapport à l'ordre $\leq$.

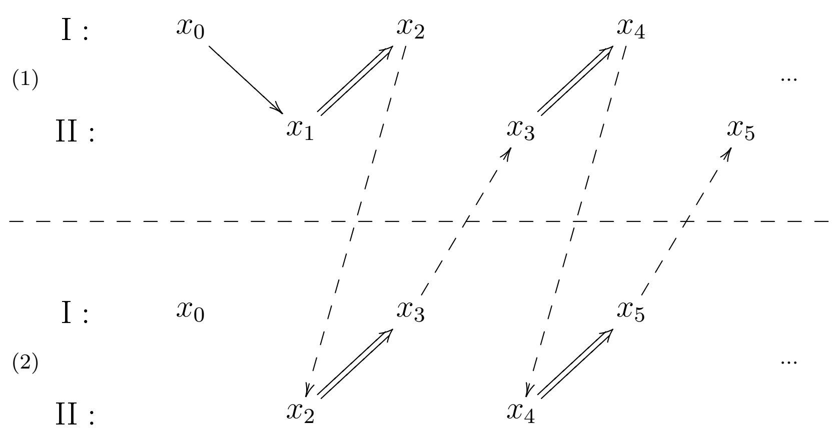
D'après le Lemme de l'Ultrafiltre, il existe $\mathcal{U}$ un ultrafiltre libre sur A. On définit alors pour toute suite infinie $x = (x_0, x_1, \ldots) \in [T]$ le sous-ensemble de A suivant :

$$E_x = \{a \in A \mid a \leq x_0\} \cup \bigcup_{i \in \omega} \{a \in A \mid x_{2i+1} < a \leq x_{2i+2}\}.$$

On définit finalement l'ensemble de gain X :

$$X = \{x \in [T] \mid E_x \in \mathcal{U}\}.$$

Montrons que le jeu $G(T, X)$ ainsi défini n'est pas déterminé. Supposons par l'absurde que le joueur I possède une stratégie gagnante σ. On construit deux parties sur T selon le diagramme suivant :



Dans ces deux parties, I joue selon σ. Si $(x_0) \in \sigma$, I commence à jouer x_0 dans (1) et (2). Puis II joue un élément x_1 de sorte que $x_1 > x_0$ dans (1), la stratégie σ fait donc jouer un x_2 à I, de sorte que $x_2 > x_1$ et $(x_, x_1, x_2) \in \sigma$; on reporte alors x_2 dans la partie (2) comme premier coup de II. La stratégie fait alors jouer un x_3 à I dans (2) de sorte que $x_3 > x_2$ et $(x_0, x_2, x_3) \in \sigma$. On reporte alors x_3 dans la partie (1) comme deuxième coup de II ; la stratégie σ de I lui fait donc jouer un x_4 tel que $x_4 > x_3$ et $(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4) \in \sigma$; et ainsi de suite. On a ainsi construit deux suites infinies y et z issues respectivement des parties (1) et (2). Puisque I a suivi la stratégie gagnante σ dans ces deux parties, on a

$$E_y = \{a \in A \mid a \leq x_0\} \cup \bigcup_{i \in \omega} \{a \in A \mid x_{2i+1} < a \leq x_{2i+2}\} \in \mathcal{U}$$

et

$$E_z = \{a \in A \mid a \leq x_0\} \cup \bigcup_{i \in \omega} \{a \in A \mid x_{2i+2} < a \leq x_{2i+3}\} \in \mathcal{U}.$$

Puisque $\mathcal{U}$ est clos par intersection, $\{a \in A \mid n \leq x_0\} = E_y \cap E_z \in \mathcal{U}$. Mais $\mathcal{U}$ contient le filtre de Fréchet, et $\{a \in A \mid a \leq x_0\}$ est fini car $\leq$ est un bon ordre sur A, donc $A \setminus \{a \in A \mid a \leq x_0\}$ appartient à $\mathcal{U}$. Ainsi

$$\emptyset = \{a \in A \mid a \leq x_0\} \cap (A \setminus \{a \in A \mid a \leq x_0\}) \in \mathcal{U},$$

ce qui contredit la définition d'un filtre, et prouve que I n'a pas de stratégie gagnante pour le jeu $G(T, X)$. On raisonne de la même manière pour prouver que II n'a pas de stratégie gagnante ; par conséquent, le jeu $G(T, X)$ n'est pas déterminé.

$\square$

Conclusion

Dans le prolongement de ce travail, et en particulier de son dernier chapitre, il nous semble intéressant de mentionner en ouverture quelques domaines de réflexion.

Les ensembles analytiques et coanalytiques forment le premier niveau d'une hiérarchie sur une classe d'ensembles dits projectifs. Nous avons prouvé que la détermination des analytiques est équivalente à une hypothèse de grand cardinal, mais que la détermination de tous les jeux va à l'encontre de l'Axiome du Choix ; il est donc naturel de se demander si l'hypothèse que les ensemble projectifs sont déterminés est consistante avec le système d'axiome ZFC, et d'étudier ce que cette hypothèse peut induire sur cette classe d'ensembles. On peut par ailleurs se demander s'il est possible d'étendre la hiérarchie de Wadge aux ensembles analytiques, voire aux ensembles projectifs. Finalement, on peut s'intéresser à l'Axiome de Détermination, axiome assurant que tous les jeux sont déterminés, en lui-même. Si celui-ci est en contradiction avec l'Axiome du Choix, il comporte néanmoins d'intéressantes conséquences, et permet en particulier de prouver que tous les ensembles sont mesurables et ont la propriété de Baire.

Axiomes de Choix

Nous avons à plusieurs reprises mentionné et utilisé l'Axiome du Choix (AC) et certains énoncés plus faibles mais néanmoins non démontrables dans ZF. Dans cette annexe, nous définissons ces différentes notions et prouvons que supposant (AC), il existe un jeu de Gale-Stewart non déterminé.

Une *fonction de choix* pour une famille non vide $(A_i)_{i \in I}$ d'ensembles non vides est une fonction $f : I \longrightarrow \bigcup_{i \in I} A_i$ telle que pour tout $i \in I$, $f(i) \in A_i$. L'Axiome du Choix peut alors s'énoncer de la manière suivante.

Axiome du Choix (AC). *Toute famille non vide d'ensembles non vides possède une fonction de choix.*

Plusieurs énoncés sont équivalents à celui-ci, nous en mentionnerons deux, le Théorème de Zermelo et le Lemme de Zorn. On rappelle qu'un ensemble E est dit bien ordonné s'il est muni d'un ordre tel que toute partie non vide de E possède un plus petit élément.

Théorème de Zermelo. *Tout ensemble peut être bien ordonné.*

Un ensemble muni d'un ordre partiel est dit ordonné inductif si chacun de ses sous-ensembles totalement ordonné, ou *chaînes*, possède un élément maximal.

Lemme de Zorn. *Tout ensemble ordonné inductif possède un élément maximal.*

L'Axiome du Choix diffère des autres axiomes du système ZF puisqu'il postule l'existence d'un ensemble (fonction de choix, bon ordre ou élément maximal suivant la formulation choisie), sans le définir. Ee fait, (AC) est indépendant des axiomes de ZF, c'est à dire qu'on on ne peut le prouver à partir de la théorie ZF. Voyons maintenant quelques énoncés strictement plus faibles que l'Axiome du Choix, mais néanmoins indépendants des axiomes de ZF.

Axiome des Choix Dépendants (DC). *Soit $\mathcal{R} \subseteq A \times A$ une relation d'arité deux sur un ensemble non vide A. Si pour tout $a \in A$, il existe $b \in A$ tel que $a\mathcal{R}b$, alors il existe une suite infinie $(a_0, a_1, \ldots) \in A^\omega$ de sorte que pour tout entier n, on a :*

$$a_n \mathcal{R} a_{n+1}.$$

L'Axiome des Choix Dépendants, conséquence de (AC) mais indépendant des axiomes de ZF implique lui-même l'Axiome des Choix Dénombrables (AC_ω), indépendant lui aussi des axiomes de ZF.

Axiome des Choix Dénombrables ($\mathbf{AC}_\omega$). *Toute famille dénombrables non vide d'ensembles non vides possède une fonction de choix.*

L'Axiome des Choix Dénombrables implique en particulier que toute union dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable. L'Axiome des Choix Dépendants est équivalent à un énoncé en terme d'arbres élagués, forme sous laquelle nous avons d'ailleurs été amenés à l'utiliser.

Proposition. *Soit T un arbre élagué non vide sur un ensemble non vide A. Alors :*

$$\textit{(DC) si et seulement si } [T] \neq \emptyset.$$

Démonstration. Supposons tout d'abord (DC). Soit T un arbre élagué non vide sur un ensemble non vide A ; la relation $\subseteq$ vérifie donc :

$$(\forall s \in T)\,(\exists t \in T)\,(s \subseteq t)$$

Par (DC), il existe une suite $(s_0, s_1, \ldots) \in T^\omega$ telle que pour tout entier naturel n, $s_n \subseteq s_{n+1}$. Définissons maintenant $x \in A^\omega$ par :

$$\forall i \in \mathbb{N}, x|long(s_i) = s_i.$$

Puisque T est un arbre, il est clos par segment initial ; on a ainsi $x \in [T]$, et donc $[T] \neq \emptyset$.

Supposons maintenant que le corps de tout arbre élagué non vide sur un ensemble non vide A est non vide. Soit $\mathcal{R} \subseteq A \times A$ une relation telle que :

$$(\forall a \in A)\,(\exists b \in A)\,(a \mathcal{R} b)\,.$$

Choisissons alors a_0, et construisons par induction un arbre élagué sur A. On pose $T_0 = \{\emptyset, (a_0)\}$, puis, pour tout entier naturel non nul n :

$$T_n = \{(x_0, x_1, \ldots, x_n) \mid (x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) \in T_{n-1} \text{ et } x_{n-1} \mathcal{R} x_n\}\,.$$

Finalement, on pose :

$$T = \bigcup_{n \in \omega} T_n.$$

Ainsi défini, T est élagué et non vide, son corps est donc non vide. Il existe ainsi une suite infinie :

$$x = (a_0, a_1, \ldots) \in [T]$$

laquelle vérifie, par définition de T, $a_n \mathcal{R} a_{n+1}$ pour tout entier naturel n, ce qui prouve (DC) et achève la démonstration.

$\square$

Éléments de topologie

Un *espace topologique* est un couple $(X, \mathcal{T})$ où X est un ensemble et $\mathcal{T}$ une collection de sous-ensembles de X telle que :

(i) $\emptyset \in \mathcal{T}$;

(ii) $X \in \mathcal{T}$;

(iii) si $(U_i)_{i \in I} \subseteq \mathcal{T}$, alors $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}$;

(iv) si $U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{T}$, alors $\bigcap_{i=1}^{n} U_i \in \mathcal{T}$.

La collection $\mathcal{T}$ est une *topologie* sur X, et ses membres des *ouverts*. Un sous-ensemble de X est dit fermé si son complémentaire est ouvert. En particulier, $\emptyset$ et X sont fermés.

Un *sous-espace* d'un espace topologique $(X, \mathcal{T})$ est un sous-ensemble Y de X muni de la topologie induite $\mathcal{T}_Y = \{U \cap Y \mid U \in \mathcal{T}\}$.

Une *base* $\mathcal{B}$ pour une topologie $\mathcal{T}$ est une collection $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ telle que tout ouvert est une union d'éléments de $\mathcal{B}$. Par convention, on pose que l'union vide donne $\emptyset$. Réciproquement, une collection $\mathcal{B}$ de sous-ensembles de X est une base pour une certaine topologie si chaque intersection de deux membres de $\mathcal{B}$ peut être vue comme une union de membres de $\mathcal{B}$, et $\bigcup\{B \mid B \in \mathcal{B}\} = X$.

Un sous-ensemble D de X est dit *dense* si X est le plus petit fermé contenant D. De manière équivalente, D est dense dans $(X, \mathcal{T})$ si son intersection avec chaque ouvert non-vide est non-vide. Un espace topologique est dit *séparable* s'il admet un sous-ensemble dense de cardinalité dénombrable.

Un *espace métrique* est un couple (X, d), où X est un ensemble et d une application

$$d : X \times X \longrightarrow [0, \infty[$$

telle que pour tous $x, y, z \in X$, on a :

(i) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;

(ii) $d(x, y) = d(y, x)$;

(iii) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Une telle application est appelée une *métrique* sur X.

On définit la boule ouverte $B(x, r)$ de centre $x \in X$ et de rayon $r \in]0, \infty[$ par :

$$B(x, r) = \{y \in X \mid d(x, y) < r\}.$$

En particulier, la collection de sous-ensembles de X :

$$\{B(x, r) \mid x \in X, r \in]0, \infty[\},$$

est une base pour un certaine topologie, appelée *topologie métrique* de (X, d).

Un espace topologique $(X, \mathcal{T})$ est dit *métrisable* s'il existe une métrique d sur X telle que $\mathcal{T}$ soit la topologie métrique de (X, d). Dans ce cas, on dit que la métrique d est compatible avec $\mathcal{T}$.

Soit (X, d) un espace métrique. Une suite $(x_n)_{n \in \omega} \subseteq X$ est dite de Cauchy si pour tout réel positif ε, il existe un entier N tel que pour tous entiers n et m plus grands que N, $d(x_n, x_m) < \varepsilon$. On dit que (X, d) est *complet* si toute suite de Cauchy admet une limite dans X. Un espace topologique $(X, \mathcal{T})$ est *complètement métrisable* s'il admet une métrique d compatible avec $\mathcal{T}$ telle que (X, d) est complet.

Bibliographie

[1] H. G. Dales and G. Oliveri. *Truth in mathematics*. Oxford University Press, 1998.

[2] M. Davis. Infinite games of perfect information. *Annals of Mathematics Study*, (52) :85–101, 1964.

[3] J. Duparc. Wadge hierarchy and Veblen hierarchy, Part I : Borel sets of finite rank. *The Journal of Symbolic Logic*, 66(1) :56 – 86, 2001.

[4] H. M. Friedman. Higher set theory and mathematical practice. *Annals of Mathematical Logic*, 2 :325–357, 1971.

[5] D. Gale and F. M. Stewart. Infinite games with perfect information. *Annals of Mathematics Study*, (28) :245–266, 1953.

[6] T. J. Jech. *Set Theory, The Third Millennium Edition, Revised and Expanded*. Springer monographs in mathematics, 2003.

[7] A. Kanamori. *The Higher Infinite : Large Cardinals in Set Theory from Their Beginnings*. Springer-Verlag, 1994.

[8] A. S. Kechris. *Classical descriptive set theory*. Springer Verlag, 1994.

[9] J.-L. Krivine. *Théorie des ensembles.* Cassini, 1998.

[10] K. Kunen. *Set theory : an introduction to independence proofs*. North-Holland Publishing Company, 1983.

[11] A. Louveau. Some Results in the Wadge hierarchy of Borel sets. *Cabal Seminar 79-81*, 1019 :28–55, 1983.

[12] D. A. Martin. Measurable cardinals and analytic games. *Fundamenta Mathematicae*, (66) :287–291, 1970.

[13] D. A. Martin. Borel Determinacy. *Annals of Mathematics*, (102) :369–371, 1975.

[14] D. A. Martin. A purely inductive proof of Borel determinacy. *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*, 42 :303–308, 1985.

[15] D. A. Martin. An extension of Borel determinacy. *Annals of pure and Applied Logic*, (49) :279–293, 1990.

[16] Y. N. Moschovakis. *Descriptive set theory.* North-Holland Publishing Company, 1980.

[17] P. Wolfe. The strict determinateness of certain infinite games. *Pacific Journal of Mathematics*, 5 :841–847, 1955.

Index