

Déformations conformes des variétés de Finsler-Ehresmann

THÈSE N° 5032 (2011)

PRÉSENTÉE LE 12 MAI 2011
À LA FACULTÉ SCIENCES DE BASE
GROUPE TROYANOV
PROGRAMME DOCTORAL EN MATHÉMATIQUES

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

POUR L'OBTENTION DU GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES

PAR

Ratiba DJELID

acceptée sur proposition du jury:

Prof. K. Hess Bellwald, présidente du jury
Prof. M. Troyanov, directeur de thèse
Prof. J.-C. Alvarez Paiva, rapporteur
Prof. J. Buser, rapporteur
Prof. B. Colbois, rapporteur



ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Suisse
2011

Remerciements

Je tiens avant tout à exprimer ma profonde reconnaissance à mon directeur de thèse, le Professeur Marc Troyanov. En plus de m'avoir permis d'entreprendre ce travail de thèse, il m'a fait découvrir le sens de la recherche en mathématiques pures. Je le remercie pour sa disponibilité malgré un emploi du temps chargé et pour son immense patience à répondre à mes questions. Il a toujours été là pour me motiver et m'aider à surmonter les moindres problèmes et incertitudes. Je tiens également à témoigner mon respect envers ses grandes qualités humaines, travailler au sein de son groupe fut pour moi un énorme plaisir.

J'aimerais également remercier les membres du jury de la thèse, le Professeur Juan-Carlos Álvarez Paiva et le Professeur Bruno Colbois pour avoir accepté d'expertiser mon travail et pour leurs précieux conseils ainsi que madame la Professeuse Kathryn Hess pour avoir accepté de présider mon jury. Je remercie également le Professeur Peter Buser pour avoir accepté de juger ma thèse et pour sa gentillesse, son sens de l'humour et son enthousiasme permanents.

Mes remerciements s'adressent aussi à tous mes collègues de l'institut de géométrie, d'algèbre et de topologie que j'ai eu le plaisir de côtoyer. Un grand merci à madame Maria Cardoso pour son aide et son immense gentillesse.

Je tiens à exprimer une reconnaissance particulière à mon ancien professeur Monsieur Abdallah Smida qui m'a permis, à travers un esprit de physique théorique, de prendre connaissance et d'apprécier le domaine de la géométrie différentielle.

Je ne puis exprimer toute la reconnaissance que je ressens envers mes parents, pour tout ce que je ne saurais formuler par de simples phrases. Je remercie aussi mon mari pour m'avoir encouragé à reprendre le cursus universitaire après de longues années d'interruption ainsi que mes enfants Rayane, Amina et Ahmed-Amine pour leur présence...tout simplement. J'adresse aussi un énorme merci à ma tante Danielle et à mon oncle Jean-Claude pour leur encouragements permanents. Je remercie aussi mes beaux-parents, toute ma famille et mes amis pour leur soutien.

J'aimerais finalement à exprimer ma gratitude au fond national suisse de la recherche scientifique et en particulier au programme Marie Heim-Vögtlin, ainsi qu'à l'IGAT et à l'EPFL pour m'avoir offert l'opportunité de passer ces agréables années au sein du campus de L'EPFL.

Abstract

An intrinsic approach to Finsler geometry is proposed. A concept of Finsler-Ehresmann manifold, denoted by (M, F, H) , is introduced and a generalized Chern connection is built for this manifold. Conformal deformations on this manifold are considered.

First, we have an analogous of Chern's theorem: we prove the existence and uniqueness of a generalized Chern connection for the manifold (M, F, H) . Similarly, within an essentially Koszulian formalism, we present two curvatures associated to this generalized connection, namely a R curvature and a P one.

The second result is the deduction of conformal transformations laws for the generalized Chern connection and associated curvatures. The transformation of R seems to have very similar properties as that of the Riemannian curvature while that of P reveals other objects of pure Finslerian nature.

Third, we construct the Finsler Weyl and Schouten tensors W and S respectively and we study their conformal transformations. Furthermore, we show that for the dimension 3, the horizontal component of W for generalized Berwald manifolds is identically zero.

The next result is a theorem of Weyl-Schouten type giving necessary and sufficient conditions for a Finsler-Ehresmann manifold to be conformally R -flat. We complete this result by exploring the case of dimension 3 for Berwald spaces which gives a result very similar to the Riemannian case. In addition, we announce some necessary conditions to characterize conformal flatness of Finsler-Ehresmann manifolds.

Keywords. Finsler geometry, Chern connection, Chern theorem, Koszul formalism, Weyl-Schouten theorem.

Résumé

Une approche intrinsèque à la géométrie finslerienne est proposée. Une notion de variété de Finsler-Ehresmann, que nous notons (M, F, \mathcal{H}) , est introduite et une connexion de Chern généralisée est construite pour cette variété. La déformation conforme de cette variété est considérée.

En premier lieu, nous avons un théorème analogue au théorème de Chern, nous montrons l'existence et l'unicité d'une connexion de Chern généralisée pour la variété (M, F, \mathcal{H}) . De même, dans le cadre d'un formalisme essentiellement koszulien, nous présentons deux courbures associées à cette connexion généralisée, une courbure R et une courbure P .

Le deuxième résultat est la déduction des lois de transformations conformes de la connexion de Chern généralisée et des courbures associées. La transformation de R semble avoir des propriétés très similaires à celle de la courbure de Riemann alors que la transformation de P fait apparaître d'autres objets purement finsleriens.

En troisième lieu, nous construisons des tenseurs de Weyl W et de Schouten S finsleriens et nous étudions leurs transformations conformes. De plus, nous montrons qu'en dimension 3, la composante horizontale de tenseur de W pour les variétés de type de Berwald généralisée est identiquement nulle.

Le prochain résultat est un théorème du type de Weyl-Schouten énonçant des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une variété de Finsler-Ehresmann soit conformément R -plate. Nous complétons ce résultat par l'exploration du cas de la dimension 3 pour les espaces de Berwald qui donne un résultat très similaire au cas riemannien. De plus, nous annonçons quelques conditions nécessaires pour la caractérisation des variétés de Finsler-Ehresmann conformément plates.

Mots-clés. Géométrie finslerienne, connexion de Chern, théorème de Chern, formalisme de Koszul, théorème de Weyl-Schouten.

Table des matières

Introduction	1
1 Géométrie finslerienne via le tenseur fondamental	7
1.1 Définitions et propriétés	8
1.2 Le fibré π^*TM	11
1.3 Distribution horizontale dans $T\mathcal{M}$	15
1.4 Connexion de Chern	18
1.5 Courbures en géométrie finslerienne	22
1.6 Variétés finsleriennes localement minkowskiennes	24
2 Axiomatisation et géométrie de Finsler-Ehresmann	29
2.1 Variété de Finsler-Ehresmann	31
2.1.1 Distribution horizontale \mathcal{H}	31
2.1.2 Forme de Ehresmann θ	32
2.2 Connexion de Chern généralisée sur (M, F, \mathcal{H})	34
2.3 Courbures pour la connexion de Chern généralisée	41
2.4 Sur les tenseurs en géométrie finslerienne	43
2.4.1 Décomposition en sous-types et association	44

2.4.2	Dérivées covariantes	46
2.4.3	Tenseurs de courbure de type $(2, 2; 0)$	47
2.5	Formulation en coordonnées et courbure drapeau	47
2.5.1	Composantes des $(2, 2; 0)$ -tenseurs de courbure	47
2.5.2	Courbure drapeau	50
2.6	Variété de Finsler-Ehresmann localement minkowskienne	52
3	Propriétés conformes d'une variété de Finsler-Ehresmann	57
3.1	Variété (M, F, \mathcal{H}_0)	59
3.2	Propriétés conformes de la connexion de Chern généralisée et des courbures associées	61
3.2.1	Transformation conforme de la connexion de Chern généralisée	61
3.2.2	Transformations conformes de la hh -courbure et de la hv -courbure	65
3.3	Propriétés conformes des tenseurs de Weyl et de Schouten	75
3.3.1	Tenseur $\varphi(\xi, X)$	75
3.3.2	Tenseur de Weyl et de Schouten	77
3.3.3	Transformations conformes de W et de S	82
3.4	Variétés de Finsler-Ehresmann conformément R -plates	87
3.5	Variété de Finsler-Ehresmann conformément plate	98
4	Moyennisation d'une métrique de Randers basée sur une métrique euclidienne	105
4.1	Métrique de Randers à la base d'une métrique euclidienne	106
4.2	Moyennisation de la métrique	107
4.3	Calcul explicite des intégrales	111

4.4	Résultat pour la forme de la métrique moyennisée	114
Annexes		121
A.	Preuve de la proposition 13	121
B.	Complément pour la preuve du théorème 19	123
C.	Champs dérivant d'un potentiel	125
D.	Un théorème d'intégrabilité	127
Guide de symboles et notations		129
Bibliographie		133

Introduction

La géométrie finslerienne est souvent décrite comme une généralisation de la géométrie riemannienne au sens où au lieu d'avoir une collection de produits scalaires pour chaque espace tangent d'une variété lisse M , nous avons une famille de normes de Minkowski F_x , $x \in M$, sur chacun de ces espaces. Une norme de Minkowski F sur un espace vectoriel V étant une fonction $F(y)$ homogène de degré 1, positive pour tout $y \in V$ (nulle uniquement si $y = 0$), C^∞ sur $V \setminus \{0\}$ et telle que pour tout $y \in V$, la fonctionnelle bilinéaire symétrique $g_{ij} = \frac{1}{2}(\partial^2 F^2 / \partial y^i \partial y^j)$ est un produit scalaire sur V . De cette façon, la structure finslerienne peut être vue comme une famille de produits scalaires, un pour chaque direction dans l'espace tangent. La notion de géométrie basée sur un élément de longueur $ds = F(x^1, \dots, x^n, dx^1, \dots, dx^n)$ où $F(x, y)$ est positivement homogène de degré 1 en y apparaît pour la première fois dans la leçon inaugurale de Riemann en 1854. Mais Riemann s'intéresse de près au cas quadratique qui est à l'origine de la géométrie riemannienne. Ce n'est qu'en 1918 que le cas général sans la restriction quadratique réapparaît dans la thèse de P. Finsler intitulée "Über Kurven und Flächen in Allgemeinen Räumen" et dirigée par C. Carathéodory. Le sujet, motivé par l'étude du calcul des variations des courbes, attire l'intérêt de mathématiciens tels que J. Synge, V. Wagner, L. Berwald, G. Landsberg, E. Cartan, H. Busemann et H. Rund. C'est Cartan qui popularise le nom de "géométrie finslerienne" dans un opuscule de 1934 [Car34].

Dans le contexte de la géométrie riemannienne, le célèbre *problème d'équivalence* [Olv95] qui consiste à déterminer si deux structures riemanniennes peuvent être déduites l'une à partir de l'autre à travers un changement de coordonnées approprié, a été résolu indépendamment, et par des méthodes différentes, en 1870 par E. B. Christoffel et R. Lipschitz qui ont démontré qu'un système complet d'invariants locaux pour une métrique riemannienne est donnée par les composantes invariantes du tenseur de courbure et de toutes ses dérivées covariantes (cf. Olver [Olv95], théorème 12.11 page 392 pour une discussion détaillée). A noter que Lipschitz a introduit une dérivée covariante sans bénéficier des méthodes de calculs tensoriels utilisées 50 ans plus tard par Levi-Civita pour introduire la connexion de Levi-Civita. Cette dernière possède deux propriétés remarquables,

à savoir, la compatibilité avec la métrique et la non présence de torsion. De la même façon, le problème d'équivalence tient une place importante en géométrie finslerienne, c'est-à-dire comment peut-on déterminer si deux métriques finsleriennes peuvent être transformées l'une vers l'autre par un changement de coordonnées. Or, en géométrie finslerienne à proprement parlé, il n'y a pas de connexion "idéale" comme celle de Levi-Civita en géométrie riemannienne car les deux propriétés de compatibilité avec la métrique et la non présence de torsion ne peuvent pas être réunies dans une même connexion dans le contexte finslierien. C'est pour cela que plusieurs connexions apparaissent en géométrie finslerienne, nous citons entre autres celle de Berwald, introduite en 1926, qui est sans torsion mais non compatible avec la métrique et la connexion de Cartan, introduite en 1934, qui est compatible avec la métrique mais possède une torsion. Les courbures de Berwald sont de deux types, une hh -courbure qui ressemble à la courbure riemannienne et une hv -courbure qui n'a pas d'équivalent riemannien. Les symboles " h " et " v " se réfèrent à des composantes horizontales et verticales dans un sens précis qui sera expliqué ultérieurement. Quant à la connexion de Cartan, elle possède trois types de courbures, une hh -, une hv - et une vv -courbure, cette dernière est directement liée à la présence de torsion.

C'est en 1948 que S.-S. Chern propose une connexion sans torsion mais non compatible avec la métrique. Cette connexion sera redécouverte par H. Rund. La connexion de Chern n'agit pas directement sur le fibré tangent TM de la variété finslerienne (M, F) . Chern propose un "terrain" naturel sur lequel cette connexion peut agir, c'est celui où le fibré tangent TM est rappelé à travers la projection canonique du fibré $TM \xrightarrow{\pi} M$ donnant lieu au fibré π^*TM dont la base est non pas la variété M elle-même mais une nouvelle variété $\mathfrak{M} = TM \setminus \{0\}$ qui est le fibré tangent privé de la section nulle. De la même façon que la connexion de Berwald, la connexion de Chern possède une hh -courbure et une hv -courbure.

La connexion de Chern et les courbures associées semblent bien adaptées à l'étude des géodésiques, mais la théorie semble moins bien s'appliquer aux questions de géométrie conforme. Nous n'avons en particulier pas trouvé de trace dans la littérature d'études portant sur le comportement de la courbure d'une variété finslerienne lors d'une déformation conforme de celle-ci. Il n'y a en particulier pas d'équivalent connu du tenseur de Schouten ou du tenseur conforme de Weyl. Dans l'article de Mo [Mo05] par exemple, un tenseur désigné par tenseur de Weyl est construit, mais ce tenseur est invariant projectif et non conforme.

Variété de Finsler-Ehresmann. Le but de cette thèse est précisément d'étudier l'effet sur la courbure des déformations conformes des métriques de Finsler. Pour cela, il est nécessaire de faire un léger changement de point de vue, et nous parlerons de variétés de "Finsler-Ehresmann". Nous étudions en particulier des conditions sur la courbure pour

qu'une variété de Finsler-Ehresmann soit conformément plate.

Pour expliquer ce qu'est une variété de Finsler-Ehresmann, il nous faut plonger un peu dans la technique. Considérons le fibré rappelé π^*TM dont la base est la variété \mathfrak{M} . Les éléments de M sont les points alors que \mathfrak{M} peut être vue comme l'espace des directions ou l'espace des "éléments linéaires" (appelés "line elements" dans l'article de Busemann [Bus50]). Plus précisément, à tout système de coordonnées locales $\{x^i\}$ sur un ouvert de M est associé un système canonique de coordonnées $\{x^i, y^j\}$ sur le relevé de cet ouvert défini par la condition qu'un v vecteur s'écrit comme $v = y^i \partial / \partial x^i$. On appelle de telles coordonnées des *coordonnées naturelles* sur \mathfrak{M} . Les conditions d'homogénéité et de convexité forte de F nous permettent d'écrire localement

$$F(x, y) = \sqrt{g_{ij}(x, y)y^i y^j}$$

où $g_{ij}(x, y)$ est le Hessien partiel de F . Il se trouve que $g_{ij}(x, y)$ définit un tenseur symétrique d'ordre 2 non pas sur le fibré tangent TM , mais sur le fibré rappelé $\pi^*TM \rightarrow \mathfrak{M}$. On lui donne le nom de *tenseur fondamental* et il peut être vu comme une "métrique riemannienne non holonome", une métrique qui dépend du point et du choix d'une direction. Une dérivation en direction des coordonnées verticales y^k permet de définir un nouveau tenseur sur le même fibré, c'est le tenseur de Cartan donné par

$$A_{ijk} = \frac{F}{2} \frac{\partial g_{ij}}{\partial y^k}$$

et mesurant le caractère non riemannien de la métrique de Finsler. En plus des tenseurs fondamental et de Cartan, il y a un protagoniste primordial de la géométrie finslerienne, c'est la *distribution horizontale* ou *connexion de Ehresmann*. Il s'agit d'une décomposition du fibré tangent $T\mathfrak{M}$ en somme directe

$$T\mathfrak{M} = \mathcal{V} \oplus \mathcal{H}$$

où $\mathcal{V} = \ker(d\pi)$ est la partie verticale de ce fibré et \mathcal{H} est un complément horizontal qui peut être défini canoniquement à partir de l'équation des géodésiques comme cela est fait dans les travaux de D. Bao, S.-S. Chern et Z. Shen [She01b, BCS00, CS05]. La connexion de Chern se définit alors comme l'unique connexion affine sur le fibré rappelé π^*TM qui est sans torsion et qui n'est compatible avec la métrique que dans la direction horizontale. Quant à la dérivée dans la direction verticale du tenseur fondamental, elle est reliée au tenseur de Cartan. Ce dernier étant nul dans le cas riemannien, on retrouve la connexion de Levi-Civita.

Connexion de Chern généralisée. Nous appelons variété de Finsler-Ehresmann un triple (M, F, \mathcal{H}) où (M, F) est une variété finslerienne et $\mathcal{H} \subset T\mathfrak{M}$ est une connexion

de Ehresmann arbitraire. Nous prouvons (Théorème 19 au chapitre 2 de la thèse) qu'à toute variété de Finsler-Ehresmann est associée une *connexion de Chern généralisée* qui possède des propriétés analogues à la connexion de Chern classique. Notons que notre construction de cette connexion est faite selon une approche intrinsèque, à la Koszul, et non via une méthode de repères mobiles comme dans les travaux de Chern. Ainsi, nous considérons que notre présentation est nouvelle, et nous espérons qu'elle offre une simplification même dans le cas de la connexion de Chern classique. Par exemple, selon cette approche, la notion de *forme de Ehresmann* θ ($\mathcal{H} = \ker \theta$) joue un rôle très actif, nous la retrouvons directement dans l'expression de la non compatibilité avec la métrique

$$(\nabla_X g)(\xi, \eta) = A(\theta(X), \xi, \eta), \quad X \in \Gamma(T\mathfrak{M}), \quad \xi, \eta \in \Gamma(\pi^*TM) \quad (1)$$

De plus, notre approche intrinsèque insiste sur une distinction claire entre les sections de $T\mathfrak{M}$ et celles de π^*TM , c'est pour cela que nous présentons les tenseurs apparaissant en géométrie finslerienne sous une forme qui respecte cette distinction (comme on peut le voir dans (1)), nous désignons ces "tenseurs mixtes" par tenseurs du type $(p_1, p_2; q)$ (par analogie aux tenseurs riemanniens (p, q)) où les degrés de covariance p_1 et p_2 sont associés aux fibrés π^*TM et $T\mathfrak{M}$, respectivement, alors que le degré de contravariance concerne uniquement le fibré rappelé π^*TM . Ceci n'est habituellement pas fait dans les ouvrages de géométrie finslerienne, par exemple, il n'est pas toujours clair dans une formule de reconnaître les indices associés à $T\mathfrak{M}$ et ceux associés π^*TM .

Déformation conforme et tenseurs de Weyl et de Schouten. Le troisième point essentiel dans notre travail repose sur l'étude du comportement de la courbure des variétés de Finsler-Ehresmann (M, F, \mathcal{H}) sous l'effet d'une déformation conforme de la métrique finslerienne. Pour cela nous étudions les déformations de type $(M, \tilde{F}, \mathcal{H}_0)$ où $\tilde{F} = \exp u \cdot F$ avec $u \in C^\infty(M)$ et où la connexion de Ehresmann \mathcal{H}_0 reste fixe. Nous nous basons sur l'approche intrinsèque présentée au chapitre 2 pour construire un *tenseur de Weyl* W de type $(2, 2; 0)$ et un $(1, 1; 0)$ -*tenseur de Schouten* S , analogues aux objets correspondants en géométrie riemannienne, pour les variétés de dimension $n \geq 3$:

$$W = \Phi + S \odot g, \quad S(\xi, X) = \frac{1}{n-2} \left(\varphi(\xi, X) - \frac{\sigma}{2(n-1)} g(\xi, \pi_* X) \right) \quad (2)$$

où $\Phi = R + P$ représente le $(2, 2; 0)$ -tenseur de courbure complète (comprenant la hh -courbure et la hv -courbure), φ est un $(1, 1; 0)$ -tenseur généralisant, en un certain sens, le tenseur de Ricci et obtenu par une certaine contraction de la courbure complète Φ . Quant à σ c'est un scalaire obtenu par contraction de φ et généralisant la courbure scalaire et le symbole \odot désigne un produit de Kulkarni adapté au cas finslerien. Nous étudions ensuite le comportement de ces tenseurs sous l'effet d'une transformation conforme. Nous avons déjà évoqué le fait que la forme de Ehresmann θ joue un drôle très actif suivant

notre approche intrinsèque comme illustré dans l'exemple (1). On retrouve l'écho de cette présence de θ dans toutes les lois de transformations conformes des objets considérés sur la variété de Finsler-Ehresmann, et ceci à travers un certain tenseur que nous appelons *tenseur croisé* Ψ , que nous présentons comme le (3, 2; 0)-tenseur :

$$\begin{aligned} \Psi(\zeta, \xi, \eta, X, Y) &= 2A(\theta(X), \xi, \zeta)g(\eta, \pi_*Y) - 2A(\theta(Y), \xi, \zeta)g(\eta, \pi_*X) \\ &+ 2[A(\theta(Y), \pi_*X, \xi) - A(\theta(X), \pi_*Y, \xi)]g(\zeta, \eta) \end{aligned} \quad (3)$$

où ξ , η et ζ sont des sections de π^*TM alors que X et Y sont des sections de $T\mathfrak{M}$.

Nous étudions les transformations conformes de la hh -courbure R et la hv -courbure P qui suivent la transformation $F \rightarrow \tilde{F} = \exp(u)F$ du lagrangien avec $u \in C^\infty(M)$ et trouvons (Théorème 51) que

$$R \rightarrow \tilde{R} = \exp(2u) \{R + (b_u^H \odot g)\}, \quad P \rightarrow \tilde{P} = \exp(2u) \{P + \Psi_u + (b_u^V \odot g)\}$$

où Ψ_u est le (2, 2; 0)-tenseur obtenu à partir du tenseur croisé (3) par contraction $\Psi_u(\cdot) = \Psi(\nabla u, \cdot)$ à travers le gradient de u . Quant à b_u^H et b_u^V , ce sont les composantes horizontale et verticale d'un objet essentiellement lié au Hessien $H_u(\xi, X) = g(\xi, \nabla_X(\nabla u))$

$$b_u(\xi, X) = H_u(\xi, X) - g(\nabla u, \pi_*X)g(\nabla u, \xi) + \frac{1}{2}g(\nabla u, \nabla u)g(\xi, \pi_*X)$$

Nous retrouvons également ce tenseur Ψ_u et les composantes de la forme b_u dans les lois de transformation qui régissent le tenseur de Weyl et de Schouten (Proposition 60) :

$$W \rightarrow \tilde{W} = \exp(2u) \{W + \Psi_u + b_u^V \odot g\}, \quad S \rightarrow \tilde{S} = S - b_u^H$$

et comme conséquence directe des transformations ci-dessus, la composante purement horizontale W^{HH} est essentiellement invariante conforme alors que c'est la transformation conforme de la composante de type de type HV qui absorbe les termes additionnels

$$W^{HH} = \tilde{W}^{HH} = \exp(2u)W^{HH}, \quad \tilde{W}^{HV} = \exp(2u) \{W^{HV} + \Psi_u + b_u^V \odot g\}$$

Un théorème de Weyl-Schouten. En observant que la composante purement horizontale du tenseur de Weyl a un comportement similaire avec son homologue riemannien, ce qui n'est pas le cas pour la composante W^{HV} , nous nous sommes posés des questions sur l'impact de ce comportement sur les conditions que pouvait avoir une variété de Finsler-Ehresmann pour être conformement plate, c'est-à-dire sur l'aptitude du tenseur de Weyl (2) que nous avons défini à décrire la courbure conforme de notre variété. Soulignons que dans le cas de la dimension 3, nous montrons (théorème 59) que pour les espaces de Berwald généralisés (variétés pour lesquelles la hv -courbure P , associée à la connexion

de Chern généralisée, est nulle), toutes les composantes du tenseur de Weyl horizontal W^{HH} sont nulles.

L'un des résultats principaux de cette thèse est une version du théorème de Weyl-Schouten pour les variétés de Finsler-Ehresmann conformément R -plate, c'est-à-dire des déformations conformes qui annulent la hh -courbure de la variété. Nous donnons dans ce résultat (théorème 72) trois conditions nécessaires et suffisantes pour que la variété de Finsler-Ehresmann (M, F, \mathcal{H}_0) soit conformément R -plate. Deux conditions sont très ressemblantes au cas riemannien, ce sont que la hh -composante W^{HH} du tenseur de Weyl est nulle et que la dérivée covariante du tenseur de Schouten obéit à une équation de symétrie (condition de Codazzi). La troisième condition concerne la symétrie du tenseur de Schouten, $S(\pi_*Y, X) = S(\pi_*X, Y)$, une condition qui est automatiquement satisfaite pour les variétés riemanniennes. Nous complétons cette caractérisation des variétés de Finsler-Ehresmann conformément R -plates par un résultat qui concerne la dimension 3 pour les variétés de type de Berwald généralisé. Nous constatons (théorème 74) que pour ce type de variétés, nous pouvons diminuer le nombre de conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une variété de Finsler-Ehresmann soit conformément R -plate.

Enfin, nous donnons en fin du chapitre 3 un aperçu sur les variétés de Finsler-Ehresmann conformément plates. Notons que la situation est plus complexe que dans le problème des variétés conformément R -plates, nous énonçons (Proposition 76) des conditions nécessaires pour qu'une variété de Finsler-Ehresmann soit conformément plate. De plus, notre résultat ne donne pas une pure condition algébrique d'intégrabilité comme dans le cas du théorème 72, mais qu'il repose sur la résolubilité d'une équation aux dérivées partielles.

Un calcul de moyennisation. Le dernier chapitre est consacré à un problème différent, qui est toutefois également motivé par des questions de géométrie finslerienne conforme. Lorsqu'on moyennise le tenseur fondamental d'une métrique finslerienne sur la boule unité en l'espace tangent en chaque point, on obtient une métrique riemannienne sur la variété de départ. L'article de V. S. Matveev, H.-B. Rademacher, M. Troyanov et A. Zeghib [MRTZ09] a montré que cette construction est utile en géométrie conforme, en particulier dans la résolution de la conjecture de Lichnerowicz-Obata. Cette construction est un outil théorique, mais il peut être intéressant de calculer explicitement cette moyennisation, ou moins dans quelques cas concrets. Le but du chapitre 4 est précisément de calculer explicitement cette moyennisation pour des métriques de Randers particulières en dimension 2.

Chapitre 1

Géométrie finslerienne via le tenseur fondamental

Une métrique Finslerienne sur une variété différentiable M est la donnée d'une fonction $F : TM \rightarrow \mathbb{R}$ qui est différentiable sur le complémentaire de la section nulle et dont la restriction à chaque espace tangent est une "norme de Minkowski". La géométrie finslerienne, motivée initialement par les calculs variationnels, semble bien décrire le comportement des géodésiques et cela dès le début de la théorie. Ceci est dû à la convexité forte vérifiée sur chaque espace tangent par la fonction $F^2 = g_{ij}(x, y)y^i y^j$. Cependant, il semble plus difficile de dégager une notion de transport parallèle, et plusieurs connexions apparaissent en géométrie Finslerienne, introduites par Synge, Berwald et Taylor. Il faut toutefois attendre 1948 pour qu'apparaisse dans les travaux de Chern une connexion qui puisse être considérée comme un outil remplaçant la connexion de Levi-Civita. Elle permet de définir un tenseur de courbure et un équivalent de la courbure sectionnelle appelé la "courbure drapeau". Le fait le plus remarquable est que la théorie riemannienne de la variation des géodésiques (champ de Jacobi, formules de variations première et seconde, forme d'indice etc.) se développe de façon similaire au cas classique. Comme conséquence importante, on retrouve en géométrie de Finsler des analogues du théorème de Cartan-Hadamard ou de Bonnet-Myers [Aus55].

Le but du présent chapitre est de présenter rapidement quelques notions classiques de la géométrie finslerienne qui jouent un rôle important dans cette thèse. En particulier, ce chapitre (ainsi que toute la thèse d'ailleurs) tient sa place dans une approche à la géométrie finslerienne à travers le tenseur fondamental g_{ij} , les approches variationnelles sur le lagrangien F ne sont pas traitées. Notre priorité est d'exploiter les outils tensoriels

habituellement utilisés en géométrie riemannienne. De plus, nous suivons essentiellement dans ce chapitre l'approche des auteurs de [BCS00] et de [Mo06] où nous pouvons percevoir l'empreinte des méthodes des repères mobiles utilisées par Chern. Nous espérons résumer dans ce chapitre l'approche de ces auteurs tout en choisissant les points particuliers directement nécessaires pour la compréhension des prochains chapitres.

La connexion introduite par Chern est une connexion sans torsion et non compatible avec la métrique. Cette connexion n'agit pas directement sur le fibré tangent TM sur la variété finslerienne (M, F) mais sur un certain fibré rappelé π^*TM dont la base est la variété $\mathfrak{M} \equiv TM^0$ (espace total du fibré tangent privée de la section nulle) plutôt que la variété M elle-même. Après quelques définitions basiques dans le paragraphe 1.1, nous présentons au paragraphe 1.2 le fibré rappelé $\pi^*TM \rightarrow \mathfrak{M}$ avant de définir dans le paragraphe 1.3 la notion de distribution horizontale sur le fibré tangent $T\mathfrak{M}$. Ces notions étant définies, nous nous intéressons ensuite au paragraphes 1.4 et 1.5 à la connexion de Chern qui est construite sur ce fibré $\pi^*TM \rightarrow \mathfrak{M}$ et aux courbures associées à cette connexion. Nous considérons ensuite au paragraphe 1.6 un exemple important des variétés finsleriennes, celles qui sont localement de Minkowski. Nous énonçons le théorème donnant les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une variété finslerienne soit localement de Minkowski et reproduisons une preuve standard donnée dans la référence [BCS00].

1.1 Définitions et propriétés

Définition 1 Une structure finslerienne sur une variété différentiable M est la donnée d'une fonction :

$$F : TM \rightarrow [0, \infty)$$

telle que :

- F est positivement homogène de degré 1 en y : $F(x, \lambda y) = \lambda F(x, y)$, $\forall \lambda > 0$
- F est C^∞ sur le fibré tangent privé de la section nulle $TM^0 = TM \setminus \{0\}$
- F est fortement convexe, c'est-à-dire que la $n \times n$ matrice hessienne

$$g_{ij}(x, y) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F^2}{\partial y^i \partial y^j} = \left[\frac{1}{2} F^2 \right]_{y^i y^j} \quad (1.1)$$

est définie positive.

Cette grandeur g_{ij} , introduite en (1.1), est appelée *tenseur fondamental*. C'est une fonction positivement homogène de degré zéro en y . Le tenseur fondamental peut être

vu comme une "métrique riemannienne non holonome", c'est-à-dire une métrique riemannienne qui dépend non seulement d'un point $x \in M$, mais aussi d'une direction $y \in T_x M^0$.

Dans ce qui suit, nous aurons plusieurs fois besoin du théorème d'Euler pour les fonctions homogènes. Nous préférons tout de même le rappeler sous une forme simplifiée.

Théorème 2 (Euler) *Si $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction positivement homogène de degré r , c'est-à-dire, $f(\lambda y) = \lambda^r f(y)$ pour tout $\lambda > 0$, alors, la relation suivante est vérifiée :*

$$y^i f_{y^i}(y) = r f(y) \quad (1.2)$$

Preuve. La preuve est immédiate en fixant y et en dérivant la relation $f(\lambda y) = \lambda^r f(y)$ par rapport à λ :

$$y^i f_{y^i}(\lambda y) = r \lambda^{r-1} f(y)$$

Nous obtenons (1.2) en posant $\lambda = 1$. ■

En géométrie finslerienne, F est souvent appelée le *lagrangien* et possède les propriétés :

- (a) $y^i F_{y^i} = F(y)$
- (b) $y^i F_{y^i y^j} = 0$
- (c) $y^i F_{y^i y^j y^k} = -F_{y^j y^k}$

Ces propriétés sont une conséquence directe du théorème 2 en considérant que F , F_{y^i} et $F_{y^i y^j}$ sont positivement homogènes de degré 1, 0 et -1 respectivement.

Historiquement, l'approche de la géométrie finslerienne à travers le lagrangien F et celle à travers le tenseur fondamental g_{ij} ne s'est pas toujours développée de sorte que l'on puisse facilement passer d'une approche à l'autre, même s'il existe une correspondance entre le lagrangien et le tenseur fondamental. Nous pouvons voir cette correspondance à travers le lemme suivant.

Lemme 3 *Le lagrangien F peut être retrouvé à partir du tenseur fondamental par :*

$$F(x, y) = \sqrt{g_{ij}(x, y) y^i y^j} \quad (1.3)$$

où $g_{ij}(x, y) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F^2}{\partial y^i \partial y^j}$.

Preuve. Le tenseur fondamental peut être écrit comme :

$$\begin{aligned} g_{ij}(x, y) &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F^2}{\partial y^i \partial y^j} \\ &= F_{y^i} F_{y^j} + F F_{y^i y^j} \end{aligned}$$

donc

$$g_{ij} y^i y^j = y^i F_{y^i} \cdot y^j F_{y^j} + F y^i y^j F_{y^i y^j} = F^2$$

Ici nous avons utilisé le fait que $y^i F_{y^i} = F(y)$ et $y^i F_{y^j y^i} = 0$ (propriétés (a) et (b)). ■

Exemples de variétés finsleriennes

(I). Variétés riemanniennes : Une métrique riemannienne g sur une variété M , qui est une famille de produits scalaires $\{g_x\}_{x \in M}$ pour chaque espace tangent $T_x M$ ($g_{ij}(x) = g_x(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j})$), définit une structure finslerienne dont le tenseur fondamental n'a pas de dépendance directionnelle :

$$g_{ij}(x, y) = g_{ij}(x)$$

(II). Variétés minkowskiennes et localement minkowskiennes : Une variété finslerienne (M, F) est dite localement minkowskienne s'il existe un atlas sur M dans lequel le tenseur fondamental est tel que :

$$g_{ij}(x, y) = g_{ij}(y)$$

De plus, la variété est (globalement) minkowskienne ou de Minkowski si M est un espace vectoriel.

(III). Espaces de Randers : Une structure finslerienne est dite de Randers si le lagrangien F s'écrit localement comme une somme :

$$F(x, y) = \alpha(x, y) + \beta(x, y), \quad \begin{cases} \alpha(x, y) = \sqrt{a_{ij}(x) y^i y^j} \\ \beta(x, y) = b_i(x) y^i \end{cases}$$

où a_{ij} sont les composantes d'une métrique riemannienne et b_i sont les composantes d'une 1-forme sur M .

(IV). Espaces de Berwald : Un espace de Berwald est un espace à peine plus général qu'un espace riemannien et un espace localement minkowskien. On peut le décrire

sommairement comme étant un espace dont tous les espaces tangents sont linéairement isométriques au même espace de Minkowski. Une définition plus précise, faisant intervenir la connexion de Chern que nous allons introduire ultérieurement, consiste à dire qu'une variété est de Berwald si les coefficients de la connexion de Chern (en coordonnées naturelles) n'ont pas de dépendance directionnelle, $\Gamma_{jk}^i(x, y) = \Gamma_{jk}^i(x)$.

L'avantage d'une description de la géométrie finslerienne à travers le tenseur fondamental g_{ij} est qu'il permet de développer des outils similaires à ceux de la géométrie riemanniennes (ou plus généralement à la géométrie différentielle traditionnelle) tels que les notions de courbure et de connexion. Le plus important est que dans cette description, la géométrie riemannienne joue en quelque sorte un rôle de référence de sorte que toute la théorie semble basée sur deux types d'objets parfois appelés *riemanniens* et *minkowskiens*. Les objets riemanniens sont des analogues de grandeurs bien connues en géométrie riemannienne qui se confondent à elles lorsque le tenseur fondamental n'a pas de dépendance directionnelle. Quant aux objets non riemanniens ou minkowskiens, ils n'ont pas d'analogues riemanniens au sens où lorsque $g_{ij}(x, y) = g_{ij}(x)$, ces objets sont nuls.

Parmi ces objets géométriques dits non riemanniens (qui n'ont pas d'analogues riemanniens) nous avons le *tenseur de Cartan*, ce tenseur joue un rôle important en géométrie finslerienne et est défini par

$$A_{ijk} = \frac{F}{2} \frac{\partial g_{ij}}{\partial y^k} = \frac{F}{4} (F^2)_{y^i y^j y^k} \quad (1.4)$$

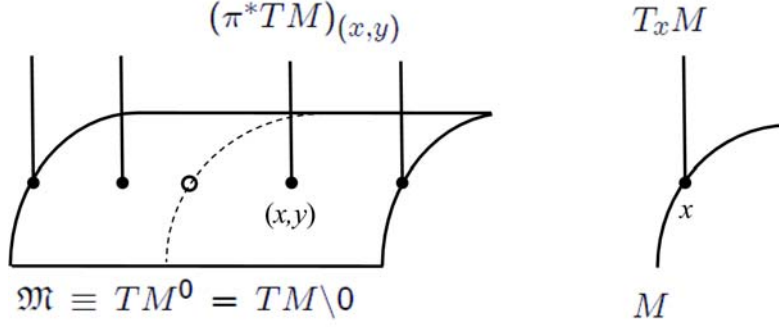
Le tenseur de Cartan¹ est homogène de degré zéro et possède les propriétés suivantes :

- $A_{ijk} = A_{jik} = A_{ikj}$ (symétrique par rapport aux 3 indices i, j, k)
- $y^i A_{ijk} = 0$
- (M, F) est riemannienne si et seulement si $A = 0$

1.2 Le fibré π^*TM

Le *fibré rappelé* (pull-back bundle) $\pi^*TM \rightarrow \mathfrak{M}$, dont la base est le fibré tangent privé de la section nulle $\mathfrak{M} \equiv TM^0 = TM \setminus \{0\}$, peut être décrit de manière imagée comme une collection d'espaces tangents $T_x M$ en chaque point (x, y) de la base \mathfrak{M} :

¹Dans la littérature, l'objet $C_{ijk} = \frac{1}{F} A_{ijk}$, apparaît parfois aussi sous le nom de tenseur de Cartan. Nous préférons utiliser A_{ijk} car ce dernier est homogène de degré zéro.



En effet, la collection de tous les points (x, y) avec $y \neq 0$, constituant le fibré tangent (privé de zéro) \mathfrak{M} , est considérée comme une variété où en chaque point (x, y) est dressée une copie de $T_x M$ sur lequel un produit scalaire $g_{ij}(x, y) dx^i \otimes dx^j$ peut être formé.

L'appellation de fibré rappelé pour $\pi^* TM$, issue du langage de la théorie des fibrés, vient du fait qu'il est construit à partir du fibré tangent TM comme suit :

$$\pi^* TM = \{(x, y, v) \in \mathfrak{M} \times TM \mid \pi(x, y) = \pi(v) = x\} \quad (1.5)$$

comme schématisé par le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \pi^* TM & \xrightarrow{\tau} & TM \\ \downarrow \pi' & & \downarrow \pi \\ \mathfrak{M} & \xrightarrow{\pi} & M \end{array} \quad (1.6)$$

Remarque 4 (Notations des variables associées aux fibrés $T(TM^0)$ et $\pi^* TM$)

Dans tout ce qui suit dans cette thèse (ceci est particulièrement important aux chapitres 2 et 3), nous désignons les vecteurs appartenant au fibré tangent de \mathfrak{M} , $T\mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{M}$ par les lettres X, Y, \dots etc. et de même pour les sections appartenant à $\Gamma(T\mathfrak{M})$ de ce fibré. Quant aux vecteurs ou sections du fibré rappelé $\pi^* TM$, ils sont désignés par les lettres ξ, η, \dots etc.

En utilisant les notations vues en (1.5), l'application canonique

$$\tau : \pi^* TM \longrightarrow TM \quad (1.7)$$

est telle que $\tau(x, y, v) = v \in T_x M$. Cette application permet la définition du gradient d'une fonction sur ce fibré, et la notion de gradient a besoin d'une métrique. Cela est possible puisque le fibré vectoriel π^*TM admet une métrique riemannienne $g_{(x,y)} = g_{ij}(x, y) dx^i \otimes dx^j$ construite à partir du tenseur fondamental (1.1) dont les composantes sont des fonctions sur \mathfrak{M} .

Définition 5 Si $u \in C^1(M)$, on définit le gradient de u , que nous noterons ∇u , $\nabla u \in \Gamma(\pi^*TM)$ par :

$$g_{(x,y)}(\nabla u_{(x,y)}, \xi_{(x,y)}) = du_{\pi(x,y)}(\tau\xi), \quad \xi \in \Gamma(\pi^*TM) \quad (1.8)$$

où τ est l'application canonique $\tau : \pi^*TM \rightarrow TM$. Nous pouvons également écrire en coordonnées :

$$\nabla u_{(x,y)} = g^{ij}(x, y) \frac{\partial u}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j}$$

En considérant les coordonnées (x^i) sur M , nous avons les bases $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}$ et $\{dx^i\}$ qui régissent les sections de TM et T^*M respectivement. Lorsque le fibré appelé π^*TM est construit, en chaque point $(x, y) \in \mathfrak{M}$ est dressée une fibre $(\pi^*TM)_{(x,y)} = T_x M$ (et de même $(\pi^*T^*M)_{(x,y)} = T_x^*M$). Alors, ces bases $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}$ et $\{dx^i\}$ induisent des bases correspondants aux fibrés appelés π^*TM et π^*T^*M respectivement. Ces nouvelles bases, qui sont aussi notées $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}$ et $\{dx^i\}$, sont désignées dans le livre de Bao, Chern et Shen [BCS00] par *sections transplantées* au sens où elles ont été transplantées de M vers la variété \mathfrak{M} . A noter que ces sections sont définies localement en x et globalement en y car une fois x fixé, ces sections transplantées ne changent pas lorsque y varie.

Grâce à la définition de ces bases, le tenseur de Cartan peut être vu comme une section symétrique de $\otimes^3 \pi^*T^*M$, alors que le tenseur fondamental est une section symétrique de $\pi^*T^*M \otimes \pi^*T^*M$:

$$\begin{aligned} A &= A_{ijk} dx^i \otimes dx^j \otimes dx^k \\ g &= g_{ij} dx^i \otimes dx^j \end{aligned}$$

Nous avons aussi deux autres sections globalement définies sur \mathfrak{M} , il s'agit de la *section distinguée* l du fibré π^*TM et de sa duale, la *forme de Hilbert* ω , section du fibré π^*T^*M . Ces deux sections sont définies par :

$$\begin{cases} l = l_{(x,y)} = \frac{y^i}{F} \frac{\partial}{\partial x^i} = l^i \frac{\partial}{\partial x^i} & , \quad \omega(l) = \frac{y^i F_{y^i}}{F} = 1 \\ \omega = \omega_{(x,y)} = F_{y^i} dx^i \end{cases} \quad (1.9)$$

La section distinguée l est de norme 1 par rapport à g :

$$\begin{aligned} g(l, l) &= g_{ij} dx^i \otimes dx^j \left(\frac{y^k}{F} \frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{y^{k'}}{F} \frac{\partial}{\partial x^{k'}} \right) \\ &= g_{ij} \frac{y^i y^j}{F^2} = 1 \end{aligned}$$

et la forme de Hilbert ω s'exprime sous forme de $\omega = l_i dx^i$ où $l_i = g_{ij} l^j = F_{y^i}$.

En plus des bases transplantées $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}$ et $\{dx^i\}$, des bases orthonormées spéciales peuvent être construites pour π^*TM et π^*T^*M . Ces bases sont construites en utilisant le tenseur fondamental g et c'est pour cela qu'elles sont appelées *bases spéciales g -orthonormées*. Une base g -orthonormale spéciale $\{e_a\}$ pour π^*TM et sa duale la base spéciale $\{\omega^b\}$ pour π^*T^*M sont telles que :

$$\begin{cases} g(e_a, e_b) = \delta_{ab} \\ e_n = l \end{cases}, \quad \begin{cases} \omega^b(e_a) = \delta_a^b \\ \omega^n = \omega \end{cases} \quad (1.10)$$

où l est la section distinguée et ω la forme de Hilbert. Il faut noter que $\{e_a\}$ n'a de sens que sur \mathfrak{M} , en général, elle n'a pas d'analogue sur M car le tenseur g est défini sur π^*TM et non sur TM sauf si F est riemannienne.

Les transformations qui régissent les passages entre les bases $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}$ et $\{e_a\}$, et de même entre $\{dx^i\}$ et $\{\omega^a\}$, s'expriment à travers les $(n \times n)$ -matrices λ_a^i et leurs inverses² λ_i^a comme suit :

$$\begin{cases} e_a = \lambda_a^i \frac{\partial}{\partial x^i} \\ \frac{\partial}{\partial x^i} = \lambda_i^a e_a \\ \omega^a = \lambda_i^a dx^i \\ dx^i = \lambda_a^i \omega^a \end{cases}, \quad \lambda_i^a \lambda_b^i = \delta_b^a, \quad \lambda_a^i \lambda_j^a = \delta_j^i \quad (1.11)$$

Comme $e_n = l = l^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ et $\omega^n = \omega = l_i dx^i$, il s'ensuit que $\lambda_n^i = l^i$ et $\lambda_i^n = l_i$. Nous pouvons citer également quelques relations utiles :

$$\begin{cases} \lambda_a^i g_{ij} \lambda_b^j = \delta_{ab} \\ \lambda_i^a g^{ij} \lambda_j^b = \delta^{ab} \\ \lambda_i^a \delta^{ab} \lambda_b^j = g^{ij} \\ \lambda_i^a \delta_{ab} \lambda_j^b = g_{ij} \end{cases}, \quad \begin{cases} \lambda_a^i = \delta_{ab} \lambda_j^b g^{ji} \\ \lambda_i^a = \delta^{ab} \lambda_b^j g_{ji} \end{cases}, \quad \begin{cases} \lambda_i^a y^i = 0 \\ \lambda_a^i F_{y^i} = 0 \\ \lambda_i^a \lambda_b^j F F_{y^i y^j} = \delta_{ab} \end{cases} \quad (1.12)$$

²Nous choisissons, comme dans la littérature de physique, de garder les mêmes notations pour les λ_a^i et leurs inverses λ_i^a , il n'y aura aucune ambiguïté dès lors que les notations des indices sont distinctes.

1.3 Distribution horizontale dans $T\mathfrak{M}$

La notion de dérivation covariante des sections locales de π^*TM nécessite une connexion. Plusieurs connexions peuvent être utilisées en géométrie finslerienne, et beaucoup d'entre elles peuvent être étudiées dans le cadre de la théorie des "sprays" en géométrie finslerienne ([She01a],[AIM93]). Dans cette thèse, nous ne nous baserons pas sur cette théorie qui est étroitement liée à la théorie des géodésiques sur les espaces finsleriens, mais utilisons tout de même certains de ses aspects naturels afin d'introduire certains concepts dont celui de la distribution horizontale sur $T\mathfrak{M}$. Nous commençons par énoncer le théorème suivant (voir [She01b] ou [She01a]).

Théorème 6 *La courbe $t \mapsto (x^1(t), x^2(t), \dots, x^n(t))$ est une géodésique finslerienne si et seulement si*

$$\ddot{x}^k + 2G^k(x, \dot{x}) = 0, \quad k = 1, \dots, n$$

où les fonctions $G^k(x, y)$ sont définies par

$$G^k(x, y) = \frac{1}{4}g^{kj}(x, y) \left[2 \frac{\partial g_{lj}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{li}}{\partial x^j} \right] y^l y^i \quad (1.13)$$

Nous ne reproduisons pas la preuve de ce théorème qu'on peut trouver en consultant [She01b] ou [She01a]. Ce qui est important à mettre en relief à travers ce théorème, c'est que les quantités G^k , définies en (1.13), sont des quantités naturelles et de même les quantités :

$$N_j^i = \frac{1}{2} \frac{\partial G^i}{\partial y^j} \quad (1.14)$$

A partir de ces objets N_j^i nous pouvons définir une 1-forme à valeurs dans π^*TM , que nous noterons θ_c , comme suit :

$$\theta_c = \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes \frac{1}{F} (dy^i + N_j^i dx^j) \quad (1.15)$$

qui est bien définie³ globalement sur la variété \mathfrak{M} . Nous devons signaler ici que nous suivons la tradition des auteurs de [BCS00] qui utilisent des objets tels que $\frac{y^j}{F}$, $\frac{N_j^i}{F}$ et ainsi de suite invariants par rapport à la transformation $y \rightarrow \lambda y$.

Grâce à θ_c et à la différentielle $\pi_* = d\pi$, nous pouvons définir les distributions horizontales et verticales.

³Un long calcul qui utilise, entre autres, la formule de transformation des N_j^i (cf. [BCS00] page 34) montre que la forme θ_c est bien définie globalement.

Définition 7 Les distributions horizontale $\mathcal{H} \equiv H\mathfrak{M} \subset T\mathfrak{M}$ et verticale $\mathcal{V} \equiv V\mathfrak{M} \subset T\mathfrak{M}$, associées à la variété finslerienne (M, F) , sont définies par :

$$\begin{cases} \mathcal{H} = \ker \theta_c \\ \mathcal{V} = \ker \pi_* \end{cases} \quad (1.16)$$

Le fibré tangent de la variété \mathfrak{M} possède les bases $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^i}, F \frac{\partial}{\partial y^i} \right\}$. Lors d'une transformation sur \mathfrak{M} induite par un changement de coordonnées dans M , les $\frac{\partial}{\partial x^i}$ se transforment d'une façon compliquée alors que $\frac{\partial}{\partial y^i}$ n'ont pas ce problème (pour les détails de ces transformations, voir le livre de Bao [BCS00] page 4 formule (1.1.3) et aussi le lemme 1.2.1 à la page 3 de [Mo06]). Pour le fibré cotangent de TM , il possède les bases $\{dx^i, dy^i\}$, et lors d'une transformation sur TM induite par un changement de coordonnées dans M , les dx^i se transforment simplement alors que dy^i non. En passant de la base $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^i}, F \frac{\partial}{\partial y^i} \right\}$ vers la base $\left\{ \frac{\delta}{\delta x^i}, F \frac{\partial}{\partial y^i} \right\}$ pour $T\mathfrak{M}$ et de la base $\{dx^i, dy^i\}$ vers $\left\{ dx^i, \frac{\delta y^i}{F} \right\}$ pour $T^*\mathfrak{M}$ avec :

$$\frac{\delta}{\delta x^i} = \frac{\partial}{\partial x^i} - N_i^j \frac{\partial}{\partial y^j} \quad (1.17)$$

$$\frac{\delta y^i}{F} = \frac{dy^i}{F} + \frac{N_j^i}{F} dx^j \quad (1.18)$$

nous avons des bases qui possèdent un comportement simple lors d'un changement de coordonnées au sein de M [BCS00]. Ces bases obéissent aux règles de dualités :

$$\frac{\delta}{\delta x^i} \xrightarrow{\text{dual}} dx^i, \quad F \frac{\partial}{\partial y^i} \xrightarrow{\text{dual}} \frac{\delta y^i}{F}$$

La variété \mathfrak{M} possède une métrique riemannienne naturelle dite de type de Sasaki :

$$G = g_{ij} dx^i \otimes dx^j + g_{ij} \frac{\delta y^i}{F} \otimes \frac{\delta y^j}{F} \quad (1.19)$$

Et par rapport à cette métrique, nous avons $\text{vect} \left(\frac{\delta}{\delta x^i} \right) \perp \text{vect} \left(F \frac{\partial}{\partial y^i} \right)$ d'où la décomposition :

$$\begin{aligned} T\mathfrak{M} &= \text{vect} \left(\frac{\delta}{\delta x^i} \right) \oplus \text{vect} \left(F \frac{\partial}{\partial y^i} \right) \\ &= \mathcal{H} \oplus \mathcal{V} \end{aligned} \quad (1.20)$$

Par conséquent, la variété \mathfrak{M} admet une connexion de Ehresmann à travers cette décomposition directement liée aux objets N_j^i d'où l'appellation qui leur est souvent attribuée de *connexion non linéaire* ou de *Ehresmann sur \mathfrak{M}* .

Les composantes g_{ij} du tenseur fondamental (1.1) peuvent être utilisées pour définir des *symboles de Christoffel formels* de seconde espèce :

$$\gamma_{jk}^i = g^{is} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{sj}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^s} + \frac{\partial g_{ks}}{\partial x^j} \right) \quad (1.21)$$

Ces symboles sont dits formels car ils ne correspondent pas vraiment à des coefficients d'une connexion. Ces symboles formels peuvent être utilisés pour retrouver la connexion non linéaire N_j^i donnée par (1.14) à travers la formule (voir ref. [BCS00] page 33) :

$$\frac{N_j^i}{F} = \gamma_{jk}^i l^k - A_{jk}^i \gamma_{rs}^k l^r l^s \quad (1.22)$$

où l^k est la section distinguée définie en (1.9), $l^k = y^k/F$, et A_{jk}^i est le tenseur de Cartan (1.4).

Etant donné que \mathfrak{M} est une variété riemannienne par rapport à la métrique de Sasaki, la base $\left\{ \frac{\delta}{\delta x^i}, F \frac{\partial}{\partial y^i} \right\}$ et sa duale $\left\{ dx^i, \frac{\delta y^i}{F} \right\}$ possèdent des analogues orthonormés :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\{ \frac{\delta}{\delta x^i}, F \frac{\partial}{\partial y^i} \right\} \\ \left\{ dx^i, \frac{\delta y^i}{F} \right\} \end{array} \right. \xrightarrow{\text{analogues orthonormés}} \left\{ \begin{array}{l} \{ \hat{e}_a, \hat{e}_{n+a} \} \\ \{ \omega^a, \omega^{n+a} \} \end{array} \right. , \quad 1 \leq a \leq n \quad (1.23)$$

Les relations qui relient les bases naturelles aux bases orthogonales sont similaires à celles reliant les bases transplantées aux bases g -orthonormales, et en plus c'est les mêmes fonctions λ_a^i qui sont utilisées. Nous résumons ces passages dans le petit tableau ci-dessous :

Bases de π^*TM	Bases de π^*T^*M	Bases de $T\mathfrak{M}$	Bases de $T^*\mathfrak{M}$
$e_a = \lambda_a^i \frac{\partial}{\partial x^i}$	$\omega^a = \lambda_a^i dx^i$	$\left\{ \begin{array}{l} \hat{e}_a = \lambda_a^i \frac{\delta}{\delta x^i} \\ \hat{e}_{n+a} = \lambda_a^i F \frac{\partial}{\partial y^i} \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} \omega^a = \lambda_a^i dx^i \\ \omega^{a+n} = \lambda_a^i \frac{\delta y^i}{F} \end{array} \right.$

(1.24)

Dans la base $\{\omega^a, \omega^{n+a}\}$, la métrique de Sasaki (1.19) sur \mathfrak{M} s'écrit comme :

$$G = \delta_{ab} \omega^a \otimes \omega^b + \delta_{ab} \omega^{n+a} \otimes \omega^{n+b} \quad (1.25)$$

1.4 Connexion de Chern

La connexion de Chern est une connexion linéaire sur le fibré π^*TM dont la base est la variété \mathfrak{M} . Nous avons introduit précédemment les symboles de Christoffel formels de second espèce (1.21) et les coefficients de la connexion non linéaire ou de Ehresmann N_j^i ((1.14) ou (1.22)). Ces objets peuvent être utilisés pour définir des symboles de Christoffel Γ_{jk}^i qui sont des coefficients associés à une certaine connexion linéaire sur le fibré $\pi^*TM \rightarrow \mathfrak{M}$, à savoir, la *connexion de Chern*. A l'instar de la connexion de Levi-Civita en géométrie riemannienne, la connexion de Chern ne possède pas de torsion, mais n'obéit qu'à des conditions de g -compatibilité restreintes.

Rappelons que d'une façon générale, les dérivées covariantes des sections de bases $\frac{\partial}{\partial x^j}$ de π^*TM et dx^i de π^*T^*M , dans une direction $X \in T\mathfrak{M}$, sont données à travers les 1-formes de connexion $\omega_j^i = \Gamma_{jk}^i dx^k$ par :

$$\nabla_X \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right) = \omega_j^i(X) \frac{\partial}{\partial x^i} \quad (1.26)$$

$$\nabla_X (dx^i) = -\omega_j^i(X) dx^j \quad (1.27)$$

Théorème 8 (Chern, Théorème 2.4.1 page 38 de [BCS00]) *Soit (M, F) une variété finslerienne. Le fibré π^*TM admet une unique connexion linéaire, appelée connexion de Chern, dont les 1-formes de connexion sont caractérisées par les équations de structure :*

(a) **Absence de torsion :**

$$d(dx^i) - dx^j \wedge \omega_j^i = -dx^j \wedge \omega_j^i = 0 \quad (1.28)$$

(b) **Une presque g -compatibilité :**

$$dg_{ij} - g_{kj}\omega_i^k - g_{ik}\omega_j^k = 2A_{ijl} \frac{\delta y^l}{F} \quad (1.29)$$

Les conditions (a) et (b) correspondent, en termes de coefficients de connexion, aux conditions (a)* et (b)* ci-dessous :

(a)* La condition d'absence de torsion est équivalente à deux conditions sous-jacentes, la première est l'absence de termes dy^k dans l'expression de ω_j^i

$$\omega_j^i = \Gamma_{jk}^i dx^k \quad (1.30)$$

et la deuxième est la symétrie des symboles de Christoffel :

$$\Gamma_{jk}^i = \Gamma_{kj}^i \quad (1.31)$$

(b)* La presque g -compatibilité implique que :

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{g^{is}}{2} \left(\frac{\delta g_{sj}}{\delta x^k} - \frac{\delta g_{jk}}{\delta x^s} + \frac{\delta g_{ks}}{\delta x^j} \right) \quad (1.32)$$

Dans la référence [BCS00] l'auteur ne donne pas de preuve du théorème 8, il démontre l'équivalence entre les conditions (a) (resp. (b)) et (a)* (resp. (b)*). Nous donnerons plus tard une preuve plus conceptuelle et surtout plus générale dans le cadre de la connexion de Chern généralisée (cf. Théorème 19 au chapitre 2).

Pour constater l'équivalence (a) \Leftrightarrow (a)*, considérons (1.28). L'expression de ω_j^i devrait, à priori, s'écrire comme $\omega_j^i = \Gamma_{jk}^i dx^k + Z_{jk}^i dy^k$ et $dx^j \wedge \omega_j^i = 0$ donne :

$$\Gamma_{jk}^i dx^j \wedge dx^k + Z_{jk}^i dx^j \wedge dy^k = 0 \iff \begin{cases} Z_{jk}^i = 0 \\ \Gamma_{jk}^i = \Gamma_{kj}^i \end{cases}$$

Pour l'équivalence (b) \Leftrightarrow (b)*, nous injectons les expressions de (1.18) et (1.30) de δy^i et ω_j^i dans l'équation (1.29) :

$$\begin{aligned} dg_{ij} - g_{kj} \Gamma_{il}^k dx^l - g_{ik} \Gamma_{jl}^k dx^l &= \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} dx^l + \frac{\partial g_{ij}}{\partial y^l} dy^l - g_{kj} \Gamma_{il}^k dx^l - g_{ik} \Gamma_{jl}^k dx^l \\ &= \frac{2A_{ijs}}{F} (dy^s + N_l^s dx^l) \end{aligned}$$

En identifiant les coefficients de dx^k et ceux de dy^k on obtient :

$$\begin{cases} g_{kj} \Gamma_{il}^k + g_{ik} \Gamma_{jl}^k = \Gamma_{jil} + \Gamma_{ijl} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} - \frac{2A_{ijs}}{F} N_l^s \\ \frac{\partial g_{ij}}{\partial y^l} = \frac{2A_{ijl}}{F} \end{cases}$$

Si nous effectuons le jeu d'indices suivant :

$$2\Gamma_{jil} = (\Gamma_{jil} + \Gamma_{ijl}) - (\Gamma_{ilj} + \Gamma_{lij}) + (\Gamma_{lji} + \Gamma_{jli})$$

nous avons :

$$\begin{aligned} 2\Gamma_{jil} &= \left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} - \frac{2A_{ijs}}{F} N_l^s \right) - \left(\frac{\partial g_{li}}{\partial x^j} - \frac{2A_{lis}}{F} N_j^s \right) + \left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i} - \frac{2A_{jls}}{F} N_i^s \right) \\ &= \left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} - \frac{\partial g_{li}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i} \right) - \left(\frac{2A_{ijs}}{F} N_l^s - \frac{2A_{lis}}{F} N_j^s + \frac{2A_{jls}}{F} N_i^s \right) \end{aligned}$$

ceci implique que :

$$\begin{aligned} \Gamma_{il}^k &= g^{kj} \Gamma_{jil} \\ &= \frac{1}{2} g^{kj} \left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} - \frac{\partial g_{li}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i} \right) - g^{kj} \left(\frac{A_{ijs}}{F} N_l^s - \frac{A_{lis}}{F} N_j^s + \frac{A_{jls}}{F} N_i^s \right) \end{aligned}$$

et en utilisant (1.21) nous obtenons

$$\Gamma_{il}^k = \gamma_{il}^k - \frac{g^{kj}}{F} (A_{ijs}N_l^s - A_{lis}N_j^s + A_{jls}N_i^s) \quad (1.33)$$

La relation (1.33) relie alors les coefficients de la connexion de Chern Γ_{il}^k aux symboles de Christoffel formels γ_{il}^k à travers une expression faisant intervenir les coefficients de la connexion non linéaire N_j^i et le tenseur de Cartan. A présent, en utilisant l'expression (1.17) de $\frac{\delta}{\delta x^i}$ et le fait que $\frac{1}{2}N_l^s \frac{\partial g_{ij}}{\partial y^l} = \frac{A_{ijs}}{F} N_l^s$ on obtient la forme élégante suivante pour les coefficients de la connexion :

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{g^{is}}{2} \left(\frac{\delta g_{sj}}{\delta x^k} - \frac{\delta g_{jk}}{\delta x^s} + \frac{\delta g_{ks}}{\delta x^j} \right)$$

Dérivées covariantes des champs tensoriels sur \mathfrak{M}

Rappelons que la section distinguée $l = l^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ et le tenseur fondamental $g = g_{ij} dx^i \otimes dx^j$ sont des sections de fibrés tensoriels sur la variété \mathfrak{M} . L'opérateur ∇ (ou les 1-formes ω_j^i) définit une connexion linéaire sur π^*TM et sur les fibrés vectoriels associés.

Nous présentons dans ce paragraphe quelques règles d'écriture de la dérivée covariante associée à la connexion de Chern en respectant la décomposition suivant les directions horizontale et verticale vue précédemment. Soit $T = T_j^i \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes dx^j$ une section locale de $\pi^*TM \otimes \pi^*T^*M$ et qui est un champ tensoriel sur la variété \mathfrak{M} , sa dérivée covariante est :

$$\nabla T = (\nabla T)_j^i \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes dx^j, \quad (\nabla T)_j^i = dT_j^i + T_j^k \omega_k^i - T_k^i \omega_j^k \quad (1.34)$$

Les $(\nabla T)_j^i$ sont des 1-formes sur \mathfrak{M} . Elles peuvent alors être développées suivant la base naturelle $\left\{ dx^s, \frac{\delta y^s}{F} \right\}$:

$$\begin{aligned} (\nabla T)_j^i &= \frac{\delta T_j^i}{\delta x^s} dx^s + F \frac{\partial T_j^i}{\partial y^s} \frac{\delta y^s}{F} + T_j^k \Gamma_{ks}^i dx^s - T_k^i \Gamma_{js}^k dx^s \quad (\text{car } \omega_j^i = \Gamma_{js}^i dx^s) \\ &= \left[\frac{\delta T_j^i}{\delta x^s} + T_j^k \Gamma_{ks}^i - T_k^i \Gamma_{js}^k \right] dx^s + \left[F \frac{\partial T_j^i}{\partial y^s} \right] \frac{\delta y^s}{F} \\ &= \left(\nabla_{\frac{\delta}{\delta x^s}} T \right)_j^i dx^s + \left(\nabla_{F \frac{\partial}{\partial y^s}} T \right)_j^i \frac{\delta y^s}{F} \\ &= T_{j;s}^i dx^s + T_{j;s}^i \frac{\delta y^s}{F} \end{aligned}$$

Ici nous avons utilisé les notations $(\dots)_H$ et $(\dots)_V$ pour désigner :

$$\left\{ \begin{array}{l} T_{j;s}^i = \left(\nabla_{\frac{\delta}{\delta x^s}} T \right)_j^i = \frac{\delta T_j^i}{\delta x^s} + T_j^k \Gamma_{ks}^i - T_k^i \Gamma_{js}^k \quad (\text{dérivée covariante horizontale}) \\ T_{j;s}^i = \left(\nabla_{F \frac{\partial}{\partial y^s}} T \right)_j^i = F \frac{\partial T_j^i}{\partial y^s} \quad (\text{dérivée covariante verticale}) \end{array} \right. \quad (1.35)$$

Rappelons que $\frac{\delta T_j^i}{\delta x^s} = \frac{\partial T_j^i}{\partial x^s} - N_s^r \frac{\partial T_j^i}{\partial y^r}$ alors que $F \frac{\partial}{\partial y^s}$ est la dérivée partielle usuelle (homogénéisée). Remarquons que la dérivée covariante horizontale $T_{j;s}^i$ est vue comme une dérivée directionnelle horizontale $\frac{\delta T_j^i}{\delta x^s}$ à laquelle sont rajoutés des termes de correction. Par contre, la dérivée covariante verticale $T_{j;s}^i$ est constituée de la dérivée partielle homogénéisée sans termes de correction.

Un exemple important est celui des dérivées covariantes du tenseur fondamental $g = g_{ij} dx^i \otimes dx^j$. Rappelons que (1.29) :

$$(\nabla g)_{ij} = dg_{ij} - g_{kj} \omega_i^k - g_{ik} \omega_j^k = 2A_{ijs} \frac{\delta y^s}{F}$$

On peut immédiatement voir que :

$$g_{ij;s}^H = 0 \quad (1.36)$$

$$g_{ij;s}^V = 2A_{ijs} \quad (1.37)$$

Ce qui signifie que le tenseur fondamental est constant (du point de vue de la dérivation covariante) le long des directions horizontales alors que les dérivées verticales sont proportionnelles au tenseur de Cartan.

Nous pouvons déduire les dérivées covariantes ∇_X de g , dans une direction X donnée, en utilisant (1.26) et (1.27) :

$$\begin{aligned} \nabla_X g = (\nabla g)(X) &= \left((\nabla g)_{ij} dx^i \otimes dx^j \right) (X) \\ &= dg_{ij}(X) dx^i \otimes dx^j + g_{ij} \nabla_X (dx^i) \otimes dx^j + g_{ij} dx^i \otimes \nabla_X (dx^j) \end{aligned}$$

De même que pour la section distinguée $l = l^i \frac{\partial}{\partial x^i}$:

$$\begin{aligned} \nabla_X l = (\nabla l)(X) &= \left((dl^i + l^j \omega_j^i) \otimes \frac{\partial}{\partial x^i} \right) (X) \\ &= dl^i(X) \frac{\partial}{\partial x^i} + l^i \nabla_X \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right) \end{aligned}$$

1.5 Courbures en géométrie finslerienne

Nous continuons dans ce chapitre avec l'approche de Chern à travers les repères mobiles. Une approche intrinsèque sera considérée dans les deux prochains chapitres. La 2-forme de courbure de la connexion de Chern est donnée par :

$$\Omega_j^i = d\omega_j^i + \omega_k^i \wedge \omega_j^k \quad (1.38)$$

Puisque les 2-formes de courbures Ω_j^i sont des 2-formes sur la variété \mathfrak{M} , elles peuvent être décomposées en :

$$\Omega_j^i = \frac{1}{2}R_{jkl}^i dx^k \wedge dx^l + P_{jkl}^i dx^k \wedge \frac{\delta y^l}{F} + \frac{1}{2}Q_{jkl}^i \frac{\delta y^k}{F} \wedge \frac{\delta y^l}{F} \quad (1.39)$$

Les objets R , P et Q sont respectivement les hh -, hv - et vv -tenseurs de courbures de la connexion de Chern. Certains auteurs utilisent la terminologie de courbure riemannienne pour désigner la hh -courbure R . Cette appellation vient du fait que la hh -courbure correspond à la courbure de Riemann lorsque le tenseur fondamental correspond à une métrique riemannienne $g_{ij}(x, y) = g_{ij}(x)$ et que les $\frac{\delta g_{jk}}{\delta x^i}$ se confondent dans ce cas aux $\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}$. Les coefficients de la connexion Γ_{jk}^i s'identifient alors aux symboles de Christoffel formels γ_{jk}^i qui ne sont rien d'autres dans ce cas que les coefficients de la connexion de Levi-Civita. Nous essayons dans la mesure du possible d'éviter cette terminologie et préférons tout simplement désigner R par hh -courbure. Quant à P , elle est appelée courbure de Minkowski, c'est une courbure qui n'a pas d'équivalent riemannien. Nous verrons un peu plus loin que la vv -courbure Q est identiquement nulle pour la connexion de Chern.

Lorsque nous considérons les composantes associées aux termes "non mixtes" $dx^k \wedge dx^l$ et $\frac{\delta y^k}{F} \wedge \frac{\delta y^l}{F}$, nous pouvons supposer que :

$$\begin{cases} R_{jkl}^i = -R_{jlk}^i \\ Q_{jkl}^i = -Q_{jlk}^i \end{cases} \quad (1.40)$$

Afin de déduire d'autres propriétés, nous effectuons une dérivation extérieure de (1.28) :

$$d(dx^i \wedge \omega_i^j) = dx^i \wedge d\omega_i^j = 0$$

nous avons alors :

$$dx^j \wedge \Omega_j^i = dx^j \wedge d\omega_j^i + dx^j \wedge \omega_k^i \wedge \omega_j^k = 0$$

En utilisant (1.39) on obtient :

$$0 = \frac{1}{2}R_{jkl}^i dx^j \wedge dx^k \wedge dx^l + P_{jkl}^i dx^j \wedge dx^k \wedge \frac{\delta y^l}{F} + \frac{1}{2}Q_{jkl}^i dx^j \wedge \frac{\delta y^k}{F} \wedge \frac{\delta y^l}{F}$$

Les trois termes étant complètement indépendants, chacun devrait s'annuler. Comme conséquences de ces annulations, nous avons la première identité de bianchi pour R , la symétrie de P_{jkl}^i par rapport à j et k , et la symétrie de Q_{jkl}^i par rapport aux indices k et l :

$$\begin{cases} R_{jkl}^i dx^j \wedge dx^k \wedge dx^l = 0 \implies R_{jkl}^i + R_{klj}^i + R_{ljk}^i = 0 \\ P_{jkl}^i dx^j \wedge dx^k \wedge \frac{\delta y^l}{F} = 0 \implies P_{jkl}^i = P_{kjl}^i \\ Q_{jkl}^i dx^j \wedge \frac{\delta y^k}{F} \wedge \frac{\delta y^l}{F} = 0 \implies Q_{jkl}^i = Q_{jlk}^i \end{cases}$$

Ici la deuxième conséquence est déduite à partir de l'antisymétrie de $dx^j \wedge dx^k$. De même, l'antisymétrie de $\frac{\delta y^k}{F} \wedge \frac{\delta y^l}{F}$ permet de déduire que $Q_{jkl}^i = Q_{jlk}^i$ et comme d'autre part $Q_{jkl}^i = -Q_{jlk}^i$ (cf. (1.40)), cette courbure est identiquement nulle. L'expression (1.39) se résume alors à :

$$\Omega_j^i = \frac{1}{2} R_{jkl}^i dx^k \wedge dx^l + P_{jkl}^i dx^k \wedge \frac{\delta y^l}{F} \quad (1.41)$$

Nous définissons le *tenseur de courbure complète* $\phi(X, Y)$ qui tient compte de la hh -courbure et de la courbure de Minkowski. L'approche intrinsèque de ce tenseur n'est pas vraiment considérée par les auteurs de géométrie finslerienne. C'est pour cela que nous nous proposons dans le chapitre 2 de construire un background tensoriel pour que des objets tels que la courbure totale $\phi(X, Y)$ soient considérés comme tenseurs finsleriens (voir le paragraphe 2.4, page 43). Pour le moment, nous donnons rapidement une formule de passage entre la 2-forme de courbure Ω_j^i et le tenseur de courbure complète $\phi(X, Y) = R(X, Y) + P(X, Y)$. En considérant une section $\xi = \xi^j \frac{\partial}{\partial x^j}$ de π^*TM et des champs locaux X, Y sur \mathfrak{M} nous avons :

$$\begin{aligned} \phi(X, Y)\xi &= (\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z) \xi \\ &= \xi^j \Omega_j^i(X, Y) \frac{\partial}{\partial x^i} \end{aligned} \quad (1.42)$$

Pour trouver les expressions en coordonnées de R et P , nous écrivons :

$$d\omega_j^i + \omega_k^i \wedge \omega_j^k = \frac{1}{2} R_{jkl}^i dx^k \wedge dx^l + P_{jkl}^i dx^k \wedge \frac{\delta y^l}{F} \quad (1.43)$$

et comme $d\omega_j^i = d\Gamma_{jl}^i \wedge dx^l$ et que $d\Gamma_{jl}^i$ est une 1-forme locale sur \mathfrak{M} , elle peut être développée en termes de dx^k et $\frac{\delta y^k}{F}$, et le coté gauche de (1.43) s'écrit comme :

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\delta \Gamma_{jl}^i}{\delta x^k} dx^k + F \frac{\partial \Gamma_{jl}^i}{\partial y^k} \frac{\delta y^k}{F} \right) \wedge dx^l + \omega_h^i \wedge \omega_j^h \\ &= \frac{\delta \Gamma_{jl}^i}{\delta x^k} (dx^k \wedge dx^l) - F \frac{\partial \Gamma_{jl}^i}{\partial y^k} \left(dx^l \wedge \frac{\delta y^k}{F} \right) + \Gamma_{hk}^i \Gamma_{jl}^h (dx^k \wedge dx^l) \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\delta \Gamma_{jl}^i}{\delta x^k} - \frac{\delta \Gamma_{jk}^i}{\delta x^l} + \Gamma_{hk}^i \Gamma_{jl}^h - \Gamma_{hl}^i \Gamma_{jk}^h \right] (dx^k \wedge dx^l) - F \frac{\partial \Gamma_{jl}^i}{\partial y^k} \left(dx^l \wedge \frac{\delta y^k}{F} \right) \end{aligned}$$

et en identifiant avec le coté droit de l'équation (1.43) nous obtenons :

$$\begin{cases} R^i_{jkl} = \frac{\delta \Gamma^i_{jl}}{\delta x^k} - \frac{\delta \Gamma^i_{jk}}{\delta x^l} + \Gamma^i_{hk} \Gamma^h_{jl} - \Gamma^i_{hl} \Gamma^h_{jk} \\ P^i_{jkl} = -F \frac{\partial \Gamma^i_{jk}}{\partial y^l} \end{cases} \quad (1.44)$$

Nous avons la relation suivante entre la distribution horizontale et hh -courbure (voir [BCS00] page 62) :

$$\left[\frac{\delta}{\delta x^k}, \frac{\delta}{\delta x^l} \right] = -l^j R^i_{jkl} F \frac{\partial}{\partial y^i} \quad (1.45)$$

Exemples

- **Variétés riemanniennes** : les coefficients Γ^i_{jk} de la connexion de Chern s'identifient aux symboles de Christoffel formels γ^i_{jk} et les $\frac{\delta}{\delta x^i}$ dans (1.44) agissent comme des $\frac{\partial}{\partial x^i}$. La hh -courbure ne sera rien d'autre que la courbure riemannienne

$$R^i_{jkl} = \frac{\partial \Gamma^i_{jl}}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma^i_{jk}}{\partial x^l} + \Gamma^i_{hk} \Gamma^h_{jl} - \Gamma^i_{hl} \Gamma^h_{jk}$$

De plus, les Γ^i_{jk} n'ayant pas de dépendance en y , $P = -F \frac{\partial \Gamma^i_{jk}}{\partial y^l} = 0$.

- **Espaces localement minkowskiens** : Ce sont des espaces dont $R^i_{jkl} = P^i_{jkl} = 0$, nous verrons cet exemple plus en détail dans le théorème 15 dans le prochain paragraphe.

Définition 9 Une variété finslerienne (M, F) est dite R -plate si la hh -courbure est nulle : $R^i_{jkl} = 0$.

L'équation (1.45) nous dit que la distribution horizontale d'une variété finslerienne R -plate est intégrable. La réciproque est également vraie et a été démontrée par X. Mo ([Mo06] page 76 ou l'article original [Mo98]) :

Théorème 10 Une variété finslerienne (M, F) a une distribution horizontale \mathcal{H} intégrable si et seulement si $R_{ik} = R_{jikl} l^j l^l = 0$.

1.6 Variétés finsleriennes localement minkowskiennes

De la même façon que pour les variétés riemanniennes qui peuvent être localement euclidiennes, les variétés finsleriennes peuvent être *localement minkowskiennes*. Il existe

une structure finslerienne à peine plus générale que les variétés localement minkowskienne et les variétés riemanniennes, ce sont les *structures de Berwald*. Une structure finslerienne est dite de type de Berwald si les coefficients de la connexion de Chern (en coordonnées naturelles) Γ_{jk}^i n'ont pas de dépendance en y . Pour un espace de Berwald, les coefficients Γ_{jk}^i définissent une dérivée covariante linéaire ∇ directement sur la variété M . Ces coefficients sont les composantes de $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^k}} \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right)$ par rapport à la base $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^i} \right\}$.

Définition 11 *une variété finslerienne (M, F) est localement minkowskienne s'il existe des coordonnées locales privilégiées (x^i) au voisinage de tous points de M qui, avec les coordonnées sur TM induites par $y = y^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, rendent F dépendante uniquement de y et non de x .*

D'après la définition ci-dessus, nous pouvons voir que les variétés localement de Minkowski sont effectivement de type de Berwald.

Lemme 12 *Si une variété finslerienne (M, F) est localement minkowskienne, alors, il existe un système de coordonnées privilégié dans lequel les coefficients Γ_{jk}^i de la connexion de Chern sont nuls.*

Preuve. Si dans un système de coordonnées privilégié le lagrangien $F(x, y) = F(y)$, le tenseur fondamental g_{ij} aussi ne dépend que de y . Par conséquent, dans ce même système de coordonnées, les symboles de Christoffel formels γ_{jk}^i , donnés par (1.21), sont nuls. La formule (1.22) nous permet de déduire que les coefficients N_j^i sont également nuls. Et d'après la formule (1.33), les coefficients de la connexion de Chern Γ_{jk}^i sont aussi nuls dans ce système de coordonnées. ■

Avant de continuer avec les variétés finslerienne localement minkowskienne et leurs significations en termes de courbures, nous énonçons rapidement une proposition classique qui concerne les coefficients associés à une connexion linéaire quelconque. Cette proposition est ensuite utilisée dans le cas de la connexion de Chern en tant que connexion linéaire sur le fibré $\pi^*TM \rightarrow T\mathcal{M}$ pour décrire les variétés localement minkowskienne.

Proposition 13 *Soit ∇ une connexion linéaire sans torsion sur le fibré tangent d'une variété de dimension finie M . Soit x un point appartenant à M . Si la courbure de ∇ s'annule dans un voisinage de x , alors, il existe un système de coordonnées locales (x^i) de x dans lequel tous les coefficients de connexion Γ_{jk}^i sont nuls.*

La preuve de cette proposition se trouve dans l'annexe A.

Proposition 14 *Soit (M, F) une variété finslerienne. Alors, les cinq critères suivants sont équivalents :*

- (a) (M, F) est de type de Berwald, c'est-à-dire que les coefficients de la connexion de Chern Γ_{jk}^i ne dépendent pas de la variable directionnelle y .
- (b) La dérivée covariante du tenseur de Cartan le long de toutes les directions horizontales (sur \mathfrak{M}) est nulle : $A_{ijk;l}^H = 0$.
- (c) La partie hv de la courbure de Chern est identiquement nulle : $P_{jkl}^i = 0$.
- (d) Les quantités $\left(\Gamma_{jk}^i y^j y^k\right)_{y^p y^q}$ ne dépendent pas de y .
- (e) Les quantités $\left(\gamma_{jk}^i y^j y^k\right)_{y^p y^q} = (G^i)_{y^p y^q}$ ne dépendent pas de y .

La preuve complète de la proposition 14 se trouve dans la référence [BCS00] (pages 264 et 265), aussi, nous ne jugeons pas utile de la reproduire dans le présent texte.

À présent, nous énonçons un théorème qui décrit les variétés localement minkowskienne en termes de la hh -courbure et de la courbure de Minkowski. Ce théorème est l'homologue finslerien du théorème en géométrie riemannienne qui dit qu'une variété riemannienne est localement euclidienne si et seulement si le tenseur de courbure de Riemann est nul.

Théorème 15 *Soit (M, F) une variété finslerienne et soient R_{jkl}^i et P_{jkl}^i les hh - et hv -courbures, respectivement de la connexion de Chern. Alors, les trois conditions suivantes sont équivalentes :*

- (a) (M, F) est localement minkowskienne.
- (b) $R_{jkl}^i = 0$ et $P_{jkl}^i = 0$.
- (c) $R_{ik} = l^j R_{jikl}^l = 0$ et $P_{jkl}^i = 0$.

Preuve. Le lemme 12 nous permet immédiatement de voir que (a) \Rightarrow (b). En effet, s'il existe un système de coordonnées dans lequel les coefficients de la connexion de Chern Γ_{jk}^i sont nuls, l'utilisation des formules (1.44) nous montre que la hh -courbure R et la hv -courbure P sont nulles dans ce système de coordonnées. Ces objets étant des tenseurs, on conclut qu'ils sont nuls dans n'importe quel système de coordonnées.

Aussi, il est évident que (b) \Rightarrow (c). Donc il reste à prouver que (c) \Rightarrow (a). Supposons que nous avons $R_{ik} = l^j R_{jikl}^l = 0$ et $P_{jkl}^i = 0$. Par la proposition 14, le fait que $P = 0$

implique que les coefficients de la connexion de Chern Γ_{jk}^i ne dépendent pas de y . Ils peuvent alors définir une connexion linéaire ∇ directement sur la variété M .

Comme $P = 0$, $\dot{A} = 0$ (formule $\dot{A}_{ikl} = -l^j P_{jikl}$ qu'on peut trouver à la page 56 de la référence [BCS00]). La notation \dot{A}_{ikl} désigne $\dot{A}_{ikl} = A_{ikl; s}^H l^s$ où $A_{ikl; s}^H$ est la dérivée covariante horizontale donnée dans (1.35). Une autre relation que nous pouvons aussi trouver dans le livre [BCS00] (page 59) et que nous reprenons ici sans démonstration :

$$\begin{aligned} R_{jkl}^i &= \frac{1}{3} (R_{k;l;j}^i - R_{l;k;j}^i + l_j R_{k;l}^i - l_j R_{l;k}^i) \\ &+ \frac{2}{3} (R_{k;j}^i l_l - R_{l;j}^i l_k + R_k^i g_{jl} - R_l^i g_{jk}) \\ &- (\dot{A}_{j|l|k}^i - \dot{A}_{jk|l}^i + \dot{A}_{uk}^i \dot{A}_{jl}^u - \dot{A}_{ul}^i \dot{A}_{jk}^u) \end{aligned} \quad (1.46)$$

nous permet de déduire que lorsque $\dot{A} = 0$ et $R_k^i = 0$, la hh -courbure $R_{jkl}^i = 0$. De ce fait nous avons (c) \Rightarrow (b).

En reprenant la formule pour R_{jkl}^i dans (1.44) en remplaçant $\frac{\delta}{\delta x}$ par $\frac{\partial}{\partial x}$ (car d'après la proposition 14 les Γ_{jk}^i ne dépendent pas de y puisque $P_{jkl}^i = 0$), nous obtenons :

$$R_{jkl}^i = \frac{\partial \Gamma_{jl}^i}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma_{jk}^i}{\partial x^l} + \Gamma_{hk}^i \Gamma_{jl}^h - \Gamma_{hl}^i \Gamma_{jk}^h = 0 \quad (1.47)$$

qui signifie que la connexion considérée est plate sur M . La proposition 13 nous permet de déduire qu'il existe un système de coordonnées dans lequel $\Gamma_{jk}^i = 0$, donc $N_k^i = 0$ (car $\frac{N_k^i}{F} = \Gamma_{jk}^i l^j$, page 43 de la référence [BCS00]). Cela nous donne en vertu de (1.33) que $\gamma_{jk}^i = 0$, ce qui implique que :

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = 0$$

Puisque les g_{ij} ne dépendent pas de x , la formule (1.3) nous permet de déduire que F aussi ne dépend pas de x et (M, F) est alors localement minkowskienne. ■

Chapitre 2

Axiomatisation et géométrie de Finsler-Ehresmann

Dans le premier chapitre, nous avons rappelé les notions fondamentales de la géométrie finslerienne telles qu'elles sont présentées classiquement par exemple dans les livres de Bao, Chern & Shen [BCS00]. Nous avons vu en particulier la connexion de Chern et les courbures associées sans insister sur l'aspect intrinsèque de ces notions. A l'instar des références [BR04], [BCS00], [She01b] et [She01a], nous avons privilégié l'utilisation des équations de structures de Cartan et les formes de courbure.

Dans le présent chapitre, nous avons deux objectifs. Le premier est que nous reprenons des notions connues en géométrie finslerienne (connexion de Chern, courbures associées,...etc) dans un langage intrinsèque. En particulier, nous proposons une formulation axiomatique, à la *Koszul*, de ces notions. Le deuxième objectif est d'effectuer cette axiomatisation non seulement sur de telles grandeurs, mais sur des grandeurs plus générales que nous introduisons. De manière plus précise, nous introduisons la notion de *variété de Finsler-Ehresmann* (M, F, \mathcal{H}) en dotant une variété finslerienne d'une structure additionnelle liée à la *connexion de Ehresmann*, et nous proposons une formulation Koszulienne de la *connexion de Chern généralisée* que nous définissons préalablement sur cette variété. En résumé, nous effectuons simultanément dans ce chapitre une axiomatisation et une généralisation de la connexion de Chern.

Notre approche illustre l'analogie entre la connexion de Chern en géométrie finslerienne et la connexion de Levi-Civita en géométrie riemannienne. La construction axiomatique de la connexion de Chern, et a fortiori celle de la connexion de Chern généralisée,

ne se trouve pas dans la littérature et doit être considérée comme nouvelle. Pour cette raison, nous donnons une preuve détaillée de l'existence et de l'unicité de la connexion de Chern généralisée.

Rappelons qu'une métrique finslerienne F sur la variété M définit un *tenseur fondamentale* g . Ce tenseur vit sur la variété \mathfrak{M} et est une métrique sur le fibré appelé $\pi^*TM \rightarrow \mathfrak{M}$. Rappelons également que ce fibré est un quotient du fibré tangent $T\mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{M}$ et nous avons la suite exacte de fibrés

$$0 \longrightarrow \mathcal{V} \xrightarrow{i} T\mathfrak{M} \xrightarrow{\pi_*} \pi^*TM \longrightarrow 0$$

où $\pi_* : T\mathfrak{M} \rightarrow \pi^*TM$ est (essentiellement) la dérivée de l'application canonique $\pi : \mathfrak{M} \rightarrow M$ et $\mathcal{V} = \ker(\pi_*)$ est le noyau de cette application et est appelé *fibré vertical*. Nous avons vu au chapitre 1 que la métrique finslerienne permet, via l'équation des géodésiques, de définir canoniquement un sous-fibré *horizontal* $\mathcal{H} \subset T\mathfrak{M}$ complémentaire au fibré vertical. La décomposition $T\mathfrak{M} = \mathcal{V} \oplus \mathcal{H}$ définit ainsi une distribution horizontale appelée *connexion de Ehresmann* du fibré $T\mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{M}$.

Nous avons signalé brièvement au début de cette introduction que nous effectuons un travail de généralisation sur la connexion de Chern, nous tenons maintenant à clarifier le sens cette généralisation. En remontant à la construction de la connexion de Chern, nous remarquons que cette construction n'est pas liée au choix d'une connexion de Ehresmann particulière. Nous commençons alors dans ce chapitre par construire dans le paragraphe 2.1 une variété de Finsler-Ehresmann (M, F, \mathcal{H}) en dotant une variété finslerienne (M, F) d'un choix arbitraire du sous-fibré horizontal $\mathcal{H} \subset T\mathfrak{M}$. Et ensuite, nous prouvons dans le paragraphe 2.2 l'existence d'une connexion de Chern généralisée sur cette variété. Dans cet esprit de généralisation, la variété finslerienne "traditionnelle" (M, F) correspond à une variété de Finsler-Ehresmann (M, F, \mathcal{H}_c) pour laquelle un choix "canonique" est fait en imposant des conditions d'invariance projective à la connexion de Ehresmann. Une construction intrinsèque de la *hh-courbure* et de la *hv-courbure*, associées à la connexion de Chern généralisée, est proposée dans le paragraphe 2.3 où nous pouvons comprendre un peu plus le lien entre l'appellation *hh-*, *hv-* et *vv-* d'une courbure avec les sous-fibrés horizontal \mathcal{H} et vertical \mathcal{V} .

Après avoir établi la connexion de Chern généralisée, nous donnons au paragraphe 2.4 quelques précisions sur la nature des tenseurs qui apparaissent en géométrie finslerienne, en particulier, les tenseurs de courbures. La nécessité de cette précision vient du fait que nos tenseurs ont des composantes covariantes et contravariantes, mais que les composantes covariantes se distinguent en deux sous-types suivant le nombre d'arguments du tenseur qui sont sections de $T\mathfrak{M}$ ou de π^*TM . Cette distinction n'est habituellement pas faite dans les livres de géométrie finslerienne, ce qui laisse place à de possibles ambiguïtés pour le praticien non encore expérimenté. En effet, nous avons déjà remarqué

dans le chapitre 1 cette *nature mixte* des tenseurs utilisés en géométrie finslerienne, mais dans les ouvrages abordant cette approche tensorielle (par exemple [BR04], [BCS00], [She01b] et [She01a]) la séparation entre variables liées au fibré rappelé π^*TM et celles liées à la base \mathfrak{M} n'est pas toujours claire. Nous nous proposons alors de construire une sorte de "background" tensoriel finslerien dans le but de définir plus clairement quand interviennent telles ou telles variables.

Le présent chapitre est complété par une présentation détaillée du tenseur de courbure d'une variété de Finsler-Ehresmann et de la courbure drapeau correspondante dans le paragraphe 2.5. On montre aussi dans le paragraphe 2.6 que la variété de Finsler-Ehresmann est localement minkowskienne si et seulement si la courbure complète est nulle et que le tenseur de Cartan, vérifie à travers la forme de Ehresmann θ , la combinaison suivante :

$$\mathcal{A} = A(\theta(X), \pi_*Y, \pi_*Z) + A(\theta(Y), \pi_*Z, \pi_*X) - A(\theta(Z), \pi_*X, \pi_*Y) = 0$$

qui correspond en termes du tenseur fondamental à la condition

$$(\nabla_X g)(\pi_*Y, \pi_*Z) + (\nabla_Y g)(\pi_*Z, \pi_*X) - (\nabla_Z g)(\pi_*X, \pi_*Y) = 0$$

où ∇ est la connexion de Chern généralisée.

2.1 Variété de Finsler-Ehresmann

2.1.1 Distribution horizontale \mathcal{H}

Considérons une variété finslerienne (M, F) et son fibré tangent (privé de zéro) $TM^0 \equiv \mathfrak{M}$. Pour ce qui nous intéresse, il y a deux fibrés importants dont la base est \mathfrak{M} , ces deux fibrés sont π^*TM et $T\mathfrak{M}$.

$$\begin{array}{ccccc} T\mathfrak{M} & \xrightarrow{\pi_*} & \pi^*TM & \xrightarrow{\tau} & TM \\ \downarrow \pi_* & & & & \downarrow \pi \\ \mathfrak{M} & \xrightarrow{\pi} & M & & M \end{array}$$

Grâce à la projection π

$$\mathfrak{M} \xrightarrow{\pi} M, \quad T\mathfrak{M} \xrightarrow{\pi_* = d\pi} TM \quad (2.1)$$

nous définissons le *sous-fibré vertical* \mathcal{V} comme le noyau de π_*

$$\mathcal{V} = \ker(\pi_*) = \{X \in T\mathfrak{M} / d\pi(X) = 0\}$$

Ce sous-fibré possède localement une base $\{\frac{\partial}{\partial y^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y^n}\}$ (ou $\{F\frac{\partial}{\partial y^1}, \dots, F\frac{\partial}{\partial y^n}\}$ si on préfère une base invariante par changement $y \rightarrow \lambda y$) en chaque voisinage $\pi^{-1}(U)$. Et nous avons la suite exacte :

$$0 \longrightarrow \mathcal{V} \xrightarrow{i} T\mathfrak{M} \xrightarrow{\pi_*} \pi^*TM \longrightarrow 0 \quad (2.2)$$

C'est-à-dire que $\pi_* \in \text{Hom}(T\mathfrak{M}, \pi^*TM) = T^*\mathfrak{M} \otimes \pi^*TM$, de plus \mathcal{V} étant le noyau de π_* , cette différentielle π_* peut être donnée par :

$$\pi_* = \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes dx^i \quad (2.3)$$

La projection π étant naturelle, le sous-fibré vertical \mathcal{V} est déterminé de manière unique, par contre, le choix d'un complémentaire de \mathcal{V} , qui est désigné par *sous-fibré horizontal* \mathcal{H} , n'est pas déterminé de manière canonique. C'est le choix d'une *connexion de Ehresmann* qui permet la sélection d'un sous-fibré \mathcal{H} . Ces deux sous-fibrés de $T\mathfrak{M}$ sont tels que :

$$T\mathfrak{M} = \mathcal{H} \oplus \mathcal{V} \quad (2.4)$$

Définition 16 Une connexion de Ehresmann associée à $\pi : \mathfrak{M} \rightarrow M$ est une distribution lisse $\mathcal{H} \subset T\mathfrak{M}$, appelée *sous-fibré horizontal de la connexion*, qui est complémentaire à \mathcal{V} , dans le sens qu'elle définit une somme directe $T\mathfrak{M} = \mathcal{H} \oplus \mathcal{V}$.

2.1.2 Forme de Ehresmann θ

Nous pouvons comprendre la définition 16 dans un langage de forme de connexion en utilisant la notion de projecteur [KMS93]. Soit $P_{\mathcal{H}}$ une projection sur le fibré vertical le long de \mathcal{H} , $P_{\mathcal{H}} : T\mathfrak{M} \rightarrow \mathcal{V}$, telle que $P_{\mathcal{H}} \circ P_{\mathcal{H}} = P_{\mathcal{H}}$ et $\text{im } P_{\mathcal{H}} = \mathcal{V}$. Cette 1-forme à valeur dans \mathcal{V} est parfois appelée forme de connexion associée à la connexion de Ehresmann, ou plus simplement *forme de Ehresmann*, au sens où $\mathcal{H} = \ker P_{\mathcal{H}}$ est le sous-fibré de la connexion de Ehresmann.

Rappelons que comme le sous-fibré \mathcal{V} possède localement une base $\{\frac{\partial}{\partial y^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y^n}\}$ en chaque voisinage $\pi^{-1}(U)$, une fois le projecteur $P_{\mathcal{H}}$ choisi, $P_{\mathcal{H}} : T\mathfrak{M} \rightarrow \mathcal{V}$ fait correspondre à chaque vecteur $\frac{\partial}{\partial x^i}$ de la base $\{\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial y^j}\}$ de $T\mathfrak{M}$ un vecteur qui se décompose suivant la base de \mathcal{V} avec des coefficients \mathcal{N}_i^j correspondant au choix de la connexion alors que les $\frac{\partial}{\partial y^j}$ demeurent inchangés :

$$\begin{cases} P_{\mathcal{H}}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = \mathcal{N}_i^j \frac{\partial}{\partial y^j} \\ P_{\mathcal{H}}\left(\frac{\partial}{\partial y^j}\right) = \frac{\partial}{\partial y^j} \end{cases} \quad (2.5)$$

Nous pouvons alors vérifier que les champs qu'on notera $\frac{\delta}{\delta x^i}$ avec

$$\frac{\delta}{\delta x^i} = \frac{\partial}{\partial x^i} - \mathcal{N}_i^j \frac{\partial}{\partial y^j}$$

forment une base de $\mathcal{H} = \ker P_{\mathcal{H}}$, en effet :

$$P_{\mathcal{H}} \left(\frac{\delta}{\delta x^i} \right) = P_{\mathcal{H}} \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right) - \mathcal{N}_i^j P_{\mathcal{H}} \left(\frac{\partial}{\partial y^j} \right) = \mathcal{N}_i^j \frac{\partial}{\partial y^j} - \mathcal{N}_i^j \frac{\partial}{\partial y^j} = 0$$

Même raisonnement pour les co-vecteurs où nous avons :

$$\delta y^i = dy^i + \mathcal{N}_j^i dx^j \quad (2.6)$$

Pour les besoins de nos calculs ultérieurs, nous préférons ne pas travailler directement avec la projection $P_{\mathcal{H}}$, mais utiliser le morphisme $\bar{\theta} : T\mathfrak{M} \rightarrow \pi^*TM$ défini par $\bar{\theta} = \nu \circ P_{\mathcal{H}}$:

$$\begin{array}{ccc} T\mathfrak{M} & & \\ P_{\mathcal{H}} \downarrow & \searrow & \\ \mathcal{V} & \xrightarrow{\nu} & \pi^*TM \end{array}$$

où ν est l'application canonique. De cette façon, chaque sous-fibré \mathcal{H} est défini comme noyau de $\bar{\theta}$, $\mathcal{H} = \ker \bar{\theta}$.

Définition 17 Une variété de Finsler-Ehresmann, que nous noterons (M, F, \mathcal{H}) , est une structure finslerienne dotée d'une connexion de Ehresmann \mathcal{H} . Nous appelons la forme $\bar{\theta}$, telle que $\mathcal{H} = \ker \bar{\theta}$, forme de Ehresmann.

A présent, nous attribuons à la forme de Finsler-Ehresmann une expression locale.

Lemme 18 L'application $\bar{\theta} : T\mathfrak{M} \rightarrow \pi^*TM$ est donnée en coordonnées par :

$$\bar{\theta} = \frac{\partial}{\partial x^j} \otimes \delta y^j \quad (2.7)$$

En particulier la restriction $\bar{\theta}|_{\mathcal{V}} : \mathcal{V} \rightarrow \pi^*TM$ est un isomorphisme.

Preuve. Il suffit de vérifier sur les vecteurs de base :

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^j} \otimes \delta y^j \right) \left(\frac{\partial}{\partial y^i} \right) = \delta_i^j \frac{\partial}{\partial x^j} = \frac{\partial}{\partial x^i} = \bar{\theta} \left(\frac{\partial}{\partial y^i} \right)$$

et

$$\frac{\partial}{\partial x^j} \otimes \delta y^j \left(\frac{\delta}{\delta x^i} \right) = 0 = \bar{\theta} \left(\frac{\delta}{\delta x^i} \right)$$

■

Remarques, notations et conventions

- Afin d'être cohérent avec les conventions suivies au premier chapitre, nous utilisons des grandeurs invariantes par rapport à la transformation $y \rightarrow \lambda y$. Nous utilisons alors la base $\{F \frac{\partial}{\partial y^i}, \dots, F \frac{\partial}{\partial y^n}\}$ et au lieu $\bar{\theta}$, nous utilisons θ :

$$\theta = \frac{\bar{\theta}}{F} = \frac{\partial}{\partial x^j} \otimes \frac{\delta y^j}{F} \quad (2.8)$$

et nous obtenons en termes de ces bases locales :

$$\begin{cases} \theta \left(F \frac{\partial}{\partial y^j} \right) = \frac{\partial}{\partial x^j} \\ \theta \left(\frac{\delta}{\delta x^j} \right) = 0 \end{cases} \quad (2.9)$$

- Notre variété (M, F, \mathcal{H}) que nous pouvons aussi désigner par $(M, F, \bar{\theta})$ peut être désignée par (M, F, θ) même si cela semble moins élégant du fait que θ dépend de F , c'est pour cela que nous préférons la notation (M, F, \mathcal{H}) .
- Nous garderons notre habitude de noter par $X, Y, \dots etc$ les sections de $T\mathfrak{M}$, et par $\xi, \eta, \dots etc$ les sections de π^*TM .
- Si $X \in \Gamma(T\mathfrak{M})$ nous utilisons les notations suivantes pour désigner une décomposition locale de X :

$$\begin{aligned} X &= X^H + X^V \\ &= X^k \frac{\delta}{\delta x^k} + X'^k F \frac{\partial}{\partial y^k} \end{aligned} \quad (2.10)$$

- Si nous considérons une section $\xi \in \Gamma(\pi^*TM)$ telle que $\xi = \pi_* X$, alors en utilisant :

$$\begin{cases} \pi_* \left(\frac{\delta}{\delta x^i} \right) = \frac{\partial}{\partial x^i} \\ \pi_* \left(\frac{\partial}{\partial y^i} \right) = 0 \end{cases} \quad (2.11)$$

nous avons alors localement $\xi = \xi^k \frac{\partial}{\partial x^k}$ avec $\xi^k = X^k$.

- De même que précédemment, si nous considérons une section locale η de π^*TM telle que $\eta = \theta(X)$, alors, en utilisant (2.9) nous avons $\eta^k = X'^k$ où les composantes X'^k désignent les composantes de la partie verticale X^V (cf. (2.10)).

2.2 Connexion de Chern généralisée sur (M, F, \mathcal{H})

Rappelons que dans le cadre de notre travail nous avons le fibré tangent $T\mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{M}$ et le fibré rappelé $\pi^*TM \rightarrow \mathfrak{M}$. En considérant notre variété finslerienne dotée d'une structure horizontale ou variété de Finsler-Ehresmann (M, F, \mathcal{H}) , notre but dans ce chapitre

est de construire une formulation koszulienne de la connexion finslerienne ∇

$$\begin{aligned} \nabla : \Gamma(T\mathfrak{M}) \times \Gamma(\pi^*TM) &\longrightarrow \Gamma(\pi^*TM) \\ (X, \xi) &\longmapsto \nabla_X \xi \end{aligned} \quad (2.12)$$

Cette connexion est une connexion sur le fibré π^*TM dont la base est \mathfrak{M} et est associé à un choix arbitraire de $\mathcal{H} = \ker \theta$. Nous allons plus tard désigner cette connexion par *connexion de Chern généralisée* et nous expliquerons la raison de cette appellation. Il faut souligner ici que même pour la connexion de Chern traditionnelle, définie au premier chapitre, tous les auteurs que nous connaissons, dont [BCS00], [Mo06], [She01b] et bien d'autres, ne présentent pas la connexion de Chern sous une formulation koszulienne. Ils utilisent de manière combinée un langage en coordonnées et celui des repères mobiles (ce dernier est omniprésent dans les ouvrages de Chern).

Théorème 19 *Soit (M, F, \mathcal{H}) une variété de Finsler-Ehresmann. Il existe une unique connexion linéaire¹ ∇ sur le fibré π^*TM dont la base est \mathfrak{M} ,*

$$\begin{aligned} \nabla : \Gamma(T\mathfrak{M}) \times \Gamma(\pi^*TM) &\longrightarrow \Gamma(\pi^*TM) \\ (X, \xi) &\longmapsto \nabla_X \xi \end{aligned}$$

telle que, pour tout $X \in \Gamma(T\mathfrak{M})$, $\xi \in \Gamma(\pi^*TM)$, cette connexion obéit à :

(a) *La symétrie :*

$$\nabla_X (\pi_* Y) - \nabla_Y (\pi_* X) = \pi_* [X, Y] \quad (2.13)$$

(b) *La presque g -compatibilité :*

$$X(g(\xi, \eta)) = g(\nabla_X \xi, \eta) + g(\xi, \nabla_X \eta) + 2A(\theta(X), \xi, \eta) \quad (2.14)$$

L'utilisation de la décomposition

$$\nabla_X = \nabla_{X^H + X^V} = \nabla_X^H + \nabla_X^V, \quad \nabla_X^H = \nabla_{X^H}, \quad \nabla_X^V = \nabla_{X^V} \quad (2.15)$$

permet de percevoir des propriétés sous-jacentes à (2.13) et à (2.14) :

¹Comme pour toute connexion linéaire, cette connexion sur π^*TM devrait satisfaire aux conditions "classiques" :

- $\nabla_{fX} \xi = f \nabla_X \xi$, $\nabla_{X+Y} \xi = \nabla_X \xi + \nabla_Y \xi$
 - $\nabla_X (\xi + \eta) = \nabla_X \xi + \nabla_X \eta$
 - $\nabla_X (f\xi) = X(f) \xi + f(x, y) \nabla_X \xi$
- pour tout $X \in T\mathfrak{M}$, $\xi \in \Gamma(\pi^*TM)$ et $f \in C^\infty(\mathfrak{M})$.

(a)* La symétrie dans la direction horizontale et l'indépendance directionnelle²

$$\nabla_X^H (\pi_* Y^H) - \nabla_Y^H (\pi_* X^H) = \pi_* [X^H, Y^H] \quad (2.16)$$

$$\nabla_X^V (\pi_* Y^H) = \pi_* [X^V, Y^H] \quad (2.17)$$

(b)* La compatibilité dans la direction horizontale et la non compatibilité dans la direction verticale :

$$X^H (g(\xi, \eta)) = g(\nabla_X^H \xi, \eta) + g(\xi, \nabla_X^H \eta) \quad (2.18)$$

$$X^V (g(\xi, \eta)) = g(\nabla_X^V \xi, \eta) + g(\xi, \nabla_X^V \eta) + 2A(\theta(X), \xi, \eta) \quad (2.19)$$

Preuve. Nous devons prouver l'unicité et l'existence de ∇ . Commençons par l'unicité en supposant l'existence. Supposons donc que ∇ est la connexion souhaitée et soient X , Y et Z des champs quelconques appartenant à $\Gamma(T\mathfrak{M})$. Reprenons l'équation de presque g -compatibilité (2.14) pour les deux champs $\pi_* Y, \pi_* Z \in \Gamma(\pi^* TM)$

$$\begin{aligned} X(g(\pi_* Y, \pi_* Z)) &= g(\nabla_X (\pi_* Y), \pi_* Z) + g(\pi_* Y, \nabla_X (\pi_* Z)) \\ &\quad + 2A(\theta(X), \pi_* Y, \pi_* Z) \end{aligned} \quad (2.20)$$

en écrivant trois fois (2.20) en faisant une permutation circulaire de X, Y et Z , puis en additionnant les 3 termes on obtient :

$$\begin{aligned} &X(g(\pi_* Y, \pi_* Z)) + Y(g(\pi_* Z, \pi_* X)) - Z(g(\pi_* X, \pi_* Y)) \\ &= g(\nabla_X (\pi_* Y), \pi_* Z) + g(\pi_* Y, \nabla_X (\pi_* Z)) + 2A(\theta(X), \pi_* Y, \pi_* Z) \\ &+ g(\nabla_Y (\pi_* Z), \pi_* X) + g(\pi_* Z, \nabla_Y (\pi_* X)) + 2A(\theta(Y), \pi_* Z, \pi_* X) \\ &- g(\nabla_Z (\pi_* X), \pi_* Y) - g(\pi_* X, \nabla_Z (\pi_* Y)) - 2A(\theta(Z), \pi_* X, \pi_* Y) \end{aligned} \quad (2.21)$$

nous obtenons en utilisant $\nabla_X (\pi_* Y) - \nabla_Y (\pi_* X) = [\pi_* X, \pi_* Y]$:

$$\begin{aligned} &X(g(\pi_* Y, \pi_* Z)) + Y(g(\pi_* Z, \pi_* X)) - Z(g(\pi_* X, \pi_* Y)) \\ &= g([\pi_* X, \pi_* Z], \pi_* Y) + g([\pi_* Y, \pi_* Z], \pi_* X) + g(\nabla_X (\pi_* Y), \pi_* Z) \\ &+ g(\nabla_Y (\pi_* X), \pi_* Z) + 2\mathcal{A}(X, Y, Z) \end{aligned} \quad (2.22)$$

où \mathcal{A} désigne la somme :

$$\mathcal{A}(X, Y, Z) = A(\theta(X), \pi_* Y, \pi_* Z) + A(\theta(Y), \pi_* Z, \pi_* X) - A(\theta(Z), \pi_* X, \pi_* Y) \quad (2.23)$$

²Cette terminologie vient du fait qu'en considérant (2.17) pour des vecteurs de base, cette condition donne l'absence du terme directionnel dans l'expression de la forme de connexion $\omega_j^i = \Gamma_{jk}^i dx^k$.

ensuite on fait une petite manipulation :

$$\begin{aligned}
& g(\nabla_X (\pi_* Y), \pi_* Z) + g(\nabla_Y (\pi_* X), \pi_* Z) \\
&= 2g(\nabla_X (\pi_* Y), \pi_* Z) - g(\nabla_X (\pi_* Y), \pi_* Z) \\
&+ g(\nabla_Y (\pi_* X), \pi_* Z) \\
&= 2g(\nabla_X (\pi_* Y), \pi_* Z) - g([\pi_* X, \pi_* Y], \pi_* Z)
\end{aligned}$$

que nous insérerons dans (2.22) pour avoir :

$$\begin{aligned}
& X(g(\pi_* Y, \pi_* Z)) + Y(g(\pi_* Z, \pi_* X)) - Z(g(\pi_* X, \pi_* Y)) \\
&= 2g(\nabla_X (\pi_* Y), \pi_* Z) - g([\pi_* X, \pi_* Y], \pi_* Z) + g([\pi_* X, \pi_* Z], \pi_* Y) \\
&+ g([\pi_* Y, \pi_* Z], \pi_* X) + 2\mathcal{A}(X, Y, Z)
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
g(\nabla_X (\pi_* Y), \pi_* Z) &= \frac{1}{2} [X(g(\pi_* Y, \pi_* Z)) + Y(g(\pi_* Z, \pi_* X)) \\
&- Z(g(\pi_* X, \pi_* Y)) + g([\pi_* X, \pi_* Y], \pi_* Z) \\
&- g([\pi_* Y, \pi_* Z], \pi_* X) + g([\pi_* Z, \pi_* X], \pi_* Y)] - \mathcal{A}(X, Y, Z)
\end{aligned} \tag{2.24}$$

L'unicité :

Supposons que nous avons deux connexions ∇^1 et ∇^2 sans torsion et qui obéissent à la condition de g -compatibilité (2.14). Comme le coté à droite de la formule (2.24) ne dépend pas de la connexion, il s'ensuit que

$$g(\nabla_X^1 \xi - \nabla_X^2 \xi, \eta) = 0, \quad \forall X \in \Gamma(TM), \quad \xi, \eta \in \Gamma(\pi^*TM) \tag{2.25}$$

et (2.25) n'a lieu que si $\nabla_X^1 \xi = \nabla_X^2 \xi$ pour toutes sections X et ξ , donc $\nabla^1 = \nabla^2$.

L'existence :

Avant de prouver l'existence de ∇ , nous utilisons la formule (2.24) ou plus précisément une version en coordonnées de cette formule. Il suffit alors de prouver qu'une telle connexion existe en chaque carte, ensuite l'unicité garantira que les connexions construites sont invariantes par changements de cartes. Nous commençons par évaluer la formule (2.24) sur différents types de triplets de vecteurs (X, Y, Z) , c'est-à-dire (X^H, Y^H, Z^H) , $(X^H, Y^H, Z^V), \dots etc$. Nous verrons que les 8 combinaisons possibles donnent en fait lieu à deux sous-formules différentes (2.29) et (2.31).

Nous utilisons les notations ∇_X^H et ∇_X^V introduites en (2.15), commençons par le triplet (X^H, Y^H, Z^H) . Dans ce cas, les termes comprenant le tenseur de Cartan sont tous nuls car $\theta(X^H) = \theta(Y^H) = \theta(Z^H) = 0$. Avec les termes restants la formule mère (2.24) devient :

$$\begin{aligned} & g(\nabla_X^H(\pi_* Y^H), \pi_* Z^H) \\ &= \frac{1}{2} [X^H(g(\pi_* Y^H, \pi_* Z^H)) + Y^H(g(\pi_* Z^H, \pi_* X^H)) \\ &\quad - Z^H(g(\pi_* X^H, \pi_* Y^H)) + g([\pi_* X^H, \pi_* Y^H], \pi_* Z^H) \\ &\quad - g([\pi_* Y^H, \pi_* Z^H], \pi_* X^H) + g([\pi_* Z^H, \pi_* X^H], \pi_* Y^H)] \end{aligned} \quad (2.26)$$

Nous évaluons à présent l'expression (2.26) sur les vecteurs de base $(\frac{\delta}{\delta x^i}, \frac{\delta}{\delta x^j}, \frac{\delta}{\delta x^k})$ pour avoir :

$$\begin{aligned} & g\left(\nabla_{\frac{\delta}{\delta x^i}}\left(\pi_* \frac{\delta}{\delta x^j}\right), \pi_* \frac{\delta}{\delta x^k}\right) \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\delta}{\delta x^i} \left(g\left(\pi_* \frac{\delta}{\delta x^j}, \pi_* \frac{\delta}{\delta x^k}\right) \right) + \frac{\delta}{\delta x^j} \left(g\left(\pi_* \frac{\delta}{\delta x^k}, \pi_* \frac{\delta}{\delta x^i}\right) \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\delta}{\delta x^k} \left(g\left(\pi_* \frac{\delta}{\delta x^i}, \pi_* \frac{\delta}{\delta x^j}\right) \right) + g\left(\left[\pi_* \frac{\delta}{\delta x^i}, \pi_* \frac{\delta}{\delta x^j}\right], \pi_* \frac{\delta}{\delta x^k}\right) \right. \\ &\quad \left. - g\left(\left[\pi_* \frac{\delta}{\delta x^j}, \pi_* \frac{\delta}{\delta x^k}\right], \pi_* \frac{\delta}{\delta x^i}\right) + g\left(\left[\pi_* \frac{\delta}{\delta x^k}, \pi_* \frac{\delta}{\delta x^i}\right], \pi_* \frac{\delta}{\delta x^j}\right) \right] \end{aligned} \quad (2.27)$$

et comme

$$\pi_* \frac{\delta}{\delta x^i} = \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad \nabla_{\frac{\delta}{\delta x^k}} \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right) = \Gamma_{jk}^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad g_{ij} = g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right), \quad \left[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right] = 0$$

la sous-formule (2.27) devient :

$$\Gamma_{ji}^s g_{sk} = \frac{1}{2} \left[\frac{\delta g_{jk}}{\delta x^i} + \frac{\delta g_{ki}}{\delta x^j} - \frac{\delta g_{ij}}{\delta x^k} \right] \quad (2.28)$$

c'est-à-dire (en multipliant par la matrice inverse g^{kl} , $g_{sk}g^{kl} = \delta_s^l$) :

$$\Gamma_{ji}^l = \frac{1}{2} g^{kl} \left[\frac{\delta g_{jk}}{\delta x^i} + \frac{\delta g_{ki}}{\delta x^j} - \frac{\delta g_{ij}}{\delta x^k} \right] \quad (2.29)$$

Si nous considérons le triplet (X^H, Y^H, Z^V) , nous avons beaucoup de simplifications car $\pi_* Z^V = 0$. La formule mère (2.24) prend la forme de

$$0 = -\frac{1}{2} Z(g(\pi_* X, \pi_* Y)) + A(\theta(Z), \pi_* X, \pi_* Y) \quad (2.30)$$

Et en évaluant sur des vecteurs de base $(X^H, Y^H, Z^V) = \left(\frac{\delta}{\delta x^i}, \frac{\delta}{\delta x^j}, F \frac{\partial}{\partial y^k}\right)$ et en utilisant le fait que $\theta(F \frac{\partial}{\partial y^k}) = \frac{\partial}{\partial x^k}$ (car θ est donné par (2.8)), la sous-formule (2.30) devient :

$$A_{kij} = \frac{1}{2} F \frac{\partial g_{ij}}{\partial y^k} \quad (2.31)$$

On retrouve alors la définition du tenseur de Cartan (1.4). Toutes les autres combinaisons donnent ou bien l'une ou bien l'autre des deux sous-formules (2.29) ou (2.31), ou alors la formule inexploitable $0 = 0$ (un résumé de tous les cas est donné en tableau dans l'annexe B).

A présent, nous pouvons prouver l'existence en prouvant que cette connexion en chaque carte répond bien aux propriétés (2.13) et (2.14). En effet, la formule (2.29) définit une connexion en chaque carte, de plus, nous pouvons facilement vérifier à partir de cette formule que $\Gamma_{ji}^l = \Gamma_{ij}^l$, la connexion est alors symétrique et la propriété (2.13) est alors vérifiée. En parcourant les raisonnements précédents à l'envers, on vérifie que la connexion construite satisfait à la condition (2.14).

Pour vérifier la presque g -compatibilité (2.14), on peut aussi faire cette vérification en coordonnées, en utilisant les notations utilisées en (1.35), les dérivées covariantes horizontale $g_{ij;s}^H$ et verticale $g_{ij;s}^V$ s'écrivent comme :

$$g_{ij;s}^H = \frac{\delta g_{ij}}{\delta x^s} - \Gamma_{si}^l g_{lj} - \Gamma_{sj}^l g_{il} \quad (2.32)$$

$$g_{ij;s}^V = F \frac{\partial g_{ij}}{\partial y^s} \quad (2.33)$$

Nous pouvons immédiatement utiliser la sous-formule (2.31) pour déduire que $F \frac{\partial g_{ij}}{\partial y^k}$ donne $2A_{ijk}$ et par conséquent d'après (2.33) :

$$g_{ij;k}^V = 2A_{ijk} \quad (2.34)$$

cette formule vérifie alors (2.19). Il reste la direction horizontale (2.18). En utilisant deux fois la formule (2.28) et en l'insérant dans (2.32) nous obtenons :

$$\begin{aligned} g_{ij;s}^H &= \frac{\delta g_{ij}}{\delta x^s} - \frac{1}{2} \left[\frac{\delta g_{sj}}{\delta x^i} + \frac{\delta g_{ji}}{\delta x^s} - \frac{\delta g_{is}}{\delta x^j} \right] - \frac{1}{2} \left[\frac{\delta g_{si}}{\delta x^j} + \frac{\delta g_{ij}}{\delta x^s} - \frac{\delta g_{js}}{\delta x^i} \right] \\ &= \frac{\delta g_{ij}}{\delta x^s} - \frac{\delta g_{ji}}{\delta x^s} \end{aligned}$$

d'où

$$g_{ij;s}^H = 0 \quad (2.35)$$

Donc (2.34) et (2.35) nous donnent respectivement (2.19) et (2.18) (on peut aussi comparer cette compatibilité dans la direction horizontale (2.18) et l'apparition du tenseur de Cartan dans la direction verticale (2.19) avec les formules (1.36) et (1.37) respectivement). ■

Définition 20 *Nous appelons la connexion ∇ que nous venons d'introduire connexion de Chern généralisée.*

La connexion de Chern généralisée est une connexion associée à la variété de Finsler-Ehresmann (M, F, \mathcal{H}) . Notons que la connexion de Chern traditionnelle est construite pour la variété finslerienne $(M, F) = (M, F, \mathcal{H}_c)$ avec :

$$\mathcal{H}_c = \ker \theta_c, \quad \theta_c = \frac{1}{F} (dy^i + N_j^i dx^j) \otimes \frac{\partial}{\partial x^i}$$

où θ_c est défini en (1.15). Les coefficients \mathcal{N}_j^i génériques dans (2.6) se résument dans ce cas aux coefficients N_j^i définis en (1.14) (page 15) à partir des géodésiques.

Il serait utile de noter que même dans le cas de la connexion de Chern généralisée, nous avons une relation similaire à (1.33) qui relie les coefficients de la connexion de Chern généralisée Γ_{jk}^i aux symboles de Christoffel formels γ_{jk}^i

$$\gamma_{jk}^i = g^{is} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{sj}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^s} + \frac{\partial g_{ks}}{\partial x^j} \right) \quad (2.36)$$

Ceci peut se vérifier par les mêmes types de calculs que dans le chapitre 1 en partant à partir de la formule (2.29) et en utilisant les coefficients génériques \mathcal{N}_j^i au lieu des N_j^i :

$$\Gamma_{il}^k = \gamma_{il}^k - g^{kj} \mathcal{A}_{ijl} \quad (2.37)$$

où l'objet \mathcal{A}_{ijl} est donné par :

$$\mathcal{A}_{ijl} = \frac{1}{F} (A_{ijs} \mathcal{N}_l^s - A_{lis} \mathcal{N}_j^s + A_{jls} \mathcal{N}_i^s) \quad (2.38)$$

On verra plus loin au paragraphe 2.6, une fois les tenseurs en géométrie finslerienne présentés au paragraphe 2.4, que \mathcal{A}_{ijl} définit en effet un tenseur.

Remarque 21 *Il faut noter que même si $\nabla_{\frac{\partial}{\partial y^i}} \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right) = 0$, la dérivée covariante dans la direction verticale d'une section quelconque $\xi \in \Gamma(\pi^*TM)$ n'est pas forcément nulle, ceci en raison de la dépendance directionnelle des composantes ξ^i , en effet :*

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial y^i}} (\xi) = \nabla_{\frac{\partial}{\partial y^i}} \left(\xi^j (x, y) \frac{\partial}{\partial x^j} \right) = \frac{\partial \xi^j}{\partial y^i} (x, y) \cdot \frac{\partial}{\partial x^j}$$

Avant de passer aux courbures associées à la connexion de Chern généralisée, définissons la notion de Hessien.

Définition 22 Nous définissons un Hessien $H_u : \Gamma(\pi^*TM) \times \Gamma(T\mathfrak{M}) \rightarrow C^\infty(\mathfrak{M})$ comme :

$$H_u(\eta, X) = g(\eta, \nabla^2 u(X)) = g(\eta, \nabla_X(\nabla u)) \quad (2.39)$$

Posons $\hat{H}_u(X, Y) = H_u(\pi_*X, Y)$ (voir formule (2.51) que nous verrons dans le paragraphe 2.4.1), cet objet \hat{H}_u n'est pas symétrique. Pour le voir, nous utilisons la formule (C.9) (cf. annexe C) nous avons³ :

$$\hat{H}_u(Y, X) - \hat{H}_u(X, Y) = 2[A(\theta(Y), \nabla u, \pi_*X) - A(\theta(X), \nabla u, \pi_*Y)] \quad (2.41)$$

Le Hessien défini en (2.39) peut se décomposer en :

$$\begin{aligned} H_u(\xi, X) &= H_u^H(\xi, X) + H_u^V(\xi, X) \\ &= g(\xi, \nabla_X^H(\nabla u)) + g(\xi, \nabla_X^V(\nabla u)) \end{aligned} \quad (2.42)$$

Remarque 23 Si nous considérons la relation (2.41) pour \hat{H}_u^H , nous constatons que $\hat{H}_u^H(X, Y)$ est symétrique.

2.3 Courbures pour la connexion de Chern généralisée

Les appellations de *hh*-, *hv*- et *vv*-courbures ont déjà été utilisées dans le chapitre précédent. L'utilisation d'un langage koszulien rend ces notions de courbures encore plus claires car il associe directement les "caractères" purement horizontal *hh*-, purement vertical *vv*- ou mixte *hv*- de la courbure à la manière avec laquelle se combinent les composantes ∇^H et ∇^V de la connexion de Chern généralisée.

³Si le tenseur fondamental correspond à une géométrie riemannienne, le tenseur de Cartan est nul et (2.41) serait nul, c'est à dire que \hat{H}_u serait symétrique. Il serait intéressant de savoir ce que signifierait dans notre cas un Hessien symétrique sans avoir $A = 0$, donc uniquement :

$$A(\theta(Y), \nabla u, \pi_*X) = A(\theta(X), \nabla u, \pi_*Y) \quad (2.40)$$

Définition 24 La courbure complète ϕ associée à la connexion de Chern généralisée ∇ est définie par :

$$\phi(X, Y)\xi = \nabla_X \nabla_Y \xi - \nabla_Y \nabla_X \xi - \nabla_{[X, Y]}\xi \quad (2.43)$$

où $X, Y \in \Gamma(TM)$ et $\xi \in \Gamma(\pi^*TM)$.

En utilisant la décomposition $\nabla_X = \nabla_X^H + \nabla_X^V$, introduite en (2.15), la courbure "complète" (2.43) donne lieu à trois types de termes :

$$\phi(X, Y) = \phi^{HH}(X, Y) + \phi^{HV}(X, Y) + \phi^{VH}(X, Y) + \phi^{VV}(X, Y) \quad (2.44)$$

où :

$$\begin{cases} \phi^{HH}(X, Y) = \phi(X^H, Y^H) = \nabla_X^H \nabla_Y^H - \nabla_Y^H \nabla_X^H - \nabla_{[X^H, Y^H]} \\ \phi^{HV}(X, Y) = \phi(X^H, Y^V) = \nabla_X^H \nabla_Y^V - \nabla_Y^V \nabla_X^H - \nabla_{[X^H, Y^V]} \\ \phi^{VH}(X, Y) = \phi(X^V, Y^H) = \nabla_X^V \nabla_Y^H - \nabla_Y^H \nabla_X^V - \nabla_{[X^V, Y^H]} \\ \phi^{VV}(X, Y) = \phi(X^V, Y^V) = \nabla_X^V \nabla_Y^V - \nabla_Y^V \nabla_X^V - \nabla_{[X^V, Y^V]} \end{cases} \quad (2.45)$$

Les notations R , P et Q sont habituellement utilisées en géométrie finslerienne pour désigner la hh -courbure, la hv -courbure ou courbure de Minkowski et la vv -courbure. La description axiomatique présentée ici semble bien justifier les appellations de hh -, hv - et vv - de ces courbures :

$$\begin{cases} R = \phi^{HH} \\ P = \phi^{HV} + \phi^{VH} \\ Q = \phi^{VV} \end{cases} \quad (2.46)$$

Nous pouvons facilement voir d'après (2.45) que la hv -courbure de Minkowski $P = \phi^{HV} + \phi^{VH}$ est telle que :

$$\phi^{HV}(X, Y) = -\phi^{VH}(Y, X) \quad (2.47)$$

La vv -courbure $Q(X, Y)$ est identiquement nulle pour la connexion de Chern généralisée. En effet,

$$\begin{aligned} \nabla_{X^V}(\xi) &= \nabla_{X^V} \left(\xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} \right) = X^V(\xi^i) \frac{\partial}{\partial x^i} + \xi^i(x, y) \nabla_{X^V} \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right) \\ &= X^V(\xi^i) \frac{\partial}{\partial x^i} \end{aligned}$$

et puisque le sous-fibré vertical est intégrable, $[\mathcal{V}, \mathcal{V}] \subset \mathcal{V}$, nous avons $\nabla_{[X^V, Y^V]} \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)$ qui est nul aussi. La vv -courbure $Q(X, Y)$ s'écrit alors comme :

$$\begin{aligned} Q(X, Y)\xi &= \nabla_X^V \nabla_Y^V \xi - \nabla_Y^V \nabla_X^V \xi - \nabla_{[X^V, Y^V]}\xi \\ &= [X^V Y^V(\xi^i) - Y^V X^V(\xi^i) - [X^V, Y^V](\xi^i)] \frac{\partial}{\partial x^i} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Par conséquent, l'expression de la courbure complète $\phi(X, Y)$ est constituée uniquement de la somme :

$$\phi(X, Y)\eta = R(X, Y)\eta + P(X, Y)\eta \quad (2.48)$$

2.4 Sur les tenseurs en géométrie finslerienne

Si $E \rightarrow \mathfrak{M}$ est un fibré vectoriel sur \mathfrak{M} , on notera $\Gamma^p(E)$, $p \in \mathbb{N}$, l'espace des sections du fibré E^p

$$E^p = \underbrace{E \times E \times \cdots \times E}_{p \text{ fois}}$$

C'est un module sur $C^\infty\mathfrak{M}$. Par convention $\Gamma^0(E) = C^\infty\mathfrak{M}$. Les tenseurs que nous considérons dans cette thèse sont les objets suivants :

Définition 25 *Un tenseur finslerien de type $(p_1, p_2; q)$ sur la variété (M, F, \mathcal{H}) est une application*

$$T : \Gamma^{p_1}(\pi^*TM) \times \Gamma^{p_2}(T\mathfrak{M}) \longrightarrow \Gamma^q(\pi^*TM)$$

qui est $C^\infty(\mathfrak{M})$ -linéaire en chaque variable.

Pour ce qui nous intéresse, $q = 0$ ou 1 .

Comme nous pouvons le constater, le degré de covariance p est composé de deux degrés p_1 et p_2 associés aux fibrés π^*TM et $T\mathfrak{M}$ alors que le degré de contravariance q concerne uniquement π^*TM .

Exemples de tenseurs finsleriens

- Le tenseur fondamental g est de type $(2, 0; 0)$
- Les sections ξ de π^*TM sont de type $(0, 0; 1)$
- Le tenseur de courbure ϕ défini en (2.48), ainsi que R et P , sont de type $(1, 2; 1)$. Ils possèdent une version $(2, 2; 0)$ que nous introduirons dans le paragraphe 2.4.3.
- Le tenseur de Weyl W , qui sera étudié en chapitre 3, est de type $(2, 2; 0)$ (il y a aussi la version $(1, 2; 1)$ de ce tenseur notée w).
- Le tenseur de Cartan A est de type $(3, 0; 0)$
- L'application π_* donnée par (2.3) et θ donnée par (2.8) sont des $(0, 1, 1)$ -tenseurs.
- Le Hessien introduit en (2.39) d'une fonction $u \in C^\infty(M)$ est de type $(0, 2; 0)$ ou $(1, 1; 0)$ (suivant qu'on utilise la formule (2.51) traitée en page 45).

Remarque 26 *Le lagrangien F n'est pas un tenseur. Et de même, les champs de vecteurs $X \in \Gamma(T\mathcal{M})$ ne sont pas des tenseurs finsleriens dans notre sens.*

Nous pouvons étendre certaines opérations connues pour les tenseurs riemanniens aux tenseurs finsleriens, parmi ces opérations nous avons le produit de Kulkarni-Nomizu.

Définition 27 *Nous définissons le produit de Kulkarni-Nomizu $e \odot E$ d'un $(1, 1; 0)$ -tenseur e et d'un $(2, 0; 0)$ -tenseur E comme le $(2, 2; 0)$ -tenseur :*

$$(e \odot E)(\xi, \eta, X, Y) = \begin{vmatrix} e(\xi, X) & e(\eta, X) \\ E(\xi, \pi_* Y) & E(\eta, \pi_* Y) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} E(\xi, \pi_* X) & E(\eta, \pi_* X) \\ e(\xi, Y) & e(\eta, Y) \end{vmatrix} \quad (2.49)$$

Ce produit généralise le produit de Kulkarni-Nomizu habituel au sens où il tient compte du caractère "mixte" de e . Ce produit est tel que :

$$(e \odot E)(\xi, \eta, X, Y) = -(e \odot E)(\eta, \xi, X, Y) = -(e \odot E)(\xi, \eta, Y, X) \quad (2.50)$$

2.4.1 Décomposition en sous-types et association

Décomposition en sous-types

Tout tenseur de type $(p_1, p_2; q)$ avec $p_2 \geq 1$ se décompose en tenseurs de même type suivant les composantes verticales et horizontales de ses p_2 arguments. Nous ne développons pas de théorie générale, il suffit de voir quelques exemples pour $p_2 = 1$ et $p_2 = 2$, c'est-à-dire, en utilisant la décomposition d'un vecteur (ou section) X en composante horizontale X^H et verticale X^V , nous avons :

(I). Si T est de type $(p_1, 1; q)$, alors nous avons la décomposition

$$T = T^H + T^V$$

où

$$\begin{cases} T^H(\xi_1, \dots, \xi_{p_1}, X) = T(\xi_1, \dots, \xi_{p_1}, X^H) \\ T^V(\xi_1, \dots, \xi_{p_1}, X) = T(\xi_1, \dots, \xi_{p_1}, X^V) \end{cases}$$

On dit que T est de sous-type horizontal si $T^V = 0$ et pareillement pour le sous-type vertical. On dit aussi que T^H et T^V sont les composantes horizontale et verticale de T .

Exemple 28 *La décomposition (2.42) du Hessien vue en page 41.*

(II). Si T est de type $(p_1, 2; q)$, alors chacune des variables liée à $T\mathfrak{M}$ peut engendrer une décomposition

$$T = T^{HH} + T^{HV} + T^{VH} + T^{VV}$$

où

$$\begin{cases} T^{HH}(\xi_1, \dots, \xi_{p_1}, X, Y) = T(\xi_1, \dots, \xi_{p_1}, X^H, Y^H) \\ T^{HV}(\xi_1, \dots, \xi_{p_1}, X, Y) = T(\xi_1, \dots, \xi_{p_1}, X^H, Y^V) \\ T^{VH}(\xi_1, \dots, \xi_{p_1}, X, Y) = T(\xi_1, \dots, \xi_{p_1}, X^V, Y^H) \\ T^{VV}(\xi_1, \dots, \xi_{p_1}, X, Y) = T(\xi_1, \dots, \xi_{p_1}, X^V, Y^V) \end{cases}$$

De même, on dira que T est de sous-type HH si $T^{HV} = T^{VH} = T^{VV} = 0$ et ainsi de suite pour les autres sous-types.

Exemple 29 Nous avons déjà vu en (2.44) et (2.45) un cas particulier de cette configuration correspondant à la décomposition du $(1, 2; 1)$ -tenseur de courbure ϕ .

Remarque 30 On peut faire des décompositions uniquement suivant une variable, même si nous avons un tenseur de type $(p_1, 2; q)$ ou plus, c'est-à-dire écrire :

$$\begin{aligned} T(\xi_1, \dots, \xi_{p_1}, X, Y) &= T^H(\xi_1, \dots, \xi_{p_1}, X, Y) + T^V(\xi_1, \dots, \xi_{p_1}, X, Y) \\ &= T(\xi_1, \dots, \xi_{p_1}, X^H, Y) + T(\xi_1, \dots, \xi_{p_1}, X^V, Y) \end{aligned}$$

(III). Plus généralement un $(p_1, p_2; q)$ -tenseur possède 2^{p_2} composantes correspondants à 2^{p_2} sous-types.

Association

Si T est un $(1, p_2; q)$ -tenseur, nous pouvons lui associer deux tenseur \hat{T} et \check{T} de type $(0, p_2 + 1; q)$ qui sont soit horizontal ou vertical suivant la $(p_2 + 1)$ -ème variable rajoutée, c'est-à-dire, si

$$T(\xi, X_1, \dots, X_{p_2}) \in \Gamma^q(\pi^*TM), \quad \xi \in \Gamma(\pi^*TM), \quad X_i \in \Gamma(T\mathfrak{M})$$

n'importe quelle section $\xi \in \Gamma(\pi^*TM)$ possède des préimages à travers π_* mais aussi à travers θ , nous pouvons dès alors définir deux $(0, p_2 + 1; q)$ -tenseurs \hat{T} et \check{T} :

$$\begin{cases} \hat{T}(X, X_1, \dots, X_{p_2}) = T(\pi_*X, X_1, \dots, X_{p_2}) \\ \check{T}(X, X_1, \dots, X_{p_2}) = T(\theta(X), X_1, \dots, X_{p_2}) \end{cases} \quad (2.51)$$

Notons que \hat{T} est horizontal suivant la variable X , même raisonnement pour \check{T} qui est vertical suivant la variable "rajoutée".

Exemple 31 Le Hessien introduit en (2.39) $\hat{H}_u(X, Y) = H_u(\pi_*X, Y)$.

2.4.2 Dérivées covariantes

En utilisant la connexion de Chern généralisée (ou en particulier la connexion de Chern), la dérivée covariante ∇ d'un tenseur de type $(p_1, p_2; q)$ devrait donner un tenseur de type $(p_1, p_2 + 1; q)$, ou en d'autre terme, si T est un $(p_1, p_2; q)$ -tenseur, l'opérateur ∇_X préserve le type

$$\nabla_X : T \mapsto \nabla_X T, \quad X \in \Gamma(T\mathfrak{M})$$

$\nabla_X T$ est un $(p_1, p_2; q)$ -tenseur. De manière générale, la dérivée covariante d'un $(p_1, 0; q)$ -tenseur T est bien définie :

$$\begin{aligned} (\nabla T)(\xi_1, \dots, \xi_{p_1}, X) &= (\nabla_X T)(\xi_1, \dots, \xi_{p_1}) \\ &= \nabla_X (T(\xi_1, \dots, \xi_{p_1})) - \sum_{i=1}^{p_1} T(\xi_1, \dots, \nabla_X \xi_i, \dots, \xi_{p_1}) \end{aligned}$$

Par exemple, si nous considérons une section $\xi \in \Gamma(\pi^*TM)$ qui est un $(0, 0; 1)$ -tenseur, $\nabla \xi$ est un $(0, 1; 1)$ -tenseur est donné par :

$$(\nabla \xi)(X) = \nabla_X \xi$$

De même, la dérivée covariante du $(2, 0; 0)$ -tenseur fondamental g , est le $(2, 1; 0)$ -tenseur :

$$(\nabla g)(\xi, \eta, X) = (\nabla_X g)(\xi, \eta) = \nabla_X (g(\xi, \eta)) - g(\nabla_X \xi, \eta) - g(\xi, \nabla_X \eta) \quad (2.52)$$

En revanche, la formulation d'une règle de dérivation pour les $(p_1, p_2; q)$ -tenseurs lorsque $p_2 \neq 0$ s'avère plus délicate. Ceci est du essentiellement au fait qu'une section $X \in \Gamma(T\mathfrak{M})$ n'est pas un tenseur finslerien et l'utilisation de la règle de Leibniz ne se fait qu'au moyen d'un passage renvoyant X vers une section de π^*TM à chaque fois que nous lui appliquerons la dérivation. Nous ne développons pas de théorie générale sur la dérivation des tenseurs de type $(p_1, p_2; q)$ avec $p_2 \neq 0$, nous manipulerons au chapitre 3 quelques cas de manière spécifique. Par exemple, si nous considérons le $(1, 1; 1)$ -tenseur B (à introduire ultérieurement en (3.4) page 61), la dérivée covariante de $B(\xi, X)$ est établie de manière spécifique en (3.6).

Remarque 32 (Sur la dérivée covariante du tenseur fondamental) Soit X une section de $T\mathfrak{M}$ et $\xi, \eta \in \Gamma(\pi^*TM)$. En reprenant la condition de g -compatibilité (2.14) que nous rappelons :

$$X(g(\xi, \eta)) = g(\nabla_X \xi, \eta) + g(\xi, \nabla_X \eta) + 2A(\theta(X), \xi, \eta)$$

Nous constatons, qu'en la comparant avec la règle de Leibniz donnée par (2.52), que :

$$(\nabla_X g)(\xi, \eta) = 2A(\theta(X), \xi, \eta) \quad (2.53)$$

d'où la terminologie de presque compatibilité utilisée dans le théorème 19.

2.4.3 Tenseurs de courbure de type $(2, 2; 0)$

Le tenseur de courbure totale ϕ défini en (2.43) est de type $(1, 2; 1)$. De la même façon qu'en géométrie riemannienne, nous pouvons définir une version $(2, 2; 0)$ de ce tenseur par la formule

$$\Phi(\xi, \eta, X, Y) = g(\phi(X, Y)\xi, \eta), \quad \xi, \eta \in \Gamma(\pi^*TM), \quad X, Y \in \Gamma(T\mathfrak{M}) \quad (2.54)$$

La hh -partie $R(X, Y)$ et hv -partie $P(X, Y)$ du tenseur ϕ sont aussi de type $(1, 2; 1)$, elles admettent aussi des versions $(2, 2; 0)$ que nous noterons simplement $R(\xi, \eta, X, Y)$ et $P(\xi, \eta, X, Y)$. L'utilisation d'une même notation pour les $(1, 2; 1)$ - et les $(2, 2; 0)$ -tenseurs ne devrait pas créer de confusion, les distinctions s'imposent suivant le contexte. Nous obtenons alors :

$$\begin{aligned} \Phi(\xi, \eta, X, Y) &= g(R(X, Y)\xi, \eta) + g(P(X, Y)\xi, \eta) \\ &= R(\xi, \eta, X, Y) + P(\xi, \eta, X, Y) \end{aligned} \quad (2.55)$$

2.5 Formulation en coordonnées et courbure drapeau

2.5.1 Composantes des $(2, 2; 0)$ -tenseurs de courbure

La nature mixte (au sens des variables associées à $T\mathfrak{M}$ ou π^*TM) de la hh -courbure et de la hv -courbure est à présent plus claire que dans le chapitre 1 où cette nature n'était pas apparente. A présent, nous déduisons à partir des formules intrinsèques des $(2, 2; 0)$ -tenseurs de courbure R et P des formules pour leurs composantes R_{ijkl} et P_{ijkl} .

Pour la hh -courbure $R = \phi^{HH}$, les choses sont relativement simples. En utilisant les expressions données en (2.45) et (2.46) nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} R(\xi, \eta, X, Y) &= g(R(X, Y)\xi, \eta) \\ &= g\left(R\left(\frac{\delta}{\delta x^k}, \frac{\delta}{\delta x^l}\right)\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right)\xi^i\eta^j X^k Y^l \\ &= R_{ijkl}\xi^i\eta^j X^k Y^l \end{aligned}$$

Remarque 33 *Remarquons que même si les indices i, j, k et l peuvent paraître comme indices de même types, ils ne le sont pas. Les indices i et j sont reliés au fibré π^*TM alors que k et l correspondent au fibré $T\mathfrak{M}$. Cet aspect, qui passe inaperçu au chapitre 1, est mis en relief grâce à cette approche intrinsèque qui sépare les variables liées au fibré rappelé π^*TM de celles correspondant à $T\mathfrak{M}$.*

Nous obtenons les composantes R_{ijkl} en commençant par calculer $R\left(\frac{\delta}{\delta x^k}, \frac{\delta}{\delta x^l}\right) \frac{\partial}{\partial x^i}$ en utilisant la hh -composante de ϕ donnée par (2.43) (voir aussi (2.45) et (2.46)) :

$$R\left(\frac{\delta}{\delta x^k}, \frac{\delta}{\delta x^l}\right) \frac{\partial}{\partial x^i} = \nabla_{\frac{\delta}{\delta x^k}} \nabla_{\frac{\delta}{\delta x^l}} \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) - \nabla_{\frac{\delta}{\delta x^l}} \nabla_{\frac{\delta}{\delta x^k}} \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) - \nabla_{\left[\frac{\delta}{\delta x^k}, \frac{\delta}{\delta x^l}\right]} \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)$$

et ensuite nous utilisons $\nabla_{\frac{\delta}{\delta x^k}} \left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \Gamma_{jk}^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, ce qui donne après un calcul direct :

$$R_{jkl}^i = \frac{\delta \Gamma_{jl}^i}{\delta x^k} - \frac{\delta \Gamma_{jk}^i}{\delta x^l} + \Gamma_{hk}^i \Gamma_{jl}^h - \Gamma_{hl}^i \Gamma_{jk}^h \quad (2.56)$$

Pour la courbure de Minkowski, en utilisant (2.45), (2.46) et (2.47), on peut écrire :

$$\begin{aligned} P(\xi, \eta, X, Y) = g(P(X, Y)\xi, \eta) &= g\left(\phi^{HV}(X, Y)\xi + \phi^{VH}(X, Y)\xi, \eta\right) \\ &= g\left(\phi^{HV}(X, Y)\xi - \phi^{HV}(Y, X)\xi, \eta\right) \\ &= g\left(\phi(X^H, Y^V)\xi - \phi(Y^H, X^V)\xi, \eta\right) \end{aligned}$$

et comme d'autre part X et Y se décomposent dans la base $\left\{\frac{\delta}{\delta x^i}, F \frac{\partial}{\partial y^i}\right\}$ comme (cf. (2.10)) :

$$\begin{aligned} X &= X^H + X^V = X^s \frac{\delta}{\delta x^s} + X'^s F \frac{\partial}{\partial y^s} \\ Y &= Y^H + Y^V = Y^s \frac{\delta}{\delta x^s} + Y'^s F \frac{\partial}{\partial y^s} \end{aligned}$$

La formule pour $P(\xi, \eta, X, Y)$ s'écrit comme

$$\begin{aligned} P(\xi, \eta, X, Y) &= g\left(\phi(X^H, Y^V)\xi - \phi(Y^H, X^V)\xi, \eta\right) \\ &= g\left(\phi\left(X^k \frac{\delta}{\delta x^k}, Y'^l F \frac{\partial}{\partial y^l}\right) \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} - \phi\left(Y^k \frac{\delta}{\delta x^k}, X'^l F \frac{\partial}{\partial y^l}\right) \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \eta^j \frac{\partial}{\partial x^j}\right) \\ &= [X^k Y'^l - Y^k X'^l] \xi^i \eta^j g\left(\phi\left(\frac{\delta}{\delta x^k}, F \frac{\partial}{\partial y^l}\right) \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) \end{aligned}$$

Ce qui implique que

$$P(\xi, \eta, X, Y) = \phi_{ijkl}^{HV} [X^k Y'^l - Y^k X'^l] \xi^i \eta^j \quad (2.57)$$

avec

$$\phi_{ijkl}^{HV} = g\left(\phi\left(\frac{\delta}{\delta x^k}, F \frac{\partial}{\partial y^l}\right) \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right)$$

D'une manière différente, la formule ci-dessus peut être retrouvée en utilisant une écriture intrinsèque du $(2, 2; 0)$ -tenseur P :

$$P = P_{ijkl} \cdot dx^k \wedge \frac{\delta y^l}{F} \otimes dx^i \otimes dx^j \quad (2.58)$$

Nous vérifions que les composantes P_{ijkl} dans (2.58) sont les composantes de ϕ^{HV} dans (2.57), $P_{ijkl} = \phi_{ijkl}^{HV}$. Remarquons que l'écriture (2.58) est possible dès lors qu'on considère le produit extérieur comme issu d'un produit tensoriel antisymétrisé :

$$\alpha \wedge \beta = \alpha \otimes \beta - \beta \otimes \alpha$$

Calculons⁴

$$\begin{aligned} \left(dx^k \wedge \frac{\delta y^l}{F} \right) (X, Y) &= dx^k(X) \frac{\delta y^l}{F}(Y) - \frac{\delta y^l}{F}(X) dx^k(Y) \\ &= X^k Y^l - X^l Y^k \end{aligned}$$

par conséquent, (2.58) donne

$$P(\xi, \eta, X, Y) = P_{ijkl} [X^k Y^l - Y^k X^l] \xi^i \eta^j$$

et en identifiant la formule ci-dessus avec (2.57), nous constatons que les composantes P_{ijkl} dans (2.58) ne sont rien d'autres que les composantes de ϕ_{ijkl}^{HV} dans (2.57)

$$P_{ijkl} = g \left(\phi \left(\frac{\delta}{\delta x^k}, F \frac{\partial}{\partial y^l} \right) \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right) = g \left(P \left(\frac{\delta}{\delta x^k}, F \frac{\partial}{\partial y^l} \right) \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \quad (2.61)$$

Cela signifie qu'il n'y a pas perte d'information en considérant uniquement ϕ_{ijkl}^{HV} dans la formule (2.58), les deux contributions ϕ^{HV} et ϕ^{VH} ont été entièrement prises en considérations par la nature du produit extérieur.

Le $(1, 2; 1)$ -tenseur P_{jkl}^i est tel que :

$$P(X, Y) \eta = \phi^{HV}(X, Y) \eta + \phi^{VH}(X, Y) \eta = P_{jkl}^i \eta^j (X^k Y^l - Y^k X^l) \frac{\partial}{\partial x^i}$$

⁴Les propriétés de $\left\{ \frac{\delta}{\delta x^i}, F \frac{\partial}{\partial y^i} \right\}$ et de sa base duale $\left\{ dx^i, \frac{\delta y^i}{F} \right\}$ nous permettent de dire que :

$$dx^k(X) = X^s \delta_s^k + 0 = X^k, \quad dx^k(Y) = Y^k \quad (2.59)$$

$$\frac{\delta y^l}{F}(X) = 0 + X^s \delta_s^l = X^l, \quad \frac{\delta y^l}{F}(Y) = Y^l \quad (2.60)$$

De la même manière que pour la hh -courbure, les composantes P_{ijkl} s'obtiennent également par calcul direct en utilisant (2.43) :

$$P\left(\frac{\delta}{\delta x^k}, F \frac{\partial}{\partial y^l}\right) \frac{\partial}{\partial x^i} = \nabla_{\frac{\delta}{\delta x^k}} \nabla_{F \frac{\partial}{\partial y^l}} \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) - \nabla_{F \frac{\partial}{\partial y^l}} \nabla_{\frac{\delta}{\delta x^k}} \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) \quad (2.62)$$

$$- \nabla_{\left[\frac{\delta}{\delta x^k}, F \frac{\partial}{\partial y^l}\right]} \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)$$

et en utilisant (2.17) nous avons $\nabla_{F \frac{\partial}{\partial y^l}} \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = 0$ et (2.62) devient :

$$P\left(\frac{\delta}{\delta x^k}, F \frac{\partial}{\partial y^l}\right) \frac{\partial}{\partial x^i} = -\nabla_{F \frac{\partial}{\partial y^l}} \nabla_{\frac{\delta}{\delta x^k}} \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = -F \nabla_{\frac{\partial}{\partial y^l}} \left(\Gamma_{ik}^j \frac{\partial}{\partial x^j}\right)$$

$$= -F \frac{\partial}{\partial y^l} \left(\Gamma_{ik}^j\right) \cdot \frac{\partial}{\partial x^j}$$

d'où :

$$P_{jkl}^i = -F \frac{\partial \Gamma_{jk}^i}{\partial y^l} \quad (2.63)$$

Maintenant que le sens des composantes R_{ijkl} et P_{ijkl} (ou R_{jkl}^i et P_{jkl}^i) est clair, nous pouvons poser en conclusion quelques formules regroupant les trois aspects (intrinsèque, en coordonnée et en langage de repères mobiles avec la 2-forme de courbure Ω_j^i associée à la connexion de Chern généralisée) :

$$\begin{cases} \Omega_j^i = \frac{1}{2} R_{jkl}^i dx^k \wedge dx^l + P_{jkl}^i dx^k \wedge \frac{\delta y^l}{F} \\ \eta^j \Omega_j^i(X, Y) \frac{\partial}{\partial x^i} = (\nabla_X \nabla_Y \xi - \nabla_Y \nabla_X \xi - \nabla_{[X, Y]} \xi) \eta \\ \quad \quad \quad = \phi(X, Y) \eta \end{cases}$$

où $\eta \in \Gamma(\pi^*TM)$ et $X, Y \in \Gamma(T\mathcal{M})$.

2.5.2 Courbure drapeau

La courbure drapeau en géométrie finslerienne est une courbure généralisant la courbure sectionnelle en géométrie riemannienne. Rappelons que la courbure sectionnelle d'une variété riemannienne (M, g) est une fonction définie sur la Grassmannienne des 2-plans $P \subset TM$. Pour une variété finslerienne (M, F) , on a besoin d'un 2-plan $P \subset TM$ et aussi d'un vecteur non nul $y \in P$. Cela s'appelle un *drapeau*.

Définition 34 *Un drapeau au point x d'une variété différentiable finslerienne M est la donnée d'un sous-espace vectoriel de dimension 2, $P \subset T_x M$ et d'un vecteur non nul*

$y \in P$. On définit la courbure du drapeau (P, y) par :

$$K(y, P) = \frac{g(R(X, Y)y, \xi)}{g(\xi, \xi)g(y, y) - [g(\xi, y)]^2} \quad (2.64)$$

où $\xi \in P$ est un vecteur non colinéaire à y ($\{\xi, y\}$ est une base de P).

L'écriture ci-dessus est possible car les vecteurs y et ξ peuvent tous les deux être vus comme sections de π^*TM à travers l'identification τ (dans (1.7) ou (1.6)) et car $g = g_{ij}(x, y) dx^i \otimes dx^j = (\frac{1}{2}F^2)_{y^i y^j} dx^i \otimes dx^j$ est une métrique riemannienne sur π^*TM . Quant à X et Y , qui sont des sections locales de $T\mathfrak{M}$, ils sont tels que $\pi_*X = \xi$ et $\pi_*Y = y$. Nous pouvons aussi noter $K(y, P) = K(y, \xi)$.

En utilisant la section distinguée $l = y/F$ et la section correspondante \tilde{l} de $T\mathfrak{M}$, c'est-à-dire $\pi_*\tilde{l} = l$, et en utilisant le fait que $g(l, l) = 1$, la formule (2.64) peut s'écrire en utilisant la section distinguée :

$$K(y, \xi) = K(l, \xi) = \frac{g(R(X, \tilde{l})l, \xi)}{g(\xi, \xi) - [g(\xi, l)]^2} \quad (2.65)$$

Avant de réécrire les expressions (2.64) et (2.65) en coordonnées, rappelons que $R_{ijkl} = g(R(\frac{\delta}{\delta x^k}, \frac{\delta}{\delta x^l})\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j})$ et puisque

$$\pi_*X = \pi_*\left(X^k \frac{\delta}{\delta x^k}\right) = X^k \frac{\partial}{\partial x^k} = \xi^k \frac{\partial}{\partial x^k} \Rightarrow X^k = \xi^k$$

et par le même raisonnement $Y^k = y^k$ et $\tilde{l}^k = l^k$, les expressions (2.64) et (2.65) s'expriment comme :

$$\begin{aligned} K(y, \xi) = K(l, \xi) &= \frac{R_{jikl}\xi^i y^j \xi^k y^l}{g(\xi, \xi) - [g(\xi, y)]^2} \\ &= \frac{R_{jikl}\xi^i l^j \xi^k l^l}{g(\xi, \xi) - [g(\xi, l)]^2} \\ &= \frac{R_{ik}\xi^i \xi^k}{g(\xi, \xi) - [g(\xi, l)]^2} \end{aligned}$$

et c'est parfois la grandeur

$$R_{ik} = R_{jikl}l^j l^l \quad (2.66)$$

qui est désignée par courbure drapeau.

2.6 Variété de Finsler-Ehresmann localement minkowskienne

Nous avons vu au chapitre 1 que les structures de Berwald sont des structures finsleriennes particulières à peine plus générales que les variétés riemanniennes et les variétés finsleriennes localement minkowskienne. En faisant intervenir la connexion de Chern, nous avons vu qu'une variété est de Berwald si les coefficients de la connexion de Chern n'ont pas de dépendance directionnelle. Pour les variétés de Finsler-Ehresmann, nous définissons également un *espace de Berwald généralisé* comme une variété de Finsler-Ehresmann pour laquelle les coefficients de la connexion de Chern généralisé n'ont pas de dépendance en y , $\Gamma_{jk}^i(x, y) = \Gamma_{jk}^i(x)$.

Nous avons introduit précédemment en (2.38) des objets \mathcal{A}_{ijl} essentiels dans la formule (2.37) qui relie les coefficients de la connexion de Chern généralisée Γ_{jk}^i aux symboles de Christoffel formels γ_{jk}^i . Nous commençons par faire un calcul très simple sur ces objets \mathcal{A}_{ijl} en leur attribuant une écriture intrinsèque.

Lemme 35 *Le $(0, 3; 0)$ -tenseur \mathcal{A} , obtenu par la combinaison suivante du tenseur de Cartan, via la connexion de Ehresmann θ :*

$$\mathcal{A}(X, Y, Z) = A(\theta(X), \pi_*Y, \pi_*Z) + A(\theta(Y), \pi_*Z, \pi_*X) - A(\theta(Z), \pi_*X, \pi_*Y) \quad (2.67)$$

correspond en coordonnées aux objets \mathcal{A}_{ijl} donnés par

$$\mathcal{A}_{ijl} = \frac{1}{F} (A_{ijs}\mathcal{N}_l^s - A_{lis}\mathcal{N}_j^s + A_{jls}\mathcal{N}_i^s) \quad (2.68)$$

Preuve. La vérification se fait en évaluant la somme apparaissant dans (2.67) sur le triplet de vecteurs $X = \frac{\partial}{\partial x^i}$, $Y = \frac{\partial}{\partial x^j}$ et $Z = \frac{\partial}{\partial x^k}$, et en utilisant le fait que

$$\theta\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = \frac{\mathcal{N}_i^l}{F} \cdot \theta\left(F \frac{\partial}{\partial y^l}\right) = \frac{\mathcal{N}_i^l}{F} \frac{\partial}{\partial x^l}, \quad \pi_*\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = \frac{\partial}{\partial x^i}$$

Nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_{ijl} &= A\left(\theta\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right), \frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^k}\right) + A\left(\theta\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right), \frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^i}\right) \\
&\quad - A\left(\theta\left(\frac{\partial}{\partial x^k}\right), \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) \\
&= \frac{1}{F} \left[\mathcal{N}_i^l A\left(\frac{\partial}{\partial x^l}, \frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^k}\right) + \mathcal{N}_j^l A\left(\frac{\partial}{\partial x^l}, \frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^i}\right) \right. \\
&\quad \left. - \mathcal{N}_k^l A\left(\frac{\partial}{\partial x^l}, \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) \right] \\
&= \frac{1}{F} (\mathcal{N}_i^l A_{ljk} + \mathcal{N}_j^l A_{lki} - \mathcal{N}_k^l A_{lij})
\end{aligned}$$

■

Définition 36 Une variété de Finsler-Ehresmann (M, F, \mathcal{H}) est localement minkowskienne si :

- (a) Le tenseur \mathcal{A} obtenu par combinaison du tenseur de Cartan, via la connexion de Ehresmann θ , est nul

$$\mathcal{A} = A(\theta(X), \pi_*Y, \pi_*Z) + A(\theta(Y), \pi_*Z, \pi_*X) - A(\theta(Z), \pi_*X, \pi_*Y) = 0 \quad (2.69)$$

- (b) Dans un système de coordonnées locales privilégiées (x^i) au voisinage de tous points de M qui, avec les coordonnées sur TM induites par $y = y^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, le lagrangien F dépend uniquement de la variable directionnelle y .

Il est évident d'après le lemme 35 que la condition (a) correspond en coordonnées à l'identité :

$$\mathcal{A}_{ijl} = \frac{1}{F} (A_{ijs} \mathcal{N}_l^s - A_{lis} \mathcal{N}_j^s + A_{jls} \mathcal{N}_i^s) = 0 \quad (2.70)$$

Remarque 37 En utilisant le lemme 35, nous constatons que pour une variété finslerienne "traditionnelle" $(M, F) = (M, F, \mathcal{H}_c)$, la condition (b) dans la définition 36 implique la condition (a) car dès que le lagrangien F ne dépend que de y , les coefficients \mathcal{N}_j^i sont nuls et la somme (2.70) (donc (2.69) aussi) est alors nulle. Ceci n'est pas le cas pour une variété de Finsler-Ehresmann quelconque, pour que celle ci soit localement de Minkowski, les coefficients \mathcal{N}_j^i n'ont pas besoin d'être nuls, seule la somme (2.70) (ou (2.69)) s'annule.

D'après la définition 36, nous pouvons affirmer que les variétés de Finsler-Ehresmann localement de Minkowski sont effectivement de type de Berwald généralisé. Nous pouvons voir ceci dans le lemme suivant.

Lemme 38 *Si une variété de Finsler-Ehresmann (M, F, \mathcal{H}) est localement minkowskienne, alors, il existe un système de coordonnées privilégié dans lequel les coefficients Γ_{jk}^i de la connexion de Chern généralisée sont nuls.*

Preuve. Si dans un système de coordonnées privilégié le lagrangien $F(x, y) = F(y)$, alors, le tenseur fondamental g_{ij} aussi ne dépend que de y . Par conséquent, dans ce même système de coordonnées, les symboles de Christoffel formels γ_{jk}^i , donnés par (2.36), sont nuls. La variété de Finsler-Ehresmann étant localement minkowskienne, la condition (2.69) (ou (2.70)) permet de déduire en utilisant la formule (2.37) que les coefficients de la connexion de Chern généralisée sont également nuls :

$$\Gamma_{il}^k = \gamma_{il}^k - \frac{g^{kj}}{F} (A_{ijs} \mathcal{N}_l^s - A_{lis} \mathcal{N}_j^s + A_{jls} \mathcal{N}_i^s) = 0$$

■

Lemme 39 *Soit (M, F, \mathcal{H}) une variété de Finsler-Ehresmann, alors, la hv -courbure de la connexion de Chern généralisée est identiquement nulle, $P_{jkl}^i = 0$, si et seulement si les coefficients de la connexion de Chern généralisée Γ_{jk}^i en coordonnées naturelles ne dépendent pas de la variable directionnelle y .*

Preuve. La preuve est immédiate si nous utilisons la formule (2.63) que nous rappelons :

$$P_{jkl}^i = -F \frac{\partial \Gamma_{jk}^i}{\partial y^l}$$

■

Théorème 40 *Soit (M, F, \mathcal{H}) une variété de Finsler-Ehresmann. Soit R_{jkl}^i et P_{jkl}^i la hh - et la hv -courbures, respectivement, de la connexion de Chern généralisée. Alors, (M, F, \mathcal{H}) est localement minkowskienne si et seulement si $R_{ijkl} = 0$, $P_{ijkl} = 0$ et $\mathcal{A}_{ijl} = 0$.*

Preuve. Le lemme 38 nous permet de voir que si (M, F, \mathcal{H}) est localement minkowskienne, alors $R_{ijkl} = 0$, $P_{ijkl} = 0$ et $\mathcal{A}_{ijl} = 0$. En effet, s'il existe un système de coordonnées dans lequel les coefficients de la connexion de Chern généralisée Γ_{jk}^i sont nuls, l'utilisation des formules (2.56) et (2.63) nous montre que la hh -courbure R et la hv -courbure P sont nuls dans ce système de coordonnées. Ces objets étant des tenseurs, on conclut qu'ils sont nuls dans n'importe quel système de coordonnées et $\mathcal{A}_{ijl} = 0$ par définition même.

A présent, si nous supposons que $R_{jikl} = P_{jikl} = 0$. Par le lemme 39, le fait que P soit nulle implique que les coefficients de la connexion de Chern généralisée Γ_{jk}^i ne dépendent pas de y . Ils peuvent alors définir une connexion linéaire D directement sur la variété M ($D_{\frac{\partial}{\partial x^k}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \Gamma_{jk}^i \frac{\partial}{\partial x^i}$). Et comme nous avons aussi $R_{jkl}^i = 0$, la formule (2.56) de R_{jkl}^i donne, en remplaçant $\frac{\delta}{\delta x}$ par $\frac{\partial}{\partial x}$,

$$R_{jkl}^i = \frac{\partial \Gamma_{jl}^i}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma_{jk}^i}{\partial x^l} + \Gamma_{hk}^i \Gamma_{jl}^h - \Gamma_{hl}^i \Gamma_{jk}^h = 0 \quad (2.71)$$

qui signifie que la connexion considérée est plate sur M et nous pouvons utiliser la proposition 13 pour déduire qu'il existe un système de coordonnées dans lequel $\Gamma_{jk}^i = 0$. De plus, nous avons $\mathcal{A}_{ijl} = 0$ qui nous permet de déduire en vertu de (2.37) que $\gamma_{jk}^i = 0$, ce qui implique que :

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = 0$$

Donc les g_{ij} ne dépendent pas de x , la formule (1.3) nous dit qu'alors F aussi ne dépend pas de x , (M, F, \mathcal{H}) est alors localement minkowskienne. ■

Chapitre 3

Propriétés conformes d'une variété de Finsler-Ehresmann

Le but de ce chapitre est l'étude du comportement de la courbure des variétés de Finsler-Ehresmann sous l'effet d'une déformation conforme de la métrique finslerienne. Nous introduisons en particulier un *tenseur de Weyl* et un *tenseur de Schouten* analogues à des objets correspondants en géométrie riemannienne. Nous étudions aussi le comportement de ces tenseurs sous l'effet d'une transformation conforme, et en particulier, nous obtenons que la partie horizontale du tenseur de Weyl est essentiellement un invariant conforme. L'un des résultats principaux de cette thèse est une version du théorème de Weyl-Schouten pour les variétés de Finsler-Ehresmann conformément R -plates. Nous donnons aussi une caractérisation des variétés conformément plates.

Nous avons construit dans le chapitre 2 une approche axiomatique de la géométrie finslerienne dans laquelle nous avons défini une variété de Finsler-Ehresmann (M, F, \mathcal{H}) comme variété finslerienne dotée d'une structure additionnelle liée à une connexion de Ehresmann "*générique*" \mathcal{H} . Dans le présent chapitre, on se donne une variété de Finsler-Ehresmann (M, F, \mathcal{H}_0) dont on étudie les transformations conformes. Plus précisément, nous étudions les déformations de type $(M, \tilde{F}, \mathcal{H}_0)$ où $\tilde{F} = \exp u \cdot F$ avec $u \in C^\infty(M)$ et où la connexion de Ehresmann \mathcal{H}_0 reste fixe.

Nous commençons au paragraphe 3.1 par présenter des formules simples de transformations du lagrangien, tenseur fondamental, tenseur de Cartan et de la forme de Ehresmann. Ensuite, nous étudions au paragraphe 3.2 les transformations conformes de la connexion de Chern généralisée sur la variété de Finsler-Ehresmann (M, F, \mathcal{H}_0) ainsi que les transformations des courbures associées. Nous continuons dans ce chapitre avec

les méthodes intrinsèques "koszuliennes" utilisées dans le chapitre 2, et en particulier, nous nous inspirons de méthodes algébriques utilisées dans le contexte de la géométrie riemannienne dans la référence [HJ03]. Plus précisément, nous écrivons la différence $(\tilde{\nabla} - \nabla)$ entre la connexion de Chern généralisée et sa transformée conforme sous forme d'un $(1, 1; 1)$ -tenseur B dont on détermine la formule. Ensuite, nous utilisons ce tenseur pour déduire les formules de transformations conformes de la hh -courbure R et de la hv -courbure de Minkowski P .

Au paragraphe 3.3 nous construisons pour les variétés de Finsler-Ehresmann de dimension $n \geq 3$ le $(2, 2; 0)$ -tenseur de Weyl W

$$W(\xi, \eta, X, Y) = \Phi(\xi, \eta, X, Y) + (S \odot g)(\xi, \eta, X, Y)$$

où le symbole \odot désigne un produit de Kulkarni-Nomizu généralisé et S est le $(1, 1; 0)$ -tenseur de Schouten :

$$S(\xi, X) = \frac{1}{n-2} \left(\varphi(\xi, X) - \frac{\sigma}{2(n-1)} g(\xi, \pi_* X) \right)$$

où le $(1, 1; 0)$ -tenseur $\varphi(\xi, X)$ généralise le tenseur de Ricci car il est construit par un type de contraction du $(2, 2; 0)$ -tenseur de courbure totale Φ , de même pour σ qui généralise la courbure scalaire. Nous donnons aussi une caractérisation du tenseur de Weyl horizontal W^{HH} (sous-type HH , cf. paragraphe 2.4.1) pour la dimension 3. Nous montrons en particulier (théorème 59) que pour cette dimension, toutes les composantes du tenseur de Weyl horizontal W^{HH} sont nulles pour les espaces de type de Berwald généralisé (espaces dont la hv -courbure, associée à la connexion de Chern généralisée, est nulle).

Nous étudions ensuite les transformations conformes de W et de S , le résultat le plus important de ces transformations dit que la composante W^{HH} du tenseur de Weyl a un comportement similaire au cas riemannien alors que la composante W^{HV} laisse apparaître des termes supplémentaires essentiellement liés à la présence du tenseur de Cartan et à la composante verticale du Hessien $H_u^V(\xi, X)$ (cf. définition 22 et formule (2.42) en page 41). Quant au tenseur de Schouten, sa transformation ne fait apparaître que des objets horizontaux. Ce comportement de la composante horizontale du tenseur de Weyl aura une influence dans le paragraphe suivant 3.4 où justement nous observons que cette composante joue un rôle de "courbure conforme" similaire au tenseur de Weyl riemannien.

Nous donnons en suite au paragraphe 3.4 une caractérisation des variétés de Finsler-Ehresmann (M, F, \mathcal{H}_0) conformément R -plates, c'est-à-dire des déformations qui annulent la hh -courbure de la variété. Le résultat essentiel de ce paragraphe est le théorème 72 qui énonce les conditions nécessaires et suffisantes pour que la variété de Finsler-Ehresmann soit conformément R -plate. Ces conditions sont que la hh -composante W^{HH} du tenseur

de Weyl est nulle et que le tenseur de Schouten ainsi que sa dérivée covariante vérifient certaines conditions de symétrie. Nous complétons le paragraphe 3.4 par le théorème 74 qui dit qu'en dimension 3, nous avons pour les variétés de type de Berwald généralisé seulement deux conditions nécessaires et suffisantes pour que de telles variétés soient conformément R -plate.

Ensuite, nous donnons au paragraphe 3.5 une caractérisation des variétés de Finsler-Ehresmann conformément plates. Nous énonçons dans la proposition certaines conditions nécessaires pour que (M, F, \mathcal{H}_0) soit conformément plate. Ces conditions ne sont pas algébriques, mais dépendent seulement d'une section ζ de π^*TM . L'existence de la fonction de déformation conforme u sera alors liée à la possibilité de ce champ ζ à être un gradient de u , $\zeta = \nabla u$.

3.1 Variété (M, F, \mathcal{H}_0)

Nous avons défini au chapitre 2 la variété de Finsler-Ehresmann (M, F, \mathcal{H}) comme variété finslerienne dotée d'une structure additionnelle liée à la connexion de Ehresmann. Cette connexion de Ehresmann "générique" \mathcal{H} (ou sa forme de Ehresmann θ) donne, lorsque nous lui imposons des conditions d'invariance projectives, la variété finslerienne canonique $(M, F, \mathcal{H}_c) \equiv (M, F)$. A présent, nous considérons une variété de Finsler-Ehresmann (M, F, \mathcal{H}_0) dont on étudie les transformations conformes. Plus précisément, nous étudions les déformations de type $(M, \tilde{F}, \mathcal{H}_0)$ où $\tilde{F} = \exp u \cdot F$ avec $u \in C^\infty(M)$ et où la connexion de Ehresmann \mathcal{H}_0 reste fixe. En termes de la forme de Ehresmann θ_0 , cela signifie qu'elle est invariante conforme, c'est-à-dire que lors d'une transformation conforme $F \rightarrow \tilde{F} = \exp u \cdot F$ de la métrique finslerienne, la forme de Ehresmann écrite en coordonnées (2.7), que nous notons dans ce cas $\bar{\theta}_0$, est invariante. En travaillant avec des grandeurs homogènes de degré zéro en y , la forme de Ehresmann $\theta_0 = \bar{\theta}_0/F$ se transforme alors comme :

$$\theta_0 \longrightarrow \tilde{\theta}_0 = \frac{\delta y^j}{\tilde{F}} \otimes \frac{\partial}{\partial x^j} = \exp(-u) \cdot \theta_0 \quad (3.1)$$

D'où l'invariance de $\bar{\theta}_0$

$$\bar{\theta}_0 = \theta_0 F \longrightarrow \tilde{\theta}_0 \tilde{F} = \exp(-u) \exp u \cdot \theta_0 F = \bar{\theta}_0$$

Considérons une variété de Finsler-Ehresmann (M, F, \mathcal{H}_0) , et considérons une fonction $u(x)$ sur M . Lors d'une déformation conforme $F \rightarrow \tilde{F} = \exp u(x) \cdot F$ de la métrique finslerienne, le tenseur fondamental suit la déformation avec un facteur $\exp 2u$, alors que

la transformation du tenseur de Cartan s'effectue avec un facteur $\exp 3u$:

$$F \longrightarrow \tilde{F} = \exp(u)F, \quad g \longrightarrow \tilde{g} = \exp(2u)g, \quad A \longrightarrow \tilde{A} = \exp(3u)A \quad (3.2)$$

en effet :

$$\tilde{g}_{ij} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \tilde{F}^2}{\partial y^i \partial y^j} = \tilde{F}_{y^i} \tilde{F}_{y^j} + \tilde{F} \tilde{F}_{y^i y^j}, \quad \tilde{A}_{ijk} = \frac{\tilde{F}}{2} \frac{\partial \tilde{g}_{ij}}{\partial y^k}$$

et comme

$$\tilde{F}_{y^i} = \frac{\partial \tilde{F}}{\partial y^i} = \exp u \cdot F_{y^i}, \quad \tilde{F}_{y^i y^j} = \frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial y^i \partial y^j} = \exp u \cdot F_{y^i y^j}, \quad \tilde{F}_{y^i} \tilde{F}_{y^j} = \exp 2u \cdot F_{y^i} F_{y^j}$$

nous avons

$$\begin{cases} \tilde{g}_{ij} = \exp 2u [F_{y^i} F_{y^j} + F F_{y^i y^j}] = \exp 2u \cdot g_{ij} \\ \tilde{A}_{ijk} = \exp u \frac{F}{2} \cdot \exp 2u \frac{\partial g_{ij}}{\partial y^k} = \exp 3u \cdot A_{ijk} \end{cases}$$

La transformation conforme du tenseur fondamental g induit des transformations sur la connexion de Chern généralisée associée à g . Pour cela, nous avons besoin de certaines formules telle que celle de la transformation conforme de $A(\theta_0(X), \xi, \eta)$.

Lemme 41 *Considérons la variété de Finsler-Ehresmann (M, F, \mathcal{H}_0) . La transformation conforme de $A(\theta_0(X), \xi, \eta)$ est donnée par :*

$$A(\theta_0(X), \xi, \eta) \longrightarrow \tilde{A}(\tilde{\theta}_0(X), \xi, \eta) = \exp(2u)A(\theta_0(X), \xi, \eta) \quad (3.3)$$

Preuve. La preuve est immédiate en utilisant la transformation conforme de θ_0 donnée par (3.1). Nous avons :

$$\begin{aligned} \tilde{A}(\tilde{\theta}_0(X), \xi, \eta) &= \exp(3u)A(\exp(-u)\theta_0(X), \xi, \eta) \\ &= \exp(2u)A(\theta_0(X), \xi, \eta) \end{aligned}$$

■

Remarque 42 *Par la suite, nous n'allons pas mettre d'indice 0 pour désigner θ_0 , nous noterons simplement θ .*

Corollaire 43 *La transformation conforme du tenseur \mathcal{A} , introduit en (2.67), s'écrit comme :*

$$\mathcal{A} \longrightarrow \tilde{\mathcal{A}} = \exp 2u \cdot \mathcal{A}$$

Preuve. En utilisant (2.67) que nous rappelons :

$$\mathcal{A}(X, Y, Z) = A(\theta(X), \pi_* Y, \pi_* Z) + A(\theta(Y), \pi_* Z, \pi_* X) - A(\theta(Z), \pi_* X, \pi_* Y)$$

et en insérant la formule de transformation (3.3) pour chacun des trois termes, nous obtenons la formule désirée. ■

3.2 Propriétés conformes de la connexion de Chern généralisée et des courbures associées

3.2.1 Transformation conforme de la connexion de Chern généralisée

Nous démontrons une proposition permettant de calculer la différence $\tilde{\nabla} - \nabla$ entre la connexion de Chern généralisée et sa transformée conforme. Pour cela, nous introduisons un certain $(1, 1; 1)$ -tenseur B concrétisant cette différence.

Définition 44 *La différence entre deux connexions de Chern généralisées ∇ et $\tilde{\nabla}$, associées respectivement à g et à $\tilde{g} = \exp 2u \cdot g$, peut être représentée par un $(1, 1; 1)$ -tenseur $B : \Gamma(\pi^*TM) \otimes \Gamma(T\mathfrak{M}) \longrightarrow \Gamma(\pi^*TM)$:*

$$B(\xi, X) = \tilde{\nabla}_X \xi - \nabla_X \xi, \quad X \in \Gamma(T\mathfrak{M}), \quad \xi \in \Gamma(\pi^*TM) \quad (3.4)$$

Etant donné que l'application $\pi_* : T\mathfrak{M} \xrightarrow{\pi_*} \pi^*TM$ est surjective, n'importe quelle section η de π^*TM peut être image à travers π_* d'une section Y de $T\mathfrak{M}$, nous pouvons alors sans soucis écrire (3.4) sous forme de :

$$B(\pi_*Y, X) = \tilde{\nabla}_X(\pi_*Y) - \nabla_X(\pi_*Y), \quad X, Y \in \Gamma(T\mathfrak{M})$$

Si nous posons $\hat{B}(X, Y) = B(\pi_*X, Y)$ (en conformité avec la notation dans (2.51) page 45), nous pouvons facilement montrer que \hat{B} est symétrique par rapport à X et Y , c'est-à-dire que $B(\pi_*X, Y) = B(\pi_*Y, X)$. En effet, la connexion $\tilde{\nabla}$ étant sans torsion (nous pouvons utiliser la formule de symétrie (2.13) page 35) pour déduire que :

$$\begin{aligned} \hat{B}(X, Y) = B(\pi_*X, Y) &= \tilde{\nabla}_Y(\pi_*X) - \nabla_Y(\pi_*X) \\ &= \tilde{\nabla}_X(\pi_*Y) - \nabla_X(\pi_*Y) \\ &= B(\pi_*Y, X) \\ &= \hat{B}(Y, X) \end{aligned} \quad (3.5)$$

Lemme 45 *Si Y est vertical, alors $B(\xi, Y) = 0$ pour toute section ξ de π^*TM .*

Preuve. La preuve est immédiate en utilisant la symétrie de \hat{B} par rapport à X et Y . En effet, n'importe quel $\xi \in \pi^*TM$ possède au moins une préimage dans $T\mathfrak{M}$ à travers π_* , $\pi_*X = \xi$, (3.5) nous permet alors d'écrire :

$$B(\xi, Y) = B(\pi_*X, Y) = B(\pi_*Y, X) = 0$$

car Y est dans le noyau de π_* . ■

Définition 46 On définit la dérivée covariante de B par :

$$(\nabla_Z B)(\eta, X) = \nabla_Z (B(\eta, X)) - B(\nabla_Z \eta, X) - B(\nabla_Z (\pi_* X), Y_\eta) \quad (3.6)$$

où la notation $Y_\eta \in T\mathfrak{M}$ désigne n'importe quelle section Y préimage de η par π_* , $\pi_* Y_\eta = \eta$.

Remarque 47 Le lemme 45 entraîne que cette définition est indépendante du choix de Y_η .

A présent, nous calculons la différence $\tilde{\nabla} - \nabla$ afin de trouver la forme de B (ou \hat{B}) définie par (3.4).

Proposition 48 Si $\tilde{g} = \exp(2u)g$, alors le $(0, 2; 1)$ -tenseur symétrique

$$\hat{B}(X, Y) = \tilde{\nabla}_X (\pi_* Y) - \nabla_X (\pi_* Y)$$

est donné par :

$$\hat{B}(X, Y) = du(X)\pi_* Y + du(Y)\pi_* X - g(\pi_* X, \pi_* Y)\nabla u, \quad X, Y \in T\mathfrak{M} \quad (3.7)$$

où $du(X)$ désigne $d\hat{u}(X) = d(\pi^* u)(X) = du(\pi_* X)$.

Preuve. Commençons par développer le terme $2\tilde{A}(\tilde{\theta}(X), \pi_* Y, \pi_* Z)$:

$$\begin{aligned} 2\tilde{A}(\tilde{\theta}(X), \pi_* Y, \pi_* Z) &= X(\tilde{g}(\pi_* Y, \pi_* Z)) - \tilde{g}(\tilde{\nabla}_X (\pi_* Y), \pi_* Z) \\ &\quad - \tilde{g}(\pi_* Y, \tilde{\nabla}_X (\pi_* Z)) \\ &= X(\exp(2u)g(\pi_* Y, \pi_* Z)) - \exp(2u) \left[g(\tilde{\nabla}_X (\pi_* Y), \pi_* Z) \right. \\ &\quad \left. + g(\pi_* Y, \tilde{\nabla}_X (\pi_* Z)) \right] \end{aligned} \quad (3.8)$$

Le premier terme apparaissant dans (3.8) donne :

$$\begin{aligned} X(\exp(2u)g(\pi_* Y, \pi_* Z)) &= 2\exp(2u)du(X)g(\pi_* Y, \pi_* Z) \\ &\quad + \exp(2u)X(g(\pi_* Y, \pi_* Z)) \\ &= \exp(2u)[2du(X)g(\pi_* Y, \pi_* Z) + g(\nabla_X (\pi_* Y), \pi_* Z) \\ &\quad + g(\pi_* Y, \nabla_X (\pi_* Z))] + \exp(2u)2A(\theta(X), \pi_* Y, \pi_* Z) \end{aligned} \quad (3.9)$$

Quant au second terme $\left[g\left(\tilde{\nabla}_X(\pi_*Y), \pi_*Z\right) + g\left(\pi_*Y, \tilde{\nabla}_X(\pi_*Z)\right) \right]$ dans (3.8), remplaçons $\tilde{\nabla}_X(\pi_*Y)$ et $\tilde{\nabla}_X(\pi_*Z)$ par leurs expressions en faisant apparaître \hat{B} :

$$\begin{aligned} & g\left(\tilde{\nabla}_X(\pi_*Y), \pi_*Z\right) + g\left(\pi_*Y, \tilde{\nabla}_X(\pi_*Z)\right) \\ &= g\left(\nabla_X(\pi_*Y) + \hat{B}(X, Y), \pi_*Z\right) + g\left(\pi_*Y, \nabla_X(\pi_*Z) + \hat{B}(X, Z)\right) \\ &= g\left(\nabla_X(\pi_*Y), \pi_*Z\right) + g\left(\hat{B}(X, Y), \pi_*Z\right) + g\left(\pi_*Y, \nabla_X(\pi_*Z)\right) \\ & \quad + g\left(\pi_*Y, \hat{B}(X, Z)\right) \end{aligned} \quad (3.10)$$

En utilisant (3.9) et (3.10), (3.8) devient :

$$\begin{aligned} 2\tilde{A}\left(\tilde{\theta}(X), \pi_*Y, \pi_*Z\right) &= \exp(2u) \left[2du(X) g(\pi_*Y, \pi_*Z) + g(\nabla_X(\pi_*Y), \pi_*Z) \right. \\ & \quad \left. + g(\pi_*Y, \nabla_X(\pi_*Z)) \right] + \exp(2u) 2A(\theta(X), \pi_*Y, \pi_*Z) \\ & \quad - \exp(2u) \left[g(\nabla_X(\pi_*Y), \pi_*Z) + g\left(\hat{B}(X, Y), \pi_*Z\right) \right. \\ & \quad \left. + g(\pi_*Y, \nabla_X(\pi_*Z)) + g\left(\pi_*Y, \hat{B}(X, Z)\right) \right] \\ &= \exp(2u) \left[2du(X) g(\pi_*Y, \pi_*Z) - g\left(\hat{B}(X, Y), \pi_*Z\right) \right. \\ & \quad \left. - g\left(\pi_*Y, \hat{B}(X, Z)\right) \right] + \exp(2u) 2A(\theta(X), \pi_*Y, \pi_*Z) \end{aligned}$$

ou sous une autre écriture :

$$\begin{aligned} 2\tilde{A}\left(\tilde{\theta}(X), \pi_*Y, \pi_*Z\right) - \exp(2u) 2A(\theta(X), \pi_*Y, \pi_*Z) &= \exp(2u) \times \\ & \times \left[2du(X) g(\pi_*Y, \pi_*Z) - g\left(\hat{B}(X, Y), \pi_*Z\right) - g\left(\pi_*Y, \hat{B}(X, Z)\right) \right] \end{aligned} \quad (3.11)$$

En utilisant (3.3), l'équation ci-dessus sera nulle

$$2du(X) g(\pi_*Y, \pi_*Z) - g\left(\hat{B}(X, Y), \pi_*Z\right) - g\left(\pi_*Y, \hat{B}(X, Z)\right) = 0 \quad (3.12)$$

En permutant X et Y dans (3.12) :

$$2du(Y) g(\pi_*X, \pi_*Z) - g\left(\hat{B}(Y, X), \pi_*Z\right) - g\left(\pi_*X, \hat{B}(Y, Z)\right) = 0 \quad (3.13)$$

et en utilisant le fait que $\hat{B}(X, Y)$ est symétrique et en additionnant (3.12) et (3.13) nous obtenons :

$$\begin{aligned} & du(X) g(\pi_*Y, \pi_*Z) + du(Y) g(\pi_*X, \pi_*Z) - g\left(\hat{B}(X, Y), \pi_*Z\right) \\ & - \frac{1}{2} \left(g\left(\pi_*Y, \hat{B}(X, Z)\right) + g\left(\pi_*X, \hat{B}(Y, Z)\right) \right) = 0 \end{aligned} \quad (3.14)$$

Calculons le terme $g(\pi_*Y, \hat{B}(X, Z)) + g(\pi_*X, \hat{B}(Y, Z))$ apparaissant dans (3.14) en remplaçant $\hat{B}(X, Z)$ et $\hat{B}(Y, Z)$ par leurs expressions contenant la connexion :

$$\begin{aligned}
g(\pi_*Y, \hat{B}(X, Z)) + g(\pi_*X, \hat{B}(Y, Z)) &= g(\pi_*Y, \hat{B}(Z, X)) + g(\pi_*X, \hat{B}(Z, Y)) \\
&= g(\pi_*Y, \tilde{\nabla}_Z(\pi_*X) - \nabla_Z(\pi_*X)) \\
&\quad + g(X, \tilde{\nabla}_Z(\pi_*Y) - \nabla_Z(\pi_*Y)) \\
&= g(\pi_*Y, \tilde{\nabla}_Z(\pi_*X)) - g(\pi_*Y, \nabla_Z(\pi_*X)) \\
&\quad + g(\pi_*X, \tilde{\nabla}_Z(\pi_*Y)) - g(\pi_*X, \nabla_Z(\pi_*Y))
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
&g(\pi_*Y, \hat{B}(X, Z)) + g(\pi_*X, \hat{B}(Y, Z)) \\
&= \exp(-2u) \left[\tilde{g}(\pi_*Y, \tilde{\nabla}_Z(\pi_*X)) + \tilde{g}(\pi_*X, \tilde{\nabla}_Z(\pi_*Y)) \right] \\
&\quad - [g(\pi_*Y, \nabla_Z(\pi_*X)) + g(\pi_*X, \nabla_Z(\pi_*Y))] \\
&= \exp(-2u) \left[Z(\tilde{g}(\pi_*X, \pi_*Y)) - 2\tilde{A}(\tilde{\theta}(Z), \pi_*X, \pi_*Y) \right] \\
&\quad - [Z(g(\pi_*X, \pi_*Y)) - 2A(\theta(Z), \pi_*X, \pi_*Y)] \\
&= \exp(-2u) Z(\tilde{g}(\pi_*X, \pi_*Y)) - Z(g(\pi_*X, \pi_*Y)) \\
&\quad - \exp(-2u) 2\tilde{A}(\tilde{\theta}(Z), \pi_*X, \pi_*Y) + 2A(\theta(Z), \pi_*X, \pi_*Y)
\end{aligned}$$

Toujours en utilisant (3.3) nous obtenons :

$$\begin{aligned}
g(\pi_*Y, \hat{B}(X, Z)) + g(\pi_*X, \hat{B}(Y, Z)) &= \exp(-2u) Z(\exp(2u)g(\pi_*X, \pi_*Y)) \\
&\quad - Z(g(\pi_*X, \pi_*Y)) \\
&= 2du(Z)g(\pi_*X, \pi_*Y) \\
&= 2g(\nabla u, \pi_*Z)g(\pi_*X, \pi_*Y) \\
&= 2g(g(\pi_*X, \pi_*Y)\nabla u, \pi_*Z) \tag{3.15}
\end{aligned}$$

en reprenant (3.14) et en remplaçant $g(\pi_*Y, \hat{B}(X, Z)) + g(\pi_*X, \hat{B}(Y, Z))$ par son expression (3.15) dans (3.14) on obtient :

$$\begin{aligned}
g(du(X)\pi_*Y, \pi_*Z) + g(du(Y)\pi_*X, \pi_*Z) - g(\hat{B}(X, Y), \pi_*Z) &\tag{3.16} \\
- g(g(\pi_*X, \pi_*Y)\nabla u, \pi_*Z) &= 0
\end{aligned}$$

La formule (3.16) implique que :

$$\hat{B}(X, Y) = du(X)\pi_*Y + du(Y)\pi_*X - g(\pi_*X, \pi_*Y)\nabla u \tag{3.17}$$

Ce qui achève notre preuve. ■

3.2.2 Transformations conformes de la hh -courbure et de la hv -courbure

Définition 49 *Considérons des sections ζ, ξ et η de π^*TM et des sections X et Y de $T\mathcal{M}$, alors, nous définissons le $(3, 2; 0)$ -tenseur Ψ à partir du tenseur de Cartan A et de la forme de Ehresmann θ par :*

$$\begin{aligned} \Psi(\zeta, \xi, \eta, X, Y) & \quad (3.18) \\ &= 2A(\theta(X), \xi, \zeta)g(\eta, \pi_*Y) - 2A(\theta(Y), \xi, \zeta)g(\eta, \pi_*X) \\ &+ 2[A(\theta(Y), \pi_*X, \xi) - A(\theta(X), \pi_*Y, \xi)]g(\zeta, \eta) \end{aligned}$$

Nous appellerons ce tenseur le tenseur croisé.

Remarque 50 *Nous définissons le $(2, 2; 0)$ -tenseur Ψ_u en effectuant une contraction de Ψ à travers le vecteur ∇u , c'est-à-dire :*

$$\Psi_u(\xi, \eta, X, Y) = \Psi(\nabla u)(\xi, \eta, X, Y) = \Psi(\nabla u, \xi, \eta, X, Y)$$

Ce tenseur est directement donné par (3.18), nous préférons tout de même le réécrire car c'est l'objet Ψ_u qui apparaît régulièrement dans le texte :

$$\begin{aligned} \Psi_u(\xi, \eta, X, Y) & \quad (3.19) \\ &= 2A(\theta(X), \nabla u, \xi)g(\eta, \pi_*Y) - 2A(\theta(Y), \nabla u, \xi)g(\eta, \pi_*X) \\ &+ 2[A(\theta(Y), \pi_*X, \xi) - A(\theta(X), \pi_*Y, \xi)]g(\nabla u, \eta) \end{aligned}$$

Le tenseur Ψ (ou Ψ_u) est un tenseur purement finslerien au sens où il est nul si F est riemannien.

Théorème 51 *Lors d'une transformation conforme du tenseur fondamental $g \rightarrow \tilde{g} = \exp(2u)g$, les $(2, 2; 0)$ -tenseurs de la hh -courbure R et de la hv -courbure P se transforment comme :*

$$\begin{cases} \tilde{R} = \exp(2u) \{R + (b_u^H \odot g)\} \\ \tilde{P} = \exp(2u) \{P + \Psi_u + (b_u^V \odot g)\} \end{cases} \quad (3.20)$$

où b_u^H et b_u^V sont les formes bilinéaires définies par :

$$\begin{cases} b_u^H(\xi, X) = H_u^H(\xi, X) - g(\nabla u, \pi_*X)g(\nabla u, \xi) + \frac{1}{2}g(\nabla u, \nabla u)g(\xi, \pi_*X) \\ b_u^V(\xi, X) = H_u^V(\xi, X) \end{cases} \quad (3.21)$$

et Ψ_u est le $(2, 2; 0)$ -tenseur croisé donné par (3.19) et H_u^V et H_u^H sont les composantes verticale et horizontale du Hessien (2.42) :

$$H_u^V(\xi, X) = g(\nabla_{X^V}(\nabla u), \xi), \quad H_u^H(\xi, X) = g(\nabla_{X^H}(\nabla u), \xi)$$

La preuve de ce théorème repose sur de long calculs développés sur les 10 prochaines pages. Nous tenons à signaler que nous avons délibérément présenté les calculs sous une forme détaillée en espérant ainsi économiser certains types d'efforts lors de la lecture.

Preuve. Nous décomposons la preuve de ce théorème en trois étapes. Dans la première, nous considérons la courbure complète $\Phi(\xi, \eta, X, Y)$ (ou $\phi(X, Y)$) introduite en (2.54) à la page 47 sans faire apparaître la hh -courbure R et la hv -courbure de Minkowski P . Dans la seconde étape, nous nous intéressons de près à la nature (type HH ou HV) de certains éléments entrant dans la transformation (à savoir Ψ_u et $(b_u \odot g)$). De manière plus précise, nous effectuons plusieurs décompositions suivant les types HH et HV des éléments apparaissant dans les transformations afin de pouvoir procéder à des identifications suivant cette nature dans la troisième étape. En dernier lieu, nous faisons apparaître la décomposition de Φ afin de trouver les lois de transformations conformes correspondant à chacune des deux courbures R et P en utilisant les propriétés de Ψ_u et de $(b_u \odot g)$.

Etape 1 Avant de passer aux $(2, 2; 0)$ -tenseurs, nous utilisons des formules en $(1, 2; 1)$ -tenseurs. Reprenons la $(1, 2; 1)$ -courbure complète $\phi(X, Y)$:

$$\phi(X, Y)\xi = \nabla_X \nabla_Y \xi - \nabla_Y \nabla_X \xi - \nabla_{[X, Y]}\xi \quad (3.22)$$

Calculons la différence :

$$\begin{aligned} & \tilde{\phi}(X, Y)\xi - \phi(X, Y)\xi \\ &= \tilde{\nabla}_X \tilde{\nabla}_Y \xi - \tilde{\nabla}_Y \tilde{\nabla}_X \xi - \tilde{\nabla}_{[X, Y]}\xi - \nabla_X \nabla_Y \xi + \nabla_Y \nabla_X \xi + \nabla_{[X, Y]}\xi \end{aligned} \quad (3.23)$$

En utilisant (3.4), nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} & \tilde{\phi}(X, Y)\xi - \phi(X, Y)\xi \\ &= \tilde{\nabla}_X (\nabla_Y \xi + B(\xi, Y)) - \tilde{\nabla}_Y (\nabla_X \xi + B(\xi, X)) - (\nabla_{[X, Y]}\xi + B([X, Y], \xi)) \\ & \quad - \nabla_X \nabla_Y \xi + \nabla_Y \nabla_X \xi + \nabla_{[X, Y]}\xi \\ &= \tilde{\nabla}_X \nabla_Y \xi + \tilde{\nabla}_X (B(\xi, Y)) - \tilde{\nabla}_Y \nabla_X \xi - \tilde{\nabla}_Y B(\xi, X) - \nabla_{[X, Y]}\xi - B([X, Y], \xi) \\ & \quad - \nabla_X \nabla_Y \xi + \nabla_Y \nabla_X \xi + \nabla_{[X, Y]}\xi \end{aligned}$$

En utilisant encore une fois $\tilde{\nabla}_X \eta = \nabla_X \eta + B(\eta, X)$ nous avons :

$$\begin{aligned} & \tilde{\phi}(X, Y)\xi - \phi(X, Y)\xi \\ &= \nabla_X \nabla_Y \xi + B(X, \nabla_Y \xi) + \nabla_X (B(\xi, Y)) + B(X, B(\xi, Y)) - \nabla_Y \nabla_X \xi - B(Y, \nabla_X \xi) \\ & \quad - \nabla_Y B(\xi, X) - B(Y, B(\xi, X)) - \nabla_{[X, Y]}\xi - B([X, Y], \xi) - \nabla_X \nabla_Y \xi + \nabla_Y \nabla_X \xi \\ & \quad + \nabla_{[X, Y]}\xi \\ &= B(X, \nabla_Y \xi) + \nabla_X (B(\xi, Y)) + B(X, B(\xi, Y)) - B(Y, \nabla_X \xi) \\ & \quad - \nabla_Y B(\xi, X) - B(Y, B(\xi, X)) - \nabla_{[X, Y]}\xi - B([X, Y], \xi) + \nabla_{[X, Y]}\xi \end{aligned}$$

En utilisant l'expression de la dérivée covariante de B donnée par (3.6), l'expression ci-dessus devient :

$$\begin{aligned}
 & \tilde{\phi}(X, Y) \xi - \phi(X, Y) \xi \\
 &= B(X, \nabla_Y \xi) + (\nabla_X B)(\xi, Y) + B(Y, \nabla_X \xi) + B(Z_\xi, \nabla_X(\pi_* Y)) + B(X, B(\xi, Y)) \\
 & - B(Y, \nabla_X \xi) - (\nabla_Y B)(\xi, X) - B(X, \nabla_Y \xi) - B(Z_\xi, \nabla_Y(\pi_* X)) - B(Y, B(\xi, X)) \\
 & - \nabla_{[X, Y]} \xi - B([X, Y], \xi) + \nabla_{[X, Y]} \xi \\
 &= (\nabla_X B)(\xi, Y) + B(Z_\xi, \nabla_X(\pi_* Y)) - \nabla_Y(\pi_* X) - \pi_*[X, Y] + B(X, B(\xi, Y)) \\
 & - (\nabla_Y B)(\xi, X) - B(Y, B(\xi, X))
 \end{aligned}$$

Et puisque nous avons $\nabla_X(\pi_* Y) - \nabla_Y(\pi_* X) - \pi_*[X, Y] = 0$ (symétrie de la connexion de Chern généralisée, cf. formule (2.13) page 35), nous avons :

$$\begin{aligned}
 & \tilde{\phi}(X, Y) \xi - \phi(X, Y) \xi \\
 &= (\nabla_X B)(\xi, Y) + B(X, B(\xi, Y)) - (\nabla_Y B)(\xi, X) - B(Y, B(\xi, X))
 \end{aligned} \tag{3.24}$$

A présent nous montrons les formules suivantes (3.25) et (3.26) qui nous permettent de calculer la somme apparaissant dans (3.24) :

$$\begin{aligned}
 (\nabla_X B)(\xi, Y) &= \hat{H}_u(Y, X) \xi + H_u(\xi, X)(\pi_* Y) - g(\pi_* Y, \xi) \nabla^2 u(X) \\
 &+ 2A(\theta(X), \nabla u, \pi_* Y) \xi + 2A(\theta(X), \nabla u, \xi)(\pi_* Y) \\
 &- 2A(\theta(X), \pi_* Y, \xi) \nabla u
 \end{aligned} \tag{3.25}$$

et

$$\begin{aligned}
 B(X, B(\xi, Y)) &= du(X) du(Y) \xi + du(X) du(\xi)(\pi_* Y) \\
 &+ 2du(Y) du(\xi)(\pi_* X) - g(\pi_* Y, \xi) g(\nabla u, \nabla u)(\pi_* X) \\
 &- du(Y) g(\pi_* X, \xi) \nabla u - du(\xi) g(\pi_* X, \pi_* Y) \nabla u
 \end{aligned} \tag{3.26}$$

ou de manière équivalente les formules suivantes (utiles lorsque nous souhaitons passer aux $(2, 2; 0)$ -tenseurs) :

$$\begin{aligned}
 g(\nabla_X B(\xi, Y), \eta) &= \hat{H}_u(Y, X) g(\xi, \eta) + H_u(\xi, X) g(\eta, \pi_* Y) \\
 &- H_u(\eta, X) g(\xi, \pi_* Y) + 2A(\theta(X), \nabla u, \pi_* Y) g(\xi, \eta) \\
 &+ 2A(\theta(X), \nabla u, \xi) g(\eta, \pi_* Y) - 2A(\theta(X), \pi_* Y, \xi) du(\eta)
 \end{aligned} \tag{3.27}$$

et

$$\begin{aligned}
 g(B(X, B(\xi, Y)), \eta) &= [du(X) du(Y) g(\xi, \eta) - g(\pi_* X, \pi_* Y) du(\xi) du(\eta)] \\
 &+ du(X) du(\xi) g(\eta, \pi_* Y) + 2g(\eta, \pi_* X) du(Y) du(\xi) \\
 &- g(\xi, \pi_* X) du(Y) du(\eta) - g(\eta, \pi_* X) g(\xi, \pi_* Y) g(\nabla u, \nabla u)
 \end{aligned} \tag{3.28}$$

Commençons par démontrer la formule (3.25). Pour des raisons pratiques, nous introduisons les notations suivantes α , β et γ :

$$(\nabla_X B)(\xi, Y) = \alpha - \beta - \gamma, \quad \begin{cases} \alpha = \nabla_X (B(\xi, Y)) \\ \beta = B(Z_\xi, \nabla_X(\pi_* Y)) \\ \gamma = B(Y, \nabla_X \xi) \end{cases}$$

Pour cela, nous utilisons l'expression de $\hat{B}(X, Y)$ donnée par (3.7) :

$$\hat{B}(X, Y) = B(X, \pi_* Y) = du(X)\pi_* Y + du(Y)\pi_* X - g(\pi_* X, \pi_* Y)\nabla u \quad (3.29)$$

Commençons par calculer α :

$$\begin{aligned} \alpha &= \nabla_X (B(\xi, Y)) & (3.30) \\ &= \nabla_X (du(Y)\xi) + \nabla_X (du(\xi)(\pi_* Y)) - \nabla_X (g(\pi_* Y, \xi)\nabla u) \\ &= \nabla_X (du(Y))\xi + du(Y)\nabla_X \xi + \nabla_X (du(\xi))\pi_* Y + du(\xi)\nabla_X (\pi_* Y) \\ &\quad - [2A(\theta(X), \pi_* Y, \xi) + g(\nabla_X(\pi_* Y), \xi) + g(\pi_* Y, \nabla_X \xi)]\nabla u - g(\pi_* Y, \xi)\nabla^2 u(X) \end{aligned}$$

Calculons $\nabla_X (du(Y))$

$$\begin{aligned} \nabla_X (du(Y)) &= \nabla_X (g(\nabla u, \pi_* Y)) & (3.31) \\ &= 2A(\theta(X), \nabla u, \pi_* Y) + g(\nabla_X(\nabla u), \pi_* Y) + g(\nabla u, \nabla_X(\pi_* Y)) \\ &= 2A(\theta(X), \nabla u, \pi_* Y) + g(\nabla^2 u(X), \pi_* Y) + g(\nabla u, \nabla_X(\pi_* Y)) \\ &= 2A(\theta(X), \nabla u, \pi_* Y) + \hat{H}_u(Y, X) + g(\nabla u, \nabla_X(\pi_* Y)) \end{aligned}$$

d'où :

$$\nabla_X (du(Y))\xi = 2A(\theta(X), \nabla u, \pi_* Y)\xi + \hat{H}_u(Y, X)\xi + g(\nabla u, \nabla_X(\pi_* Y))\xi \quad (3.32)$$

On rappelle ici que nous restons cohérents avec la notation $\hat{H}_u(Y, X) = H_u(\pi_* Y, X)$.

Par un même type de calcul nous avons aussi :

$$\nabla_X (du(\xi))\pi_* Y = 2A(\theta(X), \nabla u, \xi)\pi_* Y + H_u(\xi, X)\pi_* Y + g(\nabla u, \nabla_X \xi)\pi_* Y \quad (3.33)$$

En utilisant (3.32) et (3.33), l'expression (3.30) devient :

$$\begin{aligned} \alpha &= 2A(\theta(X), \nabla u, \pi_* Y)\xi + \hat{H}_u(Y, X)\xi + g(\nabla u, \nabla_X(\pi_* Y))\xi & (3.34) \\ &\quad + du(Y)\nabla_X \xi + 2A(\theta(X), \nabla u, \xi)\pi_* Y + H_u(\xi, X)\pi_* Y \\ &\quad + g(\nabla u, \nabla_X \xi)\pi_* Y + du(\xi)\nabla_X(\pi_* Y) - [2A(\theta(X), \pi_* Y, \xi) \\ &\quad + g(\nabla_X(\pi_* Y), \xi) + g(\pi_* Y, \nabla_X \xi)]\nabla u - g(\pi_* Y, \xi)\nabla^2 u(X) \end{aligned}$$

De manière similaire, nous calculons β et γ . Toujours en utilisant (3.7) nous obtenons :

$$\begin{aligned}\beta &= B(\nabla_X(\pi_*Y), \xi) \\ &= du(\nabla_X(\pi_*Y))\xi + du(\xi)\nabla_X(\pi_*Y) - g(\nabla_X(\pi_*Y), \xi)\nabla u \\ &= g(\nabla u, \nabla_X(\pi_*Y))\xi + du(\xi)\nabla_X(\pi_*Y) - g(\nabla_X(\pi_*Y), \xi)\nabla u\end{aligned}\quad (3.35)$$

et

$$\begin{aligned}\gamma &= B(Y, \nabla_X\xi) \\ &= du(Y)\nabla_X\xi + g(\nabla u, \nabla_X\xi)\pi_*Y - g(\pi_*Y, \nabla_X\xi)\nabla u\end{aligned}\quad (3.36)$$

En utilisant (3.34), (3.35) et (3.36), nous obtenons :

$$\begin{aligned}(\nabla_X B)(\xi, Y) &= \alpha - \beta - \gamma \\ &= 2A(\theta(X), \nabla u, \pi_*Y)\xi + \hat{H}_u(Y, X)\xi + g(\nabla u, \nabla_X(\pi_*Y))\xi \\ &\quad + du(Y)\nabla_X\xi + 2A(\theta(X), \nabla u, \xi)\pi_*Y + H_u(\xi, X)\pi_*Y \\ &\quad + g(\nabla u, \nabla_X\xi)\pi_*Y + du(\xi)\nabla_X(\pi_*Y) - [2A(\theta(X), \pi_*Y, \xi) \\ &\quad + g(\nabla_X(\pi_*Y), \xi) + g(\pi_*Y, \nabla_X\xi)]\nabla u - g(\pi_*Y, \xi)\nabla^2 u(X) \\ &\quad - g(\nabla u, \nabla_X(\pi_*Y))\xi - du(\xi)\nabla_X(\pi_*Y) + g(\nabla_X(\pi_*Y), \xi)\nabla u \\ &\quad - du(Y)\nabla_X\xi - g(\nabla u, \nabla_X\xi)\pi_*Y + g(\pi_*Y, \nabla_X\xi)\nabla u\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}(\nabla_X B)(\xi, Y) &= \hat{H}_u(Y, X)\xi + H_u(\xi, X)\pi_*Y - g(\pi_*Y, \xi)\nabla^2 u(X) \\ &\quad + 2A(\theta(X), \nabla u, \pi_*Y)\xi + 2A(\theta(X), \nabla u, \xi)\pi_*Y \\ &\quad - 2A(\theta(X), \pi_*Y, \xi)\nabla u\end{aligned}$$

l'équation ci-dessus n'est rien d'autre que la formule (3.25) que nous voulions démontrer. Nous montons maintenant la formule (3.26). Toujours en utilisant (3.7) nous avons :

$$\begin{aligned}B(X, B(\xi, Y)) & \\ &= du(X)B(\xi, Y) + du(B(\xi, Y))\pi_*X - g(X, B(\xi, Y))\nabla u \\ &= du(X)B(\xi, Y) + g(\nabla u, B(\xi, Y))\pi_*X - g(\pi_*X, B(\xi, Y))\nabla u\end{aligned}\quad (3.37)$$

En utilisant encore une fois (3.7) :

$$\begin{aligned}
B(X, B(\xi, Y)) &= du(X) [du(Y)\xi + du(\xi)\pi_*Y - g(\pi_*Y, \xi)\nabla u] \\
&\quad + g(\nabla u, [du(Y)\xi + du(\xi)\pi_*Y - g(\pi_*Y, \xi)\nabla u]) \pi_*X \\
&\quad - g(\pi_*X, [du(Y)\xi + du(\xi)\pi_*Y - g(\pi_*Y, \xi)\nabla u]) \nabla u \\
&= du(X)du(Y)\xi + du(X)du(\xi)\pi_*Y - du(X)g(\pi_*Y, \xi)\nabla u \\
&\quad + du(Y)g(\nabla u, \xi) \pi_*X + du(\xi)g(\nabla u, \pi_*Y) \pi_*X \\
&\quad - g(\pi_*Y, \xi)g(\nabla u, \nabla u) \pi_*X - du(Y)g(\pi_*X, \xi)\nabla u \\
&\quad - du(\xi)g(\pi_*X, \pi_*Y)\nabla u + g(\pi_*Y, \xi)g(\pi_*X, \nabla u)\nabla u
\end{aligned}$$

d'où la formule (3.26) recherchée :

$$\begin{aligned}
B(X, B(\xi, Y)) &= du(X)du(Y)\xi + du(X)du(\xi)\pi_*Y + 2du(Y)du(\xi)\pi_*X \\
&\quad - g(\pi_*Y, \xi)g(\nabla u, \nabla u) \pi_*X - du(Y)g(\pi_*X, \xi)\nabla u \\
&\quad - du(\xi)g(\pi_*X, \pi_*Y)\nabla u
\end{aligned}$$

A présent nous calculons (3.24) :

$$\begin{aligned}
&\tilde{\phi}(X, Y)\xi - \phi(X, Y)\xi \\
&= (\nabla_X B)(\xi, Y) + B(X, B(\xi, Y)) - (\nabla_Y B)(\xi, X) - B(Y, B(\xi, X))
\end{aligned}$$

En remplaçant $(\nabla_X B)(\xi, Y)$ et $(\nabla_Y B)(\xi, X)$ par leurs formules en utilisant (3.25), et en remplaçant $B(X, B(\xi, Y))$ et $B(Y, B(\xi, X))$ par leurs formules en utilisant (3.26) nous obtenons :

$$\begin{aligned}
&\tilde{\phi}(X, Y)\xi - \phi(X, Y)\xi \\
&= \hat{H}_u(Y, X)\xi + H_u(\xi, X)\pi_*Y - g(\pi_*Y, \xi)\nabla^2 u(X) + 2A(\theta(X), \nabla u, \pi_*Y)\xi \\
&\quad + 2A(\theta(X), \nabla u, \xi)\pi_*Y - 2A(\theta(X), \pi_*Y, \xi)\nabla u + du(X)du(Y)\xi \\
&\quad + du(X)du(\xi)\pi_*Y + 2du(Y)du(\xi)\pi_*X - g(\pi_*Y, \xi)g(\nabla u, \nabla u)\pi_*X \\
&\quad - du(Y)g(\pi_*X, \xi)\nabla u - du(\xi)g(\pi_*X, \pi_*Y)\nabla u - \hat{H}_u(X, Y)\xi \\
&\quad - H_u(\xi, Y)\pi_*X + g(\pi_*X, \xi)\nabla^2 u(Y) - 2A(\theta(Y), \nabla u, \pi_*X)\xi \\
&\quad - 2A(\theta(Y), \nabla u, \xi)\pi_*X + 2A(\theta(Y), \pi_*X, \xi)\nabla u - du(Y)du(X)\xi \\
&\quad - du(Y)du(\xi)\pi_*X - 2du(X)du(\xi)\pi_*Y + g(\pi_*X, \xi)g(\nabla u, \nabla u)\pi_*Y \\
&\quad + du(X)g(\pi_*Y, \xi)\nabla u + du(\xi)g(\pi_*Y, \pi_*X)\nabla u
\end{aligned}$$

Nous commençons par annuler les sommes les plus visibles afin d'alléger l'expression ci-dessus :

$$\begin{aligned}
 \tilde{\phi}(X, Y)\xi - \phi(X, Y)\xi &= \hat{H}_u(Y, X)\xi + H_u(\xi, X)\pi_*Y - g(\pi_*Y, \xi)\nabla^2u(X) \\
 &+ 2A(\theta(X), \nabla u, \pi_*Y)\xi + 2A(\theta(X), \nabla u, \xi)\pi_*Y \\
 &- 2A(\theta(X), \pi_*Y, \xi)\nabla u - du(X)du(\xi)\pi_*Y \\
 &+ du(Y)du(\xi)\pi_*X - g(\pi_*Y, \xi)g(\nabla u, \nabla u)\pi_*X \\
 &- du(Y)g(\pi_*X, \xi)\nabla u - \hat{H}_u(X, Y)\xi - H_u(\xi, Y)\pi_*X \\
 &+ g(\pi_*X, \xi)\nabla^2u(Y) - 2A(\theta(Y), \nabla u, \pi_*X)\xi \\
 &- 2A(\theta(Y), \nabla u, \xi)\pi_*X + 2A(\theta(Y), \pi_*X, \xi)\nabla u \\
 &+ g(\pi_*X, \xi)g(\nabla u, \nabla u)\pi_*Y + du(X)g(\pi_*Y, \xi)\nabla u
 \end{aligned}$$

Ensuite, nous utilisons (2.41) que nous rappelons

$$\hat{H}_u(Y, X) - \hat{H}_u(X, Y) = 2[A(\theta(Y), \nabla u, \pi_*X) - A(\theta(X), \nabla u, \pi_*Y)]$$

pour avoir une simplification supplémentaire :

$$\begin{aligned}
 \tilde{\phi}(X, Y)\xi - \phi(X, Y)\xi &= H_u(\xi, X)\pi_*Y - g(\pi_*Y, \xi)\nabla^2u(X) \quad (3.38) \\
 &+ 2A(\theta(X), \nabla u, \xi)\pi_*Y - 2A(\theta(X), \pi_*Y, \xi)\nabla u \\
 &- du(X)du(\xi)\pi_*Y + du(Y)du(\xi)\pi_*X \\
 &- g(\pi_*Y, \xi)g(\nabla u, \nabla u)\pi_*X - du(Y)g(\pi_*X, \xi)\nabla u \\
 &- H_u(\xi, Y)\pi_*X + g(\pi_*X, \xi)\nabla^2u(Y) \\
 &- 2A(\theta(Y), \nabla u, \xi)\pi_*X + 2A(\theta(Y), \pi_*X, \xi)\nabla u \\
 &+ g(\pi_*X, \xi)g(\nabla u, \nabla u)\pi_*Y + du(X)g(\pi_*Y, \xi)\nabla u
 \end{aligned}$$

Nous passons au $(2, 2; 0)$ -tenseur Φ introduit en (2.54), $\Phi(\xi, \eta, X, Y) = g(\phi(X, Y)\xi, \eta)$, pour écrire :

$$\begin{aligned}
 g\left(\tilde{\phi}(X, Y)\xi - \phi(X, Y)\xi, \eta\right) &= g(\tilde{\phi}(X, Y)\xi, \eta) - g(\phi(X, Y)\xi, \eta) \\
 &= \exp(-2u)\tilde{g}\left(\tilde{\phi}(X, Y)\xi, \eta\right) - g(\phi(X, Y)\xi, \eta) \\
 &= \exp(-2u)\tilde{\Phi}(\xi, \eta, X, Y) - \Phi(\xi, \eta, X, Y)
 \end{aligned}$$

D'où :

$$\tilde{\Phi}(\xi, \eta, X, Y) = \exp(2u)\left[\Phi(\xi, \eta, X, Y) + g\left(\tilde{\phi}(X, Y)\xi, \eta\right) - g(\phi(X, Y)\xi, \eta)\right] \quad (3.39)$$

Nous utilisons (3.38) pour calculer le terme $g(\tilde{\phi}(X, Y)\xi, \eta) - g(\phi(X, Y)\xi, \eta)$ dans (3.39) :

$$\begin{aligned}
& g(\tilde{\phi}(X, Y)\xi, \eta) - g(\phi(X, Y)\xi, \eta) \quad (3.40) \\
& = H_u(\xi, X)g(\eta, \pi_*Y) - g(\pi_*Y, \xi)g(\nabla^2u(X), \eta) + 2A(\theta(X), \nabla u, \xi)g(\eta, \pi_*Y) \\
& - 2A(\theta(X), \pi_*Y, \xi)g(\nabla u, \eta) - du(X)du(\xi)g(\eta, \pi_*Y) + du(Y)du(\xi)g(\eta, \pi_*X) \\
& - g(\pi_*Y, \xi)g(\nabla u, \nabla u)g(\eta, \pi_*X) - du(Y)g(\pi_*X, \xi)g(\nabla u, \eta) - H_u(\xi, Y)g(\eta, \pi_*X) \\
& + g(\pi_*X, \xi)g(\nabla^2u(Y), \eta) - 2A(\theta(Y), \nabla u, \xi)g(\eta, \pi_*X) \\
& + 2A(\theta(Y), \pi_*X, \xi)g(\nabla u, \eta) + g(\pi_*X, \xi)g(\nabla u, \nabla u)g(\eta, \pi_*Y) \quad (3.41) \\
& + du(X)g(\pi_*Y, \xi)g(\nabla u, \eta)
\end{aligned}$$

c'est-à-dire :

$$\begin{aligned}
& g(\tilde{\phi}(X, Y)\xi, \eta) - g(\phi(X, Y)\xi, \eta) \quad (3.42) \\
& = H_u(\xi, X)g(\eta, \pi_*Y) - g(\pi_*Y, \xi)H_u(\eta, X) - du(X)du(\xi)g(\eta, \pi_*Y) \\
& + du(Y)du(\xi)g(\eta, \pi_*X) - g(\pi_*Y, \xi)g(\nabla u, \nabla u)g(\eta, \pi_*X) \\
& - du(Y)g(\pi_*X, \xi)du(\eta) - H_u(\xi, Y)g(\eta, \pi_*X) + g(\pi_*X, \xi)H_u(\eta, Y) \quad (3.43) \\
& + g(\pi_*X, \xi)g(\nabla u, \nabla u)g(\eta, \pi_*Y) + du(X)g(\pi_*Y, \xi)g(\nabla u, \eta) \\
& - 2A(\theta(Y), \nabla u, \xi)g(\eta, \pi_*X) + 2A(\theta(Y), \pi_*X, \xi)du(\eta) \\
& + 2A(\theta(X), \nabla u, \xi)g(\eta, \pi_*Y) - 2A(\theta(X), \pi_*Y, \xi)g(\nabla u, \eta)
\end{aligned}$$

Et en posant :

$$\begin{aligned}
b_u(\xi, X) & = H_u(\xi, X) - du(X)du(\xi) + \frac{1}{2}g(\nabla u, \nabla u)g(\xi, \pi_*X) \quad (3.44) \\
& = H_u(\xi, X) - g(\nabla u, \pi_*X)g(\nabla u, \xi) + \frac{1}{2}g(\nabla u, \nabla u)g(\xi, \pi_*X)
\end{aligned}$$

la formule (3.42) aura la forme :

$$\begin{aligned}
& g(\tilde{\phi}(X, Y)\xi, \eta) - g(\phi(X, Y)\xi, \eta) \quad (3.45) \\
& = (b_u \odot g)(\xi, \eta, X, Y) + 2A(\theta(X), \nabla u, \xi)g(\eta, \pi_*Y) \\
& - 2A(\theta(Y), \nabla u, \xi)g(\eta, \pi_*X) + [2A(\theta(Y), \pi_*X, \xi) \\
& - 2A(\theta(X), \pi_*Y, \xi)]g(\nabla u, \eta) \quad (3.46)
\end{aligned}$$

où " \odot " est le produit de Kulkarni-Nomizu généralisé défini en (2.49) :

$$(b_u \odot g)(\xi, \eta, X, Y) = \begin{vmatrix} b_u(\xi, X) & b_u(\eta, X) \\ g(\xi, \pi_*Y) & g(\eta, \pi_*Y) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} g(\xi, \pi_*X) & g(\eta, \pi_*X) \\ b_u(\xi, Y) & b_u(\eta, Y) \end{vmatrix}$$

Nous préférons faire un raisonnement dans le chemin inverse pour vérifier l'écriture (3.45), c'est-à-dire que nous calculons le produit $(b_u \odot g)(\xi, \eta, X, Y)$:

$$\begin{aligned}
& (b_u \odot g)(\xi, \eta, X, Y) \\
&= b_u(\xi, X)g(\eta, \pi_*Y) + b_u(\eta, Y)g(\xi, \pi_*X) \\
&\quad - b_u(\eta, X)g(\xi, \pi_*Y) - b_u(\xi, Y)g(\eta, \pi_*X) \\
&= \left[H_u(\xi, X) - du(X)du(\xi) + \frac{1}{2}g(\nabla u, \nabla u)g(\xi, \pi_*X) \right] g(\eta, \pi_*Y) \\
&\quad + \left[H_u(\eta, Y) - du(Y)du(\eta) + \frac{1}{2}g(\nabla u, \nabla u)g(\eta, \pi_*Y) \right] g(\xi, \pi_*X) \\
&\quad - \left[H_u(\eta, X) - du(X)du(\eta) + \frac{1}{2}g(\nabla u, \nabla u)g(\eta, \pi_*X) \right] g(\xi, \pi_*Y) \\
&\quad - \left[H_u(\xi, Y) - du(Y)du(\xi) + \frac{1}{2}g(\nabla u, \nabla u)g(\xi, \pi_*Y) \right] g(\eta, \pi_*X)
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
(b_u \odot g)(\xi, \eta, X, Y) &= H_u(\xi, X)g(\eta, \pi_*Y) - du(X)du(\xi)g(\eta, \pi_*Y) \\
&\quad + \frac{1}{2}g(\nabla u, \nabla u)g(\xi, \pi_*X)g(\eta, \pi_*Y) + H_u(\eta, Y)g(\xi, \pi_*X) \\
&\quad - du(Y)du(\eta)g(\xi, \pi_*X) + \frac{1}{2}g(\nabla u, \nabla u)g(\eta, \pi_*Y)g(\xi, \pi_*X) \\
&\quad - H_u(\eta, X)g(\xi, \pi_*Y) + du(X)du(\eta)g(\xi, \pi_*Y) \\
&\quad - \frac{1}{2}g(\nabla u, \nabla u)g(\eta, \pi_*X)g(\xi, \pi_*Y) - H_u(\xi, Y)g(\eta, \pi_*X) \\
&\quad + du(Y)du(\xi)g(\eta, \pi_*X) - \frac{1}{2}g(\nabla u, \nabla u)g(\xi, \pi_*Y)g(\eta, \pi_*X)
\end{aligned}$$

nous avons

$$\begin{aligned}
& (b_u \odot g)(\xi, \eta, X, Y) \\
&= H_u(\xi, X)g(\eta, \pi_*Y) - du(X)du(\xi)g(\eta, \pi_*Y) + g(\nabla u, \nabla u)g(\xi, \pi_*X)g(\eta, \pi_*Y) \\
&\quad + H_u(\eta, Y)g(\xi, \pi_*X) - du(Y)du(\eta)g(\xi, \pi_*X) \\
&\quad - H_u(\eta, X)g(\xi, \pi_*Y) + du(X)du(\eta)g(\xi, \pi_*Y) - g(\nabla u, \nabla u)g(\eta, \pi_*X)g(\xi, \pi_*Y) \\
&\quad - H_u(\xi, Y)g(\eta, \pi_*X) + du(Y)du(\xi)g(\eta, \pi_*X)
\end{aligned}$$

Nous remarquerons que les dix termes composant $(b_u \odot g)(\xi, \eta, X, Y)$ dans la formule ci-dessus s'identifient aux dix premiers termes de la formule (3.42), ceci achève alors la vérification de l'écriture (3.45).

En reprenant la formule (3.39), nous obtenons en incorporant la formule (3.45) :

$$\begin{aligned}
\tilde{\Phi}(\xi, \eta, X, Y) &= \exp(2u) \{ \Phi(\xi, \eta, X, Y) + (b_u \odot g)(\xi, \eta, X, Y) \\
&\quad + \Psi_u(\xi, \eta, X, Y) \} \quad (3.47)
\end{aligned}$$

où Ψ_u est donnée par $\Psi_u(\xi, \eta, X, Y) = \Psi(\nabla u, \xi, \eta, X, Y)$ défini en (3.18) ou (3.19) :

$$\begin{aligned} \Psi_u(\xi, \eta, X, Y) &= 2A(\theta(X), \nabla u, \xi)g(\eta, \pi_*Y) - 2A(\theta(Y), \nabla u, \xi)g(\eta, \pi_*X) \\ &\quad + 2[A(\theta(Y), \pi_*X, \xi) - A(\theta(X), \pi_*Y, \xi)]g(\nabla u, \eta) \end{aligned}$$

Etape 2 Nous vérifions que Ψ_u est un hv -tenseur alors que $(b_u \odot g)$ comporte une composante de type HV et une composante de type HH . Commençons par Ψ_u . A l'instar de la hv -courbure, ce tenseur purement finslerien ($\Psi_u = 0$ si F est riemannien) est du type HV , nous pouvons facilement voir d'après (3.19) que :

$$\Psi_u(\xi, \eta, X^H, Y^H) = \Psi_u(\xi, \eta, X^V, Y^V) = 0 \quad (3.48)$$

Nous pouvons écrire Ψ_u sous forme de

$$\Psi_u(\xi, \eta, X, Y) = \Psi_u^{HV}(\xi, \eta, X, Y) + \Psi_u^{VH}(\xi, \eta, X, Y) \quad (3.49)$$

où

$$\begin{cases} \Psi_u^{HV}(\xi, \eta, X, Y) = 2A(\theta(Y), \pi_*X, \xi)g(\nabla u, \eta) - 2A(\theta(Y), \nabla u, \xi)g(\eta, \pi_*X) \\ \Psi_u^{VH}(\xi, \eta, X, Y) = 2A(\theta(X), \nabla u, \xi)g(\eta, \pi_*Y) - 2A(\theta(X), \pi_*Y, \xi)g(\nabla u, \eta) \end{cases} \quad (3.50)$$

De la même manière que pour la hv -courbure de Minkowski, Ψ_u possède une propriété semblable à (2.47) :

$$\Psi_u^{HV}(\xi, \eta, X, Y) = -\Psi_u^{VH}(\xi, \eta, Y, X)$$

Nous vérifions maintenant que $(b_u \odot g)$ possède une composante principale de type HH et possède une composante "résiduelle" de type HV . Cette vérification est rapide en utilisant la décomposition (2.42), l'expression de b_u (3.44) peut se mettre sous la forme de

$$\begin{aligned} b_u(\xi, X) &= b_u^V(\xi, X) + b_u^H(\xi, X) \\ &= H_u^V(\xi, X) + H_u^H(\xi, X) - du(X)du(\xi) + \frac{1}{2}g(\nabla u, \nabla u)g(\xi, \pi_*X) \\ &= H_u^V(\xi, X) + b_u^H(\xi, X) \end{aligned}$$

$(b_u \odot g)$ possède alors la forme :

$$\begin{aligned} (b_u \odot g)(\xi, \eta, X, Y) &= (b_u \odot g)^{HV}(\xi, \eta, X, Y) + (b_u \odot g)^{HH}(\xi, \eta, X, Y) \quad (3.51) \\ &= (H_u^V \odot g)(\xi, \eta, X, Y) + (b_u^H \odot g)(\xi, \eta, X, Y) \end{aligned}$$

Les composantes $(b_u \odot g)^{HV}$ et $(b_u \odot g)^{HH}$ n'ont pas la même envergure, c'est la hh -composante qui contient le plus de termes significatifs de $(b_u \odot g)$, la hv -composante joue un peu le rôle de composante résiduelle reliée à la composante verticale du Hessien.

Etape 3 Nous déduisons les expressions des transformées conformes de R et de P . Reprenons l'expression (3.47) démontrée dans l'étape 1 :

$$\begin{aligned}\tilde{\Phi}(\xi, \eta, X, Y) &= \exp(2u) \{ \Phi(\xi, \eta, X, Y) + (b_u \odot g)(\xi, \eta, X, Y) \\ &\quad + \Psi_u(\xi, \eta, X, Y) \}\end{aligned}$$

En utilisant l'expression (2.55), nous obtenons :

$$\begin{aligned}\tilde{R}(\xi, \eta, X, Y) + \tilde{P}(\xi, \eta, X, Y) & \tag{3.52} \\ &= \exp(2u) \{ R(\xi, \eta, X, Y) + P(\xi, \eta, X, Y) + (b_u \odot g)(\xi, \eta, X, Y) \\ &\quad + \Psi_u(\xi, \eta, X, Y) \}\end{aligned}$$

Les natures (au sens HV et HH) du tenseur Ψ_u et de $(b_u \odot g)$, discutées à l'étape 2, nous permettent d'effectuer les identifications suivantes au sein de l'expression (3.52) :

$$\begin{cases} \tilde{R}(\xi, \eta, X, Y) = \exp(2u) \{ R(\xi, \eta, X, Y) + (b_u^H \odot g)(\xi, \eta, X, Y) \} \\ \tilde{P}(\xi, \eta, X, Y) = \exp(2u) \{ P(\xi, \eta, X, Y) + \Psi_u(\xi, \eta, X, Y) + (b_u^V \odot g) \} \end{cases}$$

qui correspondent aux formules de transformations (3.20). Ces formules comprennent une partie qui généralise le cas riemannien et une partie non riemannienne faisant intervenir la hv -courbure de Minkowski P , le hv -tenseur Ψ_u , et la composante résiduelle $(H_u^V \odot g)$.

■

3.3 Propriétés conformes des tenseurs de Weyl et de Schouten

3.3.1 Tenseur $\varphi(\xi, X)$

Considérons une variété de Finsler Ehresmann (E, M, \mathcal{H}_0) . Nous avons défini au chapitre 2 la connexion de Chern généralisée, de plus, nous avons effectué une approche axiomatique à cette connexion et aux courbures associées. Dans le présent chapitre, nous gardons cette approche axiomatique pour la construction du tenseur de Weyl finslerien. Avant d'introduire ce tenseur, qui est pour nous l'objet géométrique principal pour l'étude des propriétés conformes de (E, M, \mathcal{H}_0) , nous commençons par énoncer quelques définitions liées principalement à la nature mixte des tenseurs considérés. Par exemple, le caractère mixte du $(2, 2; 0)$ -tenseur de courbure complète $\Phi(\xi, \eta, X, Y)$ associé à la connexion de Chern généralisée, exige que l'on introduise des contractions particulières lorsque nous souhaitons passer au tenseur $\varphi(\xi, X)$, qui sera l'avatar du tenseur de Ricci de la géométrie riemannienne.

Définition 52 La contraction $C(\Phi)$ du tenseur de courbure totale $\Phi(\xi, \eta, X, Y)$ est définie comme :

$$\begin{aligned} \varphi(\xi, X) &= C(\Phi)(\xi, X) \\ &= C^H(\Phi)(\xi, X) + C^V(\Phi)(\xi, X) \\ &= \Phi(e_a, \xi, X, \hat{e}_a) + \Phi(e_a, \xi, X, \hat{e}_{a+n}) \\ &= g(R(X, \hat{e}_a)e_a, \xi) + g(P(X, \hat{e}_{a+n})e_a, \xi) \end{aligned} \quad (3.53)$$

ici les notations C^H et C^V sont utilisées pour désigner respectivement les contractions dans la direction horizontale et verticale, et $\{e_a\}$ est la base g -orthonormée spéciale de π^*TM définie en (1.10) et (1.11), quand à $\{\hat{e}_a\}$ et $\{\hat{e}_{n+a}\}$, ce sont des bases orthogonales de \mathcal{H} et de \mathcal{V} , respectivement introduites en (1.23) et (1.24).

En utilisant π_* (2.3) et θ (2.8), nous avons :

$$\begin{cases} \pi_*(\hat{e}_a) = e_a \\ \theta(\hat{e}_{n+a}) = e_a \end{cases} \quad (3.54)$$

En effet, puisque \hat{e}_a et \hat{e}_{n+a} ainsi que les e_a s'écrivent avec les mêmes fonctions λ_a^i (voir le tableau (1.24) en page 17), nous obtenons :

$$\begin{cases} \pi_*(\hat{e}_a) = \lambda_a^i \pi_*\left(\frac{\delta}{\delta x^i}\right) = \lambda_a^i \frac{\partial}{\partial x^i} = e_a \\ \theta(\hat{e}_{n+a}) = \lambda_a^i \theta\left(F \frac{\partial}{\partial y^i}\right) = \lambda_a^i \frac{\partial}{\partial x^i} = e_a \end{cases}$$

Nous pouvons remarquer que la contraction dans la direction horizontale généralise le tenseur de Ricci en géométrie riemannienne, nous pouvons noter

$$C^H(\Phi)(\xi, X) = g(R(X, \hat{e}_a)e_a, \xi) = R_{ic}(\xi, X)$$

De même, nous pouvons noter $C^V(\Phi)(\xi, X)$ par $\bar{P}(\xi, X)$ tout en signalant que cette notion n'a pas d'équivalent dans la littérature finslerienne. Nous pouvons alors écrire :

$$\varphi(\xi, X) = R_{ic}(\xi, X) + \bar{P}(\xi, X) \quad (3.55)$$

En utilisant les formules de transformations (1.11), (1.24) et les formules (1.12), nous pouvons écrire $\varphi(\xi, X)$ en utilisant les composantes (en coordonnées naturelles) R_{kli}^i et P_{kli}^i de la hh -courbure et de la courbure de Minkowski :

$$\begin{aligned} \varphi(\xi, X) &= g^{ij} \cdot g\left(R(X, \frac{\delta}{\delta x^i}) \frac{\partial}{\partial x^j}, \xi\right) + g^{ij} \cdot g\left(P(X, F \frac{\partial}{\partial y^i}) \frac{\partial}{\partial x^j}, \xi\right) \\ &= g^{ij} R\left(\frac{\partial}{\partial x^j}, \xi, X, \frac{\delta}{\delta x^i}\right) + g^{ij} P\left(\frac{\partial}{\partial x^j}, \xi, X, F \frac{\partial}{\partial y^i}\right) \\ &= g^{ij} R_{jkli} \xi^k X^l + g^{ij} P_{jkli} \xi^k X^l \\ &= R_{kli}^i \xi^k X^l + P_{kli}^i \xi^k X^l \end{aligned}$$

3.3.2 Tenseur de Weyl et de Schouten

Nous avons à présent tous les ingrédients pour pouvoir introduire les tenseurs de Weyl W et de Schouten S .

Définition 53 *Considérons une variété de Finsler-Ehresmann (M, F, \mathcal{H}_0) de dimension $n \geq 3$, et considérons le $(2, 2; 0)$ -tenseur de courbure complète $\Phi(\xi, \eta, X, Y)$ associé à la connexion de Chern généralisée, alors, pour $\xi, \eta \in \Gamma(\pi^*TM)$ et $X, Y \in \Gamma(T\mathfrak{M})$, nous définissons le tenseur de Weyl comme :*

$$W(\xi, \eta, X, Y) = \Phi(\xi, \eta, X, Y) + (S \odot g)(\xi, \eta, X, Y) \quad (3.56)$$

où $(S \odot g)$ est le produit de Kulkarni-Nomizu généralisé introduit en (2.49) et S est le $(1, 1; 0)$ -tenseur de Schouten que nous définissons comme :

$$S(\xi, X) = \frac{1}{n-2} \left(\varphi(\xi, X) - \frac{\sigma}{2(n-1)} g(\xi, \pi_* X) \right) \quad (3.57)$$

et φ est le tenseur défini en (3.53), quant à σ , elle est définie à partir de φ comme :

$$\begin{aligned} \sigma = C(\varphi) &= \varphi(e_a, \hat{e}_a) + \varphi(e_a, \hat{e}_{a+n}) \\ &= \text{trace}^H \varphi + 0 \\ &= g^{ik} \left[\varphi \left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\delta}{\delta x^k} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.58)$$

Remarque 54 *Nous constatons à travers (3.53) que $\varphi(\xi, X^V) = 0$ car R est une hh-courbure et P est une hv-courbure. Ceci implique que $S(\xi, X)$ aussi ne tient compte que des contributions horizontales :*

$$S(\xi, X) = S(\xi, X^H), \quad S(\xi, X^V) = 0$$

Lemme 55 *Le tenseur de Weyl se décompose en :*

$$W = W^{HH} + W^{HV} \quad (3.59)$$

avec

$$\begin{cases} W^{HH} = R + (S \odot g) \\ W^{HV} = P \end{cases} \quad (3.60)$$

où R et P sont la hh-courbure et la courbure de Minkowski, respectivement.

Preuve. La preuve est immédiate en utilisant le fait que $S(\xi, X^V) = 0$ (remarque 54) qui montre que le produit $(S \odot g)$ est un hh -objet :

$$(S \odot g)(\xi, \eta, X^H, Y^V) = (S \odot g)(\xi, \eta, X^V, Y^H) = (S \odot g)(\xi, \eta, X^V, Y^V) = 0$$

En effet, si nous évaluons le produit $(S \odot g)$ en différents types de vecteurs, nous avons

$$\begin{aligned} (S \odot g)(\xi, \eta, X^H, Y^V) &= \begin{vmatrix} g(\xi, \pi_* X^H) & g(\eta, \pi_* X^H) \\ S(\xi, Y^V) & S(\eta, Y^V) \end{vmatrix} = 0 \\ (S \odot g)(\xi, \eta, X^V, Y^H) &= \begin{vmatrix} S(\xi, X^V) & S(\eta, X^V) \\ g(\xi, \pi_* Y^H) & g(\eta, \pi_* Y^H) \end{vmatrix} = 0 \end{aligned}$$

et il ne reste que $(S \odot g)(\xi, \eta, X^H, Y^H)$ qui n'est pas nul. Le produit $(S \odot g)$ étant un hh -objet, le tenseur de Weyl W s'écrit alors comme :

$$\begin{aligned} W &= \Phi^{HH} + (S \odot g)^{HH} + \Phi^{HV} \\ &= W^{HH} + W^{HV} \end{aligned}$$

Et puisque $\Phi^{HH} = R$ et $\Phi^{HV} = P$, l'identification entre termes de même nature donne (3.60). ■

Proposition 56 *La trace du tenseur de Weyl dans la direction horizontale donne :*

$$C^H(W)(\xi, X) = -\bar{P}(\xi, X) \quad (3.61)$$

où $\bar{P}(\xi, X) = C^V(\Phi)(\xi, X) = \Phi(e_a, \xi, X, \hat{e}_{a+n})$.

Preuve. Commençons par calculer la contraction horizontale du produit $(S \odot g)$ donné par (2.49) et en utilisant le fait que $\pi_* \hat{e}_a = e_a$ nous obtenons :

$$\begin{aligned} C^H(S \odot g)(\xi, X) &= (S \odot g)(\xi, e_a, \hat{e}_a, X) \\ &= S(\xi, \hat{e}_a)g(e_a, \pi_* X) - S(e_a, \hat{e}_a)g(\xi, \pi_* X) \\ &\quad + g(\xi, e_a)S(e_a, X) - g(e_a, e_a)S(\xi, X) \\ &= (2 - n)S(\xi, X^H) - g(\xi, \pi_* X)\text{trace}^H S \end{aligned}$$

et comme

$$\text{trace}^H S = S(e_a, \hat{e}_a) = \frac{\sigma}{2(n-1)}$$

$C^H(S \odot g)(\xi, X)$ devient :

$$C^H(S \odot g)(\xi, X) = (2 - n)S(\xi, X^H) - g(\xi, \pi_* X)\frac{\sigma}{2(n-1)}$$

et $C^H(W)(\xi, X)$ s'écrit comme :

$$\begin{aligned} C^H(W)(\xi, X) &= W(\xi, e_a, \hat{e}_a, X) \\ &= C^H(\Phi)(\xi, X) + C^H(S \odot g)(\xi, X) \\ &= R_{ic}(\xi, X) - (n-2)S(\xi, X^H) - g(\xi, \pi_* X) \frac{\sigma}{2(n-1)} \end{aligned} \quad (3.62)$$

Pour calculer $W(\xi, e_a, \hat{e}_a, X)$, nous avons besoin des composantes $W(e_b, e_a, \hat{e}_a, \hat{e}_c)$ et $W(e_b, e_a, \hat{e}_a, \hat{e}_{n+c})$, en effet nous avons :

$$\begin{aligned} C^H(W)(\xi, X) &= W(\xi^b e_b, e_a, \hat{e}_a, X^c \hat{e}_c + X'^c \hat{e}_{n+c}) \\ &= \xi^b X^c W(e_b, e_a, \hat{e}_a, \hat{e}_c) + \xi^b X'^c W(e_b, e_a, \hat{e}_a, \hat{e}_{n+c}) \end{aligned} \quad (3.63)$$

Nous commençons par calculer $W(e_b, e_a, \hat{e}_a, \hat{e}_c)$:

$$\begin{aligned} W(e_b, e_a, \hat{e}_a, \hat{e}_c) &= C^H(W)(e_b, \hat{e}_c) \\ &= R_{ic}(e_b, \hat{e}_c) - (n-2)S(e_b, \hat{e}_c) - g(e_b, e_c) \frac{\sigma}{2(n-1)} \\ &= R_{ic}(e_b, \hat{e}_c) - (n-2)S(e_b, \hat{e}_c) - \frac{g_{bc}\sigma}{2(n-1)} \\ &= R_{ic}(e_b, \hat{e}_c) - (n-2) \frac{1}{n-2} \left[\varphi(e_b, \hat{e}_c) - \frac{g_{bc}\sigma}{2(n-1)} \right] - \frac{g_{bc}\sigma}{2(n-1)} \\ &= R_{ic}(e_b, \hat{e}_c) - \left[R_{ic}(e_b, \hat{e}_c) + \bar{P}(e_b, \hat{e}_c) - \frac{g_{bc}\sigma}{2(n-1)} \right] - \frac{g_{bc}\sigma}{2(n-1)} \\ &= -\bar{P}(e_b, \hat{e}_c) \end{aligned} \quad (3.64)$$

Ensuite, nous calculons $W(e_b, e_a, \hat{e}_a, \hat{e}_{n+c})$, reprenons (3.62) pour $\xi = e_b$ et $X = \hat{e}_{n+c}$

$$\begin{aligned} C^H(W)(e_b, \hat{e}_{n+c}) &= W(e_b, e_a, \hat{e}_a, \hat{e}_{n+c}) \\ &= R_{ic}(e_b, \hat{e}_{n+c}) - (n-2)S(e_b, \hat{e}_{n+c}) - g(e_b, \pi_* \hat{e}_{n+c}) \frac{\sigma}{2(n-1)} \end{aligned}$$

et comme $\pi_* \hat{e}_{n+c} = 0$ et $S(\xi, X) = R_{ic}(\xi, X) = 0$ pour tout $X \in \ker \pi_*$, nous avons :

$$W(e_b, e_a, \hat{e}_a, \hat{e}_{n+c}) = 0$$

Il s'ensuit que (3.63) devient :

$$C^H(W)(\xi, X) = \xi^b X^c W(e_b, e_a, \hat{e}_a, \hat{e}_c) = -\bar{P}(e_b, \hat{e}_c) \xi^b X^c = -\bar{P}(\xi, X)$$

■

Lemme 57 *La somme des contractions suivantes de W :*

$$C(W) = C^H(W) + C^V(W)$$

est identiquement nulle.

Preuve. La preuve est immédiate après le calcul de la contraction dans la direction verticale

$$\begin{aligned} C^V(W)(\xi, X) = W(\xi, e_a, \hat{e}_{a+n}, X) &= C^V(\Phi)(\xi, X) + C^V(S \odot g)(\xi, X) \\ &= \bar{P}(\xi, X) + (S \odot g)(\xi, e_a, \hat{e}_{a+n}, X) \\ &= \bar{P}(\xi, X) \end{aligned}$$

et en utilisant la contraction dans la direction horizontale (3.61) nous obtenons

$$C(W) = -\bar{P}(\xi, X) + \bar{P}(\xi, X) = 0$$

■

Proposition 58 *Lorsque $n = 3$, les composantes du tenseur de Weyl horizontal W^{HH} défini en (3.60) sont presque toutes nulles à l'exception des composantes :*

$$\begin{cases} W(e_i, e_j, \hat{e}_j, \hat{e}_k) = -\bar{P}_{ik}, & j \neq i, k; i \neq k \\ W(e_i, e_j, \hat{e}_j, \hat{e}_i) = \frac{1}{2} [\bar{P}_{kk} - \bar{P}_{ii} - \bar{P}_{jj}], & i \neq j; k \neq i, j \end{cases} \quad (3.65)$$

où les indices répétés $i, j, k = 1, 2, 3$ dans les (3.65) ne désignent pas une sommation et la notation \bar{P}_{ij} désigne $\bar{P}(e_i, \hat{e}_j)$.

Une manière plus détaillée de décrire les formules ci-dessus c'est d'écrire les 6 composantes (différentes) non nulles (3.65) comme :

$$\begin{cases} W(e_1, e_3, \hat{e}_3, \hat{e}_2) = -\bar{P}_{12} \\ W(e_1, e_2, \hat{e}_2, \hat{e}_3) = -\bar{P}_{13} \\ W(e_2, e_1, \hat{e}_1, \hat{e}_3) = -\bar{P}_{23} \end{cases}$$

et :

$$\begin{cases} W(e_1, e_2, \hat{e}_2, \hat{e}_1) = \frac{1}{2} [\bar{P}_{33} - \bar{P}_{22} - \bar{P}_{11}] \\ W(e_1, e_3, \hat{e}_3, \hat{e}_1) = \frac{1}{2} [\bar{P}_{22} - \bar{P}_{11} - \bar{P}_{33}] \\ W(e_2, e_3, \hat{e}_3, \hat{e}_2) = \frac{1}{2} [\bar{P}_{11} - \bar{P}_{22} - \bar{P}_{33}] \end{cases}$$

Preuve. Soit $\{e_1, e_2, e_3\}$ une base orthonormée locale de π^*TM et $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$ une base orthonormée locale de \mathcal{H} . Rappelons que

$$W^{HH}(\xi, \eta, X, Y) = W(\xi, \eta, X^H, Y^H)$$

Si nous considérons une composante $W(e_a, e_b, \hat{e}_c, \hat{e}_d)$ pour $a, b, c, d = 1, 2, 3$, il y a au moins un indice qui apparaît deux fois. Il y a uniquement deux configurations qui peuvent se présenter pour cette répétition la première donne zéro à cause des propriétés d'antisymétrie du tenseur de Weyl :

$$W(e_a, e_a, \cdot, \cdot) = W(\cdot, \cdot, \hat{e}_b, \hat{e}_b) = 0, \quad a, b = 1, 2, 3$$

La seconde est lorsque la répétition a lieu entre les indices :

$$W(\cdot, e_a, \hat{e}_a, \cdot), \quad a = 1, 2, 3$$

ici nous avons les deux cas possibles suivants :

$$\begin{cases} W(e_b, e_a, \hat{e}_a, \hat{e}_c), & b \neq c \\ W(e_b, e_a, \hat{e}_a, \hat{e}_b) \end{cases}$$

Commençons par calculer $W(e_b, e_a, \hat{e}_a, \hat{e}_c)$ pour $b \neq c$. Pour cela, considérons l'équation (3.61) pour $\xi = e_b$ et $X = \hat{e}_c$:

$$\begin{aligned} C^H(W)(e_b, \hat{e}_c) &= W(e_b, e_1, \hat{e}_1, \hat{e}_c) + W(e_b, e_2, \hat{e}_2, \hat{e}_c) \\ &\quad + W(e_b, e_3, \hat{e}_3, \hat{e}_c) \\ &= -\bar{P}(e_b, \hat{e}_c) \end{aligned} \quad (3.66)$$

Puisque $b \neq c$, nous avons uniquement les trois possibilités suivantes :

$$\begin{aligned} (b, c) = (1, 2) : & W(e_1, e_1, \hat{e}_1, \hat{e}_2) + W(e_1, e_2, \hat{e}_2, \hat{e}_2) + W(e_1, e_3, \hat{e}_3, \hat{e}_2) = -\bar{P}(e_1, \hat{e}_2) \\ & \Rightarrow W(e_1, e_3, \hat{e}_3, \hat{e}_2) = -\bar{P}_{12} \\ (b, c) = (1, 3) : & W(e_1, e_1, \hat{e}_1, \hat{e}_3) + W(e_1, e_2, \hat{e}_2, \hat{e}_3) + W(e_1, e_3, \hat{e}_3, \hat{e}_3) = -\bar{P}(e_1, \hat{e}_3) \\ & \Rightarrow W(e_1, e_2, \hat{e}_2, \hat{e}_3) = -\bar{P}_{13} \\ (b, c) = (2, 3) : & W(e_2, e_1, \hat{e}_1, \hat{e}_3) + W(e_2, e_2, \hat{e}_2, \hat{e}_3) + W(e_2, e_3, \hat{e}_3, \hat{e}_3) = -\bar{P}(e_2, \hat{e}_3) \\ & \Rightarrow W(e_2, e_1, \hat{e}_1, \hat{e}_3) = -\bar{P}_{23} \end{aligned}$$

Nous obtenons alors le premier résultat souhaité de $W(e_i, e_j, \hat{e}_j, \hat{e}_k)$ pour $i \neq k$.

Il nous reste à calculer les composantes $W(e_b, e_a, \hat{e}_a, \hat{e}_b)$. Toujours en utilisant (3.61) nous avons :

$$\begin{aligned} b = 1 : & W(e_1, e_1, \hat{e}_1, \hat{e}_1) + W(e_1, e_2, \hat{e}_2, \hat{e}_1) + W(e_1, e_3, \hat{e}_3, \hat{e}_1) = -\bar{P}(e_1, \hat{e}_1) \\ b = 2 : & W(e_2, e_1, \hat{e}_1, \hat{e}_2) + W(e_2, e_2, \hat{e}_2, \hat{e}_2) + W(e_2, e_3, \hat{e}_3, \hat{e}_2) = -\bar{P}(e_2, \hat{e}_2) \\ b = 3 : & W(e_3, e_1, \hat{e}_1, \hat{e}_3) + W(e_3, e_2, \hat{e}_2, \hat{e}_3) + W(e_3, e_3, \hat{e}_3, \hat{e}_3) = -\bar{P}(e_3, \hat{e}_3) \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{cases} A + B = -\bar{P}_{11} \\ A + C = -\bar{P}_{22} \\ B + C = -\bar{P}_{33} \end{cases} \quad (3.67)$$

avec

$$A = W(e_1, e_2, \hat{e}_2, \hat{e}_1), \quad B = W(e_1, e_3, \hat{e}_3, \hat{e}_1), \quad C = W(e_2, e_3, \hat{e}_3, \hat{e}_2)$$

Le système (3.67) a pour solution :

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} [\bar{P}_{33} - \bar{P}_{22} - \bar{P}_{11}] \\ B &= \frac{1}{2} [\bar{P}_{22} - \bar{P}_{11} - \bar{P}_{33}] \\ C &= \frac{1}{2} [\bar{P}_{11} - \bar{P}_{22} - \bar{P}_{33}] \end{aligned}$$

D'où le deuxième résultat dans (3.65). ■

Le résultat suivant est une conséquence directe de la proposition 58.

Théorème 59 *Pour une variété de Finsler-Ehresmann (M, F, \mathcal{H}_0) de type de Berwald en dimension 3, la composante horizontale du tenseur de Weyl W^{HH} est identiquement nulle.*

Preuve. La preuve est une conséquence directe de l'équation (3.65). En effet, lorsque la variété est de type de Berwald nous avons $P = 0$, ceci implique que $\bar{P} = 0$ et (3.65) nous permet de conclure que $W^{HH} = 0$. ■

Les deux résultats ci-dessus signifient qu'en dimension 3, la courbure de Minkowski contrôle complètement la composante horizontale du tenseur de Weyl, les deux composantes du tenseur de Weyl dans (3.59) sont alors dépendantes. En particulier, lorsque la variété est de type de Berwald, nous avons une généralisation du résultat riemannien qui dit que le tenseur de Weyl est identiquement nul en dimension 3.

3.3.3 Transformations conformes de W et de S

Proposition 60 *Lors d'une transformation conforme du tenseur fondamental $g \rightarrow \tilde{g} = \exp(2u)g$, les tenseurs W et S se transforment comme :*

$$\begin{cases} W \longrightarrow \tilde{W} = \exp(2u) (W + \Psi_u + b_u^V \odot g) \\ S \longrightarrow \tilde{S} = S - b_u^H \end{cases} \quad (3.68)$$

où Ψ_u est donné par la formule (3.19) :

$$\begin{aligned} \Psi_u(\xi, \eta, X, Y) &= 2A(\theta(X), \nabla u, \xi)g(\eta, \pi_* Y) - 2A(\theta(Y), \nabla u, \xi)g(\pi_* X, \eta) \\ &\quad + [2A(\theta(Y), \pi_* X, \xi) - 2A(\theta(X), \pi_* Y, \xi)]g(\nabla u, \eta) \end{aligned}$$

avec b_u^H et b_u^V données par (3.21).

Rappelons que le tenseur de Weyl W est donné par (3.56) et que le tenseur de Schouten S est défini en (3.57).

Cette proposition est une conséquence indirecte du théorème 51, la preuve est assez courte et utilise essentiellement des formules de transformations apparaissant dans la preuve du théorème 51.

Preuve. En reprenant d'une part la formule de transformation (3.47) apparaissant dans la preuve du théorème 51 :

$$\tilde{\Phi} = \exp(2u) \{ \Phi + b_u \odot g + \Psi_u \}$$

et en remplaçant Φ par sa formule en utilisant (3.56) :

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi} = \exp(2u) \{ \Phi + b_u \odot g + \Psi_u \} &= \exp(2u) \{ W - (S - b_u) \odot g + \Psi_u \} \\ &= \exp(2u) \{ W - (S - b_u^H) \odot g + b_u^V \odot g + \Psi_u \} \end{aligned}$$

nous pouvons regrouper les termes suivant leurs natures (type HH ou HV) pour écrire :

$$\tilde{\Phi} = \exp(2u) \{ W + \Psi_u + b_u^V \odot g \} - (S - b_u^H) \odot \tilde{g} \quad (3.69)$$

Et en utilisant d'autre part la décomposition (3.56) pour $\tilde{\Phi}$ pour écrire :

$$\tilde{\Phi} = \tilde{W} - (\tilde{S} \odot \tilde{g}) \quad (3.70)$$

L'identification de (3.69) et (3.70) nous permet de montrer les formules de transformations (3.68). ■

Une conséquence directe de la proposition 60 peut être résumée dans le corollaire suivant :

Corollaire 61 *Lors d'une transformation conforme du tenseur fondamental $g \rightarrow \tilde{g} = \exp(2u)g$, les composantes W^{HH} et W^{HV} du tenseur de Weyl W se transforment comme :*

$$\begin{cases} W^{HH} \longrightarrow \tilde{W}^{HH} = \exp(2u)W^{HH} \\ W^{HV} \longrightarrow \tilde{W}^{HV} = \exp(2u) \{ W^{HV} + \Psi_u + b_u^V \odot g \} \end{cases} \quad (3.71)$$

Preuve. La preuve est immédiate si nous prenons en considération le fait que Ψ_u et $(b_u^V \odot g)$ sont des termes du type HV (revoir les arguments utilisés à l'étape 2 dans la preuve du théorème 51). ■

Remarque 62 Le $(1, 2; 1)$ -tenseur ψ_u , défini à partir de Ψ_u par

$$\Psi_u(\xi, \eta, X, Y) = g(\psi_u(X, Y)\xi, \eta)$$

est donné par :

$$\begin{aligned} \psi_u(X, Y)\xi &= 2[A(\theta(X), \nabla u, \xi)\pi_*Y - A(\theta(Y), \nabla u, \xi)\pi_*X \\ &\quad + [A(\theta(Y), \pi_*X, \xi) - A(\theta(X), \pi_*Y, \xi)]\nabla u] \end{aligned} \quad (3.72)$$

où Ψ_u est donné par (3.19). De plus, puisque ψ_u peut être noté $\psi(\nabla u)$ (cf. remarque 50) car les seules apparitions de u dans (3.72) sont sous forme de gradient, le $(2, 2; 1)$ -tenseur ψ se définit alors par :

$$\psi(\zeta, \xi, X, Y) = \psi(\zeta)(X, Y)\xi$$

et la formule (3.72) s'écrit alors comme :

$$\begin{aligned} \psi(\zeta, \xi, X, Y) &= 2[A(\theta(X), \zeta, \xi)\pi_*Y - A(\theta(Y), \zeta, \xi)\pi_*X \\ &\quad + [A(\theta(Y), \pi_*X, \xi) - A(\theta(X), \pi_*Y, \xi)]\zeta] \end{aligned} \quad (3.73)$$

Remarque 63 En utilisant (3.49) et (3.50), $\psi_u(X, Y)$ peut être mise sous la forme de :

$$\psi_u(X, Y)\xi = \psi_u^{HV}(X, Y)\xi + \psi_u^{VH}(X, Y)\xi$$

où

$$\begin{cases} \psi_u^{HV}(X, Y)\xi = 2A(\theta(Y), \pi_*X, \xi)\nabla u - 2A(\theta(Y), \nabla u, \xi)\pi_*X \\ \psi_u^{VH}(X, Y)\xi = 2A(\theta(X), \nabla u, \xi)\pi_*Y - 2A(\theta(X), \pi_*Y, \xi)\nabla u \end{cases} \quad (3.74)$$

Le lemme calculatoire suivant a pour but de mettre la transformation conforme du tenseur w sous une forme pratique directement utilisable par la suite.

Lemme 64 La transformation conforme du $(1, 2; 1)$ -tenseur w est donnée par :

$$\begin{aligned} \tilde{w}(X, Y)\xi &= w(X, Y)\xi + \psi_u(X, Y)\xi + b_u^V(\xi, X)\pi_*Y \\ &\quad - g(\xi, \pi_*Y)\nabla_{X^V}(\nabla u) + g(\xi, \pi_*X)\nabla_{Y^V}(\nabla u) \\ &\quad - b_u^V(\xi, Y)\pi_*X \end{aligned} \quad (3.75)$$

où $b_u^V(\xi, X) = H_u^V(\xi, X) = g(\xi, \nabla_{X^V}(\nabla u))$ et ψ_u est donnée par (3.72). En particulier nous avons :

$$\tilde{w}^{HH}(X, Y)\xi = w^{HH}(X, Y)\xi \quad (3.76)$$

est un invariant conforme.

Preuve. Le $(1, 2; 1)$ -tenseur w est donné par $W(\xi, \eta, X, Y) = g(w(X, Y)\xi, \eta)$. Nous devons identifier l'expression :

$$\tilde{W}(\xi, \eta, X, Y) = \tilde{g}(\tilde{w}(X, Y)\xi, \eta) = \exp(2u)g(\tilde{w}(X, Y)\xi, \eta) \quad (3.77)$$

avec l'expression issue de (3.68) :

$$\begin{aligned} \tilde{W}(\xi, \eta, X, Y) &= \exp(2u)(W + \Psi_u + b_u^V \odot g)(\xi, \eta, X, Y) \\ &= \exp(2u)g(w(X, Y)\xi, \eta) + \exp(2u)g(\psi_u(X, Y)\xi, \eta) \\ &\quad + \exp(2u)(b_u^V \odot g)(\xi, \eta, X, Y) \end{aligned} \quad (3.78)$$

Afin de pouvoir identifier (3.77) et (3.78) et de déduire l'expression de $w(X, Y)\xi$, nous réécrivons $(b_u^V \odot g)(\xi, \eta, X, Y)$ comme une expression $g(\cdot, \eta)$

$$\begin{aligned} (b_u^V \odot g)(\xi, \eta, X, Y) &= \begin{vmatrix} b_u^V(\xi, X) & b_u^V(\eta, X) \\ g(\xi, \pi_* Y) & g(\eta, \pi_* Y) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} g(\xi, \pi_* X) & g(\eta, \pi_* X) \\ b_u^V(\xi, Y) & b_u^V(\eta, Y) \end{vmatrix} \\ &= b_u^V(\xi, X)g(\eta, \pi_* Y) - b_u^V(\eta, X)g(\xi, \pi_* Y) \\ &\quad + g(\xi, \pi_* X)b_u^V(\eta, Y) - g(\eta, \pi_* X)b_u^V(\xi, Y) \end{aligned}$$

et en utilisant l'expression $b_u^V(\xi, X) = H_u^V(\xi, X) = g(\nabla_{X^V}(\nabla u), \xi)$ nous obtenons :

$$\begin{aligned} (b_u^V \odot g)(\xi, \eta, X, Y) &= b_u^V(\xi, X)g(\eta, \pi_* Y) - g(\nabla_{X^V}(\nabla u), \eta)g(\xi, \pi_* Y) \\ &\quad + g(\xi, \pi_* X)g(\nabla_{Y^V}(\nabla u), \eta) - g(\eta, \pi_* X)b_u^V(\xi, Y) \\ &= g(b_u^V(\xi, X)\pi_* Y, \eta) - g(g(\xi, \pi_* Y)\nabla_{X^V}(\nabla u), \eta) \\ &\quad + g(g(\xi, \pi_* X)\nabla_{Y^V}(\nabla u), \eta) - g(b_u^V(\xi, Y)\pi_* X, \eta) \end{aligned}$$

La $(1, 2; 1)$ version de $(b_u^V \odot g)$, que nous notons $(\overline{b_u^V \odot g})$:

$$(b_u^V \odot g)(\xi, \eta, X, Y) = g\left(\overline{(b_u^V \odot g)}(X, Y)\xi, \eta\right)$$

s'écrit alors comme :

$$\begin{aligned} \overline{(b_u^V \odot g)}(X, Y)\xi &= b_u^V(\xi, X)\pi_* Y - g(\xi, \pi_* Y)\nabla_{X^V}(\nabla u) \\ &\quad + g(\xi, \pi_* X)\nabla_{Y^V}(\nabla u) - b_u^V(\xi, Y)\pi_* X \end{aligned} \quad (3.79)$$

présent, l'identification de (3.77) et (3.78) nous donne :

$$\begin{aligned} g(\tilde{w}(X, Y)\xi, \eta) &= g(w(X, Y)\xi, \eta) + g(\psi_u(X, Y)\xi, \eta) \\ &\quad + g(b_u^V(\xi, X)\pi_*Y, \eta) - g(g(\xi, \pi_*Y)\nabla_{X^V}(\nabla u), \eta) \\ &\quad + g(g(\xi, \pi_*X)\nabla_{Y^V}(\nabla u), \eta) - g(b_u^V(\xi, Y)\pi_*X, \eta) \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \tilde{w}(X, Y)\xi &= w(X, Y)\xi + \psi_u(X, Y)\xi + \overline{(b_u^V \odot g)}(X, Y)\xi \\ &= w(X, Y)\xi + \psi_u(X, Y)\xi + b_u^V(\xi, X)\pi_*Y \\ &\quad - g(\xi, \pi_*Y)\nabla_{X^V}(\nabla u) + g(\xi, \pi_*X)\nabla_{Y^V}(\nabla u) \\ &\quad - b_u^V(\xi, Y)\pi_*X \end{aligned}$$

En particulier, nous pouvons constater que lorsque nous considérons $\tilde{w}^{HH}(X, Y) = \tilde{w}(X^H, Y^H)$, nous avons :

$$\tilde{w}^{HH}(X, Y) = w^{HH}(X, Y)$$

car tous les termes restants sont des hv -termes et sont par conséquent nuls lorsque nous les évaluons sur deux vecteurs horizontaux. ■

Remarque 65 *L'étude de la hh -composante de w rejoint le cas riemannien où le $(3, 1)$ -tenseur de Weyl riemannien est un invariant conforme.*

Nous ouvrons une parenthèse avec le lemme suivant pour trouver une expression spécifique des $(1, 2; 1)$ -tenseurs w^{HH} et w^{HV} qui est rencontrée dans des calculs ultérieurs.

Lemme 66 *Les hh - et hv -composantes du $(1, 2; 1)$ -tenseur w défini par $W(\xi, \eta, X, Y) = g(w(X, Y)\xi, \eta)$ peuvent s'écrire sous la forme de :*

$$\begin{cases} w^{HH}(X, Y)\xi = R(X, Y)\xi + g(s(X), \xi)\pi_*Y - g(\xi, \pi_*Y)s(X) \\ \quad + g(\pi_*X, \xi)s(Y) - g(s(Y), \xi)\pi_*X \\ w^{HV}(X, Y)\xi = P(X, Y)\xi \end{cases} \quad (3.80)$$

Preuve. Nous préférons utiliser l'expression de la courbure complète Φ en bloc avant d'effectuer la décomposition $\Phi = R + P$ vers la fin. Reprenons le $(2, 2; 0)$ -tenseur W défini en (3.56) :

$$\begin{aligned} W(\xi, \eta, X, Y) &= \Phi(\xi, \eta, X, Y) + (S \odot g)(\xi, \eta, X, Y) \\ &= \Phi(\xi, \eta, X, Y) + S(\xi, X)g(\eta, \pi_*Y) - S(\eta, X)g(\xi, \pi_*Y) \\ &\quad + S(\eta, Y)g(\pi_*X, \xi) - S(\xi, Y)g(\pi_*X, \eta) \end{aligned} \quad (3.81)$$

en utilisant le fait que

$$S(\eta, X) = g(\eta, s(X)), \quad \Phi(\xi, \eta, X, Y) = g(\phi(X, Y)\xi, \eta)$$

la formule (3.81) devient :

$$\begin{aligned} g(w(X, Y)\xi, \eta) &= g(\phi(X, Y)\xi, \eta) + g(s(X), \xi)g(\eta, \pi_*Y) \\ &\quad - g(\xi, \pi_*Y)g(s(X), \eta) + g(\pi_*X, \xi)g(s(Y), \eta) \\ &\quad - g(s(Y), \xi)g(\pi_*X, \eta) \\ &= g(\phi(X, Y)\xi, \eta) + g(g(s(X), \xi)\pi_*Y, \eta) \\ &\quad - g(g(\xi, \pi_*Y)s(X), \eta) + g(g(\pi_*X, \xi)s(Y), \eta) \\ &\quad - g(g(s(Y), \xi)\pi_*X, \eta) \end{aligned}$$

il s'en suit que :

$$\begin{aligned} w(X, Y)\xi &= \phi(X, Y)\xi + g(s(X), \xi)\pi_*Y - g(\xi, \pi_*Y)s(X) \\ &\quad + g(\pi_*X, \xi)s(Y) - g(s(Y), \xi)\pi_*X \end{aligned} \quad (3.82)$$

c'est-à-dire que :

$$\begin{aligned} w^{HH}(X, Y)\xi + w^{HV}(X, Y)\xi &= R(X, Y)\xi + P(X, Y)\xi \\ &\quad + g(s(X), \xi)\pi_*Y - g(\xi, \pi_*Y)s(X) \\ &\quad + g(\pi_*X, \xi)s(Y) - g(s(Y), \xi)\pi_*X \end{aligned} \quad (3.83)$$

En utilisant le fait que $S(\xi, X^V) = 0$ (ou $s(X^V) = 0$), nous arrivons aux expressions désirées. ■

3.4 Variétés de Finsler-Ehresmann conformément R -plates

Nous passons à une description des caractéristiques conformes d'une variété de Finsler-Ehresmann (M, F, \mathcal{H}_0) sous des hypothèses plus faibles, nous trouvons des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une variété de Finsler-Ehresmann soit conformément plate au sens de la R -courbure ou *conformément R -plate*. Une variété (M, F, \mathcal{H}_0) est conformément R -plate si il existe une fonction $u \in C^\infty(M)$ tel que $(M, \tilde{F} = \exp u \cdot F, \mathcal{H}_0)$ soit localement R -plate (hh -courbure $\tilde{R} = 0$). Commençons par énoncer une proposition pour décrire ce problème géométrique.

Proposition 67 Une variété de Finsler-Ehresmann (M, F, \mathcal{H}_0) est conformément R -plate si et seulement si il existe u ($u \in C^\infty(M)$) tel que :

$$\begin{cases} W^{HH} = 0 \\ S = b_u^H \end{cases} \quad (3.84)$$

où W^{HH} est la hh -partie du tenseur de Weyl W et b_u^H est donné par (3.21).

Preuve. Nous utilisons principalement les formules de transformation (3.68) :

$$\begin{cases} W \longrightarrow \tilde{W} = \exp(2u) (W + \Psi_u + b_u^V \odot g) \\ S \longrightarrow \tilde{S} = S - b_u^H \end{cases}$$

Lorsque la variété de Finsler-Ehresmann (M, F, \mathcal{H}_0) est conformément R -plate (c'est-à-dire $\tilde{R} = 0$ pour $(M, \tilde{F} = \exp u \cdot F, \mathcal{H}_0)$), la hh -courbure \tilde{R} est nulle. L'utilisation de (3.60), de la proposition 60 et du corollaire 61 nous permettent alors d'écrire :

$$\begin{aligned} \tilde{R} &= \tilde{W}^{HH} - (\tilde{S} \odot \tilde{g}) \\ &= \exp(2u) [W^{HH} - ((S - b_u^H) \odot g)] \\ &= 0 \end{aligned}$$

d'où

$$W^{HH} = 0, \quad S = b_u^H$$

Le chemin inverse est immédiat, si nous avons $W^{HH} = 0$ et $S = b_u^H$ nous avons $\tilde{R} = 0$, en effet, l'utilisation de (3.20) nous permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \tilde{R} &= \exp(2u) \{R + (b_u^H \odot g)\} \\ &= \exp(2u) \{R + (S \odot g)\} \end{aligned}$$

et en utilisant (3.60) nous avons :

$$\tilde{R} = \exp(2u) W^{HH} = 0$$

$(M, \tilde{F}, \mathcal{H}_0)$ est alors R -plate. ■

Lemme 68 En notant $\nabla u = \zeta$, nous avons l'équivalence :

$$b_u^H = S \iff \nabla_{X^H} \zeta = s(X) + g(\zeta, \pi_* X) \zeta - \frac{1}{2} g(\zeta, \zeta) \pi_* X, \quad s(X^V) = 0 \quad (3.85)$$

où s est le $(0, 1; 1)$ -tenseur de Schouten.

Preuve. Le $(0, 1; 1)$ -tenseur de Schouten s est défini à partir du $(1, 1; 0)$ -tenseur de Schouten S (3.57) par

$$S(\xi, X) = g(\xi, s(X)) \quad (3.86)$$

Si nous reprenons l'expression de b_u^H donnée par (3.21) :

$$b_u^H(\xi, X) = H_u^H(\xi, X) - g(\xi, \nabla u) g(\nabla u, \pi_* X) + \frac{1}{2} g(\nabla u, \nabla u) g(\xi, \pi_* X)$$

et si nous posons $b_u^H = S$ nous obtenons :

$$S(\xi, X) = H_u^H(\xi, X) - g(\xi, \nabla u) g(\nabla u, \pi_* X) + \frac{1}{2} g(\nabla u, \nabla u) g(\xi, \pi_* X)$$

et puisque $H_u^H(\xi, X) = g(\xi, \nabla_{X^H}(\nabla u))$ et si nous posons $\nabla u = \zeta$ nous obtenons :

$$S(\xi, X) = g(\xi, \nabla_{X^H} \zeta) - g(\xi, \zeta) g(\zeta, \pi_* X) + \frac{1}{2} g(\zeta, \zeta) g(\xi, \pi_* X)$$

et ceci implique que

$$\begin{aligned} g(\xi, \nabla_{X^H} \zeta) &= S(\xi, X) + g(\xi, \zeta) g(\zeta, \pi_* X) - \frac{1}{2} g(\zeta, \zeta) g(\xi, \pi_* X) \\ &= g(\xi, s(X)) + g(\xi, \zeta) g(\zeta, \pi_* X) - \frac{1}{2} g(\zeta, \zeta) g(\xi, \pi_* X) \end{aligned} \quad (3.87)$$

où s est défini par (3.86). L'équation (3.87) implique l'équation donnée dans (3.85) :

$$\nabla_{X^H} \zeta = \nabla \zeta(X) = s(X) + g(\zeta, \pi_* X) \zeta - \frac{1}{2} g(\zeta, \zeta) \pi_* X$$

■

La proposition technique suivante joue un rôle crucial dans la preuve du théorème 72.

Proposition 69 *Supposons que la distribution horizontale \mathcal{H} est involutive. Soit $\Lambda : TM \times \pi^* TM \rightarrow \pi^* TM$ une application C^∞ linéaire en la première variable telle que $\Lambda(X, \xi) = 0$ si $X \in \ker \pi_*$, alors, il existe localement un champ $\zeta \in \Gamma(\pi^* TM)$ tel que :*

$$\nabla_X \zeta = \Lambda(X, \xi), \quad \forall X \in \mathcal{H} \quad (3.88)$$

si et seulement si Λ est tel que :

$$(\nabla_X \Lambda)(Y) - (\nabla_Y \Lambda)(X) - R(X, Y) \zeta = 0 \quad (3.89)$$

où R est hh-courbure.

Preuve. La preuve que la condition (3.89) est nécessaire est quasi-immédiate en utilisant la formule intrinsèque de la courbure (voir (2.45) page 42). Rappelons qu'ici il s'agit uniquement de la hh -courbure R étant donné que $X, Y \in \mathcal{H}$:

$$R(X, Y)\zeta = \nabla_X^H (\nabla_Y^H \zeta) - \nabla_Y^H (\nabla_X^H \zeta) - \nabla_{[X^H, Y^H]}\zeta$$

Si $\nabla_X \zeta = \Lambda(X)$, nous avons pour n'importe quels champs horizontaux X, Y :

$$\nabla_X (\Lambda(Y)) - \nabla_Y (\Lambda(X)) = \nabla_X (\nabla_Y \zeta) - \nabla_Y (\nabla_X \zeta) \quad (3.90)$$

et comme

$$\begin{aligned} \nabla_X (\Lambda(Y)) - \nabla_Y (\Lambda(X)) &= (\nabla_X \Lambda)(Y) - (\nabla_Y \Lambda)(X) + \Lambda([X, Y]) \quad (3.91) \\ &= (\nabla_X \Lambda)(Y) - (\nabla_Y \Lambda)(X) + \nabla_{[X, Y]}\zeta \end{aligned}$$

nous obtenons en identifiant (3.90) et (3.91)

$$\begin{aligned} (\nabla_X \Lambda)(Y) - (\nabla_Y \Lambda)(X) &= \nabla_X (\nabla_Y \zeta) - \nabla_Y (\nabla_X \zeta) - \nabla_{[X, Y]}\zeta \\ &= R(X, Y)\zeta \end{aligned}$$

la condition (3.89) est alors vérifiée, il reste à prouver qu'elle est aussi suffisante. Pour cela, nous utilisons un système de coordonnées. De plus, nous divisons la preuve en deux étapes. Dans la première étape, nous réécrivons les équations (3.88) et (3.89) sous une forme en coordonnées. Dans la seconde étape, nous utilisons cette forme pour montrer que (3.89) est une condition suffisante.

Etape 1. Nous réécrivons les équations (3.88) et (3.89) en coordonnées. Commençons par les équations (3.88), en prenant pour vecteurs de bases $X = \frac{\delta}{\delta x^i}$, $Y = \frac{\delta}{\delta x^j}$, l'équation

$$\nabla_X \zeta = \Lambda(X), \quad \forall X \in \mathcal{H}$$

devient :

$$\begin{aligned} \nabla_{\frac{\delta}{\delta x^i}} \zeta &= \nabla_{\frac{\delta}{\delta x^i}} \left(\zeta^j \frac{\partial}{\partial x^j} \right) = \frac{\delta \zeta^j}{\delta x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} + \zeta^j \nabla_{\frac{\delta}{\delta x^i}} \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right) \\ &= \left\{ \frac{\delta \zeta^r}{\delta x^i} + \zeta^j \Gamma_{ij}^r \right\} \frac{\partial}{\partial x^r} \\ &= \Lambda \left(\frac{\delta}{\delta x^i} \right) \end{aligned}$$

L'équation (3.88) correspond donc en coordonnées à :

$$\begin{aligned} \frac{\delta \zeta^i}{\delta x^j} &= \left[\Lambda \left(\frac{\delta}{\delta x^j} \right) \right]^i - \zeta^l \Gamma_{jl}^i \\ &= \Upsilon_j^i \end{aligned} \quad (3.92)$$

Nous remarquons que c'est système d'équations différentielles linéaires du premier ordre.

Quant à l'expression en coordonnées de (3.89), écrivons l'expression $(\nabla_X \Lambda)(Y) - (\nabla_Y \Lambda)(X) - R(X, Y)\zeta = 0$ pour deux vecteurs de base $\frac{\delta}{\delta x^i}$ et $\frac{\delta}{\delta x^j}$:

$$\left(\nabla_{\frac{\delta}{\delta x^i}} \Lambda\right) \left(\frac{\delta}{\delta x^j}\right) - \left(\nabla_{\frac{\delta}{\delta x^j}} \Lambda\right) \left(\frac{\delta}{\delta x^i}\right) - R\left(\frac{\delta}{\delta x^i}, \frac{\delta}{\delta x^j}\right) \zeta = 0 \quad (3.93)$$

et en utilisant le fait que

$$(\nabla_X \Lambda)(Y) - (\nabla_Y \Lambda)(X) = \nabla_X(\Lambda(Y)) - \nabla_Y(\Lambda(X)) - \Lambda([X, Y])$$

nous obtenons :

$$\begin{aligned} \left(\nabla_{\frac{\delta}{\delta x^i}} \Lambda\right) \left(\frac{\delta}{\delta x^j}\right) - \left(\nabla_{\frac{\delta}{\delta x^j}} \Lambda\right) \left(\frac{\delta}{\delta x^i}\right) &= \nabla_{\frac{\delta}{\delta x^i}} \left(\Lambda\left(\frac{\delta}{\delta x^j}\right)\right) - \nabla_{\frac{\delta}{\delta x^j}} \left(\Lambda\left(\frac{\delta}{\delta x^i}\right)\right) \\ &\quad - \Lambda\left(\left[\frac{\delta}{\delta x^i}, \frac{\delta}{\delta x^j}\right]\right) \\ &= \nabla_{\frac{\delta}{\delta x^i}} \left(\Lambda\left(\frac{\delta}{\delta x^j}\right)\right) - \nabla_{\frac{\delta}{\delta x^j}} \left(\Lambda\left(\frac{\delta}{\delta x^i}\right)\right) \end{aligned}$$

Ici nous avons $\Lambda\left(\left[\frac{\delta}{\delta x^i}, \frac{\delta}{\delta x^j}\right]\right) = 0$ car le crochet $\left[\frac{\delta}{\delta x^i}, \frac{\delta}{\delta x^j}\right] \in \ker \pi_*$ (ce crochet donne en général un élément purement vertical, cf. (3.95) un peu plus loin, et a fortiori est nul si \mathcal{H} est involutive). En utilisant le fait que $\pi_*\left(\frac{\delta}{\delta x^j}\right) = \frac{\partial}{\partial x^j}$, calculons maintenant $\nabla_{\frac{\delta}{\delta x^i}} \left(\Lambda\left(\frac{\delta}{\delta x^j}\right)\right)$:

$$\begin{aligned} \nabla_{\frac{\delta}{\delta x^i}} \left(\Lambda\left(\frac{\delta}{\delta x^j}\right)\right) &= \nabla_{\frac{\delta}{\delta x^i}} \left(\Lambda\left(\frac{\delta}{\delta x^j}\right)^r \frac{\partial}{\partial x^r}\right) = \frac{\delta}{\delta x^i} \left[\Lambda\left(\frac{\delta}{\delta x^j}\right)\right]^r \frac{\partial}{\partial x^r} \\ &\quad + \left[\Lambda\left(\frac{\delta}{\delta x^j}\right)\right]^r \Gamma_{ir}^l \frac{\partial}{\partial x^l} \\ &= \left\{ \frac{\delta}{\delta x^i} \left[\Lambda\left(\frac{\delta}{\delta x^j}\right)\right]^r + \left[\Lambda\left(\frac{\delta}{\delta x^j}\right)\right]^l \Gamma_{il}^r \right\} \frac{\partial}{\partial x^r} \end{aligned}$$

et comme $R\left(\frac{\delta}{\delta x^i}, \frac{\delta}{\delta x^j}\right)\zeta = R_{ij}^r \zeta^l \frac{\partial}{\partial x^r}$, l'expression (3.93) donne :

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta x^i} \left[\Lambda\left(\frac{\delta}{\delta x^j}\right)\right]^r - \frac{\delta}{\delta x^j} \left[\Lambda\left(\frac{\delta}{\delta x^i}\right)\right]^r + \left[\Lambda\left(\frac{\delta}{\delta x^j}\right)\right]^l \Gamma_{il}^r \\ - \left[\Lambda\left(\frac{\delta}{\delta x^i}\right)\right]^l \Gamma_{jl}^r - R_{ij}^r \zeta^l = 0 \end{aligned} \quad (3.94)$$

Etape 2. Le but de cette seconde étape est de montrer que (3.94) est une condition nécessaire et suffisante pour résoudre le système d'équations différentielles linéaires (3.92)

$$\frac{\delta \zeta^i}{\delta x^j} = \Upsilon_j^i$$

sous l'hypothèse de l'intégrabilité de la distribution \mathcal{H} . Remarquons d'abord que $\mathcal{H} \subset T\mathfrak{M}$ est engendrée par les champs $\frac{\delta}{\delta x^i}$ et que ceux-ci ont d'une manière générale pour crochets

$$\left[\frac{\delta}{\delta x^k}, \frac{\delta}{\delta x^l} \right] = \left\{ \left(\frac{\partial \mathcal{N}_k^r}{\partial x^l} - \frac{\partial \mathcal{N}_l^r}{\partial x^k} \right) + \left(\mathcal{N}_k^s \frac{\partial \mathcal{N}_l^r}{\partial y^s} - \mathcal{N}_l^s \frac{\partial \mathcal{N}_k^r}{\partial y^s} \right) \right\} \frac{\partial}{\partial y^r} \quad (3.95)$$

Comme les champs verticaux $\frac{\partial}{\partial y^i}$ sont linéairement indépendants des champs horizontaux $\frac{\delta}{\delta x^k}$, on voit que \mathcal{H} est une distribution intégrable si et seulement si ces champs commutent :

$$\left[\frac{\delta}{\delta x^k}, \frac{\delta}{\delta x^l} \right] = 0$$

Or, sous cette condition, le système (3.92) admet une solution si et seulement si (voir annexe D) :

$$\frac{\delta \Upsilon_j^i}{\delta x^k} - \frac{\delta \Upsilon_k^i}{\delta x^j} = 0 \quad (3.96)$$

Calculons l'expression (3.96), pour cela nous calculons un seul terme et passerons ensuite à l'expression symétrisée.

$$\begin{aligned} \frac{\delta \Upsilon_j^i}{\delta x^k} &= \frac{\delta}{\delta x^k} \left\{ \left[\Lambda \left(\frac{\delta}{\delta x^j} \right) \right]^i - \zeta^l \Gamma_{jl}^i \right\} \\ &= \frac{\delta}{\delta x^k} \left[\Lambda \left(\frac{\delta}{\delta x^j} \right) \right]^i - \frac{\delta \zeta^l}{\delta x^k} \Gamma_{jl}^i - \zeta^l \frac{\delta \Gamma_{jl}^i}{\delta x^k} \end{aligned}$$

et en remplaçant $\frac{\delta \zeta^l}{\delta x^k}$ par son expression en utilisant (3.92) :

$$\begin{aligned} \frac{\delta \Upsilon_j^i}{\delta x^k} &= \frac{\delta}{\delta x^k} \left[\Lambda \left(\frac{\delta}{\delta x^j} \right) \right]^i - \left(\left[\Lambda \left(\frac{\delta}{\delta x^k} \right) \right]^l - \zeta^m \Gamma_{km}^l \right) \Gamma_{jl}^i - \zeta^l \frac{\delta \Gamma_{jl}^i}{\delta x^k} \\ &= \frac{\delta}{\delta x^k} \left[\Lambda \left(\frac{\delta}{\delta x^j} \right) \right]^i - \left[\Lambda \left(\frac{\delta}{\delta x^k} \right) \right]^l \Gamma_{jl}^i + \zeta^m \Gamma_{km}^l \Gamma_{jl}^i - \zeta^l \frac{\delta \Gamma_{jl}^i}{\delta x^k} \end{aligned}$$

L'expression (3.96) devient alors :

$$\begin{aligned} \frac{\delta \Upsilon_j^i}{\delta x^k} - \frac{\delta \Upsilon_k^i}{\delta x^j} &= \frac{\delta}{\delta x^k} \left[\Lambda \left(\frac{\delta}{\delta x^j} \right) \right]^i - \left[\Lambda \left(\frac{\delta}{\delta x^k} \right) \right]^l \Gamma_{jl}^i + \zeta^m \Gamma_{km}^l \Gamma_{jl}^i - \zeta^l \frac{\delta \Gamma_{jl}^i}{\delta x^k} \\ &\quad - \frac{\delta}{\delta x^j} \left[\Lambda \left(\frac{\delta}{\delta x^k} \right) \right]^i + \left[\Lambda \left(\frac{\delta}{\delta x^j} \right) \right]^l \Gamma_{kl}^i - \zeta^m \Gamma_{jm}^l \Gamma_{kl}^i + \zeta^l \frac{\delta \Gamma_{kl}^i}{\delta x^j} \\ &= \frac{\delta}{\delta x^k} \left[\Lambda \left(\frac{\delta}{\delta x^j} \right) \right]^i - \frac{\delta}{\delta x^j} \left[\Lambda \left(\frac{\delta}{\delta x^k} \right) \right]^i + \left[\Lambda \left(\frac{\delta}{\delta x^j} \right) \right]^l \Gamma_{kl}^i \\ &\quad - \left[\Lambda \left(\frac{\delta}{\delta x^k} \right) \right]^l \Gamma_{jl}^i + \left\{ \frac{\delta \Gamma_{kl}^i}{\delta x^j} - \frac{\delta \Gamma_{jl}^i}{\delta x^k} + \Gamma_{kl}^m \Gamma_{jm}^i - \Gamma_{jl}^m \Gamma_{km}^i \right\} \zeta^l \end{aligned}$$

Et comme

$$R_{lij}^r = \frac{\delta \Gamma_{jl}^r}{\delta x^i} - \frac{\delta \Gamma_{il}^r}{\delta x^j} + \Gamma_{jl}^m \Gamma_{im}^r - \Gamma_{il}^m \Gamma_{jm}^r$$

La condition (3.96) devient :

$$\begin{aligned} & \frac{\delta}{\delta x^i} \left[\Lambda \left(\frac{\delta}{\delta x^j} \right) \right]^r - \frac{\delta}{\delta x^j} \left[\Lambda \left(\frac{\delta}{\delta x^i} \right) \right]^r + \left[\Lambda \left(\frac{\delta}{\delta x^j} \right) \right]^l \Gamma_{il}^r \\ & - \left[\Lambda \left(\frac{\delta}{\delta x^i} \right) \right]^l \Gamma_{jl}^r - R_{lij}^r \zeta^l = 0 \end{aligned} \quad (3.97)$$

Nous remarquons que la condition (3.97) n'est rien d'autre que l'équation (3.94) qui correspond à la condition (3.89) en coordonnées. ■

Lemme 70 Soit $\zeta \in \Gamma(\pi^*TM)$ un champ vérifiant :

$$\nabla_X \zeta = s(X) + g(\zeta, \pi_* X) \zeta - \frac{1}{2} g(\zeta, \zeta) \pi_* X, \quad X \in \mathcal{H} \quad (3.98)$$

alors, ζ dérive d'un potentiel, $\zeta = \nabla u$, si et seulement si le $(1, 1; 0)$ -tenseur de Schouten obéit à la règle de Symétrie :

$$S(\pi_* Y, X) = S(\pi_* X, Y) \quad (3.99)$$

Preuve. La preuve est très rapide si nous utilisons le lemme 79 (cf. annexe C). Lorsque $\zeta = \nabla u$, l'écriture de l'équation (C.1) (cf. 79 en annexe C) donne lorsque $X, Y \in \mathcal{H}$:

$$g(\nabla_X \zeta, \pi_* Y) - g(\nabla_Y \zeta, \pi_* X) = 0$$

et en remplaçant $\nabla_X \zeta$ et $\nabla_Y \zeta$ par leurs expressions en utilisant (3.98) nous obtenons :

$$\begin{aligned} & g(s(X), \pi_* Y) + g(\zeta, \pi_* X) g(\zeta, \pi_* Y) - \frac{1}{2} g(\zeta, \zeta) g(\pi_* X, \pi_* Y) \\ & - g(s(Y), \pi_* X) - g(\zeta, \pi_* Y) g(\zeta, \pi_* X) + \frac{1}{2} g(\zeta, \zeta) g(\pi_* Y, \pi_* X) \\ & = g(s(X), \pi_* Y) - g(s(Y), \pi_* X) \\ & = S(\pi_* Y, X) - S(\pi_* X, Y) \\ & = 0 \end{aligned}$$

■

Nous énonçons un lemme calculatoire afin de reformuler la condition d'intégrabilité (3.89) de la proposition 69 sous une forme pratique pour la suite. De manière plus précise, nous montrons que pour un champ $\Lambda(X)$ concret donné par une certaine expression,

l'équation (3.89) faisant intervenir Λ et R peut être remplacée par une équation équivalente faisant intervenir le $(0, 1; 1)$ -tenseur de Schouten s et la composante horizontale du tenseur de Weyl W^{HH} .

Lemme 71 *La condition d'intégrabilité de l'équation :*

$$\nabla_X \zeta = \Lambda(X, \xi) =: s(X) + g(\zeta, \pi_* X) \zeta - \frac{1}{2} g(\zeta, \zeta) \pi_* X, \quad X \in \mathcal{H}$$

peut s'écrire comme :

$$(\nabla_X s)(Y) - (\nabla_Y s)(X) - w^{HH}(X, Y) \zeta = 0 \quad (3.100)$$

Preuve. Nous rappelons que le lemme 69 nous dit que l'équation (3.89) :

$$(\nabla_X \Lambda)(Y) - (\nabla_Y \Lambda)(X) - R(X, Y) \zeta = 0$$

est une condition d'intégrabilité de (3.88). Notre but est de montrer que dans le cas où Λ dans (3.88) est donné par

$$\Lambda(X) = s(X) + g(\zeta, \pi_* X) \zeta - \frac{1}{2} g(\zeta, \zeta) \pi_* X$$

l'équation (3.89) s'écrit comme (3.100). La preuve est un calcul basé sur une suite de remplacements de Λ par son expression $s + g(\zeta, \pi_*(\cdot)) \zeta - \frac{1}{2} g(\zeta, \zeta) \pi_*(\cdot)$ suivie par l'utilisation du lemme 66 donnant dans (3.80) une expression reliant $R(X, Y)$ à $w^{HH}(X, Y)$ que nous rappelons :

$$\begin{aligned} w^{HH}(X, Y) \xi &= R(X, Y) \xi + g(s(X), \xi) \pi_* Y - g(\xi, \pi_* Y) s(X) \\ &\quad + g(\pi_* X, \xi) s(Y) - g(s(Y), \xi) \pi_* X \end{aligned} \quad (3.101)$$

Commençons par calculer le terme $(\nabla_X \Lambda)(Y) - (\nabla_Y \Lambda)(X)$:

$$(\nabla_X \Lambda)(Y) - (\nabla_Y \Lambda)(X) = \nabla_X(\Lambda(Y)) - \nabla_Y(\Lambda(X)) - \Lambda([X, Y])$$

En remplaçant $\Lambda(X)$ et $\Lambda(Y)$ par leurs expressions nous obtenons (toujours pour $X, Y \in \mathcal{H}$) :

$$\begin{aligned} (\nabla_X \Lambda)(Y) - (\nabla_Y \Lambda)(X) &= \nabla_X \left[s(Y) + g(\zeta, \pi_* Y) \zeta - \frac{1}{2} g(\zeta, \zeta) \pi_* Y \right] \\ &\quad - \nabla_Y \left[s(X) + g(\zeta, \pi_* X) \zeta - \frac{1}{2} g(\zeta, \zeta) \pi_* X \right] \\ &\quad - \left[s([X, Y]) + g(\zeta, \pi_* [X, Y]) \zeta - \frac{1}{2} g(\zeta, \zeta) \pi_* [X, Y] \right] \end{aligned}$$

Et comme $\nabla_X (s(Y)) - \nabla_Y (s(X)) - s([X, Y]) = (\nabla_X s)(Y) - (\nabla_Y s)(X)$ nous avons :

$$\begin{aligned}
& (\nabla_X \Lambda)(Y) - (\nabla_Y \Lambda)(X) \tag{3.102} \\
&= (\nabla_X s)(Y) - (\nabla_Y s)(X) + g(\nabla_X \zeta, \pi_* Y) \zeta + g(\zeta, \nabla_X \pi_* Y) \zeta \\
&+ (\nabla_X g)(\zeta, \pi_* Y) \zeta + g(\zeta, \pi_* Y) \nabla_X \zeta - \frac{1}{2} g(\nabla_X \zeta, \zeta) \pi_* Y - \frac{1}{2} g(\zeta, \nabla_X \zeta) \pi_* Y \\
&- \frac{1}{2} (\nabla_X g)(\zeta, \zeta) \pi_* Y - \frac{1}{2} g(\zeta, \zeta) \nabla_X (\pi_* Y) - g(\nabla_Y \zeta, \pi_* X) \zeta \\
&- g(\zeta, \nabla_Y \pi_* X) \zeta - (\nabla_Y g)(\zeta, \pi_* X) \zeta - g(\zeta, \pi_* X) \nabla_Y \zeta \\
&+ \frac{1}{2} g(\nabla_Y \zeta, \zeta) \pi_* X + \frac{1}{2} g(\zeta, \nabla_Y \zeta) \pi_* X + \frac{1}{2} (\nabla_Y g)(\zeta, \zeta) \pi_* X \\
&+ \frac{1}{2} g(\zeta, \zeta) \nabla_Y (\pi_* X) - g(\zeta, \pi_* [X, Y]) \zeta + \frac{1}{2} g(\zeta, \zeta) \pi_* [X, Y]
\end{aligned}$$

et en utilisant les simplifications dues aux crochets (condition de symétrie de la connexion de Chern généralisée (2.13) page 35)

$$\nabla_X (\pi_* Y) - \nabla_Y (\pi_* X) = \pi_* [X, Y]$$

l'expression (3.102) devient :

$$\begin{aligned}
& (\nabla_X \Lambda)(Y) - (\nabla_Y \Lambda)(X) \\
&= (\nabla_X s)(Y) - (\nabla_Y s)(X) + g(\nabla_X \zeta, \pi_* Y) \zeta - g(\nabla_Y \zeta, \pi_* X) \zeta \\
&+ g(\zeta, \pi_* Y) \nabla_X \zeta - g(\zeta, \pi_* X) \nabla_Y \zeta - g(\nabla_X \zeta, \zeta) \pi_* Y + g(\nabla_Y \zeta, \zeta) \pi_* X
\end{aligned}$$

et en utilisant l'expression (C.1) (cf. lemme 79) que nous rappelons :

$$g(\nabla_X \zeta, \pi_* Y) - g(\nabla_Y \zeta, \pi_* X) = 0$$

nous obtenons :

$$\begin{aligned}
(\nabla_X \Lambda)(Y) - (\nabla_Y \Lambda)(X) &= (\nabla_X s)(Y) - (\nabla_Y s)(X) + g(\zeta, \pi_* Y) \nabla_X \zeta \tag{3.103} \\
&- g(\zeta, \pi_* X) \nabla_Y \zeta - g(\nabla_X \zeta, \zeta) \pi_* Y + g(\nabla_Y \zeta, \zeta) \pi_* X
\end{aligned}$$

et en remplaçant $\nabla_X \zeta$ par son expression nous écrivons :

$$\begin{aligned}
& (\nabla_X \Lambda)(Y) - (\nabla_Y \Lambda)(X) \tag{3.104} \\
&= (\nabla_X s)(Y) - (\nabla_Y s)(X) + g(\zeta, \pi_* Y) s(X) \\
&+ g(\zeta, \pi_* Y) g(\zeta, \pi_* X) \zeta - \frac{1}{2} g(\zeta, \zeta) g(\zeta, \pi_* Y) \pi_* X \\
&- g(\zeta, \pi_* X) s(Y) - g(\zeta, \pi_* X) g(\zeta, \pi_* Y) \zeta + \frac{1}{2} g(\zeta, \zeta) g(\zeta, \pi_* X) \pi_* Y \\
&- g(s(X), \zeta) \pi_* Y - g(\zeta, \pi_* X) g(\zeta, \zeta) \pi_* Y + \frac{1}{2} g(\zeta, \zeta) g(\pi_* X, \zeta) \pi_* Y \\
&+ g(s(Y), \zeta) \pi_* X + g(\zeta, \pi_* Y) g(\zeta, \zeta) \pi_* X - \frac{1}{2} g(\zeta, \zeta) g(\pi_* Y, \zeta) \pi_* X
\end{aligned}$$

Après les simplifications nécessaires nous arrivons à :

$$\begin{aligned} & (\nabla_X \Lambda)(Y) - (\nabla_Y \Lambda)(X) - R(X, Y) \zeta \\ &= (\nabla_X s)(Y) - (\nabla_Y s)(X) - R(X, Y) \zeta + g(\zeta, \pi_* Y) s(X) \\ & \quad - g(\zeta, \pi_* X) s(Y) - g(s(X), \zeta) \pi_* Y + g(s(Y), \zeta) \pi_* X \end{aligned}$$

et finalement, l'utilisation de (3.101), démontré dans le lemme 66, nous permet d'écrire l'équation ci-dessus comme :

$$(\nabla_X \Lambda)(Y) - (\nabla_Y \Lambda)(X) - R(X, Y) \zeta = (\nabla_X s)(Y) - (\nabla_Y s)(X) - w^{HH}(X, Y) \zeta$$

■

Nous énonçons à présent un des résultats principaux de la thèse.

Théorème 72 *Soit (M, F, \mathcal{H}_0) une variété de Finsler-Ehresmann de dimension $n \geq 3$ dont la distribution horizontale est intégrable. Cette variété est conformément R -plate si et seulement si :*

- (a) *La hh -composante du tenseur de Weyl W est nulle : $W^{HH} = 0$*
- (b) *Le $(1, 1; 0)$ -tenseur de Schouten S obéit à la règle de symétrie :*

$$S(\pi_* Y, X) = S(\pi_* X, Y)$$

- (c) *La dérivation covariante du $(0, 1; 1)$ -tenseur de Schouten s est telle que :*

$$(\nabla_X s)(Y) - (\nabla_Y s)(X) = 0, \quad \forall X, Y \in \mathcal{H}$$

Preuve. Si la variété (M, F, \mathcal{H}_0) est conformément R -plate, les équations (3.84) de la proposition 67 que nous rappelons :

$$\begin{cases} W^{HH} = 0 \\ S = b_u^H \end{cases}$$

sont alors vérifiées, et nous avons tout de suite (a).

La condition (b) découle naturellement de l'existence de $\zeta = \nabla u$, nous pouvons le voir en utilisant les lemmes 68 et 70. En effet, puisque $\zeta = \nabla u$, le lemme 68 nous permet de dire que puisque $b_u^H = S$, nous avons

$$\nabla_{X^H} \zeta = s(X^H) + g(\zeta, \pi_* X) \zeta - \frac{1}{2} g(\zeta, \zeta) \pi_* X$$

qui permet à son tour de déduire que $S(\pi_*Y, X) = S(\pi_*X, Y)$ en vertu du lemme 70.

Pour prouver (c), nous utilisons les mêmes arguments de départ que pour (b). Puisque nous avons $b_u^H = S$ et comme $\zeta = \nabla u$ existe, nous pouvons utiliser le lemme 68 pour déduire que

$$\nabla_{X^H}\zeta = s(X^H) + g(\zeta, \pi_*X)\zeta - \frac{1}{2}g(\zeta, \zeta)\pi_*X$$

qui n'est rien d'autre que l'équation centrale (3.88) de la proposition 69 en posant $\nabla_X\zeta = \Lambda(X, \zeta)$. Nous pouvons alors utiliser cette proposition pour déduire que puisque ζ existe et est donné par (3.88), la condition (3.89) est satisfaite :

$$(\nabla_X\Lambda)(Y) - (\nabla_Y\Lambda)(X) - R(X, Y)\zeta = 0, \quad X, Y \in \mathcal{H}$$

D'autre part, en utilisant (3.100) du lemme 71, l'équation ci-dessus est équivalente à l'équation suivante :

$$(\nabla_Xs)(Y) - (\nabla_Ys)(X) - w^{HH}(X, Y)\zeta = 0 \quad (3.105)$$

Clairement, puisque la condition (a) est déjà satisfaite, nous pouvons remplacer w^{HH} par zéro dans (3.105) pour avoir :

$$(\nabla_Xs)(Y) - (\nabla_Ys)(X) = 0$$

et la condition (c) est alors prouvée.

Nous montrons à présent que lorsque les conditions (a), (b) et (c) sont satisfaites, la variété de Finsler-Ehresmann est conformément R -plate.

Nous utilisons d'abord les conditions (a) et (c). Si $W^{HH} = 0$ et $(\nabla_Xs)(Y) - (\nabla_Ys)(X) = 0$, l'équation (3.100) est alors vérifiée et le lemme 71 nous dit alors que ceci est une condition suffisante pour que le champ ζ tel que $\nabla_X\zeta = \Lambda(X)$ existe pour $\Lambda = s + g(\zeta, \pi_*(\cdot))\zeta - \frac{1}{2}g(\zeta, \zeta)\pi_*(\cdot)$, $\forall X \in \mathcal{H}$. Puisque ζ existe, l'utilisation de la condition (b) nous permet de déduire grâce au lemme 70 que ζ dérive d'un potentiel, $\zeta = \nabla u$. Nous utilisons ensuite le lemme 68 qui nous dit que l'équivalence (3.85) est vérifiée :

$$b_u^H = S \iff \nabla_{X^H}\zeta = s(X) + g(\zeta, \pi_*X)\zeta - \frac{1}{2}g(\zeta, \zeta)\pi_*X, \quad s(X^V) = 0$$

Et finalement, l'utilisation de la proposition 67 nous permet de conclure que puisque $b_u^H = S$ et $W^{HH} = 0$, la variété est conformément R -plate. ■

Remarque 73 *La théorie des variétés de Finsler-Ehresmann R -plate diffère de celle des variétés finsleriennes au sens usuel car la distribution horizontale n'est pas nécessairement liée à l'équation des géodésiques. En particulier, nous ignorons si il existe une version du théorème de X. Mo (cf. théorème 10 page 24) pour les variétés de Finsler-Ehresmann. Et nous ne savons pas non plus si il existe des variétés de Finsler-Ehresmann conformément R -plates dont la distribution horizontale ne serait pas intégrable.*

Espaces de Berwald généralisés conformément R -plats

En dimension 3 et pour les variétés de type de Berwald généralisé, nous pouvons diminuer le nombre de conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une variété de Finsler-Ehresmann soit conformément R -plate. Ce résultat est une conséquence directe des théorèmes 72 et 59. Nous mettons en relief ce type de variétés car nous retrouvons souvent les espaces de Berwald dans la littérature finslerienne pour "tester" des caractérisations en géométrie finslerienne, ces espaces étant plus proprement finsleriens que les variétés riemanniennes et les variétés localement minkowskiennes.

Théorème 74 *Une variété de Finsler-Ehresmann de type de Berwald généralisé en dimension $n = 3$, dont la distribution horizontale est intégrable, est conformément R -plate si et seulement si :*

(i) *Le $(1, 1; 0)$ -tenseur de Schouten S obéit à la règle de symétrie :*

$$S(\pi_* Y, X) = S(\pi_* X, Y)$$

(ii) *La dérivation covariante du $(0, 1; 1)$ -tenseur de Schouten s est telle que :*

$$(\nabla_X s)(Y) - (\nabla_Y s)(X) = 0, \quad \forall X, Y \in \mathcal{H}$$

Preuve. En utilisant le théorème 59, nous pouvons dire qu'en dimension 3, pour toute variété de Finsler-Ehresmann de type de Berwald nous avons $W^{HH} = 0$. Donc nous aurons seulement les deux conditions (b) et (c) du théorème 72 (c'est-à-dire (i) et (ii)).

■

3.5 Variété de Finsler-Ehresmann conformément plate

Une variété Finsler-Ehresmann (M, F, \mathcal{H}_0) est conformément plate si il existe $u \in C^\infty(M)$ tel que $(M, \tilde{F} = \exp u \cdot F, \mathcal{H}_0)$ est localement minkowskienne. Dans le paragraphe précédent pour les variétés conformément R -plates, nous avons pu transformer le problème géométrique lié à l'existence de u en un problème algébrique en annonçant des conditions nécessaires et suffisantes. Pour les variétés de Finsler-Ehresmann conformément plates, l'écriture des conditions d'intégrabilité semblent plus complexes. Dans ce paragraphe, nous retraduisons les équations différentielles quasi-linéaires pour u en équations quasi-linéaires en un champ ζ de π^*TM et nous énonçons certaines conditions nécessaires pour que (M, F, \mathcal{H}_0) soit conformément plate. Ces conditions ne sont pas algébriques, mais dépendent seulement d'une section ζ de π^*TM . L'existence de la fonction u sera alors liée à la possibilité de ce champ ζ à être un gradient de u , $\zeta = \nabla u$.

Nous énonçons d'abord une petite proposition 75 pour décrire ce problème géométrique essentiellement lié à l'existence de u .

Proposition 75 *Une variété de Finsler-Ehresmann (M, F, \mathcal{H}_0) est conformément plate si et seulement si*

$$\mathcal{A}(X, Y, Z) = A(\theta(X), \pi_* Y, \pi_* Z) + A(\theta(Y), \pi_* Z, \pi_* X) - A(\theta(Z), \pi_* X, \pi_* Y) = 0$$

et si il existe u ($u \in C^\infty(M)$) tel que :

$$\begin{cases} W = -\Psi(\nabla u) - b_u^V \odot g \\ b_u^H = S \end{cases} \quad (3.106)$$

où $\Psi(\nabla u) = \Psi_u$ est le $(2, 2; 0)$ -tenseur croisé donné par (3.19).

Preuve. Nous utilisons principalement les formules de transformation (3.68) :

$$\begin{cases} W \longrightarrow \tilde{W} = \exp(2u) (W + \Psi_u + b_u^V \odot g) \\ S \longrightarrow \tilde{S} = S - b_u^H \end{cases}$$

En utilisant le théorème 40, nous pouvons déduire que lorsqu'une variété (M, F, \mathcal{H}_0) est conformément plate (c'est-à-dire $(M, \tilde{F} = \exp u \cdot F, \mathcal{H}_0)$ est localement minkowskienne (définition 36 page 53), la hh -courbure riemannienne \tilde{R} et la hv -courbure de Minkowski \tilde{P} sont nulles. De même nous avons $\mathcal{A} = 0$. Notre construction (3.56) du tenseur W nous donnera également $\tilde{W} = 0$. Ceci implique (en utilisant (3.68)) que

$$W = -\Psi(\nabla u) - b_u^V \odot g$$

De plus lorsque $\tilde{S} = 0$ nous avons, toujours en utilisant (3.68),

$$S = b_u^H$$

Le chemin inverse est immédiat, si nous avons $W = -\Psi(\nabla u) - b_u^V \odot g$ et $S = b_u^H$, l'utilisation de (3.69) que nous rappelons :

$$\tilde{\Phi} = \exp(2u) \{W + \Psi_u + b_u^V \odot g\} - (S - b_u^H) \odot \tilde{g}$$

Nous permet de déduire que $\tilde{\Phi} = 0$, et comme $\tilde{\Phi} = \tilde{R} + \tilde{P}$ représente la somme de deux tenseurs indépendants nuls, il s'en suit que :

$$\tilde{R} = 0 \quad \text{et} \quad \tilde{P} = 0$$

Et par conséquent, puisque nous avons aussi $\mathcal{A} = 0$, toujours d'après le théorème 40, $(M, \tilde{F}, \mathcal{H}_0)$ est localement minkowskienne. Ceci achève notre preuve. ■

Rappelons que nous avons énoncé dans la proposition 75 des conditions pour décrire ce problème géométrique essentiellement lié à l'existence de u . A présent, nous énonçons certaines conditions nécessaires, pour que (M, F, \mathcal{H}_0) soit conformément plate. Bien que ces conditions ne soient pas algébriques, elle ne dépendent tout de même que d'une section ζ de π^*TM .

Proposition 76 *Soit (M, F, \mathcal{H}_0) une variété de Finsler-Ehresmann de dimension $n \geq 3$. Si cette variété est conformément plate, alors il existe une section ζ de π^*TM telle que :*

- (a) *Le tenseur de Weyl est tel que : $W = -\Psi(\zeta) - b_\zeta^V \odot g$*
- (b) *Le $(1, 1; 0)$ -tenseur de Schouten S obéit à la règle de symétrie :*

$$S(\pi_*Y, X) - S(\pi_*X, Y) = 0$$

- (c) *La dérivation covariante du $(0, 1; 1)$ -tenseur de Schouten s obéit à l'équation :*

$$(\nabla_X s)(Y) - (\nabla_Y s)(X) = -\psi(\zeta)(X, Y)\zeta - \overline{(b_\zeta^V \odot g)}(X, Y)$$

où Ψ est le $(3, 2; 0)$ -tenseur croisé. Quand à $\psi(\zeta)$ et $\overline{b_\zeta^V \odot g}$, ce sont les $(1, 2; 1)$ versions de $\Psi(\zeta)$ et de $b_\zeta^V \odot g$, respectivement.

Rappelons que Ψ est le $(3, 2; 0)$ -tenseur croisé, introduit en (3.18), est donné par :

$$\begin{aligned} \Psi(\zeta)(\xi, \eta, X, Y) &= \Psi(\zeta, \xi, \eta, X, Y) \\ &= 2A(\theta(X), \zeta, \xi)g(\eta, \pi_*Y) - 2A(\theta(Y), \zeta, \xi)g(\eta, \pi_*X) \\ &\quad + 2[A(\theta(Y), \pi_*X, \xi) - A(\theta(X), \pi_*Y, \xi)]g(\zeta, \eta) \end{aligned}$$

avec A définissant le tenseur de Cartan et θ la forme de Ehresmann. La $(1, 2; 1)$ version de $\Psi(\zeta)$, c'est-à-dire, $g(\psi(\zeta)(X, Y)\xi, \eta) = \Psi(\zeta)(\xi, \eta, X, Y)$ ou de manière équivalente le $(2, 2; 1)$ -tenseur $\psi(\zeta, \xi, X, Y) = \psi(\zeta)(X, Y)\xi$ est donné par (3.73). Et b_ζ^V est une forme définie à partir de b_u^V par :

$$b_\zeta^V(\xi, X) = H_\zeta^V(\xi, X) = g(\nabla_{X^v}(\zeta), \xi)$$

Et nous rappelons aussi que $\overline{(b_\zeta^V \odot g)}$ est donnée par (3.79).

Preuve. Si la variété finslerienne (M, F, \mathcal{H}_0) est conformément plate, alors il existe u tel que $\exp u \cdot F$ est plat et les équations (3.106) de la proposition 75 sont alors vérifiées, donc

$$W = -\Psi(\nabla u) - b_u^V \odot g$$

et il suffit de poser $\zeta = \nabla u$ pour avoir (a).

Pour prouver (b), nous utilisons encore une fois les équations (3.106) qui nous donnent $b_u^H = S$. Et comme $\zeta = \nabla u$, nous pouvons utiliser le lemme 68 pour déduire que

$$\nabla_{X^H} \zeta = s(X^H) + g(\zeta, \pi_* X) \zeta - \frac{1}{2} g(\zeta, \zeta) \pi_* X \quad (3.107)$$

Et d'autre part, le fait que ζ soit un gradient nous permet d'utiliser l'équation (C.1) (voir le lemme 79 en annexe) :

$$g(\nabla_{X^H} \zeta, \pi_* Y) - g(\nabla_{Y^H} \zeta, \pi_* X) = 0$$

Et si nous développons cette équation en remplaçant $\nabla_X \zeta$ par son expression (3.107) :

$$\begin{aligned} & g(\pi_* Y, s(X)) + g(\zeta, \pi_* X) g(\zeta, \pi_* Y) - \frac{1}{2} g(\zeta, \zeta) g(\pi_* X, \pi_* Y) \quad (3.108) \\ & - g(\pi_* X, s(Y)) - g(\zeta, \pi_* Y) g(\zeta, \pi_* X) + \frac{1}{2} g(\zeta, \zeta) g(\pi_* Y, \pi_* X) \\ & = 0 \end{aligned}$$

nous obtenons :

$$g(\pi_* Y, s(X)) - g(\pi_* X, s(Y)) = 0$$

ou en d'autres termes, ceci correspond à la condition (b) :

$$S(\pi_* Y, X) - S(\pi_* X, Y) = 0$$

Il nous reste à prouver que (c) est également satisfaite. En posant $\Lambda = \nabla \zeta$, nous commençons par écrire :

$$\begin{aligned} \nabla_X (\nabla_Y \zeta) - \nabla_Y (\nabla_X \zeta) &= \nabla_X (\Lambda(Y)) - \nabla_Y (\Lambda(X)) \quad (3.109) \\ &= (\nabla_X \Lambda)(Y) - (\nabla_Y \Lambda)(X) + \Lambda([X, Y]) \end{aligned}$$

Et d'autre part comme

$$\begin{aligned} \nabla_X (\nabla_Y \zeta) - \nabla_Y (\nabla_X \zeta) &= \phi(X, Y) \zeta + \nabla_{[X, Y]} \zeta \quad (3.110) \\ &= \phi(X, Y) \zeta + \Lambda([X, Y]) \end{aligned}$$

L'identification de (3.109) et (3.110) nous permet d'écrire :

$$(\nabla_X \Lambda)(Y) - (\nabla_Y \Lambda)(X) = \phi(X, Y) \zeta \quad (3.111)$$

Nous prouvons ensuite que cette équation (3.111) est équivalente à l'équation suivante :

$$(\nabla_X s)(Y) - (\nabla_Y s)(X) = w(X, Y) \zeta \quad (3.112)$$

Nous rappelons que même si nous utilisons la notation $s(X)$, nous gardons à l'esprit que c'est $s(X^H)$ car $s(X^V) = 0$. En utilisant (3.109) et en remplaçant $\Lambda(Y)$ par son expression (3.107) nous avons :

$$\begin{aligned}
(\nabla_X \Lambda)(Y) - (\nabla_Y \Lambda)(X) &= \nabla_X (\Lambda(Y)) - \nabla_Y (\Lambda(X)) - \Lambda([X, Y]) & (3.113) \\
&= \nabla_X \left[s(Y) + g(\zeta, \pi_* Y) \zeta - \frac{1}{2} g(\zeta, \zeta) \pi_* Y \right] \\
&\quad - \nabla_Y \left[s(X) + g(\zeta, \pi_* X) \zeta - \frac{1}{2} g(\zeta, \zeta) \pi_* X \right] \\
&\quad - \left[s([X, Y]) + g(\zeta, \pi_* [X, Y]) \zeta - \frac{1}{2} g(\zeta, \zeta) \pi_* [X, Y] \right]
\end{aligned}$$

et comme $\nabla_X (s(Y)) - \nabla_Y (s(X)) - s([X, Y]) = (\nabla_X s)(Y) - (\nabla_Y s)(X)$ nous avons :

$$\begin{aligned}
(\nabla_X \Lambda)(Y) - (\nabla_Y \Lambda)(X) &= (\nabla_X s)(Y) - (\nabla_Y s)(X) & (3.114) \\
&\quad + g(\nabla_X \zeta, \pi_* Y) \zeta + g(\zeta, \nabla_X \pi_* Y) \zeta + (\nabla_X g)(\zeta, \pi_* Y) \zeta \\
&\quad + g(\zeta, \pi_* Y) \nabla_X \zeta - \frac{1}{2} g(\nabla_X \zeta, \zeta) \pi_* Y - \frac{1}{2} g(\zeta, \nabla_X \zeta) \pi_* Y \\
&\quad - \frac{1}{2} (\nabla_X g)(\zeta, \zeta) \pi_* Y - \frac{1}{2} g(\zeta, \zeta) \nabla_X (\pi_* Y) - g(\nabla_Y \zeta, \pi_* X) \zeta \\
&\quad - g(\zeta, \nabla_Y \pi_* X) \zeta - (\nabla_Y g)(\zeta, \pi_* X) \zeta - g(\zeta, \pi_* X) \nabla_Y \zeta \\
&\quad + \frac{1}{2} g(\nabla_Y \zeta, \zeta) \pi_* X + \frac{1}{2} g(\zeta, \nabla_Y \zeta) \pi_* X + \frac{1}{2} (\nabla_Y g)(\zeta, \zeta) \pi_* X \\
&\quad + \frac{1}{2} g(\zeta, \zeta) \nabla_Y (\pi_* X) - g(\zeta, \pi_* [X, Y]) \zeta + \frac{1}{2} g(\zeta, \zeta) \pi_* [X, Y]
\end{aligned}$$

et en utilisant les simplifications dues aux crochets ($\nabla_X (\pi_* Y) - \nabla_Y (\pi_* X) = \pi_* [X, Y]$), l'expression (3.114) devient :

$$\begin{aligned}
(\nabla_X \Lambda)(Y) - (\nabla_Y \Lambda)(X) &= (\nabla_X s)(Y) - (\nabla_Y s)(X) \\
&\quad + g(\nabla_X \zeta, \pi_* Y) \zeta - g(\nabla_Y \zeta, \pi_* X) \zeta + g(\zeta, \pi_* Y) \nabla_X \zeta - g(\zeta, \pi_* X) \nabla_Y \zeta \\
&\quad - g(\nabla_X \zeta, \zeta) \pi_* Y + g(\nabla_Y \zeta, \zeta) \pi_* X
\end{aligned}$$

et en utilisant l'expression (C.1) que nous rappelons :

$$g(\nabla_X \zeta, \pi_* Y) - g(\nabla_Y \zeta, \pi_* X) = 0$$

nous obtenons :

$$\begin{aligned}
(\nabla_X \Lambda)(Y) - (\nabla_Y \Lambda)(X) &= (\nabla_X s)(Y) - (\nabla_Y s)(X) & (3.115) \\
&\quad + g(\zeta, \pi_* Y) \nabla_X \zeta - g(\zeta, \pi_* X) \nabla_Y \zeta \\
&\quad - g(\nabla_X \zeta, \zeta) \pi_* Y + g(\nabla_Y \zeta, \zeta) \pi_* X
\end{aligned}$$

et en utilisant encore une fois l'expression de $\nabla_X \zeta$ donnée par (3.107) nous avons :

$$\begin{aligned}
(\nabla_X \Lambda)(Y) - (\nabla_Y \Lambda)(X) &= (\nabla_X s)(Y) - (\nabla_Y s)(X) \\
&+ g(\zeta, \pi_* Y) s(X) + g(\zeta, \pi_* Y) g(\zeta, \pi_* X) \zeta - \frac{1}{2} g(\zeta, \zeta) g(\zeta, \pi_* Y) \pi_* X \\
&- g(\zeta, \pi_* X) s(Y) - g(\zeta, \pi_* X) g(\zeta, \pi_* Y) \zeta + \frac{1}{2} g(\zeta, \zeta) g(\zeta, \pi_* X) \pi_* Y \\
&- g(s(X), \zeta) \pi_* Y - g(\zeta, \pi_* X) g(\zeta, \zeta) \pi_* Y + \frac{1}{2} g(\zeta, \zeta) g(\pi_* X, \zeta) \pi_* Y \\
&+ g(s(Y), \zeta) \pi_* X + g(\zeta, \pi_* Y) g(\zeta, \zeta) \pi_* X - \frac{1}{2} g(\zeta, \zeta) g(\pi_* Y, \zeta) \pi_* X
\end{aligned} \tag{3.116}$$

Après les simplifications nécessaires et en utilisant le fait que $(\nabla_X \Lambda)(Y) - (\nabla_Y \Lambda)(X) = \phi(X, Y) \zeta$ nous avons :

$$\begin{aligned}
\phi(X, Y) \zeta &= (\nabla_X s)(Y) - (\nabla_Y s)(X) \\
&+ g(\zeta, \pi_* Y) s(X) - g(\zeta, \pi_* X) s(Y) - g(s(X), \zeta) \pi_* Y \\
&+ g(s(Y), \zeta) \pi_* X
\end{aligned} \tag{3.117}$$

et finalement, l'utilisation de (3.82) (ou de (3.83)) que nous rappelons :

$$\begin{aligned}
w(X, Y) \xi &= \phi(X, Y) \xi + g(s(X), \xi) \pi_* Y - g(\xi, \pi_* Y) s(X) \\
&+ g(\pi_* X, \xi) s(Y) - g(s(Y), \xi) \pi_* X
\end{aligned}$$

nous permet d'écrire l'équation (3.117) sous forme de :

$$(\nabla_X s)(Y) - (\nabla_Y s)(X) = w(X, Y) \zeta \tag{3.118}$$

Puisque la condition (a) est satisfaite nous avons $W = -\Psi(\zeta) - b_\zeta^V \odot g$. Par ailleurs, la version (1, 2; 1) du produit de Kulkarni $b_\zeta^V \odot g$, notée $\overline{b_\zeta^V \odot g}$ dans (3.79) s'écrit comme :

$$\begin{aligned}
\overline{(b_\zeta^V \odot g)}(X, Y) \xi &= b_\zeta^V(\xi, X) \pi_* Y - g(\xi, \pi_* Y) \nabla_{X^\vee} \zeta \\
&+ g(\xi, \pi_* X) \nabla_{Y^\vee} \zeta - b_\zeta^V(\xi, Y) \pi_* X
\end{aligned}$$

Le (1, 2; 1)-tenseur w s'écrit alors lorsque la condition (a) est satisfaite comme :

$$w(X, Y) \xi = -\psi(\zeta)(X, Y) \xi - \overline{(b_\zeta^V \odot g)}(X, Y) \xi \tag{3.119}$$

L'équation (3.118) devient alors lorsque nous remplaçons w par son expression donnée par (3.119) :

$$\begin{aligned}
(\nabla_X s)(Y) - (\nabla_Y s)(X) &= -\psi(\zeta)(X, Y) \zeta - \overline{(b_\zeta^V \odot g)}(X, Y) \\
&= -\psi(\zeta)(X, Y) \xi - [b_\zeta^V(\xi, X) \pi_* Y - g(\xi, \pi_* Y) \nabla_{X^\vee} \zeta \\
&\quad + g(\xi, \pi_* X) \nabla_{Y^\vee} \zeta - b_\zeta^V(\xi, Y) \pi_* X]
\end{aligned}$$

La condition (c) est alors prouvée. ■

Chapitre 4

Moyennisation d'une métrique de Randers basée sur une métrique euclidienne

Ce chapitre est tout-à-fait indépendant du reste de la thèse. Il y a toutefois un lien avec la géométrie conforme des variétés finsleriennes, puisque la méthode de moyennisation dont nous parlons est motivée par des problèmes de géométrie conforme. En particulier, on trouve cette moyennisation à la base de la solution de la conjecture de Lichnerowicz-Obata conjecture par Matveev, Rademacher, Troyanov et Zeghib [MRTZ09].

Considérons une variété Finslerienne (M, F) , alors sont définis dans l'espace tangent $T_x M$ en un point quelconque $x \in M$ d'une part la "boule unité" $B_x = \{y \in T_x M \mid F(x, y) < 1\} \subset T_x M$, et d'autre part le tenseur fondamental $g(x, y)$. En choisissant une mesure de Lebesgue quelconque sur T_x , on définit

$$\hat{g}(\xi, \eta) = \int_{B_x} g_{(x,y)}(\xi, \eta) dy$$

puis

$$\tilde{g}(\xi, \eta) = \frac{1}{\text{vol}(B_x)} \hat{g}(\xi, \eta).$$

Le tenseur obtenu \tilde{g} est une métrique riemannienne sur M appelée la moyennisation de la métrique finslerienne F . La construction est indépendante du choix d'une mesure de Lebesgue sur $T_x M$ et est compatible avec les déformations conformes de la métrique finslerienne F .

Le but de ce chapitre est de traiter un exemple. Nous calculons explicitement la moyennisation d'une classe de métrique de Randers en dimension 2. Le choix d'un tel exemple a été initialement motivé par une caractéristique très particulière des espaces de Randers qui est la possibilité de décrire des problèmes de géométrie finslérienne par le problème de navigation de Zermelo [Zer35], [Ser06], [BR04] et [BRS04]. De plus, les espaces de Randers ont des propriétés conformes très simples à étudier [IH89]. Nous utilisons un espace de Randers avec une métrique euclidienne toute simple pour illustrer une moyennisation. Nous constatons que les calculs, bien que faisables, aboutissent au final à des expressions difficilement manipulables.

4.1 Métrique de Randers à la base d'une métrique euclidienne

En 1941, G. Randers [Ran41] s'intéressa à une certaine classe de variétés finslériennes, ce sont des variétés (M, F) où la structure finslérienne F est une *métrique de Randers*, c'est-à-dire de la forme

$$F(x, y) = \alpha(x, y) + \beta(x, y) \quad (4.1)$$

où $\alpha(x, y) = \sqrt{a_{ij}(x) y^i y^j}$ et $\beta(x, y) = b_i(x) y^i$. Les $a_{ij}(x)$ sont les composantes d'une métrique riemannienne et les $b_i(x)$ sont ceux d'une 1-forme avec x appartenant à M .

Nous considérons dans ce chapitre une métrique de Randers construite à partir de la métrique euclidienne standard δ_{ij} . En particulier une métrique de Randers à deux dimensions telle que $a_{ij} = \delta_{ij}$, le carré de F a la forme :

$$\begin{aligned} F^2 &= \delta_{ij} y^i y^j + (b_i y^i)^2 + 2\sqrt{a_{ij}(x) y^i y^j} \cdot b_k(x) y^k \\ &= (y^1)^2 + (y^2)^2 + b_1^2 (y^1)^2 + b_2^2 (y^2)^2 + 2b_1 b_2 y^1 y^2 \\ &\quad + 2\sqrt{(y^1)^2 + (y^2)^2} \cdot (b_1 y^1 + b_2 y^2) \end{aligned} \quad (4.2)$$

Nous calculons les composantes du tenseur fondamental (g_{ij}) , $g_{ij} = \frac{1}{2} (F^2)_{y^i y^j}$ pour cette métrique particulière. Afin d'alléger les notations, nous utilisons u et v pour désigner

y^1 et y^2 , nous utiliserons également la notation $(F^2)_{ij}$ pour désigner $(F^2)_{y^i y^j}$

$$\begin{aligned}
(F^2)_{11} &= \frac{\partial^2}{(\partial u)^2} \left[(u)^2 + (v)^2 + b_1^2 u^2 + b_2^2 v^2 + 2b_1 b_2 uv + 2\sqrt{u^2 + v^2} \cdot (b_1 u + b_2 v) \right] \\
&= 2(b_1^2 + 1) + 2u \frac{b_1}{\sqrt{u^2 + v^2}} + 2b_1 \left[\frac{2u}{\sqrt{u^2 + v^2}} - \frac{u^3}{(u^2 + v^2)^{\frac{3}{2}}} \right] \\
&\quad + 2vb_2 \left[\frac{1}{\sqrt{u^2 + v^2}} - \frac{u^2}{(u^2 + v^2)^{\frac{3}{2}}} \right] \\
(F^2)_{12} = (F^2)_{21} &= 2b_1 b_2 + \frac{2b_1 v}{\sqrt{v^2 + u^2}} - \frac{2vu^2 b_1}{(v^2 + u^2)^{\frac{3}{2}}} + 2b_2 u \left[\frac{1}{\sqrt{v^2 + u^2}} - \frac{v^2}{(v^2 + u^2)^{\frac{3}{2}}} \right] \\
(F^2)_{22} &= 2(b_2^2 + 1) + \frac{2b_2 v}{\sqrt{v^2 + u^2}} + 2b_2 \left[\frac{2v}{\sqrt{v^2 + u^2}} - \frac{v^3}{(v^2 + u^2)^{\frac{3}{2}}} \right] \\
&\quad + 2b_1 u \left[\frac{1}{\sqrt{v^2 + u^2}} - \frac{v^2}{(v^2 + u^2)^{\frac{3}{2}}} \right]
\end{aligned}$$

4.2 Moyennisation de la métrique

Nous effectuons la moyennisation des composantes du tenseur fondamental g_{ij} ,

$$\hat{g}_{ij} = \int_{F^2 \leq 1} g_{ij} dudv = \frac{1}{2} \int_{F^2 \leq 1} (F^2)_{ij} dudv \quad (4.3)$$

Pour cela, il est plus pratique d'utiliser les coordonnées polaires

$$\begin{cases} u = r \cos \theta \\ v = r \sin \theta \end{cases}$$

Commençons par traduire la contrainte $F^2 \leq 1$ en coordonnées polaires :

$$\begin{aligned}
F^2 &= r^2 [\cos^2 \theta + \sin^2 \theta + b_1^2 \cos^2 \theta + b_2^2 \sin^2 \theta + 2b_1 b_2 \cos \theta \sin \theta \\
&\quad + 2(b_1 \cos \theta + b_2 \sin \theta)] \\
&= r^2 [(b_1 \cos \theta + b_2 \sin \theta)^2 + 1 + 2(b_1 \cos \theta + b_2 \sin \theta)] \\
&= r^2 (b_1 \cos \theta + b_2 \sin \theta + 1)^2
\end{aligned}$$

Donc $F^2 \leq 1$ impliquera que

$$r \leq \frac{1}{b_1 \cos \theta + b_2 \sin \theta + 1}$$

Et quant aux composantes du tenseur fondamental, nous obtenons

$$g_{11} = (b_1^2 + 1) + 3b_1 \cos \theta - b_1 \cos^3 \theta + b_2 \sin^3 \theta$$

et

$$\begin{aligned} g_{12} &= g_{21} = b_1 b_2 + b_1 \sin \theta - b_1 \sin \theta \cos^2 \theta + b_2 \cos \theta (1 - \sin^2 \theta) \\ &= b_1 b_2 + b_1 \sin \theta (1 - \cos^2 \theta) + b_2 \cos \theta (1 - \sin^2 \theta) \\ &= b_1 b_2 + b_1 \sin^3 \theta + b_2 \cos^3 \theta \\ g_{22} &= (b_2^2 + 1) + 3b_2 \sin \theta - b_2 \sin^3 \theta + b_1 \cos^3 \theta \end{aligned}$$

La moyennisation (4.3) des termes ci-dessus s'écrit alors :

$$\hat{g}_{11} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{[(b_1^2 + 1) + 3b_1 \cos \theta - b_1 \cos^3 \theta + b_2 \sin^3 \theta]}{(b_1 \cos \theta + b_2 \sin \theta + 1)^2} d\theta$$

et

$$\hat{g}_{12} = \hat{g}_{21} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{b_1 b_2 + b_1 \sin^3 \theta + b_2 \cos^3 \theta}{(b_1 \cos \theta + b_2 \sin \theta + 1)^2} d\theta$$

quant à \hat{g}_{22} , il s'écrit comme :

$$\hat{g}_{22} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{[(b_2^2 + 1) + 3b_2 \sin \theta - b_2 \sin^3 \theta + b_1 \cos^3 \theta]}{(b_1 \cos \theta + b_2 \sin \theta + 1)^2} d\theta$$

Rappelons que ces intégrales simples ont été obtenues après une première intégration suivant r de

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\left(\frac{1}{b_1 \cos \theta + b_2 \sin \theta + 1}\right)} g_{ij} r dr d\theta$$

Nous effectuons le changement de variables :

$$\cos \theta = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \sin \theta = \frac{2t}{1+t^2}, \quad d\theta = \frac{2}{1+t^2} dt, \quad -\infty \leq t \leq +\infty \quad (4.4)$$

Les composantes \hat{g}_{12} deviennent alors :

$$\begin{aligned} \hat{g}_{12} = \hat{g}_{21} &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{b_1 b_2 + b_1 \left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^3 + b_2 \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^3}{\left(b_1 \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right) + b_2 \left(\frac{2t}{1+t^2}\right) + 1\right)^2} \frac{2}{1+t^2} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{b_1 b_2 (t^2 + 1)}{((1-b_1)t^2 + 2b_2 t + b_1 + 1)^2} dt \\ &\quad + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{8b_1 t^3 + b_2 (-t^6 + 3t^4 - 3t^2 + 1)}{(t^2 + 1)^2 ((1-b_1)t^2 + 2b_2 t + b_1 + 1)^2} dt \end{aligned}$$

Quant aux composantes \hat{g}_{11} nous avons :

$$\begin{aligned}\hat{g}_{11} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(b_1^2 + 1) + 3b_1 \frac{1-t^2}{1+t^2} - b_1 \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^3 + b_2 \left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^3}{\left(b_1 \frac{1-t^2}{1+t^2} + b_2 \left(\frac{2t}{1+t^2}\right) + 1\right)^2} \frac{1}{1+t^2} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^2 (b_1^2 - 3b_1 + 1) + (b_1^2 + 3b_1 + 1)}{((1-b_1)t^2 + 2b_2t + b_1 + 1)^2} dt \\ &\quad + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{b_1 (t^6 - 3t^4 + 3t^2 - 1) + 8b_2t^3}{(1+t^2)^2 ((1-b_1)t^2 + 2b_2t + b_1 + 1)^2} dt\end{aligned}$$

Et \hat{g}_{22} s'écrit comme :

$$\begin{aligned}\hat{g}_{22} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(b_2^2 + 1)t^2 + 6b_2t + (b_2^2 + 1)}{((1-b_1)t^2 + 2b_2t + b_1 + 1)^2} dt \\ &\quad + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{-8b_2t^3 - b_1(t^6 - 3t^4 + 3t^2 - 1)}{(1+t^2)^2 (b_1(1-t^2) + 2b_2t + 1 + t^2)^2} dt\end{aligned}$$

Les expressions ci-dessus peuvent se réécrire comme :

$$\hat{g}_{12} = \hat{g}_{21} = b_1 b_2 (I_1 + I_2) + b_2 (J_0 - 3J_2 + 3J_4 - J_6) + 8b_1 J_3 \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned}\hat{g}_{11} &= (b_1^2 + 3b_1 + 1) I_0 + (b_1^2 - 3b_1 + 1) I_2 - b_1 (J_0 - 3J_2 + 3J_4 - J_6) \\ &\quad + 8b_2 J_3\end{aligned} \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned}\hat{g}_{22} &= (b_2^2 + 1) I_0 + 6b_2 I_1 + (b_2^2 + 1) I_2 + b_1 (J_0 - 3J_2 + 3J_4 - J_6) \\ &\quad - 8b_2 J_3\end{aligned} \quad (4.7)$$

où les intégrales I_i , $i = 0, 1, 2$ sont données par :

$$\begin{aligned}I_0 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{((1-b_1)t^2 + 2b_2t + b_1 + 1)^2} dt \\ I_1 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t}{((1-b_1)t^2 + 2b_2t + b_1 + 1)^2} dt \\ I_2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^2}{((1-b_1)t^2 + 2b_2t + b_1 + 1)^2} dt\end{aligned}$$

et les intégrales J_i , $i = 0, 2, 3, 4$ et 6 sont données par

$$\begin{aligned} J_0 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(t^2 + 1)^2 ((1 - b_1)t^2 + 2b_2t + b_1 + 1)^2} dt \\ J_2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^2}{(t^2 + 1)^2 ((1 - b_1)t^2 + 2b_2t + b_1 + 1)^2} dt \\ J_3 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^3}{(t^2 + 1)^2 ((1 - b_1)t^2 + 2b_2t + b_1 + 1)^2} dt \\ J_4 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^4}{(t^2 + 1)^2 ((1 - b_1)t^2 + 2b_2t + b_1 + 1)^2} dt \\ J_6 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^6}{(t^2 + 1)^2 ((1 - b_1)t^2 + 2b_2t + b_1 + 1)^2} dt \end{aligned}$$

Donc, de manière plus compacte, nous définissons I_k et J_k comme :

$$\begin{cases} I_k = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^k}{((1-b_1)t^2+2b_2t+b_1+1)^2} dt \\ J_k = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^k}{(t^2+1)^2((1-b_1)t^2+2b_2t+b_1+1)^2} dt \end{cases} \quad (4.8)$$

En désignant par J la somme :

$$J = J_0 - 3J_2 + 3J_4 - J_6 \quad (4.9)$$

les formules (4.5), (4.6) et (4.7) s'écrivent comme

$$\hat{g}_{12} = \hat{g}_{21} = b_1 b_2 (I_0 + I_2) + b_2 J + 8b_1 J_3 \quad (4.10)$$

$$\hat{g}_{11} = (b_1^2 + 3b_1 + 1) I_0 + (b_1^2 - 3b_1 + 1) I_2 - b_1 J + 8b_2 J_3 \quad (4.11)$$

$$\hat{g}_{22} = (b_2^2 + 1) I_0 + 6b_2 I_1 + (b_2^2 + 1) I_2 + b_1 J - 8b_2 J_3 \quad (4.12)$$

Une manière plus pratique pour la suite est d'écrire (4.10), (4.11) et (4.12) sous forme de :

$$\hat{g}_{12} = \hat{g}_{21} = b_1 b_2 (I_0 + I_2) + b_2 J + 8b_1 J_3 \quad (4.13)$$

$$\hat{g}_{11} = (b_1^2 + 1) (I_0 + I_2) + 3b_1 (I_0 - I_2) - b_1 J + 8b_2 J_3 \quad (4.14)$$

$$\hat{g}_{22} = (b_2^2 + 1) (I_0 + I_2) + 6b_2 I_1 + b_1 J - 8b_2 J_3 \quad (4.15)$$

Et si nous introduisons encore deux notations supplémentaires Θ et Θ' :

$$\begin{cases} \Theta = -b_1 J + 8b_2 J_3 \\ \Theta' = b_2 J + 8b_1 J_3 \end{cases} \quad (4.16)$$

où J est la somme définie par (4.9). Les composantes \hat{g}_{ij} s'écrivent comme :

$$\hat{g}_{12} = \hat{g}_{21} = b_1 b_2 (I_0 + I_2) + \Theta' \quad (4.17)$$

$$\hat{g}_{11} = (b_1^2 + 1) (I_0 + I_2) + 3b_1 (I_0 - I_2) + \Theta \quad (4.18)$$

$$\hat{g}_{22} = (b_2^2 + 1) (I_0 + I_2) + 6b_2 I_1 - \Theta \quad (4.19)$$

L'avantage des écritures (4.17), (4.18) et (4.19) est de faire ressortir les différentes symétries présentes dans les différentes composantes. Par exemple elles laissent entrevoir une partie de \hat{g}_{11} clairement opposée en signe à une partie de \hat{g}_{22} .

Nous écrivons (\hat{g}_{ij}) sous forme matricielle afin de mieux deviner son "allure" :

$$(\hat{g}_{ij}) = \begin{pmatrix} (b_1^2 + 1) (I_0 + I_2) + 3b_1 (I_0 - I_2) + \Theta & b_1 b_2 (I_0 + I_2) + \Theta' \\ b_1 b_2 (I_0 + I_2) + \Theta' & (b_2^2 + 1) (I_0 + I_2) + 6b_2 I_1 - \Theta \end{pmatrix} \quad (4.20)$$

Remarque 77 Pour obtenir la moyennisation, il faut encore diviser par le volume de la boule unité. Elle vaut

$$\begin{aligned} \text{vol}(B) &= \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{(b_1 \cos \theta + b_2 \sin \theta + 1)^{-1}} r dr d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(b_1 \cos \theta + b_2 \sin \theta + 1)^2} \end{aligned} \quad (4.21)$$

Le calcul de l'aire (4.21) se fait rapidement en utilisant comme précédemment le changement de variables (4.4), nous obtenons :

$$\text{vol}(B) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+t^2}{((1-b_1)t^2 + 2b_2t + b_1 + 1)^2} dt = I_0 + I_2 \quad (4.22)$$

4.3 Calcul explicite des intégrales

Le calcul explicite de toutes les intégrales I_j et J_i n'a pas pu, pour le moment, être effectué même en utilisant des logiciels de calcul tel que Maple (ou même WolframAlpha). En effet, même en donnant différentes valeurs numériques à b_1 et à b_2 , Maple ne permet pas le calcul de J_0 , de J_2 , de J_3 , de J_4 et de J_6 . Seul des primitives de I_0 , de I_1 et de I_2

ont pu être données :

$$\begin{aligned}
I_0 &= \frac{1}{2} \frac{(b_1 - 1)t - b_2}{(1 - (b_1^2 + b_2^2))((b_1 - 1)t^2 - 2b_2t - b_1 - 1)} \Big|_{-\infty}^{+\infty} \\
&\quad - \frac{1}{2} \frac{(b_1 - 1) \operatorname{arctanh} \left(\frac{(b_1 - 1)t - b_2}{\sqrt{-(1 - (b_1^2 + b_2^2))}} \right)}{(1 - (b_1^2 + b_2^2)) \sqrt{-(1 - (b_1^2 + b_2^2))}} \Big|_{-\infty}^{+\infty} \\
I_1 &= \frac{1}{2} \frac{(b_2t + b_1 + 1)}{(1 - (b_1^2 + b_2^2))((b_1 - 1)t^2 - 2b_2t - b_1 - 1)} \Big|_{-\infty}^{+\infty} \\
&\quad - \frac{1}{2} \frac{b_2 \operatorname{arctanh} \left(\frac{(b_1 - 1)t - b_2}{\sqrt{-(1 - (b_1^2 + b_2^2))}} \right)}{(1 - (b_1^2 + b_2^2)) \sqrt{-(1 - (b_1^2 + b_2^2))}} \Big|_{-\infty}^{+\infty} \\
I_2 &= \frac{1}{2} \frac{1}{(b_1 - 1)} \left[\frac{(b_1^2 + 2b_2^2 - 1)t + b_2(b_1 + 1)}{(1 - (b_1^2 + b_2^2))((b_1 - 1)t^2 - 2b_2t - b_1 - 1)} \right] \Big|_{-\infty}^{+\infty} \\
&\quad - \frac{1}{2} \frac{1}{(b_1 - 1)} \left[\frac{(b_1^2 + 2b_2^2 - 1) \operatorname{arctanh} \left(\frac{(b_1 - 1)t - b_2}{\sqrt{-(1 - (b_1^2 + b_2^2))}} \right)}{(1 - (b_1^2 + b_2^2)) \sqrt{-(1 - (b_1^2 + b_2^2))}} \right] \Big|_{-\infty}^{+\infty} \\
&\quad - \frac{\operatorname{arctanh} \left(\frac{(b_1 - 1)t - b_2}{\sqrt{-(1 - (b_1^2 + b_2^2))}} \right)}{(b_1 - 1) \sqrt{-(1 - (b_1^2 + b_2^2))}} \Big|_{-\infty}^{+\infty}
\end{aligned}$$

Tous les termes dans I_0 , I_1 et I_2 sont formés par des fractions polynomiales sont nuls. De plus, la condition $|b|^2 = b_1^2 + b_2^2 < 1$ nous permet d'écrire $\sqrt{-(1 - (b_1^2 + b_2^2))}$ sous forme de $i\sqrt{(1 - (b_1^2 + b_2^2))}$. Nous utilisons ensuite la relation :

$$\frac{\operatorname{arctanh}(ix)}{i} = \arctan x$$

L'intégrale I_0 devient alors :

$$\begin{aligned} I_0 &= \frac{1}{2} \frac{(b_1 - 1) \operatorname{arctanh} \left(i \frac{(b_1 - 1)t - b_2}{\sqrt{1 - (b_1^2 + b_2^2)}} \right)}{(1 - (b_1^2 + b_2^2)) i \sqrt{1 - (b_1^2 + b_2^2)}} \Bigg|_{-\infty}^{+\infty} \\ &= \frac{1}{2} \frac{(b_1 - 1)}{(1 - (b_1^2 + b_2^2))^{\frac{3}{2}}} \operatorname{arctan} \left(\frac{(b_1 - 1)t - b_2}{\sqrt{1 - (b_1^2 + b_2^2)}} \right) \Bigg|_{-\infty}^{+\infty} \end{aligned}$$

Et puisque $\operatorname{arctan}(\infty) = \frac{\pi}{2}$, I_0 s'écrit finalement comme

$$I_0 = -\frac{\pi}{2} \frac{(b_1 - 1)}{(1 - (b_1^2 + b_2^2))^{\frac{3}{2}}}$$

De la même manière nous calculons I_1 et I_2 :

$$I_1 = -\frac{\pi}{2} \frac{b_2}{(1 - (b_1^2 + b_2^2))^{\frac{3}{2}}}$$

et

$$\begin{aligned} I_2 &= -\frac{1}{2} \frac{1}{(b_1 - 1)} \frac{(b_1^2 + 2b_2^2 - 1) \pi}{(1 - (b_1^2 + b_2^2)) \sqrt{1 - (b_1^2 + b_2^2)}} - \frac{\pi}{(b_1 - 1) \sqrt{1 - (b_1^2 + b_2^2)}} \\ &= -\frac{\pi}{(b_1 - 1)} \left[\frac{1}{2} \frac{(b_1^2 + 2b_2^2 - 1)}{(1 - (b_1^2 + b_2^2)) \sqrt{1 - (b_1^2 + b_2^2)}} + \frac{1}{\sqrt{1 - (b_1^2 + b_2^2)}} \right] \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} I_2 &= -\frac{\pi}{(b_1 - 1)} \left[\frac{1}{2} \frac{(b_1^2 + 2b_2^2 - 1) + 2(1 - (b_1^2 + b_2^2))}{(1 - (b_1^2 + b_2^2))^{\frac{3}{2}}} \right] \\ &= -\frac{\pi}{2(b_1 - 1)} \left[\frac{-b_1^2 + 1}{(1 - (b_1^2 + b_2^2))^{\frac{3}{2}}} \right] \\ &= \frac{\pi}{2} \frac{b_1 + 1}{(1 - (b_1^2 + b_2^2))^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

Comme nous avons déjà pu le constater dans (4.20), tous les termes en dehors de Θ et Θ' ne comportent que les intégrales I_0 , I_1 et I_2 (les seuls calculables), alors que les intégrales non calculables J_j définies dans (4.8) sont toutes regroupées dans Θ et Θ' (qui apparaissent de manière symétrique). Cela nous incite à effectuer des manipulations afin de contourner cette difficulté et essayer de deviner l'allure de (\hat{g}_{ij}) sans avoir à calculer Θ et Θ' .

4.4 Résultat pour la forme de la métrique moyennisée

Pour le moment, commençons par calculer les expressions de $(I_0 + I_2)$ et de $(I_0 - I_2)$ qui apparaissent dans les composantes \hat{g}_{ij}

$$\begin{aligned} I_0 + I_2 &= -\frac{\pi}{2} \frac{(b_1 - 1)}{(1 - (b_1^2 + b_2^2))^{\frac{3}{2}}} + \frac{\pi}{2} \frac{b_1 + 1}{(1 - (b_1^2 + b_2^2))^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{\pi}{(1 - (b_1^2 + b_2^2))^{\frac{3}{2}}} \end{aligned} \quad (4.23)$$

et

$$\begin{aligned} I_0 - I_2 &= -\frac{\pi}{2} \frac{(b_1 - 1)}{(1 - (b_1^2 + b_2^2))^{\frac{3}{2}}} - \frac{\pi}{2} \frac{b_1 + 1}{(1 - (b_1^2 + b_2^2))^{\frac{3}{2}}} \\ &= -\frac{\pi b_1}{(1 - (b_1^2 + b_2^2))^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

Récapitulons :

$$\begin{cases} I_0 + I_2 = \frac{\pi}{(1 - (b_1^2 + b_2^2))^{\frac{3}{2}}} \\ I_0 - I_2 = -\frac{\pi b_1}{(1 - (b_1^2 + b_2^2))^{\frac{3}{2}}} \end{cases} \quad (4.24)$$

Les composantes \hat{g}_{ij} ont alors une forme plus explicite :

$$\begin{aligned} \hat{g}_{12} &= \hat{g}_{21} = \frac{\pi b_1 b_2}{(1 - (b_1^2 + b_2^2))^{\frac{3}{2}}} + \Theta' \\ \hat{g}_{11} &= (b_1^2 + 1) \left(\frac{\pi}{(1 - (b_1^2 + b_2^2))^{\frac{3}{2}}} \right) - 3b_1 \left(\frac{\pi b_1}{(1 - (b_1^2 + b_2^2))^{\frac{3}{2}}} \right) + \Theta \\ &= \frac{\pi(1 - 2b_1^2)}{(1 - (b_1^2 + b_2^2))^{\frac{3}{2}}} + \Theta \\ \hat{g}_{22} &= (b_2^2 + 1) \left(\frac{\pi}{(1 - (b_1^2 + b_2^2))^{\frac{3}{2}}} \right) - 6b_2 \left(\frac{\pi}{2} \frac{b_2}{(1 - (b_1^2 + b_2^2))^{\frac{3}{2}}} \right) - \Theta \\ &= \frac{\pi(1 - 2b_2^2)}{(1 - (b_1^2 + b_2^2))^{\frac{3}{2}}} - \Theta \end{aligned}$$

c'est-à-dire en résumé nous avons :

$$\begin{cases} \hat{g}_{12} = \hat{g}_{21} = \frac{\pi b_1 b_2}{(1 - |b|^2)^{\frac{3}{2}}} + \Theta' \\ \hat{g}_{11} = \frac{\pi(1 - 2b_1^2)}{(1 - |b|^2)^{\frac{3}{2}}} + \Theta \\ \hat{g}_{22} = \frac{\pi(1 - 2b_2^2)}{(1 - |b|^2)^{\frac{3}{2}}} - \Theta \end{cases}, \quad \begin{cases} \Theta = -b_1 J + 8b_2 J_3 \\ \Theta' = b_2 J + 8b_1 J_3 \end{cases} \quad (4.25)$$

La matrice (4.20) devient :

$$(\hat{g}_{ij}) = \begin{pmatrix} \frac{\pi(1-2b_1^2)}{(1-|b|^2)^{\frac{3}{2}}} + \Theta & \frac{\pi b_1 b_2}{(1-|b|^2)^{\frac{3}{2}}} + \Theta' \\ \frac{\pi b_1 b_2}{(1-|b|^2)^{\frac{3}{2}}} + \Theta' & \frac{\pi(1-2b_2^2)}{(1-|b|^2)^{\frac{3}{2}}} - \Theta \end{pmatrix} \quad (4.26)$$

On peut aisément voir que la trace de cette matrice vaut :

$$\begin{aligned} \text{trace } \hat{g}_{ij} &= \frac{2\pi(1-b_1^2-b_2^2)}{(1-|b|^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{2\pi}{\sqrt{1-|b|^2}} \end{aligned} \quad (4.27)$$

Le calcul explicite de l'aire (4.22) donne en utilisant (4.23) :

$$\text{vol}(B) = I_0 + I_2 = \frac{\pi}{(1-(b_1^2+b_2^2))^{\frac{3}{2}}} = \frac{\pi}{(1-(|b|^2))^{\frac{3}{2}}} \quad (4.28)$$

Nous pouvons alors réécrire (4.26) en divisant par $\text{vol}(B_x)$ pour avoir la métrique moyennisée \tilde{g} :

$$(\tilde{g}_{ij}) = \frac{1}{\text{vol}(B)} (\hat{g}_{ij}) = \begin{pmatrix} (1-2b_1^2) + \frac{1}{\text{vol}(B)}\Theta & b_1 b_2 + \frac{1}{\text{vol}(B)}\Theta' \\ b_1 b_2 + \frac{1}{\text{vol}(B)}\Theta' & (1-2b_2^2) - \frac{1}{\text{vol}(B)}\Theta \end{pmatrix} \quad (4.29)$$

En conclusion, les résultats de ce chapitre nous montrent que la métrique Riemannienne obtenue par moyennisation du tenseur fondamental est effectivement calculable dans des cas relativement simples tels qu'une métrique de Randers en dimension 2. La métrique obtenue dans les formules (4.26) et (4.29) est toutefois d'une grande complexité. Si l'on souhaite par exemple comparer la courbure de la métrique finslerienne avec celle de sa moyennisée, il faudrait sans doute renoncer aux calculs exacts et tenter d'aborder ce type de problème par des méthodes numériques.

Cas particuliers

Afin de mieux méditer sur la forme de ces composantes \hat{g}_{ij} , nous les calculons dans quelques cas particuliers extrêmes :

Cas où $b_1 = b_2 = 0$

Lorsque $b_1 = b_2 = 0$, nous avons $\Theta = \Theta' = 0$, les composantes de la matrice (4.26) se résumeront à :

$$\hat{g}_{12} = \hat{g}_{21} = 0 \quad (4.30)$$

$$\hat{g}_{11} = \hat{g}_{22} = \pi \quad (4.31)$$

Ce qui donne

$$(\tilde{g}_{ij}) = \frac{1}{\pi} (\hat{g}_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ceci est un cas trivial. La trace de la matrice (\hat{g}_{ij}) vaut 2π , ce qui est conforme au résultat (4.27) lorsque nous posons $b_1 = b_2 = 0$.

Cas où $b_1 = b_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}b$

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{g}_{12} = \hat{g}_{21} = \frac{1}{2} \frac{\pi b^2}{(1-|b|^2)^{\frac{3}{2}}} + \Theta' \\ \hat{g}_{11} = \frac{\pi}{\sqrt{(1-|b|^2)}} + \Theta \\ \hat{g}_{22} = \frac{\pi}{\sqrt{(1-|b|^2)}} - \Theta \end{array} \right. , \quad \left\{ \begin{array}{l} \Theta = \frac{\sqrt{2}}{2}b(-J + 8J_3) \\ \Theta' = \frac{\sqrt{2}}{2}b(J + 8J_3) \end{array} \right.$$

Cas où $b_1 = -b_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}b$

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{g}_{12} = \hat{g}_{21} = -\frac{1}{2} \frac{\pi b^2}{(1-|b|^2)^{\frac{3}{2}}} + \Theta' \\ \hat{g}_{11} = \frac{\pi}{\sqrt{(1-|b|^2)}} + \Theta \\ \hat{g}_{22} = \frac{\pi}{\sqrt{(1-|b|^2)}} - \Theta \end{array} \right. , \quad \left\{ \begin{array}{l} \Theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}b(J + 8J_3) \\ \Theta' = \frac{\sqrt{2}}{2}b(-J + 8J_3) \end{array} \right. \quad (4.32)$$

Cas où $b_1 = -b_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}b$

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{g}_{12} = \hat{g}_{21} = -\frac{1}{2} \frac{\pi b^2}{(1-|b|^2)^{\frac{3}{2}}} + \Theta' \\ \hat{g}_{11} = \frac{\pi}{\sqrt{(1-|b|^2)}} + \Theta \\ \hat{g}_{22} = \frac{\pi}{\sqrt{(1-|b|^2)}} - \Theta \end{array} \right. , \quad \left\{ \begin{array}{l} \Theta = \frac{\sqrt{2}}{2}b(J + 8J_3) \\ \Theta' = \frac{\sqrt{2}}{2}b(J - 8J_3) \end{array} \right. \quad (4.33)$$

Cas où $b_1 = b, b_2 = 0$

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{g}_{12} = \hat{g}_{21} = \Theta' \\ \hat{g}_{11} = \frac{\pi(1-2b^2)}{(1-|b|^2)^{\frac{3}{2}}} + \Theta \\ \hat{g}_{22} = \frac{\pi}{(1-|b|^2)^{\frac{3}{2}}} - \Theta \end{array} \right. , \quad \left\{ \begin{array}{l} \Theta = -bJ \\ \Theta' = 8bJ_3 \end{array} \right. \quad (4.34)$$

Cas où $b_1 = 0, b_2 = b$

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{g}_{12} = \hat{g}_{21} = \Theta' \\ \hat{g}_{11} = \frac{\pi}{(1-|b|^2)^{\frac{3}{2}}} + \Theta \\ \hat{g}_{22} = \frac{\pi(1-2b^2)}{(1-|b|^2)^{\frac{3}{2}}} - \Theta \end{array} \right. , \quad \left\{ \begin{array}{l} \Theta = 8bJ_3 \\ \Theta' = bJ \end{array} \right. \quad (4.35)$$

Tableau récapitulatif

Nous dressons un tableau récapitulatif des quelques cas particuliers considérés :

b_i	\hat{g}_{ij}	Θ, Θ'
$b_1 = b_2 = 0$	$\begin{cases} \hat{g}_{12} = \hat{g}_{21} = 0 \\ \hat{g}_{11} = \pi \\ \hat{g}_{22} = \pi \end{cases}$	
$b_1 = b_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}b$	$\begin{cases} \hat{g}_{12} = \hat{g}_{21} = \frac{1}{2} \frac{\pi b^2}{(1- b ^2)^{\frac{3}{2}}} + \Theta' \\ \hat{g}_{11} = \frac{\pi}{\sqrt{(1- b ^2)}} + \Theta \\ \hat{g}_{22} = \frac{\pi}{\sqrt{(1- b ^2)}} - \Theta \end{cases}$	$\begin{cases} \Theta = \frac{\sqrt{2}}{2}b(-J + 8J_3) \\ \Theta' = \frac{\sqrt{2}}{2}b(J + 8J_3) \end{cases}$
$b_1 = -b_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}b$	$\begin{cases} \hat{g}_{12} = \hat{g}_{21} = -\frac{1}{2} \frac{\pi b^2}{(1- b ^2)^{\frac{3}{2}}} + \Theta' \\ \hat{g}_{11} = \frac{\pi}{\sqrt{(1- b ^2)}} + \Theta \\ \hat{g}_{22} = \frac{\pi}{\sqrt{(1- b ^2)}} - \Theta \end{cases}$	$\begin{cases} \Theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}b(J + 8J_3) \\ \Theta' = \frac{\sqrt{2}}{2}(-J + 8J_3) \end{cases}$
$b_1 = -b_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}b$	$\begin{cases} \hat{g}_{12} = \hat{g}_{21} = -\frac{1}{2} \frac{\pi b^2}{(1- b ^2)^{\frac{3}{2}}} + \Theta' \\ \hat{g}_{11} = \frac{\pi}{\sqrt{(1- b ^2)}} + \Theta \\ \hat{g}_{22} = \frac{\pi}{\sqrt{(1- b ^2)}} - \Theta \end{cases}$	$\begin{cases} \Theta = \frac{\sqrt{2}}{2}b(I + 8J_3) \\ \Theta' = \frac{\sqrt{2}}{2}b(I - 8J_3) \end{cases}$
$b_1 = b, b_2 = 0$	$\begin{cases} \hat{g}_{12} = \hat{g}_{21} = \Theta' \\ \hat{g}_{11} = \frac{\pi(1-2b^2)}{(1- b ^2)^{\frac{3}{2}}} + \Theta \\ \hat{g}_{22} = \frac{\pi}{(1- b ^2)^{\frac{3}{2}}} - \Theta \end{cases}$	$\begin{cases} \Theta = -bI \\ \Theta' = 8bJ_3 \end{cases}$
$b_1 = 0, b_2 = b$	$\begin{cases} \hat{g}_{12} = \hat{g}_{21} = \Theta' \\ \hat{g}_{11} = \frac{\pi}{(1- b ^2)^{\frac{3}{2}}} + \Theta \\ \hat{g}_{22} = \frac{\pi(1-2b^2)}{(1- b ^2)^{\frac{3}{2}}} - \Theta \end{cases}$	$\begin{cases} \Theta = 8bJ_3 \\ \Theta' = bI \end{cases}$

Annexes

A. Preuve de la proposition 13

Proposition 78 (13) *Soit ∇ une connexion linéaire sans torsion sur le fibré tangent d'une variété de dimension finie M . Soit x un point appartenant à M . Si la courbure de ∇ s'annule dans un voisinage de x , alors, il existe un système de coordonnées locales (x^i) de x dans lequel tous les coefficients de connexion Γ_{jk}^i sont nuls.*

Preuve. Supposons que la courbure R est nulle. Soit (x^i) n'importe quel système de coordonnées locales défini sur un ouvert U contenant notre point $x \in M$.

Étape 1. La première étape consiste à montrer que n'importe quel vecteur $X(x) \in T_x M$ peut être étendu à un champ vectoriel X constant ($\nabla X = 0$) sur U . En d'autres termes ce champ devra satisfaire à $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} X = 0, \forall i$ (il va de soit $\nabla_Z X = 0, \forall Z$). Pour cela procédons de la manière suivante. Soit $\gamma(x^1) = (x^1, 0, \dots, 0)$ la x^1 -courbe coordonnées passant à travers x . En translatant parallèlement $X(x)$ le long de γ (en d'autres termes le long de l'axe x^1), en chaque point de γ nous avons un vecteur $X(x^1, 0, \dots, 0)$ et une x^2 -courbe coordonnée σ . En translatant ce vecteur $X(x^1, 0, \dots, 0)$ le long de σ , nous étendons alors $X(x)$ vers un champ $X(x^1, x^2, \dots, 0)$ sur la $x^1 x^2$ -surface coordonnée Σ passant par x , c'est-à-dire $\Sigma(x^1, x^2) = (x^1, x^2, \dots, 0)$. Comme $R = 0$ sur U , et par conséquent sur Σ , nous avons :

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^1}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^2}} X - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^2}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^1}} X = 0 \quad \text{sur } \Sigma \quad (\text{A.1})$$

Par construction, $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^2}} X = 0$ sur Σ (pour le moment $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^1}} X$ est nul sur $\Sigma(x^1, 0)$ uniquement). Par conséquent (A.1) nous dit que $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^1}} X$ est parallèle le long de la x^2 -courbe coordonnée σ passant par le point $\gamma(x^1)$. Toujours par construction on sait que $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^1}} X = 0$ en $\gamma(x^1)$, donc par linéarité du transport parallèle (de ∇), $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^1}} X$ doit être nul sur toute

σ . Comme c'est valable pour toute courbe x^2 -courbe coordonnée traversant γ , nous avons alors $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} X = 0$ sur Σ . On peut continuer de la même manière jusqu'à obtention d'un champ X sur U satisfaisant à $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} X = 0, \forall i$ ou de manière équivalente :

$$\nabla_Z X = 0, \quad \forall Z$$

Et même encore mieux, par le même procédé qu'avec un X quelconque, on peut étendre les n vecteurs d'une base orthonormée $X_1(x), \dots, X_n(x)$ (et même n'importe quelle base de $T_x M$) vers une collection de champs X_1, \dots, X_n sur U tels que

$$\nabla_Z X_i = 0, \quad \forall Z, \quad i = 0, \dots, n$$

Etape 2. En vertu de la symétrie de la connexion ∇ nous avons :

$$\nabla_{X_i} X_j - \nabla_{X_j} X_i - [X_i, X_j] = 0$$

Et comme $\nabla_Z X_i = 0, \forall Z$ il s'en suit que $[X_i, X_j] = 0$. Par un théorème de la géométrie différentielle élémentaire, nous savons que si (X_1, \dots, X_n) sont des champs de vecteurs indépendants qui commutent dans un voisinage de $x \in M$, alors il existe des coordonnées (y^i) sur un voisinage (peut être plus petit) de x telles que :

$$X_i = \frac{\partial}{\partial y^i}$$

La preuve de ce théorème constitue un passage clé dans la démonstration du théorème de Frobenius.

Etape 3. Maintenant que nous savons qu'il existe des coordonnées (y^i) pour lesquelles $X_i = \frac{\partial}{\partial y^i}$ et que nous savons d'après la première étape que les champs X_i sont parallèles ($\nabla X_i = 0$), nous avons $\nabla_{\frac{\partial}{\partial y^i}} \frac{\partial}{\partial y^j} = 0$ dans tout le voisinage, ce qui revient à annuler Γ_{jk}^i :

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial y^k}} \left(\frac{\partial}{\partial y^j} \right) = \Gamma_{jk}^i \frac{\partial}{\partial x^i} = 0$$

■

B. Complément pour la preuve du théorème 19

Tableau récapitulatif expliquant pourquoi nous obtenons au total 2 sous-formules possibles (2.29) et (2.31) de la formule (2.24).

(X, Y, Z)	$g(\nabla_X(\pi_*Y), \pi_*Z) = \frac{1}{2} [X(g(\pi_*Y, \pi_*Z)) + Y(g(\pi_*Z, \pi_*X)) - Z(g(\pi_*X, \pi_*Y)) + g([\pi_*X, \pi_*Y], \pi_*Z) - g([\pi_*Y, \pi_*Z], \pi_*X) + g([\pi_*Z, \pi_*X], \pi_*Y)] - A(X, Y, Z)$
(X^H, Y^H, Z^H) $(\frac{\delta}{\delta x^i}, \frac{\delta}{\delta x^j}, \frac{\delta}{\delta x^k})$	$g(\nabla_X^H(\pi_*Y^H), \pi_*Z^H) = \frac{1}{2} [X^H(g(\pi_*Y^H, \pi_*Z^H)) + Y^H(g(\pi_*Z^H, \pi_*X^H)) - Z^H(g(\pi_*X^H, \pi_*Y^H)) + g([\pi_*X^H, \pi_*Y^H], \pi_*Z^H) - g([\pi_*Y^H, \pi_*Z^H], \pi_*X^H) + g([\pi_*Z^H, \pi_*X^H], \pi_*Y^H)]$ $\Gamma_{ji}^l = \frac{1}{2} g^{kl} \left[\frac{\delta g_{jk}}{\delta x^i} + \frac{\delta g_{ki}}{\delta x^j} - \frac{\delta g_{ij}}{\delta x^k} \right]$
(X^H, Y^H, Z^V) $(\frac{\delta}{\delta x^i}, \frac{\delta}{\delta x^j}, F \frac{\partial}{\partial y^k})$	$A(\theta(Z^V), \pi_*X^H, \pi_*Y^H) = \frac{1}{2} Z^V(g(\pi_*X^H, \pi_*Y^H))$ $A_{kij} = \frac{1}{2} F \frac{\partial g_{ij}}{\partial y^k}$
(X^H, Y^V, Z^H) $(\frac{\delta}{\delta x^i}, F \frac{\partial}{\partial y^j}, \frac{\delta}{\delta x^k})$	$A(\theta(Y^V), \pi_*Z^H, \pi_*X^H) = \frac{1}{2} Y^V(g(\pi_*X^H, \pi_*Z^H))$ $A_{jki} = \frac{1}{2} F \frac{\partial g_{ik}}{\partial y^j}$
(X^V, Y^H, Z^H) $(F \frac{\partial}{\partial y^i}, \frac{\delta}{\delta x^j}, \frac{\delta}{\delta x^k})$	$A(\theta(X^V), \pi_*Y^H, \pi_*Z^H) = \frac{1}{2} X^V(g(\pi_*Y^H, \pi_*Z^H))$ $A_{ijk} = \frac{1}{2} F \frac{\partial g_{jk}}{\partial y^i}$
(X^H, Y^V, Z^V) (X^V, Y^H, Z^V) (X^V, Y^V, Z^H) (X^V, Y^V, Z^V)	$0 = 0$

C. Champs dérivant d'un potentiel

Lemme 79 Soit (M, F, \mathcal{H}) une variété de Finsler-Ehresmann, et soit ζ une section du fibré π^*TM dont la base est \mathfrak{M} . Alors, ζ dérive localement d'un potentiel¹ (c'est-à-dire qu'il existe une fonction $u \in C^\infty(\mathfrak{M})$ telle que $\zeta = \nabla u$) si et seulement si

$$g(\pi_*Y, \nabla_X \zeta) - g(\pi_*X, \nabla_Y \zeta) = 0 \quad (\text{C.1})$$

pour tous vecteurs $X, Y \in T\mathfrak{M}$ horizontaux, où ∇ est la connexion de Chern généralisée.

Nous dirons que le $(0, 1; 1)$ -tenseur $\nabla\zeta$, obéissant à (C.1), est symétrique.

Preuve. Considérons deux champs X, Y sur \mathfrak{M} , la formule de Cartan [BCS00] nous dit que :

$$d\hat{\omega}(X, Y) = X\hat{\omega}(Y) - Y\hat{\omega}(X) - \hat{\omega}([X, Y]) \quad (\text{C.2})$$

Ici $\hat{\omega}$ désigne une section de $\overset{1}{\Lambda}(T^*\mathfrak{M})$, c'est le pull-back à travers π^* de ω appartenant à $\Gamma(\overset{1}{\Lambda}((\pi^*TM)^*))$, c'est-à-dire :

$$\hat{\omega}(X) = (\pi^*\omega)(X) = \omega(\pi_*X) \quad (\text{C.3})$$

Et comme nous avons $d(\pi^*\omega) = \pi^*d\omega$, c'est-à-dire que

$$d(\pi^*\omega)(X, Y) = (\pi^*d\omega)(X, Y) = d\omega(\pi_*X, \pi_*Y)$$

la formule (C.2) prend la forme de :

$$d\omega(\pi_*X, \pi_*Y) = X\omega(\pi_*Y) - Y\omega(\pi_*X) - \omega([\pi_*X, \pi_*Y]) \quad (\text{C.4})$$

L'avantage de la formule (C.4) par rapport à (C.2) est qu'elle nous permet de passer au tenseur fondamental g qui lui est une section symétrique de $\pi^*T^*M \otimes \pi^*T^*M$. Pour cela, considérons la forme différentielle associée à une section $\zeta \in \Gamma(\pi^*TM)$:

$$\omega = \zeta^\flat, \quad \zeta^\flat = g(\zeta, \cdot)$$

La formule (C.4) devient :

$$d\omega(\pi_*X, \pi_*Y) = X(g(\zeta, \pi_*Y)) - Y(g(\zeta, \pi_*X)) - g(\zeta, [\pi_*X, \pi_*Y]) \quad (\text{C.5})$$

¹Nous pouvons aussi dire que $\nabla\zeta$ est symétrique.

et en utilisant la propriété (2.14), l'équation (C.5) aura la forme :

$$\begin{aligned} d\omega(\pi_*X, \pi_*Y) &= g(\nabla_X\zeta, \pi_*Y) + g(\zeta, \nabla_X(\pi_*Y)) + 2A(\theta(X), \zeta, \pi_*Y) \\ &\quad - g(\nabla_Y\zeta, \pi_*X) - g(\zeta, \nabla_Y(\pi_*X)) - 2A(\theta(Y), \zeta, \pi_*X) \\ &\quad - g(\zeta, [\pi_*X, \pi_*Y]) \end{aligned}$$

Et en utilisant la propriété de symétrie (2.16), le terme

$$g(\zeta, \nabla_X(\pi_*Y)) - g(\zeta, \nabla_Y(\pi_*X)) - g(\zeta, [\pi_*X, \pi_*Y]) = 0$$

d'où :

$$\begin{aligned} d\omega(\pi_*X, \pi_*Y) &= g(\nabla_X\zeta, \pi_*Y) - g(\nabla_Y\zeta, \pi_*X) \\ &\quad + 2[A(\theta(X), \zeta, \pi_*Y) - A(\theta(Y), \zeta, \pi_*X)] \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

En particulier, lorsque X, Y sont horizontaux, $\theta(X) = \theta(Y) = 0$, on obtient

$$d\omega(\pi_*X, \pi_*Y) = g(\nabla_X\zeta, \pi_*Y) - g(\nabla_Y\zeta, \pi_*X) \quad (\text{C.7})$$

A partir de la formule (C.7) nous pouvons conclure que si ζ dérive d'une potentiel ($\zeta = \nabla u$), le terme à gauche de (C.7) $d\zeta^b = 0$, alors l'équation (C.1) est satisfaite et inversement, si l'équation (C.1) est satisfaite, le coté droit de (C.7) est nul, ce qui implique que $\zeta = \nabla u$. ■

Scholie 80 *La preuve nous montre que si ζ est un gradient, alors, si $X \in \mathcal{V}$ et $Y \in \mathcal{H}$ nous avons :*

$$g(\pi_*Y, \nabla_X\zeta) = -2A(\theta(X), \zeta, \pi_*Y) \quad (\text{C.8})$$

Plus généralement, pour des vecteurs X, Y quelconques nous avons :

$$g(\pi_*Y, \nabla_X\zeta) - g(\pi_*X, \nabla_Y\zeta) + 2[A(\theta(X), \zeta, \pi_*Y) - A(\theta(Y), \zeta, \pi_*X)] = 0 \quad (\text{C.9})$$

D. Un théorème d'intégrabilité

Proposition 81 *Considérons le système d'équations différentielles*

$$X_i(z^j) = S_i^j(u, z), \quad (1 \leq i \leq p, \quad 1 \leq j \leq q) \quad (\text{D.1})$$

où les X_i sont des champs de vecteurs définis sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^m$ et les S_j^i sont des fonctions C^∞ sur $U \times \mathbb{R}^q$. On suppose que les champs X_i sont en chaque point linéairement indépendants et commutent deux à deux :

$$[X_i, X_k] = 0$$

Alors le système (D.1) admet localement une solution

$$z^j = z^j(u^1, u^2, \dots, u^m)$$

si et seulement si

$$X_k(S_i^j(u, z(u))) = X_i(S_k^j(u, z(u))) \quad (\text{D.2})$$

Ce résultat se prouve à partir du théorème de Fobenius. Sous une forme un peu plus faible, il se trouve dans la référence [Lee06] (proposition 19.18, page 510). Notons que dans l'équation (D.2) les z^j sont considérées comme des fonctions de u et non comme des variables libres.

Guide de symboles et notations

- g_{ij} : tenseur fondamental, **page 8**
- A_{ijk} : tenseur de Cartan, **page 11**
- π^*TM : fibré rappelé, **page 11**
- $\mathfrak{N} = TM^0$: fibré tangent privé de la section nulle, **page 8**
- ∇u : gradient de u , **page 13**
- l : section distinguée, **page 13**
- ω : forme de Hilbert, **page 13**
- N_j^i : coefficients de la connexion de Ehresmann classique, **page 15**
- \mathcal{N}_j^i : coefficient de la connexion de Ehresmann arbitraire, **page 32**
- γ_{jk}^i : symboles de Christoffel formels, **page 17**
- Γ_{jk}^i : coefficients de la connexion de Chern (même notation pour Chern généralisée), **page 18**
- $\bar{\theta}$: forme de Ehresmann, **page 33**
- $\theta = \bar{\theta}/F$: forme de Ehresmann (homogène de degré 0 en y), **page 34**
- θ_c : **page 15**
- θ_0 : **page 59**
- \mathcal{H} et \mathcal{V} : sous-fibrés horizontal et vertical, **page 16**
- (M, F, \mathcal{H}) : variété de Finsler-Ehresmann, **page 33**
- $(M, F, \mathcal{H}_c) = (M, F)$: variété finslerienne classique, **page 40**
- (M, F, \mathcal{H}_0) : **page 59**
- \mathcal{A} : **page 40**

- $H_u(\eta, X)$: Hessien, **page 41**
- $H_u^H(\eta, X)$: Hessien horizontal, **page 41**
- $H_u^V(\eta, X)$: Hessien vertical, **page 41**
- Φ : le $(2, 2; 0)$ -tenseur de courbure complète, **page 47**
- ϕ : le $(1, 2; 1)$ -tenseur de courbure complète, **page 42**
- R : la hh -courbure (même notation pour les $(2, 2; 0)$ - et $(2, 2; 0)$ -tenseurs), **page 42 (47)**
- P : la hv -courbure de Minkowski (même notation pour les $(2, 2; 0)$ - et $(2, 2; 0)$ -tenseurs), **page 42 (47)**
- \odot : produit de Kulkarni-Nomizu, **page 44**
- W : le $(2, 2; 0)$ -tenseur de Weyl, **page 77**
- W^{HH} et W^{HV} : les composantes horizontale et verticale de W , **page 77**
- w : le $(1, 2; 1)$ -tenseur de Weyl, **page 85**
- w^{HH} et w^{HV} : les composantes horizontale et verticale de w , **page 86**
- $C^H(T)$: Contraction dans la direction horizontale du tenseur T , **page 76**
- $C^V(T)$: Contraction dans la direction verticale du tenseur T , **page 76**
- $C(T) = C^H(T) + C^V(T)$, **page 76**
- $\varphi = C(\Phi)$: contraction de la courbure totale, **page 76**
- $R_{ic} = C^H(\Phi)$: **page 76**
- $\bar{P} = C^V(\Phi)$: **page 76**
- S : le $(1, 1; 0)$ -tenseur de Schouten, **page 77**
- s : le $(0, 1; 1)$ -tenseur de Schouten, **page 89**
- $\sigma = C(\varphi)$: **page 77**
- $B(\xi, X)$: **page 61**
- Ψ : tenseur croisé (type $(3, 2; 0)$), **page 65**
- Ψ_ζ : contraction par un vecteur ζ (type $(2, 2; 0)$), **page 100**
- Ψ_u : contraction par ∇u , **page 65**
- ψ : version $(2, 2; 1)$ de Ψ , **page 84**

- $\psi(\zeta)$ (ou ψ_ζ) : version (1, 2; 1) de Ψ_ζ , **page 100**
- ψ_u : version (1, 2; 1) de Ψ_u , **page 84**
- $b_u(\xi, X)$: **page 72**
- $b_u^H(\xi, X)$: **page 65**
- $b_u^V(\xi, X)$: **page 65**
- $\overline{b_u^V \odot g}$: version (1, 2; 1) de $(b_u^V \odot g)$, **page 85**

Bibliographie

- [AIM93] P. L. Antonelli, R. S. Ingarden & M. Matsumoto, *The Theory of Sprays and Finsler Spaces with Applications in Physics and Biology*, Kluwer Academic Publishers, 1993.
- [Aus55] L. Auslander, "On curvature in Finsler geometry", *Trans. Amer. Math. Soc.* **79** (1955), 378–388.
- [BC93] D. Bao and S.-S. Chern, "On a Notable Connexion in Finsler Geometry", *Houston J. Math.* **19** (1) (1993), 135-180.
- [BCS95] D. Bao, S.-S. Chern and Z. Shen Editors, *Finsler Geometry*, American Mathematical Society 1995.
- [BCS00] D. Bao, S.-S. Chern and Z. Shen, *An Introduction to Riemann-Finsler Geometry*, Springer-Verlag, 2000.
- [BR03] D. Bao and C. Robles, "On Randers Spaces of Constant Flag Curvature", *Rep. on Math. Phys.* **51** (2003), 9-42.
- [BR04] D. Bao and C. Robles, "Ricci and Flag Curvatures in Finsler Geometry", in *A sampler of Riemann-Finsler Geometry*, D. Bao, R. L. Bryant, S.-S. Chern and Z. Shen (editors), MSRI Publications **50**, Cambridge University Press, 2004.
- [BRS04] D. Bao, C. Robles and Z. Shen, "Zermelo Navigation on Riemannian Manifolds", *J. Diff. Geom.* **66** (2004), 377-435.
- [Bus50] H. Busemann, "The Geometry of Finsler Spaces", *Bull. Amer. Math. Soc.* **56** (1), (1950), 5-16.
- [Car34] E. Cartan, *Les espaces de Finsler*, Actualités Scientifiques et Industrielles 79, Paris, Hermann, 1934.

- [Che96] S.-S. Chern, "Finsler Geometry Is Just Riemannian Geometry without the Quadratic Restriction", *AMS* **43** (9) (1996), 959-963.
- [CS05] S.-S. Chern and Z. Shen, *Riemann-Finsler Geometry*, World Scientific Publishing, 2005.
- [HJ03] U. Hertrich-Jeromin, *Introduction of Möbius Differential Geometry*, Cambridge University Press, 2003.
- [IH89] Y. Ichijyō and M. Hashiguchi, "On the Condition that Randers Space be Conformally Flat", *Rep. Fac. Sci., Kagoshima Univ.*, **22** (1989), 7-14.
- [IL03] T. Ivey and J. M. Landsberg, *Cartan for Beginners : Differential Geometry via Moving Frames and Exterior Differential Systems*, AMS 2003.
- [KN96] S. Kobayashi and K. Nomizu, *Foundations of Differential Geometry*, Vol I, Wiley-Intersciences publications, New York, 1996.
- [KMS93] I. Kolář, P. W. Michor and J. Slovák, *Natural Operations in differential Geometry*, Springer-Verlag, Berlin 1993.
- [Lee06] J. M. Lee, *Introduction to Smooth Manifolds*, Springer 2006.
- [Mo98] X. Mo, "Characterization and structure of Finsler spaces with constant flag curvature", *Scientia Sinica*, **41** (1998), 910-917.
- [Mo05] X. Mo, "Weyl Curvature of a Finsler Space", *Appl. Math. J. Chinese Univ. Ser. B.* **20**(1) (2005), 10-20.
- [Mo06] X. Mo, *An Introduction to Finsler Geometry*, World Scientific 2006.
- [MRTZ09] V. S. Matveev, H.-B. Rademacher, M. Troyanov et A. Zeghib, "Finsler Conformal Lichnerowicz-Obata Conjecture", *Ann. Inst. Fourier, Grenoble* **59** (3) (2009), 937-949.
- [Olv95] P. J. Olver, *Equivalence, Invariants, and Symmetry*, Cambridge Univ. Press, 1995.
- [Ran41] G. Randers, "On an Asymmetrical Metric in the Four-Space of General Relativity", *Phys. Rev.* **59** (1941), 195-199.
- [Ser06] U. Serres, "On the Curvature of two-Dimensional Optimal Control Systems and Zermelo's Navigation Problem", *J. Math. Sci.* **135** (2006), 3224-3243.

-
- [Sha97] R. W. Sharpe, *Differential Geometry- Cartan's Generalisation of Klein's Erlangen Program*, Springer 1997.m
- [She01a] Z. Shen, *Differential Geometry of Spray and Finsler Spaces*, Kluwer Academic Publishers 2001.
- [She01b] Z. Shen, *Lectures on Finsler Geometry*, World Scientific Publishing Co 2001.
- [She03] Z. Shen, "Finsler Metric with $K = 0$ and $S = 0$ ", *Canad. J. Math.* **55** (2003), 112-132.
- [Spi99] M. Spivak, *A comprehensive Introduction to Differential Geometry*, Volume II, Third edition, Houston 1999.
- [Zer35] E. Zemelo, "Über das Navigationsproblem bei ruhender oder veränderlicher Windverteilung", *Z. Angrew. Math. Mech.* **11** (1931), 114-124.

Curriculum vitae

Ratiba DJELID

Date de naissance : 8 janvier 1975

Nationalité : Algérienne

Mariée, 3 enfants

Formation :

- ▶ 1992 : Baccalauréat en sciences
- ▶ 1992-1996 : Diplôme d'études supérieures (D.E.S) en physique, option : **Physique des Rayonnements Nucléaires** à l'université des sciences et de la technologie Houari Boumediène (USTHB) à Alger.
- ▶ 1996-2000 : Thèse de Magister en physique à Alger, option **Physique Théorique**, intitulée : "*Modèle géométo-différentiel quantique de la particule étendue, lien entre l'espace interne et externe*". Sous la direction du Prof. Abdallah Smida.
 - ▶ **Publications pendant la thèse de magister :**
 - [HSD00] M. Hachemane, A. Smida and R. Djelid, "Functional Realization and Nonlinear Induced Representation in the Geometrodifferential Conception of Extended Particles", *Foundations of Physics* **29**(1999), 1479-1495.
 - [SHDH00] A. Smida, M. Hachemane, R. Djelid and A.-H. Hamici, "On External and Internal Properties of Extended Elementary Objects", *Foundations of Physics* **30**(2000), 287-299.
- ▶ 2000-2005 : —
- ▶ 2005-2010 : Doctorante en Mathématique à l'Ecole polytechnique fédérale de Lausanne sous la direction de Prof. Marc Troyanov.

Enseignement :

- ▶ 1999-2001 : Enseignement à l'université d'Alger, théorie quantique des champs (niveau 4ème année), physique générale (niveau première année).
- ▶ 2005-2010 : Assistanats en mathématiques à l'Ecole polytechnique fédérale de Lausanne et à l'université de Lausanne : Algèbre linéaire, Géométrie et mathématiques générales.