Les groupes d'homotopie supérieurs et la longue suite exacte d'une fibration

Par Laure Antonioli, EPFL.
Sous la direction de la Prof. Kathryn Hess-Bellwald.
Assistant responsable Patrick Müller.

17 décembre 2009

Table des matières

Introduction

Dans ce projet de topologie algébrique, il sera question des groupes d'homotopie supérieurs et de la longue suite exacte d'une fibration.

Dans une première partie, il s'agira de définir les groupes d'homotopie supérieurs, de citer quelques unes de leurs propriétés et de donner quelques résultats importants.

La seconde partie sera consacrée à la notion de fibré, après la définition de ce concept, on démontrera le théorème principal de ce projet, puis on exposera quelques exemples intéressants, il sera encore ensuite question des revêtements.

Dans une dernière partie, on abordera les espaces d'Eilenberg-MacLane, qui permettront de définir les groupes de cohomologie.

Brève note historique

Bien que les concepts que nous considérons actuellement comme faisant partie de la topologie aient été exprimés et utilisés par des mathématiciens au $19^{\text{ème}}$ siècle, en particulier Riemann, Klein et Poincaré, la topologie comme partie des mathématiques rigoureuses (c'est-à-dire avec des définitions précises et des démonstrations correctes) commença seulement vers 1900.

Au début, la topologie algébrique a évolué très lentement et n'attirait pas beaucoup de mathématiciens. A cette époque-là, les applications aux autres domaines des mathématiques étaient très restreintes. Cette situation a graduellement changé avec l'introduction d'outils algébriques plus puissants et la vision de Poincaré du rôle fondamental que la topologie devrait jouer dans toutes les théories mathématiques commença à se matérialiser. En 1896, Poincaré publia un article dans lequel il introduisit l'homologie, par ailleurs, il connaissait le groupe fondamental et il a également défini certains invariants topologiques. Les groupes d'homotopie supérieurs furent définis par Hurewicz en 1935 et leurs propriétés furent ensuite développées. Le concept de fibré apparut dans les années 1920, pour atteindre son état actuel à la fin de années 1940. Vers 1950, différents concepts nouveaux furent inventés comme celui de K-théorie.

Chapitre 1

Les groupes d'homotopie supérieurs

Il s'agit, dans cette première partie, tout d'abord, de définir le concept d'homotopie entre deux chemins, de donner une définition du groupe fondamental, puis de généraliser ce concept aux dimensions supérieures. On verra ensuite des propriétés et résultats utiles liés à ces définitions, dont le théorème de Whitehead et celui de Freudenthal.

Avant tout, il faut définir la notion de chemin.

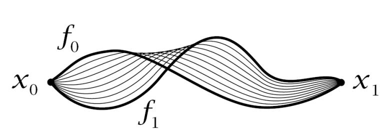
DÉFINITION 1.1. Un **chemin** dans un espace X est une application continue $f : I \to X$, où I est l'intervalle unitaire $[0, 1]$.

L'idée de déformer continûment un chemin en gardant ses extrémités fixées se précise par la définition suivante :

DÉFINITION 1.2. Une **homotopie** de chemins dans un espace X est une famille $f_t : I \to X,\ \ 0 \leq t \leq 1$, telle que

1. Les extrémités $f_t(0) = x_0$ et $f_t(1) = x_1$ sont indépendantes de t.
2. L'application associée $F : I \times I \to X$ définie par $F(s, t) = f_t(s)$ est continue.

Si deux chemins f_0 et f_1 sont ainsi connectés par une homotopie f_t, on dit alors qu'ils sont homotopes, et l'on note $f_0 \simeq f_1$.



Nous avons alors comme résultat que la relation d'homotopie de chemins à extrémités fixées est une relation d'équivalence.

La classe d'équivalence d'un chemin f par la relation d'homotopie est appelée la **classe d'homotopie** de f, et est notée $[f]$.

Étant donnés deux chemins f, $g : I \to X$ tels que $f(1) = g(0)$, on définit la **composition** de ces deux chemins par la formule

$$f \cdot g(s) = \begin{cases} f(2s), & 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ g(2s-1), & \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

On peut remarquer que cette opération de composition préserve les classes d'homotopie, ainsi si $f_0 \simeq f_1$ et $g_0 \simeq g_1$ par les homotopies f_t et g_t et si $f_0(1) = g_0(0)$ de sorte que $f_0 \cdot g_0$ est défini, alors $f_t \cdot g_t$ est défini et donne une homotopie $f_0 \cdot g_0 \simeq f_1 \cdot g_1$.

On peut alors définir la propriété d'extension d'homotopie.

Définition 1.3. Soit une application $f_0 : X \to Y$ et soit encore, sur un sous-espace $A \subset X$, une homotopie $f_t : A \to Y$ de $f_0 \mid_A$ que l'on aimerait étendre à une homotopie $f_t : X \to Y$ à partir de f_0 donné. Si une paire (X, A) est telle que le problème de l'extension peut toujours être résolu, on dit que (X, A) a la **propriété d'extension d'homotopie**. Ainsi (X, A) a la propriété d'extension d'homotopie si chaque application $X \times \{0\} \cup A \times I \to Y$ peut être étendue à une application $X \times I \to Y$.

A présent, nous pouvons donner la définition du groupe fondamental.

Définition 1.4. Dans un espace X, fixons un point $x_0 \in X$, appelé le **point de base**.

Un **lacet de base** x_0 est un chemin $f : I \to X$ tel que $f(0) = f(1) = x_0$.

Le **groupe fondamental** de X au point x_0 noté $\pi_1(X, x_0)$, est constitué des classes d'homotopie $[f]$ des lacets de base x_0.

On a alors que $\pi_1(X, x_0)$ est un groupe par rapport au produit $[f] \cdot [g] = [f \cdot g]$.

L'élément neutre de ce groupe est $[e_{x_0}]$, où pour $x_0 \in X$, e_{x_0} est le chemin constant, c'est-à-dire $e_{x_0}(t) = x_0$, $\forall t \in [0, 1]$.

Tout élément $[f]$ admet un inverse $[\bar{f}]$: si $f : [0, 1] \to X$ est un chemin, son inverse $\bar{f} : [0, 1] \to X$ est défini par $\bar{f}(t) = f(1 - t)$, $\forall t \in [0, 1]$.

Concernant l'associativité, on a

$$([f] \cdot [g]) \cdot [h] = [f \cdot g] \cdot [h] = [(f \cdot g) \cdot h] = [f \cdot (g \cdot h)] = [f] \cdot [g \cdot h] = [f] \cdot ([g] \cdot [h])$$

La troisième égalité est obtenue par reparamétrisation.

Nous pouvons maintenant définir les groupes d'homotopie supérieurs qui sont les analogues naturels en dimensions supérieures du groupe fondamental.

Définition 1.5. Soit I^n l'hypercube unitaire en dimension n, c'est-à-dire $I^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid 0 \leq x_i \leq 1, 1 \leq i \leq n\}$. Le bord ∂I^n de I^n est le sous-espace de tous les points avec au moins une coordonnée égale à 0 ou 1. Pour un espace X avec un point de base $x_0 \in X$, on définit $\pi_n(X, x_0)$ comme étant l'ensemble des classes d'homotopie des applications $f : (I^n, \partial I^n) \to (X, x_0)$, où les homotopies f_t doivent satisfaire $f_t(\partial I^n) = x_0$ pour tout t.

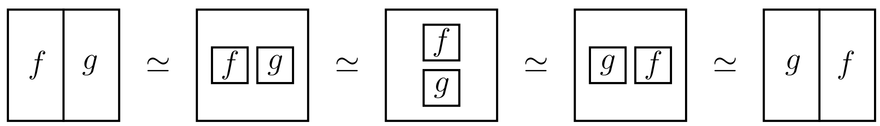
On peut étendre la définition au cas $n = 0$ en prenant I^0 comme étant un point et donc ∂I^0, étant l'ensemble vide, alors $\pi_0(X, x_0)$ est l'ensemble des composantes connexes de X.

Pour $n \geq 2$, une opération de somme dans $\pi_n(X, x_0)$, généralisant l'opération de composition dans π_1, est définie par

$$(f + g)(s_1, s_2, ..., s_n) = \begin{cases} f(2s_1, s_2, ..., s_n), & s_1 \in [0, \frac{1}{2}] \\ g(2s_1 - 1, s_2, ..., s_n), & s_1 \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Il est clair que cette somme est bien définie sur les classes d'homotopie. Comme la première composante est la seule impliquée dans l'opération de sommation, le raisonnement utilisé pour π_1 montre que $\pi_n(X, x_0)$ est un groupe. L'élément neutre étant l'application constante qui envoie I^n sur x_0 et les inverses étant donnés par $-f(s_1, s_2, ..., s_n) = f(1 - s_1, s_2, ..., s_n)$.

On utilise la notation additive pour l'opération de groupe, car $\pi_n(X, x_0)$ est abélien pour $n \geq 2$, c'est-à-dire, $f + g \simeq g + f$. On peut s'en convaincre en considérant l'homotopie représentée sur ce graphique.



Dans un premier temps, on réduit les domaines de f et de g en de plus petits sous-cubes de I^n, la région hors de ces sous-cubes étant mise en correspondance avec le point de base. Ensuite, on peut déplacer ces sous-cubes, qui restent disjoints, ainsi si $n \geq 2$, on peut interchanger leurs positions. Finalement, les domaines de f et g peuvent être agrandis pour retrouver leur taille d'origine.

On peut noter que les applications $(I^n, \partial I^n) \to (X, x_0)$ sont les mêmes que les applications du quotient $I^n/\partial I^n = S^n$ vers X prenant $s_0 = \partial I^n/\partial I^n$ comme point de base x_0. Ainsi, on peut aussi voir $\pi_n(X, x_0)$ comme les classes d'homotopie des applications $(S^n, s_0) \to (X, x_0)$, où les homotopies sont considérées à travers des applications de la même forme $(S^n, s_0) \to (X, x_0)$.

Il s'agit à présent de noter que si X est connexe par arcs, les différents choix de points de base x_0 produisent toujours des groupes $\pi_n(X, x_0)$ isomorphes, que l'on peut alors simplement écrire $\pi_n(X)$.

On a comme résultat que π_n peut être vu, en faisant référence à un concept de théorie des catégories, comme un foncteur.

Cette remarque amène une digression concernant des notions de théorie des catégories.

Notions de base de la théorie des catégories

Dans cette section concernant la théorie des catégories, on définira des concepts de base, dont celui de foncteur. Tout d'abord, on donne la définition d'un concept qui lui est inhérent, celui de catégorie.

On rappelle tout d'abord qu'un morphisme est une application entre deux ensembles munis d'une même sorte de structure algébrique, qui respecte cette structure.

DÉFINITION 1.6. Une **catégorie** $\mathcal{C}$ consiste en une classe d'objets et, pour chaque paire d'objets A, B, un ensemble de morphismes $\mathcal{C}(A, B)$, qui peut être vide, et ayant comme domaine A et comme codomaine B. Pour chaque triple d'objets A, B, C, il existe une fonction

$$\mathcal{C}(A, B) \times \mathcal{C}(B, C) \to \mathcal{C}(A, C)$$

associant à une paire de morphismes $f : A \to B$, $g : B \to C$ leur composée $g \circ f : A \to C$.

Les deux axiomes suivants devant être satisfaits :

Associativité : Si $f : A \to B$, $g : B \to C$ et $h : C \to D$, alors

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f : A \to D$$

.

Identité : Pour chaque objet B, il existe un morphisme $1_B : B \to B$, tel que si l'on a un morphisme $f : A \to B$, alors $1_B \circ f = f$, et si l'on a un morphisme $g : B \to C$, alors $g \circ 1_B = g$

On donne alors des exemples de catégories.

EXEMPLES 1.7.

1. La catégorie $\mathcal{S}et$ des ensembles et des fonctions, qui est la catégorie dont les objets sont tous les ensembles, et pour des ensembles A, B, $\mathcal{S}et(A, B)$ est l'ensemble des fonctions de A vers B.
2. La catégorie $\mathcal{T}op$ des espaces topologiques et des applications continues.
3. La catégorie $\mathcal{G}$ des groupes et des homomorphismes de groupe.
4. La catégorie $\mathcal{A}b$ des groupes abéliens et des homomorphismes de groupe.
5. La catégorie $\mathcal{V}ect$ des espaces vectoriels et des transformations linéaires.

6. La catégorie $\mathcal{M}od_A$ des modules sur un anneau A et des homomorphismes de modules.
7. Il existe une catégorie dont les objets sont les points d'un espace, et les morphismes sont les classes d'homotopie des chemins entre ces points. Cette catégorie s'appelle le groupoïde fondamental d'un espace.
8. Un groupe peut être vu comme une catégorie avec un objet, $*$ et des morphismes de cet objet dans lui-même comme éléments du groupe. La composition des morphismes est donnée par la multiplication des groupes.

On définit un cas particulier de morphismes.

Définition 1.8. Un morphisme $f : A \to B$ dans une catégorie $\mathcal{C}$ est appelé un **isomorphisme** s'il existe un autre morphisme $g : B \to A$ dans $\mathcal{C}$ tel que $f \circ g = 1_B$ et $g \circ f = 1_A$.

Par exemple, les isomorphismes dans $\mathcal{T}op$ sont les homéomorphismes, et dans $\mathcal{G}$, ce sont les isomorphismes de groupe.

Remarque 1.9. Une catégorie avec uniquement des isomorphismes est appelée un groupoïde

On définit à présent le concept de foncteur.

Définition 1.10. Soient deux catégories $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$, un **foncteur covariant** (ou un **foncteur contravariant**) $T : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ assigne à chaque objet A de $\mathcal{C}$ un objet $T(A)$ de $\mathcal{D}$, et à chaque morphisme $f : A \to B$ de $\mathcal{C}$, un morphisme $f_* = T(f) : T(A) \to T(B)$ (ou $f^* = T(f) : T(B) \to T(A)$, dans le cas d'un foncteur contravariant) de telle sorte que

(i) $T(1_A) = 1_{T(A)}$

(ii) $T(g \circ f) = T(g) \circ T(f)$ (ou $T(g \circ f) = T(f) \circ T(g)$, dans le cas d'un foncteur contravariant).

Voici quelques exemples de foncteurs.

Exemples 1.11.

1. Il existe un foncteur covariant de la catégorie des espaces topologiques et des applications continues vers la catégorie des ensembles et des fonctions, qui assigne à chaque espace topologique son ensemble sous-jacent. Ce foncteur est habituellement appelé un "*foncteur oubli*", car il "oublie" la structure d'un espace topologique.
2. Il existe un foncteur covariant de la catégorie des ensembles et des fonctions vers la catégorie des espaces topologiques et des applications continues, qui assigne à chaque ensemble l'espace topologique discret l'ayant comme ensemble sous-jacent.
3. Il existe un foncteur covariant de la catégorie des ensembles et des fonctions vers la catégorie des groupes (abéliens) et des homomorphismes de groupe, qui assigne à chaque ensemble le groupe (abélien) libre généré par cet ensemble.
4. L'application de suspension est un foncteur de $\mathcal{T}op$ vers $\mathcal{T}op$, voir la définition (1.27).

Après ces définitions et exemples de théorie des catégories, on peut revenir à la remarque concernant les groupes d'homotopie supérieurs.

Pour $n = 1$, on a que π_n est un foncteur covariant de la catégorie des espaces topologiques $\mathcal{T}op$ vers la catégorie des groupes $\mathcal{G}$. Pour $n \geq 2$, on a que π_n est un foncteur covariant de la catégorie des espaces topologiques $\mathcal{T}op$ vers la catégorie des groupes abéliens $\mathcal{A}b$. En effet, une application $\varphi : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ induit $\varphi_* : \pi_n(X, x_0) \to \pi_n(Y, y_0)$ défini par $\varphi_*([f]) = [\varphi f]$. Il vient des définitions que φ_* est bien défini et est un homomorphisme pour $n \geq 1$. Les propriétés suivantes des foncteurs : $(\varphi\psi)_* = \varphi_*\psi_*$ et $\mathbb{1}_* = \mathbb{1}$ sont aussi évidentes. En effet, $(\varphi\psi)_*([f]) = [(\varphi\psi)f]$ et $\varphi_*(\psi_*([f])) = \varphi_*[\psi f] = [\varphi(\psi f)]$. L'égalité vient du même argument que celui utilisé pour montrer l'associativité des groupes d'homotopie. On a aussi $\mathbb{1}_*([f]) = [\mathbb{1}f] = [f]$ et $\mathbb{1}([f]) = [f]$. D'où la seconde propriété.

Remarque 1.12. Les groupes d'homologie sont aussi des foncteurs de $\mathcal{T}op$ vers $\mathcal{A}b$.

On peut maintenant introduire de très utiles généralisations des groupes d'homotopie.

Définition 1.13. Considérons une paire d'espaces (X, A) et un point de base $x_0 \in A$. Considérons encore I^{n-1} comme la face de l'hypercube I^n dont les dernières coordonnées s_n valent 0, et soit J^{n-1} la fermeture de $\partial I^n - I^{n-1}$, à savoir l'union des faces restantes de I^n. Alors le **groupe d'homotopie relatif** $\pi_n(X, A, x_0)$ pour $n \geq 1$ est défini comme étant l'ensemble des classes d'homotopie d'applications $(I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \to (X, A, x_0)$ avec des homotopies par des applications de la même forme.

On peut remarquer que les groupes d'homotopie absolus sont des cas particuliers des groupes d'homotopie relatifs, car $\pi_n(X, x_0, x_0) = \pi_n(X, x_0)$.

Une opération de somme est définie dans $\pi_n(X, A, x_0)$, on utilise la même formule que pour $\pi_n(X, x_0)$, sauf pour la dernière coordonnée s_n qui, alors, n'est plus présente dans l'opération de somme.

Ainsi $\pi_n(X, A, x_0)$ est un groupe pour $n \geq 2$, et est un groupe abélien pour $n \geq 3$. Pour le cas $n = 1$, on a $I^1 = [0, 1]$, $I^0 = \{0\}$ et $J^0 = \{1\}$, alors $\pi_1(X, A, x_0)$ est l'ensemble des classes d'homotopie des chemins dans X d'un point variant dans A au point de base $x_0 \in A$. Il ne s'agit en général pas d'un groupe.

De même qu'il est possible de voir les éléments de $\pi_n(X, x_0)$ comme les classes d'homotopie d'applications $(S^n, s_0) \to (X, x_0)$, il existe une autre définition de $\pi_n(X, A, x_0)$ comme étant l'ensemble des classes d'homotopie d'applications $(D^n, S^{n-1}, s_0) \to (X, A, x_0)$, car le fait de collapser J^{n-1} en un point transforme $(I^n, \partial I^n, J^{n-1})$ en (D^n, S^{n-1}, s_0).

Une des propriétés les plus intéressantes des groupes relatifs $\pi_n(X, A, x_0)$ est liée au concept de suite exacte dont on donne maintenant la définition.

Définition 1.14. Une suite de groupes abéliens A_i, avec des homomorphismes α_i

$$\ldots \longrightarrow A_{n+1} \xrightarrow{\alpha_{n+1}} A_n \xrightarrow{\alpha_n} A_{n-1} \longrightarrow \ldots$$

est dite **exacte** si $\ker \alpha_n = \mathrm{Im}\alpha_{n+1}$, pour tout n.
Les inclusions $\mathrm{Im}\alpha_{n+1} \subset \ker \alpha_n$ sont équivalentes au fait d'avoir $\alpha_n \alpha_{n+1} = 0$.

Remarque 1.15. Un certain nombre de concepts algébriques de base peuvent être exprimés en terme de suites exactes, par exemple :

(i) $0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B$ est exacte si et seulement si $\ker \alpha = 0$, c'est-à-dire α est injective.

(ii) $A \xrightarrow{\alpha} B \longrightarrow 0$ est exacte si et seulement si $\mathrm{Im}\alpha = B$, c'est-à-dire α est surjective.

(iii) $0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \longrightarrow 0$ est exacte si et seulement si α est un isomorphisme par (i) et (ii).

(iv) $0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \longrightarrow 0$ est exacte si et seulement si α est injective et $\ker \beta = \mathrm{Im}\alpha$, ainsi β induit un isomorphisme $C \cong B/\mathrm{Im}\alpha$. Ceci peut s'écrire $C \cong B/A$ si l'on considère α comme une inclusion de A en tant que sous-groupe de B.

Une suite exacte $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$ comme dans (iv) est appelée une courte suite exacte.

On a alors que les groupes relatifs entrent dans une longue suite exacte :

$$\ldots \to \pi_n(A, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_n(X, x_0) \xrightarrow{j_*} \pi_n(X, A, x_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(A, x_0) \to \ldots \to \pi_0(X, x_0), \circledast$$

où i et j sont les inclusions $(A, x_0) \hookrightarrow (X, x_0)$ et $(X, x_0, x_0) \hookrightarrow (X, A, x_0)$. Et où l'application ∂ vient de la restriction des applications $(I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \to (X, A, x_0)$ à I^{n-1}, ou de la restriction des applications $(D^n, S^{n-1}, s_0) \to (X, A, x_0)$ à S^{n-1}. L'application ∂, appelée application bord, est un homomorphisme quand $n > 1$.

Théorème 1.16. *La suite $\circledast$ est exacte*

Démonstration : Avec seulement quelques efforts supplémentaires, on peut dériver la longue suite exacte d'un triple (X, A, B, x_0) avec $x_0 \in B \subset A \subset X$:

$$\ldots \to \pi_n(A, B, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_n(X, B, x_0) \xrightarrow{j_*} \pi_n(X, A, x_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(A, B, x_0) \to \ldots \to \pi_1(X, A, x_0)$$

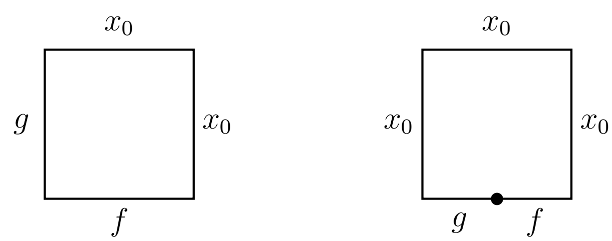
Quand $B = x_0$, ceci se réduit à la suite exacte pour la paire (X, A, x_0), et la suite continue encore deux étapes vers $\pi_0(X, x_0)$. L'exactitude de ces deux dernières étapes est claire.

· *Exactitude à* $\pi_n(X, B, x_0)$ *:* Tout d'abord, on note que la composition $j_* i_*$ est zéro, car chaque application $(I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \to (A, B, x_0)$ représente zéro dans $\pi_n(X, A, x_0)$ par le critère de compression. En effet, car le critère de compression affirme qu'une application $f : (D^n, S^{n-1}, s_0) \to (X, A, x_0)$ représente zéro dans $\pi_n(X, A, x_0)$ si et seulement si elle est homotope rel S^{n-1} à une application ayant son image contenue dans A. Pour voir que $\ker j_* \subset \mathrm{Im} i_*$, on considère $f : (I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \to (X, B, x_0)$, représentant zéro dans $\pi_n(X, A, x_0)$. Alors, de nouveau par le critère de compression, f est homotope rel ∂I^n à une application ayant son image dans A, ainsi la classe $[f] \in \pi_n(X, B, x_0)$ est dans l'image de i_*.

· *Exactitude à* $\pi_n(X, A, x_0)$ *:* La composition ∂j_* est zéro, car la restriction d'une application $(I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \to (X, B, x_0)$ à I^{n-1} a son image dans B, et ainsi représente zéro dans $\pi_{n-1}(A, B, x_0)$. Réciproquement, supposons que la restriction de $f : (I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \to (X, A, x_0)$ à I^{n-1} représente zéro dans $\pi_{n-1}(A, B, x_0)$. Alors $f\,|_{I^{n-1}}$ est homotope à une application ayant son image dans B, par l'homotopie $F : I^{n-1} \times I \to A$ rel ∂I^{n-1}. On peut appliquer F sur f pour obtenir une nouvelle application $(I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \to (X, B, x_0)$ qui, en tant qu'application de la forme $(I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \to (X, A, x_0)$ est homotope à f par l'homotopie qui envoie sur des segments initiaux de F devenant de plus en plus longs. Ainsi $[f] \in \mathrm{Im} j_*$.

· *Exactitude à* $\pi_n(A, B, x_0)$ *:* La composition $i_* \partial$ est zéro, car la restriction de l'application $f : (I^{n+1}, \partial I^{n+1}, J^n) \to (X, B, x_0)$ à I^n est homotope rel ∂I^n à une application constante par f elle-même. La réciproque est triviale si B est un point, car une homotopie nulle, c'est-à-dire homotope à une application constante, $f_t : (I^n, \partial I^n) \to (X, x_0)$ de $f_0 : (I^n, \partial I^n) \to (A, x_0)$ donne une application $F : (I^{n+1}, \partial I^{n+1}, J^n) \to (X, A, x_0)$ avec $\partial([F]) = [f_0]$. Alors la preuve est finie dans ce cas. Pour un B général, soit F une homotopie nulle de $f : (I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \to (A, B, x_0)$, par des applications de la forme $(I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \to (X, B, x_0)$ et soit g la restriction de F à $I^{n-1} \times I$, comme dans la première des deux figures ci-dessous. En reparamétrisant les $n^{\text{ème}}$ et $(n+1)^{\text{ème}}$ coordonnées, comme indiqué dans la seconde figure, on voit que f avec g accolé est dans l'image de ∂. Mais, comme remarqué dans le paragraphe précédent, accoler g sur f donne le même élément de $\pi_n(A, B, x_0)$.

$\square$



Définition 1.17. Un espace X ayant x_0 comme point de base est dit n-**connecté** si $\pi_i(X, x_0) = 0$ pour $i \leq n$.

Ainsi, 0-connecté signifie connexe par arcs et 1-connecté veut dire simplement connexe. Comme la propriété d'être n-connecté implique celle d'être 0-connecté, le choix du point de base x_0 n'est pas significatif.

Une condition assurant la propriété d'être n-connecté peut s'exprimer sans mentionner le point de base : les trois conditions suivantes sont équivalentes :

1. Chaque application $S^i \to X$ est homotope à une application constante.
2. Chaque application $S^i \to X$ s'étend à une application $D^{i+1} \to X$.
3. $\pi_i(X, x_0) = 0$ pour tout $x_0 \in X$.

Ainsi l'espace X est n-connecté si l'une de ces trois conditions est vérifiée pour tout $i \leq n$.

De manière similaire, dans le cas relatif, les quatre conditions suivantes sont équivalentes, pour $i > 0$:

1. Chaque application $(D^i, \partial D^i) \to (X, A)$ est homotope rel ∂D^i à une application $D^i \to A$.
2. Chaque application $(D^i, \partial D^i) \to (X, A)$ est homotope par de telles applications à une application $D^i \to A$.
3. Chaque application $(D^i, \partial D^i) \to (X, A)$ est homotope par de telles applications à une application constante $D^i \to A$.
4. $\pi_i(X, A, x_0) = 0$ pour tout $x_0 \in A$.

Si $i = 0$, l'élément π_0 relatif n'est pas défini et chacune des conditions $(1)-(3)$ est équivalente à dire que chaque composante connexe de X contient des points dans A, puisque D^0 est un point, et ∂D^0 est l'ensemble vide.

La paire (X, A) est dite n-connectée si les conditions $(1)-(4)$ sont vérifiées pour tout $i \leq n$, $i > 0$, et les conditions $(1) - (3)$ le sont pour $i = 0$.

On peut encore noter que X est n-connecté si et seulement si (X, x_0) est n-connecté pour un certain x_0 et donc pour tout x_0.

Un résultat important est le théorème de Whitehead. Pour pouvoir énoncer ce théorème, il faut définir les concepts de déformation-rétraction et de CW-complexe.

Définition. Une **déformation-rétraction** d'un espace X vers un sous-espace $A \subset X$ est une famille d'applications $f_t : X \to X$, $t \in I$ telle que $f_0 = \mathbb{1}$ (l'application identité), $f_1(X) = A$ et $f_t\mid_A = \mathbb{1}$ pour tout t. La famille f_t doit être continue dans le sens où l'application associée $X \times I \to X$, $(x, t) \mapsto f_t(x)$ est continue.

Avant de définir le concept de CW-complexe ou complexe cellulaire, il faut définir celui de cellule.

Définition 1.18. Une **cellule fermée** de dimension n est un espace topologique homéomorphe à une boule fermée de dimension n. Une **cellule ouverte** de dimension n est un espace topologique homéomorphe à une boule ouverte de dimension n.

On a alors qu'une cellule ouverte (et fermée) de dimension 0 est homéomorphe à l'espace singleton.

A présent, on peut définir la notion de CW-complexe ou complexe cellulaire.

DÉFINITION 1.19. Un **CW-complexe ou complexe cellulaire** est un espace de Hausdorff X ayant une partition en cellules ouvertes (de dimensions éventuellement différentes) satisfaisant les propriétés suivantes :

1. Pour toute cellule ouverte C de dimension n de la partition de X, il existe une application continue f de la boule fermée de dimension n vers X telle que
   (i) la restriction de f à l'intérieur de la boule fermée est un homéomorphisme sur la cellule C.
   (ii) l'image de la frontière de la boule fermée est contenue dans une union finie d'éléments de la partition dont la dimension est inférieure à n.
2. Un sous-ensemble de X est fermé si et seulement s'il rencontre la fermeture de chaque cellule dans un ensemble fermé.

Intuitivement, un CW-complexe est un espace X qui peut être construit en partant d'une collection discrète de points appelée X^0, puis en attachant des disques D^1 de dimension 1 à X^0, le long de leur frontière S^0. On note alors X^1 l'objet obtenu en attachant les disques D^1 à X^0. Puis, on attache des disques D^2 de dimension 2 à X^1, le long de leur frontière S^1. On note X^2 le nouvel espace, et ainsi de suite, on obtient des espaces X^n, pour tout n.

Un CW-complexe est un espace ayant cette sorte de décomposition en sous-espaces X^n, construits de cette manière hiérarchique. En particulier, X^n peut être construit à partir de X^{n-1} en attachant une infinité de disques de dimension n, les applications attachantes : $S^{n-1} \to X^{n-1}$ étant continues.

REMARQUE 1.20. Le sous-espace X^n est appelé le n-squelette de X.

Il reste encore à donner la définition d'un sous-complexe, et d'une équivalence d'homotopie.

DÉFINITION 1.21. Un **sous-complexe** d'un complexe cellulaire X est un sous-espace fermé $A \subset X$ qui est une union de cellules de X. Une paire (X, A), consistant en un complexe cellulaire X et un sous-complexe A, est appelée une **CW-paire**.

Définition 1.22. Une application $f : X \to Y$ est une **équivalence d'homotopie** s'il existe une application g telle que $fg \simeq \mathbb{1}$ et $gf \simeq \mathbb{1}$. Les espaces X et Y sont alors dits homotopiquement équivalents ou encore ayant le même **type d'homotopie**. Un espace ayant le type d'homotopie d'un point est dit **contractile**.

Le Théorème de Whitehead

On peut maintenant énoncer le théorème de Whitehead.

Théorème 1.23. *Si une application $f : X \to Y$ entre des CW-complexes connectés induit un isomorphisme $f_* : \pi_n(X) \to \pi_n(Y)$ pour tout n, alors f est une équivalence d'homotopie. Dans le cas où f est l'inclusion d'un sous-complexe $X \hookrightarrow Y$, la conclusion est plus forte : X est une déformation-rétraction de Y.*

Remarque 1.24. Le théorème de Whitehead n'affirme pas que deux CW-complexes X et Y avec des groupes d'homotopie isomorphes sont homotopiquement équivalents ; en effet, il y a une différence entre le fait de dire que X et Y ont des groupes d'homotopie isomorphes et celui de dire qu'il existe une application $X \to Y$ induisant des isomorphismes sur les groupes d'homotopie.

Pour clarifier cette remarque, on peut donner un exemple l'illustrant.

Exemple 1.25. Une illustration utilise le concept de n-espace projectif réel $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$, lequel est défini comme étant l'espace de toutes les lignes passant par l'origine dans $\mathbb{R}^{n+1}$, et on peut voir $\mathbb{R}\mathrm{P}^\infty$ comme l'espace des lignes passant par l'origine dans $\mathbb{R}^\infty = \bigcup_n \mathbb{R}^n$.

L'illustration serait par exemple de considérer $X = \mathbb{R}\mathrm{P}^2$ et $Y = S^2 \times \mathbb{R}\mathrm{P}^\infty$. Tous deux ont comme groupe fondamental $\mathbb{Z}_2$ et concernant leurs groupes d'homotopie supérieurs, on obtient ce résultat : $\pi_n(\mathbb{R}\mathrm{P}^2) \cong \pi_n(S^2 \times \mathbb{R}\mathrm{P}^\infty)$, pour $n \geq 2$, car $S^2 \simeq S^2 \times S^\infty$. Ce résultat vient du fait que S^2 est le revêtement universel de $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ et que S^∞ est celui de $\mathbb{R}\mathrm{P}^\infty$, qui est contractile. La justification de ceci sera donnée par la proposition (2.18). On a cependant que ces deux espaces ne sont pas homotopiquement équivalents.

La preuve du théorème découlera relativement facilement d'un résultat plus technique, appelé lemme de compression :

Lemme 1.26. Soit (X, A) une CW-paire, et soit (Y, B) une paire quelconque avec $B \neq \emptyset$. Pour chaque n tel que $X - A$ a des cellules de dimension n, on suppose que $\pi_n(Y, B, y_0) = 0$ pour tout $y_0 \in B$. Alors chaque application $f : (X, A) \to (Y, B)$ est homotope rel A à une application $X \to B$.

En utilisant ce lemme, on peut alors prouver le théorème de Whitehead :

Démonstration : Dans le cas particulier où f est l'inclusion d'un sous-complexe, on considère la longue suite exacte des groupes d'homotopie de la paire (X, Y). Comme f induit des isomorphismes sur tous les groupes d'homotopie, les groupes relatifs $\pi_n(Y, X)$ valent zéro. En appliquant le lemme de compression à l'application identité $(Y, X) \to (Y, X)$, on obtient alors une déformation-rétraction de Y sur X.

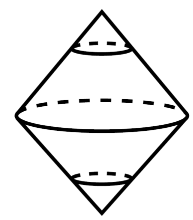
Le cas général peut être prouvé en utilisant les cylindres d'application. On a que le cylindre d'application M_f d'une application $f : X \to Y$ est l'espace quotient de l'union disjointe de $X \times I$ et Y avec les identifications $(x, 1) \sim f(x)$. Ainsi, M_f contient à la fois $X = X \times \{0\}$ et Y comme sous-espaces et la déformation M_f rétracte sur Y. L'application f devient la composition de l'inclusion $X \hookrightarrow M_f$ et de la rétraction $M_f \to Y$. Comme cette rétraction est une équivalence d'homotopie, il suffit de montrer que la déformation M_f rétracte sur X, si f induit des isomorphismes sur les groupes d'homotopie, ou de manière équivalente, si les groupes relatifs $\pi_n(M_f, X)$ valent tous zéro.

S'il se trouve que l'application f est cellulaire, envoyant le n-squelette de X vers le n-squelette de Y, pour tout n, alors (M_f, X) est une CW-paire et alors le théorème est prouvé par le premier paragraphe de la preuve. Si f n'est pas cellulaire, on peut utiliser le raisonnement suivant : d'abord, on applique le lemme précédent pour obtenir une homotopie rel X de l'inclusion $(X \cup Y, X) \hookrightarrow (M_f, X)$ à une application sur X. Comme la paire $(M_f, X \cup Y)$ satisfait clairement la propriété d'extension d'homotopie, cette homotopie s'étend à une homotopie de l'application identité sur M_f à une application $g : M_f \to M_f$ envoyant $X \cup Y$ sur X. On applique alors à nouveau le lemme à la composition $(X \times I \amalg Y, X \times \partial I \amalg Y) \to (M_f, X \cup Y) \xrightarrow{g} (M_f, X)$ pour terminer la construction d'une déformation-rétraction de M_f sur X. □

Le Théorème de suspension de Freudenthal

Un autre résultat notable est le théorème de suspension de Freudenthal, qui mène aux groupes d'homotopie stable, et en fait à tout le sujet de la théorie d'homotopie stable. Avant de donner ce théorème, il s'agit de définir le concept de suspension.

Définition 1.27. Pour un espace X, la **suspension** SX est le quotient de $X \times I$ obtenu en collapsant $X \times \{0\}$ en un point, et $X \times \{1\}$ en un autre point.



Remarque 1.28. L'application de suspension est un foncteur de $\mathcal{T}op$ vers $\mathcal{T}op$. En effet, si l'on a $f : X \to Y$, on obtient alors $Sf : SX \to SY$.

Afin de mieux saisir la notion de suspension, on donne l'exemple suivant :

Exemple 1.29. Un exemple motivant est $X = S^n$, quand $SX = S^{n+1}$ avec les deux points de suspension se trouvant aux pôles nord et sud de S^{n+1}, c'est-à-dire les points $(0, \ldots, 0, \pm 1)$. On peut voir SX comme un double cône sur X, l'union de deux copies du cône $CX = (X \times I)/(X \times \{0\})$.

On peut remarquer que si X est un complexe cellulaire, SX et CX le sont également en tant que quotients de $X \times I$, muni de sa structure cellulaire produit, I étant donné par la structure cellulaire standard de deux cellules de dimension 0 reliées par une cellule de dimension 1.

On énonce à présent un théorème qui s'avérera utile pour prouver le théorème de Freudenthal.

Théorème 1.30. *Soit X un complexe cellulaire décomposé comme l'union de deux sous-complexes A et B ayant une intersection connectée non vide $C = A \cap B$. Si (A, C) est m-connecté et (B, C) est n-connecté avec $m, n \geq 0$, alors l'application $\pi_i(A, C) \to \pi_i(X, B)$ induite par inclusion est un isomorphisme pour $i < m + n$ et une surjection pour $i = m + n$.*

A présent, on peut énoncer et prouver le théorème de suspension de Freudenthal.

THÉORÈME 1.31. *L'application de suspension $\pi_i(S^n) \to \pi_{i+1}(S^{n+1})$ est un isomorphisme pour $i < 2n-1$ et une surjection pour $i = 2n-1$. Plus généralement, le résultat reste valable pour la suspension $\pi_i(X) \to \pi_{i+1}(SX)$, quand X est un complexe cellulaire $(n-1)$-connecté.*

Démonstration : Pour commencer, on décompose la suspension SX en l'union de deux cônes C_+X et C_-X s'intersectant dans une copie de X. L'application de suspension est la même que l'application

$$\pi_i(X) \cong \pi_{i+1}(C_+X, X) \to \pi_{i+1}(SX, C_-X) \cong \pi_{i+1}(SX)$$

où l'application du milieu est induite par inclusion, et où les deux isomorphismes viennent de longues suites exactes de la forme :

$$\ldots \to \pi_{i+1}(X) \to \pi_{i+1}(C_+X) \to \pi_{i+1}(C_+X, X) \to \pi_i(X) \to \pi_i(C_+X) \to \pi_i(C_+X, X) \to \ldots$$

On considère d'une part la paire (C_+X, X), comme C_+X est contractile, on a $\pi_i(C_+X) = 0$. La longue suite exacte est alors :

$$\ldots \to 0 \to \pi_{i+1}(C_+X, X) \xrightarrow{\cong} \pi_i(X) \to 0 \to \ldots$$

De la longue suite exacte de la paire $(C_\pm X, X)$, on voit que cette paire est n-connectée si X est $(n-1)$-connecté. Alors le théorème précédent implique que l'application du milieu est un isomorphisme pour $i+1 < 2n$ et est une surjection pour $i+1 = 2n$. $\square$

Chapitre 2

Les fibrés

Cette seconde partie porte sur la notion de fibré, après avoir donné la définition de la propriété de relèvement d'homotopie, ainsi que celle d'une fibration, il sera possible de prouver le théorème principal de ce projet, portant sur la longue suite exacte de groupes d'homotopie. On donnera alors des exemples de fibrés, dont celui du fibré de Hopf. On s'intéressera ensuite aux revêtements.

Tout d'abord, on définit la propriété qui amène à la longue suite exacte de groupes d'homotopie.

Définition 2.1. Soit une application $p : E \to B$ et un espace X. On dit que (X, p) a la **propriété de relèvement d'homotopie**, ou de manière équivalente que p a la propriété de relèvement d'homotopie par rapport à X, si :

· pour toute homotopie $f : X \times [0,1] \to B$ et

· pour toute application $\tilde{f}_0 : X \to E$ relevant $f_0 = f\mid_{X\times\{0\}}$, c'est-à-dire telle que $f_0 = p\tilde{f}_0$,

il existe une homotopie $\tilde{f} : X \times [0,1] \to E$ relevant f, c'est-à-dire telle que $f = p\tilde{f}$ avec $\tilde{f}_0 = \tilde{f}\mid_{X\times\{0\}}$.

La situation est représentée sur les graphiques ci-dessous

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "p"] \\ X \times I \arrow[ur, "\tilde{f}"] \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & E \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[ur, "\tilde{f}_0"] \arrow[r, "f_0"'] & B \end{tikzcd}$$

Cette propriété peut être reformulée de la sorte : p a la propriété de relèvement d'homotopie par rapport à X si et seulement si pour chaque diagramme commutatif de la forme suivante

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f_0"] \arrow[d, "j_0"'] & E \arrow[d, "p"] \\ X \times I \arrow[r, "f"'] \arrow[ur, dashed, "\tilde{f}"] & B \end{tikzcd}$$

avec $j_0 : X \to X \times I$ étant l'inclusion $j_0(x) = (x, 0)$, il existe $\tilde{f}$ comme indiqué dans le diagramme faisant commuter les deux triangles.

On peut généraliser cette notion par celle de propriété d'extension de relèvement d'homotopie.

DÉFINITION 2.2. Soit une paire d'espaces $X \supseteq Y$.

On note $T := (X \times \{0\}) \cup (Y \times [0,1]) \subseteq X \times [0,1]$. Soit encore une application $\pi : E \to B$. On dit que (X, Y, π) a la **propriété d'extension de relèvement d'homotopie** si

· pour toute homotopie $f : X \times [0,1] \to B$ et

· pour tout relèvement $\tilde{g} : T \to E$ de $g = f\,|_T$

il existe une homotopie $\tilde{f} : X \times [0,1] \to E$ qui étend $\tilde{g}$, c'est-à-dire telle que $\tilde{f}\,|_T = \tilde{g}$.

REMARQUE 2.3. La propriété de relèvement d'homotopie de (X, p) est obtenue de la définition de la propriété d'extension de relèvement d'homotopie en prenant $Y = \emptyset$, ainsi le T de la définition est simplement $X \times \{0\}$.

A présent, il est possible de définir la notion de fibration.

DÉFINITION 2.4. Une **fibration** est une application $p : E \to B$ ayant la propriété de relèvement d'homotopie par rapport à tous les espaces X.

On peut donner un exemple d'une fibration :

Exemple 2.5. Une projection $p : B \times F \to B$ est une fibration. En effet, on a la situation suivante :

$$\begin{tikzcd} & B \times F = E \arrow[d, "p"] \\ X \times I \arrow[ur, "\tilde{f}"] \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & B \times F = E \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[ur, "\tilde{f}_0"] \arrow[r, "f_0"'] & B \end{tikzcd}$$

On peut alors choisir des relèvements de la forme $\tilde{f} : X \times I \to B \times F$ tel que $\tilde{f}(x,t) = (f(x,t), h(x))$, avec $h : X \to F$ quelconque, mais constant sur I. Et on prend $\tilde{f}_0 : X \to B \times F$ tel que $\tilde{f}_0(x) = (f_0(x), h(x))$.

On peut donner un autre exemple non trivial de fibration, appelée fibration induite.

Exemple 2.6. Soit $p : E \to B$ une fibration, et soit $g : B' \to B$ une application continue, alors l'application induite de p par g, à savoir $p' : E' \to B'$ est une fibration, appelée fibration induite. On définit l'ensemble E' de la manière suivante $E' = \{(b,e) \in B' \times E \mid g(b) = p(e)\}$. Considérons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f'_0"] \arrow[d, "j_0"'] \arrow[rr, bend left, "f_0"] & E' \arrow[r, "\tilde{g}"] \arrow[d, "p'"] & E \arrow[d, "p"] \\ X \times I \arrow[r, "f'"'] \arrow[ur, dashed, "\tilde{f}'"] \arrow[urr, "\tilde{f}"'] \arrow[rr, bend right, "f"'] & B' \arrow[r, "g"'] & B \end{tikzcd}$$

Il s'agit de construire $\tilde{f}' : X \times I \to E'$, satisfaisant $\tilde{f}' \circ j_0 = f'_0$ et $p' \circ \tilde{f}' = f'$.

On pose $f_0 = \tilde{g} \circ f'_0$ et $f = g \circ f'$, comme indiqué dans le diagramme. Comme p est une fibration, il existe $\tilde{f} : X \times I \to E$ tel que $\tilde{f} \circ j_0 = f_0$ et $p \circ \tilde{f} = f$.

Définissons $\tilde{f}'$ comme $\tilde{f}'(x,t) = (f'(x,t), \tilde{f}(x,t)) \in E'$. Alors on a $\tilde{f}'(x,0) = (f'(x,0), \tilde{f}(x,0)) = (p' f'_0(x), \tilde{g} f'_0(x)) = f'_0(x)$, et ainsi, on a $\tilde{f}' \circ j_0 = f'_0$. On a clairement que $p' \circ \tilde{f}' = f'$.

Maintenant, on peut énoncer, puis démontrer le théorème central de ce projet.

Théorème 2.7. *Supposons que $p : E \to B$ ait la propriété de relèvement d'homotopie par rapport aux disques D^k, pour tout $k \geq 0$. On choisit des points de base $b_0 \in B$ et $x_0 \in F = p^{-1}(b_0)$. Alors l'application $p_* : \pi_n(E, F, x_0) \to \pi_n(B, b_0)$ est un isomorphisme pour tout $n \geq 1$. Ainsi si B est connexe par arcs, il y a une longue suite exacte*

$$\ldots \to \pi_n(F, x_0) \to \pi_n(E, x_0) \xrightarrow{p_*} \pi_n(B, b_0) \to \pi_{n-1}(F, x_0) \to \ldots \to \pi_0(E, x_0) \to 0$$

La preuve utilisera une forme relative de la propriété de relèvement d'homotopie.

Définition 2.8. L'application $p : E \to B$ est dite ayant la **propriété de relèvement d'homotopie pour une paire** (X, A) si chaque homotopie $f_t : X \to B$ relève vers une homotopie $\tilde{g}_t : X \to E$ partant d'un relèvement donné $\tilde{g}_0$ et étendant un relèvement donné $\tilde{g}_t : A \to E$. En d'autres termes, la propriété de relèvement pour une paire (X, A) est la propriété d'extension de relèvement d'homotopie pour $(X \times I, X \times \{0\} \cup A \times I)$.

La propriété de relèvement d'homotopie pour un disque D^k est équivalente à la propriété de relèvement d'homotopie pour $(D^k, \partial D^k)$; en effet, les paires $(D^k \times I, D^k \times \{0\})$ et $(D^k \times I, D^k \times \{0\} \cup \partial D^k \times I)$ sont homéomorphes.

Ceci implique que la propriété de relèvement d'homotopie pour des disques est équivalente à la propriété de relèvement d'homotopie pour toutes les CW-paires (X, A). Par induction sur le squelette de X, il suffit de construire un relèvement $\tilde{g}_t$ pour une cellule de $X - A$ à la fois. Ainsi, on obtient une réduction au cas $(X, A) = (D^k, \partial D^k)$. Une application satisfaisant la propriété de relèvement d'homotopie pour des disques est parfois appelée une *fibration de Serre*.

On prouve alors le théorème.

Démonstration : Il s'agit tout d'abord de montrer que p_* est surjective. Pour ce faire, on représente un élément de $\pi_n(B, b_0)$ par une application $f : (I^n, \partial I^n) \to (B, b_0)$. L'application constante en x_0 donne un relèvement de f vers E sur le sous-espace $J^{n-1} \subset I^n$, alors la propriété de relèvement d'homotopie relative pour $(I^{n-1}, \partial I^{n-1})$ permet de l'étendre à un relèvement $\tilde{f} : I^n \to E$, et ce relèvement satisfait $\tilde{f}(\partial I^n) \subset F$, car $f(\partial I^n) = b_0$. Alors $\tilde{f}$ représente un élément de $\pi_n(E, F, x_0)$, avec $p_*([\tilde{f}]) = [f]$, puisque $p\tilde{f} = f$.

L'injectivité de p_* se prouve de manière similaire. Soient deux applications $\tilde{f}_0$, $\tilde{f}_1 : (I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \to (E, F, x_0)$ telles que $p_*([\tilde{f}_0]) = p_*([\tilde{f}_1])$. Soit $G : (I^n \times I, \partial I^n \times I) \to (B, b_0)$ une homotopie de $p\tilde{f}_0$ vers $p\tilde{f}_1$. On a un relèvement partiel $\tilde{G}$ donné par $\tilde{f}_0$ sur $I^n \times \{0\}$, $\tilde{f}_1$ sur $I^n \times \{1\}$ et l'application constante en x_0 sur $J^{n-1} \times I$. Après avoir permuté les deux dernières coordonnées de $I^n \times I$, la propriété de relèvement d'homotopie relative donne une extension de ce relèvement partiel à un relèvement total $\tilde{G} : I^n \times I \to E$ donnant une homotopie $\tilde{f}_t : (I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \to (E, F, x_0)$ de $\tilde{f}_0$ à $\tilde{f}_1$. Ainsi p_* est injective.

Pour prouver la dernière affirmation du théorème, on remplace $\pi_n(B, b_0)$ par $\pi_n(E, F, x_0)$ dans la longue suite exacte de la paire (E, F). L'application $\pi_n(E, x_0) \to \pi_n(E, F, x_0)$ dans la suite exacte devient alors la composition $\pi_n(E, x_0) \to \pi_n(E, F, x_0) \xrightarrow{p_*} \pi_n(B, b_0)$, ce qui est alors $p_* : \pi_n(E, x_0) \to \pi_n(B, b_0)$. Le zéro à la fin de la suite, ainsi que la surjectivité de l'application $\pi_0(F, x_0) \to \pi_0(E, x_0)$, viennent de l'hypothèse que B est connexe par arcs, car un chemin dans E d'un point arbitraire $x \in E$ vers F peut être obtenu par le relèvement d'un chemin dans B de $p(x)$ vers b_0. $\square$

Les fibrés

On définit à présent la notion de fibré.

DÉFINITION 2.9. Une structure de **fibré** sur un espace E, avec une fibre F consiste en une application de projection $p : E \to B$ telle que chaque point de B ait un voisinage U pour lequel il existe un homéomorphisme $h : p^{-1}(U) \to U \times F$ tel que le diagramme ci-dessous commute.

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(U) \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "p"'] & & U \times F \arrow[dl, "p_1"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

où l'application p_1 est la projection sur le premier facteur.

La commutativité du diagramme signifie que h transporte chaque fibre $F_b = p^{-1}(b)$ homéomorphiquement sur la copie $\{b\} \times F$ de F. Ainsi les fibres F_b sont localement arrangées comme le produit $B \times F$, mais pas forcément de manière globale. Une application h comme sur le diagramme est appelée une trivialisation locale du fibré. Comme la première coordonnée de h est seulement p, h est déterminé par sa seconde coordonnée, une application $p^{-1}(U) \to F$ qui est un homéomorphisme pour chaque fibre F_b.

La structure de fibré est déterminée par l'application de projection $p : E \to B$, mais pour indiquer quelle est la fibre, on écrit parfois un fibré comme $F \to E \to B$, une "courte suite exacte d'espaces". L'espace B est appelé l'espace de base du fibré, et E est l'espace total.

A présent, on donne des exemples de fibrés.

Exemple 2.10. Un fibré non trivial parmi les plus simples est le ruban de Möbius, qui est un fibré sur S^1 avec un intervalle comme fibre. Plus précisément, on prend E comme étant le quotient de $I \times [-1,1]$ avec les identifications $(0,v) \sim (1,-v)$, avec $p : E \to S^1$ induit par la projection $I \times [-1,1] \to I$, ainsi la fibre est $[-1,1]$. En collant deux copies de E ensemble par l'application identité entre leurs cercles frontière, on obtient un tore de Klein, un fibré sur S^1 ayant comme fibre S^1.

On remarque le cas particulièrement intéressant du fibré de Hopf.

Exemple 2.11. Le **fibré de Hopf** est de la forme $S^1 \to S^3 \to S^2$ avec comme fibre, comme espace total et comme base des sphères. Cet exemple est de suffisamment basse dimension pour être vu explicitement. La projection $S^3 \to S^2$ peut être prise comme étant $(z_0, z_1) \mapsto \frac{z_0}{z_1} \in \mathbb{C} \cup \{\infty\} = S^2$. En coordonnées polaires, on a $p(r_0 e^{i\theta_0}, r_1 e^{i\theta_1}) = \frac{r_0}{r_1} e^{i(\theta_0 - \theta_1)}$, où $r_0^2 + r_1^2 = 1$.

Pour un rapport fixé $\rho = \frac{r_0}{r_1} \in (0, \infty)$, les angles θ_0 et θ_1 varient indépendemment sur S^1, ainsi les points $(r_0 e^{i\theta_0}, r_1 e^{i\theta_1})$ forment un tore $T_\rho \subset S^3$. En faisant varier ρ, ces tores disjoints T_ρ remplissent S^3, si l'on inclut les cas limites T_0 et T_∞ où les rayons r_0 et r_1 sont infinis et nuls, faisant dégénérer les tores T_0 et T_∞ en cercles. Par la projection stéréographique de S^3 depuis le point $(0,1)$ sur $\mathbb{R}^3$, ces deux cercles correspondent au cercle unitaire dans le plan xy et l'axe z. Chaque tore T_ρ est une union de fibres de cercle, les paires (θ_0, θ_1) avec $\theta_0 - \theta_1$ constant.

Remarque 2.12. En remplaçant le corps $\mathbb{C}$ par les quaternions $\mathbb{H}$, on obtient un second fibré de Hopf : $S^3 \to S^7 \to S^4$.

Un autre fibré de Hopf : $S^7 \to S^{15} \to S^8$ peut être encore défini en utilisant l'algèbre de octonions $\mathbb{O}$.

Il s'agit là des seuls fibrés avec des sphères.

Théorème 2.13. *Un fibré $p : E \to B$ a la propriété de relèvement d'homotopie par rapport à toute CW-paire (X, A).*

Démonstration : Comme mentionné précédemment, la propriété de relèvement d'homotopie pour une CW-paire est équivalente à la propriété de relèvement d'homotopie pour des disques, ou encore de manière équivalente pour des cubes.

Soit donc $G : I^n \times I \to B$, et $G(x,t) = g_t(x)$, l'homotopie que l'on souhaite relever, en commençant avec un relèvement donné $\tilde{g}_0$ de g_0. On choisit un recouvrement ouvert $\{U_\alpha\}$ de B ayant comme trivialisations locales $h_\alpha : p^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times F$. En utilisant la compacité de $I^n \times I$, on peut subdiviser I^n en de petits cubes C et I en intervalles $I_j = [t_j, t_{j+1}]$ de sorte que chaque produit $C \times I_j$ est mis en relation par G avec un seul ouvert U_α.

Par induction sur n, on peut supposer que $\tilde{g}_t$ a déjà été construit sur ∂C pour chaque sous-cube C. Pour étendre ce $\tilde{g}_t$ sur un cube C, on peut procéder par étapes, en construisant $\tilde{g}_t$ pour t dans chaque intervalle successif I_j. Ceci, en effet, nous ramène au cas où il n'est pas nécessaire d'avoir des subdivisions de $I^n \times I$, ainsi G met en relation tout $I^n \times I$ avec un unique ouvert U_α. Alors on a $\tilde{G}(I^n \times \{0\} \cup \partial I^n \times I) \subset p^{-1}(U_\alpha)$, et en composant $\tilde{G}$ avec la trivialisation locale h_α, on se ramène au cas d'un fibré produit $U_\alpha \times F$. Dans ce cas, la première coordonnée du relèvement $\tilde{g}_t$ est simplement le g_t donné, ainsi seulement la seconde coordonnée nécessite d'être construite. Ceci peut être obtenu comme la composition $I^n \times I \to I^n \times \{0\} \cup \partial I^n \times I \to F$, où la première application est une rétraction, et la seconde application est celle qui nous est donnée. $\square$

Une application intéressante de ce théorème concerne les revêtements. On s'intéresse donc à cette notion et à ses propriétés. Tout d'abord, on définit un revêtement.

Définition 2.14. Un **revêtement** d'un espace X est un espace $\tilde{X}$ avec une application continue $p : \tilde{X} \to X$ satisfaisant la condition suivante : pour tout $x \in X$, il existe un voisinage ouvert U de X, tel que $p^{-1}(U)$ est une union disjointe d'ensembles ouverts dans $\tilde{X}$, de sorte que chacun de ces ensembles ouverts est envoyé de manière homéomorphe sur U par p. On ne demande pas que $p^{-1}(U)$ soit non vide, ainsi p n'a pas besoin d'être surjective.

Une propriété distinctive des revêtements, en tant qu'applications $p : \tilde{X} \to X$, concerne leur comportement par rapport au relèvement d'applications. On rappelle qu'un relèvement d'une application $f : Y \to X$ est une application $\tilde{f} : Y \to \tilde{X}$ telle que $p\tilde{f} = f$.

A présent, on donne des propriétés concernant les relèvements de revêtements.

Tout d'abord, on a la propriété de relèvement d'homotopie dans le cas particulier d'un revêtement :

Proposition 2.15. *Soit un revêtement $p : \tilde{X} \to X$, une homotopie $f_t : Y \to X$ et une application $\tilde{f}_0 : Y \to \tilde{X}$ relevant f_0, alors, il existe une unique homotopie $\tilde{f}_t : Y \to X$ de $\tilde{f}_0$ relevant f_t.*

En appliquant cette proposition au cas où Y est un point, on obtient la propriété de relèvement de chemins pour un revêtement $p : \tilde{X} \to X$. Cette propriété affirme alors que pour chaque chemin $f : I \to X$ et chaque relèvement $\tilde{x}_0$ du point de départ $f(0) = x_0$, il existe un unique chemin $\tilde{f} : I \to \tilde{X}$ relevant f commençant en $\tilde{x}_0$.

En prenant à présent Y comme étant l'intervalle I, on voit que chaque homotopie f_t d'un chemin f_0 dans X admet un relèvement vers une homotopie $\tilde{f}_t$ de chaque relèvement $\tilde{f}_0$ de f_0. L'homotopie relevée $\tilde{f}_t$ est une homotopie de chemins, fixant les extrémités.

En voici une application.

Proposition 2.16. *L'application $p_* : \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to \pi_1(X, x_0)$ induite par un revêtement $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ est injective. Le sous-groupe image $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$ dans $\pi_1(X, x_0)$ consiste en les classes d'homotopie des lacets dans X basés en x_0 dont les relèvements vers $\tilde{X}$ commençant en $\tilde{x}_0$ sont des lacets.*

Démonstration : Un élément du noyau de p_* est représenté comme un lacet $\tilde{f}_0 : I \to \tilde{X}$, avec une homotopie $f_t : I \to X$ de $f_0 = p\tilde{f}_0$ vers le lacet trivial f_1. Par la remarque précédant la proposition, il existe une homotopie relevée de lacets $\tilde{f}_t$ commençant avec $\tilde{f}_0$ et se terminant avec un lacet constant. Ainsi $[\tilde{f}_0] = 0$ dans $\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ et p_* est injective.

Concernant la seconde affirmation de l'énoncé, des lacets en x_0 relevant vers des lacets en $\tilde{x}_0$ représentent certainement des éléments de l'image de $p_* : \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to \pi_1(X, x_0)$. Réciproquement, un lacet représentant un élément de l'image de p_* est homotope à un lacet ayant un tel relèvement, ainsi par relèvement d'homotopie, le lacet lui-même doit avoir un tel relèvement. □

Une réponse à la question de l'existence de relèvements d'applications générales, et pas seulement de relèvements d'homotopies est donné dans le critère de relèvement qui suit :

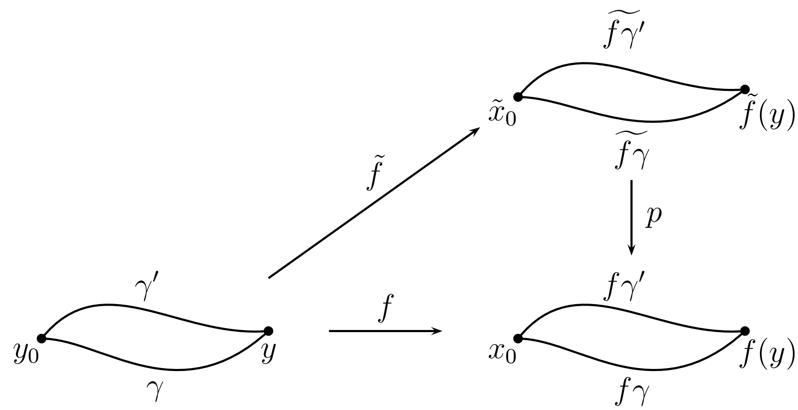
Proposition 2.17. *Soit donné un revêtement* $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ *et une application* $f : (Y, y_0) \to (X, x_0)$ *avec* Y *connexe par arcs et localement connexe par arcs. Alors un relèvement* $\tilde{f} : (Y, y_0) \to (\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ *de* f *existe si et seulement si* $f_*(\pi_1(Y, y_0)) \subset p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$.

Quand on dit qu'un espace a une certaine propriété localement, comme être localement connexe par arcs, cela signifie que chaque point a un voisinage ouvert arbitrairement petit ayant cette propriété. Ainsi dire que Y est localement connexe par arcs signifie que pour chaque point $y \in Y$, et chaque voisinage U de y, il existe un voisinage ouvert $V \subset U$ de y qui est connexe par arcs.

Démonstration : Le "seulement si" de la proposition est évident puisque $f_* = p_* \tilde{f}_*$.

Pour la réciproque, soit $y \in Y$ et soit encore γ un chemin dans Y de y_0 à y. Le chemin $f\gamma$ dans X commençant en x_0 a un unique relèvement $\widetilde{f\gamma}$ commençant en $\tilde{x}_0$. On définit $\tilde{f}(y) = \widetilde{f\gamma}(1)$. Pour montrer que ceci est bien défini, indépendant du choix de γ, soit γ' un autre chemin de y_0 à y. Alors, $(f\gamma') \cdot (\overline{f\gamma})$ est un lacet h_0 en x_0 avec $[h_0] \in f_*(\pi_1(Y, y_0)) \subset p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$. Ceci signifie qu'il existe une homotopie h_t de h_0 vers un lacet h_1 qui relève vers un lacet $\tilde{h}_1$ dans $\tilde{X}$ basé en $\tilde{x}_0$. On applique alors la propriété de relèvement d'homotopie pour un revêtement à h_t pour obtenir un relèvement $\tilde{h}_t$. Comme $\tilde{h}_1$ est un lacet en $\tilde{x}_0$, alors $\tilde{h}_0$ l'est aussi. Par l'unicité des chemins relevés, la première moitié de $\tilde{h}_0$ est $\widetilde{f\gamma'}$, et la seconde moitié est $\widetilde{f\gamma}$ parcouru en sens inverse, avec le point commun au milieu $\widetilde{f\gamma}(1) = \widetilde{f\gamma'}(1)$. Ceci montre que $\tilde{f}$ est bien défini.

Ce passage de la preuve est illustré par le graphique suivant :



Pour voir que $\tilde{f}$ est continue, soit $U \subset X$ un voisinage ouvert de $f(y)$, ayant un relèvement $\tilde{U} \subset \tilde{X}$ contenant $\tilde{f}(y)$ tel que $p : \tilde{U} \to U$ est un homéomorphisme. On choisit un voisinage ouvert connexe par arcs V de y avec $f(V) \subset U$. Pour des chemins de y_0 vers des points $y' \in V$, on peut prendre un chemin fixé γ de y_0 à y suivi par des chemins η dans V de y vers les points y'. Alors les chemins $(f\gamma) \cdot (f\eta)$ dans X ont des relèvements $(\widetilde{f\gamma}) \cdot (\widetilde{f\eta})$, où $\widetilde{f\eta} = p^{-1}f\eta$ et $p^{-1} : U \to \tilde{U}$ est l'inverse de $p : \tilde{U} \to U$. Ainsi $\tilde{f}(V) \subset \tilde{U}$ et $\tilde{f}\mid_V = p^{-1}f$. Ainsi $\tilde{f}$ est continue en y. □

Des deux dernières propositions on obtient le résultat suivant :

Proposition 2.18. *Une projection d'un revêtement $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ induit des isomorphismes $p_* : \pi_n(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to \pi_n(X, x_0)$, pour tout $n \geq 2$.*

Démonstration : Pour la surjectivité de p_*, on applique le critère de relèvement de la proposition précédente (2.17), qui implique que chaque application $(S^n, s_0) \to (X, x_0)$ admet un relèvement vers $(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$, étant donné que pour $n \geq 2$, S^n est alors simplement connexe.

L'injectivité de p_* est immédiate, cela vient de la propriété de relèvement pour des revêtements, comme dans la proposition (2.16), qui traite le cas $n = 1$. □

En appliquant alors le théorème précédent à un revêtement $p : E \to B$ avec E et B connexes par arcs, et avec une fibre discrète F, la longue suite exacte des groupes d'homotopie qui en résulte donne, par la proposition ci-dessus, que $p_* : \pi_n(E) \to \pi_n(B)$ est un isomorphisme pour $n \geq 2$. On obtient aussi une courte suite exacte $0 \to \pi_1(E) \to \pi_1(B) \to \pi_0(F) \to 0$. Ce résultat est consistant avec la théorie des revêtements.

On donne encore deux exemples d'applications du théorème précédent, le premier concernant le fibré de Hopf.

Exemple 2.19. La longue suite exacte du fibré de Hopf $S^1 \to S^3 \to S^2$ donne les isomorphismes $\pi_2(S^2) \approx \pi_1(S^1)$ et $\pi_n(S^3) \approx \pi_n(S^2)$ pour tout $n \geq 3$. En prenant $n = 3$, on voit que $\pi_3(S^2)$ est infini cyclique, généré par l'application de Hopf $S^3 \to S^2$.

Dans l'exemple suivant apparaît le concept de n-espace projectif complexe $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$, qui est défini comme l'espace des lignes complexes passant par l'origine dans $\mathbb{C}^{n+1}$, il s'agit donc de sous-espaces vectoriels de dimension 1 de $\mathbb{C}^{n+1}$. On peut généraliser cette définition à $\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty$ de la même manière que dans le cas réel.

Exemple 2.20. Du fibré $S^1 \to S^\infty \to \mathbb{C}\mathrm{P}^\infty$, on obtient $\pi_i(\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty) \approx \pi_{i-1}(S^1)$, pour tout i, car S^∞ est contractile, c'est-à-dire ayant le même type d'homotopie qu'un point.

De cet exemple et du précédent, on voit que S^2 et $S^3 \times \mathbb{C}\mathrm{P}^\infty$ sont des complexes cellulaires simplement connexes avec des groupes d'homotopie isomorphes. Cependant, ils ne sont pas homotopiquement équivalents.

Chapitre 3

Les espaces d'Eilenberg-MacLane

Dans le but de définir dans ce chapitre la notion de groupe de cohomologie, il faut auparavant définir des espaces particuliers, appelés les espaces d'Eilenberg-MacLane, qui sont associés à des groupes abéliens.

Définition 3.1. Soient G un groupe abélien, et $n \in \mathbb{N}_0$, un espace X est appelé un **espace d'Eilenberg-MacLane** de type $K(G, n)$ si

$$\pi_i(X) = \begin{cases} G & si\ i = n \\ 0 & sinon \end{cases}$$

On admettra que ces espaces existent et qu'ils sont uniques à homotopie près.

On en donne quelques exemples.

Exemples 3.2.

1. $K(\mathbb{Z}, 1) = S^1$, en effet, $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$, et $\pi_i(S^1) = 0$, $\forall i \neq 1$.
2. $K(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, 1) = \mathbb{R}\mathrm{P}^\infty$.
3. $K(\mathbb{Z}, 2) = \mathbb{C}\mathrm{P}^\infty$.

Les espaces d'Eilenberg-MacLane sont des espaces de lacets, notion dont voici la définition.

Définition 3.3. L'**espace des lacets** d'un espace X ayant comme point de base x_0, noté ΩX, est l'ensemble des applications continues d'un segment dans cet espace, tel que les images des deux extrémités du segment coïncident avec le point de base :

$$\Omega X = \{f : I \to X \text{ continue } \mid f(0) = f(1) = x_0\}.$$

On a alors que les espaces d'Eilenberg-MacLane sont des espaces de lacets, plus précisément $K(G,n) \cong \Omega K(G,n+1)$. Il existe en effet une bijection entre l'ensemble des applications de $SX \to Y$ et l'ensemble des applications de $X \to \Omega Y$.

Une structure de multiplication sur ΩX est obtenue par concaténation des lacets :

$$h \circ (g \circ f) \cong (h \circ g) \circ f$$

Les paramétrisations peuvent, par exemple, être données par les formules suivantes :

$$g \circ f(t) = \begin{cases} g(2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ f(2t-1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

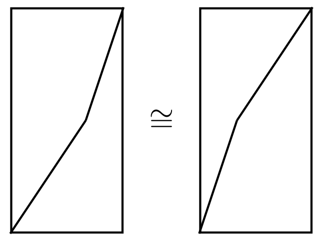
et alors, on aura d'une part,

$$h \circ (g \circ f)(t) = \begin{cases} h(2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ g(4t-2), & \frac{1}{2} \leq t \leq \frac{3}{4} \\ f(4t-3), & \frac{3}{4} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

alors que d'autre part

$$(h \circ g) \circ f(t) = \begin{cases} h(4t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{4} \\ g(4t-1), & \frac{1}{4} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ f(2t-1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

La situation est représentée sur le graphique suivant.



$(h \circ g) \circ f \qquad h \circ (g \circ f)$

Les deux paramétrisations sont homotopes, et l'homotopie n'est pas unique.

La paramétrisation de la concaténation des lacets n'est pas unique, on aurait pu par exemple la définir de la manière suivante :

$$g \circ f(t) = \begin{cases} g(4t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{4} \\ f(\frac{4t}{3} - \frac{1}{3}), & \frac{1}{4} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

REMARQUE 3.4. On utilise la structure de groupe de l'espace des lacets pour en munir les applications vers cet espace. En effet, si l'on a deux fonctions f et g d'un certain espace vers l'espace des lacets, on définit $(f+g)(x)$ comme étant $f(x)+g(x)$, ce qui donne une opération d'addition pour l'espace des applications, d'où la structure de groupe.

Pour des applications $f : X \to K(G, n)$, ceci induit une structure de groupe sur les classes d'homotopie, notées $[X, K(G, n)]$, des applications de cette forme.

On peut à présent définir les groupes de cohomologie.

DÉFINITION 3.5. Pour un groupe abélien G, et un complexe cellulaire X, on définit le **n$^{\text{ème}}$ groupe de cohomologie**, noté $H^n(X; G)$, comme étant l'ensemble des classes d'homotopie d'applications de X vers $K(G, n)$:

$$H^n(X; G) = [X, K(G, n)].$$

On a alors l'existence d'un foncteur contravariant, en effet, $f : X \to Y$ induit $f^* : H^n(Y, G) \to H^n(X, G)$. En considérant un élément d'une classe d'homotopie de $H^n(X; G)$, de la forme $a : X \to K(G, n)$, et en considérant aussi un élément de $H^n(Y; G)$, de la forme $b : Y \to K(G, n)$, on obtient alors un foncteur contravariant :

$$f^* : X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{b} K(G, n),$$

en précomposant avec la fonction f. Alors l'application $f^* : X \to K(G, n)$ appartient à $H^n(X, G)$. En appliquant f^* sur un élément $[b]$, on obtient alors $[b \circ f]$.

Il existe une opération du multiplication dans les groupes de cohomologie, qui est définie par le produit suivant :

Définition 3.6. Soient X et Y deux espaces ayant comme points de base respectifs x_0 et y_0. On définit alors leur **produit smash** comme :

$$(X, x_0) \wedge (Y, y_0) = X \times Y/((X \times y_0) \cup (x_0 \times Y))$$

La multiplication que ce produit induit pour les groupes de cohomologie est alors de la forme

$$K(G, m) \wedge K(G, n) \to K(G, m + n)$$

à deux applications $f : X \to K(G, m)$ et $g : Y \to K(G, n)$, on associe un produit de la forme suivante :

$$X \times Y \xrightarrow{f \times g} K(G, m) \times K(G, n) \to K(G, m) \wedge K(G, n) \to K(G, m + n)$$

Remarque 3.7. On a ainsi défini une multiplication dans la cohomologie, ce qui n'existe en général pas dans l'homologie.

On peut encore finalement donner l'exemple suivant :

Exemple 3.8. On a que le produit smash $X \wedge S^1$ peut être vu comme $X \times I/((X \times \partial I) \cup (\{x_0\} \times I))$, ainsi, il s'agit de la suspension réduite ΣX, le quotient de la suspension ordinaire SX, obtenue en collapsant le segment $\{x_0\} \times I$ en un point. On a donc $\Sigma X \cong X \wedge S^1$.

Conclusion

Comme exposé dans les premières pages du projet, le but de ce travail est, dans une première section, d'aborder le sujet de l'homotopie, en définissant le concept de relation d'homotopie, puis celui de groupe d'homotopie supérieur. Il s'agit ensuite de donner certaines propriétés les concernant et de prouver des résultats importants, dont le théorème de Whitehead et le théorème de suspension de Freudenthal. On définit également le concept de suite exacte et on donne quelques notions de base de théorie des catégories.

Les notions de fibrations et de fibrés sont ensuite abordées, et on donne la preuve du théorème concernant les suites exactes des groupes d'homotopie. Dans cette section, il est encore question des revêtements et de plusieurs résultats qui leur sont associés.

Dans une dernière section, les espaces d'Eilenberg-MacLane permettent finalement d'introduire le concept de groupe de cohomologie.

Bibliographie

[1] Allen Hatcher, *Algebraic topology* ; Cambridge University Press 2002.

[2] Marcelo Aguilar, Samuel Gitler, and Carlos Prieto, *Algebraic topology from a homotopical viewpoint* ; Universitext. Springer-Verlag, New York, 2002.

[3] Edwin H. Spanier, *Algebraic topology* ; Springer-Verlag, New York, 1981.

[4] Jean Dieudonné, *A History of Algebraic and Differential Topology 1900-1960* ; Birkhäuser, 1989.