EPFL, Section de Mathématiques

Projet de Semestre

Automne 2008

Algèbres de Hopf

Lev Kiwi

Professeure :

Kathryn Hess Bellwald

Sous la responsabilité de :

John Harper

In mathematics you don't understand things.
You just get used to them.
- J. von Neumann

Résumé

On peut s'intéresser aux algèbres de Hopf pour plusieurs raisons. La première est que la catégorie des algèbres de Hopf, avec de bonnes restrictions (i.e. primitivement engendrées sur un corps de caractéristique nulle) est isomorphe à la catégorie des algèbres de Lie ; un résultat très intéressant que j'ai découvert dans le papier de J.Milnor et J.Moore [**MM65**]. De plus, en topologie algébrique il arrive que des algèbres de Hopf apparaissent ; notamment l'algèbre de Steenrod. Cette dernière est particulièrement intéressante, car elle agit (d'une manière encore obscure pour moi) sur la cohomologie d'un espace topologique. Tout un papier de J.Milnor traite de cette algèbre [**Mil58**].

Dans ce travail, je me suis essentiellement basé sur la publication de J.Milnor et J.Moore [**MM65**]. Elle a le bon goût d'avoir une approche très intéressante dans sa généralité et sa présentation catégorique. C'est aussi pour cela que le contenu sera présenté avec un maximum de diagramme et une vison très abstraite. Dès le chapitre 2, le lecteur retrouvera la structure de ce papier avec les preuves des différents lemmes et propositions qui ne figurent pas dans le traité d'origine. Par contre, le chapitre 1 sort du cadre de la publication de J.Milnor et J.Moore. Il donne les notions de bases de la structure de module sur un anneau commutatif ; ceci pour permettre au lecteur de comprendre ce que c'est qu'un produit tensoriel. Ce chapitre est fortement inspiré du livre de Serge Lang [**Lan02**], ainsi que de celui de P.A.Grillet [**Gri07**] et de Mac Lane [**ML95**].

Je tiens encore à préciser que je me suis appuyé sur les livres de F.Borceux [**Bor94a**] [**Bor94b**] et sur le livre de S.Mac Lane [**ML98**] pour tout ce qui concerne la théorie des catégories. Quand à mes notions de topologies, elles viennent notamment du livre de A.Hatcher [**Hat02**] et de celui de J.Davis et P.Kirk [**DK01**]. Dans le cadre de ce projet, j'ai du encore feuilleter le livre de S.Dăscălescu [**DNR01**], ainsi que celui de P.Selick [**Sel97**] et celui de R.M.Kane [**Kan88**].

Table des matières

Résumé 3
Table des notations 6

Chapitre 1. Modules et produit tensoriel 7
1. Rappels sur les modules 7
2. Produit tensoriel de modules 9
3. Dualité de modules 12

Chapitre 2. Algèbre 15
1. Définitions principales 15
2. Produit tensoriel de A-modules 20
3. Exemple : l'algèbre tensorielle 26

Chapitre 3. Coalgèbre 29
1. Définitions principales 29
2. Produit cotensoriel de A-comodules 32
3. Exemple : l'algèbre tensorielle 34

Chapitre 4. Dualité 35
1. Résultats généraux 35
2. Primitifs et indécomposables 41

Chapitre 5. Algèbre de Hopf 45
1. Définition et propriétés générales 45

Chapitre 6. Exemples d'algèbres de Hopf 47
1. L'algèbre enveloppante 47
2. Algèbre de Steenrod 53

Bibliographie 55

Table des notations

Nous utiliserons les notations suivantes tout au long du travail :

$\mathbb{N}$	$\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$
$\mathbb{Z}$	$\{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$
$\oplus$	la somme directe
$\mathrm{Hom}(X, Y)$	l'ensemble des morphismes entre X et Y (pour la catégorie de X et Y)
id_X	le morphisme identité sur X

CHAPITRE 1

Modules et produit tensoriel

Dans ce chapitre, nous allons faire un bref rappel des concepts de bases sur les modules, ainsi que sur le produit tensoriel de modules. Les algèbres de Hopf étant construites sur cette structure, il est important d'en comprendre l'essentiel.

Pour les preuves manquantes je renvoie le lecteur aux livres de S.Lang [**Lan02**] et de P.A.Grillet [**Gri07**].

1. Rappels sur les modules

Soit A un anneau.

Définition 1.1 *On appelle un A-**module** à gauche le triple* $(M, +, \cdot)$ *tel que :*

(*i*) $(M, +)$ *est un groupe abélien,*

(*ii*) $\cdot : A \times M \to M$ *est une loi de composition externe vérifiant :*
- $\forall k \in A, \forall x, y \in M, k \cdot (x + y) = k \cdot x + k \cdot y$
- $\forall k, l \in A, \forall x \in M, (k + l) \cdot x = k \cdot x + l \cdot x$
- $\forall k, l \in A, \forall x \in M, (kl) \cdot x = k \cdot (l \cdot x)$
- $\forall x \in M, 1 \cdot x = x.$

Remarque 1.2 On peut définir de manière équivalente un A-module à droite. On dira A-module pour désigner un A-module à gauche.

Définition 1.3 *Soient M, N deux A-modules à gauche. On appelle une application A-**linéaire** de M dans N, une application $f : M \to N$ vérifiant :*

(*i*) $\forall x, y \in M, f(x + y) = f(x) + f(y)$

(*ii*) $\forall k \in A, \forall x \in M, f(k \cdot x) = k \cdot f(x).$

*Soient encore $M_1, \ldots, M_n$ des A-modules. Une application $g : M_1 \times \cdots \times M_n \to N$ est dite A-**multilinéaire** si elle est A-linéaire en chacune des variables.*

Définition 1.4 *Soient M un A-module et $N \subset M, N \neq \emptyset$. On dit que N est un **sous-module** de M si $A \cdot N = N$*[1].

Proposition 1.5 *Soient M, M' deux A-modules et $f : M \to M'$ une application A-linéaire. On a alors que* $\ker f$ *et* $\operatorname{im} f$ *sont des sous-modules de M et M' respectivement.*

Définition 1.6 *Soient M un A-module et N un sous-module de M. On définit une structure de A-module sur le groupe abélien M/N avec la multiplication*

$$\begin{aligned} \cdot : A \times M/N &\to M/N \\ (k, x + N) &\mapsto k \cdot (x + N) := k \cdot x + N, \end{aligned}$$

1. $A \cdot N = \{\sum_{i=1}^{n} a_i n_i \ : \ a_i \in A, n_i \in N\}$

pour tout $k \in A$ et pour tout $x + N \in M/N$. On appelle M/N le ***module quotient*** *de M par N.*

Proposition 1.7 *Soient M, N deux A-modules, $f : M \to N$ une application A-linéaire et S un sous-module de M tel que $S \subset \ker f$. On a alors qu'il existe une unique application A-linéaire $\bar{f} : M/S \to N$ telle que le diagramme*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & N \\ M/S \arrow[ur, dotted, "\exists ! \bar{f}"'] & \end{tikzcd}$$

commute.

Définition 1.8 *On appelle A-module de* ***génération finie****, un module M avec $m_1, \ldots, m_n \in M$ tel que tout $m \in M$ s'écrit comme combinaison A-linéaire des m_i, i.e. $m = \alpha_1 m_1 + \cdots + \alpha_n m_n$ pour certains $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in A$.*

Définition 1.9 *Soit M un A-module et $S \subset M$ un sous-ensemble non vide. On dit que S est une* ***base*** *de M (sur A) si*

(i) *S engendre M,*

(ii) *les éléments de S sont A-linéairements indépendants.*

On dit alors que M est ***libre****.*

Proposition 1.10 *Soient M un A-module libre de base S, N un A-module et $f : S \to N$ une fonction. On a alors qu'il existe une unique application de A-modules $\tilde{f} : M \to N$ telle que le diagramme suivant commute.*

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook, "i"'] & N \\ M \arrow[ur, dotted, "\exists ! \tilde{f}"'] & \end{tikzcd}$$

Proposition 1.11 *Soit $0 \to M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0$ une suite exacte courte de A-modules. On a alors que les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *il existe une application A-linéaire $\varphi : M'' \to M$, tel que $g \circ \varphi = \mathrm{id}_{M''}$,*

(ii) *il existe une application A-linéaire $\psi : M \to M'$, tel que $\psi \circ f = \mathrm{id}_{M'}$.*

Si ces conditions sont satisfaites, on a alors que

$$M = \operatorname{im} f \oplus \ker \psi, \qquad M = \ker g \oplus \operatorname{im} \varphi$$
$$M \cong M'' \oplus M'.$$

On dit qu'une suite exacte courte se ***scinde*** *si elle vérifie de telles propriétés.*

Définition 1.12 *Soit $\ldots \longrightarrow M_q \xrightarrow{f_q} M_{q+1} \xrightarrow{f_{q+1}} M_{q+2} \xrightarrow{f_{q+2}} \ldots$ une suite exacte de A-module. On dit que la suite se* ***scinde*** *si pour tout q, il existe un A-module N_q tel que $M_q = N_q \oplus \ker f_q$. On dit encore que la suite est* ***scindée****.*

Remarque 1.13 Ces suites exactes scindées auront une importance majeure dans la suite du travail, car on pourra tensoriser dessus sans perdre l'exactitude.

PROPOSITION 1.14 *Soit P un A-module. On a alors que les assertions suivantes sont équivalentes :*

(*i*) *Soient $f : P \to M''$ et $g : M \to M''$ des applications A-linéaires telle que g soit surjective. On a alors qu'il existe une application A-linéaire $h : P \to M$ telle que le diagramme suivant commute.*

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dotted, "\exists h"'] \arrow[d, "f"] & \\ M \arrow[r, "g"'] & M'' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

(*ii*) *Toute suite exacte de la forme $0 \to M' \to M \to P \to 0$ se scinde.*

(*iii*) *Il existe un A-module N tel que $P \oplus N$ est libre.*

(*iv*) *Le foncteur $\mathrm{Hom}(P, -)$ est exacte, i.e. pour toute suite exacte de A-modules $0 \to R \to S \to T \to 0$, on a que la suite $0 \to \mathrm{Hom}(P, R) \to \mathrm{Hom}(P, S) \to \mathrm{Hom}(P, T) \to 0$ est exacte*[2].

*Si ces conditions sont satisfaites, on dit que P est **projectif**.*

2. Produit tensoriel de modules

On va donner ici la définition ainsi qu'à la construction du produit tensoriel. Certains se plaindront du côté abstrait de la définition, mais ceci est motivé par l'approche du travail, le but étant de travailler le maximum d'une manière catégorique et avec des diagrammes.

A partir de maintenant, K sera un anneau commutatif.

DÉFINITION 1.15 *Soient $E_1, \dots, E_n$ des K-modules. On appelle le **produit tensoriel** entre $E_1, \dots, E_n$ le couple (T, t) où T est un K-module et $t : E_1 \times \cdots \times E_n \to T$ une application K-multilinéaire telle que pour tout couple (F, f) où F est un K-module et $f : E_1 \times \cdots \times E_n \to F$ une application K-multilinéaire, il existe une unique application K-linéaire $\bar{f} : T \to F$, telle que $\bar{f} \circ t = f$.*

En d'autres termes, on a que le diagramme suivant commute.

$$\begin{tikzcd} E_1 \times \cdots \times E_n \arrow[r, "f"] \arrow[d, "t"'] & F \\ T \arrow[ur, dotted, "\exists! \bar{f}"'] & \end{tikzcd}$$

PROPOSITION 1.16 *Avec les notations ci-dessus, un tel produit tensoriel existe et il est unique à isomorphisme près.*

DÉMONSTRATION. Nous commencerons par montrer d'abord l'unicité et ensuite l'existence d'un tel produit tensoriel.

2. Ce foncteur est exacte à gauche pour un P quelconque (préserve l'injection). Ici on impose en plus que le foncteur est exacte à droite (préserve la surjection).

Soient (T, t) et (T', t') deux produits tensoriel de $E_1, \ldots, E_n$. Alors on a que le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd}
E_1 \times \cdots \times E_n \arrow[r, "t'"] \arrow[dr, "t"'] & T' \arrow[d, bend left, dotted, "\exists! g"] \\
& T. \arrow[u, bend left, dotted, "\exists! f"]
\end{tikzcd}$$

Par la propriété universelle, on a que $id_T = gf$ et $id_{T'} = fg$.

On montre maintenant l'existence d'un tel produit tensoriel. Pour cette étape, on procède à sa construction usuelle.

On considère, L le K-module libre de base $E_1 \times \cdots \times E_n$, et on définit I le sous-module de L engendré par les éléments de la forme :

$$\begin{aligned}(x_1, \ldots, x_i + x_i', \ldots, x_n) - (x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)& \\ -(x_1, \ldots, x_i', \ldots, x_n)&\end{aligned}$$

et

$$(x_1, \ldots, kx_i, \ldots, x_n) - k(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$$

pour tout $x_i, x_i' \in E_i, k \in K, \forall i = 1, \ldots, n$.

On définit alors

$$t : E_1 \times \cdots \times E_n \overset{i}{\hookrightarrow} L \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} L/I$$

une application K-multilinéaire. De plus, posons $T := L/I$, c'est un K-module étant un quotient de module.

Il suffit maintenant de montrer que le couple (T, t) vérifie la propriété universelle.

Soit (F, f) un couple où F est un K-module et $f : E_1 \times \cdots \times E_n \to F$ une application K-multilinéaire. Par la propriété du module libre, on a qu'il existe une unique application K-linéaire $\tilde{f}$ telle que le diagramme ci-dessous commute.

$$\begin{tikzcd}
E_1 \times \cdots \times E_n \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook, "i"'] & F \\
L \arrow[ur, dotted, "\exists! \tilde{f}"'] &
\end{tikzcd}$$

Finalement, par la propriété universelle du module quotient, on a qu'il existe une unique application K-linéaire $\bar{f}$ telle que le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd}
E_1 \times \cdots \times E_n \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook, "i"'] & F \\
L \arrow[ur, "\tilde{f}"'] \arrow[d, "\pi"'] & \\
T = L/I. \arrow[uur, dotted, "\exists! \bar{f}"'] &
\end{tikzcd}$$

Ainsi (T,t) est notre produit tensoriel désiré. □

NOTATION 1.17 On note $E_1 \otimes \cdots \otimes E_n$ ou $\bigotimes_i E_i$ pour T et $x_1 \otimes \cdots \otimes x_n$ pour $t(x_1, \ldots, x_n)$.

REMARQUE 1.18 On pourrait adapter la définition du produit tensoriel à des modules sur un anneau non commutatif, mais ceci ne nous intéresse pas, car on perdrait la structure de module. On aurait seulement un groupe abélien.

PROPOSITION 1.19 *Soient $f_i : E_i \to E_i'$ des applications K-linéaires de modules pour $i = 1, \ldots, n$. On a alors qu'il existe une unique application K-linéaire $\bigotimes_i f_i : \bigotimes_i E_i \to \bigotimes_i E_i'$, telle que le diagramme ci-dessous.*

$$\begin{tikzcd}
\prod_i E_i \arrow[r, "\prod_i f_i"] \arrow[d, "t"'] & \prod_i E_i' \arrow[d, "t'"] \\
\bigotimes_i E_i \arrow[r, dotted, "\bigotimes_i f_i"] & \bigotimes_i E_i'
\end{tikzcd}$$

*L'application K-linéaire $\bigotimes_i f_i$ est appelée le **produit tensoriel** des f_i.*

Voici maintenant quelques propriétés du produit tensoriel qui nous seront utiles pour la suite de notre travail.

PROPOSITION 1.20 *Soient L, M, N des K-modules. On a alors que*

$$\begin{aligned} K \otimes M \cong M \otimes K &\cong M \\ M \otimes N &\cong N \otimes M \\ (L \otimes M) \otimes N &\cong L \otimes (M \otimes N) \end{aligned}$$

en tant que K-modules.

PROPOSITION 1.21 *Soient M, N, A_j, B_i des K-modules, $i \in I \neq \emptyset$, $j \in J \neq \emptyset$. On a alors que*

$$\begin{aligned} M \otimes (\bigoplus_{i \in I} B_i) &\cong \bigoplus_{i \in I} (M \otimes B_i) \\ (\bigoplus_{j \in J} A_j) \otimes N &\cong \bigoplus_{j \in J} (A_j \otimes N) \end{aligned}$$

en tant que K-modules.

REMARQUE 1.22 Dans la suite du travail, on notera $=$ au lieu de $\cong$.

PROPOSITION 1.23 *Le foncteur $(-) \otimes M$ est exacte à droite pour M un K-module, i.e. pour toute suite exacte de K-module $R \to S \to T \to 0$, la suite $R \otimes M \to S \otimes M \to T \otimes M \to 0$ est exacte.*

REMARQUE 1.24 Le foncteur $(-) \otimes M$ n'est généralement pas exacte à gauche. Il suffit de prendre le $\mathbb{Z}$-module $M = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et la suite exacte $0 \to \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$ et de tensoriser.

Par contre, pour certains K-modules, $(-) \otimes M$ est exacte. Dans de tels cas, on dit que M est **plat**.

DÉFINITION 1.25 *On dit qu'une catégorie $\mathscr{C}$ est **abélienne** si*

(*i*) *$\mathscr{C}$ a un objet nul,*

(*ii*) *toute paire d'objets dans $\mathscr{C}$ a un produit et un coproduit,*

(*iii*) *tout morphisme de $\mathscr{C}$ a un noyau et un conoyau,*

(*iv*) *tout monomorphisme de $\mathscr{C}$ est un noyau d'un certain morphisme de $\mathscr{C}$, et tout épimorphisme de $\mathscr{C}$ est un conoyau d'un certain morphisme de $\mathscr{C}$.*

Proposition 1.26 *Les K-modules avec les applications K-linéaires forment une catégorie abélienne.*

Remarque 1.27 Ceci justifiera l'utilisation des lemmes de diagrammes dans la suite du projet.

Proposition 1.28 *Soient M, N, L des K-modules. On a alors l'isomorphisme naturel*

$$\mathrm{Hom}(M \otimes N, L) \cong \mathrm{Hom}(M, \mathrm{Hom}(N, L))$$

en tant que K-modules.

3. Dualité de modules

Pour finir ce chapitre, on rappel encore quelques résultats sur la dualité. Les algèbres de Hopf étant des structures qui vivent avec leur dual, on donne ici les preuves de certains résultats principaux.

Pour avoir le maximum de généralité, on manipulera des modules projectifs (fini) ; notion qui généralise celle des modules libres. Ces derniers ont le bon goût de se comporter très bien avec les constructions dual.

Définition 1.29 *Soient M, N des K-modules et $f : M \to N$ une application K-linéaire.*

(*i*) *On appelle le **dual** de M, le K-module $M^* := \mathrm{Hom}(M, K)$.*

(*ii*) *On appelle le **dual** de f, l'application K-linéaire*

$$\begin{aligned} f^* : N^* &\longrightarrow M^* \\ \alpha &\longmapsto \alpha \circ f. \end{aligned}$$

Lemme 1.30 *Soit L un K-module libre de génération finie, alors L^* est aussi un K-module libre de génération finie.*

Démonstration. Comme L est un K-module libre de génération finie, on a $L = \bigoplus_{i=1}^n K$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Par conséquent,

$$\mathrm{Hom}(\bigoplus_{i=1}^n K, K) \cong \mathrm{Hom}(\prod_{i=1}^n K, K) \cong \prod_{i=1}^n \mathrm{Hom}(K, K) \cong \prod_{i=1}^n K \cong \bigoplus_{i=1}^n K. \qquad \square$$

Remarque 1.31 Soient M, N des K-modules. Observer alors que $(M \oplus N)^* = \mathrm{Hom}(M \oplus N, K) \cong \mathrm{Hom}(M, K) \oplus \mathrm{Hom}(N, K) = M^* \oplus N^*$.

Proposition 1.32 *Soit P un K-module projectif de génération finie. Alors il existe un K-module M tel que $P \otimes M$ est libre de génération finie.*

Corollaire 1.33 *Soit P un K-module projectif de génération finie. Alors P^* est aussi un K-module projectif de génération finie.*

Proposition 1.34 *Soit P un K-module projectif de génération finie. Alors $P \cong P^{**}$.*

DÉMONSTRATION. Considérons l'application de K-module

$$\begin{aligned} \lambda_L : L &\longrightarrow L^{**} \\ l &\longmapsto \lambda_L(l) : L^* \to K : \quad \alpha \mapsto \alpha(l). \end{aligned}$$

Si L est libre et de génération finie, il est facile de voir que cette application induit un isomorphisme de K-modules. De plus c'est une transformation naturelle, i.e. le diagramme suivant commute.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "f"] & A \arrow[r, "\lambda_A"] \arrow[d, "f"] & A^{**} \arrow[d, "f^{**}"] \\ B & B \arrow[r, "\lambda_B"] & B^{**} \end{tikzcd}$$

On le vérifie facilement. Soient $a \in A$, on montre que $f^{**} \circ \lambda_A(a) = \lambda_B \circ f(a)$, i.e. $\forall \beta \in B^*$ on doit avoir que $f^{**} \circ \lambda_A(a)(\beta) = \lambda_B \circ f(a)(\beta)$. En effet,

$$\begin{aligned} f^{**} \circ \lambda_A(a)(\beta) = f^{**}(\lambda_A(a))(\beta) &= \lambda_A(a) \circ f^*(\beta) = \lambda_A(a)(\beta \circ f) \\ =&\beta \circ f(a) = \beta(f(a)) = \lambda_B(f(a))(\beta) = \lambda_B \circ f(a)(\beta). \end{aligned}$$

Revenons maintenant à notre proposition. Si P est projectif, on a qu'il existe un K-module F tel que $P \oplus F$ est libre et de génération finie. Considérons alors la suite

$$P \xrightarrow{i} P \oplus F \xrightarrow{r} P$$

où i est l'injection canonique et r la rétraction. On a alors que le diagramme suivant commute.

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "i"] \arrow[rr, bend left, "\mathrm{id}_P"] \arrow[d, "\lambda_P"] & P \oplus F \arrow[r, "r"] \arrow[d, "\cong"] & P \arrow[d, "\lambda_P"] \\ P^{**} \arrow[r, "i^{**}"] \arrow[rr, bend right, "\mathrm{id}_{P^{**}}"'] & (P \oplus F)^{**} \arrow[r, "r^{**}"] & P^{**} \end{tikzcd}$$

Le rectangle de gauche induit que λ_P est injective et le rectangle de droite que λ_P est sujective. □

PROPOSITION 1.35 *Soient P, L des K-modules et tel que P soit projectif de génération finie. Alors*

$$P^* \otimes L \cong \mathrm{Hom}(P, L)$$

en tant que K-module.

DÉMONSTRATION. On considère l'application K-bilinéaire

$$\begin{aligned} \zeta : P^* \times L &\longrightarrow \mathrm{Hom}(P, L) \\ (\alpha, l) &\longmapsto \zeta_{(\alpha,l)} : P \to L : p \mapsto (\alpha(p)l). \end{aligned}$$

Par la propriété universelle du produit tensoriel, ζ induit une application K-linéaire

$$\begin{aligned} \xi : P^* \otimes L &\longrightarrow \mathrm{Hom}(P, L) \\ \alpha \otimes l &\longmapsto \xi_{\alpha\otimes l} = \zeta_{(\alpha,l)} : P \to L. \end{aligned}$$

Il suffit alors de montrer que ξ est une transformation naturelle et que dans le cas des modules libres de générations finies, c'est un isomorphisme (ceci est presque immédiat).

Pour repasser au cas des K-modules projectifs de générations finies, on utilisera le même argument que dans la proposition 1.34 mais avec le diagramme ci-dessous.

$$\begin{tikzcd} P^* \otimes L \arrow[r, "i'"] \arrow[d, "\xi_P"] \arrow[rr, bend left, "\mathrm{id}"] & (P\oplus F)^* \otimes L \arrow[r, "p'"] \arrow[d, "\xi_{P\oplus F}", "\cong"'] & P^* \otimes L \arrow[d, "\xi_P"] \\ \mathrm{Hom}(P, L) \arrow[r, "i''"] \arrow[rr, bend right, "\mathrm{id}"'] & \mathrm{Hom}(P\oplus F, L) \arrow[r, "p''"] & \mathrm{Hom}(P, L) \end{tikzcd}$$

où F est le K-module tel que $P \oplus F$ est libre de génération finie. $\square$

Corollaire 1.36 *Soient P, L des K-modules telles que P est projectif de génération finie. Alors $P^* \otimes L^* \cong (P \otimes L)^*$.*

Démonstration.

$$\begin{aligned} P^* \otimes L^* \cong \mathrm{Hom}(P, L^*) &= \mathrm{Hom}(P, \mathrm{Hom}(L, K)) \\ &\cong \mathrm{Hom}(P \otimes L, K) = (P \otimes L)^*. \end{aligned} \qquad \square$$

Remarque 1.37 Dans la suite du travail, on notera $=$ au lieu de $\cong$.

CHAPITRE 2

Algèbre

On commence ici par un tas de définitions ainsi que de petits résultats sur les algèbres. On remarque tout de suite l'approche très intéressante de Milnor et Moore, car elle se fait sans aucun élément et dans une généralité sympathique. L'avantage majeur de définir les objets ainsi nous permettra de dualiser très facilement (en « inversant » toutes les flèches) et de définir par conséquent les coalgèbres. Ceci nous donnera beaucoup de symétries et une grande élégance dans la suite du projet.

Dans cette chapitre, K sera un anneau commutatif.

1. Définitions principales

Définition 2.1 (*i*) *On appelle un K-**module gradué**, une famille de K-modules $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.*

(*ii*) *Une **application de K-modules gradués** entre A et B est une famille d'applications K-linéaires $\{f_n : A_n \to B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ qu'on note simplement $f : A \to B$ (on l'appelle aussi **morphisme de K-modules gradués**).*

(*iii*) *On appelle **produit tensoriel** de deux K-modules gradués A et B, le K-module gradué $A \otimes B$ définit par $(A\otimes B)_n := \bigoplus_{i+j=n} A_i \otimes B_j$.*

(*iv*) *On définit le **produit tensoriel** de deux applications de K-modules gradués $f : A \to B, g : A' \to B'$, comme l'application de K-modules gradués $f \otimes g : A \otimes A' \to B \otimes B'$ définit par $(f \otimes g)_n := \bigoplus_{i+j=n} f_i \otimes g_j$.*

(*v*) *Si $f : A \to B$ une application de K-modules gradués, on appelle le **noyau** de f, le K-module gradué $\ker f$ définit par $(\ker f)_n := \ker(f_n)$. De même, on appelle le **conoyau** de f, le K-module gradué $\operatorname{coker} f$ définit par $(\operatorname{coker} f)_n := \operatorname{coker}(f_n)$.*

(*vi*) *Si M est un K-module gradué et N un K-sous-module gradué de M, on définit le **quotient** de M par N comme le K-module gradué, noté M/N, définit par $(M/N)_n := M_n/N_n$.*

(*vii*) *Si A est un K-module gradué, le K-module gradué A^* est appelé le **dual** de A et il est définit par $A^*_n := \mathrm{Hom}(A_n, K)$.*

(*viii*) *Si $f : A \to B$ est une application de K-modules gradués, le **dual** de f, noté $f^* : B^* \to A^*$, est l'application de K-modules gradués définit par $(f^*)_n := (f_n)^*$* [1].

Exemple 2.2 On peut voir K comme un K-module gradué. Il suffit de poser $K_0 = K$ et $K_n = 0, \forall n > 0$. De plus, il est facile de voir que pour un K-module gradué A, on a $K \otimes A = A \otimes K = A$.

1. Les plus fourbes écriront encore $(f^*)_n := \mathrm{Hom}(f_n, K)$, ceci pour voir le dual comme le foncteur $\mathrm{Hom}(-, K)$.

Définition 2.3 *On appelle une* ***algèbre*** *sur K, un triplet (A, φ, η) où*

(*i*) *A est un K-module gradué,*

(*ii*) *$\varphi : A \otimes A \to A$ et $\eta : K \to A$ sont des applications de K-modules gradués telles que les diagrammes suivants commutent.*

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \otimes A \arrow[r, "A\otimes\varphi"] \arrow[d, "\varphi\otimes A"'] & A \otimes A \arrow[d, "\varphi"] \\ A \otimes A \arrow[r, "\varphi"] & A \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} K \otimes A \arrow[r, "\eta\otimes A"] \arrow[dr, "\cong"'] & A \otimes A \arrow[d, "\varphi"] & A \otimes K \arrow[l, "A\otimes\eta"'] \arrow[dl, "\cong"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

Remarque 2.4 L'opération φ est appelée **multiplication** tandis que η est l'**unité**.

Observer que K vu comme un K-module gradué, muni de la multiplication usuelle d'anneau et de l'identité forme une algèbre.

Définition 2.5 *Soient A, B deux K-modules gradués. On appelle le* ***twist****, l'application de K-modules gradués suivante*

$$T : A \otimes B \to B \otimes A$$

$$T_n(a \otimes b) := (-1)^{pq} b \otimes a$$

où $a \in A_p, b \in B_q$ et $p + q = n$.

Une algèbre A est dite ***commutative*** *si le diagramme*

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \arrow[dr, "\varphi"] \arrow[dd, "T"'] & \\ & A \\ A \otimes A \arrow[ur, "\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

commute.

Lemme 2.6 *Soient A, B deux algèbres sur K. On définit une structure d'algèbre sur $A \otimes B$ avec*

$$\varphi_{A\otimes B} : A \otimes B \otimes A \otimes B \overset{A\otimes T\otimes B}{\longrightarrow} A \otimes A \otimes B \otimes B \overset{\varphi_A\otimes\varphi_B}{\longrightarrow} A \otimes B$$

et

$$\eta_{A\otimes B} : K = K \otimes K \overset{\eta_A\otimes\eta_B}{\longrightarrow} A \otimes B.$$

Démonstration. Il faut vérifier que $\varphi_{A\otimes B}$ et $\eta_{A\otimes B}$ font commuter les diagrammes de la définition 2.3. Ce qui est clair par l'associativité de φ_A et φ_B. Idem pour $\eta_{A\otimes B}$. □

Définition 2.7 *Un **morphisme d'algèbres** est une application de K-modules gradués $f : A \to B$ telle que les diagrammes suivants commutent.*

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \arrow[r, "\varphi_A"] \arrow[d, "f\otimes f"'] & A \arrow[d, "f"] \\ B \otimes B \arrow[r, "\varphi_B"] & B \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} K \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[d, equal] & A \arrow[d, "f"] \\ K \arrow[r, "\eta_B"] & B \end{tikzcd}$$

Lemme 2.8 *$\varphi : A \otimes A \to A$ est un morphisme d'algèbres si et seulement si A est commutative.*

Démonstration. Considérons le diagramme

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \otimes A \otimes A \arrow[rr, "\varphi_{A\otimes A}"] \arrow[dr, "A\otimes T\otimes A"] \arrow[dd, "\varphi\otimes\varphi"'] & & A \otimes A \arrow[dd, "\varphi"] \\ & A \otimes A \otimes A \otimes A \arrow[ur, "\varphi\otimes\varphi"] \arrow[dr, "\varphi(\varphi\otimes\varphi)"'] & \\ A \otimes A \arrow[rr, "\varphi"'] & & A. \end{tikzcd}$$

On observe que le diagramme triangulaire supérieur commute par définition de $\varphi_{A\otimes A}$ et le diagramme à droite commute trivialement. Il ne reste plus que le sous-diagramme inférieur gauche, qui lui commute si et seulement si A est commutative. En effet, ce dernier résultat est immédiat en prenant des éléments, et on peut l'écrire en termes de diagramme assez facilement [2]. □

Définition 2.9 *Soit A une algèbre. On appelle une **augmentation**, un morphisme d'algèbre $\varepsilon : A \to K$. On dit alors que A est **augmentée**. On note $I(A)$ le noyau de ε.*

Lemme 2.10 *Soit A une algèbre augmentée sur K. On a alors que $\varepsilon\eta = \mathrm{id}_K$ et la suite*

$$0 \longrightarrow I(A) \longrightarrow A \xrightarrow{\varepsilon} K \longrightarrow 0$$

est exacte.

Démonstration. Comme ε est un morphisme d'algèbre, on a que le diagramme suivant commute.

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "\eta"] \arrow[d, equal] & A \arrow[d, "\varepsilon"] \\ K \arrow[r, "\eta_K"] & K \end{tikzcd}$$

où $\eta_K = \mathrm{id}_K$. Par conséquent on a $\varepsilon\eta = \mathrm{id}_K$.

Il en découle ainsi que la suite $0 \longrightarrow I(A) \longrightarrow A \xrightarrow{\varepsilon} K \longrightarrow 0$ est exacte. □

2. La raison pour laquelle je n'ai pas mis la preuve est que le diagramme fait une page entière.

DÉFINITION 2.11 *Soit $f : A \to B$ un morphisme d'algèbres. On dit que f est un* ***morphisme d'algèbres augmentées*** *si A et B sont augmentées et que le diagramme suivant commute.*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varepsilon_A"] \arrow[d, "f"] & K \arrow[d, equal] \\ B \arrow[r, "\varepsilon_B"] & K \end{tikzcd}$$

DÉFINITION 2.12 *Soit A une algèbre sur K.*

(i) *On dit que $B \subset A$ est une* ***sous-algèbre*** *(sur K) de A si (B, φ_A, η_A) est une algèbre sur K.*

(ii) *On dit que $I \subset A$ est un* ***idéal à gauche*** *de A si*

  (a) *I est une sous-algèbre non-unitaire de A, et*

  (b) *$\varphi_A(A \otimes I) \subset I$.*

(iii) *On dit que $I \subset A$ est un* ***idéal à droite*** *de A si*

  (a) *I est une sous-algèbre non-unitaire de A, et*

  (b) *$\varphi_A(I \otimes A) \subset I$.*

(iv) *On dit que $I \subset A$ est un* ***idéal*** *si I est un idéal à gauche et un idéal à droite.*

PROPOSITION 2.13 *Soient A une algèbre sur K et I un idéal de A, alors A/I est muni d'une structure d'algèbre. De plus, la projection $\pi : A \to A/I$ est un morphisme d'algèbres.*

PROPOSITION 2.14 *Soient A, B deux algèbres sur K, $f : A \to B$ un morphisme d'algèbres et I un idéal tel que $I \subset \ker f$, alors il existe un unique morphisme d'algèbre $\tilde{f} : A/I \to B$ tel que le diagramme*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"] & B \\ A/I \arrow[ur, dotted, "\exists! \tilde{f}"'] & \end{tikzcd}$$

commute.

PROPOSITION 2.15 *Soient A, B deux algèbres sur K et $f : A \to B$ un morphisme d'algèbres, alors*

(i) $\ker f$ *est un idéal de A,*

(ii) $\operatorname{im} f$ *est une sous-algèbre de B,*

(iii) $A/\ker f \cong \operatorname{im} f$.

REMARQUE 2.16 Les preuves des propositions ci-dessus découlent des résultats semblables pour les K-modules et les anneaux.

DÉFINITION 2.17 *Soit A une algèbre sur K.*

(i) *On dit que le couple (N, φ_N) est un* ***A-module à gauche*** *si*

  (a) *N est un K-module gradué,*

(b) $\varphi_N : A \otimes N \to N$ *est une application de* K*-modules gradués telle que les diagrammes suivant commutent.*

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \otimes N \arrow[r, "A\otimes\varphi_N"] \arrow[d, "\varphi_A\otimes N"] & A \otimes N \arrow[d, "\varphi_N"] \\ A \otimes N \arrow[r, "\varphi_N"] & N \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} K \otimes N \arrow[rr, "\eta\otimes N"] \arrow[dr, "\cong"] & & A \otimes N \arrow[dl, "\varphi_N"] \\ & N & \end{tikzcd}$$

(ii) *On dit que le couple* (M, φ_M) *est un* ***A-module à droite*** *si*

(a) M *est un* K*-module gradué,*

(b) $\varphi_M : M \otimes A \to M$ *est une application de* K*-modules gradués telle que les diagrammes suivant commutent.*

$$\begin{tikzcd} M \otimes A \otimes A \arrow[r, "\varphi_M\otimes A"] \arrow[d, "M\otimes\varphi_A"] & M \otimes A \arrow[d, "\varphi_M"] \\ M \otimes A \arrow[r, "\varphi_M"] & M \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} M \otimes K \arrow[rr, "M\otimes\eta"] \arrow[dr, "\cong"] & & M \otimes A \arrow[dl, "\varphi_M"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

Définition 2.18 *Soient* A *une algèbre sur* K *et* N, N' *deux* A*-modules à gauche. On dit qu'une application de* K*-modules gradués* $f : N \to N'$ *est un* ***morphisme de A-modules à gauche*** *si le diagramme suivant commute.*

$$\begin{tikzcd} A \otimes N \arrow[r, "\varphi_N"] \arrow[d, "A\otimes f"] & N \arrow[d, "f"] \\ A \otimes N' \arrow[r, "\varphi_{N'}"] & N' \end{tikzcd}$$

Si M, M' *sont deux* A*-modules à droite, on dit qu'une application de* K*-modules gradués* $f : M \to M'$ *est un* ***morphisme de A-modules à droite*** *si le diagramme suivant commute.*

$$\begin{tikzcd} M \otimes A \arrow[r, "\varphi_M"] \arrow[d, "f\otimes A"] & M \arrow[d, "f"] \\ M' \otimes A \arrow[r, "\varphi_{M'}"] & M' \end{tikzcd}$$

LEMME 2.19 *Soient A une algèbre sur K et $f, g : N \to M$ deux morphismes de A-modules à gauche (resp. à droite), alors $f + g : N \to M$ l'application de K-modules gradués définit par $(f+g)_n := f_n + g_n$ est un morphisme de A-modules à gauche (resp. à droite).*

DÉMONSTRATION. On prouve le cas des A-modules à gauche, la preuve est similaire dans les cas des A-modules à droite.

Observons que $A \otimes (f+g) = A \otimes f + A \otimes g$, par conséquent le diagramme

$$\begin{tikzcd} A \otimes N \arrow[r, "\varphi_N"] \arrow[d, "A\otimes f + A \otimes g"'] & N \arrow[d, "f+g"] \\ A \otimes M \arrow[r, "\varphi_M"] & M \end{tikzcd}$$

commute. □

REMARQUE 2.20 Grâce à ce petit lemme, on peut sans trop de peine affirmer que l'ensemble des A-modules à gauche (resp. à droite) muni des morphismes de A-modules à gauche (resp. à droite) forme une catégorie abélienne. Notez que c'est aussi le cas des K-modules gradués avec les applications K-linéaires.

Ceci justifie l'utilisation des lemmes de diagrammes dans la suite du travail.

2. Produit tensoriel de A-modules

On va donner ici quelques constructions ainsi que des résultats sur le produit tensoriel de A-modules. Tout ceci ne sera pas utiles dans l'immédiat, mais celui qui désire lire et comprendre l'entier de la publication de Milnor et Moore sera contraint de passer par là.

Dans cette section, A sera une algèbre sur un anneau commutatif K. Dans certains cas, elle sera augmentée (on le précisera chaque fois).

DÉFINITION 2.21 *Soient M un A-module à droite et N un A-module à gauche, on appelle le* ***produit tensoriel*** *de M et N le K-module gradué $M \otimes_A N$ tel que la suite*

$$M \otimes A \otimes N \overset{\varphi_M \otimes N - M \otimes \varphi_N}{\longrightarrow} M \otimes N \longrightarrow M \otimes_A N \to 0$$

est exacte

REMARQUE 2.22 Cette définition est équivalent à dire que $M \otimes_A N$ est le conoyau de $\varphi_M \otimes N - M \otimes \varphi_N$ ou encore le coégaliseur de $\varphi_M \otimes N$ et $M \otimes \varphi_N$, car on est dans une catégorie abélienne.

LEMME 2.23 *Soit M un A-module à droite et N un A-module à gauche, alors $(-) \otimes_A N$ et $M \otimes_A (-)$ sont des foncteurs.*

DÉMONSTRATION. Par commodité, notons $A-\mathsf{Mod}$ la catégorie des A-modules à gauche. On montre alors que $(-) \otimes_A N$ est un foncteur sur cette catégorie, la preuve est similaire pour $M \otimes_A (-)$. On définit

$$\begin{aligned} (-) \otimes_A N : A - \mathsf{Mod} &\longrightarrow A - \mathsf{Mod} \\ B &\longmapsto B \otimes_A N \\ f : B \to C &\longmapsto f \otimes_A N : B \otimes_A N \to C \otimes_A N \end{aligned}$$

où $f \otimes_A N$ est obtenue par la propriété universelle. C'est aussi par cette dernière qu'on montre les propriétés pour que $(-) \otimes_A N$ soit un foncteur (composition de morphismes, élément neutre). □

PROPOSITION 2.24 *Soient $M' \to M \to M'' \to 0$ une suite exacte de A-modules à droite et N un A-module à gauche. On a alors que la suite*

$$M' \otimes_A N \to M \otimes_A N \to M'' \otimes_A N \to 0$$

est exacte.

DÉMONSTRATION. On applique les foncteurs $(-) \otimes N$ et $(-) \otimes A \otimes N$ à la suite

$$M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0.$$

Cela nous donne le diagramme suivant.

$$\begin{tikzcd}
M' \otimes A \otimes N \arrow[r, "f\otimes A\otimes N"] \arrow[d] & M \otimes A \otimes N \arrow[r, "g\otimes A\otimes N"] \arrow[d] & M'' \otimes A \otimes N \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
M' \otimes N \arrow[r, "f\otimes N"] \arrow[d, "\pi'"] & M \otimes N \arrow[r, "g\otimes N"] \arrow[d, "\pi"] & M'' \otimes N \arrow[r] \arrow[d, "\pi''"] & 0 \\
M' \otimes_A N \arrow[r, "f\otimes_A N"] \arrow[d] & M \otimes_A N \arrow[r, "g\otimes_A N"] \arrow[d] & M'' \otimes_A N \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Comme $(-) \otimes N$ et $(-) \otimes A \otimes N$ sont exactes à droite, on a alors que les lignes sont exactes (sauf la dernière évidemment). De plus, f, g sont des morphismes de A-modules, donc les carrés sont commutatifs.

On montre maintenant que la suite en question est exacte.

Exactitude en $M'' \otimes_A N$: $(g \otimes_A N)\pi = \pi''(g \otimes N)$ et comme π et $\pi''(g \otimes N)$ sont surjectifs, on a alors que $(g \otimes_A N)$ est surjectif.

Exactitude en $M \otimes_A N$: On commence par montrer que $(g \otimes_A N)(f \otimes_A N) = 0$. Ceci est immédiat puisque $gf = 0$.

Il suffit maintenant de montrer que $\ker(g \otimes_A N) \subset \operatorname{im}(f \otimes_A N)$. Pour cela, on va chasser dans le diagramme. Pour simplifier la notation, notons

- i pour $M \otimes A \otimes N \to M \otimes N$,
- i'' pour $M'' \otimes A \otimes N \to M'' \otimes N$,
- f_{AN} pour $f \otimes A \otimes N$,
- f_N pour $f \otimes N$,

– f_A pour $f \otimes_A N$,
– idem pour g.
Soit $z \in \ker(g_A)$. Considérons alors le diagramme

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, mapsto, dotted, "g_{AN}"] & x' \arrow[d, mapsto, dotted, "i''"] \\ y \arrow[r, mapsto, "g_N"] \arrow[d, mapsto, dotted, "\pi"] & g_N y \arrow[d, mapsto, "\pi''"] \\ z \arrow[r, mapsto, "g_A"] & 0 \end{tikzcd}$$

où y est obtenu par surjectivité de π tel que le carré inférieur commute, x' est obtenu par exactitude, et x par surjectivité.

Comme $g_N i(x) = i'' g_{AN}(x) = g_N(y)$, on a par conséquent que $g_N(y - i(x)) = 0$. Posons ainsi, $\bar{y} = y - i(x)$ et observons que

$$\pi(\bar{y}) = \pi(y - i(x)) = \pi(y) - \underbrace{\pi(i(x))}_{=0} = z.$$

Par exactitude de la suite, on qu'il existe y' tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd} y' \arrow[r, mapsto, dotted, "f_N"] \arrow[d, mapsto, "\pi'"] & \bar{y} \arrow[r, mapsto, "g_N"] \arrow[d, mapsto, "\pi"] & 0 \arrow[d, mapsto, "\pi''"] \\ \pi y' \arrow[r, mapsto, "f_A"] & z \arrow[r, mapsto, "g_A"] & 0 \end{tikzcd}$$

commute.

On a ainsi montré que $\ker(g \otimes_A N) \subset \operatorname{im}(f \otimes_A N)$. □

Proposition 2.25 *Soient $N' \to N \to N'' \to 0$ une suite exacte de A-modules à gauche et M un A-module à droite. On a alors que la suite*

$$M \otimes_A N' \to M \otimes_A N \to M \otimes_A N'' \to 0$$

est exacte.

Démonstration. La preuve est identique à celle ci-dessus. □

Remarque 2.26 Notez que $(-) \otimes_A N$ n'est pas exacte à gauche, ceci pour les mêmes raisons que $(-) \otimes N$ ne l'est pas non plus.

Lemme 2.27 *Soit N un A-module à gauche, alors $N = A \otimes_A N$.*

Démonstration. On montre que N est le coégaliseur de $\varphi_A \otimes N$ et $A \otimes \varphi_N$. On remarque déjà que par associativité de la multiplication, on a que $\varphi_N(\varphi_A \otimes N) = \varphi_N(A \otimes \varphi_N)$. On se donne alors un morphisme de A-module à gauche f tel que le diagramme solide

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \otimes N \arrow[r, shift left, "\varphi_A \otimes N"] \arrow[r, shift right, "A \otimes \varphi_N"'] & A \otimes N \arrow[r, "\varphi_N"] \arrow[d, "f"] & N \arrow[dl, dotted, "\exists! \bar{f}"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

commute.

On peut expliquer le morphisme $\bar{f}$ comme la composition

$$N \cong K \otimes N \xrightarrow{\eta_A \otimes N} A \otimes N \xrightarrow{f} M.$$

Ainsi N sera le coégaliseur désiré.

On va montrer qu'avec un tel morphisme $\bar{f}$ le diagramme commute. Considérons pour cela

- $s_{-1} : N = K \otimes N \xrightarrow{\eta \otimes N} A \otimes N$,
- $s_0 : A \otimes N = K \otimes A \otimes N \xrightarrow{\eta \otimes A \otimes N} A \otimes A \otimes N$,
- $s_1 : A \otimes N = A \otimes K \otimes N \xrightarrow{A \otimes \eta \otimes N} A \otimes A \otimes N$.

Remarquons que $(\varphi_A \otimes N)s_0 = \mathrm{id}_{A \otimes N}$, $(A \otimes \varphi_N)s_1 = \mathrm{id}_{A \otimes N}$ et $s_{-1}\varphi_N = (A \otimes \varphi_N)s_0$. Voyons le sur le diagramme.

$$\begin{tikzcd}
A \otimes A \otimes N \arrow[r, shift left, "\varphi_A \otimes N"] \arrow[r, shift right, "A \otimes \varphi_N"'] & A \otimes N \arrow[l, bend right, "s_0"'] \arrow[l, bend left, "s_1"] \arrow[r, shift left, "\varphi_N"] \arrow[d, "f"] & N \arrow[l, shift left, "s_{-1}"] \\
& M &
\end{tikzcd}$$

Notez alors que $\bar{f} = f s_{-1}$. On montre que $f = \bar{f}\varphi_N$.

$$\begin{aligned}
\bar{f}\varphi_N =& f s_{-1}\varphi_N = f(A \otimes \varphi_N)s_0 \\
=& f\underbrace{(\varphi_A \otimes N)s_0}_{=\mathrm{id}_{A \otimes N}} = f.
\end{aligned}$$

□

Pour avoir l'unicité, il faut considérer le diagramme commutatif suivant.

$$\begin{tikzcd}
K \otimes N \arrow[d, "\eta \otimes N"'] & \\
A \otimes N \arrow[r, "\varphi_N"] \arrow[d, "f"] & N \arrow[ul, "\cong"'] \arrow[dl, shift right, "\tilde{f}"'] \arrow[dl, shift left, "\bar{f}"] \\
M &
\end{tikzcd}$$

Ceci nous donne que $\bar{f} = f(\eta \otimes N) = \tilde{f}$.

Lemme 2.28 *Si A est une algèbre augmentée pour $\varepsilon : A \to K$ et N un A-module à gauche, alors on peut définir une structure de A-module à droite sur K et $K \otimes_A N = N/I(A)N$, où $I(A)N$ est l'image de $I(A) \otimes N \to A \otimes N \to N$.*

Démonstration. On commence par définir $\varphi_K : K \otimes A \to K$ comme la composition $K \otimes A \xrightarrow{K \otimes \varepsilon} K \otimes K \xrightarrow{\cong} K$ et $\eta_K := \varepsilon$. Observons qu'ainsi, le diagramme suivant commute.

$$\begin{tikzcd}
K \otimes A \otimes A \arrow[rr, "\varphi_K \otimes A"] \arrow[dr, "K\otimes\varepsilon\otimes A"] \arrow[ddr, bend right, "K\otimes\varepsilon\otimes\varepsilon"'] \arrow[dddd, bend right=40, "K\otimes\varphi_A"'] & & K \otimes A \arrow[dddd, "\varphi_K"] \\
& K \otimes K \otimes A \arrow[ur, "\cong"'] \arrow[d, "K\otimes K\otimes\varepsilon"] & \\
& K \otimes K \otimes K \arrow[d, "\cong"] \arrow[ddr, "\cong"] & \\
& K \otimes K \arrow[dr, "\cong"] & \\
K \otimes A \arrow[ur, "K\otimes\varepsilon"] \arrow[rr, "\varphi_K"] & & K
\end{tikzcd}$$

Par conséquent, φ_K définit bien une structure de A-module à droite sur K.

On montre maintenant la deuxième partie du lemme. Considérons la suite exacte

$$I(A) \longrightarrow A \xrightarrow{\varepsilon} K \longrightarrow 0$$

et appliquons le foncteur $(-) \otimes_A N$. Ceci nous donne le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
I(A) \otimes N \arrow[r, "i\otimes N"] \arrow[d, two heads, "\pi"] & A \otimes N \arrow[r, "\varepsilon\otimes N"] \arrow[d, two heads] & K \otimes N \arrow[r] \arrow[d, two heads] & 0 \\
I(A) \otimes_A N \arrow[r, "i\otimes_A N"] & A \otimes_A N \arrow[r, "\varepsilon\otimes_A N"] & K \otimes_A N \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

En appliquant le lemmes précédent, on a

$$\begin{tikzcd}
I(A) \otimes N \arrow[r, "i\otimes N"] \arrow[d, two heads, "\pi"] & A \otimes N \arrow[r] \arrow[d, two heads] & N \arrow[r] \arrow[d, two heads] & 0 \\
I(A) \otimes_A N \arrow[r, "i\otimes_A N"] & N \arrow[r] & K \otimes_A N \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Ainsi on a par exactitude de la suite que

$$\begin{aligned}
K \otimes_A N &= N/\operatorname{im}(i \otimes_A N) \\
&= N/\operatorname{im}((i \otimes_A N)\pi) \\
&= N/\operatorname{im}(\varphi_N(i \otimes N)) = N/I(A)N. \qquad \square
\end{aligned}$$

Corollaire 2.29 *Avec les mêmes notations que ci-dessus, on a la suite exacte*

$$I(A) \otimes N \to N \to K \otimes_A N \to 0.$$

Définition 2.30 *On dit qu'une algèbre A est* ***connexe*** *si $\eta : K \to A_0$ est un isomorphisme.*

Remarque 2.31 Si A est connexe, alors il existe une unique augmentation $\varepsilon : A \to K$ tel que $K \xrightarrow{\cong} A_0 \xrightarrow{\varepsilon_0} K$ où $\varepsilon_0\eta_0 = \mathrm{id}_K$.

PROPOSITION 2.32 *Si A est connexe et soit N un A-module à gauche, alors $N = 0$ si et seulement si $K \otimes_A N = 0$.*

DÉMONSTRATION. Si $N = 0$ il est évident que $K \otimes_A N = 0$ par définition. Le seul moyen d'avoir que la suite

$$K \otimes A \otimes N \xrightarrow{\varphi_K \otimes N - K \otimes \varphi_N} 0 \longrightarrow K \otimes_A N \longrightarrow 0$$

soit exacte en $K \otimes_A N$ est que $K \otimes_A N = 0$.

Supposons que $K \otimes_A N = 0$. On a alors que $N = I(A)N$ ce qui veut dire que le morphisme $I(A) \otimes N \to N$ est surjectif. On va montrer par récurrence sur le degré de N que $N = 0$.

Cas ($N_0 = 0$): Ecrivons $I(A) \otimes N$. On se rappel que

$$(I(A) \otimes N)_n = \bigoplus_{i+j=n} I(A)_i \otimes N_j$$

Ce qui nous donne

$$I(A) \otimes N = \{I(A)_0 \otimes N_0, (I(A)_1 \otimes N_0) \oplus (I(A)_0 \otimes N_1), \dots, \\ , \dots, \bigoplus_{i+j=n} I(A)_i \otimes N_j, \dots\}$$

et comme A est connexe, $I(A)_0 = 0$. Par conséquent,

$$I(A) \otimes N = \{0, I(A)_1 \otimes N_0, \dots, \bigoplus_{\substack{i+j=n \\ i \neq 0}} I(A)_i \otimes N_j, \dots\}$$

De plus, on a supposer que $I(A) \otimes N \to N$ est surjectif, i.e. que $(I(A) \otimes N)_n \to N_n$ est surjectif $\forall n \geq 0$, en particulier pour $n = 0$. Ceci force que $N_0 = 0$.

Cas ($N_n = 0, n > 0$): Supposons que $N_k = 0, \forall 0 \leq k < n$. On a par conséquent que

$$(I(A) \otimes N)_n = \bigoplus_{i+j=n} I(A)_i \otimes N_j = \underbrace{(I(A)_0 \otimes N_n)}_{=0} \oplus (\bigoplus_{\substack{i+j=n \\ i \neq 0}} \underbrace{I(A)_i \otimes N_j}_{=0}) = 0$$

et par surjectivité, on a que $N_n = 0$. $\square$

COROLLAIRE 2.33 *Si A est connexe et $f : N \to N'$ un morphisme de A-modules à gauche, alors f est surjectif si et seulement si $K \otimes_A f$ est surjectif.*

DÉMONSTRATION. Si f surjectif alors $K \otimes_A f$ l'est aussi, car le foncteur $K \otimes_A (-)$ est exacte à droite.

Supposons maintenant que $K \otimes_A f$ est surjectif et notons N'' le conoyau de f. On a alors les suites exactes $N' \to N \to N'' \to 0$ et $K \otimes_A N' \to K \otimes_A N \to K \otimes N'' \to 0$. Puisque $K \otimes_A f$ est surjectif, on a $K \otimes_A N'' = 0$. Par la proposition précédente, on a finalement que $N'' = 0$. $\square$

REMARQUE 2.34 Il est intéressant d'observer à quel point la graduation de l'algèbre peut avoir un rôle clé dans une preuve. Je tiens à le préciser, car ce n'est pas la dernière fois qu'on aura à faire à un argument de ce type.

DÉFINITION 2.35 *Soit C un K-module gradué. On appelle $A \otimes C$ l'**extension** de C en A-module à gauche, où la multiplication est $\varphi_{A \otimes C} : A \otimes A \otimes C \xrightarrow{\varphi_A \otimes C} A \otimes C$.*

Remarque 2.36 Observez que si N est un A-module à gauche et $f : C \to N$ est un morphisme de K-modules gradués, alors la composition

$$A \otimes C \xrightarrow{A \otimes f} A \otimes N \xrightarrow{\varphi_N} N$$

est un morphisme de A-modules à gauche, car $A \otimes f$ et φ_N le sont.

Proposition 2.37 *Si A est connexe, C un K-module gradué, N un A-module à gauche et $f : C \to N$, alors la composition*

$$A \otimes C \xrightarrow{A \otimes f} A \otimes N \xrightarrow{\varphi_N} N$$

de A-modules à gauche est surjective si et seulement si la composition

$$C \xrightarrow{f} N \longrightarrow K \otimes_A N$$

de K-modules gradués est surjective.

Démonstration. Il suffit de voir que $K \otimes_A (A \otimes C) = C$. On aura alors qu'à tensoriser par $K \otimes_A (-)$.

Remarquons que le diagramme suivant commute.

$$\begin{tikzcd}
K \otimes A \otimes (A \otimes C) \arrow[r] \arrow[d, equal] & K \otimes (A \otimes C) \arrow[r] \arrow[d, equal] & K \otimes_A (A \otimes C) \arrow[r] & 0 \\
(K \otimes A \otimes A) \otimes C \arrow[r] & (K \otimes A) \otimes C \arrow[r] & C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Comme les lignes sont exactes, on a par unicité du conoyau que $C = K \otimes_A (A \otimes C)$. □

3. Exemple : l'algèbre tensorielle

On va expliciter ici un exemple important d'algèbre sur K. Cette algèbre généralise notamment l'algèbre de polynômes et c'est sur celle-ci que vont être construites les algèbres de Hopf se trouvants au chapitre 6.

Définition 2.38 *Soit K un anneau commutatif et V un K-module gradué. On définit* ***l'algèbre tensorielle*** *comme le K-module gradué*

$$T(V) := K \oplus V \oplus V^{\otimes 2} \oplus V^{\otimes 3} \oplus \cdots = \bigoplus_{n \geq 0} V^{\otimes n}$$

où $V^{\otimes n}$ désigne $\underbrace{V \otimes V \otimes \cdots \otimes V}_{n\ fois}$.

Considérons l'isomorphisme de K-modules gradués

$$V^{\otimes p} \otimes V^{\otimes q} \xrightarrow{\cong} V^{\otimes p+q}, \quad \forall p, q \in \mathbb{N}.$$

En prenant les sommes directes, on obtient une application

$$\varphi : T(V) \otimes T(V) \longrightarrow T(V)$$

Notez aussi qu'on a $V^{\otimes 0} = K$. Qui par conséquent nous induit les applications suivantes

$$\eta : K \to T(V) \quad \varepsilon : T(V) \to K.$$

Proposition 2.39 *$(T(V), \varphi, \eta, \varepsilon)$ est une algèbre augmentée sur K.*

DÉMONSTRATION. On a clairement que les diagrammes

$$\begin{tikzcd} T(V)\otimes T(V)\otimes T(V) \arrow[rr, "T(V)\otimes\varphi"] \arrow[d, "\varphi\otimes T(V)"'] & & T(V)\otimes T(V) \arrow[d, "\varphi"] \\ T(V)\otimes T(V) \arrow[rr, "\varphi"] & & T(V) \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} K\otimes T(V) \arrow[r, "\eta\otimes T(V)"] \arrow[dr, "\cong"'] & T(V)\otimes T(V) \arrow[d, "\varphi"] & T(V)\otimes K \arrow[l, "T(V)\otimes\eta"'] \arrow[dl, "\cong"] \\ & T(V) & \end{tikzcd}$$

commutent. $\square$

PROPOSITION 2.40 *Soit V un K-module gradué, A une algèbre sur K, $f : V \to A$ une application de K-modules gradués. On a alors qu'il existe un unique morphisme d'algèbre $\bar{f} : T(V) \to A$ tel que le diagramme suivant commute.*

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "f"'] & T(V) \arrow[d, dotted, "\bar{f}"] \\ & A \end{tikzcd}$$

DÉMONSTRATION. On montre l'existence, en faisant la construction de $\bar{f}_0$. Elle se généralise de la même manière aux autres degrés (les notations deviendront juste plus compliquées et indigestes).

Notez que

$$T(V)_0 = K \oplus V_0 \oplus V_0^{\otimes 2} \oplus V_0^{\otimes 3} \oplus \cdots = \bigoplus_{n\geq 0} V_0^{\otimes n}$$

Ainsi, on définit $\bar{f}_0$ par récurrence sur n. On obtiendra $\bar{f}_0$ en prenant la somme direct des $\bar{f}_0^n$.

($n = 0$):

$$\bar{f}_0^0 = (\eta_A)_0 : K \longrightarrow A_0$$

($n = 1$):

$$\bar{f}_0^1 = f_0 : V_0 \longrightarrow A_0$$

($n > 1$):

$$\bar{f}_0^n = f_0 \otimes \bar{f}_0^{n-1} : V_0 \otimes V_0^{\otimes n-1} \longrightarrow A_0 \otimes A_0 \xrightarrow{\varphi_0} A_0$$

Il est assez facile de voir que c'est un morphisme d'algèbre étant donné que la multiplication est « tellement gentille ».

L'unicité d'un tel $\bar{f}$ est aussi chose facile à montrer (mais technique). Il faudra utiliser le fait que c'est un morphisme d'algèbre et donc qu'il doit respecter la multiplication. $\square$

REMARQUE 2.41 L'algèbre tensorielle est plus que ça, c'est aussi un adjoint à gauche du foncteur oubli entre les algèbres sur K et les K-modules gradués.

CHAPITRE 3

Coalgèbre

Sur les constructions précédentes, on « dualise » pour obtenir la notion de coalgèbre.

Dans ce chapitre, K sera un anneau commutatif.

1. Définitions principales

Définition 3.1 *On appelle une* ***coalgèbre*** *sur K un triplet (A, Δ, ε) tel que*

(i) A est un K-module gradué,

(ii) $\Delta : A \to A \otimes A$ et $\varepsilon : A \to K$ sont des applications de K-modules gradués telles que les diagrammes suivants commutent.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"'] & A \otimes A \arrow[d, "\Delta\otimes A"] \\
A \otimes A \arrow[r, "A\otimes\Delta"] & A \otimes A \otimes A
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
 & A \arrow[dl, "\cong"'] \arrow[d, "\Delta"'] \arrow[dr, "\cong"] & \\
K \otimes A & A \otimes A \arrow[l, "\varepsilon\otimes A"] \arrow[r, "A\otimes\varepsilon"'] & A \otimes K
\end{tikzcd}$$

Remarque 3.2 L'opération Δ est appelée **comultiplication** tandis que ε est l'**unité**[1].

Observer aussi que K muni de l'application $\Delta(k) = 1 \otimes k = k \otimes 1$ pour tout $k \in K$ et de l'application identité, forme une coalgèbre.

Définition 3.3 *Une coalgèbre A est dite* ***commutative*** *si le diagramme suivant commute.*

$$\begin{tikzcd}
 & A \otimes A \arrow[dd, "T"] \\
A \arrow[ur, "\Delta"] \arrow[dr, "\Delta"'] & \\
 & A \otimes A
\end{tikzcd}$$

où T est le twist.

1. Certains l'appelle aussi **counité**. Etant donné que l'algèbre de Hopf va lier la structure d'algèbre et de coalgèbre ; il faudra par conséquent distinguer ε de η.

LEMME 3.4 *Soient A, B deux coalgèbres sur K. On définit une structure de coalgèbre sur $A \otimes B$ avec*

$$\Delta_{A\otimes B} : A \otimes B \overset{\Delta_A \otimes \Delta_B}{\longrightarrow} A \otimes A \otimes B \otimes B \overset{A\otimes T\otimes B}{\longrightarrow} A \otimes B \otimes A \otimes B$$

et

$$\varepsilon_{A\otimes B} : A \otimes B \overset{\varepsilon_A \otimes \varepsilon_B}{\longrightarrow} K \otimes K = K.$$

DÉMONSTRATION. La preuve est similaire à celle du lemme 2.6. $\square$

DÉFINITION 3.5 *Un **morphisme de coalgèbres** est une application de K-modules gradués $f : A \to B$ tel que les diagrammes suivants commutent.*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\Delta_A"] \arrow[d, "f"] & A \otimes A \arrow[d, "f\otimes f"] \\ B \arrow[r, "\Delta_B"] & B \otimes B \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varepsilon_A"] \arrow[d, "f"] & K \arrow[d, equal] \\ B \arrow[r, "\varepsilon_B"] & K \end{tikzcd}$$

LEMME 3.6 *$\Delta : A \to A \otimes A$ est un morphisme de coalgèbres si et seulement si A est commutative.*

DÉMONSTRATION. La preuve est similaire à celle du lemme 2.8 $\square$

DÉFINITION 3.7 *Soit A une coalgèbre sur K. On appelle une **augmentation**, un morphisme de coalgèbre $\eta : K \to A$. On dit alors que A est **augmentée**. On note $J(A)$ le conoyau de η.*

DÉFINITION 3.8 *Soit $f : A \to B$ un morphisme de coalgèbres. On dit que f est un **morphisme de coalgèbres augmentées** si A et B sont augmentées et que le diagramme suivant commute.*

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[d, equal] & A \arrow[d, "f"] \\ K \arrow[r, "\eta_B"] & B \end{tikzcd}$$

LEMME 3.9 *Si A est une coalgèbre augmentée sur K, on a alors la suite exacte*

$$0 \to K \to A \to J(A) \to 0.$$

DÉMONSTRATION. la preuve est similaire à celle du lemme 2.10. $\square$

DÉFINITION 3.10 *Soit A une coalgèbre sur K.*

*(i) On dit que le couple (N, Δ_N) est un A-**comodule à gauche** si*

(a) N est un K-module gradué,

(b) $\Delta_N : N \to A \otimes N$ est une application de K-modules gradués telle que les diagrammes suivant commutent.

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, "\Delta_N"] \arrow[d, "\Delta_N"] & A \otimes N \arrow[d, "\Delta_A \otimes N"] \\ A \otimes N \arrow[r, "A\otimes\Delta_N"] & A \otimes A \otimes N \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} & N \arrow[dl, "\Delta_N"'] \arrow[dr, "\cong"] & \\ A \otimes N \arrow[rr, "\varepsilon\otimes N"] & & K \otimes N \end{tikzcd}$$

*(ii) On dit que le couple (M, Δ_M) est un A-**comodule à droite** si*

(a) M est un K-module gradué,

(b) $\Delta_M : M \to M \otimes A$ est une application de K-modules gradués telle que les diagrammes suivant commutent.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\Delta_M"] \arrow[d, "\Delta_M"] & M \otimes A \arrow[d, "M\otimes\Delta_A"] \\ M \otimes A \arrow[r, "\Delta_M\otimes A"] & M \otimes A \otimes A \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, "\Delta_M"'] \arrow[dr, "\cong"] & \\ M \otimes A \arrow[rr, "M\otimes\varepsilon"] & & M \otimes K \end{tikzcd}$$

Définition 3.11 *Soient A une coalgèbre sur K et N, N' deux A-comodules à gauche. On dit qu'une application de K-modules gradués $f : N \to N'$ est un **morphisme de A-comodules à gauche** si le diagramme suivant commute.*

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, "\Delta_N"] \arrow[d, "f"] & A \otimes N \arrow[d, "A\otimes f"] \\ N' \arrow[r, "\Delta_{N'}"] & A \otimes N' \end{tikzcd}$$

*Si M, M' sont deux A-comodules à droite, on dit qu'une application de K-modules gradués $f : M \to M'$ est un **morphisme de A-comodules à droite** si le diagramme suivant commute.*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\Delta_M"] \arrow[d, "f"] & M \otimes A \arrow[d, "f\otimes A"] \\ M' \arrow[r, "\Delta_{M'}"] & M' \otimes A \end{tikzcd}$$

Lemme 3.12 *Soient A une coalgèbre sur K et $f, g : N \to M$ deux morphismes de A-comodules à gauche (resp. à droite), alors $f + g : N \to M$ l'application de K-modules gradués définit par $(f + g)_n := f_n + g_n$ est un morphisme de A-comodules à gauche (resp. à droite).*

Remarque 3.13 La catégorie des A-comodules muni de morphismes de A-comodules est additive, mais pas abélienne car le foncteur $(-)\otimes A$ n'est pas exacte à gauche. Par contre, si A est plat, on aura donc ce problème résolu et par conséquent, la catégorie des A-comodules sera une catégorie abélienne.

2. Produit cotensoriel de A-comodules

Sur les algèbres, on avait définit la notion de produit de A-modules (où A est une algèbre). Ici on va faire de même pour les coalgèbres et les comodules.

Dans cette section A sera une coalgèbre sur un anneau commutatif K.

DÉFINITION 3.14 *Soient M un A-comodule à droite et N un A-comodule à gauche. On définit le **produit cotensoriel** de M et N comme le K-module gradué $M\Box_A N$ tel que la suite*

$$0 \to M\Box_A N \longrightarrow M \otimes N \overset{\Delta_M\otimes N - M\otimes\Delta_N}{\longrightarrow} M \otimes A \otimes N$$

est exacte en tant que K-modules gradués.

REMARQUE 3.15 Comme pour $(-) \otimes_A N$ on peut montrer que $(-)\Box_A N$ est un foncteur.

DÉFINITION 3.16 *Soit $\dots \to M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to \dots$ une suite exacte de K-modules gradués. On dit que la suite est **scindée** si la suite $\dots \to M'_n \xrightarrow{f_n} M_n \xrightarrow{g_n} M''_n \to \dots$ est scindée pour tout $n \geq 0$.*

*On étend cette notion aux suites exactes d'algèbres et coalgèbres sur K ainsi qu'au suites exactes de A-modules (où A est une algèbre) et C-comodules (où C est une coalgèbre). On dit alors qu'une telle suite exacte est **scindée** si la suite exacte en tant que K-modules est scindée.*

PROPOSITION 3.17 *Soient $0 \to M' \to M \to M''$ une suite exacte scindée de A-comodules à droite et N un A-module à gauche. On a alors que la suite*

$$0 \to M'\Box_A N \to M\Box_A N \to M''\Box_A N$$

est exacte.

PROPOSITION 3.18 *Soient $0 \to N' \to N \to N''$ une suite exacte scindée de A-modules à gauche et M un A-module à droite. On a alors que la suite*

$$0 \to M\Box_A N' \to M\Box_A N \to M\Box_A N''$$

est exacte.

REMARQUE 3.19 Les preuves des propositions ci-dessus sont symétriquement similaires à la preuve de la proposition 2.24. Observer qu'on rajoute l'hypothèse que la suite est scindée, car le foncteur $(-) \otimes N$ n'est pas exacte à gauche.

LEMME 3.20 *Soit N un A-comodule à gauche, alors $N = A\Box_A N$.*

DÉFINITION 3.21 *On dit qu'une coalgèbre A est **connexe** si $\varepsilon_0 : A_0 \to K$ est un isomorphisme.*

REMARQUE 3.22 Si A est connexe, alors il existe une unique augmentation $\eta : K \to A$ telle que $K \xrightarrow{\cong} A_0 \xrightarrow{\varepsilon_0} K$ où $\varepsilon_0\eta_0 = \mathrm{id}_K$.

LEMME 3.23 *Si A est augmentée, N un A-comodule, on a alors que la suite*

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow A \longrightarrow J(A)$$

est exacte scindée, et la suite

$$0 \longrightarrow K\Box_A N \longrightarrow N \longrightarrow J(A) \otimes N$$

est exacte.

Démonstration. La preuve est similaire à celle du lemme 2.28. $\square$

Proposition 3.24 *Si A est connexe et soit N un A-comodule à gauche, alors $N = 0$ si et seulement si $K\square_A N = 0$.*

Démonstration. Si $N = 0$ il est évident que $K\square_A N = 0$ par définition.

Supposons que $K\square_A N = 0$. On a alors que le morphisme $N \to J(A) \otimes N$ est injectif. On va montrer par récurrence sur le degré de N que $N = 0$.

Cas ($N_0 = 0$): Ecrivons $J(A) \otimes N$.

$$J(A) \otimes N = \{\underbrace{J(A)_0 \otimes N_0}_{=0}, J(A)_1 \otimes N_0, \ldots, \bigoplus_{\substack{i+j=n \\ i\neq 0}} J(A)_i \otimes N_j, \ldots\}$$

De plus, on a supposer que $N \to J(A) \otimes N$ est injectif, i.e. que $N_n \to (J(A) \otimes N)_n$ est injectif $\forall n \geq 0$, en particulier pour $n = 0$. Ceci force que $N_0 = 0$.

Cas ($N_n = 0, n > 0$): Supposons que $N_k = 0, \forall 0 \leq k < n$. On a par conséquent que

$$(J(A) \otimes N)_n = \bigoplus_{i+j=n} J(A)_i \otimes N_j = \underbrace{(J(A)_0 \otimes N_n)}_{=0} \oplus (\bigoplus_{\substack{i+j=n \\ i\neq 0}} \underbrace{J(A)_i \otimes N_j}_{=0}) = 0$$

et par injectivité, on a que $N_n = 0$. $\square$

Proposition 3.25 *Si A est connexe, $f : N \to N''$ un morphisme de A-comodules à gauche, $i : N' \to N$ le noyau de f (en tant que K-module gradué) et supposons que la suite $J(A) \otimes N' \to J(A) \otimes N \to J(A) \otimes N''$ est exacte en tant que suite de K-modules gradués. On a alors que f est injectif si et seulement si $K\square_A f$ est injectif.*

Démonstration. En vertu du lemme 3.23, on a que le diagramme suivant commute avec les lignes et colonnes exactes.

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
 & K\square_A N \arrow[r, "K\square_A f"] \arrow[d] & K\square_A N'' \arrow[d] \\
N' \arrow[r, "i"] & N \arrow[r, "f"] \arrow[d] & N'' \arrow[d] \\
J(A) \otimes N' \arrow[r] & J(A) \otimes N \arrow[r, "J(A)\otimes f"] & J(A) \otimes N''
\end{tikzcd}$$

Il est assez facile de voir que $K\square_A f$ est injectif si f est injectif.

On montre que si $K\square_A f$ est injectif, alors f injectif. On le fait par récurrence sur le degré de N.

Cas ($N_0 = 0$): Comme $J(A)_0 = 0$ on a que $(J(A) \otimes N)_0 = 0$, par conséquent $(J(A) \otimes f)_0$ est injectif. On conclu par le lemme des cinq ; f_0 est injectif.

Cas ($N_n, n > 0$): Supposons que $N_k = 0, \forall 0 \leq k < n$. Explicitons $J(A) \otimes N$

$$J(A) \otimes N = \{J(A)_0 \otimes N_0, \ldots, \bigoplus_{\substack{i+j=n \\ i \neq 0}} J(A)_i \otimes N_j, \ldots\}$$

Par conséquent, $(J(A) \otimes N)_k = 0, \forall 0 \leq k \leq n$. Ce qui induit que $(J(A) \otimes f)_n$ est injectif et par le lemme des cinq, on a que f_n l'est aussi. □

Remarque 3.26 Observer que la condition que $J(A) \otimes N' \to J(A) \otimes N \to J(A) \otimes N''$ soit exacte est immédiatement satisfaite si A est plat.

Définition 3.27 *Soit C un K-module gradué. On appelle $A \otimes C$ l'**extension** de C en A-comodule à gauche, où la comultiplication est $\Delta_{A \otimes C} : A \otimes C \xrightarrow{\Delta_A \otimes C} A \otimes A \otimes C$.*

Remarque 3.28 Observer que si N est un A-comodule à gauche et $f : N \to C$ est un morphisme de K-modules gradués, alors la composition

$$N \xrightarrow{\Delta_N} A \otimes N \xrightarrow{A \otimes f} A \otimes C$$

est un morphisme de A-comodules à gauche, car $A \otimes f$ et Δ_N le sont.

De plus, le morphisme $K \square_A N \longrightarrow K \square_A (A \otimes C)$ de A-modules à gauche sous les conditions ci-dessus, n'est autre que la composition

$$K \square_A N \longrightarrow N \xrightarrow{f} C$$

de K-modules gradués.

Pour cela, il suffit de voir que $K \square_A (A \otimes C) = C$ et appliquer le foncteur $K \square_A (-)$.

3. Exemple : l'algèbre tensorielle

Dans 3 nous avons que l'algèbre tensorielle est une algèbre. On reprend le même exemple pour montrer ici, que c'est aussi une coalgèbre. On verra par la suite que l'algèbre tensorielle est en fait une algèbre de Hopf.

Soit V un K-module gradué et notons $T(V)$ l'algèbre tensorielle. On va définir maintenant une comultiplication. Pour cela considérons l'application de K-modules gradués

$$\delta : V \longrightarrow T(V) \otimes T(V)$$
$$v \mapsto v \otimes 1 + 1 \otimes v$$

Par la propriété universelle de l'algèbre tensorielle (proposition 2.39), on a un unique morphisme d'algèbre

$$\Delta : T(V) \longrightarrow T(V) \otimes T(V)$$

tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "\delta"'] & T(V) \arrow[d, "\Delta"] \\ & T(V) \otimes T(V) \end{tikzcd}$$

commute.

On peut vérifier assez facilement que c'est une comultiplication (associativité et préservation de l'unité) en regardant sur les éléments de V. Cela est suffisant, car ces éléments engendrent $T(V)$.

CHAPITRE 4

Dualité

Les algèbres de Hopf étant des structures qui « vivent avec leur dual » on donne ici un bref aperçu de la théorie de la dualité pour les algèbres et les coalgèbres.

Dans ce chapitre, K sera un anneau commutatif.

1. Résultats généraux

DÉFINITION 4.1 *Soit A un K-module gradué.*

(*i*) *On dit que A est de **type fini** si pour tout $n \geq 0$, A_n est de génération finie.*

(*ii*) *On dit que A est **projectif** si pour tout $n \geq 0$, A_n est projectif.*

LEMME 4.2 *Soient A et B des K-modules gradués projectifs de type finis. Alors*

(*i*) $A \cong A^{**}$,

(*ii*) $A^* \otimes B^* \cong (A \otimes B)^*$.

DÉMONSTRATION. La preuve est essentiellement la même que dans le cas des K-modules non gradués (cf. propositions 1.34 et 1.35) □

REMARQUE 4.3 En vertu du lemme précédent, on écrira désormais $A = A^{**}$ et $(A \otimes B)^* = A^* \otimes B^*$.

PROPOSITION 4.4 *Soit A un K-module gradué projectif de type fini, alors*

(*i*) $\varphi : A \otimes A \to A$ *est associative si et seulement si* $\varphi^* : A^* \to A^* \otimes A^*$ *est associative,*

(*ii*) $\eta : K \to A$ *est l'unité pour la multiplication* φ *si et seulement si* $\eta^* : A^* \to K$ *est l'unité pour la comultiplication* φ^*,

(*iii*) (A, φ, η) *est une algèbre sur K si et seulement si* (A^*, φ^*, η^*) *est une coalgèbre sur K,*

(*iv*) $\varepsilon : A \to K$ *est une augmentation de l'algèbre* (A, φ, η) *si et seulement si* $\varepsilon^* : K \to A^*$ *est une augmentation de la coalgèbre* (A^*, φ^*, η^*),

(*v*) *l'algèbre* (A, φ, η) *est commutative si et seulement si la coalgèbre* (A^*, φ^*, η^*) *est commutative.*

DÉMONSTRATION. La preuve consiste à appliquer le foncteur $(-)^*$ aux diagrammes de la définition de l'algèbre et d'utiliser le lemme précédent. Noter qu'on appliquera une nouvelle fois ce foncteur pour revenir dans l'autre sens, car $A = A^{**}$. Comme exemple, prouvons l'assertion (i). Le reste se fait de manière similaire.

Supposons que φ est associative, i.e. le diagramme

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \otimes A \arrow[r, "A\otimes\varphi"] \arrow[d, "\varphi\otimes A"'] & A \otimes A \arrow[d, "\varphi"] \\ A \otimes A \arrow[r, "\varphi"] & A \end{tikzcd}$$

commute.

On a alors, en appliquant le foncteur $(-)^*$, on a que le diagramme

$$\begin{tikzcd} (A \otimes A \otimes A)^* & (A \otimes A)^* \arrow[l, "(\varphi\otimes A)^*"'] \\ (A \otimes A)^* \arrow[u, "(A\otimes\varphi)^*"] & A^* \arrow[l, "\varphi^*"] \arrow[u, "\varphi^*"'] \end{tikzcd}$$

commute.

En appliquant le lemme précédent, on a que le diagramme

$$\begin{tikzcd} A^* \otimes A^* \otimes A^* & A^* \otimes A^* \arrow[l, "\varphi^*\otimes A^*"'] \\ A^* \otimes A^* \arrow[u, "A^*\otimes\varphi^*"] & A^* \arrow[l, "\varphi^*"] \arrow[u, "\varphi^*"'] \end{tikzcd}$$

commute. Conséquemment, on a la démonstration dans un sens. La réciproque se montre de la même manière en partant du diagramme ci-dessus. On conclu en utilisant que $A^{**} = A$. □

PROPOSITION 4.5 *Soient (A, φ, η) une algèbre sur K projective de type fini (pour sa structure de K-module gradué), et N un K-module gradué projectif de type fini. Alors*

(*i*) *N est un A-module pour $\varphi_N : A \otimes N \to N$ si et seulement si N^* est un A^*-comodule pour $\varphi^* : N^* \to A^* \otimes N^*$.*

(*ii*) *Si la condition ci-dessus est vérifiée et que $K \otimes_A N$ est aussi projectif de type fini, alors $(K \otimes_A N)^* = K\square_{A^*} N^*$.*

DÉMONSTRATION. On considère la suite exacte

$$I(A) \otimes N \to N \to K \otimes_A N \to 0,$$

et on lui applique le foncteur $(-)^* = \mathrm{Hom}(-, K)$. De plus, on sait que ce foncteur envois les morphismes surjectif sur des morphismes injectifs. Par conséquent, la suite

$$(I(A) \otimes N)^* \leftarrow N^* \leftarrow (K \otimes_A N)^* \leftarrow 0$$

est exacte. En utilisant le lemme 4.2, on a la suite exacte

$$I(A)^* \otimes N^* \leftarrow N^* \leftarrow (K \otimes_A N)^* \leftarrow 0.$$

Par définition, $(K \otimes_A N)^* = K\square_{A^*} N^*$ (car $I(A)^* = J(A^*)$).

De plus, on est obligé de supposer que $K \otimes_A N$ est aussi projectif de type fini, car c'est un quotient d'un module projectif de type fini, donc ce dernier pourrait bien ne pas l'être. □

DÉFINITION 4.6 *Soient $f : A \to B$ un morphisme d'algèbres augmentées.*

*(a) On dit que f est **normal à gauche** si*

(i) la suite de K-modules gradués $I(A) \otimes B \to B \xrightarrow{\pi} K \otimes_A B \to 0$ est exacte scindée,

(ii) et que

$$\begin{tikzcd} B \otimes I(A) \arrow[r] \arrow[rr, bend left, "0"] & B \arrow[r, "\pi"] & K \otimes_A B \end{tikzcd}$$

où π est l'application canonique.

*(b) On dit que f est **normal à droite** si*

(i) la suite de K-modules gradués $B \otimes I(A) \to B \xrightarrow{\pi} B \otimes_A K \to 0$ est exacte scindée,

(ii) et que

$$\begin{tikzcd} I(A) \otimes B \arrow[r] \arrow[rr, bend left, "0"] & B \arrow[r, "\pi"] & B \otimes_A K \end{tikzcd}$$

où π est l'application canonique.

*(c) On dit que f est **normal** si f est normal à gauche et normal à droite. Dans ce cas, $B \otimes_A K = K \otimes_A B$.*

LEMME 4.7 *Soient $f : A \to B$ un morphisme d'algèbres. On peut alors définir une structure de A-module à gauche sur B.*

DÉMONSTRATION. On définit $\varphi_B : A \otimes B \xrightarrow{f \otimes B} B \otimes B \xrightarrow{\varphi} B$.
On observe alors que les diagrammes suivants commutent

$$\begin{tikzcd}
A \otimes A \otimes B \arrow[rr, "A \otimes f \otimes B"] \arrow[rrr, bend left, "A \otimes \varphi_B"] \arrow[dr, "f \otimes f \otimes B"] \arrow[dd, "\varphi \otimes B"'] & & A \otimes B \otimes B \arrow[r, "A \otimes \varphi"] \arrow[dl, "f \otimes B \otimes B"] & A \otimes B \arrow[dl, "f \otimes B"] \arrow[ddd, "\varphi_B"] \\
& B \otimes B \otimes B \arrow[r, "B \otimes \varphi"] \arrow[d, "\varphi \otimes B"] & B \otimes B \arrow[ddr, "\varphi"] & \\
A \otimes B \arrow[r, "f \otimes B"] \arrow[d, equal] & B \otimes B \arrow[drr, "\varphi"] & & \\
A \otimes B \arrow[ur, "f \otimes B"'] \arrow[rrr, "\varphi_B"] & & & B
\end{tikzcd}$$

$$
\begin{tikzcd}
 & & A \otimes B \arrow[dl, "f\otimes B"'] \arrow[dd, "\varphi_B"] \\
K \otimes B \arrow[urr, "\eta_A \otimes B"] \arrow[r, "\eta_B \otimes B"] & B \otimes B \arrow[dr, "\varphi"] & \\
 & & B. \arrow[ull, "\cong"]
\end{tikzcd}
$$

On a alors que B est un A-module à gauche. □

Remarque 4.8 Par conséquent, on peut s'attaquer maintenant à la proposition suivante. Elle permet de généraliser le fait de mettre une structure d'algèbre sur le quotient.

On donnera ici la preuve avec des diagrammes commutatifs pour l'avoir dans toute sa généralité, et ainsi de dualiser pour avoir la proposition similaire, mais avec des comodules et des coalgèbres.

Proposition 4.9 *Soient $f : A \to B$ un morphisme normal à gauche d'algèbres augmentées, $C := K \otimes_A B$ et $\pi : B \to C$ l'application canonique, alors*

(i) il existe une unique application de K-modules gradués $\varphi_C : C \otimes C \to C$,

(ii) il existe une unique application de K-modules gradués $\eta_C : K \to C$,

(iii) il existe une unique application de K-modules gradués $\varepsilon_C : C \to K$,

et tel que $\pi : B \to C$ est un morphisme d'algèbres augmentées avec la coalgèbre $(C, \varphi_C, \eta_C, \varepsilon_C)$.

Démonstration. On commence par montrer l'existence de φ_C. Pour cela, on va prendre la suite exacte scindée $I(A) \otimes B \to B \to C$ et on va lui appliquer les foncteurs $C \otimes (-)$ (la dernière ligne) et $(-) \otimes B$ (la deuxième colonne).

On rappelle que si on tensorise sur une suite exacte scindée, alors la suite obtenue va elle aussi être exacte scindée. En particulier, si on tensorise un noyau (respectivement un conoyau), l'objet obtenu sera lui aussi un noyau (respectivement un conoyau). L'idée alors sera d'induire une application $C \otimes B \to B$ qui va induire ensuite notre applications φ_C, car $C \otimes B$ et $C \otimes C$ en utilisant la propriété universelle du conoyau.

On dessine alors le diagramme commutatif suivant

$$
\begin{tikzcd}
 & I(A) \otimes B \otimes B \arrow[rr, "I(A)\otimes\varphi"] \arrow[d, "f\otimes B\otimes B"] & & I(A) \otimes B \arrow[dl, "f\otimes B"'] \arrow[ddl] \\
 & B \otimes B \otimes B \arrow[r, "B\otimes\varphi"] \arrow[d, "\varphi\otimes B"] & B \otimes B \arrow[d, "\varphi"] & \\
B \otimes I(A) \otimes B \arrow[r, "B\otimes\varphi(f\otimes B)"] \arrow[d, two heads, "\pi\otimes I(A)\otimes B"] & B \otimes B \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi\otimes B"] & B \arrow[r, two heads, "\pi"] & C \\
C \otimes I(A) \otimes B \arrow[r] & C \otimes B \arrow[r, "C\otimes\pi"] \arrow[urr, dotted, "\exists!\alpha"] & C \otimes C \arrow[ur, dotted, "\exists!\varphi_C"'] &
\end{tikzcd}
$$

Noter qu'un tel α est induit, car la composition

$$I(A) \otimes B \otimes B \to I(A) \otimes B \to B \to C$$

est zéro puisque f est normal à gauche (le point (i)).

Pour avoir φ_C il faut vérifier maintenant que la composition

$$C \otimes I(A) \otimes B \to C \otimes B \xrightarrow{\alpha} C$$

est zéro. Comme $B \otimes I(A) \otimes B \to C \otimes I(A) \otimes B$ est surjectif, il nous faut montrer que cette composition

$$B \otimes I(A) \otimes B \to B \otimes B \to B \to C$$

est zéro. Pour cela, considérons le diagramme commutatif suivant.

$$\begin{tikzcd}
B \otimes I(A) \otimes B \arrow[r] \arrow[dr, "B\otimes f\otimes B"'] \arrow[drrr, bend right, "0"'] & B \otimes B \arrow[r, "\varphi"] & B \arrow[r, "\pi"] & C \\
& B \otimes B \otimes B \arrow[u, "B\otimes\varphi"'] \arrow[r, "\varphi\otimes B"] & B \otimes B \arrow[u, "\varphi"'] \arrow[r, "\pi\otimes B"] & C \otimes B \arrow[u, "\alpha"']
\end{tikzcd}$$

Pour dire que c'est zéro, on utilise que f est normal à gauche (le point (ii)). Ainsi par la propriété universelle du conoyau, on a l'existence de φ_C.

On obtient η_C en le définissant comme la composition $K \xrightarrow{\eta_B} B \xrightarrow{\pi} C$. Son unicité tient dans le fait qu'on veut que π soit un morphisme d'algèbre, i.e. on veut que le diagramme

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[r, "\eta_B"] \arrow[d, equal] & B \arrow[d, "\pi"] \\
K \arrow[r, "\eta_C"] & C
\end{tikzcd}$$

commute. Il faut noter aussi que dans le premier diagramme de la preuve, on a déjà le fait que π préserve la multiplication (il faut regarder en bas à droite dans ledit diagramme). Ceci dit π est un morphisme d'algèbre (qui deviendra un morphisme d'algèbre augmentée par le paragraphe suivant).

Finalement, on a aussi que le diagramme

$$\begin{tikzcd}
I(A) \otimes B \arrow[r, "\varepsilon_A\otimes\varepsilon_B"] \arrow[d] & K \arrow[d, equal] \\
B \arrow[r, "\varepsilon_B"] \arrow[d, "\pi"] & K \\
C \arrow[ur, dotted, "\exists!\varepsilon_C"'] &
\end{tikzcd}$$

commute et nous induit un unique ε_C. $\square$

Remarque 4.10 Il faudrait dans la preuve précédente, montrer encore l'associativité et la normalisation pour φ_C, mais ces propriétés découlent du fait que π est un morphisme d'algèbre. Pour l'associativité, on dessine le cube

$$\begin{tikzcd}
& B \otimes B \otimes B \arrow[rr] \arrow[dl] \arrow[dd] & & B \otimes B \arrow[dl] \arrow[dd] \\
C \otimes C \otimes C \arrow[rr] \arrow[dd] & & C \otimes C \arrow[dd] & \\
& B \otimes B \arrow[rr] \arrow[dl] & & B \arrow[dl] \\
C \otimes C \arrow[rr] & & C. &
\end{tikzcd}$$

On peut voir que la face de derrière commute et puisque π est un morphisme d'algèbres, les cotés commutent. Par conséquent la face de devant commute, ce qui prouve l'associativité. Idem pour la normalisation.

Définition 4.11 *Soient $f : B \to A$ un morphisme de coalgèbres augmentées.*

(a) On dit que f est ***normal à gauche*** *si*

- (i) *la suite de K-modules gradués $0 \to K\square_A B \xrightarrow{i} B \to J(A) \otimes B$ est exacte scindée,*
- (ii) *et que*

$$\begin{tikzcd}
K\square_A B \arrow[r, "i"] \arrow[rr, bend left, "0"] & B \arrow[r] & B \otimes J(A)
\end{tikzcd}$$

où i est l'application canonique.

(b) On dit que f est ***normal à droite*** *si*

- (i) *la suite de K-modules gradués $0 \to B\square_A K \xrightarrow{i} B \to B \otimes J(A)$ est exacte scindée,*
- (ii) *et que*

$$\begin{tikzcd}
B\square_A K \arrow[r, "i"] \arrow[rr, bend left, "0"] & B \arrow[r] & J(A) \otimes B
\end{tikzcd}$$

où i est l'application canonique.

(c) On dit que f est ***normal*** *si f est normal à gauche et normal à droite. Dans ce cas, $B\square_A K = K\square_A B$.*

Lemme 4.12 *Soient $f : A \to B$ un morphisme d'algèbres. On peut alors définir une structure de A-comodule à gauche sur B.*

Démonstration. la preuve est symétriquement identique à celle du lemme 4.7. $\square$

Proposition 4.13 *Soient $f : B \to A$ un morphisme normal à gauche de coalgèbres augmentées, $C := K\square_A B$ et $i : C \to B$ l'application canonique, alors* (*i*) *il existe une unique application de K-modules gradués $\Delta_C : C \to C \otimes C$,*

(*ii*) *il existe une unique application de K-modules gradués $\varepsilon_C : C \to K$,*

(*iii*) *il existe une unique application de K-modules gradués $\eta_C : K \to C$,*

et tel que $i : C \to B$ est un morphisme de coalgèbres augmentées (avec $(C, \Delta_C, \varepsilon_C, \eta_C)$).

Démonstration. la preuve est symétriquement similaire à celle de la proposition 4.9. Par exemple, le premier diagramme sera le suivant :

$$\begin{tikzcd}
J(A) \otimes B \arrow[rr, "J(A)\otimes\Delta"] & & J(A) \otimes B \otimes B & \\
& B \otimes B \arrow[ul, "f\otimes B"'] \arrow[r, "B\otimes\Delta"] & B \otimes B \otimes B \arrow[u, "f\otimes B\otimes B"'] & \\
C \arrow[r, "i"] \arrow[dr, dotted] \arrow[drr, dotted] & B \arrow[uul] \arrow[u, "\Delta"'] \arrow[r, "\Delta"] & B \otimes B \arrow[u, "\Delta\otimes B"'] \arrow[r, "B\otimes(f\otimes B)\Delta"] & B \otimes J(A) \otimes B \\
& C \otimes C \arrow[r, "C\otimes i"] & C \otimes B \arrow[u, "i\otimes B"'] \arrow[r, "C\otimes(f\otimes B)\Delta"] & C \otimes J(A) \otimes B \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

On fera ainsi les mêmes raisonnements pour justifier les applications induites. $\square$

2. Primitifs et indécomposables

Grâce aux propositions précédentes, on va expliciter des sous-(co)algèbres particulières. Ces dernières ont de bonnes propriétés, à tel point qu'ils apparaissent en long et en large dans les chapitres 5, 6 et 7 de la publication de Milnor et Moore [**MM65**]. De plus, c'est avec les éléments primitifs qu'on va notamment pourvoir démontrer l'équivalence de catégories au chapitre 6.

Définition 4.14 *Si A est une algèbre augmentée sur K, on pose $Q(A) := K \otimes_A I(A)$. Les éléments de $Q(A)$ sont appelés* ***éléments indécomposables****.*

Si A est une coalgèbre augmentée sur K, on pose $P(A) := K \square_A J(A)$. Les éléments de $P(A)$ sont appelés ***éléments primitifs****.*

Remarque 4.15 Si A est une algèbre, on peut définir une structure de A-module sur $I(A)$ via φ car c'est un idéal. De plus, par le corollaire 2.29 on a la suite exacte

$$I(A) \otimes I(A) \to I(A) \to Q(A) \to 0.$$

Ainsi on a que $Q(A) = I(A) \otimes_A K$[1].

De même, pour une coalgèbre A, on a la suite exacte suivante

$$0 \to P(A) \to J(A) \to J(A) \otimes J(A).$$

et on a que $P(A) = J(A) \square_A K$.

Lemme 4.16 *Si A est une coalgèbre connexe, on caractérise les primitifs comme*

$$P(A) = \{a \in A \mid \Delta(a) = a \otimes 1 + 1 \otimes a\}.$$

1. Dans beaucoup de livre, on voit définit les indécomposables directement comme l'algèbre $I(A)/I(A)^2$.

Démonstration. Si A est connexe, on peut écrire $A = \{K, A_1, A_2, A_3, \dots\}$. Conséquemment, $J(A) = \{0, A_1, A_2, A_3, \dots\}$

$$
\begin{array}{cccccc}
J(A) = & \{0, & A_1, & A_2, & A_3, & \dots\} \\
\downarrow{\scriptstyle\Delta} & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\
J(A) \otimes J(A) = & \{0, & 0, & A_1 \otimes A_1, & A_2 \otimes A_1 \bigoplus A_1 \otimes A_2, & \dots\}
\end{array}
$$

On remarque alors que le noyau de cette application est constitué de tous les éléments tels que $\Delta(a) = a \otimes 1 + 1 \otimes a$. □

Remarque 4.17 Le résultat doit rester vrai même dans le cas ou la coalgèbre n'est pas connexe. Mais je ne sais pas comment le montrer.

Lemme 4.18 *Soit $f : A \to B$ un morphisme d'algèbres augmentées sur K, alors il existe un unique morphisme $Q(f) : Q(A) \to Q(B)$.*

Démonstration. On dessine le diagramme commutatif suivant.

$$
\begin{tikzcd}
I(A) \otimes I(A) \arrow[r] \arrow[d] & I(A) \arrow[r] \arrow[d] & Q(A) \arrow[d, dotted] \\
I(B) \otimes I(B) \arrow[r] & I(B) \arrow[r] & Q(B)
\end{tikzcd}
$$

Par la propriété universelle du conoyau, on a $Q(f) : Q(A) \to Q(B)$ désiré. □

Lemme 4.19 *Soit $f : A \to B$ un morphisme de coalgèbres augmentées sur K, alors il existe un unique morphisme $P(f) : P(A) \to P(B)$.*

Démonstration. La preuve est similaire à celle du lemme ci-dessus. □

Proposition 4.20 *Soit $f : A \to B$ un morphisme d'algèbres augmentées et tel que B soit connexe. On a alors que f est surjective si et seulement si $Q(f)$ est surjective.*

Démonstration. Si f est surjective, alors on a clairement que $Q(f)$ l'est aussi.

Supposons que $Q(f)$ est surjective et dessinons le diagramme commutatif suivant.

$$
\begin{tikzcd}
I(A) \otimes I(A) \arrow[r] \arrow[d] & I(A) \arrow[r] \arrow[d] & Q(A) \arrow[d] \\
I(B) \otimes I(B) \arrow[r] & I(B) \arrow[r] & Q(B)
\end{tikzcd}
$$

On montre par récurrence sur le degré de f. Notez que $I(A)_k = A_k$ et $I(B)_k = B_k, \forall k > 0$.

Cas ($n = 0$): Comme $I(B)_0 = 0$ (car B est connexe), on a forcément que $I(f)_0$ est surjective. Comme f est un morphisme d'algèbre, on doit avoir le diagramme suivant commute.

$$
\begin{tikzcd}
A_0 \arrow[r, "\eta_0"] \arrow[d, "f_0"] & K \arrow[d, equal] \\
B_0 \cong K \arrow[r, "\eta_0"] & K \arrow[l, dotted, bend right, "\varepsilon_0"']
\end{tikzcd}
$$

Ceci prouve que f est surjective.

Cas ($n > 0$): Supposons par récurrence que $f_k = I(f)_k$ est surjective pour tout $k < n$. On remarque alors que $(I(f) \otimes I(f))_k$ est surjective pour tout $k \leq n$ (ici on utilise le fait que le produit tensoriel est exacte à droite). Par le lemme des cinq appliqué au diagramme

$$\begin{tikzcd}
(I(A) \otimes I(A))_n \arrow[r] \arrow[d, "(I(f)\otimes I(f))_n"] & I(A)_n \arrow[r] \arrow[d, "I(f)_n"] & Q(A)_n \arrow[d, "Q(f)_n"] \\
(I(B) \otimes I(B))_n \arrow[r] & I(B)_n \arrow[r] & Q(B)_n
\end{tikzcd}$$

on a que $I(f)_n = f_n$ est surjective. □

Définition 4.21 *On dit qu'un K-module gradués N est* ***plat*** *si pour tout $k \geq 0$, N_k est plat, (i.e. le foncteur $(-) \otimes N$ est exact à gauche).*

Proposition 4.22 *Soit $f : A \to B$ un morphisme de coalgèbres augmentées tel que A et B sont plats et que A soit connexe. On a alors que f est injective si et seulement si $P(f)$ est injective.*

Démonstration. La preuve est identique à celle de la proposition ci-dessus. Néanmoins, on ajoute l'hypothèse que A et B soient plat pour que dans le diagramme

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & P(A) \arrow[r] \arrow[d] & J(A) \arrow[r] \arrow[d] & J(A) \otimes J(A) \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & P(B) \arrow[r] & J(B) \arrow[r] & J(B) \otimes J(B)
\end{tikzcd}$$

le morphisme de coalgèbre $J(f) \otimes J(f)$ soit injectif. Ainsi on appliquera de la même façon le lemme des cinq. □

Remarque 4.23 Il faut observer que pour M un K-module gradué, on a la suite d'implications suivante : M espace vectoriel (si K est un corps) $\Longrightarrow M$ libre $\Longrightarrow M$ projectif $\Longrightarrow M$ plat. Ceci pour dire que des K-modules gradués plats ne sont pas inexistants. De même pour les K-modules gradués projectifs.

Proposition 4.24 *Si A est une algèbre augmentée projective de type finie, alors*

(i) *la suite*

$$I(A) \otimes I(A) \to I(A) \to Q(A) \to 0$$

est exacte scindée si et seulement si la suite

$$0 \to P(A^*) \to J(A^*) \to J(A^*) \otimes J(A^*)$$

est exacte scindée.

(ii) *Si la propriété ci-dessus a lieu, alors on a $P(A^*) = Q(A)^*$ et $Q(A) = P(A^*)^*$.*

Démonstration. Le principe est simplement d'appliquer le foncteur $(-)^*$ à nos suites exactes. □

Proposition 4.25 *Soit $f : A \to B$ un morphisme d'algèbres augmentées normal à gauche, $C = K \otimes_A B$ et $\pi : B \to C$ le morphisme canonique d'algèbres augmentées. Alors la suite de K-modules gradués*

$$Q(A) \xrightarrow{Q(f)} Q(B) \xrightarrow{Q(\pi)} Q(C) \longrightarrow 0$$

est exacte.

Démonstration. Comme f est normal à gauche, il faut voir A comme une sous-algèbre de B. Par conséquent, on se permet d'écrire $I(A)B$ au lieu de $f(I(A))B$.

$$\begin{aligned} Q(C) &= \operatorname{coker}(I(C) \otimes I(C) \longrightarrow I(C)) \\ &= \operatorname{coker}(I(B) \otimes I(B) \longrightarrow I(B)/I(A)B) \\ &\overset{(*)}{=} \operatorname{coker}(I(A) \oplus (I(B) \otimes I(B)) \longrightarrow I(B)) \\ &\overset{(\#)}{=} \operatorname{coker}(I(A) \longrightarrow I(B)/I(B)I(B)) \\ &= \operatorname{coker}(I(A)/I(A)I(A) \longrightarrow I(B)/I(B)I(B)) \\ &= \operatorname{coker}(Q(A) \longrightarrow Q(B)). \end{aligned}$$

(Les étapes $(*)$ et $(\#)$ sont justifiées par un quotient en deux temps.) □

Proposition 4.26 *Soit $f : B \to A$ un morphisme de coalgèbres augmentées normal à gauche, $C = K\square_A B$ et $i : C \to B$ le morphisme canonique de coalgèbres augmentées. Alors la suite de K-modules gradués*

$$0 \longrightarrow P(C) \xrightarrow{P(i)} P(B) \xrightarrow{P(f)} P(A)$$

est exacte.

Démonstration. La partie difficile de la preuve consiste à montrer que le noyau de $P(f)$ est inclus dans l'image de $P(i)$. On montre cette inclusion.

Soit $x \in P(B)_n$ tel que $f(x) = 0$, on a alors par la caractérisation que $\Delta_B(x) = 1 \otimes x + x \otimes 1$. Si on arrive à montrer que $x \in C_n = K\square_A B$, on a gagné. Pour montrer ça, on utilise le fait que f est normal. Ainsi $(f \otimes B)\Delta_B(x) = \underbrace{f(x)}_{=0} \otimes 1 + f(1) \otimes x = 1 \otimes x$. On conclu que $x \in C_n$ et par conséquent, $x \in P(C)_n$ [2]. □

2. L'argumentation est un peu rapide, mais utilise en fait un résultat du papier de Milnor et Moore [**MM65**] que je n'ai pas démontré.

CHAPITRE 5

Algèbre de Hopf

Dans ce chapitre on va définir la notion d'algèbre de Hopf. Comme je l'ai dit précédemment, c'est une structure algébrique qui va lier celle de l'algèbre et de la coalgèbre. Ainsi les propositions démontré dans les chapitres antérieurs sont vérifiés ici.

Comme avant, K sera un anneau commutatif.

1. Définition et propriétés générales

Définition 5.1 *On appelle une* ***algèbre de Hopf*** *sur K, un quintuples $(A, \varphi, \eta, \Delta, \varepsilon)$ où*

(i) *A est un K-module gradué, et*

$$\varphi : A \otimes A \to A, \quad \eta : K \to A$$
$$\Delta : A \to A \otimes A, \quad \varepsilon : A \to K$$

sont des applications de K-module gradués,

(ii) *(A, φ, η) est une algèbre sur K augmentée par ε,*

(iii) *(A, Δ, ε) est une coalgèbre sur K augmentée par η,*

(iv) *le diagramme*

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\Delta\otimes\Delta"] & A \arrow[r, "\Delta"] & A \otimes A \\ A \otimes A \otimes A \otimes A \arrow[rr, "A\otimes T\otimes A"] & & A \otimes A \otimes A \otimes A \arrow[u, "\varphi\otimes\varphi"'] \end{tikzcd}$$

commute (où T désigne le twist).

Lemme 5.2 *Soit A une algèbre de Hopf sur K, alors*

(i) *Δ est un morphisme d'algèbres augmentées,*

(ii) *φ est un morphisme de coalgèbres augmentées.*

Démonstration. Notez que la condition (iv) de la définition nous donne que Δ est presque un morphisme d'algèbres. Il suffit de vérifier que le diagramme suivant commute.

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "\eta"] \arrow[d, equal] & A \arrow[d, "\Delta"] \\ K \otimes K \arrow[r, "\eta\otimes\eta"] & A \otimes A \end{tikzcd}$$

Comme η est une augmentation, on a que ce diagramme commute.

On vérifie que Δ préserve l'augmentation. Observons pour cela que le diagramme suivant commute.

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\Delta"] \arrow[dr, "\cong"] \arrow[dd, "\varepsilon"] & A \otimes A \arrow[d, "\varepsilon\otimes A"'] \arrow[dd, bend left, "\varepsilon\otimes\varepsilon"] \\
& K \otimes A \arrow[d, "K\otimes\varepsilon"'] \\
K \arrow[r, equal] & K \otimes K
\end{tikzcd}
$$

Ainsi Δ est un morphisme de coalgèbres augmentées.

Idem avec φ. □

Remarque 5.3 Une définition équivalente, est de dire qu'une algèbre de Hopf est un K-module gradué A muni d'applications de K-modules gradués $\varphi, \eta, \Delta, \varepsilon$ telles que

(i) (A, φ, η) est une algèbre,

(ii) (A, Δ, ε) est une coalgèbre,

(iii) Δ et ε sont des morphismes d'algèbres (où φ et η sont des morphismes de coalgèbres)

Elle peut être pratique dans certains cas, pour montrer qu'un objet est une algèbre de Hopf.

Proposition 5.4 *Soit A un K-module gradué projectif de type fini. Alors $(A, \varphi, \eta, \Delta, \varepsilon)$ est une algèbre de Hopf sur K si et seulement si $(A^*, \varphi^*, \eta^*, \Delta^*, \varepsilon^*)$ est une algèbre de Hopf sur K.*

Démonstration. Par 4.4 la preuve est immédiate. □

Remarque 5.5 Dans la suite de la publication de Milnor et Moore, on définit encore toutes sortes de choses, comme des A-modules à gauche coalgèbres ainsi que des quasi algèbres de Hopf. Ils démontrent avec tout ça des tas de choses, mais qui n'ont (presque) aucun impact dans la partie que j'ai pu traiter. Par conséquent, j'ai sauté tout ça pour arriver à un vrai résultat ; l'algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie.

CHAPITRE 6

Exemples d'algèbres de Hopf

Dans ce chapitre, je vais dans un premier temps expliciter un résultat très intéressant ; une équivalence de catégories. Puis je finirais ensuite mon projet avec un petit mot sur l'algèbre de Steenrod.

Soit K un anneau commutatif.

1. L'algèbre enveloppante

L'algèbre qu'on va définir ici a une importance majeure autant dans cette théorie comme dans la théorie des algèbres Lie (elle intervient notamment dans la démonstration du théorème de Serre sur la classification des algèbres de Lie semi-simple). Cette algèbre va nous donner le foncteur permettant d'aller des algèbres de Lie aux algèbres de Hopf. On verra que pour l'autre sens, on utilisera les éléments primitifs.

DÉFINITION 6.1 *Soit A une algèbre sur K. On définit les* ***crochets de Lie*** *de A, comme l'application de K-modules gradués*

$$\begin{aligned} [\ ,\ ] : A \otimes A &\longrightarrow A \\ x \otimes y &\longmapsto [x, y] := \varphi(x \otimes y) - (-1)^{pq} \varphi(y \otimes x), \end{aligned}$$

pour $x \in A_p, y \in A_q$.

$(A, [\ ,\ ])$ *est appelée l'****algèbre de Lie associée*** *à A.*

DÉFINITION 6.2 *On appelle une* ***algèbre de Lie*** *sur K, un couple $(L, [\ ,\ ])$ où*

(i) *L est un K-module gradué, et*

(ii) *$[\ ,\ ] : L \otimes L \to L$ est une application de K-modules gradués,*

tels qu'il existe une algèbre A sur K avec une application injective $f : L \to A$ de K-modules graduées de sorte que le diagramme

$$\begin{tikzcd} L \otimes L \arrow[r, "{[\,,\,]}"] \arrow[d, "f\otimes f"] & L \arrow[d, "f"] \\ A \otimes A \arrow[r, "{[\,,\,]}"] & A \end{tikzcd}$$

commute.

Définition 6.3 *Soient L, L' deux algèbres de Lie. Un* ***morphisme d'algèbres de Lie*** *$f : L \to L'$ est une application de K-modules gradués telle que le diagramme*

$$\begin{tikzcd} L \otimes L \arrow[r, "{[\,,]}"] \arrow[d, "f \otimes f"] & L \arrow[d, "f"] \\ L' \otimes L' \arrow[r, "{[\,,]}"] & L' \end{tikzcd}$$

commute.

Remarque 6.4 Supposons que L soit une algèbre de Lie sur K et A une algèbre sur K. Si on dit que $f : L \to A$ est un morphisme d'algèbres de Lie, on sous entend qu'on regarde A avec sa structure d'algèbre de Lie associée.

Proposition 6.5 *Soit L une algèbre de Lie sur K, $x \in L_p$, $y \in L_q$ et $z \in L_r$, alors*

(*i*) $[x, y] = (-1)^{pq+1}[y, x]$,

(*ii*) $(-1)^{pr}[x, [y, z]] + (-1)^{qp}[y, [z, x]] + (-1)^{rq}[z, [x, y]] = 0.$

Démonstration. Un calcul facile, montre que ces propriétés sont vérifiées pour le crochet de Lie associé à une algèbre A. Il suffit de faire revenir cette information grâce à l'application injective donnée dans la définition de l'algèbre de Lie. $\square$

Définition 6.6 *Soit L une algèbre de Lie. On définit l'****algèbre enveloppante*** *de L comme une algèbre $U(L)$ avec un morphisme d'algèbre de Lie $i_L : L \to U(L)$ tels que pour tout algèbre A et pour tout morphisme d'algèbre de Lie $f : L \to A$, il existe un unique morphisme d'algèbres $\tilde{f} : U(L) \to A$ tel que le diagramme suivant commute.*

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "i_L"] \arrow[dr, "f"'] & U(L) \arrow[d, dotted, "\exists! \tilde{f}"] \\ & A \end{tikzcd}$$

Proposition 6.7 *Avec les notations ci-dessus, une telle algèbre enveloppante existe et elle est unique à isomorphisme près.*

Démonstration. L'unicité d'une telle algèbre est immédiate, puisque $U(L)$ est un objet universelle.

On montre alors l'existence d'une telle algèbre enveloppante. Considérons pour cela, l'algèbre tensorielle de L, notée $T(L)$. On remarque que si l'on se donne un morphisme d'algèbres de Lie $f : L \to A$, ce dernier induit (par la propriété universelle) un unique morphisme d'algèbres $\bar{f} : T(L) \to A$, tel que le diagramme suivant commute.

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "f"'] & T(L) \arrow[d, dotted, "\bar{f}"] \\ & A \end{tikzcd}$$

On considère maintenant l'idéal I de $T(L)$ engendré par les éléments de la forme

$$x \otimes y - (-1)^{pq} y \otimes x - [x, y], \qquad \forall x \in L_p, y \in L_q.$$

Comme $\bar{f}(I) = 0$, on a par la propriété universelle du quotient, qu'il existe un unique morphisme d'algèbres $\tilde{f} : T(L)/I \to A$ tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "f"'] & T(L) \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\bar{f}"] & T(L)/I \arrow[dl, dotted, "\exists! \tilde{f}"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

commute. Par conséquent, on définit $U(L) := T(L)/I$ et i_L comme la composition $L \xrightarrow{i} T(L) \xrightarrow{\pi} U(L)$. De plus, il est clair que i_L est un morphisme d'algèbres de Lie, c'est justement pour ça qu'on a passé au quotient. □

Lemme 6.8 *$U : \mathscr{L}_K \to \mathscr{H}_K$ est un foncteur, où $\mathscr{L}_K$ désigne la catégorie des algèbres de Lie sur K est $\mathscr{H}_K$ celle des algèbres de Hopf sur K.*

Démonstration. Précédemment, on a déjà définit la fonction pour les objets de ce foncteur. Il faut maintenant définir la fonction pour les morphismes.

Soit $f : L \to L'$ un morphismes d'algèbres de Lie. Comme f et $i_{L'}$ sont deux morphismes d'algèbres de Lie, on a alors que $i_{L'} f$ est aussi un morphisme d'algèbres de Lie. Conséquemment, on définit $U(f) : U(L) \to U(L')$ comme l'unique morphisme d'algèbres induit faisant commuter le diagramme

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "i_L"] \arrow[d, "f"] & U(L) \arrow[d, dotted, "\exists! U(f)"] \\ L' \arrow[r, "i_{L'}"] & U(L'). \end{tikzcd}$$

On montre maintenant les propriétés fonctorielles de U, i.e.

(i) pour toute algèbres de Lie L, on a $U(\mathrm{id}_L) = \mathrm{id}_{U(L)}$, et

(ii) pour tout morphismes d'algèbres de Lie $L \xrightarrow{f} L'$, $L' \xrightarrow{g} L''$, on a $U(gf) = U(g)U(f)$.

Soit L une algèbre de Lie. On dessine alors le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "i_L"] \arrow[d, "\mathrm{id}_L"] & U(L) \arrow[d, "\mathrm{id}_{U(L)}"] \\ L \arrow[r, "i_L"] & U(L). \end{tikzcd}$$

Par la propriété universelle, on a alors que $\mathrm{id}_{U(L)} = U(\mathrm{id}_L)$.

On se donne maintenant deux morphismes d'algèbres de Lie $L \xrightarrow{f} L'$, $L' \xrightarrow{g} L''$. Ainsi la composition $gf : L \to L''$ est aussi un morphisme d'algèbres de Lie et par conséquent, le diagramme

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[r, "i_L"] \arrow[d, "f"] \arrow[dd, bend right, "gf"'] & U(L) \arrow[d, "U(f)"'] \arrow[dd, bend left, "U(gf)"] \\
L' \arrow[r, "i_{L'}"] \arrow[d, "g"] & U(L') \arrow[d, "U(g)"'] \\
L'' \arrow[r, "i_{L''}"] & U(L'')
\end{tikzcd}$$

commute. Par la propriété universelle, on conclu que $U(gf) = U(g)U(f)$. □

Remarque 6.9 A ce stade là, on peut voir U comme un adjoint à gauche du foncteur qui va des algèbres, aux algèbres de Lie ; en prenant l'algèbre de Lie associée. On va par la suite dire quelque chose de bien plus fort.

Définition 6.10 *Soient L, L' deux algèbres de Lie sur K, on définit le* ***produit*** *de L et L' comme l'algèbre de Lie $(L \times L', [\,,\,])$ où le crochet est définit par*

$$\begin{aligned}
[\,,\,] : (L \times L')_p \otimes (L \times L')_q &\longrightarrow (L \times L')_{p+q} \\
(x, y) \otimes (x', y') &\longmapsto [(x, y), (x', y')] := ([x, x'], [y, y'])
\end{aligned}$$

pour tout $(x, y) \in L_p \times L'_p$ et $(x', y') \in L_q \times L'_q$.

Remarque 6.11 Pour que $L \times L'$ soit une algèbre de Lie selon notre définition, il faut pouvoir l'injecter dans une algèbre avec une application de K-modules gradués. Pour cela, on définit

$$\begin{aligned}
i_{L\times L'} : L \times L' &\longrightarrow U(L) \otimes U(L') \\
(x, y) &\longmapsto x \otimes 1 + 1 \otimes y, \qquad \forall (x, y) \in L_p \times L'_p.
\end{aligned}$$

On vérifie facilement que c'est bien une application de K-modules gradués et que c'est une injection.

Proposition 6.12 *Soient L, L' deux algèbres de Lie sur K. On a alors que*

$$U(L \times L') = U(L) \otimes U(L').$$

Démonstration. On va montrer que $U(L) \otimes U(L')$ satisfait la propriété universelle. Pour cela, on se donne un morphisme d'algèbre de Lie $f : L \times L' \to A$ où A est une algèbre quelconque. On doit avoir que le diagramme

$$\begin{tikzcd}
L \times L' \arrow[r, "i_{L\times L'}"] \arrow[dr, "f"'] & U(L) \otimes U(L') \arrow[d, "\tilde{f}"] \\
& A
\end{tikzcd}$$

commute avec un certain morphisme d'algèbres $\tilde{f}$.

On remarque que si l'on se fixe $y = 0$, la propriété universelle de l'algèbre tensorielle va nous induire un morphisme d'algèbre $\tilde{f}_1$ tel que le diagramme suivant commute.

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "i_L"] \arrow[dr, "f(-,0)"'] & U(L) \arrow[d, "\tilde{f}_1"] \\ & A \end{tikzcd}$$

(On peut vérifier facilement que $f(-,0)$ est un morphisme d'algèbres de Lie.)

Idem avec $\tilde{f}_2$ (en posant cette fois $x = 0$).

On pose ainsi $\tilde{f} := \varphi(\tilde{f}_1 \otimes \tilde{f}_2)$ comme étant le morphisme d'algèbres recherché. On vérifie alors que le diagramme

$$\begin{tikzcd} L \times L' \arrow[r, "i_{L\times L'}"] \arrow[dr, "f"'] & U(L) \otimes U(L') \arrow[d, "\tilde{f}"] \\ & A \end{tikzcd}$$

commute.

En effet, soit $(x, y) \in L \times L'$, on a alors que

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(x,0) + f(0,y) = \tilde{f}_1(x) + \tilde{f}_2(y) \\ &= \varphi_A(\tilde{f}_1(x) \otimes 1) + \varphi_A(1 \otimes \tilde{f}_2(y)) \\ &= \varphi_A(\tilde{f}_1(x) \otimes \tilde{f}_2(1) + \tilde{f}_1(1) \otimes \tilde{f}_2(y)) \\ &= \varphi_A(\tilde{f}_1 \otimes \tilde{f}_2(x \otimes 1 + 1 \otimes y)) \\ &= \varphi_A(\tilde{f}_1 \otimes \tilde{f}_2) \circ i_{L\times L'}(x,y) \end{aligned}$$

Par conséquent, $U(L) \otimes U(L')$ satisfait la propriété universelle de l'algèbre enveloppante. En fait, il faudrait encore montrer qu'une telle application $\tilde{f}$ est unique. Cela semble assez naturel, car les morphismes d'algèbres $\tilde{f}_i$ induit sont uniques. $\square$

PROPOSITION 6.13 *Soit L une algèbre de Lie sur K, alors $U(L)$ est une algèbre de Hopf.*

DÉMONSTRATION. On commence par définir l'application de K-modules gradués

$$\begin{aligned} \Delta : L &\longrightarrow L \times L \\ x &\longmapsto \Delta(x) = (x, x) \qquad \forall x \in L_p. \end{aligned}$$

Un petit calcul facile montrer que c'est un morphisme d'algèbres de Lie, i.e. le diagramme

$$\begin{tikzcd} L \otimes L \arrow[r, "{[\,,]}"] \arrow[d, "\Delta\otimes\Delta"'] & L \arrow[d, "\Delta"] \\ (L \times L) \otimes (L \times L) \arrow[r, "{[\,,]}"] & L \times L \end{tikzcd}$$

commute.

Par la proposition précédente, on a l'existence d'un morphisme d'algèbres $U(\Delta)$: $U(L) \to U(L) \otimes U(L)$. On pourra montrer aisément que c'est une comultiplication et ainsi avoir que $U(L)$ est une algèbre de Hopf. $\square$

REMARQUE 6.14 Rappelons que sur l'algèbre tensorielle, on avait définit une comultiplication (cf. chapitre 3). On peut remarquer que la comultiplication induite dans la structure quotient (après avoir vérifié qu'elle est bien définie) va être la même que celle ci-dessus.

PROPOSITION 6.15 *Si A est une algèbre de Hopf sur K, alors $P(A)$ est une sous-algèbre de Lie de la structure d'algèbre de Lie associée de A.*

DÉMONSTRATION. On doit vérifier que $[P(A), P(A)] \in P(A)$. Soient $x \in P(A)_p$, $y \in P(A)_q$, alors

$$\begin{aligned}\Delta([x,y]) &= [\Delta(x), \Delta(y)] = [x \otimes 1 + 1 \otimes x, y \otimes 1 + 1 \otimes y] \\ &= [x \otimes 1, y \otimes 1] + [x \otimes 1, 1 \otimes y] + [1 \otimes x, y \otimes 1] + [1 \otimes x, 1 \otimes y]\end{aligned}$$

il faut remarquer que

$$\begin{aligned}[x \otimes 1, y \otimes 1] &= \varphi(x \otimes y) \otimes \underbrace{\varphi(1 \otimes 1)}_{=1} - (-1)^{|x||y|} \varphi(y \otimes x) \otimes \underbrace{\varphi(1 \otimes 1)}_{=1} \\ &= [x, y] \otimes 1\end{aligned}$$

idem pour

$$[1 \otimes x, 1 \otimes y] = 1 \otimes [x, y].$$

Comme les termes centraux s'annulent, on a bien que

$$\Delta([x,y]) = [x,y] \otimes 1 + 1 \otimes [x,y]. \qquad \square$$

DÉFINITION 6.16 *Soit A une algèbre de Hopf sur K, on dit que A est **primitivement engendrée** si la plus petite sous-algèbre de A qui contient $P(A)$ est A*[1].

REMARQUE 6.17 On peut observer que les algèbres de Hopf primitivement engendrées ont leur comultiplication commutative. Par conséquent, la catégorie des algèbres de Hopf primitivement engendrées, notée $\mathscr{PH}_K$, est une sous-catégorie de la catégorie des algèbres de Hopf qui on une comultiplication commutative, notée $\mathscr{CH}_K$. Si l'on se place maintenant dans un corps de caractéristique nulle $\mathbb{K}$, Milnor et Moore démontrent qu'une algèbre de Hopf connexe A est dans $\mathscr{PH}_\mathbb{K}$ si et seulement si sa comultiplication est commutative. L'algèbre enveloppante étant connexe, on a ainsi que le foncteur $U : \mathscr{L}_\mathbb{K} \longrightarrow \mathscr{PH}_\mathbb{K}$ est bien définit.

De plus, si on pose $P : \mathscr{PH}_K \longrightarrow \mathscr{L}_K$ comme étant le foncteur associant à toute algèbre de Hopf A (primitivement engendrée), $P(A)$[2] et à tout morphisme d'algèbres de Hopf f, $P(f)$; on pourra alors s'attaquer à l'isomorphisme de catégories suivant...

THÉORÈME 6.18 *Soient $\mathbb{K}$ un corps de caractéristique nulle, et $P : \mathscr{PH}_\mathbb{K} \longrightarrow \mathscr{L}_\mathbb{K}$, $U : \mathscr{L}_\mathbb{K} \longrightarrow \mathscr{PH}_\mathbb{K}$ les foncteurs définit ci-dessus. Alors*

(i) le foncteur $PU : \mathscr{L}_\mathbb{K} \longrightarrow \mathscr{L}_\mathbb{K}$ est le foncteur identité sur $\mathscr{C}_\mathbb{K}$, et

(ii) le foncteur $UP : \mathscr{PH}_\mathbb{K} \longrightarrow \mathscr{PH}_\mathbb{K}$ est le foncteur identité sur $\mathscr{PH}_\mathbb{K}$.

---

1. Dans la publication de Milnor et Moore, on nous propose aussi de dire qu'une algèbre A est primitivement engendrée si $U(P(A)) \to A$, l'application de K-modules gradués induite par l'inclusion, est surjective.
2. $P(A)$ est bien une sous-algèbre de Lie par la proposition 6.15.

Remarque 6.19 Pour démontrer un tel résultat, il faut manipuler des filtrations. L'idée est de montrer que les filtrations primitives ainsi que les filtrations de Lie coïncident. Pour plus de détails de la preuve, je renvois le lecteur au papier de Milnor et Moore [**MM65**].

2. Algèbre de Steenrod

Je finis sur un petit exemple d'algèbre de Hopf, l'algèbre de Steenrod. Dans ce travail, je vais juste expliciter la construction sans démontrer que c'en est une. Pour la preuve, je renvois le lecteur au livre de R.Mosher et C.Tangora [**MT68**]. Cela dit, la construction usuel de l'algèbre de Steenrod se fait avec des opérations stables de cohomologie. Ici, on la construit à partir de l'algèbre tensorielle. Un mathématicien confirmé démontrera qu'il y a isomorphisme entre les deux constructions.

Puisque l'algèbre de Steenrod est un quotient d'une algèbre de Hopf, il nous faut quelques propositions sur les coalgèbres quotients. Je donne ici une petite introduction qui permettrait de comprendre un peu mieux l'idée de coidéal.

Soit $\mathbb{K}$ un corps.

Définition 6.20 *Soit A une coalgèbre sur $\mathbb{K}$.*

(i) *On dit que $B \subset A$ est une **sous-coalgèbre** (sur $\mathbb{K}$) de A si $\Delta_A(B) \subset B \otimes B$.*

(ii) *On dit que I est un **coidéal** si*

  (a) $\Delta_A(I) \subset A \otimes I + I \otimes A$,

  (b) $\varepsilon(I) = 0$.

Proposition 6.21 *Soient A une coalgèbre sur $\mathbb{K}$ et I un coidéal de A, alors A/I est muni d'une structure de coalgèbre. De plus, la projection $\pi : A \to A/I$ est un morphisme de coalgèbres.*

Proposition 6.22 *Soient A, B deux coalgèbres sur $\mathbb{K}$, $f : A \to B$ un morphisme de coalgèbres et I un coidéal tels que $I \subset \ker f$, alors il existe un unique morphisme de coalgèbre $\tilde{f} : A/I \to B$ tel que le diagramme*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & B \\ A/I \arrow[ur, dotted, "\exists! \tilde{f}"'] & \end{tikzcd}$$

commute.

Proposition 6.23 *Soient A, B deux coalgèbres sur $\mathbb{K}$ et $f : A \to B$ un morphisme de coalgèbres, alors*

(i) $\ker f$ *est un coidéal de A,*

(ii) $\mathrm{im}\, f$ *est une sous-coalgèbre de B,*

(iii) $A/\ker f \cong \mathrm{im}\, f$.

Remarque 6.24 Pour les preuves de ces propositions, je renvois le lecteur au livre de Dăscălescu [**DNR01**].

Passons maintenant à la construction de l'algèbre de Steenrod.

Définition 6.25 *On considère V le $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-espace vectoriel gradué engendré par les symboles Sq^i pour $i \geq 0$*[3] *(il faut voir $Sq^i = \{Sq^i_{(n)}\}$). On prend alors l'algèbre tensorielle de V, $T(V) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus V \oplus V^{\otimes 2} \oplus \cdots$, qu'on la passe au quotient par l'idéal I engendré par :*

(i) $1 + Sq^0$

(ii) *(la relation d'Adem)*

$$Sq^a \otimes Sq^b + \sum_{c=0}^{[a/2]} \binom{b-c-1}{a-2c} Sq^{a+b-c} \otimes Sq^c$$

$\forall 0 < a < 2b$.

*On définit alors l'**algèbre de Steenrod** (mod 2) comme $A_2 := T(V)/I$.*

Remarque 6.26 On parle de symboles Sq^i et non pas de polynômes, car en topologie on a que c'est des opérations stables avec $Sq^i_{(n)} : H^n(X) \to H^{n+i}(X)$.

Par définition, c'est une algèbre, et on pourra montrer que la comultiplication

$$\begin{aligned} \Delta : T(V) &\longrightarrow T(V) \otimes T(V) \\ Sq^i &\longmapsto \sum_{a+b=i} Sq^a \otimes Sq^b \end{aligned}$$

va engendré une comultiplication sur le quotient. Il faudrait voir que I est un coidéal.

3. D'une manière équivalente, on aurait pu considérer l'espace vectoriel des polynômes, sauf qu'on perdrait le lien avec la topologie algébrique (cf. remarque).

Bibliographie

[Bor94a] Francis Borceux. *Handbook of categorical algebra. 1*, volume 50 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge University Press, Cambridge, 1994. Basic category theory.

[Bor94b] Francis Borceux. *Handbook of categorical algebra. 2*, volume 51 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge University Press, Cambridge, 1994. Categories and structures.

[DK01] James F. Davis and Paul Kirk. *Lecture notes in algebraic topology*, volume 35 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2001.

[DNR01] Sorin Dăscălescu, Constantin Năstăsescu, and Şerban Raianu. *Hopf algebras*, volume 235 of *Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics*. Marcel Dekker Inc., New York, 2001. An introduction.

[Gri07] Pierre Antoine Grillet. *Abstract algebra*, volume 242 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York, second edition, 2007.

[Hat02] Allen Hatcher. *Algebraic topology*. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.

[Kan88] Richard M. Kane. *The homology of Hopf spaces*, volume 40 of *North-Holland Mathematical Library*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1988.

[Lan02] Serge Lang. *Algebra*, volume 211 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, third edition, 2002.

[Mil58] John Milnor. The Steenrod algebra and its dual. *Ann. of Math. (2)*, 67 :150–171, 1958.

[ML95] Saunders Mac Lane. *Homology*. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1995. Reprint of the 1975 edition.

[ML98] Saunders Mac Lane. *Categories for the working mathematician*, volume 5 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1998.

[MM65] John W. Milnor and John C. Moore. On the structure of Hopf algebras. *Ann. of Math. (2)*, 81 :211–264, 1965.

[MT68] Robert E. Mosher and Martin C. Tangora. *Cohomology operations and applications in homotopy theory*. Harper & Row Publishers, New York, 1968.

[Sel97] Paul Selick. *Introduction to homotopy theory*, volume 9 of *Fields Institute Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1997.