

Noeuds et invariants de Vassiliev

Florent Mayencourt

Professeur : Hess Bellwald Kathryn

Sous la direction de John Edward Harper

EPFL, Semestre d'hivers 2008

*Pour l'instant le monde humain appartient à
ceux qui se demandent "pourquoi". Mais l'avenir appartient forcément à
ceux qui se demandent "comment".*

Bernard Werber

Résumé

Le travail ci-présent se propose de donner un aperçu de la théorie des nœuds, via notamment les invariants de Vassiliev. Nous commencerons par formaliser la notion de nœud mathématique, puis nous présenterons quelques invariants typiques avant d'entrer dans le vif du sujet avec l'ensemble des invariants de Vassiliev. Pour finir nous démontrerons le théorème fondamental de cette théorie, à savoir un isomorphisme, dans laquelle nous introduirons l'intégrale de Kontsevich.

L'intérêt de ce travail réside notamment dans l'utilisation de plusieurs notions variées de mathématiques théoriques allant de l'algèbre de Hopf à l'analyse complexe en passant par les produits tensoriels.

Table des matières

1	Introduction	5
1.1	Définitions	5
1.2	Théorème	7
2	Algèbre de nœuds	9
2.1	Définition	9
2.2	Théorème	11
3	Table de nœuds	13
3.1	Nombre entrelacé	13
3.2	Table de nœuds	14
4	Invariants de nœuds	17
4.1	Tricolorabilité	17
4.2	Nombre de croisements	18
4.3	Nombre de dénouement	18
5	Invariants polynomiaux	21
5.1	Le polynôme crochet	21
5.2	Polynôme de Kauffmann	22
5.3	Polynôme de Jones	23
6	Les invariants de Vassiliev	25
6.1	Introduction et définitions	25
6.2	Algèbre des invariants de Vassiliev	26
6.3	Diagrammes de cordes	29

6.4	Diagrammes de cordes pour les enchevêtrements	31
6.5	Théorème fondamental	31
6.6	Bialgèbre des diagrammes de cordes	32
6.6.1	Diagrammes de cordes encadrés	33
6.6.2	Diagrammes de cordes non-encadrés	35
7	L'intégrale de Kontsevich	37
7.1	Construction	37
7.2	Exemple	39
7.3	Invariance	41
7.3.1	Introduction	41
7.3.2	Intégrale de Kontsevich pour les enchevêtrements . . .	42
7.4	Multiplication horizontale	47
7.5	Preuve du théorème fondamental	52
	Bibliographie	55

CHAPITRE 1

Introduction

1.1 Définitions

Nous allons introduire quelques définitions qu'on retrouve typiquement dans [6] et [7] :

Définition 1.1.1 (Nœuds polygonaux)

On définit :

- (i) *Un nœud polygonal est une courbe fermée dans \mathbb{R}^3 droite par morceau sans recoupement.
Soit un segment $[AB]$ d'un nœud polygonal. On définit un mouvement de base comme la transformation du segment en deux autres $[AC]$ et $[CB]$ sous condition qu'aucun segment ne traverse le triangle ABC*
- (ii) *Deux nœuds K_1 et K_2 sont équivalents si l'un peut s'écrire comme l'autre modulo un nombre fini de mouvements de base. On note*

$$K_1 \simeq_P K_2$$

Définition 1.1.2 (Nœuds lisses)

On définit :

- (i) *Une fonction continue de S^1 dans \mathbb{R}^3 est un nœud lisse si elle est injective dans son image.*
- (ii) *Deux nœuds f_1 et f_2 sont équivalents s'il existe une homotopie entre f_1 et f_2 . On le note*

$$f_1 \simeq_H f_2$$

Définition 1.1.3

On appelle un entrelacs à m composantes la composition dans \mathbb{R}^3 de m nœuds, i.e. une fonction continue de $(S^1)^m$ dans \mathbb{R}^3 injective par rapport à son image.

Deux entrelacs L_1 et L_2 sont équivalents s'il existe une homotopie entre L_1 et L_2 .

Définition 1.1.4

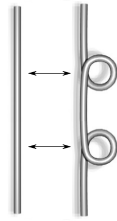
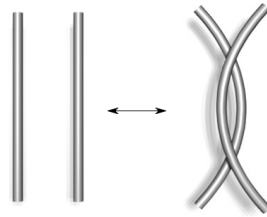
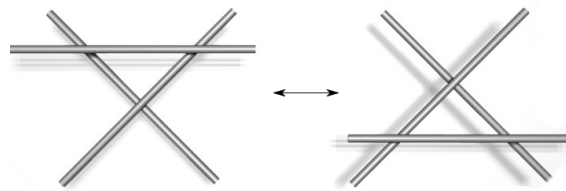
Soient $\{a_1, \dots, a_n\}$ un ensemble de points dans \mathbb{R}^3 dans un ensemble connexe plan U . Un enchevêtrement est une application continue T de $\{a_1, \dots, a_n\} \times I$ dans $U \times I$ tel que $T(-, 0)$ (le bas de l'enchevêtrement) et $T(-, 1)$ (haut de l'enchevêtrement) sont constants.

Soient deux enchevêtrements T_1 et T_2 tels que le haut de T_1 corresponde au bas de T_2 . On définit leur multiplication en concaténant simplement les deux enchevêtrements verticalement.

**Définition 1.1.5** (Nœuds projetés et mouvements de Reidemeister)

On définit

- (i) Une projection d'un nœud lisse est un nœud projeté si
 - (a) Si deux courbes se croisent, celle qui passe dessous est effacée
 - (b) Trois courbes ne peuvent pas se croiser sur un même point
 - (c) Deux courbes ne peuvent se croiser tangeanciellement
- (ii) Les mouvements de Reidemeister définis sur un nœud projeté sont

FIG. 1.1 - Ω_1 FIG. 1.2 - Ω_2 FIG. 1.3 - Ω_3

(iii) Deux projections K_1 et K_2 sont équivalentes si l'une est égale à l'autre modulo un nombre fini de mouvements de Reidemeister. On note

$$K_1 \simeq_R K_2$$

1.2 Théorème

Théorème 1.2.1

Les définitions ci-dessus sont équivalentes.

Démonstration. Il est facile de voir qu'un nœud polygonale est aussi un nœud lisse. De même si l'on a un nœud lisse, on peut le transformer en une courbe droite par morceaux. Grâce aux conventions faites sur un nœud projeté, on peut y associer un nœud lisse de manière évidente. Réciproquement on peut toujours trouver une projection d'un nœud lisse satisfaisant les conditions d'un nœud projeté.

On appellera donc les nœuds polygonaux, les nœuds lisses et les nœuds projetés simplement nœuds.

Soient deux nœuds K_1 et K_2 , alors $K_1 \simeq_P K_2$ si et seulement si $K_1 \simeq_H K_2$; on voit clairement qu'une suite de mouvements de bases sont équivalents à une homotopie entre les nœuds.

Reste à montrer que $K_1 \simeq_P K_2$ si et seulement si $K_1 \simeq_R K_2$.

Supposons qu'il existe un nombre fini de mouvement de Reidemeister qui transforment K_1 en K_2 . On voit alors que si l'on réalise la projection dans l'espace et qu'on "polygonise" le nœud, les mouvements Ω_1 , Ω_2 et Ω_3 peuvent facilement décrit comme une suite de mouvements de bases.

Soient maintenant la projection de deux nœuds polygonaux qui diffèrent par un nombre fini de mouvements de base. Traitons donc cas par cas les différentes projections des mouvements de base :

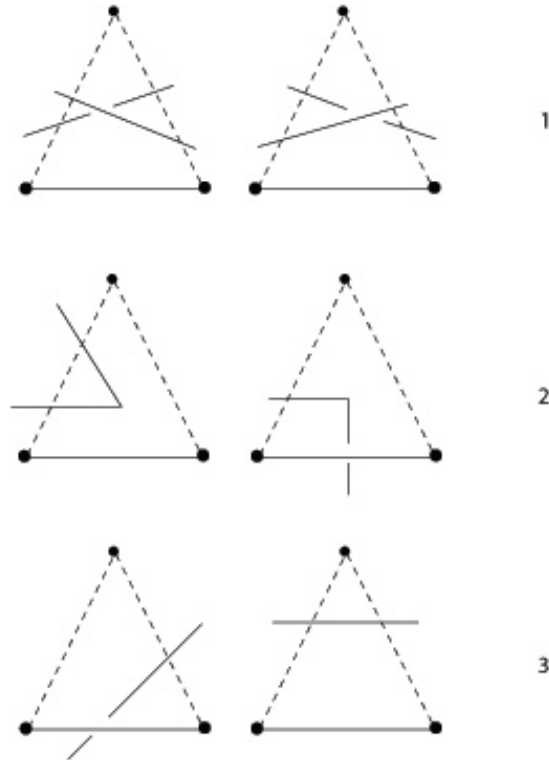


FIG. 1.4 – démonstration du théorème 1.2.1

On voit donc clairement qu'on peut faire correspondre un mouvement de base à une suite de mouvements de Reidemeister.

q.e.d

CHAPITRE 2

Algèbre de nœuds

Nous allons voir dans ce chapitre que les nœuds admettent une algèbre associative avec un élément neutre, mais que ses éléments n'ont pas d'inverses. On appelle cela un *monoïde*.

2.1 Définition

Remarque 2.1.1

Utilisons une autre manière de voir les nœuds lisse. On déforme le nœud sur un endroit jusqu'à obtenir une grande courbe et un petit nœud. On peut alors voir les nœuds comme une corde nouée à l'intérieur d'un cube, dont les deux extrémités sont attachées aux faces opposées dudit cube. Pour passer alors de la corde nouée à un nœud, il suffit de relier par une courbe simple par l'extérieur du cube les deux extrémités.

On peut alors définir à l'aide de cette notion de *nœud emboîté* :

Définition 2.1.2

Soient deux nœuds K_1 et K_2 deux nœuds emboîtés. On définit la concaténation de deux nœuds comme une opération de $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ dans \mathbb{R}^3 en reliant simplement les deux boîtes. On note

$$K_1 + K_2$$

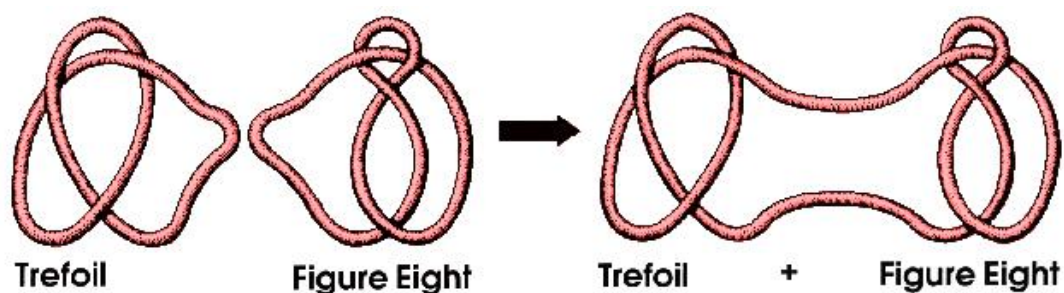


FIG. 2.1 – Concaténation [4]

Théorème 2.1.3

La concaténation est commutative.

Démonstration. Soit un nœud quelconque, alors il est facile de voir qu'on peut le déformer continuellement afin de prendre comme point de départ et d'arrivée n'importe quel point du nœud.

Considérons maintenant le second nœud comme le départ du premier nœud. Ainsi on peut faire coulisser le second nœud le long du premier comme dans l'étape précédente.

On a ainsi fait commuter les deux nœuds.

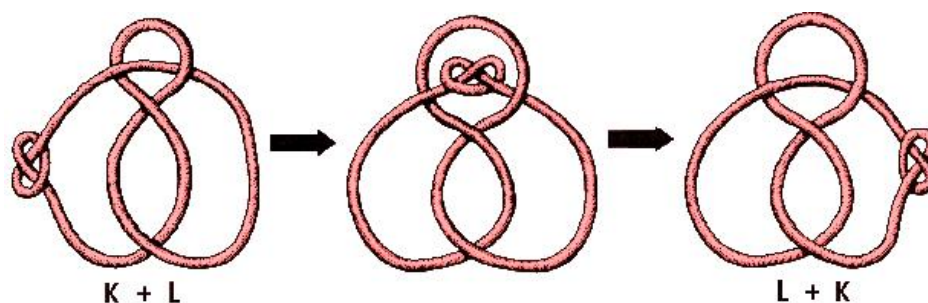


FIG. 2.2 – Commutativité [4]

q.e.d

Remarque 2.1.4

La commutativité ne dépend pas de l'endroit où on a prolongé les nœuds pour l'emboîter. En effet, comme on l'a vu dans la démonstration, on peut faire coulisser les nœuds l'un dans l'autre jusqu'à ce que les points d'intersections correspondent.

La concaténation est aussi clairement associative.

Définition 2.1.5

Un nœud est trivial s'il est isomorphe à S^1 vu comme sous-ensemble de \mathbb{R}^3 , noté 0. C'est clairement l'élément neutre pour la concaténation.

Un nœud K est dit premier si pour tout nœuds K_1 et K_2 tels que $K = K_1 + K_2$, alors K_1 ou K_2 est trivial, i.e.

$$K = K_1 + K_2 \Rightarrow K_1 \simeq 0 \vee K_2 \simeq 0$$

Définition 2.1.6

On peut construire une série de nœuds décroissants, i.e. dans des boites de plus en plus petites. On appelle ce nœud un nœud sauvage si cette suite de nœuds tend vers un point.

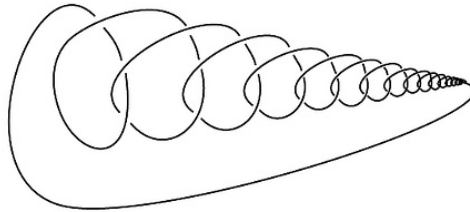


FIG. 2.3 – Nœud sauvage [3]

2.2 Théorème

Théorème 2.2.1

Si K_1 n'est pas équivalent au nœud trivial, alors pour tout K_2 , $K_1 + K_2$ n'est pas trivial.

Démonstration. Montrons la contraposée, i.e.

$$K_1 + K_2 \simeq 0 \Rightarrow K_1 \simeq 0.$$

Supposons donc $K_1 + K_2$ trivial, alors par commutativité on a que $K_2 + K_1$ est aussi trivial. On construit alors la suite $K_1 + K_2 + K_1 + K_2 + \dots$, peut être sauvage. On a alors :

$$\begin{aligned} (K_1 + K_2) + (K_1 + K_2) + \dots &\simeq K_1 + (K_2 + K_1) + (K_1 + K_2) + \dots \Rightarrow \\ 0 &\simeq K_1. \end{aligned}$$

On a donc démontré la contraposée.

q.e.d

Remarque 2.2.2

Ce théorème n'est pas anodin. C'est une preuve qu'aucun nœud ne peut avoir d'inverse. L'ensemble des nœuds n'est donc pas un groupe pour la concaténation.

CHAPITRE 3

Table de nœuds

Nous allons voir ici différentes manières de classifier les entrelacs ; les nœuds ne sont vus que comme des cas particuliers, des entrelacs à une composante.

3.1 Nombre entrelacé

Définition 3.1.1

Un entrelacs est dit séparable s'il peut s'écrire comme réunion disjointe de nœuds.

On définit le nombre entrelacé d'un entrelacs orienté L , noté $l_n(L)$, par la somme des ε_i où

$$\varepsilon_i = \begin{cases} 1 & \text{si} \\ -1 & \text{si} \\ 0 & \text{si} \end{cases}$$

Lemme 3.1.2

Les mouvements de Reidemeister n'affectent pas le nombre entrelacé.

Démonstration. Ω_1 : clairement

Ω_2 : si le mouvement agit sur une même composante : 0 , sinon $-1 + 1 = 0$

Ω_3 : trois cas : trois composantes différentes $+1 + 1 + 1 = +1 + 1 + 1$, deux composantes différentes $+1 + 1 = +1 + 1$ et une même composante $0 = 0$.

q.e.d

Théorème 3.1.3

Si un entrelacs L est séparable, alors $l_n(L) = 0$.

Démonstration. On sait par le lemme que $l_n(L)$ est invariant par les mouvements de Reidemeister. Comme de plus le nombre entrelacé deux composantes disjointes est la somme du nombre entrelacé de chacune des composantes et que celui-ci est nul pour un nœud, on a que si L est séparable, $l_n(L) = 0$. q.e.d

3.2 Table de nœuds

La table suivante énumère les nœuds et entrelacs de 0 à 9 croisements.

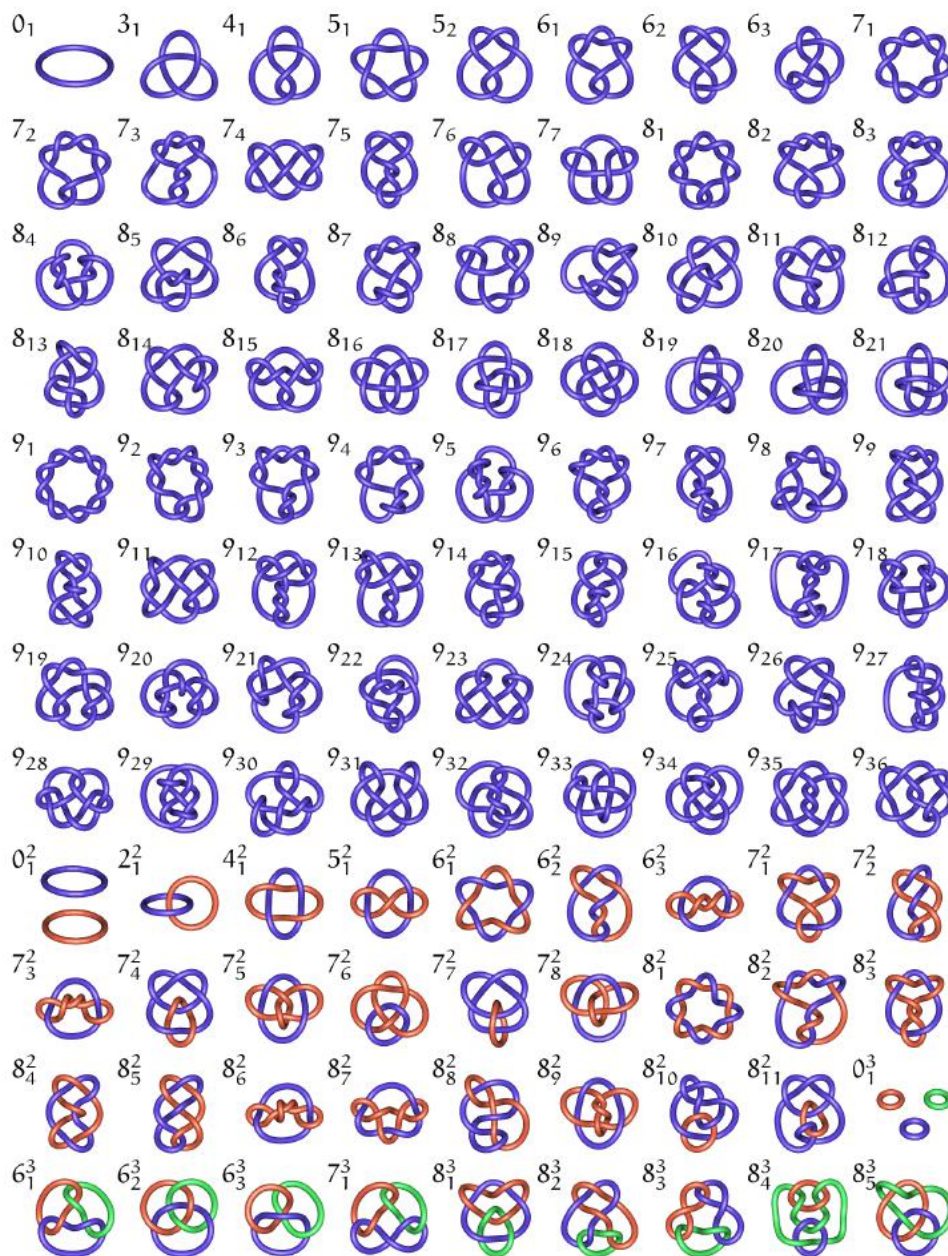


FIG. 3.1 – Table de nœuds et d'entrelacs [2]

CHAPITRE 4

Invariants de nœuds

Définition 4.0.1

Une fonction f qui associe à chaque nœud un polynôme est appelée un invariant si pour deux nœuds équivalents elle reste la-même, i.e.

$$K_1 \simeq K_2 \Rightarrow f(K_1) = f(K_2).$$

4.1 Tricolorabilité

Définition 4.1.1

On définit le coloriage de la projection d'un nœud comme suit :

- (i) On utilise soit une soit trois couleurs.
- (ii) Une courbe ne peut avoir qu'une seule couleur, i.e. on ne peut changer la couleur qu'à un croisement dessous.
- (iii) A chaque intersection, on trouve soit une unique couleur, soit trois couleurs.

Si un nœud peut être colorié en utilisant les trois couleurs, on dit qu'il est tricoloriable.

Exemple 4.1.2

Voilà comment colorier le nœud de trèfle :

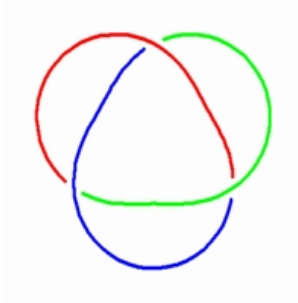


FIG. 4.1 – Nœud de trèfle tricolorié [1]

Lemme 4.1.3

La tricolorabilité d'un nœud est un invariant.

Démonstration. Clairement par Reidemeister.

q.e.d

4.2 Nombre de croisements

Définition 4.2.1

On définit le nombre de croisements d'un nœud comme le minimum de croisements sur les projections de toutes les déformations continues dudit nœud, qu'on note $c(K)$.

Lemme 4.2.2

Le nombre de croisements d'un nœud est un invariant.

Démonstration. Le troisième mouvement de Reidemeister ne change pas le nombre de croisements d'un nœud, quant aux premier et second, puisqu'on a défini ce nombre comme un minimum, ils n'influencent pas le nombre de croisements.

q.e.d

4.3 Nombre de dénouement

Définition 4.3.1

Le changement de croisement sur une projection d'un nœud est l'opération qui consiste à changer un passage dessus-dessous en dessous-dessus.

Pour une projection, on peut trouver un nombre minimale de croisement à changer pour que le nœud devienne trivial. On définit le nombre de dénouement comme le minimum sur toutes les déformations continues du nœud du nombre minimale de croisement à changer pour que le nœud devienne trivial, noté $u(K)$.

Lemme 4.3.2

Le nombre de dénouement est un invariant.

CHAPITRE 5

Invariants polynomiaux

5.1 Le polynôme crochet

Définition 5.1.1

On définit le polynôme crochet par

- (i) $\langle \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagdown \diagup \end{array} \rangle = a \langle \begin{array}{c} \frown \\ \smile \end{array} \rangle + b \langle \begin{array}{c} \smile \\ \frown \end{array} \rangle$
- (ii) $\langle L \cup 0 \rangle = c \langle L \rangle$
- (iii) $\langle 0 \rangle = 1$

Lemme 5.1.2

Le polynôme crochet n'est pas un invariant. Plus précisément, il est invariant par Ω_2 et Ω_3 , mais pas par Ω_1 .

Démonstration. Vérifions pour chaque Ω :

Ω_2

$$\langle \begin{array}{c} \smile \\ \smile \end{array} \rangle = (a^2 + b^2 + abc) \langle \begin{array}{c} \frown \\ \smile \end{array} \rangle + ab \langle \begin{array}{c} \smile \\ \frown \end{array} \rangle .$$

On doit donc avoir $a^{-1} = b$ et $c = a^2 + a^{-2}$.

Ω_3

$$\langle \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagdown \diagup \end{array} \rangle = a \langle \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagup \diagdown \end{array} \rangle + a^{-1} \langle \begin{array}{c} \diagdown \diagup \\ \diagdown \diagup \end{array} \rangle$$

Ω_1

$$\langle \text{diagram of a loop with a crossing} \rangle = -a^3 \langle \text{diagram of a loop} \rangle$$

Ainsi, si $a \neq -1$, le polynôme crochet n'est pas un invariant q.e.d

Théorème 5.1.3

Le polynôme crochet existe et il est unique.

Démonstration. Soit K un nœud projeté, avec s croisements. Pour chaque croisement, on possède deux choix de décroisement :

$$\begin{array}{l} \left(\begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagdown \diagup \end{array} \right) \xrightarrow{A} \left(\begin{array}{c} \cup \\ \cap \end{array} \right) \\ \left(\begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagdown \diagup \end{array} \right) \xrightarrow{B} \left(\begin{array}{c} \cap \\ \cup \end{array} \right) \end{array}$$

Ainsi, on voit qu'il existe 2^n choix pour dénouer un nœud.

Notons $\alpha(s)$ = nombre de choix A , $\beta(s)$ = nombre de choix B et $\gamma(s)$ = nombre de cercles finaux.

On a alors par (i), (ii) et (iii) :

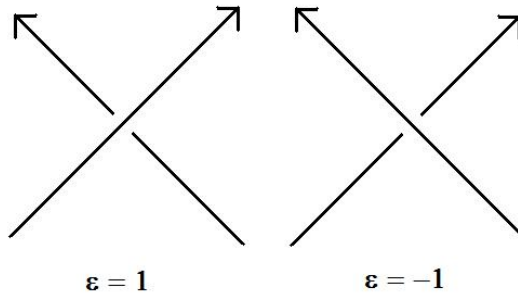
$$\langle L \rangle = \sum_s a^{\alpha(s)} b^{\beta(s)} c^{\gamma(s)-1} = \sum_s a^{\alpha(s)-\beta(s)} (-a^2 - a^{-2})^{\gamma(s)-1}$$

q.e.d

5.2 Polynôme de Kauffmann

Définition 5.2.1

A chaque croisement, on définit un état ε :



Le nombre d'état d'un nœud K est la somme de tous les états d'un nœud :

$$\omega(L) = \sum_s \varepsilon_s$$

On définit le polynôme de Kauffmann sur un nœud orienté comme :

$$X(L) = (-a)^{-3\omega(L)} \langle |L| \rangle$$

où $|L|$ est le nœud non-orienté.

Lemme 5.2.2

Le nombre d'état d'un nœud est invariant par Ω_2 et Ω_3 , mais pas par Ω_1

Démonstration. Clairement par dessin. q.e.d

Théorème 5.2.3

Le polynôme de Kauffmann est un invariant

Démonstration. On a démontré que $\omega(L)$ et $\langle |L| \rangle$ sont invariants par Ω_2 et Ω_3 .

$$X\left(\begin{array}{c} \text{loop with crossing} \end{array}\right) = (-a^{-3})(-a^3)X\left(\begin{array}{c} \text{loop without crossing} \end{array}\right) = X\left(\begin{array}{c} \text{loop without crossing} \end{array}\right) \quad \text{q.e.d}$$

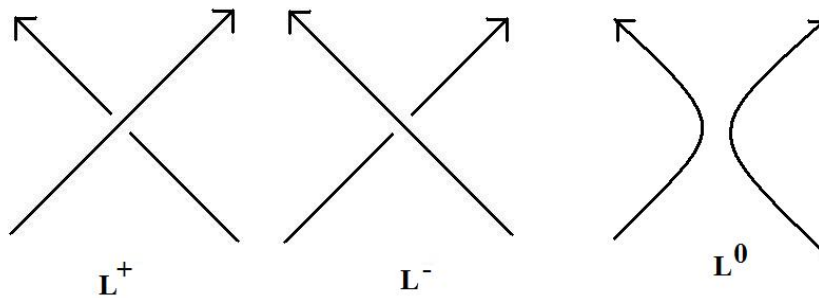
Remarque 5.2.4

Le polynôme de Kauffmann est unique, cela découle immédiatement de l'unicité du polynôme crochet et de celle du nombre d'états.

5.3 Polynôme de Jones

Notation 5.3.1

On va noter :



On a ainsi

$$\begin{aligned} a \langle L^+ \rangle - a^{-1} \langle L^- \rangle &= (a^2 - a^{-2}) \langle L^0 \rangle \\ \omega(L^\pm) &= \omega(L^0) \pm 1 \\ a(-a)^3 K(L^+) - a^{-1}(-a)^{-3} X(L^-) &= (a^2 - a^{-2}) X(L^0) \end{aligned}$$

Définition 5.3.2

On définit le polynôme de Jones par :

- (i) $q^{-1}V(L^+) - qV(L^-) = (q^{1/2} - q^{-1/2})V(L^0)$
- (ii) $V(L \cup 0) = -(q^{-1/2} + q^{1/2})V(L)$
- (iii) $V(0) = 1$

Remarque 5.3.3

En remplaçant a par $q^{-1/4}$, on voit que le polynôme de Jones est égal au polynôme de Kauffmann.

Remarque 5.3.4

Le polynôme de Kauffmann défait un entrelacs, alors que le polynôme de Jones refait l'entrelacs par des composantes disjointes.

Théorème 5.3.5

Un entrelacs à m composantes peut être transformé en m composantes triviales par une séquence de changement de croisement.

Démonstration. On procédera par récurrence sur le nombre de composantes :
 $m = 1$

On construit le nœud à partir de la projection, en montant toujours, puis on relie les deux points verticalement. Il suffit ensuite de procéder aux bons changements.

$m > 1$

On fait la construction pour chacune des composantes, puis on les relie entre-elles de la même manière. q.e.d

CHAPITRE 6

Les invariants de Vassiliev

6.1 Introduction et définitions

Lorsqu'on effectue un changement de croisements, il n'y a qu'un seul point critique, un seul point de discontinuité. Les invariants de Vassiliev représentent une famille d'invariants qui traitent de ce passage critique.

Définition 6.1.1

Une fonction continue du cercle dans l'espace, $k : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$, est un nœud singulier d'ordre n si

- (i) $\exists \{x_1, \dots, x_n\} \subset S^1$ t.q. $\forall 1 \leq i \leq n \exists ! j \neq i$ avec $k(x_i) = k(x_j)$
- (ii) $k : S^1 - \{x_1, \dots, x_n\} \rightarrow \text{Im}(k)$

En particulier, si K est un nœud, alors K est un nœud singulier d'ordre 0. $k(x_1), \dots, k(x_n)$ sont les doubles points de k .

Définition 6.1.2

Soit v un invariant à valeur dans un groupe abélien $(A, +)$. On peut alors l'étendre aux nœuds singulier par la relation de Vassiliev :

$$v(\text{diagram 1}) = v(\text{diagram 2}) - v(\text{diagram 3}).$$

Définition 6.1.3

Un invariant v à valeur dans un groupe abélien $(A, +)$ est un invariant de Vassiliev d'ordre (ou degré) $\leq n$ si son extension s'annule sur sur tous les

nœuds à plus de n doubles points.

Un invariant de Vassiliev est d'ordre n s'il est d'ordre $\leq n$ mais pas $\leq n-1$.

On note l'ensemble des invariants d'ordre $\leq n$ V_n .

Exemple 6.1.4

Traitons les cas $n = 0, 1$:

1. V_0

Soit $v \in V_0$ et K un nœud singulier d'ordre 0, alors $v(K) = cste$

En effet, soit $K' = K$ modulo un croisement, alors par la relation de Vassiliev :

$$v(K') = |v(K) - v(K')| = 0 \Rightarrow v(K) = v(K').$$

Or, par le théorème 5.3.5, tout nœud se décompose en un nœud trivial via un nombre fini de changements de croisement. Ainsi

$$\forall K \ v(K) = v(\text{trivial}).$$

2. V_1 Soit $v \in V_1$ et K un nœud singulier d'ordre 1, alors $v(K) = 0$

Par le même raisonnement que pour V_1 , on peut décomposer chacune des composantes de part et d'autre du double point en triviales :

On a donc :

$$v(K) = v(\text{diagramme 1}) = v(\text{diagramme 2}) - v(\text{diagramme 3}) = v(0) - v(0) = 0$$

Ainsi, $V_1 = V_0 = \mathbb{R}$

Remarque 6.1.5

On travaillera dorénavant avec les invariants à valeur dans un anneau commutatif, noté \mathcal{R} .

6.2 Algèbre des invariants de Vassiliev

Définition 6.2.1

Soit $n \leq m$ On définit :

$$\begin{aligned} + : V_n \times V_m &\longrightarrow V_m \\ (v_n, v_m) &\longmapsto v_n + v_m \end{aligned}$$

avec, pour K un nœud singulier quelconque $(v_n + v_m)(K) = v_n(K) + v_m(K)$.

$$\begin{aligned} \cdot : V_n \times V_m &\longrightarrow V_{m+n} \\ (v_n, v_m) &\longmapsto v_n \cdot v_m \end{aligned}$$

avec, pour K un nœud singulier quelconque $(v_n \cdot v_m)(K) = v_n(K) \cdot v_m(K)$.

Proposition 6.2.2

On vérifie que $+$ et \cdot sont bien définis, i.e.

- (i) $v_n + v_m \in V_m$
- (ii) $v_n \cdot v_m \in V_{m+n}$

Démonstration. La première partie est facile, alors que la seconde demande plus de travail :

- (i) $v_n + v_m \in V_m$ Soit K un nœud d'ordre $m + 1$, alors

$$\begin{aligned} (v_n + v_m)(K) &= v_n(K) + v_m(K) \\ &= 0 + 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Car $n \leq m < m + 1$.

- (ii) $v_n \cdot v_m \in V_{m+n}$ Soit $l = m + n + 1$ et soit K un nœud singulier d'ordre l , alors en décomposant K par la relation de Vassiliev, on obtient :

$$(v_n \cdot v_m)(K) = \sum_{\varepsilon_i = \pm 1} (-1)^{|\varepsilon|} v_m(K_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_l}) v_n(K_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_l})$$

Avec $|\varepsilon| = \#\{\varepsilon_i = -1\}$ et $K_{\varepsilon_i=1}$ (resp. $_{-1}$) est le nœud singulier K dont on a défait le i -ème double point de manière positive (respectivement négative).

On peut voir cette somme comme l'évaluation de $v_m \cdot v_n$ sur les sommets du l -cube :

$$Q_l = \{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_l) \text{ t.q. } \varepsilon_i = \pm 1\}$$

On définit alors la somme partielle de v sur une face S de Q_l : $\sum_{\varepsilon \in S} (-1)^{|\varepsilon|} v(\varepsilon)$ avec $v(K_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_l}) = v(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_l)$.

Puisque v_m (resp. v_n) sont d'ordre $\leq m$ (resp. $< n$), alors il s'annule sur chaque $m + 1$ -face (resp. $n + 1$) de Q_l .

Assertion : l'évaluation de $(v_m \dots v_n)$ sur le cube Q_l est 0.

On procède par récurrence sur l avec $v_m = f$ et $v_n = g$

$n = 1$

On a forcément $m = n = 0$. Ainsi

$$\begin{aligned} (fg)(1) - (fg)(-1) &= f(1)g(1) - f(-1)g(-1) + f(-1)g(1) + f(1)g(-1) \\ &= (f(1) - f(-1))g(1) + f(-1)(g(1) - g(-1)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Par la relation de Vassiliev. $n \geq 1$ On note $F_n := \{f : Q_n \longrightarrow \mathcal{R}\}$ avec $F_0 = \mathcal{R}$.

On définit ρ_+ et ρ_- de F_n dans $F_n - 1$ en fixant la 1ère variable (i.e. ε_1).

Soit $\delta = \rho_+ - \rho_-$. On remarque facilement que si l'évaluation d'un invariant de Vassiliev w sur r faces de Q_l est 0, alors $\delta(w)$ s'annule aussi sur $(r - 1)$ face de Q_{l-1} . En effet,

$$\begin{aligned}
\sum_{\varepsilon \in S_{(r-1)}} (-1)^{|\varepsilon|} \delta(w)(\varepsilon) &= \sum_{\varepsilon \in S_{(r-1)}} (-1)^{|\varepsilon|} (\rho_+(w) - \rho_-(w))(\varepsilon) \\
&= \sum_{\varepsilon \in S_{(r-1)}} (-1)^{|\varepsilon|} \rho_+(w)(\varepsilon) - \sum_{\varepsilon \in S_{(r-1)}} (-1)^{|\varepsilon|} \rho_-(w)(\varepsilon) \\
&= \sum_{\varepsilon \in S_{(r-1)}} (-1)^{|\varepsilon|} \rho_+(w)(\varepsilon) + \sum_{\varepsilon \in S_{(r-1)}} (-1)^{|\varepsilon|+1} \rho_-(w)(\varepsilon) \\
&= \sum_{\varepsilon \in S_{(r)}} (-1)^{|\varepsilon|} w(\varepsilon) \\
&= 0
\end{aligned}$$

On montre maintenant directement (formule de Leibniz) :

$$\delta(fg) = \rho_+(f)\delta(g) + \delta(f)\rho_-(g).$$

En effet,

$$\begin{aligned}
\delta(fg) &= \rho_+(fg) - \rho_-(fg) \\
&= \rho_+(f)\rho_+(g) - \rho_-(f)\rho_-(g) + \rho_+(f)\rho_-(g) - \rho_-(f)\rho_+(g) \\
&= \rho_+(f)(\rho_+(g) - \rho_-(g)) + (\rho_+(f) - \rho_-(f))\rho_-(g) \\
&= \rho_+(f)\delta(g) + \delta(f)\rho_-(g) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

par hypothèse de récurrence. On a ainsi démontré la proposition.

q.e.d

Proposition 6.2.3

Soient $v \in V_n$, K un nœud singulier d'ordre n et $K' = K$ modulo un croisement, alors

$$v(K) = v(K').$$

Démonstration. Soit $L \approx K$ le nœud singulier où l'on a changé le croisement différent entre K et K' par un double point. Clairement L est nœud singulier d'ordre $n + 1$. Ainsi par la relation de Vassiliev :

$$0 = v(L) = v(K) - v(K') \Rightarrow v(K) = v(K')$$

q.e.d

Définition 6.2.4

Soit $v \in V_n$. Le symbole de v est la restriction à v de tous les nœuds singuliers d'ordre n .

On note l'ensemble des symboles des invariants de Vassiliev d'ordre n V_n/V_{n-1} .

Remarque 6.2.5

Deux invariants d'ordre n avec le même symbole diffèrent par un invariant d'ordre $n-1$. V_n/V_{n-1} peut être vu comme un quotient par la relation d'équivalence « différer par un invariant d'ordre $n-1$ ».

6.3 Diagrammes de cordes

Définition 6.3.1

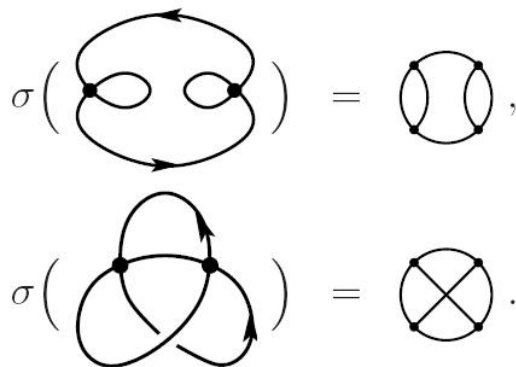
Soit $K : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$. On définit son diagramme de cordes en reliant sur S^1 les doubles points.

On note $\sigma(K)$ le diagramme de cordes obtenu à partir du nœud K .

A_n est l'ensemble de tous les diagrammes de cordes à n cordes.

Exemple 6.3.2

Par exemple :

**Proposition 6.3.3**

La valeur d'un symbole d'un invariant de Vassiliev d'ordre n sur un nœud du même ordre ne dépend que du diagramme de corde du nœud.

Démonstration. Il nous faut montrer que si K_1 et K_2 deux nœuds d'ordre n ont le même diagramme de corde, alors pour tout invariant v d'ordre n on a $v(K_1) = v(K_2)$.

Puisque K_1 et K_2 ont le même diagramme de cordes, alors ils ne diffèrent que

par un nombre fini de changement de croisement. Ainsi, par la proposition 6.2.3 $v(K_1) = v(K_2)$. q.e.d

Définition 6.3.4

Soit \mathcal{R} un anneau commutatif. On note $\mathcal{R}A_n$ l'ensemble des fonctions de A_n dans \mathcal{R} .

On définit :

$$\alpha_n : V_n \longrightarrow \mathcal{R}A_n$$

avec pour $\sigma(K) = D \in A_n$ et $v \in V_n$, $\alpha_n(v)(D) = v(K)$.

Remarque 6.3.5

Par la proposition 6.3.3, le α_n défini comme ci-dessus est bien défini car ne dépend pas du choix de K .

On connaît clairement le noyau de α_n ; il s'agit des invariants de Vassiliev qui s'annulent sur les nœuds d'ordre $n : V_{n-1}$. On a alors la fonction injective suivante :

$$\overline{\alpha}_n : V_n/V_{n-1} \longrightarrow \mathcal{R}A_n$$

L'idée maintenant serait de trouver $\text{Im}(\overline{\alpha}_n) \subset \mathcal{R}A_n$ en le filtrant par des relations bien choisies que doivent satisfaire les invariants de Vassiliev. Nous ne pouvons pas utiliser la relation de Vassiliev car elle fait intervenir A_n et A_{n-1} .

Définition 6.3.6

Une fonction $f \in \mathcal{R}A_n$ satisfait la relation 4-termes (ou 4T) si :

$$f(\text{diagram 1}) - f(\text{diagram 2}) + f(\text{diagram 3}) - f(\text{diagram 4}) = 0.$$

On appelle cette fonction un système poids, noté $f \in \mathcal{W}_n^{fr}$.

Définition 6.3.7

Un système poids $f \in \mathcal{R}A_n$ satisfait la relation 1-termes (ou 1T) si :

$$f(\text{diagram 5}) = 0.$$

On appelle cette fonctions un système poids non-encadré, noté $f \in \mathcal{W}_n$.

6.4 Diagrammes de cordes pour les enchevêtrements

6.5 Théorème fondamental

Théorème 6.5.1

Pour $\mathcal{R} = \mathbb{C}$, $\overline{\alpha}_n$ identifie l'espace V_n/V_{n-1} au sous-espace des systèmes poids non-encadrés $W_n \subset \mathcal{R}A_n$.

En d'autres termes, l'espace des systèmes poids non-encadrés

$$W = \bigoplus_{n=0}^{\infty} W_n$$

est isomorphe à l'espace gradué des symboles des invariants de Vassiliev.

Remarque 6.5.2

La démonstration se fera en deux parties :

V.Vassiliev : La fonction associée à chaque symbole est un système poids non-encadré.

M.Kontsevich : Chaque système poids non-encadré est le symbole d'un certain invariant de Vassiliev.

La première partie est faisable de suite ; la seconde demande l'introduction de l'intégrale de Kontsevich. Nous avons suivi surtout un texte de trois mathématiciens [8] et nous y avons tirés les images.

Démonstration. Soit v un invariant de Vassiliev.

Montrons que la fonction $f \in \mathcal{R}A_n$ associée à v satisfait la 1T et la 4T.

1T :

Soit K un nœud singulier d'ordre n tel que le diagramme de cordes contient un diagramme isolé. Soit p le double point qui divise le diagramme en deux parties A et B .

On peut alors délier K en deux composantes reliée par p ; appelons ce nouveau nœud K' . Clairement il a le même diagramme de cordes que K .

Par la relation de Vassiliev, on obtient :

$$v(K) = v(K') = v(K'_+) - v(K'_-)$$

Or, on s'aperçoit que $K'_+ = K'_-$ et donc $v(K) = 0$.

4T :

$$f\left(\begin{array}{c} \nearrow \\ \leftarrow \\ \nearrow \\ \leftarrow \end{array}\right) - f\left(\begin{array}{c} \nearrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \nearrow \end{array}\right) + f\left(\begin{array}{c} \nearrow \\ \leftarrow \\ \nearrow \\ \leftarrow \end{array}\right) - f\left(\begin{array}{c} \nearrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \nearrow \end{array}\right) = 0,$$

Par la relation de Vassiliev, on obtient :

$$\begin{aligned} f\left(\begin{array}{c} \nearrow \\ \leftarrow \\ \nearrow \\ \leftarrow \end{array}\right) &= f\left(\begin{array}{c} \nearrow \\ \leftarrow \\ \nearrow \\ \leftarrow \end{array}\right) - f\left(\begin{array}{c} \nearrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \nearrow \end{array}\right) = a - b, \\ f\left(\begin{array}{c} \nearrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \nearrow \end{array}\right) &= f\left(\begin{array}{c} \nearrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \nearrow \end{array}\right) - f\left(\begin{array}{c} \nearrow \\ \leftarrow \\ \nearrow \\ \leftarrow \end{array}\right) = c - d, \\ f\left(\begin{array}{c} \nearrow \\ \leftarrow \\ \nearrow \\ \leftarrow \end{array}\right) &= f\left(\begin{array}{c} \nearrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \nearrow \end{array}\right) - f\left(\begin{array}{c} \nearrow \\ \leftarrow \\ \nearrow \\ \leftarrow \end{array}\right) = c - a, \\ f\left(\begin{array}{c} \nearrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \nearrow \end{array}\right) &= f\left(\begin{array}{c} \nearrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \nearrow \end{array}\right) - f\left(\begin{array}{c} \nearrow \\ \leftarrow \\ \nearrow \\ \leftarrow \end{array}\right) = d - b. \end{aligned}$$

On a donc $(a - b) - (c - d) + (c - a) - (d - b) = 0$, ce qui prouve la partie 4T. q.e.d

6.6 Bialgèbre des diagrammes de cordes

Définition 6.6.1

On appelle espace des diagrammes de cordes (encadrés) \mathcal{A}_n^{fr} l'espace vectoriel généré par l'ensemble A_n des diagrammes d'ordre n modulo le sous-espace engendré par les combinaisons linéaires de la relation 4T :

L'espace des diagrammes de cordes non-encadré \mathcal{A}_n est quant à lui le quotient de \mathcal{A}_n^{fr} par le sous-espace engendré par les combinaisons linéaires de la relation 1T :

Remarque 6.6.2

En ces termes, l'espace poids \mathcal{W}_n^{fr} (respectivement non-encadré \mathcal{W}_n) est le dual de l'espace des diagrammes de cordes \mathcal{A}_n^{fr} (respectivement l'espace des digrammes de cordes non-encadrés \mathcal{A}_n) :

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_n &= \text{hom}(\mathcal{A}_n, \mathcal{R}) \\ \mathcal{W}_n^{fr} &= \text{hom}(\mathcal{A}_n^{fr}, \mathcal{R}) \end{aligned}$$

On peut ainsi donner une base explicite à \mathcal{A}_n^{fr} pour $n = 1, 2, 3$:

$$\mathcal{A}_1^{fr} = \langle \text{---} \circlearrowleft \text{---} \rangle, \dim \mathcal{A}_1^{fr} = 1.$$

$$\mathcal{A}_2^{fr} = \langle \text{---} \circlearrowleft \text{---} \circlearrowright \text{---}, \text{---} \circlearrowright \text{---} \circlearrowleft \text{---} \rangle, \dim \mathcal{A}_2^{fr} = 2,$$

car la seule relation 4T dans l'ensemble des diagrammes de cordes d'ordre 2 est triviale.

$$\mathcal{A}_3^{fr} = \langle \text{---} \circlearrowleft \text{---} \circlearrowright \text{---} \circlearrowright \text{---}, \text{---} \circlearrowright \text{---} \circlearrowleft \text{---} \circlearrowright \text{---}, \text{---} \circlearrowright \text{---} \circlearrowright \text{---} \circlearrowleft \text{---} \rangle, \dim \mathcal{A}_3^{fr} = 3,$$

Il y a cinq diagrammes de cordes différents dans \mathcal{A}_5 , mais deux sont dépendants des autres par la relation 4T :

$$\begin{aligned} \text{---} \circlearrowleft \text{---} \circlearrowright \text{---} &= \text{---} \circlearrowright \text{---} \circlearrowleft \text{---} \\ \text{---} \circlearrowright \text{---} \circlearrowleft \text{---} \circlearrowright \text{---} - 2 \text{---} \circlearrowright \text{---} \circlearrowright \text{---} \circlearrowleft \text{---} + \text{---} \circlearrowright \text{---} \circlearrowright \text{---} \circlearrowright \text{---} \circlearrowleft \text{---} &= 0 \end{aligned}$$

Respectivement pour \mathcal{A}_n , $n = 1, 2, 3$, on a :

$$\mathcal{A}_1 = 0, \dim \mathcal{A}_1 = 0.$$

$$\mathcal{A}_2 = \langle \text{---} \circlearrowright \text{---} \circlearrowleft \text{---} \rangle, \dim \mathcal{A}_2 = 1.$$

$$\mathcal{A}_3 = \langle \text{---} \circlearrowright \text{---} \circlearrowright \text{---} \circlearrowleft \text{---} \rangle, \dim \mathcal{A}_3 = 1.$$

6.6.1 Diagrammes de cordes encadrés

Définition 6.6.3

On définit le produit de deux diagrammes de cordes D_1 et D_2 par la concaténation des deux cercles comme vu ci-dessous :

Cette fonction est étendue par linéarité à

$$\mu : \mathcal{A}_m^{fr} \otimes \mathcal{A}_n^{fr} \rightarrow \mathcal{A}_{m+n}^{fr}.$$

Lemme 6.6.4

Le produit est bien défini par la relation 4T.

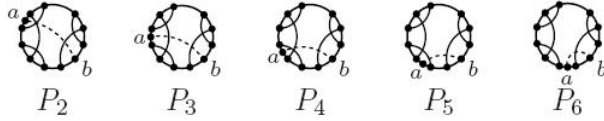
Démonstration. Remarquons qu'il suffit de montrer cela pour le produit de deux diagrammes, il en suivra nécessairement le résultat pour les combinaisons linéaires de diagrammes.

De plus, il suffit de montrer que si l'un des diagrammes, nommons-le $D_2 \in \mathcal{A}_m^{fr}$, est tourné d'un cran à l'intérieur du diagramme produit avec $D_1 \in \mathcal{A}_n^{fr}$, alors le résultat est le même modulo la relation 4T.

Commençons par donner un algorithme permettant de réaliser un tel tour : On choisit une corde dans D_2 avec comme extrémités a et b tel que a est adjacent à D_2 dans le produit. Ainsi en fixant b , on fait sauter a dans le diagramme de D_2 . On obtient donc $2n + 1$ diagrammes, notés P_0, P_1, \dots, P_{2n} . On veut maintenant montrer que $P_0 \equiv P_{2n}$ modulo la relation 4T. On écrit :

$$\begin{aligned} P_0 - P_{2n} &= P_0 + P_1 - P_1 + \dots + P_{2n-1} - P_{2n-1} - P_{2n} \\ &= (P_0 - P_1 + P_2 - P_3) + \dots + (P_{2n-3} - P_{2n-2} + P_{2n-1} - P_{2n}) \end{aligned}$$

Or on remarque facilement que $P_{i-3} - P_{i-2} + P_{i-1} - P_i = 0$ par la relation 4T. Par exemple :



q.e.d

Définition 6.6.5

On définit le coproduit dans l'algèbre \mathcal{A}^{fr}

$$\delta : \mathcal{A}_n^{fr} \rightarrow \bigoplus_{k+l=n} \mathcal{A}_k^{fr} \otimes \mathcal{A}_l^{fr}$$

comme suit : pour un diagramme $A \in \mathcal{A}_n^{fr}$, on a

$$\delta(D) := \sum_{J \subseteq [D]} D_J \otimes D_{\bar{J}},$$

la somme sur les sous-ensembles J de l'ensemble des cordes de D . D_J est le diagramme de cordes de J et $\bar{J} = [D] \setminus J$ le complémentaire de J par D .

L'opérateur δ est étendu par linéarité à \mathcal{A}^{fr} .

Lemme 6.6.6

Le coproduit δ est bien défini par la relation 4T.

Démonstration. Il nous faut ici montrer que le choix d'un représentant d'une classe n'influence pas le coproduit, i.e. que l'image d'une relation 4T est zéro.

Soit $D_1 - D_2 + D_3 - D_4 = 0$ une relation 4T. Montrons que la somme $\delta(D_1) - \delta(D_2) + \delta(D_3) - \delta(D_4)$ peut être écrite comme une combinaison de relation 4T.

Rappelons-nous qu'une relation spécifique 4T est déterminée par le choix d'une corde mobile m et d'une corde fixée a . Choisissons donc un tel m et le même découpage $A \cup B$ de l'ensemble des cordes dans chaque diagramme D_i , noté pour chaque i A_i et B_i . Les diagrammes de cordes résultant donnent la contribution de $A_i \otimes B_i$ à $\delta(D_i)$ pour $i = 1, 2, 3, 4$. Supposons que la corde mobile m est dans A . Ainsi on a $B_1 = B_2 = B_3 = B_4$ et donc $A_1 \otimes B_1 - A_2 \otimes B_2 + A_3 \otimes B_3 - A_4 \otimes B_4 = (A_1 - A_2 + A_3 - A_4) \otimes B_1$. Si $a \in A$, alors $A_1 - A_2 + A_3 - A_4$ est une relation 4T, sinon, remarquons que $A_1 = A_3$ et $A_2 = A_4$. Le cas où $m \in B$ est similaire. q.e.d

Remarque 6.6.7

L'unité et la co-unité sont définies dans \mathcal{A}^{fr} par :

$$\begin{aligned} \iota : \mathcal{R} &\rightarrow \mathcal{A}^{fr} \quad , \quad \iota(x) = x \bigcirc , \\ \varepsilon : \mathcal{A}^{fr} &\rightarrow \mathcal{R} \quad , \quad \varepsilon(x \bigcirc + \dots) = x . \end{aligned}$$

Ainsi, on peut vérifier que \mathcal{A}^{fr} est une algèbre de Hopf.

6.6.2 Diagrammes de cordes non-encadrés

Nous avons défini l'espace des diagrammes de cordes non-encadrés comme le quotient de l'espace \mathcal{A}^{fr} par le sous espace engendré par la relation 1T, qu'on peut aussi voir comme par l'ensemble des diagrammes avec une corde isolée. Dans le cadre de la multiplication dans \mathcal{A}^{fr} , ce sous-espace peut être décrit comme un idéal de \mathcal{A}^{fr} généré par Θ , le diagramme de cordes avec une seule corde, ainsi on peut écrire :

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}^{fr} / \langle \Theta \rangle$$

On cherche maintenant un homomorphisme d'algèbres $p : \mathcal{A}^{fr} \rightarrow \mathcal{A}^{fr}$ avec comme noyau $\langle \Theta \rangle$. On définit donc $p_n : \mathcal{A}^{fr} \rightarrow \mathcal{A}^{fr}$ par

$$p_n(D) := \sum_{J \subseteq [D]} (-\Theta)^{n-|J|} \dot{D}_J,$$

la somme sur $n \in \mathbb{N}$ des p_n définit l'opérateur voulu.

Proposition 6.6.8

On vérifie facilement que

- (i) p est un homomorphisme d'algèbre.
- (ii) $p(\Theta) = 0$, donc p envoie $\langle \Theta \rangle$ sur 0.
- (iii) p est un projecteur, i.e. $p^2 = p$.
- (iv) Le noyau de p est exactement $\langle \Theta \rangle$.

On a ainsi un isomorphisme par $\bar{p} : \mathcal{A}^{fr} / \langle \Theta \rangle \rightarrow \mathcal{A}^{fr}$ entre \mathcal{A} et l'image de \bar{p} . Cela nous donne immédiatement la décomposition $\mathcal{A}^{fr} = \bar{p}(\mathcal{A}) \oplus \langle \Theta \rangle$. \mathcal{A} admet donc aussi une structure d'algèbre de Hopf.

CHAPITRE 7

L'intégrale de Kontsevich

7.1 Construction

On a clairement un isomorphisme entre \mathbb{R}^3 et $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$. On peut donc définir un nœud de la même manière, un fonction continue de S^1 à $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$.

Définition 7.1.1

Soit un nœud K dans $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$. Un point $(z, t) \in K$ est un point critique si c'est un extremum local sur \mathbb{R} .

Un point critique est non-dégénéré si $K^{-1}(z + \varepsilon, t) = x \in S^1$.

Si (z_0, t_0) est un point critique, le plan $t = t_0$ est un niveau critique.

Un nœud lisse K est un nœud de Morse si tous ses points critiques sont non-dégénérés et tous ses niveaux critiques sont différents.

Définition 7.1.2

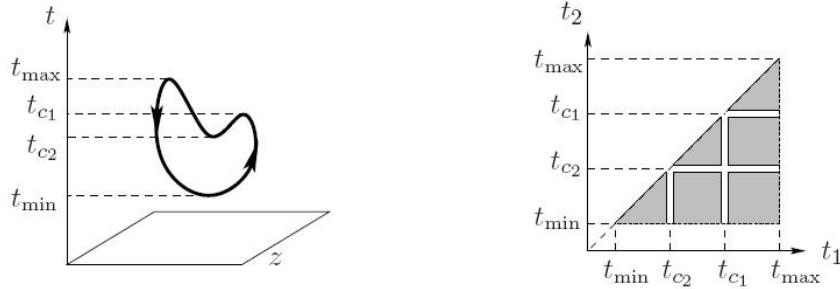
Soit K un nœud de Morse. On définit l'intégrale de Kontsevich $Z(K)$ par

$$Z(K) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2\pi i)^m} \int_{\substack{t_{\min} < t_m < \dots < t_1 < t_{\max} \\ t_j \text{ points non-critiques}}} \sum_{P=\{(z_j, j'_j)\}} (-1)^{\downarrow P} D_P \prod_{j=1}^m \frac{dz_j - dz'_j}{z_j - z'_j}.$$

Avec

t_{\min} et t_{\max} sont respectivement le minimum et le maximum de la fonction K sur \mathbb{R} .

Le domaine d'intégration est le m -simplexe (i.e. l'enveloppe convexe d'un ensemble de $(m + 1)$ points formant un repère affine dans \mathbb{R}^m) $t_{\min} < t_m < \dots < t_1 < t_{\max}$ divisé par les valeurs critiques dans les composantes connexes. Par exemple, pour le nœud suivant avec $m = 2$, le domaine d'intégration a six composantes connexes :



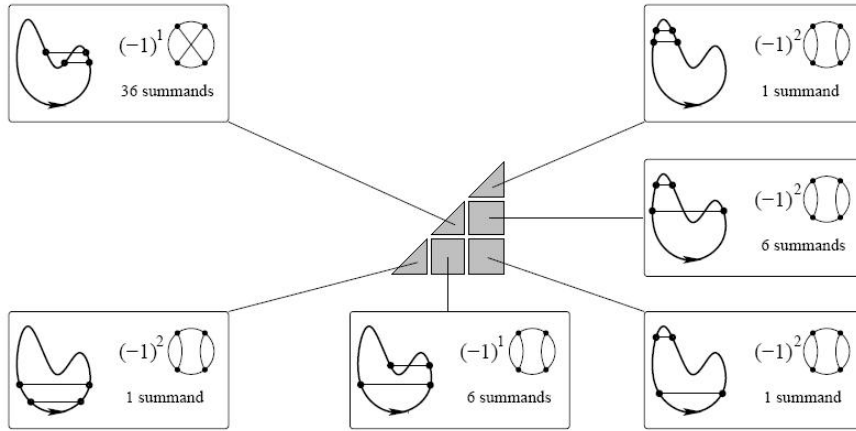
La cardinalité de P est constant dans chaque composante connexe, mais peut varier en fonction des composantes. Dans chaque plan $\{t = t_j\} \subset \mathbb{C}x\mathbb{R}$, on choisit une paire de points distincts (z_j, t_j) et (z'_j, t_j) sur K . On note $P = \{(z_j, z'_j)\}$ l'ensemble des telles paires pour $j = 1, \dots, m$. L'intégrale porte sur la somme de tous les choix des paires de P .

Dans l'exemple, pour la composante $\{t_{c_1} < t_1 < t_{\max}, t_{\min} < t_2 < t_{c_2}\}$ il n'y a qu'une paire possible de points sur le niveau $\{t = t_1\}$ et $\{t = t_2\}$. Ainsi la somme sur P de cette composante ne consiste qu'en un seul élément. Par contre, dans la composante $\{t_{c_1} < t_1 < t_{c_2}, t_{\min} < t_2 < t_{c_2}\}$ il n'y a qu'un seul choix pour le niveau $\{t = t_2\}$, mais le niveau $\{t = t_1\}$ intersecte quatre fois le nœud. Ainsi, il y a $\binom{4}{2} = 6$ paires possibles et donc la somme est constituée de six éléments.

Pour un ensemble de paires P , $\downarrow P$ symbolise le nombre de points (z_j, t_j) ou (z'_j, t_j) dans P où la coordonnée t descend le long de l'orientation de K .

Soit un ensemble de paire P . Alors on relie les points (z_j, t_j) et (z'_j, t_j) dans la préimage de K par une corde ; on obtient donc un diagramme de cordes. D^P est alors l'élément correspondant dans l'algèbre \mathcal{A} des diagrammes de cordes.

Dans l'image ci-dessous, on a un exemple pour chaque composante. On remarque que bien des composantes ont comme diagramme de cordes D^P l'élément neutre de l'algèbre \mathcal{A} .



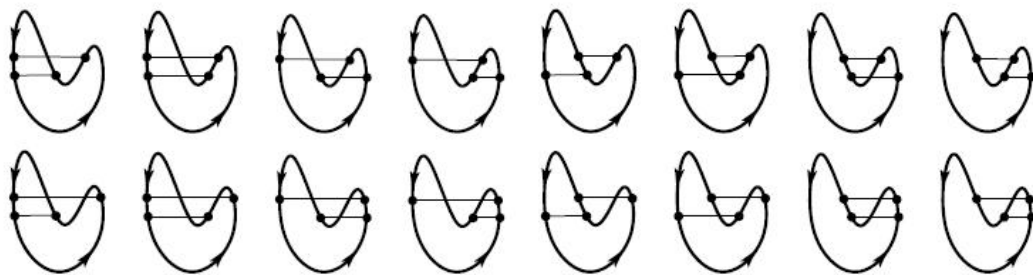
$\bigwedge_{j=1}^m \frac{dz_j - dz'_j}{z_j - z'_j}$ Le produit extérieur où les z_j sont vues comme les fonctions de S^1 dans \mathbb{C} .

Par convention, le terme $m = 0$ dans l'intégrale de Kontsevich correspond au diagramme de cordes d'ordre 0 avec coefficient 1. Il représente l'unité de l'algèbre \mathcal{A} .

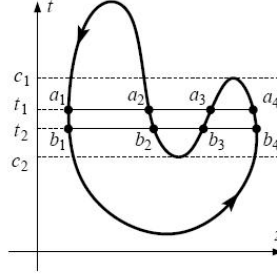
7.2 Exemple

On cherche à calculer le coefficient du diagramme de deux cordes croisées dans $Z(H)$, où H est la «bosse» (courbe plane avec 4 points critiques, cf page 38) dans l'intégrale.

Premièrement, remarquons que sur les 51 ensembles de paires vus à la page 38, seulement 16 contribuent au coefficient :



On s'intéresse donc seulement à la bande $c_1 < z < c_2$. Notons a_1, a_2, a_3 et a_4 (respectivement $b_1 \cdots b_4$) les points d'intersections du nœud avec les niveaux $\{t = t_1\}$ (resp. $\{t = t_2\}$) :



Les seize ensembles de paires ci-dessus correspondent donc à la forme différentielle suivante :

$$(-1)^{j+k+l+m} d \ln a_{jk} \wedge d \ln b_{lm}$$

où

$$a_{jk} = a_k - a_j, \quad b_{lm} = b_m - b_l,$$

$$(j, l) \in \{(1, 3), (2, 3), (1, 4), (2, 4)\} =: A,$$

$$(l, m) \in \{(1, 2), (1, 3), (2, 4), (3, 4)\} =: B,$$

$(-1)^{j+k+l+m} = (-1)^{\downarrow P}$ car ici il y a un nombre pair de ficelles orientées vers le haut et un nombre impaire orientées vers le bas.

Ainsi, le coefficient de vaut :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\Delta} \sum_{(j,k) \in A} \sum_{(l,m) \in B} (-1)^{j+k+l+m} d \ln a_{jk} \wedge d \ln b_{lm} \\ &= -\frac{1}{4\pi^2} \int_{\Delta} \sum_{(j,k) \in A} (-1)^{j+k+l} d \ln a_{jk} \wedge \sum_{(l,m) \in B} (-1)^{l+m-1} d \ln b_{lm} \\ &= -\frac{1}{4\pi^2} \int_{\Delta} d \ln \frac{a_{14}a_{23}}{a_{13}a_{24}} \wedge d \ln \frac{b_{12}b_{34}}{b_{13}b_{24}} \end{aligned}$$

où Δ est le triangle décrit par le système d'inégalités $c_2 < t_1 < c_1, c_2 < t_2 < t_1$. Pour simplifier les notations, on écrira

$$u = \frac{a_{14}a_{23}}{a_{13}a_{24}}, \quad v = \frac{b_{12}b_{34}}{b_{13}b_{24}}$$

On remarque que u est la fonction ascendante de t_1 de 0 à 1 et que v est la fonction descendante de t_2 de 1 à 0. Ainsi, la fonctions $(t_1, t_2) \mapsto (u, v)$ est un difféomorphisme avec un Jacobien négatif. Après ce changement de variable, on obtient

$$\frac{1}{4\pi^2} \int_{\Delta'} d \ln u \wedge d \ln v$$

où Δ' est l'image de Δ . On remarque clairement que le bord de Δ' contient les segments $u = 1, 0 \leq v \leq 1$ et $v = 1, 0 \leq u \leq 1$ qui correspondent à $t_1 = c_1$ et $t_2 = c_2$ respectivement. Moins facilement, le troisième côté de Δ est envoyé sur $u + v = 1$.

Ainsi, dans l'intégrale on a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi^2} \int_{\Delta'} d \ln u \wedge d \ln v &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^1 \left(\int_{1-u}^1 d \ln v \right) \frac{du}{u} \\ &= -\frac{1}{4\pi^2} \int_0^1 \ln(1-u) \frac{du}{u}. \end{aligned}$$

En appliquant Taylor sur le logarithme, on obtient

$$\frac{1}{4\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{u^k}{k} \frac{du}{u} = \frac{1}{4\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{4\pi^2} \zeta(2) = \frac{1}{24}$$

Deux choses sont étonnantes dans cette expression :

- (i) On doit utiliser la fonction ζ .
- (ii) La réponse est rationnelle.

De fait, pour un nœud K , le coefficient d'un diagramme de cordes dans $Z(K)$ est rationnel et peut être exprimé par les valeurs des fonctions multivariées de ζ :

$$\zeta(a_1, \dots, a_n) = \sum_{0 < k_1 < \dots < k_n} k_1^{-a_1} \dots k_n^{-a_n}.$$

On trouve une formule complète de $Z(H)$ dans [5].

7.3 Invariance

7.3.1 Introduction

Définition 7.3.1

Soit K un nœud de Morse. Une déformation est une famille lisse de difféomorphismes de \mathbb{R}^3 qui commence avec l'identité.

Une déformation horizontale est une déformation qui fixe les points critiques de K et laisse les plans horizontaux globalement inchangés.

Un mouvement d'un point critique C est une déformation semblable à l'identité à l'extérieur d'un petit voisinage de C et qui ne crée pas de nouveaux points critiques sur K .

Théorème 7.3.2

L'intégrale de Kontsevich est invariante sous déformation horizontale et mouvement de points critiques.

Plus précisément, elle est invariante sur toute déformation qui ne change pas le nombre de points critiques ; la preuve sera faite dans la suite.

7.3.2 Intégrale de Kontsevich pour les enchevêtrements**Remarque 7.3.3**

Pour pouvoir démontrer l'invariance pour déformations horizontales, nous devons utiliser les enchevêtrements et les diagrammes de cordes de ceux-ci (c.f. 6.4). L'idée est de couper un nœud de Morse en enchevêtrements par une suite de plans horizontaux, le nœud étant alors égale au produit de toutes ces enchevêtrements.

On rappelle ici que le produits d'enchevêtrements induit un produit sur les diagrammes de cordes associés : si $(\text{bas } T_1) = (\text{haut } T_2)$, alors la multiplication des diagrammes de cordes vient de la multiplication des espaces quotients

$$\mathcal{A}_{T_1} \otimes \mathcal{A}_{T_2} \rightarrow \mathcal{A}_{T_1 \cdot T_2}$$

On définit l'intégrale de Kontsevich pour les enchevêtrements par la même formule que celle des nœuds avec t_{\min} et t_{\max} correspondant au haut et au bas de l'enchevêtrement.

Proposition 7.3.4

L'intégrale de Kontsevich pour les enchevêtrements est multiplicative :

$$Z(T_1) \cdot Z(T_2) = Z(T_1 \cdot T_2)$$

où le produit de T_1 et T_2 est défini.

La preuve est une conséquence directe du théorème de Fubini sur les intégrales multiples. En particulier, l'intégrale de Kontsevich sur une somme verticale de deux nœuds est égale au produit des intégrales (produit au sens de l'algèbre \mathcal{A} sur les diagrammes de cordes).

Proposition 7.3.5

Soit T_0 un enchevêtrement sans points critiques et T_λ une déformation horizontale de T_0 à T_1 préservant le sommet et le fond de l'enchevêtrement, alors

$$Z(T_0) = Z(T_1).$$

Démonstration. Notons ω l'intégrand du m -ème terme de l'intégrale de Kontsevich :

$$\omega = \sum_{P=\{z_j, z'_j\}} (-1)^{\downarrow D_P} \bigwedge_{j=1}^m \frac{dz_j - dz'_j}{z_j - z'_j}.$$

Remarquons qu'ici les fonctions z_j et z'_j ne dépendent pas uniquement de t_1, \dots, t_m , mais aussi de λ . dz_j est donc la dérivée totale par rapport à toutes ces variables. Ainsi la forme ω n'est pas exactement celle qui apparaît dans l'intégrale de Kontsevich, mais ne change pas sur les simplex

$$\Delta_\lambda = \{t_{\min} < t_m < \dots < t_1 < t_{\max}\} \times \{\lambda\}$$

car la valeur de λ sur chaque simplex est fixé.

Nous devons donc montrer que l'intégrale de ω sur Δ_0 est égale à celle sur Δ_1 .

On considère le polytope produit

$$\Delta = \Delta_0 \times [0, 1]$$

Par le théorème de Stokes, on a $\int_{\partial\Delta} \omega = \int_{\Delta} d\omega$.

Or la forme ω est exacte : $d\omega = 0$. Le bord du domaine d'intégration est $\partial\Delta = \Delta_0 - \Delta_1 + \sum \{\text{faces}\}$. On affirme que $\omega|_{\{\text{face}\}} = 0$, on a donc le résultat. Pour voir cela, on considère deux types de faces.

Le premier type correspond à $t_m = t_{\min}$ ou $t_1 = t_{\max}$. Dans ce cas, $dz_j = dz'_j = 0$ pour $j = 1$ ou m , car z_j et z'_j ne dépendent pas de λ .

Le second type correspond au cas où $t_k = t_{k+1}$ pour un certain k . Dans ce cas, il nous faut choisir la k -ème et la $k+1$ -ème cordes dans le même niveau $\{t = t_k\}$. En général les points finaux coïncident et cela ne nous donne pas un diagramme de corde. Il nous faut donc définir plus soigneusement un prolongement pour ω et D_P dans de tels cas. Il est naturel de prolonger D_P sur cette face comme une fonction localement constante. Ainsi, dans le cas où les points finaux des k -ème et $k+1$ -ème cordes coïncident, on place la k -ème corde un peu en dessus de la $k+1$ -ème, de tel sorte que les points finaux diffèrent. On a maintenant traiter les sommations de ω en trois cas :

1. Les k -ème et $k+1$ -ème cordes sont rattachées sur deux même ficelles ;
2. Les k -ème et $k+1$ -ème cordes sont rattachées sur des cordes différentes, i.e. quatre ;
3. Les k -ème et $k+1$ -ème cordes sont rattachées sur exactement trois cordes différentes.

Traisons les cas un par un :

1. On a $z_k = z_{k+1}$ et $z'_k = z'_{k+1}$ ou vice versa. Ainsi $d(z_k - z_{k+1}) \wedge d(z'_k - z'_{k+1}) = 0$, et par conséquent la restriction à ω sur cette face est nul.
2. Les choix de cordes apparaît dans ω comme un ensemble de paires s'annulant mutuellement. Fixons les quatre ficelles, numérotées de un à quatre. Sllg, on peut supposer que la k -ème cordes est reliée aux ficelles une et deux et la $k + 1$ -ème aux ficelles trois et quatre. Alors il existe un autre choix où la k -ème cordes est reliée aux ficelles trois et quatre et la $k + 1$ -ème aux ficelles une et deux. Par antisymétrie du produit extérieur, la somme sur ω s'annule.
3. Il s'agit du cas le plus difficile. Les k -ème et $k + 1$ -ème cordes sont rattachées par exactement une ficelle commune. Numérotons les ficelles de un à trois et notons ω_{ij} la 1-forme $\frac{dz_i - dz_j}{z_i - z_j}$. Alors ω est le produit d'une certaine $(m - 2)$ -forme et de la somme des six 2-formes suivantes :

$$\begin{aligned}
& (-1)^\downarrow \left(\begin{array}{c} | \quad | \quad | \\ | \quad | \quad | \\ | \quad | \quad | \end{array} \right) \omega_{12} \wedge \omega_{23} \quad + \quad (-1)^\downarrow \left(\begin{array}{c} | \quad | \quad | \\ | \quad | \quad | \\ | \quad | \quad | \end{array} \right) \omega_{12} \wedge \omega_{13} \\
& + (-1)^\downarrow \left(\begin{array}{c} | \quad | \quad | \\ | \quad | \quad | \\ | \quad | \quad | \end{array} \right) \omega_{13} \wedge \omega_{12} \quad + \quad (-1)^\downarrow \left(\begin{array}{c} | \quad | \quad | \\ | \quad | \quad | \\ | \quad | \quad | \end{array} \right) \omega_{13} \wedge \omega_{23} \\
& + (-1)^\downarrow \left(\begin{array}{c} | \quad | \quad | \\ | \quad | \quad | \\ | \quad | \quad | \end{array} \right) \omega_{23} \wedge \omega_{12} \quad + \quad (-1)^\downarrow \left(\begin{array}{c} | \quad | \quad | \\ | \quad | \quad | \\ | \quad | \quad | \end{array} \right) \omega_{23} \wedge \omega_{13} .
\end{aligned}$$

Remarquons qu $\omega_{ij} = \omega_{ji}$ et réécrivons :

$$\begin{aligned}
& \left((-1)^\downarrow \left(\begin{array}{c} | \quad | \quad | \\ | \quad | \quad | \\ | \quad | \quad | \end{array} \right) - (-1)^\downarrow \left(\begin{array}{c} | \quad | \quad | \\ | \quad | \quad | \\ | \quad | \quad | \end{array} \right) \right) \omega_{12} \wedge \omega_{23} \\
& + \left((-1)^\downarrow \left(\begin{array}{c} | \quad | \quad | \\ | \quad | \quad | \\ | \quad | \quad | \end{array} \right) - (-1)^\downarrow \left(\begin{array}{c} | \quad | \quad | \\ | \quad | \quad | \\ | \quad | \quad | \end{array} \right) \right) \omega_{23} \wedge \omega_{31} \\
& + \left((-1)^\downarrow \left(\begin{array}{c} | \quad | \quad | \\ | \quad | \quad | \\ | \quad | \quad | \end{array} \right) - (-1)^\downarrow \left(\begin{array}{c} | \quad | \quad | \\ | \quad | \quad | \\ | \quad | \quad | \end{array} \right) \right) \omega_{31} \wedge \omega_{12} .
\end{aligned}$$

Par la relation 4T, on peu simplifier :

$$\left((-1)^\downarrow \left(\begin{array}{c} | \quad | \quad | \\ | \quad | \quad | \\ | \quad | \quad | \end{array} \right) - (-1)^\downarrow \left(\begin{array}{c} | \quad | \quad | \\ | \quad | \quad | \\ | \quad | \quad | \end{array} \right) \right) (\omega_{12} \wedge \omega_{23} + \omega_{23} \wedge \omega_{31} + \omega_{31} \wedge \omega_{12}).$$

Or l'identité d'Arnold nous assure que la 2-forme qui apparaît ci-dessus est nul :

$$f + g + h = 0 \Rightarrow \frac{df}{f} \wedge \frac{dg}{g} + \frac{dg}{g} \wedge \frac{dh}{h} + \frac{dh}{h} \wedge \frac{df}{f} = 0$$

Dans notre cas, on a $f = z_1 - z_2$, $g = z_2 - z_3$ et $h = z_3 - z_1$, la proposition est donc démontrée.

q.e.d

Proposition 7.3.6

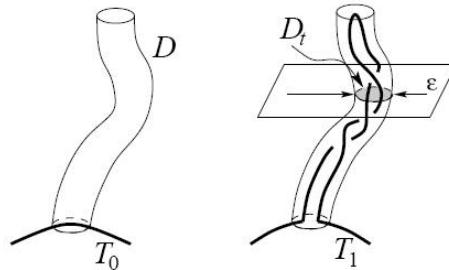
Soient T_0 et T_1 deux enchevêtrements avec exactement un point critique, différenciant l'une de l'autre par une déformation horizontale préservant le sommet et le fond des enchevêtrements et le point critique. Alors $Z(T_0) = Z(T_1)$.

Démonstration. Sllg, on peut supposer, pour simplifier le calcul, que les valeurs de t sur le fond, le point critique et le haut sont respectivement -1 , 0 et 1 . Ainsi il existe une déformation horizontale de T_0 vers T_1 , appelons-la T_λ , $0 \leq \lambda \leq 1$ de tel façon que T_λ coïncide avec T_0 pour $|t| < (1 - \lambda)^2$ et avec T_1 pour $|t| > 1 - \lambda$. On demande aussi à T_λ d'être un enchevêtrement lisse et de n'avoir qu'un seul point critique ne dépendant pas de λ . Par la proposition 7.3.5, on sait que $Z(T_\lambda) = Z(T_0)$ pour chaque λ entre 0 et 1. Mais à la limite, T_λ tend vers T_1 . On a donc ainsi prouvé l'invariance horizontale de l'intégrale de Kontsevich.

q.e.d

Définition 7.3.7

Soient T_0 et T_1 deux enchevêtrements identiques à l'exception d'un cylindre de largeur ε :



Plus exactement :

- (i) T_1 diffère de T_0 uniquement dans une région D , qui est une union de disques D_t de diamètre ε dans des plans horizontaux avec $t \in [t_1, t_2]$ fixé.

(ii) T_0 et T_1 ont exactement un point critique dans D .

(iii) T_0 et T_1 intersectent chaque disque D_t en au plus deux points

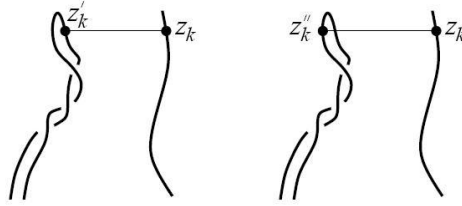
On appelle le passage de T_0 à T_1 un mouvement spécial du point critique

Théorème 7.3.8

L'intégrale de Kontsevich reste inchangée par un mouvement spécial d'un point critique : $Z(T_0) = Z(T_1)$.

Démonstration. La différence entre $Z(T_0)$ et $Z(T_1)$ ne peut venir que du terme avec une corde finissant dans le cylindre.

Le cas où les deux extrémités de la cordes sont rattachées à l'intérieur du cylindre est traité immédiatement car il est nul par la relation 1T. Ainsi il nous reste à traiter le cas où la k -ème corde est reliée à une ficelle à l'extérieur du cylindre. Nommons le point à l'intérieur du cylindre rattaché à la corde (z'_k, t_k) . Alors il existe un autre choix pour la k -ème corde où celle-ci est reliée au même point final, mais ayant son autre extrémité à l'intérieur du cylindre différente de z'_k , appelons-le (z''_k, t_k) , une corde 'longue'. On a donc :



Les deux termes correspondants apparaissant dans $Z(T_1)$ ont un signe différent dû à $(-1)^\downarrow$.

On va maintenant estimer la différence des intégrales correspondant à cette k -ème corde :

$$\begin{aligned} & \left| \int_{t_{k+1}}^{t_c} d(\ln(z'_k - z_k)) - \int_{t_{k+1}}^{t_c} d(\ln(z''_k - z_k)) \right| = \left| \ln \left(\frac{z''_{k+1} - z_{k+1}}{z'_{k+1} - z_{k+1}} \right) \right| \\ & = \left| \ln \left(1 + \frac{z''_{k+1} - z_{k+1}}{z'_{k+1} - z_{k+1}} \right) \right| \sim |z''_{k+1} - z'_{k+1}| \leq \varepsilon \end{aligned}$$

où t_c est la valeur de t sur le point le plus haut du cylindre.

Maintenant, si la $k+1$ -ème corde est aussi longue, on peut alors raisonner de la même manière et trouver une autre longue corde qui rend la contribution à l'intégrale proportionnelle à $|z''_{k+2} - z'_{k+2}| \leq \varepsilon$.

Maintenant, si la $k+1$ -ème corde n'est pas longue (i.e. elle connecte les points

z''_{k+2} et z'_{k+2} à l'intérieur du cylindre), on effectue l'estimation suivante sur la double intégrale correspondant aux k -ème et $k + 1$ -ème cordes :

$$\begin{aligned} & \left| \int_{t_{k+2}}^{t_c} \left(\int_{t_{k+1}}^{t_c} d(\ln(z'_k - z_k)) - \int_{t_{k+1}}^{t_c} d(\ln(z''_k - z_k)) \right) \frac{dz''_{k+1} - dz'_{k+1}}{z''_{k+1} - z'_{k+1}} \right| \\ & \leq \text{const} \left| \int_{t_{k+2}}^{t_c} |z''_{k+1} - z'_{k+1}| \frac{dz''_{k+1} - dz'_{k+1}}{|z''_{k+1} - z'_{k+1}|} \right| \\ & = \text{const} \left| \int_{t_{k+2}}^{t_c} d(z''_{k+1} - z'_{k+1}) \right| \sim |z''_{k+2} - z'_{k+2}| \leq \varepsilon \end{aligned}$$

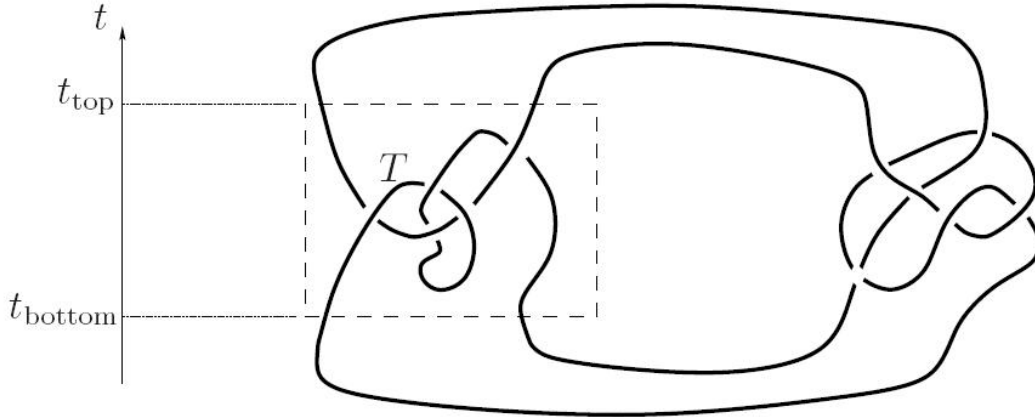
. Dans la suite de nos considérations, on voit que la différence entre $Z(T_0)$ et $Z(T_1)$ est $O(\varepsilon)$. Par un déformation horizontale, on peut faire tendre ε vers zéro. On a donc démontré l'invariance de l'intégrale par un mouvement spécial de point critique.

q.e.d

7.4 Multiplication horizontale

Définition 7.4.1

On note $Z_T(K)$ l'intégrale de Kontsevich sur le nœud K réduit avec respect à l'enchevêtrement T , dans le sens que le fond de T est égal à son sommet.

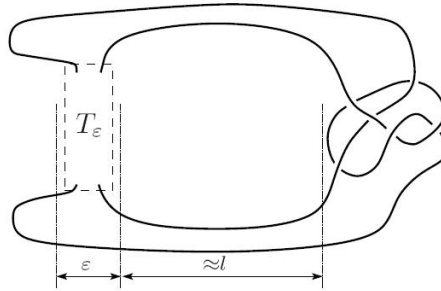


Lemme 7.4.2

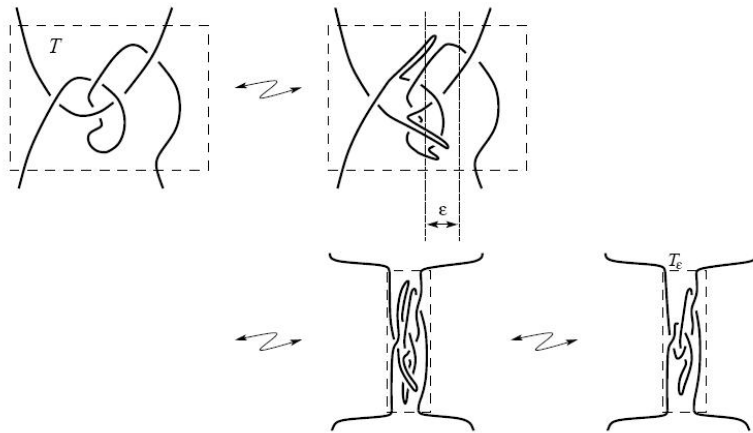
La réduction avec respect d'un enchevêtrement ne change pas la valeur de l'intégrale : $Z_T(Z) = Z(K)$

Démonstration. Nous devons prouver que la différence $Z(K) - Z_T(K)$ est nulle.

Tout d'abord, déformons le nœud horizontalement pour avoir l'entrelacs dans un petit cylindre vertical de rayon ε :



Par continuité de la déformation il nous suffit de prouver que $K(Z_\varepsilon) - Z_{T_\varepsilon}(K_\varepsilon)$ tend vers zéro lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$. Malheureusement, si l'entrelacs contient des points critiques, une simple déformation horizontale ne suffit pas pour réduire le rayon, mais il nous faut utiliser un mouvement spécial comme ci-dessous :



On applique un procédé similaire pour la portion de $K_\varepsilon \setminus T_\varepsilon$ du fond et du haut.

Maintenant la différence $Z(K_\varepsilon) - Z_{T_\varepsilon}(K_\varepsilon)$ consiste en les sommes de $Z(K_\varepsilon)$ avec les 'longues' cordes. Ainsi il suffit de montrer que l'intégrale correspondant à une 'longue' corde tend vers zéro. Pour une longue corde (z_j, z'_j) connectant T_ε avec K_ε , l'intégrale correspondante est égale au logarithme du quotient de la différence $z_j - z'_j$ par les limites hautes et basses du domaine d'intégration, lequel a la même amplitude que $\ln\left(\frac{\varepsilon+l}{l}\right) \sim \varepsilon$ et donc tend vers zéro quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

q.e.d

Théorème 7.4.3

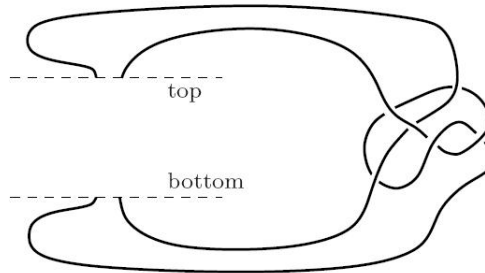
On a

$$Z\left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \left(\text{---} \right) \right) = Z\left(\text{---} \right) \cdot Z\left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \left(\text{---} \right) \right),$$

où le premier et troisième dessin représente un nœud arbitraire différant seulement du fragment représenté, et le deuxième dessin représente le nœud "bosse". Le produit est défini dans l'algèbre $\overline{\mathcal{A}}$ complétée des diagrammes de cordes.

Pour démontrer ce théorème, il nous faut généraliser l'intégrale de Kontsevich à un domaine à une dimension (avec bord) $X \subset \mathbb{R}^n$. Cet intégrale appartient à l'espace des diagrammes de cordes étendu (modulo la 1T et 4T) au squelette X . Si les bords de deux domaines X et Y coïncident (et aussi les orientations des deux domaines sur les points du bord), alors on peut bien définir une multiplication $\mathcal{A}(X) \times \mathcal{A}(X) \rightarrow \mathcal{A}(X \cup Y)$.

Plus spécifiquement, nous allons avoir besoin de l'intégrale de Kontsevich pour des enchevêtrements et leurs complémentaires. Par exemple, pour un nœud K et un enchevêtrement T , on a le dessin suivant pour $K \setminus T$:



et l'intégrale correspondante $Z(K \setminus T) \in \overline{\mathcal{A}}_{K \setminus T}$ doit être bien définie. Si T' est un enchevêtrement dont le haut et le bas correspondent à ceux de $K \setminus T$, on peut définir le produit de concaténation $T' \cdot (K \setminus T)$ correspondant à :

$$\overline{\mathcal{A}}_{T'} \times \overline{\mathcal{A}}_{K \setminus T} \rightarrow \overline{\mathcal{A}}.$$

Par définition, pour un enchevêtrement T dans le nœud K , on a :

$$Z_T(K) = Z(T) \cdot Z(K \setminus T),$$

et par le lemme 7.4.2, on obtient la

Lemme 7.4.4

Formule de multiplication dans l'intégrale de Kontsevich

$$Z(K) = Z(T) \cdot Z(K \setminus T)$$

Regardons un peu plus loin dans les propriétés de l'intégrale relatives aux enchevêtrements à une ficelle et leurs complémentaires.

On définit donc deux opérations de clôture :

- Pour les enchevêtrements
 1. Clôture de l'enchevêtrement $T \mapsto \bar{T}$. L'enchevêtrement est complété par un arc avec deux points critiques non-dégénérés en un nœud.
 2. Clôture du diagramme de corde : la fonction $\bar{\mathcal{A}}_T \rightarrow \bar{\mathcal{A}}$ est définie en identifiant les deux points finaux de T . On définit ainsi $\bar{Z}(T) \in \bar{\mathcal{A}}$ par l'intégrale de Kontsevich clos de cette manière.
- Pour le complémentaire
 1. Clôture du complémentaire $K \setminus T \mapsto \overline{K \setminus T}$. Le complémentaire est transformé en nœud par adjonction d'un arc entre les points critiques.
 2. Clôture du diagramme de cordes : la fonction $\bar{\mathcal{A}}_{K \setminus T} \mapsto \bar{\mathcal{A}}$ est définie par l'identification des deux points finaux de $K \setminus T$. On définit ainsi $\bar{Z}(K \setminus T) \in \bar{\mathcal{A}}$ par l'intégrale de Kontsevich clos de cette manière.

Lemme 7.4.5

Pour un enchevêtrement à une corde T , nous avons les identités suivantes :

- (i) $\bar{Z}(T) = Z(\bar{T})$
- (ii) $\bar{Z}(K \setminus T)Z(\overline{K \setminus T})$.

Démonstration. Pour chaque partie :

- (i) Par le lemme 7.4.4,

$$Z(\bar{T}) = Z\left(\left(\begin{array}{c} \boxed{T} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array}\right)\right) = Z(T) \cdot Z\left(\left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array}\right)\right).$$

Mais chaque diagramme de corde du complémentaire est égale à zéro par la relation 1T, sauf pour le diagramme d'ordre 0.

- (ii) On utilise le même argument pour le complémentaire, mais de fait c'est plus simple car dans ce cas il n'y a qu'un seul diagramme de corde pour l'arc ajouté.

q.e.d

Lemme 7.4.6

Pour un enchevêtrement à une corde T et sont complémentaire $K \setminus T$, le produit de concaténation $\overline{\mathcal{A}}_T \times \overline{\mathcal{A}}_{K \setminus T} \rightarrow \overline{\mathcal{A}}$ est vérifié dans l'algèbre \mathcal{A} dans le sens où l'identité suivante a lieu :

$$Z(T) \cdot Z(K \setminus T) = \overline{Z}(T) \cdot \overline{Z}(K \setminus T).$$

La démonstration est une conséquence immédiate des définitions.

Démonstration du lemme 7.4.3. Par les lemmes 7.4.5 et 7.4.6, on a :

$$\begin{aligned} Z\left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \text{---} \left(\text{---} \right) \right) &= \overline{Z}\left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \text{---} \left(\text{---} \right) \right) \cdot \overline{Z}\left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \text{---} \left(\text{---} \right) \right) \\ &= Z\left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \text{---} \left(\text{---} \right) \right) \cdot Z\left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \text{---} \left(\text{---} \right) \right). \end{aligned}$$

Le théorème est donc ainsi prouvé.

q.e.d

Définition 7.4.7

Ce théorème nous permet de définir l'invariant universelle de Vassiliev par :

$$I(K) = \frac{Z(K)}{Z(H)^{c/2}}$$

ou

$$I'(K) = \frac{Z(H)}{Z(H)^{c/2-1}},$$

où c est le nombre de points critiques de K dans une de ses représentations arbitraires de Morse et la division est entendue dans l'algèbre $\overline{\mathcal{A}}$.

7.5 Preuve du théorème fondamental

Théorème 7.5.1

Soit w un système de poids non-encadré d'ordre n , alors il existe un invariant de Vassiliev d'ordre $\leq n$ tel que son symbole est w .

Démonstration. L'invariant désiré est donné par la formule

$$K \longrightarrow w(I(K))$$

Soit D un diagramme de cordes d'ordre n et K_D un nœud singulier avec le diagramme de corde correspondant D . Remarquons qu'il suffit de montrer que $I(K_D) = D +$ (termes d'ordre $> n$). De plus, puisque le dénominateur de $I(K)$ débute avec l'unité de l'algèbre \mathcal{A} , il est suffisant de montrer :

$$Z(K_D) = D + (\text{termes d'ordre } > n).$$

Par définition, $Z(K_D)$ est la somme alternée des 2^n valeurs de Z sur la résolution complète des singularités du nœud K_D . Pour voir ce qui se passe sur un seul double point, nous allons regarder la différence de Z sur les deux nœuds K_+ et K_- . Par une déformation horizontale on a :

$$Z(K_+) - Z(K_-) = Z\left(\begin{array}{c} \text{---} \text{---} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \text{---} \text{---} \end{array}\right) - Z\left(\begin{array}{c} \text{---} \text{---} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \text{---} \text{---} \end{array}\right) = Z\left(\begin{array}{c} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \end{array}\right) - Z\left(\begin{array}{c} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \end{array}\right).$$

Ces deux nœuds diffèrent de la manière suivante : le premier possède un entrelacs où l'une des cordes effectue un tour complet autour de l'autre alors que le second est constitué de deux ficelles verticales :

$$T_+ = \left[\begin{array}{c} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \end{array} \right] \quad T_- = \left[\begin{array}{c} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \end{array} \right].$$

Par le lemme 7.4.4, on a

$$Z(K_+) = Z(T_+) \cdot Z(K_+ \setminus T_+) \quad Z(K_-) = Z(T_-) \cdot Z(K_- \setminus T_-).$$

Mais de fait, $K_+ \setminus T_+$ coïncide avec $K_- \setminus T_-$, et donc

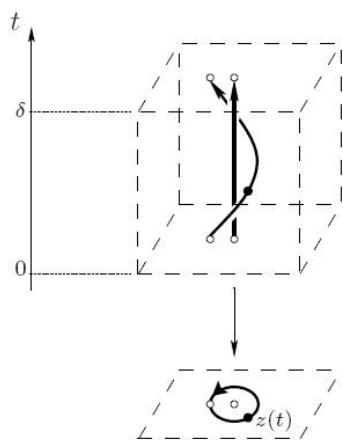
$$Z(K_+) - Z(K_-) = (Z(T_+) - Z(T_-)) \cdot Z(K_+ \setminus T_+).$$

Maintenant, pour l'entrelacs T_- , les fonctions $z(t)$ et $z'(t)$ sont constants, et donc $Z(T_-)$ consiste en une seule sommation : le diagramme de cordes trivial $D_-^{(0)}$ sur T_- ('trivial' étant entendu comme le diagramme sans cordes) avec le coefficient un. Le terme de degré zéro $D_+^{(0)}$ de $Z(T_+)$ est donc aussi le diagramme de cordes trivial avec coefficient un. Ainsi $D_-^{(0)} = D_+^{(0)}$ comme diagramme de cordes. Ainsi la différence $Z(T_+) - Z(T_-)$, et par conséquence $Z(K_+) - Z(K_-)$, commence avec un terme de degré un.

Considérons maintenant n doubles points p_1, \dots, p_n du nœud K_D . Soient maintenant $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ une suite de signes '+' ou '-'. Notons par $K_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n}$ le nœud obtenu à partir de K_D par une résolution des p_j selon les ε_j . On déforme maintenant tous les nœuds $K_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n}$ au voisinage des points p_j de la même manière que K_+ et K_- , ce qui nous donne pour tout $j = 1, \dots, n$ deux entrelacs distincts $T_{j,+}$ et $T_{j,-}$ contenus dans un petit cube de hauteur δ autour de p_j . Ainsi, l'entrelacs $T_{j,-}$ est toujours constitué de deux ficelles verticales. On peut donc écrire

$$\begin{aligned} Z(K_D) &= \sum_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n} \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n \cdot Z(K_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n}) \\ &= \sum_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}} \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_{n-1} \cdot (Z(T_{n,+}) - Z(T_{n,-})) \cdot Z(K_{\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_{n-1}, +} \setminus T_{n,+}) \\ &= \dots\dots\dots \\ &= (Z(T_{1,+} - Z(T_{1,-}))) \cdots \cdots (Z(T_{n,+} - Z(T_{n,-}))) \cdot Z(K_{+, \dots, +} \setminus (\bigcup_j T_{j,+})). \end{aligned}$$

Comme ci-dessus, chaque différence $Z(T_{j,+}) - Z(T_{j,-})$ commence avec un terme de degré un. Ainsi leur produit, $Z(K_D)$, commence avec un terme de degré n . De plus, ledit terme de degré n est proportionnel à un diagramme de cordes où la j -ème corde connecte les deux ficelles de l'entrelacs $T_{j,+}$. Ainsi les deux ficelles de $T_{j,+}$ correspondent au double point p_j dans K_D , et donc le diagramme de cordes est précisément D . Il nous faut donc à présent calculer le coefficient de D dans $Z(K_D)$. Il est donc égal au produit des coefficients des termes à une corde dans $Z(T_{j,+})$. Montrons que chacun de ces termes est égal à un. En effet, il est possible de choisir les coordonnées z et t de tel sorte que $z'(t) \equiv 0$ pour une ficelle et pour l'autre, le point $z(t)$ fait un tour complet autour de zéro lorsque t varie de 0 à δ :



Ainsi on a

$$\frac{1}{2\pi i} \int_0^\delta \frac{dz - dz'}{z - z'} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{dz}{z} = 1$$

Par le théorème de Cauchy. Le théorème de fondamental est donc prouvé.
q.e.d

Bibliographie

- [1] http://unapologetic.files.wordpress.com/2007/03/colored_trefoil.jpg.
- [2] http://www.tcm.phy.cam.ac.uk/~tmf20/FIGS/knot_tables.jpg.
- [3] www.flickr.com/photos/ethanhein/2621655687/.
- [4] www.popmath.org.uk/exhib/pagesexhib/arith.html.
- [5] D. P. Thurston D. Bar-Natan, T. Q. T. Le. *Two applications of elementary knot theory to Lie algebras and Vassiliev invariants*.
- [6] Sossinsky A. B. et V.V. Prasolov. *Knots, Links, Braids and 3-Manifolds*. American Mathematical Society, USA, 1997.
- [7] W.B Raymond Linckorish. *An Introduction to Knot Theory*. Springer, New York, 1997.
- [8] S. Chmutov S. Duzhin et J. Mostovoy. *Introduction to Vassiliev Knot Invariants*. <http://www.math.ohio-state.edu/~chmutov/preprints/>.

Bilan personnel

L'utilisation de plusieurs des grandes branches mathématiques pour arriver à un résultat m'a beaucoup apporté sur les liens qui tissent les structures et sur l'utilisations des notions apprises au cour des années précédentes. J'ai été très satisfait de travailler avec des théories récentes et de réussir à démontrer le théorème fondamental.

Par ailleurs, je pense que ce travail donne un bon aperçu de la théorie des nœuds à travers les invariants de Vassiliev. Le sujet est loin d'être épuisé, notamment à travers l'algèbre de Hopf qui régit les diagrammes de cordes et dont nous n'avons pas fait usage.