ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Projet de mathématiques Bachelor

Elemens d'algèbre

Quôc Anh Bui

Professeur : Jacques Sésiano

Semestre automne 2009-2010

Résumé

Leonhard Euler est l'un, si ce n'est le, plus grand mathématicien connu à l'heure actuelle. En effet, sa trace dans l'histoire est des plus importantes tant au point de vue de la quantité, de la variété ou de la qualité. L'énorme impact qu'ont eu ses travaux qui, d'ailleurs, inspirent toujours les scientifiques actuels, en sont la preuve. Ce dossier va traiter d'une de ses oeuvres les plus intéressantes et plus impressionnantes, ses *Elémens d'algèbre*, qui a été dictée de mémoire car Euler était devenu presque aveugle à la fin de sa vie.

Table des matières

Chapitre 1

Leonhard Euler

Le plus grand mathématicien connu jusqu'à présent est sûrement le Suisse Leonhard Euler. En effet, sa contribution à la science la plus pure a été remarquable autant au niveau quantité que qualité. Ainsi, dans bien des domaines comme la géométrie, le calcul infinitésimal, la trigonométrie, l'algèbre et la théorie des nombres, le nom d'Euler est incontournable tant son impact a été conséquent. De plus, il est à l'origine de la théorie des graphes qui connaît un immense succès actuellement pour son utilité dans tout ce qui est logistique. Sans oublier qu'il a aussi étudié une autre branche, la physique. Il s'illustre notamment en mécanique, en dynamique des fluides, en optique et en astronomie. Ses oeuvres très riches et très prolixes continuent à produire de nouvelles découvertes encore aujourd'hui. Son génie est d'autant plus répandu puisqu'on retrouve son portrait sur les billets de dix francs helvétiques et une multitude de timbres allemands, russes et suisses. Ce dernier pays a d'ailleurs fêté comme il se doit les trois cents ans de son génie en 2007. Dans toutes les écoles, il a été présenté à nouveau. Les jeunes et moins jeunes ont pu alors redécouvrir ses oeuvres.

Figure 1.1 – Timbre à l'occasion de l'anniversaire des 300 ans d'Euler en Suisse

Et pourtant, rien ne destinait notre personnage à ce fabuleux avenir qui allait être le sien. En effet, le 15 avril 1707, naquit le jeune Leonhard Euler à Bâle. Tout portait à croire que ce dernier allait tenir un haut rang dans l'église vu que son père, Paul Euler, était pasteur et sa mère, Marguerite Brucker, fille de pasteur. Ce fut la décision de déménager à Riehen qui forçat son destin. En effet, Leonhard y rencontra Jean Bernoulli, le plus grand mathématicien Européen de l'époque et grand ami de son père. A l'âge de treize ans, Euler s'inscrivit à l'Université de Bâle et trois ans plus tard il obtint son diplôme de philosophie dans lequel il compara la philosophie de Descartes à celle de Newton. Il commença alors à étudier la théologie, le grec et l'hébreu pour suivre les traces de son père et devenir pasteur à la demande de ce dernier. Mais en même temps, lors de ses leçons de mathématiques chez Johann Bernoulli, un talent incroyable dans le domaine des chiffres fut découvert et cela eût été une énorme perte de le gâcher. Le fameux professeur particulier se décida alors à aller convaincre Paul Euler que son fils allait devenir un des plus grand mathématicien.

En 1727, une première opportunité s'offrit au jeune Leonhard, âgé alors de 20 ans. Cette année là, l'Académie des Sciences de Paris proposait un problème scientifique sur la meilleure position des mâts sur un navire. Euler remporta le second prix, ne s'inclinant que contre celui qui sera connu sous le nom de "père de l'architecture navale", Pierre Bouguer, de neuf ans son aîné. Cette défaite ne le choqua guère car il remporta douze fois ce prix par la suite.

Grand ami de la famille Bernoulli, Euler avait passé une grande partie de son enfance en compagnie des deux fils de Johann, Daniel et Nikolaus. Ceux-ci, ayant suivi un chemin purement scientifique, une fois devenus adultes travaillèrent à l'Académie des sciences de Russie à Saint-Pétersbourg. En juillet 1726, Nikolaus mourut de l'appendicite, qui n'était pas encore soignable à l'époque. Daniel reprit alors les postes de son frère en mathématiques et en physique. Pour le poste qu'il avait alors laissé vacant, la physiologie, il recommanda son ami Leonhard Euler, offre que celui-ci accepta après l'échec de son postulat à un poste de professeur de physique à l'Université de Bâle.

Ce fut donc en 1727 qu'Euler arriva à Saint-Pétersbourg et commença par travailler au département médical de son académie. Rapidement, il trouva un poste dans le département de mathématiques où il travaillait souvent avec Daniel Bernoulli chez qui il logeait. Puis, maîtrisant rapidement la langue locale, il s'installa alors dans la capitale et prit même un emploi additionnel de médecin dans la marine russe.

A cette époque, le but de l'Académie de Saint-Pétersbourg était d'améliorer l'éducation en Russie mais surtout de se mettre à jour scientifiquement par rapport aux autre pays de l'Europe. Aussi la situation était très avantageuse pour les étrangers comme Euler. En effet, les fonds ne manquaient pas et la bibliothèque, très riche, était remplie de livres provenant directement de celle du Tsar et de la noblesse russe. Mais surtout très peu d'étudiants étaient inscrits afin de diminuer la charge des professeurs, leur laissant plus de temps pour leur recherche scientifique.

A la mort de Pierre II, les conditions de travail s'améliorèrent et Euler réussit à prendre un poste de professeur de physique en 1730. Puis Daniel Bernoulli rentra à Bâle en 1732. Euler lui succéda alors à la tête du département de mathématiques. Il trouva ensuite l'amour en la personne de Katharina Gsell, fille du directeur de l'académie de peinture de Saint-Pétersbourg, qu'il épousa en 1734 et avec qui il eut treize enfants dont cinq seulement parvinrent à l'âge adulte.

En 1741, l'impératrice Anna mourut. L'avenir de l'Académie devenant encore plus incertain, Euler se résigna à quitter la Russie pour rallier l'Académie de Berlin et la cour de Frédéric II de Prusse. S'enchaîna alors une période très fructueuse pendant laquelle Euler écrivit beaucoup. Notamment deux ouvrages célèbres *Introductio analysin infinitorum* (Introduction à l'analyse des infiniments petits) et *Institutiones calculi differentialis* (Traité du calcul différentiel). Mais surtout, ses 200 lettres à la nièce de Frédéric II, la princesse d'Anhalt-Dessau dont il fut le professeur. Elles furent rassemblées et publiées dans *Lettres à une princesse d'Allemagne sur divers sujets de physique et de philosophie*, dans lequel il aborda différents sujets mathématiques et physiques mais aussi philosophiques. Ce livre est d'ailleurs l'ouvrage le plus lu d'Euler. Sa particularité est sa simplicité à expliquer des problèmes scientifiques au grand public, chose rare qui lui valut cet énorme succès.

FIGURE 1.2 – Timbre allemand avec le théorème des polyèdres d'Euler

Malgré son travail titanesque et la qualité de ses oeuvres, Euler n'obtint pas l'attention méritée du roi qui n'avait d'yeux que pour son cercle de philosophes. Pire encore, comme il était de nature simple et assez directe, ne maniant pas assez bien l'art de la rhétorique, il était assez fréquemment la cible des moqueries de Voltaire qui avait une place de choix dans le cercle du monarque. Autre motif de frustration, Frédéric II refusa même une rente pour sa femme et un poste dans l'Académie de Berlin pour ses fils.

En 1766, une chance inespérée d'acquérir le statut qu'il méritait lui fut offerte. En effet, la situation se stabilisa en Russie avec l'accession au trône de Catherine

II. Celle-ci tint absolument au retour d'Euler et accepta toutes ses conditions. Euler retourna donc à Saint-Pétersbourg pour finir sa vie. Il y perdit sa femme en 1773 avant d'épouser sa demi-soeur trois ans après.

Il mourut en 1873. Sa fin fut complètement réglée, comme sa vie.

- Le matin : Il donna une leçon de mathématique à son petit fils. Puis il discuta de la découverte d'Uranus avec ses disciples.
- L'après-midi : Il étudia le mouvement des ballons, à la craie.
- 17h00 : Il dit "Je meurs".
- 23h00 : Il mourut d'une hémorragie cérébrale.

FIGURE 1.3 – Dix francs suisses à l'effigie d'Euler

Chapitre 2

Introduction dans le contexte historique

2.1 Une idée géniale malgré un handicap conséquent

Tout au long de sa carrière, Euler perdit petit à petit l'usage de la vue. En 1735, il survécut à une fièvre quasiment mortelle au prix de son oeil droit. Il attribua cependant cette perte à un travail minutieux de cartographie. Cet handicap lui valut alors le surnom de "Cyclope" auprès de Frédéric II. Vint le tour de l'oeil gauche de souffir d'une cataracte si bien qu'Euler devint presque totalement aveugle. Il ne lisait alors plus que la craie au tableau. Il tenta alors, en 1771, une opération qui échoua et se résigna à la perte de ce sens. Cependant ce malheur n'eut aucun impact sur sa productivité. Son génie et son incroyable mémoire, surpassant facilement cet obstacle, lui permit même, à l'aide de scribes, d'augmenter le rythme de ses publications. C'est ainsi qu'en 1775, Euler produisait en moyenne un document mathématique par semaine.

C'est dans ce contexte qu'il faut se plonger. Euler, dans son académie à Saint-Pétersbourg, commença à imaginer un manuel grâce auquel on pût apprendre l'algèbre sans autre secours. Malheureusement aveugle, il ne pouvait plus écrire. Il engagea alors son tailleur, qu'il avait rencontré lorsqu'il enseignait encore à Berlin. Celui-ci ne possédait que quelques notions d'arithmétique et était en somme quelqu'un d'assez ordinaire. C'était donc la personne idéale pour tester cette nouvelle manière d'apprendre l'algèbre. Euler lui dicta dès lors ce qui se nommera plus tard, ses *Elémens d'algèbre.*

2.2 Le livre

Les *Elémens d'algèbre* d'Euler ne sont pas un traité sur l'algèbre contemporaine. En effet, l'algèbre moderne n'est apparue qu'en 1925 avec Emil Artin. Pour nous faire une idée de ce dont notre document va parler, reprenons la définition qu'Euler donne de l'algèbre dans son livre.

Le but principal de l'algèbre, ainsi que de toutes les parties des mathématiques, est de déterminer la valeur de quantités, qui auparavant étaient inconnues. On l'atteint en pesant avec attention les conditions prescrites, lesquelles s'expriment toujours par des quantités connues. C'est aussi pourquoi on définit l'Algèbre, la science qui enseigne à déterminer des quantités inconnues par le moyen de quantités connues.

Ce livre donne donc des méthodes pour trouver des quantités inconnues à partir de quantités connues et de certaines conditions. Dit comme cela, les problèmes présentés paraissent très simples mais quelqu'un d'averti sait très bien qu'il suffit d'un rien pour rendre ces problèmes complexes, voir impossibles. Il n'en est rien. Euler a voulu un livre simple, accessible à n'importe qui et surtout, ne requérant aucune connaissance particulière.

Les *Elémens d'algèbre* sont partagés en deux tomes. Comme on le verra par la suite, le premier est divisé en quatre sections, elles-mêmes encore divisées en une multitude de chapitres. Dans les premières pages, Euler explique les notions de base dont nous aurons besoin quand nous passerons à l'algèbre proprement dite. Le second tome, lui, n'est divisé qu'en chapitres. A sa fin, on trouve des additions, ajoutées par Lagrange.

Pour ce travail, l'auteur a voulu rendre hommage à Euler en gardant son écriture pour les termes au carré, c'est-à-dire xx à la place de x^2. En effet, on se rend vite compte à quel point cette convention est pratique et fait gagner du temps. De plus, elle ne nécessite pas plus de caractère. Mais il est clair que pour les formules élevées au carré, il serait vraiment stupide de l'écrire deux fois.

FIGURE 2.1 – Timbre russe à l'effigie d'Euler

Chapitre 3

Elémens d'algèbre, Tome 1

3.1 Section 1 : Différentes méthodes de calcul pour les grandeurs simples ou incomplexes

3.1.1 Chapitre 1 : Mathématiques en général

Dans ce premier chapitre, Euler définit la notion de grandeur ou quantité comme *Tout ce qui est susceptible d'augmentation et de diminution.* Il souligne alors que les *mathématiques* ne sont autre chose que la *science des quantités* et que pour déterminer ces quantités, on est obligé de les comparer à des mesures connues telles que le mètre, la livre ou le litre, pour ne citer qu'eux. Ensuite, il dit que toutes ces quantités peuvent être représentées par des nombres, quelle que soit leur nature. Il définit l'*Arithmétique* comme la science des nombres dont les méthodes de calcul ne s'étendent qu'à ceux qui se présentent dans la vie quotidienne. L'*Analyse* ou l'*Algèbre* vient compléter tous les autres cas, notamment dans le calcul des nombres.

3.1.2 Chapitre 2 : Explication des signes $+$ plus et $-$ moins

On y apprend à utiliser les signes $+$ et $-$, d'abord seulement entre eux, puis ensemble. Euler introduit alors l'ensemble des naturels et des nombres entiers, mieux connus actuellement comme $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$ respectivement.

3.1.3 Chapitre 3 : De la multiplication des quantités simples

Ici est introduit le signe $\times$ ou $\cdot$ et la façon de l'utiliser. On apprend aussi à l'omettre lorsqu'on multiplie des quantités désignées par des lettres, mais pas lorsqu'on fait de même avec des chiffres. Par exemple, $34 \neq 3 \cdot 4 = 12$. Euler y fait aussi sentir ce qu'on appelle de nos jours la commutativité, c'est-à-dire $ab = ba$ et donc qu'on peut écrire les facteurs d'un produit dans n'importe quel ordre. Il explique aussi pourquoi lorsqu'on multiplie deux quantités négatives, on obtient une quantité positive et les cas que l'on connaît :

+	+	+
+	-	-
-	+	-
-	-	+

3.1.4 Chapitre 4 : De la nature des nombres entiers, en égard à leurs facteurs

Par le chapitre précédent, on sait que tout nombre peut s'écrire comme un produit de facteurs. De là va naître une classification des nombres entiers. Les nombres *simples* ou *premiers* sont ceux qui ne peuvent pas s'écrire comme le produit de deux nombres autres qu'eux-mêmes et de 1 ; et les nombres *composés* dont on pourra prendre la décomposition en facteurs premiers, c'est-à-dire qu'on pourra les écrire comme produit de nombres de la première espèce.

3.1.5 Chapitre 5 : De la division des quantités simples

Quand on décompose un nombre en facteurs, on fait appel à la notion de *division*. Aussi, Euler introduit les termes *dividende*, *diviseur*, *quotient* et *reste* et la manière de les utiliser pour diviser des nombres entiers.

3.1.6 Chapitre 6 : Des propriétés des nombres entiers par rapport à leurs diviseurs

En remarquant que les nombres sont soit pairs, soit impairs, c'est-à-dire de reste 0 ou 1 après division par 2, Euler montre que pour chaque diviseur a, tout nombre entier est obligatoirement dans une des classes suivantes :

$$an, an+1, \ldots, an+a-1$$

Dans les notes de bas de page, l'éditeur a rajouté quelques techniques pour déterminer si un nombre est divisible par tel ou tel nombre, que tout le monde a vu à l'école élémentaire. Par exemple, pour savoir si un nombre est divisible par 3, il faut que la somme de ses chiffres soit un multiple de 3.

3.1.7 Chapitre 7 : Des fractions en général

Lorsqu'un nombre divisé par un autre ne peut s'écrire en nombre entier, on l'appelle *nombre rompu*. Cela arrive lorsque, lors d'une division, le reste n'est pas nul. On va donc utiliser une nouvelle manière de l'écrire. C'est ainsi que naissent les fractions. On appelle *numérateur* le nombre au-dessus de la barre de fraction et *dénominateur* celui situé en-dessous. On remarque que si le numérateur est plus grand que le dénominateur, la fraction sera plus grande que 1 et que si c'est l'inverse, elle sera plus petite que 1. On définit alors les fractions *impropres*, celles dont la valeur est plus petite que 1. Il est nécessaire d'introduire dans ce chapitre, la notion d'infiniment grand qu'on représente par le symbole ∞ car si le dénominateur est 0, la fraction $\frac{1}{0}$ doit prendre une valeur immense que l'on ne connaît pas. De plus, on remarque qu'il y a des ∞ plus grand que d'autres car la fraction $\frac{2}{0}$ est deux fois plus grande que $\frac{1}{0}$. Ce point de vue peut sembler assez logique vu qu'à l'époque on ne maîtrisait pas suffisamment ces quantités, aussi, il serait préférable plutôt d'interdire la division par 0.

3.1.8 Chapitre 8 : Des propriétés des fractions en général

On se rend compte très vite que pour une valeur entière donnée, il y a une infinité de fraction qui lui correspondent. Par exemple :

$$\frac{1}{1} = \frac{2}{2} = \frac{3}{3} = \cdots = \frac{n}{n} = 1$$

$$\frac{2}{1} = \frac{4}{2} = \frac{6}{3} = \cdots = \frac{2n}{n} = 2$$

Il en est de même pour les valeurs rompues :

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \cdots = \frac{n}{2n} = \ldots$$

$$\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{3}{9} = \cdots = \frac{n}{3n} = \ldots$$

La convention sera de toujours rendre la fraction irréductible, c'est-à-dire que parmi toutes les possibilités de représentation d'un nombre, on prendra celle dont le numérateur et le dénominateur sont premiers entre eux.

3.1.9 Chapitre 9 : De l'addition et de la soustraction des fractions

Si les dénominateurs de deux fractions sont les mêmes, il est très facile de les additionner ou de les soustraire. Il suffit de prendre la somme ou la différence de leur numérateur et de la diviser par leur dénominateur. Voyons quelques exemples :

$$\frac{2}{7} + \frac{3}{7} = \frac{2+3}{7} = \frac{5}{7}$$

$$\frac{5}{8} - \frac{3}{8} = \frac{5-3}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

Lorsque ce n'est pas le cas, il faudra, comme on a vu au chapitre précédent, trouver deux autres fractions de valeur égale et dont les dénominateurs soient les mêmes. Cela étant fait, on pourra appliquer la même méthode que vu ci-dessus.

$$\frac{7}{13} + \frac{12}{21} = \frac{147}{273} + \frac{156}{273} = \frac{147+156}{273} = \frac{303}{273} = \frac{101}{91}$$

$$\frac{3}{5} - \frac{4}{3} = \frac{9}{15} - \frac{20}{15} = \frac{-11}{15}$$

Une convention est prise dans ce chapitre : On écrira les fractions dont la valeur est plus grande que 1, ou dont le numérateur surpasse le dénominateur, comme somme d'un entier et d'une fraction inférieure à 1. Par exemple,

$$\frac{14}{3} = 4 + \frac{2}{3} \overset{\text{déf}}{=} 4\frac{2}{3}$$

3.1.10 Chapitre 10 : De la multiplication et de la division des fractions

On commence par multiplier et diviser des fractions par des nombres entiers. La règle est, dans le premier cas, de multiplier le numérateur par le nombre, alors que dans le deuxième, de multiplier le dénominateur par le nombre. Cela donne :

$$\frac{3}{4} \cdot 3 = \frac{3 \cdot 3}{4} = \frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}$$
$$\frac{1}{2} : 3 = \frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{6}$$

On en déduit que multiplier deux fractions revient à multiplier les numérateurs et les dénominateurs pour trouver le numérateur et le dénominateur de la fraction cherchée, alors qu'en diviser deux revient à multiplier la première par l'inverse de la deuxième.

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{1 \cdot 4}{3 \cdot 5} = \frac{4}{15}$$
$$\frac{1}{3} : \frac{4}{5} = \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{4} = \frac{1 \cdot 5}{3 \cdot 4} = \frac{5}{12}$$

On peut remarquer qu'une fraction se comporte comme un nombre entier. En effet, lorsqu'on la divise par elle-même, le résultat est 1.

$$\frac{4}{7} : \frac{4}{7} = \frac{4}{7} \cdot \frac{7}{4} = \frac{4 \cdot 7}{7 \cdot 4} = \frac{28}{28} = 1$$

Pour finir ce chapitre, il faut observer que le principe de multiplication des $+$ et des $-$ doit être respecté.

3.1.11 Chapitre 11 : Des nombres carrés

On définit un carré comme le produit d'un nombre par lui-même. On appelle racine carrée le nombre correspondant à un tel produit. Par exemple, le carré de 2 est 4 et 2 est la racine carrée de 4. On remarque que si on considère la suite définie par la différence de deux carrés consécutifs, on obtient la suite des nombres impairs. En effet :

$$\begin{aligned} 1^2 - 0^2 &= 1 - 0 = 1 \\ 2^2 - 1^2 &= 4 - 1 = 3 \\ 3^2 - 2^2 &= 9 - 5 = 5 \\ 4^2 - 3^3 &= 16 - 9 = 7 \\ (n+1)^2 - n^2 = n^2 + 2n + 1 - n^2 &= 2n + 1 \end{aligned}$$

la suite considérée est $\{1, 3, 5, 7, 9, \ldots, 2n+1, \ldots\}$. On peut aussi prendre le carré de fractions. Il suffit alors de prendre le numérateur au carré et de le diviser par le carré du dénominateur.

$$(\frac{2}{3})^2 = \frac{2^2}{3^2} = \frac{4}{9}$$

Il est important de noter que le carré d'un nombre est toujours positif, quel que soit son signe. Ainsi, tout nombre positif possède deux racines, une positive et l'autre négative. Par exemple, la racine de 9 est ± 3. On voit que si on cherche à prendre la racine d'un nombre négatif, on se retrouve dans une position délicate à cause du signe. Nous allons discuter de ce cas plus tard.

3.1.12 Chapitre 12 : Des racines carrées et des nombres irrationnels qui en résultent

Lorsqu'un nombre entier est un carré ou lorsque le numérateur ainsi que le dénominateur d'une fraction sont carrés, il est facile d'en prendre la racine. Par exemple, il est facile de voir que la racine de 25 est 5 et que celle de $\frac{16}{49}$ est $\frac{4}{7}$. Par contre, si ce n'est pas le cas, il est alors impossible d'en donner sa racine en nombre fractionnaire. Pour s'en convaincre, on peut observer que la racine de 12 est plus grande que 3 car $3^2 = 9$ mais moindre que 4 dont le carré est 16. On peut toujours, en calculant un peu au hasard, trouver deux nombres fractionnaires, l'un plus grand, l'autre plus petit que 12 tels que l'erreur de l'estimation soit toujours plus petite. Mais on n'obtiendra jamais la valeur exacte. C'est pour cela que l'on va introduire le symbole $\sqrt{}$ pour désigner la racine d'un nombre cherché. Dans notre exemple, on notera $\sqrt{12}$ la racine de 12. Cela va sans dire que dans des cas où la racine peut s'écrire sans ce symbole, on l'omettra. On a donc trouvé un nouvel ensemble de nombres, ceux qui ne peuvent s'écrire en fractions et on les appellera les *nombres irrationnels*. On additionne ces quantités comme vu auparavant, en ne mélangeant pas les différentes racines. Ainsi :

$$3\sqrt{12} + 4\sqrt{6} + 5\sqrt{12} - 2\sqrt{6} = 8\sqrt{8} + 2\sqrt{6}$$

On remarque que lors de la multiplication de deux racines, le carré de leur produit doit être égal au produit de leur carré, ce qui implique qu'on peut multiplier directement les deux nombres dans les racines.

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{2 \cdot 3} = \sqrt{6}$$

Le dernier concept du chapitre est celui d'extraction de racine. En effet, si le terme sous le symbole radical peut s'écrire comme un produit dont l'un des facteurs est un carré, on pourra en prendre la racine et donc réécrire ce nombre avec une racine plus petite. Reprenons notre 12 comme exemple :

$$\sqrt{12} = \sqrt{4 \cdot 3} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{3} = 2 \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

3.1.13 Chapitre 13 : Des quantités impossibles ou imaginaires qui découlent de la même source

Nous avions vu au chapitre 11 qu'il était délicat de prendre la racine d'un nombre négatif. En effet, on a bien que tout nombre, qu'il soit positif ou négatif, pris au carré, ne peut être que positif. Mais rien ne nous affirme qu'il n'existe pas des nombres tels que leur carré soit négatif. Comme vu au chapitre précédent, on ne se doutait pas qu'il existait des *nombres irrationnels*, alors pourquoi n'existerait-il pas de quantités qu'on nommera *nombres imaginaires* ? Parmi ces nombres, on trouvera par exemple $\sqrt{-1}$, un nombre tel que son carré soit égal à -1. On remarque que ces quantités gardent les mêmes propriétés que les irrationnels et qu'on peut donc les traiter comme tels lors d'opérations algébriques.

3.1.14 Chapitre 14 : Des nombres cubiques

Le cube d'un nombre est le produit de ce nombre multiplié deux fois par lui-même. On définira la racine cubique de la même manière que la racine carrée. Si on prenait les différences de deux cubes consécutifs, on n'y verrait qu'une suite de nombres irrégulière. Par contre, si on prend la soustraction de ces nombres, on trouve une suite augmentant toujours de 6.

Nombres	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
Cubes	0	1	8	27	64	125	216	343	512	729	1000	...

On obtient comme suite irrégulière $\{1, 7, 19, 37, 61, 91, 127, 169, 217, 271, \ldots\}$ et si on prend la soustraction de ces termes deux à deux, on a la suite cherchée $\{6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, \ldots\}$. Comme pour les carrés, les cubes des fractions seront définis comme étant le cube du numérateur divisé par le cube du dénominateur.

$$(\frac{2}{3})^3 = \frac{2^3}{3^3} = \frac{8}{27}$$

3.1.15 Chapitre 15 : Des racines cubiques et des nombres irrationnels qui en dérivent

Comme pour les racines carrées, si le nombre est un cube, il est aisé de trouver sa racine cubique. Sinon, on peut l'estimer par des nombres fractionnaires avec une erreur aussi petite que voulue. On va donc introduire le symbole $\sqrt[3]{\ }$ pour exprimer ces racines. Suivent alors les mêmes règles d'addition, de soustraction, de multiplication et d'extraction des racines cubiques vues dans le chapitre des racines carrées, à la différence que la racine cubique d'un nombre est unique et qu'elle existe peu importe que le nombre soit positif ou négatif. En effet, le cube d'un nombre négatif sera négatif et celui d'un positif, plus grand que 0. On n'a donc pas besoin de la notion de *nombres imaginaires*.

3.1.16 Chapitre 16 : Des puissances en général

On appelle *puissance* d'un nombre, le résultat du produit de ce nombre multiplié par lui-même un certain nombre de fois. Par exemple, un nombre au carré est un nombre élevé à la puissance 2. Le cube correspond à la puissance 3 alors que le *bicarré* ou *carré-carré* à la puissance 4. Comme on peut prendre n'importe quelle puissance d'un nombre, on se rend vite compte que cela devient long à écrire, c'est pourquoi on va utiliser la convention suivante pour écrire une puissance de a :

Puissance	Opération	Ecriture
1	a	a
2	aa	aa
3	aaa	a^3
4	$aaaa$	a^4
$\dots$	$\dots$	$\dots$
n	$a \cdots a$	a^n

On remarque qu'en remontant le tableau ligne par ligne, on divise par a chaque fois. On pourra donc en déduire la valeur de a^0 et celles des puissances négatives de a.

Puissance	Ecriture
a^0	1
a^{-1}	$\frac{1}{a}$
a^{-2}	$\frac{1}{aa}$
a^{-3}	$\frac{1}{a^3}$
a^{-4}	$\frac{1}{a^4}$
$\dots$	$\dots$
a^{-n}	$\frac{1}{a^n}$

3.1.17 Chapitre 17 : Du calcul des puissances

Pour les additions et les soustractions, il n'y a rien de particulier à observer. Par contre, pour la multiplication d'un même nombre élevé à deux puissances différentes, on observe que les puissances s'additionnent. En effet, cela s'illustre parfaitement dans le produit suivant :

$$a^n \cdot a^m = \underbrace{a \cdots a}_{n} \cdot \underbrace{a \cdots a}_{m} = \underbrace{a \cdots a}_{m+n} = a^{m+n}$$

De même pour la division.

$$a^n : a^m = \underbrace{a \cdots a}_{n} : (\underbrace{a \cdots a}_{m}) = \underbrace{a \cdots a}_{m-n} = a^{m-n}$$

Et enfin, lorsqu'on prend la puissance d'une puissance, les puissances se multiplient tout bêtement, comme tout le monde le voit à l'école.

$$(a^m)^n = \underbrace{\underbrace{a \cdots a}_{m} \cdots \underbrace{a \cdots a}_{m}}_{n} = \underbrace{a \cdots a}_{mn} = a^{mn}$$

3.1.18 Chapitre 18 : Des racines relativement à toutes les puissances en général

Dans ce chapitre, on introduit les racines n-ièmes en ajoutant le nombre n dans le symbole de la racine qui devient $\sqrt[n]{\ }$. Aussi, puisque la racine carrée est la plus utilisée, on lui omettra son chiffre 2. Remarquons que les racines paires ne sont possibles que pour les nombres positifs, à moins que l'on accepte les *nombres imaginaires*. On voit donc qu'il y a une quantité énorme de nombres irrationnels.

3.1.19 Chapitre 19 : De la manière d'indiquer les nombres irrationnels par des exposants fractionnaires

Si on venait à prendre la racine carrée de a^2, on trouverait a. De même, la racine de a^4 est a^2, celle de a^6 est a^3. On a donc nécessairement que celle de a^3 soit $a^{\frac{3}{2}}$. On va donc introduire les puissances fractionnaires afin de pouvoir exprimer toutes les racines que l'on souhaite. On a donc

$$\sqrt[3]{13^5} = 13^{\frac{5}{3}} = 13 \cdot 13^{\frac{2}{3}}$$

On remarque que si le numérateur est plus grand que le dénominateur, on peut appliquer l'extraction de racine. En appliquant le même raisonnement sur des puissances négatives, on peut déduire que les puissances fractionnaires peuvent aussi être négatives. Enfin, on peut appliquer la règle que nous avons vue plus haut pour les puissances, c'est-à-dire que pour deux puissances fractionnaires d'un nombre donné, le produit correspond au nombre élevé à la somme des puissances.

$$a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{4}{5}} = a^{\frac{2}{3}+\frac{4}{5}} = a^{\frac{22}{15}} = a \cdot a^{\frac{7}{15}}$$

3.1.20 Chapitre 20 : Qui traite en général des différentes manières de calculer et de leur liaison

On a vu jusqu'ici six opérations : l'addition, la soustraction, la multiplication, la division, l'élévation de puissance et l'extraction de racine. A chaque fois, la quantité sur laquelle on opérait correspondait à une autre. Il est temps donc d'introduire le signe = qui signifie *est autant que*. Ce signe = est à la base de l'algèbre car on va beaucoup l'utiliser pour déterminer des inconnues.

On peut donc facilement résoudre des problèmes de la forme :

$$a + b = c \quad \text{et} \quad a - b = c$$

ou encore

$$a \cdot b = c \quad \text{et} \quad a : b = c$$

et aussi

$$a^b = c \quad \text{et} \quad \sqrt[b]{a} = c$$

Les quatre premières équations sont faciles à résoudre si on nous donne deux des trois inconnues. Pour les deux dernières, si deux inconnues, dont b, sont données, la solution se déduit facilement. Le cas où b est l'inconnue sera traité dans le prochain chapitre.

3.1.21 Chapitre 21 : Des logarithmes en général

Reprenons notre équation $a^b = c$ et supposons qu'on connaît les constantes a et c. On veut donc déterminer combien de fois le nombre a doit se multiplier par lui-même pour obtenir c. On va donc créer cette fonction que l'on nommera le *logarithme* et dont le symbole représentant sera L. Ainsi pour notre équation, la solution sera $b = L.c$. On remarque ces quelques propriétés :

Logarithme	Valeur
$L.a^1$	1
$L.a^2$	2
$L.a^3$	3
...	...
$L.a^n$	n

On peut appliquer le même raisonnement sur les puissances négatives et fractionnaires. On a donc défini une nouvelle opération. Remarquons ces quelques propriétés sur les logarithmes.

$$\begin{aligned} a^{L.c} =& c \\ L.c + L.d =& L.cd \\ L.c - L.d =& L.\frac{c}{d} \\ L.c^n =& nL.c \\ L.1 =& 0 \end{aligned}$$

Ces propriétés sont très importantes et seront beaucoup utilisées dans le chapitre suivant.

On remarque également que le logarithme ne peut être défini que sur des nombres strictement positifs et si on le prend sur des quantités négatives, on atterrit dans le domaine des nombres imaginaires. De plus, on voit que la valeur que prend cette fonction est négative lorsqu'on l'applique sur des valeurs comprises entre 0 et 1, alors que sur l'intervalle $]1, \infty[$, elle est strictement positive.

On conclura ce chapitre en mentionnant le fait qu'on peut prendre n'importe quelle valeur pour a, excepté la valeur $a = 1$ qui ne saurait être définie. En général, on utilisera la valeur $a = 10$.

3.1.22 Chapitre 22 : Des tables de logarithmes usitées

Jusqu'à présent, tout se passait sans encombre car on prenait les logarithmes de nombres particuliers et faciles à calculer. Mais si on cherche par exemple la valeur de $L.2$, on se rend compte qu'on ne sait pas comment la définir. Alors on essaie de l'approcher par des puissances fractionnaires de 10. On se rend vite compte que $\frac{1}{3} > L.2$ car si on utilise ces deux valeurs comme puissance de 10, on obtient $10^{\frac{1}{3}} > 2$ qu'on élève ensuite au cube pour obtenir $10 > 8$. Par contre, $\frac{1}{4} < L.2$ car $10^{\frac{1}{4}} < 2$ et donc $10 < 16$. On peut donc en déduire que $\frac{1}{4} < L.2 < \frac{1}{3}$, et si on continue cette méthode, on peut trouver une approximation de $L.2$ avec une erreur acceptable. On fait de même pour $L.3$. Pour $L.4$, on peut utiliser une des propriétés du chapitre précédent. En effet, $L.4 = L.2^2 = 2L.2$. On en arrive donc à la conclusion suivante : si on connaît les logarithmes de tous les nombres premiers, on peut, à l'aide des propriétés vues au chapitre sur les logarithmes, en déduire celles de tous les nombres. Donc l'idée de construire des tables serait excellente et très pratique.

3.1.23 Chapitre 23 : De la manière de représenter des logarithmes

Dans ce chapitre, on introduit une notion très importante, celle de *fraction décimale*. Si on y prête attention, on se rend compte que notre écriture des nombres est basée sur des puissances de 10. En effet, lorsqu'on écrit 524, on entend par là $5 \cdot 100 + 2 \cdot 10 + 4 \cdot 1 = 5 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0$. L'idée sera alors de continuer cette suite après une virgule. Ainsi le nombre $12,723$ représente la fraction

$$1 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0 + 7 \cdot 10^{-1} + 2 \cdot 10^{-2} + 5 \cdot 10^{-3} = 10 + 2 + \frac{7}{10} + \frac{2}{100} + \frac{5}{1000} = \frac{12723}{1000}$$

On pourra de cette façon représenter les logarithmes de 2 et de 3

$$\begin{aligned} L.2 &= 0,3010300 \\ L.3 &= 0,4771213 \end{aligned}$$

On aurait pu continuer le développement de ces deux valeurs, mais on néglige la fin à cause de *leur extrême petitesse*.

Si on prend le logarithme des nombres entre 0 et 10, on trouve que leur valeur doit être comprise entre 0 et 1. De même, pour ceux compris entre 10 et 100, on aura des valeurs comprises entre 1 et 2. On continue ainsi de suite.

Nous remarquons que la partie entière d'un logarithme est égale au nombre de chiffres de celui-ci s'il est entier, auquel on enlèvera 1. On pourra donc calculer les logarithmes suivants

$$L.3 = 0.4771213$$
$$L.30 = L.3 + L.10 = 0.4771213 + 1 = 1,4771213$$
$$L.300 = L.3 + L.100 = 0.4771213 + 2 = 2,4771213$$
$$\ldots$$
$$L.300000 = L.3 + L.100000 = 0,4771213 + 5 = 5,4771213$$
$$L.0,3 = L.3 - L.10 = 0.4771213 - 1 = -0,5228787$$

3.2 Section 2 : Des différentes méthodes de calcul pour les grandeurs composées ou complexes

3.2.1 Chapitre 1 : De l'addition des quantités complexes

Il faut prendre la notion de *quantité complexe* non pas au sens actuel du terme, mais plutôt comme une manière pour définir une inconnue, un groupe d'inconnues ou une quantité littérale. Comme l'addition est commutative, on ne rencontre aucune difficulté pour l'addition de ces quantités. Il suffit de regrouper les termes désignant une même inconnue. Par exemple :

$$2a + 4b + 3c + 3b + 4a + 12c = 2a + 4a + 4b + 3b + 3c + 12c = 6a + 7b + 15c$$

3.2.2 Chapitre 2 : De la soustraction des quantités complexes

Pour soustraire deux quantités complexes, vu que la soustraction n'est pas commutative, il faudra mettre des parenthèses. Ensuite, on change tous les signes des termes dans la parenthèse précédée du signe $-$ et on additionne simplement comme dans le chapitre précédent.

$$(2a + 3b - 7c) - (-a + 2b + 5c) = 2a + 3b - 7c + a - 2b - 5c = 3a + b - 12c$$

3.2.3 Chapitre 3 : De la multiplication des quantités complexes

Pour multiplier deux quantités complexes, on utilise les mêmes symboles que pour les nombres, c'est-à-dire $\times$ ou $\cdot$. Lorsqu'on multiplie une somme d'inconnues par un scalaire, on distribue le facteur sur chacun des termes. Par exemple :

$$2(a + b - c) = 2a + 2b - 2c$$

On va faire de même lorsqu'on multipliera deux quantités complexes, c'est-à-dire qu'on distribuera tous les termes de la première quantité sur ceux de la deuxième.

$$\begin{aligned}
&(a-b).(d-e)\\
d\ &(a-b) = ad - bd\\
e\ &(a-b) = ae - be\ ;\\
\text{donc le prod. cherc.}\ &= ad - bd - ae + be
\end{aligned}$$

On apprend alors les identités remarquables suivantes.

$$(a+b)^2 = aa + 2ab + bb$$
$$(a-b)^2 = aa - 2ab + bb$$
$$(a+b)(a-b) = aa - bb$$

Par la troisième identité, on peut déduire que la différence entre deux carrés ne peut jamais être un nombre premier. On voit par le calcul que le $\times$ ou $\cdot$ est commutatif. Soit le produit suivant, où on a numéroté les facteurs. On va les multiplier de deux manières et on verra qu'on arrive au même résultat.

$$\begin{array}{cccc} \text{I.} & \text{II.} & \text{III.} & \text{IV.} \\ (a+b) & (aa+ab+bb) & (a-b) & (aa-ab+bb) \end{array}$$

On commence par multiplier les quantités I et II ensemble puis III et IV. Et pour finir, on prendra le produit des deux résultats.

$$\begin{array}{ll} \text{II.} & aa+ab+bb \\ \text{I.} & a+b \\ \hline & a^3+aab+abb \\ & \quad +aab+abb+b^3 \\ \hline \text{I. II.} & a^3+2aab+2abb+b^3 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \text{IV.} & aa-ab+bb \\ \text{III.} & a-b \\ \hline & a^3-aab+abb \\ & \quad -aab+abb-b^3 \\ \hline \text{III. IV.} & a^3-2aab+2abb-b^3 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} a^3+2aab+2abb+b^3 & \text{I. II.} \\ a^3-2aab+2abb-b^3 & \text{III. IV.} \\ \hline a^6+2a^5b+2a^4bb+a^3b^3 & \\ \quad -2a^5b-4a^4bb-4a^3b^3-2aab^4 & \\ \qquad +2a^4bb+4a^3b^3+4aab^4+2ab^5 & \\ \qquad\quad -a^3b^3-2aab^4-2ab^5-b^6 & \\ \hline a^6-b^6. & \end{array}$$

On multiplie maintenant le produit de I et III et celui de II et IV. On arrive alors au même résultat.

$$\begin{array}{ll} \text{I.} & a+b \\ \text{III.} & a-b \\ \hline & aa+ab \\ & \quad -ab-bb \\ \hline \text{I. III.} & =aa-bb \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \text{II.} & aa+ab+bb \\ \text{IV.} & aa-ab+bb \\ \hline & a^4+a^3b+aabb \\ & \quad -a^3b-aabb-ab^3 \\ & \qquad +aabb+ab^3+b^4 \\ \hline \text{II. IV.} & =a^4+aabb+b^4 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl}
\text{II. IV.} & = a^4 + aabb + b^4 \\
\text{I. III.} & = aa - bb \\
\hline
 & a^6 + a^4bb + aab^4 \\
 & \quad - a^4bb - aab^4 - b^6 \\
\hline
 & a^6 - b^6
\end{array}$$

3.2.4 Chapitre 4 : De la division des quantités complexes

On peut utiliser deux symboles pour la division de quantités complexes. Soit la barre de fraction, soit le même symbole que la division de nombres, : . Lorsqu'on divise deux quantités complexes, on peut additionner ou soustraire chacun des termes du numérateur et mettre chacun d'eux sur le dénominateur séparément. Par exemple,

$$(a+b-c):(d-e+f) = \frac{a+b-c}{d-e+f} = \frac{a}{d-e+f} + \frac{b}{d-e+f} - \frac{c}{d-e+f}$$

Nouvelle technique introduite dans ce chapitre, la division euclidienne dont nous donnons quelques exemples ci-dessous. On place le diviseur et le dividende l'un à côté de l'autre et on les sépare par). A droite, après (, on écrira le quotient.

$$\begin{array}{l}
a+b)\, aa+3ab+2bb\, (a+2b \\
\quad aa+ab \\
\hline
\quad +2ab+2bb \\
\quad +2ab+2bb \\
\hline
\quad\quad 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
a+b)\, a^3+b^3\, (aa-ab+bb \\
\quad a^3+aab \\
\hline
\quad -aab+b^3 \\
\quad -aab-abb \\
\hline
\quad\quad +abb+b^3 \\
\quad\quad +abb+b^3 \\
\hline
\quad\quad\quad 0
\end{array}$$

3.2.5 Chapitre 5 : De la résolution des fractions en suites infinies

On va considérer la fraction

$$\frac{1}{1-a} = \frac{1-a+a}{1-a} = 1 + \frac{a}{1-a} = 1 + \frac{a-a^2+a^2}{1-a} = 1 + a + \frac{a^2}{1-a} = \dots$$
$$= 1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + \dots$$

qui se transforme comme on peut le voir en somme infinie.

- Pour $a = 1$, on trouve que la somme est infinie.
- Pour $a = 2$, on trouve que la somme $1 + 2 + 2^2 + ... + \frac{2^{n+1}}{1-2} = \frac{1}{1-2} = -1$
- Et si $a = \frac{1}{2}$, la somme devient $1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{2})^2 + \cdots + \frac{(\frac{1}{2})^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$

On est en droit de se demander pourquoi pour $a = 2$, la somme est égale à -1, alors qu'on prend une somme infinie de termes qui deviennent de plus en plus grand. La réponse est simple, le dernier terme sera encore plus grand et négatif.

$$\sum_{n=0}^{k} 2^n - 2^{k+1} = -1$$

Mais surtout, lorsqu'on fait tendre le nombre de termes vers l'infini, la somme

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\frac{1}{2})^n = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{k} (\frac{1}{2})^n = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{k} (\frac{1}{2})^n - \underbrace{\frac{(\frac{1}{2})^{k+1}}{1-\frac{1}{2}}}_{\to 0} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

possède une valeur finie. On peut faire de même pour n'importe quelle valeur fractionnaire.

Si on applique le même raisonnement sur la fraction

$$\frac{1}{1+a} = 1 - a + aa - a^3 + a^4 + \dots + (-1)^{n+} a^n + (-1)^{n+1} \frac{a^{n+1}}{1+a}$$

on peut trouver la valeur de la série alternée

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-\frac{1}{2})^n = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{k} (-\frac{1}{2})^n = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{k} (-\frac{1}{2})^n + \underbrace{(-1)^{k+1} \frac{(\frac{1}{2})^{k+1}}{1+\frac{1}{2}}}_{\to 0} = \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

Par contre, si on pose $a = 1$, on obtient la somme

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \dots + 1 - 1 + \dots$$

Or cette série ne converge pas, donc on ne connaît pas cette limite. Pourtant, Euler suppose que comme cette série alterne entre 0 et 1 de manière équilibrée, la limite doit être $\frac{1}{2}$. Nous soulignons le fait qu'à cette époque la notion de convergence n'existait pas encore.

Avec la division euclidienne, on peut exprimer d'une autre manière la fraction $\frac{1}{1+a}$.

$$
\begin{array}{l}
a+1)\ 1\ \left(\frac{1}{a}-\frac{1}{aa}+\frac{1}{a^3}-\frac{1}{a^4}+\frac{1}{a^5}\right. \\
\quad 1+\frac{1}{a} \\
\hline
\quad -\frac{1}{a} \\
\quad -\frac{1}{a}-\frac{1}{aa} \\
\hline
\qquad +\frac{1}{aa} \\
\qquad +\frac{1}{aa}+\frac{1}{a^3} \\
\hline
\qquad\quad -\frac{1}{a^3} \\
\qquad\quad -\frac{1}{a^3}-\frac{1}{a^4} \\
\hline
\qquad\qquad +\frac{1}{a^4} \\
\qquad\qquad +\frac{1}{a^4}+\frac{1}{a^5} \\
\hline
\qquad\qquad\quad -\frac{1}{a^5},\ \&c.
\end{array}
$$

On peut donc développer la fraction suivante :

$$\frac{c}{a+b} = \frac{c}{a} - \frac{bc}{aa} + \frac{bbc}{a^3} - \frac{b^3c}{a^4} + \dots$$

Euler s'en sert alors pour développer la fraction

$$\frac{1}{1-a+aa} = 1 + a - a^3 - a^4 + a^6 + a^7 - a^9 - a^{10} + \dots$$

et en posant $a = 1$, il conclut que

$$1 + 1 - 1 - 1 + 1 + 1 - 1 - 1 + \cdots = 1$$

Il utilise le résultat vu plus haut. La somme alternée des 1 et -1 valait $\frac{1}{2}$. Ici, comme chaque terme est doublé, il est naturel que la valeur totale le soit également. Encore une fois, c'est un problème de convergence de série, une notion encore inconnue à l'époque.

3.2.6 Chapitre 6 : Des carrés des quantités complexes

Le carré d'une quantité complexe consiste à la multiplier par elle-même. On arrive d'ailleurs à retrouver les identités remarquables.

$$
\begin{array}{rrr}
a & +b & \\
a & +b & \\
\hline
aa & +ab & \\
 & +ab & +bb \\
\hline
aa & +2ab & +bb
\end{array}
$$

On retrouve donc $(a+b)^2 = aa + 2ab + bb$ et de la même manière $(a-b)^2 = aa - 2ab + bb$. On peut alors remplacer a et b par n'importe quelle valeur, qu'elle soit fractionnaire ou entière.

On peut aussi calculer le carré de $(a+b+c)^2$:

$$\begin{array}{llllll}
a + b & + c & & & & \\
a + b & + c & & & & \\
\hline
aa + ab & + ac & & + bc & & \\
 + ab & + ac & + bb & + bc & + cc & \\
\hline
aa + 2ab & + 2ac & + bb & + 2bc & + cc &
\end{array}$$

On en déduit alors le carré de $(a-b-c)^2 = aa - 2ab - 2ac + bb - 2bc + cc$.

3.2.7 Chapitre 7 : De l'extraction des racinées appliquée aux quantités complexes

On extrait le carré d'une quantité complexe d'une manière assez spéciale. Prenons en exemple un carré bien connu, $aa + 2ab + bb$, pour l'illustrer. On identifie d'abord le premier terme aa. On aura donc comme premier terme de la racine a. On peut maintenant soustraire le premier terme aa. Ensuite, on cherche le deuxième terme b. On remarque qu'à cause de cela, on va devoir soustraire de notre carré, le produit $b(2a+b)$ comme vu au chapitre précédent. Donc notre reste sera de $aa + 2ab + bb - aa - b(2a+b) = aa + 2ab + bb - aa - 2ab - bb = 0$, donc $(a+b)$ est bien la racine carrée de $aa + 2ab + bb$. On fait de même pour $aa - 6ab + 9bb$ comme on verra ci-dessous.

$$\begin{array}{r|l}
 & aa + 6ab + 9bb \;\; (a + 3b \\
 & aa \\
\hline
2a + 3b & + 6ab + 9bb \\
 & + 6ab + 9bb \\
\hline
 & \quad\quad 0.
\end{array}$$

Sur les méthodes, on voit qu'à côté de la quantité complexe de laquelle on veut extraire la racine, il y a une parenthèse et après suit la racine. La colonne tout à gauche sert à représenter la quantité par laquelle il faut multiplier le deuxième terme pour savoir quelle quantité soustraire.

Pour les quantités ayant trois termes, on procède à peu près de la même manière.

$$\begin{array}{r|l}
 & aa+2ab-2ac-2bc+bb+cc\ (a+b-c \\
 & aa \\ \hline
2a+b & +2ab-2ac-2bc+bb+cc \\
 & +2ab \qquad\qquad +bb \\ \hline
2a+2b-c & -2ac-2bc+cc \\
 & -2ac-2bc+cc. \\ \hline
\end{array}$$

Cette méthode d'extraction est très utile notamment pour calculer les racines carrées de nombres. Voyons divers exemples.

$$\begin{array}{r|l}
 & 1'5\,6'2\,5 \mid 125 \\
 & 1 \\ \hline
22 & 5\,6 \\
 & 4\,4 \\ \hline
245 & 1225 \\
 & 1225 \\ \hline
 & 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
 & 99'80'01 \mid 999 \\
 & 81 \\ \hline
189 & 1880 \\
 & 1701 \\ \hline
1989 & 17901 \\
 & 17901 \\ \hline
 & 0
\end{array}$$

Si toutefois on trouve un reste non nul, cela veut dire que la quantité n'est pas carrée et qu'il faudra lui attribuer le symbole $\surd$ ou la puissance $\frac{1}{2}$.

3.2.8 Chapitre 8 : Du calcul des quantités irrationnelles

Pour additionner et soustraire des formules irrationnelles, on procède de la même manière qu'on a vu auparavant. On regroupe les racines identiques. Pour ce qui est de la multiplication, on distribue les termes comme vu plus haut et on multiplie l'intérieur des racines s'il le faut. Par exemple :

$$(3+\sqrt{2})(4-\sqrt{7}) = 12 - 3\sqrt{7} + 4\sqrt{2} - \sqrt{2}\sqrt{7} = 12 - 3\sqrt{7} + 4\sqrt{2} + \sqrt{14}$$

L'élévation au carré ne posera aucun problème vu qu'il s'agit de multiplier une quantité par elle-même. Par contre, pour la division, on utilise la barre de fraction. Cependant, on voudra toujours que le dénominateur soit entier, pour respecter un certain formalisme. Pour ce faire, il nous faudra apprendre une certaine méthode. Supposons le dénominateur égal à $a+\sqrt{b}$ que nous voulons rendre entier sans pour autant changer la valeur de la fraction. On observe qu'en multipliant cette quantité par $a-\sqrt{b}$, on arrive à éliminer les termes radicaux, arrivant au but que l'on s'était fixé. On va donc procéder ainsi : supposons que l'on veuille diviser la quantité $c+\sqrt{d}$ par $a+\sqrt{b}$.

$$\frac{c+\sqrt{d}}{a+\sqrt{b}} = \frac{c+\sqrt{d}}{a+\sqrt{b}} \cdot \frac{a-\sqrt{b}}{a-\sqrt{b}} = \frac{(c+\sqrt{d})(a-\sqrt{b})}{(a+\sqrt{b})(a-\sqrt{b})} = \frac{(c+\sqrt{d})(a-\sqrt{b})}{aa-b}$$

Prenons un exemple :

$$\begin{aligned}\frac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}} &= \frac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}\frac{1-\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}} = \frac{(2+\sqrt{2})(1-\sqrt{3}}{(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})} \\ &= \frac{2-2\sqrt{3}+\sqrt{2}-\sqrt{6}}{-2} = \frac{-2+2\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}\end{aligned}$$

3.2.9 Chapitre 9 : Des cubes et de l'extraction des racines cubiques

On remarque que le cube d'une quantité est

$$(a+b)^3 = a^3 + 3aab + 3abb + b^3$$

alors pour extraire sa racine, on va procéder de manière très similaire à l'extraction de carré.

$$\begin{array}{r|l}
 & a^3 + 12aa + 48a + 64 \quad (a + 4 \\
 & a^3 \\
\hline
3aa + 12a + 16 & +12aa + 48a + 64 \\
 & +12aa + 48a + 64 \\
\hline
 & \qquad\quad 0
\end{array}$$

De même, on pourra se servir de cette méthode pour extraire des cubes de nombres.

$$\begin{array}{r|l}
 & 2'197 \quad (10 + 3 = 13 \\
 & 1\,000 \\
\hline
300 & 1\,197 \\
90 & \\
9 & \\
\hline
399 & 1\,197 \\
\hline
 & \quad 0
\end{array}$$

3.2.10 Chapitre 10 : Des puissances plus hautes des quantités complexes

Après les carrés et les cubes, viennent des puissances encore plus élevées. Pour les calculer, on va se baser sur la puissance inférieure et la multiplier encore une fois par elle-même.

$$(a+b)^n = (a+b)^{n-1} \cdot (a+b)$$

Regardons comment on calcule les puissances de $(a+b)$.

268 ÉLÉMENS

$$
\begin{array}{rl}
(a+b)^1 = & a+b \\
& a+b \\
\hline
& aa+ab \\
& \quad +ab+bb. \\
\hline
(a+b)^2 = & aa+2ab+bb \\
& a+b \\
\hline
& a^3+2aab+abb \\
& \quad +aab+2abb+b^3. \\
\hline
(a+b)^3 = & a^3+3aab+3abb+b^3 \\
& a+b \\
\hline
& a^4+3a^3b+3aabb+ab^3 \\
& \quad +a^3b+3aabb+3ab^3+b^4. \\
\hline
(a+b)^4 = & a^4+4a^3b+6aabb+4ab^3+b^4 \\
& a+b \\
\hline
& a^5+4a^4b+6a^3bb+4aab^3+ab^4 \\
& \quad +a^4b+4a^3bb+6aab^3+4ab^4 \\
& \qquad +b^5. \\
\hline
\end{array}
$$

D'ALGEBRE. 269

$$
\begin{array}{rl}
(a+b)^5 = & a^5+5a^4b+10a^3bb+10aab^3 \\
& \qquad +5ab^4+b^5 \\
& a+b \\
\hline
& a^6+5a^5b+10a^4bb+10a^3b^3 \\
& \qquad +5aab^4+ab^5 \\
& \quad +a^5b+5a^4bb+10a^3b^3 \\
& \qquad +10a^2b^4+5ab^5+b^6. \\
\hline
(a+b)^6 = & a^6+6a^5b+15a^4bb+20a^3b^3 \\
& \quad +15aab^4+6ab^5+b^6, \text{ \&c.}
\end{array}
$$

On voit que si on connaît $(a+b)^n$, il est aisé de calculer $(a-b)^n$. En effet, il suffit alors de remplacer le signe $+$ par $-$ devant toutes les puissances impaires de b.

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6aabb + 4ab^3 + b^4$$
$$(a-b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6aabb - 4ab^3 + b^4$$

On cherche une manière pour obtenir $(a+b)^n$ sans avoir à calculer chacune des puissances intermédiaires. On remarque que le degré de chaque terme de la somme est le même. Alors que les puissances de a décroissent, celles de b augmentent, de manière à préserver cette équilibre. La difficulté sera donc de trouver les coefficients constants de chaque terme. On remarque que les coefficients de chaque puissance correspondent aux nombres du triangle de Pascal. Il suffit donc de le développer jusqu'à la ligne correspondant à la puissance cherchée.

I. puiss. coefficiens 1,1
II. ———— 1,2,1
III. ——— 1,3,3,1
IV. ——— 1,4,6,4,1
V. —— 1,5,10,10,5,1
VI. —— 1,6,15,20,15,6,1
VII. — 1,7,21,35,35,21,7,1
VIII. — 1,8,28,56,70,56,28,8,1
IX. 1,9,36,84,126,126,84,36,9,1
X. 1,10,45,120,210,252,210,120,45,10,1
&c.

Une autre manière de procéder est d'écrire la suite de fraction suivante.

$$\frac{n}{1}, \frac{n-1}{2}, \frac{n-2}{3}, \ldots, \frac{n-k}{k+1}, \ldots, \frac{2}{n-1}, \frac{1}{n}$$

En remarquant que cette suite est formée de n fractions et que la $n^{\text{ième}}$ puissance de $(a+b)$ possède $n+1$ coefficients, une règle nous dira comment calculer les valeurs voulues.

Coefficients n°	Valeur
1	1
2	$\frac{n}{1}$
3	$\frac{n}{1}\frac{n-1}{2}$
...	...
$n-1$	$\frac{n}{1}\frac{n-1}{2}\cdots\frac{3}{n-2}$
n	$\frac{n}{1}\frac{n-1}{2}\cdots\frac{3}{n-2}\frac{2}{n-1}$
$n+1$	$\frac{n}{1}\frac{n-1}{2}\cdots\frac{3}{n-2}\frac{2}{n-1}\frac{1}{n}$

Ainsi, on peut calculer par exemple :

$$\begin{aligned}(a+b)^5 &= a^5 + \frac{5}{1}a^4b + \frac{5}{1}\frac{4}{2}a^3bb + \frac{5}{1}\frac{4}{2}\frac{3}{3}aab^3 + \frac{5}{1}\frac{4}{2}\frac{3}{3}\frac{2}{4}ab^4 + \frac{5}{1}\frac{4}{2}\frac{3}{3}\frac{2}{4}\frac{1}{5}b^5 \\ &= a^5 + 5a^4b + 10a^3bb + 10aab^3 + 5ab^4 + b^5\end{aligned}$$

On verra dans le chapitre suivant pourquoi on peut utiliser cette règle.

3.2.11 Chapitre 11 : De la permutation des lettres, sur laquelle se fonde la démonstration de la règle précédente

Lorsqu'on effectue une multiplication de quantités complexes, on se rend compte que c'est la commutativité du $\cdot$ qui fait que le terme devant les puissances de a et de b ne soit pas 1. En effet, par exemple, lorsqu'on prend $(a+b)$ au carré, on voit que le terme doublé est ab et qu'il est le seul qui est répété. En effet, $(a+b)^2 = aa + ab + ba + bb = aa + 2ab + bb$. Cela vient donc du fait qu'on peut écrire ab de deux manières : ab ou ba. On fait de même pour aab qui peut s'écrire aab, aba ou baa, ce qui explique que le coefficient correspondant à ce terme dans la formule du cube de $(a+b)$ est 3. Donc pour un terme avec n lettres, on a ce qu'on appelle aujourd'hui $n!$ permutations.

Nombre des Lettres :	*Nombre des Permutations :*	
I.	1	= 1.
II.	2.1	= 2.
III.	3.2.1	= 6.
IV.	4.3.2.1	= 24.
V.	5.4.3.2.1	= 120.
VI.	6.5.4.3.2.1	= 720.
VII.	7.6.5.4.3.2.1	= 5040.
VIII.	8.7.6.5.4.3.2.1	= 40320.
IX.	9.8.7.6.5.4.3.2.1	= 362880.
X.	10.9.8.7.6.5.4.3.2.1	= 3628800.

Si une lettre se trouve p fois dans un terme, on devra diviser le coefficient de ce terme par $p!$ car le fait de permuter cette lettre avec elle-même ne change rien. On arrive donc à calculer le coefficient de n'importe quelle suite de lettres. Par exemple, le coefficient de $aaabbc$ sera $\frac{6!}{3!2!}$ ou en terme de l'époque $\frac{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{3\cdot2\cdot1\cdot2\cdot1} = 5\cdot4\cdot3 = 60$. Avec cette méthode en poche, cela devient un jeu d'enfant de calculer le cube de $a+b+c$.

$$(a+b+c)^3 = a^3 + aab + 3aac + 3abb + 6abc + 3acc + b^3 + 3bbc + 3bcc + c^3$$

Il est par contre étonnant qu'on ne trouve aucune mention du nom de Newton, auquel cette méthode est souvent associée.

3.2.12 Chapitre 12 : Du développement des suites irrationnelles par des suites infinies

Dans ce chapitre, on essaie de trouver un moyen d'écrire le développement de la $p^{\text{ième}}$ puissance de $(a+b)$. Pour cela, la méthode est simple. On écrit le développement de $(a+b)^n$ et ensuite, on remplace les n par $\frac{1}{p}$. Comme on ne connaît pas la valeur de n, cela donne lieu à une suite infinie dont les coefficients seront

Coefficients n°	Valeur ancienne	Valeur nouvelle
1	1	1
2	$\frac{n}{1}$	$\frac{1}{p}$
3	$\frac{n}{1}\frac{n-1}{2}$	$\frac{1}{p}\frac{1-p}{2p}$
...	...	...
n	$\frac{n}{1}\frac{n-1}{2}\cdots\frac{3}{n-2}\frac{2}{n-1}$	$\frac{1}{p}\frac{1-p}{2p}\cdots\frac{3p}{1-2p}\frac{2p}{1-p}$
...	...	...

On arrive donc à trouver le développement de $(a+b)^{\frac{1}{p}}$:

$$\begin{aligned}
&(a+b)^{\frac{1}{p}}\\
&= a^{\frac{1}{p}} + \frac{1}{p}a^{\frac{1}{p}-1}b + \frac{1}{p}\frac{1-p}{2p}a^{\frac{1}{p}-2}bb + \cdots + \frac{1}{p}\frac{1-p}{2p}\cdots\frac{3p}{1-2p}\frac{2p}{1-p}a^{\frac{1}{p}-(n-1)}b^{n-1} + \ldots\\
&= a^{\frac{1}{p}} + \frac{1}{p}\frac{b}{a}a^{\frac{1}{p}} + \frac{1}{p}\frac{1-p}{2p}\frac{bb}{aa}a^{\frac{1}{p}} + \cdots + \frac{1}{p}\frac{1-p}{2p}\cdots\frac{3p}{1-2p}\frac{2p}{1-p}\frac{b^{n-1}}{a^{n-1}}a^{\frac{1}{p}} + \ldots
\end{aligned}$$

Supposons qu'on veuille prendre la racine carrée de $(a+b)$, c'est-à-dire que $p=2$. Supposons de plus que a soit un carré, c'est-à-dire $a=cc$. On a alors le développement suivant,

$$\sqrt{cc+b} = c + \frac{1}{2}\frac{b}{c} - \frac{1}{8}\frac{bb}{c^3} + \frac{1}{16}\frac{b^3}{c^5} - \frac{5}{128}\frac{b^4}{c^7} + \ldots$$

ce qui veut dire qu'on peut exprimer une quantité irrationnelle comme une somme infinie de fractions. Cela peut s'appliquer à n'importe quel nombre. En effet, si celui-ci est carré, on peut l'écrire directement en fraction. S'il est irrationnel, il suffira de développer sa somme infinie comme ci-dessus. Ainsi, $\sqrt{6}=\sqrt{4+2}$ alors

$$\sqrt{6} = 2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{16} + \frac{1}{64} - \frac{5}{1024} + \ldots$$

Si on prend la somme des deux premiers coefficients, on obtient $\frac{5}{2}$ dont le carré surpasse notre nombre 6 de $\frac{25}{4}-6=\frac{1}{4}$. On va donc considérer $\sqrt{6}=\sqrt{\frac{25}{4}-\frac{1}{4}}$ et observer que la somme des deux premiers coefficients de la suite ainsi développée est de plus en plus proche de la valeur cherchée.

Racine considérée	Développement	Somme	Carré	Erreur
$\sqrt{4+2}$	$2+\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{25}{4}$	$\frac{1}{24}$
$\sqrt{\frac{25}{4}-\frac{1}{4}}$	$\frac{5}{2}+\frac{1}{20}$	$\frac{49}{20}$	$\frac{2401}{400}$	$\frac{1}{400}$
$\sqrt{\frac{2401}{400}-\frac{1}{400}}$	$\frac{49}{20}-\frac{1}{1960}$	$\frac{4801}{1960}$	$\frac{23049601}{3841600}$	$\frac{1}{3841600}$

On procède ensuite de la même manière pour développer une somme infinie de fractions égale à une racine cubique, notamment en remplaçant $n=\frac{1}{3}$ ou $p=3$. Ensuite, pour l'appliquer sur des nombres, il faudra que $a=c^3$.

3.2.13 Chapitre 13 : Du développement des puissances négatives

On va procéder comme dans le chapitre précédent pour trouver comment développer des puissances négatives, c'est-à-dire développer la formule de $(a+b)^n$ et remplacer ensuite n. On remarque que pour $n=-1$,

$$\frac{n}{1}=-1, \frac{n-1}{2}=-1, \frac{n-2}{3}=-1, \ldots$$

et donc tous les coefficients seront égaux à ± 1. On trouve comme dans un chapitre antérieur :

$$\frac{1}{a+b} = (a+b)^{-1} = a^{-1} - ba^{-2} + bba^{-3} - b^3a^{-4} + \dots$$
$$= \frac{1}{a} - \frac{b}{aa} + \frac{bb}{a^3} - \frac{b^3}{a^4} + \dots$$

En procédant de la même façon avec $n = -2$ et $n = -3$, on a :

	$\frac{n}{1}$	$\frac{n-1}{2}$	$\frac{n-2}{3}$	$\frac{n-3}{4}$
$n = -2$	-2	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{5}{4}$
$n = -3$	-3	-2	$-\frac{5}{3}$	$-\frac{6}{4}$

Et donc on trouve les développements suivants :

$$\frac{1}{(a+b)^2} = (a+b)^{-2} = \frac{1}{aa} - 2\frac{b}{a^3} + 3\frac{bb}{a^4} - 4\frac{b^3}{a^5} + 5\frac{b^4}{a^6} + \dots$$
$$\frac{1}{(a+b)^3} = (a+b)^{-3} = \frac{1}{a^3} - 3\frac{b}{a^4} + 6\frac{bb}{a^5} - 10\frac{b^3}{a^6} + 15\frac{b^4}{a^7} + \dots$$

Si on supposait simplement $n = -m$, où m est un entier positif, on développerait simplement ainsi :

$$\frac{1}{(a+b)^m} = (a+b)^m$$
$$= \frac{1}{a^m} - \frac{m}{1}\frac{b}{a^{m+1}} + \frac{m}{1}\frac{m-1}{2}\frac{bb}{a^{m+2}} - \frac{m}{1}\frac{m-1}{2}\frac{m-2}{3}\frac{b^3}{a^{m+3}} + \dots$$

Nous conclurons enfin par dire que lorsque n est un nombre fractionnaire négatif, le même raisonnement s'applique parfaitement et on obtiendra un développement fractionnaire infini. De plus, si on multiplie le développement de $\frac{1}{a+b}$ par $(a+b)$, on trouve bien 1. Il en est de même lorsqu'on multiplie le développement de $\frac{1}{(a+b)^3}$ par $(a+b)$ on retombe sur celui de $\frac{1}{(a+b)^2}$ et que si on réitère, on tombe sur celui de $\frac{1}{a+b}$.

$$\frac{1}{a+b} = \frac{1}{a} - \frac{b}{a^2} + \frac{b^2}{a^3} - \frac{b^3}{a^4} + \frac{b^4}{a^5} - \frac{b^5}{a^6} +, \ \&c.$$

$$\begin{array}{l}
\frac{1}{a} - \frac{b}{a^2} + \frac{b^2}{a^3} - \frac{b^3}{a^4} + \frac{b^4}{a^5} - \frac{b^5}{a^6} + \&c. \\
a + b \\
\hline
1 - \frac{b}{a} + \frac{b^2}{a^2} - \frac{b^3}{a^3} + \frac{b^4}{a^4} - \frac{b^5}{a^5} + \&c. \\
\quad + \frac{b}{a} - \frac{b^2}{a^2} + \frac{b^3}{a^3} - \frac{b^4}{a^4} + \frac{b^5}{a^5} - \&c. \\
\hline
1
\end{array}$$

3.3 Section 3 : Des rapports et des proportions

3.3.1 Chapitre 1 : Du rapport arithmétique, ou de la différence entre deux nombres

Lorsqu'on veut comparer deux quantités, il faut d'abord bien vérifier qu'elles sont de la même espèce. Il serait vraiment stupide de comparer, par exemple, une quantité en mètre avec une autre en kilogramme. Deux grandeurs sont soit égales, soit elles ne le sont pas. Dans le deuxième cas, on peut observer si la première quantité est plus grande ou plus petite que la deuxième. On peut ensuite distinguer deux manières de comparer ces quantités. La première consiste à observer le *rapport arithmétique*, c'est-à-dire *de combien l'une des deux quantités est plus grande que l'autre*, que l'on nomme aujourd'hui la différence. L'autre, le *rapport géométrique*, représente *combien de fois une quantité est plus grande que l'autre*, appelé de nos jours tout bêtement le rapport.

Dans ce chapitre, on s'intéresse au premier rapport, le *rapport arithmétique*. Il y a trois *choses* à distinguer.

1. a la plus grande quantité, ou *le plus grand*
2. b la plus petite quantité, ou *le plus petit*
3. d la différence entre les deux, c'est-à-dire $a - b = d$

Ces trois quantités sont liées, et à partir de deux connues, on arrive à déterminer la quantité manquante. On voit que la différence reste conservée quelle que soit la quantité c qu'on rajoute et à a et à b. Multiplier a et b par n, revient à multiplier leur différence par n.

$$\begin{aligned}&(a + c) - (b + c) = d\\&(a - c) - (b - c) = d\\&na - nb = nd\end{aligned}$$

3.3.2 Chapitre 2 : Des proportions arithmétiques

Lorsque deux couples de nombres possèdent le même rapport arithmétique,

$$a - b = d$$

$$p - q = d$$

on dit qu'ils forment une *proportion arithmétique* et on écrit $a - b = p - q$. Ces quatres nombres sont liés, c'est-à-dire que si on en connaît trois, on arrive à déterminer le quatrième. De plus, on a les propriétés suivantes :

1. $a - p = b - q$
2. $b - a = q - p$
3. $a + q = b + p$

Lorsque le deuxième terme b est égal au troisième p, on dit que ces nombres forment une *proportion arithmétique continue*, et on note $\div a, b, q$. On appelle cette suite une *progression arithmétique continue* et on peut d'ailleurs trouver les termes suivants. On caractérise une progression comme *croissante* ou *décroissante* lorsque les termes deviennent de plus en plus grands ou plus en plus petits respectivement. Par exemple, on considère la progression arithmétique croissante $1, 4, 7, 10$. On devine facilement la suite des termes.

$$1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, \ldots$$

3.3.3 Chapitre 3 : Des progressions arithmétiques

Comme vu au chapitre précédent, on définit une *progression arithmétique comme une suite de nombres, composée d'autant de termes qu'on veut, lesquels croissent ou décroissent toujours d'une même quantité.* La progression la plus simple que l'on connaît est $\mathbb{N}$, l'ensemble des entiers naturels.

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, \ldots$$

On remarque que la différence entre deux termes consécutifs est toujours $d = 1$. Construisons en une autre, avec comme chiffre de départ 2 et comme différence $d = 3$. On note au dessus les indices pour indiquer quel terme possède quelle valeur.

Indice	1	2	3	4	5	6	7	...
Progression	2	5	8	11	14	17	20	...

Les principales caractéristiques d'une progression arithmétique sont :

1. Le premier terme a
2. La différence d
3. Le nombre de termes m
4. Le dernier terme z

On a par exemple, avec les conditions ci-dessus, la progression suivante.

Indice	1	2	3	4	5	...	m
Progression	a	$a+d$	$a+2d$	$a+3d$	$a+4d$	...	$a+(m-1)d = z$

Les quatres caractérisques sont liées entre elles. En effet, il suffit seulement d'en connaître trois d'entre elles pour déterminer la dernière.

1. Si les quantités connues sont le premier terme a, le nombre de termes m et le dernier terme z, on pourra déterminer la différence d comme suit :

$$z = a + (m-1)d \Longrightarrow d = \frac{z-a}{m-1}$$

2. Si les quantités connues sont le premier terme a, la différence d et le dernier terme z, on pourra trouver le nombre de termes m :

$$z = a + (m-1)d \Longrightarrow m = \frac{z-a}{d} + 1$$

qui doit être entier sinon le résultat est absurde.

3. Les cas où l'inconnue est z ou a sont triviaux car on a :

$$z = a + (m-1)d \quad \text{et} \quad a = z - (m-1)d$$

3.3.4 Chapitre 4 : De la sommation des progressions arithmétiques

On s'intéresse maintenant à prendre la somme de tous les termes d'une progression arithmétique.

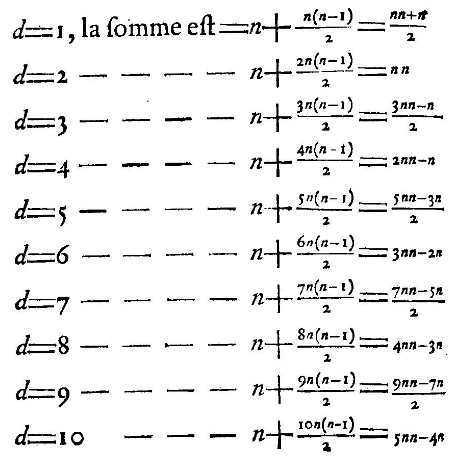
Indice	1	2	3	4	5	...	m
Progression	a	$a+d$	$a+2d$	$a+3d$	$a+4d$	...	$a+(m-1)d = z$

On se rend compte que si on prend la somme des termes extrêmes, le premier et le $m^{\text{ième}}$, on obtient $a+z$. Si on fait de même avec le deuxième et l'avant-dernier, le troisième et l'antépénultième, et ainsi de suite, on obtiendra toujours $a+z$. On en arrive donc à la méthode suivante pour trouver la somme des termes d'une progression arithmétique : on retourne la suite, on additionne le résultat avec elle-même et pour finir il faut diviser par 2 car on a pris deux fois la somme.

Terme	1	2	3	...
	a	$a+d$	$a+2d$	...
+	$a+(m-1)d$	$a+(m-2)d$	$a+(m-3)d$	...
=	$a+a+(m-1)d$	$a+a+(m-1)d$	$a+a+(m-1)d$	...
=	$a+z$	$a+z$	$a+z$	...

Terme	...	$m-2$	$m-1$	m
	...	$a+(m-3)d$	$a+(m-2)d$	$a+(m-1)d$
+	...	$a+2d$	$a+d$	a
=	...	$a+a+(m-1)d$	$a+a+(m-1)d$	$a+a+(m-1)d$
=	...	$a+z$	$a+z$	$a+z$

Donc la somme cherchée est $\frac{m(a+z)}{2} = \frac{m(2a+(m-1)d}{2} = ma + \frac{m(m-1)d}{2}$. Voici une table de valeurs pour $a = 1$ et différents d.



$d=1$, la ſomme eſt $= n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{nn+n}{2}$

$d=2$ — — — — $n + \frac{2n(n-1)}{2} = nn$

$d=3$ — — — — $n + \frac{3n(n-1)}{2} = \frac{3nn-n}{2}$

$d=4$ — — — — $n + \frac{4n(n-1)}{2} = 2nn-n$

$d=5$ — — — — $n + \frac{5n(n-1)}{2} = \frac{5nn-3n}{2}$

$d=6$ — — — — $n + \frac{6n(n-1)}{2} = 3nn-2n$

$d=7$ — — — — $n + \frac{7n(n-1)}{2} = \frac{7nn-5n}{2}$

$d=8$ — — — — $n + \frac{8n(n-1)}{2} = 4nn-3n$

$d=9$ — — — — $n + \frac{9n(n-1)}{2} = \frac{9nn-7n}{2}$

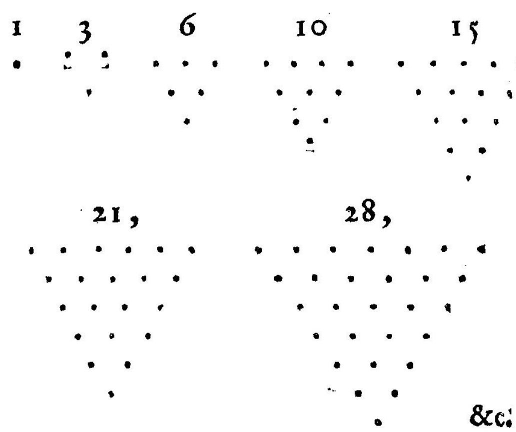
$d=10$ — — — $n + \frac{10n(n-1)}{2} = 5nn-4n$

3.3.5 Chapitre 5 : Des nombres figurés ou polygones

Dans ce chapitre, nous allons voir ce qu'est un *nombre polygone* et comment on le construit. Voyons tout de suite un premier exemple. Soit la progression arithmétique de différence $d = 1$, la suite des entiers naturels, commençant par 1.

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, \dots$$

On définit les *nombres triangulaires* comme étant la suite dont le $n^{\text{ième}}$ terme est la somme des n termes de la progression arithmétique précédente. On peut donc facilement calculer les termes de la suite grâce à ce que l'on a vu au chapitre précédent.



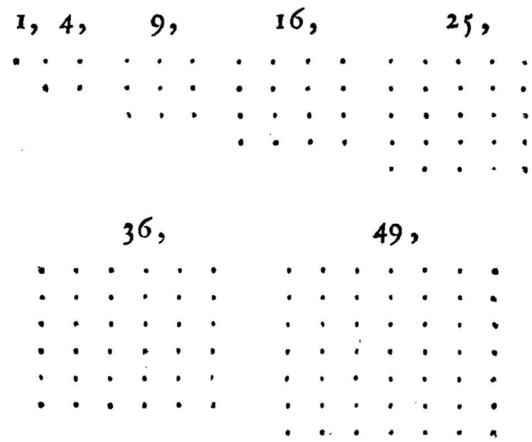
Indice ou longueur du côté	1	2	3	4	5	...	n
Suite de nombres triangulaires	1	3	6	10	21	...	$\frac{nn+n}{2}$

On voit que la valeur du $n^{\text{ième}}$ nombre triangulaire est $\frac{nn+n}{2}$, mais il serait mieux de l'écrire comme $\frac{n(n+1)}{2}$. En effet, dans la deuxième manière de l'exprimer, on voit tout de suite que c'est un nombre entier car soit n, soit $n+1$ est pair.

On prend maintenant la progression arithmétique commençant à 1 et de différence $d = 2$. On obtient la suite

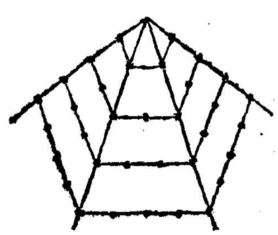
$$1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, \ldots$$

que nous allons sommer comme avant pour obtenir les *nombres quadrangulaires* ou *carrés*.



Indice ou longueur du côté	1	2	3	4	5	$\ldots$	n
Suite de nombres carrés	1	4	9	16	25	$\ldots$	nn

Voyons maintenant le cas des *nombres pentagones*. Pour cela, nous prendrons la progression arithmétique commençant à 1 et de différence $d = 3$.



Indice	1	2	3	4	5	$\ldots$	n
Progression arithmétique	1	4	7	10	13	$\ldots$	$1 + 3(n-1)$
Suite de nombres triangulaires	1	5	12	22	35	$\ldots$	$\frac{3nn-n}{2}$

On peut faire de même pour n'importe quel m-gone. Voici d'ailleurs une table qui donne les moyens de calculer les termes de chaque suite de nombres polygones.

le triangle $= \frac{nn+n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$,

le quarré $= \frac{2nn+0n}{2} = nn$,

le V gone $= \frac{3nn-n}{2} = \frac{n(3n-1)}{2}$,

le VI gone $= \frac{4nn-2n}{2} = 2nn-n = n(2n-1)$

le VII gone $= \frac{5nn-3n}{2} = \frac{n(5n-3)}{2}$,

le VIII gone $= \frac{6nn-4n}{2} = 3nn-2n = n(3n-2)$

le IX gone $= \frac{7nn-5n}{2} = \frac{n(7n-5)}{2}$,

le X gone $= \frac{8nn-6n}{2} = 4nn-3n = n(4n-3)$

le XI gone $= \frac{9nn-7n}{2} = \frac{n(9n-7)}{2}$,

le XII gone $= \frac{10nn-8n}{2} = 5nn-4n = n(5n-4)$

le XX gone $= \frac{18nn-16n}{2} = 9nn-8n = n(9n-8)$

le XXV gone $= \frac{23nn-21n}{2} = \frac{n(23n-21)}{2}$,

le m gone $= \frac{(m-2)nn-(m-4)n}{2}$ (*).

3.3.6 Chapitre 6 : Du rapport géométrique

On rappelle ici que le *rapport géométrique* est la réponse à la question : *De combien de fois l'un est plus grand que l'autre*, lorsque l'on compare deux quantités de même espèce. On va introduire maintenant trois nouvelles définitions pour mieux comprendre le rapport géométrique.

1. L'*antécédent*, le premier des deux nombres considérés.
2. Le *conséquent*, le deuxième nombre.
3. La *raison* est le quotient de l'antécédent par le conséquent.

Par exemple, si l'antécédent est 18 et le conséquent 12, la raison sera $\frac{18}{12} = 1\frac{1}{2}$, c'est-à-dire que 18 contient une fois et demi le nombre 12. On note $a : b$ pour caractériser le rapport géométrique de a et b, qu'on nomme également la raison de b à a. Si on utilise le même signe : que la division, la cause est facile à comprendre. Pour trouver ce rapport, on doit diviser l'antécédent par le conséquent.

Ces trois quantités, l'antécédent, le conséquent et la raison, sont liées. En effet, si on connaît la valeur de deux de ces inconnues, on peut facilement trouver celle qui manque. De plus, remarquons que la raison reste constante si on multiplie ou divise l'antécédent et le conséquent par le même nombre.

$$na : nb = \frac{na}{nb} = \frac{a}{b} = a : b$$

$$\frac{a}{m} : \frac{b}{m} = \frac{\frac{a}{m}}{\frac{b}{m}} = \frac{a}{b} = a : b$$

Lorsque deux paires de quantités possèdent la même raison, c'est-à-dire pour a, b, p et q on a

$$a : b = p : q$$

on dit que *a est à b comme p est à q* et on le note

$$a : b :: p : q$$

On essaiera, dans la mesure du possible, de rendre la raison de b à a sous sa forme irréductible, comme nous avons vu dans un chapitre précédent. Pour cela, nous allons nous en donner les moyens dans le chapitre suivant.

3.3.7 Chapitre 7 : Du plus grand commun diviseur de deux nombres donnés

On connaît déjà une méthode pour trouver le plus grand commun diviseur entre deux nombres. En effet, il suffit de les décomposer en facteurs premiers et de prendre le produit des quantités présentes chez les deux nombres. Par exemple, on peut chercher le plus grand commun diviseur entre 234 et 486, qu'on notera pgcd(234,429).

$$\begin{aligned}
234 &= 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 13 \\
486 &= 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3
\end{aligned}$$

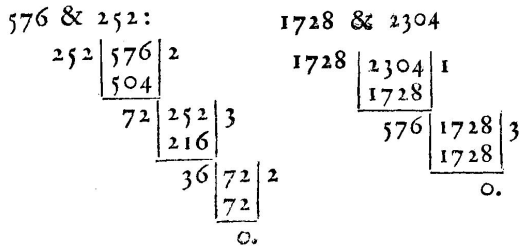
Et donc le pgcd(234,429)$= 2 \cdot 3 = 6$.

On se rend vite compte que cette méthode est assez difficile. En effet, on doit chercher à tâtons quels diviseurs pourraient composer notre nombre. On va donc donner une méthode que l'on pourra appliquer mécaniquement pour n'importe quels nombres. Elle consiste en ceci.

1. Diviser le plus grand nombre a par le plus petit b. On trouve un certain reste que l'on nommera r_1.
2. On divise le plus petit nombre b par r_1 et on trouve un deuxième reste r_2.
3. On divise r_1 par r_2 pour obtenir un reste r_3.
4. On continue ainsi jusqu'à obtenir un reste qui sera égal à 0. Le dernier diviseur sera notre pgcd(a,b).

On en donne la démonstration. Soit d le pgcd(a,b). On sait que d divise a et b et, par conséquent, il divise aussi $a - b$, $a - 2b$, ... , $a - nb$. La réciproque est vraie aussi. Si d divise b et $a - b$, $a - 2b$, ... , $a - nb$, alors d divise a. De plus, si d est le plus grand diviseur de ces termes, d sera aussi le plus grand diviseur de a et b. On sait enfin que si le quotient de a sur b est n, alors $a - nb < b$. Ceci étant posé, on peut revenir à ce qui nous intéresse. Soit le dernier diviseur p. Comme le reste de la dernière division est 0, on a que p divise ce reste qui peut être écrit comme mp. Par ce qu'on a vu plus haut, on peut déduire que p est le notre pgcd(a,b).

Voyons quelques exemples d'applications.



3.3.8 Chapitre 8 : Des proportions géométriques

On rappelle que lorsque deux rapports géométriques sont égaux, on dit que c'est une *proportion géométrique* et on le note, si a, b, c et d sont les nombres en questions, $a : b :: c : d$, ce qui veut dire que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$. On a donc les propriétés suivantes :

1. $b : a = d : c$
2. $a : c = b : d$
3. $d : b = c : a$
4. $(a + b) : a = (c + d) : c$
5. $(a - b) : a = (c - d) : c$
6. $(ma + nb) : (pa + qb) = (mc + nd) : (pc + qd)$

Ces quatres quantités sont liées, et on appelle la méthode consistant à retrouver une inconnue lorsqu'on connaît les trois autres, la *règle de trois*. Grâce à elle, on peut encore déterminer trois propriétés, pour a, b, c, d, e, f, g et h des nombres quelconques :

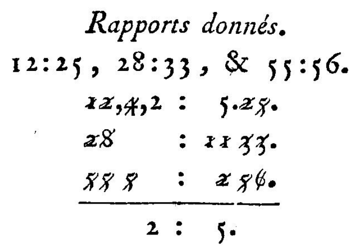
1. Si $a : b :: c : d$ et $a : f :: c : g$ alors $b : d :: f : g$.
2. Si $a : b :: c : d$ et $f : b :: c : g$ alors $a : f :: g : d$.
3. Si $a : b :: c : d$ et $e : f :: g : h$ alors $ae : bf :: cg : dh$.

3.3.9 Chapitre 9 : Des remarques sur les propositions et de sur leur usage

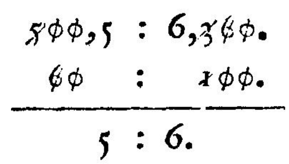
Les propriétés vues au chapitre précédent étaient très fréquemment utilisées, et le sont d'ailleurs toujours aujourd'hui. En effet, il y a toujours des questions de rapport entre quantité et prix qui demandent de maîtriser les proportions et la *règle de trois*. A l'époque, il y avait beaucoup de problèmes de change car on utilisait une monnaie différente dans presque chaque ville. C'est ce que propose ce chapitre, quelques problèmes de conversion d'une monnaie à l'autre. Il est dommage qu'on n'y trouve aucune autre application alors qu'il est dit que ces proportions sont présentes dans beaucoup de domaines de la vie courante. Cela doit être dû au fait que les problèmes de changes présentent le mieux et le plus clairement comment utiliser les propriétés vues au chapitre précédent.

3.3.10 Chapitre 10 : Des rapports composés

On définit les *rapports composés* comme le produit de plusieurs rapports géométriques ou plusieurs raisons. Par exemple, le rapport composé de $a : b$, $c : d$ et $e : f$ est $ace : bdf$. Comme la raison peut s'écrire par plusieurs fractions de même valeur et qu'on cherche la forme irréductible, on peut utiliser une technique de simplification directement entre les nombres a, b, c, d, e et f avant de bêtement tout multiplier. Elle consiste à mettre tous les antécédents d'un côté et les conséquents de l'autre. Ensuite, on simplifie par des facteurs se trouvant des deux côtés. Par exemple,



On l'utilise pour comparer des surfaces ou des espaces, pour savoir *de combien de fois l'un est plus grand que l'autre.*

1. On a deux champs. Le premier mesure 500 pieds de long pour 60 de large. Le second, 360 pieds de long pour 100 de large. On a que le rapport des longueurs est 500 : 360, tandis que celui des largeur 60 : 100. Ainsi, le rapport composé sera
$$\frac{500}{360}\frac{60}{100} = \frac{5}{6}$$


2. On compare deux chambres. Les dimensions de la première sont 36 pieds de long, 16 de large et 14 de haut. Celles de la deuxième 42 pieds de long, 24 de large et 10 de haut. On a que les rapports sont 36 : 42 pour les longueurs, 16 : 24 pour les largeurs et 14 : 10 pour les hauteurs. On trouve alors le rapport composé
$$\frac{36}{42}\frac{16}{24}\frac{14}{10} = \frac{4}{5}$$
On a donc que la première chambre est à la deuxième ce que 4 est à 5.

Soit $a : b$ une raison. On appelle $aa : bb$ la *raison doublée*, $a^3 : b^3$ la *raison triplée* ou *cubique* et ainsi de suite. On enseignait à l'époque notamment que *deux espaces circulaires sont en raison doublée de leur diamètre* ce qui veut dire que le rapport de leur aire est équivalent à celui du carré de leur diamètre.

On peut d'ailleurs utiliser les rapports composés et leurs propriétés pour résoudre certains problèmes de physique, dont celui-ci : *On a remarqué dans la chute libre des corps, qu'un corps tombe de* 15 *pieds dans une seconde, que dans deux secondes de temps il tombe de la hauteur de* 60 *pieds, et que dans trois secondes il tombe de* 135 *pieds ; on en a conclu que les hauteurs sont entr'elles comme les quarrés des des temps, et que réciproquement les temps sont en raison sous-doublée des temps, ou comme les racines quarrées des temps.*

Si par exemple on cherchait le temps t que mettrait une pierre pour tomber d'une hauteur de 2160 pieds, on aura que $15 : 2160 :: 1 : t^2$. Ainsi $t^2 = 2160 : 15 = 144$, ce qui implique que le temps cherché est de $t = 12$ secondes.

3.3.11 Chapitre 11 : Des progressions géométriques

On appelle *progression géométrique* toute suite de nombres dont le rapport de deux nombres consécutifs est le même tout au long de la suite. On appellera d'ailleurs ce rapport l'*exposant*. Par exemple, la progression géométrique d'exposant 2 est celle-ci :

Indice	1	2	3	4	5	...	n
Suite	1	2	4	8	16	...	$2^{(n-1)}$

Dans l'exemple général, on prendra le premier terme de la suite a, l'exposant b. La suite sera :

Indice	1	2	3	4	5	...	n
Suite	a	ab	abb	ab^3	ab^4	...	$ab^{(n-1)}$

Comme pour les progressions arithmétiques, les principaux acteurs de nos progressions géométriques sont le premier terme a, l'exposant b, le nombre de termes n et le dernier terme $ab^{(n-1)}$. On s'intéresse maintenant à calculer la somme de cette progression. Ce qu'il faut faire est de poser la somme des termes S. Ensuite, on la multiplie par l'exposant b. Si on enlève S à bS, il ne nous reste que le premier terme de S et le dernier de bS. La somme des deux est égale à $bS - S = (b-1)S$. Il ne reste qu'à diviser par $(b-1)$ et on obtient S. Remarquons que prendre $b = 1$ est idiot car dans ce cas, la suite reste constante et nous n'avons aucun intérêt à le faire.

Indice	1	2	3	4	5	...	n
Suite	a	ab	abb	ab^3	ab^4	...	$ab^{(n-1)}$
b·Suite	ab	abb	ab^3	ab^4	ab^5	...	ab^n

$$\begin{aligned} S &= a + ab + abb + ab^3 + ab^4 + \cdots + ab^{(n-1)} \\ bS &= \quad\quad ab + abb + ab^3 + ab^4 + ab^5 + \cdots + ab^n \\ bS - S &= ab^n - a \\ S &= \frac{ab^n - a}{b-1} \end{aligned}$$

Par exemple, on cherche la somme de la progression géométrique d'exposant 2 suivante.

$$1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512$$

$$\begin{aligned} S &= 1 + 2 + 4 + \cdots + 256 + 512 \\ 2S &= \quad\; 2 + 4 + 8 + \cdots + 512 + 1024 \\ S &= 2S - S = 1024 - 1 = 1023 \end{aligned}$$

Grâce à cet exemple, on apprend que $1 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{(n-1)} = 2^n - 1$.

On peut appliquer cette formule pour des valeurs fractionnaires de $b = \frac{b}{c} < 1$. On aura alors que la somme

$$\begin{aligned} a + a\frac{b}{c} + a\frac{bb}{cc} + a\frac{b^3}{c^3} + \cdots &= \lim_{n\to\infty} a + a\frac{b}{c} + a\frac{bb}{cc} + a\frac{b^3}{c^3} + \cdots + a\frac{b^n}{c^n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{a\frac{b^n}{c^n} - a}{\frac{b}{c}} = \lim_{n\to\infty} \frac{a - a\frac{b^n}{c^n}}{1 - \frac{b}{c}} = \lim_{n\to\infty} \frac{a(1 - \frac{b^n}{c^n})}{1 - \frac{b}{c}} = \frac{a}{1 - \frac{b}{c}} \end{aligned}$$

Par ce résultat, on démontre que

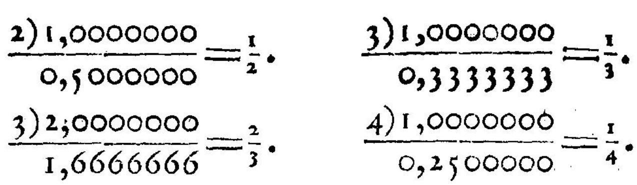
1. $0,333333\cdots = \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \cdots = \frac{\frac{3}{9}}{\frac{9}{10}} - 3 = \frac{10}{3} - 3 = \frac{1}{3}$.
2. $9,999999\cdots = 9 + \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + \cdots = \frac{9}{\frac{9}{10}} = 10$

En posant $b = -\frac{b}{c}$, on trouve la somme des séries alternées, c'est-à-dire que

$$a - a\frac{b}{c} + a\frac{bb}{cc} - a\frac{b^3}{c^3} + \cdots = \frac{a}{1 + \frac{b}{c}}$$

3.3.12 Chapitre 12 : Des fractions décimales infinies

Lors de certains calculs, comme par exemple dans les problèmes avec les logarithmes, il est plus facile d'utiliser des fractions décimales. On va voir dans ce chapitre comment faire pour passer de fractions aux fractions décimales et vice versa. Soit donc $\frac{a}{b}$ dont on veut calculer la fraction décimale. On écrit alors $a, 0000000000$ et ensuite on effectue la division par b tout simplement. Par exemple,



On voit que $\frac{2}{3} = 0,666666\cdots = 2 \cdot 0,333333 = 2 \cdot \frac{1}{3}$ donc cette méthode semble bien correcte. Jusqu'à présent les résultats étaient assez faciles à exprimer. Par contre, si on calcule $\frac{1}{7}$ les choses se compliquent un peu. On trouve ce qu'on appelle aujourd'hui une période. En effet, $\frac{1}{7} = 0,142857142857\ldots$. Pour se convaincre que cette fraction est bien la valeur que l'on cherche, on peut l'écrire en somme infinie de fraction et par le chapitre précédent trouver sa valeur en fraction. Cela donne :

$$\frac{142857}{1000000} + \frac{142857}{1000000^2} + \cdots = \frac{\frac{142857}{1000000}}{1 - \frac{1}{1000000}} = \frac{142857}{999999} = \frac{1}{7}$$

On aurait également pu le montrer d'une tout autre manière. En posant $s = 0,142857142857\ldots$ et en remarquant que $1000000s - s$ est un nombre entier, on aura que ce nombre divisé par $1000000 - 1 = 999999$ sera la valeur notre fraction.

$$\begin{aligned} s &= 0,142857\ldots \\ 1000000s &= 142857,142857\ldots \\ 999999s &= 142857 \\ s &= \frac{142857}{999999} = \frac{1}{7} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ſ &= 0,142857142857142857 \ \&c. \\ 10ſ &= 1,\ 42857142857142857 \ \&c. \\ 100ſ &= 14,\ 2857142857142857 \ \&c. \\ 1000ſ &= 142,\ 857142857142857 \ \&c. \\ 10000ſ &= 1428,\ 57142857142857 \ \&c. \\ 100000ſ &= 14285,\ 7142857142857 \ \&c. \\ 1000000ſ &= 142857,\ 142857142857 \ \&c. \\ \text{Souſtrayez } ſ &= 0,\ 142857142857 \ \&c. \\ \hline 999999ſ &= 142857. \end{aligned}$$

Donc, dans le calcul de la fraction décimale $\frac{a}{b}$, on s'arrête dès qu'on voit une répétition d'une suite de nombres.

Pour repasser dans l'autre sens, la méthode la plus facile est de multiplier la fraction décimale par 10^p, où p est la longueur de la période de la fraction décimale. Ensuite, en soustrayant le résultat par la fraction, on obtient un nombre entier. Il suffit alors de diviser le tout par $10^p - 1$.

$$\begin{aligned} s &= 0,345345345\ldots \\ 1000s &= 345,345345\ldots \\ 999s &= 345 \\ s &= \frac{345}{999} = \frac{115}{333} \end{aligned}$$

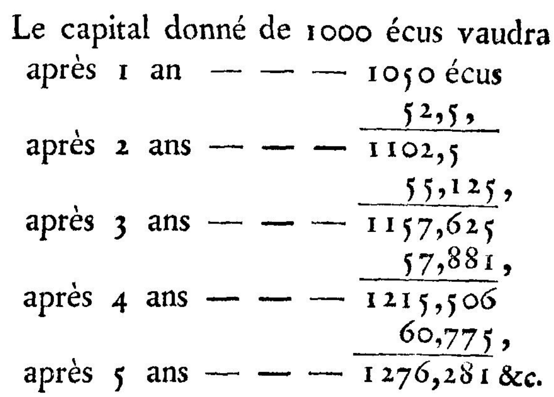
3.3.13 Chapitre 13 : Des calculs d'intérêts

On va maintenant utiliser ce qu'on a appris dans ce chapitre pour calculer des intérêts. Lorsqu'on place une somme d'argent en banque, chaque année, on touche un pourcentage par rapport à l'argent qu'on possède sur le compte. La difficulté dans ce genre de problèmes est que de par cela, si on ne touche pas à cet argent, chaque année il rapporte de plus en plus. Le tout sera de calculer comment on peut calculer le montant du compte après un certain nombre d'années.

Par exemple, une banque propose un intérêt de 5%, c'est-à-dire que pour 100 écus, elle offre 5 écus à la fin de l'année. Combien aura-t-on d'écus après deux ans si on décidait d'y déposer 860 écus ? On sait que $100 : 5 = 860 : x$, où x est le nombre d'écus gagnés la première année. Donc l'intérêt touché serait, après utilisation de la règle de trois, $x = \frac{860 \cdot 5}{100} = 43$ écus. On fait de même pour la deuxième année, c'est-à-dire calculer ce que vont rapporter $860 + x$ écus.

Année	Départ	Intérêt	Total
0	860	0	860
1	860	43	903
2	903	$45,15$	$948,15$

Le même exemple, mais on commence avec une somme de 1000 écus. En dessous de chaque solde, on trouve l'intérêt gagné pour l'année suivante.


Le capital donné de 1000 écus vaudra
après 1 an — — — 1050 écus
52,5,
après 2 ans — — — 1102,5
55,125,
après 3 ans — — — 1157,625
57,881,
après 4 ans — — — 1215,506
60,775,
après 5 ans — — — 1276,281 &c.

Prenons maintenant l'exemple général. Si on dépose une somme a sur un compte avec un intérêt i, après chaque année on obtient :

Année	Départ	Intérêt	Total
0	a	0	a
1	a	ia	$a(1+i)$
2	$a(1+i)$	$ia(1+i)$	$a(1+i)^2$
3	$a(1+i)^2$	$ia(1+i)^2$	$a(1+i)^3$
...	...	...	...
n	$a(1+i)^{n-1}$	$ia(1+i)^{n-1}$	$a(1+i)^n$

On se rend compte que calculer l'intérêt chaque année devient très vite long et prolixe, c'est alors plus simple de calculer cette formule avec des logarithmes.

En effet, après n années, le solde du compte sera $a(1+i)^n$ écus. Si on calcule son logaritme, on trouve $L.a(1+i)^n = L.a + nL.(1+i)$ qui est quand même plus facile à trouver.

Par exemple, on cherche le solde d'un compte à 6% sur lequel on a placé 3452 livres qu'on ne touche plus pendant 64 ans. Ici $a = 3452$ et $i = \frac{3}{50}$. On aura que le logarithme du solde sera égal à

$$L.3452 + 64L.\frac{53}{50}$$

que l'on calcule comme ceci.

$$\begin{array}{rr}
 & L.\,53 = 1{,}7242759 \\
\text{ſouſtrayant} & L.\,50 = 1{,}6989700 \\
\hline
 & L.\,\frac{53}{50} = 0{,}0253059 \\
\hline
\text{multipl. par } 64{:}64 & L.\,\frac{53}{50} = 1{,}6195776 \\
 & L.\,3452 = 3{,}5380708 \\
\hline
 & 5{,}1576484.
\end{array}$$

En regardant dans les tables des logarithmes, on trouve que le capital cherché est 143763 livres. On remarque que la nécessité d'une table très précise car, le nombre d'années pouvant devenir très grand, les derniers chiffres de la fraction décimale auront leur importance.

Compliquons un peu les choses. Supposons, en plus de nos premières hypothèses, que chaque année, on décide de rajouter une somme b. Nous aurons la table des valeurs suivantes.

Année	Départ	Intérêt	Rajout	Total
0	a	0	b	a
1	a	ia	b	$a(1+i)+b$
2	$a(1+i)+b$	$ia(1+i)+ib$	b	$a(1+i)^2+b(1+i)+b$
3	$a(1+i)^2$ $+b(1+i)+b$	$ia(1+i)^2$ $+ib(1+i)+ib$	b	$a(1+i)^3+b(1+i)^2$ $+b(1+i)+b$
...	...	...	...	...

Après n années, le capital sera

$$a(1+i)^n + b(1+i)^{n-1} + \cdots + b(1+i) + b$$

et comme on sait que

$$b(1+i)^{n-1} + \cdots + b(1+i) + b = \frac{b(1+i)^n - b}{i}$$

on pourra exprimer le capital ainsi :

$$(1+i)^n(a+\frac{b}{i})-\frac{b}{i}$$

Par exemple, si on a $i = 5\% = \frac{1}{20}$, on a $(1+i) = \frac{21}{20}$.

après 1 an $\frac{21}{20}a+b$,

après 2 ans $\left(\frac{21}{20}\right)^2 a+\frac{21}{20}b+b$,

après 3 ans $\left(\frac{21}{20}\right)^3 a+\left(\frac{21}{20}\right)^2 b+\frac{21}{20}b+b$,

après 4 ans $\left(\frac{21}{20}\right)^4 a+\left(\frac{21}{20}\right)^3 b+\left(\frac{21}{20}\right)^2 b$
$+\left(\frac{21}{20}\right)b+b$,

après n ans $\left(\frac{21}{20}\right)^n a+\left(\frac{21}{20}\right)^{n-1} b+\left(\frac{21}{20}\right)^{n-2} b$
$+\ldots\ldots\frac{21}{20}b+b$.

On peut faire de même si on retire une somme b chaque année. Les calculs se font de la même manière en remplaçant b par $-b$. De la même manière, on peut calculer la valeur actuelle d'une rente a devant être perçue dans n ans. Soit x la valeur actuelle. Dans n ans, on touchera la somme $a = x(1+i)^n$, donc la valeur actuelle de la rente est $x = \frac{1}{(1+i)^n}a$.

3.4 Section 4 : Des équations algébriques et de la résolution de ces équations

3.4.1 De la résolution des équations en général

Rappelons la définition qu'Euler donnait de l'algèbre.

Le but principal de l'algèbre, ainsi que de toutes les parties des mathématiques, est de déterminer la valeur de quantités, qui auparavant étaient inconnues. On l'atteint en pesant avec attention les conditions prescrites, lesquelles s'expriment toujours par des quantités connues. C'est aussi pourquoi on définit l'Algèbre, la science qui enseigne à déterminer des quantités inconnues par le moyen de quantités connues.

Ce chapitre va porter essentiellement sur la méthode de transformer différents problèmes de la vie quotidienne en termes mathématiques mettant en jeu des inconnues qu'on va chercher à déterminer en faisant appel à des quantités connues. Nous allons d'ailleurs utiliser des lettres pour désigner les différentes quantités ; celles de la fin de l'alphabet représenteront les inconnues alors qu'on prendra plutôt celles du début pour désigner les connues. Le tout sera mis sous forme d'*équations*, c'est-à-dire qu'on aura des *quantités complexes* qui seront égales à d'autres.

Pour résoudre un problème, il sera important de bien le comprendre pour pouvoir le retranscrire en équations. On croit souvent que cette partie est évidente et que ce n'est que lors des calculs des valeurs que cela devient difficile. Il n'en est rien. Nous verrons, par la suite, des méthodes qu'on peut appliquer sans réfléchir lorsqu'on obtient telle ou telle sorte d'équations. Par contre, la diversité des circonstances et des conditions des problèmes les rend difficile à poser. Aussi, on apprend que si un problème fait intervenir plusieurs inconnues, il en faudra autant d'équations.

Lorsque deux quantités sont séparées par un =, elles sont égales et on peut leur appliquer les opérations qu'on a vues plus haut, telles qu'ajouter ou soustraire des mêmes termes, les multiplier par un même nombre, les élever à la même puissance, prendre leur racine ou encore leur appliquer le logarithme. Si $x = y$, alors :
- $x + a = y + a$
- $ax = ay$
- $x^n = y^n$
- $L.x = L. <$

3.4.2 Chapitre 2 : De la résolution des équations du premier degré

Dans ce chapitre, on enseigne les méthodes pour résoudre les équations du premier degré, c'est-à-dire qu'on ne trouve que des puissances de 1 de l'inconnue. En général, on indique l'inconnue avec la lettre x.

Lorsqu'on tombe sur une équation du premier degré, le but est de faire passer tous les termes contenant l'inconnue d'un côté de l'égalité, et toutes les constantes de l'autre. Il faut ensuite diviser par le coefficient multipliant x pour obtenir la solution.

$$\begin{aligned} &12x + 2 + 5x - 3x - 7 = 14 - 8x + 2x + 5 - 4 && \\ &14x - 5 = -6x + 15 && | + 6x + 5 \\ &20x = 20 && | : 20 \\ &x = 1 && \end{aligned}$$

Lorsqu'on a des fractions dans l'équation, on multiplie par ce qu'il faut pour enlever toutes les fractions. On obtient ainsi une équation avec des coefficients entiers et on procède comme précédemment pour avoir le résultat cherché. Mais on peut aussi très bien d'abord faire passer les x d'un côté et les constantes de l'autre, puis additionner les fractions comme on l'a appris plus tôt. Mais cette manière de faire est bien plus compliquée.

Méthode 1	Méthode 2
$x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x = 44 \mid \cdot 6$	$x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x = 44$
$6x + 3x + 2x = 264$	$\frac{6x+3x+2x}{6} = 44$
$11x = 264 \mid : 11$	$\frac{11}{6}x = 44 \mid : \frac{11}{6}$
$x = 24$	$x = 24$

Si, dans une équation, on trouve

- x au dénominateur, il faudra multiplier l'équation par x.
- x sous une racine, on isole les termes radicaux et on élève tout au carré.
- un nombre à la puissance x, on l'isole et on applique la fonction logarithme aux deux côtés de l'égalité.

Ensuite, il suffira de suivre la méthode décrite plus haut pour trouver la valeur de x, notre solution.

3.4.3 Chapitre 3 : De la solution de quelques questions relatives au chapitre précédent

Ce chapitre contient vingt-et-un problèmes du premier degré. Ces questions sont très variées et on trouve pour chacune d'elle toute la résolution détaillée. Nous en présentons ici juste une seule et nous invitons le lecteur à aller feuilleter le livre d'Euler s'il cherche à satisfaire sa curiosité.

Quelqu'un a deux gobelets d'argent avec un seul couvercle pour les deux. Le premier gobelet pèse 12 *onces, et si on y met le couvercle, il pèse deux fois plus que l'autre gobelet. Mais si on couvre l'autre gobelet, celui-ci pèse trois fois plus que le premier : il s'agit de trouver le poids du second gobelet et celui du couvercle.*

On voit donc ici un problème qui a priori devrait se résoudre avec deux inconnues, le poids du second gobelet et celui du couvercle. Voyons comment habilement remédier à cela. On suppose donc que le poids du couvercle est x. On sait que le premier gobelet recouvert pèse deux fois plus que le second gobelet, qui sera donc de poids $\frac{x+12}{2}$ onces. Ensuite, on a que le poids du second gobelet recouvert est le triple du premier. L'équation cherchée est alors :

$$\begin{aligned}
&\frac{x+12}{2} + x = 36 && | \cdot 2 \\
&x + 12 + 2x = 72 && | - 12 \\
&3x = 60 && | : 3 \\
&x = 20 &&
\end{aligned}$$

Donc le poids du couvercle est de 20 onces et celui du deuxième gobelet $\frac{20+12}{2} = 16$ onces.

3.4.4 Chapitre 4 : De la résolution de deux ou plusieurs équations du premier degré

Souvent, on ne peut pas résoudre un problème en n'utilisant qu'une seule inconnue et on doit donc en introduire plusieurs. On utilisera alors les lettres de la fin de l'alphabet, par exemple x, y ou z, pour les désigner. Comme on veut rester dans les équations du premier degré, il ne faut aucune puissance plus grande que 1 et aucune multiplication entre inconnues. On obtiendra des équations de la forme $ax + by + cz = d$.

1. Prenons d'abord le cas à deux inconnues. La méthode qui vient naturellement à l'esprit est de trouver la valeur d'une inconnue en fonction de l'autre, puis, de substituer cette valeur dans la deuxième. Par exemple, dans le système suivant

$$\begin{aligned}
ax + by &= c \\
fx + gy &= h
\end{aligned}$$

On trouve $y = \frac{c-ax}{b}$, puis, en substituant dans la deuxième équation, on trouve

$$\begin{aligned}
&fx + g\frac{c-ax}{b} = h && \\
&fx + g\frac{c}{b} + g\frac{-ax}{b} = h && | \cdot b \\
&bfx + cg - agx = bh && | - cg \\
&(bf - ag)x = bh - cg && | : (bf - ag) \\
&x = \frac{bh - cg}{bf - ag} &&
\end{aligned}$$

Enfin, en remettant x dans la valeur de y, on trouve

$$\begin{aligned} y &= \frac{c - a\frac{bh-cg}{bf-ag}}{b} = \frac{c(bf-ag) - a(bh-cg)}{b(bf-ag)} = \frac{bcf - acg - abh + acg}{b(bf-ag)} \\ &= \frac{b(cf-ah)}{b(bf-ag)} = \frac{cf-ah}{bf-ag} \end{aligned}$$

Voyons cela dans un exemple. On cherche à trouver deux nombres tels que leur somme soit a et leur différence b. On a le système d'équations suivant :

$$\begin{aligned} x + y &= m \\ x - y &= n \end{aligned}$$

On a que $a = 1$, $b = 1$, $c = m$, $f = 1$, $g = -1$ et $h = n$. Reprenant ce qu'on a vu plus haut, on trouve

$$\begin{aligned} x &= \frac{bh-cg}{bf-ag} = \frac{n+m}{2} \\ y &= \frac{cf-ah}{bf-ag} = \frac{m-n}{2} \end{aligned}$$

On aurait pu arriver à cette solution différemment. En effet, si on ajoute la première équation à la deuxième, on arrive à

$$2x = m + n \Rightarrow x = \frac{m+n}{2}$$

alors que si on soustrait la deuxième équation de la première, on obtient

$$2y = m - n \Rightarrow y = \frac{m-n}{2}$$

qui sont exactement les mêmes solutions que celles trouvées plus haut.

2. Soit maintenant le cas à trois inconnues. Il nous faut donc trois équations pour pouvoir résoudre ce type de problèmes. On résoudra les problèmes en exprimant une des trois inconnues en fonction des deux autres et en substituant, on retombe sur un problème de type déjà connu avec deux équations et deux inconnues. On peut donc déduire comment résoudre les problèmes à n équations pour n inconnues, en se ramenant par substitution à deux équations avec deux inconnues. Mais on remarque alors qu'on se retrouve à faire de très longs calculs. Pour éviter cela, on peut utiliser cette astuce : introduire une nouvelle inconnue, qui dépend des problèmes. Nous allons le voir par le biais du prochain exemple.

   Trois personnes jouent ensemble ; dans la première partie, le premier joueur perd avec chacun des autres autant que chacun d'eux avait d'argent sur lui. Dans la seconde, c'est au second joueur que les deux autres gagnent autant qu'ils ont déjà d'argent. Dans la troisième partie enfin, le premier *et le second joueur gagnent au troisième autant d'argent qu'ils en avaient. Ils cessent alors de jouer, et il se trouve qu'ils ont tous une somme égale, à savoir* 24 *louis chacun. On demande avec combien d'argent chacun s'est mis au jeu.*

Soit x, y et z, l'argent avant le jeu du premier joueur, du deuxième et du troisième respectivement. L'astuce est de poser $s = x+y+z$, la somme de leur argent. On sait grâce à la fin que $s = 72$. Séparons nos trois donnes.

(a) Dans la première partie, le premier joueur perd autant d'argent que les autres avaient, soit la somme $y + z = s - x$. Il lui restera donc $x - (s - x) = 2x - s$. Les deux autres doublent leur argent et donc auront $2y$ et $2z$ respectivement.

Joueur	1	2	3
Argent	$2x - s$	$2y$	$2z$

(b) Lors de la deuxième partie, c'est au tour du deuxième joueur de perdre $s - 2y$ louis. Il lui reste alors $4y - s$ louis. Les deux autres joueurs, eux, doublent leur argent.

Joueur	1	2	3
Argent	$4x - 2s$	$4y - s$	$4z$

(c) Enfin, à la dernière partie, on voit que le troisième joueur se voit déposséder de $s - 4z$ louis et qu'il ne lui en reste que $8z - s$, alors que les deux autres voient leur argent doubler.

Joueur	1	2	3
Argent	$8x - 4s$	$8y - 2s$	$8z - s$

(d) En remplaçant s par 72 et en égalant les dernières quantités à l'argent qu'il leur reste au final, c'est-à-dire 24 louis, on trouve la somme qu'ils avaient au départ dans leur bourse :

Joueur	1	2	3
Argent	39	21	12

On se rend compte qu'on aurait pu trouver cela sans faire de l'algèbre, mais en raisonnant logiquement en remontant les parties. En divisant l'argent des gagnants par 2 et en additionnant la somme des gains au perdant à chaque partie, on obtient le même résultat :

Final			
Joueur	1	2	3
Argent	24	24	24
Avant la partie 3			
Joueur	1	2	3
Argent	12	12	48
Avant la partie 2			
Joueur	1	2	3
Argent	6	42	24
Avant la partie 1			
Joueur	1	2	3
Argent	39	21	12

3.4.5 Chapitre 5 : De la résolution des équations pures du second degré

On cherche maintenant à s'attaquer à des équations du second degré. On va donc commencer par remanier l'équation et grouper les termes en fonction de leur puissance de x, l'inconnue, de sorte à obtenir une équation de la forme $axx + bx + c = 0$. Si $a \neq 0$, $b \neq 0$ et $c \neq 0$, alors on dit que l'équation est *complète*. Lorsque le coefficient b est égal à 0, on dit que c'est une équation *pure* du second degré. Elle est de la forme $axx + c = 0$ et se résout assez facilement car on obtient alors $xx = \frac{-c}{a}$. Il y a alors trois cas à considérer.

1. Lorsque $\frac{-c}{a}$ est un carré, on peut attribuer une valeur à x qui est la racine de $\frac{-c}{a}$. Par exemple, lorsque l'équation est $xx - 144 = 0$, on trouve $xx = 144$ et donc on peut déduire que $x = 12$.
2. Lorsque $\frac{-c}{a}$ est un nombre positif mais pas carré, il faut alors se contenter du terme radical. Par exemple, pour $xx - 12 = 0$, on aura $xx = 12$ et finalement on trouvera $x = \sqrt{12}$.
3. Si $\frac{-c}{a}$ est négatif, on en déduit que x prend une valeur imaginaire ou impossible. On en conclut que le problème qui conduit à cette équation est impossible.

On remarque que si on trouve une solution pour x, comme on prend son carré, on aura toujours deux valeurs possibles. Si k la solution de l'équation $axx + c = 0$, alors $-k$ sera aussi une solution.

Dans le cas où c'est c qui est égal à 0, on a $axx + bx = x(ax + b) = 0$ et donc on a comme solution soit $x = 0$, soit $x = -\frac{b}{a}$.

On pose le problème suivant : *Quelques négocians établissent un facteur à Archangel. Chacun d'eux contribue pour le commerce qu'ils ont en vue, dix fois autant d'écus qu'ils sont d'associés. Le profit du facteur est fixé à deux fois autant d'écus qu'il y a d'associés pour* 100 *écus. Et si on multiplie la* $\frac{1}{100}$ *partie de son gain total par* $2\frac{2}{9}$*, on trouve le nombre des associés. On demande quel est ce nombre.*

Soit x le nombre d'associés. Chaque associé à fourni $10x$ écus, donc le capital est de $10xx$ écus. Or, le facteur gagne $2x$ pour chaque centaine d'écus. Son profit sera donc de $10xx\frac{2x}{100} = \frac{1}{5}x^3$. On multiplie donc les quantités suivantes (attention $2\frac{2}{9} = 2 + \frac{2}{9} = \frac{20}{9}$) :

$$\frac{1}{100}\frac{1}{5}x^3\frac{20}{9} = \frac{20}{4500}x^3 = \frac{1}{225}x^3$$

qui est égal au nombre d'employés. Comme $x \neq 0$, on peut simplifier par x.

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{225}x^3 = x && | : x \\
&\frac{1}{225}xx = 1 && | \cdot 225 \\
&xx = 225 \\
&x = 15
\end{aligned}$$

3.4.6 Chapitre 6 : De la résolution des équations mixtes du second degré

On dit qu'une équation du second degré est *mixte* ou *complète* si on y trouve les termes en xx, en x et en unité, c'est-à-dire que si $axx + bx + c = 0$ est une équation mixte, alors ni a, ni b, ni c n'est nul. Pour la résoudre, il faut la rendre unitaire, à savoir, faire que le coefficient devant le terme du second degré soit 1. On obtiendra alors une équation de la forme $xx + px = q$. En remarquant que le carré de $(x + \frac{p}{2})$ est $xx + px + \frac{pp}{4}$, on obtient une nouvelle équation que l'on sait résoudre.

$$(x + \frac{p}{2})^2 = q + \frac{pp}{4}$$

On en déduit que $x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{pp}{4} + q}$. Si on prenait l'équation $axx + bx + c = 0$, on aurait que $p = \frac{b}{a}$ et $q = -\frac{c}{a}$ et si on remplace dans la formule de x, on trouve donc

$$x = -\frac{\frac{b}{a}}{2} \pm \sqrt{\frac{\frac{bb}{aa}}{4} - \frac{c}{a}} = \frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{bb - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{bb - 4ac}}{2a}$$

la formule que l'on connaît.

On aurait aussi pu procéder comme ceci pour résoudre l'équation $xx = px+q$. On pose $x = y + \frac{p}{2}$ et par conséquent $xx = yy + py + \frac{pp}{4}$ et $px = py + \frac{pp}{2}$. On aurait alors

$$\begin{aligned}
&yy + py + \frac{pp}{4} = py + \frac{pp}{2} + q \\
&yy = q + \frac{pp}{4} \\
&y = \pm\sqrt{q + \frac{pp}{4}} \\
&x = \frac{p}{2} \pm \sqrt{q + \frac{pp}{4}}
\end{aligned}$$

ce qui nous ramène au même résultat.

Un petit problème pour illustrer cela : *Deux paysannes portent ensemble* 100 *oeufs au marché ; l'une en porte plus que l'autre, et cependant le produit est le même pour l'une et pour l'autre. La première dit à la seconde : si j'avais eu tes oeufs j'aurais retiré* 15 *sous. L'autre lui répond : si j'avais les tiens j'aurais retiré* $6\frac{2}{3}$ *sous. Combien d'oeufs chacune a-t-elle portés au marché ?*

On suppose x le nombre d'oeufs qu'a porté la première paysanne. La deuxième en aura donc vendu $100 - x$. Or, puisque la première aurait tiré 15 sous avec $100 - x$ oeufs, on en déduit qu'elle vend un oeuf à $\frac{15}{100-x}$ sous. Par un calcul identique, le prix d'un oeuf chez la deuxième paysanne est de $\frac{\frac{20}{3}}{x} = \frac{20}{3x}$ sous.

Mais puisque le produit de leur vente leur rapporte la même chose, on a que

$$x\frac{15}{100-x} = (100-x)\frac{20}{3x} \qquad | \cdot (100-x)\cdot 3x$$
$$45xx = 20(100-x)^2$$
$$45xx = 20xx - 4000x + 200000 \qquad | - 20xx$$
$$25xx = -4000x + 200000 \qquad | : 25$$
$$xx = -160x + 8000$$
$$x = -80 + \sqrt{6400+8000} = -80 + \sqrt{14400} = -80 + 120 = 40$$

donc la première apporte 40 oeufs, alors que la deuxième en apporte $100 - 40 = 60$.

3.4.7 Chapitre 7 : De l'extraction des racines des nombres polygones

Pour rappel, les nombres polygones sont des nombres obéissant à une formule particulière. Soit x la racine ou le côté du nombre. On se rappelle ce que valent les nombres polygonaux.

le III gone, ou le triangle, eſt $\frac{xx+x}{2}$,
le IV gone, ou le quarré, xx,
le V gone — — — — — $\frac{3xx-x}{2}$,
le VI gone — — — — — $2xx-x$,
le VII gone — — — — — $\frac{5xx-3x}{2}$,
le VIII gone — — — — — $3xx-2x$,
le IX gone — — — — — $\frac{7xx-5x}{2}$,
le X gone — — — — — $4xx-3x$,
le n gone — — — — — $\frac{(n-2)xx-(n-4)x}{2}$.

On voit qu'il est facile de calculer le nombre polygone à partir de sa racine. Mais lorsqu'on veut faire l'inverse, on a besoin de savoir résoudre des équations du second degré. Par exemple, si on cherche la racine d'un nombre triangulaire a, et que l'on suppose sa racine x, on aura l'équation suivante $\frac{xx+x}{2} = a$. Si on la résout, on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{xx+x}{2} &= a && | \cdot 2 \\
xx+x &= 2a && | -x \\
xx &= -x+2a \\
x &= -\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+2a} = \frac{-1+\sqrt{8a+1}}{2}
\end{aligned}$$

Comme x doit être entier, on déduit que si a est un nombre triangulaire, alors il faut que $8a+1$ soit un carré. On le voit dans le tableau suivant

Triangles	1	3	6	10	15	21	28	36	...
$8a+1$	9	25	49	81	121	169	225	289	...

Les nombres tétragones ou carrés ne posent aucune difficulté car si x est leur racine, s'ils ne respectent pas la condition $a = xx$ avec a un carré, alors ils ne sont pas carrés.

Soit a un nombre pentagone. Si sa racine est x, alors on aura $\frac{3xx-x}{2} = a$ et après calcul, on tombera sur $x = \frac{1+\sqrt{24a+1}}{6}$. Donc pour que a soit un nombre pentagone, il faut que $24a+1$ soit un carré.

On s'attaque maintenant au cas où a est un nombre n-gone. De nouveau, si on suppose que sa racine est x, le tableau nous indique que $\frac{(n-2)xx-(n-4)x}{2} = a$. Après calcul, on trouve

$$x = \frac{n-4+\sqrt{8(n-2)a+(n-4)^2}}{2(n-2)}$$

ce qui nous amène à la formule générale : si a est un n-gone, alors $8(n-2)a + (n-4)^2$ est un carré.

Par exemple, soit le 24-gone 3009 dont on cherche la racine x. On a que

$$\begin{aligned}
8(n-2)a+(n-4)^2 &= 8 \cdot 22 \cdot 3009 + 20^2 = 529584 + 400 = 529984 = 728^2 \\
x &= \frac{n-4+\sqrt{8(n-2)a+(n-4)^2}}{2(n-2)} = \frac{20+728}{44} = 17
\end{aligned}$$

3.4.8 Chapitre 8 : De l'extraction des racines carrées des binômes

On nomme en algèbre un binôme, une quantité composée de deux parties qui sont, ou toutes affectées du signe de la racine carrée, ou dont l'une au moins renferme ce signe.

On introduit ici la notion de *binôme* car lorsqu'on résout des équations du second degré, on tombe plus souvent sur eux que sur des nombres rationnels. Par exemple, $xx = 6x - 4$ admet comme solution $x = 3 + \sqrt{5}$.

On remarque que le carré d'un binôme est aussi un binôme. En effet, on a

$$(a + \sqrt{b})^2 = (aa + b) + 2a\sqrt{b}$$

On va donc pouvoir trouver la racine d'un binôme, qui doit être un binôme. Pour cela, on suppose que la racine est $\sqrt{x} + \sqrt{y}$. On obtient les équations suivantes alors.

$$\begin{aligned}(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 &= a + \sqrt{b} \\ x + y + 2\sqrt{xy} &= a + \sqrt{b}\end{aligned}$$

On en tire que $x + y = a$ et $4xy = b$. On a deux manières de résoudre ce problème.

1. La première méthode serait de déterminer une inconnue en fonction de l'autre et ensuite de la substituer dans la deuxième équation. De la première équation, on a $y = -x + a$. En l'insérant dans la seconde, on trouve :

$$\begin{aligned}&4x(-x + a) = b \\ &-4xx + 4ax = b \\ &-4xx = -4ax + b && | : (-4) \\ &xx = ax - \frac{b}{4} \\ &x = \frac{a + \sqrt{aa - b}}{2} \\ &y = -\frac{a + \sqrt{aa - b}}{2} + a = \frac{a - \sqrt{aa - b}}{2}\end{aligned}$$

   On trouve donc que la racine de $a + \sqrt{b}$ est

$$\sqrt{\frac{a + \sqrt{aa - b}}{2}} + \sqrt{\frac{a - \sqrt{aa - b}}{2}}$$

2. L'autre manière de procéder est de remarquer qu'à partir de $x + y = a$ et $4xy = b$, on a :
   - $(x + y)^2 = xx + 2xy + yy = aa$
   - $(x - y)^2 = xx - 2xy + yy = aa - b$

   On en déduit que $x + y = a$ et $x - y = \sqrt{aa - b}$. En additionnant ou en soustrayant les équations, on obtient :
   - $2x = a + \sqrt{aa - b} \Rightarrow x = \frac{a+\sqrt{aa-b}}{2}$
   - $2y = a - \sqrt{aa - b} \Rightarrow y = \frac{a-\sqrt{aa-b}}{2}$

   et on en tire la même racine.

Cette formule est beaucoup trop compliquée. Aussi, on préférera $\sqrt{a + \sqrt{b}}$ à part dans le cas où $aa - b$ serait un carré. En effet, si $aa - b = cc$, alors

$$\sqrt{a + \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + c}{2}} + \sqrt{\frac{a - c}{2}}$$

Un raisonnement identique nous mènera à

$$\sqrt{a-\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+c}{2}}-\sqrt{\frac{a-c}{2}}$$

On va utiliser ce qu'on a vu pour résoudre les équations quadratiques de la forme $x^4=2axx+d$. En faisant un changement de variable $y=xx$, on retombe sur une équation du second degré.

$$\begin{aligned}
&yy=2ay+d\\
&y=a\pm\sqrt{aa+d}\\
&x=\pm\sqrt{y}=\pm\sqrt{a\pm\sqrt{aa+d}}
\end{aligned}$$

et donc si $d=-cc$, le problème devient alors $x^4=2axx-cc$ qui admettra alors comme solution $x=\pm\sqrt{\frac{a+c}{2}}\pm\sqrt{\frac{a-c}{2}}$.

On cherche maintenant deux nombres tels que leur produit soit égal à m et la somme de leurs carrés à n. Pour ce faire, posons x et y nos deux nombres. On obtient les deux équations suivantes :

1. $xy=m$
2. $xx+yy=n$

En réutilisant les identités $(x+y)^2=xx+2xy+yy$ et $(x-y)^2=xx-2xy+yy$, on obtient les équations suivantes en combinant les précédentes :

1. $(x+y)^2=xx+2xy+yy=n+2m\Rightarrow x+y=\sqrt{n+2m}$
2. $(x-y)^2=xx-2xy+yy=n-2m\Rightarrow x-y=\sqrt{n-2m}$

Et en combinant les deux, on trouve les valeurs cherchées si $n-2m\geq 0$

$$\begin{aligned}
x&=\frac{\sqrt{n+2m}+\sqrt{n-2m}}{2}\\
y&=\frac{\sqrt{n+2m}-\sqrt{n-2m}}{2}
\end{aligned}$$

Exemple : on cherche deux nombres tels que leur produit vaut 105 et la somme de leurs carrés 274.

Soit donc x et y les deux nombres cherchés. On a que $m=105$ et $n=274$. Alors si on reprend la formule trouvée, on a

$$\begin{aligned}
x&=\frac{\sqrt{n+2m}+\sqrt{n-2m}}{2}=\frac{\sqrt{484}+\sqrt{64}}{2}=\frac{22+8}{2}=\frac{30}{2}=15\\
y&=\frac{\sqrt{n+2m}-\sqrt{n-2m}}{2}=\frac{\sqrt{484}-\sqrt{64}}{2}=\frac{22-8}{2}=\frac{14}{2}=7
\end{aligned}$$

Pour finir, nous allons chercher deux nombres x et y tels que les trois quantités suivantes soient égales :

1. La somme $x+y$

2. Le produit xy
3. La différence des carrés $xx - yy$

On peut résoudre ce problème par substitution mais la méthode est assez longue et prolixe. On va donc procéder plus intelligemment en remarquant que

$$\begin{aligned} x + y &= xx - yy && \mid : (x+y) \\ 1 &= x - y \\ x &= y + 1 \end{aligned}$$

Par conséquent, on a $x + y = 2y + 1$ et $xy = yy + y$, l'égalité $x + y = xy$ nous donne

$$\begin{aligned} yy + y &= 2y + 1 && \mid -y \\ yy &= y + 1 \\ y &= \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

et donc on trouvera $x = y + 1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

3.4.9 Chapitre 9 : De la nature des équations du second degré

Il y a deux manières de résoudre une équation du second degré. La première, nous l'avons assez vue et appliquée dans les chapitres précédents. Quant à la seconde, nous remarquons que dans beaucoup de cas, il existe deux valeurs satisfaisant l'équation. Par exemple, pour $xx + 12x + 35 = 0$, on a comme solutions, $x = -5$ et $x = -7$. On va donc se concentrer sur cette espèce d'équations.

Lorsqu'on tombe sur une équation du second degré, le but sera de la mettre sous la forme $xx - ax + c = 0$. Ensuite, remarquons dans notre exemple qu'on peut écrire différemment l'équation :

$$xx + 12x + 35 = (x + 5)(x + 7) = 0$$

On comprend mieux pourquoi les solutions de l'équations sont $x = -5$ et $x = -7$. En effet, pour que ce produit soit nul, il faut que l'un des facteurs soit nul, ce qui n'arrive que lorsque x vaut -5 ou -7. On va donc tenter de décomposer $xx - ax + c$ en un produit $(x - p)(x - q)$ avec comme conditions

$$\begin{aligned} a &= p + q \\ c &= pq \end{aligned}$$

et les solutions pourront se lire directement. On va même pouvoir généraliser sur les signes des solutions. En effet, si l'équation est sous la forme :

1. $xx - ax + c = (x - p)(x - q) = 0$, les solutions seront positives.
2. $xx + ax + c = (x + p)(x + q) = 0$, elles seront négatives.

3. $xx \pm ax - c = (x-p)(x+q) = 0$, on en aura une de chaque.

On peut d'ailleurs faire l'inverse, c'est-à-dire qu'à partir des solutions, on peut donner l'équation du second degré. Par exemple, on cherche l'équation du second degré qui admet les deux valeurs 2 et -5 :

$$(x-2)(x+5) = xx + 3x - 10$$

Il peut arriver qu'on ne trouve qu'une solution pour une équation du second degré. Par exemple, pour

$$xx - 10x + 25 = (x-5)^2 = 0$$

on ne trouve que $x = 5$ pour la satisfaire. On peut alors dire que 5 est une double solution.

On voit donc qu'on peut obtenir une ou deux solutions pour une seule équation. Mais malheureusement, il peut aussi arriver qu'on n'en trouve aucune, ou plutôt aucune possible, à savoir que les solutions sont imaginaires. Par exemple, on veut séparer 10 en deux parties telles que leur produit fasse 30. Pour le savoir, on pose x comme étant la première partie, la deuxième $10 - x$ s'en déduisant facilement. Alors le produit des deux sera $x(10-x) = 10x - xx$. Egalant à 30, on doit résoudre l'équation suivante.

$$\begin{aligned} &10x - xx = 30 && \mid + xx - 30 \\ &xx = 10x - 30 \\ &x = 5 \pm \sqrt{-5} \end{aligned}$$

On voit donc que les racines sont imaginaires.

Le but est donc de trouver une condition pour pouvoir déterminer si elle admet des solutions envisageables ou pas. Si on reprend l'équation générale $xx - ax + b = 0$ et qu'on la résout, on obtient comme solution $x = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{aa}{4} - b}$. Cette quantité n'est possible que si $\frac{aa}{4} - b \geq 0$ et donc que $aa \geq 4b$.

On peut appliquer le même raisonnement sur l'équation $fxx + gx + h = 0$. En effet, après calcul, on trouve

$$x = -\frac{-g}{2} \pm \sqrt{\frac{gg}{4ff} - \frac{h}{f}}$$

qui n'est une valeur satisfaisante que si $\frac{gg}{4ff} - \frac{h}{f} \geq 0$ donc $gg - 4fh \geq 0$, où on reconnaît notre belle formule du discriminant. En conclusion, il faut que $gg \geq 4fh$.

Les formules $xx + ax + b$ peuvent toujours être décomposées en deux facteurs $(x+p)(x+q)$, mais la nature des solutions dépend de ce qu'on a vu plus haut. Ces dernières peuvent être rationnelles, irrationnelles ou même imaginaires. Mais quelles qu'elles soient, on pourra toujours, si on connaît une des deux solutions p, trouver l'autre en effectuant une division euclidienne par $x - p$. Par exemple, pour l'équation $xx + 4x - 21$, on sait que 3 est une solution. On peut déduire que -7 est l'autre valeur cherchée par le calcul suivant.

$$
\begin{array}{l}
x - 3)\ xx + 4x - 21\ (x + 7 \\
\qquad\quad \underline{xx - 3x} \\
\qquad\qquad\quad 7x - 21 \\
\qquad\qquad\quad \underline{7x - 21} \\
\qquad\qquad\qquad 0.
\end{array}
$$

3.4.10 Chapitre 10 : Des équations pures du troisième degré

Comme pour les équations du second degré, une équation pure du troisième degré est une équation qui ne contient que des inconnues à la troisième puissance. La résolution en est d'ailleurs à peu près identique, à savoir qu'on regroupe tous les termes en x^3 d'un côté de l'égalité et les termes constants de l'autre. Ensuite, on divise et on prend la racine cubique. Par exemple,

$$
\begin{aligned}
&2x^3 + 24 - 7 + 3x^3 = 9 - x^3 + 22 && \\
&5x^3 - 17 = -x^3 + 31 && \mid +17 + x^3 \\
&6x^3 = 48 && \mid : 6 \\
&x^3 = 8 && \\
&x = \sqrt[3]{8} = 2 &&
\end{aligned}
$$

Mais on soupçonne d'autres solutions. Comme les équations du second degré se décomposaient en deux facteurs, celles du troisième devraient aussi l'être, mais en trois facteurs. D'ailleurs, si on applique la division euclidienne de l'équation ci-dessus, on obtient :

$$
\begin{array}{l}
x - 2)\ x^3 - 8 \quad (xx + 2x + 4 \\
\qquad\quad \underline{x^3 - 2xx} \\
\qquad\qquad\quad 2xx - 8 \\
\qquad\qquad\quad \underline{2xx - 4x} \\
\qquad\qquad\qquad\quad 4x - 8 \\
\qquad\qquad\qquad\quad \underline{4x - 8} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 0.
\end{array}
$$

On voit donc que $x^3 - 8 = 0$ peut aussi s'écrire comme $(x-2)(xx+2x+4) = 0$, ce qui nous rajouterait deux solutions imaginaires. Ces deux solutions sont $x = -1 \pm \sqrt{-3}$.

Prenons le cas général. On doit résoudre l'équation suivante $x^3 - a = 0$. Une première solution se lit directement $x = \sqrt[3]{a}$. On va supposer $c = \sqrt[3]{a}$ pour simplifier la suite du calcul. L'équation devient $x^3 - c^3 = 0$ qu'on peut réécrire ainsi : $(x-c)(xx+cx+cc)$.

$$
\begin{array}{llll}
x - c) & x^3 - c^3 & (xx + cx + cc & \\
 & \underline{x^3 - cxx} & & \\
 & \quad cxx - c^3 & & \\
 & \quad \underline{cxx - ccx} & & \\
 & \qquad ccx - c^3 & & \\
 & \qquad \underline{ccx - c^3} & & \\
 & \qquad\qquad 0. & &
\end{array}
$$

Les deux dernières solutions se déduisent de $xx + cx + cc = 0$. En résolvant l'équation du second degré, on trouve

$$
\begin{aligned}
& xx + cx + cc = 0 && | - cx - cc \\
& xx = -cx - cc && \\
& x = -\frac{c}{2} \pm \sqrt{\frac{cc}{4} - cc} = \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2} c &&
\end{aligned}
$$

En remplaçant $c = \sqrt[3]{a}$, on a les trois solutions de l'équation, une réelle, les deux autres imaginaires.

1. $x = \sqrt[3]{a}$
2. $x = \frac{1+\sqrt{-3}}{2} \sqrt[3]{a}$
3. $x = \frac{1-\sqrt{-3}}{2} \sqrt[3]{a}$

Exemple : *Une paysanne échange des fromages contre des poules, à raison de deux fromages pour trois poules ; ces poules pondent chacune $\frac{1}{3}$ autant d'oeufs qu'il y a de poules ; la paysanne vend au marché neuf oeufs pour autant de sous que chaque poule a pondu d'oeufs, et elle tire 72 sous ; on demande combien de fromages elle a échangé ?*

Posons x le nombre de fromages qu'elle a échangé. Elle recevra donc $\frac{3}{2}x$ poules. Une poule pond $\frac{1}{3}\frac{3}{2}x = \frac{1}{2}x$ oeufs. Cela implique que la paysanne amènera $\frac{3}{2}x\frac{1}{2}x = \frac{3}{4}xx$ oeufs au marché. Or, neuf oeufs lui rapportent $\frac{1}{2}x$. Elle va donc recevoir $\frac{1}{9}\frac{3}{4}xx\frac{1}{2}x = \frac{1}{24}x^3$ sous. On sait que cette somme est de 72 sous. On peut donc poser une équation et la résoudre :

$$\frac{1}{24}x^3 = 72 \qquad | \cdot 24$$
$$x^3 = 24 \cdot 72 = 3 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 9 = 8 \cdot 8 \cdot 27$$
$$x = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$$

La paysanne a échangé 12 fromages contre 18 poules qui lui auront pondu 108 oeufs. Remarquons qu'on a intelligemment décomposé le produit $24 \cdot 72$ afin de nous épargner des calculs bien difficiles.

3.4.11 Chapitre 11 : De la résolution des équations complètes du troisième degré

Une équation du troisième degré est dite complète si elle contient le cube de l'inconnue, son carré et l'inconnue elle-même. La forme générale de ces équations est celle-ci :

$$ax^3 + bxx + cx + d = 0$$

Les valeurs satisfaisant cette équation sont appelées des *racines*. On suppose que pour chaque équation du troisième degré, il existe trois solutions.

Dans la mesure du possible, on va essayer de décomposer notre formule en trois facteurs pour trouver les solutions. Par exemple, on voit que $x^3 - 6xx + 11x - 6 = 0$ peut être réécrit comme $(x-1)(x-2)(x-3) = 0$ et on peut lire directement les racines $x = 1$, $x = 2$ et $x = 3$ dans l'équation. Le but sera donc de décomposer la formule après l'avoir mise sous forme unitaire $x^3 - axx + bx - c = 0$. On décompose en facteurs $(x-p)(x-q)(x-r) = 0$ et on aura les conditions suivantes :

$$(x-p)(x-q)(x-r) = x^3 - (p+q+r)xx + (pq+pr+qr)x - pqr = 0$$
$$a = p+q+r$$
$$b = pq+pr+qr$$
$$c = pqr$$

Cela nous dit que si l'on cherche une solution entière de l'équation, il faut absolument qu'elle soit un diviseur du terme constant. Cela nous aidera pour nos recherches de racines par tâtonnements.

Par exemple, si on cherche les solutions entières de $x^3 - x - 6$, on sait qu'on devra les prendre parmi les nombres suivants $\{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\}$.

1. $x = 1 \Rightarrow 1 - 1 - 6 = -6$
2. $x = 2 \Rightarrow 8 - 2 - 6 = 0$
3. $x = 3 \Rightarrow 27 - 3 - 6 = 18$
4. $x = 6 \Rightarrow 216 - 6 - 6 = 204$

Donc 2 est une racine de l'équation. On peut effectuer une division de l'équation par $(x-2)$. On trouve alors $x^3 - x - 6 = (x-2)(xx+2x+3) = 0$. En résolvant $(xx+2x+3) = 0$, on trouve les deux autres solutions.

$$\begin{aligned} xx + 2x + 3 &= 0 && \mid -x-3 \\ xx &= -2x - 3 \\ x &= -1 \pm \sqrt{-2} \end{aligned}$$

Les trois racines sont donc $x = 2$, $x = -1 + \sqrt{-2}$ et $x = -1 - \sqrt{-2}$.

On ne peut appliquer cette méthode que si le coefficient qui est devant le cube de l'inconnue est égal à 1 et si tous les autres coefficients sont entiers. Cela sera toujours possible. En effet, en faisant un habile changement de variable, on pourra toujours retomber sur un cas favorable. Voyons le dans l'exemple suivant.

On part de l'équation $4x^3 - 12xx + 11x - 3 = 0$. On divise par 4 et on obtient $x^3 - 3xx + \frac{11}{4}x - \frac{3}{4}$. En posant $x = \frac{y}{2}$, on tombe sur une équation $\frac{y^3}{8} - \frac{3yy}{4} + \frac{11y}{8} - \frac{3}{4}$ qui, multipliée par 8, est exactement ce qu'on veut :

$$y^3 - 6yy + 11y - 6$$

dont les racines sont celles trouvées plus haut, à savoir $y = 1$, $y = 2$ et $y = 3$. Les racines de notre équation sont donc $x = \frac{1}{2}$, $x = 1$ et $\frac{3}{2}$.

Ces changements de variable peuvent d'ailleurs réduire énormément la recherche de racines comme par exemple dans le cas suivant. On cherche les racines de $6x^3 - 11xx + 6x - 1 = 0$. Si on procédait comme avant, il faudrait diviser l'équation par 6, on aurait alors $x^3 - \frac{11}{6}xx + x - \frac{1}{6} = 0$. En posant $x = \frac{y}{6}$, on obtient $\frac{y^3}{216} - \frac{11yy}{216} + \frac{y}{6} - \frac{1}{6} = 0$. Pour finir, on multiplie par 216, et l'équation voulue est $y^3 - 11yy + 36y - 36$. Mais les diviseurs de 36 étant très nombreux, il est plus facile de passer d'abord par le changement de variable $x = \frac{1}{z}$. On aura alors $\frac{6}{z^3} - \frac{11}{zz} + \frac{36}{z} - 1 = 0$. On multiplie par $-z^3$ et on aura une meilleure équation $z^3 - 6z^2 + 11z - 6 = 0$ dont les racines seront plus faciles à trouver car 6 possède moins de diviseurs que 36.

On remarque que le signe des nombres a, b et c influe sur le signe des racines. En effet, si l'équation est de la forme :

1. $x^3 - axx + bx - c = 0$, les racines seront positives.
2. $x^3 + axx + bx + c = 0$, elles seront négatives, car les trois facteurs seront $(x+p)$, $(x+q)$ et $(x+r)$.

On remarque que dans la première équation, si on compare le signe de deux coefficients successifs, il y a un changement de signe, au total trois. Alors que pour la deuxième équation, il y a trois successions d'un même signe. On se rend compte alors que le nombre de successions d'un même signe nous donne le nombre de racines négatives, alors que le nombre de changements de signes nous donne le nombre de racines positives. On va l'illustrer avec l'exemple suivant.

Soit l'équation $x^3 + xx - 34x + 56 = 0$. On voit une succession de mêmes signes pour deux changements de signes. On va donc avoir une racine négative pour deux positives. En effet, $x^3 + xx - 34x + 56 = (x-2)(x-4)(x+7) = 0$

et les solutions se lisent directement, $x = 2$, $x = 4$ et $x = -7$, deux positives et une négative comme prévu.

Exemple : *Quelques personnes forment une société et établissent un fonds, auquel chacune contribue autant d'écus qu'elles sont de personnes ; elles gagnent sur chaque centième d'écus* 6 *écus au-delà du nombre d'écus égal à leur nombre ; le profit total est de* 392 *écus ; on demande combien ils sont d'associés ?*

On pose x le nombre d'associés. Chacun a investi $10x$ écus, donc, au total, on aura $10xx$ écus dans le fonds. Le profit étant de $x + 6$ pourcent de leur investissement, la somme sera de $10xx\frac{x+6}{100} = \frac{x^3+6xx}{10}$ qui est égale à 392 écus. On aura alors l'équation

$$x^3 + 6xx - 3920 = 0$$

à résoudre. Comme les diviseurs de 3920 sont nombreux, on peut se simplifier la tâche en posant $x = 2y$. L'équation devient alors

$$\begin{aligned} &8y^3 + 24yy - 3920 = 0 && \mid : 8 \\ &y^3 + 3yy - 490 = 0 \end{aligned}$$

Les diviseurs de 490 étant $\{1, 2, 5, 7, 10, \ldots\}$. Les trois premiers sont trop petits. Par contre, si on essaie 7, on a $343 + 147 - 490 = 490 - 490 = 0$ et donc $y = 7$ est solution, donc $x = 14$ est une racine de notre problème. On effectue la division par $(y - 7)$ pour essayer de trouver d'autres solutions et on trouve $y^3 + 3yy - 490 = (y - 7)(yy + 10y + 70) = 0$. Si le problème a plus de solutions, elles se trouvent à partir de $yy + 10y + 70 = 0$ qui n'admet que des racines imaginaires car $4 \cdot 70 = 280 > 100 = 10^2$.

3.4.12 Chapitre 12 : De la règle de Cardan ou de Scipion Ferreo

Si on n'arrive pas à trouver de racines entières par la méthode ci-dessus, alors on ne pourra pas trouver de racines fractionnaires. En effet, il est impossible que $x = \frac{p}{q}$ soit une solution de $x^3 - axx + bx - c = 0$ car le premier terme sera une fraction sur q^3, alors que les trois derniers seront soit des fractions sur qq ou q, soit des entiers. On souligne la simplicité avec laquelle Euler démontre cette propriété alors qu'aujourd'hui, on fait appel au théorème de Gauss pour un tel cas.

Or, il faut bien que ce type d'équations possède des solutions. Il n'en reste plus que deux sortes : les irrationnelles ou les imaginaires. Nous allons voir une méthode pour trouver les racines à partir de l'équation $x^3 = fx + g$. C'est donc pour cela que nous soulignons le fait que n'importe quelle équation du troisième degré peut se réécrire, après une habile substitution, sans terme du second degré, donc de la forme cherchée.

On suppose donc l'équation suivante $x^3 + axx + bx + x = 0$ dont on veut supprimer le terme du second degré. On pose alors $x = y - \frac{a}{3}$. En remplaçant et en additionnant, on trouve une équation sans second terme.

$$
\begin{array}{rl}
x^3 = & y^3 - ayy + \frac{1}{3}aay - \frac{1}{27}a^3 \\
axx = & \quad + ayy - \frac{2}{3}aay + \frac{1}{9}a^3 \\
bx = & \qquad\quad + \ by - \frac{1}{3}ab \\
c = & \qquad\qquad\qquad + c \\
\hline
\multicolumn{2}{l}{y^3 - (\frac{1}{3}aa - b)y + \frac{2}{27}a^3 - \frac{1}{3}ab + c = 0,}
\end{array}
$$

Prenons un exemple pour nous en convaincre. Soit l'équation $x^3 - 6xx + 13x - 12 = 0$. On fait alors le changement de paramètre $x = y - \frac{-6}{3} = y + 2$. On trouve alors comme nouvelle équation :

$$
\begin{array}{rl}
x^3 = & y^3 + 6yy + 12y + 8 \\
-6xx = & \quad - 6yy - 24y - 24 \\
+13x = & \qquad\qquad + 13y + 26 \\
-12 = & \qquad\qquad\qquad - 12 \\
\hline
 & y^3 + y - 2 = 0
\end{array}
$$

ou $y^3 = -y + 2.$

Ceci étant fait, on peut maintenant décrire la *règle de Cardan* ou de *Scipion Ferreo* dans laquelle on considère la formule $x^3 = fx + g$. On en est arrivé là car, en supposant que $x = \sqrt[3]{p} + \sqrt[3]{q}$, on a que $x^3 = p + q + 3\sqrt[3]{pq}x$. C'est la raison pour laquelle notre but sera de trouver p et q de sorte que $f = 3\sqrt[3]{pq}$ et $g = p + q$. On a un système de deux équations à résoudre.

$$
\begin{array}{ll}
3\sqrt[3]{pq} = f & \qquad p + q = g \\
\sqrt[3]{pq} = \frac{f}{3} & \qquad pp + 2pq + qq = gg \\
pq = \frac{f^3}{27} & \\
4pq = \frac{4f^3}{27} &
\end{array}
$$

$$
\Rightarrow pp - 2pq + qq = gg - \frac{4f^3}{27}
$$

$$
p - q = \sqrt{gg - \frac{4f^3}{27}}
$$

Comme on a aussi $p + q = g$, en additionnant et soustrayant les deux équations, on obtient les valeurs de p et q

$$
p = \frac{g + \sqrt{gg - \frac{4f^3}{27}}}{2}
$$

$$
q = \frac{g - \sqrt{gg - \frac{4f^3}{27}}}{2}
$$

et finalement, on obtient la valeur de $x = \sqrt[3]{\frac{g+\sqrt{gg-\frac{4f^3}{27}}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{g-\sqrt{gg-\frac{4f^3}{27}}}{2}}$.

Appliquons cette règle à un exemple pour mieux la comprendre. On considère l'équation $x^3 = 6x + 9$. On a $gg = 81$ et $f^3 = 216$. Le calcul de p et q donne :

$$p = \frac{9+\sqrt{81-\frac{864}{27}}}{2} = \frac{9+\sqrt{81-32}}{2} = \frac{9+7}{2} = \frac{16}{2} = 8$$
$$q = \frac{9-\sqrt{81-\frac{864}{27}}}{2} = \frac{9-\sqrt{81-32}}{2} = \frac{9-7}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

On a donc que la racine de l'équation est $x = \sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{1} = 2 + 1 = 3$.

Attention, il arrive souvent que la solution soit réelle mais que la règle de Cardan nous amène à une quantité qui parraisse irrationnelle. Il faut alors ruser pour prouver que les deux valeurs sont les mêmes. Voyons comment dans l'exemple suivant. Soit l'équation $x^3 = 6x + 40$. On voit que 4 est solution de cette équation. Appliquons la règle de Cardan. On a que $gg = 1600$ et $f^3 = 216$. On trouve (en remarquant que $\sqrt{1568} = 28\sqrt{2}$)

$$p = \frac{40+\sqrt{1600-\frac{864}{27}}}{2} = \frac{40+\sqrt{1600-32}}{2} = \frac{40+28\sqrt{2}}{2} = 20+14\sqrt{2}$$
$$q = \frac{40-\sqrt{1600-\frac{864}{27}}}{2} = \frac{40-\sqrt{1600-32}}{2} = \frac{40-28\sqrt{2}}{2} = 20-14\sqrt{2}$$

et on trouve donc $x = \sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$ comme racine. A première vue, ce n'est pas du tout notre racine 4. Mais comme

$$(2+\sqrt{2})^3 = 20+14\sqrt{2}$$
$$(2-\sqrt{2})^3 = 20-14\sqrt{2}$$

On en conclut que $x = 2+\sqrt{2}+2-\sqrt{2} = 4$. Donc la règle est bien vérifiée.

3.4.13 Chapitre 13 : De la résolution des équations du quatrième degré

Comme pour les cas précédents, on va d'abord traiter les cas où l'équation est pure, puis on va, étape par étape, arriver au cas général.

1. Supposons que l'équation soit pure du quatrième degré. On isole les x^4 d'un côté de l'égalité et les termes constants de l'autre. Ensuite, si nous sommes dans le cas $x^4 = f$, on a, comme le carré de xx est x^4, $xx = \sqrt{f}$ et pour finir $x = \sqrt{\sqrt{f}}$. Mais on se doute que ce n'est pas la seule solution. En effet, une équation du second degré admet en général deux solutions, une du troisième degré, trois. Il serait donc logique que celle du quatrième degré en admette quatre. Dans notre cas, cela est dû au fait qu'à chaque fois qu'on prend la racine, on doit rajouter un plus ou moins. Donc si

$x^4 = f$, on a $xx = \pm\sqrt{f}$ et pour finir, les solutions sont $x = \pm\sqrt{\pm\sqrt{f}}$. Par exemple, pour $x^4 = 2401$, on a que $xx = \pm 49$ et les solutions sont $x = \pm 7$ et $x = \pm 7\sqrt{-1}$.

2. Vient ensuite les cas où l'équation peut être traitée comme une équation du second degré. Elles sont de la forme $x^4 + fxx + g = 0$. En posant $y = xx$, il ne nous reste que des termes de degré inférieur à deux. On a $yy + fy + g = 0$ qui est identique à $yy = -fy - g$ dont les solutions sont $y = -\frac{f}{2} \pm \sqrt{\frac{ff}{4} - g}$ et donc les racines de notre équation du quatrième degré sont $x = \pm\sqrt{-\frac{f}{2} \pm \sqrt{\frac{ff}{4} - g}} = \pm\sqrt{\frac{-f\pm\sqrt{ff-4g}}{2}}$.

3. Lorsque l'équation est mixte, on va commencer par utiliser la méthode des tâtonnements, comme dans le cas des équations du troisième degré. En effet, si on regarde l'équation comme un produit de quatre facteurs, on aura

$$\begin{aligned}&(x-p)(x-q)(x-r)(x-s) = \\ &\quad x^4 - (p+q+r+s)x^3 + (pq+pr+ps+qr+qs+rs)xx \\ &\qquad\qquad - (pqr+pqs+prs+qrs)x + pqrs = 0\end{aligned}$$

et on aura que si x est une racine entière de l'équation, x doit diviser le terme constant, mais il faudra dans un premier temps, au moyen d'un changement de paramètre, rendre tous les coefficients de l'équation entiers. Ensuite, quand on aura trouver une solution p, il suffira de procéder à la division pour retomber sur un terrain connu, une équation du troisième degré. On remarque d'ailleurs une autre similitude avec le cas précédent. Le nombre de successions de mêmes signes représente le nombre de racines négatives alors que celui de changement de signes donne le nombre de racines positives.

Exemple : $x^4 + 2x^3 - 7xx - 8x + 12$ avec deux changements de signes et deux successions. On aura normalement deux racines positives et deux négatives. Les diviseurs de 12 sont $\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$.
- $x = 1 \Rightarrow 1 + 2 - 7 - 8 + 12 = 0$, on a une première racine positive.
- $x = -1 \Rightarrow 1 - 2 - 7 + 8 + 12 = 12$, ne donne rien.
- $x = 2 \Rightarrow 16 + 16 - 28 - 16 + 12 = 0$, une deuxième racine positive. On ne devrait plus avoir de racine positive donc on peut passer aux diviseurs négatifs seulement.
- $x = -2 \Rightarrow 16 - 16 - 28 + 16 + 12 = 0$, une première solution négative.
- $x = -3 \Rightarrow 81 - 54 - 63 + 24 + 12 = 0$, et la deuxième.

On a donc trouvé nos quatre racines qui respectent les conditions sur les signes. Attention, la version du livre, en français et en allemand, est erronée, les solutions $x = 1$ et $x = 2$ sont justes, mais le calcul ci-dessus montre que $x = -4$ n'est pas une racine, alors que $x = -2$ l'est.

4. Malheureusement, il existe des racines irrationnelles et les moyens ci-dessus ne suffisent pas à les trouver. Mais il existe des autres méthodes

permettant de les débusquer. Nous allons voir deux cas particuliers avant de passer aux méthodes générales.

(a) $xx + max^3 + naaxx + ma^3x + a^4 = 0$. On peut réécrire cette équation $(xx + pax + aa)(xx + qax + aa) = 0$ où on aura bien choisi p et q. Si on effectue la multiplication, on obtient l'équation $x^4 + (p+q)ax^3 + (pq+2)aaxx + (p+q)a^3x + a^4 = 0$. On en conclut que

$$\begin{aligned} p + q = m &\Rightarrow pp + 2pq + qq = mm \\ pq = n - 2 &\Rightarrow 4pq = 4n - 8 \end{aligned}$$

A partir de ces deux équations, on obtient que $pp - 2pq + qq = mm - 4n - 8$ à savoir que $p - q = \sqrt{mm - 4n - 8}$. On arrive alors à trouver p et q.

$$\begin{aligned} p &= \frac{m + \sqrt{mm - 4n + 8}}{2} \\ q &= \frac{m - \sqrt{mm - 4n + 8}}{2} \end{aligned}$$

Il ne nous reste alors qu'à résoudre deux équations du second degré $(xx+pax+aa)(xx+qax+aa) = 0$ pour obtenir nos quatre solutions.

$$\begin{aligned} xx + pax + aa = 0 \Rightarrow xx = -pax - aa \Rightarrow x &= -\frac{pa}{2} \pm \sqrt{\frac{ppaa}{4} - aa} \\ &= \frac{a(-p \pm \sqrt{pp - 4})}{2} \\ xx + qax + aa = 0 \Rightarrow xx = -qax - aa \Rightarrow x &= -\frac{qa}{2} \pm \sqrt{\frac{qqaa}{4} - aa} \\ &= \frac{a(-q \pm \sqrt{qq - 4})}{2} \end{aligned}$$

Par exemple, pour $x^4 - 4x^3 - 3xx - 4x + 1 = 0$, on a $a = 1$, $m = -4$ et $n = -3$. Les valeurs de p et q seront donc

$$\begin{aligned} p &= \frac{m + \sqrt{mm - 4n + 8}}{2} = \frac{-4 + \sqrt{16 + 12 + 8}}{2} = \frac{-4 + 6}{2} = 1 \\ q &= \frac{m - \sqrt{mm - 4n + 8}}{2} = \frac{-4 - \sqrt{16 + 12 + 8}}{2} = \frac{-4 - 6}{2} = -5 \end{aligned}$$

et les racines auront pour valeur

$$\begin{aligned} x &= \frac{a(-p \pm \sqrt{pp - 4})}{2} = \frac{(-1 \pm \sqrt{1 - 4})}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} \\ x &= \frac{a(-q \pm \sqrt{qq - 4})}{2} = \frac{(5 \pm \sqrt{25 - 4})}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{21}}{2} \end{aligned}$$

Donc notre problème possède deux racines imaginaires et deux autres irrationnelles.

(b) $x^4 + max^3 + naaxx - ma^3x^3 + a^4 = 0$ peut s'écrire comme $(xx + pax - aa)(xx + qax - aa) = 0$ avec des p et q bien choisis. En utilisant exactement la même méthode, on trouve très facilement p et q, puis, les racines x.

$$p = \frac{m + \sqrt{mm - 4n - 8}}{2}$$
$$q = \frac{m - \sqrt{mm - 4n - 8}}{2}$$
$$x = -\frac{a(p \pm \sqrt{pp + 4})}{2}$$
$$x = -\frac{a(q \pm \sqrt{qq + 4})}{2}$$

3.4.14 Chapitre 14 : De la règle de Bombelli pour réduire la résolution des équations du quatrième degré à celle des équations du troisième degré

On a vu qu'avec la règle de Cardan, on peut résoudre n'importe quelle équation du troisième degré. Il est clair que vouloir résoudre des équations du quatrième degré sans savoir comment faire pour le troisième serait du suicide car généralement, on essaiera de trouver une racine pour pouvoir se ramener au cas déjà traité. De la même manière, pour les équations de dimensions supérieures, il faudra maîtriser la résolution de tous les degrés inférieurs. Euler croyait très fortement que quelqu'un trouverait une méthode pour les résoudre mais malheureusement, quelques dizaines d'années plus tard, Galois démontrait que les équations de degré supérieur à 4 n'admettaient jammais de méthode générale. On va donc devoir se contenter des équations du quatrième degré. Pour cela on introduit la règle de Bombelli qui permet de résoudre les équations qui nous intéressent.

Tout d'abord, un petit point de vue historique. Dans une note de bas de page, il est dit que cette méthode appartient plutôt à Ferrari, tout comme la règle de Cardan est plutôt due à Scipion Ferreo. A cette époque, on gardait souvent ses découvertes pour les concours ou des postes dans des universités, alors les publications ne venaient pas directement. On ne pouvait donc pas préciser avec exactitude quel mathématicien avait découvert ces règles en premier. Notre cas est un peu spécial car Cardan avait avoué qu'il avait repris Scipion Ferreo et de même, on savait que la méthode suivante vient bien de Ferrari.

Soit donc l'équation générale $x^4 + ax^3 + bxx + cx + d = 0$ qu'on va transformer en $(xx + \frac{1}{2}ax + p)^2 - (qx - r)^2 = 0$. Si on développe l'équation et qu'on la range dans l'ordre croissant de ces exposants, on obtient :

$$\begin{aligned} x^4 + ax^3 &+ \tfrac{1}{4}aaxx + apx + pp \\ &+ 2pxx - 2qrx - rr \\ &- qqxx. \end{aligned}$$

ce qui nous donnera les conditions suivantes :

1. $\frac{1}{4}aa + 2p - qq = b \Rightarrow qq = \frac{1}{4}aa + 2pq - b$
2. $ap - 2qr = c \Rightarrow 2qr = ap - c$
3. $pp - rr = d \Rightarrow rr = pp - d$

On multiplie alors quatre fois la première équation par la troisième et on met au carré la deuxième.

$$\begin{aligned} 4qqrr &= 8p^3 + (aa - 4b)pp - 8dp - d(aa - 4b) \\ 4qqrr &= aapp - 2acp + cc \end{aligned}$$

Egalant maintenant les deux dernières équations, on tombe sur une équation du troisième degré en p

$$\begin{aligned} 8p^3 + (aa - 4b)pp - 8dp - d(aa - 4b) = aapp - 2acp + cc \\ 8p^3 - 4bpp + (2ac - 8d)p - aad + 4bd - cc = 0 \end{aligned}$$

qu'on sait résoudre. On trouve alors trois valeurs pour p.

On peut ensuite trouver q par la première condition : $q = \sqrt{\frac{1}{4}aa + 2p - b}$.

Puis r par la seconde condition : $r = \frac{ap-c}{2q}$.

On résout ensuite l'équation $(xx + \frac{1}{2}ax + p)^2 - (qx - r)^2 = 0$.

$$(xx + \frac{1}{2}ax + p)^2 - (qx - r)^2 = 0$$

$$(xx + \frac{1}{2}ax + p)^2 = (qx - r)^2$$

$$\begin{aligned} xx + \frac{1}{2}ax + p &= qx - r & \qquad xx + \frac{1}{2}ax + p &= -qx + r \\ xx &= (q - \frac{1}{2}a)x - p + r & \qquad xx &= -(q + \frac{1}{2}a)x - p - r \end{aligned}$$

Donc on obtient quatre racines.

Exemple : on cherche à résoudre l'équation $x^4 - 6x^3 + 12xx - 12x + 4 = 0$. On cherche à transformer cette formule en $(xx - 3x + p)^2 - (qx - r)^2 = 0$. On a mis un $-3x$ à la place de a car c'est la seule valeur possible pour obtenir $-6x^3$. Nos trois conditions deviennent :

1. $9 + 2p - qq = 12 \Rightarrow qq = 2p - 3$
2. $6p + 2qr = 12 \Rightarrow qr = 6 - 3p$
3. $pp - rr = 4 \Rightarrow rr = pp - 4$

Multipliant la première et la troisième, puis carrant la deuxième, on obtient les deux équations suivantes

- $qqrr = 2p^3 - 3pp - 8p + 12$
- $qqrr = 9pp - 36p + 36$

En les égalant, on obtient une équation du troisième degré en p.

$$\begin{aligned} 2p^3 - 3pp - 8p + 12 &= 9pp - 36p + 36 \\ 2p^3 - 12pp + 28p + -24 &= 0 \\ p^3 - 6pp + 14p - 12 &= 0 \end{aligned}$$

dont une des racines est $p = 2$. On en tire que

$$\begin{aligned} q = \sqrt{\frac{1}{4}aa + 2p - b} = q = \sqrt{\frac{1}{4} \cdot 36 + 4 - 12} &= \sqrt{1} = 1 \\ r = \frac{ap - c}{2q} = r = \frac{-12 + 12}{2} &= 0 \end{aligned}$$

On obtient donc l'équation suivante $(xx-3x+2)^2 = xx$. On la résout facilement :

$$\begin{aligned} xx - 3x + 2 &= x & xx - 3x + 2 &= -x \\ xx &= 4x - 2 & xx &= 2x + 2 \\ x &= 2 \pm \sqrt{2} & x &= 1 \pm \sqrt{-1} \end{aligned}$$

3.4.15 Chapitre 15 : D'une nouvelle méthode de résoudre les équations du quatrième degré

Il y a une méthode tout à fait différente de Bombelli, mais qui se base aussi sur le fait qu'on sache résoudre une équation du troisième degré. On va commencer par supposer que $x = \sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r}$, où p, q et r sont les racines de l'équation du troisième degré $z^3 - fzz + gz - h = 0$. On a alors que :

$$\begin{aligned} &(z-p)(z-q)(z-r) = z^3 - (p+q+r)zz + (pq+pr+qr)z - pqr \\ &\Rightarrow p + q + r = f \\ &\Rightarrow pq + pr + qr = g \\ &\Rightarrow pqr = h \end{aligned}$$

En mettant x au carré, on obtient :

$$\begin{aligned} xx &= p + q + r + 2\sqrt{pq} + 2\sqrt{pr} + 2\sqrt{qr} \\ xx - f &= 2\sqrt{pq} + 2\sqrt{pr} + 2\sqrt{qr} \end{aligned}$$

On élève à nouveau l'équation au carré et en remarquant que $4p+4q+4r = 4g$, $pqr = h$ et $(\sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r}) = x$, on obtient

$$\begin{aligned} &x^4 - 2fxx + ff = 4pq + 4pr + 4qr + 8\sqrt{ppqr} + 8\sqrt{pqqr} + 8\sqrt{pqrr} \\ &x^4 - 2fxx + ff = 4g + 8\sqrt{pqr}(\sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r}) \\ &x^4 - 2fxx + ff = 4g + 8\sqrt{h}x \\ &x^4 - 2fxx - 8\sqrt{h}x + ff - 4g = 0 \end{aligned}$$

On sait qu'une des racines de cette équation est $x = \sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r}$. On montrera plus bas que l'équation $x^4 - axx - bx - c = 0$ est générale, c'est-à-dire qu'on pourra toujours éliminer le terme au cube d'une équation du quatrième degré. Supposons donc l'équation $x^4 - axx - bx - c = 0$. On identifie ses coefficients avec ceux trouvés ci-dessus :

$$\begin{aligned}
&2f = a \Rightarrow f = \frac{a}{2} \\
&8\sqrt{h} = b \Rightarrow h = \frac{bb}{64} \\
&ff - 4g = -c \Rightarrow \frac{aa}{4} - 4g = -c \Rightarrow g = \frac{aa}{16} + \frac{c}{4}
\end{aligned}$$

On a ainsi obtenu les coefficients de l'équation du troisième degré $z^3 - fzz + gz - h$ servant à trouver les termes radicaux qui composent notre racine x. On pourrait croire alors que cette méthode ne donne qu'une seule solution. Il n'en est rien. En effet, elle en donne bien plus car chaque racine carrée peut être soit positive, soit négative. On remarque que seul le terme en x de notre équation $x^4 - 2fxx - 8\sqrt{h}x + ff - 4g = 0$ nécessite qu'on fasse attention aux signes des radicaux. En effet, $\sqrt{h} = \frac{b}{8}$. Si $\frac{b}{8}$ est positif, il faudra que le produit des $\sqrt{p}$, $\sqrt{q}$ et $\sqrt{r}$ soit aussi positif. On obtient donc les quatres solutions suivantes :

1. $x = \sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r}$
2. $x = \sqrt{p} - \sqrt{q} - \sqrt{r}$
3. $x = -\sqrt{p} + \sqrt{q} - \sqrt{r}$
4. $x = -\sqrt{p} - \sqrt{q} + \sqrt{r}$

Alors que si $\frac{b}{8}$ est négatif, on aura les racines suivantes :

1. $x = \sqrt{p} + \sqrt{q} - \sqrt{r}$
2. $x = \sqrt{p} - \sqrt{q} + \sqrt{r}$
3. $x = -\sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r}$
4. $x = -\sqrt{p} - \sqrt{q} - \sqrt{r}$

Prenons, comme à notre habitude, un exemple pour bien comprendre tout ceci. On cherche les solutions de $x^4 - 25xx + 60x - 36 = 0$. On a

$$a = 25, b = -60, c = 36$$

Trouvons l'équation du troisième degré.

- $f = \frac{a}{2} = \frac{25}{2}$
- $g = \frac{aa}{16} + \frac{c}{4} = \frac{625}{16} + \frac{36}{4} = \frac{769}{16}$
- $h = \frac{bb}{64} = \frac{3600}{64} = \frac{225}{4}$

L'équation cherchée est donc celle-ci.

$$z^3 - \frac{25}{2}z^2 + \frac{769}{16}z - \frac{225}{4} = 0$$

Pour chasser les fractions, on fait le changement de variable suivant $z = \frac{u}{4}$. On obtient alors

$$\frac{u^3}{64} - \frac{25}{2}\frac{u^2}{16} + \frac{769}{16}\frac{u}{4} - \frac{225}{4} = 0$$

Multipliant le tout par 64 pour chasser les fractions, on trouve

$$u^3 - 50uu + 769u - 3600 = 0$$

Par tâtonnements, on trouve que $u = 9$ est une racine. On va donc diviser l'équation par $(u - 9)$ et obtenir une équation du second degré.

$$\begin{aligned}
&uu - 41u + 400 = 0 \\
&uu = 41u - 400 \\
&u = \frac{41}{2} \pm \sqrt{\frac{41^2}{4} - 400} = \frac{41 \pm \sqrt{1681 - 1600}}{2} = \frac{41 \pm \sqrt{81}}{2} = \frac{41 \pm 9}{2}
\end{aligned}$$

On trouve alors que les trois solutions sont

$$u = 9, u = 25, u = 16$$

et donc nos valeurs pour les z sont

$$z = \frac{9}{4}, z = \frac{25}{4}, z = 4$$

On a donc trouvé $p = \frac{9}{4}$, $q = \frac{25}{4}$ et $r = 4$. Comme $\frac{b}{8} = -\frac{15}{2}$ est négative, les valeurs pour x seront :

1. $x = \sqrt{p} + \sqrt{q} - \sqrt{r} = \frac{3}{2} + \frac{5}{2} - 2 = 2$
2. $x = \sqrt{p} - \sqrt{q} + \sqrt{r} = \frac{3}{2} - \frac{5}{2} + 2 = 1$
3. $x = -\sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r} = -\frac{3}{2} + \frac{5}{2} + 2 = 3$
4. $x = -\sqrt{p} - \sqrt{q} - \sqrt{r} = -\frac{3}{2} - \frac{5}{2} - 2 = -6$

On va maintenant voir comment éliminer le terme au cube d'une équation du quatrième degré. Soit donc pour cela l'équation $y^4 + ay^3 + byy + cy + d = 0$. On va poser $x = y + \frac{a}{4}$ et regarder ce qui se passe.

$$\begin{array}{rlllll}
y^4 = & x^4 - ax^3 & + \frac{3}{8}aaxx & - \frac{1}{16}a^3x & + \frac{1}{256}a^4 & \\
+ay^3 = & & + ax^3 - \frac{3}{4}aaxx & + \frac{3}{16}a^3x & - \frac{1}{64}a^4 & \\
+byy = & & + bxx & - \frac{1}{2}abx & + \frac{1}{16}aab & \\
+cy = & & & + cx & - \frac{1}{4}ac & \\
+d = & & & & + d & \\
\hline
& x^4 + 0 & - \frac{3}{8}aaxx & + \frac{1}{8}a^3x & - \frac{3}{256}a^4 & \\
& & + bxx & - \frac{1}{2}abx & + \frac{1}{16}aab & \\
& & & + cx & - \frac{1}{4}ac & \\
& & & & + d &
\end{array}\left.\vphantom{\begin{array}{c}a\\a\\a\\a\end{array}}\right\} = 0.$$

On obtient donc une équation sans troisième puissance.

En conclusion, nous allons parler un peu de la méthode pour résoudre les équations de degrés supérieurs à 4. Il n'existe pas de règle générale pour ces équations, comme mentionné plus haut. Aussi, dans la mesure du possible, on cherchera à les réduire à des degrés inférieurs. Par exemple, dans le cas de racines entières qui divisent toujours le terme constant, on pourra atteindre les degrés inférieurs en utilisant la division polynomiale.

3.4.16 Chapitre 16 : De la résolution des équations par des approximations

Souvent, lors de la résolution des équations, on tombe sur des racines qui ne sont pas rationnelles. On peut alors soit les exprimer par des quantités radicales, soit on n'a même pas cette possibilité (lorsqu'elles sont imaginaires), comme par exemple quand on résout les équations du quatrième degré. On doit alors donner des valeurs approximatives. Les méthodes que nous allons voir nous permettent de donner des valeurs jusqu'à ce que l'erreur soit acceptable.

1. La première méthode consiste à estimer la valeur d'une inconnue x entre deux entiers, par exemple, entre 4 et 5. Ensuite, comme on sait que x est plus grand que 4, on supposera $x = 4 + p$, où p est une fraction moindre que l'unité. On se basera alors sur la nouvelle valeur pour en produire une autre encore plus proche de la solution.

   Par exemple, supposons qu'on doive calculer la valeur de x pour l'équation $xx = 20$. On sait que $16 < 20 < 25$, ainsi x sera compris entre 4 et 5. On suppose alors $x = 4 + p$. On a alors $xx = 16 + 8p + pp$ dont on néglige le terme pp car très petit. On trouve alors $16 + 8p = 20$ et la valeur de $p = \frac{1}{2}$. Comme on a supposé $pp = 0$, on voit que notre solution $x = 4 + \frac{1}{2}$ est plus petite que la valeur exacte. On peut alors réitérer notre opération pour trouver des solutions dont l'erreur est de plus en plus petite.

   Généralisons maintenant au cas où on cherche la racine de l'équation $xx = a$. On sait que $n < x < n + 1$. On pose $x = n + p$ avec p comme précédemment. Elevant alors au carré, on obtient $xx = nn + 2np + pp$. Comme pp est supposé très petit, on le néglige et on obtient alors $nn + 2np = a$. On arrive alors à en déduire la valeur de $p = \frac{a-nn}{2n}$ et donc notre nouvelle valeur pour x sera

   $$x = n + \frac{a - nn}{2n} = \frac{a + nn}{2n}$$

   qui sera encore plus proche de la vraie solution que n. On peut alors itérer le processus en posant $x = \frac{a+nn}{2n} + p$ et en appliquant à nouveau la méthode.

   Par exemple, si on cherche la racine carrée de 2, on a alors $a = 2$. On sait que $1 < x < 2$ et donc en posant $x = 1 + p$, puis l'élevant au carré, on obtient $xx = 1 + 2p + pp$. On néglige le terme pp et on doit résoudre $1 + 2p = 2$. Finalement on trouve $p = \frac{1}{2}$, et une meilleure approximation sera $x = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$. Si on itère, on obtient

Valeur de n	Valeur de x	Différence du carré avec 2
1	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{4}$
$\frac{3}{2}$	$\frac{17}{12}$	$\frac{1}{144}$
$\frac{17}{12}$	$\frac{577}{408}$	$\frac{1}{166464}$

On remarque que l'erreur diminue très vite, aussi on arrive rapidement à un résultat satisfaisant.

On peut utiliser cette méthode aussi pour les racines cubiques ou bicarrées. En effet, soit l'équation $x^3 = a$ et on en cherche sa racine. On suppose qu'on connaît n tel que $n < x < n+1$. On suppose alors comme auparavant $x = n+p$ et on élève au cube. On aura alors $x^3 = n^3 + 3nnp$ puisqu'on va négliger les termes contenant du pp ou du p^3. On a alors que $n^3+3nnp = a$ et donc que $p = \frac{a-n^3}{3nn}$. Une meilleure approximation de $\sqrt[3]{a}$ sera alors $x = n + \frac{a-n^3}{3nn} = \frac{2n^3+a}{3nn}$.

Cette méthode peut très bien s'utiliser dans la résolution d'équations, quelle que soit leur nature. En effet, si on cherche les racines de $x^3+axx+bx+c = 0$ et qu'on sait que n est une valeur approchée d'une racine, on pourra poser $x = n-p$. On calcule ensuite $xx = nn-2np$ et $x^3 = n^3-3nnp$ et on remplace dans l'équation afin de trouver p. L'équation devient alors

$$\begin{aligned}
&n^3 - 3nnp + ann - 2anp + bn - bp + c = 0\\
&n^3 + ann + bn + c = 3nnp + 2anp + bp\\
&n^3 + ann + bn + c = (3nn + 2an + b)p\\
&p = \frac{n^3 + ann + bn + c}{3nn + 2an + b}
\end{aligned}$$

et finalement on peut trouver $x = n - \frac{n^3+ann+bn+c}{3nn+2an+b} = \frac{2n^3+ann-c}{3nn+2an+b}$ qui est une bien meilleure solution que n.

Pour le voir, prenons l'exemple suivant. On cherche les racines de l'équation suivante : $x^3+2xx+3x-50 = 0$. On a alors que $a = 2$, $b = 3$ et $c = -50$. On sait que $n = 3$ est une valeur assez proche d'une racine. On a alors que la nouvelle valeur $x = \frac{2n^3+ann-c}{3nn+2an+b} = \frac{122}{42} = \frac{61}{21}$ qui, introduite dans l'équation donne

$$(\frac{61}{21})^3 + 2(\frac{61}{21})^2 + 3\frac{61}{21} - 50 = \frac{916}{9261} \cong 0,1$$

Si on recommençait cette itération avec $n = \frac{61}{21}$, on obtiendrait une valeur encore plus proche.

Cette méthode approche très vite une racine estimée, mais il faut faire attention à ce que l'approximation n soit assez proche de la solution car si elle est trop éloignée, la méthode donnera des résultats *impropres*. En effet, dans l'exemple $x^5 - 6x - 10 = 0$, on sait que la racine x est comprise entre 1 et 2. On supposera donc $x = n + p$. On élève à la cinquième puissance et on obtient $x^5 = n^5 + 5n^4p$. Remettant dans l'équation, on trouve

$$
\begin{aligned}
&n^5 + 5n^4p - 6n - 6p - 10 = 0 \\
&p = \frac{10 + 6n - n^5}{5n^4 - 6} \\
&x = n + \frac{10 + 6n - n^5}{5n^4 - 6} = \frac{4n^5 + 10}{5n^4 - 6}
\end{aligned}
$$

Si on prend $n = 1$, on voit que $x = \frac{14}{-1} = -14$ s'éloigne fortement de notre racine, alors que $n = 2$ rend $x = \frac{138}{74} = \frac{69}{37}$ plus proche. Il faut donc faire attention aux choix de l'approximation.

2. La méthode vue ci-dessus est la méthode la plus intuitive pour trouver une approximation. Malheureusement, elle nous renvoie dans des calculs longs, très vite fatigants mais surtout risqués car on peut faire bien des erreurs avant de parvenir à la solution. C'est pourquoi nous allons voir une méthode qui mérite une attention à cause de la facilité de son calcul. Il s'agit de trouver une progression géométrique telle que, si on divise un nombre de la suite par le précédent, on trouve une approximation de x. Par exemple, si la suite est p, q, r, s, t, alors $\frac{q}{p} = x$, $\frac{r}{p} = xx$, $\frac{s}{p} = x^3$, etc...
Prenons directement un exemple pour voir combien cette façon de calculer est facile et directe. Soit donc l'équation $xx = x+1$ dont on veut trouver la racine. On suppose alors p, q, r, s, t tels que $\frac{q}{p} = x$, $\frac{r}{p} = xx = x+1 = \frac{q}{p}+1$ d'où $r = p+q$ et ainsi de suite. En supposant que les premiers termes sont 0 et 1, on obtient la suite

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \ldots$$

En divisant deux termes consécutifs, on obtient au début de la suite une erreur grande alors que par la suite, plus on avance, plus la suite va s'approcher de la valeur désirée.

Rapport	Valeur de x
1	∞
2	$\frac{1}{1} = 1$
3	$\frac{2}{1} = 2$
4	$\frac{3}{2}$
...	...
m	$\frac{55}{34}$

Si on prend par exemple $x = \frac{21}{13}$, on aura que l'erreur sera $(\frac{21}{13})^2 - \frac{21}{13} + 1 = \frac{441}{139} - \frac{442}{169} = -\frac{1}{169}$ ce qui est remarquable. Et si on va encore plus loin dans la progression géométrique, on aura encore mieux.

Si on fait de même avec $xx = 2x+1$, on aura, si p, q, r, s, t sont les premiers termes de la progression, $\frac{q}{p} = x$, $\frac{r}{p} = xx = 2\frac{q}{p} + 1$ d'où $r = 2q + p$ et on continue ainsi de suite. Alors en supposant que les deux premiers termes de la progression soient 0 et 1, on obtient la suite

$$0, 1, 2, 5, 12, 29, 70, 169, \dots$$

Et la suite des valeurs approchées de x sera

$$\frac{1}{0}, 2, \frac{5}{2}, \frac{12}{5}, \frac{29}{12}, \frac{70}{29}, \frac{169}{70}, \dots$$

Si on avait résolu l'équation, on aurait trouvé $x = 1 + \sqrt{2}$, on a donc trouvé une série approchant la valeur $\sqrt{2}$

$$\frac{1}{0}, 1, \frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{17}{12}, \frac{41}{29}, \frac{99}{70}, \dots$$

Par exemple, si on prend le carré de $\frac{99}{70}$, on obtient $\frac{9801}{4900}$ dont la différence avec 2 n'est que de $\frac{1}{4900}$.
On peut aussi appliquer cette méthode à des équations de plus grand degré. Par exemple, si on cherche une approximation de la racine de l'équation $x^3 = xx + 2x + 1$, on aura alors $\frac{q}{p} = x$, $\frac{r}{p} = xx$ et $\frac{s}{p} = x^3 = xx + 2x + 1 = \frac{r}{p} + 2\frac{q}{p} + 1$ donc $s = r + 2q + p$. On peut alors trouver la suite en partant de 0, 0 et 1.

$$0, 0, 1, 1, 3, 6, 13, 28, 60, 129, \dots$$

et les valeurs approchées de x sont

$$\frac{0}{0}, \frac{1}{0}, 1, 3, 2, \frac{13}{6}, \frac{28}{13}, \frac{60}{28}, \frac{129}{60}$$

Mais il est des cas où on ne pourra pas appliquer cette méthode. Par exemple, pour $xx = 2$, si on veut déterminer une progression géométrique d'exposant x, on doit poser $\frac{q}{p} = x$ et $\frac{r}{p} = xx = 2$ et on en déduit $r = 2p$. Faisant partir la suite de 1 et 1, on obtient :

$$1, 1, 2, 2, 4, 4, 8, 8, 16, 16, 32, 32 \dots$$

Les rapports oscillent constamment sur 1 et 2. Il faut alors contourner intelligemment ce problème, par exemple, en imposant un changement de variable $x = y - 1$ et on retombe sur l'équation $yy = 2y + 1$ déjà traitée plus haut.
Lorsqu'une racine rationnelle existe, cette méthode pourra nous amener à elle aussi. Soit, pour illustrer cela, l'équation $xx = x + 2$ dont on connaît la racine $x = 2$. On voit alors que si p, q et r sont les premiers termes de la progression, $r = q + 2p$. Si on fait commencer notre suite par 1 et 2, on obtient

$$1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, \dots$$

la progression est d'exposant 2, exactement notre racine.

On voit aussi, dans l'exemple suivant, que les termes pour commencer la suite sont très importants. Par exemple, pour l'équation $xx = 4x - 3$, on sait que les racines sont $x = 1$ et $x = 3$. La formule pour trouver la suite est $r = 4q - 3p$. Si on fait commencer notre suite par 1 et 1, on trouve

$$1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, \ldots$$

alors que si on la fait commencer par 1 et 3, on obtient

$$1, 3, 9, 27, 81, 243, 729, \ldots$$

qui nous donne exactement la racine $x = 3$. De manière générale la racine approchée sera la plus grande comme on le voit dans les suites suivantes. La valeur approchée est toujours 3, la plus grande racine dans notre cas.

Commencement,

0, 1, 4, 13, 40, 121, 364, &c.
1, 2, 5, 14, 41, 122, 365, &c.
2, 3, 6, 15, 42, 123, 366, 1095,&c.
2, 1,−2,−11,−38,−118,−362,−1091,
−3278, &c.

Pour finir ce premier tome, nous allons voir une équation assez loufoque.

$$x^{\infty} = x^{\infty-1} + x^{\infty-2} + x^{\infty-3} + \ldots$$

La caractéristique de la suite approchant la racine de cette équation est que chaque terme est la somme de tous les précédents. En faisant partir la suite par 1, on trouve

$$1, 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, \ldots$$

d'où on peut dire que la plus grande racine de l'équation proposée est 2. On peut le montrer aussi en divisant l'équation par x^{∞}.

$$1 = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \ldots$$

Cette somme vaut $\frac{1}{x-1}$ et on voit donc que $x = 2$.

On a donc vu deux façons différentes d'approcher des solutions. La meilleure méthode selon Euler est la première car elle est très mécanique et on n'a pas besoin de préparer quoi que ce soit de particulier, alors que la deuxième exige une certaine préparation de l'équation et des termes de la suite qui sera utilisée.

Chapitre 4

Elémens d'algèbre, Tome 2

4.1 Résumé et particularité du deuxième tome

Tout d'abord, nous allons donner la table des matières du second tome des *Elémens d'algèbre*.

1. Chapitre 1 : De la résolution des équations du premier degré qui renferment plus d'une inconnue.
2. Chapitre 2 : De la règle qu'on nomme *regula coeci* où il s'agit de déterminer, par deux équations, trois ou un plus grand nombre d'inconnues.
3. Chapitre 3 : Des équations indéterminées composées, dans lesquelles l'une des inconnues ne dépasse pas le premier degré.
4. Chapitre 4 : De la manière de rendre rationnelles les quantités sourdes de la forme $\sqrt{a + bx + cxx}$.
5. Chapitre 5 : Des cas où la formule $a + bx + cxx$ ne peut jamais devenir un carré.
6. Chapitre 6 : Des cas en nombres entiers, où la formule $axx + b$ devient un carré.
7. Chapitre 7 : D'une méthode particulière, par laquelle la formule $ann + 1$ devient un carré en nombres entiers.
8. Chapitre 8 : De la manière de rendre rationnelle la formule irrationnelle $\sqrt{a + bx + cxx + dx^3}$.
9. Chapitre 9 : De la manière de rendre rationnelle la formule incommensurable $\sqrt{a + bx + cxx + dx^3 + ex^4}$.
10. Chapitre 10 : De la manière de rendre rationnelle la formule irrationnelle $\sqrt[3]{a + bx + cxx + dx^3}$.
11. Chapitre 11 : De la résolution de la formule $axx+bxy+cyy$ en ses facteurs.
12. Chapitre 12 : De la transformation de la formule $axx + cyy$ en des carrés et en des puissances plus élevées.

13. Chapitre 13 : De quelques expressions de la forme $ax^4 + by^4$, qui ne sont pas réductibles à des carrés.
14. Chapitre 14 : Solutions de quelques questions qui appartiennent à cette partie de l'analyse.
15. Chapitre 15 : Solutions de quelques questions où l'on demande des cubes.

Cette table des matières résume très bien chaque sujet et donne une idée assez claire de la nature des problèmes discutés. On voit que dans ce deuxième tome, Euler s'attaque à des questions plus difficiles qu'au premier. De plus, ces chapitres, mis à part le premier et le deuxième, ne présenteront plus d'exemples de la vie courante. En effet, dans cette deuxième partie, la beauté des caractéristiques, des méthodes employées et des subtilités mises en oeuvre va remplacer le côté utilitaire et ingénierie des mathématiques. On pourrait considérer ce tome comme un recueil d'art.

4.2 Additions

Lorsqu'on lit la préface des *Elémens d'algèbre*, on apprend, en plus des louanges que tous vouent au génie d'Euler, que c'est M. de Lagrange, un des plus grands mathématiciens de l'époque, qui est l'auteur des *Additions* du second volume. Lagrange introduit d'ailleurs lui-même, non sans humour, ses additions en commençant par nommer Diophante, Fermat et Bachet, les seuls avant Euler à avoir travaillé sur l'analyse indéterminée tout en provoquant et en exprimant haut et fort son mépris pour les autres géomètres qui semblaient avoir délaissé cette branche des mathématiques. Il décrit ensuite ce qu'il va enseigner :

1. La théorie des fractions continues.
2. Des méthodes pour résoudre des équations du premier et du second degré, surtout en nombres rationnels ou entiers.
3. Des fonctions aux caractérisques semblables dont le produit reste une fonction semblable.

Lagrange finit par souligner qu'il tient vraiment à ce que ses additions interpellent les géomètres.

Je souhaite que les matières que j'y ai traitées puissent mériter l'attention des Géomètres, et réveiller leur goût pour une partie de l'analyse, qui me paraît très digne d'exercer leur sagacité.

4.3 Un problème fort remarquable

Un chapitre de ce deuxième tome des *Elémens d'algèbre* est particulièrement intéressant. Il s'agit du chapitre 15. Le problème consiste à trouver des cas où la formule $a + bx + cxx$ n'est pas un carré.

Dans un premier temps, on va montrer que la forme générale de ces formules est $pxx + q$. En effet, quand on part de l'équation générale $a + bx + cxx$, on peut lui donner la forme voulue en posant $x = \frac{y-b}{2c}$. On obtient alors la formule $a + \frac{by-bb}{2c} + \frac{yy-2by+bb}{4c}$. Comme on veut que cette quantité soit un carré, on peut l'égaler à $\frac{zz}{4}$. Multipliant le tout par $4c$, on obtient :

$$\begin{aligned}
&4ac + 2by - 2bb + yy - 2by + bb = czz \\
&4ac - bb + yy = czz \\
&yy = czz + bb - 4ac
\end{aligned}$$

Donc si notre formule de départ est un carré, alors $czz + bb - 4ac$ le sera aussi. En posant $t = bb - 4ac$, on trouve une formule du type voulu $czz + t$. Lorsque $t = 0$, notre formule n'est un carré que si czz est un carré. Cela force c à être un carré car sinon la formule ne sera pas un carré. Pour les autres cas, nous allons devoir recourir à la propriété des nombres par rapport à leur division d'autres nombres qu'on a vue plus haut et qu'on rappelle ici.

1. On sait que les nombres entiers peuvent être classés dans trois espèces différentes par rapport au diviseur 3. On va considérer leur carré.
   - Les nombres divisibles par 3, représentés par $3n$. Leur carré est divisible par $3^2 = 9$. On les mettra dans la catégorie $9n$
   - Les nombres dont le reste de la division par 3 est 1, représentés par $3n + 1$. Si on prend leur carré, on aura $9nn + 6n + 1$ c'est-à-dire qu'ils resteront dans leur espèce $3n + 1$.
   - Les nombres dont le reste de la division par 3 est 2, réprésentés par $3n + 2$. Leur carré est de la forme $9nn + 12n + 4$ de la forme $3n + 1$.

   On conclut donc que les carrés sont soit divisibles par 3 et 9, soit le reste de leur division par 3 est 1. Donc aucun nombre de type $3n + 2$ ne peut être un carré.

   On va donc pouvoir démontrer grâce à cela que $3xx + 2$ ne sera jamais un carré quel que soit l'entier qu'on assigne à la valeur x. En effet, le reste après division par 3 sera toujours 2. On va donc lui donner une valeur fractionnaire. Mais on va montrer que même dans ce cas-là, la formule $3xx + 2$ ne sera jamais un carré. Soit $x = \frac{t}{u}$, où on suppose que t et u sont premiers entre eux car on prend directement une fraction irréductible. On obtient donc $3\frac{tt}{uu} + 2$. Si on la multiplie par un carré, cette quantité doit rester un carré. On multiplie donc par uu, et on obtient la formule sur laquelle on veut travailler, à savoir $3tt + 2uu$. Cette quantité ne saurait être un carré car :

   (a) Si u est divisible par 3, alors t ne le sera pas car t et u sont premiers entre eux et donc $3tt + 2uu$ est divisible par 3 mais pas par 9.

   (b) Si u n'est pas divisible par 3, alors le reste de uu, qui est un carré, sera de 1. Mais alors $3tt + 2uu$ nous laissera un reste 2 et ne sera par conséquent pas un carré.

   On pourra faire de même pour toutes les formules $3tt + (3n + 2)uu$.

   (a) Dans le cas où u est divisible par 3, alors t ne le sera pas car t et u sont toujours premiers entre eux. Alors $3tt + (3n + 2)uu$ ne sera divisible que par 3 et non par 9.

(b) Dans le cas où u n'est pas divisible par 3, alors le reste laissé par $3tt + (3n + 2)uu$ sera 2 après division par 3.

On a donc que pour des n entiers positifs ou négatifs, $3tt + (3n + 2)uu$ n'est jamais un carré.

2. On fait à présent de même pour le cas où le diviseur est 4. Il existe quatre sortes de nombres.

   (a) Ceux de la forme $4n$. Leur carré est divisible par 16, donc de la forme $16n$.

   (b) Ceux de la forme $4n + 1$. Si on les élève au carré, on obtient $16nn + 8n + 1$. Ils sont donc de la forme $8n + 1$.

   (c) Ceux de la forme $4n + 2$, dont le carré est $16nn + 16n + 4$, du type $16n + 4$.

   (d) Ceux de la forme $4n+3$, avec pour carré $16nn+24n+9$, de la forme $8n + 1$.

   Cela nous apprend que les carrés impairs sont uniquement de la forme $8n + 1$ et ceux pairs sont de la forme $16n$ ou $16n + 4$. Dans tous les autres cas, on n'a jamais de carré.

   Grâce à cette classification, on peut montrer à nouveau que $3tt + 2uu$ ne peut pas être un carré.

   (a) Soit t et u sont pairs, et dans ce cas là, on va se ramener dans un des cas suivants en posant $t = 2x$ et $u = 2y$. On aura la formule $3tt + 2uu = 12xx + 8yy$. En divisant par le carré 4, on a que cette formule n'est un carré que si $3xx + 2yy$ est un carré. En appliquant cette méthode plusieurs fois, on pourra supposer qu'au moins un des deux nombres est impair. On appelle ce concept la *descente infinie* qui n'est pas mentionnée dans les *Elémens d'algèbre* mais qui était bien connu à l'époque grâce à Fermat.

   (b) Si t et u sont impairs, alors tt et uu sont de type $8n + 1$ mais alors le reste de $3tt + 2uu$ après division par 8 serait 5. Du coup, $3tt + 2uu$ ne peut être un carré.

   (c) Si on suppose t pair et u impair, on a que le reste de la division de $3tt + 2uu$ par 4 est 2. La formule ne peut pas être un carré dans ce cas là car le reste de la division par 8 sera soit plus grand, soit égal à 2.

   (d) Si t est impair et u pair, alors $3tt$ est de la forme $8n + 3$ et $2uu$ de type $8n$. Alors $3tt + 2uu$ sera de la forme $8n + 3$ qui ne peut jamais être un carré.

   Comme avant, on peut étendre cette démonstration à toutes les formules de la forme $(8m + 3)tt + (8n + 2)uu$, où m et n sont des entiers positifs ou négatifs.

3. On peut faire de même pour les diviseurs 5,7,. . .

4. On va généraliser cela. Soit d un diviseur. On peut classer les nombres de deux manières.

$$dn, dn+1, dn+2, dn+3, \ldots$$
$$dn, dn-1, dn-2, dn-3, \ldots$$

On voit alors que les carrés de $dn+1$ et $dn-1$ laissent un reste 1 après division par d, ceux de $dn+2$ et $dn-2$ un reste 4, …On généralise en disant que les nombres de la forme $dn+a$ et $dn-a$ laissent un reste de aa. Avec ceci, on peut trouver une infinité de formules telles que $att+buu$ ne puisse pas être un carré.

Chapitre 5

Commentaires sur le livre

5.1 Le symbolisme

Lorsqu'on lit les *Elémens d'algèbre*, on ne se rend presque pas compte qu'on lit un livre qui a déjà plus de deux cents ans. En effet, le symbolisme d'Euler, hormis quelques détails comme sa façon d'écrire xx à la place de x^2, est le même que nous utilisons actuellement. Notamment, dans un texte, on n'écrit pas de nombres dont on n'a aucune utilité dans un calcul en chiffres mais plutôt en toutes lettres. Les chiffres sont réservés aux nombres qui seront utilisés dans le calcul du problème. L'exemple suivant l'illustre bien :

> *Quelqu'un achète un certain nombre de pièces de drap ; il paye pour la première* 2 *écus ; pour la seconde* 4 *écus ; pour la troisième* 6 *écus et de même toujours* 2 *écus de plus pour les suivantes ; et toutes les pièces ensemble lui coûtent* 110 *écus. Combien y avait-il de pièces ?*

De plus, tous les caractères mathématiques tels que les nombres, les inconnues ou les fractions sont écrits dans un autre style afin de mieux les distinguer du texte. Enfin, comme il le dit dans un chapitre, on prendra les lettres du début de l'alphabet pour indiquer les quantités connues, et celles de la fin pour indiquer les inconnues. Cette convention avait déjà été introduite par Descartes mais elle n'a commencé à se répandre qu'avec Euler.

Ce formalisme est un peu l'héritage qu'a laissé Euler à travers ses travaux qui se sont répandus partout dans le monde. En effet, au cours de l'histoire, le formalisme a beaucoup évolué et les habitudes pour l'écriture ont très souvent été influencées par les plus grands mathématiciens. Le fait qu'aujourd'hui nous utilisons tous le formalisme d'Euler témoigne de la grandeur de ses oeuvres.

5.2 La pédagogie

Nous rappelons qu'Euler, en plus de son génie en mathématiques, était d'une polyvalence incroyable. En effet, il a eu une licence de philosophie, a étudié la théologie, le grec et l'hébreu, sans compter son poste de médecin dans l'armée de Russie. Pour finir, nous soulignerons qu'il a aussi enseigné dans des domaines variés : les mathématiques, la physique et la physiologie. Et pendant toutes ces années d'enseignement, Euler a largement eu le temps de trouver la meilleure pédagogie pour apprendre aux gens la science. C'est dans cette optique qu'il a écrit ce livre. Ses méthodes d'enseignement se sentent sur le papier.

- Une foule d'exemples et de problèmes d'actualité (de l'époque) à faire par soi-même pour mieux comprendre.
- Montrer des cas particuliers pour faire deviner la solution générale à l'élève. Et ceci même dans le deuxième tome dont certains problèmes semblent irrésolubles.
- Ne passer par aucun raccourci, vraiment développer tous les détails avec une précision sans égale.
- Parler simplement et directement sans artifice.

Sa pédagogie a d'ailleurs été mise à l'épreuve directement sur son tailleur dont on disait qu'il *ne pouvait être mis, quant à sa capacité, qu'au rang des esprits ordinaires.* Et ce fut un succès, car ce tailleur n'a pas seulement compris tout ce que son maître lui dictait et lui enseignait, mais il a aussi résolu une multitude de problèmes analytiques.

Toutes ces raisons ont donc rendu ce livre très populaire. Son accessibilité mais aussi sa qualité, car on apprend à résoudre beaucoup de problèmes de la vie courante dans les *Elémens d'algèbre*, en ont été les principaux atouts.

5.3 L'influence sur nos mathématiques

Ce n'est un secret pour personne, les travaux d'Euler ont beaucoup apporté aux mathématiques. En effet, il a beaucoup apporté au calcul infinitésimal, est celui qu'on appelle le père de la théorie des graphes et ses oeuvres continuent à être utilisées aujourd'hui pour produire de nouveaux résultats. Mais qu'en est-il de notre livre, les *Elémens d'algèbre* ?

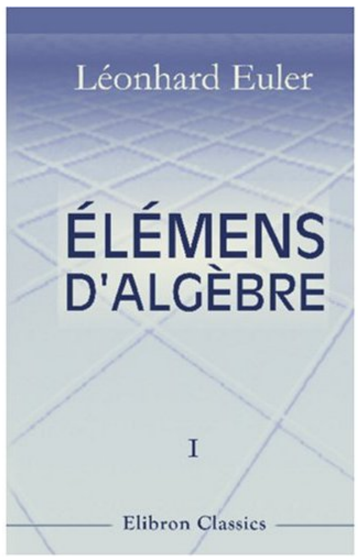
On a vu plus haut, lorsqu'on résolvait des équations du troisième et du quatrième degré qu'Euler démontrait ce qu'on appelle le théorème de Gauss. Cela nous permettait de dire que si une racine de l'équation est entière, elle doit diviser le terme constant. Cela est encore enseigné dans les écoles et est même très utile pour les chercheurs algébristes.

Sinon, lors du chapitre 16 du premier volume, on résout des équations par des approximations. Les algorithmes utilisés semblent être les premiers pas de l'analyse numérique, aujourd'hui utilisée dans tout ce qui est modellisation et simulation. On y trouve aussi une notion très importante, nommée aujourd'hui la *densité* des nombres fractionnaires $\mathbb{Q}$. En effet, on arrivera toujours à trouver une quantité fractionnaire approchant n'importe quel nombre irrationnel de manière satisfaisante.

Mais aussi, on trouve quelque chose de très surprenant. Dans le chapitre 13 du second tome, on trouve une démonstration par l'absurde. Dans les mots de l'époque, cela donnait : *Si quelqu'un niait la proposition, ce serait soutenir qu'il* *peut y avoir des valeurs de x et y telles que x^4+y^4 fut un quarré, quelque grandes qu'elles fussent, puisqu'il n'y en a pas de petites.* Ce type de démonstration est indispensable aujourd'hui. Tout bon mathématicien se doit de maîtriser ce genre de preuve.

5.4 Conclusion

Les *Elémens d'algèbre* sont un recueil dans lesquels on apprend l'algèbre de base. La simplicité, la clarté et la diversité des problèmes permettent qu'à tout âge, on puisse apprendre les bases fondamentales de l'algèbre. Il est d'ailleurs toujours édité et vendu dans le monde dans toutes les langues.



Il va sans dire qu'on pourrait sans aucun doute, après une petite actualisation des exemples et problèmes proposés, le proposer comme manuel scolaire dans les écoles. En effet, on y découvre avec intérêt l'art des mathématiques. Si on peut se poser des questions sur l'utilité du second tome, le premier lui se révèle indispensable.

Bibliographie

[1] http://wikipedia.org

[2] Leonhard P. Euler, *Elémens d'Algèbre*.