Projet de Semestre

EPFL, automne 2008

Théories d'homologie et de cohomologie généralisées

Varvara Karpova

Sous la direction de :

Prof. Kathryn Hess Bellwald

Table des matières

Table des notations

Nous utiliserons les notations suivantes tout au long du travail :

$\mathcal{C}^2$	La catégorie des paires d'objets dans une catégorie $\mathcal{C}$
$\mathcal{C}_*$	La catégorie des objets pointés d'une catégorie $\mathcal{C}$
$h\mathcal{C}$	La catégorie homotopique d'une catégorie $\mathcal{C}$, lorsque cela a un sens
Top	La catégorie des espaces topologiques
$hTop_*^0$	La catégorie des espaces topologiques avec point de base non-dégénéré
$\mathcal{CW}$	La catégorie des CW-complexes
Grp	La catégorie des groupes
Ab	La catégorie des groupes abéliens
Sp	La catégorie des spectres
$[f]$	La classe d'homotopie d'un morphisme f
l.s.e.	Longue suite exacte
c.s.e.	Courte suite exacte
$\overline{U}$	L'adhérence d'un ensemble U
$\mathring{A}$	L'intérieur d'un ensemble A
$\operatorname{Ker} f$	Le noyau d'une application f
$\operatorname{coker} f$	Le conoyau d'une application f
$\operatorname{Im} f$	L'image d'une application f
CX	Le cône réduit au dessus de l'espace X
$\mathbb{S}^n$	La sphère de dimension n
$X \simeq Y$	Les espaces X et Y ont le même type d'homotopie
$I = [0,1]$	L'intervalle unité fermé

Remerciements

Je tiens à remercier vivement la Professeure Kathryn Hess Bellwald pour son encadrement attentif de ce projet, et pour son aide dans la compréhension de la matière.

Introduction

Le but de ce travail de semestre était de comprendre la définition axiomatique des théories d'homologie et de cohomologie généralisées, et leur construction.

Le premier chapitre du projet rassemble certaines notions et résultats de base de topologie algébrique, dont on aura besoin tout au long du travail.

Dans le Chapitre 2 on présente d'abord les théories de cohomologie généralisées non-réduites, définies pour les paires d'espaces topologiques. Puis on se tourne vers les théories réduites, définies pour les espaces topologiques pointés. On verra que ces deux types de théories sont naturellement équivalentes. A la fin du chapitre on évoque les théories d'homologie généralisées et on explique comment faire l'extension d'une théorie de (co-)homologie réduite définie sur les CW-complexes, aux espaces topologiques pointés.

Le Chapitre 3 est consacré à l'étude des théories d'homologie et de cohomologie généralisées associées à un spectre, définies sur $\mathcal{CW}$. On expliquera d'abord la construction de la catégorie *Sp* des spectres, puis on étudiera la construction de telles théories.

Enfin le dernier chapitre traite des Théorèmes de représenation sur $h\mathcal{CW}$. Le théorème central qu'on étudiera sera le Théorème de représenation de Brown. Ses conséquences permettront de découvrir que les théories de cohomologie généralisées associées à un spectre construites au Chapitre 3, représentent en fait la totalité des théories de cohomologie qu'il est possible de construire sur $\mathcal{CW}$.

Chapitre 1

Quelques notions utiles

Nous rappelons dans ce chapitre quelques définitions et résultats généraux qu'il est utile d'avoir en tête pour bien comprendre la suite.

1.1 Les cofibrations

Définition 1.1.1. Une inclusion $i\colon A \hookrightarrow X$ possède la **propriété d'extension homotopique** par rapport à l'espace Y si pour toute application $f\colon X \longrightarrow Y$ et toute homotopie $G\colon A \times I \longrightarrow Y$, telle que $G(a,0) = f(a)$, $\forall a \in A$, il existe une homotopie $H\colon X \times I \longrightarrow Y$ qui étend G à X et qui vérifie $H(x,0) = f(x)$, $\forall x \in X$, c'est-à-dire si le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
A \times \{0\} \arrow[r, "i_0"] \arrow[d, "i\times id_0"'] & A \times I \arrow[d, "i\times id_I"] \arrow[ddr, bend left, "G"] & \\
X \times \{0\} \arrow[r, "i_0"] \arrow[drr, bend right, "f"'] & X \times I \arrow[dr, dashed, "\exists H"] & \\
& & Y
\end{tikzcd} .$$

L'application i est appelée **cofibration** si elle possède la propriété d'extension homotopique par rapport à tout espace Y.

Lemme 1.1.2. [Sw, Proposition 6.6] *Si $i\colon A \hookrightarrow X$ est une cofibration et si A est contractile, alors la projection $p\colon (X,A) \longrightarrow (X/A, *)$ est une équivalence d'homotopie.*

1.2 Les H-groupes

Définition 1.2.1. Soit (K,k_0) un espace pointé et notons $k_0\colon (K,k_0) \longrightarrow (K,k_0)$ l'application constante $k \mapsto k_0$. On dit que (K,k_0) est un **H-groupe** s'il est muni d'une multiplication continue $\mu : (K,k_0) \times (K,k_0) \longrightarrow (K,k_0)$ telle que

i) k_0 *est une identité homotopique*, i.e., le diagramme suivant commute **à homotopie près** :

$$\begin{tikzcd}
(K,k_0) \arrow[r, "(k_0,id)"] \arrow[dr, "id"'] & (K,k_0)\times(K,k_0) \arrow[d, "\mu"] & (K,k_0) \arrow[l, "(id,k_0)"'] \arrow[dl, "id"] \\
& (K,k_0) &
\end{tikzcd}$$

où $(k_0, id)(k) = (k_0, k)$ et $(id, k_0)(k) = (k, k_0)$ pour tous $k \in (K, k_0)$.

ii) μ *est associative à homotopie près*, i.e.,

$$\begin{tikzcd}
(K,k_0)\times(K,k_0)\times(K,k_0) \arrow[r, "\mu\times id"] \arrow[d, "id\times\mu"'] & (K,k_0)\times(K,k_0) \arrow[d, "\mu"] \\
(K,k_0)\times(K,k_0) \arrow[r, "\mu"'] & (K,k_0)
\end{tikzcd}$$

commute **à homotopie près**.

iii) *il existe un inverse homotopique continu* $\nu : (K, k_0) \longrightarrow (K, k_0)$ tel que le diagramme suivant commute **à homotopie près** :

$$\begin{tikzcd}
(K,k_0) \arrow[r, "(\nu,id)"] \arrow[dr, "k_0"'] & (K,k_0)\times(K,k_0) \arrow[d, "\mu"'] & (K,k_0) \arrow[l, "(id,\nu)"'] \arrow[dl, "k_0"] \\
& (K,k_0) &
\end{tikzcd}$$

iv) (K, k_0) est un H-groupe *homotopiquement commutaif*, si de plus le diagramme suivant commute **à homotopie près** :

$$\begin{tikzcd}
(K,k_0)\times(K,k_0) \arrow[rr, "T"] \arrow[dr, "\mu"'] & & (K,k_0)\times(K,k_0) \arrow[dl, "\mu"] \\
& K, &
\end{tikzcd}$$

où $T : K \times K \longrightarrow K \times K$ est *l'application échange* : $T(k_1, k_2) = (k_2, k_1)$ pour tous $k_1, k_2 \in K$.

1.3 Les H-cogroupes

Définition 1.3.1. Soit (K, k_0) un espace pointé et notons $k_0 : (K, k_0) \longrightarrow (K, k_0)$ l'application constante $k \mapsto k_0$. On dit que (K, k_0) est un H**-cogroupe** s'il est muni d'une comultiplication continue $\mu' : (K, k_0) \longrightarrow (K, k_0) \vee (K, k_0)$ telle que

i) k_0 *est une identité homotopique*, i.e., le diagramme suivant commute **à homotopie près** :

$$\begin{tikzcd}
 & (K \times \{k_0\}) \cup (\{k_0\} \times K) \arrow[d, equal] & \\
(K, k_0) & (K, k_0) \vee (K, k_0) \arrow[l, "(k_0 \vee id)"'] \arrow[r, "(id \vee k_0)"] & (K, k_0) \\
 & K \arrow[ul, "id"] \arrow[u, "\mu'"'] \arrow[ur, "id"'] &
\end{tikzcd}$$

où $(k_0, id)(k, k_0) = k_0$ et $(k_0, id)(k_0, k) = k$ pour tous $k \in (K, k_0)$.

ii) μ' *est coassociative à homotopie près*, i.e.,

$$\begin{tikzcd}
(K, k_0) \vee (K, k_0) \vee (K, k_0) & (K, k_0) \vee (K, k_0) \arrow[l, "\mu' \vee id"'] \\
(K, k_0) \vee (K, k_0) \arrow[u, "id \vee \mu'"] & (K, k_0) \arrow[l, "\mu'"] \arrow[u, "\mu'"']
\end{tikzcd}$$

commute **à homotopie près**.

iii) *il existe un inverse homotopique continu* $\nu' : (K, k_0) \longrightarrow (K, k_0)$ tel que le diagramme suivant commute **à homotopie près** :

$$\begin{tikzcd}
(K, k_0) & (K, k_0) \vee (K, k_0) \arrow[l, "(\nu' \vee id)"'] \arrow[r, "(id \vee \nu')"] & (K, k_0) \\
 & (K, k_0) \arrow[ul, "k_0"] \arrow[u, "\mu'"'] \arrow[ur, "k_0"'] &
\end{tikzcd}$$

iv) (K, k_0) est un H-cogroupe *homotopiquement commutaif*, si de plus le diagramme suivant commute **à homotopie près** :

$$\begin{tikzcd}
(K, k_0) \vee (K, k_0) \arrow[rr, "T"] & & (K, k_0) \vee (K, k_0) \\
 & K, \arrow[ul, "\mu'"] \arrow[ur, "\mu'"'] &
\end{tikzcd}$$

où $T : K \vee K \longrightarrow K \vee K$ est *l'application échange* : $T(k_1, k_2) = (k_2, k_1)$ pour tous $k_1, k_2 \in K$.

Proposition 1.3.2. [Sw, Proposition 2.21] *Si* (K, k_0) *est un* H*-cogroupe avec comultiplication* μ' *et inverse homotopique* ν'*, alors pour tout* (X, x_0) *dans* Top_* *l'ensemble*

$$[K, k_0; X, x_0]$$

peut être muni d'une structure de groupe. Le produit $[f] \cdot [g]$ *est alors défini par la classe d'homotopie de la composition*

$$K \xrightarrow{\mu'} K \vee K \xrightarrow{f \vee g} X \vee X \xrightarrow{\Delta'} X,$$

où Δ' *est l'application pliage, donnée par* $\Delta'(x, x_0) = \Delta'(x_0, x) = x$. *L'identité du groupe est donnée par la classe de l'application constante* $[x_0]$, *et l'inverse est donnée par* $[f]^{-1} := [f \circ \nu']$.

1.4 Le théorème de Whitehead

Le théorème de Whitehead énonce un résultat fort, qui de plus va s'avérer très utile dans nombreux raisonnements que l'on fera par la suite.

Définition 1.4.1. Soient $(X, x_0), (Y, y_0) \in Top_*$. Une application $f\colon (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$ est une **équivalence d'homotopie** s'il existe $g\colon (Y, y_0) \longrightarrow (X, x_0)$ telle que $[f] \circ [g] = [id_Y]$ et $[g] \circ [f] = [id_X]$.
On dit alors que X et Y ont le **même type d'homotopie**, noté $X \simeq Y$.

Définition 1.4.2. Une application $f\colon (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$ sur Top_* est une **équivalence d'homotopie faible** si $f_* : \pi_n(X, x_0) \longrightarrow \pi_n(Y, y_0)$ est un isomorphisme pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Théorème 1.4.3. [Sw, Théorème 6.32] *Soient* X *et* Y *des CW-complexes connexes. Dans ce cas, une application* $f\colon X \longrightarrow Y$ *est une équivalence d'homotopie si et seulement si elle est une équivalence d'homotopie faible.*

Remarquons que il est important qu'un tel f existe : cela ne suffit pas d'avoir des isomorphismes $\pi_n(X, x_0) \cong \pi_n(Y, y_0)$ pour $n \geq 0$ pour conclure que $X \simeq Y$, si ces isomorphismes ne sont pas induits par un $f\colon (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$.

1.5 Les limites directes

Définition 1.5.1. Un ensemble partiellement ordonné $(A, \leq)$ est un **ensemble dirigé** si pour tous α, $\beta \in A$ il existe une borne supérieure $\gamma \in A$, i.e., $\alpha \leq \gamma$ et $\beta \leq \gamma$.

Définitions 1.5.2. • Soit $(A, \leq)$ un ensemble dirigé. Un **système direct** $\{\{G_\alpha\}_{\alpha \in A}, j_\alpha^\beta\} \in Ab$ est une collection de groupes abéliens et d'homomorphismes de groupes $j_\alpha^\beta\colon G_\alpha \longrightarrow G_\beta$, tels que

$$\begin{tikzcd} G_\alpha \arrow[r, "j_\beta^\gamma"] \arrow[rr, bend right, "j_\alpha^\gamma"'] & G_\beta \arrow[r, "j_\alpha^\beta"] & G_\gamma, \end{tikzcd}$$

commute pour tous $\alpha \leq \beta \leq \gamma$, et $j_\alpha^\alpha = id$ pour tout $\alpha \in A$.

- Soit un système direct $\{\{G_\alpha\}_{\alpha\in A}, j_\alpha^\beta\}$ de groupes abéliens. Sa **limite directe** est un groupe abélien, noté $\varinjlim G_\alpha$, muni d'homomorphismes $\{i_\beta \colon G_\beta \longrightarrow \varinjlim G_\alpha | \beta \in A\}$, et tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & G_\alpha \arrow[r, "j_\alpha^\beta"] \arrow[dr, "i_\alpha"'] & G_\beta \arrow[r, "j_\beta^\gamma"] \arrow[d, "i_\beta"] & G_\gamma \arrow[r] \arrow[dl, "i_\gamma"] & \cdots . \\
& & \varinjlim G_\alpha & &
\end{tikzcd}$$

- Explicitement, on a que $\varinjlim G_\alpha = \oplus_{\alpha\in A} G_\alpha / R$ où $R := < i_\beta \circ j_\alpha^\beta(x) - i_\alpha(x) >$ pour tous $x \in G_\alpha$ et tous $\alpha \leq \beta$.
- La limite directe $\varinjlim G_\alpha$ possède la **propriété universelle** suivante : pour tout groupe $H \in Ab$ et pour tout $\{f_\alpha \colon G_\alpha \longrightarrow H | \alpha \in A\}$ tel que $f_\beta \circ j_\alpha^\beta = f_\alpha, \forall \alpha \leq \beta$, il existe un unique homomorphisme de groupes $f \colon \varinjlim G_\alpha \longrightarrow H$ tel que $f \circ i_\alpha = f_\alpha$ pour tous $\alpha \in A$. En termes de diagramme commutatif on a

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & G_\alpha \arrow[r, "j_\alpha^\beta"] \arrow[dr, "i_\alpha"] \arrow[ddr, bend right, "f_\alpha"'] & G_\beta \arrow[r, "j_\beta^\gamma"] \arrow[d, "i_\beta"] \arrow[dd, dotted, bend left, "f_\beta"] & G_\gamma \arrow[r] \arrow[dl, "i_\gamma"'] \arrow[ddl, bend left, "f_\gamma"] & \cdots . \\
& & \varinjlim G_\alpha \arrow[d, dashed, "\exists! f"'] & & \\
& & H & &
\end{tikzcd}$$

Proposition 1.5.3. [Sw, Proposition 7.50] *Soient $\{A_\alpha\}$, $\{B_\alpha\}$, $\{C_\alpha\}$ des systèmes directs et $\{\varphi_\alpha\} : \{A_\alpha\} \longrightarrow \{B_\alpha\}$, $\{\psi_\alpha\} : \{B_\alpha\} \longrightarrow \{C_\alpha\}$ des morphismes de systèmes directs. Si la suite*

$$A_\alpha \xrightarrow{\varphi_\alpha} B_\alpha \xrightarrow{\psi_\alpha} C_\alpha$$

est exacte pour tout $\alpha \in A$, alors la suite

$$\varinjlim A_\alpha \xrightarrow{\varinjlim \varphi_\alpha} \varinjlim B_\alpha \xrightarrow{\varinjlim \psi_\alpha} \varinjlim C_\alpha$$

est aussi exacte pour tout $\alpha \in A$.

Proposition 1.5.4. [Sw, Corollaire 7.51] *Si $\{\varphi_\alpha\} : \{G_\alpha\} \longrightarrow \{G'_\alpha\}$, un morphisme de systèmes directs, est un monomorphisme (resp. épimorphisme, resp. isomorphisme) alors $\varinjlim \varphi_\alpha$ est également un monomorphisme (resp. épimorphisme, resp. isomorphisme).*

1.6 Les limites inverses

Définitions 1.6.1. • Soit $(A, \leq)$ un ensemble dirigé. Un **système inverse** $\{\{G_\alpha\}_{\alpha\in A}, j_\alpha^\beta\} \in Ab$ est une collection de groupes abéliens et d'homomorphismes de groupes $j_\alpha^\beta \colon G_\beta \longrightarrow G_\alpha$, tels que

$$\begin{tikzcd} G_\gamma \arrow[r, "j_\beta^\gamma"] \arrow[rr, bend right, "j_\alpha^\gamma"'] & G_\beta \arrow[r, "j_\alpha^\beta"] & G_\alpha, \end{tikzcd}$$

commute pour tous $\alpha \leq \beta \leq \gamma$, et $j_\alpha^\alpha = id$ pour tout $\alpha \in A$.

- Soit un système inverse $\{\{G_\alpha\}_{\alpha\in A}, j_\alpha^\beta\}$ de groupes abéliens. Sa **limite inverse** est un groupe abélien, noté $\varprojlim G_\alpha$, muni d'homomorphismes $\{p_\beta \colon \varprojlim G_\alpha \longrightarrow G_\beta | \beta \in A\}$, et tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & G_\gamma \arrow[r, "j_\beta^\gamma"] & G_\beta \arrow[r, "j_\alpha^\beta"] & G_\alpha \arrow[r] & \cdots . \\ & & \varprojlim G_\alpha. \arrow[ul, "p_\gamma"] \arrow[u, "p_\beta"] \arrow[ur, "p_\alpha"'] & & \end{tikzcd}$$

- Explicitement, on a que $\varprojlim G_\alpha = \{x \in \prod_{\alpha\in A} G_\alpha | j_\alpha^\beta \circ p_\beta(x) = p_\alpha(x)\}$ pour tous $\alpha \leq \beta$.
- La limite inverse $\varprojlim G_\alpha$ possède la **propriété universelle** suivante : pour tout groupe $H \in Ab$ et pour tout $\{f_\alpha \colon H \longrightarrow G_\alpha | \alpha \in A\}$ tel que $j_\alpha^\beta \circ f_\beta = f_\alpha, \forall \alpha \leq \beta$, il existe un unique homomorphisme de groupes $f \colon H \longrightarrow \varprojlim G_\alpha$ tel que $p_\alpha \circ f = f_\alpha$ pour tous $\alpha \in A$. En termes de diagramme commutatif on a

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & G_\gamma \arrow[r, "j_\beta^\gamma"] & G_\beta \arrow[r, "j_\alpha^\beta"] & G_\alpha \arrow[r] & \cdots . \\ & & \varprojlim G_\alpha, \arrow[ul, "p_\gamma"] \arrow[u, "p_\beta"] \arrow[ur, "p_\alpha"'] & & \\ & & H \arrow[u, dashed, "\exists ! f"'] \arrow[uul, bend left, "f_\gamma"] \arrow[uur, bend right, "f_\alpha"'] \arrow[uu, dotted, bend right, "f_\beta"'] & & \end{tikzcd}$$

Dans la suite du projet on prend $A = \mathbb{N}$, muni de son ordre usuel ; cela suffira pour ce qu'on veut montrer.

Définition 1.6.2. Soient les homomorphismes $\{p_k \colon \prod_n G_n \longrightarrow G_k\}$, on définit l'application $\delta \colon \prod_n G_n \longrightarrow \prod_n G_n$ par

$$p_n\delta(x) = (-1)^n p_n(x) + (-1)^{n+1} j_n^{n+1} p_{n+1}(x),$$

pour tout $x \in \prod_n G_n$.

On a que $\operatorname{Ker}\delta = \{x \in \prod_{\alpha\in A} G_\alpha | j_n^{n+1} \circ p_{n+1}(x) = p_n(x)\} = \varprojlim G_n$, $n \geq 0$, et on pose $\operatorname{coker}\delta := \lim^1 G_n$.

1.7 Foncteurs adjoints

Définition 1.7.1. Soient $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ deux catégories. Une paire de foncteurs (F, G) avec $F \colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$, $G \colon \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$ est un **couple adjoint** si pour tout $C \in Ob\mathcal{C}$ et pour tout $D \in Ob\mathcal{D}$ il existe un isomorphisme naturel

$$\tau_{CD} : Mor_{\mathcal{D}}(F(C), D) \xrightarrow{\cong} Mor_{\mathcal{C}}(C, G(D)),$$

i.e., si pour tout $f \in \mathcal{C}(C', C)$ le diagramme

$$\begin{tikzcd}
Mor_{\mathcal{D}}(F(C), D) \arrow[r, "\tau_{CD}"] \arrow[d, "(Ff)^*"'] & Mor_{\mathcal{C}}(C, G(D)) \arrow[d, "f^*"] \\
Mor_{\mathcal{D}}(F(C'), D) \arrow[r, "\tau_{C'D}"'] & Mor_{\mathcal{C}}(C', G(D))
\end{tikzcd}$$

commute, et pour tout $g \in \mathcal{D}(D, D')$ le diagramme

$$\begin{tikzcd}
Mor_{\mathcal{D}}(F(C), D) \arrow[r, "\tau_{CD}"] \arrow[d, "g_*"'] & Mor_{\mathcal{C}}(C, G(D)) \arrow[d, "(Gg)_*"] \\
Mor_{\mathcal{D}}(F(C), D') \arrow[r, "\tau_{CD'}"'] & Mor_{\mathcal{C}}(C, G(D'))
\end{tikzcd}$$

commute aussi.

On rappelle maintenant la définition des foncteurs **suspension** et **lacet** sur la catégorie $h\,Top_*$.

Rappels 1.7.2. • Le foncteur **suspension**

$$S : h\,Top_* \longrightarrow h\,Top_*$$

est donné par

$$S(X, x_0) = (SX, *) := (X \wedge \mathbb{S}^1, *),$$

et par

$$S[f] := [Sf] = [f \wedge id_{\mathbb{S}^1}],$$

pour $f : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$.

- Pour tout $(Y, y_0) \in Top_*$ on définit **l'espace des lacets basés en y_0 de Y**, noté $(\Omega Y, \omega_0) \in Top_*$ par l'espace des fonctions

$$\Omega Y = \{\omega : (\mathbb{S}^1, s_0) \longrightarrow (Y, y_0)\},$$

où le point de base ω_0 est le lacet constant $\omega_0(s) = y_0$ pour tout $s \in \mathbb{S}^1$.

- Le foncteur **lacet**

$$\Omega : h\,Top_* \longrightarrow h\,Top_*$$

est donné par

$$\Omega(Y, y_0) = (\Omega(Y, y_0), \omega_0),$$

et par

$$\Omega g(\omega)(s) := g \circ \omega(s)$$

pour $g\colon (Y, y_0) \longrightarrow (Y', y_0')$.

Proposition 1.7.3. [Sw, Corollaire 2.8] *Soient* (X, x_0) *et* $(Y, y_0) \in h\,Top_*$ *et supposons que* (X, x_0) *est Hausdorff. Alors le couple* (S, Ω) *est un couple adjoint, tel que l'isomorphisme naturel* $Top_*(SX, Y) \cong Top_*(X, \Omega Y)$ *induit un isomorphisme naturel en classes d'homotopie*

$$A\colon [(SX, *), (Y, y_0)] \xrightarrow{\cong} [(X, x_0), (\Omega Y, \omega_0)].$$

Chapitre 2

Théories de cohomologie généralisées

2.1 Théories de cohomologie non-réduites

2.1.1 Définitions et axiomes de base

Rappel 2.1.1. Soient (X, A), $(Y, B) \in h\,Top^2$ et $[f] : (X, A) \longrightarrow (Y, B)$. On définit le foncteur **restriction** $R : h\,Top^2 \longrightarrow h\,Top^2$ par

$$R(X, A) = (A, \emptyset), \text{ et } R[f] = [f|_A].$$

Définition 2.1.2. Une **théorie de cohomologie non-réduite** h^* sur $h\,Top^2$ consiste en une suite de foncteurs contravariants

$$h^n : h\,Top^2 \longrightarrow Ab,\ n \in \mathbb{Z},$$

définis par

$$(X, A) \mapsto h^n(X, A),$$
$$([f] : (X, A) \longrightarrow (Y, B)) \mapsto f^* : h^n(Y, B) \longrightarrow h^n(X, A),$$

et en une suite de transformations naturelles

$$\partial^n : h^n \circ R \longrightarrow h^{n+1},\ n \in \mathbb{Z},$$

vérifiant que pour tout $(X, A) \in h\,Top^2$ le diagramme

$$\begin{tikzcd}
h^n \circ R(Y, B) \arrow[r, "\partial^n(Y,B)"] \arrow[d, "([f]|_A)^*"'] & h^{n+1}(Y, B) \arrow[d, "f^*"] \\
h^n \circ R(X, A) \arrow[r, "\partial^n(X,A)"'] & h^{n+1}(X, A)
\end{tikzcd}$$

commute. Les $\{h^n\}$ et les $\{\partial^n\}$ satisfont deux axiomes suivants :

1. *Exactitude :* Pour toute paire $(X,A) \in hTop^2$ il existe une l.s.e. $\cdots \longrightarrow h^{n-1}(A,\emptyset) \xrightarrow{\partial^{n-1}(X,A)}$

$$h^n(X,A) \xrightarrow{j^*} h^n(X,\emptyset) \xrightarrow{i^*} h^n(A,\emptyset) \xrightarrow{\partial^n(X,A)} \cdots$$

   où $i : (A,\emptyset) \hookrightarrow (X,\emptyset)$ et $j : (X,\emptyset) \hookrightarrow (X,A)$ sont les inclusions.
2. *Excision :* Pour toute paire $(X,A) \in hTop^2$ et tout ouvert $U \subset A$ tel que $\overline{U} \subset \overset{\circ}{A}$ l'inclusion $j : (X-U, A-U) \hookrightarrow (X,A)$ induit un isomorphisme
$$j^* : h^n(X,A) \xrightarrow{\cong} h^n(X-U, A-U),\ n \in \mathbb{Z}\,.$$

On rappelle qu'une **triade** $(X;A,B)$ est un espace topologique X avec A et B des sous-espaces de X tels que $A \cup B = X$. Une **CW-triade** est un CW-complexe X avec A et B des sous-complexes de X tels que $A \cup B = X$. L'axiome d'excision est équivalent à l'affirmation suivante :

Proposition 2.1.3. *La théorie h^* vérifie l'axiome d'excision si et seulement si pour toute triade $(X;A,B)$ telle que $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} = X$ l'inclusion $j : (A, A\cap B) \hookrightarrow (X,B)$ induit un isomorphisme*

$$j^* : h^n(X,B) \xrightarrow{\cong} h^n(A, A \cup B),\ n \in \mathbb{Z}.$$

Démonstration. Supposons que h^n est un foncteur satisfaisant l'axiome d'excision, et soit $(X;A,B)$ une triade avec $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} = X$. Appliquons l'excision à $X = X$, $A = B$ et $U = X - A$. On a $\overline{U} = \overline{X-A} = (X - \overset{\circ}{A}) \subset \overset{\circ}{B}$, et puisque $X - U = A$, $A - U = A \cap B$, l'inclusion $j : (A, A\cap B) \longrightarrow (X,B)$ induit un isomophisme en cohomologie.
Réciproquement, soit h^n satisfaisant la Proposition 2.1.3, et considérons une paire (X,A) avec $U \subset A$ et $\overline{U} \subset \overset{\circ}{A}$. La triade $(X; X-U, A)$ vérifie $\overset{\circ}{(X-U)} \cup \overset{\circ}{A} = (X - \overline{U}) \cup \overset{\circ}{A} \supset (X - \overset{\circ}{A}) \cup \overset{\circ}{A} = X$, donc on peut lui appliquer la Proposition 2.1.3. Comme $(X-U, (X-U)\cap A) = (X-U, A-U)$, $j^* : h^n(X,A) \longrightarrow h^n(X-U, A-U)$ est un isomoprisme et h^n satisfait l'axiome d'excision. □

On énonce maintenant, sans démonstration, un lemme technique, nécessaire pour formuler l'équivalent de l'axiome d'excision dans le cas des CW-complexes.

Lemme 2.1.4. [Sw, Lemme 7.4] *Si $(X;A,B)$ est une CW-triade, alors il existe un ouvert $A' \supset A$ et une homotopie $H : X \times I \longrightarrow X$ qui satisfont*

i) *$H_0 = id_X$,*

ii) *H est stationnaire sur A,*

iii) $H_1(A') \subset A$,

iv) $H(B \times I) \subset B$.

Proposition 2.1.5. *Pour toute CW-triade* $(X; A, B)$ *l'inclusion* $j : (A, A \cap B) \longrightarrow (X, B)$ *induit un isomorphisme*

$$j^* : h^n(X, B) \xrightarrow{\cong} h^n(A, A \cup B),\ n \in \mathbb{Z}.$$

En d'autres mots, toute CW-triade est excisive.

Démonstration. On choisit A' un voisinage de A, et une homotopie $H : X \times I \longrightarrow X$, dont l'existence est donnée par le Lemme 2.1.4. Posons $r = H_1$, alors les applications $i : (A, A \cap B) \longrightarrow (A', A' \cap B)$ et $r|_{A'} : (A', A' \cap B) \longrightarrow (A, A \cap B)$ sont des inverses homotopiques l'une de l'autre, d'où $(r|_{A'})^* : h^n(A, A \cap B) \longrightarrow h^n(A', A' \cap B)$ est un isomorphisme. Nous avons le diagramme commutatif suivant.

$$\begin{tikzcd}
h^n(X,B) \arrow[r, "j^*", "\cong"'] \arrow[d, "r^*=id_{(X,B)}"'] & h^n(A, A \cap B) \arrow[d, "\cong"', "(r|_{A'})^*"] \\
h^n(X,B) \arrow[r, "j'^*", "\cong"'] & h^n(A', A' \cap B').
\end{tikzcd}$$

Mais $j^{'*}$ est un isomorphisme par la Proposition 2.1.3 car $X - A$ est un ouvert de B, et alors $X = A \cup (X - A) \subset \overset{\circ}{A'} \cup \overset{\circ}{B}$. Donc j^* est aussi un isomorphisme. $\square$

Ce résultat montre que lorsqu'on considère des théories de cohomologie non-réduites sur $h\mathcal{CW}^2$, on peut prendre la Proposition 2.1.5 comme axiome d'excision.

Remarquons le fait suivant :

Lemme 2.1.6. *La triade* $(X; A, B)$ *est excisive si et seulement si la triade* $(X; B, A)$ *l'est.*

Nous omettons la preuve un peu technique de ce résultat. Sans être difficile, elle est basée sur une construction de nouveaux espaces à partir de X, A, B et $A \cap B$. Les projections sur ces nouveaux espaces sont des équivalences d'homotopie, elles induisent donc des isomorphismes en cohomologie aux endroits voulus. L'argument fonctionne grâce à la commutativité de l'intersection d'ensembles.

2.1.2 Conséquences des axiomes

Voici quelques conséquences élémentaires que l'on peut déduire directement des axiomes pour les théories de cohomologie non-réduites.

Proposition 2.1.7. *Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $h^n(X, X) = 0$.*

Proposition 2.1.8. *Soient (X, A), $(Y, B) \in hTop^2$. Une équivalence d'homotopie $f : (X, A) \longrightarrow (Y, B)$ induit un isomorphisme*

$$f^* : h^n(Y, B) \xrightarrow{\cong} h^n(X, A)\, n \in \mathbb{Z}.$$

Démonstration. Soit $f : (X, A) \longrightarrow (Y, B)$ telle que il existe $g : (Y, B) \longrightarrow (X, A)$ avec $f \circ g \simeq id_{(Y,B)}$ et $g \circ f = id_{(X,A)}$. Alors

$$g^* \circ f^* = h^n([g]) \circ h^n([f]) = h^n([f \circ g]) = h^n(id_{(Y,B)}) = id_{h^n(Y,B)}.$$

De même on montre que $f^* \circ g^* = id_{h^n(X,A)}$. Donc $f^* : h^*(Y, B) \longrightarrow h^*(X, A)$ est un isomorphisme avec inverse $g^* : h^*(X, A) \longrightarrow h^*(Y, B)$. □

Corollaire 2.1.9. *Si $A \subset X$ est un retract par déformation de X, alors $h^n(X, A) = 0$, pour tout $n \in \mathbb{Z}$.*

Proposition 2.1.10. *Soit $x_0 \in X$ et l'inclusion $i : (\{x_0\}, \emptyset) \hookrightarrow (X, \emptyset)$. Alors*

$$h^n(X, \emptyset) \cong h^n(\{x_0\}, \emptyset) \oplus h^n(X, \{x_0\}).$$

Démonstration. On a l'application $c : X \longrightarrow \{x_0\}$, $x \mapsto x_0$. Considerons la l.s.e.

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & h^n(X, \{x_0\}) \arrow[r, "j^*"] & h^n(X, \emptyset) \arrow[r, "i^*"] & h^n(\{x_0\}, \emptyset) \arrow[l, bend right, "c^*"'] \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

Comme $(i^* \circ c^*) = (c \circ i)^* = id_{h^n(\{x_0\})}$, la suite est scindée. Donc $h^n(\{x_0\}, \emptyset) \oplus h^n(X, \{x_0\}) \cong h^n(X, \emptyset)$, et l'isomorphisme est donné par

$$(b, d) \mapsto j^*(b) + c^*(d).$$

□

On rappelle qu'un **triplet** d'espaces topologiques (X, A, B) vérifie $B \subset A \subset X$. La proposition qui suit décrit la longue suite exacte d'un triplet.

Proposition 2.1.11. *Soit (X, A, B) un triplet et $I : (A, B) \hookrightarrow (X, B)$, $J : (X, B) \hookrightarrow (X, A)$ les inclusions. Alors il existe une l.s.e.* $\cdots \longrightarrow h^{n-1}(A, B) \xrightarrow{\Delta}$

$$h^n(X, A) \xrightarrow{J^*} h^n(X, B) \xrightarrow{I^*} h^n(A, B) \xrightarrow{\Delta} h^{n+1}(X, A) \longrightarrow \cdots$$

où Δ est la composition

$$\begin{tikzcd} h^{n-1}(A, B) \arrow[r, "i^*"] \arrow[rr, bend right, "\Delta"'] & h^{n-1}(A, \emptyset) \arrow[r, "\partial^{n-1}"] & h^n(X, A). \end{tikzcd}$$

Démonstration. Nous rajoutons les inclusions

$$\begin{array}{lll} i_1 : A \hookrightarrow X & i_2 : B \hookrightarrow A & i_3 : B \hookrightarrow X \\ j_1 : (X, \emptyset) \hookrightarrow (X, A) & j_3 : (X; \emptyset) \hookrightarrow (X, B) & \end{array}$$

et considérons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & h^{n-1}(X,\emptyset) \arrow[rr, bend left, "i_3^*"] \arrow[dr, "i_1^*"] & & h^{n-1}(B,\emptyset) \arrow[rr, bend left, "\partial^2"] \arrow[dr, "\partial^3"] & & h^n(A,B) \arrow[rr, bend left, "\Delta"] \arrow[dr, "i^*"] & & h^{n+1}(X,A) \arrow[dr] & \\
\cdots \arrow[ur] \arrow[dr] & & h^{n-1}(A,\emptyset) \arrow[ur, "i_2^*"'] \arrow[dr, "\partial^{n-1}"] & & h^n(X,B) \arrow[ur, "I^*"'] \arrow[dr, "j_3^*"] & & h^n(A,\emptyset) \arrow[ur, "\partial^{n-1}"'] \arrow[dr, "i_2^*"] & & \cdots \\
 & h^{n-1}(A,B) \arrow[ur, "i^*"] \arrow[rr, bend right, "\Delta"'] & & h^n(X,A) \arrow[ur, "J^*"] \arrow[rr, bend right, "j_1^*"'] & & h^n(X,\emptyset) \arrow[ur, "i_1^*"] \arrow[rr, bend right, "i_3^*"'] & & h^n(B,\emptyset) \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Pour prouver que la longue suite de l'énoncé est exacte, il suffit de montrer six relations :

i) $J^* \circ \Delta = 0$: $J^* \circ \Delta = J^* \circ (\partial^{n-1} \circ i^*) = (J^* \circ \partial^{n-1}) \circ i^* = (\partial^3 \circ i_2^*) \circ i^* = \partial^3 \circ \underbrace{i_2^* \circ i^*}_{=0} = 0$, vu la l.s.e.

ii) $\operatorname{Ker} J^* \subset \operatorname{Im} \Delta$: Soit $x \in h^n(X, A)$ tel que $J^*(x) = 0$. Alors $j_1^* x = j_3^* J^* x = 0$, donc il existe $y \in h^{n-1}(A, \emptyset)$ avec $\partial^{n-1} y = x$. Dans ce cas $\partial^3 i_2^* y = J^* \partial^{n-1} y = J^* x = 0$, donc il existe $z \in h^{n-1}(X, \emptyset)$ tel que $i_3^* z = i_2^* y$. On aura $i_2^*(y - i_1^* z) = i_2^* y - i_2^* i_1^* z = i_2^* y - i_3^* z = 0$, donc il existe $w \in h^{n-1}(A, B)$ tel que $i^* w = y - i_1^* z$. Alors $\Delta w = \partial^{n-1} i^* w = \partial^{n-1}(y - i_1^* z) = \partial^{n-1} y - \partial^{n-1} i_1^* z = x$. Ainsi $x \in \operatorname{Im} \Delta$.

iii) $I^* \circ J^* = 0$: La composition $J \circ I$ est égale à

$$(A, B) \overset{(id, i_2)}{\hookrightarrow} (A, A) \overset{(i_1, id)}{\hookrightarrow} (X, A).$$

Comme $h^n(A, A) = 0$ par le Corollaire 2.1.7, il s'ensuit que $(J \circ I)^* = I^* \circ J^* = 0$.

vi) $\operatorname{Ker} I^* \subset \operatorname{Im} J^*$: Soit $x \in h^n(X, B)$ tel que $I^* x = 0$. Alors $i^* I^* x = i_1^* j_3^* x = 0$, soit $j_3^* x \in \operatorname{Ker} i_1^* = \operatorname{Im} j_1^*$, i.e., il existe $y \in h^n(X, A)$ tel que $j_1^* y = j_3^*(x)$. Donc $j_3^*(x - J^* y) = j_3^* x - j_1^* y = 0$, donc il existe $z \in h^n(B, \emptyset)$ avec $\partial^3 z = (x - J^* y)$. Alors $\partial^2 z = I^* \partial^3 z = I^*(x - J^* y) = I^* x - I^* J^* y = 0$, donc on peut trouver un $w \in h^{n-1}(A, \emptyset)$ tel que $i_2^* w = z$. Dans ce cas $J^* \partial^{n-1} w = \partial^3 i_2^* w = \partial^3 z = x - J^* y$, donc $x = J^*(\partial^{n-1} w + y)$ et $x \in \operatorname{Im} J^*$.

v) $\Delta \circ I^* = 0$: $\Delta \circ I^* = (\partial^{n-1} \circ i^*) \circ I^* = \partial^{n-1} \circ (i^* \circ I^*) = \partial^{n-1} \circ (i_1^* \circ j_3^*) = \underbrace{\partial^{n-1} \circ i_1^*}_{=0} \circ j_3^* = 0$, vu la l.s.e.

vi) $\operatorname{Ker} \Delta \subset \operatorname{Im} I^*$: Supposons $x \in h^n(A, B)$ avec $\Delta x = 0$. Alors $\partial_1^* i^* x = 0$ et il existe $y \in h^n(X, \emptyset)$ tel que $i_1^* y = i^* x$. On a $i_3^* y = i_2^* i_1^* y = i_2^* i^* x = 0$, donc il existe $z \in h^n(X, B)$ avec $j_3^*(z) = y$. Dans ce cas $i^*(x - I^* z) = i^* x - i^* I^* z = i^* x - i_1^* j_3^* z = i^* x - i_1^* y = 0$ et il existe $w \in h^{n-1}(B, \emptyset)$ vérifiant $\partial_2 w = (x - I^* z)$. Alors $I^*(\partial^3 w + z) = \partial^2 w + I^* z = x$, et donc $x \in \operatorname{Im} I^*$.

□

Proposition 2.1.12. *Si $i : A \longrightarrow X$ est une cofibration alors la projection $p : (X, A) \longrightarrow (X/A, \{*\})$ induit un isomorphisme*

$$p^* : h^n(X/A, \{*\}) \xrightarrow{\cong} h^n(X, A),\ n \in \mathbb{Z}.$$

Esquisse de preuve : On rajoute un point de base à X, noté $\{+\}$, et on commence par considérer le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} (X, A) \arrow[r, "i"] \arrow[d, "p"'] & (X^+ \cup CA^+, CA^+) \arrow[d, "p'"] \\ (X/A, *) \arrow[r, "\varphi"'] & (X^+ \cup CA^+/CA^+, *), \end{tikzcd}$$

puis on montre que φ est un homéomorphisme, et on remarque que p' est une équivalence d'homotopie. D'où en cohomologie on a

$$\begin{tikzcd} h^n(X^+ \cup CA^+, CA^+) \arrow[r, "i^*"] & h^n(X, A) \\ h^n(X^+ \cup CA^+/CA^+, *) \arrow[u, "p'^*", "\cong"'] \arrow[r, "\cong", "\varphi"'] & h^n(X/A, *) \arrow[u, "p^*"'] \end{tikzcd}$$

Ainsi pour prouver que p^* est un isomorphisme, il suffit de voir si $i^* : h^n(X^+ \cup CA^+, CA^+) \longrightarrow h^n(X, A)$ en est un, ce qui sera vrai si et seulement si la triade $(X^+ \cup CA^+; X^+, CA^+)$ est excisive. Pour montrer qu'elle est excisive, on considère par exemple le voisinage ouvert de X dans $X^+ \cup CA^+$, donné par

$$X' = X^+ \cup \{[t, a] : a \in A, t \in [0, 1/3) \cup (2/3, 1]\}.$$

Ce voisinage satisfait aux conditions du Lemme 2.1.4, et la fin de la preuve ressemble à celle de la Proposition 2.1.5 □

2.1.3 Les groupes de coefficients d'une théorie de cohomologie non-réduite

Avant de définir les groupes de coefficients pour une théorie de cohomologie non-réduite, nous avons besoin de mettre en évidence l'existence de certains isomorphismes.

Puisque pour tout espace pointé $(X, \{x_0\})$, le cône $(CX, \{x_0\})$ est un espace contractile, le Corollaire 2.1.9 implique $h^n(CX, \{x_0\}) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Cela signifie en particulier que dans la l.s.e. du triplet $(CX, X, \{x_0\})$ on a un isomorphisme

$$\Delta : h^{n-1}(X, \{x_0\}) \xrightarrow{\cong} h^n(CX, X).$$

On définit alors

$$\tilde{\sigma}^n(X, x_0) : h^n(SX, \{*\}) \longrightarrow h^{n-1}(X, x_0)$$

qui est la composition

$$\begin{tikzcd} h^n(SX, \{*\}) := h^n(CX/X, \{*\}) \arrow[r, "p^*"] \arrow[rr, bend right, "\tilde{\sigma}^n"'] & h^n(CX, X) & h^{n-1}(X, \{x_0\}). \arrow[l, "\Delta"', "\cong"] \end{tikzcd}$$

Proposition 2.1.13. *Si $(X, x_0) \in Top_*$, alors l'application $\tilde{\sigma}^n(X, x_0)$ définie comme ci-dessus est un isomorphisme pour tout $n \in \mathbb{Z}$.*

Démonstration. L'inclusion $X \hookrightarrow CX$ étant une cofibration, la Proposition 2.1.12 implique que p^* est un isomorphisme, donc $\tilde{\sigma}^n(X, x_0)$ aussi. $\square$

On en déduit un corollaire important dans le cas des sphères, en se souvenant que $S(\mathbb{S}^n) = \mathbb{S}^{n+1}$:

Corollaire 2.1.14. *Pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et tout $k \in \mathbb{N}$ l'application*

$$\tilde{\sigma}^n(\mathbb{S}^k, s_0) : h^n(\mathbb{S}^{k+1}, s_0) \xrightarrow{\cong} h^{n-1}(\mathbb{S}^k, s_0)$$

est un isomorphisme.

Notation 2.1.15. On dénote par $\{*\}$ l'espace réduit à un point. D'autre part, on cosidère que $\mathbb{S}^0 = \{s_0, -1\}$.

Définition 2.1.16. Soit h^* une théorie de cohomologie sur $h\,Top^2$. On définit les **groupes de coefficients** de h^* par $h^n(*, \emptyset)$, $n \in \mathbb{Z}$.

L'application $s : \{*\} \longrightarrow \mathbb{S}^0$ envoie $\{*\}$ sur $\{s_0\}$. La triade $(\mathbb{S}^0; s_0, -1)$ étant excisive, $s^* : h^n(\mathbb{S}^0, s_0) \xrightarrow{\cong} h^n(*, \emptyset)$ est un isomorphisme pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Grâce au Corollaire 2.1.14, on peut "décaler les indices" pour avoir le deuxième isomorphisme ci-dessous :

$$h^{n-k}(*, \emptyset) \cong h^{n-k}(\mathbb{S}^0, s_0) \cong h^n(\mathbb{S}^k, s_0).$$

Ainsi le n-ème groupe de cohomologie d'une sphère de dimension k coincide avec le $(n-k)$-ème groupe de coefficients de cette théorie de cohomologie.

2.1.4 La l.s.e. de Mayer-Vietoris pour une théorie de cohomologie réduite et ses conséquences

Soient les inclusions $j_1 : (A, A \cap B) \hookrightarrow (X, B)$, $J_1 : (X, C) \hookrightarrow (X, B)$,

$$\begin{tikzcd} & (A, C) \arrow[dr, "i_3"] & \\ (A \cap B, C) \arrow[ur, "i_1"] \arrow[dr, "i_2"'] & & (X, C) \\ & (B, C) \arrow[ur, "i_4"'] & \end{tikzcd}$$

et notons Δ_1 le connectant pour le triplet $(A, A \cap B, C)$ (défini au 2.1.11).

Théorème 2.1.17. [Longue suite exacte de Mayer-Vietoris] *Soient $(X; A, B)$ une triade excisive et $C \subset A \cap B$. Alors il existe une l.s.e. en cohomologie*

$$\dots \xrightarrow{\Delta'} h^n(X, C) \xrightarrow{\delta} h^n(A, C) \oplus h^n(B, C) \xrightarrow{\gamma} h^n(A \cap B, C) \xrightarrow{\Delta'} h^{n+1}(X, C) \longrightarrow \dots$$

avec

$$\delta(x) = (i_3^*(x), i_4^*(x)),$$
$$\gamma(y, z) = i_1^*(y) - i_2^*(z),$$

et où Δ' est la composition

$$\begin{tikzcd} h^{n-1}(A \cap B, C) \arrow[r, "\Delta_1"] \arrow[rrr, bend right, "\Delta'"'] & h^n(A, A \cap B) & h^n(X, B) \arrow[l, "j_1^*"', "\cong"] \arrow[r, "J_1^*"] & h^n(X, C) \end{tikzcd}$$

Démonstration. Pour montrer que la longue suite est exacte, il faut montrer six relations, comme on l'a fait dans 2.1.11 :

i) $\gamma \circ \delta = 0$: Soit $z \in h^n(X, C)$. On a

$$\gamma \circ \delta(z) = \gamma(i_3^*(z), i_4^*(z)) = i_1^* \circ i_3^*(z) - i_2^* \circ i_4^*(z).$$

Mais $i_3 \circ i_1 = i_4 \circ i_2$, donc $\gamma \circ \delta(z) = 0$, pour tout $z \in h^n(X, C)$.

ii) - vi) Nous allons expliquer la construction du diagramme commutatif qu'il faut utiliser pour démontrer les cinq relations qui restent, sans faire ces calculs.
On prend la suite des applications qui définissent Δ', et on l'arrange comme ci-dessous dans un diagramme (les flèches correspondantes sont pleines). Puis, on complète les lignes du haut et du bas avec les morphismes et groupes manquants pour obtenir les suites exactes de triplets : dans la ligne du haut il s'agit du triplet $(A, A \cap B, C)$ (flèches en pointillés), dans celle du bas c'est $(X; B, C)$ (flèches ondulées). On rajoute enfin les morphismes verticaux, induits par les inclusions :

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, dotted] & h^n(A\cap B, C) \arrow[r, "\Delta'"] & h^{n+1}(A, A\cap B) \arrow[r, dotted] & h^n(A, C) \arrow[r, dotted, "i_1^*"] & {} \\
\cdots \arrow[r, squiggly] & h^n(B, C) \arrow[u, dashed, "i_2^*"'] \arrow[r, squiggly] & h^n(X, B) \arrow[u, "\cong", "j_1^*"'] \arrow[r, "J_1^*"'] & h^n(X, C) \arrow[u, dashed, "i_3^*"] \arrow[r, squiggly, "i_4^*"'] & {}
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
h^n(A\cap B, C) \arrow[r, "\Delta'"] & h^{n+2}(A, A\cap B) \arrow[r, dotted] & \cdots \\
h^{n+1}(B, C) \arrow[u, dashed, "i_2^*"'] \arrow[r, squiggly] & h^n(X, B) \arrow[u, "\cong", "j_1^*"'] \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Alors l'exactitude de la l.s.e. de Mayer-Vietoris devient un fruit purement algèbrique d'une chasse assidue de ce diagramme...

□

La l.s.e. de M-V est un outil très utile pour les calculs de cohomologie. Si, pour simpifier, on suppose que $C = \emptyset$ ci-dessus, on remarquera alors que dans le cas où l'espace X s'écrit comme union de deux sous-espaces A et B, dont on connaît la cohomologie, alors la suite de M-V nous donne des informations sur la cohomologie de X, pourvu que l'on connaisse aussi la cohomologie de l'intersection $A \cap B$. Plus généralement, le même raisonnement s'applique lorsque X s'écrit comme une union finie de sous-espaces.

Les résultats suivants découlent rapidement de la l.s.e. de M-V.

Proposition 2.1.18. *Soit* $(X; A, B)$ *une triade excisive. Alors les inclusions* $i_A : (A, A\cap B) \hookrightarrow (X, A \cap B)$ *et* $i_B : (B, A \cap B) \hookrightarrow (X, A \cap B)$ *induisent un isomorphisme :*

$$(i_A^*, i_B^*) : h^n(X, A\cap B) \xrightarrow{\cong} h^n(A, A\cap B) \oplus h^n(B, A \cap B),\ n \in \mathbb{Z}.$$

Démonstration. Appliquons M-V avec $C = A \cap B$: par le 2.1.7 on a $h^n(A \cap B, A \cap B) = 0$, et la l.s.e. donne $h^n(X, A\cap B) \xrightarrow{\cong} h^n(A, A\cap B) \oplus h^n(B, A \cap B)$. □

Corollaire 2.1.19. *Soit $X = A \cup B$ où A, B sont deux ouverts disjoints. Alors*
$$(i_A^*, i_B^*) : h^n(X, \emptyset) \xrightarrow{\cong} h^n(A, \emptyset) \oplus h^n(B, \emptyset),\ n \in \mathbb{Z}\,.$$

Démonstration. Les deux sous-espaces sont disjoints, d'où $A \cap B = \emptyset$, et ouverts d'où $X = \overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B}$, ainsi la triade $(X; A, B)$ est excisive et la Proposition ci-dessus s'applique. □

Corollaire 2.1.20. *Les inclusions*
$$i_X : (X, x_0) \hookrightarrow (X \vee Y, \{*\})\ et\, i_Y : (Y, y_0) \hookrightarrow (X \vee Y, \{*\})$$
iduisent un isomorphisme en cohomologie
$$(i_X^*, i_Y^*) : h^n(X \vee Y, \{*\}) \xrightarrow{\cong} h^n(X, x_0) \oplus h^n(Y, y_0),\ n \in \mathbb{Z}$$

Démonstration. Si X et Y sont des CW-complexes, $X \vee Y$ est facilement muni d'une structure de CW-complexe aussi. Ainsi $(X \vee Y; X, Y)$ est une CW-triade, donc elle est excisive par la Proposition 2.1.5. □

Un exemple d'application de Mayer-Vietoris

Nous allons donner un exemple d'utilisation de la l.s.e. de M-V en homologie, où les calculs sont plus faciles à voir. On va calculer les groupes d'homologie du tore.
Considérons le tore $T = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$. On le divise en deux sous-espaces A et B, tous les deux homéomorphes à $\mathbb{S}^1 \times I$, et tels que $T = A \cup B$. Les projections $p_A : A \longrightarrow \mathbb{S}^1$ et $p_B : B \longrightarrow \mathbb{S}^1$ sont des équivalences d'homotopie, donc la l.s.e. de M-V donne en homologie :

$$\cdots \longrightarrow h_{n+1}(T, \emptyset) \xrightarrow{\Delta'}$$

$$\begin{tikzcd}
h_n(A \cap B, \emptyset) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\cong"] & h_n(A, \emptyset) \oplus h_n(B, \emptyset) \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "p_{A*} \oplus p_{B*}", "\cong"'] & h_n(T, \emptyset) \arrow[r, "\Delta'"] & \cdots \\
h_n(\mathbb{S}^1, \emptyset) \oplus h_n(\mathbb{S}^1, \emptyset) \arrow[r, "\alpha'"] & h_n(\mathbb{S}^1, \emptyset) \oplus h_n(\mathbb{S}^1, \emptyset).
\end{tikzcd}$$

L'application α est donnée par $\alpha(x) = (i_{1*}(x), i_{2*}(x))$, l'application β par $\beta(x, y) = i_{3*}(x) - i_{4*}(y)$ et Δ' est la composition

$$h_n(X, \emptyset) \xrightarrow{J_{1*}} h_n(X, B) \xleftarrow[\cong]{j_{1*}} h_n(A, A \cap B) \xrightarrow{\Delta_1} h_{n-1}(A \cap B, \emptyset)$$

où on a conservé les notations du paragraphe 3.1.4 pour les inclusions i_1 à i_4, j_1, J_1, et pour le connectant Δ_1. Pour connaître l'expression de α', on découpe le tore en espaces A, B et les deux cercles $\mathbb{S}^1_1$ et $\mathbb{S}^1_2$ formant $A \cap B$.

Alors les inclusions i_1 et i_2 sont telles que leurs composées avec les projections p_A et p_B, restreintes aux deux cercles, donnent l'identié. L'application α' est alors donnée par

$$\alpha'(x, y) = (x + y, x + y),$$

et on a que $\operatorname{Ker}\alpha' \cong h_n(\mathbb{S}^1, \emptyset)$, $\operatorname{coker}\alpha' \cong h_n(\mathbb{S}^1, \emptyset)$.

Rappelons à présent un lemme algébrique :

Lemme 2.1.21. *Une suite exacte de groupes abéliens*

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D \xrightarrow{k} F$$

induit une suite

$$0 \longrightarrow \operatorname{coker} f \longrightarrow C \longrightarrow \operatorname{Ker} k \longrightarrow 0$$

qui est courte exacte.

Ainsi on obtient une collection de c.s.e.

$$0 \longrightarrow h_n(\mathbb{S}', \emptyset) \longrightarrow h_n(T, \emptyset) \longrightarrow h_{n-1}(\mathbb{S}^1, \emptyset) \longrightarrow 0.$$

A ce stade, pour dire plus sur les groupes d'homologie du tore $h_n(T, \emptyset)$, on a besoin d'informations sur les groupes de coefficients de la théorie h_*. Par exemple, si h_* est la théorie d'homologie ordinaire à coefficients dans $\mathbb{Z}$, alors on sait que

$$h_n(\mathbb{S}^1, \emptyset) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & n = 0, 1 \\ 0, & n \neq 0, 1 \end{cases}$$

Comme $h_{n-1}(\mathbb{S}^1, \emptyset)$ est abélien libre pour tout n, la c.s.e. ci-dessus devient scindée et on obtient

$$h_n(T, \emptyset) \cong h_{n-1}(\mathbb{S}^1, \emptyset) \oplus h_n(\mathbb{S}', \emptyset) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & n = 0, 2 \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, & n = 1 \\ 0, & n \neq 0, 1, 2. \end{cases}$$

2.2 Théories de cohomologie réduites

La notion d'une théorie de cohomologie non-réduite sur $h\,Top^2$, ayant fait l'objet de la section précédente, est fortement liée à celle d'une théorie de cohomologie réduite sur $h\,Top_*$ que l'on va développer maintenant.

2.2.1 Définitions et axiomes de base

Définition 2.2.1. Une **théorie de cohomologie réduite** k^* sur $h\,Top_*$ est la donnée d'une suite de foncteurs contravariants

$$k^n : h\,Top_* \longrightarrow Ab,\ n \in \mathbb{Z},$$

définis par

$$(X, x_0) \mapsto k^n(X, x_0),$$

$$([f] : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)) \mapsto f^* : k^n(Y, y_0) \longrightarrow k^n(X, x_0),$$

ainsi que d'une suite de transformations naturelles

$$\sigma^n : k^n \circ S \longrightarrow k^{n+1},\ n \in \mathbb{Z},$$

vérifiant que pour tout $(X, x_0) \in hTop_*$ le diagramme

$$\begin{tikzcd} k^n(SY) \arrow[r, "\sigma^n(Y,y_0)"] \arrow[d, "([Sf])^*"'] & k^{n-1}(Y, y_0) \arrow[d, "f^*"] \\ k^n(SX) \arrow[r, "\sigma^n(X,x_0)"'] & k^{n-1}(X, x_0) \end{tikzcd}$$

commute. Les $\{k^n\}$ et les $\{\sigma^n\}$ satisfont les axiomes suivants :

1. *Exactitude :* Pour toute paire pointée $(X, A, x_0) \in hTop^2_*$ avec les inclusions $i : (A, x_0) \hookrightarrow (X, x_0)$ et $j : (X, x_0) \hookrightarrow (X \cup CA, *)$, où CA est le cône réduit au-dessus de A, la suite

$$k^n(X \cup CA, *) \xrightarrow{j^*} k^n(X, x_0) \xrightarrow{i^*} k^n(A, x_0)$$

   est exacte.

2. *Axiome du wedge :* Pour toute collection $\{(X_\alpha, x_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ d'espaces pointés, les inclusions $i_\alpha : X_\alpha \hookrightarrow \vee_{\beta \in A} X_\beta$ induisent un isomorphisme

$$\{i^*_\alpha\} : k^n(\vee_{\alpha \in A} X_\alpha) \xrightarrow{\cong} \prod_{\alpha \in A} k^n(X_\alpha),\ n \in \mathbb{Z}\,.$$

3. *Axiome d'équivalence d'homotopie faible (WHE) :* Si $f : X \longrightarrow Y$ est une équivalence d'homotopie faible, alors

$$f^* : k^n(Y, f(x_0)) \xrightarrow{\cong} k^n(X, x_0)$$

   est un isomorphisme pour tout $n \in \mathbb{Z}$, et tout $x_0 \in X$.

Proposition 2.2.2. *Pour tout point $\{x\}$, on a $k^n(\{x\}, x) = 0$, $n \in \mathbb{Z}$.*

Démonstration. Pour la paire pointée $(\{x\}, \{x\}, x)$ très particulière, les inclusions $i : (\{x\}, x) \hookrightarrow (\{x\}, x)$ et $j : (\{x\}, x) \hookrightarrow (\{x\} \cup C\{x\}, *)$ sont égales à l'identité. Si on souhaite que la suite

$$k^n(\{x\}, x) \xrightarrow{id^*} k^n(\{x\}, x) \xrightarrow{id^*} k^n(\{x\}, x)$$

soit exacte, il faut avoir $k^n(\{x\}, x) = 0$. □

La proposition suivante nous garantit l'existence du connectant pour les paires pointées.

Proposition 2.2.3. *Pour toute paire pointée $(X, A, x_0) \in hTop^2_*$, il existe des transformations naturelles $\hat{\partial}^n$ et une l.s.e.*

$$\cdots \longrightarrow k^{n-1}(A, x_0) \xrightarrow{\hat{\partial}^{n-1}(X,A,x_0)}$$

$$k^n(X \cup CA, *) \xrightarrow{j^*} k^n(X, x_0) \xrightarrow{i^*} k^n(A, x_0) \xrightarrow{\hat{\partial}^n(X,A,x_0)} \cdots$$

Avant de prouver cette proposition, rappelons le résultat suivant :

Lemme 2.2.4. *Si $i : A \hookrightarrow X$ est l'inclusion, alors $X \cup_i CA/CA$ est homéomorphe au quotient X/A.*

Le lemme nous donne la suite d'homéomorphismes suivants :

$$(X \cup_i CA) \cup_j CX/CX \approx X \cup_i CA/X \approx CA/A \approx SA.$$

Démonstration. Nous avons la suite qui relie les mapping cones itérés des applications i, j, k et l :

$$A \xrightarrow{i} X \xrightarrow{j} (X \cup_i CA) \xrightarrow{k} (X \cup_i CA) \cup_j CX \xrightarrow{l} ((X \cup_i CA) \cup_j CX) \cup_k C(X \cup_i CA).$$

Soit $\overline{q}$ l'équivalence d'homotopie donnée par le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} (X \cup_i CA) \cup_j CX \arrow[r, two heads, "q"] \arrow[dr, "\overline{q}"'] & (X \cup_i CA) \cup_j CX/CX \arrow[d, "\cong"] \\ & SA. \end{tikzcd}$$

De même, on note $\overline{q}'$ l'équivalence d'homotopie correspondante, décalée d'un cran à droite dans la suite des cônes itérés.

Enfin, soit $k' = \overline{q} \circ k$, et soit $\nu' : SA \longrightarrow SA$ l'inverse homotopique dans le H-cogroupe SA. Alors il y a une équivalence d'homotopie

$$\begin{tikzcd} X \cup_i CA \arrow[r, "k'"] \arrow[rr, bend right, "\nu' \circ k'"'] & SA \arrow[r, "\nu'"] & SA. \end{tikzcd}$$

On définit le connectant $\hat{\partial}^{n-1}(X, A, x_0)$ de la l.s.e par

$$\begin{tikzcd} k^{n-1}(A) & k^n(SA) \arrow[l, "\sigma^n"', "\cong"] \arrow[r, "(\nu' \circ k')^*"] & k^n(X \cup CA). \arrow[from=1-1, to=1-3, bend right, "\hat{\partial}^{n-1}"'] \end{tikzcd}$$

En appliquant k^* à la suite et en complétant nous avons le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
k^n(((X\cup_i CA)\cup_j CX)\cup_k C(X\cup_i CA)) \arrow[r, "l^*"] & k^n((X\cup_i CA)\cup_j CX) \arrow[r, "k^*"] & k^n(X\cup_i CA) \arrow[d, "j^*"] \\
k^n(SX) \arrow[u, "\bar{q}'^*"', "\cong"] \arrow[r, "(Si)^*"] \arrow[d, "\cong"', "\sigma^n"] & k^n(SA) \arrow[u, "\cong"', "(\nu'\circ\bar{q})^*"] \arrow[ur, "(\nu'\circ k')^*"'] \arrow[d, "\cong"', "\sigma^n"] & k^n(X) \arrow[d, "i^*"] \\
k^{n-1}(X) \arrow[r, "i^*"] & k^{n-1}(A) \arrow[uur, bend right, "\hat{\partial}^{n-1}"'] & k^n(A)
\end{tikzcd}$$

Dans ce diagramme, le carré du bas commute par la naturalité de σ. Pour comprendre la commutativité du carré du haut, on peut essayer d'abord de suivre les transformations qui s'opèrent sur les espaces et les mapping cones par l, $\bar{q}'$, Si et $\nu'\circ\bar{q}$. On remarque alors qu'il est nécessaire de composer $\bar{q}$ par l'inverse homotopique ν' pour "retourner" la suspension SA dans l'autre sens pour être cohérent avec la suite des transformations. Puis on applique $k^*(.)$ et le diagramme commute par fonctorialité. La ligne du haut étant exacte par l'axiome d'exactitude, on conclut que celle du bas est exacte aussi, d'où la l.s.e. voulue. □

Le lemme qui suit décrit l'opération d'addition sur le groupe $k^n(L)$ induite par la structure du H-cogroupe (L, l_0). On laisse tomber les points de base pour allèger la notation.

Lemme 2.2.5. *Soit (L, l_0) un CW-complexe, muni d'une structure de H-cogroupe avec la comultiplication $\mu' \colon L \longrightarrow L \vee L$ et l'inverse homotopique $\nu' \colon L \longrightarrow L$. Alors l'application d'addition $\beta : k^n(L) \oplus k^n(L) \longrightarrow k^n(L)$ est définie par la composition*

$$\begin{tikzcd}
k^n(L)\oplus k^n(L) \arrow[rr, bend right, "\beta"'] & k^n(L\vee L) \arrow[l, "(i_1^*, i_2^*)"', "\cong"] \arrow[r, "\mu'^*"] & k^n(L)
\end{tikzcd}$$

$$(x, y) \mapsto x + y.$$

Démonstration. Considérons le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
k^n(L)\oplus k^n(L) & k^n(L\vee L) \arrow[l, "(i_1^*, i_2^*)"', "\cong"] \arrow[r, "\mu'^*"] & k^n(L) \, . \\
 & k^n(L) \arrow[ul, "(l_0^*, id)"] \arrow[u, "(l_0 id)^*"] \arrow[ur, "id"'] &
\end{tikzcd}$$

L'application constante $l_0 \colon L \longrightarrow L$ qui envoie tout point $l \in L$ sur l_0, se factorise à travers $c \colon L \longrightarrow \{l_0\}$. Et puisque $k^n(\{l_0\}) = 0$ par la Proposition 2.2.2, on a que $l_0^* \equiv 0$. Posons $\beta = \mu'^* \circ (i_1^*, i_2^*)^{-1}$, et soit $x \in k^n(L)$. Alors

$$\begin{aligned}
x &= \beta \circ (l_0^*, id)(x) \\
&= \beta(0, x)
\end{aligned}$$

D'autre part, le même diagramme reste vrai en changeant l'ordre des facteurs pour la flèche de gauche, i.e., avec (id, l_0^*). En utilisant cela, on a

$$\begin{aligned} x &= \beta \circ (id, l_0^*)(x) \\ &= \beta(id, 0)(x) \\ &= \beta(x, 0) \end{aligned}$$

Mais β est un homomorphisme, donc on conclut des calculs précédents que pour x, $y \in k^n(L)$ on a

$$\beta(x, y) = \beta[(x, 0) + (0, y)] = \beta(x, 0) + \beta(0, y) = x + y.$$

Montrons maintenant que $\nu'^* \colon k^n(L) \longrightarrow k^n(L)$ est donné par $x \mapsto -x$. Le diagramme

$$\begin{tikzcd} L \vee L \arrow[r, "(\nu' \vee id)"] & L \\ L \arrow[u, "\mu'"] \arrow[ur, "l_0"'] & \end{tikzcd}$$

commute à homotopie près, induisant

$$\begin{tikzcd} k^n(L \vee L) \arrow[d, "\mu'^*"'] & k^n(L) \arrow[l, "(\nu' \vee id)^*"'] \arrow[dl, "l_0^*"] \\ k^n(L). & \end{tikzcd}$$

Or nous avons :

Lemme 2.2.6. *Pour $f : (X, x_0) \longrightarrow (Z, z_0)$ et $g : (Y, y_0) \longrightarrow (Z, z_0)$ des applications pointées d'espaces, on définit $f \vee g : (X \vee Y, *) \longrightarrow (Z, z_0)$, et le diagramme suivant commute :*

$$\begin{tikzcd} k^n(X \vee Y) \arrow[d, "(i_1^*, i_2^*)"', "\cong"] & k^n(Z) \arrow[l, "(f \vee g)^*"'] \arrow[dl, "(f^*, g^*)"] \\ k^n(X) \oplus k^n(Y). & \end{tikzcd}$$

Ce lemme appliqué ici nous donne le diagramme

$$\begin{tikzcd} k^n(L \vee L) \arrow[d, "(i_1^*, i_2^*)"', "\cong"] & k^n(L) \arrow[l, "(\nu' \vee id)^*"'] \arrow[dl, "(\nu'^*, id)"] \\ k^n(L) \oplus k^n(L) & \end{tikzcd}$$

qui commute, ce qui permet d'écrire

$$\beta \circ (\nu'^*, id) = \mu'^* \circ (i_1^*, i_2^*)^{-1} \circ (\nu'^*, id) = \mu'^* \circ (\nu' \vee id)^*.$$

Ainsi en combinant les deux diagrammes

$$\mu'^* \circ (\nu' \vee id)^* = \beta \circ (\nu'^*, id) = l_0^* = 0,$$

ce qui donne pour $x \in k^n(L)$ quelconque

$$\beta \circ (\nu'^*, id)(x, x) = \beta(\nu'^*(x), x) = \nu'^*(x) + x = 0.$$

$\square$

2.3 La relation entres les théories généralisées réduites et non-réduites

Dans cette section nous allons voir qu'en se donnant une théorie de cohomologie non-réduite h^*, on peut construire une théorie de cohomologie réduite $\tilde{h}^*$ et réciproquement : en partant d'une théorie de cohomologie réduite k^*, on obtient une théorie de cohomologie non-réduite $\hat{k}^*$.
De plus, on montrera qu'il existe une correspondance bijective entre les théories réduites et non-réduites : cette équivalence se traduira par l'existence des transformations naturelles entre $\hat{\tilde{h}}^*$ et h^* d'une part, et entre $\tilde{\hat{k}}^*$ et k^* d'autre part.

2.3.1 D'une théorie de cohomologie non-réduite vers une théorie de cohomologie réduite

Définition 2.3.1. Soit h^* une théorie de cohomologie non-réduite, et soit $(X, x_0) \in hTop_*$. Alors on définit une suite de foncteurs contravariants

$$\tilde{h}^n : hTop_* \longrightarrow Ab, \; n \in \mathbb{Z},$$

par

$$\tilde{h}^n(X, x_0) = h^n(X, \{x_0\}),$$

et

$$\tilde{h}^n[f] = h^n[f],$$

pour $f : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$.

On a aussi une suite de transformations naturelles

$$\tilde{\sigma}^n : \tilde{h}^n \circ S \xrightarrow{\cong} \tilde{h}^{n-1}, \; n \in \mathbb{Z},$$

telles que pour tout $(X, x_0) \in hTop_*$ le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\tilde{h}^n \circ S(Y, y_0) \arrow[r, "\tilde{\sigma}^n(Y,y_0)"] \arrow[d, "([Sf])^*"'] & \tilde{h}^{n-1}(Y, y_0) \arrow[d, "h^n[f]"] \\
\tilde{h}^n \circ S(X, x_0) \arrow[r, "\tilde{\sigma}^n(X,x_0)"'] & \tilde{h}^{n-1}(X, x_0)
\end{tikzcd}$$

commute. On remarque que par la Proposition 2.1.13, $\tilde{\sigma}^n$ est bien un isomorphisme naturel.

Pour montrer que la théorie $\tilde{h}^n$ qu'on vient de définir est une théorie de cohomologie réduite, il reste maintenant à voir qu'elle vérifie l'axiome d'exactitude.

Démonstration. Soit $(X, A, x_0) \in h\,Top^2_*$ une paire pointée. Nous avons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
\tilde{h}^n(X \cup CA, *) \arrow[r, "\tilde{h}^n[j]"] \arrow[d, equal, "\text{déf}"] & \tilde{h}^n(X, x_0) \arrow[r, "\tilde{h}^n[i]"] \arrow[ddd, equal, "\text{déf}"] & \tilde{h}^n(A, x_0) \arrow[ddd, equal, "\text{déf}"] \\
h^n(X \cup CA, \{*\}) & & \\
h^n(X \cup CA, CA) \arrow[u, "j'^*", "\cong"'] \arrow[d, "i'^*"', "\cong"] & & \\
h^n(X, A) \arrow[r, "J^*"] & h^n(X, \{x_0\}) \arrow[r, "I^*"] & h^n(A, \{x_0\}),
\end{tikzcd}$$

Ici j'^* est un isomorphisme puisque le cône CA est contactile, et i'^* est l'isomorphisme noté i^* dans la preuve de la Proposition 2.1.12. On observe que la ligne du bas est précisement la l.s.e. du triplet (X, A, x_0), donc la ligne du haut est exacte aussi, ce qui démontre que $\tilde{h}^n$ est une théorie de cohomologie réduite. $\square$

Maintenant le passage inverse !

2.3.2 D'une théorie de cohomologie réduite vers une théorie de cohomologie non-réduite

Définition 2.3.2. Soit k^* une théorie de cohomologie réduite. On définit une suite de foncteurs contravariants

$$\hat{k}^n : h\,Top^2 \longrightarrow Ab,\ n \in \mathbb{Z},$$

par

$$\hat{k}^n(X, A) = k^n(X^+ \cup CA^+, +),$$

et

$$\hat{k}^n[f] = k^n[\hat{f}],$$

où $\hat{f} : (X^+ \cup CA^+, +) \longrightarrow (Y^+ \cup CB^+, +)$ est induite par $f : (X, A) \longrightarrow (Y, B)$. On définit également une suite de transformations naturelles

$$\hat{\partial}^n : \hat{k}^n \circ R \longrightarrow \hat{k}^{n+1},\ n \in \mathbb{Z},$$

par

$$\begin{tikzcd}
\hat{k}^n(A,\emptyset) \arrow[d, equal] & & \hat{k}^{n+1}(X,A) \arrow[d, equal] \\
k^n(A^+,+) \arrow[rr, bend right, "\hat{\partial}^{n+1}"'] & k^{n+1}(SA) \arrow[l, "\sigma^{n+1}"', "\cong"] \arrow[r, "(\nu'\circ k')^*"] & k^{n+1}(X^+\cup CA^+,+).
\end{tikzcd}$$

telles que pour tout $(X,A) \in h\,Top^2$ le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\hat{k}^n \circ R(Y,B) \arrow[r, "\hat{\partial}^n(Y,B)"] \arrow[d, "([f]|_A)^*"'] & \hat{k}^{n+1}(Y,B) \arrow[d, "k^n[\hat{f}]"] \\
\hat{k}^n \circ R(X,A) \arrow[r, "\hat{\partial}^n(X,A)"'] & \hat{k}^{n+1}(X,A)
\end{tikzcd}$$

commute. Vu la Proposition 2.2.3 sur le connectant, la théorie $\hat{k}^*$ définie de cette manière satisfait alors l'axiome d'exactitude d'une théorie de cohomologie non-réduite.

Supposons maintenant que k^* satisfait WHE et montrons que $\hat{k}^*$ satisfait l'axiome d'excision.

Démonstration. Prenons une triade $(X;A,B)$ avec $X = \overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B}$. Il faut montrer que l'inclusion $j : (A, A\cap B) \hookrightarrow (X,B)$ induit un isomorphisme

$$\hat{k}^n(X,B) \overset{\hat{k}^n[j]}{\longrightarrow} \hat{k}^n(A, A\cap B),\ n \in \mathbb{Z}\,.$$

- ***Si*** $(X;A,B)$ ***est une CW-triade*** : L'application

  $$\hat{j} : A^+ \cup C(A\cap B)^+ \longrightarrow X^+ \cup CB^+$$

  induit

  $$\hat{j}^* : k^n(X^+ \cup CB^+) := \hat{k}^n(X,B) \longrightarrow k^n(A^+ \cup C(A\cap B)^+) := \hat{k}^n(A, A\cap B).$$

  Pour voir que c'est un isomorphisme on considère le diagramme commutatif suivant :

  $$\begin{tikzcd}
  k^n(X^+ \cup CB^+) \arrow[r, "\hat{j}^*", "\cong"'] & k^n(A^+ \cup C(A\cap B)^+) \\
  k^n(X/B) \arrow[u, "p_2^*", "\cong"'] \arrow[r, "J^*", "\cong"'] & k^n(A/A\cap B). \arrow[u, "\cong", "p_1^*"']
  \end{tikzcd}$$

  Les projections

  $$p_1 : A^+ \cup C(A\cap B)^+ \longrightarrow A/A\cap B$$

et

$$p_2 : X^+ \cup CB^+ \longrightarrow X/B$$

sont des équivalences d'homotopie, donc elles induisent des isomorphismes en cohomologie. L'application $J : A/A \cap B \xrightarrow{\approx} X/B$ est un homéomorphisme, donc J^* est un isomorphisme aussi. Ainsi $\hat{j}^*$ est un isomorphisme, ce qui montre que $\hat{k}^*$ est une théorie de cohomologie non-réduite sur $h\mathcal{CW}^2$.

- ***Si*** $(X; A, B)$ ***une triade arbitraire*** : Pour montrer le même résultat sur $h\,Top^2$, on travaillera avec des CW-remplacements.

  Définition 2.3.3. Un **CW-remplacement** pour $Y \in Top$ est une paire (Y', f') où $Y' \in \mathcal{CW}$ et $f' : Y' \longrightarrow Y$ est une équivalence d'homotopie faible. De tels espaces Y' et applications f' existent et peuvent être construits pour tout $Y \in Top$, comme l'assure l'exercice 6.49 chez Switzer.

  Soit donc $(X; A, B)$ une triade arbitraire et soient des CW-remplacements : C', A' et B' pour $C = A \cap B$, A et B respectivement. On a $X' = A' \cup B'$ et $f' : X' \longrightarrow X$ une équivalence d'homotopie faible. L'exactitude et WHE impliquent que les applications

$$(f')^* : k^n(A^+ \cup C(A \cap B)^+) \xrightarrow{\cong} k^n(A'^+ \cup C(A' \cap B')^+)$$

  et

$$(f'')^* : k^n(X^+ \cup CB^+) \xrightarrow{\cong} k^n(X'^+ \cup CB'^+)$$

  sont des isomorphismes. De plus, puisque la triade $(X'; A', B')$ est une CW-triade, $\hat{j'}^*$ est un isomorphisme par le cas précédent. D'où le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
k^n(X^+ \cup CB^+) \arrow[r, "\hat{j}^*"] \arrow[d, "(f'')^*"', "\cong"] & k^n(A^+ \cup C(A \cap B)^+) \arrow[d, "(f')^*"', "\cong"] \\
k^n(X'^+ \cup CB'^+) \arrow[r, "\hat{j}'^*", "\cong"'] & k^n(A'^+ \cup C(A' \cap B')^+),
\end{tikzcd}$$

  qui montre que $\hat{j}^*$ est un isomorphisme, ce qui conclut la preuve sur $h\,Top^2$.

$\square$

Il reste à montrer que k^* satisfait l'axiome du wedge.

Proposition 2.3.4. *Pour tous (X, x_0), $(Y, y_0) \in h\mathcal{CW}_*$, les inclusions i_X : $(X, x_0) \longrightarrow (X \vee Y, *)$ et $i_Y : (Y, y_0) \longrightarrow (X \vee Y, *)$ induisent un isomorphisme*

$$(i_X^*, i_Y^*) \colon k^n(X \vee Y, *) \xrightarrow{\cong} k^n(X, x_0) \oplus k^n(Y, y_0).$$

Démonstration.

$$\begin{tikzcd}
\hat{k}^n(X \vee Y, \{*\}) \arrow[r, "\therefore_{(2)} \cong"] \arrow[d, equal, "\text{déf}"] & \hat{k}^n(X, \{x_0\}) \oplus \hat{k}^n(Y, \{y_0\}) \arrow[d, equal] \\
k^n((X \vee Y)^+ \vee C*^+) \arrow[r, "\therefore_{(1)} \cong"] \arrow[d] & \hat{k}^n(X^+ \vee Cx_0^+) \oplus \hat{k}^n(Y^+ \vee Cy_0^+) \arrow[d, "\cong"] \\
k^n(X \vee Y, *) \arrow[r, "\cong"] & k^n(X, x_0) \oplus k^n(Y, y_0).
\end{tikzcd}$$

□

Pour le cas d'un wedge d'espaces arbitraire, le même argument s'applique par récurrence.

2.3.3 La correspondance bijective entre les théories de cohomologie réduites et non-réduites

Définitions 2.3.5. • Soient h^* et h'^* deux théories de cohomologie non-réduites. Une **transformation naturelle** $T^* \colon h^* \longrightarrow h'^*$ **entre** h^* **et** h'^* est une collection de transformations naturelles

$$T^n \colon h^n \longrightarrow h'^n,$$

telles que pour toute paire $(X, A) \in h\,Top^2$ le carré

$$\begin{tikzcd}
h^n(A, \emptyset) \arrow[r, "\partial^n(X,A)"] \arrow[d, "T^n(A,\emptyset)"'] & h^{n+1}(X, A) \arrow[d, "T^{n+1}(X,A)"] \\
h'^n(A, \emptyset) \arrow[r, "\partial'^n(X,A)"'] & h'^{n+1}(X, A)
\end{tikzcd}$$

commute.

• Soient k^* et k'^* deux théories de cohomologie réduites. Une **transformation naturelle** $V^* \colon k^* \longrightarrow k'^*$ **entre** k^* **et** k'^* est une collection de transformations naturelles

$$V^n \colon k^n \longrightarrow k'^n,$$

telles que pour toute paire pointée $(X, A, x_0) \in h\,Top_*^2$ le carré

$$\begin{tikzcd}
k^n(SX, x_0) \arrow[r, "\hat{\sigma}^n"] \arrow[d, "V^{n-1}(SX,x_0)"'] & k^{n-1}(X, x_0) \arrow[d, "V^n(X,x_0)"] \\
k'^n(SX, x_0) \arrow[r, "\hat{\sigma}'^n"'] & k'^{n-1}(X, x_0)
\end{tikzcd}$$

commute.

- T^* (resp. V^*) est un **isomorphisme naturel entre h^* et h'^* (resp. entre k^* et k'^*)** si chaque T^n (resp. V^n) est un isomorphisme naturel, pour tout $n \in \mathbb{Z}$.
- Moralement, ces deux conditions traduisent en particulier le fait que dans les l.s.e. des paires (resp. dans les l.s.e des paires pointées), les couples de théories h^* et h'^* (resp. k^* et k'^*) "respectent" les connectants.

Définition 2.3.6. On dit qu'un espace pointé (X, x_0) a un **point de base non-dégénéré** si l'inclusion $i\colon \{x_0\} \hookrightarrow X$ est une cofibration. On notera par $h\,Top_*^0$ la catégorie d'espaces correspondante.

Soit k^* une théorie de cohomologie réduite quelconque et soit $(X, x_0) \in h\,Top_*^0$. Pour un tel espace, la projection $p\colon (X^+ \cup C\{x_0\}^+, *) \longrightarrow (X, x_0)$ est une équivalence d'homotopie par le Lemme 1.1.2. Donc p induit un isomorphisme en cohomologie, définissant ainsi un isomorphisme naturel $V^n\colon \tilde{\hat{k}}^n \longrightarrow k^n$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{tikzcd}
\tilde{\hat{k}}^n(X,x_0) \arrow[r, equal, "2.3.1"] \arrow[rrr, bend right, "V^n"'] & \hat{k}^n(X,\{x_0\}) \arrow[r, equal, "2.3.2"] & k^n(X^+ \cup C\{x_0\}^+, *) & k^n(X,x_0). \arrow[l, "p^*"', "\cong"]
\end{tikzcd}$$

Lemme 2.3.7. *Si k^* satisfait WHE, alors la collection d'isomorphismes naturels $V^* = \{V^n\}\colon \tilde{\hat{k}}^n \longrightarrow k^n$ définit un isomorphisme naturel de théories de cohomologie réduites sur $h\,Top_*^0$, i.e., les V^n font commuter*

$$\begin{tikzcd}
k^n \circ S(X,x_0) \arrow[r, "\sigma^n"] & k^{n-1}(X,x_0) \\
\tilde{\hat{k}}^n \circ S(X,x_0) \arrow[r, "\tilde{\hat{\sigma}}^n"'] \arrow[u, "V^n(S(X,x_0))"] & \tilde{\hat{k}}^{n-1}(X,x_0) \arrow[u, "V^{n-1}(X,x_0)"']
\end{tikzcd}$$

pour tout $(X, x_0) \in h\,Top_*^0$.

Idée de preuve : La preuve consiste à compléter l'intérieur du diagramme ci-dessus en utilisant les définitions des opérations ˆ et ˜ sur la théorie k^* pour faire intervenir les groupes de cohomologie des autres paires d'espaces, impliquées dans le raisonnement dès le début. Relier ces groupes avec les applications appropriées (connectants des l.s.e., homomorphismes induits par les projections,...) permettra de conclure que le diagramme extérieur est commutatif. La plupart des morphismes seront en fait des isomorphismes par naturalité, par définition ou grâce au fait que précisement k^* satisfait WHE. Pour les détails de la preuve pour les théories d'homologie, le lecteur peut consulter le livre de Switzer (Sw, Lemme 7.42]). □

Soit h^* une théorie de cohomologie non-réduite quelconque et soit $(X, A) \in h\,Top^2$. Nous avons

$$\hat{\tilde{h}}^n(X, A) \overset{2.3.2}{=\!=\!=} \tilde{h}^n(X^+ \cup CA^+, *) \overset{2.3.1}{=\!=\!=} h^n(X^+ \cup CA^+, \{*\}),$$

et la composition

$$h^n(X^+ \cup CA^+, \{*\}) \xleftarrow[\cong]{J^*} h^n(X^+ \cup CA^+, CA^+) \xrightarrow[\cong]{i^*} h^n(X, A)$$

définit un isomorphisme naturel $T^n\colon \hat{\tilde{h}}^n \longrightarrow h^n$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Lemme 2.3.8. *Si h^* satisfait WHE, alors la collection d'isomorphismes naturels $T^* = \{T^n\}\colon \hat{\tilde{h}}^n \longrightarrow h^n$ définit un isomorphisme naturel de théories de cohomologie non-réduites sur $h\,Top^2$, i.e., les T^n font commuter*

$$\begin{tikzcd}
h^n \circ R(X, A) \arrow[r, "\partial^n"] & h^{n-1}(X, A) \\
\hat{\tilde{h}}^n \circ R(X, A) \arrow[u, "T^n(R(X,A))"] \arrow[r, "\hat{\tilde{\partial}}^n"'] & \tilde{\hat{h}}^{n-1}(X, A) \arrow[u, "T^{n-1}(X,A)"']
\end{tikzcd}$$

pour tout $(X, A) \in h\,Top^2$.

Même technique pour la preuve de ce lemme ; la démonstration du résultat correspondant pour les théories d'homologie est le Lemme 7.44. du livre de Switzer.

Le dernier détail qui achève la preuve de la correspondance bijective entre les théories de cohomologie réduites et non-réduites consiste à noter que pour tout $(X, A) \in Top^2$ l'espace $(X^+ \cup CA^+, *)$ est "bien pointé", i.e., $(X^+ \cup CA^+, \{*\}) \in h\,Top^0_*$.

Remarques 2.3.9. **i)** Remarquons que si on se restreint sur les catégories des paires de CW-complexes, et de CW-complexes pointés, la correspondance bijective qu'on vient d'établir est vraie sans devoir supposer l'axiome d'équivalence d'homotopie faible : en fait, dans ce cas WHE découle automatiquement de la Proposition 2.1.8 et du Théorème de Whitehead (1.4.3).

ii) Par analogie avec 2.1.16, on peut définir les **groupes de coefficients** d'une théorie réduite de cohomologie k^* par $k^n(\{*\}^+, +)$, $n \in \mathbb{Z}$.

On aura

$$k^n(\{*\}^+, +) \cong k^n(\mathbb{S}^0, s_0),\ n \in \mathbb{Z},$$

et $k^n(\mathbb{S}^k, s_0) \cong k^{n-k}(\mathbb{S}^0, s_0)$.

2.4 Calcul des groupes de cohomologie d'un CW-complexe

Pour tout CW-complexe (X, x_0), on a $X^n/X^{n-1} \cong \vee_{\alpha \in J_n} \mathbb{S}^n$, où X^r dénote le sous-complexe de degré r, et la l.s.e. de la paire (X^n, X^{n-1}) donne

$$\cdots \longrightarrow k^{q-1}(X^{n-1}) \xrightarrow{\partial} k^q(\vee_{\alpha \in J_n} \mathbb{S}^n) \xrightarrow{j^*} k^q(X^n) \xrightarrow{i^*} k^q(X^{n-1}) \xrightarrow{\partial} \cdots.$$

Si la théorie k^* satisfait l'axiome du wedge, on aura

$$k^q(\vee_{\alpha \in J_n} \mathbb{S}^n_\alpha) \cong \prod_{\alpha \in J_n} k^q(\mathbb{S}^n_\alpha) = \prod_{\alpha \in J_n} k^{q-n}(\mathbb{S}^0_\alpha)$$

pour J_n ensemble d'indices quelconque. Alors l'information sur les groupes de coefficients $k^*(\mathbb{S}^0)$ permet d'obtenir de l'information sur les groupes $k^q(X^n)$ par induction pour tout $n \in \mathbb{Z}$.
Cependant, dans le cas où X est de dimension infinie, cela ne nous dit rien sur le groupe $k^q(X)$. Pour en savoir plus, nous aurons besoin de limites inverses : en fait, il se trouve que $k^q(X) = \varprojlim k^q(X^n)$.

Le résultat suivant décrit précisement la relation qui existe entre les groupes de cohomologie $\{k^q(X^n)\}_{q \in \mathbb{Z}}$ des sous-complexes d'un CW-complexe X et les groupes de cohomologie $\{k^q(X)\}_{q \in \mathbb{Z}}$ du complexe entier.

Proposition 2.4.1. *Soit (X, x_0) un CW-complexe et $X^0 \subset \ldots \subset X^n \subset \ldots \subset X$ une suite de sous-complexes avec $\cup_{n \geq 0} X^n = X$, $j^m_n \colon X^m \longrightarrow X^n$, où $i_n \colon X^n \hookrightarrow X$ sont les inclusions pour $n \geq m$. Alors $\{k^q(X^n), j^{m*}_n, \mathbb{N}\}$ est un système inverse pour tout $q \in \mathbb{Z}$, et si k^* satisfait l'axiome du wedge, alors il existe une c.s.e.*

$$0 \longrightarrow \lim{}^1 k^{q-1}(X^n) \longrightarrow k^q(X) \xrightarrow{\{i^*_n\}} \varprojlim k^q(X^n) \longrightarrow 0.$$

Idée de la preuve : Il faut introduire le téléscope

$$X' = \cup_{n \geq -1} [n-1, n]^+ \wedge X^n \subset [-2; \infty)^+ \wedge X,$$

qui est aussi un CW-complexe. On pose

$$A = \cup_{k \geq -1; k\, impair} [k-1, k]^+ \wedge X^k \subset X',$$

$$B = \cup_{k \geq 0; k\, pair} [k-1, k]^+ \wedge X^k \subset X',$$

et on considère la triade $(X'; A, B)$, à laquelle on appliquera la l.s.e. de M-V, ce qui permettra d'obtenir la c.s.e. voulue. □

On remarque ainsi qu'en cohomologie, pour que $\{i^*_n\} \colon k^q(X) \longrightarrow \varprojlim k^q(X^n)$ soit un isomorphisme il faut avoir que $\lim^1 k^{q-1}(X^n) = 0$. (En revanche, en homologie la relation est plus simple : si k_* satisfait l'axiome du wedge sur $\mathcal{CW}_*$, alors l'information sur $k_q(X^n)$ donne plus rapidement des informations sur $\varinjlim k_q(X^n) \cong k_q(X))$, comme on le verra dans la section suivante.

L'importance du théorème qui suit peut se résumer ainsi : connaître le caractère de la transformation naturelle T^* (isomorphisme/épimorphisme) pour les groupes de coefficients de deux théories de cohomologie k^* et k'^* suffit pour déduire son caractère sur les groupes de cohomologie pour tout espace X.

Théorème 2.4.2. *Soit $T^* \colon k^* \longrightarrow k'^*$ une transformation naturelle de théories de cohomologie réduites vérifiant l'axiome du wedge sur $h\mathcal{CW}_*$. Si*

$$T^q(\mathbb{S}^0, s_0) \colon k^q(\mathbb{S}^0, s_0) \longrightarrow k'^q(\mathbb{S}^0, s_0)$$

est un isomorphisme pour $q > N$ et est un épimorphisme pour $q = N$, alors pour tout CW-complexe (X, x_0) de dimension n

$$T^q(X, x_0) \colon k^q(X, x_0) \longrightarrow k'^q(X, x_0)$$

est un isomorphisme pour $q > N + n$ et un épimorphisme pour $q = N + n$.

Démonstration. Ici σ fait référence à l'application σ^n définie juste avant la Proposition 2.1.13. On la note $\sigma^{(n)}$ lorsqu'elle est composée n fois, pour éviter la confusion. On a aussi enlevé les points de base pour alléger l'écriture.

Puisque T commute avec σ, on a

$$\begin{tikzcd}
k^{n+q}(\mathbb{S}^n) \arrow[r, "\sigma^{(n)}", "\cong"'] \arrow[d, "T^{n+q}(\mathbb{S}^n)"'] & k^q(\mathbb{S}^0) \arrow[d, "T^q(\mathbb{S}^0)"] \\
k'^{n+q}(\mathbb{S}^n) \arrow[r, "\sigma'^{(n)}", "\cong"'] & k'^q(\mathbb{S}^0).
\end{tikzcd}$$

Donc si $T^q(\mathbb{S}^0)$ est un isomorpisme pour $q > N + 0$ et un épimorphisme pour $q = N + 0$, alors $T^{n+q}(\mathbb{S}^n)$ est un isomorpisme pour $q > N + n$ et un épimorphisme pour $q = N + n$.

Comme les théories k^* et k'^* satisfont l'axiome du wegde, et vu la naturalité de T, nous avons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
k^{n+q}(\vee_{\alpha\in A} \mathbb{S}^n_\alpha) \arrow[r, "\{i^*_\alpha\}", "\cong"'] \arrow[d, "T^{n+q}(\vee_{\alpha\in A} \mathbb{S}^n_\alpha)"'] & \prod_{\alpha\in A} k^{n+q}(\mathbb{S}^n_\alpha) \arrow[d, "\prod_{\alpha\in A} T^{n+q}(\mathbb{S}^n_\alpha)"] \\
k'^{n+q}(\vee_{\alpha\in A} \mathbb{S}^n_\alpha) \arrow[r, "\{i^*_\alpha\}", "\cong"'] & \prod_{\alpha\in A} k'^{n+q}(\mathbb{S}^n_\alpha)
\end{tikzcd}$$

En remplaçant $q+n$ par q, on a que $\prod_{\alpha\in A} T^{n+q}(\mathbb{S}^n_\alpha)$ est un isomorphisme pour $q > N+n$ et un épimorphisme pour $q = N+n$. Donc $T^{n+q}(\vee_{\alpha\in A} \mathbb{S}^n_\alpha)$ est aussi un isomorphisme pour $q > N + n$ et un épimorphisme pour $q = N + n$.

Pour montrer le résultat voulu sur (X, x_0), on va faire appel à sa structure de CW-complexe. Quitte à remplacer X par un complexe approprié du même type d'homotopie que X, supposons pour simplifier que $X^{n-1} = \{x_0\}$. On a alors $k^q(X^{n-1}) = 0$ pour tout q, et donc $T^q(X^{n-1})$ est toujours un isomorphisme.
Par récurrence, supposons avoir montré que $T^q(X^{m-1})$ est un isomorphisme pour $q > N + n$ et un épimorphisme pour $q = N + n$ pour un $m \geq n$.

En se rappelant que pour tout $X \in \mathcal{CW}$ on a $X^m/X^{m-1} \cong \vee_{\alpha \in J_m} \mathbb{S}^m_\alpha$, nous obtenons un diagramme commutatif de suites exactes

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & k^{q-1}(X^{m-1}) \arrow[r] \arrow[d, "T^{q-1}(X^{m-1})"'] & k^q(\vee_{\alpha \in J_m} \mathbb{S}^m_\alpha) \arrow[r] \arrow[d, "T^q(\vee_{\alpha \in J_m} \mathbb{S}^m_\alpha)"] & k^q(X^m) \arrow[r] \arrow[d, "T^q(X^m)"] & {} \\
\cdots \arrow[r] & k'^{q-1}(X^{m-1}) \arrow[r] & k'^q(\vee_{\alpha \in J_m} \mathbb{S}^m_\alpha) \arrow[r] & k'^q(X^m) \arrow[r] & {}
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
k^q(X^{m-1}) \arrow[r] \arrow[d, "T^q(X^{m-1})"'] & k^{q+1}(\vee_{\alpha \in J_m} \mathbb{S}^m_\alpha) \arrow[r] \arrow[d, "T^{q+1}(\vee_{\alpha \in J_m} \mathbb{S}^m_\alpha)"] & \cdots \\
k'^q(X^{m-1}) \arrow[r] & k'^{q+1}(\vee_{\alpha \in J_m} \mathbb{S}^m_\alpha) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

- Si $q > N + n$, alors $T^q(X^{m-1})$, $T^{q-1}(X^{m-1})$ sont des isomorphismes par hypothèse de récurrence ; $T^q(\vee_{\alpha \in J_m} \mathbb{S}^m_\alpha)$ est un isomorphisme et $T^{q+1}(\vee_{\alpha \in J_m} \mathbb{S}^m_\alpha)$ un épimorphisme par ce qui précède. Donc par le Lemme des 5, $T^q(X^m)$ est un isomorphisme.
- Si $q = N + n$, alors par hypothèse $T^q(X^{m-1})$ est un isomorphisme et $T^{q-1}(X^{m-1})$ un épimorphisme ; $T^q(\vee_{\alpha \in J_m} \mathbb{S}^m_\alpha)$ est un épimorphisme par ce qui précède, donc on conclut que $T^q(X^m)$ est un épimorphisme.

Puisque les theóries k^* et k'^* satisfont l'axiome du wedge, la Proposition 2.4.1 nous donne un diagramme commutatif de c.s.e.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \lim^1 k^{q-1}(X^n) \arrow[r] \arrow[d, "\lim^1(T^q(X^m))"'] & k^q(X) \arrow[r, "\{i_n^*\}"] \arrow[d, "T^q(X)"'] & \varprojlim k^q(X^n) \arrow[r] \arrow[d, "\varprojlim T^q(X^m)"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & \lim^1 k'^{q-1}(X^n) \arrow[r] & k'^q(X) \arrow[r, "\{i_n^*\}"] & \varprojlim k'^q(X^n) \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

On conclut alors que si $T^q(X^m)$ est un isomorphisme pour $q > N + n$ (resp. un épimorphisme pour $q = N + n$) pour toutes les valeurs de $m \geq -1$, alors $\lim^1(T^q(X^m))$ et $\varprojlim(T^q(X^m))$ sont des isomorphismes $q > N + n$ (resp. des épimorphismes pour $q = N + n$). $\square$

2.5 Quelques remarques sur les théories d'homologie généralisées

Pour compléter ce chapitre, où nous avons étudié en détails les théories de cohomologie généralisées, disons quelques mots à propos de la notion duale : les théories d'homologie généralisées. Il s'agit d'une suite de foncteurs qu'on note $\{h_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, définis de la catégorie des espaces topologiques pointés vers la catégorie des groupes abéliens, qui cette fois sont covariants. On définit de manière semblable les théories d'homologie réduites et non-réduites ; elles satisfont les axiomes correspondantes d'exactitude, d'excision, du wedge et d'équivalence d'homotopie faible, où "toutes les flèches sont inversées" par rapport au cas de la cohomologie. La l.s.e. de Mayer-Vietoris existe également (voir l'exemple de M-V traité). On peut montrer qu'il y a une correspondance bijective entre les théories d'homologie réduites et non-réduites.

Mais contrairement à la cohomologie, où on avait $k^q(X) = \varprojlim k^q(X^n)$ pour un CW-complexe X, dans le cas d'homologie on doit travailler avec les limites *directes*, et c'est à ce moment que les différences apparaissent. En particulier, la limite directe préserve les suites exactes, comme le montre la Proposition 1.5.3, ce qui n'était pas le cas pour la limite inverse. Alors la version duale du la Proposition 2.4.1 s'énonce comme suit :

Théorème 2.5.1. [Sw, Théorème 7.53] *Soit (X, x_0) un CW-complexe et $X^0 \subset ... \subset X^n \subset ... \subset X$ une suite de sous-complexes avec $\cup_{n\geq 0} X^n = X$, $j_n^m\colon X^m \longrightarrow X^n$, où $i_n\colon X^n \hookrightarrow X$ sont les inclusions pour $n \geq m$. Alors $\{k_q(X^n), j_{n*}^m, \mathbb{N}\}$ est un système direct pour tout $q \in \mathbb{Z}$, et si k_* satisfait l'axiome du wedge, alors*

$$\{i_{n*}\} : \varinjlim k_q(X^n) \longrightarrow k_q(X)$$

est un isomorphisme pour tout $q \in \mathbb{Z}$.

.

On remarque aussi que la version duale du Thèorème 2.4.2 existe également et prend la forme

Théorème 2.5.2. [Sw, Théorème 7.55] *Soit $T_*\colon k_* \longrightarrow k'_*$ une transformation naturelle de théories d'homologie satisfaisant (W) sur $h\mathcal{CW}_*$. Si*

$$T_q(\mathbb{S}^0, s_0)\colon k_q(\mathbb{S}^0, s_0) \longrightarrow k'_q(\mathbb{S}^0, s_0)$$

est un isomorphisme pour $q < N$ et est un épimorphisme pour $q = N$, alors pour tout CW-complexe (X, x_0) $(n-1)$-connexe

$$T_q(X, x_0)\colon k_q(X, x_0) \longrightarrow k'_q(X, x_0)$$

est un isomorphisme pour $q < N + n$ et un épimorphisme pour $q = N + n$.

Un bon moyen d'en savoir plus sur les théories d'homologie généralisées est de regarder le livre de Switzer : le Chapitre 7 traite le sujet en détails.

2.6 Extension des théories de (co-)homologie de $h\mathcal{CW}_*$ à $h\,Top_*$

Dans le chapitre suivant nous verrons comment construire des théories réduites de (co-)homologie sur la catégorie $h\mathcal{CW}_*$, ce qui est restrictif par rapport aux espaces topologiques en général. Voyons comment on peut étendre une théorie de cohomologie définie sur les CW-complexes pointés, à $h\,Top_*$. Soit k^* une théorie de cohomologie réduite sur $h\mathcal{CW}_*$, et soit (X, x_0) un espace pointé. On va choisir un CW-remplacement $f : X' \longrightarrow X$ pour X et le point de base $x'_0 \in X'$ vérifiant $f(x'_0) = x_0$. On définit

$$k^n(X) = k^n(X'),\ n \in \mathbb{Z}\,.$$

On peut montrer (Sw, Exercice 6.50) que deux CW-remplacements de X sont homotopiquement équivalents par une équivalence unique à homotopie près, ce qui assure que les $k^n(X)$ sont bien définis.

Pour $f \in h\,Top_*((X, x_0), (Y, y_0))$ on choisit des CW-remplacements $g : X' \longrightarrow X$, $h : Y' \longrightarrow Y$ et une application $f' \in h\mathcal{CW}_*((X', x'_0), (Y', y'_0))$ tels que

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f'"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Y' \arrow[r, "h"'] & Y \end{tikzcd}$$

commute à homotopie près. Alors on prend

$$k^n([f]) = k^n([f']),$$

qui est bien défini, car f' est unique à homotopie près (Sw, Exercice 6.50).

Puis on montre que si $f' : X' \longrightarrow Y'$ est un CW-remplacement pour X, alors $S'f : SX' \longrightarrow SX$ en est un pour SX. Alors on peut définir les transformations $\sigma : k^n(SX) \longrightarrow k^{n-1}(X)$ en demandant que le carré

$$\begin{tikzcd} k^n(SX) \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, equal] & k^{n-1}(X) \arrow[d, equal] \\ k^n(SX') \arrow[r, "\sigma", "\cong"'] & k^{n-1}(X') \end{tikzcd}$$

commute.

Pour toute paire pointée (X, A, x_0) on choisit des CW-remplacements $f' : A' \longrightarrow A$ et $g' : X' \longrightarrow X$. Soit $h : A' \longrightarrow X'$ une application de CW-complexes qui fait commuter le diagramme

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "h"'] & A \arrow[d, hook] \\ X' \arrow[r, "g'"'] & X \end{tikzcd}$$

à homotopie près. Si M_h est le mapping cylinder de X', i.e.,

$$M_h = A' \times I \cup X'/h(A') \sim (a,1) \text{ pour tout } a \in A'$$

et $r : M_h \longrightarrow X'$ est la projection, qui est une équivalence d'homotopie, alors on peut remplacer X' par M_h et g' par $g' \circ r$ dans le diagramme précédent, ce qui permettra de supposer qu'on a aussi une inclusion $A' \hookrightarrow X'$ pour les CW-remplacements. On peut montrer que l'application $l : X' \cup CA' \longrightarrow X \cup CA$ est une équivalence d'homotopie faible, donc $X' \cup CA'$ est un CW-remplacement pour $X \cup CA$, et le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd}
k^n(X \cup CA) \arrow[r, "j^*"] \arrow[d, equal] & k^n(X) \arrow[r, "i^*"] \arrow[d, equal] & k^n(A) \arrow[d, equal] \\
k^n(X' \cup CA') \arrow[r, "j'^*"] & k^n(X') \arrow[r, "i'^*"] & k^n(A').
\end{tikzcd}$$

Cela montre que la théorie k^* telle qu'on l'a définie satisfait l'axiome d'exactitude sur $hTop_*$, donc c'est une théorie de cohomologie réduite sur $hTop_*$.

De plus, remarquons que k^* satisfait l'axiome WHE de manière évidente, et donc avec la construction $\hat{}$ vue précédemment, $\hat{k}^*$ devient une théorie de cohomologie non-réduite sur $hTop^2$.

Chapitre 3

Spectres et théories de (co-)homologie associées

Dans ce chapitre, nous allons définir des nouveaux objets, les *spectres*, qui généralisent en quelque sorte les CW-complexes. Nous verrons qu'ils forment une catégorie, notée *Sp*, sur laquelle on peut définir des notions standard, telles que l'homotopie ou encore le foncteur suspension, qui possèdera dans *Sp* un inverse S^{-1} ce qui distingue *Sp* par rapport à *Top*. Dans la deuxième partie du chapitre nous verrons qu'il existe un moyen d'associer des théories réduites d'homologie et de cohomologie à tout spectre E.

3.1 La notion de spectre

3.1.1 Définitions de base

Définition 3.1.1. Un **spectre** est une collection $\{(E_n, *)_{n\in\mathbb{Z}}\}$ de CW-complexes tels que SE_n est homéomorphe à un sous-complexe de E_{n+1}, ou à tout E_{n+1}. Dans le cas où SE_n est homéomorphe à tout E_{n+1}, on note pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\varepsilon_n : SE_n \xrightarrow{\approx} E_{n+1}$ l'homéomorphisme correspondant.

Un **sous-spectre** $F \subset E$ est composé des sous-complexes $F_n \subset E_n$ tels que $SF_n \subset F_{n+1}$, $n \in \mathbb{Z}$.

Notation 3.1.2. Soit E un CW-complexe. On désignera par e_n^d une cellule de E, de dimension d et qui se trouve dans le sous-complexe E_n.

Par la suite, on parlera des *cellules topologiques* pour les cellules d'un CW-complexe, pour les distinguer des cellules de spectres, que l'on va définir à l'instant.

Définition 3.1.3. Soit $E \in Sp$. On définit la notion des **cellules de spectre** de la manière suiavnte.

- Soit $F \subset E$ le sous-spectre de E tel que $F_n = *$ (l'espace réduit à un point) pour tout $n \in \mathbb{Z}$. On va noter ce spectre par $*$; il correspond à la **cellule de dimension** $-\infty$ du spectre E.
- Si e_n^d est une d-cellule de E_n (différente de $*$, si $d = 0$). Si on la suspend une fois, on obtiendra Se_n^d, qui est une $(d+1)$-cellule de E_{n+1}. Plus généralement, en faisant sa suspension m fois on obtient $S^m e_n^d$ - une $(d+m)$-cellule de E_{n+m}.
- On peut aussi "désuspendre" les cellules. Reprenons e_n^d : elle peut être désuspendue un certain nombre de fois, au plus d, après quoi on atteint une cellule $e_{n'}^{d'}$ dans $E_{n'}$. Les deux cellules sont donc reliées par la relation $e_n^d = S^{d-d'} e_{n'}^{d'}$, et $e_{n'}^{d'}$ n'est plus suspension d'aucune cellule dans $E_{n'-1}$. Notons qu'il n'est pas forcément possible de désuspendre e_n^d jusqu'à une cellule de dimension 0 (autrement dit, $d' \neq 0$ en général, mais par contre $n - n' = d - d'$ est toujours vrai).

  Alors la suite
  $$e = \{e_{n'}^{d'}, Se_{n'}^{d'}, S^2 e_{n'}^{d'}, ...\}$$
  est appelée une **cellule de dimension** $(d' - n')$ dans E. Ainsi chaque cellule topologique de chaque CW-complexe E_n fait partie d'exactement une cellule du spectre E.

Définition 3.1.4. Un spectre E est appelé **fini** s'il possède un nombre fini de cellules.

Définition 3.1.5. On appelle **filtration** d'un spectre E une suite croissante $\{E_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ de sous-spectres de E tels que $\cup_{n\in\mathbb{Z}} E_n = E$.

Une filtration importante qui sera utilisée par la suite est la **filtration par couche**, que l'on note $\{E^n\}$. On la définit comme suit. Pour toute cellule $e = \{e_n, Se_n, ...\}$ de E on commence par trouver un sous-spectre fini $F \subset E$ tel que e est une cellule de F. [Par exemple, on prend F où le sous-complexe $F_n \subset E_n$ contient e_n et toutes ses faces, i.e., toutes les cellules e_k telles que $e_k \subset \bar{e}_n$. Puis on va prendre $F_m = *$ pour $m < n$ et $F_m = S^{m-n} E_n$ pour $m \geq n$.] On pose $l(e)$= nombre de faces de e_n, et on définit

$$\begin{cases} E^n = *, & n \leq 0 \\ E^n = \text{union de toutes les cellules avec } l(e) \leq n, & n > 0 \end{cases}$$

Alors les ensembles E^n sont appelés les **couches** de E ; c'est la notation qu'on adoptera dorénavant, lorsqu'on fera référence à la structure par couches d'un spectre E. (N.B. : on essayera d'éviter la confusion avec la notation pour la théorie de cohomologie associée à un spectre, définie plus tard - ce sera $E^n(.)$, i.e., la même, mais suivie de parenthèses.)

Moralement : on commence la construction avec la première couche E^1, qui, en tous les degrés du spectre, comporte juste la cellule $*$. Puis on attache, en degrés différents du spectre, toutes les cellules de diverses dimensions topologiques, mais qui ont au plus 2 faces. On attache au même temps aussi toutes leurs suspensions. Cela nous définit la couche E^2 de la filtration, etc. La preuve du fait que $\{E^n\}$ ainsi définie est bien une filtration est celle du Lemme 8.8 chez Switzer, que l'on ne rapporte pas ici.

Définition 3.1.6. Un sous-spectre $F \subset E$ est appelé **cofinal dans** E si pour toute cellule $e_n \subset E_n$ il existe un m tel que $S^m e_n \subset F_{n+m}$. Ainsi F a la propriété que toute cellule du spectre E, pour tous les niveaux E_n, $n \in \mathbb{Z}$, se retrouvera dans F après être suspendue un "nombre suffisant" de fois.

La cofinalité se comporte "bien" par rapport à l'intersection finie, à l'union quelconque et elle est transitive, comme assurent les propriétés qui suivent.

Propriétés 3.1.7. **i)** *L'intersection de deux spectres cofinaux est un spectre cofinal.*

ii) *Si $G \subset F \subset E$ sont des spectres tels que F est cofinal dans E et G est cofinal dans F, alors G est cofinal dans E.*

iii) *Une union quelconque de spectres cofinaux est un spectre cofinal.*

Pour construire la catégorie de spectres, nous avons encore besoin des morphismes adéquats. Il se trouve que la construction intuitive n'est pas suffisante, on va donc d'abord définir des "fonctions" entre spectres, pour ensuite raffiner et définir les "applications" entre spectres qui seront les morphismes voulus.

Définition 3.1.8. Soient $E,F \in Sp$. Une **fonction** $f : E \longrightarrow F$ **entre spectres** est une collection $\{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ d'applications cellulaires $f_n : E_n \longrightarrow F_n$ telles que

$$f_{n+1}|_{SE_n} = Sf_n.$$

La composition de deux fonctions est définie de manière habituelle : si $f : E \longrightarrow F$ et $h : F \longrightarrow G$ sont deux fonctions, alors leur composée est la fonction $h \circ f := \{h_n \circ f_n : E_n \longrightarrow G_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ vérifiant

$$h_{n+1} \circ f_{n+1}|_{SE_n} = Sh_n \circ Sf_n.$$

En d'autres mots, le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
SE_n \arrow[r, "Sf_n"] \arrow[d, hook] & SF_n \arrow[r, "Sh_n"] \arrow[d, hook] & SG_n \arrow[d, hook] \\
E_{n+1} \arrow[r, "f_{n+1}"] \arrow[rr, bend right, "h_{n+1}\circ f_{n+1}"'] & F_{n+1} \arrow[r, "h_{n+1}"] & G_{n+1}
\end{tikzcd}.$$

Définition 3.1.9. Soient E, $F \in Sp$. Considérons l'ensemble de toutes les paires (E', f') où $E' \subset E$ est un spectre cofinal et $f' \colon E' \longrightarrow F$ est une fonction. On définit sur cet ensemble une relation $\sim$ par : $(E', f') \sim (E'', f'')$ si et seulement s'il existe une paire (E''', f''') avec

- $E''' \subset (E' \cap E'')$ et E''' est cofinal
- $f''' : E''' \longrightarrow E$ vérifie $f'|_{E'''} = f''' = f''|_{E'''}$.

Les propriétés 3.1.7 assurent que $\sim$ est une relation d'équivalence. En effet, la réfléxivité et la symétrie sont claires. La transitivité : si $(E^a, f^a) \sim (E^b, f^b)$ avec (E^c, f^c) paire cofinale et $(E^b, f^b) \sim (E^d, f^d)$ avec (E^g, f^g) paire cofinale, alors pour monter que $(E^a, f^a) \sim (E^d, f^d)$ prendre la paire (E^h, f^h) avec $E^h := (E^c \cap E^d) \subset (E^a \cup E^d)$ sous-spectre cofinal par intersection et par inclusion de spectres cofinaux, et $f^h := f^b|_{E^c \cap E^g}$.
On appellera alors **applications** de E vers F les classes d'équivalence de la relation $\sim$ sur l'ensemble des paires (E', f').

Remarque 3.1.10. Si E' est le spectre cofinal dans E, et qu'on souhaite définir une application sur une cellule $e_n \in E_n$, on va "attendre" en faisant la suspension jusqu'au niveau E_{n+m} (m est un indice dépendant de la cofinalité de E'), pour définir une application à partir de $S^m e_n$.

Pour pouvoir composer les applications, on doit être sûr de l'existence de repésentants valables, ce qui est garanti par le lemme suivant :

Lemme 3.1.11. [Sw, Lemme 8.13] *Soient E,$F \in Sp$ et soit $f \colon E \longrightarrow F$ une fonction. Si $F' \subset F$ est un sous-spectre cofinal, alors il existe $E' \subset E$ aussi cofinal, tel que $f(E') \subset (F')$.*

Avec ceci, la composition de deux applications est une application bien définie. De plus elle est associative.

Définition 3.1.12. On dit que deux spectres E et F sont **équivalents** s'il existe une application de spectres $f : E \longrightarrow F$.

Remarque 3.1.13. Remarquons alors que dans la catégorie Sp, deux sous-spectres E' et E'' cofinaux d'un spectre E sont équivalents entre eux (i.e., la définition d'une application ne dépendra pas du choix du sous-spectre cofinal pour le faire). Pour le voir, on montre d'abord que le spectre E est équivalent à un de ces sous-spectres, disons E'. Cela revient à montrer qu'il existe une application $f : E \longrightarrow E'$, i.e., trouver (E^i, f^i) avec $E^i \subset E$ cofinal et $f^i \colon E^i \longrightarrow E'$ fonction. On prend $E^i := E'$ clairement cofinal et $f^i := id_{E'}$, qui est une fonction. Donc $E' \sim E$. Puis, de la même manière on montre que $E'' \sim E$, en utilisant la fonction $id_{E''}$. Par transitivité de $\sim$, il suit que $E' \sim E''$.

3.1.2 Constructions élémentaires

Définition 3.1.14. Soient $E = \{E^n\} \in Sp$ et $(X, x_0) \in \mathcal{CW}$. On définit le **produit smash** entre E et X par un nouveau spectre $E \wedge X$ en posant

$$(E \wedge X)_n = E_n \wedge X,\ n \in \mathbb{Z}$$

avec la topologie faible ($M \subset (E \wedge X)$ sera fermé dans $(E \wedge X)$ si et seulement si $M \cap f$ est fermé dans e, pour toute cellule e de $E \wedge X$).
Notons d'abord que la définition de $(E \wedge X)_n$ a un sens, car $E_n,\ X \in \mathcal{CW}$ où le produit smash est bien défini.
Puis remarquons qu'on obtient vraiment un spectre, car

$$S(E \wedge X)_n = S(E_n \wedge X) = (E_n \wedge X) \wedge \mathbb{S}^1 \cong (\mathbb{S}^1 \wedge E_n) \wedge X = SE_n \wedge X \subset E_{n+1} \wedge X = (E \wedge X)_{n+1}.$$

Pour une application $f \in Sp(E, F)$ représentée par (E', f') et pour $g \in \mathcal{CW}(K, L)$ on définit

$$f \wedge g \colon E \wedge K \longrightarrow F \wedge L,$$

qui aura pour représentant $(E' \wedge K, f' \wedge g)$ et qui est une application de spectres, car $E' \wedge K$ est cofinal dans $E \wedge K$.

Maintenant on peut définir la notion d'homotopie pour les spectres.

Définition 3.1.15. • Soient $f_0, f_1 \colon E \longrightarrow F$ deux applications de spectres. Une **homotopie de** f_0 **vers** f_1 est une application de spectres

$$H \colon E \wedge I^+ \longrightarrow F,$$

telle que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
E \wedge \{0\}^+ \arrow[d, hook, "i_0"'] \arrow[drr, bend left, "f_0"] & & \\
E \wedge I^+ \arrow[rr, "H"] & & F \\
E \wedge \{1\}^+ \arrow[u, hook, "i_i"] \arrow[urr, bend right, "f_1"'] & &
\end{tikzcd}$$

- En termes de spectres cofinaux, $f_0, f_1 \colon E \longrightarrow F$, représentées resp. par (E'_0, f'_0) et (E'_1, f'_1), sont dits **homotopes** s'il existe $E'' \subset E'_0 \cap E'_1$ sous-spectre cofinal et une fonction $H'' \colon E'' \wedge I^+ \longrightarrow F$ telle que $H'' \circ i_0 = f'_0|_{E''}$ et $H'' \circ i_1 = f'_1|_{E''}$.
- On peut montrer que l'homotopie sur la catégorie des spectres est une relation d'équivalence, et on note $[E, F]$ l'ensemble des classes d'équivalence des applications $f \colon E \longrightarrow F$. La composition passe aux classes d'homotopie.

A ce stade, nous avons défini les objets et les morphismes pour la catégorie des spectres Sp, et grâce à la notion d'homotopie introduite, nous pouvons considérer la catégorie d'homotopie associée $h\,Sp$.

Définition 3.1.16. On définit le foncteur

$$\mathbb{E} : \mathcal{CW}_* \longrightarrow Sp$$

par

$$\mathbb{E}(X)_n = \begin{cases} S^n(X) : & n \geq 0 \\ * : & n < 0 \end{cases}$$

et par

$$\mathbb{E}(f)_n = \begin{cases} S^n(f) : & n \geq 0 \\ Id_* : & n < 0 \end{cases}$$

pour $f : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$.

Définition 3.1.17. Pour une application $f : E \longrightarrow F$ de spectres donnée, on définit son **mapping cone**, noté $F \cup_f CE$, de la façon suivante. Munissons l'intervalle I du point de base 0 et posons $CE := E \wedge I$ pour le coñe réduit. On définit alors le spectre $F \cup_f CE$ par

$$(F \cup_f CE)_n = F_n \cup_{f'_n} (E'_n \wedge I),\ n \in \mathbb{Z},$$

où (E', f') est un représentant de f.

Définition 3.1.18. On définit le foncteur **suspension**

$$\Sigma : Sp \longrightarrow Sp$$

par

$$\Sigma(E) \text{ avec } (\Sigma E)_n = (E_{n+1}), \text{ pour } E \in Sp$$

Pour toute fonction $f : E \longrightarrow F$, on a la fonction

$$\Sigma(f) : \Sigma E \longrightarrow \Sigma F \text{ avec } (\Sigma f)_n = f_{n+1}.$$

Alors pour toute application $f : E \longrightarrow F$ représentée par (E', f'), on définit

$$\Sigma(f) : \Sigma E \longrightarrow \Sigma F,$$

l'application représentée par $(\Sigma E', \Sigma f')$

Ce foncteur Σ induit le foncteur analogue sur hSp_*, on peut l'itérer et il possède un inverse Σ^{-1} défini par $(\Sigma^{-1}E)_n = E_{n-1}$, $(\Sigma^{-1}f)_n = f_{n-1}$.

Etant donnée une collection $\{E^\alpha\}_{\alpha \in A} \in Sp$, on définit le **wedge** $\vee_\alpha E^\alpha$ sur Sp par

$$(\vee_\alpha E^\alpha)_n = \vee_\alpha E^\alpha_n.$$

Comme $S(\vee_\alpha E^\alpha_n) = \vee_\alpha S E^\alpha_n \subset \vee_\alpha E^\alpha_{n+1}$, il s'agit bien d'un spectre.

Proposition 3.1.19. [Sw, Proposition 8.18] *Pour toute collection* $\{E^\alpha\}_{\alpha\in A} \in$ *Sp, les inclusions* $i_\beta : E^\beta \longrightarrow \vee_\alpha E^\alpha$ *induisent pour tout* $F \in Sp$ *la bijection*

$$\{i_\alpha^*\} : [\vee_\alpha E^\alpha, F] \xrightarrow{\cong} \prod_\alpha [E^\alpha, F].$$

3.1.3 Les groupes d'homotopie d'un spectre et leurs conséquences

Définition 3.1.20. On définit les **groupes d'homotopie d'un spectre** $E \in Sp$ par

$$\pi_n(E,*) := [\Sigma^n(\mathbb{E}(\mathbb{S}^0)), E],\ n \in \mathbb{Z}\,.$$

Fixons $n \in \mathbb{Z}$. La sructure de groupe sur l'ensemble $[\Sigma^n(\mathbb{E}(\mathbb{S}^0)), E]$ est une conséquence de la Proposition 1.3.2. En effet, en degré m, l'ensemble $[\mathbb{S}^{n+m}, E_m] \cong [S(\mathbb{S}^{n+m-1}), E_m]$ peut être muni d'une structure de groupe, car $S(\mathbb{S}^{n+m-1})$ est un H-cogroupe, ce qui reste vrai pour tout m, et pour tout n.

Toute application de spectres $f : E \longrightarrow F$ induit un homomorphisme $f_* : \pi_n(E) \longrightarrow \pi_n(F)$, $n \in \mathbb{Z}$. Par analogie avec le cas des CW-complexes, on dit que f est une **équivalence d'homotopie faible sur** *Sp* si f_* est un isomorphisme pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Remarque 3.1.21. Une définition équivalente de $\pi_n(E)$ consiste à prendre les groupes de la forme $\pi_{k+n}(E_k,*)$ et les morphismes

$$\pi_{k+n}(E_k,*) \xrightarrow{\Sigma} \pi_{k+n+1}(SE_k,*) \longrightarrow \pi_{k+n+1}(E_{k+1},*),$$

qui définissent un système direct de groupes abéliens. On peut alors définir une application bijective

$$\alpha : [\Sigma(\mathbb{E}(\mathbb{S}^0)), E] \longrightarrow \varinjlim \pi_{k+n}(E_k,*),$$

ce qui permet de voir que

$$\pi_n(E,*) \cong \varinjlim \pi_{k+n}(E_k,*),\ n \in \mathbb{Z}\,.$$

Pour avoir plus de détails sur cette deuxième définition des groupes d'homotopie d'un spectre, le lecteur est invité à consulter le §8.21 du livre de Switzer.

Corollaire 3.1.22. [Sw, Proposition 8.23] *Soit le diagramme commutatif avec* $f \in Sp(G,H)$*,* $g \in Sp(F,G)$*,* $h \in Sp(E,H)$ *comme ci-dessous*

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "f"] & H \\ F \arrow[u, "g"] \arrow[r, hook] & E. \arrow[u, "h"'] \arrow[ul, dashed, "\exists k"'] \end{tikzcd}$$

Si f *est une équivalence d'homotopie faible, alors il existe* $k \in Sp(E,G)$ *telle que* $k|_F = g$ *et* $f \circ k \simeq_F h$*, i.e., les deux triangles commutent.*

Corollaire 3.1.23. *Si $f \in Sp(E,F)$ est une équivalence d'homotopie faible, alors $f_* : [G,E] \longrightarrow [G,F]$ est une bijection pour tout $G \in Sp$.*

Démonstration. f_* ***surjective :*** Soit $[h] \in [G,F]$. Prenons un $G \in Sp$ et chosissons $G' \subset G$ sous-spectre cofinal (p.ex. $G' = *$). On pose $g : G' \longrightarrow E\,;\, * \mapsto *$. Comme f est une équivalence d'homotopie faible, on peut appliquer le Corollaire 3.1.22 pour obtenir le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] & F \\ G' \arrow[u, "g"] \arrow[r, hook, "i"] & G. \arrow[u, "h"'] \arrow[ul, dashed, "\exists k"'] \end{tikzcd}$$

Il existe donc $k : G \longrightarrow E$ tel que $f \circ k \simeq_{G'} h$, i.e., $[f \circ k] = [h]$, c'est-à-dire $f_*([k]) = [h]$ et donc f_* est bien surjective.

f_* ***injective :*** Soient $\alpha, \beta : G \longrightarrow E$ et soit $H : G \wedge I^+ \longrightarrow F$ une homotopie de spectres relative à G' telle que

$$H_0 = f \circ \alpha, \text{ et } H_1 = f \circ \beta.$$

Posons

$$A := G \wedge \{0,1\} \cup G' \wedge I^+,$$

et définissons $l : A \longrightarrow E$ telle que

$$l|_{G\wedge\{0\}} = \alpha,\ l|_{G\wedge\{1\}} = \beta \text{ et } l(g',t) = \alpha(g') = \beta(g'),\ g' \in G'.$$

Alors en appliquant le Corollaire 3.1.22 on a le diagramme

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] & F \\ A \arrow[u, "l"] \arrow[r, hook, "i"] & G \wedge I^+. \arrow[u, "H"'] \arrow[ul, dashed, "\exists K"'] \end{tikzcd}$$

qui commute, où $K : G \wedge I^+ \longrightarrow E$ vérifie $K|_A = l$, i.e., K est une homotopie de α vers β relativement à G'. Donc $[f \circ \alpha] = [f \circ \beta]$, i.e., $f_*[\alpha] = f_*[\beta]$, et f_* est injective.

$\square$

Théorème 3.1.24. *Une application de spectres est une équivalence d'homotopie faible si et seulement si c'est une équivalence d'homotopie.*

Démonstration. $\Longleftarrow$ **:** Comme f est une équivalence d'homotopie, il existe $g : F \longrightarrow E$ tel que $f \circ g \simeq id_F$ et $g \circ f \simeq id_E$. Mais

$$\pi_n = [\Sigma^n(\mathbb{E}(\mathbb{S}^0)), -] : Sp \longrightarrow Grp$$

est un foncteur covariant, et on a $\pi_n(g\circ f) = g^*\circ f^* = id_{[\Sigma^n(\mathbb{E}(\mathbb{S}^0)),E]}$ et $\pi_n(f\circ g) = f^*\circ g^* = id_{[\Sigma^n(\mathbb{E}(\mathbb{S}^0)),F]}$. Donc $f_* : [\Sigma^n(\mathbb{E}(\mathbb{S}^0)),E] \longrightarrow [\Sigma^n\,\mathbb{S}^0, F]$ est un isomorphisme de groupes pour tout $n \in \mathbb{Z}$, avec inverse g_* : $[\Sigma^n(\mathbb{E}(\mathbb{S}^0)),F] \longrightarrow [\Sigma^n(\mathbb{E}(\mathbb{S}^0)),E]$, et ainsi f est une équivalence d'homotopie faible.

$\Longrightarrow$ **:** Soit $f : E \longrightarrow F$ une équivalence d'homotopie faible. Vu le Corollaire 3.1.23, en posant $G = E$ (resp. $G = F$) les applications induites f_* : $[E,E] \longrightarrow [E,F]$ (resp. $f_* : [F,E] \longrightarrow [F,F]$) sont des bijections.
La surjectivité de f_* permet de choisir un $g : F \longrightarrow E$ tel que $f_*([g]) = [id_F]$. Alors $[f\circ g] = [id_F]$, i.e., $f\circ g \simeq id_F$.
D'autre part, $f_*([g\circ f]) = [f\circ g\circ f] = [f\circ id_E] = f_*([id_E])$, et puisque f_* est injective $[g\circ f] = [id_E]$, i.e., $g\circ f \simeq id_E$, et donc f est une équivalence d'homotopie.

□

L'équivalent du Théorème de Whitehead dans le cas des spectres qu'on vient d'énoncer, servira d'outil très commode pour montrer que ΣE et $E\wedge\mathbb{S}^1$ ont le même type d'homotopie. Dans un cas comme celui-ci, où il est difficile de trouver "à la main" des inverses homotopiques pour des applications données, savoir qu'elles existent résout le problème.

Théorème 3.1.25. [Sw, Théorème 8.26] *Pour tout $E \in Sp$, il existe une équivalence d'homotopie entre les spectres ΣE et $E\wedge\mathbb{S}^1$, qui est naturelle pour tout $f \in Sp(E,F)$ i.e.,*

$$\begin{tikzcd} \Sigma E \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d, "\Sigma(f)"'] & E\wedge\mathbb{S}^1 \arrow[d, "f\wedge id_{\mathbb{S}^1}"] \\ \Sigma F \arrow[r, "\simeq"] & F\wedge\mathbb{S}^1 \end{tikzcd}$$

commute.

Esquisse de preuve : On travaille avec le téléscope $E' = \{E'_n\}$ défini pour tout $n \in \mathbb{Z}$ par

$$E'_n = E_n \wedge \{n\}^+ \cup \bigcup_{k<n} S^{k-n}E_k \wedge [k,k+1]^+.$$

Les projections $r_n : E'_n \longrightarrow E_n$ définissent une application de spectres r : $E' \longrightarrow E$, et on montre que les inclusions $i_n : E_n \hookrightarrow E'_n$ sont les inverses homotopiques des r_n. D'où $r_* : \pi_n(E') \longrightarrow \pi_n(E)$ est un isomorphisme, et par le théorème précédent r est une équivalence d'homotopie.
Dans un deuxième temps, on veut construire $f : E'\wedge\mathbb{S}^1 \longrightarrow \Sigma E$ une équivalence d'homotopie. Pour cela on définit d'abord des fonctions $f_n : E'_n \wedge \mathbb{S}^1 \longrightarrow SE_n$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, puis leurs inverses homotopiques $g_n : SE_n \longrightarrow E'_n\wedge$

$\mathbb{S}^1$. Ainsi $f_* : \pi_n(E' \wedge \mathbb{S}^1) \longrightarrow \pi_n(\Sigma E)$ est un isomorphisme, et donc une équivalence d'homotopie.
Puis on conclut que $E \wedge \mathbb{S}^1 \simeq E' \wedge \mathbb{S}^1 \simeq \Sigma E$, et la naturalité de ces équivalences vient de celle de r et f. $\square$

Corollaire 3.1.26. *Pour tous $E, F \in Sp$, l'ensemble $[E, F]$ peut être muni d'une structure de groupe abélien.*

Esquisse de preuve : Nous avons une suite de bijections d'ensembles

$$[E, F] \xrightarrow{\cong} [\Sigma E, \Sigma F] \xrightarrow{\cong} [E \wedge \mathbb{S}^1, F \wedge \mathbb{S}^1],$$

donc l'application

$$\begin{aligned} \sigma : [E, F] &\longrightarrow [E \wedge \mathbb{S}^1, F \wedge \mathbb{S}^1] \\ [f] &\mapsto [f \wedge id_{\mathbb{S}^1}], \end{aligned}$$

est bijective, et par conséquent $\sigma^2 : [E, F] \longrightarrow [E \wedge \mathbb{S}^2, F \wedge \mathbb{S}^2]$ aussi.

Or $\mathbb{S}^2 = S(\mathbb{S}^1)$ est un H-cogroupe commutatif à homotopie près, et sa comultiplication commutative $\mu' : \mathbb{S}^2 \longrightarrow \mathbb{S}^2 \vee \mathbb{S}^2$ induit la comultiplication commutative $id_E \wedge \mu' : E \wedge \mathbb{S}^2 \longrightarrow E \wedge (\mathbb{S}^2 \vee \mathbb{S}^2) \cong (E \wedge \mathbb{S}^2) \vee (E \wedge \mathbb{S}^2)$ sur $E \wedge \mathbb{S}^2$. La bijectivité σ^2 implique la commutativité sur l'ensemble $[E, F]$. $\square$

Définitions 3.1.27. • Pour toute application $f \in Sp(E, F)$ on appelle **suite spéciale de cofibration** la suite exacte

$$E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{j} F \cup_f CE.$$

• Une **suite de cofibration** est une suite de spectres $G \xrightarrow{g} H \xrightarrow{h} K$, telle qu'il existe un diagramme

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\alpha"'] & H \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\beta"'] & K \arrow[d, "\gamma"'] \\ E \arrow[r, "f"] & F \arrow[r, "j"] & F \cup_f CE \end{tikzcd}$$

qui commute à homotopie près, et où les α, β, γ sont des équivalences d'homotopie.

La proposition suivante montre l'intérêt de la notion de suite de cofibration :

Proposition 3.1.28. [Sw, Proposition 8.32] *Si $G \xrightarrow{g} H \xrightarrow{h} K$ est une suite de cofibration, alors pour tout $E \in Sp$ les suites*

$$[E, G] \xrightarrow{g_*} [E, H] \xrightarrow{h_*} [E, K]$$

et

$$[K,E] \xrightarrow{h^*} [H,E] \xrightarrow{g^*} [G,E]$$

sont exactes.

Cela explique l'intérêt de la notion de suite de cofibration.

3.2 Théories d'homologie et de cohomologie réduites associées à un spectre

Dans cette section on verra comment définir les théories réduites d'homologie et de cohomologie associées à un spectre E.

3.2.1 Théories d'homologie

Soit $E \in Sp$. Une **théorie d'homologie** associée à E se note $E_*(X)$ et se définit en posant pour tout $(X, x_0) \in h\mathcal{CW}_*$ et tout $n \in \mathbb{Z}$

$$E_n(X,x_0) := \pi_n(E \wedge X, *) = [\Sigma^n(\mathbb{E}(\mathbb{S}^0)), E \wedge X].$$

Pour $f : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$ qui induit $Id \wedge f : E \wedge X \longrightarrow E \wedge Y$, l'application induite en homotopie est

$$E_n(f) := (Id \wedge f)_* = \pi_n(E \wedge X, *) \longrightarrow \pi_n(E \wedge Y, *).$$

Vu le Corollaire 3.1.26, l'ensemble $[\Sigma(\mathbb{E}(\mathbb{S}^0)), E \wedge X]$ possède une structure de groupe abélien. Donc E_n est bien un foncteur de $h\mathcal{CW}_*$ dans Ab.

Il faut maintenant définir les transformations naturelles

$$\sigma_n : E(X) \longrightarrow E_{n+1}(SX).$$

On pose la composition suivante pour tout $n \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{tikzcd}
E_n(X) = [\Sigma^n(\mathbb{E}(\mathbb{S}^0)), E \wedge X] \arrow[r, "\Sigma", "\cong"'] \arrow[dr, "\sigma_n"'] & {[\Sigma^{n+1}(\mathbb{E}(\mathbb{S}^0)), \Sigma E \wedge X]} \arrow[d, "\cong"] \\
 & {[\Sigma^{n+1}(\mathbb{E}(\mathbb{S}^0)), E \wedge \mathbb{S}^1 \wedge X] = E_{n+1}(SX)}
\end{tikzcd}$$

qui est un isomorphisme naturel en tant que composition d'isomorphismes naturels.

Vérifions **l'axiome d'exactitude** pour la théorie E_*. Soit $(X, A, x_0) \in h\mathcal{CW}_*^2$. La suite

$$E \wedge A \xrightarrow{id \wedge i} E \wedge X \xrightarrow{id \wedge j} E \wedge (X \cup CA)$$

est une suite de cofibration, car $E_n \wedge (X \cup CA) \cong (E_n \wedge X) \cup (E_n \wedge CA) \cong (E_n \wedge X) \cup C(E_n \wedge A)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. La Proposition 3.1.28, appliquée en posant $E := \Sigma^n(\mathbb{E}(\mathbb{S}^0))$, nous garantit l'exactitude de la suite

$$E_n(A) \xrightarrow{i_*} E_n(X) \xrightarrow{j_*} E_n(X \cup CA),$$

et nous constatons que E_* définit une théorie d'homologie réduite sur $h\mathcal{CW}_*$.

Pour montrer que E_* satisfait **l'axiome du wedge**, nous avons besoin de quelques lemmes.

Lemme 3.2.1. [Sw, Proposition 8.34] *Soient $E, F \in Sp$ deux spectres tels que E est fini et $F = \cup_\alpha F^\alpha$ où $\{F^\alpha\}_{\alpha \in A}$ est un ensemble ordonné par l'inclusion de sous-spectres de F. Alors les inclusions $i_\alpha : F^\alpha \hookrightarrow F$ induisent un isomorphisme*

$$i_{\alpha *} : \varinjlim [E, F^\alpha] \xrightarrow{\cong} [E, F].$$

Le corollaire suivant dans le cas des spectres est équivalent à la version duale du Théorème 2.4.1.

Corollaire 3.2.2. *Pour tout spectre E et tout ensemble ordonné $\{Y^\alpha\}_{\alpha \in A}$ de sous-complexes de $Y \in \mathcal{CW}$ avec $Y = \cup_\alpha Y^\alpha$, les inclusions $i_\alpha : Y^\alpha \hookrightarrow Y$ induisent un isomorphisme*

$$i_{\alpha *} : \varinjlim E_n(Y^\alpha) \xrightarrow{\cong} E_n(Y),\ n \in \mathbb{Z}\,.$$

Démonstration. Il suffit de poser dans le lemme précédent $F^\alpha := E \wedge Y^\alpha$ pour tout $\alpha \in A$ et $E := \Sigma^n(\mathbb{E}(\mathbb{S}^0))$ qui est un spectre fini, . □

Proposition 3.2.3. *Soit $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset h\mathcal{CW}_*$. Pour tout spectre E, la théorie d'homologie E_* associée vérifie l'axiome du wedge,i.e., on a l'isomorphisme*

$$\{i_{\alpha *}\} : \oplus_{\alpha \in A} E_n(X_\alpha) \xrightarrow{\cong} E_n(\vee_{\alpha \in A} X^\alpha).$$

Démonstration. Dans le cas où la collection $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ des CW-complexes est finie, la Proposition 2.3.4 appliquée par récurrence permet de conclure.
Si $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ est arbitraire, on considère l'ensemble B de tous les sous-ensembles finis de A, et on pose pour tout $B' \in B$, $Y^{B'} = \vee_{\alpha \in B'} X_\alpha \subset \vee_{\alpha \in A} X_\alpha$. Puis on considère le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\varinjlim_{B' \in B} (E_n(\vee_{\alpha \in B} X_\alpha)) \arrow[r, "\gamma", "\cong"'] & E_n(\vee_{\alpha \in A} X_\alpha) \\
\varinjlim_{B' \in B} (\oplus_{\alpha \in B'} E_n(X_\alpha) \arrow[u, "\varinjlim\{i_{\alpha *}\}", "\cong"'] \arrow[r, "\{j_{B'}\}", "\cong"'] & \oplus_{\alpha \in A} E_n(X_\alpha) \arrow[u, "\{i_{\alpha *}\}"']
\end{tikzcd}$$

Par le cas fini, $\{i_{\alpha *}\}$ est un isomorphisme pour tout $B' \in B$, donc vu la Proposition 1.5.4, $\varinjlim\{i_{\alpha *}\}$ est un isomorphisme aussi. Le fait que γ et $\{j_{B'}\}$ sont des isomorphismes est une conséquence de la propriété universelle de la limite directe. Ainsi on obtient que $\{i_{\alpha *}\}$ est un isomorphisme. □

Les **groupes de coefficients** de la théorie d'homologie E_* sont définis par les groupes d'homologie de la sphère de dimension 0 :

$$E_n(\mathbb{S}^0) = \pi_n(E \wedge \mathbb{S}^0) = \pi_n(E),\, n \in \mathbb{Z}\,.$$

3.2.2 Théories de cohomologie

Soit $E \in Sp$. Une **théorie de cohomologie** associée à E se note $E^*(X)$ et se définit en posant pour tout $(X, x_0) \in h\mathcal{CW}_*$ et tout $n \in \mathbb{Z}$

$$E^n(X, x_0) := \underbrace{[\mathbb{E}(X, x_0), \Sigma^n(E, *)]}_{1)} \cong \underbrace{[\Sigma^{-n}\, \mathbb{E}(\mathbb{S}^0) \wedge X, E]}_{2)}.$$

Une application $f : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$ induit l'homomorphisme $E(f)^* : E(Y) \longrightarrow E(X)$ en cohomologie, défini par

$$E^n(f) := [\mathbb{E}(f), \Sigma^n(E, *)].$$

Pour mieux comprendre :

1) donne en degré m : $[S^m X, E_{n+m}]$. Puis en appliquant le foncteur Σ^{-n} on a
$$[\Sigma^{-n}(\mathbb{S}^m \wedge X), \Sigma^{-n}(E_{n+m})] \cong [\mathbb{S}^{m-n} \wedge X, E_m],$$

2) donne en degré m :
$$[\Sigma^{-n}\, \mathbb{S}^m \wedge X, E_m] \cong [\mathbb{S}^{m-n} \wedge X, E_m],$$
vu le Théorème 3.1.25. Toujours par le Corollaire 3.1.26, on a que la catégorie d'arrivée pour les foncteurs E^* est Ab.

Les transformations naturelles $\sigma^n : E^{n+1}(SX) \longrightarrow E^n(X)$ sont les compositions

$$\begin{tikzcd}
E^{n+1}(SX) = [\mathbb{E}(SX), \Sigma^{n+1}E] \arrow[drr, "\sigma^n"'] & & {[\Sigma(\mathbb{E}(X)), \Sigma^{n+1}(E)]} \arrow[ll, "\cong", "i^*"'] \arrow[d, "\cong"', "\Sigma^{-1}"] \\
& & {[\mathbb{E}(X), \Sigma^n E] = E^n(X),}
\end{tikzcd}$$

pour tout $n \in \mathbb{Z}$. On a utilisé que les spectres $\mathbb{E}(SX)$ et $\Sigma(\mathbb{E}(X))$ sont égaux par construction, donc i^* est un isomorphisme. Donc σ^n aussi, en tant que composée d'isomorphismes naturels.

Vérifions à présent **l'axiome d'exactitude** pour la théorie E^*.

Soit $(X, A, x_0) \in h\mathcal{CW}^2_*$ une paire pointée. On a la suite d'isomorpismes pour tout $n \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}
S^n(X \cup CA) &\cong S^n X \cup S^n(A \wedge I) \\
&\cong S^n X \cup (A \wedge I \wedge \mathbb{S}^n) \\
&\cong S^n X \cup (A \wedge \mathbb{S}^n \wedge I) \\
&\cong S^n X \cup C(S^n A).
\end{aligned}$$

Alors la suite

$$\mathbb{E}(A) \xrightarrow{\mathbb{E}(i)} \mathbb{E}(X) \xrightarrow{\mathbb{E}(j)} \mathbb{E}(X \cup CA)$$

en degré n donne

$$S^n(A) \xrightarrow{\mathbb{E}(i)_n} S^n(X) \xrightarrow{\mathbb{E}(j)_n} S^n X \cup C(S^n A),$$

c'est donc une suite de cofibration. Alors en posant $E := \Sigma^n E$ dans la deuxième partie de la Proposition 3.1.28, on a que la suite

$$E^n(X \cup CA) \xrightarrow{j^*} E^n(X) \xrightarrow{i^*} E^n(A)$$

est exacte, donc E^* est une théorie de cohomologie réduite sur $h\mathcal{CW}_*$.

Pour vérifier **l'axiome du wedge**, on se rappelle que pour tout $X_\alpha \in \mathcal{CW}$ on a $S^n(\vee_\alpha X_\alpha) \cong \vee_\alpha S^n X_\alpha$, donc $\mathbb{E}(\vee_\alpha X_\alpha) \cong \vee_\alpha \mathbb{E}(X_\alpha)$. La Proposition 3.1.19 donne alors le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
E^n(\vee_\alpha X_\alpha) \arrow[rr, "\cong"] \arrow[d, equal, "\text{déf}"] & & \prod_\alpha E^n(X_\alpha) \arrow[d, equal, "\text{déf}"] \\
{[\mathbb{E}(\vee_\alpha X_\alpha), \Sigma(E)]} \arrow[d, "\cong"] & & \prod_\alpha [\mathbb{E}(X_\alpha), \Sigma(E)] \\
{[\vee_\alpha \mathbb{E}(X_\alpha), \Sigma(E)],} \arrow[urr, "\therefore \cong"'] & &
\end{tikzcd}$$

qui permet de conclure que E^* satisfait l'axiome du wedge.

En appliquant la Proposition 2.4.1 à E^*, on obtient directement le résultat suivant, dual au Corollaire 3.2.2 :

Proposition 3.2.4. *Pour tout spectre E et toute filtration $\{X^n\}$ d'un CW-complexe X on a une c.s.e.*

$$0 \longrightarrow \lim{}^1 E^{q-1}(X^n) \longrightarrow E^q(X) \xrightarrow{\{i_n^*\}} \varprojlim E^q(X^n) \longrightarrow 0.$$

Les **groupes de coefficients** de la théorie de cohomologie E^* sont définis par les groupes de cohomologie de la sphère de dimension 0 :

$$E^n(\mathbb{S}^0) = [\mathbb{E}(\mathbb{S}^0), \Sigma^n E] \cong [\Sigma^{-n}\,\mathbb{E}(\mathbb{S}^0), E] = \pi_{-n}(E),\; n \in \mathbb{Z}\,.$$

Définition 3.2.5. Un spectre E est appelé **Ω-spectre** si l'adjoint ε' : $E_n \longrightarrow \Omega E_{n+1}$ de l'inclusion $\varepsilon : SE_n \longrightarrow E_{n+1}$ est toujours une équivalence d'homotopie faible.

Le théorème suivant fait partie des résultats centraux. Il dit que si E est un Ω-spectre, alors il existe une théorie de cohomologie sur $h\mathcal{CW}$ qui est naturellement équivalente à la théorie de cohomologie associée à ce spectre. L'un des fruits du chapitre suivant sera la réciproque de ce résultat.

Théorème 3.2.6. [Sw, Théorème 8.42] *Si E est un Ω-spectre, alors pour tout $(X, x_0) \in \mathcal{CW}$ il existe un isomorphisme naturel*

$$E^n(X) \cong [X, x_0; E_n, *].$$

Esquisse de preuve : On définit

$$k^n(X) := [X, x_0; E_n, *]$$

et

$$\bar{\sigma}^n : k^{n+1}(SX) \longrightarrow k^n(X)$$

par la composée d'isomorphismes naturels

$$[SX, *; E_{n+1}, *] \xrightarrow[\cong]{A} [X, x_0; \Omega E_{n+1}, \omega_0] \xleftarrow[\cong]{\varepsilon'_{n*}} [X, x_0; E_n, *].$$

On montre ensuite que k^* ainsi définie est une théorie de cohomologie réduite sur $h\mathcal{CW}_*$, qui satisfait l'axiome du wedge.
Puis on définit une transformation naturelle $T^n : k^n \longrightarrow E^n$, pour tout $n \in \mathbb{Z}$ de la façon suivante : toute application $f : (X, x_0) \longrightarrow (E_n, *)$ induit une fonction $f' : E'(X) \longrightarrow E$, où

$$E'(X)_m = \begin{cases} *, & m < n \\ S^{m-n}(X), & m \geq n \end{cases}$$

est un spectre cofinal de $\Sigma^{-n}\,\mathbb{E}(X)$. Alors on obtient une application de spectres $\bar{f} : \Sigma^{-n}\,\mathbb{E}(X) \longrightarrow E$, et on pose

$$T([f]) = [\bar{f}].$$

On montre enfin que $T^n(\mathbb{S}^0) : k^n(\mathbb{S}^0) \longrightarrow E^n(\mathbb{S}^0)$ est un isomorphisme pour tout n, et vu le Théorème 2.4.2, cela permet de conclure que T^* est un isomorphisme naturel de théories de cohomologie. □

3.2.3 Transformations naturelles entre théories associées aux spectres sur $h\mathcal{CW}$

Toute application de spectres $f\colon E \longrightarrow F$ induit des transformations naturelles $T_*(f)$ et $T^*(f)$ de théories d'homologie et de cohomologie.

Dans le premier cas $T_*(f) : E_* \longrightarrow F_*$ fait commuter le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} E_n(X) := [\Sigma^n(\mathbb{E}(\mathbb{S}^0)), E \wedge X] \arrow[r, "\sigma_n"] \arrow[d, "T_n(f)(X)"'] & {[\Sigma^{n+1}(\mathbb{E}(\mathbb{S}^0)), E \wedge SX] := E_{n+1}(SX)} \arrow[d, "T_{n+1}(f)(SX)"] \\ F_n(X) := [\Sigma^n(\mathbb{E}(\mathbb{S}^0)), F \wedge X] \arrow[r, "\sigma_n"] & {[\Sigma^{n+1}(\mathbb{E}(\mathbb{S}^0)), F \wedge SX] := F_{n+1}(SX)} \end{tikzcd},$$

et se définit pour tout $[k] \in [\Sigma^n(\mathbb{E}(\mathbb{S}^0)), E \wedge X]$ par

$$T_n(f)(X)[k] := [f \wedge id_X \circ k].$$

Dans le deuxième cas $T^*(f) : E^* \longrightarrow F^*$ fait commuter

$$\begin{tikzcd}
E^{n+1}(SX) := [\mathbb{E}(SX), \Sigma^{n+1}E] \arrow[r, "\sigma^n"] \arrow[d, "T^{n+1}(f)(SX)"'] & {[\mathbb{E}(X), \Sigma^n E] := E^n(X)} \arrow[d, "T^n(f)(X)"] \\
F^{n+1}(SX) := [\mathbb{E}(SX), \Sigma^{n+1}F] \arrow[r, "\sigma^n"] & {[\mathbb{E}(X), \Sigma^n F] := F^n(X)}
\end{tikzcd}$$

et se définit pour tout $[k] \in [\mathbb{E}(X), \Sigma^n E]$ par

$$T^n(f)(X)[k] := [\Sigma^n f \circ k].$$

Si de plus f est une équivalence d'homotopie, alors $T_*(f)$ et $T^*(f)$ sont des isomorphismes naturels. Mais par le Théorème 3.1.24 c'est équivalent pour f à être une équivalence d'homotopie faible, i.e., à induire un isomorphisme $f_* : \pi_n(E) \longrightarrow \pi_n(F)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, c'est-à-dire, un isomorphisme sur les groupes de coefficients des théories E_* et E^*. On obtient donc le résultat suivant, qui est un cas spécial de la version duale du Théorème 2.4.2 :

Théorème 3.2.7. *Soient E, $F \in Sp$ et $f : E \longrightarrow F$ une application de spectres. Les transformations naturelles de théories d'homologie et de cohomologie $T_*(f) : E_* \longrightarrow F_*$ et $T^*(f) : E^* \longrightarrow F^*$ sont des isomorphismes naturels si et seulement si ce sont des isomorphismes naturels sur les groupes de coefficients de ces théories.*

Remarquons que la réciproque n'est pas toujours vraie : il peut y exister des transformations naturelles T_*, T^* qui ne sont pas de la forme $T^*(f)$, i.e., qui ne proviennent pas d'une application f. Par la suite, nous verrons quelques cas où la réciproque a lieu.

Par exemple, ce sera vrai dans le paragraphe suivant, où nous parlerons rapidement de théories de cohomologie définies sur la catégorie Sp.

Extension aux théories de cohomologie sur Sp

On peut étendre la théorie de cohomologie E^* définie sur $h\mathcal{CW}_*$ à la catégorie des spectres, en posant pour $F \in Sp$

$$E^n(F) = [F, \Sigma^n E],\ n \in \mathbb{Z}.$$

On aura alors des équivalences naturelles

$$\sigma^n : E^{n+1}(F \wedge \mathbb{S}^1) \xrightarrow{\cong} E^{n+1}(\Sigma F) \xrightarrow{\cong} E^n(F),$$

pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

La théorie E^* va satisfaire **l'axiome d'exactitude** : pour toute suite de cofibration $F \xrightarrow{f} G \xrightarrow{g} H$ la suite

$$E^n(H) \xrightarrow{g^*} E^n(G) \xrightarrow{f^*} E^n(F)$$

est exacte par la Proposition 3.1.28.

Soit $T^* : E^* \longrightarrow F^*$ un isomorphisme naturel de théories de cohomologie sur Sp. On va montrer que $T^* = T^*(f)$ pour un $f \in Sp(E, F)$.

Dans $[E, E]$ on a la classe $[id_E]$. Soit $T^0(E)[id_E] \in F^0(E) = [E, F]$ représentée par $f : E \longrightarrow F$. Alors pour tout $G \in Sp$, on choisit $g : G \longrightarrow \Sigma^n E$ et on considère le cube suivant :

$$\begin{tikzcd}
{[E;E]} \arrow[dd, "T^0(E)"'] \arrow[dr, "(\Sigma^{-n}g)^*"] & & {[\Sigma^n E, \Sigma^n E]} \arrow[ll, "(\sigma)^n"'] \arrow[dd, "T^n(\Sigma^n E)"' near start] \arrow[dr, "g^*"] & \\
& {[G, E]} \arrow[dd, "T^0(G)" near start] & & {[G, \Sigma^n E]} \arrow[ll, "\Sigma^{-n}"' near start] \arrow[dd, "T^n(G)"] \\
{[E, F]} \arrow[dr, "(\Sigma^{-n}g)^*"'] & & {[\Sigma^n E, \Sigma^n F]} \arrow[ll, "(\sigma)^n"' near end] \arrow[dr, "g^*"] & \\
& {[G, F]} & & {[G, \Sigma^n F]} \arrow[ll, "\Sigma^{-n}"]
\end{tikzcd}$$

Les flèches verticales sont des isomorphismes naturels ; les faces de droite, de derrière et de gauche commutent par naturalité. Il faudra montrer que la face de devant commute. On a

$$\begin{aligned}
\Sigma^{-n}\circ T^n(G)[g] &= \Sigma^{-n}\circ T^n(G)[id_{\Sigma^n E}\circ g]\\
&= \Sigma^{-n}\circ T^n(G)\circ g^*[id_{\Sigma^n E}]\\
&= \Sigma^{-n}\circ g^*\circ T^n(\Sigma^n E)[id_{\Sigma^n E}]\\
&= (\Sigma^{-n}g)^*\circ(\sigma)^n\circ T^n(\Sigma^n E)[id^n_{\Sigma}E]\\
&= (\Sigma^{-n}g)^*\circ T^0(E)[id_E]\\
&= (\Sigma^{-n}g)^*\circ[f]\\
&= [\Sigma^0 f\circ\Sigma^{-n}g]\\
&= [f]\circ\Sigma^{-n}[g]\\
&= \Sigma^{-n}[\Sigma^n f\circ g]\\
&= T^0(G)\circ\Sigma^{-n}([g]).
\end{aligned}$$

Le calcul montre en particulier que $T^0(G)[\Sigma^{-n}g] = [f\circ\Sigma^{-n}\circ g]$, donc que $T^n(G)[g] = [\Sigma^n f\circ g]$, car Σ est bijectif. Mais cela signifie précisement que $T^* = T^*(f)$, et donc on a montré que l'isomorphisme naturel T^* entre deux théories de cohomologie E^* et F^* sur Sp provenait d'une application de spectres $f : E \longrightarrow F$.

3.2.4 Remarques sur l'homotopie stable

Observons que

$$\mathbb{E}(\mathbb{S}^0) = (S(\mathbb{S}^0), *) := \begin{cases} *, & n<0\\ \mathbb{S}^0, & n=0\\ \mathbb{S}^1, & n=1\\ \ldots & \end{cases}$$

ce spectre est appelé le **spectre des sphères**. La théorie d'homologie $\mathbb{E}(\mathbb{S}^0)_*$, associée à ce spectre, est connue sous le nom de l'**homotopie stable**. Il est plus usuel de prendre la notation $\pi_r^S(X, x_0)$, et pour tout $r\in\mathbb{Z}$ on a

$$\pi_r^S(X,x_0) := \pi_r(\mathbb{E}(\mathbb{S}^0)\wedge X,*) = \varinjlim \pi_{r+n}(\mathbb{E}(\mathbb{S}^0)_n\wedge X,*) = \varinjlim \pi_{r+n}(\mathbb{S}^n\wedge X,*).$$

Le r-ième groupe d'homologie de la théorie $\mathbb{E}(\mathbb{S}^0)_*$ correspond donc au r-ième groupe d'homotopie stable de X.

Motrons que la théorie $\pi_r^S(X, x_0)$ satisfait **l'axiome WHE** sur $h\,Top_*$.

Tout d'abord, remarquons que vu les constructions mentionnées à la fin du chapitre précédent, on peut toujours étendre une théorie de (co)-homologie réduite définie sur $h\mathcal{CW}_*$ à une théorie de (co)-homologie réduite sur $h\,Top_*$. On considèrera donc le problème posé sur $h\mathcal{CW}_*$.

Soit $(X, x_0) \in h\mathcal{CW}_*$, et soit $f : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$ une équivalence d'homotopie faible. On doit montrer que $f_* : \pi_r^S(X, x_0) \longrightarrow \pi_r^S(Y, y_0)$ est un isomorphisme, i.e., que $f_* : \varinjlim \pi_{r+n}(\mathbb{S}^n \wedge X, *) \longrightarrow \varinjlim \pi_{r+n}(\mathbb{S}^n \wedge Y, *)$ est un isomorphisme.

Par la Proposition 1.5.4, pour le montrer, il suffira de voir qu'on a des isomorphismes en chaque degré

$$(f_*)_{r+n} : \pi_{r+n}(\mathbb{S}^n \wedge X, *) \longrightarrow \pi_{r+n}(\mathbb{S}^n \wedge Y, *)$$

pour les valeurs de n suffisamment grandes. En fait, la suite des groupes d'homotopie "se stabilise" à partir d'un certain n grand, d'où le nom d'homotopie stable.

Puisque f est une équivalence d'homotopie faible, on sait que $f_* : \pi_n(X, x_0) \xrightarrow{\cong} \pi_n(Y, y_0)$, pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Comme on travaille avec des CW-complexes, le Théorème de Whitehead implique que f est aussi une équivalence d'homotopie. Dans ce cas, l'application induite par la suspension

$$S^n(f) : (S^n(X), *) \longrightarrow (S^n(Y), *)$$

est également une équivalence d'homotopie pour tout $n \geq 0$. Donc par Whitehead $S^n(f)$ est une équivalence d'homotopie faible, i.e., $(S^n f)_* : \pi_r(S^n X, *) \xrightarrow{\cong} \pi_r(S^n Y, *)$, pour tout $r \in \mathbb{Z}$. En particulier cela reste vrai pour $r = r + n$, et nous obtenons le diagramme commutatif suivant (sans les points de base pour alléger la notation) :

$$\begin{tikzcd}
\pi_n(X) \arrow[r, "f_*", "\cong"'] \arrow[d, equal, "\text{déf}"] & \pi_n(Y) \arrow[d, equal, "\text{déf}"] \\
{[\mathbb{S}^n; X]} \arrow[d] & {[\mathbb{S}^n; Y]} \arrow[d] \\
{[\mathbb{S}^{r+n}; \mathbb{S}^n \wedge X]} \arrow[r, "(S^{r+n} f)_*", "\cong"'] \arrow[d, equal, "\text{déf}"] & {[\mathbb{S}^{r+n}; \mathbb{S}^n \wedge Y]} \arrow[d, equal, "\text{déf}"] \\
\pi_{r+n}(\mathbb{S}^n \wedge X) \arrow[r, "\therefore \cong"] & \pi_{r+n}(\mathbb{S}^k \wedge Y).
\end{tikzcd}$$

Pour tout $n \geq 0$, on a une application naturelle reliant les groupes d'homotopie et les groupes d'homotopie stable d'un espace X

$$i_0 : \pi_r(X, x_0) \longrightarrow \varinjlim \pi_{r+n}(S^n X, *) = \pi_r^S(X),$$

qui envoie $x \in \pi_r(X, x_0)$ sur sa classe $\{x\}$ dans la limite directe.

Notons que les **groupes de coefficients** pour la théorie sont définis par

$$\pi_r^S(\mathbb{S}^0, s_0) = \varinjlim \pi_{r+n}(\mathbb{S}^n, *).$$

Ils ne sont connus que pour un nombre fini de valeurs de r et leur calcul représente un enjeu important en topologie algébrique.

Chapitre 4

Théorèmes de représentation

Dans le chapitre précédent, nous avons vu comment associer une théorie de (co-)homologie, satisfaisant l'axiome du wedge, à un spectre E. Dans ce chapitre nous allors montrer le résultat inverse : étant donnée une théorie de cohomologie k^* sur $h\mathcal{CW}_*$, satisfaisant l'axiome du wedge, nous allons voir comment construire un spectre E et un isomorphisme naturel $T : E^* \longrightarrow k^*$ de théories de cohomologie. Cette réciproque découle du Théorème de représentation de Brown, dont on verra la preuve et les conséquences en détails.

En fait, on va établir un résultat plus général : pour tout foncteur contravariant $F^* : h\mathcal{CW}_* \longrightarrow Set_*$, satisfaisant l'axiome du wedge et l'axiome d'exactitude, on va trouver un CW-complexe (Y, y_0) et un isomorphisme naturel $T : [-; Y, y_0] \longrightarrow F^*$.

Définition 4.0.8. Dans ce cas l'espace (Y, y_0) est appelé **espace classifiant** pour le foncteur F^*.

On va aussi prouver un résultat similaire pour les cofoncteurs définis sur la catégorie $h\mathcal{CW}_{*F}$ des CW-complexes finis ; cette fois F^* prendra ses valeurs dans la catégorie des groupes.

En fait, pour $(Y, y_0) \in h\mathcal{CW}$ et pour un $u \in F^*(Y)$ bien choisi, il existe une transformation naturelle $T_u : [-; Y, y_0] \longrightarrow F^*(-)$ donnée par

$$T_u[f] = f^*(u) \in F^*(X)$$

pour tout $f : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$. Le problème est de construire l'espace (Y, y_0) et l'élément $u \in F^*(Y)$ de manière à ce que T_u soit un *isomorphisme* naturel.

Nous verrons donc comment faire cette construction.

4.1 Cas des CW-complexes quelconques

Les cofoncteurs F^* avec lesquels on travaillera doivent satisfaire les deux axiomes suivants :

1. *Axiome du wedge (W) :* Pour un wedge arbitraire $\vee_\alpha X_\alpha \in h\mathcal{CW}_*$ avec les inclusions $i_\beta : X_\beta \hookrightarrow \vee_\alpha X_\alpha$, le morphisme induit
$$\{i_\alpha^*\} : F^*(\vee_\alpha X_\alpha) \xrightarrow{\cong} \prod_\alpha F^*(X_\alpha)$$
est une bijection.
2. *Axiome de Mayer-Vietoris (MV) :* Pour toute CW-triade $(X; A_1, A_2)$ avec les inclusions $i : A_1 \cap A_2 \hookrightarrow A$, $j_1 : A_1 \hookrightarrow X$, $j_2 : A_2 \hookrightarrow X$, et pour tous $x_1 \in F^*(A_1)$, $x_2 \in F^*(A_2)$ tels que $i^*(x_1) = i^*(x_2)$, il existe un $y \in F^*(X)$ avec $j_1^*(y) = x_1$, $j_2^*(y) = x_2$.

Proposition 4.1.1. [Sw, Proposition 9.1] *Pour tout* $(Y, y_0) \in \mathcal{CW}_*$ *le confoncteur* $F^* = [-; Y, y_0]$ *satisfait les axiomes (W) et (MV).*

Remarquons que l'axiome (MV) est satisfait essentiellement grâce au fait que $i : A_1 \cap A_2 \hookrightarrow A_1$ est une cofibration. Dans ce cas, si $X = A_1 \cup A_2$, on prend deux éléments $[f_1] \in [A_1, x_0; Y, y_0]$, $[f_2] \in [A_2, x_0; Y, y_0]$ tels que $f_1|_{A_1 \cap A_2} \simeq f_2|_{A_1 \cap A_2}$, et alors l'homotopie $H : (A_1 \cap A_2) \times I \longrightarrow Y$ peut être étendue à $H' : A_1 \times I \longrightarrow Y$ avec $H'_0 = f_1$. Alors en faisant un diagramme commutatif on s'aperçoit que $f'_1 := H'_1$ est tel que $f'_1|_{A_1 \cap A_2} = f_2|_{A_1 \cap A_2}$. Cela donne une application $g : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$ pour laquelle $g|_{A_1} = f'_1$, $g|_{A_2} = f_2$, ce qui veut dire que $[g] \in [X, x_0; Y, y_0]$ vérifie $[g]|_{A_1} = [f_1]$ et $[g]|_{A_2} = [f_2]$.

Dans tout ce qui suit, on suppose que $F^* : h\mathcal{CW}_* \longrightarrow Set_*$ vérifie (W) et (MV).

Définition 4.1.2. Un élément $u \in F^*(Y)$ est appelé ***n*-universel** si
$$T_u : [\mathbb{S}^k, s_0; Y, y_0] \longrightarrow F^*(\mathbb{S}^k)$$
$$[f] \mapsto f^*(u)$$
est un isomorphisme pour $k < n$ et un épimorphisme pour $k = n$. L'élément u est dit **universel** si T_u est un isomorphisme pour tout $k \geq 0$.

Lemme 4.1.3. [Sw, Lemme 9.3] *Si* $(X, x_0) \in h\mathcal{CW}_*$ *et* $\{x_0\} = X_{-1} \subset X_0 \subset ... \subset X_n \subset ... \subset X$ *est une suite de sous-complexes de* X *tels que* $X = \cup_n X$, *alors l'application*
$$\{i_n^*\} : F^*(X) \longrightarrow \varprojlim F^*(X_n)$$
est surjective.

Ce lemme sera très utile par la suite, dans la preuve du Théorème de Brown, où on devra construire une suite croissante de CW-complexes par attachement de cellules, et la surjectivité de $\{i_n^*\}$ nous garantira l'existence d'un élément universel, requise dans le théorème.

Nous énonçons quelques résultats techniques sur les éléments universels, sans leurs démonstrations correspondantes pour les deux premiers.

Le premier résultat porte sur l'extension de Y en "respectant les éléments universels" :

Lemme 4.1.4. [Sw, Lemme 9.8] *Pour tout $(Y, y_0) \in \mathcal{CW}_*$ et élément n-universel $u_n \in F^*(Y)$ on peut trouver un CW-complexe Y', construit à patrir de Y en attachant des $(n+1)$-cellules et un élément $(n+1)$-universel $u_{n+1} \in F^*(Y')$ tel que $i^*(u_{n+1}) = u_n$, où $i : Y \hookrightarrow Y'$ est l'inclusion.*

Le deuxième sur l'extension de Y telle que un élément v quelconque dans $F^*(Y)$ provienne d'un élément universel :

Corollaire 4.1.5. [Sw, Corollaire 9.9] *Pour tout $(Y, y_0) \in \mathcal{CW}_*$ et $v \in F^*(Y)$ on peut trouver un CW-complexe Y' qui contient Y en tant que sous-complexe et un élément universel $u \in F^*(Y')$ tel que $i^*(u) = v \in F^*(Y)$, où $i : Y \hookrightarrow Y'$ est l'inclusion.*

Et pour finir, le résultat d'existence d'un espace classifiant Y et d'un élément universel u :

Corollaire 4.1.6. [Sw, Corollaire 9.10] *Il existe un CW-complexe $(Y, y_0) \in \mathcal{CW}_*$ et un élément universel $u \in F^*(Y)$.*

Démonstration. L'existence découle rapidement du corollaire précédent : si on prend $Y = \{y_0\}$ et v - point de base de $F^*(Y)$, alors le complexe Y' et $u \in F^*(Y')$, donnés par 4.1.5, sont les objets voulus. $\square$

Le lemme ci-dessous est une version relative du Corollaire 4.1.6 : pour un CW-complexe relatif (X, A), $i : A \hookrightarrow X$, lié à Y via $g : A \longrightarrow Y$, on peut trouver $h : X \longrightarrow Y$ qui étend g, et dont le morphisme induit h^* "se comporte bien" avec l'élémemt universel $u \in F^*(Y)$ par rapport à i_*. Plus précisement :

Lemme 4.1.7. [Sw, Lemme 9.11] *Soient Y un espace avec élément universel $u \in F^*(Y)$, (X, A, x_0) une CW-paire, $g : (A, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$ une application cellulaire et $v \in F^*(X)$ tel que $i^*(v) = g^*(u)$, où $i : A \hookrightarrow X$ est l'inclusion. Alors il existe une application cellulaire $h : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$ avec*

$$h|_A = g \text{ et } v = h^*(u).$$

Autrement dit, h fait que les deux diagrammes suivants commutent :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, hook, "i"] \arrow[dr, "g"'] & X \arrow[d, dashed, "\exists h"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} u \in F^*(Y) \arrow[r, "g^*"] \arrow[d, dashed, "h^*"'] & F^*(A) \ni i^*(v) = g^*(u) \\ v \in F^*(X) \arrow[ur, "i^*"'] & \end{tikzcd}$$

Théorème 4.1.8. [Théorème de représentation de Brown] *Si $F^* : h\mathcal{CW}_* \longrightarrow Set_*$ est un cofoncteur qui satisfait (W) et (MV), alors il existe un espace classifiant $(Y, y_0) \in \mathcal{CW}_*$ et un élément universel $u \in F^*(Y)$ tel que $T_u : [-; Y, y_0] \longrightarrow F^*(-)$ est un isomorphisme naturel.*

Remarque 4.1.9. Chez Switzer, les démonstrations des résultats 4.1.4 à 4.1.6 sont détaillées, ce qui lui permet, dans la preuve du Théorème de Brown, de seulement faire référence à 4.1.6 pour avoir l'existence de (Y, y_0) et de u. Ici, on a choisi de détailler l'argument de cette existence, pour avoir un "aperçu autosuffisant" de la construction, et cela en faisant un mélange des preuves des énoncés 4.1.4 à 4.1.6.

Démonstration. (1) Expliquons d'abord la construction de l'espace classifiant et de l'élément universel. Soient $Y = \{y_0\} \in \mathcal{CW}_*$ et v le point de base de $F^*(Y)$. Prendre $Y_{-1} = Y$ et $u_{-1} = v$. On applique le Lemme 4.1.4 par induction pour avoir une suite croissante de CW-complexes $Y = Y_{-1} \subset Y_0 \subset ... \subset Y_n \subset ...$ où chaque Y_n est obtenu de Y_{n-1} par attachement de n-cellules et les éléments $u_n \in F^*(Y_n)$ sont tels que $i^*(u_n) = u_{n-1} \in F^*(Y_{n-1})$ et u_n est n-universel. On pose

$$Y' = \cup_{n \geq -1} Y_n$$

avec la topologie faible. Le Lemme 4.1.3 avec $F^*(Y') \xrightarrow{\{i_n^*\}} \varprojlim F^*(Y_n)$ nous donne un $u \in F^*(Y')$, universel par 4.1.5, et tel que $i^*(u) = u_n$, où $i : Y_n \hookrightarrow Y'$ est l'inclusion. Donc en rśumé, ce sont le complexe Y' et $u \in F^*(Y')$ qui sont les bons candidats pour l'espace classifiant et de l'élément universel respectivement.

(2) On montre maintenant que $T_u : [X, x_0; Y, y_0] \longrightarrow F^*(X, x_0)$ est un isomorphisme naturel pour tout $(X, x_0) \in \mathcal{CW}_*$.

Naturalité de T_u : On rappelle que T_u est donnée par

$$T_u[f] = f^*(u) \in F^*(X)$$

pour tout $f : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$. Pour tout $k : (Z, z_0) \longrightarrow (X, x_0)$, il faut montrer que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} {[X, x_0; Y, y_0]} \arrow[r, "T_u"] \arrow[d, "k^*"'] & F^*(Z) \arrow[d, "F^*(k)"] \\ {[Z, z_0; Y, y_0]} \arrow[r, "T_u"] & F^*(X). \end{tikzcd}$$

On a
$$T_u \circ k^*([f]) = T_u([f \circ k]) = (f \circ k)^*(u),$$
et
$$F^*(k) \circ T_u([f]) = F^*(k)(f^*(u)) = k^* \circ f^*(u) = (f \circ k)^*(u).$$

Surjectivité de T_u : Soit $v \in F^*(X, x_0)$. Dans le Lemme 4.1.7 on prend $A = \{x_0\}$, et $g : (A, \{x_0\}) \longrightarrow (Y, y_0)$, $x_0 \mapsto y_0$, et on a alors une application $h : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$ telle que $v = h^*(u) = T_u([h])$. Ainsi T_u est surjective.

Injectivité de T_u : Supposons $T_u([g_0]) = T_u([g_1])$ pour deux éléments $g_0, g_1 : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$ qu'on peut supposer cellulaires. Posons
$$X' := X \wedge I^+ \text{ et } A' := X \wedge \{0,1\}^+$$
et définissons pour tout $x \in X$ l'application
$$g : (A', *) \longrightarrow (Y, y_0)$$
par
$$g[x, 0] = g_0(x), \text{ et } g[x, 1] = g_1(x).$$
Donc on peut regarder g_0 et g_1 comme définis sur les domaines $(X \wedge \{0\}, *)$ et $(X \wedge \{1\}, *)$ respectivement. Soient les inclusions
$$\begin{array}{ll} i_0 : X \wedge \{0\}^+ \hookrightarrow X \wedge I^+ & i_1 : X \wedge \{1\}^+ \hookrightarrow X \wedge I^+ \\ j_0 : (X \wedge \{0\}^+, *) \hookrightarrow (X \wedge \{0,1\}^+, *) & j_1 : (X \wedge \{1\}^+, *) \hookrightarrow (X \wedge \{0,1\}^+, *) \end{array}$$
et soit la projection $p : X' \longrightarrow X$, $[x, t] \mapsto x$. Alors F^* induit
$$F^*(Y, y_0) \xrightarrow{g_0^*} F^*(X \wedge \{0\}^+, *) \xrightarrow{p^*} F^*(X', *).$$
Posons $v := p^* g_0^*(u) \in F^*(X')$. Alors
- $i_0^*(v) = g_0^*(u) = j_0^* \circ g^*(u)$,
- $i_1^*(v) = g_1^*(u) = j_1^* \circ g^*(u) = T_u([g_1]) = T_u([g_0]) = g_0^*(u) = j_0^* \circ g^*(u)$.

On applique maintenant le Lemme 4.1.7, à (Y, y_0), $(X', A', *)$ et $g : (A', *) \longrightarrow (Y, y_0)$: l'égalité des deux expressions ci-dessus se traduit précisement comme $i_{0,1}^*(u) = g_{0,1}^*(v)$ et donc on peut trouver une application $h : X' \longrightarrow Y$ telle que $h|_{A'} = g$. On a en fait
$$h\colon (X \wedge I^+, *) \longrightarrow (Y, y_0)$$
avec
- $h(x, 0) = g[x, 0] = g_0(x)$,
- $h(x, 1) = g[x, 1] = g_1(x)$,

donc h est une homotopie de g_0 vers g_1, i.e., $[g_0] = [g_1]$ et T_u est injective.

□

Théorème 4.1.10. *Soient $F^*, F'^* : h\mathcal{CW}_* \longrightarrow Set_*$ deux cofoncteurs avec les espaces classifiants (Y, y_0), et (Y', y_0') et les éléments universels u et u' respectivement. Si $T : F^* \longrightarrow F'^*$ est une transformation naturelle, alors il existe une application $f : (Y, y_0) \longrightarrow (Y', y_0')$, unique à homotopie près, telle que le diagramme*

$$\begin{tikzcd}
{[X, x_0; Y, y_0]} \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, "T_u(X)"', "\cong"] & {[X, x_0; Y', y_0']} \arrow[d, "\cong"', "T_{u'}(X)"] \\
F^*(X) \arrow[r, "T(X)"] & F'^*(X)
\end{tikzcd}$$

commute pour tout $(X, x_0) \in \mathcal{CW}_*$.

Démonstration. Soit $(X, x_0) \in \mathcal{CW}_*$ et soit $[g] \in [X, Y]$. Considérons le cube suivant (sans les points de base pour alléger l'écriture) :

$$\begin{tikzcd}
{[Y;Y]} \arrow[rr, "f_*"] \arrow[dr, "g^*"] \arrow[dd, "T_u(Y)"'] & & {[Y,Y']} \arrow[dr, "g^*"] \arrow[dd, "T_{u'}(Y)"' near start] & \\
& {[X,Y]} \arrow[rr, "f_*" near start] \arrow[dd, "T_u(X)" near start] & & {[X,Y']} \arrow[dd, "T_{u'}(X)"] \\
F^*(Y) \arrow[rr, "T(Y)" near start] \arrow[dr, "F^*(g)"'] & & F'^*(Y) \arrow[dr, "F'^*(g)"'] & \\
& F^*(X) \arrow[rr, "T(X)"'] & & F'^*(X)
\end{tikzcd}$$

Les flèches verticales sont des isomorphismes naturels ; les faces de droite, de gauche et de dessous commutent par naturalité. Dans $[Y, Y]$ on a la classe $[id_Y]$, et on choisit $[f] \in [Y; Y']$ tel que

$$T(Y) \circ T_u(Y)([id_Y]) = T_{u'}(Y)([f]),$$

ce qui est possible car $T_{u'}(Y)$ est un isomorphisme on aura que

$$[f] = T_{u'}(Y)^{-1}(T(Y) \circ T_u(Y)([id_Y]))-$$

Ce $[f]$ fait que la face de derrière commute. La face de dessus commute car pour tout $[h] \in [Y, Y]$ on a $f_* \circ g^*[h] = [f \circ h \circ g] = g^* \circ f_*[h]$.

Il faudra montrer que la face de devant commute. On a

$$\begin{aligned}
T_u(X) \circ T_u(X)[g] &= T(X) \circ T_u(X)([g \circ id_Y]) \\
&= T(X) \circ F^*(g) \circ T_u(Y)([id_Y]) \\
&= F'^*(g) \circ T(Y) \circ T_u(Y)([id_Y]) \\
&= F'^*(g) \circ T_{u'}(Y)([f \circ id_Y]) \\
&= T'_u(X) \circ g^*([f]) \\
&= T'_u(X)([f \circ g]) \\
&= T'_u(X) \circ f_*([g]),
\end{aligned}$$

où la quatrième égalité est vraie par le choix de f. Pour voir l'unicité de f à homotopie près remarquons que l'expression

$$T(Y) \circ T_u(Y)([id_Y]) = T_{u'}(Y)([f])$$

implique

$$(T_{u'}(Y))^{-1} \circ T(Y) \circ T_u(Y)([id_Y]) = [f]$$

vu que $T_{u'}$ est un isomorphisme naturel. De même pour $[k] \in [Y; Y']$ vérifiant $T(Y) \circ T_u(Y)([id_Y]) = T_{u'}(Y)([k])$, on écrit la même chose, et on obtient que $[k] = [f]$. $\square$

Remarquons que ce théorème possède le sens suivant : il dit qu'entre la catégorie homotopique des espaces pointés et celle des cofoncteurs vérifiant (W) et (MV), il existe une équivalence non seulement au niveau des objets (qui se traduit par l'existence des isomorphismes $T_u(X)$ et $T'_u(X)$), mais également au niveau des morphismes (grâce à la transformation naturelle $T(X)$ et l'homomorphisme induit f_*). Une autre conséquence particulière en est que l'espace classifiant (Y, y_0) pour F^* est déterminé à équivalence d'homotopie près.

4.2 Cas des CW-complexes finis

Dans cette section nous étudions le cas du cofoncteur $F^* : h\mathcal{CW}_{*F} \longrightarrow Grp$, qui satisfait (MV) et **l'axiome du wedge faible** (W_F) : l'application

$$(i_1^*, i_2^*) : F^*(X_1 \vee X_2) \xrightarrow{\cong} F^*(X_1) \times F^*(X_2)$$

est une bijection pour tous $(X_1, x_1), (X_2, x_2) \in h\mathcal{CW}_{*F}$.

Les espaces classifiants n'étant pas forcément finis, on ne peut plus considérer $F^*(Y)$ pour prouver l'équivalent du Théorème de représentation de Brown. Alors l'idée sera d'étendre F^* à $h\mathcal{CW}_*$, en prenant

$$\hat{F}^*(X, x_0) := \varprojlim F^*(X_\alpha),$$

où $(X, x_0) \in h\mathcal{CW}_*$ et X_α parcourt tous les sous-complexes finis de X qui contiennent x_0. Par le Lemme 4.1.3, on a $\hat{F}^*(X) = F^*(X)$ si $X \in h\mathcal{CW}_{*F}$.

Avant de nous tourner vers les propriétés du cofoncteur $\hat{F}^*$ et vers les théorèmes de représentation sur $h\mathcal{CW}_{*F}$, on présente un exercice qui permet de se familiariser avec la structure de groupes induite qu'on peut définir sur les classes $[X, x_0; Y, y_0]$.

Exercice

Soit $(Y, y_0) \in Top_*$. Montrons que munir l'espace (Y, y_0) d'une structure de H-groupe équivaut à munir l'ensemble $[X, x_0; Y, y_0]$ d'une strucrure de groupe, pour tout $(X, x_0) \in Top_*$.

$\Longrightarrow$: Supposons que $(Y, y_0; \mu, \nu)$ est un H-groupe, où $\mu : Y \times Y \longrightarrow Y$ est la multiplication associative, et $\nu : Y \longrightarrow Y$ est l'inverse homotopique. Alors on munit l'ensemble des classes $[X, x_0; Y, y_0]$ d'une structure de groupe de la façon suivante :

- Soit $(X, x_0) \in hTop_*$. Pour tous $f, g \in [X, x_0; Y, y_0]$ définissons le *produit* $[f] \cdot [g] \in [X, x_0; Y, y_0]$ par la classe d'homotopie de la composition

$$X \xrightarrow{\Delta} X \times X \xrightarrow{f \times g} Y \times Y \xrightarrow{\mu} Y,$$

$$x \mapsto (x, x) \mapsto (f(x), g(x)) \mapsto \mu(f(x), g(x)),$$

i.e.,

$$[f] \cdot [g] = [\mu \circ (f \times g) \circ \Delta],$$

où Δ est l'application diagonale donnée par $\Delta(x) = (x, x)$ et μ est la multiplication du H-groupe (Y, y_0).

- Montrons que le produit $[f] \cdot [g]$ est *bien défini*.
Soient $f, f' : X \longrightarrow Y$ avec $[f] = [f']$ et $g, g' : X \longrightarrow Y$ avec $[g] = [g']$.
Il faut voir si $[f] \cdot [g] = [f'] \cdot [g']$.
Soit $H : X \times I \longrightarrow Y$ une homotopie telle que $H(x, 0) = f(x)$ et $H(x, 1) = f'(x)$, et soit $G : X \times I \longrightarrow Y$ une homotopie telle que $G(x, 0) = g(x)$ et $G(x, 1) = g'(x)$.
Définissons

$$F : X \times I \longrightarrow Y$$

par la composée

$$X \times I \xrightarrow{\Delta \times \Delta} (X \times I) \times (X \times I) \xrightarrow{H \times G} Y \times Y \xrightarrow{\mu} Y,$$

$$(x,t) \mapsto ((x,t),(x,t)) \mapsto (H(x,t),G(x,t)) \mapsto \mu((H(x,t),G(x,t))),$$

qui est continue en tant que composition d'applications continues. On a alors

$$F((x,0)) = (H(x,0),G(x,0)) = (f(x),g(x)) = \mu(f(x),g(x)),$$

et

$$F((x,1)) = (H(x,1),G(x,1)) = (f'(x),g'(x)) = \mu(f'(x),g'(x)),$$

i.e., F est une homotopie telle que

$$[f]\cdot[g] := [\mu\circ(f\times g)\circ\Delta] = [\mu\circ(f'\times g')\circ\Delta] =: [f']\cdot[g'].$$

– L'*identité* pour le produit se définit par la classe de l'application constante : $[e] := [y_0]$.
– L'*inverse* pour le produit est donnée par $[f]^{-1} := [\nu\circ f]$.

Montrons maintenant qu'avec le produit défini comme ci-dessus, l'ensemble $[X,x_0;Y,y_0]$ est bien un groupe.

– *Associativité :*

$$\begin{aligned}
([f]\cdot[g])\cdot[k] &= [\mu\circ(f\times g)\circ\Delta]\cdot[k]\\
&= [\mu\circ(\mu\circ(f\times g)\circ\Delta)\times k)\circ\Delta]\\
&= [\mu\circ(\mu\times id)\circ(f\times g\times k)\circ(\Delta\times id)\circ\Delta]\\
&= [\mu\circ(id\times\mu)\circ(f\times g\times k)\circ(id\times\Delta)\circ\Delta]\\
&= [\mu\circ f\times[\mu\circ(g\times k)\circ\Delta]\circ\Delta]\\
&= [f]\cdot[\mu\circ(g\times k)\circ\Delta]\\
&= [f]\cdot([g]\cdot[k]),
\end{aligned}$$

où la quatrième égalité est vraie car μ est associative à homotopie près.

– *Elément neutre :* Considérons le produit des classes d'homotopie

$$[e]\cdot[f] = [y_0]\cdot[f] := [\mu\circ(y_0\times f)\circ\Delta],$$

on doit montrer qu'il est égal à la classe $[f]$. Pour cela, considérons le diagramme

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "f"'] & X\times X \arrow[d, "y_0\times f"] \\
Y \arrow[r, "(y_0,id)"] \arrow[dr, "id"'] & Y\times Y \arrow[d, "\mu"] \\
& Y.
\end{tikzcd}$$

Le carré du haut commute puisque

$$(y_0, id) \circ f(x) = (y_0, id)(f(x)) = (y_0, f(x))$$

et

$$(y_0 \times f) \circ \Delta(x) = (y_0 \times f)(x, x) = (y_0, f(x)).$$

Le triangle du bas commute par définition d'identité homotopique, à homotopie près. Donc le tout commute à homotopie près, i.e.,

$$id \circ f(x) \simeq \mu \circ (y_0 \times f) \circ \Delta(x),$$

autrement dit

$$[f] = [\mu \circ (y_0 \times f) \circ \Delta].$$

– *Inverses :* On doit montrer que

$$[f] \circ [\nu \circ f] = [\mu \circ (f \times (\nu \circ f)) \circ \Delta] \stackrel{?}{=} [y_0].$$

Alors considérons le diagramme

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "f"'] & X \times X \arrow[d, "(\nu \circ f) \times f"] \\ Y \arrow[r, "(\nu, id)"] \arrow[dr, "y_0"'] & Y \times Y \arrow[d, "\mu"] \\ & Y, \end{tikzcd}$$

où carré du haut commute puisque

$$((\nu, id) \circ f)(x) = (\nu \circ f(x), f(x))$$

et

$$((\nu \circ f) \times f) \circ \Delta(x) = ((\nu \circ f) \times f)(x, x) = (\nu \circ f(x), f(x)),$$

et le triangle du bas commute par définition d'inverse homotopique, à homotopie près. Donc le tout commute à homotopie près, i.e.,

$$y_0 \circ f(x) \simeq \mu \circ ((\nu \circ f) \times f) \circ \Delta(x),$$

autrement dit, on a bien

$$[y_0] = [\mu \circ ((\nu \circ f) \times f) \circ \Delta].$$

$\Longleftarrow$: Réciproquement, supposons que l'ensemble $[X, x_0; Y, y_0]$ est muni d'un produit de groupe, noté $\cdot$. Soient $p_1 : Y \times Y \longrightarrow Y$ et $p_2 : Y \times Y \longrightarrow Y$ les projections sur la première et la deuxième composantes. Soit μ : $Y \times Y \longrightarrow Y$ une application qui représente le produit $[p_1] \cdot [p_2]$ dans le groupe $[Y \times Y; Y]$, i.e., telle que $[\mu] = [p_1] \cdot [p_2]$. Alors μ est la multiplication sur Y.

D'autre part, soit une application $\nu : Y \longrightarrow Y$ qui représente l'inverse de la classe de l'identité dans $[Y, Y]$, i.e., telle que $[\nu] = [id]^{-1}$. Alors ν définit l'inverse homotopique sur Y.

L'élément neutre dans le groupe $[Y, y_0; Y, y_0]$ est la classe $[y_0]$ de l'application constante $y_0 : Y \longrightarrow Y, y \mapsto y_0$: alors $[y_0]$ est l'identité homotopique de Y.

Montrons maintenant que $(Y, y_0; \mu, \nu)$ est bien un H-groupe.

– y_0 est l'identité homotopique, car :

$$\begin{aligned}
[\mu \circ (y_0, id)(y)] &= [\mu(y_0, y)] \\
&= [p_1] \cdot [p_2](y_0, y) \\
&= [y_0] \cdot [y] \\
&= [y],
\end{aligned}$$

vu que $[y_0]$ est l'élément neutre du groupe.

– μ est associative à homotopie près, car :

$$\begin{aligned}
[\mu \circ (\mu \times id)(a, b, c)] &= [\mu(\mu(a, b), c)] \\
&= [\mu([a] \cdot [b]), c)] \\
&= ([a] \cdot [b]) \cdot [c] \\
&= [a] \cdot ([b] \cdot [c]) \\
&= [\mu(a, [b] \cdot [c]) \\
&= [\mu(a, \mu(b, c))] \\
&= [\mu \circ (id \times \mu)(a, b, c)],
\end{aligned}$$

où la quatrième égalité vient de l'associativité du produit $\cdot$.

– ν est l'inverse homotopique, car :

$$\begin{aligned}
[\mu \circ (\nu, id)(y)] &= [\mu(\nu(y), y)] \\
&= [\nu(y)] \cdot [y] \\
&:= [id(y)]^{-1} \cdot [id(y)] \\
&= [y_0].
\end{aligned}$$

Notons que la structure de groupe iduite par μ, qu'on vient de décrire, est la même que celle qui résulte du fait que $[-, (Y, y_0)]$ soit un cofoncteur vers *Grp*. On adopte la notation suivante : le cofoncteur $F^* : Top_* \longrightarrow Grp$ sera donné par

$$(X, x_0) \mapsto [(X, x_0), (Y, y_0)]_F,$$

et par

$$(f : X \longrightarrow Z) \mapsto [Z, Y]_F \xrightarrow{f^*} [X, Y]_F$$
$$[g]_F \mapsto [g \circ f]_F$$

(l'indice $_F$ précise que tout est induit par F ; dans le paragraphe qui suit il est sous-entendu, et on l'écrira explicitement lorsque ce sera important).

La structure de groupe, donnée par le cofoncteur F^* sur les classes $[X, Y]_F$, est naturelle dans le sens que pour tout $\sigma : X \longrightarrow X'$ on a

$$[X'; Y] \xrightarrow{\sigma^*} [X, Y]$$

vérifiant pour

$$[\alpha] \in [X', Y] \mapsto \sigma^*([\alpha]) = [\alpha \circ \sigma] \in [X, Y],$$

et

$$[\beta] \in [X', Y] \mapsto \sigma^*([\beta]) = [\beta \circ \sigma] \in [X, Y],$$

que

$$[\gamma] = [\alpha] \cdot [\beta] \in [X', Y] \mapsto [\gamma \circ \sigma] \in [X, Y],$$

i.e., σ^* est un homomorphisme de groupes :

$$\sigma^*([\alpha]) \cdot \sigma^*([\beta]) = \sigma^*([\alpha] \cdot [\beta]).$$

Montrons donc que la structure de groupe est la même sur les ensembles $[X, Y]_F$ et $[X, Y]_\mu$, où $[\mu] \in [Y \times Y, Y]$ est défini comme avant par $[\mu] = [p_1] \cdot [p_2]$, le produit des classes des projections. Cela reveint à motrer que pour tous $[f], [g] \in [Y, Y]$, $([f] \cdot [g])_\mu = ([f] \cdot [g])_F$. On a

$$\begin{aligned}
([f] \cdot [g])_\mu &= [\mu \circ (f \times g) \circ \Delta] \\
&= \Delta^*((f \times g)^*([\mu])) \\
&:= \Delta^*((f \times g)^*([p_1] \cdot [p_2])) \\
&= \Delta^*(((f \times g)^*([p_1]) \cdot ((f \times g)^*([p_2]))) \\
&= \Delta^*(f \times g)^*([p_1]) \cdot \Delta^*(f \times g)^*([p_2]) \\
&= [p_1 \circ (f \times g) \circ \Delta] \cdot [p_2 \circ (f \times g) \circ \Delta] \\
&= ([f] \cdot [g])_F,
\end{aligned}$$

où la quatrième et la cinquième égalités résultent du fait que $(f \times g)^*$ et Δ^* sont des homomorphismes de groupe.

Retour aux propriétés de $\hat{F}^*$

Les lemmes techniques qui suivent assurent que notre nouveau cofoncteur $\hat{F}^*$ satisfait (W), un résultat un peu plus fort que le Lemme 4.1.3 et une version plus faible de (MV).

Lemme 4.2.1. [Sw, Lemme 9.15] *Le confoncteur $\hat{F}^* : h\mathcal{CW}_* \longrightarrow Grp$ satisfait l'axiome (W).*

Lemme 4.2.2. [Sw, Lemme 9.16] *Pour tout $(X, x_0) \in h\mathcal{CW}_*$ et pour tout système direct $\{X_\alpha\}$ des sous-complexes de X tels que $X = \cup_\alpha X_\alpha$ l'application*

$$\{i_\alpha^*\} : \hat{F}^*(X) \xrightarrow{\cong} \varprojlim \hat{F}^*(X_\alpha)$$

est un isomorphisme.

Lemme 4.2.3. [Sw Lemme 9.18] *Le confoncteur $\hat{F}^*$ satisfait l'axiome $(MV)_F$: Pour toute CW-triade $(X; A, B)$ avec $A \cap B$ finie, les inclusions $i : A \cap B \hookrightarrow X$, $j_A : A \hookrightarrow X$, $j_B : B \hookrightarrow X$, et pour tous $a \in \hat{F}^*(A)$, $b \in \hat{F}^*(B)$ tels que $i^*(a) = i^*(b)$, il existe un $x \in \hat{F}^*(X)$ avec $j_A^*(x) = a$, $j_B^*(x) = b$.*

Nous avons exactement la même définition pour les éléments (n-)universels $u \in \hat{F}^*$ que la Définition 4.1.2.

Le lemme suivant est l'équivalent du Lemme 4.1.4 dans le cas de $\hat{F}^*$.

Lemme 4.2.4. [Sw, Lemme 9.20] *Pour tout $(Y, y_0) \in \mathcal{CW}_*$ et élément n-universel $u_n \in \hat{F}^*(Y)$ on peut trouver un CW-complexe Y', construit à patrir de Y en attachant des $(n+1)$-cellules et un élément $(n+1)$-universel $u_{n+1} \in \hat{F}^*(Y')$ tel que $i^*(u_n) = u_{n+1}$, où $i : Y \hookrightarrow Y'$ est l'inclusion.*

Comme dans le cas des CW-complexes quelconques, ce lemme admet des corollaires équivalents aux Corollaires 4.1.5 et 4.1.6, postulant les résultats correspondants sur $h\mathcal{CW}_{*F}$.

Avec ceci, on peut énoncer maintenant le Théorème de représentation d'Adams.

Théorème 4.2.5. [Théorème de représentation d'Adams] *Si $F^* : h\mathcal{CW}_{*F} \longrightarrow Grp$ est un cofoncteur qui satisfait (W_F) et (MV), alors il existe un espace classifiant $(Y, y_0) \in \mathcal{CW}_*$, un élément universel $u \in \hat{F}^*(Y)$ et un isomorphisme naturel $T_u : [-; Y, y_0] \longrightarrow F$ sur $h\mathcal{CW}_{*F}$. L'isomorphisme T_u est donné par*

$$T_u : [X, x_0; Y, y_0] \longrightarrow \hat{F}^*(X) = F^*(X)$$

pour tout $(X, x_0) \in \mathcal{CW}_{*F}$.

Démonstration. Dans le cas des CW-complexes finis, la preuve se déroule en fait de manière similaire à celle du Théorème de Brown. L'équivalent du Lemme 4.1.6 garantit l'existence de $u \in \hat{F}^*(Y)$, élément universel. On doit montrer que la transformation $T_u : [X, x_0; Y, y_0] \longrightarrow \hat{F}^*(X) = F^*(X)$, (X, x_0) fini, est un isomorphisme naturel. Mais par le Théorème de Brown, $T_u : [X, x_0; Y, y_0] \longrightarrow F^*(X)$ est un isomorphisme naturel pour tout $(X, x_0) \in h\mathcal{CW}_*$, donc en particulier, pour (X, x_0) fini, ce qui achève la preuve. □

Avant de donner le théorème de représentation pour les transformations naturelles, nous avons besoin de quelques définitions.

Définition 4.2.6. On dit que deux applications $f, g : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$ sont **faiblement homotopes** si pour tout CW-complexe fini (Z, z_0) et pour toute application $h : (Z, z_0) \longrightarrow (X, x_0)$, on a $f \circ h \simeq g \circ h$, i.e., le losange suivant comute **à homotopie près** :

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, "h"'] \arrow[dr, "h"] & \\ X \arrow[dr, "f"'] & & X \arrow[dl, "g"] \\ & Y & \end{tikzcd}$$

On écrit dans ce cas $f \simeq_W g$. Il s'agit d'une relation d'équivalence, et on note $[X, x_0; Y, y_0]_W$ pour l'ensemble des classes d'équivalence d'homotopie faible des applications de (X, x_0) vers (Y, y_0).

Notation 4.2.7. Soient $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ deux catégories et $G, H : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ des confoncteurs. On note par $Nat_{\mathcal{C}}(G, H)$ l'ensemble de toutes les transformations naturelles $T : G \longrightarrow H$ sur $\mathcal{C}$.

Proposition 4.2.8. [Sw, Proposition 9.23] *Il existe des isomorphismes naturels suivants*

$$\hat{F}^*(X) \cong Nat_{h\mathcal{CW}_{*F}}([-; X, x_0], F) \cong Nat_{h\mathcal{CW}_*}([-; X, x_0]_W, \hat{F}^*),$$

pour $(X, x_0) \in h\mathcal{CW}_*$.

La preuve est une manipulation pas forcément difficile, mais technique avec éléments des trois ensembles, pour voir qu'ils sont en bijection. Donc une esquisse n'apporterait pas beaucoup ; on recommande de suivre la démonstration dans le livre de Switzer au besoin. En revanche, nous allons donner une idée de l'importance de ce résultat : il permet de comprendre pourquoi le confoncteur $\hat{F}^*$ est important dans le théorème de représentation des transformations naturelles sur $h\mathcal{CW}_{*F}$.

Dans le cas où X est fini, on a $[X, x_0; Y, y_0]_W = [X, x_0; Y, y_0]$ par définition des classes d'équivalence d'homotopie faible. Si $u \in \hat{F}^*$ est l'élément universel du Théorème 4.2.5, alors la proposition qu'on vient d'énoncer implique que la transformation naturelle $T_u : [-; Y, y_0] \longrightarrow F^*(-)$ sur $h\mathcal{CW}_{*F}$ admet une extension $\hat{T}_u : [-; Y, y_0]_W \longrightarrow \hat{F}^*(-)$ sur $h\mathcal{CW}_*$. C'est elle qu'on utilisera dans les théorèmes de représentation.

L'application $\hat{T}_u$ est un isomorphisme naturel. L'injectivité se démontre en observant le diagramme ci-dessous

$$\begin{tikzcd}
{[f] \in [X;Y]_W} \arrow[rr] \arrow[dr, "\hat{T}_u(X)"] \arrow[ddr, "h^*"'] & & {[X,Y]_W \ni [g]} \arrow[dl, "\hat{T}_u(X)"] \arrow[ddr, "h^*"] & \\
& \hat{F}^*(X) \arrow[ddr] & & \\
& {[K,Y]} \arrow[rr, "h^*"] \arrow[dr, "T_u(K)"'] & & {[K,Y]} \arrow[dl, "T_u(K)"] \\
& & \hat{F}^*(K) = F^*(K) &
\end{tikzcd}$$

où la face du haut commute, et les deux traingles aussi par naturalité. Pour $f, g : X \longrightarrow Y$ telles que $\hat{T}_u[f]_W = \hat{T}_u[g]_W$, et pour une application $h : K \longrightarrow X$ où K est fini, on a que $h^*(\hat{T}_u[f]_W) = h^*(\hat{T}_u[g]_W)$, soit que $T_u[f \circ h] = T_u[g \circ h]$ (faces latérales). Puisque T_u est un isomorphisme, on en déduit que $f \circ h \simeq g \circ h$, c'est-à-dire $f \simeq_W g$, et donc on a montré que $\hat{T}_u$ est injective.

Notons que la surjectivité se prouve en utilisant le fait que $\hat{F}^*(X)$ est définie comme limite inverse.

On peut à présent énoncer le théorème équivalent au 4.1.10 pour le cas des CW-complexes finis.

Théorème 4.2.9. *Soient $F^*, F'^* : h\mathcal{CW}_{*F} \longrightarrow Set_*$ deux cofoncteurs avec les espaces classifiants (Y, y_0), et (Y', y_0') et les éléments universels u, u' respectivement. Si $T : F^* \longrightarrow F'^*$ est une transformation naturelle, alors il existe une application $f : (Y, y_0) \longrightarrow (Y', y_0)$, unique à homotopie faible près, telle que le diagramme*

$$\begin{tikzcd}
{[X, x_0; Y, y_0]} \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, "T_u(X)"', "\cong"] & {[X, x_0; Y', y_0']} \arrow[d, "\cong"', "T_{u'}(X)"] \\
F^*(X) \arrow[r, "T(X)"] & F'^*(X)
\end{tikzcd}$$

commute pour tous $(X, x_0) \in \mathcal{CW}_{*F}$.

Esquisse de preuve : On considère l'extension de T à $\hat{T} : \hat{F} \longrightarrow \hat{F}'$ sur $h\mathcal{CW}_*$ définie pour tout $(X, x_0) \in h\mathcal{CW}_*$ par

$$\hat{T}(X) := \varprojlim T(X_\alpha)$$

(on rappelle que X_α parcourt tous les sous-complexes finis de X, contenant x_0). Dans $[Y;Y]_W$ soit la classe $[id_Y]_W$ et on choisit $[f]_W \in [Y;Y']$ telle que

$$\hat{T}(Y) \circ \hat{T}_u(Y)([id_Y]_W) = \hat{T}_{u'}(Y)([f]_W).$$

Alors on montre comme dans 4.1.10 que le diagramme "étendu" avec $\hat{T}$

$$\begin{tikzcd} [X, x_0; Y, y_0]_W \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, "\hat{T}_u(X)"', "\cong"] & [X, x_0; Y', y_0']_W \arrow[d, "\cong"', "\hat{T}_{u'}(X)"] \\ \hat{F}^*(X) \arrow[r, "\hat{T}(X)"] & \hat{F}'^*(X) \end{tikzcd}$$

commute pour tout $(X, x_0) \in h\mathcal{CW}_*$, et se réduit au diagramme du 4.1.10 dans le cas où (X, x_0) est fini. $\Box$

4.3 Résultats en relation avec le Chapitre 4

Dans cette section nous verrons deux théorèmes qui sont les réciproques aux deux résultats centraux, énoncés au chapitre précédent.

4.3.1 Ω-spectres et théories de cohomologie

Tout d'abord, nous avons la réciproque au Théorème 3.2.6. Ce dernier disait que pour tout Ω-spectre E, il existe un isomorphisme naturel entre la théorie de cohomologie E^* qui lui est associée, et une théorie de cohomologie réduite $k^*(-) := [-; E_n, *]$ satisfaisant l'axiome du wedge sur $h\mathcal{CW}_*$.

Théorème 4.3.1. [Sw, Théorème 9.27] *Soit k^* une théorie de cohomologie réduite, satisfaisant (W), sur $h\mathcal{CW}_*$ ou $h\mathcal{CW}_{*F}$. Il existe alors un Ω-spectre E et un isomorphisme naturel $T : E^* \longrightarrow k^*$.*

Idée de la preuve : On a besoin d'un cofoncteur F^* ; on va poser

$$F^* := k^* : h\mathcal{CW}_* \longrightarrow Ab,$$

et F^* satisfait (MV) et (W).

Dans le cas fini, on pose

$$F^*_F := k^* : h\mathcal{CW}_{*F} \longrightarrow Ab,$$

et F^*_F satisfait aussi (MV), et $(W)_F$ suit de la Proposition 2.3.4. Alors les Théorèmes de Brown (resp. Adams pour le cas fini) impliquent qu'on peut trouver un espace classifiant E_n pour $F^* = k^n$, un élément universel $u_n \in k^n(E_n)$ (resp. $u_n \in \hat{F}^*(E_n)$) et les isomorphismes naturels $T_u : [-; Y, y_0] \longrightarrow F^*(-)$.

La suite d'isomorphismes naturels

$$[X, x_0; \Omega E_{n+1}, \omega_0] \xrightarrow[\cong]{A^{-1}} [SX, *; E_{n+1}, *] \xrightarrow[\cong]{T_{u_{n+1}}} k^n(SX) \xrightarrow[\cong]{\sigma} k^n(X) := [X, x_0; E_n, *]$$

permet de montrer que $\{E_n, \varphi_n\}$ est un Ω-spectre, où $\varphi : E_n \longrightarrow \Omega E_{n+1}$ est l'adjoint de l'inclusion $\varepsilon : SE_n \longrightarrow E_{n+1}$.

Finalement, un diagramme commutatif faisant intervenir φ^*, l'application induite par son adjoint ε^*, l'adjonction A et la suspension Σ permet de voir que les T_{u_n} définissent un isomorphisme naturel de théories de cohomologie. □

4.3.2 Transformations naturelles de la forme $T(f)$

Deuxièmement, nous allons voir maintenant quels sont les cas qui restent où la réciproque promise au §4.2.3 a lieu. Rappelons qu'il s'agissait de se demander quand est-ce qu'une transformation naturelle $T : E^* \longrightarrow F^*$ entre deux théories de cohomologie associées au spectres provenait d'une application de $f \in \mathit{Sp}(E, F)$ (on avait établi que l'autre sens est toujours vrai, et que la réciproque a lieu p.ex. pour les théories définies sur Sp).

Théorème 4.3.2. *Si E,E' sont des Ω-spectres et $T : E^* \longrightarrow E'^*$ est une transformation naturelle de théories de cohomologie sur $h\mathcal{CW}_*$, alors il existe une application de spectres $f : E \longrightarrow E'$ telle que la transformation T provient de l'application f, i.e., le diagramme suivant commute :*

$$\begin{array}{ccc} k^n(X, x_0) := [X, x_0; E^n, *] & \xrightarrow{f_*} & [X, x_0; E'^n, *] := k'^n(X) \\ {\scriptstyle T_u(X)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle T'_u(X)} \\ E^n(X) := [X, x_0; \Sigma^n E] & \xrightarrow{T(X)} & [X, x_0; \Sigma^n E'] := E'^n(X). \end{array}$$

Démonstration. Le fait que E et E' sont des Ω-spectres nous garantit, par le théorème précédent que T_u et T'_u sont des isomorphismes naturels. Alors on remarque que la preuve se déroule de la même manière que celle du Théorme 4.1.10 : on choisit $[f] \in [E^n; E'^n]$ tel que

$$T(E^n) \circ T_u(E^n)([id_E^n]) = T'_u(E'^n)([f]),$$

et on considère le cube commutatif en question. □

Pour montrer le résultat correspondant pour les transformations naturelles sur $h\mathcal{CW}_{*F}$, il faut se tourner vers la catégorie Sp encore une fois. On va considérer une théorie de cohomologie k^* définie sur Sp_F, les spectres finis. Et avec la même idée qu'avant, on va considérer une extension sur les spectres quelconques. On définit

$$\hat{k}^*(X) = \varprojlim k^*(X_\alpha)$$

pour $X \in \mathit{Sp}$, où X_α parcourt l'ensemble des sous-spectres finis de X. Alors, en définissant la notion d'homotopie faible entre les applications de spectres de manière évidente, on a des équivalences naturelles semblables à celles de la Proposition 4.2.8 :

$$\hat{k}^*(E) \cong Nat_{h\,Sp_F}([E^*;k^*]) \cong Nat_{h\,Sp}([-;E]^*_W, \hat{k}^*),$$

avec $[-,E]^*_W = \{[-,E]^n_W\} = \{[-,\Sigma^n E]_W\}$, $n \in \mathbb{Z}$.

Alors $\hat{k}^*$ n'est pas une théorie de cohomologie, mais ce foncteur satisfait les analogues de 4.2.2 et de $(MV)_F$. Par analogie avec ce qui précède, un élément $u \in \hat{k}^0(E)$ est appelé **n-universel** si

$$T_u : \pi_k(E) = E^0(\mathbb{S}^k) \longrightarrow k^0(\mathbb{S}^k)$$

est un isomorphisme pour $k < n$ et un épimorphisme pour $k = n$. L'élément u est dit **universel** si T_u est un isomorphisme pour tout $k \geq 0$.

Nous avons également l'équivalent du Lemme 4.1.4 sur la construction des éléments universels :

Lemme 4.3.3. [Sw, Lemme 9.29] *Supposons que $k^q(\mathbb{S}^0) = 0$ pour $q > 0$. Alors si F est un spectre et $v \in \hat{k}^0(F)$ est un élément n-universel, on peut trouver un spectre E, contenant F comme sous-spectre, et un élément $(n+1)$-universel $u \in \hat{k}^0(E)$ tel que $i^*(u) = v$, où $i : Y \hookrightarrow Y'$ est l'inclusion.*

L'analogue de 4.1.7 nous permet de motrer l'existence d'un isomorphisme naturel $\hat{T}_u : [-;E]^*_W \longrightarrow \hat{k}^*$ dans le cas où $k^q(\mathbb{S}^0)$, $q > 0$, qui n'est rien d'autre qu'une extension de $T_u : [-;E]^*_W \longrightarrow k^*$ définie sur Sp_F. Dans ce cas E est appelé **spectre classifiant** pour la théorie k^*.

Finalement, on peut énoncer le théorème de représenation pour les transformations naturelles sur Sp_F :

Théorème 4.3.4. *Soient $k^*, k'^* : h\,Sp_{*F} \longrightarrow Ab$ deux théories de cohomologie telles que $k^q(\mathbb{S}^0) = k'^q(\mathbb{S}^0) = 0$, $q > 0$, avec les spectres classifiants E, E' et les éléments universels u, u' respectivement. Si $T : k^* \longrightarrow k'^*$ est une transformation naturelle, alors il existe une application de spectres $f : E \longrightarrow E'$, unique à homotopie faible près, telle que le diagramme*

$$\begin{tikzcd}
E^*(F) := [F;\Sigma^n E]_W \arrow[r, "T(f)"] \arrow[d, "T_u(F)"', "\cong"] & {[F;\Sigma^n E']_W := E'^*(F)} \arrow[d, "\cong"', "T_{u'}(F)"] \\
k^*(F) \arrow[r, "T(F)"] & k'^*(F)
\end{tikzcd}$$

commute pour tous $F \in h\,Sp_F$.

Idée de la preuve : C'est la même que dans le Théorème 4.2.9 : on travaille avec l'extension $\hat{T}$ et on choisit la classe $[f]_W \in [E';\Sigma^n E']_W$ telle que

$$\hat{T}(E') \circ \hat{T}_u(E')([id'_E]_W) = \hat{T}_{u'}(E')[f]_W,$$

puis on conclut comme dans 4.2.9. □

Conclusion

Ce travail nous a permis d'apprendre beaucoup de résultats sur les théories d'homologie et de cohomologie généralisées, dont voici quelques-uns des plus importants.

La définition axiomatique des théories de (co-)homologie généralisées fait que les outils comme par exemple la l.s.e de Mayer-Vietoris, ou encore le fait que l'homologie d'un espace contractile coïncide avec celle d'un point, soient des conséquences plus ou moins directes des axiomes.

En ce qui concerne les transformations naturelles entre deux théories de (co-)homologie définies sur $h\mathcal{CW}$, on a appris que leur nature sur les groupes de coefficients, suffit pour déduire leur nature sur les groupes de (co-)homologie pour tout espace X, à condition que la théorie en question satisfait l'axiome du wedge. Un résultat semblable existe aussi pour les transformations naturelles entre théories de (co-)homologie associées à un spectre.

Pour ces dernières, nous avons vu qu'elles ne seront pas toujours induites par une application de spectres. Ce sera le cas par exemple si elles sont definies sur Sp, ou si l'application en question est définie entre deux Ω-spectres. En revanche, la réciproque est toujours vraie : toute application de spectres induit des transformations naturelles de théories de (co-)homologie associées à un spectre.

Enfin, si E est un Ω-spectre, alors il existe une théorie de cohomologie sur $h\mathcal{CW}_*$ qui est naturellement équivalente à la théorie de cohomologie associée à ce spectre. Et réciproquement : étant donnée une théorie de cohomologie k^* sur $h\mathcal{CW}_*$, satisfaisant l'axiome du wedge, on peut construire un Ω-spectre E et un isomorphisme naturel $T : E^* \longrightarrow k^*$ de théories de cohomologie. Pour établir le sens inverse, le cas où la théorie est définie sur des CW-complexes finis est distingué de celui des CW-complexes quelconques, et son traitement est plus laborieux. Dans les deux cas, les réciproques sont conséquences des Théorèmes de représentaion d'Adams et de Brown respectivement.

Comme suite logique possible à ce projet, il serait intéressant de voir quelques-uns des exemples classiques concrets de théories de (co-)homologie généralisées, comme l'homologie singulière, la K-théorie topologique ou le bordisme, ce que nous n'avons pas pu faire ici, par manque de temps.

Bibliographie

[Sw] R. M. Switzer, *Algebraic Topology - Homology and Homotopy*, Springer, 1975.

[Ha] A. Hatcher, *Algebraic Topology*, Cambridge University Press, 2002.

[Pi] R.A.A. Piccinini, *Lectures on Homotopy Theory*, North-Holland, 1992.

[W] Wikipedia, l'encyclopédie libre, *http ://www.wikipedia.org*

[D] Diagrammes commutatifs avec XY-pic, *http ://www.zoonek2.free.fr*