Catégories simpliciales enrichies et K-théorie de Waldhausen

THÈSE N^{O} 4862 (2010)

PRÉSENTÉE LE 5 NOVEMBRE 2010

À LA FACULTÉ SCIENCES DE BASE

GROUPE HESS BELLWALD

PROGRAMME DOCTORAL EN MATHÉMATIQUES

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

POUR L'OBTENTION DU GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES

PAR

Ilias AMRANI

acceptée sur proposition du jury:

Prof. F. Eisenbrand, président du jury
Prof. K. Hess Bellwald, directrice de thèse
Prof. C. Berger, rapporteur
Prof. Ph. Michel, rapporteur
Prof. A. Tonks, rapporteur

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Suisse
2010

Résumé

Ce mémoire, qui présente une nouvelle approche à la $\mathbb{K}$-théorie algébrique, se décompose en deux parties. La première est consacrée à la catégorie des petites catégories simpliciales. Tout d'abord, on construit une nouvelle structure modèle sur $\mathbf{sCat} = [\Delta^{op}, \mathbf{Cat}]$, qu'on appellera la structure diagonale, en référence à la structure diagonale de Moerdijk sur les ensembles bisimpliciaux $\mathbf{sSet}^2$. Puis on montre que la nouvelle structure est propre et cellulaire. On remarquera que cette nouvelle structure modèle n'est pas tensorisée et cotensorisée sur la catégorie des ensembles simpliciaux **sSet** de manière compatible avec la structure modèle. Pour y remédier, on utilise une autre structure modèle sur $\mathbf{sSet}^2$ définie dans l'article de Cegarra et Remedios [3] qui est équivalente à celle de Moerdijk. Puis on construit une deuxième nouvelle structure modèle sur $[\Delta^{op}, \mathbf{Cat}]$, pour obtenir une catégorie modèle à génération cofibrante, propre à gauche, cellulaire et (co)tensorisée sur **sSet** de manière compatible avec la structure modèle.
En se basant sur les travaux de [13], on construit la catégorie stable des spectres (non symétriques) $\mathbf{Sp}^{\mathbb{N}}(\mathbf{sCat}_*, \Sigma)$. L'existence assurée des Ω-spectres nous permet de définir la notion de catégorie "faiblement de Waldhausen". Le calcul de l'enrichissement simplicial **map** de la catégorie modèle $\mathbf{Sp}^{\mathbb{N}}(\mathbf{sCat}_*, \Sigma)$ mène à notre nouvelle définition de la $\mathbb{K}$-théorie algébrique des catégories faiblement de Waldhausen.

La deuxième partie de ce mémoire est une tentative de généraliser les résultats précédents aux catégories enrichies. D'abord on commence par rappeler la théorie des ∞-catégories et des ∞-groupoïdes, en s'appuyant sur les travaux de Joyal [14] et Lurie [18]. Puis on introduit des comparaisons des ∞-catégories avec la catégorie des ensembles simpliciaux munie de la structure modèle habituelle. Notre premier résultat est la construction d'une structure modèle sur $\mathbf{Top}-\mathbf{Cat}$, la catégorie des petites catégories enrichies sur la catégorie des espaces topologiques **Top**, en se basant sur les travaux de Bergner [1]. La catégorie $\mathbf{Top} - \mathbf{Cat}$ est Quillen équivalente à $\mathbf{sSet} - \mathbf{Cat}$. Notons que tous les objets dans $\mathbf{Top} - \mathbf{Cat}$ sont fibrants ; cette remarque jouera un rôle important dans cette théorie.

Notre deuxième résultat consiste en la construction d'une nouvelle structure modèle sur la catégorie des petites catégories simpliciales enrichies sur **Top**, qu'on notera $\mathbf{Top}-\mathbf{sCat} = [\Delta^{op}, \mathbf{Top}-\mathbf{Cat}]$. On montre que cette structure est propre et cellulaire. Le fait que $\mathbf{Top}-\mathbf{sCat}$ n'est pas (co)tensorisée par **sSet**, nous pose un obstacle pour définir une catégorie des spectres $\mathbf{Sp}^{\mathbb{N}}(\mathbf{Top}-\mathbf{sCat}_*, \Sigma)$.

Mots clés : catégorie enrichie, catégorie modèle, catégorie modèle stable, $\mathbf{Top}-\mathbf{Cat}$, $\mathbf{Top}-\mathbf{sCat}$, $\mathbb{K}$-théorie algébrique.

Abstract

This thesis, which presents a new approach to the algebraic $\mathbb{K}$-theory, is divided into two parts. The first one is devoted to the category of small simplicial categories. First, we construct a new model structure on $\mathbf{sCat} = [\Delta^{op}, \mathbf{Cat}]$ which is called the diagonal model structure, in reference to the diagonal model structure of Moerdijk on bisimplicial sets $\mathbf{sSet}^2$. Then we show that the new structure is proper and cellular. Note that this new model structure is not tensored and cotensored over the category of simplicial sets $\mathbf{sSet}$ in a manner consistent with the model structure. To remedy this, we use another model structure on $\mathbf{sSet}^2$ defined in the article of Cegarra and Remedios [3], which is equivalent to the Moerdijk structure. So we build a second new model structure on $[\Delta^{op}, \mathbf{Cat}]$, which is cofibrantly generated, left proper, cellular and (co)tensored on $\mathbf{sSet}$ in a compatible way.

Based on the work of [13], we construct the stable category of spectra (not symmetric) $\mathbf{Sp}^{\mathbb{N}}(\mathbf{sCat}_*, \Sigma)$. It garantees the existence of Ω-spectra, which allows us to define the notion of "weak Waldhausen category". The calculation of the simplicial enrichment **map** of the model category $\mathbf{Sp}^{\mathbb{N}}(\mathbf{sCat}_*, \Sigma)$, leads to our new definition of algebraic $\mathbb{K}$-theory of weak Waldhausen categories .

The second part of this thesis is an attempt to generalize the previous results for enriched categories. First we begin by recalling the theory of ∞-categories and ∞-groupoids, based on the work of Joyal [14] and Lurie [18]. Then we make comparisons of ∞-categories with the category of simplicial sets equipped with the usual model structure. Our first result is the construction of a model structure on $\mathbf{Top} - \mathbf{Cat}$, the category of small categories enriched over the category of topological spaces $\mathbf{Top}$, based on the work of Bergner [1] . The category $\mathbf{Top} - \mathbf{Cat}$ is Quillen equivalent to $\mathbf{sSet} - \mathbf{Cat}$. Note that all objects in $\mathbf{Top} - \mathbf{Cat}$ are fibrant ; this remark will play an important role in this theory.

Our second result is the construction of a new model structure on the category of small simplicial categories enriched over $\mathbf{Top}$, denoted by $\mathbf{Top} - \mathbf{sCat} = [\Delta^{op}, \mathbf{Top} - \mathbf{Cat}]$. We show that this structure is proper and cellular. The fact that $\mathbf{Top} - \mathbf{sCat}$ is not (co)tensored over $\mathbf{sSet}$ poses a barrier to defining the category of spectra $\mathbf{Sp}^{\mathbb{N}}(\mathbf{Top} - \mathbf{sCat}_*, \Sigma)$.

Keywords : enriched category, model category, stable model category, **Top – Cat**, **Top – sCat**, Algebraic $\mathbb{K}$-theory.

Avant-propos

Je tiens à remercier ma directrice de thèse, Kathryn Hess, de m'avoir offert la chance (et même plusieurs) de finir ce mémoire dans les meilleures conditions. Je la remercie pour ses encouragements, ses corrections précieuses, sa disponibilité et sa générosité. Je lui suis profondément reconnaissant de m'avoir soutenu jusqu'au bout.
Je remercie le prof. Clemens Berger, le prof. Friedrich Einsenbrand, le prof. Philippe Michel et le prof. Adrew Tonks d'avoir accepté de faire partie du jury.
Mes pensées vont vers mes collègues, qui sont devenus par la suite mes amis. Jan Brunner, Nicolas Michel, Patrick Muller et Théophile Naïto que je ne saurai remercier pour sa bienveillance.
Je tiens, aussi, à remercier les post-doctorants, John Harper, Sverre Lunoe Nielsen, Jonathan Scott, Gavin Seal, Samuel Wüthrich pour leurs aides et disponibilité. Ma gratitude va vers Jérôme Scherer qui m'a aidé par ses conseils et son expérience ainsi que Varvara Karpova pour les aides techniques.
Enfin, Reda Jürg Messikh, un ami d'enfance, sans qui je n'aurai probablement jamais pris ce chemin merveilleux !
Спасибо моим родителям за их истинную любовь и поддержку.

Моим Родителям посвящается.

Table des matières

Chapitre 1

Introduction

1.1 De quoi parle-t-on ?

Comme le titre de ce mémoire l'indique, il s'agit ici de la $\mathbb{K}$-théorie algébrique. Cette théorie se retrouve dans beaucoup de domaines mathématiques, tels que la théorie des anneaux et des groupes, la théorie des schémas et la théorie de l'homotopie (stable). Il est peut-être plus aisé de parler d'une théorie (cohomologique) antérieure à la $\mathbb{K}$-théorie algébrique, la $\mathbb{K}$-théorie topologique.

La $\mathbb{K}$-théorie topologique est une théorie cohomologique sur les espaces topologiques. Elle est représentable par un Ω-spectre qu'on note généralement par $\mathrm{KU} = \{\mathrm{KU}^0, \mathrm{KU}^1, \ldots\}$. Ainsi, les groupes $\mathbb{K}_i(X)$ d'un CW-complexe X sont définis comme les groupes d'homotopie $\pi_i \mathbf{map}_{\mathbf{Top}}(X, \mathrm{KU}^0) = \pi_0 \mathbf{map}_{\mathbf{Top}}(X, \mathrm{KU}^i)$, où $\mathbf{map}_{\mathbf{Top}}$ désigne le mapping space de la catégorie **Top**. Plus généralement le théorème de représentabilité de Brown montre que toute théorie cohomologique (vérifiant certaines conditions) sur les CW-complexes est représentable par un Ω-spectre.

Le groupe $\mathbb{K}_0$ d'un espace topologique a une interprétation géométrique en terme de fibrés vectoriels, tout comme la $\mathbb{K}_0$ algébrique d'un schéma a une interprétation en terme de fibrés vectoriels. Le théorème de Swan formalise cette analogie. Au delà de cette analogie, nous nous sommes posés la question de la représentabilité de la $\mathbb{K}$-théorie algébrique.

Une première tentative (naïve) est de poser le problème ainsi : Soit $\mathbf{C}$ la catégorie des anneaux commutatifs simpliciaux. On considère la catégorie modèle des préfaisceaux simpliciaux $[\mathbf{C}^{op}, \mathbf{sSet}]$. La $\mathbb{K}$-théorie algébrique de Waldhausen est un foncteur $\mathbb{K} : \mathbf{C}^{op} \to \mathbf{sSet}$. On se demande s'il existe un objet $C \in \mathbf{C}$ tel que $\mathbb{K}(A) \sim \mathbf{map}_{[\mathbf{C}^{op},\mathbf{sSet}]}(\mathcal{A}, \mathcal{C})$, avec $\mathcal{A} = \mathbf{Hom}_{[\mathbf{C}^{op},\mathbf{sSet}]}(-, A)$, et $\mathcal{C} = \mathbf{Hom}_{[\mathbf{C}^{op},\mathbf{sSet}]}(-, C)$ (plongement de Yoneda $\mathbf{C} \to [\mathbf{C}^{op}, \mathbf{sSet}]$ version enrichie). La réponse est non, puisque $\mathbb{K}$ ne commute pas aux

colimites (homotopiques).
La construction $\mathcal{S}_\bullet$ de Waldhausen [23] nous a inspiré une deuxième tentative de résoudre le problème de la représentabilité. A partir de chaque catégorie de Waldhausen $\mathbf{A}$ (on se restreint au cas où les équivalences faibles sont les isomorphismes), Waldhausen construit le Ω-spectre

$$\mathbb{K}(\mathbf{A}) = \{\Omega \mathrm{diagN}_\bullet \mathrm{iso}\mathcal{S}_\bullet \mathbf{A}, \mathrm{diagN}_\bullet \mathrm{iso}\mathcal{S}_\bullet \mathbf{A}, \mathrm{diagN}_\bullet \mathrm{iso}\mathcal{S}_\bullet^{(2)} \mathbf{A} \ldots\}.$$

où $\mathrm{N}_\bullet$ est le foncteur nerf, diag le foncteur qui associe à un ensemble bisimplicial sa diagonale, et Ω est le foncteur lacet. L'analogie en topologie est qu'à partir d'un monoïde (topologique) abélien G, on peut construire un Ω-spectre en utilisant le foncteur Bar, B :

$$\{\Omega \mathrm{B}(G), \mathrm{B}(G), \mathrm{BB}(G), \ldots\}.$$

Remarquons que la définition de Waldhausen de la $\mathbb{K}$-algébrique produit un Ω spectre au sens classique, mais on n'arrive pas à la voir comme la "réalisation" d'un spectre au niveau des catégories, c'est à dire comme un "spectre de catégories simpliciales"

$$\{\Omega \mathcal{S}_\bullet \mathbf{A}, \mathcal{S}_\bullet \mathbf{A}, \mathcal{S}_\bullet^{(2)} \mathbf{A} \ldots\}$$

tel qu'une fois le foncteur $\mathbf{map}(S^0, -)$ appliqué on retrouve un spectre "équivalent" au spectre $\mathbb{K}(\mathbf{A})$.
Une approche possible au problème de la réalisabilité est de voir les catégories de Waldhausen comme jouant un rôle similaire à celles des monoïdes topologiques (abéliens) dans **Top**. Cette analogie est bien naïve. Le but de ce mémoire est d'en donner une consistance à cette comparaison. Notre approche est d'en donner une interprétation homotopique. En effet, la définition d'une catégorie de Waldhausen est une définition " à la main " et non homotopique. Nous introduisons une notion de "catégorie Waldhausen faible", qui est vue comme le 0-ième espace des Ω-spectre dans une certaine catégorie stable. Il n'est certainement pas vrai qu'une catégorie de Waldhausen est une catégorie de Waldhausen faible, ou du moins on n'a pas de tels résultats. Cela ne constitue pas vraiment un obstacle, car la $\mathbb{K}$ théorie algébrique est aussi définie pour les petites catégories monoïdales strictes (pérmutatives), comme c'est suggéré dans l'article [9]. L'interprétation qui nous semble la plus correcte, est de voir les catégories de Waldhausen faibles comme une nouvelle classe de catégories pour lesquelles il est possible de définir la $\mathbb{K}$-théorie algébrique.

1.2 Le contenu de la thèse

Le mémoire se décompose en deux parties. La première est consacré au cas des catégories non enrichies. Le chapitre 2 est une brève introduction à la théorie des

catégories enrichies sur une catégorie $\mathbf{V}$ monoïdale symétrique et fermée. On rappelle aussi la notion de catégories simpliciales, qui est un cas particulier des catégories enrichies, où $\mathbf{V} = \mathbf{sSet}$. Puis on termine en introduisant la notion de catégories modèles simpliciales en explicitant la compatibilité de l'enrichissement avec la notion de catégorie modèle.
Le chapitre 3 est le coeur de la première partie. On construit une nouvelle structure modèle sur la catégorie $[\Delta^{op}, \mathbf{Cat}]$ et montre le premier résultat.

Theorem 1.2.1. *[3.2.4] La catégorie $[\Delta^{op}, \mathbf{Cat}]$ admet une structure modèle à génération cofibrante, telle que $\mathbf{A}_\bullet \to \mathbf{C}_\bullet$ est une équivalence (resp. fibration) si et seulement si*

$$\mathrm{diagN}_\bullet \mathrm{iso}\mathbf{A}_\bullet \to \mathrm{diagN}_\bullet \mathrm{iso}\mathbf{C}_\bullet.$$

est une équivalence (resp. fibration) dans $\mathbf{sSet}$.

Le deuxième résultat résume les propriétés clés de la catégorie modèle $[\Delta^{op}, \mathbf{Cat}]$ qui se résume ainsi :

Theorem 1.2.2. *[5.2.5,3.3.12] La structure modèle sur $[\Delta^{op}, \mathbf{Cat}]$ du théorème 1.2.1 est propre et cellulaire.*

Puis on utilise les travaux de [3] pour définir une deuxième structure modèle sur la catégorie $[\Delta^{op}, \mathbf{Cat}]$, équivalente à celle définie dans le théorème 1.2.1, et qui induit une structure modèle sur la catégorie pointée $[\Delta^{op}, \mathbf{Cat}]_*$. Cette deuxième structure modèle sur $[\Delta^{op}, \mathbf{Cat}]$ est tensorisée et cotensorisée sur $\mathbf{sSet}$ de manière compatible, en particulier les foncteurs de suspension Σ et de lacet Ω sont des adjonctions de Quillen.

Theorem 1.2.3. *[3.3.18,3.4.5] La catégorie $[\Delta^{op}, \mathbf{Cat}]_*$ admet une structure modèle à génération cofibrante, telle que $\mathbf{A}_\bullet \to \mathbf{C}_\bullet$ est une équivalence (fibration) si et seulement si*

$$\overline{W}\mathrm{N}_\bullet \mathrm{iso}\mathbf{A}_\bullet \to \overline{W}\mathrm{N}_\bullet \mathrm{iso}\mathbf{C}_\bullet$$

est une équivalence (fibration) dans $\mathbf{sSet}$. Cette structure modèle est tensorisée et cotensorisée sur $\mathbf{sSet}_*$ telle que le foncteur

$$X_* \wedge - : [\Delta^{op}, \mathbf{Cat}]_* \to [\Delta^{op}, \mathbf{Cat}]_*$$

est un foncteur de Quillen, pour tout $X_* \in \mathbf{sSet}_*$.

Le théorème 1.2.3 nous permet de définir une catégorie stable des spectres $\mathbf{Sp}^{\mathbb{N}}([\Delta^{op}, \mathbf{Cat}]_*)$ en se basant sur l'article [13].

Theorem 1.2.4 (3.5.4)**.** *La catégorie* $\mathbf{Sp}^{\mathbb{N}}([\Delta^{op},\mathbf{Cat}]_*)$ *est une catégorie modèle stable et*

$$\mathbf{map}_{\mathbf{Sp}^{\mathbb{N}}([\Delta^{op},\mathbf{Cat}]_*)}(\Sigma^\infty S^0,\mathbf{C}_\bullet)\sim \mathrm{diag}\mathrm{N}_\bullet\mathrm{iso}\mathbf{C}^0_\bullet$$

où $\mathbf{C}_\bullet$ *est un spectre stablement fibrant et* $\mathbf{C}^0_\bullet$ *est le 0-ième niveau de* $\mathbf{C}_\bullet$

On finit le premier chapitre en donnant une définition de la $\mathbb{K}$-théorie algébrique d'une catégorie pointée faiblement de Waldhausen.

Définition 1.2.5. *Un objet* $\mathbf{C}_\bullet\in[\Delta^{op},\mathbf{Cat}]_*$ *est une catégorie faiblement de Waldhausen si* $\mathbf{C}_\bullet$ *est le 0-ième objet d'un spectre stablement fibrant dans* $\mathbf{Sp}^{\mathbb{N}}([\Delta^{op},\mathbf{Cat}]_*)$.

La deuxième partie commence par un rappel de la notion de quasi-catégories (∞-catégories). On rappelle aussi leurs liens avec les catégories enrichies sur **sSet**. Puis on montre un résultat qui compare la notion de quasi-groupoïde (∞-groupoïde) et la notion de groupoïde enrichie sur **sSet**.
Nous continuons avec l'étude des catégories enrichies sur **Top**, qui forment la catégorie $\mathbf{Top}-\mathbf{Cat}$. Notre premier résultat se résume dans le théorème suivant.

Theorem 1.2.6. *[4.3.2] Il existe une structure modèle sur* $\mathbf{Top}-\mathbf{Cat}$ *à génération cofibrante et propre à droite, qui est Quillen équivalente à structure de catégorie modèle sur* $\mathbf{sSet}-\mathbf{Cat}$ *définie dans [1].*

Notre deuxième résultat de la deuxième partie est un analogue au théorème 1.2.1 : nous construisons une nouvelle structure modèle sur la catégorie $[\Delta^{op},\mathbf{Top}-\mathbf{Cat}]$.

Theorem 1.2.7. *[4.3.2] La catégorie* $[\Delta^{op},\mathbf{Top}-\mathbf{Cat}]$ *admet une structure modèle à génération cofibrante, telle que* $\mathbf{A}_\bullet\to\mathbf{B}_\bullet$ *est une équivalence (fibration) si et seulement si*

$$\mathrm{diag}\ k^!\widetilde{\mathrm{N}_\bullet}\mathrm{sing}\mathbf{A}_\bullet\to\mathrm{diag}\ k^!\widetilde{\mathrm{N}_\bullet}\mathrm{sing}\mathbf{B}_\bullet$$

est une équivalence (fibration) dans **sSet**.

- *Le foncteur* $\widetilde{\mathrm{N}_\bullet}$ *est le nerf cohérent, c'est la version enrichie du nerf* $\mathrm{N}_\bullet$ *.*
- *Le foncteur* $k^!:\mathbf{sSet}\to\mathbf{sSet}$ *peut être interprété comme la version simplicial du foncteur qui associe à une catégorie son groupoïde sous-jacent.*

On finit le chapitre 5 en donnant quelques propriétés essentielles de la catégorie modèle $[\Delta^{op},\mathbf{Top}-\mathbf{Cat}]$. Les résultats se résument dans le théorème suivant.

Theorem 1.2.8. *[5.2.5,5.2.14] La catégorie modèle* $[\Delta^{op},\mathbf{Top}-\mathbf{Cat}]$ *est propre à gauche et cellulaire.*

Malheureusement, on constate que l'on ne peut pas trouver un analogue au théorème 1.2.3 pour la catégorie $[\Delta^{op}, \mathbf{Top} - \mathbf{Cat}]$. L'objectif du dernier chapitre est de remédier à ce problème (de manière informelle, mais qu'on pense tout à fait réalisable). Ainsi on décrit à quoi doit "ressembler" la catégorie de spectres sur $[\Delta^{op}, \mathbf{Top} - \mathbf{Cat}]_*$. Cela nous permet de suggérer une définition de la $\mathbb{K}$-théorie algébrique pour les catégories enrichies en se basant sur les travaux de [13], [20] et le théorème 1.2.8.
L'annexe A contient quelques remarques sur les ensembles bisimplicaux, et un calcul de mapping space de la catégorie modèle **Cat** par les méthodes décrites dans [5].
L'annexe B est entièrement consacré à la preuve complète du théorème 1.2.6.

Première partie

K-Théorie Algébrique de Catégories Simpliciales

Chapitre 2

Rappels

2.1 Rappels de la théorie des catégories enrichies

On fera quelques rappels de la théorie des catégories enrichies sur une catégorie monoïdale avec unité I. Les détails se trouvent dans [16]. La catégorie de base sur laquelle on enrichit est notée $\mathbf{V}$. En général c'est une catégorie monoïdale fermée symétrique avec unité. Les exemples importants pour nous sont les catégories $\mathbf{Sp}^{\Sigma}$ et **sSet** (ou les versions pointées).

La définition de $\mathbf{V}$-catégorie et de $\mathbf{V}$-foncteur s'exprime par les diagrammes commutatifs que voici :

Définition 2.1.1. *Une* $\mathbf{V}-$*catégorie* $\mathbf{D}$ *est la donnée d'une classe d'objets* $\mathrm{Ob}(\mathbf{D})$*, et pour chaque paire d'objets* a, b *d'un objet* $\mathbf{Hom_D}(a, b)$ *de* $\mathbf{V}$*, une loi de composition* $m_{a,b,c} : \mathbf{Hom_D}(b, c) \otimes \mathbf{Hom_D}(a, b) \to \mathbf{Hom_D}(a, c)$*, et enfin un element identité* $e_a : \mathrm{I} \to \mathbf{Hom_D}(a, a)$*, tels que les trois diagrammes suivants soient commutatifs :*

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Hom_D}(c,d) \otimes \mathbf{Hom_D}(b,c) \otimes \mathbf{Hom_D}(a,b) \arrow[r, "1\otimes m_{a,b,c}"] \arrow[d, "m_{b,c,d}\otimes 1"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathbf{Hom_D}(c,d) \otimes \mathbf{Hom_D}(a,c) \arrow[d, "m_{a,b,d}"] \\
\mathbf{Hom_D}(b,d) \otimes \mathbf{Hom_D}(a,b) \arrow[r, "m_{a,c,d}"] & \mathbf{Hom_D}(a,d)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{I} \otimes \mathbf{Hom_D}(a,b) \arrow[rr, "e_b\otimes 1"] \arrow[dr, "l"] & & \mathbf{Hom_D}(b,b) \otimes \mathbf{Hom_D}(a,b) \arrow[dl, "m_{a,b,b}"] \\
& \mathbf{Hom_D}(a,b) &
\end{tikzcd}$$

où l est la la multiplication à gauche par l'unité I.

$$\begin{tikzcd} \mathbf{Hom_D}(a,b)\otimes \mathrm{I} \arrow[rr, "1\otimes e_a"] \arrow[dr, "r"'] & & \mathbf{Hom_D}(a,b)\otimes \mathbf{Hom_D}(a,a) \arrow[dl, "m_{a,a,b}"] \\ & \mathbf{Hom_D}(a,b) & \end{tikzcd}$$

de même r est la multiplication à droite par l'unité.

Définition 2.1.2. *Un* $\mathbf{V}-$*foncteur* T *entre deux* $\mathbf{V}-$*catégories* $T:\mathbf{C}\to\mathbf{D}$ *consiste en une fonction de classe* $T:\mathrm{Ob}(\mathbf{C})\to\mathrm{Ob}(\mathbf{D})$ *telle que pour chaque paire d'objets* a,b *dans* $\mathbf{C}$ *on a un morphisme dans* $T_{a,b}:\mathbf{Hom_C}(a,b)\to\mathbf{Hom_D}(Ta,Tb)$ *dans* $\mathbf{V}$ *qui fait commuter les deux diagrammes suivants :*

$$\begin{tikzcd} \mathbf{Hom_C}(b,c)\otimes\mathbf{Hom_D}(a,b) \arrow[r, "m_{a,b,c}"] \arrow[d, "T_{b,c}\otimes T_{a,b}"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathbf{Hom_C}(a,c) \arrow[d, "T_{a,c}"] \\ \mathbf{Hom_D}(Tb,Tc)\otimes\mathbf{Hom_D}(Ta,Tb) \arrow[r, "m_{Ta,Tb,Tc}"] & \mathbf{Hom_D}(Ta,Tc) \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \mathrm{I} \arrow[rr, "e_a"] \arrow[dr, "e_{Ta}"'] & & \mathbf{Hom_C}(a,a) \arrow[dl, "T_{a,a}"] \\ & \mathbf{Hom_D}(Ta,Ta) & \end{tikzcd}$$

Notation 2.1.3. *Soient* $\mathbf{C}$ *une catégorie enrichie sur une catégorie* $\mathbf{V}$*, et* a,b *deux objets de* $\mathbf{C}$*. Dans le cas particulier où* $\mathbf{V}=\mathbf{sSet}$ *ou* $\mathbf{Top}$*, on identifie* $\mathbf{Hom_C}(a,b)$ *avec* $\mathbf{Map}(a,b)$.
Si $\mathbf{C}$ *est une catégorie modèle, a un objet cofibrant, et b un objet fibrant, l'enrichissement simplicial défini dans [7] sera noté par* $\mathbf{map}(a,b)\in\mathbf{sSet}$.

L'ensemble des morphismes entre a et b dans une catégorie $\mathbf{C}$ enrichie sur $\mathbf{V}$ est noté $\mathbf{hom_C}(a,b)$, et l'objet des morphismes enrichis par $\mathbf{Hom_C}(a,b)$. La catégorie des petites catégories enrichies sur $\mathbf{V}$ est noté $\mathbf{V}-\mathbf{Cat}$.
Le passage de $\mathbf{V}-\mathbf{Cat}$ à $\mathbf{Cat}$ est donné par le foncteur (et même un 2-foncteur) qu'on note $(-)_0:\mathbf{V}-\mathbf{Cat}\to\mathbf{Cat}$, qui n'est rien d'autre que le foncteur représentable $\mathbf{hom_{V-Cat}}(\mathbf{I},-)$, où $\mathbf{I}$ est vu ici comme une catégorie avec un seul objet 0 tel que $\mathbf{Hom_I}(0,0)=\mathrm{I}$. Ainsi, $\mathbf{hom_C}(a,b)=\mathbf{hom}(\mathrm{I},\mathbf{Hom_C}(a,b))$.
La catégorie $\mathbf{V}-\mathbf{Cat}$ est elle même une catégorie monoïdal symétrique fermée avec unité $\mathbf{I}$ (cf [16], section 2.3). La catégorie des foncteurs enrichis (Hom-interne) entre deux $\mathbf{V}$-catégories $\mathbf{C},\ \mathbf{D}$ est noté $[\mathbf{C},\mathbf{D}]$. Le produit monoïdale $\mathbf{C}\otimes\mathbf{D}$ est défini par : $\mathrm{Ob}(\mathbf{C}\otimes\mathbf{D})=\mathrm{Ob}(\mathbf{C})\times\mathrm{Ob}(\mathbf{D})$ et $\mathbf{Hom_{C\otimes D}}((c,d),(c',d'))=\mathbf{Hom_C}(c,c')\otimes\mathbf{Hom_D}(d,d')$.

2.1.1 Modules sur une Catégorie Monoïdale Fermée

Dans ce paragraphe on définit la notion de module sur une catégorie monoïdale fermée. Bien sûr, une catégorie monoïdale fermée sera un module sur elle même. Si on analyse la situation de près, une catégorie monoïdale fermée $\mathbf{C}$ est la donnée d'un foncteur $F : \mathbf{C} \times \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ qui vérifie la condition d'associativité à isomorphisme naturel près, c'est à dire, on a une transformation naturelle $\nu : F \circ (id \times F) \to F \circ (F \times id)$ telle que $\nu_{a,b,c}$ est un isomorphisme pour tout $a, b, c \ \in \mathrm{Ob}\mathbf{C}$. de Plus F doit vérifier la condition de l'unité à isomorphisme naturel près.
La catégorie monoïdale est dite fermée si de plus le foncteur $F(a, -)$ (resp. $F(-, a)$) admet un adjoint à droite qu'on notera $\mathbf{Hom}_{\mathbf{C},r}(a, -)$ (resp. $\mathbf{Hom}_{\mathbf{C},l}(a, -)$) pour tout $a \in \mathrm{Ob}\mathbf{C}$, Si de plus la catégorie $\mathbf{C}$ est monoïdale symétrique avec unité I, alors il n'est pas difficile de voir que $\mathbf{hom}_{\mathbf{C}}(a, b) = \mathbf{hom}_{\mathbf{C}}(\mathrm{I}, \mathbf{Hom}_{\mathbf{C}}(a, b))$.

Définition 2.1.4. *Soit* $(\mathbf{V}, \odot)$ *une catégorie monoïdale symétrique fermée avec unité. Une* $\mathbf{V}-$*catégorie* $\mathbf{C}$ *est un module sur* $\mathbf{V}$ *si on a un foncteur* $- \otimes - : \mathbf{C} \times \mathbf{V} \to \mathbf{C}$ *vérifiant la relation d'associativité naturelle* $c \otimes (V \odot V') \cong (c \otimes V) \otimes V'$ *pour tout* $V, V' \in \mathbf{V}$ *et* $c \in \mathbf{C}$*, et tel que le foncteur* $c \otimes -$ *a un adjoint à droite* $\mathbf{Hom}_{\mathbf{C}}(c, -)$ *pour tout* $c \in \mathbf{C}$ *et le foncteur* $\mathbf{Hom}_{\mathbf{C}}(-, a)$ *a un adjoint à gauche noté* $a^{(-)}$ *pour tout* $a \in \mathbf{C}$.

Dans le cas où $\mathbf{V} = \mathbf{sSet}$ et $\mathbf{C}$ une catégorie module sur $\mathbf{V}$, on appellera $\mathbf{C}$ une **catégorie simpliciale**. C'est bien plus que d'être simplement enrichie sur $\mathbf{V}$. Une des nombreuses conséquences est que l'enrichissement est donné explicitement par la formule (à isomorphisme près) $\mathbf{Hom}_{\mathbf{C}}(a, b)_n = \mathbf{hom}(a \otimes \Delta^n, b)$ (cf [10] II.2).

2.1.2 Catégorie de foncteurs

Dans ce paragraphe on présente quelques constructions générales pour les catégories de $\mathbf{V}-$foncteurs entre deux $\mathbf{V}-$catégories. Il est parfois commode de les voir comme des catégories de modules sur des anneaux généralisés. L'exemple standard est la catégorie des foncteurs enrichis sur la catégorie des groupes abéliens $\mathbf{Ab}$, $[A, \mathbf{Ab}]$ où, A la catégorie avec un seul objet et comme ensemble de morphismes l'anneau A. C'est tout simplement la catégorie $A - \mathbf{Mod}$. Cette catégorie est monoïdale fermée, c'est un phénomène général dès lors que la catégorie d'arrivée est monoïdale fermée, i.e, si $\mathbf{V}$ est une catégorie monoïdale fermée et $\mathbf{C}$ une (petite) catégorie enrichie sur $\mathbf{V}$ la catégorie des foncteurs $\mathbf{V}-$enrichis (modules) , $[\mathbf{C}, \mathbf{V}]$ est monoïdale fermée. La catégorie $[\mathbf{C}, \mathbf{V}]$ récupère toute les bonne propriété de $\mathbf{V}$, par exemple, la complétude et la cocomplétude, une structure modèle (projective, injective)...

Lemme 2.1.5. *Soit* $\mathbf{V}$ *une catégorie monoïdale symétrique fermée avec unité* I *(complète et cocompète), et soit* $\mathbf{C}$ *une catégorie enrichie sur* $\mathbf{V}$*. Alors la catégorie* $[\mathbf{C}, \mathbf{V}]$ *est monoïdale férmée enrichie sur* $\mathbf{V}$.

Démonstration. La structure monoïdale est donnée point par point. Soient $F, T \in [\mathbf{C}, \mathbf{V}]$. Pour tout $c \in \mathrm{Ob}(\mathbf{C})$ on pose $(F \otimes T)(c) = F(c) \otimes T(c)$. L'enrichissement $\mathbf{Hom}_{[\mathbf{C},\mathbf{V}]}(F, T)$ est donné par l'égalisateur du diagramme suivant :

$$\prod_{c\in\mathbf{C}} \mathbf{Hom}_{\mathbf{V}}(Fc, Tc)) \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} \prod_{a,b\in\mathbf{C}} \mathbf{Hom}_{\mathbf{V}}(\mathbf{Hom}_{\mathbf{C}}(a, b), \mathbf{Hom}_{\mathbf{V}}(Fa, Tb)).$$

Pour une description précise des flèche f et g voir [16].

Dorénavant l'égalisateur précédent, qui est un End sera noté $\int_{c\in\mathbf{C}} \mathbf{Hom}_{\mathbf{V}}(Fc, Tc)$. De manière duale (en utilisant $\times$) le coégalisateur est un Coend et sera noté $\int^{c\in\mathbf{C}} Fc \otimes Tc$. Les morphismes de la catégorie $[\mathbf{C}, \mathbf{V}]$ sont obtenus en appliquant le 2-foncteur $()_0$, c'est à dire, $\mathbf{hom}_{[\mathbf{C},\mathbf{V}]}(F, T) = \mathbf{hom}_{\mathbf{V}}(\mathrm{I}, \mathbf{Hom}_{[\mathbf{C},\mathbf{V}]}(F, T))$, d'où

$$\mathbf{hom}_{[\mathbf{C},\mathbf{V}]}(F, T) = \int_{c\in\mathbf{C}} \mathbf{hom}_{V}(Fc, Tc).$$

On définit le Hom interne par la formule suivante :

$$\mathbf{HOM}_{[\mathbf{C},\mathbf{V}]}(F, T)(c) = \mathbf{Hom}_{[\mathbf{C},\mathbf{V}]}(F \otimes \mathbf{Hom}_{\mathbf{C}}(c, -), T).$$

Puis on montre que **HOM** est bien le Hom interne cherché. Notons que cette construction peut être utilisée dans beaucoup de situations, et nous fournir des catégories monoïdales symétriques fermées. Les isomorphismes naturels qui suivent sont une conséquence d'adjonction dans **V** et la commutation avec les limites (End) et les colimites (Coend).

$$\begin{aligned}
\mathbf{hom}_{[\mathbf{C},\mathbf{V}]}\Big(G,\mathbf{HOM}_{[\mathbf{C},\mathbf{V}]}(F,T)\Big) &= \int_{c\in\mathbf{C}}\mathbf{hom}_{\mathbf{V}}\Big(Gc,\mathbf{HOM}_{[\mathbf{C},\mathbf{V}]}(F,T)(c)\Big)\\
&= \int_{c\in\mathbf{C}}\mathbf{hom}_{\mathbf{V}}\Big(Gc,\mathbf{Hom}_{[\mathbf{C},\mathbf{V}]}(F\otimes\mathbf{Hom}_{\mathbf{C}}(c,-),T)\Big)\\
&= \int_{c\in\mathbf{C}}\mathbf{hom}_{\mathbf{V}}\left(Gc,\int_{d\in\mathbf{C}}\mathbf{Hom}_{\mathbf{V}}(Fd\otimes\mathbf{Hom}_{\mathbf{C}}(c,d),Td)\right)\\
&= \int_{c\in\mathbf{C}}\int_{d\in\mathbf{C}}\mathbf{hom}_{\mathbf{V}}\left(Gc,\mathbf{Hom}_{\mathbf{V}}(Fd\otimes\mathbf{Hom}_{\mathbf{C}}(c,d),Td)\right)\\
&= \int_{c\in\mathbf{C}}\int_{d\in\mathbf{C}}\mathbf{hom}_{\mathbf{V}}\left(Gc\otimes\mathbf{Hom}_{\mathbf{C}}(c,d),\mathbf{Hom}_{\mathbf{V}}(Fd,Td)\right)\\
&= \int_{d\in\mathbf{C}}\mathbf{hom}_{\mathbf{V}}\left(\int^{c\in\mathbf{C}}Gc\otimes\mathbf{Hom}_{\mathbf{C}}(c,d),\mathbf{Hom}_{\mathbf{V}}(Fd,Td)\right)\\
&= \int_{d\in\mathbf{C}}\mathbf{hom}_{\mathbf{V}}\left(Gd,\mathbf{Hom}_{\mathbf{V}}(Fd,Td)\right) \qquad cf\ [16]\ 3.71\\
&= \int_{d\in\mathbf{C}}\mathbf{hom}_{\mathbf{V}}\left(Gd\otimes Fd,Td)\right)\\
&= \int_{d\in\mathbf{C}}\mathbf{hom}_{\mathbf{V}}\left((G\otimes F)d,Td)\right)\\
&= \mathbf{hom}_{[\mathbf{C},\mathbf{V}]}\left(G\otimes F,T\right).
\end{aligned}$$

□

Comme conséquence immédiate de ce lemme, on a le corollaire suivant, qui sera notre exemple de base.

Corollaire 2.1.6. *Soit* $\mathbf{C}$ *une petite catégorie. La catégorie de foncteur* $[\mathbf{C},\mathbf{Cat}]$ *est une catégorie monoïdale symétrique fermée. En particulier la catégorie* $\mathbf{sCat} = [\Delta^{op},\mathbf{Cat}]$ *est une catégorie monoïdale symétrique fermée.*

Tout d'abord la catégorie **Cat** est monoïdale symétrique fermée complète et co-complète. L'enrichissement de $\mathbf{C}$ est l'enrichissement trivial, i.e., la $\mathbf{Hom}_{\mathbf{C}}(a,b)$ est la catégorie dont les objets sont les éléments de $\mathbf{hom}_C(a,b)$ et l'ensemble des morphismes entre de tels éléments $f,g\in\mathbf{hom}_C(a,b)$ est l'identité pour $f=g$ et $\emptyset$ sinon.

2.2 Catégories enrichies sur sSet

Dans ce paragraphe on décortique en détail la structure de **sSet**-module sur une catégorie $\mathbf{C}$.

Définition 2.2.1. *Une catégorie* $\mathbf{C}$ *est un module sur* $\mathbf{sSet}$ *i.e., il existe un bifoncteur :*

$$\mathbf{Map_C} : \ \mathbf{C}^{op} \times \mathbf{C} \to \mathbf{sSet}$$

vérifiant les propriétés suivantes :

1. $\mathbf{Map_C}(A, B)_0 = \mathbf{hom_C}(A, B)$ *pour tout objets* $A, \ B$ *dans* $\mathbf{C}$.
2. *Le foncteur* $\mathbf{Map_C}(A, -) : \mathbf{C} \to \mathbf{sSet}$ *a un adjoint à gauche :*

$$A \otimes - : \mathbf{sSet} \to \mathbf{C}$$

qui est associative dans le sens où il exist un isomorphisme

$$A \otimes (K \times L) \to (A \otimes K) \otimes L,$$

naturel en $A \in \mathbf{C}$ *et* $K, \ L \in \mathbf{sSet}$.

3. *Pour tout* $K \in \mathbf{sSet}$, *le foncteur* $K \otimes - \ : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ *admet un adjoint à droite :*

$$(-)^K : \ \mathbf{C} \to \mathbf{C}.$$

Lemme 2.2.2. *Pout tout* $n \in \mathbb{N}$, *on a l'isomorphisme naturel :*

$$\mathbf{Map_C}(A, B)_n \cong \mathbf{hom_C}(A \otimes \Delta^n, B)$$

Maintenant on peut parler de catégorie modèle simpliciale.

Définition 2.2.3. *Soit* $\mathbf{M}$ *une catégorie modèle qui a une structure de module sur* $\mathbf{sSet}$, *alors* $\mathbf{M}$ *est une catégorie simpliciale modèle si pour toute cofibration* $f : \ A \to B$ *dans* $\mathbf{M}$ *et toute cofibration* $i : \ K \to L$ *dans* $\mathbf{sSet}$, *on a que la flèche.*

$$f \boxtimes i : A \otimes L \coprod_{A \otimes K} B \otimes K \to B \otimes L$$

1. *est une cofibration ;*
2. *si* f *est une cofibration triviale, alors* $f \boxtimes i$ *l'est aussi ;*
3. *si* i *est une cofibration triviale, alors* $f \boxtimes i$ *l'est aussi.*

Corollaire 2.2.4. *Soit* $\mathbf{M}$ *une catégorie modèle simpliciale alors les foncteurs*

$$- \otimes L : \mathbf{M} \to \mathbf{M}$$

et

$$B \otimes - : \mathbf{sSet} \to \mathbf{M}$$

sont des fonteurs de Quillen à gauche pour tout $L \in \mathbf{sSet}$ *et tout objet cofibrant* $B \in \mathbf{M}$

Démonstration. Il suffit de remplacer $K = \emptyset$ puis $A = \emptyset$ dans la définition 2.2.3. $\square$

Ce qui est intéressant dans le cas des catégories modèles simpliciales, c'est que l'enrichissement **Map** à le même type d'homotopie que le **map** construit par Dweyer et Kan dans [7].

Lemme 2.2.5. *Soit* $\mathbf{M}$ *une catégorie modèle simpliciale, Soient* A *un objet cofibrant* $\mathbf{M}$, B *un objet fibrant, et* $K \in \mathbf{sSet}$, *alors*

$$\pi_0 \mathbf{Map}_{\mathbf{sSet}}(K, \mathbf{Map}_{\mathbf{C}}(A, B)) \cong \mathbf{hom}_{\mathrm{Ho}\mathbf{C}}(A \otimes K, B).$$

Démonstration. Voir [10] Chapitre II, proposition 3.10. $\square$

Définition 2.2.6. *Soit* $\mathbf{M}$ *uen catégorie modèle avec une structure de* $\mathbf{sSet}_*$*-module. Alors, on dit que* $\mathbf{M}$ *est une catégorie simpliciale modèle pointée si pour toute cofibration* $f : \ A \to B$ *dans* $\mathbf{M}$ *et toute cofibration* $i : \ K \to L$ *dans* $\mathbf{sSet}_*$, *alors*

$$f \boxtimes i : A \odot L \coprod_{A \odot K} B \odot K \to B \odot L$$

1. *est une cofibration ;*
2. *si* f *est une cofibration triviale, alors* $f \boxtimes i$ *l'est aussi ;*
3. *si* i *est une cofibration triviale, alors* $f \boxtimes i$ *l'est aussi.*

Lemme 2.2.7. *Soit* $\mathbf{M}$ *une catégorie simpliciale modèle, alors* $* \downarrow \mathbf{M} = \mathbf{M}_*$ *est une catégorie simpliciale modèle pointée, où* $*$ *est l'objet terminale dans la catégorie* $\mathbf{M}$ *qu'on suppose cofibrant.*

Démonstration. Voir [12] proposition 4.2.19. $\square$

Chapitre 3

Une Structure Modèle sur sCat

Dans ce chapitre on construira une nouvelle structure modèle sur la catégorie **sCat** des petites catégories simpliciales c'est à dire la catégorie des objets simpliciaux dans **Cat**. L'idée est de trouver une "bonne" catégorie modèle **M** monoïdale fermée de génération cofibrante et une adjonction avec **sCat** qui permettra le transfert de structure. Sous certaines conditions on décrira la procédure du transfert dans un cadre général. Avec cette nouvelle structure sur **sCat** les **map** auront un lien direct avec la $\mathbb{K}$-théorie algébrique. Cela permettra de donner une nouvelle interprétation de la $\mathbb{K}$-théorie algébrique, non comme une théorie cohomologique sur la catégorie des anneaux (ou catégories de Whaldhausen) mais plutôt comme une machinerie qui fait correspondre à chaque "bonne" catégorie un Ω-spectre. Dans le cas classique des théories cohomologiques sur les CW-complexes, on sait associer à chaque groupe abélien G la théorie cohomologique $\mathbb{H}G$ donnée par le spectre de Eilnberg-MacLane de G.

3.1 Adjonction et structure modèle

Dans ce paragraphe on donnera quelques propriétés des catégories modèles à génération cofibrante. Il nous est utile de savoir comment transférer une structure modèle d'une catégorie à une autre. Il est aussi important de pouvoir reconnaître une catégorie modèle à génération cofinbrante. Le théorème suivant répond à ce problème.

Theorem 3.1.1. *Soit* $\mathbf{D}$ *une catégorie complète et cocomplète, avec* W *et* Fib *deux classes de morphismes, tel que* W *est stable par rétracte et qui satisfait la propriété "two out of three". On définit les cofibration comme les morphismes ayant la propriété de relèvement à gauche par rapport au fibrations acyclique* $(Fib \cap W)$*. Et supposons* *qu'il existe I et J , deux ensembles de morphismes qui satisfont :*

1. *Les deux ensembles I et J permettent l'argument des petits objets.*
2. *Un morphisme est une fibration si et seulement il la propriété de relèvement à droite par rapport à J.*
3. *Un morphisme est une fibration acyclique si et seulement il la propriété de relèvement à droite par rapport à I.*
4. *Un morphisme est une cofibration acyclique si et seulement si il est la propriété de relèvement à gauche par rapport au fibration.*

Alors la catégorie **D** *est une catégorie modèle de génération cofibrante, où I est l'ensemble de cofibration génératrice et J est l'ensemble de cofibration acyclique génératrice.*

Démonstration. Voir [11] (11.3) □

Dans tout ce qui suit, **M** est une catégorie modèle de génération cofibrante avec I l'ensemble de cofibrations génératrice et J l'ensemble des cofibrations acycliques génératrices.Soit **C** une catégorie complète et cocomplète. On considère donnée l'adjonction suivante :

$$\mathbf{M} \underset{F}{\overset{G}{\rightleftarrows}} \mathbf{C}$$

où F est l'adjoint à droite de F. Le lemme suivant nous donne les conditions suffisantes, pour transférer la structure modèle de **M** vers **C** via l'adjonction

Lemme 3.1.2. *[[25], proposition 3.4.1] Soient* **M** *et* **C** *comme ci dessus. On pose*

1. W *la classe des morphismes dans* **C** *tels que leur image par F est une équivalence faible dans* **M**.
2. F *la classe des morphismes dans* **C** *tels que leur image par F est une fibration dans* **M**.

On suppose que les conditions suivantes vérifiées :

1. *Les domaines de $G(i)$ sont petits par rapport à $G(\mathrm{I})$ pour tout $i \in \mathrm{I}$ et les domaines de $G(j)$ sont petits par rapport à $G(\mathrm{J})$ pour tout $j \in \mathrm{J}$.*
2. *Le foncteur F commute avec les colimites filtrantes, c'est dire*
$$F\mathrm{colim}(\lambda \to \mathbf{C}) = \mathrm{colim}F(\lambda \to \mathbf{C})$$
.
3. *Toute composition transfinie d'équivalences faibles dans* **M** *est une équivalence.*
4. *Le pushout de $G(j)$ le long de n'importe quel morphisme f dans* **C** *est dans* W.

Alors **C** *forme une catégorie modèle avec les équivalences faibles (fibrations)* W (F), *de génération cofibrante avec comme cofibrations génératrices $G(\mathrm{I})$ et cofibrations acycliques génératrices $G(\mathrm{J})$.*

3.2 Structure modèle sur sCat

Dans ce paragraphe on applique directement le lemme précédent pour construire une nouvelle catégorie modèle sur **sCat**. On notera la catégorie des ensembles bisimpliciaux par $\mathbf{sSet}^2$, c'est une catégorie monoïdale fermée.

Définition 3.2.1. *Le foncteur* $\pi : \mathbf{sSet} \to \mathbf{Cat}$ *associe à chaque ensemble simpliciale* $K_\bullet$ *le groupoïde fondamental* $\pi(K)$ *où les objets sont les 0-simplexes* K_0*, et les isomorphismes générateurs* $t : d_1x \to d_0x$ *pour tout 1-simplexes* t *dans* K_1*. Les générateurs sont soumis à la relation* $d_0l \circ d_2l = d_1l$ *pour tout 2-simplexe* l *dans* K_2*.*

Le foncteur π admet un adjoint à droite $\mathrm{N}_\bullet\mathrm{iso}$ qui associe à chaque catégorie $\mathbf{C}$ le nerf du goupoïde sous-jacent.

Lemme 3.2.2. *La catégorie* **sCat** *est un* $\mathbf{sSet}^2$*-module enrichi sur* $\mathbf{sSet}^2$ *. La structure de module :*

$$\mathbf{sCat} \times \mathbf{sSet}^2 \to \mathbf{sCat} \ : \mathbf{D}, K \mapsto \mathbf{D} \otimes K$$

$$\mathbf{sCat} \times \mathbf{sSet}^{2\ op} \to \mathbf{sCat} \ : \mathbf{D}, K \mapsto \mathbf{D}^K,$$

et

$$\mathbf{sCat}^{op} \times \mathbf{sCat} \to \mathbf{sSet}^2 : \ \mathbf{C}, \mathbf{D} \mapsto \mathbf{Map}(\mathbf{C}, \mathbf{D}).$$

est définie par les formules

$$\mathbf{D} \otimes K = \mathbf{D} \times \pi_\bullet K,$$

$$\mathbf{D}^K = \mathbf{Hom}_{\mathbf{sCat}}(\pi K, \mathbf{D}),$$

et enfin

$$\mathbf{Map}(\mathbf{C}, \mathbf{D}) = \mathrm{N}_\bullet\mathrm{iso}\mathbf{HOM}_{\mathbf{sCat}}(\mathbf{C}, \mathbf{D}).$$

où $\pi_\bullet(K_{\bullet,\bullet})_n = \pi(X_{\bullet,n})$ *et* $\mathrm{N}_\bullet\mathrm{iso}$ *est aussi appliqué niveaux par niveau.*

Lemme 3.2.3. *Les foncteurs suivants sont adjoints :.*

$$\mathbf{sSet}^2 \underset{\mathrm{N}_\bullet\mathrm{iso}}{\overset{\pi_\bullet}{\rightleftarrows}} \mathbf{sCat}$$

où $*$ *est la catégorie simpliciale constante avec un objet et un morphisme (l'identité).*

Démonstration. Tout d'abord supposons que K est l'ensemble bisimplicial $\Delta^{n,k}$ ([10], chapitre 4). Observons que

$$\mathbf{hom}_{\mathbf{sCat}}(\pi_\bullet\Delta^{n,k}, \mathbf{C}) = \mathrm{N}_k\mathrm{iso}\ \mathbf{C}_n = \mathbf{hom}_{\mathbf{sSet}^2}(\Delta^{n,k}, \mathrm{N}_\bullet\mathrm{iso}\mathbf{C}).$$

Pour un ensemble bisimplicial quelconque K, on l'écrit comme une colimites de ses $\Delta^{n,k}$ bisimplexes, i.e.,

$$K = \mathrm{colim}_{\Delta^{n,k}\to K}\Delta^{n,k}.$$

Puisque le foncteur $\pi_\bullet$ commutes avec les colimites (car les colimites dans $\mathbf{sSet}^2$ se calculent degré par degré) il s'en suit :

$$\begin{aligned}
\mathbf{hom}_{\mathbf{sCat}}(\pi_\bullet K, \mathbf{C}) &= \mathbf{hom}_{\mathbf{sCat}}(\mathrm{colim}_{\Delta^{n,k}\to K}\pi_\bullet\Delta^{n,k}, \mathbf{C})\\
&= \mathbf{hom}_{\mathbf{sCat}}(\mathrm{colim}_{\Delta^{n,k}\to K}\pi_\bullet\Delta^{n,k}, \mathbf{C})\\
&= \lim_{\Delta^{n,k}\to K} \mathbf{hom}_{\mathbf{sCat}}(\pi_\bullet\Delta^{n,k}, \mathbf{C})\\
&= \lim_{\Delta^{n,k}\to K} \mathbf{hom}_{\mathbf{sSet}^2}(\Delta^{n,k}, \mathrm{N}_\bullet\mathrm{iso}\mathbf{C})\\
&= \mathbf{hom}_{\mathbf{sSet}^2}(\mathrm{colim}_{\Delta^{n,k}\to K}\Delta^{n,k}, \mathrm{N}_\bullet\mathrm{iso}\mathbf{C})\\
&= \mathbf{hom}_{\mathbf{sSet}^2}(K, \mathrm{N}_\bullet\mathrm{iso}\mathbf{C}).
\end{aligned}$$

La démonstration est un cas particulier du fait qu'une adjonction entre deux catégorie $\mathbf{C}$ et $\mathbf{D}$ se prolonge naturellement à une adjonction entre $[\Delta^{op}, \mathbf{C}]$ et $[\Delta^{op}, \mathbf{D}]$. □

Maintenant, on est prêt à définir la **structure modèle diagonale sur sCat** en utilisant le lemme 3.1.2, et l'adjonction précédente.

Theorem 3.2.4. *Supposons* $\mathbf{sSet}^2$ *munie de la structure modèle de Moerdijk ([10], chapitre 4, section 3). L'adjonction précédente*

$$\mathbf{sSet} \underset{\mathrm{diagN}_\bullet\mathrm{iso}}{\overset{\pi_\bullet d_*}{\rightleftarrows}} \mathbf{sCat}$$

vérifie les hypothèses du lemme 3.1.2.
Un morphisme $f : \mathbf{C}_\bullet \to \mathbf{D}_\bullet$ *dans* **sCat** *est une équivalence faible (fibration) si* $\mathrm{diagN}_\bullet\mathrm{iso}(f)$ *est une équivalence fiable (fibration) dans* **sSet**.
Les cofibrations génératrices (acycliques) dans **sCat** *sont données par l'image des cofibrations génératrices (acycliques) dans* **sSet** *par le foncteur* $\pi_\bullet d_*$.

La démonstration du théorème se fera en plusieurs étapes.

Lemme 3.2.5. *Soit*

$$\mathbf{D} \underset{F}{\overset{G}{\rightleftarrows}} \mathbf{D}$$

une adjonction, telle que F *préserve les colimites dirigées. Si* $C \in \mathbf{C}$ *est un petit objet pour un certain ordinal* β*, alors* $G(C)$ *est petit dans* $\mathbf{D}$.

Démonstration. Soit la colimite dirigée $\mathrm{colim}_{\alpha<\beta}T_\alpha$ dans $\mathbf{D}$. On a les isomorphismes suivants :

$$\begin{aligned}
\mathbf{hom_D}(G(C), \mathrm{colim}_{\alpha<\beta}T_\alpha) &= \mathbf{hom_C}(C,\ F\mathrm{colim}_{\alpha<\beta}T_\alpha) \\
&= \mathbf{hom_C}(C, \mathrm{colim}_{\alpha<\beta}\ F(T_\alpha)) \\
&= \mathrm{colim}_{\alpha<\beta}\mathbf{hom_C}(C,\ F(T_\alpha)) \\
&= \mathrm{colim}_{\alpha<\beta}\mathbf{hom_D}(G(C), T_\alpha)
\end{aligned}$$

La deuxième égalité vient du fait que F commute avec les colimites dirigées. Le reste des isomorphismes est le résultat des adjonctions et que C est β-petit. $\square$

Lemme 3.2.6. *Dans la catégorie modèle de Moerdijk, les domaines et le codomaines des cofibrations (acycliques) génératrices* I *(*J*) sont petits.*

Démonstration. Les cofibrations (acycliques) génératrices dans $\mathbf{sSet}^2$ sont les images des cofibrations (acycliques) génératrices par le foncteur d_* de la catégorie **sSet** .

$$\mathbf{sSet} \underset{\mathrm{diag}}{\overset{d_*}{\rightleftarrows}} \mathbf{sSet}^2$$

Notons que le foncteur diagonal diag admet aussi un adjoint à droite noté d^* et donc diag commute avec les colimites. De plus tous les objets dans **sSet** sont petits pour un certain ordinal. Soit A le (co)domaine d'une cofibration (acyclique) génératice de **sSet**, alors d_*A est petit dans $\mathbf{sSet}^2$ par le lemme 3.2.5. $\square$

Lemme 3.2.7. *Le foncteur* $\mathrm{diagN_\bullet iso} : \mathbf{sCat} \to \mathbf{sSet}$ *commute avec les colimites dirigées.*

Démonstration. En effet, soit la colimites dirigées $\mathrm{colim}_\lambda \mathbf{C}^\lambda$ dans **sCat**, pour un certain ordinal λ.

$$\begin{aligned}
\Big(\mathrm{diagN_\bullet iso}(\mathrm{colim}_\lambda \mathbf{C}^\lambda)\Big)_n &= \mathbf{hom_{sSet}}(\Delta^n, \mathrm{diagN_\bullet iso}(\mathrm{colim}_\lambda \mathbf{C}^\lambda)) \\
&= \mathbf{hom_{sCat}}(\pi_\bullet\ d_*(\Delta^n), \mathrm{colim}_\lambda \mathbf{C}^\lambda) \\
&= \mathbf{hom_{sCat}}(\pi_\bullet(\sqcup_{\Delta^n}\Delta^n), \mathrm{colim}_\lambda \mathbf{C}^\lambda) \\
&= \mathbf{hom_{sCat}}(\sqcup_{\Delta^n}\pi(\Delta^n), \mathrm{colim}_\lambda \mathbf{C}^\lambda) \\
&= \mathbf{hom_{Cat}}(\pi\Delta^n, \mathrm{colim}_\lambda \mathbf{C}^\lambda_n) \\
&= \mathrm{colim}_\lambda \mathbf{hom_{Cat}}(\pi\Delta^n, \mathbf{C}^\lambda_n) \\
&= \mathrm{colim}_\lambda \mathbf{hom_{sCat}}(\pi_\bullet\ d_*\Delta^n, \mathbf{C}^\lambda) \\
&= \mathrm{colim}_\lambda \mathbf{hom_{sSet}}(\Delta^n, \mathrm{diagN_\bullet iso}\mathbf{C}^\lambda) \\
&= \mathrm{colim}_\lambda \Big(\mathrm{diagN_\bullet iso}\mathbf{C}^\lambda\Big)_n .
\end{aligned}$$

Tous les isomorphismes sont obtenus par adjonction. Le cinquième isomorphisme est du au fait que $\pi\Delta^n$ est un petit objet dans **Cat**. □

Lemme 3.2.8. *Les domaines et les codomaines des cofibrations (acycliques) génératrices dans* **sCat** *sont petits.*

Démonstration. C'est une conséquence des lemmes 3.2.5 et 3.2.7, et du fait que tous les objets dans **sSet** sont petits pour un certain ordinal. □

Lemme 3.2.9. *Si j est une cofibration acyclique génératrice dans* $\mathbf{sSet}^2$, *alors $\pi_\bullet(j)$ est une équivalence faible dans* **sCat**.

Démonstration. Les cofibrations acycliques génératrices dans $\mathbf{sSet}^2$ pour la structure modèle de Moerdijk sont données par :

$$d_*\Lambda^n_i \to d_*\Delta^n = \Delta^{n,n},\ i \in \{0, 1, \ldots, n\}.$$

Plus précisément (cf [10], Chapitre 4, section 3.3), le morphisme précédent s'écrit comme :

$$\coprod_{\beta\in\Lambda^n_i} C_\beta \to \coprod_{\beta\in\Delta^n} \Delta^n.$$

Où C_β est un sous complexe contractile connexe de Λ^n_i. Considérons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
\coprod_{\beta\in\Lambda^n_i} C_\beta \arrow[r, "pr"] \arrow[d, "d_*j"'] & \coprod_{\beta\in\Lambda^n_i} * \arrow[d, "j", "\sim"'] \\
\coprod_{\beta\in\Delta^n} \Delta^n \arrow[r, "pr"] & \coprod_{\beta\in\Delta^n} *
\end{tikzcd}$$

Les projections sont des équivalences simpliciales degré par degré et donc des équivalences diagonales, de même pour j qui est trivialement une équivalence diagonale, et donc d_*j est aussi une équivalence diagonale. Appliquons au diagramme précédent le foncteur $\mathrm{N}_\bullet\pi$:

$$\begin{tikzcd}
\coprod_{\beta\in\Lambda^n_i} \mathrm{N}_\bullet\pi C_\beta \arrow[r, "pr"] \arrow[d, "\mathrm{N}_\bullet\pi_\bullet d_*j"'] & \coprod_{\beta\in\Lambda^n_i} * \arrow[d, "j", "\sim"'] \\
\coprod_{\beta\in\Delta^n} \mathrm{N}_\bullet\pi\Delta^n \arrow[r, "pr"] & \coprod_{\beta\in\Delta^n} *
\end{tikzcd}$$

Puisque C_β est un sous complexe connexe de Λ^n_i, la projection canonique $\pi C_\beta \to *$ est une équivalence de catégories, et donc on a une équivalence de nerfs. Par conséquent les flèches horizontales sont des équivalences degré par degré et donc des équivalences diagonales. On conclut que $\mathrm{N}_\bullet\pi d_*(j)$ est aussi une équivalence diagonale.
En résumé $\pi_\bullet(j)$ est une équivalence faible dans **sCat**. □

Définition 3.2.10. *Soit* $\mathbf{M}$ *une catégorie modèle. Un carré commutatif*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[d] \\ B \arrow[r] & D \end{tikzcd}$$

dans $\mathbf{C}$ *est homotopiquement cocartésien si la flèche universelle* $B \bigsqcup_A C \to D$ *est une équivalence faible.*

Lemme 3.2.11. *Soit* $f : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ *une inclusion pleinement fidèle de groupoïdes, tel que* $\mathbf{B}$ *est une petite catégorie avec la propriété que l'ensemble des morphismes entre deux objets est soit vide soit un singleton (isomorphisme unique), Soit le pushout dans* $\mathbf{Cat}$ *suivant :*

$$\begin{tikzcd} \mathbf{A} \arrow[r] \arrow[d, "f"] & \mathbf{C} \arrow[d] \\ \mathbf{B} \arrow[r] & \mathbf{D}. \end{tikzcd}$$

Alors

$$\begin{tikzcd} \mathbf{A} = \mathrm{iso}\mathbf{A} \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{iso}f"] & \mathrm{iso}\mathbf{C} \arrow[d] \\ \mathbf{B} = \mathrm{iso}\mathbf{B} \arrow[r] & \mathrm{iso}\mathbf{D} \end{tikzcd}$$

et

$$\begin{tikzcd} \mathrm{N}_\bullet\mathrm{iso}\mathbf{A} = \mathrm{N}_\bullet\mathrm{iso}\mathbf{A} \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{N}_\bullet\mathrm{iso}f"] & \mathrm{N}_\bullet\mathrm{iso}\mathbf{C} \arrow[d] \\ \mathrm{N}_\bullet\mathrm{iso}\mathbf{B} = \mathrm{N}_\bullet\mathrm{iso}\mathbf{B} \arrow[r] & \mathrm{N}_\bullet\mathrm{iso}\mathbf{D} \end{tikzcd}$$

sont homotopiquement cocartésiens dans $\mathbf{Cat}$ *et respectivement dans* $\mathbf{sSet}$*.*

Démonstration. Les hypothèse sur le goupoïde $\mathbf{B}$ implique qu'il peut être décomposé comme $\mathbf{B}_1 \sqcup \mathbf{B}_2$ tel que $f : \mathbf{A} \to \mathbf{B}_1$ est une équivalence de catégorie. Et donc $\mathbf{D} = (\mathbf{C} \sqcup_{\mathbf{A}} \mathbf{B}_1) \sqcup \mathbf{B}_2$. Le foncteur $\mathbf{C} \to \mathbf{C} \sqcup_{\mathbf{A}} \mathbf{B}_1$ est une équivalence de catégories, et même une inclusion de catégories. Si on applique le foncteur iso au pushout précédent, on a bien que $(\mathrm{iso}\mathbf{C}) \sqcup_{\mathbf{A}} \mathbf{B}_1 \sqcup \mathbf{B}_2 \to \mathrm{iso}\mathbf{D}$ est une équivalence. En effet, puisque $\mathbf{C} \to \mathbf{C} \sqcup_{\mathbf{A}} \mathbf{B}_1$ est une équivalence de catégories,

$$\mathrm{iso}\mathbf{C} \to \mathrm{iso}(\mathbf{C} \sqcup_{\mathbf{A}} \mathbf{B}_1) \tag{3.1}$$

est une équivalence de groupoïdes. De même

$$\mathrm{iso}\mathbf{C} \to \mathbf{B}_1 \sqcup_{\mathbf{A}} \mathrm{iso}\mathbf{C}$$

est une équivalence, car $\mathbf{A} \to \mathbf{B}_1$ est une cofibration triviale dans **Cat** (munie de la structure modèle de Joyal). Cela implique que le morphisme t du diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{A} \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{iso}\mathbf{C} \arrow[d, "s"] \arrow[ddr, bend left, "l"] & \\
\mathbf{B} \arrow[r] \arrow[dr, bend right] & \mathbf{B}_2 \sqcup \mathbf{B}_1 \sqcup_{\mathbf{A}} \mathrm{iso}\mathbf{C} \arrow[d, dotted, "t"] & \\
 & \mathbf{B}_2 \sqcup \mathrm{iso}(\mathbf{B}_1 \sqcup_{\mathbf{A}} \mathbf{C}) = \mathrm{iso}\mathbf{D} &
\end{tikzcd}$$

est une équivalence.

Maintenant si on applique le foncteur $\mathrm{N}_\bullet\mathrm{iso}$ au diagramme de départ, on a un diagramme de pushout dans **Cat** :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{N}_\bullet\mathbf{A} \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{N}_\bullet\mathrm{iso}\mathbf{C} \arrow[d, "s"] \arrow[ddr, bend left, "l"] & \\
\mathrm{N}_\bullet\mathbf{B} \arrow[r] \arrow[drr, bend right] & \mathrm{N}_\bullet\mathbf{B} \sqcup_{\mathrm{N}_\bullet\mathbf{A}} \mathrm{N}_\bullet\mathrm{iso}\mathbf{C} \arrow[dr, dotted, "t"] & \\
 & & \mathrm{N}_\bullet\mathrm{iso}\mathbf{D}
\end{tikzcd}$$

Observons que $\mathrm{N}_\bullet\mathbf{B} \sqcup_{\mathrm{N}_\bullet\mathbf{A}} \mathrm{N}_\bullet\mathrm{iso}\mathbf{C} = (\mathrm{N}_\bullet\mathbf{B}_1 \sqcup_{\mathrm{N}_\bullet\mathbf{A}} \mathrm{N}_\bullet\mathrm{iso}\mathbf{C}) \sqcup \mathrm{N}_\bullet\mathbf{B}_2$, et que $\mathrm{N}_\bullet\mathbf{A} \to \mathrm{N}_\bullet\mathbf{B}_1$ est une cofibration car f est injectif sur les objets et pleinement fidèle par hypothèse. De plus c'est une équivalence faible, par définition de $\mathbf{B}_1$. Donc la flèche $\mathrm{N}_\bullet\mathrm{iso}\mathbf{C} \to \mathrm{N}_\bullet\mathbf{B}_1 \sqcup_{\mathrm{N}_\bullet\mathbf{A}} \mathrm{N}_\bullet\mathrm{iso}\mathbf{C}$ est une équivalence faible, car **sSet** est une catégorie modèle. D'un autre côté $\mathrm{N}_\bullet\mathrm{iso}\mathbf{C} \to \mathrm{N}_\bullet\mathrm{iso}(\mathbf{B}_2 \sqcup_{\mathbf{A}} \mathbf{C})$ est une équivalence dans **sSet** par 3.1. On conclut que le morphisme simplicial

$$t : \mathrm{N}_\bullet\mathbf{B} \sqcup_{\mathrm{N}_\bullet\mathbf{A}} \mathrm{N}_\bullet\mathrm{iso}\mathbf{C} \to \mathrm{N}_\bullet\mathrm{iso}\mathbf{D}$$

est une équivalence faible. □

Remarque 3.2.12. *Considérons le diagramme commutatif dans* **Cat** *suivant :*

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{A} \arrow[r] \arrow[d, "f"] & \mathbf{C} \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{C}' \arrow[d] \\
\mathbf{B} \arrow[r] & \mathbf{D} \arrow[r] & \mathbf{D}'
\end{tikzcd}$$

où les deux carrés commutatifs sont des pushout. Il est clair que le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{A} \arrow[r] \arrow[d, "f"] & \mathbf{C}' \arrow[d] \\
\mathbf{B} \arrow[r] & \mathbf{D}'
\end{tikzcd}$$

est aussi un pushout.

Lemme 3.2.13. *En ayant les mêmes notations que la remarque précédente 3.2.12, et sous les hypothèses du lemme 3.2.11, les morphismes naturels :*

$$(\mathrm{N}_\bullet\mathbf{B} \sqcup_{\mathrm{N}_\bullet\mathbf{A}} \mathrm{N}_\bullet\mathrm{iso}\mathbf{C}) \sqcup_{\mathrm{N}_\bullet\mathrm{iso}\mathbf{C}} \mathrm{N}_\bullet\mathrm{iso}\mathbf{C}' \to \mathrm{N}_\bullet\mathrm{iso}\mathbf{D} \sqcup_{\mathrm{N}_\bullet\mathrm{iso}\mathbf{C}} \mathrm{N}_\bullet\mathrm{iso}\mathbf{C}'$$

et

$$\mathrm{N}_\bullet\mathrm{iso}\mathbf{D} \sqcup_{\mathrm{N}_\bullet\mathrm{iso}\mathbf{C}} \mathrm{N}_\bullet\mathrm{iso}\mathbf{C}' \to \mathrm{N}_\bullet\mathrm{iso}\mathbf{D}'$$

sont des équivalences.

Démonstration. Par 3.2.11 le morphisme $\mathrm{N}_\bullet\mathbf{B}\sqcup_{\mathrm{N}_\bullet\mathbf{A}}\mathrm{N}_\bullet\mathrm{iso}\mathbf{C} \to \mathrm{N}_\bullet\mathrm{iso}\mathbf{D}$ est une équivalence. De plus $\mathrm{N}_\bullet\mathrm{iso}\mathbf{C} \to \mathrm{N}_\bullet\mathbf{B} \sqcup_{\mathrm{N}_\bullet\mathbf{A}} \mathrm{N}_\bullet\mathrm{iso}\mathbf{C}$ et le morphisme $\mathrm{N}_\bullet\mathrm{iso}\mathbf{C} \to \mathrm{N}_\bullet\mathrm{iso}\mathbf{D}$ sont des cofibrations dans **sSet**. Puisque **sSet** est propre à gauche on conclut que

$$(\mathrm{N}_\bullet\mathbf{B} \sqcup_{\mathrm{N}_\bullet\mathbf{A}} \mathrm{N}_\bullet\mathrm{iso}\mathbf{C}) \sqcup_{\mathrm{N}_\bullet\mathrm{iso}\mathbf{C}} \mathrm{N}_\bullet\mathrm{iso}\mathbf{C}' \to \mathrm{N}_\bullet\mathrm{iso}\mathbf{D} \sqcup_{\mathrm{N}_\bullet\mathrm{iso}\mathbf{C}} \mathrm{N}_\bullet\mathrm{iso}\mathbf{C}'$$

est une équivalence. Pour montrer l'autre équivalence il suffit de remarquer que

$$(\mathrm{N}_\bullet\mathbf{B} \sqcup_{\mathrm{N}_\bullet\mathbf{A}} \mathrm{N}_\bullet\mathrm{iso}\mathbf{C}) \sqcup_{\mathrm{N}_\bullet\mathrm{iso}\mathbf{C}} \mathrm{N}_\bullet\mathrm{iso}\mathbf{C}' \sim \mathrm{N}_\bullet\mathbf{B} \sqcup_{\mathrm{N}_\bullet\mathbf{A}} \mathrm{N}_\bullet\mathrm{iso}\mathbf{C}' \to \mathrm{N}_\bullet\mathrm{iso}\mathbf{D}'$$

est une équivalence par 3.2.11 et donc par la propriété "2 out of 3"

$$\mathrm{N}_\bullet\mathrm{iso}\mathbf{D} \sqcup_{\mathrm{N}_\bullet\mathrm{iso}\mathbf{C}} \mathrm{N}_\bullet\mathrm{iso}\mathbf{C}' \to \mathrm{N}_\bullet\mathrm{iso}\mathbf{D}'$$

est une équivalence. □

Lemme 3.2.14. *Soit $j : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ une cofibration génératrice acyclique dans* **sCat**. *Alors le pushout de j le long de n'importe quel morphisme $\mathbf{A} \to \mathbf{C}$ est une équivalence faible.*

Démonstration. Tout d'abord, remarquons que toute cofibration acyclique génératrice dans **sCat** vérifie degré par degré les hypothèses du lemme 3.2.11. Soit le pushout suivant dans **sCat** :

$$\begin{tikzcd} \mathbf{A} \arrow[r] \arrow[d, "j"] & \mathbf{C} \arrow[d, "j'"] \\ \mathbf{B} \arrow[r] & \mathbf{D} \end{tikzcd}$$

En appliquant le foncteur $\mathrm{diagN}_\bullet\mathrm{iso}$ au pushout précédent, on obtient le diagramme commutatif dans la catégorie **sSet** suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{diag}\mathrm{N}_\bullet\mathbf{A} \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{diag}\mathrm{N}_\bullet\mathrm{iso}(j)"] & \mathrm{diag}\mathrm{N}_\bullet\mathrm{iso}\mathbf{C} \arrow[d, "s"] \arrow[ddr, bend left, "l"] & \\
\mathrm{diag}\mathrm{N}_\bullet\mathbf{B} \arrow[r] \arrow[drr, bend right] & \mathrm{diag}(\mathrm{N}_\bullet\mathbf{B} \sqcup_{\mathrm{N}_\bullet\mathbf{A}} \mathrm{N}_\bullet\mathrm{iso}\mathbf{C}) \arrow[dr, dotted, "\mathrm{diag}(t)"] & \\
 & & \mathrm{diag}\mathrm{N}_\bullet\mathrm{iso}\mathbf{D},
\end{tikzcd}$$

puisque les colimites dans **sCat** se calculent degré par degré. En appliquant lemme 3.2.11 degré par degré, on a que t est une équivalence degré par degré dans $\mathbf{sSet}^2$, et donc $\mathrm{diag}(t)$ est une équivalence car t dans **sSet**. D'un autre côté, $\mathrm{diag}\mathrm{N}_\bullet\mathrm{iso}(j)$ est une cofibration triviale dans d'ensemble simpliciaux, car $\mathrm{N}_\bullet\mathrm{iso}(j)$ est un monomorphisme degré par degré et c'est une équivalence diagonale par 3.2.9. Par conséquent s est une équivalence faible. Par la propriété de 2 out of 3, on conclut que l est une équivalence faible.

$\square$

Enfin, on peut montrer que **sCat** est une catégorie modèle !

Théorème 3.2.4. Le lemme 3.1.2 permet de conclure que **sCat** est une catégorie modèle à génération cofibrante, car

1. Le point (1) est une conséquence de 3.2.8.
2. Le point (2) est une conséquence de 3.2.7.
3. Le point (3) est la conséquence que dans **sSet** une composition transfinie d'équivalences faibles est encore une équivalence faible.
4. Le point (4) est une conséquence de 3.2.14.

$\square$

3.3 Propriétés de la structure modèle de sCat

Dans ce paragraphe on démontrera quelques propriétés de la structure modèle dans **sCat**, telles que la propreté à gauche, à droite, et la cellularité.

3.3.1 Les cofibrations dans sCat

Dans ce paragraphe on décrira quelques propriétés sur les cofibrations dans **sCat** qui nous permettrons de montrer que la la structure modèle sur **sCat** est propre à gauche. On garde la même notation pour les cofibrations génératrices ($i : \alpha \to \beta$). L'ensemble simplicial $\partial\Delta^n$ est généré par ($d_i e_n$ avec $0 \leq i \leq n$ et e_n est le seul $n-$simplexes non dégénéré de Δ^n. L'ensemble bisimplicial $d_*\partial\Delta^n$ est généré par $(d_i e_n, d_i e_n)$. En suivant le même raisonnement que dans ([10], chapitre 4, 3.3), $d_*\partial\Delta^n$ peut être décrit comme l'ensemble bisimplicial

$$\coprod_{\sigma \in \partial\Delta^n} C^\sigma$$

l'ensemble simplicial C^σ est généré par les faces $d_i e_n$ qui contiennent σ. Remarquons que le nombre des ces faces ayant cette propriété est strictement plus petit que $n+1$, cela implique que $C^\sigma \to *$ est une équivalence faible. De plus $\pi(C^\sigma)$ est un groupoïde équivalent au groupoïde trivial $*$, plus précisement entre deux objets de la catégorie $\pi(C^\sigma)$ il existe exactement un seul isomorphisme.

Ici, nous donnons la propriété fondamentale des cofibrations dans **sCat**

Lemme 3.3.1. *Les cofibrarations dans* **sCat** *sont des inclusions de catégories. C'est à dire que les cofibrations sont injectives sur les objets et les morphismes.*

Démonstration. Soit $i : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ une cofibration génératrice dans **sCat**. Degré par degré, les cofibrations génératrices dans **sCat** ont la propriété d'être des inclusions de catégories degré par degré, de plus $\mathbf{B}_n$ se décompose comme $\mathbf{B}^1_n \sqcup \mathbf{B}^2_n$ tel que $i_n : \mathbf{A}_n \to \mathbf{B}^1_n$ est une cofibration triviale dans **Cat**. Mais tous les objets dans **Cat** sont fibrants, celà implique qu'on a une rétraction. Par conséquent le pushout de $i : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ le long de n'importe quel foncteur $F : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ est une inclusion de catégorie degré par degré, puisque les colimites dans **sCat** se calcule degré par degré. La composition transfinie d'inclusions de catégories est encore une inclusion de catégorie, c'est à dire que les $I - Cell$ sont des inclusions de catégorie. De même les rétractes des $I - Cell$ sont encore des inclusions de catégories. On conclut que les cofibrations dans **sCat** sont des inclusions de catégories. □

Lemme 3.3.2. *Soit* $i : \alpha \to \beta$ *une cofibration génératrice dans* **sCat**, *et soit le pushout dans* **sCat** *suivant :*

$$\begin{tikzcd} \alpha \arrow[r] \arrow[d, "i"] & \mathbf{C}_\bullet \arrow[d] \\ \beta \arrow[r] & \mathbf{D}_\bullet . \end{tikzcd}$$

Alors le foncteur $\mathrm{N}_\bullet\mathrm{iso}$ *envoie ce pushout vers un carré cocartésien homotopique dans la catégorie* $\mathbf{sSet}^2$ *munie de la structure modèle projective.*

Démonstration. Les pushout dans **sCat** se calculent degré par degré. La formes des cofibrations génératrices dans **sCat** dégré par degré ont exactement la propriété exigée dans 3.2.11. □

Corollaire 3.3.3. *La version simpliciale du lemme 3.2.13 est aussi vrai si on remplace* $f : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ *par une cofibration génératrice* $i : \alpha \to \beta$ *dans* **sCat** :

$$(\mathrm{N}_\bullet\beta \sqcup_{\mathrm{N}_\bullet\alpha} \mathrm{N}_\bullet\mathrm{iso}\mathbf{C}) \sqcup_{\mathrm{N}_\bullet\mathrm{iso}\mathbf{C}} \mathrm{N}_\bullet\mathrm{iso}\mathbf{C}' \to \mathrm{N}_\bullet\mathrm{iso}\mathbf{D} \sqcup_{\mathrm{N}_\bullet\mathrm{iso}\mathbf{C}} \mathrm{N}_\bullet\mathrm{iso}\mathbf{C}'$$

et

$$\mathrm{N}_\bullet\mathrm{iso}\mathbf{D} \sqcup_{\mathrm{N}_\bullet\mathrm{iso}\mathbf{C}} \mathrm{N}_\bullet\mathrm{iso}\mathbf{C}' \to \mathrm{N}_\bullet\mathrm{iso}\mathbf{D}'$$

sont des équivalences.

Démonstration. C'est une conséquence du lemme précédent et de 3.2.13. □

3.3.2 Propreté de sCat

Dans ce paragraphe on montre que la catégorie **sCat** munie de la structure modèle du théorème 3.2.4 est propre à gauche.

Lemme 3.3.4. *Soit* $i : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ *un élément de* $I-Cell$ *dans* **sCat**. *Le foncteur* $\mathrm{diagN}_\bullet\mathrm{iso}$ *transforme le pushout dans* **sCat** *suivant :*

$$\begin{tikzcd} \mathbf{A} \arrow[r] \arrow[d, "i"] & \mathbf{C} \arrow[d] \\ \mathbf{B} \arrow[r] & \mathbf{D} \end{tikzcd}$$

en un carré cocartésien homotopique dans **sSet**.

Démonstration. Tout d'abord $\mathbf{A} \to \mathbf{B}$ est une composition transfinie de cofibrations de la forme

$$\mathbf{A} = \mathbf{C}_0 \to \dots \mathbf{A}_s \to \mathbf{A}_{s+1} \to \mathbf{A}_{s+2} \to \dots$$

On notera $\mathbf{A}_s \sqcup_{\mathbf{A}} \mathbf{C}$ par $\mathbf{C}_s$. Par le corollaire 3.3.3

$$\mathrm{N}_\bullet\mathrm{iso}\mathbf{A}_s \sqcup_{\mathrm{N}_\bullet\mathrm{iso}\mathbf{A}} \mathrm{N}_\bullet\mathrm{iso}\mathbf{C} \to \mathrm{N}_\bullet\mathrm{iso}\mathbf{C}_s$$

est une équivalence faible, et de plus $N_\bullet\mathrm{iso}\mathbf{C}_s \to N_\bullet\mathrm{iso}\mathbf{C}_{s+1}$ est une inclusion d'ensembles bisimpliciaux. En sachant que $N_\bullet\mathrm{iso}$ commute avec les colimites filtrantes, et que $\mathrm{diag}N_\bullet\mathrm{iso}\mathbf{C}_s \to \mathrm{diag}N_\bullet\mathrm{iso}\mathbf{C}_{s+1}$ est une cofibration dans **sSet**, on conclut que :

$$\mathrm{diag}(N_\bullet\mathrm{iso}\mathbf{B} \sqcup_{N_\bullet\mathrm{iso}\mathbf{A}} N_\bullet\mathrm{iso}\mathbf{C}) \to \mathrm{diag}N_\bullet\mathrm{iso}\mathbf{D}$$

est une équivalence faible dans **sSet** □

Corollaire 3.3.5. *Soit* $i : \mathbf{A}' \to \mathbf{B}'$ *une cofibration quelconque dans* **sCat**. *Le foncteur* $\mathrm{diag}N_\bullet\mathrm{iso}$ *transforme le pushout dans* **sCat** *suivant :*

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{A}' \arrow[r] \arrow[d, "i"] & \mathbf{C} \arrow[d] \\
\mathbf{B}' \arrow[r] & \mathbf{D}
\end{tikzcd}$$

en un carré cocartésien homotopique.

Démonstration. La cofibration $i' : \mathbf{A}' \to \mathbf{B}'$ est un rétracte d'une cofibration $i : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ dans $I - cell$. On note $\mathbf{B} \sqcup_{\mathbf{A}} \mathbf{C} = \mathbf{M}$, et $\mathbf{B}' \sqcup_{\mathbf{A}'} \mathbf{C} = \mathbf{D}$. Il y a donc une rétraction induite :

$$\begin{tikzcd}
N_\bullet\mathrm{iso}\mathbf{B}' \sqcup_{N_\bullet\mathrm{iso}\mathbf{A}'} N_\bullet\mathrm{iso}\mathbf{C} \arrow[r] \arrow[d] & N_\bullet\mathrm{iso}\mathbf{B} \sqcup_{N_\bullet\mathrm{iso}\mathbf{A}} N_\bullet\mathrm{iso}\mathbf{C} \arrow[r] \arrow[d, "t"] & N_\bullet\mathrm{iso}\mathbf{B}' \sqcup_{N_\bullet\mathrm{iso}\mathbf{A}'} N_\bullet\mathrm{iso}\mathbf{C} \arrow[d, "g"] \\
N_\bullet\mathrm{iso}\mathbf{D} \arrow[r] & N_\bullet\mathrm{iso}\mathbf{M} \arrow[r] & N_\bullet\mathrm{iso}\mathbf{D}
\end{tikzcd}$$

Par le lemme 3.3.4, on a que $\mathrm{diag}(t)$ est une équivalence, et donc $\mathrm{diag}(g)$ est aussi une équivalence dans **sSet**.

□

Corollaire 3.3.6. *La catégorie* **sCat** *est propre à gauche.*

Démonstration. Soit $\mathbf{A} \to \mathbf{B}$ une cofibration et Soit $f : \mathbf{A} \to \mathbf{C}$ une équivalence faible dans **sCat**. Il suffit de considérer le pushout suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{diag}N_\bullet\mathrm{iso}\mathbf{A} \arrow[r, "f", "\sim"'] \arrow[d, "i"] & \mathrm{diag}N_\bullet\mathrm{iso}\mathbf{C} \arrow[d, "s"] \arrow[ddr, bend left, "l"] & \\
\mathrm{diag}N_\bullet\mathrm{iso}\mathbf{B} \arrow[r, "g"] \arrow[drr, bend right, "h"] & \mathrm{diag}(N_\bullet\mathrm{iso}\mathbf{B} \sqcup_{N_\bullet\mathrm{iso}\mathbf{A}} N_\bullet\mathrm{iso}\mathbf{C}) \arrow[dr, dotted, "t"] & \\
& & \mathrm{diag}N_\bullet\mathrm{iso}\mathbf{D}
\end{tikzcd}$$

On a que i est une cofibration dans **sSet** puisque $\mathrm{N}_\bullet\mathrm{iso}\mathbf{A} \to \mathrm{N}_\bullet\mathrm{iso}\mathbf{B}$ est injective dans $\mathbf{sSet}^2$. Puisque f est une équivalence et **sSet** est propre, cela implique que g est une équivalence. Par le corollaire 3.3.5, t est une équivalence faible, ce qui implique que h est une équivalence faible. Donc **sCat** est propre à gauche. □

Lemme 3.3.7. *La catégorie modèle* **sCat** *est propre à droite.*

Démonstration. La propreté à droite est plus simple à montrer. Considérons le diagramme de pullback dans **sCat** suivant :

$$\begin{tikzcd} \mathbf{C} \times_{\mathbf{A}} \mathbf{D} \arrow[r, "i"] \arrow[d] & \mathbf{C} \arrow[d, "f"] \\ \mathbf{D} \arrow[r, "\sim", "j"'] & \mathbf{A} \end{tikzcd}$$

Le but est de montrer que i est une équivalence faible. En appliquant le foncteur diag $\mathrm{N}_\bullet$iso qui commute avec les limites, et donc (préserve les pullback) on obtient un diagramme de pullback dans **sSet**, avec diag$\mathrm{N}_\bullet\mathrm{iso}(f)$ une fibration par définition. Puis que **sSet** est propre à droite, on conclut que diag $\mathrm{N}_\bullet\mathrm{iso}(i)$ est aussi une équivalence faible, et donc **sCat** est propre à droite. □

3.3.3 Cellularité de sCat

Le but de cette section est de mieux comprendre les cofibrations dans la nouvelle structure de **sCat**, afin de traiter la propriété de la **cellularité**. On en aura besoin pour les questions de stabilisation et de localisation de la catégorie des spectre sur **sCat**.

Définition 3.3.8. *Une catégorie modèle de génération cofibrante est dite cellulaire si elle vérifie les conditions suivantes :*

1. *les domaines et les codomaines de* I *sont compacts (cf [11] 11.4.1) ;*
2. *les domaines des élément de* J *sont petits relativement à* I *(cf [11] 10.5.12) ; et*
3. *les cofibrations sont des monomorphismes effectifs (cf [11] 10.9.1).*

Lemme 3.3.9. *Les cofibrations et les cofibrations acycliques dans* **sCat** *vérifie la première condition de la définition 3.3.8.*

Démonstration. Soit $\mathbf{C}_\bullet$ un domaine (codomaine) d'un élément de I. Par définition $\mathbf{C}_\bullet$ est de la forme $\pi\mathbf{d}_*X_\bullet$, où d_* est l'adjoint à gauche de la diagonale diag. Soit

$f\ : \mathbf{D}_\bullet \to \mathbf{D}'_\bullet$ un I-cell complexe. Il faut monter que tout morphisme $g :\ \mathbf{C}_\bullet \to \mathbf{D}'_\bullet$ se factorise par un sous-complexe de f pour un certain cardinal γ. Le morphisme f est une composition transfinie d'éléments de $\mathrm{I} - \mathit{cell}$ qui sont des inclusions de catégories simpliciales

$$\mathbf{D}_\bullet \to \mathbf{D}^1_\bullet \dots \mathbf{D}^\beta_\bullet \to \mathbf{D}^{\beta+1}_\bullet \dots \to \mathbf{D}'_\bullet$$

La factorisation de g par un sous complexe de f revient à factoriser l'adjoint de g, noté $g'\ : d_*X_\bullet \to \mathrm{N}_\bullet\mathrm{iso}\mathbf{D}'_\bullet$ par un sous complexe de

$$\mathrm{N}_\bullet\mathrm{iso}\mathbf{D}_\bullet \to \mathrm{N}_\bullet\mathrm{iso}\mathbf{D}^1_\bullet \dots \mathrm{N}_\bullet\mathrm{iso}\mathbf{D}^\beta_\bullet \to \mathrm{N}_\bullet\mathrm{iso}\mathbf{D}^{\beta+1}_\bullet \dots \to \mathrm{N}_\bullet\mathrm{iso}\mathbf{D}'_\bullet$$

Par le même argument, une factorisation de g' revient à une factorisation de $g'' : X_\bullet \to \mathrm{diagN}_\bullet\mathrm{iso}\mathbf{D}'_\bullet$ par un sous complexe de

$$\mathrm{diagN}_\bullet\mathrm{iso}\mathbf{D}_\bullet \to \mathrm{diagN}_\bullet\mathrm{iso}\mathbf{D}^1_\bullet \dots \mathrm{diagN}_\bullet\mathrm{iso}\mathbf{D}^\beta_\bullet \to \mathrm{diagN}_\bullet\mathrm{iso}\mathbf{D}^{\beta+1}_\bullet \dots \to \mathrm{diagN}_\bullet\mathrm{iso}\mathbf{D}'_\bullet$$

lequel est une composition transfinie de monomorphismes dans **sSet**, puisque par 3.3.1 les cofibrations dans **sCat** sont des inclusions de catégories. Or les objets les objets Δ^n et $\partial\Delta^n$ sont compacts dans **sSet**. Par conséquent g se factorise par un sous-complexe de de f.

□

Lemme 3.3.10. *Les cofibrations et les cofibrations acycliques dans* **sCat** *vérifient la deuxième condition de la définition 3.3.8.*

Démonstration. Soit $\pi\mathbf{d}_*X_\bullet$ le domaine d'un élément dans J. Il s'agit de monter montrer que le domaine est petit relativement à I-cell pour un certain cardinal λ. On a les isomorphismes naturels suivants :

$$\mathrm{colim}_{\beta<\lambda}\mathbf{hom}_{\mathbf{sCat}}(\pi d_*X_\bullet, \mathbf{D}^\beta_\bullet) \to \mathrm{colim}_{\beta<\lambda}\mathbf{hom}_{\mathbf{sSet}}(X_\bullet, \mathrm{diagN}_\bullet\mathrm{iso}\mathbf{D}^\beta_\bullet)$$

$$\mathrm{colim}_{\beta<\lambda}\mathbf{hom}_{\mathbf{sSet}}(X_\bullet, \mathrm{diagN}_\bullet\mathrm{iso}\mathbf{D}^\beta_\bullet) \to \mathbf{hom}_{\mathbf{sSet}}(X_\bullet, \mathrm{diagN}_\bullet\mathrm{iso}\ \mathrm{colim}_{\beta<\lambda}\mathbf{D}^\beta_\bullet)$$

Le premier isomorphisme est résultat de l'adjonction, et le deuxième isomorphisme est une conséquence du fait que tout objet dans **sSet** est petit pour un certain cardinale λ (cf [12] lemme 3.1.1), que le foncteur diag commute avec les colimites, et que le foncteur $\mathrm{N}_\bullet$iso commute avec les colimites filtrantes. □

Lemme 3.3.11. *Les cofibrations dans* **sCat** *sont des monomorphismes effectifs (au sens de [11] 10.9).*

Démonstration. Soit $\mathbf{C}_\bullet \overset{i}{\hookrightarrow} \mathbf{D}_\bullet$ une cofibration dans **sCat** (et donc une inclusion de catégorie). Le but est de calculer l'égalisateur du diagramme suivant :

$$\mathbf{D}_\bullet \rightrightarrows \mathbf{D}_\bullet \coprod_{\mathbf{C}_\bullet} \mathbf{D}_\bullet$$

où les deux flèches sont des inclusion de catégorie provenant du diagramme du pushout suivant :

$$\begin{tikzcd} \mathbf{C}_\bullet \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, hook, "i"] & \mathbf{D}_\bullet \arrow[d, hook, "i_1"] \\ \mathbf{D}_\bullet \arrow[r, hook, "i_2"'] & \mathbf{D}_\bullet \coprod_{\mathbf{C}_\bullet} \mathbf{D}_\bullet . \end{tikzcd}$$

Nous affirmons que l'égalisateur est exactement

$$\mathbf{C}_\bullet \xrightarrow{i} \mathbf{D}_\bullet \rightrightarrows \mathbf{D}_\bullet \coprod_{\mathbf{C}_\bullet} \mathbf{D}_\bullet$$

Tout d'abord c'est bien un diagramme commutatif, supposons que $\mathbf{C}'_\bullet$ est un autre candidat pour l'égalisateur. Puisque le foncteur Ob : **sCat** $\to$ **sSet** commutes avec les limites et les colimites (car Ob admet un adjoint à gauche et à droite), alors il existe une unique flèche t qui fait commuter le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Ob}\mathbf{C}'_\bullet \arrow[d, dotted, "t"] \arrow[dr, "\mathrm{Ob}(F)"] & & \\ \mathrm{Ob}\mathbf{C}_\bullet \arrow[r, "\mathrm{Ob}(i)"] & \mathrm{Ob}\mathbf{D}_\bullet \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & \mathrm{Ob}\mathbf{D}_\bullet \coprod_{\mathrm{Ob}\mathbf{C}_\bullet} \mathrm{Ob}\mathbf{D}_\bullet \end{tikzcd}$$

En effet, les cofibrations dans **sCat** sont des monomorphismes sur les objets 3.3.1, et **sSet** est cellulaire [11]. Soit maintenant γ un morphisme dans $\mathbf{C}'_\bullet$ tel que $i_1F(\gamma) = i_2F(\gamma)$. Puisque $i_1 : \mathbf{C}_\bullet \to \mathbf{D}_\bullet \coprod_{\mathbf{C}_\bullet} \mathbf{D}_\bullet$ et $i_2 : \mathbf{C}_\bullet \to \mathbf{D}_\bullet \coprod_{\mathbf{C}_\bullet} \mathbf{D}_\bullet$ sont des injections de catégories, cela implique que $F(\gamma)$ est, en fait, un morphisme dans $\mathbf{C}_\bullet$. On conclut que tout morphisme $F : \mathbf{C}'_\bullet \to \mathbf{D}_\bullet$ dans **sCat** tel que $i_1F = i_2F$ se factorise de manière unique comme la composition

$$\mathbf{C}'_\bullet \to \mathbf{C}_\bullet \to \mathbf{D}_\bullet$$

. □

Corollaire 3.3.12. *Munie de la structure modèle 3.2.4, la catégorie* **sCat** *est cellulaire.*

La conclusion finale est que la catégorie **sCat** est une catégorie modèle propre de génération cofibrante et cellulaire. On peut donc lancer le processus de "stabilisation" décrit dans [13].

Theorem 3.3.13. *[[6], théorème 2.12.] Soit une adjonction de Quillen entre deux catégories modèles :*

$$\mathbf{C} \underset{F}{\overset{G}{\rightleftarrows}} \mathbf{D}.$$

Alors il y a un isomorphisme naturel

$$\mathbf{map}_{\mathbf{C}}(a, \mathrm{R}Fb) \to \mathbf{map}_{\mathbf{D}}(\mathrm{L}Ga, b)$$

dans la catégorie $\mathrm{Ho}(\mathbf{sSet})$

L'application de ce théorème dans le cas précis de **sCat** où on combine les adjonctions entre **sSet**, $\mathbf{sSet}^2$ et **sCat** en utilisant le théorème 3.3.13, donne le résultat suivant :

Corollaire 3.3.14. *Soient* $\mathbf{C}_\bullet$ *un objet fibrant dans* **sCat** *et* $X \in \mathbf{sSet}$*. On a un isomorphisme dans* $\mathrm{Ho}(\mathbf{sSet})$ *:*

$$\mathbf{map}_{\mathbf{sCat}}(\pi d_* X, \mathbf{C}_\bullet) \to \mathbf{Map}(X, \mathrm{diag}\mathrm{N}_\bullet \mathrm{iso}\mathbf{C}_\bullet).$$

Démonstration. L'isomorphisme $\mathbf{map}_{\mathbf{sCat}}(\pi d_* X, \mathbf{C}_\bullet) \to \mathbf{map}_{\mathbf{sSet}}(X, \mathrm{diag}\mathrm{N}_\bullet \mathrm{iso}\mathbf{C}_\bullet)$ est une conséquence du théorème 3.3.13. Puisque **sSet** est une catégorie modèle simpliciale on a un isomorphisme

$$\mathbf{map}_{\mathbf{sSet}}(X, \mathrm{diag}\mathrm{N}_\bullet \mathrm{iso}\mathbf{C}_\bullet) \to \mathbf{Map}(X, \mathrm{diag}\mathrm{N}_\bullet \mathrm{iso}\mathbf{C}_\bullet)$$

dans $\mathrm{Ho}(\mathbf{sSet})$, où **Map** est l'adjoint à droite du produit cartésien.

□

3.3.4 La $\overline{W}$-structure modèle sur sCat

Le but de cette section est d'introduire une autre structure modèle sur **sCat** équivalente à la précédente ; ce qu'on gagne est une tensorisation et cotensorisation sur **sSet** compatible avec la structure modèle. On se base essentiellement sur l'article [3]. En résumé, les auteurs de l'article utilise une nouvelle adjonction entre **sSet** et $\mathbf{sSet}^2$ pour transférer la structure modèle sur les ensembles bisimpliciaux. Les équivalences faibles sont exactement les équivalence de Moerdijk, par contre on a moins de cofibration et plus de fibrations par rapport à la structure de modèle de Moerdijk. Le foncteur adjoint à gauche $Dec : \mathbf{sSet} \to \mathbf{sSet}^2$ utilisé dans la nouvelle structure a la propriété d'être cartésien, i.e., que $Dec(X_\bullet \times Y_\bullet) = Dec(X_\bullet) \times Dec(Y_\bullet)$, contrairement au foncteur adjoint à gauche dans la structure diagonale modèle de Moerdijk qui est loin d'être cartesien.

Cette observation est cruciale pour définir une nouvelle structure modèle sur **sCat** et qui est cette fois (co)tensorisée sur **sSet** de manière compatible avec la structure modèle.

Définition 3.3.15. *Le foncteur total d'Illusie par Dec* : $\mathbf{sSet} \to \mathbf{sSet}^2$ *est défini pour tout ensemble simplicial* $Y_\bullet$, *par* $Dec(Y_\bullet)_{p,q} = Y_{p+q+1}\ \forall p, q$. *Les faces horizontales sont données par* $d_i^h = d_i :\ Y_{p+q+1} \to Y_{p+q}$, *et de manière analogue les dégénérescences par* $s_i^h = s_i$. *Les faces verticales par* $d_j^v = d_{p+1+j} :\ Y_{p+1+q} \to Y_{p+q}$ *et les dégénérescences verticales* $s_j^v = s_{p+1+j}$.

Lemme 3.3.16. *Le foncteur Dec a un adjoint à droite noté* $\overline{W} :\ \mathbf{sSet}^2 \to \mathbf{sSet}$ *défini comme suit :*

$$\overline{W}(X)_n = \{(x_{0,n}, \ldots, x_{n,0}) \in \prod_{p=0}^{n} X_{p,n-p} |\ d_0^v x_{p,n-p} = d_{p+1}^h x_{p+1,n-p-1}, 0 \leq p < n\}$$

Pour la définition des faces et les dégénérescences de $\overline{W}(X)$ en envoie le lecteur vers le paragraphe 3 de l'article [3].

Corollaire 3.3.17. *Le foncteur* $\overline{W}$ *commute au colimites dirigées.*

Démonstration. Soit une colimite dirigée $\mathrm{colim}_\lambda X$ d'objets de $\mathbf{sSet}^2$, alors l'égalité

$$\overline{W}(\mathrm{colim}_\lambda X)_n = \mathrm{colim}_\lambda \overline{W}(X)_n$$

provient du fait que le produit fini commute au colimites dans $\mathbf{sSet}^2$. □

Theorem 3.3.18. *[3] La catégorie des ensembles bisimpliciaux* $\mathbf{sSet}^2$ *admet une structure de catégorie modèle, appelée la* $\overline{W}$*-structure, dans laquelle un morphisme* f *bisimplicial est une fibration (équivalence faible) si* $\overline{W}(f)$ *est une fibration (équivalence faible) d'ensembles simpliciaux. De plus :*

1. *toute fibration de Moerdijk est une* W*-fibration ;*
2. *toute* W*-cofibration est une Moerdijk-cofibration ;*
3. *un morphisme d'ensembles bisimpliciaux est une équivalence de Moerdijk si et seleument si c'est une* $\overline{W}$*-équivalence.*

De plus, la nouvelle $\overline{W}$-structure sur les ensembles bisimpliciaux est de génération cofibrante, où

1. les cofibrations génératrices sont données par $Dec\ \partial\Delta^n \to Dec\ \Delta^n,\ n \in \mathbb{N}$.
2. les cofibrations acycliques génératrices sont données par $Dec\ \Lambda_i^n \to Dec\ \Delta^n,\ n \in \mathbb{N},\ 0 \leq i \leq n$.

Remarque 3.3.19. *La $\overline{W}$-structure et la structure de Moerdijk sur les ensembles bisimpliciaux sont Quillen equivalente, cette équivalence étant donnée simplement par l'identité. Puisque le foncteur Dec est strictement cartesien, la catégorie des ensembles bisimpliciaux est une catégorie tensorisé et cotensorisé sur* **sSet** *de manière compatible avec la structure modèle.*

Proposition 3.3.20. *Il existe une nouvelle $\overline{W}$-structure modèle de génération cofibrante sur* **sCat** *équivalente à la structure diagonale et engendré par l'adjonction*

$$\mathbf{sSet} \underset{\overline{W}\mathrm{N}_\bullet\mathrm{iso}}{\overset{\pi\ Dec}{\rightleftarrows}} \mathbf{sCat}$$

De plus la nouvelle structure sur **sCat** *est propre et cellulaire.*

Démonstration. Les cofibrations génératrices sont données par $\pi Dec\, \partial\Delta^n \to \pi Dec\, \Delta^n$, $n \in \mathbb{N}$. Les cofibrations acycliques génératrices sont données par $\pi Dec\, \Lambda_i^n \to \pi Dec\, \Delta^n$, $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq i \leq n$. Pour montrer que ces choix déterminent une structure modèle il suffit de montrer les points (2) et (4) du lemme 3.1.2. Le point (2) est une conséquence de 3.3.17. Soit $j : Dec\, \Lambda_i^n \to Dec\, \Delta^n$ une cofibration acyclique génératrice dans la $\overline{W}$-structure modèle $\mathbf{sSet}^2$. On sait par 3.3.18 que j est une cofibration acyclique dans la structure diagonale de Moerdijk pour $\mathbf{sSet}^2$. Par conséquent $\pi(j)$ est une cofibration acyclique dans la structure modèle diagonale de **sCat**. Donc le pushout de $\pi(j)$ le long d'un morphisme $f : \pi Dec\, \Lambda_i^n \to \mathbf{C}_\bullet$ de **sCat** :

$$\begin{tikzcd}
\pi Dec\, \Lambda_i^n \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi(j)"] & \mathbf{C} \arrow[d] \\
\pi Dec\, \Delta^n \arrow[r] & \mathbf{D}
\end{tikzcd}$$

est une équivalence faible, c'est à dire $\mathrm{diagN}_\bullet\mathrm{iso}\mathbf{C}_\bullet \to \mathrm{diagN}_\bullet\mathrm{iso}\mathbf{D}_\bullet$ est une équivalence faible dans **sSet**. Encore une fois par 3.3.18 on conclut que

$$\overline{W}\mathrm{N}_\bullet\mathrm{iso}\mathbf{C}_\bullet \to \overline{W}\mathrm{N}_\bullet\mathrm{iso}\mathbf{D}_\bullet$$

est une équivalence dans **sSet**.

Pour voir que la $\overline{W}$-structure modèle de **sCat** est propre à gauche et cellulaire, il suffit de remarquer les cofibrations génératrices de cette nouvelle structure sont des cofibrations dans la structure diagonale de **sCat** et donc les compositions transfinies et les rétractes de telles cofibrations génératrices sont encore des cofibrations dans la structure modèle diagonale de **sCat**. Par conséquent on a moins de cofibrations dans la $\overline{W}$-structure modèle de **sCat** que dans la structure modèle diagonale de **sCat** et en même temps on a les mêmes équivalences faibles. On conclut que la $\overline{W}$-structure modèle de **sCat** est propre à gauche et est cellulaire.

□

Remarque 3.3.21. *Il est important de remarquer à ce stade, que la nouvelle* $\overline{W}$*-structure modèle sur* **sCat** *se déduit de la structure modèle diagonale sur* **sCat**. *Il est fort probable qu'une preuve directe que la nouvelle* $\overline{W}$*-structure est une structure modèle peut s'avérer difficile. La section qui suit, nous donne une bonne raison de considérer la* $\overline{W}$*-structure modèle au lieu de la structure diagonale sur* **sCat**.

3.4 Structure modèle pointée

Il est possible de définir un foncteur de lacets basés sur **sCat**. Pour définir ce foncteur, il est nécessaire de pointer la catégorie **sCat** puisqu'elle ne l'est pas naturellement. Ainsi on introduit la catégorie $\mathbf{sCat}_*$ la catégorie $* \downarrow \mathbf{sCat}$, où les morphismes sont les foncteurs simpliciaux pointés. Les catégories modèles pointées générales sont décrites dans ([12], chapitre 6) .

Définition 3.4.1. *Une catégorie* $\mathbf{C}$ *pointée est la donnée d'un foncteur* $* \to \mathbf{C}$ *où* $*$ *est l'objet terminal dans la catégorie* **sCat**. *On notera la catégorie des petites catégorie pointées par* $\mathbf{Cat}_*$

Rappelons que la tensorisation de **Cat** par **sSet** est définie par

$$X_\bullet \otimes \mathbf{C} = \pi X_\bullet \times \mathbf{C}$$

et la cotensorisation est définie par

$$\mathbf{C}^{X_\bullet} = \mathbf{HOM}_{\mathbf{Cat}}(\pi X_\bullet, \mathbf{C})$$

On construit une (co)tensorisation de $\mathbf{sCat}_*$ par $\mathbf{sSet}_*$ en suivant la même démarche qu'avant, mais dans un cadre plus général. On suppose qu'on a une adjonction entre **sSet** et **sCat** tel que le foncteur adjoint à gauche $\rho : \mathbf{sSet} \to \mathbf{sCat}$ soit strictement cartésien, i.e., $\rho(X_\bullet) \times \rho(Y_\bullet) = \rho(X_\bullet \times Y_\bullet)$. La tensorisation est définie comme $\mathbf{C} \otimes_\rho X_\bullet = \mathbf{C} \times \rho X_\bullet$ et la cotensorisation par $\mathbf{C}^X = \mathbf{HOM}_{\mathbf{sCat}}(\rho X_\bullet, \mathbf{C})$.

Définition 3.4.2. *Soit* $\mathbf{C}_\bullet$ *une catégorie simpliciale pointée. La tensorisation*

$$- \odot - : \ \mathbf{sCat}_* \times \mathbf{sSet} \to \mathbf{sCat}_*$$

est définie d'abord sur les simplexes Δ^n puis prolongée sur **sSet** *par les colimites, c'est à dire l'extension de Kan à gauche. En particulier,* $\mathbf{C} \odot \Delta^n$ *est défini comme étant le pushout*

$$\begin{tikzcd} * \otimes_\rho \Delta^n \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{C}_\bullet \otimes_\rho \Delta^n \arrow[d] \\ * \arrow[r] & \mathbf{C} \odot_\rho \Delta^n \end{tikzcd}$$

Définition 3.4.3. *Le smash produit* $- \wedge_\rho - :\ \mathbf{sSet}_* \times \mathbf{sCat}_* \to \mathbf{sCat}_*$ *est d'abord définie sur* Δ^n_+ *par la formule*

$$\mathbf{C} \wedge_\rho \Delta^n_+ = \mathbf{C} \odot_\rho \Delta^n$$

puis prolongée à tout $\mathbf{sSet}_*$ *par extension à gauche de Kan.*

Lemme 3.4.4. *Le foncteur* $- \odot_\rho X_\bullet :\ \mathbf{sCat}_* \to \mathbf{sCat}_*$ *admet un adjoint à droite qu'on notera* $(-)^{X_\bullet} :\ \mathbf{sCat}_* \to \mathbf{sCat}_*$

Démonstration. On contruit tout d'abord l'adjoint pour $- \odot_\rho \Delta^n$. Le foncteur

$$\mathbf{HOM}_{\mathbf{sCat}}(\rho\Delta^n, -) : \mathbf{sCat}_* \to \mathbf{sCat}_*$$

qui est l'adjoint du produit cartésien dans **sCat** envoie bien une catégorie pointée $\mathbf{C}$ vers la catégorie pointée $\mathbf{HOM}_{\mathbf{sCat}}(\rho\Delta^n, \mathbf{C}_\bullet)$, où le pointage est donnée par le foncteur "constant" $0 :\ \rho\Delta^n \to \mathbf{C}_\bullet$. Reste à vérifier que c'est bien l'adjoint de $- \odot_\rho \Delta^n$ dans $\mathbf{sCat}_*$. La donnée d'un foncteur simplicial pointé $f :\ \mathbf{C}_\bullet \odot_\rho \Delta^n \to \mathbf{D}_\bullet$ est équivalente à la donnée du foncteur $\tilde{f} : \mathbf{C}_\bullet \times \rho\Delta^n \to \mathbf{D}_\bullet$ qui envoie la sous catégorie $* \otimes_\rho \Delta^n$ vers le point de base de $\mathbf{D}$, ce qui est équivalent à la donné du foncteur pointé $g : \mathbf{C}_\bullet \to \mathbf{HOM}_{\mathbf{sCat}}(\rho\Delta^n, \mathbf{D}_\bullet) := \mathbf{D}_\bullet^{\Delta^n}$. Et donc

$$\mathbf{hom}_{\mathbf{sCat}_*}(\mathbf{C}_\bullet \odot_\rho \Delta^n, \mathbf{D}_\bullet) = \mathbf{hom}_{\mathbf{sCat}_*}(\mathbf{C}_\bullet, \mathbf{D}_\bullet^{\Delta^n}).$$

Pour prouver l'adjonction pour tout ensemble simplicial $X_\bullet$ il suffit de remarquer que

$$\mathbf{C}_\bullet \odot_\rho (\mathrm{colim}_{\Delta^n \to X_\bullet} \Delta^n) = \mathrm{colim}_{\Delta^n \to X_\bullet} (\mathbf{C}_\bullet \odot_\rho \Delta^n).$$

□

En s'inspirant de la structure modèle de $\mathbf{sSet}_*$ on construit une nouvelle structure modèle sur $\mathbf{sCat}_*$ en utilisant l'adjonction de pointage et d'oubli. Le point délicat est de montrer que $\mathbf{sCat}_*$ est (co)tensorisée par $\mathbf{sSet}_*$ vu comme catégorie modèle. L'adjonction

$$\mathbf{sCat} \underset{U}{\overset{(-)_+}{\rightleftarrows}} \mathbf{sCat}_*$$

définit la nouvelle structure modèle sur $\mathbf{sCat}_*$, où les équivalences faibles sont simplement les équivalences pointées (qui préservent le pointage), si f est une cofibration (acyclique) génératrice de **sCat** alors, par définition f_+ est une cofibration (acyclique) génératrice de $\mathbf{sCat}_*$. Pour plus de détails voir [12].

Dans ce paragraphe on montrera que pour tout ensemble simplicial $X_\bullet$, les foncteurs $-\wedge X_\bullet$ et $(-)^X$ forment une paire de Quillen. D'abord, remarquons que tout ensemble simplicial pointé $p: \ \Delta^0 \to X$ peut être reconstruit par le diagramme de pushout suivant :

$$\begin{tikzcd} \Delta^0_+ \arrow[r, "p_+"] \arrow[d] & X_+ \arrow[d] \\ * \arrow[r] & X. \end{tikzcd}$$

Lemme 3.4.5. *Si $X_\bullet$ un est ensemble simplicial pointé, alors le foncteur $-\wedge X_\bullet:$ $\mathbf{sCat}_* \to$ $\mathbf{sCat}_*$ est un foncteur de Quillen, où* **sCat** *est munie de la $\overline{W}$-structure modèle, c'est à dire engendée par le foncteur Dec d'Illusie.*

Démonstration. Pour alléger les notations on notera l'ensemble simplicial pointé $X_\bullet$ simplement par X. Soit $\mathbf{C}$ dans **sCat**, alors $\mathbf{C}_+ \wedge X_+ = (\mathbf{C} \otimes X)_+$. Pour montrer que $X \wedge -$ est un foncteur de Quillen, il suffit de montrer que le foncteur envoie les cofibrations (acycliques) génératrices de $\mathbf{sCat}_*$ vers les cofibrations (acycliques). On commence par le cas où X a un point de base disjoint. Considérons le diagramme de pushout suivant :

$$\begin{tikzcd} \pi Dec\Delta^0_+ \wedge \pi DecA_+ \arrow[r] \arrow[d] & \pi DecX_+ \wedge \pi DecA_+ \arrow[d] \arrow[ddr, bend left] & \\ \pi Dec\Delta^0_+ \wedge \pi DecB_+ \arrow[r] \arrow[drr, bend right] & P \arrow[dr, dotted] & \\ & & \pi DecX_+ \wedge \pi DecB_+ \end{tikzcd}$$

où $A \to B$ est une cofibration (acyclique) génératrice dans **sSet**. C'est équivalent au diagramme de pushout :

$$\begin{tikzcd} \pi_\bullet Dec(\Delta^0 \times A)_+ \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & \pi_\bullet Dec(X \times A)_+ \arrow[d, hook] \arrow[ddr, bend left] & \\ \pi_\bullet Dec(\Delta^0 \times B)_+ \arrow[r, hook] \arrow[drr, bend right] & P \arrow[dr, hook, dotted] & \\ & & \pi_\bullet Dec(X \times B)_+ \end{tikzcd}$$

On a $P = \pi_\bullet Dec(\Delta^0 \times B \sqcup_{\Delta \times A} X \times A)_+$ puisque $\pi_\bullet$ Dec et $(-)_*$ commutent avec les colimites, et l'unique morphisme $\pi_\bullet Dec(\Delta^0 \times B \sqcup_{\Delta^0 \times A} X \times A)_+ \to \pi Dec(X \times B)_+$ est bien une cofibration (acyclique) dans $\mathbf{sCat}_*$ puisque $\mathbf{sSet}$ est monoïdale modèle, et $\pi_\bullet$, $(-)_+$, Dec sont des foncteurs de Quillen à gauche. Reste à voir que $\pi_\bullet Dec(X \wedge A_+) \to \pi_\bullet Dec(X \wedge B_+)$ est une cofibration (resp. cofibration acyclique) dans $\mathbf{sCat}_*$, c'est à dire, admet un relèvement par rapport aux fibrations acycliques (resp. fibrations).

$$\mathbf{C} \twoheadrightarrow \mathbf{D}$$

Le diagramme suivant résume la situation :

$$\begin{tikzcd}
\pi_\bullet Dec(\Delta^0 \times A)_+ \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & \pi_\bullet Dec(X \times A)_+ \arrow[rr] \arrow[d, hook, "g"] & & \pi_\bullet Dec(X \wedge A_+) \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{C} \arrow[d, two heads] \\
\pi_\bullet Dec(\Delta^0 \times B)_+ \arrow[r, hook] \arrow[urrrr, dotted, "(0)"] & P \arrow[r, hook, "f"'] \arrow[urrr, dotted, "(1)"] & \pi_\bullet Dec(X \times B)_+ \arrow[r] \arrow[urr, dotted, "(2)"] & \pi_\bullet Dec(X \wedge B_+) \arrow[r] \arrow[ur, dotted, "(3)"] & \mathbf{D}
\end{tikzcd}$$

La flèche (0) : $\pi_\bullet Dec(\Delta^0 \times B)_+ \to \mathbf{C}$ est le morphisme nul qui envoie tout vers le point de base de $\mathbf{C}$. La flèche (1) : $P \to \mathbf{C}$ est construite par la propriété universelle du pushout :

$$\begin{tikzcd}
\pi_\bullet Dec\Delta^0_+ \wedge \pi_\bullet DecA_+ \arrow[r] \arrow[d] & \pi_\bullet DecX_+ \wedge \pi DecA_+ \arrow[d] \arrow[ddr, bend left] & \\
\pi_\bullet Dec\Delta^0_+ \wedge \pi_\bullet DecB_+ \arrow[r] \arrow[drr, bend right, "(0)"] & P \arrow[dr, dotted, "(1)"] & \\
& & \mathbf{C}
\end{tikzcd}$$

En suite on construit la flèche (2) comme étant le relèvement de la cofibration (acyclique) f.

Enfin, on construit la flèche (3) : $\pi_\bullet Dec(X \wedge B_+) \to \mathbf{C}$ qui fait commuter tout le diagramme par la propriété universelle de la colimite. En effet, le diagramme suivant est un pushout dans $\mathbf{sCat}$

$$\begin{tikzcd}
\pi_\bullet Dec(\Delta^0 \times B)_+ \arrow[r] \arrow[d] & \pi_\bullet Dec(X \times B)_+ \arrow[d] \arrow[ddr, bend left, "(2)"] & \\
* \arrow[r] \arrow[drr, bend right, "(0)"] & \pi_\bullet Dec(X \wedge B_+) \arrow[dr, dotted, "(3)"] & \\
& & \mathbf{C}
\end{tikzcd}$$

car le foncteur $\pi_\bullet Dec$ commutes avec les colimites.

On conclut que $X_\bullet \wedge -$ est un foncteur de Quillen à gauche, et donc $(-)^{X_\bullet}$ est un foncteur de Quillen à droite. □

3.5 $\mathbf{Sp}^{\mathbb{N}}(\mathbf{sCat}_*)$ et $\mathbb{K}$-théorie algébrique

Ce paragraphe est l'aboutissement de ce chapitre. On définit des catégories qui jouent le rôle de **catégories de Waldhausen** et on propose une nouvelle définition de la $\mathbb{K}$-théorie algébrique pour les catégories simpliciales pointées. Pour tout ce qui suit $\mathbf{M}$ est une catégorie modèle à génération cofibrante, cellulaire, et propre à gauche, et $\mathrm{T} : \mathbf{M} \to \mathbf{M}$ un endofoncteur de Quillen à gauche avec un adjoint à droite noté U.

Définition 3.5.1. *Les objets de* $\mathbf{Sp}^{\mathbb{N}}(\mathbf{M}, \mathrm{T})$ *sont des suites* $X = \{X_0, X_1, \ldots X_n, \ldots\}$ *d'objets de* $\mathbf{M}$*, munies de morphismes de structure* $\sigma_X^n : \mathrm{T}X_n \to X_{n+1}$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$*. Les morphismes dans* $\mathbf{Sp}^{\mathbb{N}}(\mathbf{M}, \mathrm{T})$ *entre* $X = \{X_0, X_1, \ldots X_n, \ldots\}$ *et* $Y = \{Y_0, Y_1, \ldots Y_n, \ldots\}$ *sont des morphismes degré par degré dans* $\mathbf{M}$ *qui commutent avec les morphismes de structure, c'est à dire le diagramme suivant commute pour chaque* n*, entier naturel :*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{T}X_n \arrow[r, "\mathrm{T}f_n"] \arrow[d, "\sigma_X"] & \mathrm{T}Y_n \arrow[d, "\sigma_Y"] \\ X_{n+1} \arrow[r, "f_{n+1}"] & Y_{n+1}. \end{tikzcd}$$

Définition 3.5.2. *Un* U*-spectre dans* $\mathbf{Sp}^{\mathbb{N}}(\mathbf{M}, \mathrm{T})$ *est une suite* $X = \{X_0, X_1, \ldots X_n, \ldots\}$ *telle que* X_n *est fibrant dans* $\mathbf{M}$ *pour tout* n *et l'adjoint de* $\sigma_X : \mathrm{T}X_n \to X_{n+1}$ *c'est à dire* $\tau_X : X_n \to \mathrm{U}X_{n+1}$ *est une équivalence dans* $\mathbf{M}$ *pour tout* n*.*

Theorem 3.5.3. *Il existe une structure modèle stable sur la* ***catégorie des spectres*** $\mathbf{Sp}^{\mathbb{N}}(\mathbf{M}, \mathrm{T})$ *où les objets fibrants sont les* U*-spectres.*

Démonstration. Voir [13] Théorème 3.4. □

Dans la structure modèle stable sur $\mathbf{Sp}^{\mathbb{N}}(\mathbf{M}, \mathrm{T})$, le foncteur de Quillen $\mathrm{T} : \mathbf{M} \to \mathbf{M}$ se prolonge en un foncteur de Quillen $\mathrm{T} : \mathbf{Sp}^{\mathbb{N}}(\mathbf{M}, \mathrm{T}) \to \mathbf{Sp}^{\mathbb{N}}(\mathbf{M}, \mathrm{T})$ qui admet un adjoint à droite noté s_- qui est le foncteur qui décale un spectre par le degré -1, c'est à dire $(s_-X)_n = X_{n+1}$ pour $n > 0$.
L'adjonction (T, s_-) est une équivalence de Quillen (cf [13] Théorème 3.9). On constate que le foncteur dérivé $L\mathrm{T}$ devient un foncteur inversible, vu comme un endofoncteur de $\mathrm{Ho}\mathbf{Sp}^{\mathbb{N}}(\mathbf{M}, \mathrm{T})$.
On a encore une autre adjonction de Quillen entre $\mathbf{M}$ et $\mathbf{Sp}^{\mathbb{N}}(\mathbf{M}, \mathrm{T})$ donnée par :

$$\begin{tikzcd} \mathbf{M} \arrow[r, shift left, "\mathrm{T}^{\infty}"] & \mathbf{Sp}^{\mathbb{N}}(\mathbf{M}, \mathrm{T}) \arrow[l, shift left, "(-)_0"] \end{tikzcd}$$

où $\mathrm{T}^{\infty}(X) = \{X, \mathrm{T}X, \mathrm{T}\mathrm{T}X, \ldots\}$ et $\sigma_X^n = id_{\mathrm{T}^{n+1}X}$. Le foncteur $(-)_0$ associe à chaque spectre $X = \{X_0, X_1, \ldots X_n, \ldots\}$ l'objet X_0.

Theorem 3.5.4. *Il existe la catégorie modèle stable des spectres* $\mathbf{Sp}^{\mathbb{N}}(\mathbf{sCat}_*, \Sigma)$.

Démonstration. La catégorie $\mathbf{sCat}_*$ vérifie les hypothèse du théorème 3.5.3, et le foncteur $\Sigma = - \wedge S^1 : \mathbf{sCat}_* \to \mathbf{sCat}_*$, où S^1 est un modèle simplicial du cerle, est un foncteur de Quillen à gauche 3.4.5, qui à un adjoint qu'on notera Ω. Ainsi, on peut définir la catégorie modèle stable des spectres $\mathbf{Sp}^{\mathbb{N}}(\mathbf{sCat}_*, \Sigma)$. $\square$

Définition 3.5.5. *Un objet dans* $\mathbf{sCat}_*$ *est appelé* ***catégorie de Waldhausen faible*** *si c'est le 0-ième objet d'un* Ω*-spectre dans la catégorie stable* $\mathbf{Sp}^{\mathbb{N}}(\mathbf{sCat}_*, \Sigma)$.

Une catégorie de Waldhausen faible est en quelque sorte un infini lacet dans la catégorie $\mathbf{sCat}_*$. Le but maintenant est de justifier cette terminologie par le calcul des $\mathbf{map}_*$ dans $\mathbf{Sp}^{\mathbb{N}}(\mathbf{sCat}_*, \Sigma)$. Tout ce qui suit est une conséquence du théorème 3.3.13.

1. Il existe une transformation naturelle entre le foncteur diag et $\overline{W}$ qui est une équivalence faible i.e., $\mathrm{diag}(X) \to \overline{W}(X)$ est une équivalence faible dans $\mathbf{sSet}$, pour tout ensemble bisimplicial X.
2. Soit $\mathbf{C}_\bullet$ une catégorie simpliciale fibrante (pointée) dans la $\overline{W}$-structure modèle sur $\mathbf{sCat}$. L'adjonction
$$\mathbf{sSet} \underset{\mathrm{diagN}_\bullet\mathrm{iso}}{\overset{\pi \mathrm{d}_*}{\rightleftarrows}} \mathbf{sCat}$$
nous donne l'isomorphsime $\mathbf{map}_{\mathbf{sCat}}(*, \mathbf{C}_\bullet) \sim \mathrm{diagN}_\bullet\mathrm{iso}\mathbf{C}_\bullet$ dans $\mathrm{Ho}\mathbf{sSet}$
3. Si on pose S^0 la catégorie simpliciale constante $* \sqcup *$, alors l'adjonction :
$$\mathbf{sCat} \underset{F}{\overset{(-)_+}{\rightleftarrows}} \mathbf{sCat}_*$$
nous donne l'isomorphisme $\mathbf{map}_{\mathbf{sCat}_*}(S^0, \mathbf{C}_\bullet) \simeq \mathbf{map}_{\mathbf{sCat}}(*, \mathbf{C}_\bullet) \simeq \mathrm{diagN}_\bullet\mathrm{iso}\mathbf{C}_\bullet$ dans la catégorie $\mathrm{Ho}(\mathbf{sSet})$.
4. Soit $\mathbf{D}_\bullet = \{\mathbf{D}^0_\bullet, \mathbf{D}^1_\bullet, \ldots \mathbf{D}^n_\bullet, \ldots\}$ un Ω-spectre dans $\mathbf{Sp}^{\mathbb{N}}(\mathbf{sCat}_*, \Sigma)$. Alors l'adjonction
$$\mathbf{sCat}_* \underset{(-)_0}{\overset{\Sigma^\infty}{\rightleftarrows}} \mathbf{Sp}^{\mathbb{N}}(\mathbf{sCat}_*, \Sigma)$$
nous donne l'isomorphisme $\mathbf{map}(\Sigma^\infty S^0, \mathbf{D}_\bullet) \simeq \mathbf{map}(S^0, \mathbf{D}^0_\bullet) \simeq \mathrm{diagN}_\bullet\mathrm{iso}\mathbf{D}^0_\bullet$
5. L'adjonction
$$\mathbf{Sp}^{\mathbb{N}}(\mathbf{sCat}_*, \Sigma) \underset{s_-}{\overset{\Sigma}{\rightleftarrows}} \mathbf{Sp}^{\mathbb{N}}(\mathbf{sCat}_*, \Sigma)$$
nous donne l'isomorphisme
$$\mathbf{map}_*(\Sigma\Sigma^\infty S^0, \mathbf{D}_\bullet) \simeq \mathbf{map}_*(\Sigma^\infty S^0, s_-\mathbf{D}_\bullet) \simeq \mathbf{map}_*(S^0, \mathbf{D}^1_\bullet) \simeq \mathrm{diagN}_\bullet\mathrm{iso}\mathbf{D}^1_\bullet$$

et plus généralement

$$\mathbf{map}_*(\Sigma^n\Sigma^\infty S^0, \mathbf{D}_\bullet) \simeq \mathbf{map}_*(S^0, \mathbf{D}^n_\bullet) \simeq \mathrm{diagN}_\bullet\mathrm{iso}\mathbf{D}^n_\bullet.$$

Par définition de $\mathbf{map}_*$ dans $\mathbf{sCat}_*$ et le fait que $\mathbf{D}^n_\bullet \to \Omega\mathbf{D}^{n+1}_\bullet$ est une équivalence dans $\mathbf{sCat}_*$ entre objets fibrants, on a

$$\mathbf{map}_*(S^1, \mathbf{D}^{n+1}_\bullet) \simeq \mathbf{map}_*(S^0, \Omega\mathbf{D}^{n+1}_\bullet) \simeq \mathrm{diagN}_\bullet\mathrm{iso}\Omega\mathbf{D}^{n+1}_\bullet \simeq \mathrm{diagN}_\bullet\mathrm{iso}\mathbf{D}^n_\bullet$$

et d'un autre côté :

$$\mathbf{map}_*(S^1, \mathbf{D}^{n+1}_\bullet) \simeq \mathbf{Map}_*(S^1, \mathrm{diagN}_\bullet\mathrm{iso}\mathbf{D}^{n+1}_\bullet) = \Omega\mathrm{diagN}_\bullet\mathrm{iso}\mathbf{D}^{n+1}_\bullet.$$

On conclut que les isomorphismes suivants dans $\mathrm{Ho}(\mathbf{sSet})$:

$$\Omega\mathbf{map}_*(S^0, \mathbf{D}^{n+1}_\bullet) \simeq \Omega\mathrm{diagN}_\bullet\mathrm{iso}\mathbf{D}^{n+1}_\bullet \simeq \mathrm{diagN}_\bullet\mathrm{iso}\mathbf{D}^n_\bullet \simeq \mathrm{diagN}_\bullet\mathrm{iso}\Omega\mathbf{D}^{n+1}_\bullet \simeq \mathbf{map}_*(S^0, \Omega\mathbf{D}^{n}_\bullet$$

Comme avant on suppose que $\mathbf{D}_\bullet = \{\mathbf{D}^0_\bullet, \mathbf{D}^1_\bullet, \ldots \mathbf{D}^n_\bullet, \ldots\}$ est un Ω-spectre dans $\mathbf{Sp}^{\mathbb{N}}(\mathbf{sCat}_*, \Sigma)$. En général la suite des ensembles simpliciaux $\{\mathbf{map}_*(S^0, \mathbf{D}^0_\bullet), \mathbf{map}_*(S^0, \mathbf{D}^1_\bullet), \ldots\}$ n'a pas de structure de spectre dans $\mathbf{Sp}^{\mathbb{N}}(\mathbf{sSet}_*, \Sigma)$. Cette suite n'est pas un élément de $\mathbf{Sp}^{\mathbb{N}}(\mathbf{sSet}_*, \Sigma)$ mais elle a les propriétés d'un Ω-spectre, i.e.,

$$\mathbf{map}_*(S^0, \mathbf{D}^n_\bullet) \simeq \Omega\mathbf{map}_*(S^0, \mathbf{D}^{n+1}_\bullet),\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Définition 3.5.6. *Soit* $\mathbf{C}_\bullet$ *une (petite) catégorie simpliciale (i.e., un objet de* $\mathbf{sCat}_*$*) qui est faiblement de Waldhausen 3.5, on définie la* $\mathbb{K}$*-théorie algébrique de* $\mathbf{C}_\bullet$ *par l'ensemble simplicial* $\mathbf{map}(S^0, \mathbf{C}_\bullet)$ *et donc* $\mathbb{K}_i(\mathbf{C}_\bullet) = \pi_i\mathbf{map}(S^0, \mathbf{C}_\bullet)$.

3.5.1 Remarque importante

A ce stade, il est crucial de mentionner que la structure modèle sur **Cat** construite par C. Rezk est monoidale modèle, fermé,propre (puisque tous les objets sont fibrants et cofibrants) mais N'est PAS cellulaire ! Et donc on NE peut construire la catégorie stable des spectres. Pour ce convaincre de la non cellularité de **Cat** considérant l'exemple, où $\mathbf{C} \to \mathbf{D}$ et une cofibration dans **Cat** i.e., une inclusion sur les objets avec $\mathbf{C}$ la catégorie

$$a \rightrightarrows b$$

et $\mathbf{D}$ la catégorie

$$a \to b$$

Dans ce cas l'égalisateur de

$$\mathbf{D} \rightrightarrows \mathbf{D} \cup_{\mathbf{C}} \mathbf{D}$$

est bien $\mathbf{D}$ est non $\mathbf{C}$, puisque $\mathbf{D} \cup_{\mathbf{C}} \mathbf{D} = \mathbf{D}$.

Une autre raison pour voir que la stabilisation n'est pas possible est que pour toute catégorie pointé $\mathbf{C}$ les groupe d'homotopie dans la catégorie pontée $\mathbf{Cat}_*$ i.e., $\pi_i \mathrm{N}_\bullet \mathrm{iso}\mathbf{C}$ sont triviaux pour $i > 1$. Pour cette raison nous ne pouvons pas construire une catégorie stable des spectres $\mathbf{Sp}^{\mathbb{N}}(\mathbf{Cat}_*)$.
Dans la deuxième partie de ce mémoire on considérera la catégorie des petites catégories enrichies sur **sSet**. Dans [18] Lurie montre que cette catégorie $\mathbf{sSet} - \mathbf{Cat}$ est propre à gauche et combinatorielle. Par conséquent on peut construire une catégorie des spectres $\mathbf{Sp}^{\mathbb{N}}(\mathbf{sSet} - \mathbf{Cat})$ en utilisant le processus de localisation. Cette catégorie des spectres $\mathbf{Sp}^{\mathbb{N}}(\mathbf{sSet} - \mathbf{Cat}_*)$ ne nous semble pas un candidat pour les théories cohomologiques des catégories enrichies puisqu'on vient de voir que dans le cas classique $\mathbf{Sp}^{\mathbb{N}}(\mathbf{Cat}_*)$ n'existe même pas.

Deuxième partie

Vers la K-Théorie Algébrique des Catégories Enrichies

Chapitre 4

Structure Modèle sur Top – Cat

Dans cette partie, on construit une structure modèle sur **Top**−**Cat** pour la catégorie des petites catégories enrichies sur **Top**, l'analogue de la structure modèle sur **sSet** − **Cat** construite dans [1]. Une catégorie enrichie sur **sSet** est un modèle pour une ∞-catégorie, comme définie par Joyal. On introduira brièvement le langage nécessaire pour traiter les catégories enrichies sur **Top**, où **Top** est une catégorie modèle monoïdale fermé (remarquons que le produit monoïdale ne correspond pas au produit cartésien, topologiquement parlant, des espaces topologiques). De ce fait, la catégorie **Top** − **Cat** est une catégorie monoïdale fermée. On introduira quelques éléments de la théorie des ∞-catégories essentiellement tirés de [18] et [14]. On décrira les liens entre différentes théories de catégories. La discussion nous mènera à faire un choix de modèle pour les ∞-catégories.

Remarque 4.0.7. *Ici* **Top** *est la catégorie des espaces topologiques compactement générés et faiblement de Hausdorff.*

4.1 Les ∞-caterories (quasi-catégories) et les catégories enrichies

Dans la littérature mathématique, il y a beaucoup de modèles pour les ∞-catégories, dont les catégories enrichies sur **sSet** [1], les catégories enrichies sur **Top** [18] (mais la structure modèle ne se trouve pas dans la littérature), et finalement une autre structure modèle (cartésienne) modèle sur **sSet**, voir [14]. Dans cette dernière catégorie modèle, les objets fibrants jouent le "rôle" des catégories au sens large, et sont appelés les **quasi-catégories**. On les décrira plus tard. On introduira aussi la notion d'un

quasi-groupoïde qui généralise la définition de groupoïde dans le langage de catégorie classique. Puis, on parlera de la notion du **nerf cohérent** pour les catégories enrichies sur les ensembles simpliciaux ou les espaces topologiques.

Définition 4.1.1. *Une* **quasi – catégorie** *est un ensemble simplicial X qui a la propriété de relèvement pour $0 < i < n$:*

$$\begin{tikzcd} \Lambda_i^n \arrow[r, "\forall"] \arrow[d] & X \arrow[d] \\ \Delta^n \arrow[r] \arrow[ur, dotted, "\exists"] & * \end{tikzcd} \tag{4.1}$$

Il est important de remarquer que $0 < i < n$. Cette condition correspond à la notion de composition de morphismes. Parfois, on appelle de tels ensembles simpliciaux des complexes de Kan faibles. Par exemple si $\mathbf{C}$ est une catégorie classique, alors le nerf $\mathrm{N}_\bullet\mathbf{C}$ est une quasi-catégorie avec une propriété de plus : le relèvement est, en fait, unique (cf [18], proposition 1.1.2.2). D'ailleurs un ensemble simplicial est isomorphe au nerf d'une catégorie $\mathbf{C}$ si et seulement si le relèvement 4.1 existe et est unique.

Lemme 4.1.2. *Une catégorie* $\mathbf{C}$ *est un groupoïde si et seulement si* $\mathrm{N}_\bullet\mathbf{C}$ *est un complexe de Kan.*

Démonstration. Si $\mathbf{C}$ est un groupoïde, alors $\mathrm{N}_\bullet\mathbf{C}$ admet le relèvement par rapport à $\Lambda_n^n \to \Delta^n$ et $\Lambda_0^n \to \Delta^n$ simplement par le fait que toutes les flèches dans $\mathbf{C}$ sont inversibles. Donc $\mathrm{N}_\bullet\mathbf{C}$ est un complexe de Kan. Inversement, si $\mathrm{N}_\bullet\mathbf{C}$ est un complexe de Kan, on a un relèvement par rapport à $\Lambda_2^2 \to \Delta^2$ ce qui veut dire que tout diagramme de $\mathbf{C}$

$$\begin{tikzcd} & x \arrow[d, "id"] \\ y \arrow[r, "g"] \arrow[ur, dotted, "f"] & x \end{tikzcd}$$

se complète par un morphisme de $f : y \to x$ unique, donc g est inversible à droite. On montre que g est inversible à gauche en utilisant la propriété de relèvement par rapport à $\Lambda_0^2 \to \Delta^2$. Donc $\mathbf{C}$ est un groupoïde. □

Le lemme précédent suggère une définition naturelle d'un ∞-groupoïde.

Définition 4.1.3. *Une ∞-catégorie (quasi-catégorie) X est un ∞-groupoïde (quasi-groupoïde) s'il est un complexe de Kan.*

L'exemple typique associe à chaque espace topologique Y son groupoïde fondamental sing$Y$, l'ensemble des simplexes singuliers de Y, qui est bien un complexe de Kan. Ainsi on peut voir tout espace topologique comme une quasi-catégorie, qui est en fait un ∞-groupoïde.

Theorem 4.1.4. *[14] (section 6.3) La catégorie* **sSet** *admet une structure modèle, où les cofibrations sont les monomorphismes, les objet fibrants sont les les quasi-categories, les fibrations sont les pseudo-fibrations et les équivalence faibles sont les équivalences catégorielles. Cette structure est cartésienne modèle fermée. La nouvelle structure modèle sur les ensembles simpliciaux est notée* $(\mathbf{sSet}, \mathbf{Q})$.

Cette structure n'est pas de génération cofibrante. On expliquera par la suite ce qu'on entend par les équivalences catégorielles, mais on laissera de côté la notion de pseudo-fibration. À chaque quasi-catégorie X (objet fibrant dans $(\mathbf{sSet}, \mathrm{Q})$), on peut associer sa catégorie (au sens classique) homotopique notée $\mathrm{Ho}X$. Cette théorie est développée par Joyal, voir par exemple [14].

4.2 Quelques adjonctions de Quillen

Dans ce paragraphe, on décrira les différentes adjonctions de Quillen entre les catégories modèle $\mathbf{sSet} - \mathbf{Cat}$, $(\mathbf{sSet}, \mathbf{Q})$ et $\mathbf{sSet}$.

4.2.1 $\mathbf{sSet} - \mathbf{Cat}$ vs $(\mathbf{sSet}, \mathbf{Q})$

La première adjonction est décrite en détail dans [18]. On commence par décrire l'analogue dans la théorie classique des catégories

$$\mathbf{sSet} \underset{\mathrm{N}_\bullet}{\overset{\tau}{\rightleftarrows}} \mathbf{Cat},$$

l'adjoint à droite étant le nerf, et l'adjoint à gauche associe à chaque ensemble simplicial sa catégorie fondamentale. Cette adjonction n'est pas une adjonction de Quillen pour les deux structures modèles sur $\mathbf{Cat}$ connues (celle de Thomason et de Joyal). Rappelons que le nerf est un foncteur pleinement fidèle et que $\tau\ \mathrm{N}_\bullet = id$. L'idée de base est de pouvoir "prolonger" cette adjonction à une adjonction entre $(\mathbf{sSet}, \mathbf{Q})$ et la catégorie $\mathbf{sSet} - \mathbf{Cat}$. Si on utilise le nerf standard pour une catégorie enrichie sur les ensembles simpliciaux, en ne se rappelant que des 0-simplexes, alors on perdra toute l'information "homotopique" de la catégorie enrichie. Pour ne pas perdre cette information, on définit d'abord l'adjoint à gauche

$$\Xi : (\mathbf{sSet}, \mathbf{Q}) \to \mathbf{sSet} - \mathbf{Cat}$$

sur les Δ^n, puis on fait l'extension à gauche de Kan.

Définition 4.2.1. *[18] (1.1.5.1) La catégorie $\Xi(\Delta^n)$ a comme objets les 0-simplexes de Δ^n, et*

$$\Xi(\Delta^n)(i,j) \ = \begin{cases} N_\bullet P_{i,j} & si\ i \leq j \\ \emptyset & si\ i > j \end{cases}$$

où $P_{i,j}$ est l'ensemble partiellement ordonné par inclusion :

$$\{I \subseteq J : (i,j \in I) \wedge (\forall k \in I)[i \leq k \leq j]\}.$$

On ne fera pas la démonstration, mais Ξ est bien un foncteur, pour les details, voir ([18],1.1.5.3).

Définition 4.2.2. *Le foncteur adjoint à droite de Ξ est appelé le nerf cohérent, noté $\widetilde{\mathrm{N}_\bullet}$. Il est défini par la formule suivante :*

$$\widetilde{\mathrm{N}_n}\mathbf{C} = \mathbf{hom}_{\mathbf{sSet}}(\Delta^n, \widetilde{\mathrm{N}_\bullet}\mathbf{C}) := \mathbf{hom}_{\mathbf{sSet-Cat}}(\Xi(\Delta^n), \mathbf{C}).$$

Maintenant, on peut définir les équivalences catégorielles utilisées dans la structure modèle $(\mathbf{sSet}, \mathbf{Q})$. On appellera un morphisme entre deux ensembles simpliciaux $f:\ X \to Y$ une équivalence catégorielle si $\Xi(f):\ \Xi(X) \to \Xi(Y)$ est une équivalence de catégories enrichies, i.e, si $\mathbf{Map}_{\Xi(X)}(a,b) \to \mathbf{Map}_{\Xi(Y)}(\Xi(f)a, \Xi(f)b)$ est une équivalence d'ensembles simpliciaux pour tout a, b et $\pi_0\Xi(f)\ :\ \pi_0\Xi(X) \to \pi_0\Xi(Y)$ est une équivalence de catégorie.

Theorem 4.2.3. *L'adjonction suivante est une équivalence de Quillen entre la catégorie modèle de Joyal $(\mathbf{sSet}, \mathbf{Q})$ [14], et la catégorie modèle de Bergner [1]*

$$\mathbf{sSet} \underset{\widetilde{\mathrm{N}_\bullet}}{\overset{\Xi}{\rightleftarrows}} \mathbf{sSet} - \mathbf{Cat}.$$

La preuve du théorème se trouve dans [18] théorème 2.2.5.1.

Corollaire 4.2.4. *Soit $\mathbf{C}$ une catégorie enrichie sur $\mathbf{sSet}$, fibrante dans la structure modèle de [1], (i.e, les $\mathbf{Map}_{\mathbf{C}}(a,b)$ sont des complexes de Kan), alors la counité*

$$\Xi\widetilde{\mathrm{N}_\bullet}\mathbf{C} \to \mathbf{C}$$

est une équivalence de catégories enrichies.

4.2.2 $(\mathbf{sSet}, \mathbf{Q})$ vs $(\mathbf{sSet}, \mathbf{K})$

Dans ce paragraphe, on décrit une adjonction de Quillen, due à Joyal, entre la catégorie modèle de Joyal sur les ensembles simpliciaux et la catégorie modèle classique sur **sSet** qu'on notera $(\mathbf{sSet}, \mathbf{K})$, $\mathbf{K}$ pour complexe de Kan.

Définition 4.2.5. *Le foncteur $k : \Delta \to \mathbf{sSet}$ est défini en posant $k[n] = \widetilde{\Delta^n}$ pour tout $n \geq$, où $\widetilde{\Delta^n}$ est le nerf du groupoïde librement engendré par la catégorie $[n]$. Si X est un ensemble simplicial, on définit un foncteur $k^! : \mathbf{sSet} \to \mathbf{sSet}$ par :*

$$k^!(X)_n = \mathbf{hom}_{\mathbf{sSet}}(\widetilde{\Delta^n}, X).$$

Le foncteur $k^!$ a un adjoint noté $k_!$ qui est l'extension de Kan à gauche du foncteur k. De l'inclusion $\Delta^n \subset \widetilde{\Delta^n}$ on obtient pour tout n un morphisme d'ensemble $k^!(X)_n \to X_n$ qui est le niveau n d'un morphisme simplicial $\beta_X : \ k^!(X) \to X$. Plus précisément, $\beta : \ k^! \to id$ est une transformation naturelle. De manière duale, on définit une transformation naturelle $\alpha : \ id \to k_!$

Theorem 4.2.6. *La paire de foncteurs adjoints*

$$\begin{tikzcd} (\mathbf{sSet}, \mathbf{Kan}) \arrow[r, shift left, "k_!"] & (\mathbf{sSet}, \mathbf{Q}) \arrow[l, shift left, "k^!"] \end{tikzcd}.$$

est une adjonction de Quillen. De plus, $\alpha_X : \ X \to k_!(X)$ est une équivalence pour tout X.

Démonstration. Pour la preuve, voir ([14], 6.22). □

4.2.3 Les ∞-groupoïdes

Dans ce paragraphe on définit une notion de groupoïde pour les catégories enrichies sur les ensembles simpliciaux, qu'on comparera à la notion de ∞-groupoïde définie pour les quasi-catégories.

Définition 4.2.7. *Une catégorie enrichie $\mathbf{C}$ sur **sSet** est un ∞-groupoïde si $\pi_0\mathbf{C}$ est un groupoïde aus sens classique des catégories, c'est à dire que tous les morphismes sont des isomorphismes. Si $\mathbf{C}$ est une catégorie enrichie sur **sSet**, le ∞-groupoïde $\mathbf{C}'$ associé à $\mathbf{C}$ est le produit fibré dans $\mathbf{sSet} - \mathbf{Cat}$ suivant*

$$\begin{tikzcd} \mathbf{C}' = \mathrm{iso}\pi_0\mathbf{C} \times_{\pi_0\mathbf{C}} \mathbf{C} \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{C} \arrow[d] \\ \mathrm{iso}\pi_0\mathbf{C} \arrow[r] & \pi_0\mathbf{C}. \end{tikzcd}$$

Remarquons que le foncteur π_0 : $\mathbf{sSet}-\mathbf{Cat} \to \mathbf{Cat}$ est un adjoint à gauche, et donc ne commute pas forcément aux limites. Néanmoins la projection $pr : \pi_0\mathbf{C}^{'} \to \mathrm{iso}\pi_0\mathbf{C}$ est un isomorphisme. En effet, si w_1 et w_2 sont deux équivalences faibles dans $\mathbf{Map}_{\mathbf{C}}(a, b)$ et h une homotopie (i.e un 1-simplexe $\mathbf{Map}_{\mathbf{C}}(a, b)$ dont les bords sont w_1, w_2) alors h est aussi une homotopie dans $\mathbf{Map}_{\mathbf{C}'}(a, b)$. Ceci montre que la projection pr est pleinement fidèle. L'essentielle surjectivité de la projection pr est évidente.
On notera par G le foncteur qui associe à $\mathbf{C}$ son ∞-groupoïde $\mathbf{C}^{'}$. La sous-catégorie pleine de $\mathbf{sSet}-\mathbf{Cat}$ des ∞-groupoïdes sera notée $\mathbf{sSet}-\mathbf{Grp}$.

Lemme 4.2.8. *Le foncteur G : $\mathbf{sSet}-\mathbf{Cat} \to \mathbf{sSet}-\mathbf{Grp}$ est l'adjoint à droite de l'inclusion, i.e.,*

$$\mathbf{hom}_{\mathbf{sSet}-\mathbf{Grp}}(\mathbf{C}, G\mathbf{D}) = \mathbf{hom}_{\mathbf{sSet}-\mathbf{Cat}}(\mathbf{C}, \mathbf{D})$$

$\forall \mathbf{C} \in \mathbf{sSet}-\mathbf{Grp}$ *et* $\mathbf{D} \in \mathbf{sSet}-\mathbf{Cat}$.

Démonstration. Soit $\mathbf{C}$ un ∞-groupoïde, et soit $\mathbf{D} \in \mathbf{sSet}-\mathbf{Cat}$. Un morphisme $f :\ \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ définit de manière unique un morphisme adjoint $g :\ \mathbf{C} \to G\mathbf{D}$ donnée par la flèche universelle

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[drr, bend left, "f"] \arrow[dr, dotted, "\exists ! g"] \arrow[dd, "q"'] \arrow[ddr, bend right, "\phi"] & & \\
& G\mathbf{D} \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{D} \arrow[d] \\
\pi_0\mathbf{C} \arrow[r, "\pi_0 f"] & \mathrm{iso}\ \pi_0\mathbf{D} \arrow[r] & \pi_0\mathbf{D}
\end{tikzcd}$$

La flèche $\phi = \pi_0 f \circ q$ existe et fait commuter le diagramme, car $\mathbf{C}$ est un ∞-groupoïde.

□

Soit $[n]^{'}$ le groupoïde librement engendré par $[n]$. Un exemple de ∞-groupoïde est la catégorie $\Xi k_! \Delta^n$. En effet, $\Xi k_! \Delta^n = \Xi \mathrm{N}_\bullet [n]^{'} \to [n]^{'}$ est une équivalence catégorielle puisque $[n]^{'}$ est fibrant. Puisque $[n]^{'}$ est un groupoïde, alors $\pi_0 \Xi k_! \Delta^n$ l'est aussi .

Lemme 4.2.9. *Soit* $\mathbf{C}$ *une catégorie fibrante enrichie sur* $\mathbf{sSet}$, *alors* $k^! \widetilde{\mathrm{N}}_\bullet \mathbf{C} = k^! \widetilde{\mathrm{N}}_\bullet \mathbf{C}'$, *où* $\mathbf{C}^{'}$ *est le ∞-groupoïde associé a* $\mathbf{C}$.

Démonstration. En utilisant les adjonctions précédentes on a que pour tout $n \geq 0$

$$
\begin{aligned}
(k^!\widetilde{\mathrm{N}_\bullet}\mathbf{C})_n &= \mathbf{hom}_{\mathbf{sSet}}(\Delta^n, k^!\widetilde{\mathrm{N}_\bullet}\mathbf{C}) && (4.2)\\
&= \mathbf{hom}_{\mathbf{sSet}}(k_!\Delta^n, \widetilde{\mathrm{N}_\bullet}\mathbf{C}) && (4.3)\\
&= \mathbf{hom}_{\mathbf{sSet-Cat}}(\Xi k_!\Delta^n, \mathbf{C}) && (4.4)
\end{aligned}
$$

mais $\Xi k_!\Delta^n$ est un ∞-groupoïde et donc

$$
\begin{aligned}
\mathbf{hom}_{\mathbf{sSet-Cat}}(\Xi k_!\Delta^n, \mathbf{C}) &= \mathbf{hom}_{\mathbf{sSet-Grp}}(\Xi k_!\Delta^n, \mathbf{C}') && (4.5)\\
&= \mathbf{hom}_{\mathbf{sSet-Cat}}(\Xi k_!\Delta^n, \mathbf{C}') && (4.6)\\
&= \mathbf{hom}_{\mathbf{sSet}}(\Delta^n, k^!\widetilde{N}\mathbf{C}') && (4.7)\\
&= (k^!\widetilde{\mathrm{N}_\bullet}\mathbf{C}')_n && (4.8)
\end{aligned}
$$

On conclut bien que $k^!\widetilde{\mathrm{N}_\bullet}\mathbf{C}' = k^!\widetilde{\mathrm{N}_\bullet}\mathbf{C}$. □

Définition 4.2.10. *[1] Dans la structure modèle sur* **sSet − Cat** *de Bergner [1] un morphisme $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ est une fibration si*

1. $\mathbf{Map_C}(a, b) \to \mathbf{Map_D}(Fa, Fb)$ *est une fibration d'ensembles simpliciaux pour tout* $a,\ b \in \mathbf{C}$.
2. *F a la propriété de relèvement des équivalences faibles, c'est à dire que c'est des fibrations de Grothendieck, sauf que le relèvement est pour les équivalences faibles et non pour les isomorphismes.*

Corollaire 4.2.11. *Soit $\mathbf{C}'$ le ∞-groupoïde associé à une catégorie enrichie fibrante $\mathbf{C}$ dans la structure modèle de [1], alors*

$$\widetilde{\mathrm{N}_\bullet}\mathbf{C}' \to \mathrm{N}_\bullet \mathrm{iso}\ \pi_0\mathbf{C}$$

est une fibration (appelée pseudo-fibration dans [14]) dans $(\mathbf{sSet}, \mathrm{Q})$.

Démonstration. Remarquons que si $\mathbf{C}$ est fibrant, alors $\mathbf{C} \to \pi_0\mathbf{C}$ est une fibration au sens précédent. La structure modèle de Bergner est propre à droite et donc $\mathbf{C}' \to \mathrm{iso}\ \pi_0\mathbf{C}$ est aussi une fibration. De plus, le groupoïde iso $\pi_0\mathbf{C}$ est fibrant dans la structure modèle de Bergner, et donc $\mathbf{C}'$ est aussi fibrant. Par conséquent $\widetilde{\mathrm{N}_\bullet}\mathbf{C}' \to \widetilde{\mathrm{N}_\bullet}\mathrm{iso}\ \pi_0\mathbf{C}$ est une fibration dans la catégorie $(\mathbf{sSet}, \mathbf{Q})$, donc une pseudo-fibration entre quasi-catégories. Mais la catégorie $\pi_0\mathbf{C}$ est une catégorie simpliciale "constante" et donc $\widetilde{\mathrm{N}_\bullet}\mathrm{iso}\ \pi_0\mathbf{C} = \mathrm{N}_\bullet\mathrm{iso}\ \pi_0\mathbf{C}$. On conclut que $\widetilde{\mathrm{N}_\bullet}\mathbf{C}' \to \mathrm{N}_\bullet\mathrm{iso}\ \pi_0\mathbf{C}$ est une pseudo-fibration entre une quasi-catégorie et un complexe de Kan, voir 4.1.2. □

Pour X une quasi-catégorie, Joyal définit la catégorie homotopique $\mathrm{Ho}(X)$ qui est une catégorie au sens classique. Les 0-simplexes de X forment l'ensemble des objets de

Ho(X) et les 1-simplexes (modulo une relation d'équivalence) forment les morphismes de Ho(X). Un 1−simplexe dans X est appelé une équivalence faible, si son représentant dans Ho(X) est un isomorphisme.

Définition 4.2.12. *Soit $p : X \to Y$ un morphisme entre deux quasi-catégories, et soit w un 1-simplexe dans X, alors p est dit conservatif si :*

$$p(w) \text{ une équivalence dans } Y \Rightarrow w \text{ une équivalence dans } X$$

.

Lemme 4.2.13. *([14], 4.30) Soit $p : X \to Y$ un morphisme simplicial entre deux quasi-catégories, tel que p est une pseudo-fibration et conservative. Si Y est un complexe de Kan, alors X l'est aussi*

Lemme 4.2.14. *Soit $\mathbf{C} \in \mathbf{sSet} - \mathbf{Cat}$ fibrante dans la structure modèle de Bergner, alors $\widetilde{N}\mathbf{C}'$ est un complexe de Kan, où $\mathbf{C}'$ est le ∞-groupoïde associé à $\mathbf{C}$.*

Démonstration. On a vu d'après le corollaire 4.2.11 que si $\mathbf{C}$ est fibrante, alors $\widetilde{\mathrm{N}_\bullet}\mathbf{C}' \to \mathrm{N}_\bullet \mathrm{iso}\, \pi_0\mathbf{C}$ est une pseudo-fibration entre quasi-catégories, et $\mathrm{N}_\bullet \mathrm{iso}\, \pi_0\mathbf{C}$ est un complexe de Kan. Reste à voir que ce morphisme simplicial est conservatif, ce qui est le cas car tous les 0-simplexes de $\mathbf{Map}_{\mathbf{C}'}(a, b)$ sont des équivalences faibles. Par le lemme 4.2.13, on conclut que $\widetilde{\mathrm{N}_\bullet}\mathbf{C}'$ est un complexe de Kan. □

Dans [14] (Theorème 4.19) , Joyal construit une adjonction entre les complexes de Kan et les quasi-catégories. Si on note par **Kan** la sous-catégorie pleine de **sSet** des complexes de Kan, et par **QCat** la sous catégorie pleine de **sSet** des quasi-catégories, alors l'inclusion $\mathbf{Kan} \subset \mathbf{QCat}$ admet un adjoint à droite noté J. Le foncteur peut être interprété de la manière suivante : pour toute quasi-catégorie X, $\mathrm{J}(X)$ est le quasi-groupoïde associé à X, et si X est un complexe de Kan, alors $\mathrm{J}(X) = X$.

Lemme 4.2.15. *Soit X une quasi-catégorie (objet fibrant) dans $(\mathbf{sSet}, \mathbf{Q})$. La transformation naturelle $\beta_X : k^!(X) \to X$ se factorise par $\beta_X : k^!(X) \to \mathrm{J}(X) \subset X$. De plus $\beta_X : k^!(X) \to \mathrm{J}(X)$ est une fibration de Kan triviale.*

Démonstration. Voir [14], proposition 6.26. □

Corollaire 4.2.16. *Soit une catégorie $\mathbf{C} \in \mathbf{sSet} - \mathbf{Cat}$ fibrante dans la structure modèle de Bergner, et $G\mathbf{C}$ le ∞-groupoïde associé. Alors $k^!\widetilde{\mathrm{N}_\bullet}(\mathbf{C}) \to \widetilde{\mathrm{N}_\bullet}(G\mathbf{C})$ est une fibration de Kan triviale.*

Démonstration. Puisque $\mathbf{C}$ est fibrant, on a vu que $k^!\widetilde{\mathrm{N}_\bullet}(\mathbf{C}) = k^!\widetilde{\mathrm{N}_\bullet}(G\mathbf{C})$ et par le lemme précédent $k^!\widetilde{\mathrm{N}_\bullet}(G\mathbf{C}) \to \mathrm{J}(\widetilde{\mathrm{N}_\bullet}(G\mathbf{C}))$ est une fibration triviale. Mais $\widetilde{\mathrm{N}_\bullet}(G\mathbf{C})$ est un complexe de Kan, puisque $G\mathbf{C}$ est un ∞-groupoïde fibrant dans la structure modèle de Bergner, et donc $\mathrm{J}(\widetilde{\mathrm{N}_\bullet}(G\mathbf{C})) = \widetilde{\mathrm{N}_\bullet}(G\mathbf{C})$. □

Maintenant on peut voir l'analogie entre le foncteur $\mathrm{N}_\bullet$iso dans le cas des catégories classiques et le foncteur $k^!\widetilde{\mathrm{N}_\bullet}$ pour les catégories enrichies sur les ensembles simpliciaux. En effet, si $\mathbf{C}$ est une catégorie classique, alors le foncteur iso envoie $\mathbf{C}$ vers son groupoïde associé $G\mathbf{C}$ et donc $\mathrm{N}_\bullet\mathrm{iso}\mathbf{C} = \mathrm{N}_\bullet G\mathbf{C}$. Si $\mathbf{C}$ est une catégorie enrichie sur les ensembles simpliciaux de Kan, i.e., $\mathbf{C}$ est fibrant dans la structure de Bergner, l'ensemble simplicial $k^!\widetilde{\mathrm{N}_\bullet}\mathbf{C}$ est équivalent à $\widetilde{\mathrm{N}_\bullet}G\mathbf{C}$ par le corollaire 4.2.16.

4.3 Structure modèle sur Top – Cat

Dans cette section, on construit une structure modèle sur **Top – Cat** qui est Quillen équivalente à celle de **sSet – Cat** construite dans [1]. L'adjonction de Quillen est donnée par le foncteur de réalisation géométrique et le complexe singulier, voir ([18] remarque 1.1.4.3)

$$\mathbf{sSet}-\mathbf{Cat} \underset{\mathrm{sing}}{\overset{|-|}{\rightleftarrows}} \mathbf{Top}-\mathbf{Cat}. \tag{4.9}$$

Avant de commencer, rappelons la structure modèle de Bergner pour **sSet – Cat**.

Theorem 4.3.1. *[1] La catégorie* **sSet – Cat** *est une catégorie à génération cofibrante. Les équivalences faibles* $\mathrm{F} : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ *satisfont les conditions suivantes :*

W1 : *Le morphisme* $\mathbf{Map}_{\mathbf{C}}(a, b) \to \mathbf{Map}_{\mathbf{D}}(\mathrm{F}a, \mathrm{F}b)$ *est une équivalence faible dans* **sSet**.

W2 : *Le morphisme induit* $\pi_0\mathrm{F} : \pi_0\mathbf{C} \to \pi_0\mathbf{D}$ *est une équivalence faible de catégorie classique.*

Les fibrations sont les morphismes $\mathrm{F} : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ *qui satisfont :*

F1 : *Le morphisme* $\mathbf{Map}_{\mathbf{C}}(a, b) \to \mathbf{Map}_{\mathbf{D}}(\mathrm{F}a, \mathrm{F}b)$ *est une fibration dans* **sSet**.

F2 : *Pour tout objet* a *et* b *dans* $\mathbf{C}$, *et une équivalence d'homotopie* $e :\ \mathrm{F}a \to b$ *dans* $\mathbf{D}$, *il y a un objet* a_1 *dans* $\mathbf{C}$ *et une équivalence d'homotopie* $d :\ a \to a_1$ *dans* $\mathbf{C}$ *telle que* $\mathrm{F}d = e$.

L'ensemble I des cofibrations génératrices est donné par :

C1 : $U\partial\Delta^n \to U\Delta^n$, *pour* $0 \leq n$.

C1 : $\emptyset \to \{x\}$, *où* $\emptyset$ *est la catégorie vide et* $\{x\}$ *est la catégorie simpliciale avec un seul objet, et un seul morphisme qui est l'identité.*

Et l'ensemble J des cofibrations acycliques génératrices est donné par :

AC1 : $U\Lambda^n_i \to U\Delta^n$, *pour* $n \geq 0$, *et* $0 \leq i \leq n$.

AC2 : *L'inclusion* $\{x\} \to \mathcal{H}$ *où* $\{\mathcal{H}\}$ *est l'ensemble de représentants des classes d'isomorphisme de catégories simpliciales avec deux objets x et y tel que* $\mathbf{Map}_{\mathcal{H}}(x,y)$, $\mathbf{Map}_{\mathcal{H}}(x,x)$, $\mathbf{Map}_{\mathcal{H}}(y,y)$ *et* $\mathbf{Map}_{\mathcal{H}}(y,x)$ *sont contractiles et ont un nombre dénombrable de simplexes. De plus, on veut que l'inclusion* $\{x\}\bigsqcup\{y\} \to \mathcal{H}$ *soit une cofibration de Dwyer (cf. [7]).*

Le foncteur U : **sSet** $\to$ **sSet − Cat** associe à tout ensemble simplicial X la catégorie simpliciale avec deux objets x et y tel que les seul enrichissement non trivial est $\mathbf{Map}_X(x,y) = X$.

La démonstration se repose sur le théorème de Kan 3.1.1 qui permet de reconnaître une catégorie modèle de génération cofibrante. Maintenant on va énoncer notre théorème pour la structure modèle pour **Top − Cat**. La démonstration est faite en plusieurs étapes.

Theorem 4.3.2. *La catégorie* **Top − Cat** *admet une structure de catégorie modèle à génération cofibrante.*
Les équivalences faibles $\mathrm{F} : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ *satisfont les conditions suivantes.*

WT1 : *Le morphisme* $\mathrm{sing}\ \mathbf{Map}_{\mathbf{C}}(a,b) \to \mathrm{sing}\ \mathbf{Map}_{\mathbf{D}}(\mathrm{F}a,\mathrm{F}b)$ *est une équivalence faible dans* **sSet**.

WT2 : *Le morphisme induit* $\pi_0\ \mathrm{sing}\ \mathrm{F} : \pi_0\ \mathrm{sing}\ \mathbf{C} \to \pi_0\ \mathrm{sing}\ \mathbf{D}$ *est une équivalence faible de catégorie classique.*

Les fibrations sont les morphismes $\mathrm{F} : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ *qui satisfont :*

FT1 : *Le morphisme* $\mathrm{sing}\ \mathbf{Map}_{\mathbf{C}}(a,b) \to \mathrm{sing}\ \mathbf{Map}_{\mathbf{D}}(\mathrm{F}a,\mathrm{F}b)$ *est une fibration dans* **sSet**.

FT2 : *Pour tout objet a et b dans* $\mathrm{sing}\ \mathbf{C}$, *et une équivalence d'homotopie* $e : \mathrm{F}(a) \to b$ *dans* $\mathrm{sing}\ \mathbf{D}$, *il y a un objet a_1 dans* $\mathrm{sing}\ \mathbf{C}$ *et une équivalence d'homotopie* $d : a \to a_1$ *dans* $\mathrm{sing}\ \mathbf{C}$ *telle que* $\mathrm{F}d = e$.

De plus l'ensemble I des cofibrations génératrices est donné par :

CT1 : $|U\partial\Delta^n| \to |U\Delta^n|$, *pour* $n \geq 0$.

CT1 : $\emptyset \to \{x\}$, *où* $\emptyset$ *est la catégorie topologique vide et* $\{x\}$ *est la catégorie topologique avec un seul objet, et un seul morphisme qui est l'identité.*

Et l'ensemble J des cofibrations acycliques génératrices est donné par :

ACT1 : $|U\Lambda_i^n| \to |U\Delta^n|$, *pour* $0 \leq n$, *et* $0 \leq i \leq n$.

ACT2 : $\{x\} \to |\mathcal{H}|$ *où* $\{\mathcal{H}\}$ *comme dans le théorème 4.3.1*

.

Remarquons que c'est la structure de transfert par rapport à l'adjonction 4.9. Une conclusion immédiate est que, le couple adjoint $(|-|, \mathrm{sing})$ est une couple de Quillen. Il est clair que $\mathrm{F} : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ est une fibration (triviale) dans **Top − Cat** si et seulement si F a la propriété de relèvement à droite par rapport à $ACT1$, $ACT2$ ($CT1$, $CT2$) par l'adjonction de $(|-|, \mathrm{sing})$.
Pour la démonstration du théorème on utilisera le lemme 3.1.2

Lemme 4.3.3. *Le pushout de* $|U\Lambda_i^n| \to |U\Delta^n|$ *le long de tout morphisme* $\mathrm{F} : |U\Lambda_i^n| \to \mathbf{D}$ *est une équivalence faible.*

Démonstration. Voir B.2.2 □

Lemme 4.3.4. *Le pushout de* $\{x\} \to |\mathcal{H}|$ *le long de* $\{x\} \to \mathbf{C}$ *est une équivalence faible pour tout* $\mathbf{C}$.

Démonstration. Soit $\mathcal{O}$ l'ensemble des objets de la catégorie $\mathbf{C}$ sans l'objet $\{x\}$ atteint par la flèche $\{x\} \to \mathbf{C}$. On note par x, y les objets de $|\mathcal{H}|$. Le but est de montrer que h est une équivalence dans le pushout suivant

$$\begin{tikzcd} \{x\} \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{C} \arrow[d, "h"] \\ |\mathcal{H}| \arrow[r] & \mathbf{D} \end{tikzcd}$$

Observer qu'il y a un autre double poushout

$$\begin{tikzcd} \{x\} \sqcup \mathcal{O} \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{C} \arrow[d, "i"] \\ \{x, y\} \sqcup \mathcal{O} \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{C} \sqcup \{y\} \arrow[d, "h'"] \\ |\mathcal{H}| \sqcup \mathcal{O} \arrow[r] & \mathbf{D}. \end{tikzcd}$$

qui est une conséquence du fait que

$$|\mathcal{H}| \sqcup \mathcal{O} \coprod_{\mathcal{O} \sqcup \{x,y\}} \mathbf{C} \sqcup \{y\} = |\mathcal{H}| \coprod_{\{x,y\}} \mathbf{C} \sqcup \{y\} = |\mathcal{H}| \coprod_{\{x\}} \mathbf{C} = \mathbf{D}.$$

Le morphisme $h^{'}$ est le prolongement naturel de h, i.e., $h^{'} \circ i = h$.

D'autre part, la counité $c : |\text{sing}\mathbf{C}| \to \mathbf{C}$ est une équivalence faible. Considérer le double pushout suivant dans **sSet − Cat** :

$$\begin{tikzcd}
\{x\} \sqcup \mathcal{O} \arrow[r] \arrow[d] & \text{sing}\mathbf{C} \arrow[d, "i"] \\
\{x,y\} \sqcup \mathcal{O} \arrow[r] \arrow[d] & \text{sing}(\mathbf{C}) \sqcup \{y\} \arrow[d, "f^{'}"'] \\
\mathcal{H} \sqcup \mathcal{O} \arrow[r] & \mathbf{D}^{'}.
\end{tikzcd}$$

Puisque **sSet − Cat** est une catégorie modèle, on a que $f = f^{'} \circ i$ est une équivalence, par conséquent $|f|$ est une équivalence dans **Top − Cat** .
Comme avant $f^{'}$ est le prolongement de f.

En utilisant le fait que le foncteur $| - |$ commute au colimites, le diagramme du double pushout suivant permet de conclure :

$$\begin{tikzcd}
 & |\text{sing}\mathbf{C}| \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "i"] & \mathbf{C} \arrow[d, "i"] \\
\{x,y\} \sqcup \mathcal{O} \arrow[r] \arrow[d] & |\text{sing}(\mathbf{C} \sqcup \{y\})| \arrow[r, "c"] \arrow[d, "|f^{'}|"'] & \mathbf{C} \sqcup \{y\} \arrow[d, "h^{'}"'] \\
|\mathcal{H}| \sqcup \mathcal{O} \arrow[r] & |\mathbf{D}^{'}| \arrow[r, "m"'] & \mathbf{D}.
\end{tikzcd}$$

En effet,

$$m : \mathbf{D} = (|\mathcal{H}| \sqcup \mathcal{O}) \star |\text{sing}(\mathbf{C} \sqcup \{y\})| \to (|\mathcal{H}| \sqcup \mathcal{O}) \star (\mathbf{C} \sqcup \{y\}) = \mathbf{D}^{'}$$

est une équivalence par B.5.6. On a vu que $|f|$ est une équivalence, et donc par la proptiété de "2 out of 3" on conclut que h est une équivalence. □

Lemme 4.3.5. *Le foncteur* sing *commutes avec les colimites dirigées.*

Démonstration. Soit λ un ordinal, et soit

$$\mathbf{C} = \text{colim}_{\lambda} \mathbf{C}_{\lambda},$$

une colimite dirigée de catégories topologiques. Si $a^{'}$ et $b^{'}$ sont deux objets de $\mathbf{C}$, alors par définition il existe un indice t tel qu'ils sont représentés par $a,\ b \in \mathbf{C}_t$, et $\mathbf{Map}_{\mathbf{C}}(a^{'}, b^{'})$ est la colimite du diagramme suivant :

$$\mathbf{Map}_{\mathbf{C}_t^{a,b}}(a, b) \to \ldots \mathbf{Map}_{\mathbf{C}_s}(a_s, b_s) \to \mathbf{Map}_{\mathbf{C}_{s+1}}(a_{s+1}, b_{s+1}) \to \ldots ...$$

où $\mathbf{C}_t^{a,b}$ est la sous-catégorie pleine de $\mathbf{C}_t$ avec seulement deux objets a, b Puisque le foncteur Ob : **Cat** $\to$ **Set** et le foncteur sing : **Top** $\to$ **sSet** commutent avec les colimites filtrantes, on a bien que sing : **Top** – **Cat** $\to$ **sSet** – **Cat** commute avec les colimites filtrantes. $\square$

Lemme 4.3.6. *Les objets* $|U\Lambda_i^n|$, $|U\Delta^n|$ *et* $|\mathcal{H}|$ *sont petits dans* **Top** – **Cat**

Démonstration. C'est une conséquence du lemme 3.2.5 et du fait que $U\Lambda_i^n$, $U\Delta^n$ et $\mathcal{H}$ sont petits dans **sSet** – **Cat**, et que sing : **Top** – **Cat** $\to$ **sSet** – **Cat** commute avec les colimites filtrantes. $\square$

Lemme 4.3.7. *Une composition transfinie d'équivalences faibles dans* **sSet** – **Cat** *est encore une équivalence faible.*

Démonstration. C'est une conséquence du fait qu'une composition transfinie d'équivalences faibles dans **sSet** est une équivalence faible, et qu'une composition transfinie d'équivalence de catégorie dans **Cat** est aussi une équivalence. Remarquons que le foncteur π_0 : **sSet** – **Cat** $\to$ **Cat** commute avec les colimites car il admet un foncteur adjoint à droite : le foncteur qui associe à chaque catégorie non enrichie **C** la catégorie enrichie trivialement, c'est à dire **C** munie de l'enrichissement constant. $\square$

Corollaire 4.3.8. *La catégorie* **Top** – **Cat** *est une catégorie modèle à génération cofibrante et Quillen équivalente à* **sSet** – **Cat***.*

La définition de la structure modèle sur **Top** – **Cat** a l'avantage que toutes les (petites) catégories topologiques sont des objets fibrants dans **Top** – **Cat**, ce qui n'est pas le cas dans la structure de Bergner sur **sSet** – **Cat**. Cette remarque jouera un rôle important dans le chapitre suivant, où on définit une structure modèle sur la catégorie **Top** – **sCat**.

4.3.1 Mapping space dans Top – Cat et sSet – Cat

Dans ce paragraphe, on calcule certains objets **map** pour les catégories modèles **sSet** – **Cat** et **Top** – **Cat**. Notons d'abord, qu'on ne sait pas si ces catégories modèles sont monoïdales modèles. On pense que la réponse est plutôt négative.
Supposons que **C** est une catégorie enrichie sur **Top** . On définit le nerf cohérent de **C** par $\widetilde{\mathrm{N}_\bullet}\mathrm{sing}\mathbf{C}$, et on définit le ∞- groupoïde $\mathbf{C}'$ comme

$$\begin{tikzcd}
G\mathbf{C} = \mathrm{iso}\ \pi_0\mathbf{C} \times_{\pi_0\mathbf{C}} \mathbf{C} \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{C} \arrow[d] \\
\mathrm{iso}\ \pi_0\mathbf{C} \arrow[r] & \pi_0\mathbf{C}
\end{tikzcd}$$

En appliquant le foncteur sing à ce diagramme, on obtient encore un diagramme cartésien, et puisque sing est un adjoint à droite, on remarque que sing $\pi_0\mathbf{C} = \pi_0\mathrm{sing}\ \mathbf{C} = \pi_0\mathbf{C}$ et sing $\mathrm{iso}\pi_0\mathbf{C} = \mathrm{iso}\ \pi_0\mathbf{C} = \mathrm{iso}\ \pi_0\mathrm{sing}\mathbf{C}$

$$\begin{tikzcd}
G\ \mathrm{sing}\ \mathbf{C} = \mathrm{sing}(\mathrm{iso}\pi_0\mathbf{C} \times_{\pi_0\mathbf{C}} \mathbf{C}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{sing}\ \mathbf{C} \arrow[d] \\
\mathrm{sing}\ \mathrm{iso}\ \pi_0\mathbf{C} \arrow[r] & \mathrm{sing}\ \pi_0\mathbf{C}
\end{tikzcd}$$

On conclut que

$$\mathrm{sing}\ G\mathbf{C} = G\ \mathrm{sing}\ \mathbf{C}.$$

De plus $k^!\ \widetilde{\mathrm{N}_\bullet}$ sing $\mathbf{C}$ est équivalent à $\widetilde{\mathrm{N}_\bullet}$ sing $G\mathbf{C}$.

Il reste peut être la possibilité que ces catégories modèles sont des catégories simpliciales modèles. Malheuresement, on n'a pas de preuve. Par contre $\mathbf{map}(*, \mathbf{C})$ se calcule assez facilement en utilisant le théorème 3.3.13, et l'adjonction :

$$\mathbf{sSet} \underset{k^!\widetilde{\mathrm{N}_\bullet}}{\overset{\Xi k_!}{\rightleftarrows}} \mathbf{sSet} - \mathbf{Cat}.$$

On constate que pour toute catégorie (fibrante) enrichie **sSet**, on a l'isomorphisme dans la catégorie Ho(**sSet**)

$$k^!\widetilde{\mathrm{N}_\bullet}\mathbf{C} \sim \mathbf{map}_{\mathbf{sSet}}(*, k^!\widetilde{\mathrm{N}_\bullet}\mathbf{C}) \sim \mathbf{map}_{\mathbf{sSet-Cat}}(*, \mathbf{C})$$

et de la même manière, si $\mathbf{D}$ est une catégorie enrichie sur **Top**, alors

$$\mathbf{map}_{\mathbf{Top-Cat}}(*, \mathbf{D}) \sim k^!\widetilde{\mathrm{N}_\bullet}\mathrm{sing}\mathbf{D}.$$

Par le corollaire 4.2.16, on conclut que

$$\mathbf{map}_{\mathbf{sSet-Cat}}(*, \mathbf{C}) \sim \widetilde{\mathrm{N}_\bullet}G\mathbf{C}.$$

et

$$\mathbf{map}_{\mathbf{Top-Cat}}(*, \mathbf{D}) \sim \widetilde{\mathrm{N}_\bullet}G\mathrm{sing}\mathbf{D}.$$

Dans le cas classique de **Cat**, par le lemme A.4.2, on sait que $\mathbf{map}_{\mathbf{Cat}}(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \sim \mathrm{N}_\bullet\mathrm{iso}\mathbf{HOM}_{\mathbf{Cat}}(\mathbf{A}, \mathbf{B})$. Si $\mathbf{A}$ est la catégorie terminale $*$, alors $\mathbf{map}_{\mathbf{Cat}}(*, \mathbf{B}) \sim \mathrm{N}_\bullet\mathrm{iso}\mathbf{B}$. Force est de constater la similarité entre le cas classique de **Cat** et le cas enrichi

sSet − Cat.
Plus généralement,

$$\mathbf{map}_{\mathbf{Top-Cat}}(|\Xi k_!(A)|, \mathbf{C}) \sim \mathbf{map}_{\mathbf{sSet}}(A, k^! \widetilde{\mathrm{N}_\bullet} \mathrm{sing}\mathbf{C}) \sim \mathbf{Map}(A, \widetilde{\mathrm{N}_\bullet} G \mathrm{sing}\mathbf{C}),$$

où **Map** est le foncteur adjoint du produit cartésien dans **sSet**.

Remarque 4.3.9. *On ne sait pas si la catégorie* **Top − Cat** *est propre à gauche. Par contre elle propre à droite, car tous les objets sont fibrants. On pense que* **Top − Cat** *est cellulaire. Cela vient du fait que les cofibrations sont, en particulier, des inclusions de catégorie. On n'en fera pas la démonstration.*

Chapitre 5

La Catégorie Top – sCat

5.1 Structure Modèle sur Top – sCat

Dans ce chapitre on construit une structure modèle diagonale sur **Top – sCat** en s'inspirant de la structure modèle sur **sCat** et celle sur **Top – Cat**. Notre intérêt pour **Top – Cat** plutôt que **sSet – Cat** est dû au fait que dans **Top – Cat** tous les objets sont fibrants ; cette remarque jouera un rôle important par la suite. Rappelons que **Top – sCat** est la catégorie des diagrammes $[\boldsymbol{\Delta}^{op}, \mathbf{Top} - \mathbf{Cat}]$. Avant de commencer, on a besoin de fixer les notations :

Notation 5.1.1. *La composée des foncteurs*

$$\mathbf{sSet} \xrightarrow{k_!} \mathbf{sSet} \xrightarrow{\Xi} \mathbf{sSet} - \mathbf{Cat} \xrightarrow{|-|} \mathbf{Top} - \mathbf{Cat}$$

est notée $\Theta : \mathbf{sSet} \to \mathbf{Top} - \mathbf{Cat}$.

Notation 5.1.2. *La composée des foncteurs*

$$\mathbf{Top} - \mathbf{Cat} \xrightarrow{\mathrm{sing}} \mathbf{sSet} - \mathbf{Cat} \xrightarrow{\widetilde{\mathrm{N}_\bullet}} \mathbf{sSet} \xrightarrow{k^!} \mathbf{sSet}$$

est notée $\Psi : \mathbf{Top} - \mathbf{Cat} \to \mathbf{sSet}$.

Lemme 5.1.3. *Les foncteurs* $k^!$, sing, Ψ *commutent avec les coproduits disjoints.*

Remarquons que $(\Theta,\ \Psi)$ est une adjonction de Quillen (chapitre 4). Notre but est de montrer qu'il existe une structure modèle sur **Top – Cat** telle que cette adjonction se prolonge à une adjonction de Quillen entre **sSet** et **Top – sCat**. La nouvelle structure est appelée la structure modèle diagonale sur **Top − sCat**. L'adjonction $(\Theta,\ \Psi)$ induit une adjonction $\Theta_\bullet, \Psi_\bullet$ entre $\mathbf{sSet}^2$ et **Top − sCat**. Ainsi, on définit l'adjonction :

$$\begin{tikzcd} \mathbf{sSet} \arrow[r, shift left, "d_*"] & \mathbf{sSet}^2 \arrow[l, shift left, "\mathrm{diag}"] \arrow[r, shift left, "\Theta_\bullet"] & \mathbf{Top} - \mathbf{sCat} \arrow[l, shift left, "\Psi_\bullet"] \end{tikzcd}$$

On peut énoncer, maintenant, le théorème principal de ce chapitre :

Theorem 5.1.4. *L'adjonction* $(\Theta_\bullet d_*, \mathrm{diag}\Psi_\bullet)$ *engendre une structure modèle de génération cofibrante sur* **Top − sCat***, où*

1. *un morphisme* $f : \mathbf{C}_\bullet \to \mathbf{D}_\bullet$ *est une équivalence faible (fibration) si*

$$\mathrm{diag}\Psi_\bullet f : \mathrm{diag}\Psi_\bullet \mathbf{C}_\bullet \to \mathrm{diag}\Psi_\bullet \mathbf{D}_\bullet$$

   est une équivalence faible (fibration) dans **sSet***,*

2. *les cofibrations acycliques génératrices sont données pas* $\Theta_\bullet d_* \Lambda^n_i \to \Theta_\bullet d_* \Delta^n$*, pour* $0 \leq n$ *et* $0 \leq i \leq n$*,*

3. *les cofibrations génératrices sont données pas* $\Theta_\bullet d_* \partial\Delta^n \to \Theta_\bullet d_* \Delta^n$*, pour* $0 \leq n$*.*

La preuve est faite en plusieures étapes en suivant le lemme 3.1.2.

Lemme 5.1.5. *Soit* A *un sous-ensemble simplicial de* B *tel que* $A \to B$ *soit une équivalence faible, et soit* $\mathbf{C}$ *dans* **Top−Cat***. Alors pour tout* $F \in \mathbf{hom}_{\mathbf{Top-Cat}}(\Theta(A), \mathbf{C})$ *le foncteur* Ψ *envoie le pushout suivant*

$$\begin{tikzcd} \Theta(A) \arrow[r, "F"] \arrow[d] & \mathbf{C} \arrow[d] \\ \Theta(B) \arrow[r] & \mathbf{D} \end{tikzcd}$$

en un carré cocartésien homotopique dans **sSet***.*

Démonstration. Puisque Θ est un foncteur de Quillen, $\Theta(A) \to \Theta(B)$ est une cofibration triviale dans **Top−Cat**. Cela implique que $\mathbf{C} \to \mathbf{D}$ est une équivalence dans **Top−Cat**, et donc $\mathrm{sing}\mathbf{C} \to \mathrm{sing}\mathbf{D}$ est une équivalence entre objets fibrants dans **sSet − Cat**. Il résulte que $\widetilde{\mathrm{N}_\bullet}\mathrm{sing}\mathbf{C} \to \widetilde{\mathrm{N}_\bullet}\mathrm{sing}\mathbf{D}$ est une équivalence entre objets fibrants (quasi-catégories) dans $(\mathbf{sSet}, \mathbf{Q})$. Finalement, $k^!\widetilde{\mathrm{N}_\bullet}\mathrm{sing}\mathbf{C} \to k^!\widetilde{\mathrm{N}_\bullet}\mathrm{sing}\mathbf{D}$, c'est à dire, $\Psi\mathbf{C} \to \Psi\mathbf{D}$, est une équivalence faible dans $(\mathbf{sSet}, \mathbf{Kan})$. Par le même argument, $\Psi\Theta(A) \to \Psi\Theta(B)$ est une équivalence faible dans $(\mathbf{sSet}, \mathbf{Kan})$. De plus c'est un monomorphisme puisque $\Theta(A) \to \Theta(B)$ admet une rétraction (car tous les objets dans **Top − Cat** sont fibrants). Donc $\Psi\Theta(A) \to \Psi\Theta(B)$ est un cofibration triviale dans $(\mathbf{sSet}, \mathbf{Kan})$, et par conséquent $\Psi\mathbf{C} \to \Psi\Theta(B) \sqcup_{\Psi\Theta(A)} \Psi\mathbf{C}$ est une équivalence dans $(\mathbf{sSet}, \mathbf{Kan})$. Le diagramme suivant résume la situation :

$$\begin{tikzcd}
\Psi\Theta(A) \arrow[r] \arrow[d, "\sim"] & \Psi\mathbf{C} \arrow[d, "\sim"] \arrow[ddr, bend left, "\sim"] & \\
\Psi\Theta(B) \arrow[r] \arrow[drr, bend right] & \Psi\Theta(B) \sqcup_{\Psi\Theta(A)} \Psi\mathbf{C} \arrow[dr, dotted, "t"] & \\
 & & \Psi\mathbf{D}
\end{tikzcd}$$

d'où $t : \Psi\Theta(B) \sqcup_{\Psi\Theta(A)} \Psi\mathbf{C} \to \Psi\mathbf{D}$ est une équivalence faible d'ensembles simpliciaux. □

Plus généralement, on considère les ensembles bisimpliciaux (cf [10])

$$A = d_*\Lambda_i^n = \bigsqcup_{\beta \in \Lambda_i^n} C^\beta$$

et

$$B = d_*\Delta^n = \bigsqcup_{\beta \in \Delta^n} \Delta^n$$

Lemme 5.1.6. *Si $j : A \to B$ est une cofibration acyclique génératrice dans* $\mathbf{sSet}^2$*, et* $\mathbf{C}_\bullet$ *est dans* **Top − sCat***, alors le foncteur $\Psi_\bullet$ envoie le pushout suivant*

$$\begin{tikzcd}
\Theta_\bullet(A) \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{C}_\bullet \arrow[d] \\
\Theta_\bullet(B) \arrow[r] & \mathbf{D}_\bullet
\end{tikzcd}$$

en un carré cocartésien homotopique dans $\mathbf{sSet}^2$ *(Ici* $\mathbf{sSet}^2$ *est munie de la structure projective, i.e., les équivalences faibles (resp. fibrations) sont définies degré par degré)*

Démonstration. On note par $\Delta^n(m)$ (resp. $\Lambda_i^n(m)$) l'ensemble des m-simplexes de Δ^n (resp. Λ_i^n).
Remarquons tout d'abord que

$$j_m : A_m = \bigsqcup_{\beta \in \Lambda_i^n(m)} C^\beta \to \bigsqcup_{\beta \in \Lambda_i^n(m)} \Delta^n = B'_m$$

est une cofibration triviale dans $(\mathbf{sSet}, \mathbf{Kan})$. Par ailleurs, les pushouts dans **Top−sCat** se calculent degré par degré. En degré m, on a

$$\mathbf{D}_m = (\mathbf{C}_m \bigsqcup_{\Theta A_m} \Theta B'_m) \bigsqcup \bigsqcup_{\beta \in (\Delta^n(m) \setminus \Lambda_i^n(m))} \Theta(\Delta^n)$$

De l'autre côté, si on considère le pushout dans $\mathbf{sSet}^2$

$$\begin{tikzcd} \Psi_\bullet\Theta_\bullet(A) \arrow[r] \arrow[d] & \Psi_\bullet\mathbf{C}_\bullet \arrow[d] \\ \Psi_\bullet\Theta_\bullet(B) \arrow[r] & X \end{tikzcd}$$

alors X_m est égale à

$$(\Psi\mathbf{C}_m \coprod_{\Psi\Theta A_m} \Psi\Theta B'_m) \coprod \coprod_{\beta\in(\Delta^n(m)\setminus\Lambda^n_i(m))} \Psi\Theta(\Delta^n).$$

Par le lemme 5.1.5 la flèche $\Psi\mathbf{C}_m \coprod_{\Psi\Theta A_m} \Psi\Theta B'_m \to \Psi(\mathbf{C}_m \coprod_{\Theta A_m} \Theta B'_m)$ est une équivalence faible d'ensembles simpliciaux, par conséquent $X_m \to \Psi\mathbf{D}_m$, est une équivalence pour tout m. Et donc $X \to \Psi_\bullet\mathbf{D}_\bullet$ est une équivalence faible bisimpliciale degré par degré, par conséquent, c'est une équivalence faible diagonale. □

Lemme 5.1.7. *Si $A \to B$ est une cofibration acyclique génératrice dans* $\mathbf{sSet}^2$*, alors le morphisme induit dans* **sSet***,* $\mathrm{diag}\Psi_\bullet\Theta_\bullet(A) \to \mathrm{diag}\Psi_\bullet\Theta_\bullet(B)$*, est une cofibration acyclique.*

Démonstration. Si $Y \to *$ est une équivalence faible dans $(\mathbf{sSet}, \mathbf{Kan})$, alors $\Theta(Y) \to *$ est une équivalence dans **Top** – **Cat** car Θ préserve les équivalences entre objets cofibrants. Rappelons que $C^\beta \to *$ est une équivalence faible d'ensemble simpliciaux. Alors on a le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} \Theta_\bullet A \arrow[r, "f"] \arrow[d] & \coprod_{\Lambda^n_i} * \arrow[d] \\ \Theta_\bullet B \arrow[r, "g"] & \coprod_{\Delta^n} * \end{tikzcd}$$

avec $f,\ g$ des équivalences de catégories topologique degré par degré. En appliquant le foncteur $\Psi_\bullet$ on a encore une équivalence d'ensemble bisimpliciaux degré par degré (car tous les objets dans **Top** – **Cat** sont fibrants). Maintenant en appliquant le foncteur diagonal, on conclut que $\mathrm{diag}\Psi_\bullet\Theta_\bullet(A) \to \mathrm{diag}\Psi_\bullet\Theta_\bullet(B)$ est une équivalence. Pour voir que c'est une cofibration, il suffit de voir que $\Theta(C^\beta) \to \Theta(\Delta^n)$ est une cofibration triviale de catégories topologiques, et donc admet une rétraction (car tout les objets dans **Top** – **Cat** sont fibrants). Cela implique que $\Psi_\bullet\Theta_\bullet(A) \to \Psi_\bullet\Theta_\bullet(B)$ est un monomorphisme degré par degré d'ensembles bisimpliciaux. Enfin, en appliquant diag on obtient que

$$\mathrm{diag}\Psi_\bullet\Theta_\bullet(A) \to \mathrm{diag}\Psi_\bullet\Theta_\bullet(B)$$

est un monomorphisme dans **sSet** et donc une cofibration acyclique.

□

Corollaire 5.1.8. *En gardant les notations de la peuve du lemme 5.1.6, la flèche d'ensembles bisimplicaux* $\Psi_\bullet \mathbf{C}_\bullet \to X$ *est une équivalence diagonale. Par conséquent* $\Psi_\bullet \mathbf{C}_\bullet \to \Psi_\bullet \mathbf{D}_\bullet$ *est une équivalence faible diagonale.*

Démonstration. Puisque le foncteur diag commute aux pushouts, les lemmes 5.1.6 et 5.1.7 impliquent que $\mathrm{diag}\Psi_\bullet \mathbf{C}_\bullet \to \mathrm{diag}X$ est une équivalence. Le lemme 5.1.6 implique que $\mathrm{diag}X \to \mathrm{diag}\Psi_\bullet \mathbf{D}_\bullet$ est une équivalence, et donc par la propriété (two out of three) le morphisme bisimplicial $\Psi_\bullet \mathbf{C}_\bullet \to \Psi_\bullet \mathbf{D}_\bullet$ est une équivalence diagonale. $\square$

Lemme 5.1.9. *Les foncteurs* $k^!$ *et* $\widetilde{\mathrm{N}_\bullet}$ *commutent avec les colimites filtrantes.*

Démonstration. Le fait que $k^!$ commute avec les colimites filtrantes est une conséquence de l'adjonction $(k_!, k^!)$ et que le foncteur $\mathbf{hom}_{\mathbf{sSet}}(k_!\Delta^n, -)$ commute avec les colimites dirigées. De la même manière le foncteur $\widetilde{\mathrm{N}_\bullet}$ commute avec les colimites filtrante car $\Xi(\Delta^n)$ est un petit objet dans **sSet** − **Cat** $\square$

Corollaire 5.1.10. *Le foncteur* $\mathrm{diag}\Psi_\bullet$ *commute avec les colimites dirigées.*

Démonstration. Le foncteur diag préserve les colimites, car il admet un adjoint à droite, et le foncteur sing : **Top** − **Cat** → **sSet** − **Cat** commute avec les colimites filtrante par 4.3.5. Les foncteurs $k^!$ et $\widetilde{N}$ commutent avec les colimites dirigées par 5.1.9. Puisque les colimites dans **Top** − **sCat** se calculent niveau par niveau, on conclut que $\mathrm{diag}\Psi_\bullet$ commute avec les colimites dirigées.

$\square$

Enfin, on peut prouver le théorème 5.1.4.

Démonstration. (du théorème 5.1.4) C'est une conséquence de 3.1.2, 5.1.10, et 5.1.8. $\square$

5.2 Propriétés de la structure diagonale sur Top − sCat

Dans ce paragraphe on montre quelques propriétés de la structure modèle diagonale sur catégorie **Top** − **sCat**. Avant de commencer, notons qu'on peut calculer le **map** de la catégorie modèle **Top** − **sCat** en utilisant l'adjonction entre (**sSet**, **Kan**) et **Top − sCat**. Soit A un ensemble simplicial, et soit $\mathbf{C}_\bullet$ une catégorie topologique simpliciale.

Remarque 5.2.1. *L'ensemble bisimplicial $\Psi_\bullet \mathbf{C}_\bullet = k^! \widetilde{\mathrm{N}}_\bullet \mathrm{sing} \mathbf{C}_\bullet$ est équivalent degré par degré à $\widetilde{\mathrm{N}}_\bullet G \mathrm{sing} \mathbf{C}_\bullet$, où le foncteur G (4.2.8) associe à chaque catégorie dans* **sSet − sCat** *son ∞-groupoïde degré par degré. Soit $\mathbf{C}_\bullet$ une objet fibrant dans* **Top − sCat**, *en utilisant le théorème 3.3.13 on a les isomorphismes suivants dans* Ho(**sSet**) *:*

$$
\begin{aligned}
\mathbf{map}_{\mathbf{Top-sCat}}(\Theta_\bullet d_*(A), \mathbf{C}_\bullet) &\sim \mathbf{map}_{\mathbf{sSet}}(A, \mathrm{diag} \Psi_\bullet \mathbf{C}_\bullet) && (5.1)\\
&\sim \mathbf{map}_{\mathbf{sSet}}(A, \mathrm{diag} \widetilde{\mathrm{N}}_\bullet G \mathrm{sing} \mathbf{C}_\bullet) && (5.2)\\
&\sim \mathbf{Map}(A, \mathrm{diag} \widetilde{\mathrm{N}}_\bullet G \mathrm{sing} \mathbf{C}_\bullet). && (5.3)
\end{aligned}
$$

Le foncteur **Map** est l'adjoint à droite du produit cartésien dans **sSet**.

5.2.1 Propreté à gauche

Dans ce paragraphe on montre que **Top − sCat** est propre à gauche. Commençant d'abord par donner quelques propriétés sur les cofibrations.

Lemme 5.2.2. *Si $i : A \to B$ est une cofibration génératrice pour* $\mathbf{sSet}^2$ *(munie de la structure modèle de Moerdijk), alors $\Theta_\bullet i : \Theta_\bullet A \to \Theta_\bullet B$ est une inclusion de catégorie. De plus $\Psi_\bullet \Theta_\bullet i : \Psi_\bullet \Theta_\bullet A \to \Psi_\bullet \Theta_\bullet B$ est un monomorphisme dans* $\mathbf{sSet}^2$

Démonstration. Comme dans la preuve de 5.1.6 l'application $i_m : A_m \to B_m$ s'écrit

$$i_m : A_m \to B_m' \coprod_{\beta \in \Delta^n(m) \setminus \partial \Delta^n(m)} \Delta^n.$$

Or la corestriction $i_m' : A_m \to B_m'$ est une cofibration triviale dans **sSet** et donc $\Theta i_m' : \Theta A_m \to \Theta B_m'$ est une cofibration triviale dans **Top − Cat**, ce qui explique l'existence d'une rétraction puisque tous les objets sont fibrants. Par conséquent, i_m est une inclusion de catégorie, et Ψi_m est une un monomorphisme (car on a une section). □

Les résultats qui suivent concerneront tous les pushouts dans **Top − sCat** le long de $\Theta_\bullet(A) \to \Theta_\bullet(B)$, où $A \to B$ est une cofibration génératrice dans $\mathbf{sSet}^2$ (munie de la structure modèle de Moerdijk).

Lemme 5.2.3. *Soit* $\mathbf{A}_\bullet \to \mathbf{B}_\bullet$ *une cofibration cellulaire obtenue par un pushout dans* **Top − sCat** *d'une cofibration génératrice* $\Theta_\bullet i : \Theta_\bullet Z \to \Theta_\bullet W$. *Alors* $\mathbf{A}_\bullet \to \mathbf{B}_\bullet$ *est une inclusion de catégorie topologique degré par degré, et* $\Psi_\bullet \mathbf{A}_\bullet \to \Psi_\bullet \mathbf{B}_\bullet$ *est un monomorphisme dans* $\mathbf{sSet}^2$

Démonstration. Tout d'abord, on a

$$\mathbf{B}_m = (\mathbf{A}_m \coprod_{\Theta Z_m} \Theta W_m^{'}) \coprod_{\beta \in (\Delta^n(m) \backslash \partial \Delta^n(m))} \Theta(\Delta^n),$$

où la coréstriction

$$\Theta_\bullet i_m^{'} : \mathbf{A}_m \to \mathbf{A}_m \coprod_{\Theta Z_m} \Theta W_m^{'}$$

est une cofibration triviale entre objets fibrants dans **Top − Cat**, cela implique que $\Theta_\bullet i_m^{'}$ admet une rétraction et donc que $\Theta_\bullet i_m$ est une inclusion de catégorie topologique degré par degré, et donc

$$\Psi_\bullet \mathbf{A}_\bullet \to \Psi_\bullet \mathbf{B}_\bullet$$

est un monomorphisme dans $\mathbf{sSet}^2$. □

Corollaire 5.2.4. *Soit* $i : \mathbf{A}_\bullet \to \mathbf{B}_\bullet$ *une cofibration quelconque dans* **Top − sCat**, *alors* i_m *est une inclusion de catégorie et* $\Psi_\bullet i$ *est un monomorphisme dans* $\mathbf{sSet}^2$

Démonstration. On fait d'abord pour les cofibrations cellulaires qui est une conséquence facile de 5.2.3. En remarquant qu'inclusion et monomorphisme sont des notions équivalentes dans la catégorie **sSet** (resp. **Top**). Les monomorphismes sont fermée sous rétracte, on conclut que toute cofibration dans **Top − sCat** est une inclusion de catégories (degré par degré). D'autre part, $\Psi = k^! \widetilde{\mathrm{N}_\bullet}\mathrm{sing}$ conserve les inclusions, cela permet de conclure que $\Psi_\bullet i$ est un monomorphisme dans $\mathbf{sSet}^2$.

□

Theorem 5.2.5. *La catégorie* **Top − sCat** *est propre à gauche*

La preuve se fait en plusieurs étapes.

Lemme 5.2.6. *Si* $i : A \to B$ *est une cofibration génératrice pour* $\mathbf{sSet}^2$, *alors le pushout d'une équivalence faible le long de* $\Theta_\bullet A \to \Theta_\bullet B$ *est encore une équivalence faible dans* **Top − sCat**.

Démonstration. Rappelons encore une fois que

$$A = \coprod_{\beta \in \partial \Delta^n} C^\beta$$

avec $C^\beta \to \Delta^n$ une cofibration triviale. Soit le diagramme de pushout dans **Top − sCat** suivant :

$$\begin{tikzcd} \Theta_\bullet(A) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d] & \mathbf{C}_\bullet \arrow[d] \\ \Theta_\bullet(B) \arrow[r] & \mathbf{D}_\bullet . \end{tikzcd}$$

Par le même raisonnement que dans le lemme 5.1.6, le foncteur $\mathrm{diag}\Psi_\bullet$ envoie ce pushout vers un carré homotopiquement cocartésien dans **sSet**. De plus $\Theta C^\beta \to \Theta\Delta^n$ admet une section, car c'est une cofibration triviale entre objets fibrants dans **Top − Cat**. Cela implique que

$$\mathrm{diag}\Psi_\bullet\Theta_\bullet(A) \to \mathrm{diag}\Psi_\bullet\Theta_\bullet(B)$$

est une cofibration dans **sSet**. Le diagramme de pushout dans **sSet** résume la situation :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{diag}\Psi_\bullet\Theta_\bullet(A) \arrow[rr, "\sim"] \arrow[d] & & \mathrm{diag}\Psi_\bullet\mathbf{C}_\bullet \arrow[d] \arrow[ddr, bend left] & \\ \mathrm{diag}\Psi_\bullet\Theta_\bullet(B) \arrow[r, "g"] \arrow[drrr, bend right, "f"] & \mathrm{diag}(\Psi_\bullet\Theta_\bullet(B) \sqcup_{\Psi_\bullet\Theta_\bullet(A)} \Psi_\bullet\mathbf{C}_\bullet) \arrow[drr, dotted, "h", "\sim"'] & & \\ & & & \mathrm{diag}\Psi_\bullet\mathbf{D}_\bullet . \end{tikzcd}$$

Puisque **sSet** est propre à gauche, cela implique que g est une équivalence faible, et par conséquent f est une équivalence faible. □

Lemme 5.2.7. *Soit* $\mathbf{A}_\bullet \to \mathbf{B}_\bullet$ *une cofibration obtenue par un pushout d'une cofibration génératrice* $\Theta_\bullet(A) \to \Theta_\bullet(B)$ *dans* **Top − sCat**. *Le foncteur* $\Psi_\bullet$ *envoie tout pushout*

$$\begin{tikzcd} \mathbf{A}_\bullet \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{C}_\bullet \arrow[d] \\ \mathbf{B}_\bullet \arrow[r] & \mathbf{D}_\bullet \end{tikzcd}$$

en un carré homotopiquement cocartésien dans $\mathbf{sSet}^2$. *Plus généralement si* $\mathbf{A}_\bullet \to \mathbf{B}_\bullet$ *est une cofibration cellulaire dans* **Top − sCat**, *alors on a la même conclusion.*

Démonstration. Par le même raisonnement que dans 5.1.6 on a

$$\mathbf{B}_m = (\mathbf{A}_m \coprod_{\Theta A_m} \Theta B'_m) \coprod \coprod_{\beta \in (\Delta^n(m) \setminus \partial\Delta^n(m))} \Theta(\Delta^n)$$

avec la propriété que $\mathbf{A}_m \to \mathbf{A}_m \coprod_{\Theta A_m} \Theta B^{'}_m$ est une cofibration triviale dans **Top − Cat**, et donc admet une rétraction car tous les objets sont fibrants. Par conséquent $\Psi\mathbf{A}_m \to \Psi(\mathbf{A}_m \coprod_{\Theta A_m} \Theta B^{'}_m)$ est une cofibration triviale dans **sSet**. D'un autre côté,

$$\mathbf{D}_m = \mathbf{C}_m \coprod_{\mathbf{A}_m} \mathbf{A}_m \coprod_{\Theta A_m} \Theta B^{'}_m \coprod \coprod_{\beta \in (\Delta^n(m) \setminus \partial\Delta^n(m))} \Theta(\Delta^n);$$

en appliquant le foncteur Ψ, la propriété de pushout nous donne l'application unique d'ensembles simpliciaux :

$$\Psi\mathbf{C}_m \coprod_{\Psi\mathbf{A}_m} \Psi\mathbf{B}_m \to \Psi(\mathbf{C}_m \coprod_{\mathbf{A}_m} \mathbf{B}_m).$$

Puisque $\mathbf{A}_\bullet \to \mathbf{B}_\bullet$ est obtenu comme un pushout d'une cofibration génératrice dans **Top − sCat** on a que

$$\Psi\mathbf{C}_m \coprod_{\Psi\mathbf{A}_m} \Psi\mathbf{B}_m = \Psi\mathbf{C}_m \coprod_{\Psi\mathbf{A}_m} \Psi(\mathbf{A}_m \coprod_{\Theta A_m} \Theta B^{'}_m) \coprod \coprod_{\beta \in (\Delta^n(m) \setminus \partial\Delta^n(m))} \Psi\Theta(\Delta^n)$$

Puisque $\Psi\mathbf{A}_m \to \Psi(\mathbf{A}_m \coprod_{\Theta A_m} \Theta B^{'}_m)$ est une cofibration triviale, on a que

$$\Psi\mathbf{C}_m \to \Psi\mathbf{C}_m \coprod_{\Psi\mathbf{A}_m} \Psi(\mathbf{A}_m \coprod_{\Theta A_m} \Theta B^{'}_m)$$

est aussi une cofibration triviale. D'un autre coté

$$\Psi\mathbf{C}_m \to \Psi(\mathbf{C}_m \coprod_{\Theta A_m} \Theta B^{'}_m) = \Psi(\mathbf{C}_m \coprod_{\mathbf{A}_m} \mathbf{A}_m \coprod_{\Theta A_m} \Theta B^{'}_m)$$

est une équivalence par 5.1.5. On a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
\Psi\mathbf{C}_m \arrow[rr, "\sim"] \arrow[dr, "\sim"'] & & \Psi\mathbf{C}_m \coprod_{\Psi\mathbf{A}_m} \Psi(\mathbf{A}_m \coprod_{\Theta A_m} \Theta B^{'}_m) \arrow[dl, "\sim"] \\
& \Psi(\mathbf{C}_m \coprod_{\Theta A_m} \Theta B^{'}_m). &
\end{tikzcd}$$

Par conséquent

$$\Psi\mathbf{C}_m \coprod_{\Psi\mathbf{A}_m} \Psi(\mathbf{A}_m \coprod_{\Theta A_m} \Theta B^{'}_m) \coprod \coprod_{\beta \in (\Delta^n(m) \setminus \partial\Delta^n(m))} \Psi\Theta(\Delta^n) \to \Psi(\mathbf{C}_m \coprod_{\Theta A_m} \Theta B^{'}_m) \coprod \coprod_{\beta \in (\Delta^n(m) \setminus \partial\Delta^n(m))} \Psi\Theta$$

est une équivalence faible.

On conclut que

$$\Psi\mathbf{C}_m \coprod_{\Psi\mathbf{A}_m} \Psi\mathbf{B}_m \to \Psi\mathbf{D}_n$$

est une équivalence faible.
Pour les cofibrations cellulaires, on écrit $i : \mathbf{A}_\bullet \to \mathbf{B}_\bullet$ comme une composition transfinie de morphismes

$$\mathbf{A}_\bullet \to \mathbf{A}^1_\bullet \to \dots \mathbf{A}^\alpha_\bullet \to \mathbf{A}^{\alpha+1}_\bullet \to \dots \to \mathbf{B}_\bullet.$$

On pose $\mathbf{C}^\alpha_\bullet = \mathbf{C}_\bullet \coprod_{\mathbf{A}_\bullet} \mathbf{A}^\alpha_\bullet$, alors le morphisme $\mathbf{C}_\bullet \to \mathbf{D}_\bullet$ est la composition transfinie de

$$\mathbf{C}_\bullet \to \mathbf{C}^1_\bullet \to \dots \mathbf{C}^\alpha_\bullet \to \mathbf{C}^{\alpha+1}_\bullet \to \dots \to \mathbf{D}_\bullet$$

Par ce qui précède :

$$\Psi_\bullet \mathbf{A}^\alpha_\bullet \coprod_{\Psi_\bullet \mathbf{A}_\bullet} \Psi_\bullet \mathbf{C}_\bullet \to \Psi_\bullet \mathbf{C}^\alpha_\bullet$$

est une équivalence dans (degré par degré). De plus $\Psi_\bullet \mathbf{A}^\alpha_\bullet \to \Psi_\bullet \mathbf{A}^{\alpha+1}_\bullet$ est un monomorphisme dans $\mathbf{sSet}^2$ par 5.2.4. On conclut que :

$$\mathrm{colim}_\alpha \Psi_\bullet \mathbf{A}^\alpha_\bullet \coprod_{\Psi_\bullet \mathbf{A}_\bullet} \Psi_\bullet \mathbf{C}_\bullet \to \mathrm{colim}_\alpha \Psi_\bullet \mathbf{C}^\alpha_\bullet$$

est une équivalence. En remarquant que $\Psi_\bullet$ commutent avec les colimites dirigées 5.1.10, on conclut que

$$\Psi_\bullet \mathbf{B}_\bullet \coprod_{\Psi_\bullet \mathbf{A}_\bullet} \Psi_\bullet \mathbf{C}_\bullet \to \Psi_\bullet \mathbf{D}_\bullet$$

est une équivalence degré par degré, et donc une équivalence diagonale.

□

Corollaire 5.2.8. *Si $i : \mathbf{A}_\bullet \to \mathbf{B}_\bullet$ est comme dans le lemme 5.2.7, alors le pushout d'une équivalence faible le long de i est encore une équivalence faible.*

Démonstration. Soit le diagramme de pushout :

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{A}_\bullet \arrow[r, "\sim"] \arrow[d] & \mathbf{C}_\bullet \arrow[d] \\
\mathbf{B}_\bullet \arrow[r] & \mathbf{D}_\bullet .
\end{tikzcd}$$

En appliquant le foncteur $\mathrm{diag}\Psi_\bullet$ au diagramme précédent, on trouve un carré cocartésien homotopique. D'un autre coté par le lemme 5.2.4, le morphisme $\Psi_\bullet \mathbf{A}_\bullet \to \Psi_\bullet \mathbf{B}_\bullet$ est un monomorphisme dans $\mathbf{sSet}^2$, et par conséquent $\mathrm{diag}\Psi_\bullet \mathbf{A}_\bullet \to \mathrm{diag}\Psi_\bullet \mathbf{B}_\bullet$ est une cofibration dans $\mathbf{sSet}$. Le diagramme de pushout dans $\mathbf{sSet}$ suivant résume la situation :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{diag}\Psi_\bullet \mathbf{A}_\bullet \arrow[r, "\sim"] \arrow[d] & \mathrm{diag}\Psi_\bullet \mathbf{C}_\bullet \arrow[d] \arrow[ddr, bend left] & \\
\mathrm{diag}\Psi_\bullet \mathbf{B}_\bullet \arrow[r, "f"] \arrow[drr, bend right, "t"'] & X \arrow[dr, dotted, "g"] & \\
& & \mathrm{diag}\Psi_\bullet \mathbf{D}_\bullet
\end{tikzcd}$$

Puisque **sSet** est propre à gauche, f est une équivalence. De plus g est une équivalence par 5.2.7. Par conséquent t est une équivalence. □

Corollaire 5.2.9. *Si* $i : \mathbf{A}_\bullet \to \mathbf{B}_\bullet$ *est une cofibration* $I - Cell$ *dans* **Top − sCat**, *alors le pushout d'une équivalence faible le long de* i *est encore une équivalence.*

Démonstration. Considérons le pushout suivant :

$$\begin{tikzcd} \mathbf{A}_\bullet \arrow[r, "\sim"] \arrow[d] & \mathbf{C}_\bullet \arrow[d] \\ \mathbf{B}_\bullet \arrow[r] & \mathbf{D}_\bullet . \end{tikzcd}$$

On écrit $i : \mathbf{A}_\bullet \to \mathbf{B}_\bullet$ comme une composition transfinie de morphismes décrits dans le corollaire 5.2.8, c'est à dire

$$\mathbf{A}_\bullet \to \mathbf{A}_\bullet^1 \to \ldots \mathbf{A}_\bullet^\alpha \to \mathbf{A}_\bullet^{\alpha+1} \to \cdots \to \mathbf{B}_\bullet .$$

Si on pose $\mathbf{C}_\bullet^\alpha = \mathbf{C}_\bullet \bigsqcup_{\mathbf{A}_\bullet} \mathbf{A}_\bullet^\alpha$, alors le morphisme $\mathbf{C}_\bullet \to \mathbf{D}_\bullet$ est la composition transfinie de

$$\mathbf{C}_\bullet \to \mathbf{C}_\bullet^1 \to \ldots \mathbf{C}_\bullet^\alpha \to \mathbf{C}_\bullet^{\alpha+1} \to \cdots \to \mathbf{D}_\bullet .$$

Par le corollaire 5.2.8 $\mathrm{diag}\Psi_\bullet \mathbf{A}_\bullet^\alpha \to \mathrm{diag}\Psi_\bullet \mathbf{C}_\bullet^\alpha$ est une équivalence dans **sSet**. On conclut que

$$\mathbf{B}_\bullet = \mathrm{colim}_\alpha \mathbf{A}_\bullet^\alpha \to \mathrm{colim}_\alpha \mathbf{C}_\bullet^\alpha = \mathbf{D}_\bullet$$

est une équivalence faible. □

Lemme 5.2.10. *Si* $i' : \mathbf{A}'_\bullet \to \mathbf{B}'_\bullet$ *est une cofibration qui est un rétracte d'une cofibration cellulaire dans* **Top − sCat**, *alors le pushout d'une équivalence faible le long de* i' *est encore une équivalence.*

Démonstration. Par hypothèse $i' : \mathbf{A}'_\bullet \to \mathbf{B}'_\bullet$ est un rétracte d'une cofibration cellulaire $i : \mathbf{A}_\bullet \to \mathbf{B}_\bullet$. Soit un diagramme de pushout dans **Top − sCat**

$$\begin{tikzcd} \mathbf{A}'_\bullet \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "i'"] & \mathbf{C}_\bullet \arrow[d, "j'"] \\ \mathbf{B}'_\bullet \arrow[r] & \mathbf{B}'_\bullet \bigsqcup_{\mathbf{A}'_\bullet} \mathbf{C}_\bullet . \end{tikzcd}$$

La rétraction entre i et i' induit une rétraction entre $\mathbf{C}_\bullet \to \mathbf{B}'_\bullet \bigsqcup_{\mathbf{A}'_\bullet} \mathbf{C}_\bullet = \mathbf{D}'_\bullet$ et $\mathbf{C}_\bullet \to \mathbf{B}_\bullet \bigsqcup_{\mathbf{A}_\bullet} \mathbf{C}_\bullet = \mathbf{D}_\bullet$. Par conséquent,

$$t' : \Psi_\bullet \mathbf{B}'_\bullet \bigsqcup_{\Psi_\bullet \mathbf{A}'_\bullet} \Psi_\bullet \mathbf{C}_\bullet \to \Psi_\bullet \mathbf{D}'_\bullet$$

est un rétracte de

$$t:\ \Psi_\bullet\mathbf{B}_\bullet \coprod_{\Psi_\bullet\mathbf{A}_\bullet} \Psi_\bullet\mathbf{C}_\bullet \to \Psi_\bullet\mathbf{D}_\bullet.$$

Par le lemme 5.2.7 l'application t est une équivalence faible et donc $t^{'}$ est une équivalence faible (par rétracte). L'application $\mathrm{diag}\Psi_\bullet\mathbf{A}^{'}_\bullet \to \mathrm{diag}\Psi_\bullet\mathbf{B}^{'}_\bullet$ est une cofibration dans **sSet** par 5.2.4, et donc

$$\Psi_\bullet\mathbf{B}^{'}_\bullet \to \Psi_\bullet\mathbf{B}^{'}_\bullet \coprod_{\Psi_\bullet\mathbf{A}^{'}_\bullet} \Psi_\bullet\mathbf{C}_\bullet$$

est une équivalence diagonale car **sSet** est propre à gauche. Par conséquent

$$\Psi_\bullet\mathbf{B}^{'}_\bullet \to \Psi_\bullet\mathbf{D}^{'}_\bullet$$

est une équivalence diagonale car $t^{'}$ est une équivalence degré par degré et donc une équivalence diagonale. □

La preuve du théorème 5.2.5 est la suivante

Démonstration. C'est une conséquence de 5.2.10, puisque toute cofibration est un rétracte d'une cofibration cellulaire dans une catégorie modèle à génération cofibrante. □

5.2.2 Cellularité de Top − sCat

Dans ce paragraphe on montre que **Top − sCat** est une catégorie cellulaire (cf 3.3.8).

Lemme 5.2.11. *Les domaines et les codomaines des cofibrations génératrices de la catégorie modèle* **Top − sCat** *sont compacts.*

Démonstration. Supposons que $\mathbf{C}_\bullet \to \mathbf{D}_\bullet$ un est élément de $I - Cell$ dans la catégorie **Top − sCat**. Soit un morphisme $\mathbf{A}_\bullet \to \mathbf{D}_\bullet$, où $\mathbf{A}_\bullet = \Theta_\bullet d_* X$ est le (co)domaine d'une cofibration génératrice dans **Top − sCat**. Le morphisme $\mathbf{C}_\bullet \to \mathbf{D}_\bullet$ s'écrit comme une composition transfinie

$$\mathbf{C}_\bullet = \mathbf{C}^0_\bullet \to \mathbf{C}^1_\bullet \ldots \mathbf{C}^s_\bullet \to \ldots \mathbf{D}_\bullet.$$

En appliquant le foncteur $\mathrm{diag}\Psi_\bullet$ à ce diagramme on obtient :

$$\mathrm{diag}\Psi_\bullet\mathbf{C}_\bullet = \mathrm{diag}\Psi_\bullet\mathbf{C}^0_\bullet \to \mathrm{diag}\Psi_\bullet\mathbf{C}^1_\bullet \cdots \to \mathrm{diag}\Psi_\bullet\mathbf{C}^s_\bullet \to \ldots \mathrm{diag}\Psi_\bullet\mathbf{D}_\bullet.$$

Mais $\mathrm{diag}\Psi_\bullet\mathbf{C}^s_\bullet \to \mathrm{diag}\Psi_\bullet\mathbf{C}^{s+1}_\bullet$ est une cofibration dans **sSet** par 5.2.2 Un morphsime $\mathbf{A}_\bullet \to \mathbf{D}_\bullet$ est la même chose que la donnée d'un morphisme dans **sSet** $f : X \to$

$\mathrm{diag}\Psi_\bullet\mathbf{D}_\bullet$ par adjonction. Puisque X est compact dans **sSet** cela implique que f se factorise pour un certain s par $g : X \to \mathrm{diag}\Psi_\bullet\mathbf{C}^s_\bullet$. En utilisant l'adjonction, on conclut que $\mathbf{A}_\bullet \to \mathbf{D}_\bullet$ se factorise par $\Theta_\bullet d_* X \to \mathbf{C}^s_\bullet$. □

Lemme 5.2.12. *Les domaines des cofibrations génératrices acycliques sont petits relativement aux $I - Cell$ dans* **Top − sCat***.*

Démonstration. On garde les mêmes notations que dans le lemme 5.2.11. Soit la colimite dirigée $\mathrm{colim}_s\mathbf{C}^s_\bullet$, tel que $\mathbf{C}^i_\bullet \to \mathbf{C}^{i+1}_\bullet$ est un élément de $I - Cell$. Le but est de montrer que $\mathbf{hom}_{\mathbf{Top-sCat}}(\mathbf{A}_\bullet, -)$ commute avec ces colimites dirigées, où $\mathbf{A}_\bullet = \Theta_\bullet d_* X$ est le domaine d'un cofibration acyclique dans **Top − sCat**. Par adjonction

$$\mathbf{hom}_{\mathbf{Top-sCat}}(\mathbf{A}_\bullet, \mathrm{colim}_s\mathbf{C}^s_\bullet) = \mathbf{hom}_{\mathbf{sSet}}(X, \mathrm{diag}\Phi_\bullet\mathrm{colim}_s\mathbf{C}^s_\bullet).$$

Or $\mathrm{diag}\Phi_\bullet$ commute avec les colimites dirigées, donc

$$\mathbf{hom}_{\mathbf{sSet}}(X, \mathrm{diag}\Phi_\bullet\mathrm{colim}_s\mathbf{C}^s_\bullet) = \mathbf{hom}_{\mathbf{sSet}}(X, \mathrm{colim}_s\mathrm{diag}\Phi_\bullet\mathbf{C}^s_\bullet).$$

Mais tous les objets dans X sont petits dans **sSet**. Par conséquent :

$$\mathbf{hom}_{\mathbf{sSet}}(X, \mathrm{colim}_s\mathrm{diag}\Phi_\bullet\mathbf{C}^s_\bullet) = \mathrm{colim}_s\mathbf{hom}_{\mathbf{sSet}}(X, \mathrm{diag}\Phi_\bullet\mathbf{C}^s_\bullet).$$

Enfin par adjonction, on conclut que :

$$\mathbf{hom}_{\mathbf{Top-sCat}}(\mathbf{A}_\bullet, \mathrm{colim}_s\mathbf{C}^s_\bullet) = \mathrm{colim}_s\mathbf{hom}_{\mathbf{Top-sCat}}(\mathbf{A}_\bullet, \mathbf{C}^s_\bullet).$$

Par le lemme 3.2.5 on conclut que les domaines des cofibrations génératrices (acycliques) dans **Top − sCat** sont petits par rapport aux $I - Cell$. □

Lemme 5.2.13. *Les cofibrations dans* **Top − sCat** *sont des monomorphsimes effectifs.*

Démonstration. Soit $\mathbf{C}_\bullet \overset{i}{\hookrightarrow} \mathbf{D}_\bullet$ une cofibration dans **Top − sCat** (et donc une inclusion de catégorie). Le but est de calculer l'égalisateur du diagramme suivant :

$$\mathbf{D}_\bullet \rightrightarrows \mathbf{D}_\bullet \sqcup_{\mathbf{C}_\bullet} \mathbf{D}_\bullet$$

où les deux flèches sont des inclusions de catégorie provenant du diagramme du pushout suivant :

$$\begin{tikzcd} \mathbf{C}_\bullet \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, hook, "i"] & \mathbf{D}_\bullet \arrow[d, hook, "i_1"] \\ \mathbf{D}_\bullet \arrow[r, hook, "i_2"'] & \mathbf{D}_\bullet \sqcup_{\mathbf{C}_\bullet} \mathbf{D}_\bullet \end{tikzcd}$$

Nous affirmons que l'égalisateur est exactement

$$\mathbf{C}_\bullet \xrightarrow{i} \mathbf{D}_\bullet \rightrightarrows \mathbf{D}_\bullet \coprod_{\mathbf{C}_\bullet} \mathbf{D}_\bullet$$

Tout d'abord c'est bien un diagramme commutatif. Supposons que $\mathbf{C}'_\bullet$ est un autre candidat pour l'égalisateur. Puisque le foncteur Ob : **sCat** → **sSet** commute avec les limites et les colimites (car Ob admet un adjoint à gauche et à droite), il existe une unique flèche t qui fait commuter le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Ob}\mathbf{C}'_\bullet \arrow[d, dotted, "t"] \arrow[dr, "\mathrm{Ob}(F)"] & & \\ \mathrm{Ob}\mathbf{C}_\bullet \arrow[r, "\mathrm{Ob}(i)"] & \mathrm{Ob}\mathbf{D}_\bullet \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & \mathrm{Ob}\mathbf{D}_\bullet \coprod_{\mathrm{Ob}\mathbf{C}_\bullet} \mathrm{Ob}\mathbf{D}_\bullet \end{tikzcd}$$

En effet, les cofibrations dans **Top** – **sCat** sont des monomorphismes sur les objets 5.2.4, et **sSet** est cellulaire [11]. Soit maintenant γ un morphisme dans $\mathbf{C}'_\bullet$ tel que $i_1F(\gamma) = i_2F(\gamma)$. Puisque $i_1 : \mathbf{C}_\bullet \to \mathbf{D}_\bullet \coprod_{\mathbf{C}_\bullet} \mathbf{D}_\bullet$ et $i_2 : \mathbf{C}_\bullet \to \mathbf{D}_\bullet \coprod_{\mathbf{C}_\bullet} \mathbf{D}_\bullet$ sont des injections de catégories, cela implique que $F(\gamma)$ est, en fait, un morphisme dans $\mathbf{C}_\bullet$. On conclut que tout morphisme $F : \mathbf{C}'_\bullet \to \mathbf{D}_\bullet$ dans **Top** – **sCat** tel que $i_1F = i_2F$ se factorise de manière unique comme la composition

$$\mathbf{C}'_\bullet \to \mathbf{C}_\bullet \to \mathbf{D}_\bullet.$$

□

Corollaire 5.2.14. *La catégorie modèle* **Top** – **sCat** *est cellulaire.*

Chapitre 6

$\mathbb{K}$-Théorie algébrique et Théories Cohomologiques

6.1 $\mathbb{K}$-théorie d'une catégorie enrichie

Ce chapitre est informel de point de vue mathématique. Nous faisons quelques réflexions sur comment on peut continuer la recherche dans cette direction. L'idée initiale qui nous a inspiré est l'analogie entre la $\mathbb{K}$-théorie algébrique et la $\mathbb{K}$-théorie topologique. Et plus généralement, on aurait voulu répondre à la question suivante

> **Que sont les théories cohomologiques des (petites) catégories (enrichies) ?**

À la question

> **Que sont les théories de cohomologies des espaces topologiques (pointés) ?**

La réponse est bien connue dans la littérature mathématique : la catégorie modèle stable des spectres (symétriques) $\mathbf{Sp}^{\mathbb{N}}(\mathbf{Top}_*)$ ou $(\mathbf{Sp}^{\Sigma}(\mathbf{sSet}_*))$. Plus précisément ce sont les Ω-spectres, c'est à dire les objets fibrants dans la catégorie modèle stable. Le 0-espace d'un Ω-spectre "ressemble" à un groupe abélien, en particulier des E_∞-algèbres dans le langage des opérades. Et donc, à la question : que signifie une théorie cohomologie pour les espaces topologiques ? on a deux approches différentes : une provient de la théorie des catégories modèles stables, et l'autre du langage des opérades. C'est dans cette optique qu'on s'est lancé à la recherche de la signification de la notion de "théorie cohomologique" pour les catégories.
Notre source d'inspiration était la $\mathbb{K}$-théorie algébrique définie initialement par Quillen pour les catégories exactes, puis généraliser par Waldhausen pour les catégorie qui

portent aujourd'hui son nom. On a commencé, par la catégorie des petites catégories **Cat**. Il est devenu assez clair qu'il fallait passer à la catégorie **sCat** pour avoir "plus de place". Puis on a construit la catégorie modèle stable $\mathbf{Sp}^{\mathbb{N}}(\mathbf{sCat}_*)$ qui nous a permis de définir les Ω-spectre, et par conséquent une notion de "théorie cohomologique pour les catégories simpliciales". On a constaté que cela marche, car **sCat** est propre, cellulaire, et (co)tensorisée sur **sSet** de manière cohérente.
Trouver une notion de $\mathbb{K}$-théorie algébrique pour $\mathbf{Top}-\mathbf{sCat}$, la catégorie des petites simpliciales catégories enrichies sur **Top** s'est avéré plus délicat. Ce qui ne marche pas est de trouver une "bonne" (co)tensorisation sur **sSet**, afin de construire la catégorie des spectres . Cela nous a amené à poser des questions plus générales sur la théorie des catégories modèles. Le problème se pose ainsi :

> **Etant donnée une catégorie modèle M propre à droite et cellulaire, existe-il une catégorie modèle C celullaire, propre, (co)tensorisée par sSet et Quillen équivalente à M ?**

Dans ce cas les théories cohomologiques sur $\mathbf{M}$ peuvent être étudiées en considérant $\mathbf{Sp}^{\mathbb{N}}(\mathbf{C}_*)$.
Il existe quelques approches à ce type de question mais pour des fins différentes, nous semble-t-il. Dans les articles [20] et [4], les auteurs donnent certaines conditions sur la catégorie $\mathbf{M}$ (essentiellement propreté à gauche et cellularité) et montre que $\mathbf{M}$ est Quillen équivalente à une catégorie simpliciale modèle ([10], chapitre II).
Soit $\mathbf{M}$ une catégorie modèle propre et cellulaire. S'il existe une catégorie $\mathbf{C}$ simpliciale modèle propre à gauche et cellulaire **Quillen équivalente** à $\mathbf{M}$, alors les conséquences sont très intéressantes : c'est l'existence de catégorie modèle stable $\mathbf{Sp}^{\mathbb{N}}(\mathbf{C}_*)$, et donc l'existence des Ω-spectres qui définiront les théories cohomologiques sur la catégorie $\mathbf{M}_*$.
On exprime cette question sous forme de conjecture, mais on pense pouvoir donner une esquisse d'une démonstration.

Définition 6.1.1. *Soit* $\mathbf{M}$ *une catégorie modèle. On dit que* $\mathbf{M}$ *est* ***une catégorie simpliciale faible*** *si* $\mathbf{M}$ *est tensorisée et cotensorisé sur* **sSet** *tel que les foncteur adjoints suivants forme un couple de Quillen :*

–
$$X_\bullet \otimes - : \mathbf{M} \to \mathbf{M},$$

–
$$(-)^{X_\bullet} : \mathbf{M} \to \mathbf{M},$$

pour tout $X_\bullet \in \mathbf{sSet}$.

Conjecture 6.1.2. *Soit* $\mathbf{M}$ *une catégorie modèle cellulaire et propre à gauche, alors il existe une catégorie modèle simpliciale faible* $\mathbf{C}$ *cellulaire, propre à gauche qui est Quillen équivalente à* $\mathbf{M}$.

Nous donnons une piste possible pour la preuve de 6.1.2. Cette esquisse se repose essentiellement sur les idées de Dugger [4].

Theorem 6.1.3 ([4], 1.2)**.** *Soit* $\mathbf{M}$ *une catégorie cellulaire et propre à gauche, alors il existe une structure modèle* ***simpliciale*** *sur* $[\Delta^{op}, \mathbf{M}]$ *et une paire de foncteurs de Quillen adjoints*

$$\mathbf{M} \underset{ev_0}{\overset{c_*}{\rightleftarrows}} [\Delta^{op}, \mathbf{M}]$$

telle que (c_*, ev_0) *est une équivalence de Quillen. De plus, la structure modèle sur* $[\Delta^{op}, \mathbf{M}]$ *est définie comme suit :*

– *Les équivalence faibles sont les* hocolim*-équivalences.*

– *Le cofibrations sont les Reedy-cofibrations.*

Cette structure sera notée $[\Delta^{op}, \mathbf{M}]^{hc}$*. L'abréviation hc est pour homotopie colimite.*

Le but est de voir que $[\Delta^{op}, \mathbf{M}]$ avec la structure décrite auparavant est cellulaire et propre à gauche.
Dugger ([4], 4.1) définit une nouvelle (co)tensorisation de $[\Delta^{op}, \mathbf{M}]^{Reedy}$ sur **sSet**, oú la catégorie $[\Delta^{op}, \mathbf{M}]^{Reedy}$ est munie de la structure modèle de Reedy. Cette (co)tensorisation ne rend pas $[\Delta^{op}, \mathbf{M}]$ une catégorie modèle simpliciale au sens de ([10], chapitre II). Par contre $[\Delta^{op}, \mathbf{M}]$ est une catégorie modèle simpliciale faible aux sens de la définition 6.1.1. De plus, $[\Delta^{op}, \mathbf{M}]^{Reedy}$ est propre à gauche et cellulaire, car $\mathbf{M}$ l'est.
Puisque $\mathbf{M}$ est une catégorie modèle à génération cofibrante, il existe une structure modèle projective sur $[\Delta^{op}, \mathbf{M}]$. Cette structure modèle sera notée $[\Delta^{op}, \mathbf{M}]^{BK}$. L'abréviation "BK" est pour Bousfield-Kan. Notons aussi que $\mathbf{M}$ est propre à gauche et cellulaire, et donc $[\Delta^{op}, \mathbf{M}]^{BK}$ l'est aussi.

Theorem 6.1.4 ([4], 5.2)**.** *Il existe un ensemble de morphismes* S *dans* $[\Delta^{op}, \mathbf{M}]$ *tel que l'adjonction suivante est une équivalence de Quillen :*

$$L_S[\Delta^{op}, \mathbf{M}]^{BK} \underset{c_*}{\overset{\mathrm{colim}}{\rightleftarrows}} \mathbf{M},$$

L_S *étant la localisation à gauche.*
De plus les équivalences faibles dans $L_S[\Delta^{op}, \mathbf{M}]^{BK}$ *sont exactement les* hocolim*-équivalences.*

Le foncteur identité nous donne une comparaison entre $[\Delta^{op}, \mathbf{M}]^{Reedy}$ et $[\Delta^{op}, \mathbf{M}]^{BK}$, qui est en fait une équivalence de Quillen. De plus cette adjonction se prolonge à une équivalence de Quillen :

$$L_S[\Delta, \mathbf{M}]^{BK} \underset{id}{\overset{id}{\rightleftarrows}} L_S[\Delta^{op}, \mathbf{M}]^{Reedy}.$$

Remarquer que les cofibrations dans la catégorie $L_S[\Delta^{op}, \mathbf{M}]^{Reedy}$ et dans la catégorie $[\Delta^{op}, \mathbf{M}]^{Reedy}$ sont les mêmes puisque une localisation à gauche laisse les cofibrations intacts.

Corollaire 6.1.5. *La catégories modèle $L_S[\Delta^{op}, \mathbf{M}]^{Reedy}$ est Quillen équivalente à $\mathbf{M}$.*

Démonstration. La catégorie modèle $L_S[\Delta^{op}, \mathbf{M}]^{Reedy}$ est Quillen équivalente à $L_S[\Delta^{op}, \mathbf{M}]^{BK}$ et $L_S[\Delta^{op}, \mathbf{M}]^{BK}$ est Quillen équivalente à $\mathbf{M}$. Le fait que $L_S[\Delta^{op}, \mathbf{M}]^{Reedy}$ soit propre à gauche et cellulaire découle du fait que $[\Delta^{op}, \mathbf{M}]^{Reedy}$ l'est, car c'est une localisation à gauche d'une catégorie propre à gauche et cellulaire ([11], 4.1.1). □

La catégorie $[\Delta^{op}, \mathbf{M}]^{Reedy}$ est une catégorie modèle simpliciale faible propre à gauche et cellulaire. De même la catégorie $L_S[\Delta^{op}, \mathbf{M}]^{BK}$ est une catégorie modèle propre à guache et cellulaire.
Maintenant, on discute la version pointée, c'est à dire étant donnée une catégorie modèle $\mathbf{M}$ on aimerait lui associer "la" catégorie pointée. Soit $*$ l'objet terminal dans $\mathbf{M}$. Notons par $\mathbf{M}_* = * \downarrow \mathbf{M}$ la catégorie dont les objets sont $* \to M$ où $M \in \mathbf{M}$ et dont les morphismes sont les morphismes de $\mathbf{M}$ qui préservent le point de base. On a l'adjonction suivante :

$$\mathbf{M} \underset{U}{\overset{(-)_+}{\rightleftarrows}} \mathbf{M}_*.$$

où $M_+ = M \sqcup *$ et U est le foncteur oubli. Cette adjonction induit une structure modèle sur $\mathbf{M}_*$. Supposons que $\mathbf{M}$ est une catégorie modèle simpliciale, on aimerait définir un analogue pointé, c'est à dire une structure modèle simpliciale pointée sur $\mathbf{M}_*$. Cela semble une conséquence quasi immédiate.
Si on suppose que $\mathbf{M}$ est une catégorie modèle simpliciale propre à gauche et cellulaire alors $\mathbf{M}_*$ est une catégorie modèle simpliciale pointée propre et cellualire. Par conséquent on peut définir la catégorie stable des spectres $\mathbf{Sp}^{\mathbb{N}}\mathbf{M}_*$, en utilisant [13]. Nous pensons que $\mathbf{Sp}^{\mathbb{N}}\mathbf{M}_*$ est aussi simpliciale pointée et même enrichie naturellement sur $\mathbf{Sp}^{\mathbb{N}}$.
À ce stade, on a donné un processus général pour définir la catégorie de spectres pour une catégorie modèle simpliciale propre à gauche et cellulaire. Pour une catégorie modèle $\mathbf{M}$ propre à gauche et cellulaire mais pas forcement simpliciale, on construit d'abord la catégorie modèle $\mathbf{C} = L_S[\Delta_{op}, \mathbf{M}]^{Reedy}$ qui est simpliciale propre à gauche et cellulaire, puis on définit la catégorie stable des spectres.
La question qu'on s'est posé tout au long de ce mémoire :

> **Quelle est la bonne structure modèle sur Cat et Top – Cat pour définir la catégorie des spectres ?**

Pour y répondre on s'est inspiré de la $\mathbb{K}$-théorie algébrique définie pour les catégories de Waldhausen. Tout d'abord, en considérant les catégories de Waldhausen $\mathbf{A}$ où les équivalences faibles sont exactement les isomorphismes, on remarque que le spectre de la $\mathbb{K}$-théorie algébrique à la propriété que la flèche

$$\mathrm{diagN}_{\bullet}\mathrm{iso}\mathcal{S}^{(n)}\mathbf{A} \to \Omega\mathrm{diagN}_{\bullet}\mathrm{iso}\mathcal{S}^{(n+1)}\mathbf{A}$$

est une équivalence faible.
Cette dernière remarque nous a poussé à définir une structure modèle sur $\mathbf{M} = [\Delta^{op}, \mathbf{Cat}]$, où on déclare qu'un morphisme $\mathbf{A}_{\bullet} \to \mathbf{B}_{\bullet}$ est une équivalence faible dans $[\Delta^{op}, \mathbf{Cat}]$ si

$$\mathrm{diagN}_{\bullet}\mathrm{iso}\mathbf{A}_{\bullet} \to \mathrm{diagN}_{\bullet}\mathrm{iso}\mathbf{B}_{\bullet}$$

est une équivalence dans $\mathbf{sSet}$. Puis on montre que cette structure modèle est propre à gauche et cellulaire. Pour définir la catégorie des spectres, on a pu s'en sortir sans utiliser la théorie développée dans [4].
Pour le cas des catégories enrichies, on a considéré la catégorie $\mathbf{Top}-\mathbf{Cat}$, la catégorie des petites catégories enrichies sur $\mathbf{Top}$. Puis on a procédé par analogie avec le cas de $[\Delta^{op}, \mathbf{Cat}]$. Cela nous a amené à considérer la catégorie $\mathbf{M_{Top}} = [\Delta^{op}, \mathbf{Top}-\mathbf{Cat}]$ plutôt que $\mathbf{Top}-\mathbf{Cat}$. Le morphisme $\mathbf{A}_{\bullet} \to \mathbf{B}_{\bullet}$ est une équivalence faible dans $[\Delta^{op}, \mathbf{Top}-\mathbf{Cat}]$ si

$$\mathrm{diag}\ k^{!}\ \widetilde{\mathrm{N}_{\bullet}}\mathrm{sing}\mathbf{A}_{\bullet} \to \mathrm{diag}\ k^{!}\ \widetilde{\mathrm{N}_{\bullet}}\mathrm{sing}\mathbf{B}_{\bullet}.$$

Dans le chapitre 5 de ce mémoire on explique l'analogie avec les équivalences faibles dans $[\Delta^{op}, \mathbf{Cat}]$. Puis on montre au chapitre 6 que $[\Delta^{op}, \mathbf{Top}-\mathbf{Cat}]$ est propre à gauche et cellulaire. On n'est pas arrivé à construire directement la catégorie des spectres correspondant à $\mathbf{M_{Top}}$, mais grâce à [4], on peut probablement la définir comme étant la catégorie $\mathbf{Sp}^{\mathbb{N}}(L_S[\Delta^{op}, \mathbf{M_{Top}}]_*^{Reedy})$.

Les isomorphismes suivants dans $\mathrm{Ho}(\mathbf{sSet}_*)$ sont heuristiques pour avoir une idée des **map** (pointés) dans la catégorie modèle stable $\mathbf{Sp}^{\mathbb{N}}(L_S[\Delta^{op}, \mathbf{M_{Top}}]_*^{Reedy})$. Soit $\mathbf{C}_{\bullet,\bullet} = \{\mathbf{C}^0_{\bullet,\bullet}, \mathbf{C}^1_{\bullet,\bullet}, \ldots\}$ un objet fibrant dans $L_S[\Delta^{op}, \mathbf{M_{Top}}]_*$, c'est à dire un Ω-spectre.

$$\begin{aligned}
\mathbf{map}_{\mathbf{Sp}^{\mathbb{N}}(L_S[\Delta^{op},\mathbf{M_{Top}}]_*^{Reedy})}(\Sigma^{\infty}S^0, \mathbf{C}_{\bullet,\bullet}) &\sim \mathbf{map}_{L_S[\Delta^{op},\mathbf{M_{Top}}]_*^{Reedy}}(S^0, \mathbf{C}^0_{\bullet,\bullet}) \\
&\sim \mathbf{map}_{[\Delta^{op},\mathbf{M_{Top}}]_*^{hc}}(S^0, \mathbf{C}^0_{\bullet,\bullet}) \\
&\sim \mathbf{map}_{[\mathbf{M_{Top}}]_*}(S^0, \mathbf{C}^0_{\bullet,0}) \\
&\sim \mathbf{map}_{[\Delta^{op},\mathbf{Top}-\mathbf{Cat}]_*}(S^0, \mathbf{C}^0_{\bullet,0}) \\
&\sim \mathbf{map}_{\mathbf{sSet}}(*, \mathrm{diag}\ k^{!}\widetilde{\mathrm{N}_{\bullet}}\mathrm{sing}\mathbf{C}^0_{\bullet,0}) \\
&\sim \mathrm{diag}\ k^{!}\widetilde{\mathrm{N}_{\bullet}}\mathrm{sing}\mathbf{C}^0_{\bullet,0}
\end{aligned}$$

6.2 Quel lien avec la $\mathbb{K}$-théorie de Waldhasen ?

Pour la définition d'une catégorie de Waldhausen on envoie le lecteur vers [23]. Pour être bref, c'est la donnée d'une catégorie $\mathbf{C}$ avec deux classes de morphismes, les équivalence faibles et les cofibrations. On note par $w\mathbf{C}$ la sous catégorie de $\mathbf{C}$ ayant comme morphismes les équivalences faibles. Alors la $\mathbb{K}$-théorie algébrique de $\mathbf{C}$ est le Ω-spectre

$$\mathbb{K}(\mathbf{C}) = \{\Omega \mathrm{diagN}_{\bullet} w\mathcal{S}_{\bullet}\mathbf{A}, \mathrm{diagN}_{\bullet} w\mathcal{S}_{\bullet}\mathbf{A}, \mathrm{diagN}_{\bullet} w\mathcal{S}^{(2)}_{\bullet}\mathbf{A}\ldots\}.$$

Supposons qu'on ait une équivalence stable $F_{\bullet,\bullet} : \mathbf{C}_{\bullet,\bullet} \to \mathbf{D}_{\bullet,\bullet}$ dans $\mathbf{Sp}^{\mathbb{N}}(L_S[\Delta^{op}, \mathbf{M_{Top}}]_*^{Reedy})$ entre deux Ω-spectres. Donc c'est une équivalence faible degré par degré. Par conséquent $F^0_{\bullet,\bullet} : \mathbf{C}^0_{\bullet,\bullet} \to \mathbf{D}^0_{\bullet,\bullet}$ est une équivalence entre deux objets fibrants dans $(L_S[\Delta^{op}, \mathbf{M_{Top}}]_*^{Reedy})$. Par le même argument F^0 est une équivalence dans $[\Delta^{op}, \mathbf{M_{Top}}]_*^{Reedy}$. Mais les équivalences dans la structure modèle de Reedy sont degré par degré. Par conséquent

$$F^0_{\bullet,i} : \mathbf{C}^0_{\bullet,i} \to \mathbf{D}^0_{\bullet,i}$$

est une équivalence dans $\mathbf{M_{Top}} = [\Delta^{op}, \mathbf{Top} - \mathbf{Cat}]$ pour tout $i \in \mathbb{N}$. En particulier pour $i = 0$.
Soit $\mathcal{U} : \mathbf{Top} \to \mathbf{Set}$ le foncteur qui oublie la topologie. Rappelons le foncteur G qui associe à chaque catégorie enrichie sur $\mathbf{Top}$ son groupoïde (au sense enrichi).

Remarque 6.2.1. *Soit $\mathbf{A}$ une catégorie enrichie sur $\mathbf{Top}$, alors $\mathcal{U}G\mathbf{A} = w\mathbf{A}$ où $w\mathbf{A}$ est la sous catégorie (discrète) des équivalences faibles de $\mathbf{A}$.*

Conjecture 6.2.2. *Soit $F_{\bullet,\bullet} : \mathbf{C}_{\bullet,\bullet} \to \mathbf{D}_{\bullet,\bullet}$ une équivalence dans $\mathbf{Sp}^{\mathbb{N}}(L_S[\Delta^{op}, \mathbf{M_{Top}}]_*^{Reedy})$, Alors*

$$\mathrm{diagN}_{\bullet}\mathcal{U}G\ F^0_{\bullet,0} : \mathrm{diagN}_{\bullet}\mathcal{U}G\mathbf{C}^0_{\bullet,0} \to \mathrm{diagN}_{\bullet}\mathcal{U}G\mathbf{D}^0_{\bullet,0}$$

est une équivalence dans $\mathbf{sSet}$, où les foncteurs G et $\mathcal{U}$ sont appliqué degré par degré. Autrement dit :

$$\mathrm{diagN}_{\bullet}w\ F^0_{\bullet,0} : \mathrm{diagN}_{\bullet}w\mathbf{C}^0_{\bullet,0} \to \mathrm{diagN}_{\bullet}w\mathbf{D}^0_{\bullet,0}$$

est une équivalence dans $\mathbf{sSet}$.

Dans le cas classique $\mathbf{sCat}$, on peut formuler la conjecture suivante :

Conjecture 6.2.3. *Soit $\mathbf{C} \in \mathbf{Cat}$ une catégorie de Waldhausen (avec des isomorphismes) alors il existe $\mathbf{D}_{\bullet}$ une catégorie de Waldhausen faible telle que $\mathcal{S}_{\bullet}\mathbf{C} \to \mathbf{D}_{\bullet}$ est une équivalence faible dans la catégorie modèle $\mathbf{sCat}$, donc*

$$\mathrm{diagN}_{\bullet}\mathrm{iso}\mathcal{S}_{\bullet}\mathbf{C} \to \mathrm{diagN}_{\bullet}\mathrm{iso}\mathbf{D}_{\bullet}$$

est une équivalence faible dans $\mathbf{sSet}$.

La catégorie simpliciale $\mathbf{D}_\bullet$ peut être vu comme un remplacement fibrant de $\mathcal{S}_\bullet\mathbf{C}$. On ne sait pas encore comment formuler la conjecture 6.2.3 dans le cadre enrichi. La raison est qu'on ne sait pas définir la $\mathcal{S}_\bullet$ construction de Waldhausen pour les catégories de Waldhausen enrichies telle que la catégorie $\mathcal{S}_\bullet$ soit encore une catégorie de Waldhausen enrichie.

6.3 Homologie de Hochschild topologique THH

Le but de ce paragraphe est de suggérer une définition possible pour l'homologie de Hochschild topologique d'une catégorie faiblement de Waldhausen. Dans la littérature mathématique il existe plusieurs définitions de THH.

Définition 6.3.1. *[8] Soit A un spectre en anneau cofibrant (une $\mathbb{S}$-algébre cofibrante). Alors*

$$\mathrm{THH}(A) = A \wedge^{\mathrm{L}}_{A^e} A,$$

où $A^e = A \wedge A^{op}$.

Par exemple pour un spectre en anneaux commutatif A ($\mathbb{S}$-algébre commutatif A) les auteurs de [8] définissent $\mathrm{THH}(A)$ comme $S^1 \otimes A$. Dans ce contexte, la catégorie des $\mathbb{S}$-algébres commutatifs $\mathbf{CAlg}_{\mathbb{S}}$ est une catégorie tensorisée sur $\mathbf{sSet}$.
Tout spectre en anneau peut être vu comme une catégorie enrichie sur les spectres avec un seul objet. Il existe une généralisation de THH pour les petites catégories enrichies sur les spectres voir par exemple dans [2].

D'un autre côté Waldhausen définit THH pour les espaces topologiques (cf [21]).

Définition 6.3.2. *Soit G est un groupe topologique et $X = BG$. On pose*

$$\mathrm{THH}(X) := \mathrm{THH}(\Sigma^\infty G_+)$$

Si X un espace pointé quelconque alors :

$$\mathrm{THH}(X) := \mathrm{THH}(\Sigma^\infty(\Omega X)_+)$$

Un résultat classique de Bökstedt et Waldhausen dit que $\mathrm{THH}(\Sigma^\infty(\Omega X)_+) \simeq \Sigma^\infty(\mathcal{L}\Omega X)_+$ ou $\mathcal{L}$ est le foncteur qui associe à chaque espace topologique, l'espce de ses lacets libres.

Dans le cas où $X = BG$ pour un certain groupe topologique G on a le résultat suivant :

$$\mathrm{THH}(BG) := \mathrm{THH}(\Sigma^{\infty}G_{+}) \simeq \Sigma^{\infty}(\mathcal{L}BG)_{+}. \tag{6.1}$$

La formule 6.1 nous semble la plus adaptable pour généraliser la définition de THH au cadre des catégories de Waldhausen faibles. Par "analogie" entre les groupes abéliens, E_{∞}-espaces, et les catégories de Waldhausen faibles, il nous semble raisonnable de suggérer la définition suivante :

Définition 6.3.3. *Soit* $\mathbf{C}_{\bullet} \in \mathbf{sCat}_{*}$ *une catégorie de Waldhausen faible. On pose :*

$$\mathrm{THH}(\mathbf{C}_{\bullet}) := \Sigma^{\infty}\mathbf{map}_{\mathbf{sCat}}(S^{1}, \mathbf{C}_{\bullet})_{+}.$$

Ici, $\mathbf{map}_{\mathbf{sCat}}$ *est le mapping space de catégorie* $\overline{W}$*-modèle sur* $\mathbf{sCat}$*.*

Annexe A

A.1 Ensembles Bisimpliciaux

Dans la littérature mathématique il y a au moins trois structures modèles pour les ensembles bisimpliciaux $\mathbf{sSet}^2$. La plus directe et qui est une conséquence de résultats plus généraux est la structure modèle de Bousfield-Kan. Si on regarde la catégorie des objets bisimpliciaux comme une catégorie de foncteurs de $\mathbf{\Delta}^{op}$ vers $\mathbf{sSet}$, alors la structure projective sur $[\mathbf{\Delta}^{op}, \mathbf{sSet}]$ est celle ou les équivalence faibles (resp. les fibrations) sont définies point part point, et le cofibrations comme étant les morphismes ayant la propriété de relèvement à gauche par rapport au fibrations triviale. C'est une structure monoïdale fermée de génération cofibrante.
La structure de Moerdijk nécessite l'introduction d'un foncteur diag : $\mathbf{sSet}^2 \to \mathbf{sSet}$, défini par $\mathrm{diag}(X_{\bullet,\bullet})(n) = X(n,n)$. Le foncteur diagonal admet un adjoint à gauche noté $d_* : \mathbf{sSet} \to \mathbf{sSet}^2$. La structure modèle de Moerdijk est le transfert de la structure modèle de $\mathbf{sSet}$ à $\mathbf{sSet}^2$ via le foncteur diagonal, i.e un morphisme dans $\mathbf{sSet}^2$ est une équivalence faible (resp. le fibration) si et seulement si son image par diag est une équivalence faible (resp. fibration) dans $\mathbf{sSet}$, les cofibrations sont données par la propriété de relèvement à gauche par rapport au fibrations triviale.
La relation entre ces deux structures modèles est résumée dans les deux théorèmes suivants. Le premier relie les équivalences faible de Bousfield-Kan à celles de Meordijk, et le deuxième est la "contre partie" pour les fibrations.

Theorem A.1.1. *Soit $f_{\bullet,\bullet} : X_{\bullet,\bullet} \to Y_{\bullet,\bullet}$ un morphisme dans $\mathbf{sSet}^2$ tel que $f_{\bullet,j} : X_{\bullet,j} \to Y_{\bullet,j}$ une équivalence faible pour tout $j \in \mathbb{N}$ dans $\mathbf{sSet}$, alors $\mathrm{diag} f$ est une équivalence faible d'ensemble simpliciaux et donc une équivalence de Meordijk.*

Theorem A.1.2. *Soit $f_{\bullet,\bullet} : X_{\bullet,\bullet} \to Y_{\bullet,\bullet}$ un morphisme dans $\mathbf{sSet}^2$ tel que $\mathrm{diag} f$ est une fibration dans $\mathbf{sSet}$, alors $f_{\bullet,j} : X_{\bullet,j} \to Y_{\bullet,j}$ est une fibration pour tout $j \in \mathbb{N}$, i.e une fibration de Bousfield-Kan.*

A.2 Exemple

Soit $X_\bullet$ un ensemble simplicial. Dans ce paragraphe la catégorie $\mathbf{\Delta} \downarrow X_\bullet$ est la catégorie des simplexes de l'ensemble simplicial $X_\bullet$, les objets sont les morphismes simpliciaux $\sigma_n : \Delta^n \to X_\bullet$ et les morphismes sont les morphismes simpliciaux f qui font commuter le diagramme :

$$\begin{tikzcd} \Delta^n \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\sigma_n"'] & & \Delta^m \arrow[dl, "\sigma_m"] \\ & X_\bullet & \end{tikzcd}$$

On définit pour chaque morphisme $f_\bullet : Y_\bullet \to X_\bullet$ dans $\mathbf{sSet}$ le foncteur $f^* : \mathbf{\Delta} \downarrow X_\bullet \to \mathbf{sSet}$, tel que $f^*(\sigma)$ est le pullback dans $\mathbf{sSet}$ de σ le long de f. Une manière plus compacte de considérer f^* est de le voir comme le foncteur $- \times_{X_\bullet} Y_\bullet : \mathbf{\Delta} \downarrow X_\bullet \to \mathbf{sSet}$. Ce foncteur est exact à droite et donc commute avec les colimites. De plus

$$\mathrm{colim}_{\mathbf{\Delta}\downarrow X_\bullet} f^* = \mathrm{colim}_{\mathbf{\Delta}}(\mathbf{\Delta} \downarrow X_\bullet \times_{X_\bullet} Y_\bullet) = \mathrm{colim}_{\mathbf{\Delta}}(\mathbf{\Delta} \downarrow X_\bullet) \times_{X_\bullet} Y_\bullet = X_\bullet \times_{X_\bullet} Y_\bullet = Y_\bullet.$$

Soit le foncteur représentable $\mathbf{hom_{sSet}}(-, X_\bullet) : \mathbf{\Delta} \to \mathbf{Set}$. Alors par définition on a $\int^{\Delta} \mathbf{hom_{sSet}}(-, X_\bullet) = \mathbf{\Delta} \downarrow X_\bullet$.

A.3 Nerf de Certaines Catégorie

Ce qui suit se trouve dans [[10], IV, 5.1] qu'on résumera de manière très concise.

Pour montrer l'équivalence entre $X_\bullet$ et $\mathrm{N}_\bullet(\mathbf{\Delta} \downarrow X_\bullet)$, on construira un ensemble bisimplicial $Y_{\bullet,\bullet}$ tel que on ait une équivalence d'homotopie simpliciale :

$$X_\bullet \xleftarrow{\sim} \mathrm{diag} Y_{\bullet,\bullet} \xrightarrow{\sim} \mathrm{N}_\bullet(\mathbf{\Delta} \downarrow X_\bullet).$$

Les objets de la catégorie $\mathbf{\Delta} \downarrow X_\bullet$ seront noté par $\sigma : \Delta^n \to X_\bullet$ Commençons par décrire l'ensemble bisimplicial $Y_{\bullet,\bullet}$

$$Y_{m,n} = \coprod_{\sigma_0 \to \cdots \to \sigma_n} \Delta^m$$

avec $\sigma_i : \Delta^m \to X_\bullet$. On a clairement l'équivalence de Kan (et de donc de Moerdijk) entre ensembles bisimliciaux :

$$(\mathrm{diag}) \coprod_{\sigma_0 \to \cdots \to \sigma_n} \Delta^m \to (\mathrm{diag}) \coprod_{\sigma_0 \to \cdots \to \sigma_n} * = \mathrm{N}_\bullet(\mathbf{\Delta} \downarrow X_\bullet).$$

Pour l'autre équivalence, on adopte un point de vu plus catégoriel. La catégorie $\mathbf{C}$ dont les objets sont des couples $\sigma : \Delta^n \to X_\bullet, x \in \Delta^n$ et comme morphisme $\theta : (\sigma, x) \to (\tau, y)$ tel que $\tau\theta = \sigma$ et $\theta(x) = y$. Le nerf de cette catégorie est en fait l'ensemble bisimplicial $Y_{\bullet,\bullet}$. Le foncteur $F : \mathbf{C} \to \mathbf{X}$ qui envoie $(\sigma, x) \to \sigma(x)$ est bien défini. Rappelons que $\mathbf{X}$ est la catégorie simpliciale discrète qui correspond à l'ensemble simplicial $X_\bullet$. Puisque le nerf est pris niveau par niveau, il est clair que $\mathrm{diag}\mathrm{N}_\bullet\mathbf{X} = X_\bullet$, et donc on l'application simpliciale induite par

$$\mathrm{diag}\mathrm{N}_\bullet F : \mathrm{diag}\mathrm{N}_\bullet\mathbf{C} = \mathrm{diag}Y_{\bullet,\bullet} \to \mathrm{diag}\mathrm{N}_\bullet\mathbf{X} = X_\bullet.$$

La fibre (catégoriel) à droite du foncteur F admet un objet initial et donc (son nerf) est contractile, le Théorème A de Quillen [19] permet de conclure que $\mathrm{diag}Y_{\bullet,\bullet} \to X_\bullet$ est une équivalence faible d'ensembles simpliciaux.

A.4 Structure modèle sur Cat et map

Ici, on rappellera la structure modèle de Joyal et Tierney sur **Cat** [15] et on calculera explicitement le mapping space **map**.

Theorem A.4.1 (Joyal-Tierney)**.** *Il existe une structure modèle de Quillen sur* **Cat** *où les équivalence faibles sont les équivalences de catégories, les cofibrations sont les foncteurs injectifs sur les objets, et les fibrations ont la propriété de relèvement à droite par rapport aux cofibrations acycliques.*

Un raffinement est donné par C. Rezk, qui prouve que la structure décrite ci-dessus est en fait de génération cofibrante, monoïdale symétrique et propre. Pour calculer $\mathbf{map}_{\mathbf{Cat}}(\mathbf{C}, \mathbf{D})$ il suffit de savoir calculer $\mathbf{map}_{\mathbf{Cat}}(*, \mathbf{D})$, puisque la catégorie **Cat** est (symétrique) monoïdale modèle fermée.

Lemme A.4.2. *Soit* $\mathbf{D}$ *une catégorie fibrante dans* **Cat***, alors pour tout* $\mathbf{C} \in \mathbf{Cat}$ *on a*

$$\mathbf{map}_{\mathbf{Cat}}(\mathbf{C}, \mathbf{D}) = \mathbf{map}_{\mathbf{Cat}}(*, \mathbf{HOM}_{\mathbf{Cat}}(\mathbf{C}, \mathbf{D})) = \mathrm{N}_\bullet \mathrm{iso}\ \mathbf{HOM}_{\mathbf{Cat}}(\mathbf{C}, \mathbf{D}),$$

où iso $\mathbf{C}$ *est la sous catégorie des isomorphismes de* $\mathbf{C}$.

Démonstration. On peut se restreindre à calculer $\mathbf{Map_{Cat}}(*, \mathbf{C})$ pour une catégorie fibrante $\mathbf{C}$ donnée. Notons par $\mathbf{n}$ la catégorie suivante :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[loop left] \arrow[r, bend left] & 1 \arrow[l, bend left] \arrow[loop right] & \cdots & i \arrow[loop left] \arrow[r, bend left] & n, \arrow[l, bend left] \arrow[loop right] \end{tikzcd}$$

une catégorie à $n+1$ objets tel que toutes les flèches décrites dans le diagramme sont des isomorphimes (il y a exactement un morphisme entre deux objets). On notera la sous catégorie pleine de $\mathbf{Cat}$ des petite catégories $\mathbf{n}^{'}$, $n \in \mathbb{N}$ par δ. Remarquons que $\mathbf{n}^{'}$ est une catégorie fibrantante dans $\mathbf{Cat}$, puisque l'unique flèche $\mathbf{n}^{'} \to *$ est une fibration de Grothendieck, i.e., a la propriété de relèvment des isomorphismes. C'est une vérification triviale.
Pour le calcul explicite de $\mathbf{map}$ on se réfère à [5]. Puisque $\mathbf{C}$ est fibrant $\mathbf{map_{Cat}}(*, \mathbf{C}) \sim \mathrm{N}_\bullet \mathbf{D}$, où $\mathbf{D}$ est la catégorie $* \downarrow \delta^{'} \downarrow \mathbf{C}$ dont les objet sont des diagrammes de la forme

$$\begin{tikzcd} * & \mathbf{n}^{'} \arrow[l, two heads, "\sim"'] \arrow[r] & \mathbf{C} \end{tikzcd}$$

et les morphisme dans cette catégorie sont les équivalences faibles $\mathbf{n}^{'} \to \mathbf{m}^{'}$ qui font commuté le diagramme

$$\begin{tikzcd} * & \mathbf{n}^{'} \arrow[l, two heads, "\sim"] \arrow[r] \arrow[d, "\sim"] & \mathbf{C} \\ & \mathbf{m}^{'} \arrow[ul, two heads, "\sim"] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Observer qu'un foncteur $F : \mathbf{n}^{'} \to \mathbf{C}$ est déterminé par l'image des objets de $\mathbf{n}^{'}$, et que l'image des flèches $i \to i+1$ sont forcément des isomorphismes dans $\mathbf{C}$. Notons par $\mathbf{n}$ la catégorie d'ordinal n.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, bend left] & 1 \arrow[r, bend left] & \cdots & i \arrow[r, bend left] & n, \end{tikzcd}$$

et par Δ la sous catégorie pleine de $\mathbf{Cat}$ dont les objets sont les catégories ordinales finies de type $\mathbf{n}$. Observer que la catégorie $\mathbf{D}$ est équivalente à la catégorie $* \downarrow \delta \downarrow \mathrm{iso}\ \mathbf{C}$. Rappelons que $\mathbf{hom_{Cat}}(\mathbf{n}, \mathbf{A}) = \mathbf{hom_{sSet}}(\Delta^n, \mathrm{N}_\bullet \mathbf{A})$, car le foncteur $\mathrm{N}_\bullet$ est pleinement fidèle. Il s'en suit que que la catégorie $* \downarrow \delta \downarrow \mathrm{iso}\ \mathbf{C}$ est équivalente à la catégorie $\mathbf{\Delta} \downarrow \mathrm{N}_\bullet \mathrm{iso}\ \mathbf{C}$ décrite dans A.2 On conclut en utilisant les résultats de A.3 pour déduire que $\mathrm{N}_\bullet(\mathbf{\Delta} \downarrow \mathrm{N}_\bullet \mathrm{iso}\ \mathbf{C})$ est zig-zag faiblement équivalent à $\mathrm{N}_\bullet \mathrm{iso}\ \mathbf{C}$. $\square$

Remarque A.4.3. *Dans le calcul du mapping space* $\mathbf{map_{Cat}}$ *précédent, on s'est restreint au nerf de la catégorie* $* \downarrow \delta^{'} \downarrow \mathbf{C}$ *; mais suivant l'article [5], on devrait prendre la (grande) catégorie* $* \downarrow \delta^{'}_{\infty} \downarrow \mathbf{C}$*, où* $\delta^{'}_{\infty}$ *est la sous-catégorie de* $\mathbf{Cat}$ *formée de tous les groupoïdes équivalents à la catégorie triviale* $*$*. Notre approche est justifiée car l'inclusion naturelle* $* \downarrow \delta^{'} \downarrow \mathbf{C} \to * \downarrow \delta^{'}_{\infty} \downarrow \mathbf{C}$ *induit une équivalence faible de nerf par le théorème A de Quillen. En effet, les fibres sont contractiles puisqu'elles admettent un objet terminal (cf [24], 3,6).*
D'un autre côté, on aurait pu calculer $\mathbf{map_{Cat}}$ *en utilisant l'adjonction de Quillen*

$(\pi,\ \mathrm{N}_{\bullet}\mathrm{iso})$ *entre* **sSet** *et* **Cat**. *Il nous a semblé intéressant d'introduire d'autres méthodes pour le calcul de mapping space dans le cas où on a pas de telles adjonctions à disposition.*

A.5 Structure de sSet-module sur Cat

On se réfère au [12] pour la structure de Ho(**sSet**)-module sur la catégorie homotopique Ho**C** d'une catégorie modèle **C**. En général cette structure de module ne peut être relevée à la catégorie **C**. Dans le cas où $\mathbf{C} = \mathbf{Cat}$ ce relèvement existe. Le but de ce paragraphe est d'introduire la structure de **sSet**-module fermé sur la catégorie **Cat**. Dans ce cas la catégorie **Cat** est une catégorie simpliciale [10] (Chapitre 2, section 3). Tout d'abord on a l'adjonction suivante :

$$\mathbf{sSet} \underset{\mu}{\overset{\pi}{\rightleftarrows}} \mathbf{Cat}.$$

définie comme suite. Le foncteur μ est le foncteur $\mathrm{N}_{\bullet}\mathrm{iso}$ et l'adjoint à gauche est le foncteur qui envoie un ensemble simplicial vers son groupoïde fondamental ([10], chapitre 3, section 1). Cette adjonction donne lieu a la structure de **sSet**-module (fermé) pour **Cat**, en effet :

$$- \otimes - : \mathbf{Cat} \times \mathbf{sSet} \to \mathbf{Cat} : \ \mathbf{C}, K \mapsto \mathbf{C} \otimes K$$

$$(-)^{(-)} : \mathbf{Cat} \times \mathbf{sSet}^{op} \to \mathbf{Cat} : \ \mathbf{C}, K \mapsto \mathbf{C}^K$$

et

$$\mathbf{Cat} \times \mathbf{Cat} \to \mathbf{sSet} : \ \mathbf{C}, \mathbf{D} \mapsto \mathbf{Map}(\mathbf{C}, \mathbf{D})$$

par les formules

$$\mathbf{C} \otimes K = \mathbf{C} \times \pi K,$$

$$\mathbf{C}^K = \mathbf{HOM}_{\mathbf{Cat}}(\pi K, \mathbf{C}),$$

et enfin

$$\mathbf{Map}(\mathbf{C}, \mathbf{D}) = \mu \mathbf{HOM}_{\mathbf{Cat}}(\mathbf{C}, \mathbf{D}).$$

On remarque que cette structure explicite de **sSet**-module sur **Cat** est en accord avec le calcul précédent de **map**, puisque la catégorie **Cat** est monoïdale modèle fermée où tous les objets (petites catégories) sont fibrants et cofibrants.

Annexe B

B.1 La Catégorie des Diagrammes

Tout ce matériel se trouve dans ([11], 11.5) Soient $\mathbf{C}$ une petite catégorie et $\mathbf{D}$ une catégorie cocomplète quelconque, et $[\mathbf{C}, \mathbf{D}]$ la catégorie des foncteurs ou diagrammes.

Définition B.1.1. *Soit S un ensemble quelconque, et $X \in \mathbf{D}$ on pose $X \otimes S = \coprod_S X$. Plus généralement si $S : \mathbf{C} \to \mathbf{Set}$ et $c \in \mathbf{C}$, on définit un nouveau diagramme dans $\mathbf{D}$ par $(X \otimes S)(c) = X \otimes S(c)$.*

Avant d'introduire la notion de diagramme **libre** général, on commence par le cas $\mathbf{D} = \mathbf{Set}$.

Définition B.1.2. *Soit $c \in \mathbf{C}$, on définit le diagramme $F^c = \mathbf{hom}_{\mathbf{C}}(c, -)$. Un diagramme* **libre** *est une coproduit des diagrammes de type F^c.*

Par le lemme de Yoneda $\mathbf{hom}_{[C,\mathbf{Set}]}(F^c, S) = S(c)$.

Définition B.1.3. *Soient maintenant $\mathbf{D}$ une catégorie cocomplète, $X \in \mathbf{D}$ et $c \in \mathbf{C}$. On définit le foncteur $F^c_X : [\mathbf{C}, \mathbf{D}] \to \mathbf{D}$ par $X \otimes F^c$ i.e., $F^c_X(d) = \coprod_{\mathbf{hom}_{\mathbf{C}}(c,d)} X$.*

Soit $Y \in [\mathbf{C}, \mathbf{D}]$. Par le lemme de Yoneda $\mathbf{hom}_{[\mathbf{C},\mathbf{D}]}(F^c_X, Y(-)) = \mathbf{hom}_{\mathbf{D}}(X, Y(c))$.

B.2 Pushouts dans $\mathbf{V} - \mathbf{Cat}$

On se propose de définir les pushouts (assez simples) dans la catégorie des petites catégories enrichies $\mathbf{V} - \mathbf{Cat}$. Dans notre exemple $\mathbf{V}$ est la catégorie $\mathbf{sSet}$ ou $\mathbf{Top}$;

pour plus de détail voir ([18], A.3.2). Soit $f : S \to T$ un morphisme dans la catégorie $\mathbf{V}$. Il donne lieu à un morphisme dans $\mathbf{V} - \mathbf{Cat}$ qu'on notera $Uf : \ US \to UT$, où $U : \mathbf{V} \to \mathbf{V}-\mathbf{Cat}$ est un foncteur qui associe à chaque objet dans $\mathbf{V}$ la catégorie enrichie avec deux objets $x,\ y$ tel que $\mathbf{Map}_{US}(x,y) = S$, $\mathbf{Map}_{US}(y,x) = \emptyset$, $\mathbf{Map}_{US}(x,x) = \mathbf{Map}_{US}(y,y) = *$. Fixons $\mathbf{V} = \mathbf{sSet}$; le raisonnement sur $\mathbf{Top}$ est le même.
Soit $\mathbf{C}$ une catégorie enrichie sur $\mathbf{sSet}$. Le but est de décrire explicitement le pushout suivant, quand $f : S \to T$ est un monomorphisme :

$$\begin{tikzcd} US \arrow[r, "h"] \arrow[d, "Uf"] & \mathbf{C} \arrow[d] \\ UT \arrow[r] & \mathbf{D} \end{tikzcd}$$

Il est clair que les objets de $\mathbf{C}$ et $\mathbf{D}$ sont les mêmes, le plus compliqué est de définir $\mathbf{Map}_{\mathbf{D}}$. Soient $w,\ z$ des objets de $\mathbf{C}$. Définissons une suite d'ensembles simpliciaux :

$$\begin{aligned} M^0_{\mathbf{C}} &= \mathbf{Map}_{\mathbf{C}}(w,z) \\ M^1_{\mathbf{C}} &= \mathbf{Map}_{\mathbf{C}}(y,z) \times T \times \mathbf{Map}_{\mathbf{C}}(w,x) \\ M^2_{\mathbf{C}} &= \mathbf{Map}_{\mathbf{C}}(y,z) \times T \times \mathbf{Map}_{\mathbf{C}}(y,x) \times T \times \mathbf{Map}_{\mathbf{C}}(w,x) \end{aligned}$$

et ainsi de suite... Plus généralement un $m-$simplexe de $M^k_{\mathbf{C}}$ est donnée est une suite finie de la forme

$$(\sigma_0, \tau_1, \sigma_1, \tau_2, \ldots, \tau_k, \sigma_k)$$

où $\sigma_0 \in \mathbf{Map}_{\mathbf{C}}(y,z)_m$, $\sigma_k \in \mathbf{Map}_{\mathbf{C}}(w,x)_m$, $\sigma_i \in \mathbf{Map}(y,x)_m$ pour $0 < i < k$ et $\tau_i \in T_m$ pour $0 \leq i \leq k$. On définit $\mathbf{Map}_{\mathbf{D}}(w,z)$ par le quotient de $\coprod_k M^k_{\mathbf{C}}$ par les relations suivantes :

$$(\sigma_0, \tau_1, \ldots, \sigma_k) \sim (\sigma_0, \tau_1, \ldots, \tau_{j-1}, \sigma_{j-1} \circ h(\tau_j) \circ \sigma_j, \tau_{j+1}, \ldots, \sigma_k).$$

lorsque τ_j est dans $S_m \subset T_m$. La catégorie $\mathbf{D}$ est équipée de la loi associative suivante :

$$(\sigma_0, \tau_1, \ldots, \sigma_k) \circ (\sigma_0^{'}, \tau_1^{'}, \ldots, \sigma_l^{'}) = (\sigma_0, \tau_1, \ldots, , \tau_k, \sigma_k \circ \sigma_0^{'}, \tau_1^{1}, \ldots, \sigma_l^{'}).$$

Observons que la construction de $\mathbf{Map}_{\mathbf{D}}(w,z)$ vient équipée d'une filtration naturelle :

$$\mathbf{Map}_{\mathbf{C}}(w,z) = \mathbf{Map}_{D}(w,z)^0 \subset \mathbf{Map}_{\mathbf{D}}(w,z)^1 \subset \ldots$$

où $\mathbf{Map}_{D}(w,z)^k$ est défini comme l'image de $\coprod_{0 \leq i \leq k} M^i_{\mathbf{C}}$ dans $\mathbf{Map}_{\mathbf{D}}(w,z)$, et

$$\bigcup_k \mathbf{Map}_{\mathbf{D}}(w,z)^k = \mathbf{Map}_{D}(w,z).$$

Le fait le plus important est que $\mathbf{Map}_{\mathbf{D}}(w,z)^k \subset \mathbf{Map}_{\mathbf{D}}(w,z)^{k+1}$ est construit comme le pushout de l'inclusion $N^{k+1}_{C} \subset M^{k+1}_{\mathbf{C}}$, où N^{k+1}_{C} est le sous ensemble simplicial de $M^{k+1}_{\mathbf{C}}$ dont les m-simplexes consiste en $(2m+1)$-tuples $(\sigma_0, \tau_1, ..., \sigma_m)$ tel que $\tau_i \in S_m$ pour au moins une valeur de i.

B.2.1 Quelques lemmes techniques

Ici on montrera quelques lemmes techniques qui nous seront utiles pour démontrer l'existence d'une structure modèle sur **Top** – **Cat**.

Lemme B.2.1. *Soit $i : X \to Y$ une inclusion et une équivalence faible d'espaces topologiques, avec $i(X)$ fermé dans Y tel qu'il existe une homotopie $H : Y \times [0,1] \to Y$ qui a la propriété suivante :*

1. *$H(-,0) = id_Y$*
2. *$H(i(x),t) = i(x)$ pour tout $x \in X$.*
3. *$H(-,1) = s$ avec $s \circ i = id_X$.*

alors l'application g du pushout suivant :

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "i"] & Z \arrow[d, "g"] \\
Y \arrow[r, "\alpha"] \arrow[u, bend left, "s"] & D
\end{tikzcd}
$$

est aussi une équivalence.

Démonstration. Rappelons que $D = Y \cup_X Z$. Pour simplifier les notations on notera l'image de $y \in Y$ dans D par y de même pour l'image de $z \in Z$ dans D par simplement z. Puisque i admet une rétraction, g aussi admet une rétraction qu'on notera $s^{'}$, induite par s. C'est à dire que Z s'injecte dans D via g, puisque $s^{'} \circ g = id_Z$. En effet, $s^{'} : D \to Z$ est définie comme suite :

1. $s^{'}(z) = z$ pour $z \in Z$.
2. $s^{'}(y) = s(y)$ pour $y \in Y$.

Cette nouvelle section $s^{'}$ est bien définie car $s^{'}(\psi(x)) = \psi(x)$ et $s^{'}(i(x)) = i(x)$ mais dans D on a bien $i(x) = \psi(x)$ pour tout $x \in X$. Tout est résumé dans la diagramme suivant :

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, hook, "i"] & Z \arrow[d, hook, "g"] \arrow[ddr, bend left, "id"] & \\
Y \arrow[r, "\alpha"] \arrow[u, bend left, "s"] \arrow[drr, bend right, "\psi\circ s"'] & Y \cup_X Z \arrow[dr, "s^{'}"] & \\
 & & Z
\end{tikzcd}
$$

On construit une homotopie $H^{'} : D \times [0,1] \to D$ définie ainsi :

1. $H^{'}(-,0) = id_D$.
2. $H^{'}(z,t) = z$ si z est dans Z .
3. $H^{'}(y,t) = H(y,t)$ pour tout y est dans Y.

Cette homotopie est bien définie. En effet, il suffit de montrer qu'elle se recolle bien. On a $\psi(x) = i(x)$ dans D, alors $H^{'}(i(x),t) = H(i(x),t) = i(x)$ par définition, et d'autre par $H^{'}(\psi(x),t) = \psi(x)$. Puisque $i(X)$ est fermé dans Y, alors $i(X)$ est fermé dans D. On conclut que $H^{'}$ est une homotopie bien définie. De plus $H^{'}(y,0) = H(y,0) = y$ et donc $H^{'}(-,0)$ est bien l'dentité.

En calculant $H^{'}(-,1) : D \to D$ on a que $H^{'}(z,1) = z$ pour tout $z \in Z$ par définition, et $H^{'}(y,1) = H(y,1) = s(y)$ pour tout $y \in Y$. Et donc, $H^{'}(-,1) = s'$, et donc $s^{'} : D \to Z \subset D$ est une équivalence faible puisqu'elle est homotope à l'identité. Par conséquent g est aussi une équivalence d'homotopie car $s^{'} \circ g = id$.

□

Lemme B.2.2. *Avec les notation du paragraphe précédent B.2 sur les pushouts, si on pose* $f :\ S = |\Lambda_i^n| \to T = |\Delta^n|$, *alors* $\mathbf{Map_C}(w,z) \subset \mathbf{Map_D}(w,z)$ *est une équivalence* $\forall w,\ z \in \mathbf{C}$.

Démonstration. Rappelons que maintenant la catégorie $\mathbf{V} = \mathbf{Top}$. Puisque tous les objets dans **Top** sont fibrants, f admet une rétraction s. Par ailleurs, l'inclusion $N_C^{k+1} \subset M_{\mathbf{C}}^{k+1}$ est une équivalence et admet une section. Faisons la démonstration pour $k = 2$. Afin d'alléger la notation, notons

$$A_0 = \mathbf{Map_C}(y,z) \times S \times \mathbf{Map_C}(y,x) \times S \times \mathbf{Map_C}(w,x) \tag{B.1}$$
$$A_1 = \mathbf{Map_C}(y,z) \times S \times \mathbf{Map_C}(y,x) \times T \times \mathbf{Map_C}(w,x) \tag{B.2}$$
$$A_2 = \mathbf{Map_C}(y,z) \times T \times \mathbf{Map_C}(y,x) \times S \times \mathbf{Map_C}(w,x) \tag{B.3}$$

Les injections évidentes sont des équivalences faibles qui admettent chacune a une section induite pas s $A_0 \to A_i,\ i = 1,2$. On peut définir le complémentaire de $N_{\mathbf{C}}^2$, qui sont le les tuples (a, s_1, b, s_2, c) dans $\mathbf{Map_C}(y,z) \times T \times \mathbf{Map_C}(y,x) \times T \times \mathbf{Map_C}(w,x)$ tel que $s_1,\ s_2 \notin S$. On fera le raisonnement en petite dimension $n = 1$, le reste est similaire. L'espace $T \times S \cup_{S\times S} S \times T$ est le recollement de deux intervalles $[0,1]$ au point 0, alors que $T \times T$ est simplement $[0,1] \times [0,1]$. Si on pose $f :\ X = T \times S \cup_{S\times S} S \times T \to T \times T = Y$, alors on est exactement dans la situation du lemme B.2.1, c'est à dire, il existe une homotopie entre X et Y qui est exactement l'identité sur X. Si on réécrit $N_{\mathbf{C}}^2$ par

$$N_{\mathbf{C}}^2 = A_1 \bigcup_{A_0} A_2 = X \times \mathbf{Map_C}(y,z) \times \mathbf{Map_C}(y,x) \times \mathbf{Map_C}(w,x),$$

et $M^2_{\mathbf{C}}$ par
$$M^2_{\mathbf{C}} = Y \times \mathbf{Map_C}(y,z) \times \mathbf{Map_C}(y,x) \times \mathbf{Map_C}(w,x),$$
Alors la flèche induite $N^2_{\mathbf{C}} \to M^2_{\mathbf{C}}$ vérifie les conditions du lemme B.2.1. Par conséquent, le pushout de $N^2_{\mathbf{C}} \subset M^2_{\mathbf{C}}$ le long de $N^2_{\mathbf{C}} \to \mathbf{Map}_D(w,z)^1$ est encore une équivalence faible, c'est à dire l'inclusion $\mathbf{Map}_D(w,z)^1 \subset \mathbf{Map}_D(w,z)^2$ est une équivalence faible. En faisant la même chose pour k quelconque on une composition transfinie des équivalences injectives
$$\mathbf{Map_C}(w,z) \cdots \subset \mathbf{Map_D}(w,z)^k \subset \mathbf{Map_D}(w,z)^{k+1} \cdots \subset \mathbf{Map_D}(w,z)$$
qui est aussi une équivalence.

□

B.3 Graphes et Catégories

Dans ce paragraphe, on définira une adjonction entre $\mathbf{Top} - \mathbf{Cat}$ et la catégorie des petits graphes enrichies sur $\mathbf{Top}$. Cette adjonction sera construite dans le cas particulier où l'ensemble des objets est fixé d'avance. On notera par $\mathcal{O} - \mathbf{Cat_{Top}}$ la catégorie des petites catégories enrichies sur $\mathbf{Top}$ et ayant comme ensemble d'objets l'ensemble $\mathcal{O}$, où les morphismes sont les foncteurs qui sont l'identité sur les objets. De même, on définit la catégorie des petits graphes enrichis sur $\mathbf{Top}$ par $\mathcal{O} - \mathbf{Graph_{Top}}$, ayant comme sommets l'ensemble $\mathcal{O}$ et comme arêtes orientées des espaces topologiques. On exige aussi, que les morphismes de graphes soient l'identité sur les sommets.
Il existe une adjonction entre $\mathcal{O} - \mathbf{Cat_{Top}}$ et $\mathcal{O} - \mathbf{Graph_{Top}}$ donnée par le foncteur oubli et le foncteur libre, qu'on décrira par la suite. Avant de commencer à définir le foncteur libre entre les graphes et les catégories, nous étudions le cas où $\mathcal{O}$ est l'ensemble avec un seul élément.

Lemme B.3.1. *Il existe un adjoint à gauche au foncteur oubli $U : \mathbf{Mon} \to \mathbf{Top}$ où $\mathbf{Mon}$ est la catégorie des monoïdes topologiques .*

Démonstration. Soit X dans $\mathbf{Top}$. On définit
$$L(X) = * \sqcup X \sqcup (X \times X) \sqcup (X \times X \times X) \sqcup \ldots;$$
c'est un foncteur de $\mathbf{Top}$ vers les monoïdes.

Il est facile de voir que $L : \mathbf{Top} \to \mathbf{Mon}$ est bien un foncteur. Au fait c'est le foncteur cherché. En effet, soit M un monoïde topologique, un morphisme de monoïde

$L(X) \to M$ est juste la donnée d'un morphisme d'espaces topologiques non pointés $X \to U(M)$. Ce morphisme se prolonge de manière unique en un morphisme de monoïdes, en considérant les morphisme dans **Top** :

$$X \times X \cdots \times X \to M \times M \cdots \times M \to M.$$

On conclut que :

$$\mathbf{hom_{Top}}(X, U(M)) = \mathbf{hom_{Mon}}(L(X), M).$$

□

Pour généraliser l'adjonction précédente à une adjonction entre $\mathcal{O} - \mathbf{Cat_{Top}}$ et $\mathcal{O} - \mathbf{Graph_{Top}}$, on procède comme suite.

1. On pose $\mathbf{O}$ la catégorie triviale ayant comme objet $\mathcal{O}$.
2. Pour chaque graphe $\mathbf{\Gamma}$ dans $\mathcal{O} - \mathbf{Graph_{Top}}$ on définit l'ensemble de catégories sous-jascentes indexées par une paire d'éléments $a,\ b \in \mathcal{O}$

$$\Gamma_{a,b}(c,d) = \begin{cases} \Gamma(c,d) & \text{si } c = a \neq b = d \\ \mathrm{L}(\Gamma(c,d)) & \text{si } a = c = b = d \\ \emptyset & \text{si } c \neq d \text{ et } a \neq c \wedge b \neq d \\ * = id & \text{sinon} \end{cases}$$

3. Soit $\mathbf{\Gamma}$ un graphe quelconque dans $\mathcal{O} - \mathbf{Graph_{Top}}$. On définit la catégorie libre engendré par le graphe comme le produit libre dans $\mathcal{O} - \mathbf{Cat_{Top}}$ de toutes les catégories $\mathbf{\Gamma}_{a,b}$, plus précisément

$$L(\mathbf{\Gamma}) = \star_{(a,b)\in\mathcal{O}\times\mathcal{O}}\mathbf{\Gamma}_{a,b}.$$

   Par le produit libre, on entend la colimite dans $\mathbf{Top} - \mathbf{Cat}$:

$$\mathrm{colim}_{(a,b)\in\mathcal{O}\times\mathcal{O}}\mathbf{\Gamma}_{a,b}$$

Avec un peu de travail on voit que le foncteur libre L est l'adjoint à gauche du foncteur oubli $U : \mathcal{O} - \mathbf{Cat_{Top}} \to \mathcal{O} - \mathbf{Graph_{Top}}$.

B.4 Réalisation

Soit $\mathbf{M}$ une catégorie modèle simpliciale (cf 2.2.3). La catégorie $[\Delta^{op}, \mathbf{M}]$ est une catégorie modèle munie de la structure modèle de Reedy (cf [10]) où les équivalences faibles sont définies degré par degré.

Définition B.4.1. *Soit* $\mathbf{M}$ *une catégorie simpliciale (cf 2.2.1), et soit* $M_\bullet \in [\Delta^{op}, \mathbf{M}]$*. Le foncteur de réalisation :*

$$|-| : [\Delta^{op}, \mathbf{M}] \to \mathbf{M}$$

est définie sur les objets comme le coégalisateur suivant :

$$\textstyle\coprod_{\phi:[n]\to[m]} M_m \otimes \Delta^n \underset{d_1}{\overset{d_0}{\rightrightarrows}} \coprod_{[n]} M_n \otimes \Delta^n \longrightarrow |M_\bullet|$$

où $d_0 = \phi^* \otimes id$ *et* $d_1 = id \otimes \phi$.

Lemme B.4.2. *Puisque* $\mathbf{M}$ *est une catégorie simpliciale, le foncteur* $|-|$ *admet un adjoint à droite défini par :*

$$(-)^\Delta : \mathbf{M} \to [\Delta^{op}, \mathbf{M}] : M \mapsto M^{\Delta^n}.$$

Lemme B.4.3. *[[10], VII, proposition 3.6] Soit* $\mathbf{M}$ *une catégorie simpliciale modèle et* $[\Delta^{op}, \mathbf{M}]$ *munie de la structure de Reedy, alors le foncteur de réalisation*

$$|-| : [\Delta^{op}, \mathbf{M}] \to \mathbf{M}$$

est un foncteur de Quillen à gauche.

L'exemple qui nous sera utile par la suite est celui de $\mathbf{M} = \mathbf{Top}$, où **Top** est la catégorie monoïdale modèle simpliciale des espaces topologiques compactement générés. Dans cet exemple particulier $[\Delta^{op}, \mathbf{Top}]$ est une catégorie monoïdale (la structure monoïdale est définie degré par degré à partir de la structure monoïdale de **Top**), et le foncteur de réalisation $|-| : [\Delta^{op}, \mathbf{Top}] \to \mathbf{Top}$ commute au produit monoïdale (cf [8], chapitre X, proposition 1.3).

Corollaire B.4.4. *Le foncteur de réalisation* $|-| : [\Delta^{op}, \mathbf{Top}] \to \mathbf{Top}$ *préserve les équivalences d'homotopies.*

Dans la pratique le lemme B.4.3 est difficile à utiliser, car en général, il n'est pas aisé de vérifier qu'un objet dans $[\Delta^{op}, \mathbf{M}]$ est Reedy cofibrant. Dans *l'appendice A* de l'article [22], Segal donne une alternative à ce problème dans le cas particulier de $[\Delta^{op}, \mathbf{Top}]$.

Lemme B.4.5. *Il existe une foncteur* $||-|| : [\Delta^{op}, \mathbf{Top}] \to \mathbf{Top}$*, appelé la* ***bonne réalisation****, et qui a les propriétés suivantes :*

1. *soit* $f_\bullet : X_\bullet \to Y_\bullet$ *un morphisme dans* $[\Delta^{op}, \mathbf{Top}]$ *tel que si* $f_n : X_n \to Y_n$ *est équivalence faible d'espaces topologiques pour tout* $n \in \mathbb{N}$*, alors* $||f_\bullet|| : ||X_\bullet|| \to ||Y_\bullet||$ *est une équivalence faible dans* **Top** *;*

2. *Il existe une transformation naturelle $\mathcal{N} : ||-|| \to |-|$, avec a la propriété que pour tout* ***bon espace topologique simplicial*** *$X_\bullet$, le morphisme naturel :*

$$\mathcal{N}_{X_\bullet} : ||X_\bullet|| \to |X_\bullet|$$

est une équivalence faible dans **Top** *;*

3. *le morphisme naturel $||X_\bullet \times Y_\bullet|| \to ||X_\bullet|| \times ||Y_\bullet||$ est une équivalence faible dans* **Top**.

Pour une définition plus détaillée de la notion de bonne réalisation et de **bon espace topologique simplicial**, on renvoie le lecteur vers [22].

Lemme B.4.6. *Il existe un endofoncteur $\tau : [\Delta^{op}, \mathbf{Top}] \to [\Delta^{op}, \mathbf{Top}]$ et une transformation naturelle $\mathcal{Q} : \tau \to id$ avec les propriétés suivantes :*

1. *$\tau X_\bullet$ est un bon espace topologique simplicial, pour tout $X_\bullet \in [\Delta^{op}, \mathbf{Top}]$;*
2. *le morphisme naturel $\mathcal{Q}_n : \tau_n(X_\bullet) \to X_n$ est une équivalence pour tout $n \in \mathbb{N}$;*
3. *le morphisme $||X_\bullet|| \to |\tau(X_\bullet)|$ est une équivalence faible ;*
4. *enfin, on a $\tau_0(X_\bullet) = X_0$.*

Corollaire B.4.7. *Soit $f_\bullet : X_\bullet \to Y_\bullet$ un morphisme dans $[\Delta^{op}, \mathbf{Top}]$, tel que f_n est une équivalence faible pour tout n, alors*

$$|\tau(f_\bullet)| : |\tau(X_\bullet)| \to |\tau(Y_\bullet)|$$

est une équivalence faible d'espaces topologiques.

Démonstration. C'est une conséquence directe de B.4.5 et B.4.6. □

On peut voir le foncteur τ comme une sorte de remplacement cofibrant. Il est utile pour la suite de pouvoir décrire un modèle pour le foncteur τ.

Définition B.4.8. *[[22], Appendice A] Soient $A_\bullet$ un espace topologique simplicial et σ un sous ensemble de $\{1, \dots, n\}$. On pose :*

1. *$A_{n,i} = s_i A_n$.*
2. *$A_{n,\sigma} = \cap_{i \in \sigma} A_{n,i}$.*
3. *$\tau_n(A_\bullet)$ est l'union de de tous les sous espaces $[0,1]^\sigma \times A_{n,\sigma}$ de $[0,1]^n \times A_n$.*

La flèche $\tau(A_\bullet) \to A_\bullet$ est celle qui écrase les intervalles $[0,1]^\sigma$ puis qui injecte $A_{n,\sigma}$ dans A_n.

Lemme B.4.9. *Le foncteur τ envoie les équivalences d'homotopie en des équivalences d'homotopie.*

Démonstration. Soit une homotopie $h : X_\bullet \times [0,1] \to Y_\bullet$ entre t et s. Par définition de τ, on a que

$$\begin{aligned}
\tau_n(X_\bullet \times [0,1]) &= \bigcup_{\sigma \in \{1,\ldots n\}} [0,1]^\sigma \times (X_\bullet \times [0,1])_{n,\sigma} \\
&= \bigcup_{\sigma \in \{1,\ldots n\}} ([0,1]^\sigma \times X_{n,\sigma} \times [0,1]) \\
&= (\bigcup_{\sigma \in \{1,\ldots n\}} [0,1]^\sigma \times X_{n,\sigma}) \times [0,1] \\
&= \tau_n(X_\bullet) \times [0,1].
\end{aligned}$$

Par conséquent $\tau(h) : \tau(X_\bullet) \times [0,1] \to \tau(Y_\bullet)$ est une homotopie entre $\tau(t)$ et $\tau(s)$. $\square$

Définition B.4.10. *Une section forte d'une application continue $f : X \to Y$ est une application continue $i : Y \to X$ telle que $f \circ i = id_Y$ et telle qu'il exite une homotopie entre $i \circ f$ et id_X qui fixe Y.*

Corollaire B.4.11. *Le foncteur τ préserve les sections fortes.*

Démonstration. C'est une conséquence directe du lemme B.4.9 et que τ est un foncteur, et donc préserve l'identité. $\square$

Corollaire B.4.12. *Si X est un espace topologique simplicial constant, alors $\mathcal{Q}_X : \tau(X) \to X$ admet une section forte.*

Démonstration. La section $i : X \to \tau(X)$ est induite par l'identité sur X. Pour voir que c'est une section forte, il suffit de constater que $\tau_n(X) = [0,1]^n \times X$ par définition. $\square$

B.5 Monades et Comonades

Le but de ce paragraphe est de généraliser la théorie de la section 2 de l'article [7] au cas des catégories enrichies sur **Top**.
Toute adjonction définit une monade et une comonade. On s'intresse au cas particulier de l'adjonction

$$\mathcal{O} - \mathbf{Graph}_{\mathbf{Top}} \underset{U}{\overset{L}{\rightleftarrows}} \mathcal{O} - \mathbf{Cat}_{\mathbf{Top}}$$

On a la monade $T = UL$ et la comonade $F = LU$. Notons la multiplication de T par $\mu : TT \to T$ et l'unité par $\eta : id \to T$, la comultiplication $\psi : F \to FF$ et enfin la counité $\phi : F \to id$. Les $T-$algèbres sont exactement les graphes ayant une structure de catégorie.

Notation B.5.1. *On utilisera alternativement les notations suivantes qui s'avèrent plus parlante dans des contextes différents.*

Notons par $\mathcal{O}-\mathbf{sCat_{Top}}$ *la catégorie* $[\Delta^{op}, \mathcal{O}-\mathbf{Cat_{Top}}]$*, et notons par* $\mathcal{O}-\mathbf{sGraph_{Top}}$ *la catégorie des graphes simpliciaux enrichis sur les espaces topologiques,* $[\Delta^{op}, \mathcal{O} - \mathbf{Graph_{Top}}]$*.*
Si on note $[\Delta^{op}, \mathbf{Top}]$ *par* $\mathbf{sTop}$ *alors on a*

$$\mathcal{O} - \mathbf{sCat_{Top}} = \mathcal{O} - \mathbf{Cat_{sTop}},$$

et de même

$$\mathcal{O} - \mathbf{sGraph_{Top}} = \mathcal{O} - \mathbf{Graph_{sTop}}.$$

B.5.1 Résolution simpliciale

Soit $\mathbf{C}$ est dans $\mathcal{O} - \mathbf{Cat_{Top}}$, Notons la composition itérée de F par :

$$F^k = \underbrace{F \circ F \cdots \circ F}_{k}.$$

La comonade F nous fournit une résolution simpliciale de $\mathbf{C}$ (cf [7]) définie de la façon suivante :

$$F_k\mathbf{C} = F^{k+1}\mathbf{C},$$

les faces et les dégénérescences sont données par :

$$F_k\mathbf{C} \xrightarrow{d_i = F^i \phi F^{k-i}} F_{k-1}\mathbf{C}$$

$$F_k\mathbf{C} \xrightarrow{s_i = F^i \psi F^{k-i}} F_{k+1}\mathbf{C}$$

La catégorie des espaces topologiques compactement générés étant une catégorie modèle simpliciale (tensorisée et cotensorisée sur $\mathbf{sSet}$) on a les faits suivants.

1. Dans la catégorie $\mathcal{O} - \mathbf{sCat_{Top}}$ on a le morphisme noté $f : F_\bullet\mathbf{C} \to \mathbf{C}$, où $\mathbf{C}$ est vu comme un objet constant dans $\mathcal{O} - \mathbf{sCat_{Top}}$ et $f_k = \phi^{k+1}$.

2. Le morphisme f admet une section forte $i : \mathbf{C} \to F_\bullet\mathbf{C}$ dans la catégorie des graphes enrichis sur **sTop**. La section i est induite par l'unité de la monade T, par la formule suivante $\eta_{U\mathbf{C}} : U\mathbf{C} \to ULU\mathbf{C}$;
3. L'adjonction (cf B.4.1 et B.4.2)
$$[\Delta^{op}, \mathbf{Top}] \underset{(-)^\Delta}{\overset{|-|}{\rightleftarrows}} \mathbf{Top},$$
se prolonge à l'adjonction suivante :
$$\mathcal{O} - \mathbf{Cat}_{\mathbf{sTop}} \underset{(-)^\Delta}{\overset{|-|}{\rightleftarrows}} \mathcal{O} - \mathbf{Cat}_{\mathbf{Top}},$$
puisque la réalisation est un foncteur monoïdal.
4. La réalisation du morphisme f dans la catégorie $\mathcal{O}-\mathbf{sCat}_{\mathbf{Top}}$ induit une équivalence faible dans le sens où $|f| : \mathbf{Map}_{|F_\bullet\mathbf{C}|}(a, b) \to \mathbf{Map}_{\mathbf{C}}(a, b)$ est une équivalence d'espaces topologiques pour tout $a, b \in \mathcal{O}$.

Remarque B.5.2. *La réalisation $|-|$ ne "voit" pas la structure de catégorie, seulement la structure de graphe.*

Plus généralement, pour tout $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$ dans $\mathcal{O} - \mathbf{Cat}_{\mathbf{Top}}$ le morphisme suivant :
$$F_\bullet(\mathbf{C}) \star \mathbf{D} \longrightarrow \mathbf{C} \star \mathbf{D}$$
admet aussi une section forte $\mathbf{C} \star \mathbf{D} \to F_\bullet\mathbf{C} \star \mathbf{D}$ dans la catégorie $\mathcal{O} - \mathbf{sGraph}_{\mathbf{Top}}$. En effet la catégorie $\mathcal{O} - \mathbf{Graph}_{\mathbf{Top}}$ est monoïdale (non symétrique) avec comme produit $\times_{\mathcal{O}}$ qui est une généralisation de ([17],II, 7). Une catégorie topologique est un monoïde par rapport à ce produit. Le produit libre $\mathbf{C} \star \mathbf{D}$ est construit dans $\mathcal{O} - \mathbf{Graph}_{\mathbf{Top}}$ comme
$$\mathcal{O}^c \sqcup_{\mathcal{O}} \mathbf{C}' \sqcup_{\mathcal{O}} \mathbf{D}' \sqcup_{\mathcal{O}} (\mathbf{C}' \times_{\mathcal{O}} \mathbf{C}') \sqcup_{\mathcal{O}} (\mathbf{D}' \times_{\mathcal{O}} \mathbf{D}') \sqcup_{\mathcal{O}} (\mathbf{C}' \times_{\mathcal{O}} \mathbf{D}') \sqcup_{\mathcal{O}} (\mathbf{D}' \times_{\mathcal{O}} \mathbf{C}') \ldots$$
où $\mathbf{C}'$ (resp. $\mathbf{D}'$) est le graphe correspondant $\mathbf{C}$ (resp. $\mathbf{D}$) sans les identités, et $\mathcal{O}^c$ est la catégorie triviale obtenue de l'ensemble $\mathcal{O}$. Et donc la section $\mathbf{C} \star \mathbf{D} \to F_\bullet(\mathbf{C}) \star \mathbf{D}$ est induit par la section $i : \mathbf{C} \to F_\bullet\mathbf{C}$ et $id : \mathbf{D} \to \mathbf{D}$. Par conséquent :
$$\mathbf{Map}_{\mathbf{C}\star\mathbf{D}}(a, b) \to \mathbf{Map}_{|F_i(\mathbf{C})\star\mathbf{D}|}(a, b) = \mathbf{Map}_{|F_i(\mathbf{C})|\star\mathbf{D}}(a, b)$$
est une équivalence d'espaces topologiques pour tout $a,\ b \in \mathcal{O}$.

Lemme B.5.3. *Soient $\mathbf{C} \to \mathbf{D}$ une équivalence dans $\mathcal{O} - \mathbf{Cat}_{\mathbf{Top}}$ et $\mathbf{\Gamma}$ un graphe dans $\mathcal{O} - \mathbf{Graph}_{\mathbf{Top}}$, alors le morphisme induit :*
$$L(\mathbf{\Gamma}) \star \mathbf{C} \to L(\mathbf{\Gamma}) \star \mathbf{D}$$
est une équivalence faible dans $\mathcal{O} - \mathbf{Cat}_{\mathbf{Top}}$.

Démonstration. Il suffit de montrer que $\mathbf{C}' = L(\mathbf{\Gamma})_{a,b} \star \mathbf{C} \to L(\mathbf{\Gamma})_{a,b} \star \mathbf{D} = \mathbf{D}'$ est une équivalence pour tout $(a,b) \in \mathcal{O} \times \mathcal{O}$. Si $a \neq b$, c'est une conséquence directe du lemme B.2.2, où on remplace S par $\emptyset$ et T par X, alors $\mathbf{Map}_{\mathbf{C}'}(w,z) = \coprod_k M^k_{\mathbf{C}}$ et de même $\mathbf{Map}_{\mathbf{D}'}(w,z) = \coprod_k M^k_{\mathbf{D}}$. Mais $M^k_{\mathbf{C}}$ est équivalent à $M^k_{\mathbf{D}}$ car $\mathbf{C}$ est équivalente $\mathbf{D}$. On conclut que $\mathbf{Map}_{\mathbf{C}'}(w,z)$ est équivalent à $\mathbf{Map}_{\mathbf{D}'}(w,z)$.

Si $a = b$, on note l'arrête de a vers a du graphe $\mathbf{\Gamma}$ par X. Alors, on peut se ramener au cas précédent en remarquant que $\mathbf{C}' = L(\mathbf{\Gamma})_{a,b} \star \mathbf{C}$ est simplement le pushout suivant :

$$\begin{tikzcd} U(\emptyset) \arrow[r, "f"] \arrow[d] & \mathbf{C} \arrow[d, "g"] \\ U(X) \arrow[r, "\alpha"] & \mathbf{C}' \end{tikzcd}$$

le morphisme f envoie les deux objets de $U(\emptyset)$ vers l'objet a de $\mathbf{C}$, et donc, par le lemme *B.2.2* on a que le morphisme $L(\mathbf{\Gamma})_{a,a} \star \mathbf{C} \to L(\mathbf{\Gamma})_{a,a} \star \mathbf{D}$ est une équivalence. Par conséquent $L(\mathbf{\Gamma}) \star \mathbf{C} \to L(\mathbf{\Gamma}) \star \mathbf{D}$ est une équivalence par composition transfinie d'équivalences faibles. □

Remarque B.5.4. *Plus généralement*

$$F^i(L\mathbf{\Gamma}) \star \mathbf{C} \to F^i(L\mathbf{\Gamma}) \star \mathbf{D}$$

est une équivalence dans $\mathcal{O} - \mathbf{Cat_{Top}}$ *pour tout* $0 \leq i$, *c'est à dire on a une équivalence degré par degré :* $F_\bullet(L\mathbf{\Gamma}) \star \mathbf{C} \to F_\bullet(L\mathbf{\Gamma}) \star \mathbf{D}$.

Corollaire B.5.5. *Soit* $\mathbf{M}$ *est dans* $\mathcal{O} - \mathbf{Cat_{Top}}$, *alors* $F_i\mathbf{M} \star \mathbf{C} \to F_i\mathbf{M} \star \mathbf{D}$ *est une équivalence dans* $\mathcal{O} - \mathbf{Cat_{Top}}$ *pour tout* $0 \leq i$.

Démonstration. Il suffit de voir que $F = LU$ et d'appliquer le lemme B.5.3 en posant $\mathbf{\Gamma} = U\mathbf{M}$. □

Lemme B.5.6. *Soient* $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$ *et* $\mathbf{M}$ *dans* $\mathcal{O} - \mathbf{Cat_{Top}}$, *et* $\mathbf{C} \to \mathbf{D}$ *une équivalence. Alors*

$$\mathbf{M} \star \mathbf{C} \to \mathbf{M} \star \mathbf{D}$$

est une équivalence.

Démonstration. On a déjà vu par B.5.5 que

$$h_i : F_i(\mathbf{M}) \star \mathbf{C} \to F_i(\mathbf{M}) \star \mathbf{D}$$

est une équivalence pour tout $0 \leq i$. Considérons le diagramme commutatif suivant dans $\mathcal{O} - \mathbf{Graph}_{\mathbf{sTop}}$:

$$\begin{tikzcd}
\tau(F_\bullet(\mathbf{M}) \star \mathbf{C}) \arrow[rr, "\tau(h_\bullet)"] \arrow[dr, "f_\bullet"] \arrow[dd, "\tau(t)"'] & & \tau(F_\bullet(\mathbf{M}) \star \mathbf{D}) \arrow[dr, "g_\bullet"] \arrow[dd, "\tau(s)", near end] & \\
& F_\bullet(\mathbf{M}) \star \mathbf{C} \arrow[rr, "h_\bullet", near start] \arrow[dd, "t", near end] & & F_\bullet(\mathbf{M}) \star \mathbf{D} \arrow[dd, "s"] \\
\tau(\mathbf{M} \star \mathbf{C}) \arrow[rr, "\tau(h)", near end] \arrow[dr, "f"] & & \tau(\mathbf{M} \star \mathbf{D}) \arrow[dr, "g"] & \\
& \mathbf{M} \star \mathbf{C} \arrow[rr, "h"] & & \mathbf{M} \star \mathbf{D}
\end{tikzcd}$$

Les flèches t et s sont des équivalences d'homotopie. Par B.4.4, les flèches $|t|$ et $|s|$ sont aussi des équivalences d'homotopies (de graphe sous-jacents).
Les flèches $\tau(t)$ et $\tau(s)$ sont des équivalences d'homotopies B.4.11. Par B.4.4, les flèches $|\tau(t)|$ et $|\tau(s)|$ sont des équivalences d'homotopies.
La flèche $|\tau(h_\bullet)|$ est une équivalence faible par B.4.7.
Par la propriété "2 out of 3" $|\tau(h)|$ est une équivalence faible.
Les flèches f et g sont des équivalences d'homotopies par B.4.12. Donc $|f|$ et $|g|$ sont des équivalence d'homotopie par B.4.4.
On conclut par la propriété "2 out of 3" que $|h|$ est une équivalence faible et donc h l'est aussi.

$\square$

Bibliographie

[1] J.E. Bergner. A model category structure on the category of simplicial categories. *Transactions-American Mathematical Society*, 359(5) :2043, 2007.

[2] A. Blumberg and M. Mandell. Localization theorems in topological Hochschild homology and topological cyclic homology. *arXiv*, 802, 2008.

[3] A.M. Cegarra and J. Remedios. The behaviour of the W-construction on the homotopy theory of bisimplicial sets. *manuscripta mathematica*, 124(4) :427–457, 2007.

[4] D. Dugger. Replacing model categories with simplicial ones. *Transactions of the American Mathematical Society*, pages 5003–5027, 2001.

[5] D. Dugger. Classification spaces of maps in model categories. *Arxiv preprint math/0604537*, 2006.

[6] W.G. Dwyer and K. Hess. Long knots and maps between operads. *Arxiv preprint arXiv :1006.0874*, 2010.

[7] W.G. Dwyer and D.M. Kan. Simplicial localizations of categories. *J. Pure Appl. Algebra*, 17(3) :267–284, 1980.

[8] AD Elmendorf, I. Kriz, MA Mandell, JP May, and M. Cole. *Rings, modules, and algebras in stable homotopy theory.* American Mathematical Society, 2007.

[9] A.D. Elmendorf and M.A. Mandell. Rings, modules, and algebras in infinite loop space theory. *Advances in Mathematics*, 205(1) :163–228, 2006.

[10] P.G. Goerss and JF Jardine. *Simplicial homotopy theory.* Birkhauser, 1999.

[11] P. Hirschhorn. Model categories and their localizations. *Mathematical Surveys and Monogrpahs*, page 99, 2002.

[12] M. Hovey. Model categories. *Mathematical Surveys and Monographs*, 63, 1999.

[13] M. Hovey. Spectra and symmetric spectra in general model categories. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 165(1) :63–127, 2001.

[14] A. Joyal. Advanced course on simplicial methods in higher categories. *CRM*, 2008.

[15] A. Joyal and M. Tierney. Strong stacks and classifying spaces. In *Category theory (Como, 1990)*, volume 1488, pages 213–236. Springer.

[16] G.M. Kelly. *Basic concepts of enriched category theory*. Cambridge University Press, 1982.

[17] S. Mac Lane. Categories for the working mathematician. *Graduate Texts in Mathematics*, 1969.

[18] J. Lurie. Higher topos theory. *Arxiv preprint math.CT/0608040*, 2006.

[19] D. Quillen. Higher algebraic K-theory I. *Lecture notes in Math*, 341 :85–147, 1973.

[20] C. Rezk, S. Schwede, and B. Shipley. Simplicial structures on model categories and functors. *American Journal of Mathematics*, pages 551–575, 2001.

[21] J. Rognes. Two-primary algebraic K-theory of pointed spaces. *Topology*, 41(5) :873–926, 2002.

[22] G. Segal. Categories and cohomology theories. *Topology*, 13(3) :293–312, 1974.

[23] F. Waldhausen. Algebraic K-theory of spaces. *Algebraic and geometric topology (New Brunswick, NJ, 1983)*, 1126 :318–419.

[24] F. Waldhausen, B. Jahren, and J. Rognes. Spaces of PL manifolds and categories of simple maps. *Preprint*, 2008.

[25] K. Worytkiewicz, K. Hess, P.E. Parent, and A. Tonks. A model structurea la Thomason on 2-Cat. *J. Pure Appl. Algebra*, 208(1) :205–236, 2007.

CURRICULUM VITAE

Amrani Ilias

Adresse :
Rue du centre 2 bis,
1025 Saint-Sulpice

Email : ilias.amrani@epfl.ch

Date de naissance : 16 Août 1981.
Lieu de naissance : Russie.
Nationalité : Algérienne, Russe.

Education

– B.S. Mathematics, EPFL and Ecole Normale Supérieure de Lyon (ENS), 2003.

– M.A. Mathematics, EPFL, July, 2005. Advisor : Professor Pierre Pansu, Professor Marc Troyanov.

– M.A. Number theory, Analysis, geometry, October 2005 University Paris 11. Advisor : Professor Max Karoubi.

– Ph.D. Mathematics, EPFL, *expected* September 2010.