Moyennabilité et courbure: G-espaces boréliens et espaces CAT(0)

THÈSE N^{O} 4790 (2010)

PRÉSENTÉE LE 3 SEPTEMBRE 2010

À LA FACULTÉ SCIENCES DE BASE
CHAIRE DE THÉORIE ERGODIQUE ET GÉOMÉTRIQUE DES GROUPES
PROGRAMME DOCTORAL EN MATHÉMATIQUES

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

POUR L'OBTENTION DU GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES

PAR

Martin ANDEREGG

acceptée sur proposition du jury:

Prof. K. Hess Bellwald, présidente du jury
Prof. N. Monod, directeur de thèse
Prof. A. Derighetti, rapporteur
Prof. V. Kaimanovich, rapporteur
Prof. A. Karlsson, rapporteur

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Suisse
2010

À mes grand-mères.

Summary

As Avez showed (in 1970), the fundamental group of a compact Riemannian manifold of nonpositive sectional curvature has exponential growth if and only if it is not flat. After several generalizations from Gromov, Zimmer, Anderson, Burger and Shroeder, the following theorem was proved by Adams and Ballmann (in 1998).

Theorem *Let X be a proper CAT(0) space. If Γ is an amenable group of isometries of X, then at least one of the following two assertions holds :*

(1) Γ fixes a point in ∂X (boundary of X).

(2) X contains a Γ-invariant flat (isometric copie of $\mathbb{R}^n$, $n \geq 0$).

Following an idea of my PhD advisor Nicolas Monod, I tried to generalize this theorem in the context of goupoids, in this case Borel G-spaces and countable Borel equivalence relations. This lead me to study the notion of Borel fields of metric spaces, which turns out to be a suitable context to define an action of a countable Borel equivalence relation. A field of metric spaces over a set Ω is a family $\{(X_\omega, d_\omega)\}_{\omega\in\Omega}$ of nonempty metric spaces denoted by $(\Omega, X_\bullet)$. We introduced as $\mathscr{S}(\Omega, X_\bullet)$ the set of maps

$$\Big\{ f : \Omega \to \bigsqcup_{\omega\in\Omega} X_\omega := \{(\omega, x) \mid x \in X_\omega\} \,\Big|\, f(\omega) \in X_\omega \text{ for all } \omega \in \Omega \Big\}.$$

Such maps are called sections. If Ω is a Borel space, we can define a Borel structure on a field of metric spaces to be a subset $\mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)$ of $\mathscr{S}(\Omega, X_\bullet)$ satisfying these three conditions

(i) For all $f, g \in \mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)$, the function $\Omega \to \mathbb{R}$, $\omega \mapsto d_\omega(f(\omega), g(\omega))$ is Borel.

(ii) If $h \in \mathscr{S}(\Omega, X_\bullet)$ is such that the function $\Omega \to \mathbb{R}$, $\omega \mapsto d_\omega(f(\omega), h(\omega))$ is Borel for all $f \in \mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)$, then $h \in \mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)$.

(iii) There exists a countable family of sections $\{f_n\}_{n\geq 1} \subseteq \mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)$ such that $\overline{\{f_n(\omega)\}_{n\geq 1}} = X_\omega$ for all $\omega \in \Omega$.

This definition is consistent with more classical definitions of Borel fields of Banach spaces or of Borel fields of Hilbert spaces. The notion of a Borel field of metric spaces has been used in convexe analysis and in economy. As said before, we can define an action of a countable Borel equivalence relation $\mathscr{R} \subseteq \Omega^2$ on a Borel field of metric spaces $(\Omega, X_\bullet)$ in a natural way. It's determined by a family of bijectives maps

$$\{\alpha(\omega, \omega') : X_\omega \to X_{\omega'}\}_{(\omega,\omega')\in\mathscr{R}}$$

such that

(i) For all $(\omega, \omega'), (\omega', \omega'') \in \mathscr{R}$ the following equality is satisfied

$$\alpha(\omega', \omega'') \circ \alpha(\omega, \omega') = \alpha(\omega, \omega'').$$

(ii) For all $f, g \in \mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)$, the function

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{R} & \to & \mathbb{R} \\ (\omega, \omega') & \mapsto & d_\omega(f(\omega), \alpha(\omega', \omega) g(\omega')) \end{array}$$

is Borel.

Zimmer (1977) introduced the notion of amenability for ergodic G-spaces and equivalence relations, of which we obtained the first generalization (in collaboration with Philippe Henry).

Theorem *Let R be a countable, Borel, preserving the class of the measure, ergodic and amenable equivalence relation on the probability space Ω acting on a Borel field $(\Omega, X_\bullet)$ of proper CAT(0) spaces with finite topological dimension. Then at least one of the following assertions is true :*

(1) *There exists an $\mathscr{R}$-invariant Borel section $\xi \in \mathscr{L}(\Omega, \partial X_\bullet)$.*
(2) *There exists an $\mathscr{R}$-invariant Borel subfield $(\Omega, F_\bullet)$ of $(\Omega, X_\bullet)$ consisting of flat subsets.*

And the second generalization for amenable ergodic G-spaces.

Theorem *Let G be a locally compact second countable group, Ω a preserving class of the measure, ergodic amenable G-space, X a proper CAT(0) space with finite topological dimension and $\alpha : G \times \Omega \to \mathrm{Iso}(X)$ a Borel cocycle. Then at least one of the following assertions is true :*
(1) *There exists an α-invariant Borel function $\xi : \Omega \to \partial X$.*
(2) *There exists an α-invariant borelian subfield $(\Omega, F_\bullet)$ of the trivial field (Ω, X) consisting of flat subsets.*

If we consider (Ω, μ) to be a strong boundary of the group G, the cocycle α to come from an action of G on X, and X to have flats of at most dimension 2, then we can conclude the following.

Theorem *Let G be a locally compact second countable group, (Ω, μ) a strong boundary of G, X a proper CAT(0) space with finite topological dimension and whose flats are of dimension at most 2. Let suppose that G acts by isometry on X. Then at least one of the following assertions is true :*
(1) *There exists a G-equivariant Borel function $\xi : \Omega \to \partial X$.*
(2) *There exists a G-invariant flat F in X.*

The proof of the three theorems are strongly relyied to properties of Borel field of metric spaces that we prove in this thesis.

Keywords : *Amenability, Non Positive Curvature, Borel Equivalence Relation, Ergodic Theory, CAT(0) Space, Borel Field of Metric Spaces.*

Résumé

Comme l'a montré Avez en 1970, le groupe fondamental d'une variété riemannienne à courbure sectionnelle négative est à croissance exponentielle si et seulement si elle n'est pas plate. Après plusieurs généralisations due à Gromov, Zimmer, Anderson, Burger and Shroeder, le théorème suivant a été prouvé par Adams et Ballmann en 1998.

Théorème *Soit X un espace CAT(0) propre. Si Γ est un groupe moyennable d'isométries de X, alors au moins l'une des deux affirmations suivantes est vérifiée :*
(1) Γ fixe un point du bord de X.
(2) Γ fixe un plat de X.

Suivant une idée de mon directeur de thèse Nicolas Monod, j'ai essayé de généraliser ce théorème dans le contexte des groupoïdes, plus particulièrement celui des G-espaces boréliens et des relations d'équivalence boréliennes. Ceci m'a amené à étudier la notion de champ borélien d'espaces métriques, qui s'est avéré être un contexte pertinent pour définir une action d'une relation d'équivalence borélienne dénombrable. Un champ borélien d'espaces métriques sur un ensemble Ω est la donnée d'une famille $\{(X_\omega, d_\omega)\}_{\omega\in\Omega}$ d'espaces métriques non vides. On le note $(\Omega, X_\bullet)$ et on introduit $\mathscr{S}(\Omega, X_\bullet)$ l'ensemble des applications

$$\Big\{f : \Omega \to \bigsqcup_{\omega\in\Omega} X_\omega := \{(\omega, x) \mid x \in X_\omega\} \,\Big|\, f(\omega) \in X_\omega \text{ pour tout } \omega \in \Omega\Big\}.$$

Ces applications sont appelées les sections du champ $(\Omega, X_\bullet)$. Si Ω est un espace borélien, on peut définir une structure borélienne sur $(\Omega, X_\bullet)$ comme étant un sous-ensemble $\mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)$ des sections qui satisfait les trois conditions suivantes.

(i) Pour tout $f, g \in \mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)$, la fonction $\Omega \to \mathbb{R},\ \omega \mapsto d_\omega(f_\omega, g_\omega)$ est borélienne.

(ii) Si $h \in \mathscr{S}(\Omega, X_\bullet)$ est telle que la fonction $\Omega \to \mathbb{R},\ \omega \mapsto d_\omega(f(\omega), h(\omega))$ est borélienne pour tout $f \in \mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)$, alors $h \in \mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)$.

(iii) Il existe une famille dénombrable de sections $\{f_n\}_{n\geq 1} \subseteq \mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)$ telle que $\overline{\{f_n(\omega)\}}_{n\geq 1} = X_\omega$ pour tout $\omega \in \Omega$.

Cette définition est consistante avec celles plus classiques de champ borélien d'espaces de Banach et de champ borélien d'espaces de Hilbert. On peut définir une action d'une relation d'équivalence borélienne $\mathscr{R} \subseteq \Omega^2$ sur un champ borélien d'espaces métriques d'une manière naturelle : il s'agit de la donnée d'une famille d'applications bijectives

$$\{\alpha(\omega, \omega') : X_\omega \to X_{\omega'}\}_{(\omega,\omega')\in\mathscr{R}}$$

telle que

(i) pour tout $(\omega, \omega'), (\omega', \omega'') \in \mathscr{R}$ l'égalité suivante est satisfaite

$$\alpha(\omega', \omega'') \circ \alpha(\omega, \omega') = \alpha(\omega, \omega''),$$

(ii) pour tout $f, g \in \mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)$, la fonction

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{R} & \to & \mathbb{R} \\ (\omega, \omega') & \mapsto & d_\omega(f(\omega), \alpha(\omega', \omega)g(\omega')) \end{array}$$

est borélienne.

Zimmer a introduit la notion de moyennabilité pour les G-espaces ergodiques et pour les relations d'équivalences ergodiques. En collaboration avec Philippe Henry, j'ai prouvé cette première généralisation du résultat d'Adams-Ballmann.

Théorème *Soit (Ω,μ) un espace de probabilité et $\mathscr{R}$ une relation d'équivalence dénombrable, borélienne, ergodique, qui préserve la classe de la mesure et qui agit sur un champ borélien $(\Omega,X_\bullet)$ d'espaces CAT(0) propres de dimension topologique finie. Alors au moins l'une des deux assertions suivantes est vérifiée :*

(1) Il existe une section borélienne $\mathscr{R}$-invariante $\xi \in \mathscr{L}(\Omega,\partial X_\bullet)$.
(2) Il existe un sous-champ borélien de plats $\mathscr{R}$-invariant $(\Omega,P_\bullet)$ de $(\Omega,X_\bullet)$.

Puis j'ai prouvé cette deuxième généralisation qui concerne les G-espaces ergodiques moyennables.

Théorème *Soit G un groupe localement compact à base dénombrable, (Ω,μ) un G-espace ergodique moyennable, X un espace métrique CAT(0) propre de dimension topologique finie et $\alpha : G\times\Omega \to \mathrm{Iso}(X)$ un cocycle borélien. Alors au moins l'une des deux assertions suivantes est vérifiée :*

(1) Il existe une section borélienne α-invariante $\xi \in \mathscr{L}(\Omega,\partial X_\bullet)$.
(2) Il existe un sous-champ borélien de plats α-invariant $(\Omega,P_\bullet)$ de (Ω,X).

Si on suppose que (Ω,μ) est un bord fort du groupe G, que le cocycle α provient d'une action de G sur X et que les plats de X sont de dimension au plus 2, alors on peut renforcer le théorème précédent et obtenir

Théorème *Soit G un groupe localement compact à base dénombrable, (Ω,μ) un bord fort de G et X un espace métrique CAT(0) propre de dimension topologique finie et dont les plats sont de dimension au plus 2. Supposons que G agisse par isométries sur X. Alors au moins l'une des deux assertions suivantes est vérifiées :*

(1) Il existe une section borélienne G-invariante $\xi \in \mathscr{L}(\Omega,\partial X_\bullet)$.
(2) Il existe un plat invariant P de X.

Les preuves des trois théorèmes s'appuient fortement sur des propriétés des champ boréliens d'espaces métriques que nous prouvons dans cette thèse.

Mots-Clés : *Moyennabilité, Courbure Négative, Relation d'Équivalence Borélienne, Théorie Ergodique, Espace CAT(0), Champ Borélien d'Espaces Métriques.*

Remerciements

En premier lieu j'aimerais remercier mon directeur de thèse Nicolas Monod pour m'avoir initié aux joies de la recherche mathématique. En plus de m'avoir proposé un sujet qui m'a passionné et de m'avoir guidé pendant ces cinq ans, il a toujours été présent et a su me remotiver dans les moments de doute. Mon ami Philippe Henry a partagé avec moi le bonheur (et parfois la frustration) de faire des maths depuis maintenant dix ans. Une grande partie de cette thèse est le fruit de notre collaboration, un grand merci à lui. Je remercie également les membres du jury Antoine Derighetti, Vadim Kaimanovich et Anders Karlsson, ainsi que la présidente du jury Kathryn Hess, pour avoir lu ma thèse et pour leur grande flexibilité lorsqu'il a fallu fixer la date de l'examen.

Je souhaite également remercier toute ma famille. Mes parents sans qui rien n'aurait été possible : Sandrine ma petite maman chérie et Thierry mon papa qui m'a proposé son aide à de nombreuses reprises. Merci à grand-père Michel pour avoir entraîné mon calcul quand j'étais petit et à grand-papa Claude qui m'a acheté un Sciences & Vie Junior sur les nombres qui m'a occupé une bonne partie d'un été. Merci à ma soeur Séverine, à mes frères Etienne et Raphaël, à ma belle-soeur Marie-Ève, à ma belle-mère Pascale, ainsi qu'à mes oncles, tantes et cousins qui forment la famille la plus drôle du monde.

Merci à mes camarades de volée Yves, Nicola, Philippe, Julio, Manuela et Anne pour la bonne ambiance qui régnait lors de nos études. Merci à mes ex-colocs Audrey, Sophie, Gaëtan, Gipi et Serge pour m'avoir offert le cadre idéal pour ne pas travailler à la maison et avec qui j'ai passé des instants formidables ! Merci aux habitués du Lys, de la Ferblanterie, du Gavroche et du Bizarre (ils se reconnaîtront) pour tous ces apéros et bon moments partagés. Un merci spécial à Ghislain, Eugenio et Julio pour les discussions, mathématiques ou non, qu'on a eues et les mémorables soirées qu'on a passées ensemble.

Et finalement un énorme merci à Angela pour son amour, son humour et pour m'avoir supporté quand les maths me mettaient de mauvaise humeur !

Table des matières

Introduction

La notion de moyennabilité d'un groupe a été introduite par von Neumann en 1929 lorsqu'il étudiait le phénomène de décomposition paradoxale de l'action du groupe d'isométries linéaires de l'espace sur la sphère de rayon 1 observé par Hausdorff, Banach et Tarski. Tarski a prouvé l'équivalence entre l'absence d'une action paradoxale et l'existence d'une moyenne invariante sur le groupe. Par la suite cette notion a été largement étudiée et de nombreuses définitions équivalentes ont été données. En particulier, on peut citer celle du point fixe qui prendra de l'importance dans la suite de ce travail : un groupe est moyennable si et seulement si toute action continue et affine sur un convexe compact admet un point fixe.
La notion de courbure remonte à plus longtemps. Gauss est le premier à avoir formalisé cette définition dans le cas des surfaces. La courbure a été ensuite généralisée aux variétés riemannienne, puis à des espaces plus généraux, à savoir les espaces métriques. Plusieurs auteurs ont étudié des notions d'espaces métriques à courbure négative. Une notion aujourd'hui populaire et qui fait l'objet de nombreuses recherches est celle d'espace CAT(0) dont la définition originale est due à Alexandrov et la terminologie à Gromov qui l'a introduite en l'honneur des mathématiciens Cartan, Alexandrov et Topogonov. Un espace métrique géodésique est dit CAT(0) si les triangles géodésiques de cet espace sont plus fins que les triangles euclidiens. Notons que pour tout $\kappa \in \mathbb{R}$, il existe une notion d'espace CAT(κ) d'espaces métriques à courbure $\leq \kappa$, mais que dans notre travail nous nous intéresserons uniquement au cas CAT(0).
Les liens entre moyennabilité et courbure négative ont commencé à être mis en évidence par Avez qui montre que le groupe fondamental d'une variété riemannienne compacte à courbure sectionnelle négative est à croissance sous-exponentielle si et seulement la variété est plate (*i.e.* un quotient d'un espace Euclidien). La croissance d'un groupe a des connections avec la moyennabilité et Gromov fait l'observation que l'argument d'Avez montre en fait que la variété est plate si et seulement si son groupe fondamental est moyennable. Ce résultat est par la suite généralisé par plusieurs chercheurs, notamment par Zimmer qui a prouvé le théorème suivant :

Théorème 1 (Théorème 3, [Zim83])**.** *Soit M une variété riemannienne complète de volume fini à courbure sectionnelle négative. Si le groupe fondamental de M est moyennable, alors M est plate.*

Comme le groupe fondamental d'une variété riemannienne agit par isométries sur son revêtement universel, il est naturel de se demander si on peut affirmer quelque chose sur l'action d'un groupe moyennable qui agit sur une variété de Hadamard (*i.e.* complète, simplement connexe et à courbure sectionnelle négative). La réponse est donnée dans un article de Burger et Schröder :

Théorème 2 (Théorème 2, [BS87])**.** *Soit M une variété de Hadamard. Si G est un groupe d'isométries moyennable de M, alors au moins l'une des deux assertions suivantes est vérifiée :*

(i) G fixe un point du bord à l'infini de X.

(ii) G préserve un plat de X.

Adams et Ballmann généralisent ce résultat aux espaces CAT(0) :

Théorème 3 ([AB98])**.** *Soit X un espace CAT(0) propre. Si G est un groupe moyennable d'isométries de X, alors au moins l'une des deux propriétés suivantes est vérifiée :*

(i) *G fixe un point du bord à l'infini de* X.

(ii) *G préserve un plat de* X.

Il est intéressant pour notre propos d'énoncer un résultat intermédiaire que Zimmer montre dans [Zim83] pour prouver le Théorème 1 (*i.e.* le Théorème 3 de [Zim83]).

Théorème 4 (Théorème 1, [Zim83]). *Soit* $\mathscr{F}$ *un feuilletage d'une variété riemannienne* M *tel qu'il existe une mesure invariante par holonomie sur* $\mathscr{F}$ *qui est finie sur les compacts des transversales et positive sur les ouverts. Supposons que presque toute feuille (par rapport à cette mesure) est une variété complète simplement connexe à courbure sectionnelle négative et que le feuilletage est moyennable. Alors chaque feuille de* $\mathscr{F}$ *est plate.*

Ce théorème nous amène à considérer la notion de moyennabilité d'un feuilletage mesurable, sous laquelle se cache celle de moyennabilité d'une relation d'équivalence borélienne (en l'occurrence la relation triviale sur une transversale du feuilletage : deux points sont équivalents s'ils appartiennent à la même feuille). C'est Zimmer lui-même qui introduit dans [Zim77] et [Zim78] la notion de moyennabilité pour une relation d'équivalence. Il définit, dans un premier temps, la moyennabilité d'une action [1] ergodique d'un groupe topologique localement compact séparable sur un espace de probabilité standard Ω (on appellera une telle action un G-espace), puis celle de la relation induite par l'action de G sur Ω sous le nom de moyennabilité faible du G-espace. Comme toute relation d'équivalence borélienne dénombrable sur Ω provient d'une action d'un groupe dénombrable par automorphismes boréliens sur Ω (Théorème de Feldman-Moore), on obtient bien une définition de moyennabilité pour une relation d'équivalence. Zimmer a choisi de généraliser la définition qui dit qu'un groupe G est moyennable si et seulement si toute action affine continue sur un convexe compact admet un point fixe. Une action d'un groupe sur un espace X peut-être vue comme un homomorphisme $\varphi : G \to \mathrm{Bij}(X)$ où $\mathrm{Bij}(X)$ désigne le groupe des bijections de X. Dans le contexte de la définition de la moyennabilité, on a que X est un espace vectoriel topologique localement convexe et que l'image de G par l'homomorphisme est contenue dans le groupe des transformations affines de X. Un groupe G est moyennable si pour toute telle action et tout convexe compact G-invariant $K \subseteq X$, il existe $x \in K$ qui est fixé par G. En fait, il est possible de supposer que φ et X sont d'une forme particulière. Soit B un espace de Banach séparable et $\alpha : G \to \mathrm{Iso}(B)$ un homomorphisme continu qui induit un homomorphisme $\alpha_* : G \to \mathrm{Hom}(B^*_{\leq 1})$, $g \mapsto (\alpha(g)^*)^{-1}$ où $B^*_{\leq 1}$ désigne la boule unité du dual de B muni de la topologie faible-*. On peut montrer le résultat suivant : un groupe G est moyennable si et seulement si pour tout espace de Banach séparable B, pour tout homomorphisme $\alpha : G \to \mathrm{Iso}(B)$ et pour tout compact G-invariant $K \subseteq B^*_{\leq 1}$, il existe un point de K fixé par G. Pour introduire sa notion de moyennabilité d'un G-espace ergodique, Zimmer adopte le point de vue de Mackey qui emploie, dans le cadre des G-espaces, les cocycles pour remplacer les homomorphismes. Ainsi, un "homomorphisme d'un G-espace dans un groupe H" est une application $\alpha : G \times \Omega \to H$ telle que

$$\alpha(gh, \omega) = \alpha(g, h\omega)\alpha(h, \omega) \text{ pour tous } g, h \in G \text{ et } \omega \in \Omega.$$

Une action d'un G-espace sur un espace de Banach séparable peut donc être vue comme un cocycle (borélien) $\alpha : G \times \Omega \to \mathrm{Iso}(B)$ où $\mathrm{Iso}(B)$ est le groupe des isométries linéaires de B. Ce cocycle induit, comme dans le cas des groupes, un cocycle $\alpha_* : G \times \Omega \to \mathrm{Hom}(B^*_{\leq 1})$. La notion de point et d'ensemble fixe est remplacée par celle d'application borélienne α_*-invariante. Une application borélienne $f : \omega \to B^*_{\leq 1}$ (ou dans les parties convexes compactes [2] de $B^*_{\leq 1}$) est dite α_* invariante si

$$\alpha_*(g, \omega) f(\omega) = f(g\omega) \text{ pour tout } g \in G \text{ et } \omega \in \Omega.$$

1. Attention, il existe une autre notion de moyennabilité d'une action d'un groupe qui est complètement différente : une action de G sur X est appelée moyennable s'il existe une moyenne G-invariante sur X.

2. On discutera plus tard du sens à donner à une application borélienne à valeurs dans les parties de $B^*_{\leq 1}$.

Zimmer introduit la notion de moyennabilité d'un G-espace comme suit : un G-espace est moyennable si pour tout cocycle $\alpha : G\times\Omega \to \mathrm{Iso}(B)$ et toute application "borélienne" presque α_*-invariante

$$C : \Omega \to \{\text{parties convexes compactes de } B^*_{\leq 1}\},$$

il existe une application borélienne presque α_*-invariante $f : \Omega \to B^*_{\leq 1}$ telle que $f(\omega) \in C(\omega)$ pour presque tout $\omega \in \Omega$.
Parmi les cocycles $\alpha : G \times \Omega \to \mathrm{Iso}(B)$, il en existe certains particuliers : ceux qui satisfont que $\alpha(g,\omega)$ dépend juste du couple $(\omega, g\omega) \in \Omega^2$, *i.e.* ceux quoi sont constants sur $G_\omega \times \{\omega\}$ pour tout ω (où G_ω désigne le stabilisateur de ω). Un tel cocycle factorise à travers la relation $\mathscr{R}$ induite sur Ω par G et définit une application $\alpha : \mathscr{R} \to \mathrm{Iso}(B)$ telle que

$$\alpha(\omega,\omega'') = \alpha(\omega',\omega'')\alpha(\omega,\omega') \text{ pour tous } (\omega,\omega'),(\omega'',\omega') \in \mathscr{R}.$$

Sans surprise, une telle application est appelée un cocycle de la relation d'équivalence. Le G-espace est appelé faiblement moyennable si la condition de moyennabilité est vérifiée pour tous les cocycles qui factorisent à travers la relation induite $\mathscr{R}$ et la relation induite est elle appelée moyennable.
Notre travail se situe dans la continuité du résultat d'Adams et Ballmann cité plus haut et d'un résultat de Zimmer qui apparaît dans [Zim83] et qui généralise son Théorème 1 :

Théorème 5 (Théorème 2 de [Zim83])**.** *Soit $\mathscr{F}$ un feuilletage mesurable riemannienne muni d'une mesure transversalement invariante et de volume total fini. Supposons que presque toute feuille est une variété complète simplement connexe à courbure sectionnelle négative et que le feuilletage est moyennable. Alors presque toute feuille de $\mathscr{F}$ est plate.*

Sans entrer dans les détails, il faut penser à un feuilletage mesurable riemannien comme à un "champ mesurable" de variétés riemanniennes (sur une transversale). Un des théorèmes principal de cette thèse est, en quelque sorte, au Théorème d'Adams-Ballmann ce que le Théorème 2 de [Zim83] est à celui d'Avez. On est donc amené à considérer des champs mesurables d'espaces métriques sur des espaces mesurables (ou plutôt, selon la terminologie qu'on s'est fixée dans notre travail, des champs boréliens sur des espaces boréliens). Une telle notion a déjà été introduite et étudiée dans d'autres domaines des mathématiques, comme par exemple l'analyse convexe (voir [CV77]) ou l'économie (voir [De67]). Il est difficile de déterminer qui a le premier considéré de tels objets. Historiquement, les chercheurs souhaitaient déterminer quelle serait la bonne notion "d'être borélienne" pour une application allant d'un borélien Ω dans les parties d'un espace métrique séparable X. De telles applications ont reçus plusieurs dénominations selon les chercheurs : relations (!), multifonctions, *set-valued maps*, *carrier*, sous-champs, ... Voici un exemple de questions que se posaient les auteurs : quelles sont les différentes définitions raisonnables pour une telle application d'être borélienne ? sont-elles équivalentes ? quelles hypothèses faut-il rajouter pour qu'elles le soient (que les images soient des parties fermées, des parties compactes, ou qu'il existe une mesure complète sur Ω, ...) ? quelles définitions garantissent l'existence de sélecteurs boréliens (des applications boréliennes $f : \Omega \to X$ telle que $f(\omega)$ appartient à l'image de ω par la multifonction) ? si on se donne plusieurs multifonctions boréliennes est-ce que la multifonction qui associe à ω l'intersection des images est borélienne ? Par la suite, certains chercheurs ont choisi de ne plus considérer des applications de Ω dans les parties d'un espace métrique fixé, mais de définir des champs d'espaces métriques, c'est-à-dire d'associer de "manière borélienne" à chaque ω un espace métrique séparable X_ω. Ensuite ils considéraient des multifonctions sur ce champ, c'est-à-dire des applications qui associent à chaque ω une partie de X_ω et ils se posaient des questions similaires à celle de la liste qu'on a donné plus haut pour les champs triviaux (ceux où X_ω est le même pour tout $\omega \in \Omega$).
Cette dernière approche, qui est celle que nous avons choisie dans ce travail, à l'avantage de définir un champ borélien sans requérir l'existence d'un espace ambiant. Malgré que Valadier ait prouvé qu'on pouvait toujours se ramener au cas où tous les espaces sont contenus dans un même espace

(l'espace métrique séparable universel d'Urysohn, [Val78]), il reste néanmoins agréable de pouvoir définir des champs boréliens plus abstraitement. Par exemple il est plus aisé de parler d'un champ borélien d'espaces CAT(0) propres sur Ω que de parler d'une multifonction borélienne de Ω dans l'espace d'Urysohn tel que l'image de tout ω soit isométrique à un espace CAT(0) propre. De plus, la définition des multifonctions boréliennes devient du coup plus naturelle : ce sont celles qui sont elles-mêmes des champs boréliens.
Parmi les auteurs qui ont travaillé sur ces notions, on peut citer (mais la liste n'est pas exhaustive) : Castaing ([Cas67], [CV77]), Debreux ([De67]), Delode-Arinot-Penot ([DAP76]), Himmelberg ([Hi75]), Valadier ([Val71], [CV77], [Val78]). Il est parfois difficile de faire le tri parmi les différents livres et articles sur le sujet et de vraiment comprendre quel véritable apport a été fait par chacun des auteurs (il existe de nombreux recoupements entre les différents articles), et ce d'autant plus qu'il n'existe pas de terminologie partagée par tous et que le sujet est étudié par des spécialistes de domaines assez éloignés.
Comme annoncé précédemment, l'objectif de notre travail était de continuer l'étude des liens entre la moyennabilité et la courbure négative dans le cadre des relations d'équivalence, des G-espaces moyennables et des espaces CAT(0). La notion d'une action d'un G-espace ou d'une relation sur un espace métrique est à nouveau définie à partir de celle de cocycle (comme pour la moyennabilité). Pour les relations, il est également intéressant d'introduire la définition d'une action sur un champ borélien d'espaces métriques. Voici les énoncés de deux théorèmes principaux de ce travail.

Théorème 6 (4.2.6)**.** *Soit G un groupe localement compact à base dénombrable, $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ un G-espace ergodique et moyennable, X un espace CAT(0) propre de dimension topologique de recouvrement finie et $\alpha : G \times \Omega \to \mathrm{Iso}(X)$ un cocycle borélien. Alors au moins l'une des deux assertions suivantes est vérifiée :*

(I) Il existe une section borélienne invariante $\xi_\bullet$ de points du bord.

(II) Il existe $n \in \mathbb{N}$ et un sous-champ borélien $P_\bullet$ de plats de dimension n invariant.

Théorème 7 (4.2.13)**.** *Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ un espace de probabilité standard, $\mathscr{R} \subseteq \Omega^2$ une relation d'équivalence borélienne dénombrable quasi-préservant la mesure, ergodique et moyennable, $X_\bullet$ un champ borélien d'espaces CAT(0) propres de dimension topologique de recouvrement finie et α une action par isométries de $\mathscr{R}$ sur $X_\bullet$. Alors au moins l'une des deux assertions suivantes est vérifiée :*

(I) Il existe une section borélienne invariante $\xi_\bullet$ de points du bord.

(II) Il existe $n \in \mathbb{N}$ et un sous-champ borélien $P_\bullet$ de plats de dimension n invariant.

Il existe de nombreux groupes qui, sans être moyennables, admettent des actions egodiques moyennables. Zimmer montre dans [Zim78] que le bord de Poisson d'un groupe G est un G-espace moyennable et ergodique. Burger et Monod montrent que, pour une certaine classe de groupes, ce G-espace est en fait doublement ergodique (et même doublement ergodique à coefficients), résultat généralisé ensuite par Kaimanovich à une classe plus grande. Un tel G-espace (moyennable et doublement ergodique à coefficients) est appelé un bord fort de G. Sous ces hypothèses plus fortes, on peut renforcer le théorème précédent et obtenir l'autre résultat principal de cette thèse.

Théorème 8 (5.2.1)**.** *Soit G un groupe localement compact à base dénombrable, Ω un bord fort de G et X un espace $CAT(0)$ propre de dimension topologique de recouvrement finie et dont les plats sont de dimension au plus 2. Si G agit sur X, alors l'une des deux propositions suivantes au moins est vérifiée*

(i) Il existe un plat invariant de X.

(ii) Il existe une section borélienne invariante $\xi_\bullet$ de points du bord.

Karlson et Margulis ont prouvé, sous certaines hypothèses, que si Γ est un groupe dénombrable d'isométries d'un espace métrique à courbure négative (dans un sens plus large que ceux des espaces CAT(0)), alors il existe une application équivariante du bord de poisson dans le bord de X. Voir [KarMar99] pour plus de détails.

Présentation du travail

On va maintenant présenter les différents chapitres de ce travail et attirer l'attention du lecteur sur les résultats clés. Avant cela, signalons qu'une partie du travail a été effectué en collaboration avec Philippe Henry et sous la direction de Nicolas Monod. Le contenu des Chapitres 1 et 3, de la section 4.1 ainsi que tout ce qui concerne les relations d'équivalences est, à quelques epsilons près, le fruit de cette collaboration. Le Théorème 7 a donc été prouvé en premier, puis j'ai effectué le petit travail de l'adapter au cas des G-espaces. Finalement j'ai montré une application de ce théorème au bord fort d'un groupe (Théorème 8).

Chapitres

Chapitre 1

Ce premier chapitre est consacré à l'étude des champs boréliens d'espaces métriques. Comme annoncé dans l'Introduction, le sujet a déjà été étudié par un certain nombre de chercheurs, mais souvent avec des petites variations, des hypothèses et des visions différentes pour chacun, c'est pourquoi il est parfois pénible de se faire une bonne vision du sujet à travers les nombreuses références. De plus, ce n'est pas un sujet connu dans le domaine des relations d'équivalence ou des G-espaces et certains résultats dont nous avons besoin semblent être complètement nouveaux. Pour toutes ces raisons, on a choisi de faire une présentation du sujet la plus *self-contained* possible.
Dans la Section 1.1 on introduit notre définition de champ borélien d'espaces métriques sur un espace borélien (qui coïncide avec celle de [DAP76]) qu'on donne rapidement ici. Un champ d'espaces métriques sur Ω est la donnée d'une famille $\{(X_\omega, d_\omega)\}_{\omega\in\Omega}$ d'espaces métriques qu'on note $(\Omega, X_\bullet)$ ou $X_\bullet$. Une section $x_\bullet$ du champ d'espaces métriques $(\Omega, X_\bullet)$ est un élément du produit $\prod_{\omega\in\Omega} X_\omega$ et on note x_ω pour $\pi_\omega(x_\bullet)$. On note $\mathscr{S}(\Omega, X_\bullet)$ l'ensemble des sections du champ $(\Omega, X_\bullet)$. Si $x_\bullet, y_\bullet \in \mathscr{S}(\Omega, X_\bullet)$, on définit l'application

$$\begin{array}{rccl} d_\bullet(x_\bullet, y_\bullet): & \Omega & \to & \mathbb{R}_{\geq 0} \\ & \omega & \mapsto & d_\omega(x_\omega, y_\omega). \end{array}$$

Définition (1.1.3)**.** *Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace borélien standard et $(\Omega, X_\bullet)$ un champ d'espaces métriques sur Ω. Une structure borélienne sur $(\Omega, X_\bullet)$ est la donnée d'un sous-ensemble $\mathscr{L}(\Omega, X_\bullet) \subseteq \mathscr{S}(\Omega, X_\bullet)$ tel que*

(i) Pour tout $x_\bullet, y_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)$ l'application $d_\bullet(x_\bullet, y_\bullet)$ est borélienne.

(ii) Si $y_\bullet \in \mathscr{S}(\Omega, X_\bullet)$ est telle que $d_\bullet(x_\bullet, y_\bullet)$ est borélienne pour tout $x_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)$, alors $y_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)$.

(iii) Il existe une partie dénombrable $\mathscr{D} = \{x^n_\bullet\}_{n\geq 1} \subseteq \mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)$ telle que $\overline{\{x^n_\omega\}}_{n\geq 1} = X_\omega$ pour tout $\omega \in \Omega$. On note parfois $\mathscr{D}_\omega = \{x^n_\omega\}_{n\geq 1}$.

S'il existe un tel $\mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)$, on dit que $(\Omega, X_\bullet)$ est un champ borélien séparable d'espaces métriques et $\mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)$ est appelé la structure borélienne du champ. On appelle un élément de $\mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)$ une section borélienne (de la structure $\mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)$). Un ensemble $\mathscr{D}$ satisfaisant la condition (iii) est appelé une famille fondamentale de la structure borélienne $\mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)$.

Ensuite, on montre les propriétés élémentaires, en particulier on donne une définition équivalente qui peut s'avérer utile (Lemme 1.1.6), et on exhibe un certain nombre d'exemples (1.1.12). Dans la section qui suit, on donne les définitions de sous-champ borélien et de sous-champ généralisé borélien et on prouve un résultat (très proche de [CV77] pp. 66-67 et de [DAP76] p. 31) qui caractérise agréablement les sous-champs boréliens de complets (Proposition 1.2.23).

On poursuit en prouvant, dans la Section 1.3, un théorème de Valadier qui montre que tout champ borélien d'espaces métriques est trivialisable (Théorème 1.3.6). On utilise ensuite ce résultat dans la section qui suit pour démontrer des propriétés de stabilité des sous-champs généralisés boréliens de fermés d'un champ borélien de complets sur un espace de probabilité. En particulier, on attire l'attention du lecteur sur deux résultats importants qui concernent l'ensemble des classes d'équivalence (par rapport à l'égalité presque partout) de sous-champs boréliens de fermés d'un sous-champ borélien de complets sur un espace de probabilité. Le premier affirme que cet ensemble est stable par intersection dénombrable[3] (Lemme 1.4.7) et le deuxième que cet ensemble est un treillis complet pour l'ordre de l'inclusion presque partout (Proposition 1.4.8) et que l'*infimum* (respectivement le *supremum*) d'une famille de classes d'équivalence de sous-champs boréliens généralisés de fermés peut-être réalisé comme l'intersection (respectivement l'adhérence de la réunion) d'une sous-famille dénombrable.

La Section 1.5 est consacrée à l'étude des champs d'espaces métriques propres. À notre connaissance tous les résultats contenus dans cette section sont nouveaux car nous semblons être les premiers à étudier de tels champs. Dans la première sous-section, nous considérons le champ des fonctions continues associé à un champ borélien d'espaces métriques propres et montrons qu'on peut le munir d'une structure naturel de champ borélien d'espaces métriques (celle de l'évaluation borélienne, Théorème 1.5.2). Dans la deuxième, on montre que l'ensemble des sous-champs généralisés boréliens de fermés est stable pour l'intersection dénombrable (Proposition 1.5.6). Cette proposition est donc un renforcement du Lemme 1.4.7 dans le cas particulier des champs boréliens d'espaces métriques propres (on n'a pas besoin de supposer que la base du champ est munie d'une mesure de probabilité et de considérer les classes d'équivalence). On poursuit en montrant que si on considère la topologie de Chabauty sur les parties fermées de chaque espace métrique X_ω, alors l'ensemble des sous-champs généralisés boréliens de fermés définit une structure borélienne de champ borélien d'espaces métriques sur le champ $(\Omega, \mathscr{P}_{\mathrm{Fe}}(X_\bullet))$ (Lemme 1.5.9). Dans le cas particulier d'un champ trivial (Ω, X), on montre qu'un sous-champ $F_\bullet$ généralisé de fermés est borélien si et seulement si l'application $\Omega \mapsto \mathscr{P}_{\mathrm{Fe}}(X)$, $\omega \mapsto F_\omega$ est borélienne pour la σ-algèbre engendrée par la topologie de Chabauty (Corollaire 1.5.11).

Dans la Section 1.6, on considère des champs boréliens d'espaces de Banach. On commence par montrer que cette notion, qui est sans doute plus connue dans le domaine des G-espaces et des relations d'équivalence, est (presque) consistante avec celle de champ borélien d'espaces métriques (1.6.2). Dans la deuxième sous-section, on rappelle et on détaille certaines considérations d'Anantharaman-Delaroche et Renault ([AR00]) sur le champ des duaux associé à un champ borélien d'espaces de Banach. Le résultat le plus important de cette partie est la Proposition 1.6.15 qui généralise aux champs boréliens d'espaces de Banach le théorème classique qui affirme que le dual de $L^1(\Omega, B)$ est $L^\infty(\Omega, B)$ (où B est un espace de Banach séparable et Ω un espace de probabilité). On peut également citer le résultat (nouveau) qui montre que le champ des boules unités du dual est (presque) un champ borélien d'espaces métriques (1.6.19) et son corollaire qui permet de trivialiser les champs boréliens d'espaces de Banach (Lemme 1.6.22). Le matériel de cette section sera réutilisé dans la Section 2.2.3 sur la moyennabilité d'une relation d'équivalence.

La section suivante concerne les champs boréliens d'espaces de Hilbert qui ont été introduits par Dixmier ([Dix69]). On y vérifie essentiellement la consistance avec la définition de champ borélien d'espaces métriques.

La Section 1.8 est consacrée à l'étude des champs boréliens d'espaces métriques compacts. On

3. L'intersection de sous-champs est à comprendre dans le sens de sous-champ des intersections.

prouve que si $(\Omega, K_\bullet)$ est un champ borélien d'espaces métriques compacts, alors le champ des mesures de probabilités boréliennes $(\Omega, \mathrm{Prob}(K_\bullet))$ est un champ borélien d'espaces métriques (1.8.8). Ce résultat sera utilisé en lien avec la moyennabilité pour les deux généralisations du Théorème d'Adams-Ballmann énoncées dans l'Introduction (Théorèmes 6 et 7).
On termine ce chapitre avec une dernière section qui décrit quelques constructions naturelles associées aux champs boréliens d'espaces métriques et qui interviendront dans la suite du travail : quotient d'un champ d'espaces métriques par une famille de pseudo-métriques, champ produit de deux champs d'espaces métriques, limite direct d'une famille de champs d'espaces métriques et concaténation de structures boréliennes.

Chapitre 2

Ce chapitre est divisé en deux sections : l'une concerne les G-espaces et l'autre les relations d'équivalence boréliennes. Dans la première on commence par introduire rigoureusement la notion de G-espace ergodique (2.1.1). Ensuite, on définit l'action d'un G-espace sur un ensemble X (2.1.5) et on en donne quelques exemples (2.1.8). Finalement, on rappelle la définition de Zimmer pour la moyennabilité d'un G-espace (2.1.13).
Un peu plus de travail est fait dans la section consacrée aux relations d'équivalence. Après avoir rappelé les définitions basiques, on introduit la définition d'une action d'une relation d'équivalence borélienne sur un champ borélien d'espaces métriques (2.2.6) ainsi qu'un critère pour la "compatibilité" de l'action (Proposition 2.2.9). On donne également quelques exemples (2.2.12). Finalement, une dernière partie de cette section est consacrée à la moyennabilité d'une relation d'équivalence. On y rappelle la définition de Zimmer qu'on peut reformuler en termes d'actions de la relation sur des champs triviaux d'espaces de Banach (2.2.17). Pour notre propos, il sera nécessaire d'introduire une autre notion de moyennabilité où l'on considère des actions sur des champs boréliens d'espaces de Banach non nécessairement triviaux. En utilisant le Théorème de Connes-Feldman-Weiss, qui affirme qu'une relation borélienne ergodique est moyennable si et seulement si elle est (presque) une action de $\mathbb{Z}$, on montre que les deux définitions coïncident (Proposition 2.2.28).

Chapitre 3

Après avoir rappelé la définition d'un espace CAT(0) (3.1.4), on étudie les champs boréliens d'espaces CAT(0) propres et on montre, aisément en utilisant les résultats du Chapitre 1, que de nombreuses grandeurs et objets qui apparaissent dans un espace CAT(0) (point milieu, angle, angle de comparaison, rayon et centre d'un sous-ensemble borné, projection sur un convexe, ...) se comportent de manière borélienne (Proposition 3.2.1). Ensuite, on montre que le champ des bords $(\Omega, \partial X_\bullet)$ associé à un champ borélien d'espaces CAT(0) propres possède une structure naturelle de champ borélien d'espaces métriques (Lemme 3.3.6, Proposition 3.3.8 et Remarque 3.3.10). On s'intéresse ensuite à des sous-champs boréliens $(\Omega, \partial Y_\bullet)$ suffisamment petit du champ des bords : on montre que si le rayon de chaque Y_ω est plus petit que $\pi/2$ (pour la métrique angulaire), alors la section des centres de Y_ω est borélienne. On montre ensuite dans la sous-section 3.5 que si chaque X_ω est de dimension topologique finie, alors on peut associer naturellement à une intersection décroissante de sous-champ de convexes une section de points du bord. Ces résultats (tous inédits) seront utilisés pour énoncer et démontrer les théorèmes principaux de ce travail dans les deux chapitres qui suivent.

Chapitre 4

Dans ce chapitre, on prouve les Théorèmes 6 et 7. On commence par étudier en détail le résultat technique du papier d'Adams-Ballmann qui décrit une pseudo-décomposition d'un espace CAT(0) (4.1.5). On en redonne une preuve presque complète dans le but de pouvoir l'adapter au cadre des champs boréliens d'espaces métriques (Théorème 4.1.17). Ensuite, on prouve la généralisation aux G-espaces du Théorème d'Adams-Ballmann (Théorème 4.2.6). Le cas des relations d'équivalence étant extrêmement similaire (un tout petit peu plus simple puisque les "presque partout" sont plus faciles à gérer), on en redonne pas la preuve.

Chapitre 5

On prouve le dernier résultat principal de ce travail, à savoir le dernier Théorème énoncé dans l'Introduction. On commence par rappeler la définition de Bord fort d'un groupe (5.1.2) et le seul exemple connu (Théorème 5.1.3). Dans la Section 5.2, on donne la stratégie que nous allons utiliser pour démontrer le Théorème. La preuve s'appuie en particulier sur le fait que l'action de $\mathrm{Iso}(\mathbb{R}^n)$ sur les fonctions convexes 1-Lipschitz positives sur $\mathbb{R}^n$ est lisse (Proposition 5.3.10) et sur deux résultats concernant des fonctions équivariantes $\Omega \to X$, où Ω est un G-espace et X un espace métrique sur lequel G agit par isométries (Lemmes 5.4.1 et 5.4.2). La dernière section du chapitre (5.5) est consacrée à la preuve proprement dite.

Chapitre 6

En forme de conclusion, on pose quelques questions connexes aux problématiques traitées dans cette thèse.

Appendices

Dans les appendices, on prouve quelques résultats additionnels qui ne font pas partie du corps principal du travail soit par leur manque de pertinence par rapport à l'ensemble, soit parce qu'ils sont déjà bien connus ou que leur preuve est trop proche de résultats classiques.

Appendice A

On y prouve des résultats supplémentaires sur les champs boréliens d'espaces métriques : on étudie la topologie de la convergence en mesure sur la structure borélienne d'un champ d'espaces métriques sur un espace de probabilité (Théorème A.1.3) et les espaces $\mathscr{L}^1(\Omega, B_\bullet)$ et $\mathscr{L}^\infty(\Omega, B_\bullet)$ associés à un champ borélien d'espaces de Banach (Lemme A.2.1 et A.2.2).

Appendice B

Cet appendice contient quelques résultats sur les espaces métriques ou topologiques. On énonce de nombreux résultats classiques sur les espaces CAT(0) (Section B.1) et on démontre ceux pour lesquels on n'a pas trouvé de références. On consacre une section à l'étude des parties fermées d'un espace métrique propre : on introduit la topologie de Chabauty et on prouve certaines de ses propriétés élémentaires (Proposition B.2.3), puis on donne une reformulation de cette topologie dans le cas des espaces géodésiques (Lemme B.2.5). Ensuite, on montre que si on rajoute l'hypothèse CAT(0) alors l'ensemble des parties convexes, des parties plates et des plats de dimension fixée n sont des fermés (Proposition B.2.9 et Corollaire B.2.14). Dans la Section B.3, on fait l'exercice de prouver que le groupe des isométries d'un espace métrique propre est un groupe topologique métrisable séparable et localement compact et que le groupe des homéomorphismes d'un espace topologique compact est un groupe topologique métrisable à base dénombrable. Finalement, on rappelle des résultats classiques sur les limites directes d'espaces métriques, sur le joint sphérique de deux espaces métriques et sur la semi-continuité.

Appendice C

Cet ultime appendice rappelle rapidement la stratégie et les différentes étapes de la preuve du Théorème d'Adams-Ballmann, afin que le lecteur peu familier avec ce résultat puisse l'apprivoiser avant d'aborder les généralisations du Chapitre 4 (qui suivent un schéma de preuve similaire).

Notations et conventions

On termine cette partie introductive en donnant certaines définitions et en fixant les conventions et les notations que nous avons choisies pour ce travail.

Espaces métriques

Si X est un espace topologique, on note $\mathscr{P}(X)$ l'ensemble des parties de X, $\mathscr{P}^*(X)$ l'ensemble des parties non vides, $\mathscr{P}_{\mathrm{Fe}}(X)$ les parties fermées et $\mathscr{P}^*_{\mathrm{Fe}}(X)$ les parties fermées non vides. On note $\mathscr{C}(X)$ les fonctions continues sur X.
Soit (X,d) un espace métrique. Pour $x \in X$ et $r \in \mathbb{R}$, on note

$$B(x,r) = \{y \in X \mid \ d(x,y) < r\}$$

la boule ouverte de rayon r centrée en x,

$$\overline{B}(x,r) = \{y \in X \mid \ d(x,y) \leq r\}$$

la boule fermée et

$$\overline{B(x,r)}$$

l'adhérence de la boule ouverte. On note encore

$$S(x,r) = \{y \in X \mid d(x,y) = r\}$$

la sphère de rayon r centrée en x
Un espace métrique est dit propre si les boules fermées sont compactes (ou, de manière équivalente, si tous les sous-ensembles fermés et bornés sont compacts).
Un espace métrique est dit séparable s'il existe une partie dénombrable dense dans X.
Un espace métrique est dit complet si toutes les suites de Cauchy convergent.
Pour $x \in X$, on note d_x la fonction distance à x, *i.e.*

$$\begin{array}{rccl} d_x : & X & \longrightarrow & \mathbb{R}_{\geq 0} \\ & y & \mapsto & d_x(y) = d(x,y) \end{array}$$

Espaces boréliens standards

Définitions 0.0.1. *[[Kec95], p. 74] Un espace mesurable est la donnée d'un ensemble Ω et d'une σ-algèbre $\mathscr{A}$ sur Ω. Dans le cas particulier où Ω est un espace topologique et que $\mathscr{A}$ est la σ-algèbre des boréliens* [4]*, on dit que $(\Omega, \mathscr{A})$ est un espace borélien. Un espace borélien $(\Omega, \mathscr{A})$ est un espace borélien standard s'il est isomorphe à $(Y, \mathscr{B}(Y))$ où Y est un espace métrique séparable complet et $\mathscr{B}(Y)$ est la σ-algèbre des boréliens. Un théorème de Kuratowski affirme que tous les boréliens standard non dénombrables sont isomorphes (voir le Théorème 15.6 de [Kec95]). Un espace de probabilité borélien standard est un espace borélien standard muni d'une mesure de probabilité borélienne μ définie sur $\mathscr{A}$. Pour simplifier on appelle parfois "espace de probabilité standard" un tel espace.*

4. *I.e. celle engendrée par les ouverts.*

Un espace borélien $(\Omega, \mathscr{A})$ *est dit dénombrablement séparé s'il existe une suite* $\{A_n\}_{n\geq 1} \subseteq \mathscr{A}$ *qui sépare les points de* Ω.

Un espace borélien $(\Omega, \mathscr{A})$ *est dit dénombrablement engendré s'il existe une suite* $\{A_n\}_{n\geq 1} \subseteq \mathscr{A}$ *qui sépare les points de* Ω *et qui engendre* $\mathscr{A}$.

$(\Omega, \mathscr{A})$ *est un espace borélien dénombrablement engendré si et seulement s'il est Borel isomorphe à une partie borélienne d'un borélien standard (Proposition 12.1 de [Kec95]).*

Si X *et* Ω *sont des espaces boréliens, alors on note* $\mathscr{L}(\Omega, X)$ *l'ensemble des applications boréliennes de* Ω *dans* X.

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ un espace de probabilité. On dit que $\mathscr{A}$ est (μ)-complète si la propriété suivante est satisfaite : si $A \subseteq \Omega$ est tel qu'il existe $B \in \mathscr{A}$ de mesure nulle avec $A \subseteq B$, alors $A \in \mathscr{A}$.
Si une σ-algèbre n'est pas μ-complète, le théorème suivant permet de définir sa μ-complétion.

Théorème 0.0.2 ([Doo94], p. 37). *Soit* $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ *un espace de probabilité. Il existe alors une plus petite* σ*-algèbre* $\mathscr{A}^*$ *satisfaisant les conditions :*

(i) $\mathscr{A}^* \supseteq \mathscr{A}$ *;*

(ii) Il existe une mesure complète sur $\mathscr{A}^*$ *dont la restriction à* $\mathscr{A}$ *est* μ. $\mathscr{A}^*$ *est formée des ensembles* A *pour lesquels il existe* B *et* C *dans* $\mathscr{A}$ *satisfaisant les conditions*

$$B \subseteq A \subseteq C, \quad \mu(C \setminus B) = 0.$$

Définition 0.0.3. *Soit* $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ *un espace de probabilité standard. Un élément de la* μ*-complétion* $\mathscr{A}^*$ *est appelé un ensemble* μ*-mesurable. Soit* $(X, \mathscr{B})$ *un espace borélien. Une application* f *de* Ω *dans* X *est appelé une application* μ*-mesurable si* $f^{-1}(B) \in \mathscr{A}^*$ *pour tout* $B \in \mathscr{B}$. *On appelle* μ*-négligeable un élément de* $\mathscr{A}^*$ *de mesure nulle.*

Définition 0.0.4. *Soit* $(\Omega, \mathscr{A})$ *un espace borélien standard,* μ *et* ν *deux mesures boréliennes. Si, pour tout* $A \in \mathscr{A}$ *tel que* $\nu(A) = 0$*, on a* $\mu(A) = 0$ *alors on écrit* $\mu \ll \nu$ *et on dit que* μ *est absolument continue par rapport à* ν. *On dit que* μ *et* ν *sont équivalentes et on écrit* $\mu \sim \nu$ *si elles sont les deux absolument continues l'une par rapport à l'autre. Soit* $\varphi : \Omega \to \Omega$ *une application borélienne. On dit que* φ *préserve la classe de* μ *(ou préserve quasiment* μ*) si la mesure image* $\varphi_*(\mu)$ *définie par*

$$\varphi_*(\mu)(A) = \mu(\varphi^{-1}(A)) \quad \textit{pour tout } A \in \mathscr{A}$$

est telle que $\varphi_*(\mu) \sim \mu$. *On dit que* φ *préserve la mesure si* $\varphi_*\mu = \mu$. *Remarquons qu'un automorphisme borélien préserve la mesure (respectivement préserve quasiment la mesure) si et seulement si son inverse, qui est par hypothèse également borélien, le fait.*

Chapitre 1

Champs boréliens d'espaces métriques

1.1 Définitions et premières propriétés

Définition 1.1.1. *Soit Ω un ensemble non vide. Un champ d'espaces métriques sur Ω est la donnée d'une famille $\{(X_\omega, d_\omega)\}_{\omega\in\Omega}$ d'espaces métriques non vides*[1]*. On note un tel champ $(\Omega, X_\bullet)$, $(\Omega, (X_\bullet, d_\bullet))$ ou encore $X_\bullet$ si Ω est sous-entendu.*
On dit que $(\Omega, X_\bullet)$ est un champ d'espaces métriques généralisé si $(\{\omega \in \Omega \mid X_\omega \neq \emptyset\}, X_\bullet)$ est un champ d'espaces métriques.
Une section $x_\bullet$ du champ d'espaces métriques $(\Omega, X_\bullet)$ est un élément du produit $\prod_{\omega\in\Omega} X_\omega$. On adopte la notation $x_\omega := \pi_\omega(x_\bullet)$ où $\pi_\omega : \prod_{\omega'\in\Omega} X_{\omega'} \to X_\omega$ désigne la projection canonique. On peut également penser à une section comme à une application

$$x_\bullet : \Omega \to \coprod_{\omega\in\Omega} X_\omega := \{(\omega, x) \mid x \in X_\omega\}$$

telle que $x_\omega := x_\bullet(\omega) = (\omega, x) \in \{\omega\} \times X_\omega$ pour tout $\omega \in \Omega$.
On note $\mathscr{S}(\Omega, X_\bullet)$ l'ensemble des sections du champ $(\Omega, X_\bullet)$.

Définition 1.1.2. *Soit $(\Omega, X_\bullet)$ un champ d'espaces métriques et $\Omega' \subseteq \Omega$ un sous-ensemble non vide. Alors $(\Omega', X_\bullet)$ est aussi un champ d'espaces métriques qu'on appelle la restriction de $(\Omega, X_\bullet)$ à Ω'. Si $x_\bullet \in \mathscr{S}(\Omega, X_\bullet)$, alors on note $x_\bullet|_{\Omega'} \in \mathscr{S}(\Omega', X_\bullet)$ la restriction de $x_\bullet$ à Ω'.*

Soit $(\Omega, X_\bullet)$ un champ d'espaces métriques et $x_\bullet, y_\bullet \in \mathscr{S}(\Omega, X_\bullet)$. On définit l'application

$$\begin{array}{rccl} d_\bullet(x_\bullet, y_\bullet) : & \Omega & \to & \mathbb{R}_{\geq 0} \\ & \omega & \mapsto & d_\omega(x_\omega, y_\omega). \end{array}$$

Définition 1.1.3. *Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace borélien et $(\Omega, X_\bullet)$ un champ d'espaces métriques sur Ω. Une structure borélienne sur $(\Omega, X_\bullet)$ est la donnée d'un sous-ensemble $\mathscr{L}(\Omega, X_\bullet) \subseteq \mathscr{S}(\Omega, X_\bullet)$ tel que*

(i) Pour tout $x_\bullet, y_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)$ l'application $d_\bullet(x_\bullet, y_\bullet)$ est borélienne.

(ii) Si $y_\bullet \in \mathscr{S}(\Omega, X_\bullet)$ est telle que $d_\bullet(x_\bullet, y_\bullet)$ est borélienne pour tout $x_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)$, alors $y_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)$.

(iii) Il existe une partie dénombrable $\mathscr{D} = \{x^n_\bullet\}_{n\geq 1} \subseteq \mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)$ telle que $\overline{\{x^n_\omega\}_{n\geq 1}} = X_\omega$ pour tout $\omega \in \Omega$. On note parfois $\mathscr{D}_\omega = \{x^n_\omega\}_{n\geq 1}$.

S'il existe un tel $\mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)$, on dit que $(\Omega, X_\bullet)$ est un champ borélien séparable d'espaces métriques et $\mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)$ est appelé la structure borélienne du champ. On appelle un élément de $\mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)$ une section borélienne (de la structure $\mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)$). Un ensemble $\mathscr{D}$ satisfaisant la condition (iii) est appelé une famille fondamentale de la structure borélienne $\mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)$. Un ensemble de sections qui satisfait le point (i) est dit compatible avec la famille de métriques $\{d_\omega\}_{\omega\in\Omega}$.

1. Pour certains auteurs, un espace métrique est non vide par définition...

Remarques 1.1.4. (1) Il est important de remarquer que la définition de champ borélien implique que chaque espace métrique X_ω est séparable pour tout $\omega \in \Omega$.

(2) Supposons qu'on ait deux structures boréliennes $\mathscr{L}_1(\Omega, X_\bullet)$ et $\mathscr{L}_2(\Omega, X_\bullet)$ sur un même champ $(\Omega, X_\bullet)$. Si ces structures sont comparables, *i.e.* $\mathscr{L}_1(\Omega, X_\bullet) \subseteq \mathscr{L}_2(\Omega, X_\bullet)$ (ou le contraire), alors elles sont égales. En effet, soit $y_\bullet \in \mathscr{L}_2(\Omega, X_\bullet)$. Alors $d_\bullet(x_\bullet, y_\bullet)$ est borélienne pour tout $x_\bullet \in \mathscr{L}_1(\Omega, X_\bullet) \subseteq \mathscr{L}_2(\Omega, X_\bullet)$ et donc $y_\bullet \in \mathscr{L}_1(\Omega, X_\bullet)$ par le point (i) de la définition 1.1.3.

(3) On pourrait très bien définir un champ sur un espace mesurable plutôt que sur un ensemble borélien et demander que les fonctions $d_\bullet(x_\bullet, y_\bullet)$ soient mesurables au lieu d'être boréliennes. On a choisi de garder la terminologie borélienne pour éviter de changer trop souvent de vocabulaire : dans les prochaines sections on considéra des relations d'équivalence et des G-espaces sur des espaces boréliens (standards). On évite ainsi également la confusion entre fonction mesurable et μ-mesurable (voir la Définition 0.0.3).

Les exemples viendront un peu plus tard, après avoir étudié les premières propriétés de ces structures.

Définition 1.1.5. *Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace borélien, $(\Omega, X_\bullet)$ un champ borélien d'espaces métriques $\mathscr{C} \subseteq \mathscr{S}(\Omega, X_\bullet)$ un sous-ensemble de sections. Une section $x_\bullet \in \mathscr{S}(\Omega, X_\bullet)$ est un recollement dénombrable borélien d'éléments de $\mathscr{C}$ s'il existe des ensembles $\{\Omega_n\}_{n\geq 1} \subseteq \mathscr{A}$ et des sections $\{x_\bullet^n\}_{n\geq 1} \subseteq \mathscr{C}$ tels que*

$$\Omega = \bigsqcup_{n\geq 1} \Omega_n \quad \text{et} \quad x_\bullet|_{\Omega_n} = x_\bullet^n|_{\Omega_n} \text{ pour tout } n \geq 1.$$

On dit que c'est un recollement fini borélien si la partition est finie au lieu d'être dénombrable. On note $\mathrm{Rec}(\mathscr{C}) \subseteq \mathscr{S}(\Omega, X_\bullet)$ *l'ensemble des sections obtenues comme recollement borélien dénombrable d'éléments de $\mathscr{C}$.*
Soit $\{y_\bullet^n\}_{n\geq 1} \subseteq \mathscr{S}(\Omega, X_\bullet)$ et $y_\bullet \in \mathscr{S}(\Omega, X_\bullet)$. On dit que $y_\bullet$ est limite ponctuelle de la suite de sections $\{y_\bullet^n\}$ si $\lim_{n\to\infty} y_\omega^n = y_\omega$ pour tout $\omega \in \Omega$ et on note $y_\bullet = \lim_{n\to\infty} y_\bullet^n$. Si $\mathscr{C} \subseteq \mathscr{S}(\Omega, X_\bullet)$ est un sous-ensemble de sections, on note $\mathrm{LimPonc}(\mathscr{C}) \subseteq \mathscr{S}(\Omega, X_\bullet)$ *l'ensemble des sections obtenues comme limite ponctuelle d'éléments de $\mathscr{C}$.*

Ces notions de limite ponctuelle et de recollement dénombrable borélien permettent de reformuler la partie de la définition d'une structure borélienne concernant la maximalité.

Lemme 1.1.6. *Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace borélien et $(\Omega, X_\bullet)$ un champ d'espaces métriques sur Ω. Soit $\mathscr{L}(\Omega, X_\bullet) \subseteq \mathscr{S}(\Omega, X_\bullet)$ telle que les points (i) et (iii) de la Définition 1.1.3 soient satisfaits. Alors le point (ii) de cette même définition est équivalent à*
(ii)' $\mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)$ est clôt par limites ponctuelles et recollements dénombrables boréliens,
ou à
(ii)" $\mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)$ est clôt par limites ponctuelles et recollements finis boréliens.

Preuve. On va montrer (ii) ⇒ (ii)" ⇒ (ii)'⇒ (ii).
[(ii) ⇒ (ii)"] Soit $y_\bullet$ un recollement dénombrable borélien d'éléments $\{y_\bullet^n\}_{n\geq 1} \subseteq \mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)$. Comme un recollement dénombrable borélien d'applications boréliennes est une application borélienne, la fonction $d_\bullet(x_\bullet, y_\bullet)$ est borélienne pour tout $x_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)$ et donc $y_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)$. Soit $y_\bullet = \lim_{n\to\infty} y_\bullet^n$ avec $\{y_\bullet^n\}_{n\geq 1} \subseteq \mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)$, alors $d_\bullet(x_\bullet, y_\bullet) = \lim_{n\to\infty} d_\bullet(x_\bullet, y_\bullet^n)$ est borélienne pour tout $x_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)$ puisque c'est une limite ponctuelle de fonctions boréliennes et donc $y_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)$.
[(ii)" ⇒ (ii)'] Supposons que $x_\bullet \in \mathscr{S}(\Omega, X_\bullet)$ est défini à partir de la décomposition $\Omega = \sqcup_{n\geq 1} \Omega_n$ et de la famille $\{x_\bullet^n\}_{n\geq 1} \subseteq \mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)$, *i.e.* $x_\bullet|_{\Omega_n} = x_\bullet^n|_{\Omega_n}$ pour tout $n \geq 1$. On introduit, pour tout $n \geq 1$, la section $\widetilde{x}_\bullet^{\,n}$ définie par

$$\widetilde{x}_\bullet^{\,n}|_{\Omega_j} = \begin{cases} x_\bullet^j|_{\Omega_j} & \text{si } 1 \leq j \leq n, \\ x_\bullet^1|_{\Omega_j} & \text{si } j \geq n+1. \end{cases}$$

Par hypothèse, $\tilde{x}_\bullet^{\,n} \in \mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)$ pour tout $n \geq 1$ puisque c'est un recollement fini et on a $\lim_{n\to\infty} \tilde{x}_\bullet^{\,n} = x_\bullet$ qui appartient donc bien à $\mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)$.
[(ii)' ⇒ (ii)] Soit $y_\bullet \in \mathscr{S}(\Omega, X_\bullet)$ telle que $d_\bullet(x_\bullet, y_\bullet)$ est borélienne pour tout $x_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)$. On se fixe $\mathscr{D} = \{x_\bullet^n\}_{n\geq 1}$ une famille fondamentale et, pour tout $k \geq 1$, on définit $n_\bullet^k \in \mathscr{S}(\Omega, \mathbb{N})$ par

$$n_\omega^k := \min\{n \in \mathbb{N} \mid \ d_\omega(x_\omega^n, y_\omega) \leq 1/k\}.$$

Ces fonctions sont bien définies puisque $\mathscr{D}_\omega$ est dense pour tout $\omega \in \Omega$ et boréliennes puisque [2]

$$\{\omega \in \Omega \mid n_\omega^k \leq N\} = \bigcup_{j=1}^{N} \left(d_\bullet(x_\bullet^j, y_\bullet)\right)^{-1}([0, 1/k]) \in \mathscr{A} \quad \text{pour tout } N \geq 1.$$

Pour tout $k \geq 1$, on définit $y_\bullet^k \in \mathscr{S}(\Omega, X_\bullet)$ par recollement en posant

$$y_\bullet^k\,|_{\left(n_\bullet^k\right)^{-1}(\{j\})} = x_\bullet^j\,|_{\left(n_\bullet^k\right)^{-1}(\{j\})} \qquad \text{pour tout } \ j \geq 1.$$

Par construction, on a bien que $y_\bullet^k$ est un recollement dénombrable borélien d'éléments de $\mathscr{D} \subseteq \mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)$ et que $\lim_{k\to\infty} y_\bullet^k = y_\bullet$ (la convergence est même uniforme). Ainsi, $y_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)$. □

Remarque 1.1.7. Dans la preuve ci-dessus, on a utilisé un argument qui sera fréquemment réutilisé dans la suite et qu'il est donc bon de formaliser une fois pour toutes :
Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace borélien et $(\Omega, X_\bullet)$ un champ borélien d'espaces métriques sur Ω de structure borélienne $\mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)$. Supposons qu'on se soit donné $\{x_\bullet^n\}_{n\geq 1} \subseteq \mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)$ et $n_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega, \mathbb{N})$. Alors la section $x_\bullet^{n_\bullet}$ définie par

$$\left(x_\bullet^{n_\bullet}\right)_\omega := x_\omega^{n_\omega}$$

est borélienne.

On va tout de suite utiliser cette remarque pour prouver un résultat sur la fonction cardinalité d'un champ borélien d'espaces métriques.

Lemme 1.1.8. *Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace borélien et $(\Omega, X_\bullet)$ un champ borélien d'espaces métriques. Alors*

$$\begin{array}{rccc} |X_\bullet| : & \Omega & \to & \mathbb{N} \cup \{\infty\} \\ & \omega & \mapsto & |X_\omega| \end{array}$$

est borélienne. Notons $\Omega_n := \{\omega \in \Omega \mid |X_\omega| = n\}$ et $\Omega_{fini} := \cup_{n\geq 1}\Omega_n$. Alors il existe une famille fondamentale $\{z_\bullet^m\}_{m\geq 1}$ de la structure borélienne $\mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)$ telle que, pour tout $n \geq 1$ et tout $\omega \in \Omega_n$, $z_\omega^1, z_\omega^2, \dots, z_\omega^n$ soient distincts deux à deux et $z_\omega^j = z_\omega^1$ pour tout $j \geq n+1$.

Preuve. On choisit $\{x_\bullet^n\}_{n\geq 1}$ une famille fondamentale de la structure borélienne $\mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)$. Posons $z_\bullet^1 := x_\bullet^1$. Alors

$$\Omega_1 = \{\omega \in \Omega \mid \sup_{n\geq 2} d_\omega(z_\omega^1, x_\omega^n) = 0\} \in \mathscr{A}.$$

On définit $n_\bullet^2 \in \mathscr{L}(\Omega, \mathbb{N})$ par

$$n_\omega^2 := \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in \Omega_1 \\ \min\{n \in \mathbb{N} \mid d_\omega(z_\omega^1, x_\omega^n) \neq 0\} & \text{sinon} \end{cases}$$

2. Pour montrer qu'une application $n_\bullet \in \mathscr{S}(\Omega, \mathbb{N})$ est borélienne, il suffit de vérifier que

$$\{\omega \in \Omega \mid n_\omega \leq N\} \in \mathscr{A} \text{ pour tout } N \in \mathbb{N}.$$

et $z_\bullet^2 := x_\bullet^{n_\bullet^2} \in \mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)$.

Supposons qu'on ait montré que $\Omega_1, \ldots, \Omega_N$ sont boréliens et qu'on ait fabriqué $z_\bullet^1, \ldots, z_\bullet^{N+1} \in \mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)$ telles que

- Pour tout $1 \leq n \leq N$ et $\omega \in \Omega_n$, les points $z_\omega^1, \ldots z_\omega^n$ sont distincts deux à deux et $z_\omega^{n+1} = \ldots = z_\omega^{N+1} = z_\omega^1$.
- Si $\omega \notin \cup_{n=1}^N \Omega_n$ alors $\{z_\omega^1, \ldots, z_\omega^{N+1}\}$ sont les $N+1$ premiers éléments distincts de la suite $\{x_\omega^n\}_{n\geq 1}$.

Alors
$$\Omega_{N+1} = \{\omega \in \Omega \setminus (\cup_{1\leq n\leq N} \Omega_n) \mid \sup_{j\geq 0} \big(\inf_{1\leq n\leq N+1} d_\omega(z_\omega^n, x_\omega^j)\big) = 0\} \in \mathscr{A}.$$

On définit $n_\bullet^{N+2} \in \mathscr{L}(\Omega, \mathbb{N})$ par

$$n_\omega^{N+2} := \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in \bigcup_{1\leq n\leq N+1} \Omega_n \\ \min\{n \in \mathbb{N} \mid \inf_{1\leq n\leq N+1} d_\omega(z_\omega^n, x_\omega^j) \neq 0\} & \text{sinon.} \end{cases}$$

et $z_\bullet^{N+2} := x_\bullet^{n_\bullet^{N+2}} \in \mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)$.

On fabrique ainsi par récurrence la famille fondamentale de l'énoncé. □

La définition d'une structure borélienne impose l'existence d'une famille fondamentale. Le lemme qui suit donne une sorte de réciproque.

Lemme 1.1.9. *Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace borélien et $(\Omega, X_\bullet)$ un champ d'espaces métriques sur Ω. Soit $\mathscr{D} = \{x_\bullet^n\}_{n\geq 1} \subseteq \mathscr{S}(\Omega, X_\bullet)$ satisfaisant :*

(i) Pour tous entiers $n, m \geq 1$ l'application $d_\bullet(x_\bullet^n, x_\bullet^m)$ est borélienne.

(ii) $\overline{\{x_\omega^n\}}_{n\geq 1} = X_\omega$ pour tout $\omega \in \Omega$.

Introduisons les deux ensembles suivants

$$\begin{aligned} \mathscr{L}_1(\Omega, X_\bullet) &= \{y_\bullet \in \mathscr{S}(\Omega, X_\bullet) \mid d_\bullet(x_\bullet^n, y_\bullet) \text{ est borélienne pour tout } n \geq 1\}, \\ \mathscr{L}_2(\Omega, X_\bullet) &= \{x_\bullet \in \mathscr{S}(\Omega, X_\bullet) \mid x_\bullet \text{ est limite ponctuelle de recollements dénombrables} \\ &\qquad \text{boréliens d'éléments de } \mathscr{D}\} = \mathrm{LimPonc}(\mathrm{Rec}(\mathscr{D})). \end{aligned}$$

Alors $\mathscr{L}_1(\Omega, X_\bullet) = \mathscr{L}_2(\Omega, X_\bullet)$ et cet ensemble est l'unique structure borélienne de $(\Omega, X_\bullet)$ qui contienne $\mathscr{D}$. On l'appelle la structure engendrée par $\mathscr{D}$ et on la note $\mathscr{L}_{\mathscr{D}}(\Omega, X_\bullet)$.

On observe de plus que si $\mathscr{D}$ est une famille fondamentale d'une structure borélienne $\mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)$, alors on a
$$\mathscr{L}_{\mathscr{D}}(\Omega, X_\bullet) = \mathscr{L}(\Omega, X_\bullet).$$

Preuve. On commence par montrer que $\mathscr{L}_1(\Omega, X_\bullet)$ est une structure borélienne. Les points (ii) et (iii) de la Définition 1.1.3 sont trivialement satisfaits par définition de $\mathscr{L}_1(\Omega, X_\bullet)$. Il reste à prouver le point (i). Soit $y_\bullet$, $z_\bullet \in \mathscr{L}_1(\Omega, X_\bullet)$, alors
$$d_\bullet(y_\bullet, z_\bullet) = \sup_{n\geq 1} \mid d_\bullet(y_\bullet, x_\bullet^n) - d_\bullet(x_\bullet^n, z_\bullet) \mid$$

est borélienne par définition de $\mathscr{L}_1(\Omega, X_\bullet)$ et le point (ii) est vérifié. Par la Remarque 1.1.4 (2), il existe une unique structure borélienne qui contient $\mathscr{D}$. Montrons maintenant l'égalité $\mathscr{L}_1(\Omega, X_\bullet) = \mathscr{L}_2(\Omega, X_\bullet)$.

[$\supseteq$] Par le Lemme 1.1.6, on sait que $\mathscr{L}_1(\Omega, X_\bullet)$ est clôt par recollement borélien dénombrable et limite simple. Et donc $\mathscr{L}_2(\Omega, X_\bullet) \subseteq \mathscr{L}_1(\Omega, X_\bullet)$ par définition.

[$\subseteq$] On montre exactement ce qu'il faut dans la preuve du Lemme 1.1.6 [(ii)' $\Rightarrow$ (ii)]. □

Ce lemme permet de construire de nouvelles structures boréliennes. En effet, on peut l'utiliser pour étendre des structures, comme dans l'exemple qui suit.

Exemple 1.1.10. Si $X_\bullet$ est un champ borélien d'espaces métriques, alors $X^c_\bullet$, où X^c_ω est la complétion de X_ω, est un champ borélien puisqu'une famille fondamentale pour $X_\bullet$ est une famille fondamentale pour $X^c_\bullet$. Ainsi, il existe une unique structure borélienne $\mathscr{L}(\Omega, X^c_\bullet)$ sur le champ $X^c_\bullet$ tel que $\mathscr{L}(\Omega, X_\bullet) \subseteq \mathscr{L}(\Omega, X^c_\bullet)$.

Définition 1.1.11. *Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace borélien et $(\Omega, X_\bullet)$ un champ d'espaces métriques sur Ω. Par extension, on appelle aussi famille fondamentale un ensemble $\mathscr{D} = \{x^n_\bullet\}_{n\geq 1} \subseteq \mathscr{S}(\Omega, X_\bullet)$ satisfaisant les hypothèses du Lemme 1.1.9.*
On dit que deux familles fondamentales sont équivalentes si les structures boréliennes engendrées coïncident.

Exemples 1.1.12. (1) Considérons $([0,1], \mathscr{B}([0,1]))$ l'intervalle $[0,1]$ muni de la σ-algèbre des sous-ensembles boréliens, ainsi que le champ trivial défini par $(X_\omega, d_\omega) = (\mathbb{R}, |\cdot|)$ pour tout $\omega \in [0,1]$. Alors $\mathscr{L}([0,1], \mathbb{R}) = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} \mid f \text{ est borélienne}\}$ est une structure borélienne sur ce champ, une famille fondamentale étant l'ensemble des fonctions constantes à valeurs dans $\mathbb{Q}$. Plus généralement si $(\Omega, \mathscr{A})$ est un espace borélien standard et si X est un espace métrique séparable, alors

$$\mathscr{L}(\Omega, X) = \{f : \Omega \to X \mid f \text{ est borélienne}\}$$

est une structure borélienne sur le champ trivial (par le Lemme 1.1.9). Cet exemple montre que la notation $\mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)$ est cohérente avec la notation $\mathscr{L}(\Omega, X)$ dans le cas d'un champ trivial.

(2) Soit $(\Omega, X_\bullet)$ un champ borélien d'espaces métriques de structure borélienne $\mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)$. Toute famille dénombrable $\{y^n_\bullet\}_{n\geq 1} \subseteq \mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)$ permet de construire un nouveau champ borélien d'espaces métriques $(\Omega, Y_\bullet)$ en définissant $Y_\omega := \overline{\{y^n_\omega\}}_{n\geq 1}$. En effet, $\mathscr{L}(\Omega, X_\bullet) \cap \mathscr{S}(\Omega, Y_\bullet)$ est naturellement une structure borélienne pour ce champ.

(3) Il existe des champs d'espaces métriques qui n'admettent aucune structure borélienne. Évidemment les champs qui n'ont pas la propriété que chaque espace métrique est séparable sont ainsi. Cependant, il existe d'autres contre-exemples moins triviaux. Choisissons $\Omega = \Omega_1 \sqcup \Omega_2$ une décomposition non borélienne de Ω et définissons $(\Omega, X_\bullet)$ par

$$X_\omega := \begin{cases} \{0\} & \text{si } \omega \in \Omega_1 \\ \{0,1\} & \text{si } \omega \in \Omega_2, \end{cases}$$

où chaque X_ω est muni de la métrique discrète. Ce champ n'admet aucune structure borélienne. En effet, supposons qu'il en existe une. Alors il existe $\mathscr{D} = \{x^n_\bullet\}_{n\geq 1}$ une famille fondamentale. A l'aide de cette famille, on peut montrer que $\Omega_1 = \{\omega \in \Omega \mid |X_\omega| = 1\} = \{\omega \in \Omega \mid \sup_{n,m\geq 1} d(x^n_\omega, x^m_\omega) = 0\}$ est borélien, ce qui contredit le choix de Ω_1. Plus généralement, on a montré plus tôt que si $(\Omega, X_\bullet)$ est un champ borélien d'espaces métriques, alors la fonction

$$\begin{array}{cccc} |X_\bullet| & \Omega & \to & \mathbb{N} \cup \{\infty\} \\ & \omega & \mapsto & |X_\omega| \end{array}$$

doit être borélienne.

(4) Un fibré standard sur un borélien standard Ω dans le sens de Gaboriau et Alvarez (voir par exemple [Alv08]) peut-être interprété comme un champ borélien. Un fibré standard sur Ω est la donnée d'un espace borélien Y et d'une application $\pi : Y \to \Omega$ borélienne, surjective et à fibres dénombrables. Un théorème classique dû à Kuratowski, qu'on appelle souvent Théorème de sélection (voir par exemple [Kec95]), implique qu'il existe une famille $\{A_n\}_{n\geq 1}$ de boréliens de Ω et d'applications boréliennes $\{\varphi_n : A_n \to Y\}_{n\geq 1}$, telles que $\pi \circ \varphi_n = \mathrm{id}_{A_n}$ et $X = \bigsqcup_{n\geq 1} \varphi_n(A_n)$. De plus, on

peut supposer que $A_1 = \Omega$. Si on met sur chacune des fibres $\pi^{-1}(\omega)$ la métrique discrète, on peut penser à $(\Omega, \pi^{-1}(\bullet))$ comme à un champ d'espaces métriques, où $\pi^{-1}(\bullet)_\omega = \pi^{-1}(\omega)$. On définit pour chaque n une section $\widetilde{\varphi_\bullet}^n \in \mathscr{L}(\Omega, \pi^{-1}(\bullet))$ par

$$\widetilde{\varphi_\omega}^n := \begin{cases} \varphi_n(\omega) & \text{si } \omega \in A_n, \\ \varphi_1(\omega) & \text{si } \omega \in \Omega \setminus A_n. \end{cases}$$

On vérifie facilement que la famille $\mathscr{D} = \{\widetilde{\varphi_\bullet}^n\}_{n\geq 1}$ est une famille fondamentale pour le champ $(\Omega, \pi^{-1}(\bullet))$. Comme $\pi^{-1}(\omega)$ est discret, la structure borélienne est donnée par l'ensemble des recollements dénombrables boréliens d'éléments de $\mathscr{D}$. A chaque section $x_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega, \pi^{-1}(\bullet))$, on peut associer une application $\Omega \to \mathbb{N}$, $\omega \mapsto$ l'unique $n \in \mathbb{N}$ tel que $x_\omega = \varphi_n(\omega)$. Il est aisé de se convaincre qu'une section est borélienne si et seulement si l'application associée est borélienne. Au sujet des fibrés, voir aussi la Remarque 1.4.1.

(5a) Soit $\mathscr{R} \subseteq \Omega \times \Omega$ une relation borélienne dénombrable [3] sur un espace borélien $(\Omega, \mathscr{A})$. La restriction de l'application projection sur le premier facteur $\pi_l : \Omega \times \Omega \to \Omega$ à $\mathscr{R}$ permet de voir $\mathscr{R}$ comme un fibré standard sur Ω. C'est donc un champ borélien d'espaces métriques (discrets) par l'exemple (4).

(5b) L'exemple précédent peut être rendu un peu plus intéressant en considérant $\Phi := \{\varphi_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ un graphage qui engendre $\mathscr{R}$. Un tel graphage permet de définir pour chaque $\omega \in \Omega$ une métrique sur la classe de ω, qu'on note $\mathscr{R}_\omega$, et on peut considérer le champ $(\Omega, \mathscr{R}_\bullet)$. On peut vérifier que $\{f : \Omega \to \Omega \mid \operatorname{graph}(f) \subseteq \mathscr{R}\}$ est une structure borélienne pour ce champ. On fera la preuve dans l'Exemple 2.2.12 (1) après avoir introduit rigoureusement les définitions nécessaires.

(6) La notion de champ borélien d'espaces métriques est une généralisation de celle de champ borélien d'espaces de Hilbert introduit par Dixmier dans [Dix69] et de celle de champ borélien d'espaces de Banach (voir par exemple [AR00], Appendice A.3). Ces exemples sont repris en détail dans les Sections 1.6 et 1.7.

Il arrive qu'un espace topologique X soit métrisable sans qu'il existe de métrique canonique qui induise cette topologie. Parfois, savoir que la topologie est métrisable est plus intéressant que de connaître explicitement la métrique. Dans la suite, on rencontrera certains champs de tels espaces. Il est donc intéressant d'introduire la notion de champ borélien d'espaces métrisables.

Définition 1.1.13. *Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace borélien et $(\Omega, X_\bullet)$ un champ d'espaces topologiques. On dit que ce champ est un champ borélien d'espaces métrisables s'il existe une famille de métriques $\{d_\omega : X_\omega \times X_\omega \to \mathbb{R}_{\geq 0}\}_{\omega\in\Omega}$ et une partie $\mathscr{L}(\Omega, X_\bullet) \subseteq \mathscr{S}(\Omega, X_\bullet)$ tels que pour tout $\omega \in \Omega$ la topologie déduite de la métrique d_ω soit la topologie de X_ω et tels que $\mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)$ soit une structure borélienne pour le champ d'espaces métriques $(\Omega, (X_\bullet, d_\bullet))$.*

Morphismes de champs et champs équivalents

Définition 1.1.14. *Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace borélien, $(\Omega, X_\bullet)$ et $(\Omega, Y_\bullet)$ des champs boréliens d'espaces métriques de structures boréliennes respectives $\mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)$ et $\mathscr{L}(\Omega, Y_\bullet)$.*
Un morphisme de champs est la donnée d'une famille d'applications $\varphi_\bullet = \{\varphi_\omega : X_\omega \to Y_\omega\}_{\omega\in\Omega}$. On notera plus simplement $\varphi_\bullet : (\Omega, Y_\bullet) \to (\Omega, Y_\bullet)$ ou $\varphi_\bullet : X_\bullet \to Y_\bullet$ un morphisme de champs et $\mathscr{S}\left(\Omega, \mathscr{F}(X_\bullet, Y_\bullet)\right)$ l'ensemble des morphismes de champs de $(\Omega, X_\bullet)$ dans $(\Omega, Y_\bullet)$.
Un morphisme de champs est dit compatible (avec les structures boréliennes) si pour tout $x_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)$, la section définie par $\varphi_\bullet(x_\bullet) : \omega \mapsto \varphi_\omega(x_\omega)$ est un élément de $\mathscr{L}(\Omega, Y_\bullet)$. On note $\widetilde{\mathscr{L}}\left(\Omega, \mathscr{F}(X_\bullet, Y_\bullet)\right)$ l'ensemble des morphismes de champs compatibles de $(\Omega, X_\bullet)$ dans $(\Omega, Y_\bullet)$.
Un morphisme de champs est dit continu si φ_ω est continue pour tout $\omega \in \Omega$. On note $\mathscr{S}\left(\Omega, \mathscr{C}(X_\bullet, Y_\bullet)\right)$ l'ensemble des morphismes de champs continus de $(\Omega, X_\bullet)$ dans $(\Omega, Y_\bullet)$.

3. Voir le Chapitre 2 pour une définition rigoureuse.

On définit de même des morphismes de champs isométriques, surjectifs, injectifs ou bijectifs.
Deux ensembles importants de morphismes de champs sont l'ensemble des morphismes compatibles et continus, noté $\widetilde{\mathscr{L}}\big(\Omega, \mathscr{C}(X_\bullet, Y_\bullet)\big)$*, ainsi que le sous-ensemble des morphismes compatibles et isométriques* $\widetilde{\mathscr{L}}\big(\Omega, \mathrm{Iso}(X_\bullet, Y_\bullet)\big)$.
Un morphisme compatible $\varphi_\bullet \in \widetilde{\mathscr{L}}\big(\Omega, \mathscr{C}(X_\bullet, Y_\bullet)\big)$ *est dit inversible si* φ_ω *est un homéomorphisme pour tout* $\omega \in \Omega$ *et si* $\varphi_\bullet^{-1}$ *est un morphisme compatible.*

Remarque 1.1.15. Soit $\varphi_\bullet \in \mathscr{S}(\Omega, \mathscr{C}(X_\bullet, Y_\bullet))$. Pour que $\varphi_\bullet$ soit compatible, il suffit de vérifier que $\varphi_\bullet(\mathscr{D}) \subseteq \mathscr{L}(\Omega, Y_\bullet)$ pour une famille fondamentale $\mathscr{D}$ de $\mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)$. En effet, par le Lemme 1.1.9, on sait que $\mathscr{L}(\Omega, X_\bullet) = \mathrm{LimPonc}(\mathrm{Rec}(\mathscr{D}))$. Or

$$\begin{aligned}\varphi_\bullet\big(\mathrm{LimPonc}(\mathrm{Rec}(\mathscr{D}))\big) &\overset{\varphi_\bullet \text{ cont.}}{\subseteq} \mathrm{LimPonc}\big(\varphi_\bullet(\mathrm{Rec}(\mathscr{D}))\big) = \mathrm{LimPonc}\big(\mathrm{Rec}(\varphi_\bullet(\mathscr{D}))\big) \\ &\subseteq \mathrm{LimPonc}\big(\mathrm{Rec}(\mathscr{L}(\Omega, Y_\bullet))\big) \overset{\text{Lem 1.1.6}}{=} \mathscr{L}(\Omega, Y_\bullet).\end{aligned}$$

De manière similaire, on peut montrer que $\varphi_\bullet \in \widetilde{\mathscr{L}}(\Omega, \mathscr{C}(X_\bullet, Y_\bullet))$ est inversible si et seulement si φ_ω est un homéomorphisme pour tout $\omega \in \Omega$.

Définition 1.1.16. *Soit* $(\Omega, X_\bullet)$ *et* $(\Omega, Y_\bullet)$ *deux champs boréliens d'espaces métriques. Les champs boréliens* $(\Omega, X_\bullet)$ *et* $(\Omega, Y_\bullet)$ *sont dit équivalents s'il existe un morphisme de champs* $\varphi_\bullet : X_\bullet \to Y_\bullet$ *compatible, isométrique et inversible* [4].

Définition 1.1.17. *Soit* $(\Omega, X_\bullet)$ *et* $(\Omega, Y_\bullet)$ *deux champ boréliens d'espaces métriques. Les champs boréliens* $(\Omega, X_\bullet)$ *et* $(\Omega, Y_\bullet)$ *sont dit topologiquement équivalents s'il existe un morphisme de champs* $\varphi_\bullet : X_\bullet \to Y_\bullet$ *compatible, continu et inversible* [5].

Classes d'équivalence de sections et structures μ-mesurables

Définition 1.1.18. *Soit* $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ *un espace de probabilité et* $(\Omega, X_\bullet)$ *un champ borélien d'espaces métriques. On dit que* $x_\bullet, y_\bullet \in \mathscr{S}(\Omega, X_\bullet)$ *sont égales presque partout, et on note* $x_\bullet =_{p.p.} y_\bullet$*, s'il existe* $A \in \mathscr{A}$ *de mesure 0 tel que* $\{\omega \in \Omega \mid x_\omega \neq y_\omega\} \subseteq A$*. En d'autres termes deux sections sont égales presque partout si et seulement si elles coïncident en dehors d'un ensemble µ-négligeable. C'est une relation d'équivalence sur l'ensemble des sections d'un champ. Par exemple, pour la transitivité, on observe que si* $x_\bullet, y_\bullet, z_\bullet \in \mathscr{S}(\Omega, X_\bullet)$ *sont tels que* $x_\bullet =_{p.p.} y_\bullet$ *et* $y_\bullet =_{p.p.} z_\bullet$ *on a*

$$\{\omega \in \Omega \mid x_\omega \neq z_\omega\} \subseteq \{\omega \in \Omega \mid x_\omega \neq y_\omega\} \cup \{\omega \in \Omega \mid y_\omega \neq z_\omega\}.$$

C'est en particulier une relation d'équivalence sur $\mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)$ *et on peut ainsi définir l'ensemble quotient* $L(\Omega, X_\bullet) := \mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)/=_{p.p.}$ *des classes d'équivalence des sections boréliennes modulo l'égalité presque partout. Si* $x_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)$*, on note* $[x_\bullet] \in L(\Omega, X_\bullet)$ *la classe de* $x_\bullet$.

Si $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ est un espace de probabilité et si $(\Omega, X_\bullet)$ est un champ d'espaces métriques, on peut considérer des structures μ-mesurables en remplaçant le mot "borélien" par le mot "μ-mesurable" dans la Définition 1.1.3. La majeure partie des résultats reste vraie puisqu'on utilise que rarement des propriétés spéciales de $\mathscr{A}$. On va montrer que, dans ce cas particulier, on peut naturellement associer à toute structure borélienne une structure μ-mesurable donnée par l'ensemble des sections égales presque partout aux sections boréliennes. Une famille fondamentale de la structure borélienne sera aussi une famille fondamentale de la structure μ-mesurable.
Dans le cas du champ trivial $(\Omega, \mathbb{R})$ la différence entre les fonctions boréliennes et les fonctions μ-mesurables est décrite par le lemme ci-dessous.

---

4. Par la remarque 1.1.15, il suffit de demander que φ_ω soit une isométrie pour tout $\omega \in \Omega$.
5. Par la remarque 1.1.15, il suffit de demander que φ_ω soit un homéomorphisme pour tout $\omega \in \Omega$.

Lemme 1.1.19. *Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ un espace de probabilité et $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction. Alors f est μ-mesurable si et seulement si elle est égale presque partout à une fonction borélienne $\widetilde{f}$, c'est-à-dire qu'il existe $\Omega' \in \mathscr{A}$ de mesure pleine tel que $f(\omega) = \widetilde{f}(\omega)$ pour tout $\omega \in \Omega'$.*

Preuve. Supposons que f soit égale presque partout à une fonction borélienne $\widetilde{f}$. Montrons que f est μ-mesurable. Par hypothèse, il existe $\Omega' \in \mathscr{A}$ de mesure pleine tel que $f(\omega) = \widetilde{f}(\omega)$ pour tout $\omega \in \Omega'$. Soit A un borélien de $\mathbb{R}$. Alors

$$f^{-1}(A) = (f^{-1}(A) \cap \Omega') \cup (f^{-1}(A) \cap (\Omega \setminus \Omega')) = \big(\underbrace{\widetilde{f}^{-1}(A) \cap \Omega'}_{\in \mathscr{A}}\big) \cup \big(\underbrace{f^{-1}(A) \cap (\Omega \setminus \Omega')}_{\text{de mesure } 0}\big) \in \mathscr{A}^*$$

Réciproquement, soit f une fonction μ-mesurable. Alors f est limite ponctuelle de fonctions simples. On peut donc écrire $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ où $f_n = \sum_{i=1}^{m(n)} a_{i,n} \chi_{A_{i,n}}$ avec[6] $\mathscr{A}_{i,n} \in \mathscr{A}^*$ et $a_{i,n} \in \mathbb{R}$. On choisit $\widetilde{A}_{i,n} \in \mathscr{A}$ tels que $\widetilde{A}_{i,n} \subseteq A_{i,n}$ et $\mu(\widetilde{A}_{i,n}) = \mu(A_{i,n})$. Observons que $\widetilde{\Omega} := \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{m(n)} A_{i,n} \setminus \widetilde{A}_{i,n}$ est négligeable et qu'il existe donc un borélien Ω' de mesure pleine qui évite cet ensemble. Posons $\widetilde{f}_n = \sum_{i=1}^{m(n)} a_{i,n} \chi_{\widetilde{A}_{i,n} \cap \Omega'} \in \mathscr{L}(\Omega, \mathbb{R})$. Alors $\widetilde{f} := \lim_{n\to\infty} \widetilde{f}_n$ est borélienne et $\widetilde{f} =_{p.p.} f$ puisque $f_n(\omega) = \widetilde{f}_n(\omega)$ pour tout $\omega \in \Omega'$. □

A l'aide de ce lemme on peut montrer le lien entre une structure borélienne et une structure μ-mesurable.

Corollaire 1.1.20. *Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ un espace de probabilité, $(\Omega, X_\bullet)$ un champ borélien d'espaces métriques de structure borélienne $\mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)$. Alors*

$$\mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)^\mu := \{x_\bullet \in \mathscr{S}(\Omega, X_\bullet) \mid \text{ il existe } \widetilde{x}_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega, X_\bullet) \text{ telle que } x_\bullet =_{p.p.} \widetilde{x}_\bullet\},$$

est une structure borélienne pour le champ $X_\bullet$ sur $(\Omega, \mathscr{A}^*)$. De plus, si $\mathscr{D} = \{x^n_\bullet\}_{n\geq 1}$ est une partie fondamentale de la structure borélienne $\mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)$, alors $\mathscr{D}$ est aussi une partie fondamentale de la structure $\mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)^\mu$.

Preuve. On a évidemment que $\mathscr{L}(\Omega, X_\bullet) \subseteq \mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)^\mu$ et donc qu'une famille fondamentale $\mathscr{D}$ de $\mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)$ satisfait les hypothèses du Lemme 1.1.9 pour le champ $X_\bullet$ sur $(\Omega, \mathscr{A}^*)$. On peut donc définir $\mathscr{L}_{\mathscr{D}}(\Omega, X_\bullet)^\mu$ qui sera une structure μ-mesurable. Pour finir de prouver le lemme, il suffit de montrer l'égalité

$$\mathscr{L}_{\mathscr{D}}(\Omega, X_\bullet)^\mu = \mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)^\mu.$$

On utilise le Lemme 1.1.9 pour décrire $\mathscr{L}(\Omega, X_\bullet) = \mathscr{L}_{\mathscr{D}}(\Omega, X_\bullet)$ et $\mathscr{L}_{\mathscr{D}}(\Omega, X_\bullet)^\mu$.

[$\supseteq$] Si $x_\bullet \in \mathscr{S}(\Omega, X_\bullet)$ est égale presque partout à une section de $\mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)$, alors $d_\bullet(x_\bullet, x^n_\bullet)$ est μ-mesurable pour tout $n \geq 1$ par le Lemme 1.1.19 et donc $x_\bullet \in \mathscr{L}_{\mathscr{D}}(\Omega, X_\bullet)^\mu$.

[$\subseteq$] Soit $\widetilde{x}_\bullet \in \mathscr{L}_{\mathscr{D}}(\Omega, X_\bullet)^\mu$. Alors $d_\bullet(\widetilde{x}_\bullet, x^n_\bullet)$ est μ-mesurable pour tout $n \geq 1$ et il existe, par le Lemme 1.1.19, un borélien $\Omega' \in \mathscr{A}$ tel que $d_\bullet(\widetilde{x}_\bullet, x^n_\bullet)\,|_{\Omega'}$ soit borélienne pour tout $n \geq 1$. On définit $x_\bullet \in \mathscr{S}(\Omega, X_\bullet)$

$$x_\omega = \begin{cases} \widetilde{x}_\omega & \text{si } \omega \in \Omega' \\ x^1_\omega & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors $d_\bullet(x_\bullet, x^n_\bullet)$ est borélienne comme recollement borélien de fonctions borélienne. Ainsi, $x_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)$ et est égale presque partout à $\widetilde{x}_\bullet$. □

Une structure borélienne peut sembler être un espace impressionnant mais en fait on peut montrer le théorème suivant qui est une généralisation du fait que $L(\Omega, [0,1])$ muni de la topologie de la convergence en mesure est un espace polonais. Comme la preuve est essentiellement la même, on la donne en annexe (voir la Section A.1).

6. Si $A \subseteq \Omega$, on note χ_A la fonction caractéristique de A.

Théorème 1.1.21 (A.1.3)**.** *Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ un espace de probabilité et $(\Omega, X_\bullet)$ un champ borélien d'espaces métriques (complets) sur Ω de structure borélienne $\mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)$. Alors $L(\Omega, X_\bullet)$ muni de la topologie de la convergence en mesure est métrisable, séparable (et complet).*

1.2 Sous-champs boréliens

Dans cette section, on introduit et on étudie la notion de sous-champ borélien.

1.2.1 Définition et propriétés générales

Définition 1.2.1. *Soit $(\Omega, X_\bullet)$ un champ d'espaces métriques. On dit que $(\Omega, A_\bullet)$ est un sous-champ de $(\Omega, X_\bullet)$ si $(\Omega, A_\bullet)$ est un champ d'espaces métriques tel que $A_\omega \subseteq X_\omega$ pour tout $\omega \in \Omega$. En particulier, $A_\omega \neq \emptyset$ pour tout $\omega \in \Omega$ (voir la Définition 1.1.1). On dit que $(\Omega, A_\bullet)$ est un sous-champ généralisé si $(\Omega, A_\bullet)$ est un champ d'espaces métriques généralisé tel que $A_\omega \subseteq X_\omega$ pour tout $\omega \in \Omega$. La base d'un sous-champ généralisé est l'ensemble $\{\omega \in \Omega \mid A_\omega \neq \emptyset\}$.*

Définition 1.2.2. *Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace borélien, $(\Omega, X_\bullet)$ un champ borélien d'espaces métriques de structure borélienne $\mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)$ et $\Omega' \in \mathscr{A}$. On dit que $(\Omega', X_\bullet)$ est le champ restreint à Ω' du champ $(\Omega, X_\bullet)$. Si on munit Ω' de la σ-algèbre induite $\mathscr{A}_{\Omega'}$, alors $(\Omega', X_\bullet)$ est un champ borélien sur $(\Omega', \mathscr{A}_{\Omega'})$ puisque $\mathscr{L}(\Omega', X_\bullet) := \{(x_\bullet|_{\Omega'}) \mid x_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)\}$ est une structure borélienne pour ce champ (la restriction à Ω' d'une famille fondamentale de $\mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)$ est une famille fondamentale pour $\mathscr{L}(\Omega', X_\bullet)$).*

Définition 1.2.3. *Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace borélien, $(\Omega, X_\bullet)$ un champ borélien d'espaces métriques et $(\Omega, A_\bullet)$ un sous-champ. On dit que $(\Omega, A_\bullet)$ est un sous-champ borélien de $(\Omega, X_\bullet)$ si $\mathscr{L}(\Omega, A_\bullet) := \mathscr{L}(\Omega, X_\bullet) \cap \mathscr{S}(\Omega, A_\bullet)$ est une structure borélienne pour $(\Omega, A_\bullet)$. C'est-à-dire qu'on demande*

(i) Pour tous $x_\bullet, y_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega, A_\bullet)$ l'application $d_\bullet(x_\bullet, y_\bullet) : \Omega \to \mathbb{R}$ est borélienne.

(ii) Si $y_\bullet \in \mathscr{S}(\Omega, A_\bullet)$ est tel que $d_\bullet(x_\bullet, y_\bullet)$ est borélienne pour tout $x_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega, A_\bullet)$, alors $y_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega, A_\bullet)$.

(iii) Il existe une partie dénombrable $\mathscr{D}' = \{y^n_\bullet\}_{n\geq 1} \subseteq \mathscr{L}(\Omega, A_\bullet)$ telle que $\overline{\{y^n_\omega\}}_{n\geq 1} = A_\omega$ pour tout $\omega \in \Omega$.

Un sous-champ borélien est noté $(\Omega, A_\bullet) \leq (\Omega, X_\bullet)$, ou parfois simplement $A_\bullet \leq X_\bullet$. L'ensemble des sous-champs boréliens est noté $\widetilde{\mathscr{L}}(\Omega, \mathscr{P}^*(X_\bullet))$.

Définition 1.2.4. *Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace borélien et $(\Omega, X_\bullet)$ un champ borélien d'espaces métriques. Un sous-champ $(\Omega, A_\bullet)$ tel que A_ω n'est pas nécessairement non vide pour tout $\omega \in \Omega$ est appelé un sous-champ généralisé borélien si*

(i) $\Omega' := \{\omega \in \Omega \mid A_\omega \neq \emptyset\}$ est un borélien.

(ii) $(\Omega', A_\bullet)$ est un sous-champ borélien du champ restreint $(\Omega', X_\bullet)$.

On appelle le borélien $\{\omega \in \Omega \mid A_\omega \neq \emptyset\}$ la base du sous-champ $A_\bullet$. On note $\widetilde{\mathscr{L}}(\Omega, \mathscr{P}(X_\bullet))$ l'ensemble des sous-champs généralisés boréliens.

Remarques 1.2.5. (1) Comme un sous-champ $(\Omega, A_\bullet)$ d'un champ borélien $(\Omega, X_\bullet)$ n'est pas forcément tel que A_ω est fermé dans X_ω pour tout $\omega \in \Omega$, la famille fondamentale $\mathscr{D}'$ peut être telle que $\overline{\{y^n_\omega\}}_{n\geq 1} \supsetneq A_\omega$ dans X_ω pour certains ω. En lisant 1.2.3 (iii) il ne faut pas considérer A_ω comme un sous-espace de X_ω, mais comme un espace métrique en soi.

(2) Soit $\Omega' \subseteq \Omega$ un ensemble borélien, $x_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega', X_\bullet)$ et $y_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)$, alors on peut étendre $x_\bullet$ en une section $\widetilde{x}_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)$ à l'aide de $y_\bullet$ en posant

$$\widetilde{x}_\bullet := \begin{cases} x_\omega & \text{si } \omega \in \Omega' \\ y_\omega & \text{sinon.} \end{cases}$$

(3) Un champ restreint $(\Omega', X_\bullet)$ peut être vu comme un sous-champ de $(\Omega, X_\bullet)$ en choisissant une section arbitraire $x_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)$ et en considérant le sous-champ

$$X_\omega^{\Omega'} = \begin{cases} X_\omega & \text{si } \omega \in \Omega' \\ \{x_\omega\} & \text{sinon.} \end{cases}$$

(4) Les sections boréliennes sont des exemples de sous-champs boréliens.

(5) Le Lemme 1.1.6 montre qu'il suffit de montrer le point (iii) de la Définition 1.2.3 pour vérifier qu'un sous-champ $A_\bullet$ est borélien. En effet, 1.2.3 (i) est trivialement satisfaite et $\mathscr{L}(\Omega, A_\bullet)$ est close par recollements dénombrables et limites simples puisque $\mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)$ et $\mathscr{S}(\Omega, A_\bullet)$ le sont.

Lemme 1.2.6 (Transitivité). *Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace borélien, $(\Omega, X_\bullet)$ un champ borélien d'espaces métriques, $(\Omega, A_\bullet)$ un sous-champ généralisé borélien de base Ω' et $(\Omega, B_\bullet)$ un sous-champ généralisé tel que $B_\omega \subseteq A_\omega$ pour tout $\omega \in \Omega$. Alors $(\Omega', B_\bullet)$ est un sous-champ généralisé de $(\Omega', A_\bullet)$ si et seulement si $(\Omega, B_\bullet)$ est un sous-champ généralisé de $(\Omega, X_\bullet)$. En d'autres termes,*

$$(\Omega', B_\bullet) \in \widetilde{\mathscr{L}}(\Omega', \mathscr{P}(A_\bullet)) \quad \Longleftrightarrow \quad (\Omega, B_\bullet) \in \widetilde{\mathscr{L}}(\Omega, \mathscr{P}(X_\bullet)).$$

Preuve. Commençons par remarquer que dans chacun des cas $\Omega'' := \{\omega \in \Omega \mid B_\omega \neq \emptyset\}$ est borélien et qu'il reste donc à montrer que

$$(\Omega'', B_\bullet) \in \widetilde{\mathscr{L}}(\Omega'', \mathscr{P}^*(A_\bullet)) \iff (\Omega'', B_\bullet) \in \widetilde{\mathscr{L}}(\Omega'', \mathscr{P}^*(X_\bullet)).$$

Sans perdre la généralité, on peut supposer que $\Omega'' = \Omega$. On observe que

$$\begin{aligned} \underbrace{\mathscr{L}(\Omega, B_\bullet)}_{\text{relativement à } (\Omega, A_\bullet)} &\overset{\text{par déf}}{=} \mathscr{L}(\Omega, A_\bullet) \cap \mathscr{S}(\Omega, B_\bullet) = \big(\mathscr{L}(\Omega, X_\bullet) \cap \mathscr{S}(\Omega, A_\bullet)\big) \cap \mathscr{S}(\Omega, B_\bullet) \\ &= \mathscr{L}(\Omega, X_\bullet) \cap \mathscr{S}(\Omega, B_\bullet) \overset{\text{par déf}}{=} \underbrace{\mathscr{L}(\Omega, B_\bullet).}_{\text{relativement à } (\Omega, X_\bullet)} \end{aligned}$$

Ainsi, $\mathscr{L}(\Omega, B_\bullet)$ [relativement à $(\Omega, A_\bullet)$] est une structure borélienne si et seulement si $\mathscr{L}(\Omega, B_\bullet)$ [relativement à $(\Omega, X_\bullet)$] est une structure borélienne, ce qui termine la preuve. □

Lemme 1.2.7. *Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace borélien, $(\Omega, X_\bullet)$ un champ borélien d'espaces métriques. Soit $\{(\Omega, A_\bullet^n)\}_{n\geq 1}$ une famille dénombrable de sous-champs généralisés boréliens. Alors $(\Omega, \cup_{n\geq 1} A_\bullet^n)$ est un sous-champ généralisé borélien de $(\Omega, X_\bullet)$.*

Preuve. Pour tout $n \geq 1$, notons Ω_n la base de $(\Omega, A_\bullet^n)$. Observons que $\Omega' := \cup_{n\geq 1}\Omega_n$ est la base de $(\Omega, \cup_{n\geq 1} A_\bullet^n)$ et est un ensemble borélien. Ensuite, on fabrique une section

$$z_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega', X_\bullet) \cap \mathscr{S}(\Omega', \cup_{n\geq 1} A_\bullet^n).$$

Pour ce faire, on fixe pour tout $n \geq 1$ une section $\tilde{z}_\bullet^n \in \mathscr{L}(\Omega_n, A_\bullet^n) \subseteq \mathscr{L}(\Omega_n, X_\bullet)$ qu'on étend arbitrairement en une section $z_\bullet^n \in \mathscr{L}(\Omega', X_\bullet)$ (voir Remarque 1.2.5 (2)). On définit $n_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega', \mathbb{N})$ par $n_\omega = \min\{n \mid \omega \in \Omega_n\}$ et on pose $z_\bullet := z_\bullet^{n_\bullet}$ qui est borélienne (Remarque 1.1.7) et appartient à $\mathscr{S}(\Omega', \cup_{n\geq 1} A_\bullet^n)$.

Maintenant considérons pour tout $n \geq 1$ une famille fondamentale $\mathscr{D}_n \subseteq \mathscr{L}(\Omega_n, A_\bullet^n)$ du sous-champ (Ω_n, A^n). On étend toutes les sections de $\mathscr{D}_n$ en des sections de $\mathscr{L}(\Omega', X_\bullet)$ à l'aide de la section $z_\bullet$ fabriquée ci-dessus et on note $\widetilde{\mathscr{D}}_n \subseteq \mathscr{L}(\Omega', X_\bullet) \cap \mathscr{S}(\Omega', \cup_{n\geq 1} A_\bullet^n)$ l'ensemble qu'on obtient. Par construction, l'ensemble $\mathscr{D} = \cup_{n\geq 1} \widetilde{\mathscr{D}}_n$ est une famille fondamentale du sous-champ $(\Omega', \cup_{n\geq 1} A^n)$. □

Remarque 1.2.8. Soit $(\Omega, A_\bullet)$ un sous-champ borélien de $(\Omega, X_\bullet)$. Alors $(\Omega, \overline{A_\bullet})$ défini par $\left(\overline{A_\bullet}\right)_\omega := \overline{A_\omega}$ est aussi un sous-champ borélien. Il est clair qu'une famille fondamentale pour la structure borélienne $\mathscr{L}(\Omega, A_\bullet)$ est aussi une famille fondamentale pour la structure borélienne $\mathscr{L}(\Omega, \overline{A_\bullet})$, aussi la Remarque 1.2.5 (5) s'applique-t-elle. Plus généralement, si $(\Omega, B_\bullet)$ est un sous-champ tel que $A_\omega \subseteq B_\omega \subseteq \overline{A_\omega}$ pour tout $\omega \in \Omega$, alors $(\Omega, B_\bullet)$ est un sous-champ borélien.

Définition 1.2.9. *Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace borélien, $(\Omega, X_\bullet)$ un champ borélien d'espaces métriques et $(\Omega, A_\bullet)$ un sous-champ. On dit que $(\Omega, A_\bullet)$ est un sous-champ de fermés (respectivement d'ouverts, respectivement de complets) si A_ω est fermé (respectivement ouvert, respectivement complet) pour tout $\omega \in \Omega$. Mutatis mutandis pour les sous-champs généralisés boréliens. On note $\widetilde{\mathscr{L}}(\Omega, \mathscr{P}^*_{Fe}(X_\bullet))$ l'ensemble des sous-champs boréliens de fermés et $\widetilde{\mathscr{L}}(\Omega, \mathscr{P}_{Fe}(X_\bullet))$ l'ensemble des sous-champs généralisés boréliens de fermés.*

Classes d'équivalence de sous-champs

Définition 1.2.10. *Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ un espace de probabilité, $(\Omega, X_\bullet)$ un champ borélien d'espaces métriques, $A_\bullet$ et $B_\bullet$ deux sous-champs généralisés de $(\Omega, X_\bullet)$. On dit que $B_\bullet$ est équivalent à $A_\bullet$, et on note $B_\bullet =_{p.p.} A_\bullet$, s'il existe un borélien $\Omega' \in \mathscr{A}$ de mesure pleine tel que $B_\omega = A_\omega$ pour tout $\omega \in \Omega'$. C'est une relation d'équivalence (de la même manière que pour les sections, voir la Définition 1.1.18). On note $[A_\bullet]$ la classe d'équivalence de $A_\bullet$. On peut en particulier considérer l'ensemble de tous les sous-champs généralisés boréliens de $(\Omega, X_\bullet)$ et son quotient par cette relation d'équivalence qu'on note $\widetilde{L}(\Omega, \mathscr{P}(X_\bullet))$.*
On peut mettre une ordre partiel sur les classes d'équivalence de sous-champs généralisés boréliens : si $[A_\bullet]$ et $[B_\bullet]$ sont deux classes de sous-champs généralisés boréliens de $X_\bullet$, on dit que $[A_\bullet]$ est plus petite que $[B_\bullet]$ ou que $A_\bullet$ est contenu dans $B_\bullet$ presque partout, et on note $[A_\bullet] \leq [B_\bullet]$ ou $A_\bullet \subseteq_{p.p.} B_\bullet$, s'il existe un borélien $\Omega' \in \mathscr{A}$ de mesure pleine tel que $A_\omega \subseteq B_\omega$ pour tout $\omega \in \Omega'$ [7]*. On appelle cet ordre, l'ordre de l'inclusion presque partout.*

Invariance par morphismes compatibles et continus.

Lemme 1.2.11. *Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace borélien, $(\Omega, X_\bullet)$ et $(\Omega, Y_\bullet)$ des champs boréliens d'espaces métriques et $\varphi_\bullet : X_\bullet \to Y_\bullet$ un morphisme de champs compatible et continu. Alors pour tout sous-champ généralisé borélien $Z_\bullet \leq X_\bullet$, on a que $\varphi_\bullet(Z_\bullet)$ est un sous-champ généralisé borélien de $Y_\bullet$, où $\varphi_\bullet(Z_\bullet)$ est défini par $\left(\varphi_\bullet(Z_\bullet)\right)_\omega = \varphi_\omega(Z_\omega)$.*

Preuve. On commence par montrer dans le cas particulier de $X_\bullet = Z_\bullet$. Pour ce faire, on utilise la Remarque 1.2.5 (5). Il s'agit de montrer qu'il existe $\mathscr{D} \subseteq \mathscr{L}\left(\Omega, \varphi_\bullet(X_\bullet)\right) = \mathscr{L}(\Omega, Y_\bullet) \cap \mathscr{S}\left(\Omega, \varphi_\bullet(X_\bullet)\right)$ dénombrable tel que $\overline{D_\omega} \supseteq \varphi_\omega(X_\omega)$ pour tout $\omega \in \Omega$. Il suffit de prendre $\mathscr{D} = \varphi_\bullet(\mathscr{D}')$ où $\mathscr{D}'$ est une famille fondamentale de la structure $\mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)$. En effet, $\varphi_\bullet(\mathscr{D}') \subseteq \mathscr{L}\left(\Omega, \varphi_\bullet(X_\bullet)\right)$ puisque $\varphi_\bullet : X_\bullet \to Y_\bullet$ est supposé compatible et la condition de densité est vérifiée puisque l'image d'une partie dense par une application continue est dense dans l'image de l'application ($Y = \varphi(\overline{D}) \subseteq \overline{\varphi(D)}$ par continuité).
Soit maintenant $Z_\bullet$ un sous-champ généralisé borélien de $X_\bullet$. Notons Ω' la base de $(\Omega, Z_\bullet)$. La restriction à $(\Omega', Z_\bullet)$ du morphisme $\varphi_\bullet$ est évidemment un morphisme compatible et continu. Par le premier point, on a ainsi que $(\Omega', \varphi(Z_\bullet))$ est un sous-champ borélien de $(\Omega', Y_\bullet)$. □

Question 1.2.12. Est-ce que $\varphi_\bullet(\mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)) = \mathscr{L}\left(\Omega, \varphi_\bullet(X_\bullet)\right)$? L'inclusion de gauche à droite est évidente, mais si on essaye de montrer l'autre on se heurte à un petit souci...

7. Il évident que cette condition ne dépend pas du choix des représentants.

1.2.2 Sous-champs d'ouverts

On va introduire certains sous-champs généralisés boréliens d'ouverts que nous utiliserons dans la section qui suit.

Lemme 1.2.13. *Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace borélien, $(\Omega, X_\bullet)$ un champ borélien d'espaces métriques et $\mathscr{D}$ une famille fondamentale de la structure borélienne du champ $(\Omega, X_\bullet)$. Supposons que $(\Omega, U_\bullet)$ soit un sous-champ généralisé d'ouverts, satisfaisant que $\{\omega \in \Omega \mid x_\omega \in U_\omega\}$ soit borélien pour tout $x_\bullet \in \mathscr{D}$. Alors $(\Omega, U_\bullet)$ est un sous-champ généralisé borélien.*

Preuve. On note $\mathscr{D} = \{x_\bullet^n\}_{n\geq 1}$ et $\Omega_n := \{\omega \in \Omega \mid x_\omega^n \in U_\omega\} \in \mathscr{A}$. Par densité de $\{x_\omega^n\}_{n\geq 1}$ et puisque U_ω est ouvert pour tout $\omega \in \Omega$, on a que $\Omega' := \{\omega \in \Omega \mid U_\omega \neq \emptyset\} = \bigcup_{n\geq 1} \Omega_n$ est borélien. Pour tout $n \geq 1$, on définit un sous-champ généralisé borélien $(\Omega_n, A_\bullet^n)$ par

$$A_\omega^n := \begin{cases} x_\omega^n & \text{si } \omega \in \Omega_n \\ \emptyset & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors par construction $\cup_{n\geq 1} A_\bullet^n \subseteq U_\bullet \subseteq \overline{\cup_{n\geq 1} A_\bullet^n}$ et donc $U_\bullet$ est un sous-champ généralisé borélien par le Lemme 1.2.7 et la Remarque 1.2.8. □

Définition 1.2.14. *Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace borélien et $(\Omega, X_\bullet)$ un champ borélien d'espaces métriques de structure borélienne $\mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)$. Un sous-champ d'ouverts $U_\bullet$ satisfaisant qu'il existe une partie fondamentale $\mathscr{D} \subseteq \mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)$ telle que $\{\omega \in \Omega \mid x_\omega \in U_\omega\} \in \mathscr{A}$ pour tout $x_\bullet \in \mathscr{D}$ est appelé un sous-champ remarquable d'ouverts. Un tel champ est un sous-champ généralisé borélien, comme le montre le Lemme 1.2.13. Si $U_\bullet$ est tel que $\{\omega \in \Omega \mid x_\omega \in U_\omega\} \in \mathscr{A}$ pour tout $x_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)$, on dit que $U_\bullet$ est un sous-champ très remarquable d'ouverts. Un tel champ est a fortiori un sous-champ généralisé borélien.*

Définition 1.2.15. *Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace borélien et $(\Omega, X_\bullet)$ un champ borélien d'espaces métriques de structure borélienne $\mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)$. Soit $\{y_\bullet^n\}_{n\geq 1} \subseteq \mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)$ un sous-ensemble dénombrable et $\{r_\bullet^n\}_{n\geq 1} \subseteq \mathscr{L}(\Omega, \mathbb{R})$ une famille de fonctions boréliennes. Pour tout $\omega \in \Omega$ on pose*

$$U_\omega = \bigcup_{n\geq 1} B(y_\omega^n, r_\omega^n).$$

Le champ $U_\bullet$ est un sous-champ généralisé borélien de $X_\bullet$ puisque c'est un sous-champ très remarquable d'ouverts. En effet, $\{\omega \in \Omega \mid x_\omega \in U_\omega\} = \bigcup_{n\geq 1}\{\omega \in \Omega \mid d_\omega(x_\omega, y_\omega^n) < r_\omega^n\} \in \mathscr{A}$ pour tout $x_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)$. Un tel champ est appelé un sous-champ fondamental d'ouverts. On le note $U_\bullet = \bigcup_{n\geq 1} B(x_\bullet^n, r_\bullet^n)$.

Exemple 1.2.16. Si on choisit une unique section $y_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)$ et une unique fonction borélienne $r_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega, \mathbb{R})$, alors le sous-champ $B(x_\bullet, r_\bullet)$ est un sous-champ fondamental d'ouverts, donc un sous-champ généralisé borélien de base $\{\omega \in \Omega \mid r_\omega > 0\}$.

Proposition 1.2.17. *Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace borélien et $(\Omega, X_\bullet)$ un champ borélien d'espaces métriques.*

(i) Soit $U_\bullet = \bigcup_{k\geq 1} B(y_\bullet^k, r_\bullet^k)$ un sous-champ fondamental d'ouverts. Si $\mathscr{D} = \{x_\bullet^n\}_{n\geq 1}$ est une famille fondamentale, alors il existe des fonctions boréliennes $\{s_\bullet^n\}_{n\geq 1}$ telles que

$$U_\bullet = \bigcup_{n\geq 1} B(x_\bullet^n, s_\bullet^n).$$

(ii) Soit $\{U_\bullet^n = \bigcup_{m\geq 1} B(y_\bullet^{m,n}, r_\bullet^{m,n})\}_{n\geq 1}$ une famille dénombrable de sous-champs fondamentaux d'ouverts. Alors $U_\bullet := \bigcup_{n\geq 1} U_\bullet^n$ est un sous-champ fondamental d'ouverts.

(iii) Si $U_\bullet = \bigcup_{k\geq 1} B(y^k_\bullet, r^k_\bullet)$ et $V_\bullet = \bigcup_{\ell\geq 1} B(z^\ell_\bullet, s^\ell_\bullet)$ sont deux sous-champs fondamentaux d'ouverts, alors

$$U_\bullet \cap V_\bullet = \bigcup_{k,l\geq 1} B(y^k_\bullet, r^k_\bullet) \cap B(z^l_\bullet, s^l_\bullet)$$

est un sous-champ fondamental d'ouverts.

Pour prouver la proposition, on aura besoin du lemme suivant.

Lemme 1.2.18. *Soit X un espace métrique et $D \subseteq X$ une partie dense.*

(i) Pour tout $y \in X$ et $r \in \mathbb{R}$, $B(y,r) = \bigcup_{x\in D} B(x, r - d(x,y))$.

(ii) Si on se donne une famille $\{U_\beta = \bigcup_{x\in D} B(x, r^\beta_x)\}_{\beta\in\mathscr{B}}$, alors

$$\bigcup_{\beta\in\mathscr{B}} U_\beta = \bigcup_{x\in D} B(x, \sup_{\beta\in\mathscr{B}} r^\beta_x).$$

(iii) Si $U = \bigcup_{x\in D} B(x, r_x)$ et $V = \bigcup_{x\in D} B(x, r'_x)$, où $\{r_x\}_{x\in D}$, $\{r'_x\}_{x\in D} \subseteq \mathbb{R}$, alors

$$U \cap V = \bigcup_{x\in D} B(x, \min\{r_x, r'_x\}).$$

Preuve. (i) [$\supseteq$] Par l'inégalité du triangle.
[$\subseteq$] Soit $z \in B(y,r)$. Alors il existe $x \in D$ tel que $d(x,z) \leq 1/2(r - d(y,z))$. Or,

$$r - d(x,y) \geq r - d(x,z) - d(z,y) = \frac{1}{2}(r - d(y,z)) + \frac{1}{2}\underbrace{(r - d(y,z) - 2d(x,z))}_{\geq 0}.$$

Ainsi,

$$z \in B\big(x, \frac{1}{2}(r - d(y,z))\big) \subseteq B\big(x, r - d(x,y)\big).$$

(ii)

$$\bigcup_{\beta\in\mathscr{B}} U_\beta = \bigcup_{\beta\in\mathscr{B}} \bigcup_{x\in D} B(x, r^\beta_x) = \bigcup_{x\in D} \underbrace{\bigcup_{\beta\in\mathscr{B}} B(x, r^\beta_x)}_{=B(x, \sup_{\beta\in\mathscr{B}} r^\beta_x)}.$$

(iii)

$$U \cap V = \big(\bigcup_{x\in D} B(x, r_x)\big) \cap \big(\bigcup_{x\in D} B(x, r'_x)\big) = \bigcup_{x\in D} \underbrace{B(x, r_x) \cap B(x, r'_x)}_{=B(x, \min\{r_x, r'_x\})}.$$

□

Preuve de la Proposition 1.2.17. (i) On commence par montrer que pour $k \geq 1$ fixé on peut écrire $B(y^k_\bullet, r^k_\bullet)$ comme un champ de boules ouvertes centrées en les sections de $\mathscr{D}$. On note $\mathscr{D} = \{x^n_\bullet\}_{n\geq 1}$ et pour tout $n,k \geq 1$ on définit $s^{n,k}_\bullet = r^k_\bullet - d_\bullet(x^n_\bullet, y^k_\bullet) \in \mathscr{L}(\Omega, \mathbb{R})$. Puisque $\{x^n_\bullet\}_{n\geq 1}$ est une famille fondamentale, le Lemme 1.2.18 (i) montre que $B(y^k_\bullet, r^k_\bullet) = \bigcup_{n\geq 1} B(x^n_\bullet, s^{n,k}_\bullet)$. Le point (ii) du même lemme implique que

$$U_\bullet = \bigcup_{n\geq 1} B(x^n_\bullet, \sup_{k\geq 1}\{s^{n,k}_\bullet\}).$$

(ii) Par le point (i), il existe des fonctions boréliennes $s^{m,n}_\bullet$ telles que $U^n_\bullet = \bigcup_{m\geq 1} B(x^m_\bullet, s^{m,n}_\bullet)$. Alors $U_\bullet = \bigcup_{m\geq 1} B(x^m_\bullet, \sup_{n\geq 1}\{s^{m,n}_\bullet\})$ par le point (ii) du Lemme 1.2.18.

(iii) Par le point (ii), il suffit de prouver que pour $k,l \geq 1$ donnés on peut écrire $B(y^k_\bullet, r^k_\bullet) \cap B(z^l_\bullet, s^l_\bullet)$

comme un sous-champ fondamental d'ouverts. On note $\mathscr{D} = \{x^n_\bullet\}_{n\geq 1}$ et pour tout $n \geq 1$ on définit $r^n_\bullet = \min\{r^k_\bullet - d_\bullet(x^n_\bullet, y^k_\bullet), r^l_\bullet - d_\bullet(x^n_\bullet, y^l_\bullet)\}$. Par le Lemme 1.2.18 (ii), on a bien

$$B(y^k_\bullet, r^k_\bullet) \cap B(y^l_\bullet, r^l_\bullet) = \bigcup_{n\geq 1} B(x^n_\bullet, r^n_\bullet).$$

□

Questions 1.2.19. Est-ce que les quatre classes sont vraiment distinctes ? {sous-champs fondamentaux d'ouverts} $\subseteq$ {sous-champs très remarquables d'ouverts} $\subseteq$ {sous-champs remarquables d'ouverts} $\subseteq$ {sous-champs boréliens d'ouverts}.

L'exemple suivant répond partiellement à cette question.

Exemple 1.2.20 (Un sous-champ remarquable d'ouverts qui n'est pas très remarquable)**.** On considère le champ trivial $(\Omega, [0,1])$ muni de la structure borélienne $\mathscr{L}(\Omega, [0,1])$. Soit $\Omega = \Omega_1 \sqcup \Omega_2$ une partition en deux ensembles non boréliens. On définit un sous-champ $Y_\bullet$ par

$$Y_\omega := \begin{cases} [0,1] & \text{si } \omega \in \Omega_1 \\ [0,1] \setminus \{1/\pi\} & \text{si } \omega \in \Omega_2. \end{cases}$$

Alors $Y_\bullet$ est un sous-champ remarquable d'ouverts, puisque $\mathscr{D} = \mathbb{Q} \cap [0,1]$ est une famille fondamentale de $\mathscr{L}(\Omega, [0,1])$ telle que $\{\omega \in \Omega \mid x_\omega \in Y_\omega\} = \Omega \in \mathscr{A}$ pour tout $x_\bullet \in \mathscr{D}$. Mais $1/\pi \in \mathscr{L}(\Omega, [0,1])$ et $\{\omega \in \Omega \mid 1/\pi \in Y_\omega\} = \Omega_1 \notin \mathscr{A}$.

1.2.3 Sous-champs de complets

Au début de la Section 1.2.2, on a trouvé un critère suffisant pour qu'un sous-champ d'ouverts soit borélien. Ensuite, on a introduit la notion de sous-champ fondamental d'ouverts, qui va nous permettre de prouver une condition nécessaire et suffisante pour qu'un sous-champ de complets soit borélien. Il s'agit d'une généralisation des résultats de [CV77]. Si le champ $X_\bullet$ est un champ borélien de complets, alors les résultats s'appliquent aux sous-champs de fermés.

Lemme 1.2.21 ($\simeq$[CV77], p. 65)**.** *Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace borélien et $(\Omega, X_\bullet)$ un champ borélien d'espaces métriques. Soit $(\Omega, F_\bullet)$ un sous-champ de complets vérifiant la condition : pour tout sous-champ fondamental d'ouverts $(\Omega, U_\bullet)$, on a*

$$\{\omega \in \Omega \,|\, F_\omega \cap U_\omega \neq \emptyset\} \in \mathscr{A}. \tag{1.1}$$

Alors il existe une section $y_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)$ telle que $y_\omega \in F_\omega$ pour tout $\omega \in \Omega$.

Preuve. On commence par montrer l'existence d'une suite $\{y^n_\bullet\}_{n\geq 0} \subseteq \mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)$ telle que

$$d_\bullet(y^n_\bullet, F_\bullet) < 1/2^n \text{ et } d(y^n_\bullet, y^{n+1}_\bullet) < 1/2^n \text{ pour tout } n \geq 0. \tag{1.2}$$

On se fixe $\mathscr{D} = \{x^n_\bullet\}_{n\geq 1}$ une famille fondamentale. Pour construire $y^0_\bullet$, on considère l'application

$$n^0_\bullet : \begin{array}{l} \Omega \to \mathbb{N} \\ \omega \mapsto n^0_\omega := \min\{n \,|\, B(x^n_\omega, 1) \cap F_\omega \neq \emptyset\} \end{array},$$

qui est bien définie car $\{x^n_\omega\}_{n\geq 1}$ est dense dans X_ω pour tout $\omega \in \Omega$. On a que $n^0_\bullet$ est borélienne, puisque $\{\omega \in \Omega \,|\, B(x^n_\omega, 1) \cap F_\omega \neq \emptyset\} \in \mathscr{A}$ par (1.1), et on peut donc définir $y^0_\bullet := x^{n^0_\bullet}_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)$ (voir Remarque 1.1.7).

Supposons qu'on ait réussi à construire $\{y_\bullet^l\}_{0\leq l\leq m} \subseteq \mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)$ qui satisfait (1.2). Pour construire $y_\bullet^{m+1}$, on considère l'application

$$\begin{aligned} n_\bullet^{m+1}: \quad & \Omega \to \mathbb{N} \\ & \omega \mapsto n_\omega^{m+1} := \min\{n \,|\, B(x_\omega^n, 1/2^{m+1}) \cap B(y_\omega^m, 1/2^m) \cap F_\omega \neq \emptyset\}, \end{aligned}$$

qui est bien définie car $\{x_\omega^n\}_{n\geq 1}$ est dense dans X_ω pour tout $\omega \in \Omega$. Pour vérifier qu'elle est borélienne il suffit d'observer que $\{\omega \in \Omega \mid B(x_\omega^n, 1) \cap B(y_\omega^m, 1/2^m) \cap F_\omega \neq \emptyset\} \in \mathscr{A}$ par (1.1) et par la Proposition 1.2.17. On peut donc définir $y_\bullet^{m+1} := x_\bullet^{n_\bullet^{m+1}} \in \mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)$.
La suite $\{y_\omega^n\}_{n\geq 0}$ est de Cauchy, pour tout $\omega \in \Omega$, car l'inégalité triangulaire montre que

$$d_\omega(y_\omega^k, y_\omega^{k+p}) \leq 1/2^{k-2} \quad \text{pour tout } k, p \geq 1.$$

On peut alors définir $y_\bullet \in \mathscr{S}(\Omega, X_\bullet^c)$ par $y_\omega = \lim_{n\to\infty} y_\omega^n$, où $X_\bullet^c$ désigne le champ des complétés. Comme F_ω est complet pour tout $\omega \in \Omega$, $y_\bullet \in \mathscr{S}(\Omega, F_\bullet)$. De plus, $y_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)$ (puisque cet ensemble est stable par limites ponctuelles) et donc $y_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega, F_\bullet)$. □

Remarques 1.2.22. (1) Si $(\Omega, A_\bullet)$ est un sous-champ borélien de $(\Omega, X_\bullet)$, alors il vérifie la condition du lemme précédent car si $\mathscr{D}'$ une famille fondamentale de la structure borélienne de $(\Omega, A_\bullet)$ et $U_\bullet = \bigcup_{n\geq 1} B(x_\bullet^n, r_\bullet^n)$ est un sous-champ fondamental d'ouverts, alors on a

$$\{\omega \in \Omega \,|\, A_\omega \cap U_\omega \neq \emptyset\} = \bigcup_{n\geq 1} \{\omega \in \Omega \,|\, \inf_{y_\bullet \in \mathscr{D}'} d_\omega(y_\omega, x_\omega^n) < r_\omega^n\} \in \mathscr{A}.$$

(2) Pour que l'hypothèse (1.1) du Lemme 1.2.21 soit vérifiée, il suffit de montrer que

$$\{\omega \in \Omega \mid F_\omega \cap B(x_\omega, r_\omega) \neq \emptyset\} \in \mathscr{A} \quad \text{pour tout } x_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega, X_\bullet),\ r_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega, \mathbb{R}).$$

En effet, si $U_\bullet = \bigcup_{n\geq 1} B(x_\bullet^n, r_\bullet^n)$ est un sous-champ fondamental d'ouverts, alors

$$\{\omega \in \Omega \mid F_\omega \cap U_\omega \neq \emptyset\} = \{\omega \in \Omega \mid F_\omega \cap (\bigcup_{n\geq 1} B(x_\omega^n, r_\omega^n)) \neq \emptyset\} = \bigcup_{n\geq 1} \{\omega \in \Omega \mid F_\omega \cap B(x_\omega^n, r_\omega^n) \neq \emptyset\}.$$

Proposition 1.2.23 ($\simeq$ [CV77], pp. 66-67). *Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace borélien, $(\Omega, X_\bullet)$ un champ borélien d'espaces métriques de structure borélienne $\mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)$ et $(\Omega, F_\bullet)$ un sous-champ de complets.*
Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $(\Omega, F_\bullet)$ est un sous-champ borélien de $(\Omega, X_\bullet)$.

(ii) Pour tout sous-champ fondamental d'ouverts $(\Omega, U_\bullet)$, on a

$$\{\omega \in \Omega \,|\, F_\omega \cap U_\omega \neq \emptyset\} \in \mathscr{A}.$$

(iii) Pour tout $x_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)$ l'application $d_\bullet(x_\bullet, F_\bullet) : \omega \mapsto d_\omega(x_\omega, F_\omega)$ est borélienne.

(iv) Pour tout $x_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)$ et tout $r_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega, \mathbb{R})$ on a

$$\{\omega \in \Omega \,|\, F_\omega \cap B(x_\omega, r_\omega) \neq \emptyset\} \in \mathscr{A}.$$

Preuve. La stratégie est de démontrer (i) ⇒ (iii) ⇒ (iv) ⇒ (ii) ⇒ (i).
[(i) ⇒ (iii)] Soit $x_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)$ et notons $\mathscr{D}' = \{y_\bullet^n\}_{n\geq 1}$ une famille fondamentale de la structure borélienne de $(\Omega, F_\bullet)$. L'application $d_\bullet(x_\bullet, F_\bullet) = \inf_{n\geq 1} d_\bullet(x_\bullet, y_\bullet^n)$ est borélienne comme *infimum* de fonctions qui sont boréliennes car $y_\bullet^n \in \mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)$ pour tout $n \geq 1$.
[(iii) ⇒ (iv)] Soit $x_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)$ et $r_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega, \mathbb{R})$. On a
$\{\omega \in \Omega \,|\, F_\omega \cap B(x_\omega, r_\omega) \neq \emptyset\} = \{\omega \in \Omega \,|\, d_\omega(x_\omega, F_\omega) < r_\omega\} \in \mathscr{A}$ par hypothèse.

[(iv) ⇒ (ii)] C'est la Remarque 1.2.22 (2).

[(ii) ⇒ (i)] Par la Remarque 1.2.5 (5), il suffit d'exhiber $\mathscr{D}' = \{y^n_\bullet\}_{n\geq 1} \subseteq \mathscr{L}(\Omega, X_\bullet) \cap \mathscr{S}(\Omega, F_\bullet)$ telle que $\overline{\{y^n_\omega\}}_{n\geq 1}$ est dense dans F_ω pour tout $\omega \in \Omega$. On effectue la construction à l'aide du Lemme 1.2.21.

Notons $\mathscr{D} = \{x^n_\bullet\}_{n\geq 1}$ une famille fondamentale de la structure $\mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)$ et pour $n, i \geq 1$ entiers fixés définissons le sous-champ $A^{n,i}_\bullet$ par

$$A^{n,i}_\omega = \begin{cases} F_\omega \cap B(x^n_\omega, 1/2^i) & \text{si } \omega \text{ est tel que cet ensemble est non vide} \\ F_\omega & \text{sinon.} \end{cases}$$

Puis on pose $F^{n,i}_\bullet = \overline{A^{n,i}_\bullet}$ (l'adhérence). Ce sous-champ est tel qu'il vérifie la condition du Lemme 1.2.21 car si $x_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)$ et $r_\bullet$ est borélienne (voir la Remarque 1.2.22 (2)), on a

$$\begin{aligned} \{\omega \in \Omega \,|\, F^{n,i}_\omega \cap B(x_\omega, r_\omega) \neq \emptyset\} &= \{\omega \in \Omega \,|\, A^{n,i}_\omega \cap B(x_\omega, r_\omega) \neq \emptyset\} \\ &= \Big(\{\omega \in \Omega \,|\, F_\omega \cap B(x_\omega, r_\omega) \neq \emptyset\} \cap \{\omega \in \Omega \,|\, F_\omega \cap B(x^n_\omega, 1/2^i) = \emptyset\}\Big) \\ &\quad \bigcup \Big(\{\omega \in \Omega \,|\, F_\omega \cap B(x^n_\omega, 1/2^i) \cap B(x_\omega, r_\omega) \neq \emptyset\}\Big). \end{aligned}$$

Ces trois ensembles sont boréliens car $(\Omega, F_\bullet)$ satisfait (ii) (en utilisant 1.2.17 (iii) qui montre que $B(x_\bullet, r_\bullet) \cap B(x^n_\bullet, 1/2^i)$ est un sous-champ fondamental d'ouverts).

Une application du Lemme 1.2.21 livre une section $x^{n,i}_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)$ telle que $x^{n,i}_\omega \in F^{n,i}_\omega$ pour tout $\omega \in \Omega$.

Il reste à voir que $F_\omega = \overline{\{x^{n,i}_\omega\}}_{n,i\geq 1}$ pour tout $\omega \in \Omega$. Soit $x \in F_\omega$ et $\varepsilon > 0$. Comme $\{x^n_\omega\}_{n\geq 1}$ est dense dans X_ω pour tout $\omega \in \Omega$, il existe $m, i \geq 1$ tels que $d_\omega(x, x^m_\omega) < 1/2^i < \varepsilon/2$. Par conséquent, on a $x, x^{m,i}_\omega \in F_\omega \cap B(x^m_\omega, 1/2^i)$ et

$$d_\omega(x^{m,i}_\omega, x_\omega) \leq d_\omega(x^{m,i}_\omega, x^m_\omega) + d_\omega(x^m_\omega, x_\omega) < 1/2^i + 1/2^i < \varepsilon$$

d'où le résultat. □

Remarques 1.2.24. (1) Dans (iii) et (iv) on peut remplacer "pour tout $x_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)$" par "pour tout $x_\bullet \in \mathscr{D}$" où $\mathscr{D}$ est une famille fondamentale de la structure borélienne. En d'autres termes, (iii) et (iv) sont équivalents respectivement à

(iii)' Pour tout $x_\bullet \in \mathscr{D}$ l'application $d_\bullet(x_\bullet, F_\bullet)$ est borélienne.

(iv)' Pour tout $x_\bullet \in \mathscr{D}$ et toute fonction $r_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega, \mathbb{R})$ on a

$$\{\omega \in \Omega \,|\, F_\omega \cap B(x_\omega, r_\omega) \neq \emptyset\} \in \mathscr{A}.$$

La Remarque 1.2.22 (2) et la Proposition 1.2.17 montrent que (iv)' ⇒ (iv). L'implication (iii)' ⇒ (iii) découle de 1.1.6 et du fait que si $x^n_\bullet \to x_\bullet$ dans X_ω, alors $d_\bullet(x^n_\bullet, A_\bullet) \to d_\bullet(x_\bullet, A_\bullet)$.

(2) Notons $d_{F_\bullet} \in \mathscr{S}(\Omega, \mathscr{C}(X_\bullet))$ où $d_{F_\omega} : X_\omega \to \mathbb{R},\ x_\omega \mapsto d_\omega(x_\omega, F_\omega)$ et $\mathscr{C}(X_\omega)$ est l'ensemble des fonctions continues $X_\omega \to \mathbb{R}$. On peut reformuler la condition (iii) ainsi :

$$d_{F_\bullet} \in \widetilde{\mathscr{L}}(\Omega, \mathscr{C}(X_\bullet)),$$

c'est-à-dire que la fonction distance à $F_\bullet$ est un morphisme compatible de $(\Omega, X_\bullet)$ dans le champ trivial $(\Omega, \mathbb{R})$

(3) On pourrait penser que (iv) est équivalent à

(v) Pour tout $x_\bullet \in \mathscr{D}$ et toute fonction borélienne $r_\bullet : \omega \mapsto r_\omega$ on a

$$\{\omega \in \Omega \,|\, F_\omega \cap \overline{B}(x_\omega, r_\omega) \neq \emptyset\} \in \mathscr{A}.$$

Mais quand on cherche à le prouver on a besoin d'une égalité du genre

$$\{\omega \in \Omega \mid \overline{B}(x_\omega, r_\omega) \cap F_\omega \neq \emptyset\} = \bigcap_{n \geq 1} \{\omega \in \Omega \mid B(x_\omega, r_\omega + 1/n) \cap F_\omega \neq \emptyset\}.$$

Or, cette égalité n'est pas toujours vraie. Elle est par exemple fausse si la distance à F_ω n'est pas réalisée (voir l'Exemple 1.5.4). Elle devient vraie si on rajoute l'hypothèse que les X_ω sont propres. L'implication [(v)$\Rightarrow$ (iv)] est toujours vraie puisque

$$B(x,r) = \bigcup_{n \geq 1} \overline{B}(x, r - 1/n).$$

(4) La condition (ii) de la Proposition 1.2.23 montre que si $F_\bullet$ est un sous-champ borélien de complets, alors le champ complémentaire $X_\bullet \setminus F_\bullet$ est un sous-champ fondamental d'ouverts. En effet, $X_\bullet \setminus F_\bullet = \bigcup_{x_\bullet \in \mathscr{D}} B(x_\bullet, d_\bullet(x_\bullet, F_\bullet))$. La réciproque est fausse en toute généralité comme le montre l'Exemple 1.2.25.

(5) La Proposition 1.2.23 reste vraie si on considère un sous-champ généralisé $(\Omega, F_\bullet)$ de $(\Omega, X_\bullet)$ à condition de définir $d_\omega(x, \emptyset) = \infty$ pour tout $\omega \in \Omega$ et $x \in X_\omega$. En effet,

$$\{\omega \in \Omega \mid F_\omega = \emptyset\} = d_\bullet(x_\bullet, F_\bullet)^{-1}(\{\infty\})$$

et donc la base est borélienne si et seulement si $d_\bullet(x_\bullet, F_\bullet)^{-1}(\{\infty\})$ est un ensemble borélien. Notons Ω' cette base. Il n'y a plus qu'à appliquer la Proposition 1.2.23 au sous-champ $(\Omega', F_\bullet)$ du champ restreint $(\Omega', X_\bullet)$. Si X est un espace métrique, on introduit la notation $\widetilde{\mathscr{C}}(X) = \mathscr{C}(X) \cup \{\mathbf{1}^\infty\}$ où $\mathbf{1}^\infty$ désigne la fonction constante de valeur ∞. On peut donc généraliser la Proposition 1.2.23 pour les sous-champs généralisés boréliens de complets ainsi : si $F_\bullet$ est un sous-champ généralisé de complets de $X_\bullet$, alors

$$F_\bullet \text{ est un sous-champ généralisé borélien } \iff d_{F_\bullet} \in \widetilde{\mathscr{L}}(\Omega, \widetilde{\mathscr{C}}(X_\bullet)).$$

Ou encore, on a que

$$F_\bullet \text{ est un sous-champ généralisé borélien } \iff \begin{cases} \Omega' \text{ est borélien,} \\ d_{F_\bullet} |_{\Omega'} \in \widetilde{\mathscr{L}}(\Omega', \mathscr{C}(X_\bullet)). \end{cases}$$

Exemple 1.2.25. Choisissons une décomposition non borélienne $\Omega = \Omega_1 \sqcup \Omega_2$. On définit

$$X_\omega = \begin{cases}]-1,1[& \text{si } \omega \in \Omega_1 \\ ]-1,1] & \text{si } \omega \in \Omega_2. \end{cases}$$

Alors les fonctions constantes à valeurs dans $\mathbb{Q} \cap]-1,1[$ forment une famille fondamentale d'une structure borélienne sur $(\Omega, X_\bullet)$. On observe que le sous-champ généralisé $X_\bullet \setminus B_{X_\bullet}(0,1)$ n'est pas borélien. En effet $\{\omega \in \Omega \mid X_\omega \setminus B_{X_\omega}(0,1) \neq \emptyset\} = \Omega_2 \notin \mathscr{A}$.

On a vu à l'Exemple 1.2.16 que les champs de boules ouvertes (centrées en des sections boréliennes et de rayon borélien) sont des sous-champs boréliens. Il en va de même de leurs adhérences par la Remarque 1.2.8. L'un des exemples suivants montre que ce n'est en général pas vrai pour les boules fermées, mais que ça le devient si on considère des champs d'espaces géodésiques.

Exemples 1.2.26. (1) Choisissons une décomposition non borélienne $\Omega = \Omega_1 \sqcup \Omega_2$. On définit

$$X_\omega = \begin{cases} \{0\} \cup]1, \infty[& \text{si } \omega \in \Omega_1 \\ \{0\} \cup [1, \infty[& \text{si } \omega \in \Omega_2. \end{cases}$$

Alors les fonctions constantes à valeurs dans $\mathbb{Q}_{>1} \cup \{0\}$ forment une famille fondamentale d'une structure borélienne sur $(\Omega, X_\bullet)$. On observe que $(\Omega, \overline{B}_{X_\bullet}(0,1))$ n'est pas un sous-champ borélien de $(\Omega, X_\bullet)$. En effet, la fonction cardinal $|\overline{B}_{X_\bullet}(0,1)|$ n'est pas borélienne (ce qui contredit le Lemme 1.1.8).

(2) Si $(\Omega, X_\bullet)$ est un champ borélien d'espaces métriques complets tel que X_ω est géodésique pour tout $\omega \in \Omega$, alors $\overline{B}(x_\bullet, r_\bullet)$ et $S(x_\bullet, r_\bullet)$ sont des sous-champs boréliens de fermés pour tout $x_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)$ et $r_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega, \mathbb{R})$. On observe que si X est un espace métrique géodésique, $x, y \in X$ et $r \in \mathbb{R}$, alors

$$d(y, \overline{B}(x,r)) = \lceil d(x,y) - r \rceil^0 \text{ et } d(y, S(x,r)) = |d(x,y) - r|$$

où si $\alpha \in \mathbb{R}$, alors

$$\lceil \alpha \rceil^0 = \begin{cases} \alpha & \text{si } \alpha \geq 0 \\ 0 & \text{si } \alpha < 0. \end{cases}$$

Et donc on a pour $y_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)$

$$d_\bullet(y_\bullet, \overline{B}(x_\bullet, r_\bullet)) = \lceil d_\bullet(y_\bullet, x_\bullet) - r_\bullet \rceil^0 \text{ et } d_\bullet(y_\bullet, S(x_\bullet, r_\bullet)) = |d_\bullet(y_\bullet, x_\bullet) - r_\bullet|$$

et la Proposition 1.2.23 permet de conclure.

On a vu (Remarque 1.2.24 (4)) que les complémentaires des champs boréliens de fermés sont des champs fondamentaux d'ouverts. En fait, ils satisfont une condition plus forte qui est décrite dans le lemme qui suit qui caractérise entièrement les champs généralisés boréliens d'ouverts tels que leur complémentaire est un champ généralisé borélien de fermés.

Lemme 1.2.27. *Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace borélien, $(\Omega, X_\bullet)$ un champ borélien d'espaces métriques complets et $U_\bullet$ un sous-champ généralisé borélien d'ouverts. Alors le sous-champ généralisé des complémentaires $X_\bullet \setminus U_\bullet$ est borélien si et seulement si les applications*

$$\begin{array}{rccl} r_{x_\bullet}: & \Omega & \to & \mathbb{R} \\ & \omega & \mapsto & \sup\{r \mid B(x_\omega, r) \subseteq U_\omega\} \end{array}$$

sont boréliennes pour tout $x_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)$ (ou de manière équivalente pour tout $x_\bullet$ dans une famille fondamentale).

Preuve. Commençons par montrer que si X est un espace métrique, $D \subseteq X$ est une partie dense et F est un fermé de X, alors

$$d(x,F) = r_x := \sup\{r \in \mathbb{R}_{\geq 0} \mid B(x,r) \subseteq X \setminus F\} \text{ pour tout } x \in X$$

et

$$X \setminus F = \bigcup_{y \in D} B(y, d(y,F)).$$

Prouvons la première égalité.
[$\geq$] Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $y \in F$ tel que $d(x,y) < d(x,F) + \varepsilon$. Alors $B(x, d(x,F) + \varepsilon) \nsubseteq X \setminus F$ et donc $r_x \leq d(x,F) + \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$.
[$\leq$] Soit $r \geq 0$ tel que $B(x,r) \subseteq X \setminus F$. Par l'absurde, supposons que $d(x,F) < r$. Alors il existe $y \in F$ tel que $d(x,y) \leq d(x,F) + \underbrace{\frac{1}{2}(r - d(x,F))}_{>0}$. Mais alors on a la contradiction

$$d(x,F) \leq d(x,y) \leq d(x,F) + \frac{1}{2}(r - d(x,F)) = \frac{1}{2}r + \frac{1}{2}d(x,F) < d(x,F).$$

Ainsi, $d(x,F) \geq r_x$.

Pour la deuxième égalité, on observe que l'inclusion [$\supseteq$] est banale et pour l'autre, on se fixe $x \in X \setminus F$. Alors il existe $r > 0$ tel que $B(x,r) \subseteq U$. Si $y \in D$ est tel que $d(y,x) < r/2$, alors $B(y,r/2) \subseteq B(x,r) \subseteq U$ et donc $r_y \geq r/2$, d'où $x \in B(y,r_y)$.
En reprenant les notations de l'énoncé on a donc $r_{x_\bullet} = d_\bullet(x_\bullet, X_\bullet \setminus U_\bullet)$ pour tout $x_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)$ ce qui montre [$\Leftarrow$] par la Proposition 1.2.23. Et $U_\bullet = \bigcup_{n\geq 1} B(x_\bullet^n, d_\bullet(x_\bullet^n, X_\bullet \setminus U_\bullet))$ où $\{x_\bullet^n\}_{n\geq 1}$ est une famille fondamentale de la structure $\mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)$, ce qui prouve [$\Rightarrow$]. □

Questions 1.2.28. Est-ce que tous les sous-champs fondamentaux d'ouverts satisfont la propriété du Lemme 1.2.27

1.3 Trivialisation d'Urysohn

On démontre dans cette section un théorème de Valadier affirmant que tout champ borélien d'espaces métriques peut être vu comme sous-champ d'un champ trivial $(\Omega, \mathbb{U})$ où $\mathbb{U}$ est l'espace métrique séparable universel construit par Urysohn en 1927. Le travail récent [Mel05] a été consacré à cet espace. Le formalisme de ce qui suit en est inspiré.

Définition 1.3.1. *Soit X un espace métrique. Une fonction $f : X \to \mathbb{R}_{>0}$ satisfaisant*

$$|f(x) - f(y)| \leq d(x,y) \leq f(x) + f(y) \quad \textit{pour tout } x, y \in X$$

est appelée une fonction de Katětov. On note $Kat(X)$ l'ensemble des fonctions de Katětov sur X.

Définition 1.3.2. *Soit X un espace métrique.*
On dit que X satisfait la propriété d'extension rationnelle si pour tout $A \subseteq X$ fini et $f \in Kat_{\mathbb{Q}}(A) := \{f \in Kat(A) \,|\, f(a) \in \mathbb{Q}$ pour tout $a \in A\}$, il existe $y \in X$ tel que $d(y,a) = f(a)$ pour tout $a \in A$.
On dit que X satisfait la propriété d'extension approximative si pour tout $A \subseteq X$ fini, $f \in Kat(A)$ et $\varepsilon > 0$ il existe $y \in X$ tel que $|d(y,a) - f(a)| \leq \varepsilon$, pour tout $a \in A$.
On dit que X satisfait la propriété d'extension finie (ou est finiment injectif) si pour tout $A \subseteq X$ fini et $f \in Kat(A)$, il existe $y \in X$ tel que $d(y,a) = f(a)$ pour tout $a \in A$.

Lemme 1.3.3. *Soit X un espace métrique. Si X possède la propriété d'extension rationnelle, alors X possède la propriété d'extension approximative.*

Preuve. Soit $A \subseteq X$ fini, $f \in Kat(A)$ et $\varepsilon > 0$ donnés. On ordonne les éléments de A de telle sorte que

$$0 < f(a_n) \leq \ldots \leq f(a_2) \leq f(a_1),$$

Un instant de réflexion permet de se convaincre qu'une récurrence peut montrer l'existence de $r_1, r_2, \ldots, r_n \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ tels que

(1) pour tout $i = 1, \ldots, n$, on a $f(a_i) + \sum_{k=1}^{i} r_k \in \mathbb{Q}$
(2) pour tout $1 \leq i \leq j \leq n$, on a $f(a_j) + \sum_{k=1}^{j} r_k \leq f(a_i) + \sum_{k=1}^{i} r_k$
(3) $\sum_{k=1}^{n} r_k \leq \varepsilon$.

On définit $\widetilde{f} : A \to \mathbb{Q}$ par $\widetilde{f}(a_i) = f(a_i) + \sum_{k=1}^{i} q_k$ pour tout $i = 1, \ldots, n$. On a $\widetilde{f} \in \mathrm{Kat}_{\mathbb{Q}}(A)$ car pour tout $1 \leq i \leq j \leq n$ on a

$$|\widetilde{f}(a_i) - \widetilde{f}(a_j)| \overset{(2)}{=} f(a_i) - f(a_j) - \sum_{k=i+1}^{j} r_k \leq f(a_i) - f(a_j) = |f(a_i) - f(a_j)| \leq d(a_i, a_j)$$
$$\widetilde{f}(a_i) + \widetilde{f}(a_j) \geq f(a_i) + f(a_j) \geq d(a_i, a_j)$$

puisque $f \in Kat(A)$. Par hypothèse, il existe $y \in X$ tel que $d(y, a_i) = \tilde{f}(a_i)$ pour tout $i = 1, \ldots, n$. On a

$$|d(y, a_i) - f(a_i)| = |\tilde{f}(a_i) - f(a_i)| \leq \sup_{1 \leq j \leq n} |\tilde{f}(a_j) - f(a_j)| = \tilde{f}(a_n) - f(a_n) = \sum_{k=1}^{n} r_k \leq \varepsilon,$$

d'où le résultat. □

On aura besoin du Lemme suivant. Sa formulation peut-paraître étrange, mais c'est un mal nécessaire pour la suite.

Lemme 1.3.4. *Soit X un espace métrique satisfaisant la propriété d'extension approximative. Soit $\alpha > 0$, $A = \{a_1, \ldots, a_n\} \subseteq X$ et $f \in Kat(A)$. Alors*

(i) Il existe $y \in X$ tel que

$$|d(y, a_i) - f(a_i)| \leq \frac{\alpha}{2} \quad \textit{pour tout } i = 1, \ldots, n.$$

(ii) Supposons que pour $K \geq 1$ il existe $\{y_k\}_{k=1}^K \subseteq X$ tels que

$$\begin{aligned} |d(y_k, a_i) - f(a_i)| &\leq \frac{\alpha}{2^k} \quad \textit{pour tout } i = 1, \ldots, n;\ k = 1, \ldots, K \\ d(y_k, y_{k+1}) &\leq \frac{\alpha}{2^{k-1}} \quad \textit{pour tout } k = 1, \ldots, K-1. \end{aligned}$$

Alors il existe $y_{K+1} \in X$ tel que

$$\begin{aligned} |d(y_{K+1}, a_i) - f(a_i)| &\leq \frac{\alpha}{2^{K+1}} \\ d(y_K, y_{K+1}) &\leq \frac{\alpha}{2^{K-1}}. \end{aligned}$$

En particulier, si X est en plus complet, alors X possède la propriété d'extension finie.

Preuve. (i) L'existence de y est garantie par la propriété d'extension approximative.
(ii) découle directement de l'affirmation suivante.
Affirmation. Soit X, A et f comme dans l'énoncé du lemme et supposons qu'il existe $y \in X$ et $c > 0$ tels que $|d(y, a_i) - f(a_i)| \leq c$ pour $i = 1, \ldots, n$. Alors il existe $y' \in X$ tel que

$$|d(y', a_i) - f(a_i)| \leq c/2 \quad \text{et} \quad d(y, y') \leq 2c.$$

Preuve de l'affirmation. Soit $f' : A \to \mathbb{R}$ définie par $f'(a_i) = d(y_1, a_i)$ pour tout $i = 1, \ldots, n$. Il est clair que $f' \in Kat(A)$ (inégalité du triangle). On a $\|f - f'\|_\infty = \sup_{1 \leq i \leq n} |f(a_i) - f'(a_i)| \leq c$ et on définit la fonction $g : A \cup \{y\} \to \mathbb{R}$ par $g(a_i) = f(a_i)$ pour $i = 1, \ldots, n$ et $g(y) = \|f - f'\|_\infty$. Vérifions que $g \in Kat(A \cup \{y\})$. D'une part,

$$\begin{aligned}
g(y)+g(a_i) &= \|f'-f\|_\infty - f(a_i) \geq |f(a_i)-d(y,a_i)|+f(a_i) \\
&= \begin{cases} d(y,a_i) & \text{si } d(y_1,a_i)\geq f(a_i) \\ 2f(a_i)-d(y,a_i) & \text{si } f(a_i)\geq d(y,a_i), \end{cases} \\
&\geq d(y,a_i)
\end{aligned}$$

et d'autre part,

$$\begin{aligned}
|g'(a_i)-g'(y)| &= |f(a_i) - \sup_{1\leq j\leq n} |f(a_j)-d(y,a_j)|| \\
&= \begin{cases} f(a_i) - \sup_{1\leq j\leq n} |f(a_i)-d(y,a_j)| \leq f(a_i)-|f(a_i)-d(y,a_i)| \\ \sup_{1\leq j\leq n}|f(a_j)-d(y,a_j)|-f(a_i) = |f(a_{j_0})-d(y,a_{j_0})|-f(a_i) \end{cases} \\
&= \begin{cases} f(a_i)-f(a_i)+d(y,a_i) \\ 2f(a_i)-d(y,a_i) \\ f(a_{j_0})-d(y,a_{j_0})-f(a_i) \leq |f(a_{j_0})-f(a_i)|-d(y,a_{j_0}) \\ \qquad \leq d(a_i,a_{j_0})-d(a_{j_0},y) \\ d(y,a_{j_0})-(f(a_{j_0})+f(a_i)) \leq d(y,a_{j_0})-d(a_i,a_{j_0}) \end{cases} \\
&\leq d(y,a_i)
\end{aligned}$$

Comme $g \in Kat(A\cup\{y\})$, il existe $y' \in X$ tel que

$$|d(y',a_i)-g(a_i)| = |d(y',a_i)-f(a_i)| \leq c/2 \quad \text{pour tout } i=1,\dots,n$$

$$d(y',y) \leq c/2 + g(y)) = c/2 + \|f-f_1\|_\infty \leq 2c.$$

□

□

On admet le résultat suivant.

Lemme 1.3.5. *[Urysohn, [Ury27]] Il existe un espace métrique dénombrable $\mathbb{U}_0$ qui possède la propriété d'extension rationnelle.*

Cet espace $\mathbb{U}_0$ possède donc la propriété de contenir une copie de tout espace métrique dénombrable tel que la distance entre tous les points est rationnelle. Notons $\mathbb{U}$ son complété. Cet espace métrique séparable est l'espace d'Urysohn. Il satisfait la propriété d'extension approximative puisqu'il contient $\mathbb{U}_0$ qui la satisfait (Lemme 1.3.5 et 1.3.3). Or, pour un espace complet le Lemme 1.3.4 montre en particulier que les propriétés d'extension approximative et d'extension finie sont équivalentes. Ainsi, $\mathbb{U}$ possède la propriété d'extension finie.

Théorème 1.3.6 ([Val78]). *Soit $(\Omega,\mathscr{A})$ un espace borélien, $\big(\Omega,(X_\bullet,d_\bullet)\big)$ un champ borélien d'espaces métriques et $\big(\Omega,(\mathbb{U},d)\big)$ le champ trivial associé à l'espace d'Urysohn. Alors il existe $i_\bullet \in \widetilde{\mathscr{L}}(\Omega,\mathrm{Iso}(X_\bullet,\mathbb{U}))$ un morphisme de champs compatible et isométrique.*

Preuve. Soit $\mathscr{D}=\{x^n_\bullet\}_{n\geq1}\subseteq \mathscr{L}(\Omega,X_\bullet)$ une famille fondamentale de la structure borélienne et notons $\mathbb{U}_0=\{u_n\}_{n\geq 1}$ ainsi que $u^n_\bullet:\Omega\to\mathbb{U}_0$ la section constante de valeur u_n. On va construire une suite de sections $\{v^n_\bullet\}_{n\geq1}\subseteq\mathscr{L}(\Omega,\mathbb{U})$ telle que

$$d_\omega(x^n_\omega,x^m_\omega)=d(v^n_\omega,v^m_\omega) \quad \text{pour tout } n,m\geq 1 \text{ et tout } \omega\in\Omega.$$

Soit $v^1_\bullet:\Omega\to\mathbb{U}_0$ la section constante de valeur $u_1\in\mathbb{U}_0$.

Supposons que nous ayons défini les n premières sections $v^1_\bullet, \ldots, v^n_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega, \mathbb{U})$ vérifiant

$$d_\omega(x^i_\omega, x^j_\omega) = d(v^i_\omega, v^j_\omega) \quad \text{pour tout } 1 \leq i,j \leq n \text{ et tout } \omega \in \Omega.$$

On considère alors la fonction borélienne $\alpha^n_\bullet = \min_{1\leq i \leq n} d_\bullet(x^i_\bullet, x^{n+1}_\bullet)$, le sous-ensemble borélien défini par $\Omega^n_0 := \{\omega \in \Omega \,|\, \alpha^n_\omega \neq 0\}$ et on construit, par récurrence, une suite d'applications boréliennes $\{w^{n,k}_\bullet : \Omega^n_0 \to \mathbb{U}_0\}_{k\geq 1}$. Pour $k \geq 1$ et $\omega \in \Omega^n_0$ fixés, $w^{n,k}_\omega$ est le premier des $\{u^\ell_\omega\}_{\ell \geq 1}$ (qui existe par le Lemme 1.3.4 appliqué à $\mathbb{U}$) tel que la condition suivante soit vérifiée :

$$|d(u^\ell_\omega, v^i_\omega) - d_\omega(x^{n+1}_\omega, x^i_\omega)| \leq \frac{\alpha^n_\omega}{2^k} \quad \text{pour tout } i = 1, \ldots, n$$
$$d(u^\ell_\omega, w^{n,k-1}_\omega) \leq \frac{\alpha^n_\omega}{2^{k-1}}.$$

L'application $w^{n,k}_\bullet : \Omega^n_0 \to \mathbb{U}_0$ est borélienne pour tout $k \geq 1$. On pose $v^{n+1}_\bullet = \lim_{k\to\infty} w^{n,k}_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega, U)$. Sur $\Omega \setminus \Omega^n_0$, on choisit pour v^{n+1}_ω le premier des v^ℓ_ω pour $1 \leq \ell \leq n$ tel que $x^\ell_\omega = x^{n+1}_\omega$.

Il est maintenant possible de définir le morphisme de champs $\varphi_\bullet \in \widetilde{\mathscr{L}}(\Omega, \mathrm{Iso}(X_\bullet, \mathbb{U}))$. Pour tout $\omega \in \Omega$, on définit $\varphi_\omega(x^n_\omega) = v^n_\omega$. Par définition, $\varphi_\omega : \{x^n_\omega\}_{n\geq 1} \to \mathbb{U}$ est une isométrie, elle se prolonge donc en une isométrie de X_ω dans $\mathbb{U}$. Pour voir que ce morphisme est compatible, il suffit de vérifier que $\varphi_\bullet(\mathscr{D}) \subseteq \mathscr{L}(\Omega, \mathbb{U})$ (Remarque 1.1.15). Mais $\varphi(x^n_\bullet) = v^n_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega, \mathbb{U})$ par construction. □

1.4 Champs de complets

On va étudier l'ensemble des classes d'équivalence de sous-champs généralisés boréliens de fermés dans un champ borélien de complets. Le principal résultat de cette section est la Proposition 1.4.8 qui affirme que cet ensemble est un treillis complet pour l'ordre de l'inclusion presque partout.

1.4.1 σ-algèbre sur $\coprod_{\omega\in\Omega} X_\omega$

Dans le but de prouver la Proposition 1.4.8, on va introduire dans cette section une σ-algèbre sur $\coprod_{\omega\in\Omega} X_\omega$ et étudier certaines de ces propriétés.
Soit $(\Omega, X_\bullet)$ un champ borélien d'espaces métriques. Rappelons qu'on peut y penser comme à la réunion disjointe indexée de $\{X_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ qu'on note $\coprod_{\omega\in\Omega} X_\omega = \{(\omega, x) \mid x \in X_\omega\}$. Un sous-champ généralisé peut être vu comme une partie de cette réunion. En effet, $A_\bullet = \coprod_{\omega\in\Omega} A_\omega \in \mathscr{P}(\coprod_{\omega\in\Omega} X_\omega)$.
Dans cette section, on va munir l'ensemble $\coprod_{\omega\in\Omega} X_\omega$ d'une σ-algèbre qui aura des liens avec l'ensemble des sous-champs généralisés boréliens.
Rappelons qu'un sous-champ fondamental d'ouverts (Définition 1.2.15) est défini par

$$U_\bullet := \bigcup_{n\geq 1} B(x^n_\bullet, r^n_\bullet),$$

où $\{x^n_\bullet\}_{n\geq 1} \subseteq \mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)$ et $\{r^n_\bullet\} \subseteq \mathscr{L}(\Omega, \mathbb{R})$. Notons $\mathscr{O}(X_\bullet) \subseteq \mathscr{P}(\coprod_{\omega\in\Omega} X_\omega)$ l'ensemble des sous-champs fondamentaux d'ouverts. On note également

$$\mathscr{B}(X_\bullet) = \{B(x_\bullet, r_\bullet) \mid x_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega, X_\bullet) \text{ et } r_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega, \mathbb{R})\} \subseteq \mathscr{O}(X_\bullet).$$

La Proposition 1.2.17 montre que $\sigma(\mathscr{O}(X_\bullet)) = \sigma(\mathscr{B}(X_\bullet))$ où $\sigma(\ )$ désigne la σ-algèbre engendrée par ce qu'il y a dans les parenthèses.

Remarque 1.4.1. L'introduction de $\widetilde{X}_\bullet := \coprod_{\omega\in\Omega} X_\omega$ et de $\sigma(\mathscr{O}(X_\bullet))$ permet de voir les champs comme des fibrés boréliens (voir par exemple l'introduction de [AR00] ou le cas particulier de l'Exemple 1.1.12 (4)). En effet, la projection naturelle $p : \widetilde{X} \to \Omega$ est évidemment borélienne lorsqu'on munit $\widetilde{X}_\bullet$ de la σ-algèbre $\sigma(\mathcal{O}(X_\bullet))$. On peut prouver, à l'aide de la Proposition 1.2.17, que $\sigma(\mathcal{O}(X_\bullet))$ est dénombrablement engendrée. Une section peut être vue comme une application $x_\bullet : \Omega \to \widetilde{X}_\bullet$ telle que $p \circ x_\bullet = \mathrm{id}_\Omega$. Les points (i) et (ii) de la Définition 1.1.3 permettent de prouver que $\mathcal{L}(\Omega, X_\bullet)$ est exactement l'ensemble des sections qui sont boréliennes lorsqu'on les voit comme des applications de Ω dans $\widetilde{X}_\bullet$.

Montrons que dans le cas d'un champ trivial, $\sigma(\mathcal{O})$ est une σ-algèbre bien connue.

Lemme 1.4.2. *Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace borélien et X un espace métrique séparable. On considère $\mathcal{B}_X$ la σ-algèbre des boréliens de X et $\mathcal{O}(X)$ l'ensemble des sous-champs fondamentaux d'ouverts du champ constant (Ω, X). Alors on a l'égalité $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}_X$* [8] *$= \sigma(\mathcal{O}(X))$.*

Preuve. $[\subseteq]$ Observons qu'il suffit de vérifier que $\Omega' \times U \in \sigma(\mathcal{O}(X))$ pour tout $\Omega' \in \mathcal{A}$ et tout ouvert U de X. Comme X est métrique séparable, il existe des suite $\{x_n\}_{n\geq 1} \subseteq X$ et $\{r_n\}_{n\geq 1} \subseteq \mathbb{R}$ telles que $U = \bigcup_{n\geq 1} B(x_n, r_n)$. On définit pour tout $n \geq 1$ la fonction borélienne $r_\bullet^n$ par

$$r_\omega^n := \begin{cases} r_n & \text{si } \omega \in \Omega' \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ainsi $\Omega' \times U = \bigcup_{n\geq 1} B(x_n, r_\bullet^n) \in \sigma(\mathcal{O}(X))$.

$[\supseteq]$ Observons qu'il suffit de vérifier que $B(x, r_\bullet) \in \sigma(\mathcal{A} \times \mathcal{B}_X)$ pour tout $x \in X$ et $r_\bullet \in \mathcal{L}(\Omega, \mathbb{R}_{\geq 0})$ (par la Proposition 1.2.17). Une fonction borélienne est limite ponctuelle d'une suite croissante de fonctions simples et si $r_\bullet^m \nearrow r_\bullet$, alors $B(x, r_\bullet) = B(x, \sup_{m\geq 1} r_\bullet^m) = \bigcup_{m\geq 1} B(x, r_\bullet^m)$. Il suffit donc de vérifier l'affirmation pour $r_\bullet$ de la forme $\sum_{i=0}^n a_i \chi_{\Omega_i}$ ou $\Omega_i \in \mathcal{A}$. Or on a

$$B(x, r_\bullet) = \bigcup_{i=1}^n \Omega_i \times B(x, a_i) \in \sigma(\mathcal{A} \times \mathcal{B}_X).$$

□

On va prouver que si $X_\bullet$ est un champ borélien et $A_\bullet$ est un sous-champ généralisé borélien, alors la σ-algèbre sur $A_\bullet$ est la restriction de la σ-algèbre sur $X_\bullet$. Pour ce faire, on aura besoin du lemme qui suit.

Lemme 1.4.3. *Soit X un ensemble, $\mathcal{A}$ une σ-algèbre sur X engendrée par $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Si $X_1 \subseteq X$, alors la $\sigma-$algèbre engendrée par $\mathcal{B}\,|_{X_1} := \{B \cap X_1 \mid B \in \mathcal{B}\}$ est égale à $\mathcal{A}\,|_{X_1}$.*

Preuve. On décompose la preuve en trois étapes.

(1) Supposons que $X = X_1 \sqcup X_2$ et que $\mathcal{A}_i$ est une σ-algèbre sur X_i pour $i = 1, 2$. Alors

$$\mathcal{A}_1 \oplus \mathcal{A}_2 := \{A \subseteq X \mid \text{ il existe } A_i \in \mathcal{A}_i \text{ tel que } A = A_1 \sqcup A_2\}$$

est une σ-algèbre sur X. En effet, on a :

- $\emptyset \in \mathcal{A}_1 \oplus \mathcal{A}_2$ puisque $\emptyset = \overbrace{\emptyset}^{\in \mathcal{A}_1} \sqcup \overbrace{\emptyset}^{\in \mathcal{A}_2}$.
- Si $\{A_n\}_{n\geq 1} \subseteq \mathcal{A}_1 \oplus \mathcal{A}_2$, alors

$$\bigcup_{n\geq 1} A_n = \bigcup_{n\geq 1} \overbrace{A_n^1}^{\in \mathcal{A}_1} \sqcup \overbrace{A_n^2}^{\in \mathcal{A}_2} = \overbrace{(\bigcup_{n\geq 1} A_n^1)}^{\in \mathcal{A}_1} \sqcup \overbrace{(\bigcup_{n\geq 1} A_n^2)}^{\in \mathcal{A}_2} \in \mathcal{A}_1 \oplus \mathcal{A}_2.$$

8. La σ-algèbre produit, *i.e.* celle engendrée par $\mathcal{A} \times \mathcal{B}_X$.

– Si $A \in \mathscr{A}_1 \oplus \mathscr{A}_2$, alors $X \setminus A = X \setminus (A_1 \sqcup A_2) = \overbrace{(X_1 \setminus A_1)}^{\in \mathscr{A}_1} \sqcup \overbrace{(X_2 \setminus A_2)}^{\in \mathscr{A}_2} \in \mathscr{A}_1 \oplus \mathscr{A}_2$.

(2) Supposons que $X = X_1 \sqcup X_2$, que $\mathscr{A}$ soit une σ-algèbre sur X et qu'il existe des σ-algèbres $\mathscr{A}_i$ sur X_i telles que $\mathscr{A} = \mathscr{A}_1 \oplus \mathscr{A}_2$. Alors $\mathscr{A}_i = \mathscr{A}\,|_{X_i}$ pour $i = 1, 2$.
En effet, supposons que $A \in \mathscr{A}\,|_{X_1}$. Alors il existe $\widetilde{A} = A_1 \sqcup A_2 \in \mathscr{A}_1 \oplus A_2 = \mathscr{A}$ tel que $A = \widetilde{A} \cap X_1 = (\underbrace{A_1}_{\in \mathscr{A}_1} \sqcup \underbrace{A_2}_{\in \mathscr{A}_2}) \cap X_1 = A_1 \in \mathscr{A}_1$. Réciproquement, si $A \in \mathscr{A}_1$, alors $A = A \sqcup \emptyset \in \mathscr{A}$ et donc $A = A \cap X_1 \in \mathscr{A}\,|_{X_1}$. De même pour X_2.

(3) On peut maintenant montrer l'égalité.

$[\supseteq]$ Écrivons $\sigma(\mathscr{B}\,|_{X_1})$ la σ-algèbre sur X_1 engendrée par $\mathscr{B}\,|_{X_1}$. On observe que

$$\mathscr{B} \subseteq \mathscr{A}\,|_{X \setminus X_1} \oplus \sigma(\mathscr{B}\,|_{X_1}) \subseteq \mathscr{A}.$$

Ainsi, puisque $\mathscr{B}$ engendre $\mathscr{A}$ et que $\mathscr{A}\,|_{X \setminus X_1} \oplus \sigma(\mathscr{B}\,|_{X_1})$ est une σ-algèbre par le point (1), on a que $\mathscr{A}\,|_{X \setminus X_1} \oplus \sigma(\mathscr{B}\,|_{X_1}) = \mathscr{A}$. On conclut en utilisant le point (2). L'inclusion $[\subseteq]$ est évidente. □

On peut maintenant prouver ce qu'on avait annoncé.

Lemme 1.4.4 (Remarque 1.17 de [DAP76]). *Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace borélien, $(\Omega, X_\bullet)$ un champ borélien d'espaces métriques et $A_\bullet$ un sous-champ généralisé borélien. Alors*

$$\sigma(\mathscr{O}(A_\bullet)) = \sigma(\mathscr{O}(X_\bullet))\,|_{A_\bullet}\,.$$

Preuve.
$[\subseteq]$ Soit $y_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega, A_\bullet)$ et $r_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega, \mathbb{R})$. Alors

$$B_{A_\bullet}(y_\bullet, r_\bullet) = B_{X_\bullet}(y_\bullet, r_\bullet) \cap (\bigsqcup_{\omega \in \Omega} A_\omega) \in \sigma(\mathscr{O}(X_\bullet))\,|_{A_\bullet}$$

où $B_{A_\bullet}(y_\bullet, r_\bullet) = \{(\omega, x) \mid d_\omega(x, y_\omega) < r_\omega \text{ et } x \in A_\omega\}$.

$[\supseteq]$ On sait que $\sigma(\mathscr{O}(X_\bullet))\,|_{A_\bullet} = \sigma(\mathscr{B}(X_\bullet))\,|_{A_\bullet} \overset{\text{Lem. 1.4.3}}{=} \sigma(\mathscr{B}(X_\bullet)\,|_{A_\bullet})$. Il suffit donc de montrer que $B(x_\bullet, r_\bullet) \cap A_\bullet \in \sigma(\mathscr{O}(A_\bullet))$ pour tout $x_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)$ et $r_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega, \mathbb{R})$. Pour ce faire, on aura besoin d'une description adaptée de l'intersection d'une boule et d'un ensemble.

Affirmation. Soit X un espace métrique séparable, $A \subseteq X$, $D = \{y_n\}_{n \geq 1} \subseteq A$ une partie dénombrable dense dans A, $x_0 \in X$ et $r \in \mathbb{R}$. Alors

$$B(x_0, r) \cap A = \bigcup_{m \geq 1} \bigcap_{k \geq m} \bigcup_{n \geq 1} \{y \in A \mid d(y, y_n) < 1/k \text{ et } d(y_n, x_0) < r - 1/m\}$$

Preuve de l'affirmation. $[\subseteq]$ Soit $y \in B(x_0, r) \cap A$. Choisissons $m \geq 1$ tel que $B(y, 2/m) \subseteq B(x_0, r)$ (*i.e.* prendre m tel que $d(y, x_0) < r - 2/m$). D'autre part, on sait que pour tout $k \geq 1$, il existe $n(k)$ tel que $d(y, y_{n(k)}) < 1/k$. Or, si $k \geq m$, alors

$$d(y_{n(k)}, x_0) \leq d(y_{n(k)}, y) + d(y, x_0) < 1/k + r - 2/m \leq {}^{9} r - 1/m.$$

$[\supseteq]$ Soit $y \in A$ tel qu'il existe $m \geq 1$ tel que pour tout $k \geq m$, il existe $n \geq 1$ tel que $d(y, y_n) < 1/k$ et $d(y_n, x_0) < r - 1/m$. Donc il existe une suite d'indices $n(k)$ (pour k assez grand) tel que $d(y, y_{n(k)}) < 1/k$ et $d(y_{n(k)}, x_0) < r - 1/m$. Ainsi $y_{n(k)} \overset{k \to \infty}{\to} y$ et donc $d(y, x_0) = \lim_{k \to \infty} d(y_{n(k)}, x_0) \leq r - 1/m < r$, ce qui achève la preuve de l'affirmation. □

9. $1/k - 2/m \leq -1/m \iff 1/k \leq 1/m \iff m \leq k$

Soit $\{y_\bullet^n\}_{n\geq 1}$ une famille fondamentale de $\mathscr{L}(\Omega, A_\bullet)$, $x_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)$ et $r_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega, \mathbb{R})$. L'affirmation montre que

$$B_{A_\bullet}(x_\bullet, r_\bullet) = \bigcup_{m\geq 1} \bigcap_{k\geq m} \bigcup_{n\geq 1} \{(\omega, y) \mid y \in A_\omega,\ d_\omega(y, y_\omega^n) < 1/k \text{ et } d_\omega(y_\omega^n, x_\omega) < r_\omega - 1/m\}.$$

Finalement, on définit, pour $n, m, k \geq 1$, les fonctions boréliennes $r_\bullet^{n,m,k} : \Omega \to \mathbb{R}$ par

$$r_\omega^{n,m,k} := \begin{cases} 1/k & \text{si } d_\omega(y_\omega^n, x_\omega) < r_\omega - 1/m \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

qui nous permettent de réécrire

$$\{(\omega, y) \mid y \in A_\omega,\ d_\omega(y, y_\omega^n) < 1/k \text{ et } d_\omega(y_\omega^n, x_\omega) < r_\omega - 1/m\} = B_{A_\bullet}(y_\bullet^n, r_\bullet^{n,m,k}) \in \mathscr{B}(A_\bullet),$$

ce qui termine la preuve. □

1.4.2 Classes d'équivalence de sous-champs de fermés

Rappelons que si Ω est muni d'une mesure de probabilité, alors on peut considérer sur $X_\bullet$ la structure μ-mesurable naturelle induite par la structure borélienne. Soit $X_\bullet$ un champ borélien d'espaces métriques. Considérons l'ensemble des sous-champs généralisés boréliens de complets et l'ensemble des sous-champs généralisés μ-mesurables de complets. Comme pour $\mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)$ et $\mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)^\mu$ (voir le Corollaire 1.1.20), on montre que ces ensembles sont très proches.

Lemme 1.4.5. *Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ un espace de probabilité et $(\Omega, X_\bullet)$ un champ borélien d'espaces métriques. Alors*

(i) Si $F_\bullet$ est un sous-champ généralisé borélien de complets, alors $F_\bullet$ est un sous-champ généralisé μ-mesurable (de complets).

(ii) Si $F_\bullet$ est un sous-champ généralisé μ-mesurable de complets, alors il existe un sous-champ généralisé borélien de complets équivalent à $F_\bullet$ (pour l'égalité presque partout).

Preuve. (i) Soit $\mathscr{D}$ une famille fondamentale de la structure borélienne de $X_\bullet$. Par la Proposition 1.2.23, on a que $d_\bullet(x_\bullet, F_\bullet)$ est borélienne pour tout $x_\bullet \in \mathscr{D}$. En particulier $d_\bullet(x_\bullet, F_\bullet)$ est μ-mesurable pour tout $x_\bullet \in \mathscr{D}$ et, par la même proposition, appliqué cette fois au sous-champ $F_\bullet$ du champ μ-mesurable $X_\bullet$, on a que $F_\bullet$ est μ-mesurable (voir la Remarque 1.2.24 (1)).

(ii) Comme pour le point (i), on sait que $d_\bullet(x_\bullet, F_\bullet)$ est μ-mesurable pour tout $x_\bullet \in \mathscr{D}$. Ainsi, comme dans la preuve du Corollaire 1.1.20, on a qu'il existe un borélien Ω' de mesure pleine tel que $d_\bullet(x_\bullet, F_\bullet)\mid_{\Omega'}$ est borélienne pour tout $x_\bullet \in \mathscr{D}$. Donc le champ $(\Omega', F_\bullet)$ est un sous-champ généralisé borélien de $(\Omega', X_\bullet)$ et, en le prolongeant arbitrairement (avec l'ensemble vide ou une section borélienne), on obtient un sous-champ généralisé borélien de complets $F'_\bullet$ égal presque partout au champ $F_\bullet$. □

Supposons maintenant que $X_\bullet$ est un champ borélien d'espaces complets. Alors les sous-champs de complets coïncident avec les sous-champs de fermés. Rappelons qu'on note $\widetilde{\mathscr{L}}(\Omega, \mathscr{P}_{\mathrm{Fe}}(X_\bullet))$ l'ensemble des sous-champs généralisés boréliens de fermés. Par analogie, nous noterons $\widetilde{\mathscr{L}}(\Omega, \mathscr{P}_{\mathrm{Fe}}(X_\bullet))^\mu$ l'ensemble des sous-champs généralisés μ-mesurables de fermés. Notons $\widetilde{L}(\Omega, \mathscr{P}_{\mathrm{Fe}}(X_\bullet))$ le quotient de $\widetilde{\mathscr{L}}(\Omega, \mathscr{P}_{\mathrm{Fe}}(X_\bullet))$ (ou de manière équivalente de $\widetilde{\mathscr{L}}(\Omega, \mathscr{P}_{\mathrm{Fe}}(X_\bullet))^\mu$) par la relation d'égalité presque partout et $\mathscr{O}^*(X_\bullet)$ l'ensemble des sous-champs fondamentaux d'ouverts pour la structure μ-mesurable. Le lien entre la σ-algèbre $\mathscr{O}^*(X_\bullet)$ et les classes d'équivalences de sous-champs généralisés boréliens est donné par la proposition suivante.

Proposition 1.4.6 (Proposition 3.6 de [De67]). *Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ un espace de probabilité, $(\Omega, X_\bullet)$ un champ borélien d'espaces métriques complets et $F_\bullet$ un sous-champ généralisé de fermés. Alors $F_\bullet$ est un sous-champ μ-mesurable si et seulement si $F_\bullet \in \sigma(\mathscr{O}^*(X_\bullet))$.*

Preuve. [⇒] On montre le résultat plus général suivant :

Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace borélien, $X_\bullet$ un champ borélien d'espaces métriques et $A_\bullet$ un sous-champ généralisé borélien. Alors $\overline{A_\bullet} \in \sigma(\mathscr{O}(X_\bullet))$.
Soit $\mathscr{D} = \{x_\bullet^m\}_{m\geq 1}$ une famille fondamentale de $\mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)$. Comme $A_\bullet$ est un sous-champ borélien, on a que $d_\bullet(x_\bullet^m, A_\bullet)$ est borélienne pour tout $m \geq 1$. Observons que

$$(\omega, x) \in \bigsqcup_{\omega\in\Omega} \overline{A_\omega} \iff \forall\, n \geq 1,\ \exists\, m \geq 1 \text{ t.q. } d_\omega(x, x_\omega^m) < 1/n \text{ et } d_\omega(x_\omega^m, A_\omega) < 1/n.$$

[⇒] On fixe $(\omega, x) \in \bigsqcup_{\omega\in\Omega} \overline{A_\omega}$ et $n \geq 1$. Alors il existe $m(n)$ tel que $1/n > d_\omega(x, x_\omega^{m(n)}) \geq d_\omega(x_\omega^{m(n)}, A_\omega)$.
[⇐] On fixe $(\omega, x) \in \bigsqcup_{\omega\in\Omega} X_\omega$ tel que pour tout $n \geq 1$, il existe $m(n) \geq 1$ tel que $d_\omega(x, x_\omega^{m(n)}) < 1/n$ et $d_\omega(x_\omega^{m(n)}, A_\omega) < 1/n$. Alors $x_\omega^{m(n)} \to x$ et donc, par continuité de la fonction distance, $d(x, A_\omega) = \lim_{n\to\infty} d_\omega(x_\omega^{m(n)}, A_\omega) = 0$, c'est-à-dire $(\omega, x) \in \overline{A_\omega}$.
Ainsi, on peut écrire

$$\bigsqcup_{\omega\in\Omega} \overline{A_\omega} = \bigcap_{n\geq 1} \bigcup_{m\geq 1} \{(\omega, x) \mid d_\omega(x, x_\omega^m) < 1/n \text{ et } d_\omega(x_\omega^m, A_\omega) < 1/n\}.$$

En définissant, pour $n, m \geq 1$, les fonctions boréliennes $r_\bullet^{m,n} : \Omega \to \mathbb{R}$ par

$$r_\omega^{m,n} := \begin{cases} 1/n & \text{si } d_\omega(x_\omega^m, A_\omega) < 1/n \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

on obtient que

$$\overline{A_\bullet} = \bigcap_{n\geq 1} \bigcup_{m\geq 1} B(x_\bullet^m, r_\bullet^{m,n}) \in \sigma(\mathscr{O}(X_\bullet)).$$

[⇐] On commence par montrer le résultat dans le cas d'un champ trivial (Ω, X) où X est un espace métrique séparable complet. Par la Proposition 1.2.23 et la Remarque 1.2.24 (1), il suffit de vérifier que pour tout $x \in X$ et tout $r_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega, \mathbb{R})^\mu$, $\{\omega \in \Omega \mid F_\omega \cap B(x, r_\omega) \neq \emptyset\} \in \mathscr{A}^*$. Mais

$$\{\omega \in \Omega \mid F_\omega \cap B(x, r_\omega) \neq \emptyset\} = \pi_\Omega(B(x, r_\bullet) \cap F_\bullet).$$

Or, $B(x, r_\bullet) \cap F_\bullet \in \sigma(\mathscr{A}^* \times \mathscr{B}_X)$ (Lemme 1.4.4) et donc $\pi_\Omega \pi_\Omega(B(x, r_\bullet) \cap F_\bullet) \in \mathscr{A}^*$ par des théorèmes classiques (par exemple 3.4 de [De67] ou Théorème 2 de [Le78]).
Ensuite, on utilise la trivialisation d'Urysohn pour plonger $X_\bullet$ dans $\mathbb{U}$ (voir la Section 1.3). Premièrement, $F_\bullet \in \sigma(\mathscr{O}^*(X_\bullet))$ par hypothèse. Deuxièmement, les Lemmes 1.4.2 et 1.4.4 montrent que

$$\sigma(\mathscr{O}^*(X_\bullet)) = \sigma(\mathscr{A}^* \times \mathscr{B}_{\mathbb{U}})\,|_{X_\bullet}.$$

Troisièmement, on sait que $X_\bullet \in \sigma(\mathscr{A}^* \times \mathscr{B}_{\mathbb{U}})$ grâce aux Lemmes 1.2.11 et 1.4.5 et l'implication dans l'autre sens (qu'on a déjà prouvé). Ces trois constatations impliquent que $F_\bullet \in \sigma(\mathscr{A}^* \times \mathscr{B}_{\mathbb{U}})$. Et donc $F_\bullet$ est un sous-champ généralisé μ-mesurable du champ trivial $\mathbb{U}$. Grâce au Lemme 1.2.6 sur la transitivité des sous-champs, on peut conclure que $F_\bullet$ est un sous-champ généralisé μ-mesurable de $X_\bullet$. □

Corollaire 1.4.7. *Soit $(\Omega,\mathscr{A},\mu)$ un espace de probabilité, $(\Omega,X_\bullet)$ un champ borélien d'espaces métriques complets et $\{[F_\bullet^n]\}_{n\geq 1}\subseteq \widetilde{L}(\Omega,\mathscr{P}_{Fe}(X_\bullet))$ une suite de classes d'équivalence de sous-champs généralisés boréliens de fermés. Alors*

$$[F_\bullet] := [\bigcap_{n\geq 1} F_\bullet^n] \in \widetilde{L}(\Omega,\mathscr{P}_{Fe}(X_\bullet)).$$

En particulier, si $\{F_\bullet^n\}_{n\geq 1}\subseteq \widetilde{\mathscr{L}}(\Omega,\mathscr{P}_{Fe}(X_\bullet))$, il existe $F'_\bullet \in \widetilde{\mathscr{L}}(\Omega,\mathscr{P}_{Fe}(X_\bullet))$ et $\Omega'\in\mathscr{A}$ de mesure pleine tel que $F'_\omega = \bigcap_{n\geq 1} F_\omega^n$ pour tout $\omega\in\Omega'$.

Preuve. On utilise le critère de la Proposition 1.4.6 : $F_\bullet^n \in \sigma(\mathscr{O})\subseteq\sigma(\mathscr{O}^*)$ et donc $F_\bullet := \bigcap_{n\geq 1} F_\bullet^n \in \sigma(\mathscr{O}^*)$. En réappliquant le critère dans l'autre sens, on obtient que $\bigcap_{n\geq 1} F_\bullet^n \in \widetilde{\mathscr{L}}(\Omega,\mathscr{P}_{\mathrm{Fe}}(X_\bullet))^\mu$, c'est-à-dire que $[F_\bullet]\in\widetilde{L}(\Omega,\mathscr{P}_{\mathrm{Fe}}(X_\bullet))$. □

En fait, on peut faire mieux et prouver le résultat annoncé en début de section.

Proposition 1.4.8 (En partie Valadier, [Val71], pp. 278-279)**.** *Soit $(\Omega,\mathscr{A},\mu)$ un espace de probabilité et $(\Omega,X_\bullet)$ un champ borélien d'espaces métriques complets. Alors $\widetilde{L}(\Omega,\mathscr{P}_{Fe}(X_\bullet))$ muni de l'ordre de l'inclusion presque partout est un treillis complet* [10]*.*

Plus précisément, si $\{F_\bullet^\beta\}_{\beta\in\mathscr{B}} \in \widetilde{\mathscr{L}}(\Omega,\mathscr{P}_{Fe}(X_\bullet))$ est une famille de sous-champs généralisés boréliens de fermés, alors il existe une suite d'indices $\{\beta_n\}_{n\geq 1}\subseteq\mathscr{B}$ telle que $[\bigcap_{n\geq 1} F_\bullet^{\beta_n}]$ et $[\overline{\bigcup_{n\geq 1} F_\bullet^{\beta_n}}]$ soient respectivement l'infimum et le supremum de la famille $\{[F_\bullet^\beta]\}_{\beta\in\mathscr{B}}$.

Pour prouver cette proposition, on aura besoin du théorème qui suit.

Théorème 1.4.9 ([Doo94], p. 71)**.** *Soit $(\Omega,\mathscr{A},\mu)$ un espace mesuré tel que μ soit σ-finie. Supposons que $\{f_i:\Omega\to\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}\}_{i\in\mathscr{I}}$ soit une famille de fonctions boréliennes. Alors il existe une fonction borélienne $g:\Omega\to\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$ telle que*

(i) Pour tout $i\in\mathscr{I}$, on a $g\geq f_i$ pour presque tout $\omega\in\Omega$.

(ii) Si $h:\Omega\to\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$ est une fonction borélienne qui satisfait (i), alors $h\geq g$ pour presque tout $\omega\in\Omega$.

La fonction g est uniquement déterminée aux ensembles de mesure nulle près par les propriétés (i) et (ii) et toute fonction dans sa classe modulo l'égalité presque partout satisfait (i) et (ii). Un choix d'un représentant de la classe ainsi définie est le supremum *d'une famille dénombrable bien choisie d'éléments de I.*

On appelle la fonction g un supremum *essentiel de la famille $\{f_i\}_{i\in I}$ et on note parfois $g = \operatorname{sup\,ess}_{i\in I}\{f_i\}$.*

Remarque 1.4.10. Étant donné une famille non dénombrable de fonctions boréliennes $\{f_i:\Omega\to\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}\}_{i\in\mathscr{I}}$, le *supremum* ponctuel de cette famille n'est pas forcément une fonction borélienne. Par exemple, si $A\subseteq\Omega$ est un sous-ensemble non borélien, la fonction $\chi_A = \sup_{\omega\in A}\chi_{\{\omega\}}$ n'est pas borélienne. Ce théorème montre qu'il existe tout de même une famille de fonctions boréliennes qui sont des "*supremum* presque partout" de la famille $\{f_i\}_{i\in I}$. Dans l'exemple précédent, le *supremum* essentiel de la famille $\{\chi_{\{\omega\}}\}_{\omega\in A}$ est la classe des fonctions nulles presque partout.

Preuve de la Proposition 1.4.8. Commençons par prouver l'observation suivante :
Observation. Soit X un espace métrique, $D\subseteq X$ dense et $F_1,F_2\subseteq X$ deux sous-ensembles fermés. Alors,

$$F_2\subseteq F_1 \iff d(x,F_2)\geq d(x,F_1) \text{ pour tout } x\in D.$$

10. Tout sous-ensemble admet un *infimum* et un *supremum*.

[$\Rightarrow$] Soit $x \in D$. On a $d(x,F_2) = \inf_{y\in F_2} d(x,y) \geq \inf_{y\in F_1} d(x,y) = d(x,F_1)$ car l'*infimum* est pris sur un ensemble plus grand.

[$\Leftarrow$] Soit $x \in F_2$ et $\{x_k\}_{k\geq 1} \subseteq D$ telle que $x_k \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} x$. Alors, par continuité de $d(\cdot,F_1)$, on a que $d(x_k,F_1) \to d(x,F_1)$. Mais, par hypothèse, $d(x_k,F_1) \leq d(x_k,F_2)$ pour tout $k \geq 1$ et $d(x_k,F_2) \to d(x,F_2) = 0$ puisque F_2 est fermé. Ainsi, $d(x_k,F_1) \to 0$, c'est-à-dire que $x \in F_1$ (puisque F_1 est fermé).

Soit maintenant $\{F_\bullet^\beta\}_{\beta\in\mathscr{B}}$ une famille de sous-champs généralisés boréliens de fermés. On commence par montrer l'existence de l'*infimum*. On choisit $\mathscr{D} = \{x_\bullet^i\}_{i\geq 1}$ une famille fondamentale de la structure borélienne $\mathscr{L}(\Omega,X_\bullet)$. Par le Théorème 1.4.9, il existe, pour chaque $i \geq 1$, une suite d'indices $\{\beta_n^i\} \subseteq \mathscr{B}$ telle que

$$\sup_{n\geq 1} d_\bullet(x_\bullet^i, F_\bullet^{\beta_n^i}) \text{ soit un } \textit{supremum} \text{ essentiel de la famille } \{d_\bullet(x_\bullet^i, F_\bullet^\beta)\}_{\beta\in\mathscr{B}}.$$

Si on introduit $\mathscr{B}' := \{\beta_n^i\}_{i,n\geq 1}$, qui est un sous-ensemble dénombrable de $\mathscr{B}$, alors $\sup_{\beta\in\mathscr{B}'} d_\bullet(x_\bullet^i, F_\bullet^\beta)$ est aussi un *supremum* essentiel de la famille $\{d_\bullet(x_\bullet^i,F_\bullet^\beta)\}_{\beta\in\mathscr{B}}$, et ce pour tout $i \geq 1$ [11]. D'autre part on observe que $\bigcap_{\beta\in\mathscr{B}'} F_\bullet^\beta$ est un sous-champ généralisé μ-mesurable (Corollaire 1.4.7). Il reste à montrer que si $F_\bullet$ est un sous-champ généralisé borélien de fermés équivalent au sous-champ généralisé μ-mesurable $\bigcap_{\beta\in\mathscr{B}'} F_\bullet^\beta$, alors $F_\bullet \leq_{p.p} F_\bullet^\beta$ pour tout $\beta \in \mathscr{B}$. Fixons donc $\beta_0 \in \mathscr{B}$. Par construction, pour tout $i \geq 1$, on a la suite d'inégalités suivante

$$d_\bullet(x_\bullet^i, F_\bullet) =_{p.p.} d_\bullet\big(x_\bullet^i, \bigcap_{\beta\in\mathscr{B}'} F_\bullet^\beta\big) \overset{\text{Observation}}{\geq} \sup_{\beta\in\mathscr{B}'} d_\bullet(x_\bullet^i, F_\bullet^\beta) \geq_{p.p.} d_\bullet(x_\bullet^i, F_\bullet^{\beta_0}).$$

Ainsi, il existe un borélien Ω' de mesure pleine tel que $d_\omega(x_\omega^i, F_\omega) \geq d_\omega(x_\omega^i, F_\omega^{\beta_0})$ pour tout $\omega \in \Omega'$ et $i \geq 1$. L'observation préliminaire permet de conclure que $F_\omega \subseteq F_\omega^{\beta_0}$ pour tout $\omega \in \Omega'$, ce qui montre que $[F_\bullet]$ est un minorant. Comme $[F_\bullet] = [\bigcap_{\beta\in\mathscr{B}'} F_\bullet^\beta]$, c'est un *infimum*.

On procède de manière analogue pour construire $F_\bullet^{\sup}$. On considère un $\operatorname{inf\,ess}_{\beta\in\mathscr{B}} d(x^i, F_\bullet^\beta)$ qui peut-être réalisé simultanément (*i.e.* pour tous les $i \geq 1$) comme $\inf_{\beta\in\mathscr{B}''} d(x_\bullet^i, F_\bullet^\beta)$ où $\mathscr{B}''$ est une partie dénombrable de $\mathscr{B}$. On considère le sous-champ généralisé borélien de fermés $F_\bullet := \overline{\bigcup_{\beta\in\mathscr{B}''} F_\bullet^\beta}$ qui satisfait que $F_\bullet \geq F_\bullet^\beta$ pour tout $\beta \in \mathscr{B}''$. Alors, pour tout $i \geq 1$, on a la suite d'inégalités suivante

$$d_\bullet(x_\bullet^i, F_\bullet) = d_\bullet(x_\bullet^i, \overline{\bigcup_{\beta\in\mathscr{B}''} F_\bullet^\beta}) = \inf_{\beta\in\mathscr{B}''} d_\bullet(x_\bullet^i, F_\bullet^\beta) \leq_{p.p.} d_\bullet(x_\bullet^i, F_\bullet^{\beta_0}).$$

Ainsi, il existe un borélien Ω' de mesure pleine tel que $d_\omega(x_\omega^i, F_\omega) \leq d_\omega(x_\omega^i, F_\omega^{\beta_0})$ pour tout $\omega \in \Omega'$ et $i \geq 1$. L'observation préliminaire permet de peut conclure que $F_\omega^{\beta_0} \subseteq F_\omega$ pour tout $\omega \in \Omega'$, ce qui montre que $[F_\bullet]$ est un majorant. Comme $F_\bullet = \overline{\bigcup_{\beta\in\mathscr{B}''} F_\bullet^\beta}$, c'est un *supremum*.

Pour terminer la preuve de manière rigoureuse, il faut encore remarquer qu'on aurait pu prendre $\mathscr{B}' \cup \mathscr{B}''$ pour calculer le *supremum* et l'*infimum*. □

1.4.3 Morphismes de champs

On a déjà montré que l'image d'un sous-champ généralisé borélien par un morphisme compatible est borélien (Lemme 1.2.11) et on va maintenant montrer que c'est presque vrai pour la pré-image (sous certaines hypothèses raisonnables).

11. $\sup_{n\geq 1} d_\bullet(x_\bullet^i, F_\bullet^{\beta_n^i}) \geq_{p.p.} d_\bullet(x_\bullet^i, F_\bullet^\beta)$ pour tout $\beta \in \mathscr{B}$ et $i \geq 1$. En particulier, puisque $\mathscr{B}'$ est dénombrable, $\sup_{n\geq 1} d_\bullet(x_\bullet^i, F_\bullet^{\beta_n^i}) \geq_{p.p.} \sup_{\beta\in\mathscr{B}'} d_\bullet(x_\bullet^i, F_\bullet^\beta) \geq \sup_{n\geq 1} d_\bullet(x_\bullet^i, F_\bullet^{\beta_n^i})$ pour tout $i \geq 1$.

Lemme 1.4.11. *Soit* $(\Omega,\mathscr{A},\mu)$ *un espace de probabilité,* $X_\bullet$ *un champ borélien d'espaces métriques complets,* $Y_\bullet$ *un champ borélien d'espaces métriques,* $\varphi_\bullet : X_\bullet \to Y_\bullet$ *un morphisme de champs compatible et continu et* $F_\bullet \leq Y_\bullet$ *un sous-champ généralisé borélien de fermés. Définissons* $\varphi_\bullet^{-1}(F_\bullet)$ *par* $\left(\varphi_\bullet^{-1}(F_\bullet)\right)_\omega := \varphi_\omega^{-1}(F_\omega)$*. Alors il existe un borélien* Ω' *de mesure pleine tel que* $(\Omega',\varphi_\bullet^{-1}(F_\bullet))$ *est un sous-champ généralisé borélien de* $(\Omega',X_\bullet)$*.*

Preuve. Soit $\mathscr{D} \subseteq \mathscr{L}(\Omega,F_\bullet) \subseteq \mathscr{L}(\Omega,Y_\bullet)$ une famille fondamentale du sous-champ $F_\bullet$. Alors $U_\bullet^m := \bigcup_{y_\bullet\in\mathscr{D}} B(y_\bullet,1/m)$ est un sous-champ fondamental d'ouverts de $Y_\bullet$ pour tout $m \geq 1$. En particulier, ce sont des sous-champs très remarquables d'ouverts et donc $\varphi_\bullet^{-1}(U_\bullet^m)$ sont des sous-champs très remarquables d'ouverts. En effet,

$$\{\omega\in\Omega \mid x_\omega \in \varphi_\omega^{-1}(U_\omega^m)\} = \{\omega\in\Omega \mid \varphi_\omega(x_\omega)\in U_\omega^m\}$$

est un borélien pour tout $x_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega,X_\bullet)$ puisque, $\varphi_\bullet(x_\bullet)\in\mathscr{L}(\Omega,Y_\bullet)$ par hypothèse.
Ainsi, $(\Omega,\varphi_\bullet^{-1}(U_\bullet^m))$ est un sous-champ généralisé borélien de $(\Omega,X_\bullet)$ pour tout $m\geq 1$. La Remarque 1.2.8 montre que $(\Omega,\overline{\varphi_\bullet^{-1}(U_\bullet^m)})$ sont des sous-champs généralisés boréliens de $(\Omega,X_\bullet)$. Par le Corollaire 1.4.7, il existe $\Omega' \subseteq \Omega$ de même mesure tel que $(\Omega',\bigcap_{m\geq 1}\overline{\varphi_\bullet^{-1}(U_\bullet^m)})$ est un sous-champ généralisé borélien de $(\Omega,X_\bullet)$. Il reste à voir que $\bigcap_{m\geq1}\overline{\varphi_\bullet^{-1}(U_\bullet^m)} = \varphi_\bullet^{-1}(F_\bullet)$.
On le montre dans le cas d'un seul espace : soit X,Y deux espaces métriques, $\varphi : X\to Y$ continue, F fermé, $D\subseteq F$ dense et $U_m = \cup_{y\in D}B(y,1/m)$, alors $\bigcap_{m\geq1}\overline{\varphi^{-1}(U_m)} = \varphi^{-1}(F)$.
$[\supseteq]$ Si $z\in F$, alors $z\in U_m$ pour tout $m\geq 1$ par densité de D et donc on a $\varphi^{-1}(z)\in\varphi^{-1}(U_m)\subseteq \overline{\varphi^{-1}(U_m)}$ pour tout $m\geq 1$. Ainsi, $\varphi^{-1}(z)\in\bigcap_{m\geq1}\overline{\varphi^{-1}(U_m)}$.

$[\subseteq]$ Si $x\in\overline{\varphi^{-1}(U_m)}$, alors $\varphi(x)\in\varphi(\overline{\varphi^{-1}(U_m)}) \overset{\varphi\text{ cont.}}{\subseteq} \overline{\varphi(\varphi^{-1}(U_m))} \subseteq \overline{U_m}$. Et si $\varphi(x)\in\overline{U_m}$, alors $d(\varphi(x),F)\leq 1/m$ par définition de U_m. Ainsi, si $x\in\overline{\varphi^{-1}(U_m)}$ pour tout $m\geq 1$, alors $d(\varphi(x),F)\leq 1/m$ pour tout $m\geq1$ et donc $\varphi(x)\in F$, c'est-à-dire $x\in\varphi^{-1}(F)$. □

1.5 Champs d'espaces métriques propres

Cette section est consacrée à l'étude des champs d'espaces métriques propres. Dans un premier temps, on va étendre la structure borélienne d'un champ d'espaces métriques propres à une structure borélienne sur $(\Omega,\mathscr{C}(X_\bullet))$. Dans un second temps, on va utiliser ce résultat pour renforcer les résultats de la section 1.4.
Rappelons qu'un espace métrique X est propre si toutes les boules fermées sont compactes. Comme un compact métrique est séparable [12], les espaces propres sont séparables (comme réunion dénombrable de sous-espaces séparables).

1.5.1 Le champ $\mathscr{C}(X_\bullet)$ associé à $X_\bullet$

On verra dans la suite que si X est un espace métrique propre alors $\mathscr{C}(X) = \{f : X\to\mathbb{R} \text{ continue}\}$ muni de la convergence uniforme sur les compacts est un espace métrisable séparable. Ainsi, si $(\Omega,X_\bullet)$ est un champ borélien d'espaces métriques propres on peut considérer $(\Omega,\mathscr{C}(X_\bullet))$ le champ des fonctions continues qu'on peut donc voir comme un champ d'espaces métrisables. Le but de ce paragraphe est de montrer que l'ensemble des morphismes compatibles et continus du champ $(\Omega,X_\bullet)$ dans le champ trivial $(\Omega,\mathbb{R})$, c'est-à-dire

$$\widetilde{\mathscr{L}}(\Omega,\mathscr{C}(X_\bullet)) = \{f_\bullet\in\mathscr{S}(\Omega,\mathscr{C}(X_\bullet)) \mid f_\bullet(x_\bullet)\in\mathscr{L}(\Omega,\mathbb{R}) \text{ pour tout } x_\bullet\in\mathscr{L}(\Omega,X_\bullet)\}$$

est une structure borélienne sur $(\Omega,\mathscr{C}(X_\bullet))$.

12. Voir par exemple [Gil87], pp. 175-176.

Pour montrer que $\widetilde{\mathscr{L}}(\Omega, \mathscr{C}(X_\bullet))$ est une structure borélienne, il va falloir expliciter une famille fondamentale. Pour ce faire, il est nécessaire de pouvoir associer, de manière suffisamment "canonique", à un espace métrique propre (X,d) une partie dénombrable dense de $\mathscr{C}(X)$ (muni de la topologie de la convergence uniforme). Il faut également trouver une métrique suffisamment "canonique" sur $\mathscr{C}(X)$.
Rappelons que pour $x \in X$, on note $d_x \in \mathscr{C}(X)$ la fonction distance à x, *i.e.*

$$\begin{array}{rccl} d_x: & X & \longrightarrow & \mathbb{R}_{\geq 0} \\ & y & \mapsto & d_x(y) = d(x,y). \end{array}$$

Lemme 1.5.1. *Soit (X,d) un espace métrique propre et $D \subseteq X$ une partie dénombrable dense. Alors la $\mathbb{Q}$-sous-algèbre de $\mathscr{C}(X)$ engendrée par les fonctions $\mathbf{1}$ et $\{d_x\}_{x\in D}$ est une partie dénombrable dense dans $\mathscr{C}(X)$.*

D'autre part, si $x_0 \in X$ est fixé, alors

$$\begin{array}{rccl} \delta: & \mathscr{C}(X) \times \mathscr{C}(X) & \to & \mathbb{R}_{\geq 0} \\ & (f,g) & \mapsto & \delta(f,g) := \min\{\varepsilon \geq 0 \mid \sup_{x \in B(x_0, 1/\varepsilon)} |f(x) - g(x)| \leq \varepsilon\} \end{array}$$

est bien définie [13] *et est une métrique sur $\mathscr{C}(X)$ dont la topologie déduite est celle de la convergence uniforme sur les compacts. De plus, $\mathscr{C}(X)$ est complet pour cette métrique* [14].

Preuve. On commence par montrer que l'algèbre de l'énoncé, qu'on note $\mathscr{A}_{\mathbb{Q}}$ est dense. Pour ce faire, on considère d'abord le cas où $X = K$ est un espace métrique compact. La séparabilité de $\mathscr{C}(K)$ est garantie par le Théorème de Stone-Weierstrass, mais un autre résultat classique (voir par exemple [Gil87], p. 198) livre une partie dénombrable dense fabriquée à partir d'une partie dense $D = \{x_n\}_{n\geq 1}$ de K. Soit $\mathscr{A}$ la sous-algèbre de $\mathscr{C}(K)$ engendrée par la suite $\{d_{x_n}\}_{n\geq 1}$ et les fonctions constantes. On observe que celle-ci sépare les points de K. En effet, il existe pour tout $x \neq y \in K$ un entier $n \geq 1$ tel que $d(x_n, x) < d(x_n, y)$ (prendre $x_n \in B(x, d(x,y)/2)$ qui existe par densité de $\{x_n\}_{n\geq 1}$,) et donc un entier $n \geq 1$ tel que $d_{x_n}(x) \neq d_{x_n}(y)$. Par conséquent, la sous-algèbre $\mathscr{A}$ satisfait les hypothèses du Théorème de Stone-Weierstrass ([Gil87], p. 195) qui assure que $\mathscr{A}$ est dense dans $(\mathscr{C}(K), \|\cdot\|_\infty)$.
Il reste à observer, pour prouver l'énoncé dans le cas compact, que la $\mathbb{Q}$-algèbre engendrée par une partie de $\mathscr{C}(K)$ est dense dans la $\mathbb{R}$-algèbre engendrée par la même partie.
Revenons au cas général. Soit $D \subseteq X$ un sous-ensemble dénombrable dense. Définissons

$$\mathscr{A}^n_{\mathbb{Q}} := \langle\, \mathbf{1}, d_x \mid x \in D \cap \overline{B(x_0,n)}\,\rangle_{\mathbb{Q}}$$

la $\mathbb{Q}$-sous-algèbre de $\mathscr{C}(X)$ engendrée par les fonctions distance aux points de $D \cap \overline{B(x_0,n)}$ et la fonction constante de valeur 1. La sous-algèbre $\mathscr{A}^n_{\mathbb{Q}}$ est dénombrable. De plus, si $\mathscr{A}_{\mathbb{Q}}$ dénote la $\mathbb{Q}$-sous-algèbre de l'énoncé, alors

$$\mathscr{A}_{\mathbb{Q}} = \bigcup_{n\geq 1} \mathscr{A}^n_{\mathbb{Q}} = \langle\, \mathbf{1}, d_x \mid x \in D\,\rangle_{\mathbb{Q}}.$$

Il s'agit donc de prouver que $\mathscr{A}_{\mathbb{Q}}$ est dense dans $\mathscr{C}(X)$. Il faut montrer que si $f \in \mathscr{C}(X)$, $\varepsilon > 0$ et K un compact de X sont fixés alors il existe $h \in \mathscr{A}_{\mathbb{Q}}$ tel que

$$h \in U(f,K,\varepsilon) := \{g \in \mathscr{C}(X) \mid \|(f-g)|_K\|_\infty < \varepsilon\}.$$

Il existe $n \geq 1$ tel que $\overline{B(x_0,n)} \supseteq K$ et donc tel que $U(f, \overline{B(x_0,n)}, \varepsilon) \subseteq U(f,K,\varepsilon)$. La preuve du cas compact s'applique et montre qu'il existe $h \in \mathscr{A}^n_{\mathbb{Q}}$ tel que $h \in U(f, \overline{B(x_0,n)}, \varepsilon)$.

13. Si $\varepsilon = 0$, alors $B(x_0, 1/\varepsilon) = B(x_0, \infty) = X$

14. En fait, $C(X)$ est complet pour la structure uniforme de la convergence uniforme sur les compacts et donc pour n'importe quelle métrique qui induit cette structure.

Occupons nous maintenant de montrer que δ est une métrique. Commençons par montrer que le *minimum* est effectivement atteint. Soit $\{\varepsilon_n\}_{n\geq 1}$ une suite décroissante qui tend vers ε telle que $\sup_{x\in B(x_0,1/\varepsilon_n)}|f(x)-g(x)|\leq \varepsilon_n$ pour tout $n\geq 1$. Pour $x\in B(x_0,1/\varepsilon)$ fixé, il existe $m\geq 1$ tel que $x\in B(x_0,1/\varepsilon_n)$ pour tout $n\geq m$. Ainsi $|f(x)-g(x)|\leq \varepsilon_n$ pour tout $n\geq m$ et donc $|f(x)-g(x)|\leq \varepsilon$. D'autre part, il est évident que δ est positive, nulle si et seulement si $f=g$ et symétrique. Il ne reste donc que l'inégalité du triangle à démontrer. Soit donc $f,g,h\in\mathscr{C}(X)$ et notons $\varepsilon_1:=\delta(f,h)$ et $\varepsilon_2:=\delta(h,g)$. Estimons

$$\begin{aligned}
\sup_{x\in B(x_0,\frac{1}{\varepsilon_1+\varepsilon_2})}|f(x)-g(x)| &\leq \sup_{x\in B(x_0,\frac{1}{\varepsilon_1+\varepsilon_2})}\{|f(x)-h(x)|+|h(x)-g(x)|\}\\
&\leq \sup_{x\in B(x_0,\frac{1}{\varepsilon_1+\varepsilon_2})}|f(x)-h(x)|+\sup_{x\in B(x_0,\frac{1}{\varepsilon_1+\varepsilon_2})}|h(x)-g(x)|\\
&\leq \sup_{x\in B(x_0,1/\varepsilon_1)}|f(x)-h(x)|+\sup_{x\in B(x_0,1/\varepsilon_2)}|h(x)-g(x)|\leq \varepsilon_1+\varepsilon_2.
\end{aligned}$$

Ainsi, on a que $\delta(f,g)\leq\delta(f,h)+\delta(h,g)$. Il découle directement des définitions que δ induit la topologie de la convergence uniforme sur les bornés et donc sur les compacts dans notre cas, puisque X est propre.

Montrons maintenant que $\mathscr{C}(X)$ est complet par rapport à cette métrique. Pour tout $R\geq 0$, on considère l'application

$$\begin{array}{rccc}\pi_R: & \mathscr{C}(X) & \to & \mathscr{C}(\overline{B(x_0,R)})\\ & f & \mapsto & f\,|_{\overline{B(x_0,R)}}\,.\end{array}$$

Maintenant soit $\{f_n\}_{n\geq 1}$ une suite de Cauchy pour δ. Alors pour tout $R\geq 0$ la suite $\{\pi_R(f_n)\}_{n\geq 1}$ est de Cauchy dans $\mathscr{C}(\overline{B(x_0,R)})$ (pour la norme infinie). Il est classique que l'espace des fonctions continues sur un espace métrique compact est un espace de Banach (en particulier un espace métrique complet). Ainsi, il existe, pour tout $R\geq 0$, une fonction $f^R\in\mathscr{C}(\overline{B(x_0,R)})$ telle que $\pi_R(f_n)\to f^R$. Remarquons que si $R\geq R'$, alors $f^R\,|_{R'}=f^{R'}$. On peut donc définir une fonction $f\in\mathscr{C}(X)$ par $f\,|_{\overline{B(x_0,R)}}:=f^R$ qui satisfait bien que $f_n\to f$ uniformément sur les compacts. □

Ce Lemme permet de parler du champ d'espaces métrisables $(\Omega,\mathscr{C}(X_\bullet))$.

Théorème 1.5.2. *Soit $(\Omega,\mathscr{A})$ un espace borélien et $(\Omega,X_\bullet)$ un champ borélien d'espaces métriques propres. Alors $\widetilde{\mathscr{L}}(\Omega,\mathscr{C}(X_\bullet))$ est une structure borélienne du champ d'espaces métrisables $(\Omega,\mathscr{C}(X_\bullet))$. Supposons de plus qu'on s'est fixé $x^0_\bullet\in\mathscr{L}(\Omega,X_\bullet)$. Alors le sous-champ $\mathscr{C}_0(X_\bullet)$ défini par*

$$(\mathscr{C}_0(X_\bullet))_\omega:=\{f\in\mathscr{C}(X_\omega)\mid f(x^0_\omega)=0\}$$

est un sous-champ borélien de fermés.

Preuve. Observons que $\mathscr{S}(\Omega,\mathscr{C}(X_\bullet))$ est une algèbre. En effet, si $f_\bullet,g_\bullet\in\mathscr{S}(\Omega,\mathscr{C}(X_\bullet))$ et $\lambda\in\mathbb{R}$, on peut définir

$$(f_\bullet g_\bullet)_\omega:=f_\omega g_\omega,\quad (f_\bullet+g_\bullet)_\omega=f_\omega+g_\omega\quad\text{et}\quad(\lambda f_\bullet)_\omega:=\lambda f_\omega.$$

Maintenant, notons $\mathscr{D}=\{x^n_\bullet\}_{n\geq 1}$ une famille fondamentale pour la structure borélienne $\mathscr{L}(\Omega,X_\bullet)$. On définit alors les fonctions $\{d_{x^n_\bullet}\}_{n\geq 1}\subseteq\widetilde{\mathscr{L}}(\Omega,\mathscr{C}(X_\bullet))$ et $\mathbf{1}_\bullet\in\widetilde{\mathscr{L}}(\Omega,\mathscr{C}(X_\bullet))$ par

$$d_{x^n_\bullet}:\begin{array}{ccc}\Omega & \longrightarrow & \mathscr{C}(X_\bullet)\\ \omega & \longmapsto & \begin{array}{rccc}d_{x^n_\omega}: & X_\omega & \to & \mathbb{R}\\ & x & \mapsto & d_\omega(x^n_\omega,x)\end{array}\end{array}\quad\text{et}\quad \mathbf{1}_\bullet:\begin{array}{ccc}\Omega & \longrightarrow & \mathscr{C}(X_\bullet)\\ \omega & \longmapsto & \begin{array}{rccc}\mathbf{1}_\omega: & X_\omega & \to & \mathbb{R}\\ & x & \mapsto & 1\end{array}\end{array}$$

On note

$$\mathscr{A}_\mathbb{Q}:=\langle\ \mathbf{1}_\bullet,d_{x^n_\bullet}\,|\,x^n_\bullet\in\mathscr{D}\}\ \rangle_\mathbb{Q}$$

la $\mathbb{Q}$-sous-algèbre dénombrable de l'algèbre $\mathscr{S}(\Omega, \mathscr{C}(X_\bullet))$.
D'autre part, on se fixe une section de points bases $x^0_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)$ et on introduit, pour tout $\omega \in \Omega$, la métrique sur $\mathscr{C}(X_\omega)$

$$\begin{array}{rccl} \delta_\omega: & \mathscr{C}(X_\omega) \times \mathscr{C}(X_\omega) & \to & \mathbb{R}_{\geq 0} \\ & (f,g) & \mapsto & \delta_\omega(f,g) = \min\{\varepsilon \geq 0 \mid \sup_{x \in B(x^0_\omega, 1/\varepsilon)} |f(x) - g(x)| \leq \varepsilon\}. \end{array}$$

Faisons les observations suivantes.

i) $\widetilde{\mathscr{L}}(\Omega, \mathscr{C}(X_\bullet))$ est une sous-algèbre de $\mathscr{S}(\Omega, \mathscr{C}(X_\bullet))$ (car le produit et la somme de fonctions boréliennes est une fonction borélienne, de même pour le produit d'une fonction borélienne par un scalaire).

ii) $\widetilde{\mathscr{L}}(\Omega, \mathscr{C}(X_\bullet))$ est close par recollement dénombrable borélien et limite ponctuelle. En effet, la première propriété découle directement de la définition et pour la deuxième, il suffit en plus d'observer que si $f^n_\bullet \to f_\bullet$, alors $f^n_\bullet(x_\bullet) \to f_\bullet(x_\bullet)$ pour tout $x_\bullet \in \mathscr{S}(\Omega, X_\bullet)$ (la convergence uniforme sur les compacts implique la convergence ponctuelle).

iii) Si $f_\bullet, g_\bullet \in \widetilde{\mathscr{L}}(\Omega, \mathscr{C}(X_\bullet))$, alors $\delta_\bullet(f_\bullet, g_\bullet): \ \omega \mapsto \delta_\omega(f_\omega, g_\omega)$ est une fonction borélienne (*i.e.* la famille de métriques $\delta_\bullet$ est compatible avec $\widetilde{\mathscr{L}}(\Omega, \mathscr{C}(X_\bullet))$). En effet, si on note, pour $\varepsilon \geq 0$, $\mathscr{D}^\varepsilon$ une famille fondamentale de $B(x^0_\bullet, 1/\varepsilon)$, qui existe puisque c'est un sous-champ borélien (Exemple 1.2.16), alors
$$\delta_\omega(f_\omega, g_\omega) \leq \varepsilon \iff \sup_{x \in \mathscr{D}^\varepsilon_\omega} |f_\omega(x) - g_\omega(x)| \leq \varepsilon.$$

iv) $\mathscr{A}_\mathbb{Q} := \langle \mathbf{1}, \{d_{x^n_\bullet}\}_{n\geq 1}\rangle_\mathbb{Q} \subseteq \widetilde{\mathscr{L}}(\Omega, \mathscr{C}(X_\bullet))$ par l'observation i) et le fait que $\{d_{x^n_\bullet}\}_{n\geq 1} \subseteq \widetilde{\mathscr{L}}(\Omega, \mathscr{C}(X_\bullet))$ et $\mathbf{1}_\bullet \in \widetilde{\mathscr{L}}(\Omega, \mathscr{C}(X_\bullet))$.

Ainsi, $\widetilde{\mathscr{L}}(\Omega, \mathscr{C}(X_\bullet))$ est une structure borélienne sur le champ $\big(\Omega, (\mathscr{C}(X_\bullet), \delta_\bullet)\big)$. En effet, 1.1.3 (i) est vérifié par l'observation iii) et $\mathscr{A}_\mathbb{Q}$ est une famille fondamentale[15] par iv) et donc 1.1.3 (iii) est satisfait. On peut donc utiliser le Lemme 1.1.6 et conclure à l'aide de l'observation ii). □

Remarques 1.5.3. (1) Dans le cas d'un champ borélien d'espaces propres $X_\bullet$, on peut donc noter $\mathscr{L}(\Omega, \mathscr{C}(X_\bullet))$ au lieu de $\widetilde{\mathscr{L}}(\Omega, \mathscr{C}(X_\bullet))$.

(2) Si on a un champ d'espaces compacts $(\Omega, K_\bullet)$ au lieu d'un champ d'espaces propres, alors on a une famille de métriques canoniques, à savoir la famille de métriques induite par les normes uniformes $\|\cdot\|_\omega$. La même preuve que ci-dessus livre que $\widetilde{\mathscr{L}}(\Omega, \mathscr{C}(K_\bullet))$ est une structure borélienne sur le champ $\big(\Omega, (\mathscr{C}(K_\bullet), \|\cdot\|^\infty_\bullet)\big)$.

1.5.2 Sous-champs de fermés

On va maintenant renforcer les résultats obtenus dans la Section 1.4. Mais d'abord on donne un exemple qui montre ce qu'on gagne à renforcer nos hypothèses sur les espaces X_ω.

Exemple 1.5.4. Soit $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers positifs (avec 0). On munit cet ensemble de la distance d définie par

$d(0,n) = 1 + 1/n$ pour $n \geq 1$

$d(n,m) = 2$ pour $n, m \geq 1$.

Cet espace métrique (qui est complet) n'est pas pathologique : il peut être réalisé dans $\ell^2(\mathbb{N})$. On peut observer plusieurs phénomènes intéressants :

Posons $F = \mathbb{N}^*$ qui est un fermé. Alors $d(0,F) = 1$ n'est réalisée par aucun point de F.

Posons $F_n = \{1\} \cup (\mathbb{N} \cap [n, \infty[)$. Alors $d(0, F_n) = 1$ pour tout $n \geq 1$, mais $d(0, \bigcap_{n\geq 1} F_n) = 2$.

15. La densité est assurée par le Lemme 1.5.1.

Si on suppose que l'espace métrique est propre, le lemme suivant montre que ce genre de phénomènes n'apparaissent pas.

Lemme 1.5.5. *Soit X un espace métrique propre. Alors les affirmations suivantes sont vraies :*

(i) Si $F \subseteq X$ est un fermé non vide et $x \in X$, alors $d(x,F)$ est réalisée.

(ii) Soit $\{F_n\}_{n\geq 1} \subseteq X$ une suite décroissante de fermés, $F := \bigcap_{n\geq 1} F_n$ et $x \in X$. Alors

$$d(x,F) = \lim_{n\to\infty} d(x,F_n) = \sup_n d(x,F_n),$$

avec la convention que $d(x,\emptyset) = \infty$.

Preuve. (i) Par définition $d(x,F) = \inf_{y\in F} d(x,y)$. Donc pour tout $n > 0$, il existe $y_n \in F$ tel que $d(x,y_n) \leq d(x,F) + 1/n$. En particulier $\{y_n\}_{n\geq 1} \subseteq \overline{B}(x,d(x,F)+1)$. Puisque X est propre, il existe un point d'accumulation $y \in \overline{B}(x,d(x,F)+1)$. Comme F est fermé, $y \in F$ et, par construction, y satisfait $d(x,y) = d(x,F)$.
(ii) On va dans un premier temps régler la question de $F = \emptyset$ en montrant que

$$F \neq \emptyset \Leftrightarrow \sup_n d(x,F_n) < \infty.$$

[$\Rightarrow$] S'il existe $y \in F$, alors $y \in F_n$ pour tout $n \geq 1$ et $d(x,F_n) \leq d(x,y)$ pour tout $n \geq 1$. Ainsi, $\sup_{n\geq 1} d(x,F_n) \leq d(x,y) < \infty$.
[$\Leftarrow$] Par hypothèse, il existe $M \geq 0$ tel que $\sup_n d(x,F_n) \leq M$, et donc $F_n \cap \overline{B}(x,M) \neq \emptyset$ pour tout $n \geq 1$ (par le point (i)). Supposons que $F = \bigcap_n F_n = \emptyset$, alors $F \cap \overline{B}(x,M) = \emptyset$. Puisque $\overline{B}(x,M)$ est compacte, il existe $m \geq 1$ tel que $F_m \cap \overline{B}(x,M) = \emptyset$. Mais alors $\sup_{n\geq 1} d(x,F_n) = \infty$.

Maintenant on peut supposer que $F \neq \emptyset$ et $\sup_{n\geq 1} d(x,F_n) < \infty$. Puisque $F \subseteq F_n$ pour tout $n \geq 1$, on a $d(x,F) \geq \sup_{n\geq 1} d(x,F_n)$. D'autre part, on sait par le point (i) que pour tout $n \geq 1$, il existe $y_n \in F_n$ tel que $d(x,F_n) = d(x,y_n)$. Comme $\{y_n\}_{n\geq 1} \subseteq \overline{B}(x_0,d(x,F))$, il existe y un point d'accumulation. On observe que $y \in F$ (en effet, si n est fixé, $y_m \in F_n$ pour tout $m \geq n$ et donc $y \in F_n$). Mais alors $d(x,F) \leq d(x,y) = \lim_{k\to\infty} d(x,y_{n_k}) = \sup_{n\geq 1} d(x,F_n)$. □

On peut maintenant renforcer le Corollaire 1.4.7.

Proposition 1.5.6. *Soit $(\Omega,\mathscr{A})$ un espace borélien, $X_\bullet$ un champ borélien d'espaces métriques propres et $\{F^n_\bullet\}_{n\geq 1}$ une famille de sous-champs généralisés boréliens de fermés. Définissons $F_\bullet$ par*

$$F_\omega := \bigcap_{n\geq 1} F^n_\omega.$$

Alors $F_\bullet$ est un sous-champ généralisé borélien de fermés.

Preuve. On décompose la preuve en quatre étapes.
(1) On montre que si $\{F^n_\bullet\}_{n\geq 1} \subseteq \widetilde{\mathscr{L}}(\Omega,\mathscr{P}_{\mathrm{Fe}}(X_\bullet))$ est une suite décroissante (*i.e.* $F^n_\omega \subseteq F^{n-1}_\omega$ pour tout $\omega \in \Omega$), alors le sous-champ généralisé de fermés $F_\bullet$ défini par $F_\omega := \bigcap_{n\geq 1} F^n_\omega$ est aussi borélien. On a que $d_\omega(x,F_\omega) = \sup_{n\geq 1} d_\omega(x,F^n_\omega)$ pour tout $\omega \in \Omega$ et $x \in X_\omega$ par le Lemme 1.5.5, toujours en utilisant la convention que $d(x,F) = \infty$ si $F = \emptyset$. Si $x_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega,X_\bullet)$, alors $d_\bullet(x_\bullet,F_\bullet) \in \mathscr{L}(\Omega,\mathbb{R}_{\geq 0}\cup\{\infty\})$ comme *supremum* de fonctions qui sont boréliennes par le critère de la Proposition 1.2.23. Ainsi,

$$\Omega' := \{\omega \in \Omega \mid F_\omega \neq \emptyset\} = \Omega \setminus d_\bullet(x_\bullet,F_\bullet)^{-1}(\{\infty\}) \in \mathscr{A}.$$

En réappliquant le même critère à $(\Omega',F_\bullet)$ et $(\Omega',X_\bullet)$ on obtient que $(\Omega',F_\bullet)$ est un sous-champ borélien de $(\Omega',X_\bullet)$. Ainsi $F_\bullet$ est un sous-champ généralisé borélien.

(2) Soit $f_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega, \mathscr{C}(X_\bullet))$, $a_\bullet, b_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega, \mathbb{R})$ et définissons $F_\bullet$ par $F_\omega = {f_\omega}^{-1}([a_\omega, b_\omega])$. Montrons que $F_\bullet \in \widetilde{\mathscr{L}}(\Omega, \mathscr{P}_{\mathrm{Fe}}(X_\bullet))$. On pose, pour tout $n \geq 1$ et $\omega \in \Omega$,

$$U_\omega^n := (f_\omega)^{-1}(]a_\omega - 1/n, b_\omega + 1/n[).$$

Par définition de $\mathscr{L}(\Omega, \mathscr{C}(X_\bullet))$ on a que

$$\{\omega \in \Omega \mid x_\omega \in U_\omega^n\} = \{\omega \in \Omega \mid f_\omega(x_\omega) \in]a_\omega - 1/n, b_\omega + 1/n[\} \in \mathscr{A} \quad \text{pour tout } x_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega, X_\bullet).$$

Ainsi, $U_\bullet^n$ est un sous-champ généralisé borélien pour tout $n \geq 1$ puisque c'est un sous-champ très remarquable d'ouverts (voir la Définition 1.2.14). Par la Remarque 1.2.8, $(\widetilde{\Omega}, \overline{U_\bullet^n})$ est un sous-champ généralisé borélien de fermés pour tout $n \geq 1$.
Maintenant observons que si $f \in \mathscr{C}(X)$ (X espace métrique) et $a, b \in \mathbb{R}$, on a que

$$\bigcap_{n\geq 1} \overline{f^{-1}(]a - 1/n, b + 1/n[)} = f^{-1}([a, b]).$$

[$\supseteq$] Évident.
[$\subseteq$] Si $x \in \overline{f^{-1}(]a - 1/n, b + 1/n[)}$ pour tout $n \geq 1$, alors par continuité de f, on a l'inégalité

$$a - 1/n \leq f(x) \leq b + 1/n$$

pour tout $n \geq 1$ et donc $x \in f^{-1}([a, b])$.
Ainsi $F_\bullet = \bigcap_{n\geq 1} \overline{U_\bullet^n}$. Le point (1) montre que $F_\bullet$ est un sous-champ généralisé borélien de $X_\bullet$.
(3) Pour $F_\bullet, G_\bullet \in \widetilde{\mathscr{L}}(\Omega, \mathscr{P}_{\mathrm{Fe}}(X_\bullet))$, on définit $F_\bullet \cap G_\bullet$ par $(F_\bullet \cap G_\bullet)_\omega = F_\omega \cap G_\omega$. Montrons que $F_\bullet \cap G_\bullet \in \widetilde{\mathscr{L}}(\Omega, \mathscr{P}_{\mathrm{Fe}}(X_\bullet))$. Observons que

$$\Omega' := \{\omega \in \Omega \mid F_\omega \text{ et } G_\omega \neq \emptyset\} = \{\omega \in \Omega \mid F_\omega \neq \emptyset\} \cap \{\omega \in \Omega \mid G_\omega \neq \emptyset\} \in \mathscr{A}.$$

Ainsi, on peut supposer que $\Omega' = \Omega$ (si ce n'est pas le cas, il suffit de considérer les champs restreints $(\Omega', F_\bullet)$ et $(\Omega', G_\bullet)$). Comme $F_\bullet$ et $G_\bullet$ sont des sous-champ boréliens, on a que $d_{F_\bullet}$, $d_{G_\bullet} \in \mathscr{L}(\Omega, \mathscr{C}(X_\bullet))$. En particulier, $d_{F_\bullet} + d_{G_\bullet} \in \mathscr{L}(\Omega, \mathscr{C}(X_\bullet))$. Comme

$$F_\bullet \cap G_\bullet = (d_{F_\bullet} + d_{G_\bullet})^{-1}(\{0\}),$$

le point (2) montre que $F_\bullet \cap G_\bullet$ est un sous-champ généralisé borélien de fermés.
(4) Soit maintenant une suite $\{F_\bullet^n\}_{n\geq 1} \subseteq \widetilde{\mathscr{L}}(\Omega, \mathscr{P}_{\mathrm{Fe}}(X_\bullet))$. Pour tout $n \geq 1$, on pose

$$\widetilde{F_\bullet}^n := \bigcap_{j=1}^{n} F_\bullet^j \in \widetilde{\mathscr{L}}(\Omega, \mathscr{P}_{\mathrm{Fe}}(X_\bullet))$$

par le point (3). Ainsi, $F_\bullet = \bigcap_{n\geq 1} F_\bullet^n = \bigcap_{n\geq 1} \widetilde{F_\bullet}^n \in \widetilde{\mathscr{L}}(\Omega, \mathscr{P}_{\mathrm{Fe}}(X_\bullet))$ par le point (1). □

Exemple 1.5.7. On donne ici un exemple qui montre qu'une intersection de deux sous-champs boréliens n'est pas forcément un sous champ borélien. Soit $(\Omega, [0, 1])$ un champ trivial. On considère une décomposition $\Omega = \Omega_1 \sqcup \Omega_2$ non-borélienne et on définit les sous-champs $X_\bullet$ et $Y_\bullet$ par

$$X_\omega = \{0\} \quad \text{pour tout } \omega \in \Omega.$$

$$Y_\omega := \begin{cases}]0, 1] & \text{si } \omega \in \Omega_1 \\ [0, 1] & \text{si } \omega \in \Omega_2. \end{cases}$$

Ce sont clairement deux sous-champ boréliens dont l'intersection ne l'est pas.
On a enlevé l'hypothèse que les sous-champs sont fermés, pas que le champ est propre. Ce serait bien de voir ce qu'on l'on peut dire en considérant des sous-champ complets (sans l'hypothèse de propreté). Le résultat reste-il vrai [16] ou y a-t-il un contre exemple ?

16. On sait qu'il est presque vrai par le Corollaire 1.4.7.

Remarque 1.5.8. Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace borélien, $X_\bullet$ un champ borélien d'espaces métriques propres et $\mathscr{D}$ une famille fondamentale. Si pour tout $x_\bullet \in \mathscr{D}$ et $r_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)$ on a que $X_\bullet \setminus B(x_\bullet, r_\bullet)$ est borélien, alors la Proposition 1.5.6 montre que les sous-champs fondamentaux d'ouverts sont les complémentaires des champs boréliens de fermés. Toutefois, cette condition n'est pas vraie pour n'importe quel champ borélien d'espaces métriques comme le montre l'Exemple 1.2.25. Rappelons que la réciproque est toujours vraie (Remarque 1.2.24).

Soit X un espace métrique. On peut mettre sur l'ensemble de ses parties fermées non vides la topologie suivante : on considère $\mathscr{P}^*_{\mathrm{Fe}}(X)$ comme un sous-ensemble de $\mathscr{C}(X)$ via l'inclusion $i : \mathscr{P}^*_{\mathrm{Fe}}(X) \to \mathscr{C}(X)$, $F \mapsto d_F$, on munit $\mathscr{C}(X)$ de la topologie de la convergence uniforme sur les bornés et on prend la topologie induite. Une sous-base de la topologie est donc donnée par

$$U_{G,\varepsilon,R,x_0} = \{F \in \mathscr{P}^*_{\mathrm{Fe}}(X) \mid \|d_F - d_G\|_{\overline{B}(x_0,R)} \leq \varepsilon\}$$

où $\varepsilon > 0$, $R \geq 0$, $x_0 \in X$ et $G \in \mathscr{P}^*_{\mathrm{Fe}}(X)$.
D'autre part, on peut considérer la topologie de Chabauty sur l'ensemble de toutes les parties fermés de X qui est engendrée par la collection de sous-ensembles

$$\{\mathscr{O}_K \mid K \text{ est un compact de } X\} \cup \{\mathscr{O}'_U \mid U \text{ est un ouvert de } X\}$$

où

$$\mathscr{O}_K := \{F \in \mathscr{P}_{\mathrm{Fe}}(X) \mid F \cap K = \emptyset\} \quad \mathscr{O}'_U := \{F \in \mathscr{P}_{\mathrm{Fe}}(X) \mid F \cap U \neq \emptyset\}.$$

Plusieurs résultats classiques sur cette topologie sont rappelés dans l'Annexe B.2.1.

Si l'espace est propre, alors la convergence uniforme sur les bornées sur $\mathscr{C}(X)$ est la convergence uniforme sur les compacts qu'on a étudiée dans la section précédente. La topologie induite sur $\mathscr{P}^*_{\mathrm{Fe}}(X)$ par celle sur $\mathscr{C}(X)$ coïncide avec celle induite sur $\mathscr{P}^*_{\mathrm{Fe}}(X)$ par celle sur $\mathscr{P}_{\mathrm{Fe}}(X)$ (Proposition B.2.3).

Soit $X_\bullet$ un champ borélien d'espaces métriques propres. On vient de prouver l'existence d'une structure borélienne naturelle sur le champ des fonctions continues. D'autre part, on sait (Proposition 1.2.23 et Remarque 1.2.24 (2)) qu'un sous-champ de fermés $F_\bullet$ est borélien si et seulement si $d_{F_\bullet} \in \mathscr{L}(\Omega, \mathscr{C}(X_\bullet))$. Il est raisonnable de se demander si le champ des ensembles des parties fermées est un sous-champ borélien du champ des fonctions continues. De plus, comme $\mathscr{P}_{\mathrm{Fe}}(X_\omega) = \mathscr{P}^*_{\mathrm{Fe}}(X_\omega) \cup \{\emptyset\}$ possède une métrique relativement canonique [17] pour tout $\omega \in \Omega$, on peut espérer que $\widetilde{\mathscr{L}}(\Omega, \mathscr{P}_{\mathrm{Fe}}(X_\bullet))$ soit une structure borélienne pour le champ d'espaces métrisables $(\Omega, \mathscr{P}_{\mathrm{Fe}}(X_\bullet))$. Le Lemme qui suit répond positivement à ces interrogations.

Lemme 1.5.9. *Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace borélien et $(\Omega, X_\bullet)$ un champ borélien d'espaces métriques propres. Alors*

(i) $\mathscr{P}^*_{Fe}(X_\bullet)$ vu comme sous-champ de $\mathscr{C}(X_\bullet)$ est un sous-champ borélien. De plus [18]*,*

$$\mathscr{L}(\Omega, \mathscr{P}^*_{Fe}(X_\bullet)) = \widetilde{\mathscr{L}}(\Omega, \mathscr{P}^*_{Fe}(X_\bullet)).$$

(ii) L'ensemble $\widetilde{\mathscr{L}}(\Omega, \mathscr{P}_{Fe}(X_\bullet))$ est une structure borélienne pour le champ d'espaces métrisables $(\Omega, \mathscr{P}_{Fe}(X_\bullet)$.

Preuve. (i) On fait le preuve en deux temps.

(1) Soit X un espace métrique propre et $D = \{x_n\}_{n\geq 1} \subseteq X$ dénombrable dense. Pour $I = \{i_1, i_2, \ldots, i_n\} \in \mathscr{P}_{\mathrm{Finie}}(\mathbb{N})$, notons $F^I = \{x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n}\}$. Montrons que

$$\bigcup_{I \in \mathscr{P}_{\mathrm{Finie}}(\mathbb{N})} F^I \text{ est dense dans } \mathscr{P}^*_{\mathrm{Fe}}(X) \subseteq \mathscr{C}(X).$$

17. Voir la Proposition B.2.3.
18. L'ensemble de gauche est $\mathscr{L}(\Omega, \mathscr{C}(X_\bullet)) \cap \mathscr{S}(\Omega, \mathscr{P}^*_{\mathrm{Fe}}(X_\bullet))$ et celui de droite l'ensembles des sous-champs boréliens.

Soit $F \in \mathscr{P}^*_{\text{Fe}}(X)$, $\varepsilon > 0$ et $R \geq 0$ fixés. Puisque $F \cap \overline{B}(x_0, R + d(x_0, F))$ est compact, il existe $y_1, y_2, \ldots, y_n \in F$ tels que $F \cap \overline{B}(x_0, R + d(x_0, F)) \subseteq \bigcup_{i=1}^m B(y_i, \varepsilon/2)$. Par choix de D, il existe $I = \{i_1, i_2, \ldots, i_n\} \subseteq \mathbb{N}$ tel que $d(x_{i_j}, y_j) < \varepsilon/2$ pour tout $j = 1, \ldots, n$. Si $x \in B(x_0, R)$, alors $d(x, F) \leq R + d(x_0, F)$. Maintenant si $d(x, F) \geq d(x, F^I)$, alors

$$\begin{aligned} |d(x,F) - d(x,F^I)| &= d(x,F) - d(x,F^I) = d(x, F \cap \overline{B}(x_0, R + d(x_0,F))) - d(x, x_{i_j}) \\ &\leq d(x, y_j) - d(x, x_{i_j}) \leq d(y_j, x_{i_j}) \leq \varepsilon/2. \end{aligned}$$

Et si $d(x,F) \leq d(x,F^I)$, alors

$$\begin{aligned} |d(x,F) - d(x,F^I)| &= d(x,F^I) - d(x,F) = d(x,F^I) - d(x, F \cap \overline{B}(x_0, R + d(x_0,F))) \\ &= d(x,F^I) - d(x,y) = d(x, x_{i_j}) - d(x,y) \\ &\leq d(x,y) + d(y, y_{i_j}) + d(y_j, x_{i_j}) - d(x,y) \leq \varepsilon \end{aligned}$$

On a donc bien

$$|d(x,F) - d(x,F^I)| \leq \varepsilon.$$

(2) Soit $\mathscr{D} = \{x^n_\bullet\}_{n\geq 1} \subseteq \mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)$ une famille fondamentale de la structure borélienne. Pour $I = \{i_1, \ldots, i_n\} \in \mathscr{P}_{\text{Finie}}(\mathbb{N})$ on note $F^I_\bullet = \{x^{i_1}_\bullet, \ldots x^{i_n}_\bullet\}$. Alors

$$\mathscr{D}' = \bigcup_{I \in \mathscr{P}_{\text{Finie}}(\mathbb{N})} F^I_\bullet$$

est une famille fondamentale pour le sous-champ $(\Omega, \mathscr{P}_{\text{Fe}}(X_\bullet))$. En effet, on a montré la densité en (1) et il suffit d'observer que $d_{F^I_\bullet} \in \mathscr{L}(\Omega, \mathscr{C}(X_\bullet))$ par la Proposition 1.2.23 puisque $F^I_\bullet$ est évidemment un sous-champ borélien de $(\Omega, X_\bullet)$. L'égalité de l'énoncé découle directement de la Proposition 1.2.23 (voir la Remarque 1.2.24 (2))

(ii) On se fixe $x^0_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)$. Pour tout $\omega \in \Omega$, on note $d^{\mathscr{H}}_\omega$ l'écart de Hausdorff sur $\mathscr{P}(X_\omega)$ et on considère la fonction $\delta_\omega : \mathscr{P}_{\text{Fe}}(X_\omega) \times \mathscr{P}_{\text{Fe}}(X_\omega) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ définie par

$$\delta_\omega(F,G) = \inf\{\varepsilon > 0 \mid d^{\mathscr{H}}_\omega\big(F \cup (X_\omega \setminus \overline{B(x^0_\omega, 1/\varepsilon)}), G \cup (X_\omega \setminus \overline{B(x^0_\omega, 1/\varepsilon)})\big) \leq \varepsilon\}.$$

Dans l'appendice B, on montre que δ_ω est une métrique sur $\mathscr{P}_{\text{Fe}}(X_\omega)$ dont la topologie déduite est celle de Chabauty (Proposition B.2.3). Observons que $X_\bullet \setminus \overline{B(x^0_\bullet, 1/\varepsilon)}$ est un sous-champ généralisé borélien par l'Exemple 1.2.16, la Remarque 1.2.8 et la Remarque 1.2.24 (4). Ainsi $F_\bullet \cup (X_\bullet \setminus \overline{B(x^0_\bullet, 1/\varepsilon)})$ est un sous-champ borélien généralisé pour tout $F_\bullet \in \widetilde{\mathscr{L}}(\Omega, \mathscr{P}_{\text{Fe}}(X_\bullet))$ (Lemme 1.2.7) et donc [19]

$$d^{\mathscr{H}}_\bullet\big(F_\bullet \cup (X_\bullet \setminus \overline{B(x^0_\bullet, 1/\varepsilon)}), G_\bullet \cup (X_\bullet \setminus \overline{B(x^0_\bullet, 1/\varepsilon)})\big) \in \mathscr{L}(\Omega, \mathbb{R}) \text{ pour tout } F_\bullet, G_\bullet \in \widetilde{\mathscr{L}}(\Omega, \mathscr{P}_{\text{Fe}}(X_\bullet)).$$

Ainsi la famille de métriques $\delta_\bullet$ est compatible avec l'ensemble $\widetilde{\mathscr{L}}(\Omega, \mathscr{P}_{\text{Fe}}(X_\bullet))$. Le point (i) et la Proposition B.2.3 montrent que

$$\mathscr{D}'' = \{F^I_\bullet\}_{I \subseteq \mathscr{P}_{\text{Finie}}(\mathbb{N})} \cup \{\emptyset\}$$

est une famille fondamentale de $\widetilde{\mathscr{L}}(\Omega, \mathscr{P}_{\text{Fe}}(X_\bullet))$. Par le Lemme 1.1.6, il suffit de vérifier que $\widetilde{\mathscr{L}}(\Omega, \mathscr{P}_{\text{Fe}}(X_\bullet))$ est close par recollement fini borélien (ce qui est évident) et limite ponctuelle. Soit $\{F^n_\bullet\}_{n\geq 1} \subseteq \mathscr{L}(\Omega, \mathscr{P}^*_{\text{Fe}}(X_\bullet))$ une suite telle que $F^n_\bullet \to F_\bullet$. Alors, par le point (v) de la Proposition B.2.3, $F_\bullet = \bigcap_{n\geq 1} \overline{\bigcup_{m\geq n} F^m_\bullet}$ qui est un sous-champ borélien par le Lemme 1.2.7, la Remarque 1.2.8 et la Proposition 1.5.6. □

19. L'écart de Hausdorff entre deux sous-champs boréliens est une fonction borélienne puisqu'il existe des familles fondamentales qui permettent d'exprimer cette fonction comme un *maximum* de *supremum* dénombrable d'*infimum* dénombrables de fonctions boréliennes.

Remarques 1.5.10. (1) Dans le cas d'un champ d'espaces métriques propres, on peut donc noter $\mathscr{L}(\Omega, \mathscr{P}_{\mathrm{Fe}}(X_\bullet))$ et $\mathscr{L}(\Omega, \mathscr{P}^*_{\mathrm{Fe}}(X_\bullet))$ au lieu de $\widetilde{\mathscr{L}}(\Omega, \mathscr{P}_{\mathrm{Fe}}(X_\bullet))$ et $\widetilde{\mathscr{L}}(\Omega, \mathscr{P}^*_{\mathrm{Fe}}(X_\bullet))$.
(2) Si $X_\bullet$ est un champ d'espaces métriques compacts, alors on peut prendre la métrique de Hausdorff sur chaque X_ω au lieu de la métrique décrite dans le Lemme 1.5.9.

Corollaire 1.5.11. *Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace borélien et X un espace métrique propre. Un sous-champ de fermés peut être vu comme une application de $\Omega \to \mathscr{P}_{\mathrm{Fe}}(X)$. Alors un tel sous-champ est borélien si et seulement si l'application associée est borélienne (la σ-algèbre de X étant celle obtenue à partir de la topologie de Chabauty).*

Preuve. Comme la topologie de Chabauty sur $\mathscr{P}_{\mathrm{Fe}}(X)$ est métrisable et à base dénombrable, il existe une structure borélienne naturelle de champ d'espaces métriques

$$\mathscr{L}_1(\Omega, \mathscr{P}_{\mathrm{Fe}}(X)) = \{F : \Omega \to \mathscr{P}_{\mathrm{Fe}}(X) \mid F \text{ est borélienne } \}.$$

D'autre part, on a montré au Lemme 1.5.9 que l'ensemble $\mathscr{L}(\Omega, \mathscr{P}_{\mathrm{Fe}}(X))$ des sous-champs généralisés boréliens de fermés est une structure borélienne. Comme deux structures comparables sur un même champ sont égales, il suffit de montrer que l'une est contenue dans l'autre.

Supposons que $F : \Omega \to \mathscr{P}_{\mathrm{Fe}}(X)$ est une fonction borélienne. Notons $F_\bullet$ le sous-champ défini par $F_\omega = F(\omega)$ et montrons qu'il est borélien. Par la Proposition 1.2.23 et les Remarques 1.2.24 (1) et (5), il suffit de vérifier que $\{\omega \in \Omega \mid F(\omega) \neq \emptyset\} \in \mathscr{A}$ et que la fonction $\Omega' \to \mathbb{R}_{\geq 0},\ \omega \mapsto d(F(\omega), x)$ est borélienne pour tout $x \in X$. Pour se faire, observons que pour tout $r > 0$,

$$\begin{aligned}
\{\omega \in \Omega \mid F(\omega) = \emptyset\} &= F^{-1}(\{\emptyset\}) \\
\{\omega \in \Omega \mid d(x, F(\omega)) \leq r\} &= F^{-1}\big(\{H \in \mathscr{P}^*_{\mathrm{Fe}}(X) \mid d(x,H) \leq r\}\big) \\
&= F^{-1}\big(\{H \in \mathscr{P}^*_{\mathrm{Fe}}(X) \mid |d_{\{x\}}(x) - d_H(x)| \leq r\}\big)
\end{aligned}$$

qui sont boréliens par hypothèse, ce qui prouve que $F_\bullet$ est un sous-champ borélien. Ainsi les deux structures $\mathscr{L}(\Omega, \mathscr{P}_{\mathrm{Fe}}(X))$ et $\mathscr{L}_1(\Omega, \mathscr{P}_{\mathrm{Fe}}(X))$ sont les mêmes, ce qui montre qu'un sous-champ de fermés est borélien si et seulement si l'application associée est borélienne. □

Question 1.5.12. Qu'en est-il lorsque X n'est plus propre mais seulement complet ? Le problème est que la topologie de la convergence uniforme sur les bornés n'est plus nécessairement séparable...

1.5.3 Morphismes de champs

En examinant la preuve du Lemme 1.4.11, on voit que les résultats de la section 1.5.2 permettent de le renforcer dans le cas ou les espaces sont propres (on peut enlever le presque partout de la conclusion).

Lemme 1.5.13. *Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace borélien, $X_\bullet$ un champ borélien d'espaces métriques propres, $Y_\bullet$ un champ borélien d'espaces métriques, $\varphi_\bullet : X_\bullet \to Y_\bullet$ un morphisme de champs compatible et continu et $F_\bullet \leq Y_\bullet$ un sous-champ borélien de fermés. Définissons $\varphi_\bullet^{-1}(F_\bullet)$ par $\big(\varphi_\bullet^{-1}(F_\bullet)\big)_\omega := \varphi_\omega^{-1}(F_\omega)$. Alors $\varphi_\bullet^{-1}(F_\bullet)$ est un sous-champ généralisé borélien de $X_\bullet$.*

Corollaire 1.5.14. *Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace borélien, $X_\bullet$ un champ borélien d'espaces métriques propres, $Y_\bullet$ un champ borélien d'espaces métriques et $\varphi_\bullet : X_\bullet \to Y_\bullet$ un morphisme de champs compatible et continu. Alors $\varphi_\bullet(\mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)) = \mathscr{L}\big(\Omega, \varphi_\bullet(X_\bullet)\big)$.*

Preuve. Soit $y_\bullet \in \mathscr{L}\big(\Omega, \varphi_\bullet(X_\bullet)\big)$. En particulier, $\{y_\bullet\}$ est un sous-champ borélien de fermés de $Y_\bullet$. Or, $\varphi_\omega^{-1}(y_\omega) \neq \emptyset$ pour tout $\omega \in \Omega$ puisque $y_\bullet \in \mathscr{L}\big(\Omega, \varphi_\bullet(X_\bullet)\big)$. Donc, par le Lemme 1.5.13, on a que $\varphi_\bullet^{-1}(y_\bullet)$ est un sous-champ borélien de $X_\bullet$. Ainsi, $\mathscr{L}\big(\Omega, \varphi_\bullet^{-1}(y_\bullet)\big) \neq \emptyset$ et $\varphi_\bullet\big(\mathscr{L}\big(\Omega, \varphi_\bullet^{-1}(y_\bullet)\big)\big) = y_\bullet$, c'est-à-dire que $y_\bullet \in \varphi_\bullet(\mathscr{L}(\Omega, X_\bullet))$. □

1.6 Champs d'espaces de Banach

Dans cette section, on va s'occuper des champs d'espaces de Banach. On va donner deux définitions de champs boréliens d'espaces de Banach, l'une concernant les espaces de Banach séparables et une autre plus générale. Comme un espace de Banach est en particulier un espace métrique, il nous faudra montrer que la première définition est consistante avec celle de champ borélien d'espaces métriques. Ensuite on s'intéressera au champ des duaux topologiques associé à un champ borélien d'espaces de Banach (séparables) et on verra qu'il est naturellement muni d'une structure borélienne. Puis on montrera que le champ des boules unités des duaux munies de la topologie faible-$*$ est (presque) un champ borélien d'espaces métrisables. On utilisera ce dernier résultat pour montrer un résultat de trivialisation des champs d'espaces de Banach.

1.6.1 Structure borélienne de champ d'espaces de Banach

Si Ω est un ensemble, alors un champ d'espaces de Banach sur Ω est la donnée d'une famille

$$\{(B_\omega, \|\cdot\|_\omega)\}_{\omega\in\Omega}$$

d'espaces de Banach (réels) [20]. Observons que dans ce cas l'ensemble des sections (parfois également dénommées champs de vecteurs) $\mathscr{S}(\Omega, B_\bullet)$ est naturellement un espace vectoriel.

Définition 1.6.1. *Soit $(\Omega,\mathscr{A})$ un espace borélien et $(\Omega, B_\bullet)$ un champ d'espaces de Banach. On dit que $(\Omega, B_\bullet)$ est un champ borélien séparable d'espaces de Banach sur Ω si l'on s'est donné un sous-espace vectoriel $\mathscr{V}(\Omega, B_\bullet) \subseteq \mathscr{S}(\Omega, B_\bullet)$ tel que*

(i) Pour tout $x_\bullet \in \mathscr{V}(\Omega, B_\bullet)$ l'application $\|x_\bullet\|_\bullet : \Omega \to \mathbb{R}_{\geq 0},\ \omega \mapsto \|x_\omega\|_\omega$ est borélienne.

(ii) Si $y_\bullet \in \mathscr{S}(\Omega, B_\bullet)$ est telle que $\|x_\bullet - y_\bullet\|_\bullet : \Omega \to \mathbb{R}_{\geq 0},\ \omega \mapsto \|x_\omega - y_\omega\|_\omega$ est borélienne pour tout $x_\bullet \in \mathscr{V}(\Omega, B_\bullet)$, alors $y_\bullet \in \mathscr{V}(\Omega, B_\bullet)$.

(iii) Il existe une partie dénombrable $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{V}(\Omega, B_\bullet)$ telle que pour tout $\omega \in \Omega$ la famille $\mathscr{F}_\omega := \{x_\omega\}_{x_\bullet\in\mathscr{F}}$ soit totale dans B_ω (i.e. $\overline{\langle F_\omega\rangle} = B_\omega$).

Les éléments de $\mathscr{V}(\Omega, B_\bullet)$ sont appelés les sections boréliennes de $(\Omega, B_\bullet)$. L'espace vectoriel $\mathscr{V}(\Omega, B_\bullet)$ est appelé la structure borélienne du champ séparable d'espaces de Banach. Un ensemble $\mathscr{F}$ satisfaisant la condition (iii) est appelé une famille fondamentale de la structure borélienne $\mathscr{V}(\Omega, B_\bullet)$.

Comme les espaces de Banach sont en particulier des espaces métriques, il serait agréable que cette définition soit consistante avec celle de champ borélien d'espaces métriques. Le lemme suivant répond à la question.

Lemme 1.6.2. *Soit $(\Omega,\mathscr{A})$ un espace borélien et $(\Omega, B_\bullet)$ un champ séparable d'espaces de Banach.*

(i) Si $\mathscr{V}(\Omega, B_\bullet)$ est une structure borélienne du champ séparable d'espaces de Banach $(\Omega, B_\bullet)$, alors $\mathscr{V}(\Omega, B_\bullet)$ est une structure borélienne de champ d'espaces métriques pour $(\Omega, B_\bullet)$. De plus, si $\mathscr{F}$ est une famille fondamentale de la structure banachique, alors le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel engendré par $\mathscr{F}$, i.e.

$$\mathscr{D} = \{\sum_{i=1}^{n} q_i x^i_\bullet \mid n \in \mathbb{N}, x^i_\bullet \in \mathscr{F}, q_i \in \mathbb{Q}\},$$

est une famille fondamentale pour la structure borélienne métrique.

(ii) Si $\mathscr{L}(\Omega, B_\bullet)$ est une structure borélienne du champ d'espaces métriques $(\Omega, B_\bullet)$ telle que $\mathscr{L}(\Omega, B_\bullet)$ soit un sous-espace vectoriel de $\mathscr{S}(\Omega, B_\bullet)$, alors $\mathscr{L}(\Omega, B_\bullet)$ est une structure borélienne du champ séparable d'espaces de Banach $(\Omega, B_\bullet)$. De plus, une famille fondamentale de la structure métrique est une famille fondamentale de la structure banachique.

Si on suppose qu'il existe une mesure de probabilité sur $(\Omega,\mathscr{A})$, alors on peut renforcer (ii).

20. Dans notre contexte, on s'intéressera uniquement aux champ d'espaces de Banach réels.

(iii) Si $\mathscr{L}(\Omega, B_\bullet)$ est une structure borélienne du champ d'espaces métriques $(\Omega, B_\bullet)$ telle que $0_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega, B_\bullet)$, alors il existe Ω' un borélien de mesure pleine tel que $\mathscr{L}(\Omega', B_\bullet)$ est une structure borélienne du champ séparable d'espaces de Banach $(\Omega', B_\bullet)$.

Preuve. (i) Le point (ii) de la Définition 1.1.3 est équivalent au point (ii) de la Définition 1.6.1. Pour le point 1.1.3 (i), on observe que si $x_\bullet, y_\bullet \in \mathscr{V}(\Omega, B_\bullet)$, alors $x_\bullet - y_\bullet \in \mathscr{V}(\Omega, B_\bullet)$ (puisque c'est un sous-espace vectoriel) et donc $d_\bullet(x_\bullet, y_\bullet) = \|x_\bullet - y_\bullet\|_\bullet$ est borélienne par le point (i) de le Définition 1.6.1. Finalement, on observe que $\mathscr{D} \subseteq \mathscr{V}(\Omega, B_\bullet)$ puisque $\mathscr{V}(\Omega, B_\bullet)$ est un espace vectoriel. Comme le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel engendré par une partie total est dense [21], $\mathscr{D}$ satisfait donc le point (iii) de le Définition 1.1.3.

(ii) La condition 1.6.1 (i) est vérifiée car $0_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega, B_\bullet)$, 1.6.1 (ii) n'est autre que 1.1.3 (ii) et 1.6.1 (iii) est satisfaite en posant $\mathscr{F} = \mathscr{D}$. De plus, $\mathscr{L}(\Omega, B_\bullet)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{S}(\Omega, B_\bullet)$ par hypothèse.

(iii) Comme on l'a vu au point (ii), la seule difficulté réside donc dans la preuve qu'il existe un borélien Ω' de mesure pleine tel que $\mathscr{L}(\Omega', B_\bullet)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{S}(\Omega', B_\bullet)$. La preuve étant assez longue, on la fragmente en plusieurs étapes. Mais avant rappelons que $x_\bullet \in \mathscr{S}(\Omega, B_\bullet)$ est μ-mesurable si et seulement s'il existe un borélien Ω' de mesure pleine tel que $x_\bullet|_{\Omega'} \in \mathscr{L}(\Omega', B_\bullet)$ (voir le Corollaire 1.1.20).

(1) On montre que pour tous $x_\bullet, y_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega, B_\bullet)$, la section $\frac{1}{2}(x_\bullet + y_\bullet)$ est μ-mesurable. Pour ce faire, on réutilise les ensembles introduits dans la preuve du théorème de Mazur-Ulam [22] qui permettent de donner une description du point milieu en utilisant uniquement la métrique. Si B est un espace de Banach et $x_1, x_2 \in B$, alors on obtient le point $\frac{1}{2}(x_1 + x_2)$ comme l'intersection de la suite décroissante de fermés H_n qui est définie par la récurrence suivante :

$$\begin{aligned} H_1 &:= \{x \in X \mid \|x - x_1\| = \|x - x_2\| = \frac{1}{2}\|x_1 - x_2\|\} \\ H_n &:= \{x \in H_{n-1} \mid \inf_{y \in H_{n-1}} \|y - x\| \leq \frac{1}{2} \operatorname{diam}(H_{n-1})\} \end{aligned}$$

Il s'agit donc dans notre cas de vérifier qu'on peut le faire de manière borélienne. On définit les sous-champs $H^n_\bullet$ par

$$(H^n_\bullet)_\omega := \textit{le sous ensemble } H_n \textit{ de } B_\omega \textit{ associé aux points } x_\omega \textit{ et } y_\omega.$$

On va montrer par récurrence l'affirmation suivante : il existe Ω_n un borélien de mesure pleine tel que $(\Omega_n, H^n_\bullet)$ soit un sous-champ borélien de $(\Omega_n, B_\bullet)$. On commence par rappeler que pour tout $x_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega, B_\bullet)$ et $r_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega, \mathbb{R})$, $S(x_\bullet, r_\bullet)$ est un sous-champ borélien, puisque les espaces de Banach sont géodésiques (voir l'Exemple 1.2.26 (2)). Ainsi,

$$H^1_\bullet := S(x_\bullet, \frac{1}{2}\|x_\bullet - y_\bullet\|_\bullet) \cap S(y_\bullet, \frac{1}{2}\|x_\bullet - y_\bullet\|_\bullet)$$

est presqu'un sous-champ borélien par le Corollaire 1.4.7 et il existe Ω_1 de mesure pleine tel que $(\Omega_1, H^1_\bullet)$ soit un sous-champ borélien de $(\Omega_1, B_\bullet)$.

21. Soit B un espace de Banach, $F \subseteq B$ une partie totale et D le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel engendré par F. Soit $x \in B$ et $\varepsilon > 0$ fixés. Par hypothèse, il existe $\alpha_1, \ldots, \alpha_N \in \mathbb{R}$ et $x_1, \ldots, x_N \in F$ tels que $\|x - \sum_{i=1}^N \alpha_i x_i\| < \varepsilon/2$. Soit $q_1, \ldots, q_N \in \mathbb{Q}$ tels que $\sum_{i=1}^N |\alpha_i - q_i| < \frac{\varepsilon}{2 \max \|x_i\|}$, alors

$$\|x - \sum_{i=1}^N q_i x_i\| \leq \|x - \sum_{i=1}^N \alpha_i x_i\| + \|\sum_{i=1}^N \alpha_i x_i - \sum_{i=1}^N q_i x_i\| < \varepsilon .$$

22. Pour rappel, voici l'énoncé de ce théorème : *Soit B un espace de Banach réel et $f : B \to B$ une isométrie qui fixe* 0*. Alors f est linéaire.*

Supposons qu'il existe Ω_n un borélien de mesure pleine tel que $(\Omega_n, H^n_\bullet)$ soit un sous-champ borélien de $(\Omega_n, B_\bullet)$. Alors il existe $\mathscr{D}^n \subseteq \mathscr{L}(\Omega_n, B_\bullet)$ une famille fondamentale de $(\Omega_n, H^n_\bullet)$. On introduit $\mathrm{rad}^n_\bullet \in \mathscr{S}(\Omega_n, \mathscr{C}(H^n_\bullet))$ défini par

$$\mathrm{rad}^n_\omega(x) := \sup_{y \in H^n_\omega} \|x - y\|_\omega.$$

On observe que $\mathrm{rad}^n_\bullet(x_\bullet) = \sup_{y_\bullet \in \mathscr{D}^n} \|x_\bullet - y_\bullet\|_\bullet$ est borélienne pour tout $x_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega_n, H^n_\bullet)$ et donc $\mathrm{rad}^n_\bullet \in \widetilde{\mathscr{L}}(\Omega_n, \mathscr{C}(H^n_\bullet))$. D'autre part, on introduit aussi $\mathrm{diam}(H^n_\bullet) \in \mathscr{L}(\Omega_n, \mathbb{R})$ définie par $\mathrm{diam}(H^n_\omega) = \sup_{x,y \in H^n_\omega} \|x - y\|_\omega = \sup_{x,y \in \mathscr{D}^n_\omega} \|x - y\|_\omega$. Avec ces notations, on a donc

$$H^{n+1}_\bullet = \left(\mathrm{rad}^n_\bullet\right)^{-1}([0, \frac{1}{2}\mathrm{diam}(H^n_\bullet)])$$

Mais alors, par le Lemme 1.4.11, il existe un borélien de mesure pleine $\Omega_{n+1} \subseteq \Omega_n$ tel que $(\Omega_{n+1}, H^{n+1}_\bullet)$ soit un sous-champ borélien de $(\Omega_{n+1}, H^n_\bullet)$ et donc de $(\Omega_{n+1}, B_\bullet)$.
Comme $\frac{1}{2}(x_\bullet + y_\bullet) = \bigcap_{n \geq 1} H^n_\bullet$, le Corollaire 1.4.7 montre qu'il existe Ω' de mesure 1 tel que

$$\frac{1}{2}(x_\bullet + y_\bullet)\,|_{\Omega'} \in \mathscr{L}(\Omega', B_\bullet).$$

(2) On prouve que si $x_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega, B_\bullet)$ et $r_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega, [0,1])$, alors $r_\bullet x_\bullet$ est μ-mesurable. On commence par observer que si $r_\bullet$ est constante de valeur un réel de la forme $\frac{i}{2^n}$ $(n \geq 1,\ 1 \leq i \leq n)$, alors en appliquant plusieurs fois de manière judicieuse le point (1) (à la première étape on a que $\frac{1}{2}x_\bullet$ est μ-mesurable, puisque $0_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega, B_\bullet)$, puis on réapplique le résultat à $\frac{1}{2}x_\bullet$ et $0_\bullet$ ou à $\frac{1}{2}x_\bullet$ et $x_\bullet$, ...), on peut montrer que le résultat est vrai pour toutes ces fonctions. Comme $\mathscr{L}(\Omega, B_\bullet)$ est clôt par recollement finis boréliens, $r_\bullet x_\bullet$ est μ-mesurable si $r_\bullet$ est un recollement fini borélien de ces fonctions constantes. Et finalement, comme une fonction $r_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega, [0,1])$ quelconque est une limite de ces fonctions simples, le résultat est vrai pour toutes les fonctions boréliennes, puisque $\mathscr{L}(\Omega, B_\bullet)$ est clôt par limites ponctuelles.
(3) On prouve que si $x_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega, B_\bullet)$, alors $2x_\bullet$ est μ-mesurable. On commence par montrer que si B est un Banach, $x \in B$ et $\{y_n\}_{n \geq 1} \subseteq B$ est une suite telle que

- $\left|\|y_n\| - 2\|x\|\right| \leq 1/n$
- $\|x - \frac{\|x\|}{\|y_n\|} y_n\| \leq 1/n$

alors $\lim_{n \to \infty} y_n = 2x$. En effet, il suffit de calculer

$$\begin{aligned}
\|2x - y_n\| &\leq 2\|x - \frac{1}{2}y_n\| \leq 2\big(\|x - \frac{\|x\|}{\|y_n\|}y_n\| + \underbrace{\|\frac{\|x\|}{\|y_n\|}y_n - \frac{1}{2}y_n\|}_{=\|y_n\| \cdot \left|\frac{\|x\|}{\|y_n\|} - \frac{1}{2}\right|} \\
&\leq 2\big(\frac{1}{n} + \left|\|x\| - \frac{1}{2}\|y_n\|\right|\big) = \frac{2}{n} + \left|2\|x\| - \|y_n\|\right| \\
&\leq \frac{3}{n} \to 0 \quad (n \to \infty).
\end{aligned}$$

Observons également que si $y_n \in B$ est telle que $\|y_n - 2x\| \leq \frac{1}{n}$, alors les deux conditions ci-dessus sont satisfaites (de sorte qu'on peut toujours choisir une telle suite dans une partie dense fixée) : la première découle de l'inégalité du triangle inverse et la deuxième de la première et de la suite d'inégalités suivante :

$$\begin{aligned}
\|x - \frac{\|x\|}{\|y_n\|}y_n\| &\leq \frac{1}{2}\|2x - \frac{2\|x\|}{\|y_n\|}y_n\| \leq \frac{1}{2}\big(\|2x - y_n\| + \|y_n - \frac{\|2x\|}{\|y_n\|}y_n\|\big) \\
&\leq \frac{1}{2}\big(\frac{1}{n} + \left|2\|x\| - \|y_n\|\right|\big) \leq \frac{1}{n}
\end{aligned}$$

Maintenant, on fixe $x_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega, B_\bullet)$ et on choisit $\mathscr{D}' = \{x^n_\bullet\}_{n\geq 1}$ une famille fondamentale du sous-champ borélien[23] $B_\bullet \setminus B(0_\bullet, \|x_\bullet\|_\bullet)$. Par le point (2), il existe Ω' un borélien de mesure 1 tel que

$$\frac{\|x_\bullet\|_\bullet}{\|x^n_\bullet\|_\bullet} x^n_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega', B_\bullet) \quad \text{pour tout } n \geq 1.$$

Par ce qui a été montré juste au-dessus on peut définir, pour tout $k \geq 1$, une fonction $n^k_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega', \mathbb{N})$ par

$$n^k_\omega := \min\{n \in \mathbb{N} \mid \|x_\omega - \frac{\|x_\omega\|_\omega}{\|x^n_\omega\|_\omega} x^n_\omega\|_\omega \leq \frac{1}{k} \text{ et } \left|\|x^n_\omega\|_\omega - 2\|x_\omega\|_\omega\right| \leq \frac{1}{k}\},$$

qui satisfait que

$$x^{n^k_\bullet}_\bullet \mid_{\Omega'} \to 2x_\bullet \mid_{\Omega'} .$$

Ainsi, $2x_\bullet \mid_{\Omega'} \in \mathscr{L}(\Omega', B_\bullet)$.

(4) On montre que pour tout $n \geq 1$, $\{x^i_\bullet\}_{i=1}^n \subseteq \mathscr{L}(\Omega, B_\bullet)$ et $\{\alpha_i\}_{i=1}^n \subseteq \mathbb{R}$, il existe Ω' un borélien de mesure pleine tel que

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i x^i \mid_{\Omega'} \in \mathscr{L}(\Omega', B_\bullet).$$

On déduit facilement[24] du point (3) que $\alpha x_\bullet$ est μ-mesurable pour tout $x_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega, B_\bullet)$ et $\alpha \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, et des points (1) et (3) que $x_\bullet + y_\bullet$ est μ-mesurable pour tout $x_\bullet, y_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega, B_\bullet)$. Il ne reste donc plus qu'à montrer que $-x_\bullet$ est μ-mesurable pour tout $x_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega, B_\bullet)$. Pour ce faire, on considère une famille fondamentale $\mathscr{D} = \{y^n_\bullet\}_{n\geq 1}$ de $\mathscr{L}(\Omega, B_\bullet)$ et on choisit Ω' de mesure 1 tel que $(y^n_\bullet + x_\bullet) \mid_{\Omega'} \in \mathscr{L}(\Omega', B_\bullet)$ pour tout $n \geq 1$. On introduit, pour tout $k \geq 1$, $n^k_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega', \mathbb{N})$ définie par

$$n^k_\omega := \min\{n \in \mathbb{N} \mid \|y^n_\omega + x_\omega\|_\omega \leq \frac{1}{k}\} \quad \text{pour tout } \omega \in \Omega'.$$

Par construction, on a $\mathscr{L}(\Omega', B_\bullet) \ni y^{n^k_\bullet}_\bullet \mid_{\Omega'} \to -x_\bullet \mid_{\Omega'}$ et donc $-x_\bullet$ est μ-mesurable.

(5) On finalise la preuve en montrant qu'il existe Ω' de mesure pleine tel que $\mathscr{L}(\Omega', B_\bullet)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{S}(\Omega', B_\bullet)$. Soit $\mathscr{D}$ une famille fondamentale de $\mathscr{L}(\Omega, B_\bullet)$. Le point précédent garantit l'existence d'un borélien Ω' de mesure pleine tel que

$$\langle \mathscr{D} \rangle_{\mathbb{Q}} \subseteq \mathscr{L}(\Omega', B_\bullet),$$

puisqu'il n'existe qu'un nombre dénombrable de combinaisons linéaires rationnelles finies construites à partir de $\mathscr{D}$. Comme $\mathscr{L}(\Omega', B_\bullet)$ est stable par recollement borélien dénombrable, on a encore $\langle \mathrm{Rec}(\mathscr{D}) \rangle_{\mathbb{Q}} = \mathrm{Rec}\left(\langle \mathscr{D} \rangle_{\mathbb{Q}}\right) \subseteq \mathscr{L}(\Omega', B_\bullet)$. Soit maintenant $x_\bullet, y_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega', B_\bullet)$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Alors il existe $\{x^n_\bullet\}_{n\geq 1}, \{y^n_\bullet\}_{n\geq 1} \subseteq \mathrm{Rec}(\mathscr{D})$ et $\{\alpha_n\}_{n\geq 1}, \{\beta_n\}_{n\geq 1} \subseteq \mathbb{Q}$ tel que $x^n_\bullet \to x_\bullet$, $y^n_\bullet \to y_\bullet$, $\alpha_n \to \alpha$ et $\beta_n \to \beta$. Alors on a

$$\mathscr{L}(\Omega', B_\bullet) \ni \alpha_n x^n_\bullet + \beta_n y^n_\bullet \to \alpha x_\bullet + \beta y_\bullet$$

et donc $\alpha x_\bullet + \beta y_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega', B_\bullet)$, ce qui montre que c'est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{S}(\Omega', B_\bullet)$. □

Remarque 1.6.3. On a montré que les champs boréliens séparables d'espaces de Banach sont des champs boréliens d'espaces métriques et donc on se permet de noter $\mathscr{L}(\Omega, B_\bullet)$ au lieu de $\mathscr{V}(\Omega, B_\bullet)$.

Exemple 1.6.4. Le champ $(\Omega, \mathscr{C}(K_\bullet))$ associé à un champ borélien d'espaces métriques compacts est un champ borélien séparable d'espaces de Banach (voir la Remarque 1.5.3 (2)). En effet, on montre dans la preuve du Théorème 1.5.2 que $\widetilde{\mathscr{L}}(\Omega, \mathscr{C}(K_\bullet))$ est une sous-algèbre de $\mathscr{S}(\Omega, \mathscr{C}(K_\bullet))$ et donc en particulier un sous-espace vectoriel.

23. C'est bien un sous-champ borélien par un argument identique à celui de l'Exemple 1.2.26 (2)
24. Comme on a déduit le point (2) du point (1).

Voici l'analogue du lemme sur la fonction cardinal d'un champ borélien d'espaces métriques (1.1.8) pour les champs boréliens séparables d'espaces de Banach. C'est également une généralisation d'un résultat de Dixmier sur les champs boréliens séparables d'espaces de Hilbert (voir la prochaine section).

Lemme 1.6.5. *Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace borélien et $(\Omega, B_\bullet)$ un champ borélien séparable d'espaces de Banach. Alors la fonction*

$$\begin{array}{rccl} \dim B_\bullet : & \Omega & \to & \mathbb{N} \cup \{\infty\} \\ & \omega & \mapsto & \dim(B_\omega) \end{array}$$

est borélienne. Notons $\Omega_n := \{\omega \in \Omega \mid \dim(B_\omega) = n\}$ et $\Omega_{infini} := \Omega \setminus (\cup_{n\geq 1}\Omega_n)$. Alors il existe une famille fondamentale $\mathscr{F}' = \{z_\bullet^n\}_{n\geq 1}$ de la structure borélienne banachique telle que

- *Si $\omega \in \Omega_n$, alors $\{z_\omega^1, \ldots, z_\omega^n\}$ est une base de B_ω et $z_\omega^i = 0$ pour tout $i > n$.*
- *Si $\omega \in \Omega_\infty$, alors $\{z_\omega^n\}_{n\geq 1}$ est libre et totale dans B_ω.*

Preuve. On choisit $\mathscr{F} = \{x_\bullet^n\}_{n\geq 1}$ une famille fondamentale de la structure borélienne $\mathscr{L}(\Omega, B_\bullet)$. Par commodité, on définit $x_\bullet^0 \in \mathscr{L}(\Omega, B_\bullet)$ par $x_\omega^0 = 0 \in B_\omega$. Posons $z_\bullet^1 := x_\bullet^1$. Alors

$$\Omega_0 = \{\omega \in \Omega \mid \sup_{n\geq 2} \|z_\omega^1 - x_\omega^n\|_\omega = 0\} \in \mathscr{A}.$$

On définit $n_\bullet^2 \in \mathscr{L}(\Omega, \mathbb{N})$ par

$$\begin{aligned} n_\omega^2 &:= \begin{cases} 0 & \text{si } \omega \in \Omega_0 \\ \min\{n \in \mathbb{N} \mid x_\omega^n \notin \langle z_\omega^1 \rangle\} & \text{sinon} \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } \omega \in \Omega_1 \\ \min\{n \in \mathbb{N} \mid \inf_{q\in\mathbb{Q}} \|x_\omega^n - q z_\omega^1\|_\omega = 0\} & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

et $z_\bullet^2 := x_\bullet^{n_\bullet^2} \in \mathscr{L}(\Omega, B_\bullet)$.

Supposons qu'on ait montré que $\Omega_1, \ldots, \Omega_N$ sont boréliens et qu'on ait fabriqué $z_\bullet^1, \ldots, z_\bullet^{N+1} \in \mathscr{L}(\Omega, B_\bullet)$ tels que

- Pour tout $0 \leq n \leq N$ et $\omega \in \Omega_n$, on a que $\{z_\omega^1, \ldots z_\omega^n\}$ est une base de B_ω et $z_\omega^{n+1} = \ldots = z_\omega^{N+1} = 0$.
- Si $\omega \notin \Omega \setminus (\cup_{n=0}^N \Omega_n)$, alors $\{z_\omega^1, \ldots, z_\omega^{N+1}\}$ est une famille libre et $\{x_\omega^1, x_\omega^2, \ldots, x_\omega^{N+1}\} \subseteq \langle z_\omega^1, \ldots, z_\omega^{N+1} \rangle$.

Alors

$$\begin{aligned} \Omega_{N+1} &= \{\omega \in \Omega \setminus (\bigcup_{1\leq n\leq N} \Omega_n) \mid x_\omega^j \in \langle z_\omega^1, \ldots, z_\omega^{N+1} \rangle \text{ pour tout } j \geq N+2\} \\ &= \{\omega \in \Omega \setminus (\bigcup_{1\leq n\leq N} \Omega_n) \mid \sup_{j\geq 0} \big(\inf_{q_1,\ldots,q_{N+1}\in\mathbb{Q}} \|x_\omega^j - \sum_{i=1}^{N+1} q_i z_\omega^i\|_\omega \big) = 0\} \in \mathscr{A}. \end{aligned}$$

On définit $n_\bullet^{N+2} \in \mathscr{L}(\Omega, \mathbb{N})$ par

$$\begin{aligned} n_\omega^{N+2} &:= \begin{cases} 0 & \text{si } \omega \in \cup_{1\leq n\leq N+1} \Omega_n \\ \min\{n \in \mathbb{N} \mid x_\omega^n \notin \langle z_\omega^1, \ldots, z_\omega^{N+1} \rangle\} & \text{sinon} \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } \omega \in \cup_{1\leq n\leq N+1} \Omega_n \\ \min\{n \in \mathbb{N} \mid \inf_{q_1,\ldots,q_{N+1}\in\mathbb{Q}} \|x_\omega^n - \sum_{i=1}^{N+1} q_i z_\omega^i\|_\omega) > 0\} & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

et $z_\bullet^{N+2} := x_\bullet^{n_\bullet^{N+2}} \in \mathscr{L}(\Omega, B_\bullet)$.

On fabrique ainsi par récurrence la famille fondamentale de l'énoncé. □

Dans la suite on s'intéressera à des champs d'espaces de Banach où les espaces ne sont pas nécessairement séparables. On pourrait imaginer reprendre la définition dans le cas séparable et simplement ôter la condition (iii) qui est évidemment impossible si les espaces ne sont pas séparables. Mais la condition (ii) est difficile à vérifier sans avoir une famille fondamentale. C'est pourquoi on va la remplacer par une condition plus forte et plus aisé à montrer. Dans le cas des champs séparables d'espaces de Banach, on vérifie que les conditions sont équivalentes.

Lemme 1.6.6. *Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace borélien. Si $(\Omega, B_\bullet)$ est un champ d'espaces de Banach et $\mathscr{L}(\Omega, B_\bullet)$ un sous-espace vectoriel de $\mathscr{S}(\Omega, B_\bullet)$ satisfaisant les points (i) et (iii) de la Définition 1.6.1. Alors la condition (ii) de la Définition 1.6.1 est équivalente à*

(ii)' $\mathscr{L}(\Omega, B_\bullet)$ est stable par recollements dénombrables boréliens et limites ponctuelles.

Elle est également équivalente à la paire de conditions suivantes

(iv) Si $\{x^n_\bullet\}_{n\geq 1}$ est une suite dans $\mathscr{L}(\Omega, B_\bullet)$ telle que $\lim_{n\to\infty} x^n_\omega = x_\omega$ pour tout $\omega \in \Omega$, alors $x_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega, B_\bullet)$.

(v) Si $x_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega, B_\bullet)$ et $f_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega, \mathbb{R})$, alors la section définie par $f_\bullet \cdot x_\bullet : \omega \mapsto f_\omega \cdot x_\omega$ est borélienne (i.e. appartient à $\mathscr{L}(\Omega, B_\bullet)$).

Preuve. La stratégie est de montrer (ii) $\Longleftrightarrow$ (ii)' $\Longleftrightarrow$ ((iv)+(v)).

[(ii) $\Rightarrow$ (ii)'] Par le Lemme 1.6.2, on sait que $\mathscr{L}(\Omega, B_\bullet)$ est une structure borélienne de champs d'espaces métriques. Or on a montré que de telles structures sont stables par recollement borélien dénombrable et limite ponctuelle (Lemme 1.1.6).

[(ii)' $\Rightarrow$ (ii)] Soit $\mathscr{F}$ satisfaisant 1.6.1(iii). Si on considère $\mathscr{F}' := \langle \mathscr{F} \rangle_{\mathbb{Q}} \subseteq \mathscr{L}(\Omega, B_\bullet)$ le $\mathbb{Q}$-sous-espace vectoriel engendré par $\mathscr{F}$, alors $\mathscr{F}'_\omega$ est dense pour tout $\omega \in \Omega$. De plus, $d_\bullet(x_\bullet, y_\bullet) = \|x_\bullet - y_\bullet\|_\bullet$ est borélienne pour tout $x_\bullet, y_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega, B_\bullet)$ est borélienne par 1.6.1 (i) et puisque $\mathscr{L}(\Omega, B_\bullet)$ est un sous-espace vectoriel. Ainsi, $\mathscr{F}'$ est une famille fondamentale d'une structure borélienne de champ d'espaces métriques pour $(\Omega, B_\bullet)$ (Définition 1.1.11 et Lemme 1.1.9). De plus,

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}_{\mathscr{F}'}(\Omega, B_\bullet) &= \{y_\bullet \in \mathscr{S}(\Omega, B_\bullet) \mid \|x_\bullet - y_\bullet\|_\bullet \text{ est borélienne pour tout } x_\bullet \in \mathscr{F}'\} \\
&= \{y_\bullet \in \mathscr{S}(\Omega, B_\bullet) \mid y_\bullet \text{ est limite ponctuelle de recollements dénombrables} \\
&\qquad \text{boréliens d'éléments de } \mathscr{F}'\}.
\end{aligned}$$

L'hypothèse (ii)' et la deuxième égalité montrent que $\mathscr{L}_{\mathscr{F}'}(\Omega, B_\bullet) \subseteq \mathscr{L}(\Omega, B_\bullet)$. Supposons maintenant que $y_\bullet \in \mathscr{S}(\Omega, B_\bullet)$ satisfasse que $\|x_\bullet - y_\bullet\|_\bullet$ soit borélienne pour tout $x_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega, B_\bullet)$ et donc *a fortiori* pour tout $x_\bullet \in \mathscr{F}'$. Par la première description, $x_\bullet \in \mathscr{L}_{\mathscr{F}'}(\Omega, B_\bullet)$.

[(ii)' $\Rightarrow$ (iv) + (v)] Il n'y a rien à montrer pour (iv). Soit $x_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega, B_\bullet)$ une section borélienne fixée. Alors $f_\bullet x_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega, B_\bullet)$ si $f_\bullet$ est constante puisque $\mathscr{L}(\Omega, B_\bullet)$ est un sous-espace vectoriel. Si

$$f_\bullet = \sum_{n=1}^{N} a_n \chi_{\Omega_n} \quad \text{avec} \quad \Omega = \bigsqcup_{n=1}^{N} \Omega_n,\ a_n \in \mathbb{R} \text{ et } \Omega_n \in \mathscr{A}$$

est une fonction simple, alors $f_\bullet x_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega, B_\bullet)$ puisque c'est un recollement borélien fini de sections borélienne. Finalement, chaque $f_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega, \mathbb{R})$ est limite ponctuelle de fonctions simples et donc $f_\bullet x_\bullet$ est borélienne comme limite ponctuelle de sections boréliennes.

[(iv)+(v) $\Rightarrow$ (ii)'] Il suffit de prouver la stabilité par recollement borélien dénombrable. Soit donc $\Omega = \bigsqcup_{n\geq 1} \Omega_n$ une décomposition borélienne, $\{x^n_\bullet\}_{n\geq 1} \subseteq \mathscr{L}(\Omega, B_\bullet)$ et $x_\bullet \in \mathscr{S}(\Omega, B_\bullet)$ définie par $x_\bullet|_{\Omega_n} := x^n_\bullet|_{\Omega_n}$ pour tout $n \geq 1$. Observons que

$$x_\bullet = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{N} \chi_{\Omega_n} x^n_\bullet$$

qui est donc borélienne par (iv), (v) et l'hypothèse que $\mathscr{L}(\Omega, B_\bullet)$ est un espace vectoriel. $\square$

Remarque 1.6.7. Nous avons montré ces équivalences dans le cas des champs boréliens séparables d'espaces de Banach. Nous choisissons de définir la structure borélienne d'un champ borélien d'espaces de Banach (pas forcément séparable) comme un sous-espace vectoriel $\widetilde{\mathscr{L}}(\Omega, B_\bullet) \subseteq \mathscr{S}(\Omega, B_\bullet)$ satisfaisant les conditions (i) et (ii)'. On retrouve ainsi une définition équivalente à celle donnée dans [FD88] (Volume 1, p. 77) ou dans [AR00] (Appendice A. 3, p. 177) qui supposent (i), (iv) et (v), puisqu'on n'a pas utilisé la famille fondamentale dans la preuve de l'équivalence (ii) $\Longleftrightarrow$ ((iv)+(v)).

Définition 1.6.8. *Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace borélien et $(\Omega, B_\bullet)$ un champ d'espaces de Banach. On dit que $(\Omega, B_\bullet)$ est un champ borélien d'espaces de Banach sur Ω si l'on s'est donné un sous-espace vectoriel $\widetilde{\mathscr{L}}(\Omega, B_\bullet) \subseteq \mathscr{S}(\Omega, B_\bullet)$ tel que*

(i) Pour tout $x_\bullet \in \widetilde{\mathscr{L}}(\Omega, B_\bullet)$ l'application $\|x_\bullet\|_\bullet$ est borélienne.

(ii) $\widetilde{\mathscr{L}}(\Omega, B_\bullet)$ est clôt par limite ponctuelle et recollement dénombrable borélien.

Les sections (ou champs de vecteurs) de $\widetilde{\mathscr{L}}(\Omega, B_\bullet)$ sont appelées les sections boréliennes de $(\Omega, B_\bullet)$. L'espace vectoriel $\widetilde{\mathscr{L}}(\Omega, B_\bullet)$ est appelé la structure borélienne du champ.

Remarque 1.6.9. Observons que, dans le cas de la Définition 1.6.8, l'espace vectoriel $\widetilde{\mathscr{L}}(\Omega, B_\bullet) = \{0\}$ est une structure borélienne. Ceci n'est pas le cas dans la Définition 1.6.1 (sauf si $(\Omega, B_\bullet) = (\Omega, \{0\})$). Ainsi, les structures séparables sont nécessairement "plus riches" et lorsqu'on considère des champs non séparables il est bon de vérifier que la structure borélienne n'est pas trop petite.

1.6.2 Le champ des duaux

Si B est un espace de Banach, on note B^* le dual topologique de B (*i.e.* l'espace des formes linéaires continues sur B). Le lemme suivant montre qu'il existe une structure naturelle sur le champ d'espaces duaux d'un champ borélien séparable d'espaces de Banach donné.

Lemme 1.6.10 ([AR00], p. 179)**.** *Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace borélien et $(\Omega, B_\bullet)$ un champ borélien séparable d'espaces de Banach de structure borélienne $\mathscr{L}(\Omega, B_\bullet)$. Considérons $(\Omega, B_\bullet^*)$ le champ d'espaces de Banach défini par $(B_\bullet^*)_\omega := B_\omega^*$. Alors*

$$\widetilde{\mathscr{L}}(\Omega, B_\bullet^*) := \{\varphi_\bullet \in \mathscr{S}(\Omega, B_\bullet^*) \,|\, \omega \mapsto \langle \varphi_\omega, x_\omega \rangle := \varphi_\omega(x_\omega) \text{ est borélienne pour tout } x_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega, B_\bullet)\}.$$

est une structure borélienne pour le champ des duaux $(\Omega, B_\bullet^*)$. En général, ce champ n'est pas séparable (donc pas de condition 1.6.1 (iii), voir la Remarque 1.6.7).

Preuve. On vérifie les conditions de la Définition 1.6.8.
(i) Pour tout $\omega \in \widetilde{\Omega} := \Omega \setminus \{\omega \in \Omega \,|\, \dim B_\omega = 0\} \in \mathscr{A}$, on a, par définition de la norme sur le dual,

$$\|\varphi_\omega\|_\omega = \sup_{x \in B_\omega \setminus \{0\}} \frac{|\varphi_\omega(x)|}{\|x\|_\omega}.$$

Observons que le sous-champ généralisé $B_\bullet \setminus \{0\}$ défini par $(B_\bullet \setminus \{0\})_\omega := B_\omega \setminus \{0\}$ est un sous-champ borélien généralisé d'ouverts [25] de $B_\bullet$. Ainsi, il existe $\mathscr{D} \subseteq \mathscr{L}(\widetilde{\Omega}, B_\bullet \setminus \{0\})$ une famille fondamentale du sous-champ. Alors, l'application [26]

$$\|\varphi_\bullet\|_\bullet : \omega \mapsto \begin{cases} \sup_{x \in \mathscr{D}_\omega} \frac{|\varphi_\omega(x)|}{\|x\|_\omega} & \text{si } \dim(B_\omega) > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

25. Remarque 1.2.24 (4)

26. On peut effectivement prendre le *sup* sur une partie dense puisque, pour $\varphi \in B^*$ fixé, l'application $B \setminus \{0\} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, $x \mapsto \frac{|\varphi(x)|}{\|x\|}$ est continue (puisqu'on considère le dual topologique).

est borélienne comme *supremum* dénombrable d'applications boréliennes (par définition de $\widetilde{\mathscr{L}}(\Omega, B_\bullet^*)$ et 1.6.1 (i)).
(ii) Soit $\widetilde{\mathscr{L}}(\Omega, B_\bullet^*) \ni \varphi_\bullet^n \to \varphi_\bullet \in \mathscr{S}(\Omega, B_\bullet^*)$. La fonction $\varphi_\bullet(x_\bullet) = \lim_{n\to\infty} \varphi_\bullet^n(x_\bullet)$ est borélienne pour tout $x_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega, B_\bullet)$ comme limite ponctuelle de fonctions boréliennes. Donc $\varphi_\bullet \in \widetilde{\mathscr{L}}(\Omega, B_\bullet^*)$. Finalement, il découle directement de la définition que $\widetilde{\mathscr{L}}(\Omega, B_\bullet)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{S}(\Omega, B_\bullet)$ qui est clôt par recollement dénombrable borélien. □

Remarques 1.6.11. (1) On pourrait imaginer que $\widetilde{\mathscr{L}}(\Omega, B_\bullet^*) = \{0_\bullet\}$. La Proposition 1.6.15 montrera que ce n'est pas le cas.
(2) Il est facile de se convaincre que si $f_\bullet \in \mathscr{S}(\Omega, B_\bullet^*)$ et $\mathscr{D}$ est une famille fondamentale de $\mathscr{L}(\Omega, B_\bullet)$, alors il suffit de vérifier que $f_\bullet(x_\bullet)$ est borélienne pour tout $x_\bullet \in \mathscr{D}$ pour que $f_\bullet \in \widetilde{\mathscr{L}}(\Omega, B_\bullet^*)$. En particulier, si (Ω, B) est un champ trivial, alors $f_\bullet \in \widetilde{\mathscr{L}}(\Omega, B^*)$ si et seulement si l'application $f_\bullet(x) : \omega \mapsto f_\omega(x)$ est borélienne pour tout $x \in B$. C'est-à-dire que $f_\bullet$ est faiblement mesurable selon une terminologie classique.

Rappelons que si $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ est un espace de probabilité et si $f_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega, \mathbb{R})$, alors on peut introduire les deux quantités suivantes

$$\|f_\bullet\|_1 := \int_\Omega |f_\omega| d\mu(\omega) \quad \text{et} \quad \|f_\bullet\|_\infty = \operatorname{sup\,ess} f_\bullet := \sup\{M \geq 0 \mid \mu\big(\{\omega \in \Omega \mid |f_\omega| \leq M\}\big) = 1\}.$$

On peut ainsi définir deux espaces vectoriels pré-normés

$$\mathscr{L}^1(\Omega, \mathbb{R}) := \{f_\bullet \mid \|f_\bullet\|_1 < \infty\} \quad \text{et} \quad \mathscr{L}^\infty(\Omega, \mathbb{R}) := \{f_\bullet \mid \|f_\bullet\|_\infty < \infty\}.$$

ainsi que leurs séparés, *i.e.* on identifie deux fonctions si $\|f - g\| = 0$, qu'on note respectivement $L^1(\Omega, \mathbb{R})$ et $L^\infty(\Omega, \mathbb{R})$. Pour les deux normes, on montre facilement que $\|f\| = 0$ si et seulement si f est nulle presque partout.
Voici la généralisation au cadre des champs boréliens séparables d'espaces de Banach de deux lemmes classiques (voir [Rud78] ou [Doo94]) concernant les espaces vectoriels ci-dessus. La preuve n'étant que très légèrement modifiée par rapport au cas du champ trivial, on la donne dans un appendice.

Lemme 1.6.12 (A.2.1)**.** *Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ un espace de probabilité et $(\Omega, B_\bullet)$ un champ borélien d'espaces de Banach de structure borélienne $\widetilde{\mathscr{L}}(\Omega, B_\bullet)$. Définissons*

$$\widetilde{\mathscr{L}^\infty}(\Omega, B_\bullet) := \{x_\bullet \in \widetilde{\mathscr{L}}(\Omega, B_\bullet) \mid \operatorname{sup\,ess} \|x_\bullet\|_\bullet < \infty\}.$$

et $\widetilde{L}^\infty(\Omega, B_\bullet) = \widetilde{\mathscr{L}^\infty}(\Omega, B_\bullet)/ =_{p.p.}$.
Alors $\widetilde{L}^\infty(\Omega, B_\bullet)$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ est un espace de Banach.

Remarque 1.6.13. Dans le cas particulier où $B_\bullet$ est un champ borélien séparable d'espaces de Banach, on écrit $\mathscr{L}^\infty(\Omega, B_\bullet)$ au lieu de $\widetilde{\mathscr{L}^\infty}(\Omega, B_\bullet)$.

Lemme 1.6.14 (A.2.2)**.** *Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ un espace de probabilité standard et $(\Omega, B_\bullet)$ un champ borélien séparable d'espaces de Banach de structure borélienne $\mathscr{L}(\Omega, B_\bullet)$. Définissons*

$$\mathscr{L}^1(\Omega, B_\bullet) := \{x_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega, B_\bullet) \mid \|x_\bullet\|_1 = \int_\Omega \|x_\omega\|_\omega d\mu(\omega) < +\infty\}$$

et $L^1(\Omega, B_\bullet) = \mathscr{L}^1(\Omega, B_\bullet)/ =_{p.p.}$.
Alors $L^1(\Omega, B_\bullet)$ muni de la norme $\|\cdot\|_1$ est un espace de Banach séparable.

Remarquons que

$$\widetilde{L}^{\infty}(\Omega, B_\bullet) = \{[x_\bullet] \in L(\Omega, B_\bullet) \mid [\|x_\bullet\|_\bullet] \in L^{\infty}(\Omega, \mathbb{R})\}$$

et

$$L^{1}(\Omega, B_\bullet) = \{[x_\bullet] \in L(\Omega, B_\bullet) \mid [\|x_\bullet\|_\bullet] \in L^{1}(\Omega, \mathbb{R})\},$$

puisque $L^{\infty}(\Omega,\mathbb{R}) = \mathscr{L}^{\infty}(\Omega,\mathbb{R})/=_{p.p.}$ et $L^{1}(\Omega,\mathbb{R}) = \mathscr{L}^{1}(\Omega,\mathbb{R})/=_{p.p.}$.

C'est un résultat classique que le dual topologique de $L^1(\Omega,\mathbb{R})$ est $L^{\infty}(\Omega,\mathbb{R})$. En suivant la preuve de [AR00], on montre maintenant une version de cette affirmation pour les champs d'espaces de Banach.

Proposition 1.6.15 ([AR00], p. 179)**.** *Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ un espace de probabilité standard et $(\Omega, B_\bullet)$ un champ borélien séparable d'espaces de Banach de structure borélienne $\mathscr{L}(\Omega, B_\bullet)$. Alors il existe un isomorphisme isométrique $\widetilde{L}^{\infty}(\Omega, B^*_\bullet) \to \left(L^1(\Omega, B_\bullet)\right)^*$ donné par*

$$\begin{array}{ccccccc} \widetilde{L}^{\infty}(\Omega, B^*_\bullet) & \longrightarrow & \left(L^1(\Omega, B_\bullet)\right)^* & & & & \\ [\varphi_\bullet] & \mapsto & \langle [\varphi_\bullet], \cdot \rangle & : & L^1(\Omega, B_\bullet) & \to & \mathbb{R} \\ & & & & [x_\bullet] & \mapsto & \langle [\varphi_\bullet], [x_\bullet] \rangle = \int_\Omega \langle \varphi_\omega, x_\omega \rangle d\mu(\omega) \end{array}$$

Preuve. Tout d'abord, il est clair que $\langle [\varphi_\bullet], \cdot \rangle$ est bien définie et linéaire. De plus, elle est bornée car

$$\|\langle [\varphi_\bullet], \cdot \rangle\| \leq \sup_{[x_\bullet] \neq [0_\bullet]} \frac{\int_\Omega |\langle \varphi_\omega, x_\omega \rangle| d\mu(\omega)}{\|[x_\bullet]\|_1} \leq \sup_{[x_\bullet] \neq [0_\bullet]} \frac{\int_\Omega \|\varphi_\omega\|_\omega \|x_\omega\|_\omega d\mu(\omega)}{\|[x_\bullet]\|_1} \leq \|[\varphi_\bullet]\|_\infty < +\infty. \tag{1.3}$$

Montrons maintenant que l'application de l'énoncé est surjective. Le but est donc de construire, pour $\Phi \in \left(L^1(\Omega, B_\bullet)\right)^*$ fixée, une section $[\varphi_\bullet] \in \widetilde{L}^{\infty}(\Omega, B^*_\bullet)$ telle que

$$\Phi([x_\bullet]) = \int_\Omega \langle \varphi_\omega, x_\omega \rangle d\mu(\omega) \quad \text{pour tout } [x_\bullet] \in L^1(\Omega, B_\bullet). \tag{1.4}$$

Pour chaque $[x_\bullet] \in L^{\infty}(\Omega, B_\bullet)$ on définit l'application [27]

$$\begin{array}{cccc} \Phi_{[x_\bullet]} : & L^1(\Omega, \mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & [f_\bullet] & \mapsto & \Phi_{[x_\bullet]}([f_\bullet]) := \Phi([f_\bullet \cdot x_\bullet]) \end{array}$$

où $[f_\bullet x_\bullet] \in L^1(\Omega, B_\bullet)$ [28] car $\int_\Omega \|f_\omega x_\omega\|_\omega d\mu(\omega) \leq \|[x_\bullet]\|_\infty \int_\Omega |f_\omega| d\mu(\omega) < +\infty$ puisque $[x_\bullet] \in L^{\infty}(\Omega, B_\bullet)$ et $[f_\bullet] \in L^1(\Omega, \mathbb{R})$. Alors $\Phi_{[x_\bullet]}$ est une forme linéaire bornée car

$$\frac{|\Phi_{[x_\bullet]}([f_\bullet])|}{\|[f_\bullet]\|_1} \leq \frac{\|\Phi\| \|[f_\bullet x_\bullet]\|_1}{\|[f_\bullet]\|_1} \leq \frac{\|\Phi\| \|[f_\bullet]\|_1 \|[x_\bullet]\|_\infty}{\|[f_\bullet]\|_1} \quad \textit{i.e.} \quad \|\Phi_{[x_\bullet]}\| \leq \|\Phi\| \cdot \|[x_\bullet]\|_\infty. \tag{1.5}$$

En d'autres termes, $\Phi_{[x_\bullet]} \in \left(L^1(\Omega, \mathbb{R})\right)^*$. Comme $L^{\infty}(\Omega, \mathbb{R}) \simeq \left(L^1(\Omega, \mathbb{R})\right)^*$ (voir [Rud78], Théorème 6.16, l'hypothèse que μ soit de probabilité ou plus généralement σ-finie est cruciale), il existe une unique $[\ell^{[x_\bullet]}_\bullet] \in L^{\infty}(\Omega, \mathbb{R})$ telle que

$$\Phi_{[x_\bullet]}([f_\bullet]) = \int_\Omega f_\omega \ell^{[x_\bullet]}_\omega d\mu(\omega) \quad \text{pour tout } f_\bullet \in L^1(\Omega, \mathbb{R})$$

27. Ici, il est important de se souvenir que les fonctions L^1 peuvent être obtenues comme quotient des fonctions boréliennes et pas seulement des fonctions μ-mesurables (Lemme 1.1.19). En particulier, on pense à $f_\bullet$ comme à un représentant borélien de la classe dans $L^1(\Omega, \mathbb{R})$.

28. On a $f_\bullet x_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega, B_\bullet)$ par la Remarque 1.6.7.

et

$$\|[\ell_\bullet^{[x_\bullet]}]\|_\infty = \|\Phi_{[x_\bullet]}\| \le \|\Phi\|\|[x_\bullet]\|_\infty \tag{1.6}$$

par (1.5) et le fait que l'isomorphisme entre $L^\infty(\Omega,\mathbb{R})$ et $\big(L^1(\Omega,\mathbb{R})\big)^*$ soit isométrique. Observons que l'application

$$\begin{array}{rccc} \ell : & L^\infty(\Omega,B_\bullet) & \longrightarrow & L^\infty(\Omega,\mathbb{R}) \\ & [x_\bullet] & \mapsto & [\ell_\bullet^{[x_\bullet]}] \end{array}$$

ainsi définie est linéaire (par unicité de $[\ell_\bullet^{[x_\bullet]}] \in L^\infty(\Omega,\mathbb{R})$ pour $[x_\bullet] \in L^\infty(\Omega,B_\bullet)$ et par le fait que $\Phi_{[\alpha x_\bullet+\beta y_\bullet]}(f_\bullet) = \alpha\Phi_{[x_\bullet]}(f_\bullet) + \beta\Phi_{[y_\bullet]}(f_\bullet)$). De plus, on a également

$$[\ell_\bullet^{[\eta_\bullet][x_\bullet]}] = [\eta_\bullet \ell_\bullet^{[x_\bullet]}] \quad \text{pour tout } [\eta_\bullet] \in L^\infty(\Omega,\mathbb{R}) \text{ et tout } [x_\bullet] \in L^\infty(\Omega,B_\bullet), \tag{1.7}$$

puisque $\Phi_{[\eta_\bullet x_\bullet]}([f_\bullet]) = \Phi_{[x_\bullet]}([\eta_\bullet f_\bullet])$ pour tout $[\eta_\bullet] \in L^\infty(\Omega,\mathbb{R})$, $[x_\bullet] \in L^\infty(\Omega,B_\bullet)$ et $[f_\bullet] \in L^1(\Omega,\mathbb{R})$ (et toujours par unicité de $[\ell_{[x_\bullet]}]$).

Cette application ℓ va permettre de définir la section $[\varphi_\bullet] \in \widetilde{L}^\infty(\Omega,B_\bullet^*)$ recherchée. En effet, considérons une famille fondamentale $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{L}(\Omega,B_\bullet)$. Quitte à faire des recollements dénombrables boréliens, on peut supposer que $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{L}^\infty(\Omega,B_\bullet)$. Quitte à rajouter les combinaisons linéaires finies à coefficients rationnels, on peut supposer que $\mathscr{F} = \{x_\bullet^n\}_{n\ge1}$ est stable par combinaisons linéaires rationnelles finies et que $B_\omega = \overline{\{x_\omega^n\}}_{n\ge1}$ pour tout $\omega \in \Omega$.

Pour tout $\omega \in \Omega$, notons $\mathscr{F}_\omega = \{x_\omega^n\}_{n\ge1}$. Pour tout $n \ge 1$, on choisit $\ell_\bullet^{[x_\bullet^n]} \in \mathscr{L}^\infty(\Omega,\mathbb{R})$ un représentant de $[\ell_\bullet^{[x_\bullet^n]}] \in L^\infty(\Omega,\mathbb{R})$. L'idée est de définir $\varphi_\bullet \in \widetilde{\mathscr{L}^\infty}(\Omega,B_\bullet^*)$ en définissant d'abord, pour tout $n \ge 1$ et tout $\omega \in \Omega$,

$$\begin{array}{rccc} \widetilde{\varphi}_\omega : & \mathscr{F}_\omega & \to & \mathbb{R} \\ & x_\omega^n & \mapsto & \ell_\omega^{[x_\bullet^n]}, \end{array}$$

puis en prolongeant cette fonction à B_ω. Mais il faut d'abord s'assurer que $\widetilde{\varphi}_\omega : \mathscr{F}_\omega \to \mathbb{R}$ est bien définie, continue et $\mathbb{Q}$-linéaire. On peut le faire, mais seulement sur un ensemble borélien de mesure pleine.

Premièrement, montrons que pour presque tout $\omega \in \Omega$ l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{F} & \to & \mathbb{R} \\ x_\bullet^n & \mapsto & \ell_\omega^{[x_\bullet^n]} \end{array}$$

est $\mathbb{Q}$-linéaire[29]. Par (1.7), on sait que $[\ell_\bullet^{[\sum_{\text{finie}}\alpha_n x_\bullet^n]}] = [\sum_{\text{finie}}\alpha_n \ell_\bullet^{[x_\bullet^n]}]$ pour toute combinaison linéaire rationnelle finie d'éléments de $\mathscr{F}$. Par conséquent, $\ell_\bullet^{[\sum_{\text{finie}}\alpha_n x_\bullet^n]} =_{p.p.} \sum_{\text{finie}}\alpha_n \ell_\bullet^{[x_\bullet^n]}$. C'est-à-dire que, pour toute combinaison linéaire rationnelle finie, il existe un borélien de mesure pleine tel que $\ell_\omega^{[\sum_{\text{finie}}\alpha_n x_\bullet^n]} = \sum_{\text{finie}}\alpha_n \ell_\omega^{[x_\bullet^n]}$ pour tout ω dans ce borélien. Comme il n'existe qu'un nombre dénombrable de combinaisons linéaires rationnelles finies, il existe un borélien Ω' de mesure pleine tel que $\ell_\omega^{[\sum_{\text{finie}}\alpha_n x_\bullet^n]} = \sum_{\text{finie}}\alpha_n \ell_\omega^{[x_\bullet^n]}$ pour toute combinaison linéaire rationnelle finie et tout $\omega \in \Omega'$. Puisque $\mathscr{F}$ est stable par combinaisons linéaires rationnelles finies, l'application est $\mathbb{Q}$-linéaire pour tout $\omega \in \Omega'$.

Deuxièmement, montrons que $\widetilde{\varphi}_\omega : \mathscr{F}_\omega \to \mathbb{R}$ est bien définie pour presque tout $\omega \in \Omega$. On introduit, pour tout $n \ge 1$, le borélien $\Omega_n := \{\omega \in \Omega \mid x_\omega^n \ne 0\}$ et sa fonction caractéristique $\chi_{\Omega_n} \in \mathscr{L}^\infty(\Omega,\mathbb{R})$.

29. Attention, on ne peut pas montrer que l'application $\widetilde{\varphi}_\omega : \mathscr{F}_\omega \to \mathbb{R}$ est $\mathbb{Q}$-linéaire pour presque tout $\omega \in \Omega$ puisqu'on a pas encore montré qu'elle est bien définie. Pour $\omega \in \Omega$, on peut à priori avoir $[x_\bullet^n] \ne [x_\bullet^m]$ et $\ell_\omega^{[x_\bullet^n]} \ne \ell_\omega^{[x_\bullet^m]}$ bien que $x_\omega^n = x_\omega^m$. En revanche, l'application $\mathscr{F} \to \mathbb{R}$ est bien définie pour presque tout $\omega \in \Omega$. En effet, si $x_\bullet^n = x_\bullet^m$, alors évidemment $[x_\bullet^n] = [x_\bullet^m]$ et donc $\ell_\bullet^{[x_\bullet^n]} =_{p.p.} \ell_\bullet^{[x_\bullet^m]}$. On peut même rendre l'application bien définie pour tout $\omega \in \Omega$ en décidant de prendre le même représentant si deux classes $[x_\bullet^n]$ et $[x_\bullet^m]$ sont identiques.

Par définition, $[\ell_\bullet^{[x_\bullet^n]}] = [\ell_\bullet^{[\chi_{\Omega_n} x_\bullet^n]}]$ et l'égalité (1.7) livre

$$[\ell_\bullet^{[x_\bullet^n]}] = [\ell_\bullet^{[\chi_{\Omega_n} x_\bullet^n]}] = [\chi_{\Omega_n} \ell_\bullet^{[x_\bullet^n]}] \quad \text{pour tout } n \geq 1.$$

Ainsi, on a

$$\ell_\bullet^{[x_\bullet^n]} =_{p.p.} \chi_{\Omega_n} \ell_\bullet^{[x_\bullet^n]} \quad \text{pour tout } n \geq 1$$

et donc l'implication ($\omega \notin \Omega_n \ \Rightarrow\ \ell_\omega^{[x_\bullet^n]} = 0$) est vérifiée quel que soit $n \geq 1$ sur un ensemble de mesure pleine, qu'on note Ω''. Soit maintenant $\omega \in \Omega' \cap \Omega''$ et supposons qu'il existe $n, m \geq 1$ deux indices tels que $x_\omega^n = x_\omega^m$. Comme $\mathscr{F}$ est clôt par combinaisons linéaires rationnelles finies, il existe $k \geq 1$ tel que $x_\bullet^n - x_\bullet^m = x_\bullet^k$. En particulier, $x_\omega^k = 0$ (*i.e.* $\omega \notin \Omega_k$) et donc $\ell_\omega^{[x_\bullet^k]} = 0$ (puisque $\omega \in \Omega''$), c'est-à-dire que $\ell_\omega^{[x_\bullet^n]} = \ell_\omega^{[x_\bullet^m]}$ (puisque $\omega \in \Omega'$). Ceci montre que $\widetilde{\varphi}_\omega$ est bien définie sur $\mathscr{F}_\omega$ pour tout $\omega \in \Omega' \cap \Omega''$.

Finalement, montrons que $\widetilde{\varphi}_\omega : \mathscr{F}_\omega \to \mathbb{R}$ est continue pour presque tout $\omega \in \Omega$. Pour tout $n \geq 1$ et $q \in \mathbb{Q}_{>0}$, on introduit le borélien $\Omega_{n,q} = \{\omega \in \Omega \mid \|x_\omega^n\|_\omega < q\}$ et sa fonction caractéristique $\chi_{\Omega_{n,q}} \in \mathscr{L}^\infty(\Omega, \mathbb{R})$. L'égalité (1.7) livre

$$[\ell_\bullet^{[\chi_{\Omega_{n,q}} x_\bullet^n]}] = [\chi_{\Omega_{n,q}} \ell_\bullet^{[x_\bullet^n]}].$$

On a alors $\|[\chi_{\Omega_{n,q}} \ell_\bullet^{[x_\bullet^n]}]\|_\infty = \|[\ell_\bullet^{[\chi_{\Omega_{n,q}} x_\bullet^n]}]\|_\infty \overset{(1.6)}{\leq} \|\Phi\| \|[\chi_{\Omega_{n,q}} x_\bullet^n]\|_\infty \leq q\|\Phi\|$. Puisqu'il s'agit de la norme *supremum* essentiel et que $\mathbb{N}^* \times \mathbb{Q}_{>0}$ est dénombrable, il existe un borélien Ω''' de mesure pleine tel que pour tout $\omega \in \Omega'''$ on ait, pour tout $(n, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Q}_{>0}$,

$$\omega \in \Omega_{n,q} \cap \Omega''' \quad \Rightarrow \quad |\ell_\omega^{[x_\bullet^n]}| \leq q\|\Phi\|.$$

On veut montrer que $|\ell_\omega^{[x_\bullet^n]}| \leq \|x_\omega^n\|_\omega \|\Phi\|$ pour tout $n \geq 1$ et tout $\omega \in \Omega'''$. Soit donc $n \geq 1$ et $\omega \in \Omega'''$. Choisissons une suite $\{q_m\}_{m\geq 1} \subseteq \mathbb{Q}_{>0}$ telle que $q_m \overset{m\to+\infty}{\longrightarrow} \|x_\omega^n\|_\omega$ et $q_m \geq \|x_\omega^n\|_\omega$ pour tout $m \geq 1$. En particulier, on a

$$\omega \in \Omega''' \cap \Big(\bigcap_{m\geq 1} \Omega_{n,q_m}\Big) \quad \text{et donc} \quad |\ell_\omega^{[x_\bullet^n]}| \leq q_m \|\Phi\| \text{ pour tout } m \geq 1.$$

On en déduit donc que $|\ell_\omega^{[x_\bullet^n]}| \leq \|x_\omega^n\|_\omega \|\Phi\|$.

On peut donc conclure que l'application $\widetilde{\varphi}_\omega : \mathscr{F}_\omega \to \mathbb{R}$ est bien définie, $\mathbb{Q}$-linéaire et continue de norme $\leq \|\Phi\|$ pour tout $\omega \in \widetilde{\Omega} := \Omega' \cap \Omega'' \cap \Omega'''$. Ainsi, pour $\omega \in \widetilde{\Omega}$, on peut la prolonger en un élément $\varphi_\omega \in B_\omega^*$ (toujours de norme $\leq \|\Phi\|$). Sur $\Omega \setminus \widetilde{\Omega}$ on pose $\varphi_\omega = 0$ la forme linéaire nulle. On a ainsi défini un élément de $\mathscr{S}(\Omega, B_\bullet^*)$. Comme l'application

$$\omega \mapsto \langle \varphi_\omega, x_\omega \rangle = \begin{cases} \ell_\omega^{[x_\bullet]} & \text{si } \omega \in \widetilde{\Omega} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

est borélienne pour tout $x_\bullet \in \mathscr{F}$ car $\ell_\bullet^{x_\bullet} \in \mathscr{L}^\infty(\Omega, \mathbb{R})$, il est clair qu'elle est borélienne pour tout $x_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega, B_\bullet)$ car ces sections sont limites ponctuelles de recollements dénombrables boréliens d'éléments de $\mathscr{F}$. Donc $\varphi_\bullet \in \widetilde{\mathscr{L}}(\Omega, B_\bullet^*)$. Et comme $\|\varphi_\omega\|_\omega \leq \|\Phi\|$ pour tout $\omega \in \Omega$, on a que $\varphi_\bullet \in \widetilde{\mathscr{L}^\infty}(\Omega, B_\bullet^*)$ et

$$\|\varphi_\bullet\|_\infty \leq \|\Phi\|. \tag{1.8}$$

Enfin, si $[f_\bullet] \in L^1(\Omega, \mathbb{R}) \subseteq L(\Omega, \mathbb{R})$ et $[x_\bullet^n] \in [\mathscr{F}] \subseteq L^\infty(\Omega, B_\bullet)$, on a, avec (1.7),

$$\Phi_{[x_\bullet^n]}([f_\bullet]) = \Phi([f_\bullet x_\bullet^n]) = \int_\Omega f_\omega \ell_\omega^{[x_\bullet^n]} d\mu(\omega) = \int_\Omega \ell_\omega^{[f_\bullet x_\bullet^n]} d\mu(\omega) = \int_\Omega \langle \varphi_\omega, f_\omega x_\omega^n \rangle d\mu(\omega)$$

d'où on déduit (1.4) car on a $L^\infty(\Omega, B_\bullet) \cdot L^1(\Omega, \mathbb{R}) = L^1(\Omega, B_\bullet)$. Il est clair que, comme les constructions sont inverses l'une de l'autre, (1.3) et (1.8) montrent que les normes sont préservées. □

Cette proposition montre qu'on a en quelque sorte un champ dual et qu'on peut le relier au champ des duaux. Le champ dual $(\Omega, B^*_\bullet)$ d'un champ borélien séparable d'espaces de Banach n'étant pas forcément séparable pour la topologie provenant de la norme, on s'intéresse maintenant à une autre topologie naturelle : la topologie faible-$*$.

Définition 1.6.16. *Soit B un espace de Banach séparable et B^* son dual. La topologie faible-$*$ sur B^* est la topologie la moins fine telle que, pour tout $x \in B$, l'application $\varphi \mapsto \varphi(x)$ soit continue. Une base de voisinages de $\varphi \in B^*$ est donnée par tous les ensembles de la forme*

$$V(\varphi, \{x_1, \dots, x_n\}, \varepsilon) := \{\eta \in B^* \,|\, |\varphi(x_1) - \eta(x_1)| < \varepsilon, \dots, |\varphi(x_n) - \eta(x_n)| < \varepsilon\}$$

où $\varepsilon > 0$ et $\{x_1, \dots, x_n\} \subseteq B$ est un ensemble fini. On a

$$\varphi_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \varphi \text{ pour la topologie faible-}* \iff \forall x \in B,\ \varphi_n(x) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \varphi(x).$$

Si $A \subseteq B^*$, on note $\overline{A}^{*-f}$ l'adhérence de A pour la topologie faible-$*$.

Il est classique que pour cette topologie la boule unité du dual d'un espace séparable soit un compact métrisable. Il est donc naturel de se demander si le champ $(\omega, B^*_{\bullet,\leq 1})$ des boules des duaux associé à un champ borélien séparable d'espaces de Banach est un champ d'espaces métrisables. Avant de montrer que c'est (presque) le cas, prouvons un lemme qui nous sera utile.

Lemme 1.6.17. *Soit B un espace de Banach séparable, $\{x_m\}_{m\geq 1}$ une partie dénombrable dense de B et $\{\varphi_n\}_{n\geq 1} \subseteq B^*_{\leq 1}$ telle que $\overline{\{\varphi_n\}_{n\geq 1}}^{*-f}$ est convexe. Alors*

$$\overline{\{\varphi_n\}_{n\geq 1}}^{*-f} = B^*_{\leq 1} \iff \sup_{n\geq 1} \varphi_n(x_m) = \|x_m\| \quad \forall\, m \geq 1.$$

Ce lemme se déduit du théorème classique suivant (voir par exemple 9.7.11 de [EMT04]) qui est un corollaire de Hahn-Banach.

Théorème 1.6.18. *Soit B un espace de Banach, $C \subseteq B^*$ un sous-ensemble convexe, $*$-faiblement fermé. Si $\psi \in B^* \setminus C$, alors il existe $x \in X$ tel que*

$$\psi(x) > \sup_{\psi\in C} \psi(x).$$

Preuve du Lemme 1.6.17. On fait la preuve en trois étapes.

(1) On commence par observer que si $C = \overline{\{\varphi_n\}_{n\geq 1}}^{*-f}$, alors

$$\sup_{n\geq 1} \varphi_n(x) = \sup_{\varphi\in C} \varphi(x) \quad \forall\, x \in B.$$

En effet, l'application

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{ev}_x : & B^* & \to & \mathbb{R} \\ & \varphi & \mapsto & \varphi(x) \end{array}$$

est continue pour tout $x \in X$ lorsqu'on munit B^* de la topologie faible-$*$ (celle-ci est la moins fine qui rende toutes ces applications évaluations continues).

(2) Ensuite, on montre que

$$\psi \in B^*_{\leq 1} \setminus C \iff \|\psi\| \leq 1 \text{ et il existe } m \geq 1 \text{ t.q } \psi(x_m) > \sup_{n\geq 1} \varphi_n(x_m).$$

Comme il découle du Théorème 1.6.18 et du point (1) que

$$\psi \in B^*_{\leq 1} \setminus C \iff \|\psi\| \leq 1 \text{ et il existe } x \in B \text{ t.q } \psi(x) > \sup_{n\geq 1} \varphi_n(x),$$

il suffit de montrer que si $\|\psi\| \leq 1$, alors

$$\text{il existe } x \in B \text{ t.q. } \psi(x) > \sup_{n\geq 1} \varphi_n(x) \iff \text{il existe } m \geq 1 \text{ t.q } \psi(x_m) > \sup_{n\geq 1} \varphi_n(x_m).$$

Soit donc $x \in B$ tel que $\psi(x) > \sup_{n\geq 1} \varphi_n(x)$. Posons $a := \psi(x) - \sup_{n\geq 1} \varphi_n(x) > 0$ et choisissons $m \geq 1$ tel que $\|x - x_m\| < a/2$. Alors

$$\begin{aligned}\psi(x_m) &= \psi(x) - \underbrace{\psi(x - x_m)}_{\leq \|\psi\|\cdot\|x - x_m\|} > \psi(x) - a/2 = \sup_{n\geq 1} \varphi_n(x) + a/2 \\ &= \sup_{n\geq 1} \underbrace{\varphi_n(x_m) - \varphi_n(x - x_m)}_{> \varphi_n(x_m) - a/2} + a/2 \geq \sup_{n\geq 1} \varphi_n(x_m).\end{aligned}$$

(3) Finalement, il découle du point (2) que

$$\begin{aligned}\overline{\{\varphi_n\}_{n\geq 1}}^{*-f} = B^*_{\leq 1} &\iff \psi(x_m) \leq \sup_{n\geq 1} \varphi_n(x_m)\ \forall\ m \geq 1 \text{ et } \psi \in B^*_{\leq 1} \\ &\iff \sup_{\psi \in B^*_{\leq 1}} \psi(x_m) = \sup_{n\geq 1} \varphi_n(x_m)\ \forall\ m \geq 1.\end{aligned}$$

Il ne reste donc plus qu'à montrer

$$\sup_{\psi \in B^*_{\leq 1}} \psi(x) = \|x\| \text{ pour tout } x \in B.$$

Il est clair que $\psi(x) \leq \|\psi\| \cdot \|x\| \leq \|x\|$ pour tout $x \in B$ et $\psi \in B^*_{\leq 1}$. Soit maintenant $x \in B$. En appliquant (la version adaptée de) Hahn-Banach à x et au sous-espace vectoriel fermé $\{0\}$ de B, on obtient l'existence de ψ tel que $\|\psi\| = 1$ et $\psi(x) = d(x, \{0\}) = \|x\|$. □

Théorème 1.6.19. *Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ un espace de probabilité standard et $(\Omega, B_\bullet)$ un champ borélien séparable d'espaces de Banach. On note $(\Omega, B^*_{\bullet,\leq 1})$ le champs des boules unités des duaux, i.e. $\left(B^*_{\bullet,\leq 1}\right)_\omega$ est la boule unité de B^*_ω pour tout $\omega \in \Omega$. Alors il existe un borélien Ω' de mesure 1 tel que*

$$\widetilde{\mathscr{L}^\infty}(\Omega', B^*_\bullet) \cap \mathscr{S}(\Omega', B^*_{\bullet,\leq 1})$$

soit une structure borélienne de champ d'espaces métrisables pour le champ $(\Omega', B^*_{\bullet,\leq 1})$.

Preuve. On décompose la preuve en plusieurs étapes.
(1) Soit B un espace de Banach séparable, $B^*_{\leq 1}$ la boule unité du dual muni de la topologie faible-$*$ et $\{x_n\}_{n\geq 1}$ une partie dénombrable dense dans B. Alors $d^* : B^*_{\leq 1} \times B^*_{\leq 1} \to \mathbb{R}$ définie par

$$d^*(\varphi, \eta) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{2^n} \frac{|\varphi(x_n) - \eta(x_n)|}{\|x_n\|}$$

est une métrique qui induit la topologie faible-$*$.
Puisque $|(\varphi - \eta)(\frac{x_n}{\|x_n\|})| \leq \|\varphi - \eta\| \leq 2$ on a $d^*(\varphi, \eta) \leq 2$ pour tout $\varphi, \eta \in B^*_{\leq 1}$. De plus, $d^*(\varphi, \eta) = 0$ entraîne $\varphi(x_n) = \eta(x_n)$ pour tout $n \geq 1$ et donc $\varphi = \eta$ puisque φ, η sont continues et $\{x_n\}_{n\geq 1}$ est dense. Réciproquement, si $\varphi = \eta$, alors $d^*(\varphi, \eta) = 0$. L'inégalité du triangle découle de celle pour la valeur absolue. Montrons maintenant que la topologie définie par d^* est moins fine que la topologie faible-$*$. Il faut donc montrer que

$$id : (B^*_{\leq 1}, \text{faible-}*) \longrightarrow (B^*_{\leq 1}, d^*)$$

est continue. Ceci est le cas car si $\varphi \in B^*_{\leq 1}$, $\varepsilon > 0$ on a

$$B_{d^*}(\varphi, \varepsilon) \supseteq V\Big(\varphi, \Big\{\frac{x_1}{\|x_1\|}, \ldots, \frac{x_N}{\|x_N\|}\Big\}, \frac{\varepsilon}{2}\Big),$$

où $N \geq 1$ est tel que $2\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \frac{\varepsilon}{2}$. Enfin, puisque, par le Théorème de Banach-Alaoglu, $B^*_{\leq 1}$ est $*$-faiblement compacte et que $(B^*_{\leq 1}, d^*)$ est séparé, l'application id est un homéomorphisme et les topologies coïncident[30].
(2) Fixons $\mathscr{D} = \{x^n_\bullet\}_{n\geq 1} \subseteq \mathscr{L}(\Omega, B_\bullet)$ une partie fondamentale. Par le point (1), on peut définir pour chaque $\omega \in \Omega$ une métrique sur $B^*_{\omega,\leq 1}$ en posant

$$d^*_\omega(\varphi, \psi) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \Big|(\varphi - \psi)\Big(\frac{x^k_\omega}{\|x^k_\omega\|_\omega}\Big)\Big|$$

Pour tout $\varphi_\bullet, \psi_\bullet \in \widetilde{\mathscr{L}^\infty}(\Omega, B^*_{\bullet,\leq 1})$ la fonction

$$d^*_\bullet(\varphi_\bullet, \psi_\bullet) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \Big|(\varphi_\bullet - \psi_\bullet)\Big(\frac{x^k_\bullet}{\|x^k_\bullet\|_\bullet}\Big)\Big|$$

est borélienne comme limite ponctuelle de fonctions boréliennes.
Maintenant qu'on a trouvé une famille de métriques compatible, il s'agit de trouver une famille fondamentale.
(3) On prouve qu'il existe $\{\varphi^n_\bullet\}_{n\geq 1} \subseteq \mathscr{L}(\Omega, B^*_\bullet, \leq 1)$ tel que $\overline{\{\varphi_n\}_{n\geq 1}}^{*-f} = B^*_{\omega,\leq 1}$ pour presque tout $\omega \in \Omega$. Soit $\{\Phi_n\}_{n\geq 1} \subseteq (L^1(\Omega, B_\bullet))^*_{\leq 1}$ $*$-faiblement dense et clôt par combinaisons convexes rationnelles. Considérons $\mathscr{F} = \{\varphi^n_\bullet\}_{n\geq 1} \subseteq \mathscr{L}^\infty(\Omega, B^*_{\bullet,\leq 1})$ tel que[31]

$$\Phi_n([x_\bullet]) = \int_\Omega \varphi^n_\bullet(x^m_\bullet) \quad \forall\ x_\bullet \in \mathscr{L}^1(\Omega, B_\bullet).$$

On observe que
- $\overline{\{\varphi_n\}_{n\geq 1}}^{*-f} = (L^1(\Omega, B_\bullet))^*_{\leq 1}$
- $\overline{\mathscr{F}_\omega}^{*-f}$ est convexe pour tout $\omega \in \Omega$.

D'autre part, il est facile de construire[32] $\mathscr{D} = \{x^m_\bullet\}_{m\geq 1} \subseteq \mathscr{L}^1(\Omega, B_\bullet)$ tel que
- $[\mathscr{D}]$ est dense dans $L^1(\Omega, B_\bullet)$
- $\mathscr{D}_\omega$ est dense dans B_ω pour tout $\omega \in \Omega$.

En appliquant le Lemme 1.6.17 à $\{\Phi_n\}_{n\geq 1}$, on obtient que

$$\sup_{n\geq 1} \Phi_n([x^m_\bullet]) = \sup_{n\geq 1} \int_\Omega \varphi^n_\bullet(x^m_\bullet) = \|[x^m_\bullet]\|_1 = \int_\Omega \|x^m_\bullet\|_\bullet \text{ pour tout } m \geq 1.$$

En réappliquant le Lemme 1.6.17, mais cette fois à $\{\varphi^n_\omega\}_{n\geq 1}$, on obtient que

$$\{\omega \in \Omega \mid \overline{\{\varphi_n\}_{n\geq 1}}^{*-f} \neq B^*_{\omega,\leq 1}\} = \bigcup_{m\geq 1} \{\omega \in \Omega \mid \sup_{n\geq 1} \varphi^n_\omega(x^m_\omega) < \|x^m_\omega\|_\omega\}.$$

Supposons par l'absurde que cet ensemble n'est pas de mesure nulle. Alors il existe $m \geq 1$ et $\varepsilon > 0$ tel que

$$\Omega' := \{\omega \in \Omega \mid \sup_{n\geq 1} \varphi^n_\omega(x^m_\omega) + \varepsilon \leq \|x^m_\omega\|_\omega\}$$

30. En fait $B^*_{\leq 1}$ munie de la topologie faible-$*$ est métrisable si et seulement si B est séparable. En effet, si $(B^*_{\leq 1}, \text{faible-}*)$ est un compact métrisable, alors $\mathscr{C}(B^*_{\leq 1}, \text{faible-}*)$ est séparable pour la norme $\|\ \|_\infty$ (Stone-Weierstrass). On définit l'application

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{ev}: & B & \longrightarrow & \mathscr{C}(B^*_{\leq 1}, \text{faible-}*) \\ & x & \longmapsto & \mathrm{ev}_x \end{array}$$

où $\mathrm{ev}_x : (B^*_{\leq 1}, \text{faible-}*) \to \mathbb{R}$, $\mathrm{ev}_x(f) = f(x)$ est bien continue et est aussi linéaire. Cette application ev est une isométrie et donc B est séparable comme sous-espace d'un espace métrique séparable. Par contre, en général la topologie faible-$*$ sur B^* n'est pas métrisable même si B est séparable. Par exemple B^* n'est pas métrisable si B est de dimension infinie.

31. De telles sections existent par la Proposition 1.6.15.

32. Voir par exemple la preuve du Lemme A.2.2.

est de mesure > 0. Mais alors,

$$\begin{aligned}\sup_{n\geq 1}\int_\Omega \varphi^n_\bullet(x^m_\bullet) \leq \int_\Omega \sup_{n\geq 1}\varphi^n_\bullet(x^m_\bullet) &= \int_{\Omega\setminus\Omega'}\sup_{n\geq 1}\varphi^n_\bullet(x^m_\bullet) + \int_{\Omega'}\sup_{n\geq 1}\varphi^n_\bullet(x^m_\bullet)\\ &\leq \int_{\Omega\setminus\Omega'}\|x^m_\bullet\|_\bullet + \int_{\Omega'}(\|x^m_\bullet\|_\bullet - \varepsilon) = \|[x^m_\bullet]\|_1 - \mu(\Omega')\cdot\varepsilon\\ &< \|[x^m_\bullet]\|_1,\end{aligned}$$

d'où une contradiction.
(4) On a maintenant le matériel nécessaire pour conclure. Le point (1) montre qu'il existe une famille de métriques compatible $d^*_\bullet$ sur $B^*_{\bullet,\leq 1}$. Le point (3) montre qu'il existe Ω' de mesure 1 et $\mathscr{D} \subseteq \mathscr{L}(\Omega, B^*_\bullet) \cap \mathscr{S}(\Omega, B^*_{\bullet,\leq 1})$ telle que $\mathscr{D}_\omega$ est dense dans $B^*_{\omega,\leq 1}$ pour tout $\omega \in \Omega'$. Comme

$$\mathscr{L}(\Omega', B^*_\bullet) \cap \mathscr{S}(\Omega', B^*_{\bullet,\leq 1})$$

est clôt par limite ponctuelle et recollement dénombrable, le Lemme 1.1.6 permet de conclure. □

Parmi les sous-champs $(\Omega', A_\bullet)$ du champ borélien des boules unités des duaux, il en existe certains qui vont particulièrement nous intéresser plus tard : ceux qui satisfont que A_ω est convexe et $*$-faiblement compact (c'est-à-dire $*$-faiblement fermés) pour tout $\omega \in \Omega'$ [33].

Lemme 1.6.20 ($\simeq$[Zim78], Proposition 2.2). *Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ un espace de probabilité standard, $(\Omega, B_\bullet)$ un champ borélien séparable d'espaces de Banach et Ω' un borélien de mesure 1 tel que $(\Omega', B^*_{\bullet,\leq 1})$ soit un champ borélien d'espaces métriques. Soit $(\Omega', C_\bullet)$ un sous-champ borélien de $(\Omega', B^*_{\bullet,\leq 1})$ tel que C_ω est convexe non-vide et $*$-faiblement compact pour tout $\omega \in \Omega'$. Alors, on a*

$$L(\Omega, C_\bullet) := \mathscr{L}(\Omega', C_\bullet)/_{=_{p.p.}} = \{[\varphi_\bullet] \in \widetilde{L}^\infty(\Omega, B^*_\bullet) \mid \varphi_\omega \in C_\omega \textit{ pour presque tout } \omega \in \Omega\}$$

et c'est un sous-ensemble convexe et $*$-faiblement fermé de $L^\infty(\Omega, B^*_\bullet)_{\leq 1}$.

Preuve. Choisissons $\mathscr{D} = \{\varphi^n_\bullet\}_{n\geq 1}$ une famille fondamentale du sous-champ borélien $(\Omega', C_\bullet)$, puis vérifions l'égalité.
[$\subseteq$] Soit $[\varphi_\bullet]_{L(\Omega,C_\bullet)} \in L(\Omega, C_\bullet)$. Alors $\varphi_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega', C_\bullet) = \mathscr{L}(\Omega', B^*_{\bullet,\leq 1}) \cap \mathscr{S}(\Omega', C_\bullet)$. Donc $[\varphi_\bullet]_{\widetilde{L}^\infty(\Omega,B^*_\bullet)}$ satisfait que $\varphi_\omega \in C_\omega$ pour presque tout $\omega \in \Omega$ (c'est-à-dire pour presque tout $\omega \in \Omega$ pour un représentant quelconque de la classe).
[$\supseteq$] Soit $[\varphi_\bullet]_{\widetilde{L}^\infty(\Omega,B^*_\bullet)}$ telle que $\varphi_\omega \in C_\omega$ pour presque tout $\omega \in \Omega$. Il s'agit de trouver un représentant $\psi_\bullet$ de $[\varphi_\bullet]_{\widetilde{L}^\infty(\Omega,B^*_\bullet)}$ tel que $\psi_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega', C_\bullet)$. Pour cela, il suffit de choisir un élément arbitraire $\psi^0_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega, C_\bullet)$ et de recoller de manière borélienne

$$\psi_\omega := \begin{cases}\varphi_\omega & \text{si } \varphi_\omega \in C_\omega\\ \psi^0_\omega & \text{sinon.}\end{cases}$$

Montrons maintenant que $L(\Omega, C_\bullet)$ est $*$-faiblement fermé comme partie du dual de $L^1(\Omega, B_\bullet)$ (la convexités est évidente). Pour ce faire, on se donne $\{[\varphi^n_\bullet]\}_{n\geq 1} \subseteq L(\Omega, C_\bullet)$ tel que $\overline{\{\varphi^n_\omega\}_{n\geq 1}}^{*-f} = C_\omega$ pour tout $\omega \in \Omega'$ et $\{x_\bullet\}_{n\geq 1} \subseteq \mathscr{L}^1(\Omega, B_\bullet)$ une famille fondamentale de la structure borélienne métrique de $(\Omega, B_\bullet)$. Supposons maintenant qu'on ait une suite $\{\Psi_n\}_{n\geq 1} \subseteq L(\Omega, C_\bullet)$ telle que $\Psi_n \to \Psi$ et notons $\psi^n_\bullet$ et $\psi_\bullet$ les sections associées. Si $\Psi \notin L(\Omega, C_\bullet)$, alors il existe $\Omega_0 \in \mathscr{A}$ un borélien de mesure positive (qu'on peut supposer dans Ω') tel que $\psi_\omega \notin C_\omega$ pour tout $\omega \in \Omega_0$. Par le critère du Lemme 1.6.17, on obtient que pour tout $\omega \in \Omega_0$, il existe $m \geq 1$ tel que $\sup_{n\geq 1}\varphi^n_\omega(x^m_\omega) < \psi_\omega(x^m_\omega)$. Par

33. Voir par exemple la définition de sous-champ de convexes $*$-faiblement compacts de [AR00] p.97.

dénombrabilité, on peut supposer qu'il existe Ω'_0 un borélien de mesure positive, $m \geq 1$ et $\varepsilon > 0$ tel que

$$\sup_{n\geq 1} \psi^n_\omega(x^m_\omega) \leq \sup_{n\geq 1} \varphi^n_\omega(x^m_\omega) < \psi_\omega(x^m_\omega) - \varepsilon \text{ pour tout } \omega \in \Omega'_0.$$

On peut définir une section $x_\bullet \in \mathscr{L}^1(\Omega, B_\bullet)$ par $x_\bullet\,|_{\Omega'_0} := x^m_\bullet$ et $x_\bullet\,|_{\Omega\setminus\Omega'_0} = 0$ qui satisfait, pour tout $n \geq 1$, que

$$\Psi([x_\bullet]) = \int_{\Omega'_0} \psi_\omega(x^m_\omega) \geq \varepsilon + \int_{\Omega'_0} \psi^n_\omega(x_\omega) = \Psi^n([x_\bullet]).$$

Mais alors $\Psi^n([x_\bullet]) \nrightarrow \Psi([x_\bullet])$ ce qui contredit le fait que $\Psi^n \overset{*-\mathrm{f}}{\to} \Psi$. □

1.6.3 Trivialisation

Voici un théorème classique, dont on redonne la preuve dans le but de l'adapter aux champs séparables d'espaces de Banach.

Théorème 1.6.21 (Banach-Mazur). *Soit B un espace de Banach séparable. Alors il existe un plongement isométrique de B dans $\mathscr{C}([0,1])$.*

Preuve. Considérons la boule unité du dual, munie de la topologie faible-$*$, et l'application

$$\begin{array}{rccl} \mathrm{ev}: & B & \hookrightarrow & \mathscr{C}(B^*_{\leq 1}) \\ & x & \mapsto & [\mathrm{ev}(x) : \varphi \mapsto \varphi(x)] \end{array}$$

qui est une application isométrique (donc injective) puisque $\|x\| = \sup_{\varphi\in B^*_{\leq 1}} |\varphi(x)| = \|\mathrm{ev}(x)\|_\infty$ (cette égalité est un corollaire classique de Hahn-Banach). D'autre part, on sait, puisque $B^*_{\leq 1}$ est un compact métrisable, qu'il existe une surjection continue $\pi : \Sigma \to B^*_{\leq 1}$, où Σ est l'espace de Cantor (voir la Section 1.8.1). Cette application induit une application isométrique

$$\begin{array}{rccl} \widetilde{\pi}: & \mathscr{C}(B^*_{\leq 1}) & \hookrightarrow & \mathscr{C}(\Sigma) \\ & f & \mapsto & f \circ \pi. \end{array}$$

Et il existe un plongement isométrique $\mathscr{C}(\Sigma) \hookrightarrow \mathscr{C}([0,1])$. □

On peut adapter ce résultat et ainsi construire une trivialisation des champs séparables boréliens d'espaces de Banach. Mais on aura besoin de la version pour les champs boréliens de la surjection de l'espace de Cantor Σ sur le compact K qui sera démontrée dans la Section 1.8.1.

Lemme 1.6.22. *Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ un espace de probabilité standard et $(\Omega, B_\bullet)$ un champ borélien séparable d'espaces de Banach. Alors il existe un borélien $\Omega' \subseteq \Omega$ de mesure pleine et un morphisme compatible linéaire et isométrique de $(\Omega', B_\bullet)$ dans le champ trivial $\big(\Omega', \mathscr{C}([0,1])\big)$.*

Preuve. Par le Théorème 1.6.19, il existe Ω' de mesure 1 tel que $\big(\Omega', (B^*_{\bullet,\leq 1}, d^*_\bullet)\big)$ soit un champ borélien d'espaces métriques compacts. Vérifions que $\{\mathrm{ev}_\omega : B_\omega \to \mathscr{C}(B^*_{\omega,\leq 1})\}_{\omega\in\Omega'}$ est un morphisme compatible du champ borélien $(\Omega', B_\bullet)$ dans le champ borélien[34] $\big(\Omega', \mathscr{C}(B^*_{\bullet,\leq 1})\big)$.

$$\begin{array}{cl} & \mathrm{ev}_\bullet \text{ est un morphisme compatible} \\ \overset{\text{déf.}}{\Longleftrightarrow} & \mathrm{ev}_\bullet(x_\bullet) \in \mathscr{L}(\Omega', \mathscr{C}(B^*_{\bullet,\leq 1})) \quad \forall\, x_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega', B_\bullet) \\ \overset{\text{déf. } \mathscr{L}(\Omega', \mathscr{C}(B^*_{\bullet,\leq 1}))}{\Longleftrightarrow} & \big(\mathrm{ev}_\bullet(x_\bullet)\big)(\varphi_\bullet) \in \mathscr{L}(\Omega', \mathbb{R}) \quad \forall\, \varphi_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega', B^*_{\bullet,\leq 1}) \text{ et } x_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega', B_\bullet) \\ \overset{\text{déf ev}_\bullet}{\Longleftrightarrow} & \varphi_\bullet(x_\bullet) \in \mathscr{L}(\Omega', \mathbb{R}) \quad \forall\, \varphi_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega', B^*_{\bullet,\leq 1}) \text{ et } x_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega', B_\bullet). \end{array}$$

34. Théorème 1.5.2.

La dernière assertion est vrai par définition de $\mathscr{L}(\Omega', B^*_\bullet)$. Au Lemme 1.8.3, on montre qu'il existe un morphisme compatible surjectif et continu $\pi_\bullet$ du champ trivial (Ω', Σ) dans $(\Omega', B^*_{\bullet,\leq 1})$. Vérifions que le morphisme isométrique

$$\widetilde{\pi}_\bullet : (\Omega', \mathscr{C}(B^*_{\bullet,\leq 1})) \hookrightarrow (\Omega', \mathscr{C}(\Sigma))$$

est compatible. Il faut vérifier que $\widetilde{\pi}_\bullet(f_\bullet) \in \mathscr{L}(\Omega', \mathscr{C}(\Sigma))$ pour tout $f_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega', \mathscr{C}(B^*_{\bullet,\leq 1}))$, c'est-à-dire que $\widetilde{\pi}_\bullet(f_\bullet)(\sigma_\bullet) \in \mathscr{L}(\Omega', \mathbb{R})$ pour tout $\sigma_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega', \Sigma)$. Mais

$$\widetilde{\pi}_\bullet(f_\bullet)(\sigma_\bullet) = f_\bullet(\underbrace{\pi_\bullet(\sigma_\bullet)}_{\in \mathscr{L}(\Omega', B^*_{\bullet,\leq 1})}) \in \mathscr{L}(\Omega', \mathbb{R}) \text{ par définition de } \mathscr{L}(\Omega', \mathscr{C}(B^*_{\bullet,\leq 1})).$$

□

1.7 Champs d'espaces de Hilbert

Un champ d'espaces de Hilbert $(\Omega, H_\bullet)$ sur un ensemble Ω est la donnée d'une famille d'espaces de Hilbert $\{(H_\omega, < \cdot, \cdot >_\omega)\}_{\omega\in\Omega}$. Une notion classique due à Dixmier, dont la Définition 1.1.3 est directement inspirée, est celle de champ mesurable d'espaces de Hilbert ([Dix69], p. 142). Dans notre cas, on a remplacé mesurable par borélien. Ceci ne pose pas de difficultés puisque les résultats cités restent valables (voir Remarque 3 de [Dix69], p.144 et la remarque p.146).

Définition 1.7.1. *Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace borélien. On dit que $(\Omega, H_\bullet)$ est un champ borélien (séparable) d'espaces de Hilbert réels sur Ω si l'on s'est donné un sous-espace vectoriel $\mathscr{V}(\Omega, H_\bullet)$ de $\mathscr{S}(\Omega, H_\bullet)$ tel que*

(i) Pour tout $x_\bullet \in \mathscr{V}(\Omega, H_\bullet)$ l'application $\|x_\bullet\|_\bullet : \omega \mapsto \|x_\omega\|_\omega$ est borélienne.

(ii) Si $y_\bullet \in \mathscr{S}(\Omega, H_\bullet)$ est telle que $< y_\bullet, x_\bullet >_\bullet : \omega \mapsto < y_\omega, x_\omega >_\omega$ est borélienne pour tout $x_\bullet \in \mathscr{V}(\Omega, H_\bullet)$, alors $y_\bullet \in \mathscr{V}(\Omega, H_\bullet)$.

(iii) Il existe une partie dénombrable $\mathscr{E} \subseteq \mathscr{V}(\Omega, H_\bullet)$ telle que la famille $\mathscr{E}_\omega := \{x_\omega\}_{x_\bullet\in\mathscr{E}}$ soit totale dans H_ω (i.e. $\overline{\langle \mathscr{E}_\omega \rangle} = H_\omega$) pour tout $\omega \in \Omega$.

Les éléments de $\mathscr{V}(\Omega, H_\bullet)$ sont appelés les sections boréliennes (ou les champs de vecteurs boréliens) de $(\Omega, H_\bullet)$. L'espace vectoriel $\mathscr{V}(\Omega, H_\bullet)$ est appelé la structure borélienne (hilbertienne) du champ. Un ensemble $\mathscr{E}$ satisfaisant la condition (iii) est appelé une famille fondamentale de la structure borélienne $\mathscr{V}(\Omega, H_\bullet)$.

On trouve dans [Dix69] (p. 145) la proposition suivante qui est un analogue pour les champs d'espaces de Hilbert du Lemme 1.1.9.

Proposition 1.7.2. *Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace borélien, $(\Omega, H_\bullet)$ un champ d'espace de Hilbert et $\mathscr{E} \subseteq \mathscr{S}(\Omega, H_\bullet)$ une partie dénombrable de champ de vecteurs satisfaisant les conditions*

(i) $< x_\bullet, y_\bullet >_\bullet$ est borélienne pour tout $x_\bullet, y_\bullet \in \mathscr{E}$

(ii) $\mathscr{E}_\omega$ est une partie totale pour tout $\omega \in \Omega$.

Alors il existe une unique structure borélienne sur $(\Omega, H_\bullet)$ qui contienne $\mathscr{E}$. On la note $\mathscr{V}_\mathscr{E}(\Omega, H_\bullet)$.

Comme pour les champs d'espaces de Banach, on peut se demander si cette définition est consistante avec les celle de champ borélien d'espaces métriques. L'existence du produit scalaire permet de renforcer le résultat par rapport au cas des champs boréliens séparables d'espaces de Banach.

Lemme 1.7.3. *Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace borélien et $(\Omega, H_\bullet)$ un champ d'espaces de Hilbert.*

(i) Si $\mathscr{V}(\Omega, H_\bullet) \subseteq \mathscr{S}(\Omega, H_\bullet)$ est une structure borélienne hilbertienne sur $(\Omega, H_\bullet)$, alors $\mathscr{V}(\Omega, H_\bullet)$ est une structure borélienne métrique sur $(\Omega, H_\bullet)$

(ii) Réciproquement, si $\mathscr{L}(\Omega, H_\bullet)$ est une structure borélienne métrique sur $(\Omega, H_\bullet)$ telle que $0_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega, H_\bullet)$, alors $\mathscr{L}(\Omega, H_\bullet)$ est une structure borélienne hilbertienne sur $(\Omega, H_\bullet)$.

Preuve. (i) Par 1.7.1 (i) et le fait que $\mathscr{V}(\Omega, H_\bullet)$ soit un sous-espace vectoriel, on a bien que

$$d_\bullet(x_\bullet, y_\bullet) \text{ est borélienne pour tout } x_\bullet, y_\bullet \in \mathscr{V}(\Omega, H_\bullet)$$

et donc 1.1.3 (i) est vérifiée. Poser $\mathscr{D} = \langle \mathscr{E} \rangle_{\mathbb{Q}}$ définit une famille fondamentale au sens de 1.1.3 (iii) (pour la densité voir le Lemme 1.6.2 en cas de doute). Soit $y_\bullet \in \mathscr{S}(\Omega, H_\bullet)$ tel que $d_\bullet(y_\bullet, x_\bullet)$ est borélienne pour tout $x_\bullet \in \mathscr{V}(\Omega, H_\bullet)$. Alors

$$< y_\bullet, x_\bullet >_\bullet = \frac{1}{2}\left(\|x_\bullet\|_\bullet^2 + \|y_\bullet\|_\bullet^2 - \|x_\bullet - y_\bullet\|_\bullet^2\right)$$

est borélienne pour tout $x_\bullet \in \mathscr{V}(\Omega, H_\bullet)$ puisque $\|x_\bullet\|_\bullet$ l'est par 1.7.1 (i), $\|y_\bullet\|_\bullet = d_\bullet(0_\bullet, y_\bullet)$ et $\|x_\bullet - y_\bullet\|_\bullet = d_\bullet(x_\bullet, y_\bullet)$ le sont par hypothèse sur $y_\bullet$ et puisque $0_\bullet \in \mathscr{V}(\Omega, H_\bullet)$.

(ii) Le point 1.7.1 (i) est satisfait puisque $\|x_\bullet\|_\bullet = d_\bullet(0_\bullet, x_\bullet)$ est borélienne pour tout $x_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega, H_\bullet)$ puisque $0_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega, H_\bullet)$ et par 1.1.3 (i). Observons que

$$\begin{aligned} < x_\bullet, y_\bullet >_\bullet &= \frac{1}{2}\left(\|x_\bullet\|_\bullet^2 + \|y_\bullet\|_\bullet^2 - \|x_\bullet - y_\bullet\|_\bullet^2\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(d_\bullet(0_\bullet, x_\bullet)^2 + d_\bullet(0_\bullet, y_\bullet)^2 - d_\bullet(x_\bullet, y_\bullet)^2\right) \end{aligned}$$

est borélienne pour tout $x_\bullet, y_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega, H_\bullet)$. Ainsi, si $x_\bullet, y_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega, H_\bullet)$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, on a que

$$d_\bullet^2(\alpha x_\bullet + \beta y_\bullet, z_\bullet) = \|z_\bullet\|_\bullet^2 + \alpha^2\|x_\bullet\|_\bullet^2 + \beta^2\|y_\bullet\|_\bullet^2 - 2\alpha < x_\bullet, z_\bullet >_\bullet - 2\beta < y_\bullet, z_\bullet >_\bullet - 2\alpha\beta < x_\bullet, y_\bullet >_\bullet$$

est borélienne pour tout $z_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega, H_\bullet)$, c'est-à-dire que $\mathscr{L}(\Omega, H_\bullet)$ est un sous-espace vectoriel par 1.1.3 (ii).
Si $\mathscr{D}$ est une famille fondamentale pour la structure borélienne métrique, alors $\mathscr{D}$ satisfait 1.7.1 (iii). Il reste 1.7.1 (ii) à montrer. Soit donc $y_\bullet \in \mathscr{S}(\Omega, H_\bullet)$ tel que $< y_\bullet, x_\bullet >_\bullet$ est borélienne pour tout $x_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega, H_\bullet)$. Observons que le sous-champ généralisé $H_\bullet \setminus \{0\}$ défini par $(H_\bullet \setminus \{0\})_\omega := H_\omega \setminus \{0\}$ est un sous-champ généralisé borélien d'ouverts[35] de $H_\bullet$. Ainsi, si on note $\Omega' = \{\omega \in \Omega \mid \dim(H_\omega) = 0\}$, il existe $\mathscr{D}' \subseteq \mathscr{L}(\Omega', H_\bullet)$ une famille fondamentale du sous-champ $(\Omega', H_\bullet \setminus \{0\})$. Alors, par Cauchy-Schwartz,

$$\|y\|_\omega^2 = \begin{cases} \sup_{x \in \mathscr{D}'_\omega} \frac{|<y,x>_\omega|}{\|x\|_\omega} & \text{si } \omega \in \Omega' \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et donc $\|y_\bullet\|_\bullet$ est borélienne pour tout $y_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega, H_\bullet)$. Ainsi,

$$d_\bullet(x_\bullet, y_\bullet) = \|x_\bullet - y_\bullet\|_\bullet = \sqrt{\|x_\bullet\|^2 + \|y_\bullet\|^2 - 2 < x_\bullet, y_\bullet >_\bullet}$$

est borélienne pour tout $x_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega, H_\bullet)$ et donc $y_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega, H_\bullet)$ par 1.1.3 (ii). □

Remarque 1.7.4. Comme pour les champs d'espaces de Banach, on se permet de noter $\mathscr{L}(\Omega, H_\bullet)$ au lieu de $\mathscr{V}(\Omega, H)$.

Dixmier montre l'analogue du Lemme 1.6.5 (techniquement c'est plutôt nous qui montrons l'analogue de son lemme). La preuve est à peu près identique.

35. Remarque 1.2.24 (4).

Lemme 1.7.5 (Proposition 1, p. 144 de [Dix69]). *Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace borélien et $(\Omega, H_\bullet)$ un champ borélien séparable d'espaces de Hilbert. Alors la fonction*

$$\begin{array}{rccc} |\dim H_\bullet| : & \Omega & \to & \mathbb{N} \cup \{\infty\} \\ & \omega & \mapsto & \dim(H_\omega) \end{array}$$

est borélienne. Notons $\Omega_n := \{\omega \in \Omega \mid \dim(B_\omega) = n\}$ et $\Omega_{infini} := \Omega \setminus (\cup_{n\geq 1}\Omega_n)$. Alors il existe une famille fondamentale $\mathscr{F}' = \{z^n_\bullet\}_{n\geq 1}$ de la structure borélienne hilbertienne telle que

- *Pour tout $\omega \in \Omega_n$, alors $\{z^1_\omega, \ldots, z^n_\omega\}$ forme une base orthonormale de B_ω et $z^i_\omega = 0$ pour tout $i > n$.*
- *Pour tout $\omega \in \Omega_\infty$, alors $\{z^n_\omega\}_{n\geq 1}$ est une base orthonormale de B_ω.*

On note $\ell^2(\mathbb{N})$ l'espace de Hilbert séparable universel donné par la complétion de $\bigoplus_{n\geq 1} \mathbb{R}$, $H_n := \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{R} \subseteq \ell^2(\mathbb{N})$ pour $n \geq 1$ et $H_0 := \{0\} \subseteq \ell^2(\mathbb{N})$. Notons également $e_n = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots) \in \ell^2(\mathbb{N})$ où le 1 apparaît à la n-ième place.

Corollaire 1.7.6 (Trivialisation). *Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace borélien et $(\Omega, H_\bullet)$ un champ borélien d'espaces de Hilbert. Alors il existe $\varphi_\bullet : (\Omega, H_\bullet) \to (\Omega, \ell^2(\mathbb{N}))$ un morphisme de champs compatible, linéaire et isométrique. De plus, on peut choisir $\varphi_\bullet$ de telle sorte que si $\Omega_n = \{\omega \in \Omega \mid \dim(H_\omega) = n\}$ et $\Omega_\infty = \{\omega \in \Omega \mid \dim(H_\omega) = \infty\}$, alors $\varphi\,|_{\Omega_n} : (\Omega_n, H_\bullet) \to (\Omega_n, H_n)$ et φ_ω est un isomorphisme pour tout $\omega \in \Omega_\infty$.*

Preuve. On se fixe une famille $\{z^n_\bullet\}_{n\geq 1}$ comme dans l'énoncé du Lemme 1.7.5. Pour tout $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, on définit $\varphi_\bullet\,|_{\Omega_n}$ en posant, pour tout $i \geq 1$,

$$\begin{array}{rccl} \varphi_\omega : & H_\omega & \to & \ell^2(\mathbb{N}) \\ & z^i_\omega & \mapsto & \varphi_\omega(z^i_\omega) = \begin{cases} e_i & \text{si } 1 \leq i \leq n \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \end{array}$$

qu'on étend ensuite linéairement et isométriquement à tout l'espace H_ω. □

1.8 Champs d'espaces métriques compacts

1.8.1 Trivialisation

On va prouver le résultat utilisé dans le lemme sur la trivialisation des champs boréliens d'espaces de Banach (1.6.22).
On rappelle d'abord la définition de l'espace de Cantor. On considère l'intervalle $[0, 1]$. L'ensemble de Cantor est défini géométriquement par un procédé consistant en une suppression successive d'intervalles ouverts.
Soit $J_{1,1}$ l'intervalle ouvert de longueur $1/3$ centré en $1/2$. L'ensemble $\Sigma_1 = [0, 1] \backslash J_{1,1}$ est formé de deux intervalles fermés $I_{1,1}$ et $I_{1,2}$ chacun de longueur $1/3$. L'étape suivante consiste à répéter ce qui précède en supprimant de $I_{1,1}$ et $I_{1,2}$ les intervalles ouverts $J_{2,1}$ et $J_{2,2}$ de longueur $1/9$ centrés en leur milieu. L'ensemble $\Sigma_2 = [0, 1] \backslash (J_{1,1} \cup J_{2,1} \cup J_{2,2})$ est constitué de quatre intervalles fermés de longueur $1/9$. A la k-ème étape, l'ensemble $\Sigma_k = [0, 1] \backslash \bigcup_{\ell=1}^k \bigcup_{i=1}^{2^{\ell-1}} J_{\ell,i}$ est formé de 2^k intervalles fermés de longueur $1/3^k$ chacun. On peut ainsi écrire $\Sigma_k = \bigsqcup_{l=1}^{2^k} I_{k,l}$.

Définition 1.8.1. *L'ensemble triadique de Cantor est défini par $\Sigma = \bigcap_{k\geq 1} \Sigma_k$.*

Voici un résultat bien connu dont on donne une preuve qu'on va ensuite adapter aux champs boréliens d'espaces métriques compacts.

Théorème 1.8.2. *Soit (X,d) un espace métrique compact. Alors il existe une application continue surjective $\varphi : \Sigma \to X$.*

Preuve. Considérons un recouvrement de X par des boules de rayon $1/2$. Comme X est compact, on peut en extraire un sous-recouvrement fini $\{B(x_i,1/2)\}_{i=1}^{n_1}$ et $\{\overline{B}(x_i,1/2)\}_{i=1}^{n_1}$ est un recouvrement de X par des fermés. Soit k entier tel que $2^k \geq n_1$. Comme Σ_k est constitué de 2^k intervalles fermés disjoints, définissons la fonction $\phi_1 : \Sigma_k \to X$ constante sur chaque intervalle de Σ_k et d'image $\mathrm{Im}(\phi_1) = \{x_1,\ldots,x_{n_1}\}$. Cette application est continue puisqu'elle est constante sur chacun des intervalles et qu'ils sont fermés et disjoints deux à deux. Comme $\Sigma \subseteq \Sigma_k$, notons $\varphi_1 = \phi_1|_\Sigma$ et puisque Σ rencontre tous les intervalles de Σ_k, on a toujours $\mathrm{Im}(\varphi_1) = \{x_1,\ldots,x_{n_1}\}$.
Maintenant, pour construire une seconde application φ_2, on procède de la manière suivante. Comme $\overline{B}(x_i,1/2)$ est compacte pour tout $i = 1,\ldots,n_1$, il est possible de recouvrir chacune de ces boules par un nombre fini m_i de fermés $\overline{B}(x_{i,j},1/4)$. Posons $n_2 = \max_{i=1,\ldots,n_1} m_i$ et soit ℓ entier tel que si I est un intervalle de Σ_k alors $I \cap \Sigma_\ell$ est la réunion d'au moins n_2 intervalles de Σ_ℓ. On peut alors définir $\phi_2 : \Sigma_\ell \to X$ constante sur chaque intervalle de Σ_ℓ satisfaisant : si I est un intervalle de Σ_k avec $\varphi_1(I) = \{x_i\}$ alors $\phi_2(I \cap \Sigma_\ell) = \{x_{i,1},\ldots,x_{i,m_i}\}$. Notons $\varphi_2 = \phi_2|_\Sigma$. Cette application est continue d'image $\mathrm{Im}(\varphi_2) = \{x_{i,j}\}_{1\leq j\leq m_i}^{1\leq i\leq n_1}$.
Observons que, par construction, nous avons $d(\varphi_1(x),\varphi_2(x)) \leq 1/2$ pour tout $x \in \Sigma$.
Le procédé décrit ci-dessus se poursuit en divisant à chaque fois le rayon des boules par 2. Ainsi, on définit une suite d'applications $\varphi_j : \Sigma \to X$ telle que

$$d(\varphi_j(x),\varphi_{j+1}(x)) \leq 1/2^j \quad \text{pour tout} \quad x \in \Sigma.$$

La suite $\{\varphi_j\}_{j=1}^\infty$ est alors une suite de Cauchy dans l'espace des fonctions continues de Σ vers X muni de la norme de la convergence uniforme. En effet, l'inégalité précédente montre que

$$d(\varphi_j(x),\varphi_{j+k}(x)) \leq 1/2^{j-1} \quad \text{pour tout} \quad x \in \Sigma \quad \text{et tout} \quad k \geq 1.$$

La fonction $\varphi = \lim_{j\to\infty} \varphi_j$ sera notre candidate. Cette fonction étant continue, il reste à montrer qu'elle est surjective.
Soit $y \in X$. Pour tout j, il existe par construction $x \in \Sigma$ tel que $d(y,\varphi_j(x)) \leq 1/2^j$. Par conséquent,

$$d(y,\mathrm{Im}(\varphi)) \leq d(y,\varphi(x)) \leq d(y,\varphi_j(x)) + d(\varphi_j(x),\varphi(x)),$$

ce qui livre

$$d(y,\mathrm{Im}(\varphi)) \leq 1/2^j + \sup_{z\in\Sigma} d(\varphi_j(z),\varphi(z)).$$

En faisant $j \to \infty$ on a bien $d(y,\mathrm{Im}(\varphi)) = 0$, c'est-à-dire $y \in \mathrm{Im}(\varphi)$ (puisque $\mathrm{Im}(\varphi)$ est compact, donc fermé, comme l'image d'un compact par une fonction continue). □

Et voilà la version "borélienne".

Lemme 1.8.3. *Soit $(\Omega,\mathscr{A})$ un espace borélien et $(\Omega,K_\bullet)$ un champ borélien d'espaces métriques compacts. Alors il existe un morphisme de champs compatible continu et surjectif du champ trivial (Ω,Σ) sur le champ $(\Omega,K_\bullet)$.*

Preuve. On suit la preuve du Théorème 1.8.2 en s'assurant qu'on peut le faire de manière borélienne. Soit $\mathscr{D} = \{x_\bullet^n\}_{n\geq 1}$ une famille fondamentale de la structure borélienne $\mathscr{L}(\Omega,K_\bullet)$. Posons

$$\widetilde{\Omega}_m := \{\omega \in \Omega \mid \mathscr{D}_\omega \subseteq \bigcup_{n=1}^m B(x_\omega^n,1/2)\} = \bigcap_{i\geq 1}\bigcup_{n=1}^m \left(d_\bullet(x_\bullet^n,x_\bullet^i)\right)^{-1}([0,1/2[) \in \mathscr{A}.$$

K_ω est compact et donc $\bigcup_{m\geq 1}\widetilde{\Omega}_m = \Omega$. En effet, par densité de $\mathscr{D}_\omega$, $\bigcup_{n\geq 1} B(x_\omega^n,1/2) = K_\omega$ pour tout $\omega \in \Omega$ et on peut en extraire un sous-recouvrement fini. En posant $\Omega_m := \widetilde{\Omega}_m \setminus (\widetilde{\Omega}_{m-1} \cup \ldots \cup \widetilde{\Omega}_1)$

on obtient une partition borélienne dénombrable de Ω. Si α est un réel positif, on notera $\lceil\alpha\rceil$ le plus petit des entiers plus grand que α. Pour $\omega \in \Omega_m$ on peut définir une application constante par morceaux $\psi_\omega^{1,m} : \Sigma_{\lceil\log_2(m)\rceil} = \bigsqcup_{l=1}^{2^{\lceil\log_2(m)\rceil}} I_{\lceil\log_2(m)\rceil,l} \to K_\omega$ par

$$\psi_\omega^{1,m}(I_{\lceil\log_2(m)\rceil,l}) = \begin{cases} x_\omega^l & \text{si } 1 \le i \le m \\ x_\omega^1 & \text{si } m < l \le 2^{\lceil\log_2(m)\rceil}. \end{cases}$$

On obtient ainsi une section $\psi_\bullet^{1,m} \in \mathscr{S}\left(\Omega_m, \mathscr{C}(\Sigma_{\lceil\log_2(m)\rceil}, K_\bullet)\right)$. On note $m(\omega)$ l'unique m tel que $\omega \in \Omega_m$ et on pose $\varphi_\omega^1 = \psi_\omega^{1,m(\omega)}|_\Sigma$. On vérifie que $\varphi_\bullet^1 \in \widetilde{\mathscr{L}}(\Omega, \mathscr{C}(\Sigma, K_\bullet))$. En effet si $\sigma \in \Sigma$, alors $\varphi_\bullet^1(\sigma)|_{\Omega_m} = \psi_\bullet^{1,m}(I_{\lceil\log_2(m)\rceil,l})$ où l est l'unique entier tel que $\sigma \in I_{\lceil\log_2(m)\rceil,l}$. Or $\psi_\bullet^{1,m}(I_{\lceil\log_2(m)\rceil,l}) \in \mathscr{L}(\Omega_m, K_\bullet)$ et donc $\varphi_\bullet^1(\sigma) \in \mathscr{L}(\Omega, K_\bullet)$ pour tout $\sigma \in \Sigma$. C'est-à-dire que $\varphi_\bullet^1 \in \widetilde{\mathscr{L}}(\Omega, \mathscr{C}(\Sigma, K_\bullet))$, puisque les constantes engendrent les structures boréliennes dans les champs triviaux.

On va montrer maintenant comment fabriquer la deuxième section de fonctions. On considère les sous-champs boréliens $(\Omega_n, \overline{B(x_\bullet^i, 1/2)}) \le (\Omega_n, K_\bullet)$ pour $1 \le i \le n$ et $n \ge 1$ (voir l'Exemple 1.2.16 et la Remarque 1.2.8). Pour $1 \le i \le n$ et $n \ge 1$ on choisit $\mathscr{D}^{n,i} = \{x_\bullet^{n,i,l}\}_{l\ge 1} \subseteq \mathscr{L}(\Omega_n, \overline{B(x_\bullet^i, 1/2)}) \subseteq \mathscr{L}(\Omega_n, K_\bullet)$ une partie fondamentale du sous-champ $(\Omega_n, \overline{B(x_\bullet^i, 1/2)})$. Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on définit

$$\widetilde{\Omega}_m^{n,i} := \{\omega \in \Omega_n \mid \mathscr{D}_\omega^{n,i} = \bigcup_{m=1}^{l} B(x_\bullet^{n,i,l}, 1/4)\} \in \mathscr{A}.$$

Comme $\overline{B(x_\omega^i, 1/2)}$ est compact (car fermé dans un compact) on a, comme avant, que $\bigcup_{m\ge 1} \widetilde{\Omega}_m^{n,i} = \Omega_n$ pour tout $n \ge 1$ et $i = 1, \ldots, n$. On pose $\Omega_m^{n,i} = \widetilde{\Omega}_m^{n,i} \setminus (\widetilde{\Omega}_{m-1}^{n,i} \cup \ldots \cup \widetilde{\Omega}_1^{n,i})$. Maintenant pour tout $M = (m_1, \ldots, m_n) \in \mathbb{N}^n$ on pose

$$\Omega_M^n = \{\omega \in \Omega_n \mid \min\{m \mid \overline{B(x_\bullet^i, 1/2)} = \bigcup_{l=1}^{m} B(x_\bullet^{n,i,l}, 1/4)\} = m_i \text{ pour } i = 1, \ldots, n\} = \bigcap_{i=1}^{n} \Omega_{m_i}^{n,i} \in \mathscr{A}.$$

Ainsi $\Omega_n = \bigsqcup_{M\in\mathbb{N}^n} \Omega_M^n$ et $\Omega = \bigsqcup_{n\ge 1} \bigsqcup_{M\in\mathbb{N}^n} \Omega_M^n$. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $M \in \mathbb{N}^n$ fixés. On note $\overline{m} := \max\{m_1, \ldots, m_n\}$ et $k := \lceil\log_2(n)\rceil + \lceil\log_2(\overline{m})\rceil$. Pour tout $\omega \in \Omega_M^n$ on définit une application constante par morceaux

$$\psi_\omega^{2,n,M} : \Sigma_k = \bigsqcup_{l=1}^{2^k} I_{k,l} = \bigsqcup_{i=1}^{2^{\lceil\log_2(n)\rceil}} \bigsqcup_{l=1}^{2^{\lceil\log_2(\overline{m})\rceil}} I_{k,i\cdot\lceil\log_2(n)\rceil+l} \to K_\omega$$

par

$$\psi_\omega^{2,n,M}(I_{k,i\cdot\lceil\log_2(n)\rceil+l}) \begin{cases} \begin{cases} x_\omega^{n,i,l} & \text{si } 1 \le l \le m_i \\ x_\omega^{n,i,1} & \text{si } m_i < l \le 2^{\lceil\log_2(\overline{m})\rceil} \end{cases} & \text{si } 1 \le i \le n \\ x_\omega^{n,1,1} & \text{si } n < i < 2^{\lceil\log_2(n)\rceil}. \end{cases}$$

Donc si $\sigma \in \Sigma_k$, alors $\psi_\bullet^{2,n,M}(\sigma) = x_\bullet^{n,i,l}\ |_{\Omega_M^n} \in \mathscr{L}(\Omega_M^n, K_\bullet)$ où i et l sont les uniques entiers tels que $\sigma \in I_{k,i\cdot\lceil\log_2(n)\rceil} + l$. Ainsi $\psi_\bullet^{2,n,M} \in \widetilde{\mathscr{L}}(\Omega_M^n, \mathscr{C}(\Sigma_k, K_\bullet))$. En recollant et en restreignant les $\psi_\bullet^{2,n,M}$ on obtient un $\varphi_\bullet^2 \in \widetilde{\mathscr{L}}(\Omega, \mathscr{C}(\Sigma, K_\bullet))$.

En itérant le procédé, on peut construire une suite d'applications $\varphi_\bullet^n \in \widetilde{\mathscr{L}}(\Omega, \mathscr{C}(\Sigma, K_\bullet))$ telles que $\{\varphi_\omega^n\}_{n\ge 1}$ est comme dans la démonstration du Théorème 1.8.2 pour tout $\omega \in \Omega$. On peut ainsi considérer $\varphi_\omega := \lim_{n\to\infty} \varphi_\omega^n$. On obtient une section $\varphi_\bullet \in \mathscr{S}(\Omega, \mathscr{C}(\Sigma, K_\bullet))$ d'applications continues et surjectives. Il reste à vérifier que $\varphi_\bullet \in \widetilde{\mathscr{L}}(\Omega, \mathscr{C}(\Sigma, K_\bullet))$. Mais ceci est vrai par la Remarque 1.1.15 puisque si $\sigma \in \Sigma$, alors $\varphi_\bullet(\sigma) = \lim_{n\to\infty} \varphi_\bullet^n(\sigma) \in \mathscr{L}(\Omega, K_\bullet)$ comme limite ponctuelle d'éléments de $\mathscr{L}(\Omega, K_\bullet)$. $\square$

1.8.2 Champ $\mathscr{C}(K_\bullet)$, $\mathscr{C}(K_\bullet)^*_{\leq 1}$ et Prob$(K_\bullet)$

Si X est un espace métrique séparable, alors on appelle mesure de probabilité borélienne sur X une mesure de probabilité μ sur les boréliens de X. Une telle mesure est toujours régulière [36], *i.e.* pour tout borélien $A \subseteq X$, on a que

$$\mu(A) = \inf\{\mu(V) \mid A \subseteq V,\ V \text{ ouvert}\} = \sup\{\mu(F) \mid F \subseteq A,\ F \text{ fermé}\}.$$

On note $\mathrm{Prob}(X)$ l'ensemble des mesures de probabilités boréliennes sur X. Si X est compact, les mesures boréliennes et régulières sur X peuvent être identifiées avec certaines formes linéaires bornées sur $\mathscr{C}(X)$ par le Théorème de représentation de Riesz.
Étant donné un champ borélien d'espaces métriques compacts $(\Omega, K_\bullet)$, on a vu qu'on pouvait munir $(\Omega, \mathscr{C}(K_\bullet))$ de la structure borélienne banachique naturelle suivante

$$\mathscr{L}(\Omega, \mathscr{C}(K_\bullet)) = \{f_\bullet \in \mathscr{S}(\Omega, \mathscr{C}(K_\bullet)) \mid \omega \mapsto f_\omega(x_\omega) \text{ est borélienne pour tout } x_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega, K_\bullet)\}.$$

Dans cette section, on va montrer que le champ des mesures de probabilités $\mathrm{Prob}(K_\bullet)$ associé à un champ borélien d'espaces métriques compacts est un sous-champ borélien du champ des boules des duaux $(\Omega, \mathscr{C}(K_\bullet)^*_{\leq 1})$. Pour cela, on aura besoin de quelques préliminaires.

Définition 1.8.4. *Soit X un espace métrique séparable et $\mu \in \mathrm{Prob}(X)$. Soit $\mathscr{F} = \{F \subseteq X \mid F \text{ est fermé}, \mu(F) = 1\}$. Le support de μ est l'ensemble*

$$\mathrm{supp}(\mu) := \bigcap_{F \in \mathscr{F}} F.$$

Si $\mathscr{U} = \{U \subseteq X \mid U \text{ est ouvert}, \mu(U) = 0\}$, on a $X \setminus \mathrm{supp}(\mu) = \bigcup_{U \in \mathscr{U}} U$.

Lemme 1.8.5. *Soit X un espace métrique séparable et $\mu \in \mathrm{Prob}(X)$ une mesure de probabilité borélienne. Alors*

(i) Le support de μ est un fermé de mesure pleine.

(ii) Pour tout $x \in X$,
$$d(x, \mathrm{supp}(\mu)) = \sup\{r \in \mathbb{R} \mid \mu(B(x,r)) = 0\}.$$

(iii) Pour tout $x \in X$, l'application

$$\begin{array}{rccc} m: & [0, +\infty[& \longrightarrow & [0,1] \\ & r & \longmapsto & \mu(B(x,r)) \end{array}$$

est croissante et semi-continue inférieurement [37].

Preuve. (i) On utilise que X est à base dénombrable. Soit $\{U_n\}_{n \geq 1}$ une base de la topologie de X. Pour chaque $U \in \mathscr{U}$, il existe $I_U \subseteq \mathbb{N}$ une suite d'indice telle que $U = \bigcup_{n \in I_U} U_n$. En particulier,

$$\bigcup_{U \in \mathbb{U}} U = \bigcup_{n \in \bigcup_{U \in \mathbb{U}} I_U} U_n.$$

Ainsi,

$$\mu\Big(\bigcup_{U \in \mathbb{U}} U\Big) \leq \sum_{n \in \bigcup_{U \in \mathbb{U}} I_U} \mu(U_n) = 0.$$

36. Voir [Par05] Théorème II.1.2.
37. Voir Annexe B.4.3 pour la définition.

(ii) On vérifie que

$$\begin{aligned} d(x,\mathrm{supp}(\mu)) &\overset{\text{Preuve de 1.2.27}}{=} \sup\{r \geq 0 \mid B(x,r) \subseteq X \setminus \mathrm{supp}(\mu)\} \\ &\overset{(i)}{=} \sup\{r \geq 0 \mid \mu(B(x,r)) = 0\} \end{aligned}$$

(iii) Il est clair que m est croissante et que $m(0) = \mu(\emptyset) = 0$. Soit $M \in [0,1[$ et

$$I := \{r \in [0,+\infty[\,|\, m(r) \leq M\}.$$

Pour voir que m est semi-continue inférieurement, montrons que I est un intervalle fermé. Comme m est croissante, I est un intervalle et si $\{r_k\}_{k\geq 1}$ est une suite tendant vers l'extrémité droite r_∞ de l'intervalle, on a $m(r_\infty) \leq M$ car $B(x,r_\infty) = \cup_{k\geq 1} B(x,r_k)$ et $m(r_k) \leq M$ pour tout $k \geq 1$. Cela montre aussi que $\sup\{r \in \mathbb{R}_{\geq 0} \,|\, \mu(B(x,r)) \leq M\}$ est atteint (*i.e.* c'est un maximum). □

Définition 1.8.6. *Soit V un espace vectoriel et $\emptyset \neq E \subseteq V$ un sous-ensemble. On dit que $x \in E$ est un point extrémal de E s'il est impossible d'écrire x comme $ty + (1-t)z$ avec $t \in]0,1[$, $y \neq z$ et $y,z \in E$. En d'autres termes, x n'est pas strictement sur un segment non dégénéré dont les extrémités sont dans E. On note $\mathrm{Ext}(E)$ l'ensembles des points extrémaux de E.*

Lemme 1.8.7. *Soit K un espace métrique compact et D une partie dénombrable dense. On considère $\mathscr{C}(K)^*_{\leq 1}$ la boule unité du dual topologique de l'espace de Banach des fonctions continues. On munit cette ensemble de la topologie faible-$*$. Alors*

(i) L'application

$$\begin{array}{rccl} \delta: & K & \to & \mathscr{C}(K)^*_{=1} \\ & x & \mapsto & [\delta_x : f \to f(x)] \end{array}$$

est injective et continue (et donc est un homéomorphisme sur son image puisque K est compact).

(ii) $\mathscr{C}(K)^*_{\leq 1} = \overline{co(\pm\{\delta_x\}_{x\in D})}^{*-f}$ où δ_x est la mesure de Dirac en x.

(iii) $\mathrm{Prob}(K) = \overline{co(\{\delta_x\}_{x\in D})}^{*-f}$.

Preuve. (i) On a bien $\delta_x \in \mathscr{C}(K)^*_{=1}$ car $\|\delta_x\| = \sup_{\|f\|_\infty \leq 1} |f(x)| \leq 1$ et si $\mathbf{1}$ est la fonction constante de valeur 1 on a $|\delta_x(\mathbf{1})| = 1$. Pour montrer que δ est injective, on observe que si $x \neq y$ alors la fonction continue $d_x = d(\cdot, x)$ est telle que $\delta_x(d_x) = d(x,x) = 0$ mais que $\delta_y(d_x) = d(x,y) \neq 0$. Enfin, montrons que δ est continue, $\mathscr{C}(K)^*_{\leq 1}$ étant munie de la topologie faible-$*$. Soit $x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$, alors

$$\delta_{x_n} \underset{*-f}{\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}} \delta_x \iff \forall f \in \mathscr{C}(K) \text{ on a } \delta_{x_n}(f) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \delta_x(f),$$

ceci est bien le cas car $f(x_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x)$ par continuité de f.

(ii) Par le Théorème de Banach-Alaoglu, la boule $\mathscr{C}(K_\omega)^*_{\leq 1}$ est $*$-faiblement compacte. Elle est aussi convexe et, par conséquent, par le Théorème de Krein-Milman (par exemple [Fetc01], p. 76), on a

$$\mathscr{C}(K)^*_{\leq 1} = \overline{\mathrm{co}(\mathrm{Ext}(\mathscr{C}(K)^*_{\leq 1}))}^{*-f}.$$

L'ensemble des points extrémaux de $\mathscr{C}(K)^*_{\leq 1}$ étant $\{\pm\delta_x\}_{x\in K}$ (voir [Fetc01], p. 78), il suffit de montrer que

$$\overline{\mathrm{co}(\{\pm\delta_x\}_{x\in D})}^{*-f} = \overline{\mathrm{co}(\{\pm\delta_x\}_{x\in K})}^{*-f}$$

pour obtenir la conclusion. L'inclusion $[\subseteq]$ est évidente, puisque $\{\pm\delta_x\}_{x\in D} \subseteq \{\pm\delta_x\}_{x\in K}$, et la seconde s'obtient de la manière suivante. Comme $\{x\}_{x\in D}$ est dense dans K et que δ est continue, on a

$$\{\pm\delta_x\}_{x\in K} \subseteq \overline{\{\pm\delta_x\}}^{*-f}_{x\in D}.$$

Ainsi, $\mathrm{co}(\{\pm\delta_x\}_{x\in K}) \subseteq \mathrm{co}\left(\overline{\{\pm\delta_x\}_{x\in D}}^{*-f}\right)$ et donc

$$\overline{\mathrm{co}(\{\pm\delta_x\}_{x\in K})}^{*-f} \subseteq \overline{\mathrm{co}\left(\overline{\{\pm\delta x\}_{x\in D}}^{*-f}\right)}^{*-f} = \overline{\mathrm{co}(\{\pm\delta_x\}_{x\in D})}^{*-f},$$

la dernière égalité se démontrant simplement [38].

(iii) Pour voir l'ensemble des mesures de probabilité boréliennes $\mathrm{Prob}(K)$ dans $\mathscr{C}(K)^*_{\leq 1}$, on utilise le Théorème de représentation de Riesz (voir par exemple [Wal82], p. 148) qui livre une bijection

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{E} := \{\varphi \in \mathscr{C}(K)^*_{\leq 1} \mid \varphi(\mathbf{1}) = 1 \text{ et} & \simeq & \mathrm{Prob}(K) \\ \forall f \in \mathscr{C}(K)\ (f \geq 0 \Rightarrow \varphi(f) \geq 0)\} & & \\ \varphi & \mapsto & \mu_\varphi \text{ telle que } \varphi(f) = \int_K f\, d\mu_\varphi\ \forall f \in \mathscr{C}(K) \\ \varphi_\mu \text{ définie par } \varphi_\mu(\cdot) = \int_K \cdot\, d\mu & \leftarrow & \mu \end{array}$$

On observe que l'application qui a μ fait correspondre φ_μ est affine (*i.e.* $\varphi_{t\mu+(1-t)\nu} = t\varphi_\mu + (1-t)\varphi_\nu$ pour $\mu, \nu \in \mathrm{Prob}(K)$, $t \in [0,1]$), d'où la convexité de $\mathrm{Prob}(K)$ dans $\mathscr{C}(K)^*_{\leq 1}$. Pour voir que $\mathrm{Prob}(K)$ est $*$-faiblement compact, on observe que les deux conditions qui définissent le sous-ensemble $\mathscr{E}$ de $\mathscr{C}(K)^*_{\leq 1}$ sont des conditions fermées par définition de la topologie faible-$*$. Il s'agit donc de montrer que

$$\mathrm{Prob}(K) = \overline{\mathrm{co}(\{+\delta_x\}_{x\in K})}^{*-f}\ [39].$$

Pour cela, il suffit de montrer

$$\mathrm{Ext}(\mathrm{Prob}(K)) = \{+\delta_x\}_{x\in K}.$$

L'inclusion $[\supseteq]$ est simple puisque $\{+\delta_x\}_{x\in K} \subseteq \mathrm{Ext}(\mathscr{C}(K)^*_{\leq 1})$ et donc si chaque élément de l'ensemble de gauche n'est pas sur un segment non dégénéré avec extrémités dans $\mathscr{C}(K)^*_{\leq 1}$, il ne l'est pas non plus si les extrémités sont dans un sous-ensemble. L'inclusion $[\subseteq]$ découle du fait que si le support d'une mesure de probabilité contient au moins deux points, alors celle-ci n'est pas extrémale. En effet, si $\mu \in \mathrm{Prob}(K)$ est telle que $|\mathrm{supp}(\mu)| \geq 2$, alors on peut montrer qu'il existe une combinaison convexe non triviale. Comme $|\mathrm{supp}(\mu)| \geq 2$, il existe un ouvert U tel que $\mu\big(\mathrm{supp}(\mu) \cap U\big) > 0$ et $\mu\big(\mathrm{supp}(\mu) \setminus U\big) > 0$ (il suffit de choisir $x, y \in \mathrm{supp}(\mu)$ et de prendre U qui sépare x et y). En particulier on a $0 < \mu(U) < 1$ et alors

$$\mu = \mu(U)\mu\,|_U + (1-\mu(U))\mu\,|_{K\setminus U}$$

où $\mu\,|_U(A) = \frac{\mu(A\cap U)}{\mu(U)}$ pour tout $A \in \mathscr{B}(K)$. □

On peut maintenant prouver que le champ des mesures de probabilités associé à un champ borélien d'espaces métriques compacts est naturellement un champ borélien.

Proposition 1.8.8. *Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace borélien et $(\Omega, K_\bullet)$ un champ borélien d'espaces métriques compacts.*

- *(i) Alors $\widetilde{\mathscr{L}}(\Omega, \mathscr{C}(K_\bullet)^*) \cap \mathscr{S}(\Omega, \mathscr{C}(K_\bullet)^*_{\leq 1})$ est une structure borélienne sur le champ d'espaces métrisables $(\Omega, \mathscr{C}(K_\bullet)^*_{\leq 1})$. De plus, $(\Omega, \mathrm{Prob}(K_\bullet))$ est un sous-champ borélien de convexes fermés de $(\Omega, \mathscr{C}(K_\bullet)^*_{\leq 1})$.*
- *(ii) Si $(\Omega, F_\bullet)$ est un sous-champ généralisé borélien de fermés de $(\Omega, K_\bullet)$ et $\mu_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega, \mathrm{Prob}(K_\bullet))$, alors l'application $\mu_\bullet(F_\bullet) : \omega \mapsto \mu_\omega(F_\omega)$ est borélienne.*
- *(iii) Si $\mu_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega, \mathrm{Prob}(K_\bullet))$, alors $(\Omega, \mathrm{supp}(\mu_\bullet))$ est un sous-champ borélien de fermés de $(\Omega, K_\bullet)$.*

---

38. Montrons que $\overline{\mathrm{co}(A)} = \overline{\mathrm{co}(\overline{A})}$. Comme $A \subseteq \overline{A}$, on a $\overline{\mathrm{co}(A)} \subseteq \overline{\mathrm{co}(\overline{A})}$. Réciproquement, on a $A \subseteq \mathrm{co}(A)$ et donc $\overline{A} \subseteq \overline{\mathrm{co}(A)}$ et alors $\mathrm{co}(\overline{A}) \subseteq \mathrm{co}(\overline{\mathrm{co}(A)}) = \overline{\mathrm{co}(A)}$ car l'adhérence d'un convexe est convexe.

39. Et on répéte ensuite l'argument du point (ii) pour montrer qu'il suffit de prendre les $x \in D$.

La première affirmation du point (i) est une généralisation du Théorème 1.6.19 au cas particulier du champ borélien séparable d'espaces de Banach $(\Omega, \mathscr{C}(K_\bullet))$. Il est important d'observer qu'il nous arrive de considérer les probabilités sur un espace de deux manières différentes : soit d'un point de vue axiomatique sur $(\Omega, \mathscr{A})$ vu comme un ensemble muni d'une σ-algèbre, soit sur les espaces métriques compacts K_ω où elles sont alors identifiées à des formes linéaires sur $\mathscr{C}(K_\omega)$.

Preuve. (i) On a montré dans la preuve du Théorème 1.6.19 que si $B_\bullet$ est un champ borélien séparable d'espaces de Banach, alors il existe une famille de métriques $\delta_\bullet$ sur $(\Omega, B^*_{\bullet,\leq 1})$ compatible avec l'ensemble de sections $\widetilde{\mathscr{L}}(\Omega, B^*_\bullet) \cap \mathscr{S}(\Omega, B^*_{\bullet,\leq 1})$. Comme cet ensemble est clôt par limite simple et recollement borélien dénombrable, il ne reste qu'à montrer l'existence d'une famille fondamentale. Pour $x_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega, K_\bullet)$, on introduit $\delta_{x_\bullet} \in \mathscr{S}(\Omega, \mathscr{C}(K_\bullet)^*_{\leq 1})$ défini par $\delta_{x_\bullet} : \omega \mapsto \delta_{x_\omega} \in \mathscr{C}(K_\omega)^*_{\leq 1}$. On vérifie que $\delta_{x_\bullet} \in \widetilde{\mathscr{L}}(\Omega, \mathscr{C}(K_\bullet)^*) \cap \mathscr{S}(\Omega, \mathscr{C}(K_\bullet)^*_{\leq 1})$ puisque $\delta_{x_\bullet}(f_\bullet) = f_\bullet(x_\bullet)$ est borélienne pour tout $f_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega, \mathscr{C}(K_\bullet))$ par définition de cette structure borélienne (voir la Section 1.5.1).
Si $\mathscr{D}$ est une famille fondamentale de $\mathscr{L}(\Omega, K_\bullet)$ alors le Lemme 1.8.7 montre que

$$\mathscr{C}(K_\omega)^*_{\leq 1} = \overline{\mathrm{co}\{\pm\delta_x\}}^{*-f}_{x\in\mathscr{D}_\omega} \text{ et } \mathrm{Prob}(K_\omega) = \overline{\mathrm{co}\{\delta_x\}}^{*-f}_{x\in\mathscr{D}_\omega} \quad \text{pour tout } \omega \in \Omega,$$

ce qui montre que $(\Omega, \mathscr{C}(K_\bullet))$ et $(\Omega, \mathrm{Prob}(K_\bullet))$ sont des champs boréliens de convexes fermés.
(ii) On sait, par le Théorème de représentation de Riesz, qu'à $\mu_\bullet \in \mathscr{S}(\Omega, \mathrm{Prob}(K_\bullet))$ correspond $\varphi_\bullet \in \mathscr{S}(\Omega, \mathscr{C}(K_\bullet)^*_{\leq 1})$ telle que

$$\varphi_\omega(f) = \int_{K_\omega} f\, d\mu_\omega \quad \text{pour tout } \omega \in \Omega \text{ et } f \in \mathscr{C}(K_\omega).$$

On dit que $\mu_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega, \mathrm{Prob}(K_\bullet))$ si la section $\varphi_\bullet \in \mathscr{S}(\Omega, \mathscr{C}(K_\bullet)^*_{\leq 1})$ associée est borélienne, *i.e.* $\varphi_\bullet \in \widetilde{\mathscr{L}}(\Omega, \mathscr{C}(K_\bullet)^*) \cap \mathscr{S}(\Omega, \mathrm{Prob}(K_\bullet))$. La section $\varphi_\bullet$ a donc la propriété que l'application $\varphi_\bullet(f_\bullet) : \omega \mapsto \varphi_\omega(f_\omega)$ est borélienne pour toute section $f_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega, \mathscr{C}(K_\bullet))$. Rappelons que la mesure d'un fermé F de K_ω peut être calculée à l'aide d'une suite de fonctions $\{f_n\}_{n\geq 1} \subseteq \mathscr{C}(K_\omega)$:

$$\text{si } f_n \to \chi_F, \text{ alors } \mu_\omega(F) = \lim_{n\to\infty} \varphi_\omega(f_n).$$

L'idée est donc d'approximer la section $\chi_{F_\bullet}$ par une suite de sections $\{f^n_\bullet\}_{n\geq 1} \subseteq \mathscr{L}(\Omega, \mathscr{C}(K_\bullet))$. Définissons, pour tout $n \geq 1$ et $\omega \in \Omega$,

$$\begin{array}{rccl} f^n_\omega : & K_\omega & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & e^{-nd(x,F_\omega)} \end{array}$$

Alors, on a bien $f^n_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega, \mathscr{C}(K_\bullet))$ pour tout $n \geq 1$ car l'application $f^n_\bullet(x_\bullet) : \omega \mapsto f^n_\omega(x_\omega)$ est borélienne pour tout $x_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega, K_\bullet)$ comme composition d'applications boréliennes. En effet, l'application $d_\bullet(x_\bullet, F_\bullet)$ est borélienne car $(\Omega, F_\bullet)$ est un champ borélien de fermés et l'application $\mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0},\ t \mapsto e^{-n\cdot t}$ est continue et donc borélienne. Pour $x \in K_\omega$, observons qu'on a

$$x \in F_\omega \iff d_\omega(x_\omega, F_\omega) = 0 \iff f^n_\omega(x_\omega) = 1 \ \text{ pour tout } n \geq 1,$$

$$x \notin F_\omega \iff d_\omega(x_\omega, F_\omega) > 0 \iff f^n_\omega(x_\omega) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

et $\|f^n_\omega\|^\infty_\omega \leq 1$. La suite f^n_ω converge donc vers χ_{F_ω} pour tout $\omega \in \Omega$. Ceci entraîne que la fonction $\mu_\bullet(F_\bullet) = \lim_{n\to\infty} \varphi_\bullet(f^n_\bullet)$ est borélienne comme limite ponctuelle de fonctions boréliennes.

(iii) Par le Lemme 1.8.5 (ii) et la Proposition 1.2.23 il suffit de vérifier que pour tout $x_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)$ l'application

$$\begin{array}{rccl} R_\bullet : & \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \omega & \mapsto & \sup\{r \in \mathbb{R} \mid \mu_\omega(B(x_\omega, r)) = 0\} \end{array}$$

est borélienne pour tout $x_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega, K_\bullet)$. On commence par montrer que, pour tout $r \geq 0$ fixé, l'application

$$\mu_\bullet(B(x_\bullet, r)) : \omega \mapsto \mu_\omega(B(x_\omega, r)) \quad \text{est borélienne.}$$

Par le point (ii) de cette proposition, on sait que l'application

$$\mu_\bullet(\overline{B(x_\bullet, r - \frac{1}{j}})) : \omega \mapsto \mu_\omega(\overline{B(x_\omega, r - \frac{1}{j}}))$$

est borélienne pour tout $j \geq 1$ puisque $\overline{B(x_\bullet, r - \frac{1}{j})}$ est un sous-champ généralisé borélien de fermés. Comme

$$B(x_\omega, r) = \bigcup_{j \geq 1} \overline{B(x_\omega, r - \frac{1}{j})} \quad \text{pour tout } \omega \in \Omega,$$

l'application $\mu_\bullet(B(x_\bullet, r)) = \lim_{j \to \infty} \mu_\bullet(\overline{B(x_\bullet, r - \frac{1}{j})})$ est borélienne comme limite ponctuelle d'applications boréliennes. En particulier,

$$\Omega_r := \{\omega \in \Omega \,|\, \mu_\omega(B(x_\omega, r)) = 0\} \in \mathscr{A}.$$

Ceci montre que $R_\bullet$ est borélienne puisque si $t \in \mathbb{R}$, alors on a

$$(R^n)^{-1}([t, \infty[) = \Omega_t^n \in \mathscr{A}$$

car la mesure d'une boule dépend de manière inférieurement continue de son rayon (Lemme 1.8.5 (iii)) $\square$

1.9 Quelques constructions supplémentaires

On termine ce chapitre avec quelques constructions associées aux champs boréliens d'espaces métriques que nous utiliseront dans la suite de ce travail.

1.9.1 Quotient par une pseudo-métrique

Définition 1.9.1. *Soit (X, d) un espace métrique. Une pseudo-métrique δ sur X est dite continue*[40] *relativement à d si pour toute suite $\{x_n\}_{n \geq 1} \subseteq X$ et tout $x \in X$ tel que $d(x, x_n) \to 0$, on a $\delta(x, x_n) \to 0$. Ou, de manière équivalente, si l'application quotient $\pi : X \to X/_{\delta=0} = \{[x] \mid [x] = [y] \text{ si } \delta(x, y) = 0\}$ est continue lorsque $X/_{\delta=0}$ est muni de la topologie induite par la métrique $\delta([x], [y]) = \delta(x, y)$.*

Définition 1.9.2. *Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace borélien et $(\Omega, X_\bullet)$ un champ borélien d'espaces métriques de structure borélienne $\mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)$. On dit qu'une famille de pseudo-métriques $\delta_\bullet = \{\delta_\omega : X_\omega \times X_\omega \to \mathbb{R}_{\geq 0}\}_{\omega \in \Omega}$ est continue relativement à $d_\bullet$ si δ_ω est continue relativement à d_ω pour tout $\omega \in \Omega$. On dit qu'elle est compatible (avec la structure borélienne) si $\delta_\bullet(x_\bullet, y_\bullet)$ est borélienne pour tout $x_\bullet, y_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)$.*

Lemme 1.9.3. *Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace borélien, $(\Omega, X_\bullet)$ un champ borélien d'espaces métriques de structure borélienne $\mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)$ et $\{\delta_\omega : X_\omega \times X_\omega \to \mathbb{R}_{\geq 0}\}_{\omega \in \Omega}$ une famille de pseudo-métriques continue relativement à $d_\bullet$ et compatible. Soit $Y_\bullet$ le champ d'espaces métriques défini par $Y_\omega = (X_\omega/_{\delta_\omega = 0}, \delta_\omega)$. Alors il existe une unique structure borélienne sur $Y_\bullet$ telle que le morphisme de champs (continu et surjectif) $\pi_\bullet : X_\bullet \to Y_\bullet$ soit compatible.*

40. Une terminologie existe-t-elle déjà ?

Preuve. Soit $\mathscr{D}$ une famille fondamentale de $\mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)$. Alors $\pi_\bullet(\mathscr{D})$ est une famille fondamentale pour une structure borélienne sur $Y_\bullet$. En effet, les conditions du Lemme 1.1.9 sont vérifiées :

(i) Soit $x_\bullet, y_\bullet \in \mathscr{D}$. Alors $d_{Y_\bullet}(\pi(x_\bullet), \pi(y_\bullet))$ est borélienne car $d_{Y_\bullet}(\pi(x_\bullet), \pi(y_\bullet)) = \delta_\bullet(x_\bullet, y_\bullet)$ est borélienne par hypothèse.

(ii) L'ensemble $\{\pi_\omega(x_\omega)\}_{x_\bullet \in \mathscr{D}}$ est dense dans Y_ω pour tout $\omega \in \Omega$, puisque $\{x_\omega\}_{x_\bullet \in \mathscr{D}}$ est dense dans X_ω pour tout $\omega \in \Omega$, que l'image d'une partie dense par une application continue est dense dans l'image et que π_ω est surjective.

Ainsi, $\pi_\bullet(\mathscr{D})$ permet de construire une unique structure borélienne $\mathscr{L}(\Omega, Y_\bullet)$ pour le champ $Y_\bullet$ qui satisfait que $\pi_\bullet(\mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)) \subseteq \mathscr{L}(\Omega, Y_\bullet)$. □

1.9.2 Produits d'espaces métriques

Structure borélienne produit

Lemme 1.9.4. *Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace borélien et $(\Omega, X_\bullet)$, $(\Omega, Y_\bullet)$ des champs boréliens d'espaces métriques de structure borélienne $\mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)$, $\mathscr{L}(\Omega, Y_\bullet)$ respectivement. On munit $X_\omega \times Y_\omega$ de la métrique produit pour tout $\omega \in \Omega$. Alors*

$$\mathscr{L}(\Omega, X_\bullet \times Y_\bullet) := \{(x_\bullet, y_\bullet) \in \mathscr{S}(\Omega, X_\bullet \times Y_\bullet) \mid x_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega, X_\bullet), y_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega, Y_\bullet)\} = \mathscr{L}(\Omega, X_\bullet) \times \mathscr{L}(\Omega, Y_\bullet)$$

est une structure borélienne pour le champ $(\Omega, X_\bullet \times Y_\bullet)$. De plus, les projections $\pi_{X_\bullet} : X_\bullet \times Y_\bullet \to X_\bullet$ et $\pi_{Y_\bullet} : X_\bullet \times Y_\bullet \to Y_\bullet$ sont des morphismes de champs continus, surjectifs et compatibles.

Preuve. Soit $(x_\bullet, y_\bullet), (x'_\bullet, y'_\bullet) \in \mathscr{L}(\Omega, X_\bullet \times Y_\bullet)$, alors

$$d_\bullet((x_\bullet, y_\bullet), (x'_\bullet, y'_\bullet)) = \sqrt{d^2_{X_\bullet}(x_\bullet, x'_\bullet) + d^2_{Y_\bullet}(y_\bullet, y'_\bullet)}$$

et donc 1.1.3 (i) est vérifié. Soit $\mathscr{D}_{X_\bullet}$ une famille fondamentale de $\mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)$ et $\mathscr{D}_{Y_\bullet}$ une famille fondamentale de $\mathscr{L}(\Omega, Y_\bullet)$. Posons

$$\mathscr{D} := \mathscr{D}_{X_\bullet} \times \mathscr{D}_{Y_\bullet} = \{(x_\bullet, y_\bullet) \in \mathscr{S}(\Omega, X_\bullet \times Y_\bullet) \mid x_\bullet \in \mathscr{D}_{X_\bullet},\ y_\bullet \in \mathscr{D}_{Y_\bullet}\}.$$

Alors $\mathscr{D}$ satisfait 1.1.3 (iii). En effet, on a évidemment que $\mathscr{D} \subseteq \mathscr{L}(\Omega, X_\bullet \times Y_\bullet)$ et que $\{(x_\omega, y_\omega)\}_{(x_\bullet, y_\bullet) \in \mathscr{D}}$ est dense dans $X_\omega \times Y_\omega$ pour tout $\omega \in \Omega$ puisque $\mathscr{D}_{X_\bullet}$ et $\mathscr{D}_{Y_\bullet}$ sont des familles fondamentales. On peut donc utiliser le Lemme 1.1.6 et il suffit donc de montrer que $\mathscr{L}(\Omega, X_\bullet \times Y_\bullet)$ est stable par recollement dénombrable borélien et limite simple pour conclure. Si $z_\bullet \in \mathscr{S}(\Omega, X_\bullet \times Y_\bullet)$ est une limite ponctuelle de recollements d'éléments de $\mathscr{L}(\Omega, X_\bullet \times Y_\bullet)$, alors $\pi_{X_\bullet}(z_\bullet)$ (respectivement $\pi_{Y_\bullet}(z_\bullet)$) est limite ponctuelle de recollements d'éléments de $\mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)$ (respectivement $\mathscr{L}(\Omega, Y_\bullet)$). Finalement, il est clair que $\pi_{X_\bullet}\big(\mathscr{L}(\Omega, X_\bullet) \times \mathscr{L}(\Omega, Y_\bullet)\big) = \mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)$ (*mutatis mutandis* pour $Y_\bullet$) et donc que les projections sont des morphismes compatibles. □

Remarques 1.9.5. (1) Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace borélien, $X_\bullet$ et $Y_\bullet$ des champs boréliens d'espaces métriques. Si $A_\bullet$ est un sous-champ généralisé borélien de $X_\bullet \times Y_\bullet$ (muni de la structure borélienne produit), alors $\pi_{X_\bullet}(A_\bullet)$ est un sous-champ généralisé borélien de $X_\bullet$. En effet, c'est un cas particulier du Lemme 1.2.11 (en utilisant le Lemme 1.9.4).

(2) La réciproque est fausse, même si on suppose que $\pi_{X_\bullet}(A_\bullet)$ et $\pi_{Y_\bullet}(A_\bullet)$ sont des sous-champs généralisés boréliens. Considérons par exemple le champ constant $[0,1]^2$ produit des champs constants $[0,1]$ et $[0,1]$. Soit Ω' une partie non borélienne de Ω. On définit le sous-champ $A_\bullet$ de $[0,1]^2$ par

$$A_\omega = \begin{cases} \text{cercle de rayon } 1/2 \text{ centré en } (1/2, 1/2) & \text{si } \omega \in \Omega' \\ [0,1]^2 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors $\pi_{[0,1]}(A_\bullet) = [0,1]$ est borélien, mais $A_\bullet$ n'est pas un sous-champ borélien de $X_\bullet \times Y_\bullet$. En effet, $d\big((1/2,1/2), A_\bullet\big)$ n'est pas borélienne puisque

$$d\big((1/2,1/2), A_\omega\big) = \begin{cases} 1/2 & \text{si } \omega \in \Omega' \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(3) Par contre si $A_\bullet \leq X_\bullet$ et $B_\bullet \leq Y_\bullet$, alors il est clair que $(A_\bullet \times B_\bullet) \leq (X_\bullet \times Y_\bullet)$ où $X_\bullet \times Y_\bullet$ est muni de la structure borélienne produit.

Décomposition borélienne en produit

Définition 1.9.6. *Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace borélien et $(\Omega, X_\bullet)$ un champ borélien d'espaces métriques. Supposons que pour pour tout $\omega \in \Omega$ on puisse décomposer X_ω en un produit de deux espaces métriques $X^1_\omega \times X^2_\omega$. On peut alors écrire $X_\bullet = X^1_\bullet \times X^2_\bullet$. Une telle décomposition est dite borélienne s'il existe des structures boréliennes sur $X^1_\bullet$ et $X^2_\bullet$ telles que la structure sur $X_\bullet$ soit le produit de ces deux structures (voir le Lemme 1.9.4), c'est-à-dire que*

$$\mathscr{L}(\Omega, X_\bullet) = \mathscr{L}(\Omega, X^1_\bullet) \times \mathscr{L}(\Omega, X^2_\bullet).$$

Il existe un critère très simple pour vérifier qu'une décomposition est borélienne.

Lemme 1.9.7. *Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace borélien et $(\Omega, X_\bullet)$ un champ borélien d'espaces métriques de structure borélienne $\mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)$. Supposons que $X_\bullet = X^1_\bullet \times X^2_\bullet$. Alors cette décomposition est borélienne si et seulement si*

$$d_{X^1_\bullet}\big(\pi_{X^1_\bullet}(x_\bullet), \pi_{X^1_\bullet}(y_\bullet)\big) \textit{ est borélienne pour tous } x_\bullet, y_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega, X_\bullet).$$

Preuve. [$\Leftarrow$] Remarquons tout d'abord que si la distance entre les projections sur $X^1_\bullet$ de deux sections boréliennes de $\mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)$ est borélienne, alors la distance entre les projections sur $X^2_\bullet$ l'est aussi. En effet, on a

$$d^2_{X^2_\bullet}\big(\pi_{X^2_\bullet}(x_\bullet), \pi_{X^2_\bullet}(y_\bullet)\big) = d^2_{X_\bullet}(x_\bullet, y_\bullet) - d^2_{X^1_\bullet}\big(\pi_{X^1_\bullet}(x_\bullet), \pi_{X^1_\bullet}(y_\bullet)\big).$$

Vérifions maintenant que $\pi_{X^1_\bullet}(\mathscr{L}(\Omega, X_\bullet))$ est une structure borélienne sur $X^1_\bullet$. En effet, on peut vérifier les conditions de la Définition 1.1.3 :

(i) C'est notre hypothèse.

(ii) Soit $y^1_\bullet \in \mathscr{S}(\Omega, X^1_\bullet)$ telle que $d_{X^1_\bullet}\big(y^1_\bullet, \pi_{X^1_\bullet}(x_\bullet)\big)$ est borélienne pour tout $x_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)$. Il faut montrer que $y^1_\bullet \in \pi_{X^1_\bullet}(\mathscr{L}(\Omega, X_\bullet))$. Pour ce faire, on choisit arbitrairement une section $z_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)$ et on pose $y^2_\bullet = \pi_{X^2_\bullet}(z_\bullet) \in \pi_{X^2_\bullet}(\mathscr{L}(\Omega, X_\bullet))$. On montre que $(y^1_\bullet, y^2_\bullet) \in \mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)$. En effet, quelque soit $x_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)$ on a

$$d^2_{X_\bullet}\big(x_\bullet, (y^1_\bullet, y^2_\bullet)\big) = d^2_{X^1_\bullet}\big(\pi_{X^1_\bullet}(x_\bullet), y^1_\bullet\big) + d^2_{X^2_\bullet}\big(\pi_{X^2_\bullet}(x_\bullet), y^2_\bullet\big)$$

qui est borélienne. En effet, le premier terme du membre de droite est borélien par hypothèse sur $y^1_\bullet \in \mathscr{S}(\Omega, X^1_\bullet)$ et le second l'est par la remarque préliminaire et par le choix de $y^2_\bullet = \pi_{X^2_\bullet}(z_\bullet)$ avec $z_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)$. Ainsi $(y^1_\bullet, y^2_\bullet) \in \mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)$ et donc $y^1_\bullet \in \pi_{X^1_\bullet}\big(\mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)\big)$.

(iii) Si $\mathscr{D}$ est une famille fondamentale de $\mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)$, alors $\pi_{X^1_\bullet}(\mathscr{D})$ est évidemment une famille fondamentale pour $\pi_{X^1_\bullet}(\mathscr{L}(\Omega, X_\bullet))$ (puisqu'une projection est continue, car 1-Lipschitz).

Ainsi, $\pi_{X^1_\bullet}(\mathscr{L}(\Omega, X_\bullet))$ est une structure borélienne sur $X^1_\bullet$ et $\pi_{X^2_\bullet}(\mathscr{L}(\Omega, X_\bullet))$ est une structure borélienne sur $X^2_\bullet$. Il est clair qu'on a bien $\mathscr{L}(\Omega, X_\bullet) = \pi_{X^1_\bullet}(\mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)) \times \pi_{X^2_\bullet}(\mathscr{L}(\Omega, X_\bullet))$ par construction.

[$\Rightarrow$] Par hypothèse, il existe des structures boréliennes $\mathscr{L}(\Omega, X^i_\bullet)$, $i = 1,2$ telles que

$$\mathscr{L}(\Omega, X_\bullet) = \mathscr{L}(\Omega, X^1_\bullet) \times \mathscr{L}(\Omega, X^2_\bullet).$$

Par conséquent, si $x_\bullet, y_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)$, alors $x_\bullet = (x^1_\bullet, x^2_\bullet)$ et $y_\bullet = (y^1_\bullet, y^2_\bullet)$ avec $x^1_\bullet, y^1_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega, X^1_\bullet)$ et $x^2_\bullet, y^2_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega, X^2_\bullet)$. Ainsi, $d_{X^1_\bullet}\big(\pi_{X^1_\bullet}(x_\bullet), \pi_{X^1_\bullet}(y_\bullet)\big) = d_{X^1_\bullet}(x^1_\bullet, y^1_\bullet)$ est borélienne. □

Remarques 1.9.8. (1) La condition nécessaire et suffisante peut se reformuler à la lumière de la Définition 1.9.2. En effet, si on définit la pseudo-métrique δ_ω sur X_ω par $\delta_\omega(x_\omega, y_\omega) = d_{X^1_\omega}\big(\pi_{X^1_\omega}(x_\omega), \pi_{X^1_\omega}(y_\omega)\big)$, alors la condition du Lemme 1.9.7 est équivalente à demander que la famille de pseudo-métriques $\{\delta_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ soit compatible.

(2) Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace borélien et $(\Omega, X^1_\bullet)$, $(\Omega, X^2_\bullet)$ deux champs boréliens d'espaces métriques de structure borélienne $\mathscr{L}(\Omega, X^1_\bullet)$, $\mathscr{L}(\Omega, X^2_\bullet)$ respectivement. Alors la structure produit

$$\mathscr{L}(\Omega, X^1_\bullet \times X^2_\bullet) = \mathscr{L}(\Omega, X^1_\bullet) \times \mathscr{L}(\Omega, X^2_\bullet)$$

est la seule structure borélienne qui fait de $\pi_{X^1_\bullet}$ un morphisme de champs compatible.

On peut utiliser le Lemme 1.7.5 pour exhiber un exemple de décomposition non borélienne.

Exemple 1.9.9. Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace borélien et $\Omega = \Omega_1 \sqcup \Omega_2$ une décomposition non borélienne. Considérons le champ trivial d'espaces de Hilbert $(\Omega, X_\bullet) = (\Omega, \mathbb{R}^3)$. Ce champ admet la décomposition suivante

$$X_\omega = \begin{cases} \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 & \text{si } \omega \in \Omega_1 \\ \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} & \text{si } \omega \in \Omega_2. \end{cases}$$

Si la décomposition était borélienne, alors on aurait une structure borélienne d'espaces métriques sur le champ $Y_\bullet$ défini par

$$Y_\omega := \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } \omega \in \Omega_1 \\ \mathbb{R}^2 & \text{si } \omega \in \Omega_2. \end{cases}$$

Observons que $0_\bullet \in \pi_{Y_\bullet}(\mathscr{L}(\Omega, \mathbb{R}^3))$ et que donc la structure serait hilbertienne (Lemme 1.7.3). Mais alors on aurait une contradiction avec le Lemme 1.7.5 sur la fonction dimension associée à un champ borélien d'espaces de Hilbert.

1.9.3 Limite directe

Limite directe d'espaces métriques

Soit $(\mathscr{F}, \leq)$ un ensemble d'indices muni d'un ordre filtrant (*i.e.* pour tout $\Phi, \Phi' \in \mathscr{F}$ il existe $\Psi \in \mathscr{F}$ tel que $\Phi \leq \Psi$ et $\Phi' \leq \Psi$). Supposons donnée une famille $\{Z_\Phi\}_{\Phi\in\mathscr{F}}$ d'espaces métriques et un ensemble d'applications isométriques $\{j_{\Psi\Phi} \mid j_{\Psi\Phi} : Z_\Phi \to Z_\Psi \text{ pour } \Phi \leq \Psi\}$ vérifiant l'hypothèse suivante :

$$(*) \text{ Si } \Phi \leq \Psi \leq \Theta, \text{ alors } j_{\Theta\Phi} = j_{\Theta\Psi} \circ j_{\Psi\Phi}.$$ [41]

La limite directe associée à une telle famille est une construction classique. On redonne ci-dessous les informations la concernant qui sont nécessaires pour l'adapter au cadre des champs d'espaces métriques. Une preuve plus détaillée se trouve dans l'Annexe B, Lemme B.4.1.

Lemme 1.9.10. *Sous les hypothèses précédentes, il existe un unique, à isométrie près, espace métrique noté* $\varinjlim_{\Phi\in\mathscr{F}} Z_\Phi$ *qui vérifie les trois conditions suivantes :*

(i) Pour tout $\Phi \in \mathscr{F}$*, il existe une isométrie* $j_\Phi : Z_\Phi \to \varinjlim_{\Phi\in\mathscr{F}} Z_\Phi$.

41. Il découle de cette hypothèse que $j_{\Psi\Psi} = \mathrm{id}$.

(ii) Pour tout $\Phi \leq \Psi$, on a $j_\Psi \circ j_{\Psi\Phi} = j_\Phi$. En d'autres termes, le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
& \varinjlim_{\Phi \in \mathscr{F}} Z_\Phi & \\
Z_\Phi \arrow[ur, hook, "j_\Phi"] \arrow[rr, "j_{\Psi\Phi}"] & & Z_\Psi \arrow[ul, hook', "j_\Psi"']
\end{tikzcd}$$

(iii) [Propriété universelle] *Si Z' est un (autre) espace métrique vérifiant (i) et (ii), alors il existe une unique isométrie $i : \varinjlim_{\Phi \in \mathscr{F}} Z_\Phi \to Z'$ telle que pour tout $\Phi \in \mathscr{F}$ le diagramme suivant commute :*

$$\begin{tikzcd}
\varinjlim_{\Phi \in \mathscr{F}} Z_\Phi \arrow[rr, "i"] & & Z' \\
& Z_\Phi \arrow[ul, hook', "j_\Phi"] \arrow[ur, hook, "j'_\Phi"'] &
\end{tikzcd}$$

Preuve. On considère l'ensemble $\bigsqcup_{\Phi \in \mathscr{F}} Z_\Phi$ muni de la relation d'équivalence $\sim$ définie de la manière suivante :

$$z \in Z_\Phi, z' \in Z_{\Phi'} \quad z \sim z' \iff \text{il existe } \Psi \in \mathscr{F} \text{ tel que } \Phi, \Phi' \leq \Psi \text{ et } j_{\Psi\Phi}(z) = j_{\Psi\Phi'}(z').$$

Posons $Z := \bigsqcup_{\Phi \in \mathscr{F}} Z_\Phi / \sim$, définissons pour tout $\Phi \in \mathscr{F}$ l'application

$$\begin{array}{rccc} j_\Phi : & Z_\Phi & \to & Z \\ & z & \mapsto & [z]. \end{array}$$

On montre en annexe que l'ensemble Z est un espace métrique pour la distance d_Z définie par

$$d_Z([z],[z']) = d_{Z_\Psi}(j_{\Psi\Phi}(z_\Phi), j_{\Psi\Phi'}(z_{\Phi'}))$$

où $z_\Phi \in Z_\Phi \cap [z]$, $z_{\Phi'} \in Z_{\Phi'} \cap [z']$ sont des représentants et $\Psi \in \mathscr{F}$ est tel que $\Phi, \Phi' \leq \Psi$ et que $\{j_\Phi\}_{\Phi \in \mathscr{F}}$ est une famille d'isométries qui satisfait (ii).
Observons que

$$\bigsqcup_{\Phi \in \mathscr{F}} Z_\Phi / \sim = \bigcup_{\Phi \in \mathscr{F}} j_\Phi(Z_\Phi).$$

En effet, le sens $[\supseteq]$ découle de la définition de j_Φ et le sens $[\subseteq]$ du fait que pour $[z] \in Z$ il existe un représentant $z_\Phi \in Z_\Phi$ pour un certain $\Phi \in \mathscr{F}$ et $[z] = j_\Phi(z_\Phi)$.

Remarque 1.9.11. S'il existe une partie cofinale dénombrable $\{\Phi_n\}_{n \geq 1}$ de $\mathscr{F}$ (*i.e.* telle que pour tout $\Phi \in \mathscr{F}$ il existe $n \geq 1$ tel que $\Phi \leq \Phi_n$), alors on a

$$\bigcup_{\Phi \in \mathscr{F}} j_\Phi(Z_\Phi) = \bigcup_{n \geq 1} j_{\Phi_n}(Z_{\Phi_n}).$$

En effet, on a $[\subseteq]$ car si $z_\Phi \in Z_\Phi$, alors il existe $n \geq 1$ tel que $\Phi \leq \Phi_n$ et $j_\Phi(z_\Phi) \in j_{\Phi_n}(Z_{\Phi_n})$ et $[\supseteq]$ car $\Phi_n \in \mathscr{F}$ pour tout $n \geq 1$. Le résultat reste bien sûr vrai si la partie cofinale n'est pas dénombrable.

□

Limite directe dénombrable de champs boréliens

Définition 1.9.12. *Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace borélien. Un système direct indicé par $\mathbb{N}$ de champs boréliens d'espaces métriques est la donnée d'une famille dénombrable $\{X_\bullet^n\}_{n\geq 1}$ de champs boréliens d'espaces métriques de structures boréliennes respectives $\mathscr{L}(\Omega, X_\bullet^n)$ et, pour tous $m \geq n \geq 1$ et pour tout $\omega \in \Omega$, d'une application isométrique $j_\omega^{m,n} : X_\omega^n \to X_\omega^m$ satisfaisant les deux conditions suivantes :*

(i) Si $m \geq n \geq k$, alors $j_\omega^{m,k} = j_\omega^{m,n} \circ j_\omega^{n,k}$ pour tout $\omega \in \Omega$. En particulier, $j_\omega^{n,n} = id_{X_\omega^n}$ pour tout $\omega \in \Omega$.

(ii) $j_\bullet^{m,n} : X_\bullet^n \to X_\bullet^m$ est un morphisme de champs compatible (et isométrique).

En particulier, la famille $\{X_\omega^n\}_{n\geq 1}$ est un système direct pour tout $\omega \in \Omega$. Il existe donc une limite directe $\varinjlim_n X_\omega^n$ et des applications isométriques $j_\omega^n : X_\omega^n \to \varinjlim_n X_\omega^n$ pour tout $\omega \in \Omega$. On peut ainsi définir un champ $\varinjlim_n X_\bullet^n$ et des morphismes de champs $j_\bullet^n : X_\bullet^n \to \varinjlim_n X_\bullet^n$ qui permettent de considérer $X_\bullet^n$ comme sous-champ de $\varinjlim_n X_\bullet^n$.

Lemme 1.9.13. *Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace borélien et supposons que soit donné un système direct de champs boréliens d'espaces métriques $\big\{\{X_\bullet^n\}_{n\geq 1}, \{\mathscr{L}(\Omega, X_\bullet^n)\}_{n\geq 1}, \{j_\bullet^{m,n}\}_{m\geq n\geq 1}\big\}$. Alors il existe une unique structure borélienne sur le champ $\varinjlim_n X_\bullet^n$ telle que, pour tout $n \geq 1$, les morphismes de champs isométriques $j_\bullet^n : X_\bullet^n \to \varinjlim_n X_\bullet^n$ soient compatibles. On la note $\varinjlim_n \mathscr{L}(\Omega, X_\bullet^n)$*

Preuve. Pour chaque $n \geq 1$, choisissons $\mathscr{D}^n \subseteq \mathscr{L}(\Omega, X_\bullet^n)$ une famille fondamentale de la structure borélienne et posons $\mathscr{D} := \bigcup_n j_\bullet^n(\mathscr{D}^n)$. On vérifie que $\mathscr{D}$ satisfait les axiomes d'une famille fondamentale pour le champ $\varinjlim_n X_\bullet^n$ (voir le Lemme 1.1.9). Pour soulager la notation, notons $X_\bullet := \varinjlim_n X_\bullet^n$.
(i) Soit $x_\bullet, y_\bullet \in \mathscr{D}$. Il faut voir que $d_{X_\bullet}(x_\bullet, y_\bullet)$ est borélienne. Par définition de $\mathscr{D}$, il existe $n, m \geq 1$ et $x'_\bullet \in \mathscr{D}^n$, $y'_\bullet \in \mathscr{D}^m$ tels que $x_\bullet = j_\bullet^n(x'_\bullet)$ et $y_\bullet = j_\bullet^m(y'_\bullet)$. Sans restreindre la généralité, on peut supposer que $m \geq n$. Dans ce cas, l'application

$$d_{X_\bullet}(x_\bullet, y_\bullet) = d_{X_\bullet^m}(j_\bullet^{m,n}(x'_\bullet), y'_\bullet)$$

est borélienne puisque par l'hypothèse 1.9.12(ii), on a $j_\bullet^{m,n}(x'_\bullet), y'_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega, X_\bullet^m)$.
(ii) Il faut vérifier que $\{x_\omega\}_{x_\bullet \in \mathscr{D}}$ est dense dans X_ω pour tout $\omega \in \Omega$. Ceci est vrai puisque l'on sait que $X_\omega = \bigcup_n j_\omega^n(X_\omega^n)$ pour tout $\omega \in \Omega$ et que $\{x_\omega\}_{x_\bullet \in \mathscr{D}^n}$ est dense dans X_ω^n pour tout $\omega \in \Omega$.
Ainsi, par construction, $\mathscr{D}$ est une famille fondamentale d'une structure borélienne pour le champ $X_\bullet = \varinjlim_n X_\bullet^n$ satisfaisant la condition que les morphismes de champs $j_\bullet^n$ sont compatibles pour tout $n \geq 1$. Pour l'unicité, il suffit d'observer que si on demande que $j_\bullet^n$ soit compatible pour tout $n \geq 1$, alors les inclusions $j_\bullet^n(\mathscr{D}^n) \subseteq j_\bullet^n\big(\mathscr{L}(\Omega, X_\bullet^n)\big) \subseteq \mathscr{L}(\Omega, \varinjlim_n X_\bullet^n)$ sont satisfaites et de se rappeler qu'il existe une unique structure borélienne engendrée par une famille fondamentale $\mathscr{D}$. □

Remarque 1.9.14. En général, il n'est pas vrai que

$$\mathscr{L}(\Omega, \varinjlim_n X_\bullet^n) = \bigcup_n j_\bullet^n(\mathscr{L}(\Omega, X_\bullet^n)).$$

En effet, pour tout $n \geq 1$, considérons le champ trivial $X_\bullet^n = [0, n]$ muni de la structure borélienne

$$\mathscr{L}(\Omega, [0, n]) = \{f : \Omega \to [0, n] \mid f \text{ est borélienne}\}.$$

Alors on a $\varinjlim_n X_\bullet^n = \mathbb{R}_{\geq 0}$ et $\mathscr{L}(\Omega, \mathbb{R}_{\geq 0}) = \{f : \Omega \to \mathbb{R}_{\geq 0} \mid f \text{ est borélienne}\}$. Par contre, on a $\bigcup_n j_\bullet^n(\mathscr{L}(\Omega, X_\bullet^n)) = \{f : \Omega \to \mathbb{R}_{\geq 0} \mid f \text{ est borélienne et bornée}\}$.

1.9.4 Concaténation de structures boréliennes

Lemme 1.9.15. *Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace borélien et $(\Omega, X_\bullet)$ un champ d'espaces métriques (sans structure borélienne). Soit $\Omega = \bigsqcup_{n\geq 1} \Omega_n$ une décomposition borélienne de Ω. Supposons que pour tout $n \geq 1$ il existe une structure borélienne $\mathscr{L}_n(\Omega_n, X_\bullet)$ sur $(\Omega_n, X_\bullet)$. Alors*

$$\mathscr{L}(\Omega, X_\bullet) := \{x_\bullet \in \mathscr{S}(\Omega, X_\bullet) \mid x_\bullet|_{\Omega_n} \in \mathscr{L}_n(\Omega_n, X_\bullet) \text{ pour tout } n \geq 1\}.$$

est l'unique structure borélienne sur $(\Omega, X_\bullet)$ telle que

$$\mathscr{L}(\Omega_n, X_\bullet) := \left\{x_\bullet|_{\Omega_n} \middle| x_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)\right\} = \mathscr{L}_n(\Omega_n, X_\bullet).$$

On appelle cette structure la concaténation des structures $\mathscr{L}_n(\Omega_n, X_\bullet)$.

Preuve. On vérifie les conditions de la Définition 1.1.3.

(i) Soit $x_\bullet, y_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)$. Alors $d_\bullet(x_\bullet, y_\bullet)$ est borélienne comme recollement dénombrable de fonctions boréliennes.

(ii) Soit $y_\bullet \in \mathscr{S}(\Omega, X_\bullet)$ tel que $d_\bullet(x_\bullet, y_\bullet)$ est borélienne pour tout $x_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)$. Il faut voir que $y_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)$. Par hypothèse, on a en particulier que $d_\bullet(x_\bullet|_{\Omega_n}, y_\bullet|_{\Omega_n})$ est borélienne pour tout $n \geq 1$. Donc $y_\bullet|_{\Omega_n} \in \mathscr{L}_n(\Omega_n, X_\bullet)$ pour tout $n \geq 1$, c'est-à-dire $y_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)$

(iii) Pour tout $n \geq 1$ on sait qu'il existe une famille fondamentale $\mathscr{D}^n = \{x_\bullet^{n,m}\}_{m\geq 1} \subseteq \mathscr{L}_n(\Omega_n, X_\bullet)$. On se convainc facilement que

$$\mathscr{D} := \left\{x_\bullet^m \middle| x_\bullet^m|_{\Omega_n} := x_\bullet^{n,m} \text{ pour tout } n \geq 1\right\}_{m\geq 1} \subseteq \mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)$$

est une partie fondamentale pour la structure $\mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)$. Pour l'unicité, on observe que $\mathscr{D}$ doit obligatoirement être contenu dans une structure borélienne de $(\Omega, X_\bullet)$ si on veut que la condition $\mathscr{L}(\Omega_n, X_\bullet) = \mathscr{L}_n(\Omega_n, X_\bullet)$ soit vérifiée. □

Remarques 1.9.16. (1) Le résultat reste évidemment vrai si on prend une partition finie au lieu d'infinie dénombrable.

(2) On peut reformuler la conclusion en disant qu'il existe une unique structure borélienne sur $(\Omega, X_\bullet)$ telle que, pour tout $n \geq 1$, le champ $(\Omega_n, X_\bullet)$ muni de la structure borélienne $\mathscr{L}_n(\Omega_n, X_\bullet)$ est égal au champ restreint $(\Omega_n, X_\bullet)$.

Chapitre 2

G-espaces boréliens et relations d'équivalence boréliennes

2.1 G-espaces boréliens

Définition 2.1.1. *Soit G un groupe topologique localement compact à base dénombrable. Un G-espace borélien standard est la donnée d'un espace borélien standard $(\Omega, \mathscr{A})$ et d'une action borélienne de G sur Ω. Par action borélienne, on entend que l'application*

$$\begin{array}{rcl} G \times \Omega & \to & \Omega \\ (g, \omega) & \mapsto & g\omega \end{array}$$

est borélienne (en particulier la transformation de Ω par un élément de G est un isomorphisme borélien). Si on suppose qu'il existe une mesure de probabilité borélienne sur Ω telle que la mesure μ est quasi-préservée, i.e. telle que $g_*\mu \sim \mu$ pour tout $g \in G$, alors on dit que $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ est un G-espace de probabilité.
On dit que $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ est un G-espace ergodique si l'action est en plus ergodique, c'est-à-dire si les ensembles boréliens G-invariants sont de mesures nulles ou pleines.

2.1.1 Action d'un G-espace

Définition 2.1.2. *Soit G un groupe localement compact à base dénombrable, $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ un G-espace borélien standard et H un groupe borélien standard. Un cocycle borélien du G-espace dans H est une application borélienne $\alpha : G \times \Omega \to H$ telle que*

$$\alpha(gh, \omega) = \alpha(g, h\omega)\alpha(h, \omega) \text{ pour tout } g, h \in G \text{ et } \omega \in \Omega.$$

Remarques 2.1.3. (1) Zimmer définit un cocycle ([Zim78], p. 352) comme une application borélienne $\beta : \Omega \times G \to H$, où H est un groupe borélien standard, vérifiant pour tout $g, h \in G$ l'égalité

$$\beta(\omega, gh) = \beta(\omega, g)\beta(\omega g, h) \quad \text{pour presque tout } \omega \in \Omega.$$

Il y a deux différence entre cette définition et la notre. D'une part la relation de cocycle donnée par Zimmer est dans l'ordre inverse (ceci car il considère des actions à droite) et d'autre part il suppose seulement que l'égalité a lieu presque partout (lorsque l'égalité a lieu partout il dit que le cocycle est stricte).
Pour la première différence, on vérifie facilement que si $\beta : \Omega \times G \to H$ est un cocycle à la Zimmer, alors le cocycle $\alpha : G \times \Omega \to H$ donné par $\alpha(g, \omega) := \beta(\omega g^{-1}, g) = \beta(g\omega, g)$ satisfait la relation de cocycle dans notre sens.
Pour la seconde, on trouve une équivalence dans l'appendice du livre de Zimmer, sous la forme du théorème suivant.

Théorème 2.1.4 (Théorème B.9 de [Zim84])**.** *Let S be a standard Borel G-space with quasi-invariant measure μ. Suppose H is a topological group whose Borel structure is countably generated (e.g. H secound coutable). Let $\alpha : S \times G \to H$ be a cocycle. Then there is a strict coycle $\beta : S \times G \to H$ such that for all $g \in G$, $\beta(s,g) = \alpha(s,g)$ for almost all $s \in S$.*

(2) Si on pose $g = h = e$ dans l'égalité du cocycle, on obtient que $\alpha(e,\omega)^2 = \alpha(e,\omega)$ et donc $\alpha(e,\omega) = e$ pour tout $\omega \in \Omega$. Et on observe que $\alpha(g,\omega)^{-1} = \alpha(g^{-1}, g\omega)$.

Définition 2.1.5. *Soit G un groupe localement compact à base dénombrable, $(\Omega, \mathscr{A})$ un G-espace borélien standard et X un espace borélien standard. Une action du G-espace sur X est la donnée d'un sous-groupe H des bijections de X, d'une σ-algèbre sur H qui en fasse un groupe borélien standard et d'un cocycle borélien $\alpha : G \times \Omega \to H$ tel que pour tout section borélienne $x_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega, X)$ l'application*

$$\begin{array}{rcl} G \times \Omega & \to & X \\ (g,\omega) & \mapsto & \alpha(g, g^{-1}\omega) x_{g^{-1}\omega} \end{array}$$

soit borélienne.
On dit que l'action se fait par homéomorphismes (respectivement isométries, ...) si $H \subseteq \mathrm{Hom}(X)$ ($H \subseteq \mathrm{Iso}(X)$, ...).

La condition de la définition est fixée pour assurer qu'une action préserve la structure borélienne comme le montre le lemme qui suit.

Lemme 2.1.6. *Soit G un groupe localement compact à base dénombrable, $(\Omega, \mathscr{A})$ un G-espace borélien standard et X un espace borélien standard. Soit $\beta : G \times \Omega \to H \subseteq \mathrm{Bij}(X)$ une action du G-espace sur X. Alors*

(i) G agit sur l'ensemble des sections de Ω dans X selon la règle

$$(gx_\bullet)_\omega = \alpha(g, g^{-1}\omega) x_{g^{-1}\omega}.$$

De plus, $\mathscr{L}(\Omega, X)$ est G-invariant.

(ii) Si G quasi-préserve une mesure de probabilité borélienne μ sur Ω, alors G agit sur $L(\Omega, X)$.

Preuve. (i) On calcule, pour tout $g, h \in G$, $x_\bullet \in \mathscr{S}(\Omega, X)$ et $\omega \in \Omega$,

$$\begin{aligned} \big(g(hx_\bullet)\big)_\omega &= \alpha(g, g^{-1}\omega)(hx_\bullet)_{g^{-1}\omega} = \alpha(g, g^{-1}\omega)\alpha(h, h^{-1}g^{-1}\omega) x_{h^{-1}g^{-1}\omega} \\ &= \alpha(gh, h^{-1}g^{-1}\omega) x_{h^{-1}g^{-1}\omega} = \big((gh)x_\bullet\big)_\omega. \end{aligned}$$

Comme l'application

$$\begin{array}{rcl} G \times \Omega & \to & X \\ (g,\omega) & \mapsto & \alpha(g, g^{-1}\omega) x_{g^{-1}\omega} \end{array}$$

est supposée borélienne pour tout $x_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega, X)$, on a en particulier que l'application

$$\begin{array}{rcl} \Omega & \to & X \\ \omega & \mapsto & \alpha(g, g^{-1}\omega) x_{g^{-1}\omega} \end{array}$$

est borélienne pour tout $x_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega, X)$ et $g \in G$.
(ii) Évident. $\square$

Remarque 2.1.7. On peut montrer que si G préserve la mesure, alors G agit par homéomorphismes sur $\mathscr{L}(\Omega, X)$. Comme on n'est pas spécifiquement intéressé aux G-espaces qui préservent la mesure, on a mis la preuve dans une annexe (Lemme A.1.10).

Exemples 2.1.8. (1) Si $H \subseteq \mathrm{Bij}(X)$ est un groupe borélien standard et $\varphi : G \to H$ est un homomorphisme borélien, alors le cocycle donné par $\alpha(g,\omega) = \varphi(g)$ définit une action du G-espace. En particulier, un G-espace borélien Ω agit sur lui-même.

(2) Soit X un espace topologique localement compact, G un groupe topologique localement compact à base dénombrable et $(\Omega, \mathscr{A})$ un G-espace borélien standard. Supposons de plus qu'il existe un cocycle borélien $\alpha : G\times\Omega \to H$ où $H \subseteq \mathrm{Hom}(X)$ est tel que c'est un groupe topologique lorsqu'on le munit de la topologie compact-ouverte. Alors, l'application

$$\begin{array}{rcl} G\times\Omega & \to & X \\ (g,\omega) & \mapsto & \alpha(g,g^{-1}\omega)x_{g^{-1}\omega} \end{array}$$

est borélienne pour toute section $x_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega,X)$. Considérons, pour $x_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega,X)$ fixé, la suite d'applications

$$\begin{array}{ccccccc} G\times\Omega & \to & G\times\Omega\times\Omega & \to & H\times X & \to & X \\ (g,\omega) & \mapsto & (g,g^{-1}\omega,g^{-1}\omega) & \mapsto & \left(\alpha(g,g^{-1}\omega),x_{g^{-1}\omega}\right) & \mapsto & \alpha(g,g^{-1}\omega)x_{g^{-1}\omega} \end{array}$$

La première application est évidement borélienne. La deuxième l'est puisque le cocycle est borélien et que $x_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega,X)$. Et on observe que la troisième est continue. En effet, la topologie compact ouverte satisfait, lorsque X est localement compact, que l'évaluation est continue (voir par exemple [Kel55], Thm 7.5 et la remarque qui suit).

(3) Si X est un espace métrique séparable et que $H \subseteq \mathrm{Hom}(X)$ est un groupe borélien standard tel que les applications $H \to X, h \mapsto hx$ sont boréliennes pour tout $x \in X$. Alors tout cocycle borélien $\alpha : G \times \Omega \to H$ définit une action du G-espace. On commence par observer que les applications

$$\begin{array}{rcl} G\times\Omega & \to & X \\ (g,\omega) & \mapsto & \alpha(g,g^{-1}\omega)x \end{array}$$

sont boréliennes comme compositions d'applications boréliennes pour tout $x \in X$. L'hypothèse de séparabilité sur X garantit que toute fonction $x_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega,X)$ est obtenue comme limite ponctuelle de recollements boréliens dénombrables de fonctions constantes. On suppose donc que $x_\bullet$ est un recollement dénombrable borélien d'applications constantes $x_\bullet|_{\Omega_i} = x_i$ où $\Omega = \sqcup_{i\geq 1}\Omega_i$. Dans ce cas, on utilise que l'application

$$\begin{array}{rrcl} \Psi : & G\times\Omega & \to & \Omega \\ & (g,\omega) & \mapsto & g^{-1}\omega \end{array}$$

est borélienne puisque Ω est un G-espace borélien et que donc

$$\begin{array}{rcl} G\times\Omega = \bigsqcup_{i\geq 1}\Psi^{-1}(\Omega_i) & \to & X \\ (g,\omega) & \mapsto & \alpha(g,g^{-1}\omega)x_{g^{-1}\omega} \end{array}$$

est borélienne comme recollement d'applications boréliennes. Finalement, on utilise que l'action se fait par homéomorphismes pour conclure que la propriété est encore vérifiée si $x_\bullet$ est une limite ponctuelle de sections qui satisfont la propriété ($\alpha(g,g^{-1}\omega)x^n_{g^{-1}\omega} \to \alpha(g,g^{-1}\omega)x_{g^{-1}\omega}$ si $x^n_\bullet \to x_\bullet$).

Définition 2.1.9. *Soit G un groupe localement compact à base dénombrable, $(\Omega,\mathscr{A},\mu)$ un G-espace de probabilité, X un espace borélien et $\alpha : G\times\Omega \to H \subseteq \mathrm{Bij}(X)$ une action du G-espace sur X.*

Une section $x_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega,X)$ est dite presque-invariante si pour tout $g \in G$

$$\alpha(g,g^{-1}\omega)x_{g^{-1}\omega} = x_\omega \quad \textit{pour presque tout } \omega\in\Omega.$$

Ou, de manière équivalente, si pour tout $g \in G$

$$\alpha(g,\omega)x_\omega = x_{g\omega} \quad \textit{pour presque tout } \omega\in\Omega.$$

Ou encore [1] *si* $[x_\bullet] \in L(\Omega, X)$ *est invariante pour l'action de* G.
Une section est dite strictement invariante, si l'égalité a lieu partout.

Lemme 2.1.10. *Soit* G *un groupe localement compact à base dénombrable,* $(\Omega, \mathscr{A})$ *un* G*-espace borélien standard,* X *un espace métrique séparable et* $\alpha : G \times \Omega \to H \subseteq \mathrm{Hom}(X)$ *une action par homéomorphismes du* G*-espace sur* X*. Alors* G *agit sur les sous-champs boréliens et les sous-champs généralisés boréliens de* X*.*

Preuve. Comme pour les sections, on définit l'action de G sur l'ensemble de tous les sous-champs par

$$(gA_\bullet)_\omega = \alpha(g, g^{-1}\omega)(A_{g^{-1}\omega}) \quad \text{ou } g \in G \text{ et } A_\bullet \text{ est un sous-champ.}$$

Il s'agit maintenant de montrer qu'un champ borélien est envoyé sur un champ borélien. Soit $\Omega' := \{\omega \in \Omega \mid A_\omega \neq \emptyset\}$ et $\mathscr{D}$ une famille fondamentale de la structure borélienne $\mathscr{L}(\Omega', A_\bullet)$. On a que $\mathscr{D}_\omega \subseteq A_\omega \subseteq \overline{\mathscr{D}_\omega}$ pour tout $\omega \in \Omega'$ et que $\{\omega \in \Omega \mid (gA_\bullet)_\omega \neq \emptyset\} = g(\Omega') \in \mathscr{A}$. Et donc on a que

$$\alpha(g, g^{-1}\omega)(\mathscr{D}_{g^{-1}\omega}) \subseteq \alpha(g, g^{-1}\omega)(A_{g^{-1}\omega}) \subseteq \alpha(g, g^{-1}\omega)(\overline{\mathscr{D}_{g^{-1}\omega}}) \subseteq \overline{\alpha(g, g^{-1}\omega)(\mathscr{D}_{g^{-1}\omega})}$$

pour tout $\omega \in g(\Omega')$. Ainsi, $g(\mathscr{D}) \subseteq \mathscr{L}(g(\Omega'), X)$ est une famille fondamentale pour le champ $gA_\bullet$. ☐

A priori, l'ensemble Ω_g tel que $\alpha(g, \omega)x_\omega = x_{g\omega}$ pour tout $\omega \in \Omega$ dépend de $g \in G$. Une adaptation de la Proposition B.5 de [Zim84] permet de montrer qu'en fait il existe un borélien invariant de mesure pleine sur lequel l'égalité a lieu partout.

Lemme 2.1.11. *Soit* G *un groupe localement compact à base dénombrable et* $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ *un* G*-espace de probabilité standard. Supposons que le* G*-espace agisse sur un borélien standard* X *par* $\alpha : G \times \Omega \to Bij(X)$*.*
Alors une section $x_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega, X)$ *est presque invariante si et seulement s'il existe un borélien* $\Omega_0 \subseteq \Omega$ *de mesure pleine et* G*-invariant, ainsi qu'une section* $y_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega, X)$ *tels que* $y_\bullet =_{\mu-p.p.} x_\bullet$ *et*

$$\alpha(g, \omega)y_\omega = y_{g\omega} \quad \textit{pour tout } \omega \in \Omega_0 \textit{ et } g \in G.$$

Preuve. Montrons le sens non trivial. Soit donc $x_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega, X)$ telle que pour tout $g \in G$

$$\alpha(g, g^{-1}\omega)x_{g^{-1}\omega} = x_\omega \quad \text{pour presque tout } \omega \in \Omega.$$

Comme X est un borélien standard, il est isomorphe à $[0,1]$. Considérons la fonction borélienne

$$\begin{array}{rcl} G \times \Omega & \to & X \subseteq [0,1] \\ (g, \omega) & \mapsto & |\alpha(g, g^{-1}\omega)x_{g^{-1}\omega} - x_\omega|. \end{array}$$

Si on note λ une mesure de probabilité dans la classe de la mesure de Haar de G, alors on peut calculer l'intégrale de cette fonction sur $G \times \Omega$ à l'aide de Fubini des deux manières suivantes :

$$\int_G \underbrace{\Big(\int_\Omega |\alpha(g, g^{-1}\omega)x_{g^{-1}\omega} - x_\omega| d\mu(\omega) \Big)}_{=0 \quad \forall\ g \in G} d\lambda(g) = 0$$

et

$$\int_\Omega \Big(\int_G |\alpha(g, g^{-1}\omega)x_{g^{-1}\omega} - x_\omega| d\lambda(g) \Big) d\mu(\omega).$$

1. Lemme 2.1.6.

Ainsi, on peut conclure que

$$\mu\Big(\{\omega\in\Omega \mid \lambda(\{g\in G \mid \alpha(g,g^{-1}\omega)x_{g^{-1}\omega}\neq x_\omega\})>0\}\Big)=0,$$

et donc que

$$\Omega_0 := \{\omega\in\Omega \mid \alpha(g,g^{-1}\omega)x_{g^{-1}\omega} \text{ est essentiellement constante en } g\}$$

est de mesure pleine puisqu'il contient

$$\{\omega\in\Omega \mid \lambda(\{g\in G \mid \alpha(g,g^{-1}\omega)x_{g^{-1}\omega}=x_\omega\})=1\}.$$

Définissons $y_\bullet \in \mathscr{S}(\Omega,[0,1])$ par

$$y_\omega := \int_G \alpha(g,g^{-1}\omega)x_{g^{-1}\omega}d\lambda(g)$$

qui est borélienne par Fubini. En considérant

$$\begin{array}{rccl} J: & \Omega & \to & [0,1] \\ & \omega & \mapsto & \int_G |\alpha(g,g^{-1}\omega)x_{g^{-1}\omega}-y_\omega|d\lambda(g), \end{array}$$

on voit que $\Omega_0 = J^{-1}(0)\in\mathscr{A}$.
Remarquons que pour tout $\omega\in\Omega_0$, y_ω est le seul élément de X tel que

$$\alpha(g,g^{-1}\omega)x_{g^{-1}\omega}=y_\omega \quad \text{pour } \lambda\text{-presque tout } g\in G.$$

Ainsi, $y_\bullet =_{\mu-\text{p.p.}} x_\bullet$, et il reste à prouver que Ω_0 est G-invariant et que la section est strictement invariante sur Ω_0. Pour ce faire, on observe que pour tout $g,h\in G$ et $\omega\in\Omega$

$$\begin{aligned} \alpha(g,g^{-1}h\omega)x_{g^{-1}h\omega} &= \alpha(g,g^{-1}h\omega)\alpha(h^{-1}g,g^{-1}h\omega)^{-1}\alpha(h^{-1}g,g^{-1}h\omega)x_{g^{-1}h\omega} \\ &= \alpha(g,g^{-1}h\omega)\alpha(g^{-1}h,\omega)\alpha(h^{-1}g,g^{-1}h\omega)x_{g^{-1}h\omega} \\ &= \alpha(h,\omega)\alpha(h^{-1}g,g^{-1}h\omega)x_{g^{-1}h\omega} \\ &= \alpha(h,\omega)\alpha\big(h^{-1}g,(h^{-1}g)^{-1}\omega\big)x_{(h^{-1}g)^{-1}\omega} \end{aligned}$$

D'autre part, on observe que si $h\in G$ et $\omega\in\Omega_0$ sont fixés, alors

$$\begin{array}{ccccc} G & \to & G & \to & X \\ g & \mapsto & h^{-1}g & \mapsto & \alpha\big(h^{-1}g,(h^{-1}g)^{-1}\omega\big)x_{(h^{-1}g)^{-1}\omega} \end{array}$$

est constante λ-presque partout (puisque h quasi-préserve λ) et donc

$$\begin{array}{ccl} G & \to & X \\ g & \mapsto & \alpha(h,\omega)\alpha(h^{-1}g,(h^{-1}g)^{-1}\omega)x_{(h^{-1}g)^{-1}\omega}=\alpha(g,g^{-1}h\omega)x_{g^{-1}h\omega} \end{array}$$

est constante λ-presque partout. Ainsi, $h\omega\in\Omega_0$ et $y_{h\omega}=\alpha(h,\omega)y_\omega$.

□

Remarque 2.1.12. On peut appliquer ce lemme aux sous-champs boréliens de fermés si on met de bonnes hypothèses : par exemple si X est propre, alors on sait que l'ensemble des parties fermées admet une structure d'espace métrique séparable. De plus, si on suppose que $x_\bullet$ prend ses valeurs dans un sous-ensemble borélien standard $Y\subseteq X$ tel que $\alpha(g,\omega)Y\subseteq Y$ pour tout $(g,\omega)\in G\times\Omega$, alors on peut supposer que la section $y_\bullet$ prend également ses valeurs dans Y (en effet, il suffit de regarder $\alpha: G\times\Omega\to \mathrm{Bij}(Y)$ au lieu de $\alpha: G\times\Omega\to\mathrm{Bij}(X)$).

2.1.2 G-espaces ergodiques moyennables

Zimmer a introduit la notion de G-espace ergodique moyennable dans [Zim77] en s'inspirant de la définition suivante pour un groupe : un groupe dénombrable G est moyennable si et seulement si toute action continue sur un convexe compact admet un point fixe. Une manière de formuler cette définition plus précisément est de dire que si G agit par isométries linéaires sur un espace de Banach séparable B, alors l'action duale satisfait la propriété suivante : pour tout convexe fermé $C \subseteq B^*_{\leq 1}$ G-invariant, il existe $x \in C$ qui est G-invariant.
Dans le cas des G-espaces, on commence par considérer $\mathrm{Iso}(B)$ le groupe topologique des isométries linéaires d'un espace de Banach séparable muni de la topologie forte des opérateurs [2]. Ce groupe est un groupe borélien standard ([Zim78], Lemme 1.1). Supposons qu'on s'est donné un cocycle borélien $\alpha : G \times \Omega \to \mathrm{Iso}(B)$. Le Corollaire 1.2 de [Zim84] montre que la structure borélienne sur $\mathrm{Iso}(B)$ satisfait que les applications $\mathrm{Iso}(B) \to B$, $\gamma \mapsto \gamma(x)$ sont boréliennes pour tout $x \in X$ et donc que α définit une action du G-espace sur B (Définition 2.1.5) par l'Exemple 2.1.8 (3).
Rappelons qu'on note $B^*_{\leq 1}$ la boule unité du dual (topologique) muni de la topologie faible-$*$. Tout cocycle borélien $\alpha : G \times \Omega \to \mathrm{Iso}(B)$ induit un cocycle adjoint $\widetilde{\alpha}$ défini par

$$\begin{array}{rccc} \widetilde{\alpha}: & G \times \Omega & \to & \mathrm{Hom}(B^*_{\leq 1}) \\ & (g,\omega) & \mapsto & (\alpha(g,\omega)^*)^{-1}. \end{array}$$

Le Lemme 1.3 de [Zim78] montre que si $\mathrm{Hom}(B^*_{\leq 1})$ désigne le groupe des homéomorphismes de $B^*_{\leq 1}$ muni de la topologie de la convergence uniforme et que si α est un cocycle borélien, alors le cocycle induit $\widetilde{\alpha} : G \times \Omega \to \mathrm{Hom}(B^*_{\leq 1})$ est aussi borélien. Ainsi, il définit une action du G-espace par homéomorphismes sur $\mathrm{Hom}(B^*_{\leq 1})$ (Exemple 2.1.8 (2)).

Définition 2.1.13 (Moyennabilité)**.** *Soit G un groupe topologique localement compact à base dénombrable et $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ un G-espace ergodique.*
On dit que le G-espace est moyennable si pour tout espace de Banach séparable B, tout cocycle borélien $\alpha : G \times \Omega \to \mathrm{Iso}(B)$ et tout sous-champ borélien [3] $(\Omega, C_\bullet)$ de convexes compacts de $(\Omega, B^*_{\leq 1})$ presque invariant pour l'action induite sur $(\Omega, B^*_{\leq 1})$ il existe une section presque invariante $\varphi_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega, C_\bullet)$.

Remarque 2.1.14. En fait, Zimmer ne formule pas les choses exactement de la même manière. Au lieu de considérer des sous-champs boréliens au sens de la Définition 1.2.3, il considère les sous-champs (de convexes compacts) tels que

$$\{(\omega,\lambda) \in \Omega \times B^*_{\leq 1} \mid \lambda \in C_\omega\}$$

est un borélien de $\Omega \times B^*_{\leq 1}$. On a déjà montré (voir Proposition 1.4.6) la presque équivalence entre ce type de sous-champ est les sous-champs boréliens (Zimmer le montre, dans ce cas particulier, en utilisant des arguments similaires, voir Lemme 1.7, [Zim78]).

Voici le cas particulier dans lequel on appliquera la moyennabilité.

Exemple 2.1.15. Soit G un groupe localement compact à base dénombrable, $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ un G-espace moyennable, X un espace métrique compact et $\alpha : G \times \Omega \to H \subseteq \mathrm{Hom}(X)$ une action par homéomorphismes du G-espace sur X ($\mathrm{Hom}(X)$ est muni de la convergence uniforme). Supposons qu'il existe $K_\bullet$ un sous-champ borélien invariant de (Ω, X) de fermés. Alors il existe $\pi_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega, \mathrm{Prob}(K_\bullet))$ invariante (voir la Proposition 1.8.8). On commence par observer que l'homomorphisme suivant est continu (où $\mathrm{Iso}(\mathscr{C}(X))$ est le groupe des isométries linéaires muni de la topologie forte des opérateurs) :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}(X) & \to & \mathrm{Iso}(\mathscr{C}(X)) \\ \gamma & \mapsto & [\widetilde{\gamma} : f \mapsto f \circ \gamma^{-1}]. \end{array}$$

2. I.e. la plus faible telle que $\mathrm{Iso}(B) \to \mathbb{R}$, $\gamma \mapsto \|\gamma(x)\|$ est continue pour tout $x \in B$.
3. Dans le sens de la Définition 1.2.3.

Si $\gamma_n \to \gamma$ dans Hom(X), alors $\sup_{x\in X} d(\gamma_n(x),\gamma(x))\to 0$ $(n\to\infty)$ par définition. Ainsi

$$\|\widetilde{\gamma}_n f - \widetilde{\gamma} f\|_\infty = \sup_{x\in X} d\big(f(\gamma_n(x)), f(\gamma(x))\big) \to 0$$

puisque f est uniformément continue. On peut donc définir une action du G-espace par isométries linéaires sur l'espace de Banach séparable $\mathscr{C}(X)$.
Ainsi, puisque $K_\bullet$ est un sous-champ borélien invariant, alors Prob($K_\bullet$) est un sous-champ borélien invariant de $\mathscr{C}(X)^*_{\leq 1}$ de convexes compacts et il existe donc une section invariante $[\pi_\bullet] \in L(\Omega, \mathrm{Prob}(K_\bullet))$ puisque le G-espace est moyennable.

2.2 Relations d'équivalence

2.2.1 Premières définitions

Si $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence sur un ensemble Ω, on écrit $\omega\mathscr{R}\omega'$ ou $(\omega,\omega')\in\mathscr{R}$ ou simplement $\omega\sim\omega'$ (lorsque $\mathscr{R}$ est sous-entendue) pour signifier que ω' est équivalent à ω. On note $\Omega/\mathscr{R}$ l'ensemble des classes d'équivalence (espace quotient) et $[\omega]_{\mathscr{R}}$, $\mathscr{R}_\omega$ ou simplement $[\omega]$ (lorsque $\mathscr{R}$ est sous-entendue) la classe de $\omega\in\Omega$, c'est-à-dire l'ensemble des éléments de Ω équivalents à ω. Plus généralement, si $A\subseteq\Omega$, l'ensemble

$$[A]_{\mathscr{R}} := \{\omega'\in\Omega \,|\, \exists\ \omega\in A \text{ tel que } (\omega,\omega')\in\mathscr{R}\} = \bigcup_{\omega\in A}\mathscr{R}_\omega$$

est appelé le saturé de A par $\mathscr{R}$. On dit que $A\subseteq\Omega$ est $\mathscr{R}$-invariant si $[A]_{\mathscr{R}}=A$. La relation d'équivalence $\mathscr{R}$ est dite dénombrable (resp. finie) si toutes ses classes sont dénombrables (resp. finies). On ne s'intéresse qu'à de telles relations et s'il n'y a pas d'ambiguïté on omet l'adjectif dénombrable.
On note $\pi_l : \mathscr{R}\to\Omega,\ (\omega,\omega')\mapsto\omega$ et $\pi_r : \mathscr{R}\to\Omega,\ (\omega,\omega')\mapsto\omega'$ les restrictions à $\mathscr{R}$ des projections canoniques.
Supposons que $(\Omega,\mathscr{A})$ soit un espace borélien standard. On dit qu'une relation d'équivalence $\mathscr{R}\subseteq\Omega^2$ est borélienne si $\mathscr{R}$ est une partie borélienne de Ω^2. Dans ce cas le saturé d'un borélien est un borélien. En effet, si $A\in\mathscr{A}$ alors $[A]_{\mathscr{R}}=\pi_l(\pi_l^{-1}(A))$ qui est un borélien puisque $\mathscr{R}$ est un borélien de $\Omega\times\Omega$ à fibres dénombrables (Lemme 18.12 de [Kec95]).
Si A est un borélien de Ω, on note $\mathscr{R}\,|_A$ la relation induite sur A, *i.e.* la relation $\mathscr{R}\cap(A\times A)$.
Soit G est un groupe dénombrable et $(\Omega,\mathscr{A})$ un G-espace borélien standard (comme G est dénombrable, il suffit de vérifier que les applications $\omega\mapsto g\omega$ sont boréliennes pour tout $g\in G$). L'action de G sur Ω permet de définir une relation d'équivalence borélienne dénombrable :

$$\omega\mathscr{R}\omega' \iff \exists g\in G \text{ tel que } g\omega=\omega'.$$

On la note $\mathscr{R}_G$. Un théorème classique du sujet montre que c'est en fait le seul exemple.

Théorème 2.2.1 ([FM77], p. 291). *Soit $(\Omega,\mathscr{A})$ un borélien standard et $\mathscr{R}\subseteq\Omega^2$ une relation d'équivalence borélienne dénombrable. Alors il existe un groupe dénombrable G et une action borélienne $G\curvearrowright\Omega$ telle que $\mathscr{R}=\mathscr{R}_G$.*

Si $(\Omega,\mathscr{A})$ est un borélien standard, on note Aut(Ω) le groupe des automorphismes boréliens de Ω, $\mathrm{Aut_p}(\Omega)$ l'ensemble des automorphismes partiels de Ω et, pour tout $\varphi\in\mathrm{Aut_p}(\Omega)$, dom($\varphi$) le domaine de φ, Im(φ) l'image de φ et $\mathrm{Graphe}(\varphi)=\{(\omega,\varphi(\omega))\}_{\omega\in\mathrm{dom}(\varphi)}\subseteq\Omega^2$ le graphe de φ.
Soit $\mathscr{R}$ une relation d'équivalence borélienne. On peut lui associer les deux objets mathématiques suivants : le groupe plein,

$$[\mathscr{R}] := \{\varphi\in\mathrm{Aut}(\Omega)\,|\,\mathrm{Graphe}(\varphi)\subseteq\mathscr{R}\}$$

et le pseudo-groupe plein

$$[[\mathscr{R}]] := \{\varphi \in \mathrm{Aut}_{\mathrm{p}}(\Omega) \mid \mathrm{Graphe}(\varphi) \subseteq \mathscr{R}\}.$$

Les trois lemmes suivants sont des résultats classiques de la théorie des relations d'équivalence boréliennes dénombrables.

Lemme 2.2.2. *Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ un espace de probabilité borélien standard et $\mathscr{R} \subseteq \Omega^2$ une relation d'équivalence borélienne. Alors les assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) Tout $\varphi \in [[\mathscr{R}]]$ satisfait que $\mu(\mathrm{dom}(\varphi)) = 0$ si et seulement si $\mu(\mathrm{Im}(\varphi)) = 0$.

(ii) Tout élément de $[\mathscr{R}]$ préserve quasiment la mesure.

(iii) Pour tout groupe dénombrable $G \subseteq \mathrm{Aut}(\Omega)$ tel que $\mathscr{R} = \mathscr{R}_G$, la mesure μ est G-quasi-invariante.

(iv) Il existe un groupe dénombrable $G \subseteq \mathrm{Aut}(\Omega)$ tel que $\mathscr{R} = \mathscr{R}_G$ et μ soit G-quasi-invariante.

(v) Pour tout $A \in \mathscr{A}$ tel que $\mu(A) = 0$, on a que $\mu([A]_{\mathscr{R}}) = 0$.

Preuve. (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\overset{2.2.1}{\Rightarrow}$ (iv) sont évidents.
Montrons maintenant (iv) $\Rightarrow$ (v). Observons que $[A]_{\mathscr{R}} = \bigcup_{g \in G} g(A)$. Ainsi, si $\mu(A) = 0$, alors $\mu(g(A)) = 0$ pour tout $g \in G$ et donc $\mu([A]_{\mathscr{R}}) \leq \sum_{g \in G} g(A) = 0$.
Vérifions que (v) $\Rightarrow$ (i). Soit $\varphi : B \to C$ un automorphisme borélien partiel. Comme le graphe de φ est supposé contenu dans $\mathscr{R}$, on a que $C = \varphi(B) \subseteq [B]_{\mathscr{R}}$. Ainsi, si $\mu(B) = 0$ alors $\mu(C) \leq \mu([B]_{\mathscr{R}}) = 0$. Comme $\mathscr{R}$ est symétrique, le graphe de φ^{-1} est contenu dans $\mathscr{R}$ et on peut faire le même raisonnement pour montrer que $\mu(B) = 0$ si $\mu(C) = 0$. □

Lemme 2.2.3. *Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ un espace de probabilité borélien standard et $\mathscr{R} \subseteq \Omega^2$ une relation d'équivalence borélienne. Alors les assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) Tout $\varphi \in [[\mathscr{R}]]$ satisfait que $\mu(\mathrm{dom}(\varphi)) = \mu(\mathrm{Im}(\varphi))$.

(ii) Tout élément de $[\mathscr{R}]$ préserve la mesure μ.

(iii) Pour tout groupe dénombrable $G \subseteq \mathrm{Aut}(\Omega)$ tel que $\mathscr{R} = \mathscr{R}_G$, la mesure μ est G-invariante.

(iv) Il existe un groupe dénombrable $G \subseteq \mathrm{Aut}(\Omega)$ tel que $\mathscr{R} = \mathscr{R}_G$ et que μ soit G-invariante.

Preuve. (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\overset{2.2.1}{\Rightarrow}$ (iv) sont évidents.
Montrons maintenant (iv) $\Rightarrow$ (i). Soit donc $\varphi : B \to C$ un automorphisme borélien partiel tel que $\{(\omega, \varphi(\omega))\}_{\omega \in B} \subseteq \mathscr{R}$. Il s'agit de montrer que $\mu(B) = \mu(C)$. Soit $G = \{g_1, g_2, \ldots, g_n, \ldots\}$ tel que $\mathscr{R} = \mathscr{R}_G$ et que μ soit G-invariante. Alors il existe une décomposition dénombrable borélienne de B :

$$B = \bigsqcup_{n \geq 1} \underbrace{\{\omega \in B \mid n \text{ est le min des } m \text{ tel que } \varphi(\omega) = g_m(\omega)\}}_{:= B_n}.$$

Ainsi, $\mu(C) = \mu(\bigsqcup_{n \geq 1} g_n(B_n)) = \sum_{n \geq 1} \mu(g_n(B_n)) = \sum_{n \geq 1} \mu(B_n) = \mu(B)$. □

Lemme 2.2.4. *Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ un espace de probabilité borélien standard et $\mathscr{R} \subseteq \Omega^2$ une relation d'équivalence borélienne. Alors les assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) Pour tout groupe dénombrable $G \subseteq \mathrm{Aut}(\Omega)$ tel que $\mathscr{R} = \mathscr{R}_G$, l'action de G sur Ω est ergodique (i.e. si A est un borélien G-invariant, alors $\mu(A) \in \{0, 1\}$).

(ii) Il existe un groupe dénombrable $G \subseteq \mathrm{Aut}(\Omega)$ tel que $\mathscr{R} = \mathscr{R}_G$ et que l'action de G sur Ω soit ergodique.

(iii) *Tout borélien saturé A de Ω (i.e. $[A]_{\mathscr{R}} = A$) est de mesure soit pleine soit nulle.*

Preuve. Il suffit d'observer que si $\mathscr{R} = \mathscr{R}_G$, alors $[A]_{\mathscr{R}} = G(A)$ pour tout borélien A de Ω. En particulier, A est $\mathscr{R}$-invariant si et seulement si A est G invariant. □

Définition 2.2.5. *Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ un espace de probabilité borélien standard et $\mathscr{R} \subseteq \Omega^2$ une relation d'équivalence borélienne. On dit que μ est $\mathscr{R}$ quasi-invariante ou que $\mathscr{R}$ préserve quasiment μ si $\mathscr{R}$ satisfait une des assertions (et donc toutes) du Lemme 2.2.2.*
On dit que μ est $\mathscr{R}$ invariante ou que $\mathscr{R}$ préserve μ si $\mathscr{R}$ satisfait une des assertions (et donc toutes) du Lemme 2.2.3.
On dit que $\mathscr{R}$ est ergodique si $\mathscr{R}$ satisfait une des assertions (et donc toutes) du Lemme 2.2.4.

2.2.2 Action d'une relation d'équivalence

Définition 2.2.6. *Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace borélien standard, $\mathscr{R} \subseteq \Omega^2$ une relation d'équivalence borélienne et $(\Omega, X_\bullet)$ un champ borélien d'espaces métriques. Une action de $\mathscr{R}$ sur $(\Omega, X_\bullet)$, notée $\mathscr{R} \overset{\alpha}{\curvearrowright} (\Omega, X_\bullet)$, est la donnée d'une famille d'applications bijectives*

$$\{\alpha(\omega, \omega') : X_\omega \to X_{\omega'}\}_{(\omega,\omega') \in \mathscr{R}}$$

telle que

(i) *Pour tout $\omega, \omega', \omega'' \in \Omega$ tels que $\omega \mathscr{R} \omega'$ et $\omega \mathscr{R} \omega''$, on a $\alpha(\omega', \omega'') \circ \alpha(\omega, \omega') = \alpha(\omega, \omega'')$.*

(ii) *Pour tout $x_\bullet, y_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)$ l'application*

$$\begin{array}{rccl} d^{x_\bullet, y_\bullet} : & \mathscr{R} & \to & \mathbb{R} \\ & (\omega, \omega') & \mapsto & d_\omega(x_\omega, \alpha(\omega', \omega) y_{\omega'}) \end{array}$$

est borélienne ($\mathscr{R}$ est muni de la σ-algèbre induite par $\mathscr{A} \otimes \mathscr{A}$).

On dit alors que $\mathscr{R}$ agit sur $(\Omega, X_\bullet)$. Si de plus on suppose que

(iii) *Pour tout $\omega, \omega' \in \Omega$ tels que $\omega \mathscr{R} \omega'$, l'application $\alpha(\omega, \omega') : X_\omega \to X_{\omega'}$ est continue (respectivement isométrique ou linéaire[4]),*

alors on dit que $\mathscr{R}$ agit par homéomorphismes (respectivement par isométries ou linéairement) sur $(\Omega, X_\bullet)$.

Remarque 2.2.7. Il découle de (i) que pour tout $\omega, \omega' \in \Omega$ tels que $\omega \mathscr{R} \omega'$, on a $\alpha(\omega, \omega) = \mathrm{id}$ et $\alpha(\omega, \omega') = (\alpha(\omega', \omega))^{-1}$.

La condition (ii) de la Définition 2.2.6 permet d'assurer qu'une action de $\mathscr{R}$ préserve la structure borélienne. Avant de prouver cette affirmation, on montre le résultat technique suivant.

Lemme 2.2.8. *Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace borélien standard, $\mathscr{R} \subseteq \Omega^2$ une relation d'équivalence borélienne et $(\Omega, X_\bullet)$ un champ borélien d'espaces métriques. Soit encore $\{\alpha(\omega, \omega') : X_\omega \to X_{\omega'}\}_{(\omega,\omega') \in \mathscr{R}}$ une famille d'applications (quelconques) et $x_\bullet, y_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *La fonction $d^{x_\bullet, y_\bullet}$ est borélienne.*

(ii) *Il existe un groupe dénombrable $G \subseteq \mathrm{Aut}(\Omega)$ de Ω tel que $\mathscr{R}_G = \mathscr{R}$ et tel que, pour tout $g \in G$, la fonction*

$$\begin{array}{rccl} d_g^{x_\bullet, y_\bullet} : & \Omega & \to & \mathbb{R} \\ & \omega & \mapsto & d(x_\omega, \alpha(g^{-1}\omega, \omega) y_{g^{-1}\omega}) \end{array}$$

est borélienne.

4. Pour autant que cela aie un sens, c'est-à-dire que $X_\bullet$ soit en fait un champ d'espaces de Banach.

(iii) Tout groupe dénombrable $G \subseteq \mathrm{Aut}(\Omega)$ de Ω tel que $\mathscr{R}_G = \mathscr{R}$ satisfait que, pour tout $g \in G$, la fonction

$$\begin{array}{rccl} d_g^{x_\bullet, y_\bullet} : & \Omega & \to & \mathbb{R} \\ & \omega & \mapsto & d(x_\omega, \alpha(g^{-1}\omega, \omega) y_{g^{-1}\omega}) \end{array}$$

est borélienne.

(iv) Pour tout $\varphi \in [\mathscr{R}]$, la fonction

$$\begin{array}{rccl} d_\varphi^{x_\bullet, y_\bullet} : & \Omega & \to & \mathbb{R} \\ & \omega & \mapsto & d(x_\omega, \alpha(\varphi^{-1}\omega, \omega) y_{\varphi^{-1}\omega}) \end{array}$$

est borélienne.

Preuve. $[$(i) $\Rightarrow$ (iv)$]$ Soit $\varphi : \Omega \to \Omega$ un automorphisme borélien dont le graphe est contenu dans $\mathscr{R}$. Notons $\mathrm{Graphe}(\varphi) = \{(\omega, \varphi(\omega)) \mid \omega \in \Omega\}$ le graphe de φ. On observe que

$$\begin{array}{rccccccl} d_\varphi^{x_\bullet, y_\bullet} : & \Omega & \longrightarrow & \Delta \subseteq \Omega^2 & \xrightarrow{\mathrm{id} \times \varphi^{-1}} & \mathrm{Graphe}(\varphi^{-1}) \subseteq \mathscr{R} & \xrightarrow{d^{x_\bullet, y_\bullet}} & \mathbb{R} \\ & \omega & \longmapsto & (\omega, \omega) & \longmapsto & (\omega, \varphi^{-1}\omega) & \longmapsto & d^{x_\bullet, y_\bullet}(x_\omega, \alpha(\varphi^{-1}\omega, \omega) y_{\varphi^{-1}\omega}). \end{array}$$

Ainsi, l'application $d_\varphi^{x_\bullet, y_\bullet}$ est borélienne comme composition d'applications boréliennes.

$[$(iv) $\Rightarrow$ (iii)$]$ Évident.

$[$(iii) $\Rightarrow$ (ii)$]$ Théorème 2.2.1.

$[$(ii) $\Rightarrow$ (i)$]$ On ordonne $G = \{g_1, g_2, \ldots, g_n, \ldots\}$ et on considère l'application

$$\begin{array}{rccl} \min : & \mathscr{R} & \to & \mathbb{N} \\ & (\omega, \omega') & \mapsto & \min\{n \in \mathbb{N} \mid \omega' = g_n^{-1}(\omega)\}, \end{array}$$

qui est borélienne puisque $\{(\omega, \omega') \in \mathscr{R} \mid \omega' = g^{-1}(\omega)\} \subseteq \mathscr{R}$ est une partie borélienne pour tout $g \in G$. En effet, si on considère $g \times \mathrm{id} : \mathscr{R} \to \mathscr{R}, (\omega, \omega') \mapsto (g\omega, \omega')$, alors la partie en question est égale à $(g \times \mathrm{id})^{-1}(\Delta)$ qui est donc un borélien puisque la diagonale est borélienne (Ω est un borélien standard). Ainsi, $\mathscr{R} = \bigsqcup_{n \geq 1} \min^{-1}(\{n\})$ est une partition dénombrable borélienne de $\mathscr{R}$ telle que

$$d^{x_\bullet, y_\bullet} |_{\min^{-1}(\{n\})} = d_{g_n}^{x_\bullet, y_\bullet} \circ \pi_l.$$

En effet,

$$\begin{array}{ccccl} \min^{-1}(\{n\}) & \xrightarrow{\pi_l} & \Omega & \xrightarrow{d_{g_n}^{x_\bullet, y_\bullet}} & \mathbb{R} \\ (\omega, g_n^{-1}\omega) & \longmapsto & \omega & \longmapsto & d_\omega(x_\omega, \alpha(g_n^{-1}\omega, \omega) y_{g_n^{-1}\omega}). \end{array}$$

Ainsi, $d^{x_\bullet, y_\bullet}$ est borélienne comme recollement dénombrable borélien de compositions d'applications boréliennes.

□

A l'aide de ce résultat, on peut montrer la proposition suivante qui est le pendant pour les relations du Lemme 2.1.6 sur les G-espaces.

Proposition 2.2.9. *Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace borélien standard, $\mathscr{R} \subseteq \Omega^2$ une relation d'équivalence borélienne et $(\Omega, X_\bullet)$ un champ borélien d'espaces métriques. Soit $G \subseteq \mathrm{Aut}(\Omega)$ un groupe dénombrable tel que $\mathscr{R} = \mathscr{R}_G$.*

(i) Si $\{\alpha(\omega, \omega') : X_\omega \to X_{\omega'}\}_{(\omega, \omega') \in \mathscr{R}}$ est une famille d'applications satisfaisant la propriété 2.2.6 (i), alors G agit sur $\mathscr{S}(\Omega, X_\bullet)$ selon la règle

$$(gx_\bullet)_\omega = \alpha(g^{-1}\omega, \omega) x_{g^{-1}\omega}.$$

De plus, 2.2.6 (ii) est équivalent à

$$g(\mathscr{L}(\Omega,X_\bullet)) \subseteq \mathscr{L}(\Omega,X_\bullet) \text{ pour tout } g \in G.$$

Si on suppose en plus que la condition 2.2.6 (iii)-continuité est satisfaite et que $\mathscr{D}$ est une famille fondamentale de $\mathscr{L}(\Omega,X_\bullet)$, alors 2.2.6 (ii) est équivalent à

$$g(\mathscr{D}) \subseteq \mathscr{L}(\Omega,X_\bullet) \text{ pour tout } g \in G.$$

(ii) Si $\mathscr{R}$ préserve quasiment la mesure et agit sur $(\Omega,X_\bullet)$, alors G agit sur $L(\Omega,X_\bullet)$.

Preuve. (i) Montrons que G agit sur $\mathscr{S}(\Omega,X_\bullet)$. On a

$$\begin{aligned} \big((gh)x_\bullet\big)_\omega &= \alpha((gh)^{-1}\omega,\omega)x_{(gh)^{-1}\omega} = \alpha(h^{-1}g^{-1}\omega,\omega)x_{h^{-1}g^{-1}\omega} \\ &= \alpha(g^{-1}\omega,\omega)\alpha(h^{-1}g^{-1}\omega,g^{-1}\omega)x_{h^{-1}g^{-1}\omega} = \alpha(g^{-1}\omega,\omega)(hx_\bullet)_{g^{-1}\omega} = \big(g(hx_\bullet)\big)_\omega. \end{aligned}$$

Montrons que 2.2.6 (ii) est vérifié si et seulement si $g(\mathscr{L}(\Omega,X_\bullet)) \subseteq \mathscr{L}(\Omega,X_\bullet)$ pour tout $g \in G$.

$$\begin{aligned} & d^{x_\bullet,y_\bullet} \text{ est borélienne pour tout } x_\bullet, y_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega,X_\bullet) \\ \overset{2.2.8}{\Longleftrightarrow}\ & d_g^{x_\bullet,y_\bullet} \text{ est borélienne pour tout } x_\bullet, y_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega,X_\bullet) \text{ et pour tout } g \in G \\ \Longleftrightarrow\ & d_\bullet(x_\bullet, gy_\bullet) \text{ est borélienne pour tout } x_\bullet, y_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega,X_\bullet) \text{ et pour tout } g \in G \\ \overset{1.1.3}{\Longleftrightarrow}\ & gy_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega,X_\bullet) \text{ pour tout } y_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega,X_\bullet) \text{ et pour tout } g \in G. \end{aligned}$$

Supposons de plus que $\alpha(\omega,\omega')$ est continue pour tout $\omega\mathscr{R}\omega'$ et choisissons $\mathscr{D}$ une famille fondamentale de $\mathscr{L}(\Omega,X_\bullet)$. Pour terminer la preuve du point (i), il suffit de montrer que si $g(\mathscr{D}) \subseteq \mathscr{L}(\Omega,X_\bullet)$ pour tout $g \in G$, alors $g(\mathscr{L}(\Omega,X_\bullet)) \subseteq \mathscr{L}(\Omega,X_\bullet)$ pour tout $g \in G$.
Pour cela, on utilise le Lemme 1.1.9. Fixons $g \in G$. Tout d'abord soit $x_\bullet \in \mathrm{Rec}(\mathscr{D})$, *i.e.* il existe une partition borélienne $\Omega = \bigsqcup_{n\geq 1}\Omega_n$ et un ensemble de sections $\{x_\bullet^n\}_{n\geq 1} \subseteq \mathscr{D}$ tel que $x_\bullet\,|_{\Omega_n} = x_\bullet^n\,|_{\Omega_n}$ pour tout $n \geq 1$. Alors $gx_\bullet\,|_{g(\Omega_n)} = gx_\bullet^n\,|_{g(\Omega_n)}$ et donc $gx_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega,X_\bullet)$. Ensuite, soit $\{x_\bullet^n\} \subseteq \mathscr{L}(\Omega,X_\bullet)$ une suite de sections telle que $x_\bullet^n \to x_\bullet$ ponctuellement et $gx_\bullet^n \in \mathscr{L}(\Omega,X_\bullet)$ pour tout $n \geq 1$. Alors

$$\big(gx_\bullet^n\big)_\omega = \alpha(g^{-1}\omega,\omega)x^n_{g^{-1}\omega} \to \alpha(g^{-1}\omega,\omega)x_{g^{-1}\omega} = (gx_\bullet)_\omega \text{ pour tout } \omega \in \Omega.$$

Ainsi, $gx_\bullet^n \to gx_\bullet$ ponctuellement et donc $gx_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega,X_\bullet)$ ce qui montre que

$$g(\mathscr{L}(\Omega,X_\bullet)) \subseteq \mathscr{L}(\Omega,X_\bullet).$$

(ii) Par le point précédent, on sait que G agit sur $\mathscr{L}(\Omega,X_\bullet)$. Montrons que cette action passe au quotient. Il s'agit de vérifier que si $x_\bullet =_{\text{p.p.}} y_\bullet$, alors $gx_\bullet =_{\text{p.p.}} gy_\bullet$. On a

$$\begin{aligned} \{\omega \in \Omega \mid (gx_\bullet)_\omega = (gy_\bullet)_\omega\} &= \{\omega \in \Omega \mid \alpha(g^{-1}\omega,\omega)x_{g^{-1}\omega} = \alpha(g^{-1}\omega,\omega)y_{g^{-1}\omega}\} \\ &= \{\omega \in \Omega \mid x_{g^{-1}\omega} = y_{g^{-1}\omega}\} = g(\{\omega \in \Omega \mid x_\omega = y_\omega\}). \end{aligned}$$

Comme, par hypothèse, $\mathscr{R}$ quasi-préserve la mesure, alors g aussi (voir Définition 2.2.5) et donc $gx_\bullet =_{\text{p.p.}} gy_\bullet$. □

Remarque 2.2.10. On peut montrer que si $\mathscr{R}$ préserve la mesure, alors G agit par homéomorphismes sur $\mathscr{L}(\Omega,X_\bullet)$. Comme on n'est pas spécifiquement intéressé aux relations qui préservent la mesure, on a mis la preuve dans une annexe (Lemme A.1.10).

On peut aussi montrer un résultat similaire sur l'ensemble des sous-champs.

Lemme 2.2.11. *Soit $(\Omega,\mathscr{A})$ un espace borélien standard, $\mathscr{R} \subseteq \Omega^2$ une relation d'équivalence borélienne et $(\Omega,X_\bullet)$ un champ borélien d'espaces métriques. Soit G un groupe dénombrable et $G \curvearrowright \Omega$ une action borélienne telle que $\mathscr{R} = \mathscr{R}_G$. Supposons que $\mathscr{R}$ agisse par homéomorphismes sur $(\Omega,X_\bullet)$. Alors*

(i) Le groupe G agit sur l'ensemble des sous-champs généralisés boréliens de $X_\bullet$.

(ii) Si $\mathscr{R}$ préserve quasiment une mesure de probabilité borélienne μ sur Ω, alors G agit sur les classes d'équivalence des sous-champs généralisés boréliens.

En particulier, puisque $\mathscr{R}$ agit par homéomorphismes, on a que G agit sur l'ensemble des sous-champs généralisés boréliens de fermés et, lorsque $\mathscr{R}$ préserve quasiment une mesure, sur les classes d'équivalence des sous-champs boréliens généralisés de fermés.

Preuve. (i) On définit d'abord l'action de G sur l'ensemble de tous les sous-champs. Pour $g \in G$ et $A_\bullet$ un sous-champ, on définit $gA_\bullet$ par $(gA_\bullet)_\omega = \alpha(g^{-1}\omega,\omega)(A_{g^{-1}\omega})$. On vérifie comme dans la preuve de la Proposition 2.2.9 (i) que c'est bien une action. Il reste à montrer qu'un champ borélien est envoyé sur un champ borélien. Soit $\Omega' := \{\omega \in \Omega \mid A_\omega \neq \emptyset\}$ et $\mathscr{D}$ une famille fondamentale de la structure borélienne $\mathscr{L}(\Omega',A_\bullet)$. On a que $\mathscr{D}_\omega \subseteq A_\omega \subseteq \overline{\mathscr{D}_\omega}$ pour tout $\omega \in \Omega'$ et que

$$\{\omega \in \Omega \mid (gA_\bullet)_\omega \neq \emptyset\} = g(\Omega') \in \mathscr{A}.$$

Et donc, puisque $\alpha(\omega,\omega')$ est continue pour tout $(\omega,\omega') \in \mathscr{R}$, on a que

$$\alpha(g^{-1}\omega,\omega)\mathscr{D}_{g^{-1}\omega} \subseteq \alpha(g^{-1}\omega,\omega)(A_{g^{-1}\omega}) \subseteq \alpha(g^{-1}\omega,\omega)(\overline{\mathscr{D}_{g^{-1}\omega}}) \subseteq \overline{\alpha(g^{-1}\omega,\omega)(\mathscr{D}_{g^{-1}\omega})}$$

pour tout $\omega \in g(\Omega')$. Comme $g(\mathscr{D}) \subseteq \mathscr{L}(g(\Omega'),X_\bullet)$ par la Proposition 2.2.9, $g(\mathscr{D})$ est une famille fondamentale pour le champ $gA_\bullet$.

(ii) Exactement comme dans la Proposition 2.2.9 (ii). □

Voici des exemples d'actions de relations d'équivalence.

Exemples 2.2.12. (1) [Action de $\mathscr{R}$ sur le champ des classes]
Soit $(\Omega,\mathscr{A})$ un espace borélien standard, $\mathscr{R} \subseteq \Omega^2$ une relation d'équivalence borélienne dénombrable. Une relation d'équivalence est naturellement un fibré standard (voir Exemple 1.1.12).
Considérons $\Phi = \{\varphi_i : A_i \to B_i\}_{i\geq 1} \subseteq \mathrm{Aut}_{\mathrm{p}}(\Omega)$ une famille d'automorphismes partiels de Ω. Notons, pour $n \geq 1$, $\Phi^n :=$ {mots de longueur n pour l'alphabet $\Phi^{\pm 1}$}, $\Phi^{(n)} = \bigcup_{m\leq n}\Phi^m$ les mots de longueur $\leq n$ et $\Phi^{(\infty)} = \bigcup_{n\geq 1}\Phi^n$ les mots de longueur finie. Pour $\psi \in \Phi^{(\infty)}$, on note $\mathrm{dom}(\psi)$ le domaine de ψ. On dit que Φ est un graphage de la relation $\mathscr{R}$ si $\Phi \subseteq [[\mathscr{R}]]$ et si pour tout $(\omega,\omega') \in \mathscr{R}$, il existe $\varphi \in \Phi^{(\infty)}$ tel que $\varphi(\omega) = \omega'$.
On peut faire de chaque classe $\mathscr{R}_\omega$ un espace métrique en définissant, pour tout $\omega',\omega'' \in \mathscr{R}_\omega$,

$$d_{\Phi_\omega}(\omega',\omega'') = \min\{n \in \mathbb{N} \mid \exists\ \psi \in \Phi^n \text{ tel que } \psi(\omega') = \omega''\}.$$

On peut maintenant définir un champ d'espaces métriques $(\Omega,\mathscr{R}_\bullet)$ par $(\mathscr{R}_\bullet)_\omega := \mathscr{R}_\omega$ muni de la distance d_{Φ_ω}. Alors

$$\mathscr{L}(\Omega,\mathscr{R}_\bullet) := \{f : \Omega \to \Omega \mid f \text{ est borélienne et } \mathrm{Graphe}(f) \subseteq \mathscr{R}\}$$

est une structure borélienne sur le champ $(\Omega,\mathscr{R}_\bullet)$. On vérifie les conditions de la Définition 1.1.3.
1.1.3 (i) : Soient $f,h \in \mathscr{L}(\Omega,\mathscr{R}_\bullet)$. Observons que $d_{\Phi_\omega}(f(\omega),h(\omega)) \leq n$ si et seulement s'il existe $\psi \in \Phi^{(n)}$ tel que $\psi(f(\omega)) = h(\omega)$. Or, on a la suite d'applications boréliennes

$$\begin{array}{ccccc} f^{-1}(\mathrm{dom}(\psi)) & \stackrel{\triangle}{\to} & \mathscr{R} & \stackrel{(\psi\circ f)\times h}{\to} & \mathscr{R} \\ \omega & \mapsto & (\omega,\omega) & \mapsto & (\psi(f(\omega)),h(\omega)). \end{array}$$

Ainsi $\{\omega \in \Omega \mid \psi(f(\omega)) = h(\omega)\} = \left(((\psi \circ f) \times h) \circ \triangle\right)^{-1}(\Delta)$ qui est borélienne où Δ désigne la diagonale de $\Omega \times \Omega$.
1.1.3 (iii) : On choisit $G \subseteq [\mathcal{R}]$ dénombrable tel que $\mathcal{R} = \mathcal{R}_G$. Alors $\mathcal{D} = \{\omega \mapsto g\omega\}_{g\in G}$ est une famille fondamentale. En effet, $\mathcal{D}_\omega = \{g\omega\}_{g\in G} = \mathcal{R}_\omega$ pour tout $\omega \in \Omega$.
1.1.3 (ii) : Par le Lemme 1.1.6, il suffit d'observer que $\mathcal{L}(\Omega, \mathcal{R}_\bullet)$ est invariant par limite ponctuelle (la métrique de chaque classe est discrète) et recollement dénombrable borélien.
Définissons une action de $\mathcal{R}$ sur $(\Omega, \mathcal{R}_\bullet)$ par $\alpha(\omega, \omega') : \mathcal{R}_\omega \to \mathcal{R}_{\omega'}$, $\omega'' \mapsto \omega''$. Cette action satisfait les conditions de la Définition 2.2.6 et se fait par isométries. Seule la condition (ii) n'est pas triviale à vérifier. Par la Proposition 2.2.9 (i), il suffit de vérifier que $gx_\bullet \in \mathcal{L}(\Omega, X_\bullet)$ pour tout $x_\bullet \in \mathcal{D}$ et $g \in G$. Ceci est évidemment vrai puisque la famille fondamentale est invariante par l'action du groupe.

(2) [Action sur un champ trivial]
Si X est un espace métrique séparable et que $H \subseteq \mathrm{Hom}(X)$ est un groupe borélien standard tel que les applications $H \to X, h \mapsto hx$ sont boréliennes pour tout $x \in X$. Alors tout cocycle borélien $\alpha : \mathcal{R} \to H$ définit une action de la relation $\mathcal{R}$ sur le champ trivial (Ω, X). Pour prouver ceci, on se donne un groupe dénombrable $G \subseteq \mathcal{R}$ tel que $\mathcal{R} = \mathcal{R}_G$. Alors Ω est un G-espace borélien standard et le cocycle α permet de définir un cocycle

$$\begin{array}{rccl} \beta : & G \times \Omega & \to & H \\ & (g, \omega) & \mapsto & \beta(g, \omega) := \alpha(\omega, g\omega). \end{array}$$

Ce cocycle est borélien puisqu'il est la composition du cocycle α et de l'application [5]

$$\begin{array}{ccc} G \times \Omega & \to & \mathcal{R} \\ (g, \omega) & \mapsto & (\omega, g\omega) \end{array}$$

qui est borélienne puisque G est dénombrable. Ainsi, le G-espace agit sur X par l'Exemple 2.1.8 (3) et donc G préserve $\mathcal{L}(\Omega, X)$, ce qui montre que $\mathcal{R}$ agit sur le champ trivial (Ω, X) par la Proposition 2.2.9.

(3) [Bord de Floyd d'une relation d'équivalence] On peut modifier l'exemple (1) en définissant une autre métrique sur chacune des classes en s'inspirant de la méthode de Floyd (voir [Fl80] et [Kar03a]) utilisée pour définir des bords pour les groupes. On va décrire cette méthode pour un graphe quelconque $\mathcal{G} = (V(\mathcal{G}), E(\mathcal{G}))$ où $V(\mathcal{G})$ et $E(\mathcal{G})$ désignent respectivement les sommets et les arêtes de $\mathcal{G}$. On se fixe $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ tel que

(i) f est sommable.
(ii) Il existe $\lambda > 0$ tel que $\lambda f(r) < f(r+1) < f(r)$ pour tout $r \in \mathbb{N}$.

On considère $(\mathcal{G}, v_0)$ un graphe muni d'un point base. Pour un chemin $\alpha = \{x_i\}_{i=0}^n$ dans $\mathcal{G}$, *i.e.* une suite de sommets reliés par des arêtes, on définit une nouvelle longueur

$$L'_{v_0}(\alpha) = \sum_{i=1}^{N} f(d(v_0), \{x_{i-1}, x_i\})$$

qu'on peut utiliser pour définir une nouvelle distance sur $V(\mathcal{G})$ en posant, pour des sommets $x, y \in V(\mathcal{G})$,

$$d'_{v_0}(x, y) = \inf_{\alpha \text{ de } x \text{ à } y} L'(\alpha).$$

On définit

$$\overline{V(\mathcal{G})}_{v_0} := \text{ la complétion de } \left(V(\mathcal{G}), d'_{v_0}\right).$$

5. Qui est aussi un cocycle dans un certain sens (en fait c'est un homomorphisme de groupoïdes).

L'ensemble $\partial V(\mathcal{G}) := \overline{V(\mathcal{G})}_{v_0} \setminus V(\mathcal{G})$ est appelé le bord de Floyd du graphe. On vérifie que si v_0 et w_0 sont deux points bases de $\mathcal{G}$, alors id : $V(\mathcal{G}) \to V(\mathcal{G})$ s'étend en un homéomorphisme de $\overline{V(\mathcal{G})}_{v_0}$ dans $\overline{V(\mathcal{G})}_{w_0}$. On commence par montrer que si $d(v_0, w_0) = 1$, alors on a

$$d'_{v_0}(x,y) \leq \frac{1}{\lambda} d'_{w_0}(x,y) \text{ pour tout } x, y \in V(\mathcal{G}).$$

En effet, soit $x, y \in V(\mathcal{G})$ et $\varepsilon > 0$ fixés ainsi que $\alpha = \{x_i\}_{i=1}^{n}$ un chemin de x à y tel que $d'_{w_0}(x,y) \geq L'_{w_0}(\alpha) - \lambda\varepsilon$. Alors

$$\begin{aligned} d'_{v_0}(x,y) &\leq L'_{v_0}(\alpha) = \sum_{i=1}^{N} f(d(v_0, \{x_{i-1}, x_i\})) \overset{\text{(ii)}}{\leq} \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{N} f(\underbrace{d(v_0, \{x_{i-1}, x_i\}) + 1}_{\geq d(w_0, \{x_{i-1}, x_i\})}) \\ &\leq \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{N} f(d(w_0, \{x_{i-1}, x_i\})) = \frac{1}{\lambda} L'_{w_0}(\alpha) \leq \frac{1}{\lambda} d'_{w_0}(x,y) + \varepsilon \end{aligned}$$

Ainsi, on a pour v_0 et w_0 quelconques

$$\lambda^{d(v_0,w_0)} d'_{w_0}(x,y) \leq d'_{v_0}(x,y) \leq \frac{1}{\lambda^{d(v_0,w_0)}} d'_{w_0}(x,y),$$

c'est-à-dire que id : $\left(V(\mathcal{G}), d'_{v_0}\right) \to \left(V(\mathcal{G}), d'_{w_0}\right)$ est 1-Lipschitz (et d'inverse 1-Lipschitz) et s'étend donc continûment aux complétés. Remarquons que si $\mathcal{G}$ est localement fini, alors $\overline{V(\mathcal{G})}_{v_0}$ est compact (car $(V(\mathcal{G}), d'_{v_0})$ est totalement borné).

Soit $\mathcal{R} \subseteq \Omega^2$ une relation d'équivalence borélienne et $\Phi = \{\varphi_i\}_{i \geq 1}$ un graphage qui engendre $\mathcal{R}$. Le graphage permet de mettre une structure de graphe sur chaque classe d'équivalence. Notons d_ω la métrique induite par cette structure de graphe sur la classe $\mathcal{R}_\omega$ (celle qu'on a noté d_{Φ_ω} dans l'Exemple (1)). En fixant $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ comme ci-dessus, on peut introduire les nouvelles métriques d'_ω sur la classe de ω en modifiant d_ω par rapport au point base ω. On va maintenant vérifier que

$$\mathcal{L}(\Omega, \mathcal{R}_\bullet) := \{h : \Omega \to \Omega \mid h \text{ est borélienne et } \operatorname{Graphe}(h) \subseteq \mathcal{R}\}$$

est une structure borélienne sur le champ d'espaces métriques $\left(\Omega, (\mathcal{R}_\bullet, d'_\bullet)\right)$. La seule condition difficile à vérifier est que cette structure est compatible avec la famille de métriques (les autres conditions se vérifient comme dans l'Exemple (1)). Fixons $x_\bullet, y_\bullet \in \mathcal{L}(\Omega, \mathcal{R}_\bullet)$. Pour tout $\psi \in \Phi^{(n)}$ et tout $0 \leq i \leq n$ on note ψ^i le mot tronqué de longueur i, *i.e.* si $\psi = \varphi_{m_n}^{\varepsilon_n} \varphi_{m_{n-1}}^{\varepsilon_{n-1}} \dots \varphi_{m_1}^{\varepsilon_1}$ avec $\varepsilon_j \in \{\pm 1\}$, alors $\psi^i = \varphi_{m_i}^{\varepsilon_i} \dots \varphi_{m_1}^{\varepsilon_1}$. On définit la fonction

$$\begin{aligned} L_\bullet(\psi) : \quad \Omega \quad &\to \quad \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\} \\ \omega \quad &\mapsto \quad \begin{cases} \sum_{i=1}^{N} f\left(d_\omega(\omega, \{\psi^{i-1}(x_\omega), \psi^i(x_\omega)\})\right) & \text{si } x_\omega \in \operatorname{dom}(\psi) \text{ et } \psi(x_\omega) = y_\omega, \\ \infty & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

Il est facile de vérifier que pour tout $\varphi \in \Phi^{(\infty)}$, tout $z_\bullet \in \mathcal{L}(\Omega, \mathcal{R}_\bullet)$ et tout $\Omega' \subseteq \operatorname{dom}(\varphi)$, la section $\varphi(x_\bullet\, |_{\Omega'}) \in \mathcal{L}(\Omega', \mathcal{R}_\bullet)$. Ainsi, la fonction $\operatorname{dom}(\psi) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, $\omega \mapsto L_\omega(\psi)$ est borélienne pour tout $\psi \in \Phi^{(\infty)}$. Il reste à observer que

$$d'_\bullet(x_\bullet, y_\bullet) = \inf_{\psi \in \Phi^{(\infty)}} L_\bullet(\psi)$$

qui est donc borélienne et la structure est bien compatible avec la famille de métriques. Observons que la structure borélienne du champ $(\Omega, \mathcal{R}_\bullet)$ est la même si on le considère muni de la famille des métriques discrètes canoniques, celle des métriques induite par le graphage ou celle des métriques modifiées par la fonction f. L'intérêt de définir la dernière famille de métriques est qu'on peut considérer le champ des complétés $(\Omega,\overline{\mathscr{R}_\bullet})$ relativement à cette famille de métriques qui est un champ borélien (voir l'Exemple 1.1.10). Le sous-champ généralisé $(\Omega,\partial\mathscr{R}_\bullet)$ est borélien lorsque le graphage est localement fini par la Proposition 1.5.6, puisque pour tout $\omega\in\Omega$,

$$\partial\mathscr{R}_\omega=\bigcap_{n\geq 1}\overline{\mathscr{R}_\omega}\setminus B_{d_\omega}(\omega,n).$$

Le champ des bords est presque borélien sans l'hypothèse de finitude locale pour la même raison et par le Corollaire 1.4.7.
Grâce à ce qu'on a montré plus haut sur le changement de point base, on voit que l'action triviale de $\mathscr{R}$ sur $(\Omega,\mathscr{R}_\bullet)$ s'étend en une action par homéomorphismes de $\mathscr{R}$ sur $(\Omega,\overline{\mathscr{R}_\bullet})$ et sur $(\Omega,\partial\mathscr{R}_\bullet)$. La propriété de compatibilité d'une action d'une relation d'équivalence[6] se vérifie facilement à l'aide de la Proposition 2.2.9 pour l'action sur le champ des complétés. Le Lemme 2.2.16 (ii) montre que l'action sur le champ des bords est bien une action.

Remarque 2.2.13. On a vu dans l'Exemple 2.2.12 (2) que si $\alpha:\mathscr{R}\to H$ est un cocycle borélien de $\mathscr{R}$ dans un groupe borélien H, alors on peut définir un cocycle de $G\times\Omega$ dans H. La réciproque est en générale fausse, sauf si l'action de G sur Ω est libre. Dans ce cas, l'application naturelle $G\times\Omega\to\mathscr{R}$ est une bijection borélienne et on a donc une bijection entre les cocycles de $\mathscr{R}$ dans H et ceux de $G\times\Omega$ dans H.

Définition 2.2.14. *Soit $(\Omega,\mathscr{A},\mu)$ un espace de probabilité borélien standard, $\mathscr{R}\subseteq\Omega^2$ une relation d'équivalence borélienne qui préserve quasiment la mesure, $(\Omega,X_\bullet)$ un champ borélien d'espaces métriques et α une action $\mathscr{R}\curvearrowright(\Omega,X_\bullet)$.*
Une section $x_\bullet\in\mathscr{L}(\Omega,X_\bullet)$ est presque $\mathscr{R}$-invariante (ou presque invariante pour α) s'il existe un borélien $A\in\mathscr{A}$ de mesure pleine tel que

$$\alpha(\omega,\omega')x_\omega=x_{\omega'}\quad\textit{pour tout }(\omega,\omega')\in\mathscr{R}\cap(A\times A).$$

Il est clair que si $x'_\bullet\in\mathscr{L}(\Omega,X_\bullet)$ est telle que $x'_\bullet=_{p.p.}x_\bullet$ et que $x_\bullet$ est presque $\mathscr{R}$-invariante, alors $x'_\bullet$ l'est aussi. Par conséquent, on dit que $[x_\bullet]\in L(\Omega,X_\bullet)$ est $\mathscr{R}$-invariante (ou invariante pour α) si tout représentant de $[x_\bullet]$ est presque $\mathscr{R}$-invariant.
Plus généralement, un sous-champ borélien $(\Omega,A_\bullet)$ est dit presque $\mathscr{R}$-invariant s'il existe un borélien $A\subseteq\Omega$ de mesure pleine tel que

$$\alpha(\omega,\omega')A_\omega=A_{\omega'}\quad\textit{pour tout }(\omega,\omega')\in\mathscr{R}\cap(A\times A).$$

Remarque 2.2.15. Il ne coûte rien d'ajouter dans la définition précédente que le borélien A est $\mathscr{R}$-invariant. En effet, si $A\in\mathscr{A}$ est un borélien de mesure pleine alors il existe, pour autant que $\mathscr{R}$ préserve quasiment la mesure, un borélien $A'\subseteq A$ de mesure pleine invariant. Pour le prouver, il suffit de se donner un groupe dénombrable $G\subseteq\mathrm{Aut}(\Omega)$ tel que $\mathscr{R}=\mathscr{R}_G$ et d'observer que $\bigcap_{g\in G}g(A)$ satisfait toutes les conditions.

Lemme 2.2.16. *Soit $(\Omega,\mathscr{A},\mu)$ un espace de probabilité borélien standard, $\mathscr{R}\subseteq\Omega^2$ une relation d'équivalence borélienne qui quasi-préserve la mesure, $(\Omega,X_\bullet)$ un champ borélien d'espaces métriques et α une action $\mathscr{R}\curvearrowright(\Omega,X_\bullet)$. Soit encore $G\subseteq\mathrm{Aut}(\Omega)$ un groupe dénombrable tel que $\mathscr{R}=\mathscr{R}_G$.*

(i) Soit $(\Omega,A_\bullet)$ un sous-champ borélien. Alors $(\Omega,A_\bullet)$ est presque $\mathscr{R}$-invariant si et seulement si $g[A_\bullet]=[A_\bullet]$ pour tout $g\in G$.

(ii) Si $(\Omega,A_\bullet)$ est un sous-champ borélien presque $\mathscr{R}$-invariant et si $\Omega'\subseteq\Omega$ est un borélien $\mathscr{R}$-invariant de mesure pleine tel que $\alpha(\omega,\omega')A_\omega=A_{\omega'}$ pour tout $(\omega,\omega')\in\mathscr{R}|_{\Omega'}$, alors $\mathscr{R}|_{\Omega'}$ agit sur $(\Omega',A_\bullet)$.

6. *I.e.* le point (ii) de la Définition 2.2.6

Preuve. (i) [$\Rightarrow$] Par hypothèse, il existe $\Omega' \subseteq \Omega$ un borélien de mesure pleine, que l'on peut supposer $\mathscr{R}$-invariant par la Remarque 2.2.15, tel que $\alpha(\omega', \omega)A_{\omega'} = A_\omega$ pour tout $(\omega', \omega) \in \mathscr{R} \cap (\Omega' \times \Omega')$. Si $g \in G$, alors $g^{-1}(\Omega') = \Omega'$ et donc $(gA_\bullet)_\omega = \alpha(g^{-1}\omega, \omega)A_{g^{-1}\omega} = A_\omega$ pour tout $\omega \in \Omega'$.

[$\Leftarrow$] Par hypothèse, $g[A_\bullet] = [A_\bullet]$ pour tout $g \in G$. Il existe donc un borélien $\Omega' \subseteq \Omega$, G-invariant et de mesure pleine, tel que $(gA_\bullet)_\omega = A_\omega$ pour tout $\omega \in \Omega'$ et tout $g \in G$. Soit $(\omega', \omega) \in \mathscr{R} \cap (\Omega' \times \Omega')$. Alors il existe $g \in G$ tel que $\omega' = g^{-1}\omega$ et donc $\alpha(\omega', \omega)A_{\omega'} = \alpha(g^{-1}\omega, \omega)A_{g^{-1}\omega} = A_\omega$.

(ii) Tous les points sont trivialement vérifiés. □

2.2.3 Relations d'équivalence moyennables

Historiquement, c'est Zimmer qui, le premier, a défini la moyennabilité d'une relation d'équivalence. Nous allons rappeler maintenant sa définition et plus tard nous en introduirons une nouvelle, *a priori* plus générale, qui conviendra au cadre des champs boréliens d'espaces métriques. On prouvera finalement que les définitions sont équivalentes en utilisant des résultats classiques.
Zimmer définit la notion de moyennabilité d'une relation en parallèle avec celle de moyennabilité faible d'un G-espace. Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ un G-espace où G est un groupe dénombrable. On dit que G est faiblement moyennable ou que la relation $\mathscr{R}_G$ est moyennable si la Définition 2.1.13 est satisfaite pour tous les cocycles boréliens $\alpha : G \times \Omega \to \mathrm{Iso}(B)$ qui factorisent à travers $\mathscr{R}_G$, *i.e.* les cocycles tels qu'il existe un cocycle borélien $\widetilde{\alpha} : \mathscr{R} \to \mathrm{Iso}(B)$ qui fait commuter le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} G \times \Omega \arrow[r, two heads] \arrow[d, "\alpha"'] & \mathscr{R}_G \arrow[dl, "\widetilde{\alpha}"] \\ \mathrm{Iso}(B) & \end{tikzcd}$$

Donc si $\mathscr{R}$ est une relation borélienne sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$, on peut définir ainsi la moyennabilité "à la Zimmer".

Définition 2.2.17 (Moyennabilité "à la Zimmer", [Zim77], Définition 3.1)**.** *Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ un espace de probabilité standard et $\mathscr{R} \subseteq \Omega^2$ une relation borélienne qui préserve quasiment la mesure. On dit que $\mathscr{R}$ est moyennable si pour tout espace de Banach séparable B, pour tout cocycle borélien $\alpha : \mathscr{R} \to \mathrm{Iso}(B)$ et pour tout sous-champ borélien $(\Omega, C_\bullet)$ de convexes compacts de $(\Omega, B^*_{\leq 1})$ presque $\mathscr{R}$-invariant, il existe une section borélienne presque $\mathscr{R}$-invariante $\varphi : \Omega \to B^*_{\leq 1}$ telle que $\varphi(\omega) \in C_\omega$ pour presque tout $\omega \in \Omega$.*

En fait on peut montrer, en combinant des résultats de [CFW81], [AL91], [Zim78] et [JKL02] le théorème suivant qui explicite les relations moyennables.

Théorème 2.2.18. *Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ un espace de probabilité standard et $\mathscr{R} \subseteq \Omega^2$ une relation borélienne qui préserve quasiment la mesure. Alors $\mathscr{R}$ est moyennable si et seulement s'il existe un borélien Ω' de mesure pleine et $\mathscr{R}$-invariant, ainsi qu'une action de $\mathbb{Z}$ sur Ω' tel que $\mathscr{R}\,|_{\Omega'} = \mathscr{R}_{\mathbb{Z}}$.*

Preuve. [$\Leftarrow$] Observons qu'il découle de la définition d'une relation moyennable que si $\mathscr{R}\,|_{\Omega'}$ est moyennable, alors $\mathscr{R}$ est moyennable (où Ω' est comme dans l'énoncé). Il suffit donc de prouver que $\mathscr{R}\,|_{\Omega'}$ est moyennable. Or le Théorème 2.1 de [Zim78] énonce que si $G \subseteq \mathrm{Aut}(\Omega')$ est dénombrable et moyennable, alors le G espace Ω est moyennable et donc faiblement moyennable, *i.e.* $\mathscr{R}_G$ est moyennable. Comme $\mathbb{Z}$ est moyennable, l'affirmation est démontrée.

[$\Rightarrow$] Pour l'autre implication, on introduit une autre définition de moyennabilité due à Connes, Feldman et Weiss. Cette notion, *a priori* différente, est en fait équivalente (voir [AL91], Appendice 1).

Définition 2.2.19. *Soit X un ensemble. Une moyenne m sur X est une fonctionnelle linéaire $m : \ell^\infty(X) \to \mathbb{R}$ vérifiant les deux conditions suivantes :*

(i) L'application m est positive (i.e. si $f \geq 0$, alors $m(f) \geq 0$).

(ii) Si $\mathbf{1} : X \to \mathbb{R}$ est la fonction constante de valeur 1, alors $m(\mathbf{1}) = 1$.

Définition 2.2.20 (moyennabilité [CFW81])**.** *Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ un espace de probabilité standard. On dit qu'une relation d'équivalence borélienne dénombrable $\mathscr{R} \subseteq \Omega^2$ est μ-moyennable s'il existe une famille $\{m_{[\omega]}\}_{[\omega]\in\Omega/\mathscr{R}}$, où $m_{[\omega]} : \ell^\infty([\omega]) \to \mathbb{R}$ est une moyenne, vérifiant la condition suivante : pour toute application borélienne bornée $F : \mathscr{R} \to \mathbb{R}$ l'application $\omega \mapsto m_{[\omega]}(F(\omega, \cdot))$ est μ-mesurable.*

Connes, Feldman et Weiss on montré que leur notion de μ-moyennabilité (et donc celle de Zimmer) est équivalente à une autre notion, *a priori* plus restrictive.

Définition 2.2.21. *Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ un espace de probabilité standard. On dit qu'une relation d'équivalence borélienne dénombrable $\mathscr{R} \subseteq \Omega^2$ est hyperfinie s'il existe une suite croissante de sous-relations d'équivalence boréliennes finies $\mathscr{R}_1 \subseteq \mathscr{R}_2 \subseteq \ldots \subseteq \mathscr{R}_n \subseteq \ldots$ telle que*

$$\mathscr{R} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathscr{R}_n.$$

On dit que $\mathscr{R}$ est hyperfinie μ-presque partout s'il existe un ensemble $\mathscr{R}$-invariant $A \in \mathscr{A}$ avec $\mu(A) = 1$ tel que $\mathscr{R}|_A$ est hyperfinie.

Théorème 2.2.22 ([CFW81])**.** *Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ un espace de probabilité standard et $\mathscr{R} \subseteq \Omega^2$ relation d'équivalence borélienne dénombrable. Si $\mathscr{R}$ est μ-moyennable, alors $\mathscr{R}$ est hyperfinie μ-presque partout.*

Il reste à observer que les relations hyperfinies peuvent être obtenus comme des actions boréliennes de $\mathbb{Z}$ (voir par exemple [KM04], p. 19). $\square$

On va utiliser ce résultat pour prouver une équivalence entre la définition de moyennabilité de Zimmer et une définition *a priori* plus générale.

Généralisation de la définition de moyennabilité "à la Zimmer"

Le but de cette section est d'introduire une nouvelle définition de moyennabilité pour une relation d'équivalence et de montrer qu'elle est équivalente à celles dont on a déjà parlé. On va commencer par prouver les résultats techniques nécessaires pour énoncer la nouvelle définition. Pour prouver l'équivalence, on utilisera le Théorème 2.2.18 qui nous permet de supposer que $\mathscr{R}$ provient d'une action de $\mathbb{Z}$ et on suivra la stratégie de la preuve du Théorème 2.1 de [Zim78] (voir la preuve du Théorème 2.2.18 pour l'énoncé).
Supposons maintenant qu'on a une action d'une relation d'équivalence sur un champ borélien séparable d'espaces de Banach $(\Omega, B_\bullet)$. On va montrer qu'on peut étendre l'action au champ borélien (mais non séparable) des espaces duaux. Il est important d'observer que $(\Omega, B_\bullet^*)$ n'est pas nécessairement séparable. Mais il existe tout de même une structure borélienne dans le sens de la Définition 1.6.8. Il s'agit de celle de l'évaluation borélienne (voir le Lemme 1.6.10). En remplacement du point (ii) de la Définition 2.2.6, on va demander que $g\big(\widetilde{\mathscr{L}}(\Omega, B_\bullet^*)\big) \subseteq \widetilde{\mathscr{L}}(\Omega, B_\bullet^*)$ pour tout $g \in G$ où $G \subseteq \mathrm{Aut}(\Omega)$ est un groupe dénombrable tel que $\mathscr{R} = \mathscr{R}_G$ (ce choix est cohérent avec la Proposition 2.2.9).

Lemme 2.2.23. *Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ un espace de probabilité borélien standard, $\mathscr{R} \subseteq \Omega^2$ une relation d'équivalence borélienne et $(\Omega, B_\bullet)$ un champ borélien séparable d'espaces de Banach de structure borélienne $\mathscr{L}(\Omega, B_\bullet)$.*

Si $\mathscr{R}$ agit par homéomorphismes linéaires sur $(\Omega, B_\bullet)$, alors $\mathscr{R}$ agit par homéomorphismes (par rapport à la topologie faible-$*$ ou la topologie forte des opérateurs) linéaires sur $(\Omega, B^*_\bullet)$ (dans le sens décrit ci-dessus).
Si de plus l'action se fait par isométries linéaires, alors il existe Ω' invariant de mesure pleine tel que $(\Omega', B^*_{\bullet,\leq 1})$ soit un champ borélien d'espaces métriques sur lequel $\mathscr{R}\mid_{\Omega'\times\Omega'}$ agit (dans le sens de la Définition 2.2.6).

Preuve. Notons α l'action de $\mathscr{R}$ sur $(\Omega, B_\bullet)$. On définit $\mathscr{R} \overset{\widetilde{\alpha}}{\curvearrowright} (\Omega, B^*_\bullet)$:

$$\begin{array}{rccc} \widetilde{\alpha}(\omega,\omega') : & B^*_\omega & \to & B^*_{\omega'} \\ & \varphi_\omega & \mapsto & \varphi_\omega \circ \alpha(\omega',\omega). \end{array}$$

C'est-à-dire que $\widetilde{\alpha}(\omega,\omega') = \alpha(\omega',\omega)^*$. Le point (i) de 2.2.6 est facile à vérifier. Le point (iii) est aussi un résultat classique [7]. Il reste à montrer que la structure borélienne est préservée. Pour se faire, il faut commencer par observer que si $\varphi_\bullet \in \widetilde{\mathscr{L}}(\Omega, B^*_\bullet)$ et $g \in G$ on a

$$g\varphi_\bullet(x_\bullet) = (\varphi_\bullet(g^{-1}x_\bullet)) \circ g^{-1}$$

pour tout $x_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega, B_\bullet)$. En effet, on calcule

$$\begin{aligned} \big((g\varphi_\bullet)(x_\bullet)\big)(\omega) &= (g\varphi_\bullet)_\omega(x_\omega) = \big(\widetilde{\alpha}(g^{-1}\omega,\omega)(\varphi_{g^{-1}\omega})\big)(x_\omega) = \varphi_{g^{-1}\omega}\big(\alpha(\omega, g^{-1}\omega)(x_\omega)\big) \\ &= \varphi_{g^{-1}\omega}\big((g^{-1}x_\bullet)_{g^{-1}\omega}\big) = \big(\varphi_\bullet(g^{-1}x_\bullet)\big)(g^{-1}\omega). \end{aligned}$$

Par conséquent $g\varphi_\bullet$ est borélienne comme composition d'applications boréliennes, c'est-à-dire que $g\varphi_\bullet \in \widetilde{\mathscr{L}}(\Omega, B^*_\bullet)$.
Observons que le champ des boules est invariant : on a $\|\widetilde{\alpha}(\omega,\omega')\| =$ [8]$\|\alpha(\omega',\omega)\| = 1$ puisque l'action est supposée par isométries. Le Théorème 1.6.19 montre qu'il existe un borélien Ω' de mesure pleine, qu'on peut supposer invariant (voir Remarque 2.2.15), tel que $(\Omega', B^*_{\bullet,\leq 1})$ soit un champ borélien d'espaces métriques. La première partie de la preuve permet de conclure (à l'aide de la Proposition 2.2.9) que $\mathscr{R}\mid_{\Omega'\times\Omega'}$ agit sur $(\Omega', B^*_{\bullet,\leq 1})$ (dans le sens de la Définition 2.2.6). □

Ce lemme permet d'introduire une nouvelle définition de la moyennabilité pour une relation d'équivalence.

Définition 2.2.24 (Moyennabilité, champ non-trivial). *Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ un espace de probabilité standard, $\mathscr{R} \subseteq \Omega^2$ une relation d'équivalence borélienne qui préserve quasiment la mesure.*
On dit que $\mathscr{R}$ est moyennable si pour toute action par isométries linéaires $\mathscr{R} \overset{\alpha}{\curvearrowright} (\Omega, B_\bullet)$ de $\mathscr{R}$ sur un champ borélien séparable d'espaces de Banach $(\Omega, B_\bullet)$ et pour tout sous-champ borélien de convexes fermés $(\Omega', C_\bullet)$ de $(\Omega', B^*_{\bullet,\leq 1})$ presque $\mathscr{R}$-invariant pour l'action induite [9] $\mathscr{R} \overset{\widetilde{\alpha}}{\curvearrowright} (\Omega, B^*_\bullet)$, il existe une section presque $\mathscr{R}$-invariante $\varphi_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega', C_\bullet)$.

Nous allons maintenant montrer l'équivalence entre les deux définitions. Commençons par rappeler que si $\mathscr{R}$ est une relation borélienne dénombrable qui quasi-préserve la mesure et $G \subseteq \mathrm{Aut}(\Omega)$ est un groupe dénombrable tel que $\mathscr{R} = \mathscr{R}_G$, alors une action α de $\mathscr{R}$ sur un champ borélien séparable $(\Omega, B_\bullet)$ induit une action de G sur $\widetilde{\mathscr{L}}(\Omega, B^*_\bullet)$ définie par

$$(g\varphi_\bullet)_\omega = \widetilde{\alpha}(\omega, g^{-1}\omega)\varphi_{g^{-1}\omega}.$$

Puisque G préserve quasiment la mesure et que $\mathscr{R}$ agit par isométries sur $(\Omega, B_\bullet)$, alors G agit sur $\widetilde{L}^\infty(\Omega, B^*_\bullet)$ et sur $L(\Omega, B^*_{\bullet,\leq 1})$ [10]. La stratégie de la preuve est de montrer que l'action de G sur

7. ([Fetc01] Exercice 3.20, p. 90) pour la topologie faible-$*$ et ([Fetc01] 2.27, p. 51) pour la topologie des opérateurs.
8. ([Fetc01] 2.28, p. 51)
9. Voir le Lemme 2.2.23.
10. On peut enlever le $\widetilde{L}$, puisqu'on a montré qu'il existait un borélien Ω' de mesure pleine tel que $(\Omega', B^*_{\bullet,\leq 1})$ est un champ borélien d'espaces métriques.

$\widetilde{L}^{\infty}(\Omega, B^*_\bullet)$ se fait par homéomorphismes linéaires, puis d'utiliser que si $\mathscr{R}$ est moyennable (dans le sens de Zimmer), alors on peut supposer que G est moyennable (on peut même prendre $G = \mathbb{Z}$), et d'utiliser cette moyennabilité pour montrer qu'il y a une section fixe. Pour montrer que l'action se fait par homéomorphismes linéaires, on va utiliser la dérivée de Radon-Nikodym. Rappelons le théorème à l'origine de la définition et quelques propriétés dont nous aurons besoin.

Théorème 2.2.25 (Radon-Nikodym)**.** *Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ un espace mesuré σ-fini et ν une mesure σ-finie sur $\mathscr{A}$ telle que $\nu \ll \mu$ (ν est absolument continue par rapport à μ). Alors il existe une unique $[f] \in L^1(\Omega, \mathbb{R})$ (le quotient est pris par rapport à la mesure μ.) telle que*

$$\nu(A) = \int_A f\, d\mu \quad \text{pour tout } A \in \mathscr{A}.$$

La fonction $[f]$ est appelée la dérivée de Radon-Nikodym de ν par rapport à μ. On note $\dfrac{d\nu}{d\mu}$ un représentant de la dérivée de Radon-Nikodym.

Lemme 2.2.26. *Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ un espace mesuré σ-fini et ζ, ν deux mesures sur $\mathscr{A}$. Alors, les assertions suivantes sont vérifiées*

(i) Si $\zeta \ll \mu$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ est borélienne, alors

$$\int_A f\, d\zeta = \int_A f \frac{d\zeta}{d\mu} d\mu \quad \text{pour tout } A \in \mathscr{A}.$$

(ii) Si $\nu \ll \zeta \ll \mu$, alors $\dfrac{d\nu}{d\mu} = \dfrac{d\nu}{d\zeta} \cdot \dfrac{d\zeta}{d\mu}$ μ-presque partout.

(iii) Si $\nu \sim \mu$ (i.e. $\nu \ll \mu$ et $\mu \ll \nu$), alors $\dfrac{d\nu}{d\mu} = \left(\dfrac{d\mu}{d\nu}\right)^{-1}$ μ-presque partout.

(iv) Si $\nu \ll \mu$ et $g : \Omega \to \Omega$ est un automorphisme borélien, alors $g_*(\nu) \ll g_*(\mu)$ et

$$\frac{dg_*(\nu)}{dg_*(\mu)} = \frac{d\nu}{d\mu} \circ g^{-1} \quad g_*(\mu)\text{-presque partout}$$

(v) Si $g : \Omega \to \Omega$ est un automorphisme borélien qui préserve quasiment la mesure, alors

$$\frac{dg_*(\mu)}{d\mu} \circ g = \frac{d\mu}{dg_*^{-1}(\mu)}, \quad \frac{dg_*(\mu)}{d\mu} \circ g^{-1} = \frac{dg_*^2(\mu)}{dg_*(\mu)}, \quad \left(\frac{dg_*(\mu)}{d\mu}\right)^{-1} = \frac{dg_*^{-1}(\mu)}{d\mu} \circ g^{-1}.$$

(vi) Si $g, h : \Omega \to \Omega$ sont deux automorphismes boréliens qui préservent quasiment la mesure, alors

$$\frac{d(g \circ h)_*(\mu)}{d\mu} = \left(\frac{dh_*(\mu)}{d\mu} \circ g^{-1}\right) \cdot \frac{dg_*(\mu)}{d\mu} \quad \mu\text{-presque partout.}$$

Preuve. (i) Soit $A \in \mathscr{A}$. Il suffit de montrer que l'égalité a lieu lorsque $f = \chi_B$ pour $B \in \mathscr{A}$. On a alors

$$\int_A \chi_B\, d\zeta = \zeta(B \cap A) = \int_{B\cap A} \frac{d\zeta}{d\mu} d\mu = \int_A \chi_B \cdot \frac{d\zeta}{d\mu} d\mu.$$

(ii) Pour tout $A \in \mathscr{A}$, on a

$$\nu(A) = \int_A \frac{d\nu}{d\zeta} d\zeta \overset{\text{(i)}}{=} \int_A \frac{d\nu}{d\zeta} \cdot \frac{d\zeta}{d\mu} d\mu.$$

On a le résultat par unicité de la dérivée de Radon-Nikodym.

(iii) On a $\mathbf{1} = \dfrac{d\nu}{d\nu} \overset{\text{(ii)}}{=} \dfrac{d\nu}{d\mu} \cdot \dfrac{d\mu}{d\nu}$ μ-presque partout.
(iv) Soit $A \in \mathscr{A}$ tel que $0 = g_*(\mu)(A) = \mu(g^{-1}A)$. Alors $g_*(\nu)(A) = \nu(g^{-1}A) = 0$ puisque $\nu \ll \mu$. Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ une fonction borélienne. On a

$$\begin{aligned}\int_\Omega f\, dg_*(\nu) &= \int_\Omega f \circ g\, d\nu \overset{\text{(i)}}{=} \int_\Omega (f \circ g) \cdot \frac{d\nu}{d\mu}\, d\mu = \int_\Omega \Big((f \circ g) \cdot \frac{d\nu}{d\mu}\Big) \circ g^{-1} \circ g\, d\mu \\ &= \int_\Omega \Big((f \circ g) \cdot \frac{d\nu}{d\mu}\Big) \circ g^{-1}\, dg_*(\mu) = \int_\Omega f \cdot \Big(\frac{d\nu}{d\mu} \circ g^{-1}\Big)\, dg_*(\mu)\end{aligned}$$

En particulier, si $A \in \mathscr{A}$ et $f = \chi_A$ on a donc $g_*(\nu)(A) = \int_A \frac{d\nu}{d\mu} \circ g^{-1}\, dg_*(\mu)$ et on en déduit que

$$\frac{dg_*(\nu)}{dg_*(\mu)} = \frac{d\nu}{d\mu} \circ g^{-1} \quad g_*(\mu)\text{-presque partout}$$

par unicité de la dérivée de Radon Nikodym.
(v) Les deux premières égalités sont des conséquences directes de (iv). Pour la dernière, on a

$$\Big(\frac{dg_*(\mu)}{d\mu}\Big)^{-1} \overset{\text{(iii)}}{=} \frac{d\mu}{dg_*(\mu)} \overset{\text{(iv)}}{=} \frac{dg_*^{-1}(\mu)}{d\mu} \circ g^{-1}.$$

(vi) On a

$$\frac{d(g \circ h)_*(\mu)}{d\mu} = \frac{d\big[g_*(h_*(\mu))\big]}{d\mu} \overset{\text{(ii)}}{=} \frac{d\big[g_*(h_*(\mu))\big]}{dg_*(\mu)} \cdot \frac{dg_*(\mu)}{d\mu} \overset{\text{(iv)}}{=} \Big(\frac{dh_*(\mu)}{d\mu} \circ g^{-1}\Big) \cdot \frac{dg_*(\mu)}{d\mu}.$$

□

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ un espace de probabilité borélien standard, $\mathscr{R} \subseteq \Omega^2$ une relation d'équivalence borélienne qui préserve quasiment la mesure μ et $G \subseteq \mathrm{Aut}(\Omega)$ un groupe dénombrable tel que $\mathscr{R} = \mathscr{R}_G$. Par le Lemme 2.2.2, tout $g \in G$ est tel que $g_*(\mu) \sim \mu$. Par conséquent, la dérivée de Radon-Nikodym $\big[\frac{dg_*(\mu)}{d\mu}\big] \in L^1(\Omega, \mathbb{R})$ existe pour tout $g \in G$. On peut donc se fixer, pour tout $g \in G$, un représentant dans $\mathscr{L}^1(\Omega, \mathbb{R})$ de cette dérivée. On le note aussi $\frac{dg_*(\mu)}{d\mu} \in \mathscr{L}^1(\Omega, \mathbb{R})$.

Lemme 2.2.27. *Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ un espace de probabilité borélien standard, $(\Omega, B_\bullet)$ un champ borélien séparable d'espaces de Banach de structure borélienne $\mathscr{L}(\Omega, B_\bullet)$, $\mathscr{R} \subseteq \Omega^2$ une relation d'équivalence borélienne qui préserve quasiment la mesure et $G \subseteq \mathrm{Aut}(\Omega)$ un groupe dénombrable tel que $\mathscr{R} = \mathscr{R}_G$. Supposons que $\mathscr{R} \overset{\alpha}{\curvearrowright} (\Omega, B_\bullet)$ par isométries linéaires. Alors l'action de G sur $\widetilde{L}(\Omega, B_\bullet^*)$ se fait par homéomorphismes linéaires.*

Preuve. On décompose la preuve en plusieurs étapes.
(1) Le groupe G agit par isométries sur $L^1(\Omega, B_\bullet)$ selon la règle suivante : si $[x_\bullet] \in L^1(\Omega, B_\bullet)$, alors $g * [x_\bullet]$ est la classe de la section définie par

$$(g * x_\bullet)_\omega = \frac{dg_*(\mu)}{d\mu}(\omega) \cdot \alpha(g^{-1}\omega, \omega) x_{g^{-1}\omega} \text{ pour tout } \omega \in \Omega.$$

Vérifions qu'il s'agit bien d'une action. On commence par montrer qu'elle est bien définie. Premièrement, on observe que si $x_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega, B_\bullet)$, alors $g * x_\bullet = \frac{dg_*(\mu)}{d\mu} \cdot (gx_\bullet)$ et donc $g * x_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega, B_\bullet)$ par le Lemme 1.6.6 puisque $\frac{dg_*(\mu)}{d\mu}$ est borélienne et $gx_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega, B_\bullet)$ (Proposition 2.2.9). Deuxièmement, on vérifie que si $[x_\bullet] = [y_\bullet]$ alors $[g * x_\bullet] = [g * y_\bullet]$, puisque

$$\{\omega \in \Omega \mid (g * x_\bullet)_\omega = (g * y_\bullet)_\omega\} \supseteq g\{\omega \in \Omega \mid x_\omega = y_\omega\}$$

est de mesure pleine pour tout $g \in G$ puisque μ est quasi-invariante [11]. Finalement, il reste à prouver que si $[x_\bullet] \in L^1(\Omega, B_\bullet)$, alors $g * [x_\bullet] \in L^1(\Omega, B_\bullet)$ pour tout $g \in G$. Ceci découle directement du calcul qui montre que $\|g * [x_\bullet]\|_1 = \|[x_\bullet]\|_1$:

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \|(g * x_\bullet)_\omega\|_\omega \, d\mu(\omega) &= \int_\Omega \frac{dg_*(\mu)}{d\mu}(\omega) \cdot \|\alpha(g^{-1}\omega, \omega) x_{g^{-1}\omega}\|_\omega = \int_\Omega \frac{dg_*(\mu)}{d\mu}(\omega) \cdot \|x_{g^{-1}\omega}\|_{g^{-1}\omega} \, d\mu(\omega) \\
&= \int_\Omega \frac{dg_*(\mu)}{d\mu}(g\omega) \cdot \|x_\omega\|_\omega \, d\mu(g\omega) \overset{2.2.26\ (v)}{=} \int_\Omega \frac{d\mu}{dg_*^{-1}(\mu)}(\omega) \cdot \|x_\omega\|_\omega \, dg_*^{-1}(\mu)(\omega) \\
&\overset{2.2.26\ (i)}{=} \int_\Omega \|x_\omega\|_\omega \, d\mu(\omega)
\end{aligned}$$

Maintenant qu'on a montré que $*$ est bien définie, il nous reste à montrer que c'est bien une action. Soit $[x_\bullet] \in L(\Omega, B_\bullet)$ et $g, h \in G$. Par définition et par linéarité, on a alors

$$\begin{aligned}
(g * (h * x_\bullet))_\omega &= \frac{dg_*(\mu)}{d\mu}(\omega) \cdot \alpha(g^{-1}\omega, \omega)(h * x_\bullet)_{g^{-1}\omega} \\
&= \frac{dg_*(\mu)}{d\mu}(\omega) \cdot \alpha(g^{-1}\omega, \omega)\Big(\frac{dh_*(\mu)}{d\mu}(g^{-1}\omega) \cdot \alpha(h^{-1}g^{-1}\omega, g^{-1}\omega) x_{h^{-1}g^{-1}\omega}\Big) \\
&= \Big(\frac{dg_*(\mu)}{d\mu}(\omega) \frac{dh_*(\mu)}{d\mu}(g^{-1}\omega)\Big) \cdot \big(\alpha(g^{-1}\omega, \omega)\alpha(h^{-1}g^{-1}\omega, g^{-1}\omega) x_{h^{-1}g^{-1}\omega}\big) \\
\text{et} \qquad ((gh) * x_\bullet)_\omega &= \frac{d(gh)_*(\mu)}{d\mu}(\omega) \cdot \alpha(h^{-1}g^{-1}\omega, \omega) x_{h^{-1}g^{-1}\omega}.
\end{aligned}$$

Les deux expressions sont bien égales μ-presque partout par 2.2.26 (vi) (et le fait que α est une action).

(2) On considère la situation suivante :

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{R} \overset{\alpha}{\curvearrowright} (\Omega, B_\bullet) \arrow[r, dotted, "\text{action}*", "\text{(i)}"'] \arrow[d, dotted, "\text{action duale}", "2.2.23"'] & G \curvearrowright L^1(\Omega, B_\bullet) \arrow[r, dotted, "\text{action}", "\text{duale}"'] & G \overset{\beta}{\curvearrowright} (L^1(\Omega, B_\bullet))^* \arrow[d, "\simeq", "\Psi"'] \\
\mathscr{R} \overset{\alpha'}{\curvearrowright} (\Omega, B_\bullet^*) \arrow[rr, dotted, "\text{action standard}"] & & G \overset{\gamma}{\curvearrowright} L^\infty(\Omega, B_\bullet^*)
\end{tikzcd}$$

On rappelle que l'isomorphisme isométrique $\Psi : \big(L^1(\Omega, B_\bullet)\big)^* \to L^\infty(\Omega, B_\bullet^*)$ est décrit dans la Proposition 1.6.15. Alors, pour tout $g \in G$, le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
(L^1(\Omega, B_\bullet))^* \arrow[r, "\beta(g)"] \arrow[d, "\simeq", "\Psi"'] & (L^1(\Omega, B_\bullet))^* \arrow[d, "\simeq", "\Psi"'] \\
L^\infty(\Omega, B_\bullet^*) \arrow[r, "\gamma(g)"] & L^\infty(\Omega, B_\bullet^*)
\end{tikzcd}$$

Soit $\Phi \in (L^1(\Omega, B_\bullet))^*$. Montrons que $\Psi(g\Phi) = g\Psi(\Phi)$ (ou selon les notations introduites sur le diagramme, $\Psi(\beta(g)\Phi) = \gamma(g)\Psi(\Phi)$ avec $\beta(g) = (g^{-1})^*$).

11. On a pas nécessairement l'égalité entre les deux ensembles, puisqu'il se peut que $(g * x_\bullet)_\omega = (g * y_\bullet)_\omega$, même si $x_\omega \neq y_\omega$. En effet, cela peut arriver lorsque $\frac{dg_*(\mu)}{d\mu}(\omega) = 0$

Notons $\Psi(\Phi) = \varphi_\bullet \in L^\infty(\Omega, B^*_\bullet)$. On a alors, pour tout $[x_\bullet] \in L^1(\Omega, B_\bullet)$

$$\begin{aligned}(g\Phi)([x_\bullet]) = \Phi(g^{-1} * [x_\bullet]) &= \int_\Omega \frac{dg_*^{-1}(\mu)}{d\mu}(\omega)\langle \varphi_\omega, \alpha(g\omega,\omega)x_{g\omega}\rangle\, d\mu(\omega) \\ &= \int_\Omega \frac{dg_*^{-1}(\mu)}{d\mu}(g^{-1}\omega)\langle \varphi_{g^{-1}\omega}, \alpha(\omega, g^{-1}\omega)x_\omega\rangle\, d\mu(g^{-1}\omega) \\ &\overset{2.2.26\ (v)}{=} \int_\Omega \frac{d\mu}{dg_*(\mu)}(\omega)\langle \big(\alpha(g^{-1}\omega,\omega)^{-1}\big)^*\varphi_{g^{-1}\omega}, x_\omega\rangle\, dg_*(\mu)(\omega) \\ &\overset{2.2.26\ (i)}{=} \int_\Omega \langle \widetilde{\alpha}(g^{-1}\omega,\omega)\varphi_{g^{-1}\omega}, x_\omega\rangle\, d\mu(\omega) = \int_\Omega \langle (g\varphi_\bullet)_\omega, x_\omega\rangle\, d\mu(\omega)\end{aligned}$$

Ainsi, on a bien $\Psi\big(g\Phi\big) = g\varphi_\bullet = g\Psi(\Phi)$ par définition de Ψ.
(3) Le point précédent montre que l'action $G \overset{\gamma}{\curvearrowright} L^\infty(\Omega, B^*_\bullet)$ est l'action duale de l'action $G \curvearrowright L^1(\Omega, B_\bullet)$ par isométries linéaires sur le prédual. Pour tout espace de Banach B on note $\mathscr{B}(B)$ l'espace des opérateurs bornés de B dans B. Puisque l'action est par isométries, on a $\|g\|_{\mathscr{B}(L^1(\Omega,B_\bullet))} = 1$ pour tout $g \in G$ et donc on a

$$\|\gamma(g)\|_{\mathscr{B}(L^\infty(\Omega,B^*_\bullet))} = \|\beta(g)\|_{\mathscr{B}((L^1(\Omega,B_\bullet))^*)} = \|(g^{-1})^*\|_{\mathscr{B}((L^1(\Omega,B_\bullet))^*)} = \|g^{-1}\|_{\mathscr{B}(L^1(\Omega,B_\bullet))} = 1.$$

En particulier, l'action $G \curvearrowright L^\infty(\Omega, B^*_\bullet)$ est continue pour la topologie faible-$*$ car un opérateur borné du dual est continu pour cette topologie si et seulement s'il est un opérateur dual.

□

On peut maintenant montrer que notre notion de moyennabilité est équivalente à celle de Zimmer.

Proposition 2.2.28. *Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ un espace de probabilité standard et $\mathscr{R}$ une relation d'équivalence borélienne dénombrable sur Ω qui quasi-préserve la mesure. Alors les définitions de moyennabilité 2.2.17 et 2.2.24 coïncident.*

Preuve. [Définition 2.2.24 ⇒ Définition 2.2.17] Soit B un espace de Banach séparable, $\alpha : \mathscr{R} \to \mathrm{Iso}(B)$ un cocycle borélien et $(\Omega, C_\bullet)$ un sous-champ borélien de $(\Omega, B^*_{\leq 1})$ presque $\mathscr{R}$-invariant. Il faut montrer qu'il existe une section borélienne presque $\mathscr{R}$-invariante $\varphi : \Omega \to B^*_{\leq 1}$ telle que $\varphi(\omega) \in C_\omega$ pour presque tout $\omega \in \Omega$.
Le champ trivial (Ω, B) est naturellement muni de la structure borélienne

$$\mathscr{L}(\Omega, B) = \{x_\bullet \in \mathscr{S}(\Omega, B_\bullet) \mid \omega \mapsto x_\omega \text{ est borélienne}\}.$$

Par l'Exemple 2.2.12 (2), on a que α définit une action de $\mathscr{R}$ sur le champ trivial dans le sens de la Définition 2.2.6, puisque $\mathrm{ev}_x : \mathrm{Iso}(B) \to B$, $\gamma \mapsto \gamma(x)$ est borélienne pour tout $x \in X$ (voir le Corollaire 1.2 de [Zim78]).
Par hypothèse, le sous-champ $(\Omega, C_\bullet)$ est presque $\mathscr{R}$-invariant pour l'action induite $\mathscr{R} \curvearrowright (\Omega, B^*_\bullet)$. Il existe donc une section presque $\mathscr{R}$-invariante $\varphi_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega, C_\bullet)$.

[Définition 2.2.17 ⇒ Définition 2.2.24] Soit $(\Omega, B_\bullet)$ un champ borélien séparable d'espaces de Banach de structure borélienne $\mathscr{L}(\Omega, B_\bullet)$ et une action $\mathscr{R} \overset{\alpha}{\curvearrowright} (\Omega, B_\bullet)$ par isométries linéaires. Par le Théorème 1.6.19, on peut supposer, quitte à ôter un borélien de mesure nulle, que $(\Omega, B^*_{\bullet,\leq 1})$ est un champ borélien d'espaces métriques.
Soit $(\Omega, C_\bullet)$ un sous-champ borélien de convexes $*$-faiblement compacts presque $\mathscr{R}$-invariant de $(\Omega, B^*_{\bullet,\leq 1})$. Il faut montrer qu'il existe une section presque $\mathscr{R}$-invariante dans $\mathscr{L}(\Omega, C_\bullet)$. On va montrer qu'il existe $[\varphi_\bullet] \in L(\Omega, C_\bullet) = L^\infty(\Omega, C_\bullet)$ qui est $\mathscr{R}$-invariante.

Par le Théorème 2.2.18, il existe un ensemble borélien $\mathscr{R}$-invariant $\Omega' \in \mathscr{A}$ de mesure pleine et une action borélienne $\mathbb{Z} \curvearrowright \Omega'$ tels que $\mathscr{R}_{\mathbb{Z}} \cap (\Omega' \times \Omega') = \mathscr{R} \cap (\Omega' \times \Omega')$. On considère le sous-champ borélien de convexes fermés $(\Omega', C_\bullet)$ et le sous-ensemble

$$L^\infty(\Omega', C_\bullet) \subseteq L^\infty(\Omega', B^*)_{\leq 1} \simeq (L^1(\Omega', B_\bullet))^*_{\leq 1}.$$

Par le Lemme 1.6.20 (ii), c'est un sous-ensemble convexe et $*$-faiblement fermé de $L^\infty(\Omega', B^*)_{\leq 1}$. Par le Lemme 2.2.27, l'action naturelle $\mathbb{Z} \curvearrowright L(\Omega', C_\bullet)$ se fait par homéomorphismes (pour la topologie faible-$*$) linéaires. Puisque $\mathbb{Z}$ est moyennable, il existe $[\varphi_\bullet] \in L(\Omega', C_\bullet)$ invariant pour cette action. Par le Lemme 2.2.16, $[\varphi_\bullet]$ est fixe pour l'action $\mathscr{R} \overset{\alpha'}{\curvearrowright} (\Omega', C_\bullet)$. Il suffit maintenant de choisir un représentant de $[\varphi_\bullet]$ et de l'étendre de manière borélienne pour avoir une section presque $\mathscr{R}$-invariante. □

Voici le cas particulier dans lequel on appliquera la moyennabilité.

Exemple 2.2.29. Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ un espace de probabilité standard, $\mathscr{R} \subseteq \Omega^2$ une relation d'équivalence borélienne dénombrable quasi-préservant la mesure, ergodique et moyennable, $K_\bullet$ un champ borélien d'espaces métriques compacts et α une action par homéomorphismes de $\mathscr{R}$ sur $K_\bullet$. Alors il existe $[\pi_\bullet] \in L(\Omega, \mathrm{Prob}(K_\bullet))$ invariante (voir la Proposition 1.8.8).
On commence par observer que l'action de $\mathscr{R}$ sur $K_\bullet$ s'étend en une action par isométries linéaires sur $\mathscr{C}(K_\bullet)$. En effet, les points (i) et (iii) de la Définition 2.2.6 sont facile à vérifier et on vérifie (ii) comme lorsqu'on étend l'action sur un champ de Banach au champ des duaux, voir la preuve du Lemme 2.2.23. Par le même lemme, on peut étendre l'action sur $\mathscr{C}(K_\bullet)$ en une action sur $\mathscr{C}(K)^*_{\leq 1}$. Or $\mathrm{Prob}(K_\bullet)$ est un sous-champ borélien invariant de convexes compacts et il existe donc une section invariante $[\pi_\bullet] \in L(\Omega, \mathrm{Prob}(K_\bullet))$ puisque la relation est moyennable.

Chapitre 3

Champs boréliens d'espaces CAT(0) propres

Les définitions et les résultats concernant les espaces CAT(0) sont en majeure partie extraits du livre de Bridson et Haefliger ([BH99]), ouvrage de référence sur les espaces à courbure négative.

3.1 Définitions

Définitions 3.1.1. *Soit X un espace métrique.*

Un chemin géodésique de x à y est une application $c : [0,l] \to X$ telle que $c(0) = x$, $c(l) = y$ et $d(c(t), c'(t)) = |t - t'|$ pour tout $t, t' \in [0,l]$. S'il n'y a pas d'ambiguïté, on note $c_{x,y}$ un chemin de x à y.

Un segment géodésique de x à y est l'image d'un chemin géodésique c de x à y. S'il n'y a pas d'ambiguïté, on se permettra de noter $[x,y]$ un segment géodésique de x à y.

Soit $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle. Une application $c : I \to X$ est appelée une géodésique paramétrisée proportionnellement à la longueur d'arc s'il existe $\lambda > 0$ telle que $d(c(t), c(t')) = \lambda|t - t'|$ pour tout $t, t' \in I$.

X est dit géodésique si pour toute paire de points $x, y \in X$ il existe au moins un chemin géodésique de x à y. Si ce chemin est tout le temps unique, X est appelé un espace uniquement géodésique.

Un triangle géodésique est la donnée de trois points $x, y, z \in X$ (les sommets) et de trois segments géodésiques $[x,y]$, $[y,z]$ et $[z,x]$ (les cotés).

Définition 3.1.2. *Soit X un espace métrique et $Y \subseteq X$ un sous-ensemble. Le rayon de Y, noté* $\mathrm{rad}(Y)$ *est défini par*

$$\mathrm{rad}(Y) = \inf\{r > 0 \mid \textit{il existe } x \in X \textit{ tel que } Y \subseteq B(x,r)\}$$

Soit X un espace métrique géodésique. Pour tout triangle géodésique $\Delta = \Delta(x,y,z)$ dans X, il existe un (unique à isométrie prêt) triangle $\overline{\Delta} = \Delta(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ dans le plan Euclidien $\mathbb{E}^2$ tel que $d_{\mathbb{E}^2}(\overline{x}, \overline{y}) = d(x,y)$, $d_{\mathbb{E}^2}(\overline{x}, \overline{z}) = d(x,z)$ et $d_{\mathbb{E}^2}(\overline{y}, \overline{z}) = d(y,z)$. Un tel triangle $\overline{\Delta}$ est appelé un triangle de comparaison de Δ. Un point $\overline{q} \in [\overline{x}, \overline{y}]$ est appelé un point de comparaison de $q \in [x,y]$ si $d_{\mathbb{E}^2}(\overline{x}, \overline{q}) = d(x,q)$. L'angle de comparaison entre y, z au point x, qu'on note $\overline{\angle}_x(y,z)$, est l'angle dans $\mathbb{E}^2$ entre les segments $[\overline{x}, \overline{y}]$ et $[\overline{x}, \overline{z}]$.

Définition 3.1.3. *Soit X un espace métrique, $c : [0,a] \to X$ et $c' : [0,b] \to X$ deux chemin géodésiques issus du même point, i.e. tels que $c(0) = c'(0)$. Pour $t \in [0,a]$ et $t' \in [0,a']$ on considère le triangle de comparaison $\overline{\Delta}(c(0), c(t), c'(t'))$ et l'angle de comparaison $\overline{\angle}_{c(0)}(c(t), c'(t))$. L'angle d'Alexandrov entre ces géodésiques est le nombre entre 0 et π défini par*

$$\angle(c,c') = \limsup_{t,t' \to 0} \overline{\angle}_{c(0)}(c(t), c'(t')).$$

Si X est uniquement géodésique, on peut définir, pour tous $x \neq p$ et $y \neq p$, l'angle d'Alexandrov entre x et y au point p comme l'angle entre les chemins géodésiques de p à x et de p à y. On le note $\angle_p(x, y)$.

Définition 3.1.4 (Espace CAT(0))**.** *Un espace métrique géodésique est appelé un espace CAT(0) si pour tout triangle géodésique Δ et tout point $p, q \in \Delta$ on a l'inégalité $d(p,q) \leq d_{\mathbb{E}^2}(\overline{p}, \overline{q})$ où $\overline{p}$, $\overline{q}$ sont les points de comparaison de p, q dans un triangle de comparaison $\overline{\Delta}$ de Δ. Un espace CAT(0) complet est parfois appelé un espace de Hadamard.*

Remarque 3.1.5. Si X est CAT(0), alors son complété est encore CAT(0) et c'est donc un espace de Hadamard. De toute façon, comme on va s'intéresser à des espace propres, la question de la complétude ou non d'un espace CAT(0) ne sera guère pertinente dans notre contexte.

Parmi les résultats élémentaires sur les espaces CAT(0), on peut mentionner qu'un tel espace est uniquement géodésique et que les géodésiques varient continûment en fonction de leurs extrémités (Proposition II.1.4 de [BH99]), que la distance est une fonction convexe, qu'il existe une projection sur les sous-ensembles convexes complets et que les ensembles bornés admettent un unique centre. Pour plus de détails sur les énoncés, voir l'Annexe B.1.

Définition 3.1.6. *Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace borélien et $X_\bullet$ un champ borélien d'espaces métriques tel que X_ω est CAT(0) pour tout $\omega \in \Omega$. Un tel champ est appelé un champ borélien d'espaces CAT(0).*

Dans la suite nous allons nous intéresser à des actions de G-espaces boréliens standards et de relations d'équivalence boréliennes.

Action d'un G-espace borélien standard

Soit G un groupe localement compact à base dénombrable, Ω un G-espace borélien standard et X un espace CAT(0) propre. Rappelons que $\mathrm{Iso}(X)$ le groupe des isométries de X muni de la topologie compact-ouverte est un groupe localement compact à base dénombrable (voir en annexe le Lemme B.3.1). Par l'exemple 2.1.8 (2), il suffit de se donner un cocycle borélien $\alpha : G \times \Omega \to \mathrm{Iso}(X)$ pour définir une action du G-espace sur X.

Action d'un relation d'équivalence borélienne standard

Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace borélien standard, $\mathscr{R}$ une relation d'équivalence borélienne dénombrable sur Ω. Une action de $\mathscr{R}$ sur un champ borélien d'espaces CAT(0) est donc[1] la donnée d'un famille d'isométries $\{\alpha(\omega, \omega') : X_\omega \to X_{\omega'}\}_{(\omega,\omega') \in \mathscr{R}}$ telles que

(i) Pour tout $\omega, \omega', \omega'' \in \Omega$ tels que $\omega \mathscr{R} \omega'$ et $\omega \mathscr{R} \omega''$, on a $\alpha(\omega', \omega'') \circ \alpha(\omega, \omega') = \alpha(\omega, \omega'')$.

(ii) Pour tout $x_\bullet, y_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)$ l'application

$$\begin{array}{rccl} d^{x_\bullet, y_\bullet} : & \mathscr{R} & \to & \mathbb{R} \\ & (\omega, \omega') & \mapsto & d_\omega(x_\omega, \alpha(\omega', \omega) y_{\omega'}) \end{array}$$

est borélienne ($\mathscr{R}$ est muni de la σ-algèbre induite par $\mathscr{A} \otimes \mathscr{A}$).

Remarque 3.1.7. De nombreux résultats se montrent de manière analogue pour une action d'une relation d'équivalence ou pour une action d'un G-espace. C'est pourquoi on se contentera souvent d'énoncer les résultats pour des G-espaces, en sachant que pour retrouver la version relation d'équivalence, il suffit de remplacer "action d'un G-espace sur un espace CAT(0) (propre, ...)" par "action d'une relation d'équivalence sur un champ borélien d'espaces CAT(0) (propres, ...)".

1. Voir la définition 2.2.6

3.2 Premières propriétés

Comme nous allons le voir dans ce paragraphe, le travail préliminaire effectué sur les sous-champs boréliens permet de montrer facilement que certaines des propriétés des espaces CAT(0) se comportent agréablement lorsque l'on considère des champs boréliens d'espaces CAT(0) propre.

Proposition 3.2.1. *Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace borélien, $X_\bullet$ un champ borélien d'espaces CAT(0) propres, $x_\bullet, y_\bullet, p_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)$, $C_\bullet$ un sous-champ borélien de convexes fermés et $Y_\bullet$ un sous-champ borélien de bornés. Alors les propriétés suivantes sont vérifiées.*

(i) On considère

$$\begin{array}{rccl} c_\bullet : & [0,1] & \to & \mathscr{S}(\Omega, X_\bullet) \\ & t & \mapsto & [c_\bullet(t) : \omega \mapsto c_\omega(t)], \end{array}$$

où $c_\omega : [0,1] \to X_\omega$ est l'unique géodésique linéairement reparamétrisée reliant x_ω à y_ω. Alors $c_\bullet(t) \in \mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)$ pour tout $t \in [0,1]$.

(ii) On considère $\pi_{C_\bullet} \in \mathscr{S}(\Omega, \mathscr{C}(X_\bullet))$ définie par [2]

$$\begin{array}{rcl} \pi_{C_\omega}(x) & := & \text{la projection de } x \text{ sur } C_\omega \\ & = & \text{l'unique point } y \in C_\omega \text{ tel que } d_\omega(x,y) = d_\omega(x, C_\omega). \end{array}$$

Alors $\pi_{C_\bullet} \in \mathscr{L}(\Omega, \mathscr{C}(X_\bullet))$.

(iii) Supposons que $x_\omega \neq p_\omega$ et $y_\omega \neq p_\omega$ pour tout $\omega \in \Omega$. Alors les fonctions suivantes sont boréliennes

$$\begin{array}{rcl} \overline{\angle}_{p_\bullet}(x_\bullet, y_\bullet) : \omega \mapsto \overline{\angle}_{p_\omega}(x_\omega, y_\omega) & = & \text{angle entre } \overline{x}_\omega \text{ et } \overline{y}_\omega \text{ au point } \overline{p}_\omega \text{ dans le triangle} \\ & & \text{de comparaison} \\ \angle_{p_\bullet}(x_\bullet, y_\bullet) : \omega \mapsto \angle_{p_\omega}(x_\omega, y_\omega) & = & \text{angle d'Alexandrov entre la géodésique reliant } p_\omega \text{ à } x_\omega \\ & & \text{et la géodésique reliant } p_\omega \text{ à } y_\omega. \end{array}$$

(iv) La section $c_{Y_\bullet}$ qui associe à chaque ω le centre de Y_ω (voir la Proposition II.2.7 p. 179 de [BH99], B.1.7) et la fonction $\mathrm{rad}(Y_\bullet) : \Omega \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, $\omega \mapsto \inf_{x \in X_\omega}\{\sup_{y \in Y_\omega} d_\omega(x,y)\}$ *sont boréliennes.*

Preuve. (i) On a

$$c_\bullet(t) = \overline{B}(x_\bullet, t d_\bullet(x_\bullet, y_\bullet)) \cap \overline{B}(y_\bullet, (1-t) d_\bullet(x_\bullet, y_\bullet))$$

qui est borélien par l'Exemple 1.2.26 (2) (puisqu'un espace CAT(0) est géodésique par définition) et la Proposition 1.5.6.

(ii) On observe que

$$\pi_{C_\bullet}(x_\bullet) = C_\bullet \cap \overline{B}(x_\bullet, d_\bullet(x_\bullet, C_\bullet)).$$

Or $d_\bullet(x_\bullet, C_\bullet)$ est borélienne par la Proposition 1.2.23, d'où $\overline{B}(x_\bullet, d_\bullet(x_\bullet, C_\bullet))$ est un sous-champ borélien par l'Exemple 1.2.26 (2). La Proposition 1.5.6 permet de conclure.

(iii) Le théorème du cosinus livre

$$\overline{\angle}_{p_\bullet}(x_\bullet, y_\bullet) = \arccos\left(\frac{1}{2d_\bullet(p_\bullet, x_\bullet) d_\bullet(p_\bullet, y_\bullet)} \cdot (d_\bullet(p_\bullet, x_\bullet)^2 + d_\bullet(p_\bullet, y_\bullet)^2 - d_\bullet(x_\bullet, y_\bullet)^2)\right),$$

qui est donc borélienne.

Par la Proposition II.3.1 de [BH99] (B.1.8) on sait que si X est un espace CAT(0) et $p, x, y \in X$ sont tels que $p \neq x$ et $p \neq y$, alors

$$\angle_p(x,y) = \lim_{t \to 0} 2 \arcsin\left(\frac{1}{2t} \cdot d(c(t), \widetilde{c}(t))\right)$$

2. Voir la Proposition II.2.4 de [BH99] (B.1.6).

où

$$\begin{array}{rcll} c : [0, d(p,x)] & \to & X & \text{géodésique de } p \text{ à } x, \\ \widetilde{c} : [0, d(p,y)] & \to & X & \text{géodésique de } p \text{ à } y. \end{array}$$

Considérons, pour tout $\omega \in \Omega$, les applications

$$\begin{array}{rccll} c_\omega : & [0, d_\omega(p_\omega, x_\omega)] & \to & X_\omega & \text{géodésique de } p_\omega \text{ à } x_\omega \\ & t & \mapsto & c_\omega(t) & \\ \widetilde{c}_\omega : & [0, d_\omega(p_\omega, y_\omega)] & \to & X_\omega & \text{géodésique de } p_\omega \text{ à } y_\omega \\ & t & \mapsto & \widetilde{c}(t)_\omega & \end{array}$$

Mais comme $d_\omega(p_\omega, x_\omega), d_\omega(p_\omega, y_\omega)$ dépendent de ω, ces distances peuvent être arbitrairement petites selon le choix de ω. Ainsi, on ne peut pas nécessairement définir des sections $c_\bullet(t)$ et $\widetilde{c}_\bullet(t)$ pour t fixé. Par contre, on peut fabriquer deux suites de sections $\{c_\bullet^n\}_{n\geq 1}$ et $\{\widetilde{c}_\bullet^n\}_{n\geq 1}$ telles que, pour tout $\omega \in \Omega$, il existe n_ω tel que $c_\omega^n = c_\omega(1/n)$ et $\widetilde{c}_\omega^n = \widetilde{c}_\omega(1/n)$ pour tout $n \geq n_\omega$. Pour ce faire, on pose pour $n \geq 1$

$$\Omega_n := \{\omega \in \Omega \mid \min\{d_\omega(p_\omega, x_\omega), d_\omega(p_\omega, y_\omega)\} \geq 1/n\} \in \mathscr{A},$$

et on définit

$$c_\bullet^n\,|_{\Omega_n} := \overline{B}(p_\bullet, 1/n) \cap \overline{B}(x_\bullet, d_\bullet(p_\bullet, x_\bullet) - 1/n), \;\; \widetilde{c}_\bullet^n\,|_{\Omega_n} := \overline{B}(p_\bullet, 1/n) \cap \overline{B}(y_\bullet, d_\bullet(p_\bullet, y_\bullet) - 1/n) \in \mathscr{L}(\Omega_n, X_\bullet),$$

qu'on prolonge arbitrairement en éléments de $\mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)$. Comme $x_\omega \neq p_\omega$ et $y_\omega \neq p_\omega$ pour tout $\omega \in \Omega$, on a $\Omega = \bigcup_{n\geq 1} \Omega_n$ et par construction

$$\angle_{p_\bullet}(x_\bullet, y_\bullet) = \lim_{n\to\infty} 2 \arcsin\left(\frac{n}{2} \cdot d_\bullet(c_\bullet^n, \widetilde{c}_\bullet^n)\right)$$

qui est donc borélienne comme limite de fonctions boréliennes.

(iv) Notons $\mathscr{D}$ une famille fondamentale pour $\mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)$ et $\mathscr{D}'$ une famille fondamentale pour $\mathscr{L}(\Omega, Y_\bullet)$. On définit, pour chaque $\omega \in \Omega$,

$$\begin{array}{rccl} f_\omega : & X_\omega & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \sup_{y\in Y_\omega} d_\omega(x, y). \end{array}$$

Alors $f_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega, \mathscr{C}(X_\bullet))$. En effet, f_ω est continue (par l'inégalité du triangle) et si $x_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)$, alors $f_\bullet(x_\bullet) = \sup_{y_\bullet \in \mathscr{D}'} d_\bullet(x_\bullet, y_\bullet)$ est borélienne. Et comme $\mathrm{rad}(Y_\bullet) = \inf f_\bullet = \inf_{x_\bullet \in D} f_\bullet(x_\bullet)$ est borélienne, on a que $c_\bullet = (f_\bullet)^{-1}(\{\mathrm{rad}(Y_\bullet)\})$ est borélienne par le Lemme 1.5.13. □

On peut maintenant montrer un premier résultat concernant une action d'un G-espace sur un espace CAT(0) ou d'une relation d'équivalence sur un champ borélien d'espaces CAT(0).

Corollaire 3.2.2. *Soit G un groupe localement compact à base dénombrable, $(\Omega, \mathscr{A})$ un G-espace borélien standard, X un espace CAT(0) propre, et $\alpha : G \times \Omega \to \mathrm{Iso}(X)$ une action du G-espace sur X. S'il existe $Y_\bullet$ un sous-champ borélien invariant de bornés, alors il existe une section $x_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega, X)$ invariante.*

Mutatis mutandis pour une relation d'équivalence borélienne standard.

Preuve. La section des centres est borélienne et invariante. □

3.3 Structure borélienne sur $\overline{X}_\bullet$ et $\partial X_\bullet$

Définition 3.3.1. *Soit X un espace métrique CAT(0). Deux rayons géodésiques $c, c' : [0,\infty[\to \mathbb{R}$ sont dits asymptotiques s'il existe une constante $K \geq 0$ telle que $d(c(t), c'(t)) \leq K$ pour tout $t \in [0,\infty[$. On vérifie facilement que c'est une relation d'équivalence et on définit ∂X le bord de X comme l'ensemble des classes de rayons asymptotiques. On note $\overline{X} = X \cup \partial X$*

Fixons un point base x_0. Par la Proposition II.8.2 de [BH99] pour tout $\xi \in \partial X$ il existe un unique rayon géodésique $c : [0,\infty[\to X$ tel que $c(0) = x_0$ et $c \in \xi$ (on le note c_{ξ,x_0}). Définissons

$$\begin{array}{rccl} \mathrm{pr}_r : & \overline{X} & \to & \overline{B}(x_0, r) \\ & y & \mapsto & \begin{cases} \pi_{\overline{B}(x_0,r)}(y) & \text{si } y \in X \\ c_{y,x_0}(r) & \text{si } y \in \partial X. \end{cases} \end{array}$$

Pour $\xi \in \partial X,\ r > 0, \varepsilon > 0$ on introduit

$$U(\xi, r, \varepsilon) = \{x \in \overline{X} \mid d(x, x_0) > r \text{ et } d(\mathrm{pr}_r(x), c_{x_0,\xi}(r)) < \varepsilon\}.$$

Définition 3.3.2. *La topologie conique (basée en x_0) sur ∂X est la topologie engendrée par l'ensemble*

$$\big\{B(x,r) \mid x \in X \text{ et } r > 0\big\} \cup \big\{U(\xi, r, \varepsilon) \mid \xi \in \partial X,\ r > 0 \text{ et } \varepsilon > 0\big\} \subseteq \mathscr{P}(X).$$

On peut montrer (Exercice II.8.7 de [BH99]) que cet ensemble est une base pour cette topologie.

Cette topologie est indépendante du choix du point base x_0 (Proposition II.9.8 de [BH99]). Il existe une autre construction moins géométrique du bord d'un espace CAT(0) qui sera plus adaptée aux champs boréliens d'espaces CAT(0). Avant de la donner, on prouve le résultat technique suivant.

Lemme 3.3.3. *Soit X un espace métrique et $x_0 \in X$ un point base. Considérons $\mathscr{C}(X)$ l'espace des fonctions continues sur X muni de la topologie de la convergence uniforme sur les ensembles bornés, $\mathscr{C}_*(X)$ le quotient de $\mathscr{C}(X)$ par les fonctions constantes muni de la topologie quotient et $\mathscr{C}_0(X)$ le sous-espace de $\mathscr{C}(X)$ des fonctions qui s'annulent en x_0. Notons $\pi : \mathscr{C}(X) \to \mathscr{C}_*(X)$ l'application quotient. Alors*

(i) L'application $\varphi := \pi\,|_{\mathscr{C}_0(X)}: \mathscr{C}_0(X) \to \mathscr{C}_*(X)$ est un homéomorphisme.

(ii) Si X est géodésique, l'application $i : X \to \mathscr{C}_0(X),\ x \mapsto d_x - d(x, x_0)$ est un homéomorphisme sur son image.

Preuve. (i) On vérifie que si $\psi : \mathscr{C}_*(X) \to \mathscr{C}_0(X),\ [f] \mapsto f - f(x_0)$, alors ψ est bien définie et φ et ψ sont inverses l'une de l'autre. De plus φ est continue puisque π l'est. Pour ψ, on a la situation suivante :

$$\begin{tikzcd} \mathscr{C}(X) \arrow[r, two heads, "\pi"] & \mathscr{C}_*(X) \arrow[dl, "\psi"] \\ \mathscr{C}_0(X) \arrow[u, hook, "j"] & \end{tikzcd}$$

L'application ψ est continue. En effet, soit $f \in \mathscr{C}_0(X)$ et $U_0(f, n, \varepsilon) = \{g \in \mathscr{C}_0(X) \mid \|f - g\|_{\overline{B(x_0,n)}} \leq \varepsilon\}$ un voisinage de f dans $\mathscr{C}_0(X)$. Il faut montrer que $\psi^{-1}(U_0(n, \varepsilon, f))$ est un voisinage de $\psi^{-1}(f)$ dans $\mathscr{C}_*(X)$. Par la définition de la topologie quotient, il s'agit de vérifier que $\pi^{-1}(\psi^{-1}(U_0(n, \varepsilon, f)))$ est un voisinage de $j(f) = f$ dans $\mathscr{C}(X)$. Ceci est le cas car

$$U(j(f), n, \varepsilon/2) = \{h \in \mathscr{C}(X) \mid \|f - h\|_{\overline{B(x_0,n)}} \leq \varepsilon/2\} \subseteq \pi^{-1}(\psi^{-1}(U_0(n, \varepsilon, f))).$$

En effet, si $h \in U(j(f), n, \varepsilon/2)$, alors

$$\|f - \psi(\pi(h))\|_{\overline{B(x_0,n)}} = \|f - h + h(x_0)\|_{\overline{B(x_0,n)}} \leq \|f - h\|_{\overline{B(x_0,n)}} + |h(x_0)| \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

(ii) On a $i(x) \in \mathscr{C}_0(X)$ car $|i(x)(z) - i(x)(z')| \leq d(z,z')$. Pour montrer que i est un homéomorphisme sur son image, on reprend la preuve de [Bal95] (p. 27). Premièrement, on remarque que si $d(x,x_0) \geq d(y,x_0)$, alors

$$i(y)(x) - i(x)(x) = d(y,x) - d(y,x_0) - d(x,x) + d(x,x_0) \geq d(x,y),$$

ce qui permet de conclure que i est injective.
Deuxièmement, si $x, y, z \in X$, alors

$$|i(x)(z) - i(y)(z)| = |d(x,z) - d(x,x_0) - d(y,z) + d(y,x_0)| \leq 2d(x,y) \quad \text{pour tout } z \in X,$$

et donc i est continue (en fait uniformément continue).
Troisièmement, on va montrer que l'inverse de i définie sur $i(X)$ est continue. Soit $x \in X$ et $\overline{B}(x,\varepsilon)$ un voisinage de x dans X. Il faut montrer que $i(\overline{B}(x,\varepsilon))$ est un voisinage de $i(x)$ dans $i(X)$. Pour ce faire on va montrer que si $\varepsilon < 2$, alors

$$U_0(i(x), 2d(x,x_0)+1, \varepsilon) \subseteq i(\overline{B}(x,\varepsilon)).$$

On procède en deux temps.
1) On montre que

$$i(\overline{B}(x_0, 2d(x,x_0)+1)) \cap U_0(i(x), 2d(x,x_0)+1, \varepsilon) \subseteq i(\overline{B}(x,\varepsilon)).$$

En effet, si $i(y) \in i\big(\overline{B}(x_0, 2d(x,x_0)+1)\big) \cap U_0(i(x), 2d(x,x_0)+1, \varepsilon)$, alors on a que $x, y \in \overline{B}(x_0, 2d(x,x_0)+1)$ et donc en particulier (puisque $i(x), i(y) \in U_0(i(x), 2d(x,x_0)+1, \varepsilon)$)

$$\varepsilon \geq |i(x)(x) - i(y)(x)| = |-d(x,x_0) - d(x,y) + d(y,x_0)|$$

et

$$\varepsilon \geq |i(x)(y) - i(y)(y)| = |d(x,y) - d(x,x_0) + d(y,x_0)|.$$

Or ceci n'est possible que si $d(x,y) \leq \varepsilon$ (si $|a-b|$ et $|a+b|$ sont $< \varepsilon$, alors $|a|, |b| < \varepsilon$) [3].
2) On montre que si $\varepsilon < 2$, alors on a que

$$U_0(i(x), 2d(x,x_0)+1, \varepsilon) \subseteq i(\overline{B}(x_0, 2d(x,x_0)+1)).$$

On fixe $i(y) \notin i(\overline{B}(x_0, 2d(x,x_0)+1))$ (en particulier $d(x,y) \geq d(x_0,x)+1$) et on choisit z le point sur une géodésique de x à y à distance $d(x,x_0)+1$ de x. Alors

$$\begin{aligned} i(x)(z) - i(y)(z) &= d(x,z) - d(x,x_0) - d(y,z) + d(y,x_0) \\ &= 1 + d(x,x_0) - d(x,x_0) - d(y,z) + d(y,x_0) \\ &\geq 1 + d(y,x) - d(x,x_0) - d(y,z) = 1 + d(x,z) - d(x,x_0) \geq 2 = \varepsilon \end{aligned}$$

et donc $\|i(x) - i(y)\|_{\overline{B}(x, 2d(x,x_0)+1)} > \varepsilon$, c'est-à-dire $i(y) \notin U_0(i(x), 2d(x,x_0)+1, \varepsilon)$. □

3. Prendre ici $a = d(y,x_0) - d(x,x_0)$ et $b = d(x,y)$.

Remarque 3.3.4. Le point (ii) du lemme précédent n'est plus vrai si on ne suppose pas l'espace géodésique (contrairement à ce qu'affirme un exercice de [BH99] (Exercice 1, p. 268)). Sans cette hypothèse, l'inverse de i n'est en général pas continue comme le montre l'exemple suivant qui nous a été communiqué par U. Bader.

Soit $X = \{x_n\}_{n\geq 0} \subseteq (\ell^1(\mathbb{N}), \|\ \|_1)$ avec $x_n = n\delta_n$ pour tout $n \geq 0$ où $\delta_0 = 0$ et $\delta_n = (0,\dots,0,1,0,\dots)$ avec le 1 à la n-ième place (si $n \geq 1$). Cet espace est propre puisque toute boule fermée ne contient qu'un nombre fini d'éléments. Plongeons X dans $\mathscr{C}_0(X)$ muni de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts et observons que $i(x_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} i(x_0)$, alors que $x_n \overset{n\to\infty}{\not\twoheadrightarrow} x_0$ (puisque $d(x_n, x_0) = n$). En effet, pour $n > 0$, on a

$$i(x_n)(x_m) = d(x_n, x_m) - d(x_n, x_0) = \begin{cases} m & \text{si } m \neq n \\ -n & \text{si } m = n \end{cases}$$

et

$$i(x_0)(x_m) = d(x_0, x_m) - d(x_0, x_0) = m.$$

Ainsi, si $\{x_{n_1}, \dots, x_{n_k}\}$ est un sous-ensemble compact de X fixé, on a que $i(x_n)(x_{n_i}) = n_i = i(x_0)(x_{n_i})$ pour tout $n \geq \max\{n_1, \dots, n_k\}$ et $i = 1, \dots, k$, c'est-à-dire que $i(x_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} i(x_0)$. Et pourtant, $x_n \not\twoheadrightarrow x_0$ Cet exemple montre aussi que $i(X)$ est déjà compact lorsqu'on le plonge dans $\mathscr{C}_0(X)$.

On peut obtenir le bord d'un espace CAT(0) en commençant par définir tout d'abord $\overline{i(X)}$ l'adhérence de $i(X)$ dans $\mathscr{C}_*(X)$ (ou de manière équivalente dans $\mathscr{C}_0(X)$ pour un $x_0 \in X$ fixé), puis en posant

$$\partial X = \overline{i(X)} \setminus i(X).$$

Le Théorème II.8.13 de [BH99] montre que l'inclusion naturelle $i : X \to \mathscr{C}_0(X)$ s'étend de manière unique en un homéomorphisme de $\overline{X}$ dans $\overline{i(X)}$. Cet homéomorphisme fait correspondre à un point ξ du bord, la fonction $b_{\xi,x_0} \in \mathscr{C}_0(X)$ définie par [4]

$$b_{\xi,x_0}(x) := \lim_{t\to\infty} \Big(d(x, c_{\xi,x_0}(t)) - t \Big)$$

qui est appelée la fonction de Busemann associée à ξ et à x_0. Dans la suite, on imagine $\overline{i(X)} \subseteq \mathscr{C}_0(X)$ et on va montrer que si $(\Omega, X_\bullet)$ est un champ borélien d'espaces CAT(0) propres, alors il existe une structure borélienne agréable sur $(\Omega, \overline{i_\bullet(X_\bullet)})$ qui fait de $(\Omega, i_\bullet(X_\bullet))$ et de $(\Omega, \partial X_\bullet)$ des sous-champs boréliens de $(\Omega, \overline{i_\bullet(X_\bullet)})$.

Définition 3.3.5. *Soit Ω un espace borélien, $(\Omega, X_\bullet)$ un champ d'espaces métriques propres, $x^0_\bullet \in \mathscr{S}(\Omega, X_\bullet)$ et $(\Omega, \mathscr{C}_0(X_\bullet))$ le champ des fonctions continues s'annulant en $x^0_\bullet$. Pour chaque ω, on considère $i_\omega : X_\omega \to \mathscr{C}_0(X_\omega)$ comme dans le Lemme 3.3.3. On introduit alors $(\Omega, i_\bullet(X_\bullet))$ et $(\Omega, \overline{i_\bullet(X_\bullet)})$ les sous-champs de $(\Omega, \mathscr{C}_0(X_\bullet))$ définis respectivement par $\big(i_\bullet(X_\bullet)\big)_\omega := i_\omega(X_\omega)$ et $\big(\overline{i_\bullet(X_\bullet)}\big)_\omega := \overline{i_\omega(X_\omega)}$ (i.e. l'adhérence de $i_\omega(X_\omega)$ dans $\mathscr{C}_0(X_\omega)$).*

Lemme 3.3.6. *Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace borélien, $(\Omega, X_\bullet)$ un champ borélien d'espaces métriques propres et $x^0_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)$. Alors $(\Omega, i_\bullet(X_\bullet))$ et $(\Omega, \overline{i_\bullet(X_\bullet)})$ sont des sous-champs boréliens de $(\Omega, \mathscr{C}_0(X_\bullet))$ (voir le Théorème 1.5.2). De plus, $i_\bullet$ est un morphisme de champ compatible.*

Preuve. On rappelle que si $(\Omega, X_\bullet)$ est un champ borélien d'espaces métriques propres de structure borélienne $\mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)$, alors $(\Omega, \mathscr{C}_0(X_\bullet))$ est un champ borélien d'espaces métrisables pour la structure borélienne

$$\mathscr{L}(\Omega, \mathscr{C}_0(X_\bullet)) = \{f_\bullet \in \mathscr{S}(\Omega, \mathscr{C}_0(X_\bullet)) \mid f_\bullet(x_\bullet) \text{ est borélienne pour tout } x_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)\}.$$

4. Cette limite existe, voir le Lemme II.8.18 de [BH99].

On fixe maintenant une partie fondamentale $\mathscr{D}$ de $\mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)$. Alors

$$i_\bullet(\mathscr{D}) \subseteq \mathscr{L}(\Omega, \mathscr{C}_0(X_\bullet)) \cap \mathscr{S}(\Omega, i_\bullet(X_\bullet)) =: \mathscr{L}(\Omega, i_\bullet(X_\bullet)).$$

En effet, si $x_\bullet \in \mathscr{D}$, alors $i_\bullet(x_\bullet)(y_\bullet) = d_\bullet(x_\bullet, y_\bullet) - d_\bullet(x_\bullet, x_\bullet^0)$ est borélienne pour tout $y_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)$. De plus, comme $i_\omega : X_\omega \to i_\omega(X_\omega)$ est continue, $i_\bullet(\mathscr{D})$ satisfait l'hypothèse de la Remarque 1.2.5 (en effet si $\mathscr{D}$ est partout dense dans $X_\bullet$, alors $i_\bullet(\mathscr{D})$ est partout dense dans $i_\bullet(X_\bullet)$). Ainsi, $(\Omega, i_\bullet(X_\bullet))$ est un sous champ borélien de $(\Omega, \mathscr{C}_0(X_\bullet))$ et $i_\bullet(\mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)) = \mathscr{L}(\Omega, i_\bullet(X_\bullet))$ (voir le Corollaire 1.5.14). La Remarque 1.2.8 montre que $(\Omega, \overline{i_\bullet(X_\bullet)})$ est aussi un sous-champ borélien de $(\Omega, \mathscr{C}_0(X_\bullet))$. □

Si on rajoute l'hypothèse que presque tous les X_ω sont géodésiques, le lemme précédent et le Lemme 3.3.3 montrent que $(\Omega, X_\bullet)$ et $(\Omega, i_\bullet(X_\bullet))$ sont topologiquement équivalents (voir la Définition 1.1.17). Avant de montrer que $(\Omega, \partial X_\bullet)$ est un sous-champ borélien de $(\Omega, \overline{i_\bullet(X_\bullet)})$, on montre le résultat classique suivant.

Lemme 3.3.7. *Si (X, d) est un espace métrique propre géodésique, alors $\overline{i(X)}$ et ∂X sont compacts.*

Preuve. La preuve de ce Lemme repose sur une généralisation du Théorème d'Ascoli qui affirme (voir par exemple [Mun75], p. 290) : si X est localement compact et Hausdorff, Y est un espace métrique et $\mathscr{C}(X, Y)$ est muni de la topologie compacte-ouverte, alors $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{C}(X, Y)$ est de clôture compacte si et seulement si $\mathscr{F}$ est équicontinu et $\mathscr{F}_x := \{f(x) \,|\, f \in \mathscr{F}\} \subseteq Y$ est de clôture compacte pour tout $x \in X$. Comme la topologie sur $Y = \mathbb{R}$ provient d'une métrique, les topologies compacte-ouverte et de convergence uniforme sur les compacts coïncident ([Mun75], p. 286). L'ensemble $\mathscr{F} = i(X)$ est équicontinu car $|i(x)(z) - i(x)(z')| \leq d(z, z')$ pour tout $x, z, z' \in X$ et, comme $\mathscr{F}_x = \{i(y)(x) \,|\, y \in X\} \subseteq \mathbb{R}$, pour montrer que $\mathscr{F}_x$ est de clôture compacte, il suffit de voir que $\mathscr{F}_x$ est borné. Ceci est le cas car $|i(y)(x)| = |d(y, x) - d(y, x_0)| \leq d(x, x_0)$ indépendamment de $y \in X$. Par conséquent, $\overline{i(X)}$ est compact. De plus, puisque $i(X)$ est ouvert dans $\overline{i(X)}$ (l'image d'un voisinage de $x \in X$ est un voisinage de $i(x)$ puisque i est un homéomorphisme), on observe que ∂X est fermé dans $\overline{i(X)}$ et donc compact. □

Proposition 3.3.8. *Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace borélien, $(\Omega, X_\bullet)$ un champ borélien d'espaces métriques CAT(0) propres et $x_\bullet^0 \in \mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)$. Alors $(\Omega, \partial X_\bullet)$ est un sous-champ généralisé borélien de fermés de $(\Omega, \overline{i_\bullet(X_\bullet)})$.*

Preuve. (1) On commence par montrer que si X est un espace métrique CAT(0) propre, $x_0 \in X$ et $i : X \to \mathscr{C}_0(X)$, alors

$$\partial X = \bigcap_{R \in \mathbb{N}} \overline{i(X) \setminus i\big(\overline{B(x_0, R)}\big)}.$$

Pour prouver cette égalité on aura besoin de l'observation suivant : soit $\{x_n\}_{n \geq 1} \subseteq X$ une suite telle que $i(x_n) \to y \in \partial X$, alors $d(x_0, x_n) \to \infty$. En effet, si on suppose par l'absurde qu'il existe $M \geq 0$ et une sous-suite $\{x_{n_k}\}_{k \geq 1} \subseteq B(x_0, M)$, alors, quitte à encore passer à une sous-suite, il existe $x \in X$ tel que $x_{n_k} \to x$, d'où $i(x_{n_k}) \to i(x)$ ce qui contredit $i(x_n) \to y \in \partial X$.

[$\subseteq$] Soit $\xi \in \partial X$ et $R > 0$ fixés. Alors il existe une suite $\{x_n\}_{n \geq 1} \subseteq X$ telle que $i(x_n) \to \xi$. Par l'observation ci-dessus, on a que $d(x_0, x_n) \to \infty$. Ainsi, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $x_n \in X \setminus \overline{B(x_0, R)}$ pour tout $n \geq n_0$. Mais alors $\{i(x_n)\}_{n \geq n_0} \subseteq i(X) \setminus i(\overline{B(x_0, R)})$, et donc $\xi \in \overline{i(X) \setminus i(\overline{B(x_0, R)})}$.

[$\supseteq$] Soit $y \in \bigcap_{R \geq 0} \overline{i(X) \setminus i(\overline{B(x_0, R)})}$. Supposons que $y \in i(X)$. Alors il existe $R \in \mathbb{N}$ tel que $y \in i(\overline{B(x_0, R)})$ et donc $y \notin \overline{i(X) \setminus i(\overline{B(x_0, R+1)})}$. En effet, s'il existait $\{x_n\} \subseteq X \setminus \overline{B(x_0, R+1)}$ tel que $i(x_n) \to y$, alors on aurait, puisque i est un homéomorphisme, que $X \setminus \overline{B(x_0, R+1)} \ni x_n \to i^{-1}(x) \in \overline{B(x_0, R)}$ ce qui est impossible. Ainsi $y \in \partial X$.

(2) Muni de cette description du bord, on peut maintenant prouver l'énoncé du lemme. On sait que $X_\bullet \setminus \overline{B(x_\bullet^0,R)}$ est un sous-champ généralisé borélien d'ouverts pour tout $R \geq 1$ (puisque c'est le complémentaire d'un sous-champ borélien de complets, voir la Remarque 1.2.24). Puisque $X_\bullet$ et $i_\bullet(X_\bullet)$ sont topologiquement équivalents, alors $i_\bullet(X_\bullet)\setminus\overline{B(x_\bullet^0,R)}$ est un sous-champ généralisé borélien d'ouverts de $i_\bullet(X_\bullet)$ et donc de $\overline{i_\bullet(X_\bullet)}$ (Lemme 1.2.6). Le point (1) montre que

$$\partial X_\bullet = \bigcap_{\mathscr{R}\in\mathbb{N}} \overline{i_\bullet(X_\bullet) \setminus i_\bullet(\overline{B(x_\bullet^0,R)})}$$

et donc ce champ est un sous-champ généralisé borélien de fermés par la Proposition 1.5.6. □

Définition 3.3.9. *Soit X un espace CAT(0) propre, $x \in X$ et $\xi \in \partial X$. On rappelle que $c_{\xi,x} : [0,\infty[\to X$ dénote l'unique rayon de X issu de x et tendant vers ξ et $b_{\xi,x} \in \mathscr{C}(X)$ la fonction de Busemann associée à ξ et x. Si le choix de x est évident ou sous-entendu, par exemple si on a choisit un point base $x \in X$, alors on se permettra de noter c_ξ au lieu de $c_{\xi,x}$ et b_ξ au lieu de $b_{\xi,x}$.*
Soit $(\Omega,\mathscr{A})$ un espace borélien, $(\Omega,X_\bullet)$ un champ d'espaces CAT(0) propres, $x_\bullet \in \mathscr{S}(\Omega,X_\bullet)$ et $\xi_\bullet \in \mathscr{S}(\Omega,\partial X_\bullet)$. Alors $c_{\xi_\bullet,x_\bullet} : [0,\infty[\to \mathscr{S}(\Omega,X_\bullet)$ est défini par

$$\begin{array}{rccl} c_{\xi_\bullet,x_\bullet} : & [0,\infty[& \to & \mathscr{S}(\Omega,X_\bullet) \\ & t & \mapsto & c_{\xi_\bullet,x_\bullet}(t) : \omega \mapsto c_{\xi_\omega,x_\omega}(t). \end{array}$$

De même, $b_{\xi_\bullet,x_\bullet} \in \mathscr{S}(\Omega,\mathscr{C}(X_\bullet))$ est définie par $\left(b_{\xi_\bullet,x_\bullet}\right)_\omega := b_{\xi_\omega,x_\omega}$.
Si on a choisi une section de points base $x_\bullet^0 \in \mathscr{S}(\Omega,X_\bullet)$, on se permettra de noter $c_{\xi_\bullet}$ au lieu de $c_{\xi_\bullet,x_\bullet^0}$.

Remarque 3.3.10. Dans la suite on se permettra de faire référence à $(\Omega,X_\bullet)$ comme à un sous-champ de $(\Omega,\mathscr{C}_0(X_\bullet))$ tout en étant conscient du danger d'une telle identification (la structure borélienne est la même, mais la distance est différente). Il nous arrivera de noter $(\Omega,X_\bullet)$ (respectivement $(\Omega,\overline{X_\bullet})$) au lieu de $(\Omega,i_\bullet(X_\bullet))$ (respectivement $(\Omega,\overline{i_\bullet(X_\bullet)})$). La Proposition 3.3.8 et le Lemme 3.3.6 décrivent les sections de points du bord qui sont boréliennes. Il s'agit de celles qui satisfont que $b_{\xi_\bullet,x_\bullet^0}(x_\bullet)$ est une fonction borélienne pour tout $x_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega,X_\bullet)$. Il est important de remarquer que la condition ne dépend pas du choix de $x_\bullet^0 \in \mathscr{L}(\Omega,X_\bullet)$. En effet, si $y_\bullet^0 \in \mathscr{L}(\Omega,X_\bullet)$, alors $b_{\xi_\bullet,y_\bullet^0}(x_\bullet) = b_{\xi_\bullet,x_\bullet^0}(x_\bullet) - b_{\xi_\bullet,x_\bullet^0}(y_\bullet^0)$ est une fonction borélienne, et donc la structure borélienne sur $(\Omega,\overline{X_\bullet})$ obtenue est indépendante du choix de $x_\bullet^0$. En fait, l'observation précédent montre que la structure borélienne sur le champ des bords est égale à

$$\{\xi_\bullet \in \mathscr{S}(\Omega,\partial X_\bullet) \mid b_{\xi,x_\bullet}(y_\bullet) \text{ pour tout } x_\bullet, y_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega,X_\bullet)\}.$$

A partir de maintenant, on se permet de noter x au lieu de $i(x)$.

Définition 3.3.11. *Soit X un espace CAT(0). Pour tout $\xi,\eta \in \partial X$, on définit l'angle entre ξ et η au point $x \in X$ par*

$$\angle_x(\xi,\eta) = \angle_x(c_{\xi,x}(1), c_{\eta,x}(1))$$

et l'angle de Tits par

$$\angle(\xi,\eta) := \sup_{x\in X} \angle_x(\xi,\eta).$$

Lemme 3.3.12. *Soit $(\Omega,\mathscr{A})$ un espace borélien, $(\Omega,X_\bullet)$ un champ borélien d'espaces CAT(0) propres non bornés, $\xi_\bullet,\eta_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega,\partial X_\bullet)$ et $x_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega,X_\bullet)$. Alors*

(i) $c_{\xi_\bullet,x_\bullet}(t) \in \mathscr{L}(\Omega,X_\bullet)$ *pour tout* $t \geq 0$,

(ii) les application suivantes sont boréliennes

$$\begin{array}{rccl} \angle_{x_\bullet}(\xi_\bullet,\eta_\bullet): & \Omega & \to & [0,\pi] \\ & \omega & \mapsto & \angle_{x_\omega}(\xi_\omega,\eta_\omega), \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rccl} \angle_\bullet(\xi_\bullet,\eta_\bullet): & \Omega & \to & [0,\pi] \\ & \omega & \mapsto & \angle_\omega(\xi_\omega,\eta_\omega), \end{array}$$

où $\angle_{x_\omega}(\xi_\omega,\eta_\omega)$ est l'angle d'Alexandrov en x_ω entre les deux uniques rayons géodésiques issus de x_ω et partant vers ξ_ω et η_ω dans X_ω et $\angle_\omega(\xi_\omega,\eta_\omega)$ est l'angle de Tits entre ξ_ω et η_ω dans ∂X_ω.

Preuve. (i) Soit $\mathscr{D}$ une famille fondamentale pour la structure borélienne $\mathscr{L}(\Omega,X_\bullet)$. Alors par le Lemme 3.3.6, $\mathscr{D}$ est aussi une famille fondamentale pour la structure naturelle $\mathscr{L}(\Omega,\overline{X_\bullet})$. En particulier, toute section de $\mathscr{L}(\Omega,\overline{X_\bullet})$ est limite ponctuelle de recollements dénombrables boréliens d'éléments de $\mathscr{D}$ (Lemme 1.1.9). Comme $\mathscr{D}\subseteq\mathscr{L}(\Omega,X_\bullet)$, alors tout élément de $\mathscr{L}(\Omega,\overline{X_\bullet})$ est limite ponctuelle d'éléments de $\mathscr{L}(\Omega,X_\bullet)$. En particulier, puisque $\xi_\bullet\in\mathscr{L}(\Omega,\partial X_\bullet)\subseteq\mathscr{L}(\Omega,\overline{X_\bullet})$, il existe une suite de sections $x^n_\bullet\in\mathscr{L}(\Omega,X_\bullet)$ telle que $x^n_\bullet\to\xi_\bullet$ ponctuellement (moralement : on peut approximer n'importe quelle section borélienne de points du bord par des sections boréliennes de points à l'intérieur). Quitte à modifier les sections par recollements dénombrables boréliens, on peut supposer que

$$d_\omega(x^n_\omega,x_\omega)\geq n \quad \text{pour tout } \omega\in\Omega$$

(il suffit d'utiliser l'observation de la preuve de la Proposition 3.3.13 qui garantit que $d_\omega(x^n_\omega,x_\omega)\to\infty$ pour tout $\omega\in\Omega$). On peut ainsi définir $c^n_\omega:[0,d_\omega(x_\omega,x^n_\omega)]\to X_\omega$ la géodésique de x_ω à x^n_ω et, pour t fixé, on a

$$c^n_\bullet(t)\in\mathscr{L}(\Omega,X_\bullet) \text{ pour tout } n\geq t$$

(voir le Proposition 3.2.1 (i)). Or, par définition de $x^n_\bullet\to\xi_\bullet$, on a, pour t fixé, (voir [BH99], Proposition II.8.19)

$$c^n_\omega(t)\to c_{\xi_\omega,x_\omega}(t) \text{ pour tout } \omega\in\Omega,$$

d'où on peut conclure que

$$c_{\xi_\bullet,x_\bullet}(t)=\lim_{n\to\infty}c^n_\bullet(t)\in\mathscr{L}(\Omega,X_\bullet).$$

(ii) Par définition de $\angle_{x_\bullet}(\xi_\bullet,\eta_\bullet)$, on a que

$$\angle_{x_\bullet}(\xi_\bullet,\eta_\bullet)=\angle_{x_\bullet}\big(c_{\xi_\bullet,x_\bullet}(1),c_{\eta_\bullet,x_\bullet}(1)\big).$$

Ainsi on peut conclure que cette fonction est borélienne en utilisant le point précèdent et la Proposition 3.2.1 (iii). Pour la deuxième fonction, on utilise la Proposition II.9.8 (4) de [BH99], qui montre que

$$\angle_\bullet(\xi_\bullet,\eta_\bullet)=2\arcsin\big(\lim_{t\to\infty}\frac{1}{2t}\cdot d(c_{\xi_\bullet,x_\bullet}(t),c_{\eta_\bullet,x_\bullet}(t))\big).$$

Aussi cette fonction est-elle borélienne comme limite ponctuelle de fonctions boréliennes. □

Lemme 3.3.13. *Soit $(\Omega,\mathscr{A})$ borélien et $X_\bullet$ un champ borélien d'espaces CAT(0) propres et $Y_\bullet$ un sous-champ borélien de convexes fermés de $X_\bullet$. Alors $\partial Y_\bullet$ est un sous-champ généralisé borélien de fermés de $\partial X_\bullet$.*

Preuve. Commençons par montrer que si X est un espace CAT(0) et que Y est un sous-ensemble convexe fermé de X, alors ∂Y est un sous-ensemble fermé de ∂X. Soit $y_0\in Y$ fixé. Alors un rayon géodésique dans Y issu de y_0 est un rayon géodésique dans X et deux rayons dans Y sont équivalents dans Y si et seulement s'ils sont équivalents dans X. On peut ainsi définir une application injective naturelle $j:\partial Y\to\partial X$. On peut ainsi identifier ∂Y à un sous-ensemble de ∂X. Il reste à vérifier que

∂Y est fermé dans ∂X. Soit $\{\xi_n\}_{n\geq 1}\subseteq \partial Y$ une suite convergeant vers un point $\xi\in\partial X$. En particulier, $c_{y_0,\xi_n}(t)\to c_{y_0,\xi}(t)$ pour tout $t\in\mathbb{R}_{\geq 0}$. Ainsi, puisque Y est fermé, on a que $c_{y_0,\xi}([0,\infty[)\subseteq Y$ et donc $\xi\in\partial Y$. Observons encore que si $i : X\to\mathscr{C}_0(X), x\mapsto d_x - d(x,y_0)$, alors $\partial Y = \overline{i(Y)}\cap\partial X$.

Maintenant on peut montrer que $\partial Y_\bullet$ est un sous-champ borélien de $\partial X_\bullet$. En effet, puisque $i_\bullet$ est un morphisme compatible (Lemme 3.3.6), on a que $i_\bullet(Y_\bullet)$ est un sous-champ borélien de $i_\bullet(X_\bullet)$ (Lemme 1.2.11) et donc que $\overline{i_\bullet(Y_\bullet)}$ est un sous-champ borélien de $\overline{i_\bullet(X_\bullet)}$. Ainsi $\partial Y_\bullet = \overline{i_\bullet(Y_\bullet)}\cap\partial X_\bullet$ est un sous-champ généralisé borélien de $\overline{i_\bullet(X_\bullet)}$ comme intersection de sous-champs généralisés boréliens de fermés (Proposition 1.5.6) et on peut conclure avec le Lemme 1.2.6 sur la transitivité des sous-champs. □

Corollaire 3.3.14. *Soit $(\Omega,\mathscr{A})$ un espace borélien et $X_\bullet$ un champ borélien d'espaces CAT(0) propres. Supposons qu'il existe une décomposition borélienne $X_\bullet = X^1_\bullet\times X^2_\bullet$ (voir Définition 1.9.6). Alors $\partial X^1_\bullet$ est un sous-champ borélien de $X_\bullet$ (de même pour $\partial X^2_\bullet$)*

Preuve. On fixe $x^2_\bullet\in\mathscr{L}(\Omega,X^2_\bullet)$. Alors $X^1_\bullet\times\{x^2_\bullet\}$ est clairement un sous-champ borélien de convexes fermés de $X_\bullet$. Comme $\partial X^1_\bullet\simeq\partial(X^1_\bullet\times\{x^2_\bullet\})$ le Lemme 3.3.13 permet de conclure. □

Extension d'une isométrie au bord

Lemme 3.3.15. *Soit X_1, X_2 deux espaces CAT(0) propres et $\gamma : X_1\to X_2$ une isométrie. Alors l'extension naturelle de γ à $\overline{X_1}\to\overline{X_2}$ est un homéomorphisme qui envoie ∂X_1 sur ∂X_2.*

Si on munit ∂X_1 et ∂X_2 de la métrique angulaire, alors cette application naturelle est une isométrie.

Remarque 3.3.16. En fait, on pourrait regarder pour la première partie la preuve de [BH99], II.8.9, p. 264. Ils prolongent l'action en observant qu'un rayon géodésique est envoyé sur un rayon géodésique. Mais comme on préfère voir ∂X comme un sous-ensemble de $\mathscr{C}_0(X)$ (pour pouvoir mettre la structure borélienne), il est intéressant de refaire la preuve dans ce cas-là. L'avantage de la méthode sur les rayons géodésiques est qu'elle fonctionne pour une application isométrique (pas nécessairement bijective).

Preuve. Choisissons $x_1\in X_1$ et $x_2\in X_2$ des points bases. On reprend les notations du Lemme 3.3.3. On a la situation suivante :

$$\begin{tikzcd} & \mathscr{C}(X_1) \arrow[r, two heads, "\pi_1"] & \mathscr{C}_*(X_1) \arrow[dl, "\psi_1"] \\ X_1 \arrow[r, hook, "i_1"] & \mathscr{C}_0(X_1) \arrow[u, hook, "j_1"] & \end{tikzcd}$$

et de même pour X_2. Comme $\gamma : X_1\to X_2$ est une isométrie, c'est en particulier un homéomorphisme et donc $\widetilde{\gamma} : \mathscr{C}(X_1)\to\mathscr{C}(X_2)$, $f\mapsto f\circ\gamma^{-1}$ est un homéomorphisme. En effet, si $\{f_n\}_{n\geq 1}$ une suite de fonctions dans $\mathscr{C}(X_1)$ qui converge uniformément sur les compacts vers $f\in\mathscr{C}(X_1)$, alors $\widetilde{\gamma}(f_n) = f_n\circ\gamma^{-1}$ converge uniformément sur les compacts vers $f\circ\gamma = \widetilde{\gamma}f$ puisque un homéomorphisme entre espaces séparés envoie les compacts sur les compacts (voir [BTG], Chapitre 1, §9, n°4). Vérifions qu'il passe au quotient et qu'on peut définir un homéomorphisme $\widetilde{\gamma}_* : \mathscr{C}_*(X_1)\to\mathscr{C}_*(X_2)$, par $[f]\mapsto[\widetilde{\gamma}(f)]$.

(1) $\widetilde{\gamma}_*$ est bien défini : si $g = f + c$ où c est une constante, alors $\widetilde{\gamma}(f+c)(x) = (f+c)(\gamma^{-1}(x)) = f(\gamma^{-1}(x)) + c = (\widetilde{\gamma}(f)+c)(x)$.

(2) $\widetilde{\gamma}_*$ est continue : si $[f_n]\to[f]$, alors il existe une suite de constantes $\{c_n\}_{n\geq 1}\subseteq\mathbb{R}$ telle que $f_n + c_n\to f$ (uniformément sur les compacts). On observe que $\widetilde{\gamma}_*([f_n]) = [\widetilde{\gamma}(f_n)] \overset{(1)}{=} [\widetilde{\gamma}(f_n)+c_n]\to[\widetilde{\gamma}(f)] = \widetilde{\gamma}_*(f)$.

Puisque $\mathscr{C}_*(X_k)$ est homéomorphe à $\mathscr{C}_0(X_k)$ via ψ_k (pour $k = 1, 2$) on arrive à construire un homéomorphisme entre $\mathscr{C}_0(X_1)$ et $\mathscr{C}_0(X_2)$ en posant $\widetilde{\gamma}_0 := \psi_2 \circ \widetilde{\gamma}_* \circ \psi_1^{-1}$. Il découle des définitions de ces applications que $\widetilde{\gamma}_0$ est donnée par

$$\begin{array}{rccl} \widetilde{\gamma}_0 : & \mathscr{C}_0(X_1) & \to & \mathscr{C}_0(X_2) \\ & f & \mapsto & [\widetilde{\gamma}_0(f) : y \mapsto f(\gamma^{-1}y) - f(\gamma^{-1}x_2)] \end{array}$$

Vérifions que le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd} \mathscr{C}_0(X_1) \arrow[r, "\widetilde{\gamma}_0"] & \mathscr{C}_0(X_2) \\ X_1 \arrow[u, hook, "i_1"] \arrow[r, "\gamma"] & X_2 \arrow[u, hook, "i_2"'] \end{tikzcd}$$

En effet,

$$\begin{array}{rcl} \widetilde{\gamma}_0(i_1(x)) & = & \widetilde{\gamma}_0\big(d(x,\cdot) - d(x,x_1)\big) = \big(d(x,\cdot) - d(x,x_1)\big) \circ \gamma^{-1} - \big(d(x,\gamma^{-1}(x_2)) - d(x,x_1)\big) \\ & \overset{\gamma \text{ iso.}}{=} & d(\gamma(x),\cdot) - d(\gamma(x),x_2) = i_2(\gamma(x)). \end{array}$$

L'homéomorphisme $\widetilde{\gamma}_0$ est donc bien une extension de γ. On peut maintenant vérifier que ∂X_1 s'envoie sur ∂X_2 :

$$\begin{array}{rcl} \widetilde{\gamma}_0(\partial X_1) & = & \widetilde{\gamma}_0\big(\overline{i_1(X_1)} \setminus i_1(X_1)\big) = \overline{\widetilde{\gamma}_0\big(i_1(X_1)\big)} \setminus \widetilde{\gamma}_0\big(i_1(X_1)\big) \\ & = & \overline{i_2(\gamma(X_1))} \setminus i_2(\gamma(X_1)) = \overline{i_2(X_2)} \setminus i_2(X_2) = \partial X_2. \end{array}$$

On peut vérifier que cette extension est bien la même que celle qui est "plus géométrique". Rappelons qu'un point $\xi \in \partial X_1 \subseteq \mathscr{C}_0(X_1)$ est représenté par sa fonction de Busemann $b_{\xi,x_1} : X_1 \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \lim_{t\to\infty} \big(d(c_{\xi,x_1}(t),x) - t\big)$. On peut calculer

$$\begin{array}{rcl} \widetilde{\gamma}_0(b_{\xi,x_1})(y) & = & \lim_{t\to\infty} \big(d(c_{\xi,x_1}(t),\gamma^{-1}(y)) - t\big) - \lim_{t\to\infty} \big(d(c_{\xi,x_1}(t),\gamma^{-1}(x_2)) - t\big) \\ & \overset{\gamma \text{ iso.}}{=} & \lim_{t\to\infty} \big(d(\gamma(c_{\xi,x_1}(t)),y) - t\big) - \lim_{t\to\infty} \big(d(\gamma(c_{\xi,x_1}(t)),x_2) - t\big) \\ & = & \lim_{t\to\infty} \big(d(c_{\gamma(\xi),\gamma(x_1)}(t),y) - t\big) - \lim_{t\to\infty} \big(d(c_{\gamma(\xi),\gamma(x_1)}(t),x_2) - t\big) \\ & = & b_{\gamma(\xi),\gamma(x_1)}(y) - b_{\gamma(\xi),\gamma(x_1)}(x_2) = b_{\gamma(\xi),x_2}(y). \end{array}$$

Ainsi, on voit bien que les deux manières d'étendre l'action sont identiques.

La preuve de la deuxième partie de l'énoncé est évidente au vu de la définition de l'angle de Tits. □

Extension au bord de l'action d'un G-espace

Soit G un groupe localement compact à base dénombrable, Ω un G-espace borélien standard et X un espace CAT(0) propre. Supposons qu'on se soit donné une action du G-espace sur X, c'est-à-dire un cocycle borélien $\alpha : G \times \Omega \to \mathrm{Iso}(X)$. On sait que chaque isométrie de X s'étend au bord et qu'on peut définir un cocycle de $G \times \Omega \to \mathrm{Hom}(\partial X)$ (Lemme 3.3.15) (on rappelle que $\mathrm{Hom}(\partial X)$ muni de la topologie de la convergence uniforme est un groupe topologique métrisable et à base dénombrable, Lemme B.3.3). Le lemme qui suit montre que ce cocycle est borélien.

Lemme 3.3.17. *Soit X un espace métrique propre. Alors l'homomorphisme*

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & \mathrm{Iso}(x) & \to & \mathrm{Hom}(\overline{X}) \\ & \gamma & \mapsto & \tilde{\gamma} \end{array}$$

est continu.

Preuve. Puisque $\mathrm{Iso}(X)$ est à base dénombrable (et donc en particulier satisfait le premier axiome de dénombrabilité), il suffit de vérifier que si $\gamma_n \to \gamma$ dans $\mathrm{Iso}(\overline{X})$ (pour la topologie de la convergence uniforme sur les compacts), alors $\varphi(\gamma_n) \to \varphi(\gamma)$ dans $\mathrm{Hom}(\overline{X})$ (pour la topologie de la convergence uniforme). Il s'agit de montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ et $R \geq 0$, il existe $N \geq 0$ tel que

$$\|(\varphi(\gamma_n))(f) - (\varphi(\gamma))(f)\|_{\overline{B}(x_0,R)} < \varepsilon \quad \forall f \in \overline{X} \quad \text{et} \quad n \geq N.$$

Puisque $i_0(X) \subseteq \overline{X}$ est dense, on peut remplacer "pour tout $f \in \overline{X}$" par "pour tout $f \in i_0(X)$". Soit donc $f = i_0(y) = d(\cdot, y) - d(x_0, y)$ (avec $y \in X$). Alors pour tout $x \in X$, on a que

$$\begin{aligned} \left|\Big((\varphi(\gamma_n))(i_0(y)) - (\varphi(\gamma))(i_0(y))\Big)(x)\right| &= |d(\gamma^{-1}x, y) - d(x_0, y) - d(\gamma_n^{-1}x, y) + d(x_0, y))| \\ &\leq d(\gamma^{-1}x, \gamma_n^{-1}x). \end{aligned}$$

Comme on a supposé que $\gamma_n \to \gamma$, alors $\gamma_n^{-1} \to \gamma^{-1}$ (puisque $\mathrm{Iso}(X)$ est un groupe topologique) et donc le lemme est démontré par définition de la convergence uniforme sur les compacts. □

Extension au bord de l'action d'une relation d'équivalence

Lemme 3.3.18. *Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace borélien standard, $\mathscr{R} \subseteq \Omega^2$ une relation d'équivalence borélienne dénombrable, $X_\bullet$ un champ borélien d'espaces CAT(0) propres et une action $\mathscr{R} \curvearrowright X_\bullet$ par isométries qu'on note α. Alors l'action de $\mathscr{R}$ s'étend en une action par homéomorphismes $\widetilde{\alpha}$ de $\mathscr{R}$ sur les champ boréliens $\overline{X}$ et $\partial X_\bullet$. De plus, si on munit chaque ∂X_ω de la métrique angulaire, alors $\widetilde{\alpha}(\omega, \omega') : \partial X_\omega \to \partial X_{\omega'}$ est une isométrie pour tout $(\omega, \omega') \in \mathscr{R}$.*

Preuve. Fixons une section de points bases $x_\bullet^0$ et considérons $\mathscr{C}_0(X_\bullet)$ le sous-champ borélien de $\mathscr{C}(X_\bullet)$ défini à l'aide de la section $x_\bullet^0$ (voir le Théorème 1.5.2). Par le Lemme 3.3.15, l'extension du cocycle est donnée par

$$\begin{array}{rccl} \widetilde{\alpha}(\omega, \omega') : & \mathscr{C}_0(X_\omega) & \to & \mathscr{C}_0(X_{\omega'}) \\ & f & \mapsto & [\alpha(\omega, \omega')(f) : x \mapsto f(\alpha(\omega', \omega)x) - f(\alpha(\omega', \omega)x_{\omega'}^0)]. \end{array}$$

La preuve du même lemme montre que le point (i) et (iii) de la Définition 2.2.6 sont satisfaits. Il reste à vérifier le point (ii). Par la Proposition 2.2.9, il suffit de vérifier que $\varphi f_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega, \mathscr{C}_0(X_\bullet))$ pour tout $f_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega, \mathscr{C}_0(X_\bullet))$ et tout $\varphi \in [\mathscr{R}]$. Soit $x_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)$. On vérifie directement[5] que

$$(\varphi f_\bullet)(x_\bullet) = \big(f_\bullet(\varphi^{-1}x_\bullet) - f_\bullet(\varphi^{-1}x_\bullet^0)\big) \circ \varphi^{-1}.$$

Mais $\varphi^{-1}x_\bullet, \varphi^{-1}x_\bullet^0 \in \mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)$ puisque $\mathscr{R}$ agit sur $X_\bullet$ et donc $f_\bullet(\varphi^{-1}x_\bullet), f_\bullet(\varphi^{-1}x_\bullet^0) \in \mathscr{L}(\Omega, \mathbb{R})$ puisque $f_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega, \mathscr{C}_0(X_\bullet)) \subseteq \mathscr{L}(\Omega, \mathscr{C}(X_\bullet))$. Finalement φ^{-1} est un automorphisme borélien et on a bien que $(\varphi f_\bullet)(x_\bullet) \in \mathscr{L}(\Omega, \mathbb{R})$ pour tout $x_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)$, c'est-à-dire $\varphi f_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega, \mathscr{C}_0(X_\bullet))$.

Maintenant le Lemme 3.3.15 montre que les sous-champs boréliens $\overline{X}_\bullet$ et $\partial X_\bullet$ de $\mathscr{C}_0(X_\bullet)$ sont $\mathscr{R}$-invariants. La restriction de l'action à ces deux sous-champs boréliens est donc bien une action (voir Lemme 2.2.16). □

3.4 Rayon et centre d'un sous-champ borélien de fermés de $\partial X_\bullet$

Dans cette section, on s'intéresse aux sous-champs boréliens de "petits" fermés du champ $\partial X_\bullet$. Supposons que X est un espace CAT(0) propre et que $A \subseteq \partial X$ est un fermé pour la topologie conique. On peut considérer le rayon de cet ensemble pour la métrique angulaire :

$$\mathrm{rad}(A) = \inf_{\xi \in \partial X} \{\sup_{\eta \in A} \angle(\xi, \eta)\}.$$

De plus, si $\mathrm{rad} A < \pi/2$, alors on peut définir le centre de A à l'aide des résultats suivants :

5. Comme dans la preuve du Lemme 2.2.23.

Théorème 3.4.1 (Théorème II.9.13 de [BH99]). *Si X est un espace CAT(0), alors ∂X muni de la métrique angulaire est un espace CAT(1) complet.*

Définition 3.4.2. *Soit $\kappa \in \mathbb{R}$. On introduit*

$$D_\kappa := \begin{cases} \pi/\sqrt{\kappa} & si\ \kappa > 0 \\ \infty & si\ \kappa \leq 0. \end{cases}$$

Proposition 3.4.3 (Proposition II.2.7 de [BH99]). *Soit X un espace CAT(κ) complet. Si $Y \subseteq X$ est un sous-ensemble borné de rayon $\operatorname{rad}(Y) < D_\kappa/2$, alors il existe un unique point $c_Y \in X$, appelé le centre de Y, tel que $Y \subseteq \overline{B}(c_Y, \operatorname{rad}(Y))$.*

Définition 3.4.4. *Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace borélien et $(\Omega, X_\bullet)$ un champ borélien d'espaces CAT(0) propres. Soit $(\Omega, A_\bullet)$ un sous-champ borélien de fermés du champ $\partial X_\bullet$ tels que $\operatorname{rad}(A_\omega) < \pi/2$ pour tout $\omega \in \Omega$. Par le Théorème 3.4.1 et la Proposition 3.4.3, il existe un unique centre c_{A_ω} de A_ω pour tout $\omega \in \Omega$. Il est alors possible de définir la section $c_{A_\bullet} \in \mathscr{S}(\Omega, \partial X_\bullet)$ par $c_{A_\bullet} : \omega \mapsto c_{A_\omega}$. On l'appelle la section des centres de $A_\bullet$.*

On a certes montré que pour les champs boréliens d'espaces CAT(0) la fonction $\angle_\bullet(\xi_\bullet, \xi'_\bullet)$ était borélienne pour tout $\xi_\bullet, \xi'_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega, \partial X_\bullet)$, mais ce n'est pas suffisant pour affirmer que la fonction $\operatorname{rad}(A_\bullet)$ est borélienne si $A_\bullet$ est un sous-champ borélien. En effet, la topologie déduite de la métrique angulaire peut être strictement plus fine que celle de la topologie conique et ne pas être séparable c'est pourquoi on ne peut pas parler du champ borélien d'espaces métriques $\big(\Omega, (\partial X_\bullet, \angle_\bullet)\big)$. On ne peut donc pas estimer le rayon à partir de familles fondamentales de $\mathscr{L}(\Omega, \partial X_\bullet)$ et $\mathscr{L}(\Omega, A_\bullet)$ comme on l'a fait pour les champs d'espaces CAT(0) (voir 3.2.1 (iv)). Il va donc être un peu plus difficile de montrer que la fonction $\operatorname{rad}(A_\bullet)$ et, quand cela a un sens, que la section des centres $c_{A_\bullet}$ associées à un sous-champ borélien $A_\bullet$ de $\partial X_\bullet$ sont boréliennes.

Proposition 3.4.5. *Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace borélien et $(\Omega, X_\bullet)$ un champ borélien d'espaces CAT(0) propres. Soit $(\Omega, A_\bullet)$ un sous-champ borélien de fermés du champ $(\Omega, \partial X_\bullet)$. Alors*

(i) La fonction $\operatorname{rad}(A_\bullet)$ est borélienne.

(ii) Si $\operatorname{rad}(A_\omega) < \pi/2$ pour tout $\omega \in \Omega$, alors $c_{A_\bullet} \in \mathscr{L}(\Omega, \partial X_\bullet)$.

Preuve. (i) On décompose la preuve en plusieurs points.

(1) Soit X un espace CAT(0) propre, $x_0 \in X$ et $n \geq 1$ un entier positif. Alors la fonction

$$\begin{array}{rccl} \angle^n : & \partial X \times \partial X & \to & [0, \pi] \\ & (\xi, \eta) & \mapsto & \angle^n(\xi, \eta) := \sup\limits_{1 \leq t \leq n} \overline{\angle}_{x_0}(c_{\xi, x_0}(t), c_{\xi', x_0}(t)) \end{array}$$

est continue lorsqu'on munit ∂X de la topologie conique et $\lim_{n\to\infty} \angle^n(\xi, \xi') = \angle(\xi, \xi')$ pour tout $\xi, \xi' \in \partial X$. Commençons par observer que les applications

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times \partial X & \to & X \\ (t, \xi) & \mapsto & c_{\xi, x_0}(t) \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} X \setminus \{x_0\} \times X \setminus \{x_0\} & \to & [0, \pi] \\ (x, y) & \mapsto & \overline{\angle}_{x_0}(x, y) \end{array}$$

sont continues. La première l'est par définition de la topologie conique et la deuxième car l'angle de comparaison peut-être exprimé continûment à partir des distances entre les trois points concernés (voir la preuve de la Proposition 3.2.1 (iii)). Ainsi, la fonction

$$\begin{array}{ccc} [1, n] \times \partial X \times \partial X & \to & [0, \pi] \\ (t, \xi, \xi') & \mapsto & \overline{\angle}_{x_0}(c_{\xi, x_0}(t), c_{\xi', x_0}(t)) \end{array}$$

est continue (et donc uniformément continue) pour tout $n \geq 1$ (comme composition d'applications continues). La remarque ci-dessous permet de conclure que la fonction $\angle^n$ est continue. Le fait que $\angle^n \to \angle$ est prouvée dans [BH99] (Proposition II.9.8 et sa preuve).

Remarque 3.4.6. Soit X, Y deux espaces métriques et $h : X \times Y \to \mathbb{R}$ une fonction uniformément continue telle que, pour tout $x \in X$, $\max_{y\in Y}\{h(x,y)\}$ est atteint en un point $y_x \in Y$. Alors la fonction

$$\begin{array}{rccl} h_+ : & X & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \max\limits_{y\in Y}\{h(x,y)\} = h(x,y_x) \end{array}$$

est continue.

Soit $x, x' \in X$. Sans restreindre la généralité, on peut supposer que

$$h_+(x) = \max_{y\in Y}\{h(x,y)\} \geq h_+(x') = \max_{y\in Y}\{h(x',y)\}.$$

Alors

$$|h_+(x) - h_+(x')| = \underbrace{\max_{y\in Y}\{h(x,y)\}}_{=h(x,y_x)} - \underbrace{\max_{y\in Y}\{h(x',y)\}}_{\geq h(x',y_x)} \leq h(x,y_x) - h(x',y_x)$$

qui est petit si x est proche de x' puisque h est uniformément continue. [6]

(2) Soit X un espace CAT(0) propre, $x_0 \in X$ et $A \subseteq \partial X$ un sous-ensemble fermé du bord. Alors on a

$$\mathrm{rad}(A) = \lim_{n\to\infty} \min_{\xi\in\partial X}\{\max_{\eta\in A}\{\angle^n(\xi,\eta)\}\}.$$

Commençons à calculer

$$\begin{aligned} \mathrm{rad}(A) &\overset{\text{déf.}}{=} \inf_{\xi\in\partial X}\{\sup_{\eta\in A}\{\angle(\xi,\eta)\}\} = \inf_{\xi\in\partial X}\Big\{\sup_{\eta\in A}\{\sup_{n\geq 1}\{\angle^n(\xi,\eta)\}\}\Big\} \\ &\overset{(1)}{=} \inf_{\xi\in\partial X}\Big\{\sup_{n\geq 1}\{\max_{\eta\in A}\{\angle^n(\xi,\eta)\}\}\Big\}. \end{aligned}$$

Comme X est propre, ∂X et A sont des compacts métrisables et donc $\partial X \times A$ aussi. Pour tout $n \geq 1$, on peut appliquer la Remarque 3.4.6 à la fonction uniformément continue $\angle^n|_{\partial X\times A}$. Ainsi,

$$\begin{array}{ccc} \partial X & \to & [0,\pi] \\ \xi & \mapsto & \max_{\eta\in A}\{\angle^n(\xi,\eta)\} \end{array}$$

est une fonction continue pour tout $n \geq 1$. Par des résultats classiques [7], la fonction $\partial X \to [0,\pi]$, $\xi \mapsto \sup_{n\in\mathbb{N}}\{\max_{\eta\in A}\{\angle^n(\xi,\eta)\}\}$ est une fonction semi-continue inférieurement et elle admet donc un *minimum*. Ainsi

$$\mathrm{rad}(A) = \min_{\xi\in\partial X}\Big\{\sup_{n\in\mathbb{N}}\{\max_{\eta\in A}\{\angle^n(\xi,\eta)\}\}\Big\} \overset{(*)}{=} \lim_{n\to\infty}\min_{\xi\in\partial X}\{\max_{\eta\in A}\{\angle^n(\xi,\eta)\}\}.$$

Pour l'égalité $(*)$, on a utilisé l'affirmation suivante.

Affirmation. Soit X un espace topologique compact métrisable et $\{f_n : X \to \mathbb{R}\}_{n\geq 1}$ une suite croissante de fonctions continues (*i.e.* $f_{n+1}(x) \geq f_n(x)$ pour tout $x \in X$ et $n \geq 1$) qui converge ponctuellement vers une fonction

$$f = \sup_{n\geq 1} f_n.$$

Alors l'*infimum* de f est réalisé (on le note $\min f$) et $\lim_{n\to\infty}\min f_n = \min f$. De plus, si $\{x_n\}_{n\geq 1} \subseteq X$ est une suite telle que $f_n(x_n) = \min f_n$ pour tout $n \geq 1$, alors tout point d'accumulation $x \in X$ de cette suite satisfait $f(x) = \min f$.

6. On ne peut pas enlever arbitrairement la continuité uniforme. Considérons par exemple une fonction $h : [0,1] \times \mathbb{R}_{\geq 0} \to [0,1]$ qui vaut 0 sur $\{0\} \times \mathbb{R}_{\geq 0}$, 1 sur $[1/n, 1] \times \{n\}$ pour tout $n \geq 1$ et qui est prolongée en une fonction continue h telle que $h \leq 1$. Alors $\max_{y\in\mathbb{R}_{\geq 0}}\{h(x,y)\} = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in]0,1] \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

7. Lemme B.4.4 (iv) et (v)

Preuve de l'affirmation. Par des résultats classiques de semi-continuités [8], on sait que f est semi-continue inférieurement et admet un *minimum* noté $\min f$. Comme $\{f_n\}_{n\geq 1}$ est croissante, on a

$$\min f \geq \min f_{n+1} \geq \min f_n \text{ pour tout } n \geq 1.$$

Ainsi, $\lim_{n\to\infty} \min f_n$ existe et $\min f \geq \lim_{n\to\infty} \min f_n$.
Soit maintenant $\{x_n\}_{n\geq 1}$ telle que $f_n(x_n) = \min f_n$. Comme X est compact, on peut supposer, sans perte de généralité, que $x_n \to x$. Ainsi on a :

(a) $\lim_{m\to\infty} f_n(x_m) = f_n(x)$ pour tout $n \geq 1$ par continuité de f_n,

(b) $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ par définition de f.

(a) se traduit par : pour tout $\varepsilon > 0$ et $n \geq 1$, il existe $M(\varepsilon, n) \in \mathbb{N}$ (qu'on choisit plus grand que n) tel que $f_n(x_m) \geq f_n(x) - \varepsilon$ pour tout $m \geq M(\varepsilon, n) \geq n$.
(b) se traduit par : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tel que $f_n(x) \geq f(x) - \varepsilon$ pour tout $n \geq N(\varepsilon)$.
Soit $\varepsilon > 0$. En combinant (a) et (b) on obtient :

$$\begin{aligned}\min f_{M(\varepsilon,N(\varepsilon))} &= f_{M(\varepsilon,N(\varepsilon))}(x_{M(\varepsilon,N(\varepsilon))}) \overset{M(\varepsilon,N(\varepsilon))\geq N(\varepsilon)}{\geq} f_{N(\varepsilon)}(x_{M(\varepsilon,N(\varepsilon))}) \underset{M(\varepsilon,N(\varepsilon))\geq N(\varepsilon)}{\overset{(a)}{\geq}} f_{N(\varepsilon)}(x) - \varepsilon \\ &\overset{(b)}{\geq} f(x) - 2\varepsilon \geq \min f - 2\varepsilon.\end{aligned}$$

Ainsi, on a

$$\lim_{m\to\infty} \min f_m = \lim_{m\to\infty} f_m(x_m) \geq f(x) \geq \min f \geq \lim_{n\to\infty} \min f_m$$

ce qui achève la preuve de l'affirmation. □

(3) Soit $\xi_\bullet, \eta_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega, \partial X_\bullet)$ et $x^0_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)$. Alors $\angle^n_\bullet(\xi_\bullet, \eta_\bullet)$ est une fonction borélienne (où $\big(\angle^n_\bullet(\xi_\bullet, \eta_\bullet)\big)_\omega = \angle^n_\omega(\xi_\omega, \eta_\omega)$). En effet,

$$\angle^n_\bullet(\xi_\bullet, \eta_\bullet) = \sup_{t\in[1,n]\cap\mathbb{Q}} \overline{\angle}_{x^0_\bullet}(c_{\xi_\bullet, x^0_\bullet}(t), c_{\eta_\bullet, x^0_\bullet}(t))$$

et $\overline{\angle}_{x^0_\bullet}(c_{\xi_\bullet,x^0_\bullet}(t), c_{\xi_\bullet,x^0_\bullet}(t))$ est borélienne par la Proposition 3.2.1 (iii) puisque $c_{\xi_\bullet,x^0_\bullet}(t), c_{\eta_\bullet,x^0_\bullet}(t) \in \mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)$ (Lemme 3.3.12 (i)).
Les points (2) et (3) permettent de terminer la preuve du point (i). En effet, soit $A_\bullet$ un sous-champ borélien de fermés de $\partial X_\bullet$, $\mathscr{D}$ une famille fondamentale de $\mathscr{L}(\Omega, \partial X_\bullet)$ et $\mathscr{D}'$ une famille fondamentale de $\mathscr{L}(\Omega, A_\bullet)$. Grâce au point (2), on a

$$\operatorname{rad}(A_\bullet) = \lim_{n\to\infty} \inf_{\xi_\bullet\in\mathscr{D}} \{ \sup_{\eta_\bullet\in\mathscr{D}'} \{\angle^n(\xi_\bullet, \eta_\bullet)\}\},$$

qui est donc borélienne comme limite ponctuelle d'*infimum* dénombrable de *supremum* dénombrable de fonctions boréliennes.

(ii) Considérons la suite de morphismes $\{f^n_\bullet\}_{n\geq 1}$ définie par $f^n_\omega(\xi_\omega) := \max_{\eta_\omega\in A_\omega}\{\angle^n_\omega(\xi_\omega, \eta_\omega)\}$. On observe que $f^n_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega, \mathscr{C}(\partial X_\bullet))$ pour tout $n \geq 1$ (voir la preuve de (i)). La suite $\{f^n_\omega\}_{n\geq 1}$ est croissante et bornée pour tout $\omega \in \Omega$. De plus, $f_\bullet := \lim_{n\to\infty} f^n_\bullet$ satisfait que $f^{-1}_\omega(\{\min(f_\omega)\}) = \{c_{A_\omega}\}$ pour tout $\omega \in \Omega$ ($\min(f_\omega)$ est le rayon de A_ω et c_{A_ω} est le centre de A_ω). Il s'agit de montrer que $f^{-1}_\bullet(\{\min(f_\bullet)\})$ est une section borélienne.
On observe que si $\mathscr{D}$ est une famille fondamentale de la structure borélienne $\mathscr{L}(\Omega, \partial X_\bullet)$, alors $\min f^n_\bullet = \inf_{x_\bullet\in\mathscr{D}} f^n_\bullet(x_\bullet)$ et donc on a $\min f^n_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega, \mathbb{R})$. Par le Lemme 1.5.13, on sait alors que $(f^n_\bullet)^{-1}(\{\min f^n_\bullet\})$ est un sous-champ borélien de fermés de $(\Omega, \partial X_\bullet)$. Ainsi, pour tout $n \geq 1$, il

8. Toujours le Lemme B.4.4 (iv) et (v)

existe au moins un $\xi^n_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega,(f^n_\bullet)^{-1}(\{\min f^n_\bullet\})) \subseteq \mathscr{L}(\Omega,\partial X_\bullet)$. Par l'affirmation du point (1), on sait que pour tout $\omega \in \Omega$, tout point d'accumulation de $\{\xi^n_\omega\}_{n\geq 1}$ réalise le *minimum* de f_ω. Mais, par définition de f_ω, il existe pour tout $\omega \in \Omega$ un unique ξ_ω qui réalise le *minimum*. Ainsi[9], on a $\xi^n_\bullet \to f_\bullet^{-1}(\{\min f_\bullet\})$ ponctuellement et donc $c_{A_\bullet} = f_\bullet^{-1}(\{\min f_\bullet\}) \in \mathscr{L}(\Omega,\partial X_\bullet)$. □

Corollaire 3.4.7. *Soit G un groupe localement compact à base dénombrable, Ω un G-espace borélien standard, X un espace CAT(0) propre et $\alpha : G\times\Omega \to \mathrm{Iso}(X)$ une action du G-espace sur X. Si $(\Omega,A_\bullet)$ est un sous-champ borélien de fermés invariants du champ $(\Omega,\partial X)$ tels que $\mathrm{rad}(A_\omega) < \pi/2$ pour tout $\omega\in\Omega$, alors il existe une section $\xi_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega,\partial X_\bullet)$ invariante.*

Mutatis Mutandis pour une relation d'équivalence borélienne standard.

3.5 Limite d'une intersection décroissante de convexes

Il n'est pas difficile dans un espace CAT(0) propre d'associer un point dans le bord à une suite décroissante de sous-ensembles convexes, fermés et non vides dont l'intersection est vide : il suffit de prendre un point d'accumulation de la suite des projections d'un point base sur ces sous-ensembles. Mais on voudrait réussir à la faire canoniquement. Dans cette optique, nous allons commencer par définir l'ensemble limite à l'infini d'une suite décroissante de convexes, fermés, non vides dont l'intersection est vide.

Lemme 3.5.1. *Soit X un espace CAT(0) propre et $\{C_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{R}}$ une famille décroissante (i.e. si $\alpha\geq\beta$, alors $C_\alpha\subseteq C_\beta$) de sous-ensembles convexes, fermés et non vides de X. Alors*

(i) Les trois propositions suivantes sont équivalentes :

(a) Pour tout $x\in X$, on a $\lim_{\alpha\to\infty} d(x,\pi_{C_\alpha}(x)) = \infty$.

(b) Il existe $x\in X$ tel que $\lim_{\alpha\to\infty} d(x,\pi_{C_\alpha}(x)) = \infty$.

(c) $\bigcap_{\alpha\in\mathbb{R}} C_\alpha = \emptyset$.

(ii) Supposons que $\bigcap_{\alpha\in\mathbb{R}} C_\alpha = \emptyset$ et posons, pour tout $x\in X$, $C_x := \overline{\{\pi_{C_\alpha}(x)\}}_{\alpha\in\mathbb{R}} \cap \partial X$. Alors $C_x = C_y$ pour tout $x,y\in X$ et $\mathrm{diam}\, C_x \leq \pi/2$. En particulier, on peut définir l'ensemble limite à l'infini de la suite $\{C_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{R}}$ comme étant l'ensemble C_x (pour n'importe quel x).

(iii) Supposons que $\bigcap_{\alpha\in\mathbb{R}} C_\alpha = \emptyset$ et que $C_\beta = \bigcap_{\alpha<\beta} C_\alpha$ pour tout $\beta\in\mathbb{R}$. Alors pour tout $D\subseteq\mathbb{R}$ dense et tout $x\in X$ on a que l'ensemble à l'infini de la suite $\{C_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{R}}$ est égal à

$$\overline{\{\pi_{C_\beta}(x)\}}_{\beta\in D} \cap \partial X.$$

Preuve. (i) Il suffit de le prouver pour la sous-famille $\{C_n\}_{n\geq 1}$. [(b) ⇒ (c)] On montre la contraposée. Par hypothèse, il existe $c\in\bigcap_{n\geq 1} C_n$. Soit $x\in X$ quelconque. Alors $d(x,\pi_{C_n}(x)) \leq d(x,C)$ pour tout $n\geq 1$ et donc $\lim_{n\to\infty} d(x,\pi_{C_n}(x)) \neq \infty$.

[(c) ⇒ (a)] On montre la contraposée. Soit $x\in X$ tel que $\lim_{n\to\infty} d(x,\pi_{C_n}(x)) \neq \infty$, alors, comme $d(x,\pi_{C_n}(x))$ est croissante en n, il existe $r\geq 0$ tel que $d(x,\pi_{C_n}(x)) \leq r$ pour tout $n\geq 1$. Comme X est propre, il existe $c\in X$ un point d'accumulation de la suite $\{\pi_{C_n}(x)\}_{n\geq 1} \subseteq \overline{B}(x,r)$. Comme $\pi_{C_n}(x)\in C_n$ pour tout $n\geq 1$, on a que $c\in\cap_{n\geq 1} C_n$ qui est donc non vide.

(ii) On fait la preuve en trois temps.

(1) Fixons $x\in X$. On montre que

$$\begin{aligned}\overline{\{\pi_{C_\alpha}(x)\}}_{\alpha\in\mathbb{R}} \cap \partial X \quad = \quad & \{y\in\overline{X} \mid \text{il existe une suite croissante } \{\alpha(n)\}_{n\geq 1}\subseteq\mathbb{R} \text{ tendant} \\ & \text{vers l'infini telle que } \pi_{C_{\alpha(n)}}(x) \xrightarrow{n\to\infty} y\}.\end{aligned}$$

9. En effet, si $\{y_n\}_{n\geq 1}\subseteq Y$ métrique et que l'ensemble des points d'accumulation de la suite se réduit à un point, alors la suite converge vers ce point.

[$\subseteq$] Soit $\xi \in \overline{\{\pi_{C_\alpha}(x)\}}_{\alpha\in\mathbb{R}} \cap \partial X$. Alors il existe une suite d'indices $\{\alpha(n)\}_{n\geq 1}$ telle que $\pi_{C_{\alpha(n)}}(x) \to \xi$ quand $n \to \infty$. Il faut montrer qu'on peut supposer que $\{\alpha(n)\}_{n\geq 1}$ est croissante. Puisque $\xi \in \partial X$, on a que $d(x, \pi_{C_{\alpha(n)}}(x)) \to \infty$ quand $n \to \infty$ (voir la preuve de la Proposition 3.3.8). Ainsi, puisque C_α est non vide pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et que la suite de sous-ensembles est décroissante d'intersection vide, on a $\lim_{n\to\infty} \alpha(n) = \infty$ et on peut extraire une suite croissante.

[$\supseteq$] Soit $\{\alpha(n)\}_{n\geq 1} \subseteq \mathbb{R}$ une suite croissante tendant vers l'infini telle que $\{\pi_{C_{\alpha(n)}}(x)\}_{n\geq 1}$ converge vers $y \in \overline{X}$. Alors, par le point (i), on a que $\lim_{n\to\infty} d(x, \pi_{C_{\alpha(n)}}(x)) = \infty$. Et donc $y \in \partial X$ (voir la preuve de la Proposition 3.3.8).

(2) On montre que $C_x \subseteq C_y$ pour tout $x, y \in X$. Soit $\xi \in C_x$. Alors, par (1), il existe $\{\alpha(n)\}_{n\geq 1} \subseteq \mathbb{R}$ une suite croissante tendant vers l'infini telle que $\pi_{C_{\alpha(n)}}(x) \to \xi$ quand $n \to \infty$. Comme la projection est contractante, on a que

$$d(\pi_{C_\alpha}(x), \pi_{C_\alpha}(y)) \leq d(x, y) \text{ pour tout } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Ainsi [10], $\pi_{C_{\alpha(n)}}(y) \to \xi$ et donc $\xi \in C_y$.

(3) Fixons $x \in X$ et montrons que $\operatorname{diam}(C_x) \leq \pi/2$. Pour cela, on utilise la propriété de la projection qui garantit que [11]

$$\angle_{\pi_{C_\alpha}(x)}(x, \pi_{C_\beta}(x)) \geq \pi/2$$

si α et β sont assez grands pour que $x \notin C_\alpha$ et $\pi_{C_\alpha}(x) \neq \pi_{C_\beta}(x)$. En particulier, $\overline{\angle}_{\pi_{C_\alpha}(x)}(x, \pi_{C_\beta}(x)) \geq \pi/2$ et donc

$$\overline{\angle}_x(\pi_{C_\alpha}(x), \pi_{C_\beta}(x)) \leq \pi/2 \text{ si } \beta, \alpha \text{ sont comme ci-dessus.}$$

Soit maintenant $\xi, \zeta \in C_x \subseteq \partial X$. Par (1), il existe $\{\alpha(n)\}_{n\geq 1}$ et $\{\beta(n)\}_{n\geq 1}$ deux suites croissantes de réels tendant vers l'infini telles que $\pi_{C_{\alpha(n)}}(x) \to \xi$ et $\pi_{C_{\beta(n)}}(x) \to \zeta$ quand $n \to \infty$, qu'on peut choisir telles que $x \notin C_{\alpha(n)}$ et $\pi_{C_{\alpha(n)}}(x) \neq \pi_{C_{\beta(n)}}(x)$ pour tout $n \geq 1$. Le Lemme II.9.16 de [BH99] permet de conclure que

$$\angle(\xi, \zeta) \leq \liminf_{n\to\infty} \overline{\angle}_x(\pi_{C_{\alpha(n)}}(x), \pi_{C_{\beta(n)}}(x)) \leq \pi/2.$$

(iii) Il suffit de vérifier que $\pi_{C_\alpha}(x) \in \overline{\{\pi_{C_\beta}(x)\}}_{\beta\in D}$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour ce faire, on fixe $\alpha \in \mathbb{R}$ et on choisit une suite croissante $\{d_n\}_{n\geq 1} \subseteq D$ qui converge vers α. Puisque X est propre et que $C_\alpha = \bigcap_{\beta<\alpha} C_\alpha = \bigcap_{n\geq 1} C_{d_n}$ (par hypothèse), on a que

$$d(x, C_\alpha) \overset{X \text{ propre}}{=} \lim_{n\to\infty} d(x, C_{d_n}) = \lim_{n\to\infty} d(x, \pi_{C_{d_n}}(x)).$$

Ainsi, tout point d'accumulation de la suite $\{\pi_{C_{d_n}}(x)\}_{n\geq 1}$ est égal à $\pi_{C_\alpha}(x)$. En effet, si y est un point d'accumulation de cette suite, alors y appartient à C_α et $d(x, C_\alpha) = d(x, y)$ (on conclut avec l'unicité de la projection sur un convexe). $\square$

Le point (iii) du lemme précèdent permet de montrer que la définition de l'ensemble limite à l'infini s'adapte bien au contexte des champs boréliens.

Lemme 3.5.2. *Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace borélien et $X_\bullet$ un champ borélien d'espaces CAT(0) propres. Soit $\{C_\bullet^\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{R}}$ une famille de sous-champs boréliens de convexes, fermés, non vides partout telle que*

(i) $C_\omega^\alpha \subseteq C_\omega^\beta$ pour tout $\omega \in \Omega$ et tout $\alpha \geq \beta$,

(ii) $\bigcap_{\alpha\in\mathbb{R}} C_\omega^\alpha = \emptyset$ pour tout $\omega \in \Omega$,

(iii) $C_\omega^\beta = \bigcap_{\alpha<\beta} C_\omega^\alpha$ pour tout $\omega \in \Omega$ et tout $\beta \in \mathbb{R}$,

10. Évident par la définition de la topologie conique.
11. Voir B.1.6.

Soit $C_\bullet$ le sous-champ de $\partial X_\bullet$ défini par : C_ω est l'ensemble limite à l'infini de la famille $\{C^\alpha_\omega\}_{\alpha\in\mathbb{R}}$. Alors $C_\bullet$ est un sous-champ borélien de $\partial X_\bullet$.

Preuve. Fixons $x^0_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)$. Alors $\{\pi_{C^\beta_\bullet}\}_{\beta\in\mathbb{Q}}$ est une famille fondamentale pour le sous-champ $\overline{\{\pi_{C^\alpha_\bullet}(x^0_\bullet)\}}_{\alpha\in\mathbb{R}}$ de $\overline{X}_\bullet$. En effet, $\pi_{C^\alpha_\bullet}(x^0_\bullet) \in \mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ (Proposition 3.2.1 (ii)) et donc, puisque $X_\bullet$ est un sous-champ borélien de $\overline{X}_\bullet$, $\pi_{C^\alpha_\bullet}(x^0_\bullet) \in \mathscr{L}(\Omega, \overline{X}_\bullet)$. Et par le Lemme 3.5.1 on a bien

$$\overline{\{\pi_{C^\alpha_\omega}(x^0_\omega)\}}_{\alpha\in\mathbb{R}} = \overline{\{\pi_{C^\beta_\omega}(x^0_\omega)\}}_{\beta\in\mathbb{Q}}.$$

Finalement, on sait par la Proposition 3.3.8 que $\partial X_\bullet$ est aussi un sous-champ borélien de $\overline{X}_\bullet$. Comme $\overline{X}_\bullet$ est un champ de compacts, l'intersection de deux sous-champs boréliens de fermés est un sous-champ borélien (Proposition 1.5.6) et donc $C_\bullet$ est un sous-champ borélien de $\overline{X}_\bullet$. Le Lemme 1.2.6 sur la transitivité des sous-champs boréliens permet de conclure. □

Pour réussir à associer canoniquement un point dans le bord à une suite décroissante de sous-ensembles convexes, fermés et non vides dont l'intersection est vide) nous devons utiliser une hypothèse un peu plus restrictive sur l'espace X.

Lemme 3.5.3 (Lemme 4.1 de [LS97]). *Soit Y un espace CAT(κ) et $A \subseteq X$ un sous-ensemble tel que* $\operatorname{diam}(A) \leq D_\kappa/2$. *Alors on a* $\operatorname{diam}\big(\overline{co(A)}\big) = \operatorname{diam}(A)$.

Définition 3.5.4 (dimension de recouvrement). *Soit X un espace topologique et $\mathscr{A} = \{A_s\}_{s\in S}$ un recouvrement de X. Un recouvrement $\mathscr{B} = \{B_t\}_{t\in T}$ de X est un raffinement de A si pour tout $t \in T$ il existe $s \in S$ tel que $B_t \subseteq A_s$.*

Soit Z un ensemble et $\mathscr{A}$ une famille de sous-ensembles de Z. L'ordre de $\mathscr{A}$ est le plus grand entier tel que $\mathscr{A}$ contienne $n+1$ ensembles d'intersection non vide.

Soit X un espace topologique. Alors $\dim(X)$ dénote la dimension de recouvrement de X. Dans le cas d'un espace métrisable (voir [En89], 4.1.13 et 7.1.7), on peut définir la dimension de recouvrement comme suit, en trois temps :

(i) $\dim(X) \leq n$ *si*

$$\textit{pour tout recouvrement d'ouverts de } X \textit{ il existe un raffinement ouvert fini d'ordre} \leq n \tag{3.1}$$

(ii) $\dim(X) = n$ *si (3.1) est vrai pour n mais pas pour $n-1$*

(iii) $\dim(X) = \infty$ *si (3.1) n'est vrai pour aucun n*

On notera aussi $\dim_C(X)$ *le supremum des dimensions de recouvrement des sous-ensembles compacts de X.*

Théorème 3.5.5 (Théorème 1.7 de [FNS06]). *Soit Y un espace CAT(1) complet qui vérifie que* $\dim_C(Y) < \infty$ *et que* $\operatorname{diam}(Y) \leq \pi/2$. *Alors il existe une constante $\delta > 0$, qui ne dépend que de* $\dim_C(Y)$, *telle que* $\operatorname{rad}(Y) \leq \pi/2 - \delta$. *En particulier, il existe un unique centre c_Y pour Y.*

Proposition 3.5.6 (Proposition 1.8 de [FNS06]). *Soit X un espace CAT(0) propre. Alors on a*

$$\dim_C(\partial X, \angle) \leq \dim(X) - 1.$$

Les deux résultats précédents nous permettent d'atteindre notre but :

Corollaire 3.5.7. *Soit X un espace CAT(0) propre tel que dim(X) $< \infty$. Soit $\{C_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{R}}$ une suite décroissante de convexes, fermés, non vides telle que $\bigcap_{\alpha\in\mathbb{R}} C_\alpha = \emptyset$. Alors l'ensemble limite à l'infini est de rayon $< \pi/2$.*

Preuve. Notons $C \subseteq \partial X$ l'ensemble limite à l'infini de la suite $\{C_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{R}}$. Par le Lemme 3.5.1, on sait que $\operatorname{diam}(C) \leq \pi/2$. Puisque $(\partial X, \angle)$ est un espace CAT(1) complet, le Lemme 3.5.3 implique que $\operatorname{diam}(\overline{\operatorname{co}(C)}) = \operatorname{diam}(C) \leq \pi/2$. Or, on a $\dim_C(\partial X) \leq \dim(X) - 1 < \infty$ par hypothèse et par la Proposition 3.5.6. On peut donc appliquer le Théorème 3.5.5 à l'espace CAT(1) complet $\overline{\operatorname{co}(C)}$ et déduire que $\operatorname{rad}(C) \leq \operatorname{rad}(\overline{\operatorname{co}(C)}) < \pi/2$. □

On peut ainsi montrer le corollaire suivant.

Corollaire 3.5.8. *Soit G un groupe localement compact à base dénombrable, Ω un G-espace borélien standard, X un espace CAT(0) propre de dimension topologique de recouvrement finie et $\alpha : G \times \Omega \to \operatorname{Iso}(X)$ une action du G-espace sur X. Si $\{C_\bullet^\beta\}_{\beta\in\mathbb{R}}$ est une suite de sous-champs boréliens de convexes, fermés, non vides partout telle que*

(i) $C_\omega^\gamma \subseteq C_\omega^\beta$ pour tout $\omega \in \Omega$ et tout $\gamma \geq \beta$,

(ii) $\bigcap_{\beta\in\mathbb{R}} C_\omega^\beta = \emptyset$ pour tout $\omega \in \Omega$,

(iii) $C_\omega^\beta = \bigcap_{\gamma<\beta} C_\omega^\gamma$ pour tout $\omega \in \Omega$ et tout $\beta \in \mathbb{R}$.

(iv) il existe une application $r : G\times\Omega \to \mathbb{R}$ tel que $\alpha(g,\omega)C_\omega^\beta = C_{g\omega}^{\beta+r(g,\omega)}$ pour tout $(g,\omega) \in G\times\Omega$ et $\beta \in \mathbb{R}$.

Alors il existe une section $\xi_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega, \partial X_\bullet)$ invariante.

Mutatis Mutandis pour une relation d'équivalence borélienne standard.

Preuve. On vient de montrer que le champ des ensembles limites à l'infini $(\Omega, C_\bullet)$ est un sous-champ borélien de fermés. Si on montre que c'est un sous-champ invariant, on aura la conclusion en appliquant le Corollaire 3.4.7 (on peut le faire puisque l'on a $\operatorname{rad}(C_\bullet) < \pi/2$ par le Corollaire 3.5.7). On rappelle que

$$C_\bullet = \overline{i_\bullet(\{\pi_{C_\bullet^\beta}(x_\omega)\}_{\beta\in\mathbb{R}})} \cap \partial X$$

pour n'importe quelle section $x_\bullet \in \mathscr{S}(\Omega', X_\bullet)$. On calcule pour $g \in G$ et $\omega \in \Omega$

$$\begin{aligned}
(gC_\bullet)_\omega &= \widetilde{\alpha}(g,g^{-1}\omega)(C_{g^{-1}\omega}) \overset{\text{déf.}}{=} \widetilde{\alpha}(g,g^{-1}\omega)\big(\overline{\{\pi_{C^\beta_{g^{-1}\omega}}(x_{g^{-1}\omega})\}}_{\beta\in\mathbb{R}} \cap \partial X\big) \\
&\overset{\widetilde{\alpha}\text{ extension de }\alpha\text{ et homéo.}}{=} \overline{\alpha(g,g^{-1}\omega)(\{\pi_{C^\beta_{g^{-1}\omega}}(x_{g^{-1}\omega})\}_{\beta\in\mathbb{R}})} \cap \partial X \\
&\overset{\alpha\text{ iso.}}{=} \overline{\{\pi_{\alpha(g,g^{-1}\omega)(C^\beta_{g^{-1}\omega})}(\alpha(g,g^{-1}\omega)x_{g^{-1}\omega})\}}_{\beta\in\mathbb{R}} \cap \partial X \\
&= \overline{\{\pi_{C_\omega^{\beta+r(g,\omega)}}((gx_\bullet)_\omega)\}}_{\beta\in\mathbb{R}} \cap \partial X = C_\omega.
\end{aligned}$$

□

Remarque 3.5.9. Si on a une suite dénombrable $\{C_\bullet^n\}_{n\geq 1}$ de sous-champs borélien invariants, alors on a les mêmes résultats. En effet, il suffit de poser

$$C_\bullet^\alpha := \begin{cases} X_\bullet & \text{si } \alpha \leq 0 \\ C_\bullet^{\lceil \alpha \rceil} & \text{si } \alpha > 0 \end{cases}$$

et $r(g,\omega) = 0$ pour que les conditions soient vérifiées.

Chapitre 4

Généralisation du Théorème d'Adams-Ballmann

Pour le lecteur qui n'est pas familier avec le résultat de [AB98], on redonne une esquisse de la preuve dans l'Appendice C. Il est utile d'avoir en tête la stratégie de la preuve pour bien comprendre le chapitre qui vient.

4.1 La décomposition d'Adams-Ballmann d'un champ d'espaces CAT(0) propres

4.1.1 La décomposition d'Adams-Ballmann d'un espace métrique CAT(0) complet

La décomposition d'Adams-Ballmann d'un espace CAT(0) est une notion essentielle pour la preuve du théorème du même nom. Il est nécessaire de l'étudier très attentivement pour pouvoir l'adapter au cas des champs boréliens d'espaces CAT(0).
Commençons par introduire la notion de point plat.

Définition 4.1.1. *Soit (X, d) un espace métrique uniquement géodésique et $f : X \to \mathbb{R}$. On dit que f est convexe si pour tout segment géodésique $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}$ paramétré proportionnellement à la longueur d'arc on a*

$$f(\gamma(t)) \leq (1-t)f(\gamma(0)) + tf(\gamma(1)).$$

On dit que f est affine si pour tout segment géodésique $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}$ paramétré proportionnellement à la longueur d'arc on a

$$f(\gamma(t)) = (1-t)f(\gamma(0)) + tf(\gamma(1)).$$

Définition 4.1.2 ([AB98], p. 185). *Soit X un espace CAT(0) et $\xi \in \partial X$. On dit que ξ est plat si la fonction de Busemann $b_\xi : X \to \mathbb{R}$ est affine (une fonction de Busemann est toujours convexe). On note $F \subseteq \partial X$ l'ensemble des points plats. Observons que cet ensemble est* $\mathrm{Iso}(X)$ *invariant, puisque si $\xi \in \partial X$ et que b_{ξ,x_0} est une fonction de Busemann, alors $b_{\gamma(\xi),\gamma(x_0)} \circ \gamma^{-1}$ est une fonction de Busemann de $\gamma(\xi)$.*

Avant de donner des exemples de points plats, on va rappeler des résultats qui décrivent le bord d'un produit.

Lemme 4.1.3. *Soit (X_1, d_1), (X_2, d_2) deux espaces CAT(0) complets et c_i un rayon géodésique dans X_i tel que $c_i(\infty) = \xi_i \in \partial X_i$ pour $i = 1, 2$.*

(i) Si $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$, alors $c(t) = (c_1(t\cos\theta), c_2(t\sin\theta))$ est un rayon géodésique dans $(X_1 \times X_2, d)$ où $d = \sqrt{d_1^2 + d_2^2}$ est la métrique produit.

(ii) $(\partial(X_1 \times X_2), \angle)$ *est isométrique au joint sphérique*[1] $\partial X_1 * \partial X_2$ *des deux espaces métriques* $(\partial X_1, \angle_1)$, $(\partial X_2, \angle_2)$. *Par conséquent, si* $\xi = \cos(\theta)\xi_1 + \sin(\theta)\xi_2$, $\xi' = \cos(\theta')\xi_1' + \sin(\theta')\xi_2' \in \partial(X_1 \times X_2)$, *on a*

$$\angle(\xi,\xi') = \arccos\Big(\cos(\theta)\cos(\theta')\cos(\angle_1(\xi_1,\xi_1')) + \sin(\theta)\sin(\theta')\cos(\angle_2(\xi_2,\xi_2'))\Big).$$

(iii) *Si l'on note* $c(\infty) = \cos(\theta)\xi_1 + \sin(\theta)\xi_2$ *et si* $b_i : X_i \to \mathbb{R}$ *désigne la fonction de Busemann associée à* c_i *pour* $i = 1, 2$, *alors la fonction de Busemann* $b : X_1 \times X_2 \to \mathbb{R}$ *associée à* c *vérifie*

$$b(x_1,x_2) = \cos(\theta) b_1(x_1) + \sin(\theta) b_2(x_2).$$

Preuve. (i) Puisque c_1, c_2 sont des rayons géodésiques, pour tout $t \in [0,+\infty[$ on a $d((c_1(t\cos\theta), c_2(t\sin\theta)), (c_1(0), c_2(0))) = t$.
(ii) Corollaire 9.11 de [BH99] (p. 284).
(iii) Ceci résulte d'un calcul à partir de la définition de b (voir [BH99], p. 274). □

Exemple 4.1.4. Si $X = \mathbb{R}^n$, alors $\partial\mathbb{R}^n = \mathbb{S}^{n-1}$. Pour $\xi \in \mathbb{S}^{n-1}$, on vérifie facilement que

$$b_{\xi,x}(y) =< v(\xi), x-y >$$

où $v(\xi)$ est le vecteur unitaire dans la direction de ξ et donc que $b_{\xi,x}$ est affine.
Si $X = \mathbb{R}^n \times Y$ avec Y CAT(0), alors le lemme précédent montre que $\xi \in \partial\mathbb{R}^n \subseteq \partial\mathbb{R}^n \times \partial Y$ est plat. Le Théorème de décomposition d'Adams-Ballmann montre que c'est dans un certain sens le seul exemple.

Théorème 4.1.5 ([AB98], p. 188)**.** *Soit* X *un espace CAT(0) complet et* $F \subseteq \partial X$ *l'ensemble de ses points plats. Il existe un espace de Hilbert réel* E, *un espace CAT(0) complet* Y *et une application isométrique* $i : X \to E \times Y$ *tels que* $i(X)$ *est fermé, convexe et*

(1) $i(F) = \partial E \cap \partial i(X) \subseteq \partial E * \partial Y$ *et l'ensemble des directions* $v(\xi) \in E$ *pour* $\xi \in i(F)$ *engendre* E *comme espace de Hilbert réel,*

(2) l'ensemble $Y' = \{y \in Y \mid i(X) \cap (E \times \{y\}) \neq \emptyset\}$ *est convexe et dense dans* Y,

(3) pour toute isométrie $\gamma : X \to X$ *il existe une unique isométrie* $\widetilde{\gamma} : Z \to Z$ *telle que l'on ait* $i \circ \gamma = \widetilde{\gamma} \circ i$.

$$\begin{array}{ccc} Z = E \times Y & \xrightarrow{\ \widetilde{\gamma}\ } & Z = E \times Y \\ {\scriptstyle i}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle i} \\ X & \xrightarrow{\ \ \gamma\ \ } & X \end{array}$$

De plus, $\widetilde{\gamma}$ *se décompose en un produit* $\widetilde{\gamma} = (\gamma_E, \gamma_Y)$ *où* $\gamma_E \in \mathrm{Iso}(E)$ *et* $\gamma_Y \in \mathrm{Iso}(Y)$.

On redonne la preuve de ce théorème central de [AB98], en la modifiant un peu par rapport à l'originale dans le but de l'adapter plus tard aux champs boréliens d'espaces CAT(0).
Preuve du Théorème. La preuve se décompose en trois pas.

Premier pas. Si $\xi \in F$, alors il existe un espace CAT(0) complet Y_ξ et un plongement isométrique $i_\xi : X \to Z_\xi := \mathbb{R} \times Y_\xi$ tels que

(i) $i_\xi(\xi) = +\infty \in \partial\mathbb{R} \subseteq \partial\mathbb{R} * \partial Y_\xi$,

(ii) L'ensemble $\mathrm{pr}_{Y_\xi}(i(X))$ est dense dans Y_ξ,

1. Voir la Définition B.4.2.

(iii) Soit $\gamma : X \to X$ une isométrie. Comme $\gamma(\xi) \in F$, les points (i) et (ii) permettent de définir $i_\gamma(\xi) : X \to \mathbb{R} \times Y_{\gamma(\xi)}$. Alors il existe une unique isométrie $\gamma_\xi : Z_\xi \to Z_{\gamma(\xi)}$ telle que $i_{\gamma(\xi)} \circ \gamma = \gamma_\xi \circ i_\xi$, *i.e.* telle que le diagramme

$$\begin{tikzcd} Z_\xi \arrow[r, "\gamma_\xi"] & Z_{\gamma(\xi)} \\ X \arrow[u, "i_\xi"] \arrow[r, "\gamma"] & X \arrow[u, "i_{\gamma(\xi)}"'] \end{tikzcd}$$

commute. De plus, γ_ξ se décompose en un produit $\gamma_\xi = (\gamma_{\mathbb{R}}, \gamma_{Y_\xi})$ où $\gamma_{\mathbb{R}} \in \mathrm{Iso}(\mathbb{R})$ et $\gamma_{Y_\xi} \in \mathrm{Iso}(Y_\xi, Y_{\gamma(\xi)})$.

Preuve du premier pas. Soit $x_0 \in X$ et $b_{\xi,x_0} : X \to \mathbb{R}$ la fonction de Busemann de $\xi \in F$.
(1) On commence par construire l'espace Y_ξ et l'application i_ξ. Soit $x, y \in X$ et $\rho_{\xi,x}, \rho_{\xi,y}$ deux rayons géodésiques passant respectivement par x et y, tels que $\rho_{\xi,x}(\infty) = \rho_{\xi,y}(\infty) = \xi$. Supposons que les rayons soient synchronisés, c'est-à-dire que l'on change les domaines de définition de sorte que

$$b_{\xi,x_0}(\rho_{\xi,x}(t)) = -t \text{ pour tout } t \in \mathrm{dom}(\rho_{\xi,x}) \qquad b_{\xi,x_0}(\rho_{\xi,y}(t)) = -t \text{ pour tout } t \in \mathrm{dom}(\rho_{\xi,y}).$$

Alors, pour tout $s, t \in \mathrm{dom}(\rho_{\xi,x}) \cap \mathrm{dom}(\rho_{\xi,y})$ avec $s < t$, en notant $x_1 = \rho_{\xi,x}(s)$, $x_2 = \rho_{\xi,x}(t)$, $y_1 = \rho_{\xi,y}(s)$, $y_2 = c_{\xi,y}(t)$, le quadrilatère (x_1, x_2, y_2, y_1) est isométrique à un rectangle euclidien (voir [AB98], pp. 185-186). En particulier, la fonction $d(\rho_{\xi,x}(t), \rho_{\xi,y}(t))$ est constante sur $\mathrm{dom}(\rho_{\xi,x}) \cap \mathrm{dom}(\rho_{\xi,y})$.
Ainsi, pour tout $x, y \in X$ tels que $b_{\xi,x_0}(x) = -s > b_{\xi,x_0}(y) = -t$, le triangle $(x, y, c_{\xi,x}(t-s))$ est un triangle rectangle plat (voir [AB98], p. 186).
Comme les rayons pointant vers ξ sont parallèles, on peut définir sur X la pseudo-métrique suivante

$$d'(x,y) = \min\left\{d\left(c_{\xi,x}(\mathbb{R}_{\geq 0}), y\right), d\left(c_{\xi,y}(\mathbb{R}_{\geq 0}), x\right)\right\}.$$

En effet, si $x_1, x_2, x_3 \in X$, alors il existe $x_i' \in c_{\xi,x_i}$ tels que $b_{\xi,x_0}(x_1') = b_{\xi,x_0}(x_2') = b_{\xi,x_0}(x_3')$ qui satisfont que $d'(x_i, x_j) = d(x_i', x_j')$ pour tout $1 \leq i, j \leq n$ et donc d' est une pseudo-métrique telle que son séparé $\widetilde{Y}_\xi$ est CAT(0) (et $x \sim y \iff d'(x,y) = 0 \iff y \in c_{\xi,x}(\mathbb{R}_{\geq 0})$ ou $x \in c_{\xi,y}(\mathbb{R}_{\geq 0})$).
Par conséquent, $\widetilde{Y}_\xi$ est tel que son complété Y_ξ est un espace CAT(0) complet et que l'application

$$\begin{array}{rccl} i_\xi : & X & \to & \mathbb{R} \times Y_\xi \\ & x & \mapsto & (-b_{\xi,x_0}(x), [x]) \end{array}$$

est un plongement isométrique.

Remarque 4.1.6. Il est important d'observer que l'espace $\widetilde{Y}_\xi$ n'est en général pas complet. Par exemple, si $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x > 0, y \geq 1/x\}$ on a $\partial X = F \simeq [0, \frac{\pi}{2}]$. Considérons la suite $\{(n, 1/n)\}_{n \geq 1} \subseteq X$ et le point $\xi = 0$. Alors $\{[(n, 1/n)]\}_{n \geq 1} \subseteq \widetilde{Y}_0$ est une suite de Cauchy pour d' qui ne possède pas de limite.
De plus, le fait que X est propre n'implique pas en général que Y_ξ soit propre.

(2) Montrons maintenant les trois propriétés. (i) On sait que $i_\xi : X \to \mathbb{R} \times Y_\xi$ se prolonge naturellement en une application continue sur $\overline{X}$ (3.3.15). Considérons $x_n := c_{\xi,x_0}(n) \to \xi$. Comme $i_\xi(x_n) = (n, [c_{\xi,x_0}])$, on a que $i_\xi(\xi) = +\infty \in \partial \mathbb{R}_{\geq 0} \subseteq \partial \mathbb{R} * \partial Y_\xi$.
(ii) L'espace $\widetilde{Y}_\xi$ est dense dans Y_ξ puisque cet espace est son complété. Pour conclure, il suffit de remarquer que

$$\widetilde{Y}_\xi = \{y \in Y_\xi \mid i_\xi(X) \cap (\mathbb{R} \times \{y\}) \neq \emptyset\} = \mathrm{pr}_{Y_\xi}(i_\xi(X))$$

(iii) Observons qu'une isométrie $\gamma_\xi : Z_\xi \to Z_{\gamma(\xi)}$ qui étend γ satisfait $\gamma_\xi(i_\xi(\xi)) = i_{\gamma(\xi)}(\gamma(\xi))$ puisque γ envoie les rayons sur les rayons. Ainsi, γ_ξ doit se décomposer en $(\gamma_{\mathbb{R}}, \gamma_{Y_\xi})$. Pour $\gamma_{\mathbb{R}}$, on observe que

$$\mathrm{pr}_{\mathbb{R}}(\gamma(x)) - \mathrm{pr}_{\mathbb{R}}(x) = -b_{\gamma(\xi),x_0}(\gamma(x)) - (-b_{\xi,x_0}(x)) = b_{\xi,x_0}(x) - b_{\xi,\gamma^{-1}(x_0)}(x) = b_{\xi,x_0}(\gamma^{-1}(x_0))$$

pour tout $x \in X$. Ainsi, si on considère la translation

$$\gamma_{\mathbb{R}} : r \mapsto r + b_{\xi,x_0}(\gamma^{-1}(x_0))$$

et l'isométrie

$$\gamma_{Y_\xi} : [x]_{Y_\xi} \mapsto [\gamma(x)]_{Y_{\gamma(\xi)}}$$

il est clair que $\gamma_\xi(i_\xi(x)) = (\gamma_{\mathbb{R}}(\pi_{\mathbb{R}}(i_\xi(x))), \gamma_{Y_\xi}(\pi_{Y_\xi}(i_\xi(x))))$ pour tout $x \in X$ et que γ_ξ est l'unique isométrie qui satisfait cette condition.

Exemples 4.1.7. (1) Soit $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x > 0, y \geq 1/x\}$ de sorte que $F = \partial X \simeq [0, \frac{\pi}{2}]$. Si $\xi \in]0, \frac{\pi}{2}[$ on a $Y_\xi = \mathbb{R}$ et donc $i_\xi : X \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Si $\xi = 0$ ou $\xi = \frac{\pi}{2}$, on a $Y_\xi = [0, +\infty[$ et $i_\xi : X \to \mathbb{R} \times [0, \infty[$.
(2) Soit $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x > 0, y \leq \ln(x)\}$ de sorte que $F = \partial X \simeq [-\frac{\pi}{2}, 0]$. Si $\xi \in]-\frac{\pi}{2}, 0]$ on a $Y_\xi = \mathbb{R}$ et si $\xi = -\frac{\pi}{2}$ on a $Y_\xi = [0, +\infty]$.

Deuxième pas. Soit $D = \{\xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots\} \subseteq F$ une partie dénombrable de F et $x_0 \in X$ fixé. On note $\Phi_n = \{\xi_1, \ldots \xi_n\}$. Alors il existe $m : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une fonction 1-Lipschitz telle que $m(1) = 1$ et telle que pour tout $n \geq 1$ il existe un espace $CAT(0)$ complet Y_n et un plongement isométrique

$$i_n \to Z_n := \mathbb{R}^{m(n)} \times Y_n$$

qui satisfont les propriétés suivantes.

(i) $i_n(\Phi_n) \subseteq \partial\mathbb{R}^{m(n)} \subseteq \partial\mathbb{R}^{m(n)} * \partial Y_n \simeq \partial(Z_n)$ et les directions[2] $v_n(\xi_1), \ldots, v_n(\xi_n) \in \mathbb{R}^{m(n)}$ engendrent l'espace vectoriel $\mathbb{R}^{m(n)}$.

(ii) L'ensemble $\mathrm{pr}_{Y_n}(i_n(X))$ est dense dans Y_n.

(iii) Il existe une (unique) application isométrique $j_{n+1,n} : Z_n \to Z_{n+1}$ telle que $j_{n+1,n} \circ i_n = i_{n+1}$. De plus, si $m(n+1) = m(n)$, alors $Y_{n+1} = Y_n$ et $j_{n+1,n} = \mathrm{id}$; si $m(n+1) = m(n)$, alors

$$j_{n+1,n} : \mathbb{R}^{m(n)} \times Y_n \to \mathbb{R}^{m(n)} \times \mathbb{R} \times Y_{n+1}$$

se décompose en $(\mathrm{id}, j'_{n,n+1}) \in \mathrm{Iso}(\mathbb{R}^{m(n)}) \times \mathrm{Iso}(Y_n, \mathbb{R} \times Y_{n+1})$ et

$$\begin{aligned} \mathrm{pr}_{\mathbb{R}^{m(n+1)}}(i_{n+1}(x)) \quad = \quad & \Big(\mathrm{pr}_{\mathbb{R}^{m(n)}}(i_n(x)), -\frac{1}{\sqrt{1 - \| \mathrm{pr}_{\mathbb{R}^{m(n)}}(i_n(c_{\xi_{n+1},x_0}(1)))\|^2_{\mathbb{R}^{m(n)}}}} \cdot \\ & \big(b_{\xi_{n+1},x_0}(x) + < \mathrm{pr}_{\mathbb{R}^{m(n)}}(i_n(c_{\xi_{n+1},x_0}(1))), \mathrm{pr}_{\mathbb{R}^{m(n)}}(i_n(x)) >_{\mathbb{R}^{m(n)}} \big)\Big). \end{aligned}$$

(iv) Si $\gamma \in \mathrm{Iso}(X)$, alors $\gamma(D) \subseteq F$ et les points (i) et (ii) livrent, pour tout $n \geq 1$, une décomposition

$$i'_n : X \to Z'_n = \mathbb{R}^{m'(n)} \times Y'_n$$

2. $v_n(\xi_i)$ désigne le vecteur unité de $\mathbb{R}^{m(n)}$ pointant dans la direction du point à l'infini $i_n(\xi_i) \in \partial\mathbb{R}^{m(n)}$.

relativement au sous-ensemble $\gamma(D) = \{\gamma(\xi_1), \dots, \gamma(\xi_n), \dots\}$ et au point x_0. Alors, pour tout $n \geq 1$, $m'(n) = m(n)$ et il existe une unique isométrie $\gamma_n : Z_n \to Z'_n$ telle que $i_n \circ \gamma = \gamma_n \circ i'_n$. Cette isométrie se décompose en $\gamma_n = (\gamma_{\mathbb{R}^{m(n)}}, \gamma_{Y_n}) \in \mathrm{Iso}(\mathbb{R}^{m(n)}) \times \mathrm{Iso}(Y_n, Y'_n)$. De plus, si on note $j'_{n+1,n} : Z'_n \to Z'_{n+1}$ l'application du point (iii), alors on a $j'_{n+1,n} \circ \gamma_n = \gamma_{n+1} \circ j_{n+1,n}$. En particulier, le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd}
& Z_{n+1} \arrow[rr, "\gamma_{n+1}"] & & Z'_{n+1} \\
Z_n \arrow[ur, "j_{n+1,n}"] \arrow[rr, "\gamma_n"] & & Z'_n \arrow[ur, "j'_{n+1,n}"] & \\
X \arrow[u, "i_n"] \arrow[uur, "i_{n+1}"'] \arrow[rr, "\gamma"] & & X \arrow[u, "i'_n"] \arrow[uur, "i'_{n+1}"'] &
\end{tikzcd}$$

Preuve du deuxième pas. (1) On commence par montrer l'existence de la décomposition $i_n : X \to Z_n$. On effectue la preuve par récurrence sur n. Le cas $n = 1$ correspond au *Premier pas*.

Pour le pas de récurrence, on observe que si $i_n(\xi_{n+1}) \in \partial\mathbb{R}^{m(n)}$, alors on peut poser $m(n+1) = m(n)$, $Y_{n+1} = Y_n$, $i_{n+1} = i_n$ et $j_{n+1,n} = \mathrm{id}$ et que les quatre propriétés sont satisfaites. On peut donc supposer que $i_n(\xi_{n+1}) \notin \partial\mathbb{R}^{m(n)}$. Comme $i_n(\xi_{n+1}) \notin \partial\mathbb{R}^{m(n)} \subseteq \partial\mathbb{R}^{m(n)} * \partial Y_n \simeq \partial(\mathbb{R}^{m(n)} \times Y_n)$, il existe $\eta \in \partial\mathbb{R}^{m(n)}$ et $\zeta \in \partial Y_n$ tels que $i_n(\xi_{n+1})$ appartient à l'unique géodésique [3] parcourue à vitesse unité de longueur $\frac{\pi}{2}$ reliant η à ζ dans $\partial(\mathbb{R}^{m(n)} \times Y_n)$ (ζ est uniquement déterminé car $i_n(\xi_{n+1}) \notin \partial\mathbb{R}^{m(n)}$) de sorte que $i_n(\xi_{n+1}) = \cos(\alpha)\eta + \sin(\alpha)\zeta$ où $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}]$ est la distance entre $i_n(\xi_{n+1})$ et η (voir le Lemme 4.1.3). Alors, par le même lemme, on a

$$b_{i_n(\xi_{n+1})}(p, y) = \cos(\alpha) b_\eta(p) + \sin(\alpha) b_\zeta(y) \quad \text{pour tout } (p, y) \in \mathbb{R}^{m(n)} \times Y_n.$$

La fonction de Busemann b_η est affine sur $\mathbb{R}^{m(n)}$. De plus, comme ξ_{n+1} est plat par hypothèse, la fonction $b_{i_n(\xi_{n+1})}$ est affine sur $i_n(X)$. Par conséquent, b_ζ est affine sur tout segment géodésique dont les extrémités sont dans

$$\{y \in Y_n \mid i_n(X) \cap (\mathbb{R}^{m(n)} \times \{y\}) \neq \emptyset\} = \mathrm{pr}_{Y_n}(i_n(X))$$

(c'est bien un convexe). Comme $\mathrm{pr}_{Y_n}(i_n(X))$ est dense dans Y_n par hypothèse de récurrence, b_ζ est donc affine sur Y_n, *i.e.* ζ est un point plat de ∂Y_n.

On peut donc appliquer le *Premier pas* à l'espace Y_n et au point plat ζ, d'où l'existence d'un espace CAT(0) complet Y_{n+1} et d'un plongement isométrique $i_\zeta : Y_n \to \mathbb{R} \times Y_{n+1}$ tel que les trois assertions du *Premier pas* soient vérifiées. On pose alors $E_{n+1} := \mathbb{R}^{m(n)} \times \mathbb{R}$, $j_{n+1,n} = (id, i_\zeta)$ et $i_{n+1} = j_{n+1,n} \circ i_n$.

$$X \xrightarrow{i_n} Z_n = \mathbb{R}^{m(n)} \times Y_n \xrightarrow{j_{n+1,n}} Z_{n+1} = \mathbb{R}^{m(n)} \times \mathbb{R} \times Y_{n+1}$$

Remarque 4.1.8. Le produit scalaire sur $\mathbb{R}^{m(n)}$ est donné par

$$< v_n(\xi_i), v_n(\xi_j) > = \cos(\angle_{\partial X}(\xi_i, \xi_j))$$

pour tout $1 \leq i, j \leq n$. En effet, l'application $i_n : \partial X \to \partial(\mathbb{R}^{m(n)} \times Y_n)$ induite par $i_n : X \to \mathbb{R}^{m(n)} \times Y_n$ est une isométrie pour $\angle$. Par construction, on a $i_n(\xi_i) \in \partial\mathbb{R}^{m(n)} \subseteq \partial\mathbb{R}^{m(n)} * \partial Y_n$ pour tout $1 \leq i \leq n$. Ainsi, pour $1 \leq i, j \leq n$, on a

$$\angle_{\partial X}(\xi_i, \xi_j) = \angle_{\partial(\mathbb{R}^{m(n)} \times Y_n)}(i_n(\xi_i), i_n(\xi_j)) = \angle_{\partial\mathbb{R}^{m(n)}}(i_n(\xi_i), i_n(\xi_j)) = \arccos\big(< v_n(\xi_i), v_n(\xi_j) > \big).$$

3. Pour la métrique angulaire.

Remarque 4.1.9. On choisit toujours de décomposer l'espace Y_n par rapport au point $\mathrm{pr}_{Y_n}(i_n(x_0))$ de sorte que $\mathrm{pr}_{\mathbb{R}^{m(n)}}(i_n(x_0))$ est l'origine de l'espace euclidien $\mathbb{R}^{m(n)}$ pour tout $n \geq 1$.

(2) On montre les points (i) à (iv).

(i) Par construction, on a bien que $i_{n+1}(\Phi_n) = j_{n+1,n}(i_n(\Phi_n)) \subseteq \partial(\mathbb{R}^{m(n)} \times \{0\}) \subseteq \partial\mathbb{R}^{m(n+1)}$. D'autre part, $i_n(\xi_{n+1}) \in]\eta,\zeta]$ et donc $\xi_{n+1} \in \partial\mathbb{R}^{m(n+1)} \setminus \partial\mathbb{R}^{m(n)}$. Par récurrence, $v_{n+1}(\xi_1),\dots,v_{n+1}(\xi_n)$ engendrent $\mathbb{R}^{m(n)} \times \{0\}$ et par hypothèse $v_{n+1}(\xi_{n+1}) \notin \mathbb{R}^{m(n)} \times \{0\}$. Ainsi, $v_{n+1}(\xi_1),\dots,v_{n+1}(\xi_{n+1})$ engendrent bien $\mathbb{R}^{m(n+1)}$.

(ii) On observe que

$$\begin{aligned}\mathrm{pr}_{Y_{n+1}(i_{n+1}(X))} &= \mathrm{pr}_{Y_{n+1}}\big(j_{n+1,n}(i_n(X))\big) = \mathrm{pr}_{Y_{n+1}}\big(\mathrm{pr}_{\mathbb{R}^{m(n)}}(i_n(X)), i_\zeta(\mathrm{pr}_{Y_n}(i_n(X)))\big) \\ &= \mathrm{pr}_{Y_\zeta}\big(i_\zeta(\mathrm{pr}_{Y_n}(i_n(X)))\big).\end{aligned}$$

Ainsi, $\mathrm{pr}_{Y_{n+1}(i_{n+1}(X))}$ est dense dans Y_{n+1} par le *Premier pas* et par l'hypothèse de récurrence.

(iii) On a défini i_{n+1} comme $j_{n+1,n} \circ i_n$ et donc l'existence est évidente. On a déjà réglé le cas $m(n+1) = m(n)$ et on peut donc supposer que $m(n+1) = m(n)+1$. Si $x \in X$, on sait que

$$\begin{aligned}i_{n+1}(x) &= j_{n+1,n} \circ i_n(x) = j_{n+1,n}\Big(\mathrm{pr}_{E_n}(i_n(x)), \mathrm{pr}_{Y_n}(i_n(x))\Big) \\ &= \Big(\underbrace{\big(\mathrm{pr}_{\mathbb{R}^{m(n)}}(i_n(x)), -b_\zeta(\mathrm{pr}_{Y_n}(i_n(x)))\big)}_{=\mathrm{pr}_{E_{n+1}(i_{n+1}(x))}}, \mathrm{pr}_{Y_{n+1}}(i_{n+1}(x)),\Big) \in Z_{n+1}\end{aligned}$$

Il reste à expliciter la valeur de $b_\zeta(\mathrm{pr}_{Y_n}(i_n(x)))$ en fonction des ξ_k, $k = 1,\dots,n+1$.

On a $j_{n+1,n}(\zeta),\ i_{n+1}(\xi_{n+1}), j_{n+1,n}(\eta) \in \partial\mathbb{R}^{m(n+1)}$ et donc si on considère dans $\mathbb{R}^{m(n+1)}$ les vecteurs directions

$$v_{n+1}(\eta) \in \mathbb{R}^{m(n)} \times \{0\},\ v_{n+1}(\zeta) = (0,\dots,0,1) \text{ et } v_{n+1}(\xi_{n+1}),$$

on peut faire de la géométrie euclidienne. On pose

$$\alpha = \angle_{\partial Z_n}(i_n(\xi_{n+1}), \eta).$$

Si E est un sous-espace de $\mathbb{R}^{m(n+1)}$ alors on note π_E la projection orthogonale sur E. D'une part on observe que

$$\pi_{\{(0,\dots,0)\}\times\mathbb{R}}\big(v_{n+1}(\xi_{n+1})\big) = \sin(\alpha)\cdot v_{n+1}(\zeta) = (0,\dots,0,\sin(\alpha))$$

et

$$\pi_{\mathbb{R}^{m(n)}\times\{0\}}(v_{n+1}(\xi_{n+1})) = \cos(\alpha)\cdot v_{n+1}(\eta) = \big(\cos(\alpha)v_n(\eta), 0\big).$$

D'autre part, on observe qu'on a

$$\pi_{\mathbb{R}^{m(n)}\times\{0\}}\big(v_{n+1}(\xi_{n+1})\big) = \big(\mathrm{pr}_{\mathbb{R}^{m(n)}}(i_n(c_{\xi_{n+1}}(1))), 0\big).$$

On peut ainsi calculer $\cos(\alpha) = \|\,\mathrm{pr}_{\mathbb{R}^{m(n)}}\big(i_n(c_{\xi_{n+1}}(1))\big)\|_{\mathbb{R}^{m(n)}}$.

Maintenant, si $\alpha = \pi/2$, alors $\zeta = i_n(\xi_{n+1})$ et la formule de (iii) est trivialement vraie puisque

$$\sin(\alpha) = 1,\ \mathrm{pr}_{\mathbb{R}^{m(n)}}(i_n(c_{\xi_{n+1}}(1))) = 0,\ b_\zeta(\mathrm{pr}_{Y_n}(i_n(x))) = b_{i_n(\xi_{n+1})}(i_n(x)) = b_{\xi_{n+1}}(x).$$

Dans le cas où $\alpha \in]0,\pi/2[$, on utilise la formule sur les fonctions de Busemann du Lemme 4.1.3

avec $i_n(\xi_{n+1}) \in \partial(\mathbb{R}^{m(n)} \times Y_n)$, $\eta \in \mathbb{R}^{m(n)}$, $\zeta \in \partial Y_n$ et on a

$$\begin{aligned}
& b_\zeta(\mathrm{pr}_{Y_n}(i_n(x))) \\
= \; & \frac{1}{\sin(\alpha)}\left(b_{i_n(\xi_{n+1})}(i_n(x)) - \cos(\alpha) b_\eta(\mathrm{pr}_{\mathbb{R}^{m(n)}}(i_n(x)))\right) \\
= \; & \frac{1}{\sqrt{1-\cos^2(\alpha)}}\left(b_{\xi_{n+1}}(x) + \cos(\alpha) < v_n(\eta), \mathrm{pr}_{\mathbb{R}^{m(n)}}(i_n(x)) >_{\mathbb{R}^{m(n)}}\right) \\
= \; & \frac{1}{\sqrt{1 - \| \mathrm{pr}_{\mathbb{R}^{m(n)}}(i_n(c_{\xi_{n+1}}(1)))\|^2_{\mathbb{R}^{m(n)}}}} \cdot \\
& \left(b_{\xi_{n+1}}(x) + \cos(\alpha) < \frac{1}{\cos(\alpha)} \mathrm{pr}_{\mathbb{R}^{m(n)}}(i_n(c_{\xi_{n+1}}(1))), \mathrm{pr}_{\mathbb{R}^{m(n)}}(i_n(x)) >_{\mathbb{R}^{m(n)}}\right) \\
= \; & \frac{1}{\sqrt{1 - \| \mathrm{pr}_{\mathbb{R}^{m(n)}}(i_n(c_{\xi_{n+1}}(1)))\|^2_{\mathbb{R}^{m(n)}}}}\left(b_{\xi_{n+1}}(x) + < \mathrm{pr}_{\mathbb{R}^{m(n)}}(i_n(c_{\xi_{n+1}}(1))), \mathrm{pr}_{\mathbb{R}^{m(n)}}(i_n(x)) >_{\mathbb{R}^{m(n)}}\right).
\end{aligned}$$

(iv) Soit $\gamma : X \to X$ une isométrie. Par hypothèse de récurrence, $m(n) = m'(n)$ et il existe

$$\gamma_n = (\gamma_{\mathbb{R}^{m(n)}}, \gamma_{Y_n}) : Z_n = \mathbb{R}^{m(n)} \times Y_n \to Z'_n = \mathbb{R}^{m(n)} \times Y'_n.$$

Alors $i_{n+1}(\xi_{n+1}) \in \partial \mathbb{R}^{m(n)}$ si et seulement si $i'_n\big(\gamma(\xi_{n+1})\big) = \widetilde{\gamma}(i_n(\xi_{n+1})) \in \partial\mathbb{R}^{m(n)}$. Ainsi, $m(n+1) = m'(n+1)$. L'existence d'un γ_n qui fait commuter les diagrammes est garantie par la construction par récurrence. En effet, si on considère la situation suivante

$$\begin{tikzcd}
Z_n = \mathbb{R}^{m(n)} \times Y_n \arrow[r, "{j_{n+1,n}=(id,i_\zeta)}"] \arrow[d, "\gamma_n"] & Z_{n+1} = \mathbb{R}^{m(n)} \times \mathbb{R} \times Y_{n+1} \arrow[d, dotted] \\
Z'_n = \mathbb{R}^{m(n)} \times Y'_n \arrow[r, "{j'n+1,n}"] & Z'_{n+1} = \mathbb{R}^{m(n)} \times \mathbb{R} \times Y'_{n+1}
\end{tikzcd}$$

il suffit de poser $\gamma_{n+1} := (\gamma_{\mathbb{R}^{m(n)}}, \gamma_\zeta)$ où $\gamma_\zeta : Y_{n+1} \to Y'_{n+1}$ est l'extension de l'isométrie $\gamma_{Y_n} : Y_n \to Y'_n$. Montrons maintenant l'unicité. Soit $\gamma_n : Z_n \to Z'_n$ une isométrie qui étend X. Alors un rayon géodésique passant par $i_n(x)$ de direction $v_n(\xi_i)$ est envoyé par γ_n sur un rayon géodésique passant par $i'_n(\gamma(x))$ de direction $v'_n(\gamma(\xi_i))$. Or, l'ensemble des directions $v_n(\xi_i)$ pour $1 \le i \le n$ engendre $\mathbb{R}^{m(n)}$, de même pour $\{v'_n(\xi_i)\}_{i=1}^{n(m)}$. Ainsi, γ_n préserve $\partial\mathbb{R}^{m(n)}$ et donc se décompose en

$$(\gamma_{\mathbb{R}^{m(n)}}, \gamma_{Y_n}) : \mathbb{R}^{m(n)} \times Y_n \to \mathbb{R}^{m(n)} \times Y'_n.$$

$\gamma_{\mathbb{R}^{m(n)}}$ s'écrit comme la composition d'une isométrie linéaire $\sigma_n : \mathbb{R}^{m(n)} \to \mathbb{R}^{m(n)}$ qui envoie $v_n(\xi_i)$ sur $v'_n(\xi'_i)$ pour $1 \le i \le n$ et d'une translation $\tau_n : \mathbb{R}^{m(n)} \to \mathbb{R}^{m(n)} : \; v \mapsto v + t_n$. On a, pour tout $x \in X$,

$$\sigma_n(\mathrm{pr}_{\mathbb{R}^{m(n)}}(i_n(x))) + t_n = \gamma_{\mathbb{R}^{m(n)}}(\mathrm{pr}_{\mathbb{R}^{m(n)}}(i_n(x))) = \mathrm{pr}_{\mathbb{R}^{m(n)}}(i'_n(\gamma(x))).$$

Posons $x = x_0$ et on a (voir la Remarque 4.1.9)

$$t_n = \sigma_n(0) + t_n = \mathrm{pr}_{\mathbb{R}^{m(n)}}(i'_n(\gamma(x_0))).$$

Ainsi,

$$\gamma_{\mathbb{R}^{m(n)}} = \sigma_n + \mathrm{pr}_{\mathbb{R}^{m(n)}}(i'_n(\gamma(x_0))), \tag{4.1}$$

et $\gamma_{\mathbb{R}^{m(n)}}$ est uniquement déterminé. D'autre part, on a pour tout $x \in X$

$$\mathrm{pr}_{Y'_n}(i'_n(\gamma(x))) = \mathrm{pr}_{Y'_n}(\gamma_n(i_n(x))) = \gamma_{Y_n}(\mathrm{pr}_{Y_n}(i_n(x)))$$

et donc, puisque $\mathrm{pr}_{Y_n}(i_n(X))$ est dense dans Y_n, on bien que γ_{Y_n} est uniquement déterminée.

Troisième pas, preuve du théorème.
(1) On va construire la décomposition $i : X \to Z = E \times Y$. Pour se faire, on se fixe $D = \{\xi_n\}_{n\geq 1} \subseteq F$ une partie dense des point plats (pour la topologie conique). On considère la famille d'espaces métriques $\{Z_n\}_{n\geq 1}$ et la famille d'applications $\{j_{n+1,n} : Z_n \to Z_{n+1}\}_{n\geq 1}$ données par le *Deuxième pas*. On introduit, pour $m \geq n \geq 1$, $j_{m,n} := j_{m,m-1} \circ \ldots \circ j_{n+2,n+1} \circ j_{n+1,n}$. Alors $\big\{\{Z_n\}_{n\geq 1}, \{j_{m,n}\}_{m\geq n\geq 1}\big\}$ défini un système direct d'espaces métriques et on peut donc définir la limite directe (voir le Lemme 1.9.10)

$$\widetilde{Z} = \varinjlim_{n\geq 1} Z_n.$$

Comme chaque Z_n est CAT(0) (puisque c'est un produit d'espace CAT(0) par le *Deuxième pas*), $\widetilde{Z}$ est CAT(0) et son complété Z est CAT(0) complet.

Toujours par le Lemme 1.9.10 il existe, pour tout $n \geq 1$, une isométrie

$$j_n : Z_n \to \widetilde{Z} \quad \text{telle que } j_{n+1} \circ j_{n+1,n} = j_n.$$

L'existence, pour $n \geq 1$ fixé, d'un plongement isométrique $i_n : X \to Z_n$ entraîne l'existence d'un plongement isométrique $i : X \to \widetilde{Z}$ tel que $i = i_n \circ j_n$ pour tout $n \geq 1$. La situation est résumée par le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
 & Z & \\
 & \widetilde{Z} \arrow[u, hook] & \\
Z_n \arrow[ur, hook, "j_n"] \arrow[rr, hook, "j_{n+1,n}"] & & Z_{n+1} \arrow[ul, hook, "j_{n+1}"'] \\
X \arrow[u, hook, "i_n"] \arrow[rr, hook, "id"] & & X \arrow[u, hook, "i_{n+1}"']
\end{tikzcd}$$

On peut donc supposer que

$$X \subseteq Z_n = \mathbb{R}^{m(n)} \times Y_n \subseteq Z_{n+1} = \mathbb{R}^{m(n+1)} \times Y_{n+1} \subseteq \widetilde{Z} = \bigcup_{n\geq 1} Z_n \subseteq Z.$$

Observons que le point (iii) du *Deuxième pas* permet de supposer de plus qu'on a, pour tout $n \geq 1$ tel que $m(n+1) = m(n) + 1$, que

$$Z_n = \mathbb{R}^{m(n)} \times Y_n \subseteq \mathbb{R}^{m(n)} \times \mathbb{R} \times Y_{n+1} \text{ où } Y_n \subseteq \mathbb{R} \times Y_{n+1}.$$

Montrons que $Z = E \times Y$ où E est un espace euclidien et Y est CAT(0) complet. Pour tout $n \geq 1$, on définit

$$e_{n+1,n} : \mathbb{R}^{m(n)} \to \mathbb{R}^{m(n+1)}, v \to e_{n+1,n}(v) := \begin{cases} (v, 0), & \text{si } m(n+1) = m(n) + 1 \\ v & \text{si } m(n+1) = m(n). \end{cases}$$

La famille $\{\{\mathbb{R}^{m(n)}\}_{n\geq 1}, \{e_{n+1,n}\}_{n\geq 1}\}$ vérifie alors les hypothèses du Lemme 1.9.10, d'où l'existence de l'espace [4]

$$\widetilde{E} := \varinjlim_{n\geq 1} \mathbb{R}^{m(n)}$$

4. Il est aisé de vérifier que la limite directe $\widetilde{E}$ possède une structure canonique d'espace pré-hilbertien.

et, pour tout $n \geq 1$, d'une application

$$e_n : \mathbb{R}^{m(n)} \to \widetilde{E} \quad \text{telle que } e_{n+1} \circ e_{n+1,n} = e_n.$$

Notons E le complété de $\widetilde{E}$.
Soit maintenant $z \in \widetilde{Z}$ fixé. Alors il existe $n_z \geq 1$ tel que $z \in Z_n$ pour tout $n \geq n_z$. On va construire un plongement isométrique

$$k_z : E \to Z \quad \text{tel que } k(0) = z.$$

Pour $n \geq n_z$, on considère le plongement

$$\begin{array}{rccl} k_n : & \mathbb{R}^{m(n)} & \to & Z_n = \mathbb{R}^{m(n)} \times Y_n \\ & v & \mapsto & (v + \mathrm{pr}_{\mathbb{R}^{m(n)}}(z), \mathrm{pr}_{Y_n}(z)). \end{array}$$

Alors, $k_{n+1} \circ e_{n+1,n} = k_n$ puisque

$$k_{n+1}(e_{n+1,n}(v)) = k_{n+1}(v,0) = \big((v,0) + \mathrm{pr}_{\mathbb{R}^{m(n+1)}}(z), \mathrm{pr}_{Y_{n+1}}(z)\big) = (v + \mathrm{pr}_{\mathbb{R}^{m(n)}}(z), \mathrm{pr}_{Y_n}(z)) = k_n(v).$$

Par la propriété universelle de la limite directe, il existe un unique plongement isométrique $k_z : E \to Z$ tel que $k_n = k_z \circ e_n$.
Soit maintenant $z, z' \in \widetilde{Z}$ et $n_0 \geq 1$ tel que $z, z' \in Z_{n_0}$. Alors pour tout $n \geq n_0$ on a que $k_n(\mathbb{R}^{m(n)})$ est parallèle à $k'_n(\mathbb{R}^{m(n)})$ par définition de ces applications. Comme $k'_n(\mathbb{R}^{m(n)}) \subseteq k_{z'}(E)$, on a que l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{m(n)} & \to & \mathbb{R}_{\geq 0} \\ v & \mapsto & d(k_n(v), k'_n(E)) \end{array}$$

est constante, puisque[5] convexe et bornée (car $d(k_n(v), k'_n(E)) \leq d(k_n(v), k'_n(\mathbb{R}^{m(n)}))$ qui est constante). Comme $E = \overline{\bigcup_{n \geq n_0} \mathbb{R}^{m(n)}}$, on a que $k_z(E)$ est parallèle à $k_{z'}(E)$ pour tout $z, z' \in \widetilde{Z}$.
Ceci permet de conclure que $Z = E \times Y$ où Y est un espace CAT(0) complet isométrique au complété du quotient de Z' par la pseudo-métrique $d'(z, z') = d_{\mathcal{H}}(k_z(E), k_{z'}(E))$ (voir le Corollaire B.1.11).

Remarque 4.1.10. Si $z \in Z$, alors

$$\mathrm{pr}_E(z) = \lim_{n \to \infty} e_n(\mathrm{pr}_{\mathbb{R}^{m(n)}}(z)).$$

En effet, pour tout $l \geq n$ les applications du système direct sont données par

$$\begin{array}{rccl} e_{l,n} : & \mathbb{R}^{m(n)} & \to & \mathbb{R}^{m(l)} \\ & (\lambda_1, \ldots, \lambda_{m(n)}) & \mapsto & (\lambda_1, \ldots, \lambda_{m(n)}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{\in \mathbb{R}^{m(l)-m(n)}}). \end{array}$$

Maintenant si $\lim_{n\to\infty} m(n) < \infty$, alors il existe n_0 tel que $\mathbb{R}^{m(n_0+n)} = \mathbb{R}^{m(n_0)}$ pour tout $n \geq 0$ et donc $E = \mathbb{R}^{m(n_0)}$. Supposons que $\lim_{n\to\infty} m(n) = \infty$. Dans ce cas, $\widetilde{E} = \bigoplus_{n \geq 1} \mathbb{R}$, $E = \ell^2(\mathbb{N})$ et

$$\begin{array}{rccl} e_n : & \mathbb{R}^{m(n)} & \to & \ell^2(\mathbb{N}) \\ & (\lambda_1, \ldots, \lambda_{m(n)}) & \mapsto & (\lambda_1, \ldots, \lambda_{m(n)}, 0, 0, \ldots). \end{array}$$

Si $\mathrm{pr}_{\mathbb{R}^{m(n)}}(z) = \big(\lambda_1(z), \lambda_2(z), \ldots, \lambda_{m(n)}(z)\big)$, alors

$$\mathrm{pr}_E(z) = \big(\lambda_1(z), \lambda_2(z), \ldots, \lambda_m(z), \lambda_{m+1}(z), \ldots\big).$$

5. Voir le Lemme 5.3.1.

(2) On montre les propriétés (i) à (iii).

(i) On a bien que $F \subseteq \partial E$ car

$$F \subseteq \overline{D} \subseteq \overline{\partial E} = \partial E$$

puisque ∂E est fermé dans ∂Z car E est complet. De plus, il est clair qu'un point dans E est un point plat dans Z et donc que $F = \partial E \cap \partial X$. Comme $v(D)$ engendre E, il en va de même pour $v(F)$.

(ii) Il faut voir que $\mathrm{pr}_Y(X)$ est dense dans X. On sait que $\mathbb{R}^{m(n)} \times \mathrm{pr}_{Y_n}(X)$ est dense dans Z_n pour tout $n \geq 1$. Donc $\bigcup_{n\geq 1} \mathbb{R}^{m(n)} \times \mathrm{pr}_{Y_n}(X)$ est dense dans Z. Et si $z \in \mathbb{R}^{m(n)} \times \mathrm{pr}_{Y_n}(X)$, alors il existe $x \in X$ tel que $x \in k_n(\mathbb{R}^{m(n)}) \subseteq k_z(E)$. Par définition de Y on a donc bien que $\mathrm{pr}_Y(X)$ est dense dans Y.

(iii) Supposons qu'on se soit donné $D = \{\xi_n\}_{n\geq 1}, D' = \{\xi'_n\}_{n\geq 1}$ deux parties dénombrables denses de F. Alors on peut fabriquer deux décompositions $i : X \to Z = E \times Y$ et $i' : X \to Z' = E' \times Y'$. On va montrer que ces deux décompositions sont isométriques. L'idée est de supposer que

$$X \subseteq Z_n = \mathbb{R}^{m(n)} \times Y_n \subseteq Z = E \times Y.$$

et de voir qu'on peut réaliser i' dans Z. On a que $\{\xi'_n\}_{n\geq 1} \subseteq E$ et on peut noter E_n le sous-espace de E engendré par $\{v(\xi'_i)\}_{i=1}^n$ et $E_n^\perp$ son complémentaire orthogonal. Pour tout $n \geq 1$, on considère

$$\begin{array}{rccl} i'_n : & X & \to & Z'_n = E_n \times \overline{\pi_{E_n^\perp}(\mathrm{pr}_E(X))} \times Y \subseteq Z \\ & x & \mapsto & \big(\mathrm{pr}_{E_n}(\mathrm{pr}_E(x)), \mathrm{pr}_{E_n^\perp}(\mathrm{pr}_E(x)), \mathrm{pr}_Y(x)\big). \end{array}$$

Alors, en identifiant $\mathbb{R}^{m'(n)}$ avec E_n et en posant $Y'_n := \overline{\pi_{E_n^\perp}(\mathrm{pr}_E(X))} \times Y$, on voit que cette décomposition vérifie le *Deuxième pas* relativement au sous-ensemble $\{\xi'_n\}_{n\geq 1} \subseteq F$ et au point base x_0. En effet, le point (i) est évident et pour le point (ii) on observe que $\mathrm{pr}_{Y'_n}(x) = \pi_{E_n^\perp}(\mathrm{pr}_E(X)) \times \mathrm{pr}_Y(X)$ qui est donc dense dans Y_n. Comme $\overline{\bigcup_{n\geq 1} E_n} = E$, on a bien que $E' = E$, $Y = Y'$, $Z = Z'$ et $i' = \mathrm{id}$.

Soit $\gamma : X \to X$ une isométrie. Si $\tilde{\gamma} : Z \to Z$ étend γ, alors $\tilde{\gamma}$ préserve ∂E puisque γ préserve F et que $v(F)$ engendre E. Ainsi, $\tilde{\gamma}$ doit se décomposer en $\tilde{\gamma} = (\gamma_E, \gamma_Y)$. Puisque $\mathrm{pr}_Y(X)$ est dense dans Y, on a évidemment que γ_Y est uniquement déterminé par γ. On note $\gamma_E = \tau \circ \sigma$ où $\sigma : E \to E$ est une isométrie linéaire et $\tau : E \to E,\ v \mapsto v + t$ est une translation. Comme $v(F)$ engendre E, σ est uniquement déterminée par γ. Et pour τ, on observe que

$$t = \tau(0) = 0 + t = \sigma(0) + t = \gamma_E(0) = \mathrm{pr}_E(\gamma(x_0)).$$

Montrons maintenant l'existence de $\tilde{\gamma}$. On se fixe $\{\xi_n\}_{n\geq 1} \subseteq F$ une partie dénombrable dense des points plats et on considère

$$X \subseteq Z_n = \mathbb{R}^{m(n)} \times Y_n \subseteq Z \text{ et } X \subseteq Z'_n = E_n \times Y'_n \subseteq Z$$

les décompositions par rapport à $\{\xi_n\}_{n\geq 1}$ et $\{\gamma(\xi_n)\}_{n\geq 1}$ respectivement (les deux par rapport au point base x_0). Rappelons qu'on note $\gamma_n : Z_n \to Z'_n$ l'unique extension de γ à γ_n. Si $z \in Z$ et $n \geq 1$ est tel que $z \in Z_n$, alors la preuve du *Deuxième pas* (iv) montre que

$$\gamma_{n+1}(z) = \gamma_n(z).$$

Ainsi, on peut définir $\tilde{\gamma}(z) = \gamma_{n_z}(z)$ pour tout $z \in \tilde{Z}$ et étendre naturellement cette isométrie à Z. Comme chaque γ_n étend γ, il en va de même pour $\tilde{\gamma}$.

□

On introduit les ensembles $A := \{\xi \in F \mid -\xi \in F\}$ et $P := \{\xi \in F \mid \angle(\xi, A) = \pi/2\}$ et on termine la section en prouvant quelques propriétés de F, A et P qui sont nécessaires pour prouver le Théorème d'Adams-Ballmann et les généralisations.

Lemme 4.1.11. *Soit X un espace CAT(0) complet. Alors* *(i) L'ensemble F est fermé dans ∂X (et donc compact) pour la topologie conique et π-convexe.*

(ii) Sur F la topologie conique et la topologie de Tits[6] *coïncident.*

(iii) $i(A)$ est une sous-sphère fermée de ∂E.

(iv) P est fermé, π-convexe et satisfait $P \cap (-P) = \emptyset$.

De plus, F,A et P sont invariants par isométries.

Preuve. Il découle de la décomposition d'Adams-Ballmann que la géométrie de F est sphérique.

(i) Montrons que si $\{b_{\xi^n}\}_{n\geq 1}$ est une suite de fonctions affines convergeant uniformément sur les bornés vers b_ξ, alors b_ξ est affine. Soit $z, z' \in X$ et $t \in [0,1]$. Alors $c_{z,z'}(t) \in \overline{B}(z, d(z,z'))$ puisque les boules sont convexes ([BH99], Proposition II.1.4 p. 160). Comme $b_{\xi_n} \to b_\xi$ uniformément sur les bornés, alors

$$0 = b_{\xi_n}(c_{z,z'}(t)) - (1-t)b_{\xi_n}(z) - tb_{\xi_n}(z') \to b_\xi(c_{z,z'}(t)) - (1-t)b_\xi(z) - tb_\xi(z')$$

et donc b_ξ est affine.

Montrons la π-convexité. Pour se faire, considérons la décomposition d'Adams-Ballmann $i : X \hookrightarrow E \times Y$. Alors $\partial E \subseteq \partial(E \times Y) = \partial E * \partial Y$ est π-convexe de même que ∂X. Ainsi, $i(F) = i(\partial X) \cap \partial E$ est π-convexe.

(ii) Ceci découle directement du Théorème 4.1.5. En effet, dans une sphère la topologie conique et la topologie de Tits coïncident. Soit S une sphère d'un espace de Hilbert. Dans ([BH99], p. 281) il est prouvé, en toute généralité, qu'un voisinage pour la topologie conique est un voisinage pour $\angle$. Montrons alors l'autre sens : si $\xi \in \partial S$ et $V(\xi, \alpha) = \{\xi' \in S \,|\, \angle(\xi, \xi') < \alpha\}$, $\alpha \in]0, \pi]$ alors $V(\xi, \alpha)$ est un voisinage de ξ pour la topologie conique. Il faut donc montrer qu'il existe $r, \varepsilon > 0$ tels que

$$U(c_{\xi,x_0}, r, \varepsilon) \subseteq V(\xi, \alpha),$$

où $U(c_{\xi,x_0}, r, \varepsilon)$ est un voisinage de ξ pour la topologie conique (voir 3.3.2). Choisissons $r \in \mathbb{R}_{>0}$ quelconque et $\varepsilon > 0$ tel que $\varepsilon/2r < \sin(\alpha/2)$. Alors $F \cap U(c_{\xi,x_0}, r, \varepsilon) \subseteq V(\xi, \alpha)$. En effet, si $\xi' \in U(c_{\xi,x_0}, r, \varepsilon)$, alors

$$d(c_{\xi,x_0}(r), \pi_{B(x_0,r)}(\xi')) = 2r \sin\left(\frac{\angle(\xi, \xi')}{2}\right) < \varepsilon < 2r \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right),$$

d'où $\sin\left(\frac{\angle(\xi,\xi')}{2}\right) < \sin(\frac{\alpha}{2})$ et donc $\angle(\xi, \xi') < \alpha$ car $\angle(\xi, \xi')$ et $\alpha \in [0, \pi]$.

(iii) On commence par montrer que A est fermé. Soit $\{\xi_n\}_{n\geq 1}$ une suite d'éléments de A qui converge vers $\xi \in F$. Alors $b_{-\xi_n} = -b_{\xi_n} \to -b_\xi = b_{-\xi} \in F$ et donc A est fermé. De plus, c'est bien une sphère par définition et par π-convexité de F (si $\xi_1, \xi_2 \in A$ sont tels que $\angle(\xi_1, \xi_2) < \pi$, alors les géodésiques $[\xi_1, \xi_2], [\xi_2, -\xi_1], [-\xi_1, -\xi_2]$ et $[-\xi_2, \xi_1]$ sont dans F et donc dans A).

(iv) P est fermé par définition (c'est la préimage d'un point par une fonction continue, $P = \angle(A, \cdot)^{-1}(\{\pi/2\})$). On a $P \cap (-P) = \emptyset$ puisque s'il existe $\xi \in P$ tel que $\xi = -\eta$ avec $\eta \in P$, alors $\xi \in A$, ce qui contredit la définition. Il est π-convexe puisque si $\xi_1, \xi_2 \in P$ sont tels que $\angle(\xi_1, \xi_2) < \pi$ alors $d(A, [\xi_1, \xi_2]) = \pi/2$.

Pour l'invariance, on l'a déjà vérifié pour F (dans la définition). On a $\xi \in A$ si et seulement s'il existe η tel que $\angle(\xi, \eta) = \pi$. Comme γ s'étend en une isométrie de $(\partial X, \angle)$, alors $\angle(\gamma(\xi), \gamma(\eta)) = \pi$ d'où $\gamma(\xi) \in A$. On a $\xi \in P$ si et seulement si $\angle(\xi, A) = \pi/2$. Et donc $\angle(\gamma(x), A) = \angle(\gamma(x), \gamma(A)) = \pi/2$, c'est-à-dire que $\gamma(\xi) \in P$. □

6. *I.e.* celle de la métrique angulaire (voir [BH99], p. 279).

Lemme 4.1.12. *Soit X un espace CAT(0) propre et $i : X \hookrightarrow Z = E \times Y$ sa décomposition d'Adams-Ballmann. Posons*

$$E_A := \overline{\langle \nu(i(\xi)) \rangle}_{\xi \in A} \text{ et } E_P := \overline{\langle \nu(i(\xi)) \rangle}_{\xi \in P}.$$

Alors

(i) E_A est de dimension finie,

(ii) $A = F$ si et seulement si $P = \emptyset$,

(iii) $E = E_A \boxplus E_P$ (où $\boxplus$ désigne la somme directe orthogonale).

Preuve. (i) Comme les points de A possèdent une antipode, la décomposition de X selon $A \subseteq F$ livre une vraie décomposition $X = E_A \times Y_A$. Ainsi E_A est propre (puisque X l'est) et donc de dimension finie.

(ii) L'implication de gauche à droite est évidente. Pour l'autre sens, on va montrer la contraposée. Supposons donc qu'il existe $\xi \in F \setminus A$. On considère $\min_{\eta \in A} \angle(\eta, \xi)$ qui est réalisé en un unique point (puisque A est compact et qu'on est dans un espace euclidien) qu'on note η_0. Considérons la géodésique $[-\eta_0, \xi]$ (ces deux points sont à distance $< \pi$ puisque $\xi \notin A$). Le point au "sommet" de cette géodésique (*i.e.* à distance $\pi/2$ de $-\eta_0$) est dans P.

(iii) E_A et E_P sont orthogonaux, puisque pour $\xi_A \in A$ et $\xi_P \in P$ on a que

$$\langle \nu(\xi_A), \nu(\xi_P) \rangle = \cos\left(\angle(\xi_A, \xi_P)\right) = \cos(\pi/2) = 0.$$

Pour la somme, il suffit de vérifier que $\nu(\xi)$ s'écrit comme la somme d'un élément de E_A et d'un élément de E_P pour tout $\xi \in F$ (puisque $E = \overline{\langle \nu(\xi) \rangle}_{\xi \in F}$). Soit donc $\xi \in F$. On a vu dans la preuve du point (ii) qu'il existe $\xi_A \in A$ et $\xi_P \in P$ tel que ξ soit sur la géodésique $[\xi_A, \xi_P]$. Comme la géométrie de ∂E est sphérique, on a que

$$\nu(\xi) = \cos(\angle(\xi, \xi_A))\nu(\xi_A) + \sin(\angle(\xi, \xi_A))\nu(\xi_P).$$

Il n'y a pas besoin de vérifier que $E_A \cap E_P = \{0\}$ puisque la somme est orthogonale. Ainsi, $E = E_A \boxplus E_P$. □

Lemme 4.1.13. *Soit X un espace CAT(0), $B \subseteq \partial X$ fermé et π une mesure de probabilité borélienne sur B. Si la fonction $b(x) = \int_B b_{\xi, x_0}(x) d\pi(\xi)$ est constante, alors tous les points dans le support de π sont plats.*

Preuve. Par définition on a l'égalité suivante

$$\{\xi \in B \mid b_\xi \text{ est affine}\} = \bigcap_{x,y \in X,\ t \in [0,1]} \{\xi \in B \mid b_\xi(c_{x,y}(t)) = (1-t)b_\xi(x) + t b_\xi(y)\}.$$

Chacun de ces ensembles est fermé et, puisque les fonctions de Busemann sont convexes et que b est constante, ils sont de mesure 1. Ainsi, tous les points dans le support de π (*i.e.* l'intersection de tous les fermés de mesure 1) sont plats. □

4.1.2 Décomposition d'Adams-Ballmann d'un champ borélien

On va maintenant montrer que la décomposition d'Adams-Ballmann d'un espace CAT(0) peut s'effectuer de manière borélienne lorsqu'on considère un champ borélien d'espaces CAT(0) propres. Dans la suite, pour simplifier la notation, on suppose que le bord est non vide pour tout $\omega \in \Omega$ (*i.e.* $\{\omega \in \Omega \mid \partial X \neq \emptyset\} = \Omega$). Tous les résultats restent bien sûr vrais en toute généralité (en remplaçant le champ $(\Omega, \partial X_\bullet)$ par le champ restreint $(\{\omega \in \Omega \mid \partial X_\omega \neq \emptyset\}, \partial X_\bullet)$).

Les sous-champs $F_\bullet$, $A_\bullet$ et $P_\bullet$ de $\partial X_\bullet$

Lemme 4.1.14. *Soit $(\Omega,\mathscr{A},\mu)$ un espace borélien, $(\Omega,X_\bullet)$ un champ borélien d'espaces CAT(0) propres de structure borélienne $\mathscr{L}(\Omega,X_\bullet)$. Alors*

(i) Le champ des points plats $F_\bullet$ est un sous-champ généralisé borélien de $\partial X_\bullet$.

(ii) Le sous-champ $A_\bullet$ de $F_\bullet$ défini par $A_\omega := \{\xi_\omega \in F_\omega \mid -\xi_\omega \in F_\omega\}$ est un sous-champ généralisé borélien de fermés de $F_\bullet$.

(iii) Le sous-champ $P_\bullet$ de $F_\bullet$ défini par $P_\omega := \{\xi_\omega \in F_\omega \mid \angle_\omega(\xi_\omega,A_\omega) = \pi/2\}$ est un sous-champ généralisé borélien de fermés de $F_\bullet$.

Preuve. On décompose la preuve de (i) en deux étapes.
(1) Soit X un espace CAT(0), $z,z' \in X$ et $f \in \mathscr{C}(X)$. On définit

$$\Delta_{z,z',t}(f) := f(c_{z,z'}(t)) - (1-t)f(z) - tf(z'),$$

où $c_{z,z'}$ est la géodésique reliant z à z' et, pour x_0 un point base fixé,

$$\Delta^m(f) := \sup_{z,z'\in B(x_0,m)} \sup_{t\in[0,1]} |\Delta_{z,z',t}(f)|$$

qui est une fonction qui mesure "le défaut d'affinité de f" sur la boule $B(x_0,m)$. Pour $m \geq 1$ fixé, la fonction $\Delta^m : \mathscr{C}(X) \to \mathbb{R}$ est continue (où $\mathscr{C}(X)$ pour la topologie de la convergence uniforme sur les compacts).
Pour ce faire, il suffit de montrer que si $f \in \mathscr{C}(X)$ et $\varepsilon > 0$ sont fixés, alors $g \in U(f,\overline{B(x_0,m)},\varepsilon)$ implique que $|\Delta^m(f) - \Delta^m(g)| \leq 2\varepsilon$. Soit donc $z,z' \in B(x_0,m)$ et $t \in [0,1]$. Par choix de g, on a

$$\begin{array}{ccccc} f(c_{z,z'}(t)) + \varepsilon & \geq & g(c_{z,z'}(t)) & \geq & f(c_{z,z'}(t)) - \varepsilon \\ -(1-t)f(z) + (1-t)\varepsilon & \geq & -(1-t)g(z) & \geq & -(1-t)f(z) - (1-t)\varepsilon \\ -tf(z') + t\varepsilon & \geq & -tg(z') & \geq & -tf(z') - t\varepsilon. \end{array}$$

En sommant on obtient, pour tous $z,z' \in B(x_0,m)$ et $t \in [0,1]$,

$$2\varepsilon \geq |\Delta_{z,z',t}(f) - \Delta_{z,z',t}(g)|$$

Ainsi,

$$|\Delta^m(f) - \Delta^m(g)| \leq 2\varepsilon.$$

(2) Pour montrer que $F_\bullet$ est un sous-champ généralisé borélien, on va démontrer que c'est une intersection dénombrable de sous-champs généralisés boréliens de fermés (voir par la Proposition 1.5.6). On fixe $x^0_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega,X_\bullet)$ et on définit $\overline{\Delta}^m_\bullet \in \mathscr{S}(\Omega,\mathscr{C}(\partial X_\bullet)) \subseteq \mathscr{S}\left(\Omega,\mathscr{C}(\mathscr{C}(X_\bullet))\right)$ en posant

$$\begin{array}{cccc} \overline{\Delta}^m_\omega : & \partial X_\omega & \to & \mathbb{R} \\ & \xi & \mapsto & \Delta^m(b_{\xi,x^0_\omega}) \end{array}$$

Alors, par définition de $F_\bullet$, on a $F_\bullet = \bigcap_{m\geq 1}(\overline{\Delta}^m_\bullet)^{-1}(\{0\})$ et il reste à voir que chacun de ces sous-champs généralisés est borélien. Pour ce faire on va utiliser le Lemme 1.5.13 et il suffit donc de prouver que

$$\overline{\Delta}^m_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega,\mathscr{C}(\partial X_\bullet)).$$

La continuité de Δ^m_ω a été démontrée au point (1) et il reste à vérifier que $\overline{\Delta}^m_\bullet(\xi_\bullet)$ est une fonction borélienne pour tout $\xi_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega,\partial X_\bullet)$. On considère, pour tout entier $m \geq 1$, le sous-champ borélien $B(x^0_\bullet,m)$ de $X_\bullet$ dont on choisit une famille fondamentale $\mathscr{D}^m$.

On observe que

$$\overline{\Delta}_{\bullet}^{m}(\xi_{\bullet}) = {}^{7} \sup_{z_\bullet, z'_\bullet \in \mathscr{D}^m} \sup_{t\in[0,1]\cap\mathbb{Q}} |b_{\xi_\bullet, x^0_\bullet}(c_{z_\bullet,z'_\bullet}(t)) - (1-t)b_{\xi_\bullet,x^0_\bullet}(z_\bullet) - t b_{\xi_\bullet,x^0_\bullet}(z'_\bullet)|$$

qui est donc borélienne car l'évaluation de $b_{\xi_\bullet,x^0_\bullet}$ sur les sections boréliennes de $X_\bullet$ est borélienne par définition $\big(c_{z_\bullet,z'_\bullet}(t) \in \mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)$ pour tout $t \in [0,1]$ par la Proposition 3.2.1 (i)$\big)$.

(ii) La section de fonctions $\angle_\bullet \in \mathscr{S}(\Omega, C_\bullet(F_\bullet \times F_\bullet))$ définie par

$$\begin{array}{cccc} \angle_\omega : & F_\omega \times F_\omega & \to & \mathbb{R} \\ & (\xi,\eta) & \mapsto & \angle_\omega(\xi,\eta). \end{array}$$

est borélienne (Lemme 3.3.12). Par le Lemme 1.5.13, le sous-champ généralisé $B_\bullet := (\angle_\bullet)^{-1}(\{\pi\})$ de $F_\bullet \times F_\bullet$ est borélien. Et donc, $A_\bullet = \pi_{F_\bullet}\big(B_\bullet\big)$ est borélien par la Remarque 1.9.5.

(iii) On considère $\angle_\bullet(\cdot, A_\bullet) \in \mathscr{S}(\Omega, \mathscr{C}(F_\bullet))$ comme une section de fonctions continues sur $F_\bullet$. Par le point (ii) et la Proposition 1.2.23, on sait que $\angle_\bullet(\xi_\bullet, A_\bullet)$ est borélienne pour tout $\xi_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega, F_\bullet)$ et donc $\angle_\bullet(\cdot, A_\bullet) \in \mathscr{L}(\Omega, \mathscr{C}(F_\bullet))$. Ainsi, par le Lemme 1.5.13, $P_\bullet = \angle_\bullet(\cdot, A_\bullet)^{-1}(\{\pi/2\})$ est un sous-champ généralisé borélien de fermés de $F_\bullet$.

□

Remarque 4.1.15. Le Lemme 4.1.11 et le Lemme 3.3.12 (ii) montrent que si $\Omega' = \{\omega \in \Omega \mid F_\omega \neq \emptyset\}$, alors $(\Omega', (F_\bullet, \delta_\bullet))$ et $(\Omega', (F_\bullet, \angle_\bullet))$ sont topologiquement équivalents (voir la Définition 1.1.17).

Version borélienne de la décomposition d'Adams-Ballmann

A partir de maintenant, on suppose que $\{\omega \in \Omega \mid F_\omega \neq \emptyset\} = \Omega$. Cela ne change rien aux résultats puisque $Z_{\omega'} = X_{\omega'}$ pour tout $\omega' \notin \{\omega \in \Omega \mid F_\omega \neq \emptyset\}$. Aussi, une fois construite la structure borélienne $\mathscr{L}(\{\omega \in \Omega \mid F_\omega \neq \emptyset\}, Z_\bullet)$, sa concaténation avec $\mathscr{L}(\Omega \setminus \{\omega \in \Omega \mid F_\omega \neq \emptyset\}, X_\bullet)$ est une structure borélienne qui satisfait les conditions.

On reprend les notations de la preuve du *Deuxième pas* de la preuve du Théorème 4.1.5. On rajoute la convention qu'on considère $\mathbb{R}^n = \{(x_1, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots)\} \subseteq \ell^2(\mathbb{N})$ et donc que $\mathbb{R}^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$, ce qui permet de ne plus parler des applications $e_{n+1,n}$ et e_n. On commence par montrer qu'il existe une "bonne" structure borélienne sur $E_\bullet$.

Lemme 4.1.16. *Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace borélien et $(\Omega, X_\bullet)$ un champ borélien d'espaces CAT(0) propres de structure borélienne $\mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)$. On considère la décomposition d'Adams-Ballmann $i_\bullet : X_\bullet \to Z_\bullet$. Alors il existe une structure borélienne $\mathscr{L}(\Omega, E_\bullet)$ sur $(\Omega, E_\bullet)$ telle que $\mathrm{pr}_{E_\bullet} \circ i_\bullet : X_\bullet \to Z_\bullet$ soit un morphisme de champs compatible.*

Preuve. On se fixe $x^0_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)$ et $\mathscr{D} = \{\xi^1_\bullet, \xi^2_\bullet, \xi^3_\bullet, \ldots\} \subseteq \mathscr{L}(\Omega, F_\bullet)$ une famille fondamentale de la structure borélienne naturelle du champ des points plats. Alors, pour tout $\omega \in \Omega$, on peut considérer la suite de décompositions

$$X_\omega \subseteq Z^n_\omega = \mathbb{R}^{m_\omega(n)} \times Y^n_\omega \subseteq Z^{n+1}_\omega = \mathbb{R}^{m_\omega(n+1)} \times Y^{n+1}_\omega \subseteq Z_\omega = E_\omega \times Y_\omega$$

associée à la famille $\{\xi^n_\omega\}_{n\geq 1}$ et à x^0_ω. On va commencer par montrer que $m_\bullet(n) \in \mathscr{L}(\Omega, \mathbb{N})$ pour tout $n \geq 1$ et donc que $\{\mathbb{R}^{m_\bullet(n)}\}_{n\geq 1}$ est une suite croissante de sous-champs boréliens du champ trivial $\ell^2(\mathbb{N})$. On va également prouver que $\mathrm{pr}_{\mathbb{R}^{m_\bullet(n)}} : X_\bullet \to \mathbb{R}^{m_\bullet(n)}$ est un morphisme de champs compatible. On procède par récurrence.

$[n = 1]$ Dans ce cas, on décompose nos espaces par rapport à un unique point et donc $m_\omega(1) = 1$

7. En effet, si X est CAT(0) propre, $D \subseteq X$ est une partie dense et $f \in \mathscr{C}(X)$, on obtient la même valeur de $\Delta^m(f)$ en prenant le supremum sur $B(x_0, m) \cap D$ et $[0,1] \cap \mathbb{Q}$ car les géodésiques dépendent continûment des extrémités (voir [BH99], Proposition II.1.4 p. 160).

pour tout $\omega \in \Omega$. Ainsi $m_\bullet(1) \in \mathscr{L}(\Omega,\mathbb{N})$. Si $x_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)$, alors $\mathrm{pr}_{E^1_\bullet}(x_\bullet) = -b_{\xi^1_\bullet}(x_\bullet)$ (voir la preuve du *Premier pas* du Théorème 4.1.5). Or, $b_{\xi^1_\bullet}(x_\bullet) \in \mathscr{L}(\Omega,\mathbb{R})$ par définition de la structure borélienne $\mathscr{L}(\Omega, \partial X_\bullet)$.

$[n \Rightarrow n+1]$ Lorsqu'on décompose successivement par rapport à plusieurs points du bord, il arrive que le nouveau point soit déjà dans le bord de l'espace euclidien. Considérons donc

$$\Omega_0 := \{\omega \in \Omega \mid \xi^{n+1}_\omega \in \partial \mathbb{R}^{m_\omega(n)}\} = \{\omega \in \Omega \mid m_\omega(n+1) = m_\omega(n)\},$$

le sous-ensemble de Ω sur lequel la décomposition reste identique. Pour montrer que $m_\bullet(n+1)$ est borélienne il suffit de montrer que $\Omega_0 \in \mathscr{A}$, puisque $m_\bullet(n)$ est borélienne par hypothèse de récurrence et que $m_\omega(n+1)$ vaut $m_\omega(n)$ si $\omega \in \Omega_0$ et $m_\omega(n)+1$ sinon.

Or,

$$\begin{aligned}
\Omega_0 &= \{\omega \in \Omega \mid \xi^{n+1}_\omega \in \partial\mathbb{R}^{m_\omega(n)} \subseteq \partial\mathbb{R}^{m_\omega(n)} * \partial Y^n_\omega\} \\
&= \{\omega \in \Omega \mid c_{\xi^{n+1}_\omega}([0,\infty[) \subseteq \mathbb{R}^{m_\omega(n)} \times \{\mathrm{pr}_{Y^n_\omega}(x^0_\omega)\}\} \\
&= \{\omega \in \Omega \mid c_{\xi^{n+1}_\omega}(1) \subseteq \mathbb{R}^{m_\omega(n)} \times \{\mathrm{pr}_{Y^n_\omega}(x^0_\omega)\}\} \\
&= \{\omega \in \Omega \mid \|\mathrm{pr}_{\mathbb{R}^{m_\omega(n)}}\left(c_{\xi^{n+1}_\omega}(1)\right)\|_{\mathbb{R}^{m_\omega(n)}} = 1\} \in \mathscr{A}.
\end{aligned}$$

Montrons maintenant que le morphisme $\mathrm{pr}_{\mathbb{R}^{m_\bullet(n+1)}}$ est compatible. Si $\omega \in \Omega_0$, alors $\mathrm{pr}_{\mathbb{R}^{m_\omega(n+1)}} = \mathrm{pr}_{\mathbb{R}^{m_\omega(n)}}$. Sinon, le point (iii) du *Deuxième pas* de la preuve du Théorème 4.1.5 montre que si $x \in X_\omega$, alors

$$\mathrm{pr}_{\mathbb{R}^{m_\omega(n+1)}}(x) = \Big(\mathrm{pr}_{\mathbb{R}^{m_\omega(n)}}(x), \quad -\frac{1}{\sqrt{1-\|\mathrm{pr}_{\mathbb{R}^{m_\omega(n)}}(c_{\xi^{n+1}_\omega}(1))\|^2_{\mathbb{R}^{m_\omega(n)}}}} \cdot \left(b_{\xi^{n+1}_\omega}(x) + < \mathrm{pr}_{\mathbb{R}^{m_\omega(n)}}(c_{\xi^{n+1}_\omega}(1)), \mathrm{pr}_{\mathbb{R}^{m_\omega(n)}}(x) >_{\mathbb{R}^{m_\omega(n)}} \right)\Big).$$

Soit $x_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)$. On observe que :

a) $\mathrm{pr}_{\mathbb{R}^{m_\bullet(n)}}(x_\bullet) \in \mathscr{L}(\Omega, \ell^2(\mathbb{N}))$ par récurrence et puisque $x_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)$,

b) $c_{\xi^{n+1}_\bullet}(1) \in \mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)$ par le Lemme 3.3.12 (i),

c) $\mathrm{pr}_{\mathbb{R}^{m_\bullet(n)}}\left(c_{\xi^{n+1}_\bullet}(1)\right) \in \mathscr{L}(\Omega, \ell^2(\mathbb{N}))$ par hypothèse de récurrence et le point b),

d) $\|\mathrm{pr}_{\mathbb{R}^{m_\bullet(n)}}(c_{\xi^{n+1}_\bullet}(1))\|_{\mathbb{R}^{m_\bullet(n)}} \in \mathscr{L}(\Omega,\mathbb{R})$ par le point c) et la Proposition 1.7.3,

e) $b_{\xi^{n+1}_\bullet}(x_\bullet) \in \mathscr{L}(\Omega,\mathbb{R})$ par définition de la structure borélienne du champ des bords,

f) $< \mathrm{pr}_{\mathbb{R}^{m_\bullet(n)}}(c_{\xi^{n+1}_\bullet}(1)), \mathrm{pr}_{\mathbb{R}^{m_\bullet(n)}}(x_\bullet) >_{\mathbb{R}^{m_\bullet(n)}} \in \mathscr{L}(\Omega,\mathbb{R})$ par les points a) et c) et la Proposition 1.7.3,

g) $-\frac{1}{\sqrt{1-\|\mathrm{pr}_{\mathbb{R}^{m_\bullet(n)}}(c_{\xi^{n+1}_\bullet}(1))\|^2_{\mathbb{R}^{m_\bullet(n)}}}} \cdot \left(b_{\xi^{n+1}_\bullet}(x_\bullet) + < \mathrm{pr}_{\mathbb{R}^{m_\bullet(n)}}(c_{\xi^{n+1}_\bullet}(1)), \mathrm{pr}_{\mathbb{R}^{m_\bullet(n)}}(x_\bullet) >_{\mathbb{R}^{m_\bullet(n)}} \right) \in \mathscr{L}(\Omega,\mathbb{R})$ par les points d), e) et f).

Ainsi, les points a) et g) montrent que $\mathrm{pr}_{\mathbb{R}^{m_\bullet(n+1)}}\left(x_\bullet \,|_{\Omega_+}\right) \in \mathscr{L}(\Omega_+, \ell^2(\mathbb{N}))$ où l'on a noté Ω_+ le complémentaire de Ω_0.

Comme $\mathbb{R}^{m_\bullet(n)}$ est un sous-champ borélien de $(\Omega, \ell^2(\mathbb{N}))$ pour tout $n \geq 1$, il en va de même pour $E_\bullet = \overline{\bigcup_{n\geq 1} \mathbb{R}^{m_\bullet(n)}}$. De plus, la Remarque 4.1.10 montre que $\mathrm{pr}_{E_\bullet} : X_\bullet \to E_\bullet$ est un morphisme compatible.

□

Muni de ce lemme, on peut maintenant se lancer dans la preuve de la version borélienne de la décomposition d'Adams-Ballmann.

Théorème 4.1.17. *Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace borélien et $(\Omega, X_\bullet)$ un champ borélien d'espaces CAT(0) propres de structure borélienne $\mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)$. On considère la décomposition d'Adams-Ballmann $i_\bullet : X_\bullet \to Z_\bullet$. Alors il existe une unique structure borélienne sur $Z_\bullet$ telle que $i_\bullet(X_\bullet)$ soit un sous-champ borélien de $Z_\bullet$ et telle que la décomposition $Z_\bullet = E_\bullet \times Y_\bullet$ soit borélienne (voir la Définition 1.9.6). De plus, supposons que $\gamma_\bullet \in \widetilde{\mathscr{L}}(\Omega, \mathrm{Iso}(X_\bullet))$ soit un morphisme compatible et isométrique. Alors l'extension $\widetilde{\gamma}_\bullet \in \mathscr{S}(\Omega, \mathrm{Iso}(Z_\bullet))$ satisfait que*

$$\widetilde{\gamma}_\bullet = (\gamma_{E_\bullet}, \gamma_{Y_\bullet}) \in \widetilde{\mathscr{L}}(\Omega, \mathrm{Iso}(E_\bullet)) \times \widetilde{\mathscr{L}}(\Omega, \mathrm{Iso}(Y_\bullet)) \subseteq \widetilde{\mathscr{L}}(\Omega, \mathrm{Iso}(Z_\bullet)).$$

Preuve. On suppose que $X_\bullet \subseteq Z_\bullet$. Montrons l'existence de la structure borélienne. On se rappelle que, pour tout $\omega \in \Omega$, $\mathrm{pr}_{Y_\omega}(X_\omega)$ est dense dans Y_ω qui est complet. On peut ainsi voir Y_ω comme le complété du quotient de X_ω par la pseudo-métrique δ_ω définie par $\delta_\omega(x,y) = d_{Y_\omega}\big(\mathrm{pr}_{Y_\omega}(x), \mathrm{pr}_{Y_\omega}(y)\big)$. On considère $\mathscr{L}(\Omega, E_\bullet)$ la structure borélienne sur $E_\bullet$ telle que $\pi_{E_\bullet} : X_\bullet \to E_\bullet$ soit un morphisme de champs compatible (Lemme 4.1.16). Alors

$$d_{Y_\bullet}\big(\mathrm{pr}_{Y_\bullet}(x_\bullet), \mathrm{pr}_{Y_\bullet}(y_\bullet)\big) = \sqrt{{d_{X_\bullet}}^2(x_\bullet, y_\bullet) - {d_{E_\bullet}}^2\big(\mathrm{pr}_{E_\bullet}(x_\bullet), \mathrm{pr}_{E_\bullet}(y_\bullet)\big)}$$

est borélienne pour tout $x_\bullet, y_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)$. Le Lemme 1.9.3 montre donc qu'il existe une unique structure borélienne $\mathscr{L}(\Omega, Y_\bullet)$ sur $Y_\bullet$ qui fait de $\mathrm{pr}_{Y_\bullet} : X_\bullet \to Y_\bullet$ un morphisme de champs compatible. La structure produit $\mathscr{L}(\Omega, Z_\bullet) := \mathscr{L}(\Omega, E_\bullet) \times \mathscr{L}(\Omega, Y_\bullet)$ satisfait clairement les deux conditions demandées.

On s'occupe maintenant de l'unicité. Par hypothèse, il existe des structures $\mathscr{L}_2(\Omega, E_\bullet)$ sur $E_\bullet$ et $\mathscr{L}_2(\Omega, Y_\bullet)$ sur $Y_\bullet$ telles que $\mathscr{L}(\Omega, X_\bullet) \subseteq \mathscr{L}_2(\Omega, E_\bullet) \times \mathscr{L}_2(\Omega, Y_\bullet)$. En particulier, $\mathrm{pr}_{E_\bullet}\big(\mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)\big) \subseteq \mathscr{L}_2(\Omega, E_\bullet)$. Soit $\{\xi^n_\bullet\}_{n\geq 1}$ une famille fondamentale de $\mathscr{L}(\Omega, F_\bullet)$. Alors la famille $\{\mathrm{pr}_{E_\bullet}\big(c_{\xi^n_\bullet}(1)\big)\}_{n\geq 1}$ est contenue dans $\mathscr{L}_2(\Omega, E_\bullet)$ et engendre[8] la structure hilbertienne $\mathscr{L}(\Omega, E_\bullet)$, ce qui montre que $\mathscr{L}_2(\Omega, E_\bullet) = \mathscr{L}(\Omega, E_\bullet)$. De même, $\mathrm{pr}_{Y_\bullet}\big(\mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)\big) \subseteq \mathscr{L}_2(\Omega, Y_\bullet)$ et donc la structure est la même que celle décrite dans la preuve de l'existence.

Soit $\gamma_\bullet \in \widetilde{\mathscr{L}}(\Omega, \mathrm{Iso}(X_\bullet))$ un morphisme compatible, isométrique et $\widetilde{\gamma}_\bullet = (\gamma_{E_\bullet}, \gamma_{Y_\bullet})$ l'extension. On décompose $\gamma_{E_\bullet} = \tau_\bullet \circ \sigma_\bullet$ où, pour tout $\omega \in \Omega$, $\sigma_\omega : E_\omega \to E_\omega$ est une isométrie linéaire et $\tau_\omega : E_\omega \to E_\omega,\ e \mapsto e + t_\omega$ est une translation. Si $\xi_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega, F_\bullet) \subseteq \mathscr{L}(\Omega, \partial E_\bullet)$, alors

$$\sigma_\bullet(\xi_\bullet) = \gamma_\bullet(\xi_\bullet) \in \mathscr{L}(\Omega, F_\bullet) \subseteq \mathscr{L}(\Omega, \partial E_\bullet).$$

Comme $v(F_\omega)$ engendre E_ω pour tout $\omega \in \Omega$, on a bien que $\sigma_\bullet \in \widetilde{\mathscr{L}}(\Omega, \mathrm{Iso}(E_\bullet))$. D'autre part, on observe que $\tau_\bullet \in \widetilde{\mathscr{L}}(\Omega, \mathrm{Iso}(E_\bullet))$ si et seulement si $t_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega, E_\bullet)$. Or, $t_\bullet = \mathrm{pr}_{E_\bullet}(\gamma_\bullet(x_\bullet)) - \mathrm{pr}_{E_\bullet}(x_\bullet)$ pour tout $x_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)$. Ainsi, $t_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega, E_\bullet)$.

Finalement, on observe que $\gamma_{Y_\bullet}(\mathrm{pr}_{Y_\bullet}(x_\bullet)) = \mathrm{pr}_{Y_\bullet}(\gamma_\bullet(x_\bullet))$ ce qui permet de conclure que $\gamma_{Y_\bullet} \in \widetilde{\mathscr{L}}(\Omega, \mathrm{Iso}(Y_\bullet))$ puisque $\gamma_\bullet$ et $\mathrm{pr}_{Y_\bullet}$ sont compatibles et que $\mathrm{pr}_{Y_\omega}(X_\omega)$ est dense dans Y_ω pour tout $\omega \in \Omega$. □

4.2 Preuve du théorème principal

4.2.1 Cas d'un G-espace moyennable

On va prouver l'analogue des Lemmes C.0.6, C.0.7 et C.0.8 de l'Appendice C consacrée à l'esquisse de la preuve du Théorème d'Adams-Ballmann avant de se lancer dans la démonstration de la généralisation.

8. Voir la Proposition 1.7.2.

Champ de convexes et section fixe à l'infini

Proposition 4.2.1. *Soit G un groupe localement compact à base dénombrable, $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ un G-espace ergodique, X un espace CAT(0) propre de dimension de recouvrement finie et $\alpha : G \times \Omega \to \mathrm{Iso}(X)$ un cocycle borélien. Supposons qu'il n'existe pas de classe invariante de sous-champs généralisés boréliens de convexes fermés, non vides presque partout qui soit minimale pour ces propriétés. Alors il existe une classe de sections invariante $[\xi_\bullet] \in L(\Omega, \partial X)$.*

Preuve. On fait la preuve en trois temps.

(1) On commence par prouver que si $\{C_\bullet^\beta\}_{\beta\in\mathscr{B}}$ est une chaîne (pour l'inclusion presque partout) de sous-champs généralisés boréliens de fermés presque invariants, alors il existe un sous-champ généralisé borélien $C_\bullet$ de fermés presque invariant tel que

(i) $[C_\bullet] \leq [C_\bullet^\beta]$ pour tout $\beta \in \mathscr{B}$.

(ii) Il existe une famille dénombrable $\{\beta_n\}_{n\geq 1} \subseteq \mathscr{B}$ décroissante (pour l'ordre induit par celui de la chaîne) telle que $C_\bullet = \bigcap_{n\geq 1} C_\bullet^{\beta_n}$

Par la Proposition 1.4.8, il existe une famille $\{\beta'_n\}_{n\geq 1} \subseteq \mathscr{B}$ tel que $C_\bullet = \bigcap_{n\geq 1} C_\bullet^{\beta_n}$ (qui est borélien par la Proposition 1.5.6) satisfait (i). En posant $\beta_n := \min\{\beta'_1, \beta'_2, \dots, \beta'_n\}$ (i) et (ii) sont vérifiés (on a toujours que $\bigcap_{n\geq 1} C_\bullet^{\beta_n} = C_\bullet$). Il faut encore montrer que $C_\bullet$ est presque-invariant. Pour ce faire, on observe que pour tout $g \in G$

$$\{\omega \in \Omega \mid \alpha(g,\omega)C_\omega = C_{g\omega}\} \subseteq \bigcap_{n\geq 1} \{\omega \in \Omega \mid \alpha(g,\omega)C_\omega^{\beta_n} = C_{g\omega}^{\beta_n}\}.$$

(2) Ensuite, on montre que s'il n'existe pas de classe invariante de sous-champs généralisés boréliens de convexes fermés non vides presque partout qui soit minimale pour ces propriétés, alors il existe une suite dénombrable de classes invariantes de sous-champs boréliens $\{[C_\bullet^n]\}_{n\geq 1}$ de convexes fermés non vides presque partout telle que

(i) $[C_\bullet^{n+1}] \leq [C_\bullet^n]$ pour tout $n \geq 1$,

(ii) $[\bigcap_{n\geq 1} C_\bullet^n]$ est la classe du sous-champ vide.

Considérons $\mathscr{E}$ l'ensemble des classes invariantes de sous-champs généralisés boréliens de fermés convexes non vides presque partout muni de l'ordre de l'inclusion presque partout. Par hypothèse, il n'existe pas d'élément minimal dans $\mathscr{E}$. Ainsi, par la contraposée du Lemme de Zorn, il existe une chaîne $\{[C_\bullet^\beta]\}_{\beta\in\mathscr{B}}$ d'éléments de $\mathscr{E}$ qui n'admet pas de minorant. Or, par le point (1), il existe une suite décroissante (pour l'ordre induit par celui de la chaîne) d'indices $\{\beta_n\}_{n\geq 1}$ telle que $C_\bullet := \bigcap_{n\geq 1} C_\bullet^{\beta_n}$ est un sous-champ généralisé borélien de convexes fermés, presque invariant tel que $[C_\bullet] \leq [C_\bullet^\beta]$ pour tout $\beta \in \mathscr{B}$. Par hypothèse, $\{\omega \in \Omega \mid C_\omega \neq \emptyset\}$ n'est pas de mesure pleine (sinon c'est un minorant de la chaîne). Montrons que cet ensemble doit alors être de mesure nulle. Par le Lemme 2.1.11 et la Remarque 2.1.12, il existe $\widetilde{C}_\bullet =_{\text{p.p.}} C_\bullet$ et Ω' un borélien de mesure pleine G-invariant tel que $(\Omega', \widetilde{C}_\bullet)$ est invariant. Alors $\{\omega \in \Omega' \mid \widetilde{C}_\omega \neq \emptyset\}$ est G-invariant. Donc, par ergodicité, cet ensemble est de mesure soit nulle soit pleine. Puisque Ω' est de mesure pleine, on a la même dichotomie[9] pour l'ensemble $\{\omega \in \Omega \mid C_\omega \neq \emptyset\}$. Or, on avait vu que sa mesure ne pouvait être pleine et donc sa mesure doit être nulle. Ainsi, $C_\bullet$ est bien dans la classe du sous-champ généralisé partout vide.

(3) On peut maintenant attaquer la preuve de la proposition. Considérons la suite dénombrable de sous-champs généralisés boréliens presque invariants $\{C_\bullet^n\}_{n\geq 1}$ formés de convexes fermés non vides, donnée par le point (2) (on choisit des représentants tels que C_ω^n est un convexe fermé non vide pour tout $\omega \in \Omega$). Le Lemme 2.1.11 et la Remarque 2.1.12 permettent de supposer qu'il existe pour tout $n \geq 1$ un borélien Ω_n invariant de mesure pleine et $\widetilde{C}_\bullet^n$ un champ borélien de convexes

9. Puisque $\mu\{\omega \in \Omega \mid C_\omega \neq \emptyset\} = \mu\{\omega \in \Omega \mid \widetilde{C}_\omega \neq \emptyset\} = \mu\{\omega \in \Omega' \mid \widetilde{C}_\omega \neq \emptyset\}$.

fermés non vides tel que $(\Omega_n, \widetilde{C}^n_\bullet)$ est invariant et $[\widetilde{C}^n_\bullet] =_{\text{p.p.}} [C^n_\bullet]$. Observons que

$$\Omega'' := \{\omega \in \Omega' \mid \widetilde{C}^n_\omega \supseteq \widetilde{C}^{n+1}_\omega \text{ pour tout } n \geq 1 \text{ et } \bigcap_{n\geq 1} \widetilde{C}^n_\bullet = \emptyset\}$$

est G-invariant et de mesure pleine. La famille de sous-champs boréliens $\{(\Omega'', \widetilde{C}^n_\bullet)\}_{n\geq 1}$ satisfait donc les hypothèses du Corollaire 3.5.8 (voir la Remarque 3.5.9) et il existe donc $\xi_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega'', \partial X)$ invariante et donc sa classe $[\xi_\bullet] \in L(\Omega, \partial X)$ est invariante. □

Sections de fonctions quasi-invariantes

Définition 4.2.2. *Soit G un groupe localement compact à base dénombrable, $(\Omega, \mathscr{A})$ un G-espace borélien standard, X un espace CAT(0) propre et $\alpha : G \times \Omega \to \operatorname{Iso}(X)$ un cocycle borélien. Supposons qu'il existe $C_\bullet$ un sous-champ borélien invariant d'ensembles non vides. Une section de fonctions $f_\bullet \in \mathscr{S}(\Omega, \mathscr{F}(C_\bullet))$ est dite quasi-invariante s'il existe une fonction $c : G \times \Omega \to \mathbb{R}$ telle que $\widetilde{\alpha}(g,\omega)f_\omega = f_{g\omega} + c(g,\omega)$* [10].

Remarque 4.2.3. La fonction c ci-dessus est un cocycle additif. En effet,

$$\begin{aligned} \widetilde{\alpha}(gh,\omega)f_\omega &= \widetilde{\alpha}(g,h\omega)(\widetilde{\alpha}(h,\omega)f_\omega) = \widetilde{\alpha}(g,h\omega)(f_{h\omega} + c(h,\omega)) \overset{\text{déf. de } \widetilde{\alpha}}{=} \widetilde{\alpha}(g,h\omega)f_{h\omega} + c(h,\omega) \\ &= f_{gh\omega} + c(g,h\omega) + c(h,\omega), \end{aligned}$$

et donc

$$c(gh,\omega) = c(g,h\omega) + c(h,\omega).$$

Lemme 4.2.4. *Soit G un groupe localement compact à base dénombrable, $(\Omega, \mathscr{A})$ un G-espace borélien standard, Y un espace CAT(0) propre de dimension topologique finie, $\alpha : G \times \Omega \to \operatorname{Iso}(Y)$ un cocycle borélien et $X_\bullet$ un sous-champ borélien invariant de convexes non vides. Soit $f_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega, \mathscr{C}(X_\bullet))$ quasi-invariante telle que f_ω soit convexe pour tout $\omega \in \Omega$.*

(i) Posons

$$\begin{aligned} \Omega_{\inf=-\infty} &:= \{\omega \in \Omega \mid \inf f_\omega = -\infty\} \\ \Omega_{\inf>-\infty} &:= \{\omega \in \Omega \mid \inf f_\omega > -\infty \text{ et n'est pas atteint}\} \\ \Omega_{\min} &:= \{\omega \in \Omega \mid \inf f_\omega \text{ est atteint}\}. \end{aligned}$$

Alors ces trois ensembles sont des boréliens G-invariants.

(ii) $(f_\bullet|_{\Omega_{\min}} - \min(f_\bullet|_{\Omega_{\min}}))^{-1}(\{0\})$ est un sous-champ borélien de $(\Omega_{\min}, X_\bullet)$, invariant de fermés, convexes, non vides.

(iii) Posons $\Omega_{\inf} := \Omega_{\inf=-\infty} \cup \Omega_{\inf>-\infty}$. Alors il existe une section $\xi_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega_{\inf}, \partial X_\bullet)$ qui est invariante.

Preuve. (i) (Hypothèse de convexité pas nécessaire). Soit $\mathscr{D} \subseteq \mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)$ une famille fondamentale du sous-champ. Alors

$$\begin{aligned} \inf f_\bullet : \quad \Omega &\to \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \\ \omega &\mapsto \inf_{x \in X_\omega} f_\omega(x) \end{aligned}$$

est borélienne puisque $\inf f_\bullet = \inf_{x_\bullet \in \mathscr{D}} f_\bullet(x_\bullet)$. Ainsi, $\Omega_{\inf=-\infty} = (\inf f_\bullet)^{-1}(\{-\infty\}) \in \mathscr{A}$.
D'autre part, si $f : X \to \mathbb{R}$ est une fonction continue d'un espace métrique propre X et $x_0 \in X$ est fixé, alors on a que

$$\inf f \text{ est atteint} \iff \exists\, R \in \mathbb{N} \text{ t.q. } \inf_{x \in B(x_0,R)} f(x) = \inf_{x \in X} f(x).$$

10. Remarquons que $\widetilde{\alpha}(g,\omega)f_\omega \in \mathscr{F}(C_{g\omega})$ est bien défini puisque le sous-champ est supposé invariant.

Soit $x^0_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)$. Alors, pour tout $\mathbb{R} \in \mathbb{N}$ fixé, la fonction $\Omega \to \mathbb{R}$, $\omega \mapsto \inf_{x \in B(x^0_\omega, R)} f_\omega(x)$ est borélienne puisque $B(x^0_\bullet, R)$ est un sous-champ borélien de $X_\bullet$. Ainsi,

$$\Omega_{\min} = \{\omega \in \Omega \mid \inf f_\omega \text{ est atteint}\} = \bigcup_{R \in \mathbb{N}} \{\omega \in \Omega \mid \inf_{x \in B(x^0_\omega, R)} f_\omega(x) = \inf_{x \in X_\omega} f_\omega(x)\} \in \mathscr{A}.$$

Finalement, $\Omega_{\inf > -\infty} = \Omega \setminus (\Omega_{\min} \cup \Omega_{\inf = -\infty}) \in \mathscr{A}$.
La G-invariance des ensembles découle directement de la quasi-invariance de $f_\bullet$. En effet, comme $\widetilde{\alpha}(g,\omega) f_\omega = f_{g\omega} + c(g,\omega)$, f_ω atteint son *minimum* si et seulement si $f_{g\omega}$ l'atteint.
(ii) On a, par hypothèse, que $\widetilde{\alpha}(g,\omega) f_\omega = f_\omega \circ \alpha(g^{-1}, g\omega) = f_{g\omega} + c(g,\omega)$. En particulier, pour $(g,\omega) \in G \times \Omega_{\min}$, on a que $\min f_\omega = \min f_{g\omega} + c(g,\omega)$. On peut donc vérifier que $\widetilde{f_\omega} = f_\omega - \min f_\omega$ est invariante :

$$\widetilde{\alpha}(g,\omega)(f_\omega - \min f_\omega) = f_{g\omega} + c(g,\omega) - \min f_\omega = f_{g\omega} - \min f_{g\omega}.$$

Ainsi, $\widetilde{f_\bullet} \in \mathscr{L}(\Omega_{\min}, \mathscr{C}(X_\bullet))$ est une section invariante de fonctions convexes. En particulier, $(\widetilde{f_\bullet})^{-1}(\{0\})$ est un sous-champ borélien [11] de $(\Omega_{\min}, X_\bullet)$ invariant, de fermés convexes non vides.
(iii) On fait la preuve en deux temps.
(1) Pour $\omega \in \Omega_{\inf > -\infty}$, on pose $\widetilde{f_\omega} := f_\omega - \inf f_\omega$. Alors $\widetilde{f_\bullet} \in \mathscr{L}(\Omega_{\inf > -\infty}, \mathscr{C}(X_\bullet))$ est invariante et satisfait que $\widetilde{f_\omega}$ est convexe pour tout $\omega \in \Omega_{\inf > -\infty}$. On pose

$$C^n_\bullet := (\widetilde{f_\bullet})^{-1}([0, 1/n])$$

qui sont des sous-champs boréliens invariants de $(\Omega_{\inf > -\infty}, X_\bullet)$ de fermés convexes non vides tels que $C^n_\bullet \supseteq C^{n+1}_\bullet$ et que $\bigcap_{n \geq 1} C^n_\bullet$ est le champ vide. On sait associer à une telle suite une section de points à l'infini invariante : la section des centres du champ des ensembles limites à l'infini $C_\bullet$ (voir le Corollaire 3.5.8 et la Remarque 3.5.9).
(2) Pour $\omega \in \Omega_{\inf = -\infty}$, on pose $C^\beta_\omega := f^{-1}_\omega(] - \infty, -\beta])$. On a

$$\alpha(g,\omega) C^\beta_\omega = C^{\beta + c(g,\omega)}_{g\omega} \text{ pour tout } (g,\omega) \in G \times \Omega_{\inf = -\infty}.$$

En effet, on calcule

$$\begin{aligned}
\alpha(g,\omega) C^\beta_\omega &= \alpha(g,\omega) f^{-1}(] - \infty, -\beta]) = \alpha(g,\omega)(\{x \in X_\omega \mid f_\omega(x) \leq -\beta\}) \\
&= \{\alpha(g,\omega) x \in X_{g\omega} \mid f_\omega(x) \leq -\beta\} = \{y \in X_{g\omega} \mid f_\omega(\alpha(g^{-1}, g\omega) y) \leq -\beta\} \\
&= \{y \in X_{g\omega} \mid f_{g\omega}(y) + c(g,\omega) \leq -\beta\} = \{y \in X_{g\omega} \mid f_{g\omega}(y) \leq -\beta - c(g,\omega]\} \\
&= f^{-1}_{g\omega}(] - \infty, -\beta - c(g,\omega)]) = C^{\beta + c(g,\omega)}_{g\omega}.
\end{aligned}$$

Ainsi, la famille $\{C^\beta_\bullet\}_{\beta \in \mathbb{R}}$ satisfait les hypothèses du Corollaire 3.5.8 : il existe donc une section invariante de points du bord. On conclut en recollant les deux sections trouvées aux points (1) et (2) en une section invariante $\xi_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega_{\inf = -\infty} \cup \Omega_{\inf > -\infty}, \partial X_\bullet)$ de points du bord. □

Proposition 4.2.5. *Soit G un groupe localement compact à base dénombrable, $(\Omega, \mathscr{A})$ un G-espace borélien standard, X un espace CAT(0) propre et $\alpha : G \times \Omega \to \mathrm{Iso}(X)$ un cocycle borélien. Supposons de plus qu'il existe $B_\bullet$ un sous-champ borélien invariant de fermés de ∂X (pour l'action induite sur le bord) et $\pi_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega, Prob(B_\bullet))$ également invariante (pour l'action induite, voir l'Exemple 2.1.15). On fixe $x^0_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega, X)$. Pour tout $\omega \in \Omega$, on définit la fonction*

$$\begin{aligned}
b_\omega : \ X &\to \mathbb{R} \\
x &\mapsto \int_{B_\omega} b_{\xi, x^0_\omega}(x) d\pi_\omega(\xi).
\end{aligned}$$

Alors $b_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega, \mathscr{C}(X))$ est une section quasi-invariante de fonctions convexes.

11. Lemme 1.5.13.

Preuve. La fonction b_ω est convexe et 1-Lipschitz pour tout $\omega \in \Omega$ puisque c'est une intégrale de fonctions de Busemann. Pour prouver que la section de fonctions est borélienne, on va introduire la notation suivante : pour $x, x_0 \in X$, on note

$$\begin{array}{rccc} b_{x,x_0}: & \partial X & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & \xi & \mapsto & b_{\xi,x_0}(x) \end{array}$$

qui est une fonction continue [12]. Par définition de $\mathscr{L}(\Omega,\partial X)$, la fonction $b_{x_\bullet,x^0_\bullet}(\xi_\bullet) = b_{\xi_\bullet,x^0_\bullet}(x_\bullet)$ est borélienne pour tout $x_\bullet, x^0_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega,X)$ et $\xi_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega,\partial X)$ et donc on obtient, pour tout $x_\bullet, x^0_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega,X)$, une section de fonctions $b_{x_\bullet,x^0_\bullet} \in \mathscr{L}(\Omega,\mathscr{C}(\partial X))$.
Observons que pour tout $x \in X$ et $\omega \in \Omega$ on a que

$$b_\omega(x) = \int_{B_\omega} b_{\xi,x^0_\omega}(x)d\pi_\omega(\xi) = \int_{B_\omega} b_{x,x^0_\omega}(\xi)d\pi_\omega(\xi).$$

Ainsi, en utilisant le Théorème de Riesz qui permet de voir les mesures comme des formes linéaires sur les fonctions continues (voir la preuve du Lemme 1.8.7), on a que $b_\omega(x) = \pi_\omega(b_{x,x^0_\omega})$ pour tout $\omega \in \Omega$ et $x \in X$. Donc $b_\bullet(x_\bullet) = \pi_\bullet(b_{x_\bullet,x^0_\bullet})$ est borélienne par définition de $\mathscr{L}(\Omega,\mathrm{Prob}(X))$ (voir la Proposition 1.8.8) et car on a déjà prouvé que $b_{x_\bullet,x^0_\bullet} \in \mathscr{L}(\Omega,\mathscr{C}(\partial X))$ pour tout $x_\bullet, x^0_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega,X)$.
Il reste à montrer la quasi-invariance. On a, pour tout $(g,\omega) \in G \times \Omega$ et $x \in X$,

$$\begin{aligned}
(\widetilde{\alpha}(g,\omega)b_\omega)(x) &= b_\omega(\alpha(g^{-1},g\omega)x) = \int_{B_\omega} b_{\xi,x^0_\omega}(\alpha(g^{-1},g\omega)x)d\pi_\omega(\xi) \\
&\overset{(*)}{=} \int_{B_\omega} \left(b_{\xi,\alpha(g^{-1},g\omega)x^0_{g\omega}}(\alpha(g^{-1},g\omega)x) - b_{\xi,\alpha(g^{-1},g\omega)x^0_{g\omega}}(x^0_\omega)\right)d\pi_\omega(\xi) \\
&\overset{\alpha \text{ iso.}}{=} \int_{B_\omega} b_{\alpha(g,\omega)\xi,x^0_{g\omega}}(x)d\pi_\omega(\xi) - \int_{B_\omega} b_{\alpha(g,\omega)\xi,x^0_{g\omega}}(\alpha(g,\omega)x^0_\omega)d\pi_\omega(\xi) \\
&= \int_{B_\omega} b_{x,x^0_{g\omega}}(\alpha(g,\omega)\xi)d\pi_\omega(\xi) - \int_{B_\omega} b_{\alpha(g,\omega)x^0_\omega,x^0_{g\omega}}(\alpha(g,\omega)\xi)d\pi_\omega(\xi) \\
&\overset{\pi_\bullet \text{ inv.}}{=} \int_{B_{g\omega}} b_{x,x^0_{g\omega}}(\xi')d\pi_{g\omega}(\xi') - \int_{B_{g\omega}} b_{\alpha(g,\omega)x^0_\omega,x^0_{g\omega}}(\xi')d\pi_{g\omega}(\xi') \\
&= b_{g\omega}(x) - b_{g\omega}(\alpha(g,\omega)x^0_\omega) \\
&\quad \left[(*) \quad b_{\xi,z}(y) = b_{\xi,x}(y) - b_{\xi,x}(z)\right]
\end{aligned}$$

Et donc la section de fonctions $b_\bullet$ est bien quasi-invariante, avec $c(g,\omega) = b_{g\omega}(\alpha(g,\omega)x^0_\omega)$ qui ne dépend pas de $x \in X$. □

Preuve du théorème

Théorème 4.2.6. *Soit G un groupe localement compact à base dénombrable, $(\Omega,\mathscr{A},\mu)$ un G-espace borélien ergodique et moyennable, X un espace CAT(0) propre de dimension topologique de recouvrement finie et $\alpha : G \times \Omega \to \mathrm{Iso}(X)$ un cocycle borélien. Alors au moins l'une des deux assertions suivantes est vérifiée :*

(I) Il existe une section invariante $[\xi_\bullet] \in L(\Omega,\partial X)$.

(II) Il existe $n \in \mathbb{N}$ et une section invariante $[P_\bullet] \in L(\Omega,\mathrm{Plat}^n(X))$.

12. Si $\xi_n \to \xi$, alors $b_{x,x_0}(\xi_n) = b_{\xi_n,x_0}(x) \to b_{\xi,x_0}(x) = b_{x,x_0}(\xi)$ pour tout $x \in X$ puisque $b_{\xi_n,x_0} \to b_{\xi,x_0}$ uniformément sur les compacts (et donc ponctuellement).

Preuve. Faisons l'hypothèse que le cas (I) n'est pas satisfait. Alors il n'existe pas de section $\xi_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega, \partial X)$ qui soit presque invariante. Par la Proposition 4.2.1, il existe $[C_\bullet]$ une classe invariante de sous-champs généralisés boréliens de convexes fermés non vides qui est minimale pour ces propriétés. Par le Lemme 2.1.11 et la Remarque 2.1.12, il existe un borélien G-invariant de mesure pleine $\Omega' \subseteq \Omega$ et un représentant $C_\bullet$ tel que $(\Omega', C_\bullet)$ soit invariant et que C_ω soit un convexe fermé non vide pour tout $\omega \in \Omega'$. On considère $(\Omega', F_\bullet)$ le sous-champ généralisé borélien (Lemme 4.1.14) des points plats de $(\Omega', \partial C_\bullet)$ et la décomposition borélienne d'Adams-Ballmann $C_\bullet \hookrightarrow E_\bullet \times Y_\bullet$ (voir le Théorème 4.1.17) [13]. On considère le sous-champ généralisé borélien $P_\bullet$ de $\partial C_\bullet$ (toujours le Lemme 4.1.14). On pose

$$\Omega_{P_\bullet} := \{\omega \in \Omega' \mid P_\omega \neq \emptyset\}$$

qui est borélien et invariant (Corollaire 4.1.11). Par ergodicité, cet ensemble est de mesure soit nulle soit pleine. S'il est de mesure pleine, alors on peut associer une section invariante

$$\xi_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega_{P_\bullet}, P_\bullet) \subseteq \mathscr{L}(\Omega_{P_\bullet}, \partial C_\bullet) \subseteq \mathscr{L}(\Omega_{P_\bullet}, \partial X).$$

En effet, on sait par le Lemme 1.7 de [AB98] que $\mathrm{rad}(P_\omega) < \pi/2$ et donc la section des centres est borélienne et invariante (Corollaire 3.4.7). C'est une contradiction avec l'hypothèse faite plus haut.

On peut donc supposer que $\Omega_{P_\bullet}$ est (G-invariant et) de mesure nulle. Le Lemme 4.1.12 montre que $C_\omega = E_\omega \times Y_\omega$ et que E_ω est de dimension finie pour tout $\omega \in \Omega' \setminus \Omega_{P_\bullet}$. Par le Corollaire 3.3.14, on a que $(\Omega' \setminus \Omega_{P_\bullet}, \partial Y_\bullet)$ est un sous-champ généralisé borélien de $(\Omega' \setminus \Omega_{P_\bullet}, C_\bullet)$. De plus, on sait que $\alpha(g,\omega) : E_\omega \times Y_\omega \to E_{g\omega} \times Y_{g\omega}$ se décompose en $(\alpha(g,\omega)_{E_\omega}, \alpha(g,\omega)_{Y_\omega})$, ce qui implique que le sous-champ généralisé $\partial Y_\bullet$ est invariant. On pose

$$\Omega_{\partial Y_\bullet} := \{\omega \in \Omega' \setminus \Omega_{P_\bullet} \mid \partial Y_\omega \neq \emptyset\}$$

qui est donc borélien et G-invariant. Par ergodicité, cet ensemble est soit de mesure nulle soit de mesure pleine. S'il est de mesure nulle, on pose, pour simplifier la notation,

$$\widetilde{\Omega} := \Omega' \setminus (\Omega_{P_\bullet} \cup \Omega_{\partial Y_\bullet})$$

qui est un borélien G-invariant de mesure pleine. $(\widetilde{\Omega}, Y_\bullet)$ est un champ borélien de bornés et donc on peut considérer la section des centres $c_{Y_\bullet} \in \mathscr{L}(\widetilde{\Omega}, Y_\bullet)$. Alors $(\widetilde{\Omega}, E_\bullet \times \{c_{Y_\bullet}\})$ est un sous-champ borélien de $C_\bullet$ (et donc de X) qui est invariant et constitué d'espaces de Hilbert. Par ergodicité et par le Lemme 1.6.5 sur la "boréliannité" des dimensions, il est facile de montrer qu'il existe un borélien $\Omega'' \subseteq \widetilde{\Omega}$, G-invariant et de mesure pleine ainsi qu'un entier n tel que $(\Omega'', E_\bullet \times \{c_{Y_\bullet}\})$ soit un sous-champ borélien invariant de X et que $E_\omega \times \{c_{Y_\omega}\} \overset{\text{iso.}}{\simeq} \mathbb{R}^n$. On est donc dans le cas (II).

Ainsi on peut supposer que $\Omega_{\partial Y_\bullet}$ est de mesure pleine. Puisque (G, Ω) est moyennable, il existe (Définition 2.1.13 et Exemple 2.1.15) une section de mesures de probabilité $\tilde{\pi}_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega_{\partial Y_\bullet}, \mathrm{Prob}(\partial Y_\bullet))$ qui est presque-invariante. Par le Lemme 2.1.11 et la Remarque 2.1.12, il existe un borélien G-invariant de mesure pleine $\Omega'' \subseteq \Omega_{\partial Y_\bullet}$ et une section invariante $\pi_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega'', \mathrm{Prob}(\partial Y_\bullet))$. Par la Proposition 4.2.5, la section de fonctions convexes

$$b_\bullet \in \mathscr{S}(\Omega'', \mathscr{F}(X))$$

définie, pour $x^0_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega', C_\bullet)$ fixée, par

$$b_\omega(x) = \int_{\partial Y_\omega} b_{\xi, x^0_\omega}(x)\, d\pi_\omega(\xi)$$

13. Si $F_\omega = \emptyset$, alors la décomposition est triviale avec $E_\omega = \{*\}$ et $Y_\omega = C_\omega$.

est telle que $b_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega'', \mathscr{C}(X))$ et que b_ω est convexe pour tout $\omega \in \Omega''$. De plus, elle est quasi-invariante. Définissons, pour tout $\omega \in \Omega''$, f_ω comme étant la restriction de b_ω à C_ω. Alors $f_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega'', \mathscr{C}(C_\bullet))$ et est quasi-invariante. Par le Lemme 4.2.4, les sous-ensembles

$$\begin{aligned} \Omega_{\text{inf}} &= \{\omega \in \Omega'' \mid \inf f_\omega \text{ n'est pas atteint}\} \\ \Omega_{\text{min}} &= \{\omega \in \Omega'' \mid \inf f_\omega \text{ est atteint}\} \end{aligned}$$

sont boréliens et G-invariants. Par ergodicité, l'un est de mesure pleine et l'autre de mesure nulle. Si $\mu(\Omega_{\text{inf}}) = 1$, alors il existe (toujours par le Lemme 4.2.4) une section $\xi_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega_{\text{inf}}, \partial Y_\bullet)$ qui est invariante. Ceci contredit l'hypothèse faite plus haut.

On peut donc supposer que $\mu(\Omega_{\text{min}}) = 1$. Dans ce cas, $B_\bullet := \left(b_\bullet|_{\Omega_{\text{min}}} - \min(b_\bullet|_{\Omega_{\text{min}}})\right)^{-1}(\{0\})$ est un sous-champ borélien invariant de convexes, fermés, non vides. Par minimalité de $[C_\bullet]$, il existe un borélien $\widetilde{\Omega} \subseteq \Omega_{\text{min}}$ de mesure pleine tel que $B_\omega = C_\omega$ pour tout $\omega \in \widetilde{\Omega}$. Ainsi, b_ω est constante et les points de ∂Y_ω dans le support de π_ω sont plats (voir Lemme 4.1.13) pour tout $\omega \in \widetilde{\Omega}$, ce qui est impossible par construction de Y_ω. □

4.2.2 Cas d'une relation d'équivalence moyennable

On s'intéresse maintenant aux relations d'équivalence. Les seules différences avec les cas des G-espaces sont d'une part le fait que $\mathscr{R}$ agit sur des champs non-triviaux et d'autre part que les "presque partout" sont plus faciles à gérer (comme l'explique la remarque qui suit).

Remarque 4.2.7. Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ un espace de probabilité standard et $\mathscr{R} \subseteq \Omega^2$ une relation d'équivalence borélienne qui préserve quasiment la mesure et qui agit par isométries sur un champ d'espaces métriques $X_\bullet$. Soit $A_\bullet$ un sous-champ généralisé borélien qui est presque $\mathscr{R}$-invariant et Ω' un borélien de mesure pleine $\mathscr{R}$-invariant tel que $(\Omega', A_\bullet)$ est $\mathscr{R}|_{\Omega'}$-invariant (ceci existe toujours, voir la Remarque 2.2.15). Alors il est clair que $\{\omega \in \Omega' \mid A_\omega \neq \emptyset\}$ est $\mathscr{R}$-invariant.

Le fait que les relations agissent sur des champs non-triviaux ne compliquent pas les preuves de la Section 4.2.1. On se contente donc de donner les "versions relations d'équivalence des énoncés".

Champ de convexes et section fixe à l'infini

Proposition 4.2.8. *Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ un espace de probabilité standard, $\mathscr{R} \subseteq \Omega^2$ une relation d'équivalence borélienne dénombrable quasi-préservant la mesure et ergodique, $X_\bullet$ un champ borélien d'espaces CAT(0) propres de dimension de recouvrement finie et une action $\mathscr{R} \curvearrowright X_\bullet$ par isométries. Supposons qu'il n'existe pas de classe invariante de sous-champs généralisés boréliens de convexes fermés non vides presque partout qui soit minimale pour ces propriétés. Alors il existe une classe de sections $\mathscr{R}$-invariante $[\xi_\bullet] \in \mathscr{L}(\Omega, \partial X_\bullet)$.*

Sections de fonctions quasi-invariantes

Définition 4.2.9. *Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace borélien standard, $\mathscr{R} \subseteq \Omega^2$ une relation d'équivalence borélienne dénombrable, $X_\bullet$ un champ borélien d'espaces métriques propres et α une action par isométries de $\mathscr{R}$ sur $X_\bullet$. Une section de fonctions $f_\bullet \in \mathscr{S}(\Omega, \mathscr{F}(X_\bullet))$ est dite $\mathscr{R}$-quasi invariante s'il existe une fonction $c : \mathscr{R} \to \mathbb{R}, (\omega, \omega') \mapsto c(\omega, \omega')$ telle que $\widetilde{\alpha}(\omega, \omega') f_\omega = f_{\omega'} + c(\omega, \omega')$.*

Remarque 4.2.10. Comme pour les G-espaces, la fonction c ci-dessus est un cocycle additif.

Lemme 4.2.11. *Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace borélien standard, $\mathscr{R} \subseteq \Omega^2$ une relation d'équivalence borélienne dénombrable, $X_\bullet$ un champ borélien d'espaces CAT(0) propres et α une action par isométries de $\mathscr{R}$ sur $X_\bullet$. Soit $f_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega, \mathscr{C}(X_\bullet))$ une section $\mathscr{R}$-quasi invariante et telle que f_ω soit convexe pour tout $\omega \in \Omega$.*

(i) Posons

$$\begin{array}{rcl}\Omega_{\inf=-\infty} & := & \{\omega\in\Omega \mid \inf f_\omega=-\infty\},\\ \Omega_{\inf>-\infty} & := & \{\omega\in\Omega \mid \inf f_\omega>-\infty \textit{ et n'est pas atteint}\}\\ \Omega_{\min} & := & \{\omega\in\Omega \mid \inf f_\omega \textit{ est atteint}\}.\end{array}$$

Alors ces trois ensembles sont des boréliens $\mathscr{R}$-invariants.

(ii) $(f_\bullet\, |_{\Omega_{\min}} - \min(f_\bullet\, |_{\Omega_{\min}}))^{-1}(\{0\})$ est un sous-champ borélien de $(\Omega_{\min})$, $\mathscr{R}\, |_{\Omega_{\min}}$-invariant de fermés, convexes, non vides.

(iii) Posons $\Omega_{\inf} := \Omega_{\inf=-\infty}\cup\Omega_{\inf>-\infty}$. Alors il existe une section $\xi_\bullet\in\mathscr{L}(\Omega_{\inf},\partial X_\bullet)$ qui est $\mathscr{R}\, |_{\Omega_{\inf}}$-invariante.

Proposition 4.2.12. *Soit $(\Omega,\mathscr{A},\mu)$ un espace de probabilité standard, $\mathscr{R}\subseteq\Omega^2$ une relation d'équivalence borélienne dénombrable quasi-préservant la mesure μ, $X_\bullet$ un champ borélien d'espaces CAT(0) propres et α une action par isométries de $\mathscr{R}$ sur $X_\bullet$. Supposons de plus qu'il existe $B_\bullet$ un sous-champ borélien $\mathscr{R}$-invariant de fermés de $\partial X_\bullet$ (pour l'action induite sur le bord) et $\pi_\bullet\in\mathscr{L}(\Omega,Prob(B_\bullet))$ également $\mathscr{R}$-invariante (pour l'action induite, voir l'Exemple 2.2.29). Fixons $x^0_\bullet\in\mathscr{L}(\Omega,X_\bullet)$ une section de points bases. Pour tout $\omega\in\Omega$, définissons la fonction*

$$\begin{array}{rccl} b_\omega: & X_\omega & \to & \mathbb{R}\\ & x & \mapsto & \int_{B_\omega} b_{\xi,x^0_\omega}(x)\,d\pi_\omega(\xi).\end{array}$$

Alors b_ω est convexe pour tout $\omega\in\Omega$, $b_\bullet\in\mathscr{L}(\Omega,\mathscr{C}(X_\bullet))$ et est quasi-invariante.

Énoncé du théorème

Théorème 4.2.13. *Soit $(\Omega,\mathscr{A},\mu)$ un espace de probabilité standard, $\mathscr{R}\subseteq\Omega^2$ une relation d'équivalence borélienne dénombrable quasi-préservant la mesure, ergodique et moyennable, $X_\bullet$ un champ borélien d'espaces CAT(0) propres de dimension topologique de recouvrement finie de structure borélienne $\mathscr{L}(\Omega,X_\bullet)$ et α une action par isométries de $\mathscr{R}$ sur $X_\bullet$. Alors au moins l'une des deux assertions suivantes est vérifiée :*

(I) Il existe une section $\mathscr{R}$-invariante $[\xi_\bullet]\in L(\Omega,\partial X_\bullet)$.

(II) Il existe un entier $n\geq 1$ et une classe d'équivalence de sous-champ borélien de plats $\mathscr{R}$-invariante $[P_\bullet]\in L(\Omega\,\mathrm{Plat}^n(X_\bullet))$.

Remarque 4.2.14. On peut se demander pourquoi on ne pourrait pas définir une action d'un G-espace sur un champ borélien d'espaces métriques qui ne serait pas trivial en copiant celle d'une relation d'équivalence [14] et espérer prouver un théorème similaire à celui ci-dessus. Le problème semble double : d'une part la moyennabilité est définie pour un champ trivial (et il n'existe pas d'équivalent du Théorème de Conne-Feldman-Moore pour les G-espaces) et d'autre part les presque partout deviendraient plus difficiles à gérer (il faudrait en particulier prouver un équivalent du Lemme 2.1.11).

14. L'action serait alors la donnée d'une famille d'applications $\{\alpha(g,\omega): X_\omega\to X_{g\omega}\}_{(g,\omega)\in G\times\Omega}$ telle que la relation de cocycle a lieu et telle que l'action induite de G sur les sections préserve la structure borélienne.

Chapitre 5

Bord fort et espace de rang 2

5.1 Bord fort d'un groupe

Définition 5.1.1 ([Mo01],[BM02]). *Soit G un groupe. Un G-module de Banach (B,π) est la donnée d'un espace de Banach B et d'une représentation π de G dans le groupe des isométries linéaires de B. Pour un groupe topologique G, le module est dit continu si l'application $G\times B\to B,\ (g,x)\mapsto \pi(g)x$ est continue (ou de manière équivalente si pour tout $x\in B$ l'application $G\to B,\ g\mapsto \pi(g)x$ est continue).*

Un G-module de Banach à coefficients (B,π) est le contragredient d'un G-module de Banach séparable continu $(B^\sharp,\pi^\sharp)$, c'est-à-dire que B est le dual d'un espace séparable $B^\sharp$ et que $\pi(g)=\pi^\sharp(g^{-1})^*$ où $\pi^\sharp$ est une action continue de G sur B.

Définition 5.1.2. *Soit G un groupe localement compact à base dénombrable et $(\Omega,\mathscr{A},\mu)$ un G-espace de probabilité standard. Soit (B,π) un G-module à coefficient, on dit que Ω est (B,π)-ergodique si toute application faible-$*$ borélienne équivariante $f:\Omega\to B$ est essentiellement constante. On dit que Ω est $\mathfrak{X}^{sep}$-ergodique si Ω est (B,π)-ergodique pour tout (B,π) G-module à coefficients séparable.*

Le G-espace de probabilité standard Ω est appelé un bord fort de G s'il est moyennable et si l'action diagonale sur $\Omega\times\Omega$ est $\mathfrak{X}^{sep}$-ergodique.

Voici l'exemple principal de bord fort d'un groupe.

Théorème 5.1.3 (Théorème 6 de [BM02] pour un cas particulier et Théorème 3 de [Ka03] pour la version générale). *Soit G un groupe localement compact à base dénombrable. Le bord de Poisson obtenu à partir d'une mesure de probabilité symétrique étalée et non-dégénérée sur G est un bord fort pour G.*

On renvoie à [KaVe83] pour la définition du bord de Poisson.

Remarques 5.1.4. (1) Si H est un espace de Hilbert séparable et π est une représentation unitaire continue de G. Alors (H,π) est un G-module de Banach à coefficients séparable. En effet, H est isométrique à son dual.
(2) Si $(\Omega,\mathscr{A},\mu)$ est un G-espace $\mathfrak{X}^{\mathrm{sep}}$-ergodique, alors en particulier c'est un G-espace ergodique.
(3) Si $(\Omega,\mathscr{A},\mu)$ est un G-espace doublement ergodique, alors en particulier c'est un G-espace ergodique.

5.2 Énoncé du théorème et stratégie de la preuve

Voici le but de ce chapitre.

Théorème 5.2.1. *Soit G un groupe localement compact à base dénombrable, Ω un bord fort de G et X un espace $CAT(0)$ propre de dimension topologique de recouvrement finie et dont les plats sont de dimension au plus 2. Si G agit sur X, alors l'une des deux propositions suivantes au moins est vérifiée* *(i) Il existe un plat invariant de X.*

(ii) Il existe une section invariante $[\xi_\bullet] \in L(\Omega, \partial X)$.

En considérant le cocycle $G \times \Omega \to \mathrm{Iso}(X)$, $(g, \omega) \mapsto g$, on sait (par le Théorème 4.2.6) que l'une des deux alternatives suivantes est vérifiée :

(i) Il existe un champ borélien de plats invariant.

(ii) Il existe une section borélienne de points du bord invariante.

On va montrer que, sous les hypothèses du Théorème 5.2.1, l'existence d'un champ borélien de plats invariant $P_\bullet$ implique l'existence d'un plat invariant. Si les plats sont de dimension 0, *i.e.* sont des points, alors la double ergodicité garantit l'existence d'un point fixe pour G. En effet, on peut vérifier que si Ω est un G-espace doublement ergodique et que X est un espace métrique séparable sur lequel G agit par isométries, alors toute fonction borélienne équivariantt $f : \Omega \to X$ est essentiellement constante [1]. Lorsque Ω est doublement ergodique à coefficients et que X est CAT(0), on peut montrer plus : l'existence d'une section borélienne de deux variables invariante $x_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega \times \Omega, X)$ garantit l'existence d'un point fixe. Dans le cas où les plats du champ invariant ne sont pas des points, on va étudier les intersections $\partial P_{\omega_1} \cap \partial P_{\omega_2}$ pour $(\omega_1, \omega_2) \in \Omega^2$ (qui sont isométriques à des sous-ensembles π-convexes d'une sphère de dimension 1). On montrera que si $\partial P_{\omega_1} \cap \partial P_{\omega_2}$ est isométrique à une sous-sphère pour presque tout $(\omega_1, \omega_2) \in \Omega^2$, alors ces sous-sphères doivent être de dimension maximale. Dans ce cas, on obtiendra ainsi une mesure de probabilité invariante sur le bord ce qui nous permettra d'utiliser l'argument final du Théorème d'Adams-Ballmann pour conclure qu'il existe soit un point du bord invariant soit un plat invariant. Si $\mathrm{rad}(\partial P_{\omega_1} \cap \partial P_{\omega_2}) < \pi/2$, on montrera qu'on peut associer au champ de plats invariant une section borélienne invariante $\Omega \times \Omega \to X$, d'où l'existence d'un point fixe. Finalement, il restera le cas où $\mathrm{rad}(\partial P_{\omega_1} \cap \partial P_{\omega_2}) = \pi/2$. Comme on a fait l'hypothèse [2] que les plats de X sont de dimension au plus 2, ceci est possible seulement si $\partial P_{\omega_1} \cap \partial P_{\omega_2}$ est isométrique à un demi-cercle. Dans ce cas, on montrera qu'il existe une mesure de probabilité invariante sur le bord de X et donc soit un point à l'infini invariant, soit un plat invariant.

5.3 Fonctions convexes et 1-Lipschitz

On prouve dans cette section certains résultats sur les fonctions convexes 1-Lipschitz et positives sur $\mathbb{R}^n$. Ces fonctions apparaissent naturellement lorsqu'on considère la distance entre deux plats dans un espace CAT(0) (voir l'Exemple 5.3.4).

Lemme 5.3.1. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ une fonction convexe. Alors*

(i) $\lim_{t\to\infty} f(t)$ existe toujours (peut-être égale à l'infini) et

$$\lim_{t\to\infty} f(t) < \infty \quad \Longleftrightarrow \quad f \text{ est décroissante}.$$

(ii) Si f est bornée, alors f est constante.

Preuve. (i) Si f est décroissante, il est clair que $\lim_{t\to\infty} f(t)$ existe et est plus petite que l'infini. Supposons que f ne soit pas décroissante. Alors il existe $t_1 > t_0$ tel que $f(t_1) > f(t_0)$. Par convexité, on a l'inégalité suivante

$$f(t_1) \leq (1 - \frac{1}{s}) f(t_0) + \frac{1}{s} f(t_0 + s(t_1 - t_0)) \quad \text{pour tout } s \geq 1$$

1. Évidemment, on ne peut pas appliquer ce résultat aux plats d'un espace CAT(0), puisqu'il semble difficile de mettre une métrique sur l'ensemble des plats qui soit invariante par isométries et dont la topologie déduite soit séparable.

2. c'est le seul endroit où on l'utilisera.

d'où

$$f(t_0+s(t_1-t_0)) \geq s\big(f(t_1)-\underbrace{(1-\frac{1}{s})}_{\leq 1}f(t_0)\big) \geq s(f(t_1)-f(t_0)) \quad \text{pour tout } s \geq 1.$$

Ainsi, $f(t) \to \infty$ quand $t \to \infty$.
(ii) Par (i), f et $\overline{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}, t \mapsto f(-t)$ sont décroissantes. Ainsi f est décroissante et croissante, c'est-à-dire constante. □

Définition 5.3.2. *On note*

$$\mathscr{F}_{conv}(\mathbb{R}^n) = \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0} \mid f \text{ est convexe et 1-Lipschitz}\}.$$

Pour $f \in \mathscr{F}_{conv}$, on définit le bord de f, qu'on note ∂f, par

$$\partial f := \{\xi \in \mathbb{S}^{n-1} \mid \lim_{t\to\infty} f(t\xi) < \infty\}.$$

Remarque 5.3.3. On a quelques propriétés évidentes du bord d'une fonction convexe 1-Lipschitz

(i) $\partial f = \{\xi \in \mathbb{S}^{n-1} \mid \lim_{t\to\infty} f(x+t\xi) < \infty\}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ car f est 1-Lipschitz.

(ii) ∂f est π-convexe puisque f est convexe.

(iii) $\partial f = \partial\big(f^{-1}([0, \inf f + \varepsilon])\big)$ pour tout $\varepsilon > 0$.
[$\subseteq$] Si $x_0 \in f^{-1}([0, \inf f + \varepsilon])$ et $\xi \in \partial f$, alors $c_{\xi,x_0}([0,\infty[) \subseteq \big(f^{-1}([0, \inf f + \varepsilon])\big)$ puisque $f(x_0 + t\xi)$ est décroissante en t par (i) (voir Lemme 5.3.1).
[$\supseteq$] Évident par (i) .

(iv) Si $\inf f$ est atteint, alors $\partial f = \partial\big(f^{-1}(\{\min f\})\big)$ (même preuve que pour (iii)).

(v) Posons
$$A_f = \{\xi \in \partial f \mid -\xi \in \partial f\} = \partial f \cap (-\partial f) \simeq \mathbb{S}^k$$
et
$$P_f = \{\xi \in \partial f \mid \angle(\xi, A_f) = \pi/2\} \quad (P_f = \partial f \text{ si } A_f = \emptyset).$$
Si $P_f \neq \emptyset$, alors $\partial f = A_f * P_f$ et P_f est de rayon strictement plus petit que $\pi/2$.

(vi) La fonction f est constante sur les sous-espaces affines dont le bord est A_f. En particulier, si $\partial f = \mathbb{S}^{n-1}$, alors f est constante.

Exemple 5.3.4. Si X est un espace CAT(0), P et Q sont des plats de X de dimension n. Soit $\varphi : \mathbb{R}^n \to P$ une isométrie. Alors l'application $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, $x \mapsto d(\varphi(x), Q)$ est une fonction convexe. De plus, ∂f est isométrique à $\partial P \cap \partial Q$.

Une notion qui sera indispensable dans la suite est celle d'action lisse (dans le sens borélien).

Définition 5.3.5. *Soit H un groupe localement compact à base dénombrable et S un espace Borélien dénombrablement séparé (Définition 0.0.1). Une action borélienne de H sur S est dite lisse si le quotient S/H est dénombrablement séparé.*

L'intérêt d'une action lisse est justifié par le Lemme suivant (qui est un résultat classique de la théorie ergodique)

Lemme 5.3.6 (Voir par exemple [Zim84], Proposition 2.12)**.** *Soit G un groupe localement compact à base dénombrable, $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ un G-espace ergodique et Y un espace dénombrablement séparé. Alors toute fonction borélienne invariante $f : \Omega \to Y$ est essentiellement constante.*

Exemple 5.3.7. Si X est un espace métrique séparable, alors $\mathrm{Iso}(X)$ agit de manière lisse sur X. En effet, le quotient est métrisable par la métrique

$$\delta([x],[y]) := \inf_{g\in \mathrm{Iso}(X)} d(x,gy).$$

En effet, cette application est bien définie (indépendante du choix des représentants car on considère des isométries) et satisfait l'inégalité du triangle :

$$\begin{aligned}\delta([x],[z]) &= \inf_{g\in\mathrm{Iso}(X)} d(x,gz) \leq \inf_{g\in\mathrm{Iso}(X)}\inf_{h\in\mathrm{Iso}(X)} d(x,hy)+d(hy,gz)\\ &= \inf_{h\in\mathrm{Iso}(X)} d(x,hy)+\inf_{g\in\mathrm{Iso}(X)}\inf_{h\in\mathrm{Iso}(X)} \underbrace{d(hy,gz)}_{=d(y,h^{-1}gz)} = \delta([x],[y])+\delta([y],[z])\end{aligned}$$

Définition 5.3.8. *Soit X un espace topologique. Un sous-ensemble $A\subseteq X$ est dit localement fermé si pour tout $x\in A$ il existe un voisinage ouvert V de x tel que $V\cap A$ est fermé dans V. Cela est équivalent à dire que A est l'intersection d'un ouvert et d'un fermé.*

Proposition 5.3.9 (Voir par exemple [Zim84], Proposition 2.1.14)**.** *Soit G un groupe localement compact à base dénombrable, X un espace polonais et supposons que G agisse continûment sur X. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) Toutes les orbites Gx sont localement fermées.

(ii) L'action est lisse.

(iii) Pour tout $x\in X$ l'application $G/G_x\to Gx$ est un homéomorphisme (lorsqu'on munit Gx de la topologie induite par celle de X).

Proposition 5.3.10. $\mathrm{Iso}(\mathbb{R}^n)$ *agit de manière lisse sur $\mathscr{F}_{conv}(\mathbb{R}^n)$.*

Preuve. On va utiliser la Proposition 5.3.9. Pour ce faire, il faut commencer par vérifier que $\mathscr{F}_{\mathrm{conv}}(\mathbb{R}^n)$ est polonais et que $\mathrm{Iso}(\mathbb{R}^n)$ agit continûment dessus. Comme $\mathscr{F}_{\mathrm{conv}}(\mathbb{R}^n)$ est un sous-ensemble de $\mathscr{C}(\mathbb{R}^n)$ qui est polonais pour la topologie de la convergence uniforme sur les compacts (Proposition 1.5.1), il suffit d'observer que c'est un sous-ensemble fermé [3]. La vérification que le groupe d'isométries d'un espace métrique propre (muni de la topologie compact ouverte) est un groupe topologique localement compact à base dénombrable et que son action sur $\mathscr{C}(X)$ est continue est directe. Par acquis de conscience, la preuve est donnée en annexe (Lemmes B.3.1 et B.3.2).
Pour tout $\gamma\in\mathrm{Iso}(\mathbb{R}^n)$, on note $\gamma=(M,\tau)\in\mathscr{O}(n)\ltimes\mathbb{R}^n$ où $\gamma(x)=M(x-\tau)$ (la raison de cette convention quelque peu étrange deviendra clair dans le reste de la preuve). Supposons maintenant qu'il existe une suite $\{\gamma_n\}_{n\geq 1}\subseteq\mathrm{Iso}(\mathbb{R}^n)$ tel que $\gamma_n f\to g$. Comme $\mathscr{O}(n)$ est compact et que $(\mathbb{R}^n)^*\overset{\text{homéo.}}{\simeq}\mathbb{S}^{n-1}\times\mathbb{R}_{>0}$, il existe une suite $\gamma'_n=(M,t_n b)$ où $b\in\mathbb{S}^{n-1}$ et $\{t_n\}_{n\geq1}\subseteq\mathbb{R}_{\geq 0}$ telle que $\gamma'_n f\to g$. En particulier, $t_n b(f)\to M^{-1}(g)$ et donc $t_n b(f)$ doit converger.
Fixons maintenant f et montrons que son orbite est localement fermée. Soit donc $\{\gamma_n=(M,t_nb)\}_{n\geq1}$ telle que $\gamma_n f\to g$. Si $\sup t_n<\infty$, il suffit de prendre t_0 un point d'accumulation pour avoir que $g=(M,t_0b)f$. On peut donc supposer (quitte à passer à une sous-suite) que $t_n\to\infty$. Mais alors b doit appartenir à ∂f, sinon on aurait $t_nb(f)(x)=f(x+tb_n)\to\infty$, ce qui n'est pas possible puisque $t_nb(f)\to M^{-1}g$. Observons encore que si $b,-b\in\partial f$, alors la fonction est constante sur les droites $\{x_0+tb\mid t\in\mathbb{R}\}$ et donc $g=Mf$. On s'est donc ramené au cas où $t_n\to\infty$, $b\in\partial f$ et $-b\notin\partial f$ (en particulier, on a vu que si [4] $P_f=\emptyset$, alors les orbites sont fermées). En fait, on peut même supposer que $g=\lim_{n\to\infty}(M,nb)f$, puisque cette limite ne dépend pas d'un choix particulier d'une suite $\{t_n\}_{n\geq1}$ qui tend vers l'infini. En effet, pour tout $b\in\partial f$ la limite $g_b=\lim_{t\to\infty} tb(f)$

3. La propriété d'être 1-Lipschitz et la convexité sont préservées par la convergence ponctuelle et donc *a fortiori* pour la convergence uniforme sur les compacts.

4. C'est-à-dire si $\partial f=\emptyset$ ou $\partial f=\mathbb{S}^k$ $(0\leq k\leq n-1)$.

existe, puisqu'elle vaut $\lim_{t\to\infty}((\mathrm{id}, tb)f)(x) = \lim_{t\to\infty} f(x+tb)$.

Il suffit donc de montrer qu'il existe un voisinage V de f tel que $Mg_b \notin V$ pour tout $b \in \partial f \setminus (-\partial f)$ et $M \in \mathcal{O}(n)$. Commençons par noter ξ_c le centre de P_f (qui est également le centre de ∂f). Sans perdre la généralité, on peut choisir un repère orthonormé tel que $\xi_c = (1,0,\ldots,0)$ et $A_f = \partial\big(\{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1 = x_2 = \ldots = x_k = 0\}\big)$ où $(2 \le k \le n)$. En particulier, on a que

$$\partial f \cap \partial\big(\underbrace{\{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \le 0, x_{k+1} = \ldots = x_n = 0\}}_{:=E_{1^-,2,\ldots,k}}\big) = \emptyset.$$

Observons que le sous-espace $E := \mathbb{R}b \oplus E_{k+1,\ldots,n} = \mathbb{R}b \oplus \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1 = x_2 = \ldots = x_k = 0\}$ est de dimension $n-k+1$ et satisfait que [5]

$$g_b(x) = \lim_{t\to\infty} f(x+tb) = \lim_{t\to\infty} f(tb) \le f(0) \quad \text{pour tout } x \in E. \tag{5.1}$$

Maintenant fixons $\varepsilon > 0$ et posons

$$R_0 := \sup_{\eta \in \partial E_{1^-,2,\ldots k}} \big\{\sup\{t \in \mathbb{R}_{\ge 0} \mid f(t\eta) \le f(0)+\varepsilon\}\big\}$$

qui est fini puisque $\partial f \cap \partial E_{1^-,2,\ldots,k} = \emptyset$ et que $\partial E_{1^-,2,\ldots,k}$ est compact. On fixe $R > R_0$.

Affirmation. On note $S(R) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = R\}$. Alors $S(R) \cap f^{-1}([0, f(0)+\varepsilon])$ ne contient pas de sous-sphère de dimension $n-k$ et de rayon R.

Preuve de l'affirmation. Observons que

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \le 0, f(x) \le f(0)+\varepsilon\} \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|(x_1,\ldots,x_k)\| \le R_0\}$$

puisque f est constante dans les directions $k+1,\ldots,n$ et par choix de R_0. Donc si

$$x, -x \in f^{-1}([0, f(0)+\varepsilon]) \cap S(R),$$

on a que

$$\|(x_1,\ldots,x_k)\| \le R_0 \text{ et } \|x\| = R,$$

c'est-à-dire que

$$\|(x_{k+1},\ldots,x_n)\| \ge \sqrt{R^2 - R_0^2} > 0.$$

Mais un sous-espace de dimension $n-k+1$ (associé à une sphère de dimension $n-k$) doit nécessairement intersecter le sous-espace $E_{1,\ldots,k}$ puisque celui-ci est de dimension k. Il n'est donc pas possible d'avoir une sous-sphère S de dimension $n-k$ et de rayon R telle que $\|(x_{k+1},\ldots,x_n)\| > 0$ pour tout $x \in S$. □

Ainsi, on a montré que pour tout disque D de rayon R et de dimension $n-k+1$, $\sup_{x\in D} f(x) \ge f(0)+\varepsilon$. Si on choisit comme voisinage de f

$$V = \{h \in \mathscr{F}_{\mathrm{conv}}(\mathbb{R}^n) \mid \|(h-f)|_{\overline{B}(0,R)}\| < \varepsilon\},$$

on a effectivement que $Mg_b \notin V$ pour tout $b \in \partial f \setminus A$ et $M \in \mathcal{O}(n)$ par (5.1). □

Lemme 5.3.11. *Soit $f \in \mathscr{F}_{conv}(\mathbb{R}^n)$ telle que $\partial f \cap (-\partial f) = \emptyset$. Alors* $\mathrm{Iso}(\mathbb{R}^n)_f$ *admet un point fixe.*

5. Puisque f est constante sur $\{x \in \mathbb{R}^n \mid x_2 = x_3 = \ldots = x_k = 0\}$ et décroissante dans la direction b.

Preuve. Si $\partial f = \emptyset$, alors $\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = \min f\}$ est borné et son centre est invariant. On peut donc considérer le cas $\partial f \neq \emptyset$ et noter le centre ξ_c de ∂f. Sans restreindre la généralité, on peut supposer que $\xi_c = (1, 0, \ldots, 0)$. Pour $\gamma \in \mathrm{Iso}(\mathbb{R}^n)$, écrivons $\gamma = (M, b) \in \mathscr{O}(n) \ltimes \mathbb{R}^n$ avec la convention[6] que $\gamma(x) = M(x) + b$. Si $\gamma \in \mathrm{Iso}(\mathbb{R}^n)_f$, alors $M \in \{1\} \times \mathscr{O}(n-1) \subseteq \mathscr{O}(n)$ car ξ_c est invariant. On observe aussi que $b = (0, b_2, \ldots, b_n)$ puisque si $b_1 < 0$ (respectivement $b_1 > 0$), alors la suite $\{\gamma^n(0)\}_{n\geq 1}$ (respectivement $\{\gamma^{-n}(0)\}_{n\geq 1}$) tend vers un point du bord qui se trouve dans l'hémisphère ouvert centré en $-\xi_c$ ce qui n'est pas possible (puisque ∂f est contenu dans l'hémisphère centré en ξ_c). Ainsi,

$$< \nu(\xi_c) >^\perp = \{0\} \times \mathbb{R}^{n-1} \text{ est } \mathrm{Iso}(\mathbb{R}^n)_f\text{-invariant.}$$

Et puisque $\partial\big(< \nu(\xi_c) >^\perp \big) \cap \partial f = \emptyset$ (car ξ_c est le centre de ∂f et que $\mathrm{rad}(\partial f) < \pi/2$), on obtient qu'il existe une $\mathrm{Iso}(\mathbb{R}^n)_f$-orbite bornée, et donc un point fixe. □

5.4 Fonctions équivariantes

On montre dans cette section les deux résulats relatifs aux fonctions équivariantes annoncés dans la Section 5.2 sur la stratégie de la preuve du théorème principal de ce chapitre.

Double ergodicité

Lemme 5.4.1. *Soit G un groupe topologique localement compact à base dénombrable, $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ un G-espace doublement ergodique et X un espace métrique séparable sur lequel G agit par isométries. Alors toute application borélienne équivariante $\varphi : \Omega \to X$ est constante presque partout.*

Preuve. On décompose la preuve en plusieurs étapes.
(1) On commence par montrer que la relations d'équivalence $\mathscr{R}$ définie par

$$\mathscr{R} = \{(\omega_1, \omega_2) \in \Omega^2 \mid \varphi(\omega_1) = \varphi(\omega_2)\}$$

est de mesure produit pleine.
Pour ce faire, on définit une fonction borélienne f par

$$\begin{array}{rcccccc} f: & \Omega \times \Omega & \stackrel{\varphi\times\varphi}{\to} & X \times X & \stackrel{d}{\to} & \mathbb{R} \\ & (\omega_1, \omega_2) & \mapsto & (\varphi(\omega_1), \varphi(\omega_2)) & \mapsto & d(\varphi(\omega_1), \varphi(\omega_2)). \end{array}$$

On a

$$f(g(\omega_1, \omega_2)) = d(\varphi(g(\omega_1)), \varphi(g(\omega_2))) = d(g(\varphi(\omega_1)), g(\varphi(\omega_2)))) = d(\varphi(\omega_1), \varphi(\omega_2))$$

c'est-à-dire f est invariante, et donc f est constante presque partout (Lemme 5.3.6). Il reste à montrer que cette constante, que l'on note provisoirement c, est nulle. On commence par observer que la séparabilité de X entraîne, pour tout $\varepsilon > 0$, l'existence d'un $x \in X$ tel que

$$\mu\big(\{\omega \in \Omega \mid \varphi(\omega) \in B(x, \varepsilon)\}\big) > 0.$$

Mais alors

$$(\mu \otimes \mu)\big(\{(\omega_1, \omega_2) \in \Omega^2 \mid \varphi(\omega_1), \varphi(\omega_2) \in B(x, \varepsilon)\}\big) > 0$$

Ainsi, $c < 2\varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$, c'est-à-dire que $(\mu \otimes \mu)(\mathscr{R}) = 1$.
(2) On montre que si $\psi : \Omega \to X$ est une application borélienne telle que ψ n'est pas égale à une constante presque partout, alors il existe $x \in X$ et $\varepsilon > 0$ tel que

$$\mu\big(\{\omega \in \Omega \mid \psi(\omega) \in B(x, \varepsilon)\}\big), \mu\big(\{\omega \in \Omega \mid \psi(\omega) \notin B(x, \varepsilon)\}\big) > 0.$$

6. Attention ce n'est pas la même que dans la preuve de la Proposition 5.3.10

On choisit $\{x_n\}_{n\geq 1}$ une suite dense dans X et on note, pour tout $n,m \geq 1$,

$$\Omega_{n,m} := \{\omega \in \Omega \mid \psi(\omega) \in B(x_n, 1/m)\}.$$

Alors pour tout m fixé, on a que

$$\Omega = \bigcup_{n\geq 1} \Omega_{n,m},$$

et donc que $1 = \mu(\Omega) \leq \sum_{n\geq 1} \mu(\Omega_{m,n})$. Ainsi, il existe, pour tout $m \geq 1$, un entier $n(m)$ tel que $\mu(\Omega_{n(m),m}) > 0$. Supposons, par l'absurde, que pour tout $m \geq 1$ l'ensemble $\Omega_{n(m),m}$ soit de mesure pleine. On peut alors considérer le borélien de mesure pleine

$$\bigcap_{m\geq 1} \Omega_{n(m),m} = \{\omega \in \Omega \mid \psi(\omega) \in \bigcap_{m\geq 1} B(x_{n(m)}, 1/m)\}.$$

En particulier, $\bigcap_{m\geq 1} B(x_{n(m)}, 1/m) \neq \emptyset$. Mais le cardinal de cet ensemble ne peut pas être plus grand que 1, puisque si x, y sont dedans, alors $d(x,y) \leq 2/m$ pour tout $m \geq 1$, c'est-à-dire $x = y$. Ainsi, ψ est constante presque partout.

(3) On peut maintenant se lancer dans la preuve du lemme qu'on effectue par l'absurde. Par le point (2), il existe $x \in X$ et $\varepsilon > 0$ tel que $\Omega_{x,\varepsilon} := \{\omega \in \Omega \mid \varphi(\omega) \in B(x, \varepsilon)\}$ satisfasse

$$\mu(\Omega_{x,\varepsilon}), \mu(\Omega \setminus \Omega_{x,\varepsilon}) > 0.$$

Comme ces ensembles sont $\mathscr{R}$-invariants et forment une partition de Ω, on a que

$$\mathscr{R} \subseteq (\Omega_{x,\varepsilon} \times \Omega_{x,\varepsilon}) \cup (\Omega \setminus \Omega_{x,\varepsilon} \times \Omega \setminus \Omega_{x,\varepsilon}).$$

En particulier,

$$\mu(\mathscr{R}) \leq \mu(\Omega_{x,\varepsilon})^2 + (1 - \mu(\Omega_{x,\varepsilon}))^2 = 1 - 2\mu(\Omega_{x,\varepsilon}) < 1$$

ce qui contredit le point (1). □

Ergodicité avec coefficients

Soit G un groupe localement compact à base dénombrable. On note λ sa mesure de Haar invariante à droite et $L^2(G) = \{f : G \to \mathbb{R} \mid \int_G f^2 d\lambda < \infty\}$

Lemme 5.4.2. *Soit X un espace CAT(0) propre, G un groupe localement compact à base dénombrable, $\rho : G \to \mathrm{Iso}(X)$ un homomorphisme continu et Ω un G-espace ergodique avec coefficients. S'il existe $f : \Omega \to X$ équivariante, alors G admet un point fixe.*

Preuve. On effectue la preuve en deux temps.

(1) Montrons que si H est un groupe localement compact à base dénombrable et G un sous-groupe, alors G est compact si et seulement s'il existe une fonction invariante $f \in L^2(H)$.

[⇒] La fonction caractéristique appartient à $L^2(H)^G$. En effet, l'intégrale de son carré vaut $\mu(G) < \infty$ car G est compact et elle est évidemment invariante.

[⇐] Puisque $L^2(H)^G \neq \{0\}$, il existe $E \subseteq G$ qui est invariant et de mesure finie. Comme la mesure est régulière, il existe un compact $K \subseteq E$ tel que $\mu(K) > \mu(E)/2$. En particulier, $Kg \cap K \neq \emptyset$ pour tout $g \in G$ (puisque $Kg, K \subseteq E$ sont de mesure $> \mu(E)/2$). Ainsi, $G \subseteq KK^{-1}$ qui est compact (puisque l'application $K \times K \to KK^{-1}$ est continue).

(2) Muni de ce critère de compacité pour les sous-groupes, on peut s'attaquer au lemme proprement dit. Notons $H = \mathrm{Iso}(X)$. Il est facile de vérifier que H agit de manière lisse sur X (voir l'Exemple 5.3.7). Ainsi, puisque l'action de G sur Ω est en particulier ergodique, il existe $x_0 \in X$ tel que

$f(\Omega) \subseteq Hx_0$. Si on note K le stabilisateur de x_0, alors f induit $\overline{f} : \Omega \to H/K$ qui est équivariante[7]. D'autre part, on a que K est compact[8]. Par le point (1), il existe $\varphi \in L^2(H)$ qui est K-invariante. Puisque $h\varphi = h(k\varphi) = (hk)\varphi$ pour tout $h \in H$ et tout $k \in K$, on peut définir

$$\begin{array}{rccc} \widetilde{\varphi}: & \Omega & \to & L^2(H) \\ & \omega & \mapsto & \overline{f}(\omega)\varphi. \end{array}$$

On vérifie que $\widetilde{\varphi}$ est équivariante

$$\widetilde{\varphi}(g\omega) = \overline{f}(g\omega)\varphi = \rho(g)\overline{f}(\omega)\varphi = \rho(g)\widetilde{\varphi}(\omega).$$

Ainsi, par ergodicité avec coefficient, $\widetilde{\varphi}$ est constante et donc $L^2(H)^{\overline{\rho(G)}} = L^2(H)^{\rho(G)} \neq \{0\}$, ce qui montre que $\rho(G)$ est relativement compact. Ainsi, $\overline{\rho(G)}x_0$ est borné car compact (comme image de $\rho(G)$ par l'application continue $\mathrm{Iso}(X) \to X$, $\gamma \mapsto \gamma x$). L'hypothèse CAT(0) permet de conclure que le centre de cet ensemble existe et est un G-point fixe. □

5.5 Preuve du théorème

Lemme 5.5.1. *Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ un espace de probabilité standard. Soit $\varphi : \Omega \times \Omega \to [0,1]$ une application borélienne telle que pour presque tout $\omega_1 \in \Omega$ l'application $\varphi(\omega_1, \cdot)$ est essentiellement constante et que pour presque tout $\omega_2 \in \Omega$ l'application $\varphi(\cdot, \omega_2)$ est essentiellement constante. Alors φ est essentiellement constante.*

Preuve. On note

$$\begin{array}{rccc} f: & \Omega & \to & [0,1] \\ & \omega & \mapsto & \int_\omega \varphi(\omega_1, \omega_2) d\mu(\omega_2) \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rccc} g: & \Omega & \to & [0,1] \\ & \omega & \mapsto & \int_\omega \varphi(\omega_1, \omega_2) d\mu(\omega_1) \end{array}.$$

Soit $A, B \subseteq \Omega$ deux boréliens de mesure positive. On va calculer l'intégrale suivante avec Fubini de deux manières différentes :

$$\begin{aligned} \int\int_{A\times B} \big(\varphi(\omega_1,\omega_2) - f(\omega_1)\big) d\mu\otimes\mu(\omega_1,\omega_2) &= \int_A \Big(\int_B (\varphi(\omega_1,\omega_2) - f(\omega_1)) d\mu(\omega_2)\Big) d\mu(\omega_1) \\ &= \int_A (\mu(B) f(\omega_1) - \mu(B) f(\omega_1)) d\mu(\omega_1) = 0. \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} & \int\int_{A\times B} \big(\varphi(\omega_1,\omega_2) - f(\omega_1)\big) d\mu\otimes\mu(\omega_1,\omega_2) \\ = & \int_B \Big(\int_A (\varphi(\omega_1,\omega_2) - f(\omega_1)) d\mu(\omega_1)\Big) d\mu(\omega_2) \\ = & \int_B \Big(\int_A \varphi(\omega_1,\omega_2) d\mu(\omega_1)\Big) d\mu(\omega_2) - \int_B \Big(\int_A f(\omega_1) d\mu(\omega_1)\Big) d\mu(\omega_2) \\ = & \int_B \mu(A) g(\omega_2) d\mu(\omega_2) - \int_A f(\omega_1) d\mu(\omega_1) \cdot \int_B d\mu(\omega_2) = \mu(A)\int_B g - \mu(B)\int_A f. \end{aligned}$$

7. $H/K \to Hx_0$ est une bijection, $\overline{f}(\omega) = hK \iff f(\omega) = hx_0$ et $\overline{f}(g\omega) = h'K \iff h'x_0 = f(g\omega) = \rho(g)f(\omega) = \rho(g)hx_0$, d'où $\rho(g)h \equiv h' (\mod K)$.

8. $\mathrm{Iso}_{x_0} = \{g \in \mathrm{Iso}(X) \mid gx_0 = x_0\} \subseteq V(\{x_0\}, B(x_0, 1))$ qui est relativement compact (voir Lemme B.3.1). Ainsi, puisque $\mathrm{Iso}(X)_{x_0}$ est fermé, il est compact.

Ainsi, $\mu(A)\int_B g = \mu(B)\int_A f$ pour tous boréliens $A,B \subseteq \Omega$. En particulier, pour $B = \Omega$, on obtient $\int_A f = \mu(A)\int_\Omega g$ pour tout borélien A et donc f est essentiellement constante. De même pour g en posant $A = \Omega$. Ainsi, $[f] = [g] = c$ où c est une constante et donc φ est essentiellement constante. En effet,

$$\int_{\Omega^2} |\varphi(\omega_1,\omega_2) - c| d\mu \otimes \mu(\omega_1,\omega_2) = \int_\Omega \Big(\int_\Omega |\varphi(\omega_1,\omega_2) - c| d\mu(\omega_1)\Big) d\mu(\omega_2) = 0$$

□

Définition 5.5.2. *Soit $P \subseteq X$ un plat de dimension n. Un repère orthonormal de P est un $(n+1)$-uplet $b = \{b_0, b_1, \ldots, b_n\} \in P^{n+1}$ tel que*

1. *$d(b_0, b_i) = 1$ pour $i = 1, \ldots, n$,*
2. *$\angle_{b_0}(b_i, b_j) = \pi/2$ pour tout $1 \leq i < j \leq n$.*

Un tel b permet de définir une isométrie entre P et $\mathbb{R}^n$ de la manière suivante :

$$\begin{array}{llll} \varphi_b : & \mathbb{R}^n & \to & P \\ & x = (x_1, \ldots, x_n) & \mapsto & \varphi_b(x) = b_0 + \sum_{i=1}^n x_i(b_i - b_0) \end{array}$$

Lemme 5.5.3. *Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace borélien standard, $X_\bullet$ un champ d'espaces CAT(0) et $(\Omega, P_\bullet)$ un champ borélien de plats. Posons $(\Omega, B_\bullet)$ le champ des repères orthonormaux de $P_\bullet$. Alors c'est un sous-champ borélien de $(\Omega, P_\bullet^{n+1})$.*

Preuve. On commence par observer qu'il existe, par le Lemme 1.7.5, $b_\bullet^0 \in \mathscr{L}(\Omega, P_\bullet^{n+1}) \cap S(\Omega, B_\bullet)$. Ensuite, on remarque qu'on peut identifier l'ensemble des repères orthonormaux avec $\mathrm{Iso}(\mathbb{R}^n) = \mathscr{O}(n) \ltimes \mathbb{R}^n \overset{\text{top}}{\simeq} \mathscr{O}(n) \times \mathbb{R}^n$ qui peut être vu comme un espace métrique propre (puisque $\mathscr{O}(n)$ est compact et $\mathbb{R}^n$ est propre). Ainsi il existe $D \subseteq \mathrm{Iso}(\mathbb{R}^n)$ dénombrable dense, et $\{\gamma b_\bullet^0\}_{\gamma \in D}$ est une famille fondamentale du champ $(\Omega, B_\bullet)$, puisque $\gamma b_\bullet^0 \in \mathscr{L}(\Omega, P_\bullet^{n+1}) \cap \mathscr{S}(\Omega, B_\bullet)$ pour tout $\gamma \in \mathrm{Iso}(\mathbb{R}^n)$.

□

Chaque $b_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega, B_\bullet)$ permet donc de définir un morphisme isométrique compatible $\varphi_{b_\bullet} : (\Omega, P_\bullet) \to (\Omega, \mathbb{R}^n)$ (en fait tous les morphismes isométriques compatibles sont de cette forme).

On a maintenant le matériel nécessaire pour se lancer dans la preuve du Théorème principal de ce chapitre.

Preuve du Théorème 5.2.1. On commence par supposer que l'action de G sur X est minimale, *i.e.* qu'il n'existe pas de sous-ensemble convexe fermé et invariant autre que X et $\emptyset$, et que ∂X ne possède pas de point plats. Ceci est possible car sinon on peut prouver qu'il existe un point fixe à l'infini (voir la stratégie de la preuve du Théorème d'Adams-Ballmann, Annexe C). En considérant le cocycle $G \times \Omega \to \mathrm{Iso}(X)$, $(g, \omega) \to g$, on sait (par le Théorème 4.2.6) que l'une des deux alternatives suivantes est vérifiée :

(I) Il existe une classe d'équivalence de champ borélien de plat invariante.

(II) Il existe une classe d'équivalence de section borélienne de points du bord invariante.

Quitte à ôter un borélien de mesure nulle on peut supposer que $P_\bullet$ est invariant (Lemme 2.1.11 et Remarque 2.1.12) et que $\dim P_\omega = n$ pour tout $\omega \in \Omega$ (avec $0 \leq n \leq 2$). Le cas $n = 0$ est directement réglé par le Lemme 5.4.1, puisque il montre que la section invariante est essentiellement constante (cette constante est donc un point fixe pour l'action de G sur X) [9]. On peut donc supposer que les plats ne sont pas des points.

9. On a utilisé uniquement la double ergodicité. Une preuve alternative utilise l'ergodicité à coefficients : on note $x_\bullet$ la section invariante et on considère la section de deux variable qui associe à (ω_1, ω_2) le point milieux de x_{ω_1} et x_{ω_2}. Cette section est invariante et il existe donc un point fixe par le Lemme 5.4.2.

On va considérer l'application $\Omega\times\Omega\to\mathscr{P}_{\mathrm{Fe}}(\partial X)$, $(\omega_1,\omega_2)\mapsto \partial P_{\omega_1}\cap\partial P_{\omega_2}$. Pour montrer que c'est une application borélienne équivariante, on définit $P^1_\bullet$ et $P^2_\bullet$ par $P^1_{\omega_1,\omega_2}:=P_{\omega_1}$ et $P^2_{\omega_1,\omega_2}:=P_{\omega_2}$ qui sont donc des sous-champs boréliens [10] de plats équivariants de $(\Omega\times\Omega,X)$. Par le Lemme 3.3.13 et la Proposition 1.5.6, on a bien que le sous-champ qui associe à (ω_1,ω_2) le sous-champ $\partial P^1_{\omega_1,\omega_2}\cap\partial P^2_{\omega_1,\omega_2}=\partial P_{\omega_1}\cap\partial P_{\omega_2}$ est un sous-champ généralisé borélien de $(\Omega\times\Omega,X)$. On va prouver que l'hypothèse de double ergodicité implique l'existence d'un fermé $A\subseteq\mathbb{S}^2$ tel que $\partial P_{\omega_1}\cap P_{\omega_2}$ est isométrique à A pour presque tout $(\omega_1,\omega_2)\in\Omega\times\Omega$. On va en fait montrer un résultat plus fort qu'on utilisera ultérieurement dans la suite de la preuve.
On note $(\Omega\times\Omega,B^1_\bullet)$ le champ borélien des repères orthonormaux de $(\Omega\times\Omega,P^1_\bullet)$. L'action de G sur X et un choix d'une section de repères orthonormaux $b_\bullet\in\mathscr{L}(\Omega\times\Omega,B^1_\bullet)$ permettent de définir un cocycle borélien

$$\begin{array}{rccl}\alpha_{b_\bullet}: & G\times\Omega\times\Omega & \to & \mathrm{Iso}(\mathbb{R}^n)\\ & (g,\omega_1,\omega_2) & \mapsto & \varphi^{-1}_{b_{g\omega_1,g\omega_2}}\circ g\circ\varphi_{b_{\omega_1,\omega_2}}.\end{array}$$

En effet, on a [11]

$$\begin{array}{rcl}\alpha_{b_\bullet}(gh,\omega_1,\omega_2) & = & \varphi^{-1}_{b_{gh\omega_1,gh\omega_2}}\circ gh\circ\varphi_{b_{\omega_1,\omega_2}}=\varphi^{-1}_{b_{gh\omega_1,gh\omega_2}}\circ g\circ\varphi_{b_{h\omega_1,h\omega_2}}\circ\varphi^{-1}_{b_{h\omega_1,h\omega_2}}\circ h\circ\varphi_{b_{\omega_1,\omega_2}}\\ & = & \alpha_{b_\bullet}(g,h\omega_1,\omega_2)\alpha_{b_\bullet}(h,\omega_1,\omega_2).\end{array}$$

A l'aide de $b_\bullet$ on peut aussi définir $f_{b_\bullet}\in\mathscr{S}(\Omega\times\Omega,\mathscr{F}_{\mathrm{conv}}(\mathbb{R}^n))$ par

$$f_{b_{\omega_1,\omega_2}}(x)=d(\varphi_{b_{\omega_1,\omega_2}}(x),P^2_{\omega_1,\omega_2}).$$

Cette section de fonctions est borélienne puisque

$$f_{b_\bullet}(x_\bullet)=d(\underbrace{\varphi_{b_\bullet}(x_\bullet)}_{\in\mathscr{L}(\Omega\times\Omega,P^1_\bullet)},P^2_\bullet)\in\mathscr{L}(\Omega\times\Omega,\mathbb{R}_{\geq 0})\quad\text{pour tout } x_\bullet\in\mathscr{L}(\Omega\times\Omega,\mathbb{R}^n).$$

Montrons l'égalité

$$(\underbrace{\alpha_{b_{\omega_1,\omega_2}}}_{\in\mathrm{Iso}(\mathbb{R}^n)}f_{b_{\omega_1,\omega_2}})(x)=f_{b_{g\omega_1,g\omega_2}}(x).$$

On calcule

$$\begin{array}{rcl}(\alpha_{b_{\omega_1,\omega_2}}f_{b_{\omega_1,\omega_2}})(x) & = & f_{b_{\omega_1,\omega_2}}(\alpha^{-1}_{b_{\omega_1,\omega_2}}(x))=f_{b_{\omega_1,\omega_2}}((\varphi^{-1}_{b_{\omega_1,\omega_2}}\circ g^{-1}\circ\varphi_{b_{g\omega_1,g\omega_2}})(x))\\ & = & d(\varphi_{b_{\omega_1,\omega_2}}(\varphi^{-1}_{b_{\omega_1,\omega_2}}\circ g^{-1}\circ\varphi_{b_{g\omega_1,g\omega_2}})(x)),P^2_{\omega_1,\omega_2})\\ & = & d(\varphi_{b_{g\omega_1,g\omega_2}}(x),gP_{\omega_2})=d(\varphi_{b_{g\omega_1,g\omega_2}}(x),P_{g\omega_2})\\ & = & f_{b_{g\omega_1,g\omega_2}}(x).\end{array}$$

Ainsi,

$$[f_{b_\bullet}]_{\mathrm{Iso}(\mathbb{R}^n)}:\ \Omega\times\Omega\ \to\ \mathscr{F}_{\mathrm{conv}}(\mathbb{R}^n)/\,\mathrm{Iso}(\mathbb{R}^n)\text{ est invariante.}$$

Cette classe est donc essentiellement constante puisque l'action de $\mathrm{Iso}(\mathbb{R}^n)$ sur $\mathscr{F}_{\mathrm{conv}}(\mathbb{R}^n)$ est lisse. Donc il existe $f\in\mathscr{F}_{\mathrm{conv}}(\mathbb{R}^n)$ et $b_\bullet\in\mathscr{S}(\Omega\times\Omega,B^1)$ tels que $f_{b_{\omega_1,\omega_2}}=f$ pour presque tout $(\omega_1,\omega_2)\in\Omega\times\Omega$. Par le Lemme 1.5.13, le sous-champ de $(\Omega\times\Omega,B^1_\bullet)$ défini par

$$A^f_{\omega_1,\omega_2}=\{b_{\omega_1,\omega_2}\in B^1_{\omega_1,\omega_2}\mid f_{b_{\omega_1,\omega_2}}=f\}$$

10. Plus généralement, si $(\Omega,\mathscr{A})$ est un espace borélien standard, X est un espace métrique séparable, $(\Omega,A_\bullet)$ est un sous-champ borélien de (Ω,X) et $\varphi:\Omega\times\Omega\to\Omega$ est une application borélienne, alors $(\Omega\times\Omega,\tilde{A}_\bullet)$ défini par $\tilde{A}_{\omega_1,\omega_2}:=A_{\varphi(\omega_1,\omega_2)}$ est un sous-champ borélien de $(\Omega\times\Omega,X)$.
En effet, si $\{x^n_\bullet\}_{n\geq 1}\subseteq\mathscr{L}(\Omega,A_\bullet)$ est une famille fondamentale du sous-champ $(\Omega,A_\bullet)$, alors $\{\tilde{x}^n_\bullet\}_{n\geq 1}\subseteq\mathscr{S}(\Omega\times\Omega,A_\bullet)$ définie par $\tilde{x}^n_{\omega_1,\omega_2}:=x^n_{\varphi(\omega_1,\omega_2)}$ est une famille fondamentale du sous-champ $(\Omega,\times\Omega,\tilde{A}_\bullet)$.

11. Remarquons au passage que la preuve serait identique si on était parti avec un cocycle $G\times\Omega\times\Omega\to\mathrm{Iso}(X)$.

est borélien et donc il existe $b_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega\times\Omega, B^1_\bullet)$ tel que $f_{b_{\omega_1,\omega_2}} = f$ pour presque tout $(\omega_1,\omega_2)\in\Omega\times\Omega$. En particulier,

$$\alpha_{b_{\omega_1,\omega_2}} \in \mathrm{Iso}(\mathbb{R}^n)_f = \{\gamma \in \mathrm{Iso}(\mathbb{R}^n) \mid \gamma f = f\} \quad \text{pour presque tout } (\omega_1,\omega_2)\in\Omega\times\Omega.$$

Comme $\partial P_{\omega_1} \cap \partial P_{\omega_2}$ est isométrique à $\partial f_{b_{\omega_1,\omega_2}} \subseteq \mathbb{S}^1$ (Exemple 5.3.4) qui est lui-même égal à ∂f pour presque tout $(\omega_1,\omega_2)\in\Omega^2$, on a en particulier le résultat qu'on avait annoncé. On peut maintenant décomposer le reste de la preuve selon les quatre formes possibles [12] pour $\partial f \subseteq \mathbb{S}^1$:

(a) ∂f est une sous-sphère stricte de $\mathbb{S}^1$ (c'est-à-dire soit une paire de point antipodaux, soit l'ensemble vide)

(b) $\partial f = \mathbb{S}^1$

(c) $\mathrm{rad}(\partial f) < \pi/2$

(d) ∂f est un intervalle de longueur π.

(a) On montre que ce cas-ci ne peut pas se réaliser. On va commencer par prouver que pour tout $R \geq 0$ et $\varepsilon > 0$, l'ensemble

$$\{(\omega_1,\omega_2)\in\Omega^2 \mid \exists\, x_0 \in P_{\omega_1} \text{ t.q. } d(x,P_{\omega_2}) < \varepsilon \ \forall x \in B(x_0,R)\cap P_{\omega_1}\}$$

est de mesure strictement positive (et donc de mesure pleine puisque $P_\bullet$ est invariant et que l'action de G sur Ω est doublement ergodique).
Le champ de plats peut être considéré comme une application borélienne $P_\bullet : \Omega \to \mathrm{Plat}(X)$ où $\mathrm{Plat}(X)$ est muni de la topologie de Chabauty (voir 1.5.11). On note $\mu^{P_\bullet}$ la mesure image de μ par l'application $P_\bullet$. Comme cette mesure est borélienne, on a que pour tout $P_0 \in \mathrm{supp}(\mu^{P_\bullet})$ et tout voisinage V de P_0, $\mu^{P_\bullet}(V) > 0$. Fixons $P_0 \in \mathrm{supp}(\mu^{P_\bullet})$ et $y_0 \in P_0$. On vérifie en annexe que la métrique suivante induit la topologie de Chabauty sur $\mathscr{P}_{\mathrm{Fe}}(X)$ (Lemme B.2.5) : [13]

$$\delta'(F,G) := \inf\{\varepsilon > 0 \mid F\cap \overline{B}(y_0, 1/\varepsilon - \varepsilon) \subseteq (G)_\varepsilon \text{ et } G \cap \overline{B}(y_0,1/\varepsilon-\varepsilon) \subseteq (F)_\varepsilon\}.$$

Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, on a que

$$\mu^{P_\bullet}\big(B_{\delta'}(P_0,\varepsilon)\big) > 0.$$

Si $P_1 \in B_{\delta'}(P_0,\varepsilon)$, alors en particulier $\overline{B}(y_0, 1/\varepsilon - \varepsilon)\cap P_0 \subseteq (P_1)_\varepsilon$ et il existe $x_0 \in P_1$ tel que $d(y_0,x_0) < \varepsilon$. Si $P_1, P_2 \in B_{\delta'}(P_0,\varepsilon)$, alors $\delta'(P_1,P_2) < 2\varepsilon$ et donc

$$\overline{B}(x_0, 1/(2\varepsilon) - 3\varepsilon)\cap P_1 \subseteq P_1 \cap \overline{B}(y_0, R - 1/(2\varepsilon) - 2\varepsilon) \subseteq (P_2)_{2\varepsilon}.$$

Ainsi, pour tout $(\omega_1,\omega_2)\in\Omega^2$ tels que $P_{\omega_1}, P_{\omega_2} \in B_{\delta'}(P_0,\varepsilon)$, il existe $x_0 \in P_{\omega_1}$ tel que $d(y, P_{\omega_2}) < 2\varepsilon$ pour tout $y \in \overline{B}(x_0, 1/(2\varepsilon) - 3\varepsilon) \cap P_{\omega_1}$.
On peut maintenant montrer que $\partial P_{\omega_1} \cap \partial P_{\omega_2}$ ne peut pas être une sous-sphère stricte de $\mathbb{S}^1$. En effet, si $f \in \mathscr{F}_{\mathrm{conv}}(\mathbb{R}^2)$ est telle que $\partial f \simeq \mathbb{S}^0$ ou $\partial f \simeq \emptyset$, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $R \geq 0$ tel que

$$\sup_{x\in B(x_0,R)} f(x) \geq \varepsilon \quad \text{pour tout } x_0 \in X,$$

ce qui contredit l'observation faite ci-dessus.
(b) Si $\partial P_{\omega_1} \cap \partial P_{\omega_2}$ est isométrique à $\mathbb{S}^1$ pour presque tout $(\omega_1,\omega_2)\in\Omega^2$, alors

$$\partial P_{\omega_1} \cap \partial P_{\omega_2} = \partial P_{\omega_1} = \partial P_{\omega_2} \quad \text{pour presque tout } (\omega_1,\omega_2)\in\Omega^2.$$

12. Voir les Remarques 5.3.3 qui montrent que ∂f est le joint sphérique entre une sous-sphère et un sous-ensemble π-convexe de rayon $< \pi/2$ orthogonal à cette sous-sphère.
13. $(A)_\varepsilon$ désigne l'ε- épaississement de X, voir Définition B.2.2

Ainsi, il existe un cercle invariant dans le bord de ∂X. La mesure de Lebesgue sur ce cercle est une mesure de probabilité invariante et on peut donc appliquer la fin de la preuve du Théorème d'Adams-Ballmann pour arriver à une contradiction avec l'hypothèse que ∂X ne contient pas de point plat.

(c) Si $(\partial P_{\omega_1} \cap \partial P_{\omega_2}) \cap -(\partial P_{\omega_1} \cap \partial P_{\omega_2}) = \emptyset$ pour presque tout $(\omega_1, \omega_2) \in \Omega \times \Omega$, alors il existe une section presque invariante et donc un point fixe par le Lemme 5.3.11. En effet, on sait qu'il existe $f \in \mathscr{F}_{\mathrm{conv}}(\mathbb{R}^n)$ et $b_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega \times \Omega, B^1_\bullet)$ tels que $\alpha_{b_{\omega_1,\omega_2}} \in \mathrm{Iso}(\mathbb{R}^n)_f$ pour presque tout $(\omega_1, \omega_2) \in \Omega \times \Omega$. Comme $\partial f \simeq \partial P_{\omega_1} \cap \partial P_{\omega_2}$, on sait qu'il existe $x \in \mathbb{R}^n$ presque invariant (pour le cocycle $\alpha_{b_\bullet}$). Ainsi la section borélienne $\varphi^{-1}_{b_\bullet}(x) \in \mathscr{L}(\Omega \times \Omega, X)$ est presque invariante et on obtient l'existence d'un point fixe par le Lemme 5.4.2.

(d) Par hypothèse, $\partial P_{\omega_1} \cap \partial P_{\omega_2}$ est isométrique à un intervalle de longueur π pour presque tout $(\omega_1, \omega_2) \in \Omega^2$. Posons donc

$$\mathscr{P} := \{P \in \mathrm{Plat}^2(X) \mid \partial P \cap \partial P_\omega \simeq [0, \pi] \text{ pour presque tout } \omega \in \Omega\}.$$

Par Fubini, $P_\omega \in \mathscr{P}$ pour presque tout $\omega \in \Omega$. De plus, $\mathscr{P}$ est invariant puisque μ est quasi-invariante. On va montrer que si $P, Q \in \mathscr{P}$, alors

$$\partial P \cap \partial P_\omega = \partial Q \cap \partial P_\omega \text{ pour presque tout } \omega \in \Omega.$$

Supposons que ce soit faux. Alors il existe $\delta > 0$ tel que

$$\Omega' := \{\omega \in \Omega \mid \ d_{\partial P_\omega}(\partial P \cap \partial P_\omega, \partial Q \cap \partial P_\omega) \geq \delta\}$$

soit de mesure > 0 (où $d_{\partial P_\omega}$ désigne la distance de Hausdorff sur ∂P_ω). Fixons $0 < \varepsilon < \delta/2$. Par la Proposition 1.5.6, $\partial P_\bullet \cap \partial P$ est un sous-champ borélien de ∂X et donc l'application

$$\begin{array}{rccl} f: & \Omega & \to & \mathscr{P}_{\mathrm{Fe}}(\partial P) \\ & \omega & \mapsto & \partial P_\omega \cap \partial P \end{array}$$

est borélienne. Ainsi la mesure $f_*\mu$ est borélienne de même que sa restriction $f^*\mu\,|_{\Omega'}$. Il existe donc $\widetilde{\Omega} \subseteq \Omega'$ de mesure positive tel que

$$d_{\partial P}\big(\partial P \cap \partial P_\omega, \partial P \cap \partial P_{\omega'}\big) < \varepsilon \quad \text{ pour presque tout } (\omega, \omega') \in \widetilde{\Omega}^2.$$

On peut répéter le raisonnement avec Q pour obtenir qu'il existe un sous-ensemble borélien $\Omega_0 \subseteq \Omega$ de mesure positive tel que

- $d_{\partial P_\omega}(\partial P \cap \partial P_\omega, \partial Q \cap \partial P_\omega) \geq \delta$ pour tout $\omega \in \Omega_0$.
- $d_{\partial P}\big(\partial P \cap \partial P_\omega, \partial P \cap \partial P_{\omega'}\big) < \varepsilon$ pour tout $(\omega, \omega') \in \Omega_0^2$.
- $d_{\partial Q}\big(\partial Q \cap \partial P_\omega, \partial Q \cap \partial P_{\omega'}\big) < \varepsilon$ pour tout $(\omega, \omega') \in \Omega_0^2$.
- $\partial P \cap \partial P_\omega \simeq [0, \pi]$ pour tout $\omega \in \Omega_0$.
- $\partial Q \cap \partial P_\omega \simeq [0, \pi]$ pour tout $\omega \in \Omega_0$.

Un simple dessin permet de se convaincre que si I et J sont deux intervalles de longueur π d'un cercle $\mathbb{S}^1$ et si λ désigne la mesure de Lebesgue du cercle, alors

$$d_{\mathbb{S}^1}(I, J) \geq \delta \iff \lambda(I \cap J) \leq \pi - \delta.$$

Maintenant fixons $(\omega, \omega') \in \Omega_0^2 \cap \{(\omega, \omega') \in \Omega^2 \mid \partial P_\omega \cap \partial P_{\omega'} \simeq [0, \pi]\}$. Alors

$$\begin{array}{rcl} \lambda(\partial P_\omega \cap \partial P_{\omega'}) & \geq & \lambda\Big(\big(\partial P_\omega \cap \partial P_{\omega'} \cap \partial P\big) \cup \big(\partial P_\omega \cap \partial P_{\omega'} \cap \partial Q\big)\Big) \\ & = & \lambda(\partial P_\omega \cap \partial P_{\omega'} \cap \partial P) + \lambda(\partial P_\omega \cap \partial P_{\omega'} \cap \partial Q) - \lambda(\underbrace{\partial P_\omega \cap \partial P_{\omega'} \cap \partial P \cap \partial Q}_{\subseteq \partial P_\omega \cap \partial P \cap \partial Q}) \\ & \geq & (\pi - \varepsilon) + (\pi - \varepsilon) - (\pi - \delta) = \pi + (\delta - 2\varepsilon) > \pi. \end{array}$$

Mais alors on obtient la contradiction que $\lambda(\partial P_{\omega_1} \cap \partial P_{\omega_2}) > \pi$ sur un ensemble de mesure produit positive.

L'application $\varphi : \Omega \times \Omega \to \mathscr{P}_{\mathrm{Fe}}(\partial X)$, $(\omega_1, \omega_2) \mapsto \partial P_{\omega_1} \cap \partial P_{\omega_2}$ satisfait donc que pour presque tout $\omega_1 \in \Omega$ l'application $\varphi(\omega_1, \cdot)$ est essentiellement constante et que pour presque tout $\omega_2 \in \Omega$ l'application $\varphi(\cdot, \omega_2)$ est essentiellement constante. Donc φ est essentiellement constante par le Lemme 5.5.1. Ainsi, il existe une partie de ∂X isométrique à un demi-cercle invariante. La mesure de Lebesgue sur ce demi-cercle est donc invariante et on peut conclure comme au point (b). □

Chapitre 6

Conclusion

On conclut ce travail en donnant quelques pistes qui mériteraient d'être explorées dans la continuité de cette thèse.

Questions 6.0.4. Peut-on généraliser la version du Théorème d'Adams-Ballmann pour les G-espaces (Théorème 4.2.6) à une action d'un G-espace sur un champ borélien d'espace CAT(0) (plutôt que sur un unique espace X, voir la Remarque 4.2.14) ?

Cette question soulève le problème de la moyennabilité d'un G-espace. Les G-espaces et les relations d'équivalences sont des cas particuliers de groupoïdes boréliens. Des notions de moyennabilités ont été étudiées par Anahtharaman-Delaroche et Renaut dans [AR00]. L'une d'elle est formulée comme notre version non-triviale de la moyennabilité d'une relation d'équivalence. Comme dit dans la Remarque 4.2.14, il n'est pas clair que dans le cas particulier d'un G-espace, leur définition soit équivalente à celle de Zimmer.

Questions 6.0.5. Peut-on généraliser l'un des Théorèmes 4.2.6 ou 4.2.13 au cas des groupoïdes boréliens moyennables ?

Le bord de Floyd d'une relation d'équivalence, introduit dans l'Exemple 2.2.12 (3), mériterait d'être étudié en détail.
En particulier, on peut supposer que chaque classe d'équivalence est δ-hyperbolique. Par des résultats classiques sur les espaces δ-hyperboliques (voir par exemple [CDP90] Chapitre 11), on peut obtenir le bord d'un graphe hyperbolique comme le bord de Floyd en prenant la fonction $f(r) = e^{-r}$. On peut ainsi utiliser les notions de champ borélien d'espaces métriques et de section borélienne pour reformuler [1] un résultat de Kaimanovich :

Théorème 6.0.6 ($\simeq$ Théorème 3.4 de [Ka04]). *Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ un espace de probabilité standard, $\mathscr{R} \subseteq \Omega^2$ une relation d'équivalence borélienne dénombrable quasi-préservant la mesure, ergodique, moyennable et tel qu'il existe un graphage uniformément localement fini tel que chaque classe soit hyperbolique. Alors soit il existe une section $\mathscr{R}$-invariante $[\xi_\bullet] \in L(\Omega, \partial[\bullet])$, soit une section $[\xi_\bullet] \in L(\Omega, \mathscr{P}_2(\partial[\bullet]))$ où $\left(\mathscr{P}_2(\partial[\bullet])\right)_\omega = \mathscr{P}_2(\partial[\omega])$ désigne les sous-ensembles de $\partial[\omega]$ de cardinal deux.*

La construction du bord de Floyd peut se généraliser à tout espace géodésique propre et on peut donc conjecturer qu'il est possible de généraliser les arguments de Kaimanovich à un cas plus général.

Conjecture 6.0.7. *Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ un espace de probabilité standard, $\mathscr{R} \subseteq \Omega^2$ une relation d'équivalence borélienne dénombrable quasi-préservant la mesure, ergodique et moyennable. Supposons que $\mathscr{R}$ agisse par isométries sur un champ borélien d'espaces Gromov-hyperboliques propres (et de dimension topologique finie ?). Alors soit il existe une section $\mathscr{R}$-invariante $[\xi_\bullet] \in L(\Omega, \partial X_\bullet)$, soit une section $[\xi_\bullet] \in L(\Omega, \mathscr{P}_2(\partial X_\bullet))$.*

1. Kaimanovich n'utilisant pas cette notion, il parle d'une section $\xi_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega, \partial[\bullet])$ comme d'une section invariante de mesure de probabilité supportée sur un seul point.

Finalement, il est naturel de se poser la question suivante.

Questions 6.0.8. Est-il possible d'enlever l'hypothèse que les plats sont de dimension au plus 2 dans le Théorème 5.2.1 ?

Annexe A

Champs boréliens

A.1 Convergence en mesure sur $\mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)$ et $L(\Omega, X_\bullet)$

A.1.1 Convergence en mesure

Cette appendice est consacrée à l'étude de la structure uniforme de la convergence en mesure sur $\mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)$ et $L(\Omega, X_\bullet)$. Si on reprend l'Exemple 1.1.12, on sait que $L([0,1], \mathbb{R})$ muni de la convergence en mesure est un espace métrisable, complet et séparable (voir ([Doo94], p. 67) ou ([BIN], Chapitre 4, §5, n°11)). On va montrer la même chose pour $L(\Omega, X_\bullet)$.

Définition A.1.1. *Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ un espace de probabilité standard et $(\Omega, X_\bullet)$ un champ borélien d'espaces métriques de structure borélienne $\mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)$. On définit une pseudo-métrique sur $\mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)$: pour $x_\bullet, y_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)$, on pose*

$$\rho(x_\bullet, y_\bullet) = \min\{\varepsilon \geq 0 \,|\, \mu(\{\omega \in \Omega \,|\, d_\omega(x_\omega, y_\omega) > \varepsilon\}) \leq \varepsilon\}.$$

Remarques A.1.2. (1) Le minimum est effectivement atteint. En effet, si $\{\varepsilon_n\}_{n\geq 1}$ est un suite décroissante qui converge vers ε, alors

$$\{\omega \in \Omega \mid d_\omega(x_\omega, y_\omega) > \varepsilon\} = \bigcap_{n\geq 1} \{\omega \in \Omega \mid d_\omega(x_\omega, y_\omega) > \varepsilon_n\}.$$

(2) C'est effectivement une pseudo-métrique : par exemple pour l'inégalité du triangle, on observe que si $x_\bullet, y_\bullet, z_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)$ et si $\varepsilon_1 = \rho(x_\bullet, z_\bullet)$, $\varepsilon_2 = \rho(z_\bullet, y_\bullet)$ on a

$$\mu(\{\omega \in \Omega \,|\, d_\omega(x_\omega, z_\omega) > \varepsilon_1\}) \leq \varepsilon_1 \quad \text{et} \quad \mu(\{\omega \in \Omega \,|\, d_\omega(z_\omega, y_\omega) > \varepsilon_2\}) \leq \varepsilon_2$$

d'où

$$\mu(\{\omega \in \Omega \,|\, d_\omega(x_\omega, z_\omega) + d_\omega(z_\omega, y_\omega) > \varepsilon_1 + \varepsilon_2\}) \leq \varepsilon_1 + \varepsilon_2$$

et donc $\mu(\{\omega \in \Omega \,|\, d_\omega(x_\omega, y_\omega) > \varepsilon_1 + \varepsilon_2\}) \leq \varepsilon_1 + \varepsilon_2$. Par conséquent, on a bien $\rho(x_\bullet, y_\bullet) \leq \varepsilon_1 + \varepsilon_2$ par définition de ρ.

(3) $\rho(x_\bullet, y_\bullet) = 0$ si et seulement si $x_\bullet =_{\text{p.p.}} y_\bullet$ de sorte qu'on peut définir $\overline{\rho}$ sur $L(\Omega, X_\bullet)$. En effet,

$$\rho(x_\bullet, y_\bullet) = 0 \iff \mu(\{\omega \in \Omega \,|\, d_\omega(x_\omega, y_\omega) > 0\}) \leq 0 \iff \mu(\{\omega \in \Omega \,|\, x_\omega \neq y_\omega\}) = 0.$$

On appelle topologie de la convergence en mesure la topologie déduite de la (pseudo)-métrique ρ sur $\mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)$ ou $L(\Omega, X_\bullet)$.

Théorème A.1.3. *Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ un espace de probabilité standard et $(\Omega, X_\bullet)$ un champ borélien d'espaces métriques (complets) sur Ω de structure borélienne $\mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)$. Alors $L(\Omega, X_\bullet)$ muni de la topologie de la convergence en mesure est séparable (et complet).*

Le théorème classique [1] suivant sera nécessaire pour la preuve.

Théorème A.1.4. *Soit X un espace métrique séparable et μ une mesure finie sur la σ-algèbre des boréliens $\mathscr{B}(X)$. Considérons l'extension de μ sur la complétion des boréliens $\mathscr{B}^*(X)$ donnée par le Théorème 0.0.2. Alors il existe une partie dénombrable $\mathscr{E} \subseteq \mathscr{B}^*(X)$ telle que, pour tout $A \in \mathscr{B}^*(X)$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $A' \in \mathscr{E}$ tel que $\mu(A \triangle A') < \varepsilon$*

Preuve du Théorème A.1.3. (1) On commence par prouver que $\mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)$ est séparable pour la topologie de la convergence en mesure (et donc $L(\Omega, X_\bullet)$ l'est aussi).
Comme $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ est un espace borélien standard il existe $\mathscr{E}$ comme dans le théorème précédent. Sans perdre la généralité, on peut supposer que $\mathscr{E}$ est clos par réunion finie et complémentarité (et donc par intersection finie). Soit aussi $\mathscr{D} = \{x_\bullet^n\}_{n\geq 1}$ une famille fondamentale pour $\mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)$. On va montrer que

$$\mathscr{F} = \{y_\bullet \in \mathscr{S}(\Omega, X_\bullet) \mid \exists\ m \in \mathbb{N} \text{ et une partition finie } \Omega = \bigsqcup_{i=1}^m B_i,\ B_i \in \mathscr{E},\ y_\bullet|_{B_i} = x_\bullet^{n(i)}|_{B_i}\}$$

est dense dans $\mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)$. Les éléments de $\mathscr{F}$ sont appelés les fonctions simples engendrées par $\mathscr{D}$ et $\mathscr{E}$. Soit donc $x_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)$ et $\varepsilon > 0$ fixé. On définit par récurrence

$$\Omega_1 := \{\omega \in \Omega \mid d_\omega(x_\omega, x_\omega^1) < \varepsilon\} \quad \text{et pour } n \geq 2 \quad \Omega_n := \{\omega \in \Omega \mid d_\omega(x_\omega, x_\omega^n) < \varepsilon\} \setminus (\bigsqcup_{i=1}^{n-1} \Omega_i).$$

Comme $\{x_\omega^n\}_{n\geq 1}$ est dense dans X_ω pour tout $\omega \in \Omega$, on a $\mu(\bigsqcup_{n\geq 1} \Omega_n) = 1$. On peut ainsi choisir $N \geq 1$ tel que

$$\mu(\bigsqcup_{n\geq 1}^{N} \Omega_n) > 1 - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Maintenant, on choisit $\widetilde{\Omega}_n \in \mathscr{E}$ tel que

$$\mu(\widetilde{\Omega}_n \triangle \Omega_n) < \frac{\varepsilon}{2N(2N-1)} \text{ pour } n = 1, \ldots, N.$$

On a presque fini mais le problème est que les ensembles $\widetilde{\Omega}_n$ ne forment pas nécessairement une réunion disjointe. Définissons alors

$$\widehat{\Omega}_n = \widetilde{\Omega}_n \setminus (\bigcup_{k\neq n} \widetilde{\Omega}_k) \in \mathscr{E} \text{ pour } n = 1, \ldots, N, \quad \text{et} \quad \widehat{\Omega}_{N+1} = \Omega \setminus (\bigcup_{k=1}^{N} \widetilde{\Omega}_k) \in \mathscr{E}.$$

Ainsi, la section définie par

$$\widehat{x}_\bullet|_{\widehat{\Omega}_n} = x_\bullet^n|_{\widehat{\Omega}_n} \text{ pour } n = 1, \ldots, N+1,$$

appartient à $\mathscr{F}$. Il reste à voir que $\rho(\widehat{x}_\bullet, x_\bullet) \leq \varepsilon$. Pour cela, on observe que

$$\{\omega \in \Omega \mid d_\omega(x_\omega, \widehat{x}_\omega) < \varepsilon\} \supseteq \left(\bigsqcup_{n=1}^{N} (\Omega_n \cap \widehat{\Omega}_n)\right).$$

Il reste maintenant à estimer la mesure de l'ensemble de droite pour pouvoir dire quelque chose sur la mesure de celui de gauche. Pour cela, on aura besoin d'utiliser que

$$\mu(\widetilde{\Omega}_n \cap \widetilde{\Omega}_k) < 2\frac{\varepsilon}{2N(2N-1)} \text{ pour } n \neq k.$$

1. Voir par exemple [Doo94], p. 42.

Ceci est vrai, puisqu'on a $\mu(\widetilde{\Omega}_n \vartriangle \Omega_n) < \frac{\varepsilon}{2N(2N-1)}$ et $(\widetilde{\Omega}_n \cap \widetilde{\Omega}_k) \subseteq ((\widetilde{\Omega}_n \setminus \Omega_n) \cup (\widetilde{\Omega}_k \setminus \Omega_k))$ (car $\Omega_n \cap \Omega_k = \emptyset$). On peut donc maintenant minorer et obtenir, pour $n = 1, \ldots, N$,

$$\begin{aligned}
\mu(\widehat{\Omega}_n \cap \Omega_n) &\overset{\widehat{\Omega}_n \subseteq \widetilde{\Omega}_n}{=} \mu\big((\widetilde{\Omega}_n \cap \Omega_n) \setminus (\Omega_n \cap (\widetilde{\Omega}_n \setminus \widehat{\Omega}_n))\big) \\
&= \underbrace{\mu(\widetilde{\Omega}_n \cap \Omega_n)}_{=\mu(\Omega_n)-\mu(\Omega_n \setminus \widetilde{\Omega}_n)} - \underbrace{\mu(\Omega_n \cap (\widetilde{\Omega}_n \setminus \widehat{\Omega}_n))}_{\leq \mu(\widetilde{\Omega}_n \setminus \widehat{\Omega}_n)} \\
&\overset{\mu(\Omega_n \vartriangle \widetilde{\Omega}_n) \geq \mu(\Omega_n \setminus \widetilde{\Omega}_n)}{\geq} \mu(\Omega_n) - \mu(\Omega_n \vartriangle \widetilde{\Omega}_n) - \mu(\widetilde{\Omega}_n \setminus \widehat{\Omega}_n) \\
&\overset{\text{déf. de } \widehat{\Omega}_n}{=} \mu(\Omega_n) - \mu(\Omega_n \vartriangle \widetilde{\Omega}_n) - \mu(\underbrace{\widetilde{\Omega}_n \setminus (\widetilde{\Omega}_n \setminus (\cup_{k\neq n} \widetilde{\Omega}_k))}_{=\widetilde{\Omega}_n \cap (\cup_{k\neq n} \widetilde{\Omega}_k)}) \\
&\geq \mu(\Omega_n) - \underbrace{\mu(\Omega_n \vartriangle \widetilde{\Omega}_n)}_{\leq \frac{\varepsilon}{2N(2N-1)}} - \sum_{k\neq n} \underbrace{\mu(\widetilde{\Omega}_n \cap \widetilde{\Omega}_k)}_{\leq 2\frac{\varepsilon}{2N(2N-1)}} \geq \mu(\Omega_n) - \frac{(2N-1)\varepsilon}{2N(2N-1)}
\end{aligned}$$

Et ainsi,

$$\mu(\{\omega \in \Omega \mid d_\omega(x_\omega, \widehat{x}_\omega) < \varepsilon\}) \geq \sum_{n=1}^{N} \mu(\Omega_n) - N\frac{(2N-1)\varepsilon}{2N(2N-1)} > 1 - \varepsilon,$$

et donc $\rho(\widehat{x}_\bullet, x_\bullet) \leq \varepsilon$.
(2) Montrons que si on rajoute l'hypothèse que les espaces X_ω sont complets pour tout $\omega \in \Omega$, alors $L(\Omega,X_\bullet)$ muni de la métrique $\overline{\rho}$ l'est aussi.
Soit $\{[x^n_\bullet]\}_{n\geq 1}$ une suite de Cauchy dans $L(\Omega,X_\bullet)$. Par conséquent, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \geq 1$ tel que

$$\overline{\rho}([x^n_\bullet],[x^m_\bullet]) = \min\{\delta \geq 0 \,|\, \mu(\{\omega \in \Omega \,|\, d_\omega(x^n_\omega, x^m_\omega) \leq \delta\}) > 1 - \delta\} < \varepsilon \quad \text{pour tout } n, m \geq N.$$

On montre maintenant qu'il existe une sous-suite $\{x^{a_k}_\bullet\}_{k\geq 1}$ de $\{x^n_\bullet\}_{n\geq 1} \subseteq \mathscr{L}(\Omega,X_\bullet)$ telle que

$$\{\omega \in \Omega \mid \{x^{a_k}_\omega\}_{k\geq 1} \text{ est de Cauchy dans } X_\omega\}$$

contient un borélien de mesure pleine.
Pour ce faire, on choisit une suite croissante d'indices $\{a_k \geq 1\}_{k\geq 1}$ telle que

$$\mu(\{\omega \in \Omega \,|\, d_\omega(x^n_\omega, x^m_\omega) > 1/2^k\}) \leq 1/2^k \text{ pour tout } m, n \geq a_k.$$

Ainsi, $\Omega_k := \{\omega \in \Omega \,|\, d_\omega(x^{a_{k+1}}_\omega, x^{a_k}_\omega) > 1/2^k\} \in \mathscr{A}$ satisfait $\mu(\Omega_k) \leq 1/2^k$ pour tout $k \geq 1$, et donc $\sum_{k=1}^\infty \mu(\Omega_k) < +\infty$. Par conséquent, par le Théorème de Borel-Cantelli[2], on a

$$\mu(\bigcap_{k=1}^\infty \bigcup_{j=k}^\infty \Omega_j) = \mu(\{\omega \in \Omega \,|\, \omega \in \Omega_k \text{ pour une infinité de } k \geq 1\}) = 0.$$

Ainsi, en passant au complémentaire, $\widetilde{\Omega} := \{\omega \in \Omega \,|\, \exists\, K_\omega \geq 1 \text{ tel que } d_\omega(x^{a_{k+1}}_\omega, x^{a_k}_\omega) < 1/2^k \ \forall k \geq K_\omega\}$ est borélien et de mesure pleine. Il est clair que

$$\widetilde{\Omega} \subseteq \{\omega \in \Omega \,|\, \{x^{a_k}_\omega\}_{k\geq 1} \text{ est de Cauchy}\}$$

car $d_\omega(x^{a_k}_\omega, x^{a_{k+j}}_\omega) < 1/2^{k-1}$ pour tout $j \geq 1$, $k \geq K_\omega$.

2. Voir par exemple [Doo94], p. 26.

Comme X_ω est complet pour tout $\omega \in \Omega$, la suite $\{x_\bullet^{a_k}|_{\widetilde{\Omega}}\}_{k\geq 1}$ converge ponctuellement vers une section $x'_\bullet \in \mathscr{L}(\widetilde{\Omega}, X_\bullet)$, puisque $\mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)$ est clos par limites ponctuelles. On peut prolonger arbitrairement $x'_\bullet$ en une section $x_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)$.

Il reste à prouver que $\overline{\rho}([x_\bullet^n],[x_\bullet]) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Pour se faire, il suffit de montrer que $\overline{\rho}([x_\bullet^{a_k}],[x_\bullet]) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$ puisque $\{[x_\bullet^n]\}_{n\geq 1}$ est de Cauchy.
Observons que

$$\{\omega \in \Omega \mid d_\omega(x_\omega, x_\omega^{a_k}) \leq 1/2^{k-1}\} \supseteq \bigcap_{n\geq k} \{\omega \in \Omega \mid d_\omega(x_\omega^{a_{n+1}}, x_\omega^{a_n}) \leq 1/2^n\} = \bigcap_{n\geq k} \Omega \setminus \Omega_n$$

Or,

$$\mu\Big(\bigcap_{n\geq k} \Omega \setminus \Omega_n\Big) = \mu\Big(\Omega \setminus \big(\bigcup_{n\geq k} \Omega_n\big)\Big) \geq 1 - \sum_{n\geq k} \mu(\Omega_n) \geq 1 - 1/2^{k-1}.$$

et donc

$$\mu\big(\{\omega \in \Omega \mid d_\omega(x_\omega, x_\omega^{a_k}) \leq 1/2^{k-1}\}\big) \geq 1 - 1/2^{k-1},$$

et donc $\rho([x_\bullet],[x_\bullet^{a_k}]) \leq 1/2^{k-1} \to 0$ quand $k \to \infty$. □

Remarques A.1.5. (1) Observons que puisque la topologie sur $\mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)$ n'est pas séparée, une suite de Cauchy dans $\mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)$ pour la pseudo-métrique ρ admet comme limite toutes les sections d'une classe d'équivalence pour l'égalité presque partout. Cette remarque empêche de parler de “complétude dans $\mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)$”.
(2) La preuve du théorème montre que si $x_\bullet^n \to x_\bullet$ en mesure, alors il existe $\{a_k\}_{k\geq 1}$ une suite croissante d'indices telle que $x_\bullet^{a_k} \to x_\bullet$ presque sûrement.

Voici un petit lemme qui montre qu'il est raisonnable de considérer la topologie de la convergence en mesure sur les champs boréliens d'espaces métriques.

Lemme A.1.6. *Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ un espace de probabilité standard, $(\Omega, X_\bullet)$ et $(\Omega, Z_\bullet)$ des champs boréliens d'espaces métriques et $\varphi_\bullet : X_\bullet \to Z_\bullet$ un morphisme de champs compatible et continu. On munit $\mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)$ et $\mathscr{L}(\Omega, Z_\bullet)$ de la topologie de la convergence en mesure. Alors $\varphi_\bullet : \mathscr{L}(\Omega, X_\bullet) \to \mathscr{L}(\Omega, Z_\bullet)$ est continue.*

Preuve. On va démontrer le lemme en deux temps.
(1) Fixons $x_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)$. On montre que pour tout $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$, il existe $\delta(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ tel que

$$\mu\big(\{\omega \in \Omega \mid d_{X_\omega}(x_\omega, y) < \delta(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \Rightarrow d_{Z_\omega}(\varphi_\omega(x_\omega), \varphi_\omega(y)) \leq \varepsilon_1\}\big) > 1 - \varepsilon_2.$$

Pour tout $n \geq 1$, on choisit $\mathscr{D}^n$ une famille fondamentale de la structure borélienne du sous-champ borélien $\big(\Omega, \overline{B(x_\bullet, 1/n)}\big)$. On introduit

$$\begin{aligned} A_n^\varepsilon &:= \{\omega \in \Omega \mid d_{Z_\omega}(\varphi_\omega(x_\omega), \varphi_\omega(y_\omega)) \leq \varepsilon \text{ pour tout } y_\bullet \in \mathscr{D}^n\} \\ &= \bigcap_{y_\bullet \in \mathscr{D}^n} \big(d_{Z_\bullet}(\varphi_\bullet(x_\bullet), \varphi_\bullet(y_\bullet))\big)^{-1}([0,\varepsilon]) \in \mathscr{A}. \end{aligned}$$

On observe que $A_n^\varepsilon \subseteq A_{n+1}^\varepsilon$ et que $\mu(\bigcup_{n\geq 1} A_n^\varepsilon) = 1$ pour tout $\varepsilon > 0$ puisque φ_ω est continue sur X_ω (en particulier en x_ω). Donc pour tout $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$, il existe $m(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ tel que $\mu(A_m^{\varepsilon_1}) > 1 - \varepsilon_2$ pour tout $m \geq m(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$. En particulier, si on pose $\delta(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = 1/m(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ on a que

$$\mu\big(\{\omega \in \Omega \mid d_{X_\omega}(x_\omega, y) \leq \delta(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \Rightarrow d_{Z_\omega}(\varphi_\omega(x_\omega), \varphi_\omega(y)) \leq \varepsilon_1\}\big) > 1 - \varepsilon_2.$$

(2) Soit $x_\bullet^n \to x_\bullet$ en mesure. Par définition de la convergence en mesure, on a que pour tout $\varepsilon > 0$

il existe $n(\varepsilon)$ tel que $\mu\big(\{\omega \in \Omega \mid d_{X_\omega}(x_\omega, x_\omega^n) > \varepsilon\}\big) < \varepsilon$ pour tout $n \geq n(\varepsilon)$. Soit $\varepsilon > 0$. On observe que pour $n \geq n\big(\min\{\delta(\varepsilon, \varepsilon/2), \varepsilon\}\big)$, on a que

$$\begin{aligned} & \{\omega \in \Omega \mid d_{Z_\omega}(\varphi_\omega(x_\omega), \varphi_\omega(x_\omega^n)) > \varepsilon\} \\ \subseteq \ & \Big(\{\omega \in \Omega \mid d_{X_\omega}(x_\omega, y) \leq \delta(\varepsilon, \varepsilon/2) \nRightarrow d_{Z_\omega}(\varphi_\omega(x_\omega), \varphi_\omega(y)) \leq \varepsilon\} \\ & \bigcup \{\omega \in \Omega \mid d_{X_\omega}(x_\omega, x_\omega^n) > \delta(\varepsilon, \varepsilon/2)\}\Big). \end{aligned}$$

Considérons la partie droite de l'inclusion. Le premier ensemble est de mesure $\leq \varepsilon/2$ par définition du $\delta(\varepsilon, \varepsilon/2)$. De même pour le second par choix du n. Ainsi, l'ensemble de droite est de mesure plus petit que ε pour tout $n \geq n\big(\min\{\delta(\varepsilon, \varepsilon/2), \varepsilon\}\big)$, c'est-à-dire que $\varphi_\bullet(x_\bullet^n) \to \varphi_\bullet(x_\bullet)$ en mesure. On a donc montré que $\varphi_\bullet$ est continue. □

Questions A.1.7. (1) Est-ce qu'il existe une réciproque du style : si on a un morphisme de champs compatible tel que $\varphi_\bullet : \mathscr{L}(\Omega, X_\bullet) \to \mathscr{L}(\Omega, Z_\bullet)$ est continu, alors tous les φ_ω sont continus ?

(2) Si l'on garde seulement l'hypothèse que $\varphi_\bullet : X_\bullet \to Z_\bullet$ est compatible, est-ce que $\varphi_\bullet : \mathscr{L}(\Omega, X_\bullet) \to \mathscr{L}(\Omega, Z_\bullet)$ est borélienne ? Peut-être faut-il aussi demander que tous les morphismes soient boréliens ?

On peut aussi s'intéresser aux relations entre les sous-champs boréliens de $X_\bullet$ et les sous-ensembles de $\mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)$.

Remarque A.1.8. Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ un espace de probabilité standard, $X_\bullet$ un champ borélien d'espaces métriques de structure borélienne $\mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)$ et $\mathscr{C} \subseteq \mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)$ un sous-ensemble dénombrable. Pour tout $\omega \in \Omega$, on note $\mathscr{C}_\omega := \{x_\omega\}_{x_\bullet \in \mathscr{C}} \subseteq X_\omega$. Soit $Y_\bullet$ un sous-champ de $X_\bullet$ tel que $\mathscr{C}_\omega \subseteq Y_\omega \subseteq \overline{\mathscr{C}_\omega}$. Alors $Y_\bullet$ est un sous-champ borélien. En effet, $\mathscr{C}$ est une famille fondamentale pour $Y_\bullet$. De plus, en toute généralité, si $\mathscr{D}$ est une partie fondamentale d'un sous-champ borélien $Y_\bullet$, alors

$$\mathscr{L}(\Omega, Y_\bullet) = \mathscr{L}_{\mathscr{D}}(\Omega, Y_\bullet) = \overline{\mathrm{rec}_{\mathscr{E}}(\mathscr{D})}^{c.m.} \cap \mathscr{S}(\Omega, Y_\bullet),$$

où $\mathrm{rec}_{\mathscr{E}}(\mathscr{D})$ désigne les recollements de $\mathscr{D}$ selon la partie $\mathscr{E}$ du Théorème A.1.4. En particulier, si $Y_\bullet$ est un sous-champ de complets, alors $\mathscr{L}_{\mathscr{D}}(\Omega, Y_\bullet) = \overline{\mathrm{rec}_{\mathscr{E}}(\mathscr{D})}^{c.m.}$.

Lemme A.1.9. *Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ un espace de probabilité standard et $X_\bullet$ un champ borélien d'espaces métriques complets de structure mesurable $\mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)$. Alors il y a une correspondance entre les sous-champs boréliens de fermés tels que $F_\omega \neq \emptyset$ pour tout $\omega \in \Omega$ et les sous-ensembles fermés (pour la topologie de la convergence en mesure), non vides, et invariants par recollement dénombrables boréliens de $\mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)$.*

Preuve. Si $F_\bullet$ est un sous-champ borélien de fermés, il est clair que $\mathscr{L}(\Omega, F_\bullet) \subseteq \mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)$ est un sous-ensemble fermé (car complet par le Théorème A.1.3) et invariant par recollement dénombrable borélien (car c'est une structure borélienne).

Réciproquement, supposons que $A \subseteq \mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)$ soit un sous-ensemble fermé et invariant par recollement borélien dénombrable. On prend $\mathscr{D} \subseteq A$ dénombrable dense dans A, ce qui est possible car $\mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)$ est un espace métrisable séparable par le Théorème A.1.3 et donc A est séparable. Considérons maintenant le sous-champ de fermés $F_\bullet$ défini par $F_\omega = \overline{\{x_\omega\}_{x_\bullet \in \mathscr{D}}}$. C'est évidement un sous-champ borélien, puisque $\mathscr{D}$ est une famille fondamentale. Montrons que $\mathscr{L}(\Omega, F_\bullet) = A$.

[$\subseteq$] Rappelons que (Lemme 1.1.9)

$\mathscr{L}(\Omega, F_\bullet) = \mathscr{L}_{\mathscr{D}}(\Omega, F_\bullet) = \{$limites ponctuelle de recollements dénombrables boréliens d'éléments $\mathscr{D}\}$.

Comme $\mathscr{D} \subseteq A$, que A est fermé pour la topologie de la convergence en mesure (en particulier par limites ponctuelles) et que A est invariant par recollement dénombrable mesurable, on a bien que $\mathscr{L}(\Omega, F_\bullet) \subseteq A$.

[$\subseteq$] On a

$$A \subseteq \overline{\mathscr{D}} \subseteq \overline{\mathscr{L}(\Omega, F_\bullet)}^{\text{c.m.}} = \mathscr{L}(\Omega, F_\bullet).$$

□

A.1.2 Action continue d'un G-espace qui préserve la mesure.

Lemme A.1.10. *Soit X un espace topologique localement compact, G un groupe topologique localement compact à base dénombrable et $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ un G-espace ergodique préservant la mesure. Supposons de plus qu'il existe une action par homéomorphismes du G-espace sur X donnée par un cocycle $\alpha : G \times \Omega \to$* Hom$(X)$. *Alors G agit par homéomorphismes sur $\mathscr{L}(\Omega, X)$ (munit de la topologie de la convergence en mesure).*

Mutatis mutandis pour une relation d'équivalence [3].

Preuve. Par hypothèse, on a bien que G envoie les sections boréliennes sur les sections boréliennes. Si deux sections sont égales presque partout, alors, puisque G préserve la mesure, elles sont envoyées sur deux sections égales presque partout.

Pour montrer que G agit par homéomorphismes, on s'inspire du Lemme A.1.6 en adaptant ce qui doit être adapté. On procède en deux temps.

(1) Montrons que, pour $x_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega, X)$ fixé, pour tout $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$, il existe $\delta(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ tel que

$$\mu(\{\omega \in \Omega \mid d(x_{g^{-1}\omega}, y) < \delta(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \Rightarrow d\big(\alpha(g, g^{-1}\omega)x_{g^{-1}\omega}, \alpha(g, g^{-1}\omega)y\big) \leq \varepsilon_1\}) > 1 - \varepsilon_2.$$

Choisissons pour tout $n \geq 1$ une famille fondamentale $\mathscr{D}^n$ de la structure borélienne du sous-champ borélien $\overline{B(x_\bullet, 1/n)}$. On introduit, pour tout $\varepsilon > 0$ et $n \geq 1$, l'ensemble

$$\begin{aligned} A^n_\varepsilon &= \{\omega \in \Omega \mid d\big(\alpha(g, g^{-1}\omega)x_{g^{-1}\omega}, \alpha(g, g^{-1}\omega)y_{g^{-1}\omega}\big) \leq \varepsilon \text{ pour tout } y_\bullet \in \mathscr{D}^n\} \\ &= \bigcap_{y_\bullet \in \mathscr{D}^n} \big(d(gx_\bullet, gy_\bullet)\big)^{-1}([0, \varepsilon[) \in \mathscr{A}. \end{aligned}$$

Maintenant, observons que

$$\bigcup_{n \geq 1} A^n_\varepsilon \supseteq \{\omega \in \Omega \mid \alpha(g, g^{-1}\omega) \text{ est continue en } x_{g^{-1}\omega}\} \supseteq \{\omega \in \Omega \mid \alpha(g, g^{-1}\omega) \text{ est continue}\} = \Omega.$$

De plus $A^n_\varepsilon \subseteq A^{n+1}_\varepsilon$ pour tout $n \geq 1$. Ainsi, il existe, pour tout $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$, un entier $m(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ tel que $\mu(A^m_{\varepsilon_1}) > 1 - \varepsilon_2$ pour tout $m \geq m(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$. En particulier, en posant $\delta(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = 1/m(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ on obtient que

$$\mu(\{\omega \in \Omega \mid d(x_{g^{-1}\omega}, y) < \delta(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \Rightarrow d\big(\alpha(g, g^{-1}\omega)x_{g^{-1}\omega}, \alpha(g, g^{-1}\omega)y\big) \leq \varepsilon_1\}) > 1 - \varepsilon_2.$$

(2) Supposons que $x^n_\bullet \to x_\bullet$ en mesure. Alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tel que

$$\begin{aligned} & \mu\big(\{\omega \in \Omega \mid d(x^n_\omega, x_\omega) > \varepsilon\}\big) < \varepsilon \text{ pour tout } n \geq n(\varepsilon) \\ \iff & \mu\big(\{g^{-1}\omega \in \Omega \mid d(x^n_{g^{-1}\omega}, x_{g^{-1}\omega}) > \varepsilon\}\big) < \varepsilon \text{ pour tout } n \geq n(\varepsilon) \\ \iff & \mu\big(g^{-1}(\{\omega \in \Omega \mid d(x^n_{g^{-1}\omega}, x_{g^{-1}\omega}) > \varepsilon\})\big) < \varepsilon \text{ pour tout } n \geq n(\varepsilon) \\ \overset{\mu\ g-\text{invariante}}{\iff} & \mu\big(\{\omega \in \Omega \mid d(x^n_{g^{-1}\omega}, x_{g^{-1}\omega}) > \varepsilon\}\big) < \varepsilon \text{ pour tout } n \geq n(\varepsilon). \end{aligned}$$

On observe que pour $n \geq n(\min\{\delta(\varepsilon, \varepsilon/2), \varepsilon\})$ on a

$$\begin{aligned} & \{\omega \in \Omega \mid d(\alpha(g, g^{-1}\omega)x_{g^{-1}\omega}, \alpha(g, g^{-1}\omega)x^n_{g^{-1}\omega}) > \varepsilon\} \\ \subseteq\ & \{\omega \in \Omega \mid d(x_{g^{-1}\omega}, y) \leq \delta(\varepsilon, \varepsilon/2) \not\Rightarrow d\big((gx_\bullet)_\omega, \alpha(g, g^{-1}\omega)y\big) \leq \varepsilon\} \\ & \cup \{\omega \in \Omega \mid d(x_{g^{-1}\omega}, x^n_{g^{-1}\omega}) > \delta(\varepsilon, \varepsilon/2)\}. \end{aligned}$$

3. Plus précisément : soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ un espace de probabilité standard, $\mathscr{R} \subseteq \Omega^2$ une relation d'équivalence borélienne et $(\Omega, X_\bullet)$ un champ borélien d'espaces métriques de structure borélienne $\mathscr{L}(\Omega, X_\bullet)$. Soit G un groupe dénombrable et $G \curvearrowright \Omega$ une action borélienne telle que $\mathscr{R} = \mathscr{R}_G$. Si $\mathscr{R}$ préserve la mesure et agit par homéomorphismes sur $X_\bullet$, alors G agit par homéomorphismes sur $L(\Omega, X_\bullet)$.

Considérons la partie droite de l'inclusion. Le premier ensemble est de mesure $< \varepsilon/2$ par construction de $\delta(\varepsilon, \varepsilon/2)$ de même que le second par choix de n. Ainsi, l'ensemble de droite est de mesure plus petite que ε pour tout $n \geq n\big(\min\{\delta(\varepsilon, \varepsilon/2), \varepsilon\}\big)$, c'est-à-dire que $g(x^n_\bullet) \to g(x_\bullet)$ en mesure. On a donc montré que G agit par homéomorphismes sur $\mathscr{L}(\Omega, X)$. □

A.2 $L^1(\Omega, B_\bullet)$ et $L^\infty(\Omega, B_\bullet)$

Rappelons que pour $f_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega, \mathbb{R})$, on note

$$\|f_\bullet\|_\infty = \operatorname{sup\,ess} \|f_\bullet\| := \inf\{m \in \mathbb{R} \mid \mu(\{\omega \in \Omega \mid |f_\omega|_\omega \geq m\}) = 0\}.$$

Lemme A.2.1. *Soit* $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ *un espace de probabilité standard et* $(\Omega, B_\bullet)$ *un champ borélien d'espaces de Banach de structure borélienne* $\widetilde{\mathscr{L}}(\Omega, B_\bullet)$*. Définissons*

$$\widetilde{\mathscr{L}^\infty}(\Omega, B_\bullet) := \{x_\bullet \in \widetilde{\mathscr{L}}(\Omega, B_\bullet) \mid \|x_\bullet\|_\infty := \operatorname{sup\,ess} \|x_\bullet\|_\bullet < \infty\}.$$

et $\widetilde{L}^\infty(\Omega, B_\bullet) = \widetilde{\mathscr{L}^\infty}(\Omega, B_\bullet)/ =_{p.p.}$.
Alors $\widetilde{L}^\infty(\Omega, B_\bullet)$ *muni de la norme* $\|\cdot\|_\infty$ *est un espace de Banach.*

Preuve. Vérifions que $\|\cdot\|_\infty$ est une pseudo-norme sur $\widetilde{\mathscr{L}^\infty}(\Omega, B_\bullet)$. Seule l'inégalité du triangle n'est pas évidente. Elle découle de l'inclusion

$$\begin{aligned}
\{\omega \in \Omega \mid \|x_\omega + y_\omega\|_\omega > \|x_\bullet\|_\infty + \|y_\bullet\|_\infty\} \quad &\subseteq \quad \{\omega \in \Omega \mid \|x_\omega\|_\omega + \|y_\omega\|_\omega > \|x_\bullet\|_\infty + \|y_\bullet\|_\infty\} \\
&\subseteq \quad \{\omega \in \Omega \mid \|x_\omega\|_\omega > \|x_\bullet\|_\infty\} \cup \{\omega \in \Omega \mid, \|y_\omega\|_\omega > \|y_\bullet\|_\infty\}
\end{aligned}$$

Comme les ensembles de droite sont de mesure nulle, l'ensemble de gauche l'est aussi et donc $\|x_\bullet + y_\bullet\|_\infty \leq \|x_\bullet\|_\infty + \|y_\bullet\|_\infty$. Il est facile de vérifier que $\|x_\bullet - y_\bullet\|_\infty = 0$ si et seulement si $x_\bullet =_{\text{p.p.}} y_\bullet$, de sorte que $\widetilde{L}^\infty(\Omega, B_\bullet)$ est un espace vectoriel normé. Montrons qu'il est complet.
Soit $\{[x^n_\bullet]\}_{n\geq 1} \subseteq \widetilde{L}^\infty(\Omega, B_\bullet)$ une suite de Cauchy pour $\|\cdot\|_\infty$. Définissons les sous-ensembles suivants :

$$A_n := \{\omega \in \Omega \mid \|x^n_\omega\|_\omega > \|x^n_\bullet\|_\infty\} \in \mathscr{A} \quad n \geq 1,$$

$$B_{p,q} := \{\omega \in \Omega \mid \|x^p_\omega - x^q_\omega\|_\omega > \|x^p_\bullet - x^q_\bullet\|_\infty\} \in \mathscr{A} \quad p, q \geq 1.$$

Par définition de $\|\cdot\|_\infty$, $E = (\bigcup_{p,q=1}^\infty B_{p,q}) \cup (\bigcup_{n=1}^\infty A_n)$ est de mesure nulle. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N(\varepsilon) \geq 1$, tel que

$$\|x^p_\omega - x^q_\omega\|_\omega \leq \|x^p_\bullet - x^q_\bullet\|_\infty < \varepsilon \text{ pour tout } \omega \in \Omega \setminus E, \text{pour tout } p, q \geq N(\varepsilon).$$

Donc $\{x^n_\omega\}_{n\geq 1}$ est une suite de Cauchy dans B_ω pour tout $\omega \in \Omega \setminus E$. Ainsi, puisque B_ω est complet pour tout $\omega \in \Omega$, la suite $\{x^n_\bullet\,|_{\Omega\setminus E}\}_{n\geq 1}$ converge ponctuellement vers $x'_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega \setminus E, B_\bullet)$ qu'on peut prolonger en une section $x_\bullet$ de $\mathscr{L}(\Omega, B_\bullet)$, par exemple en définissant $x_\bullet\,|_E = 0_\bullet$.
Il reste à montrer que $\{[x^n_\bullet]\}_{n\geq 1}$ converge vers une section de $\widetilde{L}^\infty(\Omega, B_\bullet)$, c'est à-dire qu'on a bien $[x_\bullet] \in \widetilde{L}^\infty(\Omega, B_\bullet)$ et $\|x^n_\bullet - x_\bullet\|_\infty \to 0$. Observons que

$$\|x^n_\omega - x^m_\omega\|_\omega \leq \varepsilon \text{ pour tout } n, m \geq N(\varepsilon) \text{ et } \omega \in \Omega \setminus E.$$

En faisant tendre m vers l'infini (avec n fixé), on obtient que

$$\|x^n_\omega - x_\omega\|_\omega \leq \varepsilon \text{ pour tout } n \geq N(\varepsilon) \text{ et } \omega \in \Omega \setminus E$$

ce qui montre que $\lim_{n\to\infty} \|x_\bullet - x^n_\bullet\|_\infty = 0$. Et comme

$$\|x_\omega\|_\omega \leq \|x^{N(\varepsilon)}_\omega\|_\omega + \|x_\omega - x^{N(\varepsilon)}_\omega\|_\omega \leq \|x^{N(\varepsilon)}_\bullet\|_\infty + \varepsilon < \infty \text{ pour tout } \omega \in \Omega \setminus E,$$

on a bien que $x_\bullet \in \widetilde{L}^\infty(\Omega, B_\bullet)$. □

Lemme A.2.2. *Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ un espace de probabilité standard et $(\Omega, B_\bullet)$ un champ borélien séparable d'espaces de Banach de structure borélienne $\mathscr{L}(\Omega, B_\bullet)$. Définissons*

$$\mathscr{L}^1(\Omega, B_\bullet) := \{x_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega, B_\bullet) \,|\, \|x_\bullet\|_1 = \int_\Omega \|x_\omega\|_\omega d\mu(\omega) < +\infty\}$$

et $L^1(\Omega, B_\bullet) = \mathscr{L}^1(\Omega, B_\bullet)/ =_{p.p.}$.
Alors $L^1(\Omega, B_\bullet)$ muni de la norme $\|\cdot\|_1$ est un espace de Banach séparable.

Preuve. Il est clair que $L^1(\Omega, B_\bullet)$ est un espace vectoriel normé[4], on montre qu'il est complet et séparable.
(1) $L^1(\Omega, B_\bullet)$ est complet. Soit $\{[x^n_\bullet]\}_{n\geq 1}$ une suite de Cauchy dans $L^1(\Omega, B_\bullet)$ pour $\|\cdot\|_1$. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \geq 1$ tel que

$$\|[x^n_\bullet] - [x^m_\bullet]\|_1 = \int_\Omega \|x^n_\omega - x^m_\omega\|_\omega d\mu(\omega) < \varepsilon \quad \text{pour tout } m, n \geq N.$$

Par conséquent, puisque pour tout $\varepsilon > 0$ on a, par l'inégalité de Markov,

$$\int_\Omega \|x^n_\omega - x^m_\omega\|_\omega d\mu(\omega) \geq \varepsilon \cdot \mu\big(\{\omega \in \Omega \,|\, \|x^n_\omega - x^m_\omega\|_\omega \geq \varepsilon\}\big),$$

on voit que, pour tout $\varepsilon > 0$, $\lim_{m,n\to\infty} \mu\big(\{\omega \in \Omega \,|\, \|x^n_\omega - x^m_\omega\|_\omega \geq \varepsilon\}\big) = 0$. Donc, la suite $\{[x^n_\bullet]\}_{n\geq 1}$ est telle que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \geq 1$ tel que

$$\mu(\{\omega \in \Omega \,|\, \|x^n_\omega - x^m_\omega\|_\omega \geq \varepsilon\}) \leq \varepsilon \text{ pour tout } m, n \geq N.$$

C'est-à-dire que $\rho(x^n_\bullet, x^m_\bullet) \leq \varepsilon$ pour tout $m, n \geq N$ selon les notations de la Section A.1. Ainsi, la suite $\{x^n_\bullet\}_{n\geq 1}$ est de Cauchy dans $\mathscr{L}^1(\Omega, B_\bullet) \subseteq \mathscr{L}(\Omega, B_\bullet)$ pour la structure uniforme de la convergence en mesure. Par le Théorème A.1.3, on sait qu'il existe $x_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega, B_\bullet)$ telle que $x^n_\bullet$ converge en mesure vers $x_\bullet$ et, par la Remarque A.1.2 (2), qu'il existe une sous-suite $\{x^{n_k}_\bullet\}_{k\geq 1}$ qui converge vers $x_\bullet$ presque sûrement.
Pour montrer qu'une suite de Cauchy admet une limite, il suffit de montrer qu'une de ces sous-suites converge. Ainsi, on peut supposer que $x^n_\bullet$ converge presque sûrement vers $x_\bullet$ et il reste à montrer que $x^n_\bullet$ converge en norme $\|\cdot\|_1$ vers $x_\bullet$ et qu'on a $x_\bullet \in \mathscr{L}^1(\Omega, B_\bullet)$. Pour cela, pour $k \geq 1$ fixé, on applique le Lemme de Fatou à la suite de fonctions boréliennes $\{\|x^n_\bullet - x^k_\bullet\|_\bullet\}_{n\geq 1}$. On a $\lim_{n\to\infty} \|x^n_\bullet - x^k_\bullet\|_\bullet =_{p.p.} \|x_\bullet - x^k_\bullet\|_\bullet$ et

$$\|x_\bullet - x^k_\bullet\|_1 = \int_\Omega \|x_\omega - x^k_\omega\|_\omega d\mu(\omega) \leq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega \|x^n_\omega - x^k_\omega\|_\omega d\mu(\omega) = \liminf_{n\to\infty} \|x^n_\bullet - x^k_\bullet\|_1.$$

Comme $\{x^n_\bullet\}_{n\geq 1}$ est une suite de Cauchy pour $\|\cdot\|_1$, on a $\lim_{k\to\infty}\big(\liminf_{n\to\infty} \|x^n_\bullet - x^k_\bullet\|_1\big) = 0$, d'où $\lim_{k\to\infty} \|x_\bullet - x^k_\bullet\|^1_\bullet = 0$. Et il suffit d'écrire $x_\bullet = (x_\bullet - x^k_\bullet) - x^k_\bullet$ pour voir que $x_\bullet \in \mathscr{L}^1(\Omega, B_\bullet)$.
(2) $L^1(\Omega, B_\bullet)$ est séparable. On fait la preuve en deux étapes.
(a) Soit $\mathscr{F} = \{x^n_\bullet\}_{n\geq 1}$ une famille fondamentale pour $\mathscr{L}(\Omega, B_\bullet)$. En considérant les combinaisons linéaires finies à coefficients rationnels, on a que $\mathscr{G} = \{y^n_\bullet \,|\, y^n_\bullet = \sum_{i=1}^N q_i x^i_\bullet\}_{n\geq 1}$ est tel que $\overline{\{y^n_\omega\}_{n\geq 1}} = B_\omega$ pour tout $\omega \in \Omega$. Il est maintenant facile de modifier $\mathscr{G}$ en une famille $\mathscr{F}' = \{z^n_\bullet\}_{n\geq 1}$ telle que $\mathscr{F}' \subseteq \mathscr{L}^\infty(\Omega, B_\bullet) \subseteq \mathscr{L}^1(\Omega, B_\bullet)$ et $\overline{\{z^n_\omega\}_{n\geq 1}} = B_\omega$ pour tout $\omega \in \Omega$. En effet, il suffit de considérer la section nulle $0_\bullet \in \mathscr{L}(\Omega, B_\bullet)$ et de poser pour $n \geq 1$ donné

$$y^{n,j}_\omega = \begin{cases} y^j_\omega & \text{si } \|y^j_\omega\|_\omega \leq n \\ 0_\omega & \text{sinon} \end{cases}$$

4. Deux sections $x_\bullet, y_\bullet$ de $\mathscr{L}^1(\Omega, B_\bullet)$ sont égales presque partout si et seulement si $\|x_\bullet - y_\bullet\|_1 = 0$

et $\mathscr{F}' = \{y_\bullet^{n,j}\}_{n,j\geq 1}$.

On montre que les sections “en escalier” du type $\sum_{i=1}^N z_\bullet^i \chi_{A_i}$, $A_i \in \mathscr{A}$, $z_\bullet^i \in \mathscr{F}'$ sont denses dans $\mathscr{L}^1(\Omega, B_\bullet)$.

Soit $x_\bullet \in \mathscr{L}^1(\Omega, B_\bullet)$ et $\varepsilon > 0$. On définit par récurrence

$$\Omega^1 := \{\omega \in \Omega \,|\, \|x_\omega - z_\omega^1\|_\omega < \varepsilon\} \in \mathscr{A} \text{ et, pour } n \geq 2, \quad \Omega^n := \{\omega \in \Omega \,|\, \|x_\omega - z_\omega^n\|_\omega < \varepsilon\} \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} \Omega^i \in \mathscr{A},$$

Pour $N \geq 1$, on pose $\Omega_0^N = \Omega \setminus \bigsqcup_{n=1}^N \Omega^n$ et on a $\lim_{N\to\infty} \mu(\Omega_0^N) = 0$ puisque $\bigcup_{n\geq 1} \Omega^n = \Omega$. Comme $x_\bullet \in \mathscr{L}^1(\Omega, B_\bullet)$, on a $\|x_\bullet\|_1 < +\infty$ et donc il existe $N \geq 1$ tel que l'inégalité $\int_{\Omega_0^N} \|x_\omega\|_\omega d\mu(\omega) < \varepsilon$ est vérifiée [5]. Ainsi,

$$\|x_\bullet - \sum_{i=1}^N z_\bullet^i \chi_{\Omega^i}\|_1 = \int_\Omega \|x_\omega - \sum_{i=1}^N z_\omega^i \chi_{\Omega^i}\|_\omega d\mu(\omega) = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega^i} \|x_\omega - z_\omega^i\|_\omega d\mu(\omega) + \int_{\Omega_0^N} \|x_\omega\|_\omega d\mu(\omega) < 2\varepsilon.$$

(b) On montre que les fonctions du type $\sum_{i=1}^N z_\bullet^i \chi_{A_i}$, $A_i \in \mathscr{A}$, $z_\bullet^i \in \mathscr{F}'$ peuvent être approximées en norme $\|\cdot\|_1$ par celles du type $\sum_{i=1}^N z_\bullet^i \chi_{\widetilde{A}_i}$, $\widetilde{A}_i \in \mathscr{E}$, $z_\bullet^i \in \mathscr{F}'$ où $\mathscr{E}$ est la partie dénombrable de $\mathscr{A}$ donnée par le Théorème A.1.4.

Soit $z_\bullet = \sum_{i=1}^N z_\bullet^i \chi_{A_i}$ et $\varepsilon > 0$. Comme $\mathscr{F}' \subseteq \mathscr{L}^1(\Omega, B_\bullet)$, on a $\max_{i=1,\dots,N} \|z_\bullet^i\|_1 < +\infty$. Pour tout $i = 1, \dots, N$, soit $\widetilde{A}_i \in \mathscr{E}$ tel que $\mu(A_i \triangle \widetilde{A}_i) < \frac{\varepsilon}{N \max_{i=1,\dots,N} \|z_\bullet^i\|_1}$ (Théorème A.1.4). Alors, si $\widetilde{z}_\bullet = \sum_{i=1}^N z_\bullet^i \chi_{\widetilde{A}_i}$, on a

$$\begin{aligned}\|z_\bullet - \widetilde{z}_\bullet\|_1 &\leq \sum_{i=1}^N \int_\Omega \|z_\omega^i \chi_{A_i} - z_\omega^i \chi_{\widetilde{A}_i}\|_\omega d\mu(\omega) = \sum_{i=1}^N \Big(\int_{A_i \cap \widetilde{A}_i} \|z_\omega^i - z_\omega^i\|_\omega d\mu(\omega) + \int_{A_i \triangle \widetilde{A}_i} \|z_\omega^i\|_\omega d\mu(\omega) \Big) \\ &\leq N \max_{i=1,\dots,N} \|z_\bullet^i\|_1 \cdot \frac{\varepsilon}{N \max_{i=1,\dots,N} \|z_\bullet^i\|_1} = \varepsilon.\end{aligned}$$

□

5. Ceci découle du Théorème de convergence dominée. Si $\{\Omega^n\}_{n\geq 1} \subseteq \mathscr{A}$ est telle que $\lim_{n\to\infty} \mu(\Omega^n) = 0$, alors si $x_\bullet^n = \chi_{\Omega^n} x_\bullet$, la suite $\{x_\bullet^n\}_{n\geq 1}$ converge presque sûrement vers $0_\bullet$ car $\mu(\{\omega \in \Omega \,|\, x_\omega^n \neq 0_\omega\}) \leq \mu(\Omega^n) \to 0$. Comme $\|x_\bullet^n\|_\bullet \leq \|x_\bullet\|_\bullet$ et que $\|x_\bullet\|_\bullet$ est intégrable, on a

$$0 = \int_\Omega \lim_{n\to\infty} \|x_\omega^n\|_\omega d\mu(\omega) = \lim_{n\to\infty} \int_{\Omega^n} \|x_\omega\|_\omega d\mu(\omega).$$

Annexe B

Espaces métriques ou topologiques

B.1 Généralités sur les espaces CAT(0)

Proposition B.1.1 ($\simeq$ Proposition II.1.4 de [BH99]). *Soit X un espace CAT(0). Alors pour tout $x, y \in X$, il existe un unique chemin géodésique de x à y. De plus, ce chemin varie continûment en fonction des extrémités.*

Définition B.1.2. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ (pas nécessairement fermé ou borné) et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est convexe si pour tout $t, t' \in I$ et $s \in [0,1]$ on a*

$$f(t + s(t' - t)) \leq (1 - s)f(t) + sf(t').$$

C'est-à-dire que la région au-dessus du graphe de f est convexe.

Définition B.1.3. *Soit X un espace métrique géodésique et $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction. Alors f est convexe si pour tout chemin géodésique paramétré proportionnellement à la longueur d'arc $c : I \to X$, la fonction $f \circ c : I \to \mathbb{R}$ est convexe.*

Proposition B.1.4 (Proposition II.2.2 de [BH99]). *Soit X un espace CAT(0), alors la fonction distance $d : X \times X \to \mathbb{R}$ est convexe, i.e. pour toute paires de géodésiques paramétrisées proportionnellement à la longueur d'arc $c : [0,1] \to X$ et $c' : [0,1] \to X$, l'inégalité suivante est vérifiée pour tout $t \in [0,1]$:*

$$d(c(t), c'(t)) \leq (1 - t)d(c(0), c(0)) + td(c(1), c'(1)).$$

Corollaire B.1.5. *[[BH99],II.2.5] Soit X un espace CAT(0) et C un sous-ensemble convexe et complet. Soit d_C la fonction distance à C. Alors*

(i) d_C est une fonction convexe,

(ii) pour tout $x, y \in X$ on a que $|d_C(x) - d_C(y)| \leq d(x, y)$,

(iii) la restriction à d_C à une sphère de centre x et de rayon $r \leq d_C(x)$ atteint son infimum en une unique point y et $d_C(x) = d_C(y) + r$.

Proposition B.1.6 (Proposition II.2.4 de [BH99]). *Soit X un espace CAT(0) et C un sous-ensemble convexe complet.*

(i) Pour tout $x \in X$, il existe un unique point $\pi(x) \in X$ tel que $d(x, \pi(x)) = d(x, C)$.

(ii) Si x' appartient au segment $[x, \pi(x)]$, alors $\pi(x') = \pi(x)$.

(iii) Si $x \notin C$ et $y \in C$ est différent de $\pi(x)$, alors $\angle_{\pi(x)}(x, y) \geq \pi/2$.

(iv) L'application $x \mapsto \pi(x)$ est une rétraction de X sur C qui n'augmente pas les distances.

Proposition B.1.7 (Proposition II.2.7 de [BH99]). *Soit X un espace CAT(0) complet. Soit $Y \subseteq X$ un sous-espace borné. Alors il existe un unique point $c_Y \in X$, appelé le centre de Y, tel que $Y \subseteq \overline{B}(c_y, r_y)$.*

Proposition B.1.8 ($\simeq$ Proposition II.3.1 de [BH99]). *Soit X un espace CAT(0), $c : [0,a] \to X$ et $c' : [0,b] \to X$ deux chemins géodésiques issus du même point, i.e. tels que $c(0) = c'(0)$. Alors*

$$\angle(c,c') = \lim_{t,t' \to 0} \angle_{c(0)}(c(t), c'(t')) = \lim_{t \to 0} 2 \arcsin \frac{1}{2t} d(c(t), c'(t)).$$

Lemme B.1.9 (**Lemme du Sandwich**, [BH99], Exercice II.2.12 (2), p. 182). *Soit X un espace CAT(0) et $C_1, C_2 \subseteq X$ deux sous-ensembles convexes complets. Supposons que $d_{C_1}|_{C_2}$ soit constante de valeur $d \in \mathbf{R}_{\geq 0}$ et que $d_{C_2}|_{C_1}$ soit constante.*
Alors l'application

$$\begin{array}{rccc} j: & \overline{co(C_1 \cup C_2)} & \to & C_1 \times [0,d] \\ & x & \mapsto & (\pi_{C_1}(x), d(x, C_1)) \end{array}$$

est une isométrie.

Preuve. (1) On commence par montrer qu'on a aussi $d_{C_2}|_{C_1} = d$. Supposons que $d_{C_2}|_{C_1} = d' < d$. Si $y \in C_2$, alors $d(\pi_{C_2}(\pi_{C_1}(y)), \pi_{C_1}(y)) = d' < d$. Ainsi,

$$d(\pi_{C_2}(\pi_{C_1}(y)), C_1) \leq d(\pi_{C_2}(\pi_{C_1}(y)), \pi_{C_1}(y)) < d.$$

Ceci contredit le fait que $d_{C_1}|_{C_2} = d$ donc $d' \geq d$. De même, par symétrie, $d \geq d'$.

(2) Montrons ensuite que si $x \in C_1$, alors $\pi_{C_1}(\pi_{C_2}(x)) = x$. Si $d = 0$, il n'y a rien à montrer. Supposons donc que $d > 0$ et $\pi_{C_1}(\pi_{C_2}(x)) = x' \neq x$. On considère le triangle géodésique $\triangle(x, \pi_{C_2}(x), x')$. Par le point (1), son triangle de comparaison $\overline{\triangle}(\overline{x}, \overline{\pi_{C_2}(x)}, \overline{x}') \subseteq \mathbf{R}^2$ est un triangle isocèle (car $d(x, \pi_{C_2}(x)) = d(\pi_{C_2}(x), x') = d$). Or, par [BH99, Prop. II.2.4 (3), p. 177], on a $\overline{\angle}_{\overline{x'}}(\overline{\pi_{C_2}(x)}, \overline{x}) \geq \angle_{x'}(\pi_{C_2}(x), x) \geq \frac{\pi}{2}$. Ceci est impossible pour un triangle euclidien.

(3) Il reste à voir que

$$d^2(x,y) = d^2(\pi_{C_1}(x), \pi_{C_1}(y)) + |d(x, C_1) - d(y, C_1)|^2 \tag{B.1}$$

pour tout $x, y \in \overline{\text{co}(C_1 \cup C_2)}$.

Pour commencer, montrons ceci pour $x_i \in C_i$ pour $i = 1,2$. Si $\pi_{C_1}(x_2) = x_1$, l'affirmation est triviale. Supposons donc que $\pi_{C_1}(x_2) \neq x_1$. Par (1) et (2), on a aussi $\pi_{C_2}(x_1) \neq x_2$ car

$$x_2 \overset{(2)}{=} \pi_{C_2}(\pi_{C_1}(x_2)) \overset{(1)}{\neq} \pi_{C_2}(x_1).$$

Par [BH99, Thm. II.2.11, p. 181], le rectangle $(x_1, \pi_{C_2}(x_1), x_2, \pi_{C_1}(x_2))$ est isométrique à un rectangle euclidien car chacun de ses angles est plus grand ou égal à $\frac{\pi}{2}$ Choisissons $t \in [0,1]$ et $x \in [x_1, x_2]$ tel que $d(x, x_1) = t d(x_1, x_2)$. On considère les points $x_1', x_2' \in X$ correspondants aux points $\overline{x}_1'$, $\overline{x}_2'$ dans le rectangle euclidien qui sont les projections de $\overline{x}$ sur $[\overline{x}_1, \overline{\pi_{C_1}(x_2)}]$ et $[\overline{\pi_{C_2}(x_1)}, \overline{x}_2]$ respectivement de sorte que $d(x, x_1') = td$ et $d(x, x_2') = (1-t)d$. Montrons que dans ce cas $x_i' = \pi_{C_i}(x)$ pour $i = 1,2$. On sait que

$$d(x, \pi_{C_i}(x)) \leq d(x, x_i') \quad \text{pour } i = 1,2.$$

Alors

$$d \leq d(\pi_{C_1}(x), \pi_{C_2}(x)) \leq d(\pi_{C_1}(x), x) + d(x, \pi_{C_2}(x)) \leq d(x, x_1') + d(x, x_2') = td + (1-t)d = d.$$

Par conséquent, pour $i = 1,2$ on a $d(\pi_{C_i}(x), x) = d(x, x_i')$ et donc $\pi_{C_i}(x) = x_i'$ par unicité de la projection.

Ainsi, de ce qui précède, par comparaison avec la situation dans $\mathbf{R}^2$, on déduit alors qu'on a $x \in [\pi_{C_1}(x), \pi_{C_2}(x)]$, $\pi_{C_2}(\pi_{C_1}(x)) = \pi_{C_2}(x)$ et $\pi_{C_1}(\pi_{C_2}(x)) = \pi_{C_1}(x)$ et en outre que l'application $\gamma_{x_1,x_2}(t) \mapsto (\pi_{C_1}(x), td)$ est une isométrie. Ceci montre que $j\,|_{\gamma_{x_1,x_2}}$ vérifie (B.1).
Pour terminer la preuve de (3), considérons l'ensemble

$$E := \{\gamma_{x_1,x_2}(t) \in X \mid x_1 \in C_1, x_2 \in C_2, t \in [0,1]\}$$

et montrons que $E = \overline{\mathrm{co}\{C_1 \cup C_2\}}$. L'inclusion $[\subseteq]$ est banale. Pour $[\supseteq]$, il suffit de montrer que E est convexe et fermé puisqu'il contient évidemment C_1 et C_2.
Pour la convexité, soit $x, y \in E$. Considérons $\pi_{C_i}(x), \pi_{C_i}(y) \in X$ pour $i = 1, 2$. Au point (2), on a montré que $x \in [\pi_{C_1}(x), \pi_{C_2}(x)]$ et $y \in [\pi_{C_1}(y), \pi_{C_2}(y)]$ et que l'enveloppe convexe des quatre points $(\pi_{C_1}(x), \pi_{C_1}(y), \pi_{C_2}(y), \pi_{C_2}(x))$ est un rectangle plat. Ainsi, si $z \in [x, y]$, alors $z \in [\pi_{C_1}(x), \pi_{C_2}(x)]$ et donc $z \in E$.
Finalement, E est fermé puisque les géodésiques dépendent continûment des extrémités. □

Remarque B.1.10. Montrons que C_1 et C_2 sont isométriques via π_{C_2}. L'inverse de l'isométrie j du lemme est donnée par

$$\begin{array}{rccl} j^{-1}: & C_1 \times [0,d] & \to & \overline{\mathrm{co}(C_1 \cup C_2)} \\ & (x,t) & \mapsto & \gamma_{x,\pi_{C_2}(x)}(t/d). \end{array}$$

Si nous notons $i : C_1 \times \{0\} \to C_1 \times \{d\}$ l'isométrie évidente, alors pour $x \in C_1$, on a

$$j^{-1} \circ i \circ j(x) = j^{-1}(i((x,0))) = j^{-1}((x,d)) = \pi_{C_2}(x).$$

Corollaire B.1.11. *Soit X un espace CAT(0) complet et $E \subseteq X$ une partie isométrique à un espace de Hilbert (de dimension finie ou infinie). On pose*

$$\mathscr{E} := \{E' \subseteq X \mid E' \textit{ est parallèle à } E\} \textit{ et } X_E := \bigcup_{E' \in \mathscr{E}} E' \subseteq X.$$

Alors X_E est convexe complet et il existe Y CAT(0) complet tel que X_E est isométrique à $E \times Y$.

Preuve. (1) On commence par montrer que si E, E', E'' sont trois espaces de Hilbert parallèles dans X, alors

$$\pi_E \circ \pi_{E'} \circ \pi_{E''}\,|_E = \mathrm{id}_E\,.$$

Supposons que $\dim(E) = \infty$ (la démonstration est identique, en plus simple, lorsque la dimension est finie). On observe que si $\{d_n\}_{n\geq 1}$ sont des droites dans E concourantes, orthogonales deux à deux et telles que $\overline{\mathrm{co}(\{d_n\}_{n\geq 1})} = E$, alors $x \in E$ est uniquement déterminé par $\big(\pi_{d_n}(x)\big)_{n\geq 1}$. On va appeler un tel ensemble de droites un repère orthonormal (même s'il y a un léger abus car les droites ne sont pas orientées). Observons que si $\{d'_n\}_{n\geq 1}$ est un repère orthonormal dans E' parallèle à $\{d_n\}_{n\geq 1}$, *i.e.* d_n est parallèle à d'_n pour tout $n \geq 1$, alors, par le Lemme du Sandwich, on a que

$$\pi_{E'}(x) = \big(\pi_{d'_n}(\pi_{d_n}(x))\big)_{n\geq 1} \text{ pour tout } x \in X.$$

Maintenant, on se fixe $\{d_n\}_{n\geq 1}$ un repère orthonormal de E. Alors $\{d''_n := \pi_{E''}(d_n)\}_{n\geq 1}$ est un repère orthonormal pour E'', $\{d'_n := \pi_{E'}(d_n)\}_{n\geq 1}$ est un repère orthonormal pour E' et les trois repères sont parallèles deux à deux (toujours par le Lemme du Sandwich). Par le Lemme II.2.5 de [BH99], on a pour tout $x \in X$,

$$\pi_E(\pi_{E'}(\pi_{E''}(x))) = \big(\pi_{d_n}(\pi_{d'_n}(\pi_{d''_n}(\pi_{d_n}(x))))\big)_{n\geq 1} = \big(\pi_n(x)\big)_{n\geq 1} = x.$$

(2) On se fixe maintenant $x_0 \in X$ et on pose $Y := \pi_E^{-1}(\{x_0\}) \cap X_E$. On montre que Y est convexe. Soit $y_1, y_2 \in Y$. Alors il existe $E_1, E_2 \in \mathscr{E}$ tel que $y_1 \in E_1$ et $y_2 \in E_2$. Comme

$$\overline{\mathrm{co}(E_1 \cup E_2)} \simeq E_1 \times [0, d_{\mathscr{H}}(E_1, E_2)]$$

par le Lemme du Sandwich, $m_{y_1,y_2} \in E_1 \times \{\frac{1}{2}d_{\mathscr{H}}(E_1,E_2)\} \in \mathscr{E}$. De plus, $\pi_{E_2}(m_{y_1,y_2}) = \pi_{E_2}(y_1)$ (Proposition B.1.6 (ii)) et, par le point (1),

$$\pi_E(m_{y_1,y_2}) = \pi_E(\pi_{E_2}(m_{y_1,y_2})) = \pi_E(\pi_{E_2}(y_1)) = \pi_E(y_1) = x_0.$$

Ainsi, $m_{y_1,y_2} \in Y$ et $d(y_1,y_2) = d_{\mathscr{H}}(E_1,E_2)$ pour tout $y_1,y_2 \in Y$. Donc l'application

$$\begin{array}{rcl} X_E & \to & E \times Y \\ x & \mapsto & (\pi_E(x), Y \cap E_x) \quad \text{où } E_x \text{ est l'unique élément de } \mathscr{E} \text{ qui contient } x \end{array}$$

est une isométrie. Il reste à prouver que Y est fermé dans X (et donc complet). Soit $\{y_n\}_{n\geq 1} \subseteq Y$ telle que $y_n \to y$. Alors $\pi_E(y) = \lim_{n\to\infty} \pi_E(y_n) = x_0$. Si $e \in E$, alors $\pi_{Y_{E_n}}(e)$ est une suite de Cauchy puisque

$$d(\pi_{E_{y_n}}(e), \pi_{E_{y_m}}(e)) = d_{\mathscr{H}}(E_{y_n}, E_{y_m}) = d(y_n, y_m) \text{ pour tout } n,m \in \mathbb{N}.$$

Pour tout $e \in E$, on note $\widetilde{e} \in X$ la limite de $\{\pi_{E_{y_n}}(e)\}_{n\geq 1}$. Alors $y \in \widetilde{E} := \{\widetilde{e} \mid e \in E\}$. Ainsi, Y et X_E sont fermés. □

Proposition B.1.12 ([BH99], II.9.2, p. 278)**.** *Soit X un espace CAT(0) complet.*

(i) Pour $p \in X$ fixé, la fonction $(x,x') \mapsto \angle_p(x,x')$ est continue en tous les points $(x,x') \in \overline{X} \times \overline{X}$ tels que $x \neq p$ et $x' \neq p$.

(ii) La fonction $(p,x,x') \mapsto \angle_p(x,x')$ est semi-continue supérieurement en tous les points $(p,x,x') \in X \times \overline{X} \times \overline{X}$ tels que $x \neq p$ et $x' \neq p$.

B.2 Parties fermées d'un espace métrique propre.

B.2.1 Topologie de Chabauty

Définition B.2.1. *Soit X un espace topologique. Pour tout compact K de X, on introduit la notation*

$$\mathscr{O}_K := \{F \in \mathscr{P}_{Fe}(X) \mid F \cap K = \emptyset\}$$

et pour tout ouvert U de X

$$\mathscr{O}'_U := \{F \in \mathscr{P}_{Fe}(X) \mid F \cap U \neq \emptyset\}.$$

La topologie sur les parties fermées de X engendrée par la collection de sous-ensembles

$$\{\mathscr{O}_K \mid K \text{ est un compact de } X\} \cup \{\mathscr{O}'_U \mid U \text{ est un ouvert de } X\}$$

est appelée la topologie de Chabauty. Observons que $\mathscr{O}_{K_1} \cap \ldots \cap \mathscr{O}_{K_n} = \mathscr{O}_{K_1 \cup \ldots K_n}$ pour toute famille finie de compacts $\{K_i\}_{i=1}^n$.

Définition B.2.2. *Soit X un espace métrique, $A \subseteq X$ un sous-ensemble et $\varepsilon > 0$. Alors*

$$(A)_\varepsilon := \{x \in X \mid d(x,A) < \varepsilon\}.$$

désigne l'ε-épaississement de A.

Proposition B.2.3. *Soit X un espace topologique. On considère $\mathscr{P}_{Fe}(X)$ muni de la topologie de Chabauty. Alors*

(i) $\mathscr{P}_{Fe}(X)$ est compact.

Supposons de plus que X est un espace métrique propre qui n'est pas réduit à un point.

(ii) Soit $x_0 \in X$ fixé. Alors la fonction

$$\begin{array}{rccl} \delta : & \mathscr{P}_{Fe}(X) \times \mathscr{P}_{Fe}(X) & \to & \mathbb{R}_{\geq 0} \\ & (F,G) & \mapsto & \inf\{\varepsilon > 0 \mid d_{\mathscr{H}}\big(F \cup (X \setminus \overline{B(x_0,1/\varepsilon)}), G \cup (X \setminus \overline{B(x_0,1/\varepsilon)})\big) \leq \varepsilon\} \end{array}$$

est une distance sur $\mathscr{P}_{Fe}(X)$ dont la topologie déduite est la topologie de Chabauty.

(iii) Une suite $\{F_n\}_{n\geq 1}$ converge vers F si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées

- *Pour tout $x \in F$, il existe une suite $\{x_n\}_{n\geq 1}$ telle que $x_n \in F_n$ pour tout $n \geq 1$ et telle que $x_n \to x$ $(n \to \infty)$.*
- *Tout point d'accumulation d'une suite $\{x_n\}_{n\geq 1}$ telle que $x_n \in F_n$ pour tout $n \geq 1$ appartient à F.*

(iv) L'application

$$\begin{array}{rccl} i : & \mathscr{P}^*_{Fe}(X) & \to & \mathscr{C}(X) \\ & F & \mapsto & d_F \end{array}$$

est un homéomorphisme sur son image lorsqu'on munit $\mathscr{P}^*_{Fe}(X)$ de la topologie induite par la topologie de Chabauty et $\mathscr{C}(X)$ de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts. De plus, $i(\mathscr{P}^*_{Fe}(X)) \subseteq \mathscr{C}(X)$ est fermé, de sorte que $\mathscr{P}_{Fe}(X)$ est le compactifié d'Alexandrov de $\mathscr{P}^*_{Fe}(X)$ par le point (i).

(v) Si $F_n \overset{Chab.}{\to} F$, alors $F = \bigcap_{n\geq 1} \overline{\bigcup_{m\geq n} F_m}$.

(vi) L'application

$$\begin{array}{rccl} j : & X & \to & \mathscr{P}_{Fe}(X) \\ & x & \mapsto & \{x\} \end{array}$$

est un homéomorphisme sur son image et $\overline{j(X)} = j(X) \cup \emptyset$.

Preuve. Pour (i) on peut consulter, par exemple, [Pau07].

(ii) On commence par montrer que δ est une distance. Le fait que $\delta(F,G) = 0$ si et seulement si $F = G$ est relativement évident, la symétrie et la positivité le sont complètement. La condition que X n'est pas réduit à un point est nécessaire pour assurer que $\delta(\{x_0\},\emptyset) < \infty$. Pour prouver l'inégalité du triangle, on commence par observer que si $F,G \in \mathscr{P}_{Fe}(X)$ et $\varepsilon' \geq \varepsilon > 0$, alors

$$d_{\mathscr{H}}\big(F \cup (X \setminus \overline{B(x_0,1/\varepsilon')}), G \cup (X \setminus \overline{B(x_0,1/\varepsilon')})\big) \leq d_{\mathscr{H}}\big(F \cup (X \setminus \overline{B(x_0,1/\varepsilon)}), G \cup (X \setminus \overline{B(x_0,1/\varepsilon)})\big)$$

car $d\big(x, G \cup (X \setminus \overline{B(x_0,1/\varepsilon')})\big) \leq d\big(x, G \cup (X \setminus \overline{B(x_0,1/\varepsilon)})\big)$ pour tout $x \in X$ puisque $X \setminus \overline{B(x_0,1/\varepsilon)} \subseteq X \setminus \overline{B(x_0,1/\varepsilon')}$. Si $\delta(F,G) < \varepsilon_1$ et $\delta(G,H) < \varepsilon_2$, alors

$$\begin{array}{rl} & d_{\mathscr{H}}\big(F \cup (X \setminus \overline{B(x_0,1/(\varepsilon_1+\varepsilon_2))}), H \cup (X \setminus \overline{B(x_0,1/(\varepsilon_1+\varepsilon_2))})\big) \\ \leq & d_{\mathscr{H}}\big(F \cup (X \setminus \overline{B(x_0,1/(\varepsilon_1+\varepsilon_2))}), G \cup (X \setminus \overline{B(x_0,1/(\varepsilon_1+\varepsilon_2))})\big) \\ & + d_{\mathscr{H}}\big(G \cup (X \setminus \overline{B(x_0,1/(\varepsilon_1+\varepsilon_2))}), H \cup (X \setminus \overline{B(x_0,1/(\varepsilon_1+\varepsilon_2))})\big) \\ \leq & d_{\mathscr{H}}\big(F \cup (X \setminus \overline{B(x_0,1/\varepsilon_1)}), G \cup (X \setminus \overline{B(x_0,1/\varepsilon_1)})\big) \\ & + d_{\mathscr{H}}\big(G \cup (X \setminus \overline{B(x_0,1/\varepsilon_2)}), H \cup (X \setminus \overline{B(x_0,1/\varepsilon_2)})\big) \\ \leq & \varepsilon_1 + \varepsilon_2. \end{array}$$

Il faut maintenant prouver que les deux topologies coïncident. On commence par montrer que si $F \in \mathscr{P}^*_{Fe}(X)$ et $\varepsilon > 0$ sont fixés, alors il existe un compact K et des ouverts $U_1, \ldots, U_n$ tel que

$$F \in \mathscr{O}'_{U_1} \cap \ldots \cap \mathscr{O}'_{U_n} \cap \mathscr{O}_K \subseteq \overline{B}_\delta(F,\varepsilon).$$

Observerons que

$$G \in \overline{B}(F,\varepsilon) \overset{\text{déf. } d_{\mathscr{H}}}{\Longleftrightarrow} \begin{array}{l} G \subseteq \big(F \cup (X \setminus \overline{B(x_0,1/\varepsilon)})\big)_\varepsilon \\ F \subseteq \big(G \cup (X \setminus \overline{B(x_0,1/\varepsilon)})\big)_\varepsilon \end{array} \overset{(*)}{\Longleftrightarrow} \begin{array}{l} G \cap \overline{B(x_0,1/\varepsilon)} \subseteq \big(F \cup (X \setminus \overline{B(x_0,1/\varepsilon)})\big)_\varepsilon \\ F \cap \overline{B(x_0,1/\varepsilon)} \subseteq \big(G \cup (X \setminus \overline{B(x_0,1/\varepsilon)})\big)_\varepsilon. \end{array}$$

Le sens [$\Leftarrow$] de ($*$) est trivial. Pour l'autre, il suffit de remarquer que

$$G = \big(G \cap \overline{B(x_0, 1/\varepsilon)}\big) \cup \big(G \cap (X \setminus \overline{B(x_0, 1/\varepsilon)})\big)$$

et que

$$G \cap (X \setminus \overline{B(x_0, 1/\varepsilon)}) \subseteq X \setminus \overline{B(x_0, 1/\varepsilon)}.$$

Maintenant on distingue deux cas : soit $F \cap \overline{B(x_0, 1/\varepsilon)} = \emptyset$, soit $F \cap \overline{B(x_0, 1/\varepsilon)} \neq \emptyset$. Dans le premier cas, on a

$$\mathscr{O}_{\overline{B(x_0,1/\varepsilon)}} \subseteq \overline{B}_\delta(F, \varepsilon)$$

puisque si $G \in \mathscr{O}_{\overline{B(x_0,1/\varepsilon)}}$, alors $F, G \subseteq X \setminus \overline{B(x_0, 1/\varepsilon)}$.

Dans le deuxième cas, on choisit $x_1, \ldots, x_n \in F \cap \overline{B(x_0, 1/\varepsilon)}$ tels que

$$F \cap \overline{B(x_0, \varepsilon/2)} \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \varepsilon/2)$$

(de tels points existent puisque X est propre). Alors

$$F \in \mathscr{O}'_{B(x_1,\varepsilon/2)} \cap \ldots \cap \mathscr{O}'_{B(x_n,\varepsilon/2)} \cap \mathscr{O}_{\overline{B(x_0,1/\varepsilon)} \setminus \left(\bigcup_{i=1}^n B(x_i,\varepsilon/2)\right)} \subseteq \overline{B}_\delta(F, \varepsilon).$$

En effet, on a d'une part que si G est dans l'ensemble de gauche, alors

$$G \cap \overline{B(x_0, 1/\varepsilon)} = \big(G \cap (\bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \varepsilon/2))\big) \cap \underbrace{\big(G \cap (\overline{B(x_0, 1/\varepsilon)} \setminus \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \varepsilon/2))\big)}_{=\emptyset}$$

et si $x \in G \cap B(x_i, \varepsilon/2)$, alors $d(x, F) < \varepsilon/2 < \varepsilon$. D'autre part, on a aussi que

$$F \cap \overline{B(x_0, 1/\varepsilon)} = \big(F \cap (\bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \varepsilon/2))\big) \cap \underbrace{\big(F \cap (\overline{B(x_0, 1/\varepsilon)} \setminus \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \varepsilon/2))\big)}_{=\emptyset}$$

et si $x \in F \cap B(x_i, \varepsilon/2)$, alors $d(x, G) \leq d(x, G \cap B(x_i, \varepsilon/2)) < \varepsilon$. Ainsi, $G \in \overline{B}_\delta(F, \varepsilon)$ par l'observation préliminaire.

Pour montrer que la topologie de Chabauty est plus fine que celle déduite de la métrique δ, on se fixe $F \in \mathscr{P}_{\mathrm{Fe}}(X)$, $U_1, \ldots, U_n$ des ouverts et K un compact tel que $F \in \mathscr{O}'_{U_1} \cap \ldots \cap \mathscr{O}'_{U_n} \cap \mathscr{O}_K$. Il s'agit d'exhiber $\varepsilon > 0$ tel que

$$B_\delta(F, \varepsilon) \subseteq \mathscr{O}'_{U_1} \cap \ldots \cap \mathscr{O}'_{U_n} \cap \mathscr{O}_K.$$

On choisit $x_i \in F \cap U_i$ pour $1 \leq i \leq n$, ainsi qu'un nombre réel $R \geq 0$ tel que $K \subseteq \overline{B(x_0, R)}$. Alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que

- $B(x_i, \varepsilon) \subseteq U_i$ pour tout $i = 1, \ldots, n$,
- $1/\varepsilon > d(x_0, x_i) + 2\varepsilon$ pour tout $i = 1, \ldots, n$,
- $1/\varepsilon > R + 2\varepsilon$,
- $K \cap (F)_\varepsilon = \emptyset$.

Avant de conclure, observons que si $G \subseteq \big(H \cap (X \setminus \overline{B(x_0, 1/\varepsilon)})\big)_\varepsilon$, alors $G \cap \overline{B(x_0, 1/\varepsilon - 2\varepsilon)} \subseteq (H)_\varepsilon$. En effet, si $x \in \overline{B(x_0, 1/\varepsilon - 2\varepsilon)}$ et $y \in X \setminus \overline{B(x_0, 1/\varepsilon)}$, alors $d(x, y) \geq d(y, x_0) - d(x, x_0) \geq 2\varepsilon$.

Soit maintenant $G \in B_\delta(F, \varepsilon)$. Par ce qu'on vient d'observer, on a que $F \cap \overline{B(x_0, 1/\varepsilon - 2\varepsilon)} \subseteq (G)_\varepsilon$. Par choix de ε, on a que $x_i \in F \cap \overline{B(x_0, 1/\varepsilon - 2\varepsilon)}$ pour tout $1 \leq i \leq n$, d'où l'existence de $y_i \in G$ tel que

$d(x_i, y_i) < \varepsilon$. Toujours par choix de ε, on a $y_i \in G \cap U_i$ et donc $G \in \mathcal{O}'_{U_i}$ pour tout $1 \le i \le n$. Il reste à montrer que $G \in \mathcal{O}_K$, c'est-à-dire que $G \cap K = \emptyset$. Supposons qu'il existe $y \in G \cap K$. Alors

$$G \cap K \subseteq \overline{B(x_0, 1/\varepsilon - 2\varepsilon)} \subseteq (F)_\varepsilon,$$

ce qui contredit le choix de ε.

(iii) On renvoie à nouveau à [Pau07].

(iv) On commence par montrer que si $x_0 \in X$ est fixé et $F_n \overset{\text{Chab.}}{\to} F$, alors

$$F \neq \emptyset \iff \sup_{n \ge 1} d(x_0, F_n) < \infty.$$

[$\Rightarrow$] Soit $x \in F$. Alors, par le point (iii), il existe une suite $\{x_n\}_{n\ge1}$ telle que $x_n \in F_n$ pour tout $n \ge 1$ et $x_n \to x$. Ainsi $d(x_0, F_n) \le d(x_0, x_n)$ pour tout $n \ge 1$. Or $\{d(x_0, x_n)\}_{n\ge1}$ est bornée puisque $d(x_0, x_n) \to d(x_0, x)$.

[$\Leftarrow$] On choisit, pour tout $n \ge 1$, $x_n \in F_n$ tel que $d(x, F_n) = d(x, x_n)$. Comme $\sup_{n\ge1} d(x_0, x_n) \le R$, alors il existe une sous-suite $\{x_{n_k}\}_{k\ge1}$ qui converge vers x et donc $x \in F$ par le point (iii).

Maintenant, on prouve que si $F \neq \emptyset$, alors

$$F_n \overset{\text{Chab.}}{\to} F \iff d(y, F_n) \to d(y, F)\ \forall y \in X.$$

[$\Rightarrow$] On fixe $y \in X$. On va montrer que $\limsup_{n\to\infty} d(y, F_n) \le d(y, F) \le \liminf_{n\to\infty} F_n$. Pour la première inégalité, on fixe $x \in F$ tel que $d(y, x) = d(y, F)$ et une suite $\{x_n\}_{n\ge1}$ telle que $x_n \in F_n$ et $x_n \to x$. Alors

$$d(y, F) = d(y, x) = \lim_{n\to\infty} d(y, x_n) \ge \limsup_{n\to\infty} d(y, F_n).$$

Pour la deuxième inégalité, on sait par ce qu'on a montré plus haut qu'il existe $R \ge 0$ tel que $\sup_{n\ge1} d(y, F_n) \le R$. On peut donc choisir une suite croissante d'indices $\{n_k\}_{k\ge1}$ et une suite $\{x_{n_k}\}_{k\ge1} \subseteq X$ telle que

- $\lim_{k\to\infty} d(y, F_{n_k}) = \liminf_{n\to\infty} d(y, F_n)$,
- $x_{n_k} \in F_{n_k}$ et $d(y, x_{n_k}) = d(y, F_{n_k})$,
- $x_{n_k} \to x$ (qui appartient donc à F par (ii)).

Ainsi,

$$\liminf_{n\to\infty} d(y, F_n) = \lim_{k\to\infty} d(y, F_{n_k}) = \lim_{k\to\infty} d(y, x_{n_k}) = d(y, x) \ge d(y, F).$$

[$\Leftarrow$] On va montrer les deux propriétés du point (iii).

- Si $x \in F$, alors on choisit, pour tout $n \ge 1$, $x_n \in F_n$ tels que $d(x, F_n) = d(x, x_n)$. Par hypothèse, $d(x, x_n) = d(x, F_n) \to d(x, F) = 0$ et donc $x_n \to x$.
- Si $\{n_k\}_{k\ge1}$ est une suite croissante d'indices et $\{x_{n_k}\}_{k\ge1} \subseteq X$ est une suite telle que $x_{n_k} \in F_{n_k}$ et telle que $x_{n_k} \to x$, alors $d(x, F) = \lim_{k\to\infty} d(x, F_{n_k}) \le \lim_{k\to\infty} d(x, x_{n_k}) = 0$ et donc $x \in F$.

Finalement, on montre que si $\{F_n\} \subseteq \mathscr{P}^*_{\mathrm{Fe}}(X)$ est telle que $d(\cdot, F_n) \to f \in \mathscr{C}(X)$ ponctuellement, alors $f = d(\cdot, \bigcap_{n\ge1} \overline{\bigcup_{m\ge n} F_m})$. Pour se faire, on fixe $x \in X$. Alors on a

$$d(x, \bigcap_{n\ge1} \overline{\bigcup_{m\ge n} F_m}) = \liminf_{n\to\infty} d(x, F_n) = \lim_{n\to\infty} d(x, F_n) = f(x).$$

(v) L'ensemble $\bigcap_{n\ge1} \overline{\bigcup_{m\ge n} F_m}$ est exactement l'ensemble des points d'accumulations des suites $\{x_n\}_{n\ge1}$ telles que $x_n \in F_n$ pour tout $n \ge 1$. Le point (iii) permet de conclure.

(vi) j est continue puisque si $\{x_n\}_{n\ge1} \subseteq X$ est une suite, alors

$$d(x, x_n) = d_{\mathscr{H}}(\{x_n\}, x) \ge d_{\mathscr{H}}(\{x_n\} \cup \overline{B(x_0, 1/\varepsilon)}, \{x\} \cup \overline{B(x_0, 1/\varepsilon)}) \text{ pour tout } \varepsilon > 0.$$

Ainsi, si $x_n \to x$, alors $\{x_n\} \to \{x\}$.
Supposons que $\{x_n\}_{n\geq 1} \subseteq X$ soit une suite telle que $\{x_n\} \to F \in \mathscr{P}_{\mathrm{Fe}}(X)$. Supposons que $F \neq \emptyset$ et considérons $x \in F$ fixé. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N(\varepsilon)$ tel que

$$x \in \left(\{x_n\} \cup (X \setminus \overline{B(x_0, 1/\varepsilon)})\right)_\varepsilon \text{ pour tout } n \geq N(\varepsilon).$$

En particulier, si ε est assez petit pour que $1/\varepsilon \geq 2d(x_0, x)$ et que $\varepsilon < d(x_0, x)$, alors $x \in \overline{B(x_n, \varepsilon)}$ pour tout $n \geq N(\varepsilon)$. Ainsi $x_n \to x$. □

Remarque B.2.4. La topologie sur $i(\mathscr{P}^*_{\mathrm{Fe}}(X)) \subseteq \mathscr{C}(X)$ est en fait celle de la convergence ponctuelle. En effet, cette propriété découle du fait que $d(\cdot, A)$ est une fonction 1-Lipschitz pour tout $A \subseteq \mathscr{P}(X)$ et du résultat plus général ci dessous :

Soit Y un espace métrique compact et $\{f_n : Y \to \mathbb{R}\}_{n\geq 1}$ une suite de fonctions 1-Lipschitz qui tend ponctuellement vers f. Alors la convergence est uniforme.

Preuve du résultat. Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Alors on choisit $\{y_m\}_{m=1}^M \subseteq Y$ tel que $Y = \bigcup_{m=1\ldots M} B(y_m, \varepsilon)$. On choisit N tel que $|f_n(y_m) - f(y_m)| \leq \varepsilon$ pour $m = 1, \ldots, M$. Soit $y \in Y$. Choisissons y_m tel que $d(y, y_m) \leq \varepsilon$. Alors pour tout $n \geq N$, on a que

$$|f_n(y) - f(y)| \leq |f_n(y) - f_n(y_m)| + |f_n(y_m) - f(y_m)| + |f(y_m) - f(y)| \leq 3\varepsilon.$$

B.2.2 Espace géodésique.

Dans le cas particulier où l'espace est géodésique, on peut exhiber une autre distance qui induit aussi la topologie de Chabauty.

Lemme B.2.5. *Soit X un espace métrique géodésique propre. Alors l'application $\delta' : \mathscr{P}_{\mathrm{Fe}}(X) \times \mathscr{P}_{\mathrm{Fe}}(X) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ définie par*

$$\delta'(F, G) := \inf\{\varepsilon > 0 \mid F \cap \overline{B}(x_0, 1/\varepsilon - \varepsilon) \subseteq (G)_\varepsilon \text{ et } G \cap \overline{B}(x_0, 1/\varepsilon - \varepsilon) \subseteq (F)_\varepsilon\}$$

est une distance qui induit la topologie de Chabauty sur $\mathscr{P}_{\mathrm{Fe}}(X)$.

Preuve. Vérifions d'abord que c'est une distance. On observe que $\delta'(F, G) \leq 1$, que $\delta'(F, G) = \delta'(G, F)$ et que $\delta'(F, G) = 0$ si et seulement si $F = G$. Pour tout $\varepsilon > 0$, on note

$$V_\varepsilon := \{(F, G) \in \mathscr{P}_{\mathrm{Fe}}(X) \times \mathscr{P}_{\mathrm{Fe}}(X) \mid \delta'(F, G) \leq \varepsilon\}.$$

Pour montrer l'inégalité du triangle, il suffit de prouver que pour tout $\varepsilon > 0$ et $F, G \in \mathscr{P}_{\mathrm{Fe}}(X)$ on a

$$(F, G) \in V_{\varepsilon_1} \text{ et } (G, H) \in V_{\varepsilon_2} \ \Rightarrow\ (F, H) \in V_{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}.$$

Ceci se vérifie facilement,

$$\begin{aligned} F \cap \overline{B(x_0, 1/(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) - \varepsilon_1 - \varepsilon_2)} &\subseteq \left(G \cap \overline{B(x_0, 1/(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) - \varepsilon_1 - \varepsilon_2)}\right)_{\varepsilon_1} \\ &\subseteq \left(G \cap \overline{B(x_0, 1/\varepsilon_2 - \varepsilon_2)}\right)_{\varepsilon_1} \subseteq \left((H)_{\varepsilon_2}\right)_{\varepsilon_1} = (H)_{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}. \end{aligned}$$

Prouvons maintenant que $\delta'(F, G) \leq 2\delta(F, G)$ où δ est la métrique de la Proposition B.2.3. Il suffit de montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ et $F, G \in \mathscr{P}_{\mathrm{Fe}}(X)$

$$F \subseteq (G \cup (X \setminus \overline{B(x_0, 1/\varepsilon)}))_\varepsilon \Rightarrow F \cap \overline{B(x_0, 1/(2\varepsilon) - 2\varepsilon)} \subseteq (G)_{2\varepsilon}.$$

Ceci se prouve aisément

$$F \cap \overline{B(x_0, 1/(2\varepsilon) - 2\varepsilon)} \subseteq F \cap \overline{B(x_0, 1/\varepsilon - 2\varepsilon)} \subseteq (G)_\varepsilon \subseteq (G)_{2\varepsilon}.$$

Finalement, on montre que pour tout $F, G \in \mathscr{P}_{\mathrm{Fe}}(X)$ tels que $\delta'(F,G) \leq 1/\sqrt{2}$, alors $\delta'(F,G) \leq 2\delta(F,G)$ (ce qui terminera la preuve du lemme). Pour ce faire, il suffit de prouver que pour tout $F, G \in \mathscr{P}_{\mathrm{Fe}}(X)$ et $0 < \varepsilon \leq 1/\sqrt{2}$ on a

$$F \cap \overline{B(x_0, 1/\varepsilon - \varepsilon)} \subseteq (G)_\varepsilon \;\Rightarrow\; F \subseteq \big(G \cup (X \setminus \overline{B(x_0, 1/(2\varepsilon))})\big)_{2\varepsilon}.$$

Or on observe que

$$F = \big(\underbrace{F \cap \overline{B(x_0, 1/\varepsilon - \varepsilon)}}_{\subseteq (G)_\varepsilon}\big) \cup \big(\underbrace{F \cap (X \setminus \overline{B(x_0, 1/\varepsilon - \varepsilon)})}_{\subseteq \left(X \setminus \overline{B(x_0, 1/(2\varepsilon))}\right)}\big) \subseteq \big(G \cup (X \setminus \overline{B(x_0, 1/(2\varepsilon))})\big)_{2\varepsilon}.$$

□

Remarques B.2.6. (1) Le $1/\varepsilon - \varepsilon$ est juste une condition technique pour que δ' soit une distance. On peut facilement montrer qu'une base des voisinages de $F \in \mathscr{P}_{\mathrm{Fe}}(X)$ est donnée par

$$\big\{\{G \in \mathscr{P}_{\mathrm{Fe}}(X) \mid G \cap \overline{B(x_0, R)} \subseteq (F)_\varepsilon \text{ et } F \cap \overline{B(x_0, R)} \subseteq (G)_\varepsilon\}\big\}_{R \geq 0, \varepsilon > 0}.$$

(2) Cette nouvelle distance permet de penser à la topologie de Chabauty comme à une topologie de la convergence de Hausdorff sur les bornés. Mais on ne peut pas pour autant définir une métrique par

$$\delta''(F,G) = \inf\{\varepsilon > 0 \mid d_{\mathscr{H}}(F \cap \overline{B(x_0, \varepsilon)}, G \cap \overline{B(x_0, \varepsilon)}) \leq \varepsilon\}.$$

En effet, ce n'est pas nécessairement une distance car

$$\{\varepsilon > 0 \mid d_{\mathscr{H}}(F \cap \overline{B(x_0, \varepsilon)}, G \cap \overline{B(x_0, \varepsilon)}) \leq \varepsilon\}$$

n'est pas toujours un intervalle.

(3) Soit X un espace métrique géodésique. On considère $\mathscr{P}^*_{\mathrm{Fe}}(X)$ muni de la topologie de Chabauty. Soit $\{F_n\}_{n \geq 1} \subseteq \mathscr{P}^*_{\mathrm{Fe}}(X)$ une suite qui converge vers $F \in \mathscr{P}^*_{\mathrm{Fe}}(X)$. Alors $\sup_{n \geq 1} d(x_0, F_n) < \infty$ pour tout $x_0 \in X$. En effet, soit $1 > \varepsilon > 0$ tel que $1/\varepsilon - \varepsilon \geq d(x_0, F)$. Comme $F_n \to F$, il existe N_0 tel que $F \cap \overline{B(x_0, 1/\varepsilon - \varepsilon)} \subseteq (F_n)_\varepsilon$ et donc $d(x_0, F_n) \leq 1/\varepsilon$ pour tout $n \geq N_0$.

On considère l'application

$$\begin{array}{rccl} i_0 : & \mathscr{P}^*_{\mathrm{Fe}}(X) & \to & \mathscr{C}_0(X) \\ & F & \mapsto & d(\cdot, F) - d(x_0, F). \end{array}$$

Lemme B.2.7. *Soit X un espace métrique propre. Soit $\{F_n\}_{n \geq 1} \subseteq \mathscr{P}^*_{\mathrm{Fe}}(X)$ telle que $\sup_{n \geq 1} d(x_0, F_n) < \infty$ et que $i_0(F_n) \to f \in \mathscr{C}_0(X)$ ponctuellement. Alors*

$$f = i_0\Big(\bigcap_{n \geq 1} \overline{\bigcup_{m \geq n} F_m}\Big).$$

Preuve. Notons $F := \bigcap_{n \geq 1} \overline{\bigcup_{n \geq 1} F_n} \neq \emptyset$ puisque X est propre et que $\sup_{n \geq 1} d(x_0, F_n) < \infty$. On a que $d(x, F) = \liminf_{n \to \infty} d(x, F_n) <$ [1]∞ pour tout $x \in X$. Fixons $x \in X$ et choisissons $\{n_k\}_{k \geq 1}$ une sous-suite telle que $d(x, F) = \lim_{k \to \infty} d(x, F_{n_k})$. Alors

$$f(x) - \lim_{k \to \infty} d(x, F_{n_k}) = \lim_{k \to \infty} (d(x, F_{n_k}) - d(x_0, F_{n_k})) - \lim_{k \to \infty} d(x, F_{n_k}) = -\lim_{k \to \infty} d(x_0, F_{n_k}).$$

En particulier, cette limite existe et

$$f(x) = \underbrace{\lim_{k \to \infty} d(x, F_{n_k})}_{= d(x,F)} - \underbrace{\lim_{k \to \infty} d(x_0, F_{n_k})}_{\geq \liminf_{n \to \infty} d(x_0, F_n) = d(x_0, F)} \leq d(x, F) - d(x_0, F).$$

1. $d(x, F_n) \leq d(x_0, F_n) + d(x_0, x)$.

On peut aussi choisir $\{n_m\}_{m\geq 1}$ tel que $d(x_0,F)=\lim_{m\to\infty} d(x_0,F_{n_m})$. Alors

$$f(x)+\lim_{m\to\infty} d(x_0,F_{n_m})=\lim_{m\to\infty}(d(x,F_{n_m})-d(x_0,F_{n_m}))+\lim_{m\to\infty} d(x_0,F_{n_m})=\lim_{m\to\infty} d(x,F_{n_m}).$$

En particulier, cette limite existe et

$$f(x)=\underbrace{\lim_{m\to\infty} d(x,F_{n_m})}_{\geq \liminf_{n\to\infty} d(x,F_n)=d(x,F)}-\underbrace{\lim_{m\to\infty} d(x_0,F_{n_m})}_{=d(x_0,F)}\geq d(x,F)-d(x_0,F).$$

On a donc bien que $f(x)=d(x,F)-d(x_0,F)$ et ce pour tout $x\in X$. □

Proposition B.2.8. *Soit X un espace métrique propre et géodésique. Alors i_0 est un homéomorphisme sur son image lorsqu'on munit $\mathscr{P}^*_{\mathrm{Fe}}(X)$ de la topologie de Chabauty et $\mathscr{C}_0(X)$ de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts.*

Preuve. On fait la preuve en trois pas. On commence par montrer que i_0 est injective. Soit $F_1\neq F_2\in\mathscr{P}^*_{\mathrm{Fe}}(X)$. Supposons, sans perdre la généralité, que $d(x_0,F_1)\geq d(x_0,F_2)$. Deux cas sont possibles :

(a) Il existe $x\in F_1\setminus F_2$. Alors

$$i_0(F_2)(x)-i_0(F_1)(x)=d(x,F_2)-d(x_0,F_2)-d(x,F_1)+d(x_0,F_1)\geq d(x,F_2)>0.$$

(b) $F_1\subseteq F_2$. Si $d(x_0,F_1)=d(x_0,F_2)$, on prend $x\in F_2\setminus F_1$. Si $d(x_0,F_1)>d(x_0,F_2)$, on prend $x\in F_1$.

Ensuite, on observe que i_0 est continue. En effet, si $F_n\to F$, alors on sait, par la Proposition B.2.3, que $d(\cdot,F_n)\to d(\cdot,F)$ uniformément sur les compacts et donc que $d(\cdot,F_n)-d(x_0,F_n)\to d(\cdot,F)-d(x_0,F)$ uniformément sur les compacts.

Finalement, on montre que l'inverse de i_0 définie sur $i_0(X)$ est continue. Soit $F\in\mathscr{P}^*_{\mathrm{Fe}}(X)$ fixé. On procède en deux étapes.

(1) On montre que si $0<\varepsilon<1$ et $G\in\mathscr{P}^*_{\mathrm{Fe}}(X)$ est tel que

$$\sup_{\overline{x\in B(x_0,d(x_0,F)+1)}}|i_0(F)(x)-i_0(G)(x)|\leq\varepsilon$$

alors

$$d(x_0,G)<d(x_0,F)+1.$$

Soit $G\in\mathscr{P}^*_{\mathrm{Fe}}(X)$ tel que $d(x_0,G)\geq d(x_0,F)+1$. Puisque X est propre, il existe $y\in G$ tel que $d(x,y)=d(x,G)$. Choisissons $z\in[x,y]$ à distance $d(x_0,F)+1$ de x_0. Alors

$$\begin{aligned} i_0(F)(z)-i_0(G)(z) &= d(z,F)-d(x_0,F)-d(z,G)+d(x_0,G)=d(z,F)-d(x_0,F)+d(x_0,z)\\ &= d(z,F)-d(x_0,F)+d(x_0,F)+1\geq 1>\varepsilon. \end{aligned}$$

(2) On va prouver que si $0<\varepsilon<1$ est telle que $1/\varepsilon-\varepsilon\geq d(x_0,F)+1$ et G est tel que

$$\sup_{x\in\overline{B}(x_0,1/\varepsilon-\varepsilon)}|i_0(F)(x)-i_0(G)(x)|\leq\varepsilon,$$

alors $\delta'(F,G)\leq 2\varepsilon$ (ce qui implique bien la continuité de i_0^{-1}).
Par hypothèse, on a l'inégalité

$$|d(x,F)-d(x_0,F)-d(x,G)+d(x_0,G)|\leq\varepsilon\quad\forall\ x\in\overline{B}(x_0,1/\varepsilon-\varepsilon).$$

En particulier, si on prend $x \in F \cap \overline{B}(x_0, 1/\varepsilon - \varepsilon)$ et $y \in G \cap \overline{B}(x_0, 1/\varepsilon - \varepsilon)$ (Ces ensembles sont non vides par choix de ε et par le point (1)) on obtient que

$$\begin{aligned} |-d(x_0,F) - d(x,G) + d(x_0,G)| &\leq \varepsilon, \\ |d(y,F) - d(x_0,F) + d(x_0,G)| &\leq \varepsilon \end{aligned}$$

et on a donc l'inégalité [2]

$$|d(y,F) + d(x,G)| \leq 2\varepsilon.$$

On obtient que $d(y,F), d(x,G) \leq 2\varepsilon$ pour tout $x \in F \cap \overline{B}(x_0, 1/\varepsilon - \varepsilon)$ et $y \in G \cap \overline{B}(x_0, 1/\varepsilon - \varepsilon)$. Ainsi,

$$F \cap \overline{B}(x_0, 1/\varepsilon - \varepsilon) \subseteq (G)_{2\varepsilon} \text{ et } G \cap \overline{B}(x_0, 1/\varepsilon - \varepsilon) \subseteq (F)_{2\varepsilon},$$

c'est-à-dire que $\delta'(F,G) \leq 2\varepsilon$. □

B.2.3 Espace CAT(0)

Proposition B.2.9. *Soit X un espace CAT(0) propre. Alors*

(i) L'ensemble

$$\mathscr{P}_{Con}(X) := \{C \in \mathscr{P}^*_{Fe}(X) \mid C \text{ est convexe}\}$$

est fermé dans $\mathscr{P}^*_{Fe}(X)$.

(ii) L'adhérence de $\mathscr{P}_{Con}(X)$ dans $\mathscr{C}_0(X)$ est compact et est égal à $\overline{\mathscr{P}_{Con}(X)} = \mathscr{P}_{Con}(X) \sqcup \partial X$.

Preuve. (i) Commençons par faire l'observation suivante : un fermé $F \subseteq X$ est convexe si et seulement si $d(\cdot, F)$ est une fonction convexe. L'implication de gauche à droite est prouvée dans le Corollaire II.2.5 de [BH99] (B.1.5). Pour l'autre implication, on observe que si F n'est pas convexe, alors il existe $x, y \in F$ et $z \in [x,y]$ tel que $d(z,F) > 0$. Mais alors $d(z,F) > 0 = (1-t)d(x,F) + td(y,F)$ et $d(\cdot,F)$ n'est pas convexe. On peut maintenant montrer que $\mathscr{P}_{\mathrm{Con}}(X)$ est fermé en utilisant le point (iv) de la Proposition B.2.3. Soit $\{C_n\}_{n\geq 1} \subseteq \mathscr{P}_{\mathrm{Con}}(X)$ une suite qui converge vers $F \in \mathscr{P}^*_{\mathrm{Fe}}(X)$. Alors $d(\cdot, C_n) \to d(\cdot, F)$. Comme C_n est convexe pour tout n, alors $d(\cdot, C_n)$ est une fonction convexe et la limite $d(\cdot, F)$ aussi. Ainsi, F est convexe.

(ii) On commence par montrer que si $\{C_n\}_{n\geq 1} \subseteq \mathscr{P}_{\mathrm{Con}}(X)$ est une suite telle que $i_0(C_n) = d(\cdot, C_n) - d(x_0, C_n) \to f \in \mathscr{C}_0(X)$ et $\sup_{n\geq 1} d(x_0, C_n) = \infty$, alors $f \in \partial X$.

On décompose la preuve de cette affirmation en trois étapes.

(1) Commençons par observer que $\lim_{n\to\infty} d(x_0, C_n) = \infty$. En effet, s'il existait une sous-suite $\{C_{n_k}\}_{k\geq 1}$ telle que $\sup_{k\geq 1} d(x_0, C_{n_k}) < \infty$, alors, par la Remarque B.2.6 (3) et le Lemme B.2.7, on aurait que $f = i_0(\bigcap_{m\geq 1} \overline{\bigcup_{k\geq m} C_{n_k}})$. Mais alors on aurait que $\sup_{n\geq 1} d(x_0, C_n) < \infty$. Par l'inégalité du triangle, on a évidemment que $\lim_{n\to\infty} d(x, C_n) = \infty$ pour tout $x \in X$.

(2) Montrons maintenant que si $\{B_n\}_{n\geq 1}$ est une suite de convexes telle que $\pi_{B_n}(x) \to \xi \in \partial X$ pour tout $x \in X$ (en particulier [3], $d(x_0, \pi_{B_n}(x)) \to \infty$), alors $d(x_0, \pi_{B_n}(x_0)) - d(x_0, \pi_{B_n}(x)) \to 0$ pour tout $x \in X$. Pour ce faire, on considère un quadrilatère Q dans $\mathbb{R}^2$ obtenu en collant deux triangles de comparaison $\overline{\Delta}_{x_0, \pi_{B_n}(x_0), \pi_{B_n}(x)} = \Delta_{\overline{x_0}, \overline{\pi_{B_n}(x_0)}, \overline{\pi_{B_n}(x)}}$ et $\overline{\Delta}_{x_0, \pi_{B_n}(x), x} = \Delta_{\overline{x_0}, \overline{\pi_{B_n}(x)}, \overline{x}}$ le long de $[\overline{x_0}, \overline{\pi_{B_n}(x)}]$ de sorte que $\overline{x}$ et $\overline{\pi_{B_n}(x_0)}$ soient situés de part et d'autre du segment $[\overline{x_0}, \overline{\pi_{B_n}(x)}]$. Si

2. Si $|a+b|, |a+c| \leq \varepsilon$, alors $|c-b| = |c+a-(b+a)| \leq |a+c| + |a+b| \leq 2\varepsilon$. Ici, on prend $a = -d(x_0,F) + d(x_0,G)$, $b = -d(x,G)$ et $c = d(y,F)$.

3. En cas de doute, voir l'observation de la preuve de la Proposition 3.3.8.

n est assez grand (pour que $d(x,\pi_{B_n}(x)) >> d(x,x_0)$), alors Q est convexe. Observons que si $\overline{\beta}$ est l'angle dans Q entre $\overline{x}$ et $\overline{\pi_{B_n}(x_0)}$ au point $\overline{\pi_{B_n}(x)}$, alors

$$\begin{aligned}\overline{\beta} &\geq \overline{\angle}_{\pi_{B_n}(x)}(\pi_{B_n}(x_0),x_0)+\overline{\angle}_{\pi_{B_n}(x)}(x_0,x) \geq \angle_{\pi_{B_n}(x)}(\pi_{B_n}(x_0),x_0)+\angle_{\pi_{B_n}(x)}(x_0,x)\\ &\geq \angle_{\pi_{B_n}(x)}(\pi_{B_n}(x_0),x)\geq \pi/2.\end{aligned}$$

D'autre part

$$\overline{\angle}_{\pi_{B_n}(x_0)}(x_0,\pi_{B_n}(x))\geq \angle_{\pi_{B_n}(x_0)}(x_0,\pi_{B_n}(x))\geq \pi/2.$$

On prolonge le segment $[\overline{\pi_{B_n}(x_0)},\overline{\pi_{B_n}(x)}]$ en une droite qu'on note $\overline{d_n}$. Notons $\overline{y_n}:=\pi_{\overline{d_n}}(\overline{x_0})$. Alors $d(\overline{y_n},\overline{\pi_{B_n}(x)})\leq d(\overline{x}_0,\overline{x})$ car $\overline{\beta}\geq \pi/2$ et $d(\overline{x_0},\overline{y_n})\leq d(\overline{x_0},\overline{\pi_{B_n}(x_0)})$ car $\overline{\pi_{B_n}(x_0)}\in\overline{d_n}$. En particulier,

$$d(x_0,\pi_{B_n}(x))-d(x_0,\pi_{B_n}(x_0)) = d(\overline{x_0},\overline{\pi_{B_n}(x)})-d(\overline{x_0},\overline{\pi_{B_n}(x_0)})\leq d(\overline{x_0},\overline{\pi_{B_n}(x)})-d(\overline{x_0},\overline{y_n}).$$

D'autre part, puisque le triangle $\Delta_{\overline{x_0},\overline{y_n},\overline{\pi_{B_n}(x)}}$ est rectangle, on a que

$$\begin{aligned} d^2(\overline{x_0},\overline{x}) &\geq d^2(\overline{y_n},\overline{\pi_{B_n}(x)}) = d^2(\overline{x_0},\overline{\pi_{B_n}(x)})-d^2(\overline{x_0},\overline{y_n})\\ &= \underbrace{\left(d(\overline{x_0},\overline{\pi_{B_n}(x)})+d(\overline{x_0},\overline{y_n})\right)}_{\to\infty}\cdot\left(d(\overline{x_0},\overline{\pi_{B_n}(x)})-d(\overline{x_0},\overline{y_n})\right).\end{aligned}$$

Et donc puisque le membre de gauche est constant, on a nécessairement que

$$d(\overline{x_0},\overline{\pi_{B_n}(x)})-d(\overline{x_0},\overline{y_n})\to 0,$$

ce qui termine cette partie de la preuve.

(3) On peut maintenant terminer la preuve de l'affirmation. Soit $\xi\in\overline{X}$ un point d'accumulation de $\{\pi_{C_n}(x_0)\}_{n\geq 1}$. Alors[4] $\xi\in\partial X$. Choisissons $\{n_k\}_{k\geq 1}$ une suite croissante d'indices telle que $\pi_{C_{n_k}}(x_0)\to\xi$ ($k\to\infty$). Alors $\pi_{C_{n_k}}(x)\to\xi$ pour tout $x\in X$ puisque $d(\pi_{C_{n_k}}(x_0),\pi_{C_{n_k}}(x))\leq d(x_0,x)$ (Corollaire B.1.5) et par définition de la topologie conique sur le bord. Ainsi on a que

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{k\to\infty}\left(d(x,C_{n_k})-d(x_0,C_{n_k})\right) = \lim_{k\to\infty}\left(d(x,\pi_{C_{n_k}}(x))-d(x_0,\pi_{C_{n_k}}(x_0))\right)\\ &= \lim_{k\to\infty}\left(d(x,\pi_{C_{n_k}}(x))-d(x_0,\pi_{C_{n_k}}(x))+d(x_0,\pi_{C_{n_k}}(x))-d(x_0,\pi_{C_{n_k}}(x_0))\right)\\ &= \lim_{k\to\infty}\left(d(x,\pi_{C_{n_k}}(x))-d(x_0,\pi_{C_{n_k}}(x))\right)+\underbrace{\lim_{k\to\infty}\left(d(x_0,\pi_{C_{n_k}}(x))-d(x_0,\pi_{C_{n_k}}(x_0))\right)}_{=0 \text{ par le point (2)}}\\ &= b_{\xi,x_0}(x).\end{aligned}$$

Ceci achève la preuve de l'affirmation.

Ainsi, on a bien que $\overline{\mathscr{P}_{\mathrm{Con}}(X)}=\mathscr{P}_{\mathrm{Con}}(X)\sqcup\partial X$. La compacité découle du fait que $\mathscr{P}_{\mathrm{Con}}(X)$ est relativement compact par Ascoli (voir la preuve du Lemme 3.3.7 sur la compacité de $\overline{X}$). □

Lemme B.2.10. *Soit X un espace CAT(0) propre.*

(i) Soit $\{F_n\}_{n\geq 1}$ une suite bornée de fermés[5] qui converge vers un ensemble F. Alors $\overline{\mathrm{co}}(F_n)\to\overline{\mathrm{co}}(F)$.

(ii) Soit $\{A_n\}_{n\geq 1},\{B_n\}_{n\geq 1}\subseteq\mathscr{P}^*_{Fe}(X)$ des suites tels que $A_n\to A$ et $B_n\to B$. Alors[6] $A_n\cup B_n\to A\cup B$.

En particulier, si $x_n\to x$ et $y_n\to y$, alors $[x_n,y_n]\to[x,y]$.

4. A nouveau en cas de doute voir la preuve de la Proposition 3.3.8.
5. *I.e.* il existe $R\geq 0$ tel que $F_n\subseteq B(x_0,R)$ pour tout $n\geq 1$.
6. Évidemment l'hypothèse CAT(0) est inutile dans ce cas.

Preuve. (i) On procède en trois étapes.

(1) Pour $A \subseteq X$, on définit $A' := \{m(a,a') \mid a,a' \in A\}$ où $m(x,y)$ désigne le point milieu entre $a,a' \in X$. Remarquons que $A \subseteq A'$. On peut ainsi définir une suite croissante d'ensembles

$$A^{(0)} := A,\ A^{(n)} := (A^{(n-1)})' \text{ pour } n \geq 1$$

et une limite

$$A^{(\infty)} := \bigcup_{n\geq 0} A^{(n)}.$$

Alors

$$\overline{\mathrm{co}}(A) = \overline{A^{(\infty)}}.$$

[$\subseteq$] Évident.

[$\supseteq$] Puisque $A^{(\infty)} \subseteq \mathrm{co}(A)$, il suffit de montrer que $\overline{A^{(\infty)}}$ est convexe. De plus, puisque $\overline{A^{(\infty)}}$ est fermé, il suffit de montrer que $x, y \in \overline{A^{(\infty)}}$ implique que $m(x,y) \in \overline{A^{(\infty)}}$. Prenons $\{x_n\}_{n\geq 1}, \{y_n\}_{n\geq 1} \subseteq A^{(\infty)}$ tels que $x_n \to x, y_n \to y$. Alors $m(x_n, y_n) \in A^{(\infty)}$ et, puisque les géodésiques dépendent continûment des extrémités (Proposition 1.4 de [BH99]), $m(x_n, y_n) \to m(x,y)$. En particulier, $m(x,y) \in \overline{A^{(\infty)}}$.

(2) Montrons que $d_{\mathscr{H}}(\overline{\mathrm{co}}(A), \overline{\mathrm{co}}(B)) \leq d_{\mathscr{H}}(A,B)$ pour tout $A,B \in \mathscr{P}^*_{\mathrm{Fe}}(X)$. On vérifie déjà que $d_{\mathscr{H}}(A',B') \leq d_{\mathscr{H}}(A,B)$. Soit $x = m(a,a') \in A'$. Alors il existe $b,b' \in B$ tel que $d(a,b), d(a',b') \leq d_{\mathscr{H}}(A,B)$. Par la convexité de la distance (Proposition 2.2 de [BH99]), on a que $d(m(a,a'), m(b,b')) \leq 1/2 d(a,b) + 1/2 d(a',b') \leq d_{\mathscr{H}}(A,B)$. Donc $d(x,B') \leq d_{\mathscr{H}}(A,B)$ pour tout $x \in A'$. Par symétrie, on a aussi que $d(y,A') \leq d_{\mathscr{H}}(A,B)$ pour tout $y \in B'$. Ainsi, on a bien $d_{\mathscr{H}}(A',B') \leq d_{\mathscr{H}}(A,B)$. Par récurrence, on a que $d_{\mathscr{H}}(A^{(n)}, B^{(n)}) \leq d_{\mathscr{H}}(A,B)$ pour tout $n \geq 0$. De cette observation, on conclut facilement que $d_{\mathscr{H}}(A^{(\infty)}, B^{(\infty)}) \leq d_{\mathscr{H}}(A,B)$. En effet, si $x \in A^{(\infty)}$, alors il existe n tel que $x \in A^{(n)}$ et donc

$$d(x, B^{(\infty)}) \leq d(x, B^{(n)}) \leq d_{\mathscr{H}}(A,B).$$

On conclut en observant que si $C, D \subseteq X$, alors $d_{\mathscr{H}}(C,D) = d_{\mathscr{H}}(\overline{C}, \overline{D})$ et en utilisant le point (1).

(3) Prenons maintenant une suite $\{F_n\}_{n\geq 1} \subseteq \mathscr{P}^*_{\mathrm{Fe}}(X)$ bornée qui converge vers $F \in \mathscr{P}^*_{\mathrm{Fe}}(X)$. Il découle de la définition de la topologie de Chabauty que $d_{\mathscr{H}}(F_n, F) \to 0$ quand $n \to \infty$.
Grâce au point (2), on peut conclure que $d_{\mathscr{H}}(\overline{\mathrm{co}}(F_n), \overline{\mathrm{co}}(F)) \to 0$ et donc que $\overline{\mathrm{co}}(F_n) \to \overline{\mathrm{co}}(F)$.

(ii) Par la Proposition B.2.3 et la Remarque B.2.4, $A_n \cup B_n \to A \cup B$ si et seulement si $d(x, A_n \cup B_n) \to d(x, A \cup B)$ pour tout $x \in X$. Mais, par hypothèse et par le même lemme, on a bien que $d(x, A_n \cup B_n) = \min\{d(x,A_n), d(x,B_n)\} \to \min\{d(x,A), d(x,B)\} = d(x, A \cup B)$ pour tout $x \in X$. □

Remarques B.2.11. (1) En général, on a pas que $A_n \to A \Rightarrow \overline{\mathrm{co}}(A_n) \to \overline{\mathrm{co}}(A)$. On peut par exemple considérer dans $\mathbb{R}^2$ les ensembles

$$A_n := ([-n,n] \times \{0\}) \cup (\{(-n,n),(n,n)\}).$$

Alors $A_n \to \mathbb{R} \times \{0\}$, mais $\overline{\mathrm{co}}(A_n) = [-n,n] \times [0,n] \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \neq \overline{\mathrm{co}}(\mathbb{R} \times \{0\}) = \mathbb{R} \times \{0\}$.

(2) On a pas non plus que

$$\mathrm{co}(x,y,z) = \bigcup_{w \in [y,z]} [x,w].$$

Par exemple dans le plan hyperbolique complexe, un "triangle" (*i.e.* l'enveloppe convexe de 3 points) peut être de dimension topologique 4.

(3) Soit X un espace métrique propre. Le sous-ensemble de $\mathscr{P}^*_{\mathrm{Fe}}(X)$ constitué des parties bornées n'est pas nécessairement fermé dans $\mathscr{P}^*_{\mathrm{Fe}}(X)$. Par exemple la suite des boules fermées de rayon R tend vers X quand R tend vers l'infini.

(4) Si une suite F_n tend vers un ensemble F bornée, la suite n'est pas nécessairement borné. Il est même possible qu'aucun des ensembles ne soit borné. Par exemple dans $\mathbb{R}$, la suite défini par $F_n := \{0\} \times [n, \infty)$ tend vers $\{0\}$.

Définition B.2.12. *Soit X un espace CAT(0). Une partie P de X est dite plate si elle est convexe et s'il existe un plongement isométrique de P dans un espace Euclidien. On note $\mathscr{P}_{Plates}(X)$ l'ensemble des parties plates de X. Un partie de X est appelé un plat si elle est isométrique à un espace Euclidien de dimension finie. On note* $\mathrm{Plat}(X)$ *l'ensemble des plats de X. En particulier,* $\mathrm{Plat}(X) \subseteq \mathscr{P}_{Plates}(X)$.

La dimension d'une partie plate P de X est le minimum des entiers n tel qu'il existe un plongement isométrique de P dans $\mathbb{R}^n$ (et l'infini s'il n'existe pas de tel entier). On la note $\dim(P)$.

Dans [FL08], on trouve le résultat suivant (on en donne ici la version CAT(0), mais il est formulé sous une forme plus générale).

Lemme B.2.13. *Soit X un espace CAT(0) tel que pour tout triplet de points $x, y, z \in X$, le triangle $\Delta_{x,y,z}$ soit plat. Alors X est plat.*

Proposition B.2.14. *Soit X CAT(0) propre.*

(i) Alors l'ensemble $\mathscr{P}_{Plates}(X)$ des parties plates de X est fermé dans $\mathscr{P}^*_{Fe}(X)$.

(ii) $\mathscr{P}^{(n)}_{Plates}(X)$ l'ensemble des parties plates de X de dimension $\leq n$ est fermé dans $\mathscr{P}^*_{Fe}(X)$.

(iii) L'ensemble des plats et l'ensemble des plats de X de dimension n (qu'on note $\mathrm{Plat}^n(X)$*) sont fermés dans $\mathscr{P}^*_{Fe}(X)$.*

Preuve. (i) Soit donc une suite $\{P_n\}_{n\geq 1} \subseteq \mathscr{P}_{\mathrm{Plates}}(X)$ telle que $P_n \to C \in \mathscr{P}_{\mathrm{Con}}(X)$. Par le Lemme B.2.13, il suffit de montrer que pour tout $x, y, z \in C$ tels que $x \neq y, z$ le triangle $\Delta_{x,y,z}$ est plat. Par la Proposition B.2.3 (iii), il existe des suites $\{x_n\}_{n\geq 1}, \{y_n\}_{n\geq 1}, \{z_n\}_{n\geq 1}$ telles que $x_n, y_n, z_n \in P_n$ pour tout $n \geq 1$ et $x_n \to x$, $y_n \to y$, $z_n \to z$. Comme $d(x_n, y_n) \to d(x, y) > 0$ et $d(x_n, z_n) \to d(x, z) > 0$, il existe n_0 tel que $x_n \neq y_n, z_n$ pour tout $n \geq 0$. Comme P_n est plat, on a que $\overline{\angle}_{x_n}(y_n, z_n) = \angle_{x_n}(y_n, z_n)$. Ainsi,

$$\angle_x(y,z) \overset{B.1.12}{\geq} \limsup_{n\to\infty} \angle_{x_n}(y_n, z_n) = \limsup_{n\to\infty} \overline{\angle}_{x_n}(y_n, z_n) = \overline{\angle}_x(y,z) \overset{X\ \mathrm{CAT}(0)}{\geq} \angle_x(y,z).$$

Donc $\angle_x(y,z) = \overline{\angle}_x(y,z)$ et le triangle $\Delta_{x,y,z}$ est plat par le Flat Triangle Lemma ([BH99], p. 180).

(ii) Commençons par observer que

$$\dim P \geq n+1 \iff \exists\ (x_1, \ldots, x_{n+2}) \in P^{n+2} \text{ t.q. } \mathrm{co}(x_1, \ldots x_{n+2}) \text{ est de dimension } n+1.$$

[$\Longleftarrow$] Évident.

[$\Longrightarrow$] Par hypothèse, P ne se plonge pas dans $\mathbb{R}^n$. Considérons $m \in \mathbb{N}$ tel qu'il existe $j : P \to \mathbb{R}^m$ un plongement isométrique. On peut supposer que $0 \in j(P)$. Alors il existe $(y_1, y_2, \ldots, y_{n+1})$ des points dans $j(P)$ qui engendrent un sous-espace de dimension $n+1$ (sinon P se plongerait dans $\mathbb{R}^n$). Ainsi $\mathrm{co}(0, y_1, \ldots, y_{n+1})$ est de dimension $n+1$.

Observons maintenant que $\overline{\mathrm{co}}(x_1, \ldots, x_{n+1})$ est de dimension $< n$ si et seulement si [7]

$$\overline{\mathrm{co}}(x_1, \ldots, x_{n+1}) = \bigcup_{i=1}^{n+1} \overline{\mathrm{co}}(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_{n+1}).$$

7. C'est une conséquence du théorème de Carathedory qui affirme que l'enveloppe convexe d'un sous-ensemble A d'un espace affine de dimension m est l'ensemble des barycentres (à coefficients positifs ou nuls) des $(m+1)$-uplets d'éléments de A.

Ainsi, on peut reformuler la première observation et on obtient, pour une partie plate P,

$$\dim P \leq n \iff \forall\, (x_1,\ldots,x_{n+2}) \in P^{n+2}, \overline{\text{co}}(x_1,\ldots,x_{n+2}) = \bigcup_{i=1}^{n+2} \overline{\text{co}}(x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_{n+2}).$$

Soit maintenant $P_m \to P$ une suite de parties plates de dimension $\leq n$ qui converge vers $P \in \mathscr{P}_{\text{Plates}}(X)$. Fixons $x_1,\ldots x_{n+2} \in P$. Par la Proposition B.2.3 (iii), il existe $x_1^m,\ldots,x_{n+2}^m \in P_m$ tels que $x_i^m \to x_i$ pour tout $i = 1,\ldots,n+2$. Par le Lemme B.2.10, on a que $\overline{\text{co}}(x_1^m,\ldots,x_{n+2}^m) \to \overline{\text{co}}(x_1,\ldots,x_{n+2})$ et $\overline{\text{co}}(x_1^m,\ldots,x_{i-1}^m,x_{i+1}^m,\ldots,x_{n+2}^m) \to \overline{\text{co}}(x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_{n+2})$ pour tout $i = 1,\ldots,n+2$. Ainsi, à nouveau par le Lemme B.2.10, on a que

$$\begin{aligned}
\overline{\text{co}}(x_1,\ldots,x_{n+2}) &= \lim_{m\to\infty} \overline{\text{co}}(x_1^m,\ldots,x_{n+2}^m) = \lim_{m\to\infty} \bigcup_{i=1}^{n+2} \overline{\text{co}}(x_1^m,\ldots,x_{i-1}^m,x_{i+1}^m,\ldots,x_{n+2}^m) \\
&= \bigcup_{i=1}^{n+2} \lim_{m\to\infty} \overline{\text{co}}(x_1^m,\ldots,x_{i-1}^m,x_{i+1}^m,\ldots,x_{n+2}^m) = \bigcup_{i=1}^{n+2} \overline{\text{co}}(x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_{n+2}).
\end{aligned}$$

Ainsi, $\dim P \leq n$.

(iii) On procède en 3 étapes.

(1) On montre que si P est une partie plate, alors

$$P \text{ est un plat} \iff \forall\, x,y \in P \text{ et } R \geq 0,\ \exists\, w,z \in P \text{ t.q. } [x,y] \subseteq [w,z] \text{ et } d(x,w) = d(y,z) = R.$$

Il est évident (à cause de la convexité) que si P est une partie plate, alors

$$P \text{ est un plat} \iff \forall x,y \in P \text{ il existe une droite } d \subseteq P \text{ t.q. } x,y \in d.$$

Comme dans une partie plate il n'y a qu'une seule manière d'étendre une géodésique, on a le résultat annoncé ci-dessus.

(2) On montre que Plat(X) est fermé dans $\mathscr{P}^*_{\text{Fe}}(X)$. Soit $\{P_n\}_{n\geq 1}$ une suite de plats qui converge vers P. Par le Corollaire B.2.14, P est une partie plate et on peut donc appliquer le critère du point (1). Fixons $x,y \in P$. Il existe $\{x_n\}_{n\geq 1}$ et $\{y_n\}_{n\geq 1}$ tels que $x_n, y_n \in P_n$ pour tout $n \geq 1$ et que $x_n \to x$ et $y_n \to y$. Fixons $R \geq 0$. Par hypothèse sur la suite $\{P_n\}_{n\geq 1}$ et par le point (1), il existe $w_n, z_n \in P_n$ tels que $d(x_n,w_n) = d(y_n,z_n) = R$ et $[x_n,y_n] \subseteq [w_n,z_n]$. Mais alors, puisque X est propre, il existe une suite d'indices $\{n_k\}_{k\geq 1}$ tel que $w_{n_k} \to w \in P$ et $z_{n_k} \to z \in P$ (toujours par la Proposition B.2.3 (iii)). Par le Lemme B.2.10 on a que $[x,y] \subseteq [w,z]$. Donc P est un plat.

(3) Il reste à prouver que si $\{P_m\}_{m\geq 1}$ est une suite de plats de dimension n qui converge vers un plat P, alors P est de dimension n. Par le point (ii) on sait déjà que P est de dimension $\leq n$. Pour montrer que $\dim P \geq n$, on va utiliser le critère évident suivant : si P est un plat, alors

$$\begin{aligned}
\dim P &= \max\{n \in \mathbb{N} \mid \exists\, (x_0,x_1,\ldots,x_n) \in P^{n+1} \text{ t.q. } \angle_{x_0}(x_i,x_j) = \pi/2 \text{ pour } i \neq j \in \{1,\ldots,n\} \\
&\qquad \text{et } d(x_0,x_i) = 1 \text{ pour } i = 1,\ldots n\}.
\end{aligned}$$

Par hypothèse, P_m est un plat de dimension n pour tout $m \geq 1$. Ainsi, il existe $(x_0^m, x_1^m, x_2^m, \ldots x_n^m) \in (P_m)^{n+1}$ satisfaisant le critère ci-dessus pour tout $m \geq 1$. En passant à une sous-suite, on obtient qu'il existe $(x_0,x_1,\ldots,x_n) \in P^{n+1}$ qui satisfont le critère. Ainsi, $\dim P \geq n$. $\square$

B.3 Deux groupes topologiques

B.3.1 Groupe d'isométries d'un espace métrique propre

Lemme B.3.1. *Soit X un espace métrique propre. Alors le groupe des isométries de X, noté* Iso(X)*, muni de la topologie compact-ouverte est un groupe topologique localement compact, métrisable et à base dénombrable.*

Preuve. Remarquons dans un premier temps que, puisque X est métrique (et donc uniforme), la topologie compact-ouverte coïncide avec la topologie de la convergence uniforme sur les compacts ([Kel55], Thm. 11). Or, cette dernière est uniformisable par le système fondamental dénombrable d'entourages suivant

$$\{(f,g)\in \mathrm{Iso}(X)^2 \mid \sup_{x\in\overline{B}(x_0,n)} d(f(x),g(x))<1/m\} \text{ où } x_0 \text{ est un point base et } n,m\in\mathbb{N}^*.$$

Comme la topologie est séparée, Iso(X) est donc métrisable [8].

Montrons maintenant que c'est un groupe topologique. Considérons l'application inversion

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Iso}(X) & \to & \mathrm{Iso}(X) \\ f & \mapsto & f^{-1}. \end{array}$$

Fixons $f_0\in\mathrm{Iso}(X)$. Alors pour tout $g\in\mathrm{Iso}(X)$, $R\geq 0$ et $y\in\overline{B}\big(f_0(x_0),R\big)$

$$\begin{aligned} d\big(f_0^{-1}(y),g^{-1}(y)\big) &= d\big(g(f_0^{-1}(y)),g(g^{-1}(y))\big)=d\big(g(f_0^{-1}(y)),f_0(f_0^{-1}(y))\big)\\ &\leq \sup_{x\in\overline{B}(x_0,R)} d\big(g(x),f_0(x)\big). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\sup_{y\in\overline{B}\left(f_0(x_0),R\right)} d\big(f_0^{-1}(y),g^{-1}(y)\big)\leq \sup_{x\in\overline{B}(x_0,R)} d\big(g(x),f_0(x)\big),$$

ce qui montre que l'inversion est continue. Considérons l'opération composition

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Iso}(X)\times\mathrm{Iso}(X) & \to & \mathrm{Iso}(X) \\ (f,g) & \mapsto & f\circ g. \end{array}$$

Fixons $(f_0,g_0)\in\mathrm{Iso}(X)^2$. Alors pour tout $f,g\in\mathrm{Iso}(X)$, $R\geq 0$ et $x\in\overline{B}(x_0,R)$,

$$\begin{aligned} d\big(f_0(g_0(x)),f(g(x))\big) &\leq d\big(f_0(g_0(x)),f(g_0(x))\big)+d\big(f(g_0(x)),f(g(x))\big)\\ &= d\big(f_0(g_0(x)),f(g_0(x))\big)+d\big(g_0(x),g(x)\big)\\ &\leq \sup_{y\in\overline{B}\left(g_0(x_0),R\right)} d\big(f_0(y),f(y)\big)+\sup_{z\in\overline{B}(x_0,R)} d\big(g_0(z),g(z)\big). \end{aligned}$$

Ainsi

$$\sup_{x\in\overline{B}(x_0,R)} d\big(f_0(g_0(x)),f(g(x))\big)\leq \sup_{y\in\overline{B}\left(g_0(x_0),R\right)} d\big(f_0(y),f(y)\big)+\sup_{z\in\overline{B}(x_0,R)} d\big(g_0(z),g(z)\big),$$

ce qui implique que la multiplication est continue.

Occupons-nous maintenant de trouver une base dénombrable pour la topologie. Par définition de la topologie compact-ouverte, une sous-base est donnée par

$$V(K,O)=\{f\in\mathrm{Iso}(X)\mid f(K)\subseteq O\} \text{ où } K \text{ est un compact de } X \text{ et } O \text{ un ouvert de } X.$$

Ainsi une base de la topologie est donnée par

$$\left\{V\left(\{K_j,O_j\}_{j=1}^M\right):=\bigcap_{j=1}^M V(K_j,O_j)\mid M\geq 1, K_j \text{ et } O_j \text{ sont un compact et un ouvert de } X\right\}.$$

8. Théorème 1 du Chapitre 9, §2, n°5 de [BTG].

Mais cette base n'est pas dénombrable. On va donc introduire une autre famille de sous-ensembles. Pour ce faire, on fixe D une partie dénombrable dense dans X et on définit, pour tout $N \geq 1$, $F = \{x_i\}_{i=1}^N \subseteq D$, $F' = \{y_i\}_{i=1}^N \subseteq D$ et $n \geq 1$, les ouverts suivants

$$U_{F,F',n} := \{f \in \mathrm{Iso}(X) \mid d(f(x_i), y_i) \leq 1/n \ \forall\ i = 1, \ldots N\} = V\left(\{\{x_i\}, B(y_i, 1/n)\}_{i=1}^N\right).$$

On va prouver que ses ouverts forment une base de la topologie. Pour ce faire, il suffit de montrer que pour tout $V\left(\{K_j, O_j\}_{j=1}^M\right)$ et $f \in V\left(\{K_j, O_j\}_{j=1}^M\right)$ fixés, il existe $N \geq 1$, F, F' et $n \geq 0$ tels que

$$f \in U_{F,F',n} \subseteq V\left(\{K_j, O_j\}_{j=1}^M\right).$$

Dans un premier temps, on vérifie qu'il existe $\delta > 0$ tel que $(f(K_j))_\delta \subseteq O_j$ pour $j = 1, \ldots, M$. Il suffit de montrer que si un compact K est contenu dans un ouvert O, alors il existe $\delta > 0$ tel que $(K)_\delta \subseteq O$ (puis d'observer que $f(K_j)$ est un compact pour tout j et de prendre le minimum sur les j). Pour ce faire, on considère la fonction

$$\begin{array}{rccl} \delta : & K & \to & \mathbb{R}_{\geq 0} \\ & x & \mapsto & \delta(x) := \max\{\delta \in \mathbb{R}_{\geq 0} \mid B(x, \delta) \subseteq O\} \end{array}$$

qui est continue et strictement positive. Ainsi prendre le minimum de cette fonction comme valeur de δ convient. Dans un second temps, on prend $n \geq 1$ tel que $1/n \leq \delta/4$ et on choisit une partie $F = \{x_{i,j}\}_{i=1,\ldots,N_j; j=1,\ldots,M} \subseteq D$ telle que

- $F_j := \{x_{i,j}\}_{i=1}^{N_j} \subseteq D \cap (K_j)_{1/n}$ pour tout $j = 1, \ldots, M$.
- F_j est $1/n$-dense dans K_j pour tout $j = 1, \ldots, M$.

Prenons également $F' := \{y_{i,j}\}_{i=1,\ldots,N_j; j=1,\ldots,M} \subseteq D$ telle que

- $d\big(f(x_{i,j}), y_{i,j}\big) < 1/n$ pour tout $i = 1, \ldots, N_j$ et $j = 1, \ldots, M$.

Par définition, on a bien que $f \in U_{F,F',n}$. Il reste à vérifier que si $g \in U_{F,F',n}$, alors $g \in V\left(\{K_j, O_j\}_{j=1}^M\right)$. Soit donc $x \in K_j$ pour un certain $j \in \{1, \ldots, M\}$ fixé. Alors, il existe $i \in \{1, \ldots, N_j\}$ tel que $d(x_{i,j}, x) < 1/n$. Et donc

$$\begin{aligned} d\big(g(x), f(K_j)\big) &\leq d\big(g(x), g(x_{i,j})\big) + d\big(g(x_{i,j}), y_{i,j}\big) + d\big(y_{i,j}, f(x_{i,j})\big) + d\big(f(x_{i,j}), f(K_j)\big) \\ &= d\big(x, x_{i,j}\big) + d\big(g(x_{i,j}), y_{i,j}\big) + d\big(y_{i,j}, f(x_{i,j})\big) + d\big(x_{i,j}, K_j\big) \\ &\leq 4/n. \end{aligned}$$

Ainsi $g(x) \in \big(f(K_j)\big)_{4/n} \subseteq O_j$ par choix de n.

Finalement, il reste à montrer la compacité locale. Comme $\mathrm{Iso}(X)$ est un groupe topologique, il suffit de trouver un voisinage compact de l'identité. Montrons que $\mathscr{F} = V\left(\{x_0\}, B(x_0, 1)\right)$ est relativement compact. Il suffit de vérifier les hypothèses du théorème d'Ascoli :

- X est métrique.
- X est localement compact puisque propre.
- $\mathscr{F}$ est équicontinue (puisque $\mathscr{F} \subseteq \mathrm{Iso}(X)$).
- $\mathscr{F}_x := \{f(x) \mid f \in \mathscr{F}\} \subseteq B(x_0, d(x, x_0) + 1)$ qui est relativement compact pour tout $x \in X$.

□

Lemme B.3.2. *Soit X un espace métrique propre. Alors l'action de* $\mathrm{Iso}(X)$ *(muni de la topologie compact-ouverte) sur $\mathscr{C}(X)$ (muni de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts) est continue.*

Preuve. Comme les deux topologies sont à bases dénombrables, il suffit de vérifier que si $\{(\gamma_n, f_n)\}_{n\geq 1} \subseteq \mathrm{Iso}(X) \times \mathscr{C}(X)$ est une suite telle que $(\gamma_n, f_n) \to (\gamma, f)$, alors $\gamma_n f_n \to \gamma f$ uniformément sur les compacts. Soit $R \geq 0$ et $\varepsilon > 0$ fixés. Il s'agit de montrer qu'il existe N tel que

$$\sup_{x \in \overline{B(\gamma x_0, R)}} |f(\gamma^{-1} x) - f_n(\gamma_n^{-1} x)| \leq \varepsilon.$$

Observons que

$$\begin{aligned}
\sup_{x\in\overline{B(\gamma x_0,R)}} |f(\gamma^{-1}x) - f_n(\gamma_n^{-1}x)| &\leq \sup_{\gamma y\in\overline{B(\gamma x_0,R)}} |f(y) - f_n(\gamma_n^{-1}\gamma y)| \\
&\leq \sup_{y\in\overline{B(x_0,R)}} |f(y) - f(\gamma_n^{-1}\gamma y)| + \sup_{y\in\overline{B(x_0,R)}} |f(\gamma_n^{-1}\gamma y) - f_n(\gamma_n^{-1}\gamma y)|.
\end{aligned}$$

On commence par se fixer $0 < \delta < 1$ tel que

$$x, y \in \overline{B(x_0, R+1)} \text{ et } d(x,y) \leq \delta \Rightarrow d(f(x), f(y)) \leq \varepsilon/2.$$

Ensuite, on choisit N tel que

$$\sup_{x\in B(x_0,R)} d(x, \gamma_n^{-1}\gamma x) \leq \delta \quad \text{et} \quad \sup_{x\in B(x_0,R+1)} |f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon/2 \quad \forall\, n \geq N.$$

Ainsi, $d(y, \gamma_n^{-1}\gamma y) \leq \delta$ et $y, \gamma_n^{-1}\gamma y \in \overline{B(x_0, R+1)}$ de sorte que

$$\sup_{y\in\overline{B(x_0,R)}} |f(y) - f(\gamma_n^{-1}\gamma y)| \leq \varepsilon/2 \quad \text{et} \quad \sup_{y\in\overline{B(x_0,R)}} |f(\gamma_n^{-1}\gamma y) - f_n(\gamma_n^{-1}\gamma y)| \leq \varepsilon/2 \quad \forall\, n \geq N.$$

□

B.3.2 Groupe d'homéomorphismes d'un espace topologique compact

Lemme B.3.3. *Soit X un espace métrique compact. Alors le groupe des homéomorphismes de X, noté* Hom(X)*, muni de la topologie compact-ouverte est un groupe topologique métrisable et à base dénombrable.*

Preuve. Puisque X est métrique, la topologie compact-ouverte coïncide avec celle de la convergence uniforme qui est métrisable par la métrique

$$\delta(f,g) = \sup_{x\in X} d\big(f(x), g(x)\big).$$

Vérifions maintenant que Hom(X) est un groupe topologique. Pour montrer que l'inversion est continue, on se fixe $f_0 \in \mathrm{Hom}(X)$ et on observe que pour tout $f \in \mathrm{Hom}(X)$

$$\sup_{x\in X} d\big(f_0^{-1}(x), f^{-1}(x)\big) = \sup_{y\in X} d\big(f_0^{-1}(f(y)), y\big) = \sup_{y\in X} d\big(f_0^{-1}(f(y)), f_0^{-1}(f_0(y))\big).$$

La continuité uniforme de f_0^{-1} permet de conclure que l'inversion est continue. Pour le produit, on se fixe $(f_0, g_0) \in \mathrm{Hom}(X)^2$ et on observe que pour tout $(f,g) \in \mathrm{Hom}(X)^2$ et $x \in X$ on a

$$\begin{aligned}
d\big(f(g(x)), f_0(g_0(x))\big) &\leq d\big(f(g(x)), f_0(g(x))\big) + d\big(f_0(g(x)), f_0(g_0(x))\big) \\
&\leq \sup_{y\in X} d\big(f(y), f_0(y)\big) + \sup_{y\in X} d\big(f_0(g(y)), f_0(g_0(y))\big)
\end{aligned}$$

La continuité uniforme de f_0 permet de conclure que la multiplication est continue.

Pour montrer qu'il existe une base dénombrable, on procède à peu près comme dans la preuve du Lemme B.3.1. Mais comme on considère des homéomorphismes et non pas des isométries, on va être obligé de considérer plus d'ouverts pour obtenir une base de la topologie. Pour ce faire, on fixe D une partie dénombrable dense dans X et on définit, pour tout $N \geq 1$, $F = \{x_i\}_{i=1}^N \subseteq D$, $F' = \{y_i\}_{i=1}^N \subseteq D$, $n \geq 1$ et $m \geq 1$, les ouverts suivants

$$\begin{aligned}
U_{F,F',n,m} &:= \{f \in \mathrm{Hom}(X) \mid f\big(\overline{B}(x_i, 1/m)\big) \subseteq B(y_i, 1/n)\ \forall\, i = 1, \dots N\} \\
&= V\Big(\{\overline{B}(x_i, 1/m), B(y_i, 1/n)\}_{i=1}^N\Big).
\end{aligned}$$

A nouveau, on se fixe $V\big(\{K_j, O_j\}_{j=1}^M\big)$ ainsi que $f \in V\big(\{K_j, O_j\}_{j=1}^M\big)$, et on va montrer qu'il existe F, F' et $n, m \geq 0$ tels que

$$f \in U_{F,F',n,m} \subseteq V\big(\{K_j, O_j\}_{j=1}^M\big).$$

Dans un premier temps, on note que pour tout $\delta > 0$, il existe $\varepsilon(\delta) > 0$ tel que

$$d(x,y) < \varepsilon(\delta) \Rightarrow d\big(f(x), f(y)\big) < \delta.$$

Dans un deuxième temps, on se souvient (voir preuve du Lemme B.3.1) qu'il existe $\delta_0 > 0$ tel que

$$\big(f(K_j)\big)_{\delta_0} \subseteq O_j \quad \forall\ j = 1, \ldots, M.$$

Finalement, on prend $n, m \geq 1$ tel que $1/n \leq \delta_0/2$ et $1/m \leq \varepsilon(1/(2n))$, puis on choisit une partie $F = \{x_{i,j}\}_{i=1,\ldots,N_j; j=1,\ldots,M} \subseteq D$ telle que

- $F_j := \{x_{i,j}\}_{i=1}^{N_j} \subseteq D \cap (K_j)_{1/m}$ pour tout $j = 1, \ldots, M$.
- F_j est $1/m$-dense dans K_j pour tout $j = 1, \ldots, M$.

Choisissons également $F' := \{y_{i,j}\}_{i=1,\ldots,N_j; j=1,\ldots,M} \subseteq D$ telle que

$$d\big(f(x_{i,j}), y_{i,j}\big) < 1/(2n) \text{ pour tout } i = 1, \ldots, N_j \text{ et } j = 1, \ldots, M.$$

Alors, on a bien que $f \in U_{F,F',n,m}$. En effet, si $x \in \overline{B}(x_{i,j}, 1/m)$, alors

$$d\big(f(x), y_{i,j}\big) \leq d\big(f(x), f(x_{i,j})\big) + d\big(f(x_{i,j}), y_{i,j}\big) < 1/(2n) + 1/(2n) = 1/n.$$

Il reste à vérifier que si $g \in U_{F,F',n,m}$, alors $g \in V\big(\{K_j, O_j\}_{j=1}^M\big)$. Soit donc $x \in K_j$ pour un certain $j \in \{1, \ldots, M\}$ fixé. Alors, il existe $i \in \{1, \ldots, N_j\}$ tel que $d(x_{i,j}, x) < 1/m$. Et donc

$$\begin{aligned} d\big(g(x), f(K_j)\big) &\leq d\big(g(x), y_{i,j}\big) + d\big(y_{i,j}, f(x_{i,j})\big) + d\big(f(x_{i,j}), f(K_j)\big) \\ &\leq 1/n + 1/2n + 1/2n = 2/n. \end{aligned}$$

Ainsi $g(x) \in \big(f(K_j)\big)_{2/n} \subseteq O_j$ par choix de n. □

B.4 Résultats classiques

B.4.1 Limite direct d'espaces métriques

Soit $(\mathscr{F}, \leq)$ un ensemble d'indices muni d'un ordre filtrant (*i.e.* pour tout $\Phi, \Phi' \in \mathscr{F}$ il existe $\Psi \in \mathscr{F}$ tel que $\Phi \leq \Psi$ et $\Phi' \leq \Psi$). Supposons donnés une famille $\{Z_\Phi\}_{\Phi \in \mathscr{F}}$ d'espaces métriques et un ensemble d'applications isométriques $\{j_{\Psi\Phi} \mid j_{\Psi\Phi} : Z_\Phi \to Z_\Psi \text{ pour } \Phi \leq \Psi\}$ vérifiant l'hypothèse suivante :

(∗) Si $\Phi \leq \Psi \leq \Theta$, alors $j_{\Theta\Phi} = j_{\Theta\Psi} \circ j_{\Psi\Phi}$.[9]

Lemme B.4.1. *Sous les hypothèses précédentes, il existe un unique, à isométrie près, espace métrique noté* $\varinjlim_{\Phi \in \mathscr{F}} Z_\Phi$ *vérifiant les trois conditions suivantes :*

(i) Pour tout $\Phi \in \mathscr{F}$*, il existe une isométrie* $j_\Phi : Z_\Phi \to \varinjlim_{\Phi \in \mathscr{F}} Z_\Phi$.

(ii) Pour tout $\Phi \leq \Psi$*, on a* $j_\Psi \circ j_{\Psi\Phi} = j_\Phi$*. En d'autres termes, le diagramme suivant commute :*

$$\begin{tikzcd} & \varinjlim\limits_{\Phi \in \mathscr{F}} Z_\Phi & \\ Z_\Phi \arrow[ur, hook, "j_\Phi"] \arrow[rr, "j_{\Psi\Phi}"] & & Z_\Psi \arrow[ul, hook', "j_\Psi"'] \end{tikzcd}$$

9. Il découle de cette affirmation que $j_{\Psi\Psi} = \mathrm{id}$.

(iii) [Propriété universelle] *Si Z' est un espace métrique vérifiant (1) et (2), alors il existe une unique isométrie $i : \varinjlim_{\Phi\in\mathscr{F}} Z_\Phi \to Z'$ telle que pour tout $\Phi \in \mathscr{F}$ le diagramme suivant commute :*

$$\begin{tikzcd}
\varinjlim\limits_{\Phi\in\mathscr{F}} Z_\Phi \arrow[rr, "i"] & & Z' \\
& Z_\Phi \arrow[ul, hook, "j_\Phi"] \arrow[ur, hook, "j'_\Phi"'] &
\end{tikzcd}$$

Preuve. On considère l'ensemble $\bigsqcup_{\Phi\in\mathscr{F}} Z_\Phi$ muni de la relation d'équivalence $\sim$ définie de la manière suivante :

$$z \in Z_\Phi, z' \in Z_{\Phi'} \quad z \sim z' \iff \text{il existe } \Psi \in \mathscr{F} \text{ tel que } \Phi, \Phi' \leq \Psi \text{ et } j_{\Psi\Phi}(z) = j_{\Psi\Phi'}(z').$$

Posons $Z := \bigsqcup_{\Phi\in\mathscr{F}} Z_\Phi / \sim$, définissons pour tout $\Phi \in \mathscr{F}$ l'application

$$\begin{array}{rccc} j_\Phi : & Z_\Phi & \to & Z \\ & z & \mapsto & [z] \end{array}$$

et montrons que Z satisfait les conditions du lemme.
(1) L'ensemble Z est un espace métrique pour la distance d_Z définie par

$$d_Z([z],[z']) = d_{Z_\Psi}(j_{\Psi\Phi}(z_\Phi), j_{\Psi\Phi'}(z_{\Phi'}))$$

où $z_\Phi \in Z_\Phi \cap [z]$, $z_{\Phi'} \in Z_{\Phi'} \cap [z']$ sont des représentants et $\Psi \in \mathscr{F}$ est tel que $\Phi, \Phi' \leq \Psi$.
Cette métrique dépend *a priori* non seulement du choix des représentants mais aussi du choix de l'élément $\Psi \in \mathscr{F}$. Il s'agit de montrer que d_Z est bien définie.
(1') Soit $z_\Phi, z_{\Phi'}$ et $\Psi_1, \Psi_2 \in \mathscr{F}$ tels que $\Phi, \Phi' \leq \Psi_i$, $i = 1, 2$. Soit $\Theta \in \mathscr{F}$ tel que $\Psi_i \leq \Theta$, $i = 1, 2$ on a

$$d_{Z_{\Psi_1}}(j_{\Psi_1\Phi}(z_\Phi), j_{\Psi_1\Phi'}(z_{\Phi'})) = d_{Z_\Theta}(j_{\Theta\Phi}(z_\Phi), j_{\Theta\Phi'}(z_{\Phi'})) = d_{Z_{\Psi_2}}(j_{\Psi_2\Phi}(z_\Phi), j_{\Psi_2\Phi'}(z_{\Phi'}))$$

par $(*)$ et le fait que $j_{\Theta\Psi_1}$ et $j_{\Theta\Psi_2}$ sont des isométries.
(1") La métrique d_Z ne dépend pas du choix des représentants. En effet, si $z_1 \in Z_{\Phi_1}$, $z'_1 \in Z_{\Phi'_1}$, $z_2 \in Z_{\Phi_2}$, $z'_2 \in Z_{\Phi'_2}$ et si $z_1 \sim z_2$, $z'_1 \sim z'_2$ il existe $\Psi \in \mathscr{F}$, $\Psi' \in \mathscr{F}$ tels que

$$j_{\Psi\Phi_1}(z_1) = j_{\Psi\Phi_2}(z_2) \quad \text{et} \quad j_{\Psi'\Phi'_1}(z'_1) = j_{\Psi'\Phi'_2}(z'_2).$$

Donc, $d_{Z_\Psi}(j_{\Psi\Phi_1}(z_1), j_{\Psi\Phi_2}(z_2)) = 0 = d_{Z_{\Psi'}}(j_{\Psi'\Phi'_1}(z'_1), j_{\Psi'\Phi'_2}(z'_2))$ et ceci montre que si $\Theta \in \mathscr{F}$ est tel que $\Psi, \Psi' \leq \Theta$ on a par $(*)$

$$d_{Z_\Theta}(j_{\Theta\Phi_1}(z_1), j_{\Theta\Phi'_1}(z'_1)) \leq \underbrace{d_{Z_\Theta}(j_{\Theta\Phi_1}(z_1), j_{\Theta\Phi_2}(z_2))}_{=0} + d_{Z_\Theta}(j_{\Theta\Phi_2}(z_2), j_{\Theta\Phi'_2}(z'_2)) + \underbrace{d_{Z_\Theta}(j_{\Theta\Phi'_2}(z'_2), j_{\Theta\Phi'_1}(z'_1))}_{=0}.$$

De même, $d_{Z_\Theta}(j_{\Theta\Phi_2}(z_2), j_{\Theta\Phi'_2}(z'_2)) \leq d_{Z_\Theta}(j_{\Theta\Phi_1}(z_1), j_{\Theta\Phi'_1}(z'_1))$ et donc d_Z est indépendante du choix des représentants.
(2) L'application $j_\Phi : Z_\Phi \to Z$ est une isométrie car si $z, z' \in Z_\Phi$, on a

$$d_{Z_\Phi}(z, z') = d_{Z_\Psi}(j_{\Psi\Phi}(z), j_{\Psi\Phi}(z'))$$

pour tout $\Psi \in \mathscr{F}$ tel que $\Phi \leq \Psi$. Or, pour tout $\Psi \in \mathscr{F}$ fixé (par exemple $\Psi = \Phi$), le membre de droite n'est autre que $d_Z([z],[z'])$. Ceci démontre (i).

(3) Il est clair que $j_\Psi \circ j_{\Psi\Phi} = j_\Phi$ car si $z \in Z_\Phi$ alors $z \sim z' = j_{\Psi\Phi}(z)$ car $j_{\Psi\Phi}(z) = j_{\Psi\Psi}(z') = z'$. Ceci démontre (ii).

(4) Observons que

$$\bigsqcup_{\Phi\in\mathscr{F}} Z_\Phi / \sim = \bigcup_{\Phi\in\mathscr{F}} j_\Phi(Z_\Phi).$$

En effet, le sens $[\supseteq]$ découle de la définition de j_Φ et le sens $[\subseteq]$ du fait que pour $[z] \in Z$ il existe un représentant $z_\Phi \in Z_\Phi$ pour un certain $\Phi \in \mathscr{F}$ et $[z] = j_\Phi(z_\Phi)$.

(5) Il reste à montrer (3). S'il existe un autre espace métrique Z' vérifiant (i) (et (ii)), alors on peut construire une isométrie $i : Z \to Z'$ de la manière suivante. On définit d'abord

$$i \mid_{j_\Phi(Z_\Phi)}(j_\Phi(z_\Phi)) = j'_\Phi(z_\Phi)$$

pour tout $\Phi \in \mathscr{F}$. Par construction de i les deux triangles latéraux du diagramme ci-dessous commutent. En outre, la commutativité du triangle du bas montre que i est bien définie et l'égalité $Z = \cup_{\Phi\in\mathscr{F}} j_\Phi(Z_\Phi)$ permet de voir que i est définie sur Z tout entier. Il est clair que i est unique.

$$\begin{tikzcd}
& Z' & \\
& Z \arrow[u, hook, "i"] & \\
Z_\Phi \arrow[uur, hook, "j'_\Phi"] \arrow[ur, hook, "j_\Phi"'] \arrow[rr, "j_{\Psi\Phi}", "j'_{\Psi\Phi}"'] & & Z_\Psi \arrow[uul, hook', "j'_\Psi"'] \arrow[ul, hook', "j_\Psi"]
\end{tikzcd}$$

On pose donc $Z = \varinjlim_{\Phi\in\mathscr{F}} Z_\Phi$. L'unicité de $\varinjlim_{\Phi\in\mathscr{F}} Z_\Phi$ découle de (iii). En effet, si Z'' est un autre espace métrique satisfaisant (i), (ii) et (iii) on pose une fois $Z' = Z''$ dans (iii) et une fois $Z' = \varinjlim_{\Phi\in\mathscr{F}} Z_\Phi$. Puisque les triangles du diagramme ci-dessous commutent, $\widetilde{i}$ est l'inverse de i.

$$\begin{tikzcd}
\varinjlim\limits_{\Phi\in\mathscr{F}} Z_\Phi \arrow[r, "\exists!\, i"] & Z'' \arrow[r, "\exists!\, \widetilde{i}"] & \varinjlim\limits_{\Phi\in\mathscr{F}} Z_\Phi \\
& Z_\Phi \arrow[ul, hook', "j_\Phi"] \arrow[u, hook, "j''_\Phi"] \arrow[ur, hook, "j_\Phi"'] &
\end{tikzcd}$$

$\square$

B.4.2 Joint sphérique

Définition B.4.2. *Soient (Y_1, d_1), (Y_2, d_2) deux espaces métriques. Le joint sphérique $Y_1 * Y_2$ est l'ensemble $[0, \frac{\pi}{2}] \times Y_1 \times Y_2$ muni de la relation d'équivalence $\sim$ définie par*

$$(\theta, y_1, y_2) \sim (\theta', y'_1, y'_2) \iff \begin{cases} \theta = \theta' = 0 & et \quad y_1 = y'_1 \\ \theta = \theta' = \frac{\pi}{2} & et \quad y_2 = y'_2 \\ \theta = \theta' \in]0, \frac{\pi}{2}[& et \quad y_1 = y'_1, y_2 = y'_2 \end{cases}$$

On a donc $Y_1 \hookrightarrow \big(\{0\} \times Y_1 \times Y_2\big)/\sim$ et $Y_2 \hookrightarrow \big(\{\frac{\pi}{2}\} \times Y_1 \times Y_2\big)/\sim$. On note les classes d'équivalence $[(\theta, y_1, y_2)] = \cos(\theta) y_1 + \sin(\theta) y_2$.

De plus, ($Y_1 * Y_2$, d) est un espace métrique avec, si $y = \cos(\theta)y_1 + \sin(\theta)y_2$, $y' = \cos(\theta')y_1' + \sin(\theta')y_2'$,

$$d(y,y') = \arccos\Big(\cos(\theta)\cos(\theta')\cos(d_1^\pi(y_1,y_1')) + \sin(\theta)\sin(\theta')\cos(d_2^\pi(y_2,y_2'))\Big) \in [0,\pi]$$

où $d_i^\pi = \min\{d_i,\pi\}$ pour $i = 1,2$ (voir [BH99], p. 63).

B.4.3 Rappels sur la semi-continuité

On répond essentiellement dans cette section à l'exercice 1.7.14.(a) de [En89], p. 61.

Définition B.4.3. *Soit X un espace topologique. Une fonction $f : X \to \mathbb{R}$ est semi-continue inférieurement (respectivement supérieurement) si pour tout $x \in X$ et tout nombre réel r tel que $f(x) > r$ (respectivement $f(x) < r$) il existe un voisinage U de x tel que $f(x') > r$ (respectivement $f(x') < r$) pour tout $x' \in U$.*

Lemme B.4.4. *Soit X un espace topologique.*

(i) Soit $f : X \to \mathbb{R}$. Alors f est semi-continue inférieurement (respectivement supérieurement) si et seulement si pour tout $x \in X$ et toute suite généralisée $x_\alpha \to x$ on a que $\liminf_{x_\alpha \to x} x_\alpha \geq f(x)$ (respectivement $\limsup_{x_\alpha \to x} x_\alpha \leq f(x)$).

(ii) Soit $f : X \to \mathbb{R}$. Alors f est semi-continue inférieurement (respectivement supérieurement) si et seulement si pour tout $r \in \mathbb{R}$ l'ensemble $\{x \in X \mid f(x) \leq r\}$ (respectivement $\{x \in X \mid f(x) \geq r\}$) est fermé.

(iii) Soit $f : X \to \mathbb{R}$. Alors f est continue si et seulement si elle est semi-continue inférieurement et supérieurement.

(iv) Soit $\{f_\alpha : X \to \mathbb{R}\}_{\alpha \in \mathscr{A}}$ une famille de fonctions semi-continues inférieurement (respectivement semi-continues supérieurement) telles que $\sup_{\alpha \in \mathscr{A}} f_\alpha(x) < \infty$ pour tout $x \in X$ (respectivement $\inf_{\alpha \in \mathscr{A}} f_\alpha(x) > -\infty$). Alors la fonction f définie par $f(x) = \sup_{\alpha \in \mathscr{A}} f_\alpha(x)$ (respectivement $f(x) = \inf_{\alpha \in \mathscr{A}} f_\alpha(x)$) est semi-continue inférieurement (respectivement semi-continue supérieurement).

(v) Soit $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction semi-continue inférieurement (respectivement semi-continue supérieurement) et supposons que X soit compact. Alors f atteint son minimum (respectivement son maximum) sur X.

Preuve. (i) On prouve l'affirmation dans le cas de la semi-continuité inférieure.

[⇒] Soit $x \in X$ et $x_\alpha \to x$. Alors pour tout r tel que $f(x) > r$, il existe un voisinage U de x tel que $f(x') > r$ pour tout $x' \in U$. Ainsi pour tout r tel que $f(x) > r$ on a que $\liminf_\alpha x_\alpha \geq r$. Et donc $\liminf_\alpha x_\alpha \geq f(x)$.

[⇐] On montre la contraposée. Supposons qu'il existe $x \in X$ et $r \in \mathbb{R}$ tel que $r < f(x)$ et que pour tout voisinage U de x il existe $x' \in U$ tel que $f(x') \leq r$. Choisissons U_α une suite décroissante de voisinages qui forme une base de voisinages de x et $x_\alpha \in U_\alpha$ tel que $f(x_\alpha) \leq r$. Alors $x_\alpha \to x$ et $\liminf x_\alpha \leq r < f(x)$.

(ii) On fait la preuve pour la semi-continuité inférieure.

[⇒] Fixons $r \in \mathbb{R}$. On a que $\{x \in X \mid f(x) > r\}$ est ouvert puisque pour tout $y \in \{x \in X \mid f(x) > r\}$ il existe, par définition, un voisinage de y contenu dans $\{x \in X \mid f(x) > r\}$.

[⇐] On montre la contraposée. Supposons qu'il existe $x \in X$ et $r \in \mathbb{R}$ tels que $r < f(x)$ et que pour tout voisinage U de x, il existe $x' \in U$ tel que $f(x') \leq r$. Mais alors x appartient à l'adhérence de $\{y \in X \mid f(y) \leq r\}$ mais n'est pas dedans, c'est-à-dire que cet ensemble n'est pas fermé.

(iii) [⇒] $\{x \in X \mid f(x) \leq r\} = f^{-1}(]-\infty, r])$ est fermé puisque f est continue et que $]-\infty, r]$ est fermé. Idem pour montrer que $\{x \in X \mid f(x) \geq r\}$ est fermé.

[$\Leftarrow$] Soit $]a,b[$ un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. Alors $f^{-1}(]a,b[) = \{x \in X \mid a < f(x) < b\} = \{x \in X \mid a < f(x)\} \cap \{x \in X \mid f(x) > b\}$ qui est l'intersection de deux ouverts par hypothèse. Ainsi, la pré-image d'un ouvert par la fonction f est un ouvert, et donc f est continue.

(iv) On fait la preuve pour la semi-continuité inférieure. On observe que

$$\{x \in X \mid \sup_{\alpha \in \mathscr{A}} f_\alpha \leq r\} = \bigcap_{\alpha \in \mathscr{A}} \{x \in X \mid f_\alpha \leq r\}$$

qui est fermé comme intersection de fermés.

(v) On fait la preuve pour la semi-continuité inférieure. Soit $a := \inf f \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. Alors il existe une suite strictement décroissante de nombres réels $\{a_n\}_{n\geq 1}$ tendant vers a. Si on pose $A_n := \{x \in X \mid f(x) > a_n\}$, alors $\{A_n\}_{n\geq 1}$ est une suite croissante d'ouverts satisfaisant $\bigcup_{n\geq 1} A_n = X$. Comme X est compact, on peut extraire un sous-recouvrement fini, et donc l'infimum est atteint. $\square$

Annexe C

Esquisse du Théorème d'Adams-Ballmann

Théorème C.0.5 (Théorème d'Adams-Ballmann, [AB98])**.** *Soit X un espace CAT(0) propre* [1] *et G un groupe d'isométries de X moyennable. Alors au moins l'une des deux assertions suivantes est vérifiée :*

(i) G fixe un point à l'infini.

(ii) X contient un plat G-invariant.

La première étape de la démonstration est l'étude des points plats et la preuve du Théorème 4.1.5 sur la décomposition d'Adams-Ballmann $i : X \hookrightarrow E \times Y$. Ensuite on introduit $A := \{\xi \in F \mid -\xi \in F\}$ et $P := \{\xi \in F \mid \angle(\xi, A) = \pi/2\}$ et on observe que [2]

$$X = \mathbb{R}^n \times Y \iff A = F \iff P = \emptyset$$

et que si $P \neq \emptyset$, alors P possède un unique centre, puisque c'est un sous-ensemble π-convexe compact d'une sphère Euclidienne (de dimension pas nécessairement finie) qui satisfait que $P \cap (-P) = \emptyset$ (voir le Lemme 1.7 de [AB98]).
Avant de se lancer dans la preuve proprement dite, il faudrait encore montrer les trois résultats suivants [3], dont on montre les équivalents pour les G-espaces dans la Section 4.2.1

Lemme C.0.6. *Soit X un espace CAT(0) propre et G un groupe d'isométries de X. Si G ne fixe pas de point du bord, alors il existe un convexe fermé non-vide G-invariant minimal pour ces propriétés.*

Lemme C.0.7. *Si $f : X \to \mathbb{R}$ est une fonction convexe G-quasi-invariante* [4]*. Si $\min f$ n'existe pas, alors il existe un point fixe dans le bord ; sinon $f - \min f$ est G-invariante.*

Lemme C.0.8. *Soit $C \subseteq X$ un sous-ensemble convexe G-invariant, π une probabilité G-invariante sur ∂C et $y_0 \in C$ fixé. Alors la fonction*

$$\begin{array}{rccl} f : & C & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \int_{\partial C} b_{\xi, y_0}(x) d\pi(\xi). \end{array}$$

est une fonction convexe G-quasi-invariante.

On peut maintenant se lancer dans la preuve du théorème.

1. Dans l'article les hypothèses sont X Hadamard (*i.e.* CAT(0) complet) et localement compact. Mais un espace géodésique est complet et localement compact si et seulement s'il est propre.
2. Voir Lemme 4.1.12.
3. Ici, on s'écarte un petit peu de la preuve originelle.
4. Une fonction $f : X \to \mathbb{R}$ est quasi-invariante s'il existe $c : G \to \mathbb{R}$ telle que $f(gx) = f(x) + c(g)$ pour tout $x \in X$ et $g \in G$.

Preuve du théorème C.0.5. Supposons que G ne fixe pas de point du bord. Par le Lemme C.0.6 il existe $C \subseteq X$ un convexe fermé non vide G-invariant minimal. On a $F_C = A_C$, sinon $P_C \neq \emptyset$ et le centre de P_C est un point du bord G-invariant. Ainsi, $C = \mathbb{R}^n \times Y$ où ∂Y ne contient pas de point plat (Théorème 4.1.5). Si Y est borné, alors le plat $\mathbb{R}^n \times \{c_Y\} \subseteq C \subseteq X$ est invariant (c_Y est le centre de Y). Ainsi, on peut supposer que ∂Y est non vide. Cet ensemble est compact (pour la topologie conique) et G agit dessus par homéomorphismes. Ainsi, puisque G est moyennable, il existe une mesure de probabilité G-invariante π sur ∂Y. On se fixe $x_0 \in C$ et on considère la fonction

$$\begin{array}{rccl} f: & C & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \int_{\partial Y} b_{\xi,x_0}(x) d\pi(\xi). \end{array}$$

qui est convexe et G-quasi-invariante par le Lemme C.0.8. Si son *infimum* n'est pas atteint il existe alors un point à l'infini qui est G-invariant (Lemme C.0.7). On peut donc supposer que $\min f$ existe et donc que $f - \min f$ est une fonction convexe invariante. Puisque C est minimal, f est constante. Si on reprend la définition, on observe alors que tous les points dans le support de π sont plats [5] ce qui contredit la construction de Y. □

5. Voir 4.1.13.

Index des Notations

Index des Terminologies

Bibliographie

[AB98] *Amenable isometry groups of Hadamard spaces*, S. Adams, W. Ballmann, Mathematische Annalen 312, 1998, pp. 183-195.

[Alv08] *Une Théorie de Basse-Serre pour les Relations d'Équivalences et les Groupoïdes Boréliens*, A. Alvarez, thèse de doctorat.

[AR00] *Amenable Groupoids*, C. Anantharaman-Delaroche, J. Renault, Monographie de L'Enseignement mathématique 36, Genève, 2000.

[AL91] *Amenability, Kazhdan's Property and Percolation for Trees, Groups and Equivalence Relations*, S. Adams, R. Lyons, Israel Journal of Mathematics 75, 1991, pp. 341-370.

[Bal95] *Lectures on Spaces of Nonpositive Curvature*, W. Ballmann, DMV Seminar 25, Birkhäuser, Bâle, 1995.

[Ban32] *Théorie des Opérations Linéaires*, S. Banach, ? ? ? ? ?.

[BH99] *Metrics Spaces of Non-Positive Curvature*, M. R. Bridson, A. Heafliger, Springer, Berlin-Heidelberg, 1999.

[BIN] *Eléments d'intégration*, N. Bourbaki, Hermann, Paris, 1965 (2ème édition).

[BTG] *Topologie générale*, N. Bourbaki, Hermann, Paris, 1958.

[BTV] *Topological Vector Spaces*, N. Bourbaki, Springer-Verlag, English edition, France, 1987.

[BM02] *Continuous bounded cohomology and applications to rigidity theory*, M. Burger, N. Monod, Geometric and Functional Analysis 12 (2002), 219-280.

[BS87] *Amenable Groups and Stabilizers of Measures on the Boundary of a Hadamard Manifold.*, M. Burger, V. Schroeder, Mathematische Annalen 276, Springer-Verlag, 1987, pp. 505-514.

[Cas67] *Sur les multi-applications mesurables*, Ch. Castaing, Revue française d'informatique et de recherche opérationnelle, Numéro 1, 1967, pp. 91-126.

[CV77] *Convex Analysis and Measurable Multifunctions*, Ch. Castaing, M. Valadier, Lecture Notes in Mathematics 580, Springer, Berlin-Heidelberg, 1977.

[CFW81] *An amenable equivalence relation is generated by a single transformation*, A. Connes, J. Feldman, B. Weiss, Ergodic Theory Dynamical Systems 1, 1981, pp. 431-450.

[CDP90] *Géométrie et théorie des Groupes, Les groupes hyperboliques de Gromov*, M. Coornaert, T. Delzant, A. Papadopoulos, Lectures Notes in Mathematics, Springer-Verlag, 1990.

[De67] *Integration of correspondences*, G. Debreu, Proceedings of the fifth Berkeley symposium on mathematical statistics and probability, Berkeley, 1967, pp. 351-372.

[DAP76] *Champs boréliens et multisections*, C. Delode, O. Arino, J.-P. Penot, Annales de l'Institut Henri Poincaré (Section B), Volume 12, Numéro 1, 1976, pp. 11 - 42.

[Dix69] *Les algèbres d'opérateurs dans l'espace hilbertien (Algèbres de Von Neumann)*, J. Dixmier, Gauthier-Villars, Paris, (2ème édition) 1969.

[DJK94] *The Structure of Hyperfinite Borel Equivalence Relations*, R. Dougherty, S. Jackson, A. S. Kechris, Transactions of the American Mathematical Society 341, Numéro 1, 1994, pp. 193 - 225.

[Doo94] *Measure Theory*, J. L. Doob, Springer, GTM 143, New York, 1994.

[DS67] *Linear operators*, Vol. 1 “General Theory”, N. Dunford, J. T. Schwartz, Interscience Publishers, New York & London, 1967.

[Edw65] *Functional Analysis, Theory and Applications*, R. E. Edwards, Holt, Rinehart & Winston, New York, 1965.

[EMT04] *Function Analysis, An Introduction*, Y. Eidelman, V. Milman, A. Tsolomitis, Graduate Studies in Mathematics, Volume 66, AMS, Providence, 2004.

[En89] *General Topology*, R. Engelking, Heldermann, Berlin, 1989.

[FD88] *Representations of ∗-Algebras, Locally Compact Groups and Banach ∗-Algebraic Bundles*, J. M. G. Fell, R. S. Doran, Academic Press, Londres, 1988 (deux volumes).

[Fetc01] *Functional Analysis and Infinite-Dimensional Geometry*, M. Fabian, P. Habala, P. Hàjek, V. Montesinos Santalucía, J. Pelant, V. Zizler, Springer, New York, 2001.

[Fl80] *Group Completions and Limit Sets of Kleinian Groups*, W. J. Floyd, Invent. Math. (57), 1980, pp. 205-218.

[FL08] *The de Rham decomposition theorem for metric spaces*, T. Foertsch, A. Lytchak, Geometric and Functional Analysis, Birkhäuser, Basel, 2008.

[FM77] *Ergodic Equivalence Relations, Cohomology and Von Neumann Algebras* part. I, J. Feldman, C. Moore, Transactions of the Mathematical Society 234, Numéro 2, 1977, pp. 289-324.

[FNS06] *Fixed point sets of parabolic isometries of CAT(0)-spaces*, K. Fujiwar, K. Nagano, T. Shioya, Commentarii Mathematici Helvetici 81, ?, 2006, pp. 305-335.

[Go51] *Sur la Theorie des Representations Unitaires*, R. Godement, The Annals of Mathematics, Second Series, Vol. 53, No. 1, 1951, pp. 68-124

[Gil87] *Introduction to the Analysis of Metric Spaces*, J. R. Giles, Australian Mathematical Society, Lecture Series 3, Cambridge University Press, 1987.

[Hi75] *Mesurable relations*, C.J. Himmelberg, Fundamenta Mathematicae LXXXVII.1 (87.1) , Varsovie, 1975, pp. 53-72.

[Jos97] *Nonpositive Curvature : Geometric and Analytic Aspects*, J. Jost, Lectures in Mathematics ETH Zürich, Birkhäuser, Bâle, 1997.

[JKL02] *Countable Borel Equivalence Relations*, S. Jackson, A. S. Kechris, A. Louveau, Journal of Mathematical Logic 2, Numéro 1, 2002, pp. 1 - 80.

[Ka00] *The Poisson formula for groups with hyperbolic properties*, V. A. Kaimanovich, Annals of Mathematics, 152 (2000), pp. 659-692.

[Ka03] *Double ergodicity of the Poisson boundary and applications to bounded cohomology*, V. A. Kaimanovich, Geometric and Functional Analysis 13 (2003), no. 4, 852–861.

[Ka04] *Boundary amenability of hyperbolic spaces.*, V.A. Kaimanovich, Discrete geometric analysis, Contemporary Mathematics pp. 83–111.

[KaVe83] *Random Walks on Discrete Groups : Boundary and Entropy*, V.A. Kaimnanovich, A.M. Vershick, The Annals of Probability, Vol. 11, No 3 (Aug., 1983), pp. 457-490.

[Kar03a] *Free subgroups of groups with non-trivial Floyd boundary*, A. Karlsson, Comm. Algebra (31), numéro 11, 2003, pp. 5361-5376.

[KarMar99] *A Multiplicative Ergodic Theorem and Nonpositively Curved Spaces*, A. Karlsson, G.A. Magulis, Communications in Mathematical Physics,

[Kec95] *Classical Descriptive Set Theory*, A. S. Kechris, Springer, GTM 156, New York, 1995.

[Kel55] *General Topology*, J. L. Kelley, Springer, New York, 1955.

[KM04] *Topics in Orbit Equivalence*, A. S. Kechris, B. D. Miller, Lecture Notes in Mathematics 1852, Springer, Berlin-Heidelberg, 2004.

[Kut98] *Modern Analysis*, Kenneth Kuttler, CRC Press, 1998.

[Le78] *Mesurable Selections of Multivalueted Mappings and Projections of Measurable Sets*, V. L. Levin, Functional Analysis and Its Applications, Volume 12, Number 1, New York, 1978, pp. 108-112.

[LS97] *Kirszbraun's Theorem and metric spaces of bounded curvature*, U. Lang, V. Schroeder, Geometric And Functional Analysis Vol. 7, Birkhäuser, Bâle, 1997, pp. 535-560.

[Mel05] *Géométrie de l'espace d'Urysohn et théorie descriptive des ensembles*, J. Melleray, Thèse, Université Paris VI, 2005.

[Mo01] *Continuous Bounded Cohomology of Locally Compact Groups*, N. Monod, Springer Lecture Notes in Mathematics 1758 (2001).

[MoSh04] *Cocycle superrigidity and bounded cohomology for negatively curved spaces.*, N. Monod, Y. Shalom, Journal of Differential Geometry , 67 (2004), no. 3, 395–455.

[Mun75] *Topology, A first course*, J. R. Munkres, Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1975.

[Pap05] *Metric Spaces, Convexity and Nonpostive Curvature*, A. Papadopoulos, IRMA Lectures in Mathematics and Theoretical Physics, n°6, European Mathematical Society, 2005.

[Pa72] *Probability Measures on Metric Spaces*, K.R. Parthasarathy, AMS Chelsea Publishing, AMS Bookstore, 2005.

[Par05] *Selection Theorems and their Applications*, T. Parthasarathy, Lecture Notes in Mathematics, Springer Verlag, Berlin·Heidelberg·New York, 1972.

[Pau07] *Sur la dynamique des groupes de matrices et applications arithmétiques*, F. Paulin, De la géométrie et de la dynamique de SLn(R) et SLn(Z), N. Berline, A. Plagne et C. Sabbah Editeurs, Editions de l'Ecole Polytechnique (2007), 47-110.

[Rud78] *Analyse réelle et complexe*, W. Rudin, Masson, Paris, 1978.

[Ury27] *Sur un espace métrique universel*, P. Urysohn, Bulletin des sciences mathématiques, Tome 51, 1927, pp. 43-64 & pp. 74-90.

[Val71] *Multi-applications mesurables à valeurs convexes compactes*, M. Valadier, Journal de mathématiques pures et appliquées 50, 1971, pp. 265-297.

[Val78] *Sur le plongement d'un champ mesurable d'espaces métriques dans un champ trivial*, M. Valadier, Annales de l'Institut Henri Poincaré (Section B), Volume 14, Numéro 2, 1978, pp. 165 - 168.

[Wal82] *An Introduction to Ergodic Theory*, P. Walters, Springer, GTM 79, New York, 1982.

[Zim77] *Hyperfinite Factors and Amenable Ergodic Actions*, R. J. Zimmer, Inventiones mathematicae 41, 1977, pp. 23 - 31.

[Zim78] *Amenable Ergodic Group Actions and an Application to Poisson Boundaries of Random Walks*, R. J. Zimmer, Journal of Functional Analysis 27, 1978, pp. 350 - 372.

[Zim83] *Curvature of Leaves in Amenable Foliations* , R. J. Zimmer, American Journal of Mathematics, Vol. 105, No. 4 (Aug., 1983), pp. 1011-1022

[Zim84] *Ergodic Theory and Semisimple Groups*, R. J. Zimmer, Birkhäuser, Boston, 1984.

Curriculum Vitae

Personal informations

Name	:	Martin Anderegg
Birth date	:	January 23, 1982
Citizenship	:	Swiss
Address	:	EPFL SB IMB EGG Station 8 CH-1015 Lausanne
Tel.	:	+41 21 693 03 97
E-mail	:	martin.anderegg@epfl.ch

Cursus

2001-2006	Maîtrise Universitaire en Mathématiques, Université de Genève, Switzerland.
	Mémoire : "L'homomorphisme de Duflo : le cas $sl(2,\mathbb{C})$"
	Advisor : Anton Alekseev
1986-2001	School in Geneva, Switzerland.

Doctoral school

August 17-21, 2009	Participant of the Conference "*Ergodic Theory of Group Actions*", Georg-August-University Göttingen.
2009	Seminar of the EGG chair.
2008	Action Affines, Alain Valette
2007	Metric spaces, Martin Bridson
2006	Moyennabilité, Nicolas Monod
2006	Groupes infinis : croissance et isopérimétrie, Goulnara Arjanseva

Reaserch interests

My main interst is group theory, from an ergodic theory and geometry point of view.

Languages

French	Native language
English	Fluent
German	Some notions