

# Aplicaciones de los campos de esfuerzos cortantes en el análisis y dimensionamiento de losas de hormigón armado

## *Applications of shear fields for analysis and design of reinforced concrete slabs*

Miguel Fernández Ruiz<sup>(1)</sup>, Aurelio Muttoni<sup>(1)</sup>

Recibido | Received: 12-12-2008  
Aceptado | Accepted: 21-04-2009

### Resumen

Este artículo presenta una revisión del comportamiento estructural y de los mecanismos de transmisión de cargas en losas de hormigón armado a través del estudio de los campos de esfuerzos cortantes. La pertinencia de diferentes tipos de campos obtenidos mediante consideraciones elásticas o plásticas es analizada en relación con el comportamiento de las losas tras su fisuración. El artículo presenta y discute finalmente una serie de aplicaciones prácticas mostrando las posibilidades de esta técnica en el dimensionamiento de losas de hormigón armado..

**Palabras clave:** Campos de esfuerzos cortantes, teoría de la plasticidad, teoría de la elasticidad, losas de hormigón armado.

### Abstract

This paper investigates the mechanical behaviour and the load-carrying mechanisms of reinforced concrete slabs by means of shear fields. The suitability of various shear fields obtained from different approaches (elastic and plastic theory) is investigated with respect to the behaviour of slabs prior to and after cracking. The paper finally introduces a series of practical applications showing some possibilities of this technique in design of concrete slabs..

**Keywords:** Shear fields, theory of plasticity, theory of elasticity, reinforced concrete slabs.

---

\* An extensive English language summary of the present article is provided on page 000 of this issue both for the convenience of non-Spanish-speaking readers and inclusion in databases.

(1) Dr. Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, Station 18, CH-1015 (Lausanne, Suiza).

Persona de contacto / Corresponding author: miguel.fernandezruiz@epfl.ch

## 1. INTRODUCCIÓN

En el proyecto de losas de hormigón armado, la determinación de las armaduras de flexión ha sido tradicionalmente la tarea a la cual se le ha dedicado un mayor tiempo de análisis, considerando la verificación del esfuerzo cortante o del punzonamiento como una tarea secundaria. Esta metodología de proyecto contrasta sin embargo con el hecho de que, por ejemplo en losas apoyadas sobre columnas, el punzonamiento es el estado límite último que determina normalmente el espesor mínimo de las losas.

El análisis en ocasiones demasiado simplificado tanto de la sollicitación como de la resistencia de las losas frente a esfuerzos cortantes ha provocado problemas en numerosas estructuras, así como accidentes en algunos casos [1,2] ver Figura 1.

Debe además tenerse en cuenta que las roturas por punzonamiento o por cortante en losas revisten de una especial gravedad debido a la fragilidad de las mismas (con escasa capacidad de aviso) y al hecho de que son roturas propagables [3]. Debido a esta situación, se ha realizado un esfuerzo muy significativo en la comunidad científica para la comprensión de los fenómenos de rotura por cortante en losas sin armadura transversal, existiendo hoy en día una serie de teorías consistentes para la evaluación de su resistencia aplicadas en normas para el dimensionamiento de estructuras de hormigón. Algunos ejemplos lo constituyen la aplicación de la teoría del campo de compresiones [4] en la norma canadiense CSA (2004) [5] o la aplicación de la teoría de la fisura crítica [6, 7, 8] en la norma suiza SIA 262 (2003) [9].

Sin embargo, contrastando con el gran esfuerzo desarrollado para mejorar la comprensión en los mecanismos resistentes a cortante, un esfuerzo muy limitado ha sido llevado a cabo para entender la transmisión del esfuerzo cortante en losas y cómo integrar este aspecto

a la hora de concebir y proyectar una estructura. Algunas trabajos importantes sobre ese tema pueden sin embargo consultarse en [10, 11, 12].

Este artículo presenta una revisión de la transmisión del esfuerzo cortante en losas de hormigón armado y cómo puede efectuarse un estudio sistemático del mismo a través de los campos de esfuerzos cortantes. Dichos campos serán utilizados para la comprensión de los mecanismos de transmisión de carga en las losas y se discutirá su aplicación para la identificación de regiones potencialmente peligrosas o para la optimización de algunos aspectos de diseño.

## 2. EQUILIBRIO DE UN ELEMENTO DIFERENCIAL

La Figura 2 muestra la convención de signos que será adoptada en este artículo para los esfuerzos actuantes en un elemento losa. El equilibrio de las fuerzas verticales permite obtener:

$$q \cdot dx \cdot dy = dv_x \cdot dy + dv_y \cdot dx \rightarrow q = \frac{dv_x}{dx} + \frac{dv_y}{dy} \quad (1)$$

mientras que a partir del equilibrio de momentos proporciona:

$$\begin{aligned} v_x \cdot dy \cdot dx - dm_x \cdot dy - dm_{xy} \cdot dx &= 0 \rightarrow v_x = \frac{dm_x}{dx} + \frac{dm_{xy}}{dy} \\ v_y \cdot dx \cdot dy - dm_y \cdot dx - dm_{yx} \cdot dy &= 0 \rightarrow v_y = \frac{dm_y}{dy} + \frac{dm_{yx}}{dx} \end{aligned} \quad (2)$$

donde  $m_{xy}$  es el momento torsor de la losa ( $= m_{yx}$ ).

Gracias a las condiciones de equilibrio, las reacciones lineales en los bordes apoyados ( $r_b$ ) así como las reacciones de esquina ( $R_b$ ) pueden también obtenerse directamente (ver Figura 3):

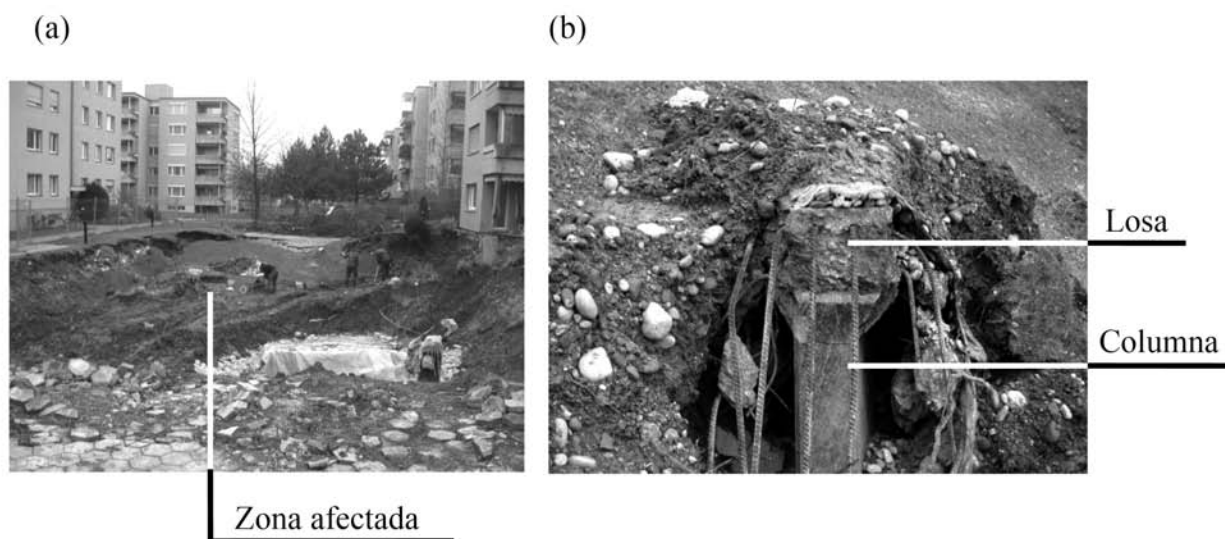


Figura 1. Derrumbe de la losa de cubierta del parking de Gretzenbach (Suiza) en 2004  
(a) estado tras derrumbe; (b) detalle de una columna tras el punzonamiento.

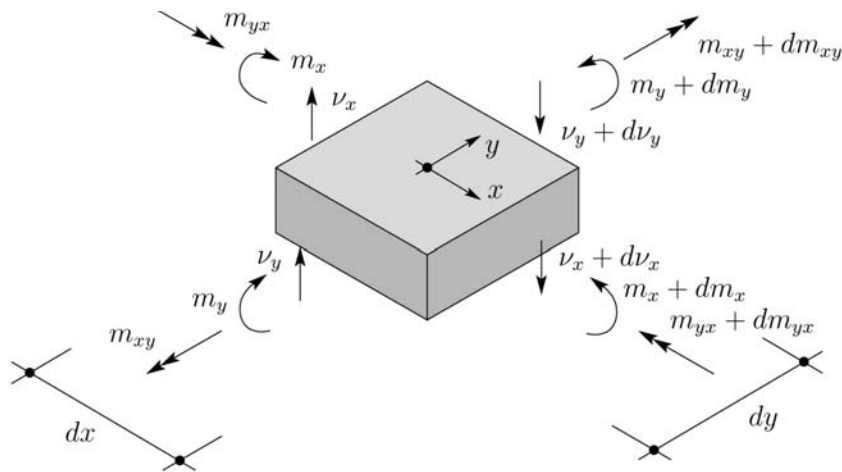


Figura 2. Elemento diferencial de una losa y esfuerzos.

$$r_b = v_n + \frac{\partial m_m}{\partial t} \tag{3}$$

$$R_b = 2 \cdot m_{xy}$$

### 3. CAMPO DE ESFUERZOS CORTANTES

Según la teoría de la plasticidad, una solución que permite equilibrar los esfuerzos actuantes sobre la losa (Figura 2) puede ser encontrada considerando el trabajo de la misma según un modelo “sandwich” [13] ver Figura 4a. Según este modelo, la losa se encuentra dividida en tres capas (Figura 4b) dos externas sometidas a esfuerzos de membrana (las cuales se encargan de equilibrar los momentos de flexión y torsión mediante compresiones en el hormigón y tracciones en las armaduras) y un núcleo que equilibra los esfuerzos cortantes ( $v_x$  y  $v_y$  ver Figura 2).

Los esfuerzos cortantes por unidad de longitud (desarrollados a lo largo de secciones perpendiculares al plano de la losa) se encuentran a su vez equilibrados mediante sendos esfuerzos rasantes que se desarrollan en las caras superior e inferior del núcleo (paralelas al plano de la losa), como se aprecia en la Figura 4b (los cuales están equilibrados en las capas externas del sandwich mediante la variación de los esfuerzos de membrana). Los esfuerzos rasantes que se desarrollan en las caras superior e inferior del núcleo constituyen por lo tanto un campo vectorial que puede ser descrito a partir de dos componentes.

Una manera conveniente para describir dicho campo consiste en considerar, para un punto cualquiera de la losa, el esfuerzo rasante principal. La magnitud de dicho esfuerzo ( $v_{tor}$  de igual valor que el esfuerzo cortante principal según la Figura 4c) y su dirección principal  $\theta$  con respecto al eje  $x$  (perpendicular a la sección de

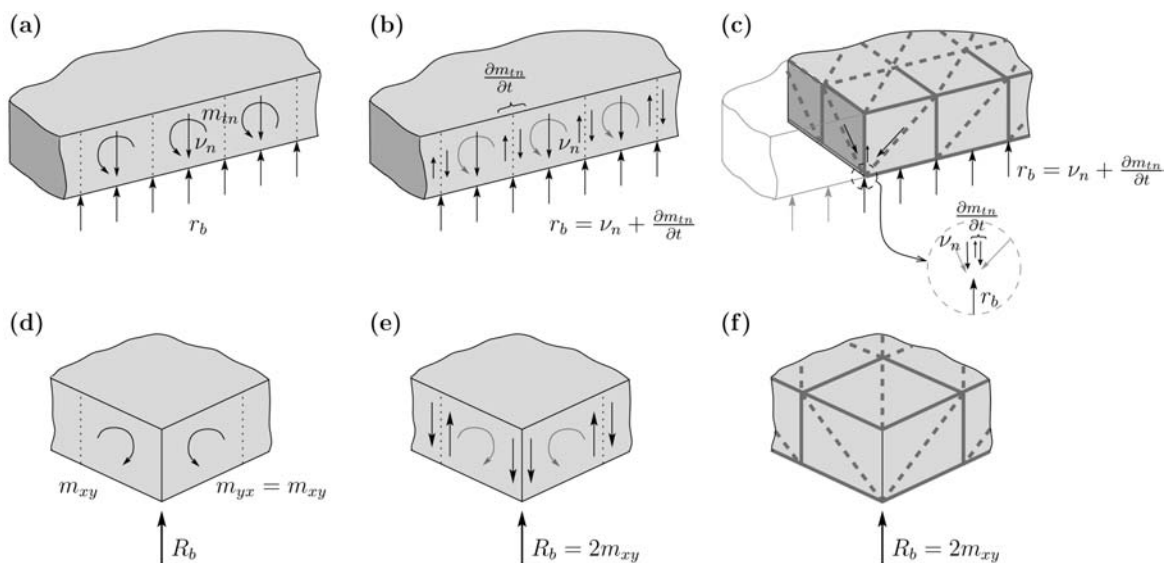


Figura 3. Reacciones de borde y de esquina

- (a) borde apoyado y esfuerzos de la losa; (b) reacción lineal obtenida a partir de los esfuerzos de la losa;
- (c) reacción lineal obtenida a partir de un modelo de celosía (con detalle de fuerzas en un nudo);
- (d) esquina y esfuerzos de la losa; (e) reacción de esquina obtenida a partir de los esfuerzos de la losa;
- (f) reacción de esquina obtenida a partir de un modelo de celosía (con detalle de fuerzas en un nudo).

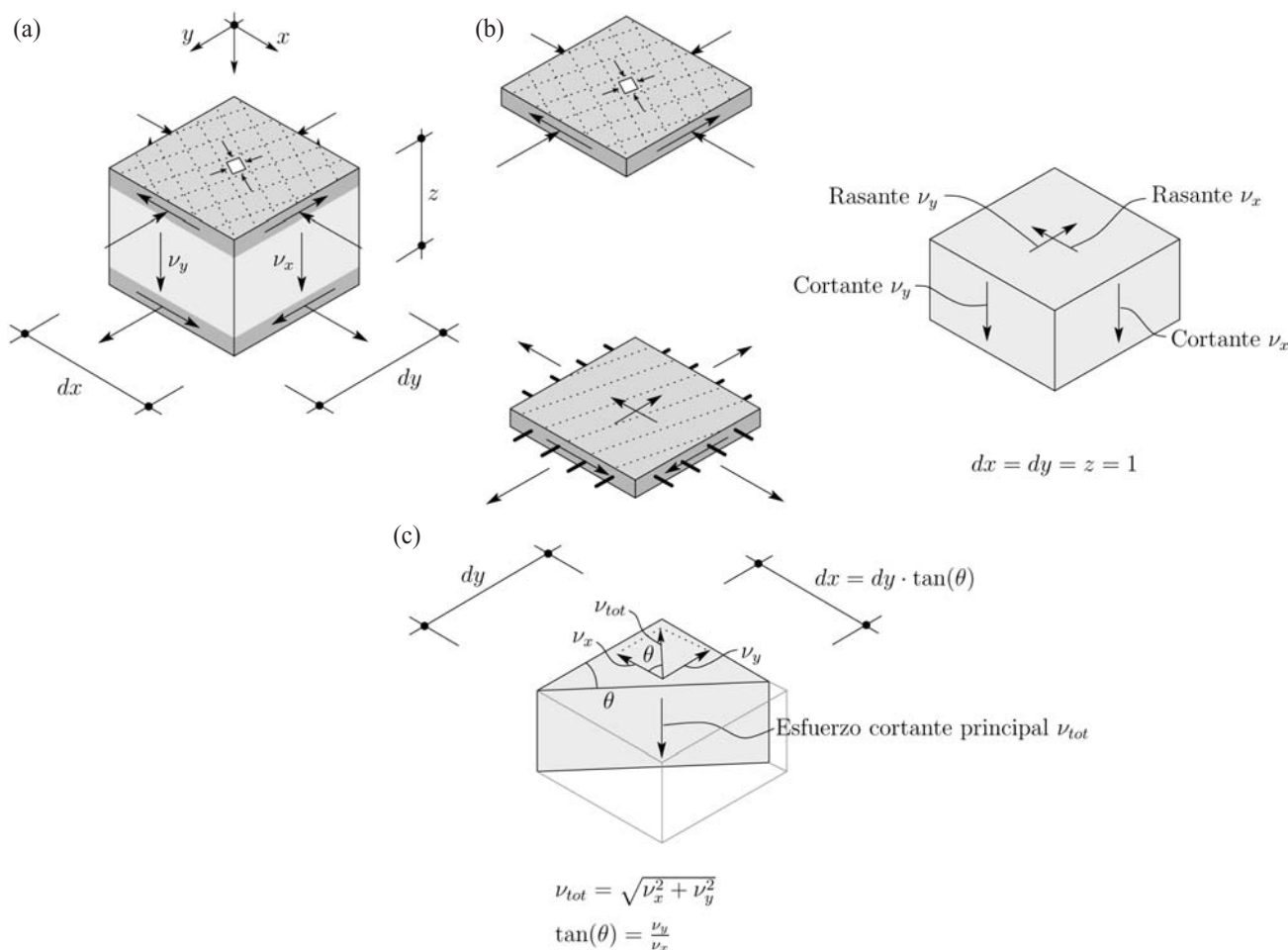


Figura 4. Modelo sandwich: (a) capas; (b) detalle de los esfuerzos desarrollados en el núcleo y capas externas; y (c) determinación del esfuerzo cortante principal.

esfuerzo cortante principal según la Figura 4c) pueden calcularse gracias a sus componentes  $\nu_x$  y  $\nu_y$  como:

$$\nu_{tot} = \sqrt{\nu_x^2 + \nu_y^2}$$

$$\theta = \arctan \frac{\nu_y}{\nu_x}$$

(4)

A partir de las componentes de dirección y valor del esfuerzo cortante principal, el campo vectorial puede ser dibujado punto por punto, indicando la dirección según la cual el esfuerzo cortante es transmitido. En este artículo se utilizará para ello un conjunto de líneas

paralelas a la dirección principal del esfuerzo cortante y cuyo espesor varía con la magnitud del esfuerzo cortante principal, ver Figura 5.

#### 4. DETERMINACIÓN DE CAMPOS DE ESFUERZOS CORTANTES EN CASOS SENCILLOS

En esta sección se presentan diferentes métodos para determinar el campo de esfuerzos cortantes en losas, comparando los resultados obtenidos.

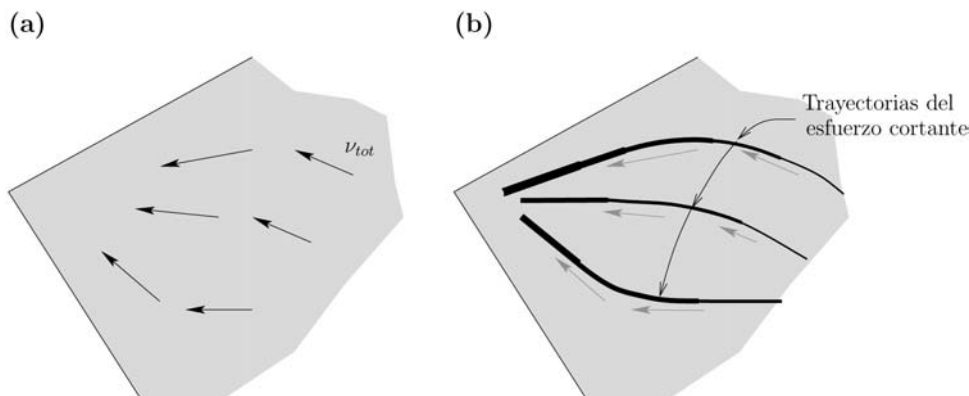


Figura 5. Representación gráfica del campo de esfuerzos cortantes en una losa: (a) campo vectorial; y (b) trayectorias del esfuerzo cortante

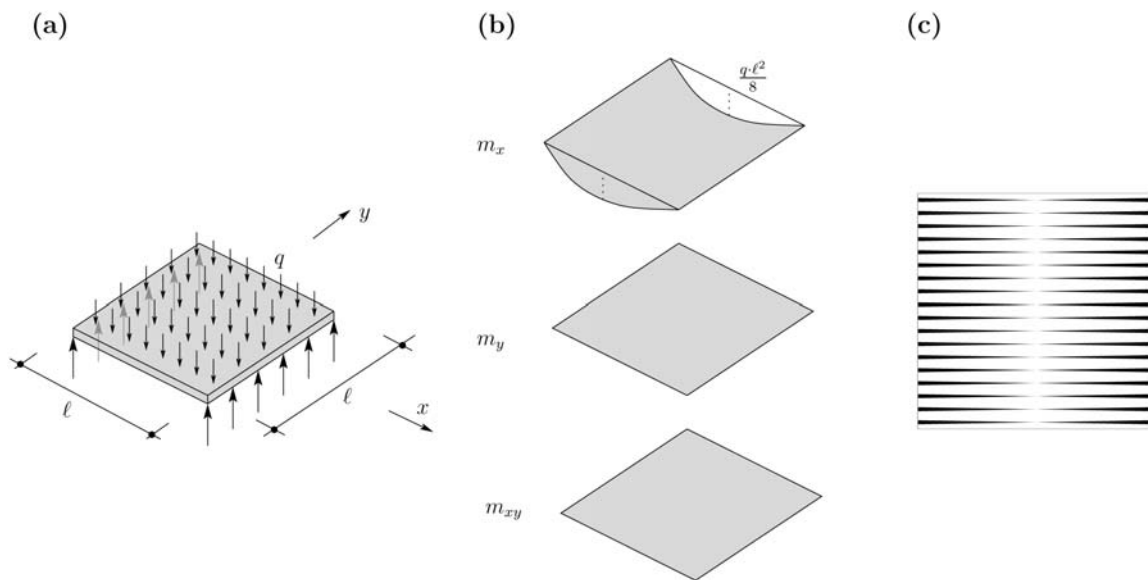


Figura 6. Losa cuadrada apoyada en dos lados sometida a carga distribuida q. (a) esquema de la losa; (b) solución de equilibrio para el campo de momentos; y (c) campo de esfuerzos cortantes resultante.

#### 4.1. Obtención a partir de campos de momentos plásticos

Los campos de momentos plásticos [14, 15] son campos tensoriales de tres componentes ( $m_x$ ,  $m_y$  y  $m_{xy}$ ) que permiten equilibrar las cargas aplicadas en una losa según las condiciones de equilibrio enunciadas en las ecuaciones (1) y (2) y que respetan las condiciones de borde de la estructura. Dichos campos (que en caso de respetar la condición de plasticidad en todos los puntos de la losa se convierten en soluciones lícitas según el teorema del límite inferior de la teoría de la plasticidad) pueden ser obtenidos sin necesidad de recurrir a condiciones de compatibilidad.

La obtención del campo de esfuerzos cortantes a partir de un campo de momentos en equilibrio es inmediato mediante la Ecuación (2). Algunos resultados correspondientes a campos de momentos plásticos conocidos, están representados en las Figuras 6, 7 y 8:

1. En el primer caso (Figura 6) se examina una losa apoyada de los dos lados. La carga se transmite exclusivamente según la dirección  $x$ , de esta manera el campo de momentos resultante es:

$$\begin{aligned} m_x &= \frac{q \cdot l^2}{8} \left( 1 - \frac{4 \cdot x^2}{l^2} \right) \\ m_y &= m_{xy} = 0 \end{aligned} \tag{5}$$

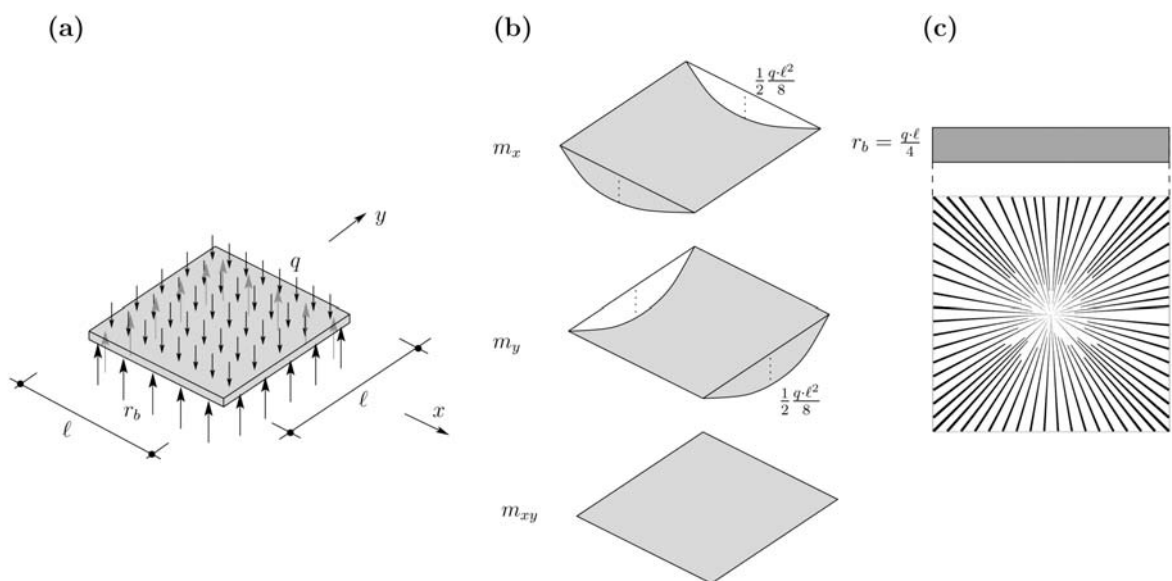


Figura 7. Losa cuadrada apoyada en sus cuatro lados sometida a carga distribuida, sin reacciones de apoyo en las esquinas: (a) esquema de la losa ; (b) solución de equilibrio para el campo de momentos; y (c) campo de esfuerzos cortantes y distribución de las reacciones de apoyo.

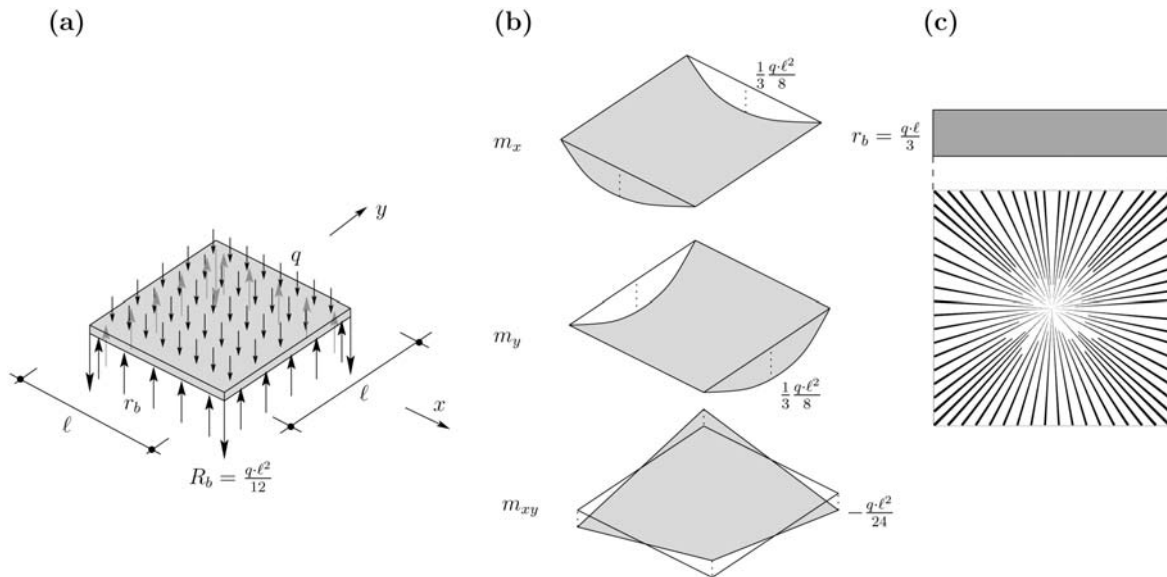


Figura 8. Losa cuadrada apoyada en sus cuatro lados sometida a carga distribuida, con reacciones de apoyo en las esquinas: (a) esquema de la losa; (b) solución de equilibrio para el campo de momentos; y (c) campo de esfuerzos cortantes y distribución de las reacciones de apoyo.

Gracias a la Ecuación (2), pueden determinarse los esfuerzos cortantes:

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} = -q \cdot x \\ v_y &= \frac{\partial m_y}{\partial y} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} = 0 \end{aligned} \tag{6}$$

En este caso, las trayectorias de los esfuerzos cortantes discurren paralelas a los bordes libres de la losa (Figura 6c).

- El segundo caso (Figura 7) estudia la respuesta de una losa apoyada en sus cuatro lados y cuyas reacciones en las esquinas son nulas (bordes con capacidad de levantarse). En este caso se adopta la hipótesis de que las cargas se transmiten en un porcentaje de 50 % en dirección  $x$  y en un porcentaje de 50 % en dirección  $y$  (equivalente al método de las bandas, según [16]). La contribución de los momentos de torsión es por lo tanto nula y el campo de momentos resulta:

$$\begin{aligned} m_x &= \frac{q \cdot l^2}{16} \left( 1 - \frac{4 \cdot x^2}{l^2} \right) \\ m_y &= \frac{q \cdot l^2}{16} \left( 1 - \frac{4 \cdot y^2}{l^2} \right) \\ m_{xy} &= 0 \end{aligned} \tag{7}$$

siendo los esfuerzos cortantes:

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} = -\frac{q}{2} \cdot x \\ v_y &= \frac{\partial m_y}{\partial y} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} = -\frac{q}{2} \cdot y \end{aligned} \tag{8}$$

El campo de esfuerzos cortantes que resulta (Figura 6c) muestra trayectorias radiales, en oposición al mostrado en la Figura 6c.

- En el último caso (Figura 8) se consideran reacciones de apoyo en las esquinas, (las cuales pueden ser obtenidas a partir de los momentos de torsión por equilibrio como  $R = 2m_{xy}$ ). Suponiendo que un tercio de las cargas se transmiten por flexión en dirección  $x$ , un tercio en dirección  $y$ , y un tercio por torsión, el campo de momentos en equilibrio con las cargas resulta:

$$\begin{aligned} m_x &= \frac{q \cdot l^2}{24} \left( 1 - \frac{4 \cdot x^2}{l^2} \right) \\ m_y &= \frac{q \cdot l^2}{24} \left( 1 - \frac{4 \cdot y^2}{l^2} \right) \\ m_{xy} &= \frac{-q \cdot l^2}{6} \frac{x \cdot y}{l^2} \end{aligned} \tag{9}$$

y los esfuerzos cortantes:

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} = -\frac{q}{2} \cdot x \\ v_y &= \frac{\partial m_y}{\partial y} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} = -\frac{q}{2} \cdot y \end{aligned} \tag{10}$$

Los esfuerzos cortantes resultan por lo tanto idénticos a los de la situación anterior siendo sus trayectorias nuevamente radiales. Sin embargo, la distribución de reacciones obtenida a lo largo de los bordes se modifica, puesto que las reacciones de las esquinas debidas al momento torsor (del mismo sentido que la carga  $q$ ) aumentan el valor de la reacción lineal al introducirse a lo largo del borde apoyado.

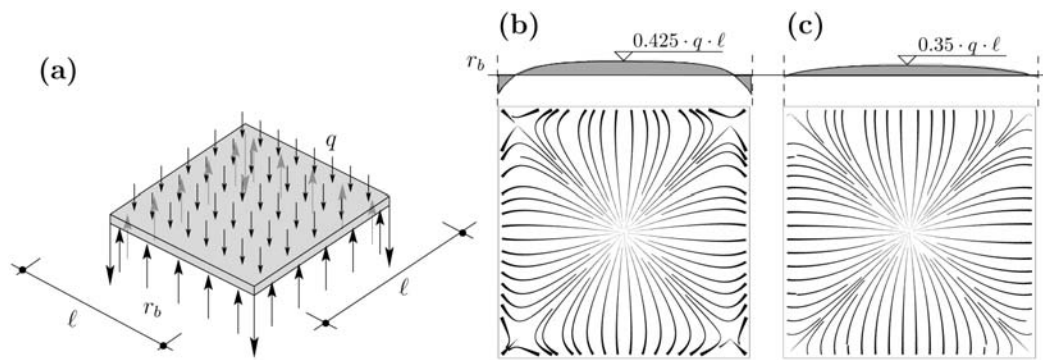


Figura 9. solución elástica del campo de esfuerzos cortante y distribución de las reacciones de apoyo: (a) losa cuadrada apoyada en sus cuatro lados y cargada uniformemente ( $q$ ); (b) campo de esfuerzos cortantes elástico no fisurado ( $G_{el}$ ); y (c) campo de esfuerzos cortantes elástico fisurado ( $G_{el}/10$ ).

#### 4.2. Obtención a partir de campos de momentos elásticos

Los campos de momentos obtenidos para una losa según la teoría de la elasticidad pueden también ser utilizados para la obtención de campos de esfuerzos cortantes. Dichos campos de momentos respetan, además de las condiciones de equilibrio, una serie de condiciones de compatibilidad que los convierten en soluciones adecuadas para la representación de los mecanismos de transmisión de carga sobre todo bajo condiciones de servicio. La obtención de dichos campos es además relativamente sencilla y sistemática mediante la aplicación del método de los elementos finitos.

La Figura 9 representa dos campos de esfuerzos cortantes posibles para la losa estudiada en el párrafo anterior. El primer campo de esfuerzos cortantes (Figura 9b) resulta de un cálculo efectuado asumiendo un material isotrópico elástico no fisurado (módulo de elasticidad  $E_c$ , módulo de elasticidad transversal  $G = G_{el} = E_c / (2 \cdot (1 + \nu_c))$ ). En el segundo caso (Figura 9c) se ha realizado también un cálculo elástico pero donde la rigidez de torsión se ha disminuido diez veces ( $G = G_{el}/10$ ) para tener en cuenta que, tras la fisuración de una losa de hormigón armado, hay una disminución más importante en la rigidez torsional que en la rigidez flexional. El primer caso corresponde por lo tanto a la respuesta de la losa antes de fisuración (o en estados poco avanzados de fisuración) mientras que el segundo caso representa el campo de esfuerzos cortantes en estados avanzados de fisuración.

La figura muestra claramente cómo la hipótesis sobre la rigidez de torsión influye de manera importante sobre el resultado del campo de esfuerzos cortantes así como sobre la distribución de las reacciones de apoyo. El primer caso (Figura 9b) corresponde en gran medida al comportamiento y valores observados en la Figura 8 (contribución de un tercio en la transmisión de cargas de los momentos torsores) mientras que el segundo caso (Figura 9c) se encuentra claramente más próximo de la solución del método de las bandas mostrado en la Figura 7. Dichos resultados son lógicos y permiten recomendar las soluciones plásticas precedentes para estados moderados (caso con reacciones de esquina) o avanzados (caso sin reacciones de esquina) de fisuración.

#### 5. CAMPO DE ESFUERZOS CORTANTES EN LOSAS APOYADAS SOBRE COLUMNAS

En esta sección se analiza el caso de una losa cuadrada apoyada en las cuatro esquinas y solicitada por dos cargas lineales uniformes (muros de carga) en dos bordes enfrentados (ver Figura 10). Este ejemplo se presenta con el objetivo de comprender las diferencias en los mecanismos de transmisión de carga de losas apoyadas en columnas (o sometidas a cargas puntuales) respecto de losas apoyadas a lo largo de líneas y sometidas a cargas distribuidas.

##### 5.1. Campo de esfuerzos cortantes obtenido a partir de un campo de momentos plástico

Una solución de equilibrio posible para el ejemplo de la Figura 10 es [14, 15]:

$$\begin{aligned} m_x &= \frac{\bar{q}}{4} \left( 1 - \frac{4 \cdot x^2}{\ell^2} \right) \\ m_y &= 0 \\ m_{xy} &= \frac{\bar{q}}{\ell} \cdot x \cdot y \end{aligned} \quad (11)$$

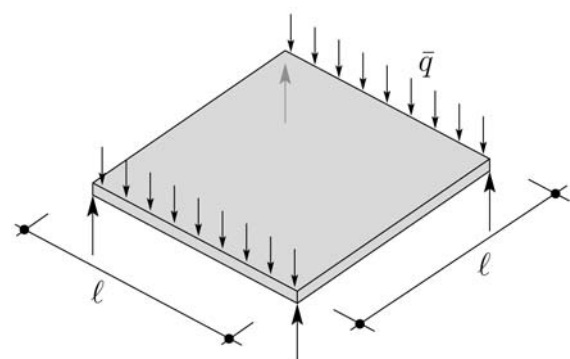


Figura 10. Losa cuadrada apoyada en las esquinas bajo dos cargas lineales.

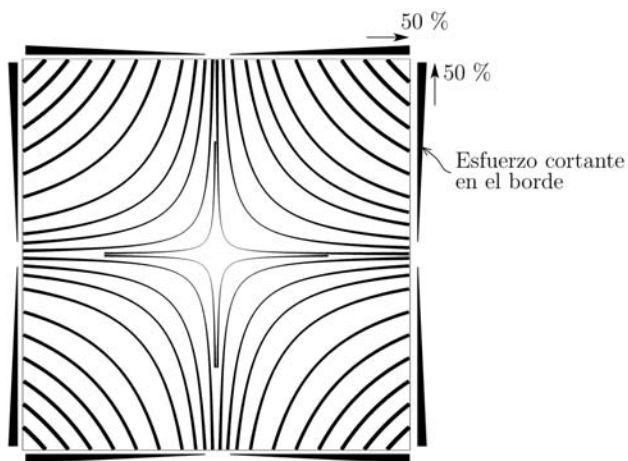


Figura 11. Campo de esfuerzos cortantes de la losa de la figura 9 según el campo de momentos plástico elegido.

resultando los esfuerzos cortantes:

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} = -\bar{q} x \\ v_y &= \frac{\partial m_y}{\partial y} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} = \bar{q} x \end{aligned} \quad (12)$$

La Figura 11 muestra el campo de esfuerzos cortantes correspondiente. En el mismo puede observarse que la carga no se transmite directamente a los apoyos por el camino más corto (línea a lo largo del borde). Al contrario, el 50% de la carga aplicada es transmitida hacia los bordes no cargados donde finalmente se transmite

hacia los apoyos. Por consiguiente, según el campo de momentos elegido, cada borde transmite al apoyo el 50% de la reacción total.

### 5.2. Campo de esfuerzos cortantes obtenidos a partir de campos de momentos elásticos

Las Figuras 12b,c muestran los campos de esfuerzos cortantes obtenidos según un análisis elástico-lineal de la losa con el módulo de elasticidad transversal ( $G_{el}$ ), y el módulo de elasticidad transversal reducido ( $G_{el}/10$ ) respectivamente. Aunque el esfuerzo cortante transmitido por cada borde permanece prácticamente igual (51% a través del borde cargado y 49% a través del borde no cargado), el campo de esfuerzos cortantes presenta diferencias significativas en las trayectorias de los esfuerzos cortantes principales.

### 5.3. Análisis mediante el método de las bandas

Dado que el método de las bandas no permite considerar la activación de los momentos de torsión (los cuales son particularmente activos en la transmisión de cargas de las soluciones discutidas anteriormente) la transmisión de las cargas hacia los apoyos se realiza directa y exclusivamente a lo largo de los bordes cargados (Figura 13). Una solución de este tipo es altamente incompatible, porque implica una flexión de las bandas de borde, mientras que el resto de la losa permanece sin deformar. El dimensionamiento de la armadura de la losa según esta solución conduce por lo tanto a la disposición de una fuerte concentración de armaduras en

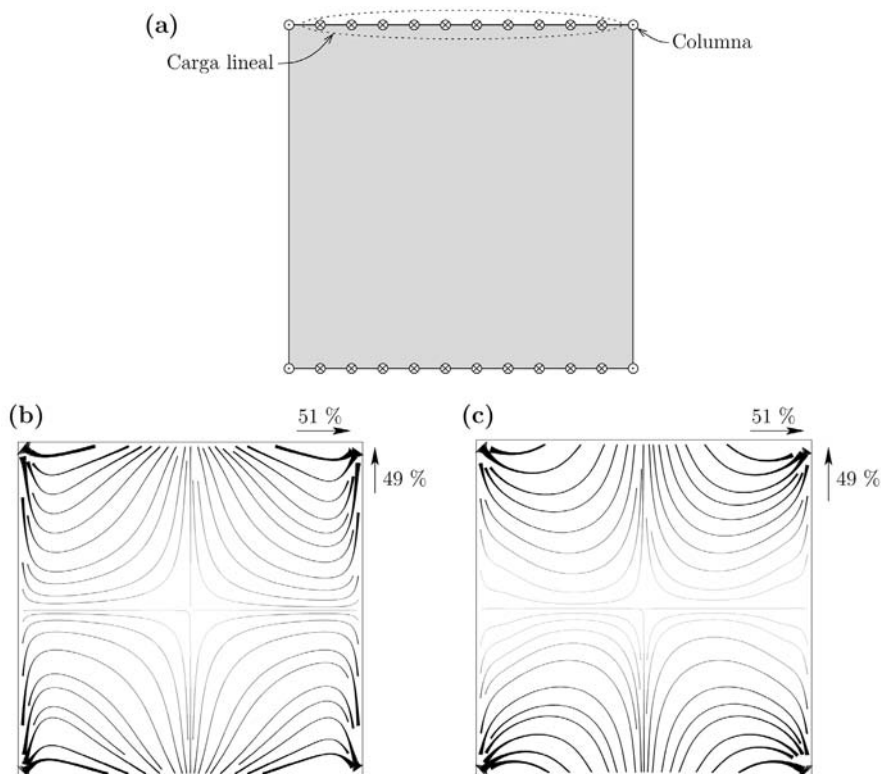


Figura 12. Campo de esfuerzos cortantes de la losa de la figura 9, solución elástica: (a) esquema de carga; (b) solución con módulo de elasticidad transversal  $G_{el}$ ; y (c) campo de esfuerzos cortantes con módulo de elasticidad transversal reducido ( $G_{el}/10$ ).



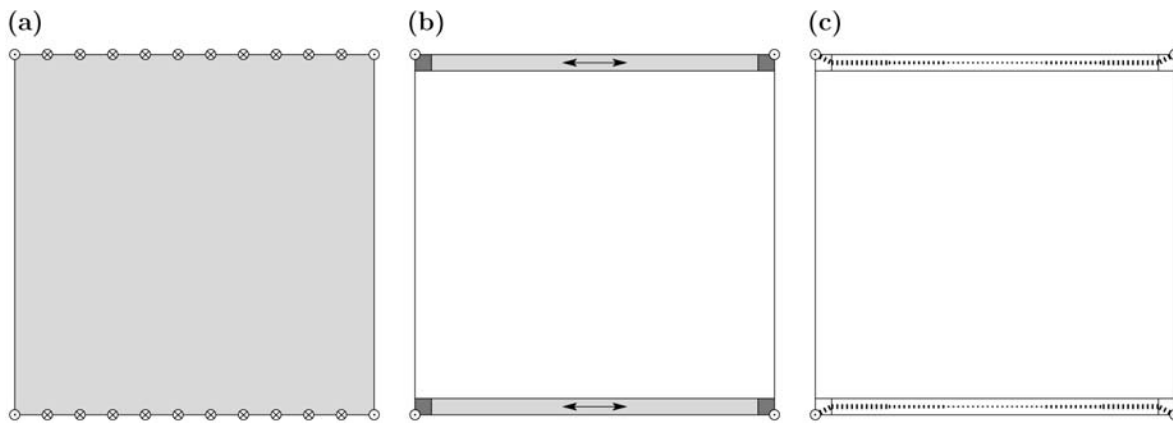


Figura 13. Transmisión de cargas en la losa de la figura 9 según el método de las bandas: (a) geometría de la losa y cargas; (b) bandas de borde; y (c) representación del campo de esfuerzos cortantes.

los bordes cargados y de una armadura mínima en la zona central (ver Figura 14a).

La gran diferencia entre las rigideces de las zonas de borde y de la parte central de la losa tras la fisuración, ocasionan una redistribución de momentos respecto de una solución elástica y por lo tanto una redistribución también en el campo de esfuerzos cortantes. Efectivamente, los bordes, potentemente armados y más rígidos tras la fisuración, transmiten una mayor fracción de la carga. Este hecho puede observarse en la Figura 14b (análisis de la losa fisurada) donde un 71% de la carga es transmitida por la banda rígida. Este comportamiento confirma para las losas el hecho, ya conocido para las lajas [17], que la transmisión de cargas en una estructura de hormigón armado es influenciada por la disposición de las armaduras y por lo tanto del esquema resistente ideado por el proyectista.

## 6. APLICACIONES DE LOS CAMPOS DE ESFUERZOS CORTANTES

En esta sección se presentan tres posibles aplicaciones prácticas de los campos de cortante en el dimensionamiento de losas de hormigón armado.

### 6.1. Determinación de perímetros de control para esfuerzo cortante o punzonamiento

El formato actual adoptado en la mayor parte de normas o recomendaciones para el proyecto de losas de hormigón armado estima la resistencia al punzonamiento o al esfuerzo cortante ( $V_d$ ) multiplicando una resistencia por unidad de longitud ( $v_{Rd}$ , resistencia nominal) por un perímetro de control ( $u$ ):

$$V_d = v_{Rd} \cdot u \quad (13)$$

La resistencia por unidad de longitud suele ser obtenida conociendo una serie de parámetros físicos, mecánicos y geométricos de la losa tales como la resistencia a la compresión del hormigón, el espesor de la losa, etcétera. Respecto del perímetro de control, dicho valor se conoce de forma exacta para algunos casos (como el punzonamiento axisimétrico de losas), siendo aproximado mediante reglas geométricas para otros casos (punzonamiento en losas con columnas empotradas y cargas asimétricas por ejemplo) e incluso puede no estar definido o no ser aplicable para otra serie de casos. Un ejemplo clásico que debe ser verificado en el proyecto de nuevos puentes de carretera y donde los perímetros de punzonamiento no se encuentran definidos en

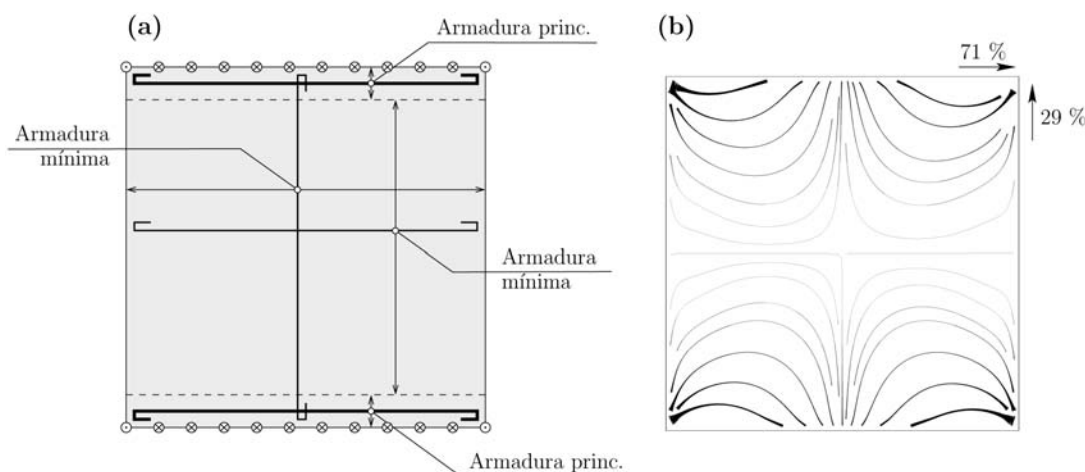


Figura 14. Campo de esfuerzos cortantes en la losa de la figura 9, para zonas con rigideces diferentes (con armadura mínima y principal): (a) losa y esquema de armado; y (b) campo de esfuerzos cortantes-

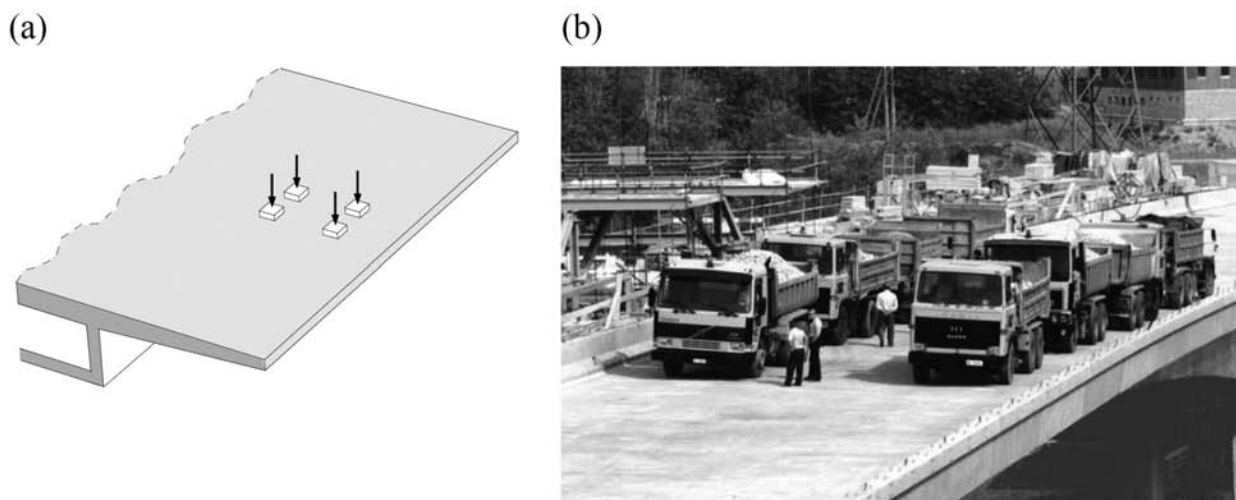


Figura 15. Losa de un puente cajón sometida a la acción de cargas puntuales (carro): (a) esquema estructural; y (b) prueba de carga del puente de Aigues-Vertes (A1, Ginebra, Suiza)

normas o recomendaciones lo constituyen por ejemplo las losas de puentes sometidas a la acción de cargas puntuales (carro), ver Figura 15.

Una metodología general para la determinación del perímetro de control tanto en casos de punzonamiento como de esfuerzo cortante ha sido desarrollada por los autores y presentada en [18]. Dicha metodología consiste en la definición de un perímetro de referencia (ver Figura 16b) que es un perímetro a la misma distancia del borde de la superficie de apoyo que aquél definido por el modelo teórico con el que se desea estimar la resistencia al corte  $v_{Rd}$  (por ejemplo a una distancia

igual a  $2d$  en el caso de la EHE 2008 [19] o el EC-2 [20] o igual a  $d/2$  en el caso de ACI 318-08 [21] o la SIA 262 [9]). Sobre dicho perímetro, se calcula el valor máximo del esfuerzo cortante principal perpendicular al mismo ( $v_{\max,d}$  ver Figura 16c) obtenido mediante un cálculo elástico-lineal del campo de esfuerzos cortantes. El perímetro de control ( $u$ ) se calcula entonces como (Figura 16d):

$$u = \frac{V_d}{v_{\max,d}} \quad (14)$$

Por consiguiente, adoptando dicho perímetro para la verificación de la resistencia al corte, se comprueba la

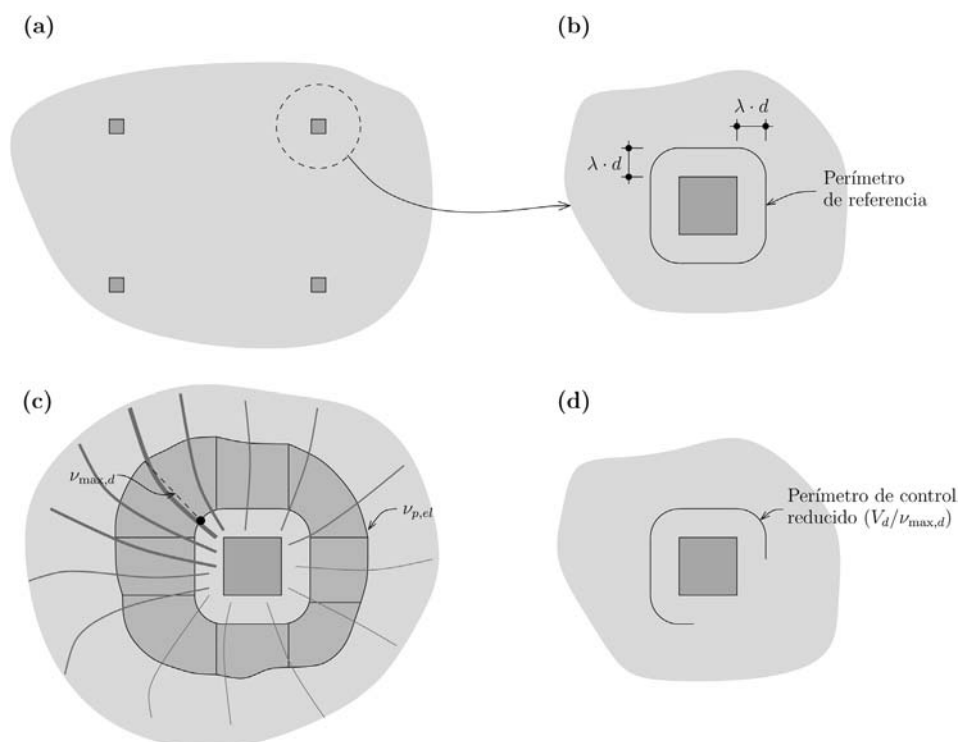


Figura 16. Determinación del perímetro de control en un caso general mediante la aplicación de los campos de esfuerzos cortantes: (a) losa apoyada sobre columnas y zona de estudio; (b) perímetro de referencia ( $\lambda=2$  para EHE-08 o EC-2;  $\lambda=1/2$  para ACI 318-08 o SIA 262); (c) reparto del esfuerzo cortante en el perímetro de referencia y valor máximo perpendicular al mismo; y (d) perímetro de control resultante.

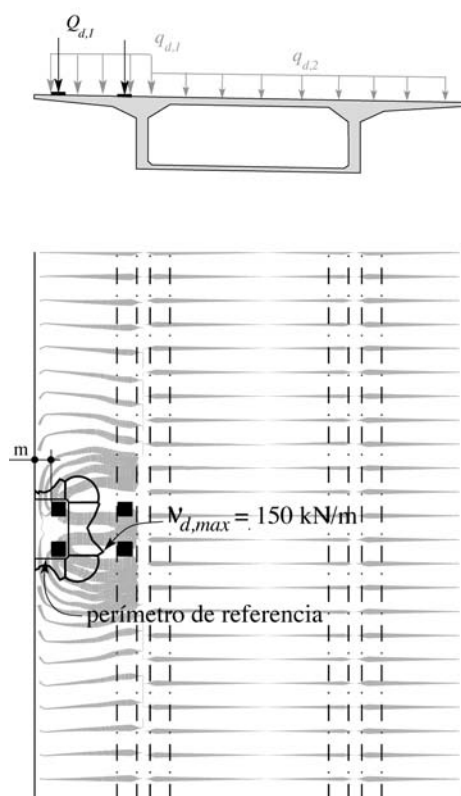


Figura 17. Campo de esfuerzos cortantes y reparto del esfuerzo cortante sobre el perímetro de referencia en la losa de un puente cajón.

resistencia de la losa para el valor máximo del esfuerzo cortante por unidad de longitud. Dicho criterio es por lo tanto prudente (al no considerar posibles redistribuciones en el campo de esfuerzos cortantes tras fisuración o plastificación de armaduras) manteniendo además una excelente correlación con resultados experimentales [12, 22] y pudiendo aplicarse a diferentes formulaciones [18] como el EC-2, ACI 318-08 o la teoría de la fisura crítica.

Un ejemplo práctico de la aplicación de esta metodología puede observarse en la Figura 17 para el caso de una losa de un puente de autopista existente en Suiza de sección cajón y canto variable. La figura presenta el campo de esfuerzos cortantes así como el reparto de los

esfuerzos cortantes alrededor de las ruedas más externas del carro (lo que conduce a un perímetro  $u = 2.1 \text{ m}$  a  $d/2$  del borde de las cargas). Dicha figura muestra concentraciones importantes en las esquinas del perímetro respecto de los bordes o la zona intermedia, indicando que un reparto constante de la carga aplicada sobre el perímetro de referencia puede conducir a resultados sensiblemente del lado de la inseguridad.

## 6.2. Identificación de zonas críticas sometidas a esfuerzo cortante o punzonamiento

En las situaciones típicas de proyecto en losas de hormigón armado (cargas uniformemente distribuidas en losas apoyadas a lo largo de muros o mediante columnas), la transmisión de esfuerzos suele privilegiar trayectorias paralelas del campo de esfuerzos cortantes (caso del esfuerzo cortante, asociado a apoyos lineales y cargas distribuidas, ver Figura 18a) o bien trayectorias radiales (caso del punzonamiento, asociado a cargas o reacciones concentradas, ver Figura 18b). Sin embargo, existen situaciones intermedias, donde la transmisión de esfuerzos cortantes no se realiza claramente de ninguna de las dos formas anteriores, ver por ejemplo el caso mostrado en la Figura 15.

El análisis de las solicitaciones y de la resistencia en dichos casos intermedios es compleja y no siempre se dispone de tratamientos sistemáticos de los mismos en las normas o recomendaciones de proyecto. En dichos casos, el análisis de campos de esfuerzos cortantes se convierte en una herramienta eficaz y que puede además ser aplicada de forma general en combinación con teorías existentes sobre la resistencia al esfuerzo cortante o punzonamiento (una serie de trabajos teóricos sobre este aspecto pueden ser consultados en [18, 2, 3]).

Un ejemplo que permite comprender la aplicación de esta técnica se presenta en la Figura 19. Se trata de una losa de 25 cm de espesor apoyada sobre cinco columnas y un muro en forma de "L". El análisis del campo de cortantes permite identificar claramente los comportamientos enunciados anteriormente, con regiones donde debe considerarse la resistencia al punzonamiento (tra-

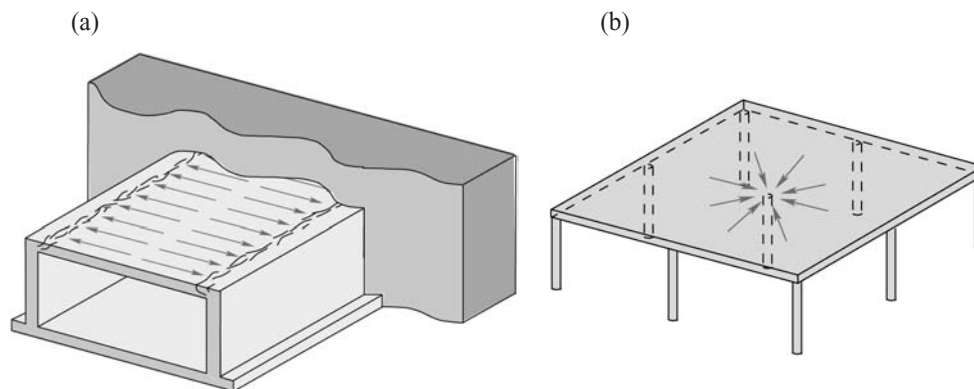


Figura 18. Transmisión de esfuerzos cortantes en losas de hormigón armado: (a) losa superior de un falso túnel; y (b) losa apoyada sobre columnas.

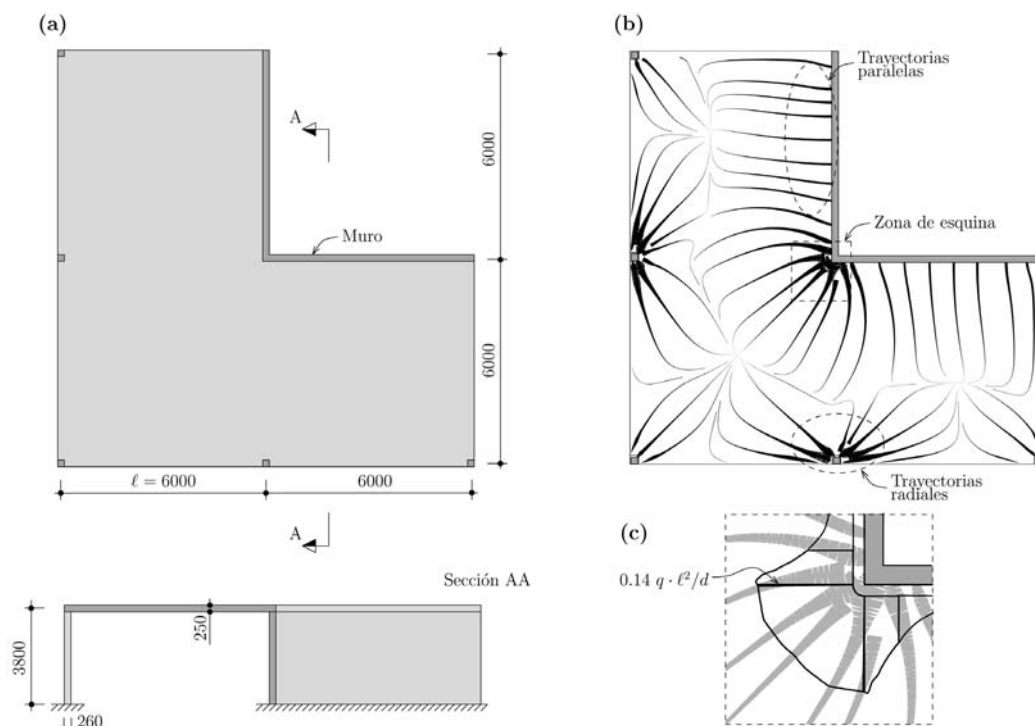


Figura 19: Campo de esfuerzos cortantes en una losa delgada apoyada sobre cinco pilares y un muro en forma de "L": (a) geometría de la losa (cotas en [mm]); (b) campo de esfuerzos cortantes y regiones; y (c) detalle del reparto de esfuerzos cortantes en la región de la esquina.

yectorias radiales cerca de las columnas) y regiones donde debe considerarse la resistencia de la losa frente al esfuerzo cortante (trayectorias paralelas del campo de esfuerzos cortantes en las zonas de los muros a una cierta distancia de la región de esquina). Respecto del comportamiento de la losa en la zona de la esquina del muro, las trayectorias del campo de esfuerzos cortantes no son paralelas sino radiales. Además, dicha región concentra una parte significativa del esfuerzo cortante (como se aprecia en la Figura 19c donde se dibuja el reparto de esfuerzos cortantes) lo que indica que es una región potencialmente crítica.

El análisis de la resistencia de la losa en dicha región en la zona de la esquina del muro puede por lo tanto ser efectuado comprobando si la resistencia de la losa frente al punzonamiento es superior al esfuerzo cortante máximo por unidad de longitud según se explicó en el apartado anterior ( $0.14 \cdot q \cdot \ell^2 / d$  en este caso). Dicho tratamiento se encuentra por ejemplo actualmente introducido (considerando ciertas simplificaciones prudentes) en la norma suiza de hormigón estructural SIA 262. Otros casos en los que los campos de cortantes se aplican para el estudio de regiones no convencionales puede consultarse en [2, 3].

### 6.3. Optimización en la disposición de armaduras transversales

Otra aplicación importante de los campos de esfuerzos cortantes, debido a la comprensión que permiten sobre la transmisión de esfuerzos cortantes en una losa, es la

optimización en la disposición de armaduras de punzonamiento. Por ejemplo, la Figura 20 muestra una losa apoyada sobre nueve columnas (sin capacidad de empotrar momentos) donde la luz en una dirección es sensiblemente superior a la luz en la otra dirección.

El análisis del campo de esfuerzos cortantes muestra, para la columna central, un reparto prácticamente uniforme del esfuerzo cortante a lo largo del perímetro de referencia, ver Figura 21. Este hecho, a primera vista tal vez sorprendente ya que los momentos son muy diferentes en las dos direcciones, se explica debido a que el esfuerzo cortante depende en realidad de la variación de éstos (Ecuación (2)). En general, si la reacción en una losa no tiene excentricidad (momento de empotramiento en

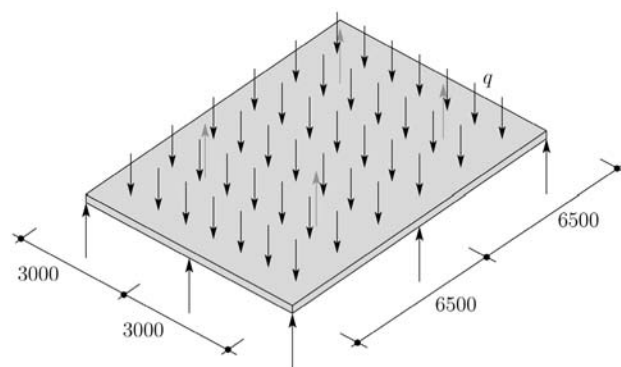


Figura 20. Losa apoyada sobre nueve columnas, con luces diferentes dos direcciones, y sometida a una carga uniforme (cotas en [mm]).

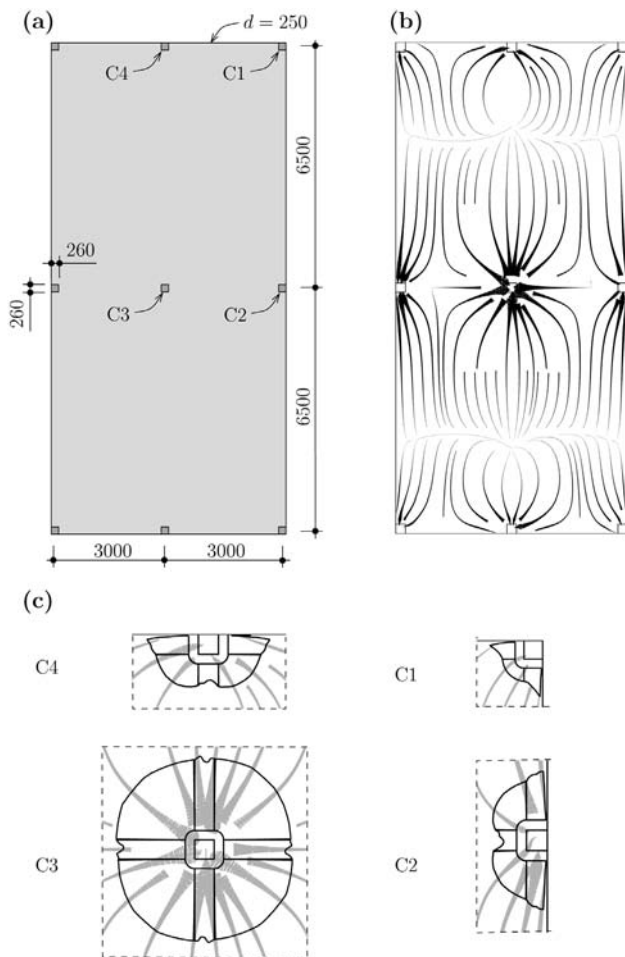


Figura 21. Losa apoyada sobre nueve columnas, con luces diferentes dos direcciones, y sometida a una carga uniforme: (a) detalle de columnas estudiadas; y (b) reparto de los esfuerzos cortantes a lo largo de los respectivos perímetros de referencia

cabeza del pilar nulo) y el tamaño de la superficie de apoyo es similar o inferior al espesor de la losa, la reacción se encuentra repartida de manera uniforme a lo largo del perímetro de control y una disposición axisimétrica de una armadura de punzonamiento (si ésta es necesaria) puede adoptarse, ver Figura 22.

Respecto de las columnas en los bordes o en las esquinas, el reparto del esfuerzo cortante a lo largo de todo el perímetro es en este caso (momentos de empotramiento nulos en cabeza de pilares) nuevamente uniforme salvo cerca de los bordes de la losa donde, sistemáticamente, se desarrollan aumentos locales. Dichas concentraciones son debidas a la torsión que se desarrolla a lo largo del borde libre (ver Figura 3a y 3c). Por lo tanto, un esquema lícito de armado transversal debe considerar, además del reparto regular en este caso de la armadura de punzonamiento, la disposición de horquillas en los bordes (o doblado en gancho de las barras de flexión) para asegurar una correcta transmisión de los momentos de torsión (desvío del campo de compresiones inclinado de las caras superior e inferior de la losa).

En el caso en que las columnas se encuentren empotradas en la losa (en vez de apoyadas), el reparto de esfuer-

zos cortantes a lo largo del perímetro de referencia se modifica sensiblemente. Este hecho se muestra en las Figuras 23 y 24 donde una carga puntual se aplica sin alineación en la trama de pilares (caso típico en las losas de transición). En este caso extremo, el reparto de los esfuerzos cortantes sigue siendo razonablemente regular si la losa se encuentra apoyada sobre las columnas sin capacidad de transmisión de momentos (Figura 23). Por lo tanto, solamente deberán considerarse ligeras reducciones en el perímetro de control según explicado anteriormente y un esquema de armado de punzonamiento axisimétrico seguirá siendo todavía razonable. Sin embargo, en el caso en el que la losa se empotra en las columnas (Figura 24), el campo de cortantes cambia sensiblemente, presentando fuertes concentraciones de esfuerzos cortantes en la zona de la columna próxima

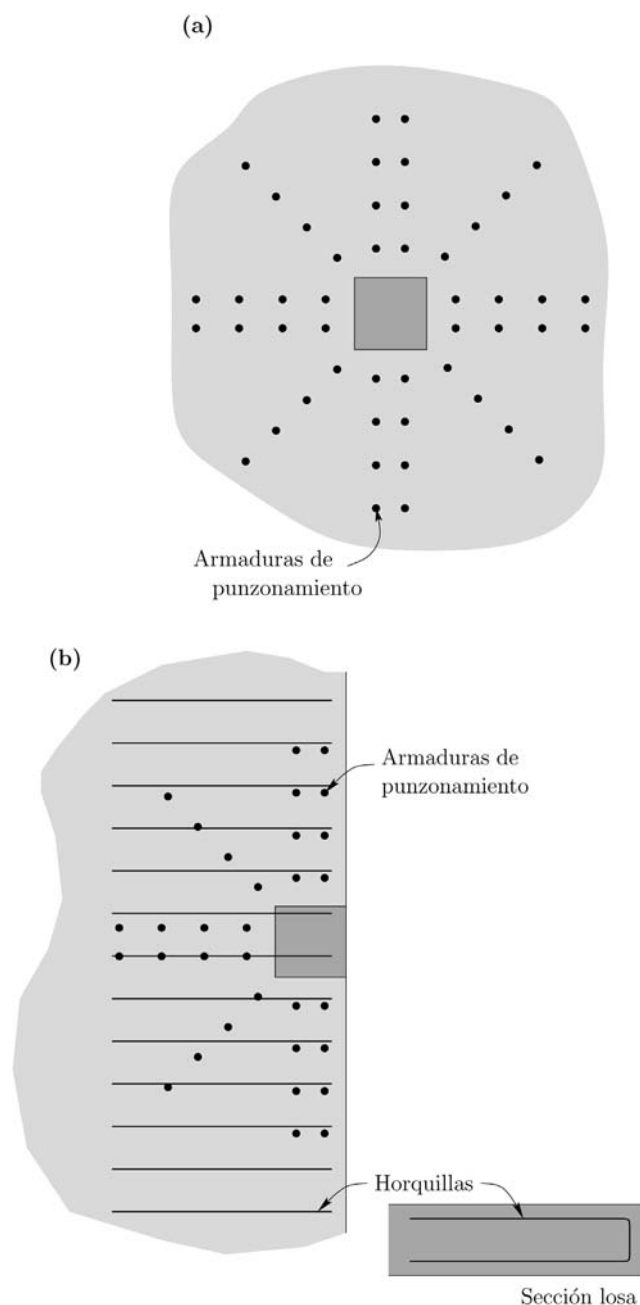


Figura 22. Armaduras transversales: (a) columna central (C3); columna de borde (C2).

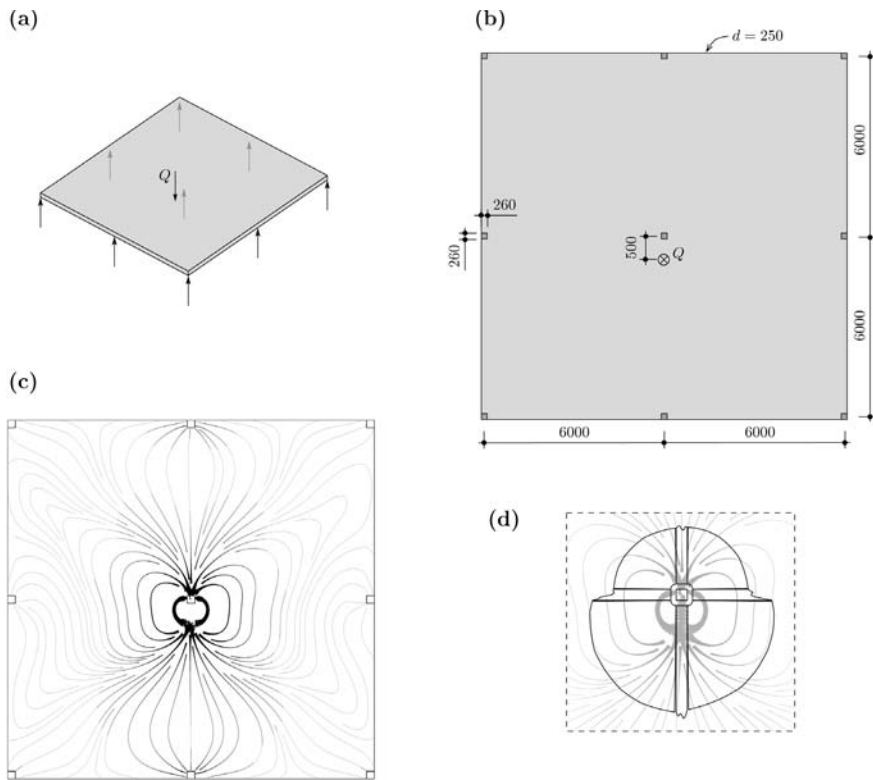


Figura 23. Losa apoyada sobre nueve columnas simplemente apoyadas y sometida a una carga puntual: (a) esquema de la losa y cargas; (b) dimensiones (cotas en [mm]); (c) campo de esfuerzos cortantes; y (d) reparto de los esfuerzos cortantes alrededor de la columna central.

de la carga. Dichas concentraciones reducen notablemente el perímetro de control a considerar y deben además tenerse en cuenta a la hora de disponer las arma-

turas de punzonamiento (las cuales serán muy probablemente necesarias teniendo en cuenta las grandes concentraciones experimentadas).

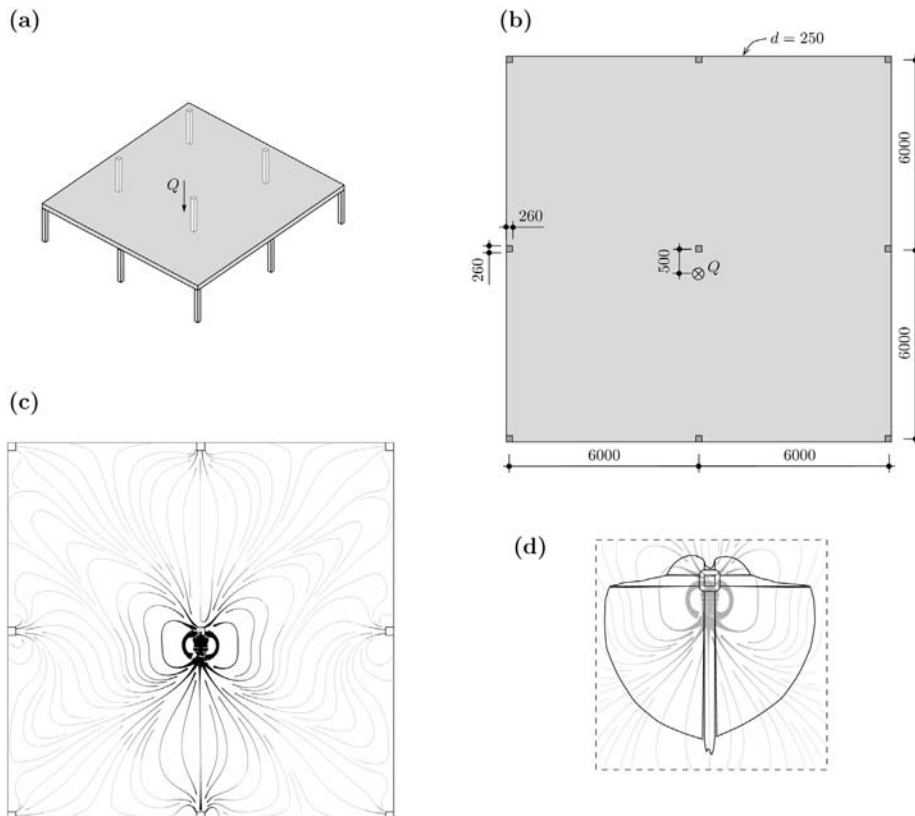


Figura 24. Losa empotrada en nueve columnas y sometida a una carga puntual: (a) esquema de la losa y cargas; (b) dimensiones (cotas en [mm]); (c) campo de esfuerzos cortantes; y (d) reparto de los esfuerzos cortantes alrededor de la columna central.

De manera aproximada, pero con una precisión razonable [22], la influencia de los momentos de empotramiento en las columnas de pequeño tamaño, pueden considerarse reduciendo el perímetro de referencia por un coeficiente ( $K_e$ ) cuyo valor puede ser estimado mediante la expresión siguiente:

$$K_e = \frac{1}{1 + \frac{e}{b}} \quad (15)$$

donde  $e$  es la excentricidad de la reacción y  $b$  el diámetro de un círculo con la misma superficie que la de la columna. Puede notarse que el coeficiente  $K_e$  (recogido en la norma SIA 262) cumple un papel similar al coeficiente  $\beta$  de punzonamiento del EC-2, pero reduciendo el perímetro de control en vez de aumentando el valor de la acción.

## 7. CONCLUSIONES

Este artículo estudia el campo de esfuerzos cortantes en losas de hormigón armado y presenta algunas aplicaciones prácticas del mismo. La principales conclusiones del artículo son:

1. El esfuerzo cortante es un vector y como tal puede definirse en cada punto de una losa mediante un campo vectorial.
2. El esfuerzo cortante se transmite en una losa según una dirección principal en cada punto, la cual define su trayectoria.
3. La trayectoria del esfuerzo cortante no es evidente de determinar *a priori* y depende de los mecanismos de transmisión de cargas de la losa.
4. El campo de esfuerzo cortantes está por lo tanto fuertemente influenciado por las condiciones de borde así como del reparto de rigideces en la losa tras su fisuración (rigideces a la flexión en dos direcciones ortogonales y rigidez a la torsión).
5. Los campos de esfuerzos cortantes son una herramienta muy eficaz a la hora de analizar determinados problemas prácticos como:
  - a) determinar el perímetro de control de punzonamiento o cortante en casos especiales
  - b) identificar regiones críticas frente al esfuerzo cortante así como determinar su comportamiento resistente
  - c) disponer de manera adecuada armaduras de punzonamiento.

## Agradecimientos

Los autores desean expresar su agradecimiento al Dr. Miguel Gómez Navarro (MC-2, Estudio de Ingeniería)

por sus valiosos comentarios y sugerencias así como por su ayuda en la selección de ejemplos para el artículo.

## Apéndice

Los cálculos por elementos finitos se hicieron utilizando al programa ANSYS (ANSYS Inc.). Las losas están modelizadas con elementos lámina (SHELL 43) con seis grados de libertad en cada nudo (tres desplazamientos y tres rotaciones). El elemento fue empleado principalmente en su forma de cuatro nodos, existiendo además en algunas zonas elementos triangulares.

La conexión entre las columnas y las losas fue modelizada mediante zonas infinitamente rígidas, estando el nodo central de estas zonas apoyado o empotrado según las condiciones de borde pertinentes.

## BIBLIOGRAFÍA

- [1] Kunz, J., Fernández Ruiz, M., Muttoni, A., *Enhanced safety with post-installed punching shear reinforcement*, fib Symposium, Amsterdam, the Netherlands, CRC Press, 2008, pp. 679-684
- [2] Muttoni, A. (Ed.), Fernández Ruiz, M., Fürst, A., Guandalini, S., Hunkeler, F., Moser, K., Seiler, H., *Sécurité structurale des parkings couverts*, SIA, Documentation D0226, 2008, 105 p.
- [3] Muttoni, A., Fernández Ruiz, M., Burdet, O., *Poinçonnement des planchers-dalles : nouveaux acquis et applications pratiques*, Journée d'étude 10 septembre 2008, École Polytechnique Fédérale de Lausanne, 102 pp.
- [4] Bentz, E. C., Vecchio, F.J., Collins, M.P., *Simplified Modified Compression Field Theory for Calculating Shear Strength of Reinforced Concrete Elements*, ACI Structural Journal, Vol. 103, No. 4, 2006, pp. 614-624
- [5] CSA Committee A23.3, *Design of Concrete Structures (CSA A23.3-04)*, Canadian Standards Association, Mississauga, 2004, 214 p.
- [6] Muttoni, A., *Schubfestigkeit und Durchstanzen von Platten ohne Querkraftbewehrung*, Beton- und Stahlbetonbau, Vol. 98, 2003, pp. 74-84.
- [7] Muttoni, A., *Punching Shear Strength of Reinforced Concrete Slabs without Transverse Reinforcement*, ACI Structural Journal, Vol. 105, No. 4, 2008, pp. 440-450
- [8] Muttoni, A., Fernández Ruiz, M., *Shear Strength of Members without Transverse Reinforcement as Function of Critical Shear Crack Width*, ACI Structural Journal, Vol. 105, No. 2, 2008, pp. 163-172
- [9] SIA 262, *Construction en béton*, Norme Suisse SN 505 262, Société suisse des ingénieurs et des architectes, Zurich, 2003, 94 p.

- [10] Marti, P., *Design of Concrete Slabs for Transverse Shear*, ACI Structural Journal, V. 87, No. 2, 1990, pp. 180-190.
- [11] Marti, P., *Kraftfluss in Stahlbetonplatten*, Beton- und Stahlbetonbau, V. 98, No. 2, 2003, pp. 85-93.
- [12] Vaz Rodrigues, R., *Shear strength of reinforced concrete bridge deck slabs*, ph.D. Thesis 3739, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, Lausanne, 2007, 114 p.
- [13] Muttoni, A., Schwartz, J. y Thürlimann, B., *Design of concrete structures with stress fields*, Birkhäuser / Springer, 1997, 145 p.
- [14] Marti, P., *Gleichgewichtslösungen für Flachdecken*, Schweizer Ingenieur und Architekt, V. 99, No. 38, Zürich, 1981, pp. 799-809.
- [15] Nielsen, M. P., *Limit analysis and concrete plasticity*, 2nd Edition, CRC Press, 1999, 908 p.
- [16] Hillerborg, A., *The advanced strip method - a simple design tool*, Magazine of Concrete Research, V. 34, No. 121, 1982, pp. 175-181.
- [17] Muttoni, A., Fernández Ruiz, M., *Dimensionamiento y verificación del hormigón estructural mediante el método de los campos de tensiones*, Hormigón y Acero, Madrid, n° 243, 2007, pp. 93-102.
- [18] Vaz Rodrigues R, Fernández Ruiz, M., Muttoni, A., *Shear strength of R/C bridge cantilever slabs*, Engineering Structures, Elsevier, Vol. 30, No. 11, pp. 3024-3033
- [19] EHE-08, *Instrucción de hormigón estructural*, Ministerio de Fomento, Madrid, 2008, 346 p.
- [20] Eurocode 2, *Design of concrete structures, Part 1: General rules and rules for buildings*, prEN 1992-1-1, Bruselas, 2004, 226 p.
- [21] ACI Comitee 318, *Building Code Requirements for Structural Concrete*, American Concrete Institute, Farmington Hills, Mich., 2008, 473 p.
- [22] Muttoni, A., Fernández Ruiz, M., Guandalini, S., *Poinçonnement des ponts-dalles*, 4. FBH / ASTRA - Studententagung « Neues aus der Brückenforschung », Dokumentation D0223 SIA, Société suisse des ingénieurs et architectes, Zürich, 2007, pp. 85-94.

#### NOTACIÓN

$E_c$	módulo elástico del hormigón
$G$	módulo de elasticidad transversal
$G_{el}$	módulo de elasticidad transversal no fisurado ( $=E_c/(2 \cdot (1+\nu_c))$ )
$R_b$	reacción de apoyo concentrada
$V_d$	Esfuerzo cortante de dimensionamiento
$\ell$	luz, distancia entre dos apoyos
$d$	altura eficaz (distancia entre la fibra exterior de hormigón comprimida y el centro de gravedad de las armaduras de flexión)
$m_x$	momento de flexión en dirección $x$ por unidad de longitud
$m_y$	momento de flexión en dirección $y$ por unidad de longitud
$m_{xy}$	momento de torsión por unidad de longitud
$q$	carga distribuida (carga por unidad de superficie)
$\bar{q}$	carga lineal (carga por unidad de longitud)
$r_b$	reacción de apoyo distribuida
$u$	perímetro de control
$x, y$	coordenadas
$\nu_c$	coeficiente de Poisson
$\nu_x$	esfuerzo cortante por unidad de longitud en una sección a lo largo de la dirección $y$ = componente de dirección $x$ del campo de esfuerzos cortantes
$\nu_y$	esfuerzo cortante por unidad de longitud en una sección a lo largo de la dirección $x$ = componente de dirección $y$ del vector campo de esfuerzos cortantes
$V_{max,d}$	esfuerzo cortante máximo de dimensionamiento por unidad de longitud a lo largo del perímetro de control
$V_{p,el}$	esfuerzo cortante perpendicular al perímetro de control (análisis elástico-lineal)
$V_{tot}$	esfuerzo cortante principal