

Topologie des champs de contraintes pour le dimensionnement des structures en béton armé

THÈSE N° 4414 (2009)

PRÉSENTÉE LE 11 JUIN 2009

À LA FACULTÉ ENVIRONNEMENT NATUREL, ARCHITECTURAL ET CONSTRUIT
LABORATOIRE DE CONSTRUCTION EN BÉTON
PROGRAMME DOCTORAL EN STRUCTURES

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

POUR L'OBTENTION DU GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES

PAR

Neven KOSTIC

acceptée sur proposition du jury:

Prof. J.-F. Molinari, président du jury
Prof. A. Muttoni, directeur de thèse
Prof. S. F. Brena, rapporteur
Dr P. Lestuzzi, rapporteur
Prof. J. Schwartz, rapporteur



ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Suisse
2009

Préface

La thèse de doctorat de M. Kostic traite de la méthode des champs de contraintes. C'est une méthode pour l'analyse et le dimensionnement des structures en béton armé, initialement développée dans les milieux académiques sur la base des théories de l'élasticité et de la plasticité et de plus en plus utilisée dans la pratique professionnelle.

Les « méthodes rigides-plastiques » ont le grand avantage de la simplicité, mais nécessitent une certaine expérience, car lors du dimensionnement des choix non nécessairement évidents doivent être faits par l'ingénieur. Ces choix ont des conséquences non négligeables sur le comportement à l'état limite de service et sur la résistance locale des détails constructifs. Pour l'analyse des structures existantes, les méthodes rigides-plastiques doivent être complétées par une approche cinématique. Une autre difficulté réside dans l'hypothèse d'un comportement ductile, rarement satisfaite lorsque la rupture du béton devient déterminante. Les méthodes basées sur la théorie de l'élasticité (champs de contraintes calculés par la méthode des éléments finis en admettant un comportement élastique, linéaire et non-fissuré du béton) ont l'avantage de l'univocité, mais conduisent à des solutions compliquées, pas toujours applicables directement dans la pratique, incohérentes avec le dimensionnement plastique des armatures et basées sur un état-limite bien éloigné des modes de rupture réels.

Le travail de M. Kostic représente une contribution importante au domaine des champs de contraintes. Certaines procédures pour le développement des champs de contrainte sont originales et pourront trouver une application tant dans l'activité professionnelle qu'au niveau didactique. En effet, une partie de son travail a été implémentée sur une plateforme de support des cours et d'échange des connaissances.

Lausanne, juin 2009

Prof. Dr Aurelio Muttoni

Remerciements

Mes remerciements vont tout d'abord au Prof. A. Muttoni qui m'a offert la possibilité et l'expérience de faire une thèse. Je le remercie surtout pour les connaissances transmises et sa passion quotidienne pour la recherche et la conception des structures.

Je tiens à remercier les autres membres du jury, à savoir le Professeur J.F. Molinari, président du jury, le Dr P. Lestuzzi du Laboratoire d'informatique et de mécanique appliquée à la construction (IMAC) de l'EPFL, le Professeur Sergio Breña de University of Massachusetts Amherst et le Professeur Joseph Schwartz de Eidgenössische Technische Hochschule Zürich – ETHZ.

Mes sincères remerciements vont à Dr O. Burdet et Dr M. Fernández Ruiz pour leur aide et l'influence positive sur mon travail. Je les remercie également pour les nombreuses discussions techniques et pratiques que j'ai eu avec eux au cours de cette thèse.

Je remercie Messieurs Rohit Gupta et Arpit Kumar qui ont permis avec leur travail de programmation la diffusion d'une partie de travail de cette thèse et je remercie Madame Tatiana Milovanovic pour la correction de ce manuscrit.

Au cours de cette thèse, j'ai eu l'occasion de partager le bureau avec deux Professeurs invités. Je remercie le Professeur P. Gambarova pour sa compagnie et les longues discussions et le Professeur A. P. Caldentey pour ces conseils techniques. Je tiens également à remercier mes deux collègues du bureau J. L. Zanella et T. Clément pour leur compagnie et leur contribution à mon apprentissage de la langue française.

Pendant mon séjour à IBéton, j'ai eu l'occasion d'avoir des collaborations très intéressantes. Je remercie fortement Messieurs R. Salvi et P. Wahlen de m'avoir transmis quelques réflexions d'architectes pendant de fructueuses discussions pour la préparation de cours.

Durant ces années, j'ai profité d'un environnement de travail agréable. Je tiens à exprimer ma sympathie à tous mes collègues, actuels et anciens. Je voudrais exprimer ma reconnaissance pour la collaboration de mes collègues Ana, Dario et Damien avec lesquels j'ai partagé dans une période importante la tâche d'assistant pour l'enseignement.

Pendant mon séjour à Lausanne, j'ai également profité des nombreuses amitiés auxquelles je tiens beaucoup. Entre elles, je remercie fortement mes amis Luis, Roberto, Visnja et Danijel pour leur compagnie quotidienne et les moments passés ensemble.

Finalement, je remercie énormément ma famille, mon frère Uros, mon cousin Lazar et mes parents en particulier pour leur amour et pour leur support continu.

Résumé

La méthode des champs de contraintes, basée sur le théorème statique de la théorie de la plasticité, offre un nombre de solutions illimité pour dimensionner une structure. Cette possibilité permet de choisir le comportement des structures mais soulève aussi la question de savoir quel modèle est le plus réaliste et le plus adapté pour le problème étudié.

Les recherches effectuées dans le cadre de cette thèse apportent des contributions sur la génération et l'optimisation des modèles de bielles-et-tirants et de champs de contraintes. Différentes méthodes manuelles et automatiques ont été généralisées et développées au cours de cette thèse. Dans le cas du dimensionnement des structures, les méthodes manuelles sont basées sur la statique graphique et l'évaluation du comportement structural, tandis que pour l'analyse des structures existantes elles sont basées sur le théorème cinématique de la théorie de la plasticité. Pour les méthodes automatiques, les critères d'optimisation sont évalués en montrant que les différents critères d'optimisation mènent à différentes dispositions des armatures et que le choix de la structure optimale peut être défini selon plusieurs critères, pour autant qu'ils puissent satisfaire l'une des propriétés de la structure et les autres n'étant satisfaits que de façon partielle.

Le critère de l'énergie de déformation minimale a été identifié comme le plus adapté; est appliqué pour la génération automatique des modèles de bielles-et-tirants et de champs de contraintes. D'abord appliqué dans l'optimisation linéaire en suivant l'approche du treillis initial, ce critère a ensuite été utilisé par l'algorithme proposé qui est basé sur la méthode des déplacements et qui respecte la compatibilité des déformations. Cet algorithme mène à des solutions optimales, mais également à des topologies de bielles-et-tirants qui sont proches des solutions optimales, ce qui est plus en accord avec le comportement global des structures. A partir d'un tel modèle, un algorithme est proposé pour obtenir les champs de contraintes discontinus correspondants.

Etant donné que l'algorithme basé sur la méthode des déplacements ne prend pas seulement en compte l'équilibre des éléments mais aussi la comptabilité de leurs déformations, cet algorithme est également appliqué à l'optimisation des champs de contraintes continus basés sur les éléments finis non-linéaires. De cette façon, la position nécessaire des tirants ainsi que la formation d'un modèle discontinu peuvent être facilement obtenues. Les résultats ont été comparés à des solutions des exemples classiques ainsi qu'à des exemples récemment proposés.

Les champs de contraintes continus et discontinus sont comparés au comportement réel de structures observé en laboratoire. En particulier, la problématique de déterminer la résistance effective du béton soumis à une multiplicité de phénomènes. Les conclusions ont été utilisées ensuite pour l'analyse d'un angle de cadre en béton léger testé en laboratoire dans le cadre de la thèse et pour différents éléments comportant des discontinuités géométriques.

L'aptitude au service des structures a été investiguée par l'étude de la fissuration de différentes zones des structures analysées par champs de contraintes. En plus en détail, les zones en traction en-dehors des zones de tirants ont été étudié, car il est nécessaire qu'un certain nombre des fissures des tirants puissent se propager dans ces zones. Une armature minimale ainsi qu'un espacement maximal des barres d'armature sont proposés pour ces zones.

Mots-clés: modèles de champs de contraintes, modèles de bielles-et-tirants, dimensionnement, analyse des structures, optimisation, algorithmes, conception, topologies, éléments finis, résistance, éclatement de l'enrobage, béton léger, fissuration, aptitude au service, armature minimale

Summary

The stress field method, which is based on the lower bound theorem of plasticity, provides an unlimited number of solutions allowing to carry the applied loads to the supports for a given structure. This possibility which gives a large freedom to designing, it raises the question of which is the most suitable stress field for the analysis of the structure.

The present research provides further contributions to the generation and the optimisation of strut-and-tie and stress field models. Different automatic and manual methods are generalised and developed. Regarding the design of structures, manual methods are based on the graphical statics and on consideration about the structural behaviour, while for the analysis of existing structures they are based on the upper bound theorem of plasticity. When using automatic methods, firstly the optimisation criteria are evaluated. Different optimisation criteria can lead to different layouts of the steel bars in the structure. Thus, the selection of the optimal structure can be defined according to several criteria, which can meet one of the requirements of the structure while the remaining may be fulfilled at least partially.

For automatic analysis, the criterion of minimum strain energy is selected as the most suitable amongst those investigated. This criterion is firstly applied in the linear optimisation of an initial truss, and then it is applied using the proposed algorithm which is based on the displacement method respecting also compatibility conditions. According to this algorithm, the optimal solution but also others close to the optimal are obtained. Finally, an algorithm is proposed which allows to transform the optimal strut-and-tie model obtained into a discontinuous stress field.

The proposed algorithm, which is based on displacement method, considers not only the equilibrium of the structure but also compatibility conditions. Therefore it can be equally used for the optimisation of continuous stress fields that are based on non-linear finite element analysis. In that way, the position of the required ties and the development of discontinuous stress field models can be easily obtained. The results obtained are compared to classical solutions and to examples recently proposed in the scientific literature.

The actual behavior of structures is also assessed by means of both continuous and discontinuous stress field analyses. The main concerns are the need for reducing the concrete strength and the analyses of the different phenomena which influence the structural behaviour. The conclusions withdrawn from this study were verified for the particular case of a corner joint cast in lightweight aggregate concrete which was tested in laboratory during the thesis and analysed with the stress field method. Additional structures containing discontinuity regions, were included in this study.

The behaviour at service load is finally studied by selecting the cracking zones in the structures which were previously identified using the stress field method. In addition, tension zones outside the tie zones are analysed in detail. At these regions, it is necessary to ensure the propagation of the tie cracks in order to limit crack openings. Suggested values for the minimal reinforcement and the maximal distance between reinforcement bars are finally proposed.

Keywords: stress field models, strut-and-tie models, design, analysis of the structures, optimisation, algorithms, conception, topologies, finite elements, strength, spalling of concrete cover, lightweight concrete, cracking, service load behavior, minimal steel

Zusammenfassung

Die Methode der Spannungsfelder, welche auf der statischen Methode basiert, bietet eine unbegrenzte Anzahl an Lösungen für die Bemessung eines Tragwerkes. Dies ergibt eine grosse Freiheit in der Bemessung, jedoch stellt sich die Frage welches Model für das entsprechende Bauteil und für das zu untersuchende Problem am zutreffendsten ist.

Die vorliegende Arbeit bietet einen Beitrag zur Erstellung und Optimierung von Fachwerk- und Spannungsfeldmodellen. Verschiedene automatische und manuelle Methoden wurden im Verlaufe dieser Arbeit verallgemeinert und entwickelt. Für die Bemessung von Bauteilen basieren die manuellen Methoden auf der grafischen Statik und der Berücksichtigung des Tragverhaltens des Bauteils, indessen basieren die Methoden für die Nachrechnung von existierenden Bauteilen auf der kinematischen Methode. Für die automatische Methode werden zuerst die Optimierungskriterien festgesetzt, wobei verschiedene Kriterien zu verschiedenen Bewehrungsanordnungen führen können. Daher hängt die Wahl der optimalen Tragstruktur von den gewählten Kriterien ab, wobei ein Kriterium ganz und die übrigen Kriterien teilweise erfüllt werden.

Für die automatische Berechnung stellte sich die minimale Dehnungsenergie für das am besten geeignete Kriterium aller verwendeten Kriterien heraus. Dieses Kriterium wird zuerst bei der linearen Optimierung eines ersten Fachwerkes und später beim vorgeschlagenen Algorithmus, welcher auf der Deformationsmethode basiert und die Verträglichkeitsbedingungen erfüllt, angewendet. Dieser Algorithmus liefert nicht nur die optimale Lösung, sondern auch andere, nahe an der optimalen Lösung liegende Lösungen. Schliesslich wird ein weiterer Algorithmus dargelegt, welcher die Umwandlung des resultierenden optimalen Fachwerkes in entsprechende diskontinuierliche Spannungsfelder ermöglicht.

Die kontinuierliche sowie die diskontinuierliche Spannungsfeldberechnungen werden mit dem bei Labortests gemessenen Verhalten von Bauteilen verglichen. Die Hauptproblematik liegt bei der effektiven Betonfestigkeit und weiteren verschiedenen Einflüsse, welche das Tragverhalten beeinflussen. Die Schlussfolgerungen aus dieser Arbeit wurden genutzt um eine Eckverbindung aus Leichtbeton, welche im Rahmen dieser Arbeit im Labor getestet wurde, zu berechnen. Ferner werden in dieser Arbeit weitere Bauteile mit geometrischen Diskontinuitäten untersucht.

Schliesslich wird das Verhalten im Gebrauchszustand untersucht, wobei die gerissenen Bereiche vorhergehend mit Hilfe der Spannungsfelder bestimmt werden. Zusätzlich werden Zugkräfte ausserhalb der Zugelemente im Detail analysiert. Dies ist nötig, um eine Ausbreitung einer gewissen Anzahl von Rissen der Zugelemente zu ermöglichen, sodass die Rissöffnung kontrolliert werden kann. Für diese Bereiche wird eine Mindestbewehrung sowie ein maximaler Bewehrungsabstand vorgeschlagen.

Stichwörter: Spannungsfelder, Fachwerkmodell, Bemessung, Optimierung, Algorithmus, Konzeption, Topologie, Finite Elemente, Widerstand, Abplatzen, Leichtbeton, Gebrauchstauglichkeit, Mindestbewehrung

Table des matières

Préface	i
Remerciements	iii
Résumé, Summary, Zusammenfassung	v
Table des matières	xi
Notations	xv
1 Introduction	1
1.1 Généralité	1
1.2 Buts de la recherche	3
1.3 Organisation de la thèse	3
2 Applications des champs de contraintes	3
2.1 Développement théorique de la méthode	5
2.2 Développement pratique de la méthode	9
Développement de procédures pour la génération des champs de contraintes	11
2.3 Bases des champs de contraintes	12
Construction d'un champ de contrainte	15
2.4 Analyse de nouvelles structures	16
Procédure géométrique pour le développement des modèles bielles-et-tirants	17
Topologie des champs de contraintes – modes de comportement	23
Topologie des champs de contraintes – influence de la forme de structure	26
2.5 Analyse de structures existantes	31
3 Critères et algorithmes d'optimisation des structures en béton armé	35
3.1 Introduction	35
3.2 Description des critères d'optimisation des structures en béton armé	35
Optimisation des structures en béton armé	39
3.3 Critères d'optimalité et génération des modèles bielles-et-tirants	40
Critère (méthode) élastique	40
Critère d'ouverture minimale des fissures	42
Critère de rigidité maximale	42
Critère d'énergie de déformation minimale	43
3.4 Algorithmes d'optimisation	45
Optimisation linéaire	45
Optimisation non-linéaire	47
Optimisation heuristique et métaheuristique	49

4	Génération des modèles de bielles-et-tirants	51
4.1	Introduction	51
4.2	Génération des modèles de bielles-et-tirants	52
4.3	Génération par l'optimisation linéaire	55
	Définition du problème	55
	Formation des équations d'équilibre	56
	Correction d'optimalité	58
	Exemples d'application	58
4.4	Problèmes particuliers	60
	L'hyperstaticité externe	60
	L'hyperstaticité interne	62
	Forme funiculaires et l'influence de la maille	63
	Modes de comportement	64
4.5	Génération par la méthode des déplacements	65
	Introduction	66
	Définition du problème et procédure proposée	68
	Principaux résultats	69
	Exemples d'application	72
4.6	Transformation aux champs de contraintes discrets	74
	Formes des bielles et des nœuds	75
	Procédure proposée	76
5	Génération des champs de contraintes	79
5.1	Introduction	79
5.2	Utilisation actuelle de la méthode des éléments finis	79
	Limites d'application des procédures existantes	81
	EF – non linéaires pour les champs de contraintes continus	82
5.3	Optimisation des champs de contraintes	84
	Procédure proposée	85
	Description d'algorithme	87
	Exemples d'application	93
	Exemple d'un élément d'essais	95
	Structures hyperstatiques	97
	Armature minimale dans l'optimisation	98
5.4	Procédure directe pour la génération des champs de contraintes	100
	Procédure basé sur la prédiction	100
	Exemples d'application	102
6	Applicabilité des champs de contraintes continus et discontinus	105
6.1	Introduction	105

6.2	Résistance effective du béton pour l'analyse des structures par la méthode des champs de contraintes	107
	Définition.	107
	Réduction de la résistance du béton à cause de la fragilité du béton en compression.	109
	Réduction de la résistance du béton à cause des déformations transversales.	110
	Vérification avec les champs de contraintes continus et discontinus.	115
	Réduction de la résistance du béton en raison de la présence des câbles de précontrainte et des barres d'armature	119
	Réduction de la résistance du béton à cause de cycles de chargement (low cycle fatigue)	125
6.3	Comparaison des champs de contraintes continus avec des résultats d'essais	126
	Structures avec discontinuité géométrique	126
	Angle de cadre en béton léger	127
6.4	Analyse des éléments sans étriers soumis à l'effort tranchant	130
	Théorie de la fissure critique	130
	Théorie de la fissure critique pour les champs de contraintes continus et discontinus	131
	Application aux éléments avec la discontinuité géométrique	132
7	Contrôle de la fissuration	135
7.1	Introduction	135
7.2	Zones de fissuration.	135
	Armature minimale et fissuration des tirants principaux	136
	Armature minimale pour les zones sollicitées à l'effort tranchant.	140
	Armature minimale des bielles en compression	141
	Armature minimale des zones tendues en-dehors de la zone des tirants	142
7.3	Zones tendues en-dehors de la zone des tirants.	142
	Résultats des essais en laboratoire.	143
	Zones tendues non-armées	144
	Zones tendues armées.	147
7.4	Armature minimale de contrôle de la fissuration des zones tendues	151
	Propositions existantes pour l'armature minimale	161
	Proposition de la norme SIA262	152
	Recommandations	153
	Vérification de l'armature minimale proposée.	155
	Taux d'armature minimale simplifié	156
	Conclusions	158
8	Conclusions	159
8.1	Conclusions de la recherche	159
8.2	Recherches futures.	161
	Références bibliographiques	163

Annexes

- A Implémentation de la génération des champs de contraintes
- B Analyse des panneaux avec des champs de contraintes continus
- C Pratique actuelle en Suisse dans le domaine des tranchées couvertes
- D Test of frame corner of MPU Heavy lifter – Comparison between test results and continuous stress fields

Curriculum Vitae

Notations

Lettres latines majuscules :

A	surface
A_s	section d'armature
C	effort de compression
E	module d'élasticité
F	force
H	composante horizontale de l'effort normal; matrice d'équilibre
K	rigidité; matrice de rigidité
M	moment de flexion
N	effort normal; vecteur des efforts
O	point d'équilibre
Q	charge concentrée, vecteur des charges
R	réaction; résultante
S	effort de la bielle
T	effort du tirant
U	énergie de déformation
V	effort tranchant; volume
W	poids

Lettres latines minuscules :

a	portée à l'effort tranchant; dimension
b	largeur
c	enrobage, zone comprimée
d	hauteur statique
d_g	taille maximal des granulats
f	résistance d'un matériau
f_c	résistance du béton à la compression
f_{c0}	résistance de référence du béton à la compression
f_{ce}	résistance effective du béton à la compression
f_{cp}	résistance plastique du béton à la compression
f_{ct}	résistance du béton à la traction
f_y	limite d'écoulement de l'acier
h	hauteur
h_b	hauteur de barycentre du tirant

h_t	hauteur de la zone tendue
h_T	hauteur effective du tirant
i	nombre
j	nombre
k	coefficient de réduction; nombre
l	longueur
l_b	longueur d'ancrage
m	nombre
n	rapport entre E_s et E_c , nombre d'itérations, nombre de fissures
q	charge répartie
r	réaction répartie
s	espacement entre les barres d'armature
s_r	espacement entre les fissures (moyenne)
t	épaisseur
u	déplacement; vecteur de déplacement
v	déplacement verticale, vectuer
w	ouverture de la fissure
x	hauteur de la zone de béton comprimée; coordonnée; variable
y	coordonnée
z	coordonnée verticale;

Lettres grecques majuscules:

Δ différence

Lettres grecques minuscules:

α angle

β angle; coefficient

χ courbure

δ coefficient de la section utile

ε déformation

ε_s déformation de l'armature

ε_c déformation du béton

ε_1 déformation latérale du béton

ε_2 déformation longitudinale du béton

ε_s déformation de l'armature

ε_y déformation de l'acier à l'écoulement

γ	facteur partiel de la résistance
η	facteur de réduction
φ	angle
θ	angle
ρ	taux d'armature, poids par unité du volume
σ	contrainte
τ	contrainte de cisaillement
τ_b	contrainte d'adhérence
ξ	paramètre

Indices :

D	armature, précontrainte
R	valeur de résistance
LCF	low cycle fatigue
c	béton; compression;
d	valeur de calcul
k	caractéristique
m	moyen
n	normal
r	de fissuration
s	acier; tirant
t	traction; tangentiel; temps
u	ultime
w	âme, transversal
x	direction
y	écoulement, direction
z	direction

$calc$	de calcul
fin	finale
inf	inférieur
$init$	initiale
max	maximal
min	minimal
mis	mesuré
$néc$	nécessaire

pic valeur de pic

sup supérieur

test d'essai

tot totale

0 valeur initiale

Autres symboles :

Ø diamètre des barres d'armature

@ distance entre armatures

type d'armature

CoV coefficient de variation

1. Introduction

1.1 Généralités

Cette thèse voit le jour un siècle après l'apparition des toutes premières publications complètes sur la théorie du béton armé et de ses applications à la construction, *Der Eisenbetonbau, seine Theorie und Anwendung*, ouvrage publié par Emil Mörsch en 1902 -1912. Depuis cette période la conception des constructions en béton armé a subi de nombreux changements. D'abord basées sur l'expérience et sur les topologies structurales provenant des connaissances acquises sur les constructions en acier et en bois, en passant par les premières conceptions "béton" de Robert Maillart avec ses planchers-dalles et par l'utilisation de la précontrainte par Fressinet, aujourd'hui ces mêmes conceptions se soumettent à l'utilisation de techniques élaborées du calcul et de la construction.

La méthode des champs de contraintes, de même que la méthode des bielles-et-tirants, a suivi un développement similaire au développement des constructions en béton. Développée tout d'abord pour l'analyse des poutres avec ou sans étriers par Ritter, Mörsch et Drucker, la méthode des champs de contraintes s'est avérée être incomparablement efficace pour l'analyse des éléments de structure ayant une certaine discontinuité géométrique mais également pour les analyses d'introduction des efforts dans les structures. Le déploiement de la méthode des champs de contraintes a été souvent précédé par la pratique de construction et l'expérience des ingénieurs. La passerelle sur le Triftwasser de Robert Maillart réalisée en 1931 et présentée à la figure 1.1 (a) l'illustre parfaitement. Le détail d'entretoise d'appui, figure 1.1 (b), montre que l'effort tranchant est transmis aux appuis en utilisant une armature de flexion et une armature de suspension placée en diagonale dans l'entretoise. Cet exemple montre que la pratique de la construction a exigé une méthode qui peut expliquer les expériences accumulées et permettre leur élargissement. Ainsi les deux types d'armature de la figure 1.1 (b) correspondent à deux champs de contraintes possibles et si les deux armatures sont activées ensemble, en utilisant les théories développées bien après la réalisation de ce pont, on obtient le modèle illustré par la figure 1.1 (c).

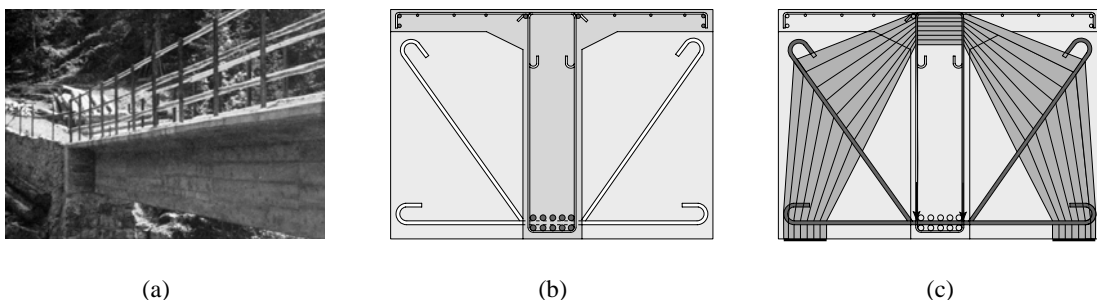


Figure 1.1: (a) Passerelle sur le Triftwasser de Robert Maillart, 1931; (b) détail de l'entretoise réalisée; (c) champs de contraintes correspondant à l'armature utilisée pour un chargement symétrique de la passerelle.

Cet exemple peut faire la liaison entre la méthode des champs de contraintes et le comportement d'une structure à l'état limite ultime et l'état limite de service. Donc, on utilise l'armature

inclinée dans le but de diminuer la force ancrée aux appuis et pour refermer les fissures des bielles en compression ou bien on utilise seulement l'armature de flexion dans le but de diminuer la quantité totale d'armature et obtenir une fissuration par flexion plus satisfaisante près des appuis. Toute liberté est donc laissée pour le choix de la topologie des champs de contraintes ou la disposition des armatures en fonction du comportement de la structure que l'on désire obtenir.

Etant donné que la méthode des champs de contraintes est basée sur le théorème statique de la théorie de la plasticité, elle offre un nombre de solutions illimité pour un type de problème. En se basant sur cette diversité de choix, on peut se permettre de définir la position des bielles de compression et des tirants pour transmettre la charge aux appuis tout en respectant le comportement de la structure à l'état limite ultime et en service. Cette liberté ainsi acquise a permis de construire non pas uniquement en étudiant les expériences acquises par le passé mais d'avoir un outil qui permet de construire d'une autre manière, en libérant la conception de nos structures. La figure 1.2 montre un exemple contemporain d'une telle structure.



Figure 1.2: *Maison Grossi, Monte Carasso 2003, architectes Giacomo&Riccarda Guidotti, ingénieur Marco Kueng.*

Un libre choix de la topologie des champs de contraintes a également eu pour conséquence d'avoir très souvent, pour une structure analysée, que différents champs de contraintes soient proposés par différents praticiens. Avoir la possibilité de choisir la topologie des champs de contraintes soulève la question de savoir quelle topologie sera la plus juste et la plus adaptée pour la structure étudiée. Cette question met en évidence que des guides plus précis ainsi que des méthodes plus automatisées sont nécessaires pour construire des champs de contraintes mieux adaptés à la situation étudiée.

Par ailleurs, il ne faut pas négliger que certaines pratiques n'ont pas encore suivi les possibilités qu'offre la méthode des champs de contraintes. Les normes doivent très souvent, dans certaines situations, se plier aux idées et aux méthodes de la théorie de la plasticité, restant par ailleurs et dans d'autres situations, liées et soumises au calcul élastique. Bien évidemment, une telle approche du dimensionnement des structures est incohérente, comme le démontre la figure 1.3. Lorsqu'il s'agit d'éléments relativement simples, comme les poutres, les sollicitations sont souvent déterminées de manière générale, avec une analyse élastique-linéaire de la structure, et ensuite les efforts internes sont analysés sur la base d'un dimensionnement plastique, figure 1.3 (a). Par contre, pour les éléments bidimensionnels, qui sont plus difficiles à traiter, figure 1.3 (b), en ayant les sollicitations externes, les efforts internes sont déterminés sur la base d'un calcul élastique. Bien évidemment les deux façons de traiter les structures ne sont pas identiques.

La raison pour laquelle dans certains cas le calcul élastique reste l'outil favorisé pour le dimensionnement des structures demeure la non-disponibilité de solutions plastiques et un plus facile control de l'aptitude au service. Des outils automatiques, permettant la détermination et l'identification des ces solutions plastiques peuvent aider de cette manière à la diffusion de la méthode des champs de contraintes.

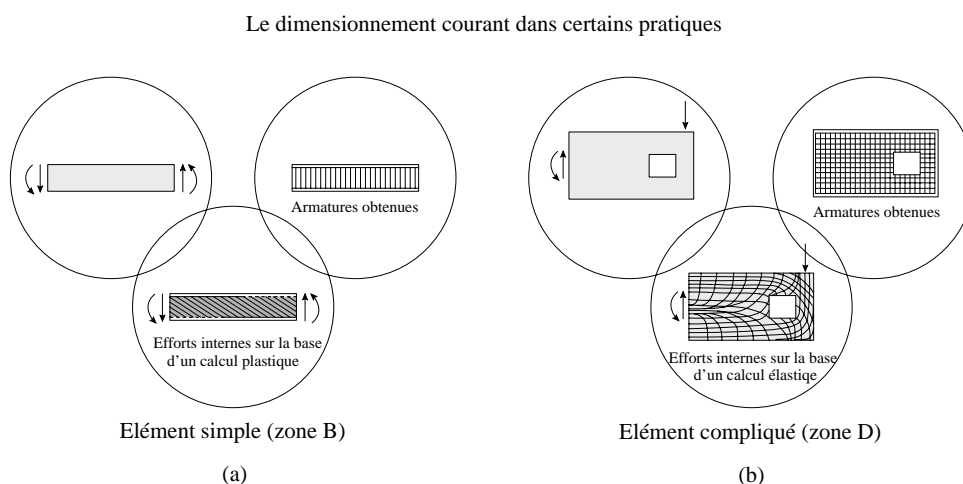


Figure 1.3: *Dimensionnement courant dans certains pratiques; (a) dimensionnement d'un élément simple; (b) dimensionnement d'un élément compliqué.*

La présentation réalisée dans cette introduction indique où se positionne la recherche de la thèse. Après les bases théoriques des champs de contraintes et les applications pratiques qui ont déjà été développées précédemment par des auteurs tels que Nielsen, Thürlimann, Schlaich et Muttoni, une question demeure ouverte; celle de la génération des champs de contraintes.

1.2 Buts de la recherche

En premier lieu, la définition de procédures automatiques pour la sélection des champs de contraintes de structures concernées s'impose comme le but principal de cette thèse. Cela concerne la génération automatique des modèles bielles-et-tirants et les modèles de champs de contraintes. De plus, des considérations sur l'aptitude au service des structures dimensionnées avec les champs de contraintes sont nécessaires pour assurer le fonctionnement satisfaisant de ces structures. Cette recherche a aussi pour but de contribuer au rapprochement de la méthode des champs de contraintes d'une utilisation plus courante dans la pratique actuelle et d'en faciliter l'application. Elle comporte également des suggestions pour l'utilisation des topologies des champs de contraintes dans diverses situations, la comparaison avec le comportement réel des structures et une discussion sur le choix qui serait le plus judicieux entre plusieurs topologies des champs de contraintes.

1.3 Organisation de la thèse

La thèse est organisée selon la structure suivante:

- Le chapitre 2 fait le point sur le développement de la méthode des champs de contraintes et sur son utilisation dans la pratique. Ensuite, les topologies des champs de

contraintes sont examinées et des suggestions pour le développement des champs de contraintes sont données. Le chapitre 2 traite également des deux méthodes relatives à la génération manuelle des champs de contraintes et à l'analyse des structures existantes.

- Le chapitre 3 aborde les critères d'optimisation possibles pour la génération des modèles bielles-et-tirants ainsi que des champs de contraintes et expose également les méthodes d'optimisation qui sont utilisées dans la recherche.
- Le chapitre 4 traite de la génération automatique des modèles bielles-et-tirants basée sur une approche comprenant un treillis initial et la transformation d'un tel modèle vers un modèle des champs de contraintes discret.
- Le chapitre 5 présente le développement automatique des champs de contraintes par le biais d'une analyse des éléments finis non-linéaires. Les résultats obtenus sont comparés avec les solutions classiques et avec les types de structures proposées récemment.
- Le chapitre 6 aborde la comparaison d'un essai sur angle de cadre, effectué en laboratoire au cours de la recherche, avec les résultats des champs de contraintes. La résistance à la compression du béton fissuré, qui est un paramètre important pour les champs de contraintes, est étudiée et analysée. Les conclusions obtenues sont ensuite utilisées pour une analyse des autres essais ayant une certaine discontinuité géométrique.
- Le chapitre 7 porte sur l'état limite de service des structures en béton armé et de la détermination d'une armature minimale pour assurer un état de fissuration satisfaisant, avec un intérêt particulier pour les zones tendues.
- Le chapitre 8 est une synthèse du travail de recherche qui contient également des recommandations pour des travaux à venir.

2. Applications des champs de contraintes

Ce chapitre est dédié aux topologies des champs de contraintes. Bien que les topologies des champs de contraintes soient connues pour les cas classiques et courants, l'utilisation de cette méthode appliquée uniquement à ces situations la limite à une méthode de dimensionnement. Etant donné que la méthode des champs de contraintes peut s'avérer également utile dans la phase de conception des structures, les éléments et les solutions de base doivent servir pour la génération des champs de contraintes dans des situations plus complexes. Ce chapitre est ainsi dédié à la génération générale des champs de contraintes en servant également comme introduction aux méthodes automatiques exposées dans les chapitres suivants.

2.1 Développement théorique de la méthode

Après les toutes premières applications du béton armé réalisées par l'ingénieur François Hennebique, pour lesquelles il a utilisé son système de construction constitué de colonnes et de poutres, Ritter [Ritter1899] fut le premier à donner les explications théoriques sur le fonctionnement des poutres en béton renforcées avec des barres en acier. Comme le montre la figure 2.1, Ritter a conclu que les efforts de traction sont repris par les étriers, et les efforts de compression conformément aux courbes de pression, le sont par le béton. Selon son modèle, les lignes de pression dans le béton sont placées à 45 degrés, mettant à égalité l'espacement des étriers et le bras de levier. Ritter fut le premier à offrir une formule de dimensionnement des poutres en béton armé et le premier également à remettre en cause la justesse de positionnement des étriers verticaux, en tenant compte des directions principales en traction, positionnées selon les diagonales.

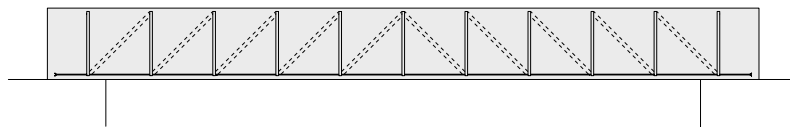


Figure 2.1: *Treillis de Ritter*, [Ritter1899].

Le travail de Ritter a trouvé sa continuité grâce à Mörsch [Mörsch08], qui su expliquer plus en détail le fonctionnement des poutres en béton armé, au moyen d'un treillis, appelé aussi le treillis de Mörsch. La figure 2.2 (a) représente un modèle de Mörsch expliquant le fonctionnement des poutres. Sur la base de ce modèle, il a apporté une modification qui décrit le fonctionnement des poutres avec une armature inclinée et placée selon les directions principales de traction, figure 2.2 (b). Une grande série d'essais qu'il a pu effectuer a permis la définition du tout premier mécanisme de rupture, l'illustration en est donnée à la figure 2.2 (c).

Un travail important de Mörsch publié en 1922 traite de l'inclinaison des bielles en compression [Mörsch22]. Sur la base de l'expérience faite avec une poutre soumise à deux forces concentrées et sans étriers, il a pu en déduire que le mécanisme de transfert de charge était celui de l'appui direct qui peut se former avec un angle plus petit que 45 degrés, figure 2.2 (d). Une autre expérience réalisée avec des poutres comprenant des étriers lui a permis de conclure que le mécanisme de transfert de charge doit être une synthèse du modèle d'appui

direct et du modèle qui active les étriers, figure 2.2 (e). Finalement, ces essais ont permis la définition d'un modèle qui contient les bielles en compression avec des inclinaisons bien différentes de 45 degrés, figure 2.2 (f). Malgré ses conclusions, Mörsch a proposé pour un dimensionnement pratique, de retenir les bielles en compression à 45 degrés. Suite au travail de Mörsch, Rausch [Rausch29] a généralisé l'hypothèse d'inclinaison des bielles en appliquant le modèle de treillis aux poutres sollicitées en torsion.

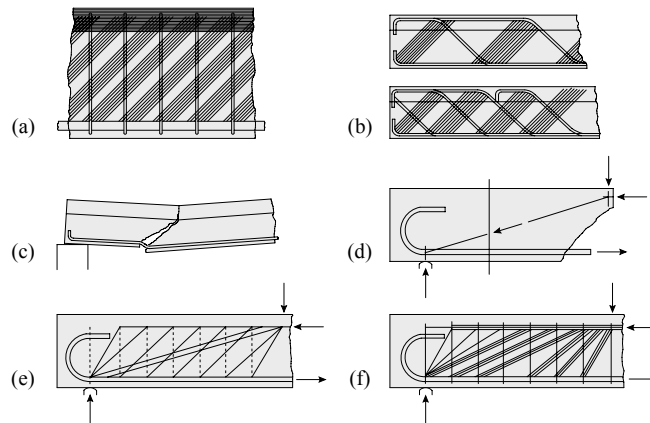


Figure 2.2: (a) *Treillis de Mörsch*, [Mörsch08]; (b) *modèle avec les étriers inclinés*, [Mörsch08]; (c) *mécanisme de rupture*, [Mörsch08]; (d) *modèle d'appui direct*, [Mörsch22]; (e) *modèle qui associe l'appui direct et le treillis*, [Mörsch22]; (f) *modèle avec l'inclinaison variable des bielles*, [Mörsch22].

Drucker a contribué au développement théorique de la méthode des champs de contraintes en appliquant les théorèmes limites de la théorie de la plasticité [Drucker61]. Il a fait l'hypothèse suivante: la déformabilité du béton est suffisante pour une idéalisation rigide-parfaitement plastique avec une contrainte d'écoulement égale à la résistance ultime du béton en compression. Il a également défini l'acier d'armature, caractérisé par un plateau plastique après l'écoulement, par une idéalisation similaire.

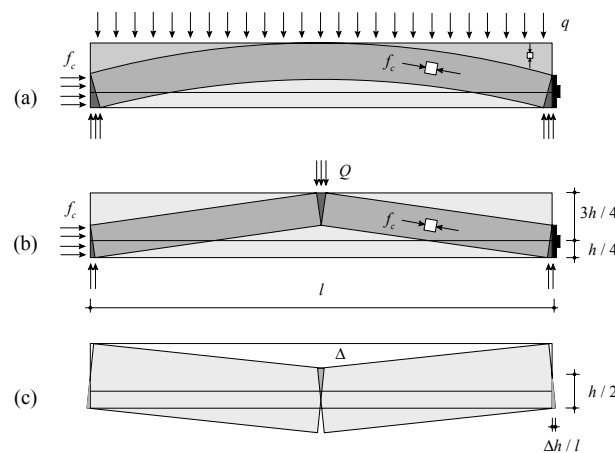


Figure 2.3: (a) *Champ de contraintes en appliquant l'effet d'arc*, [Drucker61]; (b) *champ de contraintes par application de l'appui direct*, [Drucker61]; (c) *mécanisme de rupture à la flexion*, [Drucker61].

En se basant sur le théorème statique de la théorie de la plasticité et le comportement rigide-plastique du béton et de l'acier, Drucker a défini deux champs de contraintes qui satisfont l'équilibre et la condition de plasticité pour la poutre sans étriers soumise à une charge distribuée ainsi qu'à une charge concentrée, figure 2.3 (a) et (b). Pour construire ces deux champs de contraintes, la résistance à la traction du béton est considérée comme nulle et des lignes de discontinuité existent entre les zones soumises à la contrainte ultime et les zones non sollicitées, ce qui définit des champs de contraintes discontinus. Pour la poutre soumise à une charge concentrée, la résistance obtenue par le champ de contraintes de la figure 2.3 (b) est confirmée en appliquant le théorème cinématique et un mécanisme de ruine, figure 2.3 (c).

Nielsen a apporté des contributions importantes sur l'application de la théorie de la plasticité au calcul des structures en béton armé dans sa thèse intitulée « On the Strength of Reinforced Concrete Discs » [Nielsen71]. En ce qui concerne les applications à la méthode des champs de contraintes, il a proposé l'analyse de structures sollicitées dans leur plan en utilisant les éléments triangulaires soumis à un état de contrainte homogène. Cette méthode qui se base sur certains principes déjà établis par Drucker et Chen [Drucker68], consiste à subdiviser la structure en triangles, figure 2.4 (a), et à décrire leur état de contrainte à l'aide de cercles de Mohr. Une solution est par conséquent possible car pour certains triangles les conditions de bord sont connues et les cercles de Mohr ont pour point commun les lignes de discontinuité entre les triangles, figure 2.4 (b).

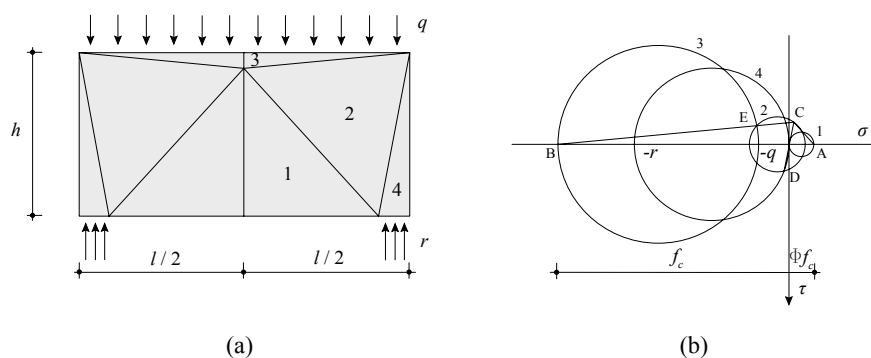


Figure 2.4: (a) *Triangulation du voile avec la charge répartie selon*, [Nielsen71]; (b) *Cercles de Mohr pour les triangles avec efforts uniformes*, [Nielsen71].

En ce qui concerne l'application du théorème cinématique, Nielsen a proposé un mécanisme licite qui suppose une rupture du béton, figure 2.5. Etant donné que la modélisation du béton comme un matériau parfaitement plastique n'est pas conservatrice, un coefficient d'efficacité est introduit pour réduire sa résistance en compression. La limite supérieure de la charge ultime est déterminée en trouvant la dissipation de l'énergie interne dans l'armature et au travers de la fissure créée, et en l'égalant avec le travail de la force externe [Nielsen78].

L'école de Zürich et le groupe de Thürlimann [Thürlimann83] ont apporté des contributions théoriques importantes pour l'application de la théorie de la plasticité dans le calcul du béton structural. Lampert et Thürlimann ont proposé un treillis de poutres avec une inclinaison variable des bielles en compression et une limitation d'inclinaison entre environ 25 et 65 degrés, [Lampert72]. Ce travail a ensuite été poursuivi par Grob [Grob76] qui a déterminé l'inclinaison des bielles en fonction de la résistance des étriers pour des poutres sous-armés.

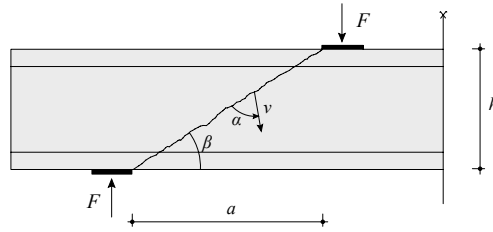


Figure 2.5: Mécanisme de ruine par écrasement du béton pour la poutre sollicitée par une charge concentrée, [Nielsen78].

Müller [Müller78] a démontré que les considérations sur l'inclinaison des bielles en compression correspondent aux considérations statiques du modèle de champs de contraintes en supposant la résistance à la traction du béton égale à zéro. La figure 2.6 (a) montre une application pour une poutre de transfert « coupling beam ». En l'absence de toute armature d'effort tranchant, l'effort est transmis par une bielle directe, figure 2.6 (b). Si une armature d'effort tranchant est présente, un modèle avec inclinaison variable des champs de compression peut être utilisé en permettant la variation des contraintes dans les tirants supérieur et inférieur, figure 2.6 (c). La figure 2.6 (d) montre l'association d'une bielle directe et des champs en compression avec inclinaison variable.

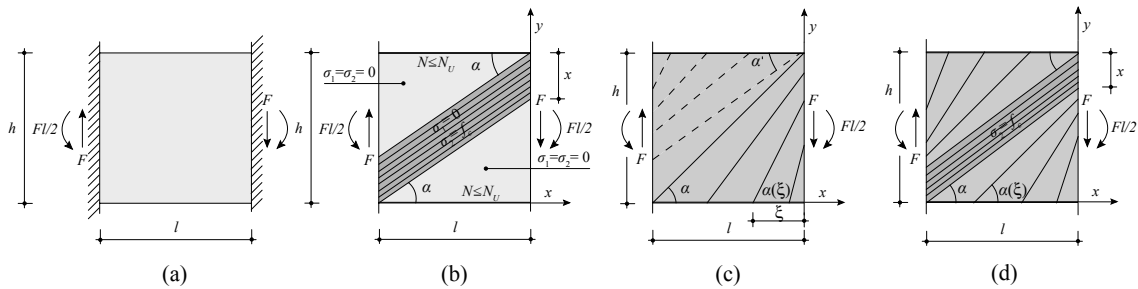


Figure 2.6: (a) Poutre de transfert étudié par Müller; (b) modèle d'appui direct; (c) modèle avec présence d'armature d'effort tranchant; (d) modèle combiné, [Müller78].

Marti [Marti80, Marti85] a continué le travail de Nielsen sur les conditions d'écoulement de voiles en béton armé en prenant en compte la résistance à la traction du béton. En ce qui concerne la méthode des champs de contraintes, il a proposé des solutions statiques pour certains cas pratiques qui sont analysés en toute rigueur. Les figures 2.7 (a) et (b) montrent les deux solutions possibles pour un voile sollicité par une charge distribuée. Les équations exactes des paraboles A-F, C-E, figure 2.7 (a) et A-C, G-E, figure 2.7 (b) ont été élaborées en fonction de la charge, de la résistance en compression du béton et des dimensions du voile.

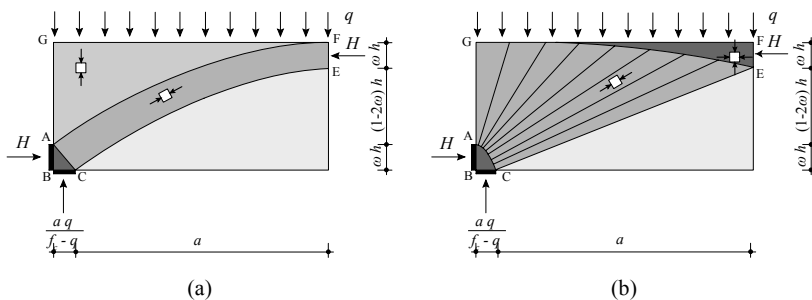


Figure 2.7: (a) Modèle d'arc continu, [Marti80]; (b) Modèle avec éventail, [Marti80].

2.2 Développement pratique de la méthode

En parallèle à un développement théorique des champs de contraintes, diverses méthodes ont été proposées pour le dimensionnement des structures en béton armé en se basant sur un comportement élastique des structures. L'une d'entre elles est examinée et développée par Leonhardt [Leonhardt75]. Elle se base sur la détermination de champs de contraintes élastiques et sur le positionnement des armatures pour reprendre les efforts en traction. La force de traction et l'armature nécessaire sont calculées en prenant l'intégrale des efforts élastiques de certaines zones et en les positionnant au barycentre de ces efforts. L'idée trouve ses bases dans les travaux de Mörsch [Mörsch24] qui a proposé le calcul polygonal des résultantes des efforts élastiques, figure 2.8 (a), et de Sargious [Sargious60] qui a estimé les surfaces des zones en traction pour de nombreux cas, figure 2.8 (b). Ce travail a ensuite influencé un développement pratique des méthodes des champs de contraintes et des bielles-et-tirants.

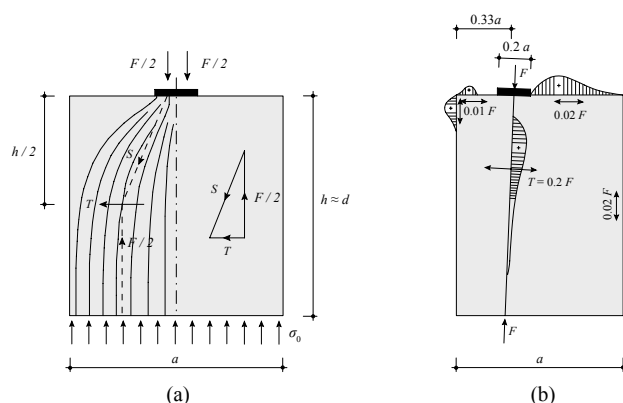


Figure 2.8: (a) Analyse d'introduction des efforts par [Mörsch24]; (b) Analyse d'introduction des efforts par [Sargious60].

Schlaich a proposé et introduit une simplification véritable ainsi qu'un complément à la méthode des champs de contraintes avec la méthode des bielles-et-tirants, ce qui a permis une utilisation dans la pratique de ces deux méthodes. Au lieu de contrôler les conditions statiques sur les contraintes il a proposé de le faire sur les résultantes des contraintes, en introduisant des bielles pour reprendre les efforts de compression et des tirants pour reprendre les efforts de traction.

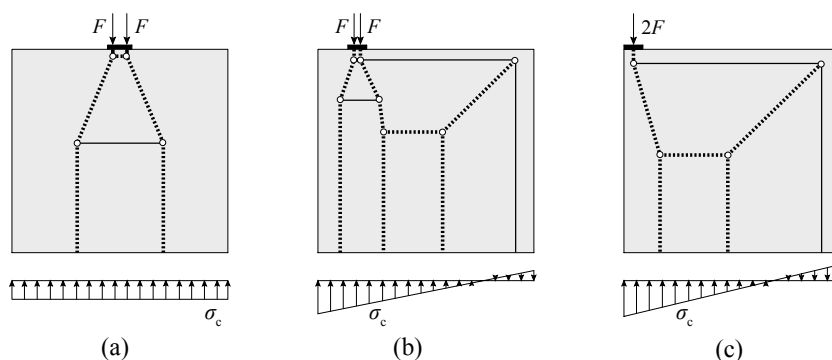


Figure 2.9: (a), (b), (c) Modèles des bielles-et-tirants pour l'introduction des efforts par [Schlaich87].

En se basant sur les travaux précédents, Schlaich a maintenu l'idée que les bielles et tirants doivent suivre les contraintes élastiques dans l'élément analysé, [Schlaich82]. De nombreux cas ont été introduits et résolus, certains d'entre eux sont présentés dans les figures 2.9 (a), (b) et (c), [Schlaich87].

Étant donné qu'avec les modèles bielles-et-tirants le contrôle des contraintes dans béton ne peut pas être effectué, il est nécessaire de passer aux modèles des champs de contraintes. L'autre approche proposée par Schlaich considère les nœuds comme des éléments critiques dans lesquels il faut vérifier les contraintes dans le béton. Il a proposé quatre types de nœuds de base ainsi que leurs variantes, figures 2.10 (a), (b), (c) et (d).

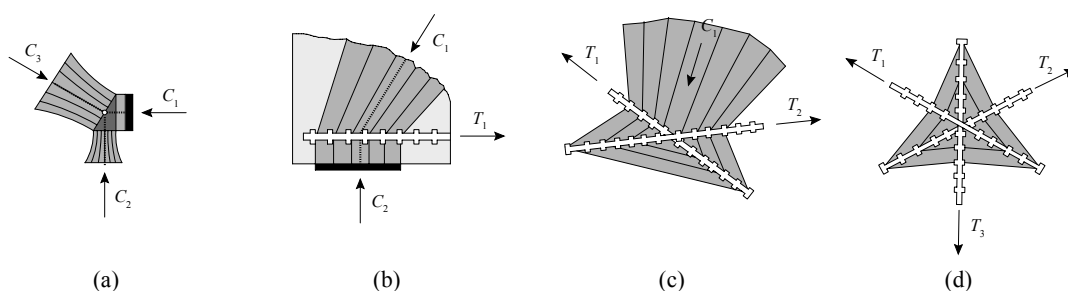


Figure 2.10: (a) *Nœud de compression-compression-compression CCC*; (b) *nœud de compression-compression-traction CCT*; (c) *nœud de compression-traction-traction CTT*; (d) *nœud de traction-traction-traction TTT*, [Schlaich87].

Pour les bielles en compression, il a retenu les champs en compression de type éventail, figure 2.11 (a) et de type prisme, figure 2.11 (c), et en plus il a proposé un troisième type de champ en compression de type bouteille, figure 2.11 (b), qui nécessite pour sa formation une résistance à la traction du béton.

Une autre proposition de Schlaich, très présente dans la littérature sur les champs de contraintes et sur les modèles bielles-et-tirants, est la subdivision de structures en zones; où selon que l'hypothèse de sections planes de Bernoulli est vérifiée (défini comme la zone B) ou soit pas vérifiée (défini comme la zone D). Les zones B, selon Schlaich, peuvent être analysées avec la théorie des poutres, par contre pour les zones D, l'utilisation de modèles bielles-et-tirants reste nécessaire, figure 1.3.

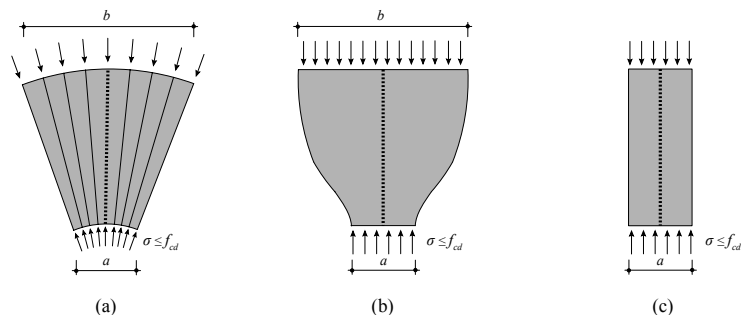


Figure 2.11: (a) *Champ en compression de type éventail*; (b) *champ en compression de type bouteille*; (c) *champ en compression de type prisme*, [Schlaich87].

En se basant sur les théories des champs de contraintes discontinus développés précédemment à l'école de Zürich [Thürlimann83], Muttoni et al. [Muttoni87], Schwartz [Schwartz02] ont

développé de nombreux exemples pratiques d'application des champs de contraintes pour le dimensionnement des structures en béton armé. Ce travail regroupe certaines propositions sur des modèles bielles-et-tirants et traite avec rigueur les champs de contraintes discontinus en appliquant ces hypothèses de base.

La figure 2.12 présente un voile multi-étage, étudié par Muttoni et al. [Muttoni87, Muttoni97]. La figure 2.12 (a) représente, quant à elle, un modèle bielles-et-tirants pour une charge donnée. La figure 2.12 (b) présente par contre, les résultantes de forces extérieures ramenées à l'intérieur de la structure avec l'utilisation d'une armature d'ancrage. Finalement, le champ de contraintes correspondant obtenu est présenté à la figure 2.12 (c).

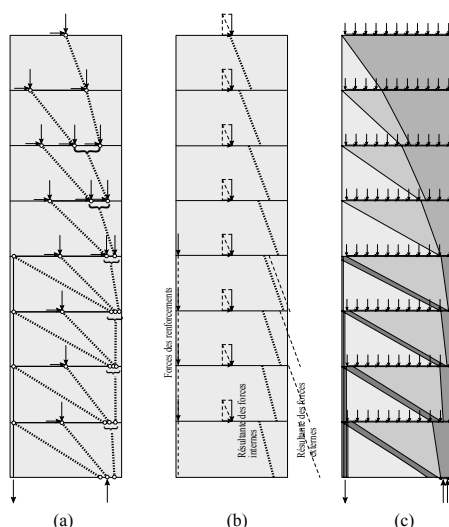


Figure 2.12: (a) *Modèle de bielles-et-tirants pour le voile multi-étage*; (b) *modèle des résultantes des forces extérieures*; (c) *modèle de champs de contraintes*, [Muttoni97].

2.2.1 Développement de procédures pour la génération des champs de contraintes

Suite au développement théorique et pratique des champs de contraintes, l'utilisation de cette méthode a imposé un autre thème de recherche tout aussi important, à savoir: quelles sont les procédures à suivre pour le développement des champs de contraintes. L'un des premiers travaux effectués a été la proposition de Muttoni et al. [Muttoni87] qui concerne l'application de considérations cinématiques.

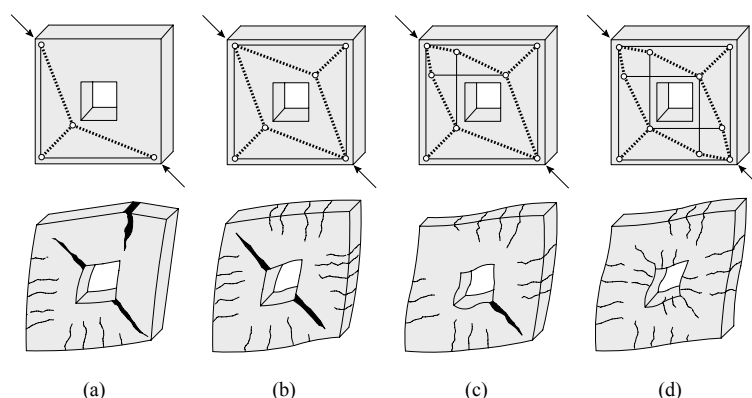


Figure 2.13: (a), (b), (c), (d) *Phases de recherche d'un modèle bielles-et-tirants*, [Muttoni87].

Selon cette procédure, un cheminement des efforts est librement choisi et l'état de déformation de la structure est étudié. Puisque pour activer le modèle choisi de grandes fissures s'ouvrent dans les zones très déformées, un modèle bielles-et-tirants additionnel vient s'ajouter afin de limiter ces déformations. La figure 2.13 présente un voile avec une ouverture étudiée conformément cette procédure. Suite à l'obtention de ce modèle, le tout premier, voir la figure 2.13 (a), l'état de déformation est étudié pour les modèles plus complets, figure 2.13 (b) et (c), jusqu'à ce que le modèle final comportant un état de déformation satisfaisant soit obtenu, exemple 2.13 (d). Par la suite, dans le prolongement de ce travail d'autres propositions plus automatiques ont été développées par Schlaich [Schlaich89], Hajdin [Hajdin90] et Despot [Despot95]. Certaines de ces propositions, ainsi que d'autres encore, seront exposées par la suite, dans les chapitres 4 et 5 de cette thèse.

2.3 Bases des champs de contraintes

Ce paragraphe donne les bases de la méthode des champs de contraintes. Selon le théorème statique de la théorie de la plasticité, un système de charges en équilibre avec une distribution de contraintes qui satisfait la condition statique de la plasticité est une borne inférieure de la charge de rupture. En se basant sur ces considérations, cette distribution des contraintes correspond à ce que l'on appelle les champs de contraintes, et l'analyse des structures par le biais de ces champs, est appelée la méthode des champs de contraintes.

Pour cela, certaines hypothèses sont nécessaires: le béton est considéré comme un matériau rigide-plastique, figure 2.14 (a), avec une résistance à la traction égale à zéro et avec une résistance à la compression f_c . Des lignes de discontinuité des contraintes sont admises selon la figure 2.14 (b).

L'acier d'armature est considéré comme un matériau rigide-plastique avec une résistance à la traction et à la compression égale à la contrainte d'écoulement de l'armature, figure 2.14 (c). L'armature peut reprendre seulement des efforts normaux, figure 2.14 (d), et l'effet de goujon est négligé.

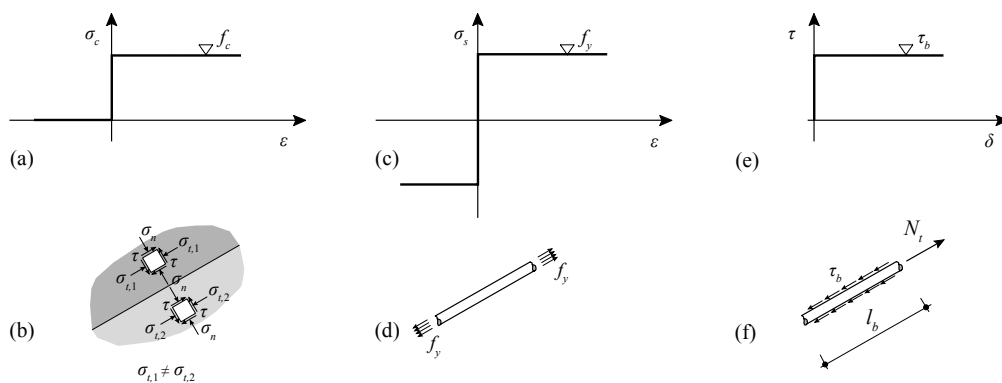


Figure 2.14: (a) Loi de comportement rigide-plastique du béton; (b) ligne de discontinuité du modèle; (c) loi de comportement rigide-plastique de l'acier d'armature; (d) sollicitations de l'armature; (e) loi d'adhérence rigide-plastique; (f) ancrage de l'armature.

L'ancrage des barres d'armature est réalisé de manière à assurer la transmission des efforts de traction des barres au béton, qui sera dès lors comprimé. Pour le contrôle de l'ancrage une loi rigide-plastique peut être adoptée, figure 2.14 (e) et (f).

Les éléments de base des champs de contraintes sont les champs de compression, les tirants et les nœuds. Les champs de compression représentent les contraintes de compression dans le béton. Si les hypothèses de base sont vérifiées [Muttoni07], il existe deux types de champs de compression, en forme de prisme et d'éventail, figure 2.15 (a).

Les tirants sont les éléments nécessaires à la transmission des efforts de traction par le biais des barres d'armature ou éventuellement des câbles de précontrainte. Ils dévient les efforts de compression dans les nœuds qui constituent le troisième élément de base des champs de contraintes. Il existe quatre types de nœuds de base qui sont représentés à la figure 2.15 (b) avec ancrage des tirants par tête d'ancrage et efforts constants dans les éléments. Il faut souligner que grâce à cela toutes les autres combinaisons de plus de trois éléments déviés dans le nœud peuvent être modélisées.

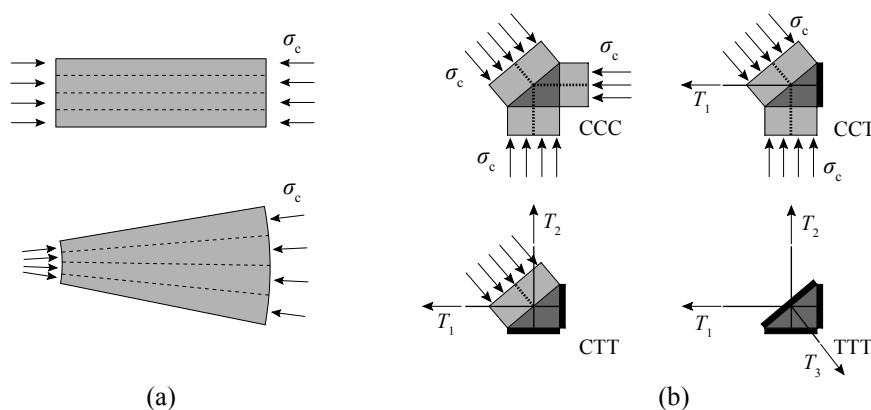


Figure 2.15: (a) *Champs de compression de type prisme et éventail*; (b) *nœuds de types CCC, CCT, CTT et TTT avec ancrage par plaque d'acier*.

Une certaine limitation de la résistance du béton doit être introduite pour prendre en considération les hypothèses faites en modélisant ce matériau comme rigide-parfaitement plastique. Examinons en premier lieu la fragilité qui caractérise davantage les bétons à hautes performances qui ont une plus forte diminution de la résistance après la valeur maximum. Ceci est pris en considération en introduisant une résistance plastique équivalente f_{cp} qui peut être calculée selon la norme SIA 262 comme:

$$f_{cp} = \eta_{fc} f_{ck} \quad , \quad \text{où: } \eta_{fc} = \left(\frac{30}{f_{ck}} \right)^{\frac{1}{3}} \leq 1.0 \quad (2.1)$$

Etant donné que la résistance du béton est fortement influencée par les déformations latérales [Vecchio86], le contrôle du béton doit être fait en tenant compte de cet effet. Vu que le calcul de ces déformations latérales se montre difficile, sans logiciel de calcul pour une utilisation courante, elles peuvent être considérées en fonction du type de sollicitation, figure 2.16. La résistance du béton qui tient compte des réductions nécessaires est appelée la résistance effective du béton f_{ce} , dans ce cas décrite comme:

$$f_{ce} = \eta_{fc} \eta_{\epsilon} f_{ck} \tag{2.2}$$

D'autres effets qui influencent encore la résistance du béton seront traités dans le chapitre 6 de cette thèse en plus des réductions définies ici.

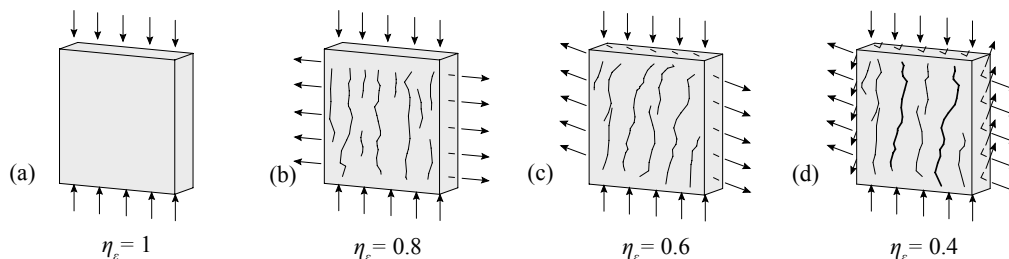


Figure 2.16: (a) Béton non fissuré en compression uniaxiale; (b) béton fissuré avec déformation latérale imposée; (c) béton fissuré avec déformation latérale imposée en diagonale; (d) béton fissuré avec armature plastifiée dans deux directions.

Pour le dimensionnement des structures un coefficient de réduction de la sécurité doit encore être appliqué, γ_c pour le béton et γ_s pour l'acier. Ce coefficient est en général donné par les normes.

Si le modèle de champs de contraintes contient des lignes de discontinuité, le modèle est dit discontinu. Au contraire, si les lignes de discontinuité ne sont pas admises et la continuité des contraintes et des déformations existe, on parle de champs de contraintes continus [Fernández07], ceux-ci sont traités dans le chapitre 5 de cette thèse.

Dans la méthode des champs de contraintes, les conditions d'équilibre sont respectées au niveau des contraintes dans les champs en compression comme dans les tirants. Une méthode, développée sur des principes similaires et qui comporte les mêmes origines, adopte l'analogie du treillis et l'équilibre respecté au niveau des forces. Cette méthode s'appelle la méthode des bielles-et-tirants [Schlaich82]. Les éléments de base équivalents aux éléments de la figure 2.15 sont présentés par la figure 2.17, où la figure (a) représente une bielle en compression et un tirant en traction alors que la figure (b) présente les quatre types de nœuds de base.

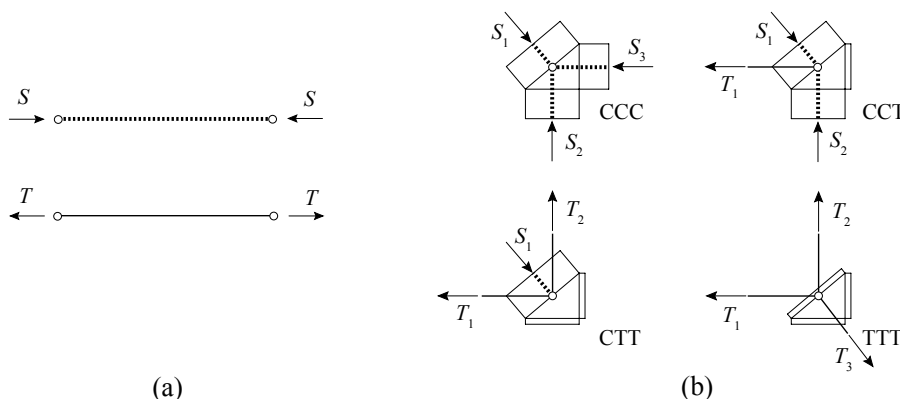


Figure 2.17: (a) Eléments des modèles de bielles-et-tirants; (b) nœuds de base des modèles de bielles-et-tirants.

Contrairement à la méthode des champs de contraintes qui est à elle seule suffisante pour l'analyse des structures, la méthode des bielles-et-tirants nécessite un contrôle supplémentaire des contraintes, dans les zones critiques. En revanche, le contrôle d'équilibre d'un modèle d'ensemble se montre plus facile en travaillant avec des forces qu'avec des contraintes. Les deux méthodes doivent cohabiter car la connaissance de chacune d'elles est nécessaire pour obtenir un dimensionnement correct de la structure.

2.3.1 Construction d'un champ de contrainte

Souvent dans le processus du dimensionnement des structures, un modèle de champ de contraintes provisoire est préalablement réalisé, grâce auquel on obtient ensuite un modèle bielles-et-tirants plus précis. Une fois que les efforts dans un tel modèle sont obtenus, un modèle de champ de contraintes correspondant est créé dans les zones nécessaires pour le contrôle final des contraintes. Par contre un tel champ de contraintes ne respecte pas toujours toutes les conditions de bord, dans ce cas un processus itératif est nécessaire; il consiste en un changement des positions de bielles et de tirants afin d'être ensuite recalculé pour créer des champs en compression. La figure 2.18 (a) montre un modèle de bielles-et-tirants pour un voile soumis à deux forces parallèles. Si un champ en compression basé sur l'effort dans la bielle est déterminé, il n'utilise pas tout le bras de levier à disposition et peut donc être changé de manière itérative, figure 2.18 (b). Au contraire, si le bras de levier initial a été choisi trop grand, le champ de compression initial ne respecte pas toutes les conditions de bord.

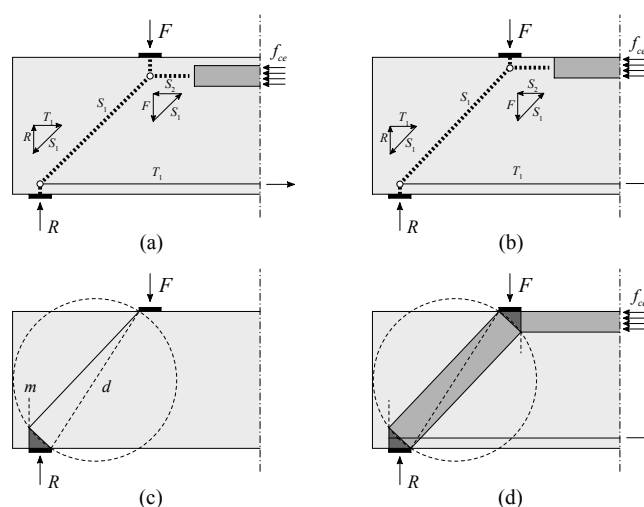


Figure 2.18: (a) Modèle de bielles-et-tirants pour le voile soumis à deux force parallèles; (b) modification de la position des bielles; (c) construction du champ de compression incliné; (d) modèle de champs de contraintes final.

Dans le cas où les nœuds doivent être hydrostatiques [Kupfer69], c'est-à-dire que toutes les bielles soient perpendiculaires au nœud et sollicitées par la même contrainte, leur vérification n'est pas nécessaire étant donné que les contraintes principales sont égales à celles des bielles. Par contre, dans ce cas, le passage d'un modèle bielles-et-tirants vers le modèle de champs de contraintes devient encore plus ardu. En effet, dans les nœuds hydrostatiques qui dévient plus de trois champs, les résultantes ne se croisent pas dans un point. Pour satisfaire une telle exigence,

à partir d'un modèle bielles-et-tirants, la position des barres et des tirants doit être changée, ce qui nécessite également le changement des efforts intérieurs dans le modèle.

Une manière alternative permettant pour obtenir le champ de contrainte correspondant peut être de garder constante la contrainte du béton dans tous les éléments en compression. Dans le cas du problème illustré à la figure 2.18 il n'existe qu'une seule solution, la construction peut donc être faite géométriquement. En déterminant la diagonale du champ de compression S_1 et la ligne m , l'inclinaison de ce champ de compression est déterminée sans calcul itératif, figure 2.18 (c). Ensuite, en utilisant la condition que la contrainte dans le béton est constante, la forme de champ de compression reste rectangulaire et il peut être immédiatement construit, figure 2.18 (d).

Dans le cas d'une structure avec plusieurs charges, la même procédure peut être appliquée, mais le nœud d'appui doit d'abord être trouvé en utilisant la résultante des charges, figure 2.19 (a) et la procédure graphique de la figure 2.18 (c). Ensuite, en construisant les champs de compression rectangulaires, figures 2.19 (b) et (c), le champ de contraintes final est trouvé géométriquement, figure 2.19 (d).

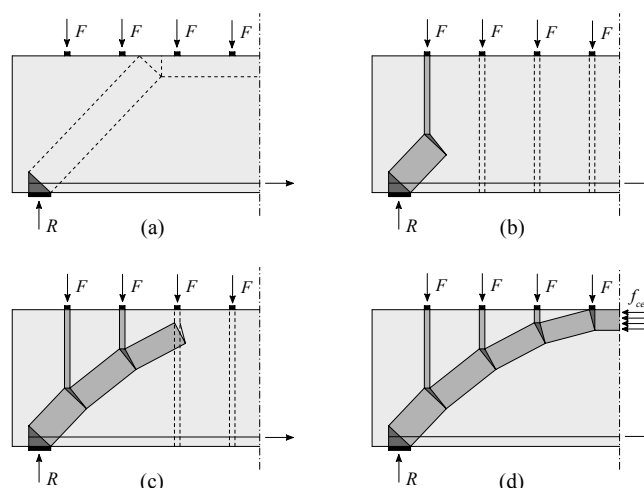


Figure 2.19: (a) Voile soumis à un système des forces; (b) et (c) construction des champs en compression; (d) modèle de champs de contraintes final.

Une telle procédure exige un logiciel de dessin ainsi que certaines connaissances sur la méthode des champs de contraintes. Une méthode automatique pour la génération de champs de contraintes discrets, qui est basée sur des principes similaires, est proposée dans le paragraphe 4.6 de cette thèse.

2.4 Analyse de nouvelles structures

Ce paragraphe est consacré au dimensionnement de nouvelles structures par la méthode des champs de contraintes et des bielles-et-tirants. Il consiste en des analyses et des recommandations élaborées au cours de cette thèse.

2.4.1 Procédure géométrique pour le développement des modèles bielles-et-tirants

Bien qu'une partie importante de la thèse soit dédiée à la génération automatique des modèles de champs de contraintes et de bielles-et-tirants, une procédure prometteuse, plutôt manuelle, est généralisée dans le cadre de cette thèse. Elle est avant tout destinée aux ingénieurs ayant acquis une certaine expérience de la méthode des champs de contraintes et dans ce contexte cette procédure peut être très efficace puisqu'elle ne nécessite pas la modélisation numérique complète de la structure.

La procédure est basée sur la statique graphique en utilisant la méthode de Culmann [Culmann1864] et la méthode de Cremona [Cremona1875]. La méthode de Culmann, inventée par Karl Culmann, consiste en la résolution d'un système de quatre forces dont les directions de chacune d'entre-elles et l'intensité de l'une d'entre-elles doivent être connues. Selon cette méthode, la résultante des forces F_1 et F_2 doit passer par le point de leur intersection et doit avoir la même direction et la même intensité que la résultante des forces F_3 et F_4 , figure 2.20 (a). En se basant sur ces propriétés ce système de quatre forces peut être résolu. La méthode de Cremona consiste en la construction d'un polygone de forces pour chaque nœud, d'un treillis isostatique, jusqu'à ce que l'effort de chaque élément de treillis soit résolu, figure 2.20 (b).

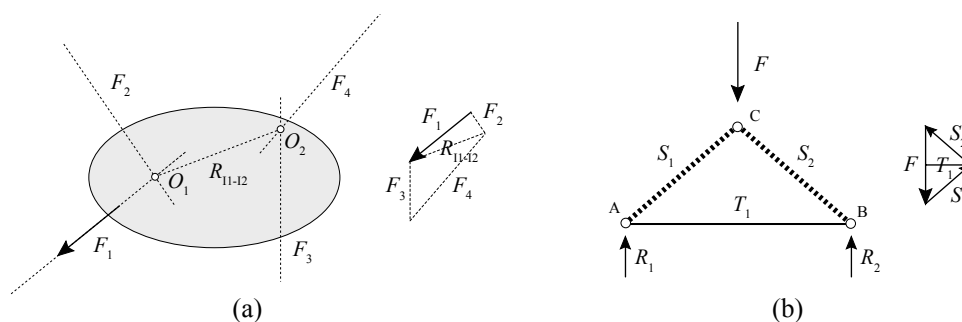


Figure 2.20: (a) Résolution d'un système de quatre forces avec la méthode de Culmann; (b) résolution d'un treillis avec la méthode de Cremona.

L'utilisation de la statique graphique dans la pratique actuelle a quasiment disparu avec l'apparition des méthodes automatiques de calcul des structures. Par contre, son utilité pour la conception des structures a été reconnue par certains ingénieurs qui l'ont souvent appliquée pour construire les lignes de pression dans des éléments de structures. Malgré l'apparition des méthodes automatiques de calcul, Muttoni [Muttoni04] a démontré que cette méthode peut concurrencer les méthodes modernes, en expliquant le comportement de différentes topologies structurales, notamment les voiles par la statique graphique. Aujourd'hui, l'apparition de logiciels de dessin a permis que cette méthode puisse être appliquée efficacement sans avoir besoin de modéliser la structure. Ceci est également valable pour le dimensionnement des structures avec la méthode des bielles-et-tirants.

La figure 2.21 représente deux structures avec une certaine discontinuité géométrique. Selon la disposition des charges et des appuis la ligne de pression peut être construite pour les deux exemples de la figure 2.21 (a) et (b). En se basant sur ces lignes de pression, les structures peuvent être modifiées de façon à ce que les lignes de pression restent toujours dans la structure. Par ailleurs, grâce à une approche différente, il est possible de considérer le changement de la forme des lignes de pression en introduisant d'autres éléments tendus et comprimés pour que la

structure conserve sa géométrie initiale. La procédure généralisée dans ce paragraphe se base sur cette dernière approche.

Etant donné que la méthode est basée sur la statique graphique, elle est en accord avec le théorème statique de la théorie de la plasticité. On peut donc en conclure qu'il existe deux conditions impératives à respecter en utilisant cette procédure; il s'agit de la condition d'équilibre et de la condition de bord. Ensuite, pour s'assurer que le modèle bielles-et-tirants obtenu de cette manière soit satisfaisant, il faut ajouter deux autres conditions essentielles: l'angle d'inclinaison des bielles par rapport aux tirants doit être supérieur à 25 degrés et le modèle choisi doit assurer un bon comportement de la structure à l'état limite de service. En conclusion, la condition de pratique de mise en plan des armatures dans des directions horizontales et verticales peut être prise en considération.

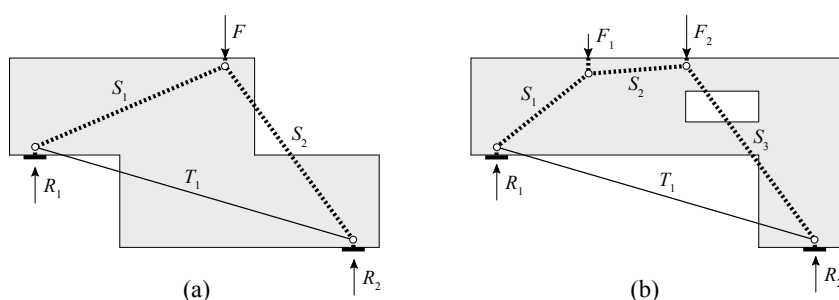


Figure 2.21: (a) et (b) Deux exemples de structures avec discontinuité géométrique et les lignes de pression correspondant aux charges et aux appuis.

La condition d'équilibre ne nécessite pas une élaboration plus profonde car il s'agit de vérifier que le modèle choisi est bien en équilibre. Par contre la deuxième condition mentionnée restant obligatoire, la condition de bord, mérite quelques commentaires. Souvent, lorsqu'il s'agit des structures étudiées avec la méthode des bielles-et-tirants, ce sont les ouvertures qui créent le plus de problèmes en termes de modélisation. Donc pour respecter les conditions de bord, le modèle bielles-et-tirants choisi doit dévier les efforts autour des ouvertures. La figure 2.22 représente une synthèse des modèles avec lesquels une telle déviation est possible. Le modèle de la figure 2.22 (a) représente une déviation par effet d'angle de cadre, où l'armature de déviation est positionnée en-dehors de l'ouverture en activant la rigidité flexionnelle de l'angle. Les figures 2.22 (b) et (c) représentent la déviation par une ou deux armatures pas nécessairement perpendiculaires à la ligne d'action de la bielle déviée. Les figures 2.22 (d) et (e) représentent la déviation de la bielle par un et deux croisements d'armatures. Les figures 2.22 (f), (g), (h), (i) et (j) représentent une version des mêmes déviations mais moins pratiques et plus générales.

Les modèles de la figure 2.22 (a) et (b) sont simples à construire, car ils sont isostatiques. Par contre, très souvent les modèles bielles-et-tirants sont mécanismes comme c'est le cas pour les modèles (c), (d) et (e) de la figure 2.22. Pour de tels systèmes il devient donc nécessaire de trouver la forme exacte pour laquelle le modèle est en équilibre. Ceci peut être un travail exigeant, car il faut calculer les efforts dans tous les éléments du modèle afin de pouvoir finalement choisir la direction des deux derniers éléments. Il est toutefois possible d'utiliser certaines propriétés de la statique graphique pour trouver la forme funiculaire sans passer par le

calcul des efforts. La figure 2.23 présente une telle solution pour des types de déviation de la figure 2.22 (c), (d) et (e).

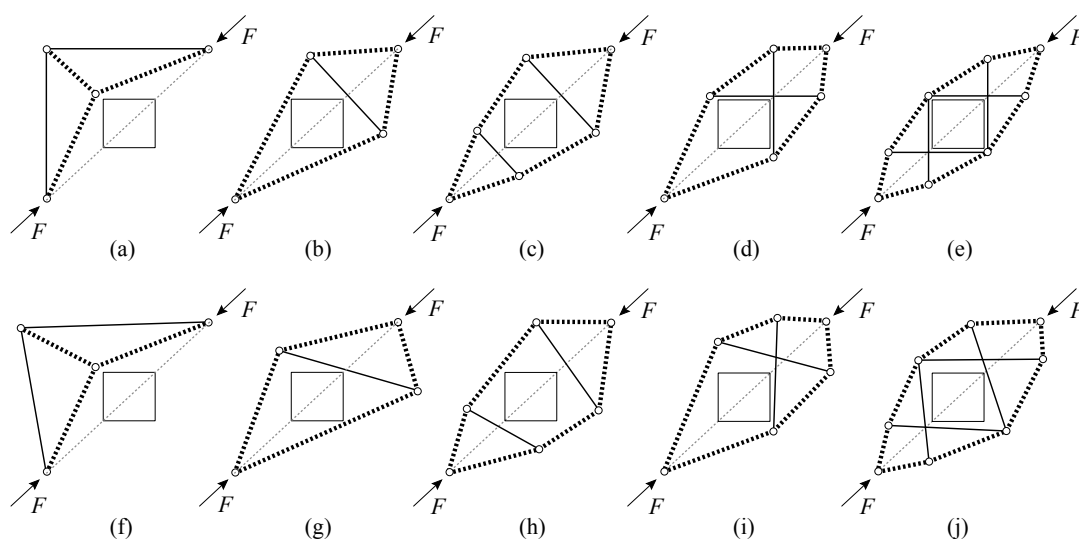


Figure 2.22: (a) Déviation de la bielle par effet d'angle de cadre; (b) et (c) déviation de la bielle par les armatures perpendiculaires à la ligne d'action de la bielle; (d) et (e) déviation de la bielle par des croisements d'armatures; (f), (g), (h), (i) et (j) représentent les mêmes déviations mais plus générales.

La figure 2.23 (a) représente quant à elle la déviation de la bielle en compression par deux tirants inclinés. Pour obtenir l'équilibre du système, la position exacte du dernier nœud doit être déterminée. Etant donné que les résultantes des bielles S_1 et S_2 ; et S_3 et S_4 passent par la ligne d'action de la bielle déviée, ceci doit être également valable pour la résultante des bielles S_5 et S_6 . Donc, le point d'intersection O_1 de la bielle S_5 et de la ligne d'action de la bielle déviée indique le point par lequel la direction de la bielle S_6 doit passer. De cette façon, la position du dernier nœud pour laquelle ce système hypostatique peut rester en équilibre est trouvée.

La figure 2.23 (b) représente la déviation de la bielle en compression par un croisement d'armatures. L'équilibre hypostatique de ce système peut être rétabli en trouvant la position juste d'un nœud pour lequel l'équilibre est trouvé. La résultante de deux tirants T_1 et T_2 doit passer par leur point d'intersection et par le point d'intersection O_1 des bielles S_1 et S_4 . En prolongeant la bielle S_4 jusqu'à la résultante des tirants, la direction de la bielle S_2 est trouvée.

La figure 2.23 (c) représente la construction de la déviation de la bielle par un double croisement d'armatures. Ce type de déviation peut mettre en scène deux déviations avec un croisement d'armatures. Contrairement aux deux constructions précédentes, où il n'a pas été obligatoire de déterminer les efforts pour trouver la forme exacte, en ce qui concerne la déviation avec deux croisements d'armatures, la détermination des efforts dans la première partie reste indispensable. Ceci dans le but de trouver les résultantes R_1 et R_2 et de procéder à la construction graphique sans calcul, comme pour 2.23 (b). Afin d'avoir tous les tirants en traction, il est nécessaire que les résultantes R_1 et R_2 soient dirigées en dehors de la zone des quatre bielles S_5 , S_6 , S_7 et S_8 .

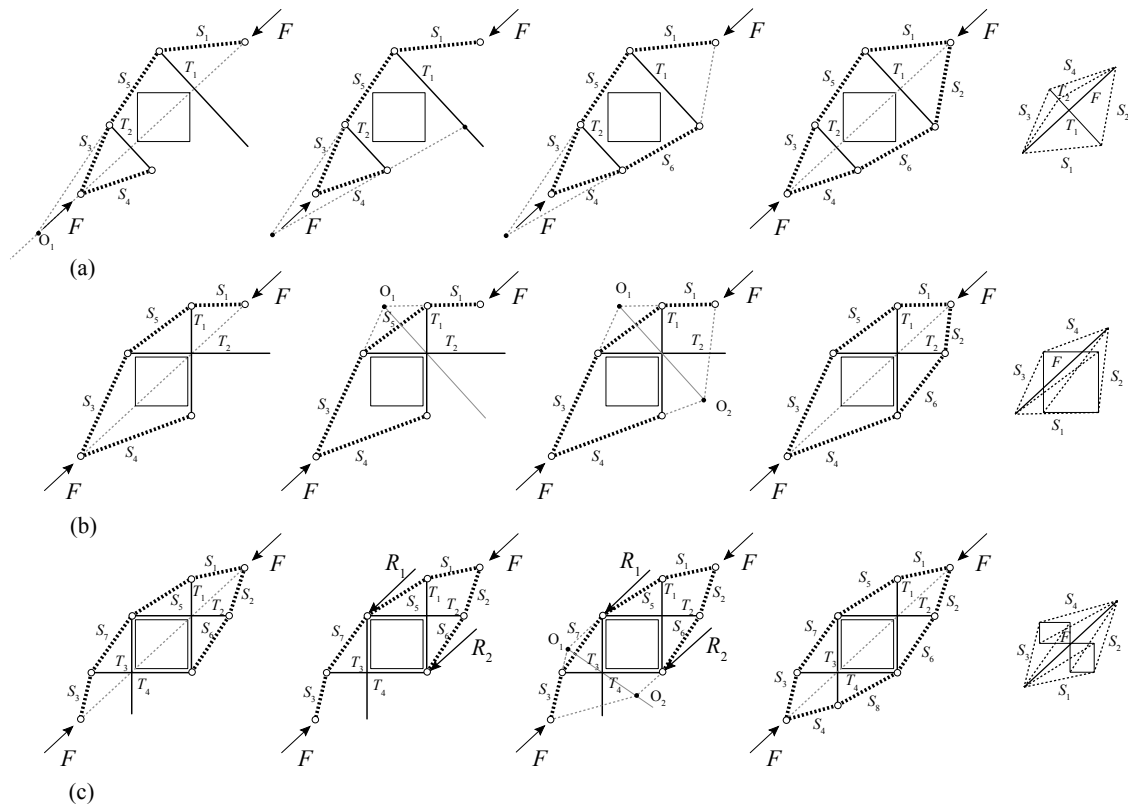


Figure 2.23: (a) Construction graphique de la ligne de pression pour la déviation de la bielle par une armature perpendiculaire à la ligne d'action; (b) construction graphique pour la déviation de la bielle avec un croisement d'armatures; (c) construction graphique pour la déviation de la bielle avec un croisement double d'armatures.

Pour obtenir un modèle de bielles-et-tirants satisfaisant, il n'est pas suffisant de respecter l'équilibre et les conditions de bord, il est aussi nécessaire que premièrement le modèle final soit suffisamment simple, il faut donc supprimer les éléments qui ne sont pas indispensables. Deuxièmement, il faut respecter l'inclinaison des bielles par rapport aux tirants et l'aptitude au service de la structure. Ceci exige que le modèle de bielles-et-tirants soit plus élaboré pour satisfaire à ces exigences. Un exemple de la réduction de nombre de bielles est donné à la figure 2.24 (a), on arrive à ce résultat en utilisant les résultants des efforts. L'exemple de la figure 2.24 (b) illustre le passage d'une bielle directe vers un modèle qui utilise l'armature verticale pour diminuer l'inclinaison de la bielle.

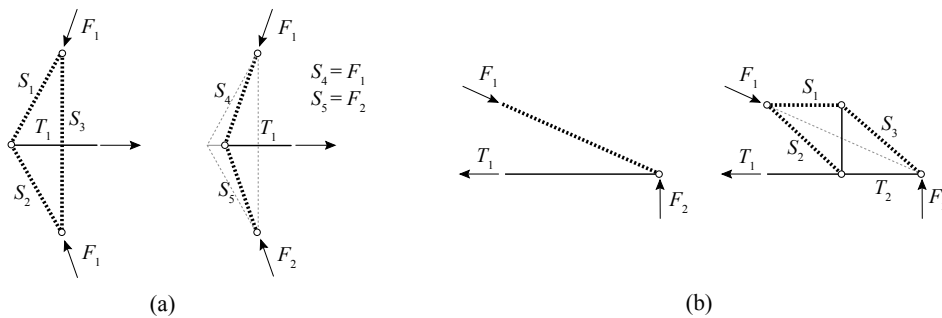


Figure 2.24: (a) Exemple de réduction de nombre d'éléments; (b) exemple de changement d'angle d'inclinaison des bielles.

Exemples pratiques

La figure 2.25 présente la géométrie d'un voile proposé par Kuchma et al. [Kuchma08] pour lequel ils ont proposé des modèles de bielles-et-tirants qu'ils ont utilisés par la suite pour le dimensionnement des échantillons d'essais. La géométrie et la forme de ce voile vont servir d'exemple pour l'explication de la procédure proposée.

La figure 2.25 (a) représente l'arc funiculaire de la charge. Étant donné qu'il ne respecte pas les conditions de bord, il se doit d'être modifié; tout d'abord en introduisant la bielle de compression S_{b1} , le tirant T_{a1} est modifié et divisé en deux tirants T_{b1} et T_{b2} , figure 2.25 (b), ensuite, puisque le tirant T_{b1} ne respecte toujours pas les conditions de bord, une déviation par un croisement d'armatures est introduite, figure 2.25 (c). Afin de respecter les conditions de bord intérieur, la bielle de compression S_{c1} peut être déviée en utilisant la déviation de la figure 2.23 (a).

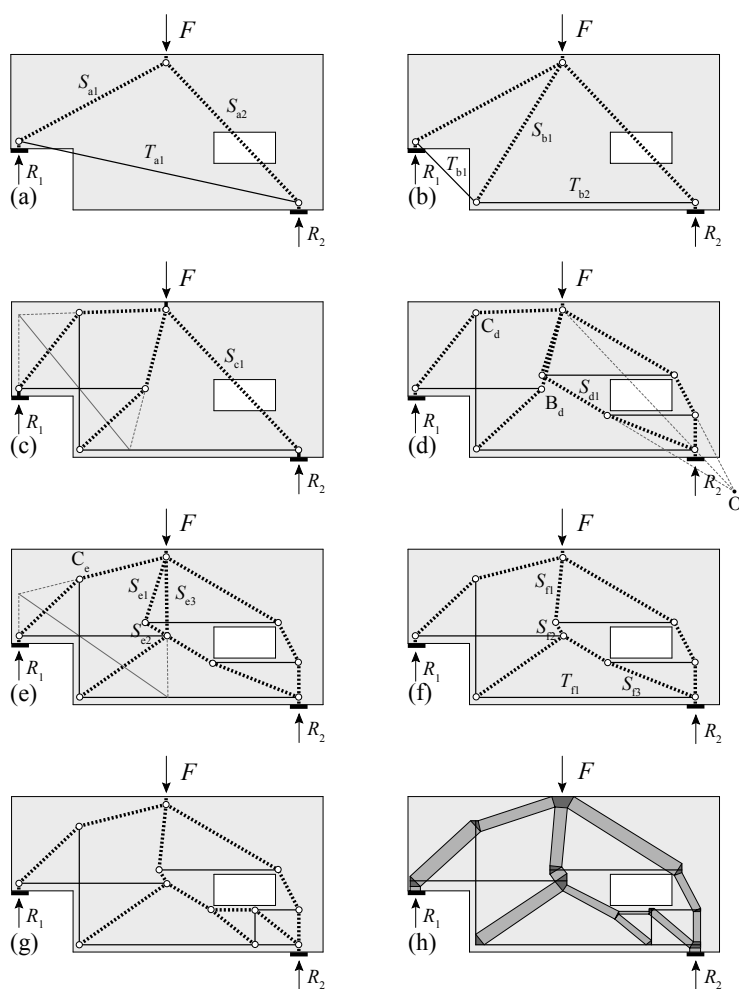


Figure 2.25: (a) Arc funiculaire de la charge; (b), (c), (d) et (e) construction graphique du modèle de bielles-et-tirants; (f) et (g) changement du modèle de bielles-et-tirants; (h) champs de contraintes correspondant.

Puisque les deux parties du modèle de bielles-et-tirants sont séparées, elles peuvent néanmoins être rétablies de façon à être ensemble en déplaçant le point B_d jusqu'à la bielle S_{d1} , figure 2.25 (d). Ce déplacement exige un changement au niveau de la forme funiculaire afin d'établir un

équilibre en abaissant le point C_d sur la nouvelle position C_e , 2.25 (e). Le modèle ainsi obtenu peut encore être simplifié en remplaçant les bielles S_{e1} , S_{e2} et S_{e3} par les bielles résultantes S_{f1} et S_{f2} , figure 2.25 (f). Finalement, l'inclinaison de la bielle S_{f3} devenue trop petite par rapport au tirant T_{f1} doit être modifiée en introduisant une armature verticale, figure 2.25 (g). En se basant sur la forme obtenue et sur les efforts dans les bielles, le modèle de champs de contraintes peut être établi, figure 2.25 (h). Les champs de compression en forme de prisme sont présentés sur cette figure, avec une contrainte de béton constante dans les champs en compression.

La figure 2.26 présente la géométrie d'un élément étudié par Breña [Breña07]. La géométrie de cet élément est donnée dans le paragraphe 2.5 de cette thèse. La figure 2.26 (a) montre le polygone funiculaire des charges qui respecte complètement les conditions de bord extérieures mais pas les conditions de bord intérieures. Pour dévier la bielle S_{a1} , une déviation par un croisement d'armatures est utilisée, figure 2.26 (b), en appliquant la construction géométrique de la figure 2.23 (b). Ensuite, en utilisant la construction géométrique de la figure 2.23 (a), la bielle S_{b1} est déviée pour obtenir le modèle de la figure 2.26 (c).

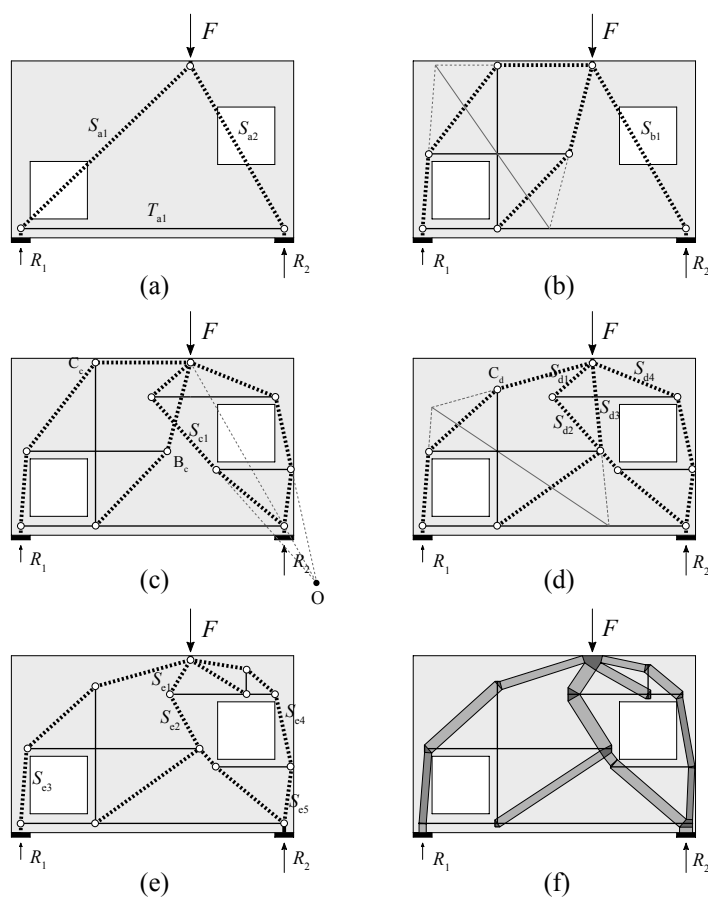


Figure 2.26: (a) Polygone funiculaire de la charge; (b), (c) et (d) construction graphique du modèle de bielles-et-tirants; (e) modification du modèle obtenu; (f) modèle de champs de contraintes correspondant.

Dans le but de rendre ce modèle unique; le point B_c est déplacé jusqu'à la bielle en compression S_{c1} , figure 2.26 (c), ce qui a pour effet de provoquer le déplacement du point C_c sur la position C_d afin de rétablir l'équilibre, figure 2.26 (d). En vue de simplifier ce modèle, les bielles S_{d1} , S_{d2} et S_{d3} sont remplacées par les bielles résultantes S_{e1} et S_{e2} et puisque l'inclinaison de la bielle S_{d4}

est devenue trop petite, une armature verticale est introduite de manière à en modifier l'inclinaison, figure 2.26 (e). La figure 2.26 (f) présente le modèle de champs de contraintes obtenu à partir du modèle bielles-et-tirants. Il faut noter que la construction du modèle de champs de contraintes complet n'est pas toujours nécessaire: il suffit de contrôler les bielles de compression les plus critiques, dans le cas exposé précédemment il s'agit des bielles S_{e3} , S_{e4} et S_{e5} .

2.4.2 Topologie des champs de contraintes - modes de comportement

Selon la procédure présentée pour le développement d'un modèle bielles-et-tirants, deux conditions indispensables sont à respecter, l'équilibre et le respect des conditions de bord. Selon ces deux conditions, en accord avec le théorème statique de la théorie de plasticité, un nombre infini de modèles bielles-et-tirants s'avère possible. Cette infinité de solutions impose la remise en question des conditions d'utilisation de ces différents modèles pour le dimensionnement des structures ainsi que les implications d'un choix donné, en comparaison à un autre.

Dans le but d'éclairer ce problème, nous étudierons un simple voile sollicité par une force ponctuelle, figure 2.27. Parmi plusieurs modèles possibles, les deux configurations les plus courantes pour cette topologie de charge sont soit l'appui direct, figure 2.27 (a), soit le modèle de suspension, figure 2.27 (b). Le modèle d'appui direct néglige complètement la traction traversant les bielles en compression due à la diffusion des efforts comme à la suspension de la charge et le modèle de suspension néglige complètement la rigidité flexionnelle du voile et la fissuration du bord inférieur. Pour comparer le comportement de ces deux modèles, une armature constituée de cinq barres $\varnothing 25$ sera utilisée pour les tirants.

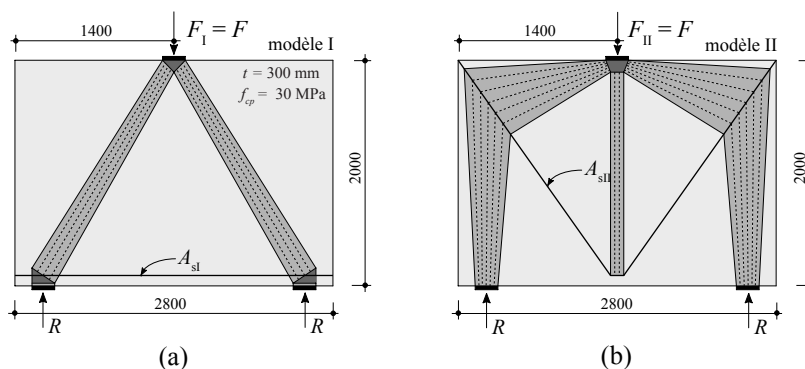


Figure 2.27: (a) *Modèle de l'appui direct*; (b) *modèle de suspension de la charge*.

Concernant le comportement à l'état limite ultime, dans le cas où une rupture du béton n'est pas déterminante, le positionnement des cinq barres en position inférieure selon le modèle I (figure 2.27 (a)), porte la charge de rupture 40% au delà de celle du modèle II. Cette estimation provenant d'un simple équilibre, donne déjà une indication précieuse sur le fait que le modèle d'appui direct est plus efficace pour le dimensionnement du voile, grâce à sa plus grande efficacité. Ce résultat, qui peut être obtenu par le simple équilibre des modèles, ne donne en revanche aucune information sur le comportement à l'état de service des deux modèles.

Pour comparer les deux modèles au niveau du comportement à l'état de service, une analyse qualitative est faite en utilisant une disposition d'armature, voir la figure 2.27 et une charge de service de 1200 kN. L'analyse est faite en employant les éléments finis non-linéaires qui

prennent en compte non-linéarité des matériaux et le “tension stiffening” des armatures. Dans le but d’obtenir le comportement optimal, la position des cinq barres d’armature est variée entre le modèle I et le modèle II. La figure 2.28 (a) montre le déplacement maximal de la structure pour les dispositions d’armatures et permet de noter que le positionnement de toutes les barres d’armature selon le modèle II mène à un plus grand déplacement de la structure. Par contre la figure 2.28 (b) donne une solution différente, en indiquant que la disposition de quatre barres selon le modèle I et d’une barre selon le modèle II conduit à une réduction de l’ouverture maximale des fissures. Ainsi, tant à l’état limite ultime qu’à l’état limite de service, figure 2.28, on peut conclure que le modèle I est le premier mode de comportement de la structure alors que le modèle II est son deuxième mode, qui doit s’activer parallèlement au premier mode de comportement, mais d’une façon plus modeste.

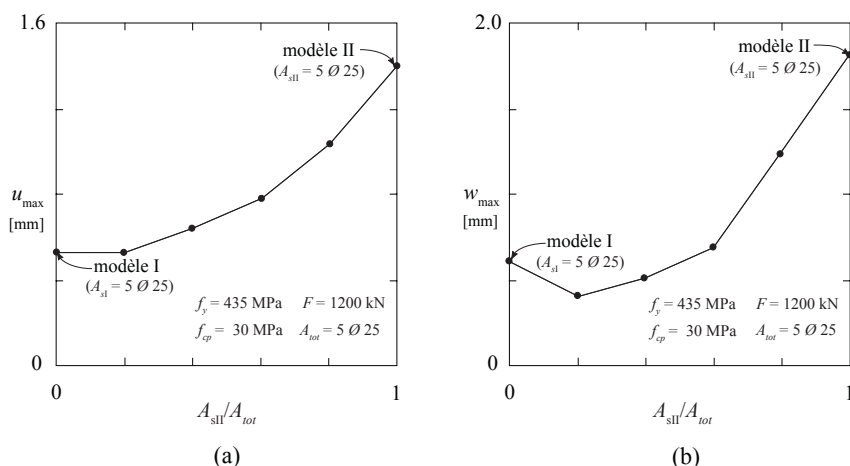


Figure 2.28: (a) Déplacement maximal de la structure (bord inférieur au centre) pour six dispositions de l’armature; (b) ouverture maximale de la fissure.

L’analyse montre que le fait de négliger le mode de comportement I peut mener la structure au mode de comportement II, avec des les répercussions sur la quantité d’armature nécessaire et une aptitude au service moindre. Par ailleurs, l’analyse montre qu’une synthèse des deux modèles pourrait s’avérer très bénéfique pour l’état de fissuration ainsi que pour la ductilité de la structure grâce à la redistribution des efforts vers le modèle II à l’état limite ultime. Il faut indiquer que l’analyse est faite sans l’utilisation d’armatures minimales, qui sont en général toujours présentes dans les structures. Celle-ci peut certainement aider à diminuer les effets négatifs de la négligence induite par un choix erroné du mode de comportement.

Pour sélectionner un mode de comportement optimal, Schlaich [Schlaich93] propose d’utiliser des tirants les plus courts possibles. Etant donné qu’il est possible d’avoir plusieurs modèles avec la même longueur de tirants, on peut ajouter que la disposition optimale est celle qui minimise les efforts dans les tirants ou qui maximise la charge de rupture. Comme dans le cas précédent, l’intégration de plusieurs modes de comportement est possible pour obtenir un meilleur comportement de la structure vis-à-vis du comportement ultime et à l’état de service. Il faut noter que dans certains cas, l’intégration d’un deuxième mode de comportement ne donne que très peu de bénéfice au comportement global de la structure et dans ce cas là, il n’est pas nécessaire de compliquer le modèle bielles-et-tirants alors qu’une armature minimale s’avèrera suffisante. Par contre, s’il existe deux modes de comportement pour lesquels la longueur des

tirants et leurs efforts sont similaires, la structure se comportant selon ces deux modes et leur combinaison dans un modèle de bielles-et-tirants final devient indispensable.

Pour étudier plus en détail les modes de comportement des structures, on étudiera un voile avec une ouverture centrale soumis à une charge disposée selon l'illustration de la figure 2.29. La déviation des efforts autour de l'ouverture peut être faite en disposant une armature horizontale au-dessus de l'ouverture centrale, figure 2.29 (a), ou en utilisant la déviation par effet d'angle de cadre, figure 2.29 (b). Une analyse qualitative sera faite afin d'étudier le comportement de la structure, pour laquelle les deux armatures au dessus de l'ouverture sont gardées constantes.

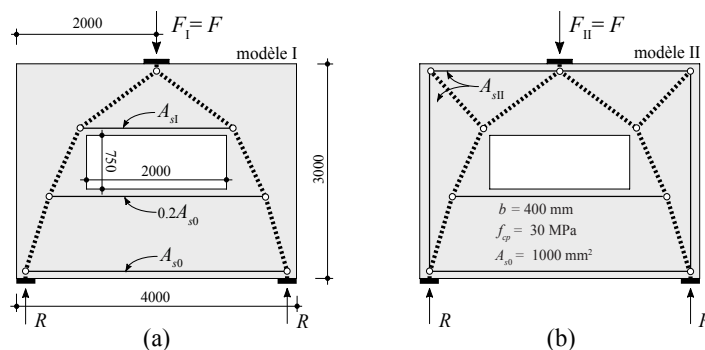


Figure 2.29: (a) Modèle I de la déviation possible autour de l'ouverture; (b) modèle II de la déviation autour de l'ouverture par effet de l'angle de cadre.

L'analyse non-linéaire qui assumée non-linéarité des matériaux, leur comportement élastique-plastique, la résistance à la traction du béton nulle et l'adhérence parfaite d'armatures est effectuée. L'analyse est d'abord faite en variant la quantité d'armatures au-dessus de l'ouverture A_{sI} en gardant l'armature aux bords A_{sII} constante et égale à A_{s0} puis en variant cette armature et en gardant l'armature A_{sI} constante et égale à A_{s0} . La figure 2.30 (a) montre que la participation du modèle II à la transmission de la charge est non négligeable, mais uniquement dans le cas d'une section d'armature A_{sII} importante. Ce comportement s'explique par le fait que l'armature au bord supérieur de l'ouverture ne permet pas l'activation des armatures aux bords de la structure. Au contraire, dans tous les cas l'activation de l'armature A_{sI} reste importante.

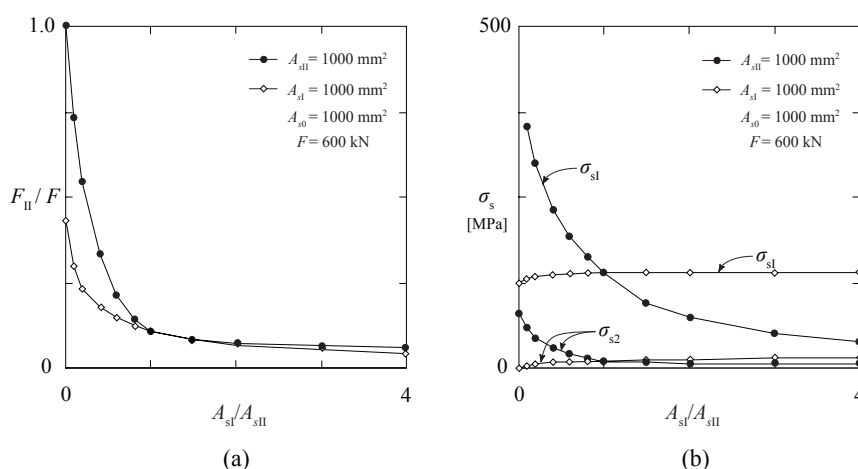


Figure 2.30: (a) Participation du modèle II à la transmission de la charge pour divers arrangements de l'armature entre le modèle I et le modèle II; (b) Contrainte dans l'armature de déviation de modèle I et II.

La figure 2.30 (b) donne les valeurs des contraintes dans les tirants étudiés pour une charge de service de 600 kN. Cette figure montre que dans le cas d'une forte diminution de la quantité d'armature A_{sI} , la contrainte augmente considérablement, ce qui a comme résultat un mauvais comportement de cette zone à l'état de service. Cependant, une forte diminution de l'armature A_{sII} ne mène qu'à une augmentation très faible de la contrainte.

Cet exemple montre que l'armature du mode de comportement I est beaucoup plus efficace de celle de mode II et que dans ce cas le mode II peut être complètement négligé lors du dimensionnement de la structure, à condition toutefois de disposer une armature minimale.

Ces considérations sont en accord avec la proposition de Muttoni et al. [Muttoni97], figure 2.13, sur le développement des modèles de champs de contraintes. Selon cette proposition, les tirants doivent être placés de façon à empêcher la création d'un mécanisme sans l'activation d'une armature. Les figures 2.31 (a) et (b) montrent l'état déformé de deux modes de comportement obtenus par une analyse qualitative. Un mécanisme possible selon le mode de comportement I est présenté à la figure 2.31 (c) à l'état déformé, ainsi qu'à la figure 2.31 (d) selon le mode de comportement II. Il est bien clair que selon le mécanisme illustré par figure 2.31 (d) une fissure importante doit se développer au bord supérieur de l'ouverture pour activer l'armature aux bords extérieurs de la structure. Cela signifie qu'une armature au bord supérieur de l'ouverture est nécessaire et qu'elle doit être beaucoup plus importante que l'armature du modèle II.

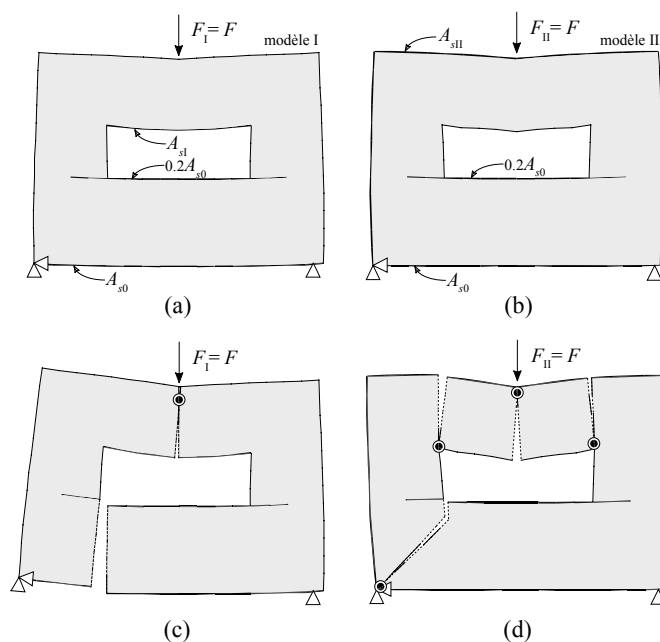


Figure 2.31: (a) et (b) Déformée des deux modes de comportement I et II; (c) et (d) Mécanismes possibles selon le modèle de bielles-et-tirants choisi.

2.4.3 Topologie des champs de contraintes – influence de la forme de structure

Des considérations relatives à la forme de la structure doivent être incluses dans le développement des modèles de bielles-et-tirants selon la procédure proposée. La connaissance de solutions existantes ne signifie pas qu'elles soient directement applicables pour toutes les géométries similaires. La figure 2.32 montre la même topologie des bielles-et-tirants proposée par Muttoni et al. [Muttoni97] mais appliquée pour des tailles d'ouvertures différentes.

Les quatre structures sont analysées qualitativement en utilisant les armatures selon les topologies de la figure 2.32. Les hypothèses de calculs définis pour la figure 2.30 restent valables. La figure 2.33 (a) représente la participation du modèle II qui active un comportement d'angle de cadre avec les armatures aux bords extérieurs de la structure. L'analyse est faite en utilisant une armature constante aux bords extérieurs et en variant la quantité d'armature sur les bordures intérieures.

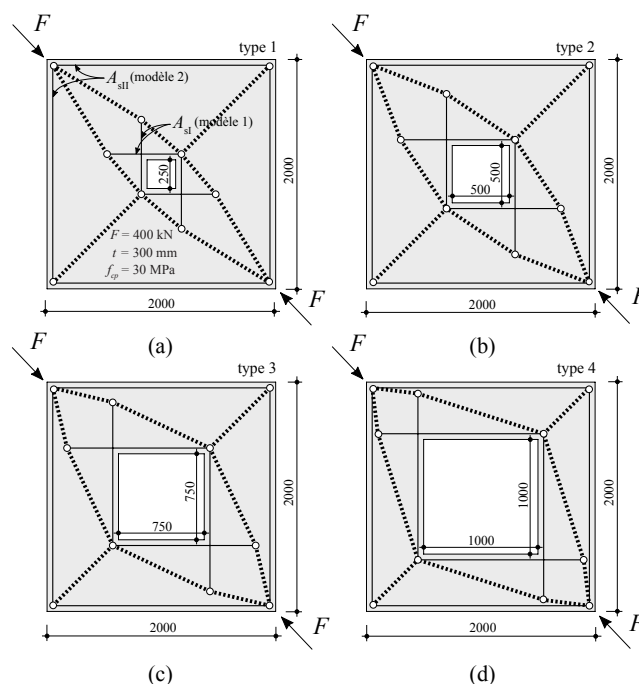


Figure 2.32: Utilisation de la même topologie des bielles-et-tirants pour une structure avec différentes tailles de l'ouverture.

La figure 2.33 (a) montre que le taux de participation du modèle II reste très faible pour les structures de la figure 2.32 (a) et (b), car la rigidité du béton dans l'axe de la force appliquée est très forte et les efforts peuvent être déviés avec une faible armature autour de l'ouverture. Ainsi l'armature aux bords extérieurs, nécessaire selon le mécanisme de la figure 2.13, peut être très faible, car avant d'activer ce mécanisme, la résistance maximale en compression du béton est déjà atteinte. Par contre l'analyse montre que dans le cas d'une ouverture plus importante l'armature aux bords extérieurs joue un rôle primordial et indispensable, voir la figure 2.32 (c) et (d), à cause de la mobilisation de l'effet de l'angle de cadre.

La figure 2.33 (b) représente les contraintes dans l'armature extérieure pour quatre types de structure et diverses quantités d'armatures autour de l'ouverture. Elle confirme que, même si elles ne sont pas directement liées à la méthode des champs de contraintes, les considérations sur la rigidité et la déformabilité de certains éléments peuvent aider à déterminer la topologie efficace des champs de contraintes.

La forme n'influence pas seulement les modes de comportement des structures mais également le changement des topologies des modèles de bielles-et-tirants. Dans l'exemple de la figure 2.32, le modèle de type 4 contient des bielles avec une très faible inclinaison. Une armature d'effort tranchant doit donc être introduite, ce qui amène un changement au niveau de la topologie du modèle bielles-et-tirants.

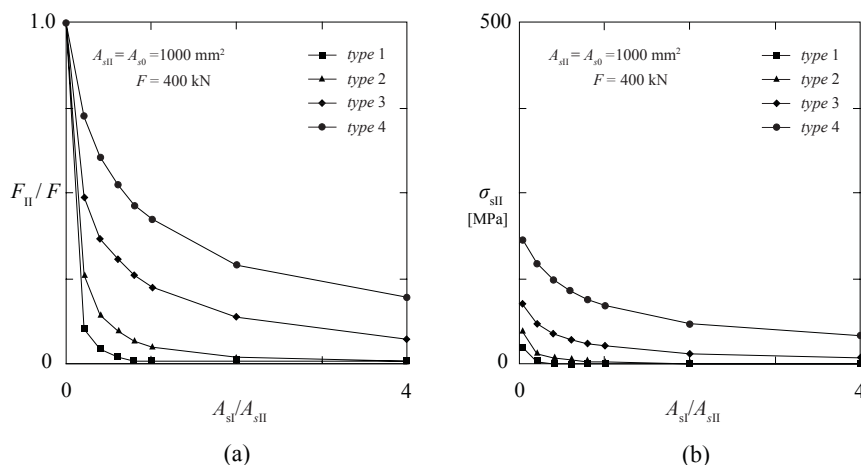


Figure 2.33: (a) Participation du modèle II à la transmission de la charge pour différentes quantités d'armatures aux bords de l'ouverture; (b) Contrainte dans l'armature de déviation pour les modèles I et II.

L'influence de la forme sur la topologie peut être établie avec l'exemple donné à la figure 2.29. La figure 2.34 (a) indique quant à elle que la déviation du modèle de l'appui direct n'est pas nécessaire dans le cas d'une petite ouverture. Si on augmente la taille de l'ouverture, des barres horizontales de déviation doivent être introduites, figure 2.34 (b). Pour finir, lorsqu'il s'agit d'une ouverture encore plus grande, les angles d'inclinaison des bielles sont très faibles ce qui nécessite l'utilisation d'armature d'effort tranchant. De plus, l'effet d'angle de cadre devient si important que des armatures doivent être ajoutées aux bords extérieurs, voir la figure 2.34 (c).

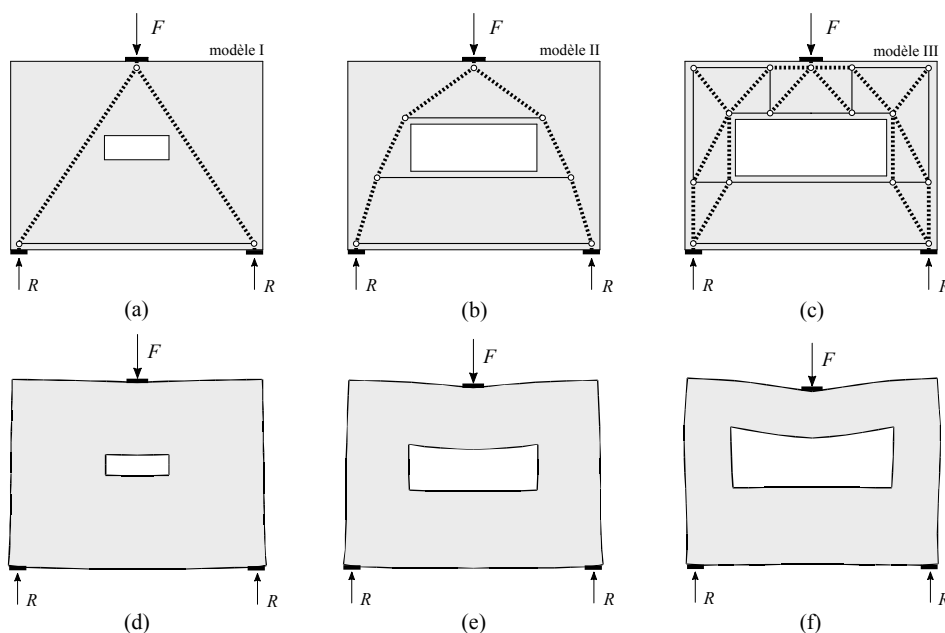


Figure 2.34: (a) (b) (c) Modèles des bielles-et-tirants pour différentes tailles de l'ouverture; (d) (e) (f) déformée qualitative pour les trois tailles de l'ouverture.

L'influence de la forme et de la rigidité de certains éléments peut être établie par le biais de la déformée qualitative de la structure. La figure 2.34 (d) montre que dans le cas d'une petite ouverture la déformée de la structure correspond à celle d'un voile et les bielles d'appui direct

sont tellement rigides que les autres mécanismes s'activent difficilement. Dans ce cas précis, une armature minimale est suffisante pour contrôler la fissuration. La figure 2.34 (e) présente une déformée dans le cas d'une ouverture qui perturbe le modèle d'appui direct, la rigidité flexionnelle de la poutre au-dessus de l'ouverture est en mesure de s'activer. Finalement, pour une ouverture encore plus grande, le modèle d'appui direct doit être en dehors de la structure, ceci reste valable non seulement dans les zones supérieures de l'ouverture, mais aussi dans les zones inférieures. Cela provoque une flexion considérable des parois latérales de l'ouverture comme des angles supérieurs de la structure, le tout ayant pour conséquence d'activer l'effet d'angle de cadre, comme l'illustre la figure 2.34 (f).

Une structure caractéristique comportant des discontinuités géométriques est proposée par Reineck [Reineck02] dans la publication spéciale ACI SP-208 qui traite des modèles de bielles-et-tirants. Un exemple de ce genre est présenté à la figure 2.35 (c), et certains modèles bielles-et-tirants sont proposés et testés par le groupe de Breen [Ley07] et de Kuchma [Kuchma08].

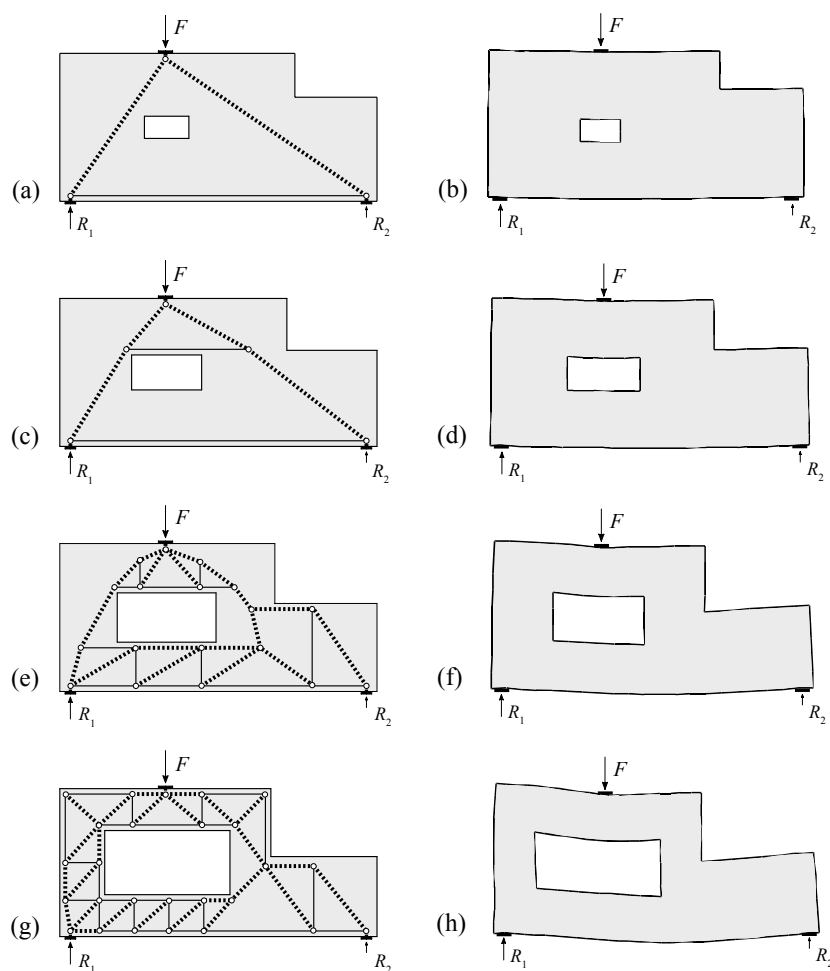


Figure 2.35: (a) et (b) Modèle de bielles-et-tirants et déformée d'élément avec une petite ouverture; (c) et (d) augmentation de l'ouverture et modèle de bielles-et-tirants correspondants avec la déformée associée; (e) et (f) modèle de bielles-et-tirants et déformée associée pour la géométrie du voile proposée par Reineck dans ACI SP-208, [Reineck02]; (g) et (h) modèle de bielles-et-tirants et déformée associée qui active l'angle de cadre.

Selon l'hypothèse de la théorie de la plasticité, cet élément permet un nombre infini de modèles de bielles-et-tirants. Par contre, si des réflexions sur la rigidité et l'activation de certains éléments sont pris en considération, le nombre des modèles bielles-et-tirants qui sont bien adaptés pour la structure étudiée en sera fortement réduit. Les figures 2.35 (a) (b) et (d) représentent des variations de la forme initiale de structure proposée par Reineck, figure 2.35 (c).

Si l'ouverture est petite, comme sur la figure 2.35 (a), elle ne provoque pas la déviation des efforts internes et le modèle d'appui direct est suffisamment rigide pour ne pas permettre l'activation d'autres modes de déformation, figure 2.35 (b). Une armature minimale autour de l'ouverture est suffisante dans ce cas pour satisfaire les exigences de l'état limite de service. Avec une augmentation de l'ouverture, la déviation des efforts par un tirant horizontal au-dessus de l'ouverture devient nécessaire, figures 2.35 (c) et (d). Pour la forme de structure de Reineck, voir 2.35 (e), l'armature minimale au-dessus et en-dessous de l'ouverture n'est pas suffisante pour reprendre l'effort tranchant et un modèle de bielles-et-tirants que l'on prendrait en considération devra être établi, voir figures 2.35 (e) et (f). En augmentant encore plus l'ouverture, les parois et les angles supérieurs de la structure finiraient par s'infléchir considérablement, figure 2.35 (g), et l'effet d'angle de cadre devient important. Cette dernière affirmation est illustrée par la déformée qualitative de structure à la figure 2.35 (h).

Si l'on retourne en arrière, au modèle de la figure 2.35 (g) nous constaterons qu'il peut être utilisé pour modéliser la structure de la figure 2.35 (a), mais certains de ces tirants seraient faiblement activés, ils ne seraient donc pas véritablement nécessaires.

Grâce à l'exemple qui suit; un voile sur plusieurs étages, on peut déduire quelle est l'influence de la forme et de la rigidité de certains éléments sur le choix du modèle de bielles-et-tirants. La figure 2.36 (a) représente le voile sans ouverture pour lequel sous l'effet des charges introduites la déformée sera du type de console, dans ce cas le modèle de bielles-et-tirants reste simple. Si on ajoute des ouvertures, il faut dévier les bielles de compression, mais une simple déviation n'est pas suffisante car la structure considéré ne se comporte pas seulement comme un voile mais la déformation de chaque élément qui constitue la structure doit également être considérée. Il faut tenir compte de tous ces modes de déformation pour chaque élément de la structure afin de déterminer le modèle de bielles-et-tirants, figure 2.36 (b). Si on augmente les ouvertures, la structure ne se comporte plus comme un simple voile, mais comme une poutre Vieredeel qui est constituée de plusieurs éléments qui ensemble forment une structure avec une importante déformation locale, figure 2.36 (c). Ainsi, pour cette structure soumise à un moment global, ce dernier se répartit en moments locaux dans chaque élément, ce qui doit être pris en compte lors de l'étude de l'élément.

Dans ce dernier exemple c'est la forme de la structure qui détermine le fait qu'elle peut se comporter comme une structure unique ou si elle est constituée par plusieurs éléments pour la génération de modèle de bielles-et-tirants. Il est certain qu'en appliquant la procédure du paragraphe 2.4.1 ce comportement pourrait être estimé de manière trop superficielle, c'est pourquoi il nécessite une expérience vaste et variée du comportement des structures. L'utilisation de méthodes automatiques demeure donc une voie parallèle à la détermination des modèles bielles-et-tirants et champs de contraintes.

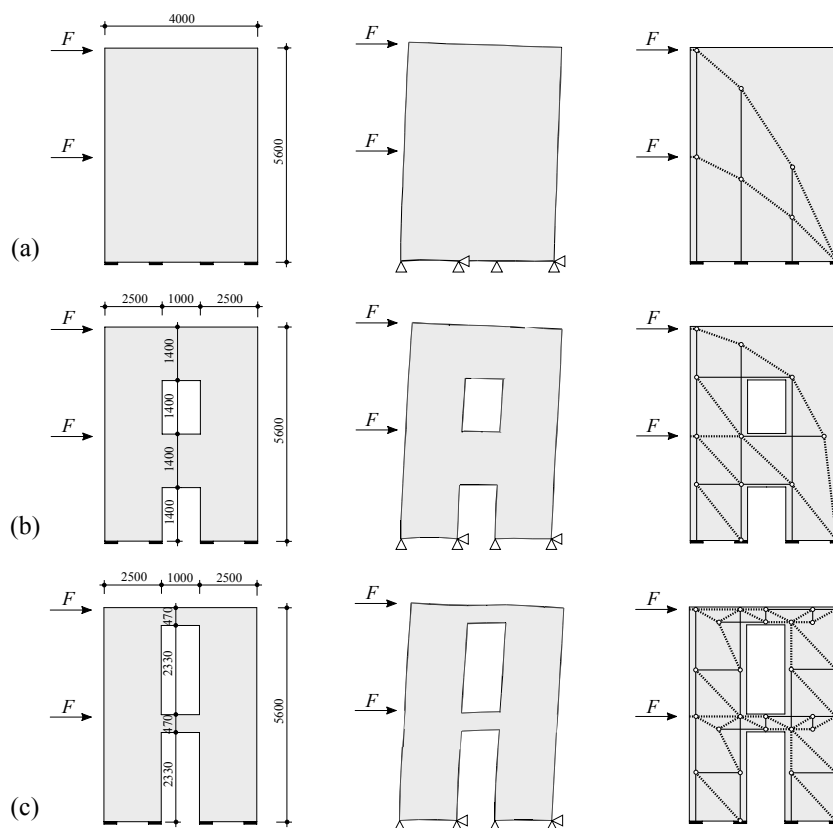


Figure 2.36: (a) *Comportement de la structure comme un simple voile*; (b) *modification du comportement en ajoutant des ouvertures*; (c) *comportement de la structure avec l'effet de poutre Vierendeel*.

2.5 Analyse de structures existantes

La méthode des champs de contraintes n'est pas uniquement une méthode pour l'analyse des structures nouvelles, mais peut être également un outil pour l'analyse des structures existantes. Etant donné que c'est une méthode basée sur le théorème statique de la théorie de la plasticité, la charge ultime d'une structure peut être calculée en recherchant le modèle de champs de contraintes qui maximise la résistance d'un élément étudié. Cette procédure peut exiger un temps considérable, de recherche d'un modèle de champs de contraintes approprié et de résolution des problèmes inhérents à la détermination de son équilibre.

Il existe malgré tout une autre voie pour définir la charge ultime d'une structure, c'est l'utilisation du théorème cinématique de la théorie de la plasticité, qui donne une borne supérieure à cette charge. L'utilisation du mécanisme pour la détermination de modèles des champs de contraintes a été proposée par Muttoni et al. [Muttoni97] et sur la base de cette proposition, une méthode de détermination de la charge ultime d'une structure se voit développée dans le cadre de cette thèse et lors d'une discussion sur des champs de contraintes [Breña07, Muttoni08]. Cette méthode considère l'utilisation d'un mécanisme licite qui minimise la charge de rupture d'un élément, à condition que la résistance du béton n'ait pas été atteinte. Cette résistance peut être contrôlée en employant un modèle de champs de contraintes qui sera réalisé uniquement dans les zones les plus critiques où une rupture du béton reste possible. Pour introduire la méthode, basée sur les deux théorèmes de la théorie de la plasticité, un élément

d'essai étudié par Zhu et al. [Zhu03] est utilisé. La figure 2.37 présente les deux échantillons T2 et T5 de cette série d'essais avec l'armature employée, les propriétés des matériaux, ainsi que les charges de rupture mesurées.

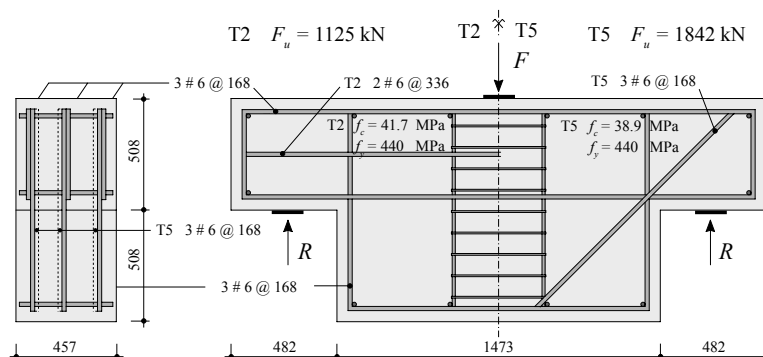


Figure 2.37: Corps d'essai T2 et T5 utilisés par Zhu et al. [Zhu01].

La rupture d'un élément selon cette méthode peut être atteinte soit par épuisement d'armature, ce qui peut être vérifié par un mécanisme, soit par le béton ce qui peut être vérifié par un modèle de champs de contraintes. Dans les zones très déformées où une résistance à la compression du béton f_{cp} ne peut être atteinte, une réduction de la résistance par un coefficient 0.6 peut être utilisée, [Muttoni90]. La figure 2.38 (a) présente l'échantillon T2, pour lequel un mécanisme qui minimise la charge de rupture, a été trouvé. La rotule qui peut être formée, uniquement dans une zone en compression, se trouve au-dessous de la zone d'introduction de la charge. La fissure qui est créée traverse toutes les armatures qui sont à l'écoulement et qui contribuent à la résistance ultime de l'élément. La figure 2.38 (b) montre un mécanisme similaire pour l'échantillon T5 qui met en œuvre une armature en diagonale. Si toutes les armatures qui traversent la fissure se trouvaient à l'écoulement, une borne supérieure de la charge ultime serait obtenue et les contraintes du béton seraient contrôlées par un champ de contraintes partiel dans la zone du mécanisme.

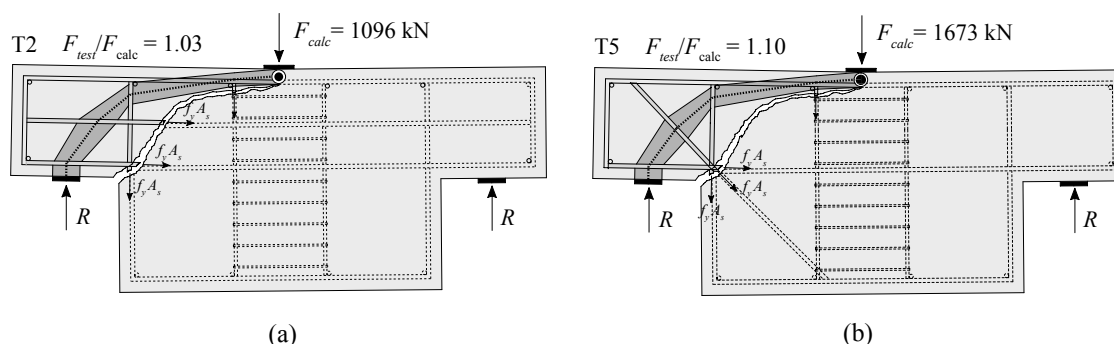


Figure 2.38: (a) et (b) Échantillons T2 et T5 et rupture par écoulement des armatures.

Cette méthode a été publiée dans la discussion d'une publication de Breña et Morrison [Breña07] dans la revue *ACI - Structural Journal*. Ces auteurs ont examiné l'utilisation de modèles de bielles-et-tirants inspirés par une analyse élastique non-fissurée. Les détails de l'armature proposés et testés lors des essais de Breña sont donnés dans figure 2.39. Les figures 2.39 (a) et (b) représentent une version de la géométrie de voile proposé par Schlaich et al.

[Schlaich87] et les figures 2.39 (c) et (d) représentent une version avec les ouvertures supplémentaires adaptée par Breña.

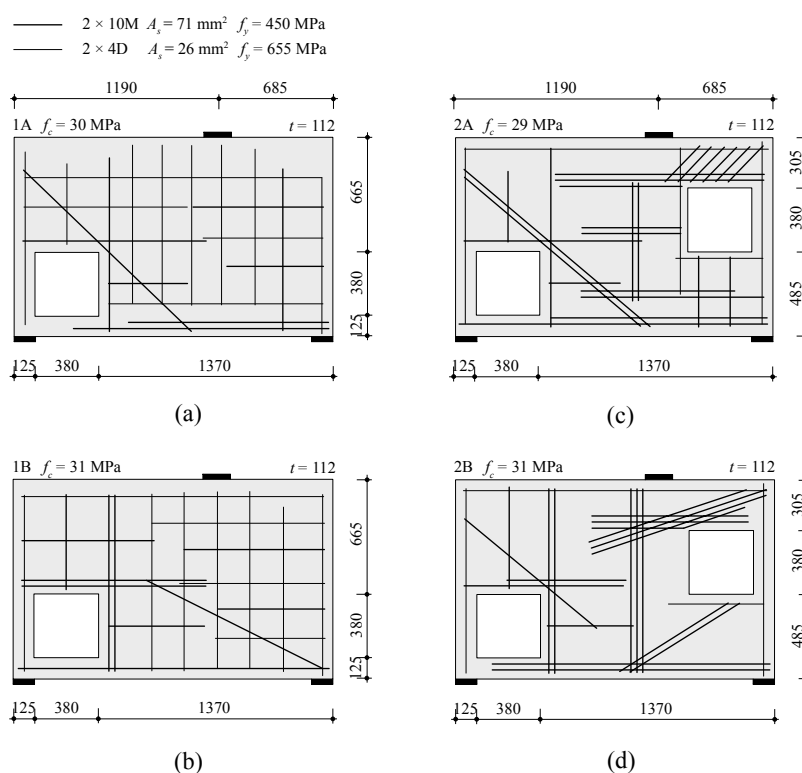


Figure 2.39: (a) et (b) Détail d'armature pour les éléments avec une ouverture; (c) et (d) détail d'armature pour les éléments avec deux ouvertures, [Breña07].

Les rapports de la charge ultime d'essai à la charge ultime calculée F_{test}/F_{calc} , obtenus par les auteurs de la publication, varient entre 1.72 et 3.19. Ces valeurs très conservatives illustrent les conséquences du choix d'un modèle de champs de contraintes qui est différent de celui qui se développe à la charge ultime de la structure, ce qui démontre que la recherche sur les topologies des champs de contraintes est très importante.

Ainsi qu'il a été indiqué auparavant, la recherche d'un modèle de bielles-et-tirants pour la détermination de la charge de rupture s'avère encore plus difficile, que la recherche d'un modèle similaire pour une nouvelle structure. La méthode proposée [Muttoni08] résout les problèmes (redistribution des efforts, armature minimale) qui s'imposent lors la recherche d'un modèle pour une structure existante, en considérant un mécanisme licite avec un champ de contraintes admissible dans les zones de mécanisme. Selon la théorie de la plasticité, une telle approche mène à la charge de rupture correspondant à une solution exacte.

Pour l'échantillon 1A de la figure 2.39 (a), une rupture par écoulement d'armature est trouvée. La disposition de la fissure du mécanisme, des armatures à l'écoulement et de la rotule pour laquelle la charge de rupture est trouvée sont données à la figure 2.40 (a). Le modèle prend en compte l'armature minimale disposée dans le modèle et le rapport F_{test}/F_{calc} obtenu est de 1.09. Pour le modèle 1B un mécanisme constitué de quatre rotules est déterminant. Par opposition au modèle 1A où toutes les armatures sont à l'écoulement, l'armature au-dessous de l'ouverture du modèle 1B reste élastique, conditionnée par l'équilibre avec les champs de compression au-

dessus de l'appui gauche. Le rapport de la charge ultime d'essai, à la charge ultime calculée F_{test}/F_{calc} est de 1.10.

Les modèles 2A et 2B avec deux ouvertures ont subi une rupture sur la partie droite de la structure. Les charges de rupture sont trouvées en déterminant les efforts dans les armatures, toutes à l'écoulement pour les deux mécanismes licites. Les deux champs de contraintes discontinus sont construits, sur la base desquels la position des nœuds et des bielles critiques peut être déterminée, dans les zones de corps libres du mécanisme. Les rapports de la charge ultime d'essai à la charge ultime calculée F_{test}/F_{calc} pour deux échantillons sont 1.04 pour l'échantillon 2A et 1.02 pour l'échantillon 2B.

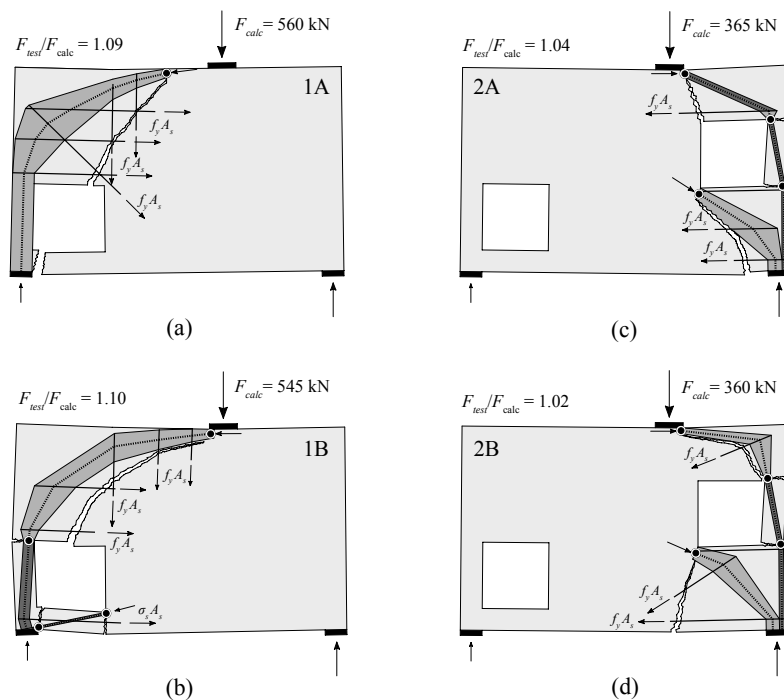


Figure 2.40: (a) et (b) Mécanismes déterminants et charges de rupture obtenues pour le modèle avec une ouverture; (c) et (d) mécanismes déterminants et charges de rupture obtenues pour le modèle avec deux ouvertures.

3. Critères et algorithmes d'optimisation des structures en béton armé

3.1 Introduction

Bien que le concept de base de la méthode des champs de contraintes soit relativement simple, il nécessite d'une certaine expérience pour être utilisé correctement et exige un travail conséquent pour toute nouvelle géométrie et toute variation dans la disposition des charges. Une automatisation du choix de la topologie des champs de contraintes s'avère donc utile pour résoudre ces difficultés.

L'objectif de ce chapitre est de décrire les critères selon lesquels le comportement des structures en béton armé peut être optimisé; il examine d'autre part l'applicabilité de ces critères pour la génération de modèles de bielles-et-tirants. Une description des algorithmes d'optimisation utilisés dans le cadre de cette recherche sera présentée à la fin de chapitre.

3.2 Description des critères d'optimisation des structures en béton armé

Les critères d'optimisation définissent les objectifs d'une optimisation. Dans le cas des structures en béton armé, ils peuvent conduire à des solutions (toutes optimales) très différentes. Afin de définir celles qui sont les plus appropriées pour générer des modèles de bielles-et-tirants, une analyse non-linéaire sera effectuée dans l'exemple qui suit. Cette analyse prend en compte la phase élastique du béton, sa phase de fissuration et d'ouverture des fissures, ainsi que le comportement élastique-parfaitement plastique d'armature et l'effet de "tension stiffening". La figure 3.1 montre un système hyperstatique composé de trois tirants de section identiques, liés par un corps rigide. Cette structure a été précédemment étudiée par Muttoni [Muttoni04] dans le cadre d'une étude de la redistribution des efforts dans les systèmes hyperstatiques. Les trois tirants ont un taux d'armature total ρ_{tot} de 4 %, et la charge de service est égale aux deux tiers de la charge ultime.

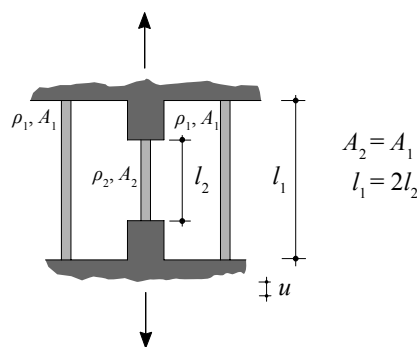


Figure 3.1: Système hyperstatique de trois tirants étudié dans [Muttoni04].

Evidemment, le comportement général de cette structure dépend fortement du taux d'armature des tirants. Si l'on admet que les tirants ont un comportement ductile, la charge ultime de la structure ne dépend que du taux d'armature total de la structure ρ_{tot} et non pas de la distribution de l'armature dans chaque tirant. En revanche, le comportement des tirants jusqu'à la rupture, dépend fortement de la distribution de l'armature entre eux. Considérons le comportement de la structure selon les critères suivants.

Critère (méthode) élastique: il nous mène à un dimensionnement de la structure selon son comportement élastique linéaire non-fissuré [Prager58]. Dans ce cas, l'armature des tirants de la structure étudiée est distribuée en fonction de la rigidité non-fissurée des tirants. Si les sections des tirants sont égales, le tirant le plus court, dont la rigidité est double de celles des tirants longs, doit être deux fois plus armé que les tirants longs ($\rho_2/\rho_1=2$).

Critère d'ouverture minimale des fissures: conduit à une distribution d'armature différente de celle de critère élastique. Le diagramme de la figure 3.2 (a) montre que la distribution optimale d'armature selon le critère d'ouverture minimale des fissures est obtenue pour un rapport entre l'armature du tirant court et celle des tirants longs $\rho_2/\rho_1 = 1.7$. Ce résultat est différent par rapport au résultat du critère élastique qui conduit à une ouverture de fissures plus grande dans les tirants longs. Le diagramme montre également qu'une distribution d'armature très différente de la distribution élastique conduit à l'écoulement de l'armature dans les tirants, après la première fissuration, ce qui pour effet de rendre l'ouverture des fissures plus importante (voir les zones grises dans les figures 3.2 (a) et (b)). Pour cette raison et pour assurer une ductilité suffisante de la structure, une armature minimale dans les tirants longs s'avère nécessaire.

Critère de rigidité maximale: il conduit à une minimisation du déplacement de la structure à l'état limite de service. Ce critère, dans la structure étudiée, conduit à une concentration de l'armature dans le tirant court ce qui permet une activation plus rapide de sa résistance, figure 3.2 (b). Etant donné que le déplacement de la structure est un critère d'aptitude au service, une armature minimale dans les tirants longs s'avère nécessaire. Les zones ombrées en gris dans le diagramme indiquent les rapports de taux d'armature pour lesquelles l'armature d'un des tirants est à l'écoulement après la première fissuration. Toutefois, cette méthode n'assure pas un état de fissuration satisfaisant pour ces tirants (longs), à cause de l'ouverture de leurs fissures qui reste importante, figure 3.2 (a).

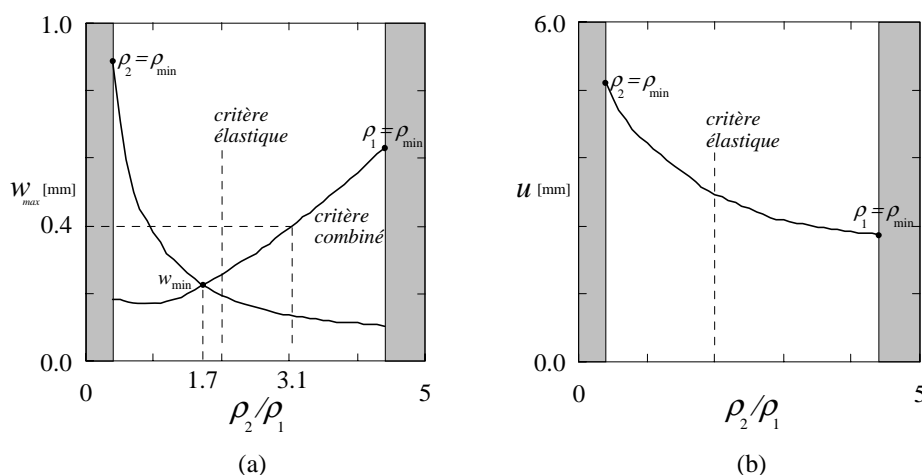


Figure 3.2: (a) Ouverture maximale des fissures en fonction du rapport entre les taux d'armature des tirants ρ_2/ρ_1 ; (b) déplacement de la structure en fonction du rapport entre les taux d'armature des tirants ρ_2/ρ_1 ($l_1=5.0$ m, $\rho_{tot}=4\%$, $A_1=A_2=0.09$ m², $\phi=14$ mm).

Critère de la quantité d'armature minimale: il mène à une minimisation de la quantité d'armature totale de la structure [Schlaich89].

Critère du volume de matériau minimal: il conduit pour sa part, à une minimisation du volume des matériaux [Hemp73]. Dans le cadre des structures en béton armé il est applicable pour des structures discrètes, dont les efforts dans les structures sont transmis soit par l'acier (tirants) soit par le béton (bielles).

Critère de l'énergie de déformation minimale: il conduit à une minimisation de l'énergie de déformation de la structure [Kupfer64].

Pour la structure étudiée, le critère de la quantité d'armature ou du volume de matériau conduit à la concentration de l'armature dans le tirant court ce qui a pour conséquence l'annulation de l'armature dans les tirants longs. Si l'on considère le critère de l'énergie de déformation, on obtient le même résultat. En utilisant ces deux critères, le tirant qui doit être plus armé, c'est à dire le tirant court, est choisie. Par contre l'état de la fissuration des tirants moins optimaux (tirants longs) est complètement négligé.

Une combinaison de critères est certainement possible; par exemple il est possible d'envisager un critère qui considère comme objectif la minimisation de la quantité d'armature ainsi qu'une limitation de l'ouverture des fissures afin de satisfaire à la contrainte de l'état limite de service. Dans le cas de l'exemple étudié, l'ouverture des fissures est limitée à 0.4 mm, selon ces deux critères une concentration de l'armature sera faite dans le tirant court tout en limitant l'ouverture des fissures dans les tirants longs à 0.4 mm. Le rapport entre les armatures sera égal dans ce cas à 3.1, figure 3.2 (a).

La figure 3.3 montre schématiquement la distribution des armatures selon les critères mentionnés en démontrant que des différents résultats sont obtenus en appliquant des différents critères.

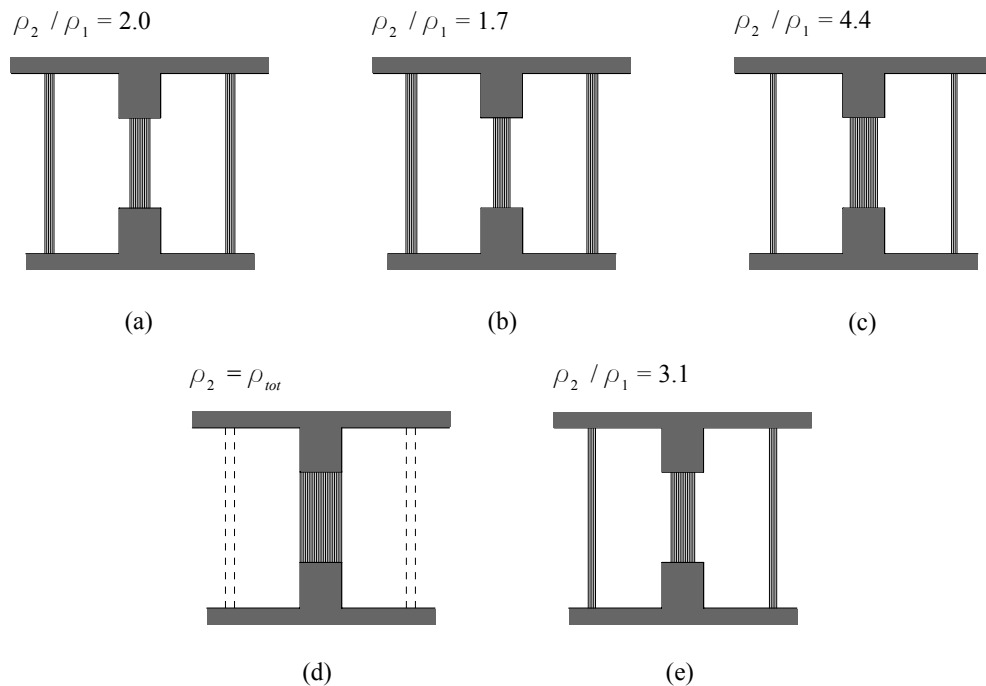


Figure 3.3: *Différentes disposition des barres d'armature selon les critères examinés: (a) élastique; (b) ouverture minimale des fissures; (c) rigidité maximale; (d) quantité d'armature minimale; (e) quantité d'armature minimale et ouverture de la fissure.*

Comme il a été mentionné précédemment, la distribution optimale de l'armature est un choix qui pourrait être basé sur un ou plusieurs critères. Par exemple, un critère pratique qui est souvent déterminant est le critère du coût, il prend en compte le prix des matériaux et leur mise en place. Toutefois aucune distribution d'armature ne permet de satisfaire tous les critères. De la même manière, si le rapport optimal des taux d'armature est trouvé, la distribution réelle des barres d'armature entre les tirants ne permet que rarement pas une mise en place satisfaisante des barres dans les tirants. La figure 3.4 montre la version de la figure 3.2 mais avec une réelle distribution des barres d'armature, calculée sur la base de taux d'armature et le nombre des barres effectivement nécessaires à placer dans les tirants, en tenant compte aussi de leur diamètre choisi égal à 14 mm.

Effectivement cette figure montre qu'on n'a pas un nombre infini de solutions possibles. Dans le cas d'un diamètre des barres égal à 14 mm, sept solutions (ou sept distributions de barres) sont possibles pour l'exemple étudié. Avec cet exemple on montre qu'on peut individualiser des groupes de solutions optimales de la figure 3.2 et qu'on n'a pas une solution optimale mais plusieurs.

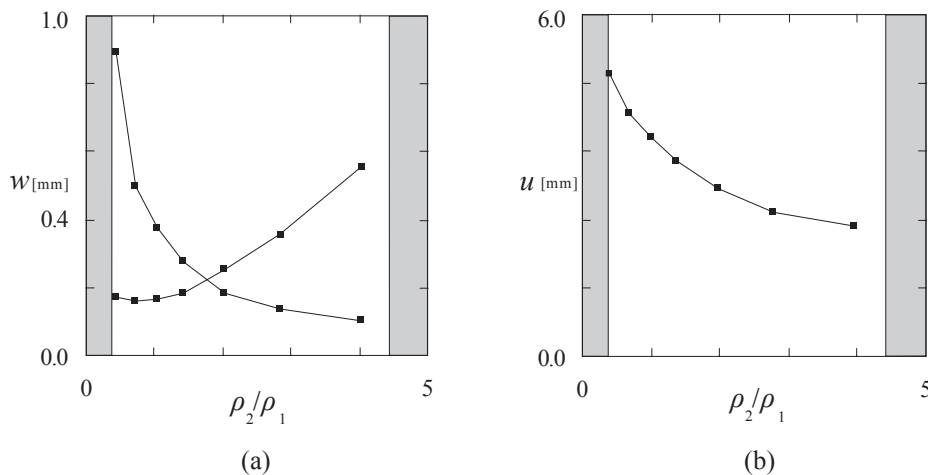


Figure 3.4: Système avec des barres d'armature discrète: (a) Ouverture maximale des fissures en fonction du rapport entre les taux d'armature des tirants ρ_2/ρ_1 ; (b) déplacement de la structure en fonction du rapport entre les taux d'armature des tirants ρ_2/ρ_1 ($l_1=5.0$ m, $\rho_{\text{tot}}=4\%$, $A_1=A_2=0.09$ m², $\phi=14$ mm).

Pour mieux comprendre la différence entre le critère de quantité d'armature et le volume des matériaux avec le critère d'énergie de déformation, l'exemple de la figure 3.5 sera examiné.

La structure considérée est sollicitée par une force axiale à mi-hauteur. Par conséquent, la partie inférieure est comprimée et la partie supérieure est tendue. Si l'on considère le critère de la quantité d'armature, la partie tendue sera négligée et seul subsiste la partie en béton, ainsi que l'illustre la figure 3.5 (b). Au contraire, si le volume de matériau est minimisé, la partie en compression sera abandonnée au profit de la partie en traction qui sera conservée, figure 3.5 (c).

Selon le critère de l'énergie de déformation minimale, la partie de la structure qui est conservée dépend des propriétés des matériaux, mais aussi de la longueur des éléments. C'est pourquoi, si la force est positionnée à mi-hauteur, la bielle comprimée qui se déforme moins que le tirant armé, est conservée, figure 3.5 (d). Cette configuration correspond au résultat qui considère le

critère de la quantité d'armature. Toutefois, si la force est déplacée à proximité de l'appui supérieur, le tirant se déforme moins que la bielle comprimée, il sera par conséquent conservé. Cette configuration correspond cette fois-ci au critère du volume de matériau, figure 3.5 (e).

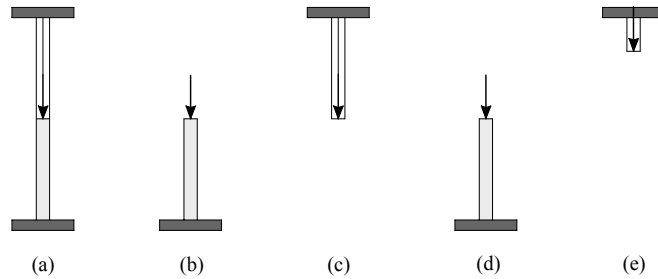


Figure 3.5: (a) Structure étudiée soumise à une force axiale à mi-hauteur; (b) solution optimale selon le critère de la quantité d'armature minimale; (c) optimum selon le critère du volume de matériau minimal; (d) optimum selon le critère d'énergie de déformation minimale; (e) optimum selon le critère d'énergie de déformation minimale, en considérant une position modifiée de la charge.

3.2.1 Optimisation des structures en béton armé

L'exemple de la figure 3.1, avec lequel est introduit le problème d'optimisation des structures en béton armé, révèle que ce problème peut être subdivisé en trois groupes de problèmes:

- Optimisation de la forme structurale
- Optimisation du modèle structural
- Optimisation du comportement structural

La figure 3.6 décrit cette subdivision:

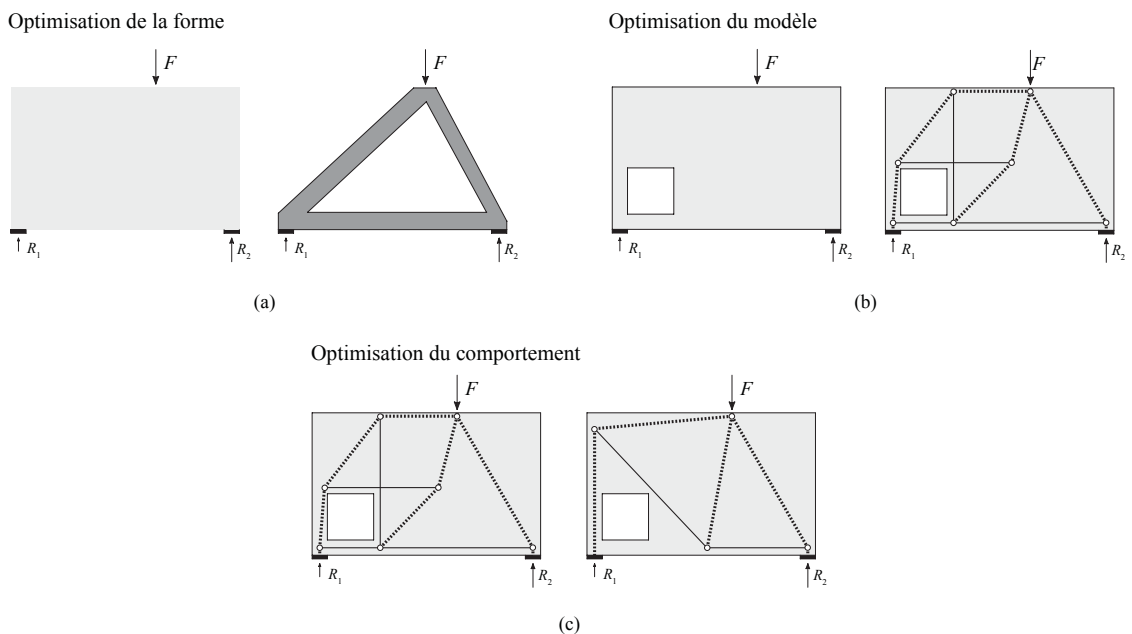


Figure 3.6: Optimisation des structures en béton armé: (a) optimisation de la forme structurale; (b) optimisation du modèle structural; (c) optimisation du comportement structural.

L'optimisation de la forme structurale représente l'optimisation des éléments structuraux, de façon à les rendre les plus efficaces possibles en minimisant la quantité de matériau utilisée, figure 3.6 (a). Cette optimisation peut trouver son importance pour les ponts en béton armé pour lesquels la quantité de béton peut jouer un rôle très important pour leur comportement structural.

Par contre, souvent pour les structures en béton armé la forme d'élément est déjà prédéterminée et certaines discontinuités géométriques peuvent exister pour différentes raisons. Dans ce cas, on peut parler d'optimisation du modèle structural (modèle de bielles-et-tirants) avec lequel les charges sont transmises jusqu'aux appuis, figure 3.6 (b). Ce type d'optimisation s'attache également à la position nécessaire d'armatures dans le même but.

Finalement, on peut optimiser le comportement de la structure en se basant sur des propriétés structurales comme l'ouverture des fissures, le déplacement de la structure etc. Dans ce but, on peut étudier le modèle (de bielles-et-tirants) optimal ou la combinaison de modèles la plus adaptée, figure 3.6 (c). Bien évidemment l'exemple de la figure 3.3 représente ce type d'optimisation parce qu'on optimise le comportement de la structure en sachant déjà que les efforts doivent passer par les tirants.

3.3 Critères d'optimalité et génération des modèles bielles-et-tirants

Cette thèse a comme un des sujets l'optimisation des modèles avec lesquelles les charges sont transmises jusqu'aux appuis (la géométrie de la structure est donnée) et elle traite d'une part l'optimisation du comportement des structures. Les critères précédemment traités ont été présentés pour des cas de structures simples, où le flux des efforts peut être facilement déterminé. L'applicabilité de ces critères lors de la détermination de modèles de bielles-et-tirants doit encore être démontrée. En effet, pour une géométrie et une charge définies, le nombre de topologies de modèles de bielles-et-tirants est infini. De ce fait, les critères d'optimisation doivent permettre la sélection d'un ou plusieurs modèles qui s'avèrent être les plus favorables par rapport au critère sélectionné.

3.3.1 Critère (méthode) élastique

En considérant la faible résistance et la fragilité du béton à la traction, Prager a proposé de renforcer les structures en béton par de l'armature positionnée selon les directions principales de traction [Prager59]. Une telle solution est admissible d'un point de vue statique et demeure compatible avec le champ de déplacement de la structure.

En suivant cette considération, Leonhardt [Leonhardt75] et ensuite Schlaich ont suggéré le critère élastique comme étant le critère préférentiel pour le développement des modèles bielles-et-tirants [Schlaich87]. Selon cette proposition, les bielles et tirants doivent être orientés en direction des efforts élastiques, figure 3.7.

En considérant cette méthode, le comportement de la structure à l'état limite de service est normalement satisfaisant. Toutefois, les charges ne sont pas portées de la manière la plus efficace. En effet, le fait de négliger la fissuration, la position et la quantité d'armature disponible, conduit à des champs de contraintes éloignés de ceux qui considèrent la redistribution des efforts après la fissuration du béton. L'exemple présenté à la figure 3.8 (a) qui

considère une structure soumise à une charge concentrée disposée à différentes positions sur la hauteur de la structure, démontre cette tendance.

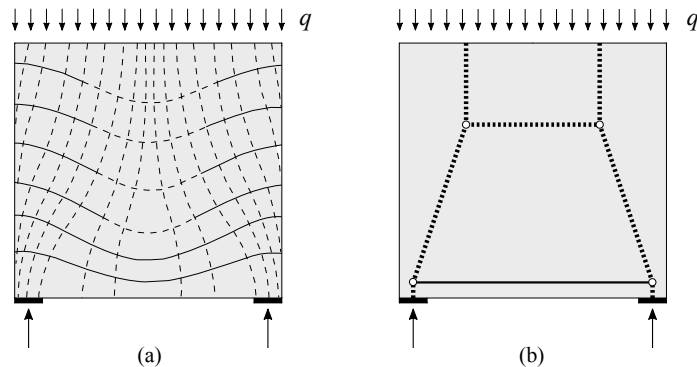


Figure 3.7: (a) Efforts élastiques; (b) modèle de bielles-et-tirants correspondant selon Schlaich [Schlaich 87].

Par principe, la méthode élastique considère la rigidité du béton armé comme égale dans toutes les directions. C'est pourquoi pour la structure de la figure 3.8, la charge appliquée est portée par le modèle d'appui direct (modèle I) ainsi que par le modèle de suspension (modèle II). En revanche, une analyse non-linéaire qui prend en compte la résistance à la traction du béton nulle, montre que la participation du modèle d'appui direct est négligeable dans le cas d'une position très basse de la charge (d petit). Dans ce cas, les bielles en compression prennent une forte inclinaison et ne sont plus assez rigides par rapport au tirant de suspension, figure 3.8 (b). Au contraire, la participation du modèle de suspension devient négligeable lorsque la charge est placée dans la partie supérieure de la structure (d grand). La rigidité du tirant de suspension est dans ce cas faible par rapport à la rigidité des bielles de compression.

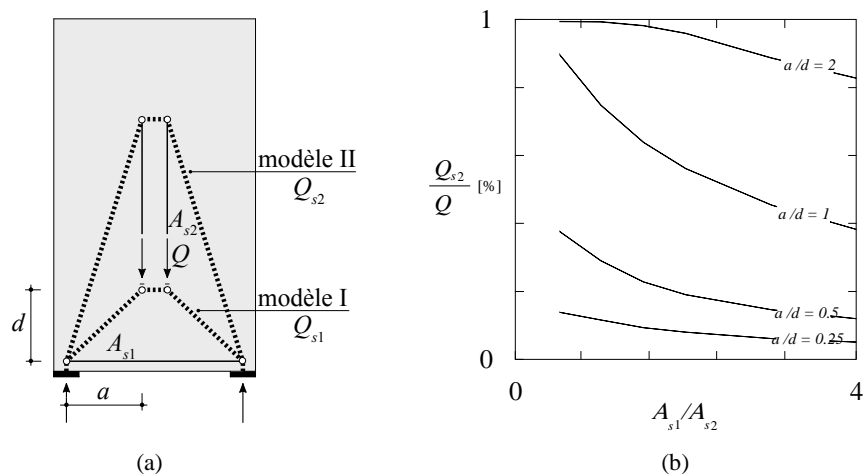


Figure 3.8: (a) Transmission de la charge par appui direct (modèle I) et par suspension (modèle II); (b) diagramme de participation du modèle II en fonction du rapport entre les taux d'armature transversal et longitudinal A_{s1}/A_{s2} et de la position de la charge.

Cette analyse permet de conclure que l'utilisation du critère (méthode) élastique pour la génération des modèles bielles-et-tirants conduit à un nombre limité de modèles qui peuvent reprendre la charge appliquée. Malgré cela, une approche plus réaliste qui prend en compte la fissuration du béton est envisageable.

3.3.2 Critère d'ouverture minimale des fissures

Le critère d'ouverture minimale des fissures assure un comportement satisfaisant de la structure à l'état limite de service. Étant donné qu'une augmentation de quantité d'armature totale dans la structure minimise l'ouverture des fissures, il s'avère que ce critère porte en lui-même un paradoxe. En effet, pour développer les modèles de bielles-et-tirants il faut diminuer le nombre de tirants possibles ce qui est souvent en opposition à une augmentation générale de la quantité d'armature totale dans la structure.

L'utilisation de ce critère reste envisageable si la quantité totale de matériau ou d'armature est limitée. De cette façon l'armature est distribuée de la manière la plus efficace tout en conservant une quantité totale d'armature constante. Ce critère conduit à concentrer l'armature au droit des fissures les plus importantes. Cependant, le choix du positionnement le plus efficace possible ne conduit pas toujours à des modèles de bielles-et-tirants et de champs de contraintes simples.

Par ailleurs, d'autres questions restent ouvertes. Premièrement: quelle quantité d'armature faut-il prescrire? Deuxièmement, comment considérer l'interaction entre l'ouverture des fissures et le diamètre de l'armature, en tenant compte du fait qu'on n'utilise généralement pas les mêmes diamètres d'armature dans toute la structure. De plus, la modélisation de l'ouverture des fissures ne peut se faire qu'à l'aide d'éléments finis non-linéaires, ce qui limite fortement l'application de ce critère.

3.3.3 Critère de rigidité maximale

Le critère de rigidité maximale, de même que le critère d'ouverture des fissures, peut conduire à la maximisation de la quantité totale d'armature et rendre ainsi son application impossible. C'est pourquoi des limitations, comme la quantité d'armature totale, doivent être introduites. De cette manière, l'armature à disposition est répartie d'une façon qui permet d'obtenir un déplacement minimal de la structure. On peut donc considérer ce critère comme une recherche de la topologie du modèle de bielles-et-tirants la plus rigide.

L'exemple de la figure 3.9 (a) montre le modèle de bielles-et-tirants pour un voile soumis à deux forces concentrées. Si l'on considère que la quantité totale d'armature doit rester constante, le modèle qui maximise le bras de levier est plus rigide, et conduit par conséquent à un déplacement plus faible. Cet exemple révèle qu'une application du critère de rigidité maximale est possible sous certaines conditions.

Une autre application possible de ce critère peut consister à imposer une valeur de contrainte dans l'armature. En respectant cette condition et en ayant la même contrainte dans le tirant de la figure 3.9, le modèle avec le plus grand bras de levier (x le plus petit) sera sélectionné car son déplacement, obtenue avec une analyse non-linéaire, s'avère être minimal, figure 3.9 (b).

Bien que le critère de déplacement semble conduire à un état limite de service satisfaisant, il ne peut répondre en tous points aux conditions imposées. En effet, il a été démontré dans l'exemple de la figure 3.1, que la disposition de toute l'armature dans le tirant court minimise le déplacement de la structure, mais conduit par ailleurs à une ouverture des fissures inacceptable dans les tirants longs et ne peut par conséquent satisfaire à l'état limite de service. Ce critère est aussi équivalent au critère d'énergie de déformation minimale défini ci-après.

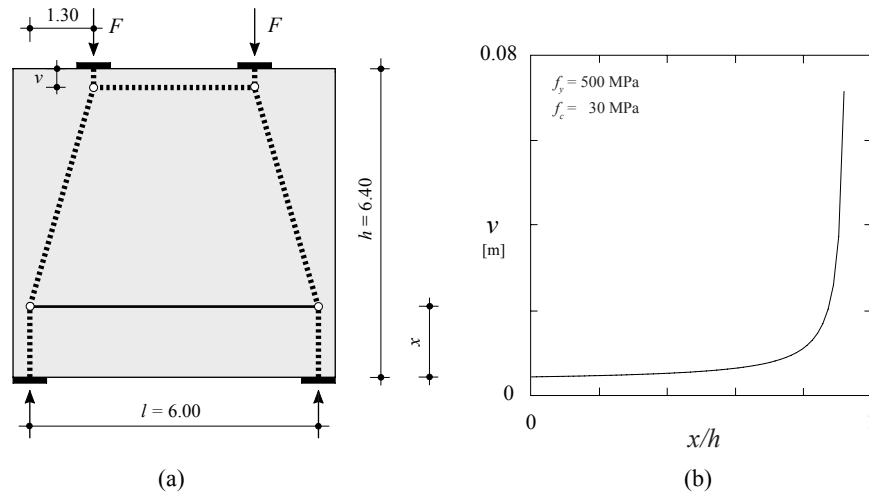


Figure 3.9: (a) *Modèle de bielles-et-tirants pour un voile soumis à deux forces concentrées*; (b) *déplacement de la structure en fonction de la position du tirant.*

3.3.4 Critère d'énergie de déformation minimale

Le critère d'énergie de déformation minimale a été appliqué pour la première fois dans les modèles de bielles-et-tirants par Kupfer [Kupfer64] pour généraliser le treillis de Morsch [Morsch08]. Par la suite, Schlaich proposa d'utiliser ce critère pour sélectionner un modèle bielles-et-tirants parmi plusieurs variantes possibles [Schlaich87]. Une formulation simplifiée, dérivée du principe d'énergie de déformation complémentaire minimale:

$$\sum N_j l_j \varepsilon_j = \min \quad (3.1)$$

a été proposé alors, en considérant un comportement élastique linéaire des tirants et des bielles après la fissuration [Schlaich87]. Si l'on néglige l'énergie de déformation du béton, (les déformations dans les bielles étant plus petites que dans les tirants), ce critère devient identique au critère de la quantité d'armature qui peut être décrit comme:

$$\sum A_j l_j = \frac{N_j l_j}{f_y} = \min \quad (3.2)$$

Etant donné que pour satisfaire le critère de la quantité d'armature, les armatures doivent être utilisées de la manière la plus efficace, elles sont sollicitées avec une valeur limite égale à f_y . Finalement, les deux critères s'avèrent être en fonction de l'effort dans la barre, et de sa longueur.

Le défaut du critère d'énergie de déformation, lors de la sélection des modèles de bielles-et-tirants, est qu'il néglige complètement la fissuration du béton résultant d'une redistribution des efforts. Ce critère est acceptable dans la plupart des structures isostatiques, car les redistributions des efforts y sont limitées et la fissuration est facilement contrôlable par une armature minimale. Par contre, il devient inadéquat dans les structures hyperstatiques lorsque les redistributions des efforts deviennent importantes, comme le démontre l'exemple de la figure 3.1. Si la structure étudiée est hyperstatique, ce critère permet uniquement de sélectionner le modèle isostatique le plus efficace du point de vue de la rigidité. Il néglige le fait que le modèle obtenu n'est qu'une partie du modèle final, qui s'avère être bien plus complet, et qui respecte également le champ de déplacement de la structure, ainsi que l'état de fissuration.

Pour illustrer les variantes des modèles bielles-et-tirants qu'il est possible d'obtenir avec ce critère dans le cas d'une structure hyperstatique, un voile symétrique sur trois appuis sera examiné, ainsi que l'illustre la figure 3.10. Le voile est chargé par une force concentrée sur chaque portée.

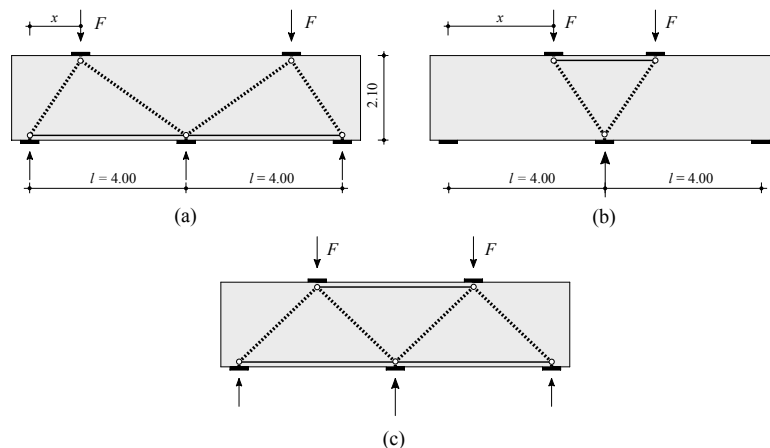


Figure 3.10: (a) *Modèle optimal selon le critère d'énergie de déformation minimale lorsque les charges sont positionnées à proximité des appuis extérieurs*; (b) *modèle optimal lorsque les charges sont positionnées à proximité de l'appui central*; (c) *modèle optimal lorsque les charges sont positionnées à mi-travée*.

Selon le critère d'énergie de déformation, si les deux forces sont positionnées à proximité des appuis extérieurs, le modèle de bielles-et-tirants optimal correspond à une transmission de la charge comme si la structure était composée de deux voiles séparés, figure 3.10 (a). Au contraire si les deux forces sont positionnées à proximité de l'appui central, le système devient un système de balance, figure 3.10 (b). La solution optimale qui combine les deux modèles ne peut être obtenue que lorsque les forces sont positionnées à mi-travée, figure 3.10 (c).

Le diagramme de la figure 3.11 montre l'énergie de déformation des deux modèles de la figure 3.10 (a) et (b) calculée sur la base de (3.1). Il montre que le modèle de la figure 3.10 (b) est prépondérant lors du positionnement de la charge vers l'appui central et qu'il devient négligeable lors du positionnement de la charge vers les appuis extérieurs. Au contraire, le modèle d'appui direct est important pour toutes les positions de la charge, bien qu'il ne soit pas le principal lors du positionnement de la charge près de l'appui central.

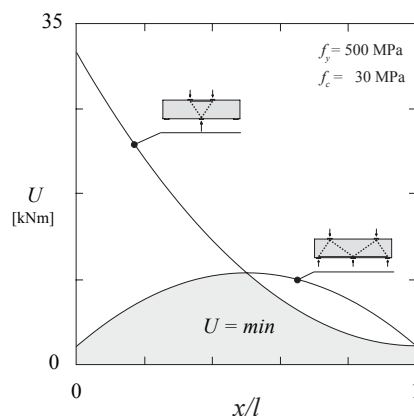


Figure 3.11: *Energie de déformation de deux modèles bielles-et-tirants, figure 3.10 (a) et (b).*

Même si chacun des deux modèles de base s'avère être le plus efficace selon le positionnement des charges, ils négligent complètement le champ de déplacement et la fissuration du voile. Evidemment, le modèle optimal est une synthèse de ces deux modèles; le niveau de participation de chaque modèle dépend de la position des charges et du niveau de fissuration. Dans les chapitres 4 et 5 une solution possible pour résoudre ce problème sera proposée.

3.4 Algorithmes d'optimisation

La satisfaction des critères d'optimisation peut être atteinte grâce à des algorithmes d'optimisation. Un algorithme d'optimisation est une procédure de recherche et de comparaison de solutions possibles admissibles, jusqu'à ce qu'une solution optimale soit trouvée. Les critères d'optimisation sont décrits par fonctions objectifs qui sont relatives aux variables de décision.

Aucun algorithme d'optimisation n'est universel. Il est au contraire développé pour trouver des solutions à une famille de problèmes très spécifique. Une bonne compréhension des algorithmes est donc indispensable pour choisir l'algorithme le mieux adapté à la résolution d'un problème donné.

Dans le cadre de cette recherche, plusieurs algorithmes classiques d'optimisation sont utilisés. Ces algorithmes sont brièvement introduits ci-après. Ils appartiennent aux groupes des algorithmes d'optimisation linéaire, non-linéaire et heuristique.

3.4.1 Optimisation linéaire

L'optimisation linéaire a pour but de trouver la variable de décision qui maximise ou minimise la fonction objectif linéaire (ou linéarisée) en respectant les contraintes, elles aussi linéaires. Tous les points qui satisferont ces contraintes deviennent des solutions admissibles pour la fonction objectif. Dans l'optimisation linéaire, les hypothèses comme la divisibilité, la linéarité, l'additivité et la non-négativité, sont appliquées. En effet on utilise des nombres réels, des fonctions linéaires, des variables dont les effets peuvent être additionnés, ainsi que des variables de décision qui ne peuvent pas prendre de valeurs négatives. Ces hypothèses limitent le nombre de problèmes pour lesquels l'optimisation linéaire peut être utilisée. Malgré tout dans la plupart de ces cas de figure, ces limites peuvent être contournées, comme pour le cas de l'optimisation linéaire en nombres entiers.

Le concept d'optimisation linéaire s'explique facilement par une représentation géométrique. La figure 3.12. (a) montre le cas de maximisation d'une fonction objectif sur une région de solutions admissibles bornées par les contraintes $x, y \geq 0$ et $2x + 3y \leq 6$. En déplaçant verticalement la fonction objectif $f = x + 3y$, on trouve le point maximal pour lequel il existe une intersection de la fonction objectif et de la région de solutions admissibles. Si on cherche le minimum de cette fonction objectif, une solution banale peut être trouvée, $x = y = 0$.

La figure 3.12 (b) montre cette fois-ci le cas de minimisation de la même fonction objectif mais uniquement sur une région bornée sur les contraintes $x, y \geq 0$ et $2x + 3y \geq 6$. En déplaçant verticalement la fonction objectif on trouve le point minimal pour lequel existe une intersection de la fonction objectif et de la région des solutions admissibles. Ce point représente le minimum de la fonction objectif.

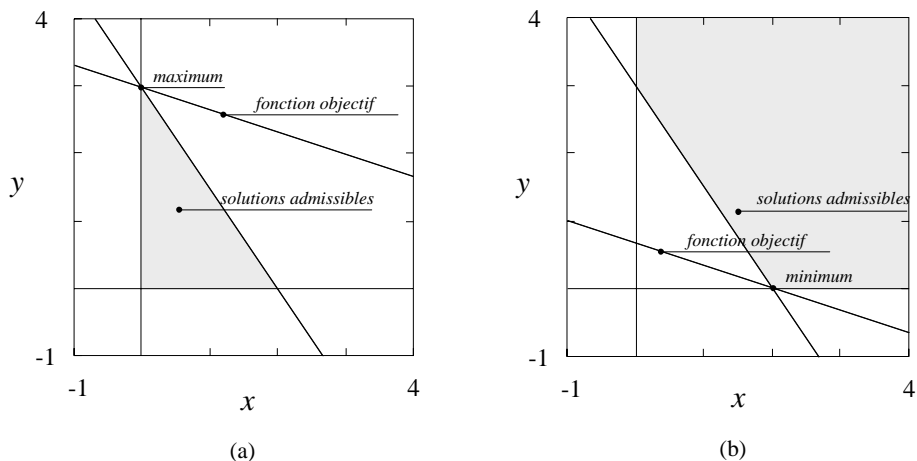


Figure 3.12: Solution graphique d'optimisation linéaire; (a) problème de maximisation; (b) problème de minimisation.

En termes mathématiques, le problème d'optimisation linéaire peut être décrit par la formule standard:

$$\min \mathbf{c}^T \mathbf{x} \tag{3.3}$$

En satisfaisant les contraintes:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \tag{3.4}$$

$$\mathbf{x} \geq 0 \tag{3.5}$$

Où \mathbf{x} est le vecteur des variables de décisions, \mathbf{c} le vecteur des coefficients de poids, \mathbf{A} et \mathbf{b} représentent respectivement la matrice et le vecteur des coefficients de contraintes. A la place des égalités dans les équations des contraintes, il est possible d'utiliser des inégalités. En effet, par introduction d'un vecteur, ces inégalités peuvent être facilement transformées en conditions d'égalité. En conclusion, il existe deux situations pour lesquelles l'optimum n'est pas obtenu; d'une part si la région des solutions admissibles est vide ou d'autre part si, elle n'est pas bornée.

D'un point de vue géométrique, les conditions forment un polyèdre convexe qui délimite une région de solutions admissibles. La région est définie par un nombre de demi-espaces dans l'espace Euclidien à n-dimensions. Des méthodes efficaces pour résoudre les problèmes d'optimisation linéaires ont été proposées dès la première partie du XX^e siècle par Kantorovich. Par la suite, la méthode du simplexe a été développée par Dantzig [Dantzig63]. D'autres algorithmes ont été proposés, basés sur les méthodes de l'ellipsoïde et du point intérieur.

Méthode du simplexe

La méthode du simplexe est la méthode de base d'optimisation linéaire [Dantzig63]. Puisque la solution optimale d'un problème linéaire se trouve sur le polyèdre borné qui présente une région de solutions admissibles, la méthode du simplexe se base sur le déplacement d'une solution à l'autre jusqu'à ce que la solution optimale soit trouvée. Le déplacement est fait en cherchant le sommet qui soit le mieux adapté pour la fonction objectif, tout en restant sur la surface du polyèdre, voir la figure 3.13. Etant donné que plusieurs sommets peuvent être considérés comme étant les meilleurs, on se doit de les soumettre à une règle de sélection.

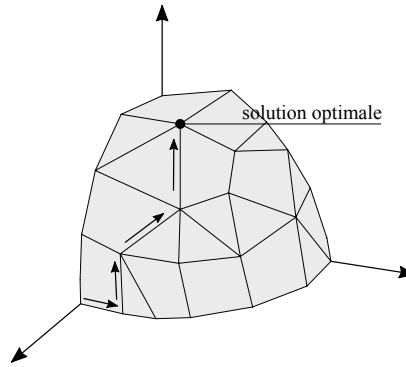


Figure 3.13: Polyèdre borné par les conditions d'optimisation.

3.4.2 Optimisation non-linéaire

On parle d'optimisation non-linéaire si la fonction objectif, qui doit être minimisée ou maximisée, est non-linéaire. La formule générale d'un problème d'optimisation non-linéaire est la suivante:

$$\begin{aligned} \min \mathbf{f}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{x} \in \mathfrak{R}^n \end{aligned} \quad (3.6)$$

En satisfaisant les contraintes:

$$\begin{aligned} \mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq 0 \\ \mathbf{h}(\mathbf{x}) = 0 \end{aligned} \quad (3.7)$$

Où les fonctions des contraintes sont des fonctions linéaires ou non-linéaires.

Si les hypothèses de continuité, de différentiabilité et de déterminisme sont satisfaites il s'agit d'optimisation différentiable. L'hypothèse de continuité admet que la fonction objectif et les fonctions des contraintes sont des fonctions continues. L'hypothèse de différentiabilité admet qu'elles sont des fonctions différentiables et l'hypothèse de déterminisme consiste à ignorer les erreurs éventuelles dans les données du problème [Bierlaire05]. La méthode de Newton et la méthode de quasi-Newton sont les bases de l'optimisation différentiable. Puisque dans le cadre de cette thèse un algorithme basé sur la méthode de quasi-Newton est utilisé, ces deux méthodes vont être brièvement introduites.

La méthode de Newton et quasi-Newton

La méthode de Newton permet de trouver la racine d'une fonction continue et différentiable [Dennis96, Bierlaire05]. Si cette méthode est généralisée au cas multidimensionnel, elle s'appelle la méthode de Newton-Raphson. L'idée de base de la méthode de Newton consiste à remplacer la fonction initiale par une fonction plus simple, linéaire. Cette nouvelle fonction est tangente à la fonction initiale au point de départ, et son zéro devient la première approximation du zéro de la fonction initiale, voir figure 3.14 (a). Par la suite ce zéro approximé sera utilisé afin de trouver le point de passage de la nouvelle tangente, qui est calculée par la dérivée première de la fonction initiale, jusqu'à ce que le zéro de la fonction initiale soit trouvé. On peut écrire la fonction du zéro approximé par la méthode de Newton dans l'itération $k+1$ comme:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \tag{3.8}$$

Etant donné que la dérivation est parfois difficile, ou exige un temps de calcul considérable, une approximation de la dérivée peut être obtenue par différences finies. Par le biais de cette méthode, appelée aussi la méthode quasi-Newton, la fonction initiale est remplacée par une fonction linéaire, comme l'illustre la figure 3.14 (b). La courbe représentative de cette fonction linéaire coupe la fonction initiale aux points $f(x_k)$ et $f(x_{k+s})$ en créant une approximation de la tangente.

Afin de limiter le temps de calcul, une sécante peut être utilisée par la méthode quasi-Newton, qui à la place de point $f(x_{k+s})$, couperait la courbe représentative de la fonction au point calculé précédemment, $f(x_{k-1})$. L'approximation du zéro de la fonction initiale faite par la méthode de quasi-Newton sécante dans l'itération $k+1$ est donné par:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{a_k} \tag{3.9}$$

Où $a(x_k)$ est:

$$a_k = \frac{f(x_{k-1}) - f(x_k)}{x_{k-1} - x_k} \tag{3.10}$$

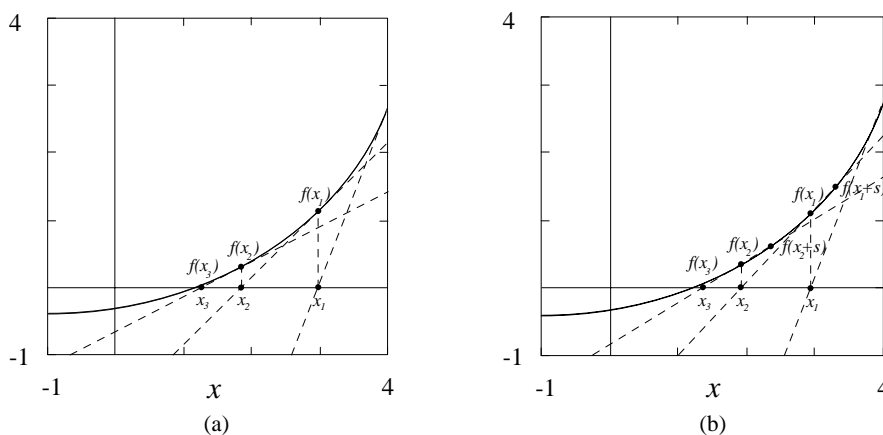


Figure 3.14: (a) Méthode de Newton; (b) méthode de quasi-Newton.

Puisque que l'on vient de démontrer que ces deux méthodes peuvent être utilisées pour trouver le zéro d'une fonction, on peut les utiliser pour trouver le minimum d'une fonction objectif. Ceci présente un problème d'optimisation; pour trouver le minimum d'une fonction continue et différentiable deux conditions s'avèrent nécessaires: tout d'abord si le x^* est un minimum local de cette fonction, il est nécessaire que la dérivée première de la fonction au point x^* soit nulle, $f'(x^*) = 0$ et que la dérivée deuxième $f''(x^*)$ soit semi-définie positive.

On peut écrire l'approximation du minimum de la fonction par la méthode de Newton à l'itération $k+1$ comme:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f'(x_k)}{f''(x_k)} \tag{3.11}$$

Cette équation présente la base de toutes les variations de l'algorithme de Newton pour optimiser des fonctions continues et différentiables sans contraintes et avec contraintes.

Méthode quasi-Newton dans l'optimisation

Dans le paragraphe précédant la méthode de Newton et celle de quasi-Newton ont été présentées pour la résolution et la minimisation d'une fonction d'une variable, mais dans la pratique actuelle les fonctions à résoudre ou à optimiser ont plusieurs variables. Cette dernière constatation rendra la méthode quasi-Newton extrêmement utile car elle n'exige pas le calcul des dérivées partielles.

Puisque dans le cadre de cette recherche un algorithme appliquant la méthode de quasi-Newton sécante est utilisé, les bases de cet algorithme sont expliquées. D'abord l'optimisation d'une fonction à plusieurs variables exige le calcul de la matrice des dérivées premières $\nabla f(\mathbf{x})$ et de la matrice des dérivées deuxièmes $\nabla^2 f(\mathbf{x})$. Malgré le fait que le calcul de la matrice des dérivées premières soit une tâche relativement simple, la matrice des dérivées deuxièmes peut être approchée à l'aide d'une mise à jour de Broyden [Broyden65, Bierlaire05]:

$$\mathbf{H}_k = \mathbf{H}_{k-1} + \frac{(\mathbf{y}_{k-1} - \mathbf{H}_{k-1} \mathbf{d}_{k-1}) \mathbf{d}_{k-1}^T}{\mathbf{d}_{k-1}^T \mathbf{d}_{k-1}} \quad (3.12)$$

avec

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_{k-1} &= \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k-1} \\ \mathbf{y}_{k-1} &= \nabla f(\mathbf{x}_k) - \nabla f(\mathbf{x}_{k-1}) \end{aligned} \quad (3.13)$$

Une fois l'approximation de la dérivée deuxième trouvée, la nouvelle direction de la recherche de minimum sera calculée par:

$$\mathbf{d}_k = -\mathbf{H}_k^{-1} \nabla f(\mathbf{x}_k) \quad (3.14)$$

Ce qui équivaut à la deuxième partie de l'équation (3.11). L'équation (3.14) permet de calculer le prochain vecteur des variables \mathbf{x}_{k+1} :

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \alpha_k \mathbf{d}_k \quad (3.15)$$

où le coefficient α_k représente un multiplicateur de la recherche linéaire qui aide à la convergence du problème. Si la dérivée première de la fonction au point \mathbf{x}_{k+1} est nulle le minimum de la fonction est trouvé et l'algorithme est arrêté, dans le cas contraire l'itération suivante sera exécutée.

3.4.3 Optimisation heuristique et métaheuristique

Les méthodes traditionnelles d'optimisation assurent l'exactitude de la solution, avec une convergence des algorithmes mathématiquement prouvée. Malgré leur déterminisme, dans les problèmes d'ingénierie, l'utilisation de ces méthodes est souvent difficile. Soit elles exigent un temps de calcul exponentiel, soit la modélisation du problème par ces méthodes en termes mathématiques n'est pas possible. Pour contourner ces problèmes, toute une série d'algorithmes, appelés algorithmes heuristiques ont été créés. Ces algorithmes sont plutôt basés sur l'expérience et l'intuition de l'expert et sont faits pour résoudre des problèmes spécifiques [Pearl84].

Dans un vaste groupe de problèmes d'optimisation, les solutions qui arrivent à être une approximation de l'optimum s'avèrent tout à fait acceptables. Dans ce cas, les algorithmes heuristiques trouvent parfaitement leur domaine d'application. Il arrive parfois que ces algorithmes soient parfaitement précis et trouvent les solutions exactes, mais tant que leur exactitude n'est pas parfaitement établie, ils gardent la dénomination d'heuristiques.

L'exemple d'un algorithme heuristique, relativement simple, est présenté dans ce qui suit. Considérons un nombre fini de points par lesquels doit passer une ligne polygonale. Quelle est la plus petite longueur possible de cette ligne? Ce problème d'optimisation complexe peut être résolu par un algorithme heuristique qui, à partir du point initial, détermine le point suivant le plus proche, jusqu'à ce que tous les points soient utilisés. La solution finale ne s'avère pas être la solution optimale mais demeure néanmoins une bonne approximation.

Les algorithmes heuristiques sont utilisés dans la plupart des cas, pour les problèmes difficiles, alors qu'ils demeurent beaucoup moins efficaces lorsqu'il s'agit de problèmes simples. Bien que certains d'entre eux soient faits pour des problèmes spécifiques, un certain nombre de ces algorithmes peuvent être appliqués à plusieurs problèmes [Spall03]. On les appelle: les algorithmes méta heuristiques. Les algorithmes les plus connus de ce groupe sont: les algorithmes génétiques, le recuit simulé (simulated annealing), la recherche du tabou (tabu search, PGSL) [Raphael03]. En conclusion, ces algorithmes s'avèrent également adaptés pour l'optimisation multi-objectif où l'on chercherait à minimaliser plusieurs fonctions objectifs.

4. Génération des modèles de bielles-et-tirants

4.1 Introduction

La génération automatique des modèles bielles-et-tirants et des modèles de champs de contraintes reste un des défis les plus importants pour la diffusion de la méthode des champs de contraintes dans la pratique actuelle. L'automatisation du choix doit aider les ingénieurs n'ayant qu'une expérience limitée avec l'utilisation de la méthode à répondre à la question la plus fréquente qu'ils sont amenés à rencontrer, à savoir: quel est le modèle le plus approprié pour une structure avec une géométrie nouvelle?

La discrétisation des structures par des éléments linéaires ou des éléments barres est une des approches les plus favorisée par les chercheurs pour résoudre le problème posé, en effet, les éléments linéaires ou les éléments barres peuvent reprendre des efforts de traction et de compression. La discrétisation d'une structure est faite par la disposition d'un certain nombre de points, qui sont reliés entre eux par les éléments barres. De cette manière, chaque combinaison de barres représente une trajectoire possible des efforts dans la structure, pour une charge donnée.

L'approche en question a été proposée dans les années '60 pour l'optimisation des formes de structures en acier. L'un des travaux les plus importants qui soit dans ce domaine est présenté par Dorn et al. [Dorn64], qui ont utilisé cette approche pour déterminer la forme optimale de la structure en partant d'un treillis initial. La structure qu'ils ont étudiée est un treillis de pont simplement appuyé et discrétisé comme le présente la figure 4.1.

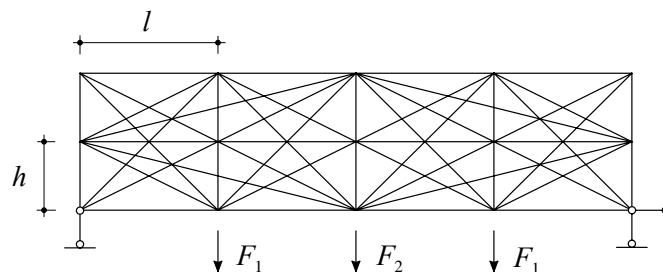


Figure 4.1: Treillis initial proposé par Dorn et al. en 1964 [Dorn64].

Le critère d'optimisation qu'ils ont adopté a été le critère de poids (volume) du matériau utilisé, qui peut être décrit comme la somme des poids des barres de la solution initiale ou bien:

$$W = \rho \sum_{j=1}^n A_j l_j = \min \quad (4.1)$$

En respectant les conditions d'équilibre dans les nœuds, grâce à des méthodes d'optimisation linéaires, le treillis comprenant le poids minimal de matériau peut être sélectionné.

Ils ont également montré comment la forme optimale change en fonction de la considération des différents rapports entre les deux systèmes de forces qui sollicitent le treillis F_1 et F_2 , ainsi que pour différents rapports de hauteur et de longueur des éléments de la structure, figure 4.2.

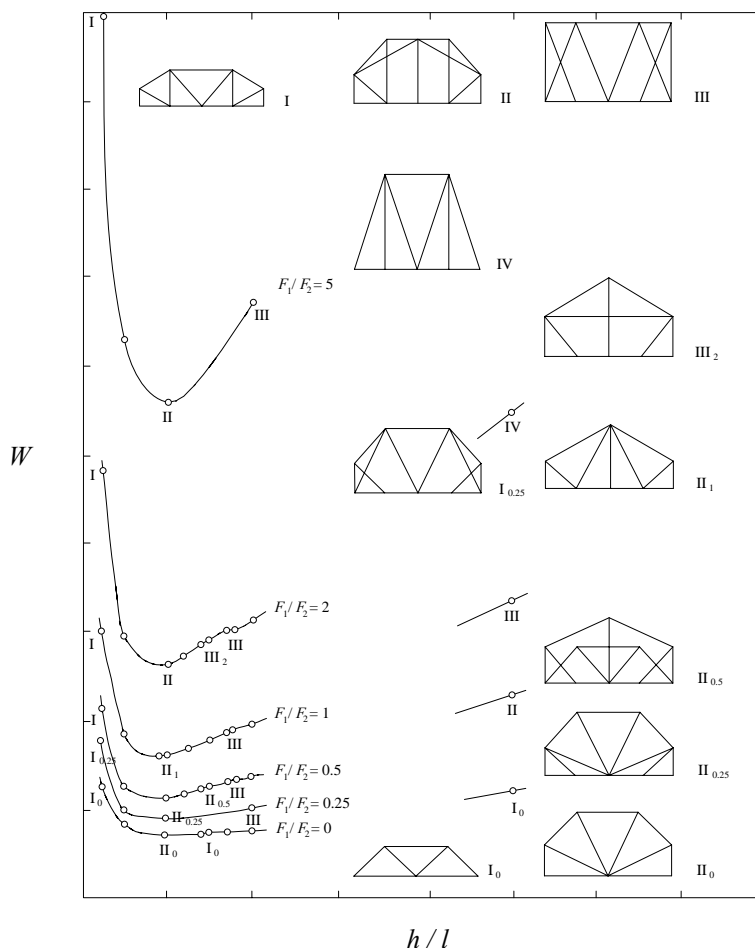


Figure 4.2: Solutions optimales selon le critère du poids (volume) de matériau pour différents rapports des charges et différents rapports de la hauteur et de la longueur des éléments de la structure, [Dorn64].

Malgré le fait que les premiers travaux effectués dans le domaine de l’optimisation de treillis aient été appliqués à des structures en acier, l’approche a pu trouver son utilité pour la génération des modèles bielles-et-tirants destiné au béton structural. En utilisant cette approche pour les modèles bielles-et-tirants, d’importantes contributions ont été apportées par Kumar [Kumar78], Anderheggen et Schlaich [Anderheggen90], Xie et Steven [Xie94], Biondini et al. [Biondini96] et Ali et White [Ali01]. Les principales contributions de ces auteurs sont présentées dans le texte qui suit.

4.2 Génération des modèles de bielles-et-tirants

Kumar a appliqué l’idée de treillis initial pour la génération des modèles treillis, en expliquant de cette manière la transmission des efforts dans un voile en béton armé avec ouvertures [Kumar78]. Néanmoins le treillis initial qu’il a utilisé n’a pas permis la connectivité totale entre les points, ce qui limitait le nombre de bielles-et-tirants possibles. Le critère d’optimisation utilisé était le critère de l’énergie de déformation. Un des voiles considéré par Kumar est présenté à la figure 4.3.

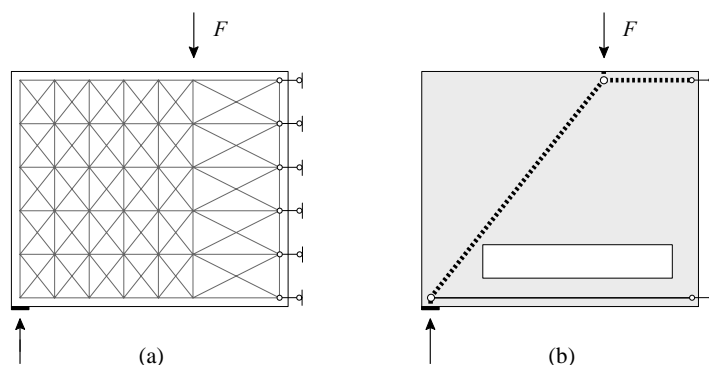


Figure 4.3: (a) Treillis initial proposé par Kumar; (b) solution optimale selon le critère de l'énergie de déformation, [Kumar78].

Dans la ligne des travaux réalisés par Kumar, Schlaich a utilisé le treillis initial, constitué de plusieurs modèles bielles-et-tirants présélectionnés, afin d'obtenir le modèle optimal [Schlaich89]. Les critères qu'il a utilisés sont: le critère (méthode) élastique, le critère plastique et le critère élastique-plastique. Selon le critère élastique, les rigidités des bielles en compression sont estimées et une distribution des efforts élastiques est calculée. Le critère plastique consiste en une minimisation de la quantité d'armature grâce aux méthodes d'optimisation linéaire, en permettant la redistribution totale des efforts entre les modèles bielles-et-tirants. En revanche, le critère élastique-plastique permet seulement une redistribution limitée des efforts, entre les modèles présélectionnés en partant d'une solution élastique.

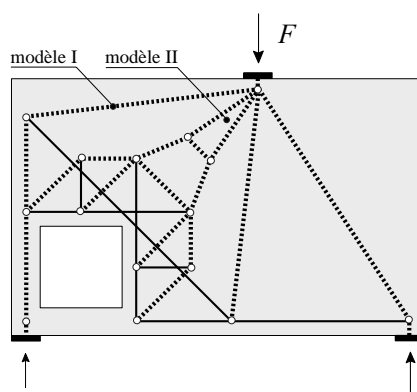


Figure 4.4: Treillis constitué par plusieurs modèles bielles-et-tirants [Schlaich87] et étudié par Schlaich [Schlaich89].

La figure 4.4 présente les modèles bielles-et-tirants pour un voile avec ouverture qui sont utilisés pour l'optimisation linéaire de la structure en appliquant les trois critères susmentionnés [Schlaich89]. Le premier modèle considère l'utilisation d'une armature inclinée pour dévier les efforts autour de l'ouverture carrée alors que le deuxième utilise les barres en direction horizontale et verticale, dans le même but.

En utilisant l'approche du treillis initial, Xie et Steven ont appliqué un algorithme heuristique pour générer les modèles bielles-et-tirants [Xie94]. Cet algorithme est basé sur un calcul élastique du treillis initial pour effectuer par la suite une suppression graduelle des barres dont les efforts intérieurs sont faibles.

Biondini et al. ont utilisé le treillis initial possédant une connectivité totale des points pour appliquer le critère de volume du matériau [Biondini96]. Dans le but de limiter une déviation exagérée de la direction des bielles et des tirants par rapport à une solution élastique, un coefficient de correction d'optimalité a été utilisé. Ce coefficient tient également compte de la longueur des barres en privilégiant celles de moindre longueur. La figure 4.5 présente un voile chargé au coin et appuyé au bord inférieur. On parvient à une première solution optimale à l'aide du critère de volume du matériau alors que l'on obtient la deuxième solution, plus pratique, en utilisant le coefficient de correction proposé [Biondini96].

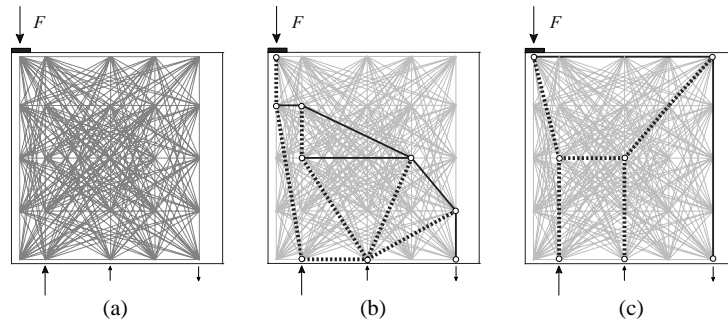


Figure 4.5: (a) Treillis initial proposé par Biondini; (b) solution optimale selon le critère du volume du matériau; (c) solution optimale obtenue en appliquant le coefficient de correction [Biondini96].

Ali et White, ont utilisé pour leurs travaux le critère d'optimisation qui considère la quantité d'armature totale dans le modèle final [Ali97, Ali01]. Etant donné qu'un tel critère peut avoir pour effet l'obtention de tirants dans des directions peu pratiques, ils ont proposé un coefficient de correction qui donne plus d'importance aux barres de direction horizontale et verticale tout en diminuant leur longueur. De cette manière, les possibilités pour ces barres de subsister dans le modèle final sont augmentées.

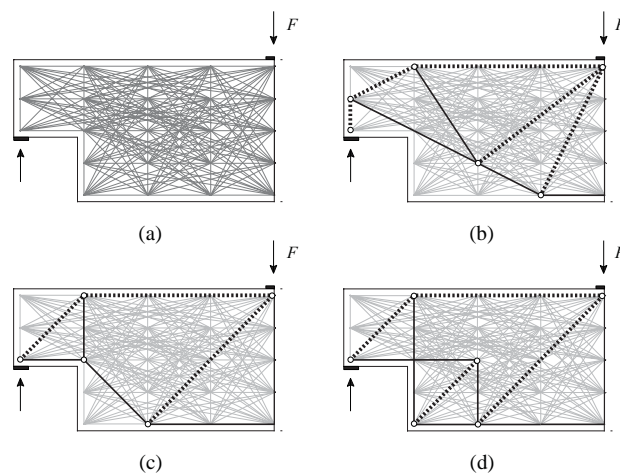


Figure 4.6: (a) Treillis initial pour la zone d'appui proposé par Ali et White; (b) solution optimale selon le critère de la quantité d'armature; (c) solution optimale obtenue en utilisant le coefficient de correction $\beta = 0.5$; (d) solution optimale obtenue en utilisant le coefficient de correction $\beta = 0.1$ [Ali01].

La figure 4.6 (a) montre la zone d'appui traitée par Ali [Ali97]. Le modèle de bielles-et-tirants illustré à la figure 4.6 (b) est obtenu en considérant le critère de la quantité d'armature. Puisqu'une telle solution contient des tirants dans des directions qui s'avèrent être peu pratiques, le coefficient de correction de la longueur des barres en direction horizontale et verticale égal à 0.5 est utilisé, voir figure 4.6 (c). La solution obtenue maintient uniquement un tirant incliné (à 45 degrés), ce tirant peut être annulé en utilisant le coefficient de correction égal à 0.1, figure 4.6 (d).

Ali et White ont également introduit un coefficient qui prend en compte la solution élastique du treillis initial et la quantité de redistribution qui est permise lors de l'optimisation, voir l'illustration de la figure 4.15. Ce coefficient doit tenir compte d'une capacité limitée du béton à développer des déformations plastiques. Le coefficient proposé est équivalent au critère élastique-plastique de Schlaich [Schlaich89].

4.3 Génération par l'optimisation linéaire

Une partie de l'étude sur le développement des algorithmes pour la génération des modèles de bielles-et-tirants dans le cadre de cette thèse est dédiée aux applications des méthodes d'optimisation linéaire. Les bases nécessaires pour la compréhension de ces méthodes sont présentées dans le chapitre 3, alors que certaines applications relatives au domaine de la génération automatique des modèles bielles-et-tirants ont déjà été examinées dans les deux paragraphes précédents. Une définition du problème d'optimisation linéaire, qui est développée dans le travail de recherche ainsi que du programme de calcul qui est développé, sera présentée par la suite.

4.3.1 Définition du problème

Les efforts dans une structure sollicitée par des charges extérieures et son poids propre, sont distribués de manière que son énergie de déformation est minimale. En tenant compte de ce fait, le critère de l'énergie de déformation peut être appliqué comme objectif pour la génération de modèles de bielles-et-tirants.

Si la section de chaque barre est constante, dans la forme la plus générale, le critère de l'énergie de déformation peut être écrit pour tout le système comme suit:

$$\sum_{j=1}^{2n} \sigma_j \varepsilon_j V_j = \min \quad (4.2)$$

où V_j est le volume d'une barre dans le système et $2n$ est le nombre de barres. La formule démontre qu'avec une diminution des efforts dans les barres, l'énergie de déformation diminue. Puisque le but de l'optimisation du treillis initial est de déterminer le modèle de bielles-et-tirants ayant l'énergie de déformation minimale parmi tous les modèles possibles, une limitation des efforts dans les barres se doit d'être introduite. Si la formule (4.2) est écrite sous une forme différente en utilisant les efforts normaux dans les barres N_j , on obtient:

$$\sum_{j=1}^{2n} \frac{\sigma_j}{E_j} N_j l_j = \min \quad (4.3)$$

Etant donné que pour différents modèles isostatiques le produit $N_j l_j / E_j$ pour chaque barre du modèle isostatique reste constant et dans le but de comparer l'énergie de déformation des différents modèles de bielles-et-tirants, tous les éléments doivent être sollicités à leur valeur admissible ou limite. Cette valeur limite peut être la résistance du béton en compression pour les bielles et la résistance de l'acier structural pour les tirants. Cette conclusion correspond à la conclusion du paragraphe 3.3.4 où il est déduit que le critère de la quantité d'armature correspond au critère de l'énergie de déformation des tirants, avec les tirants sollicités à une valeur limite prédéterminée.

En conclusion le critère de génération des modèles bielles-et-tirants basé sur l'énergie de déformation peut être défini comme suit:

$$\sum_{j=1}^{2n} \frac{f_j}{E_j} N_j l_j = \min \quad (4.4)$$

où f_j et E_j sont la résistance à la compression et le module d'élasticité du béton dans le cas d'une bielle ou de l'acier (résistance à la traction), dans le cas d'un tirant. La fonction objectif (4.4) est soumise à certaines contraintes qui représentent l'équilibre dans les nœuds du treillis initial. Les équations d'équilibre peuvent être écrites sous une forme matricielle comme:

$$\mathbf{H} \cdot \mathbf{N} = \mathbf{Q} \quad (4.5)$$

où la matrice \mathbf{H} représente la matrice d'équilibre global dans les nœuds du treillis initial en direction horizontale et verticale. Elle est de rang $2m \times 2n$, où m est le nombre de nœuds et $2n$ est le nombre de barres. Le vecteur \mathbf{N} est le vecteur des efforts dans les barres, de rang $2n$. Le vecteur \mathbf{Q} , de rang de $2m$, est le vecteur des charges dans les nœuds. Etant donné que les réactions d'appui sont inconnues, les équations d'équilibre dans les nœuds d'appui doivent être exclues des contraintes. Pour satisfaire les conditions d'optimisation linéaire, toutes les valeurs du vecteur \mathbf{N} sont nécessairement supérieures ou égales à zéro.

$$\{N_j\} \geq 0 \quad (4.6)$$

4.3.2 Formation des équations d'équilibre

Étant donné qu'une des conditions de l'optimisation linéaire est que le vecteur des variables de décision soit semi-défini positif, les valeurs du vecteur \mathbf{N} ne peuvent pas prendre de valeurs négatives. Etant donné qu'inévitablement certaines barres dans le modèle bielles-et-tirants sont sollicitées en compression, et possèdent donc une valeur d'effort intérieur négative $N_j < 0$, le signe négatif doit être directement introduit dans la matrice d'équilibre de la structure \mathbf{H} .

Pour permettre l'introduction du signe négatif dans la matrice d'équilibre, il est nécessaire d'avoir deux barres superposées et non pas une seule. De cette manière un système de n barres peut reprendre les efforts de traction et l'autre système des n barres les efforts de compression. La figure 4.7 montre comment en fonction de la position de la charge, une barre est active alors que l'autre, sur une même position, reste inactive.

Etant donné que dans un treillis de base avec une connectivité totale de m points le nombre de barres n est égal à:

$$n = \frac{m(m-1)}{2} \quad (4.7)$$

avec l'introduction des barres superposées, ce nombre est doublé ou $2n = m(m-1)$. En pratique ce nombre est inférieur car dans le cas de l'utilisation d'une maille régulière, les barres longues qui se superposent aux barres courtes sur toute leur longueur peuvent être supprimées.

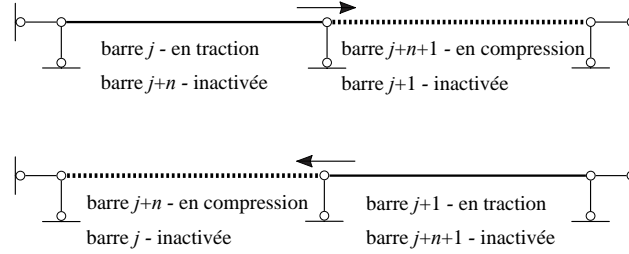


Figure 4.7: *Système de superposition des barres pour reprendre les efforts de traction et les efforts de compression.*

La figure 4.8 montre comment les barres en traction et en compression sont prises en considération dans la matrice d'équilibre des barres dans les coordonnées cartésiennes. Comme le vecteur \mathbf{N} doit être positif, les barres en compression sont transformées en barres en traction en changeant la matrice d'équilibre de la barre.

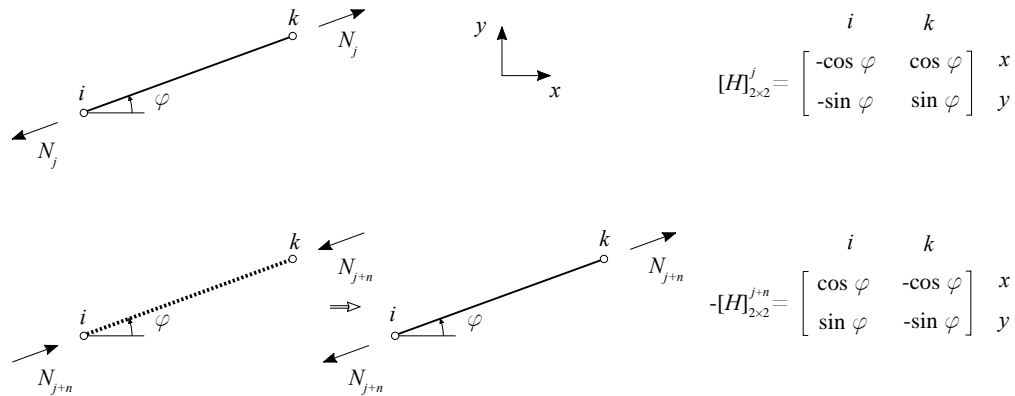


Figure 4.8: *Barre pour reprendre l'effort de traction et la barre pour reprendre l'effort de compression avec les matrices d'équilibre correspondantes;*

Les matrices d'équilibre sont rassemblées pour toutes les barres pour créer la matrice d'équilibre global \mathbf{H} . Comme dans les nœuds les efforts des barres agissent avec une direction opposée, les matrices de transformation de la figure 4.8 sont prises avec un signe négatif. Les équations d'équilibre ou les contraintes d'optimisation pour le critère d'optimisation (4.4) peuvent maintenant être écrites comme:

$$\mathbf{H}^+ \cdot \mathbf{N}^+ + \mathbf{H}^- \cdot \mathbf{N}^- = \mathbf{Q} \quad (4.8)$$

où \mathbf{H}^+ est la matrice d'équilibre global pour les barres en traction, elle possède un rang de $2m \times n$. Le vecteur \mathbf{N}^+ est le vecteur des barres en traction avec un rang égal à n . La matrice \mathbf{H}^- est la matrice d'équilibre global pour les barres en compression avec un rang $2m \times n$. Le vecteur \mathbf{N}^- est le vecteur des barres en compression avec un rang n . On obtient les relations suivantes:

$$\mathbf{H}^- = -\mathbf{H}^+$$

$$\mathbf{H} = [H_{ij}^+ \mid H_{ij}^-] \quad (4.9)$$

$$\mathbf{N} = \left\{ \begin{array}{c} N_j^+ \\ N_j^- \end{array} \right\}$$

En respectant le critère d'optimisation (4.4) ainsi que les contraintes d'optimisation (4.6) et (4.8), le problème d'optimisation linéaire est défini. Le résultat final de cette optimisation est qu'une majorité des barres est annulée avec des efforts nuls. Dans les barres non-annulées, les efforts de compression et de traction maintiennent l'équilibre des nœuds du modèle de bielles-et-tirants final.

4.3.3 Correction d'optimalité

Si l'on considère le positionnement des tirants, le critère de l'énergie de déformation peut conduire à des solutions qui s'avèrent peu adaptées. Bien que la solution obtenue ait une énergie de déformation minimale, les résultats ne coïncident pas complètement avec les solutions classiques. Il est donc possible d'obtenir des tirants dans des directions semblant au premier abord peu pratiques.

Une correction du critère d'optimalité (4.4) doit être effectuée afin de favoriser les tirants dans des directions horizontales et verticales, qui sont plus pratiques. Cette correction est obtenue en multipliant la longueur des éléments dans les directions souhaitées, par un coefficient β inférieur à 1, [Ali01]. Ce coefficient ne s'applique qu'aux barres en traction. La formulation du critère d'optimalité pour la génération des modèles bielles-et-tirants peut donc être écrite comme:

$$\sum_{j=1}^{2n} \beta_j \frac{f_j}{E_j} N_j l_j = \min \quad (4.10)$$

Puisque les armatures placées dans des directions diagonales s'avèrent pratiques dans certaines zones de déviation d'efforts, ce même coefficient peut également être appliqué aux tirants placés à 45 degrés. Un tel tirant, positionné en diagonale reste extrêmement efficace pour la déviation d'efforts et le contrôle de la fissuration, particulièrement pour les ouvertures proches de bielles en compression, figure 4.4.

En utilisant le coefficient de correction β , une solution plus adéquate avec une énergie de déformation légèrement supérieure à l'énergie de déformation minimale est obtenue. Ce coefficient ne provoque pas de déviations importantes d'optimum, mais il contribue surtout à sélectionner les tirants horizontaux et verticaux, plutôt que des tirants en direction oblique. Le coefficient $\beta = 0.1$ a été utilisé pour les exemples présentés dans ce chapitre.

4.3.4 Exemples d'application

Il existe une autre manière de contrôler des résultats des algorithmes de génération des modèles bielles-et-tirants, c'est la comparaison directe avec les solutions classiques. Certains exemples vérifiés dans le cadre de la recherche sont tirés de [Muttoni97].

L'angle de cadre sollicité par le moment de flexion est présenté à la figure 4.9. La première solution propose l'utilisation d'une armature en diagonale et une déviation simple des champs de compression, figure 4.9 (a). Comme cette solution implique l'utilisation d'un nœud avec les trois tirants, qui est très peu pratique et difficile à réaliser, une déviation double est envisagée, ainsi que le montre la figure 4.9 (b). Le modèle obtenu avec le critère de l'énergie de déformation est présenté à la figure 4.9 (c). Pour éviter les armatures placées dans des directions non-orthogonales, le coefficient de correction $\beta = 0.1$ est utilisé, le résultat obtenu à la figure 4.9 (d) qui correspond donc à la solution classique.

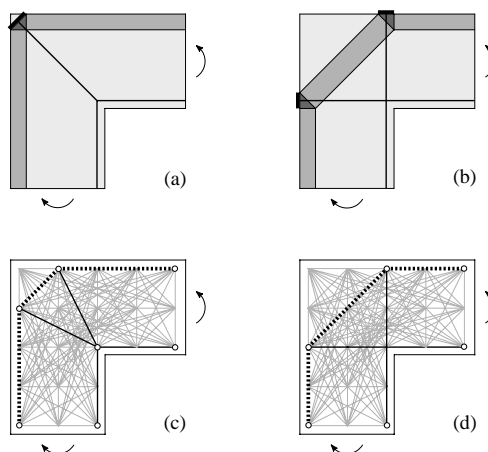


Figure 4.9: (a) et (b) Modèles de champs de contraintes pour l'angle de cadre [Muttoni97] (c) modèle de bielles-et-tirants obtenu avec le critère de génération 4.4; (d) modèle de bielles-et-tirants obtenu avec l'application du coefficient de correction $\beta = 0.1$.

Les figures 4.10 (a) et 4.10 (b) montrent un élément avec un changement de section et les champs de contraintes qui correspondent à une sollicitation en flexion simple [Muttoni97].

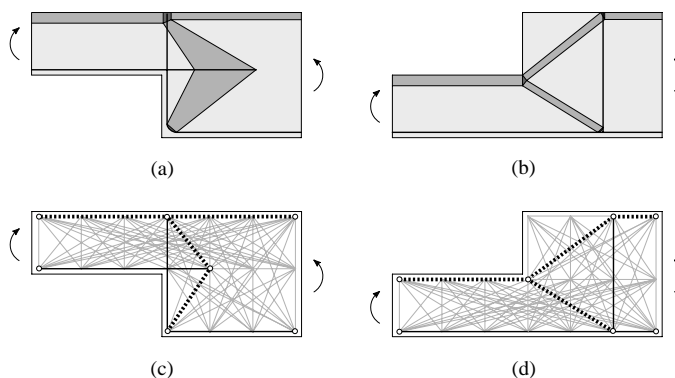


Figure 4.10: (a) et (b) Modèles de champs de contraintes pour l'élément avec changement de section [Muttoni97]; (c) et (d) modèles de bielles-et-tirants obtenus avec le critère de génération 4.10 en utilisant le coefficient $\beta = 0.1$.

L'élément est modélisé par un treillis initial et les modèles de bielles-et-tirants sont générés avec le critère de l'énergie de déformation en appliquant le coefficient de correction $\beta = 0.1$. La figure 4.10 (c) et la figure 4.10 (d) montrent les modèles bielles-et-tirants obtenus. Ils correspondent aux solutions classiques de la méthode des champs de contraintes.

La figure 4.11 (a) illustre le modèle de bielles-et-tirants pour la poutre avec les ouvertures proposées par Muttoni et al. [Muttoni97]. La poutre est modélisée par un treillis initial et le modèle final obtenu est présenté à la figure 4.11 (b). Comme dans les cas précédents, le coefficient de correction $\beta = 0.1$ a été appliqué. Le modèle obtenu correspond bien au modèle théorique.

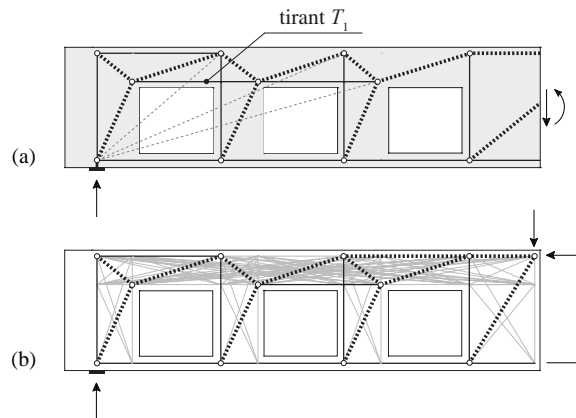


Figure 4.11: (a) *Modèle de bielles-et-tirants pour la poutre avec ouvertures proposé par Muttoni et al. [Muttoni97]; (b) modèle de bielles-et-tirants obtenu avec le critère de génération (4.10) en utilisant le coefficient $\beta = 0.1$.*

4.4 Problèmes particuliers

Bien que l'approche de génération des modèles bielles-et-tirants sur la base d'un treillis initial soit largement utilisée par les chercheurs, une analyse générale de l'applicabilité cette approche manque toujours. Tout d'abord l'approche est faite pour les structures en treillis, ce n'est qu'ensuite qu'une application pour les modèles bielles-et-tirants peut-être trouvée, puisque l'analogie entre elles n'est pas directe, certaines contraintes sont applicables. Ce paragraphe a pour but d'expliquer des problèmes particuliers spécifiques de la génération des modèles de bielles-et-tirants par le biais de cette approche et propose des solutions afin de les surmonter.

4.4.1 L'hyperstaticité externe

Le modèle bielles-et-tirants obtenu comme résultat final de l'optimisation linéaire par le critère de l'énergie de déformation est soit un modèle isostatique soit un mécanisme. Bien que cette propriété ait déjà été remarquée par les chercheurs de ce domaine et largement discutée dans [Ali97], ses implications n'ont pas été examinées. Pour la plupart des structures en béton armé, un modèle isostatique ou cinématique demeure suffisant, mais pour les structures hyperstatiques ce n'est pas le cas.

Cette problématique a déjà été introduite dans le chapitre précédent, en examinant le critère de l'énergie de déformation. La figure 4.12 illustre le cas d'un voile en béton armé reposant sur trois appuis. Si la charge est positionnée légèrement plus proche de l'appui extérieur, le modèle avec une transmission directe de la charge est optimal, voir la figure 4.12 (a) au contraire, lors si on place les charges un peu plus près de l'appui central, le modèle en V est optimal, ainsi que le montre la figure 4.12 (b). Dans le cas de structures en treillis, le choix d'un système donné aux dépens d'un autre reste possible, mais par contre dans le voile en béton armé l'activation d'un

système choisi au détriment d'un autre peut exiger de fortes redistributions des efforts internes en provoquer une fissuration exagérée.

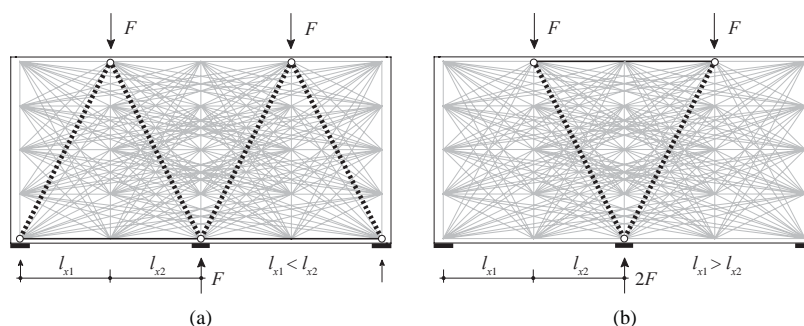


Figure 4.12: (a) Modèle avec la charge positionnée légèrement vers les appuis extérieurs; (b) modèle avec la charge positionnée légèrement vers l'appui central.

La figure 4.12 montre que l'approche présentée ne peut pas être utilisée telle quelle pour les structures hyperstatiques. Afin de rendre l'approche mieux adaptée, il faut remarquer une propriété importante: dans le cas du modèle de la figure 4.12 (a) la réaction de l'appui central est proche à deux fois la réaction des appuis extérieurs, contrairement à la réaction de l'appui central du modèle de la figure 4.12 (b) qui est égale à la charge totale exercée sur la structure. Les deux modèles optimaux obtiennent une réaction de l'appui central différente de la réaction élastique de cette structure hyperstatique. En fait, une manière d'éviter de fortes redistributions lors de l'utilisation des structures hyperstatiques est de limiter ou du moins empêcher le changement des réactions des appuis. Ceci pourrait s'obtenir facilement si dans les conditions d'équilibre (4.8) pour l'équation d'équilibre dans le nœud d'appuis, le vecteur \mathbf{Q} inclut la réaction d'appuis du système hyperstatique en rendant dans cette manière ce système isostatique. La valeur de la réaction peut être déterminée par un calcul élastique ou peut être éventuellement différente si une redistribution des efforts s'avère possible.

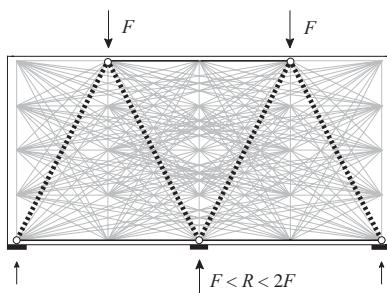


Figure 4.13: Le modèle hyperstatique obtenu avec la contrainte sur le changement de la réaction d'appui central.

La figure 4.13 propose le même voile hyperstatique mais en remplissant la condition suivante: la réaction d'appui central a une valeur prescrite, soit égale à la réaction élastique ou toute autre valeur entre F et $2F$. Le modèle de bielles-et-tirants obtenu avec le critère de l'énergie de déformation cette fois-ci n'est pas optimal selon ce critère, mais il contient tous les tirants indispensables afin de respecter l'hyperstaticité de la structure.

Il faut souligner que dans la pratique les redistributions des efforts du voile sur la figure 4.13 sont estimées par la valeur du moment de flexion sur l'appui central. Une telle évaluation de la

quantité de redistribution reste compliquée par la seule approche du treillis. Cette constatation est également valable pour une évaluation des redistributions par fissuration. C'est pourquoi une évaluation de la quantité de la redistribution par les réactions d'appuis, dans une approche basée sur l'équilibre, s'impose.

4.4.2 L'hyperstaticité interne

Le paragraphe précédent a montré que les modèles obtenus avec le critère de l'énergie de déformation sont les modèles isostatiques et qu'une adaptation de ce critère doit être faite dans le cas de structures hyperstatiques. Par contre, pour les structures isostatiques, il reste à savoir si un modèle de bielles-et-tirants isostatique est suffisant pour décrire les efforts dans ces éléments. Pour une majorité de cas plutôt simples, c'est le cas, mais pour certains cas présentant un grand nombre d'ouvertures et de discontinuités, ces modèles s'avèrent inadaptés. On peut dire que ces éléments ont un certain degré d'hyperstaticité interne et qu'un modèle isostatique n'est pas suffisant pour leur assurer une aptitude au service satisfaisante.

Une structure plus compliquée est présentée à la figure 4.11 (poutre avec ouvertures). Malgré le fait que le résultat obtenu à l'aide du critère proposé coïncide bien avec le modèle théorique [Muttoni97], le modèle obtenu est isostatique et il n'est pas complet. Il faut remarquer qu'un tirant (tirant T_1) se trouvant au-dessus de l'ouverture de gauche disparaît pendant l'optimisation et son omission pourrait provoquer une fissuration importante ainsi qu'une réduction de la résistance par la suite, malgré le fait que l'équilibre du modèle soit assuré. Il faut souligner que même si le tirant en question n'est pas inclus dans le modèle final, une armature minimale, qui est toujours présente, peut s'avérer suffisante pour le contrôle de la fissuration dans cette zone. Par contre, l'inclusion de ce tirant complètera le modèle, et par même assurera un bon comportement à l'état limite ultime ainsi qu'à l'état de service. L'inconvénient d'une telle approche est que lorsque le modèle devient hyperstatique, une évaluation de la rigidité des éléments devient nécessaire, afin de déterminer leurs efforts.

Un autre modèle obtenu par le critère proposé est illustré par la figure 4.14. La structure étudiée est introduite par Souza [Souza08] en tant qu'exemple pratique mais difficile. Bien que le modèle obtenu soit simple par rapport à la structure, il reste plutôt incomplet en raison de son isostaticité autour d'une ouverture carrée. D'autres tirants deviennent donc nécessaires pour assurer l'aptitude au service de la structure.

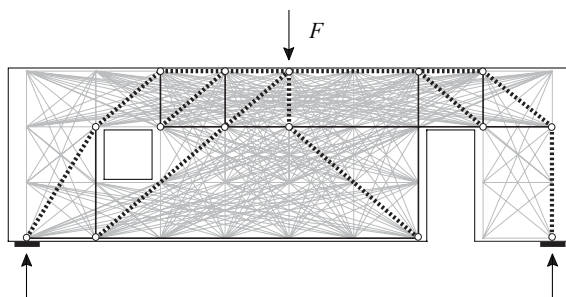


Figure 4.14: *Elément de structure proposé par Souza [Souza08] et modèle bielles-et-tirants obtenu avec le critère proposé.*

Pour surmonter le problème de la proposition d'un modèle unique qui n'est pas toujours suffisant, une autre approche est proposée par Schlaich [Schlaich89] qui considère que seule

une partie de déviation de la solution élastique non-fissuré, est permise. Il a utilisé ce critère pour étudier la répartition des efforts entre les différents modèles déjà déterminés, ainsi que l'illustre la figure 4.4.

Par la suite, Ali et White [Ali01] ont adopté l'idée de l'approche avec un treillis initial comprenant une connectivité totale de tous les points. Le but de leur étude a été de proposer des modèles de bielles-et-tirants qui peuvent assurer un comportement satisfaisant à l'état limite de service. Donc, selon leur proposition, une déviation limitée des efforts reste possible à partir de la solution élastique du treillis initial. Ils ont établi un critère qui combine le critère de la quantité d'armature avec le niveau de redistribution permis par rapport à la solution élastique. La figure 4.15 démontre le résultat de l'utilisation de ce critère mais appliquée au voile hyperstatique.

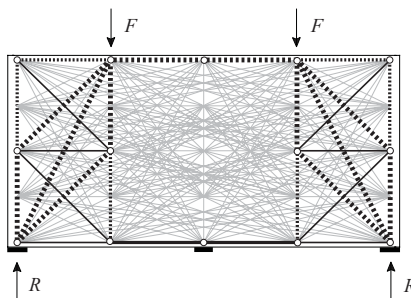


Figure 4.15: *Résultat du critère combiné incluant le niveau de redistribution permis par rapport à la solution élastique et le critère de la quantité d'armature [Ali01].*

Le résultat obtenu montre que le modèle initial, ne doit pas être interprété comme une vraie modélisation d'un milieu continu, mais plutôt comme un groupe de modèles de bielles-et-tirants, possible. Donc, une première solution élastique peut difficilement décrire l'aptitude au service de la structure et par la suite son utilisation dans les critères d'optimisation est rendue impraticable. Nous examinerons à la fin de ce paragraphe ainsi que dans les paragraphes suivants, les manières les plus adaptées, pour résoudre le problème de l'aptitude au service de ces solutions.

4.4.3 Formes funiculaires et influence de la maille

La forme de la maille adoptée pour la recherche des modèles bielles-et-tirants optimaux est primordiale pour le résultat final. Une maille insuffisante peut amener la solution à un modèle qui n'est pas vraiment optimal, mais qui demeure malgré tout le plus optimal qui soit, parmi tous les modèles possibles décrits par la maille. Les modèles qui sont particulièrement concernés par le choix de la maille sont les modèles cinématiques ou les modèles ayant une forme funiculaire. Une forme cinématique n'est en équilibre que dans une configuration précise des barres. Ceci est difficilement obtenu puisque la maille du treillis initial possède un nombre fini de points.

L'exemple de la figure 4.16 illustre l'exemple d'un voile en béton armé sollicité par deux forces. Le modèle optimal selon le critère discuté est celui de la figure 4.16 (a). Le modèle obtenu est isostatique et correspond à la solution théorique [Muttoni97]. Bien que le modèle obtenu soit correct, il existe également un modèle optimal qui est mécanisme. Ce modèle est

difficilement obtenu avec la maille du treillis initial, étant donné que la maille doit nécessairement avoir un nœud (nœud A) à la position exacte pour obtenir ce modèle funiculaire, 4.16 (b).

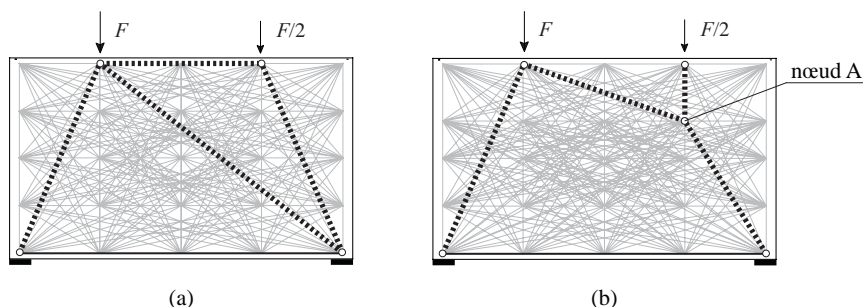


Figure 4.16: (a) *Modèle de bielles-et-tirants pour le voile simple*; (b) *modèle de bielles-et-tirants avec une forme funiculaire.*

La forme de la maille n’influence pas seulement les modèles de bielles-et-tirants dans leur intégralité, elle influence également des parties de modèles. La figure 4.17 présente l’élément proposé et étudié par Breña et Morrison [Breña07]. Par exemple, le modèle obtenu à la figure 4.17 (a) montre que les tirants positionnés au bord supérieur des deux ouvertures sont ancrés d’une manière qui emploie un nombre des bielles considérable. La figure 4.17 (b) montre qu’il est possible d’obtenir le même ancrage de ces tirants en positionnant les nœuds de maille aux endroits précis afin d’obtenir la forme funiculaire du modèle. Malgré le fait que ces formes funiculaires simplifient le modèle bielles-et-tirants final, elles sont difficilement obtenues car la forme funiculaire dépend elle aussi du rapport de charges. Une solution possible pour résoudre ce problème se trouve dans l’utilisation de la génération des champs de contraintes par une approche en milieu continu, ce qui sera présenté dans le chapitre suivant.

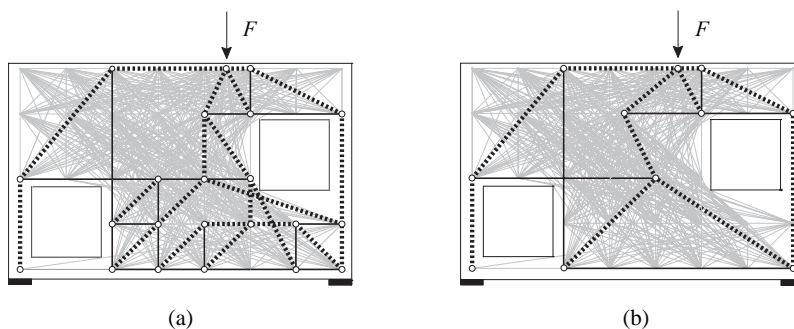


Figure 4.17: (a) *Modèle de bielles-et-tirants obtenu avec le critère proposé*; (b) *modèle si la forme de maille permet une forme funiculaire.*

4.4.4 Modes de comportement

Dans un élément en béton armé, plusieurs modèles bielles-et-tirants sont possibles pour la modélisation de la structure. Leur efficacité peut être comparée grâce à l’énergie de déformation qu’ils possèdent. Si un modèle possède une énergie de déformation inférieure aux autres, on peut dire que c’est le modèle dominant. Il peut arriver par ailleurs qu’il y ait deux ou plusieurs autres modèles avec une énergie de déformation similaire, comme dans le cas du voile hyperstatique de la figure 4.12. La démonstration effectuée à l’aide des modèles hyperstatiques

ainsi que sur les modèles avec hyperstaticité interne, montre que ces modèles doivent être pris en considération dans le modèle de bielles-et-tirants finalement retenu.

Le résultat d'une génération est un modèle bielles-et-tirants unique. S'il y a d'autres modèles qui ont une énergie de déformation similaire, ils sont éliminés. Une manière différente d'obtenir d'autres modèles bielles-et-tirants serait de faire une génération répétitive. Après que le premier modèle bielles-et-tirants a été obtenu, les barres de ce modèle peuvent être multipliées par un coefficient γ de manière à augmenter leur énergie de déformation pour la prochaine génération. Lors de celle-ci, un autre modèle avec une énergie de déformation plus grande sera obtenu. Il faut préciser que dans les cas énoncés précédemment il est indispensable d'utiliser le coefficient γ , car une annulation complète des premiers modèles obtenus peut annuler certains autres modèles qui ont un nombre des barres en commun avec les modèles rejetés.

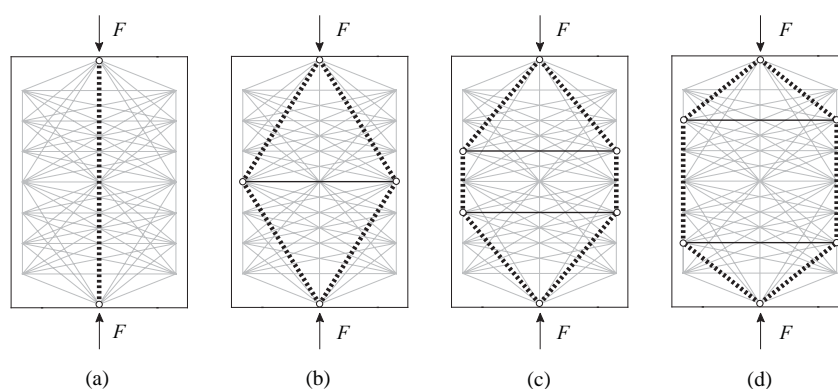


Figure 4.18: *Modes de comportement.*

La figure 4.18 montre un élément sollicité par un effort de compression, le premier modèle obtenu présente une bielle en compression sans diffusion des efforts, comme l'illustre la figure 4.18 (a). Dans la réalité, ce modèle s'avère très insuffisant, car une fissure se crée parallèlement à la bielle et peut empêcher la transmission des efforts et provoquer une rupture prématurée [Muttoni97]. D'autres modèles sont nécessaires et peuvent être obtenus si l'énergie de déformation du premier modèle est multipliée par le coefficient γ . On obtient de cette manière, le modèle de la figure 4.18 (b). Les modèles de la figure 4.18 (c) et (d) sont déterminés grâce à la multiplication des modèles obtenus par la suite par le coefficient γ .

4.5 Génération par la méthode des déplacements

Ce paragraphe introduit un algorithme de génération des modèles bielles-et-tirants basé sur la méthode des déplacements [Kostic06]. Contrairement aux algorithmes linéaires basés sur l'équilibre des nœuds, les algorithmes basés sur la méthode des déplacements nécessitent un assemblage de la matrice de rigidité et ils respectent la compatibilité des déformations.

En générale, les algorithmes existants, qui sont basés sur la méthode des déplacements, sont fondés sur le concept de la suppression itérative des éléments jusqu'à ce que certains critères d'arrêt soient satisfaits. D'habitude ces algorithmes estiment quels sont les éléments moins efficaces et les suppriment complètement pour des analyses successives. Même si ces algorithmes sont communément appliqués pour la génération de modèles de bielles-et-tirants

avec une approche par les éléments finis [Liang00], une application pour l'approche avec le treillis initial a déjà été réalisée par Xie et Steven [Xie94].

4.5.1 Introduction

Selon le critère de la génération des modèles de bielles-et-tirants 4.4, tous les éléments du modèle final sont sollicités avec la contrainte limite. Donc un algorithme de génération des modèles de bielles-et-tirants peut être celui qui impose la contrainte limite dans tous les éléments du treillis initial. Puisqu'un tel algorithme est basé sur la méthode des déplacements et une analyse élastique linéaire, la compatibilité des déformations est respectée et par conséquent la majorité des barres vont être sollicitées avec une contrainte inférieure de la contrainte limite. Comme résultat, au cours d'itérations, la section d'une majorité des barres va être diminuée et finalement annulée.

Pour expliquer l'idée de l'algorithme sur un élément simple, la structure de la figure 4.19 servira d'illustration pour la démonstration. Elle consiste en deux barres qui sont sollicitées par une force unitaire qui agit sur le point intermédiaire. La disposition de la force donne pour résultante une barre en compression et l'autre en traction. Puisque la longueur des deux barres est identique ($l_s = l_c$), selon le critère (4.4), la valeur de l'expression

$$\frac{f_y E_c}{f_c E_s} = \frac{\varepsilon_{pic-s}}{\varepsilon_{pic-c}} \quad (4.11)$$

détermine si l'annulation de la barre en traction ou de la barre en compression minimise l'énergie de déformation de la structure. Quant aux bétons normaux, si f_y/E_s est supérieur à f_c/E_c cela signifie que la valeur de l'expression (4.11) est supérieur à 1. Par conséquent, selon le critère (4.4), la barre en traction est supprimée.

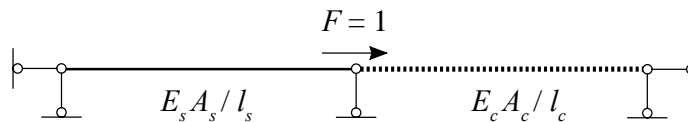


Figure 4.19: Structure constituée de deux barres sollicitées par une force unitaire.

Si l'on considère la même structure, mais cette fois-ci à l'aide de la méthode des déplacements, et en considérant les propriétés initiales des deux barres, la force dans le tirant peut être calculée par l'expression:

$$N_s = \frac{1}{\frac{E_c A_c}{E_s A_s} + 1} \quad (4.12)$$

en utilisant cette fois, la valeur limite de contrainte f_y dans le tirant, la nouvelle section du tirant peut être déterminée par l'expression:

$$A_{s,2} = \frac{1}{\frac{E_c A_c}{E_s A_s} + 1} \frac{1}{f_y} \quad (4.13)$$

Les calculs de l'effort de compression et de la section de la barre en compression peuvent être effectués de la même manière en utilisant la valeur limite de contrainte f_c . En répétant les calculs, la surface du tirant après deux itérations peut être déterminée comme suit:

$$A_{s,3} = \frac{1}{\frac{E_c A_c}{E_s A_s} \left(-\frac{f_y E_c}{f_c E_s} \right) + 1} \frac{1}{f_y} \quad (4.14)$$

après $n-1$ itérations, l'expression devient:

$$A_{s,n} = \frac{1}{\frac{E_c A_c}{E_s A_s} \left(-\frac{f_y E_c}{f_c E_s} \right)^{n-2} + 1} \frac{1}{f_y} \quad (4.15)$$

Sans répéter toutes les expressions pour la barre en compression, la surface de la bielle après $n-1$ itérations est égale à:

$$A_{c,n} = \frac{1}{\frac{E_s A_s}{E_c A_c} \left(-\frac{f_c E_s}{f_y E_c} \right)^{n-2} + 1} \frac{1}{f_c} \quad (4.16)$$

Dans l'équation (4.15) on peut noter que le rapport (4.11) est élevé à la puissance positive $n-2$, et donc si f_y/E_s est plus grand que f_c/E_c après certain nombre d'itérations, le rapport (4.11) à la puissance $n-2$ devient infini et la barre en traction est annulée. Par contre pour la barre en compression, le rapport (4.11) est inversé et élevé à la puissance positive $n-2$, devient donc égal à zéro. Dans ce cas, toute la force est transmise par la bielle et sa section finale est égale à $1/f_c$. La figure 4.20 (a) montre le diagramme de la section des barres par rapport à leur section initiale et tut en fonction du nombre d'itérations. La figure 4.20 (b) montre un diagramme similaire mais pour l'énergie de déformation des barres. Le résultat obtenu par cette procédure coïncide avec le résultat obtenu en considérant le critère (4.4). On peut donc en conclure que la procédure itérative a minimisé l'énergie de déformation de la structure.

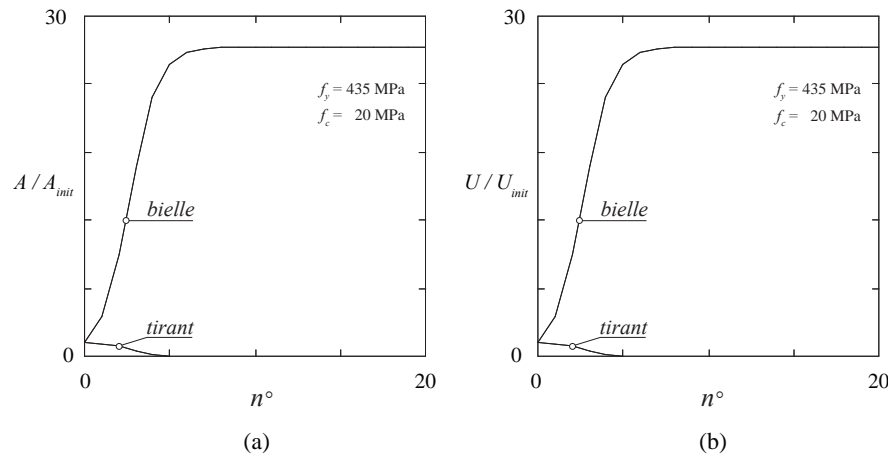


Figure 4.20: (a) Diagramme de la section des barres par rapport à leur section initiale en fonction du nombre d'itération; (b) Diagramme de l'énergie de déformation des barres par rapport à leur énergie de déformation initiale en fonction du nombre d'itération.

Deux points sont à souligner; tout d'abord, les formules ont été développées pour une force unitaire, mais elles demeurent justifiées pour toutes les autres valeurs, ensuite le choix des sections initiales des deux barres n'influence pas le résultat final. Cette dernière conclusion peut être démontrée par la figure 4.21. Si on applique toute la force unitaire au tirant avec une section adaptée à la force unitaire, la bielle en compression avec une section numériquement nulle, sera sollicitée avec une force nulle. Dans ce cas le déplacement du nœud central sera égal au déplacement du tirant. Finalement, si on réapplique ce déplacement à la bielle, sa contrainte sera supérieure à la contrainte limite f_c et donc pour la prochaine itération la section de la bielle augmentera. En considérant les propriétés des barres, à la fin des itérations la section du tirant sera annulée et la section de la bielle sera adaptée à la force unitaire, comme le montre déjà la figure 4.20 (a).

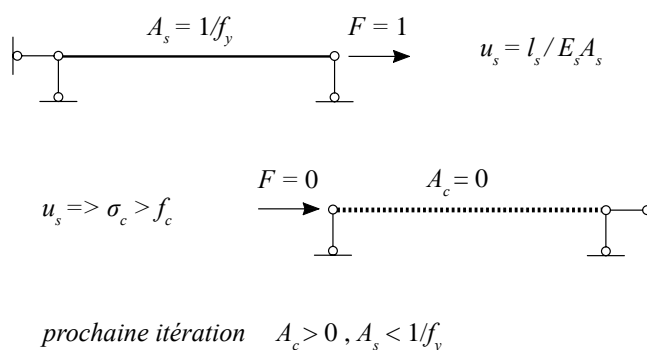


Figure 4.21: Comportement algorithmique de la structure constituée de deux barres sollicitées par une force unitaire .

4.5.2 Définition du problème et procédure proposée

Cette procédure peut être appliquée au treillis initial, dans le but de minimiser l'énergie de déformation du treillis et d'obtenir le modèle de bielles-et-tirants final. Comme la méthode des déplacements exige la création d'une matrice de rigidité globale, la matrice de rigidité en coordonnées cartésiennes doit être réalisée pour chacune des bielles. Algorithmique

La figure 4.22 montre une bielle dans le système global avec la matrice de rigidité correspondante. Le module d'élasticité utilisé est celui du béton ou de l'acier, en fonction de l'effort dans la barre.

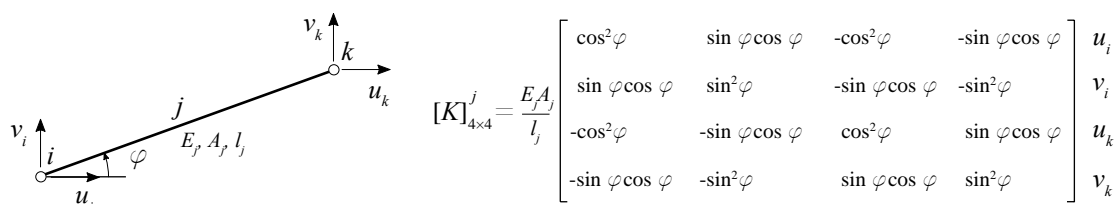


Figure 4.22: Barre en coordonnées cartésiennes et matrice de rigidité.

En assemblant toutes les matrices de rigidité des barres, les équations d'équilibre peuvent être écrites en fonction des déplacements des nœuds comme étant:

$$\mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{Q} \quad (4.17)$$

où la matrice \mathbf{K} est la matrice de rigidité du système, de rang $2m \times 2m$, \mathbf{u} est le vecteur de déplacement des nœuds et \mathbf{Q} est le vecteur de charges. Les deux vecteurs ont un rang égal à $2m$, où m est le nombre de nœuds.

Les efforts dans les barres sont obtenus par les déplacements des nœuds, calculés avec une analyse élastique linéaire. L'effort dans la barre j de la figure 4.22 peut être calculé comme:

$$N_j = \frac{E_j A_j}{l_j} ((u_k - u_i) \cos \varphi + (v_k - v_i) \sin \varphi) \quad (4.18)$$

et sa nouvelle section comme:

$$A_j = \frac{E_j A_j}{f_j l_j} ((u_k - u_i) \cos \varphi + (v_k - v_i) \sin \varphi) = \frac{N_j}{f_j} \quad (4.19)$$

où f_j et E_j sont respectivement; la résistance à la compression (traction) et le module d'élasticité du béton ou de l'acier en fonction de l'effort dans la barre. Comme dans le cas d'une optimisation linéaire, la longueur des tirants en directions horizontales ou verticales peut être multipliée par le coefficient de correction β dans le but de privilégier les modèles plus pratiques. La valeur de ce coefficient est, comme dans les cas précédents, inférieure à 1, ce qui rend ces tirants plus rigides. A la fin de chaque itération l'énergie de déformation du treillis est calculée comme:

$$U = \sum_{j=1}^n \beta_j \frac{\sigma_j}{E_j} N_j l_j \quad (4.20)$$

où n est le nombre de barres dans le système.

Lorsque toutes les nouvelles données relatives au calcul de sections de barres ont été obtenues, lors de la prochaine itération la nouvelle matrice de rigidité globale est rassemblée. Ceci permet d'entreprendre le calcul des nouveaux efforts dans les barres ainsi que la nouvelle énergie de déformation du système. Les itérations sont répétées jusqu'à ce que l'énergie de déformation arrive à une valeur constante ou bien que la relation suivante soit validée :

$$U^i - U^{i-1} \leq \Delta \quad (4.21)$$

dans ce critère d'arrêt, i représente l'itération en cours et Δ est une valeur prescrite.

4.5.3 Principaux résultats

Le résultat d'une génération selon le critère de l'énergie de déformation s'avère être un modèle hypostatique ou isostatique. La procédure proposée rend possible l'obtention de ce modèle car en ayant toutes les barres sollicitées à leur valeur limite, la compatibilité des déformations est respectée pour chaque système hypostatique ou isostatique, malgré le choix des sections.

Bien que le résultat principal d'une génération des modèles de bielles-et-tirants soit un modèle optimal selon le critère choisi, la question reste posée concernant tout un groupe d'autres modèles qui ne sont pas optimaux mais en demeurent néanmoins proches. En utilisant l'optimisation linéaire, seul le modèle optimal peut-être déterminé en négligeant tous les autres modèles qui seraient proches de ce modèle optimal.

La procédure proposée permet de trouver le modèle optimal, selon le critère de l'énergie de déformation, en passant au travers des itérations par d'autres modèles qui ne sont pas optimaux mais resteraient acceptables. La figure 4.23 illustre le voile en porte-à-faux sollicité avec une force concentrée et modélisé par un treillis initial. Le diagramme adjacent montre l'énergie de déformation du système pendant les itérations. Il montre qu'à partir de la troisième itération, les modèles restants acquièrent un niveau d'énergie de déformation similaire. Ces modèles doivent également être pris en compte pour l'étude du comportement de la structure, car dans les situations réelles les efforts se diffusent dans l'élément, particulièrement en présence d'une armature minimale, et donc les autres modèles s'activent aussi.

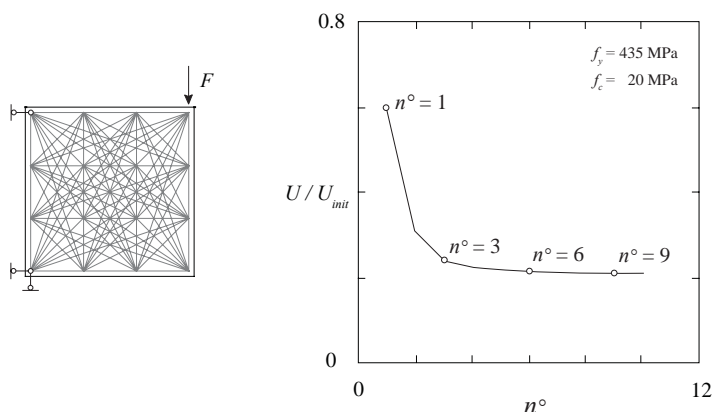


Figure 4.23: *Modèle étudié et diagramme de l'énergie de déformation du système par rapport à l'énergie de déformation initiale en fonction du nombre d'itérations.*

La figure 4.24 montre les modèles bielles-et-tirants pour les différentes itérations choisies.

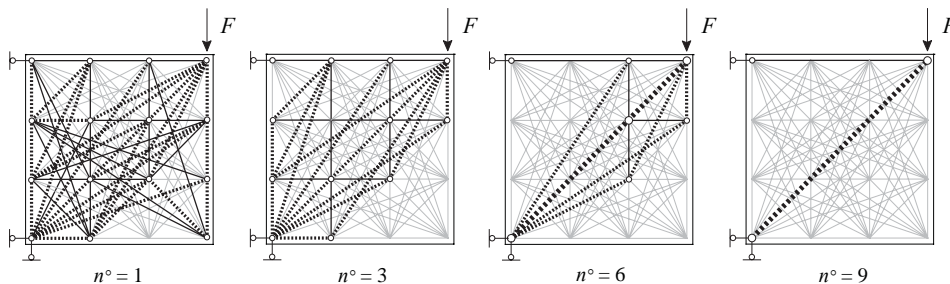


Figure 4.24: *Résultats d'itérations choisies pour le voile en porte-à-faux.*

Bien que le modèle d'itération numéro 1 soit impraticable, les autres peuvent être pris en compte pour l'état limite de service. Le modèle final est obtenu après 9 itérations et il correspondrait le mieux à la solution classique. Le diagramme de la figure 4.25 illustre le rapport entre l'énergie de déformation des barres du modèle final et l'énergie de déformation du système pour chaque itération. Il montre clairement que le modèle final est dominant par rapport aux autres modèles et que les autres modèles ne doivent être pris en compte que pour l'état limite de service en choisissant une armature minimale adéquate.

Dans l'exemple précédant, le modèle final obtenu s'avère être dominant par rapport aux autres modèles et l'élément peut être dimensionné selon celui-ci en assurant une armature minimale dans la structure. Par contre, et en fonction du choix du critère utilisé, le modèle final n'est pas,

la plupart du temps, dominant par rapport aux autres modèles. Dans ce cas, un dimensionnement selon un tel modèle pourrait se montrer insuffisant, surtout à l'état limite de service.

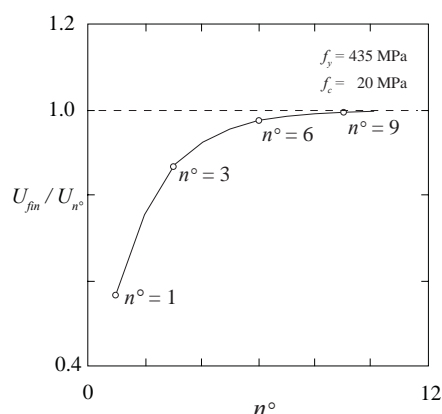


Figure 4.25: *Energie de déformation des barres du modèle final par rapport à l'énergie du système pour chaque itération.*

L'exemple de la figure 4.26 présente un autre cas simple où il n'existe pas un modèle dominant par rapport au critère de l'énergie de déformation. La figure montre le modèle bielles-et-tirants obtenu après 50 itérations, voir figure 4.26 (a), le modèle obtenu après 200 itérations, illustré par la figure 4.26 (b) et enfin le modèle avec l'énergie de déformation minimale, figure 4.26 (c).

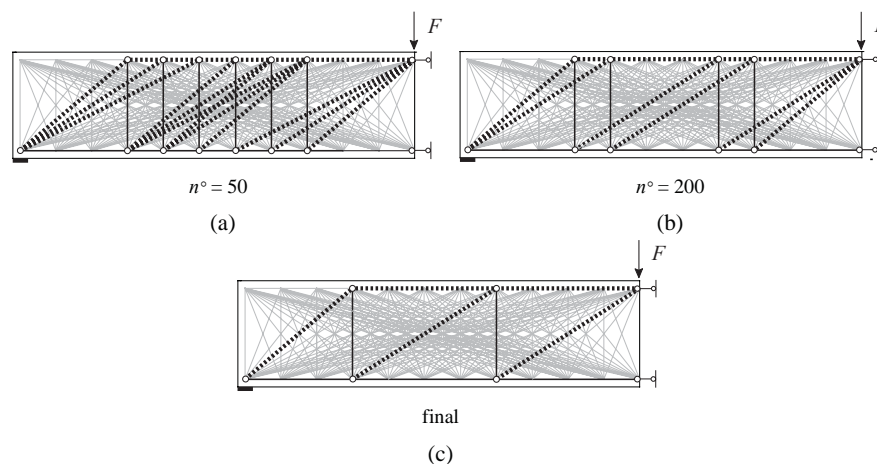


Figure 4.26: *Modélisation de la poutre et résultats de la procédure pour l'itération numéro 50, 200 et le modèle avec l'énergie de déformation minimale.*

Bien que le modèle de la figure 4.26 (c) corresponde au critère de l'énergie de déformation, le modèle présenté à l'itération numéro 50 possède néanmoins une énergie de déformation légèrement supérieure par rapport au ce modèle. Etant donné que les éléments en béton ne sont pas des structures en treillis, mais des structures continues et que les efforts se diffusent dans tout l'élément, il faut également de prendre en considération les modèles avec une énergie de déformation légèrement supérieure au minimum. Dans ces cas, les modèles supprimés doivent être pris en compte pour le dimensionnement de la structure.

La figure 4.27 (a) montre l'énergie de déformation du système par rapport à l'énergie initiale. Selon ce diagramme, l'énergie du système est demeurée quasiment constante après 20

itérations, mais par ailleurs, un grand nombre de treillis possibles reste encore présent dans le modèle. Cela signifie qu'ils ont une énergie de déformation très similaire, qui correspond à un comportement réel de cette structure où les efforts de compression sont diffusés et tous les étriers sont actifs. Le diagramme de la figure 4.27 (b) montre l'énergie des barres du modèle de la figure 4.26 (c) par rapport à l'énergie du système pour chaque itération. L'importance de ce modèle augmente fortement pendant les itérations et on passe ensuite à une augmentation plus faible, jusqu'au moment où les deux derniers modèles possibles figure 4.26 (b), avec une énergie de déformation presque égale, subsistent.

Cet exemple a une importance didactique, car même si le modèle peut être directement obtenu, on sait que dans une poutre les étriers sont toujours distribués. Par contre, dans la pratique, on rencontre des exemples pour lesquels le comportement doit être étudié plus en détail. Pour tous ces cas, une solution éventuelle apportée par l'énergie de déformation minimale peut être insuffisante et l'information sur d'autres modèles avec une énergie de déformation similaire reste importante. Cette conclusion n'a malheureusement pas été retenue par les autres chercheurs, ce qui a bien souvent conduit à des solutions allant vers les modèles bielles-et-tirants qui exigeaient des redistributions d'efforts importantes et rendait le comportement de l'état limite de service très insatisfaisant.

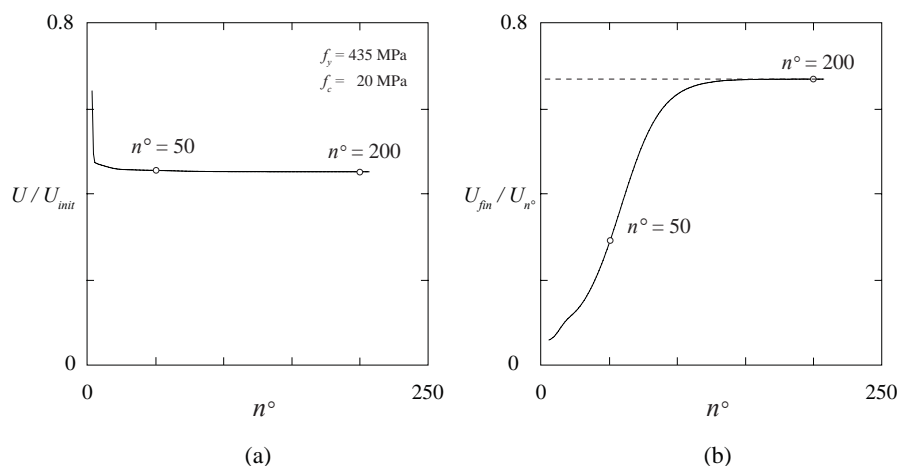


Figure 4.27: (a) Diagramme de l'énergie de déformation du système par rapport à l'énergie de déformation initiale en fonction du nombre d'itération; (b) diagramme de l'énergie des barres du modèle de la figure 4.24. (c) par rapport à l'énergie du système pour chaque itération.

4.5.4 Exemples d'application

Dans ce paragraphe où les résultats de la génération des bielles-et-tirants selon le critère de l'énergie de déformation sont présentés, l'insuffisance de certains modèles sera débattue. L'exemple de la figure 4.11 est répété avec la procédure proposée; le modèle de bielles-et-tirants illustré à la figure 4.28 ayant été obtenu après 10 itérations. Ce nouveau modèle respecte mieux le comportement réel de la structure, il inclut par ailleurs les deux tirants nécessaires à l'état limite de service, se trouvant au-dessus de la première ouverture. Ces tirants ne sont pas obtenus par l'optimisation linéaire, figure 4.11, car le modèle de la figure 4.28 possède une énergie de déformation légèrement supérieure à l'énergie minimale absolue. Étant donné que la convergence de l'algorithme proposé est lente à partir du modèle de la figure 4.11 jusqu'au

modèle de la figure 4.28, pour raison de leurs énergies de déformation similaires, le modèle de la figure 4.28 est facilement identifié par l'algorithme proposé.

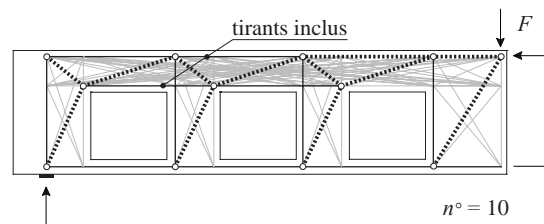


Figure 4.28: *Modèle de bielles-et-tirants pour la poutre avec les ouvertures, obtenu avec la procédure proposée suite à 10 itérations.*

L'énergie de déformation obtenue après 5 itérations diminue très légèrement, comme le montre le diagramme de la figure 4.29.

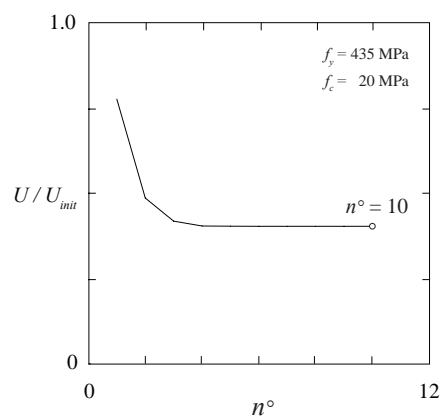


Figure 4.29: *Diagramme de l'énergie de déformation du système par rapport à l'énergie de déformation initiale en fonction du nombre d'itération pour la poutre avec les ouvertures.*

L'exemple suivant symbolise la structure présentée à la figure 4.14, analysée dans le cadre du problème de l'hyperstaticité interne et d'une armature insuffisante autour de l'ouverture carrée. Le modèle de la figure 4.14 est obtenu avec la procédure proposée après 120 itérations, figure 4.30 (b). Etant donné que ce modèle peut s'avérer insuffisant pour assurer le bon comportement de la structure à l'état limite de service, il doit être remplacé par un autre modèle qui inclut les tirants nécessaires.

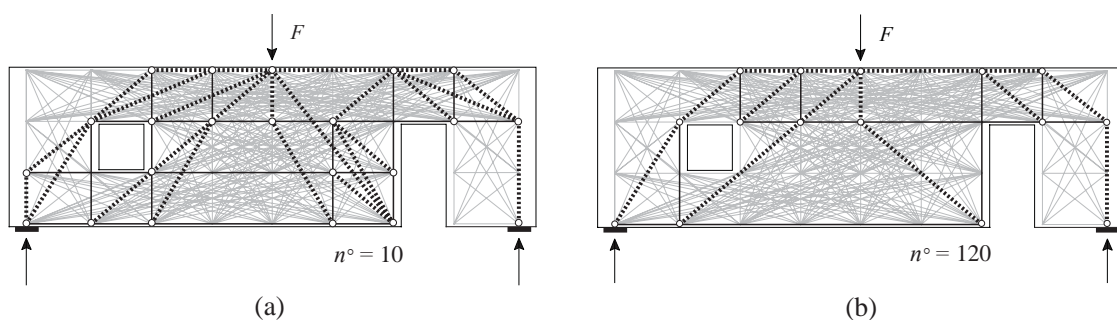


Figure 4.30: *Élément de structure proposé par [Souza08]: (a) modèle de bielles-et-tirants obtenu après 10 itérations; (b) modèle de bielles-et-tirants obtenu après 120 itérations.*

La figure 4.30 (a) illustre le modèle bielles-et-tirants obtenu après 10 itérations de la procédure. Malgré le fait que ce modèle soit plus complexe, il assure néanmoins un bon comportement de la structure à l'état limite de service.

La figure 4.31 représente le diagramme illustrant l'énergie de déformation du système en fonction du nombre d'itérations. Par opposition à l'exemple précédant, le modèle choisi après 10 itérations possède une énergie de déformation légèrement supérieure à l'énergie minimale observée ($n^\circ = 120$).

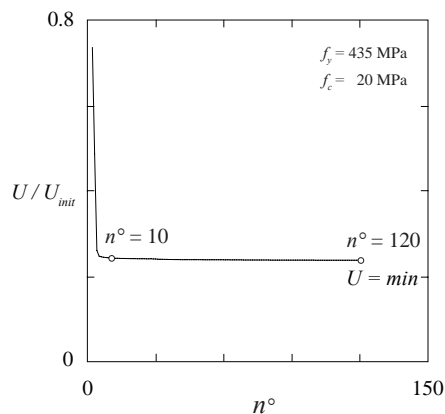


Figure 4.31: *Diagramme de l'énergie de déformation du système par rapport à l'énergie de déformation initiale en fonction du nombre d'itérations pour l'élément proposé par Souza [Souza08].*

Le travail présenté propose de ne pas suivre uniquement les modèles qui pourraient satisfaire de manière rigide le critère de l'énergie de déformation, bien que cela soit parfaitement possible, mais de tenir compte également du fait qu'il existe d'autres modèles qui sont proches de satisfaire ce critère. Puisque les efforts dans les structures en béton armé tendent à occuper l'espace continu qui est à leur disposition, la diffusion réelle des contraintes ne suivra pas uniquement le modèle avec l'énergie de déformation minimale mais aussi les modèles qui en sont proches. Il faut donc tenir compte non seulement des modèles qui incorporent le modèle avec l'énergie de déformation minimale, mais aussi des autres modèles qui en sont proches, ces derniers étant sélectionnés comme étant plus corrects et mieux adaptés pour la modélisation des structures.

4.6 Transformation aux champs de contraintes discrets

Le résultat principal de la génération des modèles bielles-et-tirants est la position et la quantité d'armature nécessaire pour le dimensionnement. Dans le but de contrôler les contraintes de compression et de produire des détails d'armature satisfaisants, une bonne approche de travail serait celle du choix des champs de contraintes [Nielsen84, Muttoni97].

Bien que les efforts de compression dans les éléments en béton armé aient tendance à se diffuser, également grâce aux armatures qui sont souvent distribuées, les champs de compression sont parfois présentés par éléments discrets. Ces éléments sont directement obtenus à partir des bielles et ils sont sollicités par un effort constant qui est égal à la résistance

effective du béton. Ce paragraphe est consacré à la génération des champs de contraintes discrets à partir d'un modèle de bielles-et-tirants.

4.6.1 Formes des bielles et des nœuds

La forme des champs de compression discrets est un parallélogramme, obtenu par l'effort de compression de la bielle correspondante divisé par la résistance effective du béton ainsi que par l'épaisseur de l'élément. Ces champs de compression sont déviés dans les zones nodales, où les tirants peuvent également être présents.

Les nœuds sont des parties importantes des champs de contraintes et leur résistance doit être contrôlée pour assurer le bon comportement de la structure à l'état limite ultime. Ils sont formés par l'intersection des bielles de compression et des tirants. La figure 4.32 (a) illustre un nœud d'un champ de contrainte. Le tirant traverse le nœud et agit comme un champ de compression équivalent placé à l'arrière du nœud. Etant donné que les bielles et le tirant de ce nœud se croisent en un point, les coins du nœud sont obtenus par une intersection simple des champs de compression et de traction.

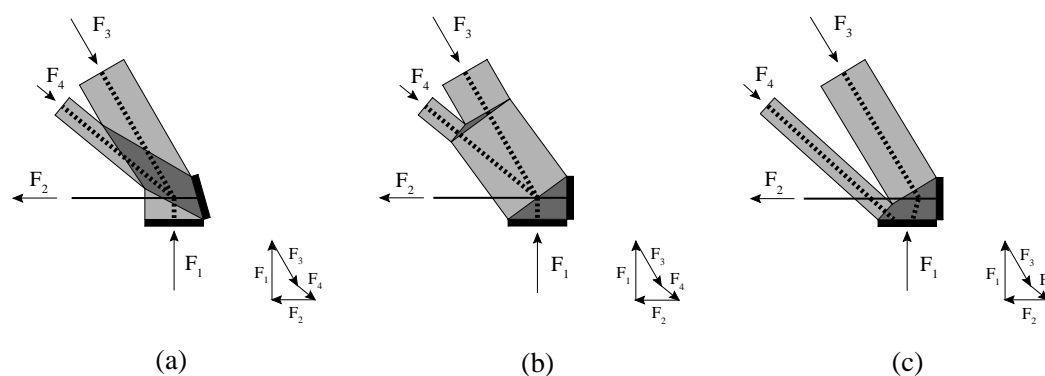


Figure 4.32: (a) Nœud défini par l'intersection des champs de compression et en traction; (b) nœud pseudo-hydrostatique proposé par Schlaich et Anagnostou [Schlaich90]; (c) nœud pseudo-hydrostatique.

Si les lignes du bord du nœud ne sont pas perpendiculaires aux champs de compression adjacents, un effort tranchant est présent le long de ces lignes. Dans ce cas, le contrôle de la résistance de ce nœud peut être fait par la subdivision du nœud aux champs en compression [Drucker68] ou en utilisant le critère de rupture sur la base des efforts principaux [Marti85]. Si toutes les lignes du bord du nœud sont perpendiculaires aux champs de contraintes adjacents, l'état de compression dans le nœud est pseudo-hydrostatique (éléments plans). Dans ce cas la contrainte effective dans les nœuds est égale à celle des champs en compression et il n'est pas nécessaire d'effectuer un contrôle de la résistance [Kupfer64].

La figure 4.32 (b) montre un nœud équivalent au nœud précédent, mais avec un état de compression pseudo-hydrostatique. Ce type de nœud est proposé par Schlaich et Anagnostou [Schlaich90] et il est obtenu par combinaison de deux champs de contraintes adjacents jusqu'à ce que tous les champs soient combinés. Si tous les nœuds des champs de contraintes sont pseudo-hydrostatiques, la forme du champ en compression est rectangulaire. La figure 4.32 (c) montre un nœud dans l'état de compression pseudo-hydrostatique. Contrairement au nœud

précédent, ce dernier n'a pas de sous-nœuds ni de champ en compression intermédiaire. Pour créer un nœud de ce type, il est nécessaire de déplacer les bielles de façon qu'elles ne se croisent pas en un point.

Malgré le fait que dans certains cas le contrôle de la résistance des nœuds soit important, les nœuds sont souvent entourés par du béton dont la résistance peut être exploitée. Dans ce cas il est suffisant de contrôler la résistance des champs de compression ou du béton se trouvant sous les plaques d'introduction des efforts.

La figure 4.33 montre un modèle de bielles-et-tirants obtenu automatiquement et le champ de contraintes correspondant qui est construit en utilisant les règles précédemment expliquées. Afin de pouvoir obtenir un tel champ de contraintes, il est nécessaire de déplacer la position des barres pour obtenir des nœuds pseudo-hydrostatiques.

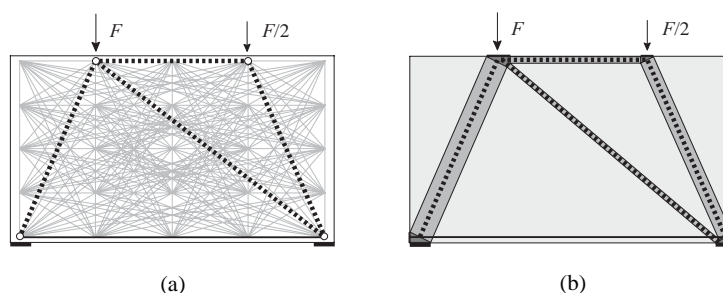


Figure 4.33: (a) *Modèle de bielles-et-tirants*; (b) *modèle de champs de contraintes correspondant*.

4.6.2 Procédure proposée

Cette partie de la thèse expose la façon dont on peut obtenir un champ de contraintes avec des nœuds pseudo-hydrostatiques en partant d'un modèle bielles-et-tirants [Kostic06]. Pour obtenir une telle condition, la direction et la position de certaines bielles doivent être modifiées. Ceci demande que les efforts dans le système soient également changés, ce qui peut être atteint par un processus itératif.

Selon la procédure proposée, les champs de contraintes sont générés en supposant que la contrainte dans les champs est égale à la résistance effective du béton. Tout d'abord, les nœuds sont créés à l'intersection des champs de compression et de traction. La géométrie du champ de contraintes obtenu de cette manière peut être itérativement modifiée afin d'obtenir les nœuds pseudo-hydrostatiques. Ceci n'est possible que si les champs en compression et les champs en traction possèdent une forme rectangulaire perpendiculaire aux bords des nœuds.

En commençant par la configuration initiale d'un champ de contraintes, 4.34 (b), la procédure peut être formulée de manière à modifier la position et la forme des bords des nœuds, en transformant la forme de chaque champ en une forme rectangulaire. Ceci peut être atteint grâce à la création d'une fonction objectif basée sur la différence respective de chaque angle d'un champ par rapport à l'angle droit. La fonction objectif sera alors définie comme:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^4 \left(\alpha_j - \frac{\pi}{2} \right)^2 = 0 \quad (4.22)$$

où n étant le nombre de champs de compression et de traction et α_j correspondant aux quatre angles de chaque champ.

Certaines contraintes doivent être satisfaites comme:

$$x_k, y_k = \text{const} \quad (4.23)$$

où x_k et y_k sont les positions des points qui doivent rester fixes, ils représentent en général les points d'introduction des efforts et des réactions d'appuis. Tous les autres points d'intersection des champs sont libres de changer de position afin d'obtenir une forme rectangulaire. Des contraintes additionnelles peuvent être ajoutées, de façon que tous les points restent dans la structure. Dans l'algorithme, les tirants sont présentés comme des champs en traction qui auraient besoin eux aussi d'adopter une forme rectangulaire pour pouvoir satisfaire le critère de génération. L'accomplissement de la génération des champs de contraintes peut être effectué en utilisant les techniques d'optimisation différentiables présentées dans le chapitre 3 de cette thèse.

Un exemple d'application est présenté à la figure 4.34 (a). Le modèle de bielles-et-tirants consiste en la transmission directe du système de charges concentrées vers les appuis. Le modèle de champ de contraintes initial est présenté sur la figure 4.34 (b). Les nœuds de ce modèle ne sont pas pseudo-hydrostatiques et la géométrie du champ de contraintes doit être modifiée par la procédure proposée. Le modèle final obtenu après l'adaptation de la géométrie est présenté sur la figure 4.34 (c), ce modèle coïncide parfaitement avec le modèle théorique pour ce système de charges, ce qui est expliqué dans [Muttoni97].

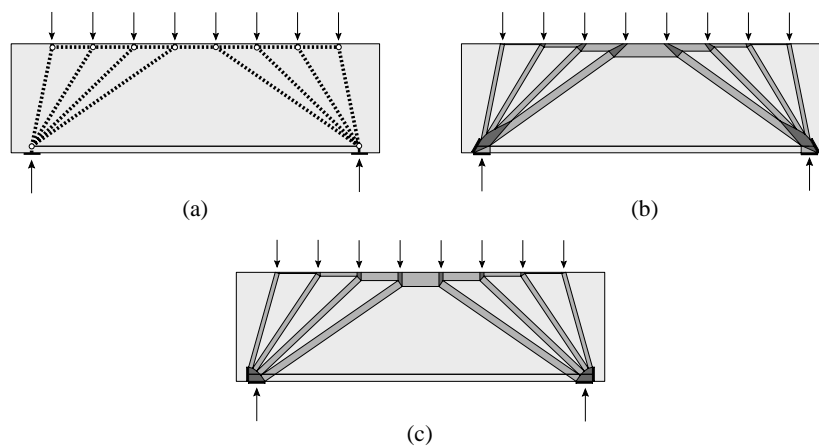


Figure 4.34: (a) *Modèle de bielles-et-tirants du voile*; (b) *champ de contraintes initial*; (c) *champ de contraintes obtenu avec les nœuds pseudo-hydrostatiques*.

5. Génération des champs de contraintes

5.1 Introduction

La génération des modèles bielles-et-tirants par un treillis initial suivi de la création de modèles de champs de contraintes discrets à partir d'un modèle de bielles-et-tirants a été présentée dans le chapitre précédent. Bien que ces modèles soient essentiels pour la compréhension du comportement structural, ils négligent le fait que ces structures sont continues. La méthode des éléments finis, qui est largement utilisée pour les calculs de structures, permet la modélisation de la continuité des structures en béton armé, tout en permettant la génération de modèles de champs de contraintes et de modèles de bielles-et-tirants. Ce chapitre est consacré à l'utilisation des éléments finis non-linéaires pour la génération de modèles de champs de contraintes.

5.2 Utilisation actuelle de la méthode des éléments finis

Dans leur travail, Schlaich et al. [Schlaich87] proposent la «load path method» pour la sélection des modèles de bielles-et-tirants. Cette méthode consiste en la détermination des conditions de bords pour la structure étudiée ou pour une partie de celle-ci, suivie par un positionnement des bielles et des tirants selon les diagrammes des contraintes dans la structure. Pour faciliter l'utilisation de cette approche, les auteurs proposent l'utilisation des résultats d'un calcul par éléments finis élastique linéaires non-fissurés comme une aide au développement des modèles de bielles-et-tirants. Ces éléments finis doivent permettre l'identification du flux des contraintes élastiques dans la structure selon lesquels un choix de modèle bielles-et-tirants peut être fait.

La figure 5.1 (a) illustre l'exemple du voile avec ouverture proposé par Schlaich et analysé par des éléments finis linéaires. Il a adopté le modèle bielles-et-tirants en utilisant les efforts élastiques obtenus avec cette analyse, voir la figure 5.1 (b). En se basant sur ce travail, d'autres contributions ont été apportées dans ce domaine par Alshegeir et Ramirez [Alshegeir92], Kotsovos [Kotsovos93] et par Mook Yun [Yun00].

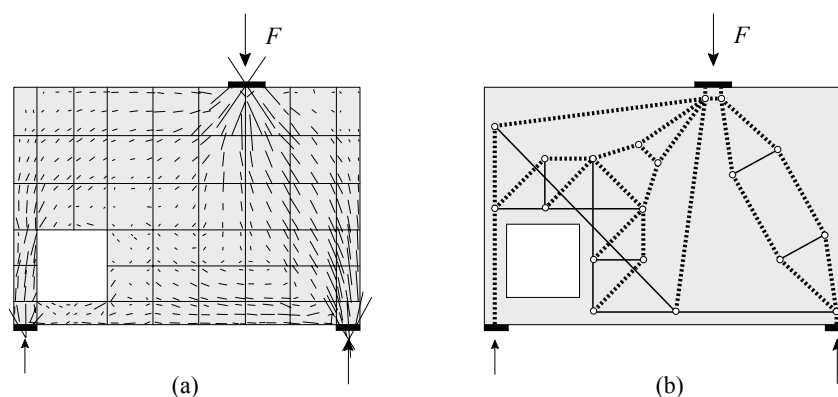


Figure 5.1: (a) *Contraintes élastiques pour le voile avec ouverture*; (b) *modèle de bielles-et-tirants final selon [Schlaich87, Schlaich91]*.

Anderheggen et al. [Anderheggen94] proposent une procédure qui s'applique au le dimensionnement d'armature aussi bien dans les murs que dans les dalles. En se basant sur les

efforts obtenus avec les éléments finis linéaires conformément à cette procédure, une première disposition d'armature peut être générée en appliquant les conditions de dimensionnement linéaires. Dans le but de rationaliser l'armature obtenue, un état d'autocontraintes peut être introduit en permettant la réduction et la redistribution de l'armature dans certaines zones. Ces autocontraintes sont introduites manuellement ou sur la base d'une optimisation linéaire par application du critère de la quantité d'armature minimale.

Malgré le fait que cette procédure se focalise plus particulièrement sur la disposition de l'armature dans les éléments de structures, des champs de contraintes peuvent également être obtenus. La figure 5.2 illustre l'angle de cadre étudié avec la procédure proposée par Anderheggen et al. Pour appliquer le critère d'optimisation, les champs d'armature sont définis selon la figure 5.2 (a). Le champ de contraintes final avec le positionnement d'armature ainsi déterminé est montré à la figure 5.2 (b), [Despot95].

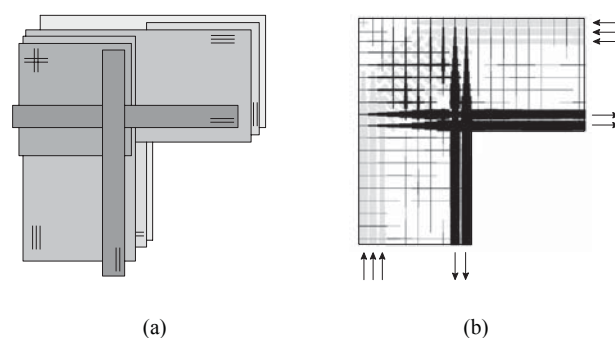


Figure 5.2: (a) Angle de cadre avec les champs d'armature; (b) disposition d'armature selon le critère de la quantité d'armature et le champ de contraintes correspondant [Despot95].

Une autre procédure pour la génération de modèles bielles-et-tirants, basée sur les éléments finis linéaires est proposée par Liang et al. [Liang00]. Selon cette méthode, l'énergie de déformation de chaque élément fini est calculée de manière à permettre l'annulation des éléments finis avec une énergie de déformation faible. En répétant cette procédure après chaque calcul élastique linéaire, les éléments conservés représentent les directions des efforts dans l'élément ce qui permet l'identification du modèle de bielles-et-tirants. Un index de performance basé sur le poids ainsi que sur les déplacements de la structure est proposé afin de contrôler l'optimisation.

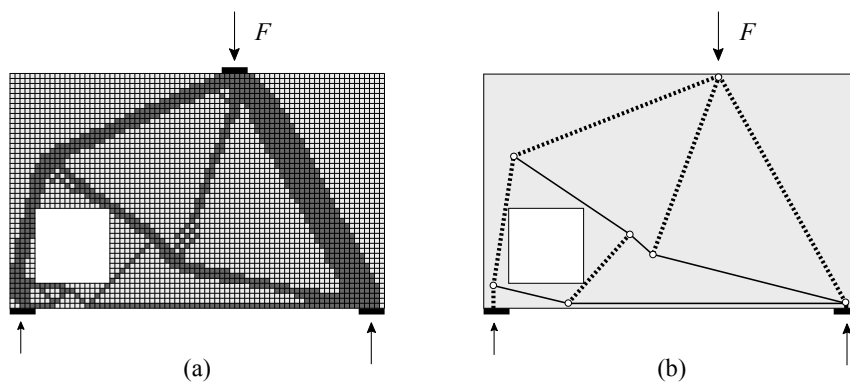


Figure 5.3: (a) Résultat de la procédure basée sur les éléments finis linéaires pour le voile avec ouverture; (b) modèle bielles-et-tirants correspondant [Liang00].

La figure 5.3 (a) présente le résultat de la méthode appliquée pour le voile avec ouverture, à partir duquel un modèle bielles-et-tirants peut être généré, figure 5.3 (b).

Une méthode innovatrice est proposée par Fernández Ruiz et Muttoni [Fernández07] pour ce développement automatique des champs de contraintes. Elle est basée sur l'utilisation d'éléments finis non-linéaires qui adoptent les bases théoriques des champs de contraintes, avec comme première hypothèse essentielle le fait que la résistance à la traction du béton est nulle. Etant donné que cette méthode se base sur les éléments finis non-linéaires et sur la théorie des champs de contraintes, elle dépasse les limites des méthodes reposant sur les éléments finis linéaires.

Selon cette méthode, les champs de contraintes peuvent être développés en choisissant la position des tirants ou en utilisant une armature minimale distribuée partout dans l'élément. L'analyse des efforts dans les armatures permet le calcul des sections nécessaires. Finalement, une deuxième analyse est possible pour contrôler le comportement global de la structure avec les armatures choisies. Etant donné que la compatibilité des déformations est respectée pour ces champs de contraintes, on peut les appeler des champs de contraintes continus.

L'analyse permet aussi la détermination des champs de contraintes discontinus. Une telle identification est claire et facile, car la rigidité du béton en traction est considérée comme nulle et tous les efforts de traction sont pris par les armatures. La figure 5.4 (a) montre le champ de contraintes continu pour le voile avec ouverture avec une armature constante distribuée partout, obtenu par Fernández et Muttoni. Sur la base de ce champ de contraintes continu, un champ de contraintes discontinu a été proposé, figure 5.4 (b), [Fernández07].

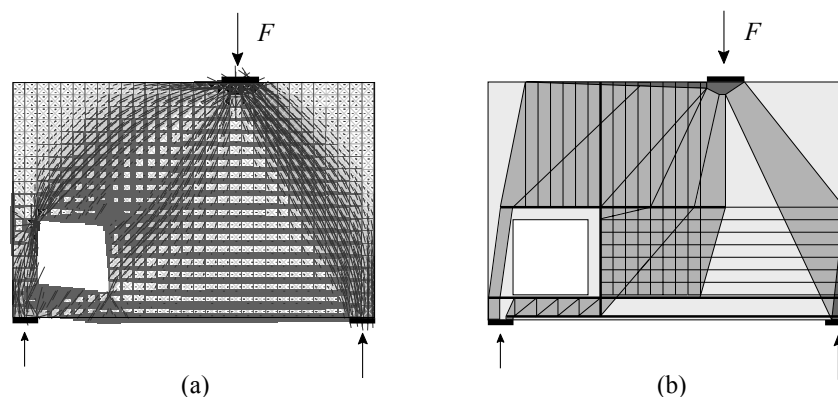


Figure 5.4: (a) *Champ de contraintes continu obtenu pour le voile avec ouverture*; (b) *champ de contraintes discontinu correspondant* [Fernández07].

5.2.1 Limites d'application des procédures existantes

Bien qu'un effort important ait été réalisé afin d'appliquer les éléments finis à la génération des champs de contraintes, certaines limitations sont à reconsidérer dans l'application même des méthodes proposées. L'utilisation des éléments finis linéaires [Schlaich87] peut être une aide précieuse pour se donner une idée sur les directions des efforts dans l'élément de structure, mais il faut néanmoins s'assurer qu'avec un calcul de cette nature, la rigidité du béton en traction est bien prise en compte. Ceci rend difficile l'identification du modèle bielles-et-tirants, car à l'état limite ultime, les structures sont fissurés et l'importance de la rigidité du béton en traction est

négligeable. Ensuite l'utilisation des éléments finis linéaires peut conduire au placement des tirants dans les directions des contraintes principales, ce qui peut être utile pour le comportement à l'état limite de service de la structure, mais demeure peu adapté au niveau du positionnement des armatures, surtout dans le cas des nœuds TTT qui demeurent difficiles à réaliser, tout en permettant un comportement satisfaisant.

La procédure proposée par Anderheggen et al. [Anderheggen94] est un outil valable pour déterminer l'armature dans l'élément de structure, mais elle contient certaines limites relativement à une utilisation à appliquer dans le contexte de la méthode des champs de contraintes. Tout d'abord les champs de renforcement doivent être prédéterminés ce qui exige déjà une connaissance de comportement global de la structure; ensuite l'angle entre les champs de compression et les armatures doit être fixe dans le but de linéariser le rapport entre les forces nodales et la quantité d'armature. Ceci, par définition limite la formation des champs de compression dans les autres directions et finalement l'armature obtenue selon le critère de la quantité d'armature reste minimale uniquement lorsqu'il s'agit de l'angle des champs en compression choisi et non pas pour tous les angles possibles.

La procédure pour la génération des modèles bielles-et-tirants proposée par Liang et al. [Liang00; Liang02] est efficace mais limitée avec la théorie élastique sur laquelle elle est basée. En effet, les positions des tirants obtenus avec cette procédure suivent les contraintes principales de la structure initiale, les tirants sont donc souvent placés dans des directions provisoires.

Selon la proposition de Fernández Ruiz et Muttoni le comportement de structures peut être étudié avec les éléments finis non-linéaires en distribuant une armature partout dans l'élément [Fernández07]. En revanche, la distribution d'une telle armature peut nous amener à surestimer la rigidité de certaines zones en rapprochant une telle solution de la solution élastique. Ainsi, l'une des directions intéressantes suivant laquelle ce travail devra s'orienter sera d'analyser la façon dont il est possible de redistribuer l'armature afin de l'utiliser d'une manière plus efficace tout en obtenant des champs de contraintes plus pratiques. Cette partie de la thèse est dédiée à cet objectif.

5.2.2 EF non-linéaires pour les champs de contraintes continus

Etant donné que les éléments finis non-linéaires pour la génération des champs de contraintes continus définis par Fernández Ruiz et Muttoni [Fernández07] sont utilisés pour la génération des champs de contraintes dans le cadre de cette thèse, leur définition et les hypothèses sont présentées dans ce qui suit.

Contrairement à d'autres méthodes basées sur les éléments finis non-linéaires qui exigent la définition de nombreux paramètres afin de tenir compte des différents aspects du comportement de la structure, les champs de contraintes continus sont basés sur des concepts simples. La figure 5.5 illustre la modélisation utilisée pour le comportement du béton pour une analyse dans le plan.

Pour un champ de déplacement défini sur le continuum, les déformations principales peuvent être calculées, voir figures 5.5 (a) – (c). Les contraintes principales sont calculées directement à partir des déformations principales en admettant les directions des contraintes et des déformations concordantes, figure 5.5 (f). Le comportement du béton est considéré en tant qu'élastique-parfaitement plastique et sa résistance à la traction est négligée, figure 5.5 (e).

Cette modélisation correspond à la surface d'écoulement de Mohr-Coulomb avec "tension cut-off" et la loi d'écoulement associée, figure 5.5 (d). La résistance à la compression du béton adoptée tient compte de la réduction plastique en fonction de la résistance du béton [Muttoni90] mais aussi de la réduction en présence de déformations latérales [Vecchio82; Vecchio86], voir chapitre 6 de cette thèse.

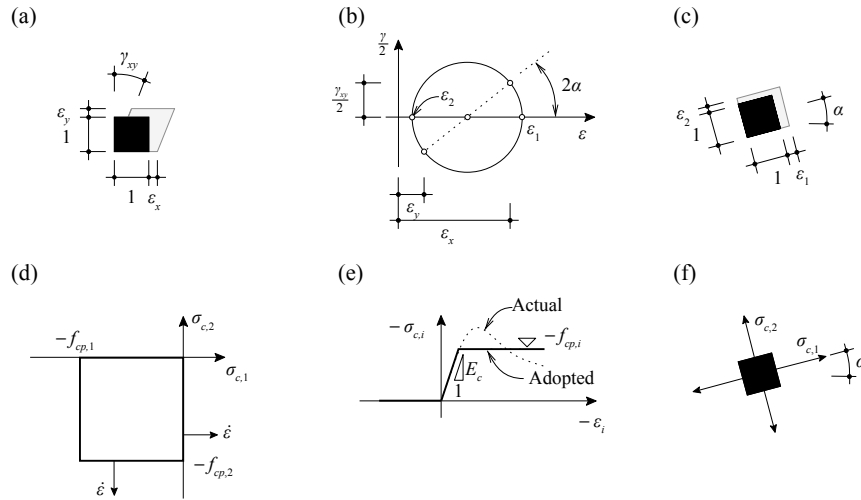


Figure 5.5: *Modélisation du béton (a) déformations; (b) cercle de Mohr et déformations principales; (c) directions des déformations principales; (d) surface d'écoulement du béton et loi d'écoulement associée; (e) relation élastique-parfaitement plastique contrainte-déformation; (f) directions adoptées pour les contraintes principales [Fernández07].*

L'implémentation de cette modélisation est faite en utilisant un élément fini « constant strain triangle (triangle à déformation constante) », voir figure 5.6. La solution est obtenue à partir d'une première solution élastique selon laquelle les champs de déplacements et les champs de déformations sont obtenus, comme le montre la figure 5.6 (a) et (b).

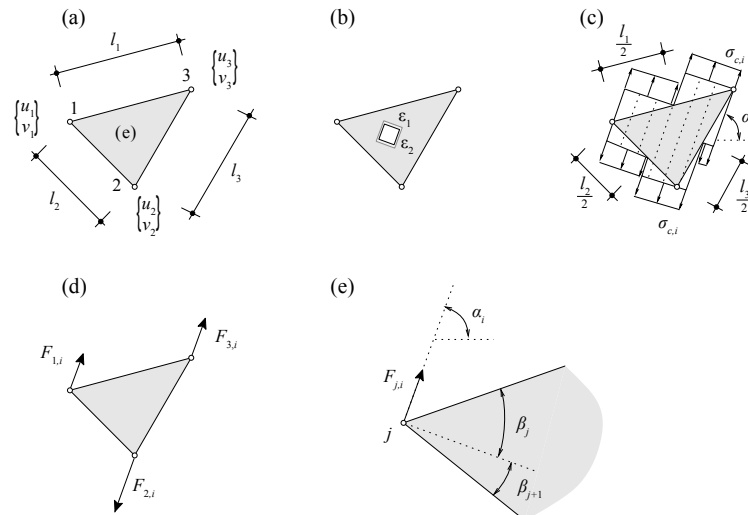


Figure 5.6: *Constant strain triangle; (a) champ de déplacement dans l'élément; (b) champ de déformations dans l'élément; (c) champ de contraintes adopté pour les contraintes principales i; (d) forces nodales; (e) angle β dans chaque nœud j [Fernández07].*

En appliquant le comportement du béton précédemment décrit, les contraintes principales de compression peuvent être déterminées, figure 5.6 (c). Les forces nodales sont ensuite déterminées selon l'équation:

$$F_{j,i} = \sigma_{c,i} \left(\frac{l_j}{2} \cos(\beta_j) - \frac{l_{j+1}}{2} \cos(\beta_{j+1}) \right) \quad (5.1)$$

pour $i \in (1,2)$ et $j \in (1,2,3)$, où la longueur l et l'angle β sont définis selon les figures 5.6 (c) et (e).

En utilisant les forces nodales déterminées précédemment, la nouvelle matrice de rigidité peut être obtenue afin de permettre le pas de calcul suivant, jusqu'à ce que l'équilibre global soit satisfait et la solution finale obtenue. La solution du problème est trouvée itérativement, en appliquant l'algorithme complet de Newton-Raphson.

Vu que le béton ne peut pas reprendre d'efforts de traction, ceux-ci sont repris par les armatures modélisées comme des éléments discrets. La figure 5.7 (a) montre la modélisation du comportement de l'acier d'armature et de précontrainte comme élastique-plastique avec l'écroutissage en utilisant les éléments discrets présentés à la figure 5.7 (b) et (c). Dans la modélisation, l'adhérence des armatures est considérée parfaite et les effets de goujon et le "tension stiffening" sont négligés.

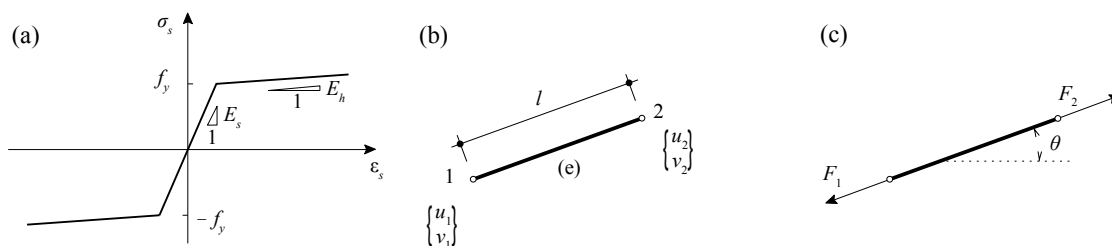


Figure 5.7: (a) Comportement élastique-plastique avec écroutissage pour l'acier d'armature et de précontrainte; (b) champ de déplacement pour l'élément linéaire; (c) forces nodales [Fernández07].

La solution obtenue avec cette approche pour le voile avec ouverture et une armature constante distribuée partout a déjà été montrée à la figure 5.4 (a).

5.3 Optimisation des champs de contraintes

L'utilisation des éléments finis non-linéaires pour l'obtention des champs de contraintes continus permet d'envisager une optimisation de la position des armatures, voire des tirants. Contrairement à une génération à partir d'un treillis initial, la génération par les éléments finis non-linéaires permet la résolution de certains problèmes précédemment décrits dans le chapitre 4, en dépassant les limites précédentes.

Tout d'abord, le béton est considéré comme étant continu, ce qui permet une libre diffusion des efforts de compression dans l'élément de structure. Ceci permet aussi d'obtenir les formes funiculaires des modèles de champs de contraintes et de bielles-et-tirants, ce qui était difficile avec une approche prenant en considération le treillis initial. En plus, la structure est réellement

modélisée par les éléments finis non-linéaires, ce qui permet par la suite le contrôle de la charge ultime et la détermination d'une armature minimale pour le modèle final, ce qui est une fois encore impossible avec une modélisation effectuée par le treillis initial. Finalement les sections du béton ne devront pas subir de changements lors la procédure, ce qui correspond à la situation réelle où la forme de la structure est en général prédéterminée et reste constante quelle que soit la forme du champ de contraintes optimal.

En ce qui concerne les approches réalisées avec des éléments finis linéaires, l'approche proposée ne tient pas compte de la rigidité du béton pour reprendre les efforts de traction, mais utilise plutôt les armatures à cette fin. Ensuite, les directions des efforts de compression sont librement déterminées et ne dépendent que de la rigidité des éléments finis et de l'équilibre établi entre eux.

Ainsi que nous avons pu le voir dans la présentation des chapitres 3 et 4, une solution relative à la quantité d'armature minimale exige que tous les tirants soient sollicités avec la valeur limite de contrainte. Ce critère correspond également au critère de l'énergie de déformation des tirants en utilisant une valeur limite pour la contrainte admissible des tirants. L'application de ce critère est réalisable dans le cadre d'une optimisation linéaire basée sur l'équilibre entre les barres ou en appliquant la procédure proposée basée sur la méthode des déplacements, voir chapitre 4 de cette thèse. Selon cette procédure, l'énergie de déformation du treillis initial est minimisée en imposant des contraintes limites dans les barres, jusqu'à l'obtention du modèle final.

Etant donné que l'approche par les éléments finis non-linéaires ne peut pas être résolue avec le simple équilibre des éléments, du fait de son statut de processus itératif et non-linéaire, les techniques classiques d'optimisation des structures ou les techniques linéaires ne sont pas adaptées. En revanche, la procédure basée sur la méthode de déplacement et présentée dans le chapitre 4, exigeant un calcul itératif de la structure en imposant la contrainte limite dans les éléments, est appropriée même dans le cas d'un calcul non-linéaire.

5.3.1 Procédure proposée

La procédure proposée pour la génération automatique des champs de contraintes comporte la modélisation de la structure avec une armature constante, uniformément distribuée dans tout l'élément. Pour éviter que l'écoulement d'armature se développe lors des analyses, il est nécessaire de modéliser le comportement de l'armature élastique, ainsi que l'illustre la figure 5.8 (a).

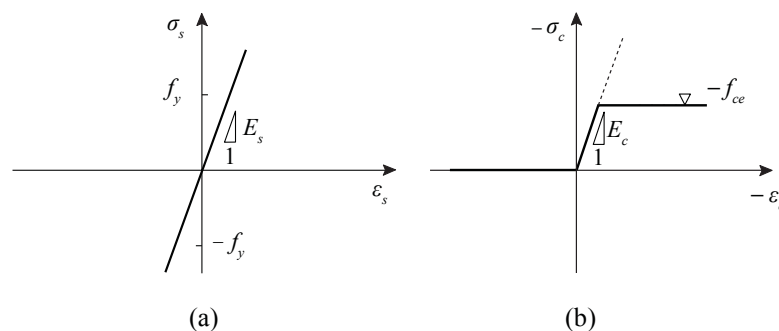


Figure 5.8: (a) Comportement élastique de l'acier d'armature; (b) comportement élastique, élastique-parfaitement plastique du béton.

Le comportement du béton est considéré comme élastique ou élastique-parfaitement plastique selon que les contraintes dans le béton sont contrôlées ou non dans la procédure. La résistance à la traction du béton est considérée comme nulle, figure 5.8 (b). Les autres paramètres nécessaires au calcul par éléments finis non-linéaires ne changent pas et restent définis selon le paragraphe 5.2.2. et les figures 5.5 - 5.7.

Les efforts dans les armatures sont déterminés lors de la première solution. Etant donné que ces armatures sont uniformément distribuées, les efforts obtenus ressemblent à une solution élastique. A ce stade une première redistribution d'armature est possible, pour obtenir une solution plus efficace. Cette redistribution peut être répétée itérativement en imposant la contrainte limite dans toutes les barres avec un changement des sections d'armature à chaque itération. Puisqu'une solution avec armature constante partout soumise à une contrainte constante, n'est cinématiquement admissible, que dans des cas particuliers, les sections de certaines armatures se doivent d'être annulées lors de ce processus itératif. En utilisant l'algorithme décrit dans [Kostic06] et dans le chapitre 4 de cette thèse, la section d'une armature j entre deux nœuds de modèle dans l'itération i peut être écrite comme suit:

$$A_{s,j}^i = \frac{A_{s,j}^{i-1} \sigma_{s,j}^{i-1}}{f_y} \quad (5.2)$$

où $A_{s,j}^i$ et $\sigma_{s,j}^i$ sont la section et la contrainte dans l'armature j dans l'itération $i-1$ et f_y est la contrainte limite admissible dans les armatures.

Lors des itérations, l'énergie de déformation de la structure est minimisée et le critère d'arrêt d'algorithme peut être défini par rapport au changement de l'énergie de déformation. Ce résultat peut être obtenu lorsque la valeur de l'énergie de déformation atteint une valeur constante ou dans le cas où la prochaine relation est vérifiée:

$$U^i - U^{i-1} \leq \Delta \quad (5.3)$$

où dans ce critère d'arrêt, U^{i-1} et U^i représentant l'énergie de déformation dans les itérations, $i-1$ et i et Δ , une valeur prescrite. Il faut souligner que lors d'une première itération, l'énergie de déformation de départ peut augmenter si une armature initiale importante est choisie, mais cette valeur diminue par la suite du fait de la redistribution de l'armature dans des positions où elle sera plus efficace.

La figure 5.9 illustre le schéma de l'algorithme proposé. Une fois que le critère d'arrêt est satisfait, le modèle de champ de contraintes continu est obtenu. Si la contrainte limite d'armature admissible dans la procédure, est égale à sa valeur de dimensionnement, les sections obtenues selon ce modèle seront les sections nécessaires à l'état limite ultime pour la charge appliquée.

De plus, ainsi que l'avaient proposé Fernández Ruiz et Muttoni [Fernández07], nous avons la possibilité d'étudier le comportement global de la structure dimensionnée en utilisant une armature minimale distribuée dans l'élément. Si la position exacte des tirants doit être prise en compte pour la vérification d'un détail particulier, le modèle de bielles-et-tirants ou le modèle de champ de contraintes discontinu peut être obtenu directement à partir du modèle obtenu.

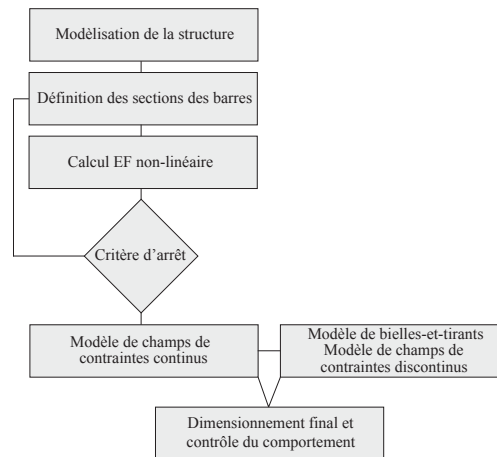


Figure 5.9: *Algorithme adopté pour la génération des champs de contraintes.*

Description d'algorithme

Afin de rendre compressible la procédure proposée, le comportement de l'algorithme de la figure 5.9 est étudié. La figure 5.10 présente un simple voile soumis à une charge concentrée qui dispose seulement d'armatures horizontales. La solution présentée après la première itération, voir la figure 5.10 (a), prend en compte toutes les armatures disposées, mais sans qu'elles aient la même efficacité. En appliquant la procédure proposée, nous obtenons la solution avec un placement du tirant dans la zone inférieure du voile, voir figure 5.10 (b). Cette solution correspond également à la solution classique de ce problème.

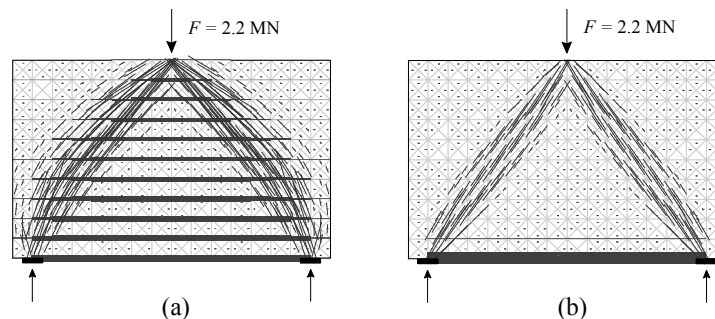


Figure 5.10: (a) *Voile soumis à une charge concentrée; solution obtenue après la première itération de la procédure;* (b) *champ de contraintes obtenu après 100 itérations.*

La figure 5.11 (a) montre le diagramme d'énergie de déformation des tirants du voile à chaque itération et l'énergie de déformation totale de tous les tirants. Le tirant pour la représentation graphique est considéré comme la somme de toutes les barres à chaque hauteur. Le diagramme de la figure 5.11 (a) montre qu'avec une diminution d'énergie de déformation totale des tirants, on arrive à une augmentation monotone de l'énergie de déformation du tirant qui est le plus efficace (tirant 1) comme le montre la figure 5.10 (b), et une diminution de l'énergie de déformation des autres tirants.

Par ailleurs, en considérant une quantité (volume) d'armature totale et en prenant en considération la diminution de la quantité d'armature utilisée, la quantité (volume) d'armature du tirant inférieur augmente de façon monotone (tirant 1), voir le diagramme figure 5.11 (b). Il

est important de souligner que le tirant placé immédiatement au-dessus du tirant le plus efficace subit au fur et à mesure une augmentation de section pour revenir par la suite à une diminution. Ceci s'explique par le fait que la contrainte dans ce tirant a d'abord été supérieure à la contrainte limite, ce qui a eu pour résultat une augmentation de la section. Ensuite elle a diminué et la section a alors également diminué. Par contre, et puisque la contrainte dans ce tirant se rapprochait de la contrainte limite en diminuant sa valeur, l'énergie de déformation qui dépend de la contrainte au carré a diminué dès le début. Etant donné que la déformation du béton autour de ce tirant est similaire à la déformation du tirant le plus efficace, l'annulation de la section de ce tirant sera lente. Conceptuellement ceci ne cause aucun problème car la position de ce tirant n'est pas erronée pour la charge appliquée. Les dimensions du voile de référence ainsi que les propriétés des matériaux utilisés dans le calcul sont présentées dans la figure 5.11.

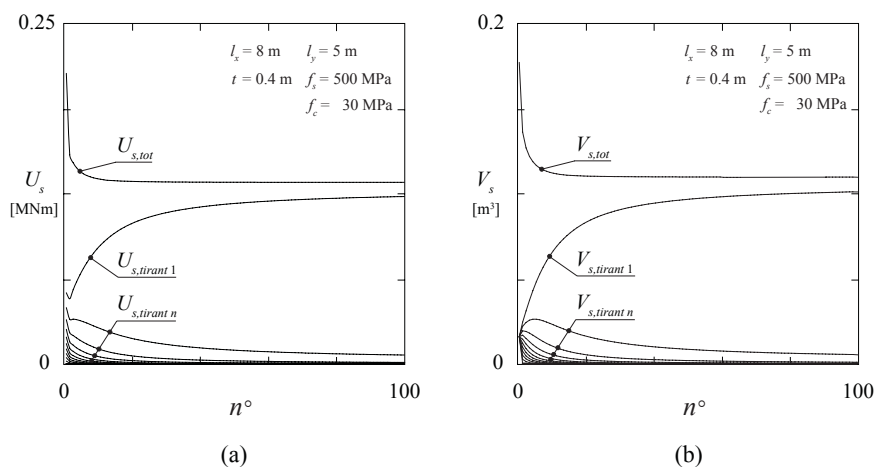


Figure 5.11: (a) Energie de déformation des tirants à chaque itération et énergie de déformation totale des tirants; (b) volume d'armature des tirants à chaque itération et le volume total d'armature utilisée.

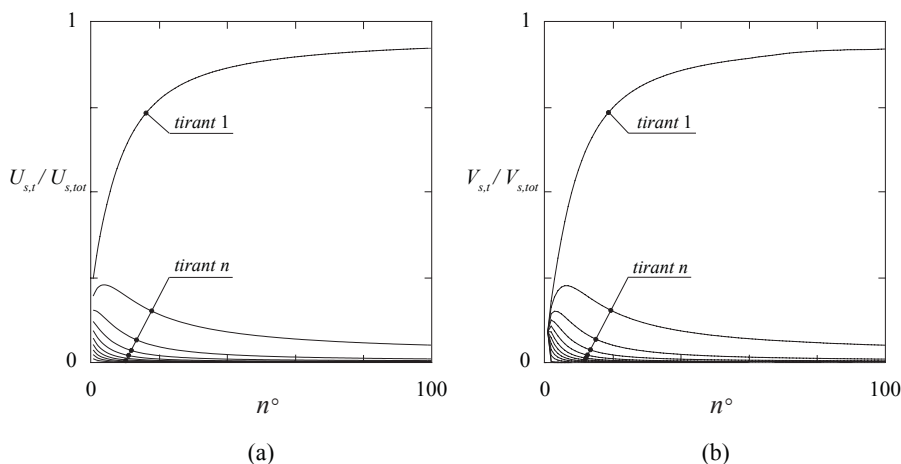


Figure 5.12: (a) Energie de déformation des tirants à chaque itération par rapport à l'énergie de déformation totale des tirants; (b) volume d'armature des tirants à chaque itération par rapport au volume total d'armature.

La figure 5.12 (a) montre l'énergie de déformation des tirants par rapport à l'énergie de déformation totale des tirants à chaque itération. Dans une manière similaire, la figure 5.12 (b)

montre le volume d'armature des tirants par rapport au volume total d'armature à chaque itération. Sur les quatre diagrammes présentés, l'efficacité des tirants par rapport à leur bras de levier est mise en évidence.

La procédure proposée intègre les deux approches pour le développement de modèles de bielles-et-tirants et de champs de contraintes, l'approche du treillis initial (chapitre 4) et l'approche avec les éléments finis non-linéaires. Sa contribution en ce qui concerne la génération de modèles de bielles-et-tirants avec le treillis initial ne concerne pas seulement la génération de modèles optimaux avec l'énergie de déformation minimale mais aussi la génération de modèles proches de l'optimal, qui sont souvent plus adaptés pour la modélisation de la structure. Par contre pour l'approche avec les éléments finis non-linéaires, où la position exacte des tirants doit être déterminée, la procédure permet leur sélection. De cette manière, cette procédure présente la première application de l'optimisation des champs de contraintes faite avec les éléments finis non-linéaires qui adoptent un comportement réel des structures en béton armé.

Voile avec ouverture

Etant donné que l'application de tous les algorithmes existants pour la génération des modèles bielles-et-tirants et des modèles champs de contraintes a été confrontée à l'exemple classique du voile avec ouverture [Schlaich87], cette structure reste utilisée pour vérifier l'algorithme proposé. La figure 5.13 (a) montre les efforts dans le voile après une première itération de la procédure, avec une armature constante distribuée partout dans l'élément. Puisque l'armature n'est pas utilisée de manière efficace, les sections d'armature pour la prochaine itération peuvent être calculées selon l'équation 5.2. La figure 5.13 (b) montre le résultat de la procédure après 20 itérations. Par rapport à la solution initiale l'armature est simplement maintenue à quelques endroits, son dimensionnement s'avérant immédiat et le modèle bielles-et-tirants ou le modèle de champ de contraintes discontinu peut être facilement sélectionné, figure 5.13 (c).

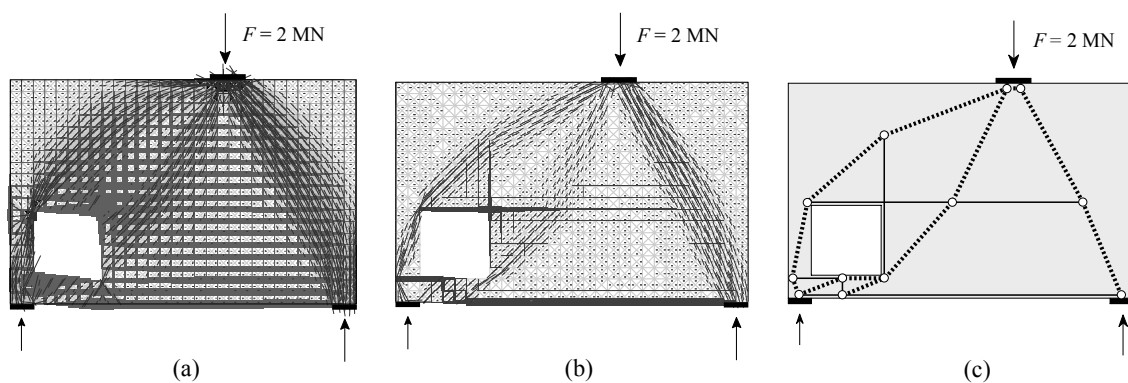


Figure 5.13: (a) Résultat de la première itération de la procédure proposée pour le voile avec ouverture; (b) modèle de champ de contraintes obtenu par la procédure proposée après 20 itérations; (c) modèle de bielles-et-tirants correspondant.

La figure 5.14 montre le diagramme d'énergie de déformation du système par rapport à l'énergie de déformation initiale en fonction du pas d'itération. Après les premières itérations où l'énergie de déformation est fortement réduite, cette diminution devient infime. Lors de la procédure, la structure devient de plus en plus rigide en reprenant les efforts de traction par les armatures les plus efficaces.

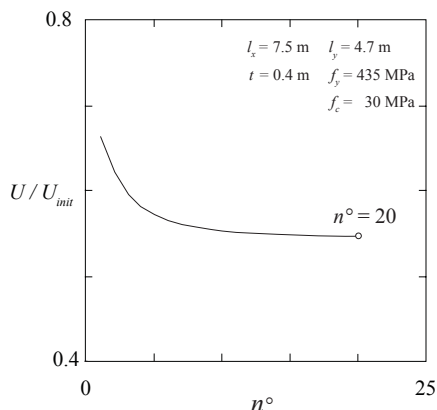


Figure 5.14: *Diagramme de l'énergie de déformation du système par rapport à l'énergie de déformation initiale en fonction du pas d'itération pour le voile avec ouverture.*

Poutre avec changement de section

Il existe une autre façon de vérifier l'adéquation des modèles obtenus par la procédure proposée; il s'agit de les comparer aux modèles bielles-et-tirants obtenus manuellement par des techniques simples. La figure 5.15 présente une poutre avec un changement de section, qui est géométriquement similaire à l'élément proposé par Chen et Breen [Chen02]. Le modèle de transmission des efforts le plus simple pour cette structure est représenté à la figure 5.15 (a).

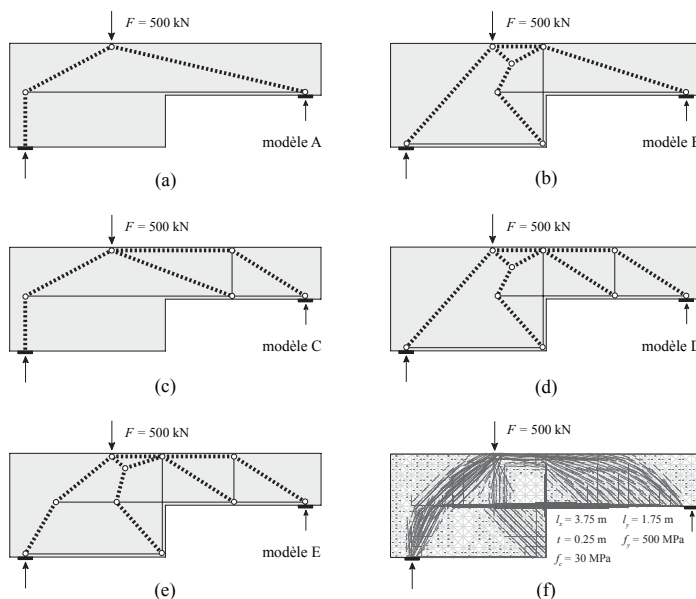


Figure 5.15: (a) – (e) *Modèles de bielles-et-tirants possibles pour la poutre avec changement de section; (f) modèle de champ de contraintes continu obtenu par la procédure proposée.*

Si toute la rigidité flexionnelle de la poutre et l'armature d'effort tranchant sont utilisées, on obtient le modèle B et le modèle C, ainsi que l'illustre la figure 5.15 (b) et (c). La synthèse de ces deux modèles résulte en un modèle présenté à la figure 5.15 (d), modèle D. Si l'armature flexionnelle de la zone de plus faible hauteur est prolongée pour dévier la bielle de l'appui direct, figure 5.15 (e), un modèle avec une quantité d'armature minimale sera obtenu. La figure

5.15 (f) montre le champ de contrainte obtenu par la procédure proposée. Les positions d'armature qui résultent de cette procédure, correspondent aux positions des tirants du modèle E, figure 5.15 (e), qui est très similaire.

La figure 5.16 montre le diagramme d'énergie de déformation des modèles A-E par rapport à l'énergie de déformation du modèle initial, modèle A. L'énergie de déformation des modèles est calculée en utilisant les propriétés des matériaux comme indiqué à la figure 5.15 (f) et la formule (3.1) tout en admettant que les bielles-et-tirants sont soumis aux contraintes limites. Le diagramme montre que le modèle E possède une énergie de déformation inférieure à celle des autres modèles. C'est effectivement le cas, parce que le modèle utilise l'armature flexionnelle de la partie de droite afin de dévier la bielle de l'appui direct de gauche, diminuant ainsi la quantité d'armature flexionnelle. Il faut remarquer qu'à partir du modèle de champ de contraintes de la figure 5.15 (f), nous obtenons une armature d'effort tranchant distribuée, au lieu de n'avoir qu'un seul tirant d'effort tranchant, l'efficacité de ces armatures étant très similaire, une redistribution avec la procédure proposée reste difficile.

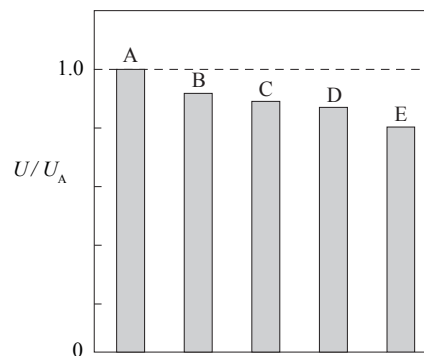


Figure 5.16: *Energie de déformation de chaque modèle de bielles-et-tirants de la figure 5.15 par rapport à l'énergie de déformation du modèle A.*

Voile carré avec ouverture

Dans le chapitre 2 de cette thèse, les considérations relatives à la forme de la structure ainsi que l'influence de la rigidité et de la déformabilité de certains éléments structuraux pour le développement des modèles bielles-et-tirants ont été discutés (figure 2.32). Il a été réalisé que les solutions existantes ne sont pas toujours directement applicables pour toutes les géométries similaires mais qu'il faut prendre en compte les considérations indiquées (la forme, la rigidité, etc.). L'algorithme proposé tient automatiquement compte de ces considérations, surtout parce qu'il est appliqué à un calcul non-linéaire qui respecte la compatibilité des déformations.

La structure de la figure 2.32 du chapitre 2 est d'abord analysée par les champs de contraintes continus. Le premier mécanisme considéré est présenté sur la figure 5.17 (a) avec le modèle de bielles-et-tirants correspondant, figure 5.17 (b). La figure 5.17 (c) montre le champ de contraintes continu qui est obtenu avec la disposition d'armatures selon le modèle de bielles-et-tirants. Pour la formation d'un tel modèle, d'importantes redistributions d'efforts sont nécessaires et la déformation du béton autour de l'ouverture centrale est considérable.

En ce qui concerne la procédure proposée, si une armature numériquement petite est placée autour de l'ouverture, sa contrainte sera supérieure à la contrainte limite et avec les itérations de

la procédure, la section de cette armature augmentera. De cette manière, on peut conclure que la procédure proposée augmente les armatures où les fissures importantes sont attendues, et ce sur la base de la déformation du béton (adhérence parfaite).

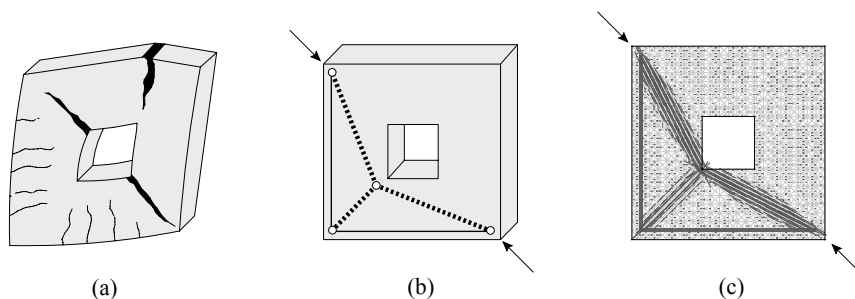


Figure 5.17: (a) *Premier mécanisme considéré*; (b) *modèle de bielles-et-tirants correspondant*; (c) *champs de contraintes continus*.

La figure 5.18 (a) montre le résultat obtenu pour le voile avec une petite ouverture centrale. Comme indiqué au chapitre 2, pour ce voile il est suffisant d'avoir une petite armature autour de l'ouverture pour dévier la bielle comprimée et pour contrôler les fissures autour de l'ouverture. L'algorithme permet la sélection de cette armature et comme les déformations en traction des autres zones sont inférieures à la déformation limite (f_y/E_s), les armatures de ces zones sont annulées.

Par contre, pour le voile avec une ouverture importante, il a été montré au chapitre 2 que des armatures extérieures sont nécessaires et que l'effet d'angle de cadre est activé pour cette configuration. La figure 5.18 (b) présente le résultat obtenu par l'algorithme proposé. Bien évidemment les armatures autour de l'ouverture sont plus importantes pour la déviation de la bielle comprimée mais comme les déformations des bords extérieurs deviennent importantes aussi, les armatures de ces zones sont activées lors des itérations. En plus, comme la figure le montre, l'armature d'effort tranchant nécessaire pour réduire l'angle d'inclinaison des bielles comprimées est obtenue.

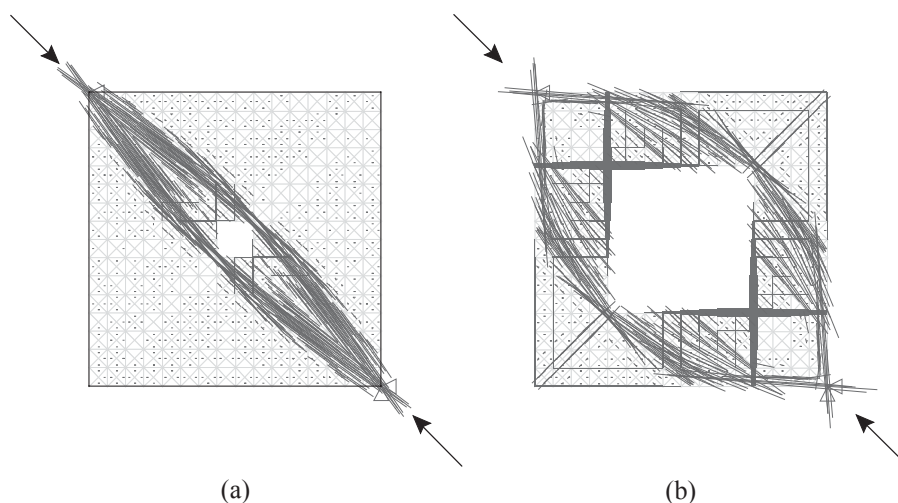


Figure 5.18: *Résultats de l'algorithme proposé (a) voile carré avec petite ouverture*; (b) *voile carré avec ouverture importante*.

5.3.2 Exemples d'application

Les structures traitées dans le chapitre 4 sont étudiées dans le but de contrôler les résultats de l'algorithme proposé. La figure 5.19 (a) montre le voile avec plusieurs ouvertures et la solution ainsi obtenue après la première itération de la procédure, pour une armature constante distribuée partout. Tout en appliquant la procédure proposée, la solution obtenue après 50 itérations est présentée sur la figure 5.19 (b). Cette solution correspond bien à la solution classique présentée au chapitre 4, figure 4.11 (a). Nous insisterons néanmoins sur le fait que dans la solution obtenue ici, la rigidité flexionnelle des membres en-dessous des ouvertures est prise en compte. La prise en compte de la rigidité de ces membres soulage les membres se trouvant au-dessus des ouvertures, qui adoptent ainsi un comportement réel dans la mesure où les membres en-dessous des ouvertures permettent effectivement le placement des armatures inférieures et supérieures ainsi que l'armature pour l'effort tranchant.

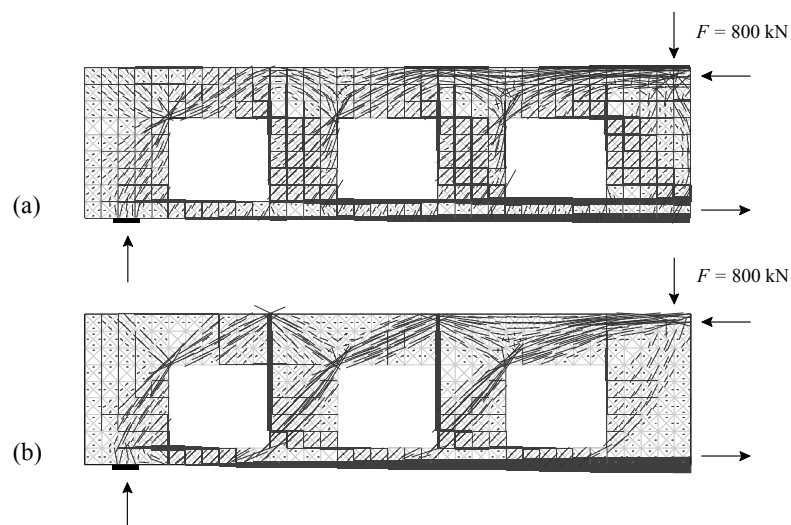


Figure 5.19: (a) *Champ de contraintes initial obtenu avec une armature constante distribuée partout pour la poutre avec plusieurs ouvertures;* (b) *champ de contraintes obtenu par la procédure proposée.*

La figure 5.20 montre l'énergie de déformation du système par rapport à l'énergie de déformation initiale en fonction du pas d'itération.

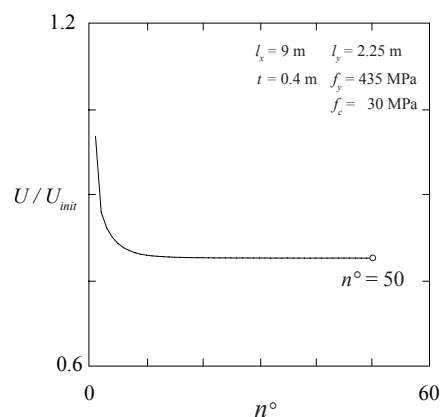


Figure 5.20: *Diagramme de l'énergie de déformation du système par rapport à l'énergie de déformation initiale en fonction du pas d'itération.*

Si le voile avec plusieurs ouvertures de la figure 5.19, est de petite taille et s'il peut plutôt s'assimiler à une poutre avec des ouvertures, la rigidité des membres en-dessous des ouvertures ne doit pas être prise en compte. Dans la procédure proposée ceci reste possible en considérant une rigidité nulle du béton, pour les éléments finis qui constituent ces membres. La figure 5.21 présente le champ de contrainte continu obtenu par la procédure décrite précédemment. Le modèle obtenu de cette manière correspond absolument au modèle de bielles-et-tirants théorique, voir figure 4.11 (a). Dans ce cas, en négligeant la rigidité des membres en-dessous des ouvertures, l'armature flexionnelle des membres au-dessus des ouvertures devient plus importante.

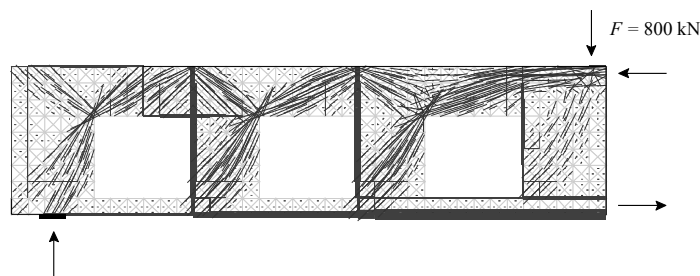


Figure 5.21: *Champ de contraintes obtenu avec la procédure proposée en négligeant la rigidité flexionnelle des membres au-dessous des ouvertures.*

La figure 5.22 montre le voile avec ouvertures avec la géométrie proposée par Souza [Souza08]. La figure 5.22 (a) montre la solution obtenue après la première itération de la procédure. En répétant le calcul itératif, certaines armatures disparaissent et d'autres sont dimensionnées selon la contrainte limite. La figure 5.22 (b) présente la solution obtenue après 50 itérations de calcul. Les armatures plus importantes sont facilement distinguées dans la zone inférieure du voile et autour de l'ouverture carrée. Le modèle de champs de contraintes continus correspond bien aux modèles obtenus avec l'approche de treillis initial présenté dans le chapitre 4. En se basant sur le modèle de champs de contraintes continus de la figure 5.22 (b), le modèle de bielles-et-tirants correspondant est obtenu, ainsi que l'illustre la figure 5.22 (c).

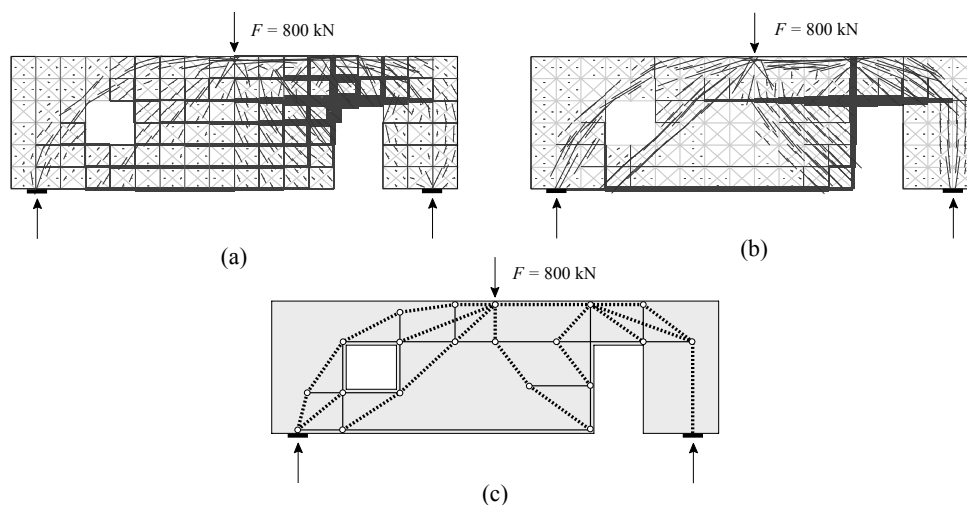


Figure 5.22: (a) *Champ de contraintes initial obtenu avec une armature constante distribuée partout pour le voile proposé par Souza [Souza08]; (b) champ de contraintes obtenu avec la procédure proposée; (c) modèle de bielles-et-tirants correspondant.*

La figure 5.23 montre l'énergie de déformation de système par rapport à l'énergie de déformation initiale en fonction du pas d'itération.

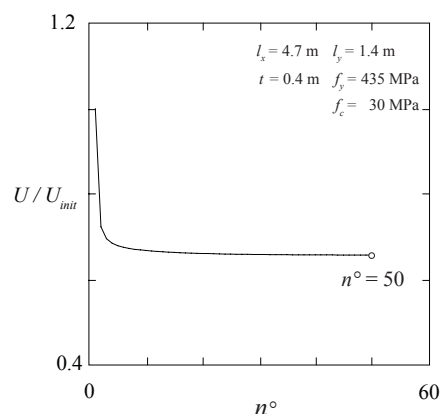


Figure 5.23: Diagramme de l'énergie de déformation du système par rapport à l'énergie de déformation initiale en fonction du pas d'itération pour le voile proposé par Souza [Souza08].

5.3.3 Exemple d'un élément d'essais

Un autre moyen pour contrôler les champs de contraintes continus obtenus par la procédure proposée serait de les comparer avec les modèles testés lors d'essais en laboratoire. Des essais réalisés dans le but de contrôler les modèles bielles-et-tirants proposés ont été effectués par Breña et Morrison [Breña07].

La figure 5.24 (a) montre la géométrie du voile proposé par Breña et Morrison. Sur la base d'une charge de dimensionnement de 150 kN et sur la base de la géométrie de la structure, ils ont proposé deux modèles de bielles-et-tirants. Grâce à ces modèles ils ont pu déterminer les armatures nécessaires obtenues selon la norme ACI 318, en utilisant un facteur de réduction de la résistance de 0.75 pour les tirants. De plus amples informations sur les armatures utilisées dans les essais en laboratoire se trouvent dans [Breña07] et dans la figure 2.39 de cette thèse.

Pour déterminer le modèle de champs de contraintes par la procédure proposée, la structure est modélisée par des éléments finis non-linéaires. Etant donné que le modèle d'essai est de petite taille, l'aptitude à transmettre l'effort tranchant du membre en dessous de l'ouverture inférieure n'est pas prise en compte. La figure 5.24 (b) présente la solution obtenue après la première itération avec une armature constante distribuée en tous points. En appliquant la procédure proposée, le champ de contraintes continu de la figure 5.24 (c) est obtenu après 50 itérations de calcul. Etant donné que les armatures finales sont bien concentrées dans ce modèle, le modèle de bielles-et-tirants peut être facilement déduit, au même titre que le modèle de champ de contraintes discret, voir figure 5.24 (d). Ce modèle correspond parfaitement au modèle obtenu par l'approche manuelle basée sur la statique graphique, expliquée au chapitre 2.

En se basant sur le modèle de champs de contraintes discret de la figure 5.24 (d) les efforts dans les tirants peuvent être déterminés. Pour faciliter la comparaison des armatures nécessaires selon le modèle obtenu et les modèles testés, les armatures sont dimensionnées selon la norme ACI 318. La figure 5.25 (a) présente la disposition d'armature proposée en accord avec le champ de

contraintes obtenu. Les barres d'armature utilisées correspondent à celles de l'essai, 10M (No. 3) qui est elle-même équivalente à la barre européenne de diamètre Ø10. La quantité d'armature utilisée selon la disposition présentée sur la figure 5.25 (a) est de 38% et de 40% inférieure par rapport à la disposition d'armature selon les modèles 2A et 2B de Breña et Morrison [Breña07], ainsi qu'on peut le voir à la figure 2.39.

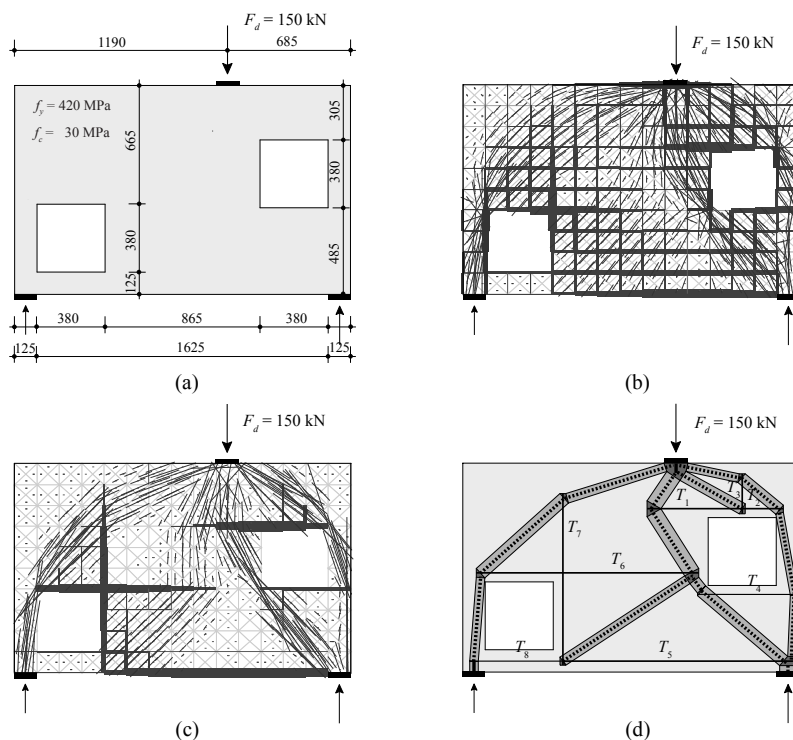


Figure 5.24: (a) Géométrie du voile proposé par Breña et Morrison [Breña07]; (b) champ de contraintes initial obtenu avec une armature constante distribuée partout; (c) champ de contraintes obtenu avec la procédure proposée; (d) champ de contraintes discontinu avec les éléments discrets.

La figure 5.25 (b) montre les valeurs des efforts obtenus pour chaque tirant du modèle proposé (figure 5.24 (d)), en utilisant une charge de dimensionnement de 150 kN, ainsi qu'en utilisant la valeur d'écoulement d'armatures, réduite par le coefficient 0.75 selon la norme ACI, les armatures suivantes peuvent être obtenues, 5.25 (b).

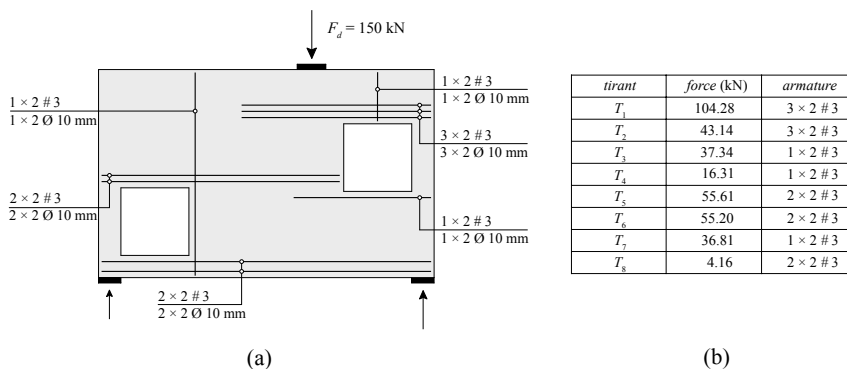


Figure 5.25: (a) Disposition d'armature selon le modèle de champ de contraintes obtenu; (b) valeurs des efforts dans les tirants du modèle de champ de contraintes discontinu.

L'efficacité du modèle obtenu est comparée aux modèles testés dans les diagrammes de la figure 5.26. La figure 5.26 (a) présente le rapport entre la charge de dimensionnement et le volume d'armature nécessaire pour les modèles 2A et 2B de Breña et Morrison ainsi que pour le modèle de la figure 5.24 (d). La figure 5.26 (b) quant à elle, présente le rapport entre la charge ultime de la structure et le volume de l'armature proposée, pour les trois modèles.

La charge ultime, pour les modèles de Breña et Morrison, peut être obtenue avec des éléments finis non-linéaires [Muttoni08] en utilisant la disposition d'armature originale [Breña07]. La charge de rupture du modèle proposé est calculée en utilisant une disposition d'armature selon la description de la figure 5.25 (a).

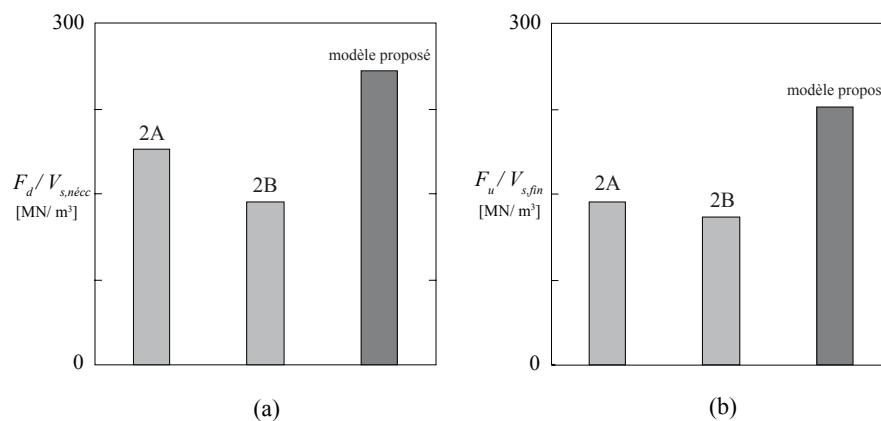


Figure 5.26: (a) Rapport entre la charge de dimensionnement et l'armature nécessaire pour les deux modèles de Breña et Morrison ainsi que pour le modèle proposé; (b) rapport de la résistance ultime et de l'armature utilisé pour ces trois modèles.

5.3.4 Structures hyperstatiques

Dans les chapitres précédents, il a été démontré que le critère de l'énergie de déformation et le critère de la quantité d'armature ne respectent pas l'hyperstaticité des structures. Les approches de génération (treillis initial, chapitre 4) basées sur ces critères peuvent trouver des solutions optimales pour les modèles de bielles-et-tirants, mais demeurent par ailleurs isostatiques pour les structures hyperstatiques. Bien que les modèles obtenus soient optimaux selon les critères définis, ils ne le sont plus vis à vis du comportement des structures hyperstatiques aux états limites ultime et de service. En outre, ils ne sont pas en accord avec la cinématique des structures pour les charges appliquées.

Dans l'optimisation des champs de contraintes continus, la compatibilité des déformations est respectée. La contrainte d'armature sur la base de laquelle l'armature est dimensionnée dépend aussi des déformations du béton autour d'armature. Pour cette raison, avec la procédure proposée, il est possible d'obtenir des modèles de champs de contraintes hyperstatiques. En effet, ces modèles sont obtenus car la redistribution des efforts vers un modèle isostatique exige les déformations dans certains zones de la structure plus grandes que f_y/E_s , et comme la conséquence l'armature dans ces zones est maintenue.

Par contre, souvent pour certaine disposition de la charge et la géométrie donnée, la position de l'armature principale peut contrôler la déformation du béton dans les autres zones de la

structure, qui sont considérées comme importantes pour la hyperstaticité de la structure. Dans ce cas le modèle optimal, obtenu avec l'optimisation, peut être isostatique. Dans le but d'obtenir toujours des modèles de champs de contraintes hyperstatiques pour les structures hyperstatiques, le changement des données de la structure doit être effectué.

Etant donné que pour l'obtention d'un modèle isostatique à partir d'un modèle hyperstatique les réactions d'appuis doivent être changées, la seule solution possible pour maintenir dans chaque cas l'hyperstaticité des structures est donc la limitation du changement des réactions, comme il est démontré au chapitre précédent. La même approche peut également être suivie pour la génération des champs de contraintes par les éléments finis non-linéaires. Ainsi, pour respecter l'hyperstaticité de la structure lors la procédure, elle doit être rendue isostatique en changeant les réactions hyperstatiques par le biais de forces externes. La valeur de ces forces externes peut être égale à la réaction d'appui élastique ou une certaine redistribution peut être admise.

La figure 5.27 montre le voile hyperstatique soumis à deux forces externes. Si ces deux forces sont positionnées selon la figure 5.27 (a) le modèle de champ de contraintes obtenu par la procédure s'avère être la descente directe des charges. Par contre si elles sont proches de l'appui central, le système en bascule est obtenu, 5.27 (b). En remplaçant les réactions d'appui par des forces externes égales aux réactions élastiques, (sans redistribution dans ce cas) l'hyperstaticité de ces structures est respectée en empêchant le changement des réactions durant la procédure. La figure 5.27 (c) et 5.27 (d) illustrent le résultat obtenu selon cette approche pour les deux dispositions des charges. Les champs de contraintes obtenus sont présentés sous forme déformée, dans le but de montrer la cinématique de la structure.

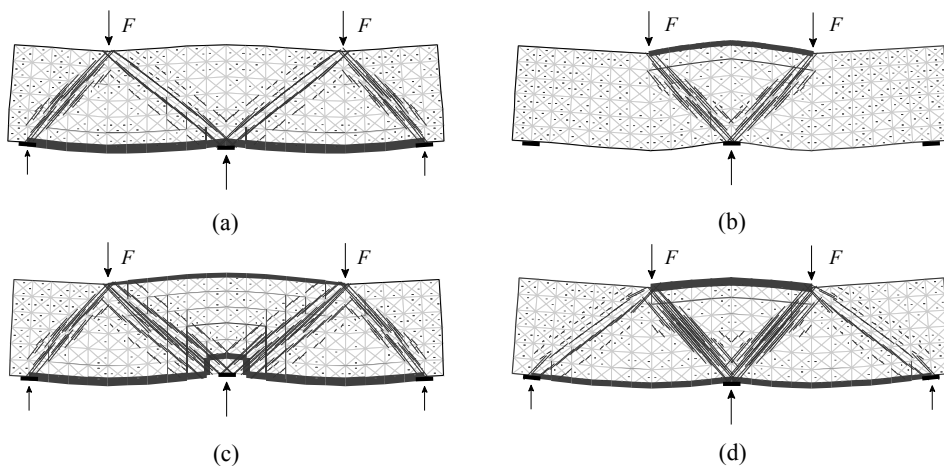


Figure 5.27: Voile hyperstatique soumis à deux forces; (a) champ de contraintes obtenu pour un positionnement des forces vers les appuis externes; (b) champ de contraintes obtenu pour un positionnement des forces vers l'appui interne; (c) - (d) champs de contraintes obtenus pour deux dispositions des forces en contrôlant les réactions d'appuis internes.

5.3.5 Armature minimale dans l'optimisation

L'optimisation des champs de contraintes, présentée dans les paragraphes précédents, regarde la génération des champs de contraintes continus avec des formes qui permettent l'identification la plus simple possible, des tirants principales et des bielles en compression. Sur la base de ces

résultats, les armatures principales peuvent être déterminées et les contraintes dans le béton contrôlées.

La proposition de Fernández et Muttoni [Fernández07] par contre considère la formation des champs de contraintes discontinus sur la base d'un calcul avec des champs de contraintes continus et une armature constante distribuée partout. Ce processus recommande l'utilisation d'une armature minimale pour création des champs de contraintes discontinus dans le but de soulager les armatures principales et inclure cette armature dans le comportement à l'état limite ultime de l'élément, figure 5.4.

Une synthèse de ces deux approches est possible en utilisant l'optimisation décrite avec la figure 5.9, mais en introduisant une limitation inférieure pour chaque armature (eq. 5.2) pour respecter l'armature minimale prescrite par les normes. Cette limitation peut être introduite comme suit:

$$A_{s,j}^i = \frac{A_{s,j}^{i-1} \sigma_{s,j}^{i-1}}{f_y}, A_{s,j}^i \geq A_{\min} \quad (5.4)$$

ce qui représente une variation de la formule (5.2). Cet algorithme adapté à l'armature minimale, est analysé avec la structure présentée à la figure 5.13 et représentée à la figure 5.28 (a). La figure 5.28 (b) montre le champ de contraintes continus obtenu en appliquant l'équation (5.4) et une armature minimale égale à 0.2 % selon la norme SIA 262. En utilisant les valeurs des efforts dans les armatures de ce modèle une disposition d'armature peut être facilement sélectionnée, figure 5.28 (c).

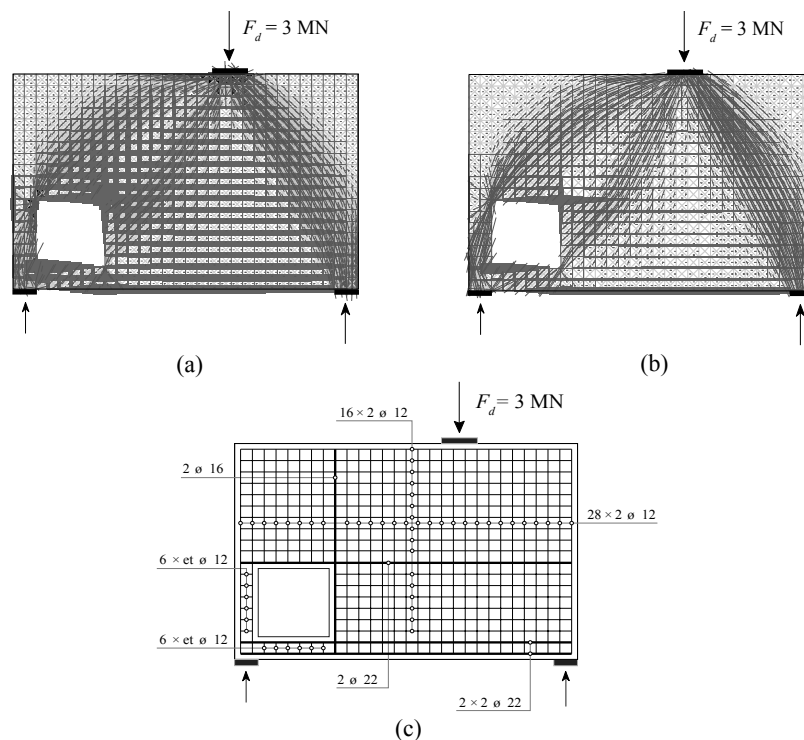


Figure 5.28: (a) Résultat de la première itération de la procédure proposée pour le voile avec ouverture (dimensions de la structure dans la figure 5.14); (b) modèle de champ de contraintes obtenu après 20 itérations en respectant l'équation (5.4); (c) disposition d'armature correspondante.

Bien que le champ de contraintes continues de la figure 5.28 (b) est moins clair que le champ de contraintes de la figure 5.13 (b), l'algorithme inclut l'armature minimale dans la réponse structurale et augmente l'armature seulement où l'armature minimale n'est pas suffisante. Une disposition d'armatures peut être facilement déterminée à partir de ce modèle et donc cette procédure peut être facilement utilisée dans la pratique.

5.4 Procédure directe pour la génération des champs de contraintes

La procédure proposée dans le paragraphe précédent est basée sur l'imposition d'une contrainte limite dans toutes les barres du système ou d'une déformation correspondant à cette contrainte limite. Etant donné que le résultat de la première itération ne correspond pas à cette exigence et que certaines barres sont moins actives, la majorité des sections de barres sont annulées au cours de la procédure décrite. Selon l'exposé du chapitre précédent et la présentation décrite dans [Ali97], la condition nécessaire pour obtenir une solution nécessitant une quantité d'armature minimale est que toutes les barres soient soumises à leur contrainte limite. La solution qui consiste à utiliser des armatures soumises à la contrainte limite correspond également à une solution dont l'énergie de déformation est minimale.

La procédure proposée s'avère très efficace pour la génération des champs de contraintes, surtout avec les éléments finis non-linéaires où la structure en béton armé est modélisée de manière réaliste. Une limitation d'application peut être le temps de calcul nécessaire qui est lié aux calculs non-linéaires. Ainsi, la formulation d'un algorithme capable de donner des réponses concernant la forme des champs de contraintes et la position des tirants nécessaires dans un nombre minimal d'itération, demeure envisageable.

5.4.1 Procédure basée sur la prédiction

Etant donné que pendant les itérations les barres restantes gagnent en importance par rapport aux autres, un algorithme possible pour la génération des champs de contraintes peut être basé sur cette propriété importante. Contrairement aux algorithmes existants, où le point de départ est un grand nombre de solution possibles, qui les élimine progressivement au fur et à mesure des itérations, un algorithme peut se baser sur la sélection directe de la solution finale en étudiant certaines propriétés des solutions intermédiaires. Une telle approche représente une prédiction de la solution finale.

Les propriétés sur lesquelles cet algorithme peut se baser sont l'augmentation d'énergie de déformation du tirant entre deux itérations, voir figure 5.11 (a) ou l'augmentation du volume d'armature de tirant, comme l'illustre la figure 5.11 (b). Si ce deuxième critère est appliqué, la condition pour qu'une barre doive rester dans la configuration finale peut se définir comme:

$$\frac{A_{s,j}^{i-1}}{A_{s,j}^i} \geq 1 \quad (5.5)$$

où $A_{s,j}^{i-1}$ et $A_{s,j}^i$ sont les sections d'une barre d'armature dans deux itérations successives, calculées selon la formule (5.2). Toutes les barres qui ne remplissent pas les conditions imposées par le critère (5.5) doivent être éliminées.

Même si l'utilisation d'une condition basée sur l'énergie de déformation semble évidente selon le diagramme 5.11 (a), l'utilisation de cette condition reste néanmoins plus contraignante; certaines barres peuvent avoir une diminution d'énergie de déformation due à la diminution de la contrainte dans la barre mais accompagnée d'une augmentation de la section. Donc, en appliquant la condition basée sur l'énergie de déformation, ces barres seront éliminées bien qu'elles soient nécessaires.

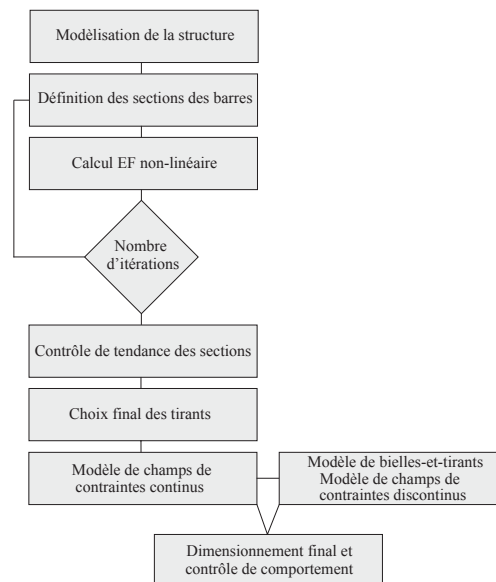


Figure 5.29: *Algorithme de la procédure directe pour la génération des champs de contraintes et pour la modélisation de structures.*

La figure 5.29 montre le schéma d'un algorithme de génération des champs de contraintes. Tout d'abord quelques cycles (typiquement 3) de calcul sont réalisés en utilisant la procédure présentée dans le paragraphe précédent ainsi que la formule (5.2). Le premier cycle est nécessaire pour disposer l'armature initiale en accord avec la charge utilisée et donc éviter que toutes les armatures aient une diminution ou une augmentation de leur section. Ensuite le deuxième et le troisième (n-ième) cycle servant à l'application de la condition (5.5). Une fois les positions des armatures nécessaires sélectionnées, un dernier calcul sera fait en tenant compte des armatures placées selon ces nouvelles données.

La figure 5.30 montre l'application de cet algorithme pour le voile de la figure 5.10. En considérant le comportement des tirants selon la figure 5.11 (b), après trois itérations de calcul la section d'armature augmente dans les deux tirants inférieurs seulement et selon la condition 5.5, ils sont sélectionnés pour le dernier calcul, figure 5.30 (a). Etant donné que le tirant avec le bras de levier qui est le plus petit augmente sa section dans un premier temps puis la diminue ensuite si la condition (5.5) est appliquée, après six itérations de calcul, le champ de contraintes de la figure 5.30 (b) est obtenu. Bien que ce champ de contraintes soit plus juste par rapport à la solution classique dans le cas de la charge considéré, les deux modèles obtenus s'avèrent être des solutions analogues.

L'algorithme proposé est appliqué au voile avec ouverture [Schlaich87] et le résultat obtenu est présenté sur la figure 5.31. Dans un cas comme celui-ci, un tirant ne traverse pas nécessairement

tout l'élément, donc l'algorithme et la condition (5.5) sont appliqués pour chaque barre reliant deux points du modèle.

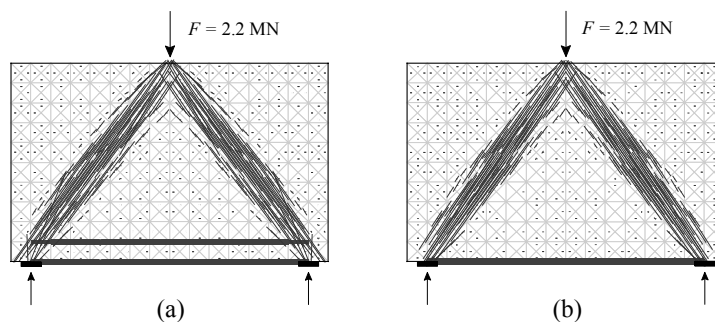


Figure 5.30: (a) *Champ de contraintes obtenu en appliquant l'algorithme de la figure 5.29 après 3 itérations*; (b) *champ de contraintes obtenu en appliquant l'algorithme après six itérations*.

Même si d'autres barres, qui sont sur la même ligne que les barres choisies sont éliminées, une armature minimale est mise en place pour permettre de rétablir un équilibre global dans le cas de l'annulation d'une barre nécessaire.

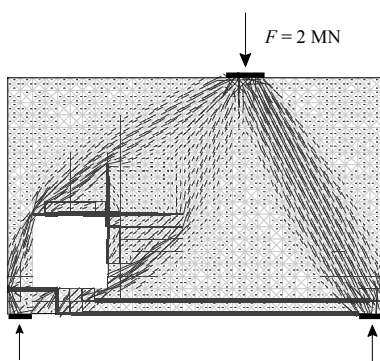


Figure 5.31: *Champ de contraintes obtenu avec l'algorithme proposé pour le voile avec l'ouverture [Schlaich87]*.

Même si d'autres barres, qui sont sur la même ligne que les barres choisies sont éliminées, une armature minimale est mise en place pour permettre de rétablir un équilibre global dans le cas de l'annulation d'une barre nécessaire.

5.4.2 Exemples d'application

Comme pour les algorithmes précédents, l'application de l'algorithme décrit sur la figure 5.29 est contrôlée en l'appliquant aux mêmes exemples, dans le but aussi de comparer les résultats obtenus. La figure 5.32 montre l'illustration d'une poutre avec des ouvertures. Étant donné qu'une structure élancée est considérée, la rigidité des éléments en dessous des ouvertures est négligée. La figure montre le champ de contraintes obtenu avec la procédure directe (figure 5.29). Le champ de contraintes obtenus après trois itérations de calcul correspond à la solution classique choisie pour ce problème [Muttoni97].

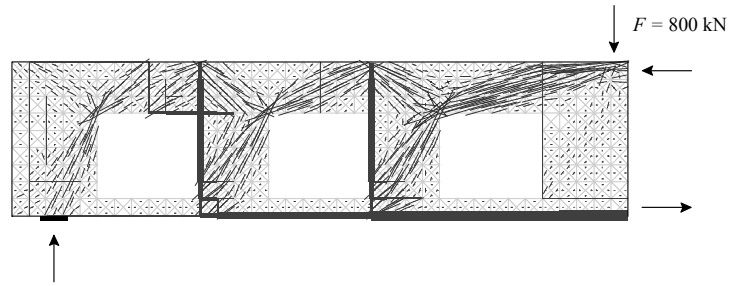


Figure 5.32: *Poutre avec des ouvertures et champ de contraintes obtenu avec la procédure directe.*

La figure 5.33 montre le champ de contraintes obtenu pour le voile avec les ouvertures proposé par Souza [Souza08]. Comme dans le cas précédent, les positions des armatures nécessaires sont obtenues après trois itérations. Leur position correspond bien à celles de la figure 5.22, malgré un nombre de calculs réduit.

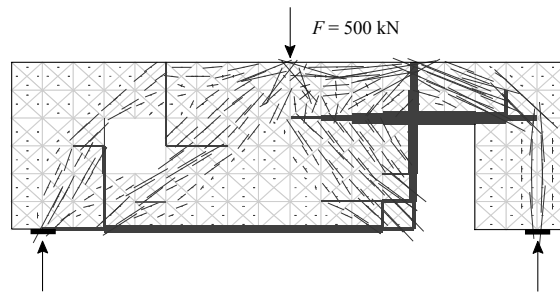


Figure 5.33: *Voile avec les ouvertures et champ de contraintes obtenu avec la procédure directe.*

6. Applicabilité des champs de contraintes continus et discontinus

Ce chapitre est consacré à l'applicabilité des champs de contraintes continus et discontinus pour l'analyse des structures en béton armé. La sélection d'une topologie optimale des champs de contraintes, est une condition nécessaire mais non suffisante pour assurer un dimensionnement intégral de la structure analysée. Certaines limites, telles que la réduction de la résistance du béton, doivent être appliquées. Sur la base de calculs et d'essais effectués en laboratoire, ces limites sont étudiées et analysées dans ce chapitre.

6.1 Introduction

Les premières applications de la théorie de la plasticité au calcul des structures en béton armé ont été proposées pour la détermination de la résistance flexionnelle des poutres et des dalles, en général gouvernée par la résistance de l'armature, une valeur qui reste constante et est peu influencée par des différents effets. Avec le développement de la méthode des champs de contraintes, l'application de la théorie de la plasticité pour d'autres topologies de structures est devenue possible. Par contre, ces structures sont souvent plus fragiles et une éventuelle rupture du béton doit être prise en considération.

L'un des points forts de la méthode des champs de contraintes est qu'elle se base uniquement sur la résistance à la traction et à la compression des armatures et de la résistance à la compression du béton. La modélisation d'une barre d'armature avec un comportement rigide-parfaitement plastique qui est employé, est en accord avec son comportement réel après sa plastification, mais, en ce qui concerne le béton, une telle modélisation ne peut être acceptée qu'avec des réserves. Etant donné que la résistance du béton structural est influencée par les nombreux effets, l'influence de ces effets sur la réduction de la résistance du béton doit être analysée.

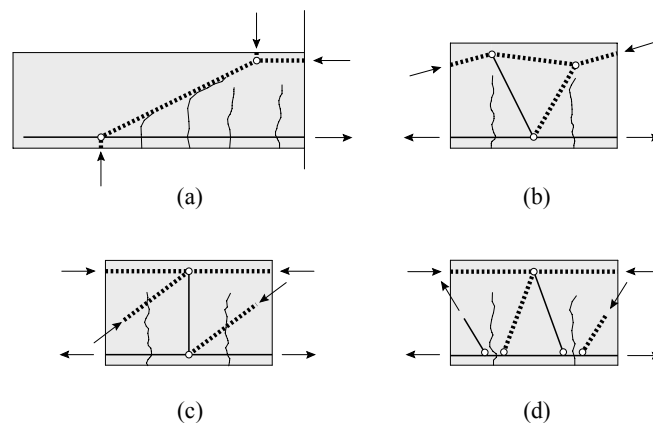


Figure 6.1: (a) Poutre sans étriers soumise à l'effort tranchant; (b) effet porte-à-faux; (c) effet d'engrainement; (d) effet de goujon; [Muttoni91].

Malgré ces réductions, dans certains éléments, le béton ne peut pas atteindre sa résistance plastique. Un tel cas est représenté par la figure 6.1 (a). Pour cette poutre sans étriers, le modèle d'appui direct est très influencé par une fissure qui rentre dans la zone de la bielle et perturbe la transition des efforts en provoquant une rupture prématurée. Cet élément doit être étudié avec

des méthodes qui prennent en compte d'autres mécanismes de transmission des efforts qui ne sont pas considérés par la méthode des champs de contraintes. Une telle méthode, appliquant la théorie de la fissure critique, est proposée par Muttoni et Fernández Ruiz [Muttoni08].

Les mécanismes qui ne sont pas pris en compte par la méthode des champs de contraintes sont présentés à la figure 6.1 (b), (c) et (d). La figure 6.1 (b) montre la transmission des efforts dans le béton par l'effet de porte-à-faux qui fait appel à la résistance à la traction du béton qui n'est pas considérée par les champs de contraintes. La figure 6.1 (c) illustre la transmission des efforts par l'effet d'engrainement des agrégats avec les tirants verticaux dans le béton, quant à la figure 6.1 (d) elle représente la transmission des efforts par l'effet de goujon qui fait appel à la rigidité flexionnelle de la barre d'armature. Si la structure est correctement armée, dans majorité des cas, certains de ces effets peuvent être négligés, par contre ils ont toujours certaine influence sur la transmission des efforts dans la structure.

Même si une armature est disposée dans la structure, la réduction de la résistance du béton doit être également prise en compte. Par cette réduction, plusieurs effets doivent être considérés et certains d'entre eux sont présentés à la figure 6.2. La figure 6.2 (a) montre l'influence des fissures au comportement uni-axial du béton. Le comportement uni-axial du béton influence sa capacité de redistribution des efforts et en l'absence d'une telle capacité, une réduction de la résistance du béton doit être prise en considération, figure 6.2 (b). Cette réduction permet la modélisation du béton selon une loi rigide-parfaitement plastique en permettant de cette manière les redistributions des efforts sans décharge des zones plastifiées.

La présence d'une déformation transversale augmente l'ouverture des fissures, ce qui a pour conséquence de diminuer également la résistance à la compression du béton, figure 6.2 (c). De plus, la présence d'une armature peut influencer une rupture hors plan et l'éclatement de l'enrobage. En conclusion, l'application d'un autre cas de charge peut dévier les champs de compression, qui dans ce cas traverseraient les fissures précédemment créées, figure 6.2 (d).

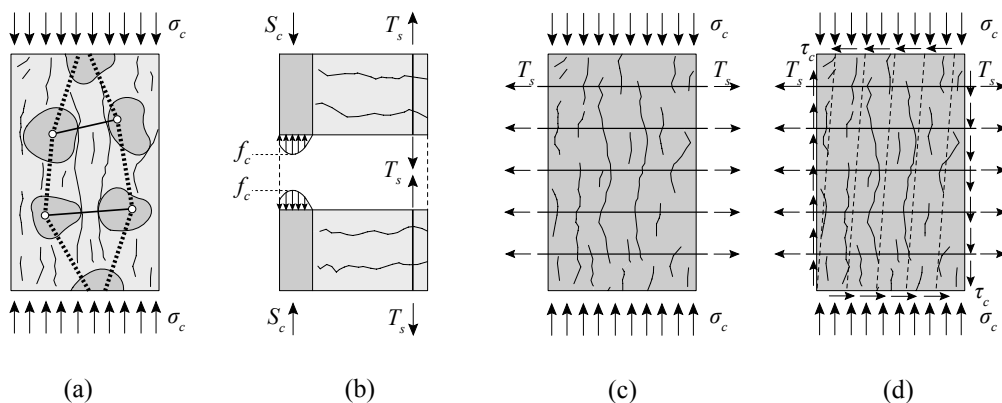


Figure 6.2: (a) *Élément du béton soumis à la compression uni-axiale*; (b) *élément du béton soumis à la flexion simple*; (c) *élément du béton soumis à la compression et la traction transversale*; (d) *élément du béton soumis à la compression, à l'effort tranchant et à la traction transversale*.

Les exemples cités précédemment sont les causes principales pour lesquelles le béton des structures ne peut pas atteindre sa résistance. Ce pourquoi la réduction de la résistance du béton

lors l'analyse des structures par des champs de contraintes continus et discontinus sera analysée dans ce chapitre.

6.2 Résistance effective du béton pour l'analyse des structures par la méthode des champs de contraintes

6.2.1 Définition

La résistance effective du béton lors de la vérification et du calcul de la résistance ultime des structures en béton armé peut être déterminée comme suit:

$$f_{ce} = f_{ck} \cdot \eta_{f_c} \cdot \eta_{\epsilon} \cdot \eta_D \cdot \eta_{LCF} \cdot \eta_{LTL} \cdot \eta_t \quad (6.1)$$

où:

- f_{ce} est la résistance effective du béton;
- f_{ck} est la résistance caractéristique à la compression de cylindre (5% fractile);
- η_{f_c} est un facteur de réduction de la résistance du béton qui prend en compte l'augmentation de la fragilité du béton avec l'augmentation de sa résistance, permettant de cette manière les redistributions des efforts;
- η_{ϵ} est un facteur de réduction de la résistance du béton prenant en compte la présence des déformations latérales dans les directions des champs de contraintes;
- η_D est un facteur de réduction de la résistance du béton qui prend en compte l'apparition des fissures hors du plan de l'élément, celles-ci étant dues à la présence des gaines de précontrainte ou des barres d'armature;
- η_{LCF} est un facteur de réduction de la résistance du béton qui considère « low cycle fatigue », dû à l'application répétitive de la charge;
- η_{LTL} est un facteur de réduction de la résistance du béton due à l'application de la charge pendant un intervalle de temps considérable;
- η_t est un facteur d'amplification de la résistance du béton qui tient en compte de l'augmentation de la résistance avec l'âge de béton.

Dans le cas du dimensionnement d'une nouvelle structure ou de la vérification de la sécurité structurale, la résistance effective du béton doit être réduite par un coefficient partiel de sécurité défini par les normes. De cette manière, la résistance effective de dimensionnement peut être calculée comme suit:

$$f_{ce,d} = f_{ce} / \gamma_c \quad (6.2)$$

où $f_{ce,d}$ est la résistance effective de dimensionnement et γ_c est le facteur partiel de sécurité, égal à 1.5 selon la norme suisse SIA 262 [SIA262] et la plupart des normes appliquant ce coefficient de sécurité.

Les essais en laboratoire

La résistance effective du béton est étudiée grâce aux essais effectués en laboratoire. Robinson et Demorieux [Robinson69] ont été parmi les premiers à avoir remarqué que la rupture du béton se produisait pour des contraintes inférieures de la résistance caractéristique. De nombreuses recherches ont été effectuées suite à leurs essais, sur des panneaux en béton armé, en utilisant différentes dispositions des charges, voir la figure 6.3.

La figure 6.3 (a) montre le type de panneau utilisé lors de la recherche de la résistance effective du béton avec l'application d'un effort tranchant, parfois accompagné d'un effort normal. Pour cette disposition de charge sans compression bi-axiale, les armatures sont en traction et les champs en compression sont en diagonale dans le panneau. Cette même disposition de panneau est utilisée par Vecchio et Collins [Vecchio82], André [André87], Sumi [Sumi87], Yamaguchi et al. [Yamaguchi88] et Ohmori et al. [Ohmori89], Kollegger et Mehlhorn [Kollegger90], Vecchio et Chan [Vecchio90] et Vecchio et al. [Vecchio94]. La figure 6.3 (b) montre la topologie des panneaux utilisées par Eible et Neuroth [Eible88], Kollegger et Mehlhorn [Kollegger90] et Belarbi et Hsu [Belarbi95]. Pour cette topologie de panneau, la traction est introduite directement dans les armatures puis les efforts de compression sont appliqués dans l'autre direction.

Afin de simuler l'effort tranchant, Stevens et Collins [Stevens91], Marti et Meyboom [Marti92], Pang et Hsu [Pang92] et Zhang et Hsu [Zhang95] ont appliqué de efforts de compression et de traction de la même intensité dans deux directions perpendiculaires, voir figure 6.3 (c). Ces dispositions d'armature ainsi ces sollicitations sont utilisées également par Kollegger et Mehlhorn [Kollegger90]. Des panneaux sollicités uni-axialement sont utilisés par Leonhardt [Leonhardt69], Eible et Neuroth [Eible88] et Kollegger et Mehlhorn [Kollegger90], figure 6.3 (d) afin d'effectuer des recherches sur l'influence de la présence d'armature sur la résistance du béton. Les résultats de ces essais seront utilisés par la suite dans la discussion sur la résistance effective du béton.

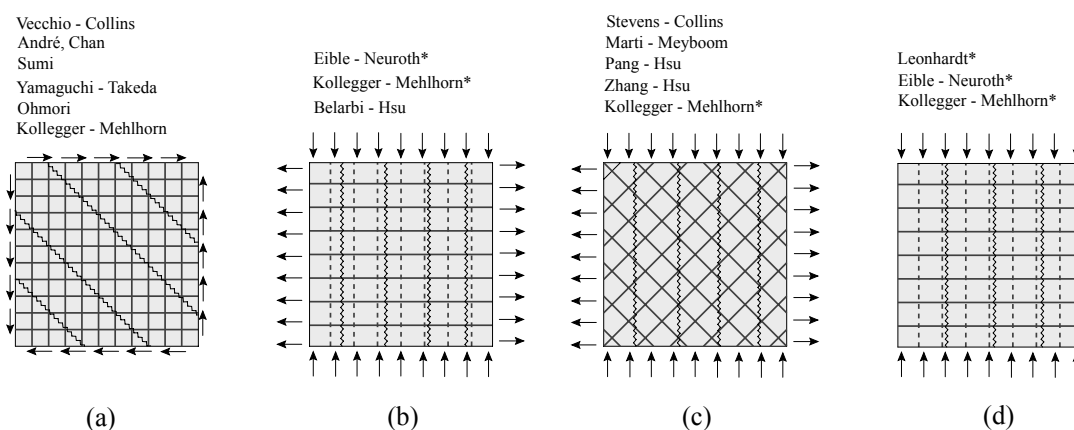


Figure 6.3: (a) Type de panneau sollicité à l'effort tranchant; (b) sollicitation traction-compression avec armatures perpendiculaires à la direction des contraintes du béton; (c) sollicitation traction-compression avec armatures en diagonale; (d) sollicitation uni-axiale; (*La forme des panneaux de la figure 6.3 (c) correspond seulement à certains des essais de Leonhardt, Kollegger-Mehlhorn et Eible-Neuroth).

6.2.2 Réduction de la résistance du béton à cause de la fragilité du béton en compression

Pour permettre la modélisation du béton selon une loi rigide-parfaitement plastique, le facteur η_{fc} tient compte de la fragilité du béton ou de sa chute de résistance après avoir atteint son maximum. L'utilisation de ce coefficient doit permettre les redistributions des efforts au niveau local, pour les zones du béton localement plastifiées, mais aussi à un niveau global pour la redistribution des efforts entre les différentes parties de la structure.

La figure 6.4 nous montre la modélisation de courbes contraintes-déformations pour des bétons possédant des résistances différentes [Fernández07]. La figure montre qu'un béton de résistance égale à 20 MPa peut se comporter selon une loi presque parfaitement plastique. Par ailleurs, en ce qui concerne les bétons à hautes performances et afin de pallier à leur fragilité, une réduction plus sévère de la résistance doit être introduite.

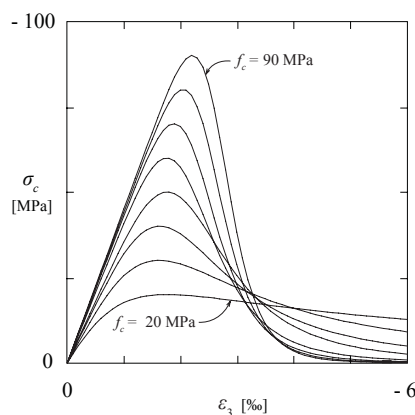


Figure 6.4: *Modélisation du comportement contrainte-déformation du béton soumis à la compression uni-axiale selon Fernández et al. [Fernández07].*

En tenant compte de la fragilité des bétons, Muttoni et al. [Muttoni87] ont proposé un facteur de réduction égal à :

$$\eta_{f_c} = \left(\frac{f_{c0}}{f_{ck}} \right)^{\frac{1}{3}} \leq 1 \quad (6.3)$$

où $f_{c0} = 20$ MPa est la résistance de référence du béton comprimé. Selon cette formule, la réduction de la résistance caractéristique f_{ck} est faible lorsque celle-ci est proche de f_{c0} et devient plus importante lorsque f_{ck} augmente. La norme suisse SIA262 a adopté la même forme pour le facteur de réduction, tout en employant une résistance de référence de 30 MPa.

Si tous les essais des panneaux effectués par des différents chercheurs sont pris en considération; les essais de Yamaguchi et al. [Yamaguchi88] montrent l'influence du facteur de réduction η_{fc} . La topologie de ces panneaux et la disposition des charges correspondent à l'illustration de la figure 6.3 (a). Les neuf panneaux ont les mêmes dimensions, le même taux d'armature $\rho_x = \rho_y = 0.00428$ et également le même diamètre d'armature $\emptyset = 29$ mm. La résistance du béton en compression varie entre 20 et 80 MPa. La figure 6.5 (a) montre la contrainte dans le béton (calculée) par rapport à la résistance caractéristique du béton. Le diagramme montre la tendance à la diminution de la résistance effective pour les bétons à plus hautes performances.

La figure 6.5 (b) représente le même diagramme, mais en annulant l'influence des déformations transversales sur la chute de la résistance en appliquant la formule (6.6). Le diagramme démontre que la diminution de la résistance effective reste la plus importante pour les bétons à hautes performances.

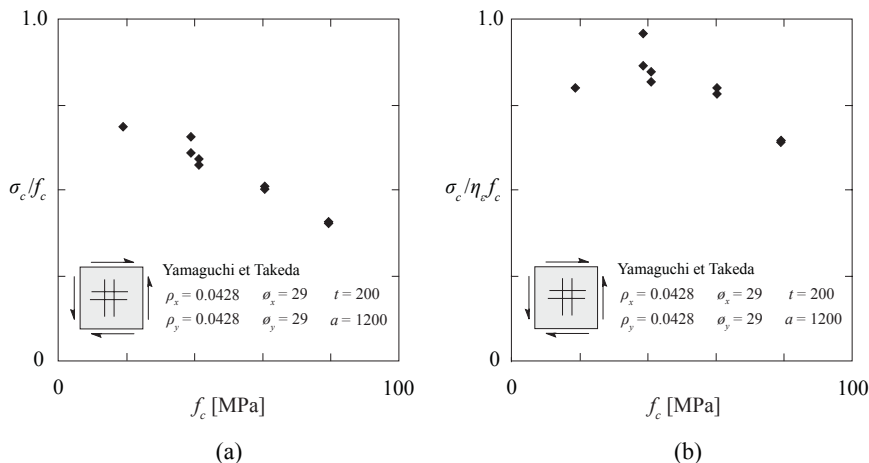


Figure 6.5: (a) Résistance effective du béton en fonction de la résistance caractéristique; (b) résistance effective du béton avec annulation de l'influence des déformations transversales, en utilisant la formule (6.6).

Si l'influence de la fragilité du béton est prise en compte selon la formule (6.3) avec la résistance de référence $f_{c0} = 30$ MPa, les points de la figure 6.6 sont faiblement dispersés.

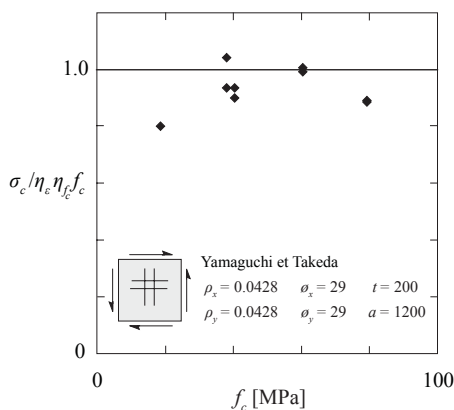


Figure 6.6: Résistance effective du béton avec annulation de l'influence des déformations transversales et de la fragilité du béton.

Les contraintes dans le béton (calculées) ont été obtenues par une analyse par champs de contraintes continus. La formule (6.3) peut être utilisée de manière similaire pour les calculs par champs de contraintes discontinus.

6.2.3 Réduction de la résistance du béton à cause des déformations transversales

La résistance à la compression du béton peut être fortement influencée par des déformations transversales du béton. Les premiers à avoir remarqué l'influence des déformations latérales ont

été: Robinson et Demorieux [Robinson69] et par la suite Collins et Vecchio [Collins79, Vecchio82].

Sur la base des essais effectués, figure 6.3, à part des ruptures telles que la rupture du béton à la compression et des armatures à la traction, les deux ruptures les plus souvent observées lors des essais sont: la rupture par glissement et la rupture par l'éclatement d'enrobage, présentés à la figure 6.7.

La figure 6.7 (a) montre la transmission des efforts à travers une fissure précédemment créée. Il est évident que selon une telle disposition des efforts il est difficile d'activer toute la résistance plastique du béton, car la forme de la fissure, son ouverture et les plastifications locales du béton influencent son adoucissement. Cet adoucissement du béton peut provoquer une rupture par glissement, cas présenté à la figure 6.7 (b).

Pour ce mode de rupture, on peut distinguer deux cas de comportement: le premier cas lorsque les armatures sont égales dans deux directions perpendiculaires, dans cette disposition, il n'y a pas de déviations importantes des contraintes de compression par rapport à la fissuration à la rupture. Soit les deux armatures sont à l'écoulement et la résistance est déterminée par l'armature, soit les déformations sont plus faibles et dans ce cas la résistance est déterminée par le béton. Pour cette typologie, la réduction de la résistance du béton est due aux perturbations des champs de contraintes et aux plastifications locales du béton. Le deuxième cas se présente lorsque les armatures sont différentes dans deux directions perpendiculaires. Pour cette disposition, il y a de fortes déviations des champs de contraintes qui traversent les fissures précédemment créées. La rupture est très souvent due à l'écoulement d'une armature et à la rupture du béton par glissement. L'engrènement des agrégats et l'effet de goujon, jouent dans ce cas un rôle important pour la transmission des contraintes au travers des fissures.

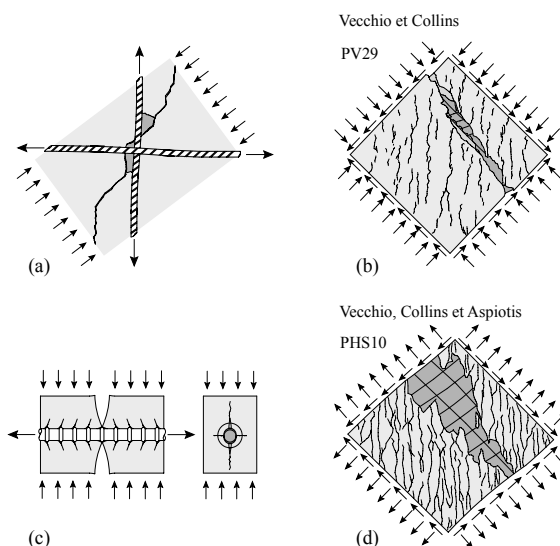


Figure 6.7: (a) Transmission des efforts au travers de la fissure et adoucissement du béton; (b) rupture par glissement; (c) fissuration par glissement relatif entre la barre et le béton; (d) rupture par éclatement de l'enrobage.

Un autre mode de rupture hors plan sera présenté ci-dessous. La figure 6.7 (c) montre un glissement relatif entre la barre et le béton, et la fissuration radiale créée par la traction tangentielle autour de la barre. Si un effort de compression est appliqué dans le plan, cette

fissuration radiale peut provoquer une rupture par délamination ou par éclatement de l'enrobage. La figure 6.7 (d) présente l'exemple d'une rupture par éclatement de l'enrobage suivie d'une rupture par glissement. La rupture par éclatement de l'enrobage est rarement remarquée pour des dispositions de charges et d'armatures comme illustré à la figure 6.3 (a), mais elle s'est avéré être une rupture plus remarquable pour la disposition de charges et d'armatures de la figure 6.3 (b), où les armatures sont perpendiculaires aux champs de contraintes.

Les deux phénomènes de rupture de la figure 6.7 sont très différents, le premier étant très dépendant de la déformation transversale, la deuxième dépendant par contre de la déformation de la barre. Malgré cette différence, le critère de rupture en fonction de la déformation transversale du béton peut être appliqué dans les deux cas, car la relation suivante reste valable:

$$\frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} \tag{6.4}$$

d'où on obtient

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_x + \varepsilon_y - \varepsilon_2 \tag{6.5}$$

où ε_1 est la déformation transversale du béton, ε_x et ε_y sont les déformations dans les directions cartésiennes correspondantes à la position des armatures et ε_2 est la déformation du béton dans la direction de contrainte principale de compression. Par l'équation (6.4) il s'avère évident qu'il existe une forte corrélation entre la déformation transversale du béton et la déformation longitudinale des armatures, en particulier pour les grandes déformations pour lesquelles la déformation du béton devient moins importante. Cette conclusion reste valable pour la disposition de la charge selon la figure 6.3 (b), pour laquelle la déformation latérale du béton ε_1 coïncide avec la déformation longitudinale des barres, sans tenir compte de tension stiffening.

La figure 6.8 (a) montre la courbe contrainte-déformation transversale, pour les bétons normaux. Si une déformation transversale est appliquée, le comportement du béton est moins rigide et la résistance effective plus faible. La figure 6.8 (b) montre que la fragilité du béton et la déformation transversale sont deux phénomènes combinés et que la diminution de la résistance est plus prononcée pour les bétons avec un comportement plus fragile.

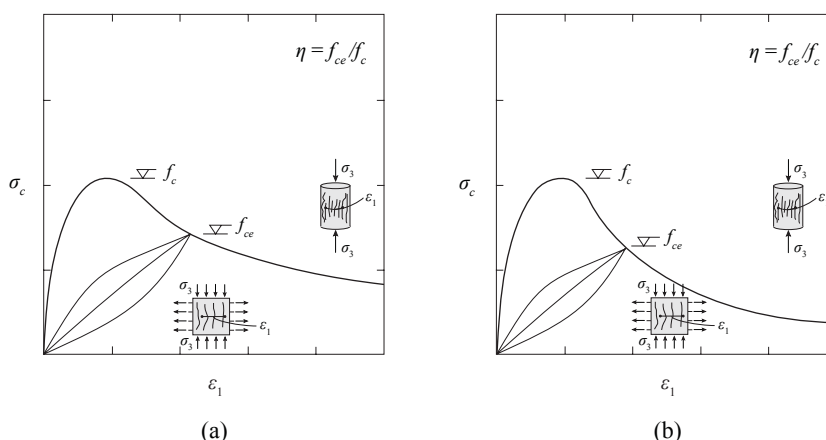


Figure 6.8: (a) et (b) Courbe de comportement contrainte-déformation pour un béton normal et pour un béton plus fragile; [Muttoni97].

Vecchio et Collins [Vecchio82,Vecchio86] ont proposé différentes équations qui prennent en compte l'influence de la déformation transversale sur la réduction de la résistance du béton, tout en proposant une équation simplifiée [Collins96]:

$$\eta_\varepsilon = \frac{1}{0.8 + 170\varepsilon_1} \quad (6.6)$$

Cette expression est basée sur le résultat des essais des panneaux avec une topologie comme celle présentée à la figure 6.3 (a). Une autre équation, basée sur les résultats comprenant des panneaux avec la topologie de la figure 6.3 (b) et (c) est proposée par Belarbi [Belarbi95]:

$$\eta_\varepsilon = \frac{0.9}{\sqrt{1 + 250\varepsilon_1}} \quad (6.7)$$

Les deux courbes sont présentées à la figure 6.9. Etant donné qu'elles sont dérivées sur la base de valeurs expérimentales, elles sont comparées avec des résultats d'essais effectués en fonction de la déformation transversale mesurée. Ces deux courbes sont très différentes pour de faibles déformations latérales. La courbe de Hsu est plus en accord avec les résultats de Kollegger et Mehlhorn pour les panneaux sollicités en traction-compression selon l'exemple de la figure 6.3 (b). Par contre la courbe de Vecchio et Collins, pour des déformations transversales similaires, est plus en accord avec les panneaux de Kollegger et Mehlhorn sollicités à l'effort tranchant et à l'effort normal, voir figure 6.3 (a). Ces derniers panneaux ont subi d'importantes sollicitations normales, ce qui a eu pour résultat les armatures en compression même si la déformation latérale était positive. Les deux courbes sont également différentes pour de grandes déformations, ce qui s'avère être de moindre importance, car dans ces zones toutes les armatures sont à l'écoulement et dans certaines situations elles déterminent la résistance.

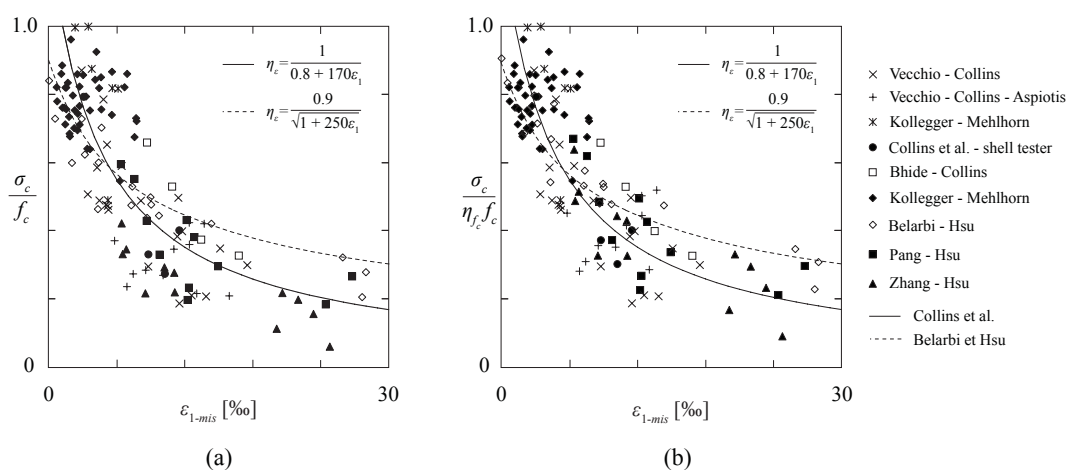


Figure 6.9: (a) et (b) Résultats des essais sur les panneaux et les courbes de [Belarbi95] et [Collins96].

Comme le montre la figure 6.8 l'effet de la fragilité du béton et l'effet de la déformation latérale sont deux phénomènes associés, qui doivent être pris en compte ensemble. Si la formule (6.3) est combinée avec la formule (6.6) de Collins on obtient l'équation suivante:

$$\eta_{f_c} \eta_\varepsilon = \left(\frac{f_{co}}{f_{ck}} \right)^{\frac{1}{3}} \frac{1}{0.8 + 170\varepsilon_1} \quad (6.8)$$

Une autre équation proposée par Kaufmann [Kaufmann96] considère également la réduction de la résistance par combinaison des effets de la fragilité du béton et de la déformation transversale:

$$\eta_{f_c} \eta_\epsilon = \frac{1}{f_{ck}^{\frac{1}{3}}(0.4 + 30\epsilon_1)} \tag{6.9}$$

Cette équation est très similaire à l'équation (6.7) de Belarbi et Hsu pour les bétons normaux et elles sont développées sur la base d'essais similaires, voir la figure 6.3 (b).

Dimensionnement des structures

En ce qui concerne les valeurs de réduction qu'il faut prendre en compte en cas d'un dimensionnement des structures, une des premières formules prenant en compte l'influence de la fragilité du béton sur sa résistance fissurée, en considérant les faibles déformations latérales, est donnée par Muttoni [Muttoni90]:

$$f_{ce} = 1.6(f_{ck})^{\frac{2}{3}} \quad f_{ce} \leq 0.6f_{ck} \tag{6.10}$$

Cette équation est une version de l'équation (6.3) avec une résistance de référence $f_{c0} = 20$ MPa et un coefficient de réduction des déformations transversales de 0.6. La formule est vérifiée pour les panneaux de la figure 6.3 (a) et (c) avec les champs de contraintes continus. Toutes les hypothèses appliquées pour ce calcul sont données dans le paragraphe 5.2.2.

Les résultats de cette analyse sont présentés à la figure 6.10 (a) et (b) en fonction de la déformation latérale calculée et de la résistance à la compression du béton. Le diagramme de la figure 6.10 (a) montre que la formule (6.10) est applicable pour les faibles déformations transversales en l'absence d'effort normal et que la diminution de résistance du béton pour de grandes déformations transversales est plus importante.

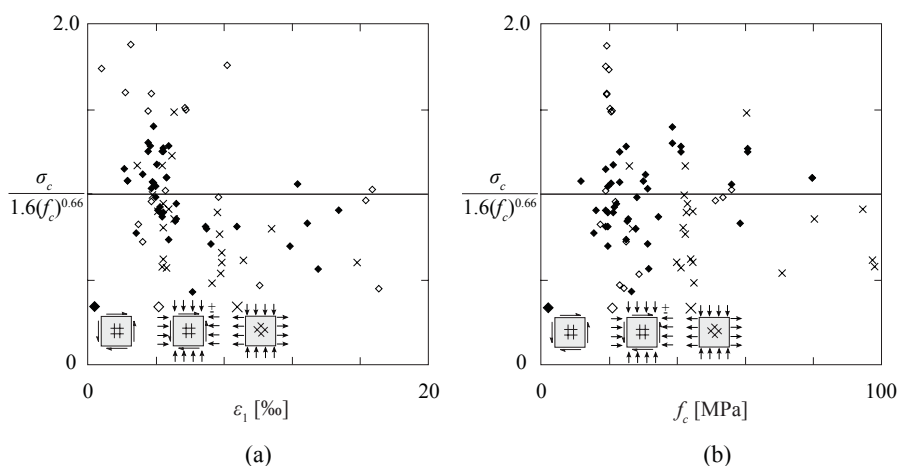


Figure 6.10: (a) Vérification de l'équation (6.10) en fonction de la déformation transversale calculée; (b) vérification de l'équation (6.10) en fonction de la résistance à la compression.

Ensuite, pour l'analyse par champs de contraintes discontinus, étant donné qu'il est difficile d'estimer la déformation latérale par cette analyse, la réduction de la résistance due aux

déformations latérales est faite selon le type de sollicitation, figure 2.16. Dans cette analyse, une réduction de 0.8 est proposée lorsque la position des armatures est perpendiculaire à la direction des efforts en compression, une réduction de 0.6 lorsque la position d'armatures est inclinée par rapport à la direction des efforts en compression et une réduction de 0.4 si les armatures sont à l'écoulement.

6.2.4 Vérification avec les champs de contraintes continus et discontinus

L'applicabilité des équations (6.8) et (6.9) pour l'analyse des structures par des champs de contraintes continus (paragraphe 5.2.2) est vérifiée pour les deux panneaux de la figure 6.3. Etant donné que la méthode des champs de contraintes est appliquée le plus souvent pour l'analyse d'éléments sollicités à l'effort tranchant, les panneaux sollicités par cet effort seront analysés ensuite. Par ailleurs, ces essais sont analysés par des champs de contraintes discontinus mais en appliquant cette fois les réductions de la résistance selon la topologie de sollicitations, la figure 2.16. La figure 6.11 (a) quant à elle, montre cette même analyse des panneaux par les champs de contraintes continus et la figure 6.11 (b) l'analyse relative aux champs de contraintes discontinus.

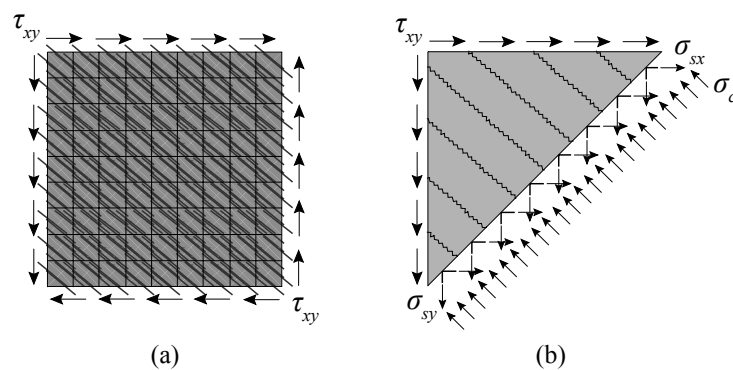


Figure 6.11: (a) Panneau analysé par les champs de contraintes continus; (b) Panneau analysé par les champs de contraintes discontinus.

La figure 6.12 (a) montre les résultats des trois topologies des panneaux analysés par les champs de contraintes continus en fonction de la déformation transversale calculée. Ces déformations transversales calculées ainsi que les contraintes dans le béton sont obtenues en appliquant des valeurs mesurées de la charge de rupture dans les calculs avec les champs de contraintes continus. Afin de mieux comparer ces résultats avec les critères de rupture, les équations (6.8) et (6.9) pour les résistances caractéristiques de 30, 60 et 90 MPa sont utilisés. Etant donné que la forme de ces deux courbes est différente, leur applicabilité pour les calculs par des champs de contraintes continus est contrôlée.

La figure 6.12 (b) montre comment les points de la figure 6.12 (a) se déplacent avec une augmentation de la charge avant d'atteindre le critère de rupture utilisé. Comme les panneaux sont sollicités à l'effort tranchant, l'augmentation des contraintes du béton est liée à l'augmentation des contraintes dans les armatures. Si les armatures sont en zone élastique, pour une petite déformation supplémentaire l'effort dans l'armature augmente considérablement ainsi que la contrainte dans le béton, (qui est fonction du taux d'armature). Le point se déplace alors vers le haut et devient plus sensible à la courbe utilisée.

Lorsqu'il s'agit de points pour lesquels toutes les armatures sont à l'écoulement, en présence d'une augmentation de la charge, ils se déplacent horizontalement ou presque horizontalement avant d'atteindre le critère de rupture. Ces points sont moins sensibles à la courbe choisie et la rupture par écoulement des armatures, suivie de la rupture du béton, est déterminante. Entre ces deux situations extrêmes, se trouve le cas d'une armature à l'écoulement en présence de rupture du béton.

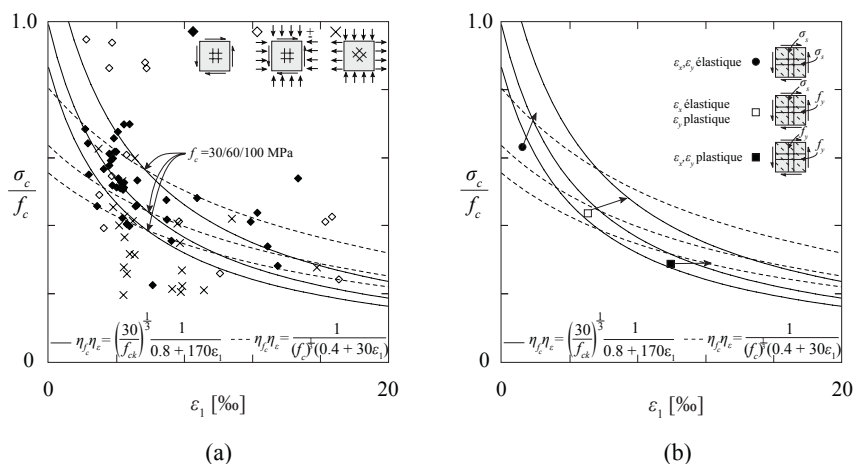


Figure 6.12: (a) Contrainte calculée normalisée par la résistance caractéristique sur cylindre en fonction de la déformation transversale calculée; (b) Présentation schématique du comportement des panneaux avant qu'ils aient atteint le critère de rupture.

La figure 6.13 montre la vérification des champs de contraintes continus avec l'équation (6.8) pour les trois topologies de panneaux. La figure 6.13 (a) indique l'effort tranchant à la rupture (mesuré) par rapport à l'effort tranchant calculé, en fonction de la déformation latérale calculée. Le graphique montre que pour les essais avec effort normal [Kollegger90] et déformations transversales faibles, la courbe (6.8) est du côté de la sécurité, ce qui n'est pas le cas pour les panneaux sollicités à l'effort tranchant avec de petites déformations transversales. La figure 6.13 (b) montre les mêmes résultats mais en fonction de la résistance du béton.

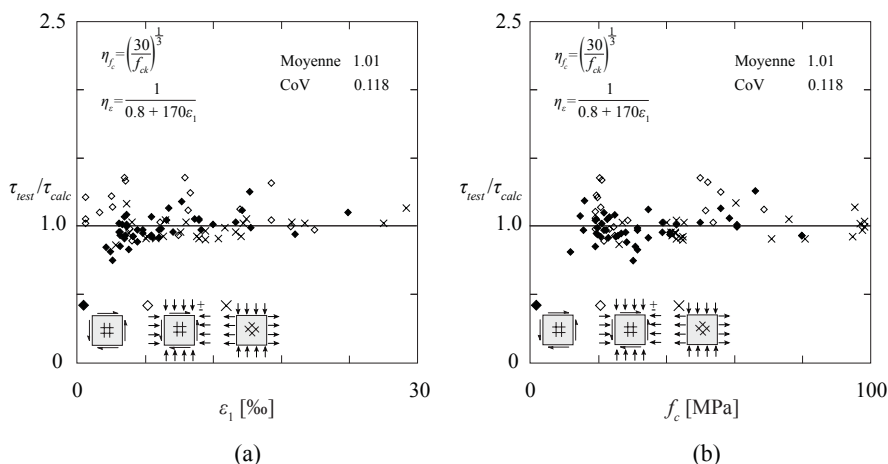


Figure 6.13: Effort tranchant mesuré normalisé par l'effort tranchant calculé en appliquant l'équation (6.8); (a) en fonction des déformations transversales; (b) en fonction de la résistance du béton.

La figure 6.14 montre la même vérification effectuée cette fois-ci avec l'équation (6.9) de Kaufmann [Kaufmann98]. La figure 6.14 (a) montre que la réduction de la résistance du béton selon cette équation pour de petites déformations transversales reste très conservatrice pour les panneaux de Kollegger et Mehlhorn sollicités à l'effort tranchant et à l'effort normal, par contre pour les autres panneaux les résultats sont similaires aux résultats de l'équation (6.8). La figure 6.14 (b) montre les résultats obtenus en fonction de la résistance caractéristique du béton.

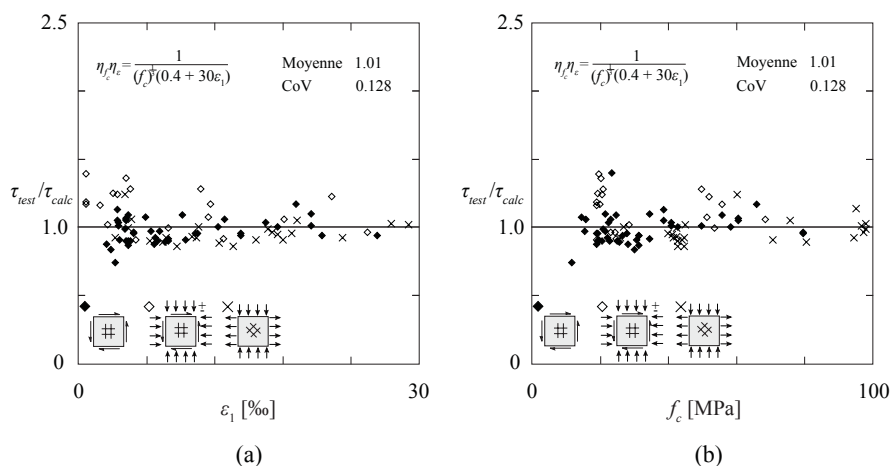


Figure 6.14: Effort tranchant mesuré normalisé par l'effort tranchant calculé en appliquant l'équation (6.9); (a) en fonction des déformations transversales; (b) en fonction de la résistance caractéristique du béton.

La figure 6.15 montre la comparaison des résultats obtenus en appliquant les deux formules (6.8) et (6.9) pour l'analyse par champs de contraintes continus. En utilisant l'équation (6.8), la moyenne des rapports de l'effort tranchant mesuré par l'effort tranchant calculé, vaut 1.01 avec un coefficient de variation de 0.118. Des résultats similaires sont obtenus avec l'équation (6.9), pour laquelle la moyenne obtenue est de 1.01 avec un coefficient de variation de 0.128. Le graphique de la figure 6.15 (a) montre que l'équation proposée par Collins et al. (6.8) s'avère légèrement meilleure pour l'analyse des panneaux sollicités à l'effort tranchant selon la topologie de la figure 6.3 (a).

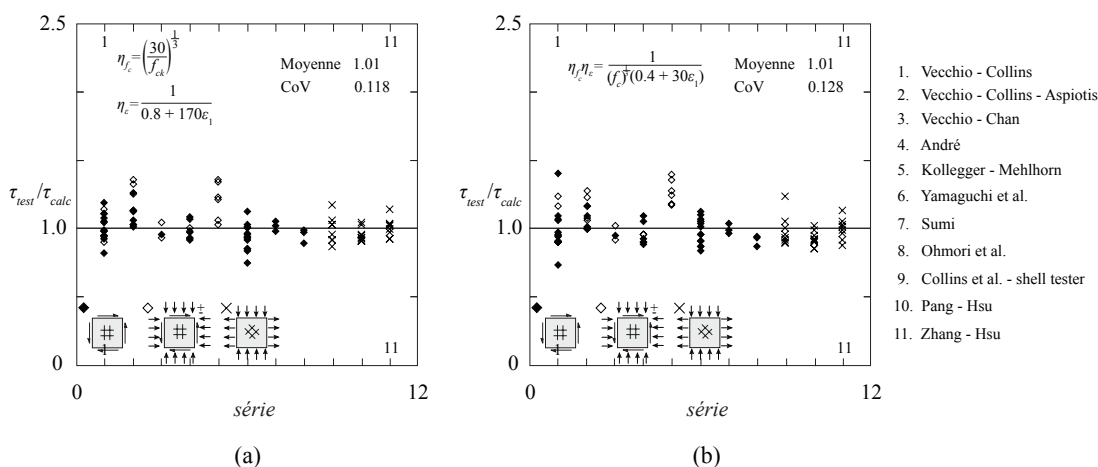


Figure 6.15: Séries de panneaux; (a) résultats d'application de l'équation (6.8); (b) résultats d'application de l'équation (6.9).

Cette vérification montre que l'utilisation des deux courbes (6.8) et (6.9), qui ne sont pas réellement similaires, se prête bien pour l'analyse des structures avec des champs de contraintes continus. Par ailleurs cette analyse a mené à une qualité des résultats très similaire ce qui remet en question le besoin de définir de nouvelles courbes utilisant les mêmes paramètres. L'intégration des autres phénomènes de rupture dans l'analyse peut mener les champs de contraintes continus vers des éléments finis non-linéaires plus sophistiqués, qui ont souvent des problèmes de convergence et à des résultats qui ne seront pas forcément meilleurs. Une autre possibilité serait de mieux définir les types de rupture possibles selon la figure 6.7, ce qui permettrait à son tour la définition d'autres critères de rupture et de meilleurs résultats par rapport à ceux obtenus précédemment. Ce procédé sera analysé dans le paragraphe suivant.

L'analyse par champs de contraintes discontinus demande également une réduction de la résistance du béton due aux déformations transversales. Etant donné qu'elles ne peuvent pas être estimées par cette méthode, la réduction de la résistance est faite en fonction de la topologie de sollicitations et en fonction de la position des armatures, figure 2.16. Selon la topologie des panneaux, une réduction de 0.6 est utilisée lorsque les armatures sont en zone élastique et la réduction égale à 0.4, si des déformations plastiques des armatures sont atteintes. Le critère utilisé pour sélectionner les panneaux sollicités à l'effort tranchant avec des armatures à l'écoulement est si la contrainte dans béton est inférieure à 0.4 fois la résistance plastique. Si ce critère n'est pas satisfait, la rupture peut être développée par l'écoulement de l'armature la plus faible avec une rupture du béton ou dans le cas où les armatures des deux directions sont pratiquement égales (et dans la zone élastique), par la rupture du béton. Dans le premier cas, le coefficient de réduction de la résistance du béton qui serait pris est de 0.4, alors que dans l'autre cas le coefficient serait de 0.6.

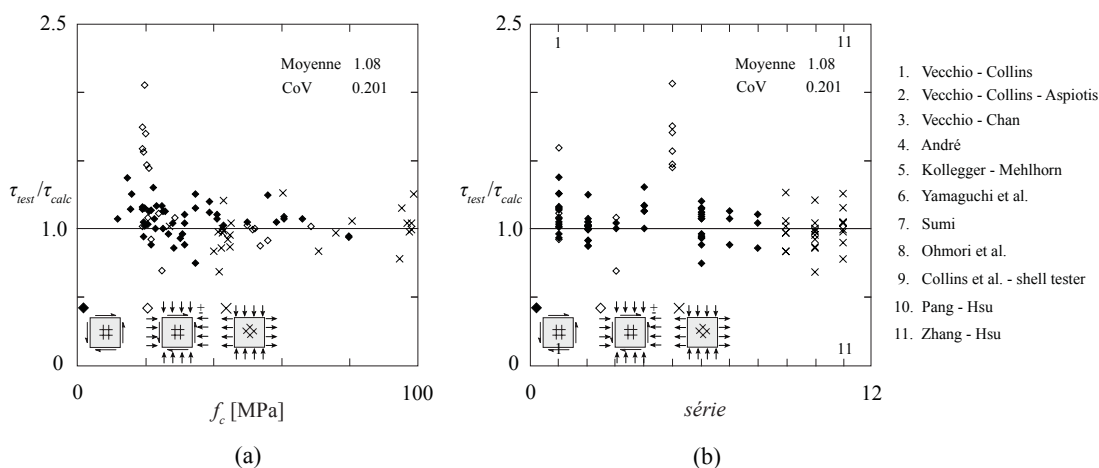


Figure 6.16: Calcul plastique; (a) résultats obtenus en fonction de la résistance caractéristique du béton; (b) résultats obtenus en fonction de la série d'essais.

La moyenne des rapports de l'effort tranchant mesuré par l'effort tranchant calculé vaut 1.08 avec un coefficient de variation égal à 0.201, voir la figure 6.16. Par ailleurs le calcul plastique démontre que les coefficients de réduction de la résistance du béton sont adaptés. De plus, les analyses effectuées ont prouvé que si des efforts normaux de compression sont appliqués dans les deux directions et que leur amplitude est importante par rapport à l'effort tranchant, un coefficient de réduction égal à 0.8 peut être utilisé. Il est aussi remarqué que pour certains

éléments pour lesquelles les armatures sont à peine dans la zone élastique, le coefficient de réduction 0.6 peut ne pas être du côté de la sécurité.

6.2.5 Réduction de la résistance du béton en raison de la présence des câbles de précontrainte et des barres d'armature

Jusqu'à présent, le comportement dans le plan des voiles a été analysé. Par contre il a été constaté que ces éléments avaient une déformation hors du plan, principalement due aux efforts de traction, qui peut provoquer une rupture laminaire de panneau. Un tel comportement se rencontre plus particulièrement pour les panneaux avec des gaines de précontrainte [Muttoni06]. La gaine influence la déviation des efforts, ce qui provoque l'apparition d'une traction hors plan, et par la suite une fissuration suivie d'une rupture.

La figure 6.17 (a) présente une rupture hors du plan du panneau sollicité dans son plan. Etant donné que la gaine n'est pas injectée, les efforts de compression doivent contourner la gaine, ce qui a pour effet de provoquer de la traction et de la fissuration hors plan, et par la suite la rupture laminaire. Dans le cas d'une gaine avec injection, figure 6.17 (b), la gaine, qui est plus rigide que le béton, attire les contraintes, ce qui peut provoquer la fissuration à une distance plus grande par rapport à la gaine ainsi qu'une rupture laminaire.

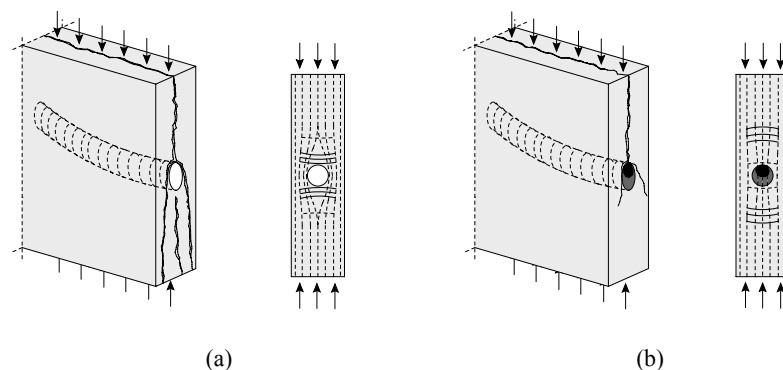


Figure 6.17: (a) Rupture latérale du panneau avec gaine non injectée; (b) rupture latérale du panneau avec la gaine injectée.

L'influence d'une gaine de précontrainte sur la fissuration hors du plan peut être définie en fonction du diamètre de la gaine par rapport à la largeur de la section. Dans la mesure où plusieurs gaines de précontrainte sont utilisées sur un même niveau de la section, la somme des diamètres doit être prise en compte. Le coefficient qui tient compte de la largeur de la gaine par rapport à la section peut être défini comme:

$$\delta = \frac{\sum \varnothing_D}{t} \quad (6.11)$$

où t est la largeur de panneau et \varnothing_D le diamètre de la gaine de précontrainte. Sur la base de ce coefficient, il est possible de définir le coefficient de réduction de la résistance du béton en présence de gaines de précontrainte dans la section comme suit:

$$\begin{aligned} \delta \leq \delta_{\min} : \eta_D &= 1 \\ \delta > \delta_{\min} : \eta_D &= 1 - k\delta \end{aligned} \quad (6.12)$$

Selon ces équations, si la gaine de précontrainte est suffisamment petite par rapport à la section, aucune réduction ne sera prise en compte. Le coefficient k tient compte de la présence ou non d'une injection dans la gaine de précontrainte ainsi que du type de la gaine.

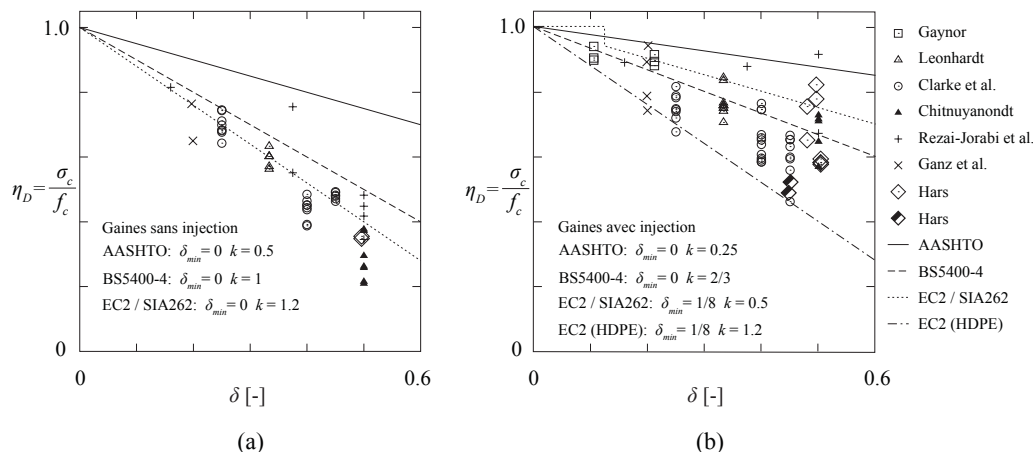


Figure 6.18: (a) Résultats d'essais effectués sur des échantillons avec gaines non-injectées; (b) résultats d'essais effectués sur des échantillons avec gaines injectées; [Hars06].

L'influence de la gaine de précontrainte sur la réduction de la résistance du béton est étudiée par Hars [Hars06] qui a rapporté les graphiques de la figure 6.18, pour les gaines avec et sans injection. Les graphiques donnent également les recommandations des différentes normes concernant les valeurs minimales des coefficients δ et k .

Réduction de la résistance à cause de la présence de barres d'armature

La réduction de la résistance du béton en présence de gaines de précontrainte est acceptée dans la pratique actuelle et de nombreux essais ont été effectués afin d'identifier la réduction nécessaire, figure 6.18. La question qui reste ouverte est: quelle est l'influence des barres d'armature sur la résistance du béton. Le premier à avoir réalisé des essais sur des cylindres en béton avec armatures a été Gaynor [Gaynor65]. Malheureusement, la réponse obtenue n'est pas directement comparable avec la situation plus réelle d'un panneau en béton armé.

Pour identifier les types de rupture possibles, les panneaux sollicités à la compression uni-axiale sans traction transversale seront considérés. La figure 6.19 (a) montre les panneaux non-armés sollicités uni-axialement dans leur plan. Les ruptures souvent remarquées pour ces panneaux non-armés sont: rupture laminaire et rupture par glissement. La figure 6.19 (b) montre un panneau avec des barres d'armature à mi-plan de la section, testé par Eibl et Neuroth [Eibl88]. La rupture observée a été laminaire à travers le plan des barres d'armature. La figure 6.19 (c) montre un panneau avec deux plans d'armature, perpendiculaires à la direction des contraintes principales de compression. La rupture observée cette fois par Kollegger et Mehlhorn a été: par éclatement de l'enrobage, ce dernier est présenté dans la figure 6.19 (c). La figure 6.19 (d) présente quant à elle un panneau avec deux nappes d'armature dans deux plans, positionnées diagonalement par rapport aux efforts de compression. Pour cette topologie, les ruptures observées ont été: rupture du béton à la compression et rupture par l'éclatement de l'enrobage.

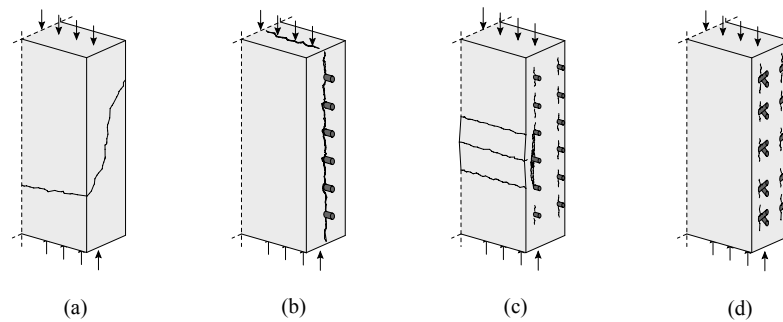


Figure 6.19: (a) Rupture d'un panneau non-armé; (b) rupture laminaire d'un panneau avec les barres à mi-plan de la section [Eible88]; (c) rupture par éclatement de l'enrobage [Kollegger90, Eible88]; (d) panneau avec barres en diagonale et rupture du béton à la compression et par éclatement de l'enrobage [Kollegger90].

La disposition des armatures selon les figures 6.19 (b) et (c) augmente la possibilité d'avoir une rupture laminaire et par l'éclatement d'enrobage, car la barre a tendance à séparer les parties du béton au travers des fissures qui sont créées dans le plan de l'armature. De cette manière la résistance effective du béton peut devenir inférieure à la résistance caractéristique sur cylindre.

La figure 6.20 (a) montre les résultats d'essais sur panneaux avec armatures sollicités uni-axialement dans leur plan. Le diagramme montre que les barres situées à mi-plan selon la figure 6.19 (b) ont une grande influence sur la diminution de la résistance du béton en provoquant une rupture laminaire. Par contre, les essais de Leonhardt avec une plus grosse barre d'armature placée à mi-plan de la section n'ont pas eu le même effet [Leonhardt69]. Une explication possible de ce phénomène est que les très grandes barres d'armature, malgré leur grand diamètre d'armature n'ont pas la tendance à séparer les parties du béton au travers de la fissure comme une armature avec un plus petit diamètre présentée à la figure 6.19 (b). Une telle barre aurait plutôt la tendance à se comporter comme une gaine injectée, figure 6.17 (b), où un glissement du béton autour de la gaine se développe.

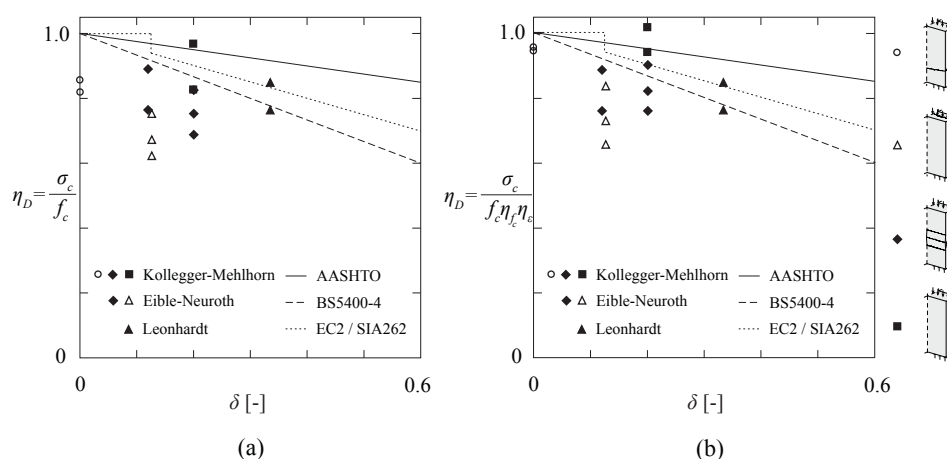


Figure 6.20: (a) Réduction de la résistance du béton due à la présence des barres d'armature; (b) correction de la résistance en fonction de fragilité et des déformations transversales.

La figure 6.20 (a) montre également que le positionnement des barres d'armature selon la figure 6.19 (c) est plus défavorable que le positionnement selon la figure 6.19 (d). Ceci étant

probablement dû au fait que l'armature diagonale en deux nappes ne provoque pas cette tendance à séparer le béton au pourtour en provoquant l'éclatement de l'enrobage.

Comme la fragilité du béton et les déformations transversales peuvent influencer la diminution de la résistance du béton, la figure 6.20 (b) montre les résultats examinés précédemment avec annulation de ces effets. Elle montre également que pour l'élément de la figure 6.19 (d), l'influence de l'armature sur la résistance reste pratiquement négligeable.

Vérification effectuée par champs de contraintes continus et discontinus

En se basant sur les considérations précédentes, l'équation (6.12) a été utilisée pour vérifier a posteriori les panneaux de la figure 6.3 (a) et (c) par les champs de contraintes continus et discontinus. Etant donné que l'effet du diamètre d'armature diminue avec l'inclinaison de l'armature par rapport aux directions principales de compression, cet effet sera pris en compte dans la manière suivante:

$$\begin{aligned} \delta \leq \delta_{\min} : \eta_D &= 1 \\ \delta > \delta_{\min} : \eta_D &= 1 - k\delta \frac{2\theta}{\pi} \end{aligned} \quad (6.13)$$

où θ est l'angle entre les barres d'armature en traction et le champ de compression. Pour la figure 6.19 (c), cet angle vaut $\pi/2$ tandis que pour la figure 6.19 (d) il vaut $\pi/4$. En conclusion, si les armatures sont parallèles au champ de compression, la réduction de la résistance à cause de la présence d'armature est égale à zéro.

Pour la vérification suivante, les coefficients δ_{\min} et k sont considérés selon les normes SIA262 et EC2, ils valent donc respectivement: 0.125 et 0.5. La figure 6.21 (a) montre les résultats obtenus par les champs de contraintes continus en combinant l'équation (6.13) avec l'équation (6.8). La figure 6.21 (b) montre les vérifications par champs de contraintes discontinus, figure 6.11 (b), en tenant compte de l'équation (6.13).

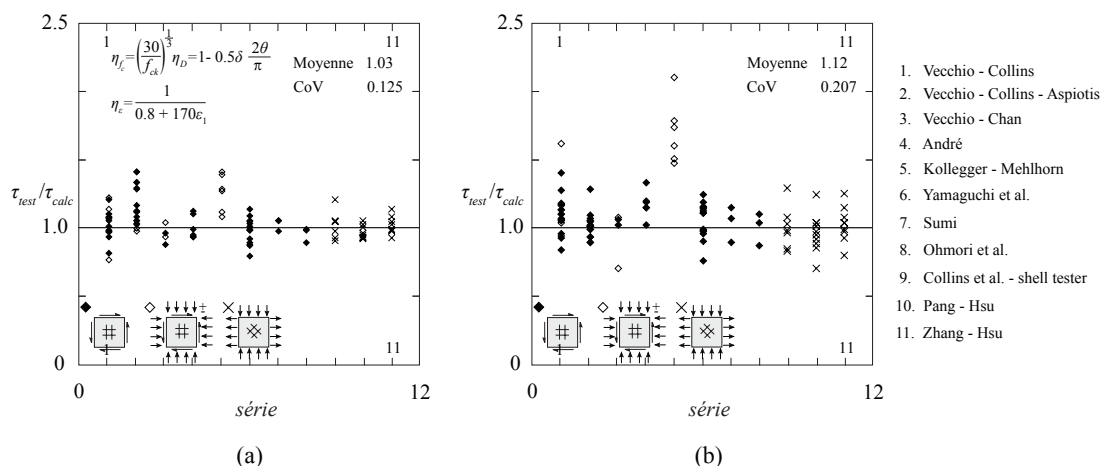


Figure 6.21: (a) Vérification par champs de contraintes continus; (b) vérification avec les champs de contraintes discontinus.

Les deux vérifications indiquent que l'utilisation du coefficient de réduction η_D donne des résultats du côté de la sécurité, mais qui ne sont pas forcément meilleurs. Deux possibilités peuvent mener à ce résultat; tout d'abord des équations telles que (6.8) et (6.9) qui sont

développés sans tenir compte de η_D , ou alors, comme nous le montre la figure 6.20 l'introduction d'un coefficient pour la topologie d'armature selon la figure 6.19 (d) qui reste à définir.

Discussion sur l'influence de l'armature et de sa déformation à la résistance du béton

Selon la formule (6.1) et la discussion précédente, la réduction de la résistance du béton due aux déformations transversales ainsi qu'à la présence d'armature est multiplicative [Fernández06, Fernández08]. La question qui se pose est de savoir si les deux effets doivent effectivement être multipliés en tenant compte du fait qu'il s'agit dans le premier cas d'une déformation dans le plan et dans un deuxième cas d'une déformation hors plan de l'élément. Les connaissances actuelles sur le sujet étant encore trop limitées, une réponse exacte n'est pas disponible. Malgré cela, sur la base de la recherche effectuée, on peut proposer les conclusions suivantes.

L'influence de η_D sur la rupture par glissement expliquée à la figure 6.7 (a) et (b) reste discutable en tenant compte du fait que l'on traite les déformations dans deux plans. Par contre, l'influence de η_D sur la rupture par l'éclatement d'enrobage, expliquée dans la figure 6.7 (c) et (d), est plus visible. Une rupture laminaire ou une rupture par éclatement de l'enrobage peuvent être provoquées par un glissement relatif entre la barre et le béton et la fissuration radiale créée par la traction tangentielle autour de la barre. Cette rupture est similaire à l'influence d'une barre qui a tendance à séparer le béton en provoquant l'un de ces deux types de rupture, voir l'illustration de la figure 6.22.

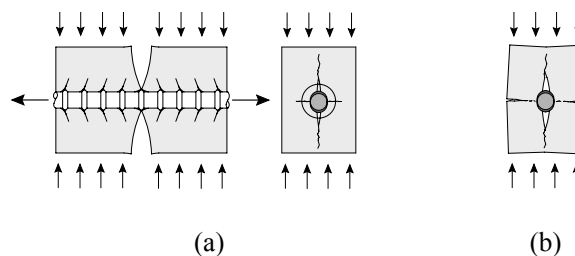


Figure 6.22: (a) Fissuration par glissement relatif entre la barre et le béton; (b) influence de la barre sur la séparation du béton à travers la fissure.

Etant donné que la figure 6.22 traite une rupture par éclatement d'enrobage, les résultats des panneaux de la figure 6.9 sont rassemblés en sélectionnant les panneaux avec une rupture similaire. Les résultats de ces panneaux sont présentés à la figure 6.23 en fonction de la déformation mesurée. La figure montre que les résultats suivent une tendance qui serait plus en accord avec la courbe de Hsu [Belarbi95], qui est comparable à la courbe de Kaufmann [Kaufmann96]. Par ailleurs, les points sont moins en accord avec la courbe de Collins [Collins96], qui met en évidence le fait que ces deux types de courbes décrivent deux phénomènes de rupture différents, voir la figure 6.7. Pour cette raison il est envisageable d'utiliser avec les champs de contraintes continus la courbe de Collins si une rupture par glissement est attendue et la courbe de Kaufmann (ou de Hsu) pour une rupture par l'éclatement d'enrobage.

La recherche effectuée montre que la topologie de panneaux influence le type de rupture. Ainsi, le phénomène d'éclatement de l'enrobage présenté à la figure 6.23, s'avère être le plus fréquent pour les panneaux avec une armature perpendiculaire aux contraintes principales, figure 6.3 (b).

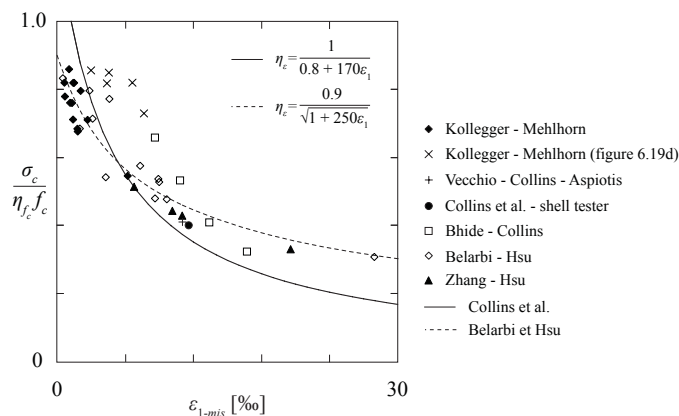


Figure 6.23: Essais sélectionnés avec une rupture par éclatement de l’enrobage.

Si une rupture par éclatement de l’enrobage est provoquée par la déformation de l’armature, la question qui reste posée est: pourquoi utiliser la déformation transversale du béton pour expliquer ce type de rupture. La figure 6.24 montre les résultats de la figure 6.23 mais cette fois-ci en fonction de la déformation longitudinale de l’armature la plus faible. Si les deux armatures ont une déformation positive, la question de l’influence de la déformation longitudinale de la plus forte armature reste ouverte. La figure 6.24 (b) montre les résultats de ces essais en fonction de la somme des déformations longitudinales de deux armatures dans des directions perpendiculaires.

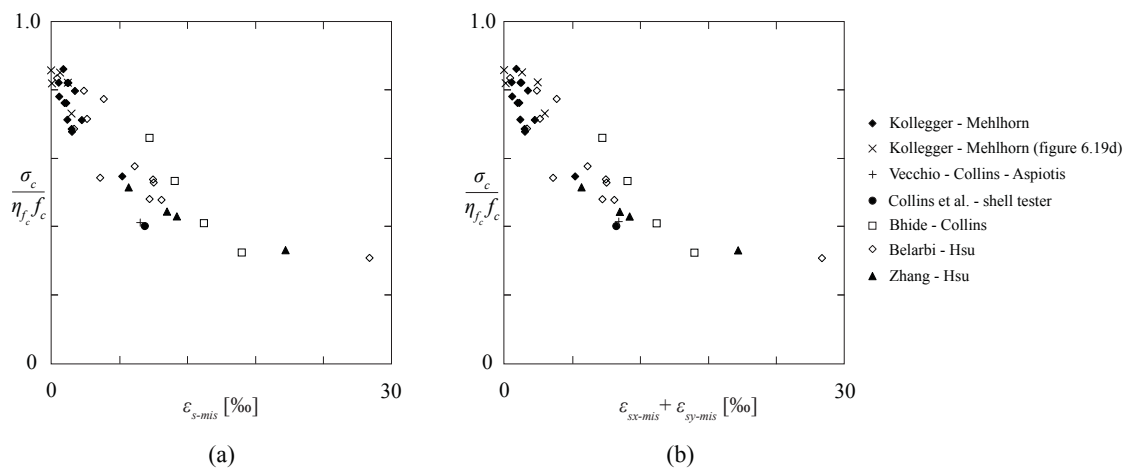


Figure 6.24: Essais sélectionnés avec une rupture par éclatement de l’enrobage; (a) contrainte normalisée dans le béton en fonction de la déformation mesurée de l’armature la plus faible; (b) contrainte dans le béton en fonction de la déformation mesurée dans les armatures dans les deux directions.

La rupture par éclatement de l’enrobage reste en accord avec l’influence de η_D sur la résistance du béton, vu le type de déformation qui la provoque. La figure 6.25 montre les résultats examinés précédemment mais en tenant compte cette fois de l’influence de l’armature par le facteur η_D .

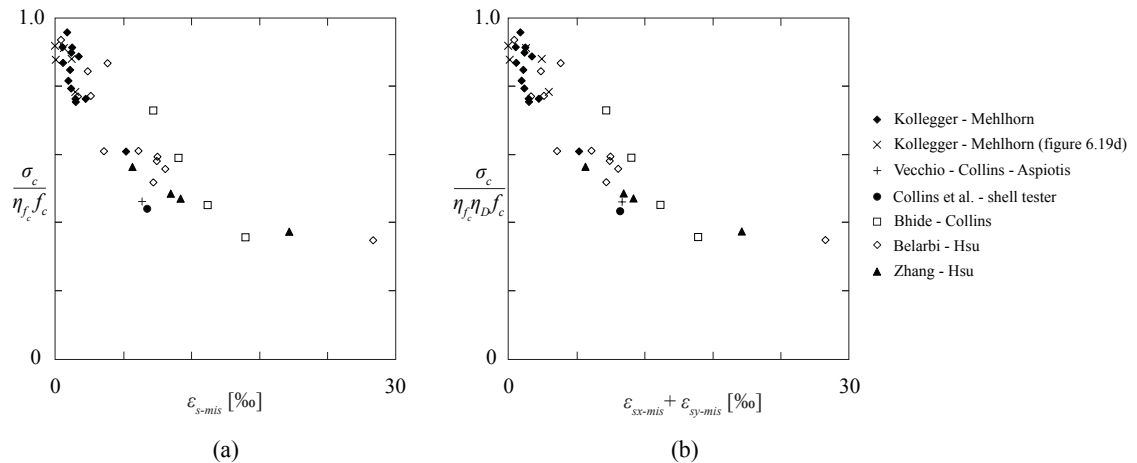


Figure 6.25: Essais sélectionnés avec une rupture par éclatement de l'enrobage en tenant compte de η_D ; (a) contrainte dans le béton en fonction de la déformation mesurée de la plus faible armature; (b) contrainte dans le béton en fonction de la déformation mesurée de l'armature dans les deux direction.

Cette analyse a pour but de promouvoir la discussion sur l'influence de la déformation transversale sur la résistance du béton. Les connaissances actuelles ne sont pas suffisantes et les différentes topologies de ruptures remarquées montrent qu'il existe d'autres phénomènes liés à la déformation transversale du béton qui influencent la rupture comme dans le cas de la déformation de l'armature. De toute manière, l'influence de la déformation de l'armature sur l'éclatement de l'enrobage doit être encore étudiée. Dans l'annexe B de cette thèse, différents cas de ruptures par éclatement de l'enrobage sont présentés.

6.2.6 Réduction de la résistance du béton à cause de cycles de chargement (low cycle fatigue)

En fonction de l'application répétitive d'une charge, la résistance du béton à la compression peut devenir encore plus réduite. Le phénomène est dû au low cycle fatigue ainsi qu'à l'accumulation de la déformation transversale pendant les cycles de charge et décharge. Le nombre de panneaux testés sous charge cyclique est limité, et le travail d'Ohmori et al. [Ohmori89] dans ce domaine reste représentatif.

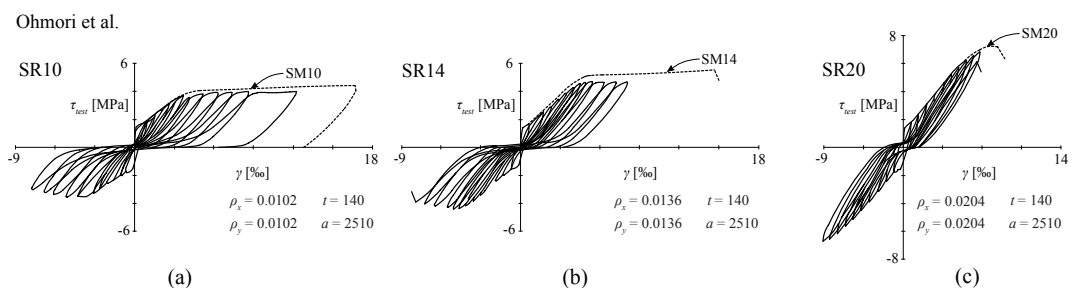


Figure 6.26: Comparaison de comportements cycliques des panneaux avec le comportement statique [Ohmori89].

La figure 6.26 nous montre une comparaison entre le comportement cyclique et statique des panneaux représentatifs. Ces panneaux ont la même résistance à la compression du béton et le

même taux d'armature. Les graphiques montrent qu'il faut compter avec une réduction d'environ 10% de la résistance du béton en cas d'application de charges répétitives.

La figure 6.27 montre le rapport entre les résistances mesurées et les résistances calculées avec champs de contraintes continus (paragraphe 5.2.2) pour des panneaux sollicités par des charges cycliques et des panneaux comparatifs sans tenir compte de la réduction η_{LCF} . Les résultats démontrent effectivement qu'une réduction de 10% doit être prise en compte en cas d'application de charges cycliques.

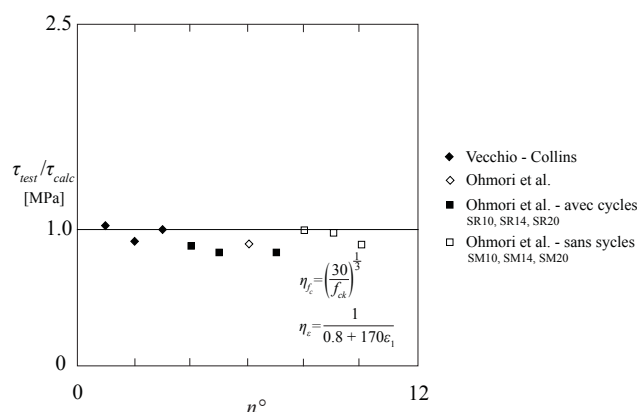


Figure 6.27: *Panneaux soumis à des charges cycliques et des panneaux comparatifs.*

6.3 Comparaison des champs de contraintes continus avec des résultats d'essais

Ce paragraphe examine la comparaison des essais effectués avec l'analyse par champs de contraintes continus. La réduction de la résistance du béton est utilisée selon la formule (6.8).

6.3.1 Structures avec discontinuité géométrique

Lors de la discussion des résultats d'essais effectués sur des éléments avec discontinuité géométrique [Breña07], une analyse de ces éléments a été faite avec des champs de contraintes continus, [Muttoni08]. Les résultats de cette analyse sont comparés aux méthodes de calcul utilisées par Breña et Morrison ainsi qu'à la méthode qui tient compte du mécanisme licite de la structure. Cette méthode est présentée dans paragraphe 2.5 de cette thèse.

Les détails d'armatures compris dans ces essais sont donnés à la figure 2.39. La figure 6.28 montre une modélisation par champs de contraintes continus. La rupture calculée a été suivie par l'écoulement des armatures et la rupture du béton. Les modèles obtenus montrent que certaines armatures ne sont pas activées dans une manière suffisante et peuvent donc être annulées ou redistribuées sur d'autres positions plus efficaces.

Le tableau 6.1 montre la comparaison des résultats. La première ligne donne les résultats de Breña et Morrison obtenus avec un modèle de bielles-et-tirants basé sur le comportement élastique de l'élément; la deuxième ligne donne les résultats des calculs qui tiennent compte du comportement non-linéaire des modèles, [Breña07].

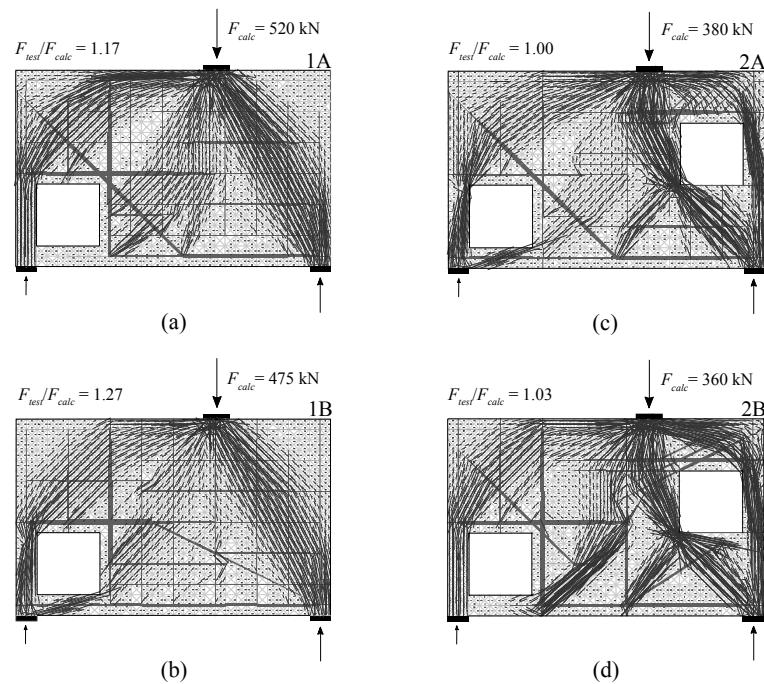


Figure 6.28: (a) et (b) Champs de contraintes continus pour modèles avec une ouverture; (c) et (d) champs de contraintes continus pour modèles avec deux ouvertures.

La troisième ligne représente les résultats des champs de contraintes discontinus qui tiennent compte quant à eux d'un mécanisme licite, présenté dans le paragraphe 2.5 de cette thèse, alors que la quatrième ligne représente les résultats des champs de contraintes continus. Les résultats des champs de contraintes continus sont néanmoins plus conservatifs par rapport aux résultats des champs de contraintes discontinus car une réduction de la résistance du béton (selon l'équation (6.8)) tient compte de l'influence des déformations transversales.

F_{test}/F_{calc}	1A	1B	2A	2B	Moyenne	CoV
Breña et Morrison – modèle élastique	3.19	2.98	1.72	1.74	2.41	0.33
Breña et Morrison – modèle non-linéaire	1.72	2.18	1.49	1.49	1.72	0.19
Champs de contraintes discontinus	1.09	1.10	1.04	1.02	1.06	0.04
Champs de contraintes continus	1.17	1.27	1.00	1.03	1.11	0.09

Tableau 6.1: Comparaison des résultats par différentes méthodes de calcul.

6.3.2 Angle de cadre en béton léger

L'analyse effectuée dans les paragraphes précédents était relative au comportement des bétons normaux et des bétons à hautes performances dans l'optique de l'analyse des structures par des champs de contraintes continus et discontinus. Pour permettre une telle analyse basée sur la théorie de la plasticité, les phénomènes importants comme la réduction de la résistance du béton pour assurer une ductilité suffisante et celle due aux déformations latérales sont examinés.

Malgré l'effort important a été appliqué pour décrire le comportement de ces bétons, l'applicabilité des modèles existants pour l'analyse des structures utilisant d'autres types de

béton doit être contrôlée. Parmi eux se trouvèrent les bétons légers pour lesquels l'applicabilité de l'analyse par champs de contraintes a été très peu vérifiée.

Lors de la recherche, la résistance et le comportement structural d'un angle de cadre en béton léger ont été examinés [Muttoni08, Kostic08]. L'essai en laboratoire a été réalisé dans le cadre d'un mandat extérieur et des informations plus détaillées sont données dans l'annexe D de cette thèse. L'échelle de l'échantillon était de 1:1, la géométrie de l'angle de cadre et le détail d'armature sont donnés à la figure 6.29 (a). Le but de cette étude était l'analyse du comportement fragile de l'élément dû à l'utilisation d'un béton léger. Ce comportement a déjà été remarqué lors des essais précédents avec une tendance à rupture prématurée par éclatement de l'enrobage de la zone comprimée.

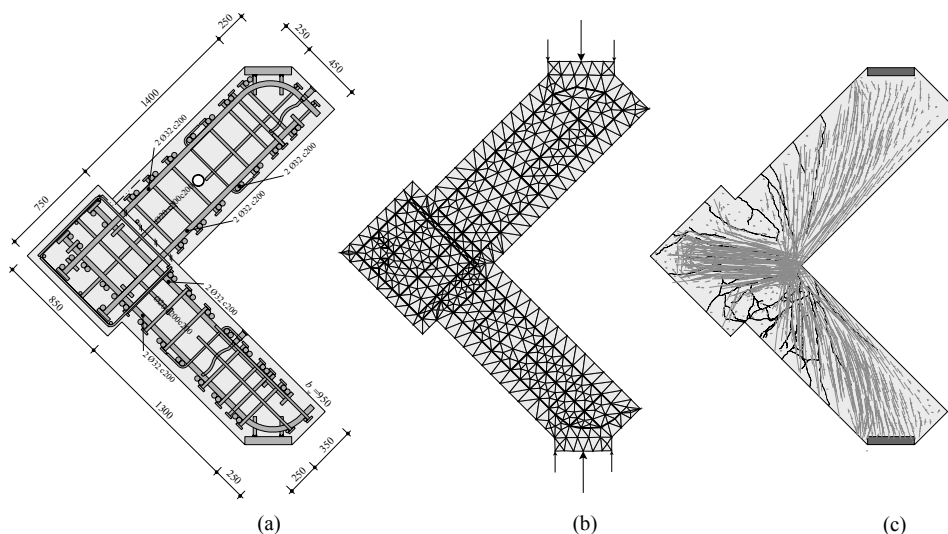


Figure 6.29: *Angle de cadre pour une plateforme flottante (a) détail d'armature; (b) modélisation par éléments finis; (c) champs de contraintes continus et plan des fissures lors l'essai.*

Les figures 6.29 (b) et (c) montrent la modélisation de l'angle de cadre par des champs de contraintes continus. Les directions des champs de compression correspondent bien avec le plan de fissures enregistré lors de l'essai. Lorsqu'il s'agit d'une structure en béton léger, le comportement fragile de ce matériau doit être pris en compte. Pour déterminer la réduction de la résistance du béton due à cette fragilité, l'utilisation de la résistance de référence $f_{c0} = 20$ MPa dans l'équation (6.3) est proposée. Cette valeur est inférieure à la valeur habituellement utilisée pour les bétons normaux, soit 30 MPa selon la norme SIA 262. En ce qui concerne la réduction due aux déformations transversale, l'équation (6.6) de Collins sera utilisée pour l'analyse réalisée avec des champs de contraintes continus. La réduction due à la présence d'armature n'est pas prise en considération et des charges répétitives ne sont pas appliquées.

La rupture par éclatement de l'enrobage de la zone comprimée est une rupture qui est vraisemblable pour ce type de structure. Elle est due aux déformations perpendiculaires à la zone comprimée ainsi qu'à la faible capacité de redistribution des efforts du béton léger. Effectivement, le début de l'éclatement de l'enrobage de la zone comprimée lors l'essai a été remarqué au niveau de charge de 93% de la charge de rupture (1848 kN). Cette rupture locale peut diminuer le bras de levier interne et ainsi diminuer considérablement la charge ultime de la

structure par rapport à la charge calculée en comptant sur toute la résistance plastique de la zone comprimée.

En tenant compte de ce phénomène, une réduction ultérieure de la résistance de l'enrobage est proposée selon la figure 6.30 (a). L'utilisation de toute la résistance plastique dans cette zone n'est pas du côté de la sécurité, mais une omission complète de cette zone serait trop conservatrice. Un calcul de comparaison est donné à la figure 6.30 (b).

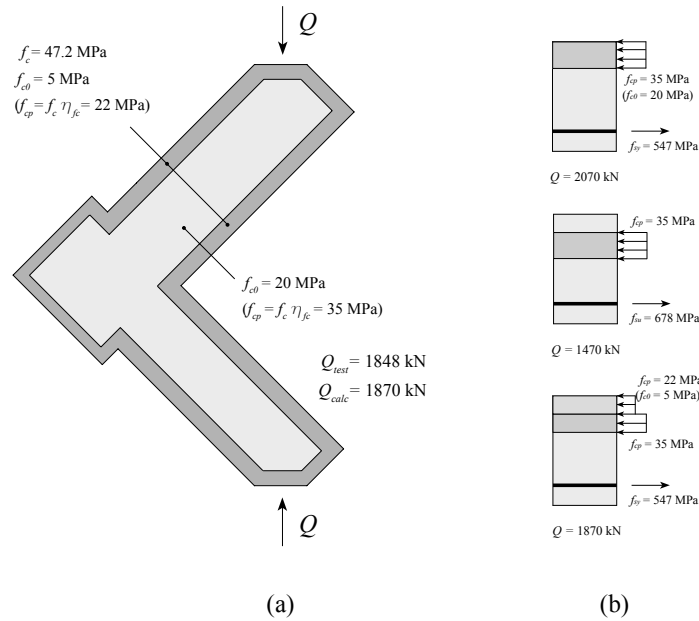


Figure 6.30: (a) Réduction de la résistance du béton en tenant compte de l'éclatement de l'enrobage; (b) modèle de calcul de la réduction de la résistance.

La résistance plastique de l'enrobage peut être calculée en utilisant l'équation (6.3), mais avec une résistance de référence $f_{c0} = 5$ MPa, l'équation (6.14). De cette manière, la résistance plastique de l'enrobage est réduite par rapport aux autres parties de la structure. Cette réduction additionnelle est nécessaire pour prendre en compte la fragilité du béton léger et l'éclatement d'enrobage qui se produisent pour cette zone sans atteindre sa résistance plastique. La charge de rupture calculée de cette manière, en utilisant ces valeurs pour les résistances de référence serait égale à 1870 kN.

$$\begin{aligned} \text{béton léger de la structure} \quad \eta_{f_c} &= \left(\frac{f_{c0}}{f_c} \right)^{\frac{1}{3}}, f_{c0} = 20 \text{ MPa} \\ \text{enrobage de la structure} \quad \eta_{f_c} &= \left(\frac{f_{c0}}{f_c} \right)^{\frac{1}{3}}, f_{c0} = 5 \text{ MPa} \end{aligned} \quad (6.14)$$

La comparaison du déplacement mesuré avec le déplacement calculé est donnée à la figure 6.31 et la comparaison des déformations pour les zones mesurées est donnée dans l'annexe D de cette thèse. Les déformations sont mesurées avec des jauges omega et les déformations calculées sont obtenues par des champs de contraintes continus. La rupture de l'échantillon a été accompagnée d'un écoulement des armatures longitudinales. Par ailleurs, sur la base de caractéristique de l'adhérence des bétons légers [Mitchell07], des plaques d'ancrage sont

introduites pour les armatures principales, ce qui a contribué à leur comportement très satisfaisant pendant l'essai. L'élément étudié a montré aussi un bon comportement sous sollicitations d'effort tranchant.

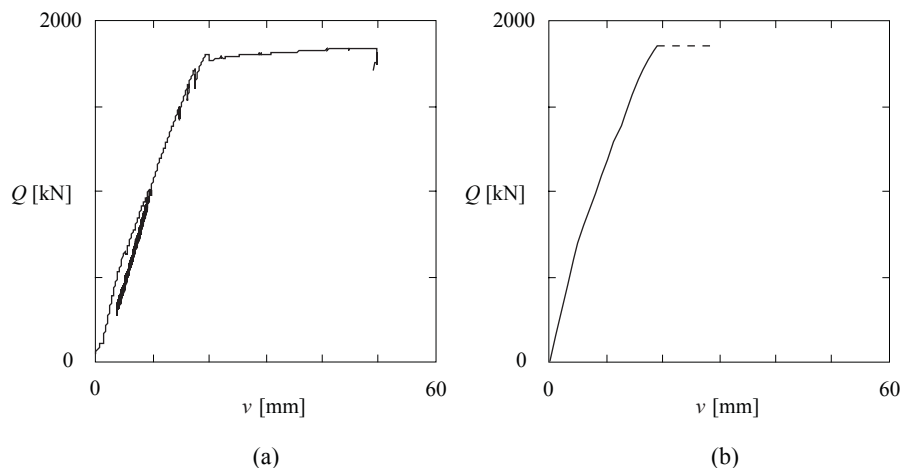


Figure 6.31: (a) *Déplacement mesuré*; (b) *Déplacement calculé par des champs de contraintes continus*.

6.4 Analyse des éléments sans étriers soumis à l'effort tranchant

Les résultats obtenus jusqu'ici s'appliquent à l'analyse des éléments en béton disposant au moins d'une armature minimale pour reprendre les efforts de traction. De cette manière, les efforts de compression sont repris par le béton, qui doit subir une réduction de sa résistance comme on vient de le voir.

En ce qui concerne les éléments ne comportant aucune armature minimale ou des éléments sans armature d'effort tranchant, d'autres mécanismes de transmission des efforts sont activés selon la figure 6.1. L'activation de ces mécanismes néglige certaines hypothèses de base de la théorie de la plasticité et d'autres approches sont examinées dans ce paragraphe pour permettre l'analyse de ces éléments par la méthode des champs de contraintes.

6.4.1 Théorie de la fissure critique

Selon Muttoni et Schwartz [Muttoni91], pour un élément de structure sans étriers et en absence de toute résistance à la traction du béton, l'unique mécanisme de transmission de charge est le modèle d'appui direct, figure 6.32 (a), introduit par Drucker en 1961 [Drucker61]. Ce modèle ne peut être complètement activé que si la bielle de compression traverse l'élément sans limitation de transmission de charge au travers des fissures.

De nombreux essais montrent cependant que le comportement effectif peut s'écarter considérablement de la solution d'équilibre plastique décrite à la figure 6.32 (a), [Muttoni03], et s'approcher plutôt d'un comportement décrit à la figure 6.32 (b). Les fissures d'abord flexionnelles se développent et se propagent dans les bielles théoriques et une telle fissure appelée aussi la fissure critique peut empêcher le développement complet d'un mécanisme plastique, 6.32 (c), en provoquant la rupture par effort tranchant sans atteindre la résistance plastique du béton et de l'armature.

La résistance des éléments sans armature à l'effort tranchant, selon Muttoni et Fernández Ruiz [Muttoni03, Muttoni08], dépend fortement de la position et de l'ouverture de la fissure critique en tenant compte aussi de la rugosité de la fissure. L'ouverture de la fissure peut être corrélée avec la position de son apparition, à une distance de $0.5d$ de la position de la force concentrée et de $0.4d$ de la position de l'armature.

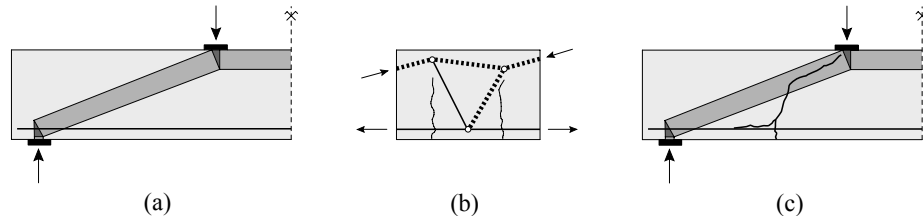


Figure 6.32: (a) *Modèle d'appui direct*; (b) *modèle qui emploie une résistance à la traction avec effet de porte-à-faux*; (c) *apparition de la fissure critique et rupture de l'élément*.

Selon la théorie de la fissure critique [Muttoni08], la résistance à l'effort tranchant V_R d'un élément sans étriers peut être calculée selon la formule semi-empirique:

$$\frac{V_R}{b d \sqrt{f_c}} = \frac{1}{6} \frac{2}{1 + 120 \frac{\varepsilon d}{16 + d_g}} \quad (6.15)$$

Elle tient compte de la résistance à la compression f_c , de l'effet d'échelle par la hauteur utile de la section d , de la largeur de la section b , et de la taille maximale des granulats d_g . La déformation ε peut être déterminée par un calcul élastique fissuré selon l'équation:

$$\varepsilon = \frac{M}{b d \rho E_s (d - c/3)} \frac{0.6d - c}{d - c} \quad (6.16)$$

où M est le moment dans la section critique et c est la hauteur de la zone comprimée:

$$c = d \rho \frac{E_s}{E_c} \left(\sqrt{1 + \frac{2E_c}{\rho E_s}} - 1 \right) \quad (6.17)$$

6.4.2 Théorie de la fissure critique pour les champs de contraintes continus et discontinus

L'application de la théorie de la plasticité au calcul de la résistance à l'effort tranchant des structures sans étriers est limitée, ce qui s'applique aussi aux champs de contraintes continus et discontinus. Les essais de Leonhardt et Walther [Leonhardt62] sur des poutres sans étriers seront considérés afin de déterminer les zones pour lesquelles l'utilisation d'une méthode de calcul basée sur les valeurs semi-empiriques est nécessaire. Ces essais ont une armature flexionnelle constante avec un élancement a/d variable. Certains de ces essais et leur champs de contraintes discontinus sont présentés à la figure 6.33 (a).

Le diagramme de la figure 6.33 (b) montre que les seuls essais à avoir atteint la résistance plastique obtenue selon la méthode des champs de contraintes discontinus ont été les essais B1, B2 et B10. Par contre, les autres essais sont positionnés sur le diagramme selon la vallée de Kani. Elle comprend deux comportements, l'appui direct à gauche et le comportement décante

par la théorie de la fissure critique à droite. La figure 6.33 (b) montre également les résultats des calculs par champs de contraintes continus ainsi que par la théorie de la fissure critique.

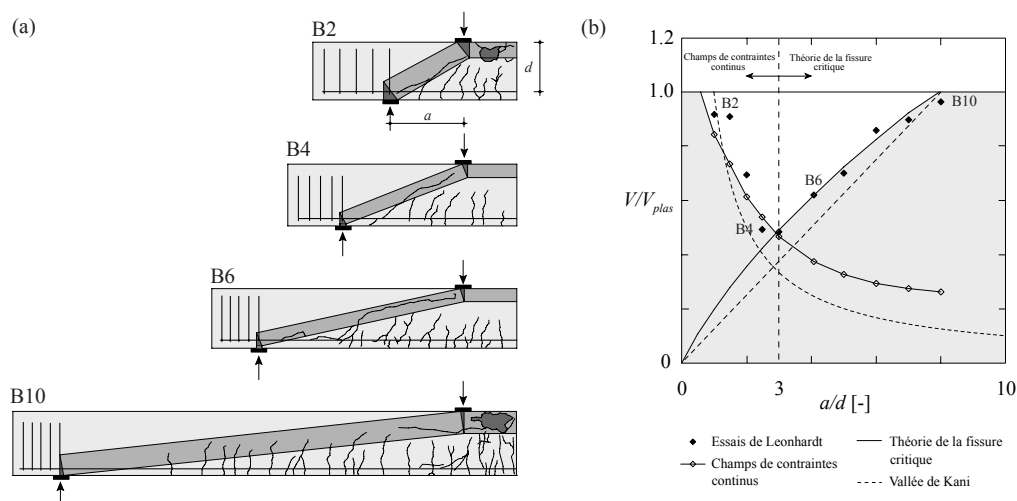


Figure 6.33: (a) *Essais de Leonhardt et Walther [Leonhardt62] avec une solution plastique [Muttoni08]*; (b) *vallée de Kani, résultats des essais de Leonhardt et valeurs calculées par des champs de contraintes continus et par la théorie de la fissure critique.*

Le diagramme montre que les champs de contraintes continus suivent bien les essais de Leonhardt jusqu'à ce que le comportement principal soit l'appui direct. Par contre pour les rapports a/d supérieurs, la réduction de la résistance du béton par déformations transversales reste très conservatrice. Pour ces éléments, l'utilisation de la théorie de la fissure critique s'avère plus adéquate et les résultats obtenus sont en accord avec les résultats des essais. Par opposition à cela, la théorie de la fissure critique ne prend pas en compte le comportement d'appui direct et les résultats pour les essais où a/d serait plus petit sont très conservateurs.

En ce qui concerne l'effet d'échelle, les champs de contraintes continus ne la prennent pas en compte, mais dans le domaine de leur applicabilité, l'effet de l'échelle pour le modèle de l'appui direct est très limité voir impraticable, [Zhang07]. Dans les zones de grand rapport a/d , le modèle d'appui direct utilisé par les champs de contraintes continus est de toute manière du côté de la sécurité. De meilleurs résultats peuvent être obtenus en utilisant la courbe de Hsu [Belarbi95] ou de Kaufmann [Kaufmann98], qui obtiennent une plus petite chute de la résistance du béton pour de grandes déformations latérales.

Le diagramme de la figure 6.33 (b) montre les zones pour lesquelles les champs de contraintes continus et la théorie de la fissure critique donnent les résultats les meilleurs. Selon les calculs effectués, le rapport a/d pour lequel il faut utiliser l'une ou l'autre méthode est égal à 3.

6.4.3 Application aux éléments avec discontinuité géométrique

La théorie de la fissure critique peut être combinée avec l'analyse par champs de contraintes discontinus de manière que les zones élancées sans étriers soient analysées par la théorie de la fissure critique. Les autres zones, qui ne seraient pas soumises aux restrictions traitées par la

théorie de la fissure critique, peuvent être analysées par les champs de contraintes discontinus ou par un mécanisme.

La figure 6.34 traite des essais de Yang et Ashour [Yang08] qui sont analysés par les champs de contraintes discontinus. Etant donné que la zone en-dessous de l'ouverture n'est pas armée à l'effort tranchant, l'effort qui peut être repris par cette zone est étudié par la théorie de la fissure critique. La charge de rupture est obtenue en utilisant la charge de rupture de cette zone, la charge de rupture de la zone au-dessus de l'ouverture et la charge de rupture de la zone centrale. La charge de rupture des zones au-dessous et au-dessus est calculée itérativement en augmentant l'effort tranchant appliqué jusque à ce que le critère de rupture 6.15 est satisfait. L'hypothèse appliquée dans ce calcul considère que la fissuration des ces éléments permet leur rotation semblable à la rotation des poutres sans étriers simplement appuyées. En ce qui concerne, la charge de rupture de la zone centrale, elle est calculée avec l'hypothèse que l'armature en-dessous de l'appui central est à l'écoulement dans la phase de rupture des éléments non-armé de l'ouverture. Le calcul démontre que les modèles de la figure 6.34 (b) et (c) ont eu une charge de rupture plus élevée, car leur zone au-dessus de l'ouverture a été armée. La figure 6.34 montre également les résultats plus conservateurs obtenus par des champs de contraintes continus.

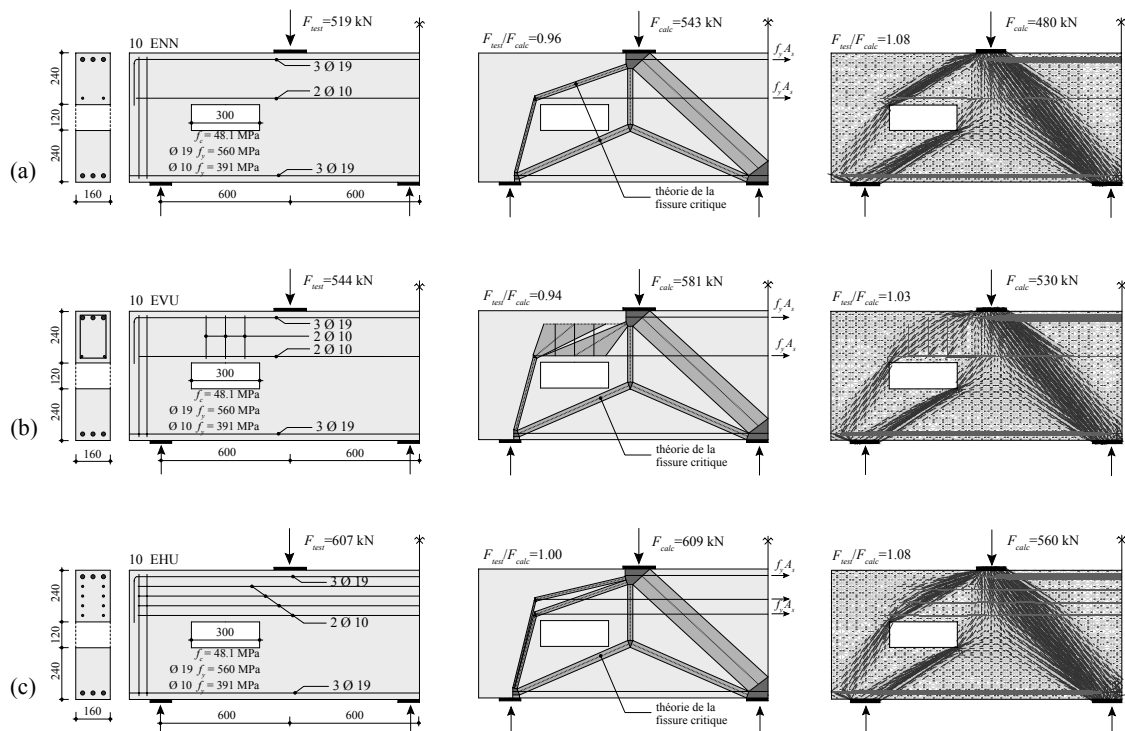


Figure 6.34: Analyse de structures par les champs de contraintes discontinus en employant la théorie de la fissure critique et analyse par les champs de contraintes; (a) essai ENN; (b) essai EVU; (c) essais EHU.

7. Contrôle de la fissuration

7.1 Introduction

Bien que la méthode des champs de contraintes soit une méthode pour l'analyse des structures à l'état limite ultime, l'aptitude au service des structures analysé par des champs de contraintes doit être toujours vérifiée. Une des hypothèses de base utilisée pour la formation d'un modèle de champs de contraintes est que la résistance à la traction du béton est nulle et que tous les efforts de traction sont repris par les armatures. Cette hypothèse, tout-à-fait valable pour le calcul de la structure à l'état limite ultime, est conservatrice à l'état limite de service dans lequel la résistance à la traction du béton n'est pas négligeable. Il est en général nécessaire de procéder à l'évaluation de l'état de la fissuration et de la déformation ainsi que la détermination d'une armature de contrôle de la fissuration. L'armature de contrôle de la fissuration doit garantir que les exigences de l'état limite de service, comme l'ouverture et la distribution des fissures ainsi que les déformations de la structure sont acceptables.

7.2 Zones de fissuration

Selon les approches précédemment proposées, la topologie des bielles-et-tirants (des champs de contraintes) sera sélectionnée pour dimensionner et vérifier par la suite les éléments principaux du modèle. Afin de compléter le dimensionnement de la structure, un contrôle à l'état limite de service doit être effectué et une armature minimale pour le contrôle de la fissuration doit être déterminée. La figure 7.1 montre le champ de contrainte de l'élément d'essai [Yang08] présenté dans le chapitre 6 de cette thèse. Etant donné que cet élément est conçu sans armature minimale, plusieurs zones particulières doivent être considérées afin de satisfaire toutes les exigences à l'état limite de service.

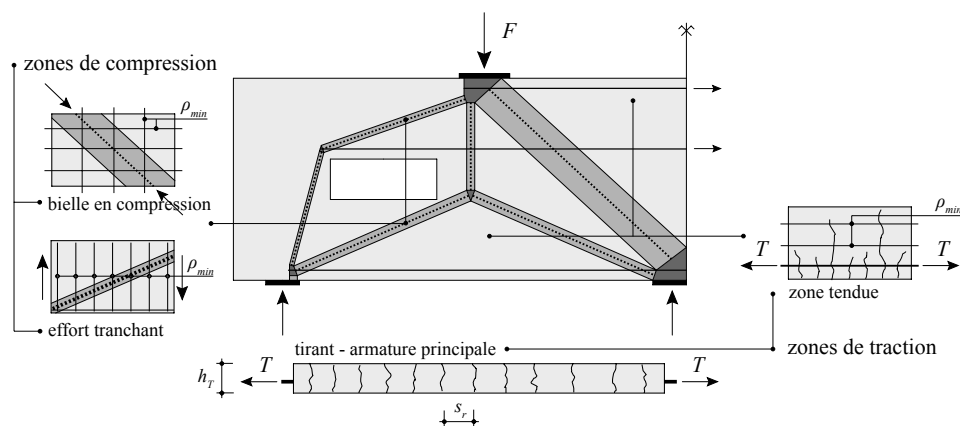


Figure 7.1: Contrôle de la fissuration pour l'élément avec une discontinuité géométrique de [Yang08].

L'espacement et l'ouverture des fissures dans les tirants doivent être contrôlés tout d'abord, ainsi que la quantité d'armature nécessaire pour empêcher une rupture fragile de la structure lors de la première fissuration. Par la suite, une armature minimale doit être déterminée pour rendre la structure plus ductile pour les zones sollicitées à l'effort tranchant et analysées par la théorie de la fissure critique.

En ce qui concerne les bielles en compression, une armature minimale permet de reprendre les efforts de traction dus à la diffusion des efforts ainsi que pour limiter les déformations latérales et l'ouverture des fissures. Une armature minimale doit être utilisée pour contrôler l'ouverture des fissures des tirants qui se propagent dans les zones tendues en-dehors de la zone des tirants, ce qui améliore l'état de fissuration de ces zones.

7.2.1 Armature minimale et fissuration des tirants principaux

Pour les poutres sollicitées à la flexion simple, l'état de fissuration au voisinage de l'armature principale est habituellement estimé à l'aide d'un tirant idéalisé, figure 7.2. La définition de la hauteur effective de ce tirant permet la détermination de son taux d'armature et l'utilisation de formules analytiques qui décrivent le comportement des tirants en béton armé.

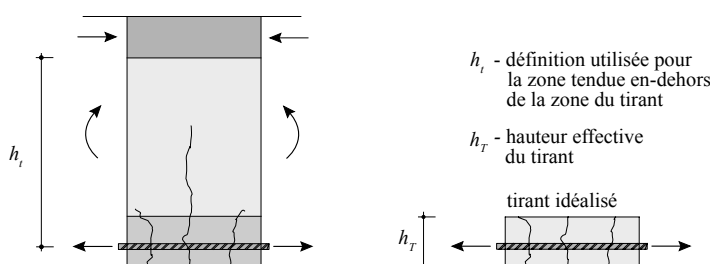


Figure 7.2: Poutre sollicitée à la flexion simple et tirant idéalisé.

Par cette approche, qui permet d'étudier l'aptitude au service du béton proche des armatures principales à l'aide d'un tirant idéalisé, on propose de traiter les autres structures qui peuvent être dimensionnées par des modèles champs de contraintes. Ainsi, le tirant à mi-travée et le tirant au-dessus de l'appui central du champ de contraintes de la figure 7.1 peuvent être modélisés.

Comportement des tirants en béton armé

Le comportement des tirants en béton armé et les formules analytiques font l'objet des travaux de [Marti97, Muttoni04]. Le schéma de la figure 7.3 (a) explique la phase de formation des fissures, dans laquelle l'effort maximal dans la barre (à la fissure) est égal à l'effort de fissuration. Une partie de cet effort est transmis au béton par l'effort d'adhérence considéré comme constant jusqu'à ce que l'effort dans le béton devienne de nouveau égal à la contrainte de fissuration f_{ct} . Cette approche permet de déterminer la distance minimale et la distance maximale entre les deux fissures, l_b et $2l_b$.

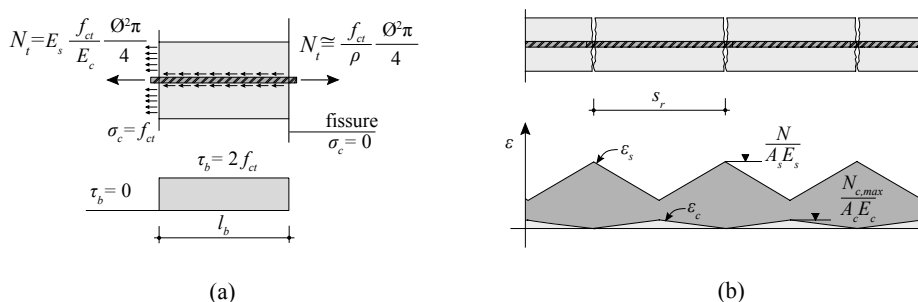


Figure 7.3: (a) Création d'une nouvelle fissure; (b) phase d'ouverture des fissures.

La figure 7.3 (b) montre la phase d'ouverture des fissures qui suit la phase de formation des fissures. Dans cette nouvelle phase, les efforts supérieurs à l'effort de fissuration sont repris par l'armature et la différence entre la déformation de l'armature et de celle du béton (à la base de distance des fissures) permet la détermination de l'ouverture de la fissure.

Etant donné que l'espacement des fissures dépend fortement de la position des premières fissures, on peut considérer sa valeur moyenne comme égale à $1.5l_b$. Selon [Muttoni04] cette distance peut être calculée comme suit:

$$s_r = 1.5 \frac{\emptyset}{8\rho} \quad (7.1)$$

où s_r est l'espacement entre les fissures, \emptyset est le diamètre de l'armature et ρ est le taux d'armature.

L'ouverture moyenne de la fissure peut être déterminée sur la base de la contrainte maximale dans l'armature $\sigma_{s,max}$ de la manière suivante:

$$w_m = \frac{\emptyset}{4\rho} \frac{\sigma_{s,max} - f_{ct}}{E_s} \quad (7.2)$$

Un tirant dimensionné de cette façon doit disposer d'une armature suffisante pour empêcher une rupture fragile lors de la première fissuration. Cela signifie que le tirant doit être capable de reprendre tous les efforts de traction passant par le béton. Afin de respecter cette condition, le taux d'armature minimale des tirants doit être supérieur ou égal au rapport suivant:

$$\rho_{min} = \frac{f_{ct}}{f_y} \quad (7.3)$$

Application pour les structures

Dans le but d'appliquer ces formules pour le calcul des structures la surface effective autour des tirants doit être déterminée. Différentes propositions ont été faites pour estimer cette hauteur effective du tirant h_T . Une proposition de Muttoni [Muttoni04] considère la hauteur effective h_T comme étant égale à $1/5$ de la hauteur totale de la poutre, h . En se basant sur la recherche effectuée, la valeur $h/5$ est valable pour des poutres dont la hauteur totale est inférieure à 600 mm tandis qu'une valeur de $h/6$ doit être prise en compte pour les poutres dont la hauteur est supérieure à cette valeur, figure 7.4 (a).

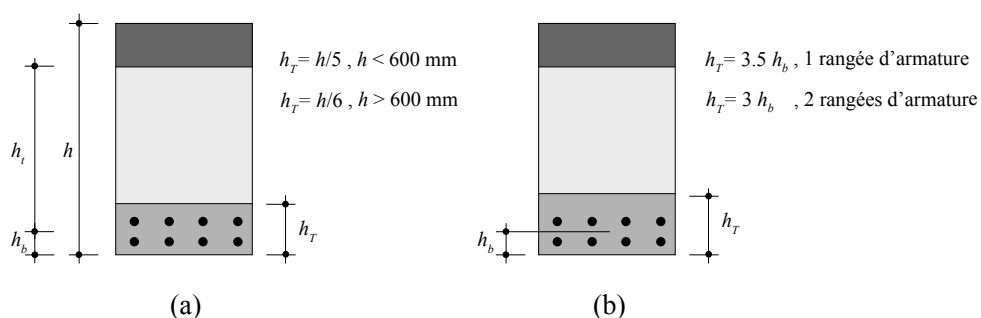


Figure 7.4: (a) et (b) Définition de la hauteur effective des tirants.

En ce qui concerne les structures pour lesquelles la hauteur totale h n'est pas en fonction de la hauteur tendue h_t , (comme pour l'exemple de la figure 7.1) les coefficients applicables à ces poutres peuvent être calibrés en fonction de h_t en considérant que pour une poutre la hauteur de la zone tendue en-dehors de la zone d'armature principale peut être estimée par la relation, $h_t = 0.75h$.

Pour certaines structures la définition de la hauteur tendue peut être difficile et dans ces situations la hauteur effective des tirants peut être déterminée sur la base de la hauteur du barycentre des armatures, [Schiessl86], figure 7.4 (b). Pour obtenir la hauteur de la zone effective sur la base des essais considérés, cette valeur peut être multipliée par 3.5 si l'armature est disposée en une rangée ou par 3 si elle est disposée en deux rangées.

En utilisant les essais de Frantz et Breen [Frantz78], l'équation (7.1) et les hypothèses sur la hauteur effective du tirant sont vérifiées, voir figure 7.5. La figure 7.5 (a) quant à elle, illustre la vérification de la hauteur effective calculée sur la base de la hauteur de la poutre. La figure 7.5 (b) montre la vérification de ces mêmes essais, avec la hauteur effective calculée selon la figure 7.4 (b).

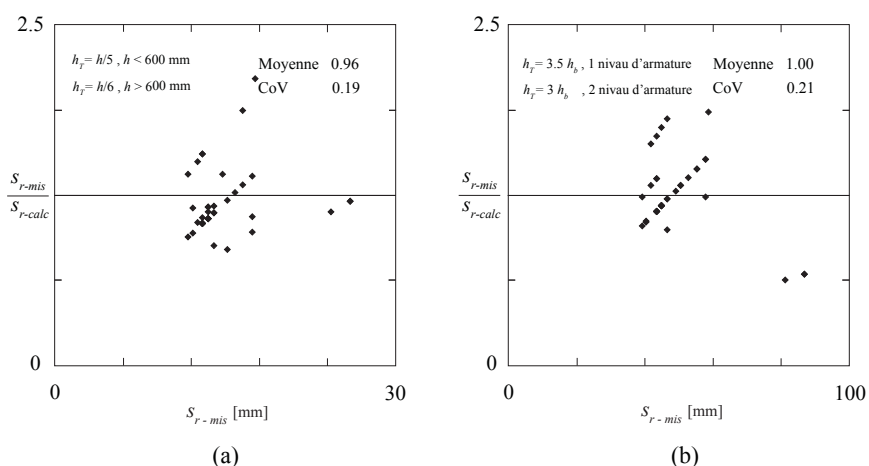


Figure 7.5: Vérification de l'espacement des fissures pour les essais de Frantz et Breen [Frantz78]; (a) vérification de formule basée sur la hauteur des poutres; (b) vérification de la formule basée sur la position d'armature.

A remarquer: Il s'avère que très souvent la position des étriers influence le développement des fissures, ce qui doit donc être pris en compte si l'équation (7.1) est employée [Fernández05].

Application pour des champs de contraintes

L'application de cette approche pour des champs de contraintes s'avère adaptée et précise mais uniquement dans le cas où le modèle sélectionné ne dévie que peu par rapport à la solution élastique. L'exemple de la figure 7.6, qui est présenté lors la discussion sur les modes de comportement (chapitre 2), est utilisé comme exemple. Si l'on sélectionne le premier mode de comportement, qui n'exige que peu de redistribution des efforts après la première fissuration, les tirants seront placés dans les zones les plus sollicitées, voir figure 7.6 (a).

Les efforts dans les tirants peuvent être déterminés par le modèle bielles-et-tirants et sur la base de ces valeurs leur état de fissuration peut être estimé. Par contre, si l'on choisit le mode de

comportement 2, figure 7.6 (b), l'ouverture de la fissure au-dessus du trou n'est pas contrôlée et elle ne peut pas être estimée par le biais d'un modèle de bielles-et-tirants.

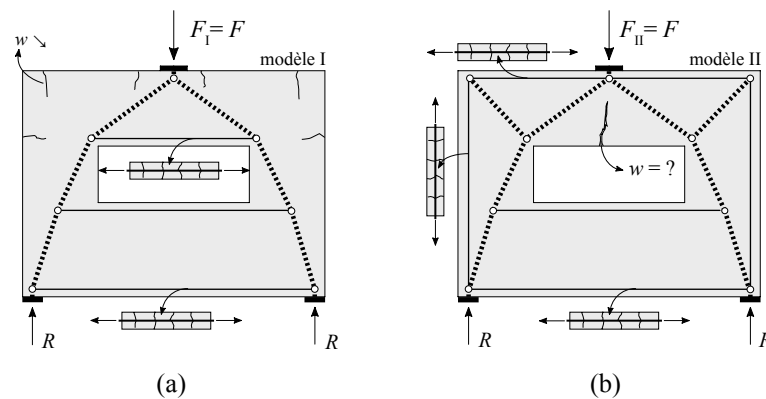


Figure 7.6: (a) Etude du mode de comportement I; (b) étude du mode de comportement II.

Dans un tel cas, il faudrait utiliser une approche qui donne des informations sur l'état de déformation de l'ensemble de la structure. Une telle approche considère des champs de contraintes continus (paragraphe 5.2.2). La figure 7.7 illustre l'état de déformation de deux modèles. Ainsi qu'il est possible de le constater dans le cas des modèles discontinus, l'ouverture des fissures peut être estimée sur la base des contraintes et des déformations obtenues par les champs de contraintes continus. De plus, dans les endroits dépourvus d'armature, l'ouverture de la fissure peut être estimée sur la base de la déformation du béton, multipliée par une distance contributive, figure 7.7 (b).

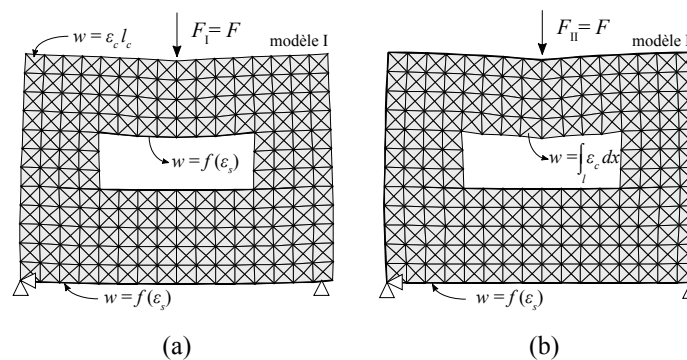


Figure 7.7: (a) Déformation du premier mode de comportement; (b) déformation du deuxième mode de comportement.

Contrairement aux champs de contraintes discontinus, qui ne peuvent pas estimer une répartition des efforts hyperstatiques à l'état limite de service, les champs de contraintes continus permettent cette estimation.

De plus, l'estimation de la fissuration par des champs de contraintes continus se trouve être plus correcte car les contraintes et les déformations sont calculées directement lors de cette analyse, figure 7.8 (a). En outre, avec des champs de contraintes continus les déplacements de la structure peuvent être contrôlés à l'état fissuré de la structure, voir figure 7.8 (b).

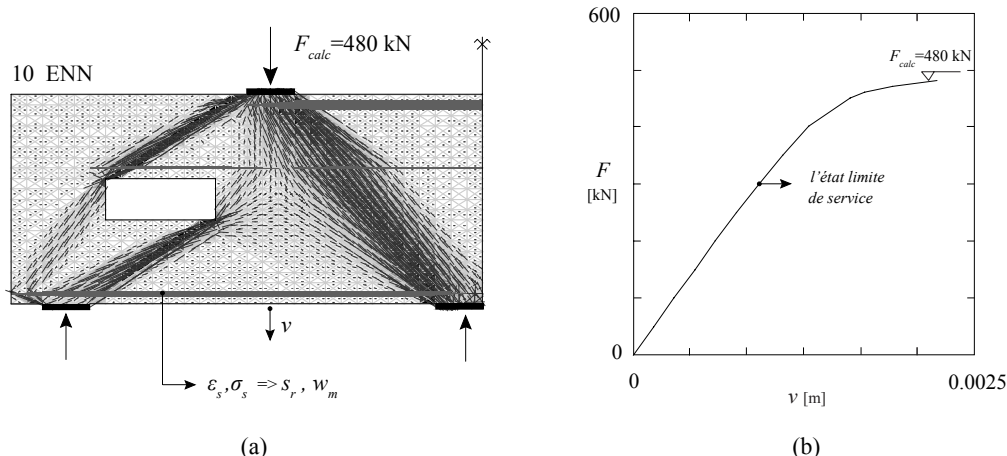


Figure 7.8: (a) Analyse par champs de contraintes continus; (b) déplacement de la structure à l'état fissuré.

7.2.2 Armature minimale pour les zones sollicitées à l'effort tranchant

Les zones sollicitées à l'effort tranchant doivent présenter une ductilité et une aptitude au service, satisfaisantes. Bien qu'une certaine résistance de ces zones soit assurée par la transmission des efforts à travers les fissures, ces éléments sont caractérisés par un comportement fragile et une armature minimale doit y être disposée. Cette armature minimale est habituellement inférieure à l'armature minimale de fissuration, équation (7.3), et son but n'étant pas de reprendre tous les efforts de traction après la fissuration mais plutôt d'agir comme une armature de suture après celles-ci. Elle doit donc s'opposer à l'ouverture des fissures, de façon à garantir la transmission des efforts au travers de celle-ci.

Bien évidemment, si l'armature minimale et la résistance de la poutre sont analysées par des champs de contraintes, une résistance conservatrice est obtenue. En effet, la résistance d'éléments sollicités à l'effort tranchant ($a/d > 2.5$) avec une armature minimale est déterminée par la contribution du béton (théorie de la fissure critique) et par la contribution de l'armature.

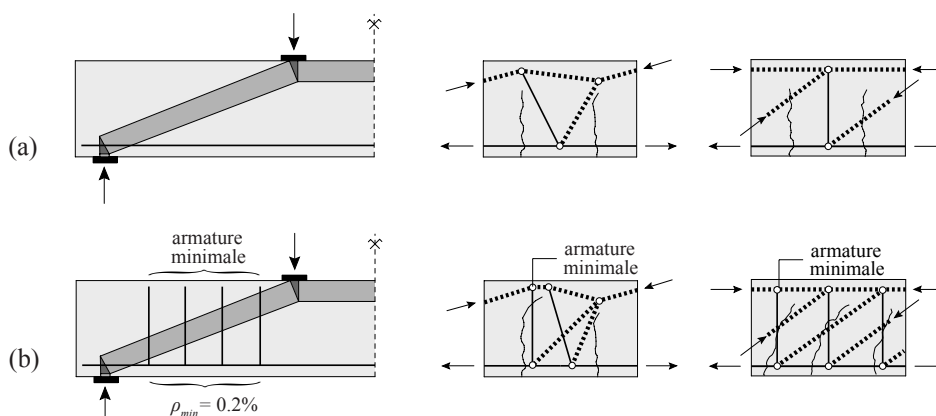


Figure 7.9: (a) Effets de transmission des efforts pour la poutre sans étriers; (b) contribution de l'armature minimale à la transmission des efforts.

La figure 7.9 (a) présente l'effet de porte-à-faux et l'effet d'engrènement qui sont utilisés comme effets de transmission des efforts par la théorie de la fissure critique. Si une armature

minimale d'effort tranchant est présente, les efforts sont transmis par l'effet de porte-à-faux qui fait appel à l'armature minimale et par l'effet d'engrainement où l'armature s'oppose à l'ouverture des fissures, figure 7.9 (b). Avec l'augmentation de la quantité d'armature, les effets considérés par la théorie de la fissure critique diminuent et l'élément se comporte comme décrit par les modèles de champs de contraintes.

Selon la norme suisse SIA262, l'armature minimale pour les zones sollicitées à l'effort tranchant doit être égale ou supérieure à 0.2%. Cette valeur est dans la majorité des cas très prudente et les autres normes comme EC-2 et ACI 318-05 proposent des valeurs moins restrictives en fonction de la résistance caractéristique du béton et la valeur d'écoulement d'armature. Selon ces normes pour les bétons normaux la valeur de l'armature minimale est de moins de 0.1%.

7.2.3 Armature minimale des bielles en compression

Pour les bielles en compression, l'armature minimale doit reprendre les efforts de traction dus à la diffusion des efforts et peut également servir pour réduire les déformations et l'ouverture des fissures transversales. La figure 7.10 (a) présente une bielle de compression avec l'armature perpendiculaire à la direction de la bielle. Le taux d'armature minimale pour empêcher une rupture fragile de la bielle vaut entre 0.1% et 0.2%, selon les propositions des normes (SIA, EC-2, ACI 318-05) pour les zones sollicitées à l'effort tranchant. Cette armature a pour but d'assurer une certaine ductilité de la bielle et d'empêcher la création d'une fissure importante dans la direction parallèle à la bielle. Afin d'avoir des fissures bien distribuées et une aptitude au service satisfaisante, cette armature doit être plus importante et doit atteindre la valeur de f_{ct}/f_y .

Pour des bielles inclinées par rapport à la direction des armatures, figure 7.10 (b), la projection des armatures (ρ_x et ρ_y) sur la direction perpendiculaire de la bielle doit être supérieure ou égale à l'armature minimale définie pour la bielle de la figure 7.10 (a). L'armature minimale pour les deux directions perpendiculaires peut être déterminée selon l'équation:

$$\rho_{\min} = \rho_{\min,x} \sin^2 \theta + \rho_{\min,y} \cos^2 \theta \quad (7.4)$$

De cette façon, l'armature minimale dans les deux directions peut être optimisée afin de donner la somme d'une armature minimale perpendiculaire à la direction de la bielle.

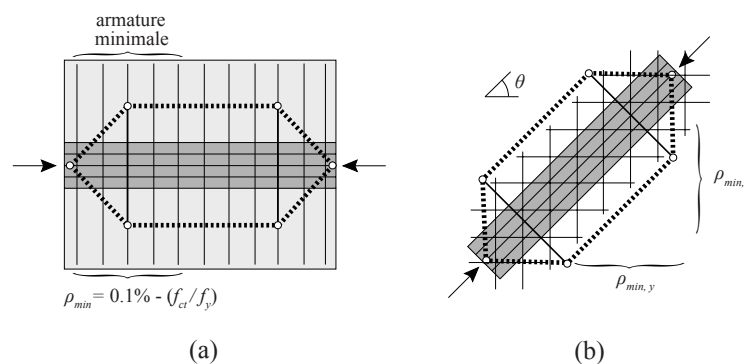


Figure 7.10: (a) Bielle de compression avec armature perpendiculaire à la direction de la fissuration; (b) bielle de compression avec armature inclinée par rapport à la direction de la fissuration.

7.2.4 Armature minimale des zones tendues en-dehors de la zone des tirants

Il a été remarqué que le nombre de fissures qui se prolongent dans les zones tendues en-dehors de la zone des tirants est très souvent limité, avec une ouverture de fissure importante par rapport aux fissures dans la zone des tirants. Cette armature minimale doit donc garantir qu'un nombre suffisant de fissures se prolongent dans ces zones afin de garantir une ouverture des fissures satisfaisante.

Leonhardt [Leonhardt77] a présenté la distribution des fissures d'une poutre en forme de T sollicitée à la flexion simple, figure 7.11. La figure indique que les fissures de la zone du tirant ont un faible espacement et que les fissures au-dessus de cette zone commencent à s'orienter vers les fissures initiales qui se prolongent dans l'âme. Ces fissures initiales, appelées aussi "fissures cumulatives" ont été caractérisées par une ouverture importante par rapport aux fissures dans la zone du tirant.

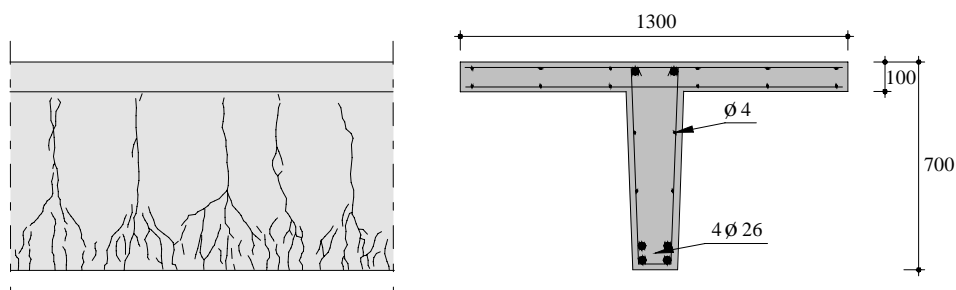


Figure 7.11: *Distribution des fissures et section de la poutre de Leonhardt [Leonhardt77].*

Pour ces zones tendues, le taux d'armature minimale égal à f_{ct}/f_y peut être défini, mais sur la base des résultats d'essais, il semble que cette armature minimale soit excessive dans certaines conditions, et insuffisante dans d'autres. Une recherche sur le sujet reste nécessaire et le reste de ce chapitre est dédié à l'étude de cette armature.

7.3 Zones tendues en-dehors de la zone des tirants

Dans la pratique actuelle, les zones tendues en-dehors de la zone des tirants, se trouvent dans les âmes des poutres et dans les parois minces. En fonction de la quantité d'armature dans ces zones ainsi que dans la zone des tirants, différentes configurations de fissures peuvent exister.

Les essais de Fellman et Menn [Fellman81] démontrent comment différents modèles de fissuration se développent en fonction de la disposition et du type d'armature dans la zone des tirants, figure 7.12.

Dans la première paroi, l'armature a été disposée sur toute la largeur et les fissures sont bien distribuées. Une concentration de l'armature aux bords de la deuxième paroi a créé une bonne distribution des fissures, mais avec une concentration des fissures dans la zone non armée où leurs ouvertures ont augmenté. Pour la troisième paroi, les huit barres de diamètre $\text{Ø } 12$ ont été remplacées par deux barres de diamètre $\text{Ø } 22$. L'espacement moyen des fissures dans la zone de l'armature a augmenté, par contre le nombre des fissures dans la zone non armée est resté inchangé.

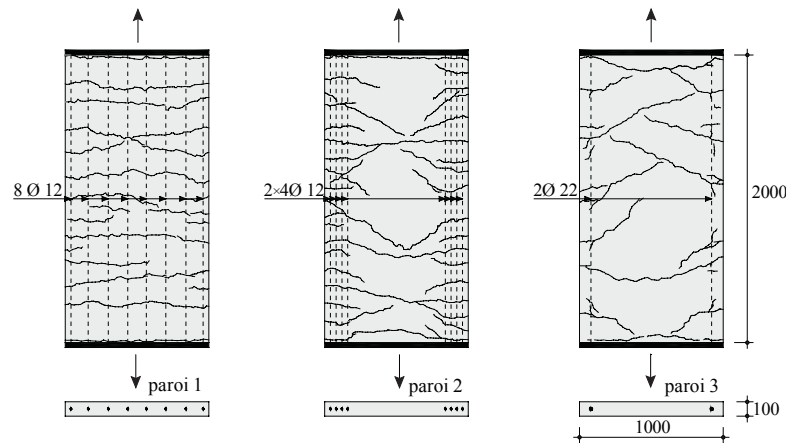


Figure 7.12: *Trois parois minces de Fellman et Menn [Fellman81].*

Les diagrammes de la figure 7.13 montrent l'ouverture moyenne des fissures le long du bord et le long de la zone centrale des trois parois en fonction de leur élongation moyenne ($l=1800\text{mm}$).

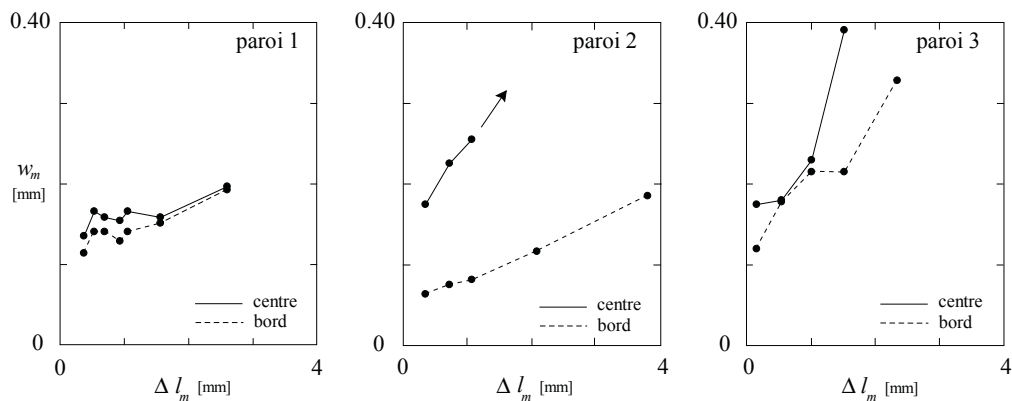


Figure 7.13: *Ouverture des fissures en fonction de l'élongation moyenne des trois parois ($l=1800\text{mm}$).*

7.3.1 Résultats des essais en laboratoire

La fissuration des zones en-dehors de la zone des tirants a été analysée par plusieurs chercheurs, plus particulièrement pour les âmes des poutres sollicitées à la flexion simple. Ce problème a été soulevé pour la première fois pendant la réunion du comité CEB sur la fissuration en 1966 [CEB67]. Plusieurs suggestions, comme la disposition de l'armature de flexion dans toute l'âme et l'utilisation des petits diamètres des barres, ont été évoquées. Depuis ces premières analyses, plusieurs recherches sur la fissuration des âmes soumises à la flexion simple ont été effectuées.

Beeby [Beeby71] a effectué des tests sur cinq poutres en T, armées à la flexion simple avec deux barres $\text{Ø } 22$. Il a remarqué qu'une petite quantité d'armature disposée dans les âmes n'a pas eu d'effets bénéfiques sur la fissuration et a proposé l'utilisation de barres de diamètres supérieurs afin de les rendre plus actives dans les âmes.

Colonna-Ceccaldi et Soretz [Colonna-Ceccaldi72] ont quant à eux effectué une série d'essais sur six poutres d'une longueur de 11 m et d'une hauteur de 1 m, en examinant la quantité d'armature nécessaire à disposer dans l'âme de façon à obtenir une ouverture de fissure maximale qui soit égale à l'ouverture de fissure maximale dans la zone du tirant.

Frantz et Breen [Frantz78] ont présenté la plus grande série d'essais sur la fissuration des âmes des poutres. Ils ont effectué des essais sur 44 poutres en T, avec des hauteurs totales entre 618 mm et 1235 mm et des largeurs des âmes entre 197 mm et 432 mm. Les paramètres étudiés ont été la quantité, la position, la distribution et l'enrobage de l'armature dans l'âme ainsi que la largeur des âmes et la hauteur des poutres. Ils ont remarqué que l'efficacité de l'armature dans les âmes est liée à son pourcentage et qu'une augmentation de la hauteur tendue augmente la quantité d'armature nécessaire. Ils ont aussi noté qu'une distribution des barres de petit diamètre est plus efficace pour contrôler la fissuration des âmes.

Braam [Braam90] a effectué des essais sur 15 poutres en béton armé dans le but de vérifier le modèle de fissuration. Sa conclusion principale a été que le modèle basé sur la surface effective du béton peut modéliser la distance et l'ouverture des fissures dans les âmes.

Alvarez et Marti [Alvarez96] ont réalisé les essais sur des parois minces et des bandes de dalle pour confirmer leur modèle théorique de fissuration des éléments en béton armé soumis à la traction.

7.3.2 Zones tendues non-armées

Les essais en laboratoire ont mis en évidence des phénomènes importants concernant la fissuration des zones tendues en-dehors de la zone des tirants. D'abord, l'ouverture des fissures dans ces zones est plus importante que l'ouverture des fissures des tirants. Ensuite, bien souvent les fissures dans la zone des tirants convergent vers les fissures initiales, ce qui a été constaté par Leonhardt [Leonhardt78] pour les âmes minces fortement armées, voir la figure 7.11.

Les calculs effectués pendant cette thèse ont démontré qu'une prolongation limitée des fissures dans l'âme a pour conséquence la concentration des déformations sur quelques fissures qui ont pour cette raison une ouverture importante. Il existe donc une corrélation possible entre le rapport du nombre des fissures dans tirant/âme (n_s/n_w) et le rapport d'ouverture moyenne des fissures dans l'âme/tirant (w_w/w_s). Dans le but d'obtenir une meilleure analyse de cette corrélation, les résultats d'essais sur les âmes minces sont interprétés.

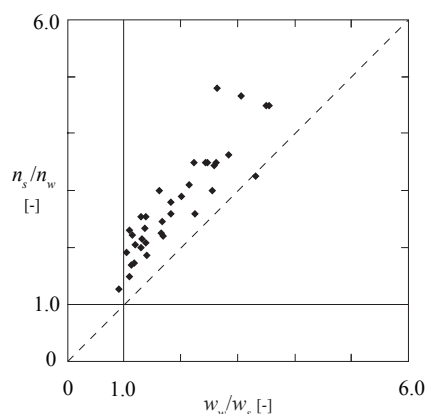


Figure 7.14: *Diagramme du rapport d'ouverture des fissures w_w/w_s et du rapport du nombre de fissures n_s/n_w pour les poutres de Frantz et Breen [Frantz78], $\epsilon_s = 1.35 \cdot 10^{-3}$.*

La figure 7.14 montre cette corrélation par rapport au nombre de fissures dans le tirant et l'âme (n_s/n_w) en fonction de l'ouverture moyenne des fissures dans les âmes et les tirants (w_w/w_s). Le nombre de fissures est décompté dans la zone du tirant ainsi qu'à mi-hauteur de la zone tendue

en-dehors de la zone du tirant. Le diagramme confirme qu'une prolongation limitée des fissures dans l'âme a pour conséquence l'ouverture de fissures importantes par rapport aux fissures dans le tirant.

Par ailleurs une prolongation d'un nombre de fissures suffisant dans les zones tendues en-dehors de la zone des tirants maintient l'ouverture des fissures de ces zones similaire à celle des fissures du tirant. Une telle propriété est très importante pour deux raisons: tout d'abord, cela permet de déterminer l'ouverture de la fissure dans la zone du tirant et de garder l'ouverture de la fissure dans la zone tendue en fonction de la fissure du tirant. De plus, cela indique qu'une armature minimale dans la zone tendue n'est pas nécessaire si la prolongation des fissures du tirant peut-être garantie sans cette armature. Toutes ces observations permettent de travailler avec le nombre des fissures qui se prolongent dans l'âme et non avec l'ouverture des fissures qui est difficile à estimer et fortement dépendante de la position des mesures.

Le deuxième phénomène de la fissuration des âmes (zones tendues) est la convergence des fissures vers les fissures initiales, figure 7.11. L'exemple de la figure 7.15 présente schématiquement les efforts et les phénomènes qui sont obtenus avec une analyse par EF non-linéaires. La figure 7.15 (a) montre qu'une partie de l'effort de l'armature entre deux fissures n'agit pas seulement sur le béton autour du tirant, mais agit également sur le béton de l'âme (une distribution plus rigide). Le même effet est remarqué pour la force de compression et l'axe neutre entre deux fissures discrètes, qui change de position en se déplaçant vers la zone tendue.

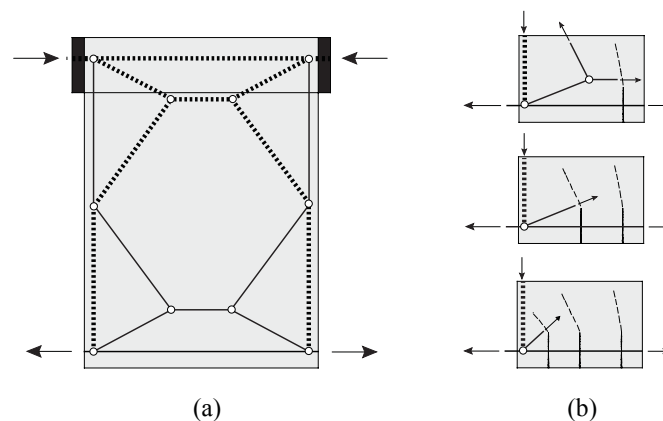


Figure 7.15: (a) Flux des efforts dans l'élément étudié et le modèle de bielles-et-tirants correspondant; (b) développement des fissures.

Si entre deux fissures existantes de nouvelles fissures apparaissent dans la zone des tirants, les efforts de traction dans l'âme influencent la propagation de ces fissures. Dans la mesure où cette nouvelle fissure serait suffisamment loin de la fissure précédente, les efforts de traction de l'âme sont perpendiculaires à la direction de la fissure et celle-ci se prolonge verticalement, voir figure 7.15 (b). Par contre si la nouvelle fissure est proche de la fissure existante (s_r petite) les contraintes de traction qui agissent sur l'âme commencent à avoir une direction inclinée par rapport à la direction initiale de la fissure, ce qui fait pivoter la direction de sa propagation, figure 7.15 (b). Ainsi, un effet de convergence des fissures se produit, ce qui est confirmé par l'essai de Leonhardt, figure 7.11, pour lequel l'espacement des fissures dans la zone du tirant était très petit.

Dans certaines situations les fissures de la zone du tirant ne changent pas de direction de propagation mais ne se développent que dans la zone du tirant. Ce phénomène est produit par un effort de traction dans l'âme, qui reste plutôt de faible intensité.

Avec l'espacement des fissures dans les tirants, la hauteur tendue a une importance significative sur le nombre de fissures qui se prolongent dans l'âme. En effet, pour créer une telle fissure, les conditions de contraintes doivent être égales à celles qui existaient lors de la première fissuration. Afin de remplir une telle condition après l'apparition de la première fissure, une certaine distance est nécessaire pour établir l'état de contrainte dans le béton juste avant la fissuration. De cette façon et en considérant la diffusion des contraintes élastiques dans le béton, cette distance nécessaire doit être en fonction de la hauteur tendue. L'influence de la hauteur tendue a pu également être notée par Frantz et Breen [Frantz78] qui ont établi le taux d'armature minimale qui en dépend.

Influence du rapport h_t/s_r sur la prolongation des fissures

La discussion précédente montre l'influence de l'espacement des fissures dans la zone du tirant s_r et l'influence de la hauteur tendue h_t sur la fissuration de ces zones. La recherche effectuée a démontré que leur rapport h_t/s_r a une influence importante sur le rapport des fissures qui se prolongent dans les zones tendues en-dehors de la zone des tirants (n_s/n_w). La figure 7.16 démontre cette tendance pour les essais sans armature minimale dans les âmes.

Cette tendance peut être expliquée également par certains essais présentés à la figure 7.17. Pour les deux poutres D-1-0 et D-3-0 avec le même tirant et un espacement moyen des fissures (s_r) similaire, différents rapports n_s/n_w sont observés, figure 7.17. Pour la poutre D-1-0 ce rapport est satisfaisant, et un grand nombre de fissures du tirant se sont prolongées dans l'âme, par contre pour la poutre D-3-0 ce rapport était inadéquat et les fissures se sont concentrées dans la zone du tirant.

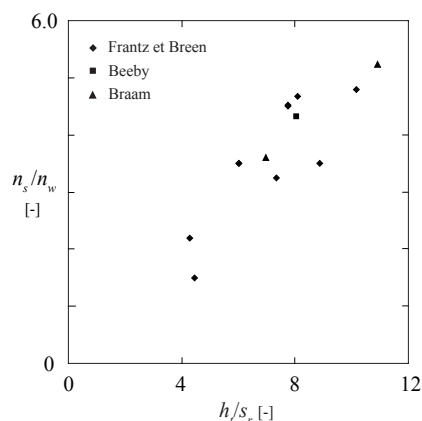


Figure 7.16: Diagramme du rapport du nombre de fissures n_s/n_w et du rapport h_t/s_r pour les poutres de Frantz et Breen [Frantz78], de Beeby [Beeby71] et Braam [Braam90].

De plus, pour une poutre comme T-1-0 avec une hauteur en traction qui se situe entre les hauteurs des deux poutres D-1-0 et D-3-0, le rapport n_s/n_w s'avère relativement petit car son tirant constitué de deux barres de diamètre $\varnothing 28.6$ avec un enrobage considérable a influencé la formation des fissures sur une distance importante. Etant donné que toutes les fissures se prolongent dans l'âme, il n'est pas nécessaire de disposer une armature additionnelle dans celle-

ci pour prolonger les fissures. Dans ce cas il faut plutôt contrôler la fissuration au voisinage de l'armature principale.

Pour les poutres avec un rapport h_t/s_r petit, (T-1-0 et D-1-0), le besoin d'armature dans l'âme est négligeable étant donné que le rapport n_s/n_w est suffisamment petit et par conséquent le rapport w_w/w_s le devient également, voir figure 7.14. Dans ce cas l'ouverture des fissures dans l'âme reste du même ordre de grandeur que l'ouverture des fissures dans la zone du tirant. Par contre pour la poutre D-3-0 une armature minimale est nécessaire pour faire pénétrer les fissures du tirant dans la zone tendue.

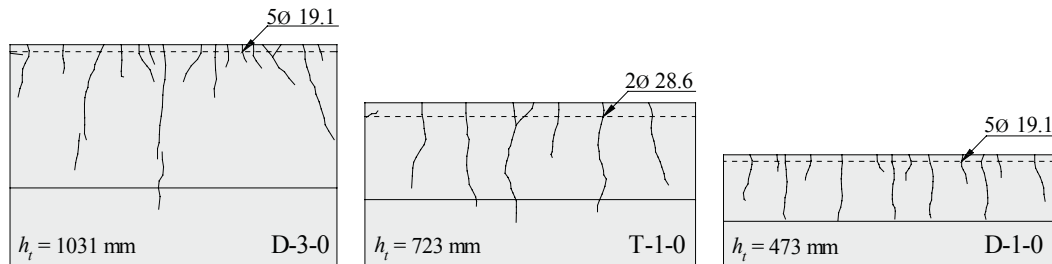


Figure 7.17: Poutres D-3-0, T-1-0 et D-1-0 [Frantz78], $\varepsilon_s = 1.2 \cdot 10^{-3}$ dans les tirants.

L'exemple d'une bande de dalle soumise à un moment quasi-constant [Alvarez96] (voir l'illustration de la figure 7.18) montre de quelle façon, pour un rapport h_t/s_r très faible ($h_t/s_r = 1.5-2$), toutes les fissures de la zone du tirant se prolongent dans la zone tendue ($n_s/n_w = 1$). Dans la pratique de la construction, ainsi que l'exige le rapport n_s/n_w , une armature minimale n'est pas nécessaire dans les zones intermédiaires de la bande de dalle pour contrôler la fissuration.

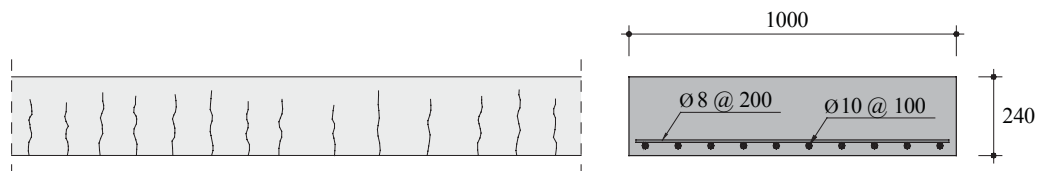


Figure 7.18: Zone d'une bande de dalle soumise à un moment quasi-constant de la bande de dalle ZP1 et sa section, Alvarez et Marti [Alvarez96].

7.3.3 Zones tendues armées

La discussion précédente a montré qu'une ouverture importante des fissures dans les âmes (zones tendues) est due à une propagation trop faible des fissures des tirants, qui souvent convergent vers les fissures initiales. Afin de satisfaire les exigences d'aptitude au service, une armature minimale peut aider à la propagation des fissures dans ces zones. En considérant le comportement des tirants en béton armé, cette armature minimale doit être supérieure ou égale au rapport f_{ct}/f_y , équation (7.3). Par contre, et ainsi que le montrent les figures 7.17 et 7.18, certains essais ont prouvé qu'un comportement satisfaisant est possible même pour des taux d'armature minimale plus petit. Ceci démontre qu'il est parfois possible de disposer d'une quantité d'armature inférieure au rapport f_{ct}/f_y et dans d'autres cas une quantité plus importante peut être éventuellement nécessaire.

L'armature minimale est caractérisée par deux effets. Tout d'abord un espacement correct s'avère nécessaire pour distribuer l'effet de l'armature sur toute la zone et d'autre part la quantité d'armature minimale est importante pour pouvoir contrôler la fissuration des zones tendues.

Espacement de l'armature

L'analyse démontre que l'espacement et la quantité d'armature dans l'âme ont un rôle important pour empêcher la convergence des fissures. Souvent, le placement d'une grande quantité d'armature dans l'âme est une solution non optimale du point de vue économique, et la compréhension du rôle de l'espacement des barres reste donc importante.

La figure 7.19 (a) montre comment un espacement trop grand de l'armature peut être peu efficace pour empêcher la convergence des fissures et plus efficace si celle-ci est placée dans la hauteur de fissure, figure 7.19 (b). Le positionnement de l'armature dans la zone de pivotement de la fissure est utile car de cette façon l'armature peut influencer la propagation de la fissure et la rendre plus verticale, figure 7.19 (c). Une estimation de la hauteur de pivotement de la fissure peut être obtenue par le biais de l'enrobage et du calcul de l'espacement des fissures s_r .

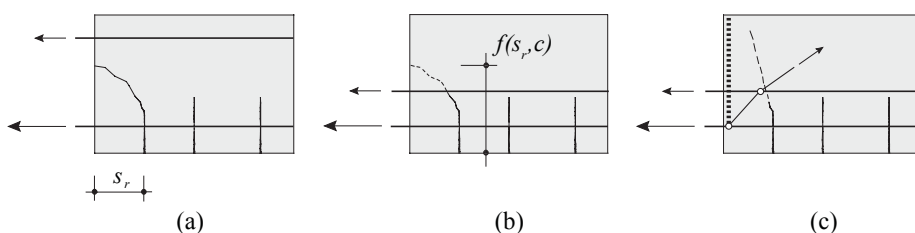


Figure 7.19: *Espacement des barres dans l'âme et l'influence sur la fissuration.*

L'importance de l'espacement de l'armature sur le contrôle de la fissuration dans les zones en traction a été étudiée par plusieurs chercheurs. Frantz et Breen [Frantz78] ont comparé l'influence de l'espacement de l'armature en gardant la quantité d'armature dans l'âme constante. La figure 7.20 présente les ouvertures mesurées pour différentes dispositions et type d'armature, y compris pour une poutre sans armature dans l'âme. La figure confirme que les poutres sans armature et avec une barre dans l'âme ont eu une importante ouverture des fissures et par contre les poutres avec 4 barres Ø 19.1 et 10 barres Ø 6 dans l'âme ont eu un comportement satisfaisant et très similaire entre elles.

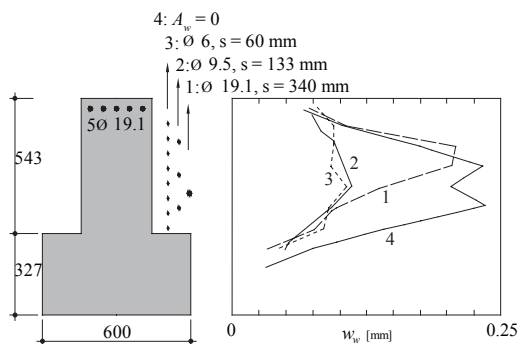


Figure 7.20: *Diagramme de l'ouverture d'une fissure moyenne pour différentes dispositions des barres [Frantz78].*

Pour soutenir l'hypothèse selon laquelle la distance entre les fissures du tirant s_r et l'espacement des barres s dans l'âme sont deux paramètres importants pour la propagation des fissures, les résultats d'essais de Frantz et de Beeby sont reportés dans le diagramme de la figure 7.21. Ce diagramme démontre que pour un rapport s_r / s petit, le nombre de fissures qui se prolongent dans l'âme est également petit (rapport n_s / n_w grand). Un tel résultat est caractéristique des poutres de Beeby qui avaient de modestes distances entre les fissures du tirant mais aussi un espacement des barres de l'âme considérable. Le diagramme montre aussi que l'espacement des barres reste très important jusqu'à une certaine valeur, après laquelle la diminution de l'espacement des barres n'est plus justifiée ni nécessaire, (la figure 7.20 le démontre aussi).

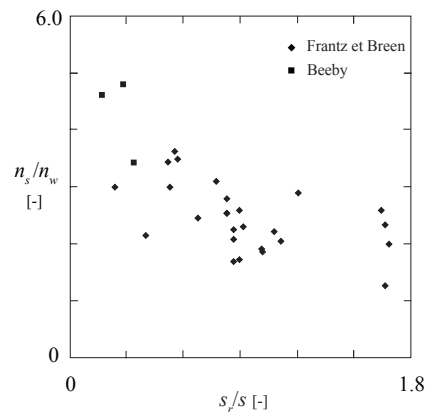


Figure 7.21: Diagramme $n_s / n_w - s_r / s$ pour les poutres de Frantz et de Beeby, $\varepsilon_s = 1.35 \cdot 10^{-3}$ dans le tirant.

Taux d'armature

Le taux d'armature dans les zones en traction en-dehors de la zone des tirants ρ_w est l'un des paramètres les plus importants pour le contrôle de la fissuration de ces zones. C'est en prenant en considération son influence que la dispersion des résultats du diagramme de la figure 7.21 peut être expliqué.

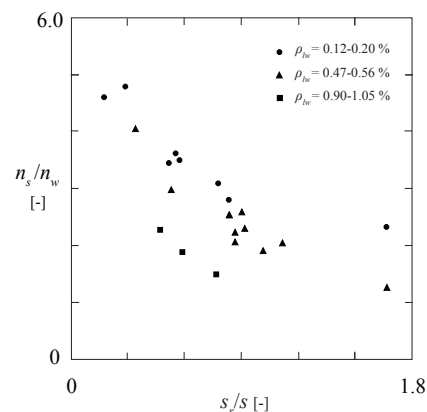


Figure 7.22: Diagrammes $n_s / n_w - s_r / s$ pour les poutres de Frantz et Breen, de Beeby et de Braam.

Afin de soutenir ces conclusions, l'illustration de la figure 7.22 montre des résultats pour des poutres possédant un taux d'armature dans l'âme ρ_w entre 0.12 - 0.20 %, de 0.47 - 0.58 % et de 0.90 - 1.05%. Le diagramme montre que les points correspondant à un taux d'armature ρ_w faible

sont au-dessus des points correspondant un taux d'armature ρ_w supérieur. Ceci démontre l'influence du taux d'armature sur la prolongation des fissures dans l'âme.

Cette analyse révèle qu'il est nécessaire de limiter l'espacement des armatures dans l'âme pour contrôler la convergence des fissures dans la zone du tirant. En revanche, un taux d'armature considérable dans l'âme est suffisant pour fissurer l'âme toute seule sans une interaction directe avec les fissures du tirant. Les essais de Braam dans la figure 7.22 avec un le taux d'armature entre 0.90 et 1.05% le démontrent.

Cette conclusion peut être démontrée par le plan des fissures de la poutre numéro 8 de Braam, figure 7.23. Trois barres de flexion avec un diamètre $\varnothing 16$ et quatre barres d'armature d'âme avec un diamètre $\varnothing 12$ ($\rho_w = 1\%$) ont été disposées dans la poutre. La distance entre les barres de l'âme est de 150 mm. L'essai démontre qu'un nombre suffisant de fissures se prolongent dans l'âme malgré un espacement important de l'armature. Dans ce cas le haut taux d'armature dans l'âme ρ_w a compensé l'espacement important de l'armature.

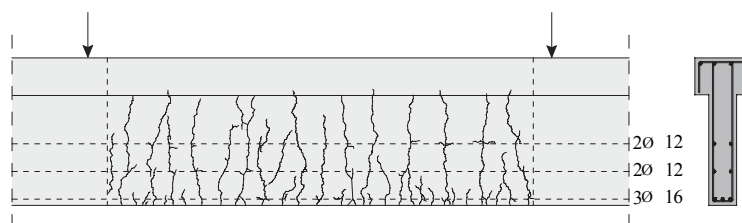


Figure 7.23: Illustration de la poutre numéro 8 de Braam [Braam90].

Largeur de la zone tendue

L'influence de la largeur de la zone en traction sur la fissuration peut être expliquée par l'espacement des fissures dans la zone du tirant, s_r . En effet, l'utilisation d'une section plus large diminue le taux d'armature effectif du tirant et augmente la distance entre les fissures du tirant. De ce point de vue, le problème de la fissuration de zones tendues sera plus marqué dans les sections minces de grands tirants, voir la figure 7.11.

Parmi tous les essais effectués sur la fissuration des âmes, seules deux poutres étaient identiques hormis la largeur de la section b . Ce sont les poutres de Braam numéro 8 et 15, voir les illustrations des figures 7.23 et 7.24.

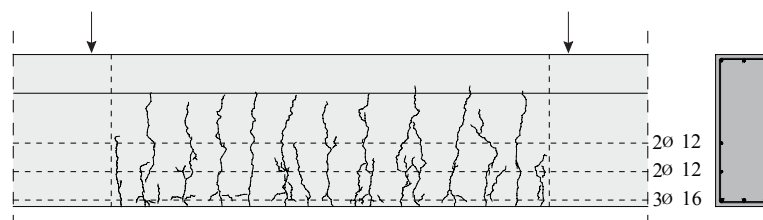


Figure 7.24: Illustration de la poutre numéro 15 de Braam, [Braam90a].

La figure 7.24 révèle que la distance moyenne entre les fissures dans la zone du tirant était plus importante pour la poutre numéro 15. Par ailleurs toutes les fissures se sont prolongées dans l'âme. Ainsi la quantité d'armature nécessaire pour prolonger les fissures dans la zone tendue pour la poutre numéro 15 est inférieure à celle pour la poutre numéro 8.

Largeur effective de l'âme

Frantz et Breen ont constaté qu'une augmentation de l'enrobage de l'armature conduit à une légère augmentation du rapport w_w/w_s . Etant donné qu'ils n'ont pas remarqué l'influence de la largeur de la section b sur la fissuration, ils ont proposé le calcul de la surface effective d'armature d'âme sur la base de l'enrobage et du diamètre de la barre, ou $2c + \emptyset$.

La figure 7.25 (a) présente le modèle de bielles-et-tirants de transmission des efforts de traction dans l'armature vers l'âme après la fissuration. Ce modèle montre que les efforts de traction occupent toute l'âme, avec une concentration des efforts près de l'armature. Le rapport entre les sollicitations des bords et de la zone centrale de l'âme dépend fortement de l'espacement des fissures et de la largeur de la section.

Dans la mesure où ce rapport reste difficile à déterminer, l'utilisation du taux d'armature géométrique pour le calcul de ρ_w à la place de la surface effective s'avère utile, figure 7.25 (b). Ceci permet un calcul plus facile et une comparaison directe des résultats obtenus par différents chercheurs sans avoir besoin d'utiliser la valeur de l'enrobage et du diamètre d'armature. Il est clair qu'une largeur de section exagérée peut avoir comme résultat des taux d'armature erronés alors qu'une limite de cette valeur égale à 300 mm est proposée selon la recherche présentée.

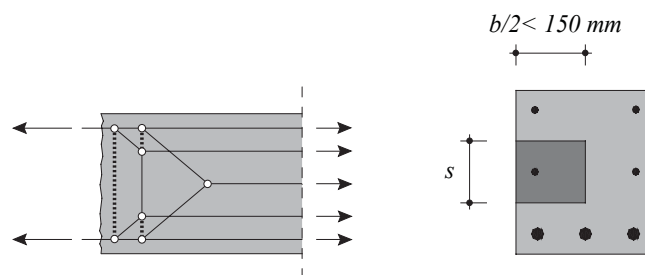


Figure 7.25: (a) *Modèle de bielles-et-tirants pour la transmission des efforts de traction dans l'armature vers l'âme après la fissuration*; (b) *surface effective pour le calcul du taux d'armature dans l'âme.*

7.4 Armature minimale de contrôle de la fissuration des zones tendues

Le taux d'armature et l'espacement des barres sont très importants pour le contrôle de la fissuration des zones tendues. Ce paragraphe a pour but de proposer des recommandations basées sur la discussion et l'analyse précédent.

7.4.1 Propositions existantes pour l'armature minimale

Depuis que le problème de la fissuration des zones tendues en-dehors de la zone des tirants a été constaté et que des premiers essais ont été effectués, plusieurs propositions sur les taux d'armature minimale ont été faites. Une des premières propositions est donnée par Colonna-Ceccaldi et Soretz qui ont proposé un taux d'armature dans l'âme de 0.5% [Colonna-Ceccaldi72].

Frantz et Breen [Frantz80] ont proposé des formules pour le taux d'armature dans l'âme qui dépendent de la hauteur tendue h_t en tenant compte de deux régimes, h_t au-dessous et au-dessus

de 1020mm (eq. (7.5) et (7.6)). Le but de cette formule est de garantir une ouverture de fissure maximale de 0.14 mm pour le tirant et de 0.20 mm pour l'âme. La largeur effective de l'âme pour laquelle les formules restent valables est de $2c + \emptyset$. La hauteur en traction est calculée comme la distance entre l'axe neutre et le tirant.

$$\rho_w = 23 \cdot 10^{-6} (h_t - 280) \quad h_t \leq 1020 \text{ mm} \quad (7.5)$$

$$\rho_w = 0.0011 + 5.9 \cdot 10^{-6} h_t \quad h_t \geq 1020 \text{ mm} \quad (7.6)$$

Leonhardt [Leonhardt78] a recommandé une armature minimale qui ne doit pas être sollicitée au-dessus de la limite d'écoulement après la fissuration d'un élément en traction pure. Par contre, dans les éléments sollicités à la flexion, voire les âmes, il a proposé une réduction de l'armature minimale du tirant selon la formule suivante:

$$\rho_{wmin} = 0.4 \frac{f_{ct}}{f_y} \quad (7.7)$$

Cette formule est valable pour les poutres avec une hauteur inférieure de 1.0 m en disposant l'armature sur une hauteur de 2/3 de la hauteur totale.

Braam [Braam90b] et Frosch [Frosch02], ont essayé dans leurs travaux de modéliser la distance et l'ouverture des fissures dans l'âme sans donner de formule directe pour le calcul du taux d'armature minimale. En effet, elle peut être déterminée par un calcul itératif en choisissant l'ouverture admissible de la fissure. Le modèle de Braam est basé sur le taux d'armature ρ_w et le diamètre d'armature \emptyset alors que le modèle de Frosch est basé sur les conclusions de Beeby selon lesquelles la distance entre la barre d'armature et la surface du béton est déterminante pour le calcul de l'ouverture de la fissure.

7.4.2 Proposition de la norme suisse SIA 262

Certaines normes comme la norme Suisse [SIA 262] admettent une armature minimale égale à f_{ct}/f_y pour éviter la rupture fragile des éléments en béton soumis à la traction. Cela signifie que l'armature après la fissuration doit être en mesure de reprendre tous les efforts dans le béton sans écoulement. Cette théorie est basée sur le comportement des tirants en béton armé, où une telle armature est également indispensable afin de répartir les fissures. La même armature est proposée comme armature minimale dans les âmes des poutres.

La figure 7.26 (a) montre le rapport entre l'ouverture moyenne des fissures dans l'âme par rapport à celle du tirant en fonction du rapport entre le taux d'armature dans l'âme et le taux d'armature minimale $\rho_{min-SIA}$ égal à f_{ct}/f_y . La figure 7.26 (b) montre le rapport des fissures qui se prolongent dans l'âme en fonction du rapport entre le taux d'armature dans l'âme et le taux d'armature minimale.

Pour les essais des poutres de Frantz et Breen avec une armature de l'âme inférieure à l'armature minimale f_{ct}/f_y , aucune défaillance fragile d'armature n'a été observée. Ceci vient du fait que le comportement à la flexion est bien différent du comportement à la traction des tirants. La flexion dans les âmes des poutres permet la redistribution des efforts et ainsi une armature minimale plus faible que celle définie pour éviter la rupture fragile des tirants peut être utilisée à condition que l'armature principale puisse reprendre ces efforts.

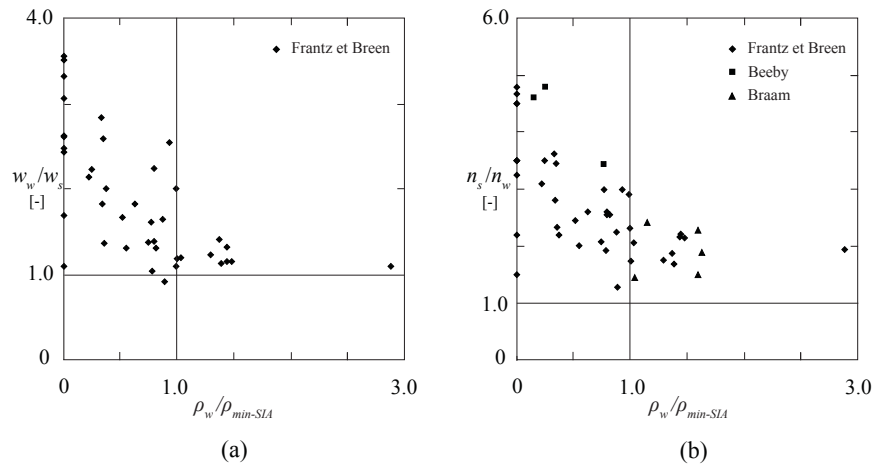


Figure 7.26: *Poutres de Frantz et Breen, $\varepsilon_s = 1.35 \cdot 10^{-3}$ dans le tirant; (a) diagramme $w_w/w_s - \rho_w/\rho_{min-SIA}$; (b) diagramme $n_s/n_w - \rho_w/\rho_{min-SIA}$.*

7.4.3 Recommandations

Limitation de l'utilisation d'armatures dans les âmes

La recherche démontre que l'utilisation d'armatures longitudinales dans les âmes n'est pas toujours justifiée, figure 7.18, et qu'il faut donner certaines limites d'utilité à cette armature. La figure 7.27 montre une tendance idéalisée du comportement des zones tendues sans armature minimale. Dans la partie gauche du diagramme, la ligne est égale à 1, car, le nombre des fissures dans l'âme ne peut pas être supérieur au nombre de fissures dans le tirant. Pour la partie droite la ligne idéalisée et les résultats d'essais effectués par différents chercheurs sont présentés.

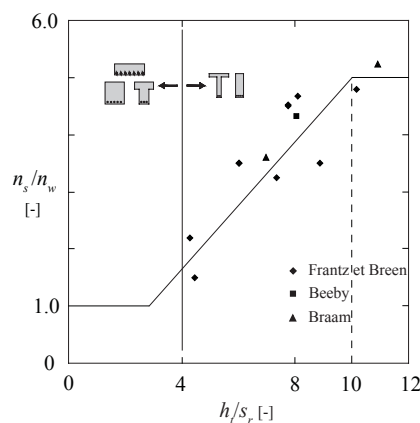


Figure 7.27: *Diagramme de la limitation de l'utilisation des armatures dans les zones tendues en-dehors de la zone des tirants.*

Le diagramme illustre le fait que pour des valeurs de h_t/s_r inférieures à 4, la valeur de n_s/n_w sera certainement en-dessous de 2.5, ce qui est pris comme une valeur limite pour l'aspect général des structures. Cette valeur vient de l'observation de l'ouverture de fissures dans l'âme par rapport à l'ouverture de fissures du tirant, figure 7.14, en permettant une ouverture légèrement plus importante dans l'âme, vu sa moindre importance. Le diagramme 7.27 démontre également

qu'il est possible de définir une limite pour laquelle l'armature minimale dans l'âme n'est pas nécessaire. Une proposition conservatrice selon la recherche présentée est donnée comme étant:

$$\rho_w = 0 \quad \text{si} \quad h_t/s_r < 4 \quad (7.8)$$

Avec la formule présentée, on admet que pour les rapports h_t/s_r inférieurs à 4 aucune armature pour le contrôle de la fissuration des zones tendues en-dehors de la zone des tirants n'est nécessaire.

Taux d'armature minimal de contrôle de la fissuration des âmes

La recherche effectuée démontre que malgré le fait que la définition d'une armature minimale égale à f_{ct}/f_y soit très pratique pour une utilisation courante, elle peut être excessive dans certaines situations. L'adaptation de cette armature s'avère donc indispensable de façon à correspondre à l'état de la fissuration globale. Une telle adaptation est déjà proposée par Leonhardt [Leonhardt78], en utilisant un multiplicateur fixe de 0.4 pour des poutres ayant une hauteur allant jusqu'à 1 m.

Un nombre suffisant de fissures qui se prolongent dans l'âme peut garantir un bon comportement à l'état limite de service et l'influence du rapport h_t/s_r sur ce sujet a déjà été démontrée dans la discussion précédente. En considérant son influence, ce rapport peut être utilisé comme multiplicateur de l'armature minimale définie pour les tirants en béton armé. De cette manière, une telle équation peut tenir compte de l'état de fissuration de l'élément afin d'obtenir une armature adéquate à chaque situation. Sur la base des résultats d'essais et sur une limitation du rapport n_s/n_w à 2.5, la formule suivante est proposée:

$$\rho_{wmin} = 0.1 \frac{h_t}{s_r} \frac{f_{ct}}{f_y} \leq \frac{f_{ct}}{f_y} \quad (7.9)$$

Cette formule modifie l'armature minimale f_{ct}/f_y par un facteur qui prend en compte la hauteur de la zone tendue en-dehors de la zone du tirant et l'état de la fissuration de ce dernier. Elle réduit l'armature nécessaire pour de petites zones tendues avec un grand espacement des fissures du tirant, et augmente ainsi l'armature nécessaire pour des zones tendues importantes lorsque l'espacement des fissures du tirant est plus réduite.

Dans le but d'appliquer cette formule pour différentes dispositions de l'armature principale, la figure 7.28 définit la zone tendue h_t pour ces situations

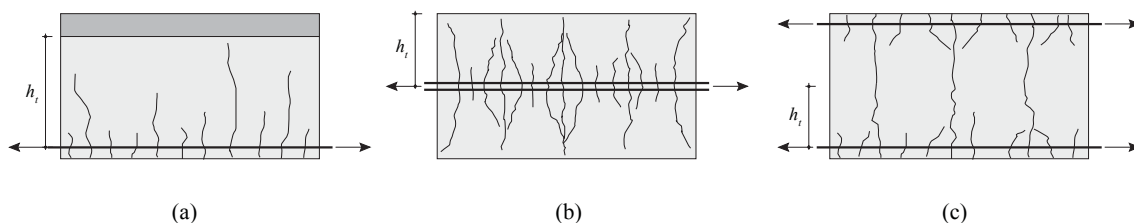


Figure 7.28: (a), (b) et (c) Définitions de la zone tendue pour différentes positions de l'armature principale.

Proposition pour l'espacement de l'armature dans les zones en traction

Les essais sur les âmes des poutres et les raisonnements théoriques montrent que le contrôle de l'espacement des armatures dans les âmes des poutres doit être effectué surtout si le taux

d'armature dans l'âme est petit. Lorsque l'armature dans l'âme est importante ($\rho_w > f_{ct}/f_y$), cette armature est capable de contrôler la fissuration dans l'âme sans l'interaction importante avec les fissures du tirant. Par contre lorsque l'armature est faible, elle doit aider la prolongation des fissures du tirant dans l'âme. En tenant compte de ces raisonnements, il est justifié de limiter l'espacement de l'armature dans l'âme en fonction de l'espacement des fissures dans le tirant (voir aussi la figure 7.19). De cette manière on peut définir cette distance comme:

$$s \leq 1.5s_r \quad \text{si} \quad \rho_w < f_{ct}/f_y \quad (7.10)$$

Un espacement inférieur à $1.5s_r$ doit assurer que l'effort dans la zone du tirant sera également transmis dans l'âme et de cette manière empêchera l'effet de convergence des fissures dans la zone du tirant.

7.4.4 Vérification de l'armature minimale proposée

L'armature minimale proposée est vérifiée par rapport aux essais de Frantz et Breen [Frantz78]. La figure 7.29 montre que le rapport n_s/n_w en fonction du rapport ρ_w/ρ_{wmin} , indique une tendance à la diminution du rapport n_s/n_w avec une augmentation d'armature dans l'âme. Pour un rapport ρ_w/ρ_{wmin} qui est égal à 1, le rapport n_s/n_w sera autour de 2.5, ce qui représente une limite supérieure pour ce rapport. Une plus grande dispersion des résultats dans cette zone est notée à cause d'un espacement variable des armatures.

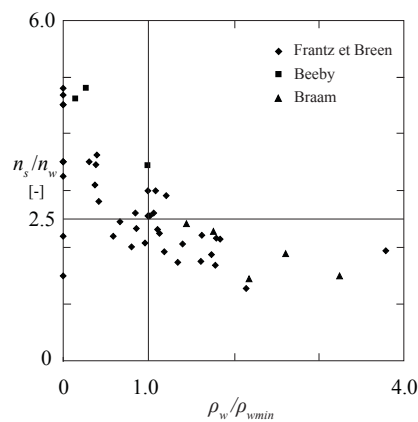


Figure 7.29: Diagramme $n_s/n_w - \rho_w/\rho_{wmin}$ pour les poutres de Frantz et Breen, $\epsilon_s = 1.35 \cdot 10^{-3}$ dans le tirant.

Graphiques de représentation d'armature minimale

Dans le but de mieux comparer l'armature minimale dans différentes situations de l'état de fissuration, une étude paramétrique a été réalisée. Les figures 7.30 (a) et (b) montrent deux diagrammes pour un taux d'armature minimale en fonction de la hauteur de la zone tendue en tenant compte d'une armature minimale pour la défaillance fragile d'un tirant. Dans les diagrammes de la figure 7.31, le taux d'armature minimale est présenté en fonction de l'espacement des fissures dans la zone du tirant. Les diagrammes ci-dessous montrent une diminution de l'armature minimale nécessaire en fonction de l'augmentation de l'espacement des fissures dans la zone du tirant.

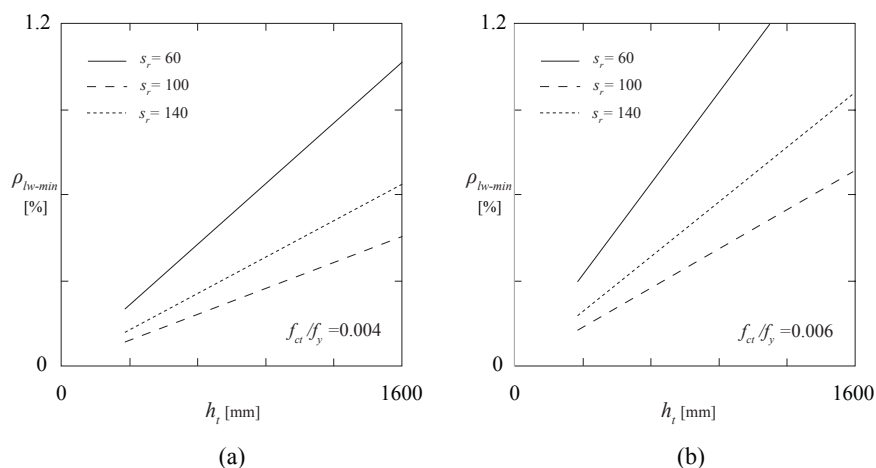


Figure 7.30: Taux d'armature minimale en fonction de la hauteur de la zone tendue.

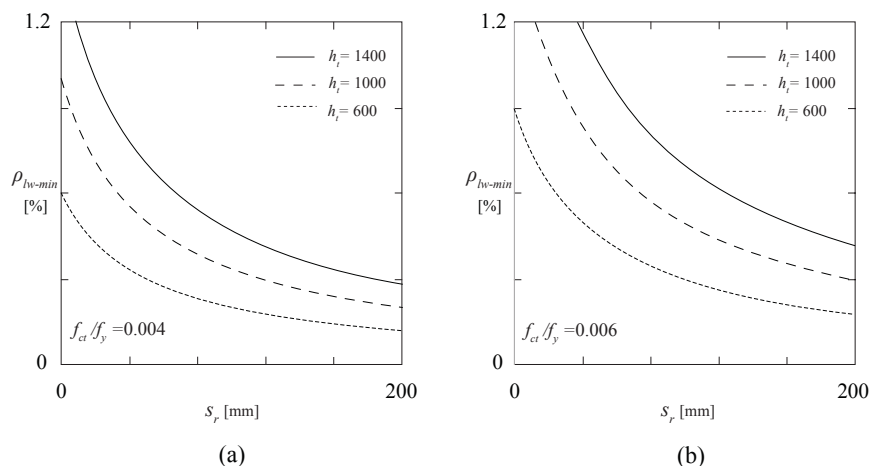


Figure 7.31: Taux d'armature minimale en fonction de l'espacement des fissures dans la zone du tirant.

7.4.5 Taux d'armature minimale simplifié

Avant d'être appliquée pour le calcul de l'armature minimale, l'équation (7.9) exige la détermination de la hauteur de la zone tendue et de la distance moyenne entre les fissures du tirant. Afin d'avoir un dimensionnement plus pratique, une version simplifiée de cette équation peut être utilisée. L'espacement moyen des fissures du tirant peut être estimé par l'équation (7.1) en utilisant la hauteur effective du tirant basée sur la hauteur de la poutre, figure 7.4 (a) et le taux d'armature du tirant égal à $\rho = A_s / bh_T$. La hauteur de la zone tendue peut être estimée comme $h_t = 0.75h$. En introduisant ces valeurs on obtient:

$$\begin{aligned} \rho_{wmin} &= 2.0 \frac{A_s}{\emptyset b} \frac{f_{ct}}{f_y}, h \leq 600 \text{ mm } (h_t \leq 450 \text{ mm}) \\ \rho_{wmin} &= 2.4 \frac{A_s}{\emptyset b} \frac{f_{ct}}{f_y}, h > 600 \text{ mm } (h_t > 450 \text{ mm}) \end{aligned} \tag{7.11}$$

où \varnothing et A_s sont respectivement: le diamètre et la quantité d'armature du tirant (armature principale). La définition de l'armature minimale permet de cette façon de déterminer l'armature minimale de manière simple, non seulement pour les âmes des poutres mais aussi pour des zones similaires définies par les champs de contraintes. De toute manière, avant de procéder à la vérification de l'armature minimale pour ces zones, le contrôle des zones du tirant s'avère nécessaire.

Exemple d'application

Dans le paragraphe qui suit, un exemple pratique proposé par Leonhardt [Leonhardt77] et réétudié par Braam [Braam90] est analysé. La géométrie de la section et les propriétés des matériaux sont présentés à la figure 7.32. Selon la norme SIA 262, la résistance à la traction correspondante f_{cm} est égale à 2.2 MPa. Afin de tenir compte de l'influence de la largeur de la section sur la résistance à la traction, celle-ci a été multipliée par le coefficient $1/1+0.5b$ qui tient compte de la largeur de la section b . La résistance à la traction de dimensionnement de l'élément ($f_{ct,d}$) vaut donc 1.87 MPa.

En employant l'équation (7.11) on obtient:

$$\rho_{wmin} = 2.4 \frac{A_s}{\varnothing b} \frac{f_{ct,d}}{f_{y,d}} = 2.4 \frac{4025.2}{22.5 \cdot 350} \frac{1.87}{400} = 0.573\%$$

ce qui correspond à une distribution de 2×5 barres $\varnothing 12$ tout les 125 mm ($\rho_w = 0.006$). Cette armature est supérieure à l'armature minimale contre la défaillance fragile d'un tirant en béton armé, ce qui signifie que l'armature minimale proposée a pris en compte la quantité d'armature du tirant ainsi que la hauteur tendue de la section.

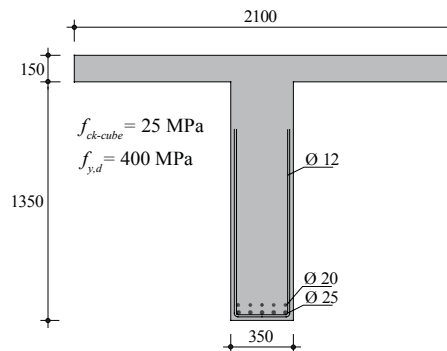


Figure 7.32: Géométrie de la section.

La figure 7.33 présente la disposition de l'armature proposée par différents chercheurs ainsi que les normes ainsi que la disposition de l'armature selon l'équation (7.11). L'exemple montre que la norme SIA 262 est la moins conservatrice parmi ces différentes propositions.

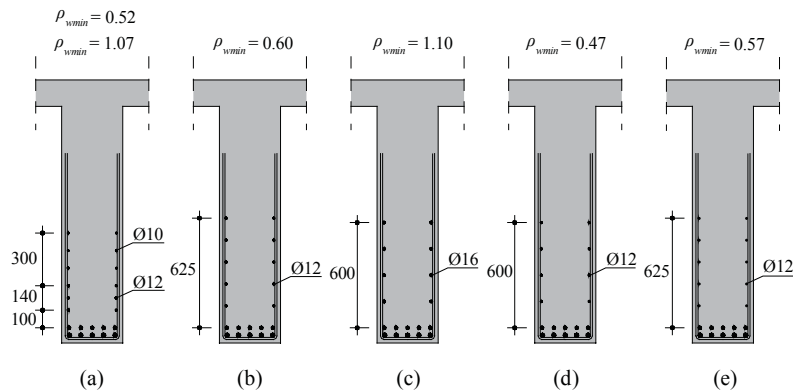


Figure 7.33: Armature dans l'âme (a) selon Leonhardt [Leonhardt78]; (b) selon Braam [Braam90]; (c) selon CEB [CEB81][CEB85]; (d) selon SIA 262 [SIA 262]; (e) selon l'équation (7.11).

7.4.6 Conclusions

Une fois que le modèle bielles-et-tirants est sélectionné, il est nécessaire de déterminer l'armature minimale pour le contrôle de la fissuration dans le but d'obtenir un comportement satisfaisant de la structure. Dans ce chapitre, l'armature de contrôle de la fissuration a été traitée en mettant l'accent sur l'armature dans les zones tendues. L'objectif de cette armature est de maintenir partout une ouverture des fissures similaire à celles du tirant. La recherche a montré qu'une prolongation d'un nombre suffisant de fissures dans la zone, en-dehors de la zone du tirant, peut garantir que cette ouverture restera satisfaisante. Les essais effectués sur les âmes des poutres ont prouvé que le nombre de fissures qui se prolongent dépend fortement du rapport de la hauteur en traction de l'âme h_t et de la distance des fissures dans la zone du tirant s_r .

Cette recherche a également pu démontrer que certaines poutres n'ont pas besoin d'armature dans l'âme. Grâce au rapport h_t/s_r une limitation $h_t/s_r < 4$ est proposée, pour cette dernière aucune armature ne sera nécessaire pour le contrôle de la fissuration. Par la suite l'armature minimale d'un tirant a été analysée et une adaptation de cette armature pour les âmes des poutres a été proposée, en tenant compte de l'état de la fissuration de la poutre déterminé par le coefficient h_t/s_r .

Une fois que l'armature minimale est choisie, il est nécessaire de garantir qu'aucun effet de convergence de fissures ne risque de se développer. La recherche a proposé qu'une limitation de l'espacement des armatures avoisinant $1.5s_r$ dans l'âme permet d'empêcher l'apparition de cet effet.

8 Conclusions

Le libre choix par l'ingénieur du comportement des structures en béton armé qui a été introduit par le développement de la théorie de la plasticité a eu pour conséquence que très souvent, pour une structure donnée, différentes solutions soient proposées par différents ingénieurs. Ceci est également valable pour la méthode des champs de contraintes. Cette diversité des topologies conduit à différents comportements des structures, certains non optimaux et certains dangereux. Cette liberté de choix mais aussi les contraintes qui l'accompagnent a souvent mené au retour aux méthodes élastiques pour le dimensionnement des structures.

Pour la tâche des ingénieurs, mais aussi pour former de nouveaux praticiens à la méthode des champs de contraintes et des bielles-et-tirants, il a été fait appel aux méthodes d'optimisation pour obtenir des solutions optimales d'une manière plus automatique. Par contre très souvent la modélisation du comportement du béton armé était éloignée de son comportement réel et les solutions obtenues étaient fréquemment liées au comportement élastique.

La génération et l'optimisation des modèles de bielles-et-tirants et de champs de contraintes ont été traitées dans cette thèse avec le but d'obtenir des résultats plus réalistes. Des considérations liées à l'état limite de service ont été introduites pour le développement des modèles de bielles-et-tirants et l'optimisation des champs de contraintes est faite en modélisant le comportement réel des structures en béton armé. Les solutions obtenues concordent avec les solutions classiques, ce qui sert de base à l'utilisation de ces méthodes pour l'analyse des nouveaux cas pratiques. Les résultats obtenus ont été élargis par des considérations dans le cas de modification ou de création manuelle d'un modèle en tenant compte du comportement structural réel.

Le comportement réel des structures observé lors d'essais en laboratoire rapportés dans la littérature a été comparé aux champs de contraintes continus et discontinus. Différents éléments comportant une discontinuité géométrique ont été analysés et un angle de cadre a été testé en laboratoire. L'aptitude au service des structures a été traitée et mise en évidence par l'étude d'une armature minimale à disposer dans les zones en traction, en-dehors des zones des tirants pour lesquels une armature minimale a été proposée.

Cette thèse contribue à la diffusion de la méthode des champs de contraintes, avec une contribution scientifique mais aussi également pratique et didactique. C'est dans ce but qu'une plateforme (i-concrete.epfl.ch) de promotion de l'utilisation des champs de contraintes a été créée, au sein de laquelle certains des algorithmes présentés ont été intégrés par des champs de contraintes continus.

8.1 Conclusions de la recherche

La recherche a mis en évidence les points suivants:

- Une méthode pour la génération des modèles de bielles-et-tirants basée sur la statique graphique a été généralisée et, sur la base d'exemples pratiques, il a été démontré qu'elle mène à des modèles satisfaisants en suivant des règles simples de construction basées sur le comportement structural du béton armé. L'influence de la rigidité des

éléments et leur comportement au service pour une telle génération a été mis en évidence.

- La thèse a démontré que la méthode qui considère un mécanisme licite avec un champ de contraintes admissible dans la zone de développement d'un mécanisme permet de surmonter les problèmes (redistribution des efforts, armature minimale) qui se présentent lors de la recherche d'un modèle de champs de contraintes pour une structure existante.
- Suivant les critères d'optimisation utilisés, des solutions optimales bien différentes sont obtenues. Dans le cadre de l'optimisation de la topologie des modèles de bielles-et-tirants et de champs de contraintes, le critère de l'énergie de déformation minimale se montre le plus adapté. Pour l'optimisation du comportement de modèles déjà choisis, d'autres critères considérant l'état limite de service doivent être employés, tout en considérant la disposition et les diamètres réels des barres d'armature.
- Il a été remarqué que les structures se comportent non seulement en accord avec le modèle optimal mais aussi avec d'autres modèles proches de la solution optimale. Un algorithme pour la génération de modèles de bielles-et-tirants qui respectent la compatibilité des déformations et qui minimisent l'énergie de déformation du modèle initial permet la sélection de ces modèles. Il a été montré qu'un tel modèle peut être transformé en un modèle de champs de contraintes discrets sur la base des critères géométriques et d'une optimisation différentiable.
- L'optimisation des champs de contraintes continus selon le critère de l'énergie de déformation minimale est applicable en suivant la procédure proposée qui respecte la compatibilité des déformations. L'algorithme proposé intègre de cette manière les deux approches pour le développement des modèles de bielles-et-tirants et de champs de contraintes, celle du treillis initial et celle par éléments finis non-linéaires.
- L'applicabilité de l'analyse des structures par des champs de contraintes discontinus et continus a été démontrée par l'analyse d'essais en laboratoire rapportés dans la littérature ainsi que pour les structures en béton léger, sur la base d'un test en laboratoire sur un angle de cadre.
- La multiplicité des réductions de la résistance du béton à cause notamment de la fragilité du béton et des déformations transversales a été confirmée ainsi que l'influence de la présence des armatures si une rupture hors du plan est considérée.
- L'aptitude au service des structures analysées par les champs de contraintes peut être analysée par l'identification des zones de fissuration, quelques-unes des plus importantes entre eux sont les zones fortement tendues. Le comportement de ces zones et des zones tendues en-dehors de la zone des tirants a été étudié. Il en a été conclu que le pourcentage de fissures qui se propagent dans des zones tendues hors des tirants est important pour avoir un comportement satisfaisant et que ce pourcentage est influencé par le rapport entre la hauteur de la zone tendue et le nombre de fissures dans le tirant. Une armature minimale pour ces zones qui prend en compte ce rapport a été proposée.

8.2 Recherches futures

Les points suivants mériteraient une étude complémentaire:

- Optimisation du comportement des structures en béton armé en tenant compte de leur comportement réel et de la disposition possible, nombre et diamètre, des barres d'armature.
- Développement des approches semi-automatiques pour la génération des modèles de bielles-et-tirants destinés aux ingénieurs avec un certain niveau d'expérience.
- Possibilité d'utilisation de la discrétisation de la structure par l'approche du treillis, qui rendrait possible le changement de la position des nœuds du treillis initial. Ceci devrait permettre une diminution considérable du nombre de barres nécessaires pour la discrétisation de la structure et devrait rendre possible la génération de modèles avec des formes funiculaires.
- Application des champs de contraintes continus à la modélisation des dalles avec un modèle sandwich et de l'algorithme d'optimisation proposé afin de diminuer la quantité d'armature nécessaire dans les dalles.
- L'intégration des champs de contraintes continus pour des dalles et pour des voiles enfin d'analyser les structures avec une disposition 3D.
- Implémentation des algorithmes proposés dans l'enseignement et dans la pratique.
- Définition d'un critère de rupture du béton basé sur la déformation longitudinale de l'armature qui prend en considération une rupture par l'éclatement de l'enrobage en combinaison avec un critère de rupture basé sur la déformation transversale.
- Armature minimale nécessaire pour les zones en compression des structures en béton armé analysées par la méthode des champs de contraintes.

Références bibliographiques

AASHTO, AASHTO LRFD Bridge Design Specifications, Third Edition, Washington, USA, 2004, 1450 pp.

ACI 318-05, Building Code Requirements for Structural Concrete, American Concrete Institute ACI, USA, 2005.

Ali, M.A., “Automatic Generation of Truss Models for the Optimal Design of Reinforced Concrete Structures,” *PhD Dissertation*, Cornell University, USA, 1997, 195 pp.

Ali, M.A., and White, R.N., “Automatic Generation of Truss Model for Optimal Design of Reinforced Concrete Structures,” *ACI Structural Journal*, Vol. 98, No. 4, Jul.–Aug. 2001, pp. 431-442.

Alshegeir, A., and Ramirez, J., “Computer Graphics in Detailing Strut-Tie Models,” *Journal of Computing in Civil Engineering*, ASCE, Vol. 6, No. 2, 1992, pp. 220-232.

Alvarez, M., and Marti, P., “Versuche zum Verbundverhalten von Bewehrungsstahl bei plastischen Verformungen,” Institut für Baustatik und Konstruktion, ETH Zürich, *IBK Bericht* Nr. 222, Birkhäuser Verlag, Basel, Switzerland, 1996, 135 pp.

Anderheggen, E., and Schlaich, M., “Computer-Aided Design of Reinforced Concrete Structures Using the Truss Model Approach,” *Computer Aided Analysis and Design of Concrete Structures*, N. Bicanic and H. Mang, Proceedings of SCI-C 1990 *Second International Conference*, Zell am See, Austria, Pineridge Press, Swansea, UK, 539-550

Anderheggen, E.; Despot, Z.; Steffen, P.N.; and Tabatabai, S.M.R., “Computer-Aided Dimensioning of Reinforced Concrete Wall and Flat Slab Structures,” *Structural Engineering International*, IABSE, Vol. 1, 1994, pp. 17-22.

André, H.M.O., “Toronto/Kajima Study on Scale Effects in Reinforced Concrete Elements,” *PhD Thesis*, University of Toronto, Department of Civil Engineering, Toronto, Canada, 1987, 267 pp.

Beeby, A.W., “An Investigation of Cracking on the Side Faces of Beams,” *Technical Report*, Cement and Concrete Association, No. 42.466, London, UK, 1971, 12 pp.

Belarbi, A., “Stress-Strain Relationship of Reinforced Concrete in biaxial tension-compression,” *PhD Thesis*, University of Houston, The Faculty of the Department of Civil Engineering, USA, 1991, 471 pp.

Belarbi, A., and Hsu, T.T.C., “Constitutive Laws of Softened Concrete in Biaxial Tension-Compression,” *ACI Structural Journal*, Vol. 92, No. 5, Sept.–Oct. 1995, pp. 562-573.

Bierlaire, M., *Introduction à l'optimisation différentiable*, Polycopié, EPFL, Lausanne, Switzerland, 2005, 518 pp.

Biondini, F.; Bontempi, F.; and Malerba, P.G., “Ricerca di Modelli Strut-and-Tie Mediante Programmazione Lineare,” *Studi e Ricerche*, Vol. 17, 1996, pp. 121-156.

- Braam, C.R.**, “Control of Crack Width in Deep Reinforced Concrete Beams,” *PhD Thesis*, Delft University of Technology, Delft, Netherlands, 1990, 108 pp.
- Braam, C.R.**, “The Behaviour of Deep Reinforced Concrete Beams,” *Technical Report*, Delft University of Technology, Delft, Netherlands, 1990, 201 pp.
- Breña, S. F., and Morrison, M. C.**, “Factor Affecting Strength of Elements Designed Using Strut-and-Tie Models,” *ACI Structural Journal*, Vol. 104, No. 3, May.– Jun. 2007, pp. 267-277.
- British Standard, BS 5400-4:** 1990- *Steel, Concrete and Composite Bridges – Part 4*, Code of Practice for design of concrete bridges, Third Edition, London, UK, 1990, 80 pp.
- Broyden, C.G.**, “A class of methods for solving nonlinear simultaneous equations,” *Mathematics of computations* 19, 1965, pp. 577-593.
- CEB, Fissuration**, CEB(Comité euro-international du béton), State of the Art Report, *Bulletin d'information* No. 61, Paris, France, 1967, pp. 22-23.
- Chitnuyanondh, L.**, “Shear Failure of Concrete I-beams with Prestressing Ducts in the Web,” PhD Thesis, Queen’s University, Kingston, Canada, 1976, 245 pp.
- Chen, B.; Hagenberger, M.J.; Breen J.E.**, “Evaluation of Strut-and-Tie Modeling Applied to Dapped Beam with Opening,” *ACI Structural Journal*, Vol. 99, No. 4, Jul.– Aug. 2002, pp. 445-450.
- Clarke, J.L., and Taylor, H.P.J.**, Web Crushing – A Review of Research, *Technical Report*, Cement and concrete association, Vol. 42-509, London, UK, 1975, 16 pp.
- Collins, M.P.**, “Stress-Strain Characteristics of Diagonally Cracked Concrete,” IABSE Colloquium Plasticity in Reinforced Concrete, *Final Report*, IABSE Vol. 29, Copenhagen, 1979, pp. 27-34.
- Collins, M.P., and Porasz, A.**, “Shear Design for High-Strength Concrete,” Comité Euro-International du Béton, *CEB Bulletin d'information*, No. 193, Dec. 1989, pp. 77-83.
- Collins, M.P.; Mitchell, D.; Adebar, P.; and Vecchio, F.J.**, “A General Shear Design Method,” *ACI Structural Journal*, Vol. 93, No. 1, Jan.–Feb. 1996, pp. 33-45.
- Colonna-Ceccaldi, J., and Soretz, S.**, “Large Reinforced-Concrete Beams with a Main Reinforcement consisting of Two thick Bars,” *Technical Report*, TOR-ISTEG Steel Corporation, Vol. 46, Luxembourg, 1972, 29 pp.
- Cremona, L.**, *Elemente des graphischen Calculs*, Quandt & Händel, Leipzig, Germany, 1875, 105 pp.
- Culmann, K.**, *Die graphische Statik*, Meyer und Zeller, Zürich, Switzerland, 1964.
- Dantzig, G.B.**, *Linear Programming and Extensions*, Princeton University Press, Princeton, USA, 1963, 625 pp.
- Dennis, J.E., and Schnabel, R.B.**, *Numerical methods for unconstrained optimization and nonlinear equations*, Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, US, 1996, 394 pp.

- Despot, Z.**, “Methode der Finiten Elemente und Plastizitätstheorie zur Bemessung von Stahlbetonscheiben,” Institut für Baustatik und Konstruktion, ETH Zürich, *IBK Bericht* Nr. 215, Birkhäuser Verlag Basel, Boston, Stuttgart, Switzerland, 1995.
- Dorn, S. W.; Gomory, E. R.; and Greenberger, J. H.**, “Automatic Design of Optimal Structures,” *Journal de Mécanique*, Vol.3, No. 1, 1964, pp. 25-52.
- Drucker, D.C.**, “On Structural Concrete and the Theorems of Limit Analysis,” *Publications*, International Association for Bridge and Structural Engineering, V.21, Zürich, Switzerland, 1961, pp. 49-59.
- Drucker, D.C., and Chen, W.F.**, “On the use of simple discontinuous fields to bound limit loads,” *Engineering Plasticity*, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1968, pp. 129-145.
- Eibl, J., and Neuroth, U.**, “Untersuchungen zur Druckfestigkeit von bewehrtem Beton bei gleichzeitig wirkendem Querkzug (On the Compressive Strength of Reinforced Concrete Subjected to Lateral Tension,” *Forschungsbericht* T2024, Institut für Massivbau und Baustofftechnologie, Universität Karlsruhe, 1988, 136 pp.
- Eurocode 2**, *Design of Concrete Structures- Part 1-1: General Rules and Rules for Buildings*, CEN, EN 1992-1-1, Brussels; EU, 2004, 225 pp.
- Fellmann, W., and Menn, C.**, “Zugversuche an Stahlbetonscheiben,” Institut für Baustatik und Konstruktion, ETH Zürich, *IBK-Bericht* Nr. 7604-1, Zürich, Switzerland, 1981, 40 pp.
- Fernández Ruiz, M.**, “Influencia de la armadura transversal en la separación de fisuras,” *Hormigón y acero*, No. 236, Madrid, Spain, 2005, pp. 35-42.
- Fernández Ruiz, M.; Hars, E.; and Muttoni, A.**, “Résistance à l'effort tranchant des poutres précontraintes à âmes minces,” *Rapport OFROU*, No. 606, Bern, Switzerland, 2006, pp. 68.
- Fernández Ruiz, M., and Muttoni, A.**, “On Development of Suitable Stress Fields for Structural Concrete,” *ACI Structural Journal*, Vol. 104, No. 4, Jul. –Aug. 2007, pp. 495-502.
- Fernández Ruiz, M.; Muttoni, A.; and Gambarova, P.**, “Relationship between Nonlinear Creep and Cracking of Concrete under Uniaxial Compression,” *Journal of Advanced Concrete Technology*, Vol. 5, No. 3, 2007, pp. 1-11.
- Fernández Ruiz, M., and Muttoni, A.**, “Shear Strength of Thin-Webbed Post-Tensioned Beams,” *ACI Structural Journal*, Vol. 105, No. 3, May –Jun. 2008, pp. 308-317.
- Frantz, G.C., and Breen J.E.**, “Control of Cracking on the Side Faces of Large Reinforced Concrete Beams,” Centre for Highway Research, The University of Texas at Austin, Technical Report 198-1F, Austin, USA, 1978, 262 pp.
- Frantz, G.C., and Breen J.E.**, “Cracking of the Side Faces of Large Reinforced Concrete Beams,” *ACI Structural Journal*, Vol. 77, No. 5, Sept.–Oct. 1980, pp. 307-313.
- Frosch, R.J.**, “Modeling and Control of Side Face Beam Cracking,” *ACI Structural Journal*, Vol. 99, No. 3, May.–Jun. 2002, pp. 376-385.
- Ganz, H.R.; Ahmad, A.; and Hitz, H.**, “Load Transfer through Concrete Sections with Grouted Ducts,” VSL International, *Bericht* No. 242e, Bern, Switzerland, 1992, 20 pp.

- Gaynor, R.D.**, “Effect of Horizontal Reinforcing Steel on the Strength of Molded Cylinders,” *ACI Journal*, Vol. 62, No. 7, July 1965, pp. 837-840.
- Grob, J., and Thürlimann, B.**, “Ultimate Strength and Design of Reinforced Concrete Beams under Bending and Shear,” *IABSE Mémoires*, Vol. 36, Zürich, Switzerland, 1976, pp. 105-120.
- Hajdin, R.**, “Computerunterstützte Berechnung von Stahlbetonscheiben mit Spannungsfeldern,” Institut für Baustatik und Konstruktion, ETH Zürich, *IBK Bericht* Nr. 175, Birkhäuser Verlag Basel, Boston, Switzerland, 1990.
- Hars, E.**, “Zum Querkraftwiderstand von Stahl und Spannbetonträgern mit Dünnen Stegen,” *PhD Thesis*, EPFL, Lausanne, 2006, 146 pp.
- Hemp, W.S.**, *Optimum Structures*, Clarendon Press, Oxford, UK, 1973, 123 pp.
- Kani, M.W.; Huggins, M.W.; and Wittkop, R.R.**, “Kani on Shear in the Reinforced Concrete,” Department of Civil Engineering, University of Toronto, Toronto, Canada, 1979, 97 pp.
- Kaufmann, W.**, “Strength and Deformations of Structural Concrete Subjected to In-Plane Shear and Normal Forces,” Institut für Baustatik und Konstruktion, ETH Zürich, *IBK Bericht* Nr. 234, Birkhäuser Verlag, Basel, Switzerland, 1998, 147 pp.
- Kirschner, U., and Collins, M.P.**, “Investigating the Behaviour of Reinforced Concrete Shell Elements,” University of Toronto, Department of Civil Engineering, *Publication* No. 86-09, Toronto, Sept. 1986, 210 pp.
- Kollegger, J., and Mehlhorn, G.**, “Experimentelle Untersuchungen zur Bestimmung der Druckfestigkeit des gerissenen Stahlbetons bei einer Querkraftbeanspruchung (Experimental Investigations for the Determination of the Compressive strength of Crack Reinforced Concrete Subjected to Lateral Tension,” Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, *Heft* 413, 1990, 132 pp.
- Kostic, N.**, “Computer-based Development of Stress Fields,” 6th *International PhD Symposium in Civil Engineering*, Zürich, Switzerland, 2006, 7 pp.
- Kostic, N.; Fernández Ruiz, M.; and Muttoni, A.**, “Test of a Frame Corner of MPU Heavy Lifter –Comparison between Test Results and Continuous Stress Fields,” *Rapport*, EPFL-ENAC-Is-Beton, Lausanne, Switzerland, 2008; 25 pp.
- Kotsovos, M.D., Bobrowski, J.**, “Design Model for Structural Concrete Based on the Concept of the Compressive Force Path,” *ACI Structural Journal*, Vol. 90, No. 1, Jan.– Feb. 1993, pp. 12-20.
- Kuchma, D.; Yindeesuk, S.; Nagle, T.; Hart, J.; and Lee, H.H.**, “Experimental Validation of Strut-and-Tie Method for Complex Regions,” *ACI Structural Journal*, Vol. 105, No. 5, Sept.– Oct. 2008, pp. 578-589.
- Kumar, P.**, “Optimal Force Transmission in Reinforced Concrete Deep Beams,” *Computers&Structures*, Vol.8, 1978, pp. 223-229.
- Kupfer, H.**, “Erweiterung der Mörsch’schen Fachwerkanalogie mit Hilfe des Prinzips vom Minimum der Formänderungsarbeit,” Comité Euro-International du Béton (CEB), *Bulletin d’Information* 40, Paris, France, 1964, pp.44-57

- Kupfer, H.; Hilsdorf, H.; and Rüschi, H.**, “Behavior of Concrete under Biaxial Stresses,” *Journal of the American Concrete Institute*, Proceedings, Vol. 66, No. 8, 1969, pp. 656-666.
- Lampert, P.**, “Bruchwiderstand von Stahlbetonbalken unter Torsion und Biegung,” Institut für Baustatik und Konstruktion, ETH Zürich, *IBK Bericht* Nr. 26, Birkhäuser Verlag Basel und Stuttgart, Switzerland, 1970, 189 pp.
- Leonhardt, F., and Walther R.**, “Schubversuche an einfeldrigen Stahlbetonbalken mit und ohne Schubbewehrung,” Heft 151, Wilhelm Ernst&Sohn, Berlin, Deutschland, 1962, 67 pp.
- Leonhardt, F.**, “Abminderung der Tragfähigkeit des Betons infolge stabförmiger rechtwinklig zur Druckrichtung angeordnete Einlagen,” Festschrift Rüschi, Berlin, Germany, 1969, pp. 71-78.
- Leonhardt, F., and Mönning, E.**, *Sonderfälle der Bemessung im Stahlbetonbau, Vorlesungen über Massivbau*, Zweiter Teil, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1975, 174 pp.
- Leonhardt, F.**, *Nachweis der Gebrauchsfähigkeit, Vorlesungen über Massivbau*, Teil 4, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1977, 194 pp.
- Leonhardt, F.**, *Grundlagen des Massivbrückenbaus, Vorlesungen über Massivbau*, Teil 6, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1979, 227 pp.
- Ley, M. T.; Riding K. A.; Widianto; Bae, S.; and Breen, J. E.**, “Experimental Verification of Strut-and-Tie Model Design Method,” *ACI Structural Journal*, Vol. 104, No. 6, Nov.– Dec. 2007, pp. 749-755.
- Liang, Q.Q.; Xie, Y.M.; and Steven, G.P.**, “Topology Optimization of Strut-and-Tie Models in Reinforced Concrete Structures Using an Evolutionary Procedure,” *ACI Structural Journal*, Vol. 97, No. 2, 2000, pp. 322-330.
- Liang, Q.Q.; Brian, U.; and Steven, G.P.**, “Performance-Based Optimization for Strut-and-Tie Modeling of Structural Concrete,” *Journal of Structural Engineering*, ASCE, Vol. 128, No. 6, 2002, pp. 815-823.
- Marti, P.**, “Zur Plastischen Berechnung von Stahlbeton (Limit Analysis of Structural Concrete),” Institut für Baustatik und Konstruktion, ETH Zürich, *IBK Bericht* Nr. 104, Birkhäuser Verlag Basel, Switzerland, 1980, 176 pp.
- Marti, P.**, “Basic Tools of Reinforced Concrete Beam Design,” *ACI Journal*, Vol. 82, No.1, Jan.-Feb. 1985, pp. 45-56.
- Marti, P., and Meyboom, J.**, “Response of Prestressed Concrete Elements to In-Plane Shear Forces,” *ACI Structural Journal*, Vol. 89, No. 5, Sept.–Oct. 1992, pp. 503-514.
- Marti, P.; Alvarez, M.; and Sigrist, V.**, “Rissbildung und Mindestbewehrung,” *Schweizer Ingenieur und Architect*, No. 41, Switzerland, 1997, pp. 832-838
- Mitchell, D.W., and Marzouk, H.**, “Bond characteristics of High-Strength Lightweight concrete,” *ACI Structural Journal*, Vol. 104, No. 1, Jan.–Feb. 2007, pp. 22-29.
- Mörsch, E.**, *Der Eisenbetonbau – seine Theorie und Anwendung* (Reinforced Concrete Construction –Theory and Application), 3. Auflage, Verlag Konrad Wittwer, Stuttgart, Germany, 1908, 376 pp.

Mörsch, E., *Der Eisenbetonbau – seine Theorie und Anwendung* (Reinforced Concrete Construction –Theory and Application), 5. Auflage, Verlag Konrad Wittwer, Stuttgart, Germany, 1922, 460 pp.

Mörsch, E., “Über die Berechnung der Gelenkquader,” *Beton u. Eisen* 23, Germany, 1924, pp. 156-161.

Müller, P., “Plastische Berechnung von Stahlbetonscheiben und balken (Plastic Analysis of Reinforced Concrete Disk and Beams),” Institut für Baustatik und Konstruktion, ETH Zürich, *IBK Bericht* Nr. 83, Birkhäuser Verlag Basel, Switzerland, 1978, 160 pp.

Muttoni, A.; Schwartz, J.; and Thürlimann, B., “Bemessen und Konstruieren von Stahlbetontragwerken mit Spannungsfeldern,” Institut für Baustatik und Konstruktion, ETH Zürich, Switzerland, 1987.

Muttoni, A., “Die Anwendbarkeit der Plastizitätstheorie in der Bemessung von Stahlbeton (Applicability of the Theory of Plasticity to the Design of Structural Concrete),” Institut für Baustatik und Konstruktion, ETH Zürich, *IBK Bericht* Nr. 176, Birkhäuser Verlag, Basel, Switzerland, 1990, 158 pp.

Muttoni, A., and Schwartz, J., “Behavior of Beams and Punching in Slabs without Shear Reinforcement,” *IABSE Colloquium*, Vol. 62, Stuttgart, Germany, 1991, pp. 703-708.

Muttoni, A.; Schwartz, J.; and Thürlimann, B., *Design of Concrete Structures with Stress Fields*, Birkhäuser, Basel, Boston and Berlin, Switzerland, 1997, 145 pp.

Muttoni A., *Eléments sans armature d’effort tranchant*, Documentation SIA, D 0182 Introduction à la norme SIA 262, Zürich, Switzerland, 2003, pp. 47-55.

Muttoni, A., *L’art des structures*, Presses polytechniques et universitaires romandes, , Lausanne, Switzerland, 2004, 271 pp.

Muttoni, A., *Structures en béton*, Polycopié, EPFL-ENAC-Is-béton, Lausanne, Switzerland, 2004.

Muttoni, A.; Burdet, O.; Hars, E., “Effect of Duct Type on Shear Strength of Thin Webs,” *ACI Structural Journal*, Vol. 103, No. 5, 2006, pp. 729-735.

Muttoni, A., and Fernández Ruiz, M., “Champs de contraintes pour le béton structural,” *Tracés*, No. 5, 2007, pp. 17-21.

Muttoni, A.; Kostic, N.; and Fernández Ruiz, M., Discussion of paper “Factor Affecting Strength of Elements Designed Using Strut-and-Tie Models,” *ACI Structural Journal*, Vol. 104-S36, 2008, pp. 233-235.

Muttoni, A., and Fernández Ruiz, M., “Shear Strength of Members without Transverse Reinforcement as Function of Critical Shear Crack Width,” *ACI Structural Journal*, Vol. 105, No. 2, Jul.– Aug. 2008, pp. 163-172.

Muttoni, A.; Fernández Ruiz, M.; Kostic, N.; and Guidotti, R., “Test of a Frame Corner of MPU Heavy Lifter,” Rapport d’essai, EPFL-ENAC-Is-Beton, Lausanne, Switzerland, 2008; 33 pp.

- Nielsen, M.P.**, “On the Strength of Reinforced Concrete Discs,” *Acta Polytechnica Scandinavica, Civil Engineering and Building Construction Series*, No. 70, Copenhagen, Denmark, 1971, 261 pp.
- Nielsen, M.P., and Braestrup, M.W.**, “Shear strength of prestressed concrete beams without web reinforcement,” *Magazine of Concrete Research*, Vol. 104, UK, 1978, pp. 119-128.
- Nielsen, M.P.**, *Limit analysis and Concrete Plasticity*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1984, 420 pp.
- Ohmori, N.; Takahashi, T.; Tsubota, H.; Inoue, N.; Kurihara, K.; and Watanabe, S.**, “Experimental Studies on Non-linear Behaviours of Reinforced Concrete Panels Subjected to Cyclic In-Plane Shear (in Japanese),” *Journal of Structural and Construction Engineering*, Transactions of the Architecture Institute of Japan, No. 403, 1989, pp. 105-118.
- Pang, X.**, “Constitutive Laws of Reinforced Concrete in Shear,” *PhD Thesis*, University of Houston, The Faculty of the Department of Civil Engineering, USA, 1991, 403 pp.
- Pang, X., and Hsu, T.T.C.**, “Behavior of Reinforced Concrete Membrane Elements in Shear,” *ACI Structural Journal*, Vol. 92, No. 6, Nov.–Dec. 1995, pp. 665-679.
- Prager, W.**, “On a Problem of Optimum Design,” *Non Homogeneity in Elasticity and Plasticity*, Proceedings of the IUTAM Symposium, Warsaw, Poland, 1958, pp. 125-132
- Pearl J.**, *Heuristics: Intelligent search strategies for computer problem solving*, Addison-Wesley, Massachusetts, USA, 1984, 382 pp.
- Raphael, B., and Smith, I.F.C.**, *Computer-Aided Engineering*, Wiley, Chichester, UK, 2003, 306 pp.
- Rausch, E.**, “Berechnung des Eisenbetons gegen Verdrehung und Abscheren (Design of Reinforced Concrete for Torsion and Shear),” Julius Springer, Berlin, Germany, 1929, 50 pp.
- Rezai-Jorabi, H., and Regan, P.E.**, “Shear Resistance of Prestressed Concrete Beams with Inclined Tendons,” *The Structural Engineer*, Vol. 64B, No. 3, London, UK, 1986, pp. 63-75.
- Reineck, K., and ACI Committee 445**, “Strut-and-Tie Models,” *ACI Special Publication*, Vol. 208, 2002, 242 pp.
- Ritter, W.**, “Die Bauweise Hennebique (The Hennebique Construction Method),” *Schweizerische Bauzeitung*, Vol. 17, Switzerland, 1899, pp. 41-43, 49-52 et 59-61.
- Robinson, J.R., and Demorieux, J.M.**, “Essaie de Traction-Compression sur Modeles d’ame de poutre en béton armé,” *Institute de Recherches Appliquées du Béton Armé*, Paris, France, 1968.
- Sargious, M.**, “Beitrag zur Ermittlung der Hauptzugspannungen am Endauflager vorgespannter Betonbalken,” TH Stuttgart, Stuttgart, Germany, 1960, 198 pp.
- Schiessl, P., and Wölfel, E.**, “Konstruktionsregeln zur Beschränkung der Rissbreite,” *Deutscher Ausschuss für Stahlbeton*, Vol. 81, No. 1, Germany, 1986, pp. 8-15.
- Schlaich, J., and Weischede D.**, “Ein praktisches Verfahren zum methodischen Bemessen und Konstruieren im Stahlbetonbau (A Practical Method for Methodical Design and Building in

Reinforced Concrete,” Comité Euro-International du Béton (CEB), *Bulletin d'Information* No. 150, Paris, 1982, 163 pp.

Schlaich, J.; Schäfer, K.; and Jennewein, M., “Toward a Consistent Design of Structural Concrete,” *PCI Journal*, Vol. 32, No.3, May-Jun.1987, pp. 74-150.

Schlaich, J., and Schäfer, K., “The Design of Structural Concrete,” IABSE Workshop Report, New Delhi, India, 1993, 129 pp.

Schlaich, M., “Computerunterstützte Bemessung von Stahlbetonscheiben mit Fachwerkmodellen,” Institut für Informatik, ETH Zürich, *Bericht* Nr. 1, Switzerland, 1989.

Schlaich, M., and Anagnostou G., “Stress Fields for Nodes of Strut-and-Tie Models,” *Journal of Structural Engineering*, ASCE, Vol. 116, No. 1, 1990, pp. 13-23.

Schwartz, J., “Stress Field Design of Reinforced Concrete Members with Circular Cross Sections,” *Structural Engineering International*, IABSE, Vol. 1, 2002, pp. 36-39.

SIA 262, Construction en béton, Société Suisse des Ingénieurs et des Architectes, Norme Suisse SN505 262, Suisse, 2003, 94 pp.

Souza, R.A., Discussion of peper “Factor Affecting Strength of Elements Designed Using Strut-and-Tie Models,” *ACI Structural Journal*, Vol. 104-S36, pp. 232-233.

Spall, J.C., *Introduction to stochastic search and optimization*, Wiley, Hoboken, USA, 2003, 595 pp.

Stevens, N.J.; Uzumeri, S.M.; and Collins, M.P., “Reinforced Concrete Subjected to Reversed Cyclic Shear-Experiments and Constitutive Model,” *ACI Structural Journal*, Vol. 88, No. 2, Mar.–Apr. 1991, pp. 135-146.

Sumi, K., “Mechanical Characteristics of Concrete in Reinforced Concrete Panel (in Japanese),” *Summaries of Technical Papers of Annual Meeting*, Architecture Institute of Japan, Structures II, Vol. C, Japan, 1987, pp. 365-368.

Thürlimann, B.; Marti, P.; Pralong, J.; Ritz, P.; and Zimmerli, B., “Anwendung der Plastizitätstheorie auf Stahlbeton (Application of the Theory of Plasticity to Structural Concrete),” *Unterlagen zum Fortbildungskurs*, Institut für Baustatik und Konstruktion, ETH Zürich, Switzerland, 1983, 252 pp.

Vecchio, F.J., and Collins, M.P., “The Response of Reinforced Concrete to In-plane Shear and Normal Stresses,” University of Toronto, Department of Civil Engineering, *Publication* No. 82-03, Toronto, Canada, 1982, 322 pp.

Vecchio, F.J., and Collins, M.P., “The Modified Compression Field Theory for Reinforced Concrete Elements Subjected to Shear,” *ACI Structural Journal*, Vol. 83, No. 2, Mar. –Apr. 1986, pp. 219-231.

Vecchio, F.J., and Collins, M.P., “Reinforced Concrete Elements in Shear and Tension,” University of Toronto, Department of Civil Engineering, *Publication* No. 87-02, Toronto, Canada, 1987, 332 pp.

Vecchio, F.J., and Chan, C.C.L., “Reinforced Concrete Membrane Elements,” *Journal of Structural Engineering*, ASCE, Vol. 116, No. 3, 1990, pp. 72-78.

- Vecchio, F.J.; Collins, M.P.; and Aspiotis, J.**, “High-Strength Concrete Elements Subjected to Shear,” *ACI Structural Journal*, Vol. 91, No. 4, Jul.–Aug. 1994, pp. 423-433.
- Xie, Y., and Steven, G.**, “Optimal Design of Multiple Load Case Structures Using an Evolutionary Procedure,” *Engineering Computations*, Vol. 11, 1994, pp. 295-302.
- Yamaguchi, T., and Naganuma, K.**, “Pure Shear Loading Tests of Reinforced Concrete Panels (in Japanese),” *Summaries of Technical Papers of Annual Meeting*, Architecture Institute of Japan, Structures II, Vol. C, Japan, 1988, pp. 545-548.
- Yang, K., and Ashour A. F.**, “Effectiveness of Web Reinforcement around Openings in Continuous Concrete Deep Beams,” *ACI Structural Journal*, Vol. 105, No. 4, Jul.–Aug. 2008, pp. 414-424.
- Yun, Y.M.**, “Computer Graphics for Nonlinear Strut-and-Tie Model Approach,” *Journal of Computing in Civil Engineering*, ASCE, Vol. 14, No. 2, 2000, pp. 127-133.
- Zhang, L.**, “Constitutive Laws of Reinforced Concrete in Shear,” *PhD Thesis*, University of Houston, The Faculty of the Department of Civil Engineering, USA, 1995, 303 pp.
- Zhang, L.**, and Hsu, T.T.C., “Behavior and Analysis of 100 Mpa Concrete Membrane Elements in Shear,” *ACI Structural Journal*, Vol. 124, No. 1, Jan.–Feb. 1998, pp. 24-34.
- Zhang, N., and Tan, K.**, “Size effect in RC deep beams: Experimental investigation and STM verification,” *Engineering Structures*, Vol. 29, 2007, pp. 3241-3254.
- Zhu, R.H.**, Wanichakorn, W.; Hsu, T.T.C.; and Vogel, J., “Crack Width Prediction Using Compatibility-Aided Strut-and-Tie Model,” *ACI Structural Journal*, Vol. 100, No. 4, Jul.– Aug. 2003, pp. 413-421.

Annexes

- A Implémentation de la génération des champs de contraintes**
- B Analyse des panneaux avec des champs de contraintes continus**
- C Analyse de la fissuration des zones tendues**
- D Test of frame corner of MPU Heavy lifter – Comparison between test results and continuous stress fields**

A.1 Implémentation de la génération des champs de contraintes

Une partie de cette thèse qui concerne la génération automatique des champs de contraintes est développée en parallèle avec le projet i-concrete (<http://i-concrete.epfl.ch>), une plateforme de support pour les cours et l'échange des connaissances ainsi que pour la compréhension du comportement global des structures en béton armé. Cette dernière concerne la possibilité d'explorer le comportement des structures en béton armé par le biais des champs de contraintes continus développés par Fernández Ruiz et Muttoni [Fernández07].

L'implémentation considère les trois applets avec une destination différente. L'applet i-Mesh développé par Burdet et Kumar (<http://i-concrete.epfl.ch>) est un préprocesseur pour les éléments finis linéaires et non-linéaires. L'applet j-Conc développé par Fernández Ruiz (<http://i-concrete.epfl.ch>) est une implémentation des champs de contraintes continus. Le dernier applet i-Opt, est une version d'applet j-Conc qui implémente l'algorithme d'optimisation développé dans le cadre de cette thèse et présenté dans le chapitre 5.

A.1.1 Applet i-Mesh

L'applet i-Mesh est le préprocesseur pour le calcul des éléments finis linéaires et non-linéaires conçu pour faciliter la génération de leur input. L'applet permet la définition de la géométrie globale de la structure ainsi que la position des armatures, des charges et des appuis. Etant donné que c'est aussi un préprocesseur pour les éléments finis non-linéaires, elle permet non seulement la définition de la propriété géométrique des sections du béton et de l'armature mais aussi la définition de leurs résistances respectives.

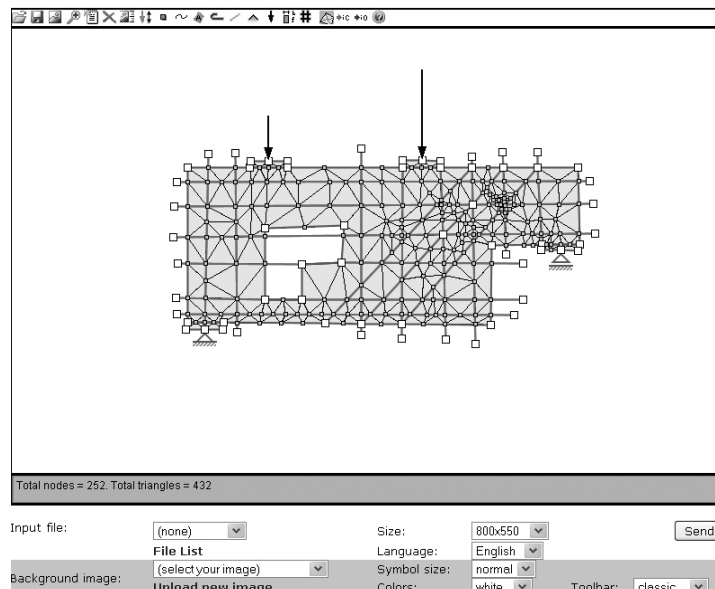


Figure A.1.1: Applet i-Mesh et la structure analysée;

Le plus grand outil de cet applet est la triangulation automatique de la structure qui respecte tous ses bords et les armatures, en permettant de cette manière la préparation des données de la structure dans une manière très automatisée. L'applet contient aussi une liaison directe avec les

applets j-Conc et i-Opt et peut aussi leur faire appel. La figure A.1.1 présente l'applet et une structure analysée.

A.1.2 Applet j-Conc

L'Applet j-Conc représentant l'implémentation des champs de contraintes continus, est réalisé par Fernández Ruiz. Dans sa version web, il peut utiliser directement l'input de l'applet i-Mesh ce qui rend son utilisation plus efficace. Etant donné que le grand intérêt de la plateforme i-concrete est sa valeur didactique, cet applet permet non seulement l'analyse des structures mais aussi l'exploration des différentes topologies d'armatures et l'investigation de leurs influences sur le comportement structurel.

L'applet permet la visualisation générale d'input avec la possibilité d'identification du nombre d'élément et des propriétés des matériaux. En ce qui concerne les résultats, il permet la visualisation de la déformée, des contraintes du béton et de l'armature ainsi que de leurs déformations. Les inputs et les résultats pour une analyse plus détaillée, peuvent être obtenus par les fichiers texte, automatiquement créés. La figure A.1.2 représente l'applet jConc avec des résultats obtenus pour la structure présentée à la figure A.1.1.

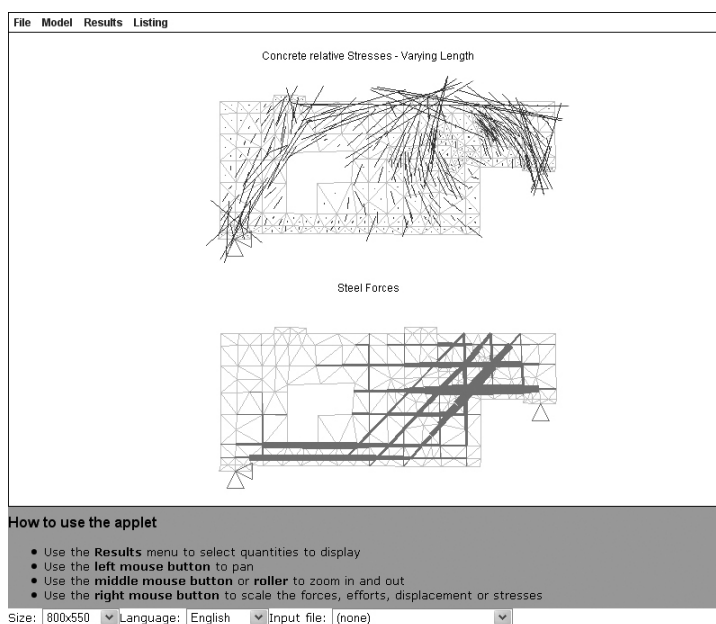


Figure A.1.2: Applet j-Conc et les résultats de la structure analysée;

A.1.3 Applet i-Opt

L'Applet i-Opt représente la version de l'applet j-Conc en adoptant toutes ces fonctions d'output mais en utilisant l'algorithme d'optimisation présenté dans le chapitre 5 de cette thèse. L'applet permet la détermination des armatures les plus efficaces pour le dimensionnement de la structure. Etant donné que la valeur limite de la résistance d'armature est utilisée lors de l'optimisation, la quantité d'armature nécessaire pour la charge donnée est directement obtenue par cette analyse.

Une éventuelle rupture de la structure pour la charge choisie lors de l'optimisation est évitée en adaptant le comportement élastique des matériaux (béton sans résistance à la traction). Une fois la topologie d'armature choisie, un dernier contrôle du comportement avec l'armature minimale est possible avec l'utilisation de j-Conc.

Le nombre d'itération lors de l'optimisation est limité à 15, pour des questions de temps de calcul. Ce nombre d'itérations est plus que suffisant pour l'identification des armatures les plus efficaces, mais en cas de nécessité il peut être changé. La figure A.1.3 représente l'applet i-Opt et le champ de contraintes obtenu pour la structure analysée.

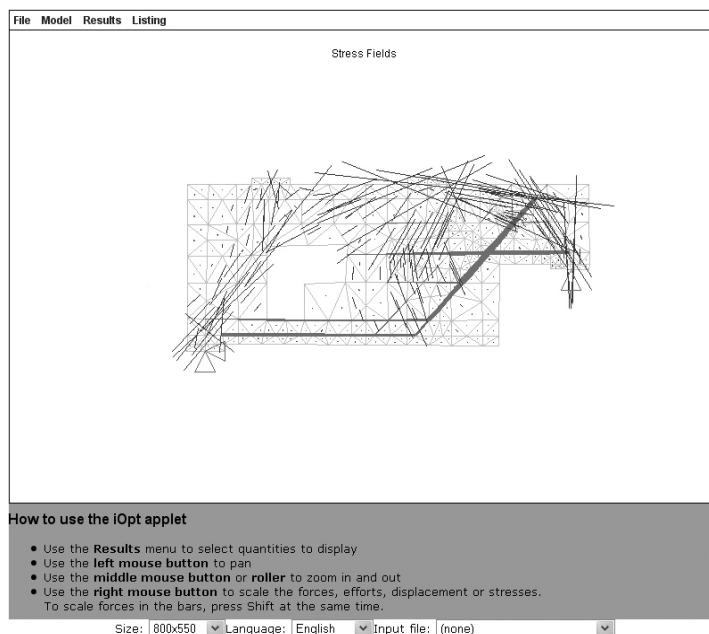


Figure A.1.3: Applet i-Opt et le résultat de l'algorithme d'optimisation;

B.1 Analyse des panneaux avec des champs de contraintes continus

Le but de cette annexe est de rapporter des données des panneaux étudiés ainsi que des résultats obtenus par l'analyse avec des champs de contraintes continus, tous présentés dans le chapitre 6 de cette thèse. Etant donné que la rupture par éclatement d'enrobage est discutée, certaines figures qui représentent une rupture de ce type sont données par la suite.

B.1.1 Panneaux analysés

Dans la partie du chapitre 6 de cette thèse la réduction de la résistance du béton sur les déformations latérales est investiguée. Une base des résultats d'essais des panneaux est analysée, en éliminant les essais avec une rupture prématurée.

Le tableau B.1.1 présente les essais qui sont analysés en appliquant les expressions de réduction de la résistance du béton 6.8 et 6.9 ainsi que les résultats d'analyse plastique en appliquant les coefficients de réduction basés sur la topologie de charges. Le tableau B.1.2 présente les résultats d'essais soumis à la low-cycle fatigue.

La liste des essais analysés est listée ci-dessous:

1. Vecchio et Collins [Vecchio82]
2. Vecchio et al. [Vecchio94]
3. Vecchio et Chan [Vecchio90]
4. André [André87]
5. Kollegger et Mehlhorn [Kollegger90]
6. Yamaguchi et al. [Yamaguchi88]
7. Sumi [Sumi87]
8. Ohmori et al. [Ohmori89]
9. Collins et Porasz [Collins89], Kirchner et Collins [Kirschner86], Marti et Meyboom [Marti92]
10. Pang et Hsu [Pang92]
11. Zhang et Hsu [Zhang95]

	<i>Spec.</i>	<i>a = h</i>	<i>t</i>	<i>f_c</i>	<i>ρ_x</i>	<i>ρ_y</i>	<i>f_{yx}</i>	<i>f_{yz}</i>	<i>τ_{exp}</i>	<i>σ_x</i>	<i>σ_y</i>	<i>τ_{exp}/τ_{calc}</i>		
												[<i>-</i>]	[mm]	[mm]
1	PV3	890	70	26.6	0.483	0.48	662	662	3.07	-	-	0.94	0.94	0.96
	PV9	890	70	11.6	1.785	1.79	455	455	3.74	-	-	0.81	0.74	1.07
	PV10	890	70	14.5	1.785	1.00	276	276	3.97	-	-	1.07	1.07	1.37
	PV11	890	70	15.6	1.785	1.31	235	235	3.56	-	-	0.97	0.97	1.14
	PV12	890	70	16.0	1.785	0.12	469	269	3.13	-	-	1.18	1.06	1.25
	PV16	890	70	21.7	0.74	0.74	255	255	2.14	-	-	1.10	1.09	1.13
	PV18	890	70	19.5	1.785	0.32	431	412	3.04	-	-	1.04	0.95	1.05
	PV19	890	70	19.0	1.785	0.71	458	299	3.95	-	-	1.04	0.95	1.16
	PV20	890	70	19.6	1.785	0.89	460	297	4.26	-	-	0.98	0.91	1.15
	PV21	890	70	19.5	1.785	1.30	458	302	5.03	-	-	0.95	0.90	0.91
	PV22	890	70	19.6	1.785	1.52	458	420	6.07	-	-	0.93	0.90	1.04
	PV23	890	70	20.5	1.785	1.79	518	518	8.87	-3.46	-3.46	1.14	1.23	1.08
	PV25	890	70	19.2	1.785	1.79	466	466	9.12	-6.29	-6.29	1.10	1.16	1.58
	PV27	890	70	20.5	1.785	1.79	442	442	6.35	-	-	0.92	0.90	1.03
	PV28	890	70	19.0	1.785	1.79	483	483	5.80	1.86	1.86	0.98	0.90	1.02
2	PHS2	890	70	66.10	3.23	0.41	606	521	6.66	-	-	1.25	1.16	1.07
	PHS3	890	70	58.40	3.23	0.82	606	521	8.19	-	-	1.05	1.00	1.04
	PHS4	890	70	68.50	3.23	0.82	606	521	6.91	1.73	1.73	1.12	1.06	1.02
	PHS5	890	70	52.10	3.23	0.41	606	521	4.81	1.20	1.20	1.32	1.22	1.00
	PHS6	890	70	49.70	3.23	0.41	606	521	9.89	-2.47	-2.47	1.35	1.28	1.02
	PHS7	890	70	53.60	3.23	0.82	606	521	10.26	-2.57	-2.57	1.03	1.00	0.87
	PHS8	890	70	55.90	3.23	1.24	606	521	10.84	-	-	1.13	1.09	1.25
	PHS9	890	70	56.00	3.23	0.41	606	521	9.37	-2.34	-2.34	1.25	1.17	0.91
	PHS10	890	70	51.40	3.23	1.24	606	521	8.58	2.15	2.15	1.11	1.07	0.99
	PA1	890	70	49.90	1.65	0.82	522	522	6.34	-	-	1.03	1.01	1.04
PA2	890	70	43.00	1.65	0.82	522	522	6.22	-	-	1.01	1.00	1.02	
3	PC1A	890	70	27.9	1.65	0.83	500	500	5.61	-	-	0.95	0.95	1.04
	PC4	890	70	24.9	1.65	0.83	260	260	4.84	-1.89	-1.89	0.93	0.91	0.69
	PC7	890	70	28.7	1.65	0.83	390	390	3.65	1.17	1.17	1.04	1.02	1.08
4	TP1	890	70	22.1	2.04	1.02	450	450	5.75	-	-	0.97	0.92	1.30
	TP1A	890	70	25.6	2.04	1.02	450	450	5.75	-	-	0.93	0.89	1.13
	KP1	2510	140	25.2	2.04	1.02	430	430	5.62	-	-	0.92	0.90	1.12
	TP2	890	70	23.1	2.04	1.02	450	450	2.63	7.89	-	0.97	0.96	-
	KP2	2510	140	24.3	2.04	1.02	430	430	2.58	7.74	-	1.00	0.96	-
	TP4	890	70	23.2	2.04	2.04	450	450	8.12	-	-	1.07	1.05	1.17
	TP4A	890	70	24.9	2.04	2.04	450	450	8.72	-	-	1.08	1.09	1.17
KP4	2510	140	23.0	2.04	2.04	430	430	6.9	-	-	0.91	0.90	1.00	
5	PK01	890	70	19.6	1.06	1.06	660	660	12.09	12.09	12.09	1.21	1.39	2.06
	PK02	890	70	19.4	1.06	1.06	660	660	9.12	-5.84	-5.84	1.22	1.24	1.57
	PK04	890	70	20.2	1.06	1.06	660	660	8.91	-3.49	-3.49	1.35	1.35	1.47
	PK06	890	70	19.9	1.06	1.06	660	660	10.14	10.14	10.14	1.02	1.17	1.70
	PK07	890	70	20.9	1.06	1.06	660	660	9.04	-3.54	-3.54	1.33	1.28	1.44
	PK08	890	70	19.0	1.06	1.06	660	660	9.96	-9.96	-9.96	1.05	1.18	1.75
6	S-21	1200	200	19.0	4.28	4.28	378	378	6.52	-	-	0.85	0.87	1.14
	S-31	1200	200	30.2	4.28	4.28	378	378	8.34	-	-	0.75	0.84	0.92
	S-32	1200	200	30.8	3.38	3.38	381	381	8.76	-	-	0.85	0.91	0.96
	S-33	1200	200	31.4	2.58	2.58	392	392	8.17	-	-	0.83	0.87	0.88
	S-34	1200	200	34.6	1.91	1.91	418	418	7.35	-	-	0.91	0.91	0.74
	S-35	1200	200	34.6	1.33	1.33	370	370	5.66	-	-	1.12	1.10	1.15
	S-41	1200	200	38.7	4.28	4.28	409	409	11.87	-	-	0.95	1.05	1.12
	S-42	1200	200	38.7	4.28	4.28	409	409	12.75	-	-	1.02	1.12	1.20
	S-43	1200	200	41.0	4.28	4.28	409	409	11.87	-	-	0.93	1.01	1.07
	S-44	1200	200	41.0	4.28	4.28	409	409	12.16	-	-	0.96	1.04	1.10
	S-61	1200	200	60.7	4.28	4.28	409	409	15.40	-	-	1.00	1.05	1.07
	S-62	1200	200	60.7	4.28	4.28	409	409	15.60	-	-	1.01	1.06	1.09
S-81	1200	200	79.7	4.28	4.28	409	409	16.19	-	-	0.93	0.95	0.94	
S-82	1200	200	79.7	4.28	4.28	409	409	16.28	-	-	0.93	0.96	0.95	
7	A-1	600	80	22.7	1.06	1.06	401	401	4.54	-	-	1.05	1.03	1.07
	A-2	600	80	21.7	1.47	1.47	401	401	5.75	-	-	0.97	0.97	0.88
	A-3	600	80	21.1	2	2.00	401	401	7.15	-	-	1.01	0.99	1.13
8	SM10	2510	140	31.5	1.02	1.02	398	398	4.47	-	-	0.99	0.93	1.10
	SM14	2510	140	31.4	1.36	1.36	398	398	5.61	-	-	0.97	0.94	1.04
	SM20	2510	140	28.1	2.04	2.04	398	398	7.23	-	-	0.88	0.87	0.86
9	SE1	1524	285	42.5	2.92	0.98	492	479	7.10	-	-	0.95	0.93	0.97
	SE2	1524	285	25.9	4.5	2.93	492	492	9.39	-	-	0.86	0.92	-

9	SE6	1524	285	40.0	2.92	0.33	492	479	3.67	-	-	1.02	0.95	0.83
	SE11	1524	285	70.8	2.93	0.98	478	451	7.24	-	-	0.91	0.90	0.83
	SE12	1524	285	75.9	2.94	0.98	450	451	7.05	-	-	1.05	1.05	0.97
	SE13	1524	285	80.5	6.93	1.92	509	480	13.19	-	-	0.91	0.89	1.06
	SE14	1524	285	60.4	4.48	4.76	509	480	15.57	-	-	1.16	1.23	1.27
	PP1	1524	285	27.0	1.942	0.65	479	480	4.86	-	-	1.03	1.00	1.01
10	A2	1397	178	41.2	1.19	1.19	462	462	5.64	-	-	0.95	0.95	0.97
	A3	1397	178	41.6	1.79	1.79	446	446	8.25	-	-	0.93	0.92	0.69
	A4	1397	178	42.4	2.98	2.98	469	469	11.98	-	-	0.94	0.99	1.00
	B1	1397	178	45.2	1.19	0.60	462	444	3.89	-	-	1.02	1.02	1.04
	B2	1397	178	44.0	1.79	1.19	446	462	6.72	-	-	0.91	0.91	0.92
	B3	1397	178	44.9	1.79	0.60	446	444	4.7	-	-	0.92	0.92	0.95
	B4	1397	178	44.7	2.98	0.60	469	444	5.53	-	-	0.90	0.85	0.86
	B5	1397	178	42.8	2.98	1.19	469	462	6.87	-	-	1.04	0.85	0.98
B6	1397	178	42.9	2.98	1.79	469	446	10.09	-	-	0.91	0.90	1.20	
11	VA1	1397	178	95.1	1.2	1.20	445	445	5.44	-	-	1.13	1.13	1.15
	VA2	1397	178	98.2	2.39	2.39	409	409	9.83	-	-	0.99	0.99	1.00
	VA3	1397	178	94.6	3.59	3.59	455	455	16.36	-	-	0.92	0.92	0.78
	VA4	1397	203	103.1	5.24	5.24	470	470	20.93	-	-	1.02	1.05	1.05
	VB1	1397	178	98.2	2.39	1.20	409	445	7.27	-	-	1.03	1.03	1.04
	VB2	1397	178	97.6	3.59	1.20	455	445	9.48	-	-	0.96	0.96	0.98
	VB3	1397	178	102.3	5.98	1.20	470	445	10.55	-	-	0.92	0.88	0.90
	VB4	1397	178	96.9	1.8	0.60	455	445	4.77	-	-	1.02	1.01	1.04
											Moyenne	1.01	1.01	1.08
											CoV	0.118	0.128	0.201

*L'influence de η_D n'est pas pris en compte

Tableau B.1.1: Essais des panneaux analysés avec des champs de contraintes continus ainsi que avec l'analyse plastique avec la réduction de la résistance du béton;

Panneaux avec low-cycle fatigue

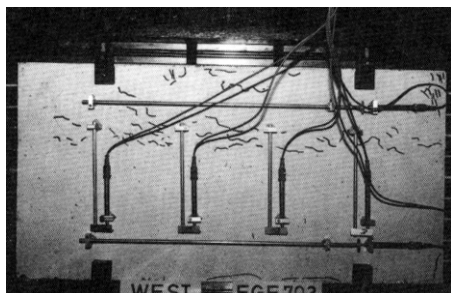
	Spec.	$a = h$	t	f_c	ρ_x	ρ_y	f_{yx}	f_{yz}	τ_{exp}	σ_x	σ_y	τ_{exp}/τ_{calc}		
												(6.8)	(6.9)	plas.
1	PV4	890	70	26.6	1.06	1.06	242	242	2.89	-	-	1.02	-	-
	PV6	890	70	29.8	1.79	1.79	266	266	4.55	-	-	0.91	-	-
8	SR05	2510	140	30.4	0.51	0.51	398	398	2.57	-	-	1.00	-	-
	SR10	2510	140	36.6	1.02	1.02	398	398	4.02	-	-	0.87	-	-
	SR14	2510	140	29.3	1.36	1.36	398	398	4.70	-	-	0.82	-	-
	SR17	2510	140	28.7	1.70	1.70	398	398	6.23	-	-	0.89	-	-
	SR20	2510	140	31.2	2.04	2.04	398	398	6.82	-	-	0.83	-	-
												Moyenne	0.91	-
											CoV	0.088	-	-

*L'influence de η_D n'est pas pris en compte

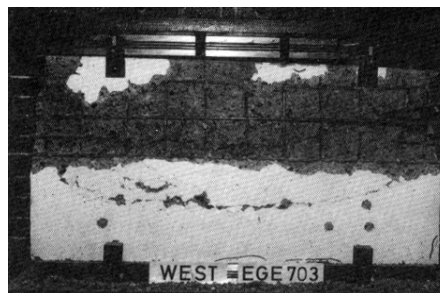
Tableau B.1.2: Essais des panneaux soumis à la low-cycle fatigue analysés avec des champs de contraintes continus;

B.1.2 Certains essais avec une rupture par éclatement d'enrobage

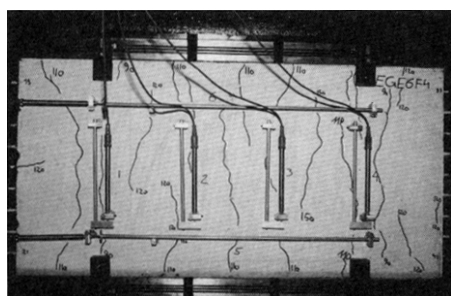
L'échantillon d'essai EGE703 de Kollegger et Mehlhorn [Kollegger90] a été sollicité avec la compression uni-axiale sans application d'efforts transversaux. Il présente la rupture par éclatement d'enrobage où l'influence de l'armature a déclenché une telle rupture. L'échantillon d'essai EGE6F4 a été sollicité avec la compression uni-axiale et la traction transversale. Les armatures ont été inclinées par rapport à la direction des efforts de compression.



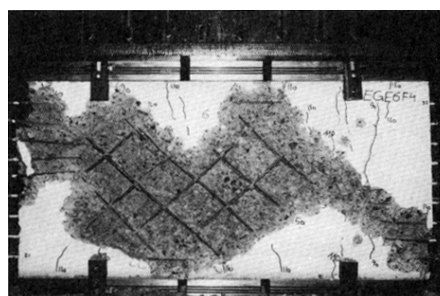
EGE703



EGE703



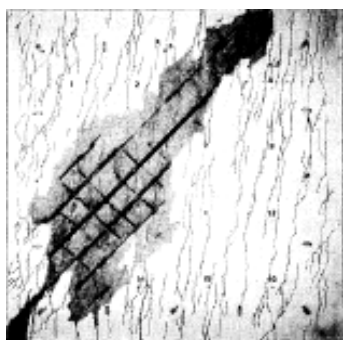
EGE6F4



EGE6F4

Figure B.1.1: Essais de Kollegger et Mehlhorn [Kollegger90] avec rupture par éclatement de l'enrobage;

Deux échantillons de Marti et Meyboom [Marti89] ont été conçus avec la pré-compression et ont été sollicités à l'effort tranchant, figure B.1.2.



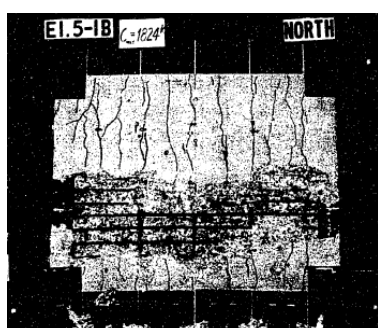
PP2



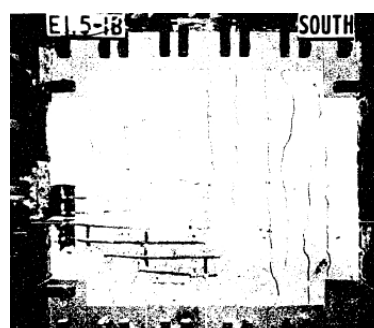
PP3

Figure B.1.2: Résultats d'essais de Marti et Meyboom [Marti89];

Belarbi et Hsu ont présenté des essais sur des panneaux avec la compression uni-axiale et la traction transversale. L'armature a été placée perpendiculairement à la direction des efforts de compression, figure B.1.3.



E1.5-1B - north



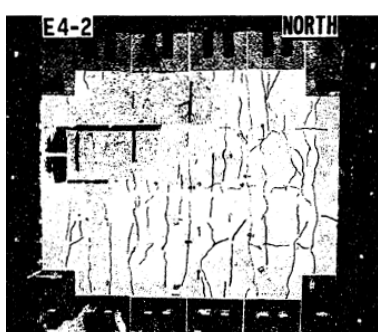
E1.5-1B - south



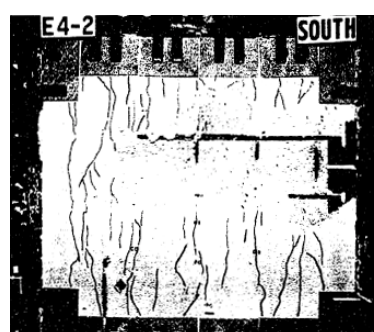
E2-1B - north



E2-1B - south



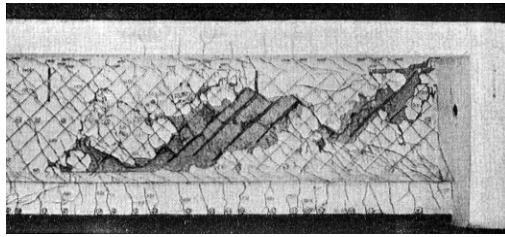
E4-2 - north



E4-2 - south

Figure B.1.3: *Essais de Belarbi et Hsu [Belarbi91], exemples des panneaux avec rupture par éclatement de l'enrobage;*

La rupture par éclatement d'enrobage pour une poutre réelle [Leonhardt62] est présentée à la figure B.1.4. L'armature a été placée perpendiculairement à la direction des contraintes de compression du béton et par la suite à l'éclatement une rupture du béton s'est produite.



T2

Figure B.1.4: *Résultat d'essai de la poutre T2* [Leonhardt62];

C.1 Analyse de la fissuration des zones tendues

Cette annexe présente la géométrie générale des poutres utilisées pour l'étude de la fissuration des zones tendues. Les essais de Beeby, de Frantz et Breen et de Braam sont considérés pour cette analyse. De plus, les données générales sur la géométrie de ces essais ainsi que sur l'armature utilisée sont présentées par la suite.

Beeby [Beeby71] a effectué des tests sur cinq poutres en T, armées à la flexion simple avec deux barres $\text{Ø}22$. Les deux premières poutres sont composées sans armature longitudinale de l'âme et respectivement pour les autres trois poutres, deux barres $\text{Ø}6$, quatre barres $\text{Ø}6$ et quatre barres $\text{Ø}10$ sont placées dans les âmes. Les poutres sont soumises à la flexion simple.

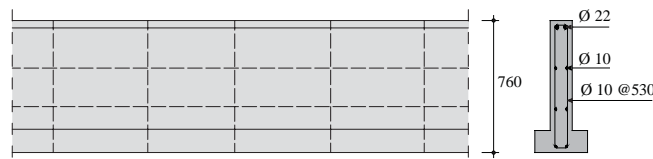


Figure C.1.1: Poutre numero 5 de Beeby [Beeby71];

Frantz et Breen [Frantz78] ont présenté la plus grande série d'essais sur la fissuration des âmes des poutres. Ils ont effectué des essais sur 44 poutres en T, avec des hauteurs totales entre 618 mm et 1235 mm et des largeurs d'âme entre 197 mm et 432 mm. La géométrie d'un essai typique est donnée dans la figure C.1.2. Les fissures sont mesurées des deux côtés des âmes dans une zone centrale de 1220 mm à l'exception de la série BC avec la zone centrale égale à 1829 mm.

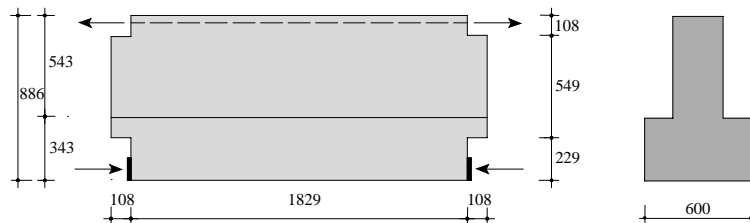


Figure C.1.2: Géométrie d'un essai typique de Frantz et Breen [Frantz78];

Braam [Braam90] a effectué des essais sur 15 poutres en béton armé dans le but de vérifier le modèle de fissuration. La hauteur des poutres a été 800 mm avec la largeur d'âme de 150 mm et de 300 mm respectivement, figure C.1.3. Les poutres sont soumises à la flexion simple avec quatre points test. La zone centrale de 2 m a été mesurée des deux côtés sur 9 niveaux de mesure.

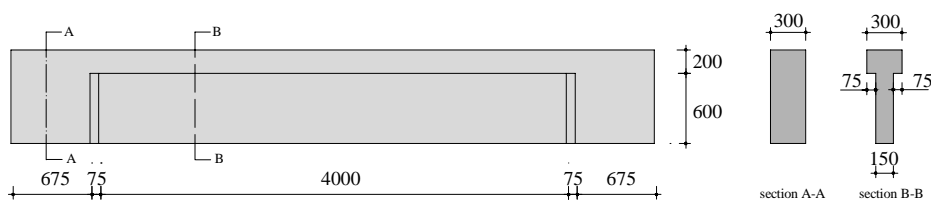


Figure C.1.3: Schema d'une poutre de Braam [Braam90];

Le tableau C.1.1 fait la récapitulation des résultats des essais de Beeby [Beeby71], de Frantz et Breen [Frantz78] et de Braam [Braam90]. Ces essais sont utilisés dans la recherche présentée dans le chapitre 7.

	h	b	f_c	A_s	\emptyset	f_y	c	A_{sw}	\emptyset_w	f_y	c	s	s_r	n_s/n_w
	[mm]	[mm]	[MPa]	[mm ²]	[mm]	[MPa]	[mm]	[mm ²]	[mm]	[MPa]	[mm]	[mm]	[mm]	[-]
beam 1	760	127	44.0	760.3	22.0	414	25	-	-	-	-	-	72.0	4.31
beam 2	760	127	48.0	760.3	22.0	414	25	-	-	-	-	-	61.0	6.48
beam 3	760	127	51.2	760.3	22.0	414	25	56.5	6.0	476	25	350.0	55.0	4.61
beam 4	760	127	46.4	760.3	22.0	414	25	113.1	6.0	476	25	230.0	61.0	4.8
beam 5	760	127	39.2	760.3	22.0	414	25	314.2	10.0	476	25	236.0	75.0	3.43
RS-1	886	286	20.3	1432.3	12.7	443	29	167.7	6.0	529	29	152.4	78.7	3.44
RS-2	886	286	21.9	1432.3	12.7	443	29	167.7	6.0	529	29	152.4	84.1	3.63
RS-3	886	286	33.9	1432.3	12.7	443	29	167.7	6.0	529	29	152.4	87.1	3.50
RS-4-0	886	286	33.7	1432.3	12.7	443	29	-	-	-	-	-	87.1	4.67
BC-1	886	286	39.6	1432.3	12.7	443	29	167.7	6.0	529	29	152.4	118.0	3.10
BC-2	886	286	31.8	1000	11.1	441	29	567.7	12.7	487	29	88.9	98.9	2.06
A-1-0	870	286	33.9	1419.4	19.1	438	29	-	-	-	-	-	116.1	3.50
A-2-0	870	286	34.3	1419.4	19.1	438	29	-	-	-	-	-	90.3	4.50
A-3	870	286	36.7	1419.4	19.1	425	29	341.9	6.0	529	29	98.4	110.8	2.20
A-4	870	286	41.8	1419.4	19.1	425	29	567.7	6.0	529	29	60.3	101.6	2.00
A-5	870	286	43.5	1419.4	19.1	425	29	567.7	12.7	452	29	133.3	90.3	2.45
A-6	870	286	32.2	1419.4	19.1	425	29	567.7	19.1	424	29	339.7	81.3	3.00
A-7	870	286	38.1	1419.4	19.1	425	29	225.8	6.0	529	29	104.8	87.1	2.80
A-8	870	286	31.6	1419.4	19.1	425	29	567.7	9.5	452	29	104.8	87.1	2.55
A-9	870	286	36.1	1419.4	19.1	425	29	1032.3	12.7	431	29	104.8	87.1	1.75
A-10	870	286	37.5	1419.4	19.1	425	29	516.1	12.7	431	29	171.5	90.3	3.00
A-11	870	286	37.3	1419.4	19.1	425	29	341.9	6.0	529	29	57.2	93.8	2.60
A-12	870	286	36.7	1419.4	19.1	425	29	993.5	9.5	452	29	52.4	87.1	2.15
A-13	870	286	33.2	1419.4	19.1	425	29	567.7	19.1	424	29	215.9	87.1	2.15
A-14	870	286	33.2	1419.4	19.1	425	29	541.9	10.6	452	29	73.0	78.7	2.21
A-15	886	286	32.0	1000	11.1	472	29	567.7	9.5	470	29	88.9	81.3	2.31
C-1	870	286	33.6	1419.4	19.1	425	29	567.7	9.5	452	29	104.8	106.0	1.92
C-2	870	286	36.5	1419.4	19.1	425	29	567.7	9.5	452	29	104.8	90.3	2.08
C-3	870	286	33.0	1419.4	19.1	425	29	567.7	9.5	452	29	104.8	93.8	2.60
C-4	870	286	32.9	1419.4	19.1	425	29	567.7	9.5	452	29	104.8	87.1	2.55
C-5	870	286	30.2	1419.4	19.1	381	29	567.7	9.5	470	29	104.8	90.3	2.25
D-1-0	618	286	26.7	1419.4	19.1	438	29	-	-	-	-	-	110.8	2.20
D-2-0	1235	286	27.4	1419.4	19.1	438	29	-	-	-	-	-	116.1	3.50
D-3-0	1235	286	36.7	1419.4	19.1	425	29	-	-	-	-	-	101.6	4.80
D-4-0	826	197	34.5	645.16	12.7	432	19	-	-	-	-	-	93.8	3.25
D-5	826	197	23.0	645.16	12.7	432	19	283.9	6.0	529	19	69.9	84.1	2.90
D-6	826	197	34.3	645.16	12.7	432	19	567.7	9.5	470	19	85.7	87.1	1.87
D-7	826	197	23.5	645.16	12.7	432	19	993.5	9.5	470	19	52.4	90.3	1.93
T-1-0	910	286	32.4	1290.3	28.6	440	64	-	-	-	-	-	162.6	1.50
T-2	910	286	34.5	1290.3	28.6	440	64	225.8	6.0	529	29	104.8	174.2	2.33
T-3	910	286	29.4	1290.3	28.6	440	64	567.7	9.5	470	29	104.8	174.2	1.27
W-1-0	873	197	27.7	1406.4	25.4	439	29	-	-	-	-	-	90.3	4.50
W-2	873	197	23.6	1406.4	25.4	439	29	567.7	9.5	452	29	104.8	90.3	1.69
W-3-0	868	432	30.9	1400	15.9	495	29	-	-	-	-	-	116.1	3.50
W-4	868	432	23.7	1400	15.9	435	29	567.7	9.5	452	29	104.8	93.8	1.73
1	800	150	43.1	1256.6	20.0	570	30	-	-	-	-	-	79.0	3.60
2	800	150	42.4	1256.6	20.0	570	30	452.4	12.0	550	30	150.0	88.0	1.89
5	800	150	41.4	1256.6	20.0	570	30	314.1	10.0	550	30	150.0	69.0	2.41
7	800	150	46.1	603.2	16.0	530	26	-	-	-	-	-	58.0	5.24
8	800	150	43.8	603.2	16.0	530	26	452.4	12.0	550	26	150.0	70.0	2.28
14	800	300	40.5	603.2	16.0	530	36	804.3	16.0	550	36	150.0	115.0	1.50
15	800	300	32.6	603.2	16.0	530	36	314.1	12.0	550	36	150.0	131.0	1.44

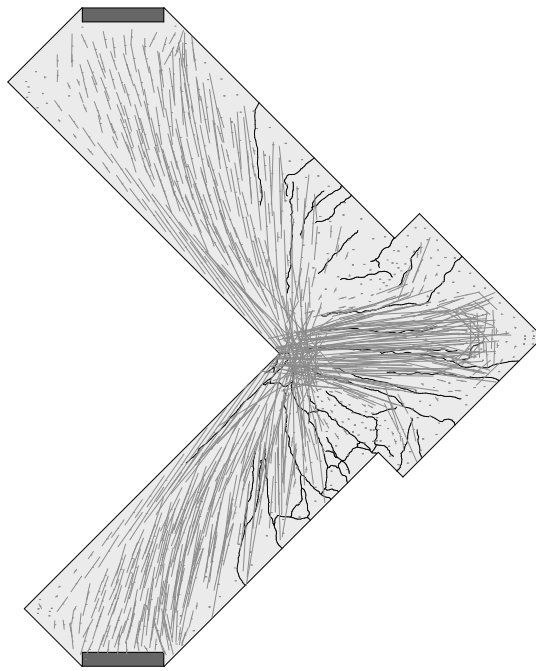
Tableau C.1.1: Résultats des essais de Beeby, de Frantz et Breen et de Braam;

D.1 Analyse d'un angle de cadre en béton léger

Lors de la recherche effectuée, le comportement structural et la charge ultime d'un angle de cadre en béton léger ont été examinés [Muttoni08, Kostic08]. L'essai en laboratoire est réalisé dans le cadre d'un mandat extérieur. Des informations plus détaillées sur les résultats d'essai sont données dans [Muttoni08]. Dans cette annexe, les résultats obtenus par les champs de contraintes continus sont comparés avec des résultats d'essai.

Test of a frame corner of MPU Heavy Lifter

Comparison between test results and continuous stress fields



Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne
Institut de structures

Neven Kostic
Dr. Miguel Fernández Ruiz
Prof. Dr. Aurelio Muttoni

Rapport: MPU - R3

April the 29th, 2008

Contents

Notation	5
1 Introduction	7
2 Continuous stress field analysis	9
2.1 Description of the model	9
2.2 Influence of cover spalling on concrete compression strength	10
3 Comparison between continuous stress fields and test results	13
3.1 Failure mode and failure load	13
3.2 Test measurements and results comparison	13
3.3 Cracking patterns and calculated stress fields	13
3.4 Remarks on the comparison of results	23

Notation

Latin letters

E_c	modulus of elasticity of concrete
f_c	compressive strength of concrete measured on cylinder
f_{ce}	effective compressive strength of concrete (for FEM analysis)
f_{sy}	yield stress of reinforcing steel
f_{su}	ultimate tensile strength of reinforcing steel
l_0	base length of omega-shaped gage
Q	applied force on the specimen

Greek letters

δ	displacement
$\Delta\ell$	increase in the length
ε_c	strain in the concrete
ε_s	strain in the reinforcing bar
ε_{su}	ultimate strain of reinforcing steel
ε_1	lateral strain in the concrete
η	reduction factor of concrete compressive strength (for FEM analysis)

1 Introduction

On December the 17th 2007, Ecole Polytechnique Federale de Lausanne (EPFL) tested a frame corner of MPU Heavy Lifter. The results of this test are detailed in a previous report *Test of a Frame Corner of MPU Heavy Lifter* [1].

This document compares the experimental results of the frame corner to those obtained using the continuous stress field method [2].

2 Continuous stress field analysis

2.1 Description of the model

Figure 2.1 shows a detail of the FE mesh used for the continuous stress field analysis.

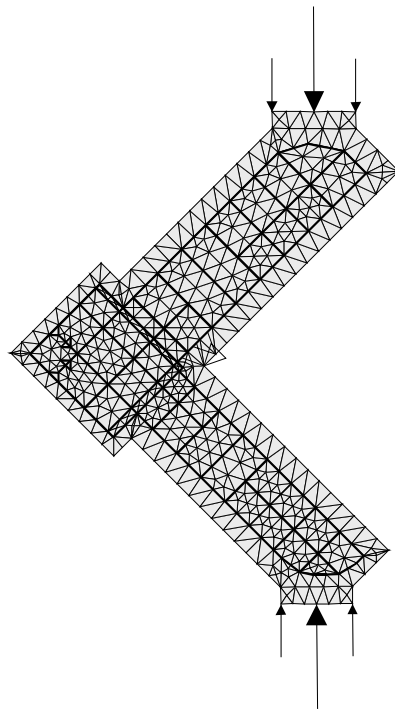


Figure 2.1: Detail of the FE Mesh

The materials properties for the FEM model are obtained from the measured properties of the materials at the time of testing.

The concrete strength is calculated using:

$$f_{ce} = f_c \eta_{fc} \eta_\epsilon$$

where f_c is the compression strength of concrete measured in cylinder. The factor η_{fc} accounts for the brittleness of the concrete and it can be estimated as [3]:

$$\eta_{fc} = \left(\frac{f_{c0}}{f_c} \right)^{\frac{1}{3}}$$

where the value of f_{c0} will be discussed in the following section.

The factor η_ϵ accounts for the influence of transverse cracking on the compressive strength of concrete. It is evaluated for each finite element using the formula proposed by Vecchio and Collins [4]:

$$\eta_\epsilon = \frac{1}{0.8 + 170 \epsilon_1} \leq 1$$

The modulus of elasticity of concrete considered for the analysis is 14.5 GPa according to Muttoni et al. [1].

With respect to the reinforced steel the measured average value of the yield strength was [1]:

$$f_{sy} = 547 \text{ MPa}$$

The modulus of elasticity of the reinforced steel considered was 205000 MPa, [1]. Perfect bond was assuming between steel and concrete.

2.2 Influence of cover spalling on concrete compression strength

During loading of the specimen, the spalling of the concrete cover developed before the maximum load was reached. As indicated by the experimental results, the spalling of the concrete cover initiated at a load equal to 1720 kN (at a longitudinal compressive strain of approximately 3 ‰). The strength of the concrete cover after the spalling was thus reduced at failure (1848 kN).

In order to estimate the reduction on the compressive strength of the concrete cover, different possibilities have been investigated:

1. First a value of $f_{c0} = 20 \text{ MPa}$ is considered for the whole member. The calculated failure load is equal to 2070 kN, figure 2.2. This approach thus overestimate the actual strength (1848 kN).
2. If the concrete cover is not considered at failure and it is assumed that the reinforcement reached its ultimate strength, (678 MPa, see [1]), a failure load of 1470 kN results, figure 2.2. This approach is clearly too conservative.

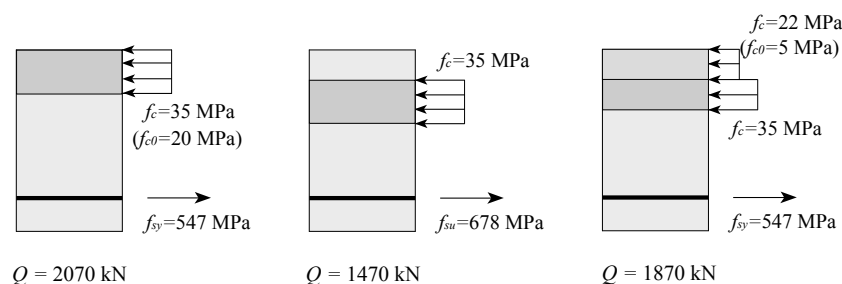


Figure 2.2: Values of the compressive strength of concrete considered for the continuous stress field analysis

3. A third approach considers a reduced strength for the concrete cover at yielding of the reinforcement. This is achieved by setting $f_{c0} = 5$ MPa for the concrete cover and $f_{c0} = 20$ MPa for the inner zone (see figure 2.3). The maximum load calculated results 1870 kN in good agreement with test result. This approach will thus be used in the following.

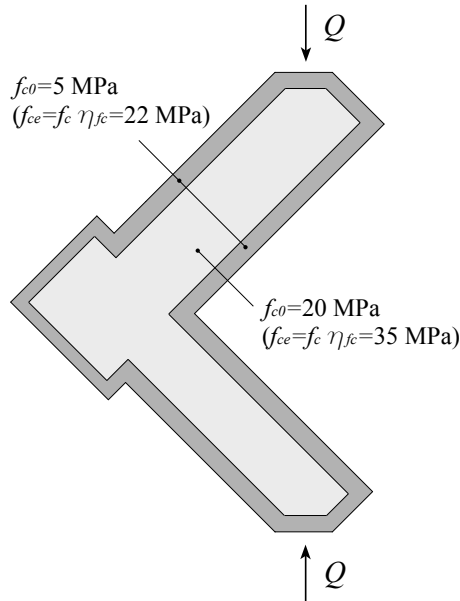


Figure 2.3: Concrete strengths for the continuous stress field analysis

3 Comparison between continuous stress fields and test results

3.1 Failure mode and failure load

The observed failure mode [1] was yielding of the reinforcement bars with crushing of the concrete in compression. This mode was in agreement with the one found with continuous stress fields.

The measured failure load was 1848 kN, 1.2 % smaller than the one obtained with continuous stress fields.

3.2 Test measurements and results comparison

Details on the continuous measurements are given in the following:

- Figure 3.1** Layout of testing devices.
- Figure 3.2** Experimental and calculated force-displacement curve.
- Figure 3.3** Experimental and calculated force-strains in the reinforcing bars.
- Figures 3.4-3.9** Experimental and calculated force-strains curves of the omega-shaped gages.

For some measurements devices, readings were not complete during the test. Such devices are marked with a star (*) in the figures. The descending parts of the experimental devices after reaching the maximum load are not plotted.

3.3 Cracking patterns and calculated stress fields

The cracking patterns at both sides of the element are compared with the directions of the compression fields obtained with continuous stress field analysis.

- Figure 3.10-3.11** Experimental cracking patterns and calculated principal directions of the continuous compression stress fields.

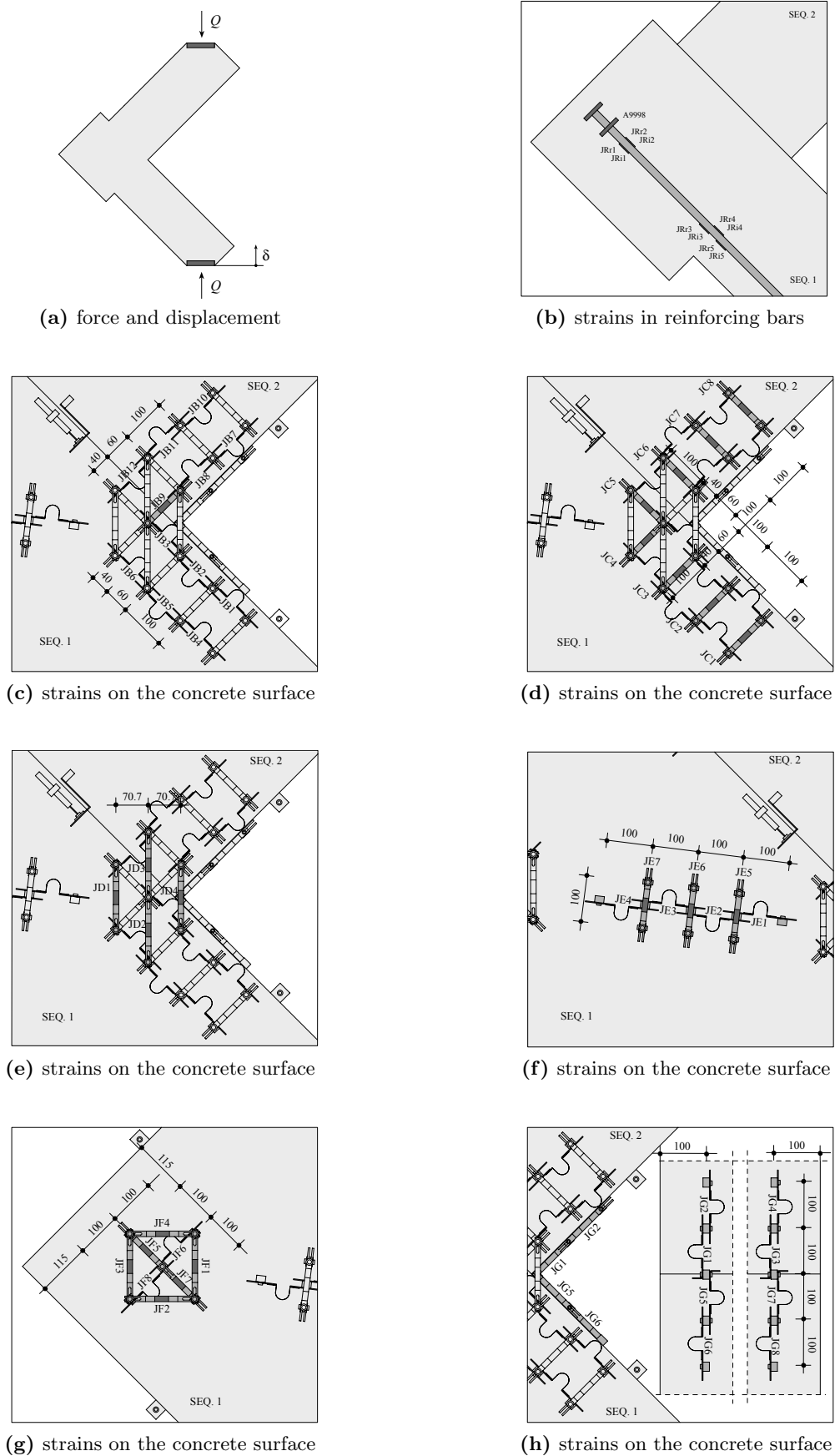


Figure 3.1: Layout of testing and analyzed devices

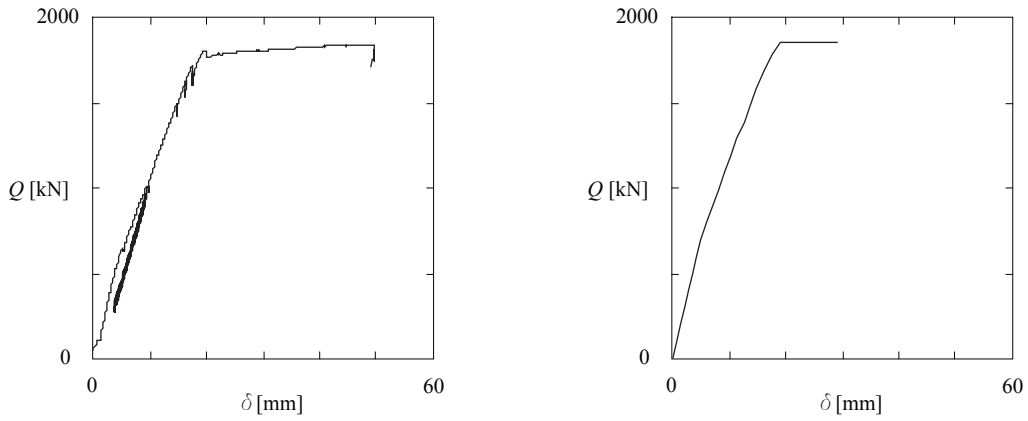


Figure 3.2: Experimental and calculated force-displacement curve

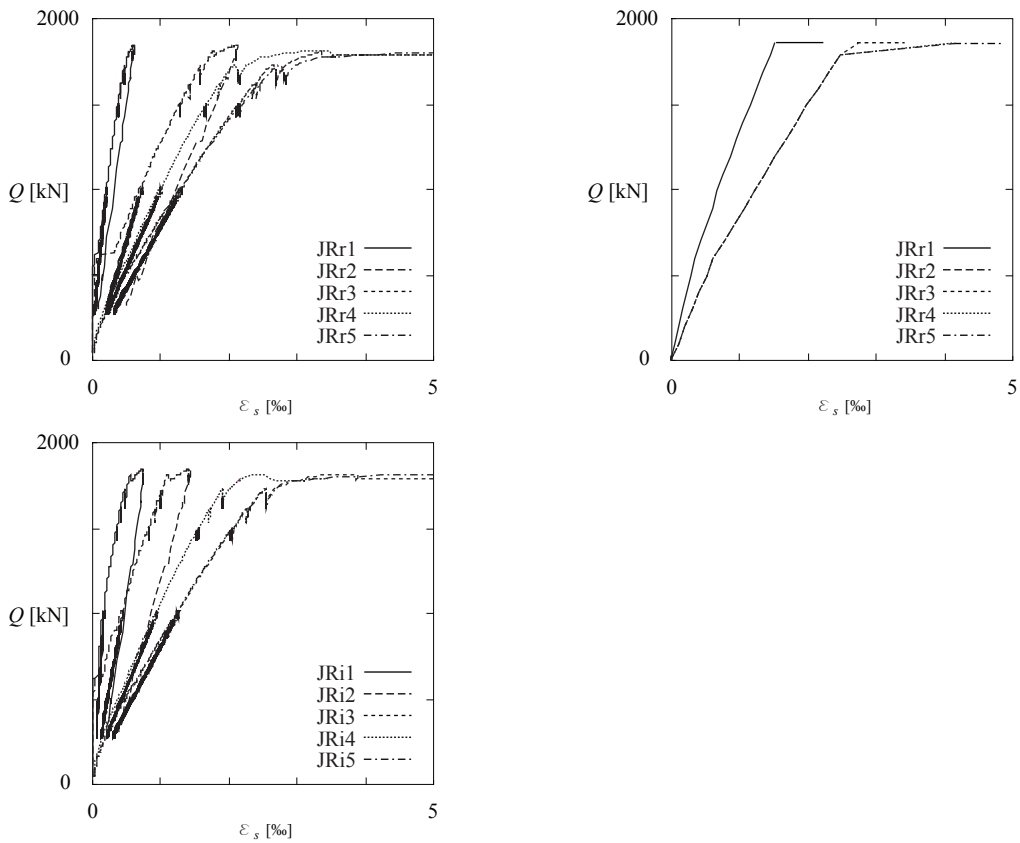


Figure 3.3: Experimental and calculated force-strains curves in the reinforcing bars

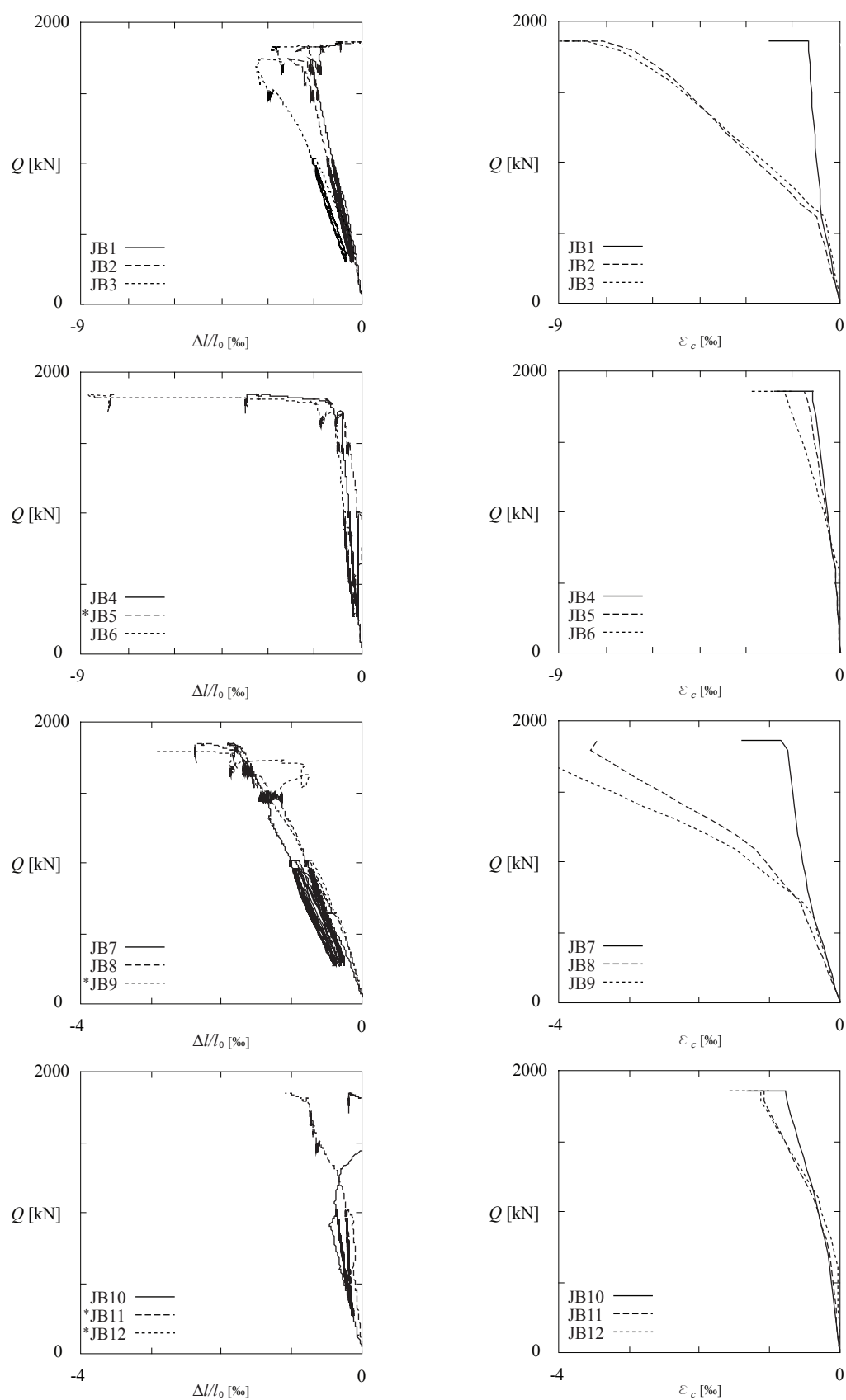


Figure 3.4: Experimental and calculated force-strains curves of the omega-shaped gages (JB), base length $\ell_0 = 100$ mm

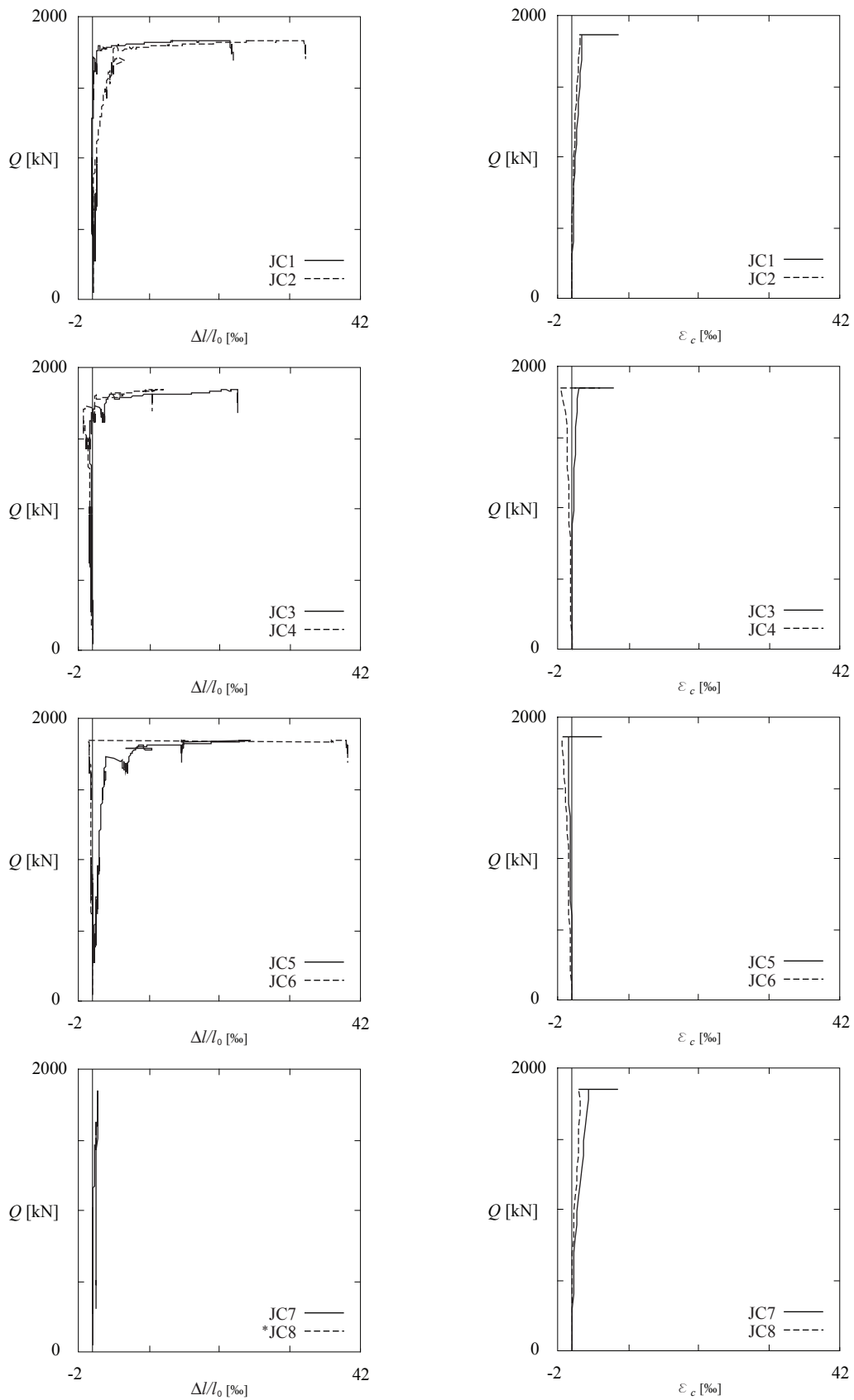


Figure 3.5: Experimental and calculated force-strains curves of the omega-shaped gages (JC), base length $\ell_0 = 100$ mm

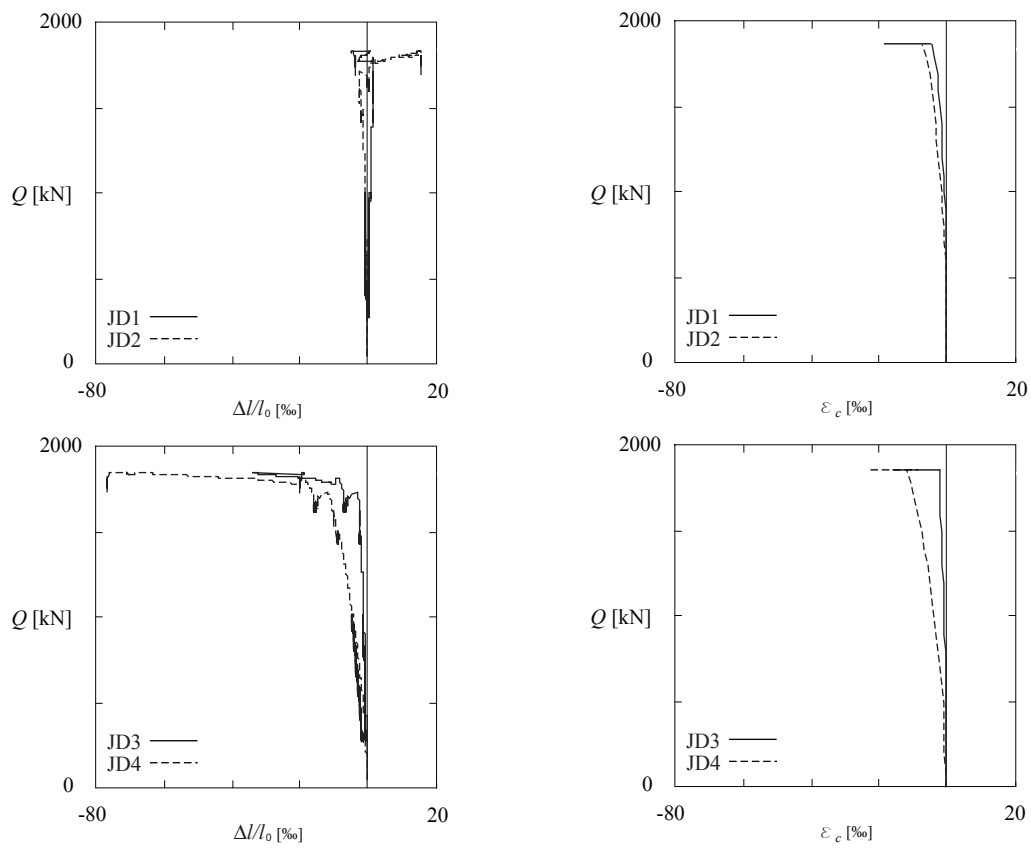


Figure 3.6: Experimental and calculated force-strains curves of the omega-shaped gages (JD), base length $\ell_0 = 100$ mm

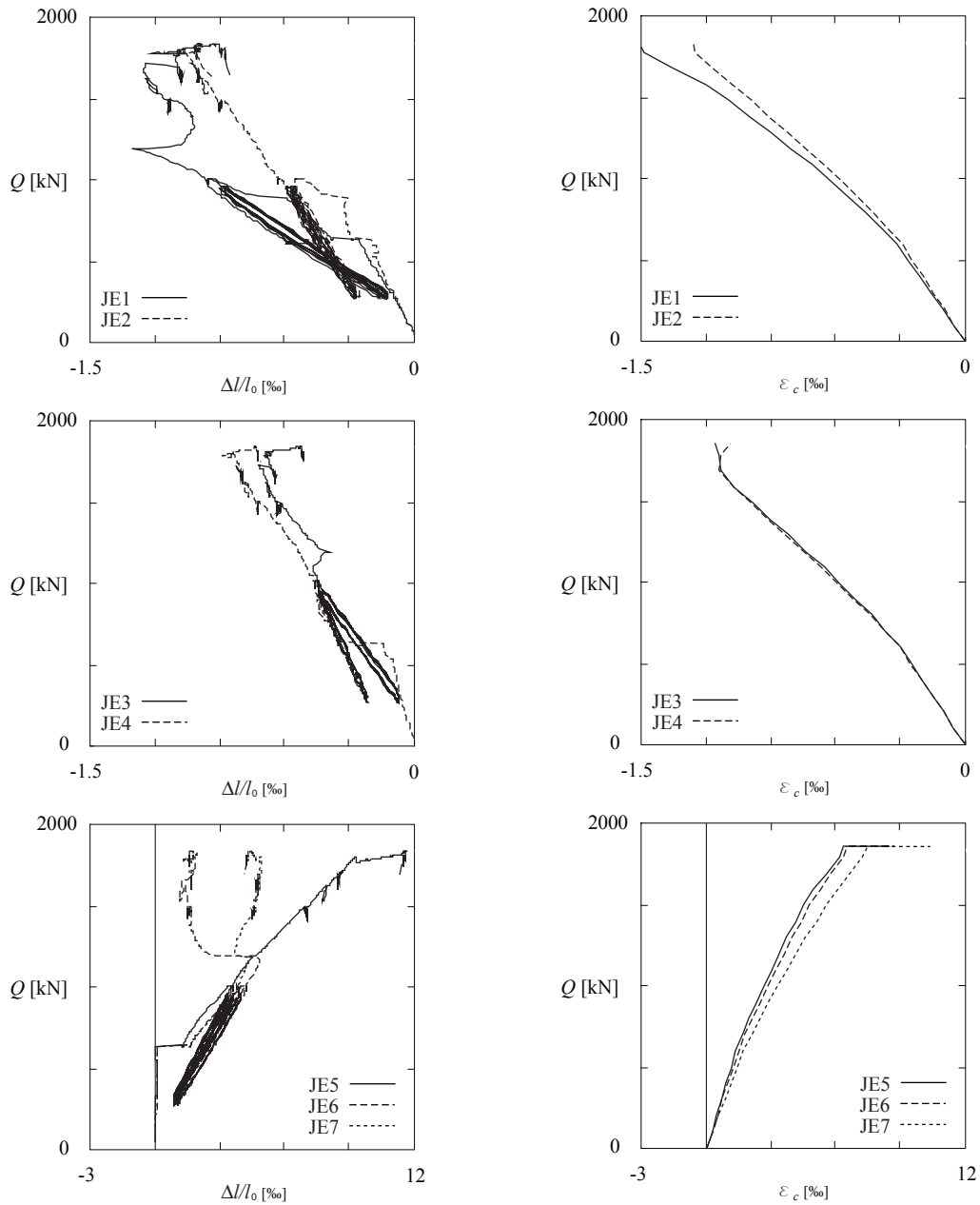


Figure 3.7: Experimental and calculated force-strains curves of the omega-shaped gages (JE), base length $l_0 = 100$ mm

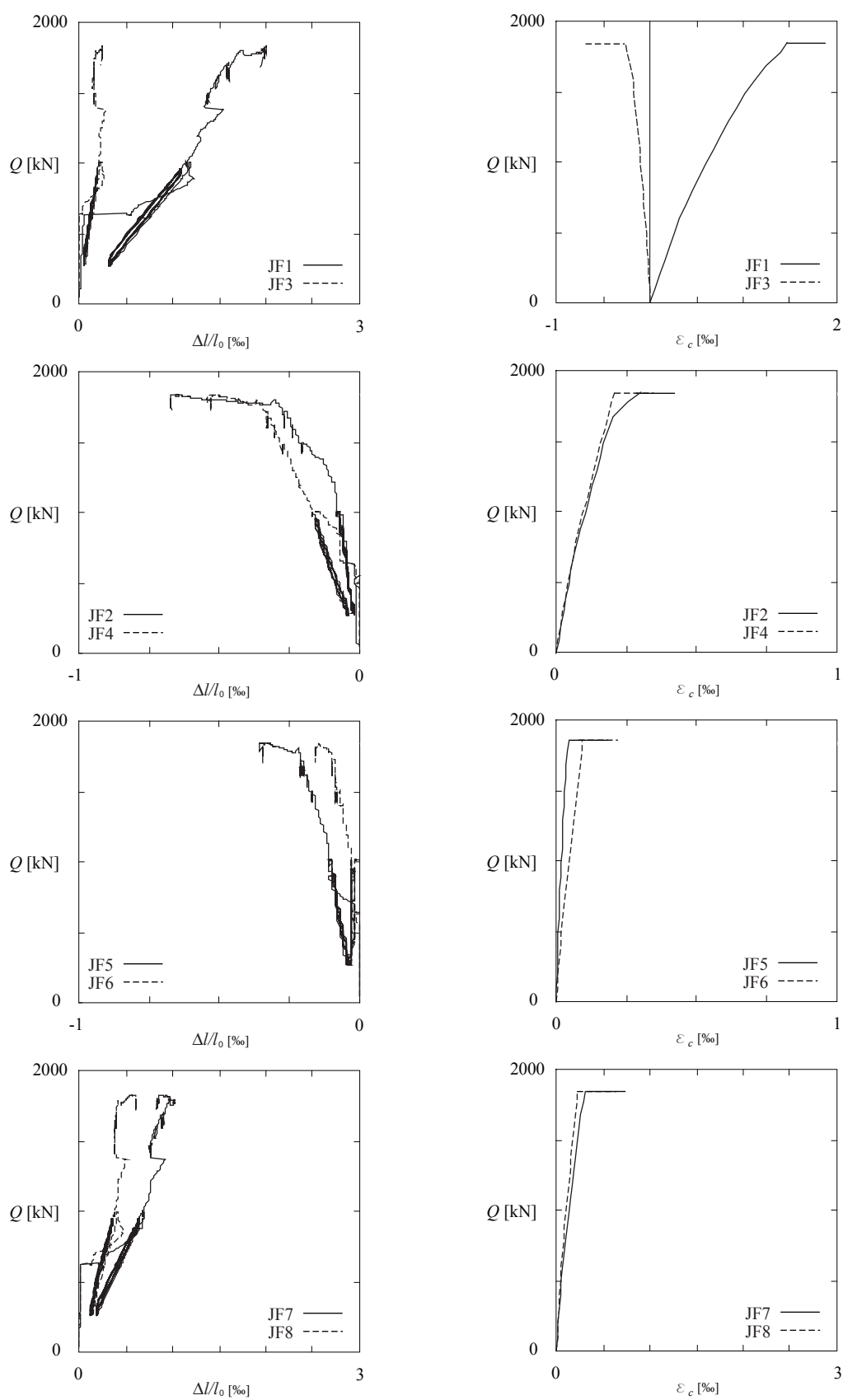


Figure 3.8: Experimental and calculated force-strains curves of the omega-shaped gages (JF), base length $\ell_0 = 100$ mm

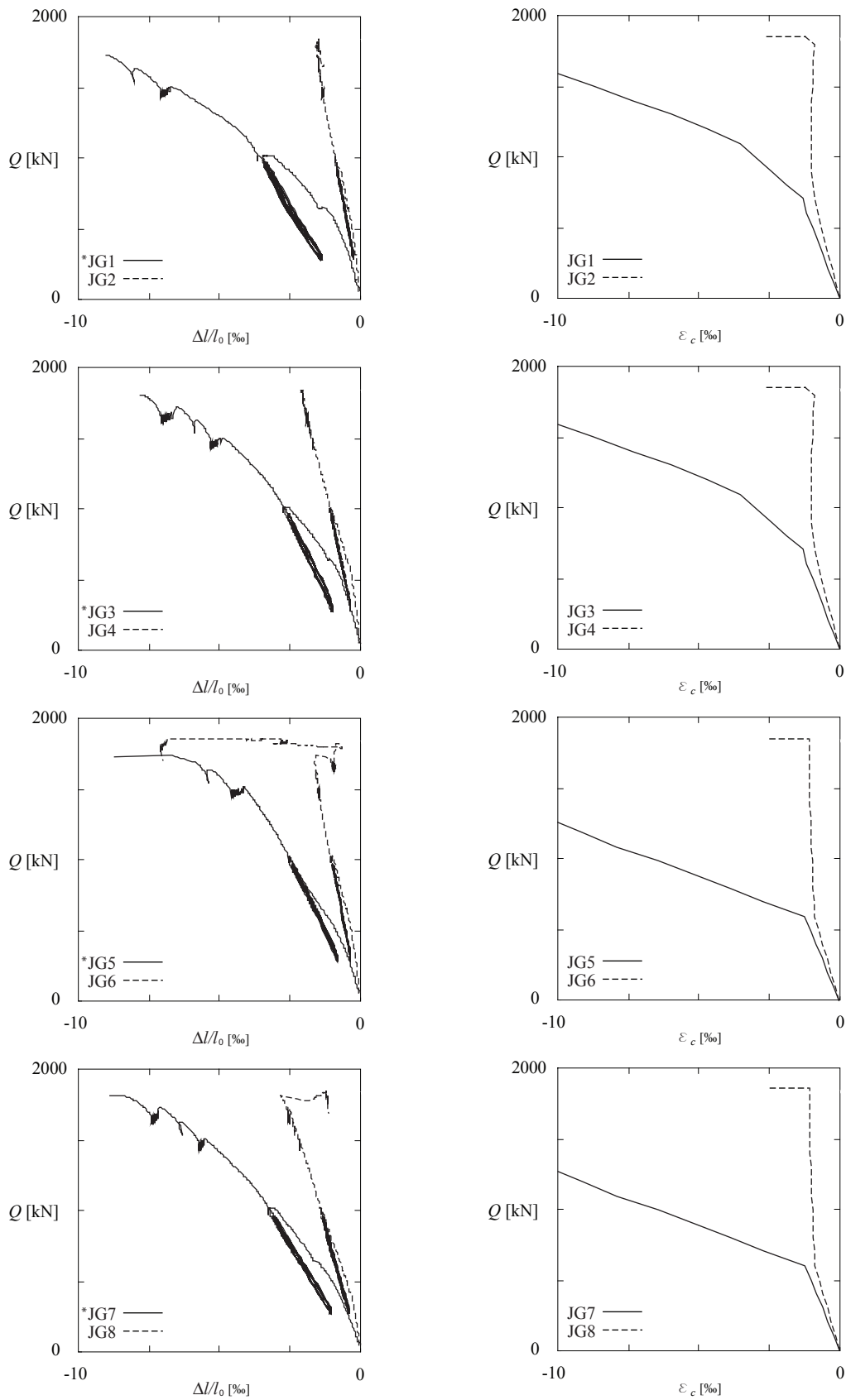


Figure 3.9: Experimental and calculated force-strains curves of the omega-shaped gages (JG), base length $l_0 = 100$ mm

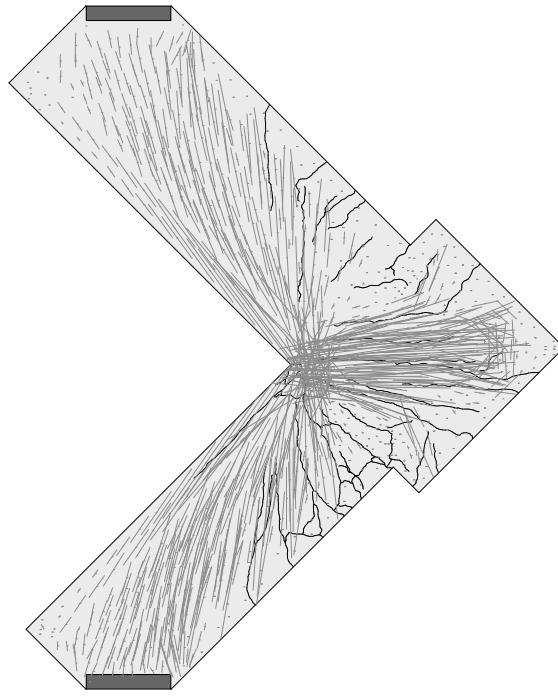


Figure 3.10: Experimental cracking pattern – east side; and calculated stress fields

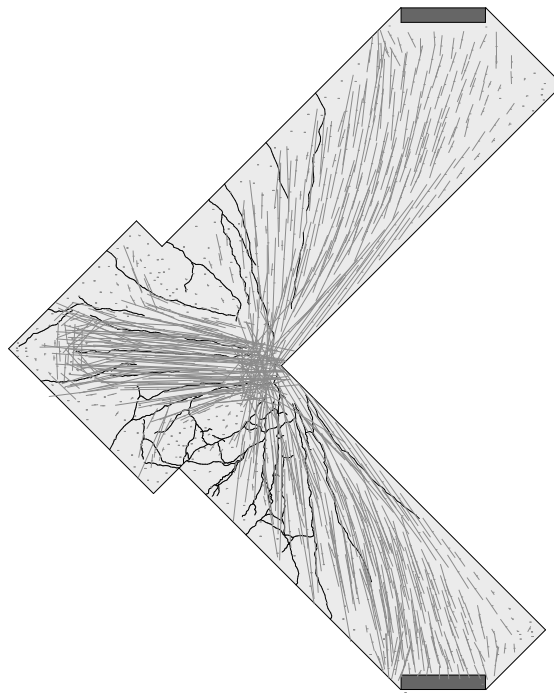


Figure 3.11: Experimental cracking pattern – west side; and calculated stress fields

3.4 Remarks on the comparison of results

- The observed failure mode, yielding of the reinforcement bars with crushing of the concrete in compression, agreed with calculated mode. The ultimate load is calculated by considering a reduction of the concrete compression strength due to spalling of the concrete cover.
- Figure 3.2 shows a good prediction of the experimental force-displacement curve.
- Figure 3.3 shows a good correlation between the experimental and the calculated force applied at the specimen-strains of the reinforcing bars. The experimental results show some difference on the strains between the upper and the lower zone of the steel bars due to probably a local bending of the bar. As the steel bars in the calculated model are spring elements, this effect could not be represented. It can be noted that the strains vary along the bar, indicating that bond was activated in the nodal region.
- Figure 3.4 compares experimental and calculated results for the compression zone of the corner. The reduction of the compression strains of gages JB1-JB3 measured close to the failure load is due to spalling of the concrete cover. The spalling of the concrete cover initiated at a load equal to 1720 kN.
- Figure 3.5 shows additional results of the spalling of the concrete cover. As indicated by the experimental results, the gages JC4 and JC6 remain in compression. This is due to that they are not affected by any crack due to spalling of the concrete cover.
- Figure 3.6 presents the experimental and the calculated results for the compression corner. As indicated by the experimental results, the gage JD2 changes its trend from compression (beginning of the test) to tension (at the end) due to development of the spalling crack in the compression zone.
- The figure 3.7 presents the experimental and the calculated strains for the compression strut of the corner. The experimental compression strains have a good correlation with the calculated strains. The experimental tensile strains are significantly influenced by the development of cracking. After a first crack opened, a second one appeared, crossing only gage JE5. The second crack influenced the first one by closing it. The other two gages consequently started to close. The cracks in the continuous stress field are smeared and this behaviour is thus not presented.
- Figure 3.8 compares the results for the anchorage zone. The behavior of the gages JF2, JF4, JF5 and JF6 was influenced by a crack developing at the region, which explains the difference in sign between the experimental and the calculated results.
- Figure 3.9 shows that the first spalling of the concrete cover occurred in the zone of the gage JG5, which led to decompression of gage JG6. On the other leg of the element, the gage JG7 showed spalling of the concrete cover only at maximum load.

Bibliography

- [1] Muttoni, A.; Fernández, R. M.; Kostic, N., and Guidotti, R., *Test of a Frame Corner of MPU Heavy Lifter*, Report MPU-R2, Lausanne, 2008.
- [2] Fernández, R. M., and Muttoni, A., "On Development of Suitable Stress Fields for Structural Concrete," *ACI Structural Journal*, V. 104, No. 4, July-Aug. 2007, pp. 495-502.
- [3] Muttoni, A.; Schwartz, J.; and Thürlimann, B., *Design of Concrete Structures with Stress Fields*, Birkhäuser/Springer, 1997, 145 pp.
- [4] Vecchio, F. J., and Colins, M.P., "The Modified Compression Field Theory for Reinforced Concrete Elements Subjected to Shear," *ACI Structural Journal*, V. 83, No. 2, Mar-Apr. 1986, pp. 219-231.

NEVEN KOSTIC, ING. DIPL. EP MILAN

Etat civil

Date de naissance : 29 février 1980
Origine : Belgrade, Serbie
E-mail : neven.kostic@epfl.ch

Formation scolaire et universitaire

2005 – Doctorant au Laboratoire de construction en béton (IS-Beton), Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne (EPFL), Suisse

2001 – 2004 Etudes et diplôme d'ingénieur en Génie Civil, formation Structures, à Politecnico di Milano, Italie

1998 – 2001 Etudes en Génie Civil, formation Structures, à la Faculté de Génie Civil, Belgrade, Serbie

1994 – 1998 Maturité scientifique à IX-ième Lycée de Belgrade, Serbie

Expérience professionnelle

2005 - Assistant au Laboratoire de Construction en Béton (IS-BETON), Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne (EPFL), Suisse

2006 - 2007 Activité indépendante pour des concours de passerelles pour Leeds – Liverpool Canal, Grande-Bretagne et pour Maasboulevard Venlo, Pays-Bas

2004 Bureau d'Ingénieurs, B&C Associati, Como, Italie

Publications

Kostic, N.; Fernández Ruiz, M.; et Muttoni, A., "Test of a Frame Corner of MPU Heavy Lifter –Comparison between Test Results and Continuous Stress Fields," *Rapport*, EPFL-ENAC-Is-Beton, Lausanne, Switzerland, 2008; 25 pp.

Muttoni, A.; Kostic, N.; et Fernández Ruiz, M., Discussion of paper "Factor Affecting Strength of Elements Designed Using Strut-and-Tie Models," *ACI Structural Journal*, Vol. 104-S36, 2008, pp. 233-235.

Muttoni, A.; Fernández Ruiz, M.; Kostic, N.; et Guidotti, R., "Test of a Frame Corner of MPU Heavy Lifter," *Rapport d'essai*, EPFL-ENAC-Is-Beton, Lausanne, Switzerland, 2008; 33 pp.

Kostic, N., "Computer-based Development of Stress Fields," 6th *International PhD Symposium in Civil Engineering*, Zürich, Switzerland, 2006, 7 pp.