

# Champs de contraintes pour le béton structural

Les champs de contraintes constituent un outil basé sur le théorème statique (ou borne inférieure) de la théorie de la plasticité. Cet outil peut être utilisé pour dimensionner et vérifier la sécurité structurale d'éléments en béton armé et précontraint. La norme SIA 262 pour la construction en béton se base sur cette méthode. Il existe d'autres méthodes de calcul pour le béton structural basées sur la théorie de la plasticité, dont la plus connue est celle des bielles-et-tirants, qui exploite l'analogie du treillis [1]<sup>1</sup>. Nous allons résumer les principes de ces deux méthodes ainsi que leur application conjointe à un cas concret<sup>2</sup>.

## Bases théoriques

Cet article se réfère tant aux modèles bielles-et-tirants qu'aux modèles de champs de contraintes, selon les définitions suivantes (fig. 1) :

1. Le modèle de bielles-et-tirants (fig. 1b), une idéalisation structurale par un treillis équivalent à partir duquel les efforts normaux dans chaque élément sont calculés pour un ensemble d'actions données. Ce treillis doit satisfaire les conditions d'équilibre et respecter les conditions de bord de la structure réelle.

2. Le modèle de champ de contraintes (fig. 1c), une idéalisation structurale où les contraintes dans l'acier et le béton sont imposées ou vérifiées. Le champ de contraintes doit satisfaire les conditions d'équilibre tout en respectant la condition statique de plasticité ainsi que les conditions de bord de la structure réelle.

En général, un modèle de bielles-et-tirants recourt à des forces (résultantes), tandis qu'un modèle de champs de contraintes fait intervenir des contraintes. S'il existe évidemment de fortes analogies entre les deux méthodes, des différences importantes subsistent néanmoins.

Une fois un champ de contraintes licite déterminé, il est possible de dériver directement un modèle bielles-et-tirants en disposant des barres à la position des résultantes des contraintes. Dans ce sens, le développement d'un champ de contraintes peut être vu comme une bonne préparation pour celui d'un modèle de bielles-et-tirants (fig. 1d). La procédure inverse (établir un modèle de champ de contraintes à partir d'un modèle de bielles-et-tirants) est aussi possible mais s'avère plus délicate, car la solution n'est pas unique.

<sup>1</sup> Les chiffres entre crochets renvoient à la bibliographie en fin d'article.

<sup>2</sup> Une description détaillée de la méthode des champs de contraintes et son application à divers éléments structuraux est fournie dans [2]. Certains développements récents ainsi que diverses applications sont disponibles sur <<http://i-concrete.epfl.ch/ex/?id=articles>>.

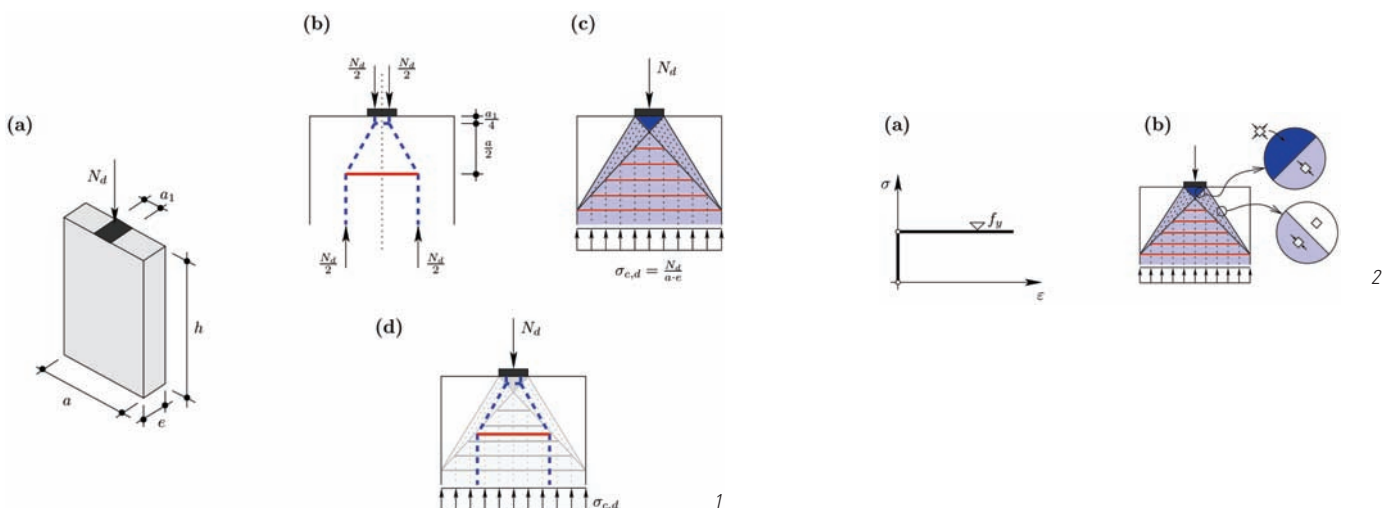


Fig. 1 : Modèles de champs de contraintes et bielles-et-tirants : (a) problème physique (diffusion d'une charge concentrée); (b) bielles-et-tirants; (c) champs de contraintes et (d) bielles-et-tirants résultant des éléments du champ de contraintes

Fig. 2 : Champ de contraintes avec des lignes de discontinuité : (a) loi de comportement uniaxial rigide-plastique et (b) détails des lignes de discontinuité et états de contraintes des deux cotés de ces dernières pour l'exemple montré à la figure 1

Fig. 3 : Lois de comportement uniaxial rigide-plastique pour le béton et l'acier : (a) réponse du béton pour différentes résistances à la compression; (b) idéalisation rigide-plastique de la réponse du béton et valeur de la résistance plastique adoptée ( $f_{cp}$ ); (c) comportement élasto-plastique de l'acier et (d) idéalisation rigide-plastique de la réponse de l'acier et résistance plastique adoptée ( $f_{ys}$ )

### Loi constitutive et ligne de discontinuité

L'application de la théorie de la plasticité [3,4] requiert la définition de la contrainte de plastification  $f_y$  pour chaque matériau. Pour une construction simple des champs de contraintes, l'hypothèse d'un comportement rigide parfaitement plastique (fig. 2a) est généralement admise.

Si cette hypothèse n'est pas obligatoire, elle facilite en revanche le développement de champs de contraintes dits discontinus, dont la construction et la résolution sont aisément réalisables à la main. Les lignes de discontinuité (fig. 2b) sont en fait des courbes délimitant des régions à l'intérieur d'un corps. Pour les contraintes qui leur sont parallèles, des sauts (discontinuités) sont possibles de part et d'autre de ces lignes. Par contre, les contraintes normales ainsi que les contraintes tangentielles doivent être égales de chaque côté de ces lignes. Lorsque les contraintes principales sont parallèles et perpendiculaires à la ligne de discontinuité (fig. 2b), l'analyse du modèle de champ de contraintes s'avère très simple, ce qui explique l'usage fréquent de ce type de champ dans la pratique.

### Idéalisation du comportement

L'idéalisation du comportement du béton et de l'acier par une loi de type rigide-plastique est soumise au respect de certaines conditions. Dans le cas du béton, sa fragilité en compression (caractérisée par la pente de la partie adoucissante de la courbe contrainte-déformation) augmente avec sa résistance (fig. 3a). Pour tenir compte de cette fragilité, qui dépend de la résistance à la compression du béton, l'idéalisation du comportement du béton implique l'utilisation d'une résistance plastique équivalente  $f_{cp}$  (fig. 3b) définie par la formule suivante :

$$f_{cp} = \eta_{fc} \cdot f_{ck}, \text{ où : } \eta_{fc} = \left( \frac{30}{f_{ck}} \right)^{\frac{1}{3}} \leq 1.0$$

où  $f_{ck}$  (résistance caractéristique du béton à la compression uniaxiale mesurée sur cylindre) s'exprime en N/mm<sup>2</sup>. La résistance à la traction du béton n'est pas considérée à cause de sa grande fragilité qui empêche une analyse plastique.

L'idéalisation du comportement de l'acier par une loi de type rigide-plastique est possible en prenant sa limite d'écoulement comme valeur de résistance plastique (fig. 3c et 3d).

### Éléments de base des champs de contraintes

Trois éléments de base sont utilisés lors de la construction de champs de contraintes : les bielles, les tirants et les nœuds.

### Bielles

Les bielles correspondent à des parties de béton comprimées selon leur axe et qui peuvent être soumises latéralement à diverses déformations imposées. Il existe deux types de bielles : les bielles à contrainte constante et les éventails (fig. 4).

La vérification de la résistance des bielles se fait à partir de la contrainte principale de compression maximale  $\sigma_{c,max,d}$ . Leur résistance est fortement influencée par les déformations latérales imposées dans le béton [4], ce qui impose que leur vérification se fasse en tenant compte d'une résistance plastique effective  $f_{ce}$  (fig. 5) selon l'inéquation suivante :

$$|\sigma_{c,max,d}| \leq f_{ce,d} \quad \text{avec :} \quad f_{ce,d} = \frac{f_{ce}}{\gamma_c}$$

### Tirants

Les tirants sont chargés de transmettre la traction. Ils sont matérialisés dans la structure réelle par des barres d'acier passif ou par des tiges ou des câbles précontraints. Leur ancrage peut être réalisé à l'aide de plaques (plaques métalliques connectées aux barres, crochets ou têtes d'ancrage) ou par adhérence, cette dernière pouvant être étudiée par une loi

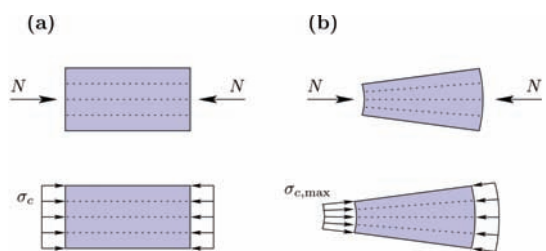
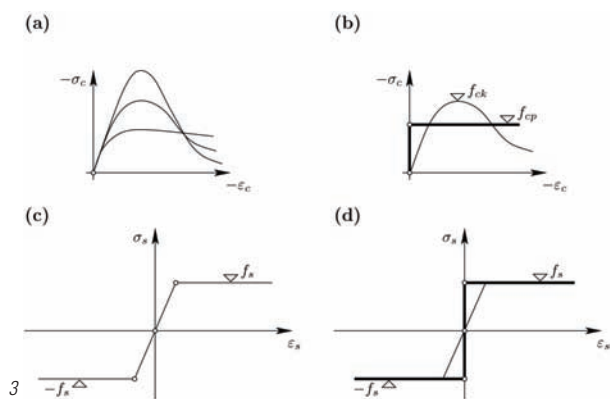


Fig. 4 : Bielles de béton : (a) bielle à contrainte constante et (b) bielle en éventail avec contrainte variable

Fig. 5 : Résistance plastique effective du béton  $f_{cc}$  selon le type de sollicitation

Fig. 6 : Ancrages de tirants : (a) ancrage par plaque ; (b) ancrage par tête d'ancrage ; (c) loi d'adhérence rigide-plastique ( $\tau$  = contrainte d'adhérence,  $\delta$  = glissement) et (d) ancrage par adhérence

Fig. 7 : Types de nœuds concentrés et distribués (C = Compression, T = Traction)

d'adhérence rigide-plastique (fig. 6c). Pour chaque tirant, il faut vérifier que :

1. la contrainte dans l'acier  $\sigma_s$  est égale ou inférieure à sa résistance plastique  $f_s$  :

$$\sigma_{s,d} \leq f_{sd} = \frac{f_{s,k}}{\gamma_s}$$

2. et que la barre d'acier a une capacité d'ancrage suffisante.

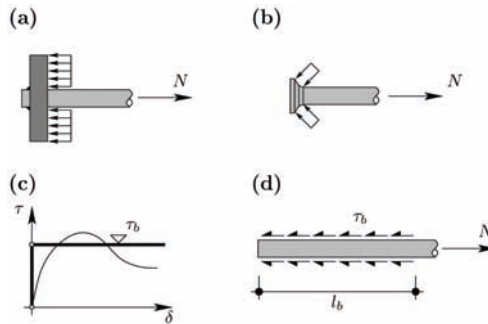
### Nœuds

Les nœuds, points de réunions des bielles et des tirants, sont le troisième élément qui doit être étudié dans un modèle de champ de contraintes. Il est possible de regrouper les différents nœuds dans quatre catégories topologiques (fig. 7). Une description détaillée des conditions à respecter par les différents types de nœuds peut être trouvée en [2].

Les nœuds CCC ne rassemblent que des bielles. Les plus simples sont dits hydrostatiques, c'est-à-dire que toutes les bielles concernées sont perpendiculaires au nœud et sollicitées par la même contrainte. La vérification de tels nœuds n'est pas nécessaire, car les contraintes principales sont égales à celles dans les bielles dont la résistance aura été déjà

été vérifiée. Pour les nœuds CCC non-hydrostatiques, on détermine les contraintes principales dans le nœud pour vérifier que la compression maximale ne dépasse pas la résistance plastique du béton.

Les nœuds CCT sont caractérisés par l'intersection d'un tirant et d'au minimum deux bielles. On distingue les cas concentrés – ancrage de la barre hors du nœud – et les cas distribués – ancrage le long du nœud lui-même (fig. 7). Les cas concentrés peuvent être traités comme un nœud CCC. Dans les deux cas, il est nécessaire de vérifier que la longueur



6

TYPE DE SOLLICITATION	$f_{cc}$	APPLICATIONS
Béton avec confinement actif ou passif	$f_{cp} + 4   \sigma_{lat}  $	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Compression triaxiale</li> <li>• Confinement latéral</li> <li>• Charges concentrées</li> </ul>
Béton non fissuré en compression uniaxiale	$f_{cp}$	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Compression simple avec armature de contrôle de fissuration</li> <li>• Colonnes, murs, poutres fléchies</li> </ul>
Béton fissuré avec déformation latérale imposée	$0.8f_{cp}$	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Murs</li> <li>• Dalles</li> <li>• Poutres avec déformation latérale</li> </ul>
Béton fissuré avec déformation diagonale imposée	$0.6f_{cp}$	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Murs ; dalles avec torsion importante</li> <li>• Ames de poutres avec effort tranchant ou torsion</li> </ul>
Béton fissuré avec armature plastifiée dans deux directions	$0.4f_{cp}$	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Ames de poutres ou murs avec armature longitudinale et transversale plastifiées</li> </ul>
Béton sans contrôle de l'ouverture des fissures	Théorie de la plasticité non applicable	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Éléments sans armature minimale suffisante</li> <li>• Poinçonnement</li> </ul>

5

TYPE	CONCENTRÉ	DISTRIBUÉ
CCC		
CCT		
CTT		
TTT		

7

Fig. 8 : Géométrie, schéma d'armature et charges sur la poutre, cotation en mm

Fig. 9 : Modèle de champ de contraintes avec appui direct et modèle de bielles-et-tirants équivalent, charge vers le bas, forces de dimensionnement en MN

d'ancrage est suffisante et que l'angle formé par le tirant avec chacune des bielles n'est pas inférieur à 45° (si aucune armature constructive est placée) ou à 25° (si une armature pour contrôler la répartition et l'ouverture des fissures est placée). Des angles inférieurs risqueraient d'engendrer des fissures très ouvertes pouvant réduire la résistance de la bielle à une valeur inférieure aux limites  $f_{ce}$  établies précédemment.

Les nœuds CTT sont caractérisés par l'intersection d'une seule bielle avec une série de tirants. Ces nœuds, qui peuvent également être concentrés ou distribués, doivent être étudiés avec prudence car des fissures de grande ouverture peuvent se développer et réduire considérablement la résistance de la bielle : il faut toujours disposer une armature constructive minimale pour contrôler la fissuration dans la zone nodale. L'angle formé entre la bielle et les tirants doit respecter les mêmes critères que pour les nœuds CCT.

Le dernier cas correspond aux nœuds TTT qui sont constitués exclusivement par des tirants. Il faut alors prêter une attention particulière à la zone d'ancrage des barres qui doit être confinée avec des étriers. Le comportement du nœud peut être amélioré par l'utilisation d'une barre pliée, mais le confinement par des armatures transversales reste nécessaire.

### Appliquer la méthode des champs de contraintes

La méthode des champs de contraintes peut en général être appliquée selon deux procédés :

- réalisation d'un dessin exact du champ de contraintes en respectant la largeur des différents éléments (bielles,

nœuds et tirants) et en vérifiant que la place disponible est suffisante pour ces derniers ;

- réalisation d'un dessin qualitatif du champ de contraintes et résolution à l'aide de coupes (analyse de sous-systèmes).

Un exemple du dimensionnement d'un élément selon ces deux procédés avec la méthode des champs de contraintes est présenté. L'élément étudié, réalisé en béton C70/85 ( $f_{cp} = 52 \text{ N/mm}^2$ ) et dont la géométrie est donnée à la figure 8, correspond à un voile de transmission, du type de ceux disposés dans un bâtiment haut pour relier le noyau aux piliers de la façade. Il est précontraint par 10 barres  $\phi 50$ , chaque barre étant caractérisées par les grandeurs suivantes :  $F_{uk} = 2.0 \text{ MN}$ ;  $F_{yk} = 1.6 \text{ MN}$ ;  $F_{p0} = 1.4 \text{ MN}$ . L'analyse des charges conduit à distinguer deux cas déterminants, qui correspondent à une force verticale appliquée au droit du pilier de  $V_d = +/- 13 \text{ MN}$ .

On considère d'abord le cas où la charge agit vers le bas. On a choisi dans un premier temps une solution avec appui direct (fig. 9), en admettant des bielles sollicitées par une contrainte  $f_{cd} (= f_{cp}/\gamma_c = 35 \text{ N/mm}^2)$ , puisque le béton se trouve dans une situation de compression uniaxiale sans tractions transversales. Cette solution impose l'introduction de forces importantes dans le nœud CCT supérieur avec un angle légèrement inférieur à 25° (limite autorisée par la norme SIA 262). La solution peut alors être améliorée en admettant un appui indirect (fig. 10), ce qui est beaucoup plus favorable et plus simple du point de vue l'ancrage des forces dans le nœud. Dans ce cas, la bielle intermédiaire (-17.4 MN) doit alors être

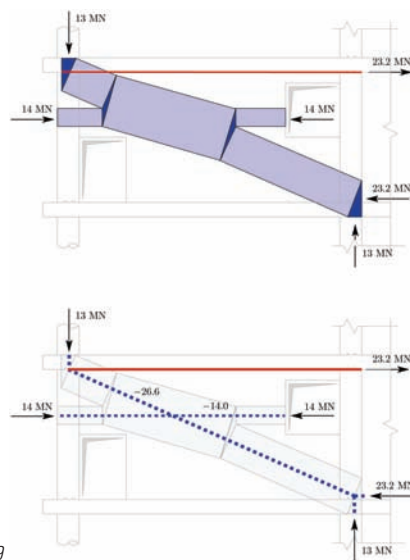
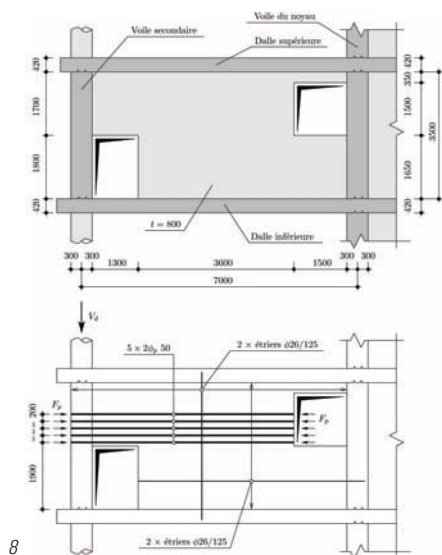


Fig. 10 : Modèle de champ de contraintes avec appui indirect et modèle de bielles-et-tirants équivalent, charge vers le bas, forces de dimensionnement en MN

Fig. 11 : Modèle de champ de contraintes et modèle de bielles-et-tirants équivalent, charge vers le haut, forces de dimensionnement en MN

Fig. 12 : Détermination des forces dans les tirants et les bielles par équilibre dans différentes coupes, forces de dimensionnement en MN

(Tous les documents illustrant cet article ont été fournis par les auteurs.)

vérifiée avec une contrainte de  $0.80 f_{cd}$  pour tenir compte de l'effet défavorable induit par la traction presque perpendiculaire à la bielle présente selon le champ de contraintes admis. Il n'est toutefois pas nécessaire de redessiner le champ, puisque la place inutilisée autour de la bielle est suffisante pour compenser l'effet défavorable.

Lorsque la charge agit vers le haut, la solution est légèrement plus complexe. La figure 11 montre le détail d'un modèle de champ de contraintes possible. Dans ce cas, les efforts dans les éléments sont obtenus par des coupes dans la structure, ce qui permet d'isoler des sous systèmes et d'exploiter les conditions d'équilibre (fig. 12). Dans ce cas, les contraintes dans les bielles de béton ne doivent pas dépasser  $0.60 f_{cd}$  à cause des armatures tendues formant un angle d'environ  $45^\circ$  avec les bielles. Le modèle de treillis correspondant, relativement compliqué (fig. 11), peut être élaboré en se basant sur le champ de contraintes précédent.

Il faut remarquer que des alternatives sont toujours possibles. La disposition d'armatures inclinées serait très efficace pour ce cas de charge.

ge). Le mécanisme résistant optimal d'un élément peut être ajusté itérativement pour une situation définie.

La résolution des champs de contraintes peut s'effectuer de deux façons différentes, selon la complexité du système. Dans tous les cas, une certaine expérience permet une résolution relativement rapide, voire purement graphique. Cette méthode est complémentaire avec la méthode de bielles-et-tirants, l'une travaillant en contraintes et l'autre en forces. Les champs de contraintes peuvent constituer une bonne préparation en vue de l'obtention d'un modèle de treillis possible. L'utilisation conjointe de modèles de champs de contraintes et de modèles de bielles-et-tirants fournit de très bons résultats pour la compréhension des mécanismes résistants d'un élément en béton et pour le choix de solutions structurales appropriées.

Aurelio Muttoni, prof. dr, ing. civil EPF  
Miguel Fernández Ruiz, dr, ing. de caminos, canales y puertos  
IS-BETON, bâtiment GC  
Station 18, CH – 1015 Lausanne

### Comprendre le comportement structural

La méthode des champs de contraintes, base de l'actuelle norme SIA 262, est une technique mûre et consolidée dans la pratique qui fournit des dimensionnements du côté de la sécurité. Elle permet une compréhension détaillée du comportement structural ainsi que l'identification des zones potentiellement critiques (tant de compression que de ancrage).

### Bibliographie

- [1] SCHLAICH, J., SCHÄFER, K. ET JENNEWEIN, M.: « Toward a consistent design of structural concrete », « PCI Journal », mai-juin 1987, pp. 75-150
- [2] MUTTONI, A., SCHWARTZ, J. ET THÜRLIMANN, B.: « Bemessung von Betontragwerken mit Spannungsfeldern », Birkhäuser / Springer, 1997, 145 p.
- [3] MARTI, P.: « Zur plastischen Berechnung von Stahlbeton », IBK, ETH Zürich, 1980, 176 p.
- [4] MUTTONI, A.: « Die Anwendbarkeit der Plastizitätstheorie in der Bemessung von Stahlbeton », IBK, ETH Zürich, 1989, 159 p.

