Sur le troisième invariant d'une forme quadratique

J. BARGE

École Polytechnique, F-91128 Palaiseau

M. OJANGUREN

Section de Mathématiques, UNIL, CH-1015 Lausanne

Résumé: *Nous étudions un invariant à valeurs dans un sous-quotient de K_3 .*

Mots clef: *invariant, Arason, Clifford, Giffen, Ketu, groupe de Steinberg, formes quadratiques, cohomologie des groupes.*

1. Introduction

Dans [1] Giffen montre comment associer à toute matrice α symétrique élémentaire à coefficients dans un anneau commutatif A , un élément $s_2(\alpha)$ dans un quotient convenable de K_2 . Cet invariant $s_2(\alpha)$ est très concret: c'est l'obstruction à relever α en un élément symétrique du groupe de Steinberg de A . Il est démontré dans [10] qu'en composant s_2 avec l'homomorphisme de Hurewicz et la classe de Chern c_{22} définie par Grothendieck, on obtient l'invariant de Clifford $e_2(\alpha) \in H^2(A, \mu_2)$.

Dans [3], par des méthodes homotopiques, Giffen a construit, pour tout entier naturel n , un invariant $s_n(\alpha)$, défini sur le noyau des précédents, à valeurs dans un quotient de $K_n(A)$.

Dans cet article nous définissons s_3 de façon purement algébrique et étudions, dans le cas où A est un corps, ses liens avec l'invariant d'Arason.

2. Un invariant cohomologique

Soit G un groupe muni d'une action d'un groupe Γ . Supposons que les groupes d'homologie entière $H_i(G)$ soient nuls pour tout i positif inférieur à n . Le groupe de cohomologie $H^n(G, H_n(G))$ est alors (d'après [4], par exemple) canoniquement isomorphe à $\text{Hom}(H_n(G), H_n(G))$. Notons u la classe de cohomologie correspondante à l'identité. Elle est, bien sûr, invariante par tout automorphisme de G . Soit $G \rtimes \Gamma$ le produit semidirect de Γ par G et $s_0 : \Gamma \rightarrow G \rtimes \Gamma$ sa section canonique. On déduit immédiatement du théorème 2 de [5] la suite exacte

$$0 \longrightarrow H^n(\Gamma, H_n(G)) \xleftarrow{s_0^*} H^n(G \rtimes \Gamma, H_n(G)) \longrightarrow H^n(G, H_n(G))^\Gamma \longrightarrow 0,$$

qui montre l'existence d'un unique relèvement $\hat{u} \in H^n(G \rtimes \Gamma, H_n(G))$ de u satisfaisant $s_0^*(\hat{u}) = 0$.

Rappelons que l'ensemble de cohomologie non abélienne $H^1(\Gamma, G)$ s'identifie à l'ensemble pointé par s_0 des sections $s : \Gamma \rightarrow G \rtimes \Gamma$ à conjugaison près. Pour tout $x \in H^1(\Gamma, G)$ nous définissons

$$s_n(x) \in H^n(\Gamma, H_n(G))$$

par $s_n(x) = s^*(\hat{u})$, où s est une section qui représente x . Cet élément ne dépend pas du choix de s dans la classe x .

2.1. Le cas $n = 1$.

Dans ce cas G est un groupe quelconque et l'application

$$s_1 : H^1(\Gamma, G) \longrightarrow H^1(\Gamma, H_1(G))$$

est induite par l'abélianisation.

2.2. Le cas $n = 2$.

Dans ce cas G est un groupe parfait. La classe $u \in H^2(G, H_2(G))$ est représentée par l'extension universelle

$$0 \longrightarrow H_2(G) \longrightarrow \tilde{G} \longrightarrow G \longrightarrow 1 .$$

L'action de Γ sur G se relève en une unique action sur cette extension. Nous avons donc la suite exacte de cohomologie

$$\dots \longrightarrow H^1(\Gamma, \tilde{G}) \longrightarrow H^1(\Gamma, G) \xrightarrow{\partial} H^2(\Gamma, H_2(G)) .$$

Proposition 2.2.1. *L'application s_2 coïncide avec le connectant ∂ .*

Preuve. Nous commençons par déterminer l'application s_2 . Dans le diagramme

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & H_2(G) & \longrightarrow & \tilde{G} & \longrightarrow & G & \longrightarrow & 1 \\ & & id \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & H_2(G) & \longrightarrow & \tilde{G} \rtimes \Gamma & \longrightarrow & G \rtimes \Gamma & \longrightarrow & 1 \quad , \\ & & & & & & \begin{array}{c} \uparrow \uparrow \uparrow s_0 \\ s \downarrow \downarrow \downarrow \\ \Gamma \end{array} & & \end{array}$$

la première suite horizontale représente la classe $u \in H^2(G \rtimes \Gamma, H_2(G))$ et la deuxième la classe $\hat{u}$. Soit

$$c : G \times G \longrightarrow H_2(G)$$

un 2-cocycle représentant u . Ce 2-cocycle n'est pas, contrairement à u , Γ -invariant. Cela signifie que pour tout $\gamma \in \Gamma$, il existe une application $f_\gamma : G \longrightarrow H_2(G)$, unique car G est parfait, telle que pour tout $g_1, g_2 \in G$ on ait l'égalité

$$\gamma \cdot c(\gamma^{-1} \cdot g_1, \gamma^{-1} \cdot g_2) - c(g_1, g_2) = f_\gamma(g_1 g_2) - f_\gamma(g_1) - f_\gamma(g_2) .$$

Si $\tilde{G}$ est ensemblistement identifié à $H_2 \times G$, l'action de Γ sur $\tilde{G}$ est donnée par la formule

$$\gamma \cdot (a, g) = (a + \gamma \cdot f_{\gamma^{-1}}(g), \gamma \cdot g)$$

pour tout $\gamma \in \Gamma$, $a \in H_2(G)$ et $g \in G$ et la multiplication dans $\tilde{G} \rtimes \Gamma$, identifié à $H_2 \times G \rtimes \Gamma$, par la formule

$$(a, g, \gamma)(a', g', \gamma') = (a + \gamma \cdot a' + \gamma \cdot f_{\gamma^{-1}}(g') + c(g, \gamma \cdot g'), g(\gamma \cdot g'), \gamma \gamma') .$$

Soit maintenant $\varphi : \Gamma \longrightarrow G$ un homomorphisme croisé et $s_\varphi : \Gamma \longrightarrow G \rtimes \Gamma$ la section qui lui correspond. Il s'agit de calculer la composante en $H_2(G)$ de

$$(0, \varphi(\gamma_1 \gamma_2), \gamma_1 \gamma_2)(0, \varphi(\gamma_2), \gamma_2)^{-1}(0, \varphi(\gamma_1), \gamma_1)^{-1} .$$

En utilisant la relation $f_{\gamma_1\gamma_2}(g) = f_{\gamma_1}(g) + \gamma_1 \cdot f_{\gamma_2}(\gamma_1^{-1} \cdot g)$, on trouve

$$-c(\varphi(\gamma_1), \gamma_1 \cdot \varphi(\gamma_2)) - \gamma_1 \cdot f_{\gamma_1^{-1}}(\varphi(\gamma_2)) ,$$

qui est l'expression d'un 2-cocycle $\Gamma \times \Gamma \longrightarrow H_2(G)$ dont la classe est $s_2([\varphi])$, $[\varphi] \in H^1(\Gamma, G)$ étant la classe de φ .

Pour déterminer $\partial[\varphi]$ on calcule, dans $\tilde{G}$,

$$(0, \varphi(\gamma_1\gamma_2))(\gamma_1 \cdot (0, \varphi(\gamma_2))^{-1})(0, \varphi(\gamma_1))^{-1}$$

et on constate que sa première composante coïncide avec le cocycle qui représente $s_2([\varphi])$.

3. Applications aux formes quadratiques

Soit A un anneau commutatif avec unité dans lequel 2 est inversible. Soit $GL_n(A)$ le groupe des matrices $n \times n$ inversibles à coefficients dans A , $E_n(A)$ le sous-groupe distingué de GL_n engendré par les matrices élémentaires, $GL(A)$ et $E(A)$ les limites inductives des $GL_n(A)$ et des $E_n(A)$. La donnée d'une forme quadratique q non dégénérée sur A^n permet de définir une involution $\alpha \mapsto \alpha^*$ sur $GL_n(A)$ qui envoie toute matrice sur l'inverse de son adjointe par rapport à q . La donnée d'une suite de matrices symétriques h_n compatibles avec les inclusions $GL_n(A) \hookrightarrow GL_{n+k}(A)$ permet donc de définir une action de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ sur $GL(A)$ qui respecte $E(A)$. Avec ces notations, le groupe $H^0(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, GL(A))$ s'identifie au groupe $O(A)$, limite inductive des groupes orthogonaux $O_n(A, h_n)$. L'ensemble $H^1(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, GL_n(A))$ s'identifie, par la multiplication à gauche par h_n , à l'ensemble des classes d'isométrie d'espaces quadratiques libres de rang n sur A . Si q est un tel espace, on notera $h(q)$ l'élément de $H^1(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, GL(A))$ qui lui correspond.

Dans la suite, les formes h_m seront les restrictions à A^m des formes hyperboliques diagonales de rang 2^n définies par

$$h_2 = \text{diag}(1, -1) \quad \text{et} \quad h_{2^n} = \text{diag}(h_{2^{n-1}}, -h_{2^{n-1}}) .$$

Ainsi, par exemple,

$$h_8 = \text{diag}(1, -1, -1, 1, -1, 1, 1, -1) .$$

3.1. Le discriminant.

Soit $K_1(A) = GL(A)/E(A) = GL(A)/[GL(A), GL(A)]$. L'application

$$s_1 : H^1(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, GL(A)) \longrightarrow H^1(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, H_1(GL(A))) = H^1(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, K_1(A))$$

s'interprète comme un raffinement du discriminant signé. En effet, si A est un corps k ,

$$H^1(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, K_1(k)) = k^*/k^{*2}$$

et s_1 est bien l'application qui associe à tout espace quadratique son discriminant. Le *premier invariant* e_1 d'un espace quadratique q se définit par $e_1(q) = s_1(h(q))$.

3.2. L'invariant de Clifford.

Soit

$$(*) \quad 0 \longrightarrow K_2(A) \longrightarrow St(A) \longrightarrow E(A) \longrightarrow 0$$

l'extension centrale universelle du groupe parfait $E(A)$. D'après la proposition 2.2.1, l'application

$$s_2 : H^1(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, E(A)) \longrightarrow H^2(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, H_2(E(A))) = H^2(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, K_2(A))$$

coïncide avec le connectant associé à la suite exacte $(*)$. On reconnait donc l'invariant de Giffen [2], étudié dans [10].

Pour tout espace quadratique q tel que $e_1(q) = 0$, on définit le *deuxième invariant* $e_2(q)$ par $e_2(q) = s_2(h(q))$.

En utilisant une description explicite du groupe de Steinberg, Giffen a démontré que si A est un corps k , cet invariant associe à la forme de Pfister $\ll a, b \gg$ le symbole $\{a, b\} \in K_2(k)/2K_2(k)$. Nous donnons une autre démonstration de ce fait, qui, n'utilisant pas la description par générateurs et relations de $St(k)$, se généralisera à s_3 .

Proposition 3.2.1. *Soit k un corps et*

$$\ll x, y \gg = \text{diag}(1, -x, -y, xy)$$

une forme de Pfister de rang 4. On a

$$s_2(h(\ll x, y \gg)) = \{x, y\} \in K_2(k)/2K_2(k) .$$

Lemme 3.2.2. *Notons $\tilde{\mathbb{Z}}$ le $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -module $\mathbb{Z}$ muni de l'action donnée par le changement de signe et G_n le produit semidirect de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ par $\tilde{\mathbb{Z}}^n$, de sorte que l'on a la suite exacte scindée*

$$0 \longrightarrow \tilde{\mathbb{Z}}^n \xrightarrow{i} G_n \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow 0 .$$

Soient A un $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -module quelconque et $u \in H^p(G_n, A)$ une classe de cohomologie telle que $i^(u) = 0 \in H^p(\tilde{\mathbb{Z}}^n, A)$. Pour tout $n \geq 1$ et tout $p \geq 1$ les conditions suivantes sont équivalentes:*

- i) $u = 0$
- ii) $s^*(u) = 0$ pour toute section $s : \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow G_n$ sauf pour celle donnée par $s(1) = (1, \dots, 1)$ et ses conjuguées.

Preuve. Ce lemme est vide pour $n = 0$ et la démonstration s'obtient par une double récurrence sur n et sur p . Si $p = 1$, l'assertion résulte immédiatement de la suite exacte scindée

$$0 \longrightarrow H^1(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, A) \xleftarrow{s^*} H^1(G_n, A) \longrightarrow H^1(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}^n, A) \longrightarrow 0 .$$

Supposons donc $p \geq 2$ et $n \geq 1$.

Considérons le diagramme à lignes exactes scindées

$$(1) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \longrightarrow & G_n & \xrightarrow{\pi} & G_{n-1} \longrightarrow 1 \\ & & id \uparrow & & \sigma \uparrow & & s \uparrow \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \longrightarrow & G_1 & \longrightarrow & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow 1 \end{array}$$

où π est la projection qui annule la dernière coordonnée de $\mathbb{Z}^n$, $s : \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow G_{n-1}$ est une section quelconque et σ un homomorphisme qui rend le diagramme commutatif. Ce diagramme induit en cohomologie un diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H^p(G_{n-1}, A) & \longrightarrow & H^p(G_n, A) & \xrightarrow{\delta} & H^{p-1}(G_{n-1}, \tilde{A}) \longrightarrow 0 \\ & & s^* \downarrow & & \sigma^* \downarrow & & s^* \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & H^p(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, A) & \longrightarrow & H^p(G_1, A) & \xrightarrow{\delta} & H^{p-1}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \tilde{A}) \longrightarrow 0 \end{array}$$

où $\tilde{A}$ est le $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -module $H^1(\tilde{\mathbb{Z}}, A) = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\tilde{\mathbb{Z}}, A)$ et δ est l'homomorphisme donné par la suite spectrale de Hochschild-Serre. On déduit par récurrence de ce diagramme qu'il suffit de démontrer le fait suivant: si $p \geq 2$ et $u \in H^p(G_1, A)$ est tel que $s^*(u) = 0$ pour toute section, alors $u = 0$.

Le cas $p = 2$ se traduit comme ceci: soit

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow \Gamma \xrightarrow{\pi} G_1 \longrightarrow 1$$

une extension de groupes et supposons que toute section $s : \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow G_1$ se factorise par Γ ; alors l'extension est triviale. Ceci est vrai car $G_1 = \mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est le groupe engendré par $a = (0, 1)$ et $b = (1, 1)$ avec les seules relations $a^2 = b^2 = 1$. Les sections définies par a et b se factorisent par Γ si et seulement si Γ contient deux éléments α et β d'ordre 2 tels que $\pi(\alpha) = a$ et $\pi(\beta) = b$ et en ce cas l'extension est scindée par l'homomorphisme $\sigma : G_1 \longrightarrow \Gamma$ défini par $\sigma(a) = \alpha$, $\sigma(b) = \beta$.

Soit maintenant $p \geq 3$. En tensorisant sur $\mathbb{Z}$ la suite

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}[\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}] \longrightarrow \tilde{\mathbb{Z}} \longrightarrow 0$$

par A on obtient une suite exacte

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow A[\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}] \longrightarrow \tilde{A} \longrightarrow 0$$

qui induit une suite exacte de cohomologie

$$\cdots \rightarrow H^{p-1}(G_1, A[\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}]) \rightarrow H^{p-1}(G_1, \tilde{A}) \rightarrow H^p(G_1, A) \rightarrow H^p(G_1, A[\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}]) \rightarrow \cdots.$$

Le lemme de Shapiro ([1], Proposition 4.1.3) montre que $H^i(G_1, A[\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}])$, étant isomorphe à $H^i(\mathbb{Z}, A)$, est nul dès que $i \geq 2$. On a donc un isomorphisme $H^{p-1}(G_1, \tilde{A}) \rightarrow H^p(G_1, A)$ qui permet de conclure par récurrence sur p .

Lemme 3.2.3. Soit $v \in H^n(\mathbb{Z}^n, H_n(\mathbb{Z}^n))$ la "classe tautologique". Pour tout multi-indice $I = (i_1, \dots, i_n)$ où les i_λ prennent les valeurs 0 ou 1, notons $s_I : \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}^n \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ l'homomorphisme défini par $s_I(1) = (i_1, \dots, i_n; 1)$. Il existe une unique classe

$$\hat{v} \in H^n(\mathbb{Z}^n \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, H_n(\mathbb{Z}^n))$$

relevant v et telle que $s_I^*(\hat{v}) = 0$ pour tout I contenant au moins un indice nul. De plus

$$s_{(1, \dots, 1)}(\hat{v}) = 1 \in H^n(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}^n) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

Preuve. Si $n = 2k$ ou $2k + 1$, la classe du n -cocycle

$$c((x_{11}, \dots, x_{1n}; \alpha_1), \dots, (x_{n1}, \dots, x_{nn}; \alpha_n)) = (-1)^\alpha x_{11} \cdots x_{nn}, \quad \alpha = \alpha_1 + \alpha_3 + \cdots + \alpha_{2k-1}$$

satisfait les conditions du lemme. L'unicité de $\hat{v}$ résulte du lemme 3.2.2 en remarquant que toute section est conjuguée à une section du type s_I .

Preuve de la proposition 3.2.1. La classe $h(\ll x, y \gg)$ est représentée par la matrice $\text{diag}(1, x, y, x^{-1}y^{-1}) = \xi\eta$, où $\xi = \text{diag}(1, x, 1, x^{-1})$ et $\eta = \text{diag}(1, 1, y, y^{-1})$. L'homomorphisme $\varphi : \mathbb{Z}^2 \longrightarrow SL(k)$ défini par $\varphi((1, 0)) = \xi$ et $\varphi((0, 1)) = \eta$ est $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -équivariant

pour le changement de signe dans $\mathbb{Z}^2$ et l'involution $*$ dans $SL(k)$. On a donc un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc}
1 & \longrightarrow & SL(k) & \longrightarrow & SL(k) \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \xleftarrow{s_0} & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow 1 \\
& & \varphi \uparrow & & \tilde{\varphi} \uparrow & & id \uparrow \\
0 & \longrightarrow & \mathbb{Z}^2 & \longrightarrow & \mathbb{Z}^2 \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \xleftarrow{s_0} & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow 1,
\end{array}$$

où $\tilde{\varphi} = \varphi \rtimes id$. Ce diagramme induit le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \rightarrow & H^2(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, K_2(k)) & \xleftarrow{s_{\xi^i \eta^j}^*} & H^2(SL(k) \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, K_2(k)) & \xrightarrow{\hat{u}} & H^2(SL(k), K_2(k))^{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} \rightarrow 0 \\
& & id \downarrow & & \tilde{\varphi}^* \downarrow & & \varphi^* \downarrow \\
0 & \rightarrow & H^2(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, K_2(k)) & \xleftarrow{s_{i,j}^*} & H^2(\mathbb{Z}^2 \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, K_2(k)) & \rightarrow & H^2(\mathbb{Z}^2, K_2(k))^{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} \rightarrow 0 \\
& & \varphi_* \uparrow & & \tilde{\varphi}_* \uparrow & & \varphi_* \uparrow \\
0 & \rightarrow & H^2(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, H_2(\mathbb{Z}^2)) & \xleftarrow{s_{i,j}^*} & H^2(\mathbb{Z}^2 \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, H_2(\mathbb{Z}^2)) & \rightarrow & H^2(\mathbb{Z}^2, H_2(\mathbb{Z}^2))^{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} \rightarrow 0, \\
& & & & \hat{v} & & v
\end{array}$$

dans lequel la première ligne horizontale est exacte (mais, bien sûr, pas les autres).

Par définition le symbole

$$\{x, y\} \in K_2(k)/2K_2(k) = H^2(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, K_2(k))$$

est l'image de $1 \in H^2(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, H_2(\mathbb{Z}^2)) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ par φ_* . La proposition résulte donc de l'égalité

$$\tilde{\varphi}^*(\hat{v}) = \tilde{\varphi}_*(\hat{u}) \in H^2(\mathbb{Z}^2 \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, K_2(k)).$$

D'après le lemme 3.2.3 il suffit de démontrer que $s_{\xi}^*(\hat{u}) = s_2(\xi) = 0$ et $s_{\eta}^*(\hat{u}) = s_2(\eta) = 0$. Ceci est clair, car les formes $h^{-1}(\xi)$ et $h^{-1}(\eta)$ sont hyperboliques.

3.3. Le troisième invariant.

Soit q un espace quadratique sur un anneau A , tel que $e_1(q) = 0$ et $e_2(q) = 0$. Puisque $s_2 = \partial$ (proposition 2.2.1), $h(q)$ est dans l'image de $H^1(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, St(A))$ dans $H^1(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, E(A))$. Le fait que $H_1(St(A), \mathbb{Z}) = H_2(St(A), \mathbb{Z}) = 0$ ([MI], §5), permet de considérer l'invariant

$$s_3 : H^1(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, St(A)) \longrightarrow H^3(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, H_3(St(A))).$$

Rappelons que $H_3(St(A))$ n'est autre que $K_3(A)$ ([Lo], théorème 1.4.2). A tout choix d'une préimage de $h(q)$ dans $H^1(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, St(A))$ on peut donc associer un élément de $H^3(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, K_3(A))$. Nous ignorons si, pour un anneau quelconque, cet élément est indépendant du choix de la préimage de $h(q)$. Montrons que c'est bien le cas si A est un corps k .

Proposition 3.3.1. *Soit k un corps. L'application s_3 se factorise par $H^1(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, SL(k))$.*

Lemme 3.3.2. *L'application*

$$SO(k) = H^0(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, SL(k)) \xrightarrow{\partial} H^1(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, K_2(k)) = {}_2K_2(k)$$

envoie tout $\alpha \in SO(k)$ sur le symbole $\{-1, NS(\alpha)\}$, où $NS(\alpha)$ est la norme spinorielle de α .

Preuve. Pour simplifier les calculs il convient, dans cette démonstration, de remplacer les formes hyperboliques sur k^{2n} choisies au début par les formes hyperboliques

$$\chi_{2n} = \chi_2 \perp \dots \perp \chi_2, \quad \text{où} \quad \chi_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

L'involution $*$ sur $SL(k)$ et sur $St(k)$ sera donc à remplacer par l'involution $\alpha \mapsto \alpha^\# = \chi_{2n}(\alpha^{-1})^t \chi_{2n}$ sur $SL(k)$ et par son relèvement sur $St(k)$. La conjugaison par une matrice $\omega \in GL_{2n}(k)$ telle que $h_{2n} = \omega^t \chi_{2n} \omega$, induit un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} SO(h) = H^0(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, (SL(k), *)) & \xrightarrow{\partial} & H^1(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, K_2(k)) \\ \text{Int}(\omega) \downarrow & & \downarrow id \\ SO(\chi) = H^0(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, (SL(k), \#)) & \xrightarrow{\partial} & H^1(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, K_2(k)). \end{array}$$

Puisque la norme spinorielle d'une matrice α dans $SO(h_{2n})$ est égale à celle de sa conjuguée $\omega \alpha \omega^{-1}$ dans $SO(\chi_{2n})$, il revient au même de démontrer la proposition pour l'une ou pour l'autre des involutions.

L'involution $\#$ sur $St(k)$ satisfait, dans les notations de [9], les relations

$$x_{12}(a)^\# = x_{12}(-a), \quad w_{12}(a)^\# = w_{12}(-a),$$

et

$$h_{12}(a)^\# = w_{12}(a)^\# w_{21}(-a^{-1})^\# w_{12}(-1)^\# = h_{12}(-a) w_{12}(1)^2.$$

On a donc

$$h_{12}(a)^{-1} h_{12}(a)^\# = h_{12}(a)^{-1} h_{12}(-a) w_{12}(1)^2 = \{-1, a\} h_{12}(-1) w_{12}(1)^2 = \{-1, a\}.$$

Comme $h_{12}(a)$ est une préimage dans $St(k)$ de la matrice orthogonale

$$\alpha = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$$

de norme spinorielle a ([11], §55), ceci prouve que l'assertion est vraie pour les matrices de $SO_2(k)$. Elle est vraie en général car, d'une part,

$$SO_{2n} = SO_2(k) \cdot [SO_{2n}, SO_{2n}]$$

([6], Ch. VI, Theorem 6.3.3) et, d'autre part, aussi bien la norme spinorielle que ∂ , étant des homomorphismes dans un groupe abélien, s'annulent sur le groupe des commutateurs de SO_{2n} .

Preuve de la proposition. Deux classes $x, x' \in H^1(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, St(k))$ ayant même image dans $H^1(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, SL(k))$ peuvent être représentées par $\alpha, \alpha' \in St(k)$ satisfaisant $\alpha \alpha^* = \alpha' \alpha'^* = 1$ et $\alpha' = c \cdot \alpha$ avec $c \in {}_2K_2(k)$. Puisque la norme spinorielle est surjective et que, d'après [13], Theorem 1.8, tout élément de ${}_2K_2(k)$ est de la forme $\{-1, u\}$, c s'écrit $\beta^{-1} \beta^*$, où $\beta \in St(k)$ se projette sur un élément orthogonal de $SL(k)$. La conjugaison par β dans $SL(k)$ agit trivialement sur $K_3(k)$ et commute à l'involution $*$. On a donc

$$s_3(\alpha') = s_3(\beta^{-1} \beta^* \alpha) = s_3(\beta^* \alpha \beta^{-1}) = s_3(\alpha).$$

Si q est un espace quadratique sur un corps k , tel que $e_1(q) = e_2(q) = 0$, la proposition 3.3.1 permet de définir $e_3(q) = s_3(\widetilde{h(q)})$, où $\widetilde{h(q)} \in H^1(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, St(k))$ est n'importe quelle préimage de $h(q) \in H^1(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, SL(k))$. Nous allons maintenant comparer $e_3(q)$ avec l'invariant de Arason. Si $x, y, z \in k^* = K_1(k)$, nous notons $x \star y \star z \in K_3(k)$ le produit de ces éléments défini par Loday dans [7].

Théorème 3.3.3. *Soit $q = \ll x, y, z \gg$ une forme de Pfister de rang 8 sur un corps k . Alors $e_1(q) = 0$, $e_2(q) = 0$ et $e_3(q)$ est égal à la classe dans $H^3(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, K_3(k))$ de l'élément $x \star y \star z$ de $K_3(k)$.*

Preuve. Il est clair que $e_1(q) = 0$. Pour démontrer les deux autres affirmations écrivons

$$\begin{aligned} q = \ll x, y, z \gg &= \langle 1, -x \rangle \otimes \langle 1, -y \rangle \otimes \langle 1, -z \rangle \\ &\simeq \text{diag}(1, -x^{-1}, -y^{-1}, x^{-1}y, -z^{-1}, xz^{-1}, y^{-1}z, -xyz) \end{aligned}$$

et, en accord avec les conventions faites au début de ce paragraphe,

$$h(q) = \text{diag}(1, x^{-1}, y^{-1}, x^{-1}y, z^{-1}, xz^{-1}, y^{-1}z, xyz) = \bar{\xi}\bar{\eta}\bar{\zeta},$$

où

$$\begin{aligned} \bar{\xi} &= \text{diag}(1, x^{-1}, 1, x^{-1}, 1, x, 1, x), \\ \bar{\eta} &= \text{diag}(1, 1, y^{-1}, y, 1, 1, y^{-1}, y), \\ \bar{\zeta} &= \text{diag}(1, 1, 1, 1, z^{-1}, z^{-1}, z, z). \end{aligned}$$

Il est clair que les invariants s_1 et s_2 sont nuls sur ces matrices (car elles sont des doubles). Elles se relèvent donc en trois éléments $\xi, \eta, \zeta \in St(k)$, tels que $\xi^*\xi = \eta^*\eta = \zeta^*\zeta = 1$. De plus, ces relevés commutent deux à deux pour la même raison et définissent donc un homomorphisme $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -équivariant $\varphi = \varphi_{\xi, \eta, \zeta} : \mathbb{Z}^3 \longrightarrow St(k)$. Cet homomorphisme induit

$$\varphi_* : H_3(\mathbb{Z}^3, \mathbb{Z}) \longrightarrow H_3(St(k), \mathbb{Z}) = K_3(k).$$

Nous montrons d'abord que $e_3(q)$ est égal à l'image par φ_* d'un générateur du groupe cyclique $H_3(\mathbb{Z}^3, \mathbb{Z})$. La méthode est complètement analogue à celle de la proposition 3.2.1. Il suffit d'utiliser le lemme 3.2.4 dans le cas $n = 3$ et de démontrer le fait suivant.

Lemme 3.3.4.

$$s_3(\xi\eta) = s_3(\eta\zeta) = s_3(\zeta\xi) = 0.$$

Preuve. D'après 3.3.1 ces invariants ne dépendent que de $\bar{\xi}\bar{\eta}, \bar{\eta}\bar{\zeta}, \bar{\zeta}\bar{\xi}$ dans $SL(k)$. Ils sont donc nuls, car les formes $h^{-1}(\bar{\xi}\bar{\eta}), h^{-1}(\bar{\eta}\bar{\zeta})$, et $h^{-1}(\bar{\zeta}\bar{\xi})$ sont hyperboliques.

Il reste à démontrer que l'image par φ_* d'un générateur ω de $H_3(\mathbb{Z}^3, \mathbb{Z})$ est égale à $c = x \star y \star z$. D'après [7], exemple 2.2.8, c est l'image de ω par Ψ_* , où $\Psi = \varphi_{\alpha, \beta, \gamma}$ et

$$\begin{aligned} \bar{\alpha} &= \text{diag}(x, x^{-1}, 1, 1, x^{-1}, x, 1, 1, 1, x, 1, x^{-1}), \\ \bar{\beta} &= \text{diag}(y, 1, y^{-1}, 1, y, 1, y^{-1}, y^{-1}, y, 1, 1, 1), \\ \bar{\gamma} &= \text{diag}(z, 1, 1, z^{-1}, 1, 1, 1, z, 1, z^{-1}, z^{-1}, z). \end{aligned}$$

Appelons “disjoints” deux éléments de $E(A)$ ou de $St(A)$ qui s'écrivent comme produits de générateurs $e_{ij}(a)$ ou $x_{ij}(a)$ sans indices communs. On constate qu'à une même permutation des lignes et des colonnes de $\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\zeta}$ près, on a $\bar{\alpha} = \bar{\xi}\bar{\lambda}$, $\bar{\beta} = \bar{\eta}\bar{\mu}$, $\bar{\gamma} = \bar{\zeta}\bar{\nu}$, où $\bar{\lambda}, \bar{\mu}, \bar{\nu}$, sont disjoints des autres et entre eux et se relèvent en des éléments λ, μ, ν de $St(k)$ disjoints entre eux et disjoints de ξ, η et ζ .

Soit, de façon générale, $\mathbb{N} = I \cup J$ une partition des entiers naturels en deux ensembles infinis disjoints et A un anneau quelconque. Notons $St_I(A), St_J(A)$ les sous-groupes de $St(A)$ engendrés par les $x_{ij}(a)$ avec $i, j \in I$ et, respectivement, $i, j \in J$.

Lemme 3.3.4. Soient $\varphi : \mathbb{Z}^3 \longrightarrow St_I(A)$ et $\psi : \mathbb{Z}^3 \longrightarrow St_J(A)$ deux homomorphismes, définis par des triplets ξ, η, ζ , respectivement λ, μ, ν , d'éléments qui commutent entre eux. Soit χ l'homomorphisme défini par le triplet $\xi\lambda, \eta\mu, \zeta\nu$. On a $\chi^*\omega = \varphi^*\omega + \psi^*\omega$.

Preuve. En choisissant des bijections $\mathbb{N} \longrightarrow I$ et $\mathbb{N} \longrightarrow J$ on obtient un homomorphisme

$$\nabla : St(A) \times St(A) \longrightarrow St(A)$$

tel que χ est le composé

$$\mathbb{Z}^3 \xrightarrow{\delta} \mathbb{Z}^3 \times \mathbb{Z}^3 \xrightarrow{\varphi \times \psi} St(A) \times St(A) \xrightarrow{\nabla} St(A).$$

Puisque

$$H_3(\mathbb{Z}^3 \times \mathbb{Z}^3) = \bigoplus_{i+j=3} H_i(\mathbb{Z}^3) \otimes H_j(\mathbb{Z}^3),$$

χ^* se factorise par

$$\bigoplus_{i+j=3} H_i(St(A)) \otimes H_j(St(A))$$

et l'assertion suit du fait que $H_1(St(A)) = 0$.

Ce lemme montre, d'une part que $c = \Psi^*\omega = \varphi^*\omega + \psi^*\omega$ et d'autre part que $\psi^*\omega = 0$, car λ, μ et ν sont, à leur tour, disjoints deux à deux. On a donc démontré que $e_3(\ll x, y, z \gg)$ est la classe de $x \star y \star z$ dans $H^3(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, K_3(k))$.

3.4. L'invariant de Arason.

Pour faire le lien entre $e_3(q)$ et l'invariant $Ar(q)$ de Arason dans le cas d'un espace quadratique q défini sur un corps k et tel que $e_1(q) = e_2(q) = 0$, remarquons que l'isomorphisme $K_3^M(k)/2K_3^M(k) \longrightarrow H^3(k, \mu_2)$, établi par Rost [12] et par Merkur'ev et Suslin [8], fournit un homomorphisme de $H^3(k, \mu_2)$ dans $H^3(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, K_3(k))$ qui envoie $Ar(q)$ dans $e_3(q)$.

Bibliographie

1. L. Evens: *The Cohomology of Groups*, Oxford, 1991.
2. C.H. Giffen: Hasse-Witt Invariants for (α, u) -Reflexive Forms and Automorphisms. I: Algebraic K_2 -Valued Hasse-Witt Invariants. J. Algebra **44** (1977), 434--456.
3. C.H. Giffen: Hermitian forms and algebraic K-Theory. Bull. A.M.S. **83** (1977), 1303--1305.
4. K.W. Gruenberg: The universal coefficient theorem in the cohomology of groups, J. London Math. Soc. **43** (1968), 239--341.
5. G. Hochschild and J-P. Serre: Cohomology of group extensions, Trans. Amer. Math. Soc. **74** (1953), 110--134.
6. M.-A. Knus: *Quadratic and Hermitian Forms over Rings*. Grundlehren der Math. Wissenschaften 294, Springer-Verlag, 1991.
7. J.-L. Loday: K-théorie algébrique et représentations de groupes. Ann. Sci. École Norm. Sup. **9** (1976), 309--377.

8. A.S. Merkur'ev and A.A. Suslin: On the norm residue homomorphism of degree three. *Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Math.* 54 (1990), 339--356 = *Math. USSR Izvestiya* 36 (1991), 349--367.
9. J. Milnor: *Introduction to Algebraic K-Theory*. Annals of Math. Studies 72, Princeton Univ. Press, 1971.
10. M. Ojanguren, R. Parimala and R. Sridharan: Ketu and the Second Invariant of a Quadratic Space. *K-Theory*, à paraître.
11. O.T. O'Meara: *Introduction to Quadratic Forms*. Grundlehren der Math. Wissenschaften 117, Springer-Verlag, 1963.
12. M. Rost: Hilbert 90 for K_3 for degree two extensions. Manuscrit, 1986.
13. A.A. Suslin: Torsion in K_2 of Fields. *K-Theory* 1 (1987), 5--29.